改訂版

現代

新幾何三角法

東京高等師範學校教授
阿部八代太郎著

改訂版

［增課］

東京開成館

（本書ノ大イサハ國定規格A5判）

改訂ニツイテ

曩ニ中學校教授要目ノ改正セラレルヤ,ソノ趣旨ト數學教育ノ傾向トニ鑑ミ本書ノ舊版ヲ編纂シテ之ヲ公ニセルニ爾來五年常ニ全國多數ノ學校ニ採用セラレタルハ著者ノ洵ニ光榮トスル所デアル。然ルニソノ姉妹篇タル現代新幾何(基本)ノ改訂ニ伴ヒ,茲ニ多少ノ修正ヲ要スルコトトナツタ。依ツテ平常ノ研究ト實地教授者各位ノ寄セラレタ批判ト助言トヲ參酌シ,舊版ニ改訂ヲ加ヘテ之ヲ刊行スルコトニシタ。

今回ノ改訂ハ平面幾何ノ補充ニ關スル部分ヲ主トシ,立體幾何ト三角法トニ於テハ小修正ヲ施シタニ過ギナイ。併シ之ニヨツテ舊版ニ比シ一層現代ノ要求ニ適應スルヤウニナツタト信ズル。

著者ハ更ニ研究ヲ重ネ本書ノ完璧ヲ期スルガ,ソレニツケテモ舊版ニ於ケルト同樣實地教授者諸賢ノ忠言ヲ切望スルモノデアル。

昭和十三年十一月

著　者　識

緒　言

本書ハ中學校基本課程用トシテ曩ニ公ニシタ現代新幾何(基本)ノ後ヲ承ケテ增課課程用幾何及ビ三角法ノ教科書ニ充テタルタメニ編纂シタモノデアル。

本書ノ編纂ニ當リ著者ハ前著ト同樣改正中學校教授要目ニ準據シ,ソノ趣旨ト現代ノ數學教育ノ傾向トニ鑑ミ特ニ次ノ諸點ニ注意シタ。

1. 平面幾何ノ補充ニ於テハ定理ノ形式ト證明法トヲ總括的ニ述ベ,既習ノ事項ヲ整理復習スルト同時ニ問題解法ノ實力ヲ養フコトニ努メ,更ニ軌跡トソノ應用ニヨル作圖題ノ解法トヲ述ベ初等平面幾何ヲ完結セシメルヤウニシタ。

2. 立體幾何ニ於テハ定理ヲ羅列スルガ如キ弊ニ陷ラヌヤウ平易ナモノニモ成ルベクソノ證明ヲ與ヘ,又求積ニ關スルモノハ嚴密ナ說明ヨリモ寧ロ公式ヲ誘導スル筋道ヲ明カニスルコトヲ期シタ。ソシテ問題ハ簡單ナモノヲ選ビ,記述セル定理ヲ十分了解セシメルコトヲ主トシタ。

3. 三角法ニ於テハ三角形ノ解法ヲ主眼トシ,恒等式ノ證明ノ如キハ極メテ之ヲ少クシタ。又記憶スベキ公式ハ成ルベクソノ數ヲ減ジ,機械的ニ公式ヲ運用スルコトノ弊ヲ避ケルヤウニシタ。

4. 全篇ヲ通ジテ算術代數トノ連絡ヲ密接ニシ,特ニ立體幾何ノ求積,三角法ノ諸問題ニ於テハ數學諸分科ヲ聯關セシメルコトニ努メタ。

5. 卷末ニ補充問題ヲ與ヘテ幾何及ビ三角法ノ全事項ニ亙ル復習ニ便シタ。コレ等ノ問題中ニハ稍〻困難ナル問題及ビ上級學校入學試驗問題ヲモ加ヘテ生徒ノ學力ヲ試練スル資材トシタ。

以上著者ハ本書ヲ以テ現代ノ要求ニ適應サセルコトニ努メタガ更ニ研究シ,版ヲ重ネルニ從ツテ完璧タラシメンコトヲ期スル。之ガタメ實地教授者各位ノ本書ニ對スル忠言ハ著者ノ切ニ希望スル所デアル。

昭和九年一月

著　者　識

目　次

第一篇　平面幾何ノ補充

第二篇　立體幾何

第３章　曲面體　[122—138]

第三篇　三角法

第１章　一般ノ角ノ三角函數　[139—156]

第２章　加法定理·減法定理　[157—169]

第３章　三角形ノ原素間ノ關係　[170—183]

第一篇　平面幾何ノ補充

第 1 章　定理ノ形式・證明法

1. 定理ノ形式

既ニ學ンダヤウニ定理ハ**假設**ト**終結**トノ二ツノ部分カラ成立ツ。ソシテ定理ハ一般ニ次ノヤウナ形式デ表ハサレル。

AガBデアレバ,CハDデアル。

ココニ"AガBデアレバ"ハ假設デ,"CハDデアル"ハ終結デアル。例ヘバ

"三角形ノ二邊ガ相等シケレバ(假設),ソノ三角形ノ二角ハ相等シイ(終結)"

ノヤウデアル。

定理ノ述べ方ニヨツテハ假設ト終結トガ上ノヤウニ明カデナイモノモアル。例ヘバ

"圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル角ハ補角ヲナス"

ノヤウデアル。シカシ之ヲ書キ換ヘテ

"四邊形ガ圓ニ內接スレバ,ソノ四邊形ノ相對スル角ハ補角ヲナス"

トスレバ一般ノ形式ニ從フコトニナル。

注意 定理ニハ"對頂角ハ相等シイ"トイフヤウニ**"甲ハ乙デアル"**トイフ形式デ述ベラレタモノモアル。コレハ

"二ツノ角ガ對頂角デアレバ,ソノ二角ハ相等シイ"

ト言ヒ換ヘルコトモ出來ル。

2. 逆・裏・對偶

例ヘバ一ツノ定理ヲ

"AガBデアレバCハDデアル"...............[1]

トイフ形式デ表ハセバ,ソノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタモノハ

"CガDデアレバAハBデアル"...............[2]

トイフ形式ニナル。コレヲ[1]ノ**逆**トイフコトハ既ニ學ンダ。ソシテ[1]ハ又[2]ノ逆デアル。

[1]ノ假設及ビ終結ヲ打消シタモノヲ夫々假設及ビ終結トスレバ

"AガBデナイナラバCハDデナイ"......[3]

トイフ形式ニナル。コレヲ[1]ノ**裏**トイフ。[1]ハ又[3]ノ裏デアル。

或事柄ガ眞デアッテモソノ逆及ビ裏ハ必ズ眞デアルトハ限ラナイ。

問 1. 次ノ定理ノ逆及ビ裏ヲイヘ。

(1) 三角形ノ二邊ガ相等シケレバソノ三角形ノ二角ハ相等シイ。

(2) 合同ナル二ツノ三角形ノ三ツノ角ハ夫夫相等シイ。

次ニ"AガBデアレバCハDデアル"......[1]ノ終結及ビ假設ヲ打消シタルモノヲ夫々假設及ビ終結トスレバ

"CガDデナイナラバAハBデナイ"......[4]

トイフ形式ニナル。コレヲ[1]ノ**對偶**トイフ。[1]ハ又[4]ノ對偶デアル。

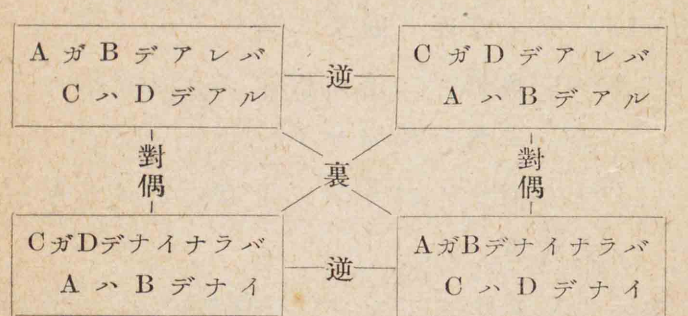
問 2. 次ノ定理ノ對偶ヲ述ベテソレガ眞デアルコトヲ確メヨ。

"二點 A, B カラ等距離ニアル點ハ線分 AB ノ垂直二等分線上ニアル"

或事柄ガ眞デアレバソノ對偶ハ必ズ眞デアル。

ソレ故一ツノ事柄ノ眞デアルコトヲ示スニハ,ソノ對偶ガ眞デアルコトヲ證明シテモヨイ。

或定理トソノ逆・裏・對偶トノ相互ノ關係ヲ示スト次ノ通リデアル。



或定理ノ逆ハ必ズ眞デアルトハ限ラナイガ,對偶ハ常ニ眞デアルカラ,上ニ示ス四ツノ事柄ノ中デ,互ニ對偶デナイ二ツガ眞デアル場合ニハコレ等ノ四ツノ事柄ハ皆眞デアルコトガワカル。

問 **3.** 次ノ定理ノ逆・裏・對偶ヲ述ベヨ。

“二双ノ對邊ノ和ガ相等シクナイ四邊形ハ圓ニ外接スルコトハ出來ナイ”

問 **4.** 上ノ定理ヲソノ對偶ヲ用ヒテ證明セヨ。

注意 定理ニヨツテハソノ對偶ヲ證明スル方ガ容易ナ場合ガアル。

例題 (1)

1. “二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ノ點ハソノ二點カラ等距離ニアル”ノ逆及ビ裏ハ眞デアル。ソノ何レカ一方ヲ證明セヨ。

2. “$a=b$ ナラバ $a^2=b^2$ デアル”ノ逆ハ眞デアルカ。又 a, b ガ共ニ正ノ數ナルトキハドウカ。

3. “三角形ノ內心ハソノ三邊カラ等距離ニアル點デアリ,外心ハソノ三頂點カラ等距離ニアル點デアル。”コレ等ノ逆ハ眞デアルカ。

4. “三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ他ノ一邊ニ平行ナル直線ハ第三邊ヲ二等分スル”ノ裏ヲ述ベヨ。

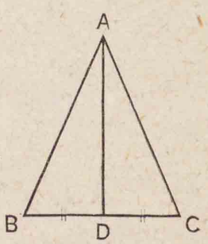
5. “二ツノ圓周ガソノ中心線上ノ一點ヲ共有スレバ,コノ二圓周ハソノ他ノ點ヲ共有シナイ”ノ裏ヲ述ベ,且ツソレガ眞デアルカドウカヲ研究セヨ。

6. “二ツノ直線ガ他ノ一ツノ直線ト交ハツテナス一組ノ錯角ガ相等シケレバ,コノ二ツノ直線ハ平行デアル”ノ對偶ヲ述ベ,且ツソレガ眞デアルコトヲ確メヨ。

3. 同一法・轉換法

"甲ハ乙デアル" トイフ定理ガ證明セラレ且ツ甲ト乙トガ唯一ツシカ存在シナイコトガワカレバ,コノ定理ノ逆ハ直チニ眞デアルト斷定サレル。例ヘバ

"二等邊三角形ノ頂點カラ底邊ニ引イタ垂線ハ底邊ヲ二等分スル"



トイフ定理ガ證明セラレレバ,頂點カラ底邊ニ引イタ垂線ト,頂點ト底邊ノ二等分點卽チ底邊ノ中點トヲ結ブ直線トハ共ニ唯一ツシカナイカラ,コノ定理ノ逆

"二等邊三角形ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結ブ直線ハ底邊ニ垂直デアル"

ハ直チニ眞デアルト斷定サレル。

カヤウナ證明法ヲ**同一法**トイフ。

問 **1.** 同一法ニヨツテ證明シ得ル定理ノ例ヲ擧ゲヨ。

或事柄ニツイテ互ニ關聯スル一群ノ定理ガアツテ,ソレ等ノ定理ノ假設ハソノ事柄ニツイテ起

リ得ベキスベテノ場合ヲ盡シ,且ツソノ終結ハ互ニ相容レナイトキニハ,コノ一群ノ定理ノ逆ハ皆眞デアルト斷定シテヨイ。例ヘバ

$\triangle ABC$ ニ於テ邊 BC, CA, AB ヲ a, b, c デ表ハスト

[1] $b > c$ ナラバ $\angle B > \angle C$

[2] $b = c$ ナラバ $\angle B = \angle C$

[3] $b < c$ ナラバ $\angle B < \angle C$

デアルコトガ證明セラレレバ,二邊 b, c ノ大サノ關係ハコノ三通リノ外ニナク且ツ $\angle B > \angle C$ デアレバ $\angle B = \angle C$ 又ハ $\angle B < \angle C$ デアリ得ナイ。ソシテ $\angle B = \angle C$ 或ハ $\angle B < \angle C$ ノトキモ同樣デアル。故ニソレ等ノ逆ハ皆眞デアルコトガ斷定サレル。卽チ

$\triangle ABC$ ニ於テ

[1] $\angle B > \angle C$ ナラバ $b > c$

[2] $\angle B = \angle C$ ナラバ $b = c$

[3] $\angle B < \angle C$ ナラバ $b < c$

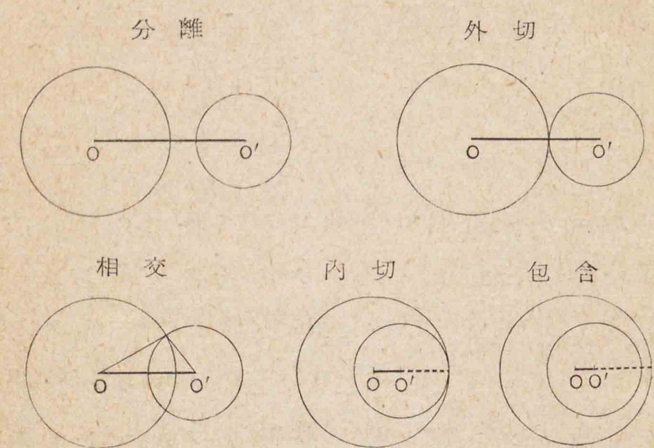
カヤウナ證明法ヲ**轉換法**トイフ。

問 **2.** "$\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A \gtreqqless 90^\circ$ ナラバ

$$AB^2 + AC^2 \lesseqqgtr BC^2 \qquad \text{(符號同順)}$$

デアル" コノ定理ノ逆ヲ證明セヨ。

問3. 二ツノ圓ノ半徑ヲ夫々r, r' $(r>r')$トシ,ソノ中心間ノ距離ヲdトスレバ,二圓ノ位置ガ次ノ圖ニ示スヤウニ



(1) 分離ノトキハ $d > r+r'$

(2) 外切ノトキハ $d = r+r'$

(3) 相交ノトキハ $r+r' > d > r-r'$

(4) 内切ノトキハ $d = r-r'$

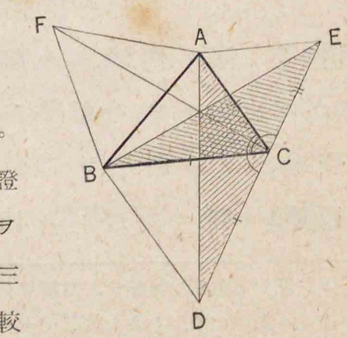
(5) 包含ノトキハ $d < r-r'$

デアル。 轉換法ニヨリ,コノ定理ノ逆ヲ證明セヨ。

4. 定理ノ證明法(一)

定理ヲ證明スルニハ同一法ヲ用ヒ,或ハ歸謬法,轉換法等ニヨリ,又ハ二ツノ圖形ヲ重ネ合セテ終結ノ成立ツコトヲ斷定スル所謂**重置法**等ニヨルコトガアルガ,一般ニハ假設カラ出發シ順次推論ヲ進メテ終結ニ達スルモノデアル。 然シコノ際ニハ屢々證明ノ端緒ヲ見出スコトノ困難ナ場合ニ遭遇スル。 コノヤウナ場合ニハ終結ガ成立ツタメノ條件ヲ求メ,更ニソノ條件ガ成立ツタメノ條件ヲ求メルヤウニシ,遂ニ假設又ハ假設カラ容易ニ斷定サレル事柄ニ達シ(**解析**)之ヲ逆ニ推論シテ證明スル(**綜合**)ノガヨイ。

例1. △ABC ノ外側ニ邊 BC, CA, AB ヲ夫々一邊トスル正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ畫ケバ,線分 AD, BE, CF ハ相等シイ。



方針 先ヅ AD=BE ヲ證明スルニハ AD, BE ヲ對應邊トスル二ツノ三角形 ACD, ECB ヲ比較

シテ之ガ合同デアルコトガワカレバヨイ。トコロガ CA＝CE, CD＝CB デアルカラ ∠ACD＝∠ECB ガ證明セラレレバヨイ。

然ルニ ∠ACD 及ビ ∠ECB ハ共ニ正三角形ノ一角ニ∠ACB ヲ加ヘタモノデアルカラ相等シイコトガワカル。[1)]

依ツテ次ノ證明ヲ得ル。

證明 △ACD, △ECB ニ於テ

CA＝CE,　CD＝CB

∠ACD＝∠ECB (＝正三角形ノ一角＋∠ACB)

∴　△ACD≡△ECB

∴　AD＝BE

同樣ニ　△ABD≡△FBC　カラ

AD＝CF

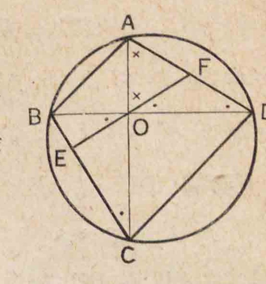
ガ證明セラレル。

∴　AD＝BE＝CF

例 2. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ直交スルトキハ,ソノ交點ヲ通リ且ツ一邊ニ垂直ナル直線ハソノ對邊ヲ二等分スル。(Brahmagupta ノ定理)

題意 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC,

1) コノ部分ハ證明ノ解析デ, 證明發見ノ手段デアルカラ證明ヲ述ベル場合ニハ書クニ及バナイ。シカシ練習ノタメニ記スルノハ望マシイ。



BD ガ O デ直交スルトキ, O ヲ通ツテ邊 BC ニ垂直ニ引イタ直線 EOF ガ對邊 AD ト交ハル點ヲ F トスレバ　AF＝FD

方針 △AOD ハ直角三角形デアルカラ, F ガ斜邊 AD ノ中點デアルコトヲ證明スルニハ

AF＝FO＝FD

ヲイヘバヨイ。コレガタメニハ

∠FOD＝∠FDO　(1)

且　∠FOA＝∠FAO　(2)

ヲ證明スレバヨイ。而シテソノ何レカ一方ヲ證明スレバ,他方ハ餘角ノ關係カラ直チニワカル。

今,圖ニ於テ ∠FOD, ∠FDO ニ夫々相等シイ角ヲ求メテ(1)ノ證明ヲ工夫スル。

證明 ∠FOD＝∠BOE　(對頂角)

又　∠BOE＝∠BCO　(共ニ ∠EOC ノ餘角)

∠BCO＝∠BDA　(同弧ノ上ニ立ツ圓周角)

∴　∠FOD＝∠FDO

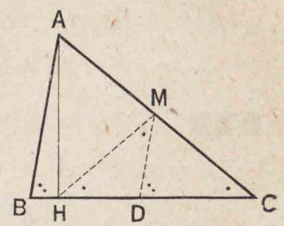
從ツテ　∠FOA＝∠FAO

∴　FO＝FD,　FO＝AF

∴　AF＝FD

例 3. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=2\angle C$ ナルトキハ邊 BC ノ中點 D ト A カラ BC ニ引イタ垂線ノ足 H トノ距離ハ邊 AB ノ半分ニ等シイ。

方針 $DH=\frac{1}{2}AB$ ヲ證明スルノデアル。



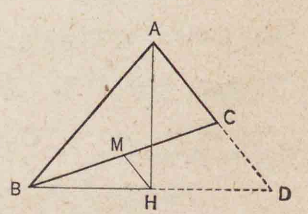
$\frac{1}{2}AB$ ハ BC, AC ノ中點ヲ結ブ線分ニ等シイコトヲ考ヘテ AC ノ中點 M ト D トヲ結ブ補助線 DM ヲ引キ $DH=DM$, 從ッテ H, M ヲ結ビ $\angle DHM=\angle DMH$ ヲ證明スレバヨイ。

證明 各自ニ試ミヨ。

注意 例 3. ニ於ケル DH ト AB トノヤウニ,直接ニ比較スル手ガカリノナイトキハ適當ノ**補助線**ヲ引イテ,ソノ關係ヲツケ,既知ノ定理ノ應用ヲ容易ナラシメルノガヨイ。補助線ニハ二點ヲ通ル直線,或點ヲ通リ或直線ニ平行ナル直線,又ハ數箇ノ點ヲ通ル圓ナドヲ用ヒル。

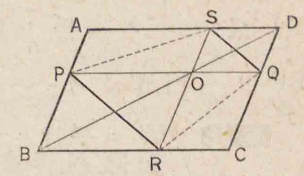
例題 (2)

1. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A$ ノ二等分線ニ B カラ引イタ垂線ノ足ヲ H トシ, BC ノ中點ヲ M トスレバ $MH=\frac{1}{2}(AB\sim AC)$



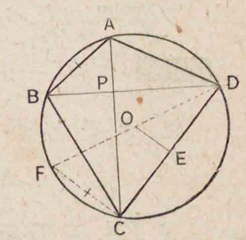
2. 圓外ノ一點 P カラソノ圓ニ二ツノ切線 PA, PB ト,一ツノ割線 PCD トヲ引キ,弦 CD ノ中點ヲ M トスレバ, MP ハ $\angle AMB$ ヲ二等分スル。

3. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 BD 上ノ一點 O ヲ通リ,邊ニ平行ナル二直線ヲ引キ,邊 AB, CD トノ交點ヲ P, Q トシ,邊 BC, DA トノ交點ヲ R, S トスレバ, PR ハ SQ ニ平行デアル。



4. $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC ヲ夫々一邊トシ,ソノ外側ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ作リ, B ト G, C ト E トヲ結ベバ $BG=CE$ 且ツ $BG\perp CE$

5. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ガ互ニ直交スルトキハ,中心 O カラ一邊 CD ニ引イタ垂線 OE ハソノ對邊 AB ノ半分ニ等シイ。



6. 圓ノ直徑 AB ノ延長上ノ一點 C カラコノ圓ニ切線ヲ引キソノ切點ヲ D トシ, AD ト $\angle ACD$ ノ二等分線トノ交點ヲ E トスレバ

$$\angle CED=\frac{1}{2}R\llcorner$$

5. 定理ノ證明法(二)

$\boxed{\text{例}}$ 正方形ABCDノ邊AB上ノ點Eト邊CD上ノ點Fトヲ結ブ直線ニ垂直ナル直線ガBCトGデ, DA又ハソノ延長トHデ交ハルトキハ,線分HGトEFトハ相等シイ。

方針 HGニ平行ニAG'ヲ引キBCトノ交點ヲG'トスレバ, $AG'GH$ハ平行四邊形デアルカラ

$$AG'=HG$$

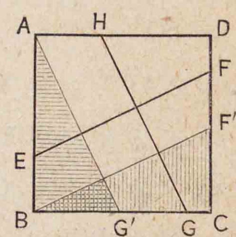
同様ニEFニ平行ニBF'ヲ引ケバ

$$BF'=EF$$

故ニ$HG=EF$ヲ證明スルニハ

$$AG'=BF'$$

ヲ證明スレバヨイ。



證明 HGニ平行ニAG'ヲ引キBCトノ交點ヲG'トスレバ

$$AG'=HG \qquad [\because\ AG'GH\text{ハ平行四邊形}]$$

又EFニ平行ニBF'ヲ引キCDトノ交點ヲF'トスレバ

$$BF'=EF \qquad [\because\ EBF'F\text{ハ平行四邊形}]$$

次ニ直角三角形ABG'トBCF'トニ於テ

$$AB=BC$$

$$\angle BAG'=\angle CBF' \qquad [\because\ AB\perp BC,\ AG'\perp BF']$$

故ニ $\triangle ABG'\equiv\triangle BCF'$

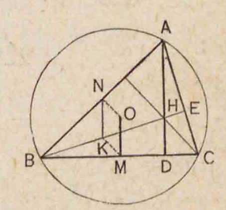
$\therefore$ $AG'=BF'$

$\therefore$ $HG=EF$

上ノ證明ノヤウニ圖形中ノ或直線又ハ線分ヲソノ位置ニ平行デアル他ノ適當ナ位置ニ移ス(補助ノ平行線ヲ引イテ)コトヲ**平行移動法**トイフ。

比較スベキ二ツノ線分又ハ二ツノ角等ノ間ニ連絡ノナイトキニハ屢〻平行移動ニヨツテソノ連絡ヲヨクスルコトガ出來ル。

$\boxed{\text{例　題}}$ (3)

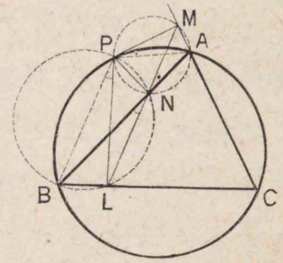


1. △ABCノ外心OカラBCマデノ距離ハ頂點Aカラコノ三角形ノ垂心Hマデノ距離ノ半分ニ等シイ。

2. 相交ハル二定圓O, O′ノ交點ノ一ツAヲ通ツテソノ二圓周ノ間ニ夾マレル線分ノ中デ,ソノ二圓ノ中心ヲ結ブ直線OO′ニ平行デアルモノガ最大デアル。

6. 重要ナ二三ノ定理

[一]　△ABCノ外接圓周上ノ任意ノ點Pカラ三邊BC, CA, ABニ引イタ垂線ノ足L, M, Nハ同一直線上ニアル。(Simson ノ定理)



證明 LトN, MトNトヲ結ベバ, P, A, M, N及ビP, B, L, Nハ夫々PA, PBヲ直徑トスル圓周上ニアルカラ

$$\angle ANM=\angle APM,\quad \angle BNL=\angle BPL \qquad (1)$$

又APBCハ圓ニ内接スル四邊形ナル故

$$\angle PAM=\angle PBL$$

$$\therefore\quad \angle APM=\angle BPL \qquad (2)$$

故ニ(1), (2)ニヨリ

$$\angle ANM=\angle BNL$$

依ッテM, N, Lハ同一直線上ニアル。

(Pガ弧BC又ハ弧CA上ニアル場合モ上ト同様ニ證明スルコトガ出來ル。各自ニ試ミヨ。)

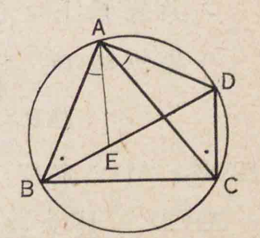
注意 上ノ直線LNMヲ△ABCニ關スル點Pノしむそん線トイフ。

問 1. 一點Pカラ△ABCノ各邊ニ引イタ垂線ノ足ガ同一直線上ニアルトキハ, Pハコノ三角形ノ外接圓周上ニアル。

問 2. △ABCノ外接圓周上ノ一點Pカラ邊BCニ引イタ垂線ガ再ビ圓周ト交ハル點ヲQトスレバ, AQハ△ABCニ關スル點Pノしむそん線ニ平行デアル。

問 3. △ABCノ各頂點カラソノ對邊ニ引イタ垂線ヲ夫々AD, BE, CFトシ, DカラAB, BE, CF, ACニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々G, K, L, MトスレバG, K, L, Mハ同一直線上ニアル。

[二]　圓ニ内接スル四邊形ノ二双ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ兩對角線ノ包ム矩形ニ等シイ。(Ptolemy ノ定理)



題意 ABCDヲ圓ニ内接スル四邊形トスレバ

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

デアル。

證明 $\angle ABD=\angle ACD$デアルカラ, BD上ニ一點Eヲ取リ, $\angle BAE=\angle CAD$ナルヤウニスレバ

$$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$$

$$\therefore \quad AB : AC = BE : CD$$

$$\therefore \quad AB \cdot CD = AC \cdot BE \qquad (1)$$

又 $$\triangle ABC \backsim \triangle AED$$

$$\therefore \quad BC : ED = AC : AD$$

$$\therefore \quad AD \cdot BC = AC \cdot ED \qquad (2)$$

(1),(2) ヲ邊々相加ヘルト

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

$$= AC(BE + ED) = AC \cdot BD$$

問 1. 邊 AB, AC ガ相等シイ二等邊三角形ABCノ外接圓ノ弧 BAC ノ共軛弧上ニ任意ノ一點 P ヲ取レバ

$$(BP + CP) : AP = BC : CA$$

問 2. C ヲ定圓周上ノ定弧 AB ノ中點, P ヲソノ共軛弧上ノ任意ノ一點, Q ヲ角 BAC ノ二等分線ガ弦 BC ト交ハル點トスレバ

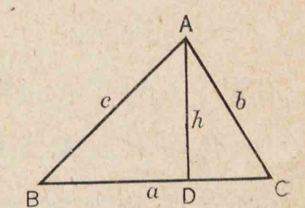
$$(AP + BP)CQ = CP \cdot BQ$$

問 3. ADヲ直徑トスル半圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ邊 AB, BC, CD, DA ノ長サヲ夫々 a, b, c, d トスレバ

$$d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - abc = 0$$

［三］ △ABC ニ於テ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $2s = a + b + c$ トシ,面積ヲ S トスレバ

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



證明 △ABC ノ最大角ヲ A トシ, A カラ對邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ, AD ノ長サヲ h トスレバ, D ハ BC ヲ內分スルカラ

$$BD + DC = BC$$

$$\therefore \quad \sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2} = a$$

$$\therefore \quad \sqrt{c^2 - h^2} = a - \sqrt{b^2 - h^2}$$

兩邊ヲ平方シテ簡約スレバ

$$2a\sqrt{b^2 - h^2} = a^2 + b^2 - c^2$$

更ニ兩邊ヲ平方シテ

$$4a^2(b^2 - h^2) = (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$\therefore \quad 4a^2h^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$= (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$$

$$\therefore \quad a^2h^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)$$

然ルニ　　$S=\frac{1}{2}ah$

$$\therefore\quad S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

注意　コレヲ **Heron ノ公式**トイヒ,三角形ノ三邊ノ長サヲ知ツテソノ面積ヲ算出スルニ用ヒラレル重要ナ公式デアル。

系　△ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ R, 内接圓ノ半徑ヲ r, ∠A, ∠B, ∠C 内ニアル傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r_1, r_2, r_3 トスレバ

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{S}{s}$$

$$r_1=\frac{S}{s-a},\quad r_2=\frac{S}{s-b},\quad r_3=\frac{S}{s-c}$$

又　　$S=\sqrt{rr_1r_2r_3}$

問 **1.**　三邊ノ長サガ $12\,cm$, $17\,cm$, $25\,cm$ ナル三角形ノ最小邊ニ對スル高サヲ求メヨ。

問 **2.**　半徑ガ $7\,m$ ト $5\,m$ トノ兩圓ガアル。ソノ中心間ノ距離ガ $3\,m$ ナラバ共通弦ノ長サハ何程カ。

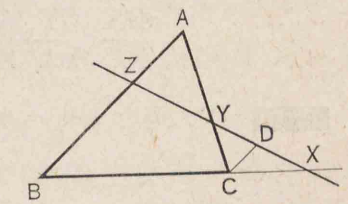
問 **3.**　圓ニ内接スル四邊形ノ各邊ノ長サヲ a, b, c, d トシ, $a+b+c+d=2s$, 面積ヲ S トスレバ

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

［四］　一直線ガ △ABC ノ邊 BC, CA, AB 或ハソノ延長ヲ夫々 X, Y, Z ニ於テ截ルトキハ

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$　(Menelaus ノ定理)

證明　C ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ,截線 XY ト交ハル點ヲ D トスレバ



$$\triangle XBZ\backsim\triangle XCD,\quad \triangle YCD\backsim\triangle YAZ$$

デアルカラ

$$\frac{BX}{XC}=\frac{BZ}{CD},\quad \frac{CY}{YA}=\frac{CD}{AZ}$$

$$\therefore\quad \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{BZ}{CD}\cdot\frac{CD}{AZ}\cdot\frac{AZ}{ZB}$$

$$=1$$

系　點 X, Y, Z ヲ夫々 △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ各ノ延長上ニ取ルカ,又ハ一ツヲ延長上ニ他ノ二ツヲ邊上ニ取ルトキ

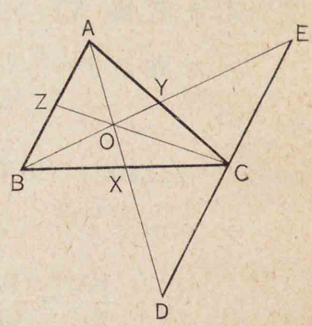
$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

ナラバ三點 X, Y, Z ハ同一直線上ニアル。

[五]　一點Oト△ABCノ各項點 A, B, C トヲ結ブ直線ガ對邊又ハソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 X, Y, Z トスレバ

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1 \qquad \text{(Ceva ノ定理)}$$

證明　C ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ,二直線 AX, BY ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ



$$\frac{BX}{XC}=\frac{AB}{DC}$$

$$\frac{CY}{YA}=\frac{CE}{AB}$$

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{DC}{CE}$$

$$\therefore\quad \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{AB}{DC}\cdot\frac{CE}{AB}\cdot\frac{DC}{CE}=1$$

系　點 X, Y, Z ヲ夫々 △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ各ノ上ニ取ルカ,又ハ一ツヲ邊上ニ他

ノ二ツヲ延長上ニ取ルトキ

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

ナラバ三直線 AX, BY, CZ ハ一點ニ會スル。

問 **1.**　△ABC ノ內接圓ガ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスレバ, AD, BE, CF ハ一點ニ會スル。

問 **2.**　△ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線ガ二邊 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トシ, BE, CD ノ交點ヲ O トスレバ, A ト O トヲ通ル直線ハ底邊 BC ヲ二等分スル。

問 **3.**　圓ニ內接スル六角形 ABCDEF ノ對角線 AD, BE, CF ガ一點デ交ハルトキハ

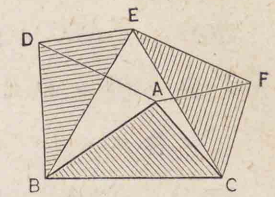
$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

例題 (4)

1.　△ABC ノ二邊 CA, AB 上ニ夫々點 Y, Z ヲ取リ, $AY=\frac{1}{3}AC$, $AZ=\frac{1}{4}AB$ ナラシメ,直線 YZ ガ邊 BC ノ延長ト交ハル點ヲ X トスレバ, CX ハ BC ノ 2 倍デアル。

2. △ABC ノ二邊 BC, CA 上ニ夫々點 X, Y ヲ取リ, BX=CX, AY=2CY ナラシメ, BY, AX ノ交點 O ト C トヲ通ル直線ガ AB ト交ハル點ヲ Z トスレバ AZ=2BZ デアル。

3. △ABC ノ邊 AB, AC ヲ夫夫一邊トスル正三角形ABD, ACF ヲソノ外側ニ,又邊 BC ヲ一邊トスル正三角形 BCE ヲ頂點 A ノ側ニ作レバ四邊形 ADEF ハ平行四邊形デアル。



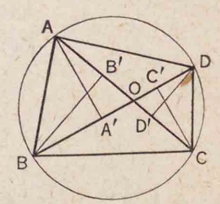
4. 三角形ノ外角ヲ二等分スル直線ガ對邊ノ延長ト交ハル三ツノ點ハ同一直線上ニアル。

5. 四邊形 ABCD ガ圓ニ内接シナイトキハ

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC > AC\cdot BD$$

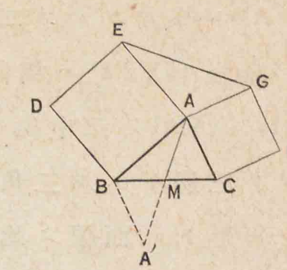
6. 四邊形 ABCD ガ圓ニ内接スルトキハ

$$\frac{AB\cdot AD+CD\cdot CB}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\frac{AC}{BD}$$



7. △ABC ノ頂點 A ヲ通ル任意ノ直線ニ他ノ頂點 B, C カラ夫々垂線 BE, CF ヲ引ケバ, BC ノ中點 D ハ E, F カラ等距離ニアル。

8. △ABC ノ二邊 AB, AC ヲ夫々一邊トスル正方形 ABDE, ACFG ヲソノ外側ニ作リ, E, G ヲ結ベバ, EG ハ中線 AM ノ 2 倍デアル。



9. 圓ノ直徑ヲ AB トシ, A ヲ通ツテソノ兩側ニ引イタ任意ノ弦 AP, AQ ノ延長ト B ニ於ケル切線トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ

$$\angle EPF=\angle EQF$$

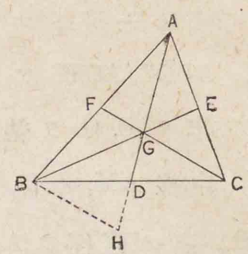
10. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點 O ヲ通リコノ點デ二等分セラレル弦 EF ガ AB, CD ト交ハル點ヲ夫々 M, N トスレバ,線分 MN ハ O ニ於テ二等分セラレル。

11. P ニ於テ外切スル二圓ニ直線 AB ガ夫々 A 及ビ B ニ於テ切スルトキ, AB ヲ直徑トスル圓ハ P ヲ通リ且ツコノ二圓ノ中心線ニ切スル。

12. 圓 O ノ互ニ垂直ナル二ツノ直徑 AOB, COD ノ OA, OD 上ニ夫々點 E, F ヲ取リ OE=OF トスレバ, BF ノ延長ハ DE ト直交スル。

13. 相交ハル二ツノ圓ノ一交點 A ヲ通リ,共通弦

ABト等角ヲナス二直線ノ兩圓周間ニ夾マレル線分 CD, EF ハ相等シイ。



14. △ABC ノ三中線 AD, BE, CF ヲ三邊トスル三角形ト原三角形トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

15. ▱ABCD ノ頂點 A ヲ通ル一直線ガ BD, CD ト夫々 P, Q デ交ハリ且ツ BC ノ延長ト R デ交ハルトキハ

$$PQ : PR = PD^2 : PB^2$$

16. △ABC ノ垂心 H ト,邊 BC ノ中點 D ト, A ヲ通ル外接圓ノ直徑ノ他端 E トノ三點ハ同一直線上ニアル。

17. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ長サガ夫々 a, b, c, d ナルトキ對角線ノ長サヲ求メヨ。

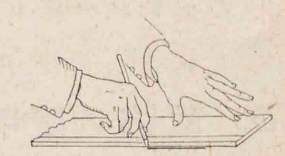
18. △ABC ノ内接圓ノ半徑ヲ r, 三ツノ傍接圓ノ半徑ヲ r_1, r_2, r_3 トスレバ

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

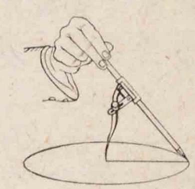
第 2 章　軌　跡

7. 軌跡ノ意味

鉛筆ノ尖端ヲ紙面ニ當テルト點ヲ記シ,ソノママ紙上ニ動カセバ線ヲ畫ク。

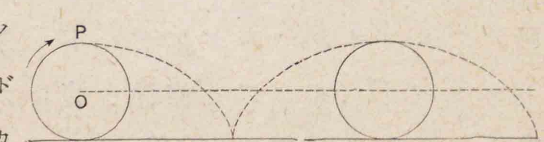


鉛筆ノ尖端ヲ定木ニ沿ウテ動カセバソノ跡ハ直線トナリ,又こんぱすノ兩脚ノ開キヲ一定ニシテ一脚ヲ固定シ他端ヲ動カセバ,ソノ跡ハ圓周トナル。カヤウニ點ガ或條件ニ從ツテ動ケバソノ跡ハ或一定ノ線トナル。



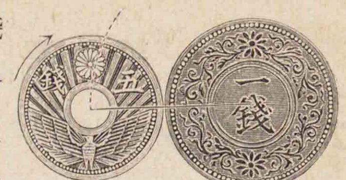
点ガ或條件ニ從ツテ動クトキ出來ル線ヲソノ條件ニ適スル點ノ**軌跡**トイフ。

問 **1.** 眞直ナ軌道上ヲ走ル汽車ノ一ツノ車輪ノ中心ノ軌跡ハドンナ線カ。



又車輪上ノ一點ノ軌跡ハドウカ。

問 **2.** 圖ノヤウニ一錢銅貨ヲ固定シ,ソノ外側ニ沿ウテ一箇ノ五錢にっける貨ヲ廻轉サセルトキハ,コノにっける貨ノ中心ノ軌跡ハドンナ線カ。



8. 軌跡ノ證明

或線ガ或條件ニ適スル點ノ軌跡デアルコトヲ決定スルニハ次ノ二ツノ事項ヲ證明シナケレバナラナイ。

[1] 與ヘラレタ條件ニ適スル點ハ皆ソノ線上ニアルコト。

[2] ソノ線上ノ點ハ皆與ヘラレタ條件ニ適スルコト。

コノ二ツハ互ニ逆デアッテ,ソノ何レヲ先ニ證明シテモヨイガ,一方ダケデハ不十分デアル。何トナレバ [1] ダケデハ條件ニ適シナイ點モソノ線上ニアルカモ知レズ,[2] ダケデハ尚ソノ線以

外ニモ與ヘラレタ條件ニ適スル點ガアルカモ知レナイ疑ガアルカラデアル。

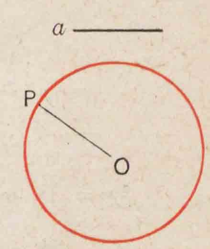
9. 軌跡ノ基礎定理(一)

次ニ軌跡ニ關スル基礎定理ヲ擧ゲル。

定理一 一ツノ定點カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ點ヲ中心トシ,ソノ距離ヲ半徑トスル圓周デアル。

題意 定點Oカラaニ等シイ距離ニアル點ノ軌跡ハ,Oヲ中心トシaヲ半徑トスル圓周デアル。

證明 [1] PヲOカラaニ等シイ距離ニアル任意ノ點トスレバ,PハOヲ中心トシaヲ半徑トスル圓周上ニアル。

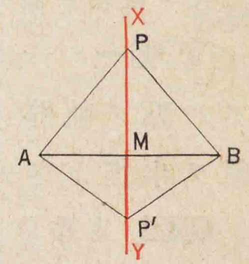


[2] コノ圓周上ノ任意ノ點トOトノ距離ハaニ等シイ。

故ニOカラaニ等シイ距離ニアル點ノ軌跡ハコノ圓周デアル。

定理二　二ツノ定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。

題意　二定點 A, B カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二點ヲ結ブ線分ABノ垂直二等分線XYデアル。



證明　[1] Pヲ二定點A, Bカラ等距離ニアル任意ノ點トスレバ

$$AP=BP$$

依ツテ P ト AB ノ中點 M トヲ結ベバ

$$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$$

$$\therefore \quad \angle PMA=\angle PMB$$

$$\therefore \quad PM \perp AB$$

故ニ P ハ AB ノ垂直二等分線 XY ノ上ニアル。故ニ A, B カラ等距離ニアル點ハ皆 XY 上ニアル。

[2] XY 上ノ任意ノ點ヲ P′ トスレバ

$$\triangle P'AM \equiv \triangle P'BM$$

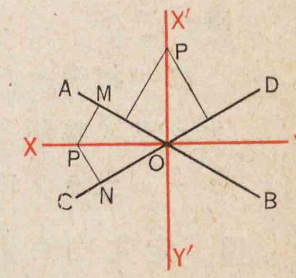
$$\therefore \quad P'A=P'B$$

故ニ XY 上ノ點ハ皆 A, B カラ等距離ニアル。

故ニ [1], [2] ニヨリ,二定點 A, B カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ線分 AB ノ垂直二等分線 XY デアル。

定理三　相交ハル二ツノ定直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二直線ノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線デアル。

題意　二ツノ定直線 AB, CD ガ O デ相交ハルトスレバ,コノ二直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ AB, CD ノナス角ヲ二等分スル直線 XY, X′Y′ デアル。



證明　[1] P ヲ AB, CD カラ等距離ニアル任意ノ點トシ, P カラ AB, CD ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引クト

$$PM=PN$$

依ツテ P ト AB, CD ノ交點 O トヲ結ベバ

$$\triangle POM \equiv \triangle PON$$

$$\therefore \quad \angle POM=\angle PON$$

故ニPハAB, CDノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線XY, X'Y'ノ何レカノ上ニアル。

[2] XY上ノ任意ノ點P'カラAB, CDニ垂線P'M', P'N'ヲ引クト

$$\triangle P'OM' \equiv \triangle P'ON'$$

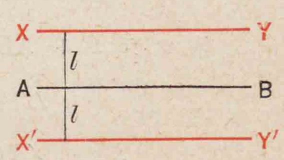
$$\therefore \quad P'M' = P'N'$$

故ニXY上ノ點ハ皆AB, CDカラ等距離ニアル。同樣ニX'Y'上ノ點モ皆AB, CDカラ等距離ニアル。

故ニ相交ハル二直線AB, CDカラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ二直線ノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線XY, X'Y'デアル。

[系] 定角内ニ於テ二邊カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハソノ角ノ二等分線デアル。

[定理] **四** 定直線カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ直線ノ兩側ニ於テ,ソノ直線カラソノ定距離ニアル二ツノ平行線デアル。



(各自ニ證明セヨ)

10. 軌跡ノ基礎定理(二)

既ニ述ベタヤウニ或線ガ或條件ニ適スル點ノ軌跡デアルコトヲ決定スルニハ

[1] 與ヘラレタ條件ニ適スル點ハ皆ソノ線上ニアルコト,

[2] ソノ線上ノ點ハ皆與ヘラレタ條件ニ適スルコト

ノ本逆二定理ヲ證明シナケレバナラヌ。トコロガ互ニ對偶デアル事柄ハソノ一方ガ眞デアレバ他モ眞デアルカラ,[1]ノ代リニ[1]ノ對偶ヲ,[2]ノ代リニ[2]ノ對偶ヲ證明シテモヨイ。ソレデ例ヘバ

[i] ソノ線上ノ點ハ皆與ヘラレタ條件ニ適スルコト……………………………[2]

[ii] ソノ線上ニナイ點ハ皆與ヘラレタ條件ニ適シナイコト……………[1]ノ對偶

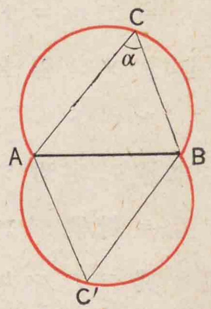
ヲ證明シテモヨイ。コノ證明ハ軌跡ノ決定ニヨク用ヒラレル。

[定理] **五** 定線分ヲ視ル角ガ定角ニ等シイ點ノ軌跡ハ,ソノ線分ヲ弦トシ,ソノ定角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル。

題意 定線分 AB ヲ視ル角ガ定角 α ニ等シイ點ノ軌跡ハ, AB ヲ弦トシ $\angle\alpha$ ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧 ACB, AC′B デアル。

證明 [i] 弧 ACB 又ハ弧 AC′B 上ノ任意ノ點 P ト A, B トヲ結ベバ

$$\angle APB = \angle\alpha$$



[ii] 弧 ACB 及ビ弧 AC′B 上ニナイ任意ノ點 P′ ト A, B トヲ結ベバ

$$\angle AP'B \neq \angle\alpha$$

ヲ證明スレバヨイ。(各自ニ試ミヨ)

系 定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ頂點ノ軌跡ハ,ソノ斜邊ヲ直徑トスル圓周デアル。

例題 (5)

次ノ軌跡ヲ求メヨ。

1. 定線分ヲ底邊トスル二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡。
2. 定直線上ノ定點ニ於テコノ直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡。

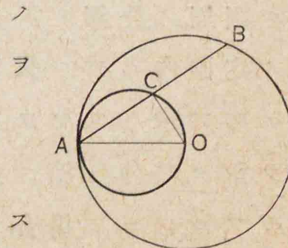
3. 圓周上ノ定點ニ於テコノ圓ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡。
4. 二ツノ定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡。
5. 平行ナル二ツノ定直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡。
6. 二ツノ定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡。
7. 定線分ヲ底邊トシ且ツ一定ノ面積ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡。
8. 定直線ニ平行ナル定圓ノ弦ノ中點ノ軌跡。
9. 定圓ニ於テ一定ノ長サノ弦ノ中點ノ軌跡。

11. 軌跡證明ノ例 (一)

例 定圓 O ノ周上ノ定點 A ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ハ,ソノ定點ト圓ノ中心トヲ結ブ線分 AO ヲ直徑トスル圓周デアル。

證明 [1] A ヲ通ル任意ノ弦 AB ヲ引キ,ソノ中點ヲ C トシ C, O ヲ結ベバ

$$CO \perp AB$$



故ニ C ハ AO ヲ直徑トスル圓周上ノ點デアル。

故ニAヲ通ル弦ノ中點ハ皆AOヲ直徑トスル圓周上ニアル。

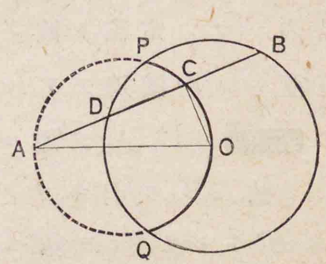
[2] AOヲ直徑トスル圓周上ノ任意ノ點C′ヲ通ル圓Oノ弦AC′Bヲ引キC′, Oヲ結ベバ

$$\angle \mathrm{AC'O} = \mathrm{R}\llcorner$$

故ニCハ弦ABノ中點デアル。 故ニAOヲ直徑トスル圓周上ノ點ハ皆Aヲ通ル弦ノ中點デアル。

故ニAヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ハAOヲ直徑トスル圓周デアル。

問 上ノ例ニ於テ, Aガ定圓内ニアル場合ノ軌跡ハドウカ。 又Aガ定圓外ニアル場合ノ軌跡ハドウカ。



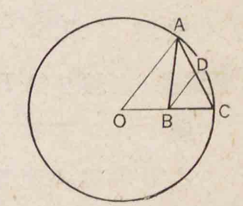
上ノ問ノ後ノ場合ニハ圖ノヤウニAOヲ直徑トスル圓周ノ全部デハナク, ソノ定圓内ニアル弧POQダケデアル。 カヤウニ與ヘラレタ條件ニ適スル點ノ軌跡ニ限界ノアルコトガアル。 コノ場合ニハソノ限界ヲ吟味セネバナラヌ。

例題 (6)

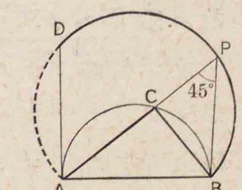
1. 定點ト定直線上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ハ,ソノ定點カラソノ定直線ニ引イタ垂線ノ垂直二等分線デアル。

2. 定點カラ他ノ定點ヲ中心トスル任意ノ圓ニ引イタ切線ノ切點ノ軌跡ハ,ソノ二ツノ定點ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

3. △ABCノ底邊BCノ位置ト大サガ一定デ,且ツソノ底邊ノ一端カラ引イタ中線BDノ長サガ一定ナルトキ,コノ三角形ノ頂點Aノ軌跡ハ點Bニ關スルCノ對稱點ヲ中心トスル一ツノ圓周デアル。



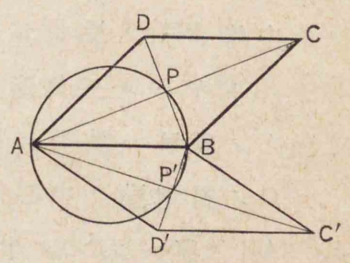
4. ABヲ與ヘラレタ半圓ノ直徑,Cヲソノ弧上ノ動點トシ, ACノ延長上ニ點Pヲ取リ, CP=CBナルヤウニスルトキ點Pノ軌跡ハ,ABヲ弦トシ,45°ノ角ヲ含ム弧デアル。(限界ノアルコトニ注意セヨ)



12. 軌跡證明ノ例(二)

軌跡ヲ求メル問題デハソレガ凡ソドンナ線ニナルカヲ推定シテカラ證明ニトリカカラナケレバナラナイ。軌跡ノ推定ガ困難ナ場合ニハ與ヘラレタ條件ニ適スル數箇ノ點ヲ精密ニ作圖スレバ軌跡ガ概ネドンナ線ニナルカハワカル。平面幾何學ニ於テ取扱フ軌跡ハ通例一ツ或ハ幾ツカノ直線又ハ圓周,或ハソレ等ノ部分ニナル。

例 **1.** 定線分ヲ一邊トスル菱形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。



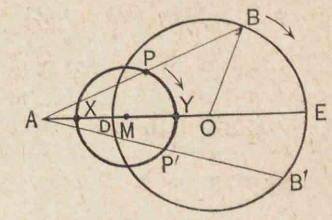
方針 定線分ABヲ一邊トスル菱形ABCDノ對角線ノ交點ヲPトスレバ對角線AC, BDハ直交スルカラ

∠APB=R∟

故ニ點PハABヲ直徑トスル圓周上ニアル。

之デ軌跡トナルベキ圖形ガワカリ,同時ニソノ圖形ニツイテ"與ヘラレタ條件ニ適スル點ハ皆ソノ線上ニアル"コトガ證明セラレタ。故ニコノ逆"ソノ線上ノ點ハ皆與ヘラレタ條件ニ適スル"コトヲ證明スレバヨイ。(各自ニ試ミヨ)

例 **2.** 定圓O外ノ定點Aトコノ圓ノ周上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。



方針 Aカラ圓Oノ周上ノ任意ノ點Bニ至ル線分ABヲ引キ,ソノ中點ヲPトスレバ,Pハ與ヘラレタ條件ニ適スル一ツノ點(**一般點**)デアル。求メル軌跡ハ點Bガ圓Oノ周上ヲ動クトキ一般點Pガ畫ク圖形デアル。トコロデAヲ通ル中心線ガ圓Oト交ハル點ヲD,EトスレバD,EハAカラ圓周Oニ至ル距離ガ最小及ビ最大ノ點デアル。故ニAD, AEノ中點ヲ夫々X, YトスレバX, Yハ與ヘラレタ條件ニ適スル**特殊點**デアル。

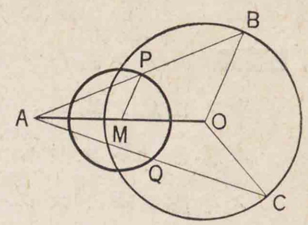
ソレデ求メル軌跡ハP,X,Yヲ通ル圓周デアルコトガ推定サレ,且ツコノ軌跡ハAOヲ軸トシテ對稱デアルコトカラXYガソノ圓ノ直徑デアルコトガワカル。依ツテXYノ中點Mヲ中心トシ$\frac{1}{2}$XY 卽チ定圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周ガ求メル軌跡デアルコトガ推定サレル。

依ツテ次ノ證明ヲ得ル。

證明 [1] 定圓Oノ周上ノ任意ノ點ヲBトシ,A,Bヲ結ビソノ中點ヲPトスレバ,Pハ與ヘ

ラレタ條件ニ適スル點デアル。

今 AO ノ中點ヲ M トシ, MP, OB ヲ引ケバ P, M ハ △ABO ノ二邊 AB, AO ノ中點デアルカラ



$$MP=\frac{1}{2}OB$$

故ニ點 P ハ M ヲ中心トシ,定圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周上ニアル。

[2] 圓 M ノ周上ニ任意ノ點 Q ヲ取リ, A, Q ヲ結ビ,コレヲ延長シテ AQ=QC ナルヤウナ點 C ヲ取リ, O, C ヲ結ベバ △ACO ニ於テ

$$OC=2MQ$$

然ルニ $\quad MQ=MP$

$\therefore \quad OC=OB$

故ニ C ハ定圓 O ノ周上ニアル。依ッテ圓 M ノ周上ノ點ハ與ヘラレタ條件ニ適スル。

故ニ求メル點ノ軌跡ハ AO ノ中點ヲ中心トシ,定圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周デアル。

例題 (7)

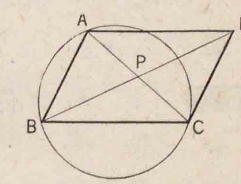
1. 定點ト定直線上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ一定ノ比ニ分ケル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 點 O ニ於テ直交スル二直線 AB, CD 上ニ夫々一端ヲ有スル定長ノ線分 LM ノ中點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

3. 正三角形 ABC 内ニアッテ二邊 AB, AC ニ至ル距離ノ和ガ第三邊 BC ニ至ル距離ノ 2 倍ニ等シイヤウナ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 定線分 AB 上ノ任意ノ點ヲ C トシ,線分 AC, CB ヲ夫々一邊トスル正三角形 ACD, CBE ヲ AB ノ同ジ側ニ作ルトキ DE ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

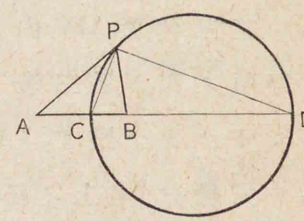
5. 平行四邊形 ABCD ニ於テ AB ハ與ヘラレタ圓ノ定弦,C ハコノ圓周上ノ任意ノ點トスル。頂點 D ノ軌跡ヲ求メヨ。



6. 二ツノ定點 A, B カラノ距離ノ平方ノ和(又ハ差)ガ一定量 m^2 ニ等シイヤウナ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

13. あぽろにうすノ定理

定理 二ツノ定點カラノ距離ノ比ガ一定ノ値(1ニ等シクナイ)ヲ有スルヤウナ點ノ軌跡ハ,ソノ二點ヲ結ブ線分ヲコノ比ニ内分及ビ外分スル點ヲ直徑ノ兩端トスル圓周デアル。(Apollonius ノ定理)



題意 二ツノ定點ヲA, Bトシ,線分ABヲ1ニ等シクナイ一定ノ比 $m:n$ ニ内分及ビ外分スル點ヲ夫々C, Dトスレバ

$$AP:BP=m:n$$

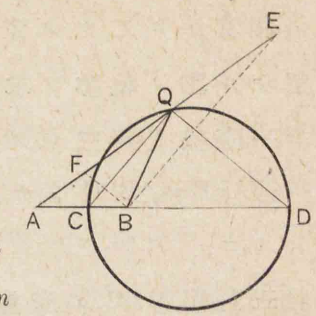
ナル點Pノ軌跡ハ線分CDヲ直徑トスル圓周デアル。

證明 [1] Pヲ條件ニ適スル任意ノ點トスレバ

$$AP:BP=AC:CB=AD:BD=m:n$$

故ニCP, DPハ△ABPノ角P及ビソノ外角ノ二等分線トナッテ∠CPDハ直角デアル。故ニPハCDヲ直徑トスル圓周上ニアル。

[2] Qヲコノ圓周上ノ任意ノ點トスル。



Bヲ通ッテCQ, DQニ平行ナル直線BE, BFヲ引キ,コレガAQト交ハル點ヲ夫々E, Fトスレバ

$$AQ:QE=AC:CB=m:n$$

$$AQ:FQ=AD:BD=m:n$$

$$\therefore\quad QE=FQ$$

然ルニBE, BFハ夫々直角ノ二邊CQ, DQニ平行デアルカラ

$$\angle EBF=R∟$$

故ニQハ直角三角形BEFノ斜邊ノ中點デアル。

$$\therefore\quad BQ=QE$$

$$\therefore\quad AQ:BQ=AQ:QE=m:n$$

卽チQハ與ヘラレタ條件ニ適スル。

故ニ二定點A, Bカラノ距離ノ比ガ $m:n$ ニ等シイ點ノ軌跡ハCDヲ直徑トスル圓周デアル。

注意 コノ軌跡ヲ**あぽろにうすノ圓**トイフ。

例題 (8)

1. 相交ハル二ツノ定直線カラノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 一直線上ニ三ツノ定點 A, B, C ガアルトキ $\angle APB=\angle BPC$ トナルヤウナ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

3. 三角形 ABC ノ底邊 BC 及ビ他ノ二邊ノ比ガ一定ナルトキ頂點 A ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 三角形 ABC ノ底邊 BC 及ビ頂角 A ノ外角ノ二等分線ガ底邊ノ延長ト交ハル點 D ガ一定ナルトキ頂點 A ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 點 P カラ定三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB 又ハソノ延長ニ引イタ垂線ノ足ガ同一直線上ニアルヤウナ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

6. 定點 A ト定直線 XY 上ノ任意ノ點 M トヲ結ブ線分 AM 上ニ正三角形 AMP ヲ作ルトキ,頂點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

第3章 作圖題

14. 作圖ノ公準

初等幾何學デ作圖題ヲ解クニ用ヒル器具ハ定木トこんぱすトダケニ限リ,コレニ依ツテ次ノ二ツヲナシ得ルコトハ既ニ學ンダ所デアル。

[1] 與ヘラレタ二點ヲ通ル直線ヲ引キ,又與ヘラレタ線分ヲ延長スルコト。

[2] 與ヘラレタ點ヲ中心トシテ與ヘラレタ半徑ヲモツ圓周ヲ畫クコト。

コノ二ツヲ**作圖ノ公準**トイヒ,コレ以外ノ圖ハスベテコノ二ツヲ反復應用シテ畫クモノトスル。

注意 1. 任意ノ角ヲ三等分スルコトヤ,圓周ト等長ノ線分ヲ引クコトナド所謂幾何學的作圖不能問題モ,物指ヤ分度器ナドノ使用ヲ許セバ或程度マデ正確ニ作圖スルコトガ出來ル。

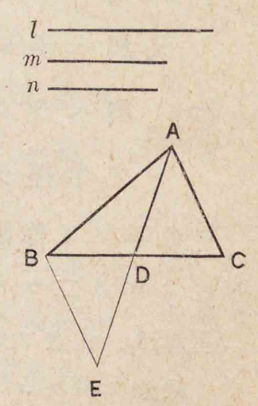
注意 2. 作圖題ヲ解クニ使用スル器具ニ制限ヲツケル理由ハ,幾何學ニ於ケル作圖題ハ製圖スルコトヨリモ,ソノ作圖法ヲ案出スルタメニ思考ヲ練習スルコトヲ主眼トスルカラデアル。

15. 作圖題ノ解法

作圖題ヲ解クニハ既ニ學ンダヤウニ一般ニハ題意ヲ述べ,次ニ解析,作圖,證明,吟味ノ順序ニヨル。但シ簡單ナ場合ニハ作圖以外ノ或モノハ之ヲ省略スルコトモアル。

例 1. 二邊ト第三邊ヘノ中線トヲ知ッテ三角形ヲ作レ。

題意 二邊ノ長サ l, m 及ビ第三邊ヘノ中線ノ長サ n ヲ知ッテ三角形ヲ作レ。



解析 $\triangle ABC$ ヲ求メル三角形トシ, $AB=l$, $AC=m$, 中線 $AD=n$ トスル。

今 AD ヲ延長シ $DE=AD$ トシ, B ト E トヲ結ブト

$$\triangle EDB \equiv \triangle ADC \qquad \therefore\ BE=AC$$

故ニ $\triangle ABE$ ハソノ三邊ノ長サガワカルカラ作圖スルコトガ出來ル。ソシテ C ハ B カラ AE ヘノ中線 BD ノ延長上 $BD=DC$ ノ如キ點デアルカラ求メルコトガ出來ル。

作圖 $l, m, 2n$ ヲ三邊トスル $\triangle ABE$ ヲ作リ, B カラ AE ヘノ中線 BD ヲ引キ,コレヲ延長シテ $BD=DC$ ノ如キ點 C ヲ求メ, A ト C トヲ結ベバ, $\triangle ABC$ ハ求メル三角形デアル。

證明 $AB=l$, D ハ AE ノ中點ナル故 $AD=n$,

又 $DC=BD$, $AD=DE$, $\angle ADC=\angle EDB$

$$\therefore\ \triangle ADC \equiv \triangle EDB$$

$$\therefore\ AC=BE=m$$

故ニ $\triangle ABC$ ハ求メル三角形デアル。

吟味 $l+m>2n>l\sim m$ ノトキニハ一ツノ解ガアル(二邊トコレガ夾ム角ノ頂點カラ引イタ中線トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル)。又 $l+m\not>2n$ 又ハ $2n\not>l\sim m$ ノトキニハ解ハナイ。

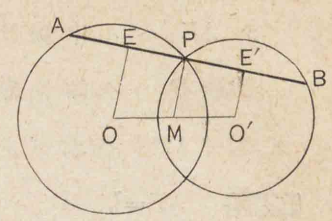
問 1. 底邊 BC, 高サ AH 及ビ底角 C ヲ知ッテ三角形 ABC ヲ作レ。

例 2. 相交ハル二ツノ定圓 O, O' ノ交點ノ一ツデアル P ヲ通ル直線ヲ引キ,兩圓周ト A 及ビ B デ交ハラシメ, $AP=BP$ ナラシメヨ。

解析 求メル直線ヲ引キ得タト假定シ, AP, PB

ノ中點ヲ夫々 E, E' トスレバ $EP=PE'$

ソコデ O ト E, O' ト E' トヲ結ベバ



$OE \perp AB,\ O'E' \perp AB$

$\therefore\ OE \parallel O'E'$

又 EO ニ平行ニ PM ヲ引キ OO' トノ交點ヲ M トスレバ $PM \perp AB$ 且ツ $OM=MO'$

依ッテ次ノ作圖ヲ得ル。

作圖 OO' ノ中點ヲ M トシ, P ト M トヲ結ビ, P ヲ通ッテ PM ニ垂直ナル直線ヲ引キ, 圓 O, O' ト交ハル點ヲ夫々 A, B トスレバ, APB ハ求メル直線デアル。

證明 (解析カラ明カデアルカラ略ス)

吟味 常ニ一ツノ解ヲ得ル。

問2. 上ノ例ニ於テ $AP:PB=m:n$ ナラシメヨ。

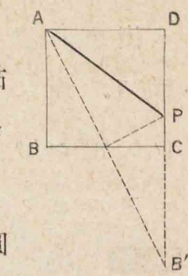
例題 (9)

1. 三中線ヲ知ッテ三角形ヲ作レ。

2. 一邊ヘノ中線ト高サ及ビ他ノ邊ヘノ中線ヲ知ッテ三角形ヲ作レ。

3. 周及ビ二角ヲ知ッテ三角形ヲ作レ。

4. 高サ AH, 二中線 BE, CF ヲ知ッテ三角形 ABC ヲ作レ。



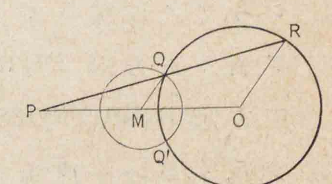
5. 正方形 $ABCD$ ノ邊 CD 上ニ點 P ヲ求メ, $PA=BC+PC$ ナラシメヨ。

6. O ヲ中心トスル二ツノ同心圓ニ一ツノ割線ヲ引キ, 圓周トノ交點ヲ順次ニ A, B, C, D トシ $AB=BC=CD$ ナラシメヨ。

7. 與ヘラレタ三角形ノ底邊ニ垂直ナル直線ヲ引キ, コノ三角形ノ面積ヲ二等分セヨ。

8. 與ヘラレタ矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

9. 與ヘラレタ圓 O 外ノ點 P カラ割線 PQR ヲ引キ, 圓周ト Q, R デ交ハラシメ, $PQ=QR$ ナラシメヨ。



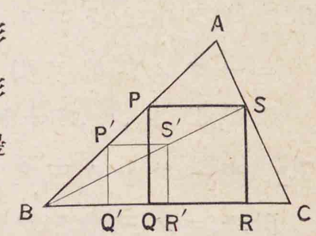
(Q カラ RO ニ平行線ヲ引キ PO トノ交點ヲ M トスレバ $PM=MO,\ MQ=\frac{1}{2}OR$ デアルコトニ注意セヨ)

10. 與ヘラレタ圓 O 外ノ點 P カラ割線 PAB ヲ引キ $PA+PB=l$ ナラシメヨ。

16. 特殊ノ解析法

作圖題ヲ解クニハ特殊ノ解析法ヲ用ヒレバ容易ニ出來ル場合ガアル。次ニ一二ノ例ヲ示ス。

例 1. 與ヘラレタ三角形ニ内接スル正方形ヲ作レ。但シソノ一邊ハ與ヘラレタ三角形ノ一邊上ニアルモノトスル。



題意 與ヘラレタ三角形 ABC ニ内接スル正方形 PQRS ヲ作レ。但シ邊 QR ハ BC 上ニアルモノトスル。

解析 求メル正方形 PQRS ガ畫カレタモノトシ,今ソノ頂點 S ガ AC 上ニアルコトノ條件ヲ省キ正方形 P′Q′R′S′ ヲ作レバ, B ハ二ツノ正方形 PQRS, P′Q′R′S′ ノ相似ノ中心デアルカラ S, S′, B ハ一直線上ニアル。

依ツテ次ノヤウニ作圖スルコトガ出來ル。

作圖 △ABC ノ邊 AB 上ニ任意ノ一點 P′ ヲ取リ, P′ カラ邊 BC ニ垂線 P′Q′ ヲ引キ, P′Q′ ヲ一邊トスル正方形 P′Q′R′S′ ヲ畫ク。

次ニ BS′ 或ハソノ延長ト AC トノ交點 S ヲ求メ, S′P′ ニ平行ニ SP ヲ引キ AB トノ交點ヲ P トシ,又 PQ ∥ P′Q′, SR ∥ S′R′ トシ BC トノ交點ヲ夫々 Q, R トスレバ,四邊形 PQRS ハ求メル正方形デアル。

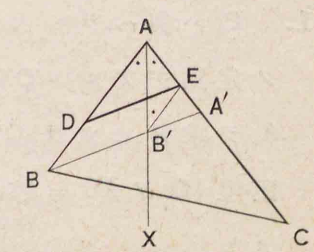
證明 (略ス)

注意 1. コノヤウニ求メル圖形ト相似ナル圖形ヲ畫キ,之ヲ利用シテ作圖スル方法ヲ**相似法**トイフ。

問 二ツノ角 A, B ト一ツノ中線 m トヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。

例 2. 與ヘラレタ三角形 ABC ニ於テ角 A ガ鋭角デアルトキ,二邊 AB, AC ト夫々 D, E デ交ハル直線ヲ引キ, AD=DE, AE=DB ナラシメヨ。

解析 求メル直線 DE ヲ引キ得タトスル。



今 DB ヲ EB′ マデ平行ニ移動スレバ

AE=DB=EB′

且ツ　AB ∥ EB′

故ニ A ト B′ トヲ結ベバ AB′ ハ ∠A ノ二等分線デアル。

次ニ BB' ノ延長ト AC トノ交點ヲA'トスレバ, $AD=DE$ デアルカラ $AB=BA'$ デアル。

依ッテ次ノ作圖ヲ得ル。

作圖 $\angle A$ ノ二等分線 AX ヲ引キ,次ニ AC 上ニ點A'ヲ取リ, $BA=BA'$ ナラシメル。

BA' ト AX トノ交點ヲ B'トシ,B'カラ AB ニ平行ニ $B'E$ ヲ引キ, AC トノ交點ヲ E トスル。

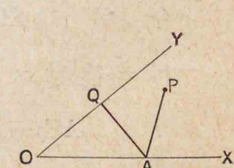
E カラ $A'B$ ニ平行ニ ED ヲ引キ AB トノ交點ヲ D トスレバ, DE ハ求メル直線デアル。

證明 (略ス)

注意 2. コノ例ノヤウニ**平行移動法**モ屢〻作圖ニ利用サレル。

例題 (10)

1. P ハ與ヘラレタ角XOY内ノ定點デアル。OX 上ニ點 A ヲ求メ,Aカラ OY ニ至ル距離AQ ヲ AP ニ等シカラシメヨ。



2. 與ヘラレタ角 XOY 内ノ定點A ヲ通リ且ツ

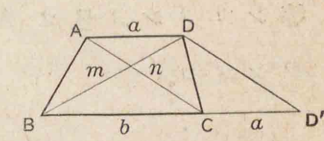
ソノ二邊ニ切スル圓ヲ畫ケ。

3. 二ツノ定直線ト一ツノ定圓トニ切スル圓ヲ畫ケ。

4. 三角形ノ頂角,高サ及ビ頂點カラ底邊ニ引イタ垂線ノ足ガ底邊ヲ内分スル二ツノ部分ノ比ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

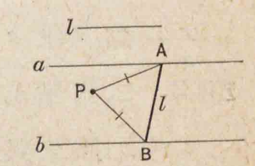
5. 四邊ヲ知ッテ梯形ヲ作レ。

6. 二邊(a, b)及ビ兩對角線(m, n)ヲ知ッテ梯形ヲ作レ。



7. 三ツノ平行線上ニ夫々一ツノ頂點ヲ置ク正三角形ヲ畫ケ。

8. 定平行線 a, b 上ニ夫々一端ヲ有スル定長(l)ナル線分AB ヲ引キ,兩平行線間ニアル定點ヲ P トスルトキ $PA=PB$ ナラシメヨ。



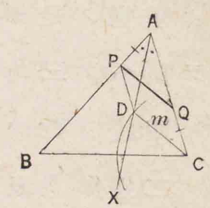
9. 定直線 XY ニ平行ナル直線ヲ引キ,二ツノ定圓 O, O' ガ截リ取ル弦ヲ AB, CD トシ

(1) $AB=CD$　　(2) $AB+CD=l$

ナラシメヨ。

10. 與ヘラレタ點Pヲ通リ,與ヘラレタ角XAYノ二邊ヲ截ル直線BCPヲ引キ,角ノ二邊トナス三角形ABCノ周ヲ與ヘラレタ長サニ等シカラシメヨ。

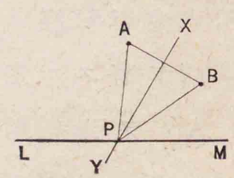
11. 定三角形ABCノ二邊AB, ACト夫々P, Qニ於テ交ハル直線ヲ引キ,PQヲ定長ノ線分mニ等シカラシメ且ツ AP=CQ ナラシメヨ。



17. 軌跡交截法

問 **1.** 二定點A, Bカラ夫々與ヘラレタ距離ニアル點ヲ求メヨ。

問 **2.** 二定點A, Bカラ等距離ニアル點ヲ與ヘラレタ直線LM上ニ求メヨ。



作圖題ヲ解クトキ,或點ノ位置ヲ定メルニ當リ,軌跡ノ考ヘヲ應用スレバ便利ナコトガ多イ。卽チ甲乙二ツノ條件ガアツテ,ソノ各ニ適スル點ノ軌跡ガ夫々X, Yナラバ,コノ兩軌跡ノ交點ハ甲乙

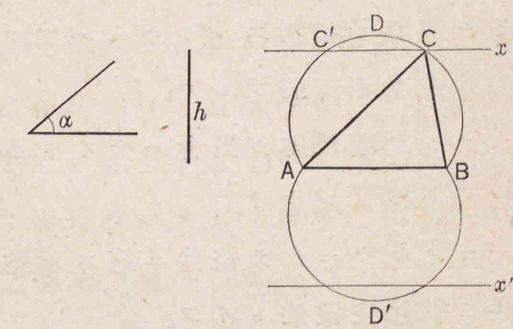
兩條件ノ何レニモ適スルコトガ明カデアル。ソシテコノ交點ノ外ニハソノ兩條件ニ適スル點ハナイ。

若シコノ兩軌跡ニ共通點ガナイトキハ,甲乙兩條件ノ双方ニ適スル點ハ存在シナイ。

例ヘバ

"底邊ノ位置及ビ大サ,高サ,頂角ノ大サヲ知ツテ三角形ヲ作レ"

ヲ解ク場合ニ, ABヲ與ヘラレタ底邊, $\angle\alpha$ヲ與ヘラレタ頂角, hヲ與ヘラレタ高サトスル。



サテ △ABC ヲ作圖スルニハ頂點Cヲ決定スレバヨイ。

ソシテ頂點Cハ次ノ二ツノ條件ヲ滿足セネバナラナイ。

[i] $\angle ACB=\angle\alpha$ デアルコト。

[ii] AB カラ h ノ距離ニアルコト。

今條件[i]ダケヲ考ヘレバ,之ニ適スル頂點Cノ軌跡トシテ AB ヲ弦トシテ $\angle\alpha$ ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧 ADB, AD'B ヲ得ル。

次ニ條件[ii]ダケヲ考ヘレバ,之ニ適スル頂點Cノ軌跡トシテ AB カラ h ノ距離ニアル二ツノ平行線 x, x' ヲ得ル。

依ッテCハコノ兩軌跡ノ交點トシテ求メラレル。コノ作圖ニ於テ[i], [ii]ノ兩軌跡ハ常ニ畫クコトガ出來ル。故ニ[ii]ノ軌跡ナル直線ガ[i]ノ軌跡ナル圓弧ニ交ハルトキハ四ツノ合同ナル三角形ガ得ラレ,相切スルトキニハ二ツノ合同ナル二等邊三角形ガ得ラレル。

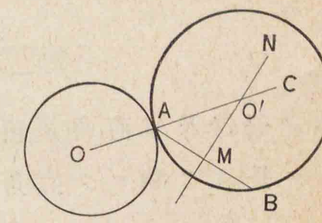
ソシテ兩軌跡ガ出會ハナイトキニハ求メル三角形ハ得ラレナイ。

コノヤウニシテ條件ニ適スル點ヲ求メル作圖法ヲ**軌跡交截法**トイフ。

コノ方法ニヨレバ二ツノ軌跡ガ證明セラレ,ソノ畫キ方ガ述ベラレレバ全體ノ解析,作圖,證明ガ既ニ行ハレタコトニナルカラ,殘リハタダ吟味ヲナセバヨイ。

例 與ヘラレタ圓周上ノ定點ニ於テコノ圓ニ切シ,且ツコノ圓外ノ定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。

題意 與ヘラレタ圓Oノ周上ノ定點Aニ於テコノ圓ニ切シ,且ツ圓O外ノ定點Bヲ通ル圓ヲ畫ケ。



解 コノ作圖ニ於テハ次ノ二ツノ條件ニ適スル圓ノ中心ヲ求メレバヨイ。

[i] 圓Oノ周上ノ定點Aニ於テ圓Oニ切スルコト。

[ii] 二定點A, Bヲ通ルコト。

ソコデO, Aヲ通ル直線OACヲ引ケ。コノ直線ハ[i]ノO圓周上ノ定點Aニ於テ之ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡デアル。

次ニ線分ABノ垂直二等分線MNヲ引ケ。コノ直線ハ[ii]ノ二定點A, Bヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡デアル。

故ニ求メル圓ノ中心ハコノ二直線ノ交點O'デ,ソノ他ニハナイ。依ッテO'ヲ中心トシテ

O′A ヲ半徑トスル圓ガ求メルモノデアル。

吟味 OA ト MN トガ平行即チ OA⊥AB デナケレバ必ズ一點 O′ デ交ハルカラ解ハ唯一ツデアル。又 OA⊥AB デアレバ求メル圓ハ畫カレナイ。

例題 (11)

1. 斜邊及ビ直角ノ頂點カラ斜邊ニ引イタ垂線ノ長サヲ知ツテ直角三角形ヲ作レ。
2. 頂角,底邊及ビ二邊ノ和(又ハ差)ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。
3. 定直線上ニ中心ヲ有シ,且ツ二ツノ定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。
4. 定點ヲ通リ,且ツ定直線上ノ與ヘラレタ點ニ於テソノ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。
5. △ABC 內ニ點 P ヲ求メ ∠APB, ∠BPC, ∠CPA ヲ等シカラシメヨ。
6. 定直線ニ切シ且ツ他ノ定直線上ニ中心ヲ有スル與ヘラレタ半徑ノ圓ヲ畫ケ。
7. 互ニ外方ニアル二定圓ノ各ニ切シ且ツ與ヘ

ラレタ長サノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。(種々ノ場合ニツイテ研究セヨ)

8. 定直線上ニ一點ヲ求メ,コノ點カラ定圓ニ引イタ切線ヲ與ヘラレタ線分ニ等シクセヨ。
9. 與ヘラレタ弓形 ACB ノ弧上ニ點 C ヲ求メ,二ツノ弦 AC, BC ノ比ヲ與ヘラレタ比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ。
10. 底邊他ノ二邊ノ比及ビ高サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。
11. 三定點 A, B, C カラノ距離ノ比ガ $a:b:c$ ニ等シイヤウナ點ヲ求メヨ。
12. 與ヘラレタ二點ヲ通リ且ツ與ヘラレタ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

18. 代數的解析法

一元二次方程式

$$x^2+px+q=0$$

ニ於テ x, p ヲ夫々線分ノ長サヲ表ハス數値トスレバ x^2, px ハ何レモ面積ノ大サヲ表ハス數値トナルカラ,q モ亦面積ヲ表ハス數値デナケレバナ

ラナイ。

依ツテ q ノ絶對値ノ代リニ b^2 ヲ用ヒ, p ノ絶對値ノ代リニ a ヲ用ヒ p, q ノ正負ヲ考ヘルト,上ノ二次方程式ノアラユル場合ハ

$$x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$$

ノ四通リデ表ハサレル。

今 a, b ナル數値ヲ有スル線分ガ與ヘラレタトキ,上ノ方程式ヲ滿足スル正根ヲ數値トスル線分ヲ作圖ニヨツテ求メヨウ。

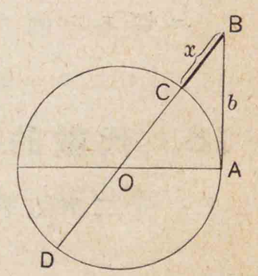
(1) $\underline{x^2+ax+b^2=0}$

コノ方程式ハ正根ヲ有シナイ。

(2) $\underline{x^2+ax-b^2=0}$

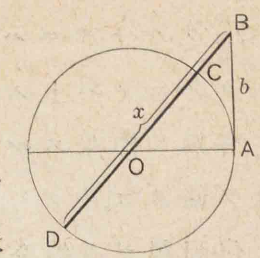
コノ方程式ヲ書キ換ヘルト

$$x(x+a)=b^2$$



トナルカラ, a ニ等シイ直徑ヲ有スル圓周上ノ點 A ニ於テ切線 AB ヲ引キ, AB$=b$ トシ B ヲ通ル直徑ヲ引キ,圓周トノ交點ヲ C, D トスレバ,二ツノ線分 BC, BD ノ中ノ小ナル方ガコノ方程式ノ正根ヲ數値トスル線分デアル。

(3) $\underline{x^2-ax-b^2=0}$



コノ方程式ヲ書キ換ヘルト

$$x(x-a)=b^2$$

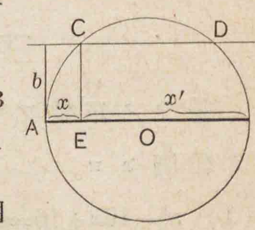
トナル。(2)ト同樣ニ作圖スルト二ツノ線分 BC, BD ノ中ノ大ナル方ガコノ方程式ノ正根ニ相當スル。

(4) $\underline{x^2-ax+b^2=0}$

コノ方程式ヲ書キ換ヘルト

$$x(a-x)=b^2$$

トナル。ソコデ a ニ等シイ線分 AB ヲ直徑トスル圓ニ於テ AB カラ b ノ距離ニアル平行線 CD ト圓周トノ交點ノ一ツデアル C カラ AB ニ垂線 CE ヲ引ケバ, AE 及ビ BE ガコノ方程式ノ正根ニ相當スル線分デアル。



(2)ト(3)トノ作圖ハ常ニ可能デ,ソノ解ハ唯一ツデアルガ,(4)ニ於テハ CD ガ圓周ト出合フトキニ限リ作圖ハ可能デアル。即チ $b>\frac{a}{2}$ ナルトキハ解ナク, $b=\frac{a}{2}$ ナルトキハ唯一ツノ解(等根)ガアリ,

$b<\frac{a}{2}$ ナルトキニハ二ツノ解ガアル。

コノコトハ上ノ方程式ヲ代數的ニ解イテ正根ノ有無ヲ吟味スル結果ト全ク一致スル。各自ニ之ヲ確メヨ。

作圖題ガ或線分ヲ求メルコトニ歸着スルヤウナ問題ニ於テ,求メル長サ又ハ之ニ關聯スル長サヲ未知數トシテ幾何的條件ヲ代數方程式デ表ハストキ,ソノ方程式ガ未知數ニ關シ二次ナル場合ニハ上ノ何レカノ形ニ直シテ解クコトガ出來ル。

カヤウナ作圖ノ方法ヲ**代數的解析法**トイフ。

例題 (12)

1. 長サノ單位ヲ1cmトシテ,次ノ方程式ノ正根ヲ作圖セヨ。

(1) $x^2-10x+16=0$　(2) $x^2-3x-16=0$

(3) $x^2+2x-9=0$　(4) $x^2-12x+25=0$

2. 相隣ル二邊ノ和又ハ差ト面積トヲ知ッテ矩形ヲ作レ。

3. 與ヘラレタル線分 AB ヲ C ニ於テ内分シテ $AC^2=2BC^2$ デアルヤウニセヨ。

19. 正十角形ノ作圖

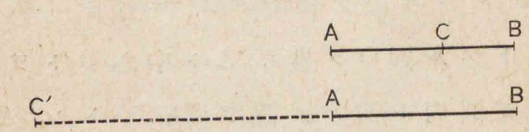
一ツノ線分ヲ内分又ハ外分シテ,ソノ一ツノ分ガ全線分ト他ノ分トノ比例中項ニナルヤウニスルコトヲ,ソノ線分ヲ**中末比**或ハ**外中比ニ分ケル**又ハ**黄金分割**スルトイフ。

作圖題 一　與ヘラレタ線分ヲ中末比ニ分ケヨ。

題意 AB ヲ與ヘラレタ線分トシ,之ヲ C ニ於テ内分又ハ C′ ニ於テ外分シ

$AB \cdot BC=AC^2$ 又ハ $AB \cdot BC'=AC'^2$

ナラシメヨ。



解 内分ノ場合ニ於テハ $AB=a$, $AC=x$ トスレバ

$BC=a-x$

デアルカラ

$a(a-x)=x^2$

即チ　$x^2+ax-a^2=0$

$\therefore\ x(x+a)=a^2$　(1)

又外分ノ場合ニ於テハ $AC'=x$ トスレバ

$$BC'=a+x$$

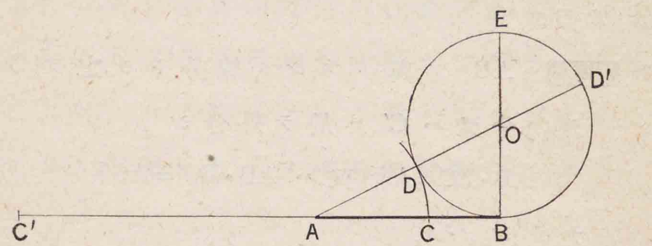
デアルカラ

$$a(a+x)=x^2$$

卽チ $$x^2-ax-a^2=0$$

$$\therefore \quad x(x-a)=a^2 \qquad (2)$$

依ッテ(1),(2)ニヨリ次ノ作圖法ガ得ラレル。



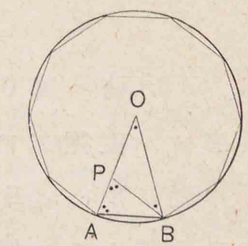
AB ト B ニ於テ切シ，AB ニ等シイ線分ヲ直徑トスル圓 O ヲ畫キ，A ト中心 O トヲ通ル直線ガ圓周ト交ハル點ヲ D, D' トシ，AB 及ビ BA ノ延長上ニ夫々 C 及ビ C' ヲ取リ $AC=AD$, $AC'=AD'$ ナラシメレバ，C 及ビ C' ハ求メル點デアル。

注意 **1.** 上ノ作圖デ

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \quad AC'=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

作圖題 二 與ヘラレタ圓ニ内接スル正十角形ヲ畫ケ。

解析 圓 O ニ内接スル正十角形ノ一邊ヲ AB トスレバ



$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$$

從ッテ

$$\angle OAB=\angle OBA=72^\circ$$

故ニ $\angle OBA$ ノ二等分線ガ OA ト交ハル點ヲ P トスルト

$$\angle ABP=\angle PBO=36^\circ$$

$$\therefore \quad \angle APB=72^\circ$$

$$\therefore \quad AB=BP=OP$$

又 $$\triangle OAB \backsim \triangle BAP$$

$$\therefore \quad OA:AB=AB:AP$$

$$\therefore \quad OA:OP=OP:AP$$

$$\therefore \quad OA\cdot AP=OP^2$$

依ッテ OP 卽チ AB ハ半徑 OA ヲ中末比ニ内分シタトキノ比例中項トナル線分ニ等シイ。

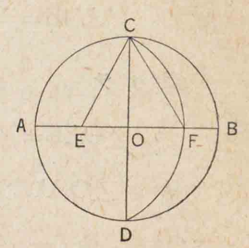
作圖 (各自ニ試ミヨ)

注意 2. 作圖題一カラワカルヤウニ半徑 r ノ圓ニ內接スル正十角形ノ一邊ハ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ デアル。

問 與ヘラレタ圓ニ內接スル正五角形ヲ作レ。

例題 (13)

1. AB, CD ハ圓 O ノ互ニ直交スル直徑デアル。AO ノ中點ヲ E トシ, E ヲ中心, EC ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ OB ト交ハル點ヲ F トスレバ,



OF ハ內接正十角形ノ一邊デ, CF ハ內接正五角形ノ一邊デアル。

2. 一邊ガ a ナル正五角形ノ對角線ノ長サヲ求メヨ。

3. 正五角形ノ二ツノ對角線ハ互ニ他ヲ中末比ニ分ケル。

4. $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ ナルコトヲ利用シテ,與ヘラレタ圓ニ內接スル正十五角形ヲ作レ。

第二篇　立體幾何

第1章　平面及ビ直線

20. 平面

平面トハソノ面上ニアル任意ノ二點ヲ通ル直線ガ常ニ全クソノ面上ニアルヤウナ面デアル。

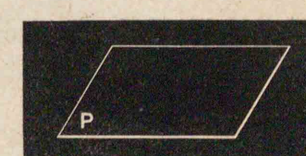
故ニ

一直線上ノ二點ガ或平面上ニアルトキハ,ソノ直線ハ全部ソノ平面上ニアル。

點又ハ直線ガ或平面上ニアルトキハ,コノ平面ハソノ**點又ハ直線ヲ含ム**或ハ**通ル**トイフ。

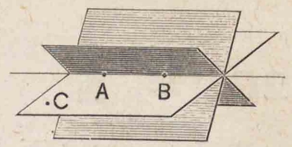
平面ト直線トガ唯一點ノミヲ共有スルトキハソノ平面ト直線トハ**相交ハル**トイフ.

平面ハ空間ニ於テソノ何レノ方向ヘモ無限ニ擴ガッテキルモノトスル。シカシ之ヲ表ハスニハ便宜上平行四邊形ヲ用ヒ,之ニ P,Q ナドノ文字ヲツケテ"平面P""平面Q"ナドト呼ブ。



21. 平面ノ決定

一平面上ノ二點A, Bヲ固定スルトキハ,ソノ平面ハコノ二點ヲ通ル直線ヲ軸トシテ廻轉サセルコトガ出來ル。シカシソノ直線上ニナイ第三ノ點Cヲ通ルマデ廻轉サセルト,ソノ位置ハ定マル。卽チ



一直線上ニナイ三點ヲ含ム平面ハ唯一ツアル。

コノ事實ヲ次ノヤウニ述ベル。

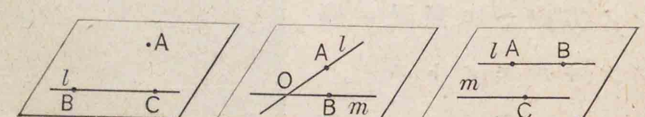
一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ決定スル。

定理 一　次ノ各ハ何レモ一平面ヲ決定スル。

[1] 一直線トソノ上ニナイ一點。

[2] 相交ハル二直線。

[3] 平行ナル二直線。



證明 [1] 一直線 l ノ上ニナイ一點ヲAトシ, l 上ニ二點B, Cヲ取レバ, l トAトヲ含ム平面ハ三點A, B, Cヲ含ム平面ニ外ナラナイ。

依ツテ l トAトハ一平面ヲ決定スル。

[2] Oニ於テ相交ハル二直線ヲ l, m トシ,ソノ上ニO以外ノ點ヲ一ツヅツ取ツテ之ヲ夫々A, Bトスレバ l, m ヲ含ム平面ハ一直線上ニナイ三點O, A, Bヲ含ム平面デアル。故ニ相交ハル二直線 l, m ハ一平面ヲ決定スル。

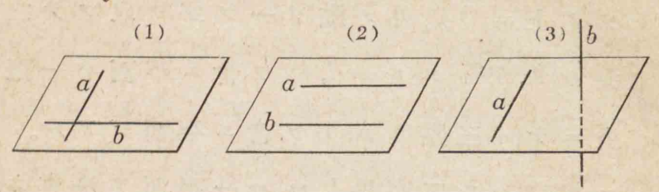
[3] 二直線 l, m ガ平行ナラバ,ソレハ同一平面上ニアル。ソシテ l 上ニ二點A, Bヲ取リ, m 上ニ一點Cヲ取レバ l, m ノ平面ハ一直線上ニナイ三點A, B, Cヲ含ム平面デアル。故ニ平行ナル二直線 l, m ハ一平面ヲ決定スル。

例題 (14)

1. 定點Aヲ通リ且ツ定直線 l ト交ハル任意ノ直線ハ一定ノ平面上ニアル。
2. 相交ハル二直線 a, b ノ中 a ニ交ハリ, b ニ平行デアル直線ハスベテ同一ノ平面上ニアル。
3. 二ツノ平行線 a, b ト交ハリナガラ動ク直線ハ常ニ同一ノ平面上ニアル。

22. 二ツノ直線

空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ハ次ノ三通リニ限ル。



（1） 相交ハル場合。

（2） 互ニ平行デアル場合。

（3） 相交ハラズ又平行デモナイ場合。

(1),(2)ノ場合ニハ二直線ハ同一ノ平面上ニアルガ,(3)ノ場合ニハ同一ノ平面上ニナイ。ソレデ空間ニ於ケル二直線デハ"相交ハラナイカラ平行デアル"或ハ"平行デナイカラ相交ハル"トイフコトハ出來ナイ。

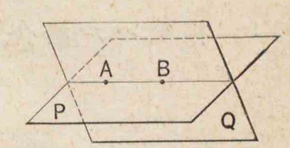
從ツテ二直線ノ平行デアルコトヲ證明スルニハ[i]二直線ガ同一ノ平面上ニアルコト,[ii]相交ハラナイコトノ二ツヲ確メナケレバナラナイ。

注意 一般ニ立體圖形ニ平面圖形ノ定理ヲ應用スルニハ,先ヅソノ圖形ガ同一ノ平面上ニアルコトヲ確メナケレバナラナイ。

23. 二平面ノ交ハリ

二ツノ平面ガ出會フトキハ唯一點ダケヲ共有スルコトハ出來ナイ。

定理 二 相異ナル二平面ガ出會フトキニハ,コレ等ノ二平面ハ一ツノ直線ヲ共有シ,ソノ直線以外ノ點ヲ共有シナイ。



證明 二平面ガ出會フトキハ少クトモ二點ヲ共有スル。今,相異ナル二平面P,Qガ出會フトキニソノ共有スル二點ヲA,Bトスレバ,A,Bハ平面P上ニアルカラ,直線ABハコノ平面Pニ含マレル。同樣ニ直線ABハ平面Qニ含マレル。故ニ二平面P,Qハ一直線ABヲ共有スル。

若シ二平面P,Qガ直線AB外ノ一點ヲ共有スルトスレバ,一直線トソノ上ニナイ一點トヲ含ム平面ハ唯一ツシカナイカラ,PトQトハ相異ナル二平面デアルコトハ出來ナイ。

故ニP,Qハ直線AB以外ノ點ヲ共有シナイ。

二平面ガ唯一ツノ直線ヲ共有スルトキハ,ソノ二平面ハ**相交ハル**トイヒ,ソノ直線ヲ二平面ノ**交ハリ**又ハ**交線**トイフ。

二平面ガ出會ハナイトキハ,ソノ二平面ハ互ニ**平行デアル**トイフ。 二平面 P, Q ガ互ニ平行デアルコトヲ $P \parallel Q$ デ表ハス。

二平面ノ位置ノ關係ハ次ノ二ツニ限ル。

(1) 相交ハル場合。(2) 互ニ平行デアル場合。

例題 (15)

1. 同一ノ平面上ニナイ三直線ガ同一ノ點ヲ通ルトキハ,コレ等ノ直線デ決定サレル平面ハ幾ツアルカ。

2. 二ツヅツ相交ハル三ツノ平面 P, Q, R ガアッテ, P ト Q, Q ト R, R ト P トノ交線ノイヅレカ二ツガ相交ハレバ殘リノ一ツモ亦ソノ交點ヲ通ル。

3. 四點ガ同一ノ平面上ニナイトキハ,コレ等ノ點ニヨッテ決定サレル平面ハ幾ツアルカ。又同樣ノ五點デハドウカ。

24. 平面ト直線トノ平行

平面ト直線トガ出會ハナイトキハ,ソノ直線ト平面トハ互ニ**平行デアル**トイフ。

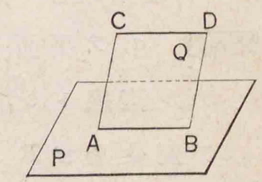
直線ト平面トノ位置ノ關係ハ次ノ三ツニ限ル。

(1) 相交ハル場合。(2) 互ニ平行デアル場合。

(3) 直線ガ平面ニ含マレル場合。

定理 三　二直線ガ平行デアルトキハ,ソノ一ツノ直線ダケヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行デアル。

題意　二直線 AB, CD ガ平行デアルトシ, AB ヲ含ミ CD ヲ含マナイ平面ヲ P トスレバ　$P \parallel CD$



證明　AB ト CD トハ平行デアルカラ一平面ヲ決定スル。之ヲ Q トスルト, AB ハ P ト Q トノ交ハリデアル。

若シ CD ト P トガ平行デナイトスレバ,ソノ交點ハ二平面 P, Q ノ交線 AB ノ上ニアル。

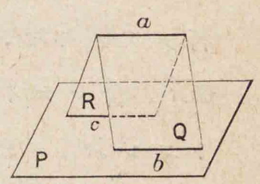
然ルニ CD ガ AB ニ交ハルコトハ假設ニ反スル。故ニ P ハ CD ニ平行デアル。

系一　平行ナル二直線ノ各ヲ含ミ他ヲ含マナイ二平面ノ交ハリハソノ二直線ノ各ニ平行デアル。

系二　同一ノ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

定理四　一平面ニ平行ナル一直線ヲ含ム任意ノ平面ト初メノ平面トノ交ハリハソノ直線ニ平行デアル。ソシテソレ等ノ交ハリハ又互ニ平行デアル。

題意　a ヲ平面Pニ平行ナル直線トシ, a ヲ含ム平面Q及ビRト平面Pトノ交線ヲ夫々 b, c トスレバ　$b \parallel a,\ c \parallel a$　且ツ　$b \parallel c$



證明　a トPトハ平行デアルカラ出會ハナイ。故ニ a ハP上ノ直線 b ト出會フコトガナイ。ソシテ a ト b トハ共ニ同一ノ平面Qノ上ニアルカラ　$a \parallel b$

同様ニシテ　$a \parallel c$

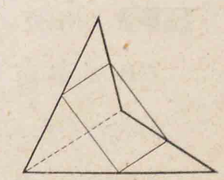
從ツテ　$b \parallel c$

系一　一直線ニ平行ナル平面上ノ一點ヲ通ツテソノ直線ニ平行ナル直線ハソノ平面ニ含マレル。

系二　同一ノ直線ニ平行ナル二平面ノ交ハリハソノ直線ニ平行デアル。

例題 (16)

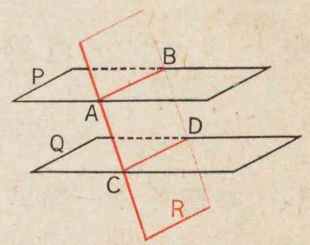
1. 平面外ノ一點ヲ通ツテソノ平面上ノ一直線ニ平行ニ引イタ直線ハソノ平面ニ平行デアル。
2. 平行線ノ一ツニ交ハル平面ハ他ニモ交ハル。
3. 同一ノ平面上ニナイ二直線ノ一ツヲ含ミ他ニ平行ナル平面ハ唯一ツアル。
4. 一定點ヲ通ツテ同一ノ平面上ニナイ二直線ノ各ニ平行ナル平面ヲ作レ。
5. 同一ノ平面上ニナイ四點ヲ順次ニ結ビツケテ出來ル四邊形ヲ**捩**(ネヂ)**レ四邊形**又ハ**ごーしゅ**(Gauche)**四邊形**トイフ。ごーしゅ四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビツケテ出來ル四邊形ハ平行四邊形デアル。



25. 平行ナル平面

定理 **五** 一平面ガ平行ナル二平面ト交ハルトキハ,ソノ交線ハ互ニ平行デアル。

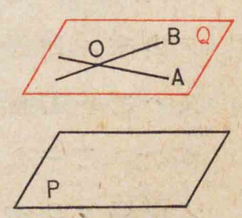
題意 平面Rガ平行ナル二平面P, Qト夫々AB, CDデ交ハルトキハ　$AB \parallel CD$



證明 P, Qハ互ニ平行デアルカラ, P上ノ直線ABトQ上ノ直線CDトハ交ハラナイ。ソシテコノ二直線ハ同一ノ平面Rノ上ニアル。故ニ $AB \parallel CD$。

定理 **六** 相交ハル二直線ガ同一ノ平面ニ平行デアルトキハ,ソノ二直線ノ決定スル平面ハ初メノ平面ニ平行デアル。

題意 相交ハル二直線OA, OBガ平面Pニ平行デアルトシ, OA, OBノ決定スル平面ヲQトスレバ　$Q \parallel P$

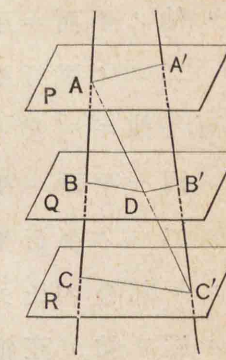


證明 (歸謬法ニヨツテ各自ニ試ミヨ)

定理 **七** 二直線ガ三ツ以上ノ平行ナル平面ト交ハルトキハ,ソノ二直線ハソレ等ノ平面ニヨツテ互ニ比例スル部分ニ分ケラレル。

題意 P, Q, Rヲ互ニ平行ナル平面トシ, ABC, A′B′C′ヲコレ等ノ平面ト夫々A, B, C及ビA′, B′, C′デ交ハル二直線トスレバ

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$



證明 A, C′ヲ結ビ,之ト平面Qトノ交點ヲDトスレバ,二直線AC, AC′ノ決定スル平面トQ, Rトノ交ハリハ夫々BD, CC′デ,又二直線A′C′, AC′ノ決定スル平面トP, Qトノ交ハリハ夫々AA′, DB′デアル。而シテ

$$BD \parallel CC', \quad AA' \parallel DB'$$

$$\therefore \ AB : BC = AD : DC'$$

又 $$AD : DC' = A'B' : B'C'$$

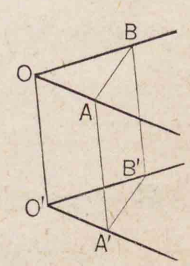
$$\therefore \ AB : BC = A'B' : B'C'$$

例題 (17)

1. 二ツノ平行直線ガ二ツノ平行平面ニ交ハッテ截リ取ラレル部分ハ相等シイ。
2. 二ツノ平行平面ノ一ツノ上ノ任意ノ點ヲ通リ,他ノ平面ニ平行ナル直線ハソノ平面ニ含マレル。
3. 二ツノ平行平面ノ一ツニ交ハル直線又ハ平面ハ他ニモ交ハル。
4. 同一平面ニ平行ナル二平面ハ互ニ平行デアル。
5. 二ツノ平行平面間ニ夾マレル二線分ヲ對應スル部分ノ比ガ等シイヤウニ内分(又ハ外分)スル點ヲ結ブ直線ハソレ等ノ平面ニ平行デアル。

26. 二直線ノナス角

定理八 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ平行デ且ツ對應スル邊ノ各ガ頂點ヲ結ブ直線ノ同側ニアルトキハ,ソノ二角ハ相等シイ。



題意 $\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トニ於テ $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$ デ且ツ OA ト $O'A'$, OB ト $O'B'$

トガ何レモ OO' ノ同ジ側ニアルトキハ

$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

證明 $OA=O'A'$, $OB=O'B'$ ナラシメルト $OAA'O'$ 及ビ $OBB'O'$ ハ何レモ平行四邊形ニナル。

$\therefore$ $AA'=OO'$, $BB'=OO'$ $\therefore$ $AA'=BB'$

又 $AA' \parallel OO'$, $BB' \parallel OO'$ $\therefore$ $AA' \parallel BB'$

故ニ $ABB'A'$ ハ平行四邊形トナリ $AB=A'B'$

$\therefore$ $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$

$\therefore$ $\angle AOB = \angle A'O'B'$

系一 任意ノ一點ヲ通ッテ,同一ノ平面上ニナイ二ツノ定直線ノ各ニ平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ一定デアル。

任意ノ一點ヲ通ッテ同一ノ平面上ニナイ二直線ノ各ニ平行ニ引イタ二直線ノナス角ヲ初メノ**二直線ノナス角**トイフ。

故ニ平行デナイ二直線ハ常ニ角ヲナス。若シコノ角ガ直角デアレバ,ソレ等ノ二直線ハ互ニ**垂直デアル**トイフ。

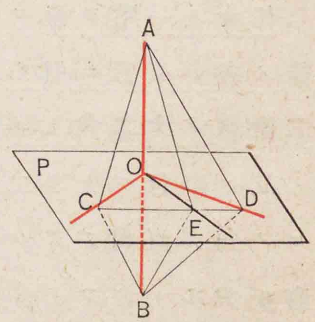
系二 平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ直線ニモ垂直デアル。

27. 平面ノ垂線

直線ガ平面ト交ハリ,ソノ交點ヲ通ッテソノ平面上ニ引イタスベテノ直線ニ垂直デアルトキハ,ソノ直線ト平面トハ互ニ**垂直デアル**又ハ**直交スル**トイヒ,ソノ直線ヲソノ**平面ノ垂線**トイフ。

直線ガ平面ト交ハリ之ト垂直デナイトキハ,ソノ直線ヲソノ**平面ノ斜線**トイヒ,一平面ヘノ垂線又ハ斜線トソノ平面トノ交點ヲソノ**垂線**又ハ**斜線ノ足**トイフ。

定理 九 相交ハル二直線ノ交點ヲ通リソノ各ニ垂直ナル直線ハ,ソノ二直線ノ決定スル平面ニ垂直デアル。



題意 相交ハル二直線OC,ODノ交點Oヲ通リソノ各ニ垂直ナル直線ヲABトスルト,ABハOC,ODノ決定スル平面Pニ垂直デアル。

證明 平面P上デOヲ通ル任意ノ直線OEヲ引キ,又OC,OD,OEト交ハル一直線ヲ引キ,ソ

ノ交點ヲ夫々C,D,Eトスル。

次ニAB上ニOBヲAOニ等シク取リ,A及ビBヲC,D,Eニ結ブト,OCハABノ垂直二等分線デアルカラ

$$AC=BC$$

同様ニ $$AD=BD$$

$$\therefore\ \triangle ACD\equiv\triangle BCD \qquad \therefore\ \angle ACE=\angle BCE$$

$$\therefore\ \triangle ACE\equiv\triangle BCE \qquad \therefore\ AE=BE$$

$$\therefore\ AB\perp OE$$

故ニABハOヲ通ッテ平面P上ニ引イタスベテノ直線ニ垂直デアル。

依ッテABハ平面Pニ垂直デアル。

系一 平面ノ垂線ハソノ平面上ニアルスベテノ直線ニ垂直デアル。

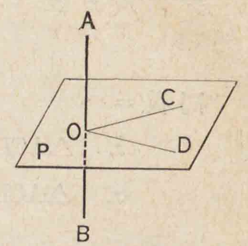
系二 相交ハル二直線ノ各ニ垂直ナル直線ハソノ二直線ノ決定スル平面ニ垂直デアル。

系三 平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直デアル。

平行ナル二平面ノ間ニ夾マレル共通垂線ノ部分ノ長サヲソノ**平行平面ノ距離**トイフ。

定理十 直線上ノ一點ヲ通ツテソノ直線ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアル。

題意 OヲAB上ノ一點トスレバ,Oヲ通ツテABニ垂直ナル平面ハ一ツアツテ唯一ツニ限ル。



證明 直線ABヲ含ム任意ノ二平面上ニ於テOヲ通ツテABニ垂線OC, ODヲ引キ,ソノ決定スル平面ヲPトスレバ,PハABニ垂直ナル平面デアル。

若シP以外ニOヲ通リABニ垂直ナル平面Qガアルトスレバ,ABヲ含ム一平面Rヲ作リ,PトRトノ交ハリヲOE, QトRトノ交ハリヲOFトスルト,OE, OFハABト共ニR上ニアツテOヲ通リ同一ノ直線ABニ垂直ニナル。コレハ不合理デアル。

故ニOヲ通リABニ垂直ナル平面ハP以外ニハナイ。

系 直線外ノ一點ヲ通ツテソノ直線ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアル。

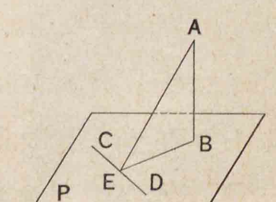
例題 (18)

1. 同一直線ニ垂直ナル二平面ハ互ニ平行デアル。
2. 平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル平面ハ他ノ直線ニモ垂直デアル。
3. 二定點A, Bカラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,線分ABノ中點ヲ通リ之ニ垂直ナル平面デアル。

28. 三垂線ノ定理

定理十一 平面外ノ一點カラソノ平面及ビソノ上ノ一直線ニ夫々垂線ヲ引ケバ,ソノ二垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ初メノ直線ニ垂直デアル。

題意 平面P外ノ點AカラPニ引イタ垂線ノ足ヲBトシ,又AカラP上ノ直線CDニ引イタ垂線ノ足ヲEトスレバ,BEハCDニ垂直デアル。



證明 CDハ相交ハル二直線AB, AEノ各ニ垂直デアルカラ,CDハAB, AEノ決定スル平面ABEニ垂直デアル。従ツテ平面ABE上ノ直

線 BE ハ CD ニ垂直デアル。

注意　コノ定理ヲ**三垂線ノ定理**トイフ。

系一　平面 P 外ノ一點 A カラ P ニ垂線 AB ヲ引キ,ソノ足 B カラ P 上ノ直線 CD ニ垂線 BE ヲ引ケバ, AE ハ CD ニ垂直デアル。

系二　平面 P 外ノ一點 A カラ P 上ノ直線 CD ニ垂線 AE ヲ引キ,ソノ足 E カラ P 上ニ於テ CD ニ垂線 EB ヲ引キ,之ニ A カラ垂線 AB ヲ引ケバ, AB ハ平面 P ニ垂直デアル。

例　題　(19)

1. 一點カラ相交ハル二平面ノ各ニ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ直線ハソノ交線ニ垂直デアル。

2. △ABC ノ垂心 H ニ於テソノ平面ニ引イタ垂線上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ, PA, PB, PC ハ夫夫 BC, CA, AB ニ垂直デアル。

3. 平面外(又ハ平面上)ノ一點カラソノ平面ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトガ出來ル。

4. 同一ノ平面ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

5. 平面外ノ一點カラソノ平面上ノ點ニ引イタ線分ノ中デ垂線ハ最小デアル。

平面外ノ一點カラソノ平面ニ引イタ垂線ノ長サヲソノ**點ト平面トノ距離**トイフ。

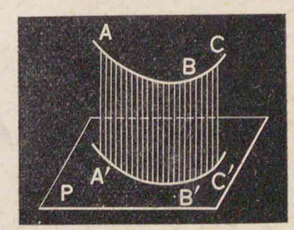
6. 平面 P 外ノ一點 A カラ P ニ垂線 AO 及ビ斜線 AB, AC ヲ引クトキ

(1)　$OB \gtreqless OC$　　ナルニ從ッテ　$AB \gtreqless AC$

(2)　$\angle OAB \gtreqless \angle OAC$　ナルニ從ッテ　$AB \gtreqless AC$

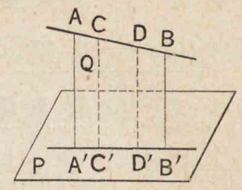
29. 正射影

一ツノ點ノ一平面上ニ投ズル**正射影**(又ハ**射影**)トハソノ點カラソノ平面ニ引イタ垂線ノ足ノコトデアル。又一ツノ線ノ一平面上ニ投ズル正射影(又ハ射影)トハソノ線上ノ點ノソノ平面上ニ投ズル正射影ノ軌跡デアル。



定理十二　一平面ニ垂直デナイ直線ガソノ平面上ニ投ズル正射影ハソノ直線上ノ二點ノ正射影ヲ通ル直線デアル。

題意 平面Pニ垂直デナイ直線AB上ノ任意ノ二點A, BノP上ニ投ズル正射影ヲ夫々A', B'トスレバ, ABノ正射影ハ直線$A'B'$デアル。



證明 AA', BB'ハ何レモ平面Pへノ垂線デアルカラ互ニ平行デアル。依ツテソノ決定スル平面ヲQトスレバ, AB, $A'B'$ハQ上ニアル。今AB上ノ任意ノ點CカラAA'ニ平行ニCC'ヲ引ケバCC'ハQ上ニアル。而シテ$A'B'$トAA'トハ交ハルカラ之ト平行ナルCC'トモ交ハル。ソノ交點ヲC'トスレバ, CC'ハ平面Pニ垂直デ, C'ハCノ正射影デアル。

故ニAB上ノスベテノ點ノ正射影ハ直線$A'B'$ノ上ニアル。

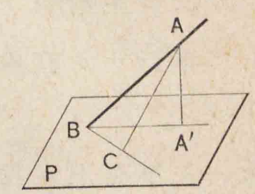
次ニ$A'B'$上ノ任意ノ點D'カラ$A'A$ニ平行ナル直線ヲ引ケバABト交ハル。ソノ交點ヲDトスレバ, D'ハDノ正射影デアル。

故ニABノP上ニ投ズル正射影ハ$A'B'$デアル。

定理十三 一平面ノ斜線ト,ソノ平面上ニアツテソノ足ヲ通ル諸直線トノナス角ノ中,ソノ斜線ノ正射影トナス鋭角ガ最小デアル。

題意 ABヲ平面Pノ斜線, Bヲソノ足トスル。又P上ニ投ズルABノ正射影ヲ$A'B$トシ,P上ニ於テBヲ通ル他ノ任意ノ直線ヲBCトスレバ

$$\angle ABA' < \angle ABC$$



證明 點Aノ正射影ヲA'トシ,BCヲBA'ニ等シク取レバ, $\triangle ABA'$, $\triangle ABC$ニ於テ

ABハ共通, $BA'=BC$, $AA'<AC$

$$\therefore \quad \angle ABA' < \angle ABC$$

直線ガ平面上ニ投ズルソノ正射影トナス鋭角ヲソノ**直線ト平面トノナス角**トイフ。

例題 (20)

1. 直線ガ平面ニ垂直デアルトキハソノ正射影ハ一點デ,直線ガ平面ニ平行デアルトキハ正射影

影ハ之ニ平行ナル直線デアル。逆モ眞デアル。

2. 相等シク且ツ平行ナル二線分ガ同一ノ平面上ニ投ズル正射影ハ相等シク且ツ平行デアル。

3. 一平面ト角 α ヲナス線分 l ガソノ平面上ニ投ズル正射影ノ長サハ $l\cos\alpha$ デアル。

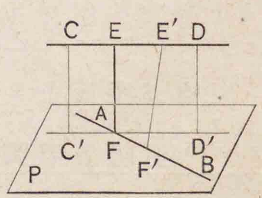
4. 平行ナル直線ガ同一ノ平面トナス角ハ相等シイ。

5. 一平面上ニ投ズル平行四邊形ノ正射影ハ一般ニハ平行四邊形デアル。

30. 二直線ノ共通垂線

定理十四 同一ノ平面上ニナイ二直線ニ共通ナ垂線ハ唯一ツアル。

證明 AB, CD ヲ同一ノ平面上ニナイ二直線トスル。AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 P ヲ作リ, CD ガ P 上ニ投ズル正射影ヲ C′D′ トスレバ, C′D′ ハ AB ニ交ハル。コノ點ヲ F トスル。然ルニ C′D′ 上ノ點ハ皆 CD 上ノ或點ノ正射影デ



アルカラ, F ヲ CD 上ノ點 E ノ正射影トスレバ, EF ハ平面 P ニ垂直デアル。

故ニ EF ハ AB 及ビ C′D′ ニ垂直デアル。從ツテ EF ハ C′D′ ニ平行ナル CD ニモ垂直デアル。

故ニ EF ハ AB, CD ニ共通ナ垂線デアル。

次ニ EF 以外ニ AB, CD ニ共通ナ垂線ガアルトシ,之ヲ E′F′ トシ AB, CD トノ交點ヲ夫々F′, E′ トスレバ, E′F′ ハ CD ニ垂直デアルカラ之ニ平行ナル直線 C′D′ ニモ垂直デアル。從ツテ E′F′ ハ平面 P ニ垂直デアル。

故ニ E′F′ ト EF トハ平行線トナツテ一平面ヲ決定シ, AB, CD ハソノ同一ノ平面上ニアルコトニナル。之ハ假定ニ反スル。

故ニ AB, CD ニ共通ナ垂線ハ EF 以外ニハナイ。卽チ唯一ツニ限ル。

系 同一ノ平面上ニナイ二直線上ニ夫夫一端ヲ有スル線分ノ中,コノ二直線ノ共通垂線ガ最小デアル。

同一ノ平面上ニナイ二直線ノ間ニアル共通垂線ノ部分ノ長サヲソノ**二直線間ノ距離**トイフ。

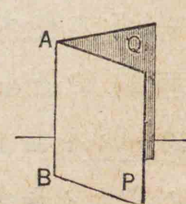
例題 (21)

1. 同一平面上ニナイ二直線 x, y ガアル。x 上ノ二點 A, B カラ y ニ引イタ二ツノ垂線 AC, BD ガ相等シイトキハ AB ノ中點 M ト CD ノ中點 N トヲ結ブ直線 MN ハ x, y ノ共通垂線デアル。
2. x, y ヲ同一ノ平面上ニナイ二直線トスレバ, x, y 上ニ夫々一端ヲ有スル線分ノ中點ハ同一ノ平面上ニアル。
3. 同一ノ平面上ニナイ二直線 AB, CD ニ交ハリ且ツ他ノ直線 XY ニ平行ナル直線ヲ引ケ。
4. ごーしゅ四邊形ノ四ツノ角ガ皆直角デアルコトハナイ。

31. 二面角

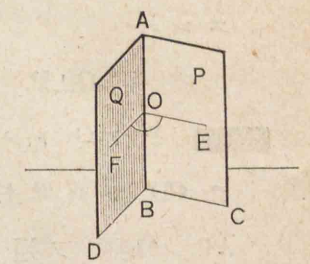
同一ノ直線デ終ル二ツノ平面ハ**二面角**ヲナストイヒ,ソノ直線ヲ二面角ノ**稜**,ソノ各平面ヲ二面角ノ**面**トイフ。

例ヘバ二平面 P, Q ガソノ交線 AB デ終ルト考ヘレバ P, Q ハ二面角ヲナシ, AB ハコノ二面角ノ稜, P, Q ハソノ面デアル。



二面角ヲ示スニハ "二面角 PABQ" ノヤウニ稜ノ文字ヲ二面ヲ示ス文字ノ間ニ置イテ呼ブ。又單ニ "二面角 AB" ト呼ブコトモアル。

二面角 PABQ ノ稜ノ上ノ一點 O カラ P, Q 各平面上ニ於テ稜ニ垂線 OE, OF ヲ引ケバ ∠EOF ヲ生ズル。ソシテ稜ノ上ニ於テ點 O ヲ何處ニ取ルトモ ∠EOF ノ大サハ常ニ一定デアル。



二面角ノ稜ノ上ノ一點カラ稜ニ垂直ニ各ノ面上ニ引イタ二直線ノナス角ヲ**二面角ノ平面角**トイフ。

二面角ノ大サハソノ平面角ノ大サデ表ハスモノトスル。

故ニ二面角ノ平面角ノ大サガ例ヘバ 65° デアルトキハ,ソノ二面角ノ大サモ 65° デアル。

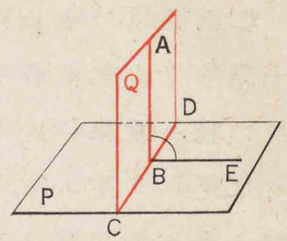
問 二面角ニ於テソノ平面角ノ二等分線ト稜トヲ含ム平面ハ,ソノ二面角ヲ二等分スル。

二平面ノナス二面角ガ直角デアルトキハ,ソノ二平面ハ互ニ**垂直デアル**又ハ**直交スル**トイフ。

定理十五 一平面ヘノ垂線ヲ含ム平面ハソノ平面ニ垂直デアル。

題意 平面Pヘノ垂線ABヲ含ム平面ヲQトスレバ

$Q \perp P$



證明 PトQトノ交ハリヲCDトシ,P上ニ於テABノ足Bヲ通リCDニ垂線BEヲ引ケバ, ABハPニ垂直デ,CD, BEハ共ニP上ニアルカラ

$AB \perp CD,\quad AB \perp BE$

故ニ$\angle ABE$ハP,Qノナス二面角ノ平面角デ,ソレガ直角デアル。

$\therefore\quad Q \perp P$

系一 二平面ガ互ニ垂直デアルトキハ,一方ノ平面上ノ任意ノ一點カラソノ交ハリニ引イタ垂線ハ他ノ平面ニ垂直デアル。

系二 二平面ガ互ニ垂直デアルトキハ,一方ノ平面上ノ任意ノ一點カラ他ノ平面ニ引イタ垂線ハ初メノ平面ニ含マレル。

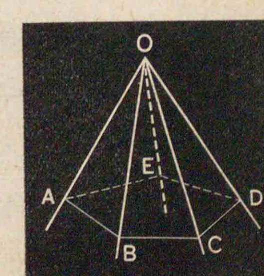
系三 同一ノ平面ニ垂直ナル二平面ノ交ハリハソノ平面ニ垂直デアル。

例題 (22)

1. 二面角PABQノ稜ABニ垂直ナル平面RハP及ビQニ垂直デアル。
2. 同一ノ點ニ於テ相交ハル三直線ガ二ツヅツ互ニ垂直デアルトキハ,コレ等ノ直線ヲ二ツヅツ含ム三平面ハ互ニ垂直デアル。

32. 多面角

三ツ以上ノ平面ガ悉ク同一ノ點ヲ通リ,且ツ二ツヅツ順次ニ相交ハルトキハ,コレ等ノ平面ハ**多面角**ヲナストイフ。



多面角ヲ作ル平面ハ皆相隣レル二平面ノ交線デ終ルモノトスル。例ヘバ五平面AOB, BOC, COD等ガ一點Oヲ共有スル直線OA, OB, OC等デ交ハルトキハ一ツノ多面角ヲ作ル。之ヲ多面

角 O—ABCDE デ表ハス。又之ヲ"多面角 O"ト呼ブコトモアル。

多面角 O—ABCDE ニ於テ O ヲソノ多面角ノ**頂點**, OA, OB, OC 等ヲ**稜**,平面 AOB, BOC 等ヲ**面**, ∠AOB, ∠BOC 等ヲ**面角**トイフ。又相隣レル二面ノナス二面角ヲ多面角ノ**稜角**トイフ。

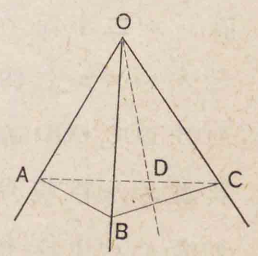
多面角ハ之ヲ作ル平面ノ數ニ從ッテ**三面角**,**四面角**,**五面角**等トイフ。

多面角ノスベテノ稜ト交ハル一ツノ平面ヲ作レバ,ソノ平面ト多面角ノ各面トノ交ハリハ一ツノ多角形ヲナス。之ヲ多面角ノ**截**(セツ)**面**トイフ。

多面角ノ截面ガ凸多角形デアルトキハ,ソノ多面角ヲ**凸多面角**トイフ。

定理 十六 三面角ノ二ツノ面角ノ和ハ他ノ一ツノ面角ヨリモ大デアル。

題意 三面角 O—ABC ニ於テ任意ノ二ツノ面角 AOB, BOC ノ和ハ面角 AOC ヨリモ大デアル。



證明 ∠AOC ガ ∠AOB 又ハ

∠BOC ニ等シイカ或ハソノ何レヨリモ小ナルトキハ明カデアル。

∠AOC ガ最大ナ面角デアルトキハ,ソノ面上ニ ∠AOD ヲ ∠AOB ニ等シク取リ,又 OA, OD, OC ト夫々 A, D, C ニ於テ交ハル直線ヲ引ク。次ニ OB ヲ OD ニ等シク取リ, AB, BC ヲ引ケバ

$$\triangle AOB \equiv \triangle AOD$$

$$\therefore \quad AB = AD$$

然ルニ $$AB + BC > AD + DC$$

$$\therefore \quad BC > DC$$

依ッテ △BOC, △DOC ニ於テ

OC ハ共通, $OB = OD$, $BC > DC$

$$\therefore \quad \angle BOC > \angle DOC$$

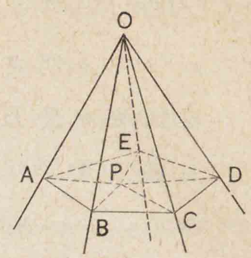
$$\therefore \quad \angle AOB + \angle BOC > \angle AOD + \angle DOC$$

即チ $$\angle AOB + \angle BOC > \angle AOC$$

定理 十七 凸多面角ノスベテノ面角ノ和ハ4直角ヨリモ小デアル。

證明 O ヲ頂點トスル多面角ニ於テソノ截面 ABCD…… ヲ作リ,コノ多角形内ノ一點 P ヲソ

ノ各頂點 A, B, C, D 等ニ結ンデ出來ル三角形ノ數ハ, O ヲ共通ノ頂點トシ, コノ多角形ノ邊 AB, BC 等ヲ底邊トスル三角形ノ數ニ等シイ。



故ニコノ二組ノ三角形ノ內角ノ總和ハ相等シイ。

然ルニ三面角 A ニ於テ二ツノ面角 OAB, OAE ノ和ハ角 BAE ヨリモ大デアル。卽チ

$$\angle OAB+\angle OAE>\angle BAE$$

$$\therefore\quad \angle OAB+\angle OAE>\angle BAP+\angle EAP$$

又 B, C, D, E 等ヲ頂點トスル三面角ニ於テモ夫々同様ノ關係ガアル。

故ニ O ヲ頂點トスルスベテノ三角形ノ底角ノ和ハ P ヲ頂點トスルスベテノ三角形ノ底角ノ和ヨリモ大デアル。

故ニ O ニ於ケルスベテノ面角ノ和ハ P ニ於ケルスベテノ角ノ和ヨリモ小デアル。卽チ 4 直角ヨリモ小デアル。

例　題 (23)

1. 三面角 O−ABC 內ニ任意ノ一點 P ヲ取レバ

$$\angle AOC+\angle BOC>\angle AOP+\angle BOP$$

2. 三面角ノ二ツノ稜角ガ相等シイトキハ,之ニ對スル二ツノ面角ハ相等シイ。又ソノ逆モ眞デアル。

3. 三面角 O−ABC ニ於テ稜角 OB ガ稜角 OC ヨリモ大ナラバ,面角 ∠AOC ハ ∠AOB ヨリモ大デアル。又ソノ逆モ眞デアル。

4. 二面角內ニ於テ二面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハソノ二面角ヲ二等分スル平面デアル。

5. 三面角ノ各稜角ヲ二等分スル三ツノ平面ハ同一ノ直線ヲ通ル。

6. 三面角ノ各稜ト之ニ對スル面角ノ二等分線トヲ含ム三ツノ平面ハ同一ノ直線ヲ通ル。

7. ごーしゅ四邊形ノ四ツノ角ノ和ハ 4 直角ヨリモ小デアル。

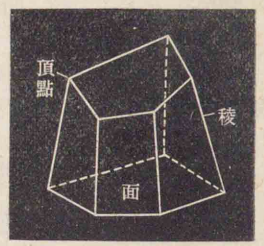
8. 與ヘラレタ四面角ヲ一平面デ截リソノ截面ヲ平行四邊形ナラシメヨ。

第2章 多面體

33. 多面體

幾ツカノ平面デ圍マレタ立體ヲ多面體トイフ。

多面體ノ境ヲナシテヰル平面ノ部分ハ皆多角形デアル。コレ等ノ多角形ヲ多面體ノ**面**トイヒ,面ト面トノ交線ヲ**稜**,稜ト稜トノ交點ヲ**頂點**トイフ。



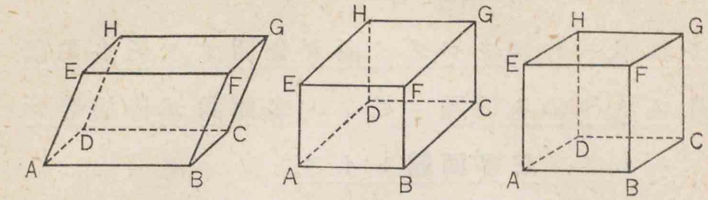
同一ノ面上ニナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ。

多面體ノ何レノ面ヲ延長スルモ他ノ面ニ出會ハナイモノヲ**凸多面體**トイフ。以下單ニ多面體トイヘバ凸多面體ヲ指スモノトスル。

多面體ハソノ面ノ數ニヨツテ**四面體,五面體,六面體**等トイフ。

三双ノ平行平面デ圍マレタ六面體ヲ**平行六面體**トイヒ,各面ガ矩形デアル平行六面體ヲ**直六面體**又ハ**直方體**トイヒ,各面ガ正方形デアル直六面

體ヲ**立方體**トイフ。



例題 (24)

1. 平行六面體ニ於テハ

(1) 三双ノ對面ハ合同ナル平行四邊形デアル。

(2) 四ツヅツ相等シク且ツ平行ナル十二ノ稜ガアル。

(3) 四ツノ對角線ハ同一ノ點デ交ハリ互ニ他ヲ二等分スル。

コノ交點ヲ**平行六面體ノ中心**トイフ。

2. 平行六面體ノ中心ヲ通リ且ツ兩端ガソノ對面上ニアル線分ハコノ點デ二等分セラレル。

3. 直方體ノ稜ハ之ニ交ハル面ニ垂直デアル。

4. 直方體ノ對角線ハ相等シイ。ソシテ對角線ノ上ノ正方形ハ一頂點カラ出ル三稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。

5. 立方體ノ對角線ノ上ノ正方形ハソノ一稜ノ上ノ正方形ノ3倍ニ等シイ。

34. 正多面體

多面體ニ於テスベテノ面ガ合同ナル正多角形デ,且ツスベテノ頂點ニ於ケル多面角ガ皆相等シイトキハ,之ヲ**正多面體**トイフ。

定理 **十八** 正多面體ハ五種類ヨリモ多クハ存在シナイ。

證明 一ツノ多面角ハ三ツ以上ノ面ヲ有シ,且ツソノ面角ノ和ハ4直角ヨリモ小デアル。

故ニ正多面體ヲ作ル正多角形ノ一內角ハ$\frac{4}{3}$直角ヨリモ小デアル。

然ルニ正n角形ノ一內角ハ$\frac{2n-4}{n}$直角デアルカラ,正n角形デ正多面體ヲ作リ得ルタメニハ

$$\frac{2n-4}{n}<\frac{4}{3}$$

之ヲ解ケバ　$n<6$

$\therefore\quad 3\leqq n<6$

$\therefore\quad n=3,\ 4,\ 5$

卽チ正多面體ノ面ハ正三角形,正方形或ハ正五角形ノ何レカデ,ソノ他ノモノハナイ。

次ニ正多面體ニ於テ一頂點ニ會スル面ノ數ヲmトスレバ

$$m\geqq 3$$

面ガ正三角形ナラバソノ內角ハ$\frac{2}{3}$直角デアルカラ

$$\frac{2}{3}m<4 \quad \therefore\ m<6$$

$$\therefore\quad m=3,\ 4,\ 5$$

面ガ正方形ナラバソノ內角ハ直角デアルカラ

$$m<4$$

$$\therefore\quad m=3$$

又面ガ正五角形ナラバソノ內角ハ$\frac{6}{5}$直角デアルカラ

$$\frac{6}{5}m<4 \quad \therefore\ m<\frac{10}{3}$$

$$\therefore\quad m=3$$

故ニ正多面體ノ一ツノ多面角ヲナス面ハ次ノ五種類シカナイ。

(1) 三ツノ正三角形　(2) 三ツノ正方形

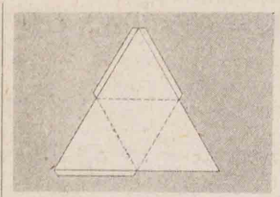
(3) 四ツノ正三角形　(4) 三ツノ正五角形

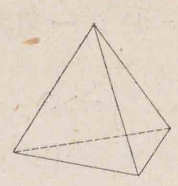
(5) 五ツノ正三角形

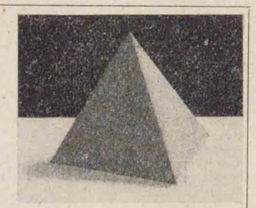
依ツテ正多面體ニハ五種類ヨリモ多クハ存在シナイ。

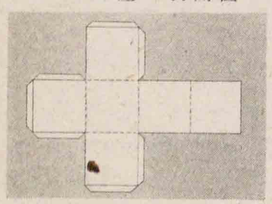
ソシテ正多面體ニハ次ノ五種類ガ出來ル。

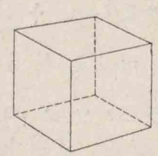
正 多 面 體

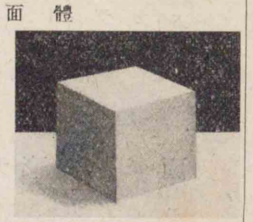

正四面體ノ展開圖

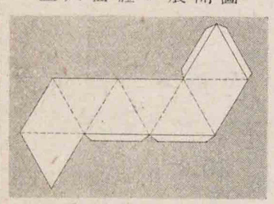

正 四 面 體

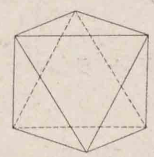


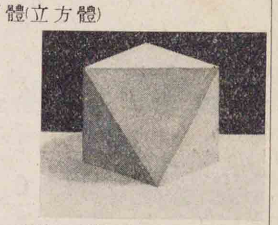

正六面體ノ展開圖

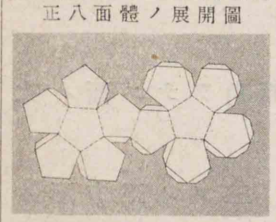

正六面體(立方體)

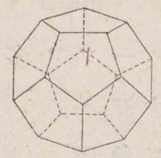


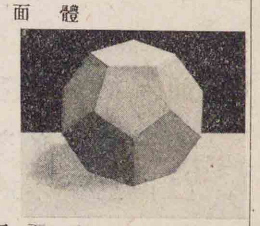

正八面體ノ展開圖

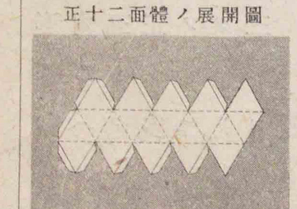

正 八 面 體

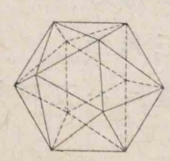


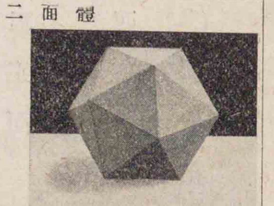

正十二面體ノ展開圖


正 十 二 面 體




正二十面體ノ展開圖


正 二 十 面 體



(1) 正四面體

四ツノ合同ナル正三角形デ圍マレタ正多面體

(2) 正六面體(立方體)

六ツノ合同ナル正方形デ圍マレタ正多面體

(3) 正八面體

八ツノ合同ナル正三角形デ圍マレタ正多面體

(4) 正十二面體

十二ノ合同ナル正五角形デ圍マレタ正多面體

(5) 正二十面體

二十ノ合同ナル正三角形デ圍マレタ正多面體

正多面體ノ模型ヲ作ルニハ,厚紙ノ上ニ圖ノヤウニソノ面ノ展開圖ヲ書キ,之ヲ切リ拔キ點線ニ沿ウテ折リ合ハセ,各稜ヲ糊着スレバヨイ。

例題 (25)

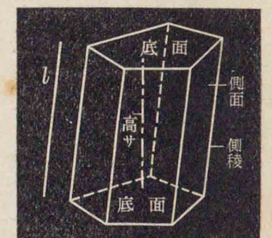
1. 一稜ノ長サガ 5*cm* ノ正四面體ノ模型ヲ作レ。

2. 一稜ノ長サガ 10*cm* デアル正四面體ノ表面積ヲ求メヨ。

3. 一稜ノ長サガ 10*cm* デアル正八面體ノ表面積及ビ對角線ノ長サヲ求メヨ。

35. 角壔

多面體ノ二面ガ平行デ他ノ面ハスベテ同一ノ直線ニ平行デアルトキニハ,之ヲ**角壔**トイフ。

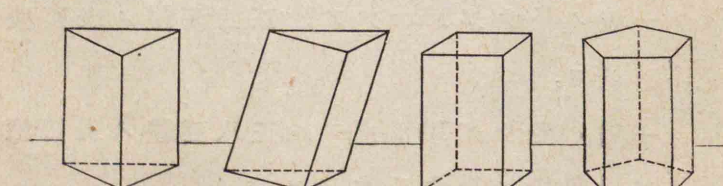


ソノ平行ナル二面ヲ角壔ノ**底面**トイヒ,同一ノ直線ニ平行ナル面ヲ**側面**,側面ノ交線ヲ**側稜**トイフ。又兩底面ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

角壔ハソノ底面ノ邊數ニ從ッテ**三角壔**,**四角壔**,**五角壔**等トイフ。

次頁ノ定理ノ圖ハ五角壔デアッテ,之ヲ五角壔 ABCDE−A′B′C′D′E′ 又ハ五角壔 ABCDE−A′ デ表ハス。

角壔ノ側稜ガソノ底面ニ垂直デアルトキハ之ヲ**直角壔**トイヒ,垂直デナイトキハ之ヲ**斜角壔**トイフ。特ニ底面ガ正多角形デアル直角壔ヲ**正角壔**トイフ。



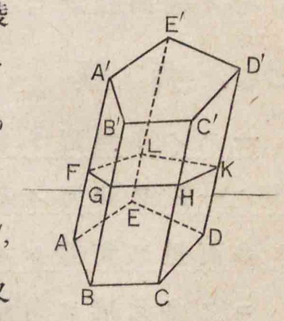
定理 十九 角壔ノ側面ハ皆平行四邊形デ,ソノ兩底面ハ合同ナル多角形デアル。

證明 (前頁ノ圖ニツイテ各自ニ試ミヨ)

角壔ノスベテノ側稜ニ交ハリ,且ツ之ニ垂直ナル平面デ截ッタ截口ヲ角壔ノ**直截面**トイフ。

定理 二十 角壔ノ側面積ヲ表ハス數ハソノ側稜ノ長サト直截面ノ周トヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

題意 角壔 ABCDE−A′B′C′D′E′ ノ側面積ヲ表ハス數ヲ S トシ,ソノ側稜 AA′ 及ビ直截面 FGHKL ノ周ヲ表ハス數ヲ夫々 l, p トスレバ $S=lp$



證明 側面積ハ □AB′, □BC′, □CD′ 等ノ和デアル。又直截面ノ邊 FG, GH, HK 等ハ夫々 AA′, BB′, CC′ 等ニ垂直デアルカラ

$$S=AA'\cdot FG+BB'\cdot GH+CC'\cdot HK+\cdots\cdots$$

然ルニ $AA'=BB'=CC'=\cdots\cdots$

$$\therefore\quad S=AA'(FG+GH+HK+\cdots\cdots)$$

$$\therefore\quad S=lp$$

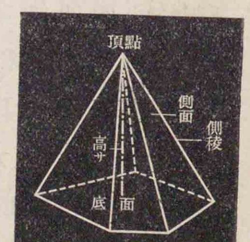
系 直角壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

例題 (26)

1. 角壔ヲスベテノ側稜ト交ハル平行平面デ截ルトキハ,ソノ截面ハ合同ナル多角形デアル。
2. 直角壔ノ側面積ガ 180 平方糎デ,底面ガ一邊 5cm ノ正三角形デアル。側稜ノ長サハ何程カ。
3. 底面ノ一邊ガ a 糎,高サガ h 糎デアル正六角壔ノ側面積及ビ全表面積ヲ求メヨ。

36. 角錐

一ツノ多角形ト,ソノ各邊ヲ底邊トシソノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トデ圍マレタ多面體ヲ**角錐**トイフ。



コノ多角形ヲ角錐ノ**底面**トイヒ,三角形ヲ**側面**トイフ。側面ト側面トノ交ハリヲ**側稜**トイヒ,スベテノ側面ガ共有スル一點ヲ**頂點**トイフ。頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ長サヲ**高サ**トイフ。

角錐ハソノ底面ノ邊數ニ從ツテ**三角錐**,**四角錐**,**五角錐**等トイフ。次頁ノ圖ハ四角錐デ,之ヲ四角錐 S—ABCD デ表ハス。

角錐ノ底面ガ正多角形デ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ足ガ底面ノ中心ト一致スルトキハ,ソノ角錐ヲ**正角錐**又ハ**直角錐**トイフ。

正角錐ノ側面ハ合同ナル二等邊三角形デアル。ソシテ正角錐ノ頂點カラ底面ノ各邊ニ至ル距離ハ一定デアル。コノ距離ヲ正角錐ノ**斜高**トイフ。

定理 二十一 角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキハ

(1) 側稜及ビ高サヲ同ジ比ニ分ケル。

(2) 截面ト底面トハ相似デアル。

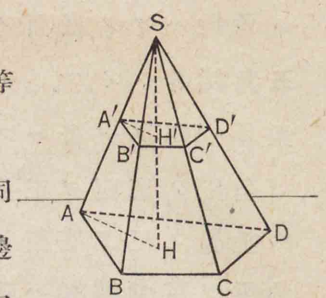
題意 角錐 S—ABCD ニ於テ,A'B'C'D' ヲソノ底面ニ平行ナル截面トシ,頂點カラ底面ニ引イタ垂線 SH トコノ截面トノ交點ヲ H' トスレバ

(1) $SA' : A'A = SB' : B'B = \cdots\cdots = SH' : H'H$

(2) 截面 $A'B'C'D' \backsim$ 底面 ABCD

證明 (1) A'H', AH ハ平行ナル二平面ト平面 SAH トノ交線デアルカラ平行デアル。

$\therefore\ SA':A'A=SH':H'H$



同様ニ $SB':B'B,\ SC':C'C$ 等モ皆 $SH':H'H$ ニ等シイ。

(2) 截面及ビ底面ハ同邊數ノ多角形デ,ソノ各邊ガ夫々平行デ且ツ同方向ヲ有スルカラ等角デアル。

又 $A'B' \parallel AB,\ A'H' \parallel AH$ デアルカラ

$$A'B':AB=SA':SA=SH':SH$$

同様ニ他ノ對應邊ノ比モ $SH':SH$ ニ等シイ。

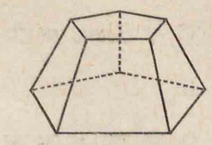
故ニ兩多角形ノ對應邊ノ比ハ皆相等シイ。

$\therefore$ 截面 $A'B'C'D' \backsim$ 底面 $ABCD$

系一 角錐ノ底面ト截面トノ面積ノ比ハ,頂點カラソレ等ノ兩面ニ至ル距離ノ二乘比ニ等シイ。

系二 底面積ト高サトガ夫々相等シイ二ツノ角錐ノ各底面ニ平行デ且ツ各頂點カラ等距離ニアル截面ノ面積ハ相等シイ。

角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ,ソノ截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**角錐臺**トイフ。



截面並ニ角錐ノ底面ヲ角錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

正角錐臺ノ側面ハ合同ナル梯形デアル。コノ梯形ノ高サヲ正角錐臺ノ**斜高**トイフ。

定理二十二 正角錐ノ側面積ハ底面ノ周ノ半分ト斜高トノ積ニ等シイ。

證明 (各自ニ試ミヨ)

系 正角錐臺ノ側面積ハ兩底面ノ周ノ和ノ半分ト斜高トノ積ニ等シイ。

例題 (27)

1. 高サ 12*cm*, 底面積45平方糎デアル角錐ヲ底面ニ平行デ且ツ頂點カラ 4*cm* ノ距離ニアル平面デ截ルトキニ出來ル截面ノ面積ヲ求メヨ。
2. 高サ 4*cm*, 底面ノ一邊ガ 6*cm* デアル正四角錐ノ全表面積ヲ求メヨ。

3. 一邊ガ12cmノ正六角形ヲ底面トスル直角錐ノ斜高ガ60cmデアル。コノ角錐ノ全表面積ヲ求メヨ。

4. 正角錐臺ノ側面積ハソノ兩底面カラ等距離ニアル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シイ。

5. 四面體ヲソノ相對スル二稜ニ平行ナル平面デ截ツタ截面ハ平行四邊形デアル。又如何ナル場合ニソノ截面ガ菱形トナルカ。

37. 體積

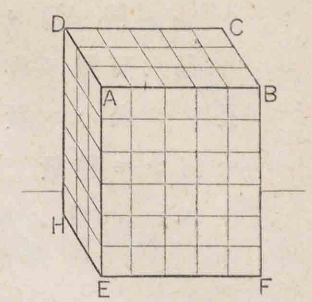
立體ノ表面ニヨツテ圍マレタ空間ノ部分ノ大サヲソノ**體積**トイフ。

體積ノ單位ニハ長サノ單位ヲ一稜トスル立方體ノ體積ヲ用ヒ,長サノ單位ノ名ニ立方トイフ語ヲ冠ラセテ之ヲ表ハス。

例ヘバ長サノ單位ガ米ナルトキハ,コレニ對應スル體積ノ單位ハ立方米デアル。

定理二十三 直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハソノ一ツノ頂點デ出會フ三稜ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

題意 直六面體ノ一頂點Aデ出會フ三稜AB, AD, AEノ長サヲ表ハス數ヲ夫々a, b, cトシ,ソノ體積ヲ表ハス數ヲVトスレバ $V=abc$



證明 (1) a, b, c ガ整數ナル場合。

例ヘバAB, AD, AEノ長サガ夫々5cm, 3cm, 6cmナラバ, ABヲ5等分シ, ADヲ3等分シ, AEヲ6等分シ,各分點ニ於テ夫々稜ニ垂直ナル平面ヲ作ルト,コノ直六面體ハ5×3×6箇ノ相等シイ立方體ニ分ケラレル。ソシテコノ各立方體ノ稜ノ長サハ1cmデアルカラ,ソノ體積ハ1立方糎デアル。故ニコノ直六面體ノ體積ハ5×3×6立方糎デアル。

同樣ニシテ a, b, cガドンナ整數デアツテモ

$$V=abc$$

ナルコトガ知ラレル。

(2) a, b, c ガ分數ナル場合。

a, b, c ガ分數デ $a=\frac{p}{l}$, $b=\frac{q}{m}$, $c=\frac{r}{n}$ ナラバ,

AB ノ l 倍, AD ノ m 倍, AE ノ n 倍ヲ三稜トスル直六面體ヲ作レバ,コノ直六面體ノ三稜ノ長サヲ表ハス數ハ夫々 p, q, r トナリ,コレ等ハ何レモ整數デアル。依ツテソノ體積ヲ V' トスレバ, (1)ノ場合ニヨリ

$$V'=pqr$$

然ルニ $$V'=lmnV$$

$$\therefore\quad V=\frac{V'}{lmn}=\frac{pqr}{lmn}=\frac{p}{l}\cdot\frac{q}{m}\cdot\frac{r}{n}=abc$$

（3） a, b, c ガ無理數ナル場合。

コノ場合ニモ $V=abc$ ガ成立ツ。シカシソノ證明ハムヅカシイカラ略スル。

系一　直六面體ノ體積ヲ V, 底面積ヲ S, 高サヲ h トスレバ $V=Sh$ デアル。

系二　立方體ノ體積ヲ表ハス數ハソノ一稜ノ長サヲ表ハス數ノ立方ニ等シイ。

例　題 **(28)**

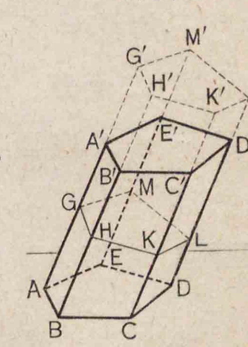
1. 內法長サ 35cm, 幅 28cm, 深サ 24cm ナル直方體ノ箱ノ容積ハ幾立デアルカ。
2. 體積ガ 729 立方糎デアル立方體ノ全表面積ヲ求メヨ。

3. 直六面體ノ三稜ノ比ガ 2:3:4 デ,體積ハ 3 立方米デアルトキ,ソノ三稜ノ長サハ各幾糎カ。

38. 角壔ノ體積

定理二十四　斜角壔ノ體積ハソノ直截面ヲ底面トシ,側稜ヲ高サトスル直角壔ノ體積ニ等シイ。

題意　斜角壔 ABCDE−A'B'C'D'E' ノ體積ハ,ソノ直截面GHKLMヲ底面トシ AA' ニ等シイ高サヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シイ。



證明　稜 AA' ヲ延長シテ,之ニ等シク GG' ヲ取リ, G' ヲ通ツテ GHKLM ニ平行ナル平面ヲ作リ,各側面ノ延長トノ交ハリヲ夫々 G'H', H'K', K'L', L'M' 及ビ M'G' トスレバ, GHKLM−G'H'K'L'M' ハ直角壔デ,ソノ側稜ハ AA' ニ等シク,ソノ底面ハ GHKLM デアル。

多面體 ABCDE−GHKLM トA'B'C'D'E'−G'H'K'L'M' トハ相對應スル稜,角及ビ面ガ夫々相等シク,

一方ヲ AA' ニ沿ウテ移動スレバ他ニ重ネ合ハスコトガ出來ル。故ニソノ體積ハ相等シイ。

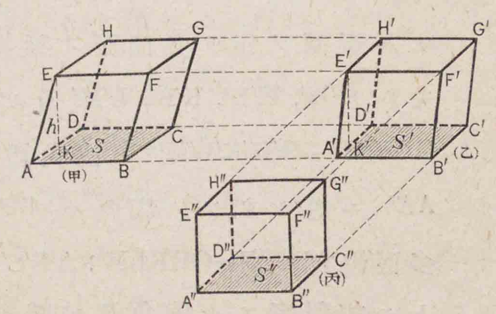
故ニコノ二ツノ多面體ニ夫々同ジ多面體 $GHKLM-A'B'C'D'E'$ ヲ加ヘタモノハ相等シイ。即チ斜角壔 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ ノ體積ハ直角壔 $GHKLM-G'H'K'L'M'$ ノ體積ニ等シイ。

系 平行六面體ノ一双ノ相對スル稜ヲ含ム平面ハ之ヲ相等シイ體積ヲ有スル二ツノ三角壔ニ分ケル。

定理二十五 平行六面體ノ體積ヲ表ハス數ハソノ底面積ト高サトヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

題意 平行六面體 $ABCD-EFGH$(甲)ノ底面積ヲ S, 高サ EK ヲ h トシ,ソノ體積ヲ V トスレバ

$$V=Sh$$



證明 平行六面體(甲)ノ稜 AB ヲ延長シ,ソノ上ニ

$A'B'$ ヲ AB ニ等シク取リ, A', B' ヲ通ッテ AB' ニ垂直ナル平面ヲ作リ, AB ニ平行ナル各稜ノ延長ト交ハラスト直四角壔 $A'D'H'E'-B'C'G'F'$(乙)ヲ得ル。コノ側稜 $A'B'$ ハ(甲)ノ側稜 AB ニ等シク,面 $A'H'$ ハ稜 AB ニ垂直ナル直截面デアルカラ, (甲)ハ(乙)ト等積デアル。

次ニコノ直四角壔(乙)ノ稜 $D'A'$ ヲ延長シ,ソノ上ニ $D''A''$ ヲ $D'A'$ ニ等シク取リ, A'' 及ビ D'' ヲ通ッテ $D'A''$ ニ垂直ナル平面ヲ作リ,(乙)ノ稜 $D'A'$ ニ平行ナル各稜ノ延長ト交ハラスト直六面體 $A''B''C''D''-E''F''G''H''$(丙)ヲ得ル。コノ側稜 $D''A''$ ハ(乙)ノ側稜 $D'A'$ ニ等シク,面 $A''F''$ ハ稜 $D'A''$ ニ垂直ナル直截面デアルカラ(乙)ハ(丙)ト等積デアル。ソシテ

直六面體(丙)ノ體積=底面積 S'' × 高サ $A''E''$

然ルニ S, S'' ハ共ニ S' ト等底等高ノ平行四邊形ノ面積デ相等シク,又 $A''E''$ ハ高サ h ニ等シイ。

$$\therefore \quad V=Sh$$

系一 三角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

系二 任意ノ角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

從ツテ角壔ノ體積ヲV,底面積ヲS,高サヲhトスレバ

$$V=Sh$$

例題 (29)

1. 三角壔ノ側稜ノ長サガ1mデ,ソノ直截面ノ三邊ノ長サガ夫々9cm, 12cm, 15cmデアル。ソノ體積ハ幾立方糎カ。

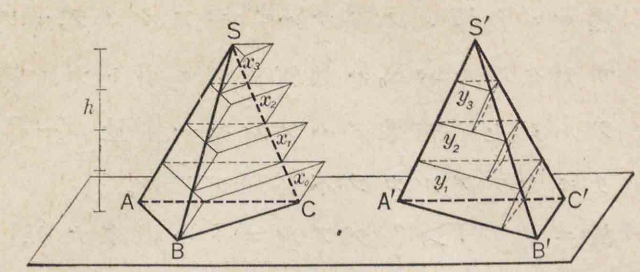
2. 正六角壔ノ底面ノ一邊ガ6cmデ側稜ノ長サガ15cmデアル。ソノ體積ヲ求メヨ。

39. 角錐ノ體積

定理二十六 底面及ビ高サガ夫々相等シイ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

題意 二ツノ三角錐S−ABC, S′−A′B′C′ニ於テ底面ABCトA′B′C′トノ面積ガ相等シク且ツ高サガ共ニhナルトキ,ソノ兩三角錐ノ體積ヲ夫々V, V'トスレバ

$$V=V'$$



證明 假リニ $V>V'$ デアルトスル。今兩三角錐ノ側稜SA, S′A′ヲ夫々n等分(例ヘバ圖ノヤウニ4等分)シ,ソノ各分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル平面デ兩角錐ヲ截レバ,ソノ相對應スル截面ノ面積ハ夫々相等シイ。

ソコデ三角錐S−ABCデハソノ底面ABC及ビ今作ツタ$(n-1)$箇ノ截面ヲ夫々下底トシSAニ平行ナル側稜ヲ有スルn箇ノ三角壔$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ヲ作リ,又三角錐S′−A′B′C′デハ今作ツタ$(n-1)$箇ノ截面ヲ上底トシ,S′A′ニ平行ナル側稜ヲ有スル$(n-1)$箇ノ三角壔$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$ヲ作レバ

$$x_0+x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots>V>V'>y_1+y_2+y_3+\ldots\ldots$$

且ツ $x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3,\ \ldots\ldots$

∴ $V-V'<x_0$

然ルニ角壔 x_0 ノ高サハ $\frac{h}{n}$ デアルカラ, n ヲ限リナク増セバ x_0 ハ如何程デモ小トナル筈デアルガ,上ノ結果デハソレハ一定量 $V-V'$ ヨリモ大デアルカラ不合理デアル。

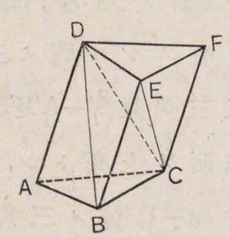
故ニ　$V>V'$ デアルコトハ出來ナイ。

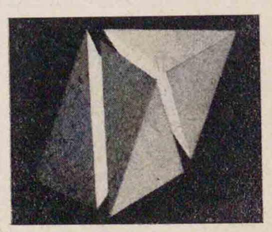
又同様ニ $V<V'$ デアルコトモ出來ナイ。

$$\therefore \quad V=V'$$

定理 二十七 三角壔ハ相等シイ體積ヲモツ三ツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。

證明 三角壔ヲ ABC—DEF トシ,之ヲ二平面 DEC, DBC デ截ルト,三ツノ三角錐 D—ECF, D—BCE, D—ABC ヲ得ル。





ソシテ三角錐 D—ECF, D—BCE ニ於テ,高サハ何レモ D カラ平面 BCFE ニ至ル距離デ,又ソノ底面 ECF, BCE ハ相等シイ。故ニコノ兩三角錐ノ體積ハ相等シイ。

次ニ三角錐 D—BCE ト D—ABC 卽チ C—BED ト C—ABD トハ高サガ何レモ C カラ平面 ABED ニ至ル距離デ,又ソノ底面 BED, ABD ハ相等シイ。故ニコノ兩三角錐ノ體積モ相等シイ。

故ニコレ等ノ三ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

系一 三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

系二 任意ノ角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

從ッテ角錐ノ體積ヲ V, 底面積ヲ S, 高サヲ h トスレバ

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

例題 **(30)**

1. 底面ノ一邊ガ $8cm$ デ高サガ $12cm$ デアル正四角錐ノ體積ヲ求メヨ。
2. 底面積ガ 120平方糎デ體積ガ 600立方糎デアル角錐ノ高サヲ求メヨ。
3. 埃及ノ大ぴらみっどノ底面ハ一邊ガ $200m$ ノ

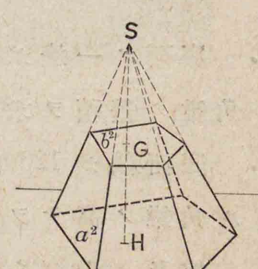
正方形デ,ソノ側面ハ何レモ正三角形デアルトイフ。ソノ體積ヲ求メヨ。

4. 四面體 ABCD ニ於テ底面 ABC ハ一邊ノ長サガ $a\,cm$ ナル正三角形デ且ツ稜 AD ノ長サハ $2a\,cm$, $\angle BAD=\angle CAD=45°$ デアル。コノ四面體ノ體積ヲ求メヨ。

40. 角錐臺ノ體積

定理 二十八 角錐臺ノ體積ハ兩底面ノ面積トソノ比例中項トノ和ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

證明 角錐臺ノ兩底面ノ面積ヲ a^2 及ビ b^2 デ表ハシ,ソノ高サヲ h,體積ヲ V トスル。



今側面ヲ延長シテ出來ル角錐ノ頂點ヲ S トシ, S カラ底面ニ至ル距離 SH, SG ヲ夫々 m, n トスレバ

$$GH=m-n=h$$

V ハ S ヲ頂點トスルコノ二ツノ角錐ノ體積ノ差デアルカラ

$$V=\frac{1}{3}ma^2-\frac{1}{3}nb^2$$

然ルニ
$$\frac{m^2}{a^2}=\frac{n^2}{b^2}$$

$$\therefore\quad \frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{m-n}{a-b}=\frac{h}{a-b}$$

$$\therefore\quad m=\frac{ha}{a-b},\quad n=\frac{hb}{a-b}$$

$$\therefore\quad V=\frac{ha^3}{3(a-b)}-\frac{hb^3}{3(a-b)}=\frac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)}$$
$$=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

ココニ ab ハ兩底面ノ面積 a^2, b^2 ノ比例中項デアル。

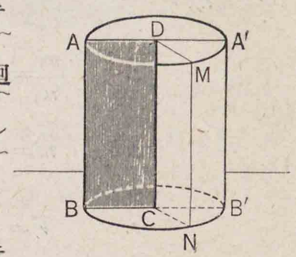
例題 (31)

1. 正六角錐臺ガアル。ソノ兩底面ノ一邊ノ長サガ夫々 $54\,cm$, $72\,cm$ デ,高サハ $45\,cm$ デアル。ソノ體積ハ幾ラカ。
2. 底面積ガ b 平方糎デ,高サガ h 糎ノ角錐ヲ頂點カラ h' 糎ノ距離ニアツテ底面ニ平行ナル平面デ截ツタトキ,ソノ二部分ノ體積ハ各何程カ。

第3章 曲面體

41. 直圓壔

矩形ガソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ他ノ三邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面デ圍マレタ立體ヲ**直圓壔**トイフ。



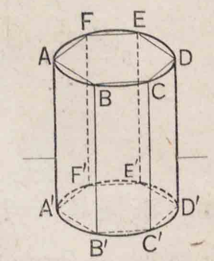
軸ニ垂直ナル二邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面ハ相等シイ圓デ,之ヲ直圓壔ノ**底面**トイヒ,又軸ニ平行ナル邊ヲ直圓壔ノ**母線**,母線ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面ヲ**側面**トイフ。又軸トシタ邊ノ長サ即チ兩底面ノ距離ヲ直圓壔ノ**高サ**トイヒ,底面ノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**トイフ。

直圓壔ノ底面ニ內接又ハ外接スル多角形ヲ底面トシ,之ト等高ナル直角壔ハソノ直圓壔ニ**內接**又ハ**外接**スルトイフ。

定理 **二十九** 直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シク,ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

題意 直圓壔ノ半徑ヲr,高サヲhトシ,ソノ側面積ヲS,體積ヲVトスレバ

$$S=2\pi rh,\qquad V=\pi r^2h$$



證明 直圓壔ニ於テソノ底面ニ內接スル正n角形ヲ作リ之ヲ底面トシ,ソノ直圓壔ト等高ナル直角壔ヲ作ルト,nヲ限リナク增大シタ極限ニ於テハ,コノ直角壔ノ底面及ビ側面ハ夫々直圓壔ノ底面及ビ側面トナル。

今內接直角壔ノ底面ノ周及ビ面積ヲ夫々p及ビS',高サヲhトスルト,ソノ側面積及ビ體積ハ夫々ph及ビ$S'h$デアル。ソシテnヲ限リナク增大スレバ,pハ直圓壔ノ底面ノ周$2\pi r$トナリ,S'ハ直圓壔ノ底面積πr^2トナル。

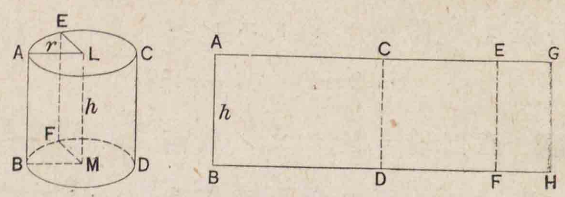
依ツテ直圓壔ノ側面積及ビ體積ハ

$$S=\text{底面ノ周}\times\text{高サ}=2\pi rh$$

$$V=\text{底面積}\times\text{高サ}=\pi r^2h$$

注意 直圓壔ノ側面ヲ一ツノ母線ABニ沿ウテ截リ,之ヲ平面上ニ展開スルト矩形ABHGヲ得ル。ABト

BH トハ夫々直圓壔ノ母線及ビ底面ノ周ニ等シイ。

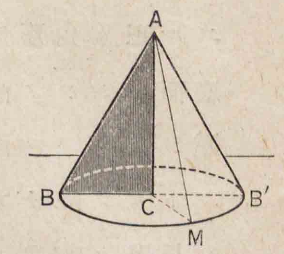


例題 (32)

1. 直圓壔ノ半徑ヲ r, 高サヲ h トスレバ,ソノ表面積ハ $2\pi r(r+h)$ デアル。
2. 高サ 34cm, 半徑 15cm ナル直圓壔ノ側面積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。
3. 底ノ內徑 30cm, 深サ 40cm ナル直圓壔形ノ水槽ガアル。ソノ容量ハ幾立カ。
4. 長サ 10m ノ銅線ノ目方ガ 6.5g デアル。銅ノ比重ヲ 8.9 トスレバ,コノ銅線ノ直徑ハ幾粍デアルカ。(粍ノ小數第一位マデ求メヨ)
5. 直截面ノ外徑ガ D, 內徑ガ d デ長サガ l ナル鐵管ノ體積ハ $\frac{1}{4}\pi(D+d)(D-d)l$ デアル。
6. 矩形ノ二隣邊ヲ a, b トスレバ,ソノ各邊ヲ軸トシコノ矩形ヲ廻轉シテ出來ル二ツノ直圓壔ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

42. 直圓錐

直角三角形ガソノ直角ノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ,他ノ二邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面デ圍マレタ立體ヲ**直圓錐**トイフ。



軸ニ垂直ナル邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル圓ヲ直圓錐ノ**底面**トイヒ,又コノ斜邊ヲ直圓錐ノ**母線**,母線ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面ヲ**側面**トイフ。又軸トシタ邊ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**トイヒ,母線ノ長サヲソノ**斜高**トイフ。又母線ト軸トノ交點ヲ直圓錐ノ**頂點**トイフ。

直圓錐ノ底面ニ內接又ハ外接スル多角形ヲ底面トシ,之ト頂點ヲ共有スル角錐ハソノ直圓錐ニ**內接**又ハ**外接**スルトイフ。

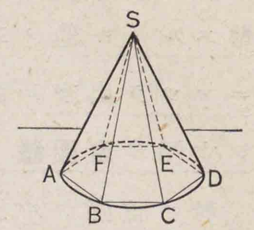
定理 三十 直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シク,ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

題意 直圓錐ノ底面ノ半徑ヲ r, 斜高ヲ l, 高サ

ヲ h トシ,ソノ側面積ヲ S, 體積ヲ V トスレバ

$$S=\frac{1}{2}\times 2\pi rl=\pi rl,\quad V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

證明 直圓錐ノ底面ニ内接スル正 n 角形ヲ作リ,之ヲ底面トシ,ソノ直圓錐ト頂點ヲ共有スル直角錐ヲ作ルト,n ヲ限リナク増大シタ極限ニ於テハ,コノ直角錐ノ底面及ビ側面ハ夫々ソノ直圓錐ノ底面及ビ側面トナル。



今内接直角錐ノ底面ノ周及ビ面積ヲ p, M, 高サヲ h トシ,又側面ノ二等邊三角形ノ高サヲ l' トスレバ,ソノ側面積 S' 及ビ體積 V' ハ夫々

$$S'=\frac{1}{2}pl',\quad V'=\frac{1}{3}Mh$$

ソシテ n ヲ限リナク増大スレバ p 及ビ M ハ夫々直圓錐ノ底面ノ周及ビ面積トナリ,又 l' ハ直圓錐ノ斜高 l トナルカラ

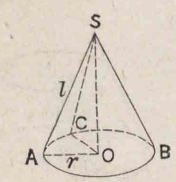
$$S=\frac{1}{2}\times\text{底面ノ周}\times\text{高サ}=\pi rl$$

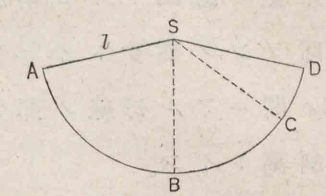
$$V=\frac{1}{3}\times\text{底面積}\times\text{高サ}=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

系 直圓錐ノ底面ノ半徑ヲ r, 高サヲ h トシ,ソノ側面積ヲ S トスレバ

$$S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

注意 直圓錐ノ側面ヲ一ツノ母線 SA ニ沿ウテ截リ,之ヲ平面上ニ展開スルト扇形 SAD ヲ得ル。扇形ノ半徑 SA ハ直圓錐ノ斜高 l ニ等シク,扇形ノ弧 ABD ハ直圓錐ノ底面ノ周 $2\pi r$ ニ等シイ。



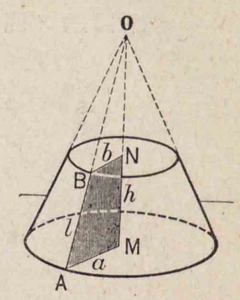


例題 (33)

1. 半徑 5*cm*, 高サ 12*cm* ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。
2. 半徑 8*cm*, 斜高 15*cm* ナル直圓錐ノ表面積ヲ求メヨ。
3. 漏斗ノ直圓錐狀ノ部分ノ口徑ガ 12*cm* デ,深サガ 10*cm* デアル。コノ部分ノ容積ハ約幾立デアルカ。
4. 一邊ノ長サガ a 糎ナル正三角形ヲ,ソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ出來ル立體ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

43. 直圓錐臺

直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ,ソノ截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**直圓錐臺**トイフ。ソノ截面ト底面トヲ共ニ直圓錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面ノ距離ヲソノ**高サ**トイヒ,又兩底面ノ間ニアル母線ノ部分ヲソノ**斜高**トイフ。



定理 **三十一** 直圓錐臺ノ

(1) 側面積ハ兩底面ノ周ノ和ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ。

(2) 體積ハ兩底面ノ面積トソノ比例中項トノ和ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

證明 M, N ヲ直圓錐臺ノ底面ノ中心, AB ヲ一ツノ母線, O ヲ直圓錐臺ノ側面ヲ延長シテ出來タ直圓錐ノ頂點トスレバ, AB 及ビ MN ノ延長ハ O ヲ通ル。(上圖參照)

今直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ a, b, 高サヲ h, 斜高ヲ l トシ,且ツ

$$\mathrm{OA}=x,\quad \mathrm{OB}=y;\quad \mathrm{OM}=p,\quad \mathrm{ON}=q$$

トスレバ $h=p-q,\quad l=x-y$

且ツ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{q}{p}=\dfrac{y}{x}$

コレ等ノ各比ノ値ヲ k ト置ケバ

$$b=ak,\quad q=pk,\quad y=xk$$

ソコデコノ直圓錐臺ノ側面積ヲ S, 體積ヲ V トスレバ

$$\begin{aligned}
S&=\pi ax-\pi by=\pi ax-\pi axk^2=\pi ax(1-k^2)\\
&=\pi a(1+k)x(1-k)=\pi(a+ak)(x-xk)\\
&=\pi(a+b)(x-y)=\pi(a+b)\,l\\
V&=\frac{1}{3}\pi a^2p-\frac{1}{3}\pi b^2q=\frac{1}{3}\pi a^2p-\frac{1}{3}\pi a^2pk^3\\
&=\frac{1}{3}\pi a^2p(1-k^3)=\frac{1}{3}\pi a^2(1+k+k^2)p(1-k)\\
&=\frac{1}{3}\pi(a^2+a^2k+a^2k^2)(p-pk)\\
&=\frac{1}{3}\pi(a^2+ab+b^2)h
\end{aligned}$$

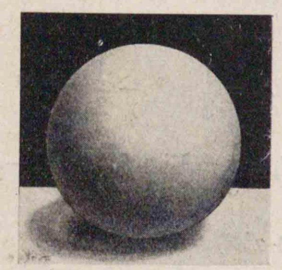
例題 **(34)**

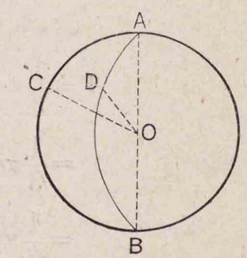
1. 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ガ 10cm 及ビ 20cm デ高サガ 24cm デアルトキ,ソノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。

2. 雨天ノトキ屋外ニ置イタ口徑32cm, 底徑20cm, 深サ24cmノばけつニ水ガソノ深サノ半分ダケ溜ツタトイフ。コノ時ノ雨量ハ一平方米ニツキ幾立デアルカ。

44. 球

半圓ガソノ直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ,ソノ弧ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面デ圍マレタ立體ヲ**球**トイフ。

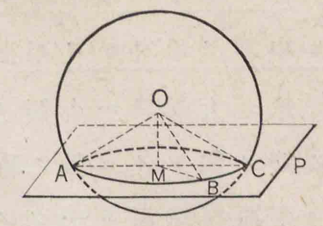




コノ曲面ヲ**球面**トイヒ,ソノ半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**,中心カラ球面上ノ一點ニ至ル線分ヲ球ノ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ球面上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ**直徑**トイフ。

定理 三十二 球ヲ一平面デ截ルトキハ,ソノ截面ハ圓デアル。

題意 中心Oナル球ヲ平面Pデ截リABCヲソノ截面トスレバ, ABCハ圓デアル。



證明 平面Pガ球ノ中心Oヲ通ルトキハ截面ノ周上ノ點ハ平面P上ニアツテ,Oカラノ距離ガ球ノ半徑ニ等シイ。故ニ截面ハOヲ中心トシ,球ノ半徑ニ等シイ半徑ノ圓周デアル。

平面PガOヲ通ラナイトキハ,OカラPニ垂線OMヲ引キ,ソノ足ヲMトシ,截面ABCノ周上ノ任意ノ點Bヲ取リBM, BOヲ引クト,三角形OBMニ於テ角Mハ直角デ,又斜線OBハ球ノ半徑ニ等シク,且ツOMハ一定デアル。故ニMBモ一定デアルカラ,截面ABCハP上ニ於テMヲ中心,MBヲ半徑トスル圓周デアル。

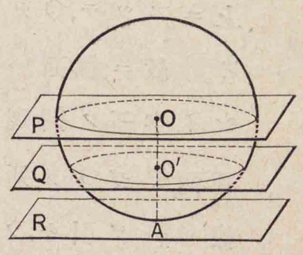
系 一ツノ球ヲ平面デ截ルトキ,ソノ中心カラ等距離ニアル截面ハ相等シク,又中心カラ不等ナル距離ニアル截面デハ,中心ニ近イモノガ遠イモノヨリモ大デアル。

球ノ中心ヲ通ル平面デノ截面ヲ球ノ**大圓**トイヒ,中心ヲ通ラナイ平面デノ截面ヲ**小圓**トイフ。

球ノ大圓又ハ小圓ノ平面ニ垂直ナル直徑ヲソノ圓ノ軸トイヒ,軸ノ兩端ヲソノ圓ノ**極**トイフ。

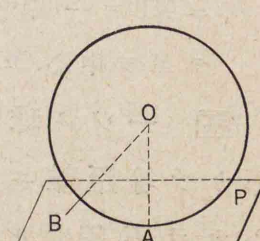
平面ガ球面ト一ツノ圓周ヲ共有スルトキハ,ソノ平面ハ球(又ハ球面)ニ**交ハル**トイフ。

平面又ハ直線ガ球面ト唯一點ヲ共有スルトキハ,ソノ平面又ハ直線ハ球(又ハ球面)ニ**切スル**トイヒ,ソノ平面ヲ**切平面**,ソノ直線ヲ**切線**,ソノ點ヲ**切點**トイフ。



定理 三十三 球面上ノ一點ニ於テソノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル平面ハソノ球ニ切スル。

證明 中心Oナル球ノ面上ノ一點Aニ於テ半徑OAニ垂直ナル平面ヲPトシ,P上ニA以外ノ任意ノ點Bヲ取リ,O,Bヲ結べバ



$$OA \perp P \quad \therefore \quad OB > OA$$

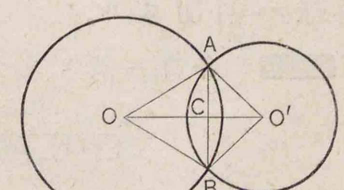
故ニ點Bハ球面外ニアル。故ニPハ球ニ切スル。

系 一 球面上ノ一點ニ於テソノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ハソノ球ニ切スル。

系 二 一平面ガ球ニ切スルトキハ,ソノ切點ニ於テソノ平面ニ垂直ナル直線ハ球ノ中心ヲ通ル。

定理 三十四 二ツノ球面ガソノ中心ヲ通ル直線外ノ一點ヲ共有スルトキハ,コノ兩球面ハ一ツノ圓周ヲ共有スル。

證明 中心ガO, O'ナル二ツノ球面ガ直線OO'外ノ一點Aヲ共有スルトセヨ。



直線OO'ト點Aトノ決定スル平面デ兩球ヲ截ルトキハ大圓O, O'ヲ得,兩圓周ハ二點A,Bデ交ハリABトOO'トノ交點ヲCトスレバ $AB \perp OO'$, $AC=BC$

今OO'ヲ軸トシテコレ等ノ二圓周ヲ廻轉ス

レバ球面 O, O′ ヲ得,點 A ハ C ニ於テ OO′ ニ垂直ナル平面上ニ於テ AC ヲ半徑トスル圓周ヲ畫キ,兩球面ハコノ圓周ヲ共有スル。

ソシテ兩球面ニハコノ他ニ共通點ハナイ(各自ニ確メヨ)。

二ツノ球面ガ一圓周ヲ共有スルトキハ,兩球(又ハ球面)ハ**相交ハル**トイフ。

二ツノ球面ガ唯一點ヲ共有スルトキハ兩球ハ互ニ**切スル**トイヒ,ソノ各ガ他ノ外ニアルトキハ**外切**,一ツガ他ノ内ニアルトキハ**内切**スルトイフ。

定理 三十五 二ツノ球面ガソノ中心ヲ通ル直線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,コノ兩球ハ相切スル。

證明 (各自ニ試ミヨ)

例題 (35)

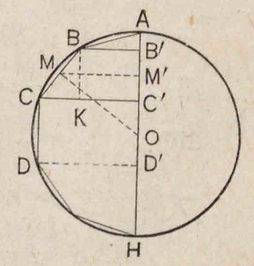
1. 同一ノ球ニ於テ二ツノ大圓ハ互ニ他ヲ等分スル。
2. 同一ノ平面上ニナイ四ツノ點ヲ通ル球面ハ唯一ツアル。
3. 四面體ニ内切スル球面ノ中心ヲ求メヨ。

4. 球ニ切スル直線又ハ平面ハソノ切點ヲ通ル半徑ニ垂直デアル。
5. 球外ノ一點カラソノ球ニ切線ヲ引ケ。
6. 半徑ガ等シクナイ二ツノ球面ノ位置ノ關係ハ幾通リアルカ。

45. 球ノ表面積及ビ體積

定理 三十六 半徑ガ r ナル球ノ表面積ハ $4\pi r^2$ デアル。

證明 中心 O, 半徑 r ナル半圓 ABC……H ガ直徑 AH ヲ軸トシテ一廻轉スレバ半徑ガ r ナル球ガ出來ル。



コノ半圓周ヲ n 等分シ,ソノ各分點 B, C, D, …… カラ AH ニ垂線ヲ引キソノ足ヲ夫々 B′, C′, D′, … トスレバ,コノ半圓ノ廻轉ニ伴ッテ三角形 ABB′, 梯形 B′BCC′ 等デ夫々一ツノ直圓錐又ハ直圓錐臺ヲ出來ル。コレ等ノスベテノ立體ノ側面積ノ和ヲ S' トスル。

サテソノ中ノ一ツデアル梯形 $B'BCC'$ ニツイテ考ヘルニ,ソノ側面積ハ $\pi BC(BB'+CC')$ デアル。依ツテ BC ノ中點 M カラ AH ニ垂線 MM' ヲ引クト,コノ側面積ハ $2\pi BC\cdot MM'$ トナル。

ソコデ O, M ヲ結ビ,又 B カラ CC' ニ垂線 BK ヲ引クト　$\triangle BCK \backsim \triangle MOM'$

従ツテ　$BC:MO=BK:MM'$

卽チ　$BC:MO=B'C':MM'$

$\therefore$　$BC\cdot MM'=MO\cdot B'C'$

故ニコノ側面積ハ又 $2\pi MO\cdot B'C'$ トナル。

他ノ梯形ニツイテモ同様ノコトガイハレ,又三角形 ABB' ハ梯形ノ平行ナル一邊ガ零トナツタ特別ノ場合ト考ヘレバヤハリ同様ノ結果ガ得ラレル。ソシテコレ等ノ結果ニ於テ MO ノ長サハ弦 AB, BC, …… ニツイテスベテ一定デアルカラ,之ヲ r' トスレバ

$$\begin{aligned} S' &= 2\pi r'AB'+2\pi r'B'C'+\cdots\cdots \\ &= 2\pi r'(AB'+B'C'+\cdots\cdots) \\ &= 2\pi r'\cdot AH = 4\pi r'r \end{aligned}$$

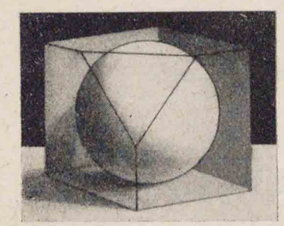
ソコデ n ヲ限リナク増大スレバ,r' ノ極限ハ

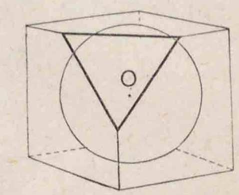
球ノ半徑 r トナリ,S' ノ極限ハ球ノ表面積 S トナルカラ

$$S=4\pi r^2$$

定理三十七　半徑ガ r ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル。

證明　半徑ガ r ナル球ノ體積ヲ求メルタメニ,





スベテノ面ガ皆コノ球ニ切スル一ツノ多面體ヲ取リ,ソノ各面ノ面積ヲ $A_1, A_2, \cdots\cdots$ トシ,中心 O トソノ各頂點トヲ結ブト,コノ多面體ハ O ヲ共通ノ頂點トシ,各面ヲ底面トスル角錐ニ分ケラレ,コレ等ノ角錐ノ高サハ皆球ノ半徑 r ニ等シイ。

依ツテコノ多面體ノ表面積及ビ體積ヲ夫々 S' 及ビ V' トスレバ

$$S'=A_1+A_2+\cdots\cdots$$

$$V'=\frac{1}{3}rA_1+\frac{1}{3}rA_2+\cdots\cdots=\frac{1}{3}rS'$$

サテコノ多面體ヲソノ各頂點トOトノ間ニ於テ球面ニ切スル平面デ截ルコトニヨツテソノ面ノ數ヲ增シ,各面ノ面積ヲ小サクスルコトガ出來ル。例ヘバ外接スル正六面體カラ始メテ漸次面ノ數ヲ限リナク增セバ,V'ノ極限ハ球ノ體積Vトナリ,S'ノ極限ハ球ノ表面積$4\pi r^2$トナル。

$$\therefore\quad V=\frac{1}{3}r\cdot 4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$\boxed{\text{例　題}}$ (**36**)

1. 半徑ガ$12cm$ナル球ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。但シ$\pi=3.1416$トスル。

2. 半徑ガ$7cm$ナル球ト體積ガ相等シクテ,底面ノ半徑ガ$8cm$ナル直圓錐ノ高サヲ求メヨ。

3. 球ニ外接スル直圓壔ノ側面積ハソノ球ノ表面積ニ等シイ。

4. 球ノ體積ハソノ外接直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シイ。

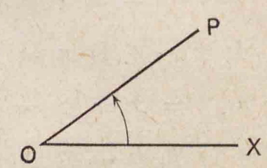
5. 體積ガ$1\,l$ナル球ノ半徑ヲ求メヨ。但シ$\pi=\dfrac{22}{7}$トスル。

第三篇　三　角　法

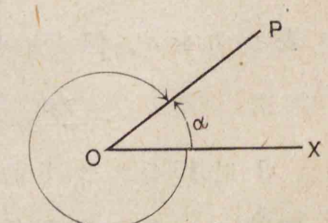
第1章　一般ノ角ノ三角函數

46. 一般ノ角

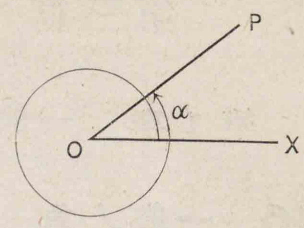
角XOPヲソノ一邊OXヲ固定シ他ノ邊OPガソノ角ノ平面上ヲOXノ位置カラOPノ位置マデ廻轉シテ出來タモノト考ヘルトキ,OXヲ角ノ**原線**トイヒ,廻轉スル邊OPヲ角ノ**動徑**トイフ。



又動徑ガ廻轉スルノニ正反對ノ二ツノ向キガアル。コノ相反スル二ツノ向キヲ區別スルタメニ,角ニ正負ノ符號ヲツケテ時計ノ針ト反對ノ向キニ廻轉シテ出來タ角ヲ**正角**トイヒ,時計ノ針ト同ジ向キニ廻轉シテ出來タ角ヲ**負角**トイフ。



又角ノ大サハ動徑ノ原線カラノ廻轉ノ分量デ



アルカラ,動徑ガ OX ヲ發シテ正又ハ負ノ向キニ廻轉シ幾回モ OX ノ位置ヲ通過シテ OP ノ位置ニ來タモノトモ考ヘラレル。従ッテ 360° ヨリモ大ナル角モ,又 −360° ヨリモ小ナル角モ考ヘルコトガ出來ル。

カヤウニ角ノ意義ヲ擴張スルコトニヨッテ角ノ大サハ正負スベテノ實數値ヲ取リ得ルコトトナル。コノヤウニソノ大サニ何等ノ制限ヲモツケナイ角ヲ**一般ノ角**トイフ。

二直線 OX, OP ノナス最小ナル正角ヲ α(度ヲ單位)トスレバ,コノ二直線ノナス一般ノ角ハ

$$\alpha + n\cdot 360°$$

デ表ハサレル。但シ n ハ零又ハ正負ノ整數デアル。

例 題 (37)

1. 3時15分カラ5時マデノ間ニ時計ノ長針ガ廻轉スル角ノ絶對値ハ何度カ。
2. 次ノ角ノ動徑ノ廻轉方向及ビ位置ヲ示セ。

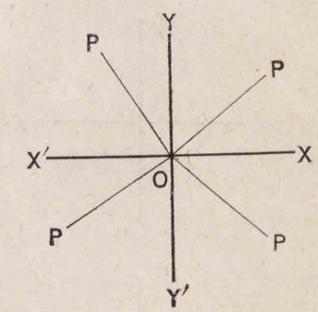
400°, −150°, −420°

3. 次ノ各ノ角ト同ジ二邊ヲ有スル正角ノ最小ナルモノヲ求メヨ。

500°, −135°, −300°

47. 象限

OX ヲ原線トスル角 XOP ガ 90° ニ等シイトキノ動徑 OP ノ取ル位置ヲ OY トシ, XO, YO ノ延長ヲ夫々 OX′, OY′ トスレバ,二直線 XOX′, YOY′ ハ直交シテ角 XOP ノ平面ヲ四ツニ分ケル。コノ各部分ヲ**象限**トイヒ, XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX ヲ順次ニ**第一象限,第二象限,第三象限,第四象限**トイヒ, ∠XOP ノ動徑 OP ガ何レノ象限ニアルカニヨッテ, ∠XOP ヲ**ソノ象限ノ角**トイフ。例ヘバ OP ガ第二象限ニアレバ ∠XOP ヲ第二象限ノ角トイフ。

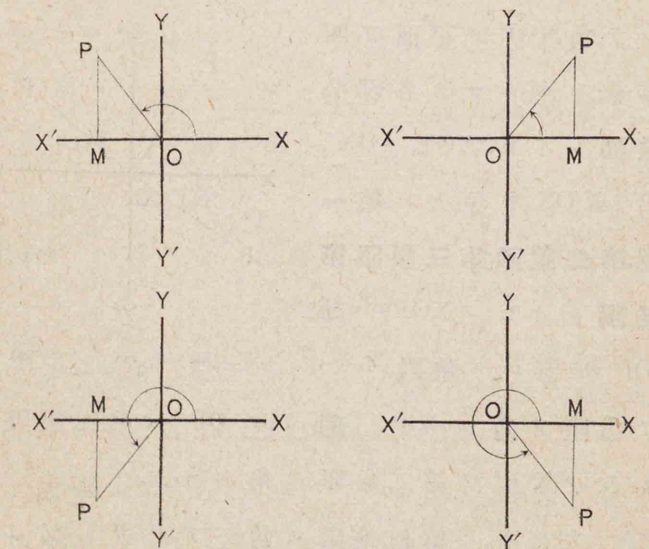


問 次ノ各ハ第何象限ノ角デアルカ。又コレ等ノ角ヲ圖デ示セ。

120°, 225°, 430°, −40°, −305°, −750°

48. 一般ノ角ノ三角函數

角 XOP ヲ θ デ表ハシ,動徑 OP 上ノ一點 P カラ原線 OX 又ハソノ延長 OX′ ニ引イタ垂線ノ足ヲ M トスレバ, OM 及ビ MP ヲ夫々直交軸 XX′, YY′ ニ關スル點 P ノ**横線**及ビ**縦線**トイフ。ソシテ θ ガ第何象限ノ角デアルカヲ區別スルタメニ線分 OP, OM, MP ノ符號ニツイテ次ノ規約ヲ設ケル。



[I] 動徑 OP ハ常ニ正トスル。

[II] 横線 OM ハ OX 上ニアルトキハ正トシ, OX′

上ニアルトキハ負トスル。

[III] 縦線 MP ハ XOX′ ニ對シテ OY ト同ジ側ニアルトキハ正トシ, OY′ ト同ジ側ニアルトキハ負トスル。

コノ規則ニ從フ線分 OP, OM, MP ノ比ヲ一般ノ角 θ ノ**三角函數**トイヒ,鋭角ノ場合ト同様ニ

正弦 (sine) $\quad \sin\theta = \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{\text{縦線}}{\text{動徑}}$

餘弦 (cosine) $\quad \cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{\text{横線}}{\text{動徑}}$

正切 (tangent) $\quad \tan\theta = \dfrac{MP}{OM} = \dfrac{\text{縦線}}{\text{横線}}$

又正切,餘弦,正弦ノ逆數ヲ夫々**餘切** (cotangent), **正割** (secant), **餘割** (cosecant) トイヒ,角 θ ノ餘切,正割,餘割ヲ夫々 $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\mathrm{cosec}\,\theta$ デ表ハス。

各象限ニ於ケル三角函數ノ符號ハ次ノ表ノヤウデアル。

象限 / 函數	I	II	III	IV	象限 / 函數
$\sin\theta$	+	+	−	−	$\mathrm{cosec}\,\theta$
$\cos\theta$	+	−	−	+	$\sec\theta$
$\tan\theta$	+	−	+	−	$\cot\theta$

問 次ノ角ノ三角函數ヲ求メヨ。

120°, 225°, 300°, −30°, −150°

49. 同一角ノ三角函數ノ關係

定義ニヨツテ $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ ハ夫々 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ ノ逆數デアルカラ次ノ關係ガアル。

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta&=1\\ \cos\theta\cdot\sec\theta&=1\\ \tan\theta\cdot\cot\theta&=1 \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

次ニ前節ノ圖ニ於テ OM, MP ノ符號ノ如何ニ拘ハラズ

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{MP}{OP}}{\dfrac{OM}{OP}}=\frac{MP}{OM}=\tan\theta$$

$\therefore$

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ \cot\theta&=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

從ツテ

又 OP ハ OM, MP ヲ二邊トスル直角三角形ノ斜邊デアルカラ, OM, MP ノ符號ノ如何ニ拘ハラズ

$$MP^2+OM^2=OP^2$$

コノ式ノ兩邊ヲ順次ニ OP^2, OM^2, MP^2 デ割ルコ

トニヨツテ次ノ三式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\theta+\cos^2\theta&=1\\ 1+\tan^2\theta&=\sec^2\theta\\ 1+\cot^2\theta&=\operatorname{cosec}^2\theta \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

上ノ諸公式ヲ用ヒルトキハ角 θ ノ三角函數中ノ一ツヲ知レバソノ他ヲ求メルコトガ出來ル。但シ(3)ニヨツテ根號ヲ有スル式ヲ得タ場合ニハ θ ガ第何象限ノ角デアルカニヨツテソノ符號ヲ適當ニ定メナケレバナラナイ。

例 θ ガ第三象限ノ角デ $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ ナルトキ他ノ三角函數ヲ求メヨ。

解 θ ガ第三象限ノ角デアルカラ $\cos\theta$ ハ負デアル。

$$\therefore\quad \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\dfrac{3}{5}}{-\dfrac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{4}{3}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{5}{3}$$

例題 (38)

1. θ ハ第四象限ノ角デ $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ ナルトキ, $\sin\theta$ 及ビ $\tan\theta$ ヲ求メヨ。

2. θ ガ第三象限ノ角デ $\tan\theta=\dfrac{5}{12}$ ナルトキ,他ノ三角函數ヲ求メヨ。

3. θ ガ第二象限ノ角デ $\sin\theta=a$ $(a>0)$ ナルトキ,他ノ三角函數ヲ求メヨ。

50. 單位圓

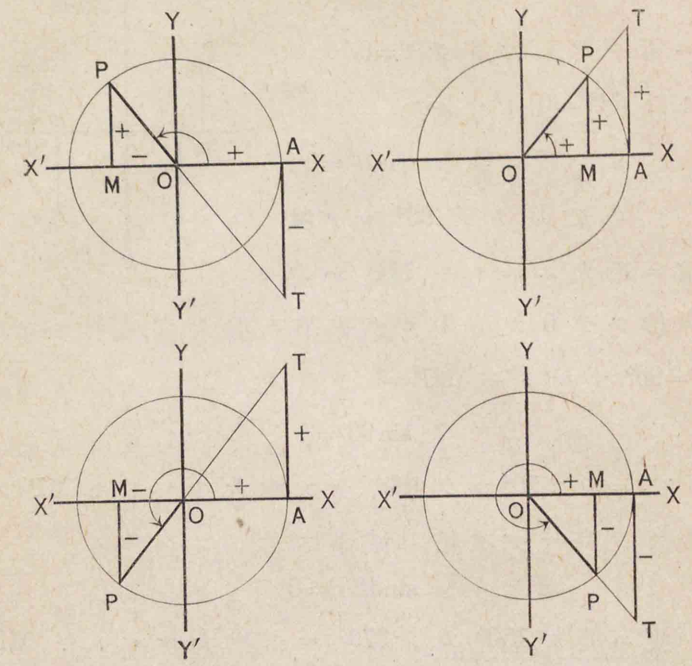
次ノ圖ノヤウニ角 θ ノ頂點Oヲ中心トシ單位ノ長サヲ半徑トスル圓ヲ書キ,原線 OX, 動徑 OP ト夫々A及ビPニ於テ交ハラシメ且ツAニ於ケルソノ圓ノ切線ト OP 又ハ PO ノ延長トノ交點ヲTトスレバ　$OP=OA=1$

$$\therefore \quad \sin\theta=\frac{MP}{OP}=MP$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=OM$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT$$

依ツテ半徑ガ長サノ單位ニ等シイ圓ヲ用ヒルト,三角函數ノ値ハ一ツノ線分ノ長サデ表ハスコトガ出來ル。カヤウナ圓ヲ**單位圓**トイフ。



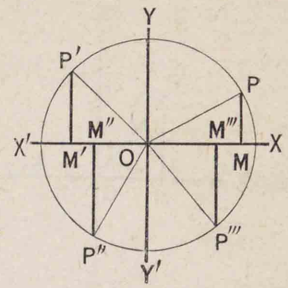
51. 三角函數ノ變化

單位圓ヲ用ヒテ角ノ三角函數ノ値ヲ一線分ノ長サデ表ハストキハ,ソノ線分ノ變化ニヨツテ三角函數ノ變化ノ狀態ヲ容易ニ知ルコトガ出來ル。

[1] **正弦ノ變化**

次ノ頁ノ單位圓Oニ於テ $\angle AOP=\theta$ トスレバ, $\sin\theta=MP$ デアルカラ θ ガ次第ニ0ニ近ヅクニ從

ヒ MP 卽チ $\sin\theta$ モ次第ニ 0 ニ近ヅク。ソシテ $\theta=0$ ナルトキ $MP=0$ トナル。



$$\therefore \quad \sin 0^\circ=0$$

又 θ ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ増大スルトキ MP ハ之ニ伴ツテ 0 カラ 1 マデ次第ニ増大スル。ソシテ $\theta=90^\circ$ ナルトキ $MP=1$ デアル。

$$\therefore \quad \sin 90^\circ=1$$

次ニ θ ガ 90° カラ 180° マデ増大スルトキ MP ハ 1 カラ 0 マデ次第ニ減小スル。ソシテ

$$\sin 180^\circ=0$$

更ニ θ ガ 180° カラ 270° マデ増大スルトキ MP ハ常ニ負デ,ソノ絶對値ハ 0 カラ 1 マデ次第ニ増大スル。ソシテ

$$\sin 270^\circ=-1$$

θ ガ 270° カラ 360° マデ増大スルトキ MP ハ猶負デソノ絶對値ハ 1 カラ 0 マデ減小スル。ソシテ

$$\sin 360^\circ=0$$

θ ガ 360° ヲ超エテ更ニ増大スレバ復タ上ト同一ノ變化ヲ繰返スコトハ明カデアル。

[2] 餘弦ノ變化

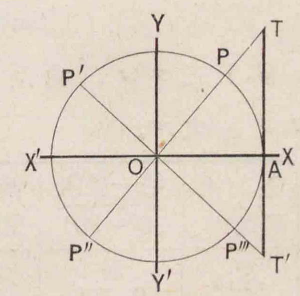
前頁ノ單位圓Oニ於テ $\cos\theta=OM$ デアル。ソレデ第一象限デハ $\cos\theta$ ハ 1 カラ 0 マデ減小シ,第二象限デハ 0 カラ -1 マデ減小シ,第三,第四象限デハ反對ニ増大スル。ソシテ

$$\cos 0^\circ=1,\quad \cos 90^\circ=0,\quad \cos 180^\circ=-1$$
$$\cos 270^\circ=0,\quad \cos 360^\circ=1$$

[3] 正切ノ變化

次ノ單位圓Oニ於テ $\tan\theta=AT$ デアル。ソシテ

$$\tan 0^\circ=0$$



θ ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ増大スルトキ, $\tan\theta$ ハ 0 カラ次第ニ増大シ, θ ガ限リナク 90° ニ近ヅケバ, $\tan\theta$ ハ如何ニ大ナル正數ヨリモ更ニ大トナル。之ヲ $\tan 90^\circ=+\infty$ デ表ハス。シカシ θ ガ僅ニ 90° ヲ超エルトキハ正切ハ俄ニ負トナル。卽チ第二象限ノ正切ハ負デアツテ, θ ガ 180° ノ方カラ 90° ニ限リナク近ヅクトソノ絶對値ハ如何ナル正數ヨリモ大トナル。之ヲ

$\tan 90° = -\infty$ デ表ハス。

$$\therefore \quad \tan 90° = \pm\infty$$

θ ガ $90°$ カラ $180°$ マデ增大スルトキハ $\tan\theta$ ハ常ニ負デソノ絕對値ハ∞カラ 0 マデ減小スル。ソシテ

$$\tan 180° = 0$$

θ ガ第三象限ニアルトキハ $\tan\theta$ ハ第一象限ノ場合ト同一ノ變化ヲナシ,第四象限ニ於テハ第二象限ノ場合ト同一ノ變化ヲスル。ソシテ

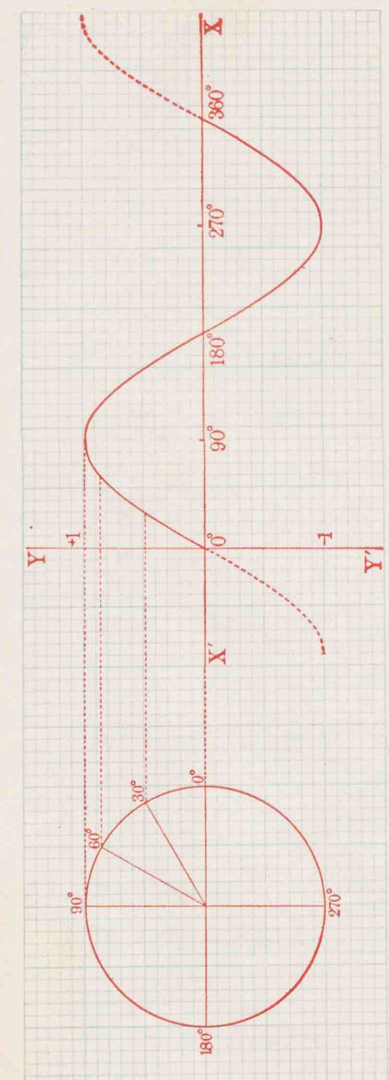
$$\tan 270° = \pm\infty$$

$$\tan 360° = 0$$

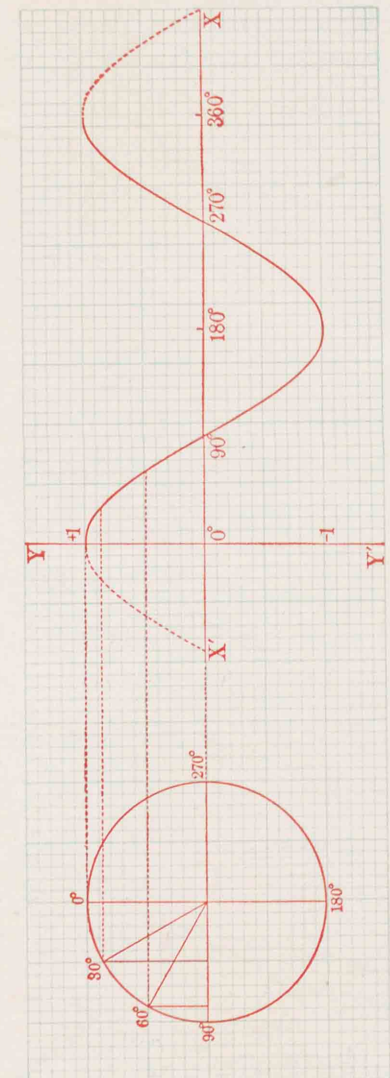
以上三ツノ三角函數ノ變化ヲ表デ示スト次ノヤウニナル。

θ / 函數	第一象限 $0°\to 90°$	第二象限 $90°\to 180°$	第三象限 $180°\to 270°$	第四象限 $270°\to 360°$
$\sin\theta$	增 $0 \nearrow 1$	減 $1 \searrow 0$	減 $0 \searrow -1$	增 $-1 \nearrow 0$
$\cos\theta$	減 $1 \searrow 0$	減 $0 \searrow -1$	增 $-1 \nearrow 0$	增 $0 \nearrow 1$
$\tan\theta$	增 $0 \nearrow +\infty$	增 $-\infty \nearrow 0$	增 $0 \nearrow +\infty$	增 $-\infty \nearrow 0$

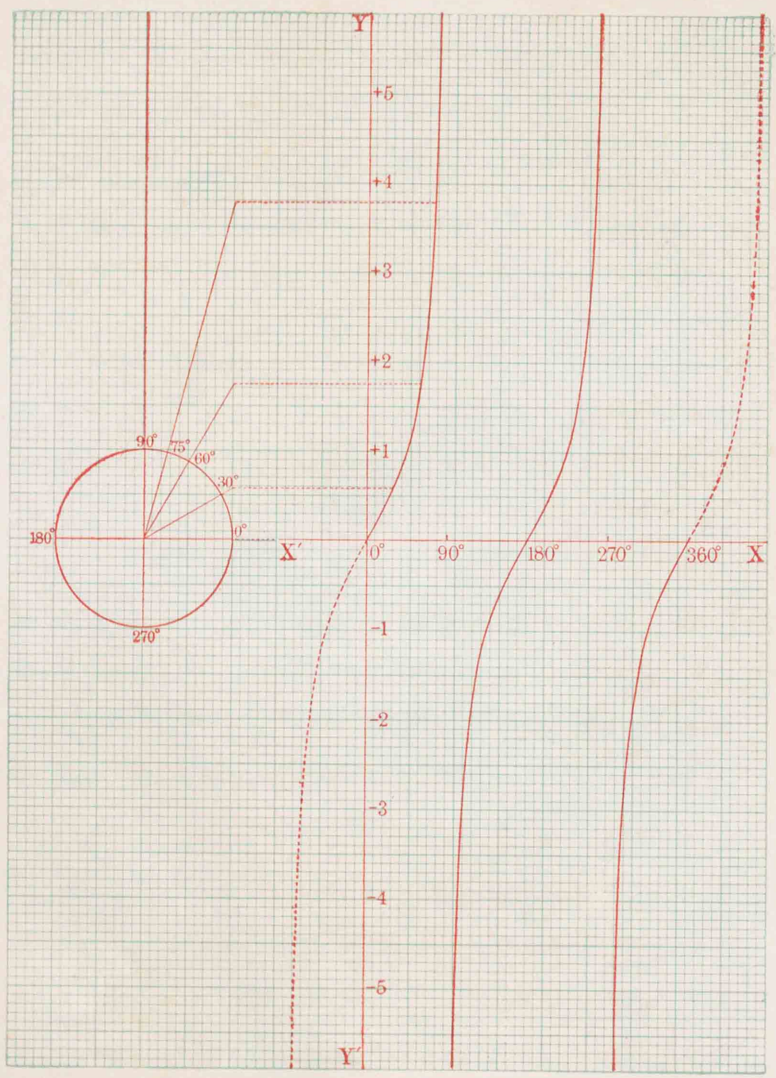
餘切,正割,餘割ハ夫々正切,餘弦,正弦ノ逆數デアルカラ容易ニソノ變化ヲ知ルコトガ出來ル。



正弦ノぐらふ



餘弦ノぐらふ



正切ノぐらふ

注意　上ノ研究ニヨツテ正弦及ビ餘弦ハソノ絶對値ガ1ヨリモ大ナルコトハナイ。正割及ビ餘割ハソノ絶對値ガ1ヨリモ小ナルコトハナイ。又正切及ビ餘切ハソノ値ニ何等ノ制限ナク正及ビ負ノスベテノ實數値ヲ取リ得ル。

52.　三角函數ノぐらふ

三角函數ノ變化ハぐらふデ示セバ一層明瞭デアル。之ヲ畫クニハ第50節ニ述ベタル單位圓デ MP, OM 及ビ AT ガ夫々角 θ ノ正弦,餘弦及ビ正切ノ値ヲ表ハスコトヲ應用スレバヨイ。

例ヘバ $\sin\theta$ ノ變化ヲぐらふデ示スニハ横軸ノ XX' 上ニ角ノ目盛ヲ取リ,次ニ XX' 上ニ中心ヲ有スル單位圓ヲ畫キ,ソノ圓周上ニ適宜ノ度ヲ置イテ點ヲ取リ,ソレ等ノ點ヲ通ツテ横軸ニ平行ニ引イタ直線ト横軸上同ジ度數ノ所ニ引イタ垂線トノ交點ヲ求メテ各點ヲ順次ニ連結スレバヨイ。

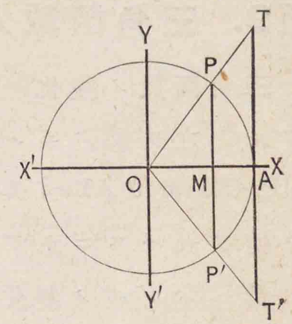
同様ナ方法デ $\cos\theta$ 及ビ $\tan\theta$ ノ變化モぐらふデ示スコトガ出來ル。前ニ挿入シタノハコレ等ノぐらふデアル。コレ等ノ曲線ハ夫々 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ ノぐらふデ,コレヲ夫々**正弦曲線,**

餘弦曲線,正切曲線トイフ。

問 $\sec\theta$ ノ變化ヲぐらふデ示セ。

53. 負角ノ三角函數

單位圓Oニ於テ $\angle AOP=\theta$, $\angle AOP'=-\theta$ トスレバ, P トP' トハ XX' ニ關シテ對稱デアルカラ P, P' カラ XX' ニ引イタ垂線ノ足ハ同一ノ點 M デ合スル。ソシテ



$$MP'=-MP,\quad AT'=-AT$$

デアルカラ次ノ等式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)&=\cos\theta\\ \tan(-\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

例題 (39)

1. 次ノ角ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

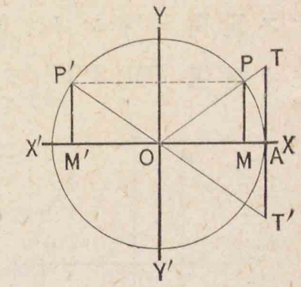
$-45°,\quad -60°,\quad -225°,\quad -330°$

2. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$\cot(-\theta)=-\cot\theta,\qquad \sec(-\theta)=\sec\theta$

54. 補角ノ三角函數

一般ニ角 θ ノ補角ハ $180°-\theta$ デ表ハサレル。單位圓Oニ於テ $\angle AOP=\theta$, $\angle AOP'=180°-\theta$ トスレバ, OP ト OP' トハ常ニ YY' ニ關シテ對稱デアル。依ツテ P 及ビ P' カラ XX' ニ夫々垂線 PM, P'M' ヲ引クトキハ



$$M'P'=MP,\quad OM'=-OM$$

デアルカラ

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°-\theta)&=\sin\theta\\ \cos(180°-\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180°-\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

例題 (40)

1. $120°, 135°, -150°$ ノ正弦及ビ餘弦ノ値ヲ求メヨ。

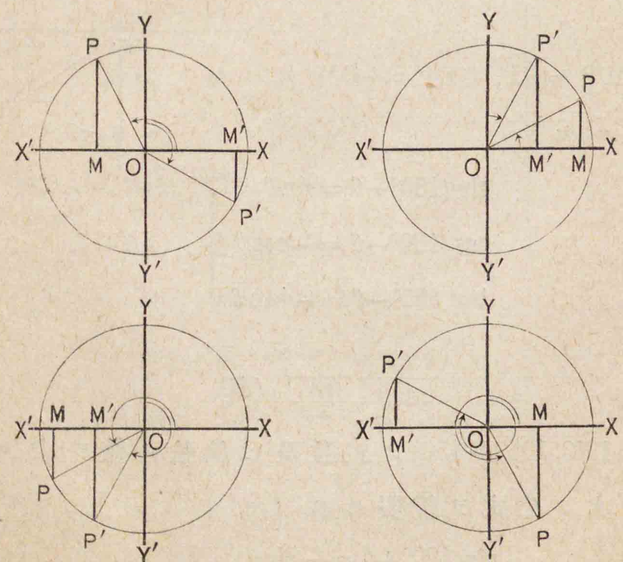
2. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°+\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(180°+\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180°+\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}$$

3. $210°, 225°, 240°, 330°$ ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

55. 餘角ノ三角函數

一般ニ角 θ ノ餘角ハ $90°-\theta$ デ表ハサレル。單位圓 O ニ於テ $\angle AOP=\theta$ トシ, $\angle AOP'=90°-\theta$ トスレバ, OP ガ XX' トナス鋭角ハ OP' ガ YY' トナス鋭角ニ等シイ。依ツテ P 及ビ P' カラ XX' ニ夫々垂線 PM, $P'M'$ ヲ引ケバ



$$\triangle P'OM' \equiv \triangle OPM$$

$$\therefore \quad M'P'=OM, \quad OM'=MP$$

故ニ θ ノ大サ及ビ符號ニ關セズ次ノ關係ガアル。

$$\left.\begin{aligned}\sin(90°-\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90°-\theta)&=\sin\theta\\ \tan(90°-\theta)&=\cot\theta\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

問 **1.** 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\left.\begin{aligned}\sin(\theta-90°)&=-\cos\theta\\ \cos(\theta-90°)&=\sin\theta\\ \tan(\theta-90°)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(90°+\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90°+\theta)&=-\sin\theta\\ \tan(90°+\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}$$

問 **2.** 次ノ三角函數ヲ 45° 以下ノ正角ノ三角函數デ表ハセ。

$\sin 74°$,　$\cos 123°$,　$\tan 130°$,　$\sin(-87°)$

例　題　(41)

1. 次ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

$\sin 300°$,　$\cos 750°$,　$\sin 1080°$,　$\cot(-210°)$

2. 三角函數ノ眞數表ニヨツテ次ノ角ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求メヨ。

112°,　245°,　−1000°

3. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\sin A+\sin(A+90^\circ)+\sin(A+180^\circ)+\sin(A+270^\circ)$

(2) $\tan(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A)+\cos(180^\circ-A)\cot(180^\circ-A)$

(3) $\sin 90^\circ+\tan^2(180^\circ-\alpha)-\operatorname{cosec}^2(90^\circ-\alpha)$

4. n ヲ任意ノ整數トスルトキ,次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

(1) $\sin(2n\cdot180^\circ+30^\circ)$

(2) $\tan\{(2n+1)\cdot180^\circ-45^\circ\}$

5. $\tan 238^\circ=\dfrac{8}{5}$ トスレバ $\sin 238^\circ$, $\cos 122^\circ$ ノ値ハ幾ラカ。

6. $\tan A=2-\sqrt{3}$ ナルトキ $\cos A$ ノ値ヲ求メヨ。

7. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $\tan(45^\circ+\alpha)\tan(45^\circ-\alpha)=1$

(2) $\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(A-45^\circ)=1$

8. 360° 以下ノ正角デ次ノ方程式ヲ滿足スルスベテノ角ヲ求メヨ。

(1) $4\sin^2 x=1$

(2) $\cos^2 x-2\cos x=3$

(3) $2\sin^2 x-5\cos x-4=0$

第2章　加法定理・減法定理

56. 正弦・餘弦ノ加法定理

二角 α,β ノ各ノ正弦及ビ餘弦ヲ知ツテ $\alpha+\beta$ ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メルニハ次ノ公式ニヨル。

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

之ヲ夫々正弦及ビ餘弦ノ**加法定理**トイフ。

證明 鋭角 XOY ヲ α, 鋭角 YOZ ヲ β デ表ハセバソノ和ナル角 XOZ ハ $\alpha+\beta$ デアル。

先ヅ $\alpha+\beta=90^\circ$ ナルトキハ $\sin\alpha=\cos\beta$ 及ビ $\cos\alpha=\sin\beta$ デアルカラ

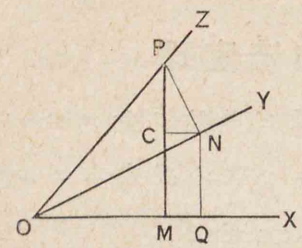
$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta&=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\\ &=1=\sin 90^\circ=\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

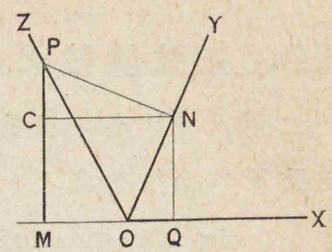
又 $$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta&=\cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\\ &=0=\cos 90^\circ=\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

トナリ,上ノ二式ハ明カニ成立ツ。

次ニ $\alpha+\beta\lesseqgtr 90^\circ$ ナルトキハ, OZ 上ニ一點 P ヲ取リ, P カラ OX, OY ニ夫々垂線 PM, PN ヲ

引キ, N カラ OX, PM ニ夫々垂線 NQ, NC ヲ引ケバ　$\angle CPN=\angle QON=\alpha$





今 OP ヲ單位ノ長サト考ヘレバ

$$\sin(\alpha+\beta)=MP=MC+CP=QN+CP$$

然ルニ　$QN=ON\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta$

$$CP=NP\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

又　$\cos(\alpha+\beta)=OM=OQ-MQ=OQ-CN$

然ルニ　$OQ=ON\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta$

$$CN=PN\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

以上 α, β ヲ共ニ正ノ鋭角トシテ證明シタガ α, β ノ大サ及ビ符號ノ如何ニ拘ハラズ上ノ定理ハ成立ツ。シカシソノ證明ハ稍煩雜デアルカラ省略スル。

57. 正弦·餘弦ノ減法定理

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

之ヲ夫々正弦及ビ餘弦ノ**減法定理**トイフ。

證明 前節ノ公式ニ於テ β ノ代リニ $-\beta$ ト置ケバ

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\{\alpha+(-\beta)\}\\ &=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\ &=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\{\alpha+(-\beta)\}\\ &=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\ &=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

例 題 (42)

1. 75° ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。

2. 15° ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。

次ノ等式ヲ證明セヨ。

3. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$

4. $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B$

5. $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}$

58. 正切ノ加法定理・減法定理

$$\left.\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

之ヲ夫々正切ノ**加法定理,減法定理**トイフ。

證明 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

コノ式ノ分母子ヲ $\cos\alpha\cos\beta$ デ割レバ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

同様ニシテ

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

例　題 (43)

次ノ等式ヲ證明セヨ。

1. $\tan(45^\circ\pm A)=\dfrac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$

2. $\cot(A\pm B)=\dfrac{\cot A\cot B\mp1}{\cot B\pm\cot A}$

59. 二倍角ノ三角函數

正弦,餘弦及ビ正切ノ加法定理ノ公式ニ於テ

$\beta=\alpha$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &=1-2\sin^2\alpha\\ &=2\cos^2\alpha-1\\ \tan2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

例　題 (44)

次ノ等式ヲ證明セヨ。

1. $(\sin A\pm\cos A)^2=1\pm\sin2A$　2. $\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2A}=\sin2A$

3. $\dfrac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}=\cos2A$　4. $\cos^4A-\sin^4A=\cos2A$

60. 半角ノ三角函數

角 α ノ三角函數ヲ知ツテ $\dfrac{\alpha}{2}$ ノ三角函數ヲ求メルニハ $\cos\alpha$ ヲ用ヒルガヨイ。卽チ二倍角ノ餘弦

公式ニ於テ α ノ代リニ $\frac{\alpha}{2}$ ヲ入レルト

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

トナル。依ツテ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\ \cos\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\ \text{従ツテ}\quad\tan\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

但シ根號ノ前ノ符號ハ α ノ大サニヨツテ $\frac{\alpha}{2}$ ガ第何象限ニアルカヲ見テ適當ニ定メナケレバナラナイ。

例　$\sin 22°30'$ ノ値ヲ求メヨ。

解　$\sin 22°30'$ ハ正デアルカラ,上ノ公式ニヨツテ

$$\sin 22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\quad(答)$$

例題 (45)

1. $\cos 22°30'$ 及ビ $\tan 22°30'$ ヲ求メヨ。

2. 半角ノ公式ニヨリ $15°$ ノ三角函數ヲ求メヨ。

3. $\cos\theta=\frac{1}{6}$ ナルトキ $\sin\frac{\theta}{2}$ 及ビ $\cos\frac{\theta}{2}$ ヲ求メヨ。但シ $270°<\theta<360°$ トスル。

次ノ等式ヲ證明セヨ。

4. $\tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$

5. $\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$

61. 三倍角ノ三角函數

3α ヲ $2\alpha+\alpha$ ト見做シテ加法定理ニアテハメテ更ニ二倍角ノ公式ヲ應用スレバ

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)\\&=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{即チ}\quad\sin 3\alpha&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\\ \text{同様ニ}\quad\cos 3\alpha&=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\\ \tan 3\alpha&=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

例 $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ デアルコトヲ證明セヨ。

解 $A=18^\circ$ トスレバ

$$5A=90^\circ \qquad \therefore \quad 2A=90^\circ-3A$$

$$\therefore \qquad \sin 2A=\cos 3A$$

$$\therefore \quad 2\sin A\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$$

$$\therefore \quad 2\sin A=4\cos^2 A-3 \qquad [\because \quad \cos A\neq 0]$$

$$=4(1-\sin^2 A)-3$$

$$\therefore \quad 4\sin^2 A+2\sin A-1=0$$

然ルニ $0<\sin 18^\circ<1$ デアルカラ

$$\sin A=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

例題 (46)

1. $\sin x=0.2$ ナラバ, $\sin 3x$ ノ値ハ幾ラカ。
2. $\cos x=-0.3$ ナラバ, $\cos 3x$ ノ値ハ幾ラカ。
3. $\tan x=\sqrt{3}$ ナラバ, $\tan 3x$ ノ値ハ幾ラカ。

次ノ等式ヲ證明セヨ。

4. $\sin^3\theta=\dfrac{1}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)$
5. $\cos^3\theta=\dfrac{1}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta)$

62. 正弦·餘弦ノ和及ビ差

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ナル四ツノ等式ノ中第一ト第二又ハ第三ト第四ヲ邊々相加ヘ又相減ズレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)&=2\sin\alpha\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)&=-2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

ココデ $\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ 從ツテ

$$\alpha=\frac{A+B}{2},\quad \beta=\frac{A-B}{2}$$

ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned}\sin A+\sin B&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin A-\sin B&=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\ \cos A+\cos B&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \cos A-\cos B&=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

コノ公式ニヨツテ二角ノ正弦及ビ餘弦ノ和又ハ差ヲ積ノ形ニ變ヘルコトガ出來ル。之ハ對數計算ヲ行フ場合ニ特ニ必要デアル。

例 $\sin 50° + \sin 10°$ ヲ簡單ニセヨ。

解 $\sin 50° + \sin 10° = 2\sin\frac{50°+10°}{2}\cos\frac{50°-10°}{2}$

$= 2\sin 30° \cos 20° = 2\times\frac{1}{2}\cos 20° = \underline{\cos 20°}$ (答)

例題 (47)

次ノ式ヲ積ノ形ニ變ヘヨ。(1—6)

1. $\sin 5A + \sin 3A$ **2.** $\cos 7A + \cos 3A$

3. $\sin 5A - \sin 3A$ **4.** $\cos 7A - \cos 3A$

5. $\sin 25° - \sin 35°$ **6.** $\cos 35° - \cos 125°$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。(7—8)

7. $\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A$

8. $\sin A + \sin(A+120°) + \sin(A+240°)$

9. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

10. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\sin A + \sin 4A + \sin 7A}{\cos A + \cos 4A + \cos 7A}$$

63. 正弦・餘弦ノ積

前節ノ公式(13)ノ兩邊ヲ交換シテ2デ割レバ

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

コノ公式ニヨツテ正弦及ビ餘弦ノ積ヲ和又ハ差ノ形ニ變ヘルコトガ出來ル。

例 $\cos 45° \cos 15° = \frac{1}{2}\{\cos(45°+15°)+\cos(45°-15°)\}$

$= \frac{1}{2}\{\cos 60° + \cos 30°\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{4}$

問 次ノ式ヲ和又ハ差ノ形ニ變ヘヨ。

(1) $\sin 3A \cos A$ (2) $\cos 6A \cos 2A$

(3) $\sin A \cos 5A$ (4) $\sin A \sin 3A$

(5) $\sin 15° \cos 45°$ (6) $\cos 75° \cos 15°$

例 題 (48)

1. α, β ハ共ニ正ノ鋭角デ $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$ ナルトキ, $\sin(\alpha+\beta)$ ノ値ハ幾ラカ。

2. α ハ正ノ鋭角, β ハ正ノ鈍角デ $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 及ビ $\cos\beta=-\frac{3}{5}$ ナルトキ, $\cos(\alpha+\beta)$ 及ビ $\cos(\alpha-\beta)$ ノ値ヲ求メヨ。

3. $\sin\alpha=0.6$ ナルトキ, $\cos 2\alpha$ ノ値ヲ求メヨ。

4. $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$ ナルトキ, $\sin 2\alpha$ ノ値ヲ求メヨ。但シ $90°<\alpha<180°$ トスル。

次ノ等式ヲ證明セヨ。(5—10)

5. $$\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A + \sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C$$

6. $$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C - \cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B$$

7. $$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$$

8. $$\cos\theta\pm\sin\theta=\sqrt{2}\sin(45°\pm\theta)=\sqrt{2}\cos(45°\mp\theta)$$

9. $$\frac{2\sin A-\sin 2A}{2\sin A+\sin 2A}=\tan^2\frac{A}{2}$$

10. $$\sin(45°-A)\sin(45°+A)=\frac{1}{2}\cos 2A$$

11. $\sin 50°-\sin 70°+\sin 10°$ ノ値ヲ求メヨ。

12. $\sin 40°+\sin 160°+\sin 280°$ ノ値ヲ求メヨ。

13. $\sin A\sin(2B+A)-\sin B\sin(2A+B)$ ヲ簡單ニセヨ。

14. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C) = 4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

15. 次ノ等式ヲ證明セヨ。但シ $A+B+C=180°$ トスル。

(1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(2) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

16. 一邊ガ a ナル正八角形ノ面積ヲ求メヨ。又ソノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

17. 半徑ガ r ナル圓ニ內接スル正五角形ノ一邊ハ $\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ デアルコトヲ證明セヨ。

18. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ $\tan A$, $\tan B$ トスルトキ $\tan(A+B)$ ヲ a, b, c デ表ハセ。

19. θ ガ $0°$ カラ $360°$ マデ變化スルトキ $\sin\theta+\cos\theta$ ノ値ヲ正ナラシメル θ ノ範圍ヲ定メヨ。

20. $\cos x+\sin x$ ノ最大値ヲ求メヨ。

第3章　三角形ノ原素間ノ關係

64. 三角形ノ角ト邊

三角形ABCノ三ツノ角A, B, Cハ何レモ$0°$ト$180°$トノ間ニアリ,ソシテ

$$A+B+C=180°$$

又三ツノ邊a, b, cハ常ニ正デ,且ツ何レノ二邊ノ和モ殘リノ一邊ヨリ大デアル。即チ

$$a+b>c \quad 又 \quad a\sim b<c \quad 等$$

三角形ノ原素間ニハナホ種々ノ關係ガアル。本章デハソノ重要ナモノニツイテ考究スル。

例　題　(49)

△ABCニ於テ次ノ關係式ノ成立ツコトヲ證明セヨ。

1. $\sin A=\sin(B+C)$
2. $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$
3. $\cos A\cos B+\cos C=\sin A\sin B$
4. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

65. 正弦法則

定理　三角形ノ邊ハソノ對角ノ正弦ニ比例スル。

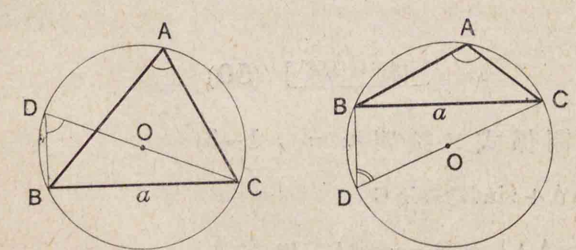
即チ△ABCニ於テ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad (16)$$

之ヲ**正弦法則**トイフ。

證明　△ABCノ外接圓ニ於テCカラ直徑CDヲ引キB,Dヲ結ベバ,$\angle CBD=\llcorner$デアルカラ

$$BC=CD\sin D$$



然ルニ $A<90°$ ナルトキハ $\angle D=A$

$A>90°$ ナルトキハ $\angle D=180°-A$

何レノ場合デモ

$$\sin D=\sin A$$

$$\therefore \quad BC=CD\sin A$$

依ツテ外接圓ノ直徑ヲ d デ表ハセバ

$$a=d\sin A$$

從ツテ $\quad d=\dfrac{a}{\sin A}$

同様ニ $\quad d=\dfrac{b}{\sin B}$ 及ビ $d=\dfrac{c}{\sin C}$

故ニ $\quad \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=d$

注意 上ノ證明ニ於テAヲ鋭角又ハ鈍角トシタガ $\angle A$ ガ直角ナルトキハ, $\sin A=1$, $a=d$ デアルカラ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{d}{1}=d$$

トナル。故ニ上ノ比例式ハ成立ツ。

例題 (50)

次ノ關係式ヲ證明セヨ。(1—3)

1. $\sin A+\sin B>\sin C$

2. $a\cos A+b\cos B=c\cos(A-B)$

3. $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$

4. $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=0$ ナラバ $C=90^\circ$ デアル。

5. $a\cos A=b\cos B$ ナラバ $\triangle ABC$ ハ二等邊三角形デアルカ,若クハ直角三角形デアル。

66. 第一餘弦法則

定理 三角形ノ各邊ハ之ヲ一邊トスル各ノ角ノ餘弦トソノ角ノ他ノ邊トノ積ノ和ニ等シイ。

卽チ $\triangle ABC$ ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} a&=b\cos C+c\cos B\\ b&=c\cos A+a\cos C\\ c&=a\cos B+b\cos A\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

之ヲ**第一餘弦法則**トイフ。

證明 $\quad \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=d$

ヨリ $\quad a=d\sin A,\ b=d\sin B,\ c=d\sin C$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a&=d\sin A=d\sin(B+C)\\ &=d(\sin B\cos C+\cos B\sin C)\\ &=d\sin B\cos C+d\sin C\cos B\\ &=b\cos C+c\cos B\end{aligned}$$

他ノ式モ同様ニ證明スルコトガ出來ル。

例題 (51)

1. 三角形ノ一頂點カラ對邊ニ垂線ヲ引イテ第

一餘弦法則ノ公式ヲ直接ニ證明セヨ。

次ノ等式ヲ證明セヨ。

2. $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$

3. $b\cos A-a\cos B=\dfrac{b^2-a^2}{c}$

67. 第二餘弦法則

定理　三角形ノ各邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和カラ,コノ二邊トソノ夾角ノ餘弦トノ積ノ2倍ヲ引イタモノニ等シイ。

即チ △ABC ニ於テ

$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

之ヲ**第二餘弦法則**トイフ。

證明　前節ノ公式ノ第一,第二,第三式ノ兩邊ニ夫々 $a,\ -b,\ -c$ ヲ掛ケテ邊々相加ヘレバ

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

他ノ式モ同樣ニ誘出スルコトガ出來ル。

系

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\\cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

例　題 (52)

1. 三角形ノ各邊ノ上ノ正方形ニ關スル幾何學ノ定理ヲ用ヒテ第二餘弦法則ノ公式ヲ直接ニ證明セヨ。

2. $b=12m,\ c=9m,\ A=120°$ ナルトキ a ヲ求メヨ。

3. 三邊ノ長サガ $7m,\ 8m,\ 13m$ ナル三角形ノ最大角ヲ求メヨ。

4. $a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$ ナルトキ △ABC ノ最小角ヲ求メヨ。

5. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

6. $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$ ナルトキ △ABC ハ二等邊三角形デアルコトヲ證明セヨ。

68. 正切法則

[定理] 三角形ノ二邊ノ差ト和トノ比ハソノ二邊ノ對角ノ差ノ半分ノ正切ト和ノ半分ノ正切トノ比ニ等シイ。

即チ △ABC ニ於テ

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}} \qquad (20)$$

之ヲ**正切法則**トイフ。

[證明] 正弦法則ニヨリ

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{d(\sin A-\sin B)}{d(\sin A+\sin B)}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

$$=\frac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}$$

他ノ角及ビ邊ノ間ニモ同様ノ關係ガアル。之ヲ Napier ノ公式トイフ。

[系]
$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} \qquad (21)$$

[例題] (53)

次ノ等式ヲ證明セヨ。(1—2)

1. $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$　　2. $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$

3. $a=b\tan\theta$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\tan\frac{A-B}{2}=\tan(\theta-45^\circ)\cot\frac{C}{2}$$

4. △ABC ニ於テ $b=10cm$, $c=5cm$, $A=60^\circ$ ナルトキ他ノ二角ヲ求メヨ。

69. 半角ノ正弦·餘弦·正切

倍角ノ公式及ビ第二餘弦法則ニヨッテ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

今,三角形ノ周ノ半分ヲ s トスレバ

$$a+b+c=2s$$

$$a+b-c=2(s-c),\quad a-b+c=2(s-b)$$

之ヲ上ノ式ニ代入スレバ

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-c)(s-b)}{bc}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

同様ニ
$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

又上ト同様ニシテ

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

從ツテ

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

例　題　(54)

次ノ等式ヲ證明セヨ。

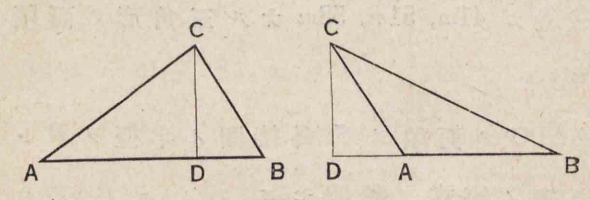
1. $a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}=s$
2. $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
3. $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$
4. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$

70. 三角形ノ面積

定理　三角形ノ面積ハ二邊トソノ夾角ノ正弦トノ積ノ半分ニ等シイ。

卽チ △ABC ノ面積ヲ S デ表ハセバ

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\qquad(25)$$



證明　△ABC ニ於テ CD ヲ高サトスレバ

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$

然ルニ　$CD=b\sin A$　又ハ　$CD=b\sin(180°-A)$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

同様ニ　$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

系　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　　(26)

證明　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

之ニ　$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$,　$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$　ヲ

代入スレバ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ヲ得ル。之ハ既ニ學ンダHeron **ノ公式**デアル。

例題 (55)

1. 二邊ガ 17m, 24m デソノ夾角ガ 60° ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。(1平方米未滿四捨五入)

2. 三邊ガ 41m, 51m, 58m ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

3. △ABC ノ面積ヲ S, 外接圓ノ半徑ヲ R トスルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ。

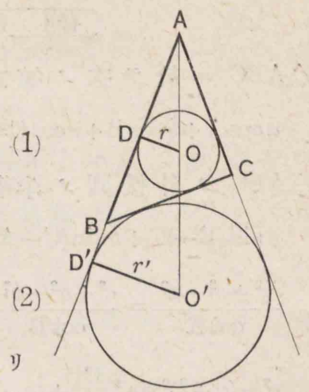
$$S=\frac{1}{2}a^2\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}\operatorname{cosec}\mathrm{A}$$
$$=2R^2\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$$

71. 三角形ノ內接圓・傍接圓ノ半徑

△ABC ノ內接圓ノ半徑ヲ r, 角 A, B, C 內ノ傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r', r'', r''' デ表ハセバ

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ \text{及ビ}\quad r'&=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\quad \text{等} \end{aligned}\right\}\quad(27)$$

證明 右ノ圖ニ於テ



$$r=\mathrm{OD}=\mathrm{AD}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}$$
$$=(s-a)\tan\frac{\mathrm{A}}{2}\qquad(1)$$
$$r'=\mathrm{O'D'}=\mathrm{AD'}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}$$
$$=s\tan\frac{\mathrm{A}}{2}\qquad(2)$$

然ルニ公式(24)ニヨリ

$$\tan\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

之ヲ(1)及ビ(2)ニ代入スレバ

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$
$$r'=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

ヲ得ル。r'', r''' ニツイテモ同樣デアル。

問1. 三邊ガ 41m, 51m, 58m ナル三角形ノ內接圓及ビ傍接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

問2. △ABC ノ面積ヲ S トシ,內接圓ノ半徑ヲ r, 角 A, B, C 內ノ傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r_1, r_2, r_3 トスレバ

$$S=rs=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$$

例　題 (56)

△ABC ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。(1—5)

1. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$ (但シ R ハ △ABC ノ外接圓ノ半徑デアル)

2. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

3. $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\cot A}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{\cot B}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{\cot C}$

4. $c^2=(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}$

5. $\dfrac{c\sin(A-B)}{b\sin(C-A)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2-a^2}$

6. $\cos A+\cos B=\sin C$ ナラバ △ABC ハドンナ三角形デアルカ。

7. a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ $\cot\dfrac{A}{2}$, $\cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{C}{2}$ モ亦等差級數ヲナス。

8. $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ ガ等差級數ヲナストキハ, a^2, b^2, c^2 モ亦等差級數ヲナス。

9. 一邊ノ長サガ a ナル正 n 角形ノ面積ハ $\dfrac{1}{4}na^2\cot\dfrac{180°}{n}$ デアル。

10. △ABC ニ於テ $\angle B=2\angle C$ ナルトキハ

(i) $a-b+c=2(b-c)\cos C$ (ii) $2(b-c)<a<3(b-c)$

11. △ABC ニ於テ

$$2\cos A+\cos B+\cos C=2$$

ナル關係ガアルトキハ $2a=b+c$ デアル。

12. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ相隣レル二角 A, B ノ正弦ノ比ハ對角線 BD ト AC トノ比ニ等シイ。

又 $\angle CAD=\alpha$, $\angle BAC=\beta$, $\angle ABD=\gamma$ トスレバ次ノ關係ガアル。

$$CD=\frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

13. 四邊形ノ兩對角線ヲ d, d' トシソノ夾角ヲ θ トスレバ,ソノ面積ハ $\dfrac{1}{2}dd'\sin\theta$ デアル。

14. △ABC ノ頂點 A カラ引イタ中線ヲ AM トスレバ

$$AM=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$$

又　$$\tan\angle AMB=\frac{2bc\sin A}{b^2-c^2}$$

15. △ABC ノ角 A ノ二等分線ヲ AD トスレバ

$$AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

第4章　三角函數ノ對數表

72. 三角函數ノ對數表

三角函數ヲ含ム計算ニ於テモ稍複雜ナ場合ニハ對數計算ヲナスノガ便利デアル。ソノ場合ニ三角函數ニ對シテハ眞數表ニヨツテソノ値ヲ求メ,次ニ數ノ對數表ニヨツテ計算スレバヨイ。然シカヤウニ二回表ヲ引クコトハ不便デアルカラ通常三角函數ノ眞數ノ對數ヲ表ニシタモノヲ用ヒル。之ヲ**三角函數ノ對數表**トイフ。

注意　三角函數ノ對數表ノ組織ハ大體眞數表及ビ數ノ對數表ト同ジデアルガ,タダ三角函數ノ値ハ1ヨリモ小ナルモノガ多イカラソノ對數ノ指標ハ負數ガ多イ。ソレデ表中ニ負ノ指標ヲ記入スルコトヲ避ケテ指標ニ10ヲ加ヘタモノガアル。之ヲ**表對數**トイヒ, Lsin, Lcos 等デ表ハス。故ニ

$$\log\sin A = \mathrm{L}\sin A - 10$$

例ヘバ　$\log\sin 30° = \mathrm{L}\sin 30° - 10 = 9.6990 - 10 = \bar{1}.6990$

本書ノ附錄ニ載セテアルノハ 10′ 飛ビノ四桁ノ對數表デアル。

73. 三角函數ノ對數表ノ用法

角ノ變化ガ微小ナルトキハ之ニ伴フ三角函數ノ對數ノ變化ハホボ角ノ變化ニ正比例スルト見做シテ差支ナイ。之ヲ**比例部分ノ法則**トイフ。

例 1.　$\log\sin 28°47'$ ヲ求メヨ。

解　表ニヨリ

$$\log\sin 28°40' = \bar{1}.6810$$

$$\log\sin 28°50' = \bar{1}.6833$$

故ニ角 10′ ノ增加ニ伴フ對數ノ增加ハ 0.0023 デアルカラ, 7′ ニ對スル對數ノ增加ハ次ノ比例式デ求メラレル。

$$10' : 7' = 0.0023 : x$$

$$\therefore \quad x = 0.00161$$

依ッテ　$\log\sin 28°47' = \bar{1}.6810 + 0.0016$

$$= \underline{\bar{1}.6826} \quad (答)$$

コノ計算ニ於ケル 0.0023 ハ小數ノ末位ヲ單位トスレバ 23 ニナル。之ヲ**表差**トイヒ,表中 log sin ノ行ノ右ニアル差トイフ欄ニ記シテアル。log cos ニ對スル表差モ同樣デアル。

log tan 及ビ log cot ノ表差ハ共通デアルカラ表ノ

中央ニ通差トイフ欄ヲ設ケテソレヲ載セテアル。

實際ニハ上ノ計算ヲ次ノヤウニ記スルガヨイ。

$\log\sin 28°47'$

$\underline{28°40'}\ldots\ldots\bar{1}.6810$　　表差$=23$

$7'\ldots\ldots\ldots\ldots 16$　　$2.3\times 7=16.1$

$\log\sin 28°47' = \underline{\bar{1}.6826}$　(答)

例 **2.** $\log\cos 17°31'40''$ ヲ求メヨ。

解 $\log\cos 17°31'40''$

$17°40'\ldots\ldots\ \bar{1}.9790$　　表差$=4$

$-8'20''\ldots\ldots\ldots 3$　　$0.4\times 8\frac{1}{3}=3.3$

$\log\cos 17°31'40''=\underline{\bar{1}.9793}$　(答)

或ハ

$\log\cos 17°30'\ \ldots\ldots\ \bar{1}.9794$　　表差$=4$

$1'40''\ldots\ldots\ldots 1$　　$0.4\times 1\frac{2}{3}=0.7$

$\log\cos 17°31'40''=\underline{\bar{1}.9793}$　(答)

注意 **1.** θ ガ第一象限ノ角ナルトキ, θ ガ増大スレバ $\sin\theta$ 及ビ $\tan\theta$ ハ増大スルガ, $\cos\theta$ 及ビ $\cot\theta$ ハ減小スルコトニ注意セヨ。

例 **3.** $\log\tan 66°28'30''$ ヲ求メヨ。

解 $\log\tan 66°28'30''$

$66°20'\ldots\ldots\ 0.3583$　　表差$=34$

$8'30''\ldots\ldots\ 29$　　$3.4\times 8.5=28.9$

$\log\tan 66°38'30''=\underline{0.3612}$　(答)

注意 **2.** $\sin\theta=\cos(90-\theta)$, $\tan\theta=\cot(90-\theta)$ デアルカラ,—

ツノ表デ正弦ト餘弦,正切ト餘切トヲ表ハスノデアルカラ各函數ニツイテ角ノ増シ工合ヲ誤ラヌヤウニセヨ。

例 **4.** $\log\sin x=\bar{1}.4488$ カラ x ヲ求メヨ。

解 $\log\sin x=\bar{1}.4488$

$\underline{\bar{1}.4447}\ldots 16°10'$　　表差$=44$

$41\ \ldots\ldots\ 9'.3$　　$10'\times\frac{41}{44}=9'.31$

$x=\underline{16°19'.3}$ (答)

例題 **(57)**

1. 次ノ値ヲ求メヨ。

$\log\sin 65°32'$,　$\log\tan 34°23'$,

$\log\cos 20°3'$,　$\log\tan 18°35'10''$

2. 次ノ式カラ A ヲ求メヨ。

$\log\sin A=\bar{1}.9792$,　$\log\tan A=\bar{1}.3214$,

$\log\tan A=1.2007$,　$\log\cos A=\bar{1}.8700$

3. $\log\sin 13°10'=\bar{1}.35752$ 及ビ $\log\sin 13°20'=\bar{1}.36289$ カラ $\log\sin 13°17'12''$ ヲ求メヨ。

4. $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ ヲ知ツテ $\log\sin 60°$ ヲ計算セヨ。

5. $\dfrac{24\times\sin 72°40'}{\sin 65°50'}$ ノ値ヲ求メヨ。

第5章　三角形ノ解法

74. 三角形ノ解法

一般ナル三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合ガアル。

[I]　二角ト一邊トヲ知ル場合。

[II]　二邊トソノ夾角トヲ知ル場合。

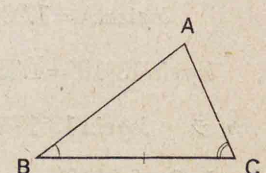
[III]　二邊トソノ一對角トヲ知ル場合。

[IV]　三邊ヲ知ル場合。

75. 二角ト一邊トヲ知ル場合

與ヘラレタ二角ハA, B, Cノ何レトスルモ殘リノ一ツハ　$A+B+C=180°$

ナル關係デ定マル。



依ッテ與ヘラレタ一邊ヲ a トスレバ,正弦法則ニヨリ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

又對數ヲ用ヒルトキノ式トシテハ夫々

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

トスベキデアルガ煩ヲ避ケルタメ以下ノ節デハ一々コノヤウナ式ハ示サナイ。

[例] $a=142m$, $B=47°35'$, $C=61°43'$ ヲ知ッテ三角形ヲ解ケ。

[解]
$$A=180°-(B+C)$$
$$=180°-(47°35'+61°43')=70°42'$$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

$$\begin{array}{r}\log a=2.1523\\ \log\sin B=\bar{1}.8682\\ -\log\sin A=0.0251\\ \hline \log b=2.0456\\ \therefore\quad b=111.1\end{array}$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

$$\begin{array}{r}\log a=2.1523\\ \log\sin C=\bar{1}.9448\\ -\log\sin A=0.0251\\ \hline \log c=2.1222\\ \therefore\quad c=132.5\end{array}$$

答 $A=70°42'$, $b=111.1m$, $c=132.5m$

[注意] $\log\sin 70°42'=\bar{1}.9749$ デアルカラ

$$-\log\sin 70°42'=0.0251$$

[例　題] (58)

1. $a=198m$, $B=65°10'$, $C=86°20'$ ヲ知ッテ三角形ヲ解ケ。

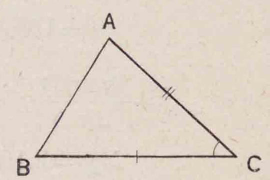
2. A$=32°5'$, B$=41°17'$, $b=372.7m$ ヲ知ツテ a ヲ計算セヨ。

3. $a=71.24m$, B$=73°11'$, C$=38°41'$ ヲ知ツテ c ヲ計算セヨ。

76. 二邊トソノ夾角トヲ知ル場合

a, b 及ビ C ヲ與ヘラレタモノトシ, $a>b$ トスルト, A+B$=180°-$C カラ

$$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2} \qquad (1)$$



又 $$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} \qquad (2)$$

(1) カラ $\frac{A+B}{2}$, (2) カラ $\frac{A-B}{2}$ ヲ知リ,之ヲ加減シテ A 及ビ B ヲ算出スルコトガ出來ル。

又 $$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

カラ c ヲ得ル。

注意 c ヲ求メルニハ $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$ 又ハ $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ ヲ用ヒテモヨイ。

例 $a=234m$, $b=129m$, C$=74°24'$ ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

解 $$\frac{C}{2}=37°12'$$

$$\frac{A+B}{2}=90°-37°12'=52°48'$$

$$a-b=105, \quad a+b=363$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$\log(a-b)=2.0212$$

$$-\log(a+b)=\bar{3}.4401$$

$$\log\cot\frac{C}{2}=0.1198$$

$$\log\tan\frac{A-B}{2}=\bar{1}.5811$$

$$\frac{A-B}{2}=20°52'$$

$$\therefore \quad A=73°40'$$

$$B=31°56'$$

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\log(a+b)=2.5599$$

$$\log\sin\frac{C}{2}=\bar{1}.7814$$

$$-\log\cos\frac{A-B}{2}=0.0295$$

$$\log c=2.3708$$

$$\therefore \quad c=234.8$$

答 A$=73°40'$, B$=31°56'$, $c=234.8m$

例題 (59)

次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。

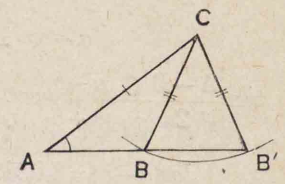
1. $a=413m$, $b=376m$, C$=28°20'$

2. $a=63.8m$, $c=49.4m$, B$=81°9'$

77. 二邊トソノ一對角トヲ知ル場合

a, b, A ヲ與ヘラレタモノトスレバ,先ヅ正弦法則ニヨリ

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a} \qquad (1)$$



之ニヨツテBヲ求メ,從ツテ

$$C=180°-(A+B)$$

ヲ得ル。再ビ正弦法則ニヨリ c ヲ求メル。

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

吟味 等式(1)ニヨリBヲ定メルニ當ツテ a, b, A ノ値ニヨツテ種々ノ場合ヲ生ズル。

[I] $\frac{b}{a}\sin A>1$ ノトキハ $\sin B>1$

故ニコノ場合ハ解ガナイ。

[II] $\frac{b}{a}\sin A=1$ ノトキハ $\sin B=1$

故ニ $B=90°$ トナル。依ツテ $A<90°$ ナルトキニ限ツテ一ツノ解ガアル。

[III] $\frac{b}{a}\sin A<1$ ノトキハ $\sin B<1$

コノ場合ニハ等式(1)ニ適スルBノ値ハ二ツアツテ,一ツハ鋭角,一ツハ鈍角デ且ツコレ等ノ二角ハ互ニ補角ヲナス。

今ソノ鈍角ヲBトシ補角ヲB'トスレバ

(i) $A<90°$ ノトキ

$A+B<180°$ 及ビ $A+B'<180°$

デアレバ二ツノ解ガアル。コノ場合ヲ**兩意ノ場合**トイフ。

又 $A+B\geqq180°$ 及ビ $A+B'<180°$

デアレバ唯一ツノ解ガアル。

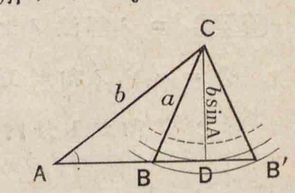
(ii) $A\geqq90°$ ノトキ

コノ場合ニハ $A+B>180°$ デアル。ソシテ

$A+B'<180°$ デアレバ唯一ツノ解ガアル。

$A+B'\geqq180°$ デアレバ解ガナイ。

注意 以上ノ結果ハ $b\sin A$ ガ頂點Cカラ對邊ABニ引イタ垂線CDノ長サデアルコトニ着目スレバヨクワカル。



例題 (60)

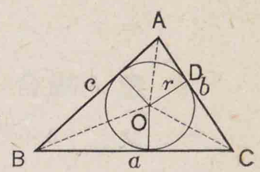
次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。

1. $a=50m,\ c=25m,\ A=120°$
2. $A=30°,\ a=45,\ b=45\sqrt{3}$
3. $c=\sqrt{2}m,\ b=1m,\ B=30°$

78. 三邊ヲ知ル場合

コノ場合ニハ　$a+b+c=2s$　ト置ケバ

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$



$$\therefore\ \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{r}{s-b}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{r}{s-c}$$

之ニヨツテ三ツノ角ヲ求メル。

注意　コノ解法ノヤウニ A, B, C ヲ別々ニ求メタ場合ニハ,ソノ和ガ 180° ニ等シイカドウカヲ驗セ。但シソノ和ガ 1 分内外ノ誤差ヲ生ズルハ已ムヲ得ナイ。

例　題　(61)

次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。

1.　$a=321m,\quad b=213m,\quad c=132m$

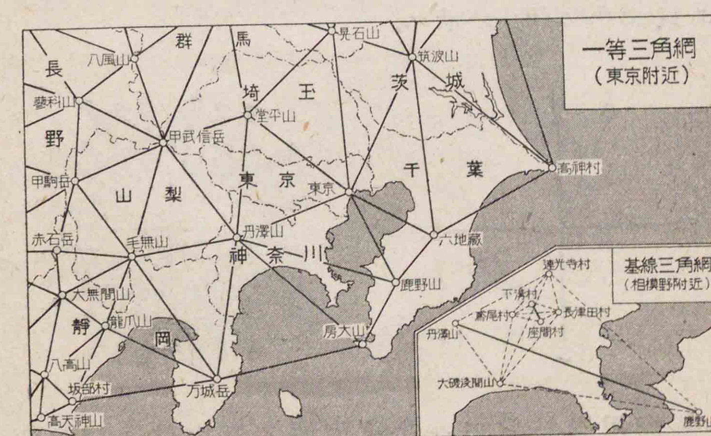
2.　$a=74.8m,\quad b=103.5m,\quad c=127.7m$

第 6 章　測量上ノ應用

79. 基　線

距離ヤ高サ等ヲ測量スルニハ適當ノ場所ニ一ツノ線分ヲ定メテ巻尺又ハ測鎖デ直接精密ニソノ長サヲ測リ,之ヲ一邊トスル三角形ヲ解イテ所要ノモノヲ知ルノデアル。コノ線分ハ測量ノ基礎トナルカラ之ヲ**基線**トイフ。

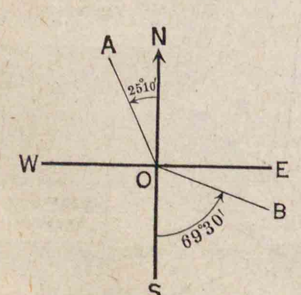
大ナル地形ヲ測量スルニハ,ソノ地面上ニアル若干ノ重要ナ地點ヲ選ビ,コレ等ヲ頂點トスル數多ノ三角形ニヨツテ地面ヲ被フモノト考ヘル。

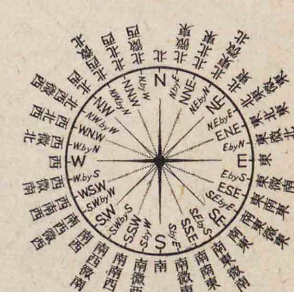


ソシテコレ等ノ三角形ノ諸邊ノ中最モ便宜ナ幾ツカノ邊ヲ精密ニ測定シテ基線トナシ,コレ等ノ基線ト各地點ニ於ケル水平角トニヨリ三角形ノ解法ヲ用ヒテ順次間接ニ各地點間ノ距離ヲ測定スル。カヤウナ測量ヲ**三角測量**トイヒ,地面ヲ被ヘル三角形ノ群ヲ**三角網**トイフ。

80. 方位

陸地測量ニ於テハ通常方位ヲ示スノニ,北又ハ南ヲ基準トシテソレヨリ東又ハ西ヘ偏シタ角度ヲ用ヒル。例ヘバ下ノ左圖ニ於テ OA ノ方位ヲ北 25°10′ 西 (N25°10′W) デ示シ,又 OB ノ方位ヲ南 69°30′ 東 (S 69°30′E) デ示ス。





航海用羅針盤デハ北東南西ノ四方位ノ間ヲ更

ニ八ツニ等分シテ三十二ノ方位ニ前頁ノ右圖ニ示スヤウナ名稱ヲツケル。

81. 距離ノ測量

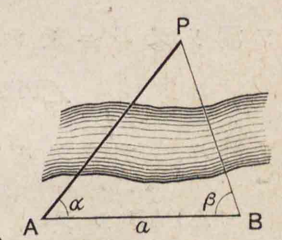
(1) 觀測點(A)カラ近ヅキ得ナイ點(P)マデノ距離ヲ求メルコト。

P ヲ望ミ得ル任意ノ點ヲ B トシテ基線 AB ヲ定メ

$$AB=a,$$

$$\angle PAB=\alpha,$$

$$\angle PBA=\beta$$



ヲ測ルトキハ, △PAB ニ於テ二角トソノ頂點間ノ邊トヲ知リ得ルカラ之ヲ解イテ邊 AP ノ長サ x ヲ求メルコトガ出來ル。

即チ

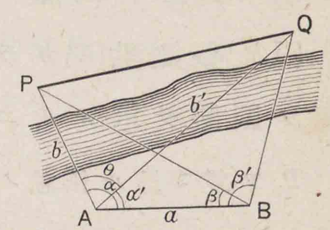
$$\angle APB=180^\circ-(\alpha+\beta)$$

$$\therefore \quad \frac{x}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad x=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

(2) 近ヅキ得ナイ二點(P, Q)間ノ距離ヲ求メルコト。

P, Q ヲ望ミ得ル二點 A, B ヲ選ンデ基線 AB ヲ定メ,ソノ長サヲ a トスル。



A ニ於テ

$$\angle PAB=\alpha,\quad \angle QAB=\alpha',$$
$$\angle PAQ=\theta$$

ヲ測リ,又 B ニ於テ

$$\angle PBA=\beta,\quad \angle QBA=\beta'$$

ヲ測ル。サウスルト

△PAB カラ $$AP=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

△QAB カラ $$AQ=\frac{a\sin\beta'}{\sin(\alpha'+\beta')}$$

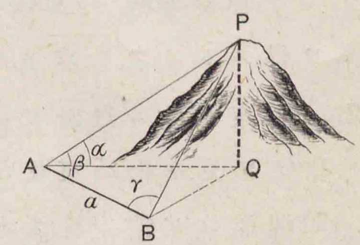
ヲ得ル。依ツテ △PAQ ニ於テ二邊トソノ夾角トヲ知リ得ルカラ之ヲ解イテ PQ ノ長サ x ヲ求メルコトガ出來ル。卽チ $AP=b$, $AQ=b'$ ト置ケバ

$$x=\frac{(b+b')\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\angle APQ-\angle AQP}{2}}$$

但シ $$\tan\frac{\angle APQ-\angle AQP}{2}=\frac{b'-b}{b+b'}\cot\frac{\theta}{2}$$

82. 高サノ測量

例ヘバ山ナドノヤウニ直立體 PQ ノ基點 Q ニ達シ難イトキ觀測點 A ヲ通ル水平面上ノ高サ PQ ヲ求メヨウトスル。



先ヅ A ヲ通ル水平面上ニ適當ナ基線 AB ヲ測リソノ長サヲ a トスル。次ニ

$$\angle PAQ=\alpha,\quad \angle PAB=\beta,\quad \angle ABP=\gamma$$

ヲ測レバ, △PAB カラ

$$AP=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

然ルニ $PQ=AP\sin PAQ$ デアルカラ

$$PQ=\frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

注意 實際ニ於テハ A ハ觀測者ノ眼ノ位置デ地上若干ノ高サニアル。ソレ故上ニ得タ PQ ニ眼ノ高サヲ加ヘタモノガ地上カラノ眞ノ高サデアル。サレド本書デハ特ニ斷ラナイトキハ眼ノ高サヲ計算ニ入レナイモノトスル。

例　題 (62)

1. 海岸ノ一點Aニ立テル人ガ沖合ニ碇泊シテヰル汽船Bマデノ距離ヲ知ラウトシテ,A點ト海岸ノ他ノ點Cトデ觀測シテ

$$AC=200m,\quad \angle CAB=65°,\quad \angle ACB=42°$$

ヲ得タトイフ。求メル距離ハ何程カ。

2. 正東ニ進ム汽船ガ或位置ニ於テ二ツノ燈臺P,Qヲ夫々北15°東及ビ北57°東ニ見タ。ソノ後20浬進ンダ點ニ於テハ夫々北70°西及ビ北10°西ニ見タトイフ。P,Q間ノ距離ヲ求メヨ。

3. 飛行機ノ高サヲ知ラウトシテ平地上ニアツテ東西200mヲ隔タツタA,B兩地デ同時ニソノ飛行機ノ方位及ビ仰角ヲ測ツタラ,Aデハ方位北61°東,仰角52°, Bデハ方位北25°西ヲ得タ。飛行機ノ高サハ何程カ。

4. 海濱ニ聳エル山ノ頂キCノ高サCDヲ知ラウトシテ,365mヲ相距テル二船A,Bニ於テ

$$\angle BAC=67°16',\ ABC=54°20',\ 仰角\ CAD=35°30'$$

ヲ測ツタ。山ノ高サヲ求メヨ。

5. 南西ノ方向ニ進行スル船カラ碇泊シテヰル二船ヲ北北西,西北西ニ望ミ,ソレカラ16km進ンデ再ビ二船ヲ望ンダラソノ方向ハ北及ビ北西トナツタトイフ。碇泊シテヰル二船ノ距離ヲ求メヨ。

6. 山頂ニ於テ同方向ニアル二家屋ノ俯角ヲ測ツテ23°20′及ビ18°10′ヲ得タ。又コノ兩家屋ノ距離ハ440mデアル。山ノ高サヲ求メヨ。但シ兩家屋ハ同一水面上ニアルモノトスル。

7. 1000mノ高度ヲ保ツテ一定ノ方向ニ進ム飛行機ガアル。某地點カラ之ヲ觀測シタラ初メ正北ニ見エ,2分間ノ後ニハ東北ニ見エタ。ソノ仰角ヲ夫々α, βトシ $\tan\alpha=\frac{1}{7}$, $\tan\beta=\frac{1}{4\sqrt{2}}$ トスレバ,コノ飛行機ノ速サハ毎分幾米デアルカ。

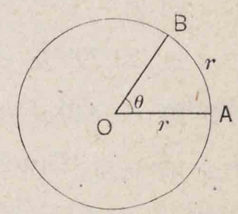
8. 敵艦ハ我艦ノ北方6浬ノ海上ニ於テ東北東ノ針路ヲ取リ,18節ノ速サヲ以テ根據地ニ向ツテ遁走シツツアル。我艦ガ30分間ノ後敵艦ニ追及シヨウトスルニハソノ針路及ビ速サヲ如何ニ定メタラヨイカ。

附　録

弧度法・三角方程式

1. 弧度法

半徑 r ナル圓 O ニ於テ半徑ト等長ナル弧 AB ニ對スル中心角ヲ θ トスレバ,



中心角ハソノ弧ニ比例シ,且ツ全圓周ニ對スル中心角ハ 360° デアルカラ

$$\theta : 360^\circ = r : 2\pi r$$

$$\therefore\quad \theta = 360^\circ \times \frac{r}{2\pi r} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= 57^\circ 29577951\ldots = 57^\circ 17' 44''.806\ldots\ldots$$

即チコノ角ノ大サハ半徑 r ノ如何ニ拘ハラズ一定デアル。

コノ一定ノ角ヲ Radian ト名ヅケ,之ヲ單位トシテ任意ノ角ヲ測ルコトガ出來ル。之ヲ**弧度法**トイフ。

サテ定義ニヨリ

$$1\ \text{radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\therefore\quad \pi\ \text{radian} = 180^\circ = 2\text{R}\llcorner$$

デアル。コノ關係式ニヨツテ六十分法(度分秒)デ表ハサレタ角ヲ弧度ニ,又弧度法デ表ハサレタ角ヲ六十分法ニ換算スルコトガ出來ル。弧度法デハ單位ノ名稱 radian ヲ略シテソノ數値ノミヲ記スルノガ常デアル。

今主ナル角ノ度數ト弧度トヲ對照スレバ

度數	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

例　題 (1)

1. 次ノ角ヲ弧度デ表ハセ。

15°, 22°30′, 48°, 110°, 32′

2. 次ノ弧度ヲ有スル角ヲ六十分法デ表ハセ。

$\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{6}$, 0.75π

3. 角ノ弧度ハソノ頂點ヲ中心トスル任意ノ圓ニ於テソノ角ニ對スル弧ノ長サト半徑トノ比ニ等シイ。

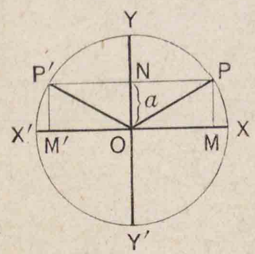
2. 三角方程式

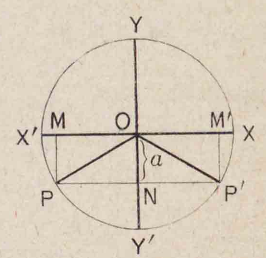
未知角ノ三角函數ヲ含ム方程式ヲ**三角方程式**

トイヒ,ソノ未知角ノ値ヲ求メルコトヲソノ方程式ヲ解クトイフ。

例 **1.** $\sin x=a$ ヲ解ケ。但シ $-1\leqq a\leqq 1$ トスル。

解 單位圓ヲ畫イテ,互ニ直交スル直徑 XOX′, YOY′ ヲ引キ, YOY′ 上ニ中心 O カラ a (符號ヲ





モ考ヘテ)ニ等シイ線分 ON ヲ取リ, N ヲ通ツテ XOX′ ニ平行ナル弦 PP′ ヲ引ケバ, OX ヲ原線トシ, OP 又ハ OP′ ヲ動徑トスルスベテノ角ノ正弦ハ悉ク a ニ等シイ。而シテコレ等ノ角ノ外ニハ a ニ等シイ正弦ヲ有スル角ハナイ。

今 OP ヲ動徑トスル最小正角ノ弧度ヲ α トスレバ, OP′ ヲ動徑トスル角ノ一ツハ $\pi-\alpha$ デアル。而シテ OP ヲ動徑トスルスベテノ角ハ α ニ 2π ノ整數倍ヲ加ヘタルモノ即チ

$2n\pi+\alpha$ デ表ハサレ, OP′ ヲ動徑トスルスベテノ角ハ $\pi-\alpha$ ニ 2π ノ整數倍ヲ加ヘタモノ $(2n+1)\pi-\alpha$ デ表ハサレル。

依ツテ方程式 $\sin x=a$ ノ解ハ

$$x=2n\pi+\alpha \quad 及ビ \quad x=(2n+1)\pi-\alpha$$

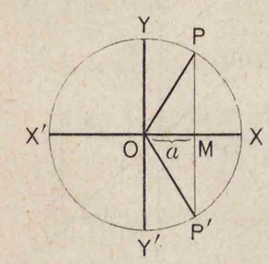
デアル。之ヲ一ツニ纏メテ

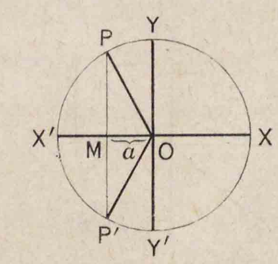
$$x=m\pi+(-1)^m\alpha$$

ト記スルコトガ出來ル。但シ n 及ビ m ハ零及ビ正負スベテノ整數ヲ表ハスモノトスル。

例 **2.** $\cos x=a$ ヲ解ケ。但シ $-1\leqq a\leqq 1$ トスル。

解 單位圓ニ於テ直徑 XOX′ 上ニ a (符號ヲモ





考ヘテ)ニ等シク OM ヲ取リ, M ヲ通リ XOX′ ニ垂直ナル弦 POP′ ヲ引ケバ,求メル角ハ OX ヲ原線トシ OP 又ハ OP′ ヲ動徑トスルスベテノ角デソノ他ニハナイ。

今 OP ヲ動徑トスル最小正角ヲ α トスレバ

OP′ ヲ動徑トスル一ツノ角ハ $-\alpha$ デアル。

コノ α 及ビ $-\alpha$ ニ 2π ノ整數倍ヲ加ヘタモノ即チ $2n\pi\pm\alpha$ ガ求メル角デアル。

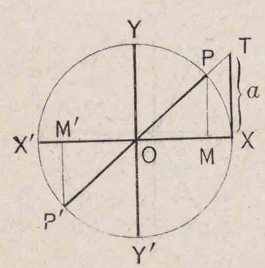
故ニ $\cos x=a$ ノ一般ノ解ハ

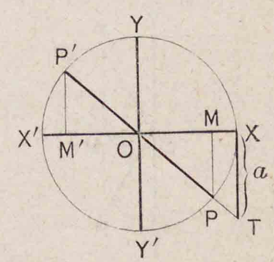
$$x=2n\pi\pm\alpha$$

但シ n ハ零及ビ正負スベテノ整數ヲ表ハスモノトスル。

例 **3.** $\tan x=a$ ヲ解ケ。但シ a ハ任意ノ實數トスル。

解 單位圓ノ直徑 XOX′ ノ端 X ニ於テ切線ヲ引キ,ソノ上ニ於テ a (符號ヲモ考ヘテ)ニ等シク





XT ヲ取リ,直線 TO ヲ引キ圓周ト P, P′ デ交ハラシメレバ OP 及ビ OP′ ヲ動徑トスルスベテノ角ガ求メル角デアル。

今 OP ヲ動徑トスル最小正角ヲ α トスレバ OP′ ヲ動徑トスル一ツノ角ハ $\pi+\alpha$ デアル

カラ, $\tan x=a$ ノ一般ノ解ハ

$$x=2n\pi+\alpha \quad 及ビ \quad x=(2n+1)\pi+\alpha$$

デアル。之ヲ一ツニ纏メルト

$$x=m\pi+\alpha$$

但シ上ノ n 及ビ m ハ零及ビ正負スベテノ整數ヲ表ハスモノトスル。

以上ノ三ツハ基本ノ三角方程式デアッテ,スベテノ三角方程式ヲ解クニハ適當ノ方法ニヨッテ之ヲカヤウナ方程式ノ解法ニ導ケバヨイ。

例 **4.** $\sin x=\cos x$ ヲ解ケ。

解 $\cos x=0$ トスレバ $\sin x=\pm1$ トナルカラコノ方程式ハ成立タナイ。依ッテ $\cos x\neq0$ トシテ方程式ノ兩邊ヲ $\cos x$ デ割レバ

$$\tan x=1$$

之ヲ滿足スル一ツノ角ハ $\frac{\pi}{4}$ デアルカラ

$$x=n\pi+\frac{\pi}{4}$$

例 **5.** $2\cos^2x+3\sin x=3$ ヲ解ケ。

解 $\cos^2x=1-\sin^2x$ ヲ代入スレバ

$$2(1-\sin^2x)+3\sin x=3$$

即チ　$2\sin^2x-3\sin x+1=0$

之ヲ $\sin x$ ニツイテ解ケバ

$$\sin x=1 \quad \text{或ハ} \quad \frac{1}{2}$$

依ツテ　$\sin x=1$ ヨリ $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

　或ハ　$\sin x=\frac{1}{2}$ ヨリ $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

例 **6.**　$\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$ ヲ解ケ。

解　兩邊ヲ 2 デ割レバ

$$\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \cos x\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad x+\frac{\pi}{6}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$$

例 **7.**　$\tan x+\cot x=2$ ヲ解ケ。

解
$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$$

$$\therefore \quad \tan^2 x-2\tan x+1=0$$

$$\therefore \quad (\tan x-1)^2=0 \qquad \therefore \quad \tan x=1$$

$$\therefore \quad \tan x=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad x=n\pi+\frac{\pi}{4}$$

例　題 (2)

次ノ方程式ヲ解ケ。(1—10)

1.　$\sin 2x=\cos x$

2.　$\sin x\cos x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

3.　$4\sin^2 x-8\cos x+1=0$

4.　$\tan x+\cot x=-2$

5.　$\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$

6.　$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

7.　$\tan^2 x+4\sin^2 x=3$

8.　$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=3\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

9.　$6\cot^2 x-4\cos^2 x=1$

10.　$\cos x\cos 2x=\cos 3x\cos 4x$

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

11.　$x+y=\frac{\pi}{2}$,　$\sin x+\sin y=\sqrt{\frac{3}{2}}$

12.　$\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}$,　$\sin(x-y)=\frac{1}{2}$

補充問題集

[平面幾何]

I. 證明問題

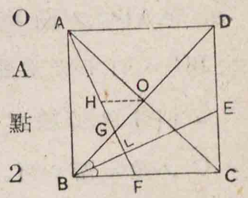
[1] 角及ビ線分ノ相等

1. $\triangle ABC$ ノ邊 AB ガ AC ノ三分ノ一ナルトキ, $\angle A$ ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トシ C カラ AD ニ垂線 CE ヲ引キ E ヲソノ足トスレバ $AD=DE$ デアル。

2. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ニ頂點 A カラ引イタ垂線ノ足ヲ夫々 P, Q トスレバ

$$PQ=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$$

3. 正方形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, $\angle CBD$ ノ二等分線 BE ニ頂點 A カラ引イタ垂線ガ BC, BD ト交ハル點ヲ夫々 F, G トスレバ, CF ハ OG ノ 2 倍ニ等シイ。



4. $\triangle ABC$ ノ外側ニ AB, AC ヲ夫々一邊トスル正方形 ABDE, ACFG ヲ作リ, A カラ BC ヘノ垂線 AH ヲ引クトキ, HA ノ延長ハ線分 EG ヲ二等分スル。

【E カラ AG ニ平行ナル直線ヲ引キ HA ノ延長トノ交點ヲ K トスレバ, $EK=AG$ 從ツテ EAGK ハ平行四邊形トナル】

5. 圓ノ直徑 AB ノ一端 B ニ於ケル切線ガ圓周上ノ任

意ノ點Cニ於ケル切線ト交ハル點ヲDトシ, AC, BD ノ交點ヲEトスレバ△CDEハ二等邊三角形デアル。

6. △ABCノ邊CBノ延長上ニ點Pヲ取リBP=BAナラシメ,邊BCノ延長上ニ點Qヲ取リCQ=CAナラシメルトキ,三點P, A, Qヲ通ル圓ノ中心ヲOトスレバ, OAハ∠BACヲ二等分スル。

7. 圓ノ直徑ABノ一端Aヲ通ル任意ノ弦ヲACトシ, 弧ACノ中點MカラABニ垂線MDヲ引キソノ足ヲDトシ, ACトMBトノ交點ヲEトスレバ, MDハAEヲ二等分スル。

【MDノ延長ト圓周トノ交點ヲ利用セヨ】

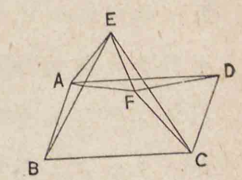
8. △ABCノ邊BC, CAノ中點ヲ夫々D, Eトシ, AカラBCニ引イタ垂線ノ足ヲFトスレバ, Dニ於テ圓DEFニ引イタ切線ガBCトナス角ノ一ツハ△ABCノ角B, Cノ差ニ等シイ。

9. △ABCノ外接圓ノ弧BC及ビソノ共軛弧ノ中點ヲ夫々D, D′トシ, D及ビD′カラABニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々E, E′トスレバ

(i) $AE=\frac{1}{2}(AB+AC)=BE'$

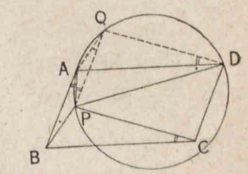
(ii) $AE'=\frac{1}{2}(AB\sim AC)=BE$

10. 平行四邊形ABCDノ内側ニ正三角形BCE, CDFヲ



作ルトキ, △AEFハ又正三角形デアル。

【△ABE≡△FDA, △ABE≡△FCEデアル】



11. 平行四邊形ABCD内ニ一點Pヲ取リ∠BAPト∠BCPトヲ相等シクスレバ, ∠ABPト∠ADPトハ相等シイ。

12. 圓Oノ任意ノ直徑ヲABトシ,半徑AOノ中點トAトノ間ニ一點Cヲ取リ, Cヲ中心トシCOヲ半徑トシテ畫イタ圓ト圓Oトノ交點ヲDトシ, DCノ延長ト圓Oトノ交點ヲEトスレバ,弧BEハ弧ADノ3倍ニ等シイ。

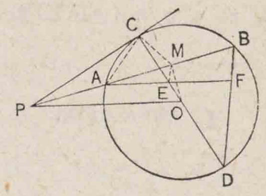
【中心角BOEガ中心角AODノ3倍ニ等シイコトヲ見出セ】

13. 角Cガ直角ナル△ABCノ頂點Cカラ斜邊ABニ垂線ヲ引キソノ足ヲDトスルトキ, △ABC, △ACD, △BCDノ内接圓ノ半徑ノ和ハCDニ等シイ。

【角Cガ直角ナル△ABCノ内接圓ノ半徑ハ$\frac{1}{2}(BC+CA-AB)$デアル。他モ同樣ニ三邊ノ關係デ表ハセ】

14. 圓O外ノ一點Pカラ割線PAB及ビ切線PCヲ引キ, ソノ切點Cヲ通ル直徑ノ他端ヲDトスル。次ニB, D

及ビP, Oヲ結ビ, Aヲ通リ PO ＝平行ナル直線ヲ引キ CD, BD (又ハソノ延長)ト夫々 E, F ＝於テ交ハラシメルトキハ AE＝EF デアル。



【AB ノ中點ヲ M トシ ME∥BF ナルコトヲ證明スレバヨイ, 四點 O, M, C, P 及ビ M, C, A, E ハ夫々同一圓周上＝アル。カヤウナ點ヲ**共圓點**トイフ】

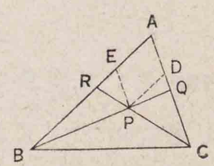
［2］ 角及ビ線分ノ大小

15. 二等邊三角形 ABC ＝於テ,點 D ガ底邊 BC ノ上＝アルトキハ AD<AB, 又點 E ガ BC ノ延長上＝アルトキハ AE>AB デアル。

16. 三角形ノ三中線ノ和ハ周ヨリモ小＝シテ,周ノ四分ノ三ヨリモ大デアル。

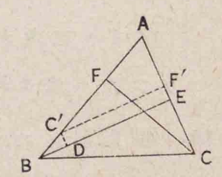
17. △ABC 内ノ任意ノ點ヲ P トシ, BP 及ビ CP ノ延長ガ夫々 AC, AB ト交ハル點ヲ Q 及ビ R トスレバ

$$PQ+PR<AQ+AR$$



18. 鋭角三角形 ABC ＝於テ AB>AC トシ, B 及ビ C カラソノ對邊＝引イタ垂線ヲ夫々 BE, CF トスレバ

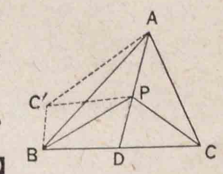
$$AB-AC>BE-CF$$



19. 點 A カラ直線 XY ＝垂線 AB 及ビソノ同ジ側＝斜線 AP, AQ, AR ヲ引キ AR−AQ＝AQ−AP ナラシメルトキハ PQ>QR デアル。

【PR ノ中點ヲ M トスレバ 2AM<AP+AR】

20. △ABC ＝於テ AB>AC トシ,中線 AD 上＝任意ノ點 P ヲ取リ PB, PC ヲ引ケバ AB−AC>PB−PC デアル。



【AD ＝關スル C ノ對稱點ヲ利用セヨ】

21. △ABC ＝於テ AB>AC ナルトキ,頂點 A カラ邊 BC ＝垂線 AD ヲ引キ, P ヲ AD 上ノ任意ノ點トスレバ

$$AB-AC<PB-PC$$

【$AB^2-AC^2=PB^2-PC^2$ デアルカラ $\dfrac{AB-AC}{PB-PC}=\dfrac{PB+PC}{AB+AC}$】

22. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ＝引イタ垂線ヲ AD トスレバ AB+AC<AD+BC デアル。

【$(AB+AC)^2$ ト $(AD+BC)^2$ トヨリ考ヘヨ】

23. 中心 O ナル圓外ノ點 P カラコノ圓＝割線 PAB ヲ引キ圓周トノ交點ヲ A, B トスレバ ∠OPA ガ小サクナル＝從ツテ PA+PB ハ大キクナル。

【中心 O カラコノ割線＝垂線ヲ引イテ考ヘヨ】

24. 三角形ノ三ツノ角ヲ α, β, γ トシ,ソノ對邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ $\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<$ R∟ デアル。

【$b+c>a,\ \alpha>0 \quad \therefore\ (a+b+c)\alpha>2a\alpha$】

[3] 二直線ノ平行ト直交

25. △ABC ト △A'B'C' トガ合同デ AB, AC ガ夫々ソノ對應邊 A'B', A'C' ニ平行ナルトキ, BC ∥ B'C' デアル。又コノトキ AA', BB', CC' ノ三直線ハ如何ナル性質ヲ有スルカ。

【AA', BB', CC' ハ互ニ平行デアルカ,或ハ一點ニ於テ相交ハル】

26. △ABC ト △A'B'C' トガ合同デ二双ノ對應邊ガ互ニ垂直ナルトキ,殘リノ對應邊モ亦互ニ垂直デアル。

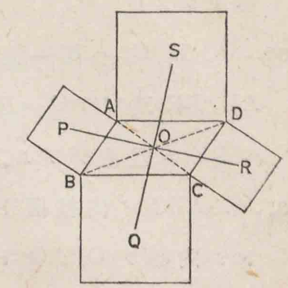
27. 一ツノ圓ノ中心 C ハ他ノ圓 O ノ圓周上ニアツテコノ二圓ノ交點ヲ A, B トスル。今圓 O ノ周上ノ任意ノ點 P カラ二ツノ直線 PA, PB ヲ引キ圓 C ノ周トノ交點ヲ夫々 X, Y トスルトキ AY, BX ハ互ニ平行デアル。

28. AOB, COD ハ圓 O ノ互ニ垂直ナル二ツノ直徑デアル。OA, OD 又ハソノ延長上ニ夫々點 E, F ヲ取リ OE=OF ナラシメルトキ; BF, DE 或ハソノ延長ガ圓周ト交ハル點ヲ夫々 L, K トスレバ,弧 KL ハ圓周ノ四分ノ一ニ等シイ。

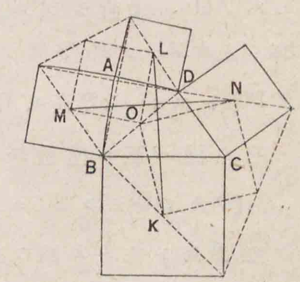
29. △ABC ノ邊 AB, AC ノ中點 P 及ビ Q カラ夫々ソノ邊ニ垂線 PD, QE ヲ三角形ノ外方ニ引キ, PD 及ビ QE

ヲ夫々邊 AB, AC ノ半分ニ等シクスルトキ, D, E ヲ邊 BC ノ中點 R ニ結ブ線分 DR, ER ハ相等シク且ツ直交スル。

30. 平行四邊形ノ各邊ヲ一邊トシテソノ外側ニ正方形ヲ作ルトキ,ソノ四ツノ正方形ノ中心ハ又一ツノ正方形ノ頂點デアル。



31. 四邊形 ABCD ノ外側ニ各邊ノ上ノ正方形ヲ作リ,ソノ各ノ中心ヲ夫々 M, K, N, L トスレバ,相對スル正方形ノ中心ヲ結ブ二ツノ線分 KL ト MN トハ相等シク且ツ直交スル。



【BD ノ中點ヲ O トシ △MON≡△LOK ナルコトヲ導ケ】

32. 平行四邊形 ABCD ノ邊 AD ニ平行ナル直線上ニ二點 E, F ヲ取リ, BE, CF ノ交點ヲ G トシ, AE, DF ノ交點ヲ H トスレバ, GH ハ AB ニ平行デアル。

【$\dfrac{HE}{HA}$ 及ビ $\dfrac{GE}{GB}$ ヲ考ヘヨ】

33. 圓外ノ一點 A カラ切線 AB 及ビ割線 ACD ヲ引キ, A カラ任意ノ方向ニ線分 AP ヲ引キ AP=AB ナラシメ, PC, PD 或ハソノ延長ト圓周トノ交點ヲ夫々 M, N

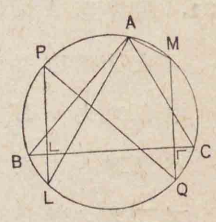
トスレバ, MN ハ AP ニ平行デアル。

【$AP^2=AC\cdot CD$ デアルカラ AP ハ圓 PCD ノ點 P ニ於ケル切線デアル】

34. A, B, C ハ同一圓周上ノ點デアル。平行ナル二弦 AD, BE 及ビ AC ニ垂直ナル弦 EF ヲ引クトキハ, BC ハ DF ニ垂直デアル。

35. △ABC ノ内接圓ト邊 BC, CA トノ切點ヲ夫々 D, E トシ,内心ヲ O, AO ト DE トノ交點ヲ G トスレバ BG ハ AG ニ垂直デアル。

36. △ABC ノ外接圓ノ任意ノ直徑ヲ PQ トスレバ,P 及ビ Q ニ關スルしむそん線ハ互ニ垂直デアル。



【P 及ビ Q カラ BC ニ引イタ垂線ガ外接圓周ト交ハル點ヲ夫々 L, M トスレバ, P, Q ニ關スルしむそん線ハ夫々 AL, AM ニ平行デアル。故ニ AL⊥AM ナルコトヲ考ヘヨ】

[4] 共圓點

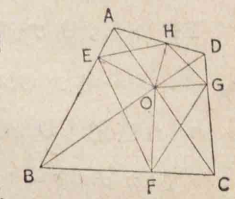
37. 圓ノ直交スル二弦ノ端ニ於ケル四ツノ切線ノナス四邊形ハ圓ニ内接スル。

38. 圓ニ内接スル四邊形ノ各邊ヲ弦トシテ形内ニ四ツノ圓ヲ作ルトキ,ソレ等ノ圓ガ新ニ交ハル四ツノ點ハ同一ノ圓周上ニアル。

39. 圓 O 外ノ一點 P カラ切線 PA, PB 及ビ割線 PQR ヲ引キ,弦 AB ノ中點ヲ D トスレバ,四點 O, D, Q, R ハ同一ノ圓周上ニアル。

【$PA^2=PQ\cdot PR$, $PA^2=PO\cdot PD$ ∴ $PQ\cdot PR=PO\cdot PD$】

40. 四邊形ノ對角線ガ互ニ直交スルトキハ,ソノ交點カラ四ツノ邊ニ引イタ垂線ノ足ハ同一ノ圓周上ニアル。



【圖ニ於テ,四邊形 AEOH, BFOE, CGOF, DHOG ハ圓ニ内接スル】

41. 三角形ノ底邊ノ位置ト大サ,他ノ二邊ノ和ノ大サトガ夫々一定ナルトキ,底邊ノ一端カラ頂角ノ外角ノ二等分線ニ引イタ垂線ノ足ハ一定圓周上ニアル。

【底邊ノ中點ヲ中心トシ二邊ノ和ノ半分ヲ半徑トスル圓周ニツイテ考ヘヨ】

42. AB ハ圓 O ノ定弦デアル。圓 O 外ノ點 P カラコノ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ切點ヲ C, D トスレバ,弦 CD ガ AB ニヨツテ二等分セラレルトキハ, P ハ一ツノ定圓周上ニアル。

【PBOA ガ一ツノ圓ニ内接スルコトヲイヘ】

43. △ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ中點 D, E, F ト三垂線 AG, BH, CK ノ足 G, H, K ト垂心カラ頂點 A, B, C ニ

至ル線分ノ中點 L, M, N トハ同一ノ圓周上ニアル。

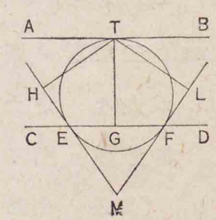
【コノ圓ヲ**九點圓**トイフ。LD ガ九點圓ノ直徑トナル】

[5] 切線及ビ切圓

44. 中心 O ナル圓ノ直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ヲ AC, BD トシ, O ヲ通ル任意ノ直線ト AC トノ交點ヲ C トシ, O ニ於テ OC ニ垂線ヲ引キ BD トノ交點ヲ D トスレバ,直線 CD ハ圓 O ニ切スル。

【O カラ CD ニ垂線 OE ヲ引キ OE ガコノ圓ノ半徑ニ等シイコトヲイヘ】

45. 二ツノ定平行線 AB, CD ガアル。AB 上ノ定點 T ニ於テ AB ニ切スル任意ノ圓ガ CD ト交ハル點ヲ E, F トスレバ E, F ニ於テコノ圓ニ引イタ切線ハ皆一定ノ圓ニ切スル。



【T カラ CD ニ引イタ垂線ノ足ヲ G トスレバ,求メル定圓ハ T ヲ中心トシ TG ヲ半徑トスルモノデアル】

46. △ABC ノ邊 AB 上ニ一點 D ヲ取リ, CD ヲ引キ, △ACD, △BCD ノ内接圓ガ同一點 E ニ於テ CD ニ切スルタメニハ點 D ハ如何ナル位置ニ取レバヨイカ。

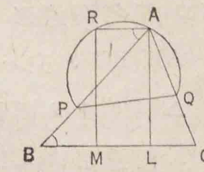
【△ADC ニ於テハ 2DE=AD+DC−AC, 又 △BCD ニ於テハ 2DE=DB+DC−BC】

47. △ABC ノ外接圓ニ B, C ニ於テ切線ヲ引キ D ニ於

テ交ハラシメ,外接圓ノ中心 O カラ AB, AC ニ平行線ヲ引キ BD, CD ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシメルトキ EF ハ圓 O ニ切スル。

【O カラ EF ニ垂線 OG ヲ引キ G ガ △ABC ノ外接圓周上ニアルコトヲ證明スルタメニ ∠BGC+∠A=2∟ ナルコトヲイヘ】

48. 形及ビ大サノ定マツタ三角形ノ二邊 AB, AC ガ夫々二定點 P, Q ヲ通ルヤウニ動クトキ邊 BC ハ常ニ一定圓ニ切スル。



49. 線分 AB ヲ直徑トスル圓 O ノ A, B ニ於ケル切線ヲ夫々 s, t トシ,圓周上ニ任意ノ點 C ヲ取リ, BC ノ延長ガ s ト交ハル點ヲ E, AC ノ延長ガ t ト交ハル點ヲ F トスル。直線 EF ガ直線 AB ト交ハル點ヲ D トスルトキハ,DC ハ圓 O ノ切線デアル。

【DC ガ s ト交ハル點ヲ M トシ, AM=ME ナルコトヲイヘ。ソノタメニハ △DCE=△DCA ナルコトヲイヘバヨイ】

50. △ABC ハ圓 O ニ内接シ, ∠C ノ二等分線ハ AB ト D ニ於テ交ハル。今 D ニ於テ AB ニ切シ且ツ C ヲ通ル圓ヲ畫クトキハ,コノ圓ハ C ニ於テ圓 O ニ内切スル。

【第二ノ圓ヲ O′ トスレバ C ニ於ケル圓 O′ ノ切線 CT (T ヲ CD ニ關シテ B ノ側ノ點トスル)ハ同時ニ圓 O ノ切線デナケレバナラヌ。ソレニハ ∠A=∠BCT デアレバヨイ】

51. 圓 O 外ノ二點 A, B ヲ通リ圓 O ト交ハル任意ノ圓ヲ畫キ,ソノ共通弦 CD ノ延長ト直線 AB トノ交點ヲ P トシ,P カラ圓 O ニ切線 PT (T ハ切點)ヲ引クトキハ,三點 A, B, T ヲ通ル圓ハ圓 O ニ切スル。

[6] 面積ノ變形

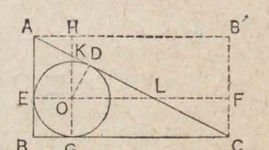
52. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC ニ平行ナル直線ガ AB, BC ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ, △ADE ト △CDF トノ面積ハ相等シイ。

53. 四邊形 ABCD 內ニ任意ノ點 P ヲ取リ △PAB+△PCD ガ常ニ一定ナレバ, ABCD ハ平行四邊形デアル。

【P ヲ通ツテ AB ニ平行ナル直線ヲ引イテ考ヘヨ】

54. 平行四邊形 ABCD 內ノ點 P ヲ通リ二隣邊ニ平行ナル直線ヲ引イテ之ヲ四ツノ平行四邊形ニ分ケルトキ, P ガ AC 上ニナイトキハ △APC ハ ▱PB ト ▱PD トノ差ノ半分ニ等シイ。

55. 角 B ガ直角ナル △ABC ノ內接圓ガ斜邊 AC ニ切スル點ヲ D トスルトキハ,矩形 AD·DC ト三角形 ABC トノ面積ハ相等シイ。



【圖ニ於テ AD·DC=AE·GC=□OHB′F, 又 △AHK≡△KDO, △ODL≡△LFC】

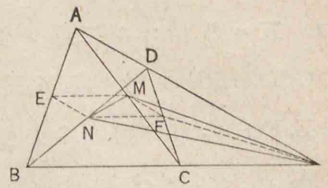
56. 矩形 ABCD ノ邊 BC, CD 上ニ夫々任意ノ點 X, Y ヲ

取レバ

$$2\triangle AXY+BX\cdot DY=\square ABCD$$

【X, Y ヲ通リ夫々 AB, AD ニ平行線ヲ引イテ考ヘヨ】

57. 四邊形ノ兩對角線ノ中點ト一双ノ對邊ノ延長ノ交點トヲ結ビツケテ得ル三角形ノ面積ハ原四邊形ノ四分ノ一ニ等シイ。



【圖ニ於テ AB, CD; AC, BD ノ中點ヲ夫々 E, F; M, N トスレバ ▱ENFM$=\frac{1}{2}$(△ABC−△DBC), △PMF$=\frac{1}{4}$△ACD, △PNF$=\frac{1}{4}$△DBC】

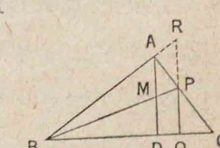
[7] 平方關係

58. 圓ノ中心カラソノ圓外ノ一直線ニ引イタ垂線ノ足ヲ D トシ,同ジ直線上ノ他ノ任意ノ點ヲ G トシ, D 及ビ G カラコノ圓ニ切線 DE, GF ヲ引クトキハ

$$GF^2=GD^2+DE^2$$

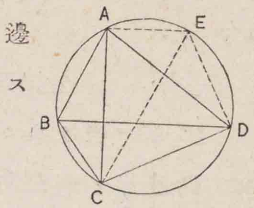
【中心ト G, E, F ヲ結ビぴたごらすノ定理ヲ適用セヨ】

59. A ヲ直角トスル直角三角形 ABC ガアル。A カラ BC ニ垂線 AD ヲ引キ, AD ノ中點ヲ M トシ, BM ト AC トノ交點ヲ P, P カラ BC ニ引イタ垂線ヲ PQ トスレバ



$$AP\cdot PC=PQ^2$$

60. 半徑ガ r ナル圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ガ直交スルトキハ



$$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2=4r^2$$

61. 互ニ外切スル二圓ノ切點 P ヲ通リ直交スル二直線 CPD, EPF ヲ引キ,兩圓周ト交ハル點ヲ夫々 C, D 及ビ E, F トシ, P ヲ通ル中心線ガ兩圓周ト交ハル點ヲ夫々 A, B トスレバ

$$AB^2=CD^2+EF^2$$

62. △ABC ノ外側ニ AB, AC ヲ夫々一邊トスル正方形 ABDE, ACFG ヲ作リ,ソノ面積ヲ夫々 S_1, S_2 トスレバ

$$EG^2+BC^2=2(S_1+S_2)$$

【BA ヲコレニ等シクKマデ延長スル。 △ACK≡△AGE】

63. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, AC, BD ノ中點ヲ夫々 E, F トシ, EF ノ中點ヲ G トスレバ

$$AO^2+BO^2+CO^2+DO^2=AG^2+BG^2+CG^2+DG^2+4GO^2$$

【△GAC, △GBD ニ於テ夫々 GE, GF ハソノ中線デアル。又 $AO^2+CO^2=2AE^2+2OE^2$, $BO^2+DO^2=2BF^2+2OF^2$】

64. 四邊形 ABCD ノ二双ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ノ交點ヲ O トスルトキ,コノ四邊形ノ四ツノ邊及ビ二ツノ對角線ノ長サヲ夫々 a, b, c, d 及ビ x, y デ表ハセバ

$$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+x^2+y^2)$$

65. △ABC ノ邊 BC 上ニ一點 P ヲ取リ $m\cdot BP=n\cdot PC$ ナラシメルトキハ

$$mAB^2+nAC^2=mBP^2+nCP^2+(m+n)AP^2$$

66. 前問ニ於テ,P ガ邊 BC ノ延長上ノ點デアルトキハ

$$mAB^2-nAC^2=mBP^2-nCP^2+(m-n)AP^2$$

67. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ D トシ, △ABC, △ABD, △ACD ノ內接圓ノ半徑ヲ夫々 r_1, r_2, r_3 トスレバ

$$r_1^2=r_2^2+r_3^2$$

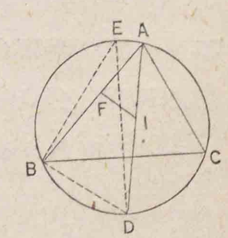
[8] 比例線分及ビ積ノ關係

68. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點カラ相對スル二邊ニ引イタ垂線ノ比ハソノ二邊ノ比ニ等シイ。

69. 點 P ニ於テ內切スル二ツノ圓ガアル。ソノ小ナル圓ノ周上ノ一點 A ニ於テコノ圓ニ切スル直線ガ大ナル圓ト交ハル點ヲ B, C トスレバ

$$PB:PC=AB:AC$$

【PA ハ ∠BPC ヲ二等分スル】



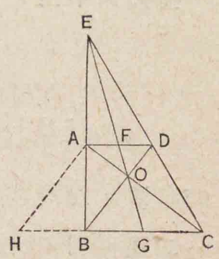
70. △ABC ノ內心ヲ I トシ, AI ノ延長ガ外接圓周ト交ハル點ヲ D トスレバ, AI·ID ハ外接圓ノ直徑ト內接圓ノ半徑トノ積ニ等シイ。

71. △ABC ニ外接スル圓ガアル。C カラ AB ニ引イタ垂線 CD ハ, C カラ A 及ビ B ニ於ケルソノ圓ノ切線ニ引イタ垂線 CE, CF ノ比例中項デアル。

【四邊形 ADCE 及ビ DBFC ハ圓ニ内接スル】

72. 圓周上ノ一點 A カラ二ツノ弦 AB, AC ヲ引キ, 弧 AB, 弧 AC ノ中點 E, F ヲ結ブ直線ガ AB, AC ト夫々 G, H ニ於テ交ハレバ AG=AH デアル。又 ∠A=60° ナルトキハ $GH^2=EG\cdot HF$ デアル。

73. 梯形 ABCD ニ於テ ∠A=∠B=R∟, AC⊥BD トシ, BA, CD ノ延長ノ交點ヲ E トシ, AC, BD ノ交點ヲ O, EO ガ AD, BC ト交ハル點ヲ夫々 F, G トスレバ $AB^2=4OF\cdot OG$ デアル。



【DB ヲ A ヲ通ルマデ平行ニ移動セヨ】

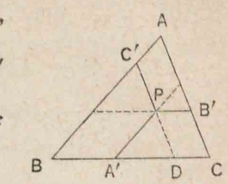
74. △ABC ノ外接圓ノ A ニ於ケル切線ト BC ノ延長トノ交點ヲ D トシ, △ACD 及ビ △ABD ノ外接圓ノ直徑ヲ夫々 $d:d'$ トスルトキハ $d:d'=AD:BD$ デアル。

【A カラ BD ニ垂線 AE ヲ引ケバ $AC\cdot AD=AE\cdot d$, $AB\cdot AD=AE\cdot d'$】

75. 一點 O デ相會スル三ツノ直線 OU, OV, OW ガアル; ∠UOW, ∠VOW ガ何レモ 60° ナルトキ, 任意ノ直線ガコノ三直線ト交ハル點ヲ夫々 A, B, C トスレバ

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}=\frac{1}{OB}$$

76. △ABC 内ノ一點 P カラ邊 AB, BC, CA ニ平行ナル直線 PA′, PB′, PC′ ヲ引キ BC, CA, AB トノ交點ヲ夫々 A′, B′, C′ トスレバ



$$\frac{BA'}{BC}+\frac{CB'}{CA}+\frac{AC'}{AB}=1$$

【$\frac{BA'}{BC}+\frac{CB'}{CA}+\frac{AC'}{AB}=\frac{BA'}{BC}+\frac{A'D}{BC}+\frac{DC}{BC}$ ナルコトヲ證明セヨ】

77. 圓外ノ一點 P カラソノ圓ニ切線 PA, 割線 PBC ヲ引キ, ∠APB ノ二等分線ガ弦 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ

$$\frac{DB}{AB}+\frac{EC}{AC}=1$$

［9］ 比例ト面積

78. △ABC ノ ∠A 及ビソノ外角ノ二等分線ガ對邊 BC 及ビソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P, Q トシ, PQ ノ中點ヲ O トスレバ

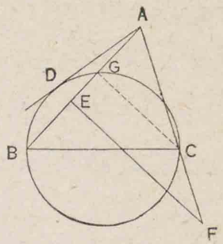
$$AB^2:AC^2=OB:OC$$

79. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C カラ斜邊 AB ニ垂線 CD ヲ引キ, AD ヲ直徑トスル圓周ト AC トノ交點ヲ E トスレバ

$$AE:CE=AC^2:BC^2$$

80. ∠A ガ鋭角ナル △ABC ニ於テ BC ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ, A カラコノ圓ニ切線 AD ヲ引キ (D ハ切點),

AB 上ニ AD ニ等シク AE ヲ取リ, E ニ於テ AB ニ垂線ヲ引イテ AC ノ延長ト F デ交ハラシメルトキハ



$$\triangle AEF=\triangle ABC$$

81. 點 A ニ於テ内切スル二圓ノ中心ヲ O, O′ トシ,外圓 O ノ周上ノ一點 P カラ内圓 O′ ニ引イタ切線ヲ PT トスレバ

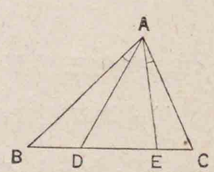
$$PT^2 : PA^2 = OO' : OA$$

82. △ABC ノ邊 BC 上ノ一點 P カラ他ノ二邊ニ平行ナル直線ヲ引キ, AC, AB トノ交點ヲ夫々 Q, R トスレバ △AQR ハ △BPR ト △CPQ トノ比例中項デアル。

83. △ABC ノ頂點 A ニ於テ外接圓ニ切線ヲ引キ, BC ノ延長ト D デ交ハラシメルトキハ

$$AB^2 : AC^2 = BD : CD$$

84. △ABC ノ邊 BC 上ニ點 D, E ヲ取リ ∠BAD=∠CAE ナラシメルトキハ



$$AB^2 : AC^2 = BD\cdot BE : CD\cdot CE$$

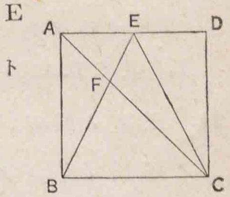
$$\left[\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AE}=\frac{\triangle ABD}{\triangle ACE}=\frac{BD}{CE},\quad \frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AD}=\frac{\triangle ABE}{\triangle ACD}=\frac{BE}{CD}\right]$$

85. △ABC ヲ各頂角ノ二等分線 AD, BE, CF ヲ以テ六ツノ小三角形ニ分ケルトキ,ソノ中デ面積ノ最大ナルモ

ノヲ求メヨ。 但シ AB>BC>CA ニシテ D, E, F ハ原三角形ノ邊上ニアル。

【内心ヲ I トスレバ △IBC, △ICA 及ビ △IAB ノ高サハ相等シイ】

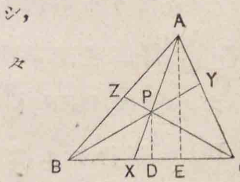
86. 正方形 ABCD ノ邊 AD ノ中點ヲ E トシ,對角線 AC ト BE トノ交點ヲ F トスレバ



$$\frac{\triangle AEF}{1}=\frac{\triangle EFC}{2}=\frac{\triangle BCF}{4}$$

【△AEF∽△BCF デアル】

87. △ABC ノ平面内ノ一點ヲ P トシ, AP, BP, CP ガ對邊ト交ハル點ヲ夫々 X, Y, Z トスレバ



$$\frac{AP}{AX}+\frac{BP}{BY}+\frac{CP}{CZ}=2$$

【左邊ヲ面積ノ比デ表ハシ,且ツ同分母ニセヨ】

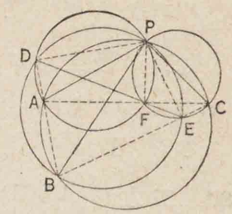
[10] 共線點

88. △ABC ノ ∠B, ∠C 及ビソノ外角ノ二等分線ニ頂點 A カラ引イタ四ツノ垂線ノ足ハ同一直線上ニアル。

【一直線上ニアル諸點ヲ**共線點**トイフ】

89. △ABC ノ ∠A 及ビソノ外角ノ二等分線ニ B カラ垂線 BE, BD ヲ引キ E, D ヲソノ足トシ, M ヲ邊 BC ノ中點トスレバ,三點 D, M, E ハ同一直線上ニアル。

90. 圓周上ノ一點 P カラ引イタ任意ノ弦 PA, PB, PC ヲ直徑トスル圓周ガ二ツヅツ相交ハル三點 D, E, F ハ同一ノ直線上ニアル。



【圖ニ於テ先ヅ三點 B, E, C 及ビ A, F, C 及ビ B, A, D ハ夫々同一直線上ニアルコトヲ考ヘヨ】

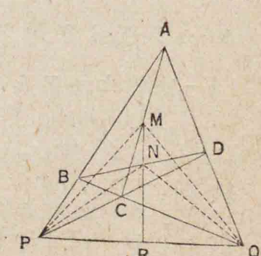
91. 三ツノ圓ガ A, B, C ニ於テ相切スルトキ,弦 AB, AC ノ延長ガ第三ノ圓ト點 D, E ニ於テ相交ハルトキハ,第三ノ圓ノ中心ト D, E トハ同一ノ直線上ニアル。

【切點ハ中心線上ニアルコトニ注意セヨ】

92. 平行四邊形 ABCD 內ノ一點 P ヲ通リ,邊 AB ニ平行ナル直線 HPF ト AD, BC トノ交點ヲ夫々 H, F トシ邊 BC ニ平行ナル直線 EPG ト AB, CD トノ交點ヲ夫々 E, G トシ, BG, DF ノ交點ヲ Q トスレバ,三點 A, P, Q ハ同一ノ直線上ニアル。

【平行四邊形ノ餘形ノ性質ヲ利用セヨ】

93. 四邊形 ABCD ノ對邊 AB, CD 及ビ BC, AD ノ交點ヲ夫々 P, Q トスレバ,對角線 AC, BD ノ中點 M, N 及ビ PQ ノ中點 R ハ同一ノ直線上ニアル。



【問題 57. ニヨリ △MNP=△MNQ ナルコトヲ利用セヨ】

94. 梯形ノ平行デナイ二邊ノ延長ノ交點,對角線ノ交點及ビ二底邊ノ中點ハ同一ノ直線上ニアル。

95. P ヲ半圓周上ノ任意ノ點トシ,直徑 AB 上ニ任意ノ點 X ヲ取リ, PB, PA ニ平行線ヲ引キ, A, B ニ於ケルコノ圓ノ切線トノ交點ヲ夫々 Q, R トスレバ,三點 Q, P, R ハ一直線上ニアル。

【AP, BP ノ延長ト B 及ビ A ニ於ケル切線トノ交點ヲ夫々 C, D トシテ $\frac{DQ}{QA}=\frac{BR}{RC}$ ナルコトヲ考ヘヨ】

96. 一點 O デ相會スル三ツノ直線 OA, OB, OC ガアル。$\angle AOB=\angle BOC=60^\circ$ 且ツ $\frac{OB}{OA}+\frac{OB}{OC}=1$ ナルトキハ三點 A, B, C ハ同一直線上ニアル。

【$\triangle OAB+\triangle OBC=\triangle OAC$ ナルコトヲ利用セヨ】

97. △ABC ノ各頂點 A, B, C ニ於テ外接圓ニ切スル直線ガ對邊 BC, CA, AB ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P, Q, R トスレバ,コレ等ノ三點ハ同一ノ直線上ニアル。

【$\frac{BP}{CP}\times\frac{CQ}{AQ}\times\frac{AR}{BR}=1$ ナレバヨイ】

[11] 共點線

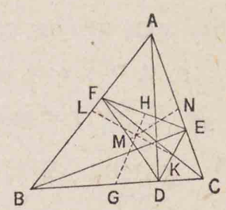
98. △ABC 內ニ任意ノ點 O ヲ取リ, AO, BO, CO ノ中點ヲ夫々 L, M, N トシ, BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスレバ,三直線 LD, ME, NF ハ一點ニ集交スル。

【一點ヲ通ル諸直線ヲ**共點線**トイフ】

99. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ外角ノ二等分線ニ B, C カラ垂線 BB', CC' ヲ引キ，又 $\angle A$ ノ二等分線ヲ AD トスレバ BC', CB', AD ハ同一ノ點ヲ通ル。

【BB', CC' ト夫々 CA, BA ノ延長トノ交點ヲ利用シテ CB' 及ビ BC' ハ何レモ AD ノ中點 M ヲ通ルコトヲ考ヘヨ】

100. $\triangle ABC$ ノ三頂點カラ對邊ニ引イタ垂線ヲ夫々 AD, BE, CF トスレバ，AB ト DE, BC ト EF, CA ト FD ノ各組ノ中點ヲ結ブ三直線ハ同一ノ點ヲ通過スル。

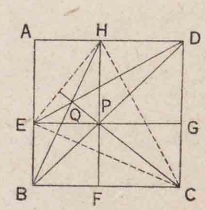


【各直線ハ夫々 $\triangle DEF$ ノ各邊ノ垂直二等分線デアル】

101. $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB 上ニ形外ニ作レル正方形ノ中心ヲ夫々 K, L, M トスレバ AK, BL, CM ハ同一ノ點ニ於テ相交ハル。

【$CM \perp KL$, $AK \perp LM$, $BL \perp MK$ デアル】

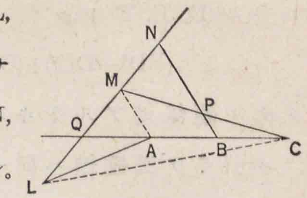
102. 正方形 $ABCD$ ノ對角線 BD 上ノ一點 P ヲ通ツテ各邊ニ平行ニ引イタ直線ガ邊 AB, BC, CD, DA ト交ハル點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ三直線 BH, CP, DE ハ同一ノ點ニ於テ相交ハル。



【BH, CP, DE ハ $\triangle HEC$ ノ三垂線デアル】

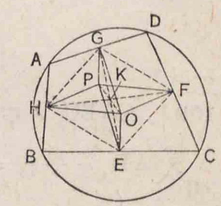
103. 一點 Q ニ於テ相交ハル二直線ガアル。今ソノ一

ツノ直線上ニ三點 A, B, C ヲ取リ $QA=AB=BC$ ナラシメ，次ニ他ノ直線上ニ三點 L, M, N ヲ取リ，$LQ=QM=MN$ ナラシメルトキハ三直線 AL, BN, CM ハ一點 P ニ於テ相交ハル。



【A ハ $\triangle MLC$ ノ重心デアル】

104. 圓ニ內接スル四邊形ノ各邊ノ中點カラ對邊ニ引イタ四ツノ垂線ハ同一ノ點ニ於テ交ハル。



【圖ニ於テ E, G カラ夫々 AD, BC ヘ垂線ヲ引キソノ交點ヲ P トスレバ，四邊形 $PEOG$ ハ平行四邊形トナリ，EG ハ K ニ於テ OP ヲ二等分スル】

105. AB ハ圓ノ直徑デアル。圓周上ノ任意ノ點 C カラ AB ニ垂線 CD ヲ引キ，C ニ於ケルコノ圓ノ切線ガ A, B ニ於ケルコノ圓ノ二切線ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスルトキハ AF, BE ハ CD 上ニ於テ相交ハル。

【BE, AF ハ何レモ CD ノ中點ヲ通過スル】

106. $\triangle ABC$ ノ邊 BC 上ノ一點ヲ D トシ，$\angle ADB$, $\angle ADC$ ノ二等分線ガ邊 AB, AC ニ交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ三直線 AD, BF, CE ハ同一ノ點ニ於テ交ハル。

【Ceva ノ定理ノ逆ヲ用ヒヨ】

107. $\triangle ABC$ ノ三邊 BC, CA, AB 或ハソノ延長上ノ點ヲ夫々 D, E, F トシ

$$(BD^2-DC^2)+(CE^2-EA^2)+(AF^2-FB^2)=0$$

ナル關係ガアルトキハ, D, E, F ニ於テ夫々 BC, CA, AB ニ引イタ三垂線ハ同一點ヲ通過スル。

【E, F ニ於テ夫々 CA, AB ニ引イタ垂線ノ交點ヲ O トシ, O カラ BC 或ハソノ延長ニ垂線 OD′ ヲ引キ D ト D′ トガ一致スルコトヲイヘ】

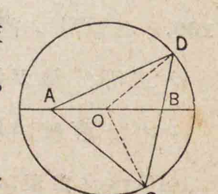
[12] 定量問題

108. $\triangle ABC$ ノ中線 AD ヲ引キ, 邊 BC 上ノ任意ノ點 P カラ AD ニ平行ニ引イタ直線ガ AB, AC 又ハソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 Q, R トスレバ PQ+PR ハ P ノ位置ニ關セズ一定デアル。

109. $\angle XAY$ ノ二等分線上ノ定點 B ト頂點 A トヲ通ル任意ノ圓周ガ角ノ二邊ト交ハル點ヲ夫々 P 及ビ Q トスレバ AP+AQ ハ定長デアル。

【B カラ $\angle XAY$ ノ一邊ニ垂線 BC ヲ引キソノ足ヲ C トスレバ AP+AQ=2AC= 一定デアル】

110. 圓 O ノ直徑上ニ於テ中心 O ノ左右等距離ニアル二定點ヲ A, B トシ, B ヲ通ル任意ノ弦ヲ CD トスレバ $\triangle ACD$ ノ三邊ノ平方ノ和ハ一定デアル。

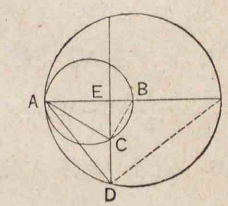


【半徑ヲ r トシ, $OA=OB=a$ トスレバ $AC^2+CD^2+DA^2=6r^2+2a^2$ ナルコトヲイヘ】

111. 點 A ニ於テ相切スル二圓ノ一ツノ圓周上ノ任意ノ點 P カラ他ノ圓ニ切線 PB ヲ引ケバ比 PA : PB ハ一定デアル。

【PA : PB ノ代リニ $PA^2 : PB^2$ ガ一定ナルコトヲイヘ】

112. 圓ノ直徑 AB ノ一端 B ヲ中心トシ, AB ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ AB ニ垂直ナル任意ノ直線ガ第一, 第二ノ兩圓周ト交ハル點ヲ夫々 C, D トスレバ AC : AD ハ一定デアル。



【$AC^2 : AD^2$ ヲ定比ニ導ケ】

[13] 定點通過

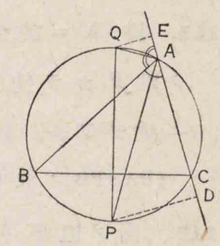
113. 直角二等邊三角形 ABC ニ於テ斜邊 BC 上ノ任意ノ點 D カラ AB, AC ニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々 E, F トスルトキ, E, F ヲ結ブ直線ニ D カラ引イタ垂線ハ定點ヲ通ル。

114. M, N ハ一定圓周上ノ二定點デアル。今 M ヲ通ツテ任意ノ割線ヲ引キ, コノ定圓周ト A ニ於テ, 又一定直線 XY ト B ニ於テ交ハラシメルトキハ, 圓 ABN ハ一定

點ヲ通ル。

【圓 ABN ト定直線 XY トノ今一ツノ交點ヲ C トスレバ $\angle BCN=\angle MAN=$ 一定 デアル】

115. 三角形ノ頂角ノ位置,大サ及ビソノ角ヲ夾ム二邊ノ和又ハ差ガ一定ナルトキ,ソノ外接圓周ハ定點ヲ通ル。



【$\angle A$ 及ビソノ外角ノ二等分線 AP, AQ ガ △ABC ノ外接圓周ニ交ハル點ヲ夫々 P, Q トシ P, Q カラ邊 AC ニ夫々垂線 PD, QE ヲ引ケバ $AD=\frac{1}{2}(AB+AC)$, $AE=\frac{1}{2}(AB\sim AC)$ デアル】

116. 定圓 O 外ノ定直線ヲ XY トシ, XY 上ノ任意ノ點 P カラ圓 O ニ引イタ切線ヲ PA, PB トシ, A, B ヲ結ブトキハ, AB ハ常ニ定點ヲ通過スル。

【O カラ XY ニ引イタ垂線 OM ト AB トノ交點ヲ R トスレバ $OM\cdot OR=OB^2$ デアル】

117. 定圓 O 外ノ二定點ヲ A, B トシ A, B ヲ通リ圓 O ト交ハル任意ノ圓ヲ作リ,ソノ交點ヲ P, Q トシ, AP, AQ 又ハソノ延長ト圓 O トノ交點ヲ夫々 R, S トスレバ,直線 RS ハ常ニ定點ヲ通過スル。

【直線 AB ト RS トノ交點ヲ K トスレバ四點 B, P, R, K ハ同一圓周上ニアル。故ニ $AP\cdot AR=AB\cdot AK=AQ\cdot AS$ デアル】

[14] 雜 題

118. △ABC ノ内接圓及ビ $\angle A$ 内ノ傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r, r' トスルトキ $BC^2=4rr'$ ナル關係ガアルトキハ,コノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

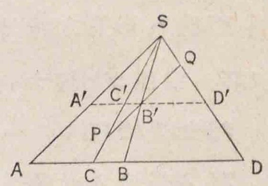
【△ABC ノ A, B, C ノ對邊ヲ a, b, c, 面積ヲ S, $a+b+c=2s$ トスレバ $r=\frac{S}{s}$, $r'=\frac{S}{s-a}$, $BC=a$ デアル】

119. △ABC ノ底邊 BC 上ノ一點ヲ D トシ

$$AB^2-AD^2=BD\cdot CD$$

ナル關係ガアルトキ, △ABC ノ形狀ヲ研究セヨ。

120. S ヲ調和列點 A, C, B, D ヲ通ル直線外ノ一點トスルトキ,四直線 SA, SB, SC, SD ノ何レカ一ツニ平行ニ引イタ直線ガ他ノ三ツデ切リ取ラレル二ツノ線分ハ相等シイ。



【一直線上ニ A, C, B, D ノ順ニアツテ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$ ナルトキ A, C, B, D ヲ**調和列點**トイフ。圖ニ於テ SB 上ノ一點 B′ ヲ通リ SA ニ平行ニ引イタ直線ト SC, SD トノ交點ヲ夫々 P, Q トスルトキ $PB'=B'Q$ ナルコトヲ證明スレバヨイ】

121. △ABC ノ底邊ノ一端 B トソノ對邊 AC 上ノ任意ノ點 D トヲ結ブ線分ハ中線 AM 及ビ A ヲ通リ BC ニ平行ナル直線トニヨツテ調和ニ分ケラレル。

【BD ト AM トノ交點ヲ通ツテ BC ニ平行線ヲ引イテ考ヘヨ】

122. 線分 BP ヲ C ニ於テ中末比ニ内分シ,ソノ大ナル部分 BC 上ニ正三角形 ABC ヲ作ルトキハ $AP^2=2BC^2$ デアル。

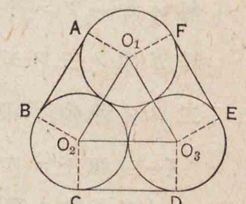
【A カラ BC ニ垂線 AM ヲ引クト $AP^2-AB^2=PB\cdot PC=BC^2$】

123. △ABC ノ一邊 AB ヲ中末比ニ内分スル點ヲ P トシ,P ヲ通ツテ BC ニ平行ナル直線ト AC トノ交點ヲ Q トスレバ △APQ=△PBC デアル。

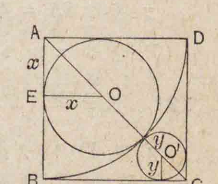
II. 計算問題

124. 直徑ガ 10*cm* ナル圓ニ内接スル矩形ガアル。ソノ面積ハ36平方糎デアル。矩形ノ各邊ノ長サヲ求メヨ。

125. 半徑ガ r 糎ナル三本ノ圓柱ヲ針金デ結束スルニハ一周リニ何程ノ長サノ針金ヲ要スルカ。(但シ結ビ目ハ算入シナイ)



126. 一邊ノ長サ a ナル正方形 ABCD ヲ,A ヲ中心トシ a ヲ半徑トスル四分圓弧デ二部分ニ分ケルトキ,コノ二部分ノ各ニ内切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ。



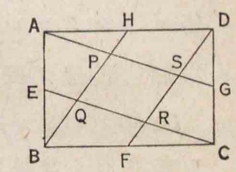
127. 直角三角形 ABC ニ於テ $\angle C=90°$, $AC=12$*cm*, $BC=16$

cm デアル。今 AB 上ニ $AP=6$*cm* ナルヤウニ點 P ヲ取リ, PQ, PR ヲ夫々 AC, BC ニ平行ニ引イテ生ズル矩形ノ面積ヲ求メヨ。

【先ヅ AB ノ長サヲ求メ,次ニ矩形ノ二隣邊ノ長サヲ計算セヨ】

128. 半徑ガ r ナル圓ヲ内接正三角形ノ一邊デ二分スルトキハ,各部分ノ面積ハ何程カ。

129. 二邊ノ長サガ a 糎, b 糎ナル矩形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫々 E, F, G, H トスルトキハ AG, BH, CE, DF デ作ラレル四邊形ノ面積ハ何程カ。



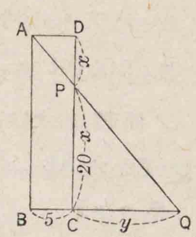
【圖ニ於テ $PH=\frac{1}{2}PQ$ ナルコトヲ考ヘヨ】

130. 面積ガ 1 平方糎ナル凸四邊形 ABCD ノ各邊ヲ延長シ A, B, C, D ガ夫々 DE, AF, BG, CH ノ中點トナルヤウニ E, F, G, H ヲ取ルトキ四邊形 EFGH ノ面積ヲ求メヨ。

131. △ABC ノ邊 AB 上ニ $\frac{1}{3}AB$ ニ等シク AA′ ヲ取リ,邊 BC 上ニ $\frac{1}{4}BC$ ニ等シク BB′ ヲ取リ,邊 CA 上ニ $\frac{1}{5}CA$ ニ等シク CC′ ヲ取ルトキ,△A′B′C′ ト △ABC トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

132. 矩形 ABCD ニ於テ直線 APQ ヲ引キ,邊 CD ト P ニ於

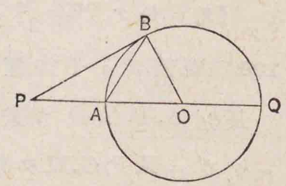
テ,邊 BC ノ延長ト Q ＝於テ交ハラシメルトキ,$\triangle$ADP ト $\triangle$CPQ トノ面積ノ和ヲ最小ナラシメル＝ハ DP ノ長サヲ何程＝スレバヨイカ。但シ邊 CD, BC ノ長サヲ夫々 20 cm ト 5 cm トセヨ。



133. 三角形ノ一ツノ傍接圓ノ半徑ガ内接圓ノ半徑ノ3倍＝等シク,ソレ等ノ兩圓ガ互＝相切シナイトキハ三角形ノ三邊ノ長サハ等差級數ヲナス。

【$\triangle$ABC ノ邊ヲ夫々 a, b, c トシ,$\triangle$ABC ノ内接圓ノ半徑ヲ r, 角 A 内ノ傍接圓ノ半徑ヲ r_1 トシ, $\triangle$ABC ノ面積ヲ S トスレバ $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r_1(b+c-a)$ デアル】

134. 半徑ガ 10 m ナル圓形ノ池ガアル。池邊カラ 10 m ノ距離＝アル點 P カラ池邊ノ最遠點 Q ＝至ル陸上ノ最近經路ヲ計算セヨ。



135. 半徑ガ a ナル圓＝内接スル正五角形及ビ正十角形ノ一邊ヲ夫々 x, y トスレバ,三線分 x, y, a ヲ三邊トスル三角形ハ直角三角形デアル。

【$x=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}a,\ y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$ デアル】

III. 軌跡

[1] 軌跡ガ圓トナル場合

136. 定圓 O ノ直徑 AB ノ一端 A ヲ通ル任意ノ弦 AP ノ延長ト, P ＝於ケル切線 PC ＝ B カラ引イタ垂線 BC ノ延長トノ交點ヲ Q トスレバ,點 Q ノ軌跡ハ B ヲ中心トシ AB ヲ半徑トスル圓周デアル。

137. AB ハ與ヘラレタ圓ノ定弦, CD ハ與ヘラレタ長サノ動弦トスルトキ, AC ト BD トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

138. 圓 O ＝於テ AB ガ定弦デ, CD ハ定長ナル任意ノ弦デアル。今 AB, CD ノ中點 E, F ヲ結ブトキ, EF ノ中點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

139. 二定點 A, B ヲ通ル直線上ノ他ノ一定點 C カラ A, B ヲ通ル圓＝引イタ切線ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

【AC·BC ハ一定デアル】

140. 定圓ノ直徑ヲ底邊トスル三角形ノ頂點ガ常＝ソノ圓周上ヲ動クトキ,ソノ三角形ノ重心ノ軌跡ヲ求メヨ。

【定圓ノ中心ヲ中心トシ,定圓ノ半徑ノ三分ノ一ヲ半徑トスル圓周デアル】

141. 定圓 O ノ直交スル任意ノ二弦 AB, CD ノ平方ノ和ガ一定(k^2)ナルトキソノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

【求メル軌跡ハ O ヲ中心トシ $\frac{\sqrt{8r^2-k^2}}{2}$ ヲ半徑トスル圓

周デアル。但シrハ定圓Oノ半徑デアル】

142. 定圓O內ニ定點Aガアル。Aヲ通リ互ニ垂直ナル二直線AB, ACヲ引キ,圓周トノ交點ヲB, Cトスル。弦BCノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

【OAノ中點ヲ中心トスル圓周デアル】

143. 與ヘラレタ矩形ABCDノ各頂點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

144. 弦ABヲ共有シABノ同側ニアル二ツノ定マレル弓形ACB, ADBガアル。點P, Qヲ夫々弧ACB, ADB上ノ任意ノ點トスルトキ∠PAQ, ∠PBQノ二等分線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

【ソノ二等分線ノ交角ハ一定デアル】

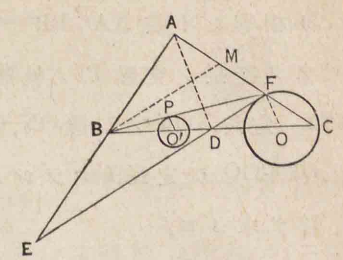
145. ABハ定圓Oノ定直徑デCハ圓周上ノ動點デアル。CカラABニ垂線CDヲ引キ, OC上ニODニ等シクOPヲ取ルトキ,點Pノ軌跡ヲ求メヨ。

【求メル軌跡ハAO, BOヲ直徑トスル二ツノ圓周デアル】

146. ABハ定圓Oノ定直徑デCDハ定長ノ弦デアル。內接四邊形CABDノ對角線AD, BCノ交點Pノ軌跡ヲ求メヨ。

147. 直角三角形ABCノ斜邊BCノ中點ヲDトシ, ABノ延長上ニBEヲABニ等シク取リ, EDトACトノ交リヲFトシ, BFヲ點Pニ於テ定比$m:n$ニ等シク內分

シ, BCヲ固定シテAヲ動カストキ, F及ビPノ軌跡ヲ求メヨ。



【Fノ軌跡ハCO$=\frac{1}{6}$BC(定長)ヲ半徑トシ, Oヲ中心トスル圓周デアル。同樣ニ圓ニ於テO′ハ定點デPO′ハ定長デアル】

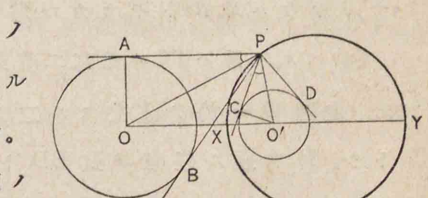
148. 正三角形ノ一頂點ニ至ル距離ガ他ノ二頂點ニ至ル距離ノ和ニ等シイヤウナ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

【軌跡ハ原三角形ノ外接圓周デアル】

149. 一點Pカラ與ヘラレタ二等邊三角形ABCノ等邊AB, ACニ引イタ垂線ノ包ム矩形ガ底邊BCニ引イタ垂線ノ上ノ正方形ニ等シイ如キ點Pノ軌跡ヲ求メヨ。

【軌跡ハB, Cニ於テ夫々AB, ACニ切スル圓周デアル】

150. 與ヘラレタ二ツノ圓O, O′ヲ等角ニ視ル點Pノ軌跡ヲ求メヨ。



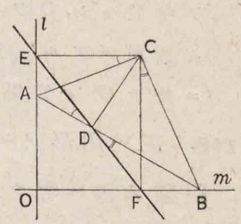
【線分OO′ヲ二定圓ノ半徑ノ比ニ內分·外分スル點ヲX, YトスレバXYヲ直徑トスル圓周デアル】

[2] 軌跡ガ直線トナル場合

151. 定圓Oノ周上ニ二定點A, Bガアル。今A, Bヲ通

リ相等シイ弦 AA′, BB′ ヲ引クトキ,コノ二ツノ弦又ハソノ延長ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

152. 定角 XOY ノ二邊 OX, OY ノ上ニ夫々點 P, Q ヲ取リ, OP+OQ ヲ定長 l ナラシメルトキ, PQ ノ中點 M ノ軌跡ヲ求メヨ。



153. 直角ニ交ハル二定直線 l, m ガアル。今直角三角形 ABC ノ直角頂 C ヲ固定シ A, B ガ夫々 l, m 上ニアルヤウニ三角形 ABC ヲ動カストキ C カラ AB ニ引イタ垂線ノ足 D ノ軌跡ヲ求メヨ。

【C カラ l, m ニ夫々垂線 CE, CF ヲ引イテ考ヘヨ】

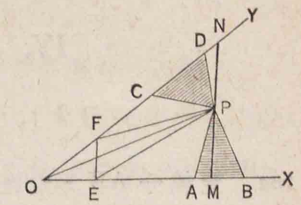
154. 一直線上ニ三點 A, B, C ガコノ順序ニアル。今點 P ヲ △PAB ノ外接圓ト △PAC ノ外接圓トガ相等シクナルヤウニ取ルトキ,カカル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

【求メル軌跡ハ BC ノ垂直二等分線デアル】

155. 定圓 O ニ於テ直交スル二ツノ定直徑ヲ AA′, BB′ トシ, B ヲ通ル任意ノ弦 BD ト AA′ トノ交點 C ニ於テ AA′ ニ垂線ヲ引キ,コレト D ニ於ケル切線トノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

【求メル軌跡ハ B′ ニ於ケル圓 O ノ切線デアル】

156. 定角 XOY ノ邊 OX 上ニ定點 A, B ガアツテ,邊 OY 上ニ定點 C, D ガアル。角内ニ點 P ヲ取リ △PAB ト



△PCD トノ和ヲ一定ナラシメルトキ,點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

【圖ニ於テ OE=AB, OF=CD トスレバ △PAB+△PCD=△OEF+△PEF】

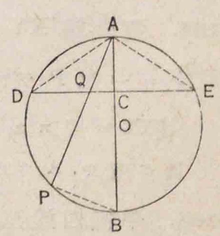
157. 二隣邊ノ比ガ一定ナル平行四邊形 ABCD ノ一頂點 A ハ固定シ,邊 AB, AD ガ夫々定方向ヲ有スルトキ頂點 C ノ軌跡ヲ求メヨ。

158. 定圓 O ノ周上ノ定點 A カラ引イタ二ツノ弦ヲ AB, AC トシ, AB^2+AC^2 ヲ一定ナラシメルトキ弦 BC ノ中點 M ノ軌跡ヲ求メヨ。

【$AM^2-OM^2=$一定ナルコトヲ證明セヨ】

159. △ABC ノ邊 BC 上ノ二定點ヲ D, E トシ, BC ニ平行ナル直線ガ二邊 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 F, G トスルトキ,二直線 DG, EF ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。但シ點 D ハ B ト E トノ間ニアルモノトスル。

【求メル軌跡ハ BC ヲ定比 BE:DC ニ内分スル點 O ト A トヲ結ブ直線デアル】



160. 定圓周上ノ定點 A カラ弦 AP ヲ引イテ AP 上ニ一點 Q ヲ取リ,矩形 AP·AQ ヲ一定ナラシメルトキ,點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。

【直徑 AB 上ニ一點 C ヲ取リ AB·AC=AP·AQ ナラシメヨ】

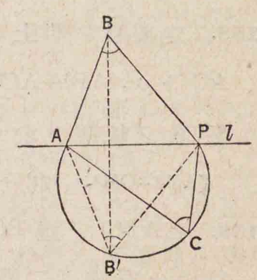
IV. 作圖題

[1] 對稱移動法

161. 定線分ABト定直線XYトガCニ於テ交ハツテヰル。今直線XY上ニ點Pヲ求メテPカラ線分AC, BCヲ等角ニ見ルヤウニセヨ。

【XYニ關スルA或ハBノ對稱點ヲ利用セヨ】

162. Aハ定直線l上ノ定點デ, B, Cハlノ兩側ニアル二定點デアル。l上ニ一點Pヲ求メテ∠ABP=∠ACP ナラシメヨ。



163. 平行四邊形ABCDノ邊BC上ニ一點Pヲ求メテ∠BAP=∠CDP ナラシメヨ。

【AノBCニ關スル對稱點ヲA'トスレバ∠A'PDハ定角トナル】

164. 定直線XYノ同側ニアル二定點ヲA, Bトシ, XY上ニ一點Pヲ求メテ∠APX=2∠BPY ナラシメヨ。

【XYニ關スルBノ對稱點B'ヲ中心トシテXYニ切スル圓ヲ畫キ, Aカラコノ圓ニ切線ヲ引イテ考ヘヨ】

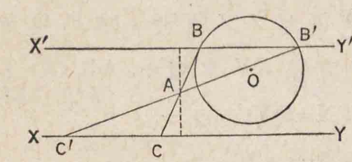
165. 平行四邊形ABCDノ對角線ノ交點Oト, 邊AB, BC, CD, DA上ノ點P, Q, R, Sヲ與ヘテコノ平行四邊形ヲ

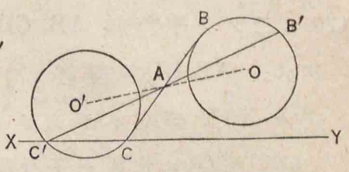
作レ。

【點Oニ關スルP, Q, R, Sノ對稱點ヲ利用セヨ】

166. Oヲ定圓, XYヲコレト交ハラナイ定直線トスル。一定點Aヲ通ル線分BCヲ引キ, 圓OトB, XYトCデ交ハラシメ, AB=AC ナラシメヨ。

【下圖ノ何レカノ方法デ推察セヨ】





[2] 平行移動法

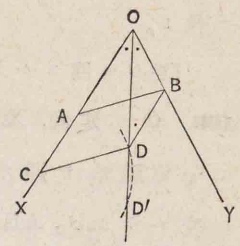
167. 定直線XYノ同側ニ二定點P, Qガアル。今P, Qヲ通リ互ニ平行ナル二直線ヲ引キ, XYト夫々A, Bデ交ハラシメ, 線分ABヲ與ヘラレタ線分lニ等シカラシメヨ。

【線分ABヲAガPヲ通ルヤウニ平行ニ移動セヨ】

168. 定直線MNニ平行ナル直線ヲ引キ△ABCノ邊AB, ACト夫々D, Eニ於テ交ハラシメBDヲAEニ等シカラシメヨ。

【DBヲEFノ位置ニ平行移動スルトAFハ∠Aノ二等分線トナル】

169. 定角 XOY ノ二邊 OX, OY 上ニ夫々 A, B ヲ求メテ $OA+OB=l$, $AB=m$ ナラシメヨ。

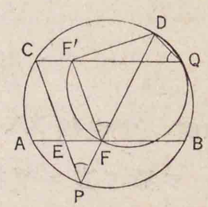


【求メル二點 A, B ガ得ラレタトシ, OX 上ニ OB ニ等シク AC ヲ取リ, 次ニ AB ヲ CD ノ位置マデ平行ニ移動シテ考ヘヨ】

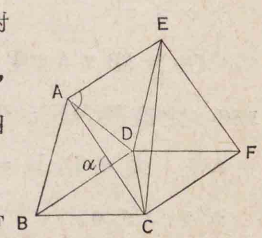
170. 二ツノ平行線 AB, CD 及ビソノ兩側ニ點 P, Q ガアル。AB, CD ニ垂直ナル直線 XY ヲ引キ, AB, CD ト夫々 X, Y デ交ハラシメ $PX=QY$ ナラシメヨ。

【XP ヲ YR ノ位置ニ平行移動セヨ】

171. C, D ハ AB ヲ弦トスル與ヘラレタ弓形ノ弧上ニアル二定點デアル。今コノ共軛弧上ニ一點 P ヲ求メ PC, PD ガ AB ト交ハル點ヲ夫々 E, F トシ EF ヲ定長 l ニ等シカラシメヨ。



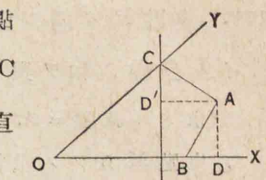
172. 四邊形 ABCD ニ於テ, 一双ノ對邊 AB, CD 及ビ二ツノ對角線 AC, BD トソノ夾角 α ヲ與ヘテコノ四邊形ヲ作レ。



【邊 AB ヲ DE ノ位置ニ, 邊 BC ヲ DF ノ位置ニ平行移動シテ平行四邊形 ACFE ヲ作ツテ考ヘヨ】

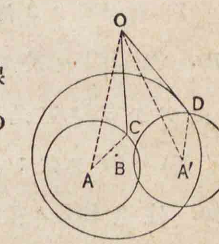
[3] 廻 轉 法

173. 與ヘラレタ角 XOY 内ノ定點 A カラ邊 OX, OY ニ線分 AB, AC ヲ引キ, $AB=AC$ 且ツ $\angle BAC$ ヲ直角ナラシメヨ。



【A カラ OX ニ垂線 AD ヲ引キ AD ヲ A ノ周リニ直角ダケ廻轉セシメヨ】

174. 二圓 A, B ト一點 O トガ與ヘラレテヰルトキ, O カラ各圓ノ周ヘ線分 OC, OD ヲ引キ $OC=OD$ 且ツ $\angle COD$ ヲ與ヘラレタ角 α ニ等シカラシメヨ。

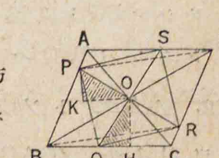


【圓 A ヲ O ノ周リニ $\angle\alpha$ ダケ廻轉移動セヨ】

175. 相交ハル二圓 A, B ノ一ツノ交點 P ヲ通リ各圓ニ弦 PQ, PR ヲ引キ △PQR ヲ正三角形ナラシメヨ。

【圓 A ヲ P ノ周リニ 60° ダケ廻轉シテ圓 C ノ位置ニ移動シテ見ヨ】

176. 與ヘラレタ平行四邊形 ABCD ニ内接スル正方形 PQRS ヲ作レ。



【圖ニ於テ平行四邊形 ABCD ト正方形 PQRS トノ對角線ノ交點ハ一致スルコトヲ證明シ, 次ニ廻轉法ニヨレ】

[4] 軌跡交截法

177. 定點 P ヲ通ル直線ヲ引キ,他ノ二定點 A, B カラ引イタ垂線ノ和ヲ與ヘラレタ長サ l ニ等シカラシメヨ。

【求メル直線ニ A, B カラ引イタ垂線ヲ AA′, BB′ トシ AB ノ中點 M カラノ垂線ヲ MM′ トスレバ

$$MM'=\frac{1}{2}(AA'+BB')=\frac{l}{2},\quad \angle PM'M=\text{R}\llcorner$$】

178. ∠A, 高サ AH 及ビ中線 AM ヲ知ツテ△ABC ヲ作レ。

【中線 AM ヲ 2 倍ニ延長シテ考ヘヨ】

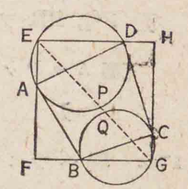
179. △ABC ニ於テ ∠A ノ大サ(α), 中線 BE(m), CF(n) ヲ知ツテコノ三角形ヲ作レ。

【A ハ BE ヲ弦トシテ α ヲ含ム弓形ノ弧上ニアル】

180. 底邊 BC ノ位置及ビ大サ(a), 頂角 A ノ大サ(α), 內接圓ノ半徑(r) ヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。

【內接圓ノ中心ヲ O トスレバ $\angle BOC=90°+\frac{\alpha}{2}$ デアル】

181. 與ヘラレタ四邊形ニ外接スル正方形ヲ作圖セヨ。

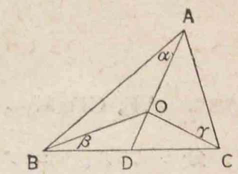


【求メル正方形 EFGH ノ頂點 E, G ノ軌跡ハ夫々 AD, BC ヲ直徑トスル圓周デアル。ソシテ EG ト兩圓周トノ交點ヲ夫々 P, Q トスレバ P, Q ハ $\overset{\frown}{APD}$, $\overset{\frown}{BQC}$ ノ中點デアル】

182. △ABC トソノ內ニ一點 O トガアリ, OA, OB, OC ヲ引イテ ∠OAB, ∠OBC, ∠OCA ヲ夫々 α, β, γ トスル

トキ

$$\frac{\beta+2\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma+2\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+2\beta}{\gamma}$$

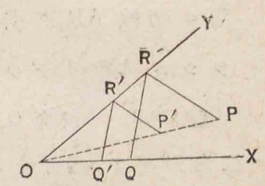


デアルトイフ。點 O ノ位置ヲ求メヨ。

【與ヘラレタ等式カラ $\alpha=\beta=\gamma$ ナルコトヲ證明シ, ∠BOC ハ ∠ACB ノ補角トナルコトヲイヘ】

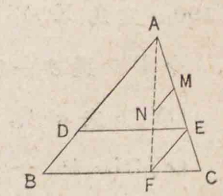
[5] 相 似 法

183. 定角 XOY 內ノ定點ヲ P トシ, OX, OY 上ニ夫々點 Q, R ヲ求メテ PR=RQ=QO ナラシメヨ。



184. 正方形ノ對角線ト一邊トノ和又ハ差ヲ與ヘテコノ正方形ヲ作レ。

185. △ABC ノ一邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ, AB, AC トノ交點ヲ夫々 D, E トシ, AE : BD ヲ與ヘラレタ比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ。

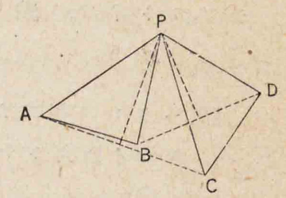


【圖ニ於テ M ハ AC 上ノ任意ノ點デ AM : MN=$m:n$, AB ∥ MN デアル】

186. 二圓 O, O′ ノ交點ノ一ツ A ヲ通ル割線 PAQ ヲ引キ二圓ト夫々 P, Q ニ於テ交ハラシメ, AP : AQ=3 : 2 ナラシメヨ。

[6] 雜　題

187. AB, CD ハ二ツノ平面上ニアル相等シイ二ツノ線分デアル。コノ平面上ニ一點 P ヲ求メ，△PAB ヲ P ノ周リニ廻轉シテ AB ガ CD ニ重ナルヤウニセヨ。

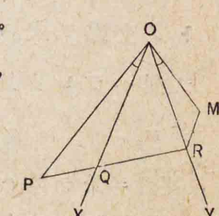


188. 定圓 O 及ビ二ツノ定直線 OX, OY ガアル。今コノ圓ニ切線 AB ヲ引キ，OX, OY ト夫々 A, B ニ於テ交ハラシメ $AB=l$ ナラシメヨ。

【△OAB ハ頂角 O ノ大サト高サト底邊トヲ與ヘラレタ三角形デアル】

189. 二圓ノ交點ノ一ツ A ヲ通ツテ割線ヲ引キ,兩圓周ト交ハル點ヲ B, C トシ，$AB \cdot AC=k^2$ ナラシメヨ。

190. 定角 XOY ノ外ニ定點 P ガアル。今 P ヲ通リ一直線ヲ引キ，二邊 OX, OY ト夫々 Q, R ニ於テ交ハラシメ $OQ \cdot OR=k^2$ ナラシメヨ。



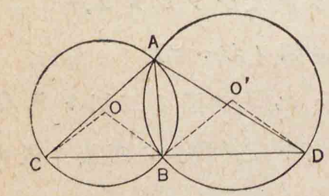
191. 與ヘラレタ圓外ニ一點ヲ求メ,コノ點カラ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ和ヲ同ジ點ト圓ノ中心トヲ通ル割線ニ等シカラシメヨ。

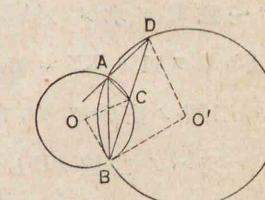
【解析法ヲ用ヒヨ】

192. △ABC ノ邊 AB 上ノ定點 P カラ直線ヲ引キ邊 AC, BC 或ハソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 Q, R トシ，△APR ト △AQR トノ面積ノ比ヲ與ヘラレタ比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ。

【解析法ニヨルカ或ハめねらうすノ定理ヲ利用セヨ】

193. 相交ハル二圓ノ交點 A, B ノ一ツ B ヲ通ル割線ガ兩圓周ト交ハル點ヲ夫々 C, D トスルトキ共通弦 AB ガ △ACD ノ A ニ於ケル頂角又ハソノ外角ノ二等分線トナルヤウニコノ割線ヲ引ケ。





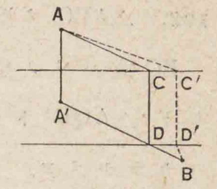
【OC∥O'B ナルヤウニ引ケバヨイ】

[7] 最大最小

194. 定角 XOY (鋭角)内ノ定點 A ヲ一頂點トシ邊 OX, OY 上ニ一ツヅツノ頂點ヲ有スル三角形ノ中デ最小ノ周ヲ有スルモノヲ求メヨ。

195. 川ノ兩岸ニ A, B ナル家ガアル。A カラ B ニ至ル道路ヲ作リ,橋ハ兩岸ニ垂直トシ AB ノ道程ヲ最小ナ

ラシメントスルニハ如何ナル路ヲ取レバヨイカ。但シ川ノ兩岸ハ平行デアル。



196. 定圓 O ノ周上ニ二定點 A, B ガアル。今平行ナル二弦 AC, BD ヲ引キ,四邊形 ABDC ノ周ヲ最大ナラシメヨ。

【AB, CD ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ

$AC+BD=2EF\geqq 2(OE+OF)$】

197. 定直線 XY ノ同ジ側ニ二定點 A, B ガアル。XY 上ニ一點 P ヲ求メ $\angle APB$ ヲ最大ナラシメヨ。

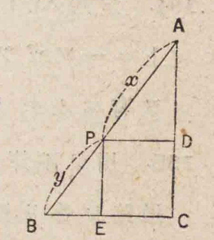
【A, B ヲ通リ XY ニ切スル圓ヲ考ヘヨ】

198. 二圓ノ交點ヲ A, B トシ, B ヲ通リ二圓ト P, Q ニ於テ交ハル割線 PBQ ヲ引キ $\triangle APQ$ ノ面積ヲ最大ナラシメヨ。

【$\triangle APQ$ ノ形ハ一定デアル】

199. 與ヘラレタ圓周上ニ一點 P ヲ求メ P カラ定弦 AB ノ兩端ニ至ル距離ノ平方ノ和ヲ最大又ハ最小ナラシメヨ。

200. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB 上ノ一點 P カラ他ノ二邊 AC, BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々 D, E トシ,矩形 PECD ヲ最大ナラシメヨ。

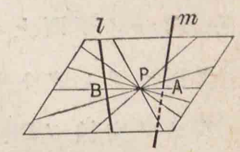


[立體幾何]

I. 直線ト平面

1. 三平面ハ一般ニ幾ツノ直線デ相交ハルカ,又コレ等ノ直線ハ幾ツノ點デ相交ハルカ。

2. 空間ニ相異ナル二直線 l, m ガアル。コノ二直線上ニナイ點 P ヲ通ツテ l, m ノ何レニモ交ハル直線ヲ引キ得ルヤ否ヤヲシラベヨ。



【點 P ト二直線 l, m 中ノ何レカ一方トノ決定スル平面ヲ考ヘヨ】

3. 二ツノ平面 P, Q ガ平行デアレバ P 上ノ任意ノ直線ト Q 上ノ任意ノ直線トハ相交ハラナイ。

4. 直線 AB ガ平面 P ニ交ハルトキハ, P 上ニハ AB ニ平行ナル直線ハ一ツモ引キ得ナイ。

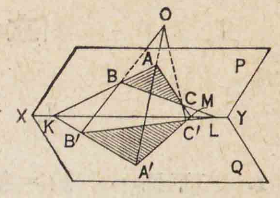
5. ごーし。四邊形 ABCD ノ對邊 AB, CD ノ中點 M, N ヲ通ル平面ガ他ノ二邊 AD, BC ト夫々 H, K ニ於テ交ハレバ次ノ關係ガアル。

$AH : HD = BK : KC$

6. 同一ノ平面上ニナイ二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ガアツテ AB ト A′B′, BC ト B′C′, CA ト C′A′ 或ハソノ延

長トガ夫々相交ハルトキハ

(i) ソノ三ツノ交點 K, L, M ハ一直線上ニアル。

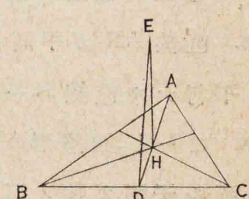


(ii) 三直線 AA′, BB′, CC′ ノ中,何レノ二ツモ平行デナケレバソノ三直線ハ同一ノ點ニ相會スル。

7. 同一ノ平面上ニナイ二直線 AB, CD ト一平面 P トガ與ヘラレタトキコノ各一ツノ直線ヲ含ム平面ヲ作リソノ交線ガ P 上ニアルヤウニセヨ。

【次ノヤウナ場合ニ分類シテ考ヘヨ。
(i) AB, CD ガ何レモ平面 P ニ交ハル場合
(ii) AB, CD ノ何レカ一方ガ P ニ平行ナル場合
(iii) AB, CD ノ何レモ P ニ平行ナル場合
(iv) AB ガ P ニ含マレ CD ガ P ニ交ハル場合等】

8. △ABC ノ垂心 H ニ於テコノ平面ニ垂線 HE ヲ引キ AH ノ延長ガ BC ト交ハル點ヲ D トスレバ, ED ハ BC ニ垂直デアル。



【三垂線ノ定理ヲ適用セヨ】

9. 相交ハル二平面 P, Q ノ何レノ上ニモナイ點 A カラ各平面ニ夫々垂線 AB, AC ヲ引キ,ソノ足カラ二平面ノ交線 XY ヘ夫々垂線 BM, CN ヲ引クトキハソノ

足 M, N ハ一致スル。

【三垂線ノ定理ヲ適用セヨ】

10. 定直線 AB ヲ含ミ之ト同一ノ平面上ニナイ二定點 P, Q カラ等距離ニアル平面ヲ求メヨ。

【PQ ノ中點ト AB トノ決定ル平面ヲ考ヘヨ】

11. 相交ハル二平面 P, Q 上ニ夫々定點 A 及ビ B ガアル。二平面ノ交線 XY 上ニ一點 R ヲ取リ AR+BR ガ最小ナルヤウニセヨ。

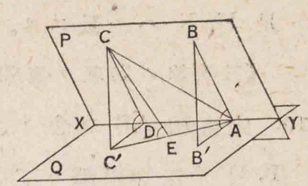
【A カラ XY ニ垂線 AC ヲ引キ Q 平面上ニ於テ CA′⊥XY, CA′=CA ナラシメ Q 上ニ於テ A′ ノ XY ニ關スル對稱點ヲ利用セヨ】

12. 圓ノ直徑 AB ノ一端 A ヲ通リ圓ノ平面ニ垂線ヲ引キ,ソノ上ノ任意ノ一點ヲ M, 圓周上ノ任意ノ一點ヲ C トスレバ,平面 MAC ト平面 MBC トハ互ニ垂直デアル。

【BC ハ AC, MC ノ双方ニ垂直デアル】

13. 一點 A カラ二ツノ平面 P, Q ニ引イタ垂線ノ和ガ他ノ點 B カラ P, Q ニ引イタ垂線ノ和ニ等シイトキハ,直線 AB 上ノスベテノ點カラ P, Q ニ引イタ垂線ノ和ハ皆相等シイ。

14. 直線 XY ニ於テ相交ハル二ツノ平面 P, Q ガアル。XY 上ノ一點 A カラ引イタ P 平面上ノ半直線 AB ト



AB ノ Q 平面上ヘノ正射影トノナス角ハ AB ガ XY ＝垂直ナルトキ最大デアル。

15. O ＝於テ互＝直角＝相交ハル三直線 OX, OY, OZ 上＝夫々點 A, B, C ヲ取ルトキ △ABC ハ鋭角三角形デアル。

【O カラ AB ＝垂線 OD ヲ引キ C, D ヲ結ンデ考ヘヨ】

16. 前問ノ場合 OX, OY, OZ 上＝截リ取ラレタ三ツノ長サ OA, OB, OC ヲ夫々 a, b, c デ表ハセバ △ABC ノ面積ハ $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ デアル。

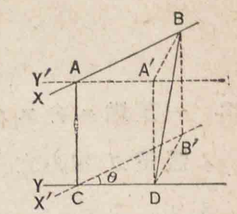
【$AB=\sqrt{a^2+b^2}$, $OD=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $CD=\sqrt{c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$】

17. 三面角 O—ABC ノ二面角 OA ガ直角ナルトキハ何レノ稜＝垂直ナル平面デ三ツノ面ヲ截ルトキモソノ截面ハ直角三角形デアル。

【稜 OA ＝垂直ナル平面デ截ツタ場合ハ明カデアル。稜 OB ＝垂直＝截ツタ截面ヲ △ABC トスレバ,平面 OAB ハ二ツノ平面 ABC, OAC ノ何レ＝モ垂直ナルコト＝注意セヨ】

18. 同一ノ平面上＝ナイ二直線 X 及ビ Y ガアル。直線 X 上＝アル二點 A, B カラ直線 Y ＝垂線ヲ引キソノ足ヲ夫々 C 及ビ D トスルトキハ線分 AB ト CD トノ間＝ハ

$$CD=AB\cos\theta$$



ノ關係ガアル。但シ θ ハ X, Y ノナス角デアル。

【圖＝於テ $X \parallel X'$, $Y \parallel Y'$, $AC \parallel BB'$, $AC \parallel DA'$ トスル。∠B′DC ガ直角ナルコトヲイヘ】

19. 相交ハル二平面 P, Q ガアツテ,コノ二平面ノナス角ハ 45° デアル。平面 P, Q ノ交線上＝線分 AB ヲ 4cm ＝等シク取リ,平面 P 上＝正三角形 ABC ヲ作リ,次＝ C ヲ通ツテ平面 P ＝垂線ヲ引キ平面 Q トノ交點ヲ D トシ, △ABD ノ面積ヲ平方糎ノ小數第二位マデ求メヨ。

【C カラ AB ＝垂線 CE ヲ引キ DE ヲ引ケバ ∠CED=45° デアル。∴ CE=CD】

20. 矩形ノ紙 ABCD ガアル。AB ハ 4m, BC ハ 3m デアル。コノ矩形ヲ對角線 AC ＝沿ウテ折リ,平面 ABC ト平面 CDA トヲ互＝垂直ナラシメルトキ B,D ノ距離ヲ求メヨ。(但シ糎未滿ヲ四捨五入セヨ)

【B カラ兩平面ノ交線 AC ＝垂線 BE ヲ引ケバ ∠BED=R∟ デアル。故＝ BE, DE ノ長サヲ計算シテ BD ノ長サヲ求メレバヨイ】

21. 三面角ノ頂點ヲ通ツテ形內＝引イタ直線ガ稜トナス三ツノ角ノ和ハソノ三面角ノ三ツノ面角ノ和ノ半分ヨリモ大デアル。

II. 多面體

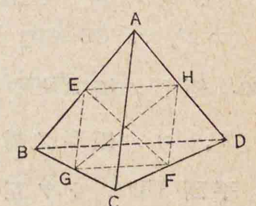
22. 一頂點ニ會スル三ツノ稜ノ長サノ比ガ3:5:6デソノ體積ガ2430立方糎ナル直六面體ノ各稜ノ長サヲ求メヨ。

23. 四面體ABCDニ於テ三角形BCD內ニ一點Pヲ取ルトキハ

$$\angle BAC+\angle BAD>\angle PAC+\angle PAD$$

24. 四面體ABCDノ稜AB, BC, CD, DAノ各中點ヲ夫々E, F, G, Hトスレバ,コノ四點ハ同一平面上ニアル。

25. 四面體ABCDノ相對スル稜AB, CDノ中點E, Fヲ通ル直線ト,他ノ相對スル稜BC, ADノ中點G, Hヲ通ル直線トガ互ニ垂直ナルトキ稜ACト稜BDトハ相等シイ。



【前問ノ結果ヲ用ヒヨ。圖ニ於テ四邊形EGFHハ菱形デアル】

26. 正四面體內ノ任意ノ一點カラ各面ニ至ル距離ノ和ハ一定デアル。

【ソノ一點ト正四面體ノ各面トニヨツテ出來ル三角錐ノ體積ノ和トソノ正四面體ノ體積トヲ比較セヨ】

27. 四面體O−ABCノ一頂點Oニ於ケル平面角ガ皆直

角ニシテソノ頂點ニ於ケル三稜OA, OB, OCガ相等シイトキハ,底面ABC上ノ任意ノ點Pカラ他ノ三面ニ引イタ三垂線PL, PM, PNノ和ハ一定デアル。

【前問ニ倣ツテ考ヘヨ】

28. 一稜ガaナル正四面體ノ高サ及ビ二面角ノ大サヲ求メヨ。

29. 一稜ガa糎ナル正四面體ABCDノ相對スル稜AB, CDノ中點M, Nヲ結ビツケル線分MNハソノ二稜ニ垂直ナルコトヲ證明シ,且ツソノ長サヲ計算セヨ。

【AN, BNヲ引ケバAN⊥CD, BN⊥CDデアル】

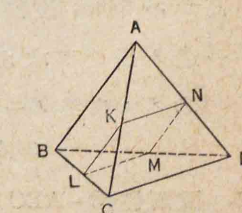
30. 正四面體O−ABCガアル。

(i) 稜ABノ中點ヲEトスレバ,平面OECハ平面ABCニ垂直デアル。

(ii) 稜BCノ中點ヲFトシテ平面OAFヲ作リ,平面OCEトノ交線ヲOHトスレバ,OHハ平面ABCニ垂直デアル。

(iii) 稜ノ長サヲ10cmトスレバOHノ長サハ何程デアルカ。

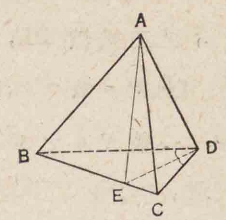
31. 四面體A−BCDノ一双ノ相對スル稜AB, CDノ長サガ相等シイトキ,コノ二稜ニ同時ニ平行ナル任意ノ平面デコノ四面體ヲ截



レバソノ截面ノ周ハ一定デアル。

【圖ニ於テ $\frac{KL}{AB}=\frac{CK}{AC}$, $\frac{KN}{CD}=\frac{AK}{AC}$】

32. 四面體ノ二ツノ面ノナス二面角ヲ二等分スル平面ガ之ニ對スル稜ヲ分ケル二部分ノ比ハコノ二ツノ面ノ面積ノ比ニ等シイ。

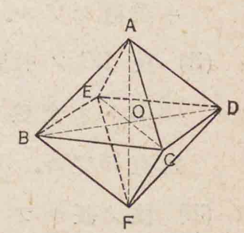


【圖ニ於テ二面角 AD ノ二等分面ト稜 BC トノ交點ヲ E トシ BE:EC=△ADB:△ADC ナルコトヲ證明スレバヨイ】

33. 埃及ノぎぜいニアルぴらみっどハ正四角錐デ,ソノ大サハ底面ノ一邊ハ 233m デ,高サハ 146m デアル。ソノ體積及ビ側面積ヲ計算セヨ。但シ1立方米未滿及ビ1平方米未滿ハ四捨五入セヨ。

34. 稜ノ長サ a ナル正八面體ノ體積ヲ計算セヨ。

【圖ニ於テ AF ハ $\sqrt{2}a$ デアル】



35. 底面ガ正方形ナル角錐臺ガアル。一ツノ底面ノ一邊ガ 20cm デ高サハ 24cm, 體積ガ 4200 立方糎ナルトキ,他ノ底邊ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。

【求メル底邊ノ一邊ヲ x 糎トスレバ
$\frac{1}{3}\times 24(400+\sqrt{400x^2}+x^2)=4200$】

36. 四面體 O-ABC ニ於テ,C ヲ通ル平面 CED ヲ作リ,

稜 OA, OB ヲ夫々 D, E ニ於テ截ルトキ

(i) 四面體 O-ABC ト O-DEC トノ體積ノ比ハ OA.OB : OD.OE ノ比ニ等シイ。

(ii) OA=10cm, OB=8cm, OD=7.5cm, OE=6cm トシ, 四面體 O-ABC ノ體積ヲ 80立方糎トシテ四面體 O-DEC ノ體積ヲ求メヨ。

【C ヲ頂點トスル四面體トシテ考ヘヨ】

III. 曲面體

37. 直圓錐ノ高サハ 12cm デ側面積ハ底面積ノ 11 倍デアルトキ體積ハ何程デアルカ。但シ圓周率ヲ 3.14 トシテ計算セヨ。

【底面ノ半徑ヲ r トスレバ $\pi r\sqrt{12^2+r^2}=11\pi r^2$】

38. 高サ 20cm ナル直圓錐及ビ底面ノ半徑 10cm ナル直圓壔ガアル。コノ二ツノ立體ハ相等シイ體積及ビ相等シイ側面積ヲ有スルトイフ。直圓錐ノ半徑及ビ直圓壔ノ高サハ何程ナルカ。但シ粍未滿ハ四捨五入セヨ。

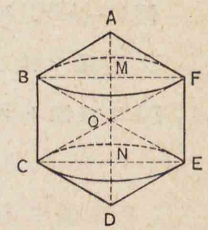
39. 直角ヲ夾ム二邊ガ a, b デ斜邊ガ c ナル直角三角形ヲ各ノ邊ノ周リニ廻轉シテ得ル立體ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

【斜邊 c ニ對スル高サヲ h トスレバ $ab=ch$】

40. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ヲ夫々 a, b, c トスレバ, a, b, c ヲ軸トシテコノ三角形ヲ一廻轉セシメルトキ出來ル立體ノ體積ノ比ハ $\frac{1}{c}:\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ デアル。

【三ツノ高サヲ夫々 a', b', c' トスレバ $aa'=bb'=cc'$】

41. 一邊ノ長サ a ナル正六角形ヲ相對スル一組ノ頂點ヲ結ビツケル對角線ノ周リ=廻轉シテ得ル立體ノ體積ヲ計算セヨ。



【圖=於テ △ABO, △BCO 等ハ何レモ一邊ノ長サガ a ナル正三角形デアル】

42. 直徑ガ 16cm ナル半圓=內接スル正方形ト外接スル矩形トヲ作リ,ソノ直徑ヲ軸トシテ兩圖形ヲ一廻轉セシメルトキ生ズル二ツノ立體ノ體積ヲ求メヨ。

43. 直圓錐臺ノ高サ h, 兩底面ノ半徑ヲ R, r トスルトキ, ソノ體積ハ高サ h, 半徑ガ $r+R$ ノ半分=等シイ直圓壔及ビ高サ h, 底面ノ半徑ガ $R\sim r$ ノ半分=等シイ直圓錐ノ體積ノ和=等シイ。

44. 球面上ノ二點 A, B =於ケル切平面ガ交ハルトキハ,ソノ交線ハ直線 AB ト交ハラナイ。

【直線 AB ト兩切平面トノ位置ノ關係ハドウカ】

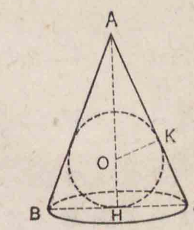
45. 一定點=於テ二ツヅツ互=直交スル三ツノ平面=ヨツテ一定ノ球ヲ截ルトキ,ソノ三ツノ截面ノ面積ノ

和ハ一定デアル。

【ソノ定點カラ各截面=至ル距離ノ平方ノ和ガ一定デアルコト=導ケ】

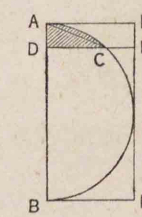
46. 球ノ表面積及ビ體積ヲ表ハス數ヲ夫々 S, V トスレバ $36\pi V^2=S^3$ デアル。

47. 球=外接スル直圓錐ノ高サガ球ノ半徑ノ 4 倍ナルトキハ,ソノ全表面積及ビ體積ハ夫々球ノ表面積及ビ體積ノ 2 倍デアル。



【圖=於テ $\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OK}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CH}}$ デアル】

48. 半圓 ACB ノ弧 AC ガ直徑 AB ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル缺球ノ曲面積ハ弦 AC ヲ半徑トスル圓ノ面積=等シイ。



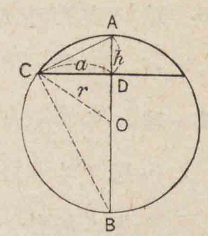
【缺球トハ球ヲ平面デ截ツタ二ツノ部分ノ各ヲイフ。圖=於テ $\overparen{\mathrm{AC}}$ =ヨツテ生ズル缺球ノ曲面積ハ $2\pi\mathrm{AN}\times\mathrm{EN}$ デアル】

49. 半徑ガ r ナル球ノ中心カラノ距離ガ l =等シイ球外ノ一點カラコノ球ノ表面ヲ見ルトキハ,ソノ見得ル部分ト球ノ全表面トノ比ハ $(l-r):2l$ デアル。

【球ノ中心ヲ O, O カラ l ノ距離=アル球外ノ點ヲ P, P カラコノ球=切線 PA ヲ引キ, A カラ PO =引イタ垂線ヲ

AH トシ, PO ト球面トノ交點ヲ B トスレバ, P カラコノ球面ヲ見得ル部分ハ BH ヲ高サトシ AH ヲ底ノ半徑トスル缺球ノ曲面デアル】

50. 半徑ガ r ナル球ノ缺球ノ高サヲ h, 底面ノ半徑ヲ a, 體積ヲ V トスレバ



$$V=\pi rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3$$

或ハ $$V=\frac{\pi a^2h}{2}+\frac{1}{6}\pi h^3$$

【缺球ノ體積ハソノ曲面積ヲ底面トシ,ソノ半徑ヲ高サトスル角錐ノ體積ト,コノ缺球ノ底面ヲ底面トシ,球ノ中心ヲ頂點トスル直圓錐ノ體積トノ和或ハ差ニ等シイ】

[三　角　法]

I. 一般ノ三角函數

1. 次ノ値ヲ求メヨ。

(1) $\sin 240^\circ$　(2) $\cos 855^\circ$　(3) $\tan(-585^\circ)$

【$240^\circ=180^\circ+60^\circ$

$855^\circ=2\times 360^\circ+90^\circ+45^\circ$, 或ハ $850^\circ=2\times 360^\circ+180^\circ-45^\circ$】

2. $\cos(90^\circ+A)+\cos A+\sin(180^\circ-A)+\sin(270^\circ+A)$ ヲ簡單ニセヨ。

3. 次ノ方程式ヲ滿足スル 360° 以下ノ正角 x ヲ求メヨ。

(1) $\sin x=\frac{1}{2}$　(2) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan x=1$

4. $\sin x=\frac{m}{n}$ ガ與ヘラレタトキ $\cos x$, $\tan x$ ノ値ヲ求メヨ。但シ $0<\frac{m}{n}<1$ トスル。

次ノ等式ヲ證明セヨ。(5—10)

5. $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$

6. $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

7. $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

8. $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$

9. $\frac{\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$

10. $(1-\tan^4 A)\cos^2 A+\tan^2 A=1$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。(11—15)

11. $\dfrac{\sin A+\tan A}{\cot A+\operatorname{cosec} A}$

12. $(1+\tan^2 A)(1-\sin^2 A)$

13. $(1+\tan A)^2+(1-\tan A)^2$

14. $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A}\cdot\dfrac{1+\sec A}{1+\operatorname{cosec} A}$

15. $\dfrac{2\sin A\cos A-\cos A}{1-\sin A+\sin^2 A-\cos^2 A}$

II. 加法定理・減法定理

次ノ等式ヲ證明セヨ。(16—36)

16. $\sin(45°+x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2}}$

【$\sin 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$】

17. $\cos(60°+x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{2}$

【$\cos 60°=\dfrac{1}{2}$, $\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$】

18. $\sin(45°+\theta)-\sin(45°-\theta)=\sqrt{2}\sin\theta$

19. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

20. $1-\tan x\tan y=\dfrac{\cos(x+y)}{\cos x\cos y}$

21. $\tan(45°+x)=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$

22. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

23. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

24. $\cot A-\cot B=\dfrac{\sin(B-A)}{\sin A\sin B}$

25. $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos\alpha$

【$\sin 4\alpha=\sin 2\cdot 2\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$】

26. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

27. $\cot\theta-\tan\theta=2\cot 2\theta$

28. $\cot^2 A-\tan^2 A=\dfrac{4\cot 2A}{\sin 2A}$

29. $\dfrac{2\tan A-\sin 2A}{2\cot A-\sin 2A}=\tan^4 A$

【$\tan A$, $\cot A$ ヲ $\sin A$, $\cos A$ デ表ハセ】

30. $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A+\sin A}{1+\cos A+\sin A}$

【$1-\cos A=2\sin^2\dfrac{A}{2}$, $1+\cos A=2\cos^2\dfrac{A}{2}$, $\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ ヲ利用セヨ】

31. $1+\tan 2x\tan x=\sec 2x$

32. $\tan A+\tan B=\sin(A+B)\sec A\sec B$

33. $\dfrac{2\sin A-\sin 2A}{2\sin A+\sin 2A}=\tan^2\dfrac{A}{2}$

34. $\tan x\sin x\cos x+\sin x\cos x\cot x=1$

35. $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=\left(\dfrac{\tan x+1}{\tan x-1}\right)^2$

36. $\tan^2 A=\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

【右邊ヲ變形セヨ】

C ヲ直角トスル直角三角形ABC＝於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。(37—41)

37. $\sin(A-B)+\cos 2A=0$

38. $\sin(A-B)+\sin(2A+C)=0$

【$\cos C=0,\ \sin C=1$ ナルコト＝注意セヨ】

39. $\tan 2A=\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$

40. $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{b+c}$

41. $\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$

次ノ等式ヲ證明セヨ。(42—50)

42. $\sin 32^\circ+\sin 28^\circ=\cos 2^\circ$

43. $\sin 50^\circ+\sin 10^\circ=\cos 20^\circ$

44. $\cos 80^\circ-\cos 20^\circ=-\sin 50^\circ$

45. $\cos(60^\circ+A)-\cos(60^\circ-A)=-\sqrt{3}\sin A$

46. $\sin(60^\circ+A)-\cos(30^\circ+A)=\sin A$

47. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\dfrac{A-B}{2}$

48. $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A$

49. $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

50. $\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)$

$$=4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

III. 三角形ノ原素間ノ關係

△ABC＝於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。(51—60)

[△ABC＝於テハ $A+B+C=180^\circ$ $\quad\therefore\ B+C=180^\circ-A$

從ツテ $\sin(B+C)=\sin(180^\circ-A)=\sin A$

$\cos(B+C)=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

$\tan(B+C)=\tan(180^\circ-A)=-\tan A$

又 $A+B+C=180^\circ$ $\quad\therefore\ \dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$

從ツテ $\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)=\cos\dfrac{A}{2}$

$\cos\dfrac{B+C}{2}=\cos\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)=\sin\dfrac{A}{2}$

$\tan\dfrac{B+C}{2}=\tan\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)=\cot\dfrac{A}{2}$]

51. $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

52. $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C$

53. $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

[$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

又 $\cos C-1=-(1-\cos C)=-2\sin^2\dfrac{C}{2}$]

54. $\sin A\cos A-\sin B\cos B+\sin C\cos C=2\cos A\cos B\cos C$

55. $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$

【$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ (159頁問題15ノ2參照)＝導ケ】

56. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$

57. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A-B}{2}$

58. $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$

59. $\sin^2 A+2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 B+\sin^2 C$

60. $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$

△ABC ニ於テソノ三邊ヲ a, b, c トシテ次ノ等式ヲ證明セヨ。(61—70)

61. $\dfrac{2a+3b-c}{a-2b+5c}=\dfrac{2\sin A+3\sin B-\sin C}{\sin A-2\sin B+5\sin C}$

62. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$

63. $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$

64. $c^2\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$

65. $(a+b)\sin\dfrac{C}{2}=c\cos\dfrac{A-B}{2}$

66. $\dfrac{a-b}{a+b}=\tan\dfrac{A-B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

67. $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$

68. $\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$

69. $1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{2c}{a+b+c}$

70. $\dfrac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}=\dfrac{a-b}{c}$

71. $A=2B$ ナルトキハ $a=2b\cos B$ デアル。

72. $\tan B\tan C=1$ ナルトキハ △ABC ハ直角三角形デアル。

73. $b\cos A=a\cos B$ ナルトキハ $a=b$ デアル。

74. △ABC ノ三ツノ角ノ比ガ 3:4:5 ナルトキ三邊ノ比ハドウカ。

75. 直角三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナストキ二ツノ銳角ノ正弦ヲ求メヨ。

76. 三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナストキ,ソノ三角形ノ最大角ヲ α,最小角ヲ β トスレバ

$$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$$

77. 三角形ノ三ツノ角ガ等差級數ヲナストキハ最大邊ト最小邊トノ和ハ殘リノ邊ノ2倍ヨリモ大キクナイ。

78. $A=2C$ ナルトキハ $a^2=bc+c^2$ デアル。

△ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ R,內接圓ノ半徑ヲ r,角 A, B, C 內ノ傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r', r'', r''' トシ,三邊 a, b, c ノ和ノ半分ヲ s,面積ヲ S トシ次ノ式ヲ證明セヨ。(79—85)

79. $r'+r''+r'''-r=4R$

【$r'=\dfrac{S}{s-a}$, $r''=\dfrac{S}{s-b}$, $r'''=\dfrac{S}{s-c}$, $r=\dfrac{S}{s}$ (171頁ノ問2參照)】

80. $\dfrac{1}{r'}+\dfrac{1}{r''}+\dfrac{1}{r'''}=\dfrac{1}{r}$

81. $r'r''+rr'''=ab$

82. $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$

【$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ トシ b ヲ $\sin A$, $\sin B$ デ表ハス工夫ヲセヨ】

83. $S=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$

【$S=sr$ 故ニ $s=R(\sin A+\sin B+\sin C)$ ナルコトヲ證明スル

ヤウニセヨ】

84. $S=s(s-a)\tan\frac{A}{2}$

85. $r'=r''+r'''+r$ ナルトキハコノ三角形ハ直角三角形デアル。

IV. 三角形ノ解法及ビ測量問題

次ノモノヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。(86—88)

86. $a=198m$, $B=65°10'$, $C=86°20'$

87. $b=413m$, $c=376m$, $A=28°20'$

88. $a=198m$, $b=377m$, $c=413m$

次ノモノヲ知ツテ三角形ノ面積ヲ求メヨ。(89—90)

89. $A=70°$, $B=60°$, $c=41.8m$

90. $B=40°$, $a=142m$, $c=325m$

91. 河ノ幅ヲ測ラウトシテ河岸ニ沿ウテ長サ200mノ基線ABヲ作リ,對岸ノ一點Cヲ求メテ ∠BAC, ∠ABCヲ測リ,夫々30°, 45°ヲ得タ。コノ河ノ幅ハ何程カ。

92. 河ノ對岸ニ高サ20mノ臺ガアル。ソシテソノ上ニ3mノ旗竿ガ立テラレテアル。今河ヲ隔テテ旗竿ノ視角ヲ測レバ丁度ソノ臺ノ基礎ニ立ツテヰル高サ2mノ小舎ノ視角ト等シイ。河ノ幅ハ何米カ。

93. 北ニ向ツテ走ル汽船カラ正東ニ當ツテ二箇ノ燈臺

ガ見エ,15分間ヲ經テソノ燈臺ハ南東及ビ南75°東ニ當ツテ見エタ。今兩燈臺ノ距離ヲ10浬トスルトコノ汽船ノ速サハ幾節カ。

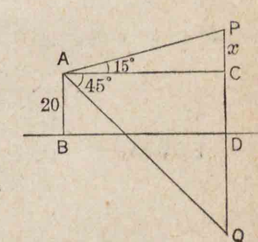
94. 煙突ノ頂點ヲD,ソノ基底ヲCトシA及ビBヲCト同ジ水平面上ノ二點トスル。今實測ニヨレバ

$\angle CAB=105°$, $\angle CBA=30°$, $\angle DAC=60°$, $AB=60m$

ナル値ヲ得タ。煙突ノ高サハ何程カ。

95. 高サhナル山上カラ西ニ方ツテ一ツノ船ヲ見テ俯角θヲ得タ。ソノ後t時間ヲ經テ再ビコレヲ望メバ南30°西ニ方リ俯角θ'デアツタトイフ。コノ船ノ速サハ毎時何程カ。

96. 湖水面上20mノ所カラ風船ヲ望ミタノ仰角ハ15°,ソノ湖水ニウツル像ノ俯角ハ45°デアル。然ラバ湖水面上ノ風船ノ高サハ何程カ。



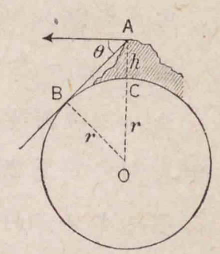
【圖ニ於テ $CQ=CA$ ソシテ $CQ=20\times2+x$ ナルコトニ注意セヨ】

97. 樹木ガアル。ソノ根本カラ測ツテ全長ノ三分ノ一ノ所ニ一ツノ枝ガアル。今樹カラ10mヲ距テテコレヲ望メバ枝カラ上ノ部分ハ30°ノ視角ヲ張ルトイフ。樹ノ高サヲ求メヨ。

98. 高サ $3m$ ノ塔上ニ直立スル旗竿ガアル。塔ノ底カラ $6m$ デソレト同一水平面上ノ一點カラ望ムト塔ト旗竿トヲ見込ム角ハ等シイ。旗竿ノ長サハ何程デアルカ。

99. 塔ノ南ノ一地點カラソノ頂ノ仰角ヲ測ツテ α ヲ得タ。次ニソノ地點カラ西ノ方ヘ l 米歩ンデ再ビ塔ノ仰角ヲ測ツテ β ヲ得タトイフ。コノ塔ノ高サハ何程デアルカ。

100. 海岸ニアル高サ h ノ山ノ頂カラ水平線ヲ望ンダトキ俯角 θ ヲ得タトスレバ,地球ノ半徑 r ハ次ノ式デ表ハサレル。



$$r=\frac{h\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

【$\angle BOA=\theta$　　$\therefore\ \frac{r}{r+h}=\cos\theta$ ナルコトニ注意セヨ】

— 答 —

例　題　(**25**)　[103 頁]

2. $100\sqrt{3}$ 平方糎　　**3.** $200\sqrt{3}$ 平方糎, $10\sqrt{2}\,cm$

例　題　(**26**)　[106 頁]

2. $12cm$　　**3.** $6ah$ 平方糎, $3a(2h+\sqrt{3}a)$ 平方糎

例　題　(**27**)　[109 頁]

1. 5 平方糎　　**2.** 96 平方糎　　**3.** $216(10+\sqrt{3})$ 平方糎

例　題　(**28**)　[112 頁]

1. 23.52 立　　**2.** 486 平方糎　　**3.** $1m$, $1.5m$, $2m$

例　題　(**29**)　[116 頁]

1. 5400 立方糎　　**2.** $810\sqrt{3}$ 立方糎

例　題　(**30**)　[119 頁]

1. 256 立方糎　　**2.** $15cm$

3. $\frac{4\sqrt{2}}{3}\times10^6$ 立方米 (1885618 立方米强)

4. 75 立方糎

例　題　(**31**)　[121 頁]

1. $269730\sqrt{3}$ 立方糎 (467186 立方糎强)

2. $\frac{bh'^3}{3h^2}$ 立方糎, $\frac{b(h^3-h'^3)}{3h^2}$ 立方糎

例　題　(**32**)　[124 頁]

2. 3204.432 平方糎　　**3.** 9π 立 (約 28.3 立)

4. $0.3mm$ 强　　**6.** $b:a$

例題(33)[127頁]

1. 314.16立方糎　　2. 約578平方糎

3. 約0.377立　　4. $\sqrt{3}\pi a^2$平方糎，$\frac{\pi}{4}a^3$立方糎

例題(34)[129頁]

1. 約4021平方糎，約17593立方糎　　2. 62.3立强

例題(36)[138頁]

1. 約1809.6平方糎，約7238.2立方糎　　2. 21.4cm强

5. 約6.2cm

例題(37)[140頁]

1. 630°　　3. 140°，225°，60°

例題(38)[146頁]

1. $\sin\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=-\frac{4}{3}$

2. $\sin\theta=-\frac{5}{13}$，$\cos\theta=-\frac{12}{13}$，$\cot\theta=\frac{12}{5}$，$\sec\theta=-\frac{13}{12}$，$\operatorname{cosec}\theta=-\frac{13}{5}$

3. $\cos\theta=-\sqrt{1-a^2}$，$\tan\theta=-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$，$\cot\theta=-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$，
$\sec\theta=-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$，$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{a}$

例題(39)[152頁]

1. $\sin(-45°)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos(-45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan(-45°)=-1$，
$\cot(-45°)=-1$，$\sec(-45°)=\sqrt{2}$，$\operatorname{cosec}(-45°)=-\sqrt{2}$
$\sin(-60°)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos(-60°)=\frac{1}{2}$，$\tan(-60°)=-\sqrt{3}$，
$\cot(-60°)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\sec(-60°)=2$，$\operatorname{cosec}(-60°)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin(-225°)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos(-225°)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan(-225°)=-1$，
$\cot(-225°)=-1$，$\sec(-225°)=-\sqrt{2}$，$\operatorname{cosec}(-225°)=\sqrt{2}$
$\sin(-330°)=\frac{1}{2}$，$\cos(-330°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan(-330°)=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\cot(-330°)=\sqrt{3}$，$\sec(-330°)=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\operatorname{cosec}(-330°)=2$

例題(40)[153頁]

3. $\sin 210°=-\frac{1}{2}$，$\cos 210°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 210°=\frac{1}{\sqrt{3}}$，
$\cot 210°=\sqrt{3}$，$\sec 210°=-\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\operatorname{cosec}210°=-2$
$\sin 225°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 225°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 225°=1$，
$\cot 225°=1$，$\sec 225°=-\sqrt{2}$，$\operatorname{cosec}225°=-\sqrt{2}$
$\sin 240°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 240°=-\frac{1}{2}$，$\tan 240°=\sqrt{3}$，
$\cot 240°=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\sec 240°=-2$，$\operatorname{cosec}240°=-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\sin 330°=-\frac{1}{2}$，$\cos 330°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 330°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，
$\cot 330°=-\sqrt{3}$，$\sec 330°=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\operatorname{cosec}330°=-2$

例題(41)[155頁]

1. $\sin 300°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 750°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 1080°=0$，
$\cot(-210°)=-\sqrt{3}$

2. $\sin 112°=0.9272$，$\cos 112°=-0.3746$，$\tan 112°=-2.4751$
$\sin 245°=-0.9063$，$\cos 245°=-0.4226$，$\tan 245°=2.1445$
$\sin(-1000°)=-0.9848$，$\cos(-1000°)=0.1736$，
$\tan(-1000°)=-5.6713$

4. (1) $\frac{1}{2}$　(2) -1　**5.** $\sin 238° = -\frac{8}{\sqrt{89}}$, $\cos 122° = -\frac{5}{\sqrt{89}}$

6. $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　**8.** (1) 30°, 150°, 210°, 330°

(2) 180°　(3) 120°, 240°

例　題　(42)　[159 頁]

1. $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

例　題　(45)　[162 頁]

1. $\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\tan 22°30' = \sqrt{2}-1$

2. $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\tan 15° = 2-\sqrt{3}$

3. $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$, $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{21}}{6}$

例　題　(46)　[164 頁]

1. 0.568　**2.** 0.792　**3.** 0

例　題　(48)　[168 頁]

1. $\frac{63}{65}$　**2.** -1, $\frac{7}{25}$　**3.** 0.28

4. $-\frac{120}{169}$　**11.** 0　**12.** 0

16. $2(1+\sqrt{2})a^2$, $\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$　**18.** $\frac{b}{c-a}$

19. $0 < \theta < 135°$ 及ビ $315° < \theta < 360°$　**20.** $\sqrt{2}$

例　題　(52)　[175 頁]

2. $\sqrt{333}\,m$ (18.25m 弱)　**3.** 120°　**4.** 45°

例　題　(53)　[177 頁]

4. B=90°, C=30°

例　題　(55)　[180 頁]

1. 177 平方米弱　**2.** 1020 平方米

例　題　(57)　[187 頁]

1. $\bar{1}.9591$, $\bar{1}.8352$, $\bar{1}.9728$, $\bar{1}.5267$

2. 72°25′, 11°50′.3, 86°23′.7, 42°9′.2

3. $\bar{1}.36139$　**4.** $\bar{1}.93753$　**5.** 25.1

例　題　(58)　[189 頁]

1. A=28°30′, b=376.6m, c=414.1m,　**2.** 300m　**3.** 47.98m

例　題　(59)　[191 頁]

1. A=86°21′, B=65°19′, c=196.4m

2. C=40°58′.6, A=57°52′.4, b=74.43m

例　題　(60)　[193 頁]

1. C=25°39′, B=34°21′, b=32.58m

2. B=60°, C=90°, c=90 又ハ B=120°, C=30°, c=45

3. C=45°, A=105°, $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 又ハ C=135°, A=15°,

$a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

例　題　(61)　[194 頁]

1. A=135°42′, B=27°36′, C=16°42′

2. A=35°52′, B=54°8′, C=90°

例　題　(62)　[200 頁]

1. 139.9m　**2.** 16.93 浬　**3.** 232.6m

4. 202.2 m　**5.** 29.57 km　**6.** 603.6 m

7. 2500 m　**8.** N41°22′E, 25.16 節

附錄例題 (1) [203 頁]

1. $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{4}{15}\pi$, $\frac{11}{18}\pi$, $\frac{2}{675}\pi$

2. 18°, 36°, 210°, 135°

附錄例題 (2) [209 頁]

1. $\frac{2n+1}{2}\pi,\ m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{3}$ [但シ m, n ハ零又ハ正負スベテノ整數ヲ表ハスモノトス。以下同樣]

2. $\frac{4m\pi+(-1)^m\pi}{8}$　**3.** $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$　**4.** $n\pi-\frac{\pi}{4}$

5. $\frac{2n+1}{6}\pi,\ n\pi\pm\frac{\pi}{3}$　**6.** $m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$

7. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$　**8.** $n\pi+\frac{\pi}{12},\ n\pi+\frac{5}{12}\pi$

9. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$　**10.** $\frac{n}{5}\pi,\ \frac{n}{2}\pi$

11. $x=\frac{\pi}{4}+\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{6}\right),\ y=\frac{\pi}{4}-\left(2n\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ [符號同順]

12. $x=n\pi\pm\frac{\pi}{8}+\frac{m}{2}\pi+(-1)^m\frac{\pi}{12},\ y=n\pi\pm\frac{\pi}{8}-\frac{m}{2}\pi-(-1)^m\frac{\pi}{12}$

[符號同順]

補充問題集

II. 計算問題 (平面幾何)

124. $(\sqrt{43}+\sqrt{7})cm,\ (\sqrt{43}-\sqrt{7})cm$　**125.** $2r(\pi+3)$ 糎

126. 圓 $O(\sqrt{2}-1)a$, 圓 $O'(3-2\sqrt{2})a$　**127.** 40.32 平方糎

128. $\frac{(8\pi+3\sqrt{3})r^2}{12},\ \frac{(4\pi-3\sqrt{3})r^2}{12}$　**129.** $\frac{1}{5}ab$ 平方糎

130. 5 平方糎　**131.** 5:12　**132.** $10\sqrt{2}\,cm$

134. 38.3m 弱

I. 直線ト平面 (立體幾何)

19. 9.79 平方糎　**20.** 367cm 强

II. 多面體 (立體幾何)

22. 9cm, 15cm, 18cm　**28.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 約 70°34′　**29.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 糎

30. (iii) $\frac{10\sqrt{6}}{3}cm$　**33.** 2642065 立方米弱, 87041 平方米强

34. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$　**35.** 5cm　**36.** (ii) 45 立方糎

III. 曲面體 (立體幾何)

37. 15.072 立方糎　**38.** 227mm 弱, 343mm 弱　**39.** $bc:ca:ab$

41. πa^3　**42.** 約 3217 立方糎, 約 1362 立方糎

I. 一般ノ三角函數 (三角法)

1. (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　(3) -1　**2.** 0

3. (1) 30° 及ビ 150°　(2) 150° 及ビ 210°　(3) 45° 及ビ 225°

4. $\cos x=\pm\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{n},\ \tan x=\pm\frac{m}{\sqrt{n^2-m^2}}$　**11.** $\sin A\tan A$

12. 1　**13.** $2\sec^2 A$　**14.** $\tan A$　**15.** $\cot A$

答

III. 三角形ノ原素間ノ關係 (三角法)

74. $2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$　　**75.** $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

IV. 三角形ノ解法及ビ測量問題 (三角法)

86. $A=28°30'$, $b=376.6m$, $c=414.1m$

87. $B=86°21'$, $C=65°19'$ $a=196.4m$

88. $A=28°34'$, $B=65°34'$, $C=85°52'$

89. 928.2平方米　**90.** 148[illegible]0平方米　**91.** 73.2m

92. 30.3 m　**93.** 14.64節　**94.** 73.48m

95. $\frac{h}{t}\sqrt{\cot^2\theta+\cot^2\theta'-\cot\theta\cot\theta'}$　**96.** 34.6m

97. 17.3m　**98.** 5m　**99.** $\frac{l}{\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}$米

數表

比例部分

	26	25	24	23
1	2.6	2.5	2.4	2.3
2	5.2	5.0	4.8	4.6
3	7.8	7.5	7.2	6.9
4	10.4	10.0	9.6	9.2
5	13.0	12.5	12.0	11.5
6	15.6	15.0	14.4	13.8
7	18.2	17.5	16.8	16.1
8	20.8	20.0	19.2	18.4
9	23.4	22.5	21.6	20.7

	22	21	19	18
1	2.2	2.1	1.9	1.8
2	4.4	4.2	3.8	3.6
3	6.6	6.3	5.7	5.4
4	8.8	8.4	7.6	7.2
5	11.0	10.5	9.5	9.0
6	13.2	12.6	11.4	10.8
7	15.4	14.7	13.3	12.6
8	17.6	16.8	15.2	14.4
9	19.8	18.9	17.1	16.2

	17	16	15	14
1	1.7	1.6	1.5	1.4
2	3.4	3.2	3.0	2.8
3	5.1	4.8	4.5	4.2
4	6.8	6.4	6.0	5.6
5	8.5	8.0	7.5	7.0
6	10.2	9.6	9.0	8.4
7	11.9	11.2	10.5	9.8
8	13.6	12.8	12.0	11.2
9	15.3	14.4	13.5	12.6

	13	12	11
1	1.3	1.2	1.1
2	2.6	2.4	2.2
3	3.9	3.6	3.3
4	5.2	4.8	4.4
5	6.5	6.0	5.5
6	7.8	7.2	6.6
7	9.1	8.4	7.7
8	10.4	9.6	8.8
9	11.7	10.8	9.9

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1874	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

比例部分

	43	42	41	39
1	4.3	4.2	4.1	3.9
2	8.6	8.4	8.2	7.8
3	12.9	12.6	12.3	11.7
4	17.2	16.8	16.4	15.6
5	21.5	21.0	20.5	19.5
6	25.8	25.2	24.6	23.4
7	30.1	29.4	28.7	27.3
8	34.4	33.6	32.8	31.2
9	38.7	37.8	36.9	35.1

	38	37	36	35
1	3.8	3.7	3.6	3.5
2	7.6	7.4	7.2	7.0
3	11.4	11.1	10.8	10.5
4	15.2	14.8	14.4	14.0
5	19.0	18.5	18.0	17.5
6	22.8	22.2	21.6	21.0
7	26.6	25.9	25.2	24.5
8	30.4	29.6	28.8	28.0
9	34.2	33.3	32.4	31.5

	34	33	32	31
1	3.4	3.3	3.2	3.1
2	6.8	6.6	6.4	6.2
3	10.2	9.9	9.6	9.3
4	13.6	13.2	12.8	12.4
5	17.0	16.5	16.0	15.5
6	20.4	19.8	19.2	18.6
7	23.8	23.1	22.4	21.7
8	27.2	26.4	25.6	24.8
9	30.6	29.7	28.8	27.9

	29	28	27
1	2.9	2.8	2.7
2	5.8	5.6	5.4
3	8.7	8.4	8.1
4	11.6	11.2	10.8
5	14.5	14.0	13.5
6	17.4	16.8	16.2
7	20.3	19.6	18.9
8	23.2	22.4	21.6
9	26.1	25.2	24.3

比例部分

	26	25	24	23
1	2.6	2.5	2.4	2.3
2	5.2	5.0	4.8	4.6
3	7.8	7.5	7.2	6.9
4	10.4	10.0	9.6	9.2
5	13.0	12.5	12.0	11.5
6	15.6	15.0	14.4	13.8
7	18.2	17.5	16.8	16.1
8	20.8	20.0	19.2	18.4
9	23.4	22.5	21.6	20.7

	22	21	19	18
1	2.2	2.1	1.9	1.8
2	4.4	4.2	3.8	3.6
3	6.6	6.3	5.7	5.4
4	8.8	8.4	7.6	7.2
5	11.0	10.5	9.5	9.0
6	13.2	12.6	11.4	10.8
7	15.4	14.7	13.3	12.6
8	17.6	16.8	15.2	14.4
9	19.8	18.9	17.1	16.2

	17	16	15	14
1	1.7	1.6	1.5	1.4
2	3.4	3.2	3.0	2.8
3	5.1	4.8	4.5	4.2
4	6.8	6.4	6.0	5.6
5	8.5	8.0	7.5	7.0
6	10.2	9.6	9.0	8.4
7	11.9	11.2	10.5	9.8
8	13.6	12.8	12.0	11.2
9	15.3	14.4	13.5	12.6

	13	12	11
1	1.3	1.2	1.1
2	2.6	2.4	2.2
3	3.9	3.6	3.3
4	5.2	4.8	4.4
5	6.5	6.0	5.5
6	7.8	7.2	6.6
7	9.1	8.4	7.7
8	10.4	9.6	8.8
9	11.7	10.8	9.9

數	0	1	2
55	7404	7412	741
56	7482	7490	749
57	7559	7566	757
58	7634	7642	764
59	7709	7716	772
60	7782	7789	779
61	7853	7860	786
62	7924	7931	793
63	7993	8000	800
64	8062	8069	807
65	8129	8136	814
66	8195	8202	820
67	8261	8267	827
68	8325	8331	833
69	8388	8395	840
70	8451	8457	846
71	8513	8519	852
72	8573	8579	858
73	8633	8639	864
74	8692	8698	870
75	8751	8756	876
76	8808	8814	882
77	8865	8871	887
78	8921	8927	893
79	8976	8982	898
80	9031	9036	904
81	9085	9090	909
82	9138	9143	914
83	9191	9196	920
84	9243	9248	925
85	9294	9299	930
86	9345	9350	93
87	9395	9400	94
88	9445	9450	94
89	9494	9499	95
90	9542	9547	95
91	9590	9595	96
92	9638	9643	96
93	9685	9689	96
94	9731	9736	97
95	9777	9782	97
96	9823	9827	98
97	9868	9872	98
98	9912	9917	99
99	9956	9961	99

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1874	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

比例部分

	43	42	41	39
1	4.3	4.2	4.1	3.9
2	8.6	8.4	8.2	7.8
3	12.9	12.6	12.3	11.7
4	17.2	16.8	16.4	15.6
5	21.5	21.0	20.5	19.5
6	25.8	25.2	24.6	23.4
7	30.1	29.4	28.7	27.3
8	34.4	33.6	32.8	31.2
9	38.7	37.8	36.9	35.1
	38	**37**	**36**	**35**
1	3.8	3.7	3.6	3.5
2	7.6	7.4	7.2	7.0
3	11.4	11.1	10.8	10.5
4	15.2	14.8	14.4	14.0
5	19.0	18.5	18.0	17.5
6	22.8	22.2	21.6	21.0
7	26.6	25.9	25.2	24.5
8	30.4	29.6	28.8	28.0
9	34.2	33.3	32.4	31.5
	34	**33**	**32**	**31**
1	3.4	3.3	3.2	3.1
2	6.8	6.6	6.4	6.2
3	10.2	9.9	9.6	9.3
4	13.6	13.2	12.8	12.4
5	17.0	16.5	16.0	15.5
6	20.4	19.8	19.2	18.6
7	23.8	23.1	22.4	21.7
8	27.2	26.4	25.6	24.8
9	30.6	29.7	28.8	27.9
	29	**28**	**27**	
1	2.9	2.8	2.7	
2	5·8	5.6	5.4	
3	8.7	8.4	8.1	
4	11.6	11.2	10.8	
5	14.5	14.0	13.5	
6	17.4	16.8	16.2	
7	20.3	19.6	18.9	
8	23.2	22.4	21.6	
9	26.1	25.2	24.3	

比例部分

	26	25	24	23
1	2.6	2.5	2.4	2.3
2	5.2	5.0	4.8	4.6
3	7.8	7.5	7.2	6.9
4	10.4	10.0	9.6	9.2
5	13.0	12.5	12.0	11.5
6	15.6	15.0	14.4	13.8
7	18.2	17.5	16.8	16.1
8	20.8	20.0	19.2	18.4
9	23.4	22.5	21.6	20.7
	22	**21**	**19**	**18**
1	2.2	2.1	1.9	1.8
2	4.4	4.2	3.8	3.6
3	6.6	6.3	5.7	5.4
4	8.8	8.4	7.6	7.2
5	11.0	10.5	9.5	9.0
6	13.2	12.6	11.4	10.8
7	15·4	14.7	13.3	12.6
8	17.6	16.8	15.2	14.4
9	19.8	18.9	17.1	16.2
	17	**16**	**15**	**14**
1	1.7	1.6	1.5	1.4
2	3.4	3.2	3.0	2.8
3	5.1	4.8	4.5	4.2
4	6.8	6.4	6.0	5.6
5	8.5	8.0	7.5	7.0
6	10.2	9.6	9.0	8.4
7	11.9	11.2	10.5	9.8
8	13.6	12.8	12.0	11.2
9	15.3	14.4	13.5	12.6
	13	**12**	**11**	
1	1.3	1.2	1.1	
2	2.6	2·4	2.2	
3	3.9	3.6	3.3	
4	5.2	4.8	4.4	
5	6.5	6.0	5.5	
6	7.8	7.2	6.6	
7	9.1	8.4	7.7	
8	10·4	9.6	8.8	
9	11.7	10.8	9.9	

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

三角函數ノ眞數表

度	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0	0.0000	0.0000	1.0000	∞	∞	1.0000	**90**
1	0.0175	0.0175	1.0002	57.2987	57.2900	0.9998	**89**
2	0.0349	0.0349	1.0006	28.6537	28.6363	0.9994	**88**
3	0.0523	0.0524	1.0014	19.1073	19.0811	0.9986	**87**
4	0.0698	0.0699	1.0024	14.3356	14.3007	0.9976	**86**
5	0.0872	0.0875	1.0038	11.4737	11.4301	0.9962	**85**
6	0.1045	0.1051	1.0055	9.5668	9.5144	0.9945	**84**
7	0.1219	0.1228	1.0075	8.2055	8.1443	0.9925	**83**
8	0.1392	0.1405	1.0098	7.1853	7.1154	0.9903	**82**
9	0.1564	0.1584	1.0125	6.3925	6.3138	0.9877	**81**
10	0.1736	0.1763	1.0154	5.7588	5.6713	0.9848	**80**
11	0.1908	0.1944	1.0187	5.2408	5.1446	0.9816	**79**
12	0.2079	0.2126	1.0223	4.8097	4.7046	0.9781	**78**
13	0.2250	0.2309	1.0263	4.4454	4.3315	0.9744	**77**
14	0.2419	0.2493	1.0306	4.1336	4.0108	0.9703	**76**
15	0.2588	0.2679	1.0353	3.8637	3.7321	0.9659	**75**
16	0.2756	0.2867	1.0403	3.6280	3.4874	0.9613	**74**
17	0.2924	0.3057	1.0457	3.4203	3.2709	0.9563	**73**
18	0.3090	0.3249	1.0515	3.2361	3.0777	0.9511	**72**
19	0.3256	0.3443	1.0576	3.0716	2.9042	0.9455	**71**
20	0.3420	0.3640	1.0642	2.9238	2.7475	0.9397	**70**
21	0.3584	0.3839	1.0711	2.7904	2.6051	0.9336	**69**
22	0.3746	0.4040	1.0785	2.6695	2.4751	0.9272	**68**
23	0.3907	0.4245	1.0864	2.5593	2.3559	0.9205	**67**
24	0.4067	0.4452	1.0946	2.4586	2.2460	0.9135	**66**
25	0.4226	0.4663	1.1034	2.3662	2.1445	0.9063	**65**
26	0.4384	0.4877	1.1126	2.2812	1.0503	0.8988	**64**
27	0.4540	0.5095	1.1223	2.2027	1.9626	0.8910	**63**
28	0.4695	0.5317	1.1326	2.1301	1.8807	0.8829	**62**
29	0.4848	0.5543	1.1434	2.0627	1.8040	0.8746	**61**
30	0.5000	0.5774	1.1547	2.0000	1.7321	0.8660	**60**
31	0.5150	0.6009	1.1666	1.9416	1.6643	0.8572	**59**
32	0.5299	0.6249	1.1792	1.8871	1.6003	0.8480	**58**
33	0.5446	0.6494	1.1924	1.8361	1.5399	0.8387	**57**
34	0.5592	0.6745	1.2062	1.7883	1.4826	0 8290	**56**
35	0.5736	0.7002	1.2208	1.7434	1.4281	0.8192	**55**
36	0.5878	0.7265	1.2361	1.7013	1.3764	0.8090	**54**
37	0.6018	0.7536	1.2521	1.6616	1.3270	0.7986	**53**
38	0.6157	0.7813	1.2690	1.6243	1.2799	0.7880	**52**
39	0.6293	0.8098	1.2868	1.5890	1.2349	0.7771	**51**
40	0.6428	0.8391	1.3054	1.5557	1.1918	0.7660	**50**
41	0.6561	0.8693	1.3250	1.5243	1.1504	0.7547	**49**
42	0.6691	0.9004	1.3456	1.4945	1.1106	0.7431	**48**
43	0.6820	0.9325	1.3673	1.4663	1.0724	0.7314	**47**
44	0.6947	0.9657	1.3902	1.4396	1.0355	0.7193	**46**
45	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	0.7071	**45**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	度

三角函數ノ對數表（一）

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
0 0	− ∞		− ∞		∞	0	0.0000	0**90**
10	$\bar{3}$.4637	3011	$\bar{3}$.4637	3011	2.5363	0	0.0000	50
20	7648	1760	7648	1761	2352	0	0.0000	40
30	9408	1250	9409	1249	0591	0	0.0000	30
40	$\bar{2}$.0658	969	$\bar{2}$.0658	969	1.9342	0	0.0000	20
50	1627	792	1627	792	8373	1	0.0000	10
1 0	$\bar{2}$.2419	669	$\bar{2}$.2419	670	1.7581	0	$\bar{1}$.9999	0**89**
10	3088	580	3089	580	6911	0	9999	50
20	3668	511	3669	512	6331	0	9999	40
30	4179	458	4181	457	5819	1	9999	30
40	4637	413	4638	415	5362	0	9998	20
50	5050	378	5053	378	4947	1	9998	10
2 0	$\bar{2}$.5428	348	$\bar{2}$.5431	348	1.4569	0	$\bar{1}$.9997	0**88**
10	5776	321	5779	322	4221	1	9997	50
20	6097	300	6101	300	3899	0	9996	40
30	6397	280	6401	281	3599	1	9996	30
40	6677	263	6682	263	3318	0	9995	20
50	6940	248	6945	249	3055	1	9995	10
3 0	$\bar{2}$.7188	235	$\bar{2}$.7194	235	1.2806	1	$\bar{1}$.9994	0**87**
10	7423	222	7429	223	2571	0	9993	50
20	7645	212	7652	213	2348	1	9993	40
30	7857	202	7865	202	2135	1	9992	30
40	8059	192	8067	194	1933	1	9991	20
50	8251	185	8261	185	1739	1	9990	10
4 0	$\bar{2}$.8436	177	$\bar{2}$.8446	178	1.1554	0	$\bar{1}$.9989	0**86**
10	8613	170	8624	171	1376	1	9989	50
20	8783	163	8795	165	1205	1	9988	40
30	8946	158	8960	158	1040	1	9987	30
40	9104	152	9118	154	0882	1	9986	20
50	9256	147	9272	148	0728	2	9985	10
5 0	$\bar{2}$.9403	142	$\bar{2}$.9420	143	1.0580	1	$\bar{1}$.9983	0**85**
10	9545	137	9563	138	0437	1	9982	50
20	9682	134	9701	135	0299	1	9981	40
30	9816	129	9836	130	0164	1	9980	30
40	9945	125	9966	127	0034	2	9979	20
50	$\bar{1}$.0070	122	$\bar{1}$.0093	123	0.9907	1	9977	10
6 0	$\bar{1}$.0192	119	$\bar{1}$.0216	120	0.9784	1	$\bar{1}$.9976	0**84**
10	0311	115	0336	117	9664	2	9975	50
20	0426	113	0453	114	9547	1	9973	40
30	0539	109	0567	111	9433	1	9972	30
40	0648	107	0678	108	9322	2	9971	20
50	0755	104	0786	105	9214	1	9969	10
7 0	$\bar{1}$.0859	102	$\bar{1}$.0891	104	0.9109	2	$\bar{1}$.9968	0**83**
10	0961	99	0995	101	9005	2	9966	50
20	1060	97	1096	98	8904	1	9964	40
30	1157	95	1194	97	8806	2	9963	30
40	1252	93	1291	94	8709	2	9961	20
50	1345	91	1385	93	8615	1	9959	10
8 0	$\bar{1}$.1436		$\bar{1}$.1478		0.8522		$\bar{1}$.9958	0**82**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
8 0	$\bar{1}$.1436	89	$\bar{1}$.1478	91	0.8522	2	$\bar{1}$.9958	0**82**
10	1525	87	1569	89	8431	2	9956	50
20	1612	85	1658	87	8342	2	9954	40
30	1697	84	1745	86	8255	2	9952	30
40	1781	82	1831	84	8169	2	9950	20
50	1863	80	1915	82	8085	2	9948	10
9 0	$\bar{1}$.1943	79	$\bar{1}$.1997	81	0.8003	2	$\bar{1}$.9946	0**81**
10	2022	78	2078	80	7922	2	9944	50
20	2100	76	2158	78	7842	2	9942	40
30	2176	75	2236	77	7764	2	9940	30
40	2251	73	2313	76	7687	2	9938	20
50	2324	73	2389	74	7611	2	9936	10
10 0	$\bar{1}$.2397	71	$\bar{1}$.2463	73	0.7537	3	$\bar{1}$.9934	0**80**
10	2468	70	2536	73	7464	2	9931	50
20	2538	68	2609	71	7391	2	9929	40
30	2606	68	2680	70	7320	3	9927	30
40	2674	66	2750	69	7250	2	9924	20
50	2740	66	2819	68	7181	3	9922	10
11 0	$\bar{1}$.2806	64	$\bar{1}$.2887	66	0.7113	2	$\bar{1}$.9919	0**79**
10	2870	64	2953	67	7047	3	9917	50
20	2934	63	3020	65	6980	2	9914	40
30	2997	61	3085	64	6915	3	9912	30
40	3058	61	3149	63	6851	2	9909	20
50	3119	60	3212	63	6788	3	9907	10
12 0	$\bar{1}$.3179	59	$\bar{1}$.3275	61	0.6725	3	$\bar{1}$.9904	0**78**
10	3238	58	3336	61	6664	2	9901	50
20	3296	57	3397	61	6603	3	9899	40
30	3353	57	3458	59	6542	3	9896	30
40	3410	56	3517	59	6483	3	9893	20
50	3466	55	3576	58	6424	3	9890	10
13 0	$\bar{1}$.3521	54	$\bar{1}$.3634	57	0.6366	3	$\bar{1}$.9887	0**77**
10	3575	54	3691	57	6309	3	9884	50
20	3629	53	3748	56	6252	3	9881	40
30	3682	52	3804	55	6196	3	9878	30
40	3734	52	3859	55	6141	3	9875	20
50	3786	51	3914	54	6086	3	9872	10
14 0	$\bar{1}$.3837	50	$\bar{1}$.3968	53	0.6032	3	$\bar{1}$.9869	0**76**
10	3887	50	4021	53	5979	3	9866	50
20	3937	49	4074	53	5926	4	9863	40
30	3986	49	4127	51	5873	3	9859	30
40	4035	48	4178	52	5822	3	9856	20
50	4083	47	4230	51	5770	4	9853	10
15 0	$\bar{1}$.4130	47	$\bar{1}$.4281	50	0.5719	3	$\bar{1}$.9849	0**75**
10	4177	46	4331	50	5669	3	9846	50
20	4223	46	4381	49	5619	4	9843	40
30	4269	45	4430	49	5570	3	9839	30
40	4314	45	4479	48	5521	4	9836	20
50	4359	44	4527	48	5473	4	9832	10
16 0	$\bar{1}$.4403		$\bar{1}$.4575		0.5425		$\bar{1}$.9828	0**74**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log si
16 0	$\bar{1}$.4403
10	4447
20	4491
30	4533
40	4576
50	4618
17 0	$\bar{1}$.4659
10	4700
20	4741
30	4781
40	4821
50	4861
18 0	$\bar{1}$.4900
10	4939
20	4977
30	5015
40	5052
50	5090
19 0	$\bar{1}$.5126
10	5163
20	5199
30	5235
40	5270
50	5306
20 0	$\bar{1}$.5341
10	5375
20	5409
30	5443
40	5477
50	5510
21 0	$\bar{1}$.5543
10	5576
20	5609
30	5641
40	5673
50	5704
22 0	$\bar{1}$.573
10	576
20	579
30	582
40	585
50	588
23 0	$\bar{1}$.591
10	594
20	597
30	600
40	603
50	606
24 0	$\bar{1}$.609
	log co

數ノ眞數表

sec	cosec	cot	cos	
0000	∞	∞	1.0000	**90**
0002	57.2987	57.2900	0.9998	**89**
0006	28.6537	28.6363	0.9994	**88**
0014	19.1073	19.0811	0.9986	**87**
0024	14.3356	14.3007	0.9976	**86**
0038	11.4737	11.4301	0.9962	**85**
0055	9.5668	9.5144	0.9945	**84**
0075	8.2055	8.1443	0.9925	**83**
0098	7.1853	7.1154	0.9903	**82**
0125	6.3925	6.3138	0.9877	**81**
0154	5.7588	5.6713	0.9848	**80**
0187	5.2408	5.1446	0.9816	**79**
0223	4.8097	4.7046	0.9781	**78**
0263	4.4454	4.3315	0.9744	**77**
0306	4.1336	4.0108	0.9703	**76**
0353	3.8637	3.7321	0.9659	**75**
0403	3.6280	3.4874	0.9613	**74**
0457	3.4203	3.2709	0.9563	**73**
0515	3.2361	3.0777	0.9511	**72**
0576	3.0716	2.9042	0.9455	**71**
0642	2.9238	2.7475	0.9397	**70**
0711	2.7904	2.6051	0.9336	**69**
0785	2.6695	2.4751	0.9272	**68**
0864	2.5593	2.3559	0.9205	**67**
0946	2.4586	2.2460	0.9135	**66**
1034	2.3662	2.1445	0.9063	**65**
1126	2.2812	1.0503	0.8988	**64**
1223	2.2027	1.9626	0.8910	**63**
1326	2.1301	1.8807	0.8829	**62**
1434	2.0627	1.8040	0.8746	**61**
1547	2.0000	1.7321	0.8660	**60**
1666	1.9416	1.6643	0.8572	**59**
1792	1.8871	1.6003	0.8480	**58**
1924	1.8361	1.5399	0.8387	**57**
2062	1.7883	1.4826	0 8290	**56**
2208	1.7434	1.4281	0.8192	**55**
2361	1.7013	1.3764	0.8090	**54**
2521	1.6616	1.3270	0.7986	**53**
2690	1.6243	1.2799	0.7880	**52**
2868	1.5890	1.2349	0.7771	**51**
3054	1.5557	1.1918	0.7660	**50**
3250	1.5243	1.1504	0.7547	**49**
3456	1.4945	1.1106	0.7431	**48**
3673	1.4663	1.0724	0.7314	**47**
3902	1.4396	1.0355	0.7193	**46**
4142	1.4142	1.0000	0.7071	**45**
osec	sec	tan	sin	度

三角函數ノ對數表（一）

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
0 0	−∞		−∞		∞	0	0.0000	0**90**
10	$\bar{3}.4637$	3011	$\bar{3}.4637$	3011	2.5363	0	0.0000	50
20	7648	1760	7648	1761	2352	0	0.0000	40
30	9408	1250	9409	1249	0591	0	0.0000	30
40	$\bar{2}.0658$	969	$\bar{2}.0658$	969	1.9342	0	0.0000	20
50	1627	792	1627	792	8373	1	0.0000	10
1 0	$\bar{2}.2419$	669	$\bar{2}.2419$	670	1.7581	0	$\bar{1}.9999$	0**89**
10	3088	580	3089	580	6911	0	9999	50
20	3668	511	3669	512	6331	0	9999	40
30	4179	458	4181	457	5819	1	9999	30
40	4637	413	4638	415	5362	0	9998	20
50	5050	378	5053	378	4947	1	9998	10
2 0	$\bar{2}.5428$	348	$\bar{2}.5431$	348	1.4569	0	$\bar{1}.9997$	0**88**
10	5776	321	5779	322	4221	1	9997	50
20	6097	300	6101	300	3899	0	9996	40
30	6397	280	6401	281	3599	1	9996	30
40	6677	263	6682	263	3318	0	9995	20
50	6940	248	6945	249	3055	1	9995	10
3 0	$\bar{2}.7188$	235	$\bar{2}.7194$	235	1.2806	1	$\bar{1}.9994$	0**87**
10	7423	222	7429	223	2571	0	9993	50
20	7645	212	7652	213	2348	1	9993	40
30	7857	202	7865	202	2135	1	9992	30
40	8059	192	8067	194	1933	1	9991	20
50	8251	185	8261	185	1739	1	9990	10
4 0	$\bar{2}.8436$	177	$\bar{2}.8446$	178	1.1554	0	$\bar{1}.9989$	0**86**
10	8613	170	8624	171	1376	1	9989	50
20	8783	163	8795	165	1205	1	9988	40
30	8946	158	8960	158	1040	1	9987	30
40	9104	152	9118	154	0882	1	9986	20
50	9256	147	9272	148	0728	2	9985	10
5 0	$\bar{2}.9403$	142	$\bar{2}.9420$	143	1.0580	1	$\bar{1}.9983$	0**85**
10	9545	137	9563	138	0437	1	9982	50
20	9682	134	9701	135	0299	1	9981	40
30	9816	129	9836	130	0164	1	9980	30
40	9945	125	9966	127	0034	2	9979	20
50	$\bar{1}.0070$	122	$\bar{1}.0093$	123	0.9907	1	9977	10
6 0	$\bar{1}.0192$	119	$\bar{1}.0216$	120	0.9784	1	$\bar{1}.9976$	0**84**
10	0311	115	0336	117	9664	2	9975	50
20	0426	113	0453	114	9547	1	9973	40
30	0539	109	0567	111	9433	1	9972	30
40	0648	107	0678	108	9322	2	9971	20
50	0755	104	0786	105	9214	1	9969	10
7 0	$\bar{1}.0859$	102	$\bar{1}.0891$	104	0.9109	2	$\bar{1}.9968$	0**83**
10	0961	99	0995	101	9005	2	9966	50
20	1060	97	1096	98	8904	1	9964	40
30	1157	95	1194	97	8806	2	9963	30
40	1252	93	1291	94	8709	2	9961	20
50	1345	91	1385	93	8615	1	9959	10
8 0	$\bar{1}.1436$		$\bar{1}.1478$		0.8522		$\bar{1}.9958$	0**82**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
8 0	$\bar{1}.1436$	89	$\bar{1}.1478$	91	0.8522	2	$\bar{1}.9958$	0**82**
10	1525	87	1569	89	8431	2	9956	50
20	1612	85	1658	87	8342	2	9954	40
30	1697	84	1745	86	8255	2	9952	30
40	1781	82	1831	84	8169	2	9950	20
50	1863	80	1915	82	8085	2	9948	10
9 0	$\bar{1}.1943$	79	$\bar{1}.1997$	81	0.8003	2	$\bar{1}.9946$	0**81**
10	2022	78	2078	80	7922	2	9944	50
20	2100	76	2158	78	7842	2	9942	40
30	2176	75	2236	77	7764	2	9940	30
40	2251	73	2313	76	7687	2	9938	20
50	2324	73	2389	74	7611	2	9936	10
10 0	$\bar{1}.2397$	71	$\bar{1}.2463$	73	0.7537	3	$\bar{1}.9934$	0**80**
10	2468	70	2536	73	7464	2	9931	50
20	2538	68	2609	71	7391	2	9929	40
30	2606	68	2680	70	7320	3	9927	30
40	2674	66	2750	69	7250	2	9924	20
50	2740	66	2819	68	7181	3	9922	10
11 0	$\bar{1}.2806$	64	$\bar{1}.2887$	66	0.7113	2	$\bar{1}.9919$	0**79**
10	2870	64	2953	67	7047	3	9917	50
20	2934	63	3020	65	6980	2	9914	40
30	2997	61	3085	64	6915	3	9912	30
40	3058	61	3149	63	6851	2	9909	20
50	3119	60	3212	63	6788	3	9907	10
12 0	$\bar{1}.3179$	59	$\bar{1}.3275$	61	0.6725	3	$\bar{1}.9904$	0**78**
10	3238	58	3336	61	6664	2	9901	50
20	3296	57	3397	61	6603	3	9899	40
30	3353	57	3458	59	6542	3	9896	30
40	3410	56	3517	59	6483	3	9893	20
50	3466	55	3576	58	6424	3	9890	10
13 0	$\bar{1}.3521$	54	$\bar{1}.3634$	57	0.6366	3	$\bar{1}.9887$	0**77**
10	3575	54	3691	57	6309	3	9884	50
20	3629	53	3748	56	6252	3	9881	40
30	3682	52	3804	55	6196	3	9878	30
40	3734	52	3859	55	6141	3	9875	20
50	3786	51	3914	54	6086	3	9872	10
14 0	$\bar{1}.3837$	50	$\bar{1}.3968$	53	0.6032	3	$\bar{1}.9869$	0**76**
10	3887	50	4021	53	5979	3	9866	50
20	3937	49	4074	53	5926	4	9863	40
30	3986	49	4127	51	5873	3	9859	30
40	4035	48	4178	52	5822	3	9856	20
50	4083	47	4230	51	5770	4	9853	10
15 0	$\bar{1}.4130$	47	$\bar{1}.4281$	50	0.5719	3	$\bar{1}.9849$	0**75**
10	4177	46	4331	50	5669	3	9846	50
20	4223	46	4381	49	5619	4	9843	40
30	4269	45	4430	49	5570	3	9839	30
40	4314	45	4479	48	5521	4	9836	20
50	4359	44	4527	48	5473	4	9832	10
16 0	$\bar{1}.4403$		$\bar{1}.4575$		0.5425		$\bar{1}.9828$	0**74**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
16 0	$\bar{1}.4403$	44	$\bar{1}.4575$	47	0.5425	3	$\bar{1}.9828$	0**74**
10	4447	44	4622	47	5378	4	9825	50
20	4491	42	4669	47	5331	4	9821	40
30	4533	43	4716	46	5284	3	9817	30
40	4576	42	4762	46	5238	4	9814	20
50	4618	41	4808	45	5192	4	9810	10
17 0	$\bar{1}.4659$	41	$\bar{1}.4853$	45	0.5147	4	$\bar{1}.9806$	0**73**
10	4700	41	4898	45	5102	4	9802	50
20	4741	40	4943	44	5057	4	9798	40
30	4781	40	4987	44	5013	4	9794	30
40	4821	40	5031	44	4969	4	9790	20
50	4861	39	5075	43	4925	4	9786	10
18 0	$\bar{1}.4900$	39	$\bar{1}.5118$	43	0.4882	4	$\bar{1}.9782$	0**72**
10	4939	38	5161	42	4839	4	9778	50
20	4977	38	5203	42	4797	4	9774	40
30	5015	37	5245	42	4755	5	9770	30
40	5052	38	5287	42	4713	4	9765	20
50	5090	36	5329	41	4671	4	9761	10
19 0	$\bar{1}.5126$	37	$\bar{1}.5370$	41	0.4630	5	$\bar{1}.9757$	0**71**
10	5163	36	5411	40	4589	4	9752	50
20	5199	36	5451	40	4549	5	9748	40
30	5235	35	5491	40	4509	4	9743	30
40	5270	36	5531	40	4469	5	9739	20
50	5306	35	5571	40	4429	4	9734	10
20 0	$\bar{1}.5341$	34	$\bar{1}.5611$	39	0.4389	5	$\bar{1}.9730$	0**70**
10	5375	34	5650	39	4350	4	9725	50
20	5409	34	5689	38	4311	5	9721	40
30	5443	34	5727	39	4273	5	9716	30
40	5477	33	5766	38	4234	5	9711	20
50	5510	33	5804	38	4196	4	9706	10
21 0	$\bar{1}.5543$	33	$\bar{1}.5842$	37	0.4158	5	$\bar{1}.9702$	0**69**
10	5576	33	5879	38	4121	5	9697	50
20	5609	32	5917	37	4083	5	9692	40
30	5641	32	5954	37	4046	5	9687	30
40	5673	31	5991	37	4009	5	9682	20
50	5704	32	6028	36	3972	5	9677	10
22 0	$\bar{1}.5736$	31	$\bar{1}.6064$	36	0.3936	5	$\bar{1}.9672$	0**68**
10	5767	31	6100	36	3900	6	9667	50
20	5798	30	6136	36	3864	5	9661	40
30	5828	31	6172	36	3828	5	9656	30
40	5859	30	6208	35	3792	5	9651	20
50	5889	30	6243	36	3757	6	9646	10
23 0	$\bar{1}.5919$	29	$\bar{1}.6279$	35	0.3721	5	$\bar{1}.9640$	0**67**
10	5948	30	6314	34	3686	6	9635	50
20	5978	29	6348	35	3652	5	9629	40
30	6007	29	6383	34	3617	6	9624	30
40	6036	29	6417	35	3583	5	9618	20
50	6065	28	6452	34	3548	6	9613	10
24 0	$\bar{1}.6093$		$\bar{1}.6486$		0.3514		$\bar{1}.9607$	0**66**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

三角函數ノ對數表（二）

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
24 0	$\bar{1}.6093$	28	$\bar{1}.6486$	34	0.3514	5	$\bar{1}.9607$	0 **66**
10	6121	28	6520	33	3480	6	9602	50
20	6149	28	6553	34	3447	6	9596	40
30	6177	28	6587	33	3413	6	9590	30
40	6205	27	6620	34	3380	5	9584	20
50	6232	27	6654	33	3346	6	9579	10
25 0	$\bar{1}.6259$	27	$\bar{1}.6687$	33	0.3313	6	$\bar{1}.9573$	0 **65**
10	6286	27	6720	32	3280	6	9567	50
20	6313	27	6752	33	3248	6	9561	40
30	6340	26	6785	32	3215	6	9555	30
40	6366	26	6817	33	3183	6	9549	20
50	6392	26	6850	32	3150	6	9543	10
26 0	$\bar{1}.6418$	26	$\bar{1}.6882$	32	0.3118	7	$\bar{1}.9537$	0 **64**
10	6444	26	6914	32	3086	6	9530	50
20	6470	25	6946	31	3054	6	9524	40
30	6495	26	6977	32	3023	6	9518	30
40	6521	25	7009	31	2991	7	9512	20
50	6546	24	7040	32	2960	6	9505	10
27 0	$\bar{1}.6570$	25	$\bar{1}.7072$	31	0.2928	7	$\bar{1}.9499$	0 **63**
10	6595	25	7103	31	2897	6	9492	50
20	6620	24	7134	31	2866	7	9486	40
30	6644	24	7165	31	2835	6	9479	30
40	6668	24	7196	30	2804	7	9473	20
50	6692	24	7226	31	2774	7	9466	10
28 0	$\bar{1}.6716$	24	$\bar{1}.7257$	30	0.2743	6	$\bar{1}.9459$	0 **62**
10	6740	23	7287	30	2713	7	9453	50
20	6763	24	7317	31	2683	7	9446	40
30	6787	23	7348	30	2652	7	9439	30
40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20
50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10
29 0	$\bar{1}.6856$	22	$\bar{1}.7438$	29	0.2562	7	$\bar{1}.9418$	0 **61**
10	6878	23	7467	30	2533	7	9411	50
20	6901	22	7497	29	2503	7	9404	40
30	6923	23	7526	30	2474	7	9397	30
40	6946	22	7556	29	2444	7	9390	20
50	6968	22	7585	29	2415	8	9383	10
30 0	$\bar{1}.6990$	22	$\bar{1}.7614$	30	0.2386	7	$\bar{1}.9375$	0 **60**
10	7012	21	7644	29	2356	7	9368	50
20	7033	22	7673	28	2327	8	9361	40
30	7055	21	7701	29	2299	7	9353	30
40	7076	21	7730	29	2270	8	9346	20
50	7097	21	7759	29	2241	7	9338	10
31 0	$\bar{1}.7118$	21	$\bar{1}.7788$	28	0.2212	8	$\bar{1}.9331$	0 **59**
10	7139	21	7816	29	2184	8	9323	50
20	7160	21	7845	28	2155	7	9315	40
30	7181	20	7873	29	2127	8	9308	30
40	7201	21	7902	28	2098	8	9300	20
50	7222	20	7930	28	2070	8	9292	10
32 0	$\bar{1}.7242$		$\bar{1}.7958$		0.2042		$\bar{1}.9284$	0 **58**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
32 0	$\bar{1}.7242$	20	$\bar{1}.7958$	28	0.2042	8	$\bar{1}.9284$	0 **58**
10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50
20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40
30	7302	20	8042	28	1958	8	9260	30
40	7322	20	8070	27	1930	8	9252	20
50	7342	19	8097	28	1903	8	9244	10
33 0	$\bar{1}.7361$	19	$\bar{1}.8125$	28	0.1875	8	$\bar{1}.9236$	0 **57**
10	7380	20	8153	27	1847	9	9228	50
20	7400	19	8180	28	1820	8	9219	40
30	7419	19	8208	27	1792	8	9211	30
40	7438	19	8235	28	1765	9	9203	20
50	7457	19	8263	27	1737	8	9194	10
34 0	$\bar{1}.7476$	18	$\bar{1}.8290$	27	0.1710	9	$\bar{1}.9186$	0 **56**
10	7494	19	8317	27	1683	8	9177	50
20	7513	18	8344	27	1656	9	9169	40
30	7531	19	8371	27	1629	9	9160	30
40	7550	18	8398	27	1602	9	9151	20
50	7568	18	8425	27	1575	8	9142	10
35 0	$\bar{1}.7586$	18	$\bar{1}.8452$	27	0.1548	9	$\bar{1}.9134$	0 **55**
10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50
20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40
30	7640	17	8533	26	1467	9	9107	30
40	7657	18	8559	27	1441	9	9098	20
50	7675	17	8586	27	1414	9	9089	10
36 0	$\bar{1}.7692$	18	$\bar{1}.8613$	26	0.1387	10	$\bar{1}.9080$	0 **54**
10	7710	17	8639	27	1361	9	9070	50
20	7727	17	8666	26	1334	9	9061	40
30	7744	17	8692	26	1308	10	9052	30
40	7761	17	8718	27	1282	9	9042	20
50	7778	17	8745	26	1255	10	9033	10
37 0	$\bar{1}.7795$	16	$\bar{1}.8771$	26	0.1229	9	$\bar{1}.9023$	0 **53**
10	7811	17	8797	27	1203	10	9014	50
20	7828	16	8824	26	1176	9	9004	40
30	7844	17	8850	26	1150	10	8995	30
40	7861	16	8876	26	1124	10	8985	20
50	7877	16	8902	26	1098	10	8975	10
38 0	$\bar{1}.7893$	17	$\bar{1}.8928$	26	0.1072	10	$\bar{1}.8965$	0 **52**
10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50
20	7926	15	8980	26	1020	10	8945	40
30	7941	16	9006	26	0994	10	8935	30
40	7957	16	9032	26	0968	10	8925	20
50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10
39 0	$\bar{1}.7989$	15	$\bar{1}.9084$	26	0.0916	10	$\bar{1}.8905$	0 **51**
10	8004	16	9110	25	0890	11	8895	50
20	8020	15	9135	26	0865	10	8884	40
30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30
40	8050	16	9187	25	0813	11	8864	20
50	8066	15	9212	26	0788	10	8853	10
40 0	$\bar{1}.8081$		$\bar{1}.9238$		0.0762		$\bar{1}.8843$	0 **50**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log si
40 0	$\bar{1}.808$
10	809
20	811
30	812
40	814
50	815
41 0	$\bar{1}.816$
10	818
20	819
30	821
40	822
50	824
42 0	$\bar{1}.825$
10	826
20	828
30	829
40	831
50	832
43 0	$\bar{1}.833$
10	835
20	836
30	837
40	839
50	840
44 0	$\bar{1}.841$
10	843
20	844
30	845
40	846
50	848
45 0	$\bar{1}.849$
	log co

三角函數ノ對數表（二）

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
24 0	$\bar{1}.6093$	28	$\bar{1}.6486$	34	0.3514	5	$\bar{1}.9607$	0 **66**
10	6121	28	6520	33	3480	6	9602	50
20	6149	28	6553	34	3447	6	9596	40
30	6177	28	6587	33	3413	6	9590	30
40	6205	27	6620	34	3380	5	9584	20
50	6232	27	6654	33	3346	6	9579	10
25 0	$\bar{1}.6259$	27	$\bar{1}.6687$	33	0.3313	6	$\bar{1}.9573$	0 **65**
10	6286	27	6720	32	3280	6	9567	50
20	6313	27	6752	33	3248	6	9561	40
30	6340	26	6785	32	3215	6	9555	30
40	6366	26	6817	33	3183	6	9549	20
50	6392	26	6850	32	3150	6	9543	10
26 0	$\bar{1}.6418$	26	$\bar{1}.6882$	32	0.3118	7	$\bar{1}.9537$	0 **64**
10	6444	26	6914	32	3086	6	9530	50
20	6470	25	6946	31	3054	6	9524	40
30	6495	26	6977	32	3023	6	9518	30
40	6521	25	7009	31	2991	7	9512	20
50	6546	24	7040	32	2960	6	9505	10
27 0	$\bar{1}.6570$	25	$\bar{1}.7072$	31	0.2928	7	$\bar{1}.9499$	0 **63**
10	6595	25	7103	31	2897	6	9492	50
20	6620	24	7134	31	2866	7	9486	40
30	6644	24	7165	31	2835	6	9479	30
40	6668	24	7196	30	2804	7	9473	20
50	6692	24	7226	31	2774	7	9466	10
28 0	$\bar{1}.6716$	24	$\bar{1}.7257$	30	0.2743	6	$\bar{1}.9459$	0 **62**
10	6740	23	7287	30	2713	7	9453	50
20	6763	24	7317	31	2683	7	9446	40
30	6787	23	7348	30	2652	7	9439	30
40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20
50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10
29 0	$\bar{1}.6856$	22	$\bar{1}.7438$	29	0.2562	7	$\bar{1}.9418$	0 **61**
10	6878	23	7467	30	2533	7	9411	50
20	6901	22	7497	29	2503	7	9404	40
30	6923	23	7526	30	2474	7	9397	30
40	6946	22	7556	29	2444	7	9390	20
50	6968	22	7585	29	2415	8	9383	10
30 0	$\bar{1}.6990$	22	$\bar{1}.7614$	30	0.2386	7	$\bar{1}.9375$	0 **60**
10	7012	21	7644	29	2356	7	9368	50
20	7033	22	7673	28	2327	8	9361	40
30	7055	21	7701	29	2299	7	9353	30
40	7076	21	7730	29	2270	8	9346	20
50	7097	21	7759	29	2241	7	9338	10
31 0	$\bar{1}.7118$	21	$\bar{1}.7788$	28	0.2212	8	$\bar{1}.9331$	0 **59**
10	7139	21	7816	29	2184	8	9323	50
20	7160	21	7845	28	2155	7	9315	40
30	7181	20	7873	29	2127	8	9308	30
40	7201	21	7902	28	2098	8	9300	20
50	7222	20	7930	28	2070	8	9292	10
32 0	$\bar{1}.7242$		$\bar{1}.7958$		0.2042		$\bar{1}.9284$	0 **58**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
32 0	$\bar{1}.7242$	20	$\bar{1}.7958$	28	0.2042	8	$\bar{1}.9284$	0 **58**
10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50
20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40
30	7302	20	8042	28	1958	8	9260	30
40	7322	20	8070	27	1930	8	9252	20
50	7342	19	8097	28	1903	8	9244	10
33 0	$\bar{1}.7361$	19	$\bar{1}.8125$	28	0.1875	8	$\bar{1}.9236$	0 **57**
10	7380	20	8153	27	1847	9	9228	50
20	7400	19	8180	28	1820	8	9219	40
30	7419	19	8208	27	1792	8	9211	30
40	7438	19	8235	28	1765	9	9203	20
50	7457	19	8263	27	1737	8	9194	10
34 0	$\bar{1}.7476$	18	$\bar{1}.8290$	27	0.1710	9	$\bar{1}.9186$	0 **56**
10	7494	19	8317	27	1683	8	9177	50
20	7513	18	8344	27	1656	9	9169	40
30	7531	19	8371	27	1629	9	9160	30
40	7550	18	8398	27	1602	9	9151	20
50	7568	18	8425	27	1575	8	9142	10
35 0	$\bar{1}.7586$	18	$\bar{1}.8452$	27	0.1548	9	$\bar{1}.9134$	0 **55**
10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50
20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40
30	7640	17	8533	26	1467	9	9107	30
40	7657	18	8559	27	1441	9	9098	20
50	7675	17	8586	27	1414	9	9089	10
36 0	$\bar{1}.7692$	18	$\bar{1}.8613$	26	0.1387	10	$\bar{1}.9080$	0 **54**
10	7710	17	8639	27	1361	9	9070	50
20	7727	17	8666	26	1334	9	9061	40
30	7744	17	8692	26	1308	10	9052	30
40	7761	17	8718	27	1282	9	9042	20
50	7778	17	8745	26	1255	10	9033	10
37 0	$\bar{1}.7795$	16	$\bar{1}.8771$	26	0.1229	9	$\bar{1}.9023$	0 **53**
10	7811	17	8797	27	1203	10	9014	50
20	7828	16	8824	26	1176	9	9004	40
30	7844	17	8850	26	1150	10	8995	30
40	7861	16	8876	26	1124	10	8985	20
50	7877	16	8902	26	1098	10	8975	10
38 0	$\bar{1}.7893$	17	$\bar{1}.8928$	26	0.1072	10	$\bar{1}.8965$	0 **52**
10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50
20	7926	15	8980	26	1020	10	8945	40
30	7941	16	9006	26	0994	10	8935	30
40	7957	16	9032	26	0968	10	8925	20
50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10
39 0	$\bar{1}.7989$	15	$\bar{1}.9084$	26	0.0916	10	$\bar{1}.8905$	0 **51**
10	8004	16	9110	25	0890	11	8895	50
20	8020	15	9135	26	0865	10	8884	40
30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30
40	8050	16	9187	25	0813	11	8864	20
50	8066	15	9212	26	0788	10	8853	10
40 0	$\bar{1}.8081$		$\bar{1}.9238$		0.0762		$\bar{1}.8843$	0 **50**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
40 0	$\bar{1}.8081$	15	$\bar{1}.9238$	26	0.0762	11	$\bar{1}.8843$	0 **50**
10	8096	15	9264	25	0736	11	8832	50
20	8111	14	9289	26	0711	11	8821	40
30	8125	15	9315	26	0685	10	8810	30
40	8140	15	9341	25	0659	11	8800	20
50	8155	14	9366	26	0634	11	8789	10
41 0	$\bar{1}.8169$	15	$\bar{1}.9392$	25	0.0608	11	$\bar{1}.8778$	0 **49**
10	8184	14	9417	26	0583	11	8767	50
20	8198	15	9443	25	0557	11	8756	40
30	8213	14	9468	26	0532	12	8745	30
40	8227	14	9494	25	0506	11	8733	20
50	8241	14	9519	25	0481	11	8722	10
42 0	$\bar{1}.8255$	14	$\bar{1}.9544$	26	0.0456	12	$\bar{1}.8711$	0 **48**
10	8269	14	9570	25	0430	11	8699	50
20	8283	14	9595	26	0405	12	8688	40
30	8297	14	9621	25	0379	11	8676	30
40	8311	13	9646	25	0354	12	8665	20
50	8324	14	9671	26	0329	12	8653	10
43 0	$\bar{1}.8338$	13	$\bar{1}.9697$	25	0.0303	12	$\bar{1}.8641$	0 **47**
10	8351	14	9722	25	0278	11	8629	50
20	8365	13	9747	26	0253	12	8618	40
30	8378	13	9773	25	0228	12	8606	30
40	8391	14	9798	25	0202	12	8594	20
50	8405	13	9823	25	0177	13	8582	10
44 0	$\bar{1}.8418$	13	$\bar{1}.9848$	26	0.0152	12	$\bar{1}.8569$	0 **46**
10	8431	13	9874	25	0126	12	8557	50
20	8444	13	9899	25	0101	13	8545	40
30	8457	12	9924	25	0076	12	8532	30
40	8469	13	9949	26	0051	13	8520	20
50	8482	13	9975	25	0025	12	8507	10
45 0	$\bar{1}.8495$		0.0000		0.0000		$\bar{1}.8495$	0 **45**
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分度

昭和九年一月十五日初版印刷　昭和九年一月二十日初版發行
昭和九年一月廿六日訂正再版印刷　昭和九年一月三十日訂正再版發行
昭和十三年十二月　三　日　修正三版印刷
昭和十三年十二月　七　日　修正三版發行

檢印

現代
新幾何三角法
[增課]
定價金壹圓

著作者　阿部八代太郎

東京市小石川區小日向水道町84
發行者　株式會社 東京開成館
代表者 松本繁吉

東京市京橋區湊町三丁目12
印刷者　太壁早治

東京市日本橋區吳服橋二丁目5
販賣所　林平書店

大阪市東區北久寶寺町心齋橋筋角
販賣所　三木佐助

發行所
東京市小石川區小日向水道町八十四番地
株式會社 **東京開成館**
【振替口座東京五三二二番】

株式會社大倉印刷所印刷