陸軍士官學校教程

算學講本

本校編輯

苐四編

陸軍士官學校編輯

算學講本

第四編

明治十二年
十二月刻成

内外兵事新聞局藏版

算學教程講本巻之三

立体幾何學之部第一

第一第二教

定説

平面ハ一個の面ニして此面中の二點を過くる直線其全長全く此面と合する者なり

空間ニ於ける平面若し設くる所の一個の直線を過くる時ハ其位置ハ一定せす其故ハ此直線を軸となし此平面を旋轉する時ハ空間中凡ての點ハ因て逐次ニ此平面を過きしむるを得れハなり

此定説ニ依れハ凡そ平面を穿過する直線ハ其平面との交點ハ唯一個のみなり其故ハ此直線其平面上ニ合せされハ

なり故に平面と直線と相交る時は其交點は一個なり此點を直線の底と名く

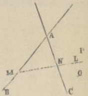
一直線平面上に於て其底に作り得へき凡ての直線に直立せる時は此直線は此平面に直交すと謂ふ

一直線平面上に於て其底に作り得へき凡ての直線と直立ならすして相交る時は此直線は此平面に斜交すと謂ふ

第一設論

平面は相交截せる二直線を過て作り得へし而して一個より多く作る能はす

AB ACはA點に於て相交截せる二直線なり今ABの直線を過て某平面Pを作り此線を軸として此平面を旋轉し此平面ACの直線上のC點を過くるまてに至らしむ



此最後の位置に於てはPの平面はACの直線中A及ひCの二個の公點を有つ故に全く此直線を有てり故に相交截せる二直線AB ACを過てPの平面を作る事を得

又此二線を過くるQの如き凡ての他の平面は此Pの平面と相合す

之を証明せるにはQの平面中の某點Lを過てLMの直線を作るなり此直線はAB ACの二直線と相交はる而してM及ひNの交點は設想に依てAB ACの二直線を有てるPの平面中に在り因てQの平面中のLMなる直線及ひL點はPの平面中に在り故にP及ひQの二平面は各公點を有ち而して其全濶中全く相合す

第一推論

一直線及ひ此線外の一點ハ平面を決定も而して一個より多く決定せハ

若し設くる所の點より設くる所の直線と交てろへき直線を作る時ハ此二直線ハ則ち平面を決定し而して一個より多く決定せされハなり

第二推論

一直線上に在らさる三點ハ平面を決定を而して一個より多く決定せハ

三點中の一個を他の二個に聯接せる二直線ハ惟一個の平面を決定されハなり

第三推論

二個の平行直線ハ惟一個の平面を決定そ

定説に依るに二個の平行直線ハ平面上に在り故に之を變して此二線ハ一個の平面ならされハ決定せすと謂ふへし其故ハ二線中の一個と他線中の一點とに因てハ惟一個の平面より多く作る能てさるハなり

第四推論

此設論に依きハ二個の平面左の三個の場合の時ハ其全潤中全く相合そ

第一　其二平面公共の二直線を有ち此二直線相交り或ハ相平行する時

第二　其二平面公共の一直線及ひ此線外の一公點を有つ時

第三　其二平面一直線上ニあらさる公共の三點を有つ時

第五推論

空間ニ於て他の某法ニ因て設けられさるA及びBの如き二直線ハ同し平面上ニ在らず

Aの直線とBの直線中の一點Rとニ因てPの平面を作る時ハ此平面ハBの直線を有たず惟之ニ因て穿過せらるなり此場合ニ於てハ一個の平面も此A及びBの二直線を過ぐる能ハず其故ハ若し此の如き平面一個成立つ者とせバハAの直線及びR點を有つべきり故ニPの平面と相合せさるへからず因て又Bの直線ハPの平面中ニ在るへし是を設想ニ反する者なり

注意　無界の平面を顯ですニハ此平面上ニ於て或る多角形設使ハ四邊形を作るなり但し此平面ハ此四邊形の周界外ニ無窮ニ引長せる者と考へさる可からず而して此四邊形を通常寫景學ニ於て矩形を顯す所の平行邊形となれ

第二設論

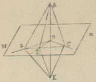
M及びNの二平面相交ハる時ハ其交處ハ直線なり

若し此交處直線ならずとする時ハ此二平面ニ公共なる一直線上ニ在らさる三點を得へし而して此二平面ハ（第一設論）相合せさる可からず是れ設想ニ反する者なり

第三設論

直線平面上ニ於て其底ニ作れる他の二直線ニ直立する時

は此直線は此平面に直立も



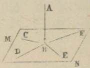
BはABの直線とMNの平面との交點なり今ABを以てMNの平面上其底に作れるBC BDの二直線の各に直立すと定む然る時は此直線は亦此平面上B點に於て作れるBIの如き凡ての他の直線に直立れ

MNの平面上に於てBC BD BIの三線に交るへきCDの直線を作り而してCDIの交點を直線にてAKの二點に聯接れ但し此AKはABの直線上Bの底より同距に設けたる者なり然る時はACD KCDの二個の三角形は相似形なり其故はCDは其公邉にてCA CKの二邉はBCの直線AKの中央に直立せるを以て(平面幾何第六款第二設論)相等しく又AD DKの二邉も全理を以て相等しけれはなり之に因てDA DKの等邉に對せるACI KCIの二角は相等し然る時はACI KCIの二個の三角形は互に相等しき二邉の間に挾める等角を有つ故にAIの邉はKIに等しく又B及ひIの二點はAKの直線の二端より等距なる故BIの直線はAKに直立す又之を反言してAKはBIに直立するなり

推論

ABの直線を過てABC ABD等の各平面を作り此直線のB點より此各平面上に於てABとの垂線BC BD等を作る時は此各垂線の幾何地は平面なり

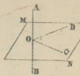
MNの平面とBC BDの二垂線に因て決定せる者となし而



して此平面ハ凡ての他の垂線を有つ事を證せんとす先つABの直線を過てABEの某平面を作る時ハBEの直線ニ循てMNの平面ニ交てる然るニABハ設想ニ依りMNの平面と直立する故BEニ直立なり故ニABEの平面上ニ於てABの直線中B點より作れる垂線ハMNの平面上ニ在る事を知る之を及言し此平面上B點を過て作れる凡ての直線ハABの直線ニ直立す因てMNの平面ハ求むる所の幾何地なりと知る

第四設論

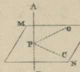
設くる所の一點Oを過きて設くる所の直線ABニ直立せる平面を作る事を得而して一個より多く作る能はず



第一　ABの直線上ニ在る一點Oを過きてABとの垂線OC ODを二個の異平面上ニ作り此二線ニ依て作れる平面MNハ即ちABの直線ニ直立す其故ハ此ABの直線ハMNの平面上ニ於て其底ニ作れる二直線OC ODニ直立せられハなり

此O點を過くる凡ての他の平面ハABの直線ニ斜交す其故ハ此ABの直線上Oの一點ニ作れる凡ての垂線を有つ所の平面MNハ（第三設論の推論）一個より多く作る能はされハなり

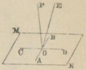
第二　若し此O點ABの直線外ニ設けらるゝ時ハ此點よりして此點及ひABの直線ニて決定せる平面上ニ於



てABの直線に垂線OPを作り然る後求むる所の平面をOPと等しくP點に於てABの直線を截るへき事を注意すへし其故は此OPの直線はABの直線上に於てO點より作り得へき惟一個の垂線なれはなり之に因て此平面はP點に於て作れるABの直線との直立面に異ならさる事決せり故に此証法を為せには AOBと異なる他の平面上に於て此P點よりAB上に垂線を下し而して此PO PCの二直線に依てMNの平面を作れは可なり

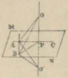
第五設論

設くる所の一點Oを過きて設くる所の平面MNに直立せる直線を作る事を得而して一個より多く作る能はす



第一　O點MNの平面上に在る時は此點を過きて此平面上にABの某直線を作り然る後（第四設論）此同點よりABの直線に直立せるCDEの平面を作るなり然る時はCDは即ちMNの平面との交線なり是に於てCDEの平面上に於てCDに直立せるOFの直線を作る時は此直線は即ちMNの平面に直立す」CDEの平面に直立せるABの直線は此平面上に於て其底に作れるOFの直線に直立す故にOFはMNの平面上のAB CDの二直線に直立す因て（第三設論）此平面に直立す此O點よりCDEの平面上或は此平面外に作れる凡ての他の直線はABCDの二直線中少くとも一個に斜交す故にMNの平面に直立せす

第二 若し此O點MNの平面外に設けらるゝ時は此平面上に於てABの如き某直線を作り而して（第四設論）此O點を過きてABの直線に直立せるOACの平面を作るなり然る時はACは即ちMNの平面との交線なり是に於て此OACの平面上に於てACに直立せるOPの直線を作るなり然る時は此OPの直線はMNの平面上BPの如き凡ての他の直線に直立し因て此平面に直立す



OPの引長線上に於てO'Pの長さをしてOPに等しからしめO'A O'B OA OBの直線を作るなりABの直線は設想に依てOACの平面に直立する故OAB O'ABの二角は直角なり而してBAO BAO'の二個の三角形は互に相等しき二邊の間に等角を有つ即ちABは公邊にしてAO AO'の二直線はOO'の直線の中央に於ける垂線APより等距なる故相等し故に此二個の三角形は相等しく而してBOの邊はBO'に等し因てOBO'の三角形は二等邊なりと知る而して其B角頂をOO'の底の中央に聯接せるBPの直線は此底に直立す因てOO'の直線はMNの平面に直立す

O點よりMNの平面上に作れるOBの如き凡ての他の直線は此平面上に斜交す蓋し若しOP OBの二直線の底を聯接せるBPの直線を作る時はBOPの三角形のOPBの角はOPの直線MNの平面に直立せるを以て直角なり故にOBPの角は鋭角にしてOBの直線はMNの平面に斜交す

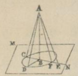
第六設論

MNの平面外の一點Aより此平面上に垂線AB及ひAC AD AE等の種々の斜線を作る時は

第一 垂線ABは凡ての斜線より最も小なり

第二 垂線の底より等距なるAC ADの二斜線は相等し

第三 垂線の底より不等距なるAD AEの二斜線は其最離る、者は最大なり



第一 ABCの平面に於てABの直線はMN及ひABCの二平面の交線に直立しACの直線は之に斜交す故に（平面幾何第六数第二設論）MNの平面に於ける垂線ABはACの斜線より最も小なり」

第二 BC BDの距離互に相等しき時はACの斜線とADの斜線と等し蓋しABC ABDの二個の三角形は互に相等しき二邊の間に直角を有つ故に相等し因て其斜邊即ちAC ADの二斜線は相等し

第三 BEの距離BDより大なる時はAEの斜線はADの斜線より大なり

BE上に於てBFの長さをBDと等しからしめAFの直線を作る時はMNの平面上に於てAD AFの二斜線は垂線ABより等距なる故相等し然るにAB AE AFの三直線はABEの同し平面上に在る者にして第一の者はBEの直線に直立し他の二個は之に斜交す故に（平面幾何第六数第二設論）此斜線中の最大なる者は垂線ABより最も離る、所のAEの線なる事を知るへし故にAEはADより大なり

注意 A点よりMNの平面迄の距離は此点より此平面上に

作れる垂線を以て測るなり

推論

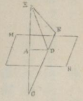
ACの直線に等しく且つ同しA点を過くる各斜線の底の幾何地は垂線ABの底を中心としBCに等しき半径を以て作れる圓周なり

是れよりしてMNの平面外のAの一点より此平面上に垂線を作るへき方法を得即ちACに等しき長さの線の一端を以てA点に固定し他の一端を以て設くる所の平面上に於てAより等距なるCDEの三点を記し然る后此三点を過くる圓周の中心Bを決定するなり此中心は即求むる所の垂線の底にして直にABの直線を作れは可なり

第七設論

BCの直線の中央Aよりして此線ニ直立せるMNの平面を作る時は第一此平面中の凡ての點はBCの二端より等距なり第二此平面外の凡ての點は同しく二端より不等距なり

第一DをMNの平面中の一點とし（DA DB DC）の直線を作り而してDAはBDCの平面上BCの中央ニ於ける垂線なる事を注意すへし故ニ（平面幾何第六教第三設論）此直線中のD點はBCの二端より等距なり第二MNの平面外のEの某點より（EB EC）の直線を作る時は此二線は相等し蓋しEDCの平面はBCの中央ニ直立せずADの直線ニ循てMNの平面を截す故ニADの線外のE點は（平面幾何第六教第三設論）B及びCの二點より不等距なり

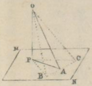


推論

設くる所の二點より等距なる空間の各点の幾何地は此二点を聯接せる直線の中央に直立せる平面なり

第八設論

MNの平面に直立せるPOの直線の底Pよりして此平面上BCの某直線に垂線を作る時は此第二垂線の底Aを第一垂線の某点Oに聯接せる凡ての直線はBCに直立す



BCの線上に於てAB ACの等距を取りPB PC及ひOB OCの直線を作る時はMNの平面に於てBCに斜交せるPB PCは垂線PAより等距なる故(平面幾何第六教第二設論)相等し故にMNの平面に斜交せるOB OCの直線は此平面に直立せるOPの直線より等距なり故に(第六設論)相等し故にOBCの三角形は二等辺なり而して其頂角頂Oと其底の中央Aに聯接せるAOの直線は此底に直立す

注意　此設論は三垂線の設論と名付る者にしてOPAの平面はBCの直線に直立なる事を證する者なり

推論

前圖は即ち同一平面上に在らさるBC OPの二直線公共の垂線APを有つ事を顯はす而して又此垂線は其最近距を測る者なる事を顯はす

其故はOP BCの直線中O及ひBの二個の某點を聯接せるOBの如き凡ての他の直線はOAより大なり因て又OPより大なれはなり

問題

一　設くる所の一點を過きて平面上ニ在らさる二直線ニ交るへき直線を作る事を求む

二　凡そ直線平面上ニ於て其底を過くる三個の直線ニ一様ニ傾斜せる時は其平面ニ直立す

三　平面外ニ設くる二點より此平面上まて等距なる各點の幾何地を求む

四　一直線上ニ在らさる三點より等距なる空間の各點の幾何地を求む

五　平面外の一點より此平面上ニ設くる一點を過きて作り得へき種々の直線上ニ下せる各垂線の底の幾何地を求む

六　設くる所の二點まての距離の二方の差常數なる所の空間の各點の幾何地を求む

七　直線上の某點より設くる所の二點まての距離の二方の差設くる所の二方ニ等しき者を求む

八　平面上の各點より此平面外ニ設くる二點まての距離の二方の和常數なる者の幾何地を求む

第三第四款

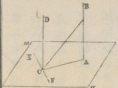
定説

直線及平面ありて何程遠く引長するも共相交はらさる時は其直線は平面ニ平行なると謂ふ

二個の平面ありて何程遠く引長するとも相交はらさる時は此二平面は相平行なると謂ふ

第一設論

二直線相平行する時は凡ての平面其一個に直立するものは亦他の者に直立す

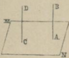


AB及ひCDは二個の平行線なり今MNの平面ABに直立すると定むれは亦CDに直立す

ABCDの二個の平行線にて（第一数第一設論）決定せる平面はACの直線に循てMNの平面を截る然るにMNの平面に直立せるABの直線は其底より此平面上に作れるACの直線に直立す故にABに平行せるCDの直線は（平面幾何第七数第三設論）亦ACに直立す此CDの直線MNの平面上他の直線に直立する事を證明するには此平面上に於てCAに直立せるCEの直線を作りC點をAB中Bの某點にCBの直線を以て聯接する時は（第一数第八設論）三垂線の設論に依りCEの直線はCBに直立す因て又（第一数第三設論）ACBの平面に直立す故に此平面中C點に作れるCDの直線はCEに直立す然るにCDは已にCAに直立せり因て又CA及ひCEの二直線を有てるMNの平面に直立す

第二設論

ABCDの二直線MNの同し平面に直立する時は相平行す



CDの直線とMNの平面との交點Cを過きて作れるABと平行線は（第一設論）此平面に直立す故に設想に依り等しく此平面に直立せるCD

と（第一款第五設論）相合す

推論

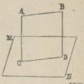
A及ひBの二直線第三の直線Cと平行する時ハ此二線ハ相平行す

Cの直線に直立せる平面を作る時ハ此平面ハ（第一設論）亦Cに平行せるABの二直線に直立す故にA及ひBの二直線ハ（第二設論）互に相平行す

第三設論

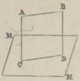
ABの直線MNの平面上に在るCDの直線と平行する時ハ此ABハ亦此平面と平行す

AB及ひCDに因て決定せるABCDの平面ハCDの直線に循てMNの平面を截る故に此二平面中第一の者の上に在るABの直線ハ第二の平面MNに交はる能はす其故ハ此ABの二平面の交線CDに平行せりと定めたれハなり



第四設論

MNの平面に平行するABの直線を過きて此MNの平面を截るへき平面を作る時ハ其交線CDハABの直線と平行す

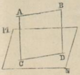


ABの直線ハCDの直線を有てるMNの平面と平行す然るに此二線ハABCDの同し平面上に在り故に相平行す

推論

ABの直線及ひMNの平面相平行せる時ハ此MNの平面上の某点CよりABと平行ニ作れる線ハ此平面上ニ在り

ABの直線とC点とニ因て決定せる平面ハ（第四設論）ABと平行せるCDの直線ニ循てMNの平面を截ル其故ハABの直線ハMNの平面と平行すれハなり



第五設論

ABの直線及ひ之と平行せるMNの平面との間ニ函める二個の平行線のAC BDの各々ハ相等し

AC BDの二個の平行線の平面ハABと平行せるCDの直線ニ循てMNの平面を截ル其故ハ（第四設論）此平面ハ設想ニ依りMNの平面と平行せるABの直線を過れハなり

故ニABCDの四邊形ハ平行邊形ニしてAC BDの二直線ハ相等し

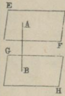
推論

直線及ひ平面相平行する時ハ各處皆等距離なり

MNの平面と平行せるABの直線中A及ひBの二点より此平面上ニAC BDの二垂線を下す時ハ此二線ハ（第二設論）相平行す因て互ニ相等し故ニABの直線及ひMNの平面ハ各處皆等距離なり

第六設論

EF GHの二平面ABの同し直線ニ直立する時ハ相平行す



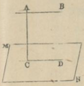
此二平面ハ相交わる能ハす其故ハ（第一教第四設論）空間中の或る一点よりABの同し直線ニ直立せる二個の平面ハ作る

能はされはなり

推論

一点Aを過きてMNの平面と平行に作れる各直線の幾何地は此MNの平面と平行せる平面なり

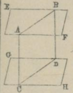
A点よりMNの平面との平行線AB及び其垂線ACを作る時ハ此二線は（第四設論）ABと平行せるCDの直線に循てMNの平面を截る所の平面を決定す故にCDの直線及び其平行線はABに直立す



故にA点を過きて作れるMNの平面との各平行線はACの直線に直立す之を反言すれはACの直線に直立せるABの如き凡ての直線はMNの平面と平行す其故ハAB及びCDに依て作れる平面はACに直立せるCDの直線に循てMNの平面を截る然るにABの直線は（平面幾何第七款第一設論）CDと平行し因て又MNの平面と平行せり故に求むる所の幾何地は（第一款第三設論）即ちMNの平面と平行せる平面なり

第七設論

EFGHの二個の平行平面をABCDの同し平面にて截る時はABCDの交線は相平行せ



ABCDの直線はEFGHの平行平面上に在る者にして相交ゝる能はす然るに此二線は共にABCDの同し平面上に在り故に相平

行れ

第八設論

二個の平面相平行する時は凡ての直線其一個に直立すれば亦他の者に直立れ

ABの直線はEFの平面と直立する者とれ然る時はEFと平行せるGHの平面に直立れ

ABの直線とGHの平面との交點Bを過きて此平面上にBDの其直線を作り然る后ABBDの二直線に依て決定せる平面を第七設論BDと平行せるACの直線に循てEFの平面を截る事を注意せ然るに設想に依りEFの平面に直立せるABの直線は亦ACの直線に直立せ因て又其平行線BDに直立せ然るにBDはGHの平面上に於てABの底に作きる其直線なり故にABの直線は此平面に直立せ

第一推論

A及ひBの二平面第三の平面Cと平行せる時は此二平面は互に相平行れ

Cの平面に直立せる其直線を作るときは此直線は第四設論亦互に相平行せるA及ひBの平面に直立す

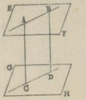
第二推論

一點を過きて設くる所の二平面と平行せる平面を作る事は一個より多くする能はれ

第九設論

EF GHの二個の平行平面の間に函める二個の平行線のAC BD

の各分は相等し



AC BDの二個の平行線の平面は（第七設論）同しく相平行せるAB CDの二直線に循てEF GHの二個の平行平面を截る故にABCDの四邊形は平行邊形にして其相對二邊は相等し

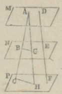
推論

EF GHの二個の平行平面は各處皆等距離なり

EFの平面中A及ひBの其二點よりGHの平面上にAC BDの二垂線を下せ時は此垂線は（第二設論）相平行なれは因て又互に相等し故にEF GHの平行平面は各處皆等距離なり

第十設論

NNPの三個の平行平面は此各平面と相交はるAC DFの二直線上に於て之を比例せる各分に截る



ABCはACの直線MNPの三平面と交はる所の点にして又DEFは同し各平面とDFの直線との交点なり

今A点よりDFと平行せるAHの直線を作り而してAC AHの二直線の平面を作る時は此平面は（第七設論）相平行せるBG CHの直線に循てN及ひPの二平面を截る因て（平面幾何第二十教第一設論）$\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{GH}$を得

然るにAG DEの直線はMNの二個の平行平面の間に函める故（第九設論）相等し又GHの直線は同理を以てEFに等しきに因て

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

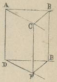
を得

第十一設論

平面上に在らさる二個の角平行せる各邊を有つときは其二角は相等しきか或は並角を為す而して其平面は相平行す

第一　BAC EDF の二角其各邊相平行し而して二個つ同方向に向ふ時は其二角は相等し

AB DE の平行邊上に於て互に相等しき AB DE の長さを取り又他の二邊上に於て AC DF の等長を取り而して AD BE CF の直線を作る然るときは ABED の四邊形は其對邊 AB DE は相平行し且つ相等しき故平行邊形なり故に他の二邊 AD BE は亦相等しく且つ相平行す



然るに AD の直線は同理を以て CF に等しく且つ相平行す故に BE CF の直線は AD の同し直線と平行し且相等しき故（第二設論の推論）互に相等しく且つ相平行するに因て BCEF の四邊形は平行邊形にして BC EF の對邊は相等し故に ABC DEF の三角形は互に相等しき三邊を有ち而して BC の對角 BAC は EF の對角 EDF に等し

第二　若し其平行の各邊反對の方向を有つときは其二角は亦相等し

此證法は平面幾何の同し設論の證法に於て之を指示

せり（平面幾何第九教第一設論）

第三　二個の平行邉同し方向を有ち他の二邉反對の方向を有つ時は其二角は並角を為す

此證法は平面幾何の同し設論の證法に於て之を指示せり（平面幾何第九教第一設論）

第四　ABC DEFの二平面の平行を證明するにはAB ACの二直線は共にDEFの平面のDE DFの二直線と平行する故（第三設論）DEFの平面と平行する事を注意すへし故にAB ACの二直線に依て決定せる平面は（第六設論の推論）DEFの平面と平行す

第一注意　空間の同し一点を過き某角の二邉と平行に作れる各直線にて成る常角を同し平面上に在らさる二直線の角と名く

第二注意　某直線平面上の某二直線に直立するときは此直線は此平面に直立す

問題

一　某直線と平行線を作り此平行線をして同し平面上に在らさる他の二直線に交はらしむる事を求む

二　直線及ひ平面同し直線に直立する時は相平行す

三　相交截せる二平面平行せる二直線を過くる時は此平面の交線は此二直線と平行す

四　相交截せる二平面同し直線と平行せるときは此二平面の交線は此直線と平行す

五　直線を過き他の直線と平行せる平面を作る事を求む

六　一点を過きて設くる所の二直線或ハ設くる所の平面と平行せる平面を作る事を求む

七　平行せる二平面まての距離設くる所の二長さ及ひれと比例せる所の各点の幾何地を求む

第五教

定説

ABC DBC の如く相交りて BC の交稜に於て終りたる二平面にて成る形を二面体角と名け BC の直線を此二面体角の稜と名け ABC DBC を其面と名く

二面体角を示すには若し其稜の直線只此二面体角にのみ屬するときは其稜上に置れたる二字を以てす反對の場合に於ては各面上に於て一字を記し其稜上に二字を記す而して各面の二字の間に於て稜の二字を唱ふるなり故に ABCD の二面体角は BC の直線を稜とし ABC DBC の二面 AD の二点を過くるものなり

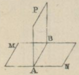
二面体角の大小設使は ABCD の体角の大小は其二面の開合にのみ関係す而して此二面は常に不定に引長せる者と解すへし此大小の考をなすには最初 DBC の平面を ABC の平面上に重なる者と定め然る后 BC の稜を軸として DBC の平面を原位に復する迄に旋轉するなり此 DBC の平面の旋轉中成す所の者は即ち其大小なり

二個の二面体角同し稜及ひ公面を有ち而して此公面の両邊に在るときは此二面体角は相隣接すと謂ふ

ABP の平面 AB の直線に循て MN の平面を截り MABP NABP の二個の隣接体角をなす時此二角の等不等に従ひ此 ABP の平面は MN の平面に直交又は斜交すと謂ふ

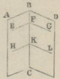
二面体角の一面他の面に直立する者を直二面体角と名く

二個の二面体角の各面互に其引長面なる時は此二面体角は其稜に因て對すと謂ふ



第一設論

ABCD の二面体角の稜上 F 及ひ K の某点を過きて此稜に直立せる EFG 及ひ HKL の二個の平面を作る時ハ此平面及ひ二面体角の各面との交線にて成る EFG HKL の二角は相等し



BC の直線に直立せる EFG HKL の二平面は（第三数第六設論）相平行す故に此二平面は（第三数第七設論）二個の平行直線に循て ABCD の二面体角の各面を截る

故に EFG HKL の二角は其各辺相平行し且つ同方向に向ふ者にして（第三数第十一設論）相等し

注意　EFG の常角は其二辺 BC の稜に直立する者にして是を

ABCDの二面体角に應ずる平面角と名く

第二設論

二個の二面体角に應ずる平面角相等しきときは此二個の二面体角は相等し

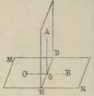
AB GHは二個の二面体角にして之に應ずるCBD IHKの平面角は相等しき者とす然るときは此二面体角は相等し

BCの辺をIHの上に重ね而してCBD IHKの二平面角を相重ぬるときはCBDの角の平面に直立せるBAの稜は第一數第三設論IHLの角の平面に直立せるHGの方向を取るに因てABC GHIの平面は二個の公直線を有ち其全闊中相合す又ABD GHKの二平面に於ても同理なり故にCABD IGHKの二面体角は相等し

推論

二面体角に應する平面角直角なる時は此二面体角は亦直角なり

MN及びADはDEの直線に循て交截せる二平面なり今此直線中の某点OよりMN及びADの平面に於てDE上に垂線OA OBを作る時は此二直線にて成るAOB AOCの隣角はADEN ADEMの隣接せる二面体角に應する平面角なり而して若し

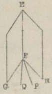


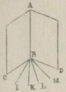
AOBの角直角なる時は ADENの二面体角も亦直角なり AOB AOCの並角は AOBの角直角なるを以て相等し故にADの平面MNの平面とにて成す ADEN ADEMの隣接二面体角は亦相等しく因て亦直角なり

第三設論

CABD GEFHの二個の二面体角の比は之に應する CBD GFHの平面角の比に等し

設使は CBD GFHの二個の平面角の比は(平面幾何第十五款定説)五三と定む然るときは此角は GFH中に三倍 CBD中に五倍を函める CBIの公度を有つ今 ABの稜及び CBDの平面角を五個に等分する所の BI BK BL BMの各直線に依て平面を作り以て(第二設論) CABDの二面体角を CABIの二面体角に等しき五個の二面体角に分つ又 GEFHの二面体角のEFの稜及び其平面角を三個に等分する所のFP FQの各直線に依て平面を作り以て其の二面体角を CABIの二面体角に等しき三個の二面体角に分つ其故に之に應する平



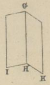


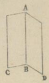
面角の各ハCBIの角に等しけれハなり故にCABIの二面体角ハCABDの二面体角中に五倍GEFHの二面体角中に三倍を含めり故にCABDとGEFHとの比ハ$\frac{5}{8}$にして即ち$\frac{CABD}{GEFH}=\frac{CBD}{GEH}$を得

第四設論

或る二面体角及ひ之に應する平面角を一とする時ハ凡ての二面体角ハ之に應する平面角と同し測度を有つ

一と定めたるIGHKの二面体角を以てCABDの二面体角を測らんとす先つIGHKの二面体角に應するIHKの平面角を一となしCABDの二面体角に應するCBDの平面角を測るへし而して（第三設論）$\frac{CABD}{IGHK}=\frac{CBD}{IHK}$を得





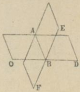
然るに此二個の等比をCADBの二面体角及ひCDBの平面角の測度を示す故に此二面体角の測度ハ此平面角の測度に等し

注意 通常二面体角の一に於てハ直二面体角を用ひ之に應する平面角の一に於てハ直線直角を用ゆ

第五設論

AC AE の二平面相交はる時は第一 CABE DABE の二個の隣接二面体角は並角をなす第二 CABE DABF の稜に因て相對する二面体角は相等し

第一 AC AE の二平面の交線 AB に直立せる CDEF の平面を作る時は CBE DBE の二個の平面角は CABE DABE の二個の二面体角に應する若にして之を合すれは二直角に値す故に此二面体角の和は亦二個の直二面体角の和に等し

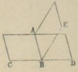


第二 稜に因て相對する CABE DABF の二面体角に應する CBE DBF の平面角は頂に因て相對する故相等し故に CABE DABF の二面体角は亦相等し

第六設論

CABE DABE の二個の隣接二面体角並角をなす時は ABC ABD の不公面は同し平面上に在り

CDE は CABE DABE の二個の並角をなす二面体角の AB の稜に直立せる平面なり又 CBE DBE の平面角は此二面体角に應す



る者にして亦並角をなす故に BC BD の不公邊な一直線上にあり因て ABC ABD の平面はAB CD の二個の公直線を有ち而して其全闊中相合す

問題

一　二個の平行平面を一個の平面にて截る時は此に生する四個の鋭二面体角并に鈍二面体角は相等し

此設論の反言は若し比較する所の二個の二面体角の稜相平行する時に非らされは真實ならず

二　平行せる稜を有つ所の二個の二面体角は若し其面互に平行し或は直角なる時は相等しきか或は並角をなす

第六教

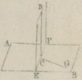
定説

一点より平面上に作れる垂線を此平面上に於ける此点の畫形影と名く

平面上に於ける某直線の畫形影は此直線中の各点の此平面上に於ける畫形影の幾何地なり

第一設論

DC の直線 AB の平面に直立する時は此直線を過ぎて作れる凡ての平面も亦 AB の平面に直立す

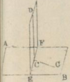


EF は AB DE の二平面の交線なり今 DC の直線と AB の平面との交点 C を過ぎて此平面上に於て EF に直立せる CG の直線を作

る時はDCGの平面角はDEFBの二面体角に應する者にしてDCの直線ABの平面に直立するを以て直角なり故にDEFBの二面体角は（第五教第二設論の推論）直角なり而してDCFの平面はABの平面に直立す

第二設論

AB DEの二平面互に直立する時は其交線に直立して此二平面中の一個の上に作れる凡ての直線は他の平面に直立す

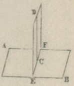


DEの平面に於てEFに直立せるDCの直線を作る時は此直線は亦ABの平面に直立す

C點を過きABの平面上に於てEFに直立せるCGの直線を作るなり然るにDEFBの二面体角をAB DEの二平面互に直立せるを以て直角なり故に此二面体角に應せるDCGの平面角も亦直角なり之に因てDCの直線とEFの二直線に直立し而して此二線を有てるABの平面にも亦直立せ

第三設論

AB DEの平面互に直立する時はEFの交線の一點より此二平面中の一個の上に作れる垂線は他の平面中に在り



ABの平面上に於てEFの交線の某點CCより作れる垂線はDFの平面に於てC

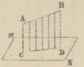
點よりEFに直立せるCDの直線と合せさる可からす其故はCDは亦ABの平面に直立すれはなり

注意

ABの平面に直立せるDEの平面はABの平面に於て二平面の交線EF中の種々の點より作れる垂線の幾何地なり

推論

ABの直線MNの平面に斜交する時は此平面上に於ける其畫形影は直線なり



ABの直線のA及ひBの某二點よりMNの平面上に垂線AC BDを下す時は此垂線は（第三教第二設論）相平行す而して此直線よて決定せる平面は（第一設論）MNの平面に直立す而して此二平面の交線CDはMN上に於るABの畫形影なり

ABの直線中種々の點よりCD上に下せる各垂線はACと平行す因てABDCの平面中に在り故に此各垂線の底の幾何地即ちABの直線のMNの平面上に於る畫形影はMN ADの平面の交線即ちCDの直線なり

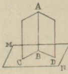
第四設論

AC ADの二平面相交りて第三の平面MNに直立する時は其交線ABは亦MNの平面に直立す

Bは MNの平面AC ADの平面の交線ABに交る所の點なり

今若し此點よりMNの平面上に垂線を作る時は此直線

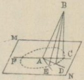
は設想に依りMNの平面に直立せるACADの二平面の各の上に（第三設論）在るへし故に此直線はMNの平面に直立せるABの交線と合ふ



第五設論

ABの直線MNの平面に斜交せる時は此直線と此平面上に於ける其畫形影とにて成せる角は此平面上に於て此直線の底Aを過きて作り得へき凡ての直線と此ABの直線とにて成す角より小なり

ABの直線の某點BよりMNの平面上に垂線ACを作る時はBA BCの二直線のA及ひCの底を聯接せるACの直線は（第三設論の推論）此平面上に於けるABの畫形影なり而してBACの角はMNの平面上A點を過きて作れるADの如き凡ての他の直線とABとにて成せBADの角より小なり



ACに等しきADの長さを取りBDの直線を作る時は此直線はMNの平面に斜交す因て（第一教第六設論）垂線BCより大なり故にABC ABDの三角形は一個の不等邊及ひ二個の相等邊を有つ故に其最小邊BCの對角BACは（平面幾何第五教第五設論の推論）最大邊BDの對角BADより小なり

第一注意　ABの斜線ADと共に成す所のBADの角はABの畫形影ACとADとにて成すCADの角と共に增大す益〻CAEの角はCADの角より大なり今A點を中心としACを半

徑として其圓周を作る時ハCEの通弦ハ（平面幾何第十一教第六設論）CDの通弦より大なり故ニBEの斜線ハBDの斜線より大なり因てABE ABDの三角形ハ一個の不等邊及ひ二個の相等邊を有つ故ニBEの邊の對角BADハ（平面幾何第三教第五設論の推論）BDの邊の對角BADより大なり

第二注意　平面上ニ於ける直線の傾斜ハ其平面上ニ於ける此線の畫形影と此線とニて成る角を以て測るなり

問題

一　二個の平面第三の平面ニ直立して二個の平行線を過ぐる時ハ此二平面ハ亦相平行す
同一平面上ニ於ける二個の平行線の畫形影ハ相平行す

二　一個の直線一個の平面ニ直立する時ハ此直線の某平面上ニ於ける畫形影ハ此二平面の交線ニ直立す

三　同一平面上ニ在らざる二個の直線ニ公垂線を作る事を求む

四　一個の不變長の直線の中央の幾何地を求む但し此直線ハ其二端他の直交して同一平面上ニ在らざる二直線の上ニ止まるなり

五　相交截せる二平面より等距なる各點の幾何地を求む

六　一個の直線相交截せる二個の平面上ニ於て其交線より等距なる各點ニ於て交はる時ハ此直線ハ此二平面上ニ於て等しく傾斜するなり又此反言ハ真實

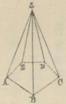
なり

七　一個の平面に斜交せる凡ての直線を此平面上に於て其直線の底を過ぎて作れる一個の直線に直立す」

第七款

定説」

一點Sを過ぎSA SB SC SD SEの交線に終りたるSAB SBC SCD SDE SEAの如き數個の平面にて成る形を多面体角と名く

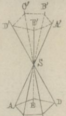


S點をSA SB等の稜を有てる多面体角の頂と名けASB BSC等の或る二個の相連稜にて成る角をSの多面体角の面と名く

多面体角を作るにも少くとも三個の平面を要す惟二個の面を有てる者を三面体角と名く

三面体角の二面体角中の一個直角なる者を直三面体角と名け二個直角なる者を二直三面体角三個直角なる者を三直三面体角と名く

多面体角此体角を作る所の不定に引長せし各平面の同傍に在る時之を凸多面体角と名け反對の場合に於ける者を凹多面体角と名く



頂點の同傍に於てSの凸多面体角の凡ての稜に交ゑるABCDEの平面とABCDEの凸多角形に循て此多面体角の表面を截る事明すなり

SABCDE SA'B'C'D'E' の如き二個の多面体角其一の各稜他の各稜の引長線なる時は之を頂に因て相對すと謂ふ

頂に因て相對する二個の多面体角は互に相等しき面及ひ二面体角を有つ然れとも通例相重ぬる能はさる者なり但し是れは後に至て其證明を顯ハ

第一設論

三面体角を作る所の平面角の各々他の二個の和より小なり

SABC は ASB BSC CSA の平面角にて作れる三面体角なり若し此三個の平面角相等しき時は此設論は直に明なり又若し不等にして ASB の角を最大なりとせれは此角に於て之を証明せれは可なり蓋し他の二角 BSC CSA は已に此角より小なれはなり

SAB の平面上に於て BSC の角に等しき BSD∟の角を作る時は SD の邊は設想に因り BSC の角より大なる ASB の角の内に在り

又 S 點の同傍に於て SA SD SB の三直線に交るへき直線を作り其交點を A D B とし而して SC の稜上に於て SD に等しき SC の長さを取り AB の直線と C 點とに依て平面を作る時は此平面は此三面体角の ASC BSC の面を AC BC の直線に循て截るなり

BSC DSC の三角形は互に相等しき二邊の間に等角を函め

る故相等し之に因てBC BDの二邊も亦相等し而してABCの三角形のAB BCの二邊の差ADは（平面幾何第三教第一設論の推論）第三の邊ACより小なり故にASD ASCの三角形は互に相等しき一邊及ひ不等の二邊を有つ即ちACより小なるADの一邊及ひSCに等しきSDの邊並にSAの公邊なり故にADの邊の對角ASDは（平面幾何第三教第四設論の推論）ACの邊の對角ASCより小なり然るにBSDの角は設想に依りBSCの角に等し故に

$$ASD+BSD < ASC+BSC$$

即

$$ASB < ASC+BSC$$

を得

第二設論

SABC S'A'B'C'の二個の三面体角頂に因て相對する時は互に相等しき面及ひ二面体角を有つ然れとも此或は彼の内に於て二個の等しき面を有つときに非されは相重ぬる能はす

SABC S'A'B'C'の三面体角のASB A'SB'の面は頂に因て相對する故（平面幾何第二教第三設論）相等し又ASC A'SC'並にBSC B'SC'の面におても同理なり又BSACの二面体角はB'SA'C'の二面体角と稜に因て相對する故（第五教第五設論）相等し又ASCB A'SCB'並に

ASBC A'SB'C' の二面体角に於ても同理なり若し SABC A'SB'C' の三面体角二個の等しき面を有つ時は SABC SA'B'C' の三面体角は相重ぬへし又若し SABC の三面体角凡て不等の面を有つ時は相重ぬる能はす SABC の三面体角の ASC の面 BSC の面に等しと定め而して SC' の稜を SC の稜上に置き SC'B' の平面を SCA の平面上に置き以て ASCB A'SC'B' の二面体角を合せるなり然る時は SC'A' SCB の平面は此二個の二面体角の相等しきに因り全く相合す又 B'SC' ASC の角は皆 BSC の角に等しき故相等し因て SB' の稜は SA の方向を取り又等しき道理に依て SA' の稜は SB に合す故に SB'A' の平面は SAB の平面と合し而して SABC SA'B'C' の三面体角は相等し

SABC の三面体角等しき面を有たさる者と定め而して亦 ASCB A'SC'B' の等しき二面体角を重ぬる時は SB' の稜は SA の方向を取らす其故は B'SC' ASC の角は等しからされはなり又之に等しく SA の稜ゟ SB'A' の平面 SBA の平面と合せさるを

以てSBニ合せす故ニSABC SA'B'C'の三面体角ハ不等ふり

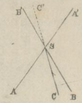
注意　SABCの三面体角二個の等しき面を有ささる時ハSABC SA'B'C'の三面体角を合する事能はざる所以ハ此三面体角の各面他の三面体角中互ニ相等しき各面と等しき順序ニ在らさきハふり即ちASC A'SC'の等しき面ニ於て一ハCC'の稜の右方ニ在り一ハ其左方ニ在きハふり

凡そ頂ニ因て相對する二個の多面体角ハ互ニ等しき面及ひ二面体角を有つ然きとも通例相重ぬへからす但し此証ハ前ニ等しき道理を以て之を為す事を得

此の如き多面体角ハ互ニ等比形を為すと謂ふ

第三設論

SABCの三面体角CSA CSBの二個の等しき面を有つ時ハ此面ニ對するSB SAの二面体角ハ相等し又之を反言すへし



SA'B'C'ハSABCの三面体角の各稜の引長線ニて成りさふ三面体角ふり此頂ニ因て相對をふ二個の三面体角ハ（第二設論）相等し

其故ハSABCの三面体角のCSA CSBの面ハ設想ニ依て相等しけれハなり今之を相重ぬふ時ハSB SA'の二面体角の相等しきを知ふ然るふSA'の二面体角ハSAの二面体角と稜

に因て相對する故（第五款第五設論）相等し故に SABC の三面体角の CSA CSB の等しき面に對する SB SA の二面体角は相等し

又之に反し SABC の三面体角 SA SB の二個の等しき二面体角を有つ時は此体角に對する CSB CSA の面は相等し

此反言も亦前と同し道理を以て証明し得るなり

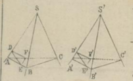
推論

三面体角の三個の面相等しき時は其三個の二面体角も亦相等し又之を反言すへし

第四設論

二個の三面体角互に相等しき面を有つ時は等しき面に對する二面体角も互に相等し而して此二個の三面体角は等形或は等比形なり

SABC S'A'B'C' は二個の三面体角にして ASB BSC CSA の面は A'S'B' B'S'C' C'S'A' の面に等しき者と定む而して BASC B'A'S'C' の二面体角の相等しき事を証せんとす



SA の稜上の D 点を過きて此稜に直立せる平面を作る時は此平面は DE DF の直線に循て BASC の二面体角の二個の面を截る

而して此二直線はSAに直立しEDFの角はBASCの二面体角を測るへき者なり

然るにBASCの二面体角を成す所のASB ASCの角は鋭直又は鈍なる事あり故にEDFの平面はSB SCの二直線の各に交る事あり或は一個と平行し他の者に交る事あり或は此二直線と平行する事あり或はS点を越へ其引長線に交る事あり此種々の場合の撿査を避るの為めにSの三面体角の各稜上に於てSA SB SCの等長を取り此ABCの三点に依て平面を作り而してASB ASC BSCの平面にて成りたる三面体角を以てSの三面体角に代用す此新三面体角はSの三面体角と共にBASCの二面体角を有ち而してEDFの平面はE及ひFの二點に於てAB ACの稜に交る其故はSAB SACの二等辺三角形のAB ACの底の傍角BAS CASは鋭角なれはなり

今又S'の三面体角の各稜上に於てSAに等しきS'A' S'B' S'C'の長きを取りA' B' C'の三点に依て平面を作り然る後A'S'上に於てADに等しきA'D'の長きを取り而してD'点を過きS'A'の稜に直立せる平面を作る時は此平面はD'E' D'F' E'F'の直線に循てA'の三面体角のA'S'B' B'S'C' C'S'A'の三個の面を截る而してE'D'F'の平面角は其各辺A'S'の稜に直立しB'A'S'C'の

二面体角を測るつき者あり今EDF E'D'F'の二角の相等しき事を証明せんとす

SAB S'A'B'の三角形は設想に依り相等しき二邊の間に等角を函める故相等し故にSABの角はS'A'B'の角に等しくABの辺はA'B'の辺に等し又同様にSACの三角形はS'A'C'の三角形にSBCの三角形はS'B'C'の三角形に等し因てSACの角はS'A'C'の角に等しくAC BCの辺は互にA'C' B'C'の辺に等し又ABC A'B'C'の三角形は相等しき三辺を有てる故BAC B'A'C'の角は相等し

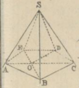
又ADE A'D'E'の直三角形は相等しき二角に隣接せる等辺を有てる故DEの辺はD'E'の辺にAEの辺はA'E'の辺に等し又ADF A'D'F'の直三角形に於てDF D'F'の辺は互にAF A'F'の辺に等し故にAEF A'E'F'の三角形は相等しき二辺の間に等角を有ち而して相等し因てEFの邊はE'F'の邊に等し故にDEF D'E'F'の三角形は相等しき三邊を有ち而してEFの邊に對せるEDFの角はE'F'の邊に對せるE'D'F'の角に等し

SABC S'A'B'C'の三面体角は其等面同順序なるか或は反對の順序なるかに從ひ等形或は等比形なり今先各等面同順序なる者と定めA'S'C'の面を其等面ASCの上に重ねる時はB'S'C' BSCの等面に對するSA S'A'の二面体角は相等しき故A'S'B'の平面はASBの平面に合す而してS'B'の直線はA'S'B' ASBの角の相等しきに因りSBの直線に合す故にB'S'C' BSCの面は相合し而してSABC S'A'B'C'の三面体角は相等し

又二個の三面体角の等しき各面反對の順序なる時ハS'の三面体角の等比形とS'の三面体角とハ其各面相等しく且同順序なる故等形にしてS S'の三面体角ハ等比形なり

第五設論

凸多面体角を作る所の平面角の和ハ四直角より小なり



SABCDEハ ASB BSC CSD DSE ESAの各平面角にて成りたる凸多面体角なり今其交點Sの一傍に於て凡ての稜に交るへき平面を以て此多面体角を截りABCDEの截面中に於て某點Oを置き直線を以て各角頂に聯接するなり然る時ハABCDEの多角形を其邊數即ちSの三面体角の面數に等しき三角形に分觧ス

是に於てABCDEの截面とSの三面体角の各面とにて成す所の各三面体角を逐次に注意する時ハABSEの三面体角に於て（第一設論）SAB+SAE>BAEを得又同様にBCSAの三面体角に於て

SBA+SBC>ABCを得餘猶此の如し此不等式の各邊を加ふる時ハSAB SBA等の三角形のAB BC等の底上に成るSAB SBA SBC等の角の和ハABCDEの多角形のBAE CBA等の内角の和より大にして即OAB OBC等の三角形のAB BC等の底上にあるOAB OBA OBC等の角の和より大なる事を知る然るにSAB SBC等の三角形ハOAB OBC等の三角形と其個數相等しき故其各角の和ハ相等し故に第一群の三角形に於てS點を公角頂とせる各角の和ハ第二群の三角形に於てO點を公角頂とせる各角の和より小なる事を要す故にSの三面体角を成せ所のASB BSC CSD等の各平面角の和ハ四直角より小なり

問題

一　三面体角の三面より等距なる各點の幾何地を求む

二　三面体角の三個の稜より等距なる各點の幾何地を求む

三　三面体角の各面に直立し其對稜を過きて作れる各平面ハ同し直線を過く

四　三面体角の各稜と其對面の平分線とにて作れる各平面ハ同し直線を過く

五　直三面体角内に於て其各稜中の一個に直立せる平面にて作れる凡ての截面ハ直三角形なり

六

三直三面体角を一個の平面にて截りて成る所の三角形の各高の交點は此三面体角の角頂の此平面上に於ける畫形影なり

七

三直三面体角を其三個の稜に交るへき平面にて截る時は第一其各面の上に截断せる三角形は此割平面上に於ける其畫形影と此平面にて此三面体角内に成る截面との中率なり第二此截面の二方は此三面体角の各面上に於ける其畫形影の二方の和に等し

八

四面体角を平面にて截り其截面をして平行邉形ならしむる事を求む

九

三面体角の内に設くる一點を過き此体角の各面上に下せる垂線は第二の三面体角の各稜なり而して第二の三面体角の面は第一の者の二面体角の並角にして第二の二面体角は第一の面の並角なり

十

三面体角の最大面は最大の二面体角に對す又之を反言すへし

十一

三面体角の各稜と其對面とにて成す所の角の和は三面の和よりは小にして其半和よりは大なり

第八第九教

定説

各方凡て平面にて終る所の体を多面体と名く此平面の交線にて成りたる多角形を此多面体の面と名け此各面を集むる者を此多面体の表面と名く

此各面ニて成る所の多面体角を多面体の角と名け此角の各頂を多面体の角頂と名け此各面の邊を多面体の稜と名け此各角頂中同一面上ニ在らさる者二個を聯接したる直線を此多面体の對角線と名く

四、六、八、十二、二十の面を有てる多面体ハ四面体六面体八面体十二面体及ひ二十面体の特名を以て之ヲ称ス

多面体の各角相等しく且其各面等しき正多角形なる者を正多面体と名く

正多面体ハ惟五種ニ止る第一正四面体是れ其各角頂ニ於て三個つゝ集りたる等邊三角形四個ニて成る者第二正六面体即ち立方体是れ其各角頂ニ於て三個つゝ集りたる正方形六箇ニて成る者第三正八面体是れ其各角頂ニ於て四個つゝ集りたる等辺三角形八個ニて成る者第四正十二面体是も其各角頂ニ於て三個つゝ集りたる正五角形十二個ニて成る者第五正二十面体是も其各角頂ニ於て五個つゝ集りたる等辺三角形二十個ニて成る者此惟五種ニ止る所以ハ正多角形の諸角のみを面とせる多面体ハ幾許作り得へきやを撿査し以て容易ニ之を知るヿ蓋し等辺三角形の一角即ち其値一直角の三分の二なる者を以てするときハ三個四個五個の面を有てる三個の多面体を作る事を得其故ハ（第七教第五設論）多面体の各面の和ハ四直角より小ニして而して一直角の三分の二ニ等しき角五個以上の和ハ四直角ニ等しきか或ハ之を超れハなり又同理ニ依り正方形の角を以てする時ハ惟一個の多面体を作

り得へきのみ而して此多面体は三個の面のみを有つ事知る可し又凡ての他の正多角形の角を以てする時は多面体を作る能はさる事知る可し

多面体は若し其体を界する所の平面を無窮に引長し此各平面の同傍に在る時は之を凸多面体と名け之に反する時は凹多面体と名く

平面にて凸多面体の表面を截る時は凸多角形を成す其故は此多角形を作る各直線の同傍に在れはなり故に直線の凸多面体の表面に交はるは二点より多き事なし

多面体の内に於て柱体および錐体の二体は特に之を區別す

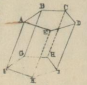
平行辺形を以て聯接せる二個の面相等しく且つ相平行なる所の多面体を柱体と名く

柱体に平行して且つ相等しき二個の面を底と名け此二面を聯接せる各平行辺形を傍面と名く

柱体の二底の平面の距離を此体の高さと名く而して第三教第九設論の推論此距離は二体中の一個より他の者の上に作る垂線を以て其測度とす

柱体を作るには其多角形設使は ABCDE の五角形を置き此平面の同傍に於て其各角頂を過きて互に平行して且つ相等しき所の直線 AF BG CH DI EK を作り然る後此各平行線の端數を角頂とせる FGHIK の多角形の各邊を作るなり然る時は ABCDEFGHIK の多面

体ハ即ち柱体なり其故ハAK EI DH CG BFの各四邊形ハ圖形の製作ニ依ルニ相平行して且つ相等しき二邊を有てる故平行邊形なり故ニ



ABCDE FGHIKの五角形ハ互ニ相平行して且つ相等しき各邊を有てる故相等し故ニ此各平行邊形ニて聯接せる相平行して且つ相等しき一面を有てるAIの多面体ハ柱体なり

柱体ハ其底三角形四邊形五角形六角形等なるニ從ひ三角柱体四角柱体五角柱体六角柱体等と名く

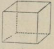
柱体の傍面底面ニ直交せる者を直柱体と名け斜交する者を斜柱体と名く又直柱体の傍面ハ矩形なり

柱体の凡ての傍面ニ交はる一き平面ニて之を截るときハ此截平面と底との間ニ函める分を柱体截段と名く

空間ニ於て多面体の占領せる場所の大さを此多面体の体積と名く若し二個の多面体等体ニあらずして等体積を有つときハ之を等積体と名く

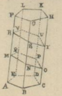
柱体の底平行辺形なる者を平行面体と名く故ニ平行面体ハ平行辺形の六面中ニ函まるゝ者なり

直角平行面体の底矩形なるときハ之を矩平行面体と名く而して此体ハ同じ角頂より分出せる三稜を以て其各長度とす又矩平行面体の各面正方形なる者を立方体或ハ正六面体と名く



第一設論

AKの柱体に於て凡ての傍面に交はるへき二個の平行平面にて作れるMNOPQ RSTUVの截面は等しき多角形なり



MO RTの二個の平行平面は（第三巻第七設論）MN RSの平行直線に循て此柱体のAGの面を截る故にMN SRの四辺形は平行辺形なり而してMN RSの平行線は相等しく又同様にMNOPQの截面のNO OP等の邊はRSTUVの截面のST TU等の辺と各相平行して且つ相等しき事を證する事を得又此多角形の各角は相平行して同方向に向ける各邊を有てる故（第三巻第十一設論）二個つゝ相等し故にMNOの角はBSTの角に等しくNOPの角はSTUの角に等し餘之に倣ふ故にMNOPQ RSTUVの截面は互に相等しき角及ひ邊を有ち而して相等し

推論

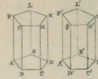
柱体の底と平行せる平面にて作れる凡ての截面は此底に等し

注意　柱体に於て其傍稜に直立せる平面にて作れる凡ての截面を此柱体の直截面と名く

第二設論

二個の柱体同位置にして且つ相等しき傍面と底との間に

等しき二面体角を有つ時は相等し



設使はAKの柱体のABCDEの底はA'K'の柱体のA'B'C'D'E'の底に等しくABGFの傍面はA'B'G'F'の傍面に等しくABの二面体角はA'B'の二面体角に等しとす而して若し其等しき各面同位置なる時は此二体は相等し

ABCDE A'B'C'D'E'の二個の等しき多角形を相合し以て此二体を相重ね然る后A'B'G'の平面はAB A'B'の二個の二面体角の等一なるに因りABGの平面と相合さる事を注意すへし又ABGF A'B'G'F'の平行辺形は設想に依て相等しく且つ同位置なる故A'B'G'の角はABGの角に等し因てB'G'の稜はBGの稜の方向を取る然るに此各直線は相等しき故G及びG'の各端は相合す

ABCDE A'B'C'D'E'の二個の下底及びBG B'G'の二稜は相合する故A'K'の柱体中B'G'と平行せるC'H' D'K'等の傍稜はAKの柱体中BGと平行せるCH DK等の傍稜と各相合しG'H'K'L'F' GHKLFの上底の各角頂は皆相合す故にAK A'K'の柱体は同し各角頂を有てる者にして此の如き者は惟一個より外作る能はす故に

此二体は相等し

推論

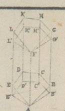
AK A'K' の二個の直柱体等底等高を有つときは相等し

AB の直二面体角は A'B' の直二面体角ニ等し而して等底等高を有てる ABGF A'B'G'F' の矩形は相等し故ニ AK A'K' の柱体は互ニ相等しく且同位置の傍面及ひ底の間ニ等しき二面体角を有てる故相等し

第三設論

斜柱体は傍稜の一個を高さとし直截面を底とせる直柱体と等積なり

AK は ABCDE FGHKL の多角形を底とせる斜柱体なり今 AF の傍稜の A 及ひ F の二端より此稜ニ直立せる AB'C' FG'H' の平面と作る時は AB'C'D'E' FG'H'K'L' の截面は其平面相平行する故（第一設論）等しき多角形なり故ニ AB'C'D'E'FG'H'K'L' の多面体は直柱体ニして AK の斜柱体の AF の傍稜を高さとし AB'C'D'E' の直截面を底とせる者なり而して此二体は等積なり



AB'C'D'E'FG'H'K'L' の全き多面体よりして AK AK' の二個の柱体を逐次ニ

減去して得る所のABCDEB′C′D′E′ FGHKLG′H′K′L′の二個の多面体は等一なり之を證するにはAB′C′D′E′ FG′H′K′L′の二個の等しき截面を相合して以て此二体を相重ぬるなり然る時はB′B G′Gは各此截面に直立し且つAF—BG′の同長を有てる故同し方向を取り且つB Gの各端は相合す又C及ひH D及ひK E及ひLの各角頂に於ても同様なり故に此同し角頂を有てるAB′CD FG′HKの二個の凸多面体は相合し而して相等しきを知る

今AB′CFGKの全体よりして逐次に此二個の等しき多面体を減去する時はAK AK′の二個の柱体を餘す而して此二体は等積ならさるへからす故にAKの斜柱体は此傍稜中の一個を高さとし直截面を底とせるAK′の直柱体と等積なり

第四設論

平行面体の各對面は相等しく且つ相平行す

AGは平行面体にしてABCD EFGHの平行邊形を底とせる者なり此二個の四邊形は相等しく且つ其各平面は平行面体の定説に依るに相平行せるなり然る時は他の對面

設使は ABFE DCGH も亦相等しく且つ其各平面は相平行す ABEF DCGH の平行邊形は互に相等しき二辺の間に等角を有つ其故は ABCD の平行辺形の對邊なるを以て AB の辺は DC の辺に AE の辺は DH の辺に等しく而して BAE の角は CDH の角と其各辺互に相平行し且つ同方向に向ふを以て相等し故に（平面幾何第十設第五設論）ABFE DCGH の二個の對面は相等し而して其各平面は各辺互に相平行せる BAE CDH の角を有てる故（第三教第十一設論）相平行す

注意　或る二個の對面を以て平行面体の底となす事を得其故は此對面は相等しく且つ相平行すれはなり

推論

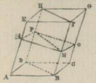
平行面体の二個の對面に交さる所の平面にて成る截面は平行邊形なり

此截面は其對邊相平行せる四邊形なれはなり但し此對邊は二個の平行面と他の一平面とにて成る交線なる故（第三教第七設論）相平行するなり

第五設論

平行面体の二個の對稜を過て作れる平面は此体を二個の等積の三角柱体に分解す

AGは平行面体にして BF DH の對稜は各 AE の同し稜と平行せるを以て（第三教第二設論の推論）互に相平行せ而して此二稜にて決定せる平面は AG の平行面体を ABDEFH BCDFGH の二個の多面体に分ち而して此二体は三角柱体なり



此第一多面体の ABD EFH の二個の三角面は互に相等しく且つ相平行せる各邊を有てる故（第三教第十一設論）相等しく且つ相平行せ又其他の各面は平行邊形なり故に此多面体は柱体なり又第二の多面体 BCDFGH に於ても同様なり

此二個の三角柱体は等積なり但し此設論は若し AG の平行面体直体なる時は直に明了なり其故は此二個の柱体は皆直体にして等底等高を有ては故（第二設論の推論）此二柱体は相等しければなり

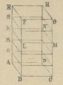
又 AG の平行面体斜体なる時此設論を證明するには此二柱体の各傍稜に直立せる MNOP の平面を作るべし然る時は AFH の斜柱体は（第三設論）此斜柱体の MNH の直截面を底とし BF の傍稜を高さとせる直柱体と等積なり又之に等しく GFH の斜柱体は NOP の直截面を底とし BF の傍稜を高さとせる直柱体と等積なり然るに此二個の直柱体の MNP NOP の底は互に相等しき三辺を有てる故相等し

而して此柱体は又BFの等高を有てる故（第二設論の推論）相等し故にAFH CEHの斜柱体は等積なり

第六設論

二個の等底の矩平行面体は其各高と比例を為す

ABCDE及ひABCDKは二個の矩平行面体にしてABCDの等底を有ちAE AKの不等の高さを有つ者とす此各高の比を（平面幾何第十五教定説）$\frac{5}{3}$に等しき者と定む故に此各高はAK中に三倍AE中に五倍を函めるAOの公度を有つ令AEを五個に等分する所のORKSの各点を過て此直線に直立せる平面を作る時は此平面はAEの平行面体に於て（第三教第七設論）ABCDの底と平行し且つ（第一設論）此底に等しき所の各截面を決定せ故にAEの平行面体は五個の等しき矩平行面体に分てり其故は（第二設論）其底及ひ高さは相等しければなり而してAKの平行面体は其三個を函めり故に此二個の多面体はABCDOの公度を有ち而して其個數はAE AKの高さのAOの公度を函める者に等し故にABCDの等底を有てるABCDE ABCDKの二個の矩平行面体の比は亦$\frac{5}{8}$に等しく即ちAE AKの高さの比に等し



第七設論

二個の等高の矩平行面体は其底と比例を為す

P及ひP'をhの等高の矩平行面体にして R R'の各底はa b及ひa' b'の直線を以て其長濶と為る者なり今h a b'の三線を以てP''の矩平行面体を作り之をPの平行面体と比較する時は此二個の多面体はh aを長濶とせる一個の等面を有ち此面を其底とされは此二体は(第六設論)b b'の各高と比例を為す即ち $\frac{P}{P''}=\frac{b}{b'}$ なり又P'' P'の二個の平行面体も亦h b'を長濶とせる等底を有てる故(第六設論) $\frac{P''}{P'}=\frac{a}{a'}$ を得此二個の相等式の各邊と相乗し其第一辺の二項をP''の公因数にて約し $\frac{P}{P'}=\frac{a\times b}{a'\times b'}$ と得然るにR及ひR'の矩形は(平面幾何第三十款第二設論)其底と高さの相乗 $\frac{a\times b}{a'\times b'}$ と比例を為す故に $\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$ と得

第八設論

一個の矩平行面体は其底と高さの相乗と比例を為す

P及ひP'をR R'の矩形を底としh h'の直線を高さとせる二個の矩平行面体にして今Pの平行面体と等底にしてP'の平行面体と等高なるPの矩平行面体を作

る時はPP″の二個の平行面体は等底なる故（第六設論）其高さと比例を為す即ち $\frac{P}{P''}=\frac{h}{h'}$ なり又P″P′の矩平行面体は等高なる故（第七設論）其底と比例を為す即ち $\frac{P''}{P'}=\frac{R}{R'}$ なり此二個の相等式の各辺を相乘し其第一辺の二項とP″の公因數にて約し

$$\frac{P}{P'}=\frac{R\times h}{R'\times h'}$$

を得

第九設論

矩平行面体の体積は底と高さの相乘に等し但し長さの一を以て作れる立方及ひ平方を体積及ひ面積の一と為す

設使はRの矩形を底としhの直線を高さとせるPの矩平行面体の体積を測るには長さの一を以て作れる立方及ひ平方を体積及ひ面積の一となし前の設論に依り

$$\frac{P}{1}=\frac{R}{1}\times\frac{h}{1}$$

即ち

$$P=R\times h$$

を得

然るにPRhの各數は此矩平行面体及ひ其底其高さの測度なる故此相等式の意は左の如し

矩平行面体の測度即ち其体積を顯はす所の數は其底及ひ其高さの測度を顯はす所の二數の相乘に等し

然れとも通常之を左の如く唱ふるなり

矩平行面体の体積は底と高さの相乘に等し

第一推論

ａ及ｂを（平面幾何第三十款第三設論）Ｒの矩形の長濶とすれは

$$R=a\times b$$

なる故

$$P=a\times b\times h$$

なり故に矩平行面体の体積は又其三長度の相乗に等し

其故にａｂｈの各數はＰの平行面体の三長度の測度なれはなり

此設論に於ては面積の一には関係せさるなり

第二推論

立方体の体積は其三長度の相乗即ち其一邊の三方に等し

反言して其數の三方は此其數を以て其一邊の長さとせる立方体の体積と考ふる事を得

注意　米突を以て長さの一とする時は方米突は面積の一にして立方米突は体積の一なり

第十設論

其平行面体の体積は底と高さの相乗に等し

此設論は矩平行面体に於ては（第九設論）前既に証明せり故に今直平行面体及ひ斜平行面体に於て之を證せん

第一　ＡＧはＡＢＣＤの平行辺形を底としＡＥの直線を高さとせる直平行面体なり今一個の底に属するＡＢの稜中Ａの其點を過き此稜に直立せる平面を作るときはＡＥＨ'Ｄ'の截面は矩形なり其故に此平行面体のＢＥＣＨの對面はＡＣＥＧ

の二底に直立するものなり

設くる所のAGの平行面体は（第三設論）AEHD′の截面を底としABの稜を高さとせる直平行面体と等積なり然るに此直平行面体は其底矩形なるを以て矩平行面体なり故に底と高さの相乘即ちAE×AD′×ABを測度となす故にAGの平行面体も亦AE×AD′×ABと測度となる然るにAD′×ABはABCDの底の面積なり故に此AGの平行面体はAEの高さとABCDの底の相乘に等し

第二　AGはABCDの平行辺形を底とせる斜平行面体にして

今其一個の底に属せるEFの稜中Eの其点を過ぎ此稜に直立せるEKNの平面を作る時は設くる所の平行面体は（第三設論）EKNOの直截面を底としEFの稜を高さとせる直平行面体と等積なり又ERはE点よりABCDの平面上に下せる垂線にして此垂線はAGの平行面体の高さにして又EKNOの平行辺形の高さなり其故は（第六教第二設論）此直線は此四辺形の平面中に在りてKNの辺に直立すれハなり故に此直平行面

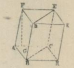
体は ER×NK×EF を測度となす因て AG の斜平行面体の体積は ER×NK×EF にして NK×AB 即ち NK×EF を測度とせる ABCD の底と ER の高さの相乗に等し

第十一設論

柱体の体積は其底と高さの相乗に等し

先つ最初に ABCDEF の三角柱体を注意す是れは ABC の三角形を底とし FG を高さとせるものなり

此柱体の A の三面体角の AB AC AF の三稜の各端を過き



他の二平面と平行せる平面を作り以て AK の平行面体を作る時は ABCDFE 及ひ BCHDEK の二個の三角柱体は BD CE の二個の對稜の平面にて此平行面体を分つ者にして（第五設論）等積なり故に AK の平行面体は設くる所の柱体の二倍なり然るに此平行面体は（第十設論）2ABC の底と FG の高さの相乗を測度となせる故に ABCDEF の三角柱体の体積は ABC×FG にして即ち ABC の底と FG の高さの相乗を測度となれ

第二に ABDK は多角柱体にして今 AF の傍稜及ひ CH DK の各

技とに依て平面を作り以て此多角柱体を三角柱体に分つ然るに此各三角柱体は多角柱体と等高にして其底は ABC ACD ADE の三角形なり而して此三角形は A の角頂より作れる AC AD の對角線にて ABCDE の多角形を分解して成るものなり然るに此各三角柱体は其底と高さの相乗を以て測度となる故に ABCK の多角柱体の体積は $(ABC+ACD+ADC)\times H$ にして即ち ABCDE の底と H の高さとの相乗に等し

第一推論

等積の底を有てる二個の柱体は其高さと比例を為し又等高を有てる時は其底と比例を為す

第二推論

二個の柱体其各底若し其各高と反比例を為す時は等積なり

問題

一　平行面体の各對角線は若し此体直体に非らさる時は不等なり
此各對角線は互に二個に等分す

二　直平行面体の對角線の二方は此体の三長度の二方の和に等し

三　直柱体の底正六角形なる者の体積を立方垤止米突以下の差に於て算する事を求む但し底の一辺は$1,^{m}56$にして其高さは$2,^{m}45$なると知るなり

四　直柱体の底等邊三角形なる者に於て其体積を一立方米突其高さを$0,^{m}80$と知り以て底の一辺を珊知米突以下の差に於て算する事を求む

五　三角柱体の体積は其某傍面に其面より之に對せる稜までの距離を乗せし者の半に等し

六　同し平面上に在らざる三個の平行線上に於て設くる所の直線に等しきAA' BB' CC'の長さを取る時はAA' BB' CC'の三角柱体の体積はAA' BB' CC'の各稜の互に相關する位置如何に論なく常數なり

七　立方体を一個の平面にて截り其截面をして正六角形ならしむる事を求む

八　平行面体の各角頂より此体の外方に在る平面までの距離の和は此体の各對角線の交点より此同し平面までの距離の八倍に等し

九　一個の平面上に於て下の如き各点の幾何地を求む但し此各点より一個の平行面体の各角頂までの距離の二方の和は設くる所の二方に等しき者なり

十　ABCDの矩形のAの角頂よりBDの對角線上に垂線AEと

下し此二線の交点Eを過て此矩形のBCの辺に直立せるEGの直線を作り又CDの辺に直立せるEHの直線を作り而して

第一 $\frac{AB^3}{AD^3}=\frac{EG}{EH}$ $AE^3=BD\times EG\times EH$ の相等式を證明すへし

第二 前式よりして一個の直線を作る方法を求む但し此直線と設くる所の直線との比は設くる所の二立方の比に等しき者なり

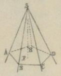
第三 DB BC の各直線をEH及ひECに於ける二個の中率線にして即ち $\frac{EH}{DH}=\frac{DH}{BG}=\frac{BG}{EG}$ の式を得る事を證明すへし

第十第十一教

定説

多面体の各面中の一個某多角形にして他の各面は此多角面の各邊を底とし空間中の同一點を頂とせる三角形なる者を錐体と名く

此多角面を錐体の底と名け此錐体の傍面積を成す所の凡ての三角面は普通なる一點を其頂と名け頂より底までの距離を其高さと名く



SABCDE の多面体は ABCDE の五角形を底としSを頂とせる錐体にして其傍面積は SAB SBC SCD SDE SEA の五個の三角形より成り其高さは頂より底の平

面上ニ下せるSFの垂線なり

錐体ハ其底三角形四邊形五角形等なるニ従ひ三角錐体四角錐体五角錐体と名く又三角錐体ニ於てハ四面体の特名を附與ふ

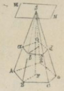
錐体の底正多角形ニして又此多角形の中心を此錐体の頂ニ聯接せる直線此底ニ直立せる時ハ之を正錐体と名く

錐体の各傍稜ニ交はる所の平面ニて此錐体を截り其底と截平面との間ニ函める分を錐体の截段と名く

第一設論

第一 SABCDEの錐体のABCDEの底と平行せるabcdeの如き凡ての平面ハ其傍稜及ひ高さを比例せる各分ニ分つ

第二 此錐体ニ於て作れるabcdeの截面ハ其底と相似形なり

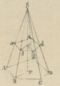


第一 錐体の頂Sを過きてABCDの底と平行せるMNの平面を作る時ハSA SB SC等の各傍稜並ニSFの高さハ（第三教第十設論）MN ad ADの三個の平行平面ニて比例せる各分ニ分つ故ニ

$$\frac{Sa}{aA}=\frac{Sb}{bB}\cdots etc\cdots=\frac{Sf}{fE}$$ を得

第二 ABCDEの底及ひabcdeの截面ハ相平行せる故（第三教第七設論）此錐体の各傍面との交線ハ平行せる直線なり

故ニ ABC abc の角ハ二個づゝ相平行して且つ同方向ニ向ける各辺と有てる故（第三教第十一設論）相等しく又之ニ等しく BCD の角ハ bcd ニ等しく CDE の角ハ cde ニ等し餘之ニ倣ふ又 AB ab の直線ハ相平行せる故 SAB Sab の三角形ハ相似形なり因て $\frac{AB}{ab}=\frac{SB}{Sb}$ を得又 SBC Sbc の三角形ハ相似形なる故 $\frac{BC}{bc}=\frac{SB}{Sb}$ を得因て $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$ なり



又同様ニ $\frac{BC}{bc}$ $\frac{CD}{cd}$ の二比の相等しき事を証し次ニ $\frac{CD}{cd}$ $\frac{DE}{de}$ の二比の相等しき事を証し遂て此の如くす故ニ ABCDE abcde の多角形ハ各等角を有ち且つ比例せる同位置の各辺を有てる故相似形なり

推論

abcde の截面ハ此錐体の底と相似形なる故此二個の多角形の面積ハ（平面幾何第十三教第二設論）同位置の辺の二方と比例を為す故ニ

$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{ab^2}{AB^2}$ を得然るニ

$\frac{ab}{AB}=\frac{Sb}{SB}=\frac{Sf}{SF}$ なる故

$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{Sf^2}{SF^2}$ を得

是より左の設論を得

錐体に於て各平行平面にて成る截面は此錐体の頂までの各距離の二方と比例を為す

第二設論

二個の錐体等しき高さを有つ時は各頂より等距離に於て底と平行せる平面にて作せる截面は各底と比例を為せ

SABC の錐体の高さ SE を以て S'A'B'C'D' の錐体の高さ S'E' と等しき者と定む而して此各直線上に於て Se S'e' の等長を取り然る後 e 点を過き ABC の底と平行せる abc の平面を作り e' 点を過き A'B'C'D' の底と平行せる a'b'c'd' の平面を作るなり

然る時は SABCD の錐体に於て作れる abc の截面は ABC の底と平行せる故此多角形の面積は（第一設論）頂までの距離の二方と比例を為せ故に $\frac{abc}{ABC}=\frac{Se^2}{SE^2}$ を得

又 S'A'B'C'D' の錐体に於て作れる a'b'c'd' の截面は亦 A'B'C'D' の底と平行せる故前に等しく $\frac{abed}{A'B'C'D'}=\frac{S'e'^2}{S'E'^2}$ を得然るに SE S'E' の高さ並に Se S'e' の直線は設想に依り相等しく因て $\frac{abc}{ABC}=\frac{a'b'c'd'}{A'B'C'D'}$ を得

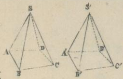
推論

二個の錐体の底等積なる時は $abcd$ $a'b'c'd'$ の截面も亦等積なり

第三設論

二個の錐体同位置にして且つ等しき傍稜と底との間に等しき二面体角を有つ時は相等し

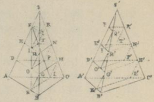
此設論の證法は（第八教第二設論）二個の柱体の等一なる事を証せし者に等し



第四設論

二個の三角錐体等積の底及び等高を有つ時は等積なり

$SABC$ $S'A'B'C'$ は二個の三角錐体にして ABC $A'B'C'$ の等積の底及び等高を有つ者とす然る時は此二体は等積なり



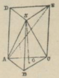
此錐体を同じ平面上に置きて其各稜中の一個設使ば SA の稜を若干數設使ば四個に等分し D E F の分点を過ぎ各底を含む所の ABC の平面と平行せる平面を作る時は其各底は等積なる故（第二設論の推論）此各平面は二個の錐体に於て等積の截面を成せ

是に於て DGH の截面の G 及び H の角頂より SA の稜との平行線を作り ABC の底の平面に交らしめ此二交点を

聯接せるKLの直線を作る時はADGK ADHL GKLHの各四辺形は平行辺形なり又AKL DGHの三角形は其各辺互に相等しき故相等し而して平行平面上に在る故AKLDGHの多面体は三角柱体なり又同様に此錐体のEMN FRQの各截面と底としSAとの平行線を傍稜として三角柱体を作るなり又之に等しくS'A'B'C'の錐体に於て截面の個数に等しく柱体を内容し其傍稜を亦S'A'と平行せしむ然るにSABCの錐体に内容せるADGHの柱体とS'A'B'C'の錐体に内容せるA'D'G'H'の柱体とは等高にして且つDGH D'G'H'の各底は等積なる故（第六教第十一設論）等積なり又DEMN D'E'M'N'並にEFQR E'F'Q'R'の柱体も同理を以て等積なり故にSABCの錐体に内容せる柱体の和はS'A'B'C'の錐体に内容せる柱体の和に等し今若しSA'の稜の分畫數を無窮に倍し各錐体に内容せる柱体の數を無窮に倍する時はSABCの錐体に内容せる柱体の和も亦S'A'B'C'の錐体に内容せる柱体の和に等し故に此二個の界限即ちSABC S'A'B'C'の二個の錐体は等積なり

第五設論

錐体の体積は其底と高さの相乗の三分の一に等し

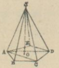


先つ最初に設使は SABC を三角錐体となし而して ABC の底上に SABCDES の三角柱体を作り其各傍稜は BS と平行せしむ然る時は SABC の錐体は此柱体の三分の一なり

ABCDES の柱体は SABC の三角錐体と SABCD の四角錐体との和なり然るに SAE の平面は（第六設論）此四角錐体を SADE SACE の二個の等積の三角錐体に分つ其故は此二体はSの公頂を有ち且つ同し平面上に在る ADE ACE の各底は互に相等しき各邊を有てる故相等しけれはなり又 SABC SADE の錐体は ABC SDE の等底を有ち且つ此柱体の高さに等しき SO の高さを有てる故此二体は等積なり而して ABCDES の柱体は SABC の錐体の三分の一なり然るに此柱体は $ABC\times SO$ を以て測度とす因て此錐体の体積は $\frac{1}{3}\times ABC\times SO$ に等しく即ち其底と

高さの相乗の三分の一なり

又SABCDEの多角錐体に於ては其各稜中の一個設使ばSAの稜とAの角頂より分出せる底の各對角線とに依て平面を作り以て之を三角錐体に分解するなり然る時は此各錐体はACADの對角線にてABCDEの多角形を分解して成るABCACDADEの三角形を底としSの公頂より其各底の平面上に作れる垂線SOを高さとす然るに此各錐体の体積は其高さとの相乗の三分の一に等し故にSABCDEの多角錐体の体積は$\frac{1}{3}(ABC+ACD+ADE)\times SO$にして即ち其底と高さの相乗の三分の一に等し



第一推論

凡そ錐体は之と等積の底にして等しき高さの柱体の三分の一なり

第二推論

等底の二個の錐体は各高と比例を為す又等高の二個の錐体は各底と比例を為す

第六設論

錐体の截段の体積ハ此截段の高さを公高とし此截段の下底及ひ上底並ニ此二底の中率を各底とせる三個の錐体の和ニ等し

先つ最初ニABCDEFハ三角錐体の截段ニしてABC DEFの二底ハ相平行する者とす此各傍面中の一個ニ於けるECの對角線と此面外ニ在るADの各角頂とふて作せるECA ECDの平面ハ此多面体をEABC ECDE EACDの三個の三角錐体ニ分解そ而して第一のEABCハ此截段の下底ABCを其一面となして今若し此三角形を其底とせる時ハ此三角錐体ハ此截段と等高を有つ其故ハEの頂ハDEFの上底中の一點なれハなり又第二のECDFの錐体ハ此截段の上底の三角形DEFを底とせる者と考へ得へし故ニこれハ此截段と等高を有つ其故ハCの頂ハABCの下底中の一點なれハなり又EACDの錐体ニ於てハEの頂をDAと平行ニ作れるEGの直線とABCの下底のABの邊との交點ニまて移し以て第四設論之GACDの錐体ニ變形なし而してGACDの錐体をACGを同底等高のGACDの錐体ニ變形なし而して

の三角形を底とし D點を頂とせる者と考ふれは其高さは此截段の高さに等し然るに ACG の底は此截段の二底 ABC DEF の中率なり

之を證明せるにはG點よりして BC と平行せる GH の直線を作り AC に交てらしむる時は AGH の三角形は DEF の三角形に等し其故は AG DE の各邊は AGED の平行邊形の對邊なるを以て相等しく又 GAH AGH の角は EDF DEF の角と二個つつ相平行して且つ同方向に向ける各邊を有てる故（第三教第十一設論）互に相等し是に於て ACG の三角形を逐次に ABC AGH の二個の三角形と比較せるに ACG ABC の三角形はCの公角頂を有ち且つ一直線上に在る AG AB の二底を有てる故其高さは相等し而して其各面積の比は（平面幾何第三十教第五設論の推論）其各底の比に等しく即ち

$$\frac{ABC}{ACG}=\frac{AB}{AG}$$

なり又 ACG AGH の三角形は AC AH の各底同し直線上に在りて且つG點は其公角頂なる故等高を有つ因て

$$\frac{ACG}{AGH}=\frac{AC}{AH}$$

を得然るに $\frac{AB}{AG}$ $\frac{AC}{AH}$ の比は BC GH の直線の相平行せるに因り（平面幾何第二十一教第一設論）相等し故に前に擧る二個の相等式よりして

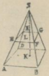
$$\frac{ABC}{ACG}=\frac{ACG}{AGH}$$

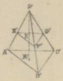
を得即ち ACG の三角形

は ABC AGH の二個の三角形の中率なり

第二に設使は ABCDEFGH は錐体の截段にして SABCD の多角錐体を其底と平行せる EFGH の平面にて截りたる者とし今 ABC の平面上に於て SABCD の錐体と等高にして ABCD の多角形と（平面幾何第三十一教第一問題）等積の三角形 ABC を底とせる S'A'B'C' の三角錐体を作る時は此二個の錐体は（第五設論）等積なり

EFG の平面は此各錐体中に於て（第二設論の推論）EFGH E'F'G' の二個の等積截面を作る而して S'E'F'G' の錐体は SEFGH の錐体と等積なる事を決す之に因て A'B'C'E'F'G' の三角錐体の截段は ABCDEFGH の多角錐体の截段と等積なり然るに三角錐体の截段は此截段と等高にして其上下二底及ひ此二底の中率を底とせる三個の錐体の和と等積なり故に此多角錐体の截段に於ても亦之を以て其證とす





注意　B b を柱体の平截段の二底とし h を其高さとすれ

は其体積Vは $\frac{1}{3}h\times B+\frac{1}{3}h\times b+\frac{1}{3}h\times\sqrt{Bb}$ 即ち $\frac{1}{3}h(B+b+\sqrt{Bb})$ に等し

B及びbの二底は（第一設論）互に相似形なる故其内一個の算用を省し事を得其故は若し此二底の二個の同位置の邊をA及びaとすれは（平面幾何第三十三款第二設論）$\frac{b}{B}=\frac{a^2}{A^2}$ にして $b=B\times\left(\frac{a}{A}\right)^2$ なり此値を以て $V=\frac{1}{3}h(B+b+\sqrt{Bb})$ の式中bに

且つ開方を行ひ以て $V=\frac{B\times h}{3}\left(1+\frac{a}{A}+\left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$ を得

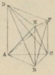
此式は開方を要せさる者にして前式より更に容易なる活用を為し得へし

第七設論

ABCDEFの三角柱体の截段の体積は此截段の下底ABCを公底とし此公底の各角頂DEFを各頂とせる三個の三角錐体の和に等し

此錐体の截段の各傍面中の一個の對角線ECと此面外

の各項ABとに依てECA ECDの平面を作るなり然る時は此平面は此截段をECAB ECAD ECDFの三個の三角錐体に分解す此内第一のECABはABCの三角形を底としE点を頂とす又第二のECADはBCADの錐体と等積なり其故はCADの同底を有ち且つEBの各項は各底の平面と平行せる直線中に在るなり然るにBACDの錐体はABCの三角形を底としD点を頂とせる者と考へ得へし又第三の錐体ECDFはABCEの錐体と等積



なり其故はCDE CAFの各底は二個の相似三角形にしてEBの各項は各底の平面と平行せる直線中に在るなり然るにABCの三角形をABCFの錐体の底としF点を以て其頂とする事を得故にABCDEFの截段はABCの三角形を公底としDEFの各点を頂とせる三個の錐体の和と等積なり

注意　んんだを此截段の上底の各角頂DEFより下底までの距離とするもの此多面体の体積は

$$\frac{1}{3}b\times h+\frac{1}{3}b\times h'+\frac{1}{3}b\times h''$$

即ち

$$\frac{1}{3}b(h+h'+h'')$$

に等し

推論

三角柱体の截段の体積は其直截面と三個の傍稜の和の三分の一との相乗に等し

配數復習

一　正四面体の稜$0{,}^{m}60$なる者の体積を立方珊知米突まてに於て算する事を求む

先つ此正四面体の稜をaとし其底及ひ高さを顕はせる式を求むる事より始む此底はaを辺とせる等辺三角形なる故此三角形の面積は（平面幾何第三十款第五設論の推論）$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$に等し

又其高さは傍稜中の一個と底に外切せる圓の半径とにて直三角形を成し此傍稜は此直三角形の斜辺なり而してaを一辺とせる等辺三角形の半径は（平面幾何第二十八款第二設論）$\frac{a}{\sqrt{3}}$なり故に此四面体の高さは

$$\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}$$

即ち

$$\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

に等し故に此四面体は

$$\frac{1}{3}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\times\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

即ち

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

を

以て測度となす此式は即ちaの稜を以て顯はせる正四面体の体積の式なり

三

今若しaの稜を$0^m,60$とすれは其体積は$\frac{(8,60)^3\sqrt{2}}{12}$にして二十五立方埵止米突四百五十六立方珊知米突なり

錐体の平截段あり其高さは3^m其二底は正六角形にして各一辺の長さは$0^m,80$及ひ$0^m,60$なり此截段の体積を立方埵止米突に於て算する事を求む

hを此截段の高さAを下底Bの一邊aを上底の同位置の一邊とすれは此多面体の体積Vは（第六設論の注意）左式に於て之を得

$$V=\frac{B\times h}{3}\left(1+\frac{a}{A}+\left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$$

然るにAの直線上に作れる正六角形は此同し線上に作れる六個の等辺三角形の和に等しきに因て（平面幾何第三十教第五設論）$B=\frac{6A^2\sqrt{3}}{4}$を得此値を以て体積Vの式中Bに代用し以て$V=\frac{h(A^2+Aa+a^2)\sqrt{3}}{2}$を得

設くる所の數を以て此式の活用を為さんには

$h=3$

$A=0,80$

$a=0,60$

と為し而して $V=1,0(0,64+0,48+0,36)\sqrt{3}$ 即ち $V=3^{m.c.},845$ を得るなり

三

四角柱体の截段 ABCDA'B'C'D' なる其二個の相對傍面は矩形にして他の二個は互に相等しき等斜二辺平行方形なり其 AB BC の辺は $1,^{m}20$ $0,^{m}40$ にして A'B' B'C' の辺は $0,^{m}54$ $0,^{m}18$ なり又其高さは $0,^{m}80$ なり此

截段の体積を求む

先つ最初に設くる所の各線を以て顕はせる此截段の体積の式を求むへし此の如くするには ABCD の矩形面の AB BC の長度を a 及ひ b とし A'B'C'D' の矩形面の A'B' B'C' の長度を a' 及ひ b' とし此二面の距離 EC を d とすへし而して AB 及ひ DC の平行稜に依て作れる平面を此截段を ABCDA'B' 及ひ A'B'C'D'CD の三角柱体の截段に分解す此第一の者は（第七設論の推論）EFE の直截面と $2a+a'$ の傍稜の和の三分の一との相

乘を以て測度となす然るにEEE'の三角形の底EE'をbに等しく其高さE'Gをdに等し故に其面積は $\frac{b\times d}{2}$ に等し因てABCDA'B'の柱体の截段の体積は $\frac{bd}{6}(2a+a')$ に等し又同様にA'B'C'D'CDの柱体の截段の体積は $\frac{b'd}{6}(2a'+a)$ に等し故に求むる所の截段の体積は $\frac{bd}{6}(2a+a')+\frac{b'd}{6}(2a'+a)$ に等し

今若し $a=1^m,20$ $b=0^m,40$ $a'=0^m,54$ $b'=0^m,18$ $d=0^m,80$ と定むる時は求むる所の体積に於てハ二百十一立方埵止米突五百二十立方珊知米突あり

第一注意

$\frac{bd}{6}(2a+a')+\frac{b'd}{6}(2a'+a)$ の式は猶又道傍に鑿開せる溝渠の容積を算するに用ゆへし若し又前式に於て $b=0$ とするときは化して $\frac{bd}{6}(2a+a')$ となる然るときは三角柱体の截段の体積を標示す但し此截段は其二底二個の同し等邊三角形にして其傍面は矩形及ひ一個の等しき等斜二邊平行方

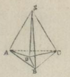
形なり此形体は塔の屋背或は砲礮に於て彈堆に付與する者なり

第二注意　若し $ABCD$ $A'B'C'D'$ の矩形を相似形即ち $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ を得るとすれは AA' BB' CC' DD' の稜を引長せる者は同し一点に會すへし然るときは $ABCDA'B'C'D'$ の多面体は錐体の截餘として考ふる事を得而して其体積は $\frac{d}{3}(ab+a'b'+\sqrt{aba'b'})$ に等し此式及ひ前式の相等しき事は $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ の式の性質を考察し以て容易に之を證し得へし

問題

一　四面体の二面体角の平分面は其對面を二分に分ち此各分は其各傍面と比例を為す

二　$SABC$ の四面体の S の角頂を過きて SAB SBC SAC の各面と等しき角を為せる所の SD の直線を作り而して底の ABC の角頂を此直線と ABC との交點 D に聯接する時は DAB DBC DAC の三角形は SAB SAC の各面と比例を為す



三 四面体の各二面体角の平分面ハ同し一點を過く

四 四面体の各稜の中央ニ直立せる平面ハ同し一點を過く

五 四面体の内方ニ一點を設け此點を凡ての角頂ニ聯接し此四面体を四個の等積の錐体ニ分解せんとん此點の位置を決定する事を求む

六 $ABCD$、$A'B'C'D'$ の二個の四面体の A A' の三面体角相等しき時ハ此四面体の体積ハ二個の等しき三面体角の各稜の相乗 $\frac{AB\times AC\times AD}{A'B'\times A'C'\times A'D'}$ と比例を為す

七 曲四邊形の二個の對邊の中央を過きて作れる凡ての平面ハ他の二辺を比例せる各分ニ分つ

八 四面体の二個の對稜の中央を過くる凡ての平面ハ此四面体を等積の二分ニ分つ

九 $ABCD$、$A'B'C'D'$ の二個の四面体の同位置の各角頂を二個つゝ聯接する所の AA' BB' CC' DD' の各直線同し一点ニ交截する者あり因て其同位置の各面若し相交截する時ハ其交處の四直線ハ同し平面上ニ在る事を証明すへし

十 正錐体の底内ニ取りたる某点を過き此底ニ垂線を作る時ハ此垂線ハ此錐体の凡ての傍面或ハ其引長

面に交はる此各交点より底の平面までの距離の和は常數なる事を證明すへし

立躰幾何學之部第一終

算學教程講本巻之四

立体幾何學之部第二

第十二教

定説

二個の多面体若し其各面互に相似形にして且つ此相似面にて成る二面体角相等しき時は之を相似体と名く二個の相似多面体に於て相應せる二點二線二面又二個の二面体角或は多面体角を同位置と名く故に二個の等しき多面体角は同位置の角にして其各頂は同位置の點なり之に等しく此同位置の點に於て終る所の二個の稜二個の對角線は同位置の線なり又二個の相似面は同位置の面なり」

第一設論

P及ひP'の二個の相似多面体の或る同位置の稜は比例を為す」

P及ひP'の相似多面体の或る同位置の二面は相似形なる故同位置の各邊は比例を為す又Pの多面体のA Bの二個の隣接面に公共なる一邊はP'の多面体のA及ひBと各同位置のA'B'の二個の隣接面に公共なる一邊と同位置なる事を注意すへし故にA A'の同位置の二面の等比は（平面幾何第二十一教定說）B B'の他の同位置の二面の比に等し之に因てP P'の二個の多面体の同位置の各稜は比例を為す

第二設論

某錐体を其底と平行せる平面にて截る時は亦錐体を成す而して原体と相似体なり

abcdはSABCDの錐体に於てABCDの底と平行せる平面にて作れる截面なり而してSABCD Sabcdの錐体は相似体なり」

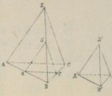
此二体の同位置の各面は相似形なり蓋しabcdの截平面はSABCDの錐体の底と平行せる故（第十数第一設論）abcd ABCDの多角形は相似形なり而してSab SAB等の同位置の三角形はab AB等の直線相平行せる故互に相等しき各角を有ち而して相似形なり又Sabcd SABCDの錐体の同位

置の多面体角ハ相等し蓋しSの多面体角ハ此二体ニ於て公共ニして今又a及ひAの同位置の三面体角の等一なる事を證明せんとし此の如くせるニハaの頂をAの頂上ニaSの稜をASの稜上ニ置きSadの平面をSADの平面と合せしめ以て此二体角を重ぬるなり然る時ハSadの角ハSADの角ニ等しきを以てadの稜ハADの稜の方向を取る又Sabの平面ハdSab DSABの二面体角の相等しきニ因りSabの平面ハSABの平面ニ合ひ而してSab SABの二角の相等しきを以てabの稜ハABの稜の方向を取る故ニaの三面体角のdabの第三の面ハAの三面体角のDABの第三の面と合ひ而して此二個の三面体角ハ相等し又b及ひBの二個の三面体角ニ於ても同理なり餘之ニ倣ふ故ニSabcd SABCDの錐体ハ互ニ相似の各面を有ち且つ同位置の等しき多面体角を有てる者ニして相等し

第三設論

二個の三角錐体同位置ニして且つ相似の二面の間ニ等しき二面体角を有つ時ハ相似体なり

SABC S'A'B'C'ハ二個の錐体ニしてAB A'B'の等しき二面体角を有ち又SAB S'A'B'の面並ニABC A'B'C'の面ハ互ニ相似形なりとし而して若しSAB ABCの面とS'A'B'C'の錐体のS'A'B' A'B'C'の面



と同位置なる時は此二体は相似体なり

BA の稜上に於て B'A' の稜に等しき Ba の長さを取り然る後 a 點を過きて SABC の錐体の ACS の面と平行せる acs の平面を作る時は此平面は（第二設論）SABC と相似の sabc の錐体を成す因て今此錐体と S'A'B'C' の錐体と相等しき事を証明する事左の如し

ab の二面体角は設想に依り A'B' の二面体角に等しく又 sab の三角形は S'A'B' の三角形に等しく其故は此各三角形は SAB の三角形と相似形にして ab A'B' の同位置の各邊相等しければなり又同理を以て abc の三角形は A'B'C' の三角形に等し故に sabc S'A'B'C' の錐体は同位置にして且つ相等しき二面の間に等しき二面体角を有つを以て（第十教第三設論）相等し因て S'A'B'C' の錐体は SABC の錐体と相似体なり

問題

一　二個の多角錐体若し同位置にして且相似の底及び傍面の間に等しき二面体角を有つ時は相似体なり」

二　二個の相似錐体の面積は同位置の二稜の二方と比例を為す

三　錐体を其底との平行面にて截り此平面にて決定せ

る錐体の面積と原錐体の面積をして m 及ひ n の二個の長さに比例せしむる事を求む

四、二個の相似錐体互に平行せる同位置の各面を有つ時は同位置の各角項を聯接せる直線は同しく一點に合す

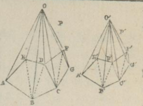
五　一個の點より一個の錐体の各角項にまて作れる各直線を等比に分つ時は此各分點は原錐体と相似体の第二の錐体の各角項なり

六　四面体の各角項を過きて其對面と平行せる各平面を作る時は此各平面にて成せる四面体は原四面体と相似体なるへきや

第十三教

第一設論

二個の相似多面体は相似にして且つ同位置の同數の三角錐体に分解せらる事を得



P 及ひ P' は二個の多面体にして先つ $ABCDE$ $A'B'C'D'E'$ の如き三角形に非らさる同位置の面の同位置の對角線を作り此面を相似の三角形に分ち此多面体の表面を相似にして且つ同位置の同數の三角形に分解するなり

是に於て P の多面体を其表面を分解したる種々の三角形を底とし此多面体の内方に於て取りさる O の某點を以頂とせる各三角錐体に分解するなり又他の P'

の多面体に於てOと同位置の点を決定するにハ各稜中の一個設使ハA'B'を過きて一個の平面を作り此平面をして此多面体の内方に於てA'B'C'D'E'の面と共にOABCの二面体角に等しき二面体角を成さしむ然る後此平面上に於てA'B'O' B'A'O'の角をABO BAOの角と等ふし以てABOの三角形と相似のA'B'O'の三角形を作る然るに此A'B'O'の三角形のO'の頂ハABOの三角形のOの点と同位置なる故P'の多面体を此O点を以頂とし此多面体の表面を分ちたる種々の三角形を底とせる三角錐体に分つ然る時ハP及ひP'の二個の多面体ハ同位置の同数の錐体に分解せり而して此各四面体ハ二個つゝ相似体なり

先つ最初に此二個の多面体の同位置の面ABCDE A'B'C'D'E'を分ちたる相似の各三角形を底とせるOABE OBDE OBCDの四面体及ひO'A'B'E' O'B'D'E' O'B'C'D'の同位置の四面体を注意するにOABE O'A'B'E'の四面体ハ同位置にして且つ相似二面の間にAB A'B'の等しき二面体角を有てる故（第十二款第三設論）互に相似体なり因てOBEの三角形ハO'B'E'の同位置の三角形と相似形なり而してOBEAの二面体角ハO'B'E'A'の同位置の二面体角に等し又同理を以てOBDE O'B'D'E'の二個の四面体も亦相似体なり其

故に $\genfrac{}{}{0pt}{}{BDE}{B'D'E'}$ の各底は設想に依り相似形にして又 $\genfrac{}{}{0pt}{}{OBE}{O'B'E'}$ の同位置の各傍面も相似形なり而して $OBDE$ の二面体角は $\genfrac{}{}{0pt}{}{OBEA}{O'B'E'A'}$ の各並角相等しきを以て $O'B'E'D'$ の二面体角に等しけれはなり又同様に $\genfrac{}{}{0pt}{}{OBCD}{O'B'C'D'}$ の二個の四面体の相等しき事を証し得へし

又 P 及ひ P' の多面体に於て $\genfrac{}{}{0pt}{}{ABCDE}{A'B'C'D'E'}$ の二面に隣接せる $\genfrac{}{}{0pt}{}{CDFG}{C'D'F'G'}$ の同位置の二面に属する各四面体を注意するに亦二個つ、相似体なり蓋し $\genfrac{}{}{0pt}{}{OCDF}{O'C'D'F'}$ の同位置の四面体を設想に依り相似形の $\genfrac{}{}{0pt}{}{CDF}{C'D'F'}$ の底と有ち $\genfrac{}{}{0pt}{}{OCD}{O'C'D'}$ の各傍面を $\genfrac{}{}{0pt}{}{OBCD}{O'B'C'D'}$ の四面体の相等しきに因り相似形にして又 $OCDF$ の二面体角を $\genfrac{}{}{0pt}{}{BCDF}{BCDO}$ の二個の二面体角の差なり然るに $\genfrac{}{}{0pt}{}{BCDF}{B'C'D'F'}$ の角を P 及ひ P' の相似多面体に於て同位置なる故相等しく又 $\genfrac{}{}{0pt}{}{BCDO}{B'C'D'O'}$ の角を $\genfrac{}{}{0pt}{}{OBCD}{O'B'C'D'}$ の相似四面体に於て同位置なる故相等し故に $OCDF$ の二面体角を $\genfrac{}{}{0pt}{}{B'C'D'F'}{B'C'D'O'}$ の二面体角の

差ニ等しく即ち $O'C'D'F'$ O' の二面体角ニ等し故ニ $OCDF$ $O'C'D'F$ の四面体は互ニ相似ニして且つ同位置の二面の間ニ等しき二面体角を有てる故相似体なり又同様ニ $ODFG$ $C'D'F'G'$ の二面ニ属せる他の四面体の相等しき事を証し得へし餘之ニ倣ふ故ニP及ひP'の多面体は相似体ニして且同位置の同数の三角錐体ニ分解せる事を得

推論

此O点はPの多面体の表面上ニ於て設くる事を得若し又此O点此多面体の各角頂中の一個設使はAニ合する時はO'の点はAと同位置のA'の角頂ニ合せへし

而してP及ひP'の多面体を分解したる各四面体の傍稜は此多面体角の同位置の對角線なるへし之ニ因て左論を得

二個の相似多角面体ニ於て同位置の各對角線は第十二設論の推論同位置の各傍稜と比例を為せ

第二設論

反言　相似ニして且つ同位置の同数の三角錐体より成りたるP及ひP'の多面体は相似体なり

先つ最初ニPの多面体の $OABE$ $OBDE$ の二個の錐体の ABE BDE の底同し平面上ニ在る時はPの多面体の $O'A'B'E'$ $O'B'D'E'$ の同位置

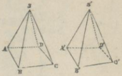
の錐体の（A'B'E'　B'D'E'）の底も亦同し平面上に在る事を證せんとす

蓋し（ABE　BDE）の三角形を同し平面上に在るを以て（OBEA　OBED）の二個の隣接せる二面体角を合して（第五数第五設論）二個の直二面体角に値す然るに（OABE　O'A'B'E'）の二個の相似四面体の（OBEA　O'B'E'A'）の同位置の二面体角を相等し又同理を以て（OBED　O'B'E'D'）の二面体角も相等し因て（O'B'E'A'　O'B'E'D'）の隣接せる二面体角を並角を為す故に（第五数第六設論）（B'E'A'　B'E'D'）の不公面を同し平面上に在り

又Pの多面体を（ABE　BDE　BCD）の三個の三角形より成りたるABCDEの面を有ち而して此三角形と互に相似形なる（A'B'E'　B'D'E'）B'C'D'の三角形をP'の多面体に於てABCDEに應するA'B'C'D'E'の面域為す事知るへし然るに此同位置の二面を相似にして且つ同位置の同數の三角形より成る故（平面幾何第二十一数第八設論）相似形なり又（CDFG　C'D'F'G'）の面に於ても同理なり餘之に倣ふ

又Pの多面体の$\genfrac{}{}{0pt}{}{ABCDE}{CDFG}$の隣接二面の傾斜とP'の多面体の$\genfrac{}{}{0pt}{}{A'B'C'D'E'}{C'D'F'G'}$の相應二面の傾斜に等し蓋し$BCDF$の二面体角は$\genfrac{}{}{0pt}{}{BCDO}{FCDO}$の二面体角の和に等し然るに$\genfrac{}{}{0pt}{}{OBCD}{O'B'C'D'}$の相似四面体に於て$\genfrac{}{}{0pt}{}{FCDO}{F'C'D'O'}$の相似四面体に於て$\genfrac{}{}{0pt}{}{FCDO}{F'C'D'O'}$の同位置の二面体角は相等し之に因て$BCDF$の二面体角も亦$\genfrac{}{}{0pt}{}{B'C'D'O'}{F'C'D'O'}$の二面体角の和即ち$B'C'D'F'$の二面体角に等し

故にP及びP'の多面体の同位置の各面は相似形にして且つ同傾斜なり又$\genfrac{}{}{0pt}{}{ABCD}{A'B'C'D'}$の如き同位置の多面体角は互に相等しく且つ同位置の面及び二面体角を有つ因て互に相重ぬへし即ち相等し



故にP及びP'の多面体は互に相似の各面及び同位置の等しき二面体を有てる故相似体なり

第三設論

二個の相似錐体の体積は同位置の稜の三方と比例を為す

SABCD Sabcd ハ二個の相似錐体ニして其多面体角を合し以て互ニ相重ねたる者とする時ハ此各錐体の底 ABCD abcd ハ相平行し而して SO So の高さハ S の頂より底上ニ作れる垂線即ち SO の直線上ニ於て測るへき者なり

又 SABCD Sabcd の錐体ハ相似体なる故 ABCD abcd の底ハ亦相似形なり而して此多角形の面積ハ（平面幾何第三十三教第二設論）同位置の各邉の二方と比例を為し即ち（第十二設論の推論）此錐体の各稜の二方と比例をなす故ニ $\frac{ABCD}{abcd}=\frac{SA^2}{Sa^2}$ を得

然るニ SABCD の錐体の底 ABCD と平行せる abcd の平面ハ（第十教第一設論）SA SO の直線を比例せる各分ニ分つ因て $\frac{SO}{So}=\frac{SA}{Sa}$ を得

以上二個の相等式の各邉を相乘し以て $\frac{ABCD\times SO}{abcd\times So}=\frac{SA^3}{Sa^3}$ を得然る

に$\frac{SABCD}{Sabcd}$の錐体の体積を（第十教第五設論）$\frac{ABCD\times SO}{abcd\times So}$の相乗の三分の一に等し故に此体積の比を$\frac{SA}{Sa}$の同位置の稜の三方の比に等し

推論

二個の相似錐体の高さを同位置の二稜と比例をなす

第四設論

PとPの二個の相似多面体の体積をA及びaの同位置の二稜の三方と比例をなす

PとPの二個の相似錐体を（第一設論）同數の相似四面体に分解し設使をV V′ V″等をPの多面体を成すべき四面体の体積とし v v′ v″ 等をpの多面体を成すべき相應の四面体の体積とす然る時は此同位置の三角錐体を相似体にして且つこの二錐体の同位置の稜を（第十二教第一設論）比例を為す故に（第三設論）

$$\frac{V}{v}=\frac{A^3}{a^3}$$

$$\frac{V'}{v'}=\frac{A^3}{a^3}$$

$$\frac{V}{v''}=\frac{A^3}{a^3}$$

を得因て

$$\frac{V}{v}=\frac{V'}{v'}=\frac{V''}{v''}\cdots=\frac{A^3}{a^3}$$

を得遂に

$$\frac{V+V'+V''\cdots}{v+v'+v''\cdots}=\frac{A^3}{a^3}$$

を得

推論

二個の相似錐体の面積を同位置の邊の二方と比例を為す」

配數復習

一 錐体の高さ$4^{m}50$其底を正方形にして其一邊の長さ$1^{m}20$な

る者あり今之と相似の錐体あり其体積は七立方米突二百九十立方垤止米突あり此体の底の一辺及ひ高さを算する事を求む

cを第二錐体の底の一邊hを其高さとすれは原錐体の体積は$\frac{1}{3}(1,2)^2\times4,5$即ち二立方米突百六十立方垤止米突にして（第三設論）$\frac{c^3}{(1,2)^3}=\frac{h^3}{(4,5)^3}=\frac{7,240}{2,160}$を得是より$c=\sqrt[3]{\frac{729(1,2)^3}{216}}=\frac{9\times1,2}{6}$及ひ$h=\sqrt[3]{\frac{7,29(4,5)^3}{216}}=\frac{9\times4,5}{6}$を得遂に$c=1,^{m}80$及ひ$h=6,^{m}75$を得

二　矩平行面体の面積は三平方米突にして其三長度の比は四六九なる者あり此体積を算する事を求む

先つ其三長度四米突六米突九米突なる矩平行面体の面積及ひ体積を算するなり此面積は六個の矩形より成る者にして此内二個は四米突六米突を長度とし他の二個は四米突九米突を長度とし又他の二個は六米突九米突を長度とする者なり故に此平行面体の全面積は$4\times6\times2+4\times9\times2+6\times9\times2$即ち$228$平方米突に等し又其体積は$4\times6\times9$即ち

216立方米突に等し此平行面体は求むる所の平行面体と互に相似形なる各面を有る且つ同位置の等しき多面体角を有てる故（第二設論）互に相似体なり故に各体積は（第四設論）同位置の稜の三方と比例を為し其面積は同稜の二方と比例を為す故に未知の体積をVとし四米突の稜と同位置の者をAとすれは（第四設論）$\frac{V}{216}=\frac{A^3}{64}$ 及ひ $\frac{3}{228}=\frac{A^2}{16}$ を得此第二式の化法を行ひ $A=\frac{2}{\sqrt{10}}$ を得此Aの値を第一式に代用し以て $\frac{V}{216}=\frac{8}{64(\sqrt{19})^3}$ を得因て $V=\frac{27}{(\sqrt{19})^3}$ 即ち $V=0,^{m.c}326012$ を得るなり

問題

一 矩平行面体の三長度の比 $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ にして其体積二立方米突なる者あり此三長度を珊知米突に於て算する事を求む

二 錐体の底と平行せる平面を作り此平面にて此多面体の体積を二分し設くる所の二線m及ひnと比例をへうらしむる事を求む

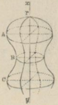
第十四第十五教

定説

直線或は曲線空間に於て旋轉するときは其線の逐次ニ占領する位置の場所は或は表面なり此線を此表面の母線と名く此母線の運動を整へる所の線を準線と名く

凡そ表面平面に非ず又平面を聯接して成る者に非ざる者を曲面と名く

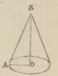
曲面の内に於て特に旋轉面と別つ旋轉面はxyの定直線を



繞りてABCの如き某線一定の方法を以て旋轉し以て成る者なり此xyの直線を此面の軸と名く

軸に直立せる凡ての截面を旋轉面の平行面と名く又軸を過ぐる平面にて作れる截面を此面の經と名く

SAOの直三角形SOAの直角の二辺中の一個設使はSOの辺を軸として旋轉し以て生する所の体を直圓錐体と名く



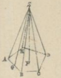
OAの直角辺は圓形を作り而して其平面は（第一教第三設論の推論）SOの軸と直交す之を圓錐体の底と名く又S點を此体の頂と名けSOを其高さと名く又SAOの直三角形のSAの斜辺は旋轉面を作る之を圓錐体の傍面積と名けSAを其斜高と名く

又ABの直線常にAの一定點を過ぎ而して此点を繞りて旋轉し且つ此表面の準線たるべきBCDの如き設くる所の曲線に接する者にて生する所の面を圓錐面と名く

若し此準線閉園せざる曲線にして而して此圓錐面をBCDの平

面即ちAの頂點の同一方に於て此母線の凡ての位置に交はる者にて之を截るときは此平面及び此圓錐面の間に函める体を雜圓錐体と名く此体はBCDの面を底としA点を頂とし此頂より底迄の距離を高さとす

二個の直圓錐体の高さ底の半徑と比例をなす時即ち此二体相似直三角形にて成る時は之を相似体と名く



SABCDEの正錐体に於てSの頂よりABCDEの底のABの如き某邊上に下せるSGの垂線を此体の斜高と名く此SGの垂線は不變長なり蓋し正錐体の定説に依れはSA SB SC等の各傍稜は頂より底上に下せるSFの垂線より等距なり故に（第一教第六設論）相等し因て此錐体の傍面を成す所のSAB SBC SCD等の二等辺三角形は互に相等しき三辺を有てる故相等し故に此各三角形の高さ即ちS點よりABCDの底の各辺上に作れる垂線は相等し

某錐体圓錐体と等高にして且つ其底は圓錐体の底に内容すへき時は此錐体は圓錐体に内容すへしと謂ふ又之を反言して圓錐体は某錐体に外切すと謂ふ

直圓錐体に於て正多角形を底とせる錐体を内容すへき時は此錐体は正錐体なり其故は底の中心を其項に聯接せる直線は圓錐体の軸と合し底に直立すれはなり

第一設論

直圓錐体の底と平行せる平面にて作せる截面は圓形なり」

設使ば SOA の直角の一辺 SO の上に於て SAO の直三角形の旋轉せる事に因て生ずる圓錐体に於て SA の母線の某一點 B より SO の軸上に垂線 BC を作る

時は SAO の三角形の旋轉中 BC の直線は（第一教第三設論の推論）SO に直立せる平面を作る而して C 點迄の距離常數なる所の B 點は此平面上に於て此 C 點を中心とせる圓周を作る故に SAO の直圓錐体に於て軸に直立せる平面即ち（第三教第六設論）圓錐体の底と平行せる平面にて作せる BC の如き凡ての截面は SO の軸上に於て中心を有てる圓形なり」

第一注意　此定説は左の如き設論即ち其証法前と同様なる者の内に於ける一個の格段なる場合なり

凡そ旋轉せる表面に於て其軸に直立せる平面にて作れる截面は圓形なり

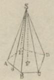
第二注意　SAO の直圓錐体を OA の底と平行せる BC の平面にて截る時は此底と截面との間に函める一分を圓錐体の平截段と名く

OA CB の圓形は此圓錐体の截段の二底にして此圓錐体の斜高 SA の一分即ち此二底の間に函める AB を以て其斜高となす

第二設論

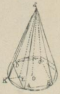
正錐体の傍面積は其底の周邊と其斜高の半との相乘に等

し



SABCDEは正錐体にしてABCDEを底としS点を頂としSGの直線を斜高とする者なり其傍面積はABCDEの多角形のAB BC CD等の各邊を底とし（定說）錐体の斜高SGを公高とせるSAB SBC SCD等の三角形の和に等し然るに此各三角形は其底と高さの相乘の半に等し故にSABCDEの正錐体の傍面積は$(AB+BC+CD+\cdots)\times\frac{SG}{2}$にして即ち其底のAB+BC+CDの周辺とSGの斜高の半との相乘に等し

注意 SOKの直圓錐体に於て成る正錐体設使はSLを斜高とせるSABCDの四角錐体を容き然る后其底の邊數を無窮に倍するときはSLの斜高は増大し圓錐体の斜高SKと無窮に相接近し而して遂に相等しきあたはす因て錐体の傍面積は増大し而して圓錐体の傍面積との差次第に減少せり又此二体の体積に於ても同様なり故に

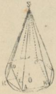


圓錐体の斜高面積及ひ体積は此内に容るゝ正錐体の面數無窮に増加せしとき此錐体の斜高傍面積及ひ体積の互に歸向する限として考ふる事を得而して圓錐

体ハ其内容正錐体の面數及ひ其面の大小ニ關せず此錐体の為めニ証明せし凡ての性質を有てる者と注意を要し

第三設論

圓錐体の傍面積ハ其底の圓周と斜高の半との相乗ニ等し



SOK の直圓錐体内ニ於て或る正錐体設使ハ SABCD の正四角錐体を容れ然る後八角十六角等の者を容るる時ハ此各錐体の傍面積ハ次第ニ増大し此体ニ外切せる SOK の圓錐体の傍面積として其限と為す然るニ此各体の面積ハ此体を成せる所の面數及ひ其大小如何ニ關せれ其底の周邊と其斜高の半との相乗ニ等し故ニ（第二設論）SOK の圓錐体の傍面積ハ（第二設論の注意）亦其底の圓周と其斜高の半との相乗ニ等し

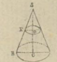
注意　直圓錐体の斜高を A とし其底の半径を R とすれハ其傍面積ハ $\pi R\times A$ ニして其全面積を得るニハ $\pi R\times A$ ニ此圓錐の底の面積即ち πR^2 を加ふへし即ち $\pi R(A\times R)$ なり

推論

SBC の直圓錐体の傍面積ハ頂及ひ底より等距の DE の平行圓周と其斜高との相乗ニ等し

D點ハ SC の中央なる故此平行圓の DE の半径ハ（平面幾

何第二十七教第六設論）底の半径OBの半ニ



等し故ニ

$\frac{1}{2}circ.CB \times SB$
$= circ.DE \times SB$
を得

第四設論

直圓錐体の平截段の傍面積ハ其二底圓周の半和と其斜高との相乘ニ等し

ABEDハ圓錐体の截段ニしてSAC SDEの二圓錐体の底AB DE相平行せる者の差ニ等し今SAの母線の一端Aより此直線上ニ垂線AGを作り其長さハ此截段の下底CAの圓周ニ等しからしめ然る后SGの直線を作り且つSAの母線と此截段の上底との交点DよりAGと平行せるDHの直線を作る時ハ此直線ハFDの圓周ニ等し

SCの直線ハSACの圓錐体の軸なるを以てSDE SACの三角形ハ直三角形ニして且つ相似形なり故ニ（平面幾何第二十七教第四設論）

$\frac{SD}{SA}=\frac{FD}{CA}=\frac{circ.FD}{circ.CA}$

を得

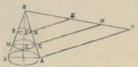
又SDH SAGの三角形ハ直三角形ニして且つ相似形なり故ニ

$\frac{SD}{SA}=\frac{DH}{AG}$

を得因て

$\frac{circ.FD}{circ.CA}=\frac{DH}{AG}$

を得



然るにAGの直線は設想に依りCAの圓周に等し故にDHの直線は亦FDの圓周に等し

SACの圓錐体の傍面積は（第三設論）$\frac{1}{2}\text{circ. }CA\times SA$に等し故に$\frac{1}{2}AG\times SA$を以て面積とすSAGの直三角形と等積なり又同様にSDFの圓錐体の傍面積はSDHの直三角形と等積なり故にABEDの圓錐截分はAGHDの二邊平行方形の面積に等し然るに此二辺平行方形の面積は（平面幾何第三十教第六設論）$AD\times\left(\frac{AG+DH}{2}\right)$に等し故にABEDの圓錐截段の傍面積は其斜高と其二底圓周の半和との相乘に等し

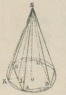
推論

ADの斜高の中央KよりAGと平行せるKNの直線及び錐体截段の底と平行せるKLの平面を作るときはKNの直線はLKの圓周に等し然るに二邊平行方形は（平面幾何第三十教第六設論）$AD\times KN$を以て其面積となす故にABDEの直圓錐平截段の傍面積は二底より等距のKLの平行圓周とADの斜高との相乘に等し

第五設論

直圓錐体の体積ハ其底と高さの相乘の三分の一ニ等し

SOKの直圓錐体内ニ於て或る正錐体設使ハ正四角錐体を容れ然る后八角十六角等の正錐体を容る、時ハ此各錐体の体積ハ次第ニ増大しSOKの外切圓錐体の体積を以て其限とす然るニ此各体ハ其面數及ひ其大小如何ニ關せす其底と高さの相乘の三分の一ニ等し故ニSOKの圓錐体の体積ハ（第二設論の注意）亦其底と高さの相乘の三分の一ニ等し



注意　直圓錐体の底の半径をRとし高さをHとすれハ其体積ハ $\frac{1}{3}\pi R^2\times H$ ニ等し

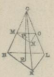
推論

二個の直圓錐体其高さ相等しき時ハ其体積ハ其底と比例を為し又其底相等しき時ハ其体積ハ其高さと比例を為す」

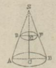
第六設論

直圓錐体の平截段ハ此截段の高さを公高とし其上下底及ひ二底の中率を各底とせる三個の直圓錐体と等積なり

ABFDハ圓錐の截段ニしてSAB SDFの二個の直圓錐体の底AB DF相平行せる者の差なり今此截段の下底の平面上ニ於てGHKLの三角錐体を作りHKLの底をしてACの圓形と等積ニしてGR



の高さはSABの圓錐体の高さSCと等しからしむ然る時は此截段の上底の平面を此錐体に於てMNOの截面を作り此截面はEDの圓形と等積なり



此圓錐截段の二底は相平行せる故SCAの平面はCAと平行せるEDの直線に循て此圓錐截段の上底を截る而してCA、EDの半径の比はSC、SEの高さの比に等し故に

$$\frac{\text{cercle}\,CA}{\text{cercle}\,ED}=\frac{CA^2}{ED^2}=\frac{SC^2}{SE^2}$$

を得又MNO、HKLの平面の相平行せるを以て $\frac{HKL}{MNO}=\frac{GR^2}{GP^2}$ を得然るにGR及びSCの直線並にGP及びSEの直線を設想に依り相等し因て $\frac{\text{cercle}\,CA}{\text{cercle}\,ED}=\frac{HKL}{MNO}$ を得然るにHKLの三角形は製圖に依てCAの圓形と等積なり故にMNOの三角形は亦EDの圓形と等積なり

SACの圓錐体の体積は $\frac{1}{3}\text{cercle}\,CA\times SC$ なる故 $\frac{1}{3}HKL\times GR$ を以て体積とせ

る GHKL の錐体と等積なり又同様に SDE の圓錐体と GMNO の錐体とも等積なりゆへに ABED の圓錐截段を HKL MNO の錐体截段と等積なり又此錐体截段の体積は第十教第六設論

$$\frac{1}{3}PR(HKL+MNO+\sqrt{HKL\times MNO})$$

なり故に此圓錐截段の体積は

$$\frac{1}{3}CE(\text{cercle}\,CA+\text{cercle}\,ED+\sqrt{\text{cercle}\,CA\times\text{cercle}\,ED})$$

にして即ち此截段の高さ CE を公高とし CA 及ひ CE の圓形並に此二圓形の中率を以て底とせる三個の圓錐体の和と等積なり

注意　R r を此截段の二底の半径とし H を其高さとすれは其体積の式は

$$\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$$

なり

問題

一　二個の直圓錐体相似体なる時は其傍面積は其底の半徑の二方と比例を為し其体積は其三方と比例を為す

二　直圓錐体の傍面を其底と平行せる平面にて等積に二分する叓を求む

三　直圓錐体の全面積十方米突にして其底の半徑$1^{m}.2$に等しき者なり此圓錐体の斜高及ひ高さを覔し又其体積を珊知米突立方以下の差に於て算する事を求む

四　直三角形を其直角の各邊上に於て逐次に旋轉するときは生する所の二個の圓錐体は其高さと反比例を為す

五　一個の桶を以て二個の等しき圓錐截段の其大底に於て接する者と考ふる時は其桶の深さ$1^{m}.32$にして其中腹及ひ底の半径は$0^{m}.88$及ひ$0^{m}.64$なる者の容積を珊知里杜児に於て算する事を求む

此設想に於ては$\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$を以て桶の容積とす但しHは其深さRは中腹の半径rは底の半径なり然れとも此式にて計算せる容積は過小なり今Rrの相乗をR^2に代用する時は$\frac{1}{3}\pi H(2R^2+r^2)$の式を得是れ英國算學士「オ｜1

六

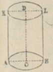
トレット」氏ノ定むる者なり

等辺三角形のCの辺を知り此三角形其高さを軸として旋轉し以て生する所の圓錐体の全面積及ひ体積を筭する事を求む

又此圓錐体の全面積を一方米突と知り或は其体積を一立方米突と知りCの値を珊知米突以下の差に於て算する事を求む

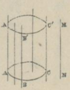
第十六教

定説



ACDKの矩形其一辺設使はCDの辺を軸として旋轉し以て生する所の体を直圓柱体と名く

CDの軸に直立せるCA DKの邊は此圓柱体の二底を作り而して此二底は相平行して且つ相等しき圓形なり又此二底の距離を測るへきCDの直線を此体の高さと名け軸と平行せるAKの邊にて生する旋轉の面を此体の傍面と名く



AA′の直線MNの定直線と平行して運動し而してABCの曲準線に接し以て生する所の面を圓柱面と名く

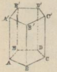
此準線閉圜せる某線にして而して此圓柱面をMNの直線に交はるへきABC A′B′C′の平面にて截るときは此二平面と圓柱面との間に在る体を雜圓柱体と名く此圓柱体はABC A′B′C′の二平面を底とし此底の平面の距離を高さと云

二個の直圓柱体の高さ其底の半径と比例をなし者即ち相似矩形に依て生ずる者を相似体と名く

其柱体の底圓柱体の底内に容るゝ時は此柱体は此圓柱体に内容ずと謂ふ又之を反言して圓柱体は其柱体に外切ずと謂ふ

第一設論

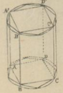
直柱体の傍面積は其高さと其底の周邊の相乘に等し



設使ば $ABCDE$ $A'B'C'D'E'$ の等しき多角形を底とせる直柱体に於て其傍面積は此柱体と等高の AA' を高さとし其底 $ABCDE$ の AB BC CD 等の邊を各底とせる AB' BC' CD' 等の矩形の和に等し然るに此各矩形の面積は（平面幾何第三十教第三設論）其底と高さの相乘に等し

故に此柱体の傍面積は $(AB+BC+CD+\cdots\cdots)\times AA'$ にして即ち $AB+BC+CD+\cdots\cdots$ の周邊と AA' の高さの相乘に等し

注意 $ABC'D'$ の直圓柱体内に於て或る正柱体設使ば $ABCD$ $A'B'C'D'$ の正四

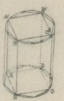


角柱体を容れ然る后此底の邊數を無窮に倍せるときは此柱体の全面積は増大し外切圓柱体の面積と無窮に相接近し而して遂に之より小なり又此柱体の体積に於ても同理にして圓柱体の体積との差を逐次に減少せり故に直圓柱体の傍面積及ひ其体積は内容柱体の底の邊數無窮に倍せし者の傍面積及ひ体積の歸向せる限と考ふる事を得而して圓柱体は其内容柱体の底の邊數及ひ其長短に關せず此柱体の為めに証明せし凡ての性質を有てる者と注意すへし

第二設論

直圓柱体の傍面積は其高さと底の圓周の相乘に等し

ABC'D'の直圓柱体内に於て或る正柱体設使ばABCDA'B'C'D'の正四角柱体を容れ然る後八角十六角等の正柱体を容るゝ時此柱体の傍面積は次第に増大し（第一設論の注意）而して之に外切せるABC'D'の圓柱体の傍面積を以て其限と為す然るに此各体の面積は其面數及ひ其大小如何に關せず底の周邊と高さの相乘に等し故にABC'D'の圓柱体の傍面積は亦AA'其高さとABCの底の圓周の相乘に等し



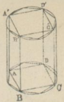
注意　Hを此圓柱体の高さとしRを其底の半径とすれは其傍面積は $2\pi R\times H$ に等し

此圓柱体の全面積を得んとするには $2\pi R\times H$ に二底の面積（平面幾何第三十四教第二設論）$2\pi R^2$ を加ふへし而して $2\pi R(H+R)$ を得るなり

第三設論

直圓柱体の体積は其底と高さの相乘に等し

ABC'D' の直圓柱体内に於て或る正柱体設使は ABCDA'B'C'D' の正四角柱体を容れ然る后八角十六角等の正柱体を容るときはこの各体の体積は次第に増大し（第一設論の注意）之に外切せる圓柱体の体積を以て其限とす然るにこの各体積は其傍面の大小及ひ其數如何に関せす其底と高さの相乘に等し故にこの圓柱体の体積は亦其底と高さの相乘に等し



注意　Rをこの圓柱体の底の半径としHを其高さとすれは其体積は $\pi R^2\times H$ に等し

推論

直圓錐体は（第十四教第五設論）之と等高同底の直圓柱体の

二分の一なり

第二推論

直圓錐体の平截段は此体の高さを公高とし此体の二底の半徑の半和及ひ半差を各底とせる圓柱及ひ圓錐体の和と等積なり

R及ひrをこの截段の二底の半徑としHを其高さとすれは其体積は第十四款第六設論の推論 $\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$ に等し然るに $R^2+Rr+r^2=3\left(\frac{R+r}{2}\right)^2+\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$ の恒式に依り且つ体積をVとすれは $V=\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\times H+\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2\times H$ となる故に此体積Vは此截段の高さHを公高となし $\frac{R+r}{2}$ 及ひ $\frac{R-r}{2}$ を各底とせる直圓柱体及ひ直圓錐体の和に等し

R及ひrの半径の差極小にして圓錐体の $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^3\times H$ の体積

圓柱体の $\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\times H$ の体積に比較して著意せさるへき時は此截段の体積は

$$V=\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\times H$$

の容率式に依て算する事を佳とす

方形ならさる材木の截段の求積に於て此式を活用し得へし蓋し此截段は之と等高にして且つ其長さの中央に於て此截段の二底と平行に作りたる截面を底とせる直圓柱体と等積なりと考へ得れはなり

前同式を以て桶の容積を量るに用ゆへし此時はHと桶の深さとしRを其中腹の半径としrを其底の半径とするなり但し此の如く算せし容積は過小なりとす因て又

$$V=\pi\left\{R-\frac{3(R-r)}{8}\right\}^2\times H$$

の式を以て算するなり是は佛國の算學士「デー」氏の定むる者なり

第四設論

第一　直圓柱体の底平圓ならさる者の傍面積は其底の周

圓と高さの相乘に等し

第二　此圓柱体の体積は其底と高さの相乘に等し　此設論の証法は第二第三設論の証法と等し惟此圓柱体の内に容れさる柱体の底を正多角形に非らさるを異なりとス。

問題

一　二個の直圓柱体相似体なる時は其傍面積は底の半徑の二方と比例を為し其体積は其半徑の三方と比例を為す

二　流形を量るに用ゐる里杜児は直圓柱体の形状にして其高さは底の中徑の二倍なり此三長度を密理米突に於て算する事を求む

三　乾物を量るに用ゐる所の里杜児埵加里杜児尼屈多里杜児は各直圓柱体の形状にして其高さは底の中徑に等し此各の三長度を密理米突に於て算する事を求む

四　直圓錐体内に於て直圓柱体を容れ其傍面積を設くる所の圓形に等しからしむる事を求む此傍面積の増極を求む

五　直圓錐体の高さ$2^{m}20$に等しく其底の半徑$1{,}^{m}80$に等しき者あり此底より一珊知米突の距離に於て底と平行せる平面にて此圓錐体を截る此截段の体積を埵止米突立方に於て算する事を求む

六　桶の容積を量る為めに「ヲートレッド」氏及ひ「デー」氏に依て定められたる二式は何れか最も大なる容積を與ふるや

七　圓柱状の玻離管の内半徑を算する事を求む但し此管若し空なる時は其重量九十瓦蘭諾にして又長さ九珊知米突の水銀柱を容るゝ時は百五十瓦蘭諾なる事を知るなり（水銀の重率は13,598に等し）

八　直圓柱体の底と平行せる平面を作りて其傍面積を二分し其底の面積として此二分の比率ならしむる事を求む

九　直圓柱体の高さは底の半徑の半に等しく其全面積を設くる所の圓形と等積なる者あり此三長度を求む

十　直圓柱体の全面積は長さ二米突の半徑の圓形に等しく其高さは一米突なるあり此体積を珊知米突立方に於て算する事を求む

十一　井水を汲出するに汲水管を用ゐ此管の内中徑をd活塞の行路をh井の中徑をD水の深さをHとす此井水を汲盡するに要すへき活塞の壓數を求む

此式に於てdを$0,^{m}12$ hを$0,^{m}35$ Dを$1,^{m}05$ Hを$2,^{m}88$とする時は其數幾何

十二　設くる所の直線を二分に分ち其一分を高さとなし

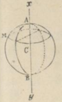
他の一分を底の半径となして直圓柱体を作り其傍面積として設くる所の圖形に等しからしむる事を求む

此問に答ふる所の二個の圓柱体の内最大なる者は何きなるや

第十七第十八欵

定説

AMBの半圓形ABの中径を軸として旋轉し以て生ずる所の体を球体と名く



故に球体は一個の旋轉面に依て終る所の体なり但し此旋轉面は其各点AMBの母線の中心Cより等距なる者なり此C點を亦球体の中心と名く

球体の中心より其面上の某一點に作れる直線を半径と名く而して半径は皆相等し

球体の中心を過ぎ其面との交點にて終る所の直線を中径と名く而して中径は皆相等し其故は皆半径の二倍なれはなり

平面球体と惟一個の公點を有つときは此平面は此球体に切すと謂ふ此點を其切點と名く

二個の球体一點に於て同一切平面を有つときは此二球体は此點に於て相切すと謂ふ

二個の平行平面一球体を截る時は此球面の此二平面内に在る分を平頭球分面と名く此面は此二平行平面の距離を

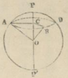
高さとし二截面を以て二底となす

此平頭球分面と定むる所の二個の平行平面中の一個此球体に切するときは此球分面は惟一個の底を有つのみのときはこれを圓頭球分面と名く

第一設論

球体に於て平面を以て作れる凡ての截面は圓形なり

此平面OAの球体の中心を過くる時は此平面はO點より等距なる各點に於て其面に交はる故に此截面は圓形にして此球体と同し中心及び等しき半径を有つ



又此平面Oの中心を過きすしてABDの曲線に循て此球面を截るときは此O點よりして此曲線の面上に垂線OCを下すなり然る時は此截面の周圍上A B等の點に於て作れる此球体の半径OA OB等はABDの平面に斜交し而して互に相等し故に（第一設第六設論）垂線OCより等距なり而してABDの曲線はC点より等距なる各点を有てる者にして即ち圓周なり但し其半径CAは此球体の半径OAより小なり

注意 球体と同し中心及び等しき半径を有つ所の各圓形を大圓形と名く而して大圓形は皆相等し又二個の大圓形は球体の中径に循て交はる其故は其中心を過くればなり

球体の中心を過きさる凡ての圓形を小圓形と名く其故は其半径球体の半径より小なればなり

CAの小圓形のCの中心及び此球体のOの中心は此圓形の

平面ニ直立せる直線中ニ在り

ABDの圓形ニ直立せる球径の二端P及ひP'は之を此圓形の極と名く盖しPP'の中径は此球を成す所の旋轉面の軸と考へ得るを以てなり而して二個の平行圓形は（第三数第七設論）同しく極を有つ

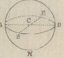
第一推論

大圓周は球面の二點を過きて作る事を得

盖し球体の中心及ひ設くる所の二點ニ依て平面を作るときは此平面は大圓周ニ循て此球面を截きるなり」球体の中心及ひ球面の二點一直線上ニ在らさる時は此各點は（第一数第一設論）惟一個の平面のみと定む此ときは設くる所の二點を過きて惟一個の大圓周のみを作り得るなり之ニ反する時は此二点は同し中径上ニ在り而して無數の大圓形を作る事を得

第二推論

凡そ大圓形ABDはCAの球体及ひ其面を二個ニ等分す



ABDEM ABDENの球分面を同し平面上ニ置き然る後CAの圓形ニ等しき其二底を合するときは夫の球分面も亦相合す其故は其凡ての点は球体及ひ其底に於ける公共の中心Cより等距なれはなり

二個の大圓形は互ニ二個ニ等分す

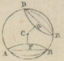
此二圓形の交線は球体の中心即ち此二圓形の各の中

心を過くきをなり

第二設論

第一　二個の等しき小圓形を球体の中心より等距なり

第二　二個の不等圓形に於てハ其大なる者を此球体の中心に最も接近す



CAの球体の中心C及びFA GDの二個の小圓形の中心F Gに依て作きる平面をABEDの大圓形に循て此球体を截り而してAB DEの小圓形の中徑即ち大圓形の通弦に循て此二個の小圓形を截る故に若しABの中徑DEの中徑に等しき時即ち此二個の小圓形相等しき時は(平面幾何第十三教第一設論)CF CGの距離を相等し又若しDEの中径ABの中径より大なる時即ちGDの圓形FAの圓形より大なる時は(平面幾何第十三教第一設論)CGの距離をCFより小なり

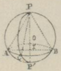
注意　此設論二條の反言を明了なり

第三設論

球体に於てABCの其圓周の凡ての点を此圓形のP及びP'の両極より等距なり

Pの極よりABCの平面上に下せる垂線の底IをIAの圓周の中心なる故(第一設論)此極より此圓周のA B C等の種々の点に作れる各直線を相等し其故は第一教第六設論)垂線PIより等距なれハなり故にABCの圓周の各点をPの極より等距なり又同法を以て他の極P'より

し等距ある事を證明し得るなり



Pの極よりABCの圓周に至るPA PB PC等の大圓周の弧の相等しき事も亦此證法よりして生するなり蓋し其通弦相等しければなり

注意　球体の某圓形の極に關する此性質を此圓形の中心に關する此性質に等し故に曲两脚規を用ひ球面上に於て平面上に於けるか如く圓弧を作る事を得へし其法規の二点の距離をして極より今作らんとする圓周までの距離に等しからしめ然る後規の二点中の一個を設くる所の極に置き他の点を以て圓周を作るなり

球体の圓形の極より此圓周迄の距離を極距と名く而して小圓形の兩極に於てを以下常に此圓形と同し半球上に在る者のみを注意そ

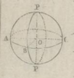
第一推論

球体の中心及ひ此球面上に作きる某圓形の中心及ひ其極ち此圓形の平面に直立せる同一直線中に在り

此設論を平面幾何第十二数第一推論に於て論せし者に等しき六個の他の設論に分解する事を得

第二推論

大圓形の極距を一象限の通弦に等し



PらOAの球体のABCの大圓形の兩極中の一個にしてPAPの大圓周の中心に於て其角頂を有てるPOAの直角を此圓周の

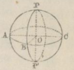
四分一に等しきPAの弧を截斷す然るに此弧の通弦はABCの大圓形の極距なり因て證せん

第三推論

OAの球体のABCの大圓形の極を求むる事を得但し其法二あり第一ABCの圓周上に於てA Bの某二點を設け此二點を極の如くにしPを交點とせる二個の大圓弧を画かく事に於てす第二ABCの圓形に直立せるAPCの大圓形を作り而してA點より起りAPCの圓周の四分の一に等しきAPの弧を作る事に於てす

第一 POA POBの角は製圖に依て直角なる故POの直線はOA OBの二個の半径に直立し因て又（第一款第三設論）OABの平面に直立す故にP點はABCの圓形の極なり

第二 APC ABCの二個の平面は設想に依り相直立す然るに此平面中第一の者の上に在るOPの直線も（第六款第二設論）ACの交線に直立す故に第二の者に直立す而してP點はABCの圓形の極なり



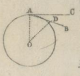
第四推論

二個の大圓形に於て此圓形の極他の圓周上に在るときは此二圓形は相直立す（第六款第一設論）第二の者は第一の者に直立して此球体の中径を過くればなり

第五設論

球体の半径の端界に直立せる平面は此球体の切平面なり

反言　球体の切平面は切點の半径ニ直立す



第一　Oの球体のOAの半径の端界Aを過きて此半径ニ直立せるBACの平面を作る時は此平面は此球体の切平面なり

Oの中心よりBACの平面上A點の外なるDの如き某點迄のODの距離は第一教第六設論此平面ニ直立せるOAの半径より大なり故ニD點は此球体の外方ニ在り因てBACの平面は此球面と惟Aの公點のみを有ち即ち此平面は此球体の切平面なり

反言　BACの平面A點ニ於てOAの球体ニ切るるときは此平面はOAの半径ニ直立す

BACの平面上A点の外なるDの如き凡ての点を設想ニ依り此球面の外方ある故OAの半径を0の中心よりBACの平面ニ迄作り得へき最短線なり故ニ(第一教第六教論)此半径は此平面ニ直立す

第一推論

球面の一點より此面の切平面を惟一個の外作る能はす

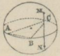
第二推論

二個の相切球体の切点は其中心を聯接せる直線上ニ在り切点を過きて作れる切平面との垂線は各中心を過くきをなり

第一問題

球体の半徑を求む

設くる所の球面上に於てM及ひNの某二点を設けM点より之を極とし随意の極距を以て圓弧を作り又等しき極距を以てN点より之を極とし第二の圓弧を作るなり然る時は此圓弧ハM及ひNより等距なるA点に於て第一の者を截るなり又同様にM及ひNより等距なる他の二点BCを決定するなり然る時は此球体の中心及ひABCの各点は（第一教第八設論）MNの直線の中央に直立せる同一平面上に在り其故は此各点は此直線の二端M及ひNより等距なれはなり故に此平面にて作れる截面は大圓形なり



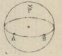
是に於て両脚規を以てAB BC ACの通弦の長さを取り此三直線を以て三角形を作るなり然る時は此三角形に外切せる圓形の半径は即ち此球体の半径なり

第二問題

球面上のA及ひBの二點を過き大圓周を作る事を求む

A及ひBの二點より之を極とし二個の大圓弧を作りP點に於て相交てらしむ此P點は（第三設論の第三推論）即ちA及ひBの二點を過くる大圓形の両極中の一個なり故にP點より之を極とし

ABの大圓周を作るなり



推論

A及ひBの二點球体の中径の二端なる時は此問題は無窮の答解を有つ其故はA及ひBの二點より之を極として作

れる大圓弧を相合し而して此弧を以て其一分とせるCDEの大圓周の凡ての點をA及びBの二點を過くる大圓形の極なれはなり

第三問題

球面のA點を過きてCBDの設くる所の大圓周に直立せる大圓周の弧を作る事を求む

A點より之を極として大圓周を作りCBDの圓周に交はらしめ其交點Pより之を極としてABの大圓周の弧を作るなり然る時は此弧は（第四設論）CBDの設くる所の圓周に直立す其故はPの極は此圓周上に在れはなり

第四問題

大圓周の弧を二個に等分する事を求む

球面上に於て設くる所の弧C及びDを決定を但し此二点をABなる二点の二端より等距なるC及びDの二点を決定し而して（第二問題）大圓周の弧を以て此二点を聯接するあり然る時は此弧の平面は（第一教第八設論）ABの通弦の中央に於て直立す故に此平面は此弧を二個に等分す

推論

CDの弧を又A及びBの二点を過きて作り得へき各小圓周の圓弧を二等分す其故は此各弧は皆ABの同し通弦を有て

はなり

注意　此法は（第四設論）又A及びBの二点を聯接せる其圓弧の中央に直立せるDCの大圓周の弧を作る事に用ゆへし

第五問題

球面上ABCの三点に依て決定せる小圓周を作る事を求む

ABCの弧の中央に於て共に直立せるDEFGの大圓周の弧を作るときは（第四問題の注意）此弧はABCの三点より等距なるP点に於て交截す是に於てP点より之を極としPAの極距を以て設くる所の三点を過ぐる圓周を作るなり

推論

此法は設くる所の小圓形の極を求むる事に用ゆへし

二個の球体の相關係せる位置に於ける注意

二球体は二圓形の如く彼此相關係して五種の位置あり而して左の五個の設論は此五種に應ずるなり

第一　二球体一個の公點をも有さずして其一個は他の者の外方に在るときは各中心の距離は各半径の和より大なり

第二　二球体外方に於て相切するときは各中心の距離は各半径の和に等し

第三　二球体相交する時は第一各中心の距離は各半径の

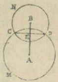
和より小にして其差より大なり第二各面の交線は各中心を聯接せる直線に直立せる平面上に在る圓周なり

第四　二球体内方に於て相切する時は各中心の距離は各半径の差に等し

第五　二球体一個の公点をも有たずして其一個は他の者の内方に在る時は各中心の距離は各半径の差より小なり」

此設論の証法は（平面幾何第十四教）之に應ずる圓形の設論に於て論せし者に等し而して若し此二球体を同し平面上に置きたる二圓形其中心を過ぐる直線を軸として旋轉し以て生ずる者と考ふれば直に明かなり

第三設論の第二の場合を証明するには相交截せる二個の球体を設けＡＢの各中心及ひ其交點中の一個Ｃとに依て平面を作るなり然る時は此平面はＣ點に於て交截せるＡＭＢＮの二個の大圓周を決定す是に於てＡＢの直線上に於て之を軸としＡＢＣの平面を旋轉する時はＡＭＢＮの各圓周は之に應ずる球体の表面を生ず而してＣ點は此二個の旋轉面に公共なる平行線を作れり之に因てＡＭＢＮの球体は此平行線に循て相交はるなり



以上五個の設論の反言は明かなり

問題

一　設くる所の直線を過ぎ或は點を過ぐる各平面にて球体中に作れる截面の中心の幾何跡を求む

二　三直三面体角の角頂設くる所の位置に在るときは其三面球体を截りて成せる所の各圓形の面積の和は常數なり
此三面体角の角頂より其三稜と球面との六個の交點までの距離の二方の和も亦常數なり

三　二個の定點までの各距離の比常數なる所の空間の各點の幾何地を求む

四　不等強の二光より同様に照らる所の空間の各點の幾何地を求む

五　球体外の一點より此球体に作れる各切線は相等し
因て此切線の幾何地は旋轉せる圓錐面なり又其切點の幾何地は此球心を設くる所の點に聯接せる直線に直立せる平面上に在る圓周なり

六　設くる所の三球体を等角に於て見るべき所の點を求む

七　設くる所の二球体を大圓に循て截る所の各球体の中心の幾何地を求む

八　設くる所の三球体を大圓に循て截る所の各球体の中心の幾何地を求む

九　設くる所の直線を過ぎて球体に切平面を作る事を求む

十　二個の球体に外方に於て切する所の各平面は各球心を過て作せる直線と同し一点に於て交會す
二個の球体に内方に於て切する所の各平面に於て

も同様なり

十一 設くる所の一点を過きて二個の球体に切平面を作る事を求む

十二 三個の球体に切平面を作る事を求む

十三 一個の直線を過きて二個の球体を截る所の平面を造り其各截面の半径をして球体の半径と比例せしむる事を求む

十四 一点を過きて三個の球体を截る所の平面を作り其各截面の半径をして球体の半径と比例せしむる事を求む

第十九款

定説

平折線及ひ凸折線の各邊各角相等しき者を正折線と名く

凡そ正折線は正多角形の周邊の如く圓形に内容し又は外切する事を得惟其中心角は（平面幾何第二十七款第一設論）通常四直角の整分ならさるを異なりとす

正折線は中心半径中心距を有つ是れ即ち其内容外切圓形の中心及ひ半径なり又其中心を過くる凡ての直線を中径と名く

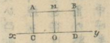
圓弧内に正折線を容るゝには（平面幾何第二十七款第二設論）直に此弧を若干數に等分し此相連弧の通弦を作るは可なり

正折線及ひ此線の二端の半径との間に在る分を正多角分形と名く

第一設論

xyの無界直線上に於て之を軸とし此軸と同一平面上に在りて且つ其同一邊に在る所のABの有界直線を旋轉するときは此線にて生ずる旋轉面はABの母線と此母線の中央Mにて作る圓周との相乘を以て測度とす

ABの直線はxyの軸に關係して三種の位置を為す事を得



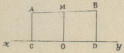
第一　ABを以てxyと平行なりと定む而してABMの各点より其軸上にAC BD MOの垂線を下す時はABCDの矩形はxyを軸として旋轉し以て直圓柱体を生ず而して

ABの直線は其傍面を為す故に（第十六数第二設論）

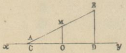
$$\text{surf.}AB = AB \times \text{cir.}OM$$

を得

第二　ABの直線を軸と平行せず且つ軸と公點を有たさるものとし而して亦xy上に於てAC BD MOの垂線を下しときはABCDの二邊平行方形はxyを軸として旋轉し直圓錐体の平截段を生し而してABの直線は其傍面を成す故に亦（第十四数第四設



論の推論） $\text{surf.}AB=AB\times\text{cir.}OM$ を得



第三

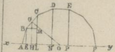
ABの二端中の一個設使ハAの一端xyの軸上ニ在るものとれ此時ハBDの垂線ハABDの直三角形を成し此三角形ハxyを軸として旋轉し以て直圓錐体を生す而してABの直線ハ其傍面を成す故ニ亦（第十四教第三設論の推論） $\text{surf.}AB=AB\times\text{cir.}OM$ を得

第二設論

BCDEの正折線此線を截らさるxyの軸を繞りて旋轉し以て生する所の表面ハ此折線内ニ容るゝ圓周と軸上ニ於ける此折線の畫形影KPとの相乘を以て測度となす

OハBCDEの正折線の中心OGハ其中心距なり此線xyの中径を軸として旋轉する時ハBC CD DEの各邊ニて生する表面の和ニ等しき表面を成す

BCの中央Gよりxyの軸ニ直立せるGHの直線を作るときハ前の設論ニ依り



$\textit{surf.}\,BC = BC \times \textit{cir.}\,HG$ を得

此測度を変形する為めにxyの軸に直立せるBK CLの直線を作り又此軸と平行せるBMの直線を作る時はBCM GOHの三角形は互に直立せる各邊を有てる故(平面幾何第十一教第五設論)相似形なり因て

$$\frac{BC}{BM}=\frac{OG}{HG}=\frac{OG}{HG}$$

を得

故に $BC \times \textit{cir.}\,HG = BM \times \textit{cir.}\,OG$ を得因て $\textit{surf.}\,BC = BM \times \textit{cir.}\,OG$ を得又BM KLは相等しき故 $\textit{surf.}\,BC = KL \times \textit{cir.}\,OG$ を得

LN及ひNPは此軸上に於けるCD DEの邊の画形影なり故に前と同理を以て $\textit{surf.}\,CD = LN \times \textit{cir.}\,OG$ 及ひ $\textit{surf.}\,DE = NP \times \textit{cir.}\,OG$ を得

以上三個の相等式の各邊を加へ且つ $\mathrm{surf.}\,BC+\mathrm{surf.}\,CD+\mathrm{surf.}\,DE$ の和は $\mathrm{surf.}\,BCDE$ なる事を注意し以て

$$\mathrm{surf.}\,BCDE=(KL+LN+NP)\,\mathrm{cir.}\,OG$$

即ち

$$\mathrm{surf.}\,BCDE=KP\times\mathrm{cir.}\,OG$$

を得るなり

推論

ABCEF の偶邊數の半正多角形 AF の中徑上に於て旋轉し以て生せる所の表面は此多角形内に容るゝ圓周と其外切圓周の中徑との相乘を以て測度となす

軸上に於ける ABCEF の半周邊の畫形影は此多角形に外切せる圓周の AF の中徑なせるなり

第二推論

前に證明せし $\mathrm{surf.}\,BC=KL\times\mathrm{cir.}\,OG$ の相等式よりして左の設論を生ず

BCの直線之と同し平面上に在るxyの軸を繞りて旋轉し以て生ずる所の表面は其軸上に於ける此直線の畫形影KLとBCの直線の中央に於て軸に交はるまてに作る垂線GOを半徑とせる圓周との相乘を以て測度となす

第三設論

平頭球分面は其高さと其大圓周との相乘を以て測度となす

BDの圓弧AMの中徑上に旋轉して生ずる所の平頭球分面に於てEFはBDの弧の二端よりAMの軸上に垂線BE DFを下し以て決定する所の高さなり今BDの弧内にBCDの正折線を容る、時はOIは中心距なり此折線AMを軸として旋轉し以て生ずる所の表面は此全分を蔽掩せるBDの平頭球分面より小なる事明らかなり而して若しBDの弧内に容る、折線の邊數を無窮に倍する時は此二表面の差は次第に減少す故にBDの球分面はBCDの折線の邊數を無窮に倍せし時此折線にて作れる表面の限なり然るに此邊數如何に關せずBCDの正折線に依て生ずる所の表面は第二設論其軸上に於ける其線の畫形影EFとOIの內容圓周との相乘を以て測度となす之に因て球分面は亦EFの高さとOAの圓周即ち此球分面を一分とせる球体の大圓周との相乘を以て測度となす

第一推論

Hをこの球分面の高さとしRをこの球体の半徑とすれは

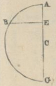
$zone = 2\pi R \times H$ を得

第二推論

同球体或は相等の各球体に於て二個の球分面は其高さと比例をなす

第四設論

球体の面積は其中径と其大圓周との相乘を以て測度となす



ABG の半圓形 AG の中径上に旋轉し以て生する所の球体に於て ABG の半圓周は AB BG の二弧の和なる故此二弧に依て生する二個の球分面を合すれは球体の表面を成す而して第三設論

$zone\ AB = AE \times cir.\ CA$

及ひ

$zone\ BG = EG \times cir.\ CA$

を得

此相等式の各邊を加ふる時は

$surf.\ sph\ CA = (AE + EG) \times cir.\ CA$

を得因て

$surf.\ sph.\ CA = AG \times cir.\ CA$

を得

第一推論

Rを球体の半径としDを其中径としSを其面積とすれば

$$S=2R\times 2\pi R=4\pi R^2$$

を得

此Sの値よりして左論を得

球体の面積は（平面幾何第三十四款第二設論）大圓形の面積の四倍に等し曰て又 $S=D\times\pi D=\pi D^2$ を得

第二推論

二個の球体の面積は其半径或は中径の二方と比例を為す

問題

一　半圓形内に於て偶邊數の正多角形を容れ又之と相似なる正多角形を外切する時は此半圓形其中径上に旋轉して生する所の球体の面積は此二個の多角形に依て生する所の面積の中率となる

二　凡そ一底の球分面は此面を生する所の弧の通弦を半径とせる圓形と等積なり

此設論は二底の球分面に適用すへきや

三　球体の面積を其大圓周を以て標示する事を求む

地球を球体と定め其面積を平方密理亜米突に於て

値する事を求む

四　球体に直圓錐体を外切し其傍面積を底の二倍ならしむる事を求む

五　球体に圓柱体を内容し其二底の和を傍面積の二倍ならしむる事を求む

六　球体に圓錐体を内容し其傍面積を同圓形に於て終る所の圓頭球分面と等積ならしむる事を求む

七　球体を平面にて截り此平面にて此球体の表面を二分せる二個の球分面の差を其截面と等積ならしむる事を求む

八　球体を平面にて截り大圓形の面積を此平面にて決定せる二個の球分面の中率ならしむる事を求む

九　球体を其中心より等距離の二個の平行平面にて截り二個の截面の面積の和を此二平面間に函める平頭球分面の面積に等しからしむる事を求む

十　球体に圓錐体を内容し其底を傍面積の半と等積ならしむる事を求む

十一　等邊圓錐体球体内に容るゝあり此圓錐体の底と平行せる平面にて此二体中に作れる各截面の差は如何なる限内に於て變化すへきやを決定する事を求む

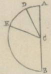
此球分面の如何なる位置に於て此二截面の差は此球体の大圓の面積の三分の二に等しかるへきや

注意　前諸題は二次方程式の尤も好き復習なり

第二十款

定説

DECの分圓形此外方の中徑ABを軸として旋轉し以て生する所の体を分球体と名く



此体ハ此分圓形のDEの弧ニて作れる圓頭球分面を以て其底となす

某多面体の各面球体ニ切するときハ此多面体ハ其球体ニ外切すと謂ふ又之を反言して球体ハ此多面体ニ内容すと謂ふ

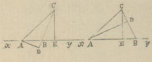
又之ニ反し某多面体の各角頂球面の各点なる時ハ此多面体ハ球体ニ内容すと謂ふ而して球体ハ之ニ外切すと謂ふ

第一設論

ABCの三角形Aの角頂より此面を横截せる事なく此三角形の平面上ニ作れるxyの直線を軸として旋轉し以て生する所の体の体積ハAの角頂よりBCの對邊迄の距離ニ此邊のxyの軸上ニ旋轉して成る所の面を乗せし者の三分の一ニ等し

ABCの三角形ハxyの軸ニ關係して三種の位置をなすを得

第一　ABの邊軸上ニ在る者と定む而してCの對角頂より此邊ニ直立せるCEの直線を作る時ハABCの三角形の旋轉ニ依て生する体積ハCEの垂線ABCの三角形の内方或ハ外方ニ在るニ従ひACE BCEの直三角形xyの軸上ニ



旋轉して生ずる所の直圓錐体の和或は差に等し然るに（第十四教第五設論）$\text{cone}\,ACE=\frac{1}{3}\pi CE^2\times AE$ 及び $\text{cone}\,BCE=\frac{1}{3}\pi CE^2\times BE$ を得因て $\text{vol}\,ABC=\frac{1}{3}\pi CE^2\times AB$ を得

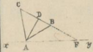
是に於てAの角頂よりBCの對邊上に垂線ADを下し而して前に擧けたるABCの体積の式中AB×CEの相乘を之に等しきBC×ADの相乘に代ゆるなり蓋し此各相乘は（平面幾何第三十教第五設論）ABCの三角形の面積の二倍を標示すればなり之に因て $\text{vol.}\,ABC=\frac{1}{3}\pi CE\times BC\times AD$ を得

然るにBCEの圓錐体の傍面積は（第十四教第三設論）πCE×BCを以て測度と為す故に

$$vol.ABC=surf.BC\times\frac{1}{8}AD$$

を得

第二



AB ACの二邊軸と合せさるときはAの角頂に對せるCBの邊は軸と交截し或は之と平行なる事あり先つ最初にCBの引長線はF点に於てxyに交はる者とす而してAの角頂よりCB上に垂線ADを下す時はABCの三角形はACF ABFの三角形の差に等しく而して此三角形xyの軸上に旋轉して生ずる所の体積は又ACF ABFの三角形にて生ずる体積の差に等し然るに

$$vol.ACF=surf.CF\times\frac{1}{3}AD$$

及び

$$vol.ABF=surf.BF\times\frac{1}{3}AD$$

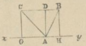
なる故

$$vol.ABC=surf.BC\times\frac{1}{3}AD$$

を得

第三　前の設論はBCの邊軸となりて成す所の角何程小なりとも真實なり因て此設論は亦此角零なる時即ちBCの邊xyと平行する時に於ても真實なる事を決すへし

令又BCとxyとの直線相平行する場合に於ける此設論の直解を見出すへしBDの二端よりxy上に於て垂線BH CGを下し而してABCの三角形xyの上に旋轉して生する所の体積は（ABD ACD）の三角形にて生する体積の和なる事を注意す然るにABHの直三角形にて生する圓錐体は（第十六款第三設論の推論）ADBHの矩形に依て生する圓柱体の三分の一に等し



故にABDの三角形をxyの軸上に旋轉し以てABDHにて生する圓柱体の三分の二に等しき体積を生す又同様にACDの三角形xyの上に旋轉して生する所の体積はADCGの矩形同し軸上に旋轉して生する所の圓柱体の三分の二に等しき事を証明すへし之に因てABCの三角形は（ADCG ADBH）の矩形に因て生する圓柱体の和の三分の二即ちBCGHの矩形に依て生する圓柱体の三分の二に等しき体積を生す故に左式を得

$vol.ABC=\frac{1}{3}\pi AD^2\times BC$

然るに BCGH の圓柱体の傍面積は（第十六教第二設論）$2\pi AD\times BC$ に等し故に

$vol.ABC=surf.BC\times\frac{1}{3}AD$

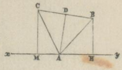
を得るなり

推論

ABC の三角形二等辺にして且つ MN の直線 xy の軸上に於ける BC 辺の畫形影なる時は（第十九教第二設論の推論）

$surf.BC=MN\times cir.AD$

を得



因て又

$vol.ABC=\frac{2}{3}\pi AD^2\times MN$

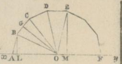
を得故に左論を得

二等辺三角形其軸其平面上に在りて其面を横截せる事なく其角頂を過ぐるとき其軸上に旋轉して生ずる所の体積は軸上に於ける此三角形の底の畫形影と此三角形の高さを半徑とせる圓形の面積との相乘の三分の二に等し

第二設論

OBCDE の正多角分形其面の外方なる xy の中徑上に旋轉して生ずる所の体積は此多角分形の BCDE の周邊にて作れる面と其中心距の三分の一との相乘に等し

O は BCDE の正折線の中心 OG は其中心距なり今 OC OD の半徑を作る時は OBCDE の正多角分形を二等邊三角形に分解し此分形 xy の軸上に旋轉して生ずる所の体積は OBC OCD ODE の二等邊三角形に因て生ずる体積の和に等し故に（第一設論）



$$vol.\,OBC = surf.\,BC \times \frac{1}{3}OG$$

$$vol.\,OCD = surf.\,CD \times \frac{1}{3}OG$$

$$vol.\,ODE = surf.\,DE \times \frac{1}{3}OG$$

を得此相等式の各邊を加へ

$$vol.\,OBCDE = (surf.\,BC + surf.\,CD + surf.\,DE) \times \frac{1}{3}OG$$

即ち $vol.\,BCDE = surf.\,BCDE \times \frac{1}{3} OG$ を得るなり

第一推論

LM を BCDE の正折線の xy の軸上に於ける畫形影なり故に（十九數第二設論）$vol.\,BCDE = LM \times cir.\,OG$ を得因て $vol.\,OBCD = \frac{2}{3} \pi OG^2 \times LM$ を得るなり之に因て OBCDE の正多角分形其面の外方なる xy の中径上に旋轉して生ずる所の体積を BCDE の正折線の軸上に於ける画形影と此線内に容る、圓形の面積との相乘の三分の二に等し

第二推論

ABCDEF の偶邊數の半正多角形其中径 AF の上に旋轉して生ずる所の体積を内容圓形に外切圓形の中径を乘せし者の三分の二に等し

ABCDEF の周邊の軸上に於ける画形影 AF を此多角形に外切せる圓形の中径なきをなり

第三設論

分球体の体積ハ此体の底をなす圓頭球分面ニ此球体の半径の三分の一を乘せし者ニ等し

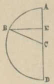
AOD の分圓形 AE の中径上ニ旋轉して生する分球体ニ於て AD の弧内ニ ABCD の正折線を作る時ハ OABCD の正多角分形 AE の軸上ニ旋轉して生する所の体積ハ之ニ外切せる分球体の体積より小ニして而して此折線の邊數を無窮ニ倍する時ハ次第ニ之ニ接近し而して AOD の分球体ハ其限なり然るニ此多角分形ニて生する体積ハ（第二設論）ABCD の折線ニて作る面と OL の中心距の三分の一との相乘ニ等し故ニ AOD の分球体の体積ハ亦 AD の弧ニて作れる圓頭球分面ニ此弧の半径の二分の一即ち球体の半径の三分の一を乘せし者ニ等し

推論

R を球体の半径とし H を分球体の底を為せる球分面の高さとすれバ（第十九款第三設論）$\text{zone}\,H = 2\pi R\times H$ を得因て $\text{sect.sph}\,R = \frac{2}{3}\pi R^2\times H$ を得故ニ分球体の体積ハ又此体の底をなせる球分面の高さニ此球体の大圓面積を乘せし者の三分の二ニ等し

第四設論

球体の体積は其面積に其半径の三分の一を乘せし者に等し



ABD の半圓形 AD の中径上に旋轉して生する球体に於て CB の某半径を作り此球体を ACB BCD の二個の分圓形に因て生する分球体の和と考ふるときは（第三設論）

$$\text{sect. sph. } ACB = \text{zone. } AB \times \frac{1}{3} CA$$

$$\text{sect. sph. } BCD = \text{zone. } BD \times \frac{1}{3} CA$$

を得是き

より

$$\text{sphère. } CA = (\text{zone } AB + \text{zone } BD) \frac{1}{3} CA$$

即ち

$$\text{sphère } CA = \text{surf. sph. } CA \times \frac{1}{3} CA$$

を得

第一推論

R を球体の半径 D を其中径 V を其体積とすれば

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

及ひ

$$V=\pi D^2\times\frac{D}{6}=\frac{1}{6}\pi D^3$$

なり

第二推論

二個の球体の体積ハ其半径或ハ中径の三方と比例をなす

第五設論

球体ニ外切せる凸多面体の体積ハ其面積ニ此球体の半径の三分の一を乗せし者ニ等し

球体の中心と此多面体の各稜とニ依て平面を作るときハ此体を錐体ニ分解す而して此錐体ハ此多面体の各面を底とし球体の中心を公頂となす然るニ此各錐体の体積ハ(第十款第五設論)其底と高さ即ち球体の半径の三分の一との相乗ニ等し故ニ云々

第一推論

同球体或ハ相等の各球体ニ外切せる凸多面体の体積ハ其面積と比例を為す

第六設論

BMDの圓分其外方なる中径AHの上ニ旋轉して生する所の体積ハ一個の圓錐体の体積の半ニ等し但し此圓錐体ハ此圓分の底BDを其底の半径としAHの軸上ニ於ける其直形影EFを以て其高さとする者なり

BMDの圓分ハCBMDの分圓形とCBDの三角形との差ニ等しき故AHを軸として旋轉して以て生する所の体積ハ此分圓

形及ひ三角形ニ依て生する所の体積の差ニ等し然るニ（第三設論）

$$vol.CBMD=\frac{2}{3}\pi CD^2\times EF$$

を得而して CG を CBD の二等邊三角形の高さなる故（第一設論の推論）

$$vol.CBD=\frac{2}{3}\pi CG^2\times EF$$

を得因て

$$vol.BMD=\frac{2}{3}\pi(CD^2-CG^2)\times EF$$

なり

然るニ CDG の三角形ハ直三角形なる故上式よりして

$$CD^2-CG^2=DG^2=\frac{BD^2}{4}$$

を得因て

$$vol.BMD=\frac{1}{6}\pi BD^2\times EF$$

を得

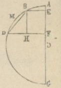
注意　此圓分半圓形に等しき時は生ずる所の体積は球体の体積に等し而して前式に於てAHをBD EFに代用するときは

$$sphero\,CA=\frac{1}{6}\pi AH^3$$

を得是れ球体の体積の為めに已に求め得たる式にして中径を以て顕はせる者なり

第七設論

球分の体積は此体の高さを中径とせる球体の体積に此体の高さ及び二底を以て其高さ及び各底とせる二個の柱体の体積の半和を加へたる者に等し



BE DFは CAの球体に於てAGの中径に直立せる二平面にて作れる圓截面の半径なり又EFの直線はBE及びDFの二圓形を底とせる球分の高さなり

EFの球分の体積はBMDの圓分とEBDFの二辺平行方形に依て生ずる体積の和に等し故に

$$vol.\,BMD=\frac{1}{6}\pi BD^2\times EF$$

及び

$$vol.\,EBDF=\frac{1}{3}\pi(BE^2+DF^2+BE\times DF)\times EF$$

を得

因て

$$seg.sph\,EF=\frac{1}{6}\pi(BD^2+2BE^2+2DF^2+2BE\times DF)EF$$

なり

B点よりDF上に於て垂線BHを下し而してBDHの三角形が直三角形なる事を注意し以て

$$BD^2=BH^2+DH^2=EF^2+(DF-BE)^2$$

即ち

$$BD^2=EF^2+DF^2+BE^2-2BE\times DF$$

を得

若しEFの球分の体積の式ニ於て此BD^2の値を代用すれば

$$seg.sph\,EF=\frac{1}{6}\pi(EF^2+3BE^2+3DF^2)EF$$

即ち

$$\text{seg.sph.}AEF=\frac{1}{6}\pi EF^2+\frac{1}{2}(\pi BE^2\times EF+\pi DF^2\times EF)$$

を得

然るに $\frac{1}{6}\pi EF^2$ の項は此球分の高さに等しき中径の球体の体積にして又 $\pi BE^2\times EF$ $\pi DF^2\times EF$ は EF の直線を高さとし BE DF の圓形を底とせる二個の圓柱体の体積なり故に云々

推論

此球分の底BE零なる時即ちAGの軸に直立せるBEの平面此球体の切平面となるときはADEの一底球分は此球分の高さを中径とせる球体と此球分と同底等高の圓柱体の半との和に等し即ち

$$\text{seg.sph.}ADE=\frac{1}{6}\pi AF^3+\frac{1}{2}\pi DF^2\times AF$$

の如し

問題

一　直線を以て三角形の二辺の中央を聯接し然る後第三の辺上に於て此三角形を旋轉する時は其各分にて生ずる所の体積の比は如何

二　球体の体積を其大圓周を以て標示する事を求む

地球を球体と定め其体積及ひ其重量を算する事を求む但し其平均重率は$5\frac{1}{2}$なりとし

三　球体に外切せる圓柱体の面積と此球体の面積と外切等辺圓錐体の面積との中率なり

又此三体の体積に於ても同様なり

四　地球大陰大陽の中径は$1\quad\frac{3}{11}\quad112$の數と比例す若し地球の体積を一とする時は大陰大陽の体積は幾何」

五　平行邊形を其平行せざる二邊上に於て逐次に旋轉する時は生ずる所の体積は其各邊と反比例を為す之を証する事を求む

六　球体を平面にて截り其最小球分面を底とせる分球体を等積に二分する事を求む

七　半圓形内に直三角形を容れ此三角形其斜邊上に旋轉して生ずる所の体積をして此半圓形内に容るゝ球体の体積と設くる所の比をなさしむる事を求む」

此比の増極を求む

立体幾何學第二終

明治十一年五月廿三日　板權免許
明治十二年十二月廿五日　出版
定價金四十五戔

出版所
東京京橋區元數寄屋町三丁目四番地
内外兵事新聞局
東京日本橋通二丁目
小林新兵衞
同
稲田佐兵衞

發兌書肆
大坂心齋橋通唐物町四丁目
浅井吉兵衞
同　心齋橋通久太郎町四丁目
柳原喜兵衞