修訂
代數學教科書
上卷

理學士高橋豐夫

編纂

東京
學海指針社

緒　言

本書は中學校師範學校及び之と同一程度の諸學校における代數學教科用に供せんとするの目的を以て編纂せるものなり.

余先年「トドハンター」原著「ローニー」増補の代數學初歩を抄譯して世に公にせり　然るに實地授業の任に當りたる教員諸氏に就きて該書教授の實況を聞くに該書は當初の目的に對しては稍繁縟に失したるの跡あり　加ふるに該書出版の當時より茲に年を閲すること三此間中等教育における斯學の程度に尠からざる變更を來せるを以て今回更に本書を編纂し新たに出版することとせり.

讀者幸に忠言を吝まず編者をして本書改良の便を得しめられんは編者の切望する所なり.

高橋豐夫識

代數學教科書上卷

目次

代數學教科書

上卷

第一編

定義 符號 代數式

1. **代數學**は數を表はすに文字を用ゐ數に施す演算を表はすに符號を用ゐ以て數に付きて論ずる學科なり.

2. 代數學に於ては數を表はすに $a, b, c, \ldots\ldots x, y, z$ 等の文字を以てす.初學者は文字にて數を表はすことに熟達し且つ能く符號の意味に通ぜざるべからず.これより最も緊要なる符號及び其用法を說明すべし.

3. 符號 + を一數の前に置くときは其數は加へらるべきことを示す.

例ヘバ$a+b$ハbニテ表ハシタル數ヲaニテ表ハシタル數ニ加フルノ意ナリ.若シaガ9ヲ表ハシbガ3ヲ表ハセバ$a+b$ハ12ヲ表ハス.

符號$+$を**加號**と稱し$a+b$を「aに加ふるb」又は「aプラスb」と讀む.

4. 符號$-$を一數の前に置くときは其數は減ぜらるべきことを示す.

例ヘバ$a-b$ハbニテ表ハシタル數ヲaニテ表ハシタル數ヨリ減ズルノ意ナリ.若シaガ9ヲ表ハシbガ3ヲ表ハセバ$a-b$ハ6ヲ表ハス.

符號$-$を**減號**と稱し$a-b$を「a引くのb」又は「aマイナスb」と讀む.

5. 同樣ニ$a+b-c$ハaニbヲ加ヘ其和ヨリcヲ引クコトヲ表ハシ,$a-b+c$ハaヨリbヲ引キ其差ニcヲ加フルコトヲ表ハシ,$a-b-c$ハaヨリbヲ引キ其差ヨリ更ニcヲ引クコトヲ表ハス.

6. 二數の間に置かれたる符號$=$は其兩數相等しきことを表はす.

例ヘバ$a=b$ハaニテ表ハシタル數ガbニテ表ハシタル數ニ等シキコトヲ表ハス.又$a+b=c$ハaニテ表

ハシタル數ニbニテ表ハシタル數ヲ加ヘタルモノハcニテ表ハシタル數ニ等シキコトヲ示ス.故ニ若シaガ9,bガ3ナレバcハ12ナルベシ.

符號$=$を**等號**と稱し$a=b$を「aに等しきはb」又は「aイクオールスb」と讀む.

7. 二數の間に置かれたる符號$\times$は其右に在る數を其左に在る數に掛くることを表はす.

例ヘバ$a\times b$ハbニテ表ハシタル數ヲaニテ表ハシタル數ニ掛ケルコトヲ示ス.故ニaガ9,bガ3ナレバ$a\times b$ハ27ナリ.

符號$\times$を**乘號**と稱し$a\times b$を「aに掛くるb」又は「aインツーb」と讀む.

同樣ニ$a\times b\times c$ハa,b,cニテ表ハシタル三數ノ積ヲ表ハス.

8. 乘號は屢々之を略す.例へば$a\times b$をabと書き,$a\times b\times c$をabcと書くが如し.然れども數が數字にて表はさるるときは決して乘號を省くべからず.例へば4×5を表はすに45を以てすべからず.如何と

なれば45には別に四十五といへる意味あればなり.故に數字の積を表はすには必ず其間に乘號を置くべし.

乘號×の代りに往々點を用ゐることあり例へば4×5を4.5と書くが如し.

乘號の點と小數點との間違ひを避くる爲め乘號の點は低く書き,小數點は高く書くべし. 即ち4×5を4.5と書き$4+\frac{5}{10}$を$4{\cdot}5$と書くべし.實際に於ては乘號に點を用ゐるは意味の曖昧ならざるときに限る.

例ヘバ$1\times2\times3\times4$ヲ$1.2.3.4$ト書クガ如シ.斯ノ如キ場合ニ於テノ點ハ小數點ト間違ヒラルル虞ナシ.

掛け合はする二數が數字と文字とであるときにも乘號又は點は通例之を省くものとす.

例ヘバ$3\times a$ヲ$3a$ト書クベシ.

9. 二數の間に置かれたる符號÷は

其右に在る數にて其左に在る數を割ることを示す.

例ヘバ$a\div b$ハbニテ表ハシタル數ヲ以テaニテ表ハシタル數ヲ割ルコトヲ示ス.故ニ若シaガ9, bガ3ナレバ$a\div b$ハ3ナリ.

符號÷を**除號**と稱し$a\div b$を「a割るのb」又は「aバイb」と讀む.二數を橫線の上下に書きて割ることを示すことあり.

例ヘバ$a\div b$ヲ$\frac{a}{b}$ト書クガ如シ.

10. 二數の間に置かれたる符號$>$は其左方に在る數が其右方に在る數より大なることを示し,二數の間に置かれたる符號$<$は其左方に在る數が其右方に在る數より小なることを示す.

例ヘバ$a>b$ハaハbヨリ大ナルコトヲ示シ,$a<b$ハaハbヨリ小ナルコトヲ示ス

此二つの符號を**不等號**と稱す.

11. 符號∴は「故に」といふ意を示し,符號∵は「如何となれば」といふ意を示す.

12. 一數が二つ或は二つより多くの數の積に等しきときは其各々を此積の**因數**と稱す.

例ヘバ $2\times3\times5=30$ ニ於テ 2,3,5 ハ各々 30 ノ因數ナリ.或ハ 30 ハ 2 及ビ 15 ナル二因數ノ積,又ハ 3 及ビ 10 ナル二因數ノ積ト考フルコトヲ得.又 $4ab$ ハ 4 及ビ ab ナル二因數ノ積,或ハ $4a$ 及ビ b ナル二因數ノ積,或ハ $4b$ 及ビ a ナル二因數ノ積ト考フルコトヲ得.或ハ又之ヲ $4, a, b$ ナル三因數ノ積ト考フルコトヲ得.

13. 一數が數字と文字との二因數の積なるときは此數字を他の因數の**係數**と稱す.

例ヘバ $4ab$ ニ於テ 4 ハ ab ノ係數ナリ.

時トシテハ $4ab$ ニ於テ ab ヲ 4 ノ係數トイヒ,或ハ $4a$ ヲ b ノ係數トイヒ.又ハ b ヲ $4a$ ノ係數トイフコトアリ.因リテ 4 ヲ特ニ ab ノ**數係數**ト稱スルコトアリ.

數字ノ因數ヲ有セザル積ニ於テハ 1 ヲ其**數係數**ト見做スコトヲ得.

例ヘバ ab ノ數係數ハ 1 ナリ.

14. 積の各因數皆相等しきときは此積を其因數の**羃**と稱す.

例ヘバ 7×7 ヲ 7 ノ第二羃トイヒ,$7\times7\times7$ ヲ 7 ノ第三羃トイフ.同樣ニ $a\times a$ ヲ a ノ第二羃トイヒ,$a\times a\times a$ ヲ a ノ第三羃トイフ.又 a ヲ a ノ第一羃ト稱スルコトアリ.

15. 羃を示すには因數を悉く列記せずして唯一つの因數を書き,因數の數を其右の肩に書くべし.

例ヘバ $a\times a$ ヲ a^2 ト書キ,$a\times a\times a$ ヲ a^3 ト書クガ如シ,a^1 ヲ以テ a ノ第一羃即チ a ヲ表ハスコトヲ得.

16. 羃の因數の數を表はさんが爲に因數の右肩に置きたる數字を羃の**指數**或は單に**指數**と稱す.

例ヘバ a^3 ニ於テハ 3 ハ指數ニシテ,a^n ニ於テハ n ハ指數ナリ.

17. 學生は能く注意して係數と指數との別を明かにせざる可からず.$3c$ は c の三倍を表はし,3 は其係數なり然るに c^3 は c を三度掛け合はせたるものを表はし 3 は其指數なり.即ち

$$3c=c+c+c \qquad c^3=c\times c\times c \quad なり.$$

18. aの第二冪即ちa^2をaの**平方**と稱し,aの第三冪即ちa^3をaの**立方**と稱することあり.四以上の冪に至りては之に相當する名稱なし,a^4をaの第四冪と讀み,a^5をaの第五冪と讀む,他は之に倣ふ

19. 一數の平方が他の一數に等しければ第一數を第二數の**平方根**と稱す.

一數の立方が他の一數に等しければ第一數を第二數の**立方根**と稱す.

一數の第四冪が他の一數に等しければ第一數を第二數の四乘根と稱す.他は皆之に倣ふ.

例ヘバ $7^2=49$ ナルヲ以テ 7 ハ 49 ノ平方根ナリ,若シ又 $b^2=a$ ナレバ b ハ a ノ平方根ナリ.同樣ニ $5^3=125$ ナルヲ以テ 5 ハ 125 ノ立方根ナリ,若シ又 $b^3=a$ ナレバ b ハ a ノ立方根ナリ.

aの平方根を示すに $\sqrt[2]{a}$ と書くことを得べし.然れども通例は單に $\sqrt{a}$ と書く.aの立方根を示すに $\sqrt[3]{a}$ を以てし

其四乘根を示すに $\sqrt[4]{a}$ を以てす.他は皆之に倣ふ.

故ニ $\sqrt{9}=3,\quad \sqrt[3]{8}=2$

符號$\sqrt{\ }$を**根號**と稱す.

20. 是迄說明し來りたる文字及び符號と尙ほ後に出で來るべき一二の符號とを總稱して**代數記號**と稱す.

21. 加號減號乘號除號根號を以て文字及び數字を結びつけたるものを**代數式**と稱す.或は單に**式**と稱す

代數式が根號を有せざるときは之を**有理式**と稱し,根號を有するときは之を**無理式**と稱す.

22. 文字を以て割ることを示さざる有理式を**整式**と稱す.

例ヘバ $a^2+ab,\ \frac{x^2}{4}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{6}$ ハ何レモ整式ナリ.

或特別なる文字を以て割ることを示さざる有理式を其文字に付きて**整式**

なりといふ.

例ヘバ $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{x}{a+b}$ ハ x ニ付キテ整式ナリ

文字を以て割ることを示す所の有理式を**分數式**と稱す.

23. 式が + 號或は一號に依りて連結せられたる部分を有せざるときは之を**單項式**と稱し,斯の如き部分を有するときは之を**多項式**と稱す.

多項式中 + 或は一の符號に依りて連結せらるる各部分を式の**項**と稱す.

例ヘバ ax, $4bc$, $5a^2c^2$ ハ單項式ナリ,而シテ $a^2+b^3-c^4$ ハ多項式ニシテ a^2,b^3,c^4 ハ各〻其項ナリ.

二項より成る多項式を**二項式**と稱し,三項より成る多項式を**三項式**と稱す.他は之に倣ふ.

例ヘバ $2a+3$ ハ二項式 $a-2b+5c$ ハ三項式ナリ,

24. 一つの項中にある文字の總數を其項の**次**と名づく.

例ヘバ a^2b^3c 卽チ $a\times a\times b$ $b\times b\times c$ ノ次ハ六ニシテ之ヲ六次ノ項ナリトイフ, 數係數ハ算入セザルヲ以テ $9a^3b^4$ ト a^3b^4 トハ同ジク七次ノ項ナリ,

此の如く項の次は其項中にある總ての文字の指數の和なり.但し書き表はされたる指數のなき文字は指數1を有するものとす.

25. 二つ或は二つより多くの項より成れる數を一數と見做して論ぜんとするときは之を**括弧**の中に置くべし.

例ヘバ a ト b トノ和ニ c ヲ掛クルコトヲ示サントスルトキハ $(a+b)\times c$ 或ハ $\{a+b\}\times c$ 或ハ單ニ $(a+b)c$ 或ハ $\{a+b\}c$ ヲ以テ之ヲ示ス.此式ニ於テハ $a+b$ ヲ一數ト見做シ,之ニ c ヲ掛クルコトヲ示ス,然レドモ若シ括弧ヲ去リテ $a+bc$ ト書クトキハ,此式ハ唯 b ノミニ c ヲ掛ケ,其積ヲ a ニ加フベキコトヲ示ス.

同樣ニ $(a+b-c)d$ ハ $a+b-c$ ニテ表ハシタル數ニ d ヲ掛クルコト卽チ $a+b-c$ 全體ニ d ヲ掛クルコトヲ示ス,然ルニ若シ括弧ヲ去リテ $a+b-cd$ ト書クトキハ此式ハ唯 c ノミニ d ヲ掛ケタルモノヲ a ト b トノ和ヨリ引クベキコトヲ示ス.

同様ニ$(a-b+c)\times(d+e)$ハ$a-b+c$及ビ$d+e$ヲ各〻一數ト見做シテ掛ケ合ハスベキコトヲ示ス,前ニ$a\times b$ヲabト書キタルガ如ク上式ヲ單ニ$(a-b+c)(d+e)$ト書クコトヲ得ベシ.

又$\sqrt{(a+b+c)}$ハ$a+b+c$ノ表ハス數ヲ平方ニ開クコトヲ示ス,$(ab)^2$ハ$ab\times ab$ヲ示シ,$(ab)^3$ハ$ab\times ab\times ab$ヲ示ス

又$(a+b-c)\div(a+e)$ハ$a+b-c$ニテ表ハシタル數ヲ$d+e$ニテ表ハシタル數ニテ割ルコトヲ示ス.

時としては一數と見做すべき若干の數の上に一横線を引きて括弧の代りとなすことあり.

例ヘバ,$\overline{a+b-c}\times\overline{d+e}$及ビ$(a+b-c)(d+e)$ハ同意義ノモノナリ,斯ノ如キ意義ニ用キラレタル線ヲ**括線**ト稱ス

26. 是迄にて代數學に於て用ゐる符號をば概ね説明し了れり.或場合に於ては符號なる語は特に加號及び減號にのみ用ゐらる,例へば減法の法則に於て符號の變化といへば單に加號及び減號の變化を指すが如し.

27. 凡て代數學に於て用ゐる文字は如何なる數をも表はすことを得今aが2を表はすものと假定すれば2をaの**數値**と稱す.

學生ヲシテ記號ノ用法ニ習熟セシメンガ爲メココニ代數式ノ數値ヲ看出スベキ例題ヲ掲クベシ.

$a=1$, $b=2$, $c=3$ $d=4$, $e=5$, $f=0$, ナルトキハ次ノ諸式ノ數値如何.

解1. $7a+3b-2d+f=7+6-8+0=13-8=5$

例2. $\dfrac{4e+5d}{d-b}=\dfrac{20+20}{4-2}=\dfrac{40}{2}=20$

例3. $b^3=2^3=8$, $e^a=5^1=5$, $e^c=5^3=125$

例4. $\sqrt{(3c+4d+5e-a)}=\sqrt{(9+16+25-1)}=\sqrt{49}=7$

問題 1

$a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $f=0$, ナルトキハ次ノ諸式ノ數値如何

1. $4e-3a-3b+5c$
2. $7ae+3bc+9d-af$
3. $\dfrac{4ac}{b}+\dfrac{8bc}{d}-\dfrac{5cb}{e}$
4. $7e+bcd-\dfrac{3bde}{2ac}$
5. $d^3+c^2-7ab+f^3$
6. $\dfrac{e^c+b^a}{c^b-b^c}$
7. $\dfrac{d^c}{b^c}$
8. b^{c+2}
9. 11^c
10. $\sqrt{(6bcd)}$
11. $2d\sqrt{(e^2-3c)}+e\sqrt{(e^2+6d)}$
12. $\dfrac{\sqrt[3]{(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)}}{\sqrt{(b^2+c^2-2bc)}}$

第二編

項ノ順序ノ變更　同類項

28. 一式の各項悉く＋號を以て連結せらるるときは,各項の順序を如何に變更するも式の値は變ずることなし.

例ヘバ$5+7$及ビ$7+5$ハ其値何レモ12ニシテ,$a+b$及ビ$b+a$ハ何レモa及ビbニテ表ハサレタル二數ノ和ヲ示スガ如シ,コレヲ式ニテ示セバ次ノ如シ.

$$a+b=b+a$$

同様ニ　$a+b+c=a+c+b=b+c+a$

29. 一式若し＋號を前に有する項と－號を前に有する項との各,若干より成るときは,前者のみの群を先きに書き,後者のみの群を其後に書けば,各群中の項の順序を如何に變更するも式の値は變ずることなし.

例ヘバ　$7+8-2-3=8+7-2-3=7+8-3-2$

$$=8+7-3-2$$

又　$a+b-c-e=b+c\quad c-e=a+b-e-c$

$$=b+a-e-c$$

30. 場合によりては,式の値を變ずることなくして項の順序を一層變更して＋號を前に有する項と－號を前に有する項とを混合することを得べし.

例ヘバ若シ$a=10, b=6, c=5$ナレバ$a+b-c=a--c+b=b-c+a$ナルベシ,如何トナレバ何レノ場合ニ於テモ其値ハ11ナレバナリ.然レドモ若シ$a=2, b=6, c=5$ナレバ$a-c+b$ハ全ク無意味ノモノトナル.如何トナレバ2ヨリ6ヲ引クコト能ハザレバナリ.

斯ノ如クcガaヨリ大ナル場合ニ於テモ$a-c+b$ト$a+b-c$トハ同ジ結果ヲ生ズルモノナリトイフ**約束**ヲ爲シ置クヲ便宜ナリトス.

同様ニ$-b+a$ト$a-b$トハ同ジ結果ヲ生ズルモノト考フベシ.

31. ＋號を前に有する項と－號を前に有する項とを區別せんが爲め次の定義を用ゐる.

＋號を前に有する項を**正項**といひ,

一號を前に有する項を**負項**といふ.

32. 式の初項は＋號,一號の何れをも前に有せざることあり,斯の如き項は常に正項なりと知るべし,されば項の順序を變更するに當り,初項を他の位置に移さんとするときは,其位置を更ふると同時に其前に＋號を置くべし.

例へバ　$a+b-c=b+a-c=b-c+a$

ココニ第一式ノ a ハ符號ヲ前ニ有セザレドモ第二式,第三式ニ於テハ＋號ヲ前ニ有ス.

33. 數個の項が全く同一なるか,或は唯數係數が異なるのみなるときは之を**同類項**といひ,然らざるときは之を**異類項**といふ.

例ヘバ a, $4a$ 及ビ $7a$ ハ同類項ニシテ a^2, $5a^2$ 及ビ $9a^2$ モ亦同類項ナリ.之ニ反シテ a^2, ab 及ビ b^2 ハ異類項ナリ.

34. 同類項を有する式は之を簡單になすことを得べし.

例 1. $6a-a+3b+5c-b+3c-2a$ ヲ簡單ニスベシ.

(30)ニ依リテ

與ヘラレタル式$=6a-a-2a+3b-b+5c+3c$

扨 $6a-a-2a=3a$ ナリ,如何トナレバ,a ハ如何ナル數ヲ表ハスニ拘ハラズ $6a$ ヨリ a ヲ引ケバ殘リハ $5a$ ニ等シク又 $5a$ ヨリ $2a$ ヲ引ケバ殘リハ $3a$ ニ等シケレバナリ.

同樣ニ $3b-b=2b$ 及ビ $5c+3c=8c$ ナリ.

故ニ與ヘラレタル式ハ $3a+2b+8c$ ニ等シ.

例 2. $a-3b-4b$ ヲ簡單ニスベシ.

與ヘラレタル式$=a-7b$ ナリ.

如何トナレバ a ヨリ先ヅ $3b$ ヲ引キ,次ニ其殘リヨリ $4b$ ヲ引クハ a ヨリ一時ニ $7b$ ヲ引クト其結果同一ナレバナリ.

35. 余輩は今 $-3b-4b=-7b$ の如き式を解釋することを得.

固より無きものより $3b$ を引き,更に其殘りより $4b$ を引くことを得ず,故に唯此式のみに付きて考ふるときは其意義通じ難けれども今これに次の如き解釋を下すことを得,則ち $-3b-4b=-7b$ とは或

代數的演算の途中に於て一數より$3b$を引き,更に其殘りより$4b$を引くことの代りに其數より一度に$7b$を引くことを得べしとの意なり.

問題 2

$a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$ ナルトキハ次ノ諸式ノ數值如何.

1. $a-3b+4c$　　**2.** $a-b^2+c^3+d^3$

3. $(a+b)(b+c)-(b+c)(c+d)+(c+d)(d+e)$

4. $(a-2b+3c)^2-(b-2c+3d)^2+(c-2d+3e)^2$

5. $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$　　**6.** $\dfrac{b^2-2bc+c^2}{a^2-2ab+b^2}$

7. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}-\dfrac{b^2+2bc+c^2}{b+c}+\dfrac{c^2+2cd+d^2}{c+d}$

8. $\sqrt{(e^2+d^2+c^2-a^2)}$　　**9.** $\sqrt[3]{(2e^2+7b)}$

第三編

整式加法

36. 加法を論ずるに當り,之を次の三つの場合に分つを便宜とす.

第一　同じ符號を有する同類項を加ふる場合

第二　同じ符號のもののみにあらざる同類項を加ふる場合

第三　同類項のみにあらざるものを加ふる場合

37. 第一　法則　同じ符號を有する同類項を加へんとせば先づ其數係數を加へ其和の前に共通の符號を置き其後に共通文字を書き添ふるべし.

例へバ $6a+3a+7a=16a$,　$-2bc-7bc-9bc=-18bc$

第一例ニ於テ $6a$ ハ $+6a$ ニ同ジク, $16a$ ハ $+16a$ ニ同ジ.

38. 第二 法則 同じ符號のもののみにあらざる同類項を加へんとせば先づ＋號の數係數のみを加へ又－號の數係數のみを加へ而して此二つの和の差を看出すべし．次に此二つの和の中何れにても大なる方の符號を此差の前に置き共通文字を其後に書き添ふるべし．

例ヘバ $7a-3a+11a+a-5a-2a=19a-10a$

$=9a+10a-10a=9a$

$2bc-7bc-3bc+4bc+5bc-6bc=11bc-16bc$

$=11bc-11bc-5bc=-5bc$

39. 第三 法則 同類項のみにあらざる項を加へんとせば第二の法則に依りて總ての同類項の和を求め，其他の項には夫々各自の符號を附して列記すべし．

例 次ノ四式ノ和ヲ求ム．

$4a+5b-7c+3d,\quad 3a-b+2c+5d,\quad 9a-2b-c-d$ 及ビ

$-a+3b+4c-3d+e$

演算ヲ施スニ當リ同類項ハ竪ノ同行ニ在ル樣ニ

排列スルヲ便宜トス．

即チ

$$\begin{array}{r}4a+5b-7c+3d\\3a-b+2c+5d\\9a-2b-c-d\\-a+3b+4c-3d+e\\\hline 15a+5b-2c+4d+e\end{array}$$

上ノ例ニ於テ $4a$, $3a$, $9a$, $-a$ ハ同類項ニシテ＋號ノ係數ノ和ハ16ナリ，又－號ノ係數ノ項ハ $-a$ 唯一ツニシテ其係數ハ1ナリ，16ト1トノ差ハ15ナルヲ以テ此等ノ同類項ヨリ $+15a$ ヲ得，然レドモ(32)ニ依リ＋號ハ省キテ書カズ．

同樣ニ $5b-b-2b+3b=5b$ 等ナリ．

40. 次の例に於ける諸項は適當に排列せられたるものなり．

例 1. 次ノ四式ノ和ヲ求ム．

$x^3+2x^2-3x+1,\ 4x^3+7x^2,+x-9,\ -2x^3+x^2--9x+8$

及ビ $-3x^3-x^2+10x-1$

$$\begin{array}{r}x^3+2x^2-3x+1\\4x^3+7x^2+x-9\\-2x^3+x^2--9x+8\\-3x^3-x^2+10x-1\\\hline 9x^2-x-1\end{array}$$

此例ニ於テ第一行ハ $x^3+4x^3-2x^3-3x^3=5x^3-5x^3$ 即チ零ナリ．是ヲ x^3 ヲ含メル諸項ハ互ニ消シ合

フトイフ.

例 2. 次ノ五式ノ和ヲ求ム.

$7x^2-3xy+x,\ 3x^2-y^2+3x-y,\ -2x^2+4xy+5y^2-x-2y,$

$-7xy-y^2+9x-5y,\ 4x^2+4y^2-2x$

$$\begin{array}{rrrrr}
7x^2 & -3xy & & +x & \\
3x^2 & & -y^2 & +3x & -y \\
-2x^2 & +4xy & +5y^2 & -x & -2y \\
 & -7xy & -y^2 & +9x & -5y \\
4x^2 & & +4y^2 & -2x & \\
\hline
12x^2 & -6xy & +7y^2 & +10x & -8y
\end{array}$$

問題 3

次ノ諸式ノ和ヲ求ム.

1. $5b,\ 7b,\ 9b,\ 11b$　　**2.** $-a,\ -3a,\ -5a$

3. $3x^2y,\ -4x^2y,\ 5x^2y,\ -16x^2y,\ 10x^2y$

4. $3a-2b,\ 4a-5b,\ 7a-11b,\ a+9b$

5. $4x^2-3y^2,\ 2x^2-5y^2,\ -x^2+y^2,\ -2x^2+4y^2$

6. $3x+2y-z,\ 2x-2y+2z,\ -x+2y+3z$

7. $a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$

8. $-7xy+6yz-4zx,\ 3xy-2yz+15zx,\ 11xy-3yz-9zx$

9. $x^3-4x^2+5x-3,\ 2x^3-7x^2-14x+5,\ -x^3+9x^2+x+8$

10. $x^4-2x^3+3x^2,\ x^3+x^2+x,\ 4x^4+5x^3,\ 2x^2+3x-4,$

$-3x^2-2x-5$

11. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\ 2a^3+5a^2b-6ab^2-7b^3,\ a^3-ab^2+2b^3$

12. $x^3-2ax^2+a^2x+a^3,\ x^3+3ax^2,\ 2a^3-ax^2-2x^3$

13. $2ab-3ax^2+2a^2x,\ 12ab+10ax^2-6a^2x,$

$-8ab+ax^3-5a^2x$

14. $x^2+y^4+z^3,\ -4x^2-5z^3,\ 8x^2-7y^4+10z^3,\ 6y^4-6z^3$

15. $3x^2-4xy+y^2+2x+3y-7,\ 2x^2-4y^2+3x-5y+8,$

$10xy+8y^2+9y,\ 5x^2-6xy+3y^2+7x-7y+11$

16. $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4,\ 4x^3y-12x^2y^2+12xy^3-4y^4$

$6x^2y^2-12xy^3+6y^4,\ 4xy^3-4y^4,\ y^4$

第四編

整式減法

41. 12より$7+3$を引きて得たる結果は先づ12より7を引き,其殘りより更に3を引きて得たる結果と同一なるべし,

即ち $$12-(7+3)=12-7-3$$

第一式中の括弧は$7+3$全體を12より引くことを示す.

同樣に $$20-(5+4+2)=20-5-4-2$$

上に記するところに準じ,aより$b+c$を引かんとするときは,先づaよりbを引き其殘りより更にcを引くも同じ結果を得,即ち$a-b-c$を以て之を示す.

故に $$a-(b+c)=a-b-c$$

第一式中の括弧は$b+c$全體をaより引くことを示す.

同樣に $$a-(b+c+d)=a-b-c-d$$

42. 次に12より$7-3$を引かんとす,若し12より7を引けば$12-7$を得,然れども要する所は12より7を引くにあらずして,7より3だけ少なき數を引くにあるを以て上の如くにては丁度3だけの引き過ぎとなる,故に$12-7$に3を加へざる可からず.

故に $$12-(7-3)=12-7+3$$

同樣に $$12-(7+3-2)=12-7-3+2$$

次に上例に準じて,aより$b-c$を引かんとす.若しaよりbを引けば$a-b$を得,然れども要する所はaよりbを引くにあらずしてbよりcだけ少なき數を引くにあるを以て上の如くにては丁度cだけの引き過ぎとなる,故に$a-b$にcを加へざるべからず.

故に $$a-(b-c)=a-b+c$$

同様に $a-(b+c-d)=a-b-c+d$

43. 前節に擧げたる例.

$$a-(b+c-d)=a-b-c+d$$

を見るに $b+c-d$ を a より引けば其結果は $a-b-c+d$ に等し,故に引くべき式中に $+b$ なる項あれば結果を表はせる式中に $-b$ なる項あり,又引くべき式中に $+c$ なる項あれば結果に $-c$ なる項あり,又引くべき式中に $-d$ なる項あれば結果に $+d$ なる項あるを見るべし.

此例と前二節に示したる例とに據り,減法に關する次の法則を得.

減數中に在る諸項の符號を悉く變更し,而して之を被減數に加ふべし.

例 1. $4x-3y+2z$ ヨリ $3x-y+z$ ヲ引ケ.

引クベキ項ノ符號ヲ悉ク變更スレバ $-3x+y-z$ ヲ得,次ニ加法ニ於ケルガ如ク諸項ヲ集ムレバ.

$$4x-3y+2z-3x+y-z=x-2y+z$$

例 2. $3x^4+5x^3-6x^2-7x+5$ ヨリ

$2x^4-2x^3+5x^2-6x-7$ ヲ引ケ

減數中ノ諸項ノ符號ヲ悉ク變シ,之ヲ被減數ニ加フルコト次ノ如シ.

$$\begin{array}{r} 3x^4+5x^3-6x^2-7x+5 \\ -2x^4+2x^3-5x^2+6x+7 \\ \hline x^4+7x^3-11x^2-x+12 \end{array}$$

初學者ハ上ノ例ニ於テノ如ク十分ニ演算ヲ行フヲ可トス,然レドモ漸々習熟スルニ從ヒ,減數ノ符號ヲ實際ニ變更セザルモ唯ココロノ中ニテ之ヲ變更シタルモノト思惟シ,直チニ結果ヲ書キ下シテ可ナリ.

44. $a-(b-c)=a-b+c$ なることは(42)に於て之を知れり,即ち引くべき式中の $-c$ なる項は結果に至り變じて $+c$ となる.故に a より $-c$ を引けば其結果は $a+c$ なり.斯の如き式は已に(35)に擧げたる例の如く,唯夫れのみにては理解し難しと雖代數演算の他の部分との關係より考ふれば,容易に其意義を會得することを得べし.

然れども,ここに一の附言を爲し,以て初

學者をして a より $-c$ を引けば $a+c$ となることを記憶せしむると同時に,其理由を會得するの一助となさんとす.

即ち　$a=a+c-c$ なり.

故に a より $-c$ を引けば,殘り $a+c$ なり.

又 $+$, $-$ なる兩符號は互に反對なる演算を示すものと見ることを得べし,即ち $-c$ は $+c$ の反對の演算を示し,$-(-c)$ は $+$ の反對の演算の反對を示す,即ち $-(-c)$ は $+c$ に等し.　負數即ち $-$ なる號を前に有する數に付きての詳細なる說明は本書之を略す.

代數學に用ゐる加法及び減法なる語は其算術に用ゐるものと意義を同ふせざるところあり,算術に於ては加ふれば常に增加を來たし,減ずれば常に減少を來たせども,代數學に於ては然らざることあり,例へば5に -3 を加ふれば其代數的の和は2なりといふことを得,又5より -3 を減ずれば其代數的の差は8なりといふことを得るが如し.

問題　4

1. $7a+14b$ ヨリ $4a+10b$ ヲ引ケ
2. $6a-2b-c$ ヨリ $2a-2b-3c$ ヲ引ケ
3. $7x^2-8x-1$ ヨリ $5x^2-6x+3$ ヲ引ケ
4. $11x^2+7xy-10y^2$ ヨリ $8x^2-3xy+5y^2$ ヲ引ケ
5. $2x^3-3x^2y+4xy^2-5y^3$ ヨリ $7x^3-8x^2y+9xy^2-10y$ ヲ引ケ
6. $11a^2x^2+12x^2+5$ ヨリ $9a^2x^2-13x^2+7$ ヲ引ケ
7. $-9a-5b-3c-4d$ ヨリ $-3a-2b-5c-8d$ ヲ引ケ
8. $4x^4-3x^3-2x^2-7x+9$ ヨリ $x^4-2x^3-2x^2+7x-9$ ヲ引ケ
9. $5x^2+6xy-12xz-4y^2-7yz-5z^2$ ヨリ $2x^2-7xy+4xz-3y^2+6yz-5z^2$ ヲ引ケ
10. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ヨリ $-a^3+3a^2b-3ab^2+b^2$ ヲ引ケ
11. $7x^4-11x^3+7x^2+11$ ヨリ $4x^4-3x^2+1$ 及ビ $5x^4+3x^3-4x-5$ ノ和ヲ引ケ
12. $11a^2-15ab-9b^2$ ヲ得ル爲メニ $7a^2-5ab+4b^2$

ニ加フベキ數如何

13. 如何ナル數ヲ $14x^4-15x^2y^2-16y^4$ ニ加フレバ $17x^4+18x^2y^2-30y^4$ ナル和ヲ得ベキカ

14. $17x^3-5x^2y+11xy^2+8y^3$ ヲ得ル爲メニ $15x^3+11x^2y-8xy^2-6y^3$ ヨリ減ズベキ數ヲ求ム

第五編

括弧

45. 代數學に於ては括弧の用は極めて廣大なるを以て能く其法則に注意せざる可からず,今次に其法則を述べん.

十號を前に有する括弧内の式は括弧を去るも其項の符號を變ずることなし

一號を前に有する括弧内の式は括弧を去れば其項の符號を變ずるものなり.

例ヘバ

$$a-b+(c-d+e)=a-b+c-d+e$$

$$a-b-(c-d+e)=a-b-c+d-e$$

第二ノ法則ハ已ニ(43)ニ於テ說明セリ,其實,減法ノ法則ニ外ナラズ,第一ノ法則モ亦同ジ方法ニテ說明スルコトヲ得ベシ.

46. 學生は特に次の如き變化に注意するを要す.

$$+(-d)=-d,\quad -(-d)=+d$$

$$+(+e)=+e,\quad -(+e)=-e$$

是等は法則と見做さざる可からざるものなり,或は(35)に於ての如くにして容易に之を說明することを得べし.

47. 數個の括弧を有する一式あるときは,前の法則に據り其最も內にあるものより順に一組づつ之を去ることを得べし.

例へバ　$a+\{b+(c-d)\}=a+\{b+c-d\}=a+b+c-d$

$a+\{b-(c-d)\}=a+\{b-c+d\}=a+b-c+d$

$a-\{b+(c-d)\}=a-\{b+c-d\}=a-b-c+d$

$a-\{b-(c-d)\}=a-\{b-c+d\}=a-b+c-d$

同様ニ

$a-[b-\{c-(d-e)\}]=a-[b-\{c-d+c\}]$

$=a-[b-c+d-e]=a-b+c-d+e$

上ノ例ニ於テノ如ク一式中ニ數個ノ括弧ヲ用ヰルトキハ相互ノ錯雜ヲ避ケンガ爲メ,其形ヲ異ニスルモノ或ハ同形ナルモ大サヲ異ニスルモノヲ用ヰルベシ.

(25)に述べたる如く,括線の用は括弧に同じ.

例へバ　$a-[b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]=a-[b-\{c-(d-e+f)\}]$

$=a-[b-\{c-d+e-f\}]=a-[b-c+d-e+f]$

$=a-b+c-d+e-f$

48. 初學者は前節に述べたる順序に依りて括弧を去るを宜しとす,即ち先づ最も內部の括弧より順に外部のものに及ぼすべし.

然れども今順序を變更して最も外部のものより始むることを得べし,斯の如くにして外部の括弧を去らんとするときは其內にある括弧內の項の符號を變ずべからず,如何となれば括弧內の式は一項と見做すべきものなればなり.

例へバ　$a-[b-\{c-(d-e)\}]=a-b+\{c-(d-e)\}$

$=a-b+c-(d-e)=a-b+c-d+e$

同様ニ　$a-[b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]$

$=a-b+\{c-(d-\overline{e-f})\}=a-b+c-(d-\overline{e-f})$

$=a-b+c-d+\overline{e-f}=a-b+c-d+e-f$

49. 時としては二三の項を括弧內に入れるを要することあり,其法則は括弧

を去るに付きての法則より直ちに出で來る,則ち次の如し.

式中の若干項を括弧內に入れ,其前に+號を置くことを得.

式中の若干項を括弧內に入れ,其內の各項の符號を變ずれば,其前に−號を置くことを得.

例ヘバ $a-b+c-d+e=a-b+(c-d+e)$

或ハ $=a-b+c+(-d+e)$

或ハ $=a-(b-c+d-e)$ 或ハ $=a-b-(-c+d-e)$

同様ニ數個ノ括弧ヲ用キルコトヲ得ベシ

例ヘバ $a-b+c-d+e=a-\{b-c+d-e\}$

$=a-\{b-(c-d+e)\}$

問題 5

次ノ諸式ノ各〻ノ括弧ヲ去リ同類項ヲ集メテ簡單ニスベシ.

1. $3a-b-(2a-b)$　　**2.** $a-b+c-(a-b-c)$

3. $1-(1-a)+(1-a+a^2)-(1-a+a^2-a^3)$

4. $a-b+c-(b-a+c)+(c-a+b)-(a-c+b)$

5. $2x-3y-3z-(x-y+2z)+(x+4y+5z)-(z-x-y)$

6. $a-\{b-c-(d-e)\}$

7. $2a-(2b-d)-\{a-b-(2c-2d)\}$

8. $a-\{2b-(3c+2b-a)\}$　　**9.** $2a-\{b-(a-2b\}$

10. $3a-\{b+(2a-b)-(a-b)\}$

11. $7a-[3a-\{4a-(5a-2a)\}]$

12. $3a-[b-\{a+(b-3a)\}]$

13. $6a-[4b-\{4a-(6a-4b)\}]$

14. $a-[2b+\{3c-3a-(a+b)\}+\{2a-(b+c)\}]$

15. $16-\{5-2x-[1-(3-x)]\}$

16. $15x-\{4-[3-5x-(3x-7)]\}$

17. $2a-[2a-\{2a-(2a-\overline{2a-a})]$

18. $16-x-[7x-\{8x-(9x-\overline{3x-6x})\}]$

第六編

整式乘法

50. 數個の因數の積は之を掛け合はする順序に拘はらず常に同一なり.

例へバ　$2\times3\times5=2\times5\times3=3\times5\times2=\cdots\cdots\cdots\cdots$

同様ニ　$abc\ =\ acb\ =\ bca\ =\cdots\cdots\cdots\cdots$

又　$c(a+b)=(a+b)c$

如何トナレバ兩式トモ $a+b$ 及ビ c ナル同ジ二因數ノ積ヲ表ハスヲ以テナリ.

乘法を論ずるに當り之を次の三つの場合に分つを便宜とす.

第一　單項式と單項式とを掛け合はす場合

第二　單項式と多項式とを掛け合はす場合

第三　多項式と多項式とを掛け合はす場合

51. 第一　若干の單項式の積

今 $3a$ ニ $4b$ ヲ掛ケルトスレバ其積ハ $3\times a\times4\times b$ 或ハ $3\times4\times a\times b$ ニ等シ即チ　$3a\times4b=12ab$

法則　若干の單項式を掛け合はさんとせば其數係數を悉く掛け合はせ,得たる積の後に式中にある總ての文字を書き添ふるべし.

例へバ　$7a\times3bc=21abc$　　$4a\times5b\times3c=60abc$

52. 符號の法則

同號は＋を生じ異號は－を生ず今式を以て之を表はせば下の如し

a と b とは如何なる數を表はすに拘はらず

$$(+a)\times(+b)=+ab$$

$$(-a)\times(+b)=-ab$$

$$(+a)\times(-b)=-ab$$

$$(-a)\times(-b)=+ab$$

例へバ　$3x\times4y=12xy$　　$(-3x)\times4y=-12xy,$

$3x\times(-4y)=-12xy,\ (-3x)\times(-4y)=12xy$

53. 若干の同じ數の羃の積は各因數の指數の和を指數となすところの其數の羃なり.

今 a^3 ニ a^2 ヲ掛ケルトスレバ(15)ニ依リテ

$a^3=a\times a\times a,\quad a^2=a\times a$ ナルヲ以テ

$$a^3\times a^2=a\times a\times a\times a\times a=a^5=a^{3+2}$$

同樣ニ $c^4c^3=c\times c\times c\times c\times c\times c\times c=c^7=c^{4+3}$

上ノ法則ハ他ノ何レノ場合ニ於テモ眞ナリ

例 1. $2a^3b^2\times 3a^2b^4=2\times 3\times a^3\times a^2\times b^2\times b^4=6a^5b^6$

例 2. $6x^2yz^3\times(-3x^4yz)=-18x^6y^2z^4$

54. 二つより多くの負の因數(－號を前に有する因數)の積はかくの如き因數の數が偶數なるか或は奇數なるかに從て正或は負なり.

例 1. $(-2)\times(-3)\times(-4)=6\times(-4)=-24$

例 2. $(-2a)\times(-3b)\times(-4c)\times(-5d)$

$$=6ab\times(-4c)\times(-5d)$$

$$=(-24abc)\times(-5d)=120abcd$$

是ニ於テ (51) ニ述ベタル法則ヲ更ニ詳述スルコト下ノ如シ.

若干の單項式を掛け合はさんとせば

符號に拘はらず其數係數を掛け合はせ,得たる積の後に式中に在る總ての文字を書き添へ而して符號の法則に依りて其符號を定むべし.

55. 第二 單項式と多項式との積

今 $a+b$ ニ 3 ヲ掛ケルトスレバ

$$3(a+b)=a+b+a+b+a+b=3a+3b$$

同樣ニ $(a+b)c=ac+bc$

又 $3(a-b)=3a-3b,\quad (a-b)c=ac-bc$

又 $(a+b-c)d=\{(a+b)-c\}d=(a+b)d-cd=ad+bd-cd$

他ハ皆之ニ傚フ.

法則 單項式を多項式に掛けんとせば多項式の各項に單項式を掛け,得たる積の前に各自の符號を置き而して總ての項を加ふべし.

例 1. $(6a^2+5b)4a^3=24a^5+20a^3b$

例 2. $(6x^3+7xy-3y^2)\times(-5x^2y)$

$$=-30x^4y-35x^3y^2+15x^2y^3$$

問題 6

次ノ諸式ノ値ヲ求ム

1. $2a^3\times 4x^2$　　2. $2a^2b\times 2ab^3$

3. $(-3x^3y^2z)\times 5x^4y^3z^2$

4. $7xy^2\times(-8xy^3)\times(-9x^2y^4)$

5. $7am^2\times 3b^2n^2\times(-4ab)\times(-2b^2n)\times(-mn^2)$

6. x^8y^5 及ビ $-x^{11}y^3$ ノ平方ヲ求ム

7. a^5b^3 及ビ $-y^5z^8$ ノ立方ヲ求ム

8. $4a^2-3b$ ニ $3ab$ ヲ掛ケヨ

9. $3x^2-4y^2+5z^2$ ニ $2x^2y$ ヲ掛ケヨ

10. $-9a^5+3a^3b^2-4a^2b^3-b^5$ ニ $-3ab^4$ ヲ掛ケヨ

56. 第三　二つの二項式及び一般に二つの多項式の積

(i) $c+d$ ヲ $a+b$ ニ掛ケヨ

第二ノ場合ニ於ケルガ如ク

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$

又　$a(c+d)=ac+ad,\qquad b(c+d)=bc+bd$

故ニ　$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

(ii) $c+d$ ヲ $a-b$ ニ掛ケヨ

$$\begin{aligned}(a-b)(c+d)&=a(c+d)-b(c+d)\\&=ac+ad-(bc+bd)\\&=ac+ad-bc-bd\end{aligned}$$

(iii) $c-d$ ヲ $a+b$ ニ掛ケヨ

$$\begin{aligned}(a+b)(c-d)=(c-d)(a+b)&=c(a+b)-d(a+b)\\&=ca+cb-(da+db)\\&=ca+cb-da-db\end{aligned}$$

(iv) $c-d$ ヲ $a-b$ ニ掛ケヨ

$$(a-b)(c-d)=a(c-d)-b(c-d)$$

又　$a(c-d)=ac-ad,\qquad b(c-d)=bc-bd$

故ニ
$$\begin{aligned}(a-b)(c-d)&=ac-ad-(bc-bd)\\&=ac-ad-bc+bd\end{aligned}$$

(v) $m+n$ ヲ $a+b+c$ ニ掛ケヨ

$m+n=p$ ト假定スレバ

$$(a+b+c)p=ap+bp+cp$$

p ノ代リニ $m+n$ ヲ置ケバ

$$\begin{aligned}(a+b+c)(m+n)&=a(m+n)+b(m+n)+c(m+n)\\&=am+an+bm+bn+cm+cn\end{aligned}$$

項數ガイクツアル場合ニ於テモ同樣ニシテ積ヲ要ムルコトヲ得

法則　二つの多項式を掛け合はさんとせば單項式を掛け合はする法則に從て一つの式の各項に他の式の各項を掛け此等の總ての積を加ふべし.

例　$3a-4b$ ヲ $2a+3b-4c$ ニ掛ケヨ

$$(2a+3b-4c)(3a-4b)=3a(2a+3b-4c)-4b(2a+3b-4c)$$
$$=6a^2+9ab-12ac-(8ab+12b^2-16bc)$$
$$=6a^2+9ab-12ac-8ab-12b^2+16bc$$
$$=6a^2+ab-12ac-12b^2+16bc$$

57. 多項式を掛け合はすには被乘數の下に乘數を書き而して部分積の同類項が竪の同じ行に在る樣に配置するを便利とす.

例　$x-7$ ヲ $x-9$ ニ掛ケヨ.

$$\begin{array}{r} x-9 \\ x-7 \\ \hline x^2-9x \\ -7x+63 \\ \hline x^2-16x+63 \end{array}$$

上ノ例ニ就テ説明センニ先ヅ乘數ノ第一項 x ヲ符號ノ法則ニ注意シテ被乘數 $x-9$ ノ各項ニ掛ケ,得タル積ヲ第三列ニ書キ,次ニ乘數ノ第二項 -7 ヲ被乘數ノ各項ニ掛ケ,得タル積ヲ第四列ニ書クベシ. $-9x$ ト $-7x$ トハ同類項ナルヲ以テ竪ノ同ジ行中ニ置キ然ル後第三列ト第四列トノ部分積ヲ加フベシ.

58. 尙ほ下に便利なる算式を用ゐたる二三の例題を揭ぐ.

例 1.

$$\begin{array}{l} x^2+3x \\ x-1 \\ \hline x^3+3x^2 \\ -x^2-3x \\ \hline x^3+2x^2-3x \end{array}$$

例 2.

$$\begin{array}{l} a^2-ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3-a^2b+ab^2 \\ +a^2b-ab^2+b^3 \\ \hline a^3+b^3 \end{array}$$

例 3.

$$\begin{array}{r} 3a^2-4ab+5b^2 \\ a^2-2ab+3b^2 \\ \hline 3a^4-4a^3b+5a^2b^2 \\ -6a^3b+8a^2b^2-10ab^3 \\ +9a^2b^2-12ab^3+15b^4 \\ \hline 3a^4-10a^3b+22a^2b^2-22ab^3+15b^4 \end{array}$$

第三例ニ就テ説明センニ先ヅ乘數ノ第一項即チ a^2 ヲ被乘數ノ各項ニ乘ジ $3a^4-4a^3b+5a^2b^2$ ヲ得,次ニ乘數ノ第二項即チ $-2ab$ ヲ被乘數ノ各項ニ乘ジ $-6a^3b+8a^2b^2-10ab^3$ ヲ得,次ニ乘數ノ第三項即チ $3b^2$ ヲ被乘數ノ各項ニ乘ジ $9a^2b^2-12ab^3+15b^4$ ヲ得.

扨斯ノ如クシテ得タル諸項ヲ同類項ガ竪ノ同行ニ在ル樣ニ置クベシ,斯ノ如ク配置スルコトハ各項ヲ集ムルトキ錯雜スルコトナク,極メテ容易ナルヲ以テ甚ダ緊要ナリトス,本題ニ於ケル最後ノ結果ハ $3a^4-10a^3b+22a^2b^2-22ab^3+15b^4$ ナリ.

59. 積の項を同類項が竪の同行に在る樣に配置するには乘數及び被乘數の項を或一定の順序に列記すべし,即ち式

中,多数の項中に在る一文字を撰みて其冪の順に記するを要す.

例ヘバ前例ニ於テハ a ノ冪ノ順ニ記セリ,先ヅ被乘數ノ第一項ニハ其最高次即チ二次ノ項 $3a^2$ ヲ置キ,第二項ニハ a ニ付キテ一次ノ項 $-4ab$ ヲ置キ,第三項ニハ全ク a ヲ有セザル項即チ $5b^2$ ヲ置ケリ.

被乘數ガ斯ノ如ク列記セラレタルトキハ a ノ降冪の順に排列せられたりトイフ,同様ニ乘數モ亦 a ノ降冪ノ順ニ排列セラレタリ.

又乘數及ビ被乘數ノ項ノ順序ヲ雙方共逆ニ書クコトヲ得,此場合ニ於テハ乘數及ビ被乘數ハ a ノ昇冪の順に排列せられたりトイフ. 乘數及ビ被乘數ノ諸項ヲ排列スルニ昇冪ト降冪トノ何レヲ取ルモ不可ナシト雖モ兩數俱ニ同ジ文字ノ或ハ昇冪ノ順ニ,或ハ降冪ノ順ニ排列セザル可カラズ.

例 1. x^3-2x-2 ヲ $1+2x-3x^2+x^4$ ニ乘ズベシ.

x ノ降冪ノ順ニ排列シ,法則ニ從テ相乘ズルコトハ次ノ如シ

$$
\begin{array}{l}
x^4-3x^2+2x+1 \\
x^3\qquad\;\; -2x-2 \\
\hline
x^7-3x^5+2x^4+x^3 \\
\qquad -2x^5\qquad\quad +6x^3-4x^2-2x \\
\qquad\qquad -2x^4\qquad\quad +6x^2-4x-2 \\
\hline
x^7-5x^5\qquad\quad +7x^3+2x^2-6x-2
\end{array}
$$

例 2. $a+b+c$ ヲ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ ニ掛ケヨ.

a ノ降冪ノ順ニ列記セヨ

$$
\begin{array}{l}
a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
a+b+c \\
\hline
a^3-a^2b-a^2c+ab^2-abc+ac^2 \\
\quad +a^2b\qquad -ab^2-abc\qquad +b^3-b^2c+bc^2 \\
\qquad +a^2c\qquad -abc-ac^2\qquad +b^2c-bc^2+c^3 \\
\hline
a^3\qquad\qquad -3abc\qquad +b^3\qquad +c^3
\end{array}
$$

或ハ括弧ヲ用キテ掛ケ合ハスコトヲ得ベシ.

$$
\begin{array}{l}
a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2) \\
a+(b+c) \\
\hline
a^3-a^2(b+c)+a(b^2-bc+c^2) \\
\quad +a^2(b+c)-a(b+c)(b+c)+(b+c)(b^2-bc+c^2) \\
\hline
\end{array}
$$

然ルニ　$a(b^2-bc+c^2)-a(b+c)(b+c)$

$$=a\{b^2-bc+c^2-(b+c)(b+c)\}$$

$$=a\{b^2-bc+c^2-(b^2+2bc+c^2)\}$$

$$=a\{b^2-bc+c^2-b^2-2bc-c^2\}=-3abc$$

又　$(b+c)(b^2-bc+c^2)=b^3+c^3$

故ニ諸項ヲ加フレバ前ト同一ナル結果

$a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ得.

例 3. $x-a$, $x-b$, $x-c$ ヲ掛ケ合ハセヨ.

$$
\begin{array}{l}
x-a \\
x-b \\
\hline
x^2-ax \\
\quad -bx+ab \\
\hline
x^2-(a+b)x+ab \\
x-c \\
\hline
x^3-(a+b)x^2+abx \\
\qquad\qquad -cx^2+(a+b)cx-abc \\
\hline
x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc
\end{array}
$$

被乘數ト乘數トノ相異ナレル二ツノ多項式ヲ掛ケ合ハスニ當リテハ乘數ト被乘數トヲ交換シ一題每ニ二回ノ演算ヲ爲スコトヲ得ベシ,斯ノ如クシテ得タル二ツノ結果ハ固ヨリ同一ナルベク由リテ以テ演算ノ正確ナルヤ否ヤヲ驗メスコトヲ得.

問題 7

1. $(x+5)(x-5)$　**2.** $(y-13)(y+11)$

3. $(7x+3y)(3x-4y)$　**4.** $(3x^2-y^2)(3x^2+2y^2)$

5. $(2x^3+4x^2+8x+16)(3x-6)$

6. $(x^3+x^2+x-1)(x-1)$

7. $(1+4x-10x^2)(1-6x+3x^2)$

8. $(x^3-4x^2+11x-24)(x^2+4x+5)$

9. $(x^3+4x^2+5x-24)(x^2-4x+11)$

10. $(x^3-7x^2+5x+1)(2x^2-4x+1)$

11. $(x^3+6x^2+24x+60)(x^3-6x^2+12x+12)$

12. $(x^3-2x^2+3x-4)(4x^3+3x^2+2x+1)$

13. $(x^4-2x^3+3x^2-2x+1)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)$

14. $(a^2-ab+2b^2)(a^2+ab+2b^2)$

15. $(4x^2-3xy-y^2)(3x-2y)$

16. $(x^5-x^4y+xy^4-y^5)(x+y)$

17. $(2x^2+3xy+4y^2)(3x^2+4xy+y^2)$

18. $(x^2+y^2-xy+x+y-1)(x+y-1)$

19. $(x^4+2x^3y+4x^2y^2+8xy^3+16y^4)(x-2y)$

20. $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$

21. $(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$

22. $(x^2+3x+2)(x^2-5x+6)(x^2+2x-3)$

第七編

整式除法

60. 除法は算術に於ての如く乘法の逆の演算なり,乘法に於ては二つの因數の積を求むるにあれども除法に於ては積と因數の一つとを知りて他の因數を求むるなり.

除法を論ずるに當り之を次の三つの場合に分つを便宜とす.

第一　單項式にて單項式を割る場合

第二　單項式にて多項式を割る場合

第三　多項式にて多項式を割る場合

61. 第一　單項式にて單項式を割る法

余輩は已に(9)に於て除法の演算を示すところの符號を說明せり,例へば $2c$ にて $5a$ を割りて得たる商を表はすには $5a \div 2c$ 或は $\frac{5a}{2c}$ を以てす.

被除數と除數とが同一なる因數を有することあり,此場合に於ては算術に於ての如く商を簡單になすことを得,例へば $6bc$ にて $15a^2b$ を割れば商 $\frac{15a^2b}{6bc}$ を得,今被除數 $15a^2b=5a^2\times 3b$ にして除數 $6bc=b\times 2c$ なり,乃ち $3b$ なる因數は除數及び被除數の雙方に通ずるを以て之を約し,$\frac{5a^2}{2c}$ を以て其商を表はすことを得,故に $\frac{15a^2b}{6bc}=\frac{5a^2}{2c}$ 或は又除數中の因數が悉く約せらるることあり,例へば $24abx$ を $8ax$ にて割れば

$$\frac{24abx}{8ax}=\frac{3b\times 8ax}{8ax}=3b$$

62. 乘法の種々の場合を推考すれば商の符號に關する法則を得べし.

例 1.　$4ab \times 3c = 12abc$

$\therefore \quad \frac{12abc}{4ab} = 3c, \qquad \frac{12abc}{3c} = 4ab$

例 2.　$4ab \times (-3c) = -12abc$

$\therefore \quad \frac{-12abc}{4ab} = -3c, \qquad \frac{-12abc}{-3c} = 4ab$

例 3.　$-4ab \times 3c = -12abc$

$\therefore \quad \frac{-12abc}{-4ab} = 3c, \qquad \frac{-12abc}{3c} = -4ab$

例 4.　$(-4ab) \times (-3c) = 12abc$

$\therefore \quad \frac{12abc}{-4ab} = -3c, \qquad \frac{12abc}{-3c} = -4ab$

是に因りて同號は＋を生じ異號は－を生ずといふ符號の法則は乘法に於て眞なるが如く除法に於ても亦眞なることを知る.

63. 因りて一つの單項式にて他の單項式を割る法則を述ぶること次の如し.

横線の上に被除數を書き其下に除數を書くべし,兩數若し公因數を有するときは之を約し,兩數の符號同一なるときは其式に＋號を附し,符號相異なるときは－號を附すべし.

64. 一數の羃を以て同じ數の他の羃を割りたる商は被除數の指數より除數の指數を減じ,得たる殘りを指數と爲すところの其數の羃なり.

今 a^5 ヲ a^3 ニテ割ルトセバ(15)ニ依リテ

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a, \quad a^3 = a \times a \times a$ ナルヲ以テ

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2 = a^{5-3}$$

同樣ニ $\frac{c^7}{c^4} = \frac{c \times c \times c \times c \times c \times c \times c}{c \times c \times c \times c} = c \times c \times c = c^3 = c^{7-4}$

又ハ此法則ノ眞正ナルコトヲ次ノ如クニシテ證明スルコトヲ得, (53) ニ依リテ

$c^4 \times c^3 = c^7 \qquad \therefore \quad \frac{c^7}{c^4} = c^3, \quad \frac{c^7}{c^3} = c^4$

65. 今ここに $\frac{a^2}{a^5}$ なる式ありと假定せよ,然るときは之を $\frac{a^2 \times 1}{a^2 \times a^3}$ と書くことを得るを以て (61) の如くにして a^2 を約するを得, 故に $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$

例 1.　$12a^2b^3 \div 3ab^2 = \frac{12a^2b^3}{3ab^2} = 4ab$

例 2.　$\frac{10}{7}a^3b^2c^4 \div \left(-\frac{3}{8}a^2b^3c^6\right) = -\frac{8 \times 10}{3 \times 7}\frac{a^3b^2c^4}{a^2b^3c^6} = -\frac{80}{21}\frac{a}{bc^2}$

66. 第二　單項式にて多項式を割る法

單項式にて多項式を割る法則は單項式を多項式に掛くる法則を推考して之を得べし.

例へバ $(a-b)c=ac-bc \quad \therefore \quad \frac{ac-bc}{c}=a-b$

又 $(a-b)\times(-c)=-ac+bc \quad \therefore \quad \frac{-ac+bc}{-c}=a-b$

是に因りて單項式にて多項式を割る法則を述ぶること下の如し.

單項式にて單項式を割る法則に從て除數を以て被除數の各項を割り,依りて得たる總ての部分商を加ふべし.

例 1. $\frac{x^2y^3-3xy^2+x^2y}{xy}=xy^2-3y+x$

例 2. $\frac{5a^2b^2c-8abc^4+4ac^3}{-5abc^2}=-\frac{ab}{c}+\frac{8c^2}{5}-\frac{4c}{5b}$

問題 8

1. $15x^5\div3x^2$ 2. $24a^6\div(-8a^3)$
3. $24a^4b^5c^6\div(-3a^2b^3c^4)$
4. $(4x^3-8x^2+16x)\div4x$
5. $(3a^4-12a^3+15a^2)\div(-3a^2)$

6. $(x^3y-3x^2y^2+4xy^3)\div xy$
7. $(-15a^3b^3-3a^2b^2+12ab)\div(-3ab)$
8. $(60a^3b^3c^2-48a^2b^4c^2+36a^2b^3c^4-20abc^6)\div4abc^2$

67. 第三 多項式にて多項式を割る法.

多項式にて多項式を割るには算術の多位の除法の如く演算を爲すべし.其法則は次の如し.

(i) 除數及び被除數を倶に或通有なる文字の昇冪の順に,或は降冪の順に排列すべし.

(ii) 除數の第一項を以て被除數の第一項を除し,其結果を商の第一項と爲すべし,次に此項を除數の各項に乘じ,得たる積を被除數より減ずべし.

(iii) (ii)に於て得たる剩餘の第一項を除數の第一項を以て除し其の結果を商の第二項となすべし逐次此の如くに前と同樣の演算を續け行ふべし.

(iv) 上の如くにして逐次被除數の項數を減じ其全く盡くるに至りて已むべし.

例 $a-b$ ニテ $a^2-2ab+b^2$ ヲ割レ.

其算式ハ次ノ如シ

$$
\begin{array}{l|l}
a^2-2ab+b^2 & a-b \\
\underline{a^2-\ ab} & \overline{a-b} \\
\quad -ab+b^2 & \\
\quad \underline{-ab+b^2} &
\end{array}
$$

上ノ法則ノ理ハ被除數ヲ適宜ニ數個ノ部分ニ分チ,除數ニテ各部分ヲ割リ,依リテ得タル總テノ部分商ヲ加フルニアリ.

上ノ例ニ於テハ $a^2-2ab+b^2$ ハ a^2-ab 及ビ $-ab+b^2$ ナル二ツノ部分ニ分タレタリ,而シテ此等ノ部分ヲ夫々 $a-b$ ニテ割リテ得タル商 a ト $-b$ トヲ加ヘテ $a-b$ ナル答ヲ得タリ.

68.

例 1. $a+b$ ニテ a^2-b^2 ヲ割レ.

$$
\begin{array}{l|l}
a^2-\ b^2 & a+b \\
\underline{a^2+ab} & \overline{a-b} \\
\quad -ab-b^2 & \\
\quad \underline{-ab-b^2} &
\end{array}
$$

例 2. $x+3$ ニテ x^2+2x-3 ヲ割レ.

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+2x-3 & x+3 \\
\underline{x^2+3x} & \overline{x-1} \\
\quad -\ x-3 & \\
\quad \underline{-\ x-3} &
\end{array}
$$

例 3. $a^2-2ab+3b^2$ ニテ $3a^4-10a^3b+22a^2b^2-22ab^3+15b^4$ ヲ割ルベシ.

$$
\begin{array}{l|l}
3a^4-10a^3b+22a^2b^2-22ab^3+15b^4 & a^2-2ab+3b^2 \\
\underline{3a^4-\ 6a^3b+\ 9a^2b^2} & \overline{3a^2-4ab+5b^2} \\
\quad -\ 4a^3b+13a^2b^2-22ab^3 & \\
\quad \underline{-\ 4a^3b+\ 8a^2b^2-12ab^3} & \\
\qquad\qquad 5a^2b^2-10ab^3+15b^4 & \\
\qquad\qquad \underline{5a^2b^2-10ab^3+15b^4} &
\end{array}
$$

此例ニ於テ被除數及ビ除數ハ何レモ a ノ降冪ノ順ニ排列セラレタリ,被除數ノ第一項ハ $3a^4$ ニシテ除數ノ第一項ハ a^2 ナリ,後ノ數ヲ以テ前ノ數ヲ割レバ商ノ第一項トシテ $3a^2$ ヲ得,次ニ除數ノ各項ニ $3a^2$ ヲ掛ケ其積ヲ被除數ノ下ニ移シ,a ノ同ジ冪ヲ含メル項ハ竪ノ同行ニ在ル樣ニ配置シテ之ヲ減ジ,殘リ $-4a^3b+13a^2b^2$ ヲ得,而シテ被除數ノ次ノ一項 $-22ab^3$ ヲ降シテ之ニ書キ添フベシ.

次ニ除數ノ第一項 a^2 ニテ $-4a^3b$ ヲ割レバ商ノ第二項トシテ $-4ab$ ヲ得,次ニ前ノ如ク除數ノ各項ニ $-4ab$ ヲ掛ケ其積ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列シテ第二ノ被除數ノ下ニ置キ,之ヲ減ズレバ殘リ $5a^2b^2-10ab^3$ ヲ得,之ニ被除數ノ次ノ項 $15b^4$ ヲ降シテ書キ添フベシ,次ニ又 a^2 ヲ以テ $5a^2b^2$ ヲ割リテ商ノ第三項 $5b^2$ ヲ得,之ヲ除數ノ各項ニ掛ケ其積ヲ前ノ如ク第三回ノ被除數ノ下ニ列記シ之ヲ減ズレバ殘リナキニ至ル.

斯ノ如クニシテ被除數ノ項ハ全ク盡キタルヲ以

テ演算ハココニ畢レリトス,而シテ其商ハ

$3a^2-4ab+5b^2$ ナリ.

被除數及び除數を俱に或通有文字の昇冪の順に,或は降冪の順に排列すること,并に演算中も常に此順序に注意することは最も緊要なり.

69. 算術に於ての如く代數學にても亦一式にて他式を割り盡し得ざることあり,例へば $a+b$ を以て $a^2+2ab+2b^2$ を割れば商 $a+b$ を得,尙ほ剩除 b^2 あり,之を式にて示すこと次の如し.

$$\frac{a^2+2ab+2b^2}{a+b}=a+b+\frac{b^2}{a+b}$$

分數を論ずることは後編に讓り,今は唯割り盡し得る場合のみに止む。

70. 尙ほ下に二三の例題を揭ぐ.

例 1.　$1+2x-3x^2+x^4$ ニテ $x^7-5x^5+7x^3+2x^2-6x-2$

ヲ割レ.

被除數及ビ除數ヲ x ノ降冪ノ順ニ排列シテ除法ヲ行フコト次ノ如シ.

$$\begin{array}{l|l}
x^7-5x^5\qquad+7x^3+2x^2-6x-2 & x^4-3x^2+2x+1 \\
\underline{x^7-3x^5+2x^4+x^3} & x^3-2x-2 \\
\quad-2x^5-2x^4+6x^3+2x^2-6x & \\
\quad\underline{-2x^5\qquad+6x^3-4x^2-2x} & \\
\qquad-2x^4\qquad+6x^2-4x-2 & \\
\qquad\underline{-2x^4\qquad+6x^2-4x-2} &
\end{array}$$

例 2.　$a+b+c$ ニテ $a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ割レ.

兩數ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列シ,除法ヲ行フコト次ノ如シ.

$$\begin{array}{l|l}
a^3\qquad-3abc+b^3+c^3 & a+b+c \\
\underline{a^3+a^2b+a^2c} & a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
\quad-a^2b-a^2c\qquad-3abc & \\
\quad\underline{-a^2b\qquad-ab^2-abc} & \\
\qquad-a^2c+ab^2-2abc & \\
\qquad\underline{-a^2c\qquad-abc-ac^2} & \\
\qquad\quad ab^2-abc+ac^2+b^3 & \\
\qquad\quad\underline{ab^2\qquad+b^3+b^2c} & \\
\qquad\qquad-abc+ac^2-b^2c & \\
\qquad\qquad\underline{-abc\qquad-b^2c-bc^2} & \\
\qquad\qquad\quad ac^2\qquad+bc^2+c^3 & \\
\qquad\qquad\quad\underline{ac^2\qquad+bc^2+c^3} &
\end{array}$$

若シ a^2b 及ビ a^2c ノ如ク a ノ同ジ冪ヲ有スル項ガ二ツアルトキハ更ニ他ノ一文字例ヘバ b ヲ選ビ之ヲ含メル項ヲ之ヲ含マザル項ノ前ニ置クベシ,又 ab^2 及ビ abc ノ兩項ニ就テハ前者ハ後者ヨリ b ノ指數大ナルヲ以テ ab^2 ヲ abc ノ先ニ置クベシ.

此例ハ亦括弧ヲ用ヰテ演算スルコトヲ得.

$$
\begin{array}{l|l}
a^3 \qquad\qquad -3abc+b^3+c & a+b+c \\
\cline{2-2}
a^3+a^2(b+c) & a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2) \\
\cline{1-1}
\quad -a^2(b+c)-3abc+b^3+c^3 & \\
\quad -a^2(b+c)-a(b^2+2bc+c^2) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 & \\
\qquad\qquad a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

例 3. $x-c$ ニテ $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$ ヲ割レ.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc & x-c \\
\cline{2-2}
x^3-cx^2 & x^2-(a+b)x+ab \\
\cline{1-1}
\quad -(a+b)x^2+(ab+ac+bc)x-abc & \\
\quad -(a+b)x^2+(a+b)cx & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad abx-abc & \\
\qquad\qquad\qquad abx-abc & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

乘數及ビ被乘數ガ相同ジカラザル一ツノ乘法ノ例題ハ二ツノ除法ノ例題トナル,如何トナレバ積ヲ二ツノ因數ノ一ニテ割レバ其商ハ他ノ因數ナレバナリ.

故ニ學生ハ前編ノ例題ヨリ除法ノ例題ヲ取リ來ルヲ得ベク,又之ニ因リテ演算ノ誤リナキヤ否ヤヲ驗メスコトヲ得ベシ.

又商及ビ除數ガ相同ジカラザル除法ノ例題ヨリ其商ヲ除數ト爲ス所ノ他ノ除法ノ例題ヲ得ベシ,即チ此新例題ノ商ハ勿論原ノ除數ナルベシ.

問題 9

1. $(x^2-7x+12)\div(x-3)$　**2.** $(x^2+x-72)\div(x+9)$

3. $(2x^3-x^2+3x-9)\div(2x-3)$

4. $(6x^3+14x^2-4x+24)\div(2x+6)$

5. $(x^2+xy-12y^2)\div(x-3y)$

6. $(5x^2-68xy+143y^2)\div(x-11y)$

7. $(42x^2+158xy+136y^2)\div(7x+17y)$

8. $(66x^2+3xy-15y^2)\div(11x-5y)$

9. $(15a^4-47a^2b^2+28b^4)\div(3a^2-7b^2)$

10. $(28-a-47a^2+24a^3)\div(4-3a)$

11. $(x^6-1)\div(x-1)$　**12.** $(x^4-81y^4)\div(x-3y)$

13. $(x^4-2x^3y+2x^2y^2-xy^3)\div(x-y)$

14. $(x^5-y^5)\div(x-y)$　**15.** $(a^5+32b^5)\div(a+2b)$

16. $(x^5+2x^4y+3x^3y^2-x^2y^3-2xy^4-3y^5)\div(x^3-y^3)$

17. $(x^4-5x^3+11x^2-12x+6)\div(x^2-3x+3)$

18. $(x^4+64)\div(x^2+4x+8)$

19. $(x^4+10x^3+35x^2+50x+24)\div(x^2+5x+4)$

20. $(x^6-2x^3+1)\div(x^2-2x+1)$

21. $(a^6-b^6)\div(a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$

22. $(x^6+2x^5-4x^4-2x^3+12x^2-2x-1)\div(x^2+2x-1)$

23. $(x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1)\div(x^4-2x^3+3x^2-2x+1)$

24. $(x^{12}+x^6-2)\div(x^4+x^2+1)$

25. $\{x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc\}$
$\div\{x^2-(a+b)x+ab\}$

26. $\{a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2\}\div(ax^2-bx+c)$

27. $(x^4-x^3y-xy^3+y^4)\div(x^2+xy+y^2)$

28. $(x^3-3xy-y^3-1)\div(x-y-1)$

29. $(49x^2+21xy+12yz-16z^2)\div(7x+3y-4z)$

30. $(a^3+8b^3+c^3-6abc)\div(a^2+4b^2+c^2-ac-2ab-2bc)$

第八編

一次方程式

71. 二つの代數式の相等しといふことを代數記號を以て書き表はせるものを**等式**と稱し,其二つの式を,各其等式の**邊**と稱す,等號の左にある式を左邊といひ,其右にある式を右邊といふ.

72. 等式の兩邊が之に含まれたる文字が如何なる數を表はすに拘はらず,常に相等しきときは之を**恒等式**と稱す,次に示す如きものは其例なり.

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2,\quad (x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

此等の等式はxとaとが如何なる値を有するも兩邊常に相等し.

73. 等式の兩邊が之に含まれたる文字が或格段なる數を表はすときにのみ

相等しきときは,之を**方程式**と稱す.

例ヘバ $x+1=7$ ナル式ハ $x=6$ ナルトキニノミ眞ナルヲ以テ方程式ナリ.

74. 方程式の兩邊が相等しくなるには之に含まれたる文字が一個或は數個の或格段なる數を表はすを要す.方程式中の斯の如き文字を**未知數**と稱し,其格段なる値は方程式に**適合**すといひ,而して之を其方程式の**根**と稱す.根を看出すことを方程式を**解く**といふ.

方程式の未知數は通常羅馬字の終りの方の文字 x, y, z 等を以て之を示し已知數は其初めの方の文字 a, b, c 等を以て之を示す.

75. 一つの未知數 x を含める方程式の兩邊が x の第一羃より高き羃を含まざるときは之を**一次方程式**と稱す.

若し方程式が x^2 を含み而して x^2 の

これより高き羃を含まざるときは之を**二次方程式**と稱す.　他は皆之に準ず.

上の定義に於ては方程式の兩邊は x に付きて有理なる整式なりと假定す.

76. 本編に於ては一次方程式を解く方法を示さんとす.依りて先づ方程式の表はせる相等しといふことを損ふことなくして之に施し得る所の演算を説明すべし.

77. 同一の數假令 a を以て方程式の兩邊に掛け或は之を割ることを得.

此定理の眞なることは明白なり.但し a は零を除き他の如何なる數を表はすも可なり.

78. (77)の重もなる用は方程式中の分數を去るに在り,方程式の分數を去るには分數の總ての分母の積,或は其最小公倍數を方程式の各項に掛くるべし.

例ヘバ $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=9$ ノ分數ヲ去ルニハ各項ニ $3\times4\times6$ ヲ掛クルベシ,然ルトキハ

$$4\times6\times x+3\times6\times x+3\times4\times x=3\times4\times6\times9$$

即チ $$24x+18x+12x=648$$

6 ニテ各項ヲ割レバ

$$4x+3x+2x=108$$

上ノ如ク $3\times4\times6$ ヲ各項ニ掛クル代リニ 3, 4, 6 ノ最小公倍數12ヲ各項ニ掛クルモ可ナリ,然レバ直チニ次ノ式ヲ得.

$$4x+3x+2x=108 \quad 即チ\ 9x=108$$

兩邊ヲ 9 ニテ割レバ $x=\frac{108}{9}=12$.

故ニ12ハ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ,今原ノ方程式中ノ x ノ代リニ12ヲ置キ,此根ノ正否ヲ驗メスコトヲ得ベシ,即チ左邊ハ $\frac{12}{3}+\frac{12}{4}+\frac{12}{6}=4+3+2=9$ トナリ右邊ニ同ジ.

79. 方程式の一邊に在る項の符號を變じ之を他邊に移すことを得.

例ヘバ $x-a=b-y$ ニ於テ兩邊ニ a ヲ加フレバ

$$x-a+a=b-y+a, \quad 即チ\ x=b-y+a$$

又兩邊ヨリ b ヲ減ズレバ

$$x-b=b+a-y-b=a-y$$

是ニ因リテ $-a$ ヲ方程式ノ一邊ヨリ他邊ニ移セバ $+a$ トナリ, $+b$ ヲ一邊ヨリ他邊ニ移セバ $-b$ トナルコトヲ知ル.

80. 方程式の各項の符號を悉く變ずるも其兩邊は尚ほ相等しきことを損ふことなし.

此理ハ前節ノ定理ヨリ直チニ出デ來ル,例ヘバ方程式 $x-a=b-y$ ニ於テ各項ヲ他邊ニ移セバ

$$y-b=a-x \quad 即チ \quad a-x=y-b$$

而シテ此結果ハ原ノ方程式ノ各項ノ符號ヲ悉ク變ジタルモノト同一ナリ.

81. 一つの未知數を有する一次方程式の解法の法則は下の如し.

分數あるときは先づ之を去り而して未知數を含める諸項を悉く其一邊に移し已知數を悉く其他邊に移し未知數の係數或は其諸係數の和を以て兩邊を割るべし,然るときは所要の根を得.

例 1. $7x+25=35+5x$ ヲ解クベシ.

此方程式ハ分數ヲ有セザルヲ以テ直チニ項ヲ移セバ $\quad 7x-5x=35-25 \quad$ 即チ $\quad 2x=10$

2ニテ兩邊ヲ割レバ $x=\frac{10}{2}=5$

根ノ正否ヲ驗メス爲メニ原方程式ニ於テ x ノ代リニ5ヲ置ケバ兩邊ハ各,60トナル,因リテ此根ハ正シ.

例 2. $4(3x-2)-2(4x-3)-3(4-x)=0$ ヲ解クベシ.

先ヅ式ノ示ストコロノ乘算ヲ行ヘバ

$$12x-8-(8x-6)-(12-3x)=0$$

括弧ヲ去レバ $12x-8-8x+6-12+3x=0$

項ヲ集ムレバ $7x-14=0$

項ヲ移セバ $7x=14$; 7ニテ割レバ, $x=\frac{14}{7}=2$

原方程式ノ第一邊ノ x ノ代リニ2ヲ置ケバ

16−10−6 即チ 0 トナル.

例 3. $\frac{5x+4}{2}-\frac{7x+5}{10}=5\frac{3}{5}-\frac{x-1}{2}$ ヲ解ケ.

$5\frac{3}{5}=\frac{28}{5}$, 分母ノ最小公倍數10ヲ各項ニ乘ズレバ

$$5(5x+4)-(7x+5)=28\times2-5(x-1)$$

即チ $25x+20-7x-5=56-5x+5$

項ヲ移セバ $25x-7x+5x=56+5-20+5$

即チ $23x=46$ $\therefore$ $x=\frac{46}{23}=2$

初學者ハ精確ヲ期スル爲メニ,宜シク上ノ例ニ於テノ如ク一々演算ヲ記スベシ,方程式ノ分母ヲ去ルニ當リ符號ニ付テノ誤リヲ生ズルコト屢,コレアリ,

故ニ前例ニ於テ10ヲ以テ $-\frac{7x+5}{10}$ ニ掛クルニ當リ先ヅ $-(7x+5)$ ト記シ,然ル後括弧ヲ解キテ $-7x-5$ ト記スルヲ宜シトス,コレ符號ノ誤リヲ爲スコトヲ避ケンガ爲メナリ.

例 4. $5x+\frac{\cdot45x-\cdot75}{\cdot6}=\frac{1\cdot2}{.2}-\frac{\cdot3x-\cdot6}{\cdot9}$ ヲ解ケ.

精確ヲ期スル爲メ小數ヲ悉ク通常ノ分數ニ直スヲ可トス,依リテ

$$\frac{5x}{10}\times\frac{10}{6}\left(\frac{45x}{100}-\frac{75}{100}\right)=\frac{10}{2}\times\frac{12}{10}-\frac{10}{9}\left(\frac{3x}{10}-\frac{6}{10}\right)$$

簡單ニスレバ

$$\frac{x}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{9x}{20}-\frac{3}{4}\right)=6-\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)$$

即チ $\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5}{4}=6-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$

12ヲ乘ズレバ $6x+9x-15=72-4x+8$

項ヲ移セバ $19x=72+8+15=95$ 故ニ $x=\frac{95}{19}=5$

問題 10

次ノ方程式ヲ解クベシ.

1. $16x-11=7x+70$
2. $24x-49=19x-14$
3. $7(x-18)=3(x-14)$
4. $5(x-7)+63=9x$
5. $72(x-5)=63(5-x)$
6. $21(4x-5)=24(3x-5)+27$

7. $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{6}=\frac{x}{8}+\frac{1}{12}$ **8.** $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}=x-7$

9. $\frac{2x}{3}+4=\frac{7x}{12}+9$ **10.** $56-\frac{3x}{4}=48-\frac{5x}{8}$

11. $\frac{2x}{3}+12=\frac{4x}{5}+6$ **12.** $\frac{7x}{8}-5=\frac{9x}{10}-8$

13. $\frac{3x}{4}+\frac{180-5x}{6}=29$ **14.** $1+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=\frac{3x}{4}-4\frac{1}{2}$

15. $2x-\frac{19-2x}{2}=\frac{2x-11}{2}$

16. $\frac{x+1}{3}-\frac{3-1}{5}=x-2$ **17.** $\frac{10x+3}{3}-\frac{6x-7}{2}=10x-10$

18. $x-1-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$

19. $\frac{x+3}{2}+\frac{x+4}{3}+\frac{x+5}{4}=16$

20. $\frac{3x-4}{2}-\frac{6x-5}{8}=\frac{3x-1}{16}$

21. $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

22. $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=\frac{2}{3}$

23. $\frac{2x-5}{6}+\frac{6x+3}{4}=5x-17\frac{1}{2}$

24. $\frac{x}{4}-\frac{5x+8}{6}=\frac{2x-9}{3}$

25. $\frac{3x+5}{7}-\frac{2x+7}{3}+10-\frac{3x}{5}=0$

26. $\frac{1}{7}(3x-4)+\frac{1}{3}(5x+3)=43-5x$

27. $\frac{1}{2}(27-2x)=\frac{9}{2}-\frac{1}{10}(7x-54)$

28. $5x-[8x-3\{16-6x-(4-5x)\}]=6$

29. $\frac{1-2x}{3}-\frac{4-5x}{6}+\frac{13}{42}=0$

30. $\cdot5x+\cdot6x-\cdot8=\cdot75x+\cdot25$

16) $3x+5-9+3=15x-30$
$5x-15x=9-5-3-30$
$-10x=-29 \quad x=2\frac{9}{10}$

17) $20x+6-18x+21=60x-60$
$20x-18x-60x=-6-18-60$
$58x=84$
$x=1\frac{26}{58}$

第九編

一次方程式應用問題

82. 是より一次方程式の簡易なる應用問題を與へんとす，先づ極めて平易なる問題を代數記號を以て書き表はすべき例を示すべし．

例 1. 二數アリ其差15ニシテ小ナルモノガbナレバ大ナル數ハ如何．

(大ナル某數)−(小ナル數)＝15

即チ　(大ナル某數)$-b$　＝15

故ニ　大ナル某數　$=b+15$

例 2. 三ツノ相隣レル整數ノ，中間ノ數ヲmトスレバ他ノ二數各〻幾何．

中間ノ數ハmナルヲ以テ末ノ數ハ之ヨリ大ナルコト1即チ$m+1$ナリ，又中間ノ數ガmナルヲ以テ初メノ數ハ之ヨリ小ナルコト1即チ$m-1$ナリ，

故ニ三ツノ數ハ$m-1$, m, $m+1$ナリ．

例 3. 一個ノ價n錢宛ナル菓子a個ノ代金幾許．

ナルカ．

8個ノ價＝1個ノ價ノ8倍

53個ノ價＝‥　‥　‥　‥53倍

同様ニ　a個ノ價＝‥　‥　‥　‥a倍

＝n錢ノa倍＝an錢

例 4. 甲ノ所有金ハa圓ニシテ，乙ノ所有金ハ甲ノ所有金ヨリb圓多ク，丙ノ所有金ハ甲乙兩人分ノn倍ニ等シトイフ，丙ノ所有金幾許．

乙ノ所有金＝甲ノ所有金＋b圓

＝a圓＋b圓＝$(a+b)$圓

∴　甲ノ所有金＋乙ノ所有金＝a圓＋$(a+b)$圓

＝$(2a+b)$圓

∴　丙ノ所有金＝n×(甲ノ所有金＋乙ノ所有金)

＝$n\times(2a+b)$圓＝$n(2a+b)$圓

例 5. 年齡m歳ノ人アリ，(1)此人今ヨリn年以前ニハ何歳ナリシカ　(2)今ヨリp年後ニハ如何．

(1)n年以前ニ於ケル此人ノ年齡ハ今ヨリn歳少ナシ，而シテ今ハm歳ナリ．

∴　n年以前ノ年齡＝m歳－n歳＝$(m-n)$歳

(2)p年ヲ經レバ此人ノ年齡ハ今ヨリp歳多クナルベシ，而シテ今ハm歳ナリ．

∴　p年後ノ年齡＝m歳＋p歳＝$(m+p)$歳．

例 6. 年利r分ニテ三年間ニ元金p圓ヨリ生ズ

ル單利金幾何ナルカ.

元金百圓ニ付キ一年間ノ利金$=r$圓

$\therefore$ 金1圓ニ付キ一年間ノ利金$=\frac{r}{100}$圓

$\therefore$ 金p圓ニ付キ一年間ノ利金$=p\times\frac{r}{100}$圓

$=\frac{pr}{100}$圓

$\therefore$ 元金p圓ニ付キ三年間ノ利金$=3\times\frac{pr}{100}$圓

$=\frac{3pr}{100}$圓

同様ニ　元金p圓ニ付キn年間ノ利金$=\frac{npr}{100}$圓

問題 11

1. 49ハbヨリ何程大ナルカ,又aハ72ヨリ何程大ナルカ.

2. $3x+4y$ハ$2x-3y$ヨリ何程大ナルカ.

3. 100ヲ二分スルニ其一部分ガxナレバ他ハ幾許.

4. 三數アリ,合ハセテ89ナリ,第一數ハaニシテ第二數ハ第一數ヨリ少ナキコトbナリトイフ,第二第三ノ兩數各幾許.

5. 中間ノ數ガbナル五ツノ相隣レル整數ヲ大サノ順ニ列記セヨ.

6. 七ツノ相隣レル奇數アリ,其中間ノ數ハ$2m+1$ナリ,此七數合ハセテ幾許.

7. 一坪b圓ヅツノ地面a坪ノ價ヲ問フ.

8. 金a圓ヲ均一ニn人ニ分配スレバ毎一人ノ所得幾許.

9. 甲ハa歳ニシテ乙ハb歳ナリ,乙生レシ時甲ハ何歳ナリシカ.

10. m年以前ニハ父ノ年齢ハ其子ノ年齢ノn倍ナリキ,而シテ其子今年b歳ナリ,父ハ今何歳ナルカ.

11. 一時間n哩ノ速度ニテm哩ヲ行クニハ何時間ヲ要スルカ.

12. 或人最初金貳拾圓ヲ有セシガ,其後a圓ヲ費シ,b圓ヲ失ヒ又c圓ヲ他ヨリ受取リタリト云フ,今ノ所有金幾何ナルカ.

13. 或仕事ヲ為スニ各人毎日其事業ノ$\frac{1}{a}$ヅツヲ成シ得ルトスレバn人ニテハ何日ヲ要スルカ.

14. 長サa尺,幅b尺,高サc尺ナル一室ノ四壁及ビ牀ノ面積ハ合計幾坪ナルカ.

15. 年利三分ニテn年間ニ元金貳百圓ヨリ生ズル單利金幾何.

83. 是より本編及び前編に於て説明

したる方法を問題に應用し,以て代數學用法の一班を示さんとす.

凡て問題には二數あり,其一は已に知る所の數にして之を**已知數**と稱し,他の一は之と或一定の關係を有して其値は後に看出さるべきものなり,之を**未知數**と稱す.

問題は上に記する二種の數の關係を通常の言葉にていひ表はせるものにして其解法を述ぶれば次の如し.

x を以て未知數を表はし,代數記號を用ゐて已知數と未知數との間の關係を書き著はすべし,斯の如くすれば一の方程式を得るを以て之を解きて未知數の値を看出すべし.

84.

問題 **1.** 二數アリ其和八十五,其差二十七ナリ,二數各〻幾何.

x ヲ小ナル數トセヨ,然レバ二數ノ差ハ27ナルヲ以テ大ナル數ハ $x+27$ ナルベシ,而シテ二數ノ和ハ85ナルヲ以テ

$$x+x+27=85 \qquad 即チ \qquad 2x+27=85$$

$$\therefore \quad 2x=85-27=58 \qquad \therefore \quad x=\frac{58}{2}=29$$

因リテ小ナル數ハ29ニシテ大ナル數ハ $29+27$ 即チ56ナリ.

問題 **2.** 金五拾圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分ツニ乙ノ所得ハ甲ノ所得ヨリ五圓多ク,丙ノ所得ハ甲乙ノ所得ノ和ニ等シ,三人ノ所得各〻幾許.

x ヲ甲ノ所得ノ圓ノ數トスレバ乙ノ所得ノ圓ノ數ハ $x+5$,丙ノ所得ノ圓ノ數ハ $2x+5$ ナルベシ.

總金額ハ50圓ナルヲ以テ

$$x+x+5+2x+5=50 \qquad 即チ \qquad 4x+10=50$$

$$\therefore \quad 4x=50-10=40 \qquad \therefore \quad x=10$$

因リテ甲ノ所得ハ金拾圓,乙ノ所得ハ金拾五圓,丙ノ所得ハ金貳拾五圓ナリ.

問題 **3.** 茶商アリ,上下二種ノ茶ヲ持テリ,下茶一斤ノ價ハ金四拾錢,上茶一斤ノ價ハ金七拾錢ナリ,今此二種ノ茶ヲ混ジテ一斤ノ價金五拾錢ノモノ百斤ヲ作ラントス,各種幾斤ヅツヲ混ズベキカ.

x ヲ混ズベキ下茶ノ斤數トセヨ,然レバ混ズベキ上茶ノ斤數ハ $100-x$ ナルベシ,而シテ下茶一斤ノ價

ハ金40錢ナルヲ以テ其x斤ノ價ハ金$40x$錢ニシテ、上茶一斤ノ價ハ金70錢ナルヲ以テ其$100-x$斤ノ價ハ金$70(100-x)$錢ナリ,今全價額ハ50×100錢ナルヲ以テ

$$50\times100=40x+70(100-x)$$

即チ　$$5000=40x+7000-70x$$

$$\therefore\quad 30x=2000$$

$$\therefore\quad x=\frac{200}{3}=66\frac{2}{3}$$

故ニ所要ノ下茶ノ斤數ハ$66\frac{2}{3}$ニシテ上茶ノ斤數ハ$33\frac{1}{3}$ナリ.

問題 4. 長サ二呎四吋ノ絲ヲ二分シ,其一部分ヲシテ他ノ一部分ノ四分ノ三ニ等シカラシメントス,二部分ノ長サ各,幾何.

xヲ大ナル部分ノ吋ノ數トセヨ,然レバ小ナル部分ノ吋ノ數ハ$\frac{3x}{4}$ナルベシ,今全長ノ吋ノ數ハ28ナルヲ以テ

$$x+\frac{3x}{4}=28$$

$$\therefore\quad 4x+3x=112\qquad \text{即チ}\quad 7x=112$$

因リテ　$$x=16$$

故ニ一部分ノ長サハ16吋,他ノ一部分ノ長サハ12吋ナリ.

85. 問題を解くに付きての唯一の困難は通常の言葉にていひ表はされたる事柄を代數學上の言葉に改むるにあり,然れども確實迅速に問題を解き得るに至るには練習を爲すの外,一の良法なきを以て少しく困難に逢ふことあるも決して失望すべからず. 玆に學生の殊に注意すべきことあり,(84)の問題2の解法に於てxを甲の所得の圓の數とせり,然るに初學者は往々xを單に甲の金とすることあり,然れどもこれ斷じて不可なり,如何となれば甲の所得は或は圓を以て,或は錢を以てする等種々の異なる表はし方あるべきを以て單に甲の金とするは不定なればなり.次に問題4に於てはxを大なる部分の吋の數とせり,然れども此を單に大なる部分,或は一部分とするが如きは同じく不可なり.

85. 次に掲ぐる問題中には算術にて或は單に推量等にて容易に解し得べきものあり,因りて代數學の効用を無視し其力に藉るの必要なしと速了するものなきにあらず,然れども代數學を用ゐるときは凡て此等の問題を正確に解き得るのみならず,算術のみにては至難若しくは全く不能の問題も容易に解き得べきことを後に至りて知ることあるべし.

問題　12

1.　某數アリ,其五分ノ一ヨリ多キコト二十四ナリトイフ,某數ヲ問フ.

2.　兩數ノ差ハ七,其和ハ三十三ナリトイフ,兩數各〻幾許ナルカ.

3.　某數ニ五十六ヲ加フレバ其結果ハ原數ニ三倍ストイフ,某數ヲ看出セ.

4.　七十五ナル數ヲ大小ノ二ツニ分チタルニ,大ナル數ノ三倍ハ小ナル數ノ七倍ヨリ十五多シトイフ,各數幾何ナルカ.

5.　百八十八ヲ二分セヨ,但シ其一部分ノ四分ノ一ハ他ノ一部分ノ八分ノ一ヨリ多キコト十四ナランコトヲ要ス.

6.　六十ナル數ヲ大小二部ニ分テ大ナル數ト六十四トノ差ヲシテ小ナル數ト三十八トノ差ノ二倍ニ等シカラシメントス,此數ヲ如何ニ分ツベキカ.

7.　某數アリ,其五分ノ一ト七分ノ一トノ和ハ其四分ノ一ト七分ノ一トノ差ヨリ多キコト九十九ナリトイフ,某數如何.

8.　一數九十二ヲ四分セルニ第一數ハ第二數ヨリ十多ク,第三數ヨリハ十八多ク,第四數ヨリハ二十四多シトイフ,四數各〻幾何.

9.　甲乙丙三人ニテ金百五拾五圓ヲ出金セリ,乙ハ甲ヨリ拾五圓多ク出シ,丙ハ乙ヨリ貳拾圓多ク出セリトイフ,甲乙丙ノ出金高各〻幾何ナルカ.

10.　魚アリ,頭ノ長サハ九寸,尾ノ長サハ頭ノ長サト脊ノ長サトノ半分ノ和ニ等シク,脊ノ長サハ頭ノ長サト尾ノ長サトノ和ニ等シ,脊及ビ尾ノ長サ各〻幾寸ナルカ.

11.　甲乙丙三人ニテ金七拾六圓ヲ出金セリ,乙ハ甲ヨリ拾圓多ク出金シ,丙ハ甲乙兩人分丈ケ出金セリトイフ,三人ノ出金高各〻幾何ナルカ.

12.　甲乙丙三人ニテ金貳百七拾六圓ヲ出金セ

リ,乙ノ出金高ハ甲ノ出金高ノ二倍ヨリ拾貳圓多ク丙ノ出金高ハ乙ノ出金高ノ三倍ヨリ拾貳圓多シ,各,何圓ヅツ出金セシカ.

13.　今甲ノ年齢ハ乙ノ年齢ノ二倍ナリ,而シテ今ヨリ七年以前ノ甲乙年齢ヲ合ハセタルモノハ今ノ甲ノ年齢ニ等シトイフ,現今ノ年齢各,幾許.

$x=30-x+10$

$30-x=$生月

$30-x+10=$

14.　十一月某日ニ生レシ一兒アリ,而シテ十二月十日迄ニ經過シタル日數ハ其兒ノ生レシ日ヲ示ス數ニ等シトイフ,生レシ日ハ幾日ナルカ.

15.　人アリ六子ヲ有ス,其年齢ハ長子ヨリ末子ニ至ル迄遞次四歳ヅツ少ナク,而シテ長子ノ年齢ハ末子ノ年齢ノ三倍ナリトイフ,六子各,幾歳ナルカ.

16.　同容量ノ甲乙二ツノ水ヲ滿タシタル桶アリ,今甲ヨリ三斗四升ヲ酌ミ出シ,乙ヨリ八斗ヲ酌ミ出シタルニ甲ニ於テノ殘量ハ乙ニ於テノ殘量ノ三倍ナリ,二ツノ桶ハ初メ何程宛ノ水ヲ有セシカ.

17.　金若干圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分配セシニ甲乙ノ所得ハ合ハセテ六拾圓,甲丙ノ所得ハ合ハセテ八拾圓,乙丙ノ所得ハ合ハセテ九拾貳圓ナリトイフ,三人ノ所得各,幾何ナルカ.

18.　金五百圓ヲ甲乙丙丁ノ四人ニ分ツニ甲乙ノ分ハ合ハセテ貳百八拾圓,甲丙ノ分ハ合ハセテ貳百六拾圓,甲丁ノ分ハ合ハセテ貳百貳拾圓ナリ,四人ノ所得各,幾何.

19.　或人一群ノ乞食ニ逢ヒテ一人ニ金四錢宛與ヘントスレバ拾六錢ヲ餘スベク,又六錢宛與ヘントスレバ貳拾錢不足スベシトイフ,乞食ノ總人數幾何.

20.　金九百圓ヲ二口ニ分チ,其一ヲ年利四分ニテ貸シ,他ヲ年利五分ニテ貸セシニ雙方ノ利金相等シカリシトイフ,年利四分ニテ貸セシ金高ヲ問フ.

21.　二ツノ相隣レル數アリ,第一ノ二分ノ一ト五分ノ一トノ和ハ第二ノ四分ノ一ト三分ノ一トノ和ニ等シトイフ,二數各,幾何.

22.　甲乙二人ノ旅人アリ,甲ハ金百圓ヲ所持シ乙ハ金四拾八圓ヲ所持セリ,然ルニ途中盜難ニ罹リ甲ハ乙ヨリモ二倍多ク失ヘリ,然ルニ尙ホ甲所有ノ殘金ハ乙所有ノ殘金ニ三倍ストイフ,兩人ノ失ヘル金高各,幾何ナルカ.

23.　甲乙二人アリ,合ハセテ金四拾圓ヲ所持セリ,甲若シ乙ヨリ拾圓ヲ受取ルトキハ甲ノ所有ハ乙ノ所有ヨリ六圓多シトイフ,最初幾圓宛ヲ所持セシカ.

24.　酒ト水トヲ混合セルモノアリ,酒ハ全量ノ半ヨリ二斗五升多ク水ハ全量ノ三分ノ一ヨリ五升少シトイフ,酒ト水トノ量ヲ問フ.

$\frac{x}{5}+25=x-(\frac{x}{3}-5)$

25.　若干ノ火藥アリ,其成分硝石ハ全量ノ半分ヨリ六斤多ク,硫黄ハ全量ノ三分ノ一ヨリ五斤少ク,木炭ハ全量ノ四分ノ一ヨリ三斤少シトイフ,成分各々幾何ナルカ.

第十編

乘法ニ於ケル公式及ビ因數

87. 是より代數式の演算に於て屢,用ゐるところの乘法の例題にして特に學生の注意を要するものを説明せんとす.

次の三つの式の眞なることは乘法を實施することに依りて容易に證明するを得.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

即ち　二數の和の平方は其各數の平方の和に其二數の積の二倍を加へたるものに等し.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

即ち　二數の差の平方は其各數の平方の和より其二數の積の二倍を減じたるものに等し.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

即ち　二數の和及び差の積は其二數の平方の差に等し.

88. 前節に掲げたる結果は代數學の効用の一端を示すに足れり.代數學は余輩をして數に關する一般の定理を說明し及び之を簡明に書き表はすことを得しむ,例へば　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　と記號を以て書き表はすは之を言葉にて書き表はすよりもはるかに簡明なりとす.

上の如く計算の法則を記號を以て書き表はせる一般の結果を**公式**と稱す

符號±は＋及び－なる二つの符號を重ねたるものにして之を**複號**と稱す.例へば公式(1)と(2)とを次の一つの公式にて表はすことを得.

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$a\pm b$を「a プラスマイナスb」と讀む

89. (87)の三公式の應用の例

例 1. $3x+2y$ ノ平方ヲ求ム.

公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ハ a ト b トガ如何ナル數ヲ表ハスニ拘ハラズ常ニ眞ナルヲ以テ a ノ代リニ $3x$ ヲ置キ b ノ代リニ $2y$ ヲ置クベシ.

然レバ　$(3x+2y)^2=(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2$

$=9x^2+12xy+4y^2$

例 2. $x+y+z$ ヲ二乘セヨ.

$x+y$ ヲ a ニテ表ハセバ $x+y+z=a+z$

依リテ　$(a+z)^2=a^2+2az+z^2$

$=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$

$\{2x^2-(3xy-4y^2)\}^2$

$=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$

例 3. $(2x^2-3xy+4y^2)^2$ ノ値ヲ求ム.

$(2x^2-3xy+4y^2)^2$

$=(2x^2-3xy)^2+2(2x^2-3xy)4y^2+(4y^2)^2$

$=4x^4-12x^3y+9x^2y^2+16x^2y^2-24xy^3+16y^4$

$=4x^4-12x^3y+25x^2y^2-24xy^3+16y^4$

例 4. $x+y-z$ ト $x-y+z$ トノ積ヲ求ム.

$a=x,\quad b=y-z$ トスレバ

$a+b=x+y-z,\quad a-b=x-(y-z)=x-y+z$

$\therefore\quad (x+y-z)(x-y+z)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$=x^2-(y-z)^2=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-y^2+2yz-z^2$

例 5. $p-q+r-s$ ト $p-q-r+s$ トノ積ヲ求ム.

$$(p-q+r-s)(p-q-r+s)$$
$$=\{(p-q)+(r-s)\}\{(p-q)-(r-s)\}$$
$$=(p-q)^2-(r-s)^2$$
$$=p^2-2pq+q^2-(r^2-2rs+s^2)$$
$$=p^2-2pq+q^2-r^2+2rs-s^2$$

例 6. $a+b+c,\ a+b-c,\ a-b+c,\ b+c-a$ ノ積ヲ求ム.

先ヅ初メノ二因數ノ積ヲ求ムレバ(3)及ビ(1)ニ依リテ

$$(a+b+c)(a+b-c)=(a+b)^2-c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2-c^2$$

終リノ二因數ノ積ヲ求ムレバ(3)及ビ(2)ニ依リテ

$$(a-b+c)(b+c-a)=\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}$$
$$=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2+2ab-b^2$$

次ニ $a^2+2ab+b^2-c^2$ ト $c^2-a^2+2ab-b^2$ トノ積ヲ求ムレバ

$$(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-a^2+2ab-b^2)$$
$$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$$
$$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$
$$=4a^2b^2-\{(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+c^4\}$$
$$=4a^2b^2-(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)c^2-c^4$$
$$=4a^2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4$$
$$=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$

問題 13

(87)ノ公式ヲ應用シテ次ノ諸式ノ値ヲ求ム.

1. $(7x+5y)^2$　　2. $(7x^2-5y^2)^2$

3. $(6x-5y)(6x+5y)$　　4. $(x^2-5x+7)^2$

5. $(x-y+z)(x-y-z)$　　6. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy-y^2)$

7. $(x^3-x^2+x-1)^2$

8. $(x^3+2x^2+3x+1)(x^3-2x^2+3x-1)$ $=(x^3+3x)^2-(2x^2+1)^2$

9. $(2x+3y)^2(4x^2+12xy-9y^2)$

10. $(ax+by)(ax-by)(a^2x^2+b^2y^2)$

90. 乘法を實施することに依りて次の公式を容易に證明するを得.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

上ノ公式ヲ應用シテ次ノ乘法ノ結果ヲ直チニ書キ下スコトヲ得.

例 1. $(x+7)(x+8)=x^2+15x+56$

例 2. $(x-5)(x-6)=x^2-11x+30$

例 3. $(x+5)(x-3)=x^2+2x-15$

例 4. $(3x+5y)(3x-7y)=9x^2+(5y-7y)3x+5y(-7y)$

$$=9x^2-6xy-35y^2$$

問題 14

(90)ノ公式ヲ應用シテ次ノ乘法ノ結果ヲ直チニ書キ下ダセ.

1. $(x+21)(x+11)$ 2. $(x-23)(x-3)$
3. $(x+10)(x-7)$ 4. $(x-16)(x+3)$
5. $(7x-3y)(7x-2y)$ 6. $(2x+7a)(2x-5a)$

91. 乘法を實施することに依りて次の公式を容易に證明するを得.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$$

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)$$
$$+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)$$

$(a+(b+c))^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$

$$+3c^2(a+b)+6abc$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

92. 前の公式を應用し又は乘法を實施することに依りて恒等式を證明するの例.

式 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(c-b)(c-a)+2(b-a)(b-c)$
$+2(a-b)(a-c)$ ヲ證明セヨ.

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2$$
$$+c^2-2ca+a^2=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\cdots\cdots(1)$$

又
$$(c-b)(c-a)=c^2-ca-cb+ab$$
$$(b-a)(b-c)=b^2-ba-bc+ac$$
$$(a-b)(a-c)=a^2-ab-ac+bc$$

$\therefore$
$$(c-b)(c-a)+(b-a)(b-c)+(a-b)(a-c)$$
$$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)及ビ(2)ニ依リテ

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(c-b)(c-a)+2(b-a)(b-c)$$
$$+2(a-b)(a-c)$$

問題 15

次ノ公式ヲ證明スベシ.

1. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

2. $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2=(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2$

3. $(a-b)^3+b^3-a^3=3ab(b-a)$

4. $(a+b+c)^2-a(b+c-a)-b(a+c-b)-c(a+b-c)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

5. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$

6. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=24abc$

7. $(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2=(2a)^2$

8. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$

9. $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a-b)^2(a+b)+3(a+b)^2(a-b)=(2a)^3$

10. $(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$

$=(x+z)^3+3(x+z)^2y+3(x+z)y^2+y^3$

因　　數

93. 前諸節に於て二つ或は二つより多くの因數の積を求め得べき乘法の或一般の結果を示せり.

是より其逆の演算即ち所設の代數式の因數を求むる方法を述べんとす.

94. 所設の代數式の各項が公因數を有する場合.

一つの數が一つの多項式の各項の公因數なるときは此數は其多項式の因數なること明かなり.

例へバ　$3a^2x^3-4a^3x^2=a^2x^2(3x-4a)$

$7a^3b^4c^5-28a^5b^3c^6+35a^6b^5c^4=7a^3b^3c^4(bc-4a^2c^2+5a^3b^2)$

95. 公式と比較して因數を求むることを得る場合.

公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ と比較して因數を求むる例.

例 1. $x^2+4xy+4y^2=x^2+2x(2y)+(2y)^2=(x+2y)^2$

例 2. $9x^2-6xy+y^2=(3x)^2-2(3x)y+y^2=(3x-y)^2$

例 3. $-25x^2+40xy-16y^2=-[(5x)^2-2(5x)(4y)+(4y)^2]$

$=-[5x-4y]^2$

例 4. $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

$=(a^2+2ab+b^2)-2(a+b)c+c^2$

$=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$

$=(a+b-c)^2$

96. 公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ と比較して因數を求むる例.

例 1. $x^2-4y^2=x^2-(2y)^2=(x+2y)(x-2y)$

例 2. $9x^4-36y^2=(3x^2)^2-(6y)^2=(3x^2+6y)(3x^2-6y)$

例 3. $9b^2-(c-d)^2=\{3b+(c-d)\}\{3b-(c-d)\}$

$$=(3b+c-d)(3b-c+d)$$

97. 公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

及び $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

と比較して因數を求むる例.

例 1. $8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$

$$=(2a+3b)[(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2]$$

$$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$$

例 2. $64y^3-125z^3=(4y)^3-(5z)^3$

$$=(4y-5z)[(4y)^2+(4y)(5z)+(5z)^2]$$

$$=(4y-5z)(16y^2+20yz+25z^2)$$

問題 16

次ニ掲グル諸式ヲ因數ニ分解セヨ.

1. x^2+4x+4　　2. $x^2-10x+25$

3. $16x^2+40xy+25y^2$　　4. $-49x^2+112x-64$

5. $x^2+x+\frac{1}{4}$　　6. $64x^2-144xy^2+81y^4$

7. $4(x+y)^2-12(x+y)z+9z^2$

8. $x^2(a-b)^2-4(a-b)xy+4y^2$

9. x^2-64y^2　　10. $1-100a^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　$x+y$　　$\{(x-y)+z\}\{(x-y)-z\}$

$(\cancel{(x-y)+z})($

11. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{81}$　　12. $(7x+5y)^2-z^2$

13. a^8-b^8　　14. $(a^2+ab-b^2)^2-(a^2-ab-b^2)^2$

15. $x^2-2xy+y^2-z^2$　　16. $25a^2-60ab+36b^2-49c^2$

17. x^3+1　　18. y^3+216

19. $a^3-1000b^3$　　20. $(2x-3y)^3-27z^3$

98. 公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

と比較して因數を求むる例.

例 $x^2+7x+12$ ヲ因數ニ分解セヨ.

若シ $a+b=7$ $ab=12$ トナルガ如キ二數 a ト b トヲ看出シ得ルトセバ上ノ公式ニ依リテ

$$x^2+7x+12=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

偖12ヲ二ツノ因數ニ分解スレバ1ト12, 2ト6, 3ト4ニシテ其中3ト4トノ和ハ丁度7ナリ.

$$\therefore\quad x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$$

99. 公式 $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

と比較して因數を求むる例.

例 $x^2-11x+28$ ヲ因數ニ分解セヨ.

若シ $a+b=11$ $ab=28$ トナルガ如キ二數 a, b ヲ看出シ得ルトセバ.

$$x^2-11x+28=x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$$

28ナル積ヲ有スル二數ハ1ト28, 2ト14, 4ト7ニ

シテ其中4ト7トノ和ハ丁度11ナリ.

$\therefore$ $$x^2-11x+28=(x-7)(x-4)$$

100. 公式　$x^2+(a-b)x-ab=(x+a)(x-b)$ と比較して因數を求むる例.

左邊ノ第二項ノ係數ハ $a>b$ ナルカ或ハ $a<b$ ナルカニ從テ正或ハ負ナリ.

例 1. $x^2+2x-15$ ノ因數ヲ求ム.

若シ $a-b=2$　$ab=15$ トナルガ如キ二數 a, b ヲ看出シ得ルトセバ

$$x^2+2x-15=x^2+(a-b)x-ab=(x+a)(x-b)$$

15ナル積ヲ有スル二數ハ1ト15, 3ト5ニシテ其中3ト5トノ差ハ2ナリ.

$\therefore$ $a=5,$　$b=3$ ニシテ

$$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$$

例 2. $x^2-3x-10$ ノ因數ヲ求ム.

(此例ニ於テハ例1ト異ナリ第二項ノ係數ハ負ナリ)

$a-b=-3,$　$ab=10$ トナルガ如キ二數 a, b ヲ看出シ得ルトセバ

$$x^2-3x-10=x^2+(a-b)x-ab=(x+a)(x-b)$$

積ガ10トナリ差ガ -3 トナル二數ハ2及ビ5ナルコト明カナリ而シテ $a=2,$　$b=5$ ナリ.

$\therefore$ $$x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$$

問題　17

次ノ諸式ヲ因數ニ分解セヨ.

1. $x^2+13x+42$　　**2.** $x^2+30x+209$

3. $x^2-14x+48$　　**4.** $x^2-5xy+6y^2$

5. $x^2-27xy+92y^2$　　**6.** $x^4-8x^2y+15y^2$

7. $(x--y)^2+11(x-y)+30$

8. $x^2-2xy+y^2-9x+9y+14$　$(x-y)^2-9(x-y)+14.$

9. $x^2-4x-21$　　**10.** x^2+x-30

11. $x^2-4x-45$　　**12.** $255+2y-y^2$

13. $x^2+8xy-65y^2$

101. 一式を因數に分解せんとするに,前の諸節に於て爲したるが如く直ちに公式を應用し能はざる場合に於ても若し之を二數の平方の差の形に變化することを得るときは $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ に依りて直ちに其因數を書き下すことを得べし.

例 1. $x^2+8x+15$ ノ因數ヲ求ム.

$$x^2+8x+15=x^2+8x+16-16+15$$
$$=(x+4)^2-1$$

$(x+4-1$　$(x+4+1)$

$$=(x+4+1)(x+4-1)$$
$$=(x+5)(x+3)$$

例 2. $2x^2+3x-5$ ノ因數ヲ求ム.

$$2x^2+3x-5=2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)$$
$$=2\left\{x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{2}\right\}$$
$$=2\left\{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2\right\}$$
$$=2\left(x+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\right)$$
$$=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)$$
$$=(2x+5)(x-1)$$

例 3. $a^4+a^2b^2+b^4$ ヲ因數ニ分解セヨ.

$$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$
$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2$$
$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

問題 18

1. $x^2+7x-44$　　**2.** $x^2-5xy-24y^2$

3. $x^2+7xy-60y^2$　　**4.** $4x^2+x-3$

5. $5x^2-38x+21$　　**6.** x^4+x^2+1

7. $10x^2-19x-56$

第十一編

最大公約數

102. 一つの整式にて他の整式を割り盡し得るときは前式は後式の**約數**なりといふ，又一つの整式にて他の二つ或は二つより多くの整式を割り盡し得るときは前の一つの式は後の二つ或は二つより多くの式の**公約數**なりといふ.

二つ或は二つより多くの整式の公約數は通例一つより多くあり，其中にて次數の最大なるものを其**最大公約數**と稱す.

最高通因数

〔最大公約數ヲ通例G.C.M.ト略記ス〕

103. 單項式の最大公約數は視察に依りて直ちに之を看出すことを得べし.

例 1. $16a^4b^2c$ ト $20a^3b^3d$ トノ G.C.M. ヲ求ム.

16, 20 ナル數係數ノ G.C.M. ハ 4 ナリ

兩式ニ通ズル文字ハ a 及ビ b ナリ而シテ各式ヲ割リ盡シ得ル其最高羃ハ夫々 a^3 及ビ b^2 ナリ.

∴ $4a^3b^2$ ハ所要ノ G.C.M ナリ

例 2. $8a^2b^3c^2x^5yz^3$, $12a^4bcx^2y^3$ 及ビ $16a^3c^3x^2y^4$ ノ G.C.M ヲ求ム

8, 12, 16 ナル數係數ノ G.C.M. ハ 4 ナリ

三式ニ通ズル文字ハ a, c, x 及ビ y ニシテ各式ヲ割リ盡シ得ル其最高羃ハ夫々 a^2, c, x^2 及ビ y ナリ.

∴ $4a^2cx^2y$ ハ所要ノ G.C.M. ナリ.

上の例に因りて見るに,各式を割り盡し得る或一つの文字の最高羃のものは諸式中にある此文字の諸羃の中に於て指數の最小なるものなり.

因りて單項式の最大公約數を求むる法則は下の如し.

与へられたる諸式の數係數の最大公約數と,總ての式に通ずる文字に,諸式中,其各文字の有する最小指數を附したるものとを掛け合はすべし,然るときは

其積は所要の最大公約數なり.

104. 與へられたる諸式の各を其諸式の最大公約數にて割れば其商は公約數を有せず.

例ヘバ前節ノ例 1 ニ於テ各式ヲ其 G.C.M. $4a^3b^2$ ニテ割レバ商 $4ac$ ト $5bd$ トニハ公約數ナシ.

105. 多項式にても容易に其因數を求むることを得れば單項式の場合の如く視察に依りて直ちに其最大公約數を看出すことを得べし.

例 $4a^2(a+b)^2$, $6ab(a^2-b^2)$ ノ G.C.M. ヲ求ム.

ココニ $2a$ ハ $4a^2$ 及ビ $6ab$ ノ G.C.M. ニシテ $a+b$ ハ $(a+b)^2$ 及ビ a^2-b^2 ノ約數ニシテ而シテ唯一ツノ公約數ナリ, 故ニ $2a(a+b)$ ハ與ヘラレタル二式ノ G.C.M ナリ.

問題 19

次ノ諸式ノ最大公約數ヲ看出セ.

1. $15x^4$, $18x^2$ **2.** $35a^2b^3x^3y^4$, $49a^2b^4x^4y^3$

3. xy^5, $2x^2y^3$, $3x^3y^2$

4. $3a^6b^7x^5y^4$,　$12a^3b^4x^3y^6$,　$69a^9b^7x^5y^7$,　$345a^4b^6x^8y^{10}$

5. $6(x+1)^3$,　$9(x^2-1)$　　**6.** x^6-y^6,　x^4-y^4

7. $x^2+2x-120$,　$x^2-2x-80$

8. $4(x^2-x+1)$,　$3(x^4+x^2+1)$

$(x-1)^2(x+1)$

9. $5(x^2-x+1)$,　$4(x^6-1)$

10. x^2+5x+4,　x^2+2x-8,　$x^2+7x+12$

106.　前節に述べたる方法は複雑なる例題の場合には用ゐること能はず,如何となれば前編に述べたるが如き場合の外の因數分解は甚だ困難なればなり.因りて今別に多項式の最大公約數の定義并に之を求むる法則を示さんとす.

若し二つ或は二つより多くの多項式が或通有なる文字の羃を有すれば,此總ての式を割り盡し得る因數の中,其文字に付きて最高次のものを此諸式の最大公約數と稱す.

107.　二つの多項式の最大公約數を求むる法則は次の如し.

$x^2-x+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2+1$
$(x-\frac{1}{2})^2$

所設の二式をA及びBにて表はずとせよ,先づ二式を或通有の文字の降羃の順に排列すべし,而して假りに其文字に付きてAの第一項の指數がBの第一項の指數より小ならずとせよ,BにてAを割り,若し剩餘あらば之を新除數とし,Bを新被除數として除法を施し,剩餘あらば更に之を新除數とし,前の除數を新被除數とすべし,逐次斯の如くに爲し終に剩餘なきに至りて止む,然るときは其最後の除數は所要の最大公約數なり.若しBがAを割り盡すときはBはA及びBの最大公約數なるべし.

例　x^2-4x+3,　$4x^3-9x^2-15x+18$ ノ G.C.M. ヲ看出スベシ.

$$
\begin{array}{l}
x^2-4x+3)\,4x^3-9x^2-15x+18\,(4x+7 \\
\qquad\qquad\quad \underline{4x^3-16x^2+12x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 7x^2-27x+18 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{7x^2-28x+21} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-3)\,x^2-4x+3\,(x-1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x^2-3x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x+3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-x+3}
\end{array}
$$

故ニ $x-3$ ハ所要ノ G.C.M. ナリ

108. 最大公約數を求むる法則の證

前節に示せる法則は下の原理より出で來る.

(1) 若しPがAの約數なれば亦 mA の約數なり, 如何となれば, PにてAを割り,得たる商を a とすれば $\mathrm{A}=a\mathrm{P}$, 故に $m\mathrm{A}=ma\mathrm{P}$, 故に P は mA の約數なり.

(2) 若しPがA及びBの約數なれば亦 $m\mathrm{A}\pm n\mathrm{B}$ の約數なり,如何となれば, P は A及びBの約數なるを以て $\mathrm{A}=a\mathrm{P}$, $\mathrm{B}=b\mathrm{P}$ と定むるを得.

故に $m\mathrm{A}\pm n\mathrm{B}=(ma\pm nb)\mathrm{P}$, 故に P は $m\mathrm{A}\pm n\mathrm{B}$ の約數なり.

109. 所設の二式をA及びBにて表はすとせよ,BにてAを割り,得たる商を p とし剩餘をCとす,CにてBを割り,得たる商を q とし剩餘をDとす,DにてCを割り,得たる商を r とし,剩餘なきものと假定す. 因りて

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{B})\ \mathrm{A}\ (p \\
\quad\ \ p\mathrm{B} \\
\hline
\mathrm{C})\ \mathrm{B}\ (q \\
\quad\ \ q\mathrm{C} \\
\hline
\mathrm{D})\ \mathrm{C}\ (r \\
\quad\ \ r\mathrm{D} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\mathrm{A}=p\mathrm{B}+\mathrm{C},\quad \mathrm{B}=q\mathrm{C}+\mathrm{D},\quad \mathrm{C}=r\mathrm{D}$$

先づDは二式A,Bの公約數なることを證明せんとす.

$\mathrm{C}=r\mathrm{D}$ なるを以て,DはCの約數なり,故に前節に依りDは qC の約數にして亦 $q\mathrm{C}+\mathrm{D}$ の約數なり,即ちDはBの約數なり,又DはB及びCの約數なるを以て亦 $p\mathrm{B}+\mathrm{C}$ の約數なり,即ちDはAの約數なり,故にDはA及びBの公約數なり.

次にDはA及びBの最大公約數なることを證明せんとす.

前節に依りA及びBの各公約數は $\mathrm{A}-p\mathrm{B}$ 即ちCの約數なり, さればA及びBの各公約數はB及びCの公約數なり,

同樣にB及びCの各公約數は又C及びDの公約數なり,故にA及びBの各公約數はDの約數なり,然れどもDより高次なる式にてDを割り盡すこと能はず.故にDはA及びBの最大公約數なり.

110. 前節に於てA及びBの各公約數はDの約數なることを示せり,即ち二式の各公約數は其最大公約數の約數なり.

111. 最大公約數を求むる爲めに除法を爲すの際,商に分數の生ずることあり,今此分數を避けて演算を容易ならしむべき一つの法則を擧ぐべし.

與へられたる二式の最大公約數を求めんが爲めに除法を行ふに當り,其幾回目なるに拘はらず商の新項を定むる前に除數,或は被除數を,此兩數の公約數を含まざる如何なる式を以て割るも

此法の眞正を損ふことなし,又除數の約數を含まざる如何なる式を以て其被除數に掛くるも差支なし.

例 1. $2x^2-7x+5$, $3x^2-7x+4$ ノ G.C.M. ヲ求ム.

$2x^2-7x+5$ ヲ除數トセン＝ $2x^2$ ＝テ $3x^2$ ヲ割ラントスレバ,商ハ分數トナル.此煩ヲ避ケンタメ兩式ノ公約數＝アラザル 2 ヲ被除數＝掛ケ而シテ除法ヲ行ヘバ

3 7 4

$$
\begin{array}{r l}
2x^2-7x+5) & 6x^2-14x+\ 8\ (3 \\
 & \underline{6x^2-21x+15} \\
 & \qquad 7x-7
\end{array}
$$

次＝ $7x-7$ ヲ以テ $2x^2-7x+5$ ヲ割ラントスレバ,商ノ初項ハ分數トナル,然ル＝7ハ新除數ノ約數ナレドモ新被除數ノ約數＝アラザルヲ以テ,新除數ヲ7＝テ割リ而シテ後除法ヲ行ヘバ

$$
\begin{array}{r l}
x-1) & 2x^2-7x+5\ (2x-5 \\
 & \underline{2x^2-2x} \\
 & \quad -5x+5 \\
 & \quad \underline{-5x+5}
\end{array}
$$

即チ $x-1$ ハ所要ノ G.C.M. ナリ

例 2. x^7+y^7 及ビ x^5+y^5 ノ G.C.M. ヲ看出セ.

$$
\begin{array}{r l}
x^5+y^5) & x^7+y^7\quad (x^2 \\
 & \underline{x^7+x^2y^5} \\
 & -x^2y^5+y^7=-y^5(x^2-y^2)
\end{array}
$$

除法ヲ行フ前 x^5+y^5 ノ約數＝アラザル $-y^5$ ヲ剩

餘ヨリ取リ除キテ,

$$
\begin{array}{l}
x^2-y^2)x^5+y^5(x^3+xy^2 \\
\qquad\quad \underline{x^5-x^3y^2} \\
\qquad\qquad\quad x^3y^2+\ \ y^5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^3y^2-xy^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad xy^4+y^5=y^4(x+y)
\end{array}
$$

$(x^3$

y^4 ハ x^2-y^2 ヲ約シ得ザルヲ以テ,此因數ヲ剩餘ヨリ取リ除キ,

$$
\begin{array}{l}
x+y)x^2-y^2(x-y \\
\qquad\quad \underline{x^2-y^2}
\end{array}
$$

故ニ所要ノ G.C.M. ハ $x+y$ ナリ.

112. 二式 A及びBが F なる公約數を有することは視察にて明かなりとし,Fにて A及び B を割り,得たる商を夫々 a 及び b とすれば

$$A=a\mathrm{F}, \qquad \mathrm{B}=b\mathrm{F}$$

(110) に依り,F は A 及び B の最大公約數の一約數なり,今 a 及び b の G.C.M. を看出し,之にFを掛くるときは其積は即ち A及び B の G.C.M. なるべし.

例 $30x^5-5x^4-175x^3$ 及ビ $42x^5-49x^4-224x^3+210x^2$ ノ G.C.M. ヲ看出セ.

$$30x^5-5x^4-175x^3=5x^3(6x^2-x-35)$$

$$42x^5-49x^4-224x^3+210x^2=7x^2(6x^3-7x^2-32x+30)$$

$6x^2-x-35$ 及ビ $6x^3-7x^2-32x+30$ ノ G.C.M. ヲ求ムレバ $2x-5$ ヲ得.

又 $5x^3$ 及ビ $7x^2$ ノ G.C.M. ハ x^2 ナリ,故ニ所要ノ G.C.M. ハ $x^2(2x-5)$ ナリ.

113. A, B 及び C なる三つの整式の G.C.M. を求むるには先づ三式中の任意の二つ,例へば A と B との G.C.M. を看出し,之を D とせば D と C との G.C.M. は所要の A, B, C の G.C.M. なり.

如何となれば D 及び C の各公約數は A, B 及び C の公約數なり,又 (110) に依りて A, B 及び C の各公約數は D 及び C の公約數なり,故に D 及び C の G.C.M. は A, B 及び C の G.C.M. なり. 同様に三つより多くの整式の G.C.M. を看出すことを得べし.

問題 20

次ノ諸式ノ最大公約數ヲ看出セ.

1. $x^2+4x-5,\quad x^3-6x+5$
2. $2x^3+x^2-11x-10,\quad 2x^3-9x^2+4x+15$
3. $x^3-9x^2+23x-12,\quad x^3-10x^2+28x-15$
4. $x^3-29x+42,\quad x^3+x^2-35x+49$
5. $x^3-41x-30,\quad x^3-11x^2+25x+25$
6. $x^3+7x^2+17x+15,\quad x^3+8x^2+19x+12$
7. $x^3-10x^2+26x-8,\quad x^3-9x^2+23x-12$
8. $2x^3-7x^2-8x-35,\quad 2x^3+9x^2+16x+21$
9. $6x^2+x-2,\quad 9x^3+48x^2+52x+16$
10. $x^3-4x^2+2x+3,\quad 2x^4-9x^3+12x^2-7$
11. $x^4-1,\quad 3x^5+2x^4+4x^3+2x^2+x$
12. $x^2-3x-70,\quad x^3-39x+70,\quad x^3-48x+7$

第十二編

最小公倍數

114. 一つの整式が他の一つの整式にて約し得らるるときは前式は後式の**倍數**なりといふ,又一つの整式が他の二つ或は二つより多くの整式の各にて約し得らるるときは前の一つの式は後の多くの式の**公倍數**なりといふ.

二つ或は二つより多くの整式の公倍數は數多あり,其中にて次數の最小なるものを其**最小公倍數**と稱す.

(最小公倍數ヲ通例L.C.M.ト略記ス)

115. 單項式の最小公倍數は視察に依りて直ちに之を看出すことを得べし.

例 1. $16a^4b^2c$ 及ビ $20a^3b^3d$ ノ L.C.M. ヲ求ム.

16, 20 ナル數係數ノ L.C.M. ハ 80 ナリ, 式中ニ有

ル文字ハ a, b, c, d ニシテ其最高冪ハ夫々 a^4, b^3, c, d ナリ，故ニ $80a^4b^3cd$ ヲ所要ノ L.C.M. トス.

例 **2.** $8a^2b^3c^2x^5yz^3$, $12a^4bcx^2y^3$ 及ビ $16a^3c^3x^2y^4$ ノ L.C.M. ヲ求ム.

數係數ノ L.C.M. ハ 48 ニシテ諸式中ニアル文字ハ a, b, c, x, y 及ビ z ナリ而シテ其最大指數ハ夫々 4, 3, 3, 5, 4 及ビ 3 ナリ，因リテ所要ノ L.C.M. ハ $48a^4b^3c^3x^5y^4z^3$ ナリ.

因りて單項式の最小公倍數を求むる法則は次の如し.

与へられたる諸式の數係數の最小公倍數と諸式中にある總ての文字に諸式中其各文字の有する最大指數を附したるものとを掛け合はすべし，然るときは其積は所要の最小公倍數なり.

116. 與へられたる諸式の各にて其最小公倍數を割れば其商は公約數を有せず.

例ヘバ前節ノ例 1 ニ於テ與ヘラレタル各式ニテ其 L.C.M. ヲ割レバ商 $5bd$, $4ac$ ヲ得，而シテ此二式ニハ

公約數ナシ

117. 多項式にても容易に其因數を求むることを得れば單項式の場合の如く視察に依りて直ちに其最小公倍數を看出すことを得.

例 $a^2b^3(x^2+x-20)$, $ab^2(x^2-3x-4)$, $a^5b^4(x^2+2x+1)$ ノ L.C.M. ヲ求ム.

今
$$a^2b^3(x^2+x-20)=a^2b^3(x+5)(x-4)$$
$$ab^2(x^2-3x-4)=ab^2(x-4)(x+1)$$
$$a^5b^4(x^2+2x+1)=a^5b^4(x+1)^2$$

此等ノ諸式ニ於テ $a, b, x-4, x+5$ 及ビ $x+1$ ノ最大指數ハ夫々 5, 4, 1, 1 及ビ 2 ナリ.

故ニ L.C.M. ハ $a^5b^4(x-4)(x+5)(x+1)^2$ ナリ.

問題 21

次ノ諸式ノ最小公倍數ヲ求ム.

1. $12a^3b^2c$, $18ab^2c^3$

2. $8yz^2$, $122x^2$, $18xy^3$

3. x^3y^2, x^4yz, $x^2y^3z^3$

4. $77a^2b^3c^4x^5$, $91a^6b^7c^2x^9$, $143a^3b^2c^8x$

5. x^3+4x, $x^2+9x+20$

$(x+1)(x-1)$ $(x+1)(x^2-x+1)$ $(x-1)(x^2+x+1)$

$(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

6. $(a-b)^2$, a^2-b^2 **7.** $4a(a+b)$, $6b(a^3+b^3)$

8. x^2-3x-4, x^2-x-12

9. $8(a^2-b^2)$, $12(a+b)^2$, $20(a-b)^2$

10. $15(a^2b-ab^2)$, $21(a^3-ab^2)$, $35(ab^2+b^3)$

11. x^2-1, x^3+1, x^3-1, x^6+1,

12. $18(x+y)^2(x^3-y^3)$, $24(x-y)^2(x^3+y^3)$, $36(x^2-y^2)^2$

$(x^2-y^2)^2$

118. 二つ或は二つより多くの多項式のL.C.M.の定義をば次の如く述ぶることを得.

若し二つ或は二つより多くの多項式が或通有なる文字の冪を有すとすれば,此諸式の各にて約し得らるる式の中其文字に付きて最低次のものを此諸式の最小公倍數と稱す.

119. 次に二つの多項式のL.C.M.を求むる方法を示さんとす.

A及びBを二式とし,Dを其最大公約數とし, $A=aD$, $B=bD$ とせよ,然れば最大公約數の定義に依りて,aとbとは

$(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$(x^4-1)(x^8+x^4+1)=x^{12}-1$

公約數を有せず,故に其最小公倍數はabなり,是を以てaD及びbDにて約し得べき最低次の式はabDなるべし.

故にMをA及びBのL.C.M.とすれば

$$M=abD=Ab=Ba=\frac{AB}{D} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

故に又 $$MD=AB \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

是に由りて二つの多項式のL.C.Mを求むる法則は次の如し.

二式の積を其最大公約數にて割るべし.

或は之を次の如く述ぶることを得.

二式の一を其最大公約數にて割り其商に他の一式を掛くるべし.

(2)に依りて 二式の最大公約數及び最小公倍數の積は此二式の積に等し.

120.

例 1. x^2-4x+3 及ビ $4x^3-9x^2-15x+18$ ノ L.C.M. ヲ求ム.

二式ノ G.C.M. ハ $x-3$ ナリ. [(107) ヲ見ヨ]

今 x^2-4x+3 ヲ $x-3$ ニテ割レバ商 $x-1$ ヲ得

∴所要ノ L.C.M. ハ $(x-1)(4x^3-9x^2-15x+18)$ ナリ

$(4x^3-9x^2-15x+18)\div(x-3)=4x^2+3x-6$ ナルヲ以テ上記ノ L.C.M. ヲ次ノ如ク書クコトヲ得.

$$\text{L.C.M.}=(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)$$

例 2. $2x^2-7x+5$ 及ビ $3x^2-7x+4$ ノ L.C.M. ヲ看出セ.

二式ノ G.C.M. ハ $x-1$ ナリ. [(111) 例 1 ヲ見ヨ]

又　$(2x^2-7x+5)\div(x-1)=2x-5$

$(3x^2-7x+4)\div(x-1)=3x-4$

故ニ所要ノ L.C.M. ハ $(x-1)(2x-5)(3x-4)$ ナリ.

121. 三つの多項式 A, B, C の L.C.M. を求むるには, 先づ三式中の任意の二つ, 假令ば A 及び B の L.C.M. を求め, 之を M とせば M と C との L.C.M. は所要の A, B, C の L.C.M. なり. 如何となれば M と C との各公倍數は A, B, C の公倍數なること明かなり, 又 M は A と B との最小公倍數なるを以て A と B との各公倍數は M の倍數なること明かなり, 故に A, B, 及び C の各公倍數は M 及び C の公倍數なり.

故に M 及び C の L.C.M. は A, B, 及び C の L.C.M. ならざるを得ず.

同樣に三つより多くの整式の L.C.M. を看出すことを得.

問題 22

次式ノ最小公倍數ヲ求メヨ.

1. $x^3+5x^2+7x+2,\ x^2+6x+8$
2. $12x^2+5x-3,\ 6x^3+x^2-x$
3. $x^3-6x^2+11x-6,\ x^3-9x^2+26x-24$
4. $x^3-7x-6,\ x^3+8x^2+17x+10$
5. $x^4+x^3+2x^2+x+1,\ x^4-1$
6. $x^4-2x^3-3x^2+8x-4,\ x^4-5x^3+20x-16$
7. $x^4+a^2x^2+a^4,\ x^4-ax^3-a^3x+a^4$
8. $x^2+2x-3,\ x^3+3x^2-x-3,\ x^3+4x^2+x-6$

第十三編
分　數　式
(約分　通分　加法　減法)

122. 代數學の分數に關する諸法則は算術におけるものと殆ど同樣なり.

算術に於ては分數 $\frac{7}{11}$ は一を十一に割りたるものの七倍を表はす,代數に於ても若し a, b を正の整數なりとすれば $\frac{a}{b}$ は一を b 箇に割りたるものの a 倍を表はす.

$\frac{a}{b}$ を**分數**と稱し,a を**分子**,b を**分母**と稱す.

凡て整數或は整式は分母に一を有する分數と見做すことを得.例へば

$$a=\frac{a}{1},\quad b+c=\frac{b+c}{1}$$

123. 代數學にて分數を混數の形に

更むるには,算術におけるが如く次の法則に依る.

為し得るだけ,分母にて分子を割り,其商に,剩餘を分子とし除數を分母とせる分數を加ふべし.

例 1. $\frac{24a}{7}=3a+\frac{3a}{7}$　**例 2.** $\frac{a^2+3ab}{a+b}=a+\frac{2ab}{a+b}$

例 3. $\frac{x^2-6x+14}{x^2-3x+4}=x+3+\frac{-x+2}{x^2-3x+4}=x+3-\frac{x-2}{x^2-3x+4}$

124. 整數を分數に掛けんとせば其整數を分子に掛くるか,或は其整數にて分母を割るべし.

$\frac{a}{b}$ を任意の分數とし c を任意の整數とすれば $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$, 如何となれば $\frac{a}{b}$ は 1 を b にて割りたるものの a 倍にして $\frac{ac}{b}$ は矢張 1 を b にて割りたるものの $a\times c$ 倍なり,故に $\frac{ac}{b}$ は $\frac{a}{b}$ の c 倍なり.

次に $\frac{a}{bc}$ を任意の分數とし,c を任意

の整數とすれば　$\frac{a}{bc}\times c=\frac{a}{b}$,　如何となれば $\frac{a}{b}$ は 1 を b にて割りたるものの a 倍にして $\frac{a}{bc}$ は 1 を $b\times c$ にて割りたるものの a 倍なるを以て前者の各部分は後者の各部分の c 倍なり,故に $\frac{a}{b}$ は $\frac{a}{bc}$ の c 倍なり.

125. 整數にて分數を割るには,分母に其整數を掛くるか,或は分子を其整數にて割るべし.

$\frac{a}{b}$ を任意の分數とし,c を任意の整數とすれば,　$\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{bc}$,　如何となれば(124)に依りて $\frac{a}{b}$ は $\frac{a}{bc}$ の c 倍なり,故に $\frac{a}{bc}$ は $\frac{a}{b}$ の c 分の一なり.

次に $\frac{ac}{b}$ を任意の分數とし,c を任意の整數とすれば,　$\frac{ac}{b}\div c=\frac{a}{b}$　如何となれば,(124)に依りて $\frac{ac}{b}$ は $\frac{a}{b}$ の c 倍なり,故に $\frac{a}{b}$ は $\frac{ac}{b}$ の c 分の一なり.

126. 分數の分母及び分子に同じ整數を掛くるときは,其値は變ずることなし.

如何となれば,或整數を分數の分子に掛くるは,即ち其整數を分數に掛くるに同じ,而して同じ整數を其分母に掛くるは,即ち其整數を以て前の結果を割るに同じ,然るに一整數を一數に掛けて得たる積を同じ整數にて割れば其數の値は最初に異なることなし.

同様に分數の分母及び分子を同じ整數にて割るときは其値は變ずることなし.

上の緊要なる定理を式を以て表はすときは

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$$

127. 以上の證明は各文字が正の整數を表はす場合にのみ適合するものなり,然れども $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ なることは a, b 及び c が如何なる數を表はすに拘はらず常に眞なるものなり,但し其一般の證はここに略す.

今 c ノ代リニ -1 ヲ置ケバ

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$$

又 $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$, $+\frac{a}{-b}=+\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$, $-\frac{a}{-b}=-\frac{-a}{b}=\frac{a}{b}$

同様ニ $\frac{a}{b}\times c$ ハ常ニ $\frac{ac}{b}$ ニ等シト假定スレバ,

$$\frac{a}{b}\times(-1)=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},\quad \frac{a}{b}\times(-2)=\frac{-2a}{b}=-\frac{2a}{b}$$

問題 23

次ノ分數ヲ混數ニ直ホスベシ

1. $\frac{25x}{7}$　**2.** $\frac{12x^2-5y}{6x}$

3. $\frac{2x^2-6x-1}{x-3}$　**4.** $\frac{x^3+ax^2-3a^2x-3a^2}{x-2a}$

5. $\frac{x^4+1}{x-1}$

次ノ諸式ノ値ヲ求ム.

6. $\frac{4a^2}{9b^2}\times 3b$　**7.** $\frac{3(a-b)}{8(a^3+b^3)}\times 4(a^2-ab+b^2)$

8. $\frac{x^2}{(x^2-1)^2}\times(x+1)$　**9.** $\frac{10(a^3-b^3)}{3(a+b)}\div 5(a^2+ab+b^2)$

10. $\frac{x^6-1}{x^2+1}\div(x^2-x+1)$

約　分

128. 次に(126)に述べたる結果を約分及び通分なる二つの緊要なる演算に應用せんとす.

分數の分母及び分子が公約數を有せざるときは之を**既約分數**と稱す.

分數を既約分數に直ほすには其分母と分子とを其最大公約數にて割るべし.

最大公約數にて一時に割る代りに算術におけるが如く分母と分子とを任意の公約數にて幾回も割り,遂に公約數

なきに至りて止むを便利とす.

公約數にて分母及び分子を割る演算を其約數を**消シ合フ**といふ.

例 1. $\dfrac{16a^4b^2c}{20a^3b^3d}$ ヲ既約分數ニ直ホセ.

分母子ノ最大公約數 $4a^3b^2$ ヲ以テ此兩數ヲ割レバ $\dfrac{4ac}{5bd}$ ヲ得,即チ $\dfrac{4ac}{5bd}$ ハ與ヘラレタル分數ニ等シキ既約分數ナリ.

例 2. $\dfrac{x^2-3x-28}{x^2-7x-44}$ ヲ既約分數ニ直ホセ.

$$與ヘラレタル分數=\frac{(x-7)(x+4)}{(x-11)(x+4)}=\frac{x-7}{x-11}$$

例 3. $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}$ ヲ既約分數ニ直ホセ.

$$與ヘラレタル分數=\frac{\{(a-b)-c\}\{(a-b)+c\}}{\{a-(b+c)\}\{a+(b+c)\}}$$
$$=\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{(a-b-c)(a+b+c)}=\frac{a-b+c}{a+b+c}$$

例 4. $\dfrac{x^2-4x+3}{4x^3-9x^2-15x+18}$ ヲ既約分數ニ直ホセ.

分母子ノ G.C.M. $x-3$ ニテ此兩數ヲ割レバ所要ノ結果 $\dfrac{x-1}{4x^2+3x-6}$ ヲ得.

此例ノ如キモ特ニ G.C.M. ヲ求ムルマデモナシ,如何トナレバ分子ノ因數ハ $x-1$ 及ビ $x-3$ ナルコト明カナリ,故ニ若シ分數ガ約セラルベキモノナレ

バ此等ノ因數ノ少クトモ一ツハ其分母ヲ割リ盡サザル可カラズ,即チ除法ヲ行フテ之ヲ試ムルニ $x-1$ ハ分母ヲ割リ盡シ得ザレドモ,$x-3$ ハ之ヲ割リ盡スヲ知ル.

問題 24

次ノ諸分數ヲ既約分數ニ直ホセ.

1. $\dfrac{5x}{15x^2y}$　2. $\dfrac{28x^4y^5z^7}{49x^5y^3z^2}$　3. $\dfrac{143x^3y^6z^7u^2}{91x^2y^8z^8u^7}$

4. $\dfrac{8x^2y^3z^5}{13x^3y^2z^4-15x^4y^3z^2}$　5. $\dfrac{a^2+ab}{2ab}$

6. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}$　7. $\dfrac{10a^2x}{5a^2x-15ay^2}$　8. $\dfrac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}$ $=\dfrac{(x+7)(x+3)}{(x-5)(x+3)}$

9. $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+3x+2}$ $=\dfrac{(x+2)(x-5)}{(x+1)(x+2)}$　10. $\dfrac{x^2-16x-17}{x^2-22x+85}$ $=\dfrac{(x-17)(x+1)}{(x-17)(x-5)}$

11. $\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(a+c)x+ac}$ $=\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x+a)(x+c)}$　12. $\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(c-a)x-ac}$ $=\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-a)(x+c)}$

13. $\dfrac{(x+a)^2-(b+c)^2}{(x+b)^2-(a+c)^2}$　14. $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab}{a^2-b^2-c^2-2bc}$

15. $\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^4-(x-1)^4}$　16. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+x+10}$

17. $\dfrac{x^2-10x+21}{x^3-46x-21}$　18. $\dfrac{x^2+x-42}{x^3-10x^2+21x+18}$

19. $\dfrac{6x^2-11x+5}{3x^3-2x^2-1}$　20. $\dfrac{20x^2+x-12}{12x^3-5x^2+5x-6}$

通　分

129. 分數を通分するには,各分數の分子に,其分數の分母を除き總ての他の分母を掛けて得たる積を新分子となし,總ての分母を掛け合はせたるものを公分母となすべし.

例へば$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, 及び$\frac{c}{f}$を通分すれば

$$\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf},\quad \frac{c}{d}=\frac{cbf}{dbf},\quad \frac{c}{f}=\frac{cbd}{fbd}$$

即ち$\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$及び$\frac{cbd}{fbd}$は夫々$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$及び$\frac{c}{f}$と同値の分數にして公分母dbfを有す.

上の法則は諸分數をして常に或公分母を有せしむと雖,この公分母は必ずしも最小のものにあらず故に屢〻次の法則を用ゐる.

130. 分數を最小公分母に通分するには,先づ諸分母の最小公倍數を求め之

を公分母と爲すべし,次に各分數の分母にて此公分母を割り,得たる商を其分子に掛け以て新分子となすべし.

例 1. $\frac{a}{yz}$, $\frac{b}{zx}$, $\frac{c}{xy}$ヲ最小公分母ニ通分スベシ.

諸分母ノL.C.M.ハxyzナリ.

因リテ　$\frac{a}{yz}=\frac{ax}{xyz}$, $\frac{b}{zx}=\frac{by}{xyz}$, $\frac{c}{xy}=\frac{cz}{xyz}$

例 2. $\frac{1}{3a(x-y)}$, $\frac{3}{4a^2(x+y)}$, $\frac{4}{5a^3b(x^2-y^2)}$ヲ最小公分母ニ通分スベシ.

諸分母ノL.C.M.ハ$60a^3b(x^2-y^2)$ナリ

今之ヲ各分母ニテ割レバ$20a^2b(x+y)$, $15ab(x-y)$, 12ヲ得. 因リテ

$$\frac{1}{3a(x-y)}=\frac{20a^2b(x+y)}{60a^3b(x^2-y^2)}\qquad \frac{3}{4a^2(x+y)}=\frac{45ab(x-y)}{60a^3b(x^2-y^2)}$$

$$\frac{4}{5a^3b(a^2-y^2)}=\frac{48}{60a^3b(x^2-y^2)}$$

問題 25

次ノ分數ヲ最小公分母ニ通分セヨ.

1. $\frac{b-c}{bc}$, $\frac{c-a}{ca}$, $\frac{a-b}{ab}$　　**2.** $\frac{3}{4x}$, $\frac{4}{6x^2}$, $\frac{5}{12x^3}$

3. $\frac{1}{x+1},\ \frac{3}{4x+4},\ \frac{x}{x^2-1}$

4. $\frac{a}{x-a},\ \frac{x}{a-x},\ \frac{a^2}{x^2-a^2},\ \frac{ax}{a^2-x^2}$

(x+a)(x-a) (a-x)(a+x)

5. $\frac{a}{x-a},\ \frac{a+x}{x^2+ax+a^2},\ \frac{ax}{x^3-a^3}$

6. $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab},\ \frac{1}{x^2-(a+c)x+ac},\ \frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$

分數の加法及び減法

131. 若干の分數の和を求め,或は二つの分數の差を求むるには此等の分數を通分して其分子の和或は差を求め之を分子と爲し,公分母を以て其分母と爲すべし.

例 1. $\frac{a+c}{b}$ ヲ $\frac{a-c}{b}$ ニ加ヘヨ.

此二分數ハ已ニ公分母ヲ有スルヲ以テ之ヲ通分スルノ要ナシ,故ニ

$$\frac{a+c}{b}+\frac{a-c}{b}=\frac{a+c+a-c}{b}=\frac{2a}{b}$$

例 2. $\frac{4a-3b}{c}$ ヨリ $\frac{3a-4b}{c}$ ヲ減ゼヨ.

$$\frac{4a-3b}{c}-\frac{3a-4b}{c}=\frac{4a-3b-(3a-4b)}{c}$$

$$=\frac{4a-3b-3a+4b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

初學者ハ精確ヲ期センガ爲メニ,此例ニ於ケルガ如クー々演算ヲ記スルヲ可トス.

例 3. $\frac{c}{a+b}$ ヲ $\frac{c}{a-b}$ ニ加ヘヨ.

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c(a-b)}{a^2-b^2},\quad \frac{c}{a-b}=\frac{c(a+b)}{a^2-b^2}$$

故ニ $$\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a-b}=\frac{c(a-b)+c(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{ca-cb+ca+cb}{a^2-b^2}=\frac{2ca}{a^2-b^2}$$

例 4. $\frac{2a}{x-a}-\frac{3a}{x+a}+\frac{a^2}{x^2-a^2}$ ノ値ヲ求ム.

項ノ數ガ二ツヨリ多クアルトキ,又ハ加フベキモノ或ハ減ズベキモノ相混ズルトキニ於テモ,演算ノ方法ハ前ト異ナルコトナシ.

分母ノ L.C.M. ハ x^2-a^2 ニシテ

$$\frac{2a}{x-a}=\frac{2a(x+a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{2ax+2a^2}{x^2-a^2}$$

$$\frac{3a}{x+a}=\frac{3a(x-a)}{(x+a)(x-a)}=\frac{3ax-3a^2}{x^2-a^2}$$

$\therefore$ 所設ノ式$=\frac{2ax+2a^2-(3ax-3a^2)+a^2}{x^2-a^2}=\frac{6a^2-ax}{x^2-a^2}$

例 5. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1+x^4}+\frac{8x^4}{1+x^8}$ ヲ簡單ニス

ベシ.

斯ノ如キ分數ニ於テハ諸分數ヲ一度ニ通分シテ加ヘ或ハ引クヨリモ或適宜ノ順序ニ從テ二ツ宛通分シテ加ヘ或ハ引クヲ簡便トス.

初メノ二分數ノ和$=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1-x}{1-x^2}+\frac{1+x}{1-x^2}=\frac{2}{1-x^2}$

∴ 初メノ三分數ノ和$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}$

$$=\frac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{1-x^4}=\frac{4}{1-x^4}$$

∴ 初メノ四分數ノ和$=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}$

$$=\frac{4(1+x^4)+4(1-x^4)}{1-x^8}=\frac{8}{1-x^8}$$

∴ 所設ノ全式$=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}$

$$=\frac{8(1+x^8)+8(1-x^8)}{1-x^{16}}=\frac{16}{1-x^{16}}$$

例 6. $x+3-\frac{x-2}{x^2-3x+4}$ ヲ一ツノ分數ニ直ホセ.

$$x+3-\frac{x-2}{x^2-3x+4}=\frac{x+3}{1}-\frac{x-2}{x^2-3x+4}$$

$$=\frac{(x+3)(x^2-3x+4)}{x^2-3x+4}-\frac{x-2}{x^2-3x+4}$$

$$=\frac{x^3-5x+12-(x-2)}{x^2-3x+4}$$

$$=\frac{x^3-5x+12-x+2}{x^2-3x+4}=\frac{x^3-6x+14}{x^2-3x+4}$$

132. 是までは,二つ或は二つより多くの分數を一つの分數に直ほす方法を示せり,逆に一つの分數を分ちて二つ或は二つより多くの分數となし,或は整數及び分數となすことを得べし.

例 1. $\frac{3bc-4ac+5ab}{abc}=\frac{3bc}{abc}-\frac{4ac}{abc}+\frac{5ab}{abc}=\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$

例 2. $\frac{6x^2+3x-27}{3x-7}=\frac{(2x+5)(3x-7)+2x+8}{3x-7}$

$$=2x+5+\frac{2x+8}{3x-7}$$

問題 26

次ノ諸式ノ値ヲ求ム.

1. $\frac{3a-5b}{4}+\frac{2a-b-c}{3}+\frac{a+b+c}{12}$

2. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}$　　3. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}$

4. $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$　　5. $\frac{1}{x+y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$

6. $\frac{1+3x}{1-3x}-\frac{1-3x}{1+3x}$　　7. $\frac{a}{x(a-x)}-\frac{x}{a(a-x)}$

8. $\frac{a}{2a-2b}-\frac{b}{2b-2a}$　　9. $\frac{a-2b}{3c}-\frac{b-3c}{2a}+\frac{4ab+3bc}{6ac}$

10. $\dfrac{2b}{a+b}-\dfrac{3a}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ **11.** $\dfrac{x^2}{ab}+\dfrac{(x+a)^2}{a(a-b)}+\dfrac{(x+b)}{b(a-b)}$

12. $\dfrac{b^2+bc+c^2}{b+c}-\dfrac{b^2-bc+c^2}{b-c}$ **13.** $\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{2a}{a-b}-\dfrac{a^3+a^2b}{a^2b-b^3}$

14. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{2x-1}-\dfrac{2x-7}{4x^2-1}$ **15.** $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2x}{(x+2)^2}$

16. $\dfrac{3}{2x-4}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2+8}$

17. $\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{x-3}{x^2-4x+16}+\dfrac{x^2}{x^3+64}$

18. $\dfrac{x^2+ax+a^2}{x^3-a^3}-\dfrac{x^2-ax+a^2}{x^3+a^3}$

19. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+1}+\dfrac{x-2}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}$

20. $\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}-\dfrac{2}{(x-2)(x-4)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

21. $\dfrac{1-2x}{3(x^2-x+1)}+\dfrac{x+1}{2(x^2+1)}+\dfrac{1}{6(x+1)}$

22. $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{xy-2x^2}{x^3-y^3}$

23. $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{x-1}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{x^4+x^2+1}$

24. $\dfrac{a+b}{ax+by}+\dfrac{a-b}{ax-by}+\dfrac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x^2+b^2y^2}$

25. $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}-\dfrac{3}{x^2-5x+4}$

26. $\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{4a}{x^2-a^2}-\dfrac{2a}{x^2+a^2}$

27. $\dfrac{3}{x^2+3x}+\dfrac{5}{x^2+5x}+\dfrac{2(x+4)}{x^2+8x+15}$

28. $\dfrac{4}{x(x-2)}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{3}{x(x-3)}$

29. $\dfrac{\overbrace{a^2-(b-c)^2}^{a}}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{\overbrace{b^2-(c-a)^2}^{b}}{(b+c)^2-a^2}+\dfrac{\overbrace{c^2-(a-b)^2}^{c}}{(c+a)^2-b^2}$

30. $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{2x^2}{(1-x)(1+x^2)}$

$$-\frac{2x^2}{(1+x)(1+x^2)}-\frac{8x^3}{1-x^4}$$

133. 次に掲げたるは緊要なる例題なり.

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}\ \text{を}$$

簡單にすべし.

此例題に於て,初學者は或は諸分母の積を取りて直ちに公分母となし,爲めに演算をして極めて煩雜ならしむるの虞なしとせず,第二分數の分母の因數 $b-a$ と第一分數の分母の因數 $a-b$ とは唯符號を異にするのみ,而して (127) に依りて $\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}=-\dfrac{b}{(b-c)(a-b)}$

又第三分數の分母 $(c-a)(c-b)$ は
$-(c-a)(b-c)$ に等しく，第一分數の分母
$(a-b)(a-c)$ は $-(a-b)(c-a)$ に等しきを以て
與へられたる式

$$=-\frac{a}{(a-b)(c-a)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}-\frac{c}{(c-a)(b-c)}$$

此形に付きて吟味するときは最小公分母は $(a-b)(b-c)(c-a)$ なること明白なり，
依りて

與へられたる式

$$=\frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{-ab+ac-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=0$$

問題　27

次ノ諸式ノ値ヲ求ム.

1. $\dfrac{a}{(x-a)(a-b)}+\dfrac{b}{(x-b)(b-a)}$

2. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$

3. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

4. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}-\dfrac{1}{abc}$

5. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

6. $\dfrac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab}+\dfrac{x+b}{x^2-(a+c)x+ac}+\dfrac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}$

才一學期

第十四編

分數式ノ續キ

(乘法　除法)

乘　法

134. 若干の分數を掛け合はするには此等の分數の分子を掛け合はせたるものを分子となし,其分母を掛け合はせたるものを分母となすべし.

135. 此法則の證明は次の如し.

$\frac{a}{b}$ 及び $\frac{c}{d}$ を掛け合はせらるべき二つの分數とし $\frac{a}{b}=x, \frac{c}{d}=y$ とすれば

$a=bx,\ c=dy$ なり,　故に　$ac=bdxy$ なり,

bd を以て其兩邊を割れば $\frac{ac}{bd}=xy$

然るに $xy=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ 故に $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

ac は掛け合はせらるべき二つの分數の

分子の積にして,bd は其分母の積なり,即ち法則を證明す.

二つより多くの分數が掛け合はせらるる場合に於ても亦同様にして上の法則を證明することを得.

136. 掛け合はすべき分數の分子及び分母の因數を,夫々掛け合はす前に分子及び分母が公因數を有するや否やを檢査するを可とす,如何となれば若し公因數あれば,之を互に消し合ひて結果を簡單になし得べければなり.

〔(128)を見よ.〕

例 1. a ニ $\frac{b}{c}$ ヲ掛ケヨ.

$$a=\frac{a}{1}\qquad\therefore\quad \frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$$

サレバ $a\frac{b}{c}$ ト $\frac{ab}{c}$ トハ同値ナリ,　例ヘバ $4\frac{x}{5}=\frac{4x}{5}$

又
$$\frac{1}{4}(2x-3)=\frac{2x-3}{4}$$

例 2. $\frac{x}{y}$ ニ $\frac{x}{y}$ ヲ掛ケヨ.

$$\frac{x}{y}\times\frac{x}{y}=\frac{x\times x}{y\times y}=\frac{x^2}{y^2},\qquad\therefore\ \left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}$$

例 3. $\dfrac{3a}{4b}$ ニ $\dfrac{8c}{9a}$ ヲ掛ケヨ.

$$\frac{3a}{4b}\times\frac{8c}{9a}=\frac{3a\times 8c}{4b\times 9a}=\frac{2c\times 12a}{3b\times 12a}=\frac{2c}{3b}$$

例 4. $\dfrac{3a^2}{(a+b)^2}$ ニ $\dfrac{4(a^2-b^2)}{3ab}$ ヲ掛ケヨ.

$$\frac{3a^2}{(a+b)^2}\times\frac{4(a^2-b^2)}{3ab}=\frac{4a(a-b)\times 3a(a+b)}{b(a+b)\times 3a(a+b)}=\frac{4a(a-b)}{b(a+b)}$$

例 5. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1$ ニ $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1$ ヲ掛ケヨ.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\frac{a}{b}\,\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2-1=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}-1$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2b^2}$$

例 6. $\dfrac{1-a^2}{b+b^2}$, $\dfrac{1-b^2}{a+a^2}$, $b+\dfrac{ab}{1-a}$ ヲ掛ケ合ハセヨ.

先ヅ混數 $b+\dfrac{ab}{1-a}$ ヲ分數ニ直ホセバ

$$b+\frac{ab}{1-a}=\frac{b(1-a)+ab}{1-a}=\frac{b}{1-a}$$

依リテ所設ノ三式ノ積 $=\dfrac{1-a^2}{b+b^2}\times\dfrac{1-b^2}{a+a^2}\times\dfrac{b}{1-a}$

$$=\frac{(1-a^2)(1-b^2)b}{b(1+b)a(1+a)(1-a)}=\frac{1-b}{a}$$

137. 前諸編に於て爲せし如く,ここに又或例題を解くに當り,法則として用ゐらるべき二三の結果を掲ぐべし.

(i) $\dfrac{a}{b}\times\left(-\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{-c}{d}=\dfrac{-ac}{bd}=-\dfrac{ac}{bd}$

(ii) $-\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{-a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{-ac}{bd}=-\dfrac{ac}{bd}$

(iii) $\left(-\dfrac{a}{b}\right)\times\left(-\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{-a}{b}\times\dfrac{-c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$

問題 28

次ニ掲グル諸式ノ値ヲ看出セ.

1. $\dfrac{a^2}{bc}\times\dfrac{b^2}{ac}\times\dfrac{c^2}{ab}$　　2. $\dfrac{a^2b}{x^2y}\times\dfrac{b^2c}{y^2z}\times\dfrac{c^2a}{z^2x}$

3. $\dfrac{x+1}{x-1}\times\dfrac{x+2}{x^2-1}\times\dfrac{x-1}{(x+2)^2}$　　4. $\dfrac{xa}{x+a}\times\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$

5. $\left(b+\dfrac{a^2}{b}\right)\left(a-\dfrac{b^2}{a}\right)$　　6. $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(b-\dfrac{ab}{a+b}\right)$

7. $\dfrac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}\times\dfrac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$

8. $\dfrac{x^6-y^6}{x^4+2x^2y^2+y^4}\times\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}\times\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$

9. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy}\times\dfrac{xy-y^2}{x^4-y^4}\times\dfrac{x}{y}$　　10. $\dfrac{x^4-a^4}{x^3-a^3}\times\dfrac{x^2+ax+a^2}{x+a}$

11. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}+1\right)\times\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$

12. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\times\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}\times\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}$

13. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}\times\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-7x+12}$

除　法

138. 一分數を他の分數にて除するには除數の分子と分母とを交換して得たる分數を被除數に乘ずべし.

139. 此法則の證は次の如し.

$\dfrac{a}{b}$ を $\dfrac{c}{d}$ にて割ることを要むとす.

$\dfrac{a}{b}=x,\ \dfrac{c}{d}=y$ とすれば　$a=bx,\ c=dy$

$\therefore\quad ad=bdx,\quad bc=bdy\quad\therefore\quad \dfrac{ad}{bc}=\dfrac{bdx}{bdy}=\dfrac{x}{y}$

然るに　$\dfrac{x}{y}=x\div y=\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

例 1. a ヲ $\dfrac{b}{c}$ ニテ割ルベシ.

$a=\dfrac{a}{1}\quad\therefore\quad \dfrac{a}{1}\div\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{1}\times\dfrac{c}{b}=\dfrac{ac}{b}$

例 2. $\dfrac{9a}{8c}$ ニテ $\dfrac{3a}{4b}$ ヲ割ルベシ.

$\dfrac{3a}{4b}\div\dfrac{9a}{8c}=\dfrac{3a}{4b}\times\dfrac{8c}{9a}=\dfrac{2c\times12a}{3b\times12a}=\dfrac{2c}{3b}$

例 3. $\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$ ニテ $\dfrac{ab-b^2}{(a+b)^2}$ ヲ割ルベシ.

$$\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}\div\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}\times\frac{a^2-b^2}{b^2}$$

$$=\frac{b(a-b)(a+b)(a-b)}{b^2(a+b)^2}=\frac{(a-b)^2}{b(a+b)}$$

140. (137) に載せたる結果は分數除法に關係あるを以て再び爰に揭ぐ.

(i)　$\dfrac{a}{b}\times\left(-\dfrac{c}{d}\right)=-\dfrac{ac}{bd}$

$$\therefore\quad -\frac{ac}{bd}\div\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}$$

(ii)　$-\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=-\dfrac{ac}{bd}$

$$\therefore\quad -\frac{ac}{bd}\div\frac{c}{d}=-\frac{a}{b}$$

(iii)　$\left(-\dfrac{a}{b}\right)\times\left(-\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{ac}{bd}$

$$\therefore\quad \frac{ac}{bd}\div\left(-\frac{c}{d}\right)=-\frac{a}{b}$$

$\frac{10}{5}=2$

問題 29

次ニ掲グル諸式ノ値ヲ看出セ.

1. $\dfrac{4a^2b}{5x^2y} \div \dfrac{2ab^2}{15xy}$ 2. $\dfrac{3a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4} \div \dfrac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^2z^3}$

3. $\dfrac{1}{x^2-y^2} \div \dfrac{1}{x-y}$ 4. $\dfrac{6(ab-b^2)^2}{a(a+b)^2} \div \dfrac{2b}{a(a-b)^2}$

5. $\dfrac{a^2-4x^2}{a^2-4ax} \div \dfrac{a^2-2ax}{ax+4x^2}$ 6. $\dfrac{8x^3}{x^3-y^3} \div \dfrac{4x^2}{x^2+xy+y^2}$

7. $\dfrac{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}{x^3+y^3} \div \dfrac{(a+x)^2}{x^2-xy+y^2}$

8. $\dfrac{x^2+(a+c)x+ac}{x^2+(b+c)x+bc} \div \dfrac{x^2-a^2}{x^2+b^2}$

9. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3+y^3} \div \dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}$

10. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9} \div \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}$

11. $\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\left(1-\dfrac{x}{y}\right) \div \dfrac{y}{x^2+y^2}$

12. $\left(5x^2-\dfrac{1}{5}\right) \div \left(x+\dfrac{1}{5}\right)$

13. $\left(a^3-\dfrac{1}{a^3}\right) \div \left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

14. $\left(\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{x}\right) \div \left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)$

15. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+1+\dfrac{a^2}{x^2}\right) \div \left(\dfrac{x}{a}-1+\dfrac{a}{x}\right)$

16. $\left\{\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{a^3}{x^3}-3\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{a^2}{x^2}\right)+\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}\right\} \div \left\{\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}\right\}$

141. 分數式の形を爲す所の或複雜なる式は前に述べたる分數に關する法則を用ゐて之を簡單に爲すことを得.

例 1. $\dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{x}{y}}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$\frac{a}{b}-\frac{x}{y}=\frac{ay-bx}{by}, \qquad \frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{ay+bx}{by}$$

∴ 所設ノ式 $=\dfrac{ay-bx}{by} \div \dfrac{ay+bx}{by}=\dfrac{ay-bx}{by}\times\dfrac{by}{ay+bx}$

$$=\frac{ay-bx}{ay+bx}$$

例 2. $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$1+\frac{a+1}{3-a}=\frac{3-a}{3-a}+\frac{a+1}{3-a}=\frac{3-a+a+1}{3-a}=\frac{4}{3-a}$$

$$1\div\frac{4}{3-a}=\frac{1}{1}\times\frac{3-a}{4}=\frac{3-a}{4}$$

$$a+\frac{3-a}{4}=\frac{4a}{4}+\frac{3-a}{4}=\frac{4a+3-a}{4}=\frac{3+3a}{4}$$

而シテ $1\div\dfrac{3+3a}{4}=\dfrac{1}{1}\times\dfrac{4}{3+3a}=\dfrac{4}{3+3a}$

或ハ簡單ニ次ノ如ク爲スヲ得ベシ.

與ヘラレタル式 $=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3-a}}}=\dfrac{1}{a+\dfrac{3-a}{4}}=\dfrac{1}{\dfrac{3+3a}{4}}=\dfrac{4}{3+3a}$

問題 30

次ニ掲グル諸式ヲ簡單ニセヨ.

1. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$　　**2.** $\dfrac{\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}}{\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)^2}$

3. $\dfrac{\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x-1}{3}}{\dfrac{13}{6}(x+1)-\dfrac{x}{3}-2\dfrac{1}{2}}$　　**4.** $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}$

5. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x-1}{x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}}$　　**6.** $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

7. $1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$　　**8.** $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

9. $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$

10. $\left(\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{d^2}{x^2-y^2}\right)\div\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x}{x^2-y^2}\right)$

11. $\dfrac{1}{a^2-\dfrac{a^3-1}{a+\dfrac{1}{a+1}}}$

12. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b-a}-\dfrac{a}{a+b}$ ノ値ヲ求ム. 但シ $x=\dfrac{a^2(b-a)}{b(b+a)}$

第十五編

一次方程式ノ續キ
及ヒ
一次方程式ノ如クニシテ解クコトヲ得ベキ分數方程式

142. 本編に於ては第八編に於て說きたるものより稍複雜なる一次方程式及び未知數に付きて整式ならざる方程式にして其解法をして一次方程式の解方に歸せしむることを得るものに付きて論ぜんとす,但し未知數の數は何れも一つなりとす.

143. 例 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$\frac{x+6}{11}-\frac{2x-18}{3}+\frac{2x+3}{4}=5\frac{1}{3}+\frac{3x+4}{12}$$

此例ニ於テハ先ヅ其一部ニ付キテ分母ヲ拂ヒ,式ヲ簡單ニナシ而ル後他ノ分母ヲ拂フ方ガ簡便ナリ

先ヅ12ヲ掛クレバ

$$\frac{12(x+6)}{11}-4(2x-18)+3(2x+3)=\frac{16}{3}\times 12+3x+4$$

即チ　$$\frac{12(x+6)}{11}-8x+72+6x+9=64+3x+4$$

項ヲ移シテ簡單ニスレバ

$$\frac{12(x+6)}{11}=5x-13$$

11ヲ掛クレバ　$$12(x+6)=11(5x-13)$$

之ヲ解ケバ　$$x=5$$

144.　$\dfrac{7}{x-2}=\dfrac{5}{x-3}$ ヲ解ケ.

$(x-2)(x-3)$ を兩邊に掛くれば

$$7(x-3)=5(x-2)$$

7x−5x=21−10

之を解けば　$x=5\frac{1}{2}$

ここに $(x-2)(x-3)$ を方程式の兩邊に掛けたるは $x-2$, $x-3$ なる二式は何れも零に等しからずと假定せるなり（x の値は固より方程式を解きたる上にあらざれば知ること能はざるを以て $x-2$ 或は $x-3$ は零となるやも知るべからず）如何となれば若し何れにても其一つが零に等しからんには其積も亦零となる

を以て之を方程式の兩邊に掛くることとは不都合なればなり.蓋し斯の如くにして方程式を解くときは爲めに元の方程式に適合せざる根を得ることあり,因りて上の方法に依りて方程式を解くときは其根が元の方程式に適合するや否やの驗めしを爲さざる可からず.

上の例に於ては $5\frac{1}{2}$ は元方程式の根なり,如何となれば其方程式に於て $x=5\frac{1}{2}$ とすれば兩邊は何れも2となる.

145.　前節の如き x に付きて整式ならざる方程式即ち分數方程式を解くには下の如く爲すも可なり.

方程式の總ての項を一邊に集めて一つの分數となし然る後之を既約分數に直ほし(若し其分數が既約分數ならざるときは)而して其分子を零に等しと置きて得る所の方程式を解くべし,然ると

きは所設の方程式の根を得,而して決して餘計のものの入り來ることなし,故に此解法に依るときは得る所の x の値に付きて一々驗めしを爲すを要せず.

146.

例 1. $\dfrac{x-5}{x-7}=\dfrac{x+3}{x+9}$ ヲ解ケ.

$(x-7)(x+9)$ ヲ掛ケヨ

然レバ　$(x+9)(x-5)=(x-7)(x+3)$

即チ　$x^2+4x-45=x^2-4x-21$

兩邊ヨリ x^2 ヲ減ジテ　$4x-45=-4x-21$

項ヲ移シテ　$4x+4x=45-21$

即チ　$8x=24$

∴　$x=\dfrac{24}{8}=3$

元ノ方程式ニ於テ $x=3$ トスレバ兩邊ハ何レモ $\dfrac{1}{2}$ トナル,因リテ3ハ所要ノ根ナリ.

例 2. $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{4x+5}{4x+4}+\dfrac{3x+3}{3x+1}$ ヲ解ケ.

與ヘラレタル方程式ヲ次ノ形ニ書クコトヲ得.

$$\frac{2(x+1)+1}{x+1}=\frac{(4x+4)+1}{4x+4}+\frac{(3x+1)+2}{3x+1}$$

∴　$2+\dfrac{1}{x+1}=1+\dfrac{1}{4x+4}+1+\dfrac{2}{3x+1}$

∴　$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{3x+1}$　即チ　$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{3x+1}$

∴　$9x+3=8x+8$　因リテ　$x=5$

元ノ方程式ニ於テ $x=5$ トスレバ,兩邊ハ何レモ $\dfrac{13}{6}$ トナル,因リテ5ハ所要ノ根ナリ.

例 3. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}$ ヲ解ケ.

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{(x-1)(x-3)-(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-4x+3-(x^2-4x+4)}{(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

又　$\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{(x-4)(x-6)-(x-5)^2}{(x-5)(x-6)}$

$$=\frac{x^2-10x+24-(x^2-10x+25)}{(x-5)(x-6)}$$

$$=-\frac{1}{(x-5)(x-6)}$$

因リテ與ヘラレタル方程式ハ次ノ如クナル,

$$-\frac{1}{(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{(x-5)(x-6)}$$

兩邊ノ符號ヲ變ジシ　$\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{(x-5)(x-6)}$

上ノ方程式ニ於テ其兩邊ノ分子同一ナルヲ以テ其分母ハ相等シ.

即チ　$(x-5)(x-6)=(x-2)(x-3)$

即チ　$x^2-11x+30=x^2-5x+6$

∴　$-11x+5x=6-30$　即チ　$-6x=-24$

∴　$6x=24$　∴　$x=4$

(別解) 所設ノ方程式ヲ次ノ如ク書クコトヲ得

$$\frac{(x-2)+1}{x-2}-\frac{(x-3)+1}{x-3}=\frac{(x-5)+1}{x-5}-\frac{(x-6)+1}{x-6}$$

故ニ $$1+\frac{1}{x-2}-1-\frac{1}{x-3}=1+\frac{1}{x-5}-1-\frac{1}{x-6}$$

故ニ $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}$$

因リテ $$\frac{-1}{(x-2)(x-3)}=\frac{-1}{(x-5)(x-6)}$$

以下前ニ同ジ.

147. 或方程式に於ては已知數を表はすに文字を用ゐることあり,是迄の如くxは未知數を表はすものとし而して其他の文字は各一つの已知數を表はすものとす.

例 1. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$ ヲ解ケ

ab ヲ乘ズレバ $bx+ax=abc$ 即チ $(a+b)x=abc$

$a+b$ ニテ割レバ $x=\frac{abc}{a+b}$

例 2. $\frac{x-a}{x-b}=\frac{(2x-a)^2}{(2x-b)^2}$ ヲ解ケ.

分數ヲ去レバ $(x-a)(2x-b)^2=(x-b)(2x-a)^2$

即チ $(x-a)(4x^2-4xb+b^2)=(x-b)(4x^2-4xa+a^2)$

掛ケ合ハスレバ

$$4x^3-4x^2(a+b)+x(4ab+b^2)-ab^2=4x^3-4x^2(a+b)$$

$$+x(4ab+a^2)-a^2b$$

∴ $xb^2-ab^2=xa^2-a^2b$

即チ $x(a^2-b^2)=a^2b-ab^2=ab(a-b)$

∴ $$x=\frac{ab(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{ab}{a+b}$$

元ノ方程式ニ於テ $x=\frac{ab}{a+b}$ トスレバ兩邊ハ何レモ $\frac{a^2}{b^2}$ トナル,故ニ $\frac{ab}{a+b}$ ハ所要ノ根ナリ.

〔別解〕 所設ノ方程式ヲ次ノ如ク書クコトヲ得

$$\frac{(2x-a)^2}{x-a}=\frac{(2x-b)^2}{x-b}$$

即チ $$\frac{4x^2-4ax+a^2}{x-a}=\frac{4x^2-4bx+b^2}{x-b}$$

即チ $$4x+\frac{a^2}{x-a}=4x+\frac{b^2}{x-b}$$

∴ $$\frac{a^2}{x-a}=\frac{b^2}{x-b}$$

即チ $a^2x-a^2b=b^2x-ab^2$

以下前ニ同ジ.

問題 31

次ニ掲グル方程式ヲ解ケ

1. $\frac{12}{x}+\frac{1}{12x}=\frac{29}{24}$ 2. $\frac{198}{3x-4}=\frac{216}{5x-6}$

3. $\frac{45}{2x+3}=\frac{57}{4x-5}$

4. $\frac{3x-1}{2}-\frac{2x-5}{3}+\frac{x-3}{4}-\frac{x}{6}=x+1$

5. $x+\frac{5x-8}{3}=6-\frac{3x-8}{5}$

6. $x+1-\frac{x^2+3}{x+2}=2$　　7. $\frac{x-1}{x-2}=\frac{7x-21}{7x-26}$

8. $\frac{x}{7}-\frac{3x}{2}+\frac{71}{7}=\frac{3x+1}{2}+1\frac{1}{14}$

9. $\frac{7+9x}{4}-1+\frac{2-x}{9}=7x$

10. $\frac{1}{3}(2x-10)-\frac{1}{11}(3x-40)=15-\frac{1}{5}(57-x)$

11. $\frac{6x+8}{2x+1}-\frac{2x+38}{x+12}=1$

12. $\frac{x-1}{4}-\frac{x-5}{32}+\frac{15-2x}{40}=\frac{9-x}{2}-\frac{7}{8}$

13. $\frac{x+1}{7}+x(x-2)=(x-1)^2$

14. $\frac{3x^2-2x-8}{5}=\frac{(7x-2)(3x-6)}{35}$

15. $\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{4x-2}{3x-2}=\frac{1}{6}$

16. $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$

17. $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$

18. $\frac{3-2x}{1-2x}-\frac{2x-5}{2x-7}=1-\frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}$

19. $\frac{3+x}{3-x}-\frac{2+x}{2-x}-\frac{1+x}{1-x}=1$

20. $a(x-a)+b(x-b)+2ab=0$

21. $\frac{a-b}{x-c}=\frac{a+b}{x+c}$　　22. $\frac{a(x-b)-b(x-a)}{x-2c}=b-a$

23. $(ax-b)(bx+a)=a(bx^2-a)$

24. $(x-a)(x-b)(x+2a+2b)=(x+2a)(x+2b)(x-a-b)$

25. $\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a-b}{x-c}$

26. $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-a+c}=\frac{1}{x-b-c}-\frac{1}{x-b}$

27. $\frac{ax}{x-b}+\frac{bx}{x-a}=a+b$

第十六編

一次方程式應用問題ノ續キ

148. ここに第九編に出したるが如き一次方程式應用問題の較,複雜なるものを示さんとす.

問題 1. 八十ヲ四分シテ,其第一部分ニ三ヲ加ヘ第二部分ヨリ三ヲ引キ第三部分ニ三ヲ掛ケ第四部分ヲ三ニテ割リ各結果ヲシテ悉ク相等シカラシメンコトヲ要ム.

第一部分ヲ表ハスニ x ヲ以テセヨ,然レバ之ニ 3 ヲ加ヘタル結果 $x+3$ ハ第二部分ヨリ 3 ヲ引キタル者ニ等シカルベキヲ以テ第二部分ハ $x+6$ ナルベシ

又 $x+3$ ハ第三部分ニ 3 ヲ掛ケタルモノニ等シカルベキヲ以テ第三部分ハ $\frac{x+3}{3}$ ナルベシ.

又 $x+3$ ハ 3 ニテ第四部分ヲ割リタルモノニ等シカルベキヲ以テ第四部分ハ $3(x+3)$ ナルベシ.

今此等ノ各部分ハ合ハセテ 80 ニ等シ,

即チ $$x+x+6+\frac{x+3}{3}+3(x+3)=80$$

即チ $$2x+6+\frac{x+3}{3}+3x+9=80$$

即チ $$5x+\frac{x+3}{3}=80-15=65$$

3 ヲ乘ズレバ $$15x+x+3=195 \quad 即チ \quad 16x=192$$

$$\therefore \quad x=\frac{192}{16}=12$$

故ニ所要ノ四ツノ部分ハ 12,18,5, 及ビ 45 ナリ.

問題 2. 金嚢ノ中五錢白銅貨ト二錢銅貨ト合ハセテ二百五十六個アリ,而シテ其總金額ハ金九圓拾七錢ナリトイフ,金嚢中銅貨ノ數幾何.

x ヲ以テ銅貨ノ數トスレバ $256-x$ ハ白銅貨ノ數ナルベシ

$$\therefore \quad 2x+5(256-x)=917$$

$$\therefore \quad 3x=5\times256-917=1280-917=363$$

$$\therefore \quad x=121$$

故ニ銅貨ノ數ハ 121 個,白銅貨ノ數ハ 135 個ナリ.

問題 3. 水槽アリ,之ニ水ヲ滿タサントスルニ甲管ノミヲ以テ注入スレバ六時間ヲ要スベク乙管ノミヲ以テスレバ八時間ヲ要スベシ,而シテ又龍頭ノ口ヲ開キ全槽ノ水ヲ放出セシメントスルニハ十二時間ヲ要ストイフ,今甲乙兩管ヨリ水ヲ注入スルト同時ニ龍頭ノ口ヨリ水ヲ放出セシムレバ幾時間ニシテ滿水トナルベキカ.

x ヲ以テ所要ノ時間數ヲ表ハストセヨ,甲管ヨリ

入ル水ハ一時間ニ槽ノ$\frac{1}{6}$ヲ充タスヲ以テx時間ニハ其$\frac{x}{6}$ヲ充タスベシ,乙ヨリスル水ハ一時間ニ其$\frac{1}{8}$ヲ充タスヲ以テx時間ニハ其$\frac{x}{8}$ヲ充タスベシ然ルニ龍頭ヨリ出ヅル水ハ一時間ニ槽ノ容量ノ$\frac{1}{12}$ニ當ルヲ以テx時間ニ流出スル水量ハ槽ノ$\frac{x}{12}$ナルベシ,今x時間ニ全槽滿水ストイフニヨリ

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{8}-\frac{x}{12}=1$$

24ヲ乘ズレバ $4x+3x-2x=24$ 即チ $5x=24$

∴ $x=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$ 答四時四十八分間

149. 時としてはxを所要の未知數と爲さずして,之と已知の關係を有する所の某數をxにて表はす方が簡便なることあり.

問題 甲乙二旅人アリ,甲ハ某所ヲ出發シ五時間ニ七里ノ速サニテ旅行セリ,乙ハ其後八時間ヲ經テ同所ヲ出發シ三時間ニ五里ノ速サニテ甲ノ跡ヲ追ヘリ,甲ハ乙ニ追付カルル迄ニ幾許里ヲ行キ得ルカ.

甲カ乙ニ追付カルル迄ニ甲ノ旅行セシ時ノ數ヲxニテ表ハセ,然レバ$x-8$ハ乙ノ旅行セル時ノ數ナリ.

今甲ハ五時間ニ七里ヲ行クヲ以テ一時間ニハ一里ノ$\frac{7}{5}$ヲ行クベシ,故ニx時間ニハ$\frac{7x}{5}$里ヲ行クベシ

同樣ニ乙ハ一時間ニ一里ノ$\frac{5}{3}$ヲ行クヲ以テ$x-8$時間ニハ$\frac{5}{3}(x-8)$里ヲ行クベシ,然ルニ乙ガ甲ニ追付キタル時ニハ兩人ノ旅行セル里程相同ジキヲ以テ

$$\frac{5}{3}(x-8)=\frac{7x}{5}$$

15ヲ掛ケテ $25(x-8)=21x$ 即チ $25x-200=21x$

∴ $25x-21x=200$ 即チ $4x=200$

∴ $x=\frac{200}{4}=50$

∴ $\frac{7x}{5}=\frac{7}{5}\times50=70$ 即チ甲ハ乙ニ追付カルルマデニ七十里ヲ行クベシ.

150. 或問題に於ては算術に於て學生の已に修得したる比例の知識を要す次の三問題は其例なり.

問題 1. 56ヲ二分シ其一部分ト他ノ一部分トノ比ヲシテ3ノ4ニ對スル如クナラシメヨ.

xヲ以テ一部分ヲ表ハストキハ他ノ一部分ハ$56-x$ナルベシ.

∴ $\frac{x}{56-x}=\frac{3}{4}$

分數ヲ去レバ $4x=3(56-x)$ 即チ $4x=168-3x$

∴ $7x=168$ ∴ $x=\frac{168}{7}=24$

因リテ一部分ハ24ニシテ他ノ一部分ハ56−24即チ32ナリ.

上ニ述ブル所ハ初學者ニハ最モ心付キ易キ解方ナリ,然レドモ之ヨリ一層簡單ナル解法アリ,即チ次ノ如シ.

$3x$ヲ以テ一部分ヲ表ハセバ他ノ一部分ハ$4x$ナルベシ是レ兩部分ノ比ハ3ノ4ニ對スル如クナルヲ以テナリ,然ルニ其和56ナリ,

$\therefore \quad 3x+4x=56$ 即チ $7x=56$ $\therefore \ x=8$

因リテ一部分ハ 3×8 即チ 24 ニシテ他ノ一部分ハ 4×8 即チ 32ナリ.

問題 2. 甲乙二桶アリ,甲桶ハ一斗二升ノ酒ト一斗八升ノ水トヲ有シ,乙桶ハ九升ノ酒ト三升ノ水トヲ有ス,今此混合物ヲ更ニ混合シテ酒ト水ト各七升ヅツノモノヲ得ントスルニハ,二ツノ桶ヨリ各幾升宛ヲ汲ミ出スベキカ.

xヲ以テ甲ヨリ汲ミ出スベキ升數ヲ表ハストセヨ,然レバ所要ノ混合液ハ其量一斗四升ナルヲ以テ$14-x$ハ乙桶中ヨリ汲ミ出スベキ升數ナルベシ.

今甲桶ノ液量三斗ノ中酒ハ一斗二升ナルニ由リ酒ノ分量ハ全量ノ $\frac{12}{30}$ ナリ, 故ニ甲桶ヨリ汲ミ出スベキx升中ニハ酒 $\frac{12x}{30}$ 升ヲ含有スベシ.

同樣ニ乙桶ヨリ汲ミ出スベキ $14-x$升中ニハ酒 $\frac{9(14-x)}{12}$ 升ヲ含有スベシ,今所要ノ混合液ハ酒七升ヲ含有スベキヲ以テ

$$\frac{12x}{30}+\frac{9(14-x)}{12}=7 \qquad 即チ \quad \frac{2x}{5}+\frac{3(14-x)}{4}=7$$

$$\therefore \quad 8x+15(14-x)=140 \qquad 即チ \quad 8x+210-15x=140$$

即チ $7x=70$ $\therefore \ x=10$

故ニ甲桶ヨリ一斗,乙桶ヨリ四升汲ミ出サザル可カラズ.

問題 3. 二時ト三時トノ間ニ於テ時計ノ兩針重ナリ合フ時刻ヲ問フ.

xヲ以テ二時後ノ所要ノ分數ヲ表ハストセヨ,x分時間ニハ長針ハ時計ノ盤面ニ於テx分劃ヲ回轉ス,而シテ長針ノ回轉ハ短針ノ回轉ヨリ十二倍速キヲ以テ短針ハx分時間ニ$\frac{x}{12}$分劃ヲ回轉スベシ,又二時ニ於テハ短針ハ長針ヨリ十分劃前ニ在ルヲ以テ兩針相合スルマデニハ,長針ハ短針ヨリ十分劃多ク回轉セザルベカラズ.

$\therefore \quad x=\frac{x}{12}+10$ 即チ $12x=x+120$

即チ $11x=120$ $\therefore \ x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$

即チ 2時$10\frac{10}{11}$分ニ於テ兩針ハ重ナル.

問題 32

1. 44ヲ二分シ其大ナル部分ニ5ヲ加ヘタルモノノ小ナル部分ニ7ヲ加ヘタルモノニ對スル比

ヲシテ 4:3 ノ如クナラシメヨ.

2. 100 ヲ二分シ,其兩部分ノ差ノ平方ヲシテ小ナル部分ノ二倍ノ平方ヨリ多キコト 2000 ナラシムルコトヲ要ム.

3. 甲乙兩種ノ地所二百五十坪ヲ貸シテ金拾五圓貳拾錢ノ收入アリ,甲種ノ地代ハ一坪ニ付金八錢,乙種ハ一坪ニ付金五錢ナリ,兩種ノ地所各幾何坪ナリヤ.

4. 金七拾貳圓ノ手形ヲ五圓金貨及ビ一圓金貨ヲ以テ支拂ヒシニ貨幣ノ個數ハ二十八ナリシトイフ,各貨幣ノ數ヲ問フ.

5. 甲乙丙三人ノ職工アリ,一定ノ時間ニ於テ甲ハ乙ノ半バヲ爲シ得ベク,乙ハ丙ノ半バヲ爲シ得ベシ,今三人協力シテ一工事ヲ廿四日間ニ成就セリトイフ,然ラバ此工事ヲ一人宛ニテ爲ストキハ各幾日ニテ成就シ得ベキヤ.

6. 水槽アリ甲乙ノ兩管ニテ之ニ水ヲ注入スレバ十二分間ニ充滿スベク而シテ甲管ノミヲ用キルトキハ二十分間ニ充滿スベシトイフ,然ラバ乙管ノミヲ用キルトキハ幾分間ニテ充滿スベキヤ.

7. 十「ノット」ノ速サヲ以テ進航スル一軍艦八「ノット」ノ速サヲ以テ進航スル敵艦ヲ十八海里ノ先方ニ見之ヲ追ハントス,此敵艦ハ追付カルルマデニ

幾許海里ヲ走リ得ベキカ.〔十「ノット」ノ速サトハ一時間ニ十海里ノ速サヲイフ.〕

8. 百五十四里相距リタル兩地ヨリ甲乙兩人同時ニ發足シ途中ニテ相會センコトヲ約ス,甲ハ二時間ニ三里ノ速サ,乙ハ四時間ニ五里ノ速サニテ歩ムトスレバ最初發足セシ後幾時間ニシテ相會スベキヤ.

9. 人アリ其所持金九拾八圓ノ中若干ヲ單利年五分ニテ,又殘金ヲ單利年六分ニテ貸シ付ケタルニ十五年ノ後利子合計金八拾壹圓トナレリトイフ五分利貸シノ金額ヲ問フ.

10. 某國ニ若干ノ國債アリ,戰爭ノ際ニ於テ其四分ノ一ヲ增シタリシガ,後平和打續キ漸次償却シテ金貳千五百萬圓ヲ減ジ得タリ,而シテ此時ヨリ利子ハ年四分五厘ヨリ引キ下リテ年四分トナレリ,因リテ其後ノ年利金ハ戰爭以前ノ年利金ト同額ナリトイフ,戰爭以前ノ國債ヲ問フ.

11 若干ノ金額ヲ或單利率ニテ貸シ付クレバ八ケ月ヲ經テ元利合計金貳百九拾七圓六拾錢トナレリ,尙ホ七ケ月ヲ貸シ續クレバ金參百六圓ニ上ルベシトイフ,貸シ金幾何ナリヤ.

12. 茶一斤ト砂糖九斤トノ價金貳圓八錢ニシテ茶一斤ト砂糖十五斤ノ價金貳圓六拾貳錢ナリ,砂

糖一斤ノ價幾何.

13. 或人職工ヲ傭フテ出勤ノ日ニハ金九拾六錢ノ賃錢ヲ拂フベク,欠勤ノ日ニハ金參拾六錢ノ科料ヲ取ルコトヲ約セリ,出勤ノ日數ハ欠勤ノ日數ニ二倍シ而シテ職工ノ受ケタル金額ハ金拾八圓七拾貳錢ナリトイフ,出勤ノ日數幾何.

14. 金若干圓ヲ甲乙兩人ニ分配スルニ其割合5:3ノ如シ,而シテ甲ノ所得ハ總額ノ九分ノ五ヨリ多キコト金五拾圓ナリトイフ,二人ノ所得各々幾何.

15. 茶商アリ,一斤ニ付金貳圓ナル一等ノ茶五十六斤,ニ一斤ニ付金壹圓四拾錢ナル二等ノ茶若干斤ヲ混ジテ一斤ニ付金壹圓八拾錢ニ販賣セントス,二等ノ茶幾斤ヲ混ズベキカ.

16. 上下二種ノ混合酒ヲ以テ滿チタル甲乙二樽アリ,而シテ甲樽ニ於テハ上二,下七ノ割合,乙樽ニ於テハ上二,下五ノ割合ナリトイフ,今上酒二升ト下酒六升トノ混合酒ヲ得ントスルニハ各樽ヨリ何升宛ヲ出スベキヤ.

17. 時計ノ兩針三時ト四時トノ間ニ於テ反對ノ向キヲ爲シテ一直線トナルベキ時刻ヲ求ム.

18. 今十一時ヲ過グルコト若干分ナリ,而シテ時計ノ兩針ノ相距ルコト今ヨリ十分前ニ於ケルモノノ三分ノ二ナリ,現時刻ヲ問フ.

19. 甲ノ年齡ノ乙ノ年齡ニ對スル比ハ5:3ノ如シ,然ルニ今ヨリ三十年後ニハ35:23ノ如クナルベシ,甲乙二人ノ今ノ年齡ヲ問フ.

20. 三兒童アリ,長兒ノ年齡ハ他ノ二兒ノ年齡ノ和ニ等シク,而シテ此二兒ノ年齡ハ3:2ノ如シ,然ルニ十年ヲ經レバ長兒ノ年齡ハ他ノ二兒ノ年齡ノ和ノ半ヨリ多キコト五歲ナルベシトイフ,三兒童ノ現時ノ年齡ヲ問フ.

21. 甲乙兩人各々若干金ヲ所持ス,乙若シ甲ニ金五圓ヲ與フレバ兩人ノ所持金同額トナルベク,若シ又甲ヨリ乙ニ金拾圓ヲ與フレバ乙ノ所持金ハ甲ノ所持金ノ五倍トナルベシ,兩人ノ所持金各々幾何ナルカ.

22. 甲乙兩人同一ノ歲入ヲ有セリ,甲ハ年々其$\frac{1}{5}$ヲ積ミ立テシガ乙ハ年々甲ヨリモ金六百圓宛多ク消費セシ爲メニ三年ノ後金壹千圓ノ負債ヲ生ゼリ,歲入各々幾何.

23. 甲乙二人輪番ニ射的ヲナシ,甲ハ十二發ノ中七發的中シ,乙ハ十二發ノ中九發的中セリ而シテ兩人相合シテ三十二發的中セリトイフ,甲乙二人各々何回發射セシヤ.

24. 一坪金壹圓宛ニテ若干ノ地所ヲ購求シ,其價格三倍ニ上リタルトキ其一部ヲ賣リシニ全原價

ノ額ヲ回收シタル上金百五拾圓ノ利益ヲ得尚ホ七百五十坪ノ地面ヲ殘有ストイフ,購求セル地所ノ坪數幾何.

25.　甲乙二人金五千圓ノ合資ヲ以テ商業ヲ營ミ金千六百圓ノ利益ヲ得タリ,今之ヲ出金高ニ應シテ配分スルニ甲ノ所得ハ乙ノ所得ヨリ多キコト金參百貳拾圓ナリ,二人ノ出金高各幾何.

26.　一ケ年間ニ於ケル甲ノ收入ノ乙ノ收入ニ對スル比ハ5:3ノ如ク,其支出ハ7:4ノ如シ而シテ各自ノ每年ノ貯金額ハ參百圓ナリトイフ,歲入幾何

第十七編

聯立一次方程式

151.　爰にx及びyなる二つの未知數を有する方程式例へば$3x-7y=8$ありとせんに,其二つの未知數の一つに任意の數値を附與すれば之に相應する他の未知數の數値を定むる事を得べし,されば上の方程式に適合すべきxとyとの數値の組數は限りなく多し,例へば$y=1$なれば$3x=15$即ち$x=5$,又$y=2$なれば$3x=22$即ち$x=7\frac{1}{3}$等なるが如し.

爰に又同種類の他の方程式例へば$2x+5y=44$ありとせんに之に適合する兩未知數の値の組數も亦限りなく多し.

然れども今若し同時に上の兩方程式に適合すべきxとyとの數値を求む

るとせばxの値もyの値も各唯一個のみなることを看出すべし,如何となれば第一の方程式の兩邊に5を掛くるときは

$$15x-35y=40$$

第二の方程式の兩邊に7を掛くるときは

$$14x+35y=308$$

故に相加へて

$$15x-35y+14x+35y=40+308$$

即ち　$29x=348$　故に　$x=\frac{348}{29}=12$

故に兩式に適合すべきxの値は12ならざるを得ず,xの此値を所設の兩方程式の一つ假令ば第二のxに置き換ふれば

$$24+5y=44$$

故に　$5y=20$　故に　$y=4$

152.　一つより多くの未知數を含む

二つ或は二つより多くの方程式ありて其各未知數の同一の値が同時に之に適合するときは之を**聯立方程式**と稱す.

ここに先づ唯一次の未知數二つを有し且つ其積を有せざる聯立方程式に付きて論ぜんとす.

153.　二つの未知數を含む聯立一次方程式を解くに通常用ゐらるる方法三つあり,而して此三つの方法に通じて一の原則あり,即ち二つの未知數を含む二方程式よりして未知數一つのみを含む一方程式を求むること是なり.

此方法を施すことを一つの未知數を**省ク**といふ.

一つの未知數を含む一方程式を解くには第八編の方法に依るべし,斯くして看出したる一つの未知數の値を與へられたる方程式中の一つの其未知數に

置き換へ以て他の未知數の値を看出すことを得べし.

154. 第一　加減法　各方程式に掛くるに同じ一未知數の係數が相等しくなるが如き數を以てせよ,斯くして得たる方程式に加法若しくは減法を施して他の一未知數のみを含む一方程式を作るべし.

已に(151)に於て此方法を用ゐたり

例　$8x+7y=100$ ………… (1)

$12x-5y=88$ ………… (2)

yヲ省カンガタメ(1)ニ掛クルニ(2)ニ於ケルyノ係數5ヲ以テシ,(2)ニ掛クルニ(1)ニ於ケルyノ係數7ヲ以テスレバ

$40x+35y=500$　　$84x-35y=616$

二式ヲ加ヘテ　$40x+84x=500+616$

即チ　$124x=1116$　∴　$x=9$

xノ此値ヲ所設ノ方程式ノ何レカ一ツ,假令(2)ノxニ置キ換フレバ　$108-5y=88$

即チ　$20=5y$　∴　$y=4$

若シ先ヅxヲ省カント欲セバ(1)ニ12ヲ掛ケ(2)ニ8ヲ掛クルベシ,然ルトキハ次式ヲ得

$96x+84y=1200$　　$96x-40y=704$

減法ヲ施シテ　$84y+40y=1200-704$

即チ　$124y=496$　∴　$y=4$

尚ホ是ヲ簡單ニスルコトヲ得,例ヘバ(1)ニ3ヲ掛ケ(2)ニ2ヲ掛クルトキハ

$24x+21y=300$　　$24x-10y=176$

故ニ減法ヲ施シテ　$21y+10y=300-176$

即チ　$31y=124$　∴　$y=4$

155. 第二　代入法　二つの方程式中の何れか一つより一つの未知數を書き表はすに他の未知數を含める式を以てし,此値を他の方程式中の此未知數に代入すべし.

此法ニ依リテ,上ニ掲ゲタル例題ヲ解ケバ

$8x=100-7y$　∴　$x=\frac{100-7y}{8}$

xノ此値ヲ(2)ノxニ代入スレバ

$$\frac{12(100-7y)}{8}-5y=88$$

即チ　$$\frac{3(100-7y)}{2}-5y=88$$

∴　$300-21y-10y=176$

∴　$300-176=21y+10y$

即チ　$31y=124$　∴　$y=4$

y ノ此値ヲ二ツノ與ヘラレタル方程式中ノ一ツノ y ニ代入スレバ $x=9$ ヲ得ベシ.

〔別解〕(1)ヨリ　$7y=100-8x$　∴　$y=\dfrac{100-8x}{7}$

y ノ此値ヲ(2)ノ y ニ代入ス

$$12x-\frac{5(100-8x)}{7}=88$$

∴　$84x-500+40x=616$

∴　$124x=500+616=1116$　∴　$x=9$

156. 第三　等置法　各方程式よりして同じ一つの未知數を書き表はすに他の未知數を含める式を以てし而して所得の二つの式を等號を以て連結すべし.

重ネテ上ノ例題ヲ以テ示サンニ

(1)ヨリ　$x=\dfrac{100-7y}{8}$　(2)ヨリ　$x=\dfrac{88+5y}{12}$

∴　$$\frac{100-7y}{8}=\frac{88+5y}{12}$$

兩邊ニ24ヲ掛ケテ分數ヲ去レバ

$$3(100-7y)=2(88+5y)$$

即チ　$300-21y=176+10y$

∴　$300-176=21y+10y$　即チ　$31y=124$

∴　$y=4$

是ヨリ前ノ如ク $x=9$ ヲ看出スコトヲ得ベシ.

〔別解〕(1)ヨリ　$y=\dfrac{100-8x}{7}$　(2)ヨリ　$y=\dfrac{12x-88}{5}$

故ニ　$$\frac{100-8x}{7}=\frac{12x-88}{5}$$

此方程式ヨリ $x=9$ ヲ得ベク, 夫ヨリ又前ト同シク $y=4$ ヲ看出スコトヲ得ベシ.

157.

例　$19x-21y=100,\ 21x-19y=140$ ヲ解ケ.

此等ノ方程式ヲ解クニ已ニ説明シタル方法ヲ以テスルヲ得ベキコト勿論ナリト雖倚ホ簡單ナル一方法アリ, 即チ

兩式ヲ加フレバ　$19x-21y+21x-19y=100+140$

即チ　$40x-40y=240$　∴　$x-y=6$ …………(1)

又相減ズレバ　$21x-19y-19x+21y=140-100$

即チ　$2x+2y=40$　∴　$x+y=20$ …………(2)

(1)ニ(2)ヲ加フレバ　$2x=26$　∴　$x=13$

(2)ヨリ(1)ヲ引ケバ　$2y=14$　∴　$y=7$

問題　33

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1. $7x-5y=24,\ 4x-3y=11$
2. $3x+2y=32,\ 20x-3y=1$

右三種ノ解法中第一加減法ガ最モ多ク行ハル

3. $6x-7y=42,\ 7x-6y=75$

4. $10x+9y=290,\ 12x-11y=130$

5. $\frac{x}{3}+3y=7,\ \frac{4x-2}{5}=3y-4$

6. $2x+\frac{y-2}{5}=21,\ 4y+\frac{x-4}{6}=29$

7. $\frac{3x}{19}+5y=13,\ 2x+\frac{4-7y}{2}=33$

8. $\frac{x+y}{3}+\frac{y-x}{2}=9,\ \frac{x}{2}+\frac{x+y}{9}=5$

9. $\frac{x+y}{3}+x=15,\ \frac{x-y}{5}+y=6$

10. $\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5,\ \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10$

11. $\frac{x-1}{8}+\frac{y-2}{5}=2,\ 2x+\frac{2y-5}{3}=21$

12. $3x+9y=2{\cdot}4,\ 0{\cdot}21x-0{\cdot}06y=0{\cdot}03$

13. $0{\cdot}08x-0{\cdot}21y=0{\cdot}33,\ 0{\cdot}12x+0{\cdot}7y=3{\cdot}54$

158. 學生は以後屢上に述べたる一般の解法に據るよりも特別なる方法に依りて較簡單に解くことを得る特種の例題に遇ふことあるべし〔前節の例の如きは其一なり〕然れども其簡便法なるも

のは經驗と習熟とに依るにあらざれば心付き難きものなるを以て初學者は之を看出さんとして徒らに時間を費すは不可なり.

例 1. $\frac{12}{x}+\frac{8}{y}=8,\quad \frac{27}{x}-\frac{12}{y}=3$ ヲ解ケ.

若シ上ノ方程式ヨリ分數ヲ去ルトキハ未知數ノ積ナル xy ヲ含ム所ノ方程式ヲ得,是レ本編ニ屬スルモノニアラズ,然レドモ已ニ說明シタル方法ヲ用キテ之ヲ解クコトヲ得.

第一式ニ 3 ヲ掛ケ,第二式ニ 2 ヲ掛ケテ相加フレバ

$$\frac{36}{x}+\frac{24}{y}+\frac{54}{x}-\frac{24}{y}=24+6 \quad \text{即チ} \quad \frac{36}{x}+\frac{54}{x}=30$$

即チ　$\frac{90}{x}=30$　由リテ　$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$　$\therefore\ x=3$

x ノ此値ヲ第一式ノ x ニ代入スレバ

$$\frac{12}{3}+\frac{8}{y}=8 \qquad \therefore\ \frac{\ }{y}=8-4=4$$

由リテ　$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$　$\therefore\ y=2$

例 2. $a^2x+b^2y=c^2\quad ax+by=c$ ヲ解ケ.

本題ニ於テハ x ト y トハ未知數ヲ表ハシ,其他ノ文字ハ已知數ヲ表ハスモノトス.

第二式ニ b ヲ掛ケ得タル積ヲ第一式ヨリ引ケバ

$$a^2x+b^2y-abx-b^2y=c^2-bc$$

即チ $$a(a-b)x=c(c-b)$$

$$x=\frac{c(c-b)}{a(a-b)}$$

x ノ此値ヲ第二式ノ x ニ代入スレバ

$$\frac{ac(c-b)}{a(a-b)}+by=c$$

∴ $$by=c-\frac{c(c-b)}{a-b}=\frac{c(a-b)-c(c-b)}{a-b}=\frac{c(a-c)}{a-b}$$

∴ $$y=\frac{c(a-c)}{b(a-b)}$$

或ハ x ノ値ヲ看出シタル如クニシテ y ノ値ヲ看出スコトヲ得.

159. 次の聯立方程式を解け.

$$ax+by=c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a'x+b'y=c' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(a ト a' トノ兩數ノ間ニハ何ノ關係モナシ, b, b' 及ビ c, c' ニ付キテモ亦然リ, 然レドモ斯ノ如キ係數ヲ用キルトキハ演算ノ上ニ於テ往々便益ヲ得ルコトアリ)

(1)に b' を掛け

$$ab'x+bb'y=b'c \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(2)に b を掛け

$$a'bx+bb'y=bc' \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

(3)より(4)を引けば

$$x(ab'-a'b)=b'c-bc'$$

故に $$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

同樣に(1)に a' を掛け(2)に a を掛けて減法を施せば

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

(1)及び(2)は x と y とを含む一般なる形の聯立一次方程式なるを以て(5)及び(6)は斯の如き方程式の根の公式なり.

問題 34

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. (159) ノ公式ヲ用キテ問題33ノ 1, 2, 及ビ 3, ヲ解ケ
2. $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=8,\quad \frac{13}{x}+\frac{7}{y}=101$
3. $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=1,\quad \frac{18}{x}+\frac{20}{y}=16$
4. $x-4y=7,\quad \frac{x}{3y}+\frac{11}{10}=\frac{4x-5y}{5y}$
5. $\frac{x+1}{y-1}-\frac{x-1}{y}=\frac{6}{y},\quad x-y=1$

6. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2,\quad bx-ay=0$

7. $x+y=a+b,\quad bx+ay=2ab$

8. $(a+c)x-by=bc,\quad x+y=a+b$

9. $x+y=c,\quad ax-by=c(a-b)$

10. $(a+b)x-(a-b)y=4ab,\quad (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2$

三つの未知數を含む聯立一次方程式

160. 三つの未知數を含む三つの聯立一次方程式あるときは前の方法に依りて其中の二つの方程式より唯二つの未知數を含む一つの方程式を求むべし,次に第三の方程式と前の二方程式中の一つとより前と同じ二つの未知數のみを含む他の方程式を求むべし.

斯の如くにして二つの未知數を含める二つの方程式を得たるを以て前の方法に依りて此二つの未知數の値を求むることを得べし,而して此等の値を所設の方程式中の一つの此等の未知數に代用すれば他の一つの未知數の値を求むることを得.

161. 例 1. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$7x+3y-2z=16 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

$$2x+5y+3z=39 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

$$5x-y+5z=31 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

(1)ニ3ヲ掛ケ(2)ニ2ヲ掛クレバ

$$21x+9y-6z=48,\qquad 4x+10y+6z=78$$

之ヲ加フレバ $25x+19y=126 \quad \cdots\cdots \quad (4)$

(1)ニ5ヲ掛ケ(3)ニ2ヲ掛クレバ

$$35x+15y-10z=80 \qquad 10x-2y+10z=62$$

之ヲ加フレバ $45x+13y=142 \quad \cdots\cdots \quad (5)$

今(4)及ビ(5)ヨリx, yノ値ヲ看出サントス.

(4)ニ9ヲ掛ケ(5)ニ5ヲ掛クレバ

$$225x+171y=1134 \qquad 225x+65y=710$$

減法ヲ施シテ

$$106y=424 \qquad \therefore \quad y=4$$

yノ此値ヲ(4)ノyニ代入スレバ

$$25x+76=126$$

$$\therefore \quad 25x=126-76=50 \qquad \therefore \quad x=2$$

(1)ニ於テ $x=2,\ y=4$ トスレバ

$14+12-2z=16 \quad \therefore \quad 10=2z \quad \therefore \quad z=5$

例 2. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

$$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}=24 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

$$\frac{7}{x}-\frac{8}{y}+\frac{9}{z}=14 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

(1)ニ2ヲ掛ケ,得タル積ヲ(2)ニ加フレバ,

$$\frac{7}{x}+\frac{8}{y}=26 \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

(1)ニ3ヲ掛ケ,得タル積ヲ(3)ニ加フレバ,

$$\frac{10}{x}-\frac{2}{y}=17 \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

(5)ニ4ヲ掛ケ,得タル積ヲ(4)ニ加フレバ,

$$\frac{47}{x}=94$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}=\frac{94}{47} \qquad \therefore \quad x=\frac{47}{94}=\frac{1}{2}$$

x ノ此値ヲ(5)ノ x ニ代入スレバ

$$20-\frac{2}{y}=17$$

$$\therefore \quad \frac{2}{y}=20-17=3 \qquad \therefore \quad y=\frac{2}{3}$$

x 及ビ y ノ此等ノ値ヲ(1)ノ x ト y トニ代入スレバ

$$2+3-\frac{3}{z}=1$$

$$\therefore \quad \frac{3}{z}=4 \qquad \therefore \quad z=\frac{3}{4}$$

例 3. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=5 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=4 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

(1)(2)及ビ(3)ヲ加ヘ2ニテ約スレバ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=6 \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

(4)ヨリ(2)ヲ減ズレバ

$$\frac{x}{a}=1 \qquad \therefore \quad x=a$$

(4)ヨリ(3)ヲ減ズレバ

$$\frac{y}{b}=2 \qquad \therefore \quad y=2b$$

(4)ヨリ(1)ヲ減スレバ

$$\frac{z}{c}=3 \qquad \therefore \quad z=3c$$

162. 方程式及び未知數の數が三つより多くあるときに於ても上に述ぶる所と同じ方法に依りて之を解くことを得べし

問題 35

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1. $x+3y+2z=11,\ 2x+y+3z=14,\ 3x+2y+z=11$

2. $5x-6y+4z=15,\quad 7x+4y-3z=19,\quad 2x+y+6z=46$

3. $4x-5y+z=6,\quad 7x-11y+2z=9,\quad x+y+3z=12$

4. $3x-y+z=17,\quad 5x+3y-2z=10,\quad 7x+4y-5z=3$

5. $x+y+z=5,\quad 3x-5y+7z=75,\quad 9x-11z+10=0$

6. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3\frac{5}{6},\quad \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{4}{z}$

7. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2,\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}$ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{2}{x}=0$

8. $y+z=a,\quad z+x=b,\quad x+y=c$

9. $y+z-x=a,\quad z+x-y=b,\quad x+y-z=c$

10. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=1$

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,\ \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1\quad \frac{c}{z}+\frac{a}{x}=1$

第十八編

聯立一次方程式應用問題

163. 本編に於ては聯立一次方程式の應用問題に付きて論ぜんとす.

問題 1. 或人一打ニ付金七錢ノ柿若干ト,二十個ニ付金拾貳錢ノ蜜柑若干トヲ買フテ金壹圓〇八錢ヲ拂ヘリ,今若シ其$\frac{2}{3}$ダケノ柿ト其二倍ダケノ蜜柑トヲ買ヒタリトセバ金壹圓六拾錢ヲ拂フベシトイフ,問フ此人ノ買ヒシ菓實ノ數各〻幾許ナルカ.

xヲ柿ノ數トシ,yヲ蜜柑ノ數トセヨ,柿一個ノ價ハ$\frac{7}{12}$錢ナルヲ以テ其x個ノ價ハ$\frac{7}{12}x$錢ナリ.

同様ニ蜜柑y個ノ價ハ$\frac{12}{20}y$錢即チ$\frac{3}{5}y$錢ナリ.

故ニ
$$\frac{7}{12}x+\frac{3}{5}y=108 \quad \text{..}\ \ \text{..}\ \ \text{..}\ \ (1)$$

$$\frac{7}{12}\times\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}\times 2y=160 \quad \text{..}\ \ \text{..}\ \ \text{..}\ \ (2)$$

(1)ニ 2 ヲ掛ケ其積ヨリ(2)ヲ引ケバ

$$\frac{14}{12}x-\frac{14}{36}x=2\times108-160=56$$

因リテ $\qquad x=72$

(1)ニ於テ $x=72$ トスレバ,

$$42+\frac{3y}{5}=108, \quad 是ヨリ \quad y=110$$

故ニ答　柿七十二個　蜜柑百十個.

問題 2. 或人金若干圓ヲ若干人ニ等分スルニ若シ六人多カランニハ各〻ノ所得金貳圓ヲ減ズベク,若シ三人少カランニハ各〻ノ所得金貳圓ヲ增スベシトイフ,人數及ビ各〻ノ所得幾何ナルカ.

x ヲ人數トシ,y ヲ各人所得ノ圓ノ數トスレバ xy ハ總金高ノ圓ノ數ナリ.

依リテ　$(x+6)(y-2)=xy$ ......(1)

$(x-3)(y+2)=xy$ ......(2)

(1)ヨリ　$xy+6y-2x-12=xy$

$\therefore$　$6y-2x=12$ ......(3)

(2)ヨリ　$xy+2x-3y-6=xy$

$\therefore$　$2x-3y=6$ ......(4)

(3)ト(4)トヲ加フレバ,　$3y=18$　$\therefore$　$y=6$

y ノ此値ヲ(4)ノ y ニ代用ス

$2x-18=6$

$\therefore$　$2x=24$,　$\therefore$　$x=12$

答　人數ハ十二人　各〻ノ所得ハ金六圓.

問題 3. 二位ノ某數アリ,其數字ノ和ノ五倍ハ其數ニ等シク,又其數ニ 9 ヲ加フレバ數字ノ順序ヲ轉倒シテ得タル數ニ等シトイフ,其數ヲ求ム.

x ヲ以テ十ノ位ノ數字ヲ表ハシ,y ヲ以テ一ノ位ノ數字ヲ表ハスベシ,然レバ其數ハ $10x+y$ ニシテ其數字ノ和ノ五倍ハ其數ニ等シトイフヲ以テ

$10x+y=5(x+y)$ ....(1)

此數ニ 9 ヲ加フレバ數字ノ順序ヲ轉倒シテ得タル數トナルトイフヲ以テ

$10x+y+9=10y+x$ ....(2)

(1)ヨリ　$5x=4y$ ....(3)

(2)ヨリ　$9x+9=9y$　即チ　$x+1=y$

y ノ此値ヲ(3)ニ代用ス

$5x=4(x+1)$　$\therefore$　$x=4$

(3)ヨリ　$y=5$　故ニ　答四十五

問題 4. 汽車アリ,一時間進行セル後汽鑵ニ損所ヲ生ゼシ爲メ二十四分間停止セリ,其後前ノ $\frac{6}{5}$ ノ速サニテ進行セシニ平常ヨリ十五分後レテ到着セリ若シ汽鑵ノ破損ヲシテ尙ホ五哩進行セル後ニ起リタラシメバ,其上尙ホ二分後レテ到着スベシトイフ列車ノ初メノ速サ及ビ進行セシ距離ヲ問フ.

$5x$ 哩ヲ以テ列車ノ一時間ニ付キテノ初メノ速サヲ表ハシ,y ヲ以テ全距離ノ哩數ヲ表ハセバ,$y-5x$ ハ汽車ノ停止後進行セル哩數ナリ,此距離ヲ進行スルニ初メノ速サヲ以テスレバ $\frac{y-5x}{5x}$ 時間ヲ要スベク,其

$\frac{6}{5}$ノ速サヲ以テスレバ$\frac{y-5x}{6x}$時間ヲ要スベシ.

列車ハ二十四分間停止セシモ唯十五分後レテ到着セシヲ以テ殘リノ路程ヲ進行スルニ初メノ速サヲ以テスルヨリモ九分早ク到着セシナリ,今9分ハ$\frac{9}{60}$時ナルヲ以テ

$$\frac{y-5x}{6x}=\frac{y-5x}{5x}-\frac{9}{60}\cdots\cdots\cdots(1)$$

若シ列車ノ停止ガ尙ホ五哩進行セル後ニ起レリトスレバ殘リノ路程ハ$y-5x-5$哩ナリ,

$$\therefore\quad \frac{y-5x-5}{6x}=\frac{y-5x-5}{5x}-\frac{7}{60}\cdots\cdots(2)$$

(1)ヨリ(2)ヲ引ケバ

$$\frac{5}{6x}=\frac{5}{5x}-\frac{2}{60}$$

$$\therefore\quad 50=60-2x \qquad 即チ \qquad x=5$$

xノ此値ヲ(1)ノxニ代入シ,因リテ得ルトコロノ方程式ヲ解ケバ$y=47\frac{1}{2}$ヲ得,故ニ列車ノ初メノ速サハ一時間ニ25哩ニシテ全距離ハ$47\frac{1}{2}$哩ナリ.

問題5. 甲乙丙三人共同シテ一ツノ仕事ヲ仕上グルニ三十日ヲ費セリ,若シ甲乙兩人ニテ之ヲ爲セバ三十二日ヲ要シ,乙丙兩人ニテ之ヲナセバ百二十日ヲ要スベシトイフ,然ラバ一人ニテ之ヲナセバ各幾日ヲ費スベキカ.

x, y, zヲ以テ夫々甲乙丙ガ各一人ニテ此仕事ヲ

仕上グルニ要スル日數トスレバ,甲乙丙ハ一日ニ夫々其仕事ノ$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ヲ仕上ゲ得ベシ,又甲乙丙三人ニテハ一日ニ其仕事ノ$\frac{1}{30}$ヲ爲シ得ベシ

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$同樣ニ\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{32}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$及ビ\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{120}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)ヨリ(2)ヲ引ケバ$z=480$ ヲ得

(1)ヨリ(3)ヲ引ケバ$x=40$ ヲ得

xノ此値ヲ(2)ノxニ代用スレバ$y=160$ ヲ得

故ニ各一人ニテハ甲ハ四十日,乙ハ百六十日,丙ハ四百八十日ヲ要ス.

164. 問題を解くに種々の方法あり又未知數を表はすにも或は一つの文字を用ゐ,或は二三の文字を用ゐる等種々あり,今「大小二數あり小なる數は大なる數の$\frac{2}{3}$にして,其和は100なりといふ,其二數を求む」なる問題に付きて之を説明せんにxを大なる數とし,yを小なる數とすれば

$$y=\frac{2x}{3} \qquad x+y=100$$

或はxを以て大なる數を表はせば$100-x$は小なる數を表はすべきを以て

$$100-x=\frac{2x}{3}$$

或は$3x$を以て大なる數を表はせば$2x$は小なる數を表はすべきを以て

$$2x+3x=100$$

以上三通りの方法の何れに依るも大なる數として60を得,小なる數として40を得べし.

是に因りて本編の終りに掲げたる或問題の如きは未知數を表はすに唯一つの文字を用ゐて之を解くことを得,之に反して第十六編の終りに擧げたる問題中には二つの文字を用ゐて解く方が却て適當なるが如きものあり,要するに未知數を多く用ゐるときは演算は長く

なれども,之と同時に題意の次第を追ふて其關係を容易に式に表はし得ること多し.

問題　36

1.　甲ノ所持金ニ金參拾六圓ヲ增加セバ乙ノ所持金ノ三倍トナルベク,乙ノ所持金ヨリ金五圓ヲ減少セバ甲ノ所持金ノ半分トナルベシトイフ,甲乙兩人ノ所持金各々幾何ナルカ.

2.　二數アリ,第一數ニ第二數ノ$\frac{1}{2}$ヲ足セバ20トナリ,第二數ニ第一數ノ$\frac{1}{3}$ヲ足セバ亦20トナルトイフ,兩數各々幾許.

3.　二ツノ部分ヨリ成レル釣竿アリ,上部ノ長サノ下部ノ長サニ對スル比ハ5:7ノ如ク,又上部ノ九倍ト下部ノ十三倍トハ合ハセテ全竿ノ長サノ十一倍ヨリ長キコト三十六吋ナリトイフ,上下二部ノ長サ各々幾何.

4.　農夫アリ,或人ニ小麥三斗ト大麥四斗トヲ金五圓四拾錢ニ賣リ,又他ノ人ニ小麥五斗ト大麥三斗トヲ金六圓八拾錢ニ賣レリ,然ラバ一升ノ價各々幾許.

5. 上下二種ノ酒アリ,今上酒二升ト下酒三升トノ割合ニ之ヲ混合スレバ一升ノ價金四拾錢トナリ,上酒七升ト下酒八升トノ割合ニ之ヲ混合スレバ一升ノ價金四拾壹錢トナルトイフ,各種ノ酒一升ノ價各〻幾許.

6. 甲乙二人ニテ金貳拾九圓ノ借金ヲ爲セリ,甲モ乙モ一人ノミニテハ之ヲ辨償スルコト能ハザレドモ乙若シ其所持金ノ$\frac{2}{3}$ヲ甲ニ與フレバ甲ハ之ヲ皆濟スルコトヲ得,甲若シ其所持金ノ$\frac{3}{4}$ヲ乙ニ與フレバ乙モ亦之ヲ皆濟スルコトヲ得ルトイフ,甲乙兩人ノ所持金各〻幾何.

7. 甲若シ乙ヨリ金貳拾五圓ヲ受取レバ甲乙兩人ノ所持金相等シク,乙若シ甲ヨリ金貳拾貳圓ヲ受取レバ乙ノ所持金ハ甲ノ所持金ニ二倍スベシトイフ,問フ兩人ノ所持金各〻幾何.

8. 分數アリ,其分子ニ1ヲ加ヘ,其分母ヨリ1ヲ減ズレバ1トナリ,分子ニ分母ヲ加ヘ,分母ヨリ分子ヲ減ズレバ4トナル,其分數ヲ看出セ.

9. 人アリ,若干ノ金圓ヲ貧民ニ分與スルニ一人ニ金五拾錢宛ヲ與ヘントスレバ金壹圓ノ不足ヲ生ズルガ故ニ金四拾錢宛ヲ與ヘタルニ金五拾錢ヲ剩セリトイフ,貧民ノ數及ビ金額ヲ問フ.

10. 矩形ノ床アリ,若シ其幅二尺ヲ增シ,長サ三

尺ヲ增セバ其積六十四平方尺ヲ增スベク,若シ又其幅三尺ヲ增シ,長サ二尺ヲ增セバ其積六十八平方尺ヲ增スベシトイフ,床ノ幅及ビ長サ各〻幾何ナルカ.

11. 或二桁ノ數アリ,今之ヲ二倍シ,更ニ36ヲ加フレバ,其結果ハ元ノ數ノ數字ノ順序ヲ轉倒シテ得タル數ノ二倍ヨリ36ヲ減ジタルモノニ等シ,又元ノ數ハ其數字ノ和ノ四倍ヨリ大ナルコト3ナリ,其數ヲ求ム.

12. 二旅人ノ荷物合ハセテ五百六十斤アリ,無賃制限外ノ運賃トシテ甲ハ金~~六~~七拾貳錢ヲ拂ヒ,乙ハ金壹圓八拾錢ヲ拂ヘリ,若シ此荷物悉ク一人ノ所有ナリトスレバ金貳圓參拾錢ヲ拂フベシトイフ,問フ
三円三十二銭
一人ニ付何斤マデ無賃ナルヤ.

13. 甲乙二人五分間ノ競走ヲナセリ,初メ乙ハ甲ヨリ先キニ在ルコト二十碼ナリシトイヘドモ,乙ガ二碼ヲ走ル間ニ甲ハ三碼ヲ走レルヲ以テ甲ハ遂ニ三十碼ノ勝ヲ得タリトイフ,競爭場ノ長サ及ビ兩人ノ速サ各〻如何.

14. 河ノ一岸ニ沿フテ甲乙ノ兩市アリ,其間ノ距離二十四哩ナリ,或人甲市ヨリ乙市ニ行クニ全距離ノ半ヲ步行シ,半ヲ舟ニテ溯リ七時間ヲ費セリ,歸リニハ全距離ノ半ヲ前ノ速サノ四分ノ三ノ速サニテ步行シ,半ヲ前ノ速サノ二倍ノ速サヲ以テ舟ニテ

下リ六時間ヲ費セリトイフ,初メノ歩行ノ速サ及ビ舟ノ速サヲ問フ.

15. 甲乙兩人ニテ爲セバ三十日ニテ竣功スベキ工事アリ,今兩人ニテ十八日間働キタル後乙ハ休業セリ,依リテ甲一人ニテ其殘業ヲ二十日間ニテ完成セリ,今此工事ヲ甲若クハ乙一人ニテ竣功スルニハ各幾日ヲ要スベキカ.

16. 急行列車及ビ尋常列車ガ百二十哩ヲ進行スルニ要スル時間ノ比ハ9:14ナリ,尋常列車ハソレガ二十哩ヲ行クニ要スルダケノ時間ヲ停車場ニ於テ費シ,急行列車ハ唯其半分ダケノ時間ヲ停車場ニ於テ費セリ,又急行列車ノ速サハ尋常列車ノ速サヨリ一時間ニ十五哩大ナリトイフ,各列車ノ速サ如何.

for can't

17. 長サ九十二呎ノ列車ト長サ八十四呎ノ列車トガ一定ノ速サヲ以テ並行セル線路ニ沿フテ進行スルアリ若シ二列車ノ方向相反スルトキハ始メ相逢フテヨリ相別ルルマデニ一秒半ヲ費スベク,若シ其方向同一ナルトキハ速キ列車ガ遲キ列車ニ追及シテヨリ全ク之ヲ拔キ越スマデニ六秒ヲ費スベシトイフ,二列車ノ速サ各幾何ナルカ.

18. 甲乙兩人ニテ一ツノ仕事ヲナセバ六日間ニ金四圓ノ賃錢ヲ得ベク,甲丙兩人ニテハ九日間ニ金五圓四拾錢ヲ得ベク,乙丙兩人ニテハ十五日間ニ

八圓ヲ得ベシトイフ,一日ノ賃錢各幾何.

19. 三桁ノ數アリ,其値ハ數字ノ和ノ四十八倍ニ等シ,若シ此數ヨリ198ヲ引ケバ其殘リハ數字ノ順序ヲ轉倒シテ得タル數ニ等シ,又兩端ノ數字ノ和ハ中間ノ數字ノ二倍ニ等シ,此數ヲ求ム.

問題答（上卷）

1. (13頁)

1. 26 **2.** 89 **3.** 6 **4.** 39 **5.** 59

6. 127 **7.** 2 **8.** 32 **9.** 1331

10. 12 **11.** 67 **12.** 2

2. (18頁)

1. 7 **2.** 88 **3.** 43 **4.** 72 **5.** 1

6. 1 **7.** 5 **8.** 7 **9.** 4

3. (22頁)

1. $32b$ **2.** $-9a$ **3.** $-2x^2y$

4. $15a-9b$ **5.** $3x^2-3y^2$ **6.** $4x+2y+4z$

7. $2a+2b$ **8.** $7xy+yz+2zx$

9. $2x^3-2x^2-8x+10$ **10.** $5x^4+4x^3+3x^2+2x-9$

11. $4a^3+2a^2b-4ab^2+b^3-7b$ **12.** a^2x+3a^3

13. $6ab-9a^2x+7ax^2+ax^3$ **14.** $5x^3$

15. $10x^2+8y^2+12x+12$ **16.** x^6

4. (29頁)

1. $3a+4b$ **2.** $4a+2c$ **3.** $2x^2-2x-4$

4. $3x^2+10xy-15y^2$ **5.** $-5x^3+5x^2y-5xy^2+5y^3$

6. $2a^2x^2+25x^2-2$ **7.** $-6a-3b+2c+4d$

8. $3x^4-x^3-14x+18$ **9.** $3a^2+13xy-16xz-y^2-13yz$

10. $2a^3-6a^2b+6ab^2-2b^3$ **11.** $-2x^4-14x^3+10x^2+4x+15$

12. $4a^2-10ab-13b^2$ **13.** $3x^4+33x^2y^2-14y^4$

14. $-2x^3+16x^2y-19xy^2-14y^3$

5. (34頁)

1. a **2.** $2c$ **3.** $a+a^3$ **4.** $-2b+2c$

5. $3x+3y-z$ **6.** $a-b+c+d-e$ **7.** $a-b+2c-d$

8. $3c$ **9.** $3a-3b$ **10.** $2a-b$

11. $5a$ **12.** a **13.** $4a$

14. $3a-2c$ **15.** $9+3x$ **16.** $7x+6$

17. a **18.** $16-12x$

6. (40頁)

1. $8x^3$ **2.** $4a^3b^3$ **3.** $-15x^7y^5z^3$

4. $504x^4y^9$ **5.** $-168a^2b^5m^8n^5$ **6.** $x^{16}y^{10}$, $x^{22}y^8$

7. $x^{15}b^9$, $-y^{15}z^{24}$ **8.** $12a^3b-9ab^3$

9. $6x^4y-8x^2y^3+10x^2yz^2$

10. $27a^6b^4-9a^4b^6+12a^3b^7+3ab^9$

7. (46頁)

1. x^2-25 **2.** $y^2-2y-143$

3. $21x^2-19xy-12y^2$ **4.** $9x^4+3x^2y^2-2y^4$

5. $6x^4-96$ **6.** x^4-2x+1

7. $1-2x-31x^2+72x^3-30x^4$

8. $x^5-41x-120$ **9.** $x^5+151x-264$

10. $2x^5-18x^4+39x^3-25x^2+x+1$

11. $x^6+1008x+720$

12. $4x^6-5x^5+8x^4-10x^3-8x^2-5x-4$

13. $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1$ **14.** $a^4+3a^2b^2+4b^4$

15. $12x^3-17x^2y+3xy^2+2y^3$ **16.** $x^6-x^4y^2+x^2y^4-y$

17. $6x^4+17x^3y+26x^2y^2+19xy^3+3y^4$

18. $x^3+y^3+3xy-2x-2y+1$ **19.** x^5-32y^5

20. x^4-a^4 **21.** $x^8+x^4a^4+a^8$

22. $x^6-14x^4+49x^2-36$

8. (52頁)

1. $5x^2$ **2.** $-3a^3$ **3.** $-8a^2b^2c^2$

4. x^2-2x+4 **5.** $-a^2+4a-5$ **6.** $x^2-3xy+4y^2$

7. $5a^2b^2+ab-4$ **8.** $15a^2b^2-12ab^3+9abc^2-5c^4$

9. (59頁)

1. $x-4$ **2.** $x-8$ **3.** x^2+x+3

4. $3x^2-2x+4$ **5.** $x+4y$ **6.** $5x-13y$

7. $6x+8y$ **8.** $6x+3y$ **9.** $5a^2-4b^2$

10. $7+5a-8a^2$ **11.** $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

12. $x^3+3x^2y+9xy^2+27y^3$ **13.** $x^3-x^2y+xy^3$

14. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^2+y^4$

15. $a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4$

16. $x^2+2xy+3y^2$ **17.** x^2-2x+2

18. x^2-4x+8 **19.** x^2+5x+6

20. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ **21.** $a^3+32a^2b+2ab^2+b^3$

22. x^4-3x^2+4x+1 **23.** $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

24. $x^8-x^6+2x^2-2$ **25.** $x-c$

26. ax^2+bx+c **27.** $x^2-2xy+y^2$

28. $x^2+x(y+1)+y^2-y+1$ **29.** $7x+4z$

30. $a+2b+c$

10. (67頁)

1. 9	**2.** 7	**3.** 21	**4.** 7	**5.** 5
6. 1	**7.** 2	**8.** 15	**9.** 60	**10.** 64
11. 45	**12.** 120	**13.** 12	**14.** 6	**15.** 2
16. 2	**17.** $1\frac{1}{2}$	**18.** $1\frac{1}{5}$	**19.** 11	**20.** $2\frac{1}{3}$
21. 3	**22.** 3	**23.** $1\frac{1}{2}$	**24.** $1\frac{1}{3}$	**25.** 10
26. 6	**27.** 12	**28.** 5	**29.** $\frac{1}{7}$	**30.** 3

11. (72頁)

1. $49-b$ **2.** $x+7y$ **3.** $100-x$

4. $a-b,\ 89-2a+b$ **5.** $b-2,\ b-1,\ b,\ b+1,\ b+2$

6. $14m+7$ **7.** ab 圓 **8.** $\dfrac{a}{n}$圓

9. $a-b$ **10.** $n(b-m)+m$ **11.** $\dfrac{m}{n}$時間

12. $(20-a-b+c)$圓 **13.** $\dfrac{a}{n}$日

14. $\dfrac{1}{36}(ab+2ac+2bc)$坪 **15.** $6n$圓

12. (78頁)

1. 30 **2.** 13, 20 **3.** 28

4. 54, 21 **5.** 100, 88 **6.** 36, 24

7. 420 **8.** 36, 26, 18, 12

9. 35, 50, 70 圓 **10.** 36, 27 寸

11. 14, 24, 38 圓 **12.** 24, 60, 192 圓

13. 28, 14 **14.** 十一月二十日

15. 10, 14, 18, 22, 26, 30 歲 **16.** 一石三升

17. 24, 36, 56 圓 **18.** 130, 150, 130, 90 圓

19. 18人 **20.** 500 圓 **21.** 5, 6

22. 88, 44圓 **23.** 13, 27 圓

24. 酒 八斗五升, 水 三斗五升 **25.** 18, 3, 3 斤

13. (87頁)

1. $49x^2+70xy+25y^2$ **2.** $49x^4-70x^2y^2+25y^4$

3. $36x^2-25y^2$ **4.** $x^4+10x^3+39x^2-70x+49$

5. $x^2-2xy+y^2-z^2$ **6.** $x^4-x^2y^2-2xy^3-y^4$

7. $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1$ **8.** $x^6+2x^4+5x^2-1$

9. $16x^4+96x^3y+144x^2y^2-81y^4$ **10.** $a^4x^4-b^4y^4$

14. 88頁

1. $x^2+32x+231$ **2.** $x^2-26x+69$

3. $x^2+3x-70$ **4.** $x^2-13x-48$

5. $49x^2-35xy+6y^2$ **6.** $4x^2+4ax-35a^2$

15. (89頁)

1. $(x+2)^2$ **2.** $(x-5)^2$ **3.** $(4x+5y)^2$

4. $-(7x-8)^2$ **5.** $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ **6.** $(8x-9y)^2$

7. $(2x+2y-3z)^2$ **8.** $\{x(a-b)-2y\}^2$ **9.** $(x+8y)(x-8y)$

10. $(1+10d)(1-10d)$

16. (92頁)

1. $\left(\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{9}\right)\left(\dfrac{x}{10}-\dfrac{y}{9}\right)$ **2.** $(7x+5y+z)(7x+5y-z)$

3. $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

4. $4ab(a+b)(a-b)$ **5.** $(x-y+z)(x-y-z)$

6. $(5a-6b+7c)(5a-6b-7c)$ **7.** $(x+1)(x^2-x+1)$

8. $(y+6)(y^2-6y+36)$ **9.** $(a-10b)(a^2+1)(ab+100b^2)$

10. $(2x-3y-3z)(4x^2-12xy+6xz+6y^2-9yz+9z^2)$

17. (95頁)

1. $(x+6)(x+7)$ **2.** $(x+11)(x+19)$

3. $(x-6)(x-8)$　　4. $(x-2y)(x-3y)$

5. $(x-4y)(x-23y)$　　6. $(x^2-3y)(x^2-5y)$

7. $(x-y+5)(x-y+6)$　　8. $(x-y-2)(x-y-7)$

9. $(x+3)(x-7)$　　10. $(x+6)(x-5)$

11. $(x+5)(x-9)$　　12. $(17-y)(15+y)$

13. $(x+13y)(x-5y)$

18. (96頁)

1. $(x-4)(x+11)$　　2. $(x-8y)(x+3y)$

3. $(x-5y)(x+12y)$　　4. $(4x-3)(x+1)$

5. $(x-7)(5x-3)$　　6. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

7. $(5x+8)(2x-7)$

19. (99頁)

1. $3x^3$　　2. $7a^2b^3x^3y^3$　　3. xy^2　　4. $5a^3b^4x^3y^4$

5. $3(x+1)$　　6. x^2-y^2　　7. $x-10$　　8. x^2-x+1

9. x^2-x+1　　10. $x+4$

20. (108頁)

1. $x-1$　　2. $2x^2-3x-5$　　3. x^2-5x+3

4. x^2-6x+7　　5. x^2-6x-5　　6. $x+3$

7. $x-4$　　8. $2x^2+3x+7$　　9. $3x+2$

10. x^2-x-1　　11. x^3+1　　12. $x+7$

21. (111頁)

1. $36a^3b^2c^3$　　2. $4392x^2y^2z^3$　　3. $x^4y^3z^2$

4. $1001a^6b^7c^8x^9$　　5. x^3+9x^2+20x　　6. $(a+b)(a-b)^2$

7. $12ab(a^3+b^3)$　　8. $(x+1)(x+3)(x-4)$

9. $120(a+b)^2(a-b)^2$　　10. $105ab^2(a+b)(a-b)$

11. $x^{12}-1$　　12. $72(x^2-y^2)(x^3-y^3)(x^3+y^3)$

22. (115頁)

1. $(x+2)(x+4)(x^2+3x+1)$　　2. $x(2x+1)(3x-1)(4x+3)$

3. $(x^2-5x+6)(x-1)(x-4)$　　4. $(x^2+3x+2)(x-3)(x+5)$

5. $(x^2+x+1)(x^2+1)(x-1)(x-1)$

6. $(x^3-x^2-4x+4)(x-1)(x-4)$

7. $(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)(x-a)^2$

8. $(x+1)(x+2)(x^2+2x-3)$

23. (120頁)

1. $3x+\dfrac{4x}{7}$　　2. $2x-\dfrac{5y}{6x}$　　3. $2x-\dfrac{1}{x-3}$

4. $x^2+3ax+3a^2+\dfrac{3a^3}{x-2a}$　　5. $x^3+x^2+x+1+\dfrac{2}{x-1}$

6. $\dfrac{4a^2}{3b}$　　7. $\dfrac{3(a-b)}{2(a+b)}$　　8. $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$

9. $\dfrac{2(a-b)}{3(a+b)}$　　10. $\dfrac{(x^3-1)(x+1)}{x^2+1}$

24. (123頁)

1. $\dfrac{1}{3xy}$　2. $\dfrac{4y^2z^3}{7x}$　3. $\dfrac{11xz^4}{7y^2u^3}$

4. $\dfrac{8yz^3}{13xz^2-15x^2y}$　5. $\dfrac{a+b}{2b}$　6. $\dfrac{a+b}{a-b}$

7. $\dfrac{2ax}{ax-3y^2}$　8. $\dfrac{x+7}{x-5}$　9. $\dfrac{x-5}{x+1}$

10. $\dfrac{x+1}{x-5}$　11. $\dfrac{x+b}{x+c}$　12. $\dfrac{x-b}{x+c}$

13. $\dfrac{x+a-b-c}{x+b-a-c}$　14. $\dfrac{a+b+c}{a-b-c}$　15. $\dfrac{3x^2+1}{4x(x^2+1)}$

16. $\dfrac{x+3}{x^2-2x+5}$　17. $\dfrac{x-3}{x^2+7x+3}$　18. $\dfrac{x+7}{x^2-4x-3}$

19. $\dfrac{6x-5}{3x^2+x+1}$　20. $\dfrac{5x+4}{3x^2+x+2}$

25. (125頁)

1. $\dfrac{a(b-c)}{abc}, \ldots$　2. $\dfrac{9x^2}{12x^3}, \ldots$　3. $\dfrac{4(x-1)}{4(x^2-2)}$

4. $\dfrac{a(x+a)}{x^2-a^2}, \ldots$　5. $\dfrac{a(x^2+ax+a^2)}{x^3-a^3}, \ldots$

6. $\dfrac{x-c}{(x-a)(x-b)(x-c)}, \ldots$

26. (129頁)

1. $\dfrac{6a-6b-c}{4}$　2. $\dfrac{2a}{a^2-b^2}$　3. $\dfrac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$

4. $\dfrac{a+b+c}{abc}$　5. $\dfrac{1}{x-y}$　6. $\dfrac{12x}{1-9x^2}$

7. $\dfrac{a+x}{ax}$　8. $\dfrac{a+b}{2a-2b}$　9. $\dfrac{2a^2+9c^2}{6ac}$

10. $\dfrac{2a^2+ab+b^2}{b^2-a^2}$　11. 1　12. $\dfrac{2c^3}{c^2-b^2}$

13. $\dfrac{b}{a-b}$　14. $\dfrac{2x-3}{x(4x^2-1)}$　15. $\dfrac{16}{(x-2)(x+2)^2}$

16. $\dfrac{4(x+10)}{x^4-16}$　17. $\dfrac{2x^2-9x+44}{x^3+64}$　18. $\dfrac{2a}{x^2-a^2}$

19. $\dfrac{x^2-2x}{x^3+1}$　20. 0　21. $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^3)}$

22. $\dfrac{2y^3}{x^3-y^3}$　23. $\dfrac{2(x+1)}{x^2+x+1}$　24. $\dfrac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$

25. 0　26. $\dfrac{4a^3}{x^4-a^4}$　27. $\dfrac{2}{x}$

28. $\dfrac{2}{x(x-2)}$　29. 1　30. 0

27. (132頁)

1. $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}$　2. $\dfrac{1}{(a-c)(c-b)}$　3. 0

4. $-\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$　5. 1　6. $\dfrac{3x^2-a^2-b^2-c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

28. (137頁)

1. 1　2. $\dfrac{a^3b^3c^3}{x^3y^3z^3}$　3. $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

4. $x-a$　5. $\dfrac{a^4-b^4}{ab}$　6. $\dfrac{a^2b^2}{a^2-b^2}$

7. $\dfrac{ax}{a^2-x^2}$　8. $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$　9. $\dfrac{1}{x^2-y^2}$

10. x^2+a^2 **11.** $\dfrac{x^6-ax^5+a^5x-a^6}{a^3x^3}$

12. 1 **13.** 1

29. (140頁)

1. $\dfrac{6ay}{bx}$ **2.** $\dfrac{9c^2x^2}{16a^2z^2}$ **3.** $\dfrac{1}{x+y}$

4. $\dfrac{3(a-b)^2}{b(a+b)}$ **5.** $\dfrac{x(a+2x)}{a^2}$ **6.** $\dfrac{2x}{x-y}$

7. $\dfrac{a+x}{x+y}$ **8.** $\dfrac{x-b}{x^2-a}$ **9.** $\dfrac{1}{x^2-y^2}$

10. $\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^3$ **11.** $\dfrac{y^4-x^4}{y^3}$ **12.** $5x-1$

13. $\dfrac{a^4+a^2+1}{a^2}$ **14.** $\dfrac{x-y}{y}$ **15.** $\dfrac{x^2+ax+a^2}{ax}$

16. $\dfrac{x^4-3x^3a+3xa^3+a^4}{a^2x^2}$

30. (142頁)

1. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **2.** $\dfrac{n-m}{n+m}$ **3.** 1

4. $\dfrac{x-4}{x-5}$ **5.** $\dfrac{1}{x+1}$ **6.** $\dfrac{1}{x+1}$

7. $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ **8.** $x+1$ **9.** $\dfrac{1+x^2}{1+x}$

10. x **11.** 1 **12.** 0

31. (149頁)

1. 10 **2.** 12 **3.** 6 **4.** -7

5. $3\frac{1}{7}$ **6.** 5 **7.** 8 **8.** 3

9. $\dfrac{1}{5}$ **10.** 17 **11.** 2 **12.** 5

13. 6 **14.** 2 **15.** 2 **16.** 7

17. 4 **18.** -1 **19.** $\dfrac{3}{2}$ **20.** $\dfrac{(a-b)^2}{a+b}$

21. $\dfrac{ac}{b}$ **22.** c **23.** $-\dfrac{a}{a+b}$ **24.** $2(a+b)$

25. $\dfrac{ab}{a+b-c}$ **26.** $\dfrac{a+b}{2}$ **27.** $\dfrac{a+b}{2}$

32. (157頁)

1. 27, 17 **2.** 20, 80 **3.** 90, 160坪 **4.** 11, 17

5. 168, 84, 42日 **6.** 30分 **7.** 72海里

8. 56時ノ後 **9.** 48圓 **10.** 200,000,000圓

11. 288圓 **12.** 9錢 **13.** 24 **14.** 450, 270圓

15. 28斤 **16.** $4\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$升 **17.** 3時$49\frac{1}{11}$分

18. 11時40分 **19.** 40, 16歲 **20.** 10, 6, 4歲

21. 17·5, 27·5圓 **22.** $1333\frac{1}{3}$圓 **23.** 24

24. 1200 **25.** 3000, 2000圓 **26.** 4500, 2700圓

33. (169頁)

1. 17, 19 **2.** 2, 13 **3.** 21, 12 **4.** 20, 10

5. 3, 2 **6.** 10, 7 **7.** 19, 2 **8.** 6, 12

9. 10, 5 **10.** 20, 20 **11.** 9, 7 **12.** ·2, ·2

13. 12, 3

34. (173頁)

2. $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}$ **3.** 3, 2 **4.** 63, 14

5. 3, 2 **6.** a, b **7.** a, b **8.** b, a

9. $\frac{ac}{a+b}, \frac{bc}{a+b}$ **10.** $a+b,\ a-b$

35. (178頁)

1. 2, 1, 3 **2.** 3, 4, 6 **3.** 2, 1, 3 **4.** 4, 0, 5

5. 5, -5, 5 **6.** $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ **7.** $\frac{4}{3}$, 4, $\frac{4}{5}$

8. $x=\frac{1}{2}(b+c-a), \ldots\ldots$ **9.** $x=\frac{1}{2}(b+c), \ldots\ldots$

10. $2a, 2b, 2c$

35. (185頁)

1. 42, 26圓 **2.** 22, 16 **3.** 45, 63 吋
4. 10, 6錢 **5.** 49, 34錢 **6.** $19\frac{1}{3}$, $14\frac{1}{2}$圓

7. 116, 166圓 **8.** $\frac{3}{5}$ **9.** 15人, 6圓50錢

10. 14尺, 10尺 **11.** 59 **12.** 100斤

13. 150碼, 一分ニ付30碼 20碼 **14.** 4, 3哩

15. 50, 75日 **16.** 一時間ニ45哩, 30哩

17. 一時間ニ30哩, 50哩 **18.** $36\frac{2}{3}$, 30, $23\frac{1}{3}$錢

19. 432

(終リ)

明治三十五年 二月 四日發 行
明治三十五年 三月廿八日再版發行
明治三十五年 八月二十日訂正三版發行
明治三十五年 十月 三日四版發行
明治三十八年 二月廿三日五版發行
明治三十八年十一月 四日訂正六版印刷
明治三十八年十一月 七日訂正六版發行

著作者 高橋豊夫

發行兼印刷者 鈴木有三
東京市淺草區猿屋町十二番地

代表者 學海指針社
東京市日本橋區通旅籠町十一番地

修訂代數學教科書全二冊

定價 上卷七拾錢 下卷七拾錢

35

7

13

91

$13 \times 7 = 91$

$\frac{x}{2} \times 12 = 4x + 3x + 2x = 9x$

$9x = 9 \times 12.$

$9x = 108$

$x = \frac{108}{9} = 12$

$x = x \times \frac{1}{3} + 24$

$x - \frac{x}{3} = 24$

第二年級

彭井