数学

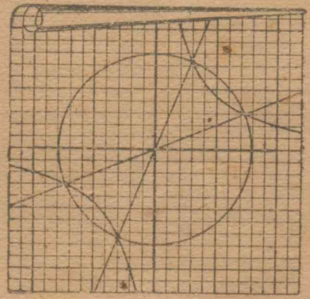
解析編（1）

文部省検定済教科書

中等學校教科書株式會社

文部省検定済
昭和23年2月29日　高等学校用

数　学
解析編
(I)



中等學校教科書株式會社

目　次

第一章　一次函数 ……… 1
§ 1.　一次函数とグラフ ……… 1
§ 2.　一次方程式 ……… 8
§ 3.　一次不等式 ……… 14
§ 4.　連立方程式 ……… 19
雑　題 ……… 27

第二章　式の計算 ……… 34
§ 1.　式の加減 ……… 34
§ 2.　式の乗法 ……… 40
§ 3.　式の除法 ……… 45
§ 4.　簡單な因数分解 ……… 50
§ 5.　やや複雑な因数分解 ……… 57
§ 6.　分数式の計算 ……… 60
§ 7.　開　平 ……… 68
雑　題 ……… 74

第三章　二次函数 ……… 81
§ 1.　二次函数とグラフ ……… 81
§ 2.　二次函数の最大・最小 ……… 94
§ 3.　二次方程式 ……… 97
§ 4.　根と係数との関係 ……… 108
§ 5.　二次不等式 ……… 110
§ 6.　簡單な絶対不等式 ……… 115
§ 7.　簡單な分数函数 ……… 118
§ 8.　連立方程式 ……… 124
§ 9.　簡單な無理方程式 ……… 129
雑　題 ……… 133

第四章　指数函数と対数函数 ……… 143
§ 1.　累乗と指数法則 ……… 143
§ 2.　累乗根 ……… 145
§ 3.　指数の拡張 ……… 148
§ 4.　指数函数 ……… 151
§ 5.　対数函数 ……… 155
§ 6.　対数の性質 ……… 158
§ 7.　対数表 ……… 161
§ 8.　対数計算 ……… 164
§ 9.　計算尺 ……… 167
§10.　計算尺による計算 ……… 172
§11.　計算図 ……… 176
雑　題 ……… 181

第五章　三角函数 ……… 184
§ 1.　円運動と三角函数 ……… 184
§ 2.　三角函数のグラフ ……… 188
§ 3.　三角函数の性質 ……… 192
§ 4.　弧度法 ……… 196
§ 5.　單振動 ……… 198
§ 6.　單振動の合成 ……… 201
§ 7.　加法定理 ……… 205
§ 8.　三角形と三角函数 ……… 212
§ 9.　三角形の解法 ……… 217
§10.　三角形の面積 ……… 224
§11.　逆三角函数 ……… 227
雑　題 ……… 230

附　録　数表 ……… 巻末
第一表　平方・立方・平方根・立方根の表
第二表　三角函数表
第三表　数の対数表

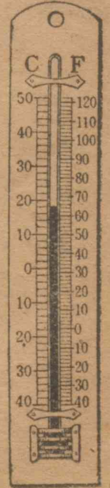
第一章　一次函数

§1.　一次函数とグラフ

氣温をはかるのに，普通には，攝氏と華氏の温度計が使われている。攝氏温度計では，氷点は 0° で，沸点は 100° である。また，華氏温度計では，氷点は 32° で，沸点は 212° である。

同じ温度を攝氏と華氏とで書き表わした時，その目盛の読みの間にある関係を表にすると，次のようになる。

攝氏	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
華氏	32°	50°	68°	86°	104°	122°	140°	158°	176°	194°	212°



同じ温度を攝氏と華氏とで表わした時，その読みをそれぞれ x°, y° とすると，x と y との間に，どんな関係があるかを調べてみよう。

まず，攝氏の 0° は華氏で 32° に当たるから，$x=0$ に対する y の値は 32 である。また，x が 1 だけ増すと，それに対して y は 1.8 だけ増す。したがって，x, y の間には，次の関係があることがわかる。

$$y=1.8x+32$$

これが攝氏の度数と華氏の度数との換算式である。

問1. 攝氏で，$0°, 5°, 10°, 15°$ など $5°$ おきの温度は，華氏では何度になるか。前ページの換算式によって，これを計算せよ。また，温度計について，その結果を調べよ。

攝氏で，$-5°, -10°, -15°$ などは，華氏では何度になるか。

前ページの換算式の x や y は，種々の値をとることができる。このように，種々の値をとることのできる量を示すのに使った文字を**変数**という。

二つの変数 A, B があって，A の値がきまれば B の値がきまるという関係がある時，変数 A, B の間に**函数関係**があるといい，変数 B を変数 A の**函数**という。

前ページの換算式で，x の値がきまると，y の値がきまるから，y は x の函数であるということができる。そして

$$y=1.8x+32$$

という式が，その函数関係を表わす式である。

種々の値をとると考えられる量を表わす文字を変数というのに対して，一定の値をとると考えられる量を表わす文字を**定数**という。

問2. 円の面積は直径の函数と考えられる。直径 $x\,cm$ の円の面積を $y\,cm^2$ として，x, y の函数関係を表わす式を書け。

問3. 長さ $6.89\,cm$ のゼンマイがある。このゼンマイが分銅 $1\,g$ について $0.33\,cm$ 伸びるとすると，分銅 $x\,g$ の時の長さを $y\,cm$ とすれば，y は x の函数であるといえるか。もし，y が x の函数であるならば，その函数関係を式に書き表わせ。

問4. 8% の食塩水が $500\,g$ ある。これを濃くするために水分を蒸発させる時，$x\%$ の食塩水にするためには，$y\,g$ の水を蒸発させなければならないとする。この場合に，y は x の函数であるといえるか。もし，y が x の函数であるならば，その函数関係を式に書き表わせ。

問5. 矩形の面積は，縦，横の長さの函数である。縦，横がそれぞれ $x\,m$, $y\,m$ ある矩形の面積を $z\,m^2$ として，その函数関係を式に書き表わせ。

問6. 預金の利息は，元金と利率と預け入れの期間によって定まるから，利息は元金と利率と期間の函数である。

元金を p 円，年利率を r，期間を t 年とし，利息を i 円として，その函数関係を式に書き表わせ。單利法と複利法との両方の場合について考えよ。

x の函数 y があって，y が x の一次式 $ax+b$ で表わされる時，y は x の**一次函数**であるという。特に，a を x の**係数**，b を**定数項**という。

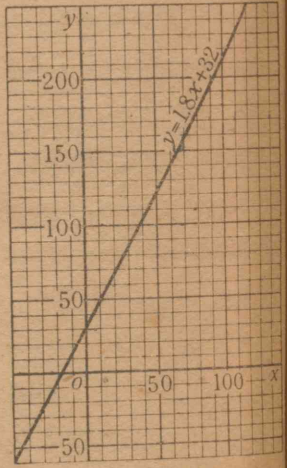
1ページで考えた温度の換算式では，x の係数は 1.8，定数項は 32 である。

上に述べた場合で，定数項 b が 0 であれば，函数関係を示

す式は

$$y=ax$$

となる。この場合には，xの値が2倍，3倍，……になるにつれて，yも2倍，3倍，……になる。つまり，yはxに比例する。yがxに比例すると考えた場合に，xの係数aを比例定数という。



xの函数

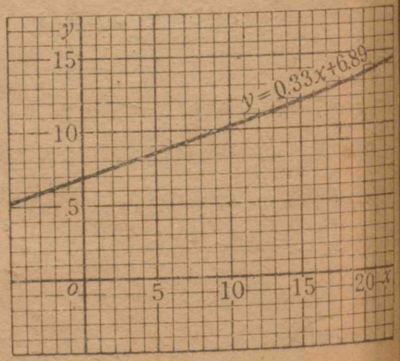
$$y=ax+b$$

で，xの値の変化に應ずるyの値の変化のようすを知るには，x，yの関係を表に表わしてもよいが，グラフに表わしてもよい。

温度計の攝氏と華氏の度数x, yの換算式は

$$y=1.8x+32$$

である。このx,yの関係を示す点は，一直線上に並ぶことがわかる。問3の一次函数についても同様である。



一般に，一次函数のグラフは必ず直線になるかどうかを調べよう。まず，

$$y=ax \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

について考える。

(1)で，$x=0$とすれば，$y=0$となるから，グラフは原点を通る。xの二つの値 x_1, x_2 に應じて，yの値はそれぞれy_1, y_2となったとする。点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)をA_1, A_2とし，A_1, A_2からx軸におろした垂線の足をB_1, B_2とすると

$oB_1=x_1$，　$B_1A_1=y_1$

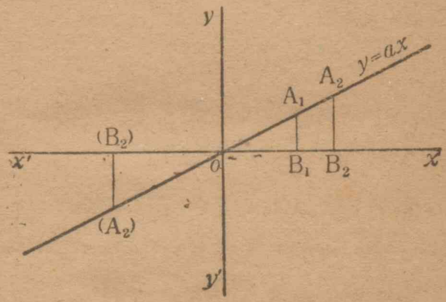
$oB_2=x_2$，　$B_2A_2=y_2$

$y_1=ax_1$，　$y_2=ax_2$

であるから

$$\frac{B_1A_1}{oB_1}=a$$

$$\frac{B_2A_2}{oB_2}=a$$



それ故　$$\frac{B_1A_1}{oB_1}=\frac{B_2A_2}{oB_2}$$

三角形oB_1A_1，oB_2A_2は，角B_1，B_2が共に直角であるような直角三角形であるから，上の比例式によって相似である。したがって，角B_1oA_1と角B_2oA_2とは等しく，oA_1，oA_2はoの同じ側にあって重なるか，反対側にあって一直線となるかのいずれかになる。いずれにしても，A_1, A_2はoと共に一直線上にある。それで，(1)によって定まる一組のx, yの値を座標とする点とoを通る直線を引けば，その他の点はみなこの直線上にあることとなり，(1)のグラフが直線であることが

わかる。

なお，上の研究から，次のことがわかる。

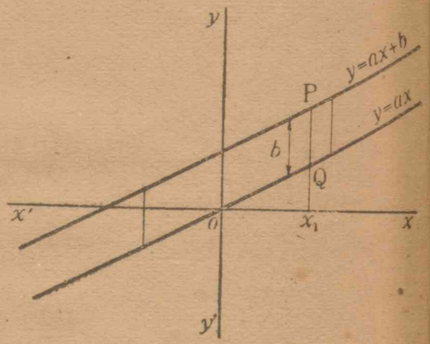
〔1〕 $a>0$ ならば，直線は第一，第三象限にある。

$a<0$ ならば，直線は第二，第四象限にある。

〔2〕 直線が x 軸の正の方向となす角を $\alpha°$ とすれば

$$\tan \alpha° = a$$

である。



次に，一般の一次函数

$$y=ax+b \quad \cdots(2)$$

について考えよう。

(1) と (2) の a の値は等しいとする。(1)と(2)で，x の一つの値 x_1 に應ずる y の値をそれぞれ y', y'' とすると

$$y'=ax_1, \qquad y''=ax_1+b$$

となり

$$y''-y'=b$$

となる。点 (x_1, y'')，(x_1, y') をそれぞれ P, Q とすれば，PQ は x 軸に垂直である。言い換えると，y 軸に平行であり，その線分の長さは b の絶対値に等しい。これは，x の値に関係のないことであるから，(2) のグラフは (1) のグラフを平行移動したものである。その平行移動の方向は，b が正ならば

y 軸の正の方向，b が負ならば y 軸の負の方向であり，平行移動の距離は $|b|$ に等しい。

以上の研究によって，次のことがわかる。

〔1〕 一次函数 (2) のグラフは直線である。

〔2〕 この直線は，y 軸上座標が b であるような点を通る。

〔3〕 この直線の方向は，a によって定まる。直線が x 軸の正の方向となす角を $\alpha°$ とすれば

$$\tan \alpha° = a$$

である。

一次函数 $y=ax+b$ のグラフを，単に**直線 $y=ax+b$** といい，$y=ax+b$ を，その**直線の式**ということがある。b を，この直線の**截片**（せつぺん），a を**勾配**（こうばい）または**方向係数**という。

問7. 一次函数 $y=ax+b$ で，a の値を変えずに，b の値を変えると，そのグラフはどのように変わるか。

問8. 一次函数 $y=ax+b$ で，b の値を変えずに，a の値を変えると，そのグラフはどのように変わるか。

問9. 次の函数のグラフを書け。

(1) $y=2x-3$ (2) $y=-\dfrac{1}{2}x+1$

(3) $x+2$ (4) $-x+3$

問10. 直線 $y=2x-3$ を，y 軸の正の方向に 3 だけ平行移動した直線の式を求めよ。また，y 軸の負の方向に 3 だけ平行移動した直線の式はどうか。

問11. 次の直線の式を求めよ。

(1)　勾配が5で，点 (0, 6) を通るもの。

(2)　勾配が5で，点 (2, 3) を通るもの。

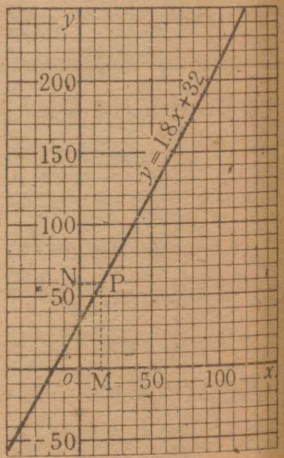
(3)　勾配が $\frac{3}{2}$ で，点 (−2, 4) を通るもの。

(4)　勾配が $-\frac{1}{3}$ で，点 (1, −5) を通るもの。

問12.　次の各点を通り，直線 $y=7x-5$ に平行な直線の式を求めよ。

(1) (4,1)　(2) (2,2)　(3) (−2, −5)　(4) (−3,0)

§2.　一次方程式



温度計で，華氏 59° の時に，摂氏で何度になるかを求めよう。これは

$$y=1.8x+32$$

で，$y=59$ となるような x の値を求めることになる。上の等式で，$y=59$ とすれば

$$1.8x+32=59$$

この式の x の値を求めるには，二つの方法が考えられる。その一つはグラフを用いる方法であり，他の一つは，計算による方法である。

まず，グラフによって求めるには，y 軸上座標が 59 である点Nを通って x 軸に平行に引かれた直線が，直線 $y=1.8x+32$ と交わる点Pから x 軸に垂線をおろし，その垂線の足Mの x 座標を読みとればよい。

また，計算によって求めるには，次のようにする。

$$1.8x+32=59$$

両辺から 32 を引くと

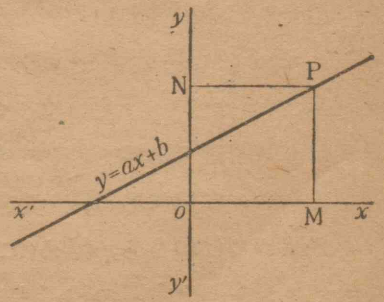
$$1.8x=27$$

両辺を 1.8 で割ると

$$x=15$$

したがって，華氏で 59° の温度は，摂氏では 15° になることがわかる。

一般に，一次函数 $y=ax+b$ で，y の値が定まった値 k となるような x の値を求めるには，次のようにすればよい。



〔1〕　グラフによって求める方法。

まず，直線 $y=ax+b$ を書く。y 軸上座標が k である点Nを通って x 軸に平行な直線が，直線 $y=ax+b$ と交わる点 P から x 軸に垂線をおろし，その足 M の x 座標を読みとる。

〔2〕　計算によって求める方法。

$$ax+b=k$$

両辺から b を引くと

$$ax=k-b$$

両辺を a で割って

$$x=\frac{k-b}{a}$$

とする。

問 1. 一次函数 $y=4x+10$ で，y の値を 0 にする x の値を求めよ。10 にする x の値はどうか。-5 にする x の値はどうか。

問 2. 次の各函数の値を，括弧内に示されている値にするための x の値を求めよ。

(1) $y=4x-9$ $(y=3)$ (2) $y=10-1.5x$ $(y=1)$

(3) $0.4x+20.5$ (23.7) (4) $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}$ $\left(\frac{3}{5}\right)$

二つの式や数が等しいことを表わす式を**等式**という。

$1.8x+32=59,\quad 7t+4=2t-6$

$x+y=y+x,\quad (x+y)+z=x+(y+z)$

などはみな等式である。等号の左側にある式を，その等式の**左辺**といい，右側にある式を**右辺**という。

上の四つの例のうち，始めの二つは，x や t がどんな値をとっても，左辺と右辺の値が等しくなるというわけには行かないが，あとの二つでは，x, y, z がどんな値をとっても，両辺の値が等しい。この始めの二つのような等式を**方程式**といい，x や t を**未知数**という。また，あとの二つのような等式を，方程式と区別する必要がある時は**恒等式**という。

方程式の両辺が，未知数について一次式である時（$y=3$ の場合に，これを $y=0\cdot x+3$ とみて，$y=3$ を一次式と考えることがある），この方程式を**一次方程式**という。

次に，一次方程式の解き方を例によって示そう。

〔例 1〕 方程式 $7x+4=2x-6$ を解け。

〔解 1〕 グラフによって解くこと。

$7x+4$, $2x-6$ は共に x の一次函数で，そのグラフは直線である。この方程式を解くことは，x の適当な値を求めて，その値に対する二つの一次函数 $7x+4$ と $2x-6$ の値が等しくなるようにすることである。したがって，二直線 $y=7x+4$, $y=2x-6$ の交点の x 座標を読みとればよい。

二直線のグラフを書いて，その交点の x 座標を読むと，$x=-2$ となる。

〔解 2〕 計算で解くこと。

$$7x+4=2x-6$$

の両辺から 4 を引くと

$$7x=2x-6-4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

両辺から $2x$ を引くと

$$7x-2x=-6-4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$5x=-10$$

両辺を 5 で割ると $x=-2$ 　　答 $x=-2$

上の解き方では，始めの方程式から (1), (2) と変形して，$x=-2$ となったのである。この場合に，(2) の $-2x$, -4 は，それぞれ始めの方程式の右辺の $2x$, 左辺の $+4$ の符号を変え

て，他の辺に移したものと考えられる。

等式の一方の辺の項の符号を変えて，他の辺に移すことを**移項**という。

この移項という言葉を使って，一次方程式の解き方を説明しよう。

〔例 2〕 方程式 $x+6=10-1.5x$ を解け。

〔解〕 左辺の $+6$, 右辺の $-1.5x$ を，それぞれ移項して

$$x+1.5x=10-6$$

$$2.5x=4$$

両辺を 2.5 で割つて　$x=1.6$　　答 $x=1.6$

上の解き方からわかるように，一次方程式を解くには，まず，移項によって，未知数を含む項と既知数の項とを，等号の両辺に分けて，$ax=b$ の形の等式とする。次に，両辺を x の係数で割って $x=\dfrac{b}{a}$ とすればよい。

方程式を解くには，等式についての次の重要な性質を用いている。

〔A〕 等式の両辺に同じ数または式を加えても，やはり等式が得られる。

〔B〕 等式の両辺から同じ数または式を引いても，やはり等式が得られる。

〔C〕 等式の両辺に同じ数または式をかけても，やはり等式が得られる。

〔D〕 等式の両辺を，0 でない同じ数または値が0とならない同じ式で割っても，やはり等式が得られる。

問3. 次の方程式をグラフで解け。また，計算で解け。

(1) $3x=x-4$　　(2) $8-5x=7x+12$

(3) $\dfrac{2}{3}x=\dfrac{1}{6}x+2$　　(4) $\dfrac{2}{5}x-2=3-\dfrac{13}{5}x$

(5) $1.28x+3.2=1.2x+3.24$

問4. 次の方程式を解け。

(1) $3x-2+2x=x+6$　　(2) $3x-6=14-x$

(3) $2.8-6.5x=7-3x$　　(4) $3.3x-8+2.5x=4-1.4x$

(5) $4(x+2)-2x+6=17$　　(6) $2(13-x)=28(x-9)$

(7) $\dfrac{2}{5}(x-3)-2=1\dfrac{3}{5}-2\dfrac{3}{5}x$

(8) $5-4(x-3)=x-2(x-1)$

(9) $15-7x+\dfrac{1}{3}=4-\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+12$

(10) $3x-\sqrt{2}=5\sqrt{2}-x$　　(11) $8x-4(6-x)=25$

(12) $2(x-6)=3(x+8)-17$

(13) $12(x-7)-4(13-x)=x-16$

(14) $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-6x}{2}=\dfrac{1}{6}$　　(15) $\dfrac{2x-3}{9}+\dfrac{x+7}{6}=\dfrac{5x+7}{18}$

問5. 次の各組の直線の交点の座標を求めよ。

(1) $y=2x+3$,　$y=x+5$

(2) $y=6x+1$,　$y=3x-2$

(3) $y=4x+7$,　$y=-2x-2$

問6. 5 dl のアルコールを入れたびんがある。その重さは 1645 g で，これから 2 dl のアルコールを出したら，重さが 1487 g になった。このアルコール 1 l の重さは何ほどか。

問7. 8 %の食塩水が 150 g ある。これを水で薄めて 6 %の食塩水にするには，水をどれほど入れればよいか。

問8. 8 %と 5 %の食塩水がある。この二つの食塩水をまぜて，7 %の食塩水 600 g をつくるには，どんな割合にまぜればよいか。

方程式を應用して問題を解くには，次のようにすればよい。

〔1〕 何を求めるかを考える。

〔2〕 適当に未知数を選ぶ。

〔3〕 未知数を使って，問題の意味を方程式で表わす。

〔4〕 その方程式を解く。

〔5〕 その値が問題に適するかどうかを考えて答を定める。

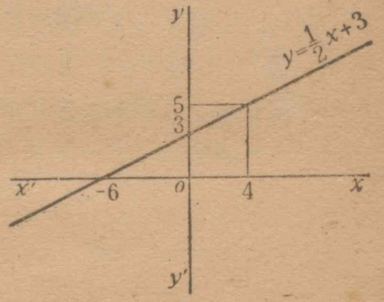
§3. 一次不等式

前節では，一次函数 $y=ax+b$ で，y の値を定まった値 k にする x の値の求め方を考えた。本節では，y の値をある定まった値 k より大きくするとか，または，小さくするためには，x の値はどのような範囲にあればよいかを調べよう。

二つの数または式の値の大小関係を表わすのに，不等号 $>$ または $<$ を用いる。

a が b より大きいことを $a>b$ または $b<a$ と書き表わす。また，a が正の数であることを表わすには $a>0$ または $0<a$ と書き，負の数であることを表わすには $a<0$ または $0>a$ と書く。

一次函数 $y=\frac{1}{2}x+3$ のグラフによって，次のことがわかる。



$x>4$ ならば $y>5$

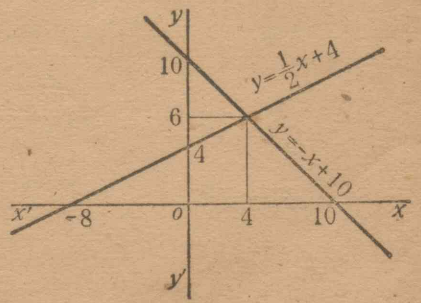
$x<4$ ならば $y<5$

それで，$\frac{1}{2}x+3$ の値を 5 より大きくするためには，x の値が 4 より大きければよい。

また，二つの一次函数

$y=\frac{1}{2}x+4,$

$y=-x+10$



のグラフの交点は (4, 6) で，$x>4$ ならば，

$\frac{1}{2}x+4>-x+10$

であり，$x<4$ ならば，$\frac{1}{2}x+4<-x+10$ である。

不等式 $\frac{1}{2}x+3<5$, $\frac{1}{2}x+4>-x+10$ のように，不等式の両辺が共に x の一次式である時，これを**一次不等式**という。

不等式に適する x の値は，方程式の場合のように，ある特別な値ではなくて，一般には，あるきまった範囲内の値である。この範囲を定めることを，**不等式を解く**という。

上の例でもわかるように，不等式はグラフで解くことができる。

一般に，不等式 $ax+b<a'x+b'$ を解くには，二直線 $y=ax+b$ と $y=a'x+b'$ との交点の x 座標を求め，グラフからその左右いずれであるかを定めればよい。

問 1. 次の不等式をグラフによって解け。

(1) $3x-1>0$ (2) $-\frac{1}{3}x-2>0$

(3) $3x-2>5$ (4) $5>3x-1$

(5) $2x+1<-x+7$ (6) $x>-2x+6$

問 2. 次の二つの不等式が同時に成り立つような x の範囲を求めよ。

(1) $2x+2<0$, $-\frac{1}{2}x-3<0$

(2) $3x+1>0$, $-\frac{1}{3}x+1<0$

不等式は，計算によっても解くことができる。まず，不等式の性質を調べよう。

a が b より大きいことは，$a-b$ が正の数であることと同じである。

$a>b$ ならば $a-b>0$; $a-b>0$ ならば $a>b$

したがって，二つの数の大小関係は，差が正であるか負であるかを調べればよい。このことを基にして，不等式の性質を調べてみよう。

〔性質 1〕 $a>b$ ならば $\boldsymbol{a+c>b+c}$, $\boldsymbol{a-c>b-c}$

〔証明〕 まず，$a>b$ ならば $a-b>0$ であるから

$(a+c)-(b+c)=a-b>0$ 故に $a+c>b+c$

$(a-c)-(b-c)=a-b>0$ 故に $a-c>b-c$

この性質は，次のように述べることができる。

不等式の両辺に同じ数を加えても，また，両辺から同じ数を引いても，不等号の向きは変わらない。

〔性質 2〕 $a>b$, $c>0$ ならば $\boldsymbol{ac>bc}$, $\boldsymbol{\frac{a}{c}>\frac{b}{c}}$

〔証明〕 まず，$a>b$ ならば $a-b>0$ である。$c>0$ は c が正の数であることを表わす。二つの正の数の積は正の数であるから

$$(a-b)c>0$$

ところで，$(a-b)c=ac-bc$ であるから

$ac-bc>0$ 故に $ac>bc$

次に，ある数を c で割ることと，その数に $\frac{1}{c}$ をかけることとは同じである。また，$c>0$ ならば $\frac{1}{c}>0$ であるから

$a>b$ ならば $a\times\frac{1}{c}>b\times\frac{1}{c}$ 故に $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

この性質は，次のように述べることができる。

不等式の両辺に同じ正の数をかけても，また，両辺を同じ正の数で割っても，不等号の向きは変わらない。

〔性質3〕 $a>b$, $c<0$ ならば, $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

〔証明〕 $a>b$ ならば $a-b>0$ で, $a-b$ は正の数である。$c<0$ は c が負の数であることを表わす。正の数と負の数の積は負の数であるから

$$(a-b)c<0$$

このことから $ac-bc<0$ 故に $ac<bc$

前と同じようにして $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

この性質は，次のように述べることができる。

不等式の両辺に同じ負の数をかけたり，また，両辺を同じ負の数で割ると，不等号の向きは反対になる。

〔例〕 上に述べたことによって，問 1. (5) を解け。

〔解〕 $2x+1<-x+7$ ……………………(1)

両辺に x を加えると

$$2x+1+x<7$$

両辺から 1 を引くと

$2x+x<7-1$ ……………………(2)

故に $3x<6$

$3>0$ であるから，両辺を 3 で割ると

$$x<2$$

答 $x<2$

上の解き方で，(1), (2) を比較してみると，(1) の右辺の $-x$, 左辺の $+1$ が，それぞれ符号を変えて，(2)の左辺，右辺に移されたとみられる。等式の場合と同様に，不等式でも，一方の辺にあるものを，符号を変えて他の辺に移すことを移項という。

不等式を解くには，まず，移項によって，未知数を含む項と既知数の項とを不等号の両辺に分けて

$$ax>b \quad \text{または} \quad ax<b$$

の形にする。次に，a の値の正，負を考えて，両辺を a で割ればよい。その時に，不等号の向きは，a の符号が正ならばそのまま変えなくてよいが，負ならば変えなければならない。

問3. 問 1，問 2 の不等式を計算で解け。

問4. 次の不等式を解け。

(1) $x>8-5x$ (2) $2x>3+6x$

(3) $7x+4>2x-6$ (4) $x+2\geqq 2x-3$

(5) $0.2x+5<x-3$ (6) $\frac{4}{3}x+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}$

(7) $\frac{1}{3}x-6<\frac{1}{7}x-2$ (8) $3x+\frac{x+1}{5}<\frac{6-4x}{15}$

問5. 二つの数 a, b が同符号の数であることを，$ab>0$ と表わしてよいか。a, b が異符号の数であることは，どのように表わされるか。

§4. 連立方程式

二つの変数 x, y の間に

$x-3y=4$ ……………………(1)

の関係があるとする。この等式は次の各組の x, y の値によって満足させられるが，この式に適合しない x, y の値の組も無数にある。したがって，上の等式も方程式といえる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	…
y	…	$-\frac{7}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	…

方程式 (1) で，y を x の函数と考え，y を x の式で表わすと

$$y=\frac{1}{3}(x-4)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる。(1) から (2) を導くことを (1) を y について**解く**という。(1) を x について解けば

$$x=3y+4$$

となる。

上に作った表の各組の値を座標とする点は，一直線上に並ぶ。したがって，方程式 $x-3y=4$ をこの直線の方程式という。

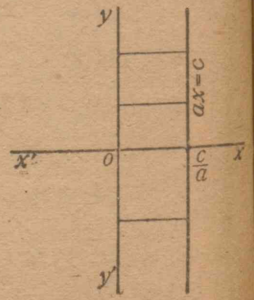
一般に

$$ax+by=c$$

で，$b\neq 0$ であれば，これを y について解くと

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

となるから，方程式 $ax+by=c$ のグラフは直線となることがわかる。



$b=0$ ならば，y の項が含まれないことになって，y の値が何であっても，$x=\frac{c}{a}$ となる。しかし，$ax=c$

は，$ax+by=c$ の特別の場合であることから，$ax=c$ を $ax+0\cdot y=c$ とみて，これに適する $x,\ y$ の値の組が $ax=c$ に適するものと考えると，上の方程式のグラフは，x 軸上で座標が $\frac{c}{a}$ である点を通って y 軸に平行な直線であるといえる。

以上でわかったことを，次のようにまとめることができる。

〔1〕 方程式 $ax+by=c$ のグラフは直線である。

〔2〕 特に，$a=0$ ならば，その直線は x 軸に平行であり，$b=0$ ならば，その直線は y 軸に平行である。

問1. 次の方程式のグラフを書け。また，それらの直線の勾配を言え。

(1) $x-3y=4$　　(2) $2x+5y=30$

(3) $3x-2y=9$　　(4) $4x+7y=-2$

(5) $3x-2y=8$　　(6) $5x+3y=7$

問2. 問1で，(1)，(2) の交点の座標を求めよ。(3) と (4) とではどうか。(5) と (6) とではどうか。

問3. 直線 $2x-3y=5$ に平行で，点 $(0,\ 2)$ を通る直線の方程式を求めよ。また，点 $(5,\ -4)$ を通る直線，$(-3,8)$ を通る直線の方程式を求めよ。

問4. 二直線 $a_1x+b_1y=c_1$，$a_2x+b_2y=c_2$ が平行となるための條件を求めよ。

問1の (1)，(2) の交点の座標は，方程式 (1) と (2) の両方

に同時に適する x, y の値であるとみられる。今，これを計算によって求めてみよう。

両直線の交点の座標を (x', y') とすれば，x', y' は未知の数で，以下の計算によって求められるはずのものである。

x', y' は (1)，(2) に適するのであるから

$$x'-3y'=4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

$$2x'+5y'=30 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2')$$

$(1')$ を x' について解くと

$$x'=3y'+4$$

これを，$(2')$ に代入すると

$$2(3y'+4)+5y'=30$$

これを解くと　　　　$y'=2$

よって　　　　　　　$x'=10$

それで，(1)，(2) を同時に満足させる x, y の値は，それぞれ 10，2 である。

上の解法で，x', y' は，変数 x, y そのものではなく，直線 (1)，(2) の交点の座標としてきまった値である。ただ，その値がわかっていないので，未知数と呼ばれるのである。しかし，上の解法で，未知数の記号としては，どんな文字を用いても差支えないから，変数の記号 x, y をそのまま未知数の記号と考えて，次のように計算してもよい。

(1) を x について解くと

$$x=3y+4$$

これを (2) に代入すると

$$2(3y+4)+5y=30$$

これを解くと　　　　$y=2$

よって　　　　　　　$x=10$

方程式 $ax+by=c$ は，始め変数 x, y の間の函数関係を表わす式と考えたが，上のように，二つの未知数 x, y の間にあらかじめ知られている関係を示す式であるとも考えられる。このように考えて，$ax+by=c$ を，二つの未知数 x, y に関する**方程式**ともいう。

二つの未知数に関する方程式を**二元方程式**という，これに対して，一つの未知数に関する方程式を**一元方程式**という。

第2節で考えたような方程式は一元方程式である。もちろん，三元，四元などの方程式も考えられる。

上に考えた二直線 $x-3y=4$ と $2x+5y=30$ の交点の座標を求めることは，二つの未知数 x, y についての二つの方程式 $x-3y=4$，$2x+5y=30$ を一組にして，その両方に適する x, y の値を求めることであるとみられる。

このように，二元方程式二つを一組として考えた場合に，これを**二元連立方程式**といい，両方に適する未知数の値をきめることを，**連立方程式を解く**という。

もちろん，三元，四元などの連立方程式も考えられる。

次に，二元連立方程式を解く種々な方法を考えよう。例として，上に考えた連立方程式をとる。

〔例〕 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x-3y=4 \cdots\cdots(1) \\ 2x+5y=30 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

〔解1〕 (1) を x について解くと

$$x=3y+4 \cdots\cdots(3)$$

これを (2) の x に代入すると

$$2(3y+4)+5y=30 \cdots\cdots(4)$$

$$11y=22 \quad 故に \quad y=2$$

この値を (3) に代入すると

$$x=10$$

答 $x=10,\ y=2$

〔解2〕 (1) を x について解くと

$$x=3y+4 \cdots\cdots(3)$$

(2) を x について解くと

$$x=\frac{30-5y}{2} \cdots\cdots(5)$$

(3) と (5) の x は同じ値であるから

$$3y+4=\frac{30-5y}{2} \cdots\cdots(6)$$

$$6y+8=30-5y$$

$$11y=22 \quad 故に \quad y=2$$

この値を (3) の y に代入して $x=10$

〔解3〕 (1)の両辺に2をかけると

$$2x-6y=8$$

この両辺から(2)の両辺を引くと

$$-11y=-22 \quad 故に \quad y=2$$

この y の値を(1)に代入すると

(1)×2	$2x-6y=8$	
(2)	$2x+5y=30$	(−
	$-11y=-22$	

$$x-6=4$$

$$x=10$$

上の三つの解法を調べよう。

〔解1〕は，(1) を x について解き，それを (2) の x に代入して y に関する一元方程式 (4) を作り，これを解いて y の値を求め，それから x の値を求めたのである。

まず，二つの方程式の一方を一つの未知数 x（または y）について解き，次に，これを他の方程式の x（または y）に代入して y（または x）だけの方程式を作る。このようにして解く方法を**代入法**という。

〔解2〕は，(1) 及び (2) をいずれも x について解き，それを等しいとおいて，y だけの方程式 (6) を作り，これを解いて y の値を求め，それから x の値を求めたのである。

まず，両方の方程式を x（または y）について解き，次に，それによって y（または x）だけの方程式を作る。このようにして解く方法を**等置法**という。

〔解3〕は，(1) の両辺に2をかけて x の係数が (2) と等しくなるようにし，引算によって y だけの方程式を作って y の値を求め，それによって x の値を求めたのである。

まず，二つの方程式の両辺に適当な数をかけて x（または y）の係数を等しくする。次に，左右両辺同志の寄算または引算によって，y（または x）だけについての方程式を作る。このようにして解く方法を**加減法**という。

以上三つの解法に共通なことは，まず，二つの未知数のうちの一方だけに関する方程式を作り，次に，これを解いてその値を定め，それから他の未知数の値を求めることである。

二つの方程式から適當な方法で一つの未知数を含まない方程式を作ることを，その未知数を**消去する**という。代入法も，等置法も，加減法も，つまりは未知数を消去するための手続である。どの未知数を消去するかは，なるべく計算の手数を省くように考えてするのがよい。

問5. 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=-x+4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2y=6x+5 \\ 5x+10y+7.5=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y=x-7 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-5y=17 \\ 4x+3y=22 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x+3y=21 \\ 7x-3y=6 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 11x-3y=9 \\ 4x-3y=-12 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 3x+4y=22 \\ 2x-y=1 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 3x+2y=9 \\ 9x-8y=8 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 5x+8y=-1 \\ 7x+6y=9 \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=\frac{31}{10} \\ \frac{3}{5}x-\frac{1}{2}y=\frac{37}{20} \end{cases}$

問6. 二つの点 (3, 5), (4, 8) を通る直線の方程式を $y=ax+b$ とし，a, b についての連立方程式を作れ。

次に，その直線の方程式を求めよ。

問7. 次の各組の二点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) (3, 4), (7, 10)　　(2) (0, 1), (3, 4)

(3) (4, 1), (7, 3)　　(4) (x_1, y_1), (x_2, y_2)

問8. ある会社で買入れた債券の買價は 2,2000 円であった。額面 15 円で賣出價格 10 円の割增金附貯蓄債券と，額面 10 円で賣出價格 7 円の割引國庫債券とを合わせて，その額面総額は 3,2500 円であった。おのおの幾枚ずつであったか。

問9. 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+2y-z=15 \\ 4x+3y=24 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-2y+3z=20 \\ 2x+3y-4z=-1 \\ 3x-2y+5z=40 \end{cases}$

雜　　題

1. 次の一次函数のグラフを書け。

(1) $y=3x+4$　　(2) $y=-7x+4$

(3) $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}$　　(4) $y=0.4x-2.4$

(5) $4-2.5x$　　(6) $\frac{1}{5}x-2$

2. 次の方程式のグラフを書け。

(1) $3x-4y=5$　　(2) $0.5x+1.6y=3.2$

(3) $\frac{x}{3}-\frac{3}{4}y+\frac{5}{6}=0$　　(4) $2y=10-4x$

3. 直線 $6x-2y=3$ に平行で，次のおのおのの点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $(0,\ -1)$ (2) $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ (3) $(-1.5,\ -2)$

(4) $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{4}\right)$ (5) $(x_1,\ y_1)$

4. 次の各組の点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $(-2,\ 4),\ (5,\ -3)$ (2) $(-3,\ 0),\ (6,\ 3)$

(3) $(1,\ 2),\ (-3,\ 6)$ (4) $(0,\ 4),\ (4,\ 0)$

(5) $(3,\ 2),\ (-2,\ -5)$ (6) $\left(-1,\ \dfrac{3}{4}\right),\ \left(\dfrac{2}{5},\ -2\right)$

5. 空氣中では，音の速さは大体溫度だけの函数であるとみられる。空氣の溫度が 0°C の時，音の速さは約 331 m/秒で，溫度が 1°C 增すと，音の速さは約 0.6 m/秒 の割合で增す。x°C の時の音の速さを y m/秒 として，x, y の函数關係を表わす式を求めよ。

6. 圧力を変えなければ，氣体の体積は溫度だけの函数である。0°C の時 v_0 m^3 の体積をもつ氣体は，t°C の時，どれほどの体積となるか。氣体の体積は 1°Cの溫度の上昇に伴なって，その $\dfrac{1}{273}$ だけ增すことが実驗によって知られている。

7. 大氣の溫度は，上空へ昇るにしたがって低くなる。実測の結果によると，上空 11 km までは大体 1 km について 6°C の割合で低くなり，それ以上の上空では，ほとんど変わらないことがわかっている。地表の大氣の溫度が 15°C の時，上空 x km の大氣の溫度を y°C として，x, y の關係を式で表わせ。

8. 一次函数 $y=ax+b$ で，x の値が x_1 から x_2 まで変化する時，y の値は y_1 から y_2 まで変化するとする。この時，x の値の変化量 x_2-x_1 と，それに應ずる y の値の変化量 y_2-y_1 との間に，どのような關係があるか。また，x の値の增加に伴って，y の値が增すか減るかを調べよ。

9. 次の方程式を解け。

(1) $8(x-1)+7(x-2)=20x-7$

(2) $x+\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{5x+3}{2}$

(3) $y-7+\dfrac{y}{2}=\dfrac{3y-10}{5}-5$

(4) $\dfrac{u}{2}+\dfrac{u+1}{7}=u-2$

(5) $\dfrac{5x-7}{2}-\dfrac{2x+7}{3}=3x-14$

(6) $\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{5}(x+2)=\dfrac{1}{3}x-1$

(7) $3(2x+5)-5(3x-4)=3(x+5)-10$

(8) $0.2(1.4y-3.5)=0.7(2.4y-1.8)$

(9) $\dfrac{8+z}{6}+\dfrac{7-2z}{8}=\dfrac{5z}{12}$

(10) $\dfrac{4}{x}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{7}{x}$

10. 二直線 $y=ax+b,\ y=a'x+b'$ の交点の座標を求めよ。また，この二直線の位置關係を a, b, a', b' によって言い表わせ。

11. 摂氏と華氏とで読みの値が同じになるような温度は何度か。

12. $4\,km$ 隔たった停車場に行くのに，始めは毎分 $60\,m$ の速さで歩いたが，遅くなりそうなので，途中から毎分 $85\,m$ の速さで歩いて，50 分で停車場についた。速さを変えてからどれほど歩いたか。

13. 純良な牛乳 $1\,l$ の目方は約 $1.032\,kg$ である。ある牛乳 $2.5\,l$ の目方が $2.572\,kg$ であったとすると，この牛乳にはどれほどの水がまぜてあるか。

14. 次の不等式を解け。

(1) $-2x>x+6$　　(2) $-2x+3<x+1$

(3) $x>8-5x$　　(4) $3x>5+6x$

(5) $2x+7>5x-2$　　(6) $0.2x+5<1.4x-1$

(7) $0.1x-3<0.5x+6$　　(8) $x-\frac{2}{3}<3(x-1)+\frac{1}{2}$

(9) $3x+8\geqq 5x+2$　　(10) $7x-6\leqq 2(x+4)$

(11) $ax+b>a'x+b'$

15. $a>b,\ c>d$ である時，次の不等式は正しいということができるか。

(1) $a+c>b+d$　　(2) $a-c>b-d$　　(3) $ac>bd$

16. 三角形の二辺の和は他の一辺より大きく，二辺の差は他の一辺より小さい。三辺の長さを $a,\ b,\ c$ として，上のことを不等式で表わせ。

17. 次のおのおのの一次函数で，x の値が括弧内に示されている範囲にある時，函数の値はどのような範囲にあるか。

(1) $4x-3\ (x<-2)$　　(2) $0.6x+8.9\ (x>3)$

(3) $\frac{3}{5}(x-7)+\frac{2}{3}\ (x\leqq 4)$　　(4) $\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+6\ (x\geqq 15)$

18. 建築法規によると，道路に面して建物を建てる場合に，その高さは前面の道路の幅の 1.25 倍に $8\,m$ を加えたものより低くしなければならない。道路の幅を $x\,m$，建物の高さを $y\,m$ として，y と x との関係を式で表わせ。

高さ $24\,m$ の建物を道路に面して建てるには，どんな幅の道路を選ばなければならないか。

19. 一次函数 $y=2x-3$ のグラフは直線で，この直線によって平面は二つの部分に分けられる。この二つの部分について次のことを考えよ。

(1) 原点のある側の点の x 座標と y 座標の間には，どのような関係があるか。

(2) 反対側ではどうか。

20. 次の直線について上と同様なことを考えよ。

(1) $y=-x+4$　　(2) $y=-0.6x-1.8$

21. 次の不等式に適する $x,\ y$ の値の組で定まる点は，どのような範囲にあるか。これを図に示せ。

(1) $2y>3x-7$　　(2) $y<3x-9$

(3) $2x-y-5<0$　　(4) $4x+y>7$

y′時が大なる時 上

22. 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x=2y \\ y-2x=3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+2y=9 \\ 9x-8y=8 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ 4x-5y=-20 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x-3y=3x+5y \\ 6x-4y=15 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 0.6y-0.2x=1 \\ 1.8y-0.5x=4 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 8m+7n=15-\dfrac{m-n}{3} \\ 5n-6m=10+\dfrac{m-n}{3} \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 5(p-q)=-35 \\ 7q-6(p+q)=-37 \end{cases}$

(9) $x+y-4=2x+3y-11=3x+2y+12$

(10) $\begin{cases} \dfrac{3}{u}+\dfrac{2}{v}=1 \\ \dfrac{5}{u}-\dfrac{3}{v}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$　　(11) $\begin{cases} 6x+2y+3z=42 \\ 5x-3y+2z=20 \\ 2x-9y-4z=-25 \end{cases}$

(12) $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 3x-4y+2z=1 \\ 5x+6y-3z=8 \end{cases}$　　(13) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x+6z=56 \\ 4y-x+6z=28 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} u+v+w=1 \\ v=u-w \\ w=v-u \end{cases}$　　(15) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=19 \\ \dfrac{7}{x}+\dfrac{6}{y}-\dfrac{1}{z}=43 \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{y}+\dfrac{2}{z}=3 \end{cases}$

23. 連立方程式 $a_1x+b_1y=c_1$, $a_2x+b_2y=c_2$ を解け。また，二直線 $a_1x+b_1y=c_1$, $a_2x+b_2y=c_2$ の位置の関係は，a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 によって，どのように表わされるかを研究せよ。

24. ある学校の生徒は 1155 人で，これを前年にくらべると 3.75% の減少に当たる。これを細別すると，通学生は 5% の増加，寄宿生は 30% の減少となる。現在の通学生及び寄宿生はおのおの幾人か。

25. ある村で，昨年 1560 石の米がとれた。今年は村内の三部落が競って増産につとめたため，各部落とも同額の増収があったが，これは甲部落では 8%，乙部落では 4%，丙部落では 6% の増収に当たる。各部落の今年の収穫高を求めよ。

26. 黄銅は銅と亜鉛との合金である。黄銅の比重を 8 より大きくするには，銅と亜鉛をどのような割合でまぜるとよいか。但し，銅・亜鉛の比重はそれぞれ 8.93, 7.14 である。

27. 二直線 $2x+y=5$, $3x-y=10$ は，平面を四つの部分に分ける。この四つの各部分を不等式で書き表わせ。

28. ある家庭で，四月から五月にかけて，主食が次のように配給された。

第一回　15 日分として，米 24.9 kg，乾しうどん 6 束(たば)。

第二回　10 日分として，米 10 kg，小麦粉 8 kg。

第三回　6 日分として，小麦粉 8.4 kg，食パン 8 斤。

第四回　10日分として，米 2 kg，小麦粉 14.2 kg，食パン 6 斤。

乾しうどん 1 束，小麦粉 1 kg，食パン 1 斤は，それぞれ米幾グラムに換算されて配給されたか。

第二章 式の計算

§1. 式の加減

一次函数 $y=ax+b$ の右辺 $ax+b$ は，ax と b との二つの**項**を加え合わせたものである。また，$a^2b+x^2y-12ax^3+35xy^2$ も，a^2b, x^2y, $12ax^3$, $35xy^2$ を加減してできたものである。

このような式を**整式**という。項が二つ以上ある整式を**多項式**といい，特に，項が一つのものを**単項式**という。

単項式は，幾つかの数及び文字の積である。また，多項式は，おのおのの項の前にある加減の記号を，その項の符号とみて，それらの項の和であると考えられる。

項のうち，係数だけ異るものを**同類項**という。

例えば，$5a$, $-3a$, a は同類項であり，$\sqrt{3}a^2bc^3$, $15a^2bc^3$, $-12a^2bc^3$ も同様に a^2bc^3 について同類項である。

多項式が同類項を含む時，その同類項をまとめることを，**同類項を簡約する**という。例えば

$$35a^2b+15xy-12a^2b+a^3-xy+14a^2b-50a^2b-8a^3$$

で，$35a^2b$, $-12a^2b$, $14a^2b$, $-50a^2b$ は同類項で，これを加え合わせると，$-13a^2b$ となる。また，$15xy$, $-xy$；a^3, $-8a^3$ もそれぞれ同類項で，これを加え合わせると，それぞれ $14xy$, $-7a^3$ となる。したがって，始めの式は

$$-13a^2b+14xy-7a^3$$

と直すことができる。

同類項を式中の特定な文字についてまとめる場合が多い。この場合には，それ以外の文字で，その式に含まれている文字は，既知の係数とみられる。例えば

$$5a^2x-7b^2x+c^2x$$

を x について同類項をまとめると，$5a^2$, $-7b^2$, c^2 はすべて係数であるとみられる。したがって，始めの式は

$$(5a^2-7b^2+c^2)x$$

とまとめることができる。

問1. 次の式を，x の冪（べき）についての式と考え，同類項をまとめて簡単な式に書き表せ。

(1) $bcx-cax+abx$　　(2) $x^2-ax-c^2x^2-bx+bx^3$

(3) $2ax-3bx^2-2bx+2cx^2+1$

上のようにして同類項をまとめておけば，式を取り扱うのに便利である。

式を加えるには，次に示すいずれかの方法で計算すればよい。

〔例1〕 $5x^2+6x+3$ と $2x^2-3x-4$ とを加えよ。

〔解1〕

$$\begin{aligned}&5x^2+6x+3+(2x^2-3x-4)\\&=5x^2+6x+3+2x^2-3x-4\\&=5x^2+2x^2+6x-3x+3-4\\&=7x^2+3x-1\end{aligned}$$

〔解 2〕

$$\begin{array}{rl} & 5x^2+6x+3 \\ +) & 2x^2-3x-4 \\ \hline & 7x^2+3x-1 \end{array}$$

〔解 1〕に示した方法で計算する場合には，まず，x^2 の係数をみて加え合わせ，続いて，x の係数，定数をみてそれぞれ加え合わせるがよい。

$2x^4+5x^3-3x^2+x+7$ のように，項を，冪の指数が次々に小さくなる順に並べてある場合に，この多項式は**降冪の順**に書いてあるという。また，$7+x-3x^2+5x^3+2x^4$ のように，項を，冪の指数が次々に大きくなる順に並べてある場合に，この多項式は**昇冪の順**に書いてあるという。

多項式は，上の例のように，ある文字に着目して，降冪または昇冪の順に整頓しておくと，式を取り扱うのに都合がよい。

〔例 2〕 次の各式の和を求めよ。

$-4x^2+2x^3-3x+6,\quad 7-x^2,\quad 6x^3+5x+3,\quad -2x^3-2x^2+7$

〔解 1〕 $2x^3-4x^2-3x+6,\ -x^2+7,\ 6x^3+5x+3,\ -2x^3-2x^2+7$

として，次のように計算する。

$$\begin{array}{rl} & 2x^3-4x^2-3x+6 \\ & -x^2+7 \\ & 6x^3+5x+3 \\ +) & -2x^3-2x^2+7 \\ \hline & 6x^3-7x^2+2x+23 \end{array}$$ (答)

〔解 2〕 x^3, x^2, x の係数及び定数を，順次に各整式から選んで，そのおのおのを，次のように加え合わせる。

x^3 の係数は 2, 6, −2 であるから，これを順次に加え合わせると 6 となる。よって x^3 の項の和は $6x^3$ である。

同様にして x^2, x の係数をそれぞれ加え合わせると −7, 2 となるから，x^2 の項の和は $-7x^2$ で，x の項の和は $2x$ である。最後に定数を順に加え合わせると 23 となる。

よって，求める和は $6x^3-7x^2+2x+23$ である。

問2. 次の式の和を求めよ。

(1) $-11a+8a^3-7a^2,\ -6a^2+2a+10,\ 4a^3-9a-5$

(2) $-10x^2-2x+5x^3-12,\ -9x^3+14-7x+x^2,\ -x+5+3x^2$

(3) $xy+x^2-5y^2,\ 3x^2+7y^2-3xy,\ y^2-5x^2+4xy$

式の減法を行うには，次に示すような方法で計算するとよい。

〔例 3〕 $3a^3-2a^2+a-2$ から a^3-2a^2+2a-1 を引け。

〔解 1〕 $3a^3-2a^2+a-2-(a^3-2a^2+2a-1)$

$=3a^3-2a^2+a-2-a^3+2a^2-2a+1$

$=2a^3-a-1$

〔解 2〕

$$\begin{array}{rl} & 3a^3-2a^2+a-2 \\ -) & a^3-2a^2+2a-1 \\ \hline & 2a^3-a-1 \end{array}$$

〔解 3〕 二つの式の a^3, a^2, a の係数及び定数について，順次におのおのの差を求めて，二つの式の差を書いて行く。

問3. 減法についての〔解 1〕の結果から，括弧を取り去る時の符号のきめ方を考えよ。

問　　題

1. 次の式の括弧をはずせ。

(1)　$(a-x+y)-(b-x-y)+(a+b-2y)$

(2)　$2x-\{y-(x-2y)\}$

(3)　$3x-\{9-(2x+7)+3x\}$

2. $14\,mn+(9y-x)$ にどんな式を加えると $8\,mn$ になるか。

また，$3ay-(5b+n)$ にどんな式を加えると $2ay$ になるか。

3. 次の二つの式の和及び差（第一式から第二式を引く）を求めよ。

(1)　$4x+7y+3,\quad -2x+y-4$

(2)　$7x-2y+32,\quad 3x+5y-42$

(3)　$3a-2b+c,\quad a+b+4c$

(4)　$2p-3q+4r+s,\quad p+4q-7r-2s$

(5)　$-\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}$

(6)　$-\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}y,\quad -\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y$

(7)　$\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}z,\quad \frac{3}{2}x-\frac{5}{3}y-\frac{2}{3}z$

(8)　$6.3x+2.5y-0.5z;\quad 1.4x-9.2y+4z$

(9)　$12.3x-7.5y+6.4z,\quad -7.8x-1.5y-2.3z$

(10)　$4x^2-2xy+8y^2,\quad 4x^2-4xy-y^2$

4. 次の式の和を求めよ。

(1)　$5x+3y+z,\quad 3x+2y+3z,\quad x-3y-5z$

(2)　$ax^2+bx-4,\quad 3ax^2-2bx+4,\quad -4ax^2-2bx+5$

(3)　$2p-3q+4r+s,\quad p+4q-7r-2s,\quad 3p+q-3r-4s,$

$2p+2q+6r-3s$

(4)　$p^3+3p^2+4p-6,\quad 1-2p-p^2,\quad p^3-1,\quad 3p^2+2+2p$

(5)
$$\begin{array}{rr} & 5a-3b+3c-\ d \\ & -3a+\ b\qquad +7d \\ & 2a-5b-8c+\ d \\ +) & \underline{-3a+4b+7c-9d} \end{array}$$

(6)
$$\begin{array}{rr} & 7x^3-\ x^2+\ x-1 \\ & -5x^3+4x^2-8x+4 \\ & -2x^3+5x^2+3x-7 \\ +) & \underline{x^3-8x^2+4x-4} \end{array}$$

(7)　$\frac{5}{8}x^2-\frac{1}{3}xy-\frac{1}{4}y^2,\quad -x^2-\frac{2}{3}xy+2y^2,\quad \frac{2}{5}x^2-xy-5y^2$

5. 次の第一式から第二式を引け。

(1)　$17x^2-14xy-15y^2,\quad 16x^2+12xy-9y^2$

(2)　$45x^2y^2-27x^4+81y^4,\quad 73x^4+45y^4+65x^2y^2$

(3)　$27x^3-6x^2y+8y^3,\quad -15x^3+8xy^2-4y^3$

(4)　$-6g^4+7g^3h-4gh^3,\quad -13g^3h+8g^2h^2-6gh^3+5h^4$

(5)　$x^3+3x^2y+y^3+3xy^2,\quad -3y^3-3x^2y+3xy^2$

6. $\mathrm{A}=3a^2-2ab+5b^2,\qquad \mathrm{B}=9a^2-5ab+3b^2$

$\mathrm{C}=7a^2-8ab+5b^2,\qquad \mathrm{D}=11a^2-3ab-4b^2$

である時，次の計算をせよ。

(1)　$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}$　　(2)　$\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}$

(3)　$\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{D}$　　(4)　$\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}+\mathrm{D}$

§2. 式の乗法

単項式の積は，次の例に示したように計算する。

〔例1〕 $(2x)^2\times(-2xy)^3$ を簡単にせよ。

〔解〕 $(2x)^2\times(-2xy)^3=4x^2\times(-8x^3y^3)$

$=4\times(-8)\times(x^2\times x^3y^3)$

$=-32x^5y^3$

問1. 次の計算をせよ。

(1) $x^2y^3\times x^3yz^2$ (2) $5x^3\times(-2yz)^2\times x^2y$

単項式の乗法を基にして，いろいろな式の計算ができる。

〔例2〕 $2a^2(5a+3b)$ を計算せよ。

〔解〕 $2a^2(5a+3b)=2a^2\times5a+2a^2\times3b$

$=10a^3+6a^2b$

〔例3〕 $(a^2-3ab+b^2)(a-b)$ を計算せよ。

〔解1〕 $(a^2-3ab+b^2)(a-b)$

$=a(a^2-3ab+b^2)-b(a^2-3ab+b^2)$

$=a^3-3a^2b+ab^2-a^2b+3ab^2-b^3$

$=a^3-4a^2b+4ab^2-b^3$

〔解2〕

$$\begin{array}{rr} & a^2-3ab+b^2 \\ \times) & a-b \\ \hline & a^3-3a^2b+ab^2 \qquad\qquad \\ & -\ a^2b+3ab^2-b^3 \\ \hline & a^3-4a^2b+4ab^2-b^3 \end{array}$$

問2. 上の二つの例に示した計算の仕方を，数についての

計算の仕方とくらべて，説明せよ。

二つの一次式の積 $(ax+b)(cx+d)$ の計算，あるいはこれの特殊な場合の計算は，式の計算をする場合によく出会う。

まず，重要なものを公式としてあげておく。

〔1〕 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

〔2〕 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

〔3〕 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

〔4〕 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

問3. これらの式が正しいことを，計算によって確かめよ。

〔例4〕 公式を用いて次の掛算をせよ。

$$(x-3)(x+4)$$

〔解〕 公式〔1〕で，$a=-3$, $b=4$ であるから，$a+b=1$, $ab=-12$ として

$$(x-3)(x+4)=x^2+x-12$$

このように，二つ以上の式の積を多項式として書き表わすことを，その式を**展開する**という。

〔例5〕 一辺が 10 m，他の辺が 15 m の矩形の土地の両辺を a m だけ長くすると，面積はどれほど増すか。

〔解〕 $(10+a)(15+a)-10\times15=150+25a+a^2-150=25a+a^2$

即ち，面積は $25a+a^2$ 平方メートルだけ増す。

問　　　　題

1. 次の二式の積を求めよ。

(1)　$-ax^2y$,　$a^3x-5a^2x^2+ax^3-2x^4$

(2)　$-3ab^4$,　$-9a^5+3a^3b^2-4a^2b^3-b^5$

(3)　$5x^2(y^2z)^2$,　$(-3xyz^2)^2$

(4)　$x-2$,　$x-3$　　(5)　$2x-3$,　$x+3$

(6)　$3x-4y$,　$2x+3y$　　(7)　$x+y+z$,　$x-y+z$

(8)　$2x^2-3xy+4y^2$,　$3x^2-4xy-5y^2$

(9)　$x^2+2xy+8$,　$y^2+2xy-8$

(10)　$4x^2+9y^2-6xy$,　$3y^2+x^2+6xy$

2. 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+3)(x+2)$　　(2)　$(x-1)(x-6)$

(3)　$(x-6)(x+2)$　　(4)　$(x+5)(x-2)$

(5)　$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$　　(6)　$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

(7)　$(x+0.6)(x-0.7)$　　(8)　$(x-1.5)(x-2)$

(9)　$(3x+2)(5x+4)$　　(10)　$(7x-3)(x+5)$

(11)　$(8a-3b)(6a-5b)$　　(12)　$(1-6x)(9+6x)$

3. 一辺 a cm の正方形がある。その縦を 3 cm，横を 2 cm 長くすると，その面積は幾らになるか。また，前より増した面積はどれだけか。これらを式に書き表わせ。

4. 前問の正方形の縦を 5 cm 長くし，横を 5 cm 短くして矩形を作ると，この面積はもとの正方形の面積より大きいか小さいか。その違いは何ほどか。

5. 次の等式は成り立つか。

(1)　$(7-x)(x-4)=-(x-7)(x-4)$

(2)　$(4-x)(6-x)=(x-4)(x-6)$

6. 正方形の土地がある。その一辺を 5 m 長くし，他の一辺を 7 m 短くしたら，面積が 85 m^2 減少した。この正方形の土地の面積は幾らであったか。

7. 二辺の長さの比が 2:3 の矩形がある，この長い辺を 2 m 縮め，短い辺を 5 m 伸ばしたら，面積は 45 m^2 増した。もとの矩形の二辺はおのおの幾らか。

8. 次の計算をせよ。

(1)　$(x+y)(x-y)$　　(2)　$(a-3b)(a+3b)$

(3)　$\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)$　　(4)　$\left(\frac{5}{6}+4x\right)\left(\frac{5}{6}-4x\right)$

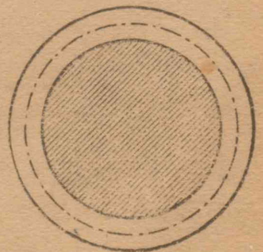
(5)　101×99　　(6)　81×79　　(7)　398×402

(8)　$(x-7)^2$　　(9)　$(x+p)^2$　　(10)　$(4a-1)^2$

(11)　$(3a+4b)^2$　　(12)　$(-x-3y)^2$　　(13)　$(-4x+y)^2$

(14)　38^2　　(15)　89^2　　(16)　95^2

9. 円形の池の周囲に幅 h m の道がある。この道の面積を計算するのに，道の真中を通る円の周 a m をはかって，ah m^2 とした。これで正しいかどうかを調べよ。



10. 次の式の左辺から右辺を導け。

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(3) $(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

11. 次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)^3$ (2) $(a-1)^3$ (3) $(2x-1)^3$

(4) $(x-a-1)^3$ (5) $(x^2-x-1)^3$

(6) $(x-1)(x^2+x+1)$ (7) $(1+2x)(1-2x+4x^2)$

12. 次の式は正しいか。

(1) $(a-b)^2=(b-a)^2$ (2) $(a-b)^3=(b-a)^3$

13. 次の式を展開せよ。

(1) $(5x-4)(3x-2)$ (2) $(10a+7bc)(10a-7bc)$

(3) $\left(\frac{2}{5}xy-\frac{2}{3}xz\right)\left(\frac{2}{5}xy+\frac{2}{3}xz\right)$

(4) $(u-v)(u+v)(u^2+v^2)$

(5) $\{(a+b)+3\}^2$ (6) $\{(a-b)-2\}^2$

(7) $\begin{array}{r} x^2+xy+y^2 \\ \times)\ x^2-xy+y^2 \\ \hline \end{array}$ (8) $\begin{array}{r} a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \\ \times)\ a+b+c \\ \hline \end{array}$

14. a^2 の値がわかっている時，$(a+1)^2$ の値を求める方法を工夫せよ。

この方法によって 50 から 70 までの整数の平方表を作れ。

15. 次の方程式を解け。

(1) $(x-3)(x-5)=(x-2)(x-3)$ (2) $(x-2)^2=x^2$

(3) $(x+6)(x-6)=x(x-3)$

(4) $4-3(x-1)(x-3)=5x-x(3x-2)$

16. 矩形の土地がある。その縦を $6\,m$ 長くし，横を $3\,m$ 短くしても面積に変わりがない。また，縦を $3\,m$ 短くし，横を $5\,m$ 伸ばしたら面積は $4\,m^2$ 増した。この土地の面積は幾らか。

§3. 式の除法

單項式の除法は，次の例に示したように計算する。

〔例1〕 $6ab^2\div(-9a^2b)$ を計算せよ。

〔解〕 $6ab^2\div(-9a^2b)=-\dfrac{6ab^2}{9a^2b}=-\dfrac{2b}{3a}$

問1. 次の計算をせよ。

(1) $a^2b\div(-b^2)$ (2) $3ab^2c\div12a^2b^2c^3$

(3) $-2xy^2\div(-6yz^2)$ (4) $(-26x^2y^3)\div38xy^5$

多項式についての除法は，双方を降冪の順に列べ，数についての除法と同様な仕方で計算することができる。

例えば，$(2x^2+7x+9)\div(x+2)$ は次のように計算する。

$$\begin{array}{r} 2x+3 \\ x+2\overline{)2x^2+7x+9} \\ \underline{2x^2+4x} \\ 3x+9 \\ \underline{3x+6} \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ 12\overline{)279} \\ \underline{24} \\ 39 \\ \underline{36} \\ 3 \end{array}$$

即ち，商は $2x+3$ で，余りは3である。

問2. 次の計算をせよ。

(1) $(x^2+5x+6)\div(x+3)$

(2) $(x^2+x-30)\div(x-5)$

(3) $(2x^2-5x-3)\div(x-3)$

(4) $(5x^2+18x-10)\div(x+4)$

(5) $(3x^2-5x)\div(x+1)$

(6) $(2-6x^2+3x)\div(2x-1)$

(7) $(6x-2x^2+5)\div(4-x)$

(8) $(x^3-4x^2-6x+20)\div(x-2)$

(9) $(a^3+2a^2-3a)\div(a^2-a+2)$

(10) $(x-3x^3-1+x^4)\div(x^2-2-3x)$

(11) $(a^4-2a^3-3+5a)\div(1-a^2-2a)$

(12) $(x^5-24x+5x^3-3x^4+74)\div(5+x^2-2x)$

今までの計算からもわかるように，多項式の除法では，商の係数の排列は，被除数・除数の係数を共に降冪の順に並べ，特に，欠けた項の係数は0としてできる数の場合と同様である。

この場合に，商の次数は，被除数と除数との次数の最も高いもので割算を行ってみればわかる。例えば，前ページの例では，$x^2\div x$ と計算して，商は x の一次式であることがわかる。

〔例2〕 $(5x^4-7x^2+x)\div(x^2-1)$ を計算せよ。

〔解〕 係数だけを分離して，次のように計算する。

$$
\begin{array}{rrr|rrrrr}
 & & & 5 & 0 & -2 & & \\
\hline
1 & 0 & -1 & 5 & 0 & -7 & 1 & 0 \\
 & & & 5 & 0 & -5 & & \\
\cline{4-8}
 & & & & & -2 & 1 & 0 \\
 & & & & & -2 & 0 & 2 \\
\cline{6-8}
 & & & & & & 1 & -2
\end{array}
$$

即ち，商は $5x^2-2$ で，余りは $x-2$ である。

このように，係数だけに注目して計算する仕方は，除法だけに適用されるものではなく，加法・減法・乗法にも適用できる。

〔例3〕 $(4x^5-2x+7)+(-x^5+4x^4-2x^2-6)$ を計算せよ。

〔解〕

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 7 \\
+) & -1 & 4 & 0 & -2 & 0 & -6 \\
\hline
 & 3 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1
\end{array}
$$

即ち，和は $3x^5+4x^4-2x^2-2x+1$ である。

〔例4〕 $(2x^4-5x^2+3x-4)-(x^3-3x^2-2)$ を計算せよ。

〔解〕

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 2 & 0 & -5 & 3 & -4 \\
-) & & 1 & -3 & 0 & -2 \\
\hline
 & 2 & -1 & -2 & 3 & -2
\end{array}
$$

即ち，差は $2x^4-x^3-2x^2+3x-2$ である。

〔例5〕 $(3x^2+5)\times(x^2-2x-1)$ を計算せよ。

〔解〕

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 3 & 0 & 5 & & \\
\times) & 1 & -2 & -1 & & \\
\hline
 & 3 & 0 & 5 & & \\
 & & -6 & 0 & -10 & \\
 & & & -3 & 0 & -5 \\
\hline
 & 3 & -6 & 2 & -10 & -5
\end{array}
$$

即ち，積は $3x^4-6x^3+2x^2-10x-5$ である。

問 3. 乗法で，上のように計算した場合に，積の次数を定めるには，どうすればよいか。その方法を考えよ。

問 4. 次の計算をせよ。

(1) $(6x^3-4x+3)+(-2x^3-2x^2+7)$

$(5x^3-6x^4+1)+(7x^4-4x^2+5)$

(2) $(5x^3-10x^2-2x-12)-(3x^3-x+5)$

$(2x^3+4x^2-3x+1)-(4x^3-5x^2+4)$

(3) $(2x^2-4x+3)\times(5x-1)$

$(x^2+2x+4)\times(x^2-2x+4)$

$(x^3-2x^2+5x-1)\times(3x^2-x+5)$

(4) $(x^3+3x^2-4x-6)\div(x^2-1)$

$(x^2-3x^3+x-1)\div(x^2-x+1)$

$(2x^4+2x^3+3x^2+8x+2)\div(2x^2+4x+3)$

問　　題

1. 次の計算をせよ。

(1) $(x^3-4x^2+6x)\div x$　　(2) $(2x^2-9x+6)\div(x+3)$

(3) $(6x^2-5x-4)\div(2x-3)$　　(4) $(4x-5)\div(2x-3)$

(5) $(1+5x^3-6x^4)\div(1-x+3x^2)$

(6) $(a^3-8b^3-1-6ab)\div(a-2b-1)$

(7) $(6-2x^4+10x^3-11x^2+x)\div(4x-3-2x^2)$

(8) $(3x^3-4x^2-x)\div(1-x)$

2. 次の問題で，等式 A＝BQを成り立たせるようなQを見出せ。

(1) $A=x^3+y^3$,　$B=x^2-xy+y^2$

(2) $A=x^3-y^3$,　$B=x^2+xy+y^2$

(3) $A=a^4+a^2b^2+b^4$,　$B=a^2-ab+b^2$

(4) $A=a^3+b^3+c^3-3abc$,　$B=a+b+c$

3. 次の式を展開せよ。

(1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

(3) $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)$

(4) $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$

(5) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(6) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(7) $(x^2+2x+3)(x^3-1)$

4. $2x^2+7x+9$ を $x+2$ で割ると，商は $2x+3$ で，余りは3である。したがって，次の恒等式が成り立つ。

$$2x^2+7x+9=(x+2)(2x+3)+3$$

上の等式は恒等式であるから，x のどんな値に対しても成り立つ。特に，$x+2$ を0にする値，即ち，$x=-2$ を上の恒等式の左辺に代入すると，その結果は3となるわけである。上に述べたことが正しいわけを説明せよ。

5. 多項式を一次式で割った時の，余りだけを求める方法を考えよ。

§4. 簡単な因数分解

$\frac{1}{2}(a+b)h$ を展開すると$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$ となり，$(x+2)(x+1)$ を展開すると x^2+3x+2 となる。

式を取り扱う時に，上のように展開する場合もあるが，これとは逆に，多項式をまとめて積の形にする場合もある。

一般に，一つの式を幾つかの式の積に直すことを，もとの**式を因数に分解する**といい，積の形に直した時のおのおのの式を，もとの式の因数という。

$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$ の項 $\frac{1}{2}ah$, $\frac{1}{2}bh$ で，$\frac{1}{2}h$ はその各項に共通な因数である。このように，多項式の各項に共通な因数を，各項の**共通因数**という。多項式 $\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$ を因数に分解して$\frac{1}{2}(a+b)h$ とすることは，$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$ を，その各項の共通因数$\frac{1}{2}h$ と一つの多項式との積に直すことであるといえる。いうまでもなく，後者の多項式は，前者の多項式の各項を共通因数で割って商を加え合わせたものである。

共通因数がある場合の因数分解は，次のようにするがよい。$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$ を見て，まず，共通因数が $\frac{1}{2}h$ であることがわかる。そこで $\frac{1}{2}h$ で $\frac{1}{2}ah$, $+\frac{1}{2}bh$を割ってみると，商はそれぞれ a, $+b$ となるから，$a+b$ を括弧に入れて，次のように書く。

$$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}h(a+b)$$

問1. 次の式を因数に分解せよ。続いて，その仕方を言え。

(1) $5x+5y$　　(2) $3xy+6x^2y$

(3) $2ab-6a^2b$　　(4) $8c^2d-12cd^3$

問2. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $8a+8b$　　(2) $5x-5y$　　(3) $ax-bx$

(4) $6mx-2nx$　　(5) x^2-x　　(6) $a-5ab$

(7) $ax-2ay+3az$　　(8) $lx-mx+x$

(9) $a(x+y)-b(x+y)$　　(10) $(a-b)x-(a-b)y$

(11) $m(3x-2y)-5(3x-2y)$

(12) $2(3p-q)x-(3p-q)$

〔例1〕 $xy+x-y-1$ を因数に分解せよ。

〔解〕
$$\begin{aligned}xy+x-y-1&=(xy+x)-(y+1)\\&=x(y+1)-(y+1)\\&=(y+1)(x-1)\end{aligned}$$

問3. 上の因数分解の仕方を説明せよ。

問4. $xy+x-y-1$ を，上にあげた以外の方法で，因数に分解する仕方はないか。

問5. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $ab-a-b+1$　　(2) x^3+x^2+x+1

(3) $ab-bc-b^2+ca$　　(4) x^3+2-2x^2-x

因数分解は，展開とは逆に，式を積の形に改めるのであるから，その公式は乗法公式から導かれる。即ち

〔1〕　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

　　　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

〔2〕　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

〔3〕　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

〔例2〕　$a^2-10a+25$ を因数に分解せよ。

〔解〕 25 は 5 の平方であり，10 は 5 の 2 倍であるから，公式〔1〕のいずれかの形である。そして，$-10a$ は負項であるから，〔1〕の下の場合になることがわかる。したがって，

$$a^2-10a+25=(a-5)^2$$

問6.　次の式を因数に分解せよ。

(1)　x^2+2x+1　　(2)　x^2-6x+9

(3)　$x^2+2xy+y^2$　　(4)　$1-2x+x^2$

(5)　x^2-4x+4　　(6)　$a^2+10a+25$

(7)　$a^2+a+\frac{1}{4}$　　(8)　$a^2-ab+\frac{1}{4}b^2$

(9)　$4a^2-12a+9$　　(10)　$25-30a+9a^2$

(11)　$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}b^2$　　(12)　$\frac{9}{25}x^2+\frac{6}{7}xy+\frac{25}{49}y^2$

〔例3〕　x^2+4x+3 を因数に分解せよ。

〔解〕 3 は完全平方数ではないから，〔1〕の場合ではなく，〔2〕の場合である。

かけて 3，加えて 4 になる二つの数は 1 と 3 である。したがって，〔2〕の場合の公式で，a, b は 1 または 3 である。

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

〔例4〕　x^2-4x+3 を因数に分解せよ。

〔解〕 かけて 3，加えて -4 になる二つの数は -1 と -3 である。したがって，〔2〕の場合の公式で，a, b は -1 または -3 である。

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

問7.　次の式を因数に分解せよ。

(1)　x^2+6x+8　　(2)　x^2-4x+3

(3)　x^2-8x+7　　(4)　$x^2+7x+10$

(5)　$y^2-3y-10$　　(6)　a^2+a-30

(7)　$m^2+4m-60$　　(8)　$98-7x-x^2$

(9)　$x^2-3x-28$　　(10)　$a^2-8a-20$

(11)　$x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$　　(12)　$x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{12}$

〔例5〕　$3x^2-3y^2$ を因数に分解せよ。

〔解〕　$3x^2-3y^2=3(x^2-y^2)=3(x+y)(x-y)$

問8.　次の式を因数に分解せよ。

(1)　a^2-64　　(2)　x^2-1　　(3)　$25x^2-49y^2$

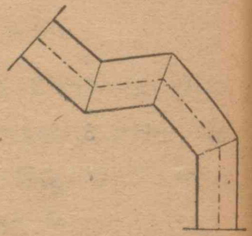
(4)　$16a^2-81b^2$　　(5)　a^2b^2-1　　(6)　a^2b-b^3

(7)　$x^3y^2-xz^2$　　(8)　$4a^2b^2-25c^2d^2$

(9)　$4xyz^2-25x^3y^3$　　(10)　$16m^2n^2-p^2x^2$

問題

1. 右の図のように，幅の一様な道路がある。その面積を計算するのに，道路の眞中を通る線の長さにその幅をかけた。



これで正しいかどうかを調べよ。

2. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $6x^2-8x$　　(2) $3ab^2-2a^2b$

(3) $3x^2y-3xy^2$　　(4) $27x^2+18xy$

(5) $a(x-y)+b(y-x)$　　(6) $2x(x+1)-(x+1)^2$

(7) $(x-1)(2x-7)-(1-x)^2$

(8) $(3x-y)(2a+p)-(3x-y)(a-p)$

3 次の式を因数に分解せよ。

(1) $ax-3by-3ay+bx$

(2) $2xz-xy-4yz+2y^2$

(3) $ax-bx+cx+ay-by+cy$

(4) $3ax-5ay+a-3bx+5by-b$

4. 一直線上に四点 A, B, C, D が，図の順に並んでいる。点 C が BD の中点であると，

$AC^2-BC^2=AB\cdot AD$ であることを示せ。

5. 次の式を因数に分解せよ。

(1) x^2-a^2　　(2) x^2-100　　(3) $4x^2-25$

(4) $20x^2-45$　　(5) $1-49x^2$　　(6) $9a^2b-16b^3$

(7) $100a^2-144b^2$　　(8) $(x+a)^2-b^2$

(9) $(2a-3b)^2-4b^2$　　(10) $4a^2-(2a-b)^2$

6. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $9x^2-6x+1$　　(2) y^2+4y+4

(3) $1-8x+16x^2$　　(4) $81+18m+m^2$

(5) $4a^2-12ab+9b^2$　　(6) $4a^2-20ax+25x^2$

(7) $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$　　(8) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$

(9) $x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$　　(10) $x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{16}y^2$

(11) x^3+14x^2+49x　　(12) $p-2p^2+p^3$

(13) $3p^3+6p^2+3p$　　(14) $3x^2-2x+\frac{1}{3}$

7. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $x^2+7x+10$　　(2) $x^2-7x+10$

(3) $x^2+3x-10$　　(4) $x^2-3x-10$

(5) x^2-7x+6　　(6) $x^2-8x+12$

(7) x^2+x-12　　(8) x^2-2x-8

(9) $x^2+9xy+8y^2$　　(10) $x^2-3xy+2y^2$

(11) $x^2-7xy-8y^2$　　(12) $x^2+xy-12y^2$

(13) $x^2-(c+5)x+5c$　　(14) $x^2-(n-3)x-3n$

(15) $x^2+(a-b)x-ab$

8. a^2+ma に n^2 を加えた式が $(a+n)^2$ に等しければ，n^2 は m のどのような式であるか。

9. 次の式の括弧の中に適当な数を入れて，一次式の平方に等しくなるようにせよ。

(1) $x^2+(\quad)x+1$　(2) $x^2-(\quad)x+4$

(3) $x^2+(\quad)px+p^2$　(4) $x^2-(\quad)qx+9q^2$

(5) $a^2x^2-(\quad)ax+\dfrac{1}{4}$　(6) $a^2x^2+(\quad)abxy+\dfrac{1}{9}b^2y^2$

(7) $x^2-2x+(\quad)$　(8) $x^2+4x+(\quad)$

(9) $x^2+x+(\quad)$　(10) $x^2+\dfrac{2}{3}x+(\quad)$

(11) $x^2-\dfrac{x}{5}+(\quad)$　(12) $x^2-8.8x+(\quad)$

(13) $x^2+0.7x+(\quad)$　(14) $x^2+\dfrac{b}{a}x+(\quad)$

10. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $a^2(x+y)-b^2(x+y)$　(2) $a^2(x^2-y^2)-b^2(x^2-y^2)$

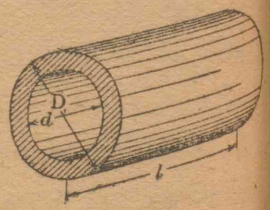
(3) $(a+b)^2-(a-b)^2$　(4) $(2a-3b)^2-(3a-2b)^2$

(5) $-a^2+2ab-b^2$　(6) $(a+b)^2+2(a+b)+1$

(7) $(x+y)^2+4(x+y)+4$　(8) $(x-y)^2-6(x-y)+9$

(9) $a^2-2ab+b^2-3a+3b$　(10) $9x^2-6xy+y^2-z^2$

11. 鉄管がある。その内径・外径・長さはそれぞれ $d$cm，Dcm，$l$cm である。この鉄管の重さを求める式を作れ。但し，鉄の比重は 7.86 である。



今作った式を用いて，次の鉄管の重さを計算せよ。

D	7	8	9	10
d	6.6	7.6	8.6	9.6
l	20	20	30	30

§5. やや複雑な因数分解

前節で，因数分解の簡単なものについて調べた。本節では，やや複雑な因数分解について調べよう。

まず，次のような二次三項式の因数分解について考えよう。

〔4〕　$px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)$

$$p=ac,\quad q=ad+bc,\quad r=bd$$

〔例1〕 $2x^2+7x+6$ を因数に分解せよ。

〔解〕　$2x^2+7x+6=(ax+b)(cx+d)$

となったとする。a, c の積が 2 で，b, d の積が 6 で，$ad+bc$ が 7 でなければならない。そこで，2, 6 を因数に分解して，組み合わせを作ってみる。

$\begin{cases}a=1\\c=2\end{cases}$　$\begin{cases}a=-1\\c=-2\end{cases}$　$\begin{cases}a=2\\c=1\end{cases}$　$\begin{cases}a=-2\\c=-1\end{cases}$

$\begin{cases}b=1\\d=6\end{cases}$　$\begin{cases}b=-1\\d=-6\end{cases}$　$\begin{cases}b=2\\d=3\end{cases}$　$\begin{cases}b=-2\\d=-3\end{cases}$

$\begin{cases}b=3\\d=2\end{cases}$　$\begin{cases}b=-3\\d=-2\end{cases}$　$\begin{cases}b=6\\d=1\end{cases}$　$\begin{cases}b=-6\\d=-1\end{cases}$

これらのうち，$ad+bc$ が 7 に等しいことから，a, c, b, d が共に負である場合は除いてよい。

$ad+bc$ が 7 になるかどうかを確かめるために，次に示したように，十文字にかけ合わせてみるがよい。

$$\begin{array}{ccc} a & & b\\ 1 & & 1\\ & \times & \\ 2 & & 6\\ c & & d\end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & & b\\ 1 & & 6\\ & \times & \\ 2 & & 1\\ c & & d\end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & & b\\ 1 & & 2\\ & \times & \\ 2 & & 3\\ c & & d\end{array}$$

上のように調べて，$2x^2+7x+6=(x+2)(2x+3)$ であることがわかる。

問 1. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $2x^2+5x+2$　　(2) $2x^2+7x+3$

(3) $2x^2-11x+12$　　(4) $2x^2-9x+4$

(5) $5x^2+17x+6$　　(6) $5x^2+9x-2$

(7) $4x^2-4x-3$　　(8) $6x^2-13x-8$

(9) $6x^2+5xy-6y^2$　　(10) $6x^2-13xy+6y^2$

(11) $2x^2-5ax-3a^2$　　(12) $4a^2-2ab-6b^2$

今までは二次式の因数分解について調べてみた。次に，三次式の特殊なものについて考えよう。

〔5〕 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

〔例 2〕 $8a^3-27b^3$ を因数に分解せよ。

〔解〕 $8a^3-27a^3=(2a)^3-(3b)^3=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

問 2. 次の式を因数に分解せよ。

(1) x^3+1　　(2) $1-8x^3$　　(3) a^3+64

問　題

1. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $x^2+11x+24$　　(2) $x^2-13x+36$

(3) $x^2-7x-44$　　(4) $x^2+5x-24$

(5) $x^2-15x+36$　　(6) x^2-x-30

(7) $4x^2-5xy-6y^2$　　(8) $8y^2-21y-9$

(9) $21m^2+40mn-21n^2$　　(10) x^3-10x^2+9x

(11) $980-70x-10x^2$　　(12) $6x^3-36x^2y+54xy^2$

(13) $(x+y)^2+3(x+y)+2$　　(14) $(x-y)^2-3(x-y)-4$

(15) $6(x+y)^2-5(x+y)-6$

(16) $12(x-y)^2+7(x-y)-12$

(17) $6a(x-y)^2+9a(x-y)-6a$

(18) $a^2x^2+a(b-c)x-bc$

2. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $27a^3+b^3$　　(2) $125a^3+1$　　(3) x^3y^3-64

(4) x^3-1　　(5) $343-x^3$　　(6) $a^3+(b+c)^3$

(7) $(z+5)^3+a^3$　　(8) $(x-1)^3-(y-1)^3$

3. $a^4+a^2b^2+b^4$ を完全平方式にするには，どんな項を加えればよいか。次に，この式を二つの完全平方式の差に直して，因数に分解せよ。

4. 次の式を因数に分解せよ。

(1) x^4+4x^2+16　　(2) $4x^4-16x^2+9$

5. $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$ を因数に分解せよ。

§6. 分数式の計算

AとBが共に整式である時，$\dfrac{B}{A}$ を**分数式**といい，分子・分母を，その分数式の**項**という。

分数式では，分数と同じように，両項に0でない同じ数，または式をかけても，あるいは，両項を0でない同じ数または式で割っても，その分数式は，もとの分数式と値が等しい。

したがって，分子・分母の共通因数で両項を割って，分数式を簡単にすることがある。これを**約分**という。

このためには，分数式の両項を因数に分解しておくと都合がよい。

〔例1〕 $\dfrac{9xy-12y^2}{12x^2-16xy}$ を約分せよ。

〔解〕 $\dfrac{9xy-12y^2}{12x^2-16xy}=\dfrac{3y(3x-4y)}{4x(3x-4y)}=\dfrac{3y}{4x}$

分数式を加えるには，おのおのの分母の最小公倍数を分母とする分数の形に直してから計算すればよい。

〔例2〕 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}$ を計算せよ。

〔解〕
$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}&=\frac{x+3}{x(x+3)}+\frac{x}{x(x+3)}\\&=\frac{x+3+x}{x(x+3)}\\&=\frac{2x+3}{x(x+3)}\end{aligned}$$

問1. 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}-\dfrac{c}{x}$ (2) $-\dfrac{x-3}{5}-\dfrac{x-7}{10}+\dfrac{2-x}{5}$

(3) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x-2}$ (4) $\dfrac{8}{x+4}-\dfrac{8}{x-4}$

(5) $x+\dfrac{x+1}{2x+3}$ (6) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{9}{x^2-3x}$

(7) $1-\dfrac{7x}{x^2-5x}$ (8) $1+\dfrac{4x^2+x}{x^3+2x^2}$

(9) $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x-5}$ (10) $\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{1-x^2}$

(11) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^2}$ (12) $x+4-\dfrac{x-12}{x-3}$

(13) $a+b-\dfrac{2ab}{a+b}$ (14) $\dfrac{a-3x}{4}-a+2x$

(15) $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{3a}{a+x}+\dfrac{2ax}{x^2-a^2}$

(16) $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{2}{(x+1)(3-x)}+\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

分数式の乗除についても，分数について計算する場合と同様なことに注意しなければならない。

〔例3〕 $\dfrac{x^3y}{z}\times\dfrac{z}{xy^3}$ を計算せよ。

〔解〕 $\dfrac{x^3y}{z}\times\dfrac{z}{xy^3}=\dfrac{\overset{x^2}{\cancel{x^3}\cancel{y}}\times\overset{1}{\cancel{z}}}{\underset{1}{\cancel{z}}\times\underset{y^2}{\cancel{xy^3}}}=\dfrac{x^2}{y^2}$

〔例4〕 $\dfrac{4a}{3xy}\div\dfrac{-20a}{9y}$ を計算せよ。

〔解〕 $\dfrac{4a}{3xy}\div\dfrac{-20a}{9y}=-\dfrac{\overset{1}{\cancel{4a}}\times\overset{3}{\cancel{9y}}}{\underset{x}{\cancel{3xy}}\times\underset{5}{\cancel{20a}}}=-\dfrac{3}{5x}$

〔例5〕 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-16}\times\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4}$ (2) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}\div\dfrac{x^2-6x+8}{2x^2-5x-3}$

〔解〕

(1) $$\frac{x^2-4}{x^2-16}\times\frac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4}=\frac{\overset{1}{\cancel{(x+2)}}(x-2)}{(x+4)\underset{1}{\cancel{(x-4)}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{(x+2)}}\overset{1}{\cancel{(x-4)}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{(x+2)}}}{\cancel{(x+2)^2}}}=\frac{x-2}{x+4}$$

(2) $$\frac{x^2-3x+2}{x^2-9}\div\frac{x^2-6x+8}{2x^2-5x-3}=\frac{(x-1)\overset{1}{\cancel{(x-2)}}}{(x+3)\underset{1}{\cancel{(x-3)}}}\times\frac{(2x+1)\overset{1}{\cancel{(x-3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-2)}}(x-4)}$$

$$=\frac{(x-1)(2x+1)}{(x+3)(x-4)}$$

$$=\frac{2x^2-x-1}{x^2-x-12}$$

問2. 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{7x}{a^3}\times\dfrac{5ab}{14x^3}$ (2) $\dfrac{15a^3b^2}{22x^2y^5}\times\dfrac{14xy^2}{25a^2b}$

(3) $\dfrac{5a^2b}{6xy^2}\div\dfrac{3ab^2}{4x^2y}$ (4) $\dfrac{4a^2b}{5x^2y}\div\dfrac{2ab^3}{15xy^2}$

(5) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}\times\dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}$ (6) $\dfrac{x^2-49}{x^2-9}\div\dfrac{x+7}{x+3}$

(7) $\dfrac{x^2-4}{2x-4}\times\dfrac{2}{x+2}$ (8) $\dfrac{4x^2-1}{4y^2-1}\div\dfrac{2x+1}{2y-1}$

(9) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-16}\times\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4}\div\dfrac{x-3}{x-4}$

(10) $\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-c^2}\div\dfrac{x+a}{x-c}$

(11) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\div\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1}\times\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$

整式に関する比例式には，次のような性質がある。

a, b, c, d が整式であって，比例式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ が成り立つと，次の比例式が成り立つ。

〔1〕 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$, $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

〔例6〕 上の等式が成り立つわけを説明せよ。

〔解1〕 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ であるから

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,\quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

したがって $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$, $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

〔解2〕 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ であるから $a=bk$, $c=dk$

故に $$\frac{a+b}{b}=\frac{bk+b}{b}=\frac{b(k+1)}{b}=k+1$$

$$\frac{c+d}{d}=\frac{dk+d}{d}=\frac{d(k+1)}{d}=k+1$$

したがって $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$

また $$\frac{a-b}{b}=\frac{bk-b}{b}=\frac{b(k-1)}{b}=k-1$$

$$\frac{c-d}{d}=\frac{dk-d}{d}=\frac{d(k-1)}{d}=k-1$$

したがって $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

問3. 四つの式 a, b, c, d に関して，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ であると，次の等式が成り立つわけを説明せよ。

〔2〕 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}, \qquad \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$$

問4. 次の等式が成り立つわけを説明せよ。

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{pa+qc}{pb+qd}$$

問　　題

1. 次の分数式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{6ab^2}{9a^2b}$　(2) $\dfrac{a^2b}{-b^2}$　(3) $\dfrac{3ab^2c}{12a^2b^2c^2}$

(4) $\dfrac{-2xy^2}{-6yz^2}$　(5) $\dfrac{26x^2y^3}{39xy^5}$　(6) $\dfrac{-5m^2n}{-30m^3n^2}$

(7) $\dfrac{54ab^2c}{81a^4b^3c^2}$　(8) $\dfrac{p^2q^3r}{-pq^2r}$

2. 次の分数式を約分せよ。

(1) $\dfrac{4a^2-9c^2}{4a^2+6ac}$　(2) $\dfrac{3a^2+6a}{a^2+4a+4}$

(3) $\dfrac{b^2-5b}{b^2-4b-5}$　(4) $\dfrac{abx-bx^2}{cx^2-acx}$

(5) $\dfrac{x^2+5x-14}{4-x^2}$　(6) $\dfrac{x^2-x-20}{2x^2-7x-15}$

(7) $\dfrac{(x-a)^2-b^2}{(x-b)^2-a^2}$　(8) $\dfrac{a^2+4ab-21b^2}{a^2-7ab+12b^2}$

3. 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{3a}{-4b}\times\dfrac{12b^2}{9a^2}$　(2) $\dfrac{x^2y}{z}\times\dfrac{(-z)^2}{xy}$

(3) $\dfrac{(3a)^2}{4y}\div\dfrac{3x^2}{(-2y^2)^3}$　(4) $\dfrac{6a^2b^2c^2}{7mxy}\times\dfrac{5m^2x^3}{3a^3c^5}$

(5) $\dfrac{(4a^2b)^2}{21x^5y^2}\times\dfrac{3x^2y}{(2a)^2b}$　(6) $\dfrac{3a^2}{5a-10}\times\dfrac{3a-b}{4a^3}$

(7) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x-5}\times\dfrac{x^2-25}{x^2+2x-3}$　(8) $\dfrac{9x^2-4y^2}{4-x^2}\div\dfrac{3x-2y}{2+x}$

(9) $\dfrac{2a^3}{bc}\div\dfrac{ac}{3b^2}\div\dfrac{ac}{5c^3}$

(10) $\dfrac{a^2-7a+6}{a^2+3a-4}\times\dfrac{a^2+10a-24}{a^2-14a+48}\div\dfrac{a^2+6a}{a^3-8a^2}$

4. 二つの直円柱がある。底面の半径は a と b で，高さは b と a である。この直円柱の体積の比を計算せよ。

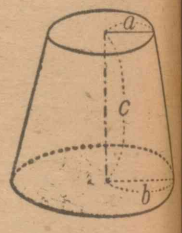
5. 四角な箱に茶筒がちょうど一ぱいにはいっている。茶筒の底面の直径は a，高さは b である。この箱と茶筒との容積の比を計算せよ。

6. 半径が r，中心角が $\alpha°$ の扇形で円錐を作ると，その母線の長さと底面の直径との比は，どのような式で表わされるか。また，側面積と底面積との比はどうか。

7. 次の式の意味をよく考えて計算せよ。

(1) $\dfrac{\dfrac{2}{a}}{1-\dfrac{2}{a}}$　(2) $\dfrac{\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{m}}{\dfrac{z}{m}}$

(3) $\dfrac{1}{c-\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{c}}}$　　(4) $\dfrac{1+\dfrac{b}{x}}{\dfrac{a}{x}+1}$



8. 直円錐台の上底，下底の半径及び高さを，それぞれ $a,\ b,\ c$ とすると，その体積はどのような式で表わされるか。

9. 8％ の食塩水と 5％ の食塩水とを 1：2 の割合にまぜると，何パーセントの食塩水となるか。また，a％ と b％ の食塩水を 3：1 の割合にまぜるとどうか。

10. $a=m+n$ である時，次の式の値を求めよ。

$$\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{a}\right)+\frac{n}{m}\left(1-\frac{n}{a}\right)$$

11. $x=a-b$ である時，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a(a-x)}{b}-\frac{b(b+x)}{a}=x$$

12. $x=a+b+c$　である時，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a(x-a)}{b+c}+\frac{b(x-b)}{a+c}+\frac{c(x-c)}{a+b}=x$$

13. 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}\times\dfrac{a-b+c}{a-b-c}\times\dfrac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}$

(2) $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}\times\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x-y)^2-z^2}$

(3) $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+x-12}\times\dfrac{x^2-x-20}{x^2+12x+35}\times\dfrac{x^2+11x+28}{x^2-2x-15}$

(4) $\dfrac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2-c^2-2bc}\times\dfrac{a^2-2ac+c^2-b^2}{b^2-2bc+c^2-a^2}$

14. $y=\dfrac{3}{4}x$ である時，次の式の値を求めよ。

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{y^2}{x^2-y^2}$$

15. $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{2}{5}$ は $\dfrac{x-(x+3)}{x+3}=\dfrac{2-5}{5}$ として $\dfrac{-3}{x+3}=\dfrac{-3}{5}$

故に　$x+3=5$ から $x=2$ と解ける。

この方法を利用して，次の方程式を解け。

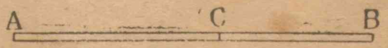
(1) $\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{1}{4}$　　(2) $\dfrac{x+2}{x-2}=5$

(3) $\dfrac{3x-2}{3x+5}=\dfrac{1}{8}$　　(4) $\dfrac{2x}{2x+1}=\dfrac{3x-2}{3x}$

(5) $\dfrac{6}{x+y-1}=\dfrac{-3}{2x-2y}=\dfrac{9}{x}$

$\begin{cases}5x+3y=1\\ 6y-7x=0\end{cases}$

16. 長さ $a$cm の棒 AB がある。これを C で二つに切り，4：3 の割合に分けたいと思う。それぞれの長さを幾らにすればよいか。



17. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ である時，次の式を証明せよ。

(1) $\dfrac{3a-b}{b}=\dfrac{3c-d}{d}$　　(2) $\dfrac{2a+b}{b}=\dfrac{2c+d}{d}$

(3) $\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ (4) $\dfrac{(a-c)^2}{(b-d)^2}=\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$

(5) $\left(\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}\right)^2=\dfrac{a^4+c^4}{b^4+d^4}$

18. $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$である時，次の式を証明せよ。

(1) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{3abc}{a'bc+b'ca+c'ab}$ (2) $\dfrac{a^2}{a'^2}=\dfrac{ab+bc+ca}{a'b'+b'c'+c'a'}$

(3) $\dfrac{a^2}{a'^2}=\dfrac{b^2}{b'^2}=\dfrac{c^2}{c'^2}=\dfrac{(a+b+c)^2}{(a'+b'+c')^2}$

§7. 開平

676 の平方根の求め方を考えよう。

(1) $1^2=1$，$10^2=100$，$100^2=10000$，………

であるから，676 の平方根のうち，正の方は 10 より大きく，100 よりも小さい。即ち，整数部分は二けたである。

(2) 十の位の数字を定めるために，10，20，30，……の平方を計算して，$\sqrt{676}$ は 20 よりも大きく，30 よりも小さいことがわかる。

即ち $$20<\sqrt{676}<30$$

故に，十の位の数は 2 である。この十の位の数字 2 は，6|76 と区切った時に，6 の平方根よりも小さくて，これに最も近い整数が 2 であることからわかる。

(3) $\sqrt{676}$ を $20+y$ とすると，y は 10 以下の数であるから，次の等式が成り立つはずである。

$$676=(20+y)^2=400+2\times20\times y+y^2$$

即ち $$676-400=2\times20\times y+y^2$$

y の値は 20 にくらべて小さいから，y^2 は $2\times20\times y$ にくらべて小さい数である。したがって，676−400=276 はだいたい $2\times20\times y$ とみられるから，y は $276\div40$ と計算して，約 6 ということがわかる。

(4) $$676-400=(2\times20+y)y$$

と変形してみると，次のように計算してよいことがわかる。

```
                             2  6
               2           ────────
               2            )6 7 6
              ──            4
20×2+6……4 6              ─────
               6            2 7 6……676−20²
                            2 7 6……(20×2+6)×6
                           ─────
                                0
```

上のように計算する場合には，一の位から左右に二けたずつに区切るのが便利である。

〔例 **1**〕 $\sqrt{1190.25}$ を計算せよ。

〔解〕

```
                      3   4.  5
                   ─────────────
   3               )1 1|9 0. 2 5
   3                 9
  ──               ──────
  6 4                2 9 0
    4                2 5 6
  ────             ─────────
  6 8 5                3 4 2 5
      5                3 4 2 5
                   ─────────
                             0
```

故に $$\sqrt{1190.25}=34.5$$

〔例2〕 $\sqrt{0.000729}$ を計算せよ。

〔解〕

$$
\begin{array}{r@{\qquad}r}
 & 0.\ 0\ 2\ 7 \\
2 & \big)\,0.\ 0\ 0\ 0\ 7\ 2\ 9 \\
2 & 4 \\
\hline
47 & 3\ 2\ 9 \\
7 & 3\ 2\ 9 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故に　　$\sqrt{0.000729}=0.027$

問1. 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{65536}$　　(2) $\sqrt{331.24}$　　(3) $\sqrt{0.412164}$

(4) $\sqrt{0.822649}$　　(5) $\sqrt{0.00762129}$

整式の平方根を計算する場合も，数と同じである。

〔例3〕 $\sqrt{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$ を計算せよ。

〔解〕

$$
\begin{array}{r@{\qquad}r}
 & x^2-3x+2 \\
x^2 & \big)\,x^4-6x^3+13x^2-12x+4 \\
x^2 & x^4 \\
\hline
2x^2-3x & -6x^3+13x^2 \\
-3x & -6x^3+\ 9x^2 \\
\hline
2x^2-6x+2 & 4x^2-12x+4 \\
2 & 4x^2-12x+4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故に　　$\sqrt{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}=x^2-3x+2$

問2. 整式の平方根を，上のように計算してよいわけを考えよ。

問3. 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}$

(2) $\sqrt{9x^4-12x^3+34x^2-20x+25}$

(3) $\sqrt{4x^4-12x^3+5x^2+6x+1}$

(4) $\sqrt{49a^4-42a^3b+37a^2b^2-12ab^3+4b^4}$

(5) $\sqrt{16x^6-24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1}$

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ や $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を計算するのに，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ を平方に開いて計算するのでは，不便でもあるし，不正確である。このような場合に，都合のよい計算の仕方を考えよう。

a, b が正の数であると，次の等式が成り立つ。

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}, \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

問4. 上の等式が成り立つわけを説明せよ。

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ を計算するには，$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ であるから，6 の平方根を計算すればよい。

問5. $\sqrt{3}\times\sqrt{7}$ を計算せよ。

問6. 次の値を，小数第二位まで求めよ。まず，巻末の数表で求め，次に計算で求めよ。

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$　(3) $\sqrt{5}\times\sqrt{7}$

(4) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}$　(5) $\sqrt{11}\times\sqrt{12}$　(6) $\sqrt{8}\times\sqrt{30}$

(7) $\sqrt{3}\times\sqrt{13}$　(8) $\sqrt{15}\times\sqrt{7}$　(9) $\sqrt{6}\times\sqrt{17}$

(10) $\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}$　　(11) $\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{12}$

$\sqrt{72}-\sqrt{8}$ を計算する場合に，次のような計算の仕方が考えられる。

$$\sqrt{72}-\sqrt{8}=\sqrt{8}\sqrt{9}-\sqrt{8}=\sqrt{8}(3-1)$$
$$=2\sqrt{8}=\sqrt{32}$$

また　　$\sqrt{72}=6\sqrt{2}$，　$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

として　$\sqrt{72}-\sqrt{8}=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}=\sqrt{32}$

問 7.　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{8}+\sqrt{2}$　　　(2)　$\sqrt{45}-\sqrt{27}$

(3)　$\sqrt{96}+\sqrt{24}-3\sqrt{54}$　　　(4)　$\sqrt{80}-\sqrt{125}+\sqrt{20}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を計算する場合に，次のような計算の仕方が考えられる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

または

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.5}$$

問 8.　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(2)　$\dfrac{2}{\sqrt{8}}$　(3)　$\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$　(4)　$\dfrac{1}{\sqrt{48}-\sqrt{12}}$

このように，分母が無理数である分数を，有理数を分母とする分数に直すことを，**分母を有理化する**という。

問 9.　次の分数の分母を有理化せよ。

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{8}}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{12}}$　　(3)　$\sqrt{\dfrac{7}{12}}$

(4)　$\sqrt{\dfrac{5}{18}}$　　(5)　$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{1}{5}}$　　(6)　$\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

(7)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$　　(8)　$\dfrac{3}{11+3\sqrt{7}}$　　(9)　$\dfrac{3\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}+1}$

(10)　$\dfrac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　　(11)　$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　　(12)　$\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

問　　題

宿題P93～77

1.　次の式を計算せよ。

(1)　$\sqrt{56169}$　　(2)　$\sqrt{388.09}$　　(3)　$\sqrt{8.0089}$

(4)　$\sqrt{9x^4-6x^3+19x^2-6x+9}$

(5)　$\sqrt{x^6-4x^4-2x^3+4x^2+4x+1}$

2.　次の式の平方因数を括り出せ。

(1)　$\sqrt{98}$　　(2)　$\sqrt{405}$　　(3)　$2\sqrt{54}$

(4)　$\sqrt{\dfrac{8}{9}}$　　(5)　$3\sqrt{\dfrac{20}{18}}$　　(6)　$3\sqrt{242}$

3.　次の式を簡単にせよ。

(1)　$5\sqrt{20}-2\sqrt{27}$　　(2)　$\sqrt{27}+\sqrt{18}+\sqrt{90}$

(3)　$\sqrt{12}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}$　　(4)　$2\sqrt{175}-3\sqrt{63}$

(5)　$\sqrt{2}+3\sqrt{32}-6\sqrt{18}$　　(6)　$\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{300}$

(7)　$\sqrt{3}\times\sqrt{27}$　　(8)　$\sqrt{5}\times\sqrt{20}$

(9)　$(2\sqrt{72}-3\sqrt{8})\sqrt{2}$　　(10)　$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$

(11) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$　　(12) $(7-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

(13) $\sqrt{12}\div\sqrt{3}$　　(14) $4\sqrt{18}\div 2\sqrt{2}$

(15) $3\left(\dfrac{\sqrt{6}-3}{3}\right)^2+6\left(\dfrac{\sqrt{6}-3}{3}\right)$

(16) $\left(\dfrac{7+\sqrt{3}}{2}\right)^2-7\left(\dfrac{7+\sqrt{3}}{2}\right)$

(17) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}-2)$

(18) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{10})$

4. 次の式の近似値を，なるべく簡単で誤差の少ないようにして求めよ。

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　(3) $\sqrt{\dfrac{5}{6}}\div\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

(4) $4\sqrt{147}+3\sqrt{75}+\sqrt{192}$　(5) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}-\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$

(6) $2\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

雑　題

1. 次の割算の商を第五項まで求め，以下を分数で表わせ。

(1) $\dfrac{1}{1+x}$　(2) $\dfrac{1}{1-x}$　(3) $\dfrac{1}{1+x^2}$　(4) $\dfrac{1}{1-x^2}$

2. 大，小二数がある。大きい数を小さい数で割ると，商は3で余りは4になるが，大きい数の3倍を小さい数で割ると，商は11で余りは2となる。この二数を求めよ。

3. x の値が極めて小さい時は

$$\frac{1}{1+x}=1-x$$

と考えてよい。この理由を言え。

次の式を小数第二位まで求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1+0.01}$ $=0.99$　(2) $\dfrac{1}{1.05}$ $=0.95$

4. x の値が極めて小さい時は

$$\frac{1}{1-x}=1+x$$

と考えてよい。この理由を言え。

次の式を小数第二位まで求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1-0.01}$ $=1.01$　(2) $\dfrac{1}{0.98}$ 1.02

$1-0.02$

5. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $16x^2-25y^2$　(2) $2x^2-72$

(3) $(x+a)^2-b^2$　(4) $(2x-3y)^2-9y^2$

(5) $(x+y)^2-(x-y)^2$　(6) $(3x+2y)^2-(2x-3y)^2$

(7) $a(x^2-y^2)+b(x^2-y^2)$　(8) $(7x-2y)^2-(4x-3y)^2$

(9) $a(x^2-y^2)-3(x^2-y^2)$

(10) $10a(x^2-4y^2)-5b(x^2-4y^2)$

(11) $(a-b)(b^2-c^2)-(a+b)(b-c)^2$

(12) $(3a-b)x^2+(b-3a)y^2$

(13) $(a-b)(x^2-y^2)-(b-a)(y^2-z^2)$

6. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $6ab+4ac+8ad$　(2) $3x^3-6xy^2+5xz^2$

(3) $x^2yz-3xy^2z-xyz^2$　(4) $7a^2-42ab$

(5) $2(x+y)-3(x+y)$

(6) $8(2x-5y)-6a(2x-5y)-4(2x-5y)$

(7) $ax+2ay+az-bx-2by-bz$

(8) $\sqrt{3}x-\sqrt{3}y-ax+ay$

(9) $9a^3+21ab-15a^2y-35by$

(10) $x^2-11x+28$　(11) $x^2+12x-28$

(12) $x^2-5xy-14y^2$　(13) $3x^2-10x+3$

(14) $10x^2+7x-12$　(15) $ax^2-ax+\dfrac{a}{4}$

(16) $x^3-6x^2y+9xy^2$　(17) $9(x-1)^2+6(x-1)-63$

(18) $x^2(x+1)^2-6x(x+1)-16$

(19) $8(x-1)^2+22(x-1)+15$

(20) $x^2-(a-b)x-ab$

(21) $6x^2+(4a-9b)x-6ab$

(22) $10(x+y)^2+11(x+y)(x-y)-6(x-y)^2$

(23) $36(x-y)^2-60(x-y)(a-b)+25(a-b)^2$

(24) $4(x+1)^2(x-1)^2-4a(x^2-1)+a^2$

(25) $m^2(a+b)^2+(ma-mb)^2$

(26) $3(x^3-xy^2)+2(x^2y-y^3)$

(27) $(x-2)(x-3)(x-4)-(x-2)(x-3)$

(28) $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$

(29) $x^2-(3-2x)^2$　(30) a^2-x^2-4x-4

(31) $(a-b)^2-(3a-2b)^2$　(32) $(x-3)^2-x^2+10x-25$

(33) $m(2a-b)^2-m(a-2b)^2$

(34) $(2a+b)^3-(2a+b)(a-2b)^2$

(35) $a^2(x-y)+4b^2(y-x)$　(36) $x(x-3)+2$

(37) $(x-y)(x-y+3)+2$　(38) $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

7. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}+\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$

8. 次の式を因数に分解せよ。

(1) $a^3+(a-b)^3$　(2) $(x^3+y^3)+(x+y)x^2$

(3) x^4+x^2+1　(4) $4a^4-13a^2+1$

(5) $(x^3-y^3)+(x^2+y^2)-2xy$　(6) a^6-b^6

(7) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$　(8) $x^3+y^3+3xy(x+y)$

$(a-b)^3$　$(x+y)^3$

9. 次の方程式を解け。

(1) $a^2(x-a)+b^2(x-b)+abx=0$

(2) $(x+a)(x-a)+(x+b)(x-b)=2(x-a)(x-b)$

10. 長さ a の直線の半分を一辺とする正三角形を二つ作れ。また，同じ長さの直線の $\dfrac{1}{3}$ を一辺とする正三角形を三つ作れ。このおのおのの場合について面積の和を求め，その比を計算せよ。

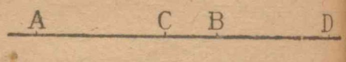
次に，二等分，三等分する代わりに m 等分，n 等分して同様の比を計算せよ。

11. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ ならば，

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$ である。これを証明せよ。

12. $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}$ から $x:y:z$ を求めよ。

13. 直線ABの長さは a で，C, D はこれを $m:n$ の比に内分及び外分する点である。AC, BC, AD, BD の長さを求めよ。次に，CD を BC+BD として計算せよ。また，CD を AD−AC として計算せよ。



14. 速さ毎時10 km の船が，ある川を5 km 上下している。この川は，流れの最も速い時は，毎分5 m，最も遅い時は，ほとんど静水に等しくなる。この船が一往復する間は流れの速さが変わらないものとして，一往復するのに最も速い時で何時間かかるか。また，最も遅い時ではどうか。この二つの時間の比をも求めよ。

15. 分数 $\dfrac{b}{a}$ の分子・分母に同じ正の数を加えると，その分数はもとの値よりも1に近い。これを証明せよ。

16. 二数 a, b があって $a>b$ である。m, n が正の数である時，三数 a, b, $\dfrac{ma+nb}{m+n}$ の大小関係を不等式で示せ。

17. 次の式を約分せよ。

(1) $\dfrac{4m+4n}{5m+5n}$　　(2) $\dfrac{ab(p-q)^2}{a(p-q)(p+q)}$

(3) $\dfrac{(a-b)(a+b)^2}{4(a-b)(a+b)}$　　(4) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-6x+5}$

18. 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{a^2-4b^2}{x^2-6x+9}\times\dfrac{x^2-3x}{2(a-2b)}$　　(2) $\dfrac{3ax-3ay}{x^2-9y^2}\div\dfrac{3bx-3by}{3y-x}$

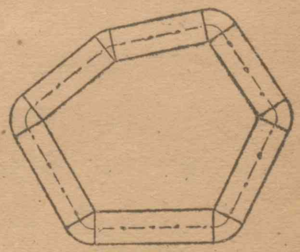
(3) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2+ab-ac}\times\dfrac{a^2b^2c^2}{a^2+ab+ac}\div\dfrac{b^2c^2}{abc}$

(4) $a^2-\dfrac{a^3}{a-b}$　　(5) $\dfrac{1}{x^2+2xy}+\dfrac{1}{xy+2y^2}$

(6) $\left(\dfrac{x+2y}{x+y}+\dfrac{x}{y}\right)\div\left(\dfrac{x}{y}+2-\dfrac{x}{x+y}\right)$

(7) $\left(1-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{12}{x-3}\right)\left(1+\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{12}{x+3}\right)$

19. 多角形の土地のまわりに幅の一様な道がある。角のところは外側が円弧になっている。道の眞中の線の長さに道幅をかけると道の面積になるか。



20. 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{62001}$　　(2) $\sqrt{877969}$

(3) $\sqrt{71.9104}$　　(4) $\sqrt{844.309249}$

(5) $\sqrt{9x^4+6x^3-5x^2-2x+1}$

(6) $\sqrt{x^4-16x^3+66x^2-16x+1}$

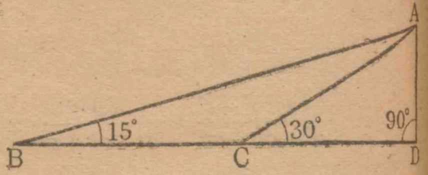
(7) $\sqrt{x^6-2x^5+x^4+2x^3-2x^2+1}$

21. 次の方程式を解け。

(1) $\sqrt{5}(x-1)=-\sqrt{3}(x+1)$

(2) $\sqrt{3}(\sqrt{2}x-1)=3x$

22. 右の図で，$\dfrac{AD}{AB}$，$\dfrac{BD}{AB}$，$\dfrac{AD}{BD}$ を求めよ。



23. $x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ である時，x^2+xy+y^2 の値を求めよ。

24. $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ である時，$x^2-10x-1$ の値を求めよ。

25. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ は，次のようにして簡単にすることができる。

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}=\sqrt{1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}$$

これにならって，次の無理式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$　(2) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$　(3) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$

(4) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$　(5) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$

26. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である時，$\dfrac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ の値を求めよ。

(1) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$
(2) $3+\sqrt{3}$
(3) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$
(4) $3+\sqrt{2}$

第三章　二次函数

§1. 二次函数とグラフ

変数 x の函数 y が x の二次式で表わされる時，y は x の**二次函数**であるという。

$$y=x^2,\qquad y=2x^2-1$$
$$y=5x-x^2,\qquad y=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}$$

などはいずれも x の二次函数である。また，二次式

$$4x^2-2,\qquad x-\frac{1}{2}x^2,\qquad -3x^2+4x-1$$

で，x を変数と考えれば，これらの式の値は，x の値によって定まるのであるから，このような二次式も，変数 x の二次函数であるということができる。

x の二次函数 y の一般の形は

$$y=ax^2+bx+c,\qquad (a\neq 0)$$

である。但し，a, b, c は x に関係のない定数とする。

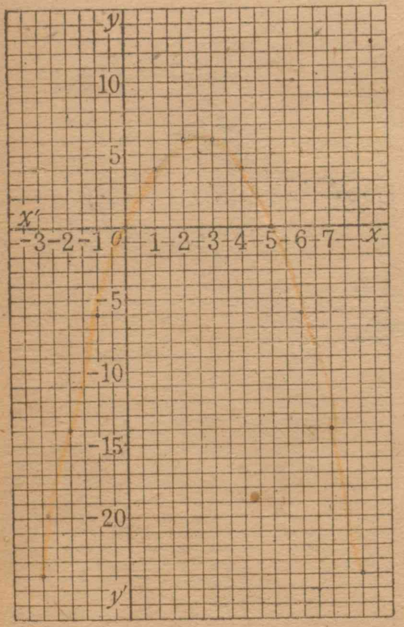
次に，二次函数の値の変化のようすをグラフについて研究しよう。二次函数の例として

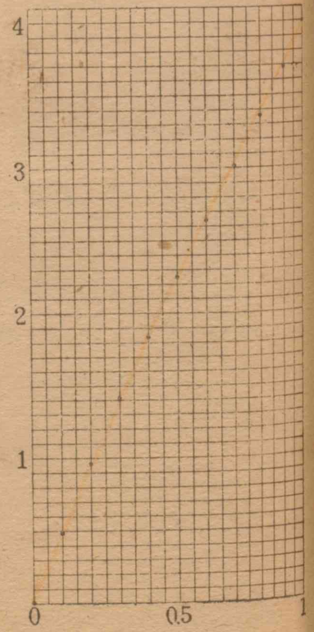
$$y=5x-x^2$$

をとって考える。x の値を 0, 1, 2, 3, ……, −1, −2, −3, …… とし，これらに應ずる y の値を表にしてみると，次のようになる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y	…	-24	-14	-6	0	4	6	6	4	0	-6	-14	-24	…

これらの各組の値を座標とする点をとると，下の左の図のようになる。したがって，$y=5x-x^2$ で，対應する x，y の値の組を座標とする点は，ある曲線の上に並んでいるとみられる。





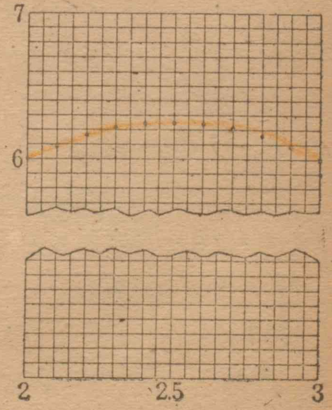
各点の間を，更に細かく調べてみるために，例えば，x の値を 0，0.1，0.2，0.3，……，0.9，1 として y の値を求めると

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0	0.49	0.96	1.41	1.84	2.25	2.64	3.01	3.36	3.69	4

となる。これをグラフに書いてみると，前ページの右の図のようになって，滑らかな曲線のできることがわかる。また，x の値が 2 と 3 の時，1 と 4 の時，0 と 5 の時などに，これに対應する y の値はそれぞれ等しい。特に，$x=2$ と $x=3$ の間を更に十等分して，2.1，2.2，2.3，……，2.9 に應ずる y の値を計算すると，次のようになる。

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
y	6.00	6.09	6.16	6.21	6.24	6.25	6.24	6.21	6.16	6.09	6.00

更に，これをグラフに表わすと，右の図のようになる。



上で調べたことから，二次函数 $y=5x-x^2$ について次のことがわかる。

(1)　等式 $y=5x-x^2$ によって示される函数関係は，これをグラフに示すと，一つの滑らかな曲線ができる。

(2)　x の値が 2.5 より小さい間は，x の値が増すにつれて，y の値は順次大きくなり，$x=2.5$ の時，y の値は最大と

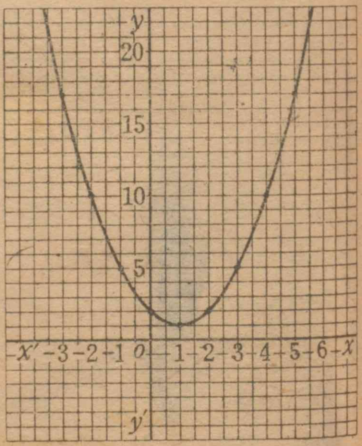
なる。更に，x の値が 2.5 を超えて大きくなるにつれて，y の値は逆に小さくなる。

(3)　この函数関係を示す曲線は，直線 $x=2.5$ に関して左右対称になっている。

次に，二次函数 $y=x^2-2x+2$ について調べてみよう。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
y	…	17	10	5	2	1	2	5	10	17	…

上の表からみて明らかなように，x の値が1より小さい間は，x の値が増すにつれて，y の値は次第に減少し，$x=1$ の時，y は最小な値をとる，更に，x の値が1を超えて大きくなると，y の値は次第に増加する。



また，この函数関係を示すグラフについてみると，できた曲線は，直線 $x=1$ に関して左右対称である。

問1.　次の二次式で示される函数関係をグラフに示せ。

(1)　$y=x(10-x)$　　　(2)　$y=7x-x^2$

(3)　x^2-8x　　　(4)　$x^2+(10+x)^2$

また，これらの二次函数の値を最も大きくするか，あるいは，最も小さくするような x の値をグラフから読みとれ。

問2.　次の二次函数のグラフを書け。

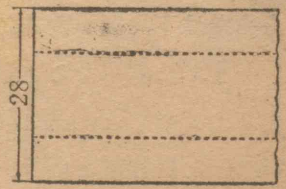
(1)　$y=x^2-x$　　　(2)　$y=x^2-4x$

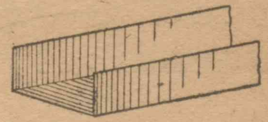
(3)　$y=-x^2-8$　　　(4)　$y=-x^2+6x$

(5)　$y=x^2+6x+21$　　　(6)　$y=8-4x-x^2$

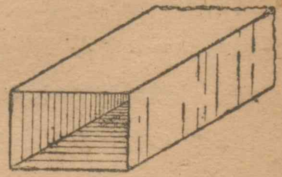
これらの函数の値が 12 となるような x の値を求めよ。また，x のどのような範囲の値に対して，y の値が 12 より小さくなるかを調べよ。

問3.　幅 28 cm の矩形のブリキ板がある。これを下の図のように折り曲げて切り口が矩形の形をしたおけを作るのに，おけの深さを x cm，切り口の面積を y cm^2 として，y を x の式で表わせ。切り口の面積をなるべく大きくするには，深さをどれほどにしたらよいか。また，切り口の面積を 80 cm^2 以上にするには，深さをどのようにしたらよいか。



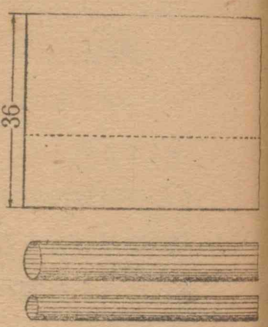


問4.　問3のブリキ板を右の図のように四角柱の形に折り曲げて筒を作り，その切り口の面積をなるべく大きくしたい。どのように折り曲げたらよいか。また，切り口の面積を 40cm^2



にするには，どのように折り曲げたらよいか。

問 5. 幅 36 cm のブリキ板を右の図のように切って，二本の円管を作るのに，円管の切り口の面積の和は，切り口によってどのように変わるか。この和が最も小さくなるのは，どのように切った場合か。



問 1 及び問 2 の二次函数のグラフはいずれも対称軸をもち，上または下に開いた曲線である。

今までに調べたことから，二次式で示される函数関係をグラフに表わすと，上と同じような形をした曲線ができる。この曲線を抛物線（ほうぶつせん）という。

ここで，いろいろな二次式で示されるものについて，その関係を調べよう。まず，簡単な

$$y=ax^2$$

について調べてみる。

(1) $x=0$ ならば，$y=0$ であるからグラフは原点を通る。

(2) 絶対値が等しく符号だけが違う x の二つの値に対しては，x^2 の値は等しいから，二点 (x_1, ax_1^2) 及び $(-x_1, ax_1^2)$ はいずれもグラフ上の点である。この二点は y 軸について対称であるから，この函数関係を示す曲線もまた，y 軸について対称である。

(3) x の値が 0 でない時，x^2 の値はいつも正であるから

$a>0$ ならば　　$y>0$

$a<0$ ならば　　$y<0$

それで，この函数関係を示す曲線は，$a>0$ ならば x 軸の下側には出ない。また，$a<0$ ならば上側に出ない。

(4) x の値の絶対値が大きくなると，$a>0$ ならば y の値は正で幾らでも大きくなる。また，$a<0$ ならば y の値は負で，その絶対値は幾らでも大きくなる。したがって，$a>0$ ならばグラフは上に開き，$a<0$ ならば下に開く。

この始めの場合に，グラフは上に凹（おう）であるといい，後の場合には，下に凹であるということがある。

問 6. 次の各組の二次函数のグラフを書いて，できた曲線をくらべよ。

(1) $y=x^2$，$y=-x^2$　　(2) $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$

(3) $y=3x^2$，$y=-3x^2$

問 7. $y=ax^2$ と $y=bx^2$ で，a, b の絶対値が等しく，符号が違う時，それらのグラフはどのような位置関係にあるか。

問 8. $y=ax^2$ で a の値が変わると，曲線はどのように変わって行くか。

上で調べた，二次函数 $y=ax^2$ で示される曲線について，その結果をまとめると，次のようである。

〔1〕 $y=x^2$ と $y=-x^2$ とでは，曲線は x 軸について対称の位置にある。

〔2〕 $a>0$ ならば，$y=ax^2$ で示される曲線は，$y=x^2$ で示される曲線を，y 軸方向にだけ適当に伸縮したものとみられる。

また，$a<0$ ならば，$y=ax^2$ で示される曲線は，$y=-x^2$ で示される曲線を，y 軸方向にだけ適当に伸縮したものとみられる。

二つの変数 x, y の間に $y=ax^2$ という関係があって，a が x に無関係な定数である時，y は x の**二乗**（または**平方**）に**比例する**といい，a を**比例定数**という。

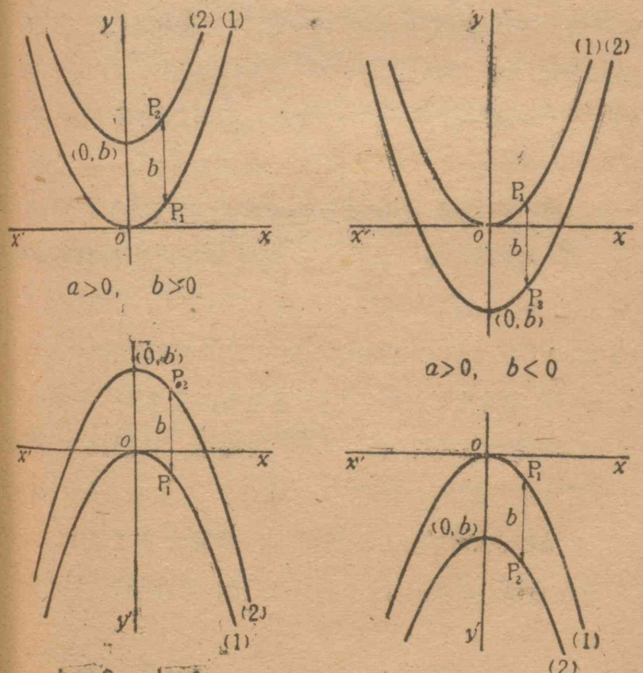
問9. 二乗に比例するものの例を言え。

次に
$$y=ax^2+b \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
の形の二次函数について調べよう。

まず，これを今までに調べた
$$y=ax^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
とくらべてみよう。

x の一つの値に應じて (1) 及び (2) で定まる y の値をそれぞれ y', y'' とすると
$$y'=ax_1^2, \qquad y''=ax_1^2+b$$
となるから
$$y''-y'=b$$

それ故，(x_1, y') 及び (x_1, y'') をそれぞれ P_1, P_2 とすれば
$$P_1P_2=b$$
となる。b が正であるか負であるかによって，P_2 は P_1 よりも $|b|$ だけ上にあるか下にあるかがきまる。したがって，(2) で示される曲線は，(1) で示される曲線を b だけ y 軸に平行に平行移動したものであるということができる。但し，b が正ならば，y 軸の正の向きに，b が負ならば y 軸の負の向きに



$a>0$, $b>0$

$a>0$, $b<0$

$a<0$ $b>0$

$a<0$, $b<0$

移動するものとする。

上の研究をまとめると，次のようになる。

〔1〕 (2) のグラフは，(1) のグラフを y 軸に平行に b だけ平行移動したものである。したがって

〔2〕 (2) のグラフは y 軸に関して対称である。

〔3〕 $a>0$ であるか $a<0$ であるかによって，(2) のグラフは上に凹，または下に凹である。

問 10. 二次函数 $y=2x^2$ のグラフを基にして，次の二次函数のグラフを書け。

(1) $y=2x^2-3$ (2) $y=2x^2+5$

二次函数 $y=ax^2$ のグラフを y 軸に平行に平行移動することは，上で研究した。次に，x 軸に平行に平行移動することを考えよう。

点 (x, y) を x 軸の正の向きに 3 だけ平行移動すると，x 座標が 3 だけ増すから $(x+3, y)$ となり，2 だけ x 軸の負の向きに平行移動すれば，$(x-2, y)$ となる。一般に x 軸に平行に b だけ平行移動すれば $(x+b, y)$ となる。b の値が正ならば，x 軸の正の向きに b だけ平行移動することになり，b の値が負ならば，x 軸の負の向きに $|b|$ だけ平行移動することになる。

問 11. 次の各点を平行移動して点 $(0, 2)$ と重ねるためには，どのような平行移動をすればよいか。

(1) $(5, 2)$ (2) $(-3, 2)$ (3) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

問 12. 次の各点を平行移動して点 (x, y) に重ねるためには，どのような平行移動をすればよいか。

(1) $(x+2, y)$ (2) $(x-4, y)$ (3) $(x-b, y)$

上で調べたことを基にして，x 軸に平行に平行移動してできる曲線の式を求めよう。

$y=ax^2$ で示される曲線を，x 軸に平行に b だけ移動したとする。その曲線上の点の座標を x', y' とすると，x, y；x', y' の間に，次の等式で示されるような関係がある。

$$x'=x+b, \qquad y'=y$$

x, y については，$y=ax^2$ という関係がある。これと上の関係式から，x', y' の関係を示す式ができれば，平行移動してできた曲線の式となる。

さて $x=x'-b, \qquad y=y'$

$$y'=a(x'-b)^2$$

したがって，曲線の式は，次のように書くことができる。

$$y=a(x-b)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

このことから，$y=a(x-b)^2$ で示される曲線は，$y=ax^2$ で示される曲線を x 軸の向きに平行移動したものであることがわかる。

問 13. 次のおのおのの函数のグラフは，$y=3x^2$ のグラフを，x 軸に平行に平行移動したものである。平行移動の向

きの正，負と距離を言え。

(1)　$y=3(x-5)^2$　　(2)　$y=3(x+3)^2$

(3)　$y=3\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$　　(4)　$y=3(x-0.6)^2$

問 14.　次のおのおの函数のグラフの位置を，$y=-3x^2$ を基にして言え。

(1)　$y=-3x^2+4$　　(2)　$y=-3(x+2)^2$

(3)　$y=-3(x-5)^2-6$　　(4)　$y=-3x^2-12x-7$

問 15.　次の各組の二次函数について，グラフの位置関係を述べよ。

(1)　$\begin{cases} y=2x^2+4x \\ y=2x^2-6x-1 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} y=2x^2+4x \\ y=-2x^2+4x \end{cases}$

(3)　$\begin{cases} y=2(x-3)^2+1 \\ y=-2(x-3)^2-1 \end{cases}$

問 16.　二次函数 $y=a(x+b)^2$ のグラフの対称軸はどんな直線か。

問 17.　次の二次函数のグラフの対称軸を言え。

(1)　$y=x^2-8x$　　(2)　$y=-x^2+5x$

(3)　$y=2x^2+9x$　　(4)　$y=-2x^2+6x-5$

一般の二次函数

$$y=ax^2+bx+c \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

のグラフについて考えよう。上の等式の右辺は，次のように変形することができる。

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

この等式に，次のような移動の系列を考えると，これで示される曲線も，$y=ax^2$ を示す曲線を適当に移動してできたものと考えられる。

$$y=ax^2 \rightarrow y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \rightarrow y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

言い換えると，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，二次函数 $y=ax^2$ のグラフを x 軸に平行に $-\frac{b}{2a}$ だけ平行移動し，更に y 軸に平行に $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ だけ平行移動したものである。

したがって，一般の二次函数で示される曲線について，次のことがいえる。

〔1〕　直線 $x=-\frac{b}{2a}$ に関して対称である。

〔2〕　$x=-\frac{b}{2a}$ ならば，$y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ である。

〔3〕　$a>0$ であれば，上に凹である。そして，$x<-\frac{b}{2a}$ である時は，x の値が増すにつれて y の値は減じ，$x=-\frac{b}{2a}$ の時，y の値が最小となる。更に，x の値が増して，$x>-\frac{b}{2a}$ となる時は，x の値が増すにつれて，y の値は増す。

$a<0$ であれば，下に凹である。そして，$x<-\frac{b}{2a}$ である時は，x の値が増すにつれて y の値は増し，$x=-\frac{b}{2a}$ の時，y の値は最大となる。更に，x の値が増して，

$x>-\dfrac{b}{2a}$ となる時は，x の値が増すにつれて，y の値は減ずる。

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを単に拋物線 $y=ax^2+bx+c$ といい，点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ をその頂点，対称の軸である直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$ を，その軸という。

問 18. 次の拋物線を書け。また，その頂点の座標及び軸の方程式を書け。

(1) $y=3x^2$　　(2) $y=4x-x^2$

(3) $y=-8x^2+16$　　(4) $y=2x^2-4x-5$

(5) $y=x^2+8x+13$　　(6) $y=24-9x-x^2$

問 19. 拋物線 $y=x^2+px+q$ の頂点の座標及び軸の方程式を書け。

問 20. 拋物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を平行移動して，頂点が次の各点になったとする。それらの拋物線の式を求めよ。

(1) $(0,\ 2)$　　(2) $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$　　(3) $(3,\ 5)$

問 21. 拋物線 $y=2x^2-5x-3$ を平行移動して，頂点が次の各点になったとする。それらの拋物線の式を求めよ。

(1) $(0,\ 0)$　　(2) $(4,\ 1)$　　(3) $(-3,\ 8)$

§2. 二次函数の最大・最小

前節で研究したことによると，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ の値の変化について，次のことがわかる。

$a>0$ ならば，x の値が $-\dfrac{b}{2a}$ より小さい間は，x の値が増すにつれて，y の値は減じ，x の値が $-\dfrac{b}{2a}$ を超えると，x の値が増すにつれて，y の値も増す。

$a<0$ ならば，x の値が $-\dfrac{b}{2a}$ より小さい間は，x の値が増すにつれて，y の値も増し，x の値が $-\dfrac{b}{2a}$ を超えると，x の値が増すにつれて，y の値は減ずる。

したがって，$a>0$ の時，$x=-\dfrac{b}{2a}$ に應ずる y の値 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ は $-\dfrac{b}{2a}$ 以外の値に應ずる y の値のどれよりも小さい。つまり $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ は，y のとる種々な値のうちで最小な値である。

同様に考えて，$a<0$ の時，$x=-\dfrac{b}{2a}$ に應ずる，y の値 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ は，y の種々な値のうちで最大な値である。

このことは，式の変形によっても知ることができる。

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$x=-\frac{b}{2a} \text{ ならば } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

$$x\neq-\frac{b}{2a} \text{ ならば } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$$

である。したがって

〔1〕 $a>0$ の時

$$x=-\frac{b}{2a} \text{ ならば } a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

したがって　　　$y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

$x \neq -\dfrac{b}{2a}$ ならば　$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2>0$

したがって　　　$y>-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

〔2〕　$a<0$ の時

$x=-\dfrac{b}{2a}$ ならば　$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$

したがって　　　$y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

$x \neq -\dfrac{b}{2a}$ ならば　$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2<0$

したがって　　　$y<-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

問 1.　次の二次函数の最大値または最小値を求めよ。また，それに應ずる x の値を求めよ。

(1)　$y=2x^2-5x$　　　(2)　$y=2x^2-5x+4$

(3)　$y=-2x^2+6x$　　　(4)　$y=-2x^2+6x+3$

(5)　$y=3x^2+7x$　　　(6)　$y=7+16x-2x^2$

(7)　$8+4x-5x^2$　　　(8)　$(x+4)(x+6)$

(9)　$(2x+1)(x-5)$　　　(10)　$3(x+3)^2-10$

問 2.　縦，横の長さの和が 12 cm になるような矩形は無数に多い。このような矩形のうちで，面積が最も大きいのはどのような矩形か。

問 3.　直角をはさむ二辺の和が 15 cm であるような直角三角形のうちで，斜辺の最も短いものは何か。

問 4.　初速 20 m/秒 で，眞上に投げ上げた物体が t 秒の後，h m の高さにあるとする。空氣の抵抗を考えに入れなければ，t, h の關係は，次の等式で示される。

$$h=20t-4.9t^2$$

この物体が最高の位置に達するのに何秒かかるか。

問 5.　抛物線 $y=ax^2+bx+c$ は，どんな場合に，x 軸と交わるか。それを判定する方法を述べよ。それを問 1 のおのおのの抛物線に應用せよ。

§3.　二次方程式

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ で，y の値をある定った値 k に等しくするような x の値を求めよう。これは

$$ax^2+bx+c=k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

に適する x の値を求めることで，グラフによって求めるには，抛物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=k$ との交点の x 座標を読みとればよい。

(1) のような方程式を**一元二次方程式**という。

(1) で，右辺の k を移項すると

$$ax^2+bx+c-k=0$$

となる。$c-k$ はある定った値である。これを改めて c と書けば

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる。一元二次方程式では，すべての項を左辺に集め，同類項を約してしまえば，(2)の形になるから，(2)を一元二次方程式の**一般式**という。

方程式 (2) を解くには，抛物線 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸と交わる点の x 座標を読みとればよいが，また，次のように考えることもできる。

(2) を書き換えて

$$ax^2=-bx-c$$

とする。これは抛物線 $y=ax^2$ と，直線 $y=-bx-c$ との交点の x 座標を読みとることによって解かれる。

また，(2)は次のように変形することもできる。

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$$

したがって，抛物線 $y=x^2$ と，直線 $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ との交点の x 座標を読みとることによっても解くことができる。この方法は，抛物線 $y=x^2$ を一つきっちり書いておけば，容易に解くことができるので，上に述べた方法にくらべてまさっているといえる。

問 1. 次の方程式を上の方法で解け。

(1) $x^2-x-6=0$　　(2) $2x^2+x-12=0$

(3) $7-x-6x^2=0$　　(4) $2x+3-x^2=0$

(5) $x^2+x+1=0$

次に，一元二次方程式を計算で解くことを考えよう。まず，簡単な場合から順次に研究して行こう。

〔1〕 定数項がない場合

方程式は　$ax^2+bx=0$

である。x を括り出して

$$x(ax+b)=0$$

二つの数の積が0となるのは，少なくとも一方の因数が0である場合に限る。したがって

$$x=0 \quad または \quad ax+b=0$$

第二式から，$x=-\frac{b}{a}$ となるから，根は 0 及び $-\frac{b}{a}$ である。

〔2〕 因数分解による方法

第二章で学んだように，ax^2+bx+c が容易に因数分解される場合がある。例えば

$$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$$

であるから，方程式

$$x^2-x-6=0$$

は　$(x+2)(x-3)=0$

となる。したがって

$$x+2=0 \quad または \quad x-3=0$$

よって　$x=-2$　または　$x=3$

となり，根は -2 及び 3 である。

始めに考えた〔1〕の場合は，因数分解のできる特別の場合とみてよい。

$(x-1)(x+1)$

問 2. 次の方程式を解け。

(1) $x(x-9)=0$　　(2) $2x(x+3)=0$

(3) $x(4x-3)=0$　　(4) $6x^2+5x=0$

(5) $0.5x^2=2.5x$　　(6) $(x-2)(x+5)=0$

(7) $(2x-1)(3x+5)=0$　　(8) $x^2-x-2=0$

(9) $x^2-8x+15=0$　　(10) $x^2-10x-11=0$

(11) $2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}x^2=0$　　(12) $(x-1)^2+3=(x+2)^2$

〔3〕 一次の項を欠く場合

方程式は　$ax^2+c=0$

である。c を移項し，両辺を a で割れば，方程式は

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

となる。$-\frac{c}{a}$ はある定まった数であるから，これを改めて k と書くことにすると，方程式は

$$x^2=k$$

となる。k が負の数でなければ，この方程式の根は，k の平方根である。即ち，この方程式の根は $\sqrt{k}$ と $-\sqrt{k}$ とである。

問 3. 次の方程式を解け。

(1) $x^2=49$　　(2) $4x^2=81$

(3) $x^2-6=0$　　(4) $3x^2-27=0$

(5) $3x^2-5=2x^2+7$　　(6) $(x-3)^2=81$

(7) $(x+4)(x+5)=3(x+1)(x+2)-4$

一般に，正の数 k の平方根は二つあって，それらは絶対値が等しく，符号は反対である。その正の方を $\sqrt{k}$，負の方を $-\sqrt{k}$ と表わす。また両方をまとめて $\pm\sqrt{k}$ と書く。

この書き方によれば，方程式 $x^2=k$ の根は，$k>0$ ならば，$x=\pm\sqrt{k}$ であり，$k=0$ ならば，$x=0$ である。

問 4. 次の方程式を解け。

(1) $x^2=100$　　(2) $x^2-15=0$

(3) $2x^2+6=5x^2-3$　　(4) $4(x+2)^2=(x+8)^2$

(5) $9x^2=(x-3)^2$　　(6) $5x^2=(x+3)^2$

われわれの今までに知っている数は，無理数と有理数とであって，どれも平方すれば正の数か 0 となって，負の数にはならなかった。

したがって，$k<0$ ならば，方程式

$$x^2=k$$

は根をもたないとか，解けないとか言って差支えない。

しかし，方程式 $x+5=3$ の根があるようにするために，$3-5$ を考えて，このような方程式でも根があるとした。また，有理数だけを考えていた時，方程式 $x^2=2$ の根があるようにするために，$\sqrt{2}$ を考えて，このような方程式でも根があるとした。ここでも，$x^2=-1$, $x^2=-2$, $x^2=-\frac{3}{5}$ などに根があるようにするために，新しい数を考えよう。

$k<0$ である時，$x^2=k$ に適するような x の値があるもの

として，このような数を**虚数**と名づける。特に

$$x^2=-1$$

であるような x を $\sqrt{-1}$ と $-\sqrt{-1}$ とする。$\sqrt{-1}$ を記号 i で表わし，**虚数単位**という。

虚数に対して，有理数・無理数をまとめて**実数**という。実数と虚数との著しい違いは，次のようである。

実数の平方は正の数，または 0 である。

虚数の平方は負の数である。

虚数についての計算は，全く実数と同様であるとする。

$$(-i)^2=i^2=-1$$

a を実数とすると

$$(ai)^2=a^2i^2=-a^2$$

したがって，方程式　$x^2=-1$

の根は　$\pm i$ である。

また，方程式　$x^2=-4$

の根は，$\pm 2i$ である。

同様に，方程式　$x^2=-5$

の根は，$\pm\sqrt{5}\,i$ である。

このような虚数を考えると，方程式 $x^2=k$ は，k の正，負に関係なく根があるといえる。

問 5.　次の方程式を解け。

(1)　$x^2=-16$　　(2)　$x^2+25=0$

(3)　$3x^2=-5$　　(4)　$\frac{1}{2}x^2+4=0$

(5)　$9x^2+1=0$　　(6)　$6x^2+11=0$

(7)　$(x-3)^2+3(x+1)^2=0$　　(8)　$(x-2)^2+5=0$

問 6.　次の式を簡単にせよ。

(1)　$2i+5i$　　(2)　$i-4i$

(3)　$\sqrt{-49}+\sqrt{-16}$　　(4)　$\sqrt{-100}-\sqrt{-64}$

(5)　$2\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,i$　　(6)　$\sqrt{3}\,i-\sqrt{2}\,i$

(7)　$3i+2i$　　(8)　$\sqrt{5}\,i\times 2\sqrt{5}\,i$

(9)　$6i\div 2i$　　(10)　$4\sqrt{7}\,i\div 2\sqrt{7}\,i$ 2

(11)　i^3 $=-\sqrt{-1}$　　(12)　i^4 $=1$　　(13)　$\frac{1}{i}$ $=-i$

〔4〕　根の公式

上では，二次方程式の特別の形のものについて，その解法を考えた。ここでは，一般の形の方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

について，その解法を考えよう。

すでに，第1節でわかったように

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

であるから，方程式は

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

と書くことができる。両辺を a で割れば

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

両辺の平方根をとれば

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

故に $$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となる。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

を，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**根の公式**という。

問 7. 次の方程式を解け。

(1) $x^2-6x-16=0$　　(2) $2x^2-5x=3$

(3) $3x=x^2+1$　　(4) $4x^2+7x=92$

(5) $2x^2-5x+1=0$　　(6) $x^2+5x+7=2x^2+6x+1$

二次方程式　　$ax^2+bx+c=0$

で，係数 a, b, c がすべて実数である時，その根について，次の三つの場合がある。

〔1〕 $b^2-4ac>0$

この場合，方程式の二つの根は実数で相異なる。

〔2〕 $b^2-4ac=0$

この場合，方程式はただ一つの実数の根 $-\frac{b}{2a}$ をもつ。

〔3〕 $b^2-4ac<0$

この場合，方程式の二つの根は，実数でなくて，実数 $-\frac{b}{2a}$ と，虚数 $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の和として表わされる。

方程式の根が実数である時は，方程式は**実根**をもつといい，根が実数でない時は，方程式は**虚根**をもつという。

係数 a, b, c が実数である二次方程式を**実係数方程式**という。実係数方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実根をもつかどうかは，b^2-4ac によって判断することができる。

上に述べたことから，b^2-4ac は，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根についての判断をする時に用いられる重要な式である。これを二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**という。これを普通 D で表わす。

$$\mathrm{D}=b^2-4ac$$

上に述べたことをまとめると，次のようになる。

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根は

〔1〕 $\mathrm{D}>0$ ならば，相異なる二つの実根

〔2〕 $\mathrm{D}=0$ ならば，一つの実根

〔3〕 $\mathrm{D}<0$ ならば，相異なる二つの虚根

である。

上に述べたように，二次方程式の根は，〔1〕及び〔3〕の場合には，根が二つであるが，〔2〕だけは一つである。しかし，a, b, c が実数で，D の値が正の数から 0 に近づくように変化したものとみれば，$\mathrm{D}=0$ となる場合は，$\mathrm{D}>0$ となる場合の特別なものであるといえる。したがって，$\mathrm{D}=0$ の場合の一つの根は，二つの根が等しくなったものと考えることができる。この意味で，$\mathrm{D}=0$ の時は，方程式は相等しい二つ

の根，あるいは，二重根をもつといい，更に言葉を略して，等根をもつということがある。つまり，実係数の二次方程式で，判別式について

〔1〕 D>0 ならば，相異なる二つの実根

〔2〕 D=0 ならば，等根（等しい二つの実根）

〔3〕 D<0 ならば，虚根

となるのである。

問 8. 次の方程式の根を判別せよ。次に，これを解け。

(1)	$5x^2=26x-5$	(2)	$x^2-x-\frac{3}{4}=0$
(3)	$x^2+10x+3=2x^2-5x+53$		
(4)	$x^2+x+1=0$	(5)	$x^2-x+4=2x-1$
(6)	$2x^2-x-5=x^2+3x-9$	(7)	$x^2+16x+64=0$
(8)	$3x^2-5x+5=0$ D<0	(9)	$9x^2+16(x+1)^2=0$
(10)	$0.43x^2-0.27x-3.17=0$		

問 9. 実係数の二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根は，判別式によって判別される。このことと，抛物線 $y=ax^2+bx+c$ の x 軸に対する位置との関係を調べよ。

a, b を実数とする時，$a+bi$ を複素数という。

複素数 $a+bi$ で，$b=0$ ならば，実数 a となり，$a=0$ ならば虚数 bi となるから，複素数の中には，実数も虚数も含められていると考えてよい。

複素数の寄算・引算・掛算・割算は，次のようである。

加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乗法　$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$

$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

特に　$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

である。

除法
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \quad \left(\begin{array}{l}c,\ d\ \text{は同時に}\\ \text{は}\ 0\ \text{でない}\end{array}\right)$$
$$=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

また，二つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ とが等しいということは，$a=c$ であると同時に $b=d$ であることを示す。

問 10. 次の式を計算せよ。

(1)	$(2+i)+(5+4i)$ $=7+5i$	(2)	$(-1+2i)+(7-3i)$ $=6-i$
(3)	$\left(5+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)$	(4)	$(10-3i)-(7-5i)$
(5)	$(-8-i)-(13+14i)$	(6)	$(4+2i)(3-2i)$
(7)	$(8.4-2.9i)(1-6i)$	(8)	$(5+4i)(5-4i)$
(9)	$\frac{12+4i}{3-i}$	(10)	$\frac{15-2i}{4+3i}$ $=\frac{54-53i}{25}$
(11)	$(3+8i)^2$	(12)	$(-10+2i)^2$

§4. 根と係数との関係

前節で，二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の二つの根は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2a},\qquad \mathrm{D}=b^2-4ac$$

であることがわかつた。今，この二つの値を $\alpha,\ \beta$ としよう。

例えば　$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\mathrm{D}}}{2a},\qquad \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$

であるとすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{\mathrm{D}})(-b-\sqrt{\mathrm{D}})}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\mathrm{D}})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\mathrm{D}}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

したがって　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

あるいは　$\dfrac{b}{a}=-(\alpha+\beta),\qquad \dfrac{c}{a}=\alpha\beta$

となる。これを二次方程式の**根と係数との関係**という。

前節で，二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

を解くのに，左辺の二次式を因数分解を用いて解いた。ここでは逆に (1) を解くことによって，二次式

$$ax^2+bx+c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

を因数分解する方法を考えよう。

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

である。方程式 (1) の二根を α,β とすれば，根と係数との関係から，次のようになる。

$$ax^2+bx+c=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

〔例〕 二次式 $12x^2+17x-40$ を因数に分解せよ。

〔解〕 $12x^2+17x-40=0$ を解くと

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\times12\times(-40)}}{24}=\frac{-17\pm47}{24}$$

故に　$x=\dfrac{5}{4}$　または　$x=-\dfrac{8}{3}$

したがって

$$12x^2+17x-40=12\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{8}{3}\right)$$

$$=4\left(x-\frac{5}{4}\right)\times3\left(x+\frac{8}{3}\right)$$

$$=(4x-5)(3x+8)$$

問1. 次の方程式の二根の和と積を言え。

(1) $x^2+8x+15=0$　　(2) $x^2-6x+8=0$

(3) $3x^2+2x-5=0$　　(4) $3x^2-4x=55$

(5) $5x^2=26x-5$　　(6) $\dfrac{5}{7}x^2=\dfrac{2}{11}x+\dfrac{3}{4}$

問2. 次の二次式を因数に分解せよ。

$+\frac{14}{55}$　$\frac{21}{-20}$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(1) $x^2-25x+156$　　(2) $2x^2+5x-18$

(3) $2x^2-19x-21$　　(4) $2x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{6}$

(5) $3x^2+\frac{19}{2}x-18$　　(6) $6x^2+\frac{41}{5}x+\frac{8}{3}$

問3. 次の方程式の一つの根は-3である。mの値を求めよ。

(1) $x^2+mx-6=0$　　(2) $2x^2+5x+m=0$

§5. 二次不等式

複素数に関しては，大小関係を考えることはできない。本節では，大小関係を中心にして考えるのであるから，数といえば，それが定数であっても変数であっても，すべて実数であるとする。

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，直線 $x=-\frac{b}{2a}$ を軸とし，点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ を頂点とし，$a>0$ ならば，上に開き，$a<0$ ならば下に開いた抛物線である。この抛物線上で，x 軸の上側にある点の y 座標は正であるから，それらの x 座標は，不等式

$$ax^2+bx+c>0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

によって表わされる。また，x 軸の下側の点の x 座標は

$$ax^2+bx+c<0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

によって表わされる。

不等式 (1)，(2) あるいは (1)，(2) の形に導くことのできる不等式を，**二次不等式**といい，この不等式に適する x の値の範囲を見出すことを，その**不等式を解く**という。

上に述べたことによって，不等式 (1) あるいは (2) を解くには，抛物線 $y=ax^2+bx+c$ を書き，x 軸の上側あるいは下側にある曲線の部分に應ずる x の値の範囲を定めればよい。

問1. 次の不等式を解け。

(1) $x^2-4x-5>0$　　(2) $4x^2+7x-15<0$

(3) $x^2-7x+10>0$　　(4) $10x-3x^2-3>0$

(5) $x^2+2x+3>0$　　(6) $x^2+5<6x$

問2. 二次不等式をグラフで解くのに，不等式を次のように変形して解くこともできる。

(1) $ax^2+bx+c>0$ あるいは $ax^2+bx+c<0$ を

$ax^2>-bx-c$ あるいは $ax^2<-bx-c$

としてみる。

(2) 二次不等式を

$x^2+b'x+c'>0$ あるいは $x^2+b'x+c'<0$ とし，

更に，$x^2>-b'x-c'$ あるいは $x^2<-b'x-c'$

としてみる。

この (1)，(2) のようにしてグラフで解く方法を言え。

問3. 上に述べた方法で問1の不等式を解け。

次に，二次不等式を計算で解くことを考えよう。

不等式 (1) あるいは (2) で，x^2 の係数 a は正であると考え

てよい。それは，もし a が負であれば，不等式の両辺に -1 をかけて，x^2 の係数を正にすればよい。もちろん，その場合には，不等号の向きを変えなければならない。

根と係数との関係からわかったように，方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の二根を α, β とすれば

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

となるから，不等式(1)及び(2)はそれぞれ

$$a(x-\alpha)(x-\beta)>0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

あるいは $$a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2')$$

と書き換えることができる。$a>0$ ときめたから $(1'), (2')$ はそれぞれ，両辺を正の数 a で割ることによって

$$(x-\alpha)(x-\beta)>0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)<0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

と変形することができる。

二つの実数の積が，正または負となるのは，その二数が同符号の数であるか，または異符号の数であるということと同じである。しかし，α, β は実数であるとは限らないから，α, β が共に実数である場合と，虚数である場合とに分けて考えなければならない。また，実数である場合についても，相異なる場合と，相等しい場合に分けて考える必要がある。

〔1〕 α, β が相異なる実数である場合

まず，不等式 (3) について調べよう。不等式 (3) が成り立つためには $x-\alpha$, $x-\beta$ は同符号の数でなければならない。

即ち $$x-\alpha>0,\ x-\beta>0 \quad あるいは \quad x-\alpha<0,\ x-\beta<0$$

したがって $$x>\alpha,\ \ x>\beta \quad あるいは \quad x<\alpha,\ \ x<\beta$$

今，α, β のうち，大きい方を α，小さい方を β とすれば，$x>\alpha$ であると共に $x>\beta$ であるためには，$x>\alpha$ であればよい。

また，$x<\alpha$ であると共に $x<\beta$ であるためには，$x<\beta$ であればよい。

つまり (3) が成り立つためには，x の範囲は

$$x>\alpha \quad または \quad x<\beta$$

である。明らかに，上の範囲にある x の値に対しては，(3) の不等式は成り立つ。即ち，不等式(3)，したがって(1)の解は

$$x>\alpha \quad または \quad x<\beta$$

である。

また，(4)，したがって(2)の不等式の解は $\beta<x<\alpha$ である。

問4. (4) の不等式の解法をくわしく説明せよ。

〔2〕 α, β が相等しい(実数である)場合

不等式 (3) 及び (4) はそれぞれ

$$(x-\alpha)^2>0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3')$$

あるいは $$(x-\alpha)^2<0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4')$$

となる。

$(3')$ は $x \neq \alpha$ である限り，x の値は何であってもよい。

また，$(4')$ は x がどんな値をとっても成立しない。

$\alpha=\beta$ となるのは，D=0 である場合で

$$\alpha=\beta=-\frac{b}{2a}$$

である。したがって，不等式 (1) は $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ である限り，x のどんな値に対しても成り立つが，不等式 (2) に適する x の値はない。

〔3〕 $\alpha,\ \beta$ が実数でない場合

この時は，$x-\alpha,\ x-\beta$ の正，負を論ずることはできない。

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

とすれば

$$(x-\alpha)(x-\beta)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}$$

である。$\alpha,\ \beta$ が実数でないのは D<0 なる場合であって

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqq 0,\qquad -\frac{D}{4a^2}>0$$

であるから　　$(x-\alpha)(x-\beta)>0$

となる。つまり，不等式 (3)，したがって (1) は，x がどんな値をとっても成り立つが，不等式 (4)，したがって (2) に適する x の値はない。

問 5. 次の不等式を解け。

(1) $(x+2)(x-5)>0$　　(2) $(2x+5)(3x-1)<0$

(3) $2x^2-8x+3<0$　　(4) $3x^2+7x+2>0$

(5) $2x^2-3x-2\geqq 0$　　(6) $4x-3<x^2$

(7) $x^2\leqq 16$　　(8) $2x^2+4>4x+x^2$

(9) $x^2-10<5x^2+20x+18$　　(10) $3x^2+16<x^2-x$

問6. 次の二つの不等式が同時に成り立つような x の値の範囲を定めよ。

(1) $x^2-7x+10>0,\ x^2<36$

(2) $3x^2+5x-2>0,\ 4x^2-4x-3>0$

(3) $x^2+2x-35<0,\ 6x^2-7x-5<0$

(4) $x^2+x-1>0,\ 6x^2+x-15<0$

問7. $x^2>a^2$ である時，$x<-a$ あるいは $x>a$ であるといってよいか。

§6. 簡単な絶対不等式

前節でわかったように，不等式には，その式中にある文字が実数である限り，どんな値をとっても成立するものと，そうでないものとがある。これらを分けて考える場合に，前者を**絶対不等式**といい，後者を**條件附不等式**という。

不等式　　$x^2+x+1>0$

は絶対不等式であり

$$2x^2-3x-2<0$$

は條件附不等式である。

不等式の基本的な性質の二，三については，すでに，第一章で述べた。ここでは第一章で述べなかった二，三の基本的な性質について研究しよう。

二数の大小関係はもともと，その二数の差の正，負によって定められるものであるから，二数の大小関係を判定するには，その差の正，負を調べればよい。

まず，第一章で述べたことを列記する。

〔性質1〕 $a>b$ ならば，$a+m>b+m$ である。

〔性質2〕 $a>b$ ならば，$a-m>b-m$ である。

〔性質3〕 $a>b,\ m>0$ ならば，$ma>mb$ である。

〔性質4〕 $a>b,\ m<0$ ならば，$ma<mb$ である。

次に更に，二，三の性質を補足しよう。

〔性質5〕 $a>b,\ b>c$ ならば，$a>c$ である。

〔証明〕 $a>b,\ \ b>c$ であるから

$$a-b>0, \qquad b-c>0$$

したがって $$(a-b)+(b-c)>0$$

故に $$a-c>0$$

〔性質6〕 $a>b,\ c>d$ ならば，$a+c>b+d$ である。

〔証明〕 $a>b,\ \ c>d$ であるから

$$a-b>0, \qquad c-d>0$$

したがって $$(a-b)+(c-d)>0$$

$$(a+c)-(b+d)>0$$

故に $$a+c>b+d$$

〔性質7〕 a, b, c, d がいずれも正の数で $a>b,\ \ c>d$ ならば，$ac>bd$ である。

〔証明〕 $a>b,\ c>0$ であるから

$$ac>bc$$

また，$c>d,\ b>0$ であるから

$$bc>bd$$

故に $$ac>bd$$

特に，$c=a,\ d=b$ とすれば，次の性質となる。

〔性質8〕 a, b が正の数で，$a>b$ ならば $a^2>b^2$ である。

問1. 不等式に関して，次の性質を証明せよ。

(1) $a>b,\ c<d$ ならば，$a-c>b-d$ である。

(2) a, b, c, d がいずれも，負の数で $a>b,\ c>d$ ならば，$ac<bd$ である。

(3) a, b が負の数で $a>b$ ならば，$a^2<b^2$ である。

問2. a, b が共に正の数である時，$a^2>b^2$ ならば $a>b$ であるということができるか。a, b が共に負の数ならばどうか。また，a, b が異符号ならばどうか。

問3. 次の不等式を証明せよ。

(1) $a^2+b^2\geqq 2ab$ (2) $a^2+ab+b^2\geqq 0$

問4. $a>b$ である時，a^3 と b^3 とではどちらが大きいか。

問5. a, b を等しくない二つの正の数とする時，

$$\frac{a+b}{2}, \qquad \sqrt{ab}, \qquad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

の大小関係はどうか。

正の数 a, b に対して $\dfrac{a+b}{2}$ を**相加平均**，$\sqrt{ab}$ を**相乗平均**という。$\sqrt{ab}$ はもちろん ab の平方根のうちの，正の方

である。

等しくない二つの数の相加平均と相乗平均とでは，どちらが大きいか。

問6. a, b が共に正の数である時，$\sqrt{a+b}$ と $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ とではどちらが大きいか。また，$a>b>0$ である時，$\sqrt{a-b}$ と $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ とではどちらが大きいか。

問7. a, b がどんな数であっても，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$|a|-|b|\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$$

問8. 次の不等式を，絶対値の記号を用いないで表わせ。

(1) $|x|<5$　　(2) $|x|>3$

(3) $|x|<|a|$　　(4) $|x|>|a|$

問9. 正の数とその逆数との和は，2より小さくないことを証明せよ。

§7. 簡単な分数函数

x の整式についての分数がある時，その分数の分母が0となるようなxの値を除けば，x の値が定まれば，その式の値も定まるから，分数式そのものもxの函数と考えることができる。y がxの分数式で表わされる時，y はxの分数函数であるという。本節では，簡単な分数函数について研究しよう。

面積が $1\,m^2$ ある矩形の一辺の長さを $x\,m$ とし，他の一辺の長さを $y\,m$ とすれば，y はxの函数で，その関係は次の等式で示される。

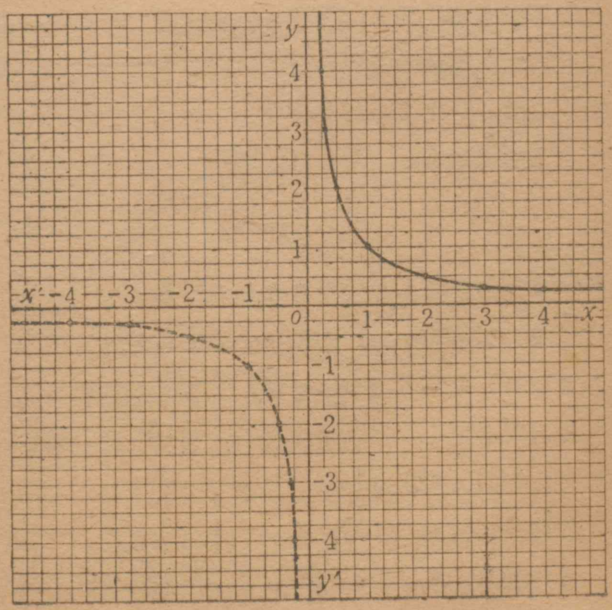
$$y=\frac{1}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

この式で，x の種々な値に應じて定まる y の値を求めると，次のようになる。

x	……	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	……
y	……	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	……

これらの各組の値を座標とする点をとると，一つの曲線上に並ぶことがわかる．この曲線が函数 (1) のグラフである。

x の値が大きくなると，y の値はそれに伴なってますます小さくなるから，曲線はいくらでもx軸に近づく。また，x の値が0に近くなるほどyの値は大きくなるから，曲線



は y 軸にいくらでも近づく。しかし，x がどんな値をとっても，y の値が0となることはない。したがって，曲線が x 軸に接したり交わったりすることはない。また，x が分母にあるので，x の値が0となることはできないから，曲線が y 軸に接したり，交わったりすることもない。

この例では，変数 x は矩形の一辺の長さを表わす変数であるとしたから，負の数をとることはない。つまり，x は正の値のみをとり得るのである。このように，変数のとり得る値の範囲がきまっている時，その範囲を変数の**変域**という。しかし，x の値がどんな実数をとってもよい場合にも，変域を考えることができる。即ち，実数全体を変域と考えればよい。

今，x が矩形の一辺の長さを表わすと考えないで，負の値をとってよいと考えてみよう。x が0以外の正や負のどんな値をとってもよいとすれば，函数

$$y=\frac{1}{x}$$

のグラフはどのようになるであろうか。

$x>0$ の場合については，すでに考えたところである。そこで $x<0$ の場合について考えよう。この場合には，y の値も負となるから，グラフは第三象限にある。絶対値が等しくて符号の相反する x の二つの値を考えると，それに対應する y の値も，絶対値が等しく符号が相反する。一般に点 (a,b) と $(-a,-b)$ とは原点に関して対称の位置にあるから，x の負の値に対する曲線の部分は，x の正の値に対する曲線の部分と原点に関して対称となる。119 ページの図の点線の部分は，x の負の値に対する部分を示したものである。

上に述べたことをまとめると，次のようになる。

〔1〕 函数 $y=\frac{1}{x}$ のグラフは原点に関して対称の位置にある二つの部分からなる。

〔2〕 この函数のグラフは左右に遠ざかるにつれて，いくらでも x 軸に近づき，上下に遠ざかるにつれて，いくらでも y 軸に近づく。

等式 $y=\frac{1}{x}$ で示されるような曲線を**双曲線**という。また，x 軸，y 軸を，この双曲線の**漸近線**という。双曲線 $y=\frac{1}{x}$ では，漸近線が直交しているから，特に，**直角双曲線**ということがある。

問1. 双曲線 $y=\frac{1}{x}$ は直線 $y=x$ に関して対称である。これを証明せよ。

問2. 函数 $y=\frac{a}{x}$ で $a=2, 3, 4, \cdots\cdots$ としてグラフを書け。$a=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$ としたらどうか。

また，a が負の値であったらどうか。

問3. 次の函数のグラフは，$y=\frac{1}{x}$ のグラフを適当に移動してできたものである。これを説明せよ。

(1) $y=\frac{1}{x+4}$ (2) $y=\frac{1}{x-3}$ (3) $y=\frac{1}{x}+2$

(4)　$y=\dfrac{1}{x}-5$　(5)　$y=\dfrac{3x+1}{x}$

問 4.　二つの変数 x, y の間に，函数関係 $y=\dfrac{k}{x}$ が成り立つ時，y は x に**反比例**(あるいは**逆比例**)**する**といい，k を**比例定数**という。

y が x に反比例し，x の値が 5 の時，y の値が 2 であるならば，比例定数は幾らか。

また，この場合に y の値を 10 にするためには，x の値を幾らにすればよいか。

方程式が分数を含み，その分母に未知数がある時，この方程式を**分数方程式**という。

分数方程式を解くには，まず，その分母を拂って，未知数を分母に含まない方程式に導くのである。

〔例 1〕　次の分数方程式を解け。

$$\frac{3}{2x-1}+\frac{4}{3x+1}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

〔解〕　まず，分母を拂うために，方程式の両辺に $(2x-1)(3x+1)$ をかけると

$$3(3x+1)+4(2x-1)=(2x-1)(3x+1) \cdots\cdots\cdots (2)$$

括弧をはずし，移項して同類項をまとめると

$$6x^2-18x=0$$

となる。これを解いて

$$x=0 \quad \text{または} \quad x=3$$

$x=0$ ならば，方程式(1)の左辺は

$$\frac{3}{2\times0-1}+\frac{4}{3\times0+1}=-3+4=1$$

となって，確かに右辺に等しいから $x=0$ は (1) の根である。

$x=3$ ならば，方程式(1)の左辺は

$$\frac{3}{2\times3-1}+\frac{4}{3\times3+1}=\frac{3}{5}+\frac{4}{10}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$$

となって，やはり右辺に等しいから，$x=3$ も(1)の根である。

〔例 2〕　次の分数方程式を解け。

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x-2)(x+1)}=0 \cdots\cdots (1)$$

〔解〕　両辺に $(x-2)(x+1)$ をかけると

$$(x+1)+(x-2)+3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

したがって　　$2x=-2$

故に　　$x=-1$

となる。しかし，$x=-1$ とすると，もとの方程式の分母が 0 となってしまう。つまり，$x=-1$ は (2) の根ではあるが，(1) の根であるということはできない。それで，この場合には根はない。

一般に，分数式は分母が 0 にならない場合に限って，その式に値があるのであるから，分母を拂ってできる方程式を解き，根を求めただけでは，不十分である。その根が必ずもとの方程式の分母を 0 にしないことを確かめてみなければならない。

問 5.　分数方程式を解くには，まず，分母を拂って，未知数を分母に含まない方程式を作るのであるが，そのために

はどんな式をかけたらよいか。

問6. 次の方程式を解け。

(1) $\dfrac{3}{x+1}=3$　　(2) $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{5}{x-1}$

(3) $\dfrac{2}{7-x}=\dfrac{x}{4x-13}$　　(4) $\dfrac{x+5}{7-2x}=\dfrac{x+3}{3x-8}$

(5) $\dfrac{2x}{(2x+1)(x-1)}=\dfrac{3}{2x-1}$　　(6) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{6}{x}=4$

(7) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$　　(8) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{4}{3}$

(9) $\dfrac{x^2-3x-3}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{x}{x+3}+2$

(10) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{7}{x+3}=\dfrac{2}{x+1}$

問7. 川に沿って 6 km 隔たった，二つの町がある。この間を時速 8 km の汽船が往復するのに，1 時間 36 分かかるという。この川の水は一様な速さで流れるものとして，その速さを求めよ。

§8. 連立方程式

二元一次連立方程式の解法については，すでに，第一章で研究した。本節では，二元二次連立方程式について，その解き方を工夫してみよう。

二つの未知数に関する連立方程式で，少なくとも一方の方程式が未知数について二次式である場合に，この連立方程式を**二元二次連立方程式**という。

これを解くための一般的方法は，二元一次連立方程式の場合と同じように，いずれか一方の未知数を消去して，残りの未知数に関する一元方程式を作り出すことである。

〔例 1〕 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y=2x-5 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

〔解〕 (2) の y を (1) に代入すると

$$x^2+(2x-5)^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

となる。(3) を解いて

$$x=0 \quad \text{または} \quad x=4$$

を得る。

$x=0$ ならば (2) から　$y=-5$

$x=4$ ならば (2) から　$y=3$

したがって，根は $x=0,\ y=-5$ 及び $x=4,\ y=3$ となる。この二組の値が (1) 及び (2) に適することとは容易にわかる。

問1. 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ y=x+1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4x=3y \end{cases}$

(3) $\begin{cases} xy=4 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=2x+1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2-4y^2=4 \\ x-4y+3=0 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases}$

問2. 直径 40 cm の円板から，横が縦の2倍よりも 8 cm だけ短くて，最も大きい矩形の板を切り取るには，矩形の縦，横をそれぞれ何センチメートルにすればよいか。

問1の(6)は第二式を x（または y）について解き，第一式の x（または y）に代入して，y（または x）だけの方程式を作って解いてもよいが，次のように考えることもできる。

第一式の左辺を因数に分解すると

$$(x+y)(x-2y)=0$$

したがって

$$x+y=0 \quad \text{または} \quad x-2y=0$$

となる。これらを第二式と組み合わせると，次の二組の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-3y=5 \end{cases} \quad \text{及び} \quad \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$$

この二組の連立方程式を解いてもよい。

問3. 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ 5x-2y+8=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x^2-3xy-2y^2=0 \\ 4x+7y=-10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x^2-4xy-y^2=0 \\ x^2+y^2=15 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x^2-4xy-15y^2=0 \\ x^2+xy-4y^2=64 \end{cases}$

問4. 次のおのおのの連立方程式では，定数項を消去して，問3の形の方程式に直してから解け。

(1) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \\ x^2+2xy-3y^2=5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+xy=24 \\ xy+y^2=40 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=44 \\ 2x^2-3xy+2y^2=16 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} (x+y)^2=5x^2-5 \\ 4(x-y)^2=4y^2-3 \end{cases}$

〔例2〕 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

〔解〕 この連立方程式の一組の根を $x=\alpha, y=\beta$ とすると，他の一組の根は，$x=\beta,\ y=\alpha$ である。これはどちらの組に対しても $\alpha+\beta=5,\ \ \alpha\beta=6$ となることから明らかである。

さて，根と係数との関係から，$\alpha,\ \beta$ を二根とする二次方程式は

$$t^2-5t+6=0$$

である。この左辺を因数に分解して

$$(t-2)(t-3)=0$$

故に　　$t=2 \quad \text{または} \quad t=3$

したがって上の連立方程式の根は $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 及び $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ である。

問5. 次の連立方程式を上の方法で解け。

(1) $\begin{cases} x+y=12 \\ xy=27 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=40 \\ xy=300 \end{cases}$

問6. 次の連立方程式を例2の形に導いて解け。

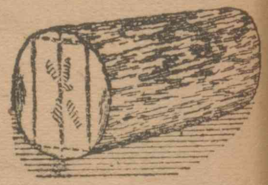
(1) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=-12 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-xy+y^2=19 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=218 \end{cases}$

(5) $x^2+y^2=10xy-5(x+y)=5(xy-1)$

問7. 周囲 120 cm，面積 600 cm^2 の直角三角形の三辺の長さを求めよ。

問8. 直径 35 cm の丸太から，右の図のような四角柱を切り取り，底面の周を 90 cm にすると，その縦，横の長さは幾らか。



問9. 方程式 $x^2+y^2=25$ で，x の値を定めると，それに應じて y の値がきまるから，y を x の函数と考えることができる。この方程式に適する x, y の値の組を座標にもつ点はどのような曲線上にあるか。

一般に方程式 $x^2+y^2=r^2$ のグラフは，原点を中心とする半径 r の円であることを証明せよ。但し，$r>0$ とする。

問10. 円 $x^2+y^2=13$ を，その中心が点(0, 3)，及び(4, 2)に來るようにせよ。おのおのの方程式はどうなるか。

問11. 円 $x^2+y^2=r^2$ を平行移動して，中心が点 (a, b) に來るようにすると，方程式はどうなるか。

問12. 方程式 $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ のグラフは円であるか。円であるならば，その中心の座標と半径とを求めよ。

問13. 問6の(2)で，第一式は円を表わし，第二式は双曲線を表わす。したがって，この連立方程式の根は，この円と双曲線との交点の座標である。これをグラフで求めよ。

この連立方程式を計算で解くのに，$x+y$ を求めると，$x+y=\pm1$ となる。これは二つの直線である。この二つの直線と始めの円及び双曲線とは，どのような関係にあるか。

§9. 簡單な無理方程式

数について平方根が考えられたように，式についても平方根が考えられる。また，数についての場合と同じように，式についても三乘根，四乘根などが考えられる。このような式を**無理式**という。

無理式の取り扱いは，無理数と同様である。

問1. a を実数とすると，a^2 は負の数ではないから，平方根は実数である。$\sqrt{a^2}=a$ は正しいか。正しくないとしたら，正しく書くにはどうしたらよいか。

問2. 次の式を簡單にせよ。

(1) $\sqrt{a^4x}+\sqrt{b^4x}-\sqrt{4a^2b^2x}$　(2) $\sqrt{25b}+2\sqrt{9b}-5\sqrt{4b}$

問3. 次の式で分母が有理式になるようにせよ。

(1) $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$　(3) $\dfrac{3+2\sqrt{x}}{5+3\sqrt{x}}$

(4) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{c+d\sqrt{x}}$　(5) $\dfrac{2y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$　(6) $\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}$

このようにすることを分母を**有理化する**という。

問4. $x=a+\sqrt{b}$, $y=a-\sqrt{b}$ として $x^2+3xy+y^2$ を a, b で表わせ。

問5. 次の式の y を x の式で表わせ。また，x の値を実数とする時，それに應ずる y の値もまた実数となるようにするには，x の値をどのような範囲に限らなければならないか。

(1) $y^2=2x$　(2) $y^2=4x-3$　(3) $x^2+y^2=5$

(4) $3x^2+2y^2=1$　(5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　(6) $x^2-y^2=10$

(7) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$　(8) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(9) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

(10) $2x^2+2xy+y^2-4x+2y+8=0$

方程式が未知数についての無理式を含む時，これを**無理方程式**という。

無理方程式を解くには，適当に移項して両辺を二乗したり，三乗したりなどして，有理方程式に導く。

〔例1〕 $\sqrt{x+5}+1=x$ を解け。

〔解〕 1 を移項すると　$\sqrt{x+5}=x-1$

両辺を平方すると　$x+5=x^2-2x+1$

移項して　$x^2-3x-4=0$

左辺を因数に分解して　$(x+1)(x-4)=0$

故に　$x=-1$　または　$x=4$

$x=-1$ とすると，もとの方程式の左辺は 3 となり，右辺は -1 となるから，$x=-1$ はもとの方程式に適しない。

$x=4$ とすると，左辺は 4 となり，右辺も 4 となるから，$x=4$ はもとの方程式に適する。

故に，求める根は 4 である。

このように，無理方程式を解くには，両辺を二乗したり，三乗したりして有理方程式を作り，これを解いて得る根のうちから，もとの方程式に適するもののみを選ばねばならない。

問6. 上の〔例1〕で，根にならない x の値はどのような理由によって生じたか。$y=\sqrt{x+5}$, $y=x-1$ のグラフを書いて調べよ。

問7. 次の方程式を解け。

(1) $x+\sqrt{1+x}=5$　(2) $2\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$　11=x

(3) $3\sqrt{4x-5}=\sqrt{13x-3}$　(4) $4=2\sqrt{x}-3$

(5) $x=7-\sqrt{x^2-7}$　(6) $\sqrt{x+5}=x-1$　x=4

x=4

(7) $\sqrt{x+15}=\sqrt{x}-\sqrt{5}$　(8) $3x-7\sqrt{x}+2=0$

(9) $x+\sqrt{x+3}=4x-1$　(10) $1-6x-\sqrt{5(x+4)}=0$

x=1

〔例2〕 $2\sqrt{x}-3=\sqrt{x+9}$ を解け。

〔解〕 両辺を平方すると

$$4x-12\sqrt{x}+9=x+9$$

となる。したがって　$3x=12\sqrt{x}$

故に　$x=4\sqrt{x}$

更に平方すると　$x^2=16x$

したがって　$x(x-16)=0$

故に　$x=0$　または　$x=16$

$x=0$ とすると，もとの方程式の左辺は -3；右辺は $+3$ となって，両辺の値は等しくないから，0 は根でない。

$x=16$ とすると，左辺は 5，右辺も 5 となって両辺等しいから，16 は根である。

問 8.　次の方程式を解け。

(1)　$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}-\sqrt{4x-1}=0$

(2)　$\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}-\sqrt{x-1}=0$

(3)　$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$

(4)　$\sqrt{2(2x-3)}=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}$

(5)　$x+1+\sqrt{x+1}=6$

x を含む無理式の値は，x の値が定まれば，それに應じて定まるのであるから，この無理式もまた，函数関係を示すものとみることができる。このような函数を**無理函数**という。

問 9.　$y^2=ax$ のグラフは何か。a の値が変わる時，グラフはどのように変わるか。$y=\sqrt{ax}$ 及び $y=-\sqrt{ax}$ は何を表わすか。

問 10.　次の方程式の表わす曲線は抛物線である。それを

書け。また，頂点の座標及び軸の方程式を書け。

(1)　$y^2=x-2$　　(2)　$y^2=-3x-1$

(3)　$y^2=5(x+4)$　　(4)　$\frac{1}{2}y^2+3x-4=0$

(5)　$x-4y-y^2=0$　　(6)　$2x=y^2-2y+3$

問 11.　次の函数のグラフは何か。

(1)　$y=\sqrt{x-5}$　　(2)　$y=-2\sqrt{x+3}$

(3)　$y=2\sqrt{3x-5}$　　(4)　$y=-\sqrt{x+4}+2$

問 12.　次の函数のグラフは何か。

(1)　$y=\sqrt{4-x^2}$　　(2)　$y=-\sqrt{3-x^2}$

(3)　$y=\sqrt{r^2-x^2}$　$(r>0)$　　(4)　$y=\sqrt{9-x^2}-1$

(5)　$y=4+\sqrt{13-x^2}$　　(6)　$y=-2-\sqrt{3+2x-x^2}$

雑　題

1.　函数 $y=x^2+px$ で，p の値を変えると，それに應じて，この函数のグラフも変わる。p の値とグラフの位置との関係を調べよ。

2.　y は x の二次函数で，x の値が 0, 2, 4 の時，y の値は，10, 0, 10 である。y は x のどのような式で表わされるか。

3.　軸が y 軸に平行な抛物線がある。この抛物線が三点 $(1, -10)$，$(3, 10)$，$(5, -10)$ を通るならば，その方程式はどうか。

4.　次の抛物線の方程式を求めよ。

(1)　$y=-x^2+2$ を，y 軸に平行に 3 だけ平行移動したもの。

(2)　$y=5x^2+3$ を，x 軸に平行に -4 だけ平行移動したもの。

(3)　$y=-2x^2-6$ と，原点に関して対称なもの。

(4)　$y=2x^2-6x$ と，原点に関して対称なもの。

(5)　$y=3x^2+5x-1$ と，x 軸に関して対称なもの。

(6)　$y=-x^2-10x+6$ と，点 $(1,1)$ に関して対称なもの。

5.　変数 x と，その函数 y との間に，次のような関係がある時，このグラフはどんな曲線か。

$$x^2+4y^2=4$$

6.　次の方程式のグラフを書け。

(1)　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

7.　次の方程式のグラフの位置の関係を調べよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2)　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

(3)　$\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(4)　$\dfrac{(x-5)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

8.　次の方程式のグラフを書け。

(1)　$x^2-y^2=4$　　(2)　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$

(3)　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　(4)　$-x^2+y^2=25$

9.　一辺の長さ 30 cm の正方形の厚紙の四隅から，等しい大きさの正方形を切り取って箱を作りたい。切り落すべき正方形の一辺を x cm とし，箱の容積を y cm^3 とする時，y は x のどのような式で表わされるか。x, y の関係を示すグラフを書け。

また，箱の容積を最大にするには，どうすればよいか。

10.　次の函数のグラフを書け。

(1)　$y=x^3$　　(2)　$y=ax^3$

(3)　$y=x^2(x-2)$　　(4)　$y=(x+1)(x-2)(x-5)$

11.　直角をはさむ二辺の和が 15 cm に等しいような直角三角形のうちで，面積の最も大きいものを求めよ。

12.　長さ 50 m のなわで矩形の土地をかこむのに，かこまれた地面を最大にするには，どのようにすればよいか。

13.　長さ 4 m のひもを二つに切って，そのおのおのを周とする二つの正方形を作り，その面積の和を最も小さくするには，ひもをどのように切ればよいか。

14.　次の方程式を解け。

(1)　$(x-5)(x-7)=0$　5 7　　(2)　$(2x+1)(3x+5)=0$

(3)　$3x^2=7x$　　(4)　$x^2-6x+8=0$

(5)　$x^2-12x+4=0$　　(6)　$x^2-5\sqrt{3}x+18=0$

(7)　$x^2+5x+13=0$　　(8)　$5x^2-15x+12=0$

(9)　$(1+0.05x)^2=1.2(1+0.1x)$　$4\pm4\sqrt{6}$

(10)　$(2x+1)(3x-2)(x-4)=0$　$x=-\frac{1}{2}$　$x=\frac{2}{3}$　$x=4$

15.　直径 24 cm の鉄の球を鋳つぶして，内径 6 cm，長さ 100 cm の管を作るには，管の厚みをどれほどにしたらよいか。

16.　3 m を隔てて 10 しょくの電燈と 32 しょくの電燈

がつけてある。この中間のどの辺に障子を置くと，両面の明かるさが等しくなるか。

17. 生徒昇降口に，コンクリート製の正方形のタイルが720枚敷いてある。このタイルを一辺が 10 cm 長いタイルに変えると450枚でよい。昇降口に敷かれてあるタイルの一枚の大きさは何ほどか。

18. 縦1 m，横2 m の机がある。これに，その廣さの2倍の机掛けを掛けて，縦も横も同じ長さだけ垂れるようにするには，机掛けの縦，横の長さをどれほどにしたらよいか。

19. 次の計算をせよ。

(1) $3\left(\frac{\sqrt{6}-3}{3}\right)^2+6\left(\frac{\sqrt{6}-3}{3}\right)$

(2) $\left(\frac{-7+\sqrt{3}}{2}\right)^2-7\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)+1$

(4) $2\left(\frac{1-\sqrt{7}i}{4}\right)^2-\frac{1-\sqrt{7}i}{4}-2$

また，上の式で平方根数の前にある符号を変えて計算せよ。

20. 次の式で x, y が実数である時，その値を求めよ。

(1) $(x+y)+i(x-y)=2+4i$

(2) $(2x+7y)+i(3x-2y)=-3-i$

21. a, b, c を実数とする時，$\alpha+i\beta$ が方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根であれば，$\alpha-i\beta$ もまた根であることを証明せよ。但し，α, β も実数とする。

22. 次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{2}{1+i}$　(2) $\frac{1+i}{1-i}$　(3) $\frac{-2+2i}{-4i}$

(4) $\frac{-4i}{-2+2i}$　(5) $\frac{-2+2\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$　(6) $\frac{3+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+3i}$

23. 甲，乙二人で同じ二次方程式を解くのに，甲は一次の項を，乙は定数項を書き誤って，それぞれ $-2, 6$ 及び $-2\pm\sqrt{8}i$ という根を得た。正しい方程式の根を求めよ。

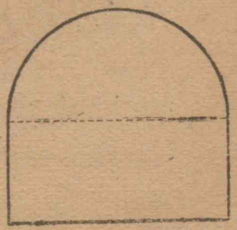
24. 二次函数 $y=2x^2-x-3$ で，y の値をあるきまった値にしようとすると，それに應ずる x の値が実数にならないことがある。このことをグラフで説明せよ。

y がどのような値をとる時，それに應ずる x の値が実数になるか。また，このことを調べるのに判別式を利用することはできないか。

25. 前問で研究した方法で，次の二次函数の最大・最小を求めよ。

(1) $y=x(10-x)$　(2) $y=x^2+2x-5$

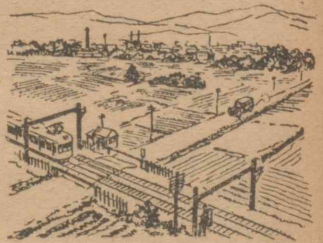
(3) $y=3-4x-2x^2$　(4) $y=ax^2+bx+c$



26. 右の図のように，矩形と半円とを継いだ形をした窓がある。その周囲は5 m である。窓は周囲の構造上これ以上大きくすることはできないが，これと同じように，周囲はやはり5 m

で，半円と矩形とを継いだ形にしてなるべく廣くするとしたら，どのようにすればよいか。

27. 電車線路と，これに直交する街道がある。電車が踏み切りを通過してから20秒後に，この街道を走る乗合自動車が踏み切りを渡った。



電車と自動車との直線距離が最小となるのはいつか。但し，電車と自動車の速さは，それぞれ毎時60 km, 30 km とする。

28. 次の方程式を解け。

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+10}$ (2) $\dfrac{5}{x-5}-\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{2}{x+2}$

(3) $\dfrac{x-4}{3}-\dfrac{6}{5-2x}=\dfrac{x-16}{5}$ (4) $\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x+1}$

(6) $\dfrac{x-7}{x^2+12x+35}=\dfrac{2x}{2x^2+11x-27}$

(7) $\dfrac{x-1}{x+4}+\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{x-5}{x}=3$

(8) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{x-7}-\dfrac{1}{x-9}$

29. x が正の範囲で変わる時，次の函数のグラフはどのような曲線か。負の範囲まで考えるとグラフはどうなるか。

$$y=x+\frac{1}{x}$$

30. $x>0$ とすると，前問の函数の値は 2 より小さくならない。これを上に書いたグラフを用いて証明せよ。

31. 午前10時に出発したある舟が，川を 7 km さかのぼって直ちに引き返し，午前11時52分に出発点に戻った。流れの速さを毎時 2 km として，この舟の静水での速さを求めよ。

32. ふもとから 4 km ある山の頂上までスキーで往復した。下る時にかかった時間は，上りよりも 1 時間 20 分少なかった。下りの速さは，上りよりも毎時 4 km 速いとして，上り，下りの速さを求めよ。

33. 水槽に水を入れるために 2 本の管があって，一つの管は他の管の 2 倍の給水力がある。この 2 本の管で給水を始めてから 1 時間 20 分たって，小さい方の管が故障したので，大きい管だけで給水して，満水するまでに始めから 3 時間かかった。水は，始め，水槽に $\frac{1}{3}$ だけ入っていたという。故障がなかったら満水まで何時間かかったか。

34. 8% の食塩水と 5% の食塩水とを $1:x$ の割合にまぜてできる食塩水の濃度を y% として，y を x の式で表わせ。また，x, y の関係を示すグラフを作れ。

35. 未知数 x に関する方程式 A=B の根は，必ず方程式 CA=CB の根である。方程式 CA=CB の根はすべて方程式 A=B の根であるということができるか。このことと，分数

方程式を解く時，もとの方程式の根にならない x の値が出ることとの間には，どんな関係があるか。

36. 次の不等式を解け。

(1) $6x^2-x-18<0$　　(2) $6-5x-6x^2>0$

(3) $10x^2-2x+3>0$　　(4) $\dfrac{x-2}{x+3}>0$

(5) $\dfrac{2x-3}{x+3}<0$　　(6) $\dfrac{3x+10}{2x+5}>0$　　(7) $\dfrac{5x-4}{x+4}<2$

(8) $(x+5)(x+2)(x-1)>0$

(9) $(2x-3)(3x-4)(4x-5)<0$

(10) $(2x-7)(x^2-x-6)<0$　　(11) $\dfrac{6x-1}{2x^2-3x-5}>0$

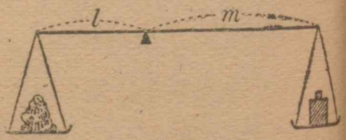
(12) $(x^2-2x-8)(x^2-3x-27)<0$

(13) $(x+5)(2x^2+x+2)>0$

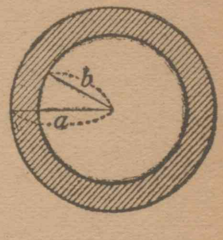
37. 8% の食塩水と 5% の食塩水とをまぜて，5.5% 以上の食塩水を作るには，どのような割合にまぜなければならないか。

38. 海水を煮つめて 30% 以上の食塩水にするには，どれほどの水分を蒸発させなければならないか。海水は，1 kg 中 35 g の塩類を含むものを標準とする。

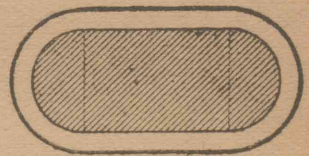
39. 右の図のように，左右のうでの長さの違う天びんがある。左のさらに物体をのせ，右のさらに a g の分銅をのせたらつり合った。次に，右のさらにその物体をのせ，左のさらに b g の分銅をのせたらつり合った。この物体の質量は，a, b の相乗平均になることを証明せよ。



40. 右の図のように，半径 a の円から半径 b の円を切り取った形の紙がある。その面積は，両円の半径の相加平均に等しい半径の円の周と，両円の半径の差との積に等しいことを証明せよ。



41. 右の図に示したような内周 400 m のトラックで，左右の曲線路の部分は二つの等しい半円である。この内部の面積を 10000 m^2 にするには，直線路の長さをどれほどにすればよいか。



42. 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x^2=5y+4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+y=19 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+2y-4=0 \\ x^2+2xy-7x+2=0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ x^2+y^2+4x-6y-13=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+2y=4 \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+4y=4 \\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$

43. 直線 $y=2x+b$ が円 $x^2+y^2=4$ に接するように, b の値を定めよ。また, 交わるためには, b はどんな値をとらねばならないか。

44. 直線 $y=ax+5$ が円 $x^2+y^2=9$ に接するように a の値を定めよ。また, 交わるためには, a はどんな値をとらねばならないか。

45. 方程式 $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ の根は, いずれも方程式 $\mathrm{A}^2=\mathrm{B}^2$ の根であることを証明せよ。また, 方程式 $\mathrm{A}^2=\mathrm{B}^2$ の根は, いずれも方程式 $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ の根であるということができるか。

46. 次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{x-1}<3-x$ (2) $x+1<\sqrt{25-x^2}$

47. 次の不等式に適する x, y の値を座標とする点は, どんな範囲にあるか。グラフによって示せ。

(1) $y<3x^2-2$ (2) $x^2+y^2<13$

(3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1$ (4) $x<y^2-2y+2$

(5) $x^2-y^2>1$ (6) $xy>5$

48. 次の各組の二つの不等式に適する x, y の値を座標にもつ点のある範囲を図で示せ。

(1) $\begin{cases} y>2x-3 \\ x^2+y^2<16 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-y+3>0 \\ y>2x^2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y>x-3 \\ y^2<4x \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ x^2-y^2<1 \end{cases}$

第四章 指数函数と対数函数

§1. 累乗と指数法則

地球と太陽との距離は約 1.5 億キロメートルである。このような大きな数を, キロメートルを単位として表わす時, $1.5\times10^8\,km$ と書くことがある。

ある数 a を n 箇かけ合わせたものを, a の n 乗という。二乗, 三乗, 四乗などをまとめて**累乗**(るいじょう)といい, これを a^2, a^3, a^4 などと記し, 2, 3, 4 などを累乗の**指数**という。

正, 負の数 a, b の累乗について, その計算規則を調べよう。

$$\begin{cases} a^3\times a^2=aaa\times aa=a^5=a^{3+2} \\ (a^2)^3=a^2\times a^2\times a^2=a^{2+2+2}=a^6=a^{2\times3} \\ a^3\div a^2=\dfrac{a^3}{a^2}=\dfrac{aaa}{aa}=a=a^{3-2} \\ (ab)^2=ab\times ab=aa\times bb=a^2b^2 \end{cases}$$

上の計算方法からわかるように, m, n を正の整数とする時, 次の等式が成り立つ。

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad a^m\div a^n=a^{m-n}\ (m>n)$$

$$(a^m)^n=a^{mn},\quad (ab)^n=a^nb^n,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

これを**指数法則**という。

問 1. 光の速さは毎秒 $3\times10^5\,km$ である。光が太陽から地球に達するには, 何ほどの時間がかかるか。

問　　題

1. 次の計算を，10 の累乗の形に書き表わせ。

(1) $10^3\times10^2\times10$　　(2) $10^7\div10^5$

(3) $10^5\times10^3\div10^4$　　(4) $(10^5)^3\times10^3$

(5) $10^6\div10^3\div10^2$　　(6) $10^8\div(10^2)^3\times10$

2. 次の計算をせよ。

(1) $2^5\times2^2$　　(2) $2^7\div2^4$　　(3) $(2^3)^2\div2^4$

(4) $2^2\times(2^3)^2$　　(5) $2^6\times2\div(2^2)^3$　　(6) $2^8\div2^4\times2^3$

3. 次の式を簡単にせよ。

(1) $x^5\times x^2$　　(2) $a^5\div a^2$　　(3) $(a^5)^3$

(4) $x^2\times x^5\times x$　　(5) $a^2\times a\times a^5$　　(6) $y^7\div y^2\div y^3$

(7) $3x^3\times2x^2$　　(8) $2x^4\times(-3x^3)$　　(9) $7x^2y\times2x^3y^2$

(10) $4xy^2\times x^2y$　　(11) $8x^3y^3\div2xy^2$　　(12) $(3x^2y)^2\div3xy$

(13) $(2y)^3\times4yx^2$　　(14) $5xy^3\times(2xy)^2$　　(15) $6x^3y\div2x^2y$

(16) $\dfrac{3}{4}x^2y\times\dfrac{2}{5}xy^3$　　(17) $\dfrac{4}{5}xy^3\div\dfrac{2}{5}xy$

(18) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{xy^3}{az^4}\times\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x^2z^2}{y^3}$　　(19) $\dfrac{x^3y}{z^4}\div\dfrac{xy}{z}$

4. 次の式の括弧をはずせ。

(1) $(x^3)^5$　　(2) $(xy^2)^3$　　(3) $(0.2x^2)^3$

(4) $(-ab^2)^2$　　(5) $(-a^2b)^3$　　(6) $(-a^3)^5$

(7) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^3$　　(8) $\left(-\dfrac{a^2}{bc}\right)^2$　　(9) $\left(-\dfrac{3a}{2bc}\right)^3$

§2.　累乗根

二乗して a になる数を a の二乗根(または平方根)，三乗して a になる数を a の三乗根(または立方根)といい，これをそれぞれ $\sqrt{a}$，$\sqrt[3]{a}$ で表わすことは，すでに学んでいる。一般に，次のように定める。

n が正の整数である時，n 乗して a となる数を，a の n **乗根**という。二乗根，三乗根などをまとめて，**累乗根**という。

問1.　次の累乗根を残らず言え。

(1) 25 の二乗根　　(2) 8 の三乗根

(3) -8 の三乗根　　(4) 81 の四乗根

(5) 32 の五乗根　　(6) -32 の五乗根

一般に，累乗根について，次の性質がある。

〔1〕 n が偶数である時，

正の数には実数の n 乗根が二つあって，それらの絶対値は等しく，符号は反対である。

負の数には実数の n 乗根がない。

〔2〕 n が奇数である時，

正の数には実数の n 乗根が一つあって，正の数である。

負の数には実数の n 乗根が一つあって，負の数である。

正の数 a の n 乗根のうち，正の方を $\sqrt[n]{a}$ で表わす。根号 $\sqrt{}$ の左肩に書いて何乗根であるかを表わす数を，累乗根の**指数**という。特に，二乗根に限り，通常その指数を書かないでおく。

累乗根について，その計算規則を調べよう。

a, b を正の数とする。まず，次の等式の成り立つことは，累乗根の意味から直ぐにわかる。

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \qquad \sqrt[n]{a^n} = a$$

また，次の関係も成り立つ。

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

問2. 上の関係が成り立つ理由を説明せよ。

〔例1〕 $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$ を計算せよ。 $\sqrt[3]{8}$

〔解〕 $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \times 2} = \sqrt[3]{8} = 2$

〔例2〕 $\sqrt[3]{2} \div \sqrt[3]{18}$ の近似値を求めよ。

立方根表で $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{18}$ を読みとり，割算によって近似値を計算することもできるが，次のように計算すれば，一層便利である。

〔解〕 $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{3^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$

問3. 次の累乗根を a の累乗の形に書き表わせ。

$$\sqrt{a^4}, \qquad \sqrt{a^{10}}, \qquad \sqrt[3]{a^6}, \qquad \sqrt[n]{a^{3n}}, \qquad \sqrt[n]{a^{mn}}$$

問4. m, n が正の整数で，m が n の倍数である場合に，$\sqrt[n]{a^m}$ を a の累乗の形に書き表わせ。

問5. m n が正の整数である時，次の等式が成り立つ。この理由を説明せよ。

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{\underbrace{aa\cdots\cdots a}_{m\text{箇}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\cdots\cdots\sqrt[n]{a}}_{m\text{箇}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

〔例3〕 $\sqrt[3]{27^2}$ を簡単にせよ。

〔解〕 $\sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$

あるいは $\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

問　　題

1. 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{27}$ = 3　(2) $\sqrt[3]{-27}$ = −3　(3) $\sqrt[3]{-0.008}$ = −0.2

(4) $\sqrt[5]{243}$ = 3　(5) $\sqrt[6]{64}$ = 2　(6) $\sqrt[5]{a^5}$ = a

(7) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$ = 3/4　(8) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{32}}$ 2　(9) $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^6}}$ = 1

2. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$　(2) $\sqrt[3]{x^4} \div \sqrt[3]{x}$　(3) $\sqrt[n]{(a^n)^m}$ a^m

(4) $\sqrt[3]{2a^2} \times \sqrt[3]{4a}$　(5) $\sqrt[5]{x^4y} \times \sqrt[5]{xy}$　(6) $(2\sqrt[3]{x})^6$

3. $\sqrt[6]{8}$ の近似値は $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$ によって計算してよい。この理由を考えよ。また，その近似値を小数第三位まで求めよ。

一般に，次の等式が成り立つことを説明せよ。

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

4. 次の累乗根の近似値を小数第三位まで求めよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$　(3) $\sqrt[4]{9}$　(4) $\sqrt[6]{27}$

0.447　0.4807　1.732　1.732

(5) $\sqrt{\sqrt[3]{25}}$ (6) $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}$ (7) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{2}{27}}$

1.710 2.885 0.358

§3. 指数の拡張

今までのところ，累乗の指数は正の整数に限られていた。しかし，累乗についてのいろいろな計算を考えた時，指数を正の整数に限っていたのでは不便である。例えば

$$a^8\div a^5=a^3,\qquad a^5\div a^5=1,\qquad a^5\div a^8=\frac{1}{a^3}$$

である。一般に，$a^m\div a^n$ (m, n は正の整数) で，

$m>n$ ならば　$a^m\div a^n=a^{m-n}$

$m=n$ ならば　$a^m\div a^n=1$

$m<n$ ならば　$a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}$

となって，その結果を書き表わすのに不便である。そこで，m, n の大小関係がどんなであろうとも，その結果を a^{m-n} と書き表わすことができるように約束すれば便利になる。

即ち，$a^m\div a^n$ で

$m=n$ ならば　$a^m\div a^n=a^{m-n}=a^0$

$m<n$ ならば　$a^m\div a^n=a^{m-n}=a^{-(n-m)}$

と書くことにして，次のように約束する。

a を 0 でない任意の数とする時

〔1〕 $a^0=1$

〔2〕 p を正の整数とすると　$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$

これを具体的にいえば

〔1〕 $(-1)^0=1,\quad 1^0=1,\quad 10^0=1,\quad \left(\frac{3}{5}\right)^0=1$

とし，$a^5\div a^5=a^0$ と書き表わす。

〔2〕 $a^{-3}=\dfrac{1}{a^3},\quad a^{-4}=\dfrac{1}{a^4},\quad a^{-5}=\dfrac{1}{a^5}$

とし，$a^5\div a^8=a^{-3}$ と書き表わす。

また，累乗根も累乗の形に書き表わすことができれば，その取り扱いも簡単にできる。

$(\sqrt[3]{a^2})^3=a^2$ である。今，$\sqrt[3]{a^3}$ を a^p と書いたとし，どんな指数についても指数法則が成り立つとすると，$(a^p)^3=a^{3p}$ となるから，$3p=2$，したがって $p=\dfrac{2}{3}$ となり，$\sqrt[3]{a^2}$ を $a^{\frac{2}{3}}$ と書き表わすのが便利であるといえる。

また，$(\sqrt[m]{a^n})^m=a^n$ である。今，$\sqrt[m]{a^n}$ を a^p と書いたとし，どんな指数についても指数法則が成り立つとすると，$(a^p)^m=a^{pm}$ となるから，$pm=n$，したがって，$p=\dfrac{n}{m}$ となり，$\sqrt[m]{a^n}$ を $a^{\frac{n}{m}}$ と書き表わすのが便利であるといえる。

このようにすれば，累乗の指数は，正，負のどんな有理数でもよいことになり，また，それらについても指数法則が成り立つとしてよい。

問1. m, n が正の分数である時，$m=\dfrac{q}{p}$，$n=\dfrac{q'}{p'}$ (p, q, p', q' は正の整数) とおくことができる。a が正の数であると $a^m\times a^n$, a^{m+n} は，次のように書き表わされる。

$$a^m \times a^n = a^{\frac{q}{p}} \times a^{\frac{q'}{p'}} = \sqrt[p]{a^q} \times \sqrt[p']{a^{q'}}$$

$$a^{m+n} = a^{\frac{q}{p}+\frac{q'}{p'}} = a^{\frac{p'q+pq'}{pp'}} = \sqrt[pp']{a^{p'q+pq'}}$$

上の二つの等式を pp' 乗して，$a^m \times a^n = a^{m+n}$ が成り立つ理由を説明せよ。

問2. m, n が負の分数である場合についても，$a^m \times a^n = a^{m+n}$ が成り立つ理由を説明せよ。

問3. m, n がどんな有理数であっても，a が正の数であると，次の等式が成り立つ。この理由を説明せよ。

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

〔例1〕 $\dfrac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}}{x} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{2}{3}}}{x} = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$

〔例2〕 $(\sqrt[3]{a^5})^2 \div \sqrt[3]{a} = (a^{\frac{5}{3}})^2 \div a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{3}\times 2-\frac{1}{3}} = a^3$

問　　題

1. 次の式を根号を用いて表わせ。

(1) $10^{\frac{1}{3}}$　(2) $10^{\frac{2}{3}}$　(3) $10^{0.2}$

(4) $x^{-\frac{2}{3}}$　(5) $(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$　(6) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$

2. 次の式を累乗の形に書き表わせ。

(1) $\sqrt{x^3}$　(2) $(\sqrt[3]{a})^2$　(3) $x\sqrt[3]{x}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$　(5) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$　(6) $\sqrt[3]{(a+b)^2}$

3. 次の式を，累乗の形に書き表わせ。

(1) $\dfrac{1}{a^3}$　(2) $\dfrac{x}{y^3}$　(3) $\dfrac{1}{xy^3}$

(4) $\dfrac{1}{a^{-2}}$　(5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$　(6) $\dfrac{c}{a^2b^{-3}}$

4. 次の式の値を求めよ。

(1) $8^{\frac{2}{3}}$　(2) $(-5)^0$　(3) 2^{-3}

(4) $25^{-\frac{1}{2}}$　(5) $32^{-\frac{2}{5}}$　(6) $10^{1.5}$

5. 次の式を簡単にして，正の数を指数とする式に改めよ。

(1) $a^2 \times a^{-3}$　(2) $(x^{-3})^2$　(3) $x^3 \div x^{-2}$

(4) $(xy^0)^{-2}$　(5) $(-2x^2)^{-3}$　(6) $(a^0b^{-2}c^{-4})^{\frac{3}{2}}$

6. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt[4]{a}$　(2) $\sqrt[3]{x^2} \div \sqrt{x}$　(3) $\sqrt[6]{\sqrt{a^3}}$

(4) $(x+x^{-1})^2$　(5) $(x-y) \div (x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$

§4. 指数函数

x が -5 から 16 まで整数値を取って変わる時，$y=2^x$ の値は，次の表に示すようになる。

x	y	x	y	x	y
−5	0.03125	2	4	9	512
−4	0.0625	3	8	10	1024
−3	0.125	4	16	11	2048
−2	0.25	5	32	12	4096
−1	0.5	6	64	13	8192
0	1	7	128	14	16384
1	2	8	256	15	32768

この表は次のような計算に利用できる。

〔例 1〕 次の式を簡単にせよ。

(1) 64×256 $=2^{14}$　　(2) $32768\div1024$ $2^{5}=32$

(3) 32^{3} $=2^{15}=$　　(4) $\sqrt[4]{4096}$ $=2^{\frac{12}{4}}=8$

〔解〕 (1) $64\times256=2^{6}\times2^{8}=2^{6+8}=2^{14}=16384$

(2) $32768\div1024=2^{15}\div2^{10}=2^{15-10}=2^{5}=32$

(3) $32^{3}=(2^{5})^{3}=2^{5\times3}=2^{15}=32768$

(4) $\sqrt[4]{4096}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^{12\div4}=2^{3}=8$

このように，積・商・累乗・累乗根を直接計算で求める代わりに，指数の寄算・引算・掛算・割算で簡単に求めることができる。

上で行った計算は，2 の累乗の形で書き表わされているが，指数が整数である数についてであった。次に，2 の累乗の形で書き表わした時に，指数が整数でないものについての計算の仕方を考えよう。

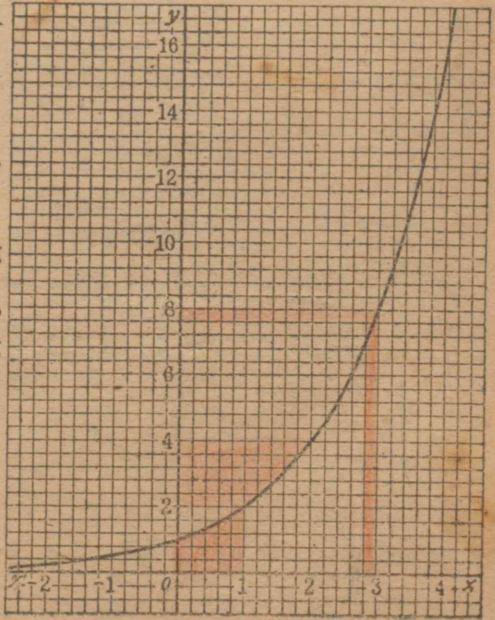
例えば，3×5 のような計算では，3，5 を 2 の累乗の形に書き表わすことができれば，その計算を表によって行うことができる。そこでまず，3，5 が 2 の累乗の形に書き表わすことができるかどうかを調べるために，函数 $y=2^{x}$ のグラフを作ってみよう。

2 の平方根から始めて，$2^{\frac{1}{4}}$，$2^{\frac{1}{8}}$，…… を順次に計算することができる。更に，これを基にして，累乗の指数の分母が，4，8，…… であるものを計算することができる。次は，その計算の仕方を示したものである。

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=1.414$$
$$2^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}=1.189$$
$$2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{4}}=1.681$$
$$2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}-1}=2^{\frac{3}{4}}\div2=0.841$$
$$2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}-1}=2^{\frac{1}{2}}\div2=0.707$$
$$2^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{4}-1}=2^{\frac{1}{4}}\div2=0.595$$
$$2^{1\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}+1}=2^{\frac{1}{4}}\times2=2.378$$
$$2^{1\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}+1}=2^{\frac{1}{2}}\times2=2.828$$
$$2^{1\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+1}=2^{\frac{3}{4}}\times2=3.362$$

このようにして計算した結果を基にして，$y=2^{x}$ のグラフを書くと，右の図のようになる。

この図から，x がどんな数であっても，$y=2^{x}$ の y の値がきまるようにみられる。また，x が $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…… と，どんなに小さくとも，y の値がきまるから，



その間にある x の数についても，y の値がきまると考えることができる。

$y=2^x$ で，x のどんな値に対しても，y の値がきまることを基にすると，乗除に関する計算を加減に関する計算に直して，その結果を求めることができる。

〔例 2〕 前ページのグラフを用いて，次の式を計算せよ。

$$\sqrt[3]{0.7\times4.8}$$

〔解〕 グラフから $0.7=2^{-0.5}$, $4.8=2^{2.3}$

故に $\sqrt[3]{0.7\times4.8}=\sqrt[3]{2^{-0.5}\times2^{2.3}}=2^{\frac{-0.5+2.3}{3}}=2^{0.6}$

再びグラフから $2^{0.6}=1.5$ となるから

$$\sqrt[3]{0.7\times4.8}=1.5$$

このような計算は，函数 $y=2^x$ のグラフを用いなければならないわけではなく

$$y=10^x,\qquad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\qquad y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$$

などの函数を用いても，同様に行うことができる。

一般に，正の数 a を定数とする時，$y=a^x$ で表わされる函数 y を，x の指数函数といい，a をその底という。

問　　題

1. $y=2^x$ のグラフを用いて，次の計算をせよ。

(1) 2.3×6.5　(2) $14\div3.5$　(3) 2.4^3

(4) $\sqrt[5]{13}$　(5) $0.84^2\div0.9$　(6) $\sqrt{0.65\times4.5}$

(7) $4.5\times2.1\times3.2$　(8) $12\times4.8\div6.1$

2. 次の値を求めよ。

$10^{\frac{1}{8}}$,　$10^{\frac{1}{4}}$,　$10^{\frac{3}{8}}$,　$10^{\frac{1}{2}}$,　$10^{\frac{5}{8}}$,　$10^{\frac{3}{4}}$

$10^{\frac{7}{8}}$,　$10^{-\frac{1}{8}}$,　$10^{-\frac{1}{4}}$,　$10^{-\frac{3}{8}}$,　$10^{-\frac{1}{2}}$,　$10^{-\frac{3}{4}}$

この値を用いて，x が $-\dfrac{1}{2}$ から 1 まで変わる間の $y=10^x$ のグラフを書け。

3. 前問のグラフを用いて，次の計算をせよ。

(1) 2.7×3　(2) $8.4\div2.3$　(3) 1.6^3

(4) $\sqrt[3]{7.5}$　(5) $1.8^2\times\sqrt{6.5}$　(6) 23×0.25^3

(7) $4.5\div2.2\times3.5$　(8) $\sqrt{4.3}\times1.2^3$

4. $y=2^x$, $y=10^x$ のグラフを用いて，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\dfrac{1}{10}\right)^x$ のグラフを書く方法を工夫せよ。また，これを書け。

5. 指数函数 $y=a^x$ のグラフについて，次の問に答えよ。

(1) $y=a^x$, $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフを比較せよ。

(2) グラフが y 軸を切る点はどこか。また，その理由を言え。

(3) 底 a が 1 の時，函数のグラフはどうなるか。また，底 a が 1 より大きいか，小さいかによって，グラフはどうなるか。

(4) x の絶対値が大きくなると，曲線はどうなるか。

§5. 対数函数

指数函数のグラフからわかるように，a が 1 以外の正の数であると，$y=a^x$ の y に，任意の正の値を与えた時，これに対

して x の値はただ一つ定まる。故に，x は y の函数であるといえる。

上の等式を，x を主にして表わすため，次のように定める。

a が1以外の正の数であって，二数 x，y の間に $y=a^x$ の関係がある時，x を，a を底とする y の対数といい，$x=\log_a y$ と書き表わす。これに対して y を対数 x の眞数という。

したがって，$y=a^x$，$x=\log_a y$ は同一の函数関係を表わすものである。

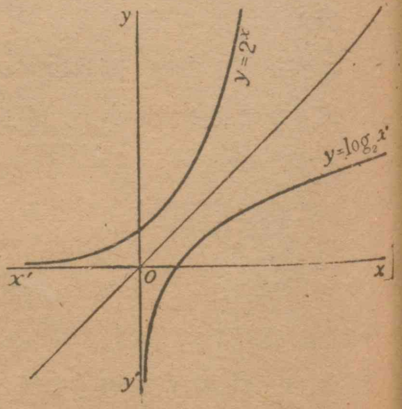
例えば，$32=2^5$ を書き換えると，$5=\log_2 32$ となる。

函数を取り扱う時，変数を x，その函数を y で表わすのが普通であるから，x と y とを取りかえて，次のように書く。

$$y=\log_a x$$

このような函数のグラフを書く方法を工夫しよう。

$y=\log_2 x$ と $x=2^y$ とは，同じグラフで，$x=2^y$ と $y=2^x$ とは，x と y とが取りかえられたに過ぎない。したがって，$y=\log_2 x$ のグラフは，指数函数 $y=2^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称の位置にある。



一般に，$y=\log_a x$ のグラフは，指数函数 $y=a^x$ のグラフを用いて容易に

書くことができる。

函数 $y=\log_a x$ を**対数函数**という。指数函数 $y=a^x$ と対数函数 $y=\log_a x$ のような関係にある函数を，互に他の**逆函数**という。

問　　題

1. 次の関係を対数記号を用いて表わせ。

(1) $2^3=8$　(2) $64=8^2$　(3) $6^3=216$

(4) $2^0=1$　(5) $3=9^{\frac{1}{2}}$　(6) $4=8^{\frac{2}{3}}$

2. 次の等式を $y=a^x$ の形に書け。

(1) $3=\log_5 125$　(2) $\log_5 25=2$

(3) $-2=\log_3 \dfrac{1}{9}$　(4) $\log_{\sqrt{2}} 2=2$

(5) $\log_4 8=\dfrac{3}{2}$　(6) $\log_{10} a=x$　$a=10^x$

3. 次の式の値を言え。

$\log_{10} 1000$, 3　$\log_{10} 100$, 2　$\log_{10} 10$, 1　$\log_{10} 1$ $=0$

$\log_{10} 0.1$,　$\log_{10} 0.01$,　$\log_{10} 0.001$,　$\log_{10} 0.0001$ $=-4$

4. 次の式の値を言え。

(1) $\log_2 4$　(2) $\log_3 27$　(3) $\log_2 16$　$2^x=16$

(4) $\log_5 1$　(5) $\log_{\sqrt{5}} 5$　(6) $\log_4 32$

5. x が 0.5 から 10 まで変わる間における，次の函数のグラフを書け。

$$y=\log_{10} x$$

§6. 対数の性質

第4節，〔例1〕の計算法は，指数法則に基ずくものであるが，これを対数の関係に直すとどうなるかを考えてみよう。

問1. a が任意の正の数である時，a を底として，a 及び 1 の対数を求めよ。

$a^0=1$

前問でわかったように

〔1〕 $\log_a a=1$　　　〔2〕 $\log_a 1=0$

である。

対数を取り扱う計算では，ある便利な一数を定めて，常にその数を底ときめておくと便利である。われわれの用いる数は十進法で表わされているから，実用には 10 を底とする対数を用いる。

特に，10 を底とする対数を**常用対数**といい，底を書くのを省いて，$x=10^y$ の関係を $y=\log x$ と書き表わす。

指数法則を対数の関係に直すと，次の諸性質が得られる。

〔1〕 積及び商の対数

二つの正の数を a, b とし，

$$x=\log a,\qquad y=\log b$$

とすると　　$a=10^x,\qquad b=10^y$

故に　　$ab=10^x\times10^y=10^{x+y}$

したがって　　$\log ab=x+y=\log a+\log b$

また，同じように

$$\frac{a}{b}=\frac{10^x}{10^y}=10^{x-y}$$

したがって　　$\log\dfrac{a}{b}=x-y=\log a-\log b$

これをまとめると

〔3〕　　$\log ab=\log a+\log b$

〔4〕　　$\log\dfrac{a}{b}=\log a-\log b$

〔例1〕 $\log 270$，$\log 0.27$ の値を求めよ。

〔解〕 $\log 270=\log(2.7\times100)=\log 2.7+\log 100$

$\log 0.27=\log(2.7\div10)=\log 2.7-\log 10$

157 ページの問題5で作ったグラフから $\log 2.7$ を求めて，上の計算を行え。

〔2〕 累乗及び累乗根の対数

一つの正の数 a を取って

$$x=\log a\qquad 即ち\qquad a=10^x$$

とすれば　　$a^n=(10^x)^n=10^{nx}$

故に　　$\log a^n=nx=n\log a$

したがって，$n=\dfrac{q}{p}$ とすれば，次の等式が成り立つ。

〔5〕　　$\log\sqrt[p]{a^q}=\dfrac{q}{p}\log a$

〔例2〕 $\log 2.5^3$，$\log\sqrt[3]{5^2}$ の値を求めよ。

〔解〕 $\log 2.5^3=3\log 2.5,\qquad \log\sqrt[3]{5^2}=\dfrac{2}{3}\log 5$

157 ページの問5で作ったグラフから $\log 2.5$，$\log 5$ を求めて，上の計算を行え。

公式〔1〕から〔5〕は，一般の対数でも成り立つ。

問2. M, N が正の数である時，次の等式が成り立つ。これを証明せよ。

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^n=n\log_a M$$

$$\log_a \sqrt[p]{M^q}=\frac{q}{p}\log_a M$$

問　　題

1. $\log 2=0.301$, $\log 3=0.477$ を用いて，次の式の値を求めよ。

(1) $\log 200$　　(2) $\log 6$　　(3) $\log 0.9$

(4) $\log\frac{2}{3}$　　(5) $\log 800$　　(6) $\log 5$

(7) $\log\sqrt{30}$　　(8) $\log 0.125$　　(9) $\log\sqrt[3]{20}$

2. 157 ページ問題5で作ったグラフを用いて，次の式から $\log x$ を求めよ。

次に，上のグラフを反対に読んで，x の値を求めよ。

(1) $x=6.5\times1.7$　　(2) $x=6.5\div1.7$

(3) $x=1.7^3$　　(4) $x=\sqrt[3]{8.4}$

(5) $x=\dfrac{1.25\times4.8}{2.7}$　　(6) $x=\dfrac{\sqrt{3.14}}{1.5^2}$

3. 等式 $\log\dfrac{1}{a}=-\log a$ が成り立つことを証明せよ。

4. 次の式を $\log a$, $\log b$, $\log c$ で表わせ。

(1) $\log abc$　　(2) $\log\dfrac{a}{bc}$　　(3) $\log\sqrt{abc}$

§7. 対数表

対数函数のグラフを用いると，乗除などの計算を容易に行うことができるが，もっとくわしい近似値を得るには，対数を見やすくまとめた数表を用いる。

$\log 1=0$, $\log 10=1$ であるから，1 以上 10 未満の数の対数は，整数部分が0の小数である。

本書の巻末に，1.00 から 9.99 まで 0.01 おきの数について，その対数を，小数第四位まで掲げてある。これを**四けたの対数表**という。

次に，対数表を使って，例えば $\log 24.3$, $\log 243$, ……, 及び $\log 0.243$, $\log 0.0243$, …… を求める方法を考えよう。

対数表で，$\log 2.43=0.3856$ を読み，2.43 の小数点をずらせた数の対数は，次のようにして得られる。

$$\log 24.3=\log 2.43+\log 10=0.3856+1$$
$$\log 243=\log 2.43+\log 100=0.3856+2$$

…………………………………………

$$\log 0.243=\log 2.43-\log 10=0.3856-1$$
$$\log 0.0243=\log 2.43-\log 100=0.3856-2$$

…………………………………………

0.3856−1, 0.3856−2 など，対数が負の数となるものは

$$(-1)+0.3856, \qquad (-2)+0.3856$$

のように，負の整数と正の小数との和の形に直し，次のように書く。

$$\log 0.243=\bar{1}.3856, \qquad \log 0.0243=\bar{2}.3856$$

以上求めた結果をまとめて書くと，次のようになる。

$$\log 243=2.3856$$
$$\log 24.3=1.3856$$
$$\log 2.43=0.3856$$
$$\log 0.243=\bar{1}.3856$$
$$\log 0.0243=\bar{2}.3856$$

数の対数を上のように書いた時，正または負の整数部を指標といい，正の小数部分を仮数という。

上の例でわかるように，指標及び仮数には，次の性質がある。

〔1〕 **指標の性質**　整数部分が n けたからなる数の対数の指標は $n-1$ である。また，首位が小数第 n 位にある小数の対数の指標は $\bar{n}$ である。

〔2〕 **仮数の性質**　数字の並び方が同じで，小数点だけをずらした数の対数の仮数は，みな同じである。

〔例1〕 log 7058 を求めよ。

〔解〕 7058 は四けたの数であるから，対数の指標は 3 である。また，対数表で log 7.05＝0.8482 を読み，8 に対する仮数の増加は，表の右欄にある比例部分で求め，これを加えて次のように計算する。

$$\begin{array}{l} \log 7058 \\ \log 7050=3.8482 \\ \qquad\quad 8 \cdots\cdots 5 \\ \hline \log 7058=3.8487 \end{array}$$

〔例2〕 次の等式に当てはまる x を求めよ。

$$\log x=\bar{2}.2848$$

〔解〕 指標が $\bar{2}$ であることから，x の首位は小数第二位にある。

また，対数表で log 1.92＝0.2833 を読み，x の始めの三数字が 192 であることがわかる。四つ目の数字は，仮数の増加 0.0015 (0.2848−0.2833) に対する x の増加を，比例部分の表で求めて，次のように計算する。

$$\begin{array}{l} \log x=\bar{2}.2848 \\ \qquad \bar{2}.2833 \cdots\cdots 0.0192 \\ \qquad\qquad 15 \\ \qquad\qquad 16 \cdots\cdots\cdots 7 \\ \hline \qquad\qquad x=0.01927 \end{array}$$

また，指標の性質から，ある数式の計算の結果のけた数をすぐに知ることができる。

〔例3〕 2^{10} は何けたの数か。

〔解〕　　$\log 2^{10}=10\log 2=3.010$

指標が 3 であるから 2^{10} は四けたの数である。

問　　題

1. 次の対数の指標を言え。

log 1 = 0　log 100 = 2
log 10 = 1　log 1000 = 3

log 823,　log 57800,　log 1.28,　log 0.408
log 0.007,　log 1.05,　log 1035,　log 0.0105

2. 次の式から，x の首位数字のある位を言え。

(1) $\log x=1.6096$　(2) $\log x=0.4814$
(3) $\log x=3.5$　(4) $\log x=\overline{1}.959$
(5) $\log x=\overline{3}.485$　(6) $\log x=2$

3. 次の対数の値を求めよ。

(1) log 30.5　(2) log 0.0785　(3) log 453.6
(4) log 0.8403　(5) log 70.07　(6) log 0.07295
(7) log 3.1416　(8) log(sin 25°)　(9) log(cos 45°)

4. 次の式から x の値を求めよ。

(1) $\log x=1.4216$　(2) $\log x=0.5358$
(3) $\log x=\overline{1}.7453$　(4) $\log x=\overline{3}.8654$
(5) $\log x=2.9137$　(6) $\log x=4.8065$
(7) $\log(\sin x)=\overline{1}.7042$　(8) $\log(\cos x)=\overline{1}.5240$

§8. 対数計算

〔例 1〕 35.72×0.00745 を計算せよ。

〔解〕 $x=35.72\times0.00745$ とおくと

$$\log x=\log 35.72+\log 0.00745$$

$$\begin{array}{r}\log 35.72=1.5529\\ \log 0.00745=\overline{3}.8722\\ \hline \log x=\overline{1}.4251\\ x=0.2661\end{array}$$

四けたの対数表を用いて計算する場合には，結果は上のように，首位から四けただけで止めておくがよい。

〔例 2〕 $27.5\div0.07325$ を計算せよ。

〔解〕 $x=27.5\div0.07325$ とおくと

$$\log x=\log 27.5-\log 0.07325$$

$$\begin{array}{r|l}\log 27.5=1.4393 & \\ -\log 0.07325=1.1352 & -\overline{2}.8648=1.1352\\ \hline \log x=2.5745 & \end{array}$$

$$x=375.4$$

$-\log 0.07325$ は，次のように考えて計算すればよい。

$$-\log 0.07325=-\overline{2}.8648=2-0.8648=1.1352$$

部分的な計算は，別紙にするか，右の余白にする。

〔例 3〕 0.852^3 を計算せよ。

〔解〕 $x=0.852^3$ とおくと

$$\begin{array}{rl|l}\log x &=3\log 0.852 & \quad(-1)+0.9304\\ &=3\times\overline{1}.9304 & \times)\qquad\qquad 3\\ &=\overline{1}.7912 & \quad(-3)+2.7912=\overline{1}.7912\\ x&=0.6183 & \end{array}$$

〔例 4〕 $\sqrt[3]{0.07584}$ を計算せよ。

〔解〕 $x=\sqrt[3]{0.07584}$ とおくと

$$\begin{array}{rl|l}\log x &=\frac{1}{3}\log 0.07584 & \quad(-2)+0.8799\\ &=\frac{1}{3}\times\overline{2}.8799 & 3)\ (-3)+1.8799\\ &=\overline{1}.6266 & \quad(-1)+0.6266=\overline{1}.6266\\ x&=0.4233 & \end{array}$$

〔例5〕 $\dfrac{4}{3}\times 3.14\times 0.825^3$ を計算せよ。

〔解〕 $x=\dfrac{4}{3}\times 3.14\times 0.825^3$ とおくと

$$\log x=\log 4-\log 3+\log 3.14+3\log 0.825$$

$\log 4=0.6021$	
$-\log 3=\overline{1}.5229$	$-0.4771=\overline{1}.5229$
$\log 3.14=0.4969$	
$3\log 0.825=\overline{1}.7495$	$\overline{1}.9165\times 3=\overline{1}.7495$
$\log x=0.3714$	

$$x=2.351$$

問　　　題

1. 次の式を計算せよ。

(1) $\overline{3}.8256+1.6321$　　(2) $\overline{1}.2550+\overline{3}.8912$

(3) $\overline{2}.7653+5.6021+\overline{1}.8072+\overline{2}.6912$

(4) $\overline{1}.6653-0.3215$　　(5) $2.4688-4.5342$

(6) $1.7265-\overline{2}.5039$　　(7) $\overline{1}.7335-\overline{1}.9905$

(8) $2.5077-3.6122-\overline{1}.5071$

(9) $\overline{1}.2046\times 3$　　(10) $\overline{2}.5132\times 4$

(11) $\overline{3}.3125\times 5$　　(12) $\overline{1}.8105\div 2$

(13) $\overline{4}.9204\div 3$　　(14) $\overline{1}.2033\times\dfrac{2}{3}$

2. 対数表を用いて，次の計算をせよ。

(1) 0.0586×78.6　　(2) 732.5×0.5014

(3) $28.3\div 129.5$　　(4) $0.03647\div 0.572$

(5) 0.724^3　　(6) $\sqrt[3]{0.0243}$

(7) $\sqrt[3]{1.23}$　　(8) 25.7^2

(9) $\dfrac{243\times 0.682}{0.0566}$　　(10) $\dfrac{0.78}{15.96\times 0.0456}$

(11) $\dfrac{\sqrt[3]{1.44}}{0.4385}$　　(12) $\sqrt[3]{\dfrac{0.9876\times 63.35}{1.124}}$

(13) $\dfrac{(-0.187)^3\times 0.346}{0.0381^2}$　　(14) $\dfrac{1.25\sin 52^\circ}{\sin 65^\circ}$

3. 対数表を用いて次の方程式を解け。

(1) $12^x=45$　　(2) $2^{x+1}=42$

4. 元金 5000 円を年利 3 分，半年ごとの複利で預けると，10 年後には，元利合計何ほどになるか。

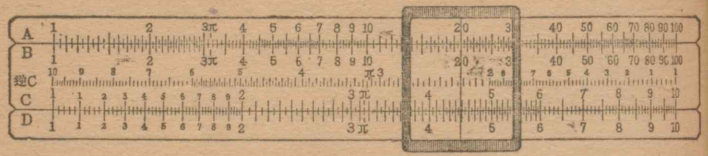
5. 年利 2 分 7 厘，1 年ごとの複利で預金し，15 年後に元利合計が 5,0000 円となるようにしたい。何ほどの元金を預ければよいか。

6. 年利 3 分，1 年ごとの複利で預けると，元利合計が元金の 2 倍になるのは何年後か。

7. 地球の半径を 6370 km，目方を $6\times 10^{21}\,t$ とみなして，その比重を計算せよ。

§9. 計算尺

計算尺は対数を應用して，乗法・除法を行う器具である。次の図に示したのは計算尺の一種である。この原理と使い方を調べよう。



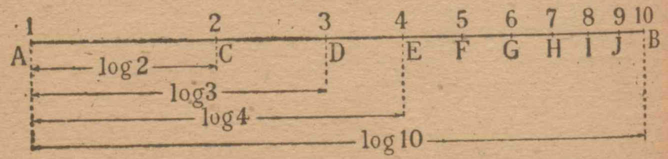
次の表は，1 から 10 までの整数の常用対数を，小数第三位までとって示したものである。

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
対数	0.000	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1.000

今，直線ABを引き，これを長さの単位にとって

$$AB=1=\log 10$$

とする。AB 上に AC, AD, AE, …… の長さを，次のようにはかって，点 C, D, E, …… には，それぞれ 2, 3, 4, …… と目盛をつける。



$$AC=0.30=\log 2$$

$$AD=0.48=\log 3$$

$$AE=0.60=\log 4$$

…………………

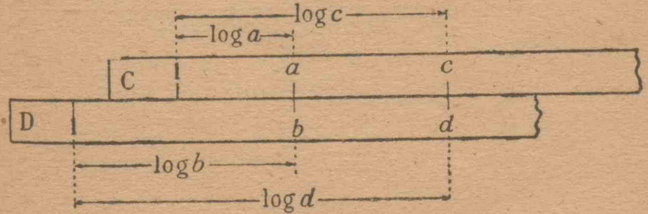
$\log 1=0$, $\log 10=1$ であるから，基点 A は 1，B は 10 と目盛を附ける。

このように，一般に基点から $\log x$ の長さの点に数 x をつけて得られる目盛を**対数尺**という。

計算尺の図に，A, B, C, D, 逆 C（または CI）の5種の目盛があるが，いずれも対数尺である。

長さの単位は適当にとればよい。例えば，20 cm の計算尺では，A尺，B尺は 10 cm を長さの単位としてあり，基点に1，中央に10，他端に100と，左から右へ目盛がしてある。C尺，D尺は 20 cm を長さの単位としてあり，基点に1，他端に10と左から右へ目盛が附けてある。逆C尺も同じく長さの単位は20 cm であるが，C尺とは逆に基点を10，他端に1と右から左へ目盛が附けてある。これらの対数尺の1または10の目盛は，内尺(うちじゃく)をずらさない時は一致するようにそろえてある。

内尺をずらして，C尺の目盛 a と c が，それぞれD尺の目盛 b と d に合ったとする。この場合



$$\log b-\log a=\log d-\log c$$

であるから $\log \dfrac{b}{a}=\log \dfrac{d}{c}$

故に $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$

即ち，C尺の目盛とそれに合うD尺の目盛とは，常に比例している。

〔1〕 したがって，C尺の1に合うD尺の目盛をxとすれば

$$x=\frac{b}{a}$$

から，商 $\frac{b}{a}$ はD尺の目盛で得られる。

〔2〕 $$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

の関係から，四数 a, b, c, d のうち，いずれか三数がわかると，他の一数が求められる。

これらの計算は，A尺とB尺を用いても同様にできる。

逆C尺のaの目盛がD尺のbの目盛に合った時，逆C尺のcの目盛がD尺のdの目盛に合ったとする。この場合

$$\log a+\log b=\log c+\log d$$

であるから $$\log ab=\log cd$$

故に $$ab=cd$$

〔3〕 したがって，逆C尺の1に合うD尺の目盛をxとすれば

$$x=ab$$

から，積abはD尺の目盛で得られる。

なほ，A尺とD尺の目盛の関係は，D尺の長さの単位が，A尺の長さの単位の2倍になっているから，滑線(すべりせん)を動かして

A尺のaとD尺のdの目盛が合えば

$$\log a=2\log d=\log d^2$$

したがって，$a=d^2$ の関係がある。これから，ある数を二乗したり，平方根を求めたりすることができる。

問　　題

1. 前ページ〔1〕で，C尺の1に合うD尺の目盛が無い時には，どうすればよいか。

また，前ページ〔3〕で，逆C尺の1に合うD尺の目盛がない時には，どうすればよいか。

2. 前問で調べた方法の正しい理由を式で示せ。

3. C尺とD尺で，積を計算する方法を考えよ。

また，逆C尺とD尺で，商を計算する方法を考えよ。

4. 計算尺で，累乗または累乗根を求めるには，どうすればよいか。その方法を考えよ。

5. 右の表の金額の百分率を求めよ。

	金額(円)	百分率(%)
甲	134.21	
乙	89.40	
丙	249.31	
丁	72.98	
計	545.90	100.0

6. 1ヤードと1mの長さの比は，32:35 である。これから次の表を完成せよ。

ヤード	3	8	15	85			
メートル					3	10.5	16

§10. 計算尺による計算

計算尺を用いて計算するには，次のことがらに注意することが大切である。

〔1〕 目盛は正しく合わせる。

〔2〕 滑線と，それを合わせる目盛は正確に重ねる。

〔3〕 位どり，小数点の位置は概算で求める。

前節でわかったことを基にして計算する方法を調べよう。

〔例1〕 2×3 を求めよ。

〔解〕 D尺の2に，逆C尺の3を合わせ，逆C尺の1に合うD尺の目盛6を読んで

$$2\times3=6$$

〔例2〕 4×5 を求めよ。

〔解〕 D尺の4に逆C尺の5を合わせて，逆C尺の10に合うD尺の目盛2を読む。これを10倍して

$$4\times5=20$$

問1. 〔例2〕の解で，結果を目盛で読んだ数を10倍する理由を調べよ。

問2. 次の掛算をせよ。

2.5×3.2,　　2.5×8.4,　　17.2×0.43

0.35×25,　　830×0.69,　　0.345×2.78

〔例3〕 $6\div3$ を求めよ。

〔解〕 D尺の6にC尺の3を合わせ，C尺の1に合うD尺の目盛2を読んで，答2を得る。

問3. $3\div5$ を計算する方法を考えよ。

問4. 次の計算をせよ。

$5.1\div2.8$,　　$42\div7$,　　$1440\div32$

$0.765\div51$,　　$0.328\div17.4$,　　$3.14\div0.0235$

正の数の乗除は，上のようにして求めることができるが，負の数では，まず，式の中に含まれた負の符号の数を調べて，全体が正数になるか負数になるかを確かめる。それから，絶対値について上の計算を行い，答の絶対値を定めればよい。

問5. 次の計算をせよ。

$(-4.5)\div3.2$,　$(-2.7)\div(-7.2)$,　$4.6\div(-5.1)$

〔例4〕 2.13^2 を求めよ。

〔解〕 D尺の2.13に滑線を合わせて，これに重なるA尺の目盛を読み，4.51を得る。

〔例5〕 $\sqrt{0.0123}$ を求めよ。

〔解〕 A尺の1.23に滑線を合わせて，これに重なるD尺の目盛1.11を読み，概算で位取りをきめ，0.111を得る。

問6. 次の数の平方数を求めよ。

1,　3,　4,　6.5,　1.12,　1.85,　2.42

問7. 次の数の平方根を求めよ。

4,　7,　8.5,　19,　22.4,　87.6,　3.14

計算尺では，前節〔2〕の性質を利用して，比例の計算，單位の換算，百分率などの計算を行うことができる。

〔例 6〕　$1.27:4.35=2:x$ から x を求めよ。

〔解〕　D 尺の目盛と C 尺の目盛が比例していることから，D 尺の 1.27 と C 尺の 4.35 を合わせ，D 尺の 2 に合う C 尺の目盛を読んで 6.85 を得る。

問 8.　換算率がわかっている時，二つの單位の間の換算の仕方を考えよ。

問　　題

1.　次の計算をせよ。

(1)　1.85×2.54　　(2)　3.8×1.24

(3)　6.75×3.06　　(4)　7190×3.14

(5)　0.82×0.536　　(6)　112.5×0.07568

(7)　$9.5\div2.4$　　(8)　$6.24\div3.14$

(9)　$345\div5.32$　　(10)　$0.198\div0.706$

(11)　$604\div0.4055$　　(12)　$0.918\div1.038$

2.　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{27\times1.85}{3.14}$　　(2)　$\dfrac{128}{8.5\times24.5}$

(3)　$\dfrac{0.68\times0.075}{0.305\times0.025}$　　(4)　$\dfrac{125\times23.5\times78}{4.03\times278}$

3.　次の比例式を計算尺で解け。

(1)　$\dfrac{2.35}{4.27}=\dfrac{4.12}{x}$　　(2)　$\dfrac{2.09}{15.4}=\dfrac{x}{4.56}$

(3)　$\dfrac{12.7}{x}=\dfrac{75}{63}$　　(4)　$\dfrac{x}{223}=\dfrac{0.78}{1.53}$

4.　次の名数を，括弧内の單位に直せ。

(1)　2 尺 5 寸 (m)　　(2)　27.5 分 (cm)

(3)　1.52 m (尺)　　(4)　3.55 cm (分)

(5)　16 貫 (kg)　　(6)　23 kg (貫)

(7)　45 g (匁)　　(8)　2.5 ポンド (匁)

5.　次の計算をせよ。

(1)　2.4^2　(2)　308^2　(3)　0.576^2　(4)　$\sqrt{3.7}$

(5)　$\sqrt{37}$　(6)　$\sqrt{370}$　(7)　$\sqrt{0.37}$　(8)　$\sqrt{10.5}$

(9)　$\sqrt{10500}$　(10)　$\sqrt{53\times1.85}$　(11)　$\sqrt{\dfrac{6.02\times2.98}{32}}$

6.　ある自動車が，37 km の道を 50 分間で走った。この自動車は時速どれくらいで走ったか。

7.　周の長さが 8.72 m の円の半径を計算せよ。

8.　右の表は，昭和 22 年 4 月の衆議院議員選挙の各党派別の当選者数及び得

	当選者数	百分率	得票数	百分率
社　会	143		712,8646	
自　由	131		713,9505	
民　主	124		692,1035	
國　協	31		193,6606	
共　産	4		97,4484	
諸　派	20		130,1916	
無所属	13		177,5134	
計		100		100

票数である。これから，各党派別の百分率を算出せよ。

§11. 計算図

図を用いて，種々の計算を簡単にする方法を工夫しよう。

問1. 三数 x, y, z の間に，$x+y=z$ の関係があるとする。$z=1$ とすると，$x+y=1$ のグラフはどうなるか。

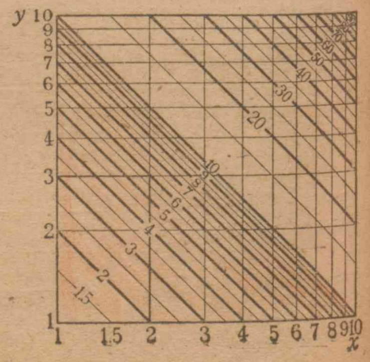
同様に $z=2, 3, 4, \cdots\cdots$ としてできるグラフを，上に書いたグラフに書き加えよ。

ここにできた直線の集まりを，この**図表群**という。この図では，$x+y=z$ に適する一組の値，例えば $x=2$, $y=3$, $z=2+3=5$ の表わす三つのグラフは常に一点で交わる。この理由を考えよ。

また，この図を用いて，加法・減法を行う方法を工夫せよ。

三数 x, y, z の間に，$xy=z$ の関係があるとする。

x 軸及び y 軸上に，同じ単位の対数尺を目盛り，両軸上の同じ数，例えば，2 と 2 を結ぶ直線を引くと，これは $z=2$ 即ち $xy=2$ のグラフとなる。



なぜならば，この直線上のある一点の座標を (x, y)

とすれば

$$\log x+\log y=\log 2$$

したがって $$xy=2$$

の関係があるからである。

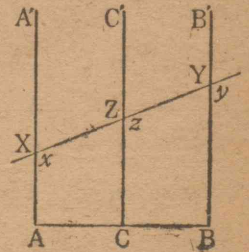
同様にして，z を 3, 4, 5, …… とすると，前ページの図のように，直線群が得られる。

図では，$xy=z$ に適する一組の値，例えば，$x=2$, $y=3$, $z=2\times3=6$ の表わす三つのグラフは，常に一点で交わる。故に，この図を用いて乗法・除法を簡単に行うことができる。

このようなグラフが簡単に書けるように，目盛を対数尺で附けた方眼紙がある。これを**対数方眼紙**といい，与えられた関係式が因数の積の形である場合に用いて便利である。

上のように，三変数 x, y, z の間に，ある関係があって，その関係を満たすような x, y, z の値の組が，線の交点として求められる時，その図を**共点図表**という。

問2. 三つの直線 AA′, CC′, BB′ を下の図のように等しい間隔で平行に引く。これらと交わる一直線を引いて，交点をそれぞれ X, Z, Y とすると，AX, CZ, BY の長さの間に，どのような関係があるか。



次に，AA′ 及び BB′ に同じ単位の物指の目盛を附け，CC′ には上の単位の半分を単位とする物指の目盛

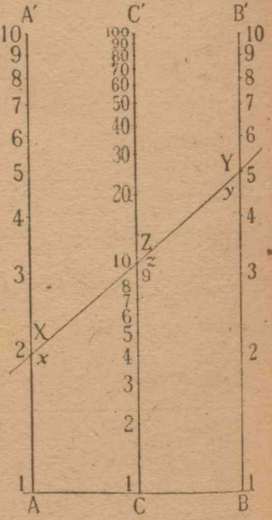
を，いずれも A, B, C を基準として附けよ。この場合に，X, Y, Z の目盛の読みの数を x, y, z とすれば

$$x+y=z$$

の関係がある。これを説明せよ。

また，この図を用いて加法・減法を行う方法を考えよ。

前問と同様の図で，AA′, BB′ に同じ単位の対数目盛を附け，CC′ には上の単位の半分を単位とする対数目盛を下の図のように附けたとする。



この時，三数 x, y, z の間には，常に次の関係が成り立つ。

$$xy=z$$

なぜならば，X, Y, Z の目盛の読みを x, y, z とすれば，AX, BY, CZ の長さは，それぞれ $\log x$, $\log y$, $\frac{1}{2}\log z$ となる。

これは前問によって

$$\log x+\log y=\log z$$

したがって　$xy=z$

となるからである。

この図を用いて，乗法・除法を行うことができる。

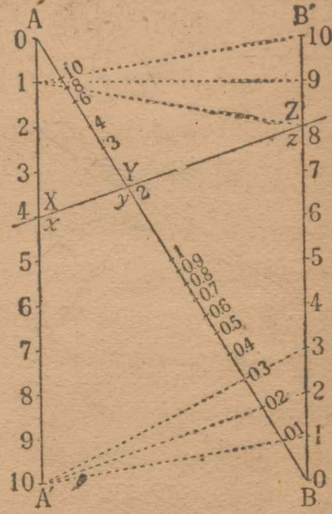
上のように，三変数 x, y, z の間に，ある関係があって，その関係を満足する x, y, z の組が，同じ直線上に並ぶよう

$\frac{BY}{AY}=\frac{BZ}{AX}$ 比は一定

になっている時，その図を**共線図表**という。

次の計算図も一種の共線図表である。

三変数 x, y, z の間に，$xy=z$ の関係があるとする。下の図のように，二点 A, B から反対の方向に平行な直線 AA′, BB′ を引く。



AB 上の一点 Y を通って直線を引き，AA′, BB′ と交わる点をそれぞれ X, Z とすれば，$\frac{BZ}{AX}$ の値は，Y を通る直線の方向にかかわらず一定である。

この理由から，次のように目盛を附ける。

まず，AA′, BB′ 上には同じ単位の物指の目盛を，それぞれ A, B を基点として附ける。

次に，AB 上に，AA′ 上の一点,例えば 10 と，BB′ 上の目盛 1, 2, 3, …… とを結び，AB との交点にそれぞれ

$$\frac{1}{10}=0.1,\quad \frac{2}{10}=0.2,\quad \frac{3}{10}=0.3,\quad \cdots\cdots$$

と附ける。あるいは，AA′ 上の目盛 1 と，BB′ 上の目盛 10, 9, 8, …… とを結び，AB との交点に 10, 9, 8, …… と附けてもよい。

この図で，任意に引かれた直線と，AA′, AB, BB′ との交点の目盛をそれぞれ x, y, z とすれば，次の関係がある。

$$y=\frac{z}{x} \quad あるいは \quad xy=z$$

それ故，これは乗法・除法に用いる計算図である。

問　　題

1. 177 ページの図で，AC:CB=2:1 とすると，AX, BY, CZ の長さの間に，どのような関係があるか。

また，三つの直線に適当に目盛を附けて，$x+2y=z$ の関係を示す共線図表を作れ。

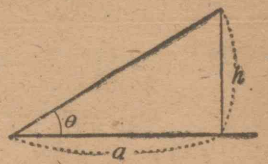
2. 前問で，三つの直線に目盛を適当に附けると，$xy^2=z$ の関係の共線図表が得られる。三つの直線にどのような目盛を附ければよいか。

3. (胸囲)÷(身長)×100 を比胸囲という。身長と胸囲とから比胸囲を求める計算図を作れ。但し，身長は 90 cm から 2 mまで，胸囲は 40 cm から 1 m までの範囲とする。

4. 三変数 x, y, z の間に，$x^2+y^2=z^2$ の関係がある。z を 1 とすると，x, y の関係を表わすグラフはどのようになるか。

同様に，z を 2, 3, 4, …… とした場合のグラフを，上に書いたグラフに書き加えよ。この図は，どのような計算に役立つか。

5. 水平距離 a と仰角 θ とを知れば，その高さ h が求められる。



a は 100 m から 200 m まで，θ は $0°$ から $15°$ までの範囲にあるものとして，a, θ から h を読みとることのできる計算図を作れ。

雑　　題

1. 次の数の対数を求めよ。

32.5,	3240,	60000,	3.02,	0.304
0.30923,	82.425,	0.008235,	0.00346,	72320000

2. 次の対数の 2 倍及び $\frac{1}{2}$ を作れ。

2.3425,	$\bar{2}.3425$,	$\bar{3}.3425$,	3.3425
1.85648,	$\bar{2}.85648$,	$\bar{3}.85648$,	3.85648

3. 次の対数の真数を求めよ。

$\bar{3}.3421$,	$\bar{4}.3246$,	0.4357,	5.2347
2.4252,	$\bar{2}.4383$,	$\bar{7}.5756$,	8.9378

4. 次の方程式を解け。

(1)　$1.03^x=6$　　　(2)　$3^{x-1}=70$　$x=4.867$

$x=96.535$

(3)　$2\log(x+1)=0$　　　(4)　$\log x+\log(x-3)=1$

5. 対数には次の性質がある。これを証明せよ。

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a}$$

6. 前問を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\log_2 5$　　　(2)　$\log_5 7$

7. 次の等式を証明せよ。

(1)　$\log\dfrac{\sqrt[4]{5}\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{18}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}\log 2-\dfrac{7}{6}\log 3$

(2)　$\log_a b\ \log_b c\ \log_c a=1$

8. 1.035 を何乗したら 100 より大きくなるか。

9. 0.985 を何乗したら，0.01 より小さくなるか。

10. 対数表を用いて，次の計算をせよ。

(1)　$235^2\times1.705$　　　(2)　$\sqrt[3]{5.71\times6.78}$

(3)　$\dfrac{7.32^2\times2.708}{0.56^2}$　　　(4)　$\sqrt{\dfrac{3.505^2-2.78^2}{0.608}}$

11. 計算尺を用いて，次の計算をせよ。

(1)　$12.5^2\times15.8$　　　(2)　$\sqrt{18.7}\div3.14$

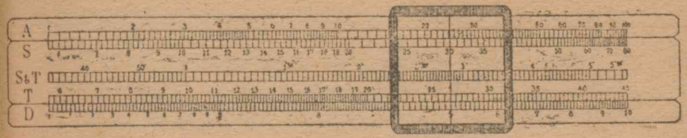
(3)　$\dfrac{135}{567\times32.8}$　　　(4)　$\dfrac{0.197\times32.8}{0.655\times0.72}$

12. 單振子の長さを $l\,cm$ とし，その周期をT秒とすると

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{980}}$$

の関係がある。周期が1秒及び2秒の單振子を作るには，長さをそれぞれ何センチメートルにすればよいか。

13. ある計算尺では，内尺の裏にS尺，T尺の目盛がある。S尺は 90° までの正弦，T尺は 45° までの正接の対数尺である。これとD尺とを用いて，角の正弦・正接の値を求める方法を工夫せよ。



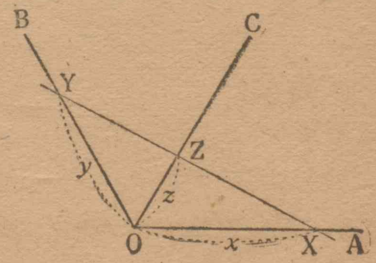
14. 方程式 $x^2+px+q=0$ で，x を $1, 2, 3, \cdots\cdots, -1, -2, -3, \cdots\cdots$ とすると，p, q の関係を示すグラフはそれぞれどのような線になるか。

また，このようなグラフを作っておくと，どのような計算に役立つか。

15. 直角に交わる座標軸の両方に，原点を1として対数目盛を附けておく。

この軸を用いて，$y=x^2$ のグラフ及び $y=x^3$ のグラフを書け。どのような関係がわかるか。

16. 右の図で角 AOB は 120° で，OCはこれを二等分している。一直線が，この三直線と交わる点をそれぞれX, Y, Zとし $OX=x$, $OY=y$, $OZ=z$ とすると，x, y, z の間には，どのような関係があるか。



また，この関係を利用して，次の関係式に適する値の組を求める計算図を作れ。

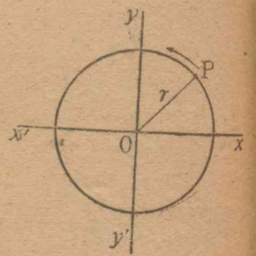
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$$

第五章　三角函数

§1.　円運動と三角函数

柱時計の振子や針の位置は刻々に変化する。しかし，いずれも一定の時間がたつと元の位置にもどって，また同じ変化を繰り返す。このような運動を**周期運動**といい，一定の時間を**周期**という。

半径 r の円Oがあって，一点Pがこの周上を一定の速さで左まわりに回轉しているものとする。このPの運動は一種の周期運動である。



上のような周期運動を**円運動**という。

また，運動している点Pを定点Oから観測する場合に，OPを**動径**といい，動径が單位時間に回轉する角の大きさを，Oに対するPの**角速度**という。

Pの角速度を毎秒 α とし，Oを原点とする座標軸をとり，時間はPがOXを通過する一定の時を基準にとって，t 秒後に動径OPがOXとなす角を θ とすれば，次の関係が成り立つ。

$$\theta=\alpha t$$

この円運動で，Pの座標を $x,\ y$ とすれば，$0^\circ<\theta<90^\circ$ の

範囲内では，θ の大きさにかかわらず，次の関係がある。

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

$\theta=\alpha t$ ときめれば，θ はその大きさに制限がない。θ は，t の大きさによって，時にはOPがOXを数回通過した後の角，即ち，**正の角**ともみられ，また，OPがOXを通過する前の角，即ち，**負の角**ともみられる。このように拡張された角を**一般の角**という。したがって，ある位置にある動径OPとOXは無数の角を表わすものと考えられる。その最小の正の角を α とすれば，この二直線によって示されるすべての角は，次の式で表わされる。

$$\alpha+n\cdot 360^\circ$$　（但し，n は0または正，負の整数）

これらの角を，動径OPに**属する角**という。

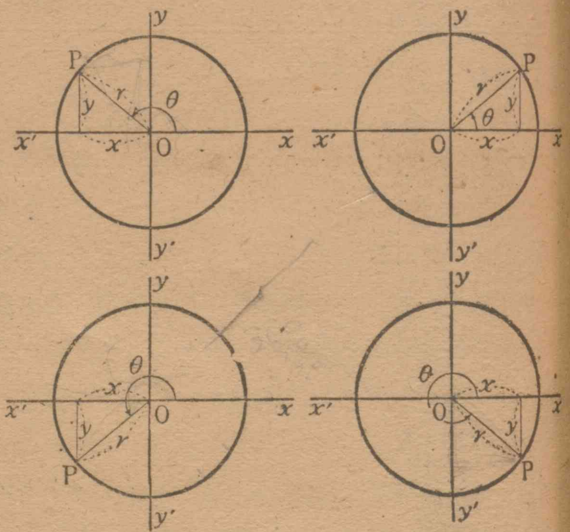
Pの座標を表わす式で，θ が一般の角の場合にも成り立つようにするには，正弦·余弦の意味をどう定めればよいかについて考えよう。

動径OPが前ページの図にある $\angle xOy$，$\angle yOx'$，$\angle x'Oy'$，$\angle y'Ox$ のいずれの角内にあるかによって，OPに属する角をそれぞれ**第一象限の角，第二象限の角，第三象限の角，第四象限の角**という。

θ が何象限の角であっても，$OP=r>0$ とし，Pの座標を $x,\ y$ とすれば，$x,\ y$ 及び r の間に作られる六つの比

$$\frac{y}{r},\quad \frac{x}{r},\quad \frac{y}{x},\quad \frac{x}{y},\quad \frac{r}{x},\quad \frac{r}{y}$$

の値は，OP の大きさに関係なく，それぞれ θ の大きさによって定まるから，それぞれ θ の函数である。



これらの値を，θ の三角函数といい，次のように定める。

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$	（正弦）	$\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{r}{y}$	（余割）
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$	（余弦）	$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$	（正割）
$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$	（正接） 逆数	$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$	（余接）

各象限における三角函数の符号は，点Pの座標の符号の間にある関係によって，次ページの表のようになる。

このように定めれば，θ がどの象限にあっても，θ とPの座標との間には，常に

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

の関係が成り立つ。

函数＼象限	I	II	III	IV
$\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$, $\sec\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$, $\cot\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

問　題

1. 半径 4 cm の円があって，一点Pが毎分5回の割合で左まわりに円運動をしている。Pの角速度は何ほどか。

2. 前問で，Oを原点とする直交軸をとり，PがOXを通るある一定の時刻を，時間をはかる基準にとると，時間(t秒)とPの座標 x, y との間に，どのような関係が成り立つか。

3. 前二問で，次の時刻における動径の位置を定めよ。また，Pの座標を求めよ。

2秒後，	3秒後，	5秒後，	10秒後
14秒後，	5秒前，	20秒前，	30秒前

4. θ がどのような角であっても，次の等式が成り立つ。これを説明せよ。但し，n は0または正，負の整数とする。

$$\sin(\theta+n\cdot360^\circ)=\sin\theta$$
$$\cos(\theta+n\cdot360^\circ)=\cos\theta$$
$$\tan(\theta+n\cdot360^\circ)=\tan\theta$$

5. 次の等式が成り立つ。これを証明せよ。

$$\sin\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta=1,\qquad \cos\theta\cdot\sec\theta=1,\qquad \tan\theta\cdot\cot\theta=1$$

逆数関係

§2. 三角函数のグラフ

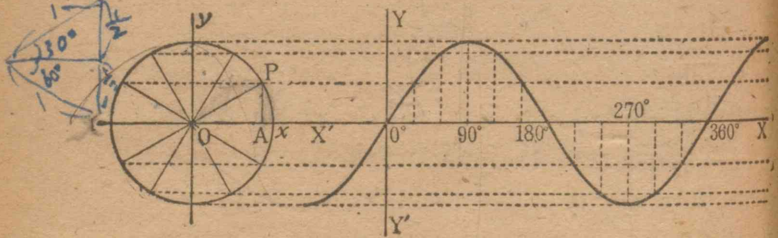
一般の角の正弦・余弦及び正接のグラフを書くことを工夫しよう。

〔1〕 正弦・余弦のグラフ

半径1の円Oで，x 軸の正の方向 OA と角 θ を作る動径 OPをとる時，Pの座標 x, y は，次の式で表わされる。

$$y=\sin\theta,\qquad x=\cos\theta$$

(1) $\sin\theta$ の変化をみるには，Pの縦座標 y の変化を調べればよい。



上の図に示すように，円Oの x 軸の延長上にグラフのX軸を定め，θ の種々の値に対するPの y 座標を求め，これをX軸上同じ度数のところの縦座標にとる。例えば，円周を12等分し，30°, 60°, 90°, …… を通る横線と，X 軸上の同じ度数の目盛を通る縦線との交点を求め，これらの点を滑らかな曲線で連結すればよい。

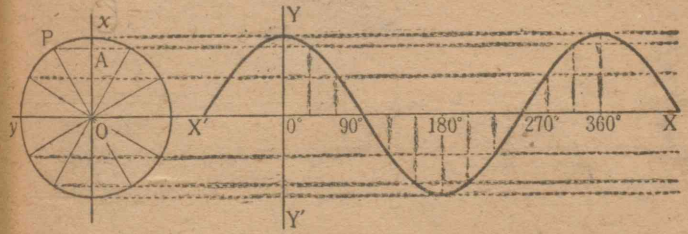
θ が 360° を超えて更に増大する時，y は 0° から 360° までの変化と同一の変化を繰り返す。故に，$\sin\theta$ は 360° を周期とする**周期函数**である。

$y=\sin\theta$ のグラフにある曲線を**正弦曲線**という。

このグラフから明らかなように，0°, 90°, 180°, 270° の正弦の値は，次のように定めるとよい。

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin 0^\circ=0, & \sin 90^\circ=1\\ \sin 180^\circ=0, & \sin 270^\circ=-1\end{array}}$$

(2) $\cos\theta$ の変化をみるには，Pの横座標 x の変化を調べればよい。



この場合は，上の図に示すように，円Oの y 軸上にグラフのX軸を定め，θ の種々の値に対するPの x 座標を求め，これをX 軸上同じ度数のところの縦座標にとって，これらの点を滑らかな曲線で連結すればよい。

$\cos\theta$ は，$\sin\theta$ と同様に，360° を周期とする周期函数である。

グラフから明らかなように，0°, 90°, 180°, 270° の余弦の値は，次のように定めるとよい。 $\boxed{x=r\cos\theta}$

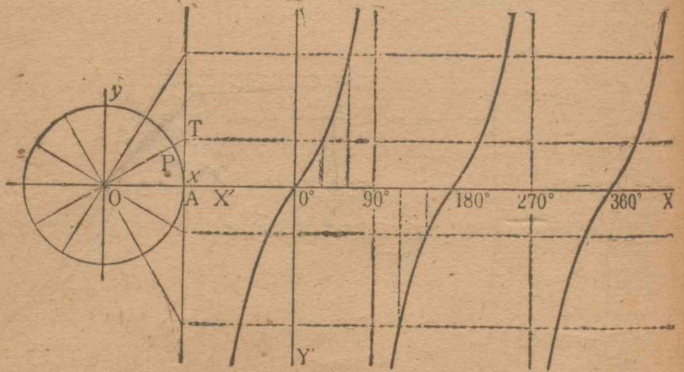
$$\boxed{\begin{array}{ll}\cos 0^\circ=1, & \cos 90^\circ=0\\ \cos 180^\circ=-1, & \cos 270^\circ=0\end{array}}$$

〔2〕 正接のグラフ

Aにおける円Oの接線とOPの延長との交点をTとすると，

$$AT=\tan\theta$$

となる。故に，正弦の場合と同様に座標軸を定め，θ の種々の値に対するATの大きさを求め，これをX軸上同じ度数のところの縦座標にとって，これらの点を滑らかな曲線で連結すればよい。



上の図によってわかるように，$\tan\theta$ は $180°$ を周期とする周期函数である。

また，$0°$, $180°$ の正接は，次のように定めるとよい。

$$\tan 0°=0, \qquad \tan 180°=0$$

θ が $90°$ よりも小さい値から限りなく $90°$ に近づくと，$\tan\theta$ は限りなく大きくなる。これを次の式で表わす。

$$\tan 90°=+\infty$$

しかし，θ が $90°$ よりも大きい値から限りなく $90°$ に近づくと，$\tan\theta$ は負の数であって，その絶対値は限りなく大きくなる。これを次の式で表わす。

$$\tan 90°=-\infty$$

結局，$\tan 90°=\pm\infty$ と表わすのが普通である。

同様に，次のように書く。

$$\tan 270°=\pm\infty$$

問　　題

1. $y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ の二つのグラフの間に，どのような関係があるか。

2. $-180°<\theta<360°$ の範囲内で，次の式に適する θ は，幾つあるか。また，その値を求めよ。

(1) $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　(2) $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(4) $\tan\theta=\pm1$

3. 次の函数のグラフを書け。また，各函数の周期は何ほどか。

(1) $y=2\sin x$　　(2) $y=\sin 2x$　　(3) $y=\sin\dfrac{x}{2}$

4. 前問で書いたグラフと，$y=\sin x$ のグラフの間に，どのような関係があるか。

5. t が -5 秒から 15 秒まで変わる間における，次の函数のグラフを書け。

$$y=2\sin 30°\cdot t$$

6. θ が $-90°$ から $360°$ まで変わる間における，次の函数のグラフを書け。

$$y=\cot\theta,\qquad y=\sec\theta,\qquad y=\mathrm{cosec}\,\theta$$

§3. 三角函数の性質

三角函数の性質や，三角函数の間にある関係について調べよう。

〔1〕 負の角の三角函数

$\sin(-\theta)$ と $\sin\theta$, $\tan(-\theta)$ と $\tan\theta$ は，絶対値が等しくて符号が反対であるから，$y=\sin\theta$ と $y=\tan\theta$ のグラフで，その曲線は，何れも原点について点対称である。

また，$\cos(-\theta)$ と $\cos\theta$ は相等しいから，$y=\cos\theta$ のグラフで，その曲線は y 軸について対称である。

したがって，次の関係がある。

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(-\theta)=-\sin\theta, \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta\\&\tan(-\theta)=-\tan\theta\end{aligned}}$$

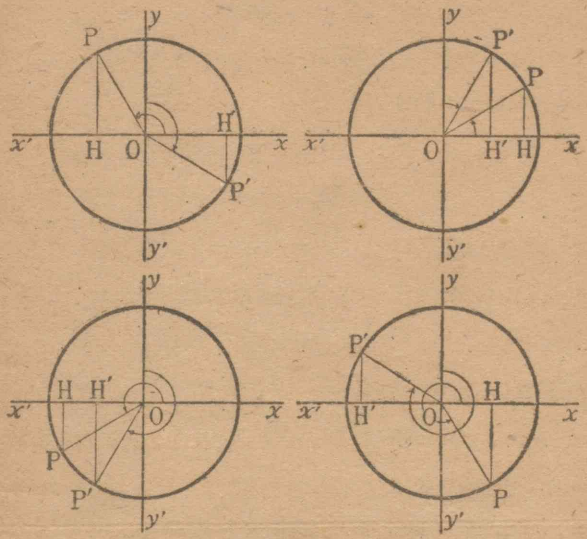
〔2〕 $90°-\theta$, $90°+\theta$ の三角函数

半径1の円Oで，$\angle xOP=\theta$, $\angle xOP'=90°-\theta$ とし，P及び P′ から XX′ に垂線 PH, P′H′ を引くと

$$\triangle P'OH' \equiv \triangle OPH$$

故に $\qquad P'H'=OH,\qquad OH'=PH$

したがって，θ の大きさにかかわらず，次の等式が成り立つ。



$$\boxed{\begin{aligned}\sin(90°-\theta)&=\cos\theta\\\cos(90°-\theta)&=\sin\theta\\\tan(90°-\theta)&=\cot\theta\end{aligned}}$$

問1. $y=\sin\theta$ のグラフで，曲線は $90°$ における縦線について対称である。また，$y=\cos\theta$, $y=\tan\theta$ のグラフでは，曲線は X 軸上の $90°$ の点について点対称である。これを証明せよ。

問2. 次の等式が成り立つ。これを証明せよ。

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(90°+\theta)=\sin(90°-\theta), &&\sin(90°+\theta)=\cos\theta\\&\cos(90°+\theta)=-\cos(90°-\theta), &&\cos(90°+\theta)=-\sin\theta\\&\tan(90°+\theta)=-\tan(90°-\theta), &&\tan(90°+\theta)=-\cot\theta\end{aligned}}$$

〔3〕 $180°-\theta$, $180°+\theta$ の三角函数

問1に述べた図形の性質を基にして考えると，次の等式が成り立つわけがわかる。

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$$

問3. 次の等式が成り立つ。これを証明せよ。

$$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°+\theta)=\tan\theta$$

〔例1〕 $-150°$ の正弦及び余弦を求めよ。

〔解〕 $\sin(-150°)=-\sin 150°=-\sin(180°-30°)$

$$=-\sin 30°=-0.5000$$

$$\cos(-150°)=\cos 150°=\cos(180°-30°)$$
$$=-\cos 30°=-0.8660$$

〔4〕 三角函数相互の関係

θ を一般の角とする時，次の等式が成り立つ。

$$\boxed{\begin{aligned}&\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\&1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\end{aligned}}$$

$\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

〔証明〕 186 ページの図で，動径 OP に属する角を θ とすれば

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}$$

三平方の定理によって $x^2+y^2=r^2$ であるから

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{r^2}{r^2}=1$$

また， $1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2}{x^2}=\dfrac{r^2}{x^2}$

$\dfrac{r}{x}=\sec\theta$ であるから $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

〔例2〕 θ が第三象限の角であって，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ である時，$\cos\theta$, $\tan\theta$ を求めよ。

〔解〕 θ が第三象限の角であるから，$\cos\theta<0$ である。

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{4}$$

問　　題

1. 次の角の正弦・余弦及び正接の値を求めよ。

$120°$,	$135°$,	$225°$,	$630°$
$-120°$,	$-300°$,	$-540°$,	$-112°$
$240°$,	$1200°$,	$-16°$,	$-520°$

2. 次の式を θ の正弦または余弦で書き表わせ。

(1) $\sin(\theta-90°)$ (2) $\sin(\theta-180°)$

(3) $\cos(\theta-90°)$ (4) $\cos(\theta-180°)$

3. 次の式を θ の正弦または余弦で書き表わせ。

(1) $\sin(270°-\theta)$　　(2) $\sin(270°+\theta)$

(3) $\cos(270°-\theta)$　　(4) $\cos(270°+\theta)$

4. θ が第四象限の角であって，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ である時，$\sin\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ。

5. $\sin\theta=-0.3$ である時，$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ。

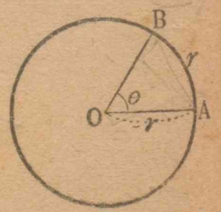
6. 一つの三角形の三つの角を A, B, C で表わす時，次の等式が成り立つ。これを証明せよ。

(1) $\sin A=\sin(B+C)$　　(2) $\cos A=-\cos(B+C)$

(3) $\tan A=-\tan(B+C)$　(4) $\sin A=-\sin(2A+B+C)$

§4. 弧度法

一つの円では，中心角とそれに対する弧の長さとは比例する。したがって，中心角の大きさを弧の長さではかることができる。



問1. 半径 r の円 O で，半径と等しい長さの弧 AB に対する中心角を θ とする。θ の値を求める式を作り，その値を小数第四位まで求めよ。

$\theta=\dfrac{180°}{\pi}$

また，度・分・秒の単位で書け。

57° 17′ 44″ ……

問2. 前問の角の大きさは，半径 r の大きさに関係なく一定である。これを証明せよ。

この一定の角の大きさを一**弧度**といい，弧度を単位とする角のはかり方を**弧度法**という。

問3. 同じ角を，弧度法ではかって α，分度器ではかって A° であったとする。α, A の間に次の等式が成り立つ。これを証明せよ。

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{A}{180}$$

問3の関係式から，度または直角単位の角を弧度に，あるいは弧度で表わされた角を度または直角単位の角に換算することができる。

問4. 次の角を換算せよ。

180°,　45°,　2 直角,　$\dfrac{\pi}{2}$,　$\dfrac{\pi}{4}$

弧度法では，通常単位の弧度という記号を省く。

問　　題

1. 次の角を弧度で表わせ。

180°,　60°,　75°,　22.5°,　30°

270°,　110°,　18°,　3°,　−15°

3 直角,　$\dfrac{3}{2}$ 直角,　$\dfrac{1}{4}$ 直角,　$\dfrac{2}{5}$ 直角,　a 直角

2. 次の弧度を度で表わせ。また，直角単位で表わせ。

1,　2,　3,　$\dfrac{1}{3}$,　$\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{3\pi}{2}$,　$\dfrac{3\pi}{4}$,　$\dfrac{\pi}{3}$,　$\dfrac{2}{3}\pi$,　$\dfrac{\pi}{6}$

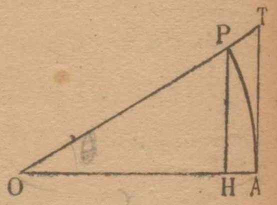
3. 半径 $6\,cm$ の円がある。次の長さの弧に対する中心角はそれぞれ何弧度か。

(1) $2\,cm$　　(2) $5\,cm$　　(3) $3.5\,cm$

4. 半径 r の円で，中心角 θ に対する弧の長さを求めよ。また，半径が1の円ではどうか。

5. 半径 r の円で，中心角が θ である扇形の面積は $\frac{r^2\theta}{2}$ である。これを証明せよ。

6. 右の図で，ATをAにおける接線，PH⊥OA とする。

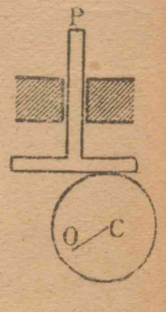


$AT>\overset{\frown}{AP}>PH$ の関係を用いて，次の関係を証明せよ。

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$$

§5. 単振動

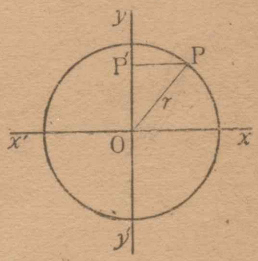
右の図に示したのは，回轉運動を直線上の往復運動に変える装置の一種で，カムと呼ばれるものである。円板をその中心Cと異なる点Oのまわりに回轉させると，Pは上下運動をする。この運動の性質を調べるには，Pの運動を式に書き表わすがよい。



問　円板Cの半径を $4\,cm$ とし，$OC=3\,cm$ とする。円板をOのまわりに毎分10回の割合で，左まわりに回轉させると，Cの角速度は毎秒何弧度か。

Pの位置は，振動の中央の点Mを座標の原点として表わし，時間は，PがMを通る一定の時を基準にとってはかるものとして，t 秒後のMPの大きさを $y\,cm$ とする。y を t の式で書き表わせ。

上の問で調べたPの運動は，結局は，次のP′の運動と同じものである。



半径 r の円周上を，点Pが毎秒 α の等角速度で左まわりに回轉しているものとする。Pから yy' におろした垂線の足をP′とすると，P′はPの運動につれて，yy' 上で周期運動をする。

Oを原点とする座標軸をとり，時間は，Pが Ox を通過するある一定の時を基準にとってはかるものとして，t 秒後のOP′の大きさを y とすると，P′の運動は次の式で表わされる。

$$y=r\sin\alpha t$$

上で調べたP′の運動を**単振動**といい，r を単振動の**振幅**という。

問　　題

1. 上の円運動の図で，OPが x 軸の正の方向と $\frac{\pi}{2}$ の角をなす時を時間の基準として，P′の運動を式に書き表わせ。

2. 本節の問で，座標の原点は振動の最下点にとり，時間

はPが原点に來た一定の時を基準にとって，Pの運動を正弦の式で書き表わせ。

3. 198 ページの図に示したやうな構造のカムで，Pに次の式で表わされる單振動をさせようと思う。（單位は秒，ミリメートル）

$$y=25\sin\frac{3}{4}\pi t$$

円板の中心と円板の回轉の中心との距離を何ほどにすればよいか。また，円板を毎分何回の割合で回轉させればよいか。

4. 次の式は，單振動を表わすものと見られるか。但し，t は時間（秒）を，y は距離（センチメートル）を表わすものとする。もし，單振動を表わすとすれば，その振幅・周期を言え。

また，時間は，点Pがどの位置にあった時からはかったものかを示せ。

(1) $y=2\sin\frac{\pi}{4}t$　　(2) $y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)$

(3) $y=5\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$　　(4) $y=4\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)$

5. 單振動は，次のような形の式で表わすことができる。これを説明せよ。但し，r, α, β は定数とする。

$$y=r\sin(\alpha t+\beta)$$

6. 單振動をする点の速さは，どこで最も速いか。また，どこで最も遅いか。單振動を示すグラフについて調べよ。

7. 次の図は，ある機械の一部を示したもので，OP=4*cm*，PQ=32 *cm* である。Pが毎秒 π の等角速度で回轉すると，

Qはどのような運動をするか。

Qはだいたい單振動をしているとみて，Qの運動を式に書き，また，グラフに表わしてみよ。

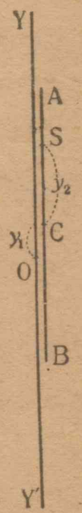
§6. 單振動の合成

直線 YOY′ の上で，直線 AB が單振動をしている。AB の中点Cの運動は，次の式で書き表わされるものとする。但し，座標の原点を O とする。

$$y_1=4\sin\frac{\pi}{6}t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

また，点Sは AB 上で單振動をしていて，その運動は次の式で表わされるものとする。但し，座標の原点をCとする。

$$y_2=3\cos\frac{\pi}{6}t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$



上の式で，距離はセンチメートル，角度は弧度，時間は秒を單位にしている。今後も特に断らない限り，單位はセンチメートル，弧度，秒とする。

上の運動で，SはOに対して二つの運動を合わせた運動をする。このように，二つの運動を合わせたものを，二つの運動の**合成運動**という。

二つの單振動の合成運動は，どのような運動になるかを考えよう。

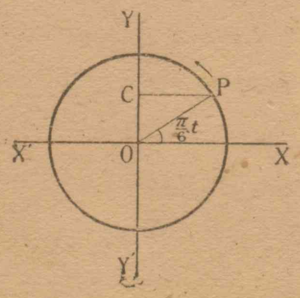
問1. CのYY′に対する運動を示すグラフと，SのABに対する運動を示すグラフとを，同じ座標軸を用いて書け。

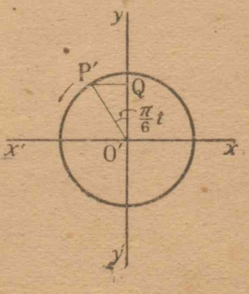
このグラフにある二つの曲線を基にして，SのYY′に対する運動を示すグラフを作れ。

問2. 前問で，合成してできたSの運動はどんな振動であるか。これをグラフについて調べよ。また，單振動と推定されるならば，その運動を示す式を書け。

前二問で推定したことを，單振動の基になる円運動の合成によって確かめてみることにしよう。

(1) について調べてみると，次の左の図のように，半径4cmの円Oで，その周上を左まわりに毎秒 $\frac{\pi}{6}$ の等角速度で回轉する点Pを考え，Pから y 軸におろした垂線の足をCとする時，(1) 式は，Cの單振動を表わすものとみることができる。但し，時間は，PがOXを通過する時が基準となっている。

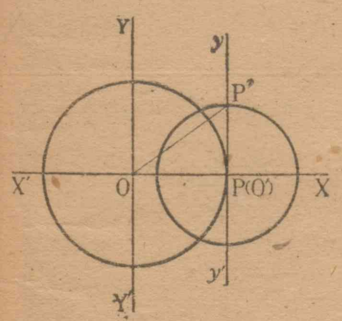


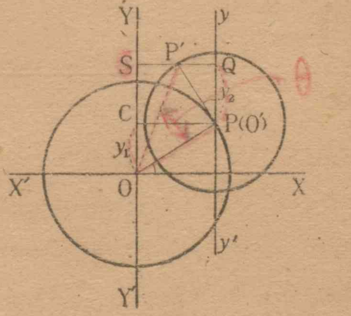


同様に，(2) ついて考えてみると，前ページの右の図のように，半径3cmの円O′で，その周上を左まわりに毎秒 $\frac{\pi}{6}$ の等角速度で回轉する点P′を考え，P′から y 軸へおろした垂線の足をQとする時，P′がO′y を通過する時を基準にとったQの單振動を表わすものとみることができる。

今，中心O′をPに重ねて，その座標軸が常に円Oの座標軸と平行を保つようにして，円Oの周上を回轉させると，P′はOに対して二つの円運動の合成運動をする。

下の左の図は，時間のはかり始めにおけるP, P′の位置を示し，右の図は，これから t 秒後の位置を示したものである。





この時，P′からY軸におろした垂線の足をSとすれば，CSがPQに等しいから，P′の y 座標は次の式で表わされる。

$$y=y_1+y_2=4\sin\frac{\pi}{6}t+3\cos\frac{\pi}{6}t$$

また別に，上の右の図でわかるように

$$\angle POX=\angle P'PQ\ \left(=\frac{\pi}{6}t\right)$$

故に，$\angle OPP'$ は常に一定（直角）であって，$OP'=5\,cm$ である。したがって，P' は O を中心とし，半径 5 cm の円周上を毎秒 $\frac{\pi}{6}$ の等角度速度で，円運動することとなって，S は O に対してまた單振動することが確かめられた。

また，一定の角 POP' の大きさを $\theta\left(大約\ \frac{\pi}{5}\right)$ とすると，S の運動を表わす式は，次の通りである。

$$\boxed{y=5\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\theta\right)}$$

問　　題

1. 次の二つの單振動を合成し，振幅と周期とを求めよ。また，合成運動を，振幅と角速度とを用いて式に書き表わせ。

(1)　$y_1=2\sin \pi t,\qquad y_2=3\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$

(2)　$y_1=3\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}\right),\quad y_2=4\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)$

2. 次の二つの單振動を合成すると，どのような運動になるか。これをグラフに示せ。

合成運動は單振動であるか，これをグラフについて調べよ。

(1)　$y_1=2\sin \pi t,\quad y_2=2\cos 2\pi t$

(2)　$y_1=\sin \pi t,\quad y_2=\cos\frac{\pi}{3}t$

3. α がどのような角であっても，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

4. 半径 3 cm の直円柱が，その軸のまわりを毎分 5 回の割合で等角速度で回轉している。また，点 P が，その一つの母線に沿って毎分 30 cm の割合で等速度運動をするものとする。点 P は，軸に対してどのような運動をするか。その曲線を投影図に書き表わせ。

上で書いた曲線を**つる巻線**といい，母線が一回轉する間に，点 P が母線上を進んだ距離を，つる巻線の**進み**という。

§7. 加法定理

前ページの問題 3 により，次の関係があることがわかった。

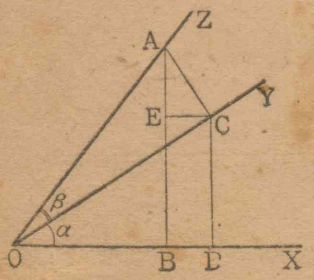
$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

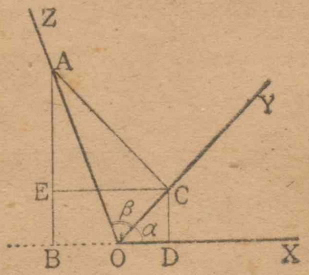
一般に，$\sin(\alpha\pm\beta)$，$\cos(\alpha\pm\beta)$ の括弧を取ると，$\alpha,\ \beta$ の三角函数で，どのように表わされるかを調べよう。

まず，$\alpha,\ \beta$ が共に鋭角で

$$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2},\qquad \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$$

の二つの場合について考えよう。





直線OX, OY, OZを引き，$\angle XOY=\alpha$，$\angle YOZ=\beta$ とすると，$\angle XOZ=\alpha+\beta$ となる。OZ 上にAをとり，$OA=1$ とする。A から OX, OY に垂線をおろし，その足をそれぞれB, Cとし，また，Cから AB に垂線 CE を引くと

$$\angle CAE=\angle XOY=\alpha$$

$$CA=\sin\beta, \qquad OC=\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=BA=BE+EA=DC+EA$$

また　$DC=OC\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta$

$EA=CA\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta$

故に　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots(1)$

次に，前ページの左の図のように，$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ の場合に

$$\cos(\alpha+\beta)=OB=OD-BD=OD-EC$$

前ページの右の図のように，$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ の場合に

$$\cos(\alpha+\beta)=-OB=-(BD-OD)=OD-EC$$

また　$OD=OC\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta$

$EC=CA\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta$

故に　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \cdots\cdots(2)$

上の (1), (2) を，**正弦・余弦の加法定理**という。

加法定理は，α, β がどのような角の時にも成り立つ。この証明を考えよう。

問 1. 加法定理は，$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta=\pi$ の時にも成り立つ。これを証明せよ。

加法定理が α, β が鋭角の時に成り立つことを基にして，α, β のいずれかが $\frac{\pi}{2}$ だけ増した時にも成り立つことが，次のように証明される。

α, β を鋭角とする。$\alpha'=\frac{\pi}{2}+\alpha$ とすると，α' は鈍角となる。鈍角と鋭角とを加え合わせた場合について考えよう。

$$\sin(\alpha'+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)=\cos(\alpha+\beta)$$

また　$\sin\alpha'\cos\beta+\cos\alpha'\sin\beta$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

この二式の右辺は，(2) によって相等しい。

故に　$\sin(\alpha'+\beta)=\sin\alpha'\cos\beta+\cos\alpha'\sin\beta$

となって，正弦の加法定理が成り立つ。

問 2. 上の場合に，余弦の加法定理も成り立つことを証明せよ。

加法定理が α', β の二角について成り立つことを基にして，α', β のいずれかが更に $\frac{\pi}{2}$ だけ増した時にも成り立つことは，上と全く同様にして証明される。

α, β を鋭角とし，これらを $\frac{\pi}{2}$ ずつ増して行くと，どんな正の角にでも等しくすることができるから，一般に，正弦・

余弦の加法定理は，α, β が一般の正の角の場合に，常に成り立つことがわかる。

問 3. 加法定理が，α, β が鋭角の時に成り立つことを基にして，α, β のいずれか一方が $\dfrac{\pi}{2}$ だけ減つた時にも成り立つことを証明せよ。

また一般の負の角の時にも常に成り立つことを証明せよ

正弦・余弦の加法定理を用いると，α, β が一般の角である時，正接について次の式が得られる。但し，割る数は0でないとする。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

この式の分母，分子を $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

これを**正接の加法定理**という。

上で証明したことを，定理としてまとめておく。

定理 一般の角 α, β について，次の等式が成り立つ。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

加法定理で，β を $-\beta$ と置き換えると，次の定理が得られる。

定理 一般の角 α, β について，次の等式が成り立つ

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

〔例1〕 第6節で扱った二つの單振動の合成を表わす次の式を，加法定理を用いて，$y=r\sin(\alpha t+\beta)$ の形に書き変えてみよ。

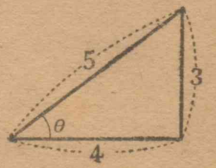
$$y=4\sin\frac{\pi}{6}t+3\cos\frac{\pi}{6}t$$

また，第6節で求めた結果とくらべよ。

〔解〕 直角をはさむ二辺が 4, 3 の直角三角形の斜辺は5である。

この三角形の3に對する角を θ とする。與えられた式を5で割って変形すると

$$\frac{y}{5}=\frac{4}{5}\sin\frac{\pi}{6}t+\frac{3}{5}\cos\frac{\pi}{6}t$$
$$=\sin\frac{\pi}{6}t\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}t\sin\theta$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\theta\right)$$



したがって　　$y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\theta\right)$

これは第6節で求めた結果に等しい。

〔例2〕 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

〔証明〕 加法定理において，$\beta=\alpha$ とおくと

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

あるいは $=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

問　　題

1. 次の式を $y=r\sin(\alpha x+\beta)$ の形に書き改めよ。

(1) $y=\sin x+\cos x$　　(2) $y=3\sin 2x+4\cos 2x$

(3) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-3\cos x$

2. 次の等式が成り立つことを証明せよ．但し，複号は上下同順にとるものとする。

(1) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

(2) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

(3) $\sin\left(A\pm\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin A\pm\cos A)$

(4) $\cos\left(A\pm\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A\mp\sin A)$

(5) $\tan\left(A\pm\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan A\pm 1}{1\mp\tan A}$

3. 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}\\ \sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}\\ \cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$

4. 前問の等式を用いて，次の式を積の形に変えよ。

(1) $\sin 3\theta+\sin\theta$　　(2) $\sin 5\theta-\sin 3\theta$

(3) $\cos 7\theta+\cos 3\theta$　　(4) $\cos 7\theta-\cos 3\theta$

5. 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\{\sin(x+y)+\sin(x-y)\}$$
$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\{\sin(x+y)-\sin(x-y)\}$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\}$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}$$

6. 前問の等式を用いて，次の式を和・差の形に変えよ。

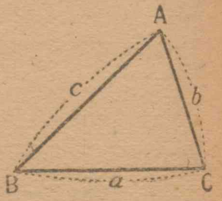
(1) $\sin 3\theta\cos 2\theta$　　(2) $\cos 4\theta\cos\theta$

(3) $\sin\theta\cos 4\theta$　　(4) $\sin 5\theta\sin 3\theta$

7. $\sin\theta=0.4$ である時，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ の値を求めよ。また，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

§8. 三角形と三角函数

三角形 ABC の三つの角の大きさを A, B, C で表わすことにする。また，これらに対する辺をそれぞれ a, b, c とすると，次の関係がある。

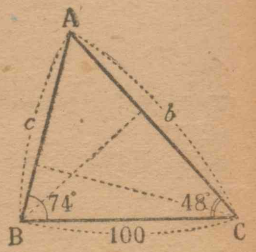


$$A+B+C=\pi,$$

$$b+c>a>b\sim c$$

このほか，角と辺とにどんな関係があるかを調べよう。

問 1. 二地点 B, C から A までの距離をはかるため，角 B, C 及び辺 BC を測定して次の結果を得た。



$B=74°,\ C=48°,\ BC=100\ m$

明らかに，$A=58°$ である。B, C から対辺に垂線を引いて，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{100}{\sin 58°}=\frac{b}{\sin 74°},\qquad \frac{100}{\sin 58°}=\frac{c}{\sin 48°}$$

また，b, c の値を計算せよ。

上の結果からわかるように，三角形に次の性質がある。

定理 三角形 ABC で，次の等式が成り立つ。

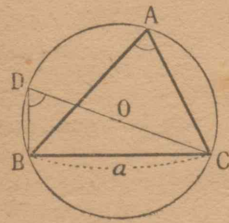
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

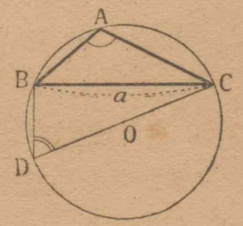
これを三角形の**正弦定理**という。

正弦定理は，次の方法でも証明することができる。

〔**証明**〕 三角形 ABC に外接円を書き，C を通る直径 CD を引いて BD を結ぶと，∠CBD が直角である。したがって

$$BC=CD\sin D$$





上の左の図のように，$A<\frac{\pi}{2}$ の場合は　$D=A$

上の右の図のように，$A>\frac{\pi}{2}$ の場合は　$D=\pi-A$

故に，どちらの場合でも

$$\sin D=\sin A$$

故に　$BC=CD\sin A$

したがつて，外接円の直径を 2R で表わすと

$$a=2R\sin A\qquad 即ち\qquad \frac{a}{\sin A}=2R$$

同様にして

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\qquad \frac{c}{\sin C}=2R$$

であることがわかる。

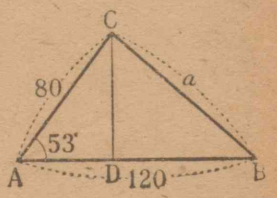
したがつて　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

また，$A=\frac{\pi}{2}$ の場合は，$\sin A=1$, $a=2R$ であるか

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{2R}{1}=2R$$

となって，上の等式が成り立つ。

問 2. 二地点 B, C 間の距離を求めるため，辺 AC, AB 及び角 A を測定して，次の結果を得た



AC＝80 m,　AB＝120 m

A＝53°

C から AB に垂線 CD を引いて，BD, CD を求め，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a^2=80^2+120^2-2\times80\times120\cos 53°$$

また，a の値を求めよ。

上の結果からわかるように，三角形に次の性質がある。

定理　三角形 ABC で，次の等式が成り立つ。

第二余弦法則

$$\boxed{\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}}$$

これを三角形の**余弦定理**という。

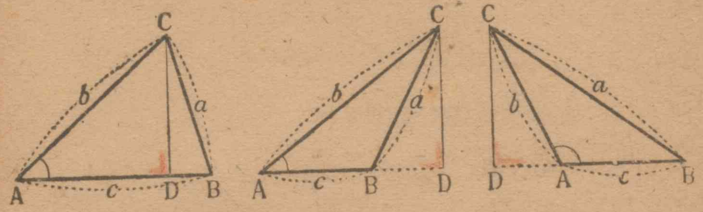
この定理の成り立つことは，次のように証明することができる。

〔**証明**〕 三角形 ABC で，C から直線 AB に垂線 CD を引くと

$$CD=b\sin A$$

$A<\frac{\pi}{2}$ の場合は，次の左及び中の図のように

(鋭角)　(鋭角)　(鈍角)



$$AD=b\cos A$$

$$BD=AB\sim AD=c\sim b\cos A$$

(ここで，波形のしるし～は，大きいものから小さいものを引くことを表わす。)

$A>\frac{\pi}{2}$ の場合は，上の右の図のように

$$AD=-b\cos A$$

$$BD=AB+AD=c-b\cos A$$

故に，どちらの場合でも，三平方の定理によって

$$BC^2=CD^2+BD^2$$

$$\begin{aligned} a^2&=(b\sin A)^2+(c\sim b\cos A)^2\\ &=b^2(\sin^2A+\cos^2A)+c^2-2bc\cos A\\ &=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

$A=\frac{\pi}{2}$ の場合は，$\cos A=0$ であるから，上の等式は

$$a^2=b^2+c^2$$

となる。三平方の定理から，この等式の成り立つことは明らかである。

他の式も同様に証明することができる。

〔**例**〕 三角形の三辺の長さが 6 cm, 5 cm, 4 cm である時，この三角形で最も大きい角を求めよ。

〔**解**〕 6 cm の辺に対する角は最大である。これを A とする。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

に $a=6,\ b=5,\ c=4$ を代入すると

$$6^2=5^2+4^2-2\times5\times4\cos A$$

$$\cos A=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=0.1250$$

$$A=82°50'$$

このような計算をするには，余弦定理を次の式に書き変えておくのが便利である。

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

問　　題

1. 三角形 ABC で，辺と角が次のようである時，この三角形の外接円の直径を求めよ。

（1）　$a=7.5\,cm$，　$A=130°$

（2）　$a=4.8\,cm$，　$B=65°$，　$C=78°$

2. 三角形の三辺の長さが次のようである時，その三角形は鋭角三角形であるか，直角三角形であるか，あるいは，鈍角三角形であるか。余弦定理を用いて調べよ。

（1）　$4\,cm,\ 5\,cm,\ 7\,cm$　　（2）　$5\,cm,\ 12\,cm,\ 13\,cm$

（3）　$15\,cm,\ 16\,cm,\ 18\,cm$

3. 三角形の三辺の長さが次のようである時，三つの角を求めよ。

（1）　$a=5\,cm,\ b=6\,cm,\ c=7\,cm$

（2）　$a=\sqrt{6}\,cm,\ b=2\sqrt{3}\,cm,\ c=(3+\sqrt{3})\,cm$

4. 三角形 ABC で，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(オ一余弦法則

$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$b=c\cos A+a\cos C$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

5. 前問の関係式を用いて，余弦定理を証明せよ。

6. 三角形 ABC で，次の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin A+\sin B>\sin C$$

§9.　三角形の解法

三角形の幾つかの辺の長さと角の大きさとがわかっている時，残りの辺の長さや角の大きさを求めることを，**三角形を解く**という。

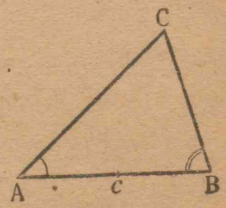
ここで，三角形を解く方法をまとめておこう。

〔1〕　二角と一辺とを知る場合

A, B, C のうち，二角がわかると，残りの一角は

$$A+B+C=\pi$$

によって定まる。



一辺 c がわかっていると，正弦定理

$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$

によって，a, b は次の式で計算できる。

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C},\qquad b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

〔例 1〕 A=52°，B=74°，c=128 cm を知って，この三角形を解け。

〔解〕 $C=180^\circ-(52^\circ+74^\circ)=54^\circ$

$$a=\frac{128\sin 52^\circ}{\sin 54^\circ}=\frac{128\times 0.7880}{0.8090}$$

$\log 128=2.1072$
$\log 0.7880=\bar{1}.8965$
$-\log 0.8090=0.0921$

$\log a=2.0958$
$a=124.7$

$$b=\frac{128\sin 74^\circ}{\sin 54^\circ}=\frac{128\times 0.9613}{0.8090}$$

$\log 128=2.1072$
$\log 0.9613=\bar{1}.9828$
$-\log 0.8090=0.0921$

$\log b=2.1821$
$b=152.1$

答 C=54°，a=124.7 m，b=152.1 m

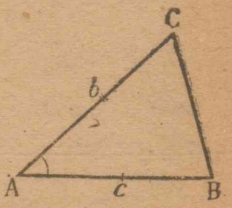
〔2〕 二辺とそのはさむ角とを知る場合

二辺 b, c と，そのはさむ角 A とがわかっていると，余弦定理によって，a は次の式で計算できる。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

また，a がわかると，正弦定理によって

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$



となるから，この式で sin B を計算し，正弦表を引いて B を求める。また，C は次の式で計算できる。

$$C=\pi-(A+B)$$

〔例 2〕 b=165 m，c=137 m，A=66° を知って，三角形を解け。

〔解〕 $a^2=165^2+137^2-2\times 165\times 137\cos 66^\circ$
$=27225+18769-45210\times 0.4067$
$=27607$
$a=166.2$

$$\sin B=\frac{165\sin 66^\circ}{166.2}=\frac{165\times 0.9135}{166.2}=0.9070$$

$$B=65^\circ 6'$$

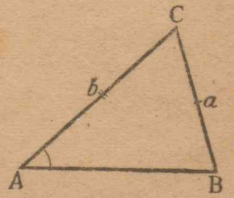
また， $C=180^\circ-(66^\circ+65^\circ 6')=48^\circ 54'$

答 a=166.2 m，B=65°6′，C=48°54′

〔3〕 二辺とその一対角とを知る場合

二辺 a, b と一対角 A とがわかっていると，正弦定理によって

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$



となって，これから B を求め，後は〔1〕の場合に帰する。

〔例 3〕 a=193.1 m，b=361.0 m，A=29° を知って，三角形を解け。

〔解〕 $\sin B=\dfrac{361\sin 29^\circ}{193.1}=\dfrac{361\times 0.4848}{193.1}$
$=0.9063$

これから，次の二つのBの値が得られる。

$$B=65^\circ$$
$$B=180^\circ-65^\circ=115^\circ$$

B=65° の場合

$C=180^\circ-(29^\circ+65^\circ)$

$=86^\circ$

$c=\dfrac{193.1\sin 86^\circ}{\sin 29^\circ}$

$=\dfrac{193.1\times 0.9976}{0.4848}$

$=397.5$

B=115° の場合

$C=180^\circ-(129^\circ+115^\circ)$

$=36^\circ$

$c=\dfrac{193.1\sin 36^\circ}{\sin 29^\circ}$

$=\dfrac{193.1\times 0.5878}{0.4848}$

$=234.1$

答 $\begin{cases} B=65^\circ,\ C=86^\circ,\ c=397.5\,m \\ B=115^\circ,\ C=36^\circ,\ c=234.1\,m \end{cases}$

〔4〕 三辺を知る場合

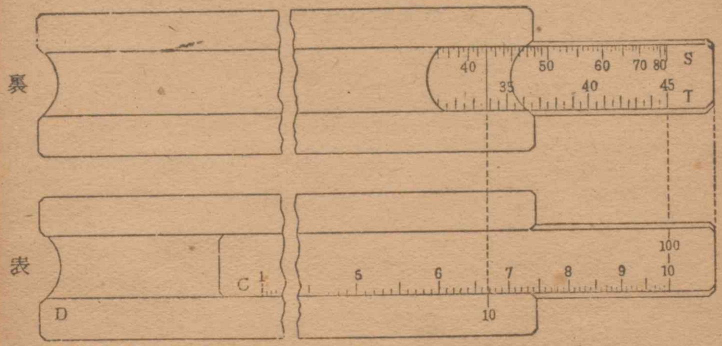
この場合には，余弦定理を用ひ，前節〔例〕に示すようにして角を求める。

(P216 の定理を用いる)

計算尺を裏返すと，内尺にS尺とT尺がある。これを用いて，角の正弦・正接を読みとることができる。

例えば，sin 42° は，S尺の 42 を計算尺の裏の右端につけてある線に合わせ，計算尺の表面でD尺の 10 の目盛に合うC尺の 6.69 を読んで得られる。

逆に，正弦の値がわかっている時，その角の大きさを求めることもできる。



問 1. 上の方法から，正弦の値を知って，その角の大きさを求める方法を考えよ。

問 2. 次の x を求めよ。

$$\sin 32^\circ 50'=x, \qquad \sin x=0.545$$

角の正接についても同様にできる。

一般に，計算尺で與えられた角の三角函数の値を求めるには，前に得られた公式を利用して，計算尺で値を求められる範囲の角の三角函数に直すのである。

正接は角が 45° までであるが，それより大きくて 90° までの角については，次の公式によって求めることができる。

$$\tan\theta=\frac{1}{\tan(90^\circ-\theta)}$$

したがって，$90^\circ-\theta$ をT尺にとり，これに合う逆C尺の目盛を読めばよい。

余弦については $\cos\theta=\sin(90^\circ-\theta)$ で求められる。

問3. 計算尺で次の式の x を求めよ。

$\cos 23°=x,\qquad \cos x=0.415$

$\tan 48°36'=x,\qquad \tan x=2.145$

上に述べたことを基にして，計算尺を，三角形の解法に用いることができる。

問　　題

1. 三角形 ABC で，辺と角とが次のようにわかっている時，この三角形を解け。

(1)　$c=125.8\,m,\quad A=72°,\quad B=35°$

(2)　$c=78.5\,m,\quad A=130°,\quad C=21°$

(3)　$a=385\,m,\quad b=500\,m,\quad C=65°$

(4)　$a=50\,m,\quad b=73.5\,m,\quad B=35°$

(5)　$a=200\,cm,\quad b=172.6\,cm,\quad c=42.4\,cm$

2. 小山のふもとで，その頂の仰角をはかったら24°であった。そこから12°の傾斜の坂を頂に向かって156 m 登り，再び頂の仰角をはかったら31°であつた。この小山のふもとからの高さは何ほどか。

3. 汽船が港を出てから21ノットの速さで東に向かって航行し，1時間20分後に針路を南68°30′東に変えた。それから3時間たった時に，この船は港からどれくらい離れたところにいるか。

また，その船は港からどの方向にいるか。

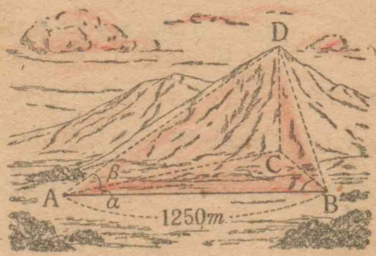
4. 船に乗って8ノットの速さで北20°東の方向に40海里離れた島に向かって直進しようと思う。この附近では北62°東の方向に1.2ノットの速さで流れている潮流のあることがわかっている。船の針路をどの方向に向ければよいか。

5. 甲船は18ノットの速さで北32°西の方向に航行している。乙船は甲船に連絡をとるため，できるだけ早く追いつきたいと思う。現在，甲は乙の東方3海里のところにある。乙が40ノットの速さで進むものとして，乙はどの方向に航行すればよいか。

また，これに要する時間は何ほどか。

6. 高さ400 m の山の頂で，東方にある甲駅と，南52°東にある乙駅との俯角をはかったら，それぞれ35°, 15°, であった。甲，乙両駅の水平距離を求めよ。

7. ABは1250 m の基線である。A地点でBと山の頂Dとを観測して，その間の水平角 α 及びDの仰角 β をはかり，また，B地点でAとDとを観測して，その間の水平角 γ をはかったら，それぞれ次のようであった。



$\alpha=20°,\qquad \beta=28°,\qquad \gamma=83°$

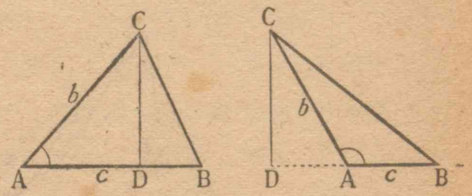
この山の高さを求めよ。

§10. 三角形の面積

三角形の辺の長さや角の大きさを知って，その面積を求める方法を工夫しよう。

三角形 ABC の高さを CD とし，その面積を M で表わすと

$$M=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$



Aがどのような角であっても

$$CD=AC\sin A$$

であるから

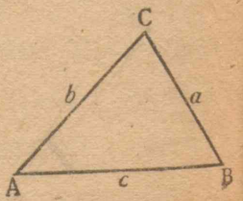
$$M=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A$$

一般に，次の定理が成り立つ。

定理 三角形 ABC の面積を M とすれば，次の式が成り立つ。

$$\mathbf{M=\frac{1}{2}\mathit{bc}\sin A=\frac{1}{2}\mathit{ca}\sin B=\frac{1}{2}\mathit{ab}\sin C}$$

次に，三角形の三辺の長さ a, b, c がわかっている時，その面積を求める方法を考えよう。



余弦定理を用いれば

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A$$

$$=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

$$=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

$a+b+c=2s$ とおくと

$$b+c-a=2(s-a)$$

$$c+a-b=2(s-b)$$

$$a+b-c=2(s-c)$$

故に　$$\sin A=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

したがって

$$M=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

故に，次の定理が成り立つ。

定理 三角形 ABC で，三辺の長さの和を $2s$ とおき，面積を M とすると，次の等式が成り立つ。

$$\mathbf{M=\sqrt{\mathit{s}(\mathit{s}-\mathit{a})(\mathit{s}-\mathit{b})(\mathit{s}-\mathit{c})}}$$

〔例〕 三角形の三辺の長さが $5\,cm$, $6\,cm$, $8\,cm$ である時，

この三角形の面積を計算せよ。

〔解〕 $s=\frac{1}{2}(5+6+8)=9.5$

$$M=\sqrt{9.5\times(9.5-5)\times(9.5-6)\times(9.5-8)}$$
$$=\sqrt{9.5\times4.5\times3.5\times1.5}$$
$$\log M=\frac{1}{2}(\log 9.5+\log 4.5+\log 3.5+\log 1.5)$$
$$=\frac{1}{2}(0.9777+0.6532+0.5441+0.1761)$$
$$=1.1756$$

$M=14.98$　　　　答　$14.98\ cm^2$

問　　題

1. 三角形 ABC で，二角 B, C と一辺 a とを知って，この面積を計算する式を書け。

2. 三角形 ABC で，次の辺や角がわかっている時，この三角形の面積を求めよ。

(1)　$a=34.5\ m$,　$b=28.5\ m$,　$C=57°36'$

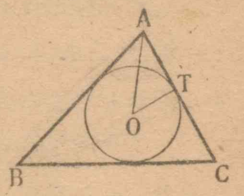
(2)　$a=24.8\ m$,　$B=59°10'$,　$C=82°30'$

(3)　$a=32.7\ m$,　$A=30°15'$,　$B=115°20'$

(4)　$a=147.6\ m$,　$b=203.9\ m$,　$c=86.7\ m$

3. 三角形 ABC の面積を M，内接円の半径を r，三辺の長さの和を $2s$ とすると，$M=rs$ の関係がある。これを証明せよ。また，内接円の半径を a, b, c で表わせ。

4. 三角形 ABC の内接円が辺 AC に接する点を T とし，



三辺の和を $2s$ とすると

$$AT=s-a$$

となる。これを証明せよ。

また，次の式を証明せよ。

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

同様に，$\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ を求める式を作り，222 ページ問題 1. (5) を対数を用いて解け。

5. 三辺が $7\ cm, 8\ cm, 9\ cm$ の三角形の高さを求めよ。

§11. 逆三角函数

三角函数の値がきまった数になるような，角の値について調べよう。

問　三角函数のグラフを用いて，次の方程式に適する x の値を言え。

(1)　$\sin x=\frac{1}{2}$　　(2)　$\cos x=\frac{1}{2}$　　(3)　$\tan x=1$

次に，$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲内で (1), (3) の根を言え。また，$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲内で (2) の根を言え。

上の各方程式に適する x の値は，角に制限がなければ，数限りなく多くある。

しかし，(1), (3) において $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$, (2) において

$0 \leqq x \leqq \pi$ の制限をおくと，x の値はただ一つしか求まらない。

一般に，$|a| \leqq 1$ の時，$\sin x=a$，$\cos x=a$ に適する x の値を，それぞれ次の式で表わす。

$$x=\sin^{-1}a, \qquad x=\cos^{-1}a$$

また，a を任意の数とする時，$\tan x=a$ に適する x の値を，次の式で表わす。

$$x=\tan^{-1}a$$

$\sin^{-1}a$, $\cos^{-1}a$, $\tan^{-1}a$ を，それぞれ a の**逆正弦**，**逆余弦**，**逆正接**という。

$x=\sin^{-1}a$ 及び $x=\tan^{-1}a$ は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲内で，また，$x=\cos^{-1}a$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲内で，それぞれただ一つの値しか表わさない。

このただ一つの値を，それぞれ逆正弦，逆余弦，逆正接の**主値**という。

今後，特に断らない時は，$\sin^{-1}a$ などの記号は，その主値を表わすことにする。

$y=\sin^{-1}x$ において，x の値が $|x| \leqq 1$ の範囲内で定まると，y の値は定まる。故に y は x の函数である。

$$y=\sin x \quad と \quad y=\sin^{-1}x$$

とは，互に他の**逆函数である**という。

$$y=\cos x \quad と \quad y=\cos^{-1}x$$

$$y=\tan x \quad と \quad y=\tan^{-1}x$$

についても，同様なことがいえる。

$y=\sin^{-1}x$, $y=\cos^{-1}x$, $y=\tan^{-1}x$ を x の**逆三角函数**という。

問　　題

1. $y=\sin^{-1}x$ のグラフを書け。また，$y=\sin x$ のグラフと比較せよ。

2. $y=\cos^{-1}x$ 及び $y=\tan^{-1}x$ のグラフを書け。

3. 次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　(2)　$\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3)　$\tan^{-1}\sqrt{3}$

(4)　$\sin^{-1}0$　(5)　$\cos^{-1}(-1)$　(6)　$\sin^{-1}(-0.23)$

4. $|a| \leqq 1$ の時，$\sin x=a$ のすべての解は，次の式で表わされる。これを証明せよ。但し，n は整数とする。

$$x=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}a$$

5. $|a| \leqq 1$ の時，$\cos x=a$ のすべての解は，次の式で表わされる。これを証明せよ。但し，n は整数とする。

$$x=2n\pi \pm \cos^{-1}a$$

6. $\tan x=a$ のすべての解は，次の式で表わされる。これを証明せよ。但し，n は整数とする。

$$x=n\pi+\tan^{-1}a$$

7. 次の方程式のすべての解を求めよ。

(1)　$2\sin x=1$　(2)　$2\cos x=\sqrt{3}$

(3)　$\tan x+\sqrt{3}=0$　(4)　$2\cos^2 x+3\sin x=3$

雑　　題

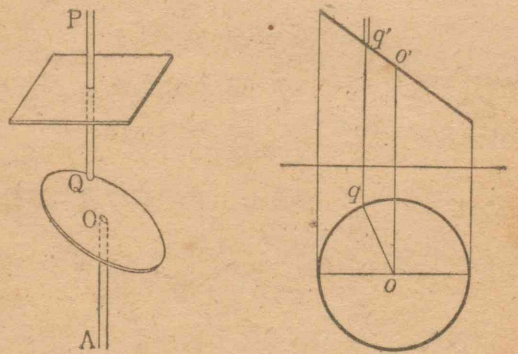
1. 直円柱の上につる巻線が書いてある。このつる巻線を直円柱の軸に平行な平面へ投影すると，一つの曲線が出來る

座標軸を適當に選んで，この曲線の式を書け。

2. 半徑 $2\,cm$ の円周上を，点Pが毎秒 π の等角速度で回轉している。この円の中心が毎秒 $2\,cm$ の速さで直線運動をすると，Pはどのような運動をするか。これを図に示せ。

また，Pの運動を式に書き表わせ。

3. 次の図に示したものはカムの一種である。鉛直の軸OAの先端Oに円板が傾けて取り附けてあり，軸OAがまわると，棒PQは上下に往復運動をする。



また，上の右の図は，Pの運動を調べるために書いた投影図である。軸OAとPQとの距離が $3\,cm$ で，円板は軸に対して $60°$ 傾いているものとする。軸を毎分 10 回の割合で回

轉させると，Pはどのような運動をするか。これを図に書いて調べよ。

座標の原点と基準になる時刻とを適當に定めて，Pの運動を式に書き表わせ。

4. 一点に二つの力が働いている。その大きさを a, b とし，その方向が作る角を θ とすると，合力の大きさは何ほどか。これを式に書き表わせ。

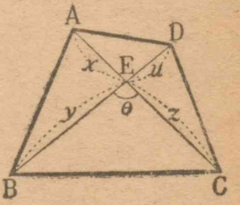
5. x が0から 2π まで変化する時，次の函数のグラフを書け。

$$y=\sin x+\cos x$$

6. 三角形 ABC で，次の関係がある時，この三角形はどんな三角形か。

$$\cos A+\cos B=\sin C$$

7. 四辺形ABCDの対角線の交点をEとし，その交角を θ とする。



$AE=x,\quad BE=y$

$CE=z,\quad DE=u$

として，四辺形 ABCD の面積を書き表わせ。

8. 梯形があって，その両底の大きさは $7.3\,cm$, $12.6\,cm$ で，他の二辺は $6.8\,cm$, $4.2\,cm$ である。この梯形の面積を求めよ。

9. 一辺の大きさが a である正 n 角形の面積をMとする

と，次の等式が成り立つ。これを証明せよ。

$$M=\frac{1}{4}na^2\cot\frac{\pi}{n}$$

10. 北 62° 西の方向に，高さ $2\,m$，幅 $8\,m$ のへいが平地に垂直に立てられている。太陽が眞南から 30° の高度でこれを照らすものとすると，このへいの地面上に投ずる影の面積は幾らか。

附録　数　表

頁

第一表　平方・立方・平方根・立方根の表 (1—100)………2

第二表　三角函数表 (0°—90°)………3

第三表　数の対数表 (1.00—9.99)………4, 5

第一表　平方・立方・平方根・立方根の表

数	平方	立方	平方根	立方根	数	平方	立方	平方根	立方根
1	1	1	1.0000	1.0000	51	2601	132651	7.1414	3.7084
2	4	8	1.4142	1.2599	52	2704	140608	7.2111	3.7325
3	9	27	1.7321	1.4422	53	2809	148877	7.2801	3.7563
4	16	64	2.0000	1.5874	54	2916	157464	7.3485	3.7798
5	25	125	2.2361	1.7100	55	3025	166375	7.4162	3.8030
6	36	216	2.4495	1.8171	56	3136	175616	7.4833	3.8259
7	49	343	2.6458	1.9129	57	3249	185193	7.5498	3.8485
8	64	512	2.8284	2.0000	58	3364	195112	7.6158	3.8709
9	81	729	3.0000	2.0801	59	3481	205379	7.6811	3.8930
10	100	1000	3.1623	2.1544	60	3600	216000	7.7460	3.9149
11	121	1331	3.3166	2.2240	61	3721	226981	7.8102	3.9365
12	144	1728	3.4641	2.2894	62	3844	238328	7.8740	3.9579
13	169	2197	3.6056	2.3513	63	3969	250047	7.9373	3.9791
14	196	2744	3.7417	2.4101	64	4096	262144	8.0000	4.0000
15	225	3375	3.8730	2.4662	65	4225	274625	8.0623	4.0207
16	256	4096	4.0000	2.5198	66	4356	287496	8.1240	4.0412
17	289	4913	4.1231	2.5713	67	4489	300763	8.1854	4.0615
18	324	5832	4.2426	2.6207	68	4624	314432	8.2462	4.0817
19	361	6859	4.3589	2.6684	69	4761	328509	8.3066	4.1016
20	400	8000	4.4721	2.7144	70	4900	343000	8.3666	4.1213
21	441	9261	4.5826	2.7589	71	5041	357911	8.4261	4.1408
22	484	10648	4.6904	2.8020	72	5184	373248	8.4853	4.1602
23	529	12167	4.7958	2.8439	73	5329	389017	8.5440	4.1793
24	576	13824	4.8990	2.8845	74	5476	405224	8.6023	4.1983
25	625	15625	5.0000	2.9240	75	5625	421875	8.6603	4.2172
26	676	17576	5.0990	2.9625	76	5776	438976	8.7178	4.2358
27	729	19683	5.1962	3.0000	77	5929	456533	8.7750	4.2543
28	784	21952	5.2915	3.0366	78	6084	474552	8.8318	4.2727
29	841	24389	5.3852	3.0723	79	6241	493039	8.8882	4.2908
30	900	27000	5.4772	3.1072	80	6400	512000	8.9443	4.3089
31	961	29791	5.5678	3.1414	81	6561	531441	9.0000	4.3267
32	1024	32768	5.6569	3.1748	82	6724	551368	9.0554	4.3445
33	1089	35937	5.7446	3.2075	83	6889	571787	9.1104	4.3621
34	1156	39304	5.8310	3.2396	84	7056	592704	9.1652	4.3795
35	1225	42875	5.9161	3.2711	85	7225	614125	9.2195	4.3968
36	1296	46656	6.0000	3.3019	86	7396	636056	9.2736	4.4140
37	1369	50653	6.0828	3.3322	87	7569	658503	9.3274	4.4310
38	1444	54872	6.1644	3.3620	88	7744	681472	9.3808	4.4480
39	1521	59319	6.2450	3.3912	89	7921	704969	9.4340	4.4647
40	1600	64000	6.3246	3.4200	90	8100	729000	9.4868	4.4814
41	1681	68921	6.4031	3.4482	91	8281	753571	9.5394	4.4979
42	1764	74088	6.4807	3.4760	92	8464	778688	9.5917	4.5144
43	1849	79507	6.5574	3.5034	93	8649	804357	9.6437	4.5307
44	1936	85184	6.6332	3.5303	94	8836	830584	9.6954	4.5468
45	2025	91125	6.7082	3.5569	95	9025	857375	9.7468	4.5629
46	2116	97336	6.7823	3.5830	96	9216	884736	9.7980	4.5789
47	2209	103823	6.8557	3.6088	97	9409	912673	9.8489	4.5947
48	2304	110592	6.9282	3.6342	98	9604	941192	9.8995	4.6104
49	2401	117649	7.0000	3.6593	99	9801	970299	9.9499	4.6261
50	2500	125000	7.0711	3.6840	100	10000	1000000	10.0000	4.6416

第二表　三角函数表

S C T

角	正弦	余弦	正接	角	正弦	余弦	正接
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	∞

第三表　数の対数表(一)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4 8 12	17 21 25	29 33 37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4 8 11	15 19 23	26 30 34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3 7 10	14 17 21	24 28 31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3 6 10	13 16 19	23 26 29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3 6 9	12 15 18	21 24 27
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3 6 8	11 14 17	20 22 25
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3 5 8	11 13 16	18 21 24
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2 5 7	10 12 15	17 20 22
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2 5 7	9 12 14	16 19 21
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2 4 7	9 11 13	16 18 20
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1 2 3	4 5 7	8 9 10
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7