43274
教科書文庫
4
412
43-1937
20000
39114

新式

算術代數教科書

教授資料

[四五學年用]

理學博士 高木貞治著

広島大学図書
2000039114

東京開成館

375.9
Ta11

資料室
中央図書館

教科書文庫
4
412
43-1937
2000039114

新　式

算術代數教科書

教授資料

［四五學年用］

東京帝國大學名譽教授　理學博士

高　木　貞　治

著

広島大学図書

2000039114

東京開成館

廣島大學圖書之印

廣島大學教 39114 図書

廣島大學圖書之印

第 1 章　一元高次方程式

第三學年マデニ，二次方程式ノ解法ヲ取扱ツタノデアルガ，本章デハ未知數ノ次數ガ二次以上ノ方程式モ特殊ノ工夫ニヨツテ解キ得ルコトヲ知ラシメル。即チ次ノ場合ニ於ケル一元高次方程式ノ解法ヲ授ケルノガ主眼デアル。

(1)　置換ニヨル解法

(2)　剩餘定理ヲ應用スル解法(因數分解ヲ應用スル解法)

(注意)　一般ナル三次及ビ四次方程式ハ代數的ニ解クコトハ出來ルガ中等學校程度デハ上記ノヤウナ特殊ナ場合ニツイテ取扱フベキデアル。尙複雜ナ技巧ヲ要スル高次方程式ノ解法ハ取扱ハナイガヨイ。

頁 1.

1.　置換ニヨル解法　〔拙著高等教育代數學 P. 180 參照〕

本節デハ 例 1, 例 2 ニ示スヤウナ形ノ高次方程式ノ解法ヲ授ケルノデアル。

頁 2.

問　[1]　$x^4-25x^2+144=0$

$x^2=X$　ト置ケバ　$X^2-25X+144=0$　∴　$X=16$ 又ハ $X=9$

依ツテ　$x^2=16$　又ハ　$x^2=9$　∴　$x=\pm4$　又ハ　$x=\pm3$

(答)　$\pm4,\ \pm3$

[2]　$9x^4+12=31x^2$

∴　$9x^4-31x^2+12=0$　∴　$x^2=3$ 又ハ $x^2=\frac{4}{9}$

∴　$x=\pm\sqrt{3}$　又ハ　$x=\pm\frac{2}{3}$

(答)　$\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{2}{3}$

[3] $\dfrac{6x}{2x^2+1}+\dfrac{2x^2+1}{3x}=3$

$\dfrac{3x}{2x^2+1}=X$ ト置ケバ $2X+\dfrac{1}{X}=3$

$\therefore\ 2X^2-3X+1=0$ $\therefore\ X=\dfrac{1}{2}$ 又ハ $X=1$

依ツテ

$\dfrac{3x}{2x^2+1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 2x^2-6x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}$

$\dfrac{3x}{2x^2+1}=1$

$\therefore\ 2x^2-3x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$ 又ハ 1

(答) $\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, 1

[4] $\dfrac{x^2-5x}{x+1}+\dfrac{24(x+1)}{x(x-5)}+14=0$

$\dfrac{x^2-5x}{x+1}=X$ ト置ケバ $X+\dfrac{24}{X}+14=0$

$\therefore\ X^2+14X+24=0$ $\therefore\ X=-12$ 又ハ $X=-2$

依ツテ

$\dfrac{x^2-5x}{x+1}=-12$

$\therefore\ x^2+7x+12=0$

$\therefore\ x=-3$ 又ハ -4

$\dfrac{x^2-5x}{x+1}=-2$

$x^2-3x+2=0$

$x=1$ 又ハ 2

(答) 1, 2, −3, −4

頁 3.

2. 因數分解ニヨル解法 〔拙著高等教育代數學 P. 198 參照〕

本節デハ因數分解ヲ應用シテ容易ニ解キ得ル高次方程式ノ解法ヲ授ケル。

頁 5.

問 [1] $x^3=81x$ $\therefore\ x(x^2-81)=0$ $\therefore\ x(x-9)(x+9)=0$

$\therefore\ x=0$ 又ハ $x=9,\ x=-9$ (答) ±9, 0

[2] $(x^2-4)(x^2+3)=4x(x^2-4)$

$\therefore\ (x^2-4)(x^2-4x+3)=0$

$\therefore\ x^2-4=0$ 又ハ $x^2-4x+3=0$

$\therefore\ x=\pm2$ 又ハ $x=3$ 又ハ 1 (答) ±2, 3, 1

[3] $3x(x-1)=(x^2-1)(x-2)$

$\therefore\ (x-1)(x^2-4x-2)=0$ $\therefore\ x-1=0$ 又ハ $x^2-4x-2=0$

$\therefore\ x=1$ 又ハ $x=2\pm\sqrt{6}$ (答) 1, $2\pm\sqrt{6}$

[4] $(x^2-a^2+b^2-c^2)^2=4(bx-ac)^2$

$\therefore\ \{x^2-a^2+b^2-c^2-2(bx-ac)\}\{x^2-a^2+b^2-c^2+2(bx-ac)\}=0$

$\therefore\ x^2-2bx+b^2-(a-c)^2=0$ 又ハ $x^2+2bx+b^2-(a+c)^2=0$

$\therefore\ x=b+a-c$ 又ハ $b-a+c$ 又ハ $-b+c+a$ 又ハ $-b-a-c$

(答) $a+b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$, $-a-b-c$

3. 剩餘ノ定理

剩餘ノ定理ノ取扱ハ整式,恒等式ニツイテソノ實例ヲ示シツツ,意味ヲ明確ニシ,徹底ヲ期セラレタイ。

剩餘ノ定理ノ應用トシテハ主トシテ

(1) 剩餘ヲ求メルコト (2) 整除ノ條件ヲ求メルコト

(3) 高次方程式ヲ解クコト

デアルガ,尙因數分解ノ問題モ補充シテ課スルガヨイ。

頁 8.

問 1. $2x^4-9x^3+x^2-3x-5$ ヲ $x-1$ デ割ツタ剩餘ハ

$2\times1^4-9\times1^3+1^2-3\times1-5=-14$ (答) −14

問 2. $4x^3+mx^2+x+6$ ノ $x=\dfrac{1}{2}$ ヲ代入セヨ。

$4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+m\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}+6=0$ $\therefore\ m=-28$ (答) −28

問 3. x^3+x^2+mx+n ヲ $x+2$ デ割ツタ剰餘ガ 5 デアルカラ

$(-2)^3+(-2)^2+m(-2)+n=5 \quad \therefore \quad -2m+n=9$

同様ニシテ $(2)^3+2^2+2m+n=5 \quad \therefore \quad 2m+n=-7$

$\therefore \quad m=-4,\ n=1$ (答) $m=-4,\ n=1$

問 4. [1] $x^3-57x+56=0 \quad \therefore \quad (x-1)(x^2+x-56)=0$

$\therefore \quad (x-1)(x-7)(x+8)=0 \quad \therefore \quad x=1$ 又ハ 7 又ハ -8

(答) 1, 7, -8

[2] $x^3-5x^2-28x+32=0 \quad \therefore \quad (x-1)(x^2-4x-32)=0$

$\therefore \quad (x-1)(x-8)(x+4)=0 \quad \therefore \quad x=1$ 又ハ 8 又ハ -4

(答) 1, 8, -4

[3] $x^2(x+6)=32 \quad \therefore \quad x^3+6x^2-32=0$

$\therefore \quad (x-2)(x^2+8x+16)=0 \quad \therefore \quad (x-2)(x+4)^2=0$

$\therefore \quad x=2$ 又ハ -4 (答) 2, -4

頁 9. 問 題 (1)

1. $10x^4-47x^2+48=0 \quad \therefore \quad (5x^2-16)(2x^2-3)=0$

$\therefore \quad x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 又ハ $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

(答) $\pm\frac{4\sqrt{5}}{5},\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

2. $6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-25\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$

$x+\frac{1}{x}=X$ ト置ケバ $6X^2-25X+26=0$

$\therefore \quad X=2$ 又ハ $X=\frac{13}{6}$

依ツテ

$x+\frac{1}{x}=2$	$x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$
$\therefore \quad x^2-2x+1=0$	$6x^2-13x+6=0$
$\therefore \quad x=1$	$\therefore \quad x=\frac{2}{3}$ 又ハ $\frac{3}{2}$

(答) 1, $\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}$

3. $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{6}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$x-\frac{1}{x}=X$ ト置ケバ $x^2+\frac{1}{x^2}=X^2+2$

$\therefore \quad X^2+2=\frac{17}{6}X \quad \therefore \quad 6X^2-17X+12=0$

$\therefore \quad X=\frac{3}{2}$ 又ハ $X=\frac{4}{3}$

依ツテ

$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$	$x-\frac{1}{x}=\frac{4}{3}$
$\therefore \quad 2x^2-3x-2=0$	$3x^2-4x-3=0$
$\therefore \quad x=2$ 又ハ $-\frac{1}{2}$	$\therefore \quad x=\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$

(答) 2, $-\frac{1}{2},\ \frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$

4. $(x^2-7x+6)(x^2-7x-2)=84$

$x^2-7x=X$ ト置ケバ $(X+6)(X-2)=84$

$\therefore \quad X^2+4X-96=0 \quad \therefore \quad X=8$ 又ハ $X=-12$

$\therefore \quad x^2-7x=8$ 又ハ $x^2-7x=-12$

$\therefore \quad x=8$ 又ハ -1; 又ハ $x=3$ 又ハ $x=4$ (答) 8, 4, 3, -1

5. $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=144$

$\{(x+2)(x-4)\}\{(x+3)(x-5)\}=144$

$\therefore \quad (x^2-2x-8)(x^2-2x-15)=144$

$x^2-2x=X$ ト置ケバ $(X-8)(X-15)=144$

$\therefore\ X^2-23X-24=0 \quad \therefore\ X=24$ 又ハ $X=-1$

$\therefore\ x^2-2x=24$ | $x^2-2x=-1$

$\therefore\ x=6$ 又ハ -4 | $\therefore\ x=1$

(答) 6, 1, −4

6. $x^3-19x+30=0$

剰餘定理ヲ用ヒテ $x=3$ トスレバ左邊ハ零トナル。故ニ左邊ハ $x-3$ デ割リ切レル。

$\therefore\ (x-3)(x^2+3x-10)=0 \quad \therefore\ (x-3)(x-2)(x+5)=0$

$\therefore\ x=3$ 又ハ 2 又ハ -5 (答) 3, 2, −5

7. $x^4-5x^3+20x-16$ ニ於テ $x=1$ トスレバコノ式ハ零トナル故ニ $x-1$ デ割リ切レル。 $\therefore\ x^4-5x^3+20x-16=(x-1)(x^3-4x^2-4x+16)$

コノ第二因數ハ $x-2$ デ割リ切レル。

$$\therefore\ x^4-5x^3+20x-16=(x-1)(x-2)(x^2-2x-8)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+2)(x-4)$$

故ニ求メル根ハ 1, 2, −2, 4 デアル。 (答) 4, 2, 1, −2

8. $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$

$\therefore\ (a+b-2x)\{(a-x)^2-(a-x)(b-x)+(b-x)^2\}=(a+b-2x)^3$

$\therefore\ (a+b-2x)\{(a-x)^2-(a-x)(b-x)+(b-x)^2-(a-x)^2$
$-2(a-x)(b-x)-(b-x)^2\}=0$

$\therefore\ 3(a+b-2x)(a-x)(b-x)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{a+b}{2}$ 又ハ $x=a$ 又ハ $x=b$ (答) $a,\ b,\ \dfrac{a+b}{2}$

9. x^n-a^n ニ於テ $x=a$ ヲ代入スレバ $x^n-a^n=a^n-a^n=0$, 故ニ x^n-a^n ハ $x-a$ デ割切レル。

次ニ x^n+a^n ニ於テ $x=-a$ ヲ代入スレバ $(-a)^n+a^n$……(1)

n ガ正ノ奇數ナラバ $(-a)^n+a^n=-a^n+a^n=0$

n ガ正ノ偶數ナラバ $(-a)^n+a^n=a^n+a^n\neq 0$

即チ x^n+a^n ハ n ガ正ノ奇數ナラバ $x-a$ デ割切レ, n ガ正ノ偶數ナラバ割切レナイ。

10. $P=x^4+px^2+qx+a^2$ ガ x^2-1 デ割切レル故, P ノ $x=1$ 及ビ -1 ヲ代入スレバ何レモ 0 トナル。即チ

$1+p+q+a^2=0$……(1) $\quad 1+p-q+a^2=0$……(2)

(1) ヨリ $p+q=-(1+a^2)$……(3)

(2) ヨリ $p-q=-(1+a^2)$……(4)

(3), (4) ヨリ $p=-(1+a^2),\quad q=0$

コノ $p,\ q$ ノ値ヲ P ニ代入スレバ

$$P=x^4-(1+a^2)x^2+a^2=(x^2-1)(x^2-a^2)$$

故ニ P ハ x^2-a^2 デ割切レル。

11. 7 頁系 2. ニヨリ $x^3+2x^2-kx+4=0$ ガ $x=2$ ナル根ヲ有スル故, 左邊ハ $x-2$ デ割切レル。故ニ左邊ノ $x=2$ ヲ代入スレバ 0 トナル。

$2^3+2\times 2^2-k\times 2+4=0 \quad \therefore\ k=10$

依ツテ原方程式ハ $x^3+2x^2-10x+4=0$

$\therefore\ (x-2)(x^2+4x-2)=0 \quad \therefore\ x=2$ 又ハ $x=-2\pm\sqrt{6}$

(答) 10, $-2\pm\sqrt{6}$

12. 前題ト同樣ニシテ $6^3+a\times 6^2+72=0 \quad \therefore\ a=-8$

原方程式ハ $x^3-8x^2+72=0 \quad \therefore\ (x-6)(x^2-2x-12)=0$

$\therefore\ x=6$ 又ハ $x=1\pm\sqrt{13}$ (答) $1\pm\sqrt{13}$

第2章 無理方程式

本章デハ無理方程式及ビソノ解法ニツイテ授ケ簡單ナル應用問

題ヲ取扱ヒ，更ニ無理式 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ ヲ簡單ニスル練習ヲナサシメル。

無理方程式ノ解法ハ次ノ順序ニヨルノデアル。

(1) 無理式ヲ有理化シテ有理方程式ヲ作リ，

(2) ソノ有理方程式ヲ解キ，

(3) ソノ根ガ原方程式ニ適スルカ否カヲ驗メス。

頁 10.

4. 無理方程式 〔拙著高等教育代數學 P. 169 參照〕

頁 11.

5. 無緣根

本節デハ無理方程式ヲ解クトキ，無緣根ノ入リ來ルコトノアル理由ヲ證明スルノガ主眼デアル。

無理方程式ヲ解クトキノ驗算ハ解法ノ一部分デアルコトヲ知ラシメ，必ズ之ヲ記述スベキコトヲ徹底セシムベキデアル。

(注意) 例ヘバ $\sqrt{x-2}+\sqrt{2+x}=4$ ノヤウニ無理式ガ二ツアル場合ニハ無理式一ツダケヲ一邊ニ置キ，兩邊ヲ乘冪シテ根號ヲ去ルヤウニスル。又 $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=5\sqrt{x+1}$ ノヤウニ無理式ガ三ツアル場合ニハ無理式ヲ一ツダケ一邊ニ置キ，兩邊ヲ乘冪シテ根號ヲ去ルヤウニスル。

頁 14.

問 [1] $\sqrt{3x-8}=5$

兩邊ヲ二乘スレバ　$3x-8=25$　$\therefore\ x=11$

$x=11$ ヲ原方程式ノ左邊ニ代入スレバ　$\sqrt{3\times11-8}=5$

故ニ $x=11$ ハ原方程式ノ根デアル。　(答) 11

[2] $3\sqrt{3x+7}-x=5$

$\therefore\ 3\sqrt{3x+7}=x+5$

兩邊ヲ二乘スレバ　$9(3x+7)=x^2+10x+25$

$\therefore\ x^2-17x-38=0$　$\therefore\ x=19$ 又ハ -2

$x=19$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊 $=3\sqrt{3\times19+7}-19=5$

故ニ $x=19$ ハ原方程式ノ根デアル。

$x=-2$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊 $=3\sqrt{3\times(-2)+7}+2=5$

故ニ $x=-2$ モ原方程式ノ根デアル。　(答) 19, -2

[3] $x+\sqrt{x-4}=6$

$\therefore\ \sqrt{x-4}=6-x$

兩邊ヲ二乘スレバ　$x-4=x^2-12x+36$

$\therefore\ x^2-13x+40=0$　$\therefore\ x=8$ 又ハ 5

$x=8$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊 $=8+\sqrt{8-4}=10$

故ニ $x=8$ ハ原方程式ニ適合シナイ。

$x=5$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊 $=5+\sqrt{5-4}=5+1=6$

故ニ $x=5$ ハ原方程式ノ根デアル。　(答) 5

[4] $\sqrt{x-2}+\sqrt{2+x}=4$

$\therefore\ \sqrt{x-2}=4-\sqrt{2+x}$

兩邊ヲ二乘スレバ　$x-2=16-8\sqrt{2+x}+2+x$

$\therefore\ 2\sqrt{2+x}=5$

更ニ兩邊ヲ二乘スレバ　$4(2+x)=25$　$\therefore\ x=\dfrac{17}{4}$

$x=\dfrac{17}{4}$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊 $=\sqrt{\dfrac{17}{4}-2}+\sqrt{2+\dfrac{17}{4}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=4$

故ニ $x=\frac{17}{4}$ ハ原方程式ノ根デアル。 (答) $\frac{17}{4}$

[5] $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=5\sqrt{x+1}$

兩邊ヲ二乘スレバ $x+4+2\sqrt{x+4}\sqrt{x+9}+x+9=25(x+1)$

$\therefore\ 2\sqrt{x+4}\sqrt{x+9}=23x+12$

更ニ兩邊ヲ二乘スレバ $4(x+4)(x+9)=529x^2+552x+144$

$\therefore\ 21x^2+20x=0 \qquad \therefore\ x=0$ 又ハ $x=-\frac{20}{21}$

$x=-\frac{20}{21}$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{-\frac{20}{21}+4}+\sqrt{-\frac{20}{21}+9}=\frac{8}{\sqrt{21}}+\frac{13}{\sqrt{21}}=\frac{21}{\sqrt{21}}=\sqrt{21}$

右邊$=5\sqrt{-\frac{20}{21}+1}=\frac{5}{\sqrt{21}}$

故ニ $x=-\frac{20}{21}$ ハ原方程式ニ適合シナイ。

$x=0$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5,\qquad$ 右邊$=5\sqrt{1}=5$

故ニ $x=0$ ハ原方程式ノ根デアル。 (答) 0

6. 解法ノ特例

本節デハ $x^2+3x-2\sqrt{x^2+3x-1}=4$ ノヤウニ根號内ノ未知數ヲ含ム部分ト根號外ノ未知數ヲ含ム部分トノ未知數ノ同ジ冪ノ項ノ係數ガ比例スル無理方程式ノ解法ヲ授ケル。

頁 15.

問 [1] $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x+6}=18$

$\sqrt{x^2-3x+6}=y$ ト置ケバ原方程式ハ $y^2+2y-24=0$

$\therefore\ y=4$ 又ハ $y=-6$

$y\not<0$ ナル故 $y=-6$ ハ捨テル。

$\sqrt{x^2-3x+6}=4 \qquad \therefore\ x^2-3x-10=0$

$\therefore\ x=5$ 又ハ $x=-2$ (答) 5, −2

[2] $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$

$\sqrt{x^2-2x+6}=y$ ト置ケバ $2y^2+3y-27=0$

$\therefore\ y=3$ 又ハ $y=-\frac{9}{2}$ (捨テル)

$\sqrt{x^2-2x+6}=3 \qquad \therefore\ x^2-2x-3=0$

$\therefore\ x=3$ 又ハ $x=-1$ (答) 3, −1

[3] $(x+4)(x-3)-3\sqrt{x(x+1)}+14=0$

$\therefore\ x^2+x-12-3\sqrt{x^2+x}+14=0$

$\therefore\ x^2+x-3\sqrt{x^2+x}+2=0$

$\sqrt{x^2+x}=y$ ト置ケバ $y^2-3y+2=0$

$\therefore\ y=2$ 又ハ $y=1$

$\sqrt{x^2+x}=2$	$\sqrt{x^2+x}=1$
$\therefore\ x^2+x-4=0$	$\therefore\ x^2+x-1=0$
$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$	$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(答) $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

[4] $\sqrt{16-7x-x^2}=x^2+7x-\frac{1}{4}$

兩邊ヲ4倍シテ次ノ如ク變形スル。

$4(16-7x-x^2)+4\sqrt{16-7x-x^2}-63=0$

$\sqrt{16-7x-x^2}=y$ ト置ケバ $4y^2+4y-63=0$

$\therefore\ y=\frac{7}{2}$ 或ハ $y=-\frac{9}{2}$ (捨テル)

$\therefore\ \sqrt{16-7x-x^2}=\frac{7}{2}$ 兩邊ヲ二乘スレバ

$4(16-7x-x^2)=49 \qquad \therefore\ 4x^2+28x-15=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 又ハ $x=-\frac{15}{2}$ (答) $\frac{1}{2},\ -\frac{15}{2}$

頁 16.

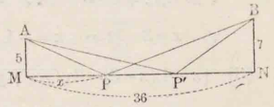
7. 應用問題

頁 17.

問 1. MP$=x$(cm) トスレバ NP$=(36-x)$(cm)

故ニ AP$=\sqrt{5^2+x^2}$,

BP$=\sqrt{(36-x)^2+7^2}$



依ツテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$\sqrt{5^2+x^2}-\sqrt{(36-x)^2+7^2}=\pm 12 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\therefore\ \sqrt{5^2+x^2}\mp 12=\sqrt{(36-x)^2+7^2}$$

兩邊ヲ二乘シテ整頓スレバ $\mp\sqrt{25+x^2}=3x-49$

更ニ兩邊ヲ二乘シテ整頓スレバ

$$4x^2-147x+1188=0$$

$$\therefore\ x=12 \text{ 又ハ } \frac{99}{4}$$

コレ等ハ (1) ニ適合スル。

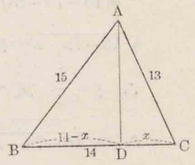
(答) MP$=12$cm, NP$=24$cm

又ハ MP$=24\frac{3}{4}$cm, NP$=11\frac{1}{4}$cm

問 2. △ABC ニ於テ AB$=15$(cm), BC$=14$(cm), CA$=13$(cm) トシ, A ヨリノ高サヲ AD トスル。

今 CD$=x$(cm) トスレバ, AD ノ長サカラ

$$\sqrt{13^2-x^2}=\sqrt{15^2-(14-x)^2}\cdots\cdots\cdots(1)$$



コノ無理方程式ヲ解イテ $x=5$ ヲ得ル。

$x=5$ トスレバ AD$=\sqrt{13^2-5^2}=12$(cm)

故ニ, コノ三角形ノ面積ハ $12\times14\times\frac{1}{2}=84$(cm^2)

(答) 84平方糎

8. $a+\sqrt{b}$ ノ平方根

本節ノ教授ヲ進メルニハ 19 頁ヲ參考トシ, 實例ニツイテ徹底ヲ期セラレタイ。ソシテ尙無理式ノ値ヲ小數デ表ハス練習ヲシテ, 本節ノ變形ノ便利ナルコトヲ會得セシメルガヨイ。

(注意) 1. 教授ノ順序トシテハ $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ ノヤウニ, $\sqrt{b}$ ノ係數トシテ 2 ガアル場合ニツキ授ケ, 次ニ $\sqrt{b}$ ノ係數ガ 2 デナイ場合ニ及ブガヨイ。

(注意) 2. $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$ ハ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ナル形ニスルコトハ出來ナイ。何トナレバ, コノ兩邊ヲ二乘スレバ $a+2\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy}$ トナリ, $2\sqrt{b}=-2\sqrt{xy}$ トナルガ, 左邊ハ正ノ無理數デ, 右邊ハ負數トナツテ不合理デアル。

同樣ニ $\sqrt{a-2\sqrt{b}}$ ハ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ト置クコトハ出來ナイ。

ソシテ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ト置クトキ $x>y$ デナケレバナラナイ。

頁 18.

問 1. [1] $\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$ (答)

[2] $\sqrt{28-5\sqrt{12}}=\sqrt{28-2\sqrt{75}}=5-\sqrt{3}$ (答)

[3] $\dfrac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{12+2\sqrt{27}}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}$ (答)

[4] $\dfrac{5}{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}=\dfrac{5}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}=\dfrac{5}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{15-5\sqrt{2}}{7}$ (答)

問 2. [1] $\sqrt{3}x^2-(\sqrt{3}-1)x-1=0$

$$x=\frac{(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)\pm(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}}=1 \text{ 又ハ } -\frac{1}{\sqrt{3}}$$ (答) $1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$

[2] $x^2-4x+9=\sqrt{8}(2x-5)$

$\therefore\ x^2-2(2+\sqrt{8})x+9+5\sqrt{8}=0$

$\therefore\ x=(2+\sqrt{8})\pm\sqrt{(2+\sqrt{8})^2-(9+5\sqrt{8})}$

$=(2+2\sqrt{2})\pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}=(2+2\sqrt{2})\pm(\sqrt{2}-1)$

$=3\sqrt{2}+1$ 又ハ $3+\sqrt{2}$

(答) $3\sqrt{2}+1,\ 3+\sqrt{2}$

頁 20. 問 題 (2)

1. $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2}=\sqrt{8x-7}$

兩邊ヲ二乘スレバ $x+2+2x+2+2\sqrt{x+2}\sqrt{2x+2}=8x-7$

$\therefore\ 2\sqrt{x+2}\sqrt{2x+2}=5x-11$

更ニ兩邊ヲ二乘スレバ $4(x+2)(2x+2)=25x^2-110x+121$

$\therefore\ 17x^2-134x+105=0$ $\therefore\ x=7$ 又ハ $x=\frac{15}{17}$

$x=7$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{7+2}+\sqrt{2\times7+2}=3+4=7$

右邊$=\sqrt{8\times7-7}=7$

故ニ $x=7$ ハ原方程式ノ根デアル。

$x=\frac{15}{17}$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{\frac{15}{17}+2}+\sqrt{2\times\frac{15}{17}+2}=\frac{7}{\sqrt{17}}+\frac{8}{\sqrt{17}}=\frac{15}{\sqrt{17}}$

右邊$=\sqrt{8\times\frac{15}{17}-7}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

故ニ $x=\frac{15}{17}$ ハ無緣根デアル。 (答) 7

2. $\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=x$

$\therefore\ \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}=x$ $\therefore\ x=x\sqrt{x+1}$

$\therefore\ x(1-\sqrt{x+1})=0$ $\therefore\ x=0$ 又ハ $\sqrt{x+1}=1$

$\therefore\ x=0$

$x=0$ ハ原方程式ヲ滿足スルカラ求メル根デアル。 (答) 0

3. $\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{\sqrt{x^2+1}}=4$

$\sqrt{x^2+1}=y$ ト置ケバ $y+\frac{3}{y}=4$ $\therefore\ y^2-4y+3=0$

$\therefore\ y=1$ 又ハ $y=3$

依ツテ

$\sqrt{x^2+1}=1$	$\sqrt{x^2+1}=3$
兩邊ヲ二乘シテ $x^2+1=1$	兩邊ヲ二乘シテ $x^2+1=9$
$\therefore\ x=0$	$\therefore\ x=\pm2\sqrt{2}$

(答) $\pm2\sqrt{2},\ 0$

4. $3+\sqrt{x^2+x-1}=2x$

$\therefore\ \sqrt{x^2+x-1}=2x-3$

兩邊ヲ二乘スレバ $x^2+x-1=4x^2-12x+9$

$\therefore\ 3x^2-13x+10=0$

$\therefore\ x=1$ 又ハ $x=\frac{10}{3}$

$x=1$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=3+\sqrt{1+1-1}=4$ 右邊$=2\times1=2$

故ニ $x=1$ ハ無緣根デアル。

$x=\frac{10}{3}$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=3+\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{10}{3}-1}=3+\frac{11}{3}=\frac{20}{3}$, 右邊$=2\times\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$

故ニ $x=\frac{10}{3}$ ハ原方程式ノ根デアル。 (答) $\frac{10}{3}$

5. $2x^2-3\sqrt{2x^2-7x+7}=7x-3$

$\therefore\ 2x^2-7x+7-3\sqrt{2x^2-7x+7}-4=0$

$\sqrt{2x^2-7x+7}=y$ ト置ケバ $y^2-3y-4=0$

$\therefore\ y=4$ 又ハ $y=-1$ (捨テル)

$\sqrt{2x^2-7x+7}=4$ ヨリ $2x^2-7x+7=16$

$\therefore\ 2x^2-7x-9=0$ $\therefore\ x=\dfrac{9}{2}$ 又ハ -1 (答) $\dfrac{9}{2},\ -1$

6. $9x-3x^2+4\sqrt{x^2-3x+5}=11$

$\therefore\ 3(x^2-3x+5)-4\sqrt{x^2-3x+5}-4=0$

$\sqrt{x^2-3x+5}=y$ ト置ケバ $3y^2-4y-4=0$

$\therefore\ y=2$ 又ハ $y=-\dfrac{2}{3}$ (捨テル)

$\sqrt{x^2-3x+5}=2$ ヨリ $x^2-3x+1=0$ $\therefore\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(答) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

7. $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$

$3x^2-4x=y$ ト置ケバ $\sqrt{y+34}+\sqrt{y-11}=9$

$\therefore\ \sqrt{y+34}=9-\sqrt{y-11}$

兩邊ヲ二乘スレバ $y+34=81-18\sqrt{y-11}+y-11$

$\therefore\ \sqrt{y-11}=2$

更ニ兩邊ヲ二乘スレバ $y=15$

故ニ $3x^2-4x-15=0$ $\therefore\ x=3$ 又ハ $-\dfrac{5}{3}$

$x=3$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{27-12+34}+\sqrt{27-12-11}=9$

$x=-\dfrac{5}{3}$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{\dfrac{25}{3}+\dfrac{20}{3}+34}+\sqrt{\dfrac{25}{3}+\dfrac{20}{3}-11}=7+2=9$

故ニ $x=3$ 及ビ $-\dfrac{5}{3}$ ハ原方程式ノ根デアル。 (答) $3,\ -\dfrac{5}{3}$

8. $\sqrt{mx+b^2}+\sqrt{mx}=a$

$\therefore\ \sqrt{mx+b^2}=a-\sqrt{mx}$

兩邊ヲ平方シテ $mx+b^2=a^2+mx-2a\sqrt{mx}$

$\therefore\ 2a\sqrt{mx}=a^2-b^2$

更ニ兩邊ヲ平方スレバ $4a^2mx=(a^2-b^2)^2$

故ニ $a^2m\neq0$ トスレバ $x=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2m}$ (答)

〔吟味〕 $a^2m\neq0$ トスル。

$x=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2m}$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}+b^2}+\sqrt{\dfrac{a^2-b^2)^2}{4a^2}}=\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2)^2}{4a^2}}+\sqrt{\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}}\cdots(1)$

$a>b$ トスレバ $\sqrt{(a^2-b^2)^2}=(a^2-b^2)$

$a<b$ トスレバ $\sqrt{(a^2-b^2)^2}=-(a^2-b^2)$

$a>0$ ナル故

$a>b$ トスレバ (1) ヨリ 左邊$=\dfrac{a^2+b^2}{2a}+\dfrac{a^2-b^2}{2a}=a$

$a<b$ トスレバ (1) ヨリ 左邊$=\dfrac{a^2+b^2}{2a}-\dfrac{a^2-b^2}{2a}=b$

故ニ $a^2m\neq0$ トシ $a>b$ ナルトキ $x=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2m}$ ハ原方程式ノ根デアル。

$a<b$ ナルトキハ $x=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4a^2m}$ ハ無緣根デアル。

$m=0$ トスレバ 左邊$=\sqrt{b^2}$ 右邊$=a$ ナル故 $a=b$ ナルトキハ,

$b>0$ ナルトキハ不定ニシテ, $b<0$ ナルトキハ不可能デアル。

9. $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}=a+b$

$\therefore\ \sqrt{a^2-x^2}=a+b-\sqrt{b^2+x^2}$

兩邊ヲ二乘スレバ $a^2-x^2=(a+b)^2-2(a+b)\sqrt{b^2+x^2}+b^2+x^2$

$\therefore\ (a+b)\sqrt{b^2+x^2}=x^2+b^2+ab$

更ニ兩邊ヲ二乘シテ整頓スレバ $x^4=(a^2-b^2)x^2$

$\therefore\ x=0$ 又ハ $x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$

コレ等ノ x ノ値ハ原方程式ヲ滿足スル。 (答) $0,\ \pm\sqrt{a^2-b^2}$

10. $\sqrt{mx+n^2}-\sqrt{nx+m^2}=m-n$

$\therefore\ \sqrt{mx+n^2}=\sqrt{nx+m^2}+m-n$

兩邊ヲ二乘スレバ

$mx+n^2=nx+m^2+(m-n)^2+2(m-n)\sqrt{nx+m^2}$

$\therefore\ m\neq n$ トスレバ $x-2m=2\sqrt{nx+m^2}$

更ニ兩邊ヲ二乘スレバ $x^2-4mx+4m^2=4(nx+m^2)$

$\therefore\ x^2-4(m+n)x=0$

$\therefore\ x=0$ 又ハ $x=4(m+n)$

$x=0$ ヲ原方程式ニ代入スレバ ($m>0,\ n>0$ トスル)

左邊$=\sqrt{n^2}-\sqrt{m^2}=n-m$

故ニ $x=0$ ハ無緣根デアル。

$x=4(m+n)$ ヲ原方程式ニ代入スレバ

左邊$=\sqrt{4m(m+n)+n^2}-\sqrt{4n(m+n)+m^2}=2m+n-(2n+m)=m-n$

故ニ $x=4(m+n)$ ハ求メル根デアル。 (答) $4(m+n)$

11. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=4\sqrt{x^2-a^2}$

左邊ノ分母ヲ有理化スルト

$$\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}{x^2-(x^2-a^2)}=\frac{x^2+(x^2-a^2)+2x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$$

$$\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x^2+(x^2-a^2-2x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$$

故ニ原方程式ハ $\dfrac{4x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}=4\sqrt{x^2-a^2}$

$\therefore\ x\sqrt{x^2-a^2}=a^2\sqrt{x^2-a^2}$

兩邊ヲ二乘スレバ $x^2(x^2-a^2)=a^4(x^2-a^2)$

$\therefore\ x^2=a^2$ 又ハ $x^2=a^4$ $\therefore\ x=\pm a$ 又ハ $x=\pm a^2$

$x=\pm a$ トスレバ 左邊$=\dfrac{\pm a}{\pm a}-\dfrac{\pm a}{\pm a}=0$, 右邊$=0$

$x=a^2$ トスレバ

左邊$=\dfrac{a^2+\sqrt{a^4-a^2}}{a^2-\sqrt{a^4-a^2}}-\dfrac{a^2-\sqrt{a^4-a^2}}{a^2+\sqrt{a^4-a^2}}=\dfrac{4a^2\sqrt{a^4-a^2}}{a^2}=4\sqrt{a^4-a^2}$

右邊$=4\sqrt{a^4-a^2}$

$x=-a^2$ トスレバ 左邊$=\dfrac{-4a^2\sqrt{a^4-a^2}}{a^2}=-4\sqrt{a^4-a^2}$

右邊$=4\sqrt{a^4-a^2}$

故ニ $x=\pm a$ 及ビ $x=a^2$ ハ原方程式ヲ滿足スル。 (答) $\pm a,\ a^2$

12. $\begin{cases} x+y=13\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $y=13-x\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ $\sqrt{x}-\sqrt{13-x}=1$

$\therefore\ \sqrt{x}=\sqrt{13-x}+1$

兩邊ヲ二乘シテ $x=13-x+1+2\sqrt{13-x}$

$\therefore\ x-7=\sqrt{13-x}$

兩邊ヲ二乘シテ $x^2-14x+49=13-x$

$\therefore\ x^2-13x+36=0$ $\therefore\ x=9$ 又ハ 4

$x=9$ ヲ (3) ニ代入スレバ $y=4$

$x=4$ ヲ (3) ニ代入スレバ $y=9$

$x=9,\ y=4$ ハ (2) ヲ滿足スルガ, $x=4,\ y=9$ ハ滿足シナイ。

(答) $x=9,\ y=4$

13. $\begin{cases} x-y=7\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \sqrt{x+7}+\sqrt{y-1}=5\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $y=x-7\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-8}=5$

$\therefore\ \sqrt{x+7}=5-\sqrt{x-8}$

兩邊ヲ二乘スレバ $x+7=25+x-8-10\sqrt{x-8}$

$\therefore\ \sqrt{x-8}=1$

更ニ兩邊ヲ二乘スレバ $x-8=1$ $\therefore\ x=9$

之ヲ (3) ニ代入スレバ $y=2$

$x=9,\ y=2$ ハ (2) ヲ滿足スル。 (答) $x=9,\ y=2$

14. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{17}{4}$ ……(1) $x^2+y^2=706$ ……(2)

(1) ノ左邊ノ分母ヲ有理化スレバ $\dfrac{2(x+y)}{x-y}=\dfrac{17}{4}$

$\therefore\ 8(x+y)=17(x-y)$ $\therefore\ x=\dfrac{25}{9}y$ ……(3)

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ $\left(\dfrac{25}{9}y\right)^2+y^2=706$

$\therefore\ y=\pm 9$ $\therefore\ x=\pm 25$

$x,\ y$ ノ負數ノ値ハ採ラナイ。(虛數ハ扱ハナイカラ)

$x=25,\ y=9$ ハ (1) ヲ滿足スル。 (答) $x=25,\ y=9$

頁 21.

15. $2y-x=1$ ……(1) $\sqrt{x+y-1}-\sqrt{x-y+1}=2$ ……(2)

(1) ヨリ $x=2y-1$ ……(3)

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ $\sqrt{3y-2}-\sqrt{y}=2$ $\therefore\ \sqrt{3y-2}=\sqrt{y}+2$

兩邊ヲ二乘スレバ $3y-2=y+4+4\sqrt{y}$ $\therefore\ y-3=2\sqrt{y}$

兩邊ヲ二乘スレバ $y^2-6y+9=4y$ $\therefore\ y^2-10y+9=0$

$\therefore\ y=9$ 又ハ 1

コレ等ノ値ヲ (3) ニ代入スレバ $x=17$ 又ハ $x=1$

$x=17,\ y=9$ ハ (2) ヲ滿足シ $x=1,\ y=1$ ハ (2) ヲ滿足シナイ。

(答) $x=17,\ y=9$

16. $\dfrac{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}=\dfrac{3+\sqrt{5-(\sqrt{12}+1)}}{2-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{3+(\sqrt{3}-1)}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3}$ (答)

17. $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

$=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (答)

18. 題意ニヨリ二數ハ何レモ正ノ數デアル。求メル二數ヲ $x,\ y$ トスレバ

$xy=144$ ……(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$ ……(2)

(2) ノ兩邊ヲ二乘スレバ $x+y+2\sqrt{xy}=49$ ……(3)

(3) ニ (1) ヲ代入スレバ $x+y=25$ ……(4)

(1), (4) ヨリ $x=16,\ y=9;\ x=9,\ y=16$

故ニ求メル二數ハ 16 ト 9 デアル。 (答) 16, 9

19. $x+y+\sqrt{x+y}-12=0$ ト置キ $\sqrt{x+y}=X$ ト置ケバ

$X^2+X-12=0$ $\therefore\ X=3$ 又ハ $X=-4$ (捨テル)

故ニ $\sqrt{x+y}=3$ $\therefore\ x+y=9$

之ヲ滿足スル $x,\ y$ ノ正ノ整數値ヲ求メルト

$\begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=7\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=7\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=8\\y=1\end{cases}$ (答)

20. 直角ヲ夾ム二邊ヲ x cm, y cm トスレバ, 斜邊ハ $\sqrt{x^2+y^2}$ cm デアル。依ツテ題意ニヨリ

$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=12$ ……(1)

$xy=6\times 2$ ……(2)

(1) ヨリ $\sqrt{x^2+y^2}=12-(x+y)$

兩邊ヲ二乘スレバ $x^2+y^2=144-24(x+y)+x^2+y^2+2xy$ ……(3)

(3) ニ (2) ヲ代入スレバ　$x+y=7$……(4)

(2), (4) ヨリ　$x=4,\ y=3;\ x=3,\ y=4$

コレ等ノ値ハ (1) ヲ滿足スル。

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16+9}=5$　　(答)　5 cm, 4 cm, 3 cm

21. 直角ヲ夾ム二邊ヲ夫々 x cm, y cm トスレバ斜邊ハ $\sqrt{x^2+y^2}$ cm デアル。依ツテ題意ニヨリ

$x+y-\sqrt{x^2+y^2}=4$……(1)　　$xy=60$……(2)

(1) ヨリ　$\sqrt{x^2+y^2}=(x+y)-4$

兩邊ヲ二乘スレバ　$x^2+y^2=x^2+y^2+2xy+16-8(x+y)$

コノ式ニ (2) ヲ代入スレバ　$x+y=17$……(4)

(2), (4) ヨリ　$x=12,\ y=5;\ x=5,\ y=12$

コレ等ノ値ハ (1) ヲ滿足スル。

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$　　(答)　13 cm, 12 cm, 5 cm

第 3 章　多元聯立方程式

二元ノ聯立方程式ノ解法ハ既ニ基本教材中デ取扱ツタカラ本章デハ三元以上ノ聯立一次方程式及ビ三元ノ聯立二次方程式ノ解法ヲ授ケ，計算力ノ練磨ヲナサシメル。

三元ノ聯立一次方程式ノ解法ハ，ソノ方法ニ於テ稍，複雜デアルカラ基本教材デナク本書ニ採ツタノデアル。教授者ハ解法ノ要點ヲ明確ニ生徒ニ授ケナケレバナラナイ。

次ニ三元ノ聯立二次方程式ハ極メテ簡單ナモノダケヲ授ケル程度デヨイ。特殊ナル工夫ヲ要スル難問題ヲ多ク課スルコトハ生徒ヲ徒ラニ困ラシメルダケデアルカラ取扱ハヌガヨイ。

頁 22.

9. 多元聯立一次方程式 〔拙著高等教育代數學 P. 78 參照〕

本節デハ先ヅ三元ノ聯立一次方程式ノ解キ方ヲ授ケル。三ツノ未知數ガ各方程式ニ含マレテヰル場合ヲ授ケ次ニ教科書 27 頁問題 4. ノヤウニ，或未知數ガ缺ケテヰル方程式ノアル場合ノ解法ヲ工夫セシメル。

三元ノ場合ガ徹底シタラ四元ノ場合ニ及ブガヨイ。

頁 23.

問 [1]
$$\begin{cases} x+y+z=12 \cdots\cdots(1) \\ x+2y-z=5 \cdots\cdots(2) \\ 2x+y-z=6 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(1)+(2)　$2x+3y=17$……(4)

(1)+(3)　$3x+2y=18$……(5)

(4)×2−(5)×3　　$-5x=-20$　　∴　$x=4$……(6)

(6) ヲ (4) ニ代入スレバ　$8+3y=17$　　∴　$y=3$……(7)

(6), (7) ヲ (1) ニ代入スレバ　$4+3+z=12$　　∴　$z=5$

(答)　$x=4,\ y=3,\ z=5$

[2]
$$\begin{cases} 2x-y+z=5 \cdots\cdots(1) \\ x-2y+z=2 \cdots\cdots(2) \\ x-y+2z=9 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(1)−(2)　　$x+y=3$……(4)

(1)×2−(3)　$3x-y=1$……(5)

(4)+(5)　　$4x=4$　　∴　$x=1$……(6)

(6) ヲ (4) ニ代入スレバ　$y=2$……(7)

(6), (7) ヲ (1) ニ代入スレバ　$2-2+z=5$　　∴　$z=5$

(答)　$x=1,\ y=2,\ z=5$

$$[3]\quad \begin{cases} 2x+3y+5z=3 \cdots\cdots(1) \\ 2x+3y=10z \cdots\cdots(2) \\ 6x-9y+5z=1 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(2) ヨリ $2x+3y-10z=0 \cdots\cdots (2)'$

$(1)\times 2+(2)'$ $6x+9y=6$ $\therefore$ $2x+3y=2 \cdots\cdots(4)$

$(1)-(3)$ $-4x+12y=2$ $\therefore$ $-2x+6y=1 \cdots\cdots(5)$

$(4)+(5)$ $9y=3$ $\therefore$ $y=\frac{1}{3} \cdots\cdots(6)$

(6) ヲ (4) ニ代入スレバ $2x=1$ $\therefore$ $x=\frac{1}{2} \cdots\cdots (7)$

(6), (7) ヲ (1) ニ代入スレバ $1+1+5z=3$ $\therefore$ $z=\frac{1}{5}$

(答) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{5}$

$$[4]\quad \begin{cases} y+z-x=9 \cdots\cdots(1) \\ z+x-y=1 \cdots\cdots(2) \\ x+y-z=5 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(1) ヨリ $-x+y+z=9 \cdots\cdots(1)'$

(2) ヨリ $x-y+z=1 \cdots\cdots(2)'$

$(1)'+(3)$ $2y=14$ $\therefore$ $y=7$

$(1)'+(2)'$ $2z=10$ $\therefore$ $z=5$

$(2)'+(3)$ $2x=6$ $\therefore$ $x=3$

(答) $x=3,\ y=7,\ z=5$

10. 多元聯立二次方程式 〔拙著高等教育代數學 P. 204 參照〕

三元ノ聯立二次方程式ノ解法ハ困難デアルカラ，簡單ナモノヲ取扱フ程度デヨイ。

頁 24.

問 1.

[1] $xy=15 \cdots\cdots(1)$ $yz=20 \cdots\cdots(2)$ $zx=12 \cdots\cdots(3)$

$(1)\times(2)\times(3)$ $(xyz)^2=3600$

$\therefore$ $xyz=60 \cdots\cdots(4)$

又ハ $xyz=-60 \cdots\cdots(5)$

(4), (5) ヲ順ニ (2), (3), (1) デ割レバ

$x=\pm 3,\ y=\pm 5,\ z=\pm 4$ 〔複號同順〕 (答)

$$[2]\quad \begin{cases} (x+y)(x+z)=15 \cdots\cdots(1) \\ (y+z)(y+x)=21 \cdots\cdots(2) \\ (z+x)(z+y)=35 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

$(1)\times(2)\times(3)$ $\{(x+y)(x+z)(y+z)\}^2=(3\times 5\times 7)^2$

$\therefore$ $(x+y)(x+z)(y+z)=105 \cdots\cdots(4)$

又ハ $(x+y)(x+z)(y+z)=-105 \cdots\cdots(5)$

(4) ヲ (3), (2), (1) デ割レバ

$x+y=3,\ x+z=5,\ y+z=7$

$\therefore$ $x=0.5,\ y=2.5,\ z=4.5$

(5) ヲ (3), (2), (1) デ割レバ

$x+y=-3,\ x+z=-5,\ y+z=-7$

$\therefore$ $x=-0.5,\ y=-2.5,\ z=-4.5$

(答) $x=\pm 0.5,\ y=\pm 2.5,\ z=\pm 4.5$ 〔複號同順〕

頁 25.

問 2.

$$[1]\quad \begin{cases} (y+z)(x+y+z)=12 \cdots\cdots(1) \\ (z+x)(x+y+z)=20 \cdots\cdots(2) \\ (x+y)(x+y+z)=30 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

$(1)+(2)+(3)$ $2(x+y+z)^2=62$ $\therefore$ $(x+y+z)^2=31$

$\therefore$ $x+y+z=\sqrt{31} \cdots\cdots(4)$

又ハ $x+y+z=-\sqrt{31} \cdots\cdots(5)$

(4), (5) デ (1), (2), (3) ヲ順ニ割レバ

$y+z=\pm\frac{12}{\sqrt{31}}$, $z+x=\pm\frac{20}{\sqrt{31}}$, $x+y=\pm\frac{30}{\sqrt{31}}$

複號ノ + ヲ採ツテ (4) ニ代入スレバ

$x=\frac{19}{\sqrt{31}}=\frac{19\sqrt{31}}{31}$, $y=\frac{11}{\sqrt{31}}=\frac{11\sqrt{31}}{31}$, $z=\frac{1}{\sqrt{31}}=\frac{\sqrt{31}}{11}$

− ヲ採ツテ (5) ニ代入スレバ $x=-\frac{19\sqrt{31}}{31}$, $y=-\frac{11\sqrt{31}}{31}$,

$z=-\frac{\sqrt{31}}{11}$

(答) $x=\pm\frac{19\sqrt{31}}{31}$, $y=\pm\frac{11\sqrt{31}}{31}$, $z=\pm\frac{\sqrt{31}}{11}$ 〔複號同順〕

[2] $\begin{cases} x(x+y+z)=12 \cdots\cdots(1) \\ (2y+z)(x+y+z)=30 \cdots\cdots(2) \\ (y+2z)(x+y+z)=42 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)×3+(2)+(3) $3(x+y+z)^2=108$

∴ $(x+y+z)^2=36$

∴ $x+y+z=6$, 又ハ $x+y+z=-6$

之ヨリ $x=\pm2$, $y=\pm1$, $z=\pm3$ 〔複號同順〕 (答)

頁 27.

問 3.

[1] $\begin{cases} x+y-z=12 \cdots\cdots(1) \\ x^2-yz=28 \cdots\cdots(2) \\ x^2+y^2+z^2=56 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(2)×2+(3) $3x^2+(y-z)^2=112 \cdots\cdots(4)$

(1) ヨリ $y-z=12-x$ 之ヲ (4) ニ代入スレバ

$3x^2+(12-x)^2=112$ ∴ $x^2-6x+8=0$

∴ $x=2$ 又ハ $x=4$

$x=2$ トスレバ (1) ヨリ $y-z=10 \cdots\cdots(5)$

(2) ヨリ $yz=-24 \cdots\cdots(6)$

(5), (6) ヨリ $y=6$, $z=-4$; $y=4$, $z=-6$

又 $x=4$ トスレバ (1) ヨリ $y-z=8 \cdots\cdots(7)$

(2) ヨリ $yz=-12 \cdots\cdots(8)$

(7), (8) ヨリ $y=6$, $z=-2$; $y=2$, $z=-6$

(答) $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \\ z=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \\ z=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=-6 \end{cases}$

[2] $\begin{cases} xz=y^2 \cdots\cdots(1) \\ x+y+z=19 \cdots\cdots(2) \\ x^2+y^2+z^2=133 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)×2+(3) $y^2+(x+z)^2=2y^2+133$

∴ $y^2-(x+z)^2=-133 \cdots\cdots(4)$

(2) ヨリ $x+z=19-y$

之ヲ (4) ニ代入スレバ $y^2-(19-y)^2=-133$

∴ $38y=228$ ∴ $y=6 \cdots\cdots(5)$

(5) ヲ (2) ニ代入スレバ $x+z=13 \cdots\cdots(6)$

(1) ニ代入スレバ $xz=36 \cdots\cdots(7)$

(6), (7) ヨリ $x=4$, $z=9$; $x=9$, $z=4$

(答) $x=4$, $y=6$, $z=9$; $x=9$, $y=6$, $z=4$

問 題 (3)

1. $\begin{cases} z=5x+2y \cdots\cdots(1) \\ 3x+2y+4z=29 \cdots\cdots(2) \\ 7x-y-3z=4 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1) ヨリ $5x+2y-z=0 \cdots\cdots(1)'$

(1)′−(2) $2x-5z=-29 \cdots\cdots(4)$

(2)+(3)×2 $17x-2z=37 \cdots\cdots(5)$

(4)×2−(5)×5 $-81x=-243$ ∴ $x=3$……(6)

(6) ヲ (4) ニ代入スレバ $z=7$……(7)

(6), (7) ヲ (1) ニ代入スレバ $y=-4$

(答) $x=3,\ y=-4,\ z=7$

2. $\begin{cases} 2x+y-2z=20 \cdots\cdots(1) \\ 3x-\dfrac{y}{2}+z=10 \cdots\cdots(2) \\ 5x+y-\dfrac{z}{3}=20 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(2)×2 $6x-y+2z=20$ ……(2)′

(3)×3 $15x+3y-z=60$ ……(3)′

(1)+(2)′ $8x=40$ ∴ $x=5$……(4)

(4) ヲ (1) ニ代入スレバ $y-2z=10$……(5)

(4) ヲ (3)′ ニ代入スレバ $3y-z=-15$……(6)

(5)−(6)×2 $-5y=40$ ∴ $y=-8$……(7)

(4), (7) ヲ (1) ニ代入スレバ $z=-9$

(答) $x=5,\ y=-8,\ z=-9$

3. $\begin{cases} x+y-2z=9 \cdots\cdots(1) \\ 3(x+y)-5z=29 \cdots\cdots(2) \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{4y}{7}=1-\dfrac{z}{2} \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(3)×42 $14x-24y+21z=42$ ……(4)

(1) ノ $x+y$ ヲ (2) ニ代入スレバ $3(2z+9)-5z=29$

∴ $z=2$……(5)

故ニ (1) ヨリ $x+y=13$……(6)

(5) ヲ (4) ニ代入スレバ $7x-12y=0$……(7)

(6), (7) ヨリ $x=\dfrac{156}{19}$ ∴ $y=\dfrac{91}{19}$

(答) $x=8\dfrac{4}{19},\ y=4\dfrac{15}{19},\ z=2$

4. $\begin{cases} x+y+z=12 \cdots\cdots(1) & x+y+u=10 \cdots\cdots(2) \\ x+z+u=14 \cdots\cdots(3) & y+z+u=15 \cdots\cdots(4) \end{cases}$

(1)+(2)+(3)+(4) $3(x+y+z+u)=51$

∴ $x+y+z+u=17$……(5)

(5) ヨリ (4), (3), (2), (1) ヲ引イテ $x=2,\ y=3,\ z=7,\ u=5$ (答)

5. $\begin{cases} yz+5zx-5xy=11 \cdots\cdots(1) \\ 2yz-3zx+xy=5 \cdots\cdots(2) \\ 3yz-2zx-xy=10 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

先ヅ $xy,\ yz,\ zx$ ニツイテ解ク。

(1)+(2)×5 $11yz-10zx=36$……(4)

(2)+(3) $5yz-5zx=15$……(5)

(4)−(5)×2 $yz=6$……(6)

(6) ヲ (5) ニ代入スレバ $zx=3$……(7)

(6), (7) ヲ (1) ニ代入スレバ $xy=2$……(8)

故ニ (6), (7), (8) ヨリ $x=\pm1,\ y=\pm2,\ z=\pm3$ 〔複號同順〕 (答)

6. $\begin{cases} x(y+z)=20 \cdots\cdots(1) \\ y(z+x)=18 \cdots\cdots(2) \\ z(x+y)=8 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1), (2), (3) ノ括弧ヲ外セバ $xy+xz=20,\ yz+xy=18,\ xz+yz=8$

コノ三式ヲ相加ヘテ 2 デ割レバ $xy+xz+yz=23$

∴ $xy=15,\ xz=5,\ yz=3$ コノ三式ヲ相乘ジテ $(xyz)^2=15^2$

∴ $xyz=15$ 又ハ $xyz=-15$

∴ $x=\pm5,\ y=\pm3,\ z=\pm1$ 〔複號同順〕 (答)

頁 28.

7. $\begin{cases} (x+1)(y+1)=30 \cdots\cdots(1) \\ (y+1)(z+1)=42 \cdots\cdots(2) \\ (z+1)(x+1)=35 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)×(2)×(3) $(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=5^2\times6^2\times7^2$

$\therefore\quad (x+1)(y+1)(z+1)=210$ ……(4)

又ハ $(x+1)(y+1)(z+1)=-210$ ……(5)

(4) ヲ (1), (2), (3) デ順ニ割レバ $z+1=7\quad\therefore\ z=6$

$x+1=5\quad\therefore\ x=4$

$y+1=6\quad\therefore\ y=5$

(5) ヲ (1), (2), (3) デ順ニ割レバ $z+1=-7\quad\therefore\ z=-8$

$x+1=-5\quad\therefore\ x=-6$

$y+1=-6\quad\therefore\ y=-7$

(答) $x=4,\ y=5,\ z=6;\ x=-6,\ y=-7,\ z=-8$

8. $\begin{cases} xy+x+y=19 \cdots\cdots(1) \\ yz+y+z=29 \cdots\cdots(2) \\ xz+x+z=23 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1) ヨリ $(x+1)(y+1)=20$ ……(1)′

(2) ヨリ $(y+1)(z+1)=30$ ……(2)′

(3) ヨリ $(z+1)(x+1)=24$ ……(3)′

(1)′×(2)′×(3)′ $(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=4^2\times5^2\times6^2$

$\therefore\quad (x+1)(y+1)(z+1)=\pm120$ ……(4)

(4) ヲ (1)′, (2)′, (3)′ デ順ニ割ツテ

$z+1=\pm6,\quad x+1=\pm4,\quad y+1=\pm5$

故ニ $x=3,\ y=4,\ z=5;\ x=-5,\ y=-6,\ z=-7$ (答)

9. $\begin{cases} x+y+z=37 \cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2+z^2=481 \cdots\cdots(2) \\ xy=z^2 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1) ヨリ $x+y=37-z$ ……(4)

(2) ヨリ $x^2+y^2=481-z^2$ ……(5)

$\therefore\quad (37-z)^2=481-z^2+2z^2$

$\therefore\quad z=12$ ……(6)

之ヲ (4) ニ代入スレバ $x+y=25$ ……(7)

(3) ニ代入スレバ $xy=144$ ……(8)

$\therefore\quad x=16,\ y=9$ 又ハ $x=9,\ y=16$

(答) $x=16,\ y=9,\ z=12;\ x=9,\ y=16,\ z=12$

10. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=41 \cdots\cdots(1) \\ yz+xy-xz=16 \cdots\cdots(2) \\ xy-xz-yz=-8 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(2), (3) カラ $yz=12$ ……(4)

(4) ヲ (3) ニ代入シテ $xy-zx=4\quad\therefore\ x(y-z)=4$ ……(5)

(1)+(3)×2 $(x+y-z)^2=25\quad\therefore\ x+(y-z)=\pm5$ ……(6)

(5), (6) カラ $x=\pm1,\ y-z=\pm4$ 又ハ $x=\pm4,\ y-z=\pm1$

之ヲ (4) ト組合ハセルト次ノ組トナル。

$\begin{cases} x=1 \\ y-z=4 \\ yz=12 \end{cases}\quad \begin{cases} x=4 \\ y-z=1 \\ yz=12 \end{cases}\quad \begin{cases} x=-1 \\ y-z=-4 \\ yz=12 \end{cases}\quad \begin{cases} x=-4 \\ y-z=-1 \\ yz=12 \end{cases}$

之カラ次ノ八組ノ根ヲ得ル。

$$\begin{cases} x=1 \\ y=6 \\ z=2 \end{cases}\quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 4 & 4 & -1 & -1 & -4 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & 2 & -6 & 3 & -4 \\ -6 & 3 & -4 & 6 & -2 & 4 & -3 \end{array}\quad \text{(答)}$$

11. $x^2+2yz=y^2+2zx=z^2+2xy=75$

相加フレバ $(x+y+z)^2=225\quad\therefore\ x+y+z=\pm15$

又 $x^2-y^2+2yz-2zx=0\quad\therefore\ (x-y)(x+y-2z)=0$

同様ニ $(y-z)(y+z-2x)=0$ 故ニ

$$\begin{cases} x=y \\ y=z \\ x+y+z=\pm 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y \\ y+z=2x \\ x+y+z=\pm 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2z \\ y=z \\ x+y+z=\pm 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=2z \\ y+z=2x \\ x+y+z=\pm 15 \end{cases}$$

何レノ組カラモ初メノ二ツノ方程式カラ $x=y=z$ ヲ得ル。

故ニ根ハ次ノ二組デアル。 $x=y=z=\pm 5$ (答)

12. $\begin{cases} (x-1)(y-1)=6 \cdots\cdots\cdots(1) \\ (y-2)(z-2)=3 \cdots\cdots\cdots(2) \\ (z-3)(x-3)=2 \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1) ヨリ $x-1=\dfrac{6}{y-1}$ $\therefore\ x-3=\dfrac{8-2y}{y-1} \cdots\cdots\cdots(4)$

(2) ヨリ $z-2=\dfrac{3}{y-2}$ $\therefore\ z-3=\dfrac{5-y}{y-2} \cdots\cdots\cdots(5)$

(4), (5) ヲ (3) ニ代入スレバ $\left(\dfrac{5-y}{y-2}\right)\left(\dfrac{8-2y}{y-1}\right)=2$

$\therefore\ y=3$ 之ヲ (1), (2) ニ代入スレバ

$x=4,\ z=5$ (答) $x=4,\ y=3,\ z=5$

13. $\begin{cases} x=(1-z)(1-x) \cdots\cdots\cdots(1) \\ y=(1-x)(1-y) \cdots\cdots\cdots(2) \\ z=(1-y)(1-z) \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1) ヨリ $z=\dfrac{1-2x}{1-x}$, (2) ヨリ $x=\dfrac{1-2y}{1-y}$, (3) ヨリ $y=\dfrac{1-2z}{1-z}$

y ヲ x ニ代入スレバ $x=\dfrac{1-\dfrac{2(1-2z)}{1-z}}{1-\dfrac{1-2z}{1-z}}=\dfrac{3z-1}{z}$

之ヲ z ニ代入スレバ $z=\dfrac{1-\dfrac{2(3z-1)}{z}}{1-\dfrac{3z-1}{z}}=\dfrac{2-5z}{1-2z}$

$\therefore\ z-2z^2=2-5z$ $\therefore\ 2z^2-6z+2=0$

$\therefore\ z^2-3z+1=0$ $\therefore\ z=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ y=\dfrac{1-2z}{1-z}=\dfrac{1-(3\pm\sqrt{5})}{1-\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{-4\mp 2\sqrt{5}}{-1\mp\sqrt{5}}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{5}}{1\pm\sqrt{5}}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

同様ニ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (答) $x=y=z=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$〔複號同順〕

14. $\begin{cases} x+y=7 \cdots\cdots\cdots(1) & z+w=3 \cdots\cdots\cdots(2) \\ x+z^2=8 \cdots\cdots\cdots(3) & y+w^2=4 \cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$

(3)+(4)−(1) $z^2+w^2=5 \cdots\cdots\cdots(5)$

(2) ト (5) トカラ (I) $z=1,\ w=2$ (II) $z=2,\ w=1$

(3), (4) ニ代入シテ (I) $x=7,\ y=0$ (II) $x=4,\ y=3$

(答) $\begin{cases} x=7,\ y=0,\ z=1,\ w=2 \\ x=4,\ y=3,\ z=2,\ w=1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y+z+w=6 \cdots\cdots\cdots(1) & x-y+z-w=4 \cdots\cdots\cdots(2) \\ x+2y+3z+4w=1 \cdots\cdots\cdots(3) & x+2y-3z-4w=23 \cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$

(1)+(2) $x+z=5 \cdots\cdots\cdots(5)$

(3)+(4) $x+2y=12 \cdots\cdots\cdots(6)$

(1)×4+(4) $5x+6y+z=47 \cdots\cdots\cdots(7)$

(7)−(5) $2x+3y=21 \cdots\cdots\cdots(8)$

(6)×2−(8) $y=3$ $\therefore\ x=6$ $\therefore\ z=-1$

コレ等ヲ (1) ニ代入スレバ $w=-2$

(答) $x=6,\ y=3,\ z=-1,\ w=-2$

第 4 章 二次方程式ノ理論

本章デハ二次方程式ノ補充トシテ二次方程式ノ根ト係數トノ關係，根ノ判別，二次式ノ因數分解，二次式ノ値ノ極大・極小ニツイテ授ケ，數ヲ擴張シテ虚數ヲ導入スルノデアル。

根ト係數ノ關係ヤ根ノ判別ノ如キ，根ノ理論ニ關スル事項ハ兎モ角モ虚數ノ計算ハ簡單ニ取扱フコトガ望マシイ。

函數値ノ極大・極小ハ不等式ノ章ニ於テ述ベルガ本章デハ二次式ノ値ノ變化カラ，ソノ極大・極小ヲ研究セシメルノデアル。

頁 29.

11. 根ト係數トノ關係〔拙著高等教育代數學 P. 138, P. 144參照〕

本節デハ二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスルトキ $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ナル關係ヲ授ケ，根ト係數トノ關係ヲ利用シテ次ノ事項ヲ研究セシメル。

(1) 二數ノ和・積又ハ二數ノ差・積ヲ知ツテ二數ヲ求メルコト。

(2) 二次方程式ノ一根ヲ知ツテ他ノ根ヲ求メルコト。

(3) 根ノ對稱式ノ値ヲ求メルコト。

(4) 與ヘラレタ二數ヲ二根トスル方程式ヲ作ルコト。

(注意) 二根ガ無理式デアツテモ，ソノ積及ビ和ハ常ニ係數ノ有理式デ表ハサレル。根ノ對稱式 $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3$ 等ハ常ニ係數ノ有理式デ表ハサレル。

頁 31.

問 1. 二ツノ數ヲ α, β トスレバ $\alpha+\beta=10$, $\alpha\beta=24$

依ツテ α, β ハ二次方程式 $x^2-10x+24=0$ ノ根デ，コノ方程式ヲ

解イテ求メル數 4 及ビ 6 ヲ得ル。 (答) 4, 6

問 2. 求メル因數ヲ α, β トスレバ

$\alpha-\beta=1$, $\alpha\beta=306$

$\therefore\ \alpha+(-\beta)=1$, $\alpha(-\beta)=-306$

依ツテ $\alpha, -\beta$ ハ二次方程式 $x^2-x-306=0$ ノ根 $18, -17$ デアル。

故ニ，$\alpha=18$, $-\beta=-17$ 即チ $\alpha=18$, $\beta=17$

又ハ $\alpha=-17$, $-\beta=18$ 即チ $\alpha=-17$, $\beta=-18$ (負ハ捨テル)

(答) 18, 17

問 3. [1] b ガ一ツノ根ナルコトハ視察ニヨツテ明カデアル。サテ今一ツノ根ハ二ツノ根ノ和ガ a デアルカラ

$x+b=a$ $\therefore\ x=a-b$ 故ニ根ハ b, $a-b$ (答)

[2] $x=1$ トスレバ $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$

故ニ 1 ガ一根ナルコトヲ知ル。

二根ノ積ハ $\dfrac{a-b}{b-c}$ デアルカラ，$x\times1=\dfrac{a-b}{b-c}$ $\therefore\ x=\dfrac{a-b}{b-c}$

(答) $1, \dfrac{a-b}{b-c}$

頁 32.

問 4. [1] $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{c}{a}=\dfrac{b^2-ac}{a^2}$ (答)

[2] $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)=\frac{3abc-b^3}{a^3} \quad (答)$$

[3] $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\left(-\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{c}\right)=-\dfrac{b}{c}$ (答)

[4] $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$

$$=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)\left(\frac{a^2}{c^2}\right)=\frac{b^2-2ac}{c^2} \quad (答)$$

頁 33.

問 5. [1] 求メル方程式ヲ $x^2+px+q=0$ トスレバ

$$-p=\frac{5}{7}-1\frac{2}{5}=-\frac{24}{35},\qquad q=\left(\frac{5}{7}\right)\times\left(-1\frac{2}{5}\right)=-1$$

故ニ求メル方程式ハ

$$x^2+\frac{24}{35}x-1=0\qquad\therefore\ 35x^2+24x-35=0\quad(答)$$

[2] 求メル方程式ヲ $x^2+px+q=0$ トスレバ

$$-p=\frac{2+\sqrt{10}}{5}+\frac{2-\sqrt{10}}{5}=\frac{4}{5},$$

$$q=\left(\frac{2+\sqrt{10}}{5}\right)\left(\frac{2-\sqrt{10}}{5}\right)=\frac{4-10}{25}=-\frac{6}{25}$$

故ニ求メル方程式ハ

$$x^2-\frac{4}{5}x-\frac{6}{25}=0\qquad\therefore\ 25x^2-20x-6=0\quad(答)$$

問 6. [1] $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$

$\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}$, 故ニ求メル二次方程式ハ $x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0$

$\therefore\ a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$ (答)

[2] $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\times\frac{a}{c}=\frac{b^2-2ac}{ac}$

$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$, 故ニ求メル二次方程式ハ

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}x+1=0\qquad\therefore\ acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0\quad(答)$$

12. 實數・虚數 〔拙著高等教育代數學 P. 46 參照〕

本節デハ一元二次方程式ノ解法ニ關聯シテ虚數ヲ導入シ，ソノ計算法ヲ授ケ，一般二次方程式ノ解法ニ應用セシメルノデアル。

補充トシテ簡單ニ次ノ事項ヲ授ケテモヨイ。

(1) 負數ノ開平ヲ可能ナラシメルタメニ數ノ範圍ヲ擴張シテ，實數ノ外ニ虚數ト稱スル新ラシイ種類ノ數ヲ用ヒル。

(2) $\sqrt{-1}$ ヲ i デ表ハシ，之ヲ虚數單位トイフ。即チ

$$i^2=-1$$

a, b ガ實數ナルトキ $a+bi$ ノヤウナ式ヲ一般ニ虚數(又ハ複素數)トイフ。

(3) 虚數ノ四則ハ i ヲ代數文字ト同樣ニ取扱ツテ之ヲ行フコトト定メル。但シ i^2 ハ隨時之ヲ -1 デ置キ換ヘルモノデアル。今 a ヲ正數トスレバ

$$(\sqrt{a}\,i)^2=\sqrt{a}\,i\times\sqrt{a}\,i=(\sqrt{a})^2i^2=a\times(-1)=-a$$

又 $(-\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a}\,i)\times(-\sqrt{a}\,i)=(-\sqrt{a})^2i^2=a\times(-1)=-a$

故ニ $\sqrt{a}\,i$ 及ビ $-\sqrt{a}\,i$ ハ共ニ負數 $-a$ ノ平方根デアル。

依ツテ

$\sqrt{-a}$ ハ $\sqrt{a}\,i$ ヲ

從ツテ $-\sqrt{-a}$ ハ $-\sqrt{a}\,i$ ヲ表ハスモノト定メル。例ヘバ

$$\sqrt{-4}=2i,\quad -\sqrt{-4}=-2i$$

(注意) 冪根ニ關スル公式

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$$

ナドハ a, b ガ正數デナイトキニハ通用セヌコトガアル。例ヘバ

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{3}\,i=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times i^2=-\sqrt{6}$$

デアルカラ，$\sqrt{-2}\sqrt{-3}$ ハ $\sqrt{(-2)\times(-3)}$ 即チ $\sqrt{6}$ ニハ等シイトハイハレナイ。

又 $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$ デ，之ハ $(\sqrt{-2})^2$ 即チ -2 ニハ等シクナイ。

故ニ虚數ノ計算ニ於テハ $\sqrt{-a}$ ヲ $\sqrt{a}\,i$ ノ形ニ直シテ取扱フガヨイ。

虚數四則ノ規約ニ依ツテ，或方程式ガ虚根ヲ有スルトキニ，ソノ根ガ原方程式ニ適合スルコトヲ驗スコトヲ得ル。例ヘバ

$x^2+x+1=0$ ノ根ハ $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ 即チ $\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

之ヲ驗スニ，$x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ トスレバ

$$x^2+x+1=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1$$
$$=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1$$
$$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1=0$$

頁 35.

問 1. 8 ノ立方根ハ $x^3=8$ ノ根デアル。

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore\ x=2$ 又ハ $x^2+2x+4=0$

$\therefore\ x=2$ 又ハ $x=-1\pm i\sqrt{3}$ (答)

(驗) 2 ガ 8 ノ立方根ナルコトハ明ラカデアル。

$(-1+i\sqrt{3})^3=-1+3i\sqrt{3}-3(i\sqrt{3})^2+(i\sqrt{3})^3$

$=-1+3i\sqrt{3}+9-3i\sqrt{3}=8$

$(-1-i\sqrt{3})^3$ ガ 8 ナルコトモ同様ニ證明出來ル。

(注意) 一般ニ，a ガ實數ノトキ，方程式

$x^3=a$ 即チ $\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3-1=0$ ヲ解ケバ

$\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}}=1$, 又ハ $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, 又ハ $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

今 $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\omega$ ト置ケバ $\omega^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ デアル。(ω ト ω^2 トハ 1 ノ立方根ノ虚數ナルモノ)

從ツテ $x=\sqrt[3]{a}$, $\omega\sqrt[3]{a}$, $\omega^2\sqrt[3]{a}$

即チ實數 a ノ立方根ハ三ツアル。一ツハ實數 $\sqrt[3]{a}$ デ他ノ二ツハ，之ニ 1 ノ虚數立方根ヲ乘ジタ虚數デアル。(但シ $a=0$ ノトキニ限ツテ三ツノ立方根ハイヅレモ 0 ニナ)ル

故ニ 8 ノ立方根ハ 2, 2ω, $2\omega^2$ デアル。

頁 36.

問 2. $(xy-6)^2+(3x-2y)^2=0$

x, y ハ實數デアルカラ $(xy-6)^2$, $(3x-2y)^2$ ハ正數又ハ零デアル。

故ニソノ和ガ 0 トナルノハ各數ガ 0 デアルトキニ限ル。

故ニ $xy-6=0$……(1), $3x-2y=0$……(2)

(2) ヨリ $y=\dfrac{3x}{2}$ 之ヲ (1) ニ代入スレバ $\dfrac{3x^2}{2}=6$

$\therefore\ x^2=4$ $\therefore\ x=\pm2$ $\therefore\ y=\pm3$

(答) $x=\pm2$, $y=\pm3$ 〔複號同順〕

問 3. $(x^2+1)(y^2+4)=8xy$

$x^2y^2+4x^2+y^2+4=8xy$ $\therefore\ (xy-2)^2+(2x-y)^2=0$

前題同様ニ

$xy-2=0$……(1) $2x-y=0$……(2)

(1), (2) ヨリ $x=\pm1$, $y=\pm2$ 〔複號同順〕 (答)

頁 37.

13. 判別式 〔拙著高等教育代數學 P. 136 參照〕

本節デハ二次方程式ノ根ノ性質ノ判別ニツイテ授ケルノデアル。

頁 38.

問 1. [1] $6x^2+5x-4=0$, $D=25+96=121$ 故ニ二ツノ實根ヲ有スル。(一根ハ正デ，他ハ負)

[2] $4x^2+21x+5=0$, $D=441-80=361$ 故ニ二ツノ實根ヲ有スル。(二ツノ根ハ共ニ負數)

[3] $6x^2-11x+3=0$, $D=121-72=49$ 故ニ二ツノ實根ヲ有スル。(二ツノ根ハ共ニ正數)

[4] $4x^2+12x+9=0$, $D=36-36=0$ 故ニ實根(等根)ヲ有スル。(根ハ負數)

[5] $9x^2-24x+16=0$, $D=144-144=0$ 故ニ實根(等根)ヲ有スル。(根ハ正數)

[6] $3x^2+x+7=0$, $D=1-84=-83$ 故ニ虚根ヲ有スル。

頁 39.

問 2. [1] $ax^2-2(a+b)x+2b=0$, $D=(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$

即チ D ハ正數デアル。故ニ二ツノ實根ヲ有スル。

[2] $(x-a)(x-b)=c^2$ $\therefore$ $x^2-(a+b)x+ab-c^2=0$

$D=(a+b)^2-4(ab-c^2)=(a-b)^2+4c^2$

即チ D ハ 0 又ハ正數デアル。故ニ等根ヲ有スルカ又ハ二ツノ實根ヲ有スル。

[3] $x^2-2ax-(a+1)=0$ $\therefore$ $D=a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

即チ D ハ正數デアル。故ニ二ツノ實根ヲ有スル。

[4] $x^2-2px+2p^2=0$ $\therefore$ $D=p^2-2p^2=-p^2$

即チ D ハ 0 又ハ負數デアルカラ等根ヲ有スルカ又ハ二ツノ虚根ヲ有スル。

頁 40.

14. 判別式ノ應用

頁 41.

問 1. 求メル數ヲ x トスレバ

$$x+\frac{1}{x}=a \quad \therefore \quad x^2-ax+1=0 \quad \therefore \quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$$

即チ求メル數ハ $\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$ デアル。

但シ x ハ實數デアルカラ a^2-4 即チ $(a+2)(a-2)$ ハ正數デナクテハナラヌ。サテ $(a+2)$ ハ正ナレドモ $(a-2)$ ハ $a<2$ ナルトキハ負トナル。故ニ a ハ 2 ヨリモ小ナルコトガ出來ナイ。

問 2. 正數ヲ a トシ, $a+\frac{1}{a}=x$ トスレバ

$a^2-ax+1=0$, a ハ實數ナル故 $x^2-4\geqq 0$ $\therefore$ $x\geqq 2$

($x\leqq -2$ ハ題意ニ適シナイ)

問 3. 一部分ヲ x トスレバ他ノ部分ハ $a-x$ デアル。故ニ

$x^2+(a-x)^2=S$ $\therefore$ $2x^2-2ax+a^2-S=0$

$$\therefore \quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-2(a^2-S)}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{2S-a^2}}{2}$$

故ニ求メル二部分ハ $\frac{a+\sqrt{2S-a^2}}{2}$, $\frac{a-\sqrt{2S-a^2}}{2}$

a ガ定マルトキ, S ノ有シ得ベキ最小値ハ $2S-a^2=0$ カラ $S=\frac{a^2}{2}$ デアル。 (答) $S=\frac{a^2}{2}$

問 4. $x^2+1=k(x^2-2x+1)$, $(k-1)x^2-2kx+k-1=0$

$$\therefore \quad x=\frac{k\pm\sqrt{2k-1}}{k-1}$$

之ガ實數デアルタメニハ

$D=2k-1$ ガ負デハイケナイ。即チ

$2k-1\geqq 0$ $\therefore$ $k\geqq\frac{1}{2}$

即チ分數式ノ値ハ $\frac{1}{2}$ ヨリモ小サクハナルコトガ出來ナイ。

頁 42.

15. 二次式ノ因數分解

頁 45.

問 [1] $x^2-x-210=0$ トスレバ $x=\frac{1\pm\sqrt{1+840}}{2}=\frac{1\pm 29}{2}$

$\therefore$ $x=15$ 又ハ -14 故ニ 原式$=(x+14)(x-15)$

[2] $6x^2-37x+6=0$ トスレバ $x=6$ 又ハ $\frac{1}{6}$

原式$=6(x-6)\left(x-\frac{1}{6}\right)=(x-6)(6x-1)$

[3] $7x^2-44x-35=0$ トスレバ $x=7$ 又ハ $-\frac{5}{7}$

$\therefore$ 原式$=7(x-7)\left(x+\frac{5}{7}\right)=(x-7)(7x+5)$

[4] $15x^2+16ax-15a^2=0$ トスレバ $x=\frac{3}{5}a$ 又ハ $-\frac{5}{3}a$

$\therefore$ 原式$=15\left(x-\frac{3}{5}a\right)\left(x+\frac{5}{3}a\right)=(5x-3a)(3x+5a)$

[5] $6x^2+(a-2)x-2a^2+a=0$ トスレバ

$$x=\frac{-(a-2)\pm\sqrt{(a-2)^2+24(2a^2-a)}}{12}=\frac{-(a-2)\pm\sqrt{(7a-2)^2}}{12}$$

$$=\frac{-(a-2)\pm(7a-2)}{12}$$

$\therefore$ $x=\frac{a}{2}$ 又ハ $-\frac{2a-1}{3}$

$\therefore$ 原式$=6\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{2a-1}{3}\right)=(2x-a)(3x+2a-1)$

[6] $6a^2-ax-35x^2=0$ トスレバ

$a=\frac{1\pm\sqrt{1+840}}{12}x=\frac{1\pm29}{12}x$ 即チ $a=\frac{5}{2}x$ 又ハ $a=-\frac{7}{3}x$

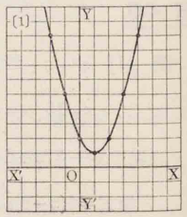
$\therefore$ 原式$=6\left(a-\frac{5}{2}x\right)\left(a+\frac{7}{3}x\right)=(2a-5x)(3a+7x)$

16. 二次式ノ値ノ極大・極小

〔拙著高等教育代數學 P. 305 參照〕

本節ノ教授ヲ進メルニハ先ヅ二次式ノぐらふニツイテ，ソノ畫キ方ヲ復習シ，二次式ノ値ノ變化ヲ研究セシメル。

次ニ定理ハ二次式ノ實例ニツイテ説明スルガヨイ。單ニ抽象的ニ説明ヲ試ミル程度デハ生徒ノ納得ヲ得ルコトハ難カシイ。

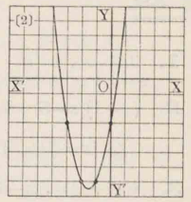


頁 48.

問 [1] $x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1$

故ニ極小値ハ 1 デアル。

[2] $2x^2+6x-3$



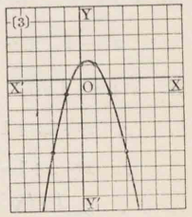
D$=9+6=15>0$ デアルカラ x ノ値ニヨツテコノ式ノ符號ガ變ル。

$2x^2+6x-3=2\left(x^2+3x-\frac{3}{2}\right)$

$=2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{15}{4}\right\}$

故ニ $\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{3}{2}>x>-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ ノトキ負，サモナイトキハ正トナル。

$x=-\frac{3}{2}$ ノトキ極小，極小値ハ $-\frac{15}{2}$

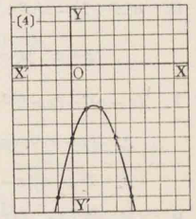


[3] $1+x-x^2$, D$=1+4>0$ 故ニ x ノ値ニヨツテ式ノ符號ハ變ル。

$1+x-x^2=-(x^2-x-1)$

$=-\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right\}$

$x=\frac{1}{2}$ ノトキ極大，極大値ハ $\frac{5}{4}$

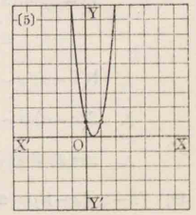


[4] $x(3-x)-5=-x^2+3x-5$,

D$=9-20=-11<0$

$-x^2+3x-5=-\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right\}$

$x=\frac{3}{2}$ ノトキ極大，極大値ハ $-\frac{11}{4}$



[5] $1-4x+4x^2$

D$=4-4=0$

故ニぐらふハ x 軸ニ切スル。

$1-4x+4x^2=(1-2x)^2$

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$ ノトキ極小，極小値ハ 0

頁 49. 問 題 (4)

1. $3x^2-x+4=0$ $\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-48}}{6}=\dfrac{1\pm i\sqrt{47}}{6}$ (答)

2. $(x-1)(x-3)+5=0$ $\therefore\ x^2-4x+8=0$

$\therefore\ x=2\pm\sqrt{4-8}=2\pm 2i$ (答)

3. $4(x^2+1)=7(x-1)$ $\therefore\ 4x^2-7x+11=0$

$\therefore\ x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-176}}{8}=\dfrac{7\pm i\sqrt{127}}{8}$ (答)

4. $x^3+1=0$ $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 又ハ $x=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ (答) $-1,\ \dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

5. $x^4+x^2+1=0$

$\therefore\ x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x)=0$

$\therefore\ x^2-x+1=0$ 又ハ $x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, 又ハ $x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ (答)

6. $a(x^2+1)=x(a^2+1)$ $\therefore\ ax^2-(a^2+1)x+a=0$

$\therefore\ x=a$ 又ハ $\dfrac{1}{a}$ (答)

7. $(x-a)^2+(x-b)^2=(2x-a-b)^2$

$\therefore\ (x-a)^2+(x-b)^2=\{(x-a)+(x-b)\}^2$

$\therefore\ 2(x-a)(x-b)=0$ $\therefore\ x=a$ 又ハ $x=b$ (答) $a,\ b$

8. $(x-a)^3+(x-b)^3=(2x-a-b)^3$

$\therefore\ (x-a)^3+(x-b)^3=\{(x-a)+(x-b)\}^3$

$=(x-a)^3+(x-b)^3+3(x-a)^2(x-b)+3(x-a)(x-b)^2$

$\therefore\ 3(x-a)(x-b)\{(x-a)+(x-b)\}=0$

$\therefore\ 3(x-a)(x-b)(2x-a-b)=0$

$\therefore\ x=a$ 又ハ b 又ハ $\dfrac{a+b}{2}$ (答) $a,\ b,\ \dfrac{a+b}{2}$

9. $(x-m)(x-n)=(a-m)(a-n)$

視察ニヨリ $x=a$ ガ一根ナルコトヲ知ル。

x ノ係數ハ $-(m+n)$ ナル故他ノ一根ハ $m+n-a$ デアル。

(答) $a,\ m+n-a$

10. $(x-a+b)(x+a-b)+(a-b)^2=0$

$x^2-(a-b)^2+(a-b)^2=0$ $\therefore\ x^2=0$ $\therefore\ x=0$ (答) 0

11. $x^3-(a^2+b^2+ab)x-ab(a+b)=0$

視察ニヨリ $x=-a$ ナルコトヲ知ル。故ニ左邊ヲ因數ニ分解シテ,

$(x+a)\{x^2-ax-b(a+b)\}=0$

$\therefore\ (x+a)(x+b)(x-a-b)=0$

故ニ求メル三根ハ $-a,\ -b,\ a+b$ デアル。 (答)

12. $\begin{cases} 3x+4y=30 \cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=25 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $y=\dfrac{30-3x}{4}\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ

$x^2+\left(\dfrac{30-3x}{4}\right)^2=25$ $\therefore\ 5x^2-36x+100=0$

$\therefore\ x=\dfrac{18\pm 4\sqrt{11}i}{5}\cdots\cdots(4)$

(4) ヲ (3) ニ代入スレバ $y=\dfrac{1}{4}\left(30-\dfrac{54\pm 12\sqrt{11}i}{5}\right)=\dfrac{24\mp 3\sqrt{11}i}{5}$

(答) $x=\dfrac{18\pm 4\sqrt{11}i}{5},\ y=\dfrac{24\mp 3\sqrt{11}i}{5}$ 〔複號同順〕

13. $\begin{cases} x^2-xy-y^2=20 \cdots\cdots(1) \\ x^2-3xy+2y^2=8 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times 2$ $2x^2-2xy-2y^2=40\cdots\cdots(3)$

$(2)\times 5$ $5x^2-15xy+10y^2=40\cdots\cdots(4)$

$(4)-(3)$ $3x^2-13xy+12y^2=0$ $\therefore\ (x-3y)(3x-4y)=0$

$\therefore\ x=3y\cdots\cdots(5)$ 又ハ $3x=4y\cdots\cdots(6)$

(5) ヲ (2) ニ代入スレバ $9y^2-9y^2+2y^2=8$

$\therefore\ y^2=4 \quad \therefore\ y^2=4 \quad \therefore\ y=\pm 2 \quad \therefore\ x=\pm 6$

(6) ヲ (2) ニ代入スレバ $\left(\frac{4}{3}y\right)^2-4y^2+2y^2=8$

$\therefore\ y^2=-36 \quad \therefore\ y=\pm 6i \quad \therefore\ x=\pm 8i$

(答) $x=\pm 6,\ y=\pm 2;\ x=\pm 8i,\ y=\pm 6i$ 〔複號同順〕

14. $\begin{cases}(x+y)^2+(x+y)-2xy=8 \cdots\cdots(1)\\ (x+y)^2-3xy=7 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(2) ヨリ $xy=\dfrac{(x+y)^2-7}{3}$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$(x+y)^2+(x+y)-\dfrac{2(x+y)^2-14}{3}=8$

$\therefore\ (x+y)^2+3(x+y)-10=0$

$\therefore\ x+y=2$ 又ハ $x+y=-5$

$x+y=2$ ヲ (2) ニ代入スレバ $xy=-1$

$\therefore\ x+y=2,\ xy=-1$ ヨリ $x=1\mp\sqrt{2},\ y=1\pm\sqrt{2}$

$x+y=-5$ ヲ (2) ニ代入スレバ $xy=6$

$\therefore\ x+y=-5,\ xy=6$ ヨリ $x=-2,\ y=-3;\ x=-3,\ y=-2$

(答) $x=1\mp\sqrt{2},\ y=1\pm\sqrt{2};\ x=-2,\ y=-3;\ x=-3,\ y=-2$

15. $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=13 \cdots\cdots(1)\\ x^2y-xy^2=6 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(2) ヨリ $xy(x-y)=6 \cdots\cdots(3)$

(3) ヨリ $x-y=\dfrac{6}{xy}$, 之ヲ (1) ニ代入スレバ

$\dfrac{6(x^2+y^2)}{xy}=13 \quad \therefore\ 6x^2-13xy+6y^2=0$

$\therefore\ (2x-3y)(3x-2y)=0$

$\therefore\ 2x=3y \cdots\cdots(4)$ 又ハ $3x=2y \cdots\cdots(5)$

(4) ヲ (2) ニ代入スレバ $\frac{2}{3}x^2\left(x-\frac{2}{3}x\right)=6$

$\therefore\ x^3=27 \quad \therefore\ (x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore\ x=3$ 又ハ $x=\dfrac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}\ \begin{cases}x=\dfrac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}\\ y=-1\pm i\sqrt{3}\end{cases}$

(5) ヲ (2) ニ代入スレバ $\frac{3}{2}x^2\left(x-\frac{3}{2}x\right)=6$

$\therefore\ x^3+8=0 \quad \therefore\ x=-2$ 又ハ $x=1\pm i\sqrt{3}$

$\therefore\ \begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}\ \begin{cases}x=1\pm i\sqrt{3}\\ y=\dfrac{3\pm 3i\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

(答) $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}\ \begin{cases}x=\dfrac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}\\ y=-1\pm i\sqrt{3}\end{cases}\ \begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}\ \begin{cases}x=1\pm i\sqrt{3}\\ y=\dfrac{3\pm 3i\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

16. $12x^2-37x-144=0$ トスレバ $x=\dfrac{16}{3}$ 又ハ $x=-\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ 12x^2-37x-144=12\left(x-\dfrac{16}{3}\right)\left(x+\dfrac{9}{4}\right)=(3x-16)(4x+9)$

17. $280x^2+1614x-945=0$ トスレバ $x=\dfrac{15}{28}$ 又ハ $-\dfrac{63}{10}$

$\therefore\ 280x^2+1614x-945=280\left(x-\dfrac{15}{28}\right)\left(x+\dfrac{63}{10}\right)$

$=(28x-15)(10x+63)$

18. $x^2-3xy+2y^2+x-3y-2=0$ トスレバ

$x^2+(1-3y)x+2y^2-3y-2=0$

$\therefore\ x=\dfrac{(3y-1)\pm\sqrt{(3y-1)^2-4(2y^2-3y-2)}}{2}=\dfrac{(3y-1)\pm(y+3)}{2}$

$=2y+1$ 又ハ $y-2$

$\therefore\ x^2-3xy+2y^2+x-3y-2=(x-2y-1)(x-y+2)$

19. $\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q$ デアルカラ

$(y-\alpha)(y-\beta)=y^2-(\alpha+\beta)y+\alpha\beta=y^2+py+q$

頁 50.

20. $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ デアルカラ

$$(\alpha-2\beta)(\beta-2\alpha)=5\alpha\beta-2(\alpha^2+\beta^2)=5\alpha\beta-2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$

$$=\frac{5c}{a}-2\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}=\frac{9c}{a}-\frac{2b^2}{a^2}=\frac{9ac-2b^2}{a^2}$$

21. $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ デアルカラ

$$(m\alpha+n\beta)+(n\alpha+m\beta)=(m+n)\alpha+(m+n)\beta=(m+n)(\alpha+\beta)=-\frac{(m+n)b}{a}$$

$$(m\alpha+n\beta)(n\alpha+m\beta)=mn\alpha^2+(m^2+n^2)\alpha\beta+mn\beta^2=mn(\alpha^2+\beta^2)+(m^2+n^2)\alpha\beta$$

$$=mn\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+(m^2+n^2)\alpha\beta=mn\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}+\frac{(m^2+n^2)c}{a}$$

$$=\frac{mn(b^2-2ac)}{a^2}+\frac{(m^2+n^2)ac}{a^2}=\frac{(m-n)^2ac+mnb^2}{a^2}$$

故ニ求メル方程式

$$x^2+\frac{(m+n)b}{a}x+\frac{(m-n)^2ac+mnb^2}{a^2}=0$$

$$\therefore\quad a^2x^2+(m+n)abx+(m-n)^2ac+mnb^2=0$$

22. $3x^2+(a^2+a-2)x+3a=0$ ノ根ガ $\pm m$ デアルカラ，二根ノ和ハ 0 トナル。故ニ根ト係數トノ關係カラ $a^2+a-2=0$

$\therefore\quad (a-1)(a+2)=0\qquad \therefore\quad a=1$ 又ハ $a=-2$

又二根ノ積ハ $-m^2$ デアルカラ $-\dfrac{3a}{3}=m^2\qquad \therefore\quad m^2=-1$ 又ハ 2

$\therefore\quad m=\pm\sqrt{-1}$ 又ハ $m=\pm\sqrt{2}$ (答) $\begin{cases}a=-2,\ m=\pm\sqrt{2}\\ a=+1,\ m=\pm\sqrt{-1}\end{cases}$

23. $\dfrac{3x^2+6x+2}{2x^2+3x+1}=k$ トシテ $(3-2k)x^2+(6-3k)x+2-k=0$ ニナルカラ x ノ値ガ唯一ツトイヘバ $D=0$ 即チ

$(6-3k)^2-4(3-2k)(2-k)=0\qquad \therefore\quad 36-36k+9k^2-4(6-7k+2k^2)=0$

$\therefore\quad k^2-8k+12=0\qquad \therefore\quad k=2$ 又ハ 6 (答)

24. $2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2=0$

$D=(a+b)^2-2(a^2+b^2)=-(a^2-2ab+b^2)=-(a-b)^2$

即チ $a\neq b$ ノトキハ D ガ負數デアルカラ，コノ方程式ハ二ツノ虚根ヲ有スル。$a=b$ ノトキハ $D=0$ 故相等シイ二實根ヲ有スル。

25. $a^2+b^2+c^2+d^2=2ab+2cd$

$\therefore\quad a^2-2ab+b^2+c^2-2cd+d^2=0\qquad \therefore\quad (a-b)^2+(c-d)^2=0$

故ニ $a-b$ 及ビ $c-d$ ハ零デナクテハナラヌ。即チ $a=b,\ c=d$

26. $7x^2-3x+2=7x^2-3x+\dfrac{9}{28}+\dfrac{47}{28}=(\sqrt{7}x)^2-3x+\left(\dfrac{3}{\sqrt{28}}\right)^2+\dfrac{47}{28}$

$$=\left(\sqrt{7}x-\frac{3}{\sqrt{28}}\right)^2+\frac{47}{28}$$

故ニコノ二次式ハ x ノ値ノ如何ニ關セズ恒ニ正デアル。コノ二次式ガ最小ナル數値ヲトルノハ $\sqrt{7}x-\dfrac{3}{\sqrt{28}}$ ガ 0 ニ等シイトキデアル。

即チ $\sqrt{7}x-\dfrac{3}{\sqrt{28}}=0,\qquad \therefore\quad x=\dfrac{3}{\sqrt{196}}=\dfrac{3}{14}$ ノトキデアル。

頁 51.

27. $2ax-x^2=-(x^2-2ax+a^2)+a^2=a^2-(x-a)^2$

故ニ $2ax-x^2$ ガ最大ノ値ヲトルノハ $x=a$ ナルトキデアル。又コノトキノ $2ax-x^2$ ノ値ハ $2ax-x^2=2a^2-a^2=a^2$

28. $x^2-2(1-k)x+1=0$ ガ實根ヲ有スルノハ

$(1-k)^2-1\geqq 0$ 即チ $-2k+k^2\geqq 0$

ノトキデ，之ハ $k(k-2)\geqq 0$ ト書クコトガ出來ルカラ

$k\leqq 0$ 又ハ $k\geqq 2$ ナルトキデアル。

29. $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4},\quad \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq 0$ ナル故 x^2-x+1 ハ x ノ値ノ如何ニ關セズ恒ニ正デアル。

30. $x^2+2x-35=(x-5)(x+7)$

故ニ $x>5$ 又ハ $x<-7$ ナルトキコノ式ハ正トナル。

又 $5>x>-7$ ナルトキ負トナル。

第5章 等差級數

本章デハ一般的ノ級數ノ概念ヲ與ヘ先ヅ等差級數・調和級數ノ性質ヲ研究セシメ，ソノ應用トシテ實際問題ヲ授ケル。

頁 52.

17. 級 數

本節デハ先ヅ級數ノ定義ヲ與ヘテ，後ソノ規則性ヲ發見セシメル。生徒ヲシテ級數ヲ作ラセ，又社會現象，自然現象ノ間ニ存在スル級數ノ實例ニツイテ擧ゲシメ，級數ニ關スル興味ヲ喚起セシメルコトガ望マシイ。

18. 等差級數

本節デハ等差級數ノ定義ヲ與ヘ，次ニ初項，公差ヲ與ヘテ等差級數ヲ作ル練習ヲナサシメル。

等差級數ノ例ヲ與ヘテ公差ヲ發見セシメ，又初項・公差ヲ或ハ負數トシ，分數トシ，小數トシテ等差級數ヲ作ラシメ，之ガ徹底ヲ期スルヤウセラレ次節ノ一般項ノ教授ノ豫備トスルコトガ望マシイ。

頁 53.

19. 等差級數ノ一般項

等差級數ノ初項及ビ公差ニ數値ヲ與ヘテ順次ノ項ヲ作リ，之カラ一般項ヲ導クヤウ工夫シテ教授ヲ進メルノデアル。

又例ヘバ第 n 項ガ $3n-1$ ナル級數ヲ求メル等ノヤウニ一般項ヲ與ヘテ級數ヲ作ラセル。

頁 54.

問 1. $a=1,\ d=2$ ナル故，一般項 l ハ $1+(n-1)\times 2$ 即チ $2n-1$

第五十項ハ $2\times 50-1=99$

問 2. 3, 19, 35, 51, 67, 83

第 n 項ハ $3+(n-1)\times 16=16n-13$

問 3. $120+16d=96 \quad \therefore\ d=-\dfrac{3}{2}$ (答) $-\dfrac{3}{2}$

問 4. $a+13d=100,\ a+19d=148$

之ヲ解イテ $d=8,\ a=-4$ (答) -4

20. 等差中項

本節デハ二ツノ數 a, b ノ間ニ m 箇ノ等差中項ヲ挿入スル方法ヲ授ケルノデアルガ，$m=1, 2, 3, \cdots\cdots$ トシテソノ等差中項ノ求メ方ヲ會得セシメルガヨイ。

特ニ二數ノ等差中項ニツイテハ充分徹底スルヤウ注意セネバナラナイ。

頁 55.

問 1. $d=\dfrac{87-2}{5}=17$ (答) 19, 36, 53, 70

問 2. $d=\dfrac{-10-32}{21}=-2$，第七番目ハ $32+7\times(-2)=18$ (答) 18

問 3. n 項ヲ入レタトスレバ

$$24+3\times\frac{48-24}{n+1}=32 \quad \therefore\ n=8$$ (答) 8

問 4. 等差級數ヲ $a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots\cdots\ l$ トシ，初項カラ第 n 番目ノ項ハ $a+(n-1)d$ デ，末項カラ第 n 番目ノ項ハ初項 l，公差 $-d$ ト考ヘラレルカラ $l-(n-1)d$

故ニ $a+(n-1)d+l-(n-1)d=a+l$ 即チ兩外項カラ同ジ番目ニアル二項ノ和ハ兩外項(初項ト末項)ノ和ニ等シイ。

頁 56.

21. 等差級數ノ和

等差級數ノ和ヲ求メル公式ノ作リ方ヲ授ケ，計算練習ヲナサシメル。圖解ヲ用ヒテ公式ノ作リ方ヲ會得サセル等適當ナ工夫ヲナシ，之ガ徹底ヲ期スルガヨイ。

頁 57.

問 1. $d=5-1=4$ $\therefore$ $S=5\times(2+9\times4)=190$ (答) 190

問 2. 公差$=\frac{1}{3}$，第十六項$=\frac{1}{2}+\frac{15}{3}=5.5$

第二十五項$=\frac{1}{2}+\frac{24}{3}=8.5$，項數$=25-15=10$

和$=\frac{10(5.5+8.5)}{2}=70$ (答) 70

問 3. $d=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$，$a=\frac{3}{2}$，$4=\frac{3}{2}+\frac{n-1}{4}$ $\therefore$ $n=11$

$\therefore$ $S=\frac{11}{2}\left(\frac{3}{2}+4\right)=\frac{121}{4}=30\frac{1}{4}$ (答) $30\frac{1}{4}$

問 4. $a=12$，$d=-2$，$36=\frac{n}{2}\{24+(n-1)(-2)\}$

$\therefore$ $36=n(13-n)$ $\therefore$ $n^2-13n+36=0$ $\therefore$ $n=4$ 又ハ 9

(答) 4 項又ハ 9 項

22. 調和級數

調和級數ト等差級數トヲ比較シテソノ關係ヲ明瞭ニスルガヨイ。調和級數ニツイテハ簡單ニ取扱フガヨイ。

頁 58.

問 1. 調和級數ヲ 6, 3, x, y トスレバ $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ハ等差級數ヲナス。 $\therefore$ $\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{x}$……(1) $\frac{2}{x}=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}$……(2)

(1) ヨリ $x=2$，之ヲ (2) ニ代入スレバ $y=\frac{3}{2}$ (答) 2, $\frac{3}{2}$

問 2. 求メル調和中項ヲ x, y トシ 6, x, y, 24 ガ調和級數ヲナストスレバ $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{24}$ ハ等差級數ヲナス。

$\therefore$ $\frac{2}{x}=\frac{1}{6}+\frac{1}{y}$……(1) $\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{24}$……(2)

(1) ヨリ $12y=xy+6x$ ……(3)

(2) ヨリ $48x=xy+24y$……(4)

(3), (4) ヨリ $2y=3x$……(5)

(5) ヲ (3) ニ代入スレバ $x=8$ 又ハ $x=0$ (捨テル)

$\therefore$ $y=12$ (答) 8, 12

問 題 (5)

1. $d=b-a$，第 n 項ヲ l トスレバ $l=a+(n-1)(b-a)$ (答)

頁 59.

2. 初項ヲ x，公差ヲ d トスレバ $a=x+(m-1)d$……(1)

$b=x+(n-1)d$……(2)

(1)−(2) $a-b=(m-n)d$ $\therefore$ $d=\frac{a-b}{m-n}$

之ヲ (1) ニ代入スレバ $x=a-\frac{(m-1)(a-b)}{m-n}=\frac{a(1-n)+b(m-1)}{m-n}$

故ニ第 k 項ハ $\frac{a(1-n)+b(m-1)}{m-n}+(k-1)\frac{a-b}{m-n}$

$=\frac{mb-na}{m-n}+\frac{a-b}{m-n}k$ (答)

3. $a=15$，$n=8$，$S=40$ ヲ公式 $S=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ ニ代入スレバ

$40=\frac{8\{30+7d\}}{2}$ $\therefore$ $d=-\frac{20}{7}$

末項ヲ l トスレバ $l=15+7\times\left(-\frac{20}{7}\right)=-5$

(答) 末項 −5，公差 $-\frac{20}{7}$

4. 三桁ノ整數ノ中，13 ノ倍數ノ最小ハ $13\times8=104$，最大ハ

$13\times76=988$, 依ツテ求メル箇數ハ $76-(8-1)=69$ デアツテ, ソノ和ハ $\frac{69}{2}(8+76)\times13=37674$ デアル。 (答) 69箇, 37674

5. 四桁ノ正ノ整數中, 末位ノ數字ガ7ナルモノノ最小數ハ 1007, 最大數ハ 9997 デアル。ソシテソノ箇數ハ 900 デアル。

故ニソノ和ハ $\frac{900\times(1007+9997)}{2}=4951800$ (答) 4951800

6. $a=1, d=2$ トシテ n 項ノ和ハ $\frac{n}{2}\{2+(n-1)\times2\}=n^2$

7. 第一番目ノ項數ハ 1 箇, 第二番目ハ 2 箇, 第三番目ハ 3 箇, ……, 第 n 番目ノ項數ハ n 箇, 故ニ第 $(n-1)$ 番目マデノ項數ノ和即チ第 $(n-1)$ 番目ノ末項ハ $\frac{n-1}{2}\{1+(n-1)\}$ 即チ $\frac{n}{2}(n-1)$. 故ニ第 n 番目ノ項ノ初項ハ $\frac{n}{2}(n-1)+1$, 故ニソノ項ノ和ハ

$\frac{n}{2}\left[2\left\{\frac{n}{2}(n-1)+1\right\}+(n-1)\right]=\frac{n}{2}(n^2+1)$ (答) $\frac{n}{2}(n^2+1)$

8. 第一群カラ第 n 群マデニ排列サレタ奇數ノ數ハ

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

故ニ第 n 群中ノ最後ノ奇數ハ $\frac{n(n+1)}{2}\times2-1=n^2+n-1$

依ツテ第 n 群中ノ數ハ初項 n^2+n-1, 公差 -2, 項數 n ナル等差級數ヲナス故ソノ和ヲ S トスレバ

$S=\frac{n}{2}\{2(n^2+n-1)+(n-1)\times(-2)\}=n^3$ (答) n^3

9. 二數ヲ x, y トスレバ $x+y=2\times9$ ……(1)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{8}$ ……(2)

(2) ヨリ $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{4}$ 之ニ (1) ヲ代入スレバ

$xy=72$ ……(3)

(1), (3) ヨリ $x=12, y=6$ 或ハ $x=6, y=12$ (答) 6, 12

10. $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ デアルカラ $(a-b)c=(b-c)a$

$\therefore\ a:c=a-b:b-c$

頁 60.

11. a, b, c ハ調和級數ヲナスカラ $b=\frac{2ac}{a+c}$ ……(1)

$\therefore\ \frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}$ $\therefore\ 2\frac{c+a}{b}=\frac{(a+c)^2}{ac}$ ……(2)

又 $\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ac}=\frac{\frac{2ac}{a+c}(a+c)+c^2+a^2}{ac}$

$=\frac{(a+c)^2}{ac}$ ……(3)

(2), (3) ヨリ $2\frac{c+a}{b}=\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}$

故ニ $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ハ調和級數ヲナス。

12. $(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$ ガ等根ヲ有スルカラ

$(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$

$\therefore\ (2b-a-c)^2=0$ $\therefore\ 2b=a+c$

故ニ, a, b, c ハ等差級數ヲナス。

13. 初項ヲ a, 公差ヲ d トスレバ奇數ノ項數ハ $n+1$ デ, 偶數ノ項數ハ n デアル。

奇數項ノ和 $S=a+(a+2d)+(a+4d)+\cdots\cdots$

$=\frac{(n+1)\{2a+n\times2d\}}{2}=(n+1)(a+nd)$

偶數項ノ和 $S'=(a+d)+(a+3d)+(a+5d)+\cdots\cdots$

$=\frac{n}{2}\{2(a+d)+(n-1)2d\}=n(a+nd)$

$\therefore\ S:S'=n+1:n$ (答)

14. 初項 10, 公差 5, 項數 8 ノ和ノ 2 倍 $=440$ (答) 440m

15. 末子ノ取分ヲ a 圓トシ人數ヲ n トスレバ

$a+(n-1)1500=2a \quad \therefore \quad a=1500(n-1)$

之ヲ $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)1500\}=45000$ ニ代入シテ

$n^2-n-20=0 \quad \therefore \quad n=5$ (負根ハ棄テル) (答) 5 人

16. 中央ヲ x トシ, 公差ヲ y トスレバ $5x=35 \quad \therefore \quad x=7$

又 $(x+2y)^2+(x+y)^2+x^2+(x-y)^2+(x-2y)^2=335$

$\therefore \quad x^2+2y^2=67 \quad \therefore \quad y^2=9 \quad \therefore \quad y=\pm 3$

(答) 1, 4, 7, 10, 13; 13, 10, 7, 4, 1

17. 公差ハ $\frac{10-17}{9}=-\frac{7}{9}$, $17\div\frac{7}{9}=21$ 餘

故ニ $17-21\times\frac{7}{9}$ ハ正, $17-22\times\frac{7}{9}$ ハ負デアル。依ツテ第 22 項マデハ正デアツテソノ次カラ負數トナル。

又和ガ正ニナルノハ初項ト末項トノ和ガ正ナルトキニ限ル。

故ニ $17+17-(n-1)\frac{7}{9}>0$ カラ $44\frac{5}{7}>n$ 故ニ 44 項マデノ和ガ正デアル。

頁 61.

18. 最大角ノ外角ハ $180°-135°=45°$, ソシテ順次外角ハ $6°$ 宛大キクナル。ソシテ一頂點ニ於ケル外角ヲ一ツ宛トツタ和ハ $360°$, 故ニ邊數 n ハ $\frac{n}{2}\{45°\times 2+(n-1)\times 6°\}=360°$ 即チ $n=6$ (負ハ棄テル)

(答) 6

19. 直角ヲ夾ム二邊ヲ x, $x+d$ トスレバ斜邊ハ $\sqrt{x^2+(x+d)^2}$ デアル。コノ三邊ハ等差級數ヲナス故ニ

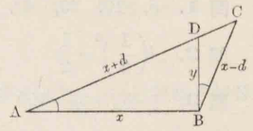
$2(x+d)=x+\sqrt{x^2+(x+d)^2}$

$\therefore \quad x^2-2dx-3d^2=0 \quad \therefore \quad x=3d$ ($x=-d$ ハ棄テル)

$\therefore \quad x+d=4d, \quad \sqrt{x^2+(x+d)^2}=5d$

故ニ三邊ノ比ハ $3d:4d:5d=3:4:5$ (答)

20. △ABC ニ於テ最小角ヲ A, 最大角ヲ B トシ, ∠CBD=∠A トスレバ



△ABC∽△BDC

$\therefore$ AC : AB = BC : BD

AB$=x$, BC$=x-d$, AC$=x+d$, BD$=y$ ト置ケバ

$x+d:x=x-d:y \quad \therefore \quad y=\frac{x(x-d)}{x+d}$ ……(1)

又 $\mathrm{CD}(x+d)=(x-d)^2$

$\therefore \quad \mathrm{AD}=x+d-\mathrm{CD}=x+d-\frac{(x-d)^2}{x+d}=\frac{4xd}{x+d}$

$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2$ ナル故 $\frac{(4xd)^2}{(x+d)^2}=x^2+y^2$……(2)

(1)^2 ヲ (2) ニ代入スレバ $\frac{16x^2d^2}{(x+d)^2}=x^2+\frac{x^2(x-d)^2}{(x+d)^2}$

之ヲ整頓スレバ $x^2=7d^2 \quad \therefore \quad x=\sqrt{7}d$ ($x=0$, $-\sqrt{7}d$ ハ棄テル)

$\therefore \quad x-d=(\sqrt{7}-1)d, \quad x+d=(\sqrt{7}+1)d$

故ニ三邊ノ比ハ $x+d:x:x-d=(\sqrt{7}+1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}-1)$

第6章 等比級數

本章デハ等比級數ノ性質ヲ研究セシメ, 一般項及ビ和ノ求メ方ヲ授ケ更ニ無限等比級數ノ和及ビ循環小數ノ分數化ヲ知ラシメ, 等比級數ノ應用問題ノ解法ヲ取扱フノデアル。

頁 62.

23. 等比級數

本節ノ教授ハ等差級數ノ場合ト同樣ノ注意ノモトニセヨ。

頁 63.

問 1. 5, 10, 20, 40, 80; $5\times2^{n-1}$

問 2. $4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$

問 3. $(-5)(-2)^5=160$

24. 等比中項

本節デハ二ツノ數 a, b ノ間ニ m 箇ノ等比中項ヲ挿入スル方法ヲ授ケルノデアル。

(注意) 1. a, b ノ間ニ m 箇ノ等比中項ヲ挿入スル場合ノ公比 r ハ $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ デ $m+1$ ガ奇數ナラバ, a, b ノ符號ニ關係ナク r ニハ唯一ツノ値ガアル。$m+1$ ガ偶數ナラバ a, b ガ同符號ノトキニダケ m 箇ノ等比級數ヲ挿入スルコトガ出來ル。ソシテ r ニハ正負二ツノ値ガアル。a, b, ガ同符號デナケレバ r ノ値ハ存在シナイ。

本書デハ, a, b モ等比中項モ正數ト限定シテ考ヘサセルノデアルカラ教授者ハ上ノ事柄ヲ含ンデヰテ教授ヲ進メラレタイ。

(注意) 2. 幾何學ト連絡シテ二數 a, b ノ等比中項ノ作圖ヲ考ヘシメルガヨイ。

頁 64.

問 1. 公比ヲ r トスレバ $24\times r^3=192$ $\therefore$ $r^3=8$ $\therefore$ $r=2$

(答) 48, 96

頁 65.

問 2. 公比ヲ r トスレバ $336r^4=21$ $\therefore$ $r=\pm\frac{1}{2}$

故ニ第三項ハ $336\times\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2=84$ (答) 84

問 3. 挿入スベキ二數ヲ x, y トスレバ

$x^2=4y$ ……(1) $2y=x+12$ ……(2)

(2) ヲ (1) ニ代入スレバ $x^2-2x-24=0$ $\therefore$ $x=6$ 又ハ -4

$\therefore$ $y=9$ 又ハ 4 (答) 6, 9; -4, 4

25. 等比級數ノ和

本節デハ等比級數ノ和ヲ求メル公式ノ作リ方ヲ授ケ, ソノ計算法ヲ練習サセルノデアル。

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ $r\neq1$ ニ注意スベキデアル。$r=1$ ナル場合ハ

$$S=a+a+a+\cdots\cdots+a=na$$ デアル。

次ニ $Sr=ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n$ ……(2)

ヲ作ル理由モ生徒ニ發見セシメルヤウ指導スルガヨイ。

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

ニ於テ $1>r$ ナル場合ハ前式ヲ, $r>1$ ナル場合ハ後式ヲ用フルノガ便利ナルコトヲ知ラシメル。

本節ノ取扱デハ公式ヲ導イタラ直チニ等比級數ノ和ヲ求メル應用問題ヲ提出シテ之ヲ解決セシメ, 生徒ノ學習興味ヲ喚起スルコトモヨイ。

頁 66.

問 題 (6)

1. $r=3$ $\therefore$ $S=\frac{3^5-1}{3-1}=121$ (答) 121

2. $S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{ar^{n-1}r-a}{r-1}=\frac{lr-a}{r-1}$ 又ハ $\frac{a-lr}{1-r}$ (答)

3. $r=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $l=ar^{n-1}$ ノ公式ニ於テ $\frac{16}{243}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore$ $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $\therefore$ $n-1=5$ $\therefore$ $n=6$

$$\therefore\ S=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^6\right\}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{665}{486}=1\frac{179}{486}$$ (答) $1\frac{179}{486}$

4. $\dfrac{96r-3}{r-1}=189$ ヨリ $r=2$ $\therefore$ $3r^{n-1}=96$ ニ代入シテ

$2^{n-1}=32$ $\therefore$ $n-1=5$ $\therefore$ $n=6$ (答) 6 項

5. 初項ヲ a トスレバ末項ハ $\dfrac{1}{a}$ デアル。$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{17}{4}$

$\therefore$ $a=4$ 又ハ $a=\dfrac{1}{4}$

$a=4$ トスレバ $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{4}$

$S=\dfrac{a-rl}{1-r}$ ノ公式ニ代入シテ $\dfrac{31}{4}=\dfrac{4-\frac{1}{4}r}{1-r}$ $\therefore$ $r=\dfrac{1}{2}$

$l=ar^{n-1}$ ノ公式ニ代入シテ $\dfrac{1}{4}=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore$ $n=5$

又 $a=\dfrac{1}{4}$ トスレバ $\dfrac{1}{a}=4$

$S=\dfrac{a-rl}{1-r}$ ノ公式ニ代入シテ $\dfrac{31}{4}=\dfrac{\frac{1}{4}-4r}{1-r}$ $\therefore$ $r=2$

$l=ar^{n-1}$ ノ公式ニ代入シテ $4=\dfrac{1}{4}\times(2)^{n-1}$ $\therefore$ $n=5$

(答) 5 項

6. 初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ

$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^9=2\cdots\cdots\cdots(1)$

$ar^{10}+ar^{11}+ar^{12}+\cdots\cdots+ar^{19}+ar^{20}+ar^{21}+\cdots\cdots+ar^{29}$

$=r^{10}(a+ar+\cdots\cdots+ar^9)+r^{20}(a+ar+\cdots\cdots+ar^9)$

$=2(r^{10}+r^{20})=12$ 〔(1) ヲ代入〕

$\therefore$ $r^{10}+r^{20}=6$ $\therefore$ $r^{10}=2\cdots\cdots\cdots(2)$

$(ar^{30}+ar^{31}+\cdots\cdots+ar^{39})+(ar^{40}+ar^{41}+\cdots\cdots+ar^{49})$

$+(ar^{50}+ar^{51}+\cdots\cdots+ar^{59})=(r^{30}+r^{40}+r^{50})\times 2$

$=(2^3+2^4+2^5)\times 2=112$ (答) 112

頁 67.

26. 無限等比級數

1, 3, 9, 27, ……

$\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{16}$, ……

1, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{8}$, ……

ナドノ級數ニ於テ項數ヲ增ストソノ和ハドウ變化スルカヲ考ヘサセ，次ニ公比 r ガ 1 ヨリ大ナルトキ，公比 r ガ 1 ヨリ小ナルトキノ和ノ變化ヲ考究セシメル。

極限ニツイテハ生徒ノ心理ヲ考慮シテ，明確ニ教授シナケレバナラナイ。

頁 69.

問 [1] $r=\dfrac{5}{3}\div 5=\dfrac{1}{3}$ $\therefore$ $S=\dfrac{5}{1-\frac{1}{3}}=7\dfrac{1}{2}$ (答) $7\dfrac{1}{2}$

[2] $r=-\dfrac{3}{4}$ $\therefore$ $S=\dfrac{1}{1+\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{7}$ (答) $\dfrac{4}{7}$

[3] $r=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\div(\sqrt{2}-1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ $S=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$ (答)

[4] $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{2}{3}a$ $\therefore$ $1-r=\dfrac{3}{2}$ $\therefore$ $r=-\dfrac{1}{2}$ (答)

[5] 初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ

$a(1+r)=3\cdots\cdots(1)$ $\dfrac{a}{1-r}=4\cdots\cdots(2)$

(1) ヲ (2) デ割ツテ $1-r^2=\dfrac{3}{4}$ $\therefore$ $4r^2=1$ $\therefore$ $r=\pm\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $a=2$ 又ハ 6 (答) 初項 2, 公比 $\dfrac{1}{2}$; 初項 6, 公比 $-\dfrac{1}{2}$

頁 70.

27. 循環小數

本節デハ循環小數ヲ説明シ，次ニ循環小數ヲ分數ニ直ス方法ニツイテ授

ケル。

循環小數ヲ分數ニ直ス規則ハ記憶セシメルガヨイガ，コノ規則ヲ作ルダケノ力ハ養ツテ置クベキデアル。

（注意） 小數ヲ分類スルト次ノヤウニナル。

- 小數
  - 有限小數 （分母ガ 2, 5 以外ノ素因數ヲ含マナイ分數）
  - 無限小數
    - 循環小數
      - スベテノ數字ガ循環スルモノ（分母ガ 2, 5 ノ素因數ヲ含マナイ分數）
      - 循環セヌ部分ヲ含ムモノ（分母ガ2, 5 及ビソレ以外ノ素因數ヲ含ム分數）
    - 不循環小數……無理數デ分數ニ直サレナイ

頁 73.

問 [1] $0.\dot{5}0\dot{4}=\frac{504}{999}=\frac{56}{111}$

[2] $5.1\dot{3}\dot{6}=\frac{5136-51}{990}=\frac{5085}{990}=\frac{113}{22}$

[3] $0.000\dot{4}\dot{5}=0.\dot{4}\dot{5}\times\frac{1}{1000}=\frac{45}{99000}=\frac{1}{2200}$

[4] $0.00\dot{0}4\dot{5}=\frac{45}{999}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{2220}$

[5] $0.09\dot{3}5\dot{1}=\frac{9351-9}{99900}=\frac{9342}{99900}=\frac{519}{5550}$

[6] $0.12\dot{3}4\dot{5}=\frac{12345-12}{99900}=\frac{12333}{99900}=\frac{4111}{33300}$

頁 74. 問 題 (7)

1. $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$

$\therefore\ \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

2. 三數ヲ a, ar, ar^2 トスレバ

$a(1+r+r^2)=35$……(1)　　$a^2(1+r^2+r^4)=525$……(2)

(2)÷(1)　$a(1-r+r^2)=15$……(3)

(1)÷(3)　$\frac{1+r+r^2}{1-r+r^2}=\frac{7}{3}$　　$\therefore\ 2r^2-5r+2=0$

$\therefore\ r=2$ 又ハ $\frac{1}{2}$　　$\therefore\ a=5$ 又ハ 20

何レニシテモ三數ハ 5, 10, 20　　（答） 5, 10, 20

3. $a=1, r=2$, 項數 $n+1$ ナル等比級數ノ和デアルカラ

$S=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$　　（答） $2^{n+1}-1$

4. 第 n 項ハ　$1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$

又 n 項ノ和ハ　$\frac{1-r}{1-r}+\frac{1-r^2}{1-r}+\frac{1-r^3}{1-r}+\cdots\cdots+\frac{1-r^n}{1-r}$

$=\frac{n}{1-r}-\frac{r}{1-r}(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})=\frac{n}{1-r}-\frac{r}{1-r}\times\frac{1-r^n}{1-r}$

$=\frac{n}{1-r}-\frac{r(1-r^n)}{(1-r)^2}$　　（答） $\frac{1-r^n}{1-r}$, $\frac{n}{1-r}-\frac{r(1-r^n)}{(1-r)^2}$

5. 三數ヲ a, ar, ar^2 トスル。但シ $r>1$

$a(1+r+r^2)=39$……(1)　　$a^3r^3=729$……(2)

(2) ヨリ　$ar=9$……(3)

(3) ヲ (1) ニ代入スレバ　$\frac{9(1+r+r^2)}{r}=39$

$\therefore\ 9r^2-30r+9=0$　　$\therefore\ r=3$ 又ハ $r=\frac{1}{3}$（捨テル）

$\therefore\ a=3$

$a=3, r=3$ トスレバ三數ハ 3, 9, 27

（答） 3, 9, 27

6. 等比級數ヲ $a, ar, ar^2, \cdots\cdots$ トシ，順次ニ k 項宛加ヘレバ

$a(1+r+\cdots+r^{k-1})$,　$ar^k(1+r+\cdots+r^{k-1})$,　$ar^{2k}(1+r+\cdots+r^{k-1})$, …

トナル。即チ公比ガ r^k ナル等比級數ヲナス。

7. 右邊ノ各項ハ初項 a^{n-1}, 公比 $\frac{b}{a}$, 項數 n ノ等比級數ヲナス。故ニ

$$右邊 = a^{n-1}\times\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n-1}{\frac{b}{a}-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

又右邊ノ k 番目ノ項ハ $a^{n-1}\times\left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}=a^{n-k}b^{k-1}$ (答)

頁 75.

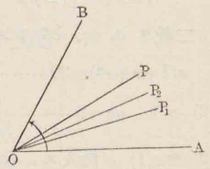
8. $2.3\dot{7}\dot{8}\div0.\dot{4}\dot{5}=2\frac{375}{990}\div\frac{45}{99}=\frac{2355}{990}\times\frac{99}{45}=\frac{157}{30}=5\frac{7}{30}(=5.2\dot{3})$

9. $2.\dot{2}9\dot{7}\div6.2\dot{3}=2\frac{297}{999}\div6\frac{21}{90}=\frac{85}{37}\times\frac{30}{187}=\frac{150}{407}=0.\dot{3}6855\dot{0}$

10. $AB=a$ トスレバ, $BP_1=\frac{a}{2}$, $P_1P_2=\frac{a}{4}$, $P_2P_3=\frac{a}{8}$, ……

故ニ求メル渦狀ノ曲線ノ長サノ極限ハ $\frac{\frac{1}{2}\pi a}{1-\frac{1}{2}}=\pi a$ (答) πa

11. $\angle AOB=\theta$ トスレバ $\angle AOP=\frac{\theta}{2}$



$$\angle AOP_1=\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{4}$$
$$=\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\angle AOP_2=\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\theta}{8}$$
$$=\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\theta}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

……

コノヤウニシテ作レル角ノ極限ハ

$$S=\frac{\frac{\theta}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\theta$$

即チ $\angle AOP$, $\angle AOP_1$, $\angle AOP_2$, ……ハ限リナク $\frac{1}{3}\theta$ ニ近ヅク。

12. $PQ=\frac{1}{2}AP=\frac{a}{2}$, $QR=\frac{1}{2}AQ=\frac{\sqrt{3}}{4}a$,

$$\therefore\ PQRS\cdots\cdots=\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}a+\cdots\cdots=\frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{2-\sqrt{3}}=a(2+\sqrt{3})$$

頁 76.

13. $\triangle PQR\backsim\triangle QRS\backsim\cdots\cdots$ 且 $PQ=\frac{a}{2}$, $QR=\frac{\sqrt{3}}{4}a$, ……

$PQ^2:QR^2=4:3$, $QR^2:RS^2=4:3$, ……

$$\therefore\ \triangle PQR+\triangle QRS+\cdots\cdots=\triangle PQR\left\{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$
$$=4\triangle PQR=\triangle APQ\quad[\because\ \triangle APQ:\triangle PQR=AP^2:PQ^2=4:1]$$

14. 始メノ正方形ノ一邊ト第二ノ正方形ノ一邊トノ比ハ 50 : 49 デアル。從ツテソノ面積ノ比ハ $50^2:49^2$ デアル。

故ニ第二ノ面積ハ $\left(\frac{49}{50}\right)^2a^2$ デアル。從ツテ第三ノ面積ハ $\left(\frac{49}{50}\right)^4a^2$ デアル。

故ニ求メル體積ヲ V トスレバ

$$V=ca^2\left\{1+\left(\frac{49}{50}\right)^2+\left(\frac{49}{50}\right)^4+\cdots\cdots\right\}=\frac{ca^2}{1-\left(\frac{49}{50}\right)^2}$$
$$=\frac{2500}{99}ca^2$$

(答) $\frac{2500}{99}ca^2$

15. $2+\frac{2}{3}\times2\times2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times2\times2+\cdots\cdots=2+\frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2+8=10$

(答) 10 m

16. $\frac{9}{10}$ ヲ公比トスル無限等比級數ヲナス。總和ヲ S cm トスレバ

$$S=30+30\times\frac{9}{10}+30\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots\cdots=30\times\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=300$$

(答) 300 cm

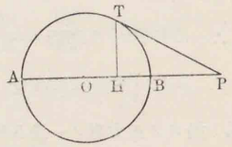
頁 77.

17. $a=\dfrac{x+y}{2}$, $g^2=xy$, $\dfrac{2}{h}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

$\therefore\ ah=\dfrac{x+y}{2}\times\dfrac{2xy}{x+y}=xy=g^2$

18. $PA+PB=PO+r+PO-r=2PO$

(r ハ半徑)



$\therefore\ PO=\dfrac{PA+PB}{2}$ ……(1)

又 $PT^2=PA\cdot PB$ ……(2)

又 $PH\cdot PO=PT^2$ ……(3)

(1), (2), (3) ヨリ $PH=\dfrac{PT^2}{PO}=\dfrac{2PA\cdot PB}{PA+PB}$

即チ PH ハ PA, PB ノ調和中項デアル。

第7章 冪 根

本章デハ既ニ學ンダ冪及ビ冪根ニ關スル法則ヲ復習整理シ，更ニ，冪指數ヲ分數，零，負數ナル場合ニ擴張シ，一般ノ指數ヲ有スル冪ニ關スル計算法ヲ授ケ，次章ノ對數教授ノ準備トスルノガ主眼デアル。

頁 78.

28. 冪ニ關スル法則

本節デハ既ニ學ンダ指數法則ヲ復習整理スルノデアル。新式算術代數教

科書二・三學年用 4 頁及ビ 13 頁ヲ參照シテ教授ヲ進メラレタイ。

頁 79.

問 [1] $(a^2)^3=a^6$

[2] $a^n\div a^{m+n}=\dfrac{a^n}{a^{m+n}}=\dfrac{1}{a^m}$

[3] $2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$

[4] $4^n\div 2^n=\left(\dfrac{4}{2}\right)^n=2^n$

[5] $(-a)^{2n}=a^{2n}$

[6] $(-x)^{2n+1}=-x^{2n+1}$

[7] $(250)^2=(25\times10)^2=25^2\times10^2=62500$

$2.5^2=\left(\dfrac{25}{10}\right)^2=\dfrac{25^2}{10^2}=6.25$

$0.25^2=\left(\dfrac{25}{100}\right)^2=\dfrac{25^2}{100^2}=0.0625$

[8] $2.7^3=\dfrac{27^3}{10^3}=19.683$

[9] n ガ奇數ナルトキハ $\dfrac{-1-(-1)^n}{2}=\dfrac{-1-(-1)}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0$

n ガ偶數ナルトキハ $\dfrac{-1-(-1)^n}{2}=\dfrac{-1-(+1)}{2}=-1$

[10] $3x^2+4$ デ x ノ平方ハ正又ハ零デアルカラ，$3x^2\geqq0$

$\therefore\ 3x^2+4>0$ $(x^2+1)-2x=x^2-2x+1=(x-1)^2$

$\therefore\ x=1$ ノトキハ 0, $x\neq1$ ノトキハ正。

$2(a-b)^2+5(b-c)^2$ ハ $a-b=0$, $b-c=0$ 即チ $a=b=c$ ナルトキハ 0 トナリ，ソノ他ハ正數ノ 2 倍ト正數ノ 5 倍トノ和デアルカラ常ニ正デアル。

29. 冪 根

平方根ハ二次方程式ノ解法ノ準備トシテ取扱ヒ，ソノ後立方根等ニツイテモ簡單ニ取扱ツタノデアルガ，分數指數ヲ導入スル準備トシテ，一般

ニ n 乘根ニツイテ授ケルノデアル。

既習事項ヲ復習整理シツツ教授ヲ進メルガヨイ。

頁 81.

問 1. 81 ノ 4 乘根ハ 3 ト -3 デアル。又 $\sqrt[4]{81}=3$ デアル。

問 2. [1] 正シイ。 [2] 81 ノ 4 乘根ハ 3 ダケデハナイカラ正シクナイ。

30. 冪根ニ關スル定理

頁 83.

問 [1] $\sqrt{12}\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sqrt{3}=2\times3=6$

[2] $\sqrt[3]{25}\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{5^2}\sqrt[3]{5\times8}=\sqrt[3]{5^3\times2^3}=5\times2=10$

[3] $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}=\dfrac{3}{4}$ [4] $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}=\dfrac{3}{5}$

[5] $\sqrt[3]{8a^6x^6}=2a^2x^2$ [6] $\sqrt[4]{(ab)^6}=\sqrt{a^3b^3}=ab\sqrt{ab}$

[7] $\sqrt[3]{(-a)^6}=\sqrt[3]{a^6}=a^2$ [8] $\sqrt[3m]{x^{2m}y^{5m}}=\sqrt[3]{x^2y^5}=y\sqrt[3]{x^2y^2}$

31. 冪根ノ計算

冪根ノ計算ハ拙著新式算術代數教科書二・三學年用 93 頁ヲ參照シテ教授ヲ進メラレタイ。

頁 84.

問 1. [1] $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3000}=2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}+10\sqrt[3]{3}=11\sqrt[3]{3}$

[2] $\sqrt[3]{2}\times\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{500}$

[3] $\sqrt[3]{4}\div\sqrt{2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{4^2}\div\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{\dfrac{4^2\times2}{2^3}}=\sqrt[6]{4}=\sqrt[3]{2}$

問 2. [1] $3\sqrt{5}=\sqrt{45}$, $4\sqrt{3}=\sqrt{48}$ $\therefore\ 3\sqrt{5}<4\sqrt{3}$

[2] $2\sqrt{2}=\sqrt{8}=\sqrt[6]{8^3}=\sqrt[6]{512}$, $\sqrt[3]{20}=\sqrt[6]{20^2}=\sqrt[6]{400}$

$\therefore\ 2\sqrt{2}>\sqrt[3]{20}$

32. 指數ガ分數ナル冪ノ意味

指數ガ分數ナル冪ハ教科書ノヤウニ定義スルコトハ理論的デアル。生徒ニハ次ノヤウニ説明スルノモ理解シ易イカラ參考ニ掲ゲル。

例ヘバ指數ガ正ノ分數デアルトキモ $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ガ成立ツト假定スレバ $(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$

$(\sqrt{a})^2=a$

故ニ $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ ト定メル。

一般ニ $a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}$ ト定メル。

頁 85.

問 1. [1] $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$ [2] $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=4$ [3] $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$

[4] $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

問 2. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$, $\sqrt[7]{a^{10}}=a^{\frac{10}{7}}$, $(\sqrt[6]{a})^8=a^{\frac{8}{6}}$

問 3. $(a^{\frac{1}{2}})^2=(\sqrt{a})^2=a$, $(a^{\frac{2}{3}})^3=(\sqrt[3]{a^2})^3=a^2$

問 4. $a^{0\cdot5}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$, $a^{1\cdot5}=a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^3}$, $a^{0\cdot25}=a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a}$

問 5. $a^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

一般ニ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{np}}$

33. 指數ガ0又ハ負數ナル冪ノ意味

本節ノ説明ハ教科書ノヤウデ差支ナイガ，參考ノタメニ次ニ掲ゲル。

公式 $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ ガ m, n ノ大小如何ニ拘ハラズ成立ツトスレバ

$\dfrac{a^3}{a}=a^2$, $\dfrac{a^3}{a}=a^{3-1}=a^2$

$\dfrac{a^3}{a^2}=a$, $\dfrac{a^3}{a^2}=a^{3-2}$

$\dfrac{a^3}{a^3}=1$, $\dfrac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0$ $\therefore\ a^0=1$

$$\frac{a^3}{a^4}=\frac{1}{a},\quad \frac{a^3}{a^4}=a^{3-4}=a^{-1}\qquad \therefore\ a^{-1}=\frac{1}{a}$$

$$\frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}\qquad \therefore\ a^{-2}=\frac{1}{a^2}$$

…… …… ……

故ニ $a^0=1,\quad a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$ ト定メル。$[a\neq 0]$

頁 86.

問 題 (8)

1. $a^{-1}=\dfrac{1}{a^1}=\dfrac{1}{a}$

2. $a^{-3}=\dfrac{1}{a^3}$

3. $a^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$

4. $(xy)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

5. $10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=0.001$

6. $8^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{8^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{1}{2}=0.5$

7. $16^{-0.5}=\dfrac{1}{16^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{4}=0.25$

8. $a^3\div a^5=\dfrac{1}{a^2}=a^{-2}$

9. $1\div a^2=\dfrac{1}{a^2}=a^{-2}$

10. $a^5\times a^{-3}=a^5\times\dfrac{1}{a^3}=a^2$

11. $a^3\times a^{-5}=a^3\times\dfrac{1}{a^5}=\dfrac{1}{a^2}=a^{-2}$

12. $a\div a^{-2}=a\div\dfrac{1}{a^2}=a^3$

13. $a^{-5}\div a^{-3}=\dfrac{1}{a^5}\div\dfrac{1}{a^3}=\dfrac{1}{a^2}=a^{-2}$

14. $\left(\dfrac{1}{a}\right)^2=\dfrac{1}{a^2}=a^{-2}$

15. $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{a})^2}=\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{-\frac{2}{3}}$

頁 87.

34. 一般ノ指數法則

指數ガ正ノ整數ノ場合ノ外ニ分數, 0, 負數ノ場合ニモ指數ノ法則ガ成立

ツコトヲ知ラシメ, 冪ニ關スル計算ヲ練習セシメルノデアル。

一般指數ヲ用ヒルコトニヨツテ開法モ冪法モ乘冪ノ計算トナルコトヲ注意セヨ。

頁 89.

問 [1] $4^{\frac{3}{2}}\times 4^{\frac{5}{2}}=4^{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=4^{\frac{8}{2}}=4^4=256$

[2] $64^{\frac{1}{3}}\div 64^{\frac{1}{2}}=64^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=64^{-\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{64}}=\dfrac{1}{2}$

[3] $(8^{-\frac{3}{2}})^{\frac{4}{9}}=8^{-\frac{3}{2}\times\left(\frac{4}{9}\right)}=8^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{1}{4}$

[4] $(4^{\frac{1}{3}}\times 5^{-\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}\times 5^{-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}=2\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{125}}$

[5] $(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$

$=a-b$

問 題 (9)

1. $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{7}=5^{\frac{1}{2}}\times 7^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{3}{6}}\times 7^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{5^3\times 7^2}=\sqrt[6]{6125}$

2. $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[6]{6}=3^{\frac{3}{6}}\times 5^{\frac{2}{6}}\times 6^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{3^3\times 5^2\times 6}=\sqrt[6]{4050}$

3. $\sqrt[3]{m^2}\sqrt{n^3}\times\sqrt{m^3}\sqrt[3]{n^2}=m^{\frac{2}{3}}\times n^{\frac{3}{2}}\times m^{\frac{3}{2}}\times n^{\frac{2}{3}}=m^{\frac{4+9}{6}}n^{\frac{9+4}{6}}=\sqrt[6]{(mn)^{13}}$

4. $\sqrt[3]{12^2}\div\sqrt{3^3}=12^{\frac{2}{3}}\div 3^{\frac{3}{2}}=\sqrt[6]{\dfrac{12^4}{3^9}}=\sqrt[6]{\dfrac{4^4}{3^5}}=\sqrt[6]{\dfrac{256}{243}}$

5. $\sqrt{4^3}\times\sqrt[3]{5}\div\sqrt[3]{10^2}=4^{\frac{3}{2}}\times 5^{\frac{1}{3}}\div 10^{\frac{2}{3}}=2^3\times 5^{\frac{1}{3}}\div 10^{\frac{2}{3}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{2^9\times 5}{10^2}}=\sqrt[3]{25.6}$

6. $\sqrt[3]{a}\sqrt{b^3}\div\sqrt{a^3}\sqrt[3]{b}=a^{\frac{1}{3}}\times b^{\frac{3}{2}}\div(a^{\frac{3}{2}}\times b^{\frac{1}{3}})=a^{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}\times b^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}$

$=a^{-\frac{7}{6}}b^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^7}$

頁 90.

7. $(1+x^{\frac{1}{2}})(1-x^{\frac{1}{2}})=1-(x^{\frac{1}{2}})^2=1-x$

8. $(x^{\frac{n}{2}}+x^{-\frac{n}{2}})^2=(x^{\frac{n}{2}})^2+2x^{\frac{n}{2}}x^{-\frac{n}{2}}+(x^{-\frac{n}{2}})^2=x^n+2+x^{-n}$

9. $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x+y+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})=(x^{\frac{1}{2}})^3-(y^{\frac{1}{2}})^3=x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$

10. $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$

11. $\dfrac{x^2-x^{-2}}{x-x^{-1}}=\dfrac{x^2-(x^{-1})^2}{x-x^{-1}}=x+x^{-1}$

12. $\sqrt{x+x^{-1}-2}=\sqrt{(x^{\frac{1}{2}})^2+(x^{-\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}=\sqrt{(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2}$

$=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$

13. $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{1-x}+\dfrac{2xx^{\frac{1}{2}}}{x-1}=\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}{1-x}=2x^{\frac{1}{2}}$

14. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$ $\therefore$ $x^2+2+x^{-2}+x+x^{-1}=6$

$\therefore$ $(x+x^{-1})^2+(x+x^{-1})-6=0$ $\therefore$ $x+x^{-1}=2$ 又ハ -3

$\therefore$ $x^2-2x+1=0$ カラ $x=1$

$x^2+3x+1=0$ カラ $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ (答) $1,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

15. $3x^{\frac{3}{4}}-8x^{-\frac{3}{4}}=5,$ $x^{\frac{3}{4}}=X$ ト置ケバ

$3X-\dfrac{8}{X}=5$ $\therefore$ $3X^2-5X-8=0$

$\therefore$ $X=\dfrac{8}{3}$ 又ハ -1

正根ヲ採リ $X=\dfrac{8}{3}$ $\therefore$ $x^{\frac{3}{4}}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore$ $x^3=\left(\dfrac{8}{3}\right)^4$ $\therefore$ $x=\sqrt[3]{\left(\dfrac{8}{3}\right)^4}=\dfrac{16\sqrt[3]{9}}{9}$ (答)

16. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x-3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x-5}$ $\therefore$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x-3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-3x}$

$\therefore$ $5x-3=5-3x$ $\therefore$ $x=1$ (答) 1

第8章 對 數

本章デハ對數ノ諸性質ニツイテ授ケ，對數表ヲ用ヒテ計算ヲ練習セシメルノガ主眼デアル。

對數計算ハ乘法，除法ヲ加減ノ算法ニ，冪法，開法ヲ乘除ノ算法ニ變ヘルトコロニ特長ガアルノデアルカラ，生徒ヲシテ之ヲヨク理解セシメテ，實際計算ニ役立タセル迄ニ充分ニ習熟セシメナケレバナラナイ。

頁 91.

35. 指數ト冪トノ値ノ關係

本節デハ指數ノ變化ト冪ノ變化トノ關係ヲ知ラシメ，對數教授ノ準備トスル。

教科書ノ例ノヤウニ，最初ニ 10 ノ冪ニツイテ指數ト冪トノ關係ヲ充分ニ徹底セシメ，次ニ 2 ノ冪等ヲ作リ，生徒ヲシテぐらふヲ畫カシメルガヨイ。

頁 93.

36. 對 數

本節デハ對數ノ意義ヲ授ケルノデアル。$E^L=N$ ト $L=\log_E N$ トハ同ジ事柄ヲ表ハシタモノナルコトヲ充分徹底セシメル。

次ニ 10 及ビ 2 ヲ底トシタ對數ノ一例ヲ示ス。

$E^L=N$ (1)	$L=\log_E N$ (2)	$E^L=N$ (1)	$L=\log_E N$ (2)
$10^3=1000$	$3=\log_{10}1000$	$2^3=8$	$3=\log_2 8$
$10^2=100$	$2=\log_{10}100$	$2^2=4$	$2=\log_2 4$
$10^1=10$	$1=\log_{10}10$	$2^1=2$	$1=\log_2 2$
$10^0=1$	$0=\log_{10}1$	$2^0=1$	$0=\log_2 1$
$10^{-1}=0.1$	$-1=\log_{10}0.1$	$2^{-1}=\frac{1}{2}=0.5$	$-1=\log_2 0.5$
$10^{-2}=0.01$	$-2=\log_{10}0.01$	$2^{-2}=\frac{1}{4}=0.25$	$-2=\log_2 0.25$
$10^{-3}=0.001$	$-3=\log_{10}0.001$	$2^{-3}=\frac{1}{8}=0.125$	$-3=\log_2 0.125$

上ノ表デ (1) ヲ (2) ニ, (2) ヲ (1) ニ書キ換ヘル練習ヲ充分ニセラレタイ。

コノ例カラ一般ニ $\log_E 1=0$, $\log_E E=1$ ヲ導クガヨイ。

(注意) $\log_E N$ ハ「E ヲ底トシテノ N ノ對數」又ハ「ろがりずむ E ノ N」ト讀ムガヨイ。

頁 94.

問 1. $\log_3 9=x$ ト置ケバ $3^x=9=3^2$ $\therefore\ x=2$

$\log_3 27=x$ ト置ケバ $3^x=27=3^3$ $\therefore\ x=3$

$\log_3 81=x$ ト置ケバ $3^x=81=3^4$ $\therefore\ x=4$

又 $\log_3 \frac{1}{9}=x$ ト置ケバ $3^x=\frac{1}{9}=3^{-2}$ $\therefore\ x=-2$

$\log_3 \frac{1}{27}=x$ ト置ケバ $3^x=\frac{1}{27}=3^{-3}$ $\therefore\ x=-3$

$\log_3 \frac{1}{81}=x$ ト置ケバ $3^x=\frac{1}{81}=3^{-4}$ $\therefore\ x=-4$

問 2. $\log_{10}1000=x$ ト置ケバ $10^x=1000=10^3$ $\therefore\ x=3$

同樣ニ考ヘテ $\log_{10}100=2$, $\log_{10}10=1$, $\log_{10}1=0$, $\log_{10}0.1=-1$, $\log_{10}0.01=-2$, $\log_{10}0.001=-3$

問 3. $\log_{16}4=x$ ト置ケバ $16^x=4$ $\therefore\ 4^{2x}=4$ $\therefore\ 2x=1$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$

問 4. $4^{-2}=0.0625$ $\therefore\ \log_4 0.0625=-2$

問 5. $\log_E N=0.25$ $\therefore\ E^{0.25}=N$ $\therefore\ E^{\frac{1}{4}}=N$

問 6. 10 ヲ底トシ N ノ對數 L ガ示サレテアル。

頁 95.

37. 對數ノ性質

對數ノ性質ノ教授ハ數値計算ノ例モ示シテ生徒ノ理解ヲ助ケルガヨイ。

例ヘバ

$$\log_{10}(100\times1000)=\log_{10}100+\log_{10}1000=2+3=5$$

又 $\log_{10}(100000)=5$

頁 96.

問 1. $6=2\times3$ $\therefore\ \log_{10}6=0.30103+0.47712=0.77815$

$4=2^2$ $\therefore\ \log_{10}4=2\times0.30103=0.60206$

$12=2^2\times3$ $\therefore\ \log_{10}12=0.60206+0.47712=1.07918$

$\log_{10}\frac{2}{3}=\log 2-\log 3=0.30103-0.47712=-0.17609$

$\log_{10}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_{10}2=\frac{1}{2}\times0.30103=0.15052$

$\log_{10}\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=\log_{10}3^{-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4}\log_{10}3=-\frac{1}{4}\times0.47712=-0.11928$

頁 97.

問 2. $\log_{10}20=\log_{10}10+\log_{10}2=1+0.30103=1.30103$

$\log_{10}200=\log_{10}100+\log_{10}2=2+0.30103=2.30103$

$\log_{10}0.2=\log_{10}2-\log_{10}10=0.30103-1=-0.69897$

$\log_{10}0.03=\log_{10}3-\log_{10}100=0.47712-2=-1.52288$

$\log_{10}0.009=2\log_{10}3-\log_{10}1000=0.95424-3=-2.04576$

$\log_{10}\sqrt{0.3}=\frac{1}{2}(\log_{10}3-\log_{10}10)=\frac{1}{2}(0.47712-1)=-0.26144$

問 3. $\log_E a = l$ デアルカラ

$$\log_E aE = \log_E a + \log_E E = l + 1$$

$$\log_E aE^n = \log_E a + \log_E E^n = \log_E a + n\log_E E = l + n$$

$$\log_E a^m E^n = m \log_E a + n \log_E E = ml + n$$

$$\log_E \frac{a}{E} = \log_E a - \log_E E = l - 1$$

$$\log_E \frac{a}{E^n} = \log_E a - n \log_E E = l - n$$

$$\log_E \frac{1}{a} = \log_E a^{-1} = -\log_E a = -l$$

$$\log_E \frac{E}{a} = \log_E E - \log_E a = 1 - l$$

問 4. 二數ヲ a, b トスレバ

$$\log\sqrt{ab} = \log\sqrt{a} + \log\sqrt{b} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

之ガ即チ a, b 二數ノ對數ノ相加平均數デアル。

問 5. $\log_a b = x$ トスレバ $a^x = b$ ……(1)

$\log_b c = y$ トスレバ $b^y = c$ ……(2)

(2) ニ (1) ヲ代入スレバ $a^{xy} = c$ $\therefore$ $\log_a c = xy = \log_a b \times \log_b c$

即チ $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$

38. 常用對數

本節デハ常用對數ノ定義及ビソノ指標ト假數ニツイテ授ケルノデアル。常用對數ハ理論的ノ研究ニ必要ナモノデナク，全ク實用的ノモノデ，指標ヲ定メルコトガ容易ナルコトガ特長デアル。

頁 100.

39. 指標ヲ定メル規則

指標ヲ定メル規則ハ次ノ例ノヤウナ表カラ纏メルノガ生徒ノ理解ヲ容易ナラシメル。

參考ノタメニ掲ゲテ置ク。

$$\left.\begin{array}{l} \log 100 = 2 \\ \log\ 56 = x \\ \log\ 10 = 1 \\ \log\ \ 8 = x' \\ \log\ \ 1 = 0 \\ \log 0.4 = x'' \\ \log 0.1 = \bar{1} \end{array}\right\}$$

コノ x, x', x'' ノ値ハドウ定メタラヨイカ。之カラ指標ノ規則ヲ纏メル。

指標ノ定メ方ハ對數表用法ノ基礎ヲナスモノ故徹底セシメネバナラヌ。

頁 102.

問 1. 2, 1, $\bar{1}$, 5, 0, $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$

問 2. 5.8768, 3.8768, 1.8768, 0.8768, $\bar{1}$.8768, $\bar{3}$.8768, $\bar{5}$.8768

問 3. 百ノ位，厘ノ位

問 4. $100 \log 2 = 30.103$ (答) 整數 31 桁

問 5. $-1.7536 = \bar{2}.2464$

40. 對數表

本節デハ對數表ニツイテ說明シ，ソノ用法ヲ授ケルノデアル。

(注意) 教授者ノ參考ノタメニ五桁以上ノ對數表及ビ對數表ヲ作ルコトニツイテ述ベテ置ク。

五桁以上ノ對數表ノ使用法ハ四桁ノ表ニヨツテ上ニ說明シタノト大概同樣デアル。次頁ニ五桁ノ對數表ノ一部ヲ示ス。

ココデ注意スベキコトハ假數ノ欄ニ於テ，最初ノ二桁ハ左端ニ記シテアルコトデアル。例ヘバ 3546 ニ對スル假數ハ 54974 デアル。又 3549 ニ對スル假數ハ 55011 デ，ソノ最初ノ二桁ハ次ノ行ノ左端ニ記シテアル 55 デアル。ソレガ * 印デ示サレテアル。比例部分 (P.P.) ノ用法ハ四桁ノ

表ト同樣デアル。

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.	
350	54 407	419	432	444	456	469	481	494	506	518		
351	531	543	555	568	580	593	605	617	630	642	13	
352	654	667	679	691	704	716	728	741	753	765	1	1.3
353	777	790	802	814	827	839	851	864	876	888	2	2.6
354	900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011	3	3.9
355	55 023	035	047	060	072	084	096	108	121	133	4	5.2
356	145	157	169	182	194	206	218	230	242	255	5	6.5
357	267	279	291	303	315	328	340	352	364	376	6	7.8
358	388	400	413	425	437	449	461	473	485	497	7	9.1
359	509	522	534	546	558	570	582	594	606	618	8	10.4
360	630	642	654	666	678	691	703	515	727	739	9	11.7

(對數表ヲ作ルコトニツイテ)

對數表ハ第 35 節ニ示シタ方法ニヨツテ作リ得ラレル。92 頁ノ表ハ

$$10^{L}=N \quad \therefore \quad \log N=L$$

ノ相對應スル値ヲ示スモノデアルカラ，一種ノ對數表ニ外ナラヌガ，唯記載セラレタ對數ハ甚ダ少イ。然ルニコノ表ハ如何程デモ擴張スルコトガ出來ル。L ノ欄ノ 0 ト 1 トノ間ニ於テ，既出ノ $\frac{1}{4}=0.25$, $\frac{2}{4}=0.5$, $\frac{3}{4}=0.75$ ノ外ニ $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ ヲ挿入スルトキソレ等ニ對スル N ノ値ヲ開平ニヨツテ求メ得ルコトハ既ニ說明シタ通リデアル。次ニ L ノ $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, ……, $\frac{15}{16}$ ナル値ニ對スル N ノ値ヲ求メ，次第ニコノ計算ヲ繼續シテ遂ニ L ノ $\frac{1}{2^{14}}\cdots\frac{2^{14}-1}{2^{14}}$ ナル値ニ對スル N ノ値ガ算出サレタトスレバ $2^{14}=16384$ デアルカラ 10000 以上ノ對數ガ得ラレ，普通ノ四桁ノ對數表以上ニ精密ナル對數表ガ出來上ルワケデアル。コノ表ニ記載サレナイ L ノ値ニ對スル N ハ比例挿入法ニヨツテ計算スルコトヲ得ルコト普通ノ對數表ト同樣デアル。又コノ表ヲ整理シテ普通ノ對

數表ノ形ニ改作スルコトヲ得ルノモ勿論デアル。

頁 103.

問 1. 2.5391, 1.8048, 0.6830, $\bar{1}.1038$, $\bar{3}.6990$, $\bar{5}.3010$

頁 104.

問 2. 2870, 35.4, 0.0554, 1.95, 85200000, 502

41. 比例挿入法

本節デハ比例部分ノ理ヲ說明シ，之ヲ用ヒテ四ツ以上ノ數字カラ成ル數ノ對數ノ求メ方及ビ對數ヲ知ツテ原數ヲ求メル方法ヲ授ケルノデアル。比例部分ノ理ハ既ニ平方根ノトコロデ說明シテアルカラ之ヲ復習シテ充分生徒ニ會得セシメルコトガ必要デアル。

對數ヲ知ツテ原數ヲ求メル方法ハ對數計算ノ目的デアリ，ソシテ生徒ノ困難トスルモノデアルカラ反覆練習シテ充分ニ徹底スルヤウ訓練スベキデアル。

頁 106.

問 1.

$\log 0.0328 = \bar{2}.5159$ (表差 13)
9……117
$\log 0.03289 = \bar{2}.5171$ (答) $\bar{2}.5171$

$\log 54600 = 4.7372$ (表差 8)
3 ……24
$\log 54630 = 4.7374$ (答) 4.7374

$\log 0.548 = \bar{1}.7388$ (表差 8)
7 …… 56
$\log 0.5487 = \bar{1}.7394$ (答) $\bar{1}.7394$

$\log 0.000908 = \bar{4}.9581$ (表差 5)
7……35
$\log 0.0009087 = \bar{4}.9585$ (答) $\bar{4}.9585$

$\log 28.6 = 1.4564$ (表差 15)
5 ……75
$\log 28.65 = 1.4572$ (答) 1.4572

log13.2 =1.1206 (表差 33)
8……264
log13.28=1.1232 (答) 1.1232

頁 107.

問 2. 4571
4564……286 (表差15)
7…… 5
(答) 2865

8449
8445……699 (表差6)
4…… 7
(答) 699700

5496
5490……354 (表差12)
6…… 5
(答) 3.545

4124
4116……258 (表差17)
8…… 5
(答) 0.02585

3572
3560……227 (表差19)
12…… 6
(答) 0.002276

6458
6454……442 (表差10)
4…… 4
(答) 0.4424

42. 對數計算ノ例

本節及ビ次節デハ積，商，冪，冪根ヲ對數ヲ用ヒテ計算セシメルノデアル。計算ハ正確迅速ニ出來ルヤウニ練習シ，對數計算ガ如何ニ便利ナルカヲ會得サセネバナラナイ。

生徒ハ稍ゝモスレバ對數計算ハ面倒ナル感ジヲ抱キ勝チデアル，之ハマダ對數教授ガ徹底シナイノデアルカラ練習ヲ充分ニシテ生徒ヲシテ對數ニ親シムヤウ訓練スベキデアル。

本節ノ教授ハ次ノ順序ニヨルノデアル。

(I) 積ノ計算

例ヘバ次ノ如キ基本計算ヲ練習セヨ。

$\bar{2}.4256+1.5341+\bar{1}.6439+\bar{3}.5621$

(II) 商ノ計算

餘對數ニツイテ授ケル。

例ヘバ次ノ如キ基本練習ヲ課セヨ。

colog 12, colog 64.8, colog 0.823, colog 0.0247

ノ値ヲ求メルコト。

(III) 冪ノ計算

負ノ指標ヲ有スル對數ニ，正ノ整數ヲ掛ケル方法ヲ授ケル。

例ヘバ次ノ如キ基本練習ヲ課セヨ。

$\bar{1}.3465\times5$, $\bar{2}.4670\times3$, $\bar{1}.1234\times4$

(IV) 冪根ノ計算

指標ガ負數ナル對數ヲ正ノ整數デ割ル方法ヲ授ケル。

例ヘバ次ノ如キ基本練習ヲ課セヨ。

$\bar{5}.4255\div5$, $\bar{1}.4264\div3$, $\bar{2}.5246\div4$

頁 108.

問 1. log 3.62=0.5587
log 5.87=0.7686
log 7.56=0.8785
log x=2.2058
x=160.6 (答)

頁 109.

問 2. log 0.0128=$\bar{2}$.1072

log 0.975 =$\bar{1}$.9890
−log 0.0128=1.8928
log x =1.8818
761……8814
7……4
x=76.17 (答)

頁 110.

問 3. log 2.63=0.4200
(×3
log x =1.2600
18.1…=1.2577
9……23
x=18.2 (答)

問 4.

$\log 36 = 1.5563$

$\log \frac{1}{36} = \bar{2}.4437$ (×2

$\log x = \bar{4}.8874$

771……8871

6……3

$x = 0.0007716$ (答)

頁 111.

問 5. [1] $\log 21.87 = 1.3398$ (÷3

$\log x = 0.4466$

279……4456

6……10

$x = 2.796$ (答)

[2] $\log 75.34 = 1.8770$ (÷6

$\log x = 0.3128$

205……3118

5……10

$x = 2.055$ (答)

[3] $\log 0.1586 = \bar{1}.2003$ (×2

$\bar{2}.4006$ (÷7

$\log x = \bar{1}.7715$

590……7709

9……6

$x = 0.5909$ (答)

[4] $\log 0.0354 = \bar{2}.5490$ (×6

$\log x = \bar{9}.2940$

196……2923

8……17

$x = 1.968 \times 10^{-9}$ (答)

(首位ハ小數第九位)

43. 複雜ナル計算ノ例

頁 112.

問 [1] $x = \frac{213 \times 3.752}{35.76}$ トスレバ

$\log 35.76 = 1.5534$

$\log 213 = 2.3284$

$\log 3.752 = 0.5742$

$-\log 35.76 = \bar{2}.4466$

$\log x = 1.3492$

223……3483

5……9

$x = 22.35$

(答) -22.35

[2] $\log 3.1416 = 0.4971$ (×3

$\log 3.1416^3 = 1.4913$

$\log 450 = 2.6532$

$\log$ 分母 $= 4.1445$

$\log 8750 = 3.9420$

$\log 1.34 = 0.1271$

$\log$ 分子 $= 4.0691$

$-\log$ 分母 $= \bar{5}.8555$

$\log x = \bar{1}.9246$

840……9243

6……3

$x = 0.8406$ (答)

[3] $x = \sqrt[3]{7} \div \left(\sqrt[6]{\frac{2}{3}} \times \sqrt{1.05}\right) = \sqrt[3]{7} \times \sqrt[6]{1.5} \div \sqrt{1.05}$

$\log 7 = 0.8451$

$\log 1.5 = 0.1761$

$\log 1.05 = 0.0212$

$\log \sqrt{1.05} = 0.0106$

$\log \sqrt[3]{7} = 0.2817$

$\log \sqrt[6]{1.5} = 0.0294$

$-\log \sqrt{1.05} = \bar{1}.9894$

$\log x = 0.3005$

$x = 1.998$ (答)

[4] $x = \sqrt{(1+0.765)(1-0.765)} = \sqrt{1.765 \times 0.235}$

$\log 1.765 = 0.2468$

$\log 0.235 = \bar{1}.3711$

$\bar{1}.6179$ (÷2

$\log x = \bar{1}.8090$

$x = 0.644$ (答)

44. 應 用

前ニモ述ベタ通リ對數ハ實用トシテ價値アルモノデアルカラ，生活ニ即シタル實際的ノ問題ヲ作成シテ補充トシテ課シ，對數ガ如何ニ吾人ノ生活ニ役立ツカヲ知ラシメルコトガ望マシイ。

頁 113.

問 1. 直徑$=\sqrt{2}$ m，圓周$=\sqrt{2}\pi$ m

$\log 2 = 0.3010$

$\log \sqrt{2} = 0.1505$

$\log \pi = 0.4971$

$\log \sqrt{2}\pi = 0.6476$ $\sqrt{2}\pi = 4.442$ (答) 4.442m

問 2. 求メル距離ヲ x cm トスレバ

面積 $=\sqrt{7.6^2-5.65^2}\times 11.3=7.6\times x$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{13.25\times 1.95}\times 11.3}{7.6}=\frac{\sqrt{2.65\times 0.39}\times 56.5}{7.6}$$

$$\begin{array}{ll}
\log 2.65 & =0.4232\\
\log 0.39 & =\bar{1}.5911\\
\hline
 & \quad 0.0143\\
 & \quad\overline{}\,(\div 2\\
\log\sqrt{2.65\times 0.39} & =0.0072\\
\log 56.5 & =1.7520\\
-\log 7.6 & =\bar{1}.1192\\
\hline
\log x & =0.8784
\end{array}$$

$x=7.56$ (答) 7.56 cm

頁 114.

問 3. [1] $x\log 5=\log 17$ $\quad\therefore\quad x=\dfrac{\log 17}{\log 5}=\dfrac{1.2304}{0.6990}$

$$\begin{array}{ll}
\log 1.2304 & =0.0900\\
-\log 0.6990 & =0.1555\\
\hline
\log x & =0.2455
\end{array}$$

$\therefore\quad x=1.76$ (答)

[2] $9\times 3^x=\dfrac{5}{7}\times 7^x$ $\quad\therefore\quad \left(\dfrac{7}{3}\right)^x=\dfrac{9\times 7}{5}=12.6$

$x\log 2.333=\log 12.6$ $\quad\therefore\quad x=\dfrac{1.1004}{0.3680}$

$$\begin{array}{ll}
\log 1.1004 & =0.0416\\
-\log 0.368 & =0.4342\\
\hline
\log x & =0.4758
\end{array}$$

$\therefore\quad x=2.99$ (答)

問 題 (10)

1. 與式 $=\log\left(20449^{\frac{1}{2}}\times\dfrac{4}{7}\times\dfrac{35}{13}\times\dfrac{5}{11}\right)=\log\left(143\times\dfrac{4}{7}\times\dfrac{35}{13}\times\dfrac{5}{11}\right)$

$=\log 100=2$ (答) 2

2. [1] $\log 72=\log(2^3\times 3^2)=3\log 2+2\log 3=1.8572$ (答)

[2] $\log 1500=\log\left(\dfrac{3}{2}\times 1000\right)=\log 1000+\log 3-\log 2$

$=3+0.4771-0.3010=3.1761$ (答)

3. $\log_{25}200=x$ ト置ケバ $25^x=200$

$\therefore\quad x\log 25=\log 200$ $\quad\therefore\quad x(\log 100-2\log 2)=\log 2+\log 100$

$\therefore\quad x(2-0.60206)=0.30103+2$

$\therefore\quad x=\dfrac{2.30103}{1.39794}=1.64601$ 强

(答) 1.64601

4. $25^{25}=x$ ト置ケバ $25\log 25=\log x$

$\therefore\quad 25\log\dfrac{100}{4}=\log x$ $\quad\therefore\quad 25(\log 100-2\log 2)=\log x$

$\therefore\quad \log x=34.9500$ 故ニ x ハ 35 桁ノ整數デアル。

(答) 35 桁

5. $\log\dfrac{1}{2.5^{10}}=-10\log\dfrac{25}{10}=-10\{2\log 5-1\}=-10\{2(1-\log 2)-1\}$

$=-10+20\log 2=\bar{4}.0200$

故ニ小數第 4 位ヨリ始マル。 (答) 小數第 4 位

頁 115.

6. $x=\dfrac{2347\times\sqrt[5]{0.235}}{\sqrt{(23.4)^3}}$ ト置ケバ

$\log x=\log 2347+\dfrac{1}{5}\log 0.235-\dfrac{1}{2}\times 3\log 23.4$

$$\begin{array}{ll}
\log 2340 & =3.3692\\
 & \quad 7\cdots\cdots 133\\
\hline
\log 2347 & =3.3705\\
\log 0.235 & =\bar{1}.3711\\
 & \quad\overline{}\,(\div 5\\
\dfrac{1}{5}\log 0.235 & =\bar{1}.8742\\
\log 23.4 & =1.3692\\
 & \quad\overline{}\,(\times 3\\
 & \quad 4.1076\\
 & \quad\overline{}\,(\div 2\\
\dfrac{3}{2}\log 23.4 & =2.0538
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\log 2347 & =3.3705\\
\dfrac{1}{5}\log 0.235 & =\bar{1}.8742\\
-\dfrac{3}{2}\log 23.4 & =\bar{3}.9462\\
\hline
\log x & =1.1909\\
 & \quad 15.5\cdots\cdots 1.1903\\
 & \quad\overline{}\\
 & \quad 2\cdots\cdots\cdots 6\\
\hline
 & x=15.52
\end{array}$$

(答) 15.52

7. 等比級數ノ初項ヲ x, 公比ヲ k トスレバ

$a=xk^{p-1},\quad b=xk^{q-1},\quad c=xk^{r-1}$

$\therefore\ \log a=\log x+(p-1)\log k$

$\log b=\log x+(q-1)\log k$

$\log c=\log x+(r-1)\log k$

$\therefore\ (q-r)\log a+(r-p)\log b+(p-q)\log c$

$=(q-r)\{\log x+(p-1)\log k\}+(r-p)\{\log x+(q-1)\log k$

$+(p-q)\{\log x+(r-1)\log k\}=0$

8. x, y, z ハ等比級數ヲナスカラ $y^2=xz$ $\therefore\ y=x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ ……(1)

$(b-c)\log x+(c-a)\log y+(a-b)\log z=0$

$\therefore\ \log x^{(b-c)}+\log y^{(c-a)}+\log z^{(a-b)}=\log 1$

$\therefore\ x^{(b-c)}\times y^{(c-a)}\times z^{(a-b)}=1$ ……(2)

(1) ヨリ $y^{(c-a)}=x^{\frac{1}{2}(c-a)}z^{\frac{1}{2}(c-a)}$ ……(3)

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ

$x^{(b-c)}\times x^{\frac{1}{2}(c-a)}\times z^{(a-b)}\times z^{\frac{1}{2}(c-a)}=1$

$\therefore\ x^{\left(b-\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right)}\times z^{\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}-b\right)}=1$

$\therefore\ \left(\frac{x}{z}\right)^{\left(b-\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right)}=1$

$\therefore\ b-\frac{a}{2}-\frac{c}{2}=0$ $\therefore\ 2b=a+c$

即チ a, b, c ハ等差級數ヲナス。

9. [1] $\frac{1}{2}\log(x-5)+\log\sqrt{x-26}=1$

$\therefore\ \log\sqrt{x-5}+\log\sqrt{x-26}=\log 10$

$\therefore\ \sqrt{x-5}\sqrt{x-26}=10$ $\therefore\ (x-5)(x-26)=100$

$\therefore\ x=30$ 又ハ 1 〔$x=1$ ハ棄ツ〕 (答) 30

[2] $\log(x^3+1)-\log(x+1)=1$

$\therefore\ \log(x^3+1)-\log(x+1)=\log 10$

$\therefore\ \frac{x^3+1}{x+1}=10$ $\therefore\ x^2-x+1=10$

$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$ 〔負號ハ捨テル〕

(答) $\frac{1+\sqrt{37}}{2}$

10. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=3$ ……(1)

$\log x+\log y=2$ ……(2)

(2) カラ $xy=100$ ……(3)

$(1)^2$ $x+y-2\sqrt{xy}=9$ ……(4) $(x>0,\ y>0)$

(4) ニ (3) ヲ代入スレバ $x+y=29$ ……(5)

(3), (5) ヨリ $x=25,\ y=4;\ x=4,\ y=25$

$x>y$ ナル故 $x=25,\ y=4$ (答)

11. $x=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{29}=2^{30}-1$

今 $x'=2^{30}$ トスレバ

$\log x'=30\log 2=9.03$ $(\log 2=0.3010)$

$\therefore\ x'=1.07\times10^9$ (約)

1.07×10^9錢$=1.07\times10^7$圓$=1070\times10^4$圓$=1070$萬圓 (約) (答)

頁 116.

12. $\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2h=1000000$ トスレバ

$\log\pi+3\log h=6+2\log 2$

$\therefore\ \log h=\frac{1}{3}(2\log 2-\log\pi)+2=\frac{1}{3}(0.6020-0.4971)+2$

$=2.0349$ $\therefore\ h=108.4$ (答) 108.4 mm

13. 長サノ單位一萬 km トスル。

面積$=4\pi\left(\frac{4}{2\pi}\right)^2=\frac{16}{\pi}$

コノ對數ハ　$4\times0.3010-0.4971=0.7069$

依ツテ表カラ　面積＝5.09億平方粁

又體積＝$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{4}{2\pi}\right)^3=\frac{32}{3\pi^2}$

コノ對數ハ　$1.5051-0.4771-0.9942=0.0338$

依ツテ表カラ　體積＝1.08兆立方粁　(答)　5.09億平方粁，1.08兆立方粁

14.　$1:5.20^3=365^2:x^2$　デアルカラ　$x=365\times\sqrt{5.20^3}$

$$\begin{array}{ll} \log 5.20 & =0.7160 \\ & \overline{2.1480}\ (\times 3 \\ & \overline{1.0740}\ (\div 2 \\ \log\sqrt{5.20^3} & =1.0740 \\ \log 365 & =2.5623 \\ \hline \log x & =3.6363 \end{array}$$

∴　x＝約 4330　(答)　約 4330 日

第9章 複 利 法

中等學校ノ數學教育ガ吾人ノ實社會生活ニ接觸ヲ密ニシナケレバナラナイコトハ今更言ヲ俟タナイトコロデアル。サレバ生徒ノ心理發達ノ過程ニ應ジテ實際的問題ノ取扱ヒニ留意スルコトガ必要デアル。

本章デハ對數ノ應用算トシテ複利法ヲ取扱ヒ，更ニ年賦積立・年賦償却等日常諸算ノ計算ニ習熟セシメルノデアル。

教授者ハヨク現代經濟界ノ趨勢ト土地ノ狀況トヲ斟酌シテ生活ニ即シタル教授ヲ進メラレタイ。

尙複利ニ於ケル元利合計及ビ現價ハ對數ニヨツテ計算ヲ練習セシメ，次ニ卷末ノ複利表及ビ現價表ノ使用法ヲ授ケ計算ヲ正確・迅速ナラシメルヤウニセラレタイ。

頁 117.

45. 複利法

本節デハ等比級數ヲ用ヒテ複利法ノ公式ヲ導キ，元利合計及ビ現價，期間ヲ求メル練習ヲナサシメルノデアル。

元金ヲ A，一期ノ利率ヲ r，n 期末ノ元利合計ヲ S トスレバ

$$S=A(1+r)^n$$

例 2. ノ期間 7 年 4 箇月ニツイテハ生徒ハ之ヲ　$7\frac{4}{12}=7\frac{1}{3}$ 年トシテ

$$S=2500\times(1+0.04)^{7\frac{1}{3}}$$

トスルカモシレナイガ，7年ノ次ノ 4 箇月ニ就イテハ單利法ヲ適用スルノデアルカラ注意ヲシナケレバナラナイ。

(注意) 1.　銀行當座預金・郵便貯金ナドノ利息計算ハ何レモ複利法デアルガ，銀行預金ハ通常 10 圓未滿ノ端下ニ，又郵便貯金デハ 10 錢未滿ノ端下ニハ利息ヲ附ケナイ。ソシテ 1 錢未滿ハ切捨テルコトニナツテヰル。コノヤウナ場合ニハ複利法ノ公式ヲ用ヒナイデ一期毎ニ計算スルノデアル。

(注意) 2.　次節ノ複利表・現價表モ，本節ニ於テ對數計算ガ終ツタラ之ト連絡シテ使用セシメルガ適切デアル。

頁 119.

問 1.　$S=8535\times(1+0.045)^{12}$　トスレバ

$$\begin{array}{ll} \log 1.045 & =0.0191 \\ \log 1.045^{12} & =0.2292 \\ \log 8535 & =3.9312 \\ \hline \log S & =4.1604 \end{array}$$

∴　S＝14470　　(答)　14470 圓

問 2.　$S=560\times(1+0.03)^6\times\left(1+0.06\times\frac{4}{12}\right)$

トスレバ

$\log 1.03=0.0128$

$\therefore\ \log 1.03^6=0.0768$

$$\begin{array}{r} \log 560 \ =2.7482 \\ \log 1.03^6=0.0768 \\ \log 1.02 \ =0.0086 \\ \hline \log S=2.8336 \end{array}$$

$\therefore\ S=682$ (答) 682 圓

頁 120.

問 3. 求メル元金ヲ x 圓トスレバ $x\times(1+0.05)^{10}=10000$

$\therefore\ \log x=\log 10000-10\log 1.05$

$\log 1.05=0.0212$

$10\log 1.05=0.2120$

$$\begin{array}{r} \log 10000=4.0000 \\ -10\log 1.05 \ =\bar{1}.7880 \\ \hline \log \quad x \ =3.7880 \end{array}$$

$\therefore\ x=6137$ (答) 6137 圓

頁 121.

46. 複利表・現價表

頁 122.

47. 年賦積立

本節デハ年賦積立ノ公式ヲ等比級數カラ導クノデアル。年賦積立ハ貯蓄銀行・郵便貯金等ニ應用セラレルカラ，實際的ノ問題モ補充シテ課スルヤウニセラレタイ。

頁 124.

問 1. $S=\dfrac{200}{0.04}\{(1+0.04)^{10}-1\}=5000\times(1.480244-1)$

$=5000\times0.480244=2401.22$ (答) 2401圓22錢

問 2. 毎年ノ積立金ヲ a 圓トスレバ

$5000=\dfrac{a(1+0.045)\{(1+0.045)^{20}-1\}}{0.045}$ $\quad 1.045^{20}=2.411714$

$\therefore\ a=\dfrac{5000\times0.045}{1.045\times1.411714}=152.5$(圓)約 (答) 152.5圓

48. 年賦償却

本節デハ年賦償却ノ公式ヲ授ケ，問題ヲ練習セシメルノデアル。銀行等ニツイテ實際ノ例ヲ採リ課スルト生徒ノ興味ヲ喚起シ，又實用的デアルカラ教授者ハソノ土地ニツイテ適切ナル教材ヲ補充セラレタイ。

頁 125.

問 1. $a=\dfrac{5000\times0.04}{1-(1+0.04)^{-10}}$ $\quad 1.04^{-10}=0.675$

$\therefore\ a=\dfrac{5000\times0.04}{1-0.675}=\dfrac{5000\times0.04}{0.325}=\dfrac{200}{0.325}=615.4$(約)

(答) 615 圓 40 錢

問 2. 毎期ノ支拂金ヲ a 圓トスレバ

半年末ノ元利合計ハ $(8000-a)(1+0.03)$圓

一年末ノ元利合計ハ $\{(8000-a)(1+0.03)-a\}(1+0.03)$

$=(8000-a)(1+0.03)^2-a(1+0.03)$

同樣ニシテ

八年末ノ元利合計ハ $(8000-a)(1+0.03)^{16}-a(1+0.03)^{15}-a(1+0.03)^{14}$

$-\cdots\cdots-a(1+0.03)$

八年末ニ又 a 圓ヲ返濟スルノデアルカラ

$(8000-a)(1+0.03)^{16}-a(1+0.03)^{15}-\cdots\cdots-a(1+0.03)-a=0$

$\therefore\ 8000(1+0.03)^{16}=a(1+0.03)^{16}+a(1+0.03)^{15}+\cdots\cdots+a(1+0.03)+a$

$=\dfrac{a}{0.03}\{(1+0.03)^{17}-1\}$

$\therefore\ a=\dfrac{8000\times(1+0.03)^{16}\times0.03}{(1+0.03)^{17}-1}=\dfrac{8000\times0.03}{1+0.03-(1+0.03)^{-16}}$

$1.03^{-16}=0.623$

$\therefore\ a=\dfrac{8000\times0.03}{0.407}=\dfrac{240000}{407}=589.7$ (約) (答) 589.7 圓

頁 126.

49. 年金ノ現價

年金ニハ定期年金（契約期間中定期ニ同一金額ヲ支拂フモノ）・永續年金（永久ニ亘ツテ定期ニ同一金額ヲ支拂フモノ）・生命年金（年金ヲ受取ル人ノ死亡スルマデ定期ニ同一金額ヲ支拂フモノ）ガアル。

恩給年金・郵便年金等ノ實例ヲ示スガヨイ。

頁 128.

問 1. 現價ヲ A 圓トスレバ

$$A=\frac{100}{0.06}\{1-(1+0.06)^{-15}\}=\frac{100}{0.06}(1-0.417)=\frac{58.3}{0.06}=972$$

（答） 972 圓

問 2. 現價ヲ A 圓トスレバ

$$A=\frac{150}{0.045}\{1-1.045^{-30}\}\qquad[1.045^{-30}=0.267]$$

$$=\frac{150}{0.045}\times(1-0.267)=\frac{150}{0.045}\times0.733=2443$$ （答） 2443 圓

問 3. 現價ヲ A 圓トスレバ $A\times1.05^{10}=\frac{200}{0.05}=4000$

$1.05^{-10}=0.614$ $\therefore$ $A=4000\times0.614=2456$ （答） 2456 圓

問 題 (11)

1. 元利合計ヲ S 圓トスレバ

$S=50\times(1.05^{15}-1)\div0.05=1000\times1.08=1080$ （答） 1080 圓

2. $\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}=5000$ ニ於テ $r=0.06$, $n=10$ トシテ

$$a=\frac{5000\times0.06}{1.06^{10}-1}=\frac{5000\times0.06}{0.79}=379.7\text{ 强}$$ （答） 約 380 圓

3. 年賦金ヲ a 圓トスレバ

$$150000\times1.06^3=\frac{a}{0.06}(1-1.06^{-5})$$

$1.06^3=1.191$, $1.06^{-5}=0.747$ $\therefore$ $a=\frac{150000\times1.191\times0.06}{0.253}$

$=42368$ 圓 （答）

頁 129.

4. 求メル金額ヲ x 圓トスレバ

$$x(1+0.06)^4=\frac{500}{0.06},\qquad 1.06^4=1.26$$

$$\therefore\ x=\frac{500}{1.26\times0.06}=6600\ (\text{約})$$ （答） 6600 圓

5. 10 年後ヨリ始マル永續年金ノ 10 年後ニ於ケル現價ハ $\frac{50}{0.048}$ 圓, 現價ヲ A 圓トスレバソノ 10 箇年後ノ元利合計ハ $A(1+0.048)^{10}$ デ之ガ

$$100(1+0.048)^9+100(1+0.048)^8+\cdots\cdots$$
$$+100(1+0.048)+100+\frac{50}{0.048}$$ 圓デアル。

故ニ $A(1.048)^{10}=\frac{100}{0.048}\{1.048^{10}-1\}+\frac{50}{0.048}$

$$=\frac{6250}{3}(1.048^{10}-1)+\frac{3125}{3}$$

$x=1.048^{10}$ トスレバ $\log 1.048=0.0204$ $\therefore$ $\log 1.048^{10}=0.2040$

$\therefore$ $x=1.6$

$$\therefore\ A(1.048)^{10}=\frac{6250}{3}\times0.6+\frac{3125}{3}=\frac{6875}{3}$$

$\therefore$ $\log A=\log 6875-\log 3-\log 1.048^{10}$

$$\begin{array}{rl}
\log 6875 & =3.8373\\
-\log 3 & =\bar{1}.5229\\
-\log 1.048^{10} & =\bar{1}.7960\\
\hline
\log A & =3.1562\\
143\cdots\cdots & 1553\\
3\cdots\cdots & 9\\
\hline
A=1433 &
\end{array}$$

（答） 1433 圓

6. 定期年金ノ公式デ, $A=5000$, $r=0.05$, トシテ n ヲ求ム。

$5000\times0.05=500\times(1-1.05^{-n})$

$\therefore$ $0.5=1-1.05^{-n}$ $\therefore$ $1.05^{-n}=0.5$ $\therefore$ $1.05^n=\frac{1}{0.5}=2$

$\therefore\ n=\dfrac{\log 2}{\log 1.05}=14$ 强　　(答) 15 年目

7. 年金額ヲ x 圓トスレバ

$$\frac{a}{r}\{(1+r)^m-1\}=\frac{x}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}$$

$$\therefore\ x=a\frac{(1+r)^m-1}{1-(1+r)^{-n}}$$　　(答) $a\dfrac{(1+r)^m-1}{1-(1+r)^{-n}}$ 圓

8. 全體ノ現價ハ $\dfrac{a}{r}\{1-(1+r)^{-2n}\}$ デ，甲ノ現價ハ

$$a\left\{\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+r)^{2n-1}}\right\}=\frac{a}{1+r}\times\frac{1-(1+r)^{-2n}}{1-(1+r)^{-2}}$$

$$=\frac{a(1+r)}{r(2+r)}\{1-(1+r)^{-2n}\}$$

故ニ乙ニ與ヘル金高ハ

$$\frac{a}{r}\{1-(1+r)^{-2n}\}\left(\frac{1+r}{2+r}-\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2(2+r)}\{1-(1+r)^{-2n}\}\text{圓}$$　(答)

第10章 不 等 式

本章デハ不等式ノ基本性質ヲ知ラシメ，條件附不等式ノ解法及ビ之ヲ應用シテ函數値ノ極大・極小ヲ求メル方法ヲ授ケルノデアル。

不等式ノ概念ハ既ニ隨所ニ於テ授ケテアル筈デアルカラ之ヲ系統付ケルトイフ考ノモトニ教授ヲ進メラレタイ。又函數値ノ極大・極小ハ本書 16 節ニ於テ二次式ノ値ノ極大・極小ニツイテ授ケテアルカラ之ト連絡シテ教授セラレタイ。

(**注意**) 數ノ大小ヲ比較スルノハ實數ノ範圍ニ限ル。從ツテ不等式ニ於テ取扱フ數ハスベテ實數トスル。

頁 130.

50. 不等式ノ性質 〔拙著高等教育代數學 P. 255 參照〕

頁 133.

問 1. $a-d-(b-c)=(a-b)+(c-d)\cdots\cdots\cdots(1)$

$a>b,\ c>d$ ナル故 $a-b>0,\ c-d>0$

故ニ (1) ノ右邊ハ正デアル。

$\therefore\ a-d-(b-c)>0$　　$\therefore\ a-d>b-c$

問 2. $\dfrac{a}{d}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{ac-bd}{cd}\cdots\cdots\cdots(1)$

$a,\ b,\ c,\ d$ ハ正デ $a>b,\ c>d$ ナル故 $ac>bd$ 又 $cd>0$

故ニ $\dfrac{ac-bd}{cd}>0$　　$\therefore\ \dfrac{a}{d}-\dfrac{b}{c}>0$　　$\therefore\ \dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

問 3. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$　　$a<b$ ナル故 $a-b<0$

故ニ $a+b>0$ ナルトキハ $a^2-b^2<0$　　$\therefore\ a^2<b^2$

$a+b<0$ ナルトキハ $a^2-b^2>0$　　$\therefore\ a^2>b^2$

問 4. $a^2<b^2$　　$\therefore\ (a-b)(a+b)<0$　　$\therefore\ b>a>-b\ \ [b>0]$

$-b>a>b\ \ [b<0]$

故ニ b ノ絶對値ハ a ノ絶對値ヨリ大デアル。

51. 絶對不等式ト條件不等式 〔拙著高等教育代數學 P. 260 參照〕

本節デハ絶對不等式ト條件不等式ニツイテ授ケ，一次及ビ二次ノ不等式ノ解法ヲ授ケル。

ぐらふヲ用ヒテ不等式ヲ解キ，方程式ノ解法ト比較研究セシメルコトガ望マシイ。

頁 134.

問 1. [1] $2(5x-1)-3(2+x)>6$

$\therefore\ 10x-2-6-3x>6$　　$\therefore\ 7x>14$　　$\therefore\ x>2$ (答)

[2] $3x-\frac{2}{3}(2x-1)>\frac{4}{3}(3x+1)-10$

兩邊ヲ 3 倍シテ, $9x-4x+2>12x+4-30$

$\therefore\ 28>7x \quad \therefore\ 4>x$ (答)

[3] $\frac{x^2}{3}+5>\frac{1}{6}(2x-1)(x-10) \quad \therefore\ \frac{x^2}{3}+5>\frac{1}{6}(2x^2-21x+10)$

$\therefore\ 2x^2+30>2x^2-21x+10 \quad \therefore\ 21x>-20 \quad \therefore\ x>-\frac{20}{21}$ (答)

頁 136.

問 2. [1] $2x^2+7x>15 \quad \therefore\ 2x^2+7x-15>0$

$\therefore\ (x+5)(2x-3)>0 \quad \therefore\ x>\frac{3}{2}$ 又ハ $x<-5$ (答)

[2] $x^2+3x<28 \quad \therefore\ x^2+3x-28<0$

$\therefore\ (x-4)(x+7)<0 \quad \therefore\ 4>x>-7$ (答)

[3] $x^2<1 \quad \therefore\ x^2-1<0$

$\therefore\ (x-1)(x+1)<0 \quad \therefore\ 1>x>-1$ (答)

[4] $x^2>4 \quad \therefore\ x^2-4>0$

$\therefore\ (x-2)(x+2)>0 \quad \therefore\ x>2$ 又ハ $x<-2$ (答)

[5] $x^2+1>2x \quad x^2-2x+1>0$

$\therefore\ (x-1)^2>0 \quad \therefore\ x\neq 1$ ナルトキハ成立ツ。(答)

[6] $\frac{x-2}{x-3}>0$ 兩邊ニ正ナル $(x-3)^2$ ヲ掛ケルト

$(x-2)(x-3)>0 \quad \therefore\ x>3$ 又ハ $x<2$ (答)

(注意) 一元二次不等式ノ解法ハ次ノヤウニ纏メル。

$ax^2+bx+c\gtreqless 0$ ……(1)

[1] $b^2-4ac>0$ ナル場合

$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスル。$[\alpha>\beta]$

$a(x-\alpha)(x-\beta)\gtreqless 0$ ……(2)

a ノ正負ヲ考ヘテ (2) ヨリ

$(x-\alpha)(x-\beta)\gtreqless 0$ トスル。

$\begin{cases} (x-\alpha)(x-\beta)>0 \text{ ノ解ハ } x>\alpha \text{ 又ハ } x<\beta \\ (x-\alpha)(x-\beta)<0 \text{ ノ解ハ } \alpha>x>\beta \end{cases}$

[2] $b^2-4ac=0$ ナル場合

$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

故ニコノ式ハ a ト同符號デアル。但シ $x=-\frac{b}{2a}$ ノトキ 0 デアル。

$ax^2+bx+c>0$ ハ $a>0$ ナルトキハ $x=-\frac{b}{2a}$ ナラザル限リ成立シ, $a<0$ ナルトキ不能デアル。

$ax^2+bx+c<0$ ハ $a>0$ ナルトキ不能。$a<0$ ナルトキ $x=-\frac{b}{2a}$ ナラザル限リ成立スル。

[3] $b^2-4ac<0$ ナル場合

$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$

$\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$ ナル故 $a>0$ ナルトキハ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ正。

$a<0$ ナルトキハ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ負。

故ニ $ax^2+bx+c>0$ ハ $a>0$ ナルトキハ常ニ成立シ

$a<0$ ナルトキハ不能。

又 $ax^2+bx+c<0$ ハ $a>0$ ナルトキハ不能デ

$a<0$ ナルトキハ常ニ成立スル。

頁 138.

52. 高次不等式・分數不等式

本節デハ簡單ナ高次不等式ト分數不等式トノ解法ヲ授ケル。

頁 141.

問 題 (12)

1. $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2+b^2-2ab)=(a+b)(a-b)^2$

$a+b>0,\quad a-b\neq 0$ ナル故 $(a+b)(a-b)^2>0$

$\therefore\quad a^3+b^3-ab(a+b)>0 \qquad \therefore\quad a^3+b^3>ab(a+b)$

2. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ad+bc)^2=(ac-bd)^2$

$ac\neq bd$ ナル故 $(ac-bd)^2>0 \qquad \therefore\quad (a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ad+bc)^2>0$

$\therefore\quad (a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ad+bc)^2$

3. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$

a, b, x, y ハ實數, 故ニ $(ay-bx)^2\geqq 0$

$\therefore\quad 1-(ax+by)^2=(ay-bx)^2\geqq 0$

$\therefore\quad (ax+by)^2\leqq 1 \qquad \therefore\quad 1\geqq ax+by\geqq -1$

4. $x+\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1}{x}(x^2-2x+1)$

$=\dfrac{1}{x}(x-1)^2$

コノ式デ $x>0$

$\therefore\quad \dfrac{1}{x}(x-1)^2\geqq 0 \qquad \therefore\quad x+\dfrac{1}{x}\geqq 2$

$x=1$ ナルトキハ $\dfrac{1}{x}(x-1)^2=0 \qquad \therefore\quad x+\dfrac{1}{x}=2$

5. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)-4=1+\dfrac{ad}{bc}+\dfrac{bc}{ad}+1-4=\dfrac{ad}{bc}+\dfrac{bc}{ad}-2$

$=\dfrac{a^2d^2-2abcd+b^2c^2}{abcd}=\dfrac{(ad-bc)^2}{abcd}$

然ルニ, a, b, c, d ハ悉ク正數ナル故 $abcd>0$

又 $(ad-bc)^2\geqq 0 \qquad \therefore\quad \dfrac{(ad-bc)^2}{abcd}\geqq 0$

$\therefore\quad \left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\geqq 4$

6. a, b, c ガ悉ク正數ナルトキハ

$\dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$ ナル定理ガアル。

コノ證明ヲシテ見ヨウ。

$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})\times\dfrac{1}{2}\{(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})^2$

$+(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2\}$

然ルニ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}>0,$

$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c})^2+(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2\geqq 0$

$\therefore\quad a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\geqq 0 \qquad \therefore\quad \dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$

次ニ本問題ノ證明ヲナス。a, b, c ハ悉ク正數ナル故

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geqq 3\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c}\times\dfrac{c}{a}} \qquad \therefore\quad \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geqq 3$

同樣ニ $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\geqq 3$

コノ兩邊ハ何レモ正ナル故, 相乘ジテ

$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\geqq 9$

頁 142.

7. $a^2+b^2=c^2 \qquad \therefore\quad c^3=\sqrt{a^2+b^2}(a^2+b^2)$

$a^3+b^3-c^3=a^3+b^3-(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}$

$=a^2(a-\sqrt{a^2+b^2})+b^2(b-\sqrt{a^2+b^2})\cdots\cdots\cdots(1)$

a, b ハ正數ナル故 $a<\sqrt{a^2+b^2},\quad b<\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore\quad a-\sqrt{a^2+b^2}<0,\quad b-\sqrt{a^2+b^2}<0$

$\therefore\quad a^2(a-\sqrt{a^2+b^2})+b^2(b-\sqrt{a^2+b^2})<0$

$\therefore\quad a^3+b^3-c^3<0 \qquad \therefore\quad a^3+b^3<c^3$

8. $2x^2-13x+15<0 \qquad \therefore\quad (x-5)(2x-3)<0$

$\therefore\quad 5>x>\dfrac{3}{2}$ (答)

9. $x^2-6x+15>0 \qquad \therefore\quad (x-3)^2+6>0$ 故ニ x ノ値ノ總テノ實數値ニ對シテ原式ハ成立ツ。

10. $\dfrac{9-x^2}{x-7}>0$, 兩邊ニ $(x-7)^2$ ヲ掛ケテ $(9-x^2)(x-7)>0$

$\therefore\quad (x-3)(x+3)(x-7)<0$

$\therefore\ 7>x>3$ 又ハ $x<-3$ (答)

11. $\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{x-2}{x+3}$ $\quad\therefore\ 1-\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}<1-\dfrac{5}{x+3}$

$\therefore\ \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{5}{x+3}<0$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-5}{(x+2)(x+3)}<0$

$\therefore\ \dfrac{x^2+11}{(x-1)(x+2)(x+3)}<0$

兩邊ニ正ナル $(x-1)^2(x+2)^2(x+3)^2$ ヲ掛ケルト

$(x^2+11)(x-1)(x+2)(x+3)<0,$

$x^2+11>0 \quad\therefore\ (x-1)(x+2)(x+3)<0$

$\therefore\ x<-3$ 或ハ $-2<x<1$ (答)

12. $x^2-4x+3>0$……(1) $\quad x^2-6x+8>0$……(2)

(1) ヲ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ $x>3$ 又ハ $x<1$

(2) ヲ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ $x>4$ 又ハ $x<2$

故ニ (1), (2) ヲ同時ニ滿足スル x ノ値ノ限界ハ $x>4$ 又ハ $x<1$ (答)

13. $5>2x^2-2x-1$……(1) $\quad 2x^2-2x-1>3$……(2)

(1) ヨリ $x^2-x-3<0$, (2) ヨリ $x^2-x-2>0$ 故ニ

(1) ヲ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}>x>\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$……(3)

(2) ヲ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ $x>2$ 又ハ $x<-1$……(4)

故ニ (3), (4) ヲ同時ニ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ

$2<x<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ 又ハ $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<x<-1$ (答)

14. 矩形ノ長邊ヲ x m トスレバ短邊ハ $(8-x)$m デアル。

故ニ $x(8-x)\leqq 15 \quad\therefore\ x^2-8x+15\geqq 0$

$\therefore\ x\geqq 5$ 又ハ $x\leqq 3$ (棄テル)

故ニ長邊ハ 5 m ヨリ小デハイケナイ。 (答) $x\geqq 5$ m

53. 不等式ヲ應用シテ極大極小ヲ求メルコト

〔拙著高等教育代數學 P. 312 參照〕

函數ノ極大極小ヲ研究スルコトハ數學教育上重要デアルカラ，生徒ノ理解ノ程度ヲ顧慮シ充分徹底スル樣取扱フコトヲ要スル。

本節ニハ分母及ビ分子ガ二次以下ノ分數式ノ極大極小ニツイテノ問題ヲ採ツテ置イタガ本書 16 節ノ二次函數ノ極大極小ニツイテ，更ニ復習シ研究セシメルガヨイ。

例ヘバ「x^2-2x+2 ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ」

[解] $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ 故ニ $x=1$ ナルトキ極小ニシテ，ソノ値ハ 1 デアル。

[別解] $x^2-2x+2=y$ ト置ケバ $x^2-2x+2-y=0$

x ガ實數デアルノハ $1-(2-y)\geqq 0$ 即チ $y-1\geqq 0$

ナルトキデアル。故ニ $y\geqq 1$

故ニ y 即チ x^2-2x+2 ノ極小値ハ 1 デ，ソノトキノ x ノ値ハ

$x=1$ デアル。$\left(x=-\dfrac{b}{2a}\ \text{ニ當ル}\right)$

コノ別解ハ 16 節デ取扱ハナカツタノデアルカラ，コノ方法ニツイテ，新ニ教授スルガヨイ。

頁 145.

問 [1] $\dfrac{x^2+6x-3}{2x-1}=k$ トスレバ $x^2+2(3-k)x-3+k=0$

x ノ實數條件ヲ求メルト $(3-k)^2-(k-3)\geqq 0$

$\therefore\ k^2-7k+12\geqq 0 \quad\therefore\ k\geqq 4$ 又ハ $k\leqq 3$

故ニ與ヘラレタ式ハ 4 ト 3 トノ間ノ値ヲ有スルコトガナイ。

コノ式ノ極小値ハ 4 デ $x=1$ ガ對應シ，極大値ハ 3 デ $x=0$ ガ對應スル。

[2] $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=k$ トスレバ $(1-k)x^2-3(1+k)x+4(1-k)=0$

x ノ實數條件ヲ求メテ $9(1+k)^2-16(1-k)^2\geqq 0$

$\therefore\ 7k^2-50k+7\leqq 0 \quad\therefore\ (k-7)(7k-1)\leqq 0 \quad\therefore\ 7\geqq k\geqq\dfrac{1}{7}$

故ニ與ヘラレタ式ノ値ノ範圍ハ $7 \geqq k \geqq \frac{1}{7}$

ソシテコノ式ノ極大値ハ 7 デ，極小値ハ $\frac{1}{7}$ デアル。

極大値ニハ $x=-2$，極小値ニハ $x=2$ ガ對應スル。

54. 相加平均ト相乘平均トノ大小

〔拙著高等教育代數學 P. 279 參照〕

本節デハ相加平均ト相乘平均トノ大小ニ關スル定理ヲ授ケ，次節ノ應用問題ノ解法ノ準備トスル。

二ツノ數ノ相加平均ト相乘平均トノ大小ハぐらふニヨツテ示スト直觀的ニ理解ヲ助ケル。

頁 149.

55. 前節ノ應用

頁 151.

問 題 (13)

1. $2x^2-7x+11=k$ トスレバ $2x^2-7x+11-k=0$

x ノ實數條件ハ $49-8(11-k) \geqq 0$ $\therefore$ $k \geqq \frac{39}{8}$

$k=\frac{39}{8}$ ニ對應スル x ノ値ハ $\frac{7}{4}$

(答) $x=\frac{7}{4}$ ノトキ極小，極小値ハ $\frac{39}{8}$

2. $-x^2+4x-8=k$ トスレバ $x^2-4x+8+k=0$

x ノ實數條件ハ $4-(8+k) \geqq 0$ $\therefore$ $k \leqq -4$

$k=-4$ ニ對應スル x ノ値ハ $x=2$

(答) $x=2$ ノトキ極大，極大値 -4

3. $\frac{5x^2+8x-1}{x^2+1}=k$ トスレバ $(5-k)x^2+8x-(1+k)=0$

x ノ實數條件ヨリ $16+(5-k)(1+k) \geqq 0$ $\therefore$ $k^2-4k-21 \leqq 0$

$\therefore$ $(k+3)(k-7) \leqq 0$ $\therefore$ $7 \geqq k \geqq -3$

$k=7$ ノトキハ $x=2$，$k=-3$ ノトキハ $x=-\frac{1}{2}$

(答) $x=-\frac{1}{2}$ ノトキ極小，極小値 -3，$x=2$ ノトキ極大，極大値 7

4. $3x+\frac{5}{x}=k$ トスレバ $3x^2-kx+5=0$

x ノ實數條件ハ $k^2-60 \geqq 0$ $\therefore$ $k \geqq 2\sqrt{15}$ 又ハ $k \leqq -2\sqrt{15}$

コノ式ノ最小値ハ $2\sqrt{15}$ デアル。 (答) $2\sqrt{15}$

5. $y=ax^2+bx+c$……(1)

(1) ニ於テ $x=1$ ナルトキハ $y=3$，$x=2$ ナルトキハ $y=7$，$x=3$ ナルトキハ $y=13$ ナル故コレ等ヲ代入スレバ

$a+b+c=3$ ……(2) $4a+2b+c=7$……(3)

$9a+3b+c=13$……(4)

(2), (3), (4) ヨリ $a=b=c=1$

故ニ (1) ハ $y=x^2+x+1$ $\therefore$ $x^2+x+1-y=0$

x ノ實數條件ヨリ $1-4(1-y) \geqq 0$，$y \geqq \frac{3}{4}$

即チ y ノ最小値ハ $\frac{3}{4}$ デ，之ニ對應スル x ノ値ハ $-\frac{1}{2}$ デアル。

(答) $x=-\frac{1}{2}$ ノトキ

6. ax^2-bx+5 ハ最小値ヲ有スルカラ $a>0$

今 $ax^2-bx+5=y$ ト置ケバ $b^2-4a(5-y) \geqq 0$

$\therefore$ $4ay \geqq 20a-b^2$ 但シ $a>0$

$\therefore$ $y \geqq 5-\frac{b^2}{4a}$……(1)

最小値 $y=1$ ナルトキハ (1) ハ等式トナリ

$1=5-\frac{b^2}{4a}$ $\therefore$ $16a-b^2=0$……(2)

又コノトキ $ax^2-bx+5=1$ ハ等根 2 ヲ有スルニヨリ

$2=\frac{b}{2a}$ $\therefore$ $4a-b=0$……(3)

(2), (3) ヨリ $a=0$, $b=0$ 又ハ $a=1$, $b=4$

然ルニ $a>0$ ナルヲ以テ $a=1,\ b=4$ (答)

7. 73 ヲ二數ニ分ケテ一數ヲ x トシ $x^2+(73-x)^2=y$ ト置ケバ

$$2x^2-146x+5329=y$$

x ノ實數條件ヲ求メテ

$$73^2-2(5329-y)\geqq 0,\quad y \text{ ハ整數ナル故}$$

$y=2665$ トナル。

之ニ對應スル x ノ値ハ 36 及ビ 37 デアル。即チ 36, 37 ガ求メル答デアル。

8. $x+y=k$……(1) ト置ク。

$xy=x+y \quad \therefore\ x(y-1)=y$

依ツテ $y\neq 1$ トスレバ $x=\dfrac{y}{y-1} \quad \therefore\ \dfrac{y}{y-1}+y=k$

$\therefore\ y^2-ky+k=0$

y ガ實數ナルタメニハ $k^2-4k\geqq 0 \quad \therefore\ k(k-4)\geqq 0$

然ルニ $k>0 \quad \therefore\ k\geqq 4$

k ノ最小値ハ 4 デ，之ニ對應スル y ノ値ハ $\dfrac{k}{2}=2$

$\therefore\ x=y=2 \quad \therefore\ x+y=4$

9. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}=k$ ト置ケバ

$x=2k+1$……(1) $\qquad y=3k-1$……(2)

$z=4k+2$……(3)

$$\therefore\ x^2+y^2+z^2=(2k+1)^2+(3k-1)^2+(4k+2)^2=29k^2+14k+6$$

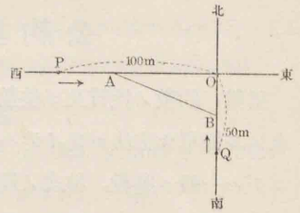
$$=29\left(k^2+\frac{14}{29}k+\frac{6}{29}\right)=29\left\{\left(k+\frac{7}{29}\right)^2+\frac{125}{29^2}\right\}\text{……(4)}$$

故ニ (4) ヲ最小ナラシメル k ノ値ハ $-\dfrac{7}{29}$ デアル。ソシテソノ式ノ値ハ $\dfrac{125}{29}$

$k=-\dfrac{7}{29}$ ヲ (1), (2), (3) ニ代入スレバ $x=\dfrac{15}{29},\ y=-\dfrac{50}{29},\ z=\dfrac{30}{29}$

(答) $x=\dfrac{15}{29},\ y=-\dfrac{50}{29},\ z=\dfrac{30}{29}$; 最小値 $\dfrac{125}{29}$

10. 始メノ甲，乙ノ位置ヲ P, Q トシ，t 秒後ノ位置ヲ A, B トスレバ



$OA=100-4t,\ OB=50-3t,$ 故ニ AB ノ最小ヲ求メルニハ

$$(100-4t)^2+(50-3t)^2$$

ノ最小ヲ求メレバヨイ。

$$(100-4t)^2+(50-3t)^2=25(t^2-44t+500)=25\{(t-22)^2+6\}$$

故ニ，コノ式ハ $t=22$ ノトキ，ソノ値ハ最小トナル。(答) 22 秒後

頁 152.

11. 無税ノ時ノ輸入額ヲ a 圓トスレバ

$$\text{税金}\quad y=a\left(1-\frac{3p}{10}\right)\times\frac{p}{10}=a\left(\frac{p}{10}-\frac{3p^2}{100}\right)=\frac{3a}{100}\left(\frac{10}{3}p-p^2\right)$$

$$=\frac{3a}{100}\left\{\frac{25}{9}-\left(p-\frac{5}{3}\right)^2\right\}=\left\{\frac{1}{12}-\frac{3}{100}\left(p-\frac{5}{3}\right)^2\right\}a$$

$p=\dfrac{5}{3}$ 割ナルトキ $\dfrac{1}{12}$ ナル最大値ヲ有スル。 (答) $\dfrac{5}{3}$割

12. 食券 1 枚ニツキ x 錢增シタトキ發賣數ハ y 枚減ズルトスレバ 1 枚ノ値ノ增シガ發賣數ノ減リニ比例スルカラ

$(13-10):x=45:y \quad \therefore\ y=15x$……(1)

ソコデ 1 枚ノ價ヲ $(10+x)$ 錢トシタトキ枚數ハ 390 枚ヨリモ y 枚減ルノデアルカラソノ時ノ總收入高ヲ z 錢トスレバ

$$z=(10+x)(390-y)$$

(1) ヲ代入シテ $z=(10+x)(390-15x)=15\{324-(8-x)^2\}$

故ニ z ヲ最大ナラシメルタメニハ $(8-x)^2$ ヲ最小値，即チコノ場合ハ $x=8$ ナラシメル。

故ニ 1 枚ノ價ハ $10+8=18$ (答) 18 錢

附　錄

公約數・公倍數

倍數，約數ノ性質及ビ整數，整式ノ最大公約數・最小公倍數ヲ求メル簡單ナ方法ニツイテハ既ニ基本教材ニ取扱ツテアルガ，ココデハ一般ニ整數，整式ノ最大公約數・最小公倍數ヲ求メル方法ニツイテ授ケ，之ガ簡單ナ應用問題ヲ取扱フノデアル。

頁 153.

1. 約數ノ性質

本節デハ約數ニ關スル定理ヲ授ケ，最大公約數ノ一般ノ求メ方ノ原理ヲ知ラシメルノデアル。

頁 154.

問　0, 6

頁 155.

2. 最大公約數ノ一般ノ求メ方

前節ノ定理ニヨリ最大公約數ノ一般的ノ求メ方ヲ授ケ之ヲ練習セシメル。

最大公約數ヲ求メル方法ハ次ノ二通リデアル。

[1]　因數分解ニヨル方法　　[2]　互除法

問題ニヨツテ何レノ方法ガ簡便デアルカヲ見分ケルコトガ必要デアル。

頁 157.

問　[1]　49　　[2]　x^2+3　　[3]　x^2-3x+7

頁 158.

3. 最小公倍數

本節デハ一般ニ最小公倍數ヲ求メル原理ニツイテ授ケ，問題ヲ練習セシ

メル。

問　[1]　G.C.M.$=13$,　L.C.M.$=6182423$

[2]　G.C.M.$=x^2-3x+7$,　L.C.M.$=(x-1)(x^4+3x^2+6x+35)$

[3]　G.C.M.$=3x^2-4x+7$,　L.C.M.$=(x-3)(6x^3+x^2+2x+21)$

頁 159.

問　題

1. 2655 ト 3717 トノ G.C.M. ハ 531 デ，531 ト 6195 トノ G.C.M. ハ 177，故ニ求メル最大公約數ハ 177 デアル。　(答)

2655 ト 3717 トノ L.C.M. ハ 18585 デ，18585 ト 6195 トノ L.C.M. ハ 18585 デアル。故ニ求メル最小公倍數ハ 18585 デアル。　(答)

2. 第一式ト第二式トノ G.C.M. ハ x^2+2x-3 デ，之ト第三式トノ G.C.M. モ x^2+2x-3 デアル。故ニ求メル G.C.M. ハ x^2+2x-3 デアル。

次ニ第一式ト第二式トノ L.C.M. ハ x^3+3x^2-x-3 デ，之ト第三式トノ L.C.M. ハ $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$，故ニ求メル L.C.M. ハ

$x^4+5x^3+5x^2-5x-6$ デアル。

(答)　x^2+2x-3,　$x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

3. $2x^4+3x^3-6x^2+8x-3$ ト $2x^4+7x^3-8x+3$ トヲ同時ニ零ナラシメル x ノ値ハ，コノ二式ノ G.C.M. ヲ零ナラシメル x ノ値デアル。

コノ二式ノ G.C.M. ハ $(2x-1)(x+3)$ デアル。

故ニ求メル x ノ値ハ -3 ト $\frac{1}{2}$ デアル。　(答)

4. $8x^3-12x^2-26x+15=0$……(1)　　$12x^3+8x^2-13x+3=0$……(2)

(1), (2) ノ共通根ハ (1), (2) ノ左邊ノ G.C.M. ヲ零ナラシメル x ノ値デアル。

(1), (2) ノ左邊ノ G.C.M. ハ $4x^2+4x-3$ デアル，故ニ共通根ハ

$4x^2+4x-3=0$　ヨリ　$x=\frac{1}{2}$　又ハ　$-\frac{3}{2}$

$(8x^3-12x^2-26x+15)\div(4x^2+4x-3)=2x-5$……(3)

$(12x^3+8x^2-13x+3)\div(4x^2+4x-3)=3x-1$……(4)

(3), (4) ヨリ共通ナラヌ根ハ $\frac{5}{2}$ ト $\frac{1}{3}$ デアル。

(答)　共通ナル根 $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$; 共通ナラヌ根 $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{3}$

5. $20x^3-21x^2-35x-3=3$ ヲ滿足スル x ノ値ヲ求メルト

$(x-2)(20x^2+19x+3)=0$　ヨリ

$\therefore\ x=2$ 又ハ $x=-\frac{3}{4}$ 又ハ $x=-\frac{1}{5}$

$24x^3-26x^2-41x-2$……(1)

$x=2$ ヲ (1) ニ代入スレバ, ソノ値ハ 4 トナル。

$x=-\frac{3}{4}$ ヲ (1) ニ代入スレバ, ソノ値ハ 4 トナル。

$x=-\frac{1}{5}$ ヲ (1) ニ代入スレバ, ソノ値ハ $\frac{621}{125}=4\frac{121}{125}$ トナル。

(答)　$-\frac{1}{5}$

6. 二ツノ整式ノ最小公倍數ハ, ソノ最大公約數デ割リ切レル。

故ニ　$2^3-9\times2^2+20\times2+a=0$　　$\therefore\ a=-12$　　(答)

依ツテ L.C.M. ハ　$x^3-9x^2+20x-12$　デアル。

$(x^3-9x^2+20x-12)\div(x-2)=x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$

二ツノ整式ハ同次デアルノデアルカラ, 求メル二式ハ

$(x-1)(x-2)$,　$(x-6)(x-2)$

即チ　x^2-3x+2,　$x^2-8x+12$　(答)

7. 二ツノ整式ノ最小公倍數ハ, ソノ最大公約數デ割リ切レル。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 \qquad -9 \\
\hline
x^2+x-2 & 4x^4+4x^3-17x^2+\ px+q \\
 & 4x^4+4x^3-\ 8x^2 \\
\hline
 & \qquad -9x^2+\ px+q \\
 & \qquad -9x^2-9x+18 \\
\hline
 & \qquad (p+9)x+q-18
\end{array}
$$

コノ剩餘 $(p+9)x+q-18$ ハ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ零デナケレバナラ

ナイ。

又　$4x^2-9=(2x+3)(2x-3)$　ヨリ

二ツノ三次式ハ　$\left.\begin{array}{l}(x^2+x-2)(2x+3)=2x^3+5x^2-x-6\\(x^2+x-2)(2x-3)=2x^3-x^2-7x+6\end{array}\right\}$ (答)

頁 160.

8. 共通根ヲ α トスレバ

$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1=0$……(1)

$\alpha^2+b\alpha+1=0$ ……(2)

(1)−(2)　$\alpha^2(\alpha+a-1)=0$

然ルニ　$\alpha\neq0$　($x=0$ ハ根デナイコト明カデアル)

$\therefore\ \alpha=1-a$

ココニ　$\alpha\neq0$ ナル故 $a\neq1$

故ニ共通根ハ $1-a$ デアル。之ヲ (2) ニ代入スレバ

$(a-1)^2-b(a-1)+1=0$

9. x^n-ax+b ト $nx^{n-1}-a$ トノ公約數ハ

$n(x^n-ax+b)-x(nx^{n-1}-a)$ ノ約數デアル。

サテ　$n(x^n-ax+b)-x(nx^{n-1}-a)=a(1-n)x+nb$

($a(1-n)\neq0$ トスレバ)　　$=a(1-n)\left\{x+\frac{nb}{a(1-n)}\right\}$

即チ原ノ二式ノ公約數ハ　$x+\frac{nb}{a(1-n)}$　デアル。

ソコデ　$nx^{n-1}-a$ ハ $x+\frac{nb}{a(1-n)}$ 即チ $x-\frac{nb}{a(n-1)}$ デ割リ切レル。

故ニ剩餘定理ニヨツテ　$n\left\{\frac{nb}{a(n-1)}\right\}^{n-1}-a=0$

$\therefore\ \frac{n^nb^{n-1}}{a^{n-1}(n-1)^{n-1}}=a$　　$\therefore\ \left(\frac{a}{n}\right)^n=\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$

$a(1-n)=0$ ナルトキハ $a=0$, コノトキ原二式ガ公約數ヲ有スルトキハ b モ又 0 トナリ勿論 $\left(\frac{a}{n}\right)^n=\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$ デアル。

10. $x^2+px+q\cdots\cdots\cdots(1)$　　$x^2+qx+p\cdots\cdots\cdots(2)$

(1), (2) ノ L.C.M. ハ三次式ナル故 G.C.M. ハ一次式デアル。

今 G.C.M. ヲ $x-a$ トスレバ (1), (2) ヨリ

$a^2+pa+q=0\cdots\cdots\cdots(3)$　　$a^2+qa+p=0\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)-(4)$　$(p-q)a-(p-q)=0$

$\therefore\ (p-q)(a-1)=0$

サテ $p=q$ トスレバ (1), (2) ハ同一ノ式トナリ，最大公約數ハ一次デハナクナル。故ニ $p\neq q$　　$\therefore\ a=1$

次ニ $x-1$ ガ最大公約數デアルカラ，(1) ヨリ

$1+p+q=0\cdots\cdots\cdots(5)$

故ニ　$x^2+px+q=x^2+px-(p+1)=(x-1)(x+1+p)$

$=(x-1)(x-q)$

同様ニ　$x^2+qx+p=(x-1)(x-p)$

故ニ　最小公倍數$=(x-1)(x-p)(x-q)$

$=x^3-(1+p+q)x^2+(p+q+pq)x-pq$

$=x^3+(pq-1)x-pq$

補充問題

[1] 整式ノ四則

1. $2a-3b-\{b-(2a-b)+(a-2b)\}=2a-3b+a=3a-3b$

2. $(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2+x-1)=\{(x^3+x)+(x^2+1)\}\{(x^3+x)-(x^2+1)\}$

$=(x^3+x)^2-(x^2+1)^2=x^6+2x^4+x^2-x^4-2x^2-1=x^6+x^4-x^2-1$

3. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)-3(x+y)(y+z)(z+x)$

$=\{x+(y+z)\}^3-(x^3+y^3+z^3)-3(x+y)(y+z)(z+x)$

$=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$

$-3(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(y+z)\{3x^2+3x(y+z)+(y+z)^2-(y^2-yz+z^2)-3(x+y)(z+x)\}$

$=(y+z)\times 0=0$

4. $(4x^3+x^2-5x-8)(x^6-4x^4+18x^2-6)$ ノ x^7 ノ係數ハ $-5-16=-21$

x^5 ノ係數ハ $20+72=92$　　(答)　$-21,\ 92$

5. $(x^2+px+q)(ax^2+bx+c)$ ノ x^3 ノ係數ハ $ap+b$

x ノ係數ハ　$bq+pc$，故ニ

$ap+b=0\cdots\cdots\cdots(1)$　　$bq+pc=0\cdots\cdots\cdots(2)$

(1) ヨリ　$p=-\dfrac{b}{a}\cdots\cdots\cdots(3)$　　$[a\neq 0]$

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ　$bq-\dfrac{bc}{a}=0$　　$\therefore\ q=\dfrac{c}{a}\cdots\cdots\cdots(4)$ $[b\neq 0]$

$a=0,\ b\neq 0$ ノトキ不能，$a\neq 0,\ b=0$ ノトキ $p=0,\ q$ ハ不定　　(答)

6. $(a^2b+b^2a+b^2c+bc^2+a^2c+c^2a+3abc)\div(a+b+c)=ab+bc+ca$

コノ計算ハ被除式ヲ a ノ降冪順ニ配列シテ行フノデアル。

7. $(x^4+y^4-z^4+2x^2y^2+2z^2-1)\div(x^2+y^2-z^2+1)=x^2+y^2+z^2-1$

[2] 剩餘ノ定理

8. $3^3-4\times3^2+3-2=-8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-2=-2\frac{3}{8}$

9. $5^3-5^2\times m+7\times5-15=0$ ヨリ m ヲ求メヨ。 $m=\frac{29}{5}$ (答)

10. $x+y+z=0$ ヨリ $x+y=-z$, $y+z=-x$, $z+x=-y$, 之ヲ第一式ニ代入シテ 0 ト置ケバ $-xyz+nxyz=0$ $\therefore$ $n=1$ (答)

頁 2.

11. 與式ノ x ニ, a ヲ代入シテ $a^3-5a^2+2a+8=0$……(1)

$2a$ ヲ代入シテ $8a^3-20a^2+4a+8=0$……(2)

(2)−(1) $7a^3-15a^2+2a=0$ $\therefore$ $a(a-2)(7a-1)=0$

$\therefore$ $a=0$ 又ハ $a=2$ 又ハ $a=\frac{1}{7}$

コレ等ノ a ノ値デ (1), (2) ヲ共ニ滿足スルモノハ $a=2$ デアル。

(答) 2

12. x^2+px+q ヲ $x-1$ デ割レバ 6 餘ルカラ

$1+p+q=6$……(1)

$x+1$ デ割レバ 2 餘ルカラ $1-p+q=2$……(2)

(1), (2) ヨリ $p=2$, $q=3$ (答)

13. x^3+mx^2+nx+2 ガ $x-1$ 及ビ $x+1$ デ割リ切レルカラ

$1+m+n+2=0$……(1) $-1+m-n+2=0$……(2)

(1), (2) ヨリ $m=-2$, $n=-1$ (答)

14. $3x^3+2mx^2+nx-18$ ガ $(x+3)(x-2)$ デ整除セラレルカラ $x+3$ 及ビ $x-2$ デ整除セラレル。故ニ

$x=-3$ トシテ $-81+18m-3n-18=0$……(1)

$x=2$ トシテ $24+8m+2n-18=0$……(2)

(1), (2) ヨリ $m=3$, $n=-15$ (答)

15. x ニツイテノ有理整式ヲ p トシ, 之ヲ $(x-a)(x-b)$ デ割ツタ商ヲ p' トスル。除式ハ二次式デアルカラ剩餘ハ一次式デ之ヲ $mx+n$ トスル。

$p=p'(x-a)(x-b)+mx+n$

今コノ式ノ右邊ニ於テ $x=a$ ト置イタモノハ A ニ等シイ。

$(a-a)(a-b)p'_{x=a}+ma+n=A$

$\therefore$ $ma+n=A$……(1)

同様ニシテ $mb+n=B$……(2)

(1)−(2) $m(a-b)=A-B$

$a\neq b$ ナル故 $m=\frac{A-B}{a-b}$

從ツテ (1) ヨリ $n=\frac{aB-bA}{a-b}$

故ニ求メル剩餘ハ $\frac{A-B}{a-b}x+\frac{aB-bA}{a-b}$ (答)

16. (i) 二次三項式ヲ $p=ax^2+bx+c$ トスル。

$x=3$ ノトキ $9a+3b+c=0$……(1)

$x=-2$ ノトキ $4a-2b+c=15$……(2)

$x=-3$ ノトキ $9a-3b+c=24$……(3)

(1), (2), (3) ヨリ $a=1$, $b=-4$, $c=3$

故ニ $p=x^2-4x+3$

(ii) $x^2-4x+3=6$ トスレバ $x^2-4x-3=0$

$\therefore$ $x=2\pm\sqrt{7}=2\pm2.645\cdots=4.645\cdots$ 又ハ $-0.645\cdots$

(答) (i) x^2-4x+3, (ii) 4.645, -0.645

17. $n^3+5n=6n+n(n-1)(n+1)$ 然ルニ $n(n-1)(n+1)$ ハ連續三整數デアルカラ 6 ノ倍數デアル。故ニ $6n+n(n-1)(n+1)$ ハ 6 デ整除セラレル。

[3] 未定係數法

18. 恒等式 $x^3=A(x-1)(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)+D$ ニ

於テ $x=1$ トスレバ　$1=D$

$x=2$ トスレバ　$8=C+D$　$\therefore$　$C=7$

$x=3$ トスレバ　$27=2B+2C+D$　$\therefore$　$B=6$

$x=4$ トスレバ　$64=6A+6B+3C+D$　$\therefore$　$A=1$

(答)　$A=1,\ B=6,\ C=7,\ D=1$

19. x^5 ノ係数ヨリ　$-p^2+1=0$　$\therefore$　$p=\pm1$……(1)

x^3 ノ係数ヨリ　$-7p+q-5p+7=0$……(2)

$p=1$ ヲ (2) ニ代入スレバ　$q=5$

$p=-1$ ヲ (2) ニ代入スレバ　$q=-19$

(答)　$p=1,\ q=5;\ p=-1,\ q=-19$

頁 3.

20. 分母ヲ拂ヘバ

$(x+1)(x-2)=A(x-1)(x^2+x+2)+Bx(x^2+x+2)+(Cx+D)(x-1)x$

同次冪係数ヲ比較シテ　$A+B+C=0,\ 1=B-C+D,$

$-1=A+2B-D,\ -2=-2A$

$\therefore$　$A=1,\ B=-\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{2},\ D=1$　(答)

21. $x^3-x^2-11x+15=(x-3)(x^2+2x-5)$ ナル故

$2x^2-11x+5=A(x^2+2x-5)+(Bx+C)(x-3)$

$=(A+B)x^2+(2A-3B+C)x-(5A+3C)$

$\therefore$　$A+B=2,\ 2A-3B+C=-11,\ 5A+3C=-5$

$\therefore$　$A=-1,\ B=3,\ C=0$　(答)

22. $x^2-y^2+x+ky-6=(x+ay+b)(x+cy+d)$　ト置イテ x, y ノ同次冪係数ヲ比較シテ

$ac=-1$……(1)　　$a+c=0$……(2)

$bd=-6$……(3)　　$b+d=1$……(4)

$bc+ad=k$……(5)

(1), (2) ヨリ　$a=1,\ c=-1;\ a=-1,\ c=1$

(3), (4) ヨリ　$b=3,\ d=-2;\ b=-2,\ d=3$

コレ等ノ値ヲ (5) ニ代入シテ　$k=5$, 又ハ　-5　(答)

23. 與ヘラレタ三次式ガ他ノ二次式ニヨツテ割リ切レルカラ

$x^3+px+q=(x^2+ax+b)(x+m)$……(1)

$x^3+px+q=(x^2+a'x+b')(x+m')$……(2)

トスレバ, 同次冪係数ノ比較ニヨリ

(1) ヨリ　$a+m=0$……(3)　　$am+b=p$……(4)

$bm=q$……(5)

(2) ヨリ　$a'+m'=0$……(6)　　$a'm'+b'=p$……(7)

$b'm'=q$……(8)

(3), (5) ヨリ m ヲ消去スレバ　$-ab=q$

(6), (8) ヨリ m' ヲ消去スレバ　$-a'b'=q$

故ニ　$ab=a'b'$　$[=-q]$

(4)−(7)　$am-a'm'+b-b'=0$……(9)

コノ式ニ　$m=-a,\ m'=-a',\ b=-\frac{q}{a},\ b'=-\frac{q}{a'}$ ヲ代入スレバ　$-a^2+a'^2-\frac{q}{a}+\frac{q}{a'}=0$　$\therefore$　$(a'-a)\left(a'+a-\frac{1}{aa'}q\right)=0$

$a'\neq a$　トスレバ

$a'+a-\frac{q}{aa'}=0$

$\therefore$　$q=aa'(a+a')$

故ニ　$ab=a'b'=-aa'(a+a')$

24. $ax^2+bx+c=(2ax+b)\left(\frac{1}{2}x+m\right)$　トスレバ

$ax^2+bx+c=ax^2+\left(\frac{b}{2}+2am\right)x+bm$

$\therefore$　$b=\frac{b}{2}+2am$……(1)　　$c=bm$……(2)

$\therefore\quad b^2-4ac=0$ ……(3)

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

コノ式ニ (3) ヲ代入スレバ

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left\{\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right\}^2$$

25. $(a+bx)^2+(a'+b'x)^2=(b^2+b'^2)x^2+2(ab+a'b')x+a^2+a'^2$

コノ二次式ガ (x ニ關スル) 完全平方ナルタメノ條件ハ

$(ab+a'b')^2-(b^2+b'^2)(a^2+a'^2)=0$

$\therefore\quad (ab'-a'b)^2=0\qquad \therefore\quad ab'=a'b$ (答)

26. $4x^4-12x^3+5x^2+ax+b=\{\pm(px^2+qx+r)\}^2$ ト置ケバ

右邊ハ $p^2x^4+2pqx^3+(2pr+q^2)x^2+2qrx+r^2$

同次冪係數ヲ比較シテ

$p^2=4$ ……(1)　　$2pq=-12$ ……(2)

$2pr+q^2=5$ ……(3)　　$2qr=a$ ……(4)

$r^2=b$ ……(5)

(1) ヨリ $p=\pm2$

(i) $p=2$ トスレバ (2) ヨリ $q=-3$ (3) ヨリ $r=-1$

(4), (5) ニ代入スレバ $a=6,\ b=1$

(ii) $p=-2$ トスレバ (2) ヨリ $q=3$ (3) ヨリ $r=1$

(4), (5) ニ代入スレバ $a=6,\ b=1$　　(答) $a=6,\ b=1$

27. $ax^3+3bx^2+3cx+d=(ax^2+2bx+c)(x+p)$ ト置キ，同次冪係數ヲ比較スレバ $b=ap,\ c=bp,\ d=cp$ ヲ得ル。依ツテ，

$b=ap,\ c=ap^2,\ d=ap^3$

之ヲ第一式ニ代入スレバ $ax^3+3bx^2+3cx+d=a(x+p)^3$ ……(1)

然ルニ $p=\dfrac{b}{a}$ $[a\neq0]$ 故ニ (1) ハ

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)^3=\left[\sqrt[3]{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]^3$$

同様ニシテ $ax^2+2bx+c=\left[\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right]^2$

[4] 因數分解

28. $x^3+(2a+1)x^2+(a^2+2a-1)x+a^2-1$

$=x^3+x^2-x-1+2a(x^2+x)+(x+1)a^2$

$=x^2(x+1)-(x+1)+2ax(x+1)+(x+1)a^2$

$=(x+1)(x^2-1+2ax+a^2)=(x+1)\{(x+a)^2-1\}$

$=(x+1)(x+a+1)(x+a-1)$ (答)

頁 4.

29. $n^2x-xy-n^4y+2n^2y^2-y^3=x(n^2-y)-y(n^4-2n^2y+y^2)$

$=x(n^2-y)-y(n^2-y)^2=(n^2-y)\{x-y(n^2-y)\}$

$=(n^2-y)(x-n^2y+y^2)$ (答)

30. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)+(c^2-b^2)a+b^2c-c^2b$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c)$ (答)

31. $ab(a+b-3)-2a(a-1)-b(b-2)$

$=(b-2)a^2+(b^2-3b+2)a-b(b-2)$

$=(b-2)a^2+(b-2)(b-1)a-b(b-2)$

$=(b-2)\{a^2+(b-1)a-b\}=(b-2)(a-1)(a+b)$ (答)

32. $ax^2-a^3-a^2b+ab^2+b^3-bx^2=(a-b)x^2-(a^3-b^3)-ab(a-b)$

$=(a-b)(x^2-a^2-ab-b^2-ab)=(a-b)\{x^2-(a+b)^2\}$

$=(a-b)(x+a+b)(x-a-b)$ (答)

33. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(b+c)(ac+a^2+bc+ab)+abc$

$=(b+c)a^2+(b+c)(ac+ab)+(b+c)bc+abc$

$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$

$=\{(b+c)a+bc\}\{a+(b+c)\}=(a+b+c)(ab+ac+bc)$ (答)

34. $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$ (答)

35. $x^4-27x^2y^2+y^4=(x^2-y^2)^2-25x^2y^2=(x^2-y^2+5xy)(x^2-y^2-5xy)$ (答)

36. $(a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2=0$ ト置ケバ

$$x=\frac{-2ab\pm\sqrt{4a^2b^2+(a^2-b^2)^2}}{a^2-b^2}y=\frac{-2ab\pm(a^2+b^2)}{a^2-b^2}y$$

$$=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}y \quad 又ハ \quad \frac{-(a+b)^2}{a^2-b^2}y$$

$$\therefore \quad x=\frac{a-b}{a+b}y \quad 又ハ \quad x=-\frac{a+b}{a-b}y$$

故ニ 原式$=\{(a+b)x-(a-b)y\}\{(a-b)x+(a+b)y\}$ (答)

37. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24=(x^2+x-12)(x^2+x-2)+24$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+48=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$ (答)

38. $(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-90=(2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-90$

$=(2x^2+5x)^2+5(2x^2+5x)-84=(2x^2+5x+12)(2x^2+5x-7)$

$=(2x^2+5x+12)(2x+7)(x-1)$ (答)

39. $12x^2-37x-144=(3x-16)(4x+9)$ (答)

40. $2x^2-3xy-2y^2-8x+y+6=2x^2-(3y+8)x-(2y^2-y-6)$

$=2x^2-(3y+8)x-(2y+3)(y-2)=(2x+y-2)(x-2y-3)$ (答)

41. $10x^2-3xy-18y^2+6x+45y-28=10x^2-(3y-6)x-(18y^2-45y+28)$

$=10x^2-(3y-6)x-(6y-7)(3y-4)=(2x-3y+4)(5x+6y-7)$ (答)

42. $x^4+2x^3-13x^2-14x+24$ ニ於テ $x=1$ トスレバ 0 トナル。故ニ

$x-1$ デ割レバ 原式$=(x-1)(x^3+3x^2-10x-24)$

更ニ第二因數ハ $x+2$ デ割リ切レル。故ニ

原式$=(x-1)(x+2)(x^2+x-12)=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ (答)

43. 剩餘定理ニヨリ $b-c$ ナル因數ガアル。

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=a(b-c)(b+c)-bc(b-c)-a^2(b-c)$

$=(b-c)\{a(b+c)-bc-a^2\}=(b-c)(b-a)(a-c)=(b-c)(c-a)(a-b)$ (答)

44. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=x^3(y-z)+yz(y^2-z^2)-x(y^3-z^3)$

$=(y-z)\{x^3+yz(y+z)-x(y^2+yz+z^2)\}$

$=(y-z)\{x(x^2-y^2)-z^2(x-y)-yz(x-y)\}$

$=(y-z)(x-y)\{x(x+y)-z^2-yz\}=(y-z)(x-y)\{(x-z)(x+z)+y(x-z)\}$

$=(y-z)(x-y)(x-z)(x+y+z)$ (答)

45. x ニツイテ整頓スレバ $x^2+(y+2z)x-(2y^2+3z^2-7yz)$

$=x^2+(y+2z)x-(y-3z)(2y-z)=(x+2y-z)(x-y+3z)$ (答)

46. a ニツイテ整頓スレバ $a^2-2(b+c)a-(3b^2+3c^2-10bc)$

$=a^2-2(b+c)a-(b-3c)(3b-c)=(a-3b+c)(a+b-3c)$ (答)

47. $(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3=(a-x)^3+(b-x)^3-\{(a-x)+(b-x)\}^3$

$=-3(a-x)^2(b-x)-3(a-x)(b-x)^2=-3(a-x)(b-x)(a+b-2x)$

$=3(a-x)(b-x)(2x-a-b)$ (答)

[5] 最大公約數・最小公倍數

48. $a^2-b^2-ac-bc=(a+b)(a-b-c)$

$a^2+b^2-2ab-ac+bc=(a-b)^2-c(a-b)=(a-b)(a-b-c)$

$a^2+b^2-c^2-2ab=(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c)$

$\therefore$ G.C.M.$=a-b-c$

49. G.C.M.$=3x-7$

頁 5.

50. G.C.M.$=x+1$

51. 與式ノ G.C.M.$=x^2+x-1$

$$\therefore \quad \text{L.C.M.}=(x^4+3x-2)\times\frac{x^4+3x^3-x^2-4x+2}{x^2+x-1}$$

$$=(x^4+3x-2)(x^2+2x-2)$$

52. G.C.M.$=x^2+3x+1$

$$\therefore \quad \text{L.C.M.}=\frac{x^4+x^3-3x^2+4x+2}{x^2+3x+1}\times(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)$$

$$=(x^2-2x+2)(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)$$

53. $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$, $x^2+6x+9=(x+3)^2$

$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

$\therefore$ L.C.M. $=(x+2)(x+3)^2(x^2-2x+4)$

54. 教科書(注意)ニヨリ $ab=35$, $\therefore$ $a=1$, $b=35$; $a=5$, $b=7$

故ニ二数ハ $A=1\times12=12$, $B=35\times12=420$ 及ビ $A=5\times12=60$

$B=7\times12=84$ (答) 12, 420; 60, 84

55. 二ツノ整数ヲ $A=aG$, $B=bG$ トシ, G.C.M. $=G$ トスル。$L=abG$

$AB=abG^2$ ナル故 $G=\dfrac{AB}{L}=\dfrac{26250}{1050}=25$

$ab=\dfrac{L}{G}=\dfrac{1050}{25}=42$

$\therefore$ $a=1$, $b=42$; $a=2$, $b=21$; $a=3$, $b=14$; $a=6$, $b=7$

故ニ求メル二数ハ次ノ 4 組デアル。

$$\begin{cases}A=aG\cdots\\B=bG\cdots\end{cases}\begin{cases}1\times25\\42\times25\end{cases}\begin{cases}2\times25\\21\times25\end{cases}\begin{cases}3\times25\\14\times25\end{cases}\begin{cases}6\times25\\7\times25\end{cases}\text{(答)}$$

(答) 25, 1050; 50, 525; 75, 350; 150, 175

56. 前題同様ニ $AB=abG^2=384$, $G=8$

$\therefore$ $ab=6$ $\therefore$ $a=1$, $b=6$; $a=2$, $b=3$

故ニ, 二数ハ

$$\begin{cases}A=aG\cdots\\B=bG\cdots\end{cases}\begin{cases}1\times8=8\\6\times8=48\end{cases}\begin{cases}2\times8=16\\3\times8=24\end{cases}\text{(答)}$$

57. $A+B=(a+b)G=168$, $L=abG=1001$

a ト b トハ互ニ素ナル故 $a+b$ ト ab トモ互ニ素デアル。

故ニ, 二数ノ G.C.M. ハ $A+B$ ト L トノ G.C.M. デアル。

二数ノ G.C.M. ハ 7 デアル。

従ツテ $ab=143$ $\therefore$ $a=1$, $b=143$; $a=13$, $b=11$

$a=1$, $b=143$ ハ題意ニ適シナイ。$a=13$, $b=11$ ヨリ

$A=13\times7=91$, $B=11\times7=77$ (答) 91, 77

58. $A+B=(a+b)G=128400$, $G=8025$

$\therefore$ $a+b=128400\div8025=16$

故ニ $a=1$, $b=15$; $a=3$, $b=13$; $a=5$, $b=11$; $a=7$, $b=9$

故ニ求メル二数ハ

$$\begin{cases}A=aG\cdots\\B=bG\cdots\end{cases}\begin{cases}1\times8025=8025\\15\times8025=120375\end{cases}\begin{cases}3\times8025=24075\\13\times8025=104325\end{cases}\begin{cases}5\times8025=40125\\11\times8025=88275\end{cases}$$

$$\begin{cases}7\times8025=56175\\9\times8025=72225\end{cases}\text{(答)}$$

59. $A=aG$, $B=bG$, $L=abG$ $\therefore$ $G+abG=56$ $\therefore$ $1+ab=\dfrac{56}{G}$

故ニ G ハ 56 ノ約数デアル。[G=56 ハ除ク]

$\therefore$ $G=1, 2, 4, 7, 8, 14, 28$ $\therefore$ $1+ab=56$, $1+ab=28$, $1+ab=14$,

$1+ab=8$, $1+ab=7$, $1+ab=4$, $1+ab=2$

$\therefore$ $ab=55, 27, 13, 7, 6, 3, 1$

$$\therefore\begin{cases}a=1, & 5, & 1, & 1, & 1, & 1, & 2, & 1, & 1\\b=55, & 11, & 27, & 13, & 7, & 6, & 3, & 3, & 1\\G=1, & 1, & 2, & 4, & 7, & 8, & 8, & 14, & 28\end{cases}$$

故ニ求メル二数ハ

$$\begin{matrix}A=aG\cdots\\B=bG\cdots\end{matrix}\begin{cases}1\\55\end{cases}\begin{cases}5\\11\end{cases}\begin{cases}2\\54\end{cases}\begin{cases}4\\52\end{cases}\begin{cases}7\\49\end{cases}\begin{cases}8\\48\end{cases}\begin{cases}16\\24\end{cases}\begin{cases}14\\42\end{cases}\begin{cases}28\\28\end{cases}\text{(答)}$$

60. $G=x^2+3x+2$, $L=abG=x^4+5x^3-7x^2-41x-30$

$\therefore$ $ab=\dfrac{L}{G}=x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$

A, B ハ同次デアルカラ a, b ハ同次デ且互ニ素デアル。

従ツテ $a=x+5$, $b=x-3$

$$\therefore\left.\begin{aligned}A&=(x+5)(x^2+3x+2)=x^3+8x^2+17x+10\\B&=(x-3)(x^2+3x+2)=x^3-7x-6\end{aligned}\right\}\text{(答)}$$

頁 6.

61. $G=x^2+x-1\cdots\cdots(1)$　　$L=abG=3x^7+5x^6-4x^4-6x^3+x+1\cdots\cdots(2)$

$\therefore\ ab=\dfrac{L}{G}=3x^5+2x^4+x^3-3x^2-2x-1$

$=(x-1)(x^2+x+1)(3x^2+2x+1)$

依ツテ求メル二式ハ

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+x-1)(x^2+x+1),\quad (x^2+x-1)(x-1)(3x^2+2x+1)\\ \text{又ハ}\quad (x^2+x-1)(3x^2+2x+1),\quad (x^2+x-1)(x-1)(x^2+x+1)\end{array}\right\}\ \text{(答)}$$

62. $A+B=(a+b)G=2x^3+11x^2-x-30=(x^2+7x+10)(2x-3)$

$L=abG=x^4+4x^3-15x^2-58x-40=(x^2+7x+10)(x+1)(x-4)$

A+B ト L トノ G.C.M. ハ二式ノ G.C.M. デアル。

A+B ト L トノ G.C.M. ハ $x^2+7x+10$

$\therefore$ 故ニ　$a=x+1,\ b=x-4$

故ニ求メル二式ハ

$(x^2+7x+10)(x+1),\quad (x^2+7x+10)(x-4)$

即チ　$x^3+8x^2+17x+10,\quad x^3+3x^2-18x-40$　(答)

63. $x+2$ ハ公約數デアルカラ

$4+2a-3b=0\cdots\cdots(1)$　　$4-14a+5b=0\cdots\cdots(2)$

(1), (2) ヨリ　$a=1,\ b=2$　依ツテ二ツノ二次三項式ハ

$x^2-x-6=(x+2)(x-3),\qquad x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

$\therefore$ L.C.M. $=(x+2)(x-3)(x+5)=x^3+4x^2-11x-30$　(答)

64. x^2+ax+b ハ $x+f$ デ割リ切レル。又 x^2+mx+n モ $x+f$ デ割リ切レル。

$$\begin{array}{r|l} & x+(a-f)\\ \hline x+f & x^2+ax+b\\ & x^2+fx\\ \hline & (a-f)x+b\\ & (a-f)x+f(a-f)\\ \hline & b-af+f^2=0\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} & x+(m-f)\\ \hline x+f & x^2+mx+n\\ & x^2+fx\\ \hline & (m-f)x+n\\ & (m-f)x+f(m-f)\\ \hline & n-mf+f^2=0\end{array}$$

$\therefore$ L.C.M. $=(x+f)(x+a-f)(x+m-f)$　(答)

65. $x^2+lx+mn$ ト $x^2+mx+ln$ トノ G.C.M. ガ $x+k$ デ $k\neq0$ ナルニヨリ

剩餘定理ニヨリ　$k^2-lk+mn=0\cdots\cdots(1)$　　$k^2-mk+ln=0\cdots\cdots(2)$

$(2)-(1)$　$(l-m)(k+n)=0$

與ヘラレタ二式ノ G.C.M. ハ一次デアルカラ $l\neq m$

$\therefore\ k+n=0$　　$\therefore\ k=-n$

$\therefore\ n^2+ln+mn=0,\ k\neq0$ ヨリ $n\neq0$　　$\therefore\ n+l+m=0$

故ニ　$x^2+lx+mn=x^2-(m+n)x+mn=(x-m)(x-n)$

又 $x+k=x-n$ デアルカラ

$$\text{L.C.M.}=\frac{x^2+lx+mn}{x+k}\times(x^2+mx+ln)=\frac{(x-m)(x-n)}{x-n}\times(x^2+mx+ln)$$

$$=(x-m)(x^2+mx+ln)=x^3+(ln-m^2)x-lmn$$

$[-m=l+n$ ヲ代入$]=x^3+(ln+lm+mn)x-lmn$

66. $A=a'G=2x^2+ax+3,\quad B=b'G=3x^2+4x+b\quad G=x+c,$

$L=a'b'G=6x^3+17x^2+14x+3$　トスレバ

$2c^2-ac+3=0\cdots\cdots(1)$

$2x^2+ax+3$ ハ $x+c$ デ割切レソノ商 a' ハ $2x+a-2c$

$\therefore\ 6x^3+17x^2+14x+3=(2x+a-2c)(3x^2+4x+b)$

$=6x^3+(8+3a-6c)x^2+2(2a+b-4c)x+b(a-2c)$

$\therefore\ 8+3a-6c=17,\quad 2a+b-4c=7,\quad ab-2bc=3$

$\therefore\ b=1,\quad a=2c+3$　之ヲ (1) ニ代入スレバ　$c=1$

$\therefore\ a=5$　　(答)　$a=5,\ b=1,\ c=1$

67. 原式ニ $x=k$ ヲ代入シテ

$k^3+ak^2+bk+c=0\cdots\cdots(1)$　　$k^2+bk+c=0\cdots\cdots(2)$

$(1)-(2)$　$k^3+(a-1)k^2=0$　　$\therefore\ k^2(k+a-1)=0$

$k=0$ トスレバ $c=0$ トナリ假設ニ反スルカラ $k\neq0$

$\therefore\ k+a-1=0\cdots\cdots(3)$　　$a-1\neq0$

(3) ノ k ヲ (2) ニ代入シテ $(a-1)^2-b(a-1)+c=0$

68. $A=x^3+ax^2+bx+1$, $B=x^3+bx^2+ax+1$ ト置ケバ

A, B ノ公約數ハ $A-B=(a-b)x^2-(a-b)x=(a-b)x(x-1)$ ノ約數デアル。$a=b$ ナルトキハ A ト B トハ同一ノ式トナルカラ, $a\neq b$ トシテ, 又 x ハ公約數デナイ。故ニ $x-1$ ガ公約數デアル。

故ニ $1+a+b+1=0$ $\therefore$ $a+b+2=0$ (答)

69. 二次式ト三次式トノ L.C.M. ガ四次式ナル故 G.C.M. ハ一次式デアル。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\
x^2-2x+p & x^3-x^2+2px-2 \\
 & x^3-2x^2+px \\ \hline
 & x^2+px-2 \\
 & x^2-2x+p \\ \hline
 & (p+2)x-(p+2)
\end{array}
$$

G.C.M. ハ一次式ナルニヨリ $p+2\neq 0$ $\therefore$ G.C.M. $=x-1$

$x=1$ ヲ第一式ニ代入スレバ $1-2+p=0$ $\therefore$ $p=1$

$\therefore$ L.C.M. $=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\times(x^3-x^2+2x-2)=x^4-2x^3+3x^2-4x+2$ (答)

頁 7.

[6] 分數式

70. $\left(\dfrac{a^3}{b}-\dfrac{b^3}{a}\right)\left(\dfrac{3a+b}{a+b}-\dfrac{3a-b}{a-b}\right)$

$$=\frac{a^4-b^4}{ab}\times\frac{(3a+b)(a-b)-(3a-b)(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a^4-b^4}{ab}\times\frac{-4ab}{a^2-b^2}=-4(a^2+b^2)$$

71. 原式ヲ通分スレバ

$$\frac{-\{a^2(b-c)(x+b)(x+c)+b^2(c-a)(x+c)(x+a)+c^2(a-b)(x+a)(x+b)\}}{(b-c)(c-a)(a-b)(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$=\frac{-\{-(b-c)(c-a)(a-b)x^2\}}{(b-c)(c-a)(a-b)(x+a)(x+b)(x+c)}=\frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

72. 原式

$$=\frac{-\{a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+c(a-b)(x-a)(x-b)\}}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

73. 原式 $=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$

74. 原式 $=\dfrac{yz}{(y-x)(z-x)}+\dfrac{zx}{(z-y)(x-y)}+\dfrac{xy}{(x-z)(y-z)}$

$$=\frac{1}{(x-y)(y-z)(z-x)}\times\{yz(z-y)+zx(x-z)+xy(y-x)\}=1$$

75. 原式 $=\dfrac{(1+a)(b-c)-(1+b)(a-c)+(1+c)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$ [分子$=0$]

[7] 無理式

76. $7\sqrt[3]{250}-8\sqrt[3]{16}-6\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}$

$$=7\times5\sqrt[3]{2}-8\times2\sqrt[3]{2}-6\times3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=0$$

77. 分母 $=2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

原式 $=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\dfrac{(3+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (答)

78. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$,

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-1)}{1}$$

$$=2+2\sqrt{3}-1-\sqrt{6}=1+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$$

$\therefore$ 原式 $=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})+(1+2\sqrt{3}-\sqrt{6})=1$ (答)

頁 8.

79. $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})+\dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$

$=2\sqrt{3}+3+2-2\sqrt{2}+1=6+\sqrt{12}-\sqrt{8}=6+3.464-2.828=6.636$

80. $\dfrac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{27}-2\sqrt{2}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}}$

$=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=\dfrac{(3-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1.732}{3}=0.577$

81. $\dfrac{1}{6}(11-\sqrt{101-36\sqrt{5}})=\dfrac{1}{6}\{11-(\sqrt{81}-\sqrt{20})\}$

$=\dfrac{1}{6}\{11-9+2\sqrt{5}\}=\dfrac{1}{6}(2+2\sqrt{5})=\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}$

82. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3}=\sqrt{5}+\sqrt{7}$

83. $2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

原式$=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0$

84. 原式$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}\times\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{1}{2}\{\sqrt{15}+\sqrt{3}-3-\sqrt{5}\}=0.184\cdots$ (答) 0.184

85. $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

原式$=\dfrac{\sqrt{45}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}(\sqrt{45}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\dfrac{1}{3}(17-4\sqrt{10})$

$=\dfrac{1}{3}(17-\sqrt{160})$

$=\dfrac{1}{3}(17-12.6491\cdots)=\dfrac{1}{3}\times4.3508\cdots=1.4502\cdots$ (答) 1.450

86. 原式$=\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}\times\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{3b^{\frac{1}{2}}}\times\dfrac{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2}$

$=\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{3b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}$ (答)

87. x ノ指數ハ $\dfrac{a}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{b}{(b-c)(a-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(b-c)}=0$

故ニ $x^0=1$ (答)

88. 原式$=\dfrac{2}{1-x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{4}{1+x}=\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{4}{1+x}=\dfrac{8x}{1-x^2}$ (答)

89. $\dfrac{(x^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})(x^{\frac{3}{2}}-y^{-\frac{3}{2}})}{x^2+xy^{-1}+y^{-2}}$

$=\dfrac{(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(x-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1})(x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})(x+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1})}{(x+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1})(x-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1})}$

$=(x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})=x-y^{-1}$ (答)

90. $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

$=\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}+(a-a^{-1})(b-b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}$

サテ $(a-a^{-1})(b-b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})$

$=(ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})$

$=a^2b^2-a^2-b^2+1-1+b^{-2}+a^{-2}-a^{-2}b^{-2}$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=1$ (答)

頁 9. [8] 代數式ノ値

91. $\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{(a+b)-2a}{(a+b)-2b}=\dfrac{b-a}{a-b}=-1$ $\therefore\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^3=-1$

$\dfrac{x-2a+b}{x+a-2b}=\dfrac{(a+b)-4a+2b}{(a+b)+2a-4b}=\dfrac{3(b-a)}{3(a-b)}=-1$

$\therefore\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^3-\dfrac{x-2a+b}{x+a-2b}=0$ (答)

92. $\sqrt{1+x}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$\sqrt{1-x}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\frac{3+x}{2-\sqrt{1+x}}+\frac{3-x}{2+\sqrt{1-x}}=\frac{3+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{3-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$=\frac{6+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\frac{6-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(6+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})+(6-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{6}=\frac{42}{6}=7 \quad (答)$$

93. $2x=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$, 兩邊ヲ二乘シテ $4x^2=4\frac{1}{2}$ $\therefore$ $4x^2-4=\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x+\sqrt{4x^2-4}}{2x-\sqrt{4x^2-4}}=\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$$

(答)

94. $\sqrt{1+x}=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{1-x}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$

$$原式=\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \quad (答)$$

95. $$\frac{\frac{ab^2-a}{ab+1}+a}{\frac{a^2b+b}{ab+1}-b}=\frac{ab^2-a+a(ab+1)}{a^2b+b-b(ab+1)}=\frac{ab(a+b)}{ab(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

$$原式=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2}{(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\frac{2.449\cdots+1.414\cdots}{2}=1.93強$$

(答) 1.93強

96. $x^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)$ 但シ $\frac{a}{b}>0$ トスル。

$\therefore$ $x^2+1=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ $\therefore$ $2a\sqrt{1+x^2}=a\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

$x+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\therefore$ 原式$=a\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{\frac{b}{a}}=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a+b$ (答)

97. $a+x=\frac{a(b+1)^2}{b^2+1}$, a, b ヲ正數トシテ $\sqrt{a+x}=\frac{(b+1)\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}$

$a-x=\frac{a(b-1)^2}{b^2+1}$ $\therefore$ $b\geqq 1$ ノトキハ $\sqrt{a-x}=\frac{(b-1)\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}$

$b<1$ ノトキハ $\sqrt{a-x}=\frac{-(b-1)\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}$

$$故=\ b\geqq 1 ノトキ\quad 原式=\frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}\{(b+1)+(b-1)\}}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}\{(b+1)-(b-1)\}}=b$$

$$b<1 ノトキハ\quad 原式=\frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}\{(b+1)-(b-1)\}}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+1}}\{(b+1)+(b-1)\}}=\frac{1}{b}$$

(答) $b\geqq 1$ ノトキハ b, $b<1$ ノトキハ $\frac{1}{b}$

98. $x^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}$ $x^2-1=\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}=\frac{(a-b)^2}{4ab}$

$a>b$ ナルトキハ $\sqrt{x^2-1}=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ……(A)

$a<b$ ナルトキハ $\sqrt{x^2-1}=\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$ ……(B)

(A) ノ場合

$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}+\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}=\frac{a}{\sqrt{ab}}$

$$\therefore\quad \frac{2a\sqrt{x^2-1}}{(a-b)\{x+\sqrt{x^2-1}\}}=\frac{2a\times\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}}{(a-b)\times\dfrac{a}{\sqrt{ab}}}=1\quad(答)$$

(B) ノ場合

$$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}+\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}=\frac{b}{\sqrt{ab}}$$

$$\therefore\quad \frac{2a\sqrt{x^2-1}}{(a-b)\{x+\sqrt{x^2-1}\}}=\frac{2a\times\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{(a-b)\times\dfrac{b}{\sqrt{ab}}}=-\frac{a}{b}\quad(答)$$

99. $x^3-2x^2+3x+5=(x+2)(x^2-4x+1)+10x+3$……(1)

$x^2-4x+1=0\qquad\therefore\quad x=2\pm\sqrt{3}$……(2)

(2) ヲ (1) ニ代入スレバ x^3-2x^2+3x+5 ノ値ハ

$10\times(2\pm\sqrt{3})+3=23\pm10\sqrt{3}$ (答)

100. $x^2=4x+1$ ヨリ $x=2+\sqrt{5}$ ($x>0$ ヲトル)……(1)

$x^4-5x^3+4x^2-6x+17=(x^2-x+1)(x^2-4x-1)-3x+18$……(2)

(2) ニ (1) ヲ代入スレバ $-3(2+\sqrt{5})+18=3(4-\sqrt{5})$ (答)

頁 10.

101. $\sqrt{\dfrac{u(3u+7)}{1-5u-3u^2}}=\sqrt{\dfrac{(3u^2+6u)+u}{u+(1-6u-3u^2)}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{u}}$

$u=\dfrac{-3\pm\sqrt{12}}{3}$ ナル故 $\dfrac{1}{u}=\dfrac{3}{-3\pm\sqrt{12}}=3\pm2\sqrt{3}$

$\therefore\sqrt{1+\dfrac{1}{u}}=\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pm1=2.73\cdots$ 又ハ $0.73\cdots$

(答) 2.73, 0.73

102. $x^2+y^2+z^2-xyz=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)^2$

$-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)$

$=\dfrac{a^2}{b^2}+2+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+2+\dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{a^2}+2+\dfrac{a^2}{c^2}$

$-\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{a^2}{b^2}+1\right)=4$ (答)

103. $x=\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-(3+2\sqrt{2})$,

$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$

原式$=(x+y)^3-2xy-3(x+y)+2=(-4\sqrt{2})^3+2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$

$-3(-4\sqrt{2})+2=4-116\sqrt{2}$ (答)

104. $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$……(1)

$x+y+z=a$……(2) $\qquad x^2+y^2+z^2=b^2$……(3)

$xyz=c^3$……(4)

$(2)^2-(3)$ $2(xy+xz+yz)=a^2-b^2\qquad\therefore\quad xy+xz+yz=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ …(5)

(1) ニ (2), (3), (4), (5) ヲ代入スレバ

$x^3+y^3+z^3-3c^3=a\left(b^2-\dfrac{a^2-b^2}{2}\right)$

$\therefore\quad x^3+y^3+z^3=\dfrac{6c^3+3ab^2-a^3}{2}$ (答)

105. $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\beta\gamma}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)^2-\dfrac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$

$\alpha+\beta+\gamma=a$……(1) $\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=b$……(2)

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=c$……(3)

$(1)^2-(2)$ $2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=a^2-b,\qquad\therefore\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\dfrac{a^2-b}{2}$……(4)

(3) ヨリ $\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=c$……(5)

(5) ヲ (4) ニ代入スレバ $\dfrac{a^2-b}{2\alpha\beta\gamma}=c\qquad\therefore\quad \alpha\beta\gamma=\dfrac{a^2-b}{2c}$……(6)

(3), (1), (6) ヲ始メノ式ニ代入スレバ

$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}=c^2-\dfrac{2a}{\dfrac{a^2-b}{2c}}=c^2-\dfrac{4ac}{a^2-b}$ (答)

106. $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$$=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ca}+\frac{c(a+b)}{ab}=\frac{1}{abc}\{-a^3-b^3-c^3\}$$

$a^3+b^3+c^3=3abc$ $(a+b+c=0$ ナル故)

$\therefore$ 原式$=\frac{-3abc}{abc}=-3$ (答)

107. $a+b+c=0,\quad \therefore\ a=-(b+c),\ b=-(c+a),\ c=-(a+b)$

原式$=\frac{-a^2b(b+c)-b^2c(c+a)-c^2a(a+b)}{-a^2c(b+c)-b^2a(c+a)-c^2b(a+b)}$

$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)}{a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2+abc(a+b+c)}=1 \quad (答)$$

108. $6x^2+4y^2=11xy \quad \therefore\ (3x-4y)(2x-y)=0 \quad \therefore\ y=\frac{3}{4}x$ 又ハ $y=2x$

$y=\frac{3}{4}x$ トスレバ $\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=\frac{x^2+\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{16}x^2}{x^2-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{16}x^2}=-\frac{61}{11}$

$y=2x$ トスレバ $\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=\frac{x^2+6x^2+4x^2}{x^2-6x^2+4x^2}=-11$

(答) $-\frac{61}{11},\ -11$

109. $\frac{x^3+4y^3+z^3}{y(x^2+z^2)}=\frac{2x^3+8y^3+2z^3}{2y(x^2+z^2)}=\frac{2(x^3+z^3)+(x+z)^3}{(x+z)(x^2+z^2)}$

$$=\frac{2(x^2-xz+z^2)+(x^2+2xz+z^2)}{x^2+z^2}=3 \quad (答)$$

110. 假設ヨリ $\frac{x}{85}=\frac{y}{153}=\frac{z}{272}=k$ ト置ケバ

$x=85k,\ y=153k,\ z=272k$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{\sqrt{272k}-\sqrt{153k}}{\sqrt{153k}+\sqrt{85k}}}=\sqrt{\frac{4\sqrt{17}-3\sqrt{17}}{3\sqrt{17}+\sqrt{17}\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4} \quad (答)$$

頁 11.

111. $x+y+z=\frac{14}{3}x=\frac{7}{2}y=k$ トスレバ

$x=\frac{3k}{14},\quad y=\frac{4k}{14} \quad \therefore\ x+y+z=\frac{7k}{14}+z=k \quad \therefore\ z=\frac{1}{2}k$

$\therefore\ \frac{x+y+z}{z}=\frac{k}{z}=\frac{k}{\frac{1}{2}k}=2$ (答)

112. $\frac{(1-y)^2}{x}+\frac{(1-x)^2}{y}=\frac{(x+y)-2(x^2+y^2)+(x^3+y^3)}{xy}$ ……(1)

$x+y=a$ ……(2) $\quad x^2-xy+y^2=a$ ……(3)

$(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3xy=a^2-a \quad \therefore\ xy=\frac{a^2-a}{3}$ ……(4)

(2), (3), (4) ヲ (1) ニ代入スレバソノ値ハ 1 トナル。(答) 1

[9] 一元整方程式

113. $a(x-a^2)=b(x-b^2) \quad \therefore\ (a-b)x=a^3-b^3$

$a\neq b$ トスレバ $x=a^2+ab+b^2$

$a=b$ トスレバ不定。

(答) $a\neq b$ トスレバ $x=a^2+ab+b^2$, $a=b$ トスレバ不定

114. $(a-b)(x-c)+(a+b)(x+c)=2(bx+ac)$

$2(a-b)x=2c(a-b)$

$\therefore\ a\neq b$ トスレバ $x=c$

$a=b$ トスレバ 不定

(答) $a\neq b$ トスレバ $x=c$, $a\neq b$ トスレバ不定

115. $\frac{x-(b+c)}{a}+\frac{x-(c+a)}{b}+\frac{x-(a+b)}{c}=3$

$\therefore\ \frac{x-(a+b+c)}{a}+\frac{x-(a+b+c)}{b}+\frac{x-(a+b+c)}{c}=0$

$\therefore\ \{x-(a+b+c)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0$ ナルトキハ $x=a+b+c$,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ ナルトキハ不定 (答)

116. $\sqrt{3}x^2+2\sqrt{7}x+4=0$

$\therefore\ x=\frac{-\sqrt{7}\pm\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{7}\pm(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{3}\{-\sqrt{21}\pm(2\sqrt{3}-3)\}=\frac{1}{3}(\mp3-\sqrt{21}\pm\sqrt{12})=-1.372\cdots$ 又ハ $-1.682\cdots$ (答) $-1.372,\ -1.682$

117. $(1-a^2)(x+a)=2a(1-x^2)$

$\therefore\ 2ax^2+(1-a^2)x-a(1+a^2)=0$

(i) $a\neq0$ トスレバ

$x=\frac{-(1-a^2)\pm\sqrt{(1-a^2)^2+8a^2(1+a^2)}}{4a}=\frac{a^2-1\pm(3a^2+1)}{4a}$

$\therefore\ x=a$ 又ハ $x=-\frac{a^2+1}{2a}$

(ii) $a=0$ ノトキハ $x=0$

(答) $a\neq0$ ノトキ $a,\ -\frac{a^2+1}{2a}$; $a=0$ ノトキ $x=0$

118. $(a-b)^2x^2-4abx=(a+b)^2$ $[a\neq b]$

$\therefore\ x=\frac{2ab\pm\sqrt{4a^2b^2+(a-b)^2(a+b)^2}}{(a-b)^2}=\frac{2ab\pm(a^2+b^2)}{(a-b)^2}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$

又ハ -1 (答) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2,\ -1$

119. $x^3-6x^2+5x+12=0$ $\therefore\ (x-3)(x^2-3x-4)=0$

$\therefore\ x=3$ 又ハ $x=4$ 又ハ $x=-1$ (答)

120. $x^4+3x^3-4x^2-3x+3=0$

$\therefore\ (x-1)(x^3+4x^2-3)=0$ $\therefore\ (x-1)(x+1)(x^2+3x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 又ハ -1 又ハ $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ (答) $1,\ -1,\ \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

121. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

左邊ヲ因數ニ分解シテ $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=0$

(答) $1,\ 2,\ -2,\ -3$

122. $a^2x^4-(a^4+1)x^2+a^2=0$

$x^2=X$ ト置ケバ

$a^2X^2-(a^4+1)X+a^2=0$ $\therefore\ (a^2X-1)(X-a^2)=0$

$\therefore\ X=\frac{1}{a^2}$ 又ハ $X=a^2$, 但シ $a\neq0$ トスル。

$x^2=\frac{1}{a^2}$ $\therefore\ x=\pm\frac{1}{a}$ 又ハ $x^2=a^2$ $\therefore\ x=\pm a$ (答)

123. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

$\therefore\ (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$

$\therefore\ (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)-96=0$

$\therefore\ (x^2+5x+16)(x^2+5x-6)=0$

$\therefore\ x^2+5x+16=0$ 又ハ $x^2+5x-6=0$

$\therefore\ x=\frac{-5\pm\sqrt{-39}}{2}=\frac{-5\pm i\sqrt{39}}{2}$ 又ハ $x=1$ 又ハ $x=-6$

(答) $\frac{-5\pm i\sqrt{39}}{2},\ 1,\ -6$

124. $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$

$x\neq0$ ナル故兩邊ヲ x^2 デ割レバ

$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0$

今 $x-\frac{1}{x}=y$ ト置ケバ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=y^2+2$

$\therefore\ 6(y^2+2)-25y+12=0$ $\therefore\ (2y-3)(3y-8)=0$

$\therefore\ y=\frac{3}{2}$ 又ハ $y=\frac{8}{3}$

(i) $y=\frac{3}{2}$ ナルトキハ $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ $\therefore\ 2x^2-3x-2=0$

$\therefore\ x=2$ 又ハ $-\frac{1}{2}$

(ii) $y=\frac{8}{3}$ ナルトキハ $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$ $\therefore\ 3x^2-8x-3=0$

$\therefore\ x=3$ 又ハ $-\frac{1}{3}$

(答) $2,\ -\frac{1}{2},\ 3,\ -\frac{1}{3}$

頁 12.

125. $1000x^6-6119x^3+9261=0$

$x^3=X$ ト置ケバ $1000X^2-6119X+9261=0$

$\therefore\ X=\frac{343}{125}$ 又ハ $\frac{27}{8}$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & x^3=\frac{343}{125}\ \text{ヨリ}\ x=\frac{7}{5},\ \frac{7}{5}\omega,\ \frac{7}{5}\omega^2 \\ \text{(ii)} & x^3=\frac{27}{8}\ \text{ヨリ}\ x=\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\omega,\ \frac{3}{2}\omega^2\end{array}\right\}\ \text{(答)}$$

[10] 一元分數方程式

126. $\frac{1-3x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}+3=0$

兩邊ニ x^2-1 ヲ掛ケテ分母ヲ拂ヘバ

$1-3x+x+1+3(x^2-1)=0 \quad \therefore\ 3x^2-2x-1=0$

$\therefore\ (x-1)(3x+1)=0 \quad \therefore\ x=1$ 又ハ $x=-\frac{1}{3}$

$x=1$ ハ原方程式ノ分母ヲ 0 ニスルガ $x=-\frac{1}{3}$ ハ分母ヲ 0 ニシナイカラ求メル根デアル。 (答) $-\frac{1}{3}$

127. $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{9-3x}=\frac{2}{9}-\frac{5}{18+3x-3x^2}$

$\therefore\ \frac{1}{x+2}+\frac{1}{3x-9}=\frac{2}{9}+\frac{5}{(3x-9)(x+2)}$

分母ヲ拂ヘバ $x^2-7x+12=0 \quad \therefore\ x=3$ 又ハ 4

$x=3$ ハ分母ヲ 0 ニシ, $x=4$ ハ分母ヲ 0 ニシナイ。 (答) 4

128. $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{2}$

分母ヲ拂ツテ整頓スレバ $x^2-13x+36=0 \quad \therefore\ x=4$ 又ハ 9

何レモ原方程式ノ分母ヲ 0 ニシナイカラ求メル根デアル。(答) 4, 9

129. $\frac{p+qx}{q+px}=\frac{r+sx}{s+rx}$ 分母ヲ拂ヘバ $(ps-qr)x^2=ps-qr$,

$ps\neq qr$ ノトキ $x^2=1 \quad \therefore\ x=\pm1$, $ps-qr=0$ ノトキ不定。

$(q+p)(s+r)\neq0$ ノトキハ $x=1$

$(q-p)(s-r)\neq0$ ノトキハ $x=-1$

$(q^2-p^2)(s^2-r^2)\neq0$ ノトキ二根トモ原方程式ノ根デアル。 (答) ±1

130. $\frac{3x+1-a}{x-a}=2-3a$

分母ヲ拂ヘバ $(3a+1)x=3a^2-a-1$

$a\neq-\frac{1}{3}$ ノトキ $x=\frac{3a^2-a-1}{3a+1}$ ……(1)

(驗) $x-a=\frac{3a^2-a-1}{3a+1}-a=\frac{-(2a+1)}{3a+1}$

$a=-\frac{1}{2}$ ナルトキ 0 トナル故 $a\neq-\frac{1}{2}$ ノトキ (1) ハ根デアル。

(答) $a\neq-\frac{1}{3}$ 且 $a\neq-\frac{1}{2}$ ノトキ $\frac{3a^2-a-1}{3a+1}$

131. $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{x+4}{x+3}-\frac{x+5}{x+4}$

$\therefore\ 1+\frac{1}{x+1}-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)=1+\frac{1}{x+3}-\left(1+\frac{1}{x+4}\right)$

$\therefore\ \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$

$\therefore\ \frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+3)(x+4)}$

$\therefore\ (x+1)(x+2)=(x+3)(x+4) \quad \therefore\ x=-\frac{5}{2}$

コノ値ハ原方程式ノ分母ヲ 0 ニシナイカラ求メル根デアル。(答) $-\frac{5}{2}$

132. $\frac{4x-5}{2x-3}-\frac{15x-23}{3x-4}=\frac{12x-17}{6x-10}-\frac{20x-29}{4x-5}$

$\therefore\ \left(2+\frac{1}{2x-3}\right)-\left(5-\frac{3}{3x-4}\right)=\left(2+\frac{3}{6x-10}\right)-\left(5-\frac{4}{4x-5}\right)$

$\therefore\ \frac{1}{2x-3}+\frac{3}{3x-4}=\frac{3}{6x-10}+\frac{4}{4x-5}$

$\therefore\ \dfrac{-1}{(2x-3)(6x-10)}=\dfrac{-1}{(4x-5)(3x-4)}$

$\therefore\ x=1\dfrac{3}{7}$, 之ハ原方程式ノ分母ヲ 0 ニシナイカラ求メル根デアル。

(答) $1\dfrac{3}{7}$

133. $\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{10}{3}$, $\dfrac{x^2-1}{x}=X$ ト置ケバ

$X+\dfrac{1}{X}=\dfrac{10}{3}$ $\therefore\ 3X^2-10X+3=0$ $\therefore\ (3X-1)(X-3)=0$

$\therefore\ X=\dfrac{1}{3}$ 又ハ 3

$X=\dfrac{1}{3}$ ナルトキハ $\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{1}{3}$ $\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{6}$

$X=3$ ナルトキハ $\dfrac{x^2-1}{x}=3$ $\therefore\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

コレ等ハ何レモ原方程式ノ根デアル。 (答) $\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{6}$, $\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

134. $\dfrac{x^3}{8}-\dfrac{27}{x^3}=\dfrac{15}{2}\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{x^2}\right)-\dfrac{71}{2}$

$y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}$ ト置ケバ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{x^2}=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)^2+3=y^2+3$

$\dfrac{x^3}{8}-\dfrac{27}{x^3}=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{x^2}\right)=y\left(y^2+\dfrac{9}{2}\right)$

之ヲ原方程式ニ代入スレバ $y\left(y^2+\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{15}{2}(y^2+3)-\dfrac{71}{2}$

$\therefore\ 2y^3-15y^2+9y+26=0$

$\therefore\ (y+1)(2y^2-17y+26)=0$ $\therefore\ (y+1)(y-2)(2y-13)=0$

$\therefore\ y=-1$ 又ハ 2 又ハ $\dfrac{13}{2}$

(i) $y=-1$ ナルトキ $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}=-1$

$\therefore\ x^2+2x-6=0$ $\therefore\ x=-1\pm\sqrt{7}$

分母ヲ 0 ニシナイカラ求メル根デアル。

(ii) $y=2$ ナルトキ $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}=2$

$\therefore\ x^2-4x-6=0$ $\therefore\ x=2\pm\sqrt{10}$

分母ヲ 0 ニシナイカラ求メル根デアル。

(iii) $y=\dfrac{13}{2}$ ノトキ $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{13}{2}$

$\therefore\ x^2-13x-6=0$ $\therefore\ x=\dfrac{13\pm\sqrt{193}}{2}$

分母ヲ 0 ニシナイカラ求メル根デアル。

(答) $-1\pm\sqrt{7}$, $2\pm\sqrt{10}$, $\dfrac{13\pm\sqrt{193}}{2}$

135. $\dfrac{1}{x+a+b}+\dfrac{1}{x-a+b}+\dfrac{1}{x+a-b}+\dfrac{1}{x-a-b}=0$

$\dfrac{2x}{x^2-(a+b)^2}+\dfrac{2x}{x^2-(a-b)^2}=0$ (第一, 第四ヲ第二, 第三ヲ組合セテ)

$\therefore\ 2x\left\{\dfrac{1}{x^2-(a+b)^2}+\dfrac{1}{x^2-(a-b)^2}\right\}=0$

$\therefore\ x=0$ 又ハ $\dfrac{1}{x^2-(a+b)^2}+\dfrac{1}{x^2-(a-b)^2}=0$

第二方程式ヨリ $2x^2-2(a^2+b^2)=0$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

$x=0$ ナルトキ, $a+b\neq0$, $a-b\neq0$, 從ツテ $a^2-b^2\neq0$ ナラバ原方程式ノ分母ハ何レモ 0 デナイ。

$x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$ ナルトキ $ab\neq0$ ナラバ $x^2-(a+b)^2\neq0$, $x^2-(a-b)^2\neq0$ ナル故原方程式ノ分母ハ何レモ 0 デナイ。

(答) 0 (但シ $a^2-b^2\neq0$), $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ (但シ $ab\neq0$)

頁 13.

136. $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}+3=0$

$\left(\dfrac{a}{x-a}+1\right)+\left(\dfrac{b}{x-b}+1\right)+\left(\dfrac{c}{x-c}+1\right)=0$

$\therefore\ x\left(\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}\right)=0$

$\therefore\ x=0$ 又ハ $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$

(i) $abc\neq 0$ ナルトキ $x=0$ ハ原方程式ノ分母ヲ 0 ニシナイ。故ニ求メル根デアル。

(ii) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$

分母ヲ拂ヘバ $(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$

$$\therefore\ x=\frac{(a+b+c)\pm\sqrt{(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)}}{3}$$

$$=\frac{(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}}{3}$$

a, b, c ヲ相異ナル三數トスレバ，コノ値ハ分母ヲ 0 ニシナイカラ求メル根デアル。

(答) $0\ (abc\neq 0),\ \dfrac{(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}}{3}$

[11] 聯立方程式

137. $\begin{cases} x-y=a-b \cdots\cdots(1) \\ b(x-c)=a(y-c) \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) ヨリ $bx-ay=c(b-a)\cdots\cdots(3)$

$(3)-(1)\times a \qquad (b-a)x=(b-a)(c+a)$

$\therefore\ b\neq a$ ノトキ $x=c+a \qquad \therefore\ y=b+c$

(答) $x=a+c,\ y=b+c$ (但シ $b\neq a$)

138. $\begin{cases} 6x+(a-1)y-5a+2=0 \cdots\cdots(1) \\ (a+6)x-2y+7a+22=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times 2+(2)\times(a-1) \qquad (a+2)(a+3)x=-(a+2)(7a-9)$

$(a+2)(a+3)\neq 0$ ノトキ $x=-\dfrac{7a-9}{a+3}$ 之ヲ (1) ニ代入シテ

$(a-1)y=\dfrac{6(7a-9)}{a+3}+5a-2$ 故ニ $a-1\neq 0$ ノトキ $y=\dfrac{5(a+12)}{a+3}$

(答) $x=-\dfrac{7a-9}{a+3}$ [但シ $(a+2)(a+3)\neq 0$], $y=\dfrac{5(a+12)}{a+3}$ [但シ $a-1\neq 0$]

139. $\begin{cases} \dfrac{7}{8}x+\dfrac{2}{5}y=\dfrac{1}{4} \cdots\cdots(1) \\ 0.0\dot{5}x-0.\dot{1}\dot{2}y=0.0\dot{5}\dot{2} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ハ $35x+16y=10\cdots\cdots(3)$

(2) ハ $\dfrac{1}{18}x-\dfrac{4}{33}y=\dfrac{26}{495}$ 即チ $55x-120y=52\cdots\cdots(4)$

(3), (4) ヨリ $x=\dfrac{2}{5},\ y=-\dfrac{1}{4}$ (答) $x=\dfrac{2}{5},\ y=-\dfrac{1}{4}$

140. $(k-1)x+2y=2k-1\cdots\cdots(1)$

$2x+4y=3k\cdots\cdots(2)$

$(3k-2)x-2y=k-2\cdots\cdots(3)$

(1), (3) ヨリ $x=\dfrac{3k-3}{4k-3}$ [$4k-3\neq 0$ トスル]

$$y=\frac{5k^2-4k}{2(4k-3)}$$

コノ x, y ノ値ヲ (2) ニ代入スレバ

$$\frac{2(3k-3)}{4k-3}+\frac{2(5k^2-4k)}{4k-3}=3k$$

$\therefore\ 2k^2-7k+6=0 \qquad \therefore\ k=2$ 又ハ $\dfrac{3}{2}$

$\left.\begin{array}{l} k=2 \text{ トスレバ } x=\dfrac{3}{5},\ y=\dfrac{6}{5} \\ k=\dfrac{3}{2} \text{ トスレバ } x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{7}{8} \end{array}\right\}$ (答)

141. $\begin{cases} 4x^2+5y=6+20xy-25y^2+2x \cdots\cdots(1) \\ 7x-11y=17 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $(2x-5y)^2-(2x-5y)-6=0$

$\therefore\ (2x-5y+2)(2x-5y-3)=0$

故ニ次ノ二組ノ聯立方程式ヲ得ル。

(A) $\begin{cases} 2x-5y+2=0 \\ 7x-11y-17=0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2x-5y-3=0 \\ 7x-11y-17=0 \end{cases}$

(A) ヨリ $x=\frac{107}{13}$, $y=\frac{48}{13}$ (B) ヨリ $x=4$, $y=1$

(答) $x=\frac{107}{13}$, $y=\frac{48}{13}$; $x=4$, $y=1$

142. $\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3+y^3=9 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) カラ $x^3+y^3=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}=9$

之ニ (1) ヲ代入スレバ $xy=2 \cdots\cdots\cdots(3)$

(1), (3) ヨリ $x=2$, $y=1$; $x=1$, $y=2$ ヲ得ル。

(答) $x=2$, $y=1$; $x=1$, $y=2$

143. $\begin{cases} x^2+2xy-4x+y=0 \cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2-2xy+6x-5y=0 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) カラ $(2x+1)y=4x-x^2$ $2x+1 \neq 0$ トスレバ

$y=\frac{4x-x^2}{2x+1} \cdots\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ

$$\left(\frac{4x-x^2}{2x+1}\right)^2-\frac{2x(4x-x^2)}{(2x+1)}+6x-\frac{5(4x-x^2)}{2x+1}=0$$

分母ヲ拂ツテ

$$(4x-x^2)^2-2x(2x+1)(4x-x^2)+6x(2x+1)^2-5(2x+1)(4x-x^2)=0$$

$$\therefore\ (4x-x^2)^2+(2x+1)(x^2-4x)(2x+5)+6x(2x+1)^2=0$$

之ヲ整頓スレバ $x(5x^3+12x^2-3x-14)=0$

$\therefore\ x(x-1)(5x+7)(x+2)=0$

之ヨリ $x=0,\ 1,\ -\frac{7}{5},\ -2$ ヲ得ル。

從ツテ $y=0,\ 1,\ \frac{21}{5},\ 4$

(答) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{7}{5} \\ y=\frac{21}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

144. $\begin{cases} (x^2+y)(y^2+x)=(x+y)^3 \cdots\cdots\cdots(1) \\ (x+2)(y+2)=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヲ展開シテ整頓スレバ $xy(xy+1)=3xy(x+y)$

$\therefore\ xy \neq 0$ トスレバ $xy+1=3(x+y) \cdots\cdots(3)$

(2) ヨリ $xy+2(x+y)+3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3), (4) ヨリ $x+y=-\frac{2}{5}$, $xy=-\frac{11}{5}$ ヲ得ル。

之カラ $\begin{cases} x=\frac{-1+2\sqrt{14}}{5} \\ y=\frac{-1-2\sqrt{14}}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{-1-2\sqrt{14}}{5} \\ y=\frac{-1+2\sqrt{14}}{5} \end{cases}$

$x=0$ ナルトキハ (2) ヨリ $y=-\frac{3}{2}$

$y=0$ ナルトキハ (2) ヨリ $x=-\frac{3}{2}$

(答) $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{-1+2\sqrt{14}}{5} \\ y=\frac{-1-2\sqrt{14}}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{-1-2\sqrt{14}}{5} \\ y=\frac{-1+2\sqrt{14}}{5} \end{cases}$

頁 14.

145. $\begin{cases} 2x^2+3xy-4y^2=10 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x^2+5xy+y^2=35 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times 7-(2)\times 2$ $6x^2+11xy-30y^2=0$

$(2x-3y)(3x+10y)=0$ $\therefore\ x=\frac{3}{2}y$ 又ハ $x=-\frac{10}{3}y$

$x=\frac{3}{2}y$ ヲ (2) ニ代入シテ整頓スレバ $y^2=2$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{2}$ $\therefore\ x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x=-\frac{10}{3}y$ ヲ (2) ニ代入シテ整頓スレバ

$y^2=\frac{315}{259}$ ∴ $y=\pm 3\sqrt{\frac{5}{37}}$ ∴ $x=\mp 10\sqrt{\frac{5}{37}}$

(答) $\begin{cases} x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 10\sqrt{\frac{5}{37}} \\ y=\mp 3\sqrt{\frac{5}{37}} \end{cases}$

146. $\begin{cases} x^2+y^2=xy+5 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3+y^3=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $x^2-xy+y^2=5 \cdots\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ

$x+y=2 \cdots\cdots\cdots(4)$

(3) ヨリ $(x+y)^2-3xy=5$, 之ニ (4) ヲ代入スレバ

$xy=-\frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots(5)$

(4) ヲ (5) ニ代入シテ $x(2-x)=-\frac{1}{3}$

∴ $3x^2-6x-1=0$

∴ $x=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}$ ∴ $y=\frac{3\mp 2\sqrt{3}}{3}$ 〔複號同順〕(答)

147. $\begin{cases} 2xy+x+y+3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (x^2-2x+1)(y^2-2y+1)=4 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) ヨリ $(x-1)^2(y-1)^2=4$

∴ $(x-1)(y-1)=\pm 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3) ト (1) トヲ組合セテ次ノ二組ノ聯立方程式ヲ解ケバヨイ。

(A) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=2 \cdots\cdots(4) \\ 2xy+x+y+3=0 \cdots(1) \end{cases}$ (B) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=-2 \cdots(4)' \\ 2xy+x+y+3=0 \cdots\cdots(1) \end{cases}$

(A) ニ於テ (4) ヨリ $xy-(x+y)-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(5)×2−(1) $x+y=-\frac{5}{3}$ ∴ $xy=-\frac{2}{3}$

∴ $x=\frac{1}{3}$, $y=-2$; $x=-2$, $y=\frac{1}{3}$

(B) ヨリ $x+y=1$, $xy=-2$

∴ $x=2$, $y=-1$; $x=-1$, $y=2$

(答) $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

148. $\begin{cases} ax-by-z+1=0 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y-az-b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ x+y-z+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(2)−(3) $(1-a)z=b+1$, $1-a\neq 0$ ナラバ $z=\frac{b+1}{1-a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1)−(3) $(a-1)x=(b+1)y$, $1-a\neq 0$ ナラバ $x=\frac{(b+1)}{a-1}y \cdots\cdots(5)$

(4), (5) ヲ (3) ニ代入スレバ

$y\frac{(b+1)}{a-1}+y-\frac{b+1}{1-a}+1=0$

∴ $(a+b)y+(a+b)=0$

$a+b\neq 0$ ナラバ $y=-1$

之ヲ (5) ニ代入シテ $x=\frac{b+1}{1-a}$

故ニ $1-a\neq 0$, $a+b\neq 0$ ナラバ $x=\frac{b+1}{1-a}$, $y=-1$, $z=\frac{b+1}{1-a}$ (答)

(吟味) $a\neq 1$ ニシテ $a+b=0$ ナラバ x, y ハ不定, $z=1$

$a=1$, $b\neq -1$ ナラバ 不能

$a=1$, $b=-1$ ナラバ 不定

149. $\begin{cases} ax+y+z=1 \cdots\cdots\cdots(1) \\ x+ay+z=1 \cdots\cdots\cdots(2) \\ x+y+az=1 \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)+(2)+(3) $(a+2)(x+y+z)=3$

∴ $x+y+z=\frac{3}{a+2} \cdots\cdots\cdots(4)$

(1)−(4) $(a-1)x=\dfrac{a-1}{a+2}$

$a-1\neq 0$ トシテ $x=\dfrac{1}{a+2}$ (但シ $a+2\neq 0$)

同様ニシテ $y=z=\dfrac{1}{a+2}$

$a+2=0$ ナラバ不能, $a-1=0$ ナラバ不定

(答) $x=y=z=\dfrac{1}{a+2}$ (但シ $a+2\neq 0, a-1\neq 0$ ノトキ)

150. $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-by+b^2z=b^3\cdots\cdots\cdots(2) \\ x-cy+c^2z=c^3\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)−(2) $(b-a)y-(b-a)(b+a)z=-(b^3-a^3)$

$a\neq b$ トスレバ $y-(a+b)z=-(a^2+ab+b^2)\cdots\cdots\cdots(4)$

(1)−(3) $(c-a)y-(c-a)(c+a)z=-(c^3-a^3)$

$a\neq c$ トスレバ $y-(c+a)z=-(c^2+ca+a^2)\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)−(5) $(c-b)z=ca-ab+c^2-b^2=a(c-b)+(c-b)(c+b)$

$c\neq b$ トスレバ $z=a+b+c\cdots\cdots\cdots(6)$

(6) ヲ (5) ニ代入スレバ $y=bc+ca+ab\cdots\cdots\cdots(7)$

(6), (7) ヲ (1) ニ代入スレバ $x=abc$

a, b, c ノ中相等シイモノガアレバ不定

(答) $x=abc, y=bc+ca+ab, z=a+b+c$ (但シ $a\neq b\neq c$ ノトキ)

151. $\begin{cases} x+2y-z=11\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-4y^2+z^2=37\cdots\cdots\cdots(2) \\ xz=24\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

$x-z=t$ ト置ケバ (1) ハ $t+2y=11\cdots\cdots\cdots(4)$

(2) ハ $(x-z)^2+2xz-4y^2=37$ $\therefore$ $t^2-4y^2=-11\cdots\cdots\cdots(5)$

(5) ヨリ $(t+2y)(t-2y)=-11$

(4) ヲ代入スレバ $t-2y=-1\cdots\cdots\cdots(6)$

(4), (6) ヨリ $t=5,\ y=3$

$\therefore$ $\begin{cases} x-z=5 \\ xz=24 \end{cases}$ ヨリ $\begin{cases} x=8 \\ z=3 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} x=-3 \\ z=-8 \end{cases}$

(答) $\begin{cases} x=8 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \\ z=-8 \end{cases}$

152. $\begin{cases} x=yz+2y+z\cdots\cdots\cdots(1) \\ y=zx+2x+z\cdots\cdots\cdots(2) \\ z=xy+x+y\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)−(2) $(x-y)(z+3)=0$

(i) $z=-3$ ナラバ

(2) ヨリ $x+y=-3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3) ヨリ $xy+x+y=-3\cdots\cdots\cdots(5)$

(4), (5) ヨリ $xy=0$

$\therefore$ $x=0,\ y=-3$ 又ハ $x=-3,\ y=0$

(ii) $x=y$ ナラバ

(2) ヨリ $zx+x+z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(3) ヨリ $x^2+2x-z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

(6), (7) ヨリ $x(z+x+3)=0$

$\therefore$ $x=0$ ナラバ $z=0$

$z=-(x+3)$ ナラバ $x^2+3x+3=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{-3\pm i\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ $z=\dfrac{-3\mp i\sqrt{3}}{2}$

(答) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{-3\pm i\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-3\pm i\sqrt{3}}{2} \\ z=\dfrac{-3\mp i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ 〔複號同順〕

153. $\begin{cases} x+y=xy \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+2z=xz \cdots\cdots\cdots(2) \\ 3y+3z=yz \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1) ヨリ $y=\dfrac{x}{x-1} \cdots\cdots\cdots(4)$

(3) ニ代入シテ $\dfrac{3x}{x-1}+3z=\dfrac{xz}{x-1}$ $\therefore$ $3x+2xz-3z=0$

$\therefore$ $z=\dfrac{3x}{3-2x} \cdots\cdots\cdots(5)$

(5) ヲ (2) ニ代入シテ $2x+\dfrac{6x}{3-2x}=\dfrac{3x^2}{3-2x}$

$\therefore$ $7x^2-12x=0$

$\therefore$ $x=0$ 又ハ $x=\dfrac{12}{7}$

コレ等ヲ (4), (5) ニ代入シテ $x=0,\ y=z=0$

$x=\dfrac{12}{7},\ y=\dfrac{12}{5},\ z=-12$

(答) $x=y=z=0;\ x=\dfrac{12}{7},\ y=\dfrac{12}{5},\ z=-12$

154. $\begin{cases} x+y+z=6 \cdots\cdots\cdots(1) \\ (x-y)^2=2z \cdots\cdots\cdots(2) \\ xy+z=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1) ヨリ $x+y=6-z \cdots\cdots\cdots(4)$

(3) ヨリ $xy=5-z \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(2) ヨリ $(x+y)^2-4xy=2z$

之ニ (4), (5) ヲ代入スレバ

$(6-z)^2-4(5-z)=2z$

$\therefore$ $z^2-10z+16=0$ $\therefore$ $z=2$ 又ハ $z=8$

故ニ (A) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases}$

(A) ヨリ $x=3,\ y=1;\ x=1,\ y=3$

(B) ヨリ $x=-3,\ y=1;\ x=1,\ y=-3$

(答) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \\ z=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=8 \end{cases}$

155. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=15 \cdots\cdots\cdots(1) \\ (y+z)(y+x)=18 \cdots\cdots\cdots(2) \\ (z+x)(z+y)=30 \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)×(2)×(3) $(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2=90^2$

$\therefore$ $(x+y)(y+z)(z+x)=\pm 90 \cdots\cdots\cdots(4)$

$\left.\begin{array}{ll} (4)\div(1) & y+z=\pm 6 \\ (4)\div(2) & z+x=\pm 5 \\ (4)\div(3) & x+y=\pm 3 \end{array}\right\}$ 〔複號同順〕

之ヨリ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-4 \end{cases}$ (答)

156. $\begin{cases} xy+x+y-1=0 \cdots\cdots\cdots(1) \\ yz+y+z-5=0 \cdots\cdots\cdots(2) \\ zx+z+x-2=0 \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1) ハ $(x+1)(y+1)=2 \cdots\cdots\cdots(4)$

(2) ハ $(y+1)(z+1)=6 \cdots\cdots\cdots(5)$

(3) ハ $(z+1)(x+1)=3 \cdots\cdots\cdots(6)$

(4)×(5)×(6) $(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=36$

$\therefore$ $(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 6$

$\therefore$ (A) $\begin{cases} x+1=1 \\ y+1=2 \\ z+1=3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x+1=-1 \\ y+1=-2 \\ z+1=-3 \end{cases}$ (A) ヨリ $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ (B) ヨリ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \\ z=-4 \end{cases}$ (答)

157. $\begin{cases} xy+xz=27 \cdots\cdots\cdots(1) \\ yx+yz=32 \cdots\cdots\cdots(2) \\ zx+zy=35 \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

$\{(1)+(2)+(3)\}\div 2 \qquad xy+xz+yz=47 \cdots\cdots\cdots(4)$

$(4)-(1) \quad yz=20, \quad (4)-(2) \quad zx=15, \quad (4)-(3) \quad xy=12$

$\therefore \quad xyz=\pm 60$

(答) $x=\pm 3,\ y=\pm 4,\ z=\pm 5$〔複號同順〕

158. (i) $(xy-6)^2+(2x-3y+5)^2=0$ ヲ滿足スル $x,\ y$ ノ實數値ハ次ノ聯立方程式ノ根デアル。

$\begin{cases} xy-6=0 \\ 2x-3y+5=0 \end{cases}$

之ヲ解イテ $\quad x=2,\ y=3;\ x=-\dfrac{9}{2},\ y=-\dfrac{4}{3}$ (答)

(ii) $(x^2+4)(y^2+1)-8xy=0$

括弧ヲ外シテ x ニツイテ整頓スレバ

$(y^2+1)x^2-8xy+4(y^2+1)=0$

x ガ實數ナルタメノ條件ヲ求メルト

$16y^2-4(y^2+1)^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -(y^2-1)^2 \geqq 0$

$\therefore \quad y^2-1=0 \qquad \therefore \quad y=\pm 1$

コノ y ニ對應スル x ノ値ハ $\quad x=\pm 2$

(答) $x=2,\ y=1;\ x=-2,\ y=-1$

頁 15.

159. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+2}=1 \cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y-1}=2 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ノ分母ヲ拂ヘバ $\quad xy+x-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2) ノ分母ヲ拂ヘバ $\quad 2xy-3x-5y+7=0 \cdots\cdots\cdots(4)$

(3), (4) カラ $\quad 5x+5y-9=0$

$\therefore \quad y=\dfrac{9-5x}{5} \cdots\cdots\cdots(5)$

(5) ヲ (3) ニ代入スレバ $\quad 5x^2-14x+5=0$

$\therefore \quad x=\dfrac{7\pm 2\sqrt{6}}{5} \qquad \therefore \quad y=\dfrac{2\mp 2\sqrt{6}}{5}$ (答)

160. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=2 \cdots\cdots\cdots(1) \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)-(2) \quad \dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{y}{x}=t$ ト置ケバ $\quad t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \quad 2t^2-3t-2=0 \qquad \therefore \quad t=2$ 又ハ $-\dfrac{1}{2}$

依ツテ $\quad \dfrac{y}{x}=2$ 又ハ $\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{2}$

(i) $\dfrac{y}{x}=2$ トスレバ $\quad y=2x$

之ヲ (1) ニ代入スレバ $\quad 2x^2-\dfrac{1}{2}=2$

$\therefore \quad x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore \quad y=\pm\sqrt{5}$

(ii) $\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{2}$ トスレバ $\quad x=-2y$

之ヲ (1) ニ代入スレバ $\quad -2y^2+2=2 \qquad \therefore \quad y=0$ 之ハ不可能。

(答) $x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ y=\pm\sqrt{5}$〔複號同順〕

161. $\begin{cases} xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{20}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times(2) \quad \left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=\dfrac{100}{9} \qquad \therefore \quad y+\dfrac{1}{y}=\pm\dfrac{10}{3}$

(i) $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3} \qquad \therefore \quad y=3$ 又ハ $\dfrac{1}{3}$

之ヲ (1) ニ代入スレバ $x=\frac{1}{2}$

(ii) $y+\frac{1}{y}=\frac{-10}{3}$ ∴ $y=-3$ 又ハ $-\frac{1}{3}$

之ヲ (1) ニ代入スレバ $x=-\frac{1}{2}$

(答) $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$

162. $\begin{cases} xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{6}\cdots\cdots(1) \\ 1+y^2=\frac{15}{2}xy\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ヨリ $x(1+y^2)=\frac{5}{6}y$ (但シ $y\neq0$)

之ニ (2) ヲ代入スレバ $\frac{15}{2}x^2y=\frac{5}{6}y$

∴ $x^2=\frac{1}{9}$ ∴ $x=\pm\frac{1}{3}\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (2) ニ代入スレバ $1+y^2=\pm\frac{5}{2}y$

∴ $y=\pm2$ 又ハ $\pm\frac{1}{2}$

(答) $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

163. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{z}{2}\cdots\cdots(1) \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{x}{3}\cdots\cdots(2) \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{y}{4}\cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1), (2), (3) ヨリ $x+y=\frac{xyz}{2}\cdots\cdots(4)$ $y+z=\frac{xyz}{3}\cdots\cdots(5)$

$z+x=\frac{xyz}{4}\cdots\cdots(6)$

$\frac{(4)+(5)+(6)}{2}$ $x+y+z=\frac{13xyz}{24}\cdots\cdots(7)$

(4), (5), (6), (7) ヨリ $x=\frac{5xyz}{24}$, $y=\frac{7xyz}{24}$, $z=\frac{xyz}{24}$

∴ $xyz=\frac{35(xyz)^3}{24^3}$ 〔$xyz\neq0$〕

∴ $(xyz)^2=\frac{24^3}{35}$ ∴ $xyz=\pm48\sqrt{\frac{6}{35}}$ 〔複號同順〕

∴ $x=\pm2\sqrt{\frac{30}{7}}$, $y=\pm2\sqrt{\frac{42}{5}}$, $z=\pm2\sqrt{\frac{6}{35}}$ (答)

164. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=84\cdots\cdots(1) \\ x+\sqrt{xy}+y=14\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ハ $(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)=84$ 之ニ (2) ヲ代入スレバ

$x-\sqrt{xy}+y=6\cdots\cdots(3)$

(2), (3) ヨリ $x+y=10$, $\sqrt{xy}=4$

∴ $x=8$, $y=2$; $x=2$, $y=8$ (答)

165. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=6\cdots\cdots(1) \\ xy+12=0\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) $x+y+\sqrt{(x+y)^2-2xy}=6$ 之ニ (2) ヲ代入スレバ

$x+y+\sqrt{(x+y)^2+24}=6$

移項シテ平方スレバ $x+y=1$

故ニ $x+y=1$, $xy=-12$

之カラ $x=4$, $y=-3$; $x=-3$, $y=4$ (答)

[12] 消去法

166. $\frac{x}{y+z}=a\cdots\cdots(1)$ $\frac{y}{z+x}=b\cdots\cdots(2)$

$\frac{z}{x+y}=c$……(3)

各式ノ逆數ヲトレバ　$\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\frac{1}{a}$……(4)

$\frac{z}{y}+\frac{x}{y}=\frac{1}{b}$……(5)　$\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{1}{c}$……(6)

(4)×(5)×(6)　$2+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)=\frac{1}{abc}$

$\therefore\ 2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$　$\therefore\ 2abc+bc+ca+ab=1$　(答)

167. $y-z=a(y+z)$……(1)　$z-x=b(z+x)$……(2)

$x-y=c(x+y)$……(3)

(1), (2), (3) ヲ變形シテ　$y(1-a)=z(1+a)$……(4)

$z(1-b)=x(1+b)$……(5)　$x(1-c)=y(1+c)$……(6)

(4)×(5)×(6)　$xyz(1-a)(1-b)(1-c)=xyz(1+a)(1+b)(1+c)$

$\therefore\ (1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c)$

之ヲ整頓スレバ　$abc+a+b+c=0$　(答)

168. $\frac{y}{x}+\frac{x}{z}=a$……(1)　$\frac{z}{y}+\frac{y}{x}=b$……(2)

$\frac{x}{z}+\frac{z}{y}=c$……(3)

$\frac{(1)+(2)+(3)}{2}$,　$\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=\frac{a+b+c}{2}$……(4)

(4) ヨリ (1), (2), (3) ヲ引イテ

$\frac{z}{y}=\frac{-a+b+c}{2}$,　$\frac{x}{z}=\frac{a-b+c}{2}$,　$\frac{y}{x}=\frac{a+b-c}{2}$

コノ兩邊ヲ相乘ズレバ

$1=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8}$

$\therefore\ (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=8$　(答)

169. $\frac{y^2+z^2-x^2}{ayz}=\frac{z^2+x^2-y^2}{bzx}=\frac{x^2+y^2-z^2}{cxy}=1$

$\therefore\ y^2+z^2-x^2=ayz$……(1)　$z^2+x^2-y^2=bzx$……(2)

$x^2+y^2-z^2=cxy$……(3)

(1)+(2)　$2z^2=z(ay+bx)$　$\therefore\ \frac{ay}{z}+\frac{bx}{z}=2$……(4)

同樣ニ　$\frac{bz}{x}+\frac{cy}{x}=2$……(5)　$\frac{cx}{y}+\frac{az}{y}=2$……(6)

(4)×(5)×(6)

$2abc+a^2\left(\frac{bz}{x}+\frac{cy}{x}\right)+b^2\left(\frac{cx}{y}+\frac{az}{y}\right)+c^2\left(\frac{ay}{z}+\frac{bx}{z}\right)=8$

$\therefore\ abc+a^2+b^2+c^2=4$　(答)

[13] 判別式

170. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ ノ判別式ヲ作レバ

$(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=(c+a-2b)^2\geqq 0$

依ツテ原方程式ハ實根ヲ有スル。

$x=\frac{(a-c)\pm(c+a-2b)}{2(b-c)}=\frac{a-b}{b-c}$　又ハ　1

故ニ二根ノ比ハ　$\frac{a-b}{b-c}:1=\frac{a-b}{b-c}$　(答)

頁 16.

171. 判別式$=(p+q)^2-8(q+r)=(p^2-4q)+(q^2-4r)+2pq-4q-4r$

$<(p^2-4q)+(q^2-4r)+2pq-p^2-q^2=(p^2-4q)+(q^2-4r)-(p-q)^2<0$

故ニ與ヘラレタ方程式ハ實根ヲ有セヌ。

172. $(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+c^2+d^2=0$

判別式$=(ac+bd)^2-(a^2+b^2)(c^2+d^2)=-(bc-ad)^2$

然ルニ與ヘラレタ方程式ハ實根ヲ有スルカラ

$-(bc-ad)^2\geqq 0$

$\therefore\ bc-ad=0$　故ニ等根ヲ有スル。

173. 原方程式ハ　$(c-a)x^2+2bx+c+a=0$, 之ガ虛根ヲ有スルニヨリ

$b^2-(c-a)(c+a)<0 \quad \therefore \quad a^2+b^2<c^2$

a, b, c ハ三角形ノ三邊ヲ表ハスカラ, c ニ對スル角ハ鈍角デアル。

174. $x^2-\dfrac{m^2-6}{m}x+\dfrac{m^2-6}{m}+\dfrac{5}{4}=0$ ハ等根ヲ有スルニハ

$$\left(\frac{m^2-6}{m}\right)^2-4\left(\frac{m^2-6}{m}+\frac{5}{4}\right)=0$$

$\therefore \quad \dfrac{m^2-6}{m}=5$ 又ハ -1

(i) $\dfrac{m^2-6}{m}=5$ トスレバ $m=6$ 又ハ -1

(ii) $\dfrac{m^2-6}{m}=-1$ トスレバ $m=-3$ 又ハ 2

(答) 6, 2, −1, −3

175. $2(p^2+1)x^2+8\sqrt{pq}x+q^2+4=0$ ガ等根ヲ有スルニハ

$16pq-2(p^2+1)(q^2+4)=0 \quad \therefore \quad (pq-2)^2+(2p-q)^2=0$

p, q ハ實數ナルヲ以テ $pq=2, \ 2p=q$

之ヲ解イテ $p=\pm1, \ q=\pm2$ 〔複號同順〕(答)

176. $\dfrac{a^2}{x-p}+\dfrac{b^2}{x}-1=0$, 分母ヲ拂ヘバ

$-x(x-p)+a^2x+b^2(x-p)=0$

$x^2-(p+a^2+b^2)x+pb^2=0$

判別式$=(p+a^2+b^2)^2-4pb^2=p^2+a^4+b^4+2pa^2-2pb^2+2a^2b^2$

$=(p+a^2-b^2)^2+4a^2b^2\geqq0$

故ニ原方程式ハ實根ヲ有スル。

177. $x^2+px+q=0$……(1) $\quad x^2+px+q=k\left(x+\dfrac{p}{2}\right)$……(2)

(1) ノ判別式$=p^2-4q\geqq0$……(3)

(2) ヲ整頓スレバ $x^2+(p-k)x+q-\dfrac{pk}{2}=0$

(2) ノ判別式$=(p-k)^2-4\left(q-\dfrac{pk}{2}\right)=p^2-4q+k^2$……(4)

(3) 及ビ k ガ實數ナルコトカラ $p^2-4q+k^2\geqq0$

故ニ (2) ハ實根ヲ有スル。

178. $\dfrac{2}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+1=0$……(1)

(1) ノ分母ヲ拂ヘバ $x^2-(a+b-3)x+ab-a-2b=0$……(2)

(2) ノ根ハ $x=\dfrac{a+b-3\pm\sqrt{(a-b-1)^2+8}}{2}$……(3)

$(a-b-1)^2+8>0$ ナルヲ以テ (2) ハ相等シクナイ實根ヲ有スル。

次ニ $x=a$ ヲ (2) ニ代入スレバ $2(a-b)\neq0$

又 $x=b$ ヲ (2) ニ代入スレバ $b-a\neq0$

故ニ a, b ハ (2) ノ根デハナイ。從ツテ (2) ノ根ハ (1) ノ根デアル。

即チ (1) ハ相等シクナイ實根ヲ有スル。

コノ根ヲ α, β. $(\alpha>\beta)$ トスレバ

$x^2-(a+b-3)x+ab-a-2b=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore \quad (a-\alpha)(a-\beta)=a^2-(a+b-3)a+ab-a-2b=2(a-b)>0$

$(b-\alpha)(b-\beta)=b^2-(a+b-3)b+ab-a-2b=b-a<0$

從ツテ一根ハ a, b ノ間ニアル。ソシテ $b>\beta, \ a>b>0$

ナル故 $a>\alpha>b$

$\therefore \quad a>\alpha>b>\beta$

頁 17. [14] 根ノ符號

179. $ax^2-x+b=0$ ノ二ツノ實根ヲ α, β トシ $|\alpha|>|\beta|$ トスレバ

根ト係數トノ關係カラ $\alpha+\beta=\dfrac{1}{a}$……(1) $\alpha\beta=\dfrac{b}{a}$……(2)

今 $\alpha<0$ トスレバ $|\alpha|>|\beta|$ ナル故 $\alpha+\beta<0 \quad \therefore \quad \dfrac{1}{a}<0$ 即チ a ハ負數デアル。又 $\alpha>0$ トスレバ同樣ニ a ハ正數デアル。即チ α ト a トハ同符號デアル。故ニ (2) ヨリ β ト b トモ同符號ナルコトガワカル。

180. $x^2+px+96=0$ ノ二根ヲ正ノ整數 α, β トスレバ

$\alpha\beta=96,\quad \alpha+\beta=-p$

ニシテ α, β ハ 96 ノ約數デアル。依ツテ

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=96\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=48\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=32\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=24\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=6\\ \beta=16\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=8\\ \beta=12\end{cases}$$

從ツテ $p=-97,\ -50,\ -35,\ -28,\ -22,\ -20$ ノ 6 箇ノ値ヲ得ル。

(答) 6 箇

181. $x^2-(3a-b)x+a-b=0$

二根ヲ α, β トスレバ α, β ハ何レモ 5 ヨリ小ナル正ノ整數デアルカラ，根ト係數ノ關係カラ

$\alpha=4,\ \beta=4$ トスレバ $3a-b=8,\ a-b=16$ ……(1)

$\alpha=4,\ \beta=3$ トスレバ $3a-b=7,\ a-b=12$ ……(2)

$\alpha=4,\ \beta=2$ トスレバ $3a-b=6,\ a-b=8$ ……(3)

$\alpha=4,\ \beta=1$ トスレバ $3a-b=5,\ a-b=4$ ……(4)

$\alpha=3,\ \beta=3$ トスレバ $3a-b=6,\ a-b=9$ ……(5)

$\alpha=3,\ \beta=2$ トスレバ $3a-b=5,\ a-b=6$ ……(6)

$\alpha=3,\ \beta=1$ トスレバ $3a-b=4,\ a-b=3$ ……(7)

$\alpha=2,\ \beta=2$ トスレバ $3a-b=4,\ a-b=4$ ……(8)

$\alpha=2,\ \beta=1$ トスレバ $3a-b=3,\ a-b=2$ ……(9)

$\alpha=1,\ b=1$ トスレバ $3a-b=2,\ a-b=1$ ……(10)

(1) ヨリ $a=-4,\ b=-20$

(3) ヨリ $a=-1,\ b=-9$

(8) ヨリ $a=0,\ b=-4$

他ヨリハ a, b ハ整數値ハ得ラレナイ。

(答) $a=-4,\ b=-20;\ a=-1,\ b=-9\ a=0,\ b=-4$

182. $x^2+2(m-4)x+3m-2=0$ ノ二根ガ何レモ正數ナル故

$(m-4)^2-(3m-2)\geqq 0$ ……(1)　　$m-4<0$ ……(2)

$3m-2>0$ ……(3)

(1) ヨリ $m\geqq 9$ 又ハ $m\leqq 2$ ……(4)

(2), (3) ヨリ $\dfrac{2}{3}<m<4$ ……(5)

(4), (5) ヨリ $\dfrac{2}{3}<m\leqq 2$ ……(6)

(6) ヲ滿足スル整數 m ハ 1 ト 2 デアル。　(答) 1, 2

183. $x^2-11x+(m+30)=0$ ガ實根ヲ有スルニヨリ

$11^2-4(m+30)\geqq 0\quad \therefore\ m\leqq\dfrac{1}{4}$

二根ガ共ニ 5 ヨリ大ナルタメニハ二根ノ和ガ 11 ナル故，大ナル根ハ 5 ヨリ大ナル故，小根ガ 5 ヨリ大ナレバヨイ。

$\therefore\ \dfrac{1}{2}(11-\sqrt{1-4m})>5\quad \therefore\ \sqrt{1-4m}<1\quad \therefore\ m>0$

(答) $\dfrac{1}{4}\geqq m>0$

184. $(2-m)x^2+4mx-(m+1)=0$ ……(1)

(1) ノ判別式 $=4m^2+(2-m)(m+1)=3\left\{\left(m+\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{23}{36}\right\}>0$

故ニ相異ナル實根ヲ有スル。

(i) $2-m>0$ ノトキ

二根ノ和 $-\dfrac{4m}{2-m}<0$，二根ノ積 $-\dfrac{m+1}{2-m}<0$

故ニ，二根ハ異符號デ，負根ノ絶對値ハ正根ノ絶對値ヨリ大デアル。

(ii) $2-m<0$ ノトキ

二根ノ和 $-\dfrac{4m}{2-m}>0$，二根ノ積 $-\dfrac{m+1}{2-m}>0$

故ニ二根ハ共ニ正根デアル。

ソシテ二根ヲ α, β トスレバ $\alpha=\dfrac{-2m+\sqrt{D}}{2-m}$，$\beta=\dfrac{-2m-\sqrt{D}}{2-m}$

共ニ正根ナル故 $|\alpha|<|\beta|$

185. $x^2+px+q=0$ ……(1)　　$x^2+(p+2)x+(p+q)=0$ ……(1)

(1) ハ實根ヲ有スルカラ $p^2-4q\geqq 0$ ……(3)

(2) ノ判別式ヲ作レバ $(p+2)^2-4(p+q)=p^2-4q+4$ ……(4)

(3) ニヨリ (4) ハ正デアル。故ニ (2) ハ不等實根ヲ有スル。

(1) ガ不等實根ヲ有スルトキハ $p^2-4q>0$ デ小ナル根ハ

$$\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \cdots\cdots(5)$$

(2) ノ大ナル根ハ $\dfrac{-(p+2)+\sqrt{p^2-4q+4}}{2}$ ……(6)

(2) ノ小ナル根ハ $\dfrac{-(p+2)-\sqrt{p^2-4q+4}}{2}$ ……(7)

(6)−(5) $\dfrac{\sqrt{p^2-4q+4}+\sqrt{p^2-4q}-2}{2}>0$ $[\because \sqrt{p^2-4q+4}>2]$

$$\therefore \frac{-(p+2)+\sqrt{p^2-4q+4}}{2}>\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \cdots\cdots(A)$$

(5)−(7) $\dfrac{\sqrt{p^2-4q+4}+2-\sqrt{p^2-4q}}{2}>0$ $[\because \sqrt{p^2-4q+4}>\sqrt{p^2-4q}]$

$$\therefore \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}>\frac{-(p+2)-\sqrt{p^2-4q+4}}{2} \cdots\cdots(B)$$

(A), (B) ニヨツテ (1) ノ小ナル根ハ (2) ノ二根ノ間ニアルコトヲ知ル。

頁 18. [15] 根ト係數トノ關係

186. $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ α, $n\alpha$ トスレバ

$(n+1)\alpha=-p$ ……(1) $n\alpha^2=q$ ……(2)

(1), (2) ヨリ α ヲ消去スレバ $np^2=(n+1)^2q$ (答)

187. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスレバ

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ……(1) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ……(2)

$mnb^2=(m+n)^2ac$ ヨリ $[a^2\neq0]$

$$mn\left(\frac{b}{a}\right)^2=(m+n)^2\frac{c}{a} \cdots\cdots(3)$$

(3) ニ (1), (2) ヲ代入スレバ

$$mn(\alpha+\beta)^2=(m+n)^2\alpha\beta$$

$$\therefore mn\alpha^2-(m^2+n^2)\alpha\beta+mn\beta^2=0$$

$$\therefore (m\alpha-n\beta)(n\alpha-m\beta)=0$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{n}{m} \text{ 又ハ } \frac{m}{n}$$

故ニ二根ノ比ハ $m:n$ デアル。

188. $x^2+px+q=0$ ……(1) $x^2+qx+p=0$ ……(2)

(1) ノ二根ヲ α, β, (2) ノ二根ヲ α', β' トスレバ

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ $\therefore (\alpha-\beta)^2=p^2-4q$ ……(3)

又 $\alpha'+\beta'=-q$, $\alpha'\beta'=p$ $\therefore (\alpha'-\beta')^2=q^2-4p$ ……(4)

然ルニ (1), (2) ノ二根ノ差ガ相等シキ故

$p^2-4q=q^2-4p$ $\therefore (p-q)(p+q+4)=0$

$\therefore p=q$ 又ハ $p+q=-4$ (答)

189. $ax^2+2bx+c=0$ ノ二根ハ α, β ナル故

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{a}$ ……(1) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ……(2)

$px^2+2qx+r=0$ ノ二根ハ $\alpha+k$, $\beta+k$ ナル故

$\alpha+\beta+2k=-\dfrac{2q}{p}$ ……(3) $(\alpha+k)(\beta+k)=\dfrac{r}{p}$ ……(4)

(3) ニ (1) ヲ代入スレバ $2k=-\dfrac{2q}{p}+\dfrac{2b}{a}$

$$\therefore k=\frac{b}{a}-\frac{q}{p} \cdots\cdots(5)$$

(4) ニ (1), (2) ヲ代入スレバ

$$\alpha\beta+(\alpha+\beta)k+k^2=\frac{c}{a}-\frac{2b}{a}k+k^2=\frac{r}{p} \cdots\cdots(6)$$

(6) ニ (5) ヲ代入スレバ

$$\frac{c}{a}-\frac{2b}{a}\left(\frac{b}{a}-\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{q}{p}\right)^2=\frac{r}{p}$$

$$\therefore a^2(q^2-pr)=p^2(b^2-ac)$$

$$\therefore \frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{q^2-pr}{p^2}$$

190. $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ α, β トスレバ $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ ノ根ハ α^2, β^2 デアル。

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\alpha^2+\beta^2=-\frac{b^2}{a^2}\cdots\cdots\cdots(3) \qquad \alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}\cdots\cdots\cdots(4)$$

(1), (2), (3), (4), ヨリ α, β ヲ消去スレバ

$$\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=-\frac{b^2}{a^2} \qquad \therefore\ 2b^2-2ac=0 \qquad \therefore\ b^2=ac$$

即チ b ハ a ト c トノ比例中項デアル。

191. p, q ヲ二根トスル方程式ハ $x^2-(a+b+h)x+ab=0$

$$\therefore\ p+q=a+b+h\cdots\cdots\cdots(1) \qquad pq=ab\cdots\cdots\cdots(2)$$

次ニ $(x-p)(x-q)+hx=0$ ヨリ $x^2-(p+q-h)x+pq=0$

コノ式ニ (1), (2) ヲ代入スレバ

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

故ニコノ根ハ a ト b デアル。

頁 19.

192. 根ト係數トノ關係カラ $\alpha=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha^2=\dfrac{c}{a}$

$$\beta=-\frac{q}{p}, \quad \beta^2=\frac{r}{p} \qquad \therefore\ \alpha=\frac{\alpha^2}{\alpha}=-\frac{c}{b}, \quad \beta=\frac{\beta^2}{\beta}=-\frac{r}{q}$$

故ニ α, β ハ次ノ方程式ノ根デアル。

$$x^2+\left(\frac{c}{b}+\frac{r}{q}\right)x+\frac{c}{b}\cdot\frac{r}{q}=0$$

$$\therefore\ bqx^2+(br+cq)x+cr=0 \qquad \text{但シ } \alpha\neq0,\ \beta\neq0$$

193. $\dfrac{1}{k-\alpha}+\dfrac{1}{k-\beta}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ ヨリ $\dfrac{2k-(\alpha+\beta)}{(k-\alpha)(k-\beta)}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$$\frac{2k-(\alpha+\beta)}{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ハ α, β デアルカラ

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ 之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$\frac{2ak+b}{ak^2+bk+c}=-\frac{b}{c} \qquad \therefore\ abk^2+(b^2+2ac)k+2bc=0$$

k ニ關ススル二次方程式ノ判別式ヲ作レバ

$$D=(b^2+2ac)^2-8ab^2c=(b^2-2ac)^2$$

a, b, c ハ有理數ナル故 k ハ有理數デアル。

$$k=\frac{-(b^2+2ac)\pm\sqrt{(b^2-2ac)^2}}{2ab}=-\frac{2c}{b} \text{ 又ハ } -\frac{b}{a} \quad \text{(答)}$$

194. $(x-a)(x-b)+h^2=0$ ヨリ $x^2-(a+b)x+ab+h^2=0$

コノ二根ハ α, β ナル故 $\alpha+\beta=a+b\cdots\cdots\cdots(1)$ $\alpha\beta=ab+h^2\cdots\cdots\cdots(2)$

$\alpha+2\beta$, $\beta+2\alpha$ ヲ二根トスル方程式ハ

$$x^2-3(\alpha+\beta)x+\{2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta\}=0\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) ニ (1), (2) ヲ代入スレバ

$$x^2-3(a+b)x+\{2(a+b)^2+ab+h^2\}=0$$

$$\therefore\ (x-a-2b)(x-b-2a)+h^2=0$$

195. $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ α, β トスレバ

$$S_1=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad S_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$S_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{-b^3+3abc}{a^3}$$

故ニ

$$aS_3+bS_2+cS_1=a\times\left(\frac{-b^3+3abc}{a^3}\right)+b\times\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)+c\times\left(\frac{-b}{a}\right)=0$$

196. $x^2+px+q=0$ ノ二根ガ α, β ナル故

$$\alpha+\beta=-p, \qquad \alpha\beta=q$$

$$\frac{\alpha^2}{2\alpha+3\beta}+\frac{\beta^2}{3\alpha+2\beta}=\frac{\alpha^2(3\alpha+2\beta)+\beta^2(2\alpha+3\beta)}{(2\alpha+3\beta)(3\alpha+2\beta)}$$

$$=\frac{3(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}+2\alpha\beta(\alpha+\beta)}{6(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta}$$

$$=\frac{3(-p)(p^2-3q)+2q(-p)}{6(-p)^2+q}=\frac{7pq-3p^3}{6p^2+q} \quad \text{(答)}$$

197. $2x^2+3x+4=0$ ノ二根ガ α, β ナル故

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=2$

$$\therefore\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\frac{\alpha+\beta}{\beta}=(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{2}=\frac{9}{8}\text{(答)}$$

頁 20.

198. $ax^2+2bx+c=0$ ノ二根ガ α, β ナル故

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta}\right)$$

$$=\left(-\frac{2b}{a}\right)\times\frac{\frac{c}{a}-1}{\frac{c}{a}}=\frac{2b(a-c)}{ac}$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta-2+\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{c}{a}-2+\frac{a}{c}=\frac{(a-c)^2}{ac}$$

故ニ求メル方程式ハ

$$x^2-\frac{2b(a-c)}{ac}x+\frac{(a-c)^2}{ac}=0$$

$\therefore\ acx^2-2b(a-c)x+(a-c)^2=0$ $[\because\ ac\neq 0]$

又コノ方程式ガ等根ヲ有スルタメニハ

$b^2(a-c)^2-ac(a-c)^2=0$

$\therefore\ a=c$ 又ハ $b^2=ac$

(答) $acx^2-2b(a-c)x+(a-c)^2=0$, $a=c$ 又ハ $b^2=ac$

199. $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=n$ トスレバ所要ノ方程式ハ

$x^2-mx+n=0$……(1)

假定ヨリ $m+\sqrt{m}=6$……(2)

$m^3-3mn=52$……(3)

(2) ヨリ $(\sqrt{m}-2)(\sqrt{m}+3)=0$, $\sqrt{m}+3\neq 0$ $\therefore\ \sqrt{m}=2$ $\therefore\ m=4$

(3) ヨリ $64-12n=52$ $\therefore\ n=1$

コノ m, n ヲ (1) ニ代入スレバ $x^2-4x+1=0$ (答)

200. $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$, $\alpha'+\beta'=-p'$, $\alpha'\beta'=q'$

$(\alpha\alpha'+\beta\beta')+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')=pp'$

$$(\alpha\alpha'+\beta\beta')(\alpha\beta'+\alpha'\beta)=\alpha\beta(\alpha'^2+\beta'^2)+\alpha'\beta'(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=q(p'^2-2q')+q'(p^2-2q)$$

$$=q'p^2+qp'^2-4qq'$$

故ニ求メル方程式ハ $x^2-pp'x+q'p^2+qp'^2-4qq'=0$ (答)

[16] 共通根

201. $ax^2+bx+c=0$……(1) $lx^2+mx+n=0$……(2)

(i) 一ツノ共通根ヲ α トスレバ

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$……(3) $l\alpha^2+m\alpha+n=0$……(4)

(3), (4) ヨリ $\alpha^2=\frac{bn-mc}{am-bl}$, $\alpha=-\frac{na-lc}{am-bl}$ [但シ $am-bl\neq 0$]

$\therefore\ (an-lc)^2=(am-bl)(bn-mc)$ (答)

(ii) 二ツノ共通根ヲ α, β トスレバ

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{m}{l}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{n}{l}$

$\therefore\ \frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ (答)

但シ m 又ハ n ガ 0 ナラバ b 又ハ c ハ 0 トナル。

202. 共通根ヲ α トスレバ

$\alpha^2+p\alpha+q=0$……(1) $\alpha^2+q\alpha+p=0$……(2)

(1)−(2) $(p-q)\alpha=p-q$, $p\neq q$ ナル故 $\alpha=1$

$\therefore\ 1+p+q=0$……(3)

(1) ノ根ヲ 1, α, (2) ノ根ヲ 1, β トスレバ $q=\alpha$, $p=\beta$

之ヲ (3) ニ代入スレバ $\alpha+\beta=-1$

頁 21.

203. 共通根ヲ α トスレバ

$\alpha^2+m\alpha+4=0$……(1)　　$\alpha^2-(m-2)\alpha-12=0$……(2)

(1)−(2)　$2(m-1)\alpha+16=0$　　$\therefore\ \alpha=\dfrac{-8}{m-1}$　[但シ $m\neq1$]……(3)

(3) ヲ (1) ニ代入シテ分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$m^2=17$　　$\therefore\ m=\pm\sqrt{17}$

從ツテ (3) ヨリ $\alpha=\dfrac{-1\mp\sqrt{17}}{2}$,　$m=1$ ナラバ共通根ナシ。

(答)　$m=\pm\sqrt{17}$,　共通根ハ $\dfrac{-1\mp\sqrt{17}}{2}$

204. 第二, 第三 ノ方程式ノ共通根ヲ x' トスレバ

$x'^2+(\alpha+1)x'+\beta^2=0$……(1)　　$x'^2+(\beta+1)x'+\alpha^2=0$……(2)

(1)−(2)　$(\alpha-\beta)x'-(\alpha^2-\beta^2)=0$　　$\therefore\ (\alpha-\beta)\{x'-(\alpha+\beta)\}=0$

$\alpha\neq\beta$ ナル故　$x'=\alpha+\beta$

$\alpha,\ \beta$ ハ　$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ナル故

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,　$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$　故ニ　$x'=-\dfrac{b}{a}$……(3)

(1)+(2)　$2x'^2+(\alpha+\beta+2)x'+\alpha^2+\beta^2=0$……(4)

(4) ニ (3) ヲ代入シテ整頓スレバ　$2b^2=a(b+c)$　(答)

205. 前ノ二方程式ノ共通根ヲ α トスレバ

$\alpha^2-3\alpha+a=0$……(1)　　$\alpha^2+5\alpha+2a=0$……(2)

(2)−(1)　$\alpha=-\dfrac{a}{8}$　之ヲ (1) ニ代入シテ　$\dfrac{a^2}{64}+\dfrac{3a}{8}+a=0$

$\therefore\ a=0$　又ハ　-88

(i)　$a=0$ ナラバ $x=0$ ナル根ヲ共有シ, 後ノ二方程式ハ

$x^2-x-2=0$,　$x^2+7x+6=0$　トナリ,　-1 ナル根ヲ共有スル。

(ii)　$a=-88$ ナラバ, 後ノ二方程式ハ

$x^2-x-90=0$,　$x^2+7x-170=0$　トナリ, 10 ナル根ヲ共有スル。

[17] 方程式應用問題

206. $1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}=\dfrac{10^n-1}{10-1}=\dfrac{10^n-1}{9}=$整數

何トナレバ 10^n-1 ハ $10-1$ デ割リ切レル。

$\therefore\ 10^n=(9$ ノ倍數$)+1$　依ツテ m 桁ノ整數ヲ M トシ

$M=a_1\times10^{m-1}+a_2\times10^{m-2}+\cdots+a_{m-1}\times10+a_m$

トスレバ　$10^{m-1}=(9$ ノ倍數$)+1$,　$10^{m-2}=(9$ ノ倍數$)+1\cdots$

$\therefore\ M=(9$ ノ倍數$)+a_1+a_2+\cdots+a_m$

$\therefore\ M-(a_1+a_2+a_3\cdots+a_m)=(9$ ノ倍數$)$

故ニ又 M ガ 9 ノ倍數ナルカ否カハ $(a_1+a_2+\cdots+a_m)$ ガ 9 ノ倍數ナルカ否カニヨル。

207. $17^3=4913$,　$18^3=5832$　デアルカラ

$17^3<5000<18^3$　故ニ 5000 以内ノ整數中完全立方ハ

$17^3,\ 16^3,\ 15^3,\ \cdots,\ 3^3,\ 2^3,\ 1^3$

從ツテ求メルモノハ 17, 16, 15, …, 2, 1 ノ中, 完全平方ナルモノヲ取レバヨイ。即チ $16^3,\ 9^3,\ 4^3,\ 1^3$ デアル。　(答)　$16^3,\ 9^3,\ 4^3,\ 1^3$

208. 二整數ヲ $x,\ y$ トスルト　$xy=4(x+y)$　　$\therefore\ (x-4)(y-4)=16$

$x-4$ ト $y-4$ ハ何レモ 16 ノ約數デアル。

(i)　$x-4=\pm1$,　$y-4=\pm16$　　$\therefore\ x=5,\ y=20;\ x=3,\ y=-12$

(ii)　$x-4=\pm2$,　$y-4=\pm8$　　$\therefore\ x=6,\ y=12;\ x=2,\ y=-4$

(iii)　$x-4=\pm4$,　$y-4=\pm4$　　$\therefore\ x=y=8;\ x=y=0$

故ニ求メル二數ハ 5, 20; 3, −12; 6, 12; 2, −4; 8, 8; 0, 0　(答)

209. 十位, 一位ノ數字ヲ夫々 $x,\ y$ トスレバ

$10x+y=2xy+5$……(1)　　$x^2+y^2-4=2xy+5$……(2)

(2) ヨリ　$(x-y)^2=9$　　$\therefore\ x-y=\pm3$

(i)　$x-y=3$ トスレバ (1) ヨリ

$2y^2-5y-25=0$ ∴ $y=5$ 又ハ $y=-\frac{5}{2}$ (捨ツ)

從ツテ $x=8$ 故ニ，二位ノ數ハ 85 デアル。

(ii) $x-y=-3$ トスレバ (1) ヨリ

$2y^2-17y+35=0$ ∴ $y=5$ 又ハ $y=\frac{7}{2}$ (捨ツ)

從ツテ $x=2$ 故ニ，二位ノ數ハ 25 デアル。 (答) 85, 25

頁 22.

210. 二數ヲ x, y トスレバ $x+y=xy=x^2+y^2$……(1)

故ニ $x+y=xy$……(2) $x+y=x^2+y^2$……(3)

(3)−(2) $0=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=x^2y^2-3xy$

∴ $xy=0$ 又ハ $xy=3$

(i) $xy=0$ ノトキハ $x+y=0$ ∴ $x=0,\ y=0$

(ii) $xy=3$ ノトキハ $x+y=3$ ∴ $x=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2},\ y=\frac{3\mp i\sqrt{3}}{2}$

(答) 0, 0; $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$

211. 百位，十位，一位ノ數字ヲ夫々 x, y, z トスレバ

$x+y+z=14$……(1) $x^2+y^2+z^2=70$……(2)

$100x+10y+z=100z+10y+x+198$……(3)

(3) ヨリ $x-z=2$ 之ト (1) カラ $2x+y=16$

コノ二式カラ y, z ヲ x デ表ハシ (2) ニ代入スレバ

$3x^2-34x+95=0$ ∴ $x=5$ 又ハ $x=\frac{19}{3}$ (捨ツ)

∴ $y=6,\ z=3$ (答) 563

212. 求メル數ヲ $100x+10y+z$ トスレバ

$z=0$ 又ハ $z=5$……(1) $x+y+z=21$……(2)

$100(x-z)+z-x=\pm 297$……(3)

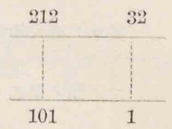
又 $0<x\leqq 9,\ 0\leqq y\leqq 9,\ 0\leqq z\leqq 9$ デアルカラ $z=0$ トスレバ

(2) ハ成リ立タナイ。

故ニ $z=5$, (3) ヨリ $x=8$ 又ハ 2

(2) ヨリ $y=8$ 又ハ 14 (捨ツ) (答) 885

213. コノ二本ノ間ヲ a トスレバ南側ノ相隣レル二本ノ間隔ハ $\frac{a}{100}$，北側ノ相隣レル二本ノ間隔ハ $\frac{a}{180}$ デアル。コノ兩間隔ノ何レデ割ツテモ整商ヲ得ル位置ノ樹木ハ互ニ正面ニ向キ合フ。



$\frac{a}{100}$ ト $\frac{a}{180}$ ノ何レデ割ツテモ整商ヲ得ル最小數ハ $\frac{a}{20}$ デアル。依ツテ南側ノ第 1 本目ト第 101 本目以外ニ，正面ニ向キ合フ本數ハ

$a\div\frac{a}{20}-1=19$ (答) 19 組

214. 初メノ速サヲ毎時 x km トスレバ

$$\frac{1}{4}+\frac{11+\frac{x}{4}}{x+\frac{1}{2}}=\frac{11}{x}+\frac{1}{6}$$

之ヲ整頓スレバ $8x^2+x-132=0$ ∴ $x=4$ 又ハ $-\frac{33}{8}$

$x>0$ ナル故 $x=4$ ヲ採ル。 (答) 毎時 4 km

215. 汽艇ノ靜水ヲ走ル速サヲ毎時 x km トスレバ

$\frac{5}{x+3}+\frac{5}{x-3}=1\frac{1}{4}$ ∴ $x^2-8x-9=0$ ∴ $x=9$ 又ハ $x=-1$

$x>0$ ナルニヨリ $x=9$ (答) 毎時 9 km

216. 水夫ガ靜水ヲ漕グ速サ及ビ流ノ速サヲ毎時 x m, y m トスレバ

$\frac{7500}{x-y}=2\frac{5}{60}$……(1) $\frac{7500\times\frac{2}{5}}{x+y}+\frac{7500\times\left(1-\frac{2}{5}\right)}{y}=2$……(2)

(1) ヨリ $x-y=3600$……(3) ∴ $x=y+3600$

之ヲ (2) ニ代入シテ整頓スレバ $\frac{1}{750}y^2-\frac{8}{5}y-5400=0$

之ヨリ $y>0$ ナルニヨリ $y=2700$ ∴ $x=6300$

(答) 漕グ速サ毎時 6.3 km, 水流ノ速サ毎時 2.7 km

頁 23.

217. 甲乙兩地間ノ距離ヲ a トスレバ甲乙ノ速サハ夫々毎時 $\frac{a}{m}$, $\frac{a}{n}$

從ツテ兩人相會スルマデハ出發後 $a\div\left(\frac{a}{m}+\frac{a}{n}\right)=\frac{mn}{m+n}$ (時)

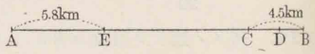
コノ間ノ甲乙ノ行程ハ夫々 $\frac{na}{m+n}$, $\frac{ma}{m+n}$

依ツテ $x=\frac{ma}{m+n}\div\frac{a}{m}=\frac{m^2}{m+n}$, $y=\frac{na}{m+n}\div\frac{a}{n}=\frac{n^2}{m+n}$

$\therefore\ \frac{m^2}{m+n}:\frac{n^2}{m+n}=m^2:n^2$ (答)

218. A, B 兩地間ノ距離ヲ x km,

甲, 乙ノ速サヲ毎時夫々 y km,



z km トスレバ

$\frac{x-4.5}{y}=\frac{x-4.5}{z}-1$……(1) $\frac{4.5\times2}{y+z}=1$……(2)

$\frac{2x}{y}=\frac{2x-5.8}{z}-1$……(3)

コノ聯立方程式ヲ解イテ $x=24.5$ (答) 24.5 km

219. 甲, 乙ノ速サヲ夫々毎時 x km, y km トスレバ

$\frac{2(x+y)+4}{x}=\frac{4(x+y)-4}{y}$……(1) $\frac{2(x+y)-4}{x}=4$……(2)

(1), (2) ヲ解イテ $x=4$, $y=6$ (負ハ捨テル)

又 $2x+2y=20$

(答) AB 間ノ距離 20 km, 甲ノ速サ毎時 4 km, 乙ノ速サ毎時 6 km

220. ソノ驛ノ手前 a m ノトコロデ汽笛ヲ鳴ラシ始メタトシ, コノ汽車ノ速サヲ毎秒 x m トスレバ, 汽笛ヲ鳴ラシ始メタトキカラ驛デ汽笛ノ第一聲及ビ最終ヲ聞ク迄ノ時間ハ夫々 $\frac{a}{340}$ 秒及ビ $10+\frac{a-10x}{340}$ 秒ナル

故 $\frac{a}{340}+9\frac{3}{5}=10+\frac{a-10x}{340}$ $\therefore\ x=\frac{68}{5}$

從ツテ速サハ毎時 $\frac{68}{5}\times60\times60=48960$(m) (答) 毎時 48.96 km

頁 24.

221. 砲彈ノ平均ノ速サヲ毎秒 x m, 觀測所ト目標トノ間ノ距離ヲ y m トスル。音ノ速サハ毎秒 480 m÷1.5=320 m

$\frac{2400}{x}+\frac{2400}{320}=10\frac{1}{2}$……(1) $\frac{2400}{x}+\frac{y}{320}=1\frac{1}{2}+10$……(2)

コノ聯立方程式ヲ解イテ $x=800$, $y=2720$

(答) 距離 2720 m, 砲彈ノ速サ毎秒 800 m

222. 甲, 乙, 丙ノ毎分ノ速サヲ夫々 x m, y m, z m トスル。

乙ガ甲ニ追付イタトキハ, 甲ハ出發後 30 分, 乙ハ出發後 25 分デアル。

$\therefore\ 25y=30x$ $\therefore\ y=\frac{6}{5}x$……(1)

丙ガ甲ニ追付イタトキハ, 甲ハ出發後 40 分, 丙ハ出發後 25 分ナル故

$25z=40x$ $\therefore\ z=\frac{8}{5}x$……(2)

丙ガ甲ニ追付イタトキハ, 乙ハ出發後 35 分ナル故

$35y-25z=2x$ [(1), (2) ヲ代入]

乙, 丙ノ毎分ノ速サノ差ハ $\frac{8}{5}x-\frac{6}{5}x=\frac{2}{5}x$(m)

故ニ丙ガ乙ニ追付クノハ, 甲ニ追付イタトキカラ

$2x\div\left(\frac{8}{5}x-\frac{6}{5}x\right)=5$(分) (答) 5 分

223. 甲, 乙, 丙ノ速サヲ毎秒 x m, y m, z m トシ, 運動場ノ周圍ヲ l m トスレバ $\frac{l}{x}=\frac{l-6y}{y}=\frac{500}{z}$, $\frac{720}{x}=\frac{l+75}{y}=\frac{l}{z}$

兩式ヲ相除スレバ $\frac{720}{l}=\frac{l+75}{l-6y}=\frac{l}{500}$ $\therefore\ l=600$(m)

$\therefore\ y=6\frac{1}{4}$(m)

コノ l ト y ヲ第二式ニ代入スレバ $x=6\frac{2}{3}$(m) $z=5\frac{5}{9}$(m)

(答) 周圍 600 m, 速サ毎秒甲 $6\frac{2}{3}$m, 乙 $6\frac{1}{4}$m, 丙 $5\frac{5}{9}$m

224. 甲, 乙ノ就業時間ハ夫々 $7\frac{1}{4}$時, $6\frac{2}{3}$時デアル。今甲乙各1人デコ

ノ仕事ヲ仕上ゲルニ要スル時數ヲ夫々 x 時, y 時トスレバ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}\cdots\cdots\cdots(1) \qquad 7\frac{1}{4}\times\frac{1}{x}+6\frac{2}{3}\times\frac{1}{y}=1\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヲ聯立方程式トシテ解イテ $x=12\frac{1}{4}$, $y=16\frac{1}{3}$

(答) 甲 $12\frac{1}{4}$時, 乙 $16\frac{1}{3}$時

225. 甲管ダケデ滿水セシメルニ x 時ヲ要スルトスレバ, 乙管ダケデハ $\left(x-\frac{32}{60}\right)$ 時ヲ要シ, 甲, 乙兩管ヲ使用スレバ $\left(x-1\frac{21}{60}\right)$ 時ヲ要スル。故ニ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{32}{60}}=\frac{1}{x-1\frac{21}{60}} \qquad \therefore\ 50x^2-135x+36=0$$

$x>1\frac{20}{60}$ ナルニヨリ $x=\frac{12}{5}=2.4$(時)

即チ甲ダケデハ 2 時 24 分ヲ要シ, 乙ダケデハ 2時24分−32分 即チ 1 時 52 分ヲ要スル。

(答) 甲管 2時24分, 乙管 1時52分

頁 25.

226. 出席人員ヲ x 人トスレバ $\frac{2880}{x}+20=\frac{2880}{x-2}$

分母ヲ拂ツテ整頓スレバ $x^2-2x-288=0$ $\therefore$ $x=18$ 又ハ -16

$x>0$ ナルニヨリ $x=18$

1 人ノ實際出金額ハ 28圓80錢÷16=1圓80錢

(答) 18人, 1圓80錢

[18] 等式ノ證明

227. 左邊$=a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ $\therefore$ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

$\therefore$ $a+b+c=0$ 又ハ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

228. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1$ $\therefore$ $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$

$\therefore$ $(b+c)(c+a)(a+b)=0$ $\therefore$ $a=-b$ 又ハ $b=-c$ 又ハ $c=-a$

$b=-c$ トスレバ $\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)(a^3+b^3+c^3)$

$$=\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{c^3}+\frac{1}{c^3}\right)(a^3-c^3+c^3)=\frac{1}{a^3}\times a^3=1$$

$b=-c$, $c=-a$ ノトキモ同樣デアル。

229. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ $\therefore$ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1$

$\therefore$ $a=-b$ 又ハ $b=-c$ 又ハ $c=-a$ [前題參照]

$\therefore$ $a^3+b^3+c^3=a^3-c^3+c^3=a^3$, $(a+b+c)^3=(a-c+c)^3=a^3$

$\therefore$ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$

$b=-c$, $c=-a$ ノトキモ同樣デアル。

230. $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

兩邊ニ abc ヲ掛ケテ $b^3c^3+c^3a^3+a^2b^3=a^4bc+b^4ca+c^4ab$

$\therefore$ $(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=0$

$\therefore$ $a^2=bc$ 又ハ $b^2=ca$ 又ハ $c^2=ab$

231. $(x^4-2x^2yz+y^2z^2)+(y^4-2xy^2z+z^2x^2)+(z^4-2xyz^2+x^2y^2)$

$=(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2=0$

x, y, z ハ實數ナル故 $x^2=yz$, $y^2=zx$, $z^2=xy$

$\therefore$ $x^3z=y^3z$, $y^3x=z^3x$ $\therefore$ $z(x^3-y^3)=0$, $x(y^3-z^3)=0$

故ニ $xz\neq0$ トスレバ x, y, z ハ實數ナル故

$x^3=y^3=z^3$ $\therefore$ $x=y=z$

又 $x=0$ トスレバ $y=z=0$ トナリ, $x=y=z$

依ツテ何レノ場合ニモ $x=y=z$

232. $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(ax+by-cz)=abck$

ト置ケバ $by+cz-ax=bck$ ……(1)

$cz+ax-by=cak$ ……(2)　　$ax+by-cz=abk$ ……(3)

(1)+(2)+(3)　$ax+by+cz=(ab+bc+ca)k$ ……(4)

(1), (4) ヨリ　$x=\dfrac{(b+c)k}{2}\ [a\neq 0]$,　(2), (4) ヨリ　$y=\dfrac{(c+a)k}{2}\ [b\neq 0]$

(3), (4) ヨリ　$z=\dfrac{(a+b)k}{2}\ [a\neq 0]$　　$\therefore\ x+y+z=(a+b+c)k$

故ニ　$a+b+c=0$　ナラバ　$x+y+z=0$

頁 26.

233. $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}+2=0$

$\therefore\ \dfrac{x+y+z}{x}+\dfrac{x+y+z}{y}+\dfrac{x+y+z}{z}=1$

$\therefore\ (x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1$　　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$

234. 假設ヨリ　$y^2-z^2+ax(y-z)=0$　　$y\neq z$　　$\therefore\ y+z+ax=0$

同様ニシテ　$z+x+ay=0$　　$\therefore\ (x-y)=a(x-y)$

然ルニ　$x\neq y$　　$\therefore\ a=1$　　$\therefore\ x+y+z=0$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3=3xyz$

235. $a^3+b^3+c^3-3abc=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=0$

$\therefore\ a+b+c=0$　又ハ　$a=b=c$

コノトキハ三ツノ方程式ハ共通根ヲ有スルコト明ラカデアル。

a, b, c ガ實數デナイトスルト　1 ノ立方根ヲ $1, \omega, \omega^2$ トスレバ

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\omega^2+c\omega)(a+b\omega+c\omega^2)$

$\therefore\ a+b+c=0$ ……(1)　　$a+b\omega^2+c\omega=0$ ……(2)

$a+b\omega+c\omega^2=0$ ……(3)

(i) $a+b+c=0$ ノトキハ $x=1$ ガ共通根デアル。

(ii) $a+b\omega^2+c\omega=0$ ノトキハ，三ツノ方程式ノ $x=\omega$ ヲ代入シ $\omega^3=1$ ヲ用ヒルト

$ax^2+bx+c=a\omega^2+b\omega+c=\dfrac{1}{\omega}(a\omega^3+b\omega^2+c\omega)=\dfrac{1}{\omega}\times 0=0$

$bx^2+cx+a=b\omega^2+c\omega+a=0$

$cx^2+ax+b=c\omega^2+a\omega+b=\omega\left(c\omega+a+\dfrac{b}{\omega}\right)=\omega(c\omega+a+b\omega^2)=0$

故ニ ω ガ共通根デアル。

(iii) $a+b\omega+c\omega^2=0$ ノトキハ，三ツノ方程式ノ $x=\omega^2$ ヲ代入スルト

$ax^2+bx+c=a\omega^4+b\omega^2+c=\dfrac{1}{\omega^2}(a\omega^3+b\omega^4+c\omega^2)$

$=\dfrac{1}{\omega^2}(a+b\omega+c\omega^2)=0$

$bx^2+cx+a=b\omega^4+c\omega^2+a=b\omega+c\omega^2+a=0$

$cx^2+ax+b=c\omega^4+a\omega^2+b=\dfrac{1}{\omega}(c\omega^2+a\omega^3+b\omega)$

$=\dfrac{1}{\omega}(c\omega^2+a+b\omega)=0$

故ニ ω^2 ガ共通根デアル。

[19] 不等式ノ證明

236. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$　トスレバ　$a=bk,\ c=dk$

$\therefore\ a+d-(b+c)=bk+d-(b+dk)=(k-1)(b-d)$

a ガ最大ナラバ　$k-1>0$,　$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}>1$　　$\therefore\ b-d>0$

$\therefore\ (k-1)(b-d)>0$　　$\therefore\ a+d>b+c$

237. $a^3-b^3-3b^2(a-b)=(a-b)(a^2+ab-2b^2)=(a-b)^2(a+2b)$

$a\neq b$ ニシテ $a>0,\ b>0$ ナル故　$(a-b)^2(a+2b)>0$

$\therefore\ a^3-b^3>3b^2(a-b)$

238. m, n ハ相異ナル正數ナル故　$m+n-2\sqrt{mn}=(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2>0$

$\therefore\ \dfrac{m+n}{\sqrt{mn}}>2$,　同様ニシテ　$\dfrac{n+p}{\sqrt{np}}>2$,　$\dfrac{p+q}{\sqrt{pq}}>2$,　$\dfrac{q+m}{\sqrt{qm}}>2$

以上ノ四式ヲ相乘ジテ　$\dfrac{(m+n)(n+p)(p+q)(q+m)}{mnpq}>16$

239. $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}-(x+y)=\dfrac{x^3+y^3}{xy}-(x+y)=\dfrac{(x+y)(x^2-2xy+y^2)}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)(x-y)^2}{xy}>0$ [$\because$ $x\neq y$, $x>0$, $y>0$] $\therefore$ $x+y<\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$

頁 27.

240. 教科書 145 頁定理ヲ用ヒヨ。

241. $\dfrac{5+2x}{4+3x}-\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{16}x\right)=\dfrac{21x^2}{16(4+3x)}>0$ [$\because$ $x>0$]

$\therefore$ $\dfrac{5+2x}{4+3x}>\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{16}x$

次ニ $\dfrac{21x^2}{16(4+3x)}=\dfrac{x^2}{\dfrac{16(4+3x)}{21}}$, $\dfrac{16(4+3x)}{21}-3=\dfrac{1+48x}{21}>0$

$\therefore$ $\dfrac{16(4+3x)}{21}>3$ $\therefore$ $\dfrac{21x^2}{16(4+3x)}<\dfrac{x^2}{3}$

242. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ $\therefore$ $yz+zx+xy=\dfrac{xyz}{x+y+z}$

$\therefore$ $(x+y+z)(yz+zx+xy)=xyz$ $\therefore$ $(y+z)(z+x)(x+y)=0$

$\therefore$ $y+z=0$ 又ハ $z+x=0$ 又ハ $x+y=0$

$y+z=0$ トスレバ $\dfrac{xyz}{x+y+z}=\dfrac{xyz}{x}=yz$

然ルニ $y+z=0$ ナル故 y ト z ハ異符號デアル。故ニ $yz<0$

$\therefore$ $yz+zx+xy=yz<0$

$z+x=0$, $x+y=0$ ノトキモ同様デアル。

243. $a^2x^2-(a^2+b^2-c^2)xy+b^2y^2$

$=\{ax-\dfrac{(a^2+b^2-c^2)}{2a}y\}^2+b^2y^2-\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}y^2$

$\{ax-\dfrac{(a^2+b^2-c^2)}{2a}y\}^2\geqq 0$,

$b^2y^2-\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}y^2=\dfrac{y^2}{4a^2}\{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\}$

$=\dfrac{y^2}{4a^2}(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)$……(1)

a, b, c ハ三角形ノ三邊ナル故

$(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)>0$

故ニ (1) ハ正又ハ 0 デアル。

$\therefore$ $a^2x^2-(a^2+b^2-c^2)xy+b^2y^2\geqq 0$

244. $(1+a+a^2)(1+b+b^2)-3(1+ab+a^2b^2)$

$=(1+b+b^2)a^2+(1+b+b^2)a+(1+b+b^2)-3-3ab-3a^2b^2$

$=(1+b-2b^2)a^2+(1-2b+b^2)a-(2-b-b^2)$

$=(1+2b)(1-b)a^2+(1-b)^2a-(2+b)(1-b)$

$=(1-b)\{(1+2b)a^2+(1-b)a-(2+b)\}$

$=-(a-1)(b-1)(2ab+a+b+2)$……(1)

然ルニ $a>1$, $b>1$ $\therefore$ $a-1>0$, $b-1>0$, $2ab+a+b+2>0$

故ニ (1) 式ハ負デアル。

$\therefore$ $(1+a+a^2)(1+b+b^2)<3(1+ab+a^2b^2)$ (答)

245. $\dfrac{1}{a^2+a+1}-(a^2-a+1)=\dfrac{1-(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=\dfrac{-(a^4+a^2)}{a^2+a+1}<0$

[$\because$ $a^2+a+1=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$, $-(a^4+a^2)<0$]

$\therefore$ $\dfrac{1}{a^2+a+1}<a^2-a+1$ (答)

[20] 不等式ノ解法

246. [1] $x^2+3x<28$ $\therefore$ $x^2+3x-28<0$ $\therefore$ $(x+7)(x-4)<0$

$\therefore$ $4>x>-7$ (答)

[2] $x^2-2\sqrt{3x}+1>0$ $\therefore$ $\{x-(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}\{x-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}>0$

$\therefore$ $x>\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 又ハ $x<\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (答)

[3] $(x-1)(x+2)(2x-3)>0$

$\therefore$ $-2<x<1$ 又ハ $\dfrac{3}{2}<x$ (答)

[4] $(x+5)(x-4)(x-6)<0$ $\therefore$ $x<-5$ 又ハ $4<x<6$ (答)

247. $2x^2+5x>3$ $\therefore$ $2x^2+5x-3>0$ $\therefore$ $(x+3)(2x-1)>0$

$\therefore$ $x>\frac{1}{2}$ 又ハ $x<-3$……(1)

$3x^2<5x+2$ $\therefore$ $3x^2-5x-2<0$ $\therefore$ $(x-2)(3x+1)<0$

$\therefore$ $2>x>-\frac{1}{3}$……(2)

(1), (2) ヲ同時ニ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ $2>x>\frac{1}{2}$ (答)

頁 28.

248. $x^2-5x+6>0$ $\therefore$ $(x-2)(x-3)>0$ $\therefore$ $x<2$ 又ハ $x>3$……(1)

$x^2-9x+8<0$ $\therefore$ $(x-1)(x-8)<0$ $\therefore$ $8>x>1$……(2)

(1), (2) ヲ同時ニ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ $1<x<2$ 又ハ $3<x<8$ (答)

249. $x^2-2x-4<0$ $\therefore$ $\{x-(\sqrt{5}+1)\}\{x-(1-\sqrt{5})\}<0$

$\therefore$ $\sqrt{5}+1>x>1-\sqrt{5}$……(1)

$(x+2)(x-1)(x-4)>0$ $\therefore$ $-2<x<1$ 又ハ $x>4$……(2)

(1), (2) ヲ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ $1>x>1-\sqrt{5}$ (答)

250. $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}>0$, 兩邊ニ正ナル $(x-2)^2(x-3)^2$ ヲ掛ケルト

$(x-1)(x-2)(x-3)>0$ $\therefore$ $x>3$ 又ハ $2>x>1$ (答)

251. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+3}>0$ 分母ノ x^2+2x+3 ハ x ノ値ノ如何ニ拘ハラズ正デアル。コノ不等式ノ兩邊ニ x^2+2x+3 ヲ掛ケテ $x^2-3x+2>0$

$\therefore$ $(x-1)(x-2)>0$ $\therefore$ $x>2$ 又ハ $x<1$ (答)

252. $-5<\frac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}<5$, $x^2+x+1>0$ ナル故

$4x^2+(5+h)x+4>0$……(1) $6x^2+(5-h)x+6>0$……(2)

(1) ノ成立ツ條件ヨリ $(5+h)^2-8^2<0$……(3)

(2) ノ成立ツ條件ヨリ $(5-h)^2-12^2<0$……(4)

(3) ヨリ $h^2+10h-39<0$ $\therefore$ $(h-3)(h+13)<0$ $\therefore$ $3>h>-13$…(5)

(4) ヨリ $h^2-10h-119<0$ $\therefore$ $(h-17)(h+7)<0$ $\therefore$ $17>h>-7$…(6)

(5), (6) ヲ同時ニ滿足スル h ノ値ノ範圍ハ $-7<h<3$ (答)

253. $\frac{2x-7}{2x^2-2x-5}=y$ トスレバ $2x-7=y(2x^2-2x-5)$

$\therefore$ $2yx^2-2(y+1)x-5y+7=0$

x ハ實數ナル故 $(y+1)^2+2y(5y-7)\geqq 0$

$\therefore$ $11y^2-12y+1\geqq 0$ $\therefore$ $(11y-1)(y-1)\geqq 0$

$\therefore$ $y\geqq 1$ 又ハ $y\leqq\frac{1}{11}$

254. $\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}>0$ デナケレバナラナイカラ $x>-25$……(1)

又 $25-x^2\geqq 0$ デナケレバナラナイカラ $-5\leqq x\leqq 5$……(2)

(1), (2) ヲ滿足スル x ノ値ノ範圍ハ $-5\leqq x\leqq 5$ デアル。

故ニ (2) ノ範圍デ原方程式ノ兩邊ヲ平方シテ

$25-x^2<\frac{1}{49}(x+25)^2$ $\therefore$ $x^2+x-12>0$, $\therefore$ $(x+4)(x-3)>0$

$\therefore$ $x>3$……(3) 又ハ $x<-4$……(4)

(2) ト (3) カラ $3<x\leqq 5$, (2) ト (4) カラ $-5\leqq x<-4$ (答)

255. $2x^2+2(p+2)x+p+6=0$ ノ根ガ實數ナルタメニハ

$(p+2)^2-2(p+6)\geqq 0$ $\therefore$ $p^2+2p-8\geqq 0$ $\therefore$ $(p-2)(p+4)\geqq 0$

$\therefore$ $p\geqq 2$ 又ハ $p\leqq -4$ (答)

256. $x^2+y^2=8$……(1) $(x-1)^2+(y-1)^2=k$……(2)

(1)−(2) $2x+2y=10-k$……(3)

(1)×4 $4x^2+4y^2=32$……(4) (3) ヲ (4) ニ代入スレバ

$(10-k-2y)^2+4y^2=32$ $\therefore$ $8y^2-4(10-k)y+(k^2-20k+68)=0$

y ガ實數ナルタメニハ $4(10-k)^2-8(k^2-20k+68)\geqq 0$

$\therefore$ $k^2-20k+36\leqq 0$ $\therefore$ $18\geqq k\geqq 2$

コノ不等式ヲ滿足スル k ヲトレバ y ガ實數トナリ, 從ツテ (3) ヨリ x モ亦實數トナル。 (答) $18\geqq k\geqq 2$

頁 29. [21] 極大・極小

257. $2x^2-5x+10=y$ トスレバ $2x^2-5x+10-y=0$

x ハ實數ナル故 $25-8(10-y)\geqq 0$ $\therefore$ $y\geqq 6\frac{7}{8}$

故ニ y 即チ $2x^2-5x+10$ ノ最小値ハ $6\frac{7}{8}$ デアル。

コノトキノ x ノ値ハ $\frac{5}{4}$ デアル。 (答) $x=\frac{5}{4}$ ノトキノ最小値ハ $6\frac{7}{8}$

258. $\frac{3}{x^2+2x+5}=y$ トスレバ x ガ實數ナラバ y モ亦實數デアル。

$yx^2+2yx+5y-3=0$

$y\neq 0$ ナル故コノ方程式ハ實係數ノ二次方程式デアル。

x ハ實數ナル故 $y^2-y(5y-3)\geqq 0$, $\therefore$ $4y^2-3y\leqq 0$

$\therefore$ $\frac{3}{4}\geqq y>0$ [$\because$ $y\neq 0$]

y 即チ $\frac{3}{x^2+2x+5}$ ノ最大値ハ $\frac{3}{4}$ デアル。コノトキノ x ノ値ハ -1

(答) -1

259. $x+y+z=3$……(1) $x-y+5z=1$……(2)

(1), (2) ヨリ $x=2-3z$……(3) $y=1+2z$……(4)

(3), (4) ヲ $x^2+y^2+z^2$ ニ代入スレバ

$x^2+y^2+z^2=(2-3z)^2+(1+2z)^2+z^2=14z^2-8z+5$

コノ式ヲ k ト置ケバ $14z^2-8z+5-k=0$

z ハ實數ナル故 $16-14(5-k)\geqq 0$ $\therefore$ $14k\geqq 54$ $\therefore$ $k\geqq\frac{27}{7}$

故ニ $x^2+y^2+z^2$ ノ最小値ハ $\frac{27}{7}$; コノトキノ z ノ値ハ $\frac{2}{7}$,

x, y ノ値ハ $x=\frac{8}{7}$, $y=\frac{11}{7}$ (答) $\frac{27}{7}$; $\frac{8}{7}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{2}{7}$

260. x ニ關スル二次式ヲ ax^2+bx+c トスレバ題意ニヨリ

$x=-2$, $y=-15$ ナル故 $4a-2b+c=-15$……(1)

$x=0$, $y=5$ ナル故 $c=5$……(2)

$x=1$, $y=9$ ナル故 $a+b+c=9$……(3)

(1), (2), (3) ヨリ $a=-2$, $b=6$, $c=5$

故ニ $y=-2x^2+6x+5$ $\therefore$ $2x^2-6x+y-5=0$

x ハ實數ナル故 $9-2(y-5)\geqq 0$ $\therefore$ $19\geqq 2y$ $\therefore$ $y\leqq\frac{19}{2}$

故ニ $-2x^2+6x+5$ ノ最大値ハ $\frac{19}{2}$ デアル。

(答) $-2x^2+6x+5$, 最大値 $\frac{19}{2}$

261. $x+y=p$ トスレバ $x^2+y^2=1$ ニ代入シテ $(p-y)^2+y^2=1$

$\therefore$ $2y^2-2py+p^2-1=0$, y ハ實數ナル故 $p^2-2(p^2-1)\geqq 0$

$\therefore$ $p^2-2\leqq 0$ x, y ハ正數ナル故 $x+y$ 即チ p ハ正デアル。

$\therefore$ $\sqrt{2}\geqq p>0$……(1) 又 $p^2-1=2xy>0$

$\therefore$ $p^2-1>0$ $\therefore$ $p>1$……(2) (1), (2) ヨリ $\sqrt{2}\geqq p>1$,

故ニ $x+y$ ノ最大値ハ $\sqrt{2}$ デアル。 (答) $\sqrt{2}$

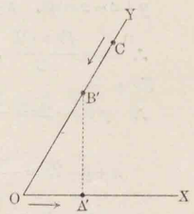
262. $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)=(x^2+5x+5)^2-1$

故ニ y ノ最小ナルハ $x^2+5x+5=0$ ノトキデアル。

即チ $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ ノトキ最小, 最小値ハ -1 デアル。 (答)

263. A ガ O ニアルトキ B ハ C ニアルトスル。A ガ A′ ニ來ルトキ B ハ B′ ニ來ルトシ, OA′$=x$ km, OB′$=y$ km, A′B′$=z$ km



トスレバ題意ニヨリ

$x+y=20$…(1) $z^2=x^2+y^2-2xy\times\frac{1}{2}$…(2)

(1) ヲ (2) ニ代入シ, x ニ就イテ整頓スレバ

$3x^2-60x+400-z^2=0$, x ハ實數 $\therefore$ $30^2-3\times(400-z^2)\geqq 0$

$\therefore$ $z^2\geqq 100$ 然ルニ $z>0$ $\therefore$ $z\geqq 10$

故ニ AB ノ距離ガ最小トナルトキノ距離ハ 10 km デアル。コノトキ $x=10$ トナルカラ, ソレハ A ノ出發ノ時カラ $\frac{10}{5}=2$ 即チ 2 時間後デアル。 (答) 2 時間後, 10 km

264. x 錢引キ下ゲルトキノ賣上金高ヲ S 錢トスレバ

$S=(a-x)(b+20x)$……(1)

$\therefore\ 20x^2-(20a-b)x+S-ab=0$

x ハ實數ナル故 $(20a-b)^2-80(S-ab)\geqq 0$

$\therefore\ S\leqq\dfrac{(20a-b)^2}{80}+ab$

從ツテ S ノ最大値ハ $S=\dfrac{(20a-b)^2}{80}+ab$……(2)

ソノトキノ x ノ値ハ $x=\dfrac{20a-b}{40}$……(3)

題意ニヨリ (3) ト (2) ニ $x=39$, $S=131220$ ヲ代入スレバ

$20a-b=39\times 40$……(4)　　$\dfrac{(20a-b)^2}{80}+ab=131220$……(5)

(4), (5) ヨリ　$a=120$,　$b=840$,　〔a ノ負ハ捨テル〕 (答)

頁 30.　[22] 比及ビ比例

265. $\dfrac{y+z-x}{a}=\dfrac{z+x-y}{b}=\dfrac{x+y-z}{c}=k$ トスレバ

$y+z-x=ak,\quad z+x-y=bk,\quad x+y-z=ck$

$\therefore\ x=\dfrac{(b+c)k}{2},\quad y=\dfrac{(c+a)k}{2},\quad z=\dfrac{(a+b)k}{2}$

$\therefore\ y+z-2x=\dfrac{2a-b-c}{2}k,\quad z+x-2y=\dfrac{-a+2b-c}{2}k$

$x+y-2z=\dfrac{-a-b+2c}{2}k$

$\therefore\ y+z-2x:z+x-2y:x+y-2z=2a-b-c:2b-c-a:2c-a-b$

(答)

266. $4x-3y-6z=0,\quad 2x+4y-14z=0$ ヨリ　$x=3z,\quad y=2z$

$\therefore\ \dfrac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}=\dfrac{2\times(3z)^2+3\times(2z)^2+6z^2}{(3z)^2+5\times(2z)^2+7z^2}=1$　(答)

267. $\dfrac{x^2+2y^2}{x^2-2y^2}=\dfrac{267}{71}$　　$\therefore\ 71(x^2+2y^2)=267(x^2-2y^2)$

$\therefore\ 49x^2-169y^2=0$　　$\therefore\ (7x+13y)(7x-13y)=0$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{13}{7}$　又ハ　$\dfrac{x}{y}=-\dfrac{13}{7}$

$x,\ y$ ハ異符號ナル故　$\dfrac{x}{y}=-\dfrac{13}{7}$　　$\therefore\ \dfrac{x}{13}=-\dfrac{y}{7}=k$

$\therefore\ x=13k,\quad y=-7k$　　$\therefore\ \dfrac{x+2y}{x-2y}=\dfrac{13k-14k}{13k+14k}=-\dfrac{1}{27}$　(答)

268. $\sqrt{25x^2-y^2}=y-x$ ノ兩邊ヲ二乘スレバ　$25x^2-y^2=y^2+x^2-2xy$

$\therefore\ (3x+y)(4x-y)=0$　　$\therefore\ y=-3x$ 又ハ $y=4x$

(i) $y=-3x$ ナルトキハ原方程式ノ　左邊$=\sqrt{25x^2-9x^2}=\sqrt{16x^2}$

右邊$=y-x=-3x-x=-4x$ 故ニ $x<0$ デアルトキニ成立ツ。

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x}=\dfrac{4}{3x},\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3x}=\dfrac{2}{3x}$

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}:\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=2:\sqrt{2}$

(ii) $y=4x$ ナルトキハ原方程式ノ　左邊$=\sqrt{25x^2-16x^2}=\sqrt{9x^2}$

右邊$=y-x=4x-x=3x$,　故ニ $x>0$ ナルトキニ成立ツ。

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4x}=\dfrac{3}{4x},\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4x}=\dfrac{5}{4x}$

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}:\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=\sqrt{3}:\sqrt{5}$

(答)　$\sqrt{2}$ 又ハ $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

269. $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}=k$ トスレバ

$y+z=(b-c)k,\quad z+x=(c-a)k,\quad x+y=(a-b)k$

$\therefore\ x+y+z=0$　　$\therefore\ x=(c-b)k,\quad y=(a-c)k,\quad z=(b-a)k$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}=\dfrac{\sqrt{\{(c-b)^2+(a-c)^2+(b-a)^2\}}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}k=k$

270. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)=abck$ トスレバ

$y+z=bck,\quad z+x=ack,\quad x+y=abk$

$\therefore\ x+y+z=\dfrac{(ab+ac+bc)}{2}k \qquad \therefore\ x=\dfrac{(ab+ac-bc)k}{2}$

$y=\dfrac{(ab-ac+bc)k}{2},\quad z=\dfrac{(-ab+ac+bc)k}{2}$

$\therefore\ y-z=a(b-c)k \qquad \therefore\ \dfrac{y-z}{a(b-c)}=k$

同様ニシテ $\dfrac{z-x}{b(c-a)}=k,\quad \dfrac{x-y}{c(a-b)}=k$

$\therefore\ \dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{x-y}{c(a-b)}$

271. $x=cy+bz\cdots\cdots\cdots(1) \qquad y=az+cx\cdots\cdots\cdots(2)$

$z=bx+ay\cdots\cdots\cdots(3)$

(3) ヲ (1), (2) ニ代入スレバ $x=cy+b(bx+ay)\cdots\cdots\cdots(4)$

$y=a(bx+ay)+cx\cdots\cdots\cdots(5)$

$(4)\times x-(5)\times y \qquad x^2-y^2=b^2x^2-a^2y^2 \qquad \therefore\ x^2(1-b^2)=y^2(1-a^2)$

$a^2\neq 1,\quad b^2\neq 1$ ナル故 $\dfrac{x^2}{1-a^2}=\dfrac{y^2}{1-b^2}$

同様ニシテ $\dfrac{y^2}{1-b^2}=\dfrac{z^2}{1-c^2} \qquad \therefore\ \dfrac{x^2}{1-a^2}=\dfrac{y^2}{1-b^2}=\dfrac{z^2}{1-c^2}$

272. 三邊ノ長サヲ a, b, c トシ，題意ニヨリ

$\dfrac{a(b+c)}{27}=\dfrac{b(c+a)}{32}=\dfrac{c(a+b)}{35}=k^2$ トスレバ

$ab+ac=27k^2,\quad bc+ab=32k^2,\quad ca+bc=35k^2$

$\therefore\ ab+ac+bc=47k^2 \qquad \therefore\ bc=20k^2,\quad ca=15k^2,\quad ab=12k^2$

$\therefore\ abc=60k^3 \qquad \therefore\ a=3k,\quad b=4k,\quad c=5k$

$\therefore\ a:b:c=3:4:5$ (答)

273. $y=l\left(kx+\dfrac{k'}{x}\right)$ トスル。[k, k', l ハ常數]

$\therefore\ y=lkx+\dfrac{lk'}{x}$ lk, lk' ハ常數ナル故，夫々 m, m' トスレバ

$y=mx+\dfrac{m'}{x}\cdots\cdots\cdots(1)$

$x=2$ ナルトキ $y=3 \qquad \therefore\ 3=2m+\dfrac{m'}{2}\cdots\cdots\cdots(2)$

$x=3$ ナルトキ $y=5 \qquad \therefore\ 5=3m+\dfrac{m'}{3}\cdots\cdots\cdots(3)$

(2), (3) ヨリ $m=\dfrac{9}{5},\quad m'=-\dfrac{6}{5}$

故ニ x, y ノ關係式ハ $y=\dfrac{9}{5}x-\dfrac{6}{5x} \qquad \therefore\ 5y=9x-\dfrac{6}{x}$ (答)

頁 31.

274. $y=kx^3,\quad z=\dfrac{l}{\sqrt{x}}$ [k, l ハ常數]

$\therefore\ y+z=kx^3+\dfrac{l}{\sqrt{x}},\quad x=1$ ナルトキ $y+z=5$ ナル故

$5=k+l\cdots\cdots\cdots(1) \qquad$ 又 $y+z^2=kx^3+\dfrac{l^2}{x}$

$x=2$ ナルトキ $y+z^2=26$ ナル故 $26=8k+\dfrac{l^2}{2}\cdots\cdots\cdots(2)$

(1), (2) ヨリ $l=2,\ k=3;\ l=14,\ k=-9$ ヲ得ル。

$\sqrt{y}\,z=\sqrt{kx^3}\dfrac{l}{\sqrt{x}}$ ニ於テ $k=3,\ l=2$ トスレバ

$\sqrt{y}\,z=\sqrt{3x^3}\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 之ヲ 2 ニ等シト置ケバ

$\therefore\ \sqrt{3x^3}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=2\cdots\cdots\cdots(3) \qquad \therefore\ 3x^2=1$

$\therefore\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ コノ値ハ (3) ヲ滿足スル。

$k=-9,\ l=14$ トスレバ $\sqrt{y}\,z=\sqrt{-9x^3}\dfrac{14}{\sqrt{x}}$

$\therefore\ \sqrt{-9x^3}\dfrac{14}{\sqrt{x}}=2\cdots\cdots(4) \qquad \therefore\ x=\pm\dfrac{i}{21}$

之ハ (4) ヲ滿足スル。 (答) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\dfrac{i}{21}$

275. (i) $z=\dfrac{k(y^2+3y+2a)}{x^2}$ [k ハ常數]

$x=3,\ y=1$ ノトキ $z=\dfrac{1}{9}$ ナル故 $\dfrac{1}{9}=\dfrac{k(1+3+2a)}{9}$

$\therefore\ k(4+2a)=1\cdots\cdots\cdots(1)$

$x=-2,\ y=5$ ノトキ $z=\dfrac{19}{4}$ ナル故 $\dfrac{19}{4}=\dfrac{k(25+15+2a)}{4}$

$\therefore\ k(40+2a)=19$ ……(2)

(1), (2) ヨリ $a=-1,\ k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ z=\dfrac{y^2+3y-2}{2x^2}$ (答)

(ii) $x=7,\ z=\dfrac{3}{14}$ ナルトキハ $\dfrac{3}{14}=\dfrac{y^2+3y-2}{2\times 49}$

$\therefore\ y^2+3y-23=0$

$\therefore\ y=\dfrac{-3\pm\sqrt{101}}{2}=\dfrac{-3\pm 10.0498\cdots}{2}=3.524\cdots$ 又ハ $-6.524\cdots$

y ノ正値ヲトツテ $y=3.524$ (答)

276. $\dfrac{a^{n+1}}{x^n}=\dfrac{b^{n+1}}{y^n}=\dfrac{c^{n+1}}{z^n}=x+y+z=k$ トスレバ

$a^{n+1}=kx^n,\ b^{n+1}=ky^n,\ c^{n+1}=kz^n$

$\therefore\ a^{\frac{n+1}{n}}=k^{\frac{1}{n}}x,\ b^{\frac{n+1}{n}}=k^{\frac{1}{n}}y,\ c^{\frac{n+1}{n}}=k^{\frac{1}{n}}z$

$\therefore\ a^{\frac{n+1}{n}}+b^{\frac{n+1}{n}}+c^{\frac{n+1}{n}}=k^{\frac{1}{n}}(x+y+z)=k^{\frac{n+1}{n}}$

$\therefore\ \left(a^{\frac{n+1}{n}}+b^{\frac{n+1}{n}}+c^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}=\left(k^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}=k$

277. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{k}{x+y}$ [k ハ常數]

$\therefore\ x^2+2xy+y^2=kxy \qquad \therefore\ (x-y)^2=(k-4)xy$

又 $x^2+y^2=(k-2)xy \qquad \therefore\ (x-y)^2=\dfrac{k-4}{k-2}(x^2+y^2)$

$\dfrac{k-4}{k-2}$ ハ常數ナル故 $(x-y)^2$ ハ x^2+y^2 ニ正比例スル。

278. 甲, 乙ノ歳入ヲ夫々 $9x$ 圓, $7x$ 圓トスレバ甲ノ毎年ノ出費ハ $\dfrac{36}{5}x$ 圓デ, 乙ノ出費ハ $\left(\dfrac{36}{5}x+180\right)$ 圓 デアル。故ニ

$5\left(\dfrac{36}{5}x+180\right)=35x+1000 \qquad \therefore\ x=100 \qquad \therefore\ 7x=700$

(答) 700 圓

279. 最初甲ハ x 圓, 乙ハ y 圓出資シタトスレバ次ノ實際ノ出資ハ甲, 乙共ニ $\dfrac{x+y}{4}$ 圓 デアル。甲, 乙ノ負擔ノ比ガ 1 : 5 ナラバ

甲ノ出資全額ハ $x+\dfrac{x+y}{12}$ 圓 デ乙ノ出資全額ハ $\dfrac{5(x+y)}{12}+y$ 圓デアル。

$\therefore\ \dfrac{5}{8}\left\{\dfrac{x+\dfrac{x+y}{4}}{y+\dfrac{x+y}{4}}\right\}=\dfrac{x+\dfrac{x+y}{12}}{y+\dfrac{5(x+y)}{12}} \qquad \therefore\ (x-3y)(7x-5y)=0$

$\therefore\ x:y=3:1$ 又ハ $x:y=5:7$ (答) 3 : 1 又ハ 5 : 7

頁 32.

280. 最初ノ銅ヲ x kg トスレバ, 初メ混合シタトキノ量ハ $(x+3)$ kg デ, 之カラ 9 kg ヲ取去ツタ中ノ銅ハ $\left(x-\dfrac{9x}{x+3}\right)$kg,

亞鉛ハ $\left(3-\dfrac{3\times 9}{x+3}\right)$kg デアル。

$\therefore\ x-\dfrac{9x}{x+3}:3-\dfrac{27}{x+3}+9=5:7 \qquad \therefore\ 7x^2-102x-45=0$

$\therefore\ x=15$ 又ハ $-\dfrac{3}{7}$ [負ハ捨テル] (答) 15 kg

281. 甲ヨリ x g 乙ヨリ y g ヲトレバ $\dfrac{10x}{100}+\dfrac{90y}{100}=\dfrac{30(x+y)}{100}$

$\therefore\ x=3y$

然ルニ $0<x\leqq 1000,\ 0<y\leqq 200$ ナル故最モ多量ニ作ルニハ $y=200$, $x=600$ トスル。 (答) 甲 600 g, 乙 200 g

282. 南北兩軍ノ戰死者數ヲ夫々 ax 人, bx 人 トシ, 生存者數ヲ cy 人, dy 人 トスレバ $ax+cy:bx+dy=l:m$

$\therefore\ l(bx+dy)=m(ax+cy) \qquad \therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{ld-mc}{ma-lb}$

$\therefore\ \dfrac{ax}{cy}=\dfrac{a(ld-mc)}{c(ma-lb)} \qquad \dfrac{bx}{dy}=\dfrac{b(ld-mc)}{d(ma-lb)}$

(答) 南軍 $\dfrac{a(ld-mc)}{c(ma-lb)}$, 北軍 $\dfrac{b(ld-mc)}{d(ma-lb)}$

283. 速サヲ毎時 x km, がそりんノ量ヲ y kg, 航行時間ヲ t トスレバ

$y=kx^2t$, $x=20$, $t=1$ ナルトキ $y=4$ ナル故 $4=20^2k$ $\therefore\ k=\frac{1}{100}$

$\therefore\ y=\frac{1}{100}x^2t$, 之ニ $t=\frac{50}{x-5}$ ヲ代入スレバ

$y=\frac{50x^2}{100(x-5)}=\frac{x^2}{2(x-5)}$ $\therefore\ x^2-2xy+10y=0$

x ガ實數 ナルタメノ條件ハ

$y^2-10y\geqq 0$ $\therefore\ y(y-10)\geqq 0$, $y>0$ ナル故 $10\leqq y$

故ニ y ノ最小値ハ 10 デ, 之ニ對應スル x ノ値ハ $x=10$

(答) 速サ毎時 10 km, がそりんノ量 10 kg

284. AC 間ハ 60浬+30浬=90浬, 陸岸ニ對シテ一定ノ速サデ溯航シ 10 時間ヲ要シタノデアルカラ時速ハ 90浬÷10=9浬 デアル。

AB 間ハ水流毎時 2 浬デアルカラ船ノ眞ノ速サハ 11 節デ, CB 間ハ水流毎時 3 浬デアルカラ船ノ眞ノ速サハ 12 節デアル。

燃料ハ船ノ速サノ三乘ニ比例スルカラ, 船ノ速サヲ v 節, 石炭ノ量ヲ x 噸トスレバ單位時間ニツキ $x=kv^3$ (k ハ常數)

又 AB 間及ビ BC 間ノ溯航時間ハ夫々 $\frac{60}{9}$ 時, $\frac{30}{9}$ 時 デアル。故ニ AB 間ノ所要石炭ハ $k\times 11^3\times\frac{60}{9}$, BC 間ノ所要石炭ハ $k\times 12^3\times\frac{30}{9}$

$\therefore\ k\times 11^3\times\frac{60}{9}+k\times 12^3\times\frac{30}{9}=16$ $\therefore\ k=\frac{12}{10975}$

故ニ 10 節ノトキノ毎時ノ所要石炭量ヲ y 噸トスレバ

$y=k\times 10^3=\frac{12}{10975}\times 10^3=1.09\cdots\cdots$ (答) 1.09 噸

頁 33.

285. 壓力ヲ x kg, 平面ノ面積ヲ y 平方米, 風速ヲ毎秒 z m トスレバ

$x=kyz^2$ [k ハ常數]

$x=30$, $y=1$, $z=20$ ナル故 $30=k\times 20^2$ $\therefore\ k=\frac{3}{40}$

$\therefore\ x=\frac{3}{40}yz^2$, 故ニ求メル風壓ハ

$z=45$, $y=4$ トシテ $x=\frac{3}{40}\times 4\times 45^2=607.5$ (答) 607.5 kg

286. 甲樽ノ水ヲ x 立, 乙樽ノ酒ヲ y 立 トスレバ, 次ノ表ヲ得ル。

	甲		乙	
	水	酒	水	酒
乙ノ酒ヲ$\frac{1}{3}$甲ニ入レタトキ	x	$\frac{1}{3}y$	0	$\frac{2}{3}y$
次ニ甲ノ$\frac{1}{3}$ヲ乙ニ入レタトキ	$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{9}y$	$\frac{1}{3}x$	$\frac{7}{9}y$
次ニ乙ノ$\frac{1}{3}$ヲ甲ニ入レタトキ	$\frac{7}{9}x$	$\frac{13}{27}y$	$\frac{2}{9}x$	$\frac{14}{27}y$

第三回目ニ移シタルトキ甲ノ中ノ水ト酒トハ等量ナル故

$\frac{7}{9}x=\frac{13}{27}y$ $\therefore\ 21x=13y\cdots\cdots\cdots(1)$

コノトキノ乙ノ中ノ水ト酒トノ割合ハ

$\frac{2}{9}x:\frac{14}{27}y=6x:14y=3x:7y\cdots\cdots\cdots(2)$

(2) ニ (1) ヲ代入スレバ $3x:7y=13:49$ (答)

[23] 級數

287. 初項ヲ a, 公差ヲ d トスレバ $\frac{4}{2}(2a+3d)=68$

$\therefore\ 2a+3d=34\cdots\cdots\cdots(1)$

$\frac{5}{2}\{2(a+5d)+4d\}=30$ $\therefore\ a+7d=6\cdots\cdots\cdots(2)$

(1), (2) ヨリ $a=20$, $d=-2$

求メル和ヲ S トスレバ

$S=\frac{16}{2}\{2(a+14d)+15d\}=8(20\times 2-43\times 2)=-368$ (答)

288. $100\div 17=5\cdots\cdots 15$, $2000\div 17=117\cdots\cdots 11$

故ニ初項 102, 末項 1989, 項數 $117-5=112$ ナル等差級數ノ和ガ求メルモノデアル。

$\frac{112}{2}(102+1989)=117096$ (答)

289. 200 ヨリ小ナル正ノ整数中ノ 3 ノ倍数, 5 ノ倍数, 7 ノ倍数ノ和ヲ夫々 S_1, S_2, S_3 トスレバ

$S_1=\frac{66}{2}(3+198)=6633,\qquad S_2=\frac{39}{2}(5+195)=3900$

$S_3=\frac{28}{2}(7+196)=2842$

次ニ 3, 5 ノ公倍数, 3, 7 ノ公倍数, 5, 7 ノ公倍数, 3, 5, 7 ノ公倍数ノ和ヲ夫々 S', S'', S''', S_A トスレバ

$S'=\frac{13}{2}(15+195)=1365,\qquad S''=\frac{9}{2}(21+189)=945,$

$S'''=\frac{5}{2}(35+175)=525,\qquad S_A=105$

求メル總和ハ $S_1+S_2+S_3-(S'+S''+S''')+S_A=10645$ (答)

頁 34.

290. 初項ヲ a, 項数ヲ n トスレバ

$a+(n-1)\times3=10a$……(1) $\qquad \frac{n}{2}(a+10a)=440$……(2)

(1), (2) ヨリ $a=5$ 又ハ $a=-\frac{16}{3}$

$a=5$ ノトキ $n=16$

$a=-\frac{16}{3}$ ノトキ $n=-15$ (題意ニ適セヌ)

(答) 初項 5, 公差 3, 項数 16

291. 公差ヲ d トスレバ $\frac{4}{2}\{26+3d\}=\frac{10}{2}\{26+9d\}$ $\quad\therefore\ d=-2$

第 n 項マデノ和ヲ S トスレバ

$S=\frac{n}{2}\{26-(n-1)\times2\}=n(14-n)=49-(n-7)^2$

故ニ $n=7$ ノトキ S ハ最大トナル。 (答) 第 7 項マデ

292. $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$ ナル故

$\frac{n}{2}(n+1)>1000$ ヲ満足スル n ノ最小正整数値ヲ求メレバヨイ。

$\left(n+\frac{1+\sqrt{8001}}{2}\right)\left(n-\frac{\sqrt{8001}-1}{2}\right)>0,$

上式ヨリ $n-\frac{\sqrt{8001}-1}{2}>0 \qquad \therefore\ n>\frac{\sqrt{8001}-1}{2}=44.\cdots\cdots$

(答) 45

293. 第 m 項マデノ和ハ $pm+qm^2$,

第 $(m-1)$ 項マデノ和ハ $p(m-1)+q(m-1)^2$,

故ニ第 m 項ハ $p\{m-(m-1)\}+q\{m^2-(m-1)^2\}=p+q(2m-1)$ (答)

294. 第五項マデノ和 $5(16+5)=105$

第四項マデノ和 $4(16+4)=80$

故ニ求メル第五項ハ $105-80=25$ (答)

295. $S_m=\frac{n\{2m+(2m-1)(n-1)\}}{2}=mn^2-\frac{n(n-1)}{2}$

所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\left\{1\cdot n^2-\frac{n(n-1)}{2}\right\}+\left\{2n^2-\frac{n(n-1)}{2}\right\}+\cdots\cdots+\left\{pn^2-\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

$$=n^2(1+2+\cdots\cdots+p)-\frac{pn(n-1)}{2}=\frac{n^2p(p+1)}{2}-\frac{pn(n-1)}{2}$$

$$=\frac{pn(pn+1)}{2}\quad\text{(答)}$$

296. 初項ヲ a, 公差ヲ d トスレバ $S_1=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$S_2=\frac{2n}{2}\{2a+(2n-1)d\},\qquad S_3=\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)d\}$

$\therefore\ S_2^2-S_1S_3=n^2\{2a+(2n-1)d\}^2-\frac{3}{4}n^2\{2a+(n-1)d\}\{2a+(3n-1)d\}$

$=\frac{n^2}{4}[\{2a+(2n-1)d\}^2+3n^2d^2]>0\quad[a\neq0,\ d\neq0]$

$\therefore\ S_2^2>S_1S_3$

297. 初項ヲ a トスレバ偶数番目ノ項ハ初項ガ $a+7$, 公差 14, 項数 75 デアルカラソノ和ハ

$$\frac{75}{2}\{2(a+7)+74\times14\}=75(a+525)\cdots\cdots\cdots(1)$$

奇数番目ノ項ハ初項ガ a, 公差 14, 項数 75 ナル故, ソノ和ハ

$$\frac{75}{2}\{2a+74\times14\}=75(a+518)\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)−(2) $75(a+525)-75(a+518)=525$ (答)

頁 35.

298. 社員ヲ x 人トスレバ 5 圓宛ノ等差ヲツケタトキノ賞與總額ハ

$$S=\frac{x}{2}\{2\times500-(x-1)\times5\}=\frac{x}{2}(1005-5x)(\text{圓})$$

4 圓宛ノ等差ヲツケタトキハ

$$S'=\frac{x}{2}\{2\times500-(x-1)4\}=\frac{x}{2}(1004-4x)(\text{圓})$$

$$\therefore\ \frac{x}{2}(1005-5x)+1040=\frac{x}{2}(1004-4x)-88$$

$$\therefore\ x^2-x-2256=0 \qquad \therefore\ x=48 \quad \text{又ハ} \quad x=-47\ (\text{捨テル})$$

$$\therefore\ S=\frac{48}{2}(1005-5\times48)=18360$$

故ニ使用セル金額ハ 18360圓+1040圓=19400圓

又三十番目ノ人ノ增加額ハ

$$(500-29\times4)-(500-29\times5)=29(\text{圓})$$

(答) 48人, 19400圓, 29圓ノ增加

299. 調和級數ノ第 p 項ヲ $\dfrac{1}{a+(p-1)d}$ トスレバ

$$\text{第 } m \text{ 項}=\frac{1}{a+(m-1)d}=n\cdots(1) \qquad \text{第 } n \text{ 項}=\frac{1}{a+(n-1)d}=m\cdots(2)$$

$$\text{第}(m+n)\text{項}=\frac{1}{a+(m+n-1)d}\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) ヨリ $a=d=\dfrac{1}{mn}\cdots\cdots\cdots(4)$

(4) ヲ (3) ニ代入スレバ, 第$(m+n)$項$=\dfrac{1}{a+(m+n-1)d}=\dfrac{mn}{m+n}$ (答)

300. a, b, c, d ハ調和級數ヲナス故 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=r$ トスレバ

$$b=\frac{a}{1+ar},\quad c=\frac{a}{1+2ar},\quad d=\frac{a}{1+3ar}$$ [コノ分母ハ何レモ正]

$$bc-ad=-\frac{2a^4r^2}{(1+ar)(1+2ar)(1+3ar)}<0$$

$$b+c-(a+d)=-\frac{2a^2(2+3ar)r^2}{(1+ar)(1+2ar)(1+3ar)}<0$$

$$\therefore\ bc<ad,\quad b+c<a+d$$

301. a, b, c ガ調和級數ヲナスカラ $b=\dfrac{2ac}{a+c}$

$$\therefore\ \frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}-4=\frac{a+\dfrac{2ac}{a+c}}{2a-\dfrac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\dfrac{2ac}{a+c}}{2c-\dfrac{2ac}{a+c}}-4$$

$$=\frac{3}{2ac}(a-c)^2\geqq0$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geqq4$$

302. 初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ

$$a(1+r+r^2)=14\cdots\cdots\cdots(1) \qquad a^2(1+r^2+r^4)=532\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)÷(1) $a(1-r+r^2)=38\cdots\cdots\cdots(3)$

(3)÷(1) $\dfrac{1-r+r^2}{1+r+r^2}=\dfrac{19}{7}$ $\therefore\ 6r^2+13r+6=0$

$$\therefore\ r=-\frac{3}{2} \quad \text{又ハ} \quad r=-\frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} r=-\dfrac{3}{2}\ \text{ノトキ}\ a=8,\ \text{第 5 項}=8\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)^4=\dfrac{81}{2} \\ r=-\dfrac{2}{3}\ \text{ノトキ}\ a=18,\ \text{第 5 項}=18\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{32}{9} \end{array}\right\}\ (\text{答})$$

303. 初項ヲ a, 公比ヲ r トシ, 項數ヲ $2n$ トスレバ

$$\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=\frac{6560}{2187}\cdots\cdots\cdots(1) \qquad \frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{80}{27}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)÷(2) $1+r^n=\dfrac{82}{81}$ $\therefore\ r^n=\dfrac{1}{81}$ $\therefore\ r<1$

故ニ a (初項) ガ最大項デアル。$a=2,\ r^n=\dfrac{1}{81}$ ヲ (2) ニ代入スレバ

$$\frac{2\left(1-\dfrac{1}{81}\right)}{1-r}=\frac{80}{27} \qquad \therefore\ r=\frac{1}{3}$$

依ツテ $\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{81}$ $\therefore\ n=4$ $\therefore\ 2n=8$ (答) 8

304. 甲級數ノ和ヲ S, 乙級數ノ和ヲ S′ トシ, 兩級數ノ項數ヲ n, 公比ヲ夫々 r, r' トスレバ

$$S=1+r+\cdots+r^{n-1},\qquad S'=1+r'+\cdots+r'^{n-1}$$

$$r^{n-1}=a,\qquad r'^{n-1}=\frac{1}{a}\quad(r>0,\ r'>0)$$

$$\therefore\ (rr')^{n-1}=1\qquad\therefore\ rr'=1\qquad\therefore\ r'=\frac{1}{r}$$

$$\therefore\ r^{n-1}S'=r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+r+1=S$$

$$\therefore\ \frac{S}{S'}=r^{n-1}=a$$

頁 36.

305. 初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ

$$A=a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})$$

$$B=a(1+r+\cdots+r^{n-1}+r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{2n-1})=A(1+r^n)$$

$$C=a(1+r+\cdots+r^{n-1}+r^n+\cdots+r^{2n-1}+r^{2n}+\cdots+r^{4n-1})$$

$$=A+Ar^n+Ar^{2n}+Ar^{3n}$$

$$=A(1+r^n+r^{2n}+r^{3n})=A(1+r^n)(1+r^{2n})=B(1+r^{2n})$$

$$\therefore\ C-B=Br^{2n}\qquad\therefore\ A^2(C-B)=A^2Br^{2n}$$

又 $B-A=Ar^n$ $\therefore\ B(B-A)^2=A^2Br^{2n}$

$$\therefore\ A^2(C-B)=B(B-A)^2$$

306. 各項ヲ a, ar, ar^2, ar^3 トスレバ $A=\frac{a(1-r^4)}{1-r}$, $B=\frac{a^2(1-r^8)}{1-r^2}$

($r^2\neq1$ トス) $x=ar+ar^2$ トスレバ

$$x^2+\frac{B}{A}x-\frac{1}{2}(A^2-B)=(ar+ar^2)^2+\frac{a(1+r^4)}{1+r}(ar+ar^2)-\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2(1-r^4)^2}{(1-r)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{a^2(1-r^8)}{1-r^2}\right\}=a^2r(1+r^2)(1+r+r^2)-a^2r(1+r^2)(1+r+r^2)=0$$

$r=1$ ノトキハ, $A=4a$, $B=4a^2$, 第二項ト第三項トノ和ハ $2a$ デアル。

$$\therefore\ x^2+\frac{B}{A}x-\frac{1}{2}(A^2-B)=(2a)^2+a\times2a-\frac{1}{2}(16a^2-4a^2)=0$$

$x=-1$ ノトキ $A=0$ トナルカラ $\frac{B}{A}$ ハ無意味トナル。

故ニ公比ガ -1 ナラザルトキハ第二項ト第三項トノ和ハ

$x^2+\frac{B}{A}x-\frac{1}{2}(A^2-B)=0$ ノ根デアル。

307. x 箇ノ黴菌ガ 1 時間後ニハ $a+bx$, 2 時間後ニハ $a+b\{a+bx\}$

$=a+ab+b^2x$, 3 時間後ニハ $a+b\{a+ab+b^2x)=a+ab+ab^2+b^3x$

故ニ n 時間後ニハ $a+ab+ab^2+\cdots+ab^{n-1}+b^nx=\frac{a(1-b^n)}{1-b}+b^nx$

(答)

308. 三數ヲ $a-d$, a, $a+d$ トスレバ $a-d+a+a+d=69$ $\therefore\ a=23$

$$\therefore\ (23-d+6)(23+d+16)=(23+7)^2\qquad\therefore\ d^2+10d-231=0$$

$\therefore\ d=11$ 又ハ -21, 故ニ求メル三數ハ 12, 23, 34; 44, 23, 2 (答)

309. 等差中項 $A=\frac{a+b}{2}$, 等比中項 $G=\pm\sqrt{ab}$, 調和中項 $H=\frac{2ab}{a+b}$

(i) $G>0$ ノトキ $A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq0$

$$G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geqq0$$

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore\ a\neq b\ \text{ナルトキ} & A>G>H\\ a=b\ \text{ナルトキ} & A=G=H\end{array}\right\}\ (\text{答})$$

(ii) $G<0$ ノトキ

$$A-H=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geqq0$$

$$H-G=\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{ab}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a+b}>0$$

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore\ a\neq b\ \text{ナルトキ} & A>H>G\\ a=b\ \text{ナルトキ} & A=H>G\end{array}\right\}\ (\text{答})$$

310. $\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=r$ ト置ケバ $c=br$, $d=br^2$, 又 $a=2b-c=b(2-r)$

又 $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{d}$ ニ代入スレバ $\frac{2}{br}=\frac{1}{b(2-r)}+\frac{1}{br^2}$

$$\therefore\ (3r-2)(r-1)=0$$

(i) $r=1$ ナルトキハ $b=c=d=a=864$

(ii) $r=\frac{2}{3}$ ナルトキハ $\frac{a}{12}=\frac{b}{9}=\frac{c}{6}=\frac{d}{4}=k$ ト置クコトガ出來

$a=12k,\ b=9k,\ c=6k,\ d=4k,$ 故ニ $a,\ b,\ c,\ d$ ノ最小公倍數ハ $36k$

$\therefore\ 36k=864 \quad \therefore\ k=24 \quad \therefore\ a=12\times24=288,$

$b=9\times24=216,\ c=6\times24=144,\ d=4\times24=96$

(答) $a=b=c=d=864;\ a=288,\ b=216,\ c=144,\ d=96$

頁 37.

311. 初項ハ $a+b-c$

第二項ハ $2a+b-c^2$

第三項ハ $3a+b-c^3$

……

第 p 項ハ $pa+b-c^p$

コノ和ヲ S トスレバ

$$S=(1+2+\cdots+p)a+pb-(c+c^2+\cdots+c^p)$$

$$=\frac{ap(p+1)}{2}+pb-\frac{c(c^p-1)}{c-1}\quad[\text{但シ } c\neq1]$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{ap^2+(a+2b)p}{2}-\frac{c(c^p-1)}{c-1}\\ &c=1 \text{ ナルトキハ } S=\frac{ap^2+(a+2b)p}{2}-p\end{aligned}\right\}\ (\text{答})$$

312. 初項ヲ a, 公比ヲ r, 求メル和ヲ S トスレバ

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}=p\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \frac{ar^n}{1-r}=q\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$S=\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\times(1+r^n)\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(1)\div(2)\quad \frac{1-r^n}{r^n}=\frac{p}{q}\quad\therefore\ r^n=\frac{q}{p+q}\quad\therefore\ 1+r^n=\frac{p+2q}{p+q}$$

$$\therefore\ S=p\times\frac{p+2q}{p+q}=\frac{p(p+2q)}{p+q}\qquad(\text{答})$$

313. 原級數ノ初項ヲ a, 公比ヲ r トシソノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{a}{1-r},\qquad |r|<1$$

各項ノ二乘, 三乘ノ和ヲ S_1, S_2 トスレバ

$$S_1=\frac{a^2}{1-r^2},\qquad S_2=\frac{a^3}{1-r^3}$$

題意ニヨリ $\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{2a}{1-r}\quad\therefore\ \frac{a}{1+r}=2\cdots\cdots\cdots(1)$

$$\frac{a^3}{1-r^3}=\frac{3a}{1-r}\qquad\therefore\ \frac{a^2}{1+r+r^2}=3\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ $\frac{4(1+r)^2}{1+r+r^2}=3\quad\therefore\ r^2+5r+1=0$

$|r|<1$ ナル故 $r=\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$ (答)

314. $0.5\dot{2}3\dot{4}=\frac{5234-5}{9990}=\frac{5229}{9990}=\frac{581}{1110}$ (答)

315. 原式 $=10\times(10^2)^{\frac{1}{2\times2}}\times\cdots\times(10^n)^{\frac{1}{n\times2^{n-1}}}\times\cdots\cdots\cdots$

$$=10^{1+2\times\frac{1}{2\times2}+\cdots\cdots+n\times\frac{1}{n\times2^{n-1}}+\cdots\cdots}=10^{1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots}=10^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=10^2$$

$=100$ (答) 100

316. 求メル數ヲ x トスレバ

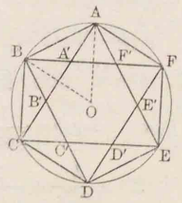
$1.\dot{2}\dot{5}x-1.25x=1\quad\therefore\ (1.\dot{2}\dot{5}-1.25)x=1$

$\therefore\ 0.00\dot{2}\dot{5}x=1\quad\therefore\ \frac{25}{9900}x=1\quad\therefore\ x=396$ (答)

317. $MA+NB+\cdots+TY=\frac{l}{n(n-1)}+\frac{2l}{n(n-1)}+\cdots+\frac{(n-1)l}{n(n-1)}$

$$=\frac{l}{n(n-1)}\{1+2+\cdots+(n-1)\}$$

$$=\frac{l}{n(n-1)}\times\frac{(n-1)n}{2}=\frac{l}{2}\quad(\text{答})$$



318. 原正六角形ヲ ABCDEF トシ, 頂點ヲ一ツ置キニ結ビ付ケテ生ズル新正六角形ヲ A′B′C′D′E′F′ トスル。正六

角形ノ中心ヲ O トスレバ △OAB ハ正三角形デ, A′ ハソノ重心デアル。

△OAB ノ中線ノ長サハ $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}a=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore\ A'B'=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{1}{\sqrt{3}}a$ 即チ $b=\frac{1}{\sqrt{3}}a$

同様ニシテ $c=\frac{1}{\sqrt{3}}b=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2a,$

$\therefore\ b+c+d+\cdots=\frac{1}{\sqrt{3}}a+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2a+\cdots$

$=\dfrac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{a}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}a$ (答)

頁 38.

[24] 對　　數

319. 假定ニヨリ $2\log_a y=\log_a x+\log_a z$

$\therefore\ \log_a y^2=\log_a xz \qquad \therefore\ y^2=xz$

320. 等比級數ノ初項ヲ a, 公比ヲ k トスレバ

$ak^{p-1}=x,\quad ak^{q-1}=y,\quad ak^{r-1}=z$

$\therefore\ \log x=\log a+(p-1)\log k,\quad \log y=\log a+(q-1)\log k$

$\log z=\log a+(r-1)\log k$

$\therefore\ (q-r)\log x+(r-p)\log y+(p-q)\log z$

$=(q-r)\log a+(q-r)(p-1)\log k+(r-p)\log a+(r-p)(q-1)\log k$

$+(p-q)\log a+(p-q)(r-1)\log k=0$

321. $b^2=ac$ 兩邊ノ對數ヲトツテ $2\log_x b=\log_x a+\log_x c$

然ルニ $\log_x b=\frac{1}{\log_b x},\quad \log_x a=\frac{1}{\log_a x},\quad \log_x c=\frac{1}{\log_c x}$

$\therefore\ \frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\frac{2}{\log_b x}$

322. $5\times5^2\times5^3\times\cdots\times5^n>10^{15}$ ヲ滿足スル n ノ最小ナル正ノ整數値ヲ求メルノデアル。

即チ $5^{\frac{n(n+1)}{2}}>10^{15}$, 兩邊ノ對數ヲトツテ $\frac{n(n+1)}{2}\log 5>15$

$\log 5=1-\log 2=0.6990 \quad \therefore\ \frac{n(n+1)}{2}>\frac{15}{0.6990} \quad \therefore\ n(n+1)>42.9\cdots$

コノ式ヲ滿足スル n ノ正整數値ノ最小ナルモノハ 7 デアル。

(答) 7

323. 所要ノ因數ヲ n 箇トスレバ

$2\times2^2\times2^4\times2^8\times\cdots\times2^{2^{(n-1)}}>10^9$

然ルニ $2^{1+2+4+8+\cdots+2^{(n-1)}}=2^{2^n-1}$

$\therefore\ 2^{2^n-1}>10^9$

兩邊ノ對數ヲトリ $(2^n-1)\log2>9,\quad \log2>0$ ナル故

$2^n>1+\frac{9}{\log 2} \qquad \therefore\ 2^n>30.9\cdots$

而シテ $2^4=16,\ 2^5=32$ 故ニ $n=5$ ヲ取ル。 (答) 5 箇

324. 第 n 項マデ取ルトスレバ

$\dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^n-1}{\frac{5}{4}-1}>396 \qquad \therefore\ \left(\frac{5}{4}\right)^n-1>99 \qquad \therefore\ \left(\frac{5}{4}\right)^n>100$

$\therefore\ n(\log 5-\log 4)>2 \qquad \therefore\ n(1-3\log 2)>2 \qquad \therefore\ 0.097n>2$

$\therefore\ n>\frac{2000}{97}=20.\cdots \qquad \therefore\ n=21$ (答) 21 項

325. $N=(1.08)^{30}$ トスレバ

$\log N=30\log 1.08=30\log\frac{108}{100}=30(\log 108-2)=30\{\log(2^2\times3^3)-2\}$

$=30\{2\log 2+3\log 3-2\}=30\times\{0.60206+1.43136-2\}$

$=1.00260>\log 10 \qquad \therefore\ N>10$ (答) 10 ヨリ大

326. 元金ヲ a 圓, 期間ヲ n 年トスレバ $a\times1.04^n=20a \quad \therefore\ 1.04^n=20$

$\therefore\ n\log 1.04=\log 20 \qquad \therefore\ n\log(2^3\times0.13)=\log(2\times10)$

$\therefore\ n(3\log 2+\log 0.13)=\log 2+1$

$\therefore\ n(0.9030+\bar{1}.1139)=1.3010 \qquad \therefore\ n=\dfrac{13010}{169}=76.98\cdots$

(答) 約 77 年

頁 39.

327. $N=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{80}$ トスレバ

$N=2^{81}-1 \qquad \therefore\ N+1=2^{81}$

$\therefore\ \log(N+1)=81\log 2=24.3810$

$\therefore\ N+1=10^{24.3810}=10^{24}\times 10^{0.3810}$

$10^{0.3810}>10^{\frac{1}{3}}=2.\cdots$

$\therefore\ 10^{25}>N+1>10^{24}\times 2$

$\therefore\ 10^{25}-1>N>10^{24}\times 2\cdots-1>10^{24}$

故ニ N ハ 25 桁ノ整數デアル。 (答) 25 桁

328. $1.25=\dfrac{10}{8}=\dfrac{10}{2^3}$ ナルヲ以テ

$N=\left(\dfrac{1}{1.25}\right)^{20}=\left(\dfrac{2^3}{10}\right)^{20}$

$\therefore\ \log N=20(3\log 2-1)=60\times 0.3010-20=-1.9400=\bar{2}.0600$

故ニ $\left(\dfrac{1}{1.25}\right)^{20}$ ノ有効數字ハ小數第二位ヨリ始マル。

(答) 第二位

329. 現在ノ人口ヲ a 人トシ, n 年後ニ 2 倍ニナルトスレバ

$a\left(1+\dfrac{1}{30}-\dfrac{1}{48}\right)^n\geqq 2a,\quad a>0$ ナル故 $\left(\dfrac{81}{80}\right)^n\geqq 2$

$\therefore\ n\log\dfrac{81}{80}\geqq\log 2 \qquad \therefore\ n\log\dfrac{3^4}{2^3\times 10}\geqq\log 2$

$\therefore\ n\geqq\dfrac{\log 2}{4\log 3-3\log 2-1}=\dfrac{0.30103}{0.00539}=55.8\cdots$

(答) 56 年後

330. $2\log\dfrac{5}{3}-\log\dfrac{7}{4}+2\log 3+\dfrac{1}{2}\log 49=\log\left\{\dfrac{5^2}{3^2}\times\dfrac{4}{7}\times 3^2\times\sqrt{49}\right\}$

$=\log 100=2$ (答)

331. $\dfrac{2\log 2+\log 3}{1+\dfrac{1}{2}\log 0.36+\dfrac{1}{3}\log 8}=\dfrac{\log(2^2\times 3)}{\log(10\times\sqrt{0.36}\times\sqrt[3]{8})}=\dfrac{\log 12}{\log 12}=1$

(答)

332. $\dfrac{\log\sqrt{48}+\log 5-\log\sqrt{1000}}{\log 12-1}=\dfrac{\log\dfrac{\sqrt{48}\times 5}{10\sqrt{10}}}{\log\dfrac{12}{10}}$

$=\dfrac{\log\sqrt{\dfrac{12}{10}}}{\log\dfrac{12}{10}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\log\dfrac{12}{10}}{\log\dfrac{12}{10}}=\dfrac{1}{2}$ (答)

333. $S=\sqrt[5]{\dfrac{(25.96)^2\times 0.06391}{193.6\times\sqrt{0.322}}}$ トスレバ

$\log S=\dfrac{1}{5}\left\{2\log 25.96+\log 0.06391-\log 193.6-\dfrac{1}{2}\log 0.322\right\}$

$2\log 25.96=2.8286$

$\log 0.06391=\bar{2}.8056$

$-\log 193.6=\bar{3}.7131$

$-\dfrac{1}{2}\log 0.322=0.2460$

$5\ \big|\ \bar{1}.5933$

$\log S=\bar{1}.9187$

$0.829\cdots\bar{1}.9186$

$2\cdots\cdots\cdots 1$

$S=0.8292$ (答) 0.8292

334. $S=\sqrt[7]{\dfrac{0.193\times(13.94)^3}{583.5\times\sqrt{27.3}}}$ トスレバ

$\log S=\dfrac{1}{7}\left\{\log 0.193+3\log 13.94-\log 583.5-\dfrac{1}{2}\log 27.3\right\}$

$\log 0.193=\bar{1}.2856$

$3\log 13.94=3.4326$

$-\log 583.5=\bar{3}.2339$

$-\frac{1}{2}\log 27.3=\bar{1}.2819$

$7 \mid \bar{1}.2340$

$\log S=\bar{1}.8906$

$0.777\cdots\bar{1}.8904$

$3\cdots\cdots\cdots 2$

$S=0.7773$ (答) 0.7773

335. $\log(x-2)+\log(x-8)=2$ $\therefore$ $\log(x-2)(x-8)=\log 100$ $(x>8)$

$\therefore$ $(x-2)(x-8)=100$ $\therefore$ $x^2-10x-84=0$ $\therefore$ $x=5\pm\sqrt{109}$

$x>8$ デアルカラ $x=15.440\cdots$ (答) 15.440

336. $\log x^2-\frac{6}{\log x}=1$ $\therefore$ $2(\log x)^2-\log x-6=0$

$\therefore$ $(2\log x+3)(\log x-2)=0$ $\therefore$ $\log x=2$ 或ハ $-\frac{3}{2}$

$\therefore$ $x=100$ 又ハ $\frac{1}{10\sqrt{10}}$ (答)

頁 40.

337. $\log\sqrt{x-9}+\frac{1}{2}\log(2x-1)=1$ $\therefore$ $\sqrt{x-9}\sqrt{2x-1}=10$

兩邊ヲ二乘シテ $(x-9)(2x-1)=100$ $\therefore$ $2x^2-19x-91=0$

$\therefore$ $x=13$ 又ハ $-\frac{7}{2}$

$x=-\frac{7}{2}$ ハ $2x-1<0$ トスルカラ根デナイ。

$x=13$ ハ $x-9>0$, $2x-1>0$ ナル故, 根デアル。 (答) 13

338. $x^2+8y=15\cdots\cdots\cdots(1)$ $\log_{10}x-\log_{10}y=2\log_{10}2\cdots\cdots\cdots(2)$

(2) ヨリ $\log_{10}\frac{x}{y}=\log_{10}4$ $\therefore$ $x=4y\cdots\cdots\cdots(3)$

(1), (3) ヨリ $x^2+2x-15=0$, $x>0$ ナル故 $x=3$ $\therefore$ $y=\frac{3}{4}$ (答)

339. $2^x\times 5^y=1\cdots\cdots\cdots(1)$ $5^{x+1}\times 2^y=2\cdots\cdots\cdots(2)$

$\log 5=1-\log 2$

(1) ヨリ $x\log 2+y(1-\log 2)=0\cdots\cdots\cdots(3)$

(2) ヨリ $(x+1)(1-\log 2)+y\log 2=\log 2$

$\therefore$ $x(1-\log 2)+y\log 2=2\log 2-1\cdots\cdots\cdots(4)$

(3),(4) ヨリ $x=\log 2-1=-0.6990$, $y=\log 2=0.3010$

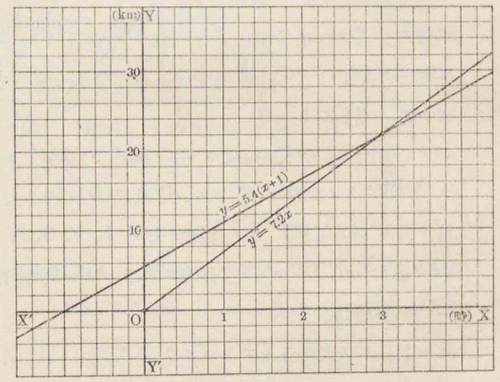
(答) $x=-0.699$, $y=0.301$

[25] 雜題

340. 所要時間ヲ x 時トシ, 相會スルマデ兩人ノ進ンダ距離ヲ y km トスレバ

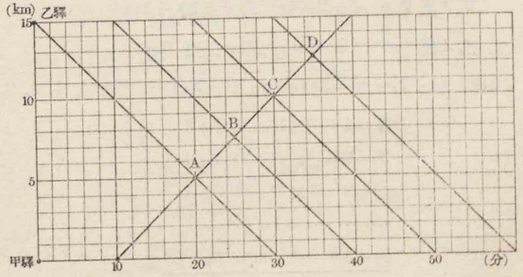
$y=7.2x\cdots\cdots\cdots(1)$ $y=5.4(x+1)\cdots\cdots\cdots(2)$

(1), (2) ノぐらふノ交點ノ x 座標ハ甲ガ乙ニ追付イタトキノ時間ヲ示ス。



(答) 甲出發後3時間

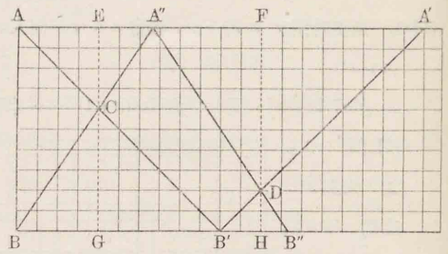
341. 甲驛ヲ發スル第三番電車ハ午前6時10分ニ發シ午前6時40分ニ乙驛ニ着ク。



ソシテ乙驛ヲ發シタ各電車ト A, B, C, D デ出會フ。

出會フ點	A	B	C	D
時刻	午前6時20分	6 時 25 分	6 時 30 分	6 時 35 分
甲驛カラノ距離	5 km	7.5 km	10 km	12.5 km

342. 今時間及ビ距離ノ單位ヲ適當ニ選ベバ甲ノぐらふトシテ圖ノ AB′A′ ヲ得ル。〔コヽニ AB′=B′A′〕



次ニ乙ノぐらふトシテ BA″B″ ヲ得ル。〔コヽニ AB′ ト BA″ トノ交點ヲ C, B′A′ ト A″B″ トノ交點ヲ D トシ, C 及ビ D ヲ通リ夫々 AB ニ平行ナ直線ヲ引キ AA′, BB′ トノ交點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ BA″=A″B″, DF=2CE〕題意ニヨリ AE=2(時間) DH=4(km) FA′=4(時間)

故ニぐらふヲ實測スルコトニヨリ AB 即チ AB 間ノ距離ハ 20 km

甲ノ速サハ $8\div2=4$ 即チ毎時 4 km

乙ノ速サハ $12\div2=6$ 即チ毎時 6 km

343. $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$ ニ於テ n ヲ順次 1, 2, 3, …n ト置クト

$$2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$$
$$3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$$
$$4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

邊々相加ヘルト

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+(1+1+\cdots+1)$$

$$\therefore\ 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=(n+1)^3-1-3(1+2+\cdots+n)-n$$
$$=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}$$

$$\therefore\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

344. $7+77+777+\cdots=7(1+11+111+\cdots)$

$$=\frac{7}{9}(9+99+999+\cdots)=\frac{7}{9}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots\}$$

$$\frac{7}{9}\{(10+100+1000+\cdots)-10\}=\frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^{10}-1)}{9}-10\right\}$$

$$=\frac{7}{9}\left(\frac{10^{11}-100}{9}\right)=\frac{700}{81}(10^9-1)\quad(答)$$

345. $S=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$

$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\quad(答)$$

頁 41.

346. $S=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n-1)x^{n-1}$ ……(1)

$xS=\quad x+3x^2+5x^3+\cdots+(2n-3)x^{n-1}+(2n-1)x^n$ …(2)

(1)−(2) $(1-x)S=1+2x+2x^2+2x^3+\cdots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n$

$$=1-(2n-1)x^n+2x\frac{1-x^{n-1}}{1-x}\quad[但シ\ 1\neq x\ トス]$$

$$\therefore\ S=\frac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}\quad(答)$$

347. $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\quad(答)$$

348. $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$$ (答)

349. $x>0$ ナルトキノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{1-\dfrac{x}{1+x}}=\frac{1+x}{1}=1+x$$

$x<0$ ナルトキハ

$-\dfrac{1}{2}<x$ ナルトキ $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|<1$ トナリ $S=1+x$

$x=-\dfrac{1}{2}$ ナルトキ $\dfrac{x}{1+x}=-1$ トナリ S ハ 1 カ 0 ナレドモ不定

$-1<x<-\dfrac{1}{2}$ ナルトキ $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>1$, 且 $\dfrac{x}{1+x}<0$ トナリ S ハ不定

$x=-1$ ナルトキハ $1+x=0$ トナリ $\dfrac{x}{1+x}$, $\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$ 等ハ無意味,

従ツテ S モ無意味デアル。

$x<-1$ ナルトキ $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>1$, 且 $\dfrac{x}{1+x}>0$ トナリ

S ハ限リナク大デアル。

350. $\left(\dfrac{81}{80}\right)^x=10$ $\quad\therefore\quad x\{4\log3-3\log2-1\}=1$

故ニ $\log2=0.3010$, $\log3=0.4771$ ヲ用ヒルト

$$x=\frac{1}{4\log3-3\log2-1}=185.2$$

$0.4771+0.00005>\log3\geqq0.4771-0.00005$

$1.9084+0.0002>4\log3\geqq1.9084-0.0002$

同様ニ $0.9030+0.00015>3\log2\geqq0.9030-0.00015$

$\therefore\quad 1.9084-0.9030+(0.0002+0.00015)>4\log3-3\log2\geqq1.9084$

$-0.9030-(0.0002+0.00015)$

$\therefore\quad 1.0054+0.00035>4\log3-3\log2\geqq1.0054-0.00035$

$\therefore\quad 0.0054+0.00035>4\log3-3\log2-1\geqq0.0054-0.00035$

$\therefore\quad 0.00575>4\log3-3\log2-1\geqq0.00505$

$$\therefore\quad \frac{1}{0.00575}<\frac{1}{4\log3-3\log2-1}\leqq\frac{1}{0.00505}$$

$$\therefore\quad 173.9<\frac{1}{4\log3-3\log2-1}\leqq198.02$$

$x=\dfrac{1}{4\log3-3\log2-1}$ ヲ 185.2 トスレバソノ誤差ハ 13 ヨリ小サイ。

(答)

— 終 —

新式
算術代數教科書
教授資料
〔四五學年用〕
昭和十二年三月五日印刷
昭和十二年三月十日發行

非賣品

著作者　高木貞治

東京市小石川區小日向水道町八十四番地
發行者　株式會社東京開成館
代表者　松本繁吉

東京市京橋區銀座西二丁目三番地
印刷者　高橋郁

發行所　東京開成館

三協印刷株式會社印刷

小田
小田

教
4
200