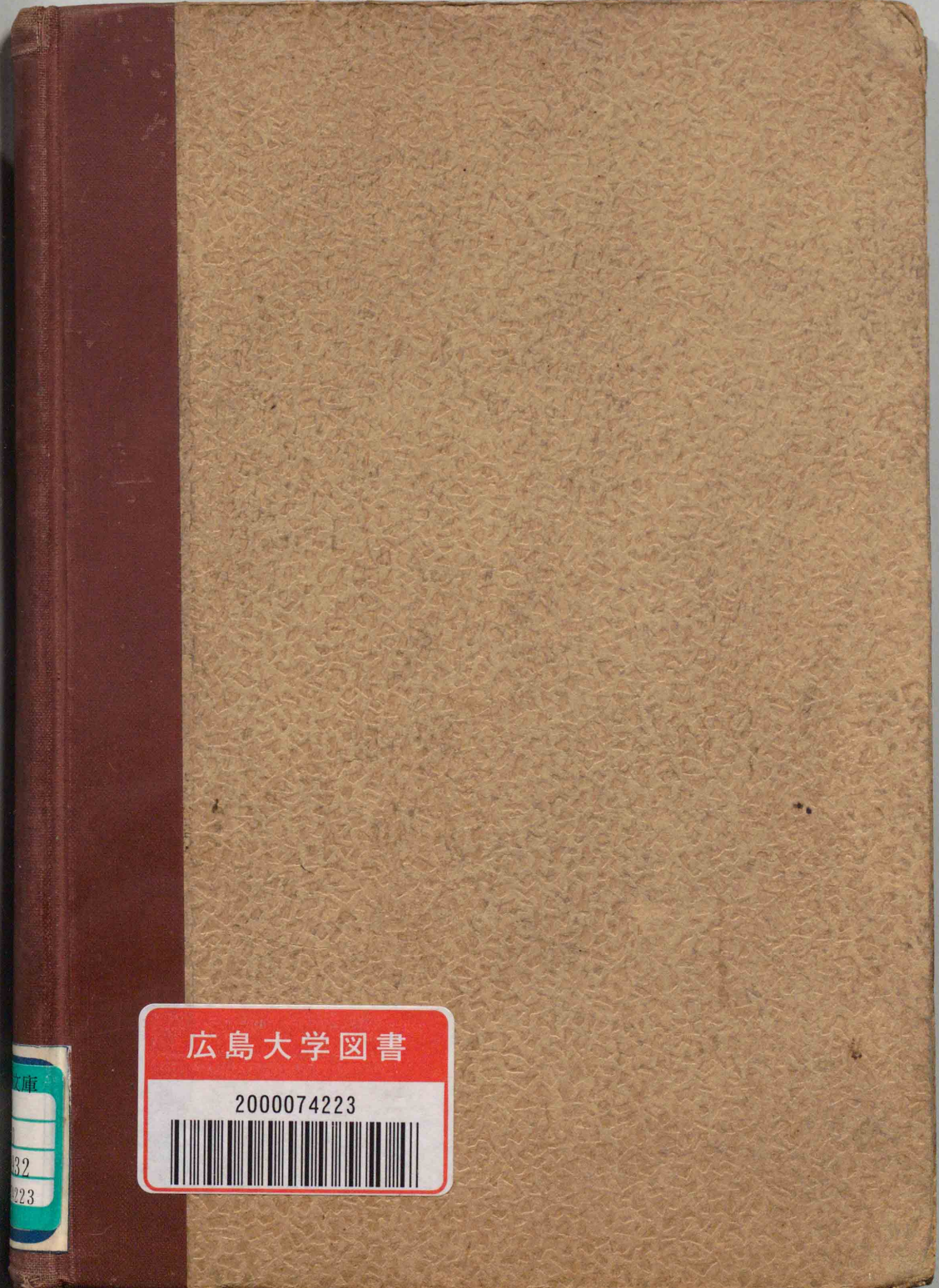
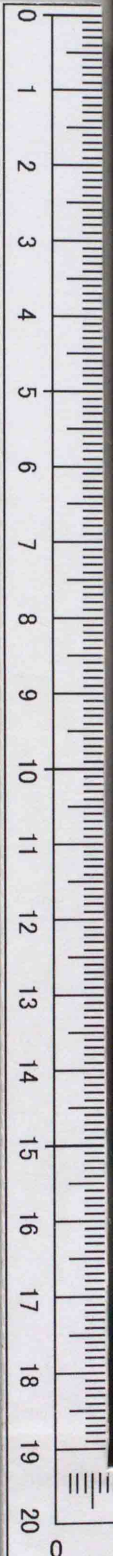
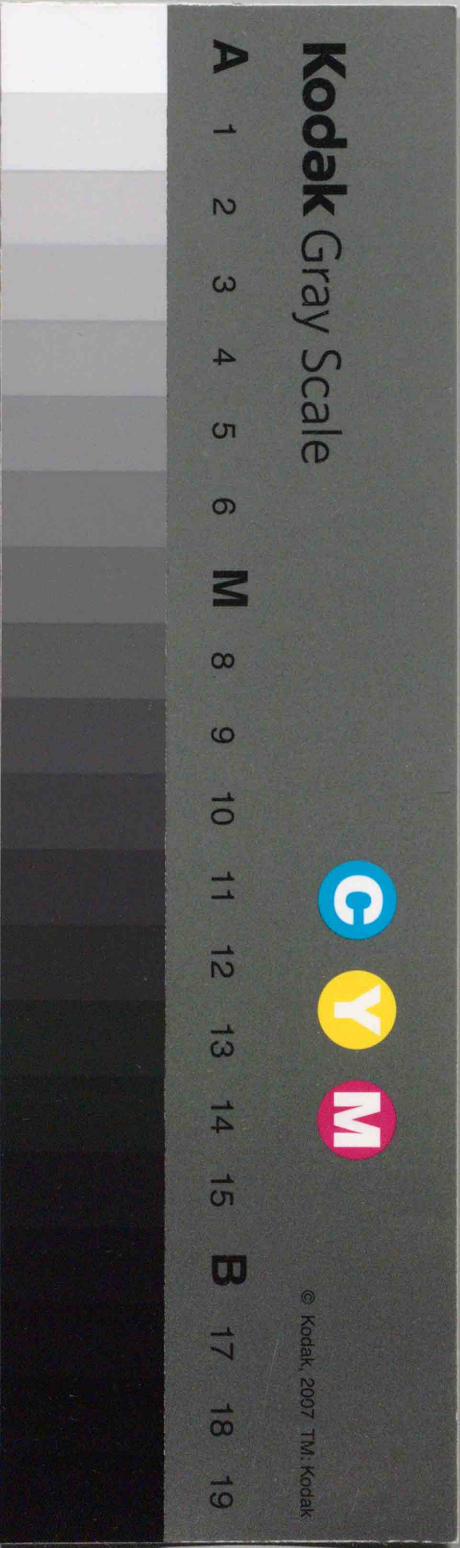
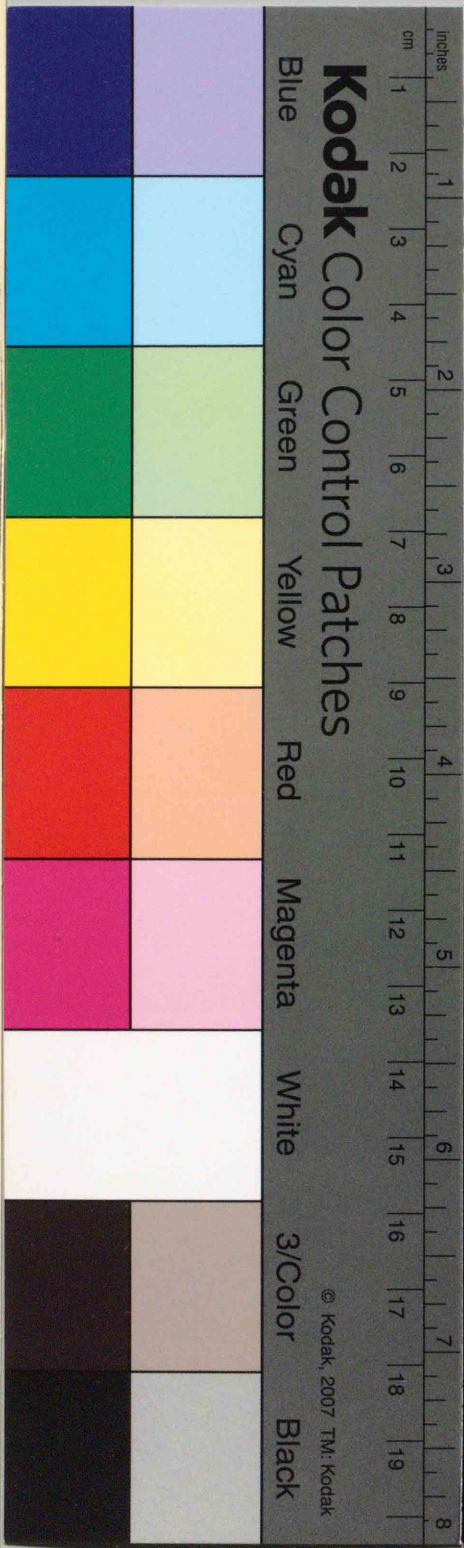


40315

教科書文庫

4
410
41-1932
20000 74223



広島大学図書

2000074223



42  
413  
BB7

教科書文庫  
4  
410  
41-1932  
2000074223

資 料 室

文部省檢定濟  
昭和七年九月二十七日 中學校數學科用

中等教育  
幾何三角法教科書

[增課]

東北帝國大學名譽教授

理學博士

林 鶴 一

著

四・五學年用



東京開成館

目次

第一篇 平面幾何學ノ補充 [1—111]

第一章 定理ノ證明法 …… 1  
第二章 直線圖形 …… 17  
第三章 圓 …… 32  
第四章 軌跡及ビ作圖 …… 46  
第五章 比例 …… 78

第二篇 平面三角法 [112—161]

第一章 銳角・鈍角ノ三角函數 …… 112  
第二章 加法定理・減法定理 …… 122  
第三章 三角形ノ角ト邊トノ關係 …… 130  
第四章 三角形ノ解法 …… 139  
第五章 測量問題 …… 147  
第六章 一般ノ角ノ三角函數 …… 152

第三篇 立體幾何學 [162—235]

第一章 平面及ビ直線 …… 162  
第二章 垂線 …… 175

広島大学図書

2000074223



第三章 二面角及び多面角 …… 185  
 第四章 角嚙及び角錐 …… 197  
 第五章 直圓嚙・直圓錐・球 …… 217

補習問題 [1-33]

答 [1-2]

附表

數ノ對數表・三角函數ノ眞數表・三角函數ノ對數表



第一篇

平面幾何學ノ補充

第一章 定理ノ證明法

1. 直接證明法

直接證明法ハ假設カラ出發シテ順次推論ヲ進メテ終結ニ達スル方法デ、通常用ヒラレルモノデアアル。

例  $\triangle ABC$  ノ外接圓ノ周上ノ任意ノ點  $P$  カラ三邊  $AB, BC, CA$  へ夫々垂線  $PL, PM, PN$  ヲ引ケバ、其ノ足  $L, M, N$  ハ同一ノ直線上ニアル。

考へ方  $ML, MN$  ヲ結ビ  $\angle PML + \angle PMN = 2RL$  デアルコトヲ證明スル。

證明  $\angle PLB$  ト  $\angle PMB$  トハ共ニ直角デアアル(假設)。

故ニ  $PLBM$  ハ圓ニ内接スル四角形デアアル。

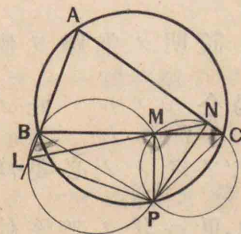
依ツテ  $PB$  ヲ結ブト

$\angle PBL = \angle PML$

又  $PC$  ヲ結ブト

$\angle PBL = \angle PCA$

故ニ  $\angle PML = \angle PCN$



又  $\angle PMC$  ト  $\angle PNC$  トハ共ニ直角デアアル(假設)カラ、 $PMNC$  ハ圓ニ内接スル四角形デアアル。

$$\text{故ニ} \quad \angle PCN + \angle PMN = 2RL$$

$$\text{故ニ} \quad \angle PML + \angle PMN = 2RL$$

故ニ  $L, M, N$  ハ同一ノ直線上ニアル。

**注意** 本定理ヲしむそん Simson ノ定理トイヒ、 $LMN$  ヲ  $P$  點ニ關スル  $\triangle ABC$  ノしむそん線トイフ。

**問1.** しむそんノ定理ノ逆ヲ述べ、且之ヲ證明セヨ。

**問2.** 圓ニ内接スル三角形ノ一頂點ヲ一端トスル直徑ノ他ノ端ト垂心トヲ結ブ線分ト底邊トハ互ニ他ヲ二等分スル。

(先ヅ銳角三角形ニ就イテ證明シ、其ノ證明ハ鈍角三角形ノ場合ニモ當テハマルカドウカラ研究セヨ)

## 2. 解析法・綜合法

證明ノ進路ヲ假設カラ出發シテハ考案ニ困難ナ場合ガアル。此ノトキ終結カラ出發シテ終結ガ成立ツタメノ必要條件ヲ考究シテ一ツノ新條件ヲ求め、更ニ其ノ新條件ガ成立ツタメノ必要條件ヲ探究

シ、順次其ノ條件ヲ求メテ遂ニ假設又ハ假設カラ容易ニ斷定サレル事柄ニ到達スル方法ヲ解析法トイヒ、解析法ノ推究ヲ逆ニシテ證明スル方法ヲ綜合法トイフ。

**例1.** 圓ニ内接スル四角形  $ABCD$  ノ對角線  $AC, BD$  ガ直交スレバ、其ノ圓ノ中心カラ  $AB$  へノ距離  $OM$  ハ邊  $CD$  ノ半分ニ等シイ。

**解析** 直徑  $BOE$  ヲ引キ、 $AE$  ヲ結ブト  $AE = 2OM$

$$\text{依ツテ} \quad OM = \frac{1}{2}CD \quad \text{デアアルタ}$$

メニハ

$$AE = CD$$

デアアルコトヲ要スル。從ツテ

$$\angle ABE = \angle CBD$$

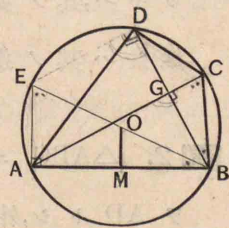
デアアルコトヲ要スル。從ツテ  $\triangle ABE$  ト  $\triangle CBG$

トカラ  $\angle BAE = \angle BGC = RL$  デアアルコトニ着目シテ

$$\angle AEB = \angle GCB$$

デアアルコトヲ要スル。然ルニコレハ同ジ弧  $AB$  ノ上ニ立ツ二ツノ圓周角デアアル。

依ツテ之ヲ證明ノ出發點トシテ上ノ進路ヲ逆ニ取ツテ證明ヲ得ル。(學生之ヲ試ミヨ)



**注意 1.** 解析法デ次々ノ條件ガ直グ前ノ條件ヲ満足スル必要ニシテ十分ナル條件デアレバ解析法ダケデ證明ハ完全デアル。然シ上ノ例1ノヤウニ終結ガ成立ツコトカラ逆ニ必要ナル條件ダケヲ研究シタ場合ニハ必ズ綜合法ニヨツテ定理ノ眞ナルコトヲ明ラカニセネバナラナイ。此ノ場合解析法ハ證明ノ考ヘ方デアルカラ特ニ記スル必要ハナイ。ケレドモ練習ノタメニ證明ノ前ニ書イテ見ルコトハ甚ダ有益デアル。

**問 1.** 圓ニ内接スル四角形ノ對角線ガ直交スルトキハ、其ノ交點カラ一ツノ邊ヘ引イタ垂線ノ延長ハ其ノ邊ノ對邊ヲ二等分スル。

(ぶらまぐぶた Brahmagupta ノ定理)

**問 2.**  $\triangle ABC$  ニ於テ A カラ邊 BC へ引イタ垂線ヲ AD トシ、外心ヲ O、内心ヲ I トスルト、AI ハ  $\angle OAD$  ヲ二等分スル。

**注意 2.** 終結カラ逆進シテ假設ニ到達スル代リニ次ノ例2ノヤウニ假設ト終結トノ双方カラ推論ヲ進メテ或一致スル事柄ヲ見出シテモヨイ。之ガ多ク用ヒル考ヘ方デアル。

**例 2.** C ハ半圓周 ACB 上ノ一ツノ點デ、D ハ其ノ直徑 AB 上ノ一點デアル。D カラ AB へ垂線ヲ引キ AC、BC 及ビ半圓周ト夫々 E、F 及ビ G デ交ハラ

シメルト、DG ハ DE ト DF トノ比例中項デアル。

**解析** DG ガ DE ト DF トノ比

例中項デアルタメニハ

$$\overline{DG}^2 = DE \cdot DF \quad (1)$$

デアルコトヲ要スル。然ルニ

$$\overline{DG}^2 = AD \cdot DB$$

デアルカラ、(1)ガ成立ツタメニハ

$$AD \cdot DB = DE \cdot DF$$

從ツテ  $AD : DE = DF : DB$  (2)

デアルコトヲ要スル。

又假設カラ  $\angle ADE = \angle ACB (= \angle F)$  デアルカラ

$$\angle DAE = \angle F$$

故ニ  $\triangle ADE \sim \triangle FDB$

故ニ  $AD : DE = DF : DB$  (2)

**證明** (學生之ヲナセ)

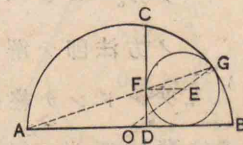
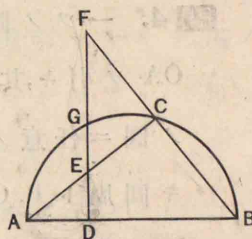
**問 3.** 半圓 ACB ノ弧 ACB 上ノ任意ノ點 C カラ直

徑 AB へ引イタ垂線ヲ CD ト

シ、弧 CB、垂線 CD 及ビ直徑

AB ニ切スル圓ト弧 CB トノ

切點ヲ G トシ、CD トノ切點ヲ F トスルト、三點



A, E, G ハ同一ノ直線上ニアル。

問4. 一ツノ圓ノ中心 O カラ一直線 LM へ垂線

OA ヲ引キ, 其ノ足 A カラ此

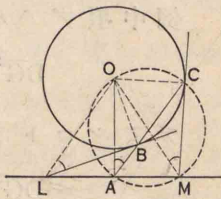
ノ圓ニ任意ノ割線 ABC ヲ引

キ圓周ト B, C デ交ハラシメ,

B ト C トデ此ノ圓ニ切スル

直線ガ LM ト夫々 L, M デ交ハレバ, AL ト AM

トハ相等シイ。



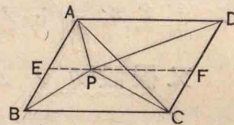
問5. ABCD ハ平行四邊形デ, P ヲ △ABC 内ノ任

意ノ點トスレバ

$$\triangle PAB + \triangle PAC = \triangle PAD$$

デアル。

(證明スベキ式ノ兩邊ニ △PBC ヲ加ヘテ考ヘヨ)



注意3. 定理ノ證明ノ考ヘ方ハ本節ニ述ベタモノニヨ

ルノガヨイガ, 前節ニ述ベタモノ即チ假設カラ出發シ

テ終結ニ達スル推究ヲ鍛練スルコトハ又甚ダ重要デ

アル。コレハ定理ハ其ノ終結ガ知レテキルカラ本節

ノ方法即チ解析ヲ行フコトガ出來ルガ, 假設ノミヲ知

ツテドンナ終結ヲ得ルカラ推究スル場合即チ定理ノ

發見ヲナス場合ニハ上ノヤウナ推究ハ用ヒラレナイ

カラデアル。

### 3. 間接證明法

定理ヲ證明スルニ, 之ヲ直接ニ證明シナイデ, 其ノ對偶ヲ證明スル方ガ容易デアルコトガアル。即チ

$$\text{「A ガ B ナレバ C ハ D デアル」} \quad (1)$$

トイフ定理ヲ證明スルニ, 其ノ對偶デアル

$$\text{「C ガ D デナイナラバ A ハ B デナイ」} \quad (2)$$

ヲ證明スルノデアル。

例ヘバ「四角形ノ對角ガ互ニ補角デアルトキハ, 此ノ四角形ハ圓ニ内接スル」ヲ證明スルニ歸謬法ト稱シテ, 其ノ對偶ヲ證明シタコトハ記憶スルコトデアラウ。

例 四角形ノ二組ノ對邊ノ和ガ相等シイトキハ此ノ四角形ハ圓ニ外接スル。

證明 四角形 ABCD ニ於テ

$$AB + CD = BC + AD \quad (1)$$

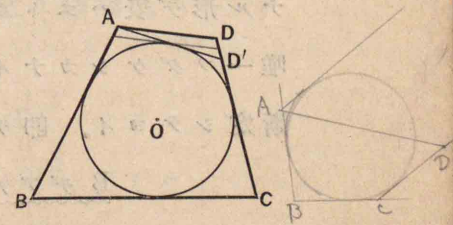
トシ邊 AB, BC, CD ニ切ス

ル圓 O ヲ畫キ, 假リニ  $\underline{AD}$

ガ此ノ圓ニ切シナイトシ

テ, 頂點 A カラ此ノ圓ニ切

線 AD' ヲ引キ, CD 又ハ其ノ延長ト D' デ交ハラ







證明

AB, BC, CD = 1, 2, 3, 4 シメルト, ABCD' ハ圓ノ外接四角形デアルカラ

OF ⊥ AD, AD = 2OF  
 + AD = 2OF  
 AD = 平行ノ円ノ切線

$$AB + CD' = BC + AD' \quad (2)$$

AD = 平行ノ円ノ切線

AD = 平行ノ円ノ切線

$$AD + BC = AD' + DC \quad (1)$$

$$AD \sim AD' = DD'$$

AD + BC = AB + CD 得ル。

コレハ不合理デアル。

②-①

AD = AD' = AA' + DD' 故ニ AD ハ圓 O ニ切スル。

$$AD = AD' + AA' + DD'$$

即チ四角形 ABCD ハ圓 O ニ外接スル。

AD = AD' + AA' + DD'

AD = AD' + AA' + DD'

AD = AD' + AA' + DD'

問 1. 凸多角形ニハ三ツヨリモ多ク鋭角ハナイ。

問 2.  $\triangle ABC$  ノ一邊 BC ノ兩端カラ對邊ヘ引イ  
 タ二線分 BD, CE ハ決シテ互ニ二等分スルコト  
 ハナイ。

4. 同一法

或定理ガ證明セラレ、之ヲ

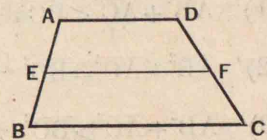
A デアルトキハ B デアル

ナル形デ表ハストキ、A ナルモノモ、B ナルモノモ  
 唯一ツダケシカナイト、此ノ定理ノ逆モ真デアルト  
 斷定シテヨイ。即チ

B デアルトキハ A デアル。

此ノ證明法ヲ同一法トイフ。

例ヘバ「梯形 ABCD ノ平行デナイ一邊 AB ノ中點  
 E カラ底ニ平行ニ引イタ直線ハ他ノ邊 CD ノ中點  
 F ヲ通ル」トイフ定理ガ證明セラ  
 レルト「梯形 ABCD ノ平行デナ  
 イ二邊 AB, CD ノ中點ヲ結ブ直  
 線ハ底ニ平行デアル」ハ同一法ニヨツテ直ニ真デア  
 ルト斷定シテヨイ。



5. 轉換法

或事柄ニ就イテ互ニ關聯スル一群ノ定理ガ證明  
 セラレ、其等ノ定理ノ假設ハ其ノ事柄ニ就イテノ總  
 テノ場合ヲ盡クシ(從ツテ其ノ中一ツハ必ズ成立ツ)  
 且其ノ終結ハ互ニ相容レナイ(同時ニ二ツ以上成立  
 ツコトハ出來ナイ)トキハ、其等ノ定理ノ逆ハ皆成立  
 ツト斷定シテヨイ。コレハ一群ノ定理ノ逆ヲ一括  
 シテ證明スル論理的證明法デ、之ヲ轉換法トイフ。

例ヘバ「 $\triangle ABC$  ニ於テ

(1)  $\angle A > 90^\circ$  ナラバ  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 < \overline{BC}^2$  デアル。

(2)  $\angle A = 90^\circ$  ナラバ  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$  デアル。

(3)  $\angle A < 90^\circ$  ナラバ  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 > \overline{BC}^2$  デアル」トイフ。

三定理ガ證明セラレタナラバ、此ノ逆ハ皆成立ツト  
斷定シテヨイ。即チ

(1)'  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 < \overline{BC}^2$  ナラバ  $\angle A$  ハ鈍角デアアル。

(2)'  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$  ナラバ  $\angle A$  ハ直角デアアル。

(3)'  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 > \overline{BC}^2$  ナラバ  $\angle A$  ハ鋭角デアアル。

何故ナレバ例ヘバ(1)ヲ考ヘルニ、若シ假リニ  $\angle A$   
ガ鈍角デナイトスレバ、 $\angle A$  ハ直角デアアルカ又ハ鋭  
角デアアルカデアアルカラ、(2)ト(3)トカラ  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$  ハ  
 $\overline{BC}^2$  ニ等シイカ又ハ  $\overline{BC}^2$  ヨリモ大デ、共ニ假設ニ反  
スルカラデアアル。

**問**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $AD$  ヲ一ツノ中線トシ

(1)  $AD > BD$  ナラバ  $\angle BAC < 90^\circ$  デアアル。

(2)  $AD = BD$  ナラバ  $\angle BAC = 90^\circ$  デアアル。

(3)  $AD < BD$  ナラバ  $\angle BAC > 90^\circ$  デアアル。

之ヲ證明シ、且此ノ三定理ノ逆ヲ考ヘヨ。

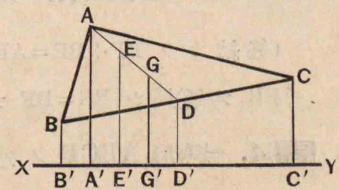
### 6. 補助圖形

幾何學ノ問題ヲ證明スル場合ニ或部分ノ性質ヲ  
明瞭ナラシメ、且既知ノ定理ノ應用ヲ容易ナラシメ  
ルタメニ補助圖形ヲ畫クコトガ必要デアアル。一ツ

ノ補助線ノ助ケニヨツテ證明ニ成功シ、又補助圖形  
ノ相違デ證明ニ繁簡ノ差ヲ生ズルコトハ常ニ經驗  
スル所デアアル。故ニ補助圖形ハ極メテ重要デアアル  
ガ如何ナル補助圖形ヲ利用スレバ定理ヲ簡潔ニ證  
明スルコトガ出來ルカハ法則トシテ述ベルコトガ  
出來ナイ。唯補助圖形ハ成ルベク少クスルコトハ  
望マシイ。

**例 1.**  $\triangle ABC$  ノ各頂點カラ此ノ三角形ヲ截ラナ  
イ直線  $XY$  マデノ距離ノ和  $AA' + BB' + CC'$  ハ  $\triangle ABC$   
ノ重心  $G$  カラ  $XY$  マデノ距離  $GG'$  ノ3倍ニ等シイ。

**考ヘ方**  $BB' + CC'$  ニ關係アル  $D$  カラ  $XY$  ヘ引イ  
タ垂線  $DD'$  ト、 $AA' + GG'$  ニ關係アル  $AG$  ノ中  
點  $E$  カラ  $XY$  ヘ引イタ垂線  $EE'$  トヲ補助線ト  
シテ利用スル。



**證明**  $AA' + GG' = 2EE'$

$BB' + CC' = 2DD'$

邊々相加ヘテ

$$AA' + BB' + CC' + GG' = 2(E E' + D D')$$

$$= 4GG'$$

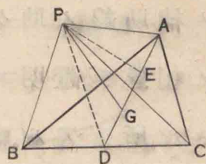
$$\therefore AA' + BB' + CC' = 3GG'$$

問 1.  $\triangle ABC$  ノ重心ヲ  $G$  トシ,  $P$

ヲ任意ノ點トスルト

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GP^2$$



問 2.  $\triangle ABC$  ヲ圓ニ内接スル正

三角形トシ,  $P$  ヲ劣弧  $BC$  上ノ

任意ノ點トスルト

$$PA = PB + PC$$

( $PB + PC$  ヲ得ルタメ  $= BP$  ヲ延長シテ  $PD = PC$  ナルヤ  
ウ  $= D$  ヲ定メル)



問 3. 正方形  $ABCD$  ノ  $A$  カラ  $BC$  ニ任意ノ直線

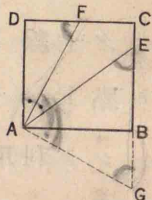
$AE$  ヲ引キ,  $\angle DAE$  ノ二等分線  $AF$

ト  $CD$  トノ交點ヲ  $F$  トスルト

$$DF = AE - BE$$

(終結カラ  $DF + BE = AE$  ヲ得ルカラ,

$EB$  ヲ延長シ  $BG = DF$  ナルヤウ  $= G$  ヲ取ル)

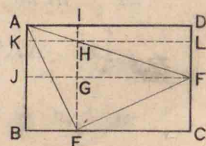


問 4. 矩形  $ABCD$  ノ邊  $BC$  上ノ一點ヲ  $E$  トシ,  $CD$

上ノ一點ヲ  $F$  トスルト

$$2\triangle AEF + BE \cdot DF = ABCD$$

( $2\triangle AEF$  ヲ矩形内ニ得ルタメ  $H$  ヲ  
通ツテ  $BC = 平行 = KL$  ヲ引ク)



例 2. 圓ノ弦  $AB$  ガ此ノ圓ヲ分ケタ弓形ノ一ツ  
ニ内接スル圓ノ切點ヲ  $C, D$  トスレバ,  $CD$  ハ此ノ弓  
形ノ弧ノ共軛弧ノ中點ヲ通ル。

解析  $CD$  ノ延長ト  $\widehat{ACB}$  ノ共軛弧トノ交點ヲ  $M$   
トスル。  $M$  ガ  $\widehat{AMB}$  ノ中點デアルコトヲ證明  
スルニハ

$$\angle ACD = \angle DCB$$

ヲ證明スレバヨイ。

ソコデ共通切線  $CE$  ヲ引

キ,  $AB$  ノ延長ト  $E$  デ交ハ

ラシメテ角ノ關係ヲ推究スル。即チ

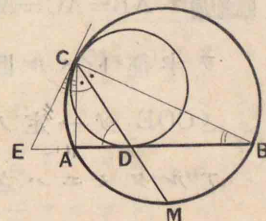
$$\angle ACD = \angle ECD - \angle ECA$$

$$\angle DCB = \angle EDC - \angle B$$

次ニ  $\angle ECD$  ト  $\angle EDC$  及ビ  $\angle ECA$  ト  $\angle B$  ノ關係ヲ  
考ヘル。

注意 一般ニ相切圓・相交圓ニ關スル問題ハ, 共通切線ヲ  
引クカ, 共通中心線ヲ引クカ, 共通弦ヲ引クカノ何レカ  
ノ補助圖形ヲ用ヒルガヨイ。

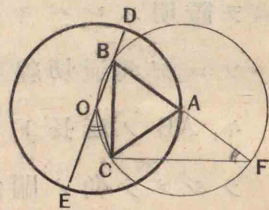
問 5. ニツノ圓ガ  $A$  デ内切スルトキニ, 外圓ノ弦  
 $BC$  ガ  $D, E$  デ内圓ニ交ハレバ,  $\angle BAD$  ト  $\angle CAE$   
トハ相等シイ。



例3. 二等邊三角形 ABC ノ等邊 AB, AC ハ一ツノ定圓 O ノ半徑ニ等シク,  $\angle A$  ハ一定ノ大サデア。ソシテ A ガ定圓 O ノ周上ニアツテ, B ハ此ノ圓ノ定直徑 DE 上ニアレバ, CO ハ常ニ DE ト一定ノ大サノ角ヲ作ル。但シ B ト O トハ合シナイトスル。

解析 AB=AC=AO デアルカラ, Aヲ中心トシ ABヲ半徑トスル圓ヲ畫イテ角ノ關係ヲ考ヘル。

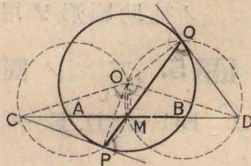
$\angle COE$  ガ一定ノ大サデア  
アルタメニハ之ニ等シイ  
 $\angle F$  ガ一定ノ大サデア  
アルコトヲ要スル。



從ツテ  $2\angle F$  ニ等シイ  $\angle BAC$  ガ一定ノ大サデア  
アルコトヲ要スル(假設)。

問6. 圓 O ニ其ノ外部ノ一點 P カラニツノ切線 PA, PB ト一ツノ割線 PCD トヲ引キ弦 CD ノ中點ヲ M トスルト, MP ハ  $\angle AMB$  ヲ二等分スル。

問7. 圓ノ弦 AB ノ中點 M  
ヲ通ル任意ノ弦 PQ ノ兩  
端ニ於ケル切線ガ AB ノ  
延長ト交ハル點ヲ C, D ト

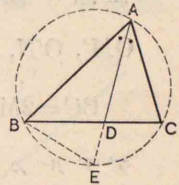


スレバ, AC ト BD トハ相等シイ。

問8.  $\triangle ABC$  ノ A ニ於ケル内角又ハ外角ノ二等分線ガ邊 BC 又ハ其ノ延長ヲ截ル點ヲ D トスレバ

$$\overline{AD}^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

(BD·DC = 等シイ矩形ヲ得ル目的デ  
外接圓ヲ畫ク。



$$\overline{AD}^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \text{ デアルタメニハ}$$

$$BD \cdot DC = AD \cdot DE \text{ デアルカラ}$$

$$\overline{AD}^2 + AD \cdot DE = AB \cdot AC \text{ デアルコト,}$$

$$\text{從ツテ } AD \cdot AE = AB \cdot AC \text{ デアルコト,}$$

$$\text{從ツテ } AB : AE = AD : AC \text{ デアルコトヲ要スル。}$$

ソシテ  $\angle BAE = \angle EAC$  デアルカラ

$$\triangle ABE \sim \triangle ADC \text{ デアルコトヲ要スル)}$$

## 7. 平行移動法

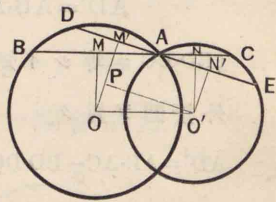
平行移動法ハ圖形中ノ或直線ヲ其ノ位置ニ平行  
デアル他ノ適當ノ位置ニ移シテ他ノ線トノ連絡ヲ  
良クスル方法デア。ル。

例 相交ハル二定圓 O, O' ノ交點ノ一ツ A ヲ通ツ  
テ, 其ノ二圓周ノ間ニ夾マレル線分ノ中デ, 其ノ二圓

ノ中心ヲ結ブ直線  $OO'$  ニ平行デアルモノガ最大デア  
アル。

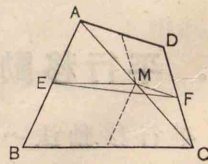
**解析**  $BC$  ヲ  $OO'$  ニ平行デアル線分,  $DE$  ヲ他ノ  
任意ノ線分トシ,  $O, O'$  カラ  $BC, DE$  ニ垂線  $OM,$   
 $OM', O'N, O'N'$  ヲ引クト

$BC=2MN, DE=2M'N'$   
デア  
ルカラ,  $BC > DE$  デア  
ルタメニハ  $MN > M'N'$  デア  
ルコトヲ要スル。

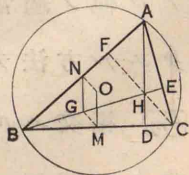


ソシテ  $MN=OO'$  デアルカラ,  $M'N'$  ヲ  $O'P$  ノ位  
置ニ平行ニ移動スル( $O'$  カラ  $M'N'$  ニ平行ニ  $O'P$   
ヲ引クト),  $OO'$  ハ直角三角形ノ斜邊トナリ,  $O'P$   
ハ其ノ直角ノ一邊トナル。

**問 1.** 四角形ノ一組ノ對邊ノ中  
點ヲ結ブ線分ハ他ノ一組ノ邊  
ノ和ノ半分ヨリモ大デナイ。



**問 2.**  $\triangle ABC$  ノ外心カラ一  
邊  $BC$  マデノ距離ハ,  $A$  カラ此ノ三角  
形ノ垂心マデノ距離ノ半分ニ  
等シイ。

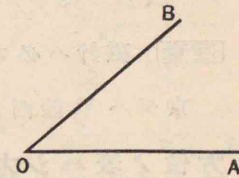


第二章 直線圖形

8. 角

**半直線** 一ツノ點カラ引カレタ直線ヲ半直線ト  
イフ。

故ニ角ハ一ツノ點カラ引カレ  
タ二ツノ半直線デ出来タ圖形デ  
アル

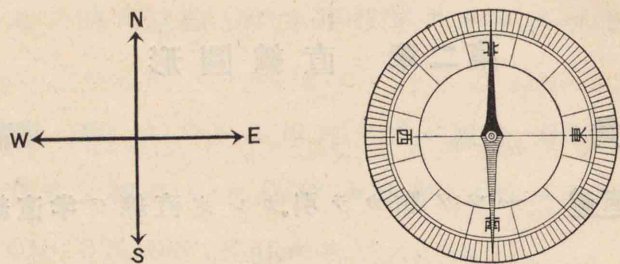


- 問 1.** 角ノ種類ヲ擧ゲテ其ノ各ノ定義ヲ述ベヨ。
- 問 2.** 角ニ關スル重要ナ定理ヲ述ベヨ。
- 問 3.** 相交ハル二直線ノ交點ヲ通り其ノ一組ノ  
對頂角ヲ二等分スル直線ニ直交スル直線ハ他  
ノ一組ノ對頂角ヲ二等分スル。

**問 4.** 二角ノ邊ノ一組ガ平行デ他ノ一組ガ垂直  
デアレバ, 此ノ二角ノ大サニドンナ關係ガアル  
カ。

9. 方位

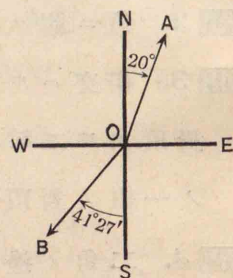
方位ヲ示スニハ東・西・南・北ノ四方向ヲ基準ニスル。  
方向ヲ定メルニハ磁針又ハ北極星ナドニヨル。



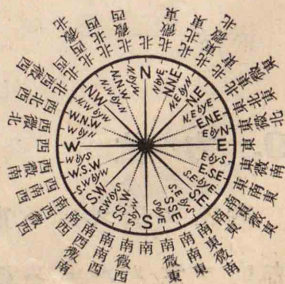
**注意** 磁針ハ必ズシモ正シク南北ヲ指サナイ。現今東京デハ  $5^\circ$  餘西ニ、樺太デハ  $8^\circ$  餘西ニ偏シテキル。

**方位ノ表ハシ方** 方位ヲ表ハスニハ通常次ノ二法ヲ用ヒル。

[1] 陸地測量デハ通常北(或ハ南)カラ東(或ハ西)ヘ偏スル角度ヲ以テスル。例ヘバ右ノ圖デ OA ノ方位ヲ北  $20^\circ$  東 (N $20^\circ$ E) デ示シ, OB ノ方位ヲ南  $41^\circ 27'$  西 (S $41^\circ 27'$ W) デ示ス。

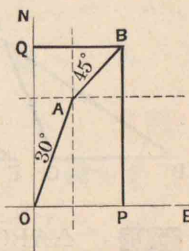


[2] 航海用ノ羅針盤デハ東西南北ノ四方位ノ間ヲ各、八等分シ,此ノ三十二方位ニ右ノ圖ニ示スヤウナ名稱ヲ用ヒル。ソレデ例ヘバ北  $22^\circ 30'$  東



ハ北北東ト呼ビ, 南  $11^\circ 15'$  西ハ南微西ト呼ビ, マタ西  $22^\circ 30'$  北ハ西北西ト呼ブ。

**問** 或人ガ東西及ビ南北ニ通ズルニツノ道路ノ交叉點カラ出發シテ N $30^\circ$ E ノ方向ニ  $600m$  進ミ, 更ニ方向ヲ北東ニ轉ジテ  $400m$  ヲ進ンデ某地ニ達シタトイフ。此ノ地點ハ兩道路カラ各、幾米距タツテキルカ。



### 10. 三角形ノ合同

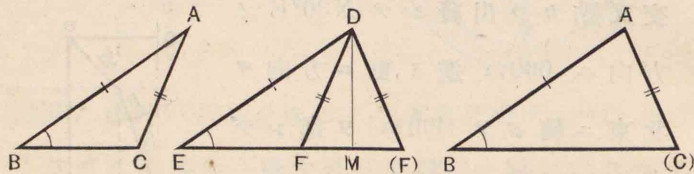
**問 1.** ニツノ三角形ガ合同デアルニツノ基礎定理ヲ擧ゲヨ。

**注意 1.** 三角形ノ合同ニヨツテ線分又ハ角ノ等シイコトヲ證明スルコトガ出來ル場合ハ甚ダ多イ。

**問 2.**  $\triangle ABC$  ノニツノ中線 BD, CE ヲ延長シテ  $DF=BD, EG=CE$  ナルヤウニ F, G ヲ取ルト F, A, G ハ同一ノ直線上ニアル。

**例** 一ツノ三角形 (ABC) ノ二邊 (AB, AC) ガ夫々他ノ三角形 (DEF) ノ二邊 (DE, DF) ニ等シク, 其ノ一

組ノ等邊 (AC, DF) ニ對スル角ガ等シイトキハ, 他ノ一組ノ等邊 (AB, DE) ニ對スル角ハ相等シイカ又ハ補角デアアル。



**證明**  $\triangle ABC$  ヲ  $\triangle DEF$  ノ上ニ重ネ, A ヲ D ノ上ニ, 邊 AB ヲ邊 DE ノ上ニ重ネ, C ト F トガ DE ノ同ジ側ニアルヤウニスルト,  $\angle B = \angle E$  デアルカラ, 邊 BC ハ邊 EF ノ上ニアツテ, 點 C ハ直線 EF 上ノドコカニ落ナル。

ソシテ  $AC = DF$  デ A ハ D ノ上ニ重ナツタカラ AC ト DF トノ位置ノ關係ハ, 次ノ三ツノ場合ノ何レカーツデアアル。

- (1) AC ト DF トガ共ニ D カラ EF へ引イタ垂線 DM ニ重ナル場合(兩三角形ガ直角三角形デアルトキ)。
- (2) AC ト DF トガ共ニ DM ノ同ジ側ニアツテ重ナル場合。

(3) AC ト DF トガ DM ノ兩側ニアツテ, 之ト等角ヲナス場合。

故ニ(1)及ビ(2)ノ場合デハ AB ト DE トニ對スル角ハ相等シク, 兩三角形ハ合同デアアル。

又(3)ノ場合デハ AB ト DE トニ對スル角ハ互ニ補角デアアル。

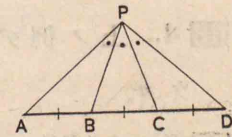
**注意** 2. 次ノ各ノ場合ニハ  $\angle C$  ト  $\angle F$  トガ補角デアアルコトガ出來ナイカラ, 兩三角形ハ合同デアアル。

- (a)  $\angle B$  ト  $\angle E$  トガ直角又ハ鈍角デアルトキ。
- (b)  $\angle C$  ト  $\angle F$  トガ共ニ銳角, 共ニ鈍角デアルトキ, 又ハ何レカーツガ直角デアルトキ。
- (c) AC, DF ガ AB, DE ヨリモ大キイトキ。

**問 3.** 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ガ對邊ヲ二等分スルトキハ, 此ノ三角形ハ二等邊三角形デアアル。

**問 4.** 二點 B, C ハ一ツノ線分 AD ヲ三等分スル

點デアルトキ, 直線 AD 外ニ一點 P ヲ取ツテ  $\angle APD$  ガ PB ト PC トデ三等分



サレルヤウニスルコトガ出來ルカドウカ。

神智内記 ①

### 11. 多角形ノ内角ノ和

**問 1.** 多角形ノ内角及ビ外角ノ和ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 正  $n$  角形ノ一ツノ内角及ビ一ツノ外角ヲ表ハス公式ヲ書ケ。

**問 3.** 或正多角形ノ一角ガ  $162^\circ$  デアル。此ノ邊數ヲ求メヨ。

**例** 四角形  $ABCD$  ノ相隣ル二角  $A, B$  ノ二等分線ノ交角  $O$  ノ大サハ  $\frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$  ニ等シイ。

**證明**  $\angle O = 2RL - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

然ルニ四角形ノ内角ノ和ハ

$4RL$  デアルカラ

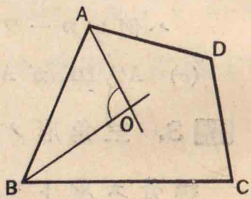
$$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 2RL$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) = 2RL - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

$$\therefore \angle O = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

**問 4.** 上ノ例デ  $\angle A, \angle C$  ノ二等分線ノ交角ハドウカ。

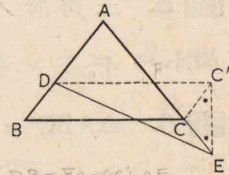
**問 5.**  $\triangle ABC$  ノ  $\angle B$  ト  $\angle C$  トノ二等分線ノ交角及ビ  $B$  ト  $C$  トニ於ケル外角ノ二等分線ノ交角ヲ  $\angle A$  デ表ハセ。



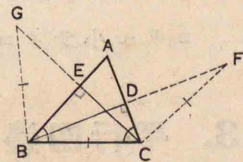
### 12. 三角形ノ邊ト角トノ大小

**問 1.** 三角形ノ邊ト角トノ大小ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 二等邊三角形  $ABC$  ノ邊  $AC$  ノ延長上ニ一點  $E$  ヲ取リ,  $AB$  上ニ一點  $D$  ヲ取ツテ  $BD = CE$  ナルヤウニスレバ  $DE > BC$  デアル。  
( $BC$  ヲ  $DC'$  ノ位置ニ平行移動シ  $\triangle DEC'$  ノ  $\angle DC'E$  ト  $\angle DEC'$  トヲ比較スル)



**問 3.**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $AB > AC$  デ  $B, C$  カラ對邊ヘ引イタ垂線ヲ  $BD, CE$  トスルト,  $BD > CE$  ヲリモ大キイ。  
( $BD, CE$  ヲ延長シ  $BF, CG$  ヲ夫々,  $BD, CE$  ノ 2 倍ニ等シクスル)



**例**  $O$  ヲ  $\triangle ABC$  内ノ任意ノ點トスレバ

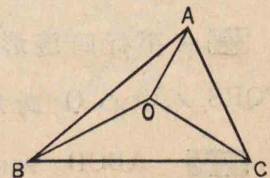
$$OA + OB + OC < AB + BC + CA$$

**證明**  $OA + OB < CA + CB$

$$OB + OC < AB + AC$$

$$OC + OA < BA + BC$$

此ノ三式ヲ邊々相加ヘテ





$$2(OA+OB+OC) < 2(AB+BC+CA)$$

$$\therefore OA+OB+OC < AB+BC+CA$$

問4. 上ノ例ノ假設デ次ノ式ヲ證明セヨ。

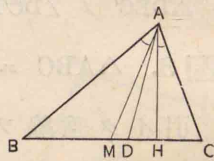
$$OA+OB+OC > \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

問5. 三角形ノ三ツノ高サノ和ハ其ノ周ヨリモ小サイ。

問6.  $\triangle ABC$ ニ於テ、 $AD$ ヲ $\angle BAC$ ノ二等分線トシ、 $AM, AH$ ヲ夫々 $A$ カラ $BC$ ニ引イタ中線ト垂線トスレバ、 $AD$ ハ $AM$ ト

$AH$ トノ間ニアル。

( $\angle BAM, \angle CAH$ ガ共 $= \frac{1}{2}\angle BAC$ ヨリモ小サイコトニ着眼セヨ)



### 13. 平行四邊形・矩形・正方形

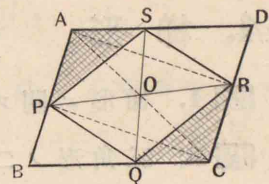
問1. 次ノモノニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

- 1 平行四邊形      2 矩形
- 3 正方形          4 菱形

例 平行四邊形  $ABCD$ ニ内接スル平行四邊形  $PQRS$ ノ中心  $O$ (對角線ノ交點)ハ皆相合スル。

解析  $ABCD$ ヲモ内接形ノ極端ナ位置ト考ヘラ

レルカラ、中心  $O$ ガ常ニ相合スルタメニハ  $O$ ガ  $AC$ ノ中點ニ合スルコトヲ要スル。

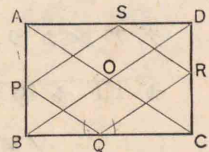


$\triangle APQ \cong \triangle CRQ$   
 $AP \parallel CR$   
 $AP = CR$  平行四邊形  
 $PR \parallel AC$  中點ヲ取ル

依ツテ  $APCR$ ガ平行四邊形デアルコト、從ツテ  $AP$ ト $CR$ トガ平行デ且相等シイコト、從ツテ  $\triangle PAS \cong \triangle RCQ$ デアルコトヲ要スル。

問2. 矩形  $ABCD$ ニ内接スル四角形  $PQRS$ ノ三邊ガ夫々此ノ矩形ノ對角線

ニ平行デアレバ、 $PQRS$ ハ平行四邊形デアル。ソシテ其



ノ各隣邊ハ夫々  $ABCD$ ノ各邊ニ等角ヲナシ、其ノ周ハ  $AC+BD$ ニ等シイ。

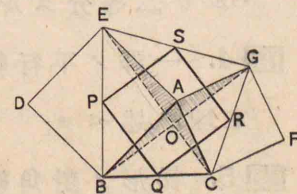
問3.  $\triangle ABC$ ノ邊  $AB, AC$ ノ上ニ其ノ外方ニ正方形  $ABDE, ACFG$ ヲ作り、 $EB, BC, CG, GE$ ノ中點ヲ

夫々  $P, Q, R, S$ トスレバ、 $PQRS$ ハ正方形デアル。

( $PQRS$ ハ平行四邊形デアル

カラ、其ノ二隣邊ガ相等シ

ク且垂直デアルコトヲ證明スル)



## 14. 梯形

問1. 梯形ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

問2. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ通ル直線ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

例 四角形 ABCD ニ於テ  $AB=CD$  ナルトキ、二邊 BC, AD ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ、AB, CD ノ延長ハ EF ト等角ヲナス。

解析 AC ノ中點ヲ M トスルト、 $EM \parallel AB$ ,  $FM \parallel CD$

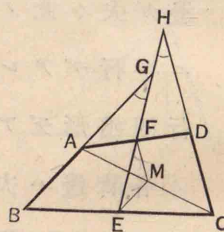
デアルカラ、AB, CD ノ延長

ガ EF ト等角ヲナスニハ

$$\angle MEF = \angle MFE$$

従ツテ  $ME = MF$

デアルコトヲ要スル。



問3.  $\triangle ABC$  ノ邊 BC 上ニ一點 D ヲ取リ  $BD=2CD$  ナルヤウニシ、E ヲ AB ノ中點トスレバ、AD ハ CE ヲ二等分スル。

問4. 一群ノ平行線ト其ノ截線トニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

問5. 梯形ノ對角線ガ等シイトキハ、之ハ等脚梯形デアル。

## 15. 三角形ノ中線ト重心

問1. 三角形ノ中線ト重心ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

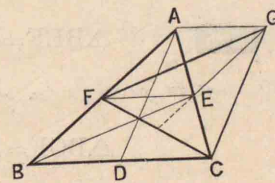
例  $\triangle ABC$  ニ於テ D, E, F ヲ夫々三邊 BC, CA, AB ノ中點トシ、AF ト FE トヲ二邊トスル平行四邊形 AFEG ヲ作レバ、 $\triangle CGF$  ノ三邊ハ夫々  $\triangle ABC$  ノ三中線ニ等シイ。

解析  $CG=AD$ ,  $GF=BE$  ヲ證

明スレバヨイノデアルカ

ラ、 $ADCG$  ト  $BEGF$  トガ平

行四邊形デアルコトヲイヘバヨイ。



問2. 上ノ例ヲ應用シテ、與ヘラレタ三線分ニ等シイ三中線ヲ有スル三角形ヲ作圖セヨ。

問3. AD ヲ  $\triangle ABC$  ノ一ツノ中線トスルト

$$\frac{1}{2}(AB+AC) > AD > \frac{1}{2}(AB+AC-BC)$$

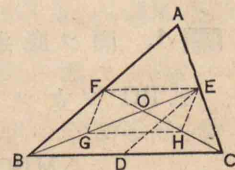
問4.  $\triangle ABC$  ノ邊 AC, AB 上ニ夫々 E, F ヲ取リ、

BE, CF ノ交點ヲ O トスルト

キ、 $BO=2OE$ ,  $CO=2OF$  デア

レバ、O ハ此ノ  $\triangle AEC$  ノ重心

デアル。



## 16. 多角形ノ面積

**問 1.** 矩形ノ面積ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 平行四邊形・三角形ノ面積ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

**例** 平行四邊形 ABCD ノ頂點 A カラ直線ヲ引キ BC ト E デ, CD 又ハ其ノ延長ト F デ交ハラシメレバ,  $\triangle BEF = \triangle DEC$  デアル。

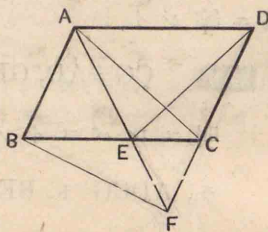
**解析**  $\triangle BEF = \triangle DEC$

デアルトメニハ

$$\triangle BCF = \triangle DEF$$

然ルニ  $\triangle BCF = \triangle AFC$

故ニ  $\triangle AFC = \triangle DEF$  デアルコトヲ要スル。



**問 3.** 平行四邊形 ABCD ノ對角線 BD ニ平行ニ EF ヲ引キ, BC ト CD トノ

交點ヲ夫々 E, F トスレバ

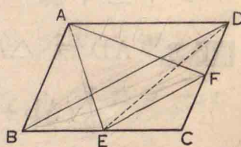
$$\triangle ABE = \triangle ADF$$

( $\triangle ABE = \triangle DBE$  デアル。  $\triangle ADF$  ハ何ニ等シイカ)

**問 4.** 同ジ底邊 BC ノ上ニ二ツノ三角形 ABC,

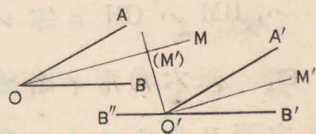
$A'BC$  ガ立ツトキ,  $AA'$  ノ中點ヲ M トスレバ

$$\triangle MBC = \frac{1}{2}(\triangle ABC \pm \triangle A'BC)$$



## 問題 1

1. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ平行デアレバ, 此ノ二角ノ二等分線ハ互ニ平行デアルカ又ハ直交スル。



2. 平行線ニ關スル公理ト重要定理トヲ述ベヨ。

3. 二等邊三角形 ABC ノ兩底角ノ二等分線ガ對邊ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ, EF ハ BC ニ平行デアル。

4. 二等邊三角形ノ底ノ兩端 B, C カラ對邊ニ相等シイ線分 BD, CE ヲ引ケバ, BE ト CD トハ等シイカドウカ。

5. 三角形 ABC ノ一邊 AB ノ中點 D カラ AC ニ DE ヲ引キ, DE ガ  $\frac{1}{2}BC$  ニ等シイトキハ, DE ハ BC ニ平行デアルカドウカ。

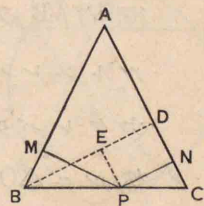
6. 等脚三角形 ABC ニ於テ  $AB = AC$  トシ, AB 上ニ一點 D ヲ, AC ノ延長上ニ一點 E ヲ取リ,  $BD = CE$  ナルヤウニスルトキハ, DE ハ BC デ二等分セラレル。

7. 直角三角形 ABC ノ斜邊デナイ二邊 AB, AC  
ノ上ニ其ノ形外ニ正方形 ABEF, ACGH ヲ作リ, E,  
G カラ斜邊 BC ノ延長ヘ垂線 EM, GN ヲ引クトキ  
ハ, BM ハ CN ニ等シイ。
8. 正六角形ノ各邊ノ上ニ其ノ形外ニ六ツノ正  
方形ヲ書イテ十二角形ヲ作ルト, コレハ正十二角  
形デアアルカドウカ。
9. 四角形 ABCD ニ於テ二邊 AB, CD ガ互ニ平行  
デ, 其ノ和ガ邊 BC ニ等シイトキハ,  $\angle ABC$ ,  $\angle BCD$   
ノ二等分線ハ AD 上デ交ハル。
10. 三角形ノ頂點カラニツノ底角及ビ其ノ外角  
ノ二等分線ヘ引イタ垂線ノ足ハ皆此ノ三角形ノ  
底デナイ二邊ノ中點ヲ通ル直線上ニアル。
11.  $\triangle ABC$  ノ頂點 B, C カラ其ノ對邊ヘ垂線 BE,  
CF ヲ引クト, EF ノ中點ト BC ノ中點トヲ結ブ直  
線ハ EF ニ垂直デアアル。
12. 四角形ノ二組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二直線ト  
對角線ノ中點ヲ結ブ直線トハ同ジ點ヲ通ル。
13.  $\triangle ABC$  ノ邊 BC ノ中點ヲ D, 中線 AD ノ中點  
ヲ E トシ, BE ト AC トノ交點ヲ F トスルト, F ハ

AC ノ三等分點ノ一ツデアアル。

14. 平行四邊形 ABCD ノ二邊 CD, DA ノ中點ヲ夫  
夫 E, F トスルト, BE, BF ハ對角線 AC ヲ三等分  
スル。
15. 梯形 ABCD ノ兩底ヲ AD, BC トシ, 之ニ平行ナ  
ル直線ガ AB, CD ト夫々 M 及ビ N デ交ハリ, MN ガ  
 $\frac{1}{2}(AD+BC)$  ニ等シイトキハ, M 及ビ N ハ夫々 AB,  
CD ノ中點デアアル。

16. 二等邊三角形ノ底邊上ノ任  
意ノ點カラ他ノ二邊ヘ引イタ垂  
線ノ和ハ常ニ一定ノ長サデアアル。  
又點ヲ底邊ノ延長上ニ取ルトド  
ウカ。



17. 梯形 ABCD ノ兩底ヲ AB, CD トシ, B カラ AD  
ニ平行ニ引イタ直線ト, D カラ BC ニ平行ニ引イ  
タ直線トノ交點ヲ E トスルト,  $\triangle CDE = \triangle ABE$  デ  
アル。
18.  $\triangle ABC$  ノ邊 AB, AC ノ上ニ外側ニ正方形 ABDE,  
ACFG ヲ作ルト,  $\triangle AEG$  ハ  $\triangle ABC$  ニ等シイ。

第三章 圓

17. 中心角・弧・弦

問 1. (1)圓ノ中心角ト之ニ對スル弧,(2)圓ノ弧ト其ノ弦トノ大サニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

例 弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ其ノ弦ニ對スル弧ヲ三等分スルカ。

證明 圓 O ニ於テ,弦 AB ヲ C, D デ三等分スル半

徑ガ AB ヲ E, F デ三等分スルトスレバ,  $\angle AOE = \angle EOF$  デナケレバナラナイ。

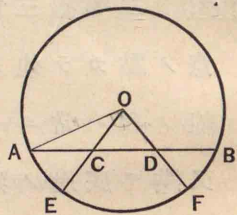
然ルニ  $\triangle OAD =$  於テ  $OA > OD$  デ, OC ハ其ノ中線デアアルカ

ラ  $\angle AOC < \angle COD$  デアル。コレハ矛盾デアアル。

故ニ弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ其ノ弦ニ對スル弧ヲ三等分シナイ。

問 2. 圓 O ノ弦 AB ヲ C マデ延長シテ BC ヲ半徑ニ等シク取り, CDOE ヲ引イテ圓周ト D, E デ交ハラシメレバ

$$\widehat{BD} = \frac{1}{3}\widehat{AE}, \quad \angle AOE = 3\angle C$$



18. 弦・中心線

問 1. 圓ノ弦ト中心線ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

例 AP, AQ ハ一ツノ圓ノ二ツノ弦デアアル。ソシテ M, N ヲ夫々  $\widehat{AP}$  及ビ  $\widehat{AQ}$  ノ中點トシ,弦 MN ガ AP, AQ 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 B, C トスレバ, AB ト AC トハ相等シイ。

解析 OM, ON ヲ結ブト  $OM \perp AP, ON \perp AQ$  デアル。

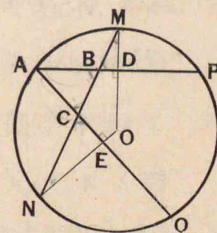
サテ

$$AB = AC \quad \text{ナラバ}$$

$$\angle MBD = \angle NCE$$

從ツテ  $\angle OMN = \angle ONM$  デア

ルコトヲ要スル。



問 2. 圓ノ弦ノ大小ニ關スル定理ヲ舉ゲヨ。

問 3. 圓ノ二ツノ等弦ガ相交ハレバ,其ノ交點デ分ケラレル部分ハ二ツツツ相等シイ。

問 4. 同ジ點ヲ通ル相等シイ弦(直徑デナイ)ハ二ツヨリハ多クナイ。

問 5. 圓ノ一ツノ弦ヲ二等分スル弦ヲ引キ,其ノ弦ヲ二等分スル第三ノ弦ヲ引キ,次第ニカヤウニ弦ヲ引ケバ,其ノ弦ハ次第ニ大キクナル。

### 19. 圓周角

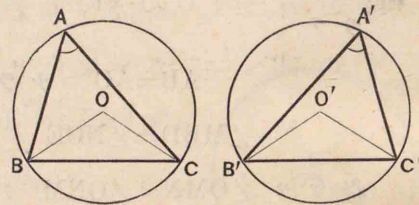
**問 1.** 圓周角ト中心角ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 弓形ト其ノ含ム角ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**例 1.** 底邊ト頂角ノ大サトガ等シイニツノ三角形ノ外接圓ハ相等シイ。

**解析**  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  ニ於テ  
 $BC = B'C', \angle A = \angle A'$

トシ、外心ヲ夫々  
 $O, O'$  トスルト、此  
ノ兩外接圓ガ相  
等シイタメニハ、



$OB = O'B'$  デアルコトヲ要スル。

從ツテ  $\triangle OBC \equiv \triangle O'B'C'$  デアルコトヲ要スル。

**問 3.** 上ノ例デ  $\angle A$  ト  $\angle A'$  トガ補角デアレバドウカ。

**問 4.**  $H$  ヲ  $\triangle ABC$  ノ垂心トスレバ、 $\triangle HBC, \triangle HCA, \triangle HAB$  ノ外接圓ノ大サニ差ガアルカ。

**例 2.**  $\triangle ABC$  ノ底邊  $BC$  ガ一定デ、頂角  $A$  ノ大サガ一定デアレバ、 $B, C$  カラ對邊ヘ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ線分  $EF$  ノ長サハ一定デアアル。

**解析**  $\angle BEC$  ト  $\angle BFC$  トガ共ニ直角デアアルカラ

$EF$  ハ  $BC$  ヲ直徑トスル圓

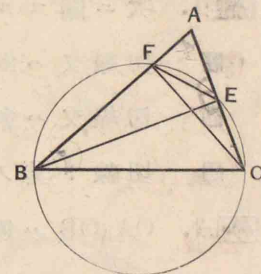
ノ弦デアアル。

故ニ  $EF$  ノ長サガ一定デ

アルタメニハ、圓周角  $EBF$

ガ一定ノ大サデアアルコト

ヲ要スル。



**問 5.**  $\triangle ABC$  ノ外接圓周上ノ一點  $P$  カラ三邊  $BC, CA, AB$  へ垂線ヲ引キ、其ノ各、ガ再ビ圓周ト交ハル點ヲ夫々  $A', B', C'$  トスレバ、 $\triangle A'B'C'$  ハ原ノ三角形ト合同デアアル。

**問 6.**  $AB$  ト  $CD$  トハ圓  $O$  ノ平行ナル二弦デ、 $M$  ハ  $CD$  ノ中點デアアル。今  $B$  ト  $M$  トヲ通ル弦ヲ  $BE$  トスレバ、四ツノ點  $A, E, O, M$  ハ同ジ圓周上ニアアル。

**問 7.** 圓内デ直交スルニツノ弦ガ圓周ヲ分ケル四ツノ弧ノ中デ相隣ラナイニツノ弧ノ和ハ其ノ圓ノ半圓周ニ等シイ。

又二弦ガ其ノ延長デ交ハル場合ハドウカ。

### 20. 切線・割線

問 1. 次ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

- 1 切線又ハ割線ト半徑。
- 2 切線又ハ割線ト中心トノ距離。
- 3 切線ト其ノ切點ヲ通ル弦トノ夾ム角。

例 1. OA, OB ハ圓 O ノ垂直ナル二ツノ半徑デア  
ル。今 B カラ任意ノ弦 BQ ヲ引イテ OA ト P デ交ハ  
ラシメ, Q ニ於ケル切線 QR ヲ引イテ OA ノ延長ト  
R デ交ハラシメルト,  $\triangle PQR$  ハ等脚三角形デア  
ル。

解析  $\angle RQP = \angle RPQ = \angle BPO$

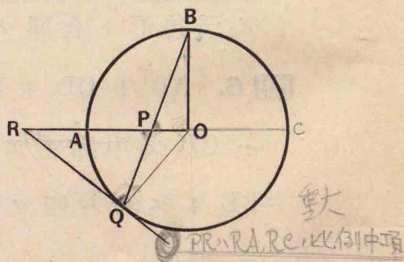
デアレバヨイ。然ルニ

$$\angle RQO = \angle BOP = RL$$

デア  
ルカラ

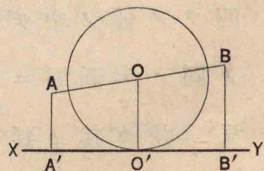
$$\angle OQB = \angle OBQ$$

デア  
レバヨイ。



問 2. A, B ハ二定點デ, XY ハ動ク直線デア  
ル。

ソシテ A, B カラ XY マデ  
ノ距離ノ和ハ常ニ等シイ。  
然ラバ XY ハ一ツノ定マ  
ツタ圓ニ切シナガラ動ク。



例 2. 圓 O ノ半徑 OP ヲ之ト等シイ長サニ Q マ  
デ延長シ, Q カラ此ノ圓ニ切線 QT ヲ引イテ切點ヲ  
T トスレバ, 圓 PQT ハ圓 O ニ等シイ。

解析 圓 PQT ト圓 O トハ弦 PT ヲ共有スルカラ

$$\angle TQP = \angle TRP \text{ デアルコ}$$

トヲ證明スレバヨイ。

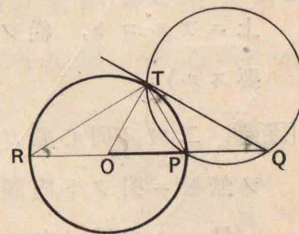
然ルニ  $\triangle QTO$  ハ直角三

角形デアツテ, P ハ其ノ

斜邊ノ中點デア  
ルカラ,

$$\angle TQP = \angle PTQ \text{ デアル。}$$

故ニ  $\angle PTQ = \angle TRP$  デアルコトヲ要スル。



問 3. 弧 AB ノ中點 C ヲ通ル任意ノ直線ヲ引キ

弦 AB 又ハ其ノ延長ト D デ, 弧

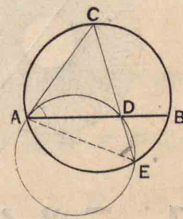
AB ノ共軛弧又ハ弧 AB ト E デ

交ハラシメレバ,  $\triangle ADE$  ノ外接

圓ハ AC ニ切スル。

(圓 ADE ガ AC ニ切スルニハ  $\angle CAD = \angle E$  デアルコトヲ

要スル)

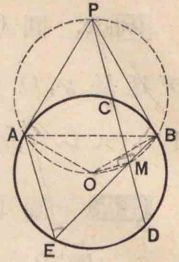


問 4. 圓 O ノ外部ノ一點 P カラ二ツノ切線 PA,

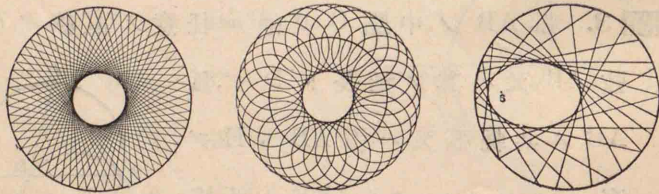
PB ト一ツノ割線 PCD トヲ引キ, A カラ CD ニ

平行ナル弦 AE ヲ引クトキハ、BE  
ハ弦 CD ヲ二等分スル。

(BE ト CD トノ交點 M ガ CD ノ中點デ  
アルタメニハ  $OM \perp CD$  デアルコトヲ  
要スル。故ニ P, A, O, M, B ガ同ジ圓周  
上ニアルコト、從ツテ  $\angle PMB = \angle PAB$  デアルコトヲ  
要スル)



**注意** ニツノ同心圓ガアルトキ、内圓ニ切スル外圓ノ弦  
ヲ無數ニ引クト、内圓ハ丁度此等ノ切線デ作レタヤウ  
ニ見エル(次圖ノ左)。故ニ此ノ内圓ヲ此等ノ弦ノ包線  
トイフ。此ノヤウニ線ノ運動デ線ガ出來ルト考ヘル  
コトガアル。



### 21. ニツノ圓

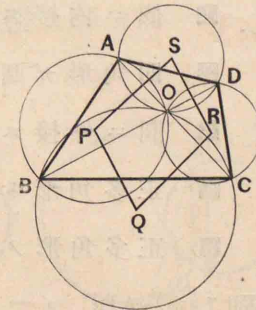
**問 1.** 次ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

- 1 相交ハルニツノ圓ノ共通中心線ト其ノ兩  
圓周ノ交點ノ位置及ビ兩圓ノ共通弦。

- 2 相切スルニツノ圓ノ共通中心線ト切點ノ  
位置。

- 3 ニツノ圓ノ相互ノ位置ト兩圓ノ半徑ノ和  
及ビ差。

**例** 四角形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスルト、  
 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODA$  ノ外接圓ノ中心ハ一ツ  
ノ平行四邊形ノ頂點トナル。



**證明** 四ツノ圓ノ中心ヲ P,

Q, R 及ビ S トスルト

$$PQ \perp BD, SR \perp BD$$

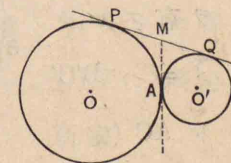
$$\therefore PQ \parallel RS$$

同様ニ  $PS \parallel QR$

故ニ PQRS ハ平行四邊形デアル。

- 問 2.** 三角形ノ三邊ノ上ニ形外ニ正三角形ヲ作  
ルトキハ、其ノ三ツノ正三角形ノ外接圓ノ中心  
ハ一ツノ正三角形ノ頂點トナル。

- 問 3.** A デ外切スルニツノ圓  
ノ共通外切線ノ切點ヲ P, Q  
トスレバ、A ハ PQ ヲ直徑ト  
スル圓ノ周上ニアル。





**問 4.** 前問デ P', Q' ヲ他ノ共通外切線ノ切點トシ, M, N ヲ共通内切線ト PQ, P'Q' トノ交點トスルト,  $MN \parallel PP' \parallel QQ'$  デ  $MN = \frac{1}{2}(PP' + QQ')$  デアル。

### 22. 内接形・外接形

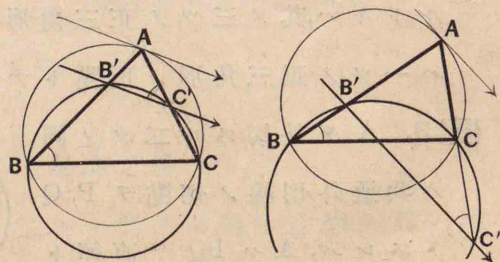
**問 1.** 次ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

- 1 圓ニ内接スル四角形ノ角ノ關係。
- 2 四角形ガ圓ニ内接スル條件。
- 3 圓ニ外接スル四角形ノ邊ノ關係。
- 4 正多角形ト圓トノ關係。
- 5 正多角形ノ面積。

**例 1.**  $\triangle ABC$  ノ二ツノ頂點 B, C ヲ通ル任意ノ圓周ガ二邊 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 B', C' トスレバ, 直線 B'C' ハ常ニ一定ノ方向ヲ有スル。

**解析** B'C' ガ

一定ノ方向ヲ有スルタメニハ B'C' ト AC (定直



線)トノ交角ガ一定デアルコトヲ要スル。

**問 2.** 圓ニ内接スル六角形ノ二組ノ對邊ガ平行デアレバ, 殘リノ一組ノ對邊モ平行デアル。

**例 2.** ニツノ圓ノ交點ヲ A, B トシ, A ヲ通ル割線 CAD ガ此ノ二圓周ト交ハル點 C, D ニ於テ夫々兩圓ニ切線ヲ引キ, 其ノ交點ヲ E トスレバ, E, C, B, D ハ同ジ圓周上ニアル。

**解析** 四角形 ECBD ガ圓ニ内接スルタメニハ

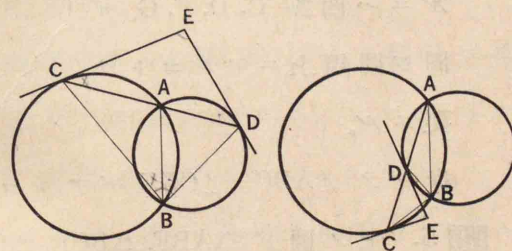
$$\angle E + \angle CBD$$

ガ 2 直角デア

アルコトヲ

要スル。

コレニハ



$$\angle CBD = \angle ECD + \angle EDC \text{ デアルコトヲ要スル。}$$

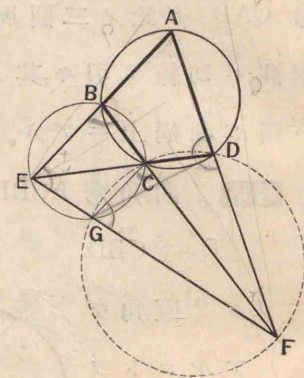
**問 3.** 上ノ例デ CAD ト C'AD' トヲ任意ノ二ツノ割線トシ CC' ト DD' トノ交點ヲ E トスレバドウカ。

**問 4.**  $\triangle ABC$  ノ各頂點カラ對邊ヘ引イタ垂線ヲ AD, BE, CF トスレバ, 垂心 H ハ  $\triangle DEF$  ノ内心デアル。

**注意**  $\triangle DEF$  ヲ  $\triangle ABC$  ノ垂足三角形トイフ。

**例 3.** 圓ニ内接スル四角形 ABCD ノ二邊 AB, CD ノ延長ノ交點ト、他ノ二邊 BC, AD ノ延長ノ交點トヲ夫々 E, F トスレバ、 $\triangle BCE$ ,  $\triangle CDF$  ノ外接圓ノ周ハ EF 上デ交ハル。

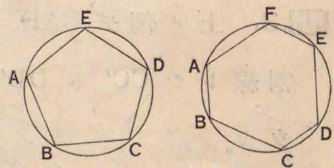
**解析** 圓 BCE ト EF トノ交點ヲ G トスルト、兩圓 BEC, CDF ノ周ガ EF 上デ交ハルニハ四點 C, D, F, G ガ同ジ圓周上ニアルコトヲ要スル。



從ツテ  $\angle ADC = \angle CGF$  デアルコトヲ要スル。

**問 5.** 上ノ圖デ  $\triangle ABF$ ,  $\triangle BCE$ ,  $\triangle CDF$  及ビ  $\triangle ADE$  ノ外接圓周ハ同ジ點ヲ通ル。

**問 6.** 圓ニ内接スル多角形ノ角ガ皆等シイトキハ、此ノ多角形ハ正多角形デアルカ。



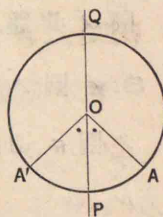
**問 7.** 邊ノ數ガ偶數デアル多角形ガ一ツノ圓ニ外接スルトキハ、其ノ一ツ置キニ取ツタ邊ノ和ハ相等シイ。

① 圓ニ内接スル多角形ノ各角ハ等シキハ、此ノ多角形ハ正多角形  
② 圓ニ外接スル多角形ノ各邊ノ和ハ等シキハ、此ノ多角形ハ正多角形

### 問題 2

1. 定マツターツノ直線上ニ中心ヲ置キ、此ノ直線外ノ一ツノ定點ヲ通ル圓周ハ皆他ノ一ツノ定點ヲ通ル。

2. 同一ノ點ヲ通ル總テノ直線ニ關シテ對稱デアアル圖形ハ其ノ點ヲ中心トスル圓デアアル。



3.  $\triangle ABC$  ノ内心ヲ O トシ、AO, BO, CO ノ延長ガ其ノ外接圓ノ周ト交ハル點ヲ夫々 A', B', C' トスルト、O ハ  $\triangle A'B'C'$  ノ垂心デアアル。

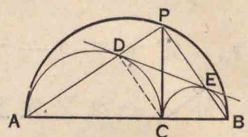
4. 一ツノ圓ノ内ニアル點ト外ニアル點トヲ通ル圓周ハ其ノ圓ニ交ハル。

5. 二ツノ圓 O, O' ノ交點ヲ A, B トシ、圓 O ノ周上ノ任意ノ點ヲ P トシ、PA, PB ガ圓 O' ノ周ト交ハル點ヲ夫々 C, D トスルト、弦 CD ノ長サハ一定デアアル。

6. 互ニ外方ニ離レル二ツノ圓ノ二組ノ共通切線ノ交點ト其ノ二圓ノ中心トハ同一ノ直線上ニアル。

7. 半圓周上ノ一點 P カラ直徑 AB へ垂線 PC ヲ引キ, AP, BP ガ AC, BC ヲ直徑

トスル圓ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスルト, DE ハ後ノ二ツノ圓ノ共通切線デアアル。



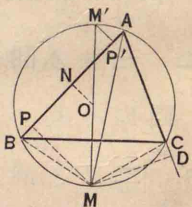
8. 圓ノ弦ガ直交スルトキ, 其ノ各ノ端ニ於テ其ノ圓ニ切線ヲ引イテ出來ル四角形ハ圓ニ内接スル。

9. M, M' ヲ  $\triangle ABC$  ノ外接圓ノ BC ニ對スル弧ノ中點トシ, M, M' カラ AB へ引イタ垂線ヲ MP, M'P' トスルト

$$AP = BP' = \frac{1}{2}(AB + AC)$$

$$AP' = BP = \frac{1}{2}(AB - AC)$$

$$\angle AMM' = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$$



10. 一ツノ四角形ノ内接圓ト外接圓トガ畫カレルトキハ, 其ノ相對スル切點ヲ結ブ二ツノ直線ハ直交スル。

11. 直角三角形 ABC ノ内接圓ガ斜邊 AB 及ビ BC ニ切スル點ヲ D, E トシ, DE ト AC ノ延長トノ交

點ヲ F トスルト  $BD = CF$  デアル。

12. 一ツノ圓周上ニ三點 A, B, C ヲ取り, 弧 BC (其ノ上ニ A ガナイトスル) ノ中點ヲ D トシ, 線分 DA 上ニ DB ニ等シク DO ヲ取レバ, O ハ  $\triangle ABC$  ノ内心デアアル。

13. 三角形ノ傍心ト内心トヲ結ブ線分ハ其ノ三角形ノ外接圓ノ周デ二等分セラレル。

14. 三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫々  $a, b, c$  デ表ハシ, 内接圓ノ半徑ヲ  $r$ , 又邊 BC, CA, AB ニ切スル傍接圓ノ半徑ヲ夫々  $r', r'', r'''$  トシ且此ノ三角形ノ面積ヲ  $S$ ,  $a+b+c$  ヲ  $2s$  デ表ハスト

$$S = sr = (s-a)r' = (s-b)r'' = (s-c)r'''$$

15. 正多角形ノ一外角ト, 其ノ一邊ニ對スル外接圓ノ中心角トハ相等シイ。

16. 正多角形ノ内部ノ任意ノ點カラ各邊へ引イタ垂線ノ和ハ一定デアアル。

第四章 軌跡及ビ作圖

23. 軌跡ノ定義

軌跡トハ點ガ或定メラレタ條件ニ從ツテ移動シタトキ、其ノ通過シタ道跡ヲ表ハス線デ、コレハ次ノ二ツノ事柄ニ分ケテ考ヘラレル。

[1] 其ノ條件ニ適スル點ハ皆其ノ線ノ上ニアルコト。

[2] 其ノ線ノ上ニアル點ハ皆其ノ條件ニ適スルコト。

即チ[1]ハ其ノ線ガ其ノ條件ニ適スル點ヲ皆含ムコトヲ表ハシ、[2]ハ其ノ線ノ上ニハ其ノ條件ニ適シナイ點ハ一ツモナイコトヲ表ハス。

此處ニ線トイフノハ一ツ又ハ幾ツカノ直線又ハ線分、或ハ一ツ又ハ幾ツカノ圓周又ハ弧、或ハ此等ノ集合デアル。<sup>\*</sup> 故ニ此ノ線ノ代リニ圖形トイフ言葉ヲ用ヒテ軌跡ノ定義ヲ次ノヤウニ述ベル。

\* 軌跡ニハ圓デナイ曲線デアルコトモアリ、又平面又ハ平面ノ一部分又ハ曲面デアルコトモアル。ソシテ又點ノ軌跡ノ外ニ線ノ軌跡ガアルガ、此處デハ一ツノ平面上ノ點ノ軌跡ガ直線又ハ圓トナル場合ノミ考究スル。

**定義** 或條件ニ適スル點ガ皆或圖形ノ上ニアツテ且其ノ圖形ノ上ノ點ハ皆其ノ條件ニ適スルトキハ、其ノ圖形ヲ其ノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。

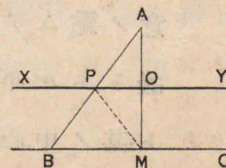
24. 重要ナ軌跡

**問 1.** 次ノ軌跡ヲ表ハス定理ヲ述ベヨ。

- ① 一定點カラ定距離ニアル點ノ軌跡。
- ② 一定直線カラ定距離ニアル點ノ軌跡。
- ③ 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡。
- ④ 二定直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡。
- ⑤ 一定線分ヲ直角ニ見込ム點ノ軌跡。
- ⑥ 一定線分ガ一定ノ大サノ角ヲ見込ム點ノ軌跡。

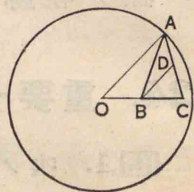
軌跡問題ノ中ニハ上ノ何レカーツニ歸着セシメルコトノ出來ルモノガ多イ。

**問 2.** 一定點カラ一定直線ヘ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ハ、其ノ定點カラ其ノ定直線ヘ引イタ垂線ノ垂直二等分線



デアル。(其ノ定點カラ其ノ定直線ヘ引イターツノ線分ノ中點ヲ通り其ノ定直線ニ平行ナル直線デアルトイツテモヨイ)

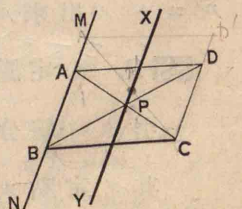
**問3.**  $\triangle ABC$  ノ底邊  $BC$  ノ位置ト長サトガ一定デ、且中線  $BD$  ノ長サガ一定デアレバ、頂點  $A$  ノ軌跡ハ點  $B$  ニ關スル點  $C$  ノ對稱點ヲ中心トスル一ツノ圓周デアアル。



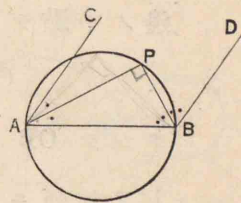
**注意** 軌跡ヲ表ハス定理ヲ證明スルニハ、第23節ノ[1]ト[2]トヲ證明スルノガ一般デアアルガ、時ニハ先ツ[2]ヲ證明シ(軌跡ノ定理デハ軌跡デアアル圖形ガ終結トシテワカツテキルカラ)次ニ[1]ノ對偶即チ其ノ圖形ノ上ニナイ點ハ皆定メラレタ條件ニ適シナイコトヲ證明スル方ガ簡單デアアルコトガアル。

**問4.** 問2ヲ上ノ注意ノ方法デ證明セヨ。

**問5.**  $BC$  ハ定線分デ、 $MBN$  ハ  $B$  ヲ通ル一ツノ定直線デアアル。今  $MN$  上ニ任意ノ點  $A$  ヲ取り  $AB, BC$  ヲ二邊トスル平行四邊形ヲ作ルト、其ノ中心ノ軌跡ハ  $BC$  ノ中點ヲ通り  $MN$  ニ平行ナル直線デアアル。



**問6.**  $AB$  ハ定線分デ、 $AC, BD$  ハ其ノ同ジ側ニアル任意ノ一組ノ平行線デアアル。然ラバ  $\angle BAC$  ト  $\angle ABD$  トノ二等分線ノ交點ノ軌跡ハ  $AB$  ヲ直徑トスル圓周デアアル。



### 25. 軌跡ノ求メ方

軌跡ヲ求メルニハ定メラレタ條件ニ適スルト假定スル點ヲ設ケ、適當ナ補助圖形ヲ加ヘテ其ノ點ハドンナ線ノ上ニアルベキカヲ考究シテ其ノ線ヲ發見シ且第23節ノ[1]ヲ證明スル(コレニハ定メラレタ條件ニ適スル特殊點ヲ利用スルトヨイコトガアル)。ソシテ次ニ其ノ逆ヲ證明スルガヨイ。

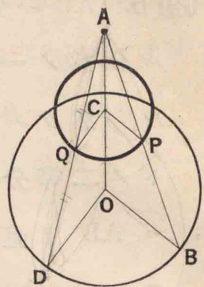
**例1.** 與ヘラレタ點  $A$  カラ與ヘラレタ圓  $O$  ノ周ヘ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**解**  $A$  カラ圓  $O$  ノ周上ノ任意ノ點  $B$  ニ至ル線分  $AB$  ヲ引キ、其ノ中點ヲ  $P$  トスルト、 $P$  ハ與ヘラレタ條件ニ適スル一ツノ點デアアル。  
 $AO$  ヲ結ビ、其ノ中點ヲ  $C$  トシ、 $OB, CP$  ヲ結ブト

PトCトハ夫々  $\triangle ABO$  ノ二  
邊ノ中點デアアルカラ

$$CP = \frac{1}{2}OB$$

ソシテ  $OB$  ハ  $B$  ガ圓  $O$  ノ周  
上ヲ如何ニ移動スルモ長サ  
ガ一定デアアル。



故ニ  $CP$  ノ長サモ  $P$  ノ移動ニ關ハラズ一定デ  
アル。ソシテ  $C$  ハ不動ノ點デアアル。

故ニ  $P$  ハ  $C$  ヲ中心トシテ與ヘラレタ圓  $O$  ノ半  
徑ノ半分ニ等シイ半徑ヲ有スル圓周  $(C)$  上ニ  
アル。

次ニ此ノ圓周  $(C)$  上ニ任意ノ點  $Q$  ヲ取リ、 $AQ$  ヲ  
引キ、其ノ上ニ點  $D$  ヲ  $QD=AQ$  ナルヤウニ取ル  
ト

$$OD=2CQ, \quad CQ=CP=\frac{1}{2}OB$$

デアアルカラ

$$OD=OB$$

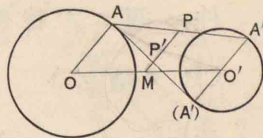
故ニ  $D$  ハ圓  $O$  ノ周上ノ點デアアル。

故ニ  $Q$  ハ定メラレタ條件ニ適スル。

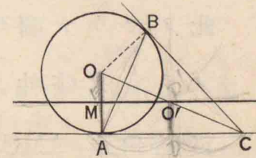
故ニ求メル軌跡ハ此ノ圓周  $(C)$  デアル。

問 1. 一定點カラ他ノ一定點ヲ通ル直線ヘ引イ  
タ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

問 2. 與ヘラレタ二圓  $O, O'$   
ノ平行ナル半徑ヲ  $OA$  及  
ビ  $O'A'$  トシ、線分  $AA'$  ノ中  
點ノ軌跡ヲ求メヨ。

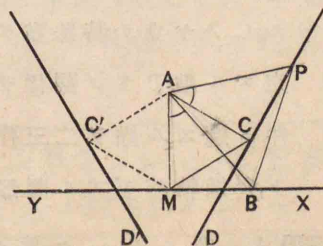


問 3. 與ヘラレタ圓  $O$  ノ周上ノ定點  $A$  カラ引イ  
タ切線ノ上ニ任意ノ點  $C$   
ヲ取リ、ソレカラ此ノ圓ニ  
切線  $CB$  ヲ引クトキ  $\triangle ABC$   
ノ外心ノ軌跡ヲ求メヨ。



例 2. 與ヘラレタ點  $A$  カラ與ヘラレタ直線  $XY$   
ヘ引イタ任意ノ線分ヲ底邊トスル正三角形ノ頂點  
ノ軌跡ヲ求メヨ。

解  $A$  カラ  $XY$  ヘ引イタ任意ノ線分ヲ  $AB$  トシ、  
之ヲ底邊トシテ正三  
角形  $ABP$  ヲ作ルト、其  
ノ頂點  $P$  ハ定メラレ  
タ條件ニ適スル一點  
デアアル。



今 A カラ XY へ垂線 AM ヲ引キ、AM ヲ底邊トシテ正三角形 AMC ヲ作ルト、C ハ定メラレタ條件ニ適スル特殊點デ定點デアアル。

CP ヲ結ブト  $\triangle CAP \equiv \triangle MAB$

故ニ  $\angle ACP = \angle AMB = \angle R$

故ニ P ハ C ヲ通り AC ニ垂直ナル直線ノ上ニアル。

此ノヤウナ圖形ハ AM ノ兩側ニ出來ルカラ、定メラレタ條件ニ適スル點ハ、AM ヲ底邊トスル正三角形 AMC、AMC' ノ頂點 C、C' ヲ通り夫々 AC 及ビ AC' ニ垂直ナル二直線ノ上ニアル。

次ニ此ノ二直線ノ上ノ點ハ皆定メラレタ條件ニ適スル。(學生之ヲ證明セヨ)

故ニ求メル軌跡ハ此ノ二直線デアアル。

**注意** 1. 軌跡デアアル圖形ヲ發見スルニ上ノ例 2 ニ於ケル C ノヤウナ特殊點ヲ作り、ソレト條件ニ適スルト假定スル點 P トノ關係ヲ考ヘルトヨイコトガアル。條件ニ適スル點ヲ二三作ツテ特殊點トノ關係ヲ考ヘルト、大抵軌跡デアアル圖形ノ見當ハツクモノデアアル。

**問 4.** 與ヘラレタ長サヲ有シ、與ヘラレタ直線ニ

平行ナル線ヲ引キ、其ノ軌跡ヲ求メヨ。

1. 與ヘラレタル  $\triangle PQR =$  相似ナル  $\triangle ABC$ 、頂點 A ガ定點ニシテ、頂點 B ガ定直線 XY 上ヲ動クキ、他ノ頂點 C ノ軌跡ヲ求ム。

(解) (1) A ヨリ XY へ到ル垂線 AM ヲ作り  $\triangle AMN$  ヲ  $\triangle ABC$  ト同ジ向キニ相似ニ作リ、点 N ハ條件ニ適スルニ定點ナリ

$\triangle ACN, \triangle ABM =$  対行  
 $AB:AC = AM:AN$   
 $\angle MAB = \angle NAC$  }  $\therefore \triangle ACN \sim \triangle ABM$

$\therefore \angle ANC = \angle AMB = \angle R$

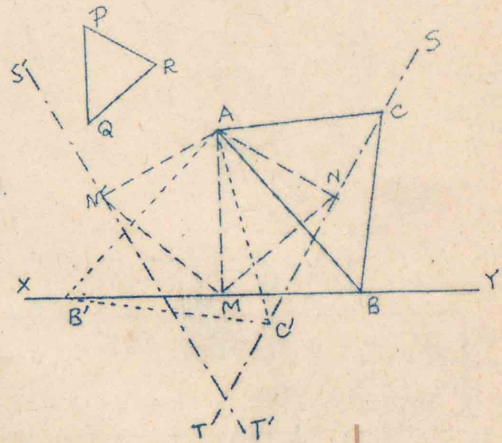
故ニ点 C ハ定點 N ヲ通り、定直線 AN ニ垂直ナル直線(コノ直線トスル)上ニアリ

(2) 直線 XY 上ニ任意ノ点 C' ヲ取り、AC' ヲ一辺トスル  $\triangle AC'B'$  ヲ  $\triangle AMN$  ト同ジ向キニ相似ニ作リ

(1) ト同理ニヨリ  $\triangle AC'N' \sim \triangle AB'M'$   $\therefore \angle AMB' = \angle ANC' = \angle R$

故ニ点 B' ハ XY 上ニアル。從ツテ C' ハ條件ニ適ス。

(1) (2) トヨリ  $\triangle ABC$  及  $\triangle AC'B'$  正三角形 AMN' ト同ジ向キニ作リ、又 AM' ヲ一辺トシテ  $\triangle PQR =$  相似ナル  $\triangle AMN'$  ヲ  $\triangle AMN$  ト反対側ニ作リ、 $\triangle AMN'$  ト同ジ向キニ  $\triangle ABC$ 、点 C' ノ軌跡ハ、ト同様ニシテ、定點 N' ヲ通り定直線 AN' ニ垂直ナル直線 ST' ナリ。



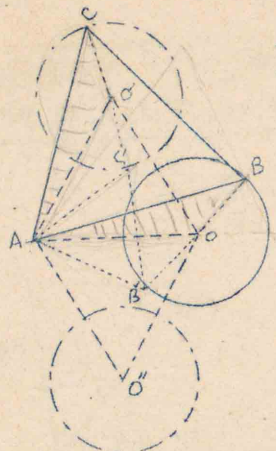
**類題** 1. 定點 A ヨリ定直線 XY へ到ル線分 AB ヲ一辺トスル正方形 ABCD ヲ作ルトキ、C 点ノ軌跡ヲ求メヨ。又 D ノ軌跡ハ如何。

**應用** 2. 與ヘラレタル  $\triangle ABC =$  正三角形 PQR ヲ内接シ、頂點 P、Q、R ハ夫々辺 BC、CA 上ニアルヤウニセヨ。

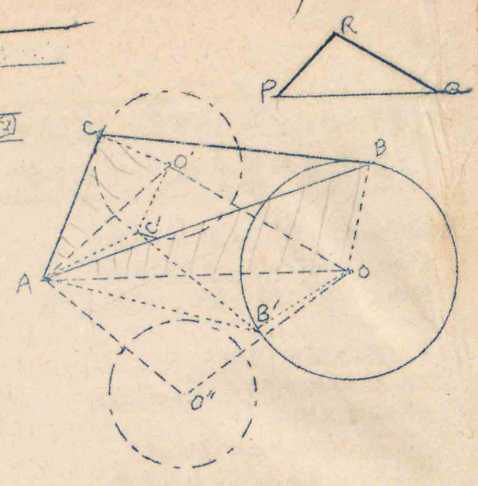
2. 定點 A ヨリ定円 O ノ周上ノ一点 B へ到ル線分 AB ヲ一辺トスル正三角形 ABC ノ頂點 C ノ軌跡ヲ求メヨ。

定線分 AO ヲ一辺トスル正三角形 AOO'、AOO'' ヲ作り、 $\triangle ABC$  及  $\triangle AOO'$  ト同ジ向キニ作リ、C' ノ軌跡ハ O' ヲ中心トシ、半径 AO' ヲ半径トスル円ヲ、 $\triangle AOO''$  ト同ジ向キニ作リ、軌跡ハ O'' ヲ中心トシ、半径 AO'' ヲ半径トスル円ヲ得ル。

2. 図



3. 図



3. 與へラレタル $\triangle PQR$ ニ相似ナル $\triangle ABC$ , 頂点Aが定点ニシテ頂点Bが定円Oノ周ニ動カケキ, 他, 頂点Cノ軌跡ヲ求メヨ.

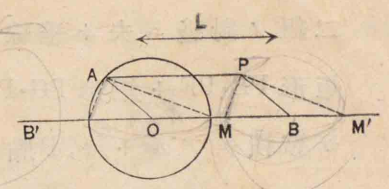
(解) (1) AOヲ一辺トスル $\triangle AOO'$ ヲ $\triangle PQR$ ニ相似テ $\triangle ABC$ ト同ジ向キニ作ルバ,  
 $\triangle ABC \sim \triangle AOO'$   
 $\therefore \frac{OC}{OB} = \frac{AO'}{AO} = \frac{PR}{PQ}$   
 $\therefore OC = \frac{PR}{PQ} \cdot r$  (Oヲ中心トシテ長ク $\frac{PR}{PQ}r$ ヲ半径トスル内周ニ $P$ ).

(1)+(2)ヨリ $\triangle ABC$ ヲ $\triangle AOO'$ ト同ジ向キニ作ルキ点Cノ軌跡ハO'内周ナリ.  
 又 $\triangle AOO'$ ヲ $\triangle PQR$ ニ相似ニ $AO$ ニ等シク $O'$ ヲ $O$ トシテ $\triangle AOO'$ ト同ジ向キニ $\triangle ABC$ ヲ作ルキ点Cノ軌跡ハO'中心, 半径 $\frac{PR}{PQ}r$ ノ内周ナリ.

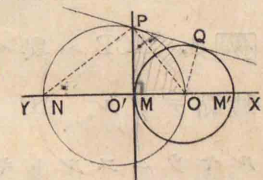
類題 3. 定点Aヨリ定円Oノ周ニ到ル線分ABヲ一辺トスル正方形ABCDヲ作ルキ, 頂点Cノ軌跡ヲ求メヨ. 又D点ノ軌跡ヲ求メヨ.

應用 4. 正三角形ABC(又ハ正方形ABCD)ヲ作り, 頂点Aハ定点ニシテ, B, Cハ夫々定円P, Qノ周ニアルヤウニセヨ.

平行ナル線分ガ, 其一ノ一端ヲ與ヘラレタ圓周ノ上ニ置イテ滑ルトキ他ノ端ノ軌跡ヲ求メヨ.

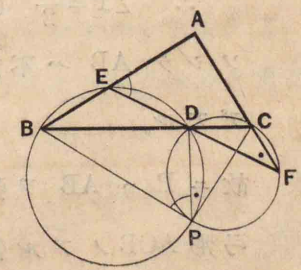


問 5. 定圓Oト其ノ中心Oヲ通ル定直線XOYガアル. XOY上ニ中心ヲ置キ且Oヲ通ル圓O'ト圓Oトニ共通切線ヲ引クトキ, 圓O'ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ.



例 3.  $\triangle ABC$ ノ邊BC上ノ定點Dヲ通ル直線ヲ引キ, 二邊AB, AC又ハ其ノ延長トノ交點ヲ夫々E, Fトスルトキ $\triangle BDE, \triangle CDF$ ノ外接圓ノDデナイ交點Pノ軌跡ヲ求メヨ.

解 A, B, P, Cハ同ジ圓周上ニアル(第22節問3). 故ニPハ $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ周上ニアル.  
 逆ニ此ノ圓周上ノ點ハ皆定メラレタ條件ニ適スル.



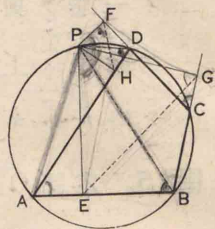
問 6. 動點Pカラ圓ニ内接スル四角形ABCDノ



二組ノ對邊ニ夫々垂線 PE, PF ト PG, PH ヲ引キ,  
矩形 PE・PF ト 矩形 PG・PH ト

ガ等積デアルトキ, P 點ノ軌  
跡ヲ求メヨ。

( $\triangle PEG \sim \triangle PHF$  カラ  $\angle PDA = \angle PBA$   
デアアルコトヲ誘導セヨ)



**例 4.** ACB ハ與ヘラレタ弓形デ, C ハ其ノ弧ノ上  
ノ動點デアアル。AC ノ延長上ニ點 P ヲ取リ CP=BC  
ナルヤウニスルトキ, P ノ軌跡ヲ求メヨ。

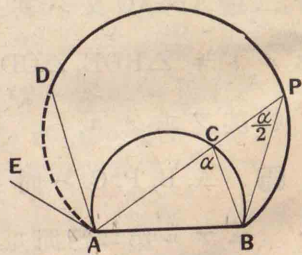
**解**  $\angle ACB$  ハ C ノ位置ニ關ハラズ一定ノ大サヲ  
有スル。之ヲ  $\alpha$  トスルト

$$\alpha = \angle P + \angle PBC$$

ソシテ  $\angle PBC = \angle P$

$$\therefore \angle P = \frac{\alpha}{2} \text{ (一定)}$$

ソシテ AB ハ不動ノ線分  
デアアル。



故ニ P ハ AB ヲ弦トシ  $\frac{\alpha}{2}$  ニ等シイ角ヲ含ミ, 且  
弓形 ACB ノアル側ニアル弓形 APB ノ弧ノ上ニ  
アル。

然ルニ C ガ漸次 A ニ近ヅクニ從ツテ AC ハ A

ニ於ケル圓 ACB ノ切線 AD ニ近ヅキ,  $\angle BAD$  ノ  
外ニ決シテ出ルコトハナイ。ソシテ

$$\angle BAD = 180^\circ - \alpha$$

又 A ニ於ケル圓 ADB ノ切線ヲ AE トスルト

$$\angle BAE = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \angle BAD < \angle BAE$$

故ニ AD ハ弧 APB ノ弦デアアル。從ツテ P ハ弧  
BD ノ上ニアル。

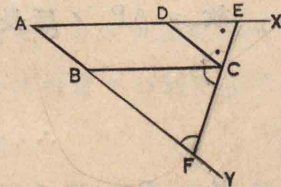
次ニ弧 BD ノ上ノ點ハ皆定メラレタ條件ニ適  
スル。(學生之ヲ證明セヨ)

故ニ求メル軌跡ハ弧 BD デアル。

**注意 2.** 此ノ例 4 ノヤウニ軌跡ガ或線ノ全部デハナク  
其ノ一部デアアルコトガアル。故ニ定メラレタ條件ニ  
適スル點ガ或線ノ上ニアルコトヲ知レバ, 其ノ線全部  
ノ上ノ點ガ其ノ條件ニ適スルカドウカヲ考ヘ, 若シ其  
ノ線ノ一部ガ軌跡トナル場合ニハ其ノ限界ヲ嚴密ニ  
吟味決定スルコトガ肝要デアアル。

**例 7.** AX, AY ハ與ヘラレタ

二ツノ半直線デ, 平行四邊  
形 ABCD ノ二邊 AB, AD ガ  
夫々 AX, AY 上ニアツテ,

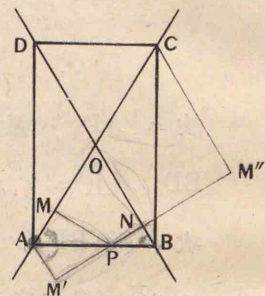


From AX, AY to E, F

其ノ周ガ一定デアルトキ、頂點 C ノ軌跡ヲ求メヨ。

**例 5.** 相交ハル二直線 AC, BD ニ至ル距離ノ和ガ與ヘラレタ線分 L ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**解** AC, BD ノ交點ヲ O トシ、  
P ヲ  $\angle AOB$  ノ内ニアツテ、  
定メラレタ條件ニ適スル  
點トシ、P カラ AC, BD へ夫  
夫垂線 PM, PN ヲ引クト



$$PM + PN = L$$

NP ヲ延長シ、其ノ上ニ  $PM' = PM$  ナルヤウニ  $M'$   
ヲ取り、 $M'$  カラ BD ニ平行ニ  $M'A$  ヲ引イテ AC  
トノ交點ヲ A トスルト、 $NM' = L$  デアルカラ A  
ハ定點(特殊點)デアル。ソシテ

$$\triangle PAM' \cong \triangle PAM$$

$$\therefore \angle PAM' = \angle PAM$$

故ニ AP ノ延長ト BD トノ交點ヲ B トスルト

$$\angle OBA = \angle OAB$$

$$\therefore OB = OA$$

故ニ P ハ線分 AB ノ上ニアル。

逆ニ線分 AB ノ上ノ點ハ皆定メラレタ條件ニ  
適スル。

故ニ  $\angle AOB$  ノ内ニアツテ求メル軌跡ハ線分 AB  
デアル。

同様ニ  $\angle BOC$ ,  $\angle COD$ ,  $\angle DOA$  ノ内ニアツテ求メ  
ル軌跡ハ夫々線分 BC, CD, DA デアル。但シ OC,  
OD ハ共ニ OA ニ等シイ。

故ニ求メル軌跡ハ此等ノ四線分カラ出來ル矩  
形 ABCD ノ周デアル。

**軌跡ノ作圖** OB 上ニ任意ノ點 N ヲ取り N カラ  
OB へ垂線  $NM'$  ヲ引キ  $NM' = L$  ナルヤウニ  $M'$   
ヲ定メ、 $M'$  ヲ通ツテ BD ニ平行ニ  $M'A$  ヲ引キ AC  
トノ交點ヲ A トスル。

次ニ AC, BD ノ上ニ OA ニ等シク OB, OC, OD  
ヲ取り、AB, BC, CD, DA ヲ結ブ。

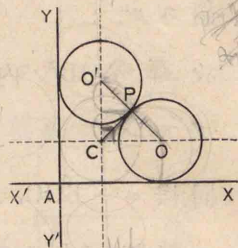
**注意 3.** 多クノ場合ニハ、求メル軌跡ガドーナ圖形デア  
ルカラ考ヘル間ニ自然ニ作圖セラレルガ、上ノ例 5 ノ  
ヤウニ其ノ作圖ガ明ラカデナイ場合ニハ別ニ之ヲ明  
ラカニスルコトガ必要デアル。

**問 8.** 相交ハル二定直線ニ至ル距離ノ差ガ與ヘ

ラレタ線分  $L$  ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

問 9. 等圓ガ直交スル二直

線ニ一ツツ切シ且互ニ  
外切シナガラ移動スルト  
キ、其ノ切點ノ軌跡ヲ求メ  
ヨ。

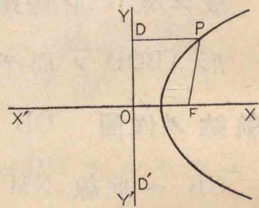


注意 4. 點ノ軌跡ハ定メラレタ條件ニヨツテハ直線及

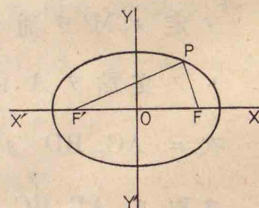
ビ圓以外ノ曲線デアルコト

ガアル。

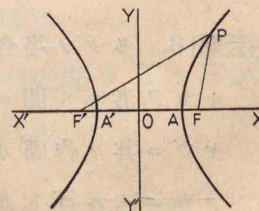
例ハバ一定點(F)ト一定直線  
(DD')トカラ等距離ニアル點  
ノ軌跡ハ拋物線デアル。



又二定點(F, F')カラノ距離  
ノ和ガ一定デアル點ノ軌跡  
ハ橢圓デアル。



又二定點(F, F')カラノ距離  
ノ差ガ一定デアル點ノ軌跡  
ハ双曲線デアル。



此等ハ皆重要ナ曲線デアル  
ガ本書ノ程度デハ之ヲ説カ  
ナイ。

問 題 3

1. 二等邊三角形 ABC ノ底 BC ニ垂直ナル直線ガ  
AB, AC 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 M, N トス  
ルトキ、線分 MN ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 與ヘラレタ三角形ノ頂點ヲ A, B, C トシ、 $\triangle PAB$   
ト  $\triangle PAC$  トガ等積デアルヤウニ點 P ヲ取ルトキ、  
P ノ軌跡ヲ求メヨ。

3. BC ハ一ツノ定線分、BA ハ B ヲ通ル一ツノ定  
直線デアル。今 BC ヲ底トシ BA 上ニ頂點ヲ有  
スル三角形ヲ作ルトキ、此ノ三角形ノ重心ノ軌跡  
ヲ求メヨ。

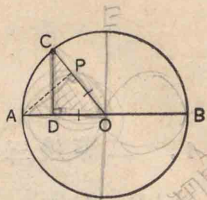
4. 三角形ノ底邊ガ一定デ、他ノ二邊ノ差ガ不變デ  
アルトキ、頂角ノ二等分線ヘ底邊ノ兩端カラ引イ  
タ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

又頂角ニ隣ル外角ノ二等分線ヘ引イタ垂線ノ足  
ノ軌跡ハドウカ。

5. 定直線ト夫々其ノ上ノ二定點ニ於テ切シ互ニ  
外切スル二圓ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

6. 圓 O ノ周上ヲ運行スル點 C ガアル。此ノ點 C

ガ此ノ圓ノ一定直徑 AOB ニ投ジ  
タ正射影ヲ D トシ、半徑 OC 上ニ  
OD ニ等シク OP ヲ取ルトキ、P ノ  
軌跡ヲ求メヨ。



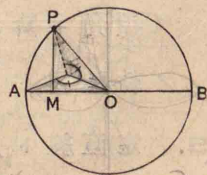
7. 與ヘラレタ線分 AB ヲ C デ二ツニ分ケ、其ノ  
兩部分ヲ底邊トシ AB ノ同ジ側ニ二ツノ正三角  
形 ACD, BCD' ヲ作ルトキ、線分 DD' ノ中點 P ノ軌  
跡ヲ求メヨ。



8. 正三角形 ABC 内ニ一點 P ヲ取り、P カラ二  
邊 AB, AC ニ至ル距離ノ和ガ P カラ BC ニ至ル距  
離ニ等シイヤウニスルトキ、P ノ軌跡ヲ求メヨ。

9. 底邊ノ位置及ビ大サト頂角ノ大サトガ一定  
デアル三角形ノ内心ノ軌跡ヲ求メヨ。

10. AB ヲ定圓 O ノ與ヘラレタ直徑トスル。P ヲ  
其ノ周上ノ動點トシ、P カラ AB へ  
垂線 PM シ引クトキ、 $\triangle POM$  ノ内  
心ノ軌跡ヲ求メヨ。



(軌跡ハ四ツノ弧ヨリ成ル眼鏡形ノ圖  
形デアル)

Handwritten mathematical notes and diagrams for problem 10, including various geometric constructions and angle relationships.

## 26. 作圖題

問 1. 幾何學デ作圖題ヲ解クノニ用ヒル器具ハ  
何々カ。又其ノ各ノ用途ヲ述ベヨ。

問 2. 作圖ノ公法トハ何カ。又ソレヲ述ベヨ。

作圖題ノ解法 作圖題ヲ解クニハ次ノ順序方法  
ニヨル。

[1] 解析 求メル圖形ガ既ニ畫カレタトシ、解答ト  
假定スル圖形ヲ畫キ、之ニ適當ナ補助圖形ヲ加ヘ  
テ其ノ圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スルタメニハ  
ドンナ條件ガ成立タネバナラナイカラ考ヘ、順次  
其ノ條件(作圖ノ必要條件)ヲ變化シテ遂ニ直ニ作  
圖シ得ラレル條件ヲ發見スルコト。

[2] 作圖 解析デ得タ最後ノ條件ニ適スル圖形ヲ  
畫イテ之ヲ出發點トシ、解析デ取ツタ進路ヲ逆ニ  
シテ順次其ノ各段階ニ於ケル條件ニ適スル作圖  
ヲナスコト。

[3] 證明 解答デアル圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適  
スルコトヲ證明スルコト。

[4] 吟味 解析デ得タ條件(作圖ノ必要條件)ニヨツ  
テ作圖ニ可能・不可能ノ場合ハナイカドウカラ研

究シ、若シ不可能ノ場合ガアルナラバ、其ノ可能デア  
アルタメノ條件(與ヘラレタ元素ノ關係)ヲ定メ、又  
其ノ可能デア場合ニ出來ル解答ノ數ニ就イテ  
研究スル。

**注意** 1. 解析ノ所デ述ベタ作圖シ得ラレル條件トイフ  
ノハ作圖ノ公法及ビ既ニ作圖シ得ラレタ基本作圖ノ  
條件ノコトデア。但シ次ノ各、ハナシ得ラレルモノ  
トシテヨイ。

- (1) 平面上ニ任意ノ點ヲ取ルコト。
- (2) 相交ハル二線ノ交點ヲ取ルコト。

**注意** 2. 解析デ得タ條件ハ解答トナル圖形ガ與ヘラレ  
タ條件ニ適スルタメノ必要條件ヲ基トシタノデア  
カラ、作圖デ出來タ圖形ハ與ヘラレタ條件ニ適スル  
タメニ必要デア性質ハ備ヘテキルケレドモ、マダ其ノ  
條件ニ適スルニ十分デアカドウカハワカラナイ。  
ソレデ必ズ證明ヲナシテ作圖デ出來タ圖形ガ與ヘ  
レタ總テノ條件ニ適スルコトヲ確メネバナラナイ。

**問** 3. 基本作圖題ヲ述ベヨ。

**例** 三角形 ABC ノ内ニ、底邊 BC ニ平行ナル直線  
DE ヲ引キ、二邊 AB, AC ト夫々 D, E デ交ハラシメ、  
 $DE = BD + CE$  ナラシメヨ。

**解析** 求メル直線 DE ガ既ニ引カレタトシ、其ノ  
上ニ DP ヲ BD ニ等シク取ルト

$$\angle DBP = \angle DPB$$

$$\angle PBC = \angle DPB$$

$$\therefore \angle DBP = \angle PBC$$

即チ BP ハ  $\angle ABC$  ノ二

等分線デアコトヲ要スル。

同様ニ PE = CE デアルカラ、CP ハ  $\angle ACB$  ノ二  
等分線デアコトヲ要スル。

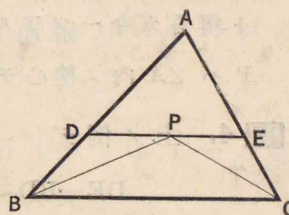
從ツテ P ハ  $\angle ABC$  ト  $\angle ACB$  トノ二等分線ノ交  
點( $\triangle ABC$  ノ内心)デアコトヲ要スル。

**作圖**  $\angle ABC$  ト  $\angle ACB$  トノ二等分線ヲ引キ、其ノ  
交點ヲ P トスル。

P ヲ通ツテ BC ニ平行ニ DE ヲ引キ、AB, AC ト  
夫々 D, E デ交ハラシメルト、DE ハ求メル直線  
デア。

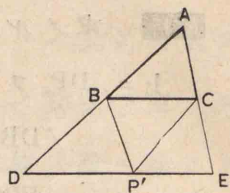
**證明** (學生之ヲ行ヘ)

**吟味** 三角形ノ内心ハ常ニ存在シ且其ノ數ハ唯  
一ツデアカラ、此ノ問題ハ常ニ可能デア。  
ソシテ解答ハ唯一ツデア。



注意 3. DEヲ形外ニ出ルコトヲ

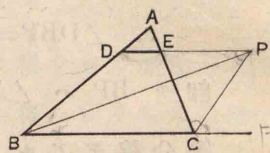
許ス(DEガAB, ACノ延長ヲ截ル)ト、解答ガ今一ツアル。此ノトキPハ∠A内ノ傍心デアル。



問 4. 上ノ例デ

$$DE = BD \sim CE$$

ナルヤウニ DEヲ引ケ。

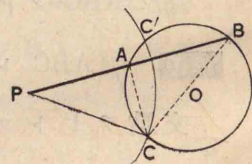


問 5. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ヲ引キ、此ノ直線カラ其ノ二圓ガ截リ取ル弦ガ等シイヤウニセヨ。

問 6. 與ヘラレタ圓Oノ外ノ

與ヘラレタ點Pカラ此ノ圓ニ割線PABヲ引キ PA=AB

ナルヤウニセヨ。



### 27. 軌跡交截法

作圖題解法ノ解析ニ於テ、其ノ解法ガ或二ツノ條件ニ適スル點ノ作圖ニ歸着スル場合ハ頗ル多イ。此ノ場合ハ、其ノ條件ノ中ノ一ツヲ除キ他ニ適合スル點ノ軌跡ヲ作ルガヨイ。カヤウニシテ二ツノ異

ナル軌跡ヲ得ルトキハ、其ノ交點ガ求メル點トナル。

例 1. 二定點 A, Bヲ通り且定圓Oト交ハツテ出來ル共通弦 EFガ與ヘラレタ直線 Lニ平行デアルヤウニ圓ヲ畫ケ。

解析 求メル圓ノ中心ヲCトスルト、Cハ二定點

A, Bカラ等距離ニアリ、

且 COガ共通弦 EFニ

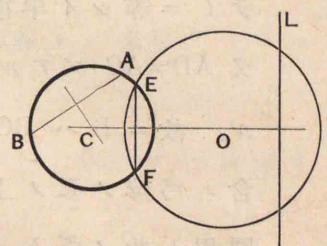
垂直デアルカラ COガ

Lニ垂直デナケレバナ

ラナイ。

故ニCハ ABノ垂直二等分線トOヲ通ツテL

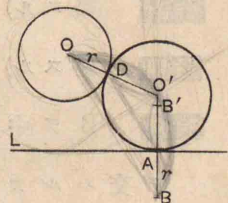
ニ直交スル直線トノ交點デアルコトヲ要スル。



問 1. 定直線上ノ定點ニ於テ

之ニ切シ且一定圓ニ切スル

圓ヲ畫ケ。



例 2. 底邊 BCト他ノ二邊ノ

長サノ和ト頂角ノ大サαトヲ與ヘテ三角形ヲ作

レ。

解析 (1) 底邊ノ位置モ長サモ定マツテキルカラ、

頂點ガ求メラレルトヨイ。

△ABCヲ求メル三角形ト

シ、BAヲDマデ延長シテ

AD=ACトナルヤウニス

ルトBD=AB+AC=lデア

ルカラ、DハBヲ中心トシ

テlニ等シイ半徑ヲ有スル圓周ノ上ニアル。

又AD=ACデアルカラ  $\angle D = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ デア

ル。故ニDハBCヲ弦トシ  $\frac{\alpha}{2}$ ニ等シイ角ヲ

含ム弓形ノ弧ノ上ニアル。從ツテDハ先キノ

圓周ト此ノ弧トノ交點デアルコトヲ要スル。

ソシテ頂點AハBDトCDノ垂直二等分線ト

ノ交點デアルコトヲ要スル。

**作圖** (略スル)

**證明** (略スル)

**吟味** Bヲ中心トスル圓周ハ弧BDCト二點D, D'

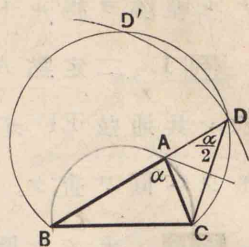
デ交ハルカラ、解答ハ二ツアルヤウデアアルガ、

△ABCトD'カラ得ル三角形トハ合同デアアル。

**解析** (2)  $BC = a$ トスレバ、 $a + l$ ハ△ABCノ周ニ

等シイカラ、之ヲ $2s$ トスル。

今△ABCノ内接圓Oト∠A内ノ傍接圓O'トヲ



畫キ、其ノABトノ切

點ヲ夫々D, D'トス

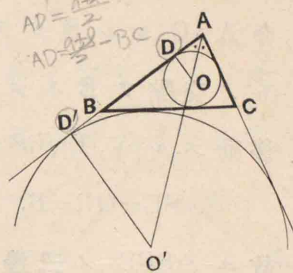
ルト  $AD = s - a$ ,  $AD' = s$

デアルカラ、O, O'ハ夫

夫∠BACノ二等分線

トD, D'ニ於ケルABノ垂線トノ交點デアアルコ

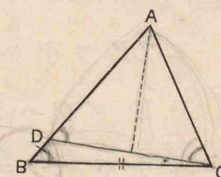
トヲ要スル。



吟味  
Flgの交點トシ  
O, O'ハ夫  
夫∠BACノ二等分線

**問2.** 二角ト其ノ對邊ノ和トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

**問3.** 底邊他ノ二邊ノ差ト兩底角ノ差トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。



### 28. 平行移動法 (解析・仕方)

**例** 四邊ノ長サヲ與ヘテ梯形ヲ作レ。 梯形ノ平行移動

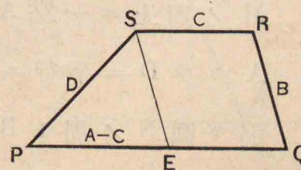
**解析** A, B, C, Dヲ與ヘラレタ四ツノ長サトスル。

問題ガ既ニ解ケタトシ、

PQRSヲ解答トシPQ,

QR, RS, SPガ夫々A, B,

C, Dニ等シイトスル。



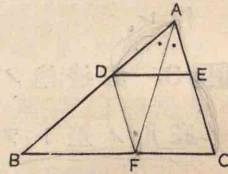
今  $A > C$  トシ,  $S$  カラ  $RQ$  ニ平行ニ  $SE$  ヲ引キ  $PQ$  トノ交點ヲ  $E$  トスル ( $RQ$  ヲ  $SE$  ノ位置ニ平行移動スル)ト,  $EQRS$  ハ平行四邊形デアルカラ

$$SE = QR = B, \quad PE = PQ - EQ = A - C$$

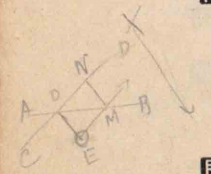
故ニ  $\triangle SPE$  ノ三邊ガ夫々  $A - C, B, D$  ニ等シイコトヲ要スル。

依ツテ先ヅ此ノ三角形ヲ作圖シテ解答ガ得ラレル。(吟味)  $a + c > b - d > a - c$

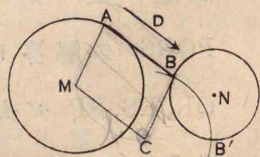
**問1.**  $\triangle ABC$  ノ底  $BC$  ニ平行ニ  $DE$  ヲ引キ  $AB, AC$  ト夫々  $D, E$  デ交ハラシメ,  $AD = CE$  トナルヤウニセヨ。



**問2.** 與ヘラレタ直線ニ平行デ,他ノ與ヘラレタ二直線ノ間ニ夾マレル部分ガ與ヘラレタ長サニ等シイヤウニ直線ヲ引ケ。



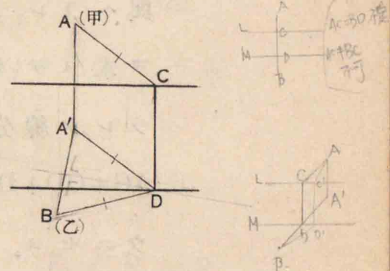
**問3.** 二圓  $M, N$  ト一直線  $D$  ガ與ヘラレタトキ, 圓  $M$  ノ周上ニ一點  $A$  ヲ求メ,  $A$  カラ  $D$  ニ平行ニ  $AB$  ヲ引キ圓  $N$  ノ周ト  $B$  デ交ハラシメ  $AB$  ガ與ヘラレタ



Handwritten notes for Question 3:  $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD = BC$ ,  $AB = CD$ ,  $AE = CF$ ,  $AF = CE$ ,  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ ,  $AE = CF$ ,  $AF = CE$ .

長サ  $l$  ニ等シイヤウニセヨ。

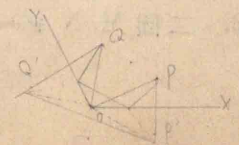
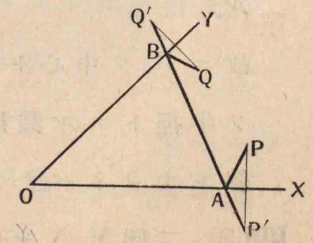
**問4.** 川ヲ隔テテ甲乙二軒ノ家ガアル。此ノ川ニ橋ヲ架ケルニ, 其ノ兩岸ノ渡リ口ガ甲乙カラ等距離ニアルヤウニシタイ。橋ノ位置ヲ定メヨ。但シ川ノ兩岸ハ平行デ, 橋ハ岸ニ垂直ニ架ケルモノトスル。又甲カラ乙ニ至ル道程ガ最小ナルヤウニスルニハドウスレバヨイカ。



### 29. 對稱法

**例1.** 與ヘラレタ角  $XOY$  ノ内部ニ二定點  $P, Q$  ガアル。今二邊  $OX, OY$  上ニ夫々二點  $A, B$  ヲ求メテ折線  $PABQ$  ノ長サガ最小ナルヤウニセヨ。

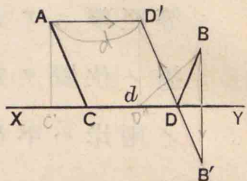
**解析**  $OX$  ニ關スル  $P$  ノ對稱點  $P'$  ト,  $OY$  ニ關スル  $Q$  ノ對稱點  $Q'$  トヲ取レバ  $PA = P'A, QB = Q'B$  デアルカラ, 折線  $PABQ$  ノ長サハ  $P'ABQ'$  ノ長サニ等シイ。





故ニ P'ABQ' ガ一直線トナルヤウニ A, B ヲ取  
ルコトガ必要デ(且十分)デア  
ル。

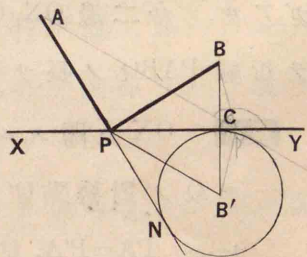
**問 1.** 一直線 XY ト其ノ同ジ側ニ二點 A, B トガ  
與ヘラレ、XY 上ニ二點 C, D  
ヲ求メテ CD ノ長サヲ與ヘ  
ラレタ線分  $d$  ニ等シクシ、且  
 $AC+CD+DB$  ヲ最小ナルヤ  
ウニセヨ。



**例 2.** 一直線 XY ト其ノ同ジ側ニ二點 A, B トガ  
與ヘラレ、XY 上ニ一點 P ヲ求メ、 $\angle APX$  ガ  $\angle BPY$  ノ  
2 倍デア  
ルヤウニセヨ。

**解析** XY ニ關スル點 B ノ對稱點ヲ B' トスルト、

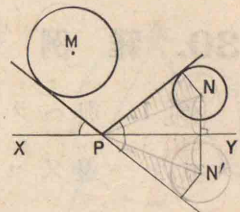
$\angle B'PC = \angle BPC$  デアルカ  
ラ、PB' ハ  $\angle APX$  ノ對頂  
角 CPN ノ二等分線デア  
ル。



故ニ B' ヲ中心トシ B'C  
ヲ半徑トスル圓周ヲ畫クト、APN ハ此ノ圓ノ切  
線トナラネバナラナイ。

**問 2.** 二圓 M, N ト一直線 XY トガ與ヘラレタト  
ノ同ジ側ニ

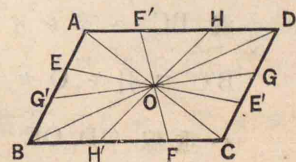
キ、XY 上ニ一點 P ヲ求メ、P  
カラ此ノ二圓ニ引イタ切線  
ガ XY ニ等シイ傾キヲナス  
ヤウニセヨ。



**例 3.** 中心ト各邊上ニアルベキ四ツノ點トガ與  
ヘラレテ平行四邊形ヲ作レ。

**解析** 求メル平行四邊形ヲ ABCD トシ、O ヲ其ノ

中心トシ、E, F, G, H ヲ  
夫々邊 AB, BC, CD, DA  
上ニアルベキ點トスル。

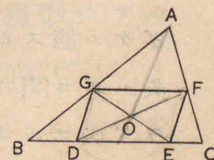


O ハ ABCD ノ對稱ノ中

心デア  
ルカラ、O ニ關スル E, F, G, H ノ對稱點  
E', F', G', H' ハ夫々邊 CD, DA, AB, BC  
上ニアル  
コトヲ要スル。

カヤウニシテ各邊上ニアルベキ二點ガ定マル  
カラ、ABCD ノ四邊ヲ引クコトガ出來ル。

**問 3.** 與ヘラレタ三角形ニ内  
接シ且其ノ形内ノ與ヘラレ  
タ點ヲ中心トスル平行四邊  
形ヲ作レ。



### 30. 雜例

1. 定長弦

**例 1.** 與ヘラレタ圓 O = 正三角形ヲ内接セシメテ其ノ一邊(又ハ延長)ガ與ヘラレタ點 P ヲ通ルヤウニセヨ。

**解析** 求メル三角形ヲ ABC トシ其ノ邊 BC (又ハ延長)ガ與ヘラレタ點 P ヲ

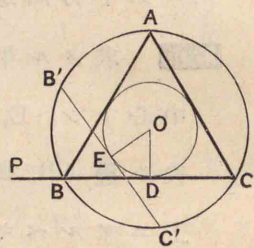
通ルトスル。

邊 BC = 等シイ任意ノ弦

B'C' ヲ引キ, O カラ BC, B'C'

ヘ垂線 OD, OE ヲ引クト,

OD = OE デアルカラ BC ハ O ヲ中心トシ OE ヲ半徑トスル圓ニ切スルコトヲ要スル。



**注意** 本問題ヲ解クニハ次ノ二條件ニ適スル弦 BC ヲ引クコトヲ工夫スルノdeal。

[1] 圓 O ノ内接正三角形ノ一邊ニ等シイコト。

[2] 與ヘラレタ點 P ヲ通ルコト。

ソコデ先ヅ此ノ二條件ノ中ノ一ツ[2]ヲ度外視シテ[1]ダケニ適スル弦 B'C' ヲ引キ, 次ニ此ノ弦ヲ[1]ノ性質ヲ失ハズニ[2]ニモ適スルヤウニ其ノ位置ヲ變ヘルコトヲ工夫スルノdeal。

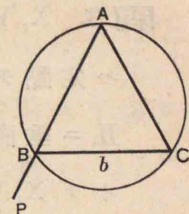
**問 1.** 與ヘラレタ圓ニ内接スル二等邊三角形ヲ

畫キ, 其ノ底邊ガ與ヘラレタ長

サ b ニ等シク, 他ノ邊ノ一ツガ

與ヘラレタ點 P ヲ通ルヤウニ

セヨ。



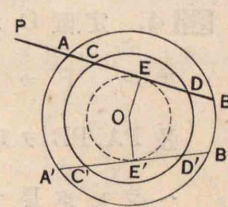
**問 2.** 一定點ヲ通ツテ與ヘラレタ二ツノ同心圓

ニ割線ヲ引キ, 其ノ二圓周ノ

間ニ夾マレル部分ガ與ヘラ

レタ長サニ等シイヤウニセ

ヨ。



**例 2.** 定直線 XY 外ニ定點 P ガアル。P カラ角  $\alpha$  = 等シイ角ヲナス二直線ヲ引キ, 之ガ XY カラ截リ取ル部分 QR ヲ定線分 L ニ等シイヤウニセヨ。

**解析** XY 上ニ L ニ等シイ部分 Q'R' ヲ取リ平行

四邊形 PQQ'P' ヲ

作レバ

$$PP' = QQ' = RR'$$

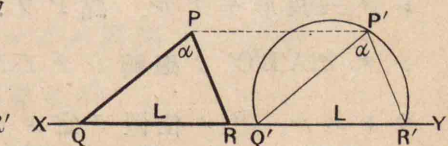
deal カラ, PRR'P' ハ平行四邊形 deal。

故ニ  $PQ \parallel P'Q'$  及ビ  $PR \parallel P'R'$

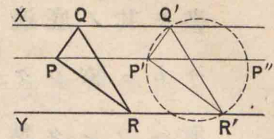
故ニ  $\angle Q'P'R' = \angle QPR = \alpha$

依ツテ P' ノ位置ヲ定メルコトガ出來ル。

(註) 同前

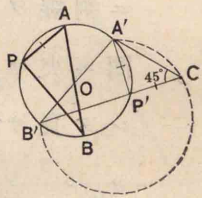


問3. X, Y ハ定平行線デ, P  
ハ定點デア。今 P カラ  
互ニ垂直ナル二直線ヲ引



イテ X, Y ト夫々 Q, R デ交ハラシメ, QR ガ與  
ヘラレタ長サ L ニ等シイヤウニセヨ。

問4. 定圓 O ノ周上ニ定點 P ガ  
アル。P カラ互ニ垂直ナル二  
弦 PA, PB ヲ引イテ, 其ノ和ガ與  
ヘラレタ長サニ等シイヤウニ  
セヨ。



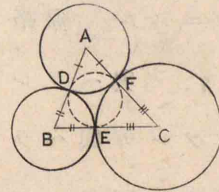
問題 4

1.  $\triangle ABC$  ト  $\triangle A'B'C'$  トハ合同ナル二ツノ與ヘラレタ三角形デア。點 P ヲ求メ, 此ノ點ヲ中心トシテ  $\triangle A'B'C'$  ヲ廻轉シテ  $\triangle ABC$  ニ重ネ合ハセヤウトスル。P ノ位置ヲ定メヨ。
2. 定圓 O 内ニ二定點 A, B ガアツテ,  $OA = OB$  デアル。此ノ圓周上ニ點 P ヲ求メ, P カラ A, B ヲ通ル二弦 PC, PD ヲ引キ  $PC = PD$  ナルヤウニセヨ。
3. A ヲ與ヘラレタ直線 XY 上ノ定點トシ, P ヲ XY

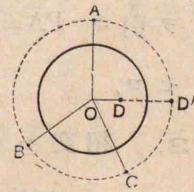
上ニナイ定點トスル。XY 上ニ點 C ヲ求メ  $AC + CP$   
ガ與ヘラレタ線分 L ニ等シイヤウニセヨ。

4. 與ヘラレタ直線 AB ニ其ノ上ノ定點 A デ切シ且其ノ上ニナイ定點 C ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。
5. 與ヘラレタ圓ト直線トガ交ハラナイトキ, 此ノ双方ニ切シ且與ヘラレタ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。
6. 三ツノ與ヘラレタ點ヲ中心トシ互ニ外切スル三ツノ圓周ヲ畫ケ。

(AD ノ長サヲ考ヘヨ。又問題ノ中ノ外切スルヲ單ニ切スルトスレバドウカ)



7. 四點 A, B, C, D ハ同ジ圓周上ニナイ定點デア。ソシテ此ノ何レノ三點ヲ取ツテモ同ジ直線上ニナイトキ, 此ノ四點カラ等距離ニアル圓周ヲ畫ケ。(解答ノ數ニ注意セヨ)



8. 與ヘラレタ點ヲ中心トシ與ヘラレタ直線ニ交ハル圓ヲ畫イテ, 出來ル弓形ノ一ツノ含ム角ガ與ヘラレタ角ニ等シイヤウニセヨ。
9. 定點 A カラ或方向ニ等速デ直進スル船ガアル。

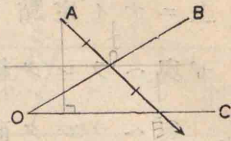
或人ガ或地點Oカラ此ノ船ヲ

望見シタトキ, Aヲ出發シテ

時間後ニ定直線OBノ上ニ來

リ,ソレカラ時間後ニ他ノ定直線OCノ上ニ來

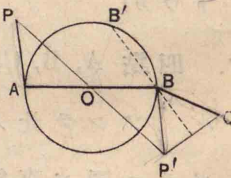
タ。此ノ船ノ航路ヲ示ス線ヲ畫ケ。



10. 直線狀ノ鐵道ヲ敷設スルニ,定メラレタ三箇所ノ地點カラ其ノ線路マデノ距離ガ等シイヤウニスル。線路ノ位置ヲ定メヨ。

11. 與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ長サノ弦ヲ引キ,ソレガ與ヘラレタ弦デ二等分サレルヤウニセヨ。

12. 圓Oト二點P,Qトガ與ヘラレタトキ,此ノ圓ノ直徑ABヲ引キ PA=QBトナルヤウニセヨ。



13. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ヲ引キ,ソレガ其ノ二圓ノ周カラ截リ取ラレル部分ノ長サヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ。

14. 與ヘラレタ二圓ヲ截ル一直線ヲ引キ,其ノ二圓ノ弦トナル部分ガ夫々與ヘラレタ二線分ニ等シイヤウニセヨ。

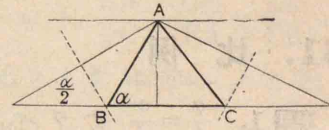
15. 次ノモノヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

1 周ト二角。

2 周ト一底角ト高サ

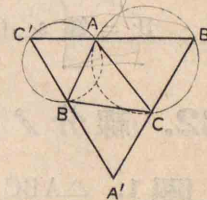
3 一邊ト一角ト一中

線。(五ツノ場合ガアル)



4 高サト底ノ兩端カラ出ル中線。

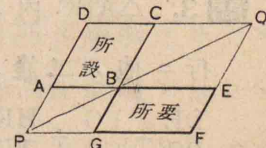
16. 與ヘラレタ三角形ニ,與ヘラレタ正三角形ニ等シイ正三角形ヲ外接セシメヨ。



17. 周ト對角線ノ長サトヲ知ツテ矩形ヲ作レ。

18. 與ヘラレタ正三角形ト等積デ,一邊ガ此ノ三角形ノ一邊ニ等シク且一角ガ與ヘラレタ角ニ等シイ平行四邊形ヲ作レ。

19. 與ヘラレタ平行四邊形ト等積デ,一邊ト一角トガ夫々與ヘラレタ線分ト角トニ等シイ平行四邊形ヲ作レ。



20. 矩形ノ一邊上ノ定點カラ二直線ヲ引イテ此ノ矩形ヲ三等分セヨ。

## 第五章 比例

## 31. 比例

問1.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ナラバ、之カラドンナ比例式ガ出來ルカ。色々ナ結果ヲ示セ。

問2.  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots$  ナラバ、此ノ各比ハドンナ比ニ等シイカ。

## 32. 線分ノ比例

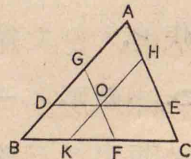
問1.  $\triangle ABC$  ノ邊  $BC$  ニ平行ナル直線ガ他ノ二邊(又ハ延長)ヲ  $D, E$  デ截ルトキ出來ル比例ニ關スル定理(たーれす Thales ノ定理)ヲ述ベヨ。

問2. 二圓ガ  $A$  デ内切スルトキ、内圓ニ切スル外圓ノ弦ヲ  $BC$  トシ、 $AB, AC$  ガ内圓ノ周ト  $P, Q$  デ交ハレバ  $AP:PB=AQ:QC$  デアル。

問3.  $\triangle ABC$  内ノ一點  $O$  ヲ通リ  $BC, CA, AB$  ニ平行ニ他ノ二邊ノ間ニ夫々  $DE, FG, HK$  ヲ引ケバ

$$\frac{DE}{BC} + \frac{FG}{CA} + \frac{HK}{AB} = 2 \text{ デアル。}$$

(左邊ノ各比ノ後項ヲ  $AB = \text{變ヘヨ}$ )



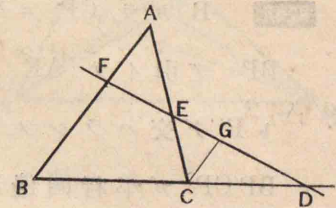
例  $\triangle ABC$  ノ三邊  $BC, CA, AB$  又ハ其ノ延長ガ一直線デ夫々  $D, E, F$  デ截ラレルト  $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$  デアル。(めねらうす Menelaus ノ定理)

證明  $C$  カラ  $AB$  ニ平行

ニ  $CG$  ヲ引キ、 $DE$  ト  $G$

デ交ハラシメルト

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{CG}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CG}{AF}$$



$$\therefore \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = \frac{BF}{CG} \times \frac{CG}{AF} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

問4. 上ノ圖デ  $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$ ,  $\frac{AF}{FB} = \frac{p}{q}$  デアルトキ、 $\frac{CE}{EA}$  ノ値ヲ求メヨ。

## 33. 線分ノ分割

問1. 次ノ作圖題ヲ解ケ。

① 定線分ヲ定比ニ分割セヨ。(比例配分)

② 與ヘラレタ三線分ノ第四比例項ヲ求メヨ。

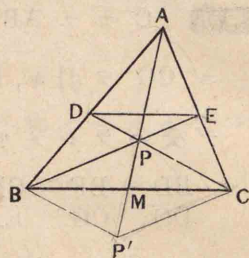
③ 與ヘラレタ二線分ノ第三比例項ヲ求メヨ。

問2. たーれすノ定理ノ逆ヲ述べ、之ヲ證明セヨ。

問3. めねらうすノ定理ノ逆ヲ述べ、之ヲ證明セヨ。

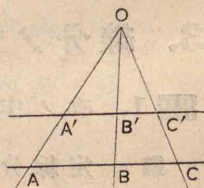
例  $\triangle ABC$  ノ邊  $BC$  ニ平行ニ  $DE$  ヲ引キ、 $AB, AC$  トノ交點ヲ夫々  $D, E$  トシ、 $BE$  ト  $CD$  トノ交點ヲ  $P$  トスレバ、 $AP$  ハ邊  $BC$  ノ中點ヲ通ル。

解析  $B$  カラ  $CP$  ニ平行ニ  $BP'$  ヲ引イテ  $AP$  ノ延長ト  $P'$  デ交ハラシメルト、 $BP'CP$  ガ平行四邊形デア  
ルコト、從ツテ  $CP' \parallel BE$  デアルコトヲ要スル。



從ツテ  $\frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PP'} = \frac{AD}{DB}$  デアルコトヲ要スル。

問 4. 一點  $O$  カラ出ル三ツノ半直線  $OA, OB, OC$  ガ二ツノ平行線  $ABC, A'B'C'$  ヲ夫々  $A, B, C$  及ビ  $A', B', C'$  デ截ルトキハ  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$  デアル。



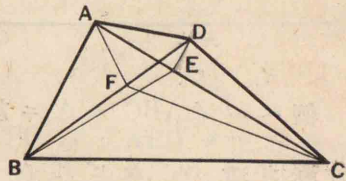
又此ノ逆ヲ證明セヨ。

### 34. 三角形ノ内角・外角ノ二等分線

問 1. 三角形ノ内角或ハ外角ノ二等分線ト其ノ角ノ對邊ノ部分ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

例 四角形  $ABCD$  ノ  $\angle A, \angle C$  ノ二等分線ガ對角線  $BD$  上デ交ハルトキハ、 $\angle B, \angle D$  ノ二等分線ハ對角線  $AC$  上デ交ハル。

解析  $\angle B$  ノ二等分線ト  $AC$  トノ交點ヲ  $E$  トスルト、 $DE$  ガ  $\angle D$  ノ二等分線デア  
ルコトヲ要スル。



從ツテ  $AE:EC=DA:DC$  デアルコトヲ要スル。

然ルニ  $AB:AD=CB:CD$  デアルカラ、

$AB:BC=DA:DC$  從ツテ  $AE:EC=AB:BC$

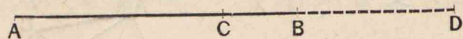
デア  
ルコトヲ要スル。

問 2.  $\angle C$  ヲ直角トスル直角三角形  $ABC$  ノ  $\angle A$  ノ二等分線ト對邊  $BC$  トノ交點ヲ  $D$  トシ、且此ノ三角形ノ面積ハ 6 平方糎デ、邊  $AC$  ノ長サハ 4 糎デア  
ル。  $AB$  ト  $AD$  トノ長サヲ求メヨ。

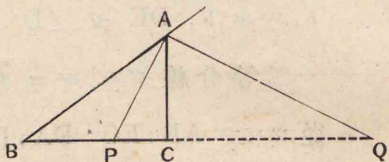
### 35. 調和列點

定義 線分  $AB$  ヲ相等シイ比ニ内分及ビ外分スル點ヲ夫々  $C$  及ビ  $D$  トスレバ、 $C$  ト  $D$  トハ  $AB$  ヲ調和ニ分ケルトイヒ、此ノ四點  $A,$

B, C, D ヲ調和列點トイフ。ソシテ C ト D トハ A, B ニ關シテ調和共軛點デアルトイフ。



例へバ  $\triangle ABC$  ノ A ニ於ケル内角ト外角トノ二等分線ガ邊 BC 及ビ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P, Q トスルト, B, C, P, Q ハ調和列點デアル。



問 1. 圓ノ直徑 CD 上ノ一點 B カラ之へ垂線 BP ヲ引キ, 圓周トノ交點 P ニ於テ此ノ圓ニ切線 PA ヲ引キ, CD ノ延長ト A デ交ハラシメルト, A, B, C, D ハ調和列點デアル。

問 2. A, P, B ハ同ジ直線上ニ此ノ順ニアル三點デアル。AB ノ延長上ニ Q 點ヲ取り, A, B, P, Q ガ調和列點デアルヤウニセヨ。

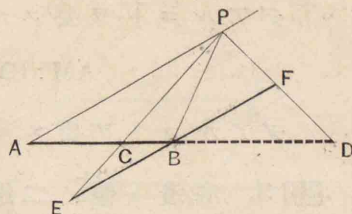
例 A, B, C, D ハ調和列點デ, P ハ直線 AB 外ノ一點デアルトキ, B ヲ通り PA ニ平行ナル直線ガ PC, PD ト夫々 E, F デ交ハレバ  $BE=BF$  デアル。

解析  $\frac{AP}{BE} = \frac{AC}{BC}, \frac{AP}{BF} = \frac{AD}{BD}$  デアルカラ,  $BE=BF$

ナルタメニハ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

デアルコトヲ要スル。



問 3. 右ノ圖デ

$\angle CPD = \angle RL$  デアレバ, PC ハ  $\angle APB$  ヲ二等分シ, PD ハ其ノ外角ヲ二等分スル。

### 36. あぼろにらすノ定理

問 1. 二定點カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シイ點ノ軌跡(Apollonius ノ定理)ヲ述ベヨ。

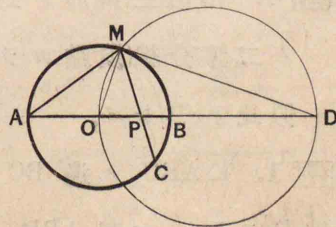
問 2. A, B, C ハ一ツノ定直線上ノ三定點デアル。一點 P ヲ求メテ  $PA:PB:PC$  ガ與ヘラレタ比  $l:m:n$  ニ等シイヤウニセヨ。

例 AB ハ定圓 O ノ定直徑デ, P ハ AB 上ノ定點デアル。此ノ定圓周上ニ一點 M ヲ求メ, 弦 MPC ヲ引キ, 之ヲ弦 MA ニ等シイヤウニセヨ。

解析  $MA=MC$  デアル

タメニハ

$$\angle AMO = \angle OMP$$



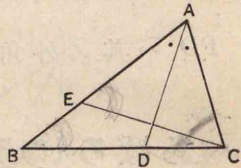
デアルコトヲ要スル。從ツテ

$$AM:PM=AO:PO$$

デアルコトヲ要スル。依ツテMノ軌跡ガワカル。

問3. 底邊ト他ノ二邊ノ比ト次ノモノトヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

- 1 一底角。
- 2 兩底角ノ差。
- 3 兩底角ノ和。



### 37. 三角形ノ相似

問1. ニツノ三角形ガ相似デアル條件ヲ擧ゲヨ。

問2. 一ツノ鋭角ヲ夾ム二邊ノ比ガ相等シイニツノ直角三角形ハ相似デアル。

問3. 相似三角形ノ内接圓ノ半徑ノ比モ、外接圓ノ半徑ノ比モ其ノ相似比ニ等シイ。

問4. 相似三角形ノ對應スル高サノ比モ、對應角ノ二等分線(頂點カラ對邊マデノ部分)ノ比モ相似比ニ等シイ。

例1.  $\triangle ABC$ ノ邊BC上又ハ其ノ延長上ニ任意ノ點Dヲ取レバ、圓ABDト圓ACDトノ半徑ノ比ハ

AB:ACニ等シイ。

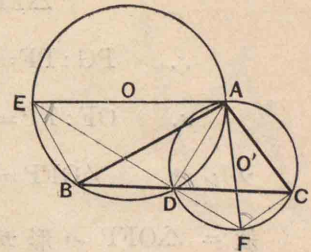
解析 ニツノ圓ノAヲ通ル

直徑ヲAE, AFトスルト

$$AE:AF=AB:AC$$

デアルコトヲ要スルカ

ラ、 $\triangle ABE$ ノ $\triangle ACF$ デアルコトヲ要スル(問2)。



問5. ニツノ圓ガAトBトデ交ハリ、Bヲ通ル任意ノ直線ガ此ノ二圓周トC及ビDデ交ハレバ、ACトADトノ比ハ一定デアル。

問6. 圓Oニ其ノ外部ノ一點Pカラニツノ切線PA, PBヲ引キ、圓周上ノ任意ノ點CカラAB, PA, PBヘ垂線CL, CM, CNヲ引クトキハ、CLハCMトCNトノ比例中項デアル。

例2. 相交ハル二定直線AB, CDカラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比M:Nニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

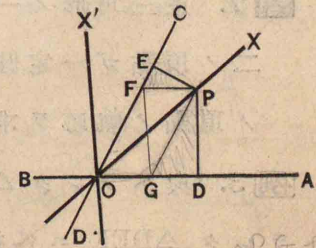
解析 Pヲ條件ニ適スル

任意ノ一點トシ、Pカラ

AB, CDヘ夫々垂線PD,

PEト平行線PF, PGト

ヲ引ケバ



$\triangle PGO$   
 $\frac{PG}{GO} = \frac{PE}{EO}$   
 $PG \cdot EO = PE \cdot GO$   
 $PG \cdot EO = PE \cdot GO$   
 $PG \cdot EO = PE \cdot GO$



$$\triangle PDG \sim \triangle PEF$$

$$\therefore PG : PF = PD : PE = M : N$$

$$\therefore OF : FP = M : N \quad (\text{一定})$$

$$\text{ソシテ} \quad \angle OFP = 2\angle AOC \quad (\text{一定})$$

故ニ  $\triangle OFP$  ハ形ガ一定(常ニ一定三角形ニ相似)

デアアル。故ニ  $\angle FOP$  ガ一定デアアル。

故ニ P ガ  $\angle AOC$  又ハ其ノ對頂角ノ内ニアル場合ハ、Oヲ通り  $\angle AOC$  及ビ其ノ對頂角ノ内ニアールーツノ直線ノ上ニアルコトヲ要スル。

同様ニ P ガ  $\angle COB$  又ハ其ノ對頂角ノ内ニアル場合ハ、Oヲ通り此ノ二角ノ内ニアールーツノ直線ノ上ニアルコトヲ要スル。

**注意** 本題デハ軌跡ノ作圖法ヲ明示スルコトヲ要スル。又軌跡ハ二ツノ直線ヨリ成ルガ、其ノ一ツ  $OX'$  (前圖)ハ  $GF$ ニ平行デアアル。

問7. 正三角形ノ一頂點ヲ一定點 Aニ固定シ、第二ノ頂點ガ一定圓ノ周上ヲ移動スルトキ、第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

例3. 與ヘラレタ  $\triangle ABC$ ニ相似ナル三角形ヲ與ヘラレタ  $\triangle DEF$ ニ外接セシメヨ。

解析  $\triangle A'B'C'$ ヲ求メル三角

形トシ、 $\angle B' = \angle B, \angle C' = \angle C$

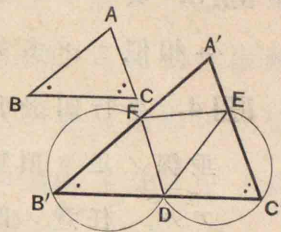
トスルト、 $B'$ ハ  $DF$ ヲ弦ト

シ  $\angle B$ ニ等シイ角ヲ含ム

弓形ノ弧ノ上ニアツテ、 $C'$

ハ  $DE$ ヲ弦トシ  $\angle C$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ

弧ノ上ニアルコトヲ要スル。



問8. 上ノ例デ  $\triangle A'B'C'$ ヲ  $\triangle ABC$ ニ合同デアアル

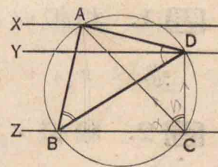
ヤウニスルニハドウスルカ。

問9. 與ヘラレタ三ツノ平行

線ノ上ニ夫々一ツツ頂點

ヲ置キ、與ヘラレタ三角形ニ

相似ナル三角形ヲ畫ケ。



### 38. 多角形ノ相似

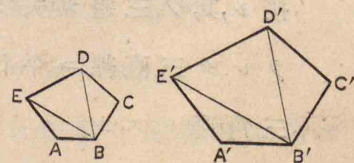
問1. 二ツノ相似多角形ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

問2. 相似多角形ハ同

數ノ夫々相似ナル三

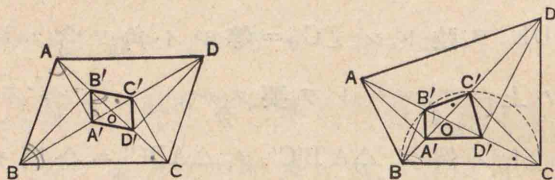
角形ニ分ケルコトガ

出來ル。



問3. 與へラレタ線分ノ上ニ與へラレタ多角形ニ相似ナル多角形ヲ作レ。

問4. 平行四邊形ノ各頂點カラ對角線へ引イタ垂線ノ足ヲ頂點トスル四邊形ハ原形ト相似デアル。任意ノ四邊形デハドウカ。



### 39. 相似ノ中心・相似法

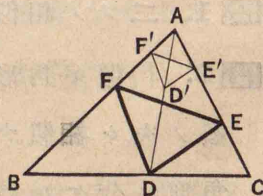
問1. 相似ノ中心ノ定義ト之ニ關スル定理トヲ述ベヨ。

問2. 相似ノ中心ノ利用(相似法)デ前節ノ問2ヲ解ケ。

例 與へラレタ  $\triangle ABC$  ニ内接シ、其ノ三邊ガ夫々與へラレタ三直線ニ平行ナル三角形ヲ畫ケ。

解析  $\triangle DEF$  ヲ  $\triangle ABC$  ニ内接シ、其ノ三邊ガ夫々與へラレタ三直線ニ平行ナル三角形トスル。

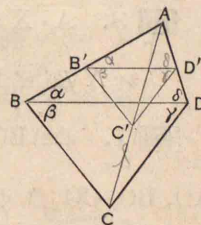
今  $\triangle D'E'F'$  ヲ三邊ガ夫々與へラレタ直線ニ平



行デ  $E', F'$  ガ夫々  $AC, AB$  ノ上ニアル任意ノ三角形トスルト、 $\triangle D'E'F' \sim \triangle DEF$  ニ相似デ對應邊ガ夫々平行デアルカラ、 $A$  ハ此ノ兩形ノ相似ノ中心デアル。從ツテ  $D$  ハ  $AD'$  ト  $BC$  トノ交點デナケレバナラナイ。

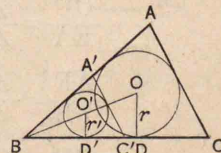
$$\frac{AO}{A'O} = \frac{AP}{A'P} = \frac{AR}{A'R} \quad \text{OR/OR'}$$

問3. 四角形ノ一對角線 ( $AC$ ) ノ長サト、他ノ對角線ガ各邊ト作ル四角ノ大サ ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) トヲ知ツテ、此ノ四角形ヲ作レ。



問4. 一邊ト高サトノ和ニ等シイ線分ガ與へラレタトキ正三角形ヲ作レ。

問5. 一角ト其ノ二邊ノ比ト内接圓ノ半徑トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。



( $BC' : BC = r' : r$  = 注意セヨ)

### 40. 矩形・三角形ノ面積ノ比例

問1. 次ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

1. 矩形及ビ三角形ノ面積ト底邊又ハ高サトノ比例。

2 比例スル線分ト其ノ線分ノ包ム矩形。

問2.  $\triangle ABC$ ニ於テ邊  $BC$  上ノ一點  $X$  カラ二邊  $AB, AC$ ニ平行ニ  $XY, XZ$ ヲ引キ, 邊  $AC, AB$ ト夫夫  $Y, Z$ デ交ハラシメレバ,  $\triangle AYZ \sim \triangle BZX \sim \triangle CXY$ トノ比例中項デアアル。

問3.  $A \cdot X = K^2$ ニ適スル線分  $X$ ヲ作圖セヨ。但シ  $A$  及ビ  $K$ ハ與ヘラレタ線分トスル。

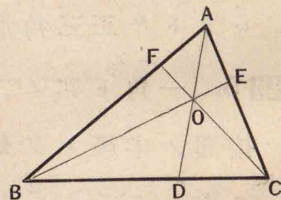
例1.  $\triangle ABC$ ノ三頂點カラ, 同ジ點ヲ通ルヤウニ  $AO, BO, CO$ ヲ引キ對邊ト夫々  $D, E, F$ デ交ハラシメレバ,  $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$ デアアル。(ちよば Cevaノ定理)

解析

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC},$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\triangle BOC}{\triangle BOA},$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\triangle COA}{\triangle COB}$$



$$\therefore \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC} \times \frac{\triangle BOC}{\triangle BOA} \times \frac{\triangle COA}{\triangle COB} = 1$$

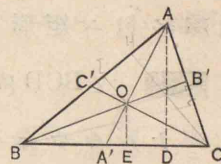
問4. 上ノ例ノ逆ヲ證明セヨ。

問5. 三角形ノ各角ノ二等分線ガ同ジ點ヲ通ルコト及ビ三角形ノ三中線ガ同ジ點ヲ通ルコトヲ證明セヨ。

問6.  $\triangle ABC$  内ノ任意ノ點  $O$ ト頂點  $A, B, C$ トヲ結ビ, 其ノ延長ガ對邊ト交ハ

ル點ヲ夫々  $A', B', C'$ トスルト

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1 \text{ デアル。}$$



例2.  $A$ デ内切スル二ツノ圓ガアル。小圓ノ周上ノ任意ノ點  $D$ ニ於テ之ニ切スル大圓ノ弦  $BC$ ヲ引キ  $AB, AC$ ヲ結ビ小圓ノ周ト夫々  $P, Q$ デ交ハラシメレバ  $DC \cdot AP = DB \cdot AQ$ デアアル。

解析  $DC \cdot AP = DB \cdot AQ$ デア

$$\text{ルタメニハ } \frac{AP}{AQ} = \frac{DB}{DC} \text{デア}$$

ルコトヲ要スル。

然ルニ  $PQ \parallel BC$ デアアルカラ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \text{デアアルコトヲ要スル。}$$

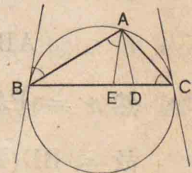
從ツテ  $AD$ ガ  $\angle BAC$ ヲ二等分スルコトヲ要スル。

問7. 圓ニ内接スル  $\triangle ABC$ ノ頂點  $A$ カラ  $C, B$ ニ

於ケル切線ニ平行ニ  $AD, AE$ ヲ

引キ,  $BC$ ト夫々  $D, E$ デ交ハラ

$$\text{シメレバ } \frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2} \text{デアアル。}$$



( $\triangle ABE \sim \triangle ABC$ カラ  $AB^2 = BE \cdot BC$ ヲ得テ之ヲ使用セヨ)

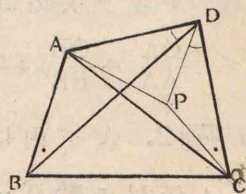
例3. 四角形ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ對角線ノ包ム矩形ヨリモ小デナイ。

證明  $\angle BCD$  内  $= \angle DCP = \angle ABD$

ナルヤウニ  $CP$  ヲ引ク、又  $\angle ADC$  内

$= \angle CDP = \angle ADB$  ナルヤウニ

$DP$  ヲ引クト



$\triangle ADB \sim \triangle PDC$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{PC}{CD}$$

$$\therefore AB \cdot CD = BD \cdot PC \quad (1)$$

及ビ  $\frac{DA}{DB} = \frac{DP}{DC} \quad \therefore \frac{DA}{DP} = \frac{DB}{DC}$

而シテ  $\angle ADP = \angle BDC$

$\therefore \triangle DAP \sim \triangle DBC$

$$\therefore \frac{DA}{PA} = \frac{DB}{BC}$$

$$\therefore BC \cdot DA = BD \cdot PA \quad (2)$$

故ニ(1)ト(2)トヲ邊々相加ヘテ

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = BD(PA + PC)$$

然ルニ  $PA + PC$  ハ  $AC$  ヲリモ小デナイ。

故ニ  $BD(PA + PC)$  ハ  $BD \cdot AC$  ヲリモ小デナイ、即チ

$AB \cdot CD + BD \cdot DA$  ハ  $AC \cdot BD$  ヲリモ小デナイ。

注意  $PA + PC = AC$  デアルトキ、從ツテ  $P$  ガ  $AC$  上ニアルトキ、從ツテ四角形  $ABCD$  ガ圓ニ内接スルトキハ  $AB \cdot CD + BC \cdot DA$  ハ  $AC \cdot BD$  ニ等シイ。

問8. とれみー(Ptolemy)ノ定理及ビ其ノ逆ヲ述べ、且之ヲ證明セヨ。

問9. 正三角形  $ABC$  ノ外部ニ一點  $P$  ガアル。若シ  $PA = PB + PC$  デアレバ、 $P$  ハ  $\triangle ABC$  ノ外接圓ノ周上ノ點デアアル。

#### 41. 一角ノ等シイニツノ三角形ノ比

問1. 一角ノ等シイニツノ三角形ノ比ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

問2.  $\triangle ABC$  ノ三邊上ニ夫々  $X, Y, Z$  ヲ取リ、 $AX, BY, CZ$  ガ夫々  $AB, BC, CA$  ノ三分ノニデアルヤウニスレバ、 $\triangle XYZ$  ハ  $\frac{1}{3} \triangle ABC$  ニ等シイ。

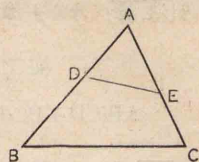
問3.  $\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  トガ等積デ、 $\angle A$  ト  $\angle D$  トガ等シイトキハ  $AB, AC, DE, DF$  ノ間ニドンナ比例式ガ成立ツカ。又此ノ場合、更ニ  $DE = DF$  デアルトキハドウカ。

問4.  $D$  ハ與ヘラレタ  $\triangle ABC$  ノ邊  $AB$  上ノ定點

デアル。他ノ邊 AC 上ニ一點

Eヲ求メテ  $\triangle ADE$ ガ  $\triangle ABC$ ノ

$\frac{n}{m}$ ニ等シイヤウニセヨ。

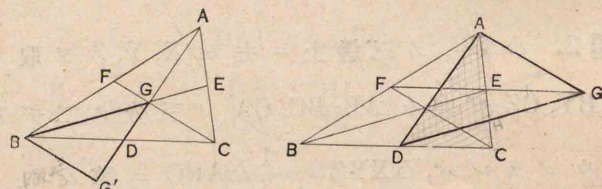


### 42. 相似多角形ノ比

**問 1.** 相似三角形ノ面積ノ比及ビ相似多角形ノ面積ノ比ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.**  $\triangle ABC$ ノ二中線  $BD, CE$ ノ交點ヲ  $G$ トシテ、 $\triangle BGC$ ト  $\triangle DGE$ トノ比ヲ求メヨ。

**問 3.** 三角形ノ三中線ニ等シイ三邊ヲ有スル三角形ト原ノ三角形トノ比ヲ求メヨ。



**問 4.** 同ジ圓ニ内接スル正六角形ト外接スル正六角形トノ比ヲ求メヨ。

**問 5.**  $\triangle ABC$ ヲ其ノ一邊  $BC$ ニ平行ナル二直線デ三等分スレバ二邊  $AB, AC$ ハ此ノ二直線デ

大約 1000 : 414 : 318ノ比ニ分ケラレル。

### 43. 弦ノ部分ノ包ム矩形 (方圓定理)

**問 1.** 一ツノ圓ノ相交ハル二弦ノ部分ノ包ム矩形ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 二ツノ線分  $AB, CD$  又ハ其ノ延長ガ  $P$ デ交ハルトキ、 $A, B, C, D$ ガ同ジ圓周上ニアルノハドンナ場合カ。

**問 3.**  $P$ ハ弦  $AB$ ノ延長上ノ一點デ、 $C$ ハ圓周上ノ一點デアル。  $PA, PB, PC$ ノ間ニドンナ關係ガアルトキ、 $PC$ ガ圓  $ABC$ ニ切スルカ。

**例 1.** 相交ハル二圓ノ共通弦上ノ任意ノ點  $C$ ヲ通ツテ直線ヲ引キ、各圓ト夫々  $A, D$ 及ビ  $B, E$ デ交ハラシメルト  $AB : BC = ED : DC$ デアル。

**解析**  $AB : BC = ED : DC$

デアルトメニハ

$$AB \cdot DC = BC \cdot ED$$

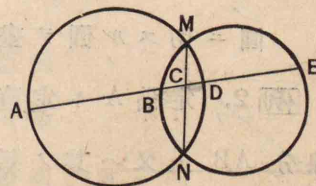
從ツテ

$$(AC - BC)DC = BC(EC - DC)$$

從ツテ

$$AC \cdot CD = BC \cdot CE$$

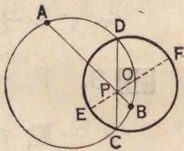
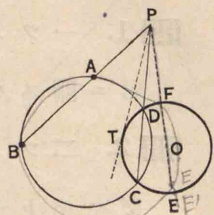
デアルトコトヲ要スル。コレハ何レモ  $MC \cdot CN$ ニ等シイ。



問4. A, B ハ二定點デ O ハ一定圓デアル。 A, B

ヲ通ル任意ノ圓ト圓 O トノ共通弦又ハ其ノ延長ハ皆同ジ點ヲ通ル。

(A, B ヲ通り圓 O ト交ハルーツノ圓ヲ畫キ, 其ノ交點ヲ C, D トシ, AB ト CD トノ交點ヲ P トスル。又 A, B ヲ通り圓 O ト交ハル他ノ任意ノ圓ト圓 O トノ交點ヲ E, F トスルト, 割線 PE ハ F ヲ通ル)



問5. 前問ノ圖デ P カラ圓 O ニ切線ヲ引キ切點ヲ T トスルト, 圓 ABT ハ圓 O ニ切スル。

問6. 與ヘラレタ二點ヲ通り與ヘラレターツノ圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。

例2. 定點 A ト定直線 MN 上ノ動點 B トヲ結ブ線分 AB 上又ハ其ノ延長上ニ一點 P ヲ取ツテ矩形 AB · AP ヲ與ヘラレタ平方  $K^2$  ニ等シクスルトキ P 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解析 A カラ MN へ垂線 AC ヲ引キ, AC 上又ハ其ノ延長上ニ一點 D ヲ  $AC \cdot AD = K^2$  ナルヤウニ

例題 定直線 MN 上ノ定點 A カラ AB ヲ引キ AB 上ノ延長上ニ  $AP \cdot AB = K^2$  ナルヤウニ P ヲ取ルニ P 點ノ軌跡如何

取レバ

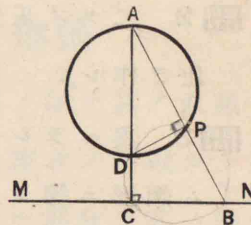
$$AP \cdot AB = AC \cdot AD$$

デアルカラ C, B, P, D ハ同ジ圓周上ニアル。

故ニ

$$\angle APD = \angle ACB = 90^\circ$$

從ツテ P ハ AD ヲ直徑トスル圓周上ニアルコトヲ要スル。

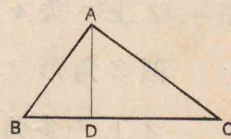


問7. A, B ハ二ツノ定點デ, C ハ直線 AB ノ延長上ノ定點デアル。 C カラ A, B ヲ通ル圓ニ引イタ切線ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

### 44. 比例中項

問1. 直角三角形 ABC ノ直角

ノ頂點 A カラ斜邊 BC へ垂線 AD ヲ引キ, 次ノ各ヲ證明



セヨ。

1  $AD^2 = BD \cdot DC$

2  $AB^2 = BD \cdot BC$

3  $AC^2 = CD \cdot CB$

4  $AB^2 : AC^2 = BD : DC$  (面積比ヲ直線比ニ)

注意 1 = 於テハ AD ハ BD ト DC トノ比例中項デアル。

問2. ニツノ正方形ノ比  $m^2:n^2 =$  等シイ線分ノ比ヲ作レ。

問3. 與ヘラレタ二線分ノ比例中項(二線分ノ包ム矩形ニ等シイ正方形)ヲ作ル方法ヲ述ベヨ。

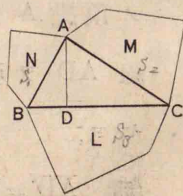
問4.  $\triangle ABC$  ノ頂點 A カラ對邊 BC へ引イタ垂線ノ足 D ガ邊 BC 上ニアツテ  $AD^2 = BD \cdot DC$  ナレバ  $\angle BAC$  ハ直角デアル。

### 45. びたごらすノ定理

問1. びたごらす(Pythagoras)ノ定理ヲ述ベヨ。

問2. 與ヘラレタニツノ正方形ノ和又ハ差ニ等シイ正方形ヲ作ル方法ハドウカ。

問3.  $\angle A$  ヲ直角トスル直角三角形  $ABC$  ノ三邊ノ上ニ夫々其ノ三邊ヲ對應邊トスルヤウニ相似多角形ヲ畫クトキ、斜邊  $BC$  ノ上ノ多角形ノ面積ハ他ノ二邊  $AB, AC$  ノ上ノ多角形ノ面積ノ和ニ等シイ。



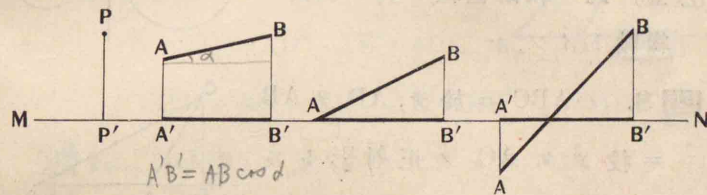
( $BC^2 : CA^2 : AB = BC : CD : BD$  ヲ用ヒヨ)

$$\frac{S_3}{BC^2} = \frac{S_1}{AB^2} = \frac{S_2}{AC^2} = \frac{BD}{AB+AC}$$

$$S_3 = S_1 + S_2$$

### 46. びたごらすノ定理ノ擴張

或點カラ或直線へ引イタ垂線ノ足ヲ其ノ直線ニ投ジタ其ノ點ノ正射影トイヒ、或線分ノ兩端カラ或直線へ引イタ垂線ノ足ノ間ニアル部分ヲ其ノ線分ノ正射影トイフ。

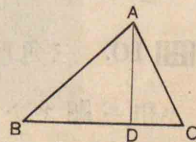


問1. 線分  $AB$  ノ直線  $MN$  ニ投ジタ正射影ヲ  $A'B'$  トスレバ、 $AB$  ト  $A'B'$  トノ大小ノ關係ハドウカ。

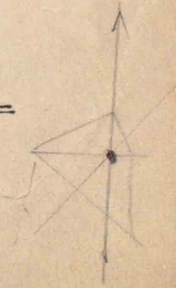
問2. 上ノ圖デ  $AB$  ト  $MN$  トノ角ヲ  $\alpha$  トシ、 $AB$  ノ長サヲ  $a$  トスレバ  $A'B' = a \cos \alpha$  デアル。

問3. 等長デ且平行デアル線分ガ同ジ直線ニ投ジタ正射影ハ相等シイ。

問4. 三角形ノ二邊ノ平方ノ差ハ其ノ二邊ガ第三邊ニ投ジタ正射影ノ平方ノ差ニ等シイ。



問5. 二定點カラノ距離ノ平方ノ差ガ定量  $K^2$  ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

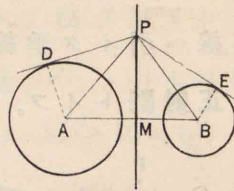


問6. 定圓Oト定點Aトガアル。今動點Pカラ此ノ圓ニ引イタ切線ガ PA = 等シイヤウニ點Pガ動クトキ、其ノ畫ク軌跡ヲ求メヨ。

$PA^2 = PD^2 + AD^2$   
 $PB^2 = PE^2 + BE^2$   
 $PA^2 = PB^2 = AD^2 + BE^2$   
 $PA^2 - PD^2 = AD^2 - BE^2$   
 Mニ交ル

問7. 二定圓ニ引イタ切線ガ相等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 此ノ軌跡直線ヲ其ノ二圓ノ根軸トイフ。

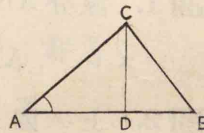
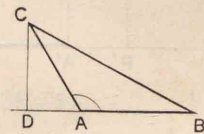


問8. △ABCニ於テ、ADヲABニ投ジタ ACノ正射影トスレバ

$BC^2 = CD^2 + BD^2$   
 $= CA^2 - AD^2 + BD^2$   
 $= CA^2 - AD^2 + (AD + AB)^2$   
 $= CA^2 + AB^2 + 2AB \cdot AD$

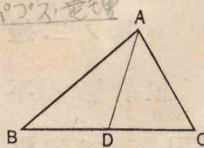
$BC^2 = AB^2 + AC^2 \pm 2AB \cdot AD$

但シ ∠Aガ鈍角ナラバ+ヲ取リ、鋭角ナラバ-ヲ取ル。



問9. △ABCノ三邊 BC, CA, ABヲ夫々 a, b, cデ表ハストキ、∠A=120°ナレバ  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$  デ、∠A=60°ナレバ  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$  デアル。

問10. 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ニ關スル定理ヲ述ベヨ。



問11. 平行四邊形ノ四邊ノ平方ト二對角線ノ平方トノ間ニハドンナ關係ガ

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = AC^2 + BD^2$

アルカ。一般ノ四邊形デハドウカ。

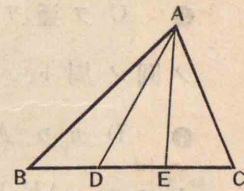
例 △ABCノ一邊 BCヲ D, Eデ三等分スレバ  $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + BE^2$

證明  $AB^2 + AE^2 = 2AD^2 + 2DE^2$   
 $AC^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2DE^2$

邊々相加ヘテ

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + BE^2$  ( $\because 4DE^2 = BE^2$ )



問12. △ABCノ重心ヲGトスレバ

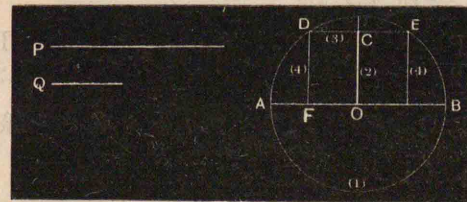
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AG^2 + BG^2 + CG^2)$

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 = 2(AA^2 + DG^2) + 2BD^2$   
 $= 2AG^2 + 4AA^2 + DG^2 + 2BD^2$   
 $= 3AG^2 + CG^2 + AA^2 + AB^2 + 4DG^2$

$BC^2 = 4BD^2$   
 $= 3AG^2 + BG^2 + CG^2 + 4DG^2$

47. 作圖題

問1 二線分ノ和(P)ト其ノ二線分ノ包ム矩形ノ面積(Q)\*トヲ知ツテ其ノ二線分ヲ求メヨ。



作圖 ① P = 等シイ線分 ABヲ直徑トスル圓周

\* スベテ面積ハ正方形ノ面積デ與ヘラレルトスル。從ツテ其ノ正方形ノ一邊デアル線分ノ長サガ與ヘラレタトスル。



ヲ畫キ、其ノ中心ヲ  $O$  トスル。

②  $AB$  ニ垂直ナル半徑上ニ  $Q$  ニ等シク  $OC$  ヲ取ル。

③  $C$  ヲ通り  $AB$  ニ平行ナル弦  $DE$  ヲ引キ、此ノ圓ノ周トノ交點ヲ  $D, E$  トスル。

④  $D$  カラ  $AB$  へ垂線  $DF$  ヲ引キ其ノ足ヲ  $F$  トスル。  $AF, FB$  ハ求メル二線分デアアル。

**證明** (略スル)

**吟味** 本題ハ點  $D$  ガ存在スルトキ、即チ  $OC \leq OA$  従ツテ  $Q \leq \frac{P}{2}$  デアルトキニ限ツテ解答ガアル。

ソシテ  $Q < \frac{P}{2}$  デアルトキハ  $DE$  ハ此ノ圓ト交ハルカラ  $AB$  ヲ分ケル點ハ二ツ得ラレルガ解答ハ唯一種デアアル。

又  $Q = \frac{P}{2}$  デアルトキハ兩線分ハ共ニ  $\frac{P}{2}$  デアル。

**注意** 1.  $P, Q$  ノ數値ヲ夫々  $p, q$  トシ、求メル線分ノ數値ヲ  $x, y$  トスレバ、本問題ハ

$$x+y=p, \quad xy=q^2 \quad \text{ナル一組ノ方程式}$$

従ツテ  $x^2 - px + q^2 = 0$  ナル一元二次方程式

ノ幾何學的解法ヲ求メルモノデアアル。

作圖ニヨツテ

今圖ニヨツテ  $x$  ト  $y$  トヲ計算スルト

$$x = AF = OA - OF, \quad y = FB = OA + OF$$

且  $OF^2 = OD^2 - DF^2 = OA^2 - OC^2$

故ニ  $OF = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$

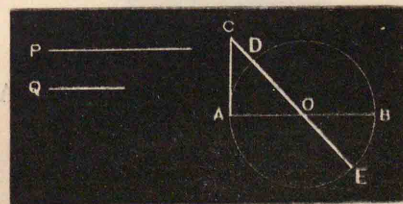
従ツテ  $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2 - 4q^2}{4}} = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q^2}}{2}$

及ビ  $y = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2 - 4q^2}{4}} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q^2}}{2}$

デ、コレガ上ノ方程式ノ二根デアアル。

① **問** 1.  $x^2 - 10x + 16 = 0$  ヲ作圖ニヨツテ解ケ。

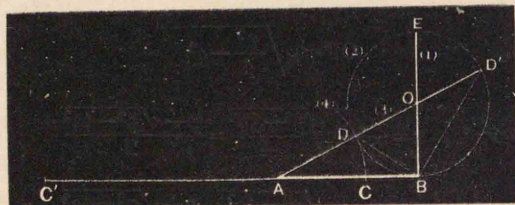
② **[2]** 二線分ノ差 ( $P$ ) ト其ノ二線分ノ包ム矩形ノ面積 ( $Q^2$ ) トヲ知ツテ其ノ二線分ヲ求メヨ。



**作圖**  $P$  ニ等シイ線分  $AB$  ヲ直徑トシテ圓周ヲ畫キ、其ノ一端  $A$  ニ於ケル此ノ圓ノ切線上ニ  $Q$  ニ等シク  $AC$  ヲ取リ、 $C$  カラ中心線  $CDOE$  ヲ引ケバ、 $CD, CE$  ハ求メル二線分デアアル。

**吟味** 本題ハ常ニ成立スル。

③ [3] 與ヘラレタ線分 (AB) ヲ二分シ、其ノ一部分ヲ  
他ノ部分ト全線分トノ比例中項ナラシメヨ。



作圖 ① 與ヘラレタ線分 AB ノ一端 B カラ BA

ニ等シイ垂線 BE ヲ引ク。

② BE ヲ直径トスル圓周 O ヲ畫ク。

③ A ヲ通ル中心線 ADD' ヲ引ク。

④ AD ニ等シク AB 上ニ AC ヲ取ルト、C ハ求  
メル内分點デアアル。

又 AD' ニ等シク BA ノ延長上ニ AC' ヲ取ルト、

C' ハ求メル外分點デアアル。

證明 AB ハ B 點デ圓 O ニ切スルカラ

$$AB^2 = AD \cdot AD' = AD(AD + DD')$$

故 =  $AB^2 = AC(AC + AB)$

故 =  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC + AB}{AB}$

故 =  $\frac{AB - AC}{AC} = \frac{AC + AB - AB}{AB}$

中末比 = 分ト  
黄金分割

故 =  $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$

同様 =  $\frac{BC'}{AC'} = \frac{AC'}{AB}$

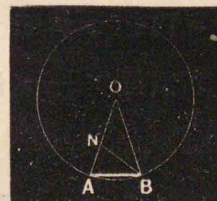
注意 2. 上ノヤウニ線分ヲ分割スルコトヲ中末比ニ分  
ケルトイヒ、之ヲ黄金分割トモイフ。

問 2. 上ノ分割法デハ

$$AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB, \quad AC' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$$

問 3. 正五角形 ABCDE ノ對角線 AC, BE ノ交點  
ヲ P トスレバ、P ハ AC, BE ヲ中末比ニ分ケル。

④ 正十角形及ビ正五角形ヲ作レ。



解析 正十角形ガ既ニ畫カレタトシ、AB ヲ其ノ  
一邊トシ、其ノ外接圓ヲ畫キ、中心ヲ O トスレバ

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$$

故 =  $\angle OBA$  ノ二等分線 BN ヲ引ケバ

$$\angle ABN = 36^\circ$$

故ニ  $\triangle BAN \cong \triangle OAB$

故ニ  $AN : AB = AB : AO$

然ルニ  $\triangle ONB, \triangle ABN$  ハ共ニ等脚三角形デア  
カラ

$$AB = BN = NO$$

故ニ  $AN : NO = NO : AO$

故ニ  $N$  ハ半徑  $AO$  ヲ中末比ニ分ケル點デア  
ル。

**作圖** 任意ノ圓ヲ畫イテ其ノ半徑  $OA$  ヲ引キ、之  
ヲ  $N$  デ中末比ニ内分シ、其ノ大キナ部分  $ON$  ニ  
等シイ弦  $AB$  ヲ作り、之ニ等シイ連接スル弦ヲ  
作ルト、此ノ圓ニ内接スル正十角形ガ出來ル。  
内接正十角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ブト内接  
正五角形ガ出來ル。

✓ **問 4.** 圓ノ半徑ヲ  $r$  トスレバ、其ノ内接正十角形  
ノ一邊ハ  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$  デアル。

✓ **◎ 問 5.** 與ヘラレタ圓ニ内接スル正十五角形ヲ作  
レ。  $\left(\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \text{着目セヨ}\right)$

**注意 3.** 正七角形・正九角形・正十一角形ノヤウナ正多角  
形ハ近似的デナケレバ作圖スルコトガ出來ナイ。諸  
子ガ既ニ作圖シ得タ正多角形ノ邊數ヲ擧ゲヨ。

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20

## 48. 圓ノ周ト面積

**問 1.** 圓ノ周ト其ノ圓ノ内接・外接正多角形ノ周  
トノ間ニハドンナ關係ガアルカ。

**問 2.** 圓周率ニ就イテ知ル所ヲ述ベヨ。

**問 3.** 圓周率ヲ 3.14159 トスルノト  $\frac{22}{7}$  トスルノト  
ハ半徑 120 m ノ圓ノ周デ幾ラノ差ガアルカ。

**問 4.** 半徑ガ  $R$  デアル圓ノ周ヲ表ハス式ヲ書ケ。

**問 5.** 圓ノ周ハ何ニ比例シテ變化スルカ。

**問 6.** 與ヘラレタ幾ツカノ圓ノ周ノ和ニ等シイ  
周ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

**問 7.** 正多角形ノ面積ヲ求メル公式ヲ書ケ。

**問 8.** 半徑ガ  $R$  デアル圓ノ面積ヲ表ハス式ヲ書  
ケ。

**問 9.** 圓ノ面積ハ何ニ比例シテ變化スルカ。

**問 10.** 圓ノ弧ハ何ニ比例スルカ。

**問 11.** 扇形ノ面積ヲ求メル方法ヲ述ベヨ。

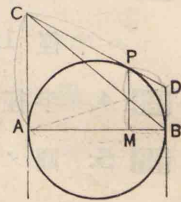
**問 12.** 面積ニ於テ、與ヘラレタ圓ノ 2 倍、3 倍ニ等  
シイ圓ヲ作圖セヨ。

又與ヘラレタ二ツノ圓ノ和又ハ差ニ等シイ圓  
ヲ作圖セヨ。

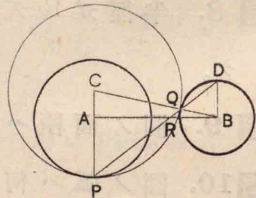
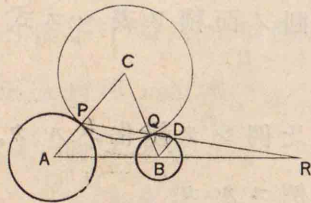
問題 5

1.  $\triangle ABC$  ノ邊  $BC$  ニ平行ナル直線ノ二邊  $AB, AC$  デ夾ミ取ラレル部分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。又其ノ部分ヲ定比ニ分ケル點ノ軌跡ヲ求メヨ

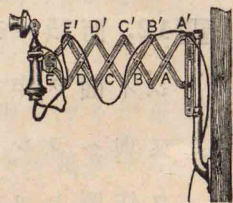
2. 圓周上ノ一點  $P$  カラ直徑  $AB$  へ垂線  $PM$  ヲ引キ、又  $P$  及ビ  $A, B$  ニ於ケル切線ノ交點ヲ夫々  $C, D$  トスレバ、 $AD, BC$  ハ  $PM$  ヲ二等分スル。



3. 二定圓  $A, B$  ニ切スル任意ノ圓ヲ  $C$  トシ、其ノ切點ヲ  $P, Q$  トスルト、直線  $PQ$  ハ常ニ或定點ヲ通ル。



右ノ圖ノマウナ電話機ガアル。各ノ四角形ハ相等シイ菱形デ、連結部  $A, B, C, D, E$  ハ目釘ノ周リニ廻轉自由デアアル。此ノ電話機ヲ引張ルトキ、 $A, B, C, D, E$  ノ動ク距離



ヲ比較セヨ。

5. ニツノ圓ニニツノ共通内切線ヲ引ケバ、其ノ切點間ニ夾マレル劣弧ノ比ハ兩圓ノ半徑ノ比ニ等シイ。

6. 圓外ノ一點  $P$  カラ圓ニ割線  $PAB$  ト切線  $PC$  トヲ引キ、 $A, B$  カラ  $PC$  ニ垂線  $AL, BM$  ヲ引キ、 $C$  カラ  $AB$  ニ垂線  $CN$  ヲ引クト  $AL \cdot BM = CN^2$  デアル。

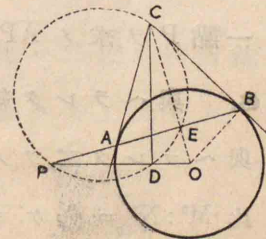
7. 圓ノ二弦  $AB, AC$  ノ夾角  $BAC$  ガ  $60^\circ$  デアルトキ、弧  $AB$  ノ中點  $M$  ト弧  $AC$  ノ中點  $N$  トヲ結ブ直線ガ  $AB, AC$  ニ交ハル點ヲ夫々  $P, Q$  トスルト、 $PQ^2 = PM \cdot QN$  デアル。

先ノ  $AP=AQ$  ナルヲ  
 証明スルニ  
 $\angle A = 60^\circ$  ナリ  
 $\angle P = \angle Q$   
 $AP=AQ$   
 $\triangle APQ$  正三角形ナリ  
 $PM=QN$   
 $PM \cdot QN = PM^2$   
 $PQ^2 = PM \cdot QN$

8.  $\triangle ABC$  ノ三邊  $BC, CA, AB$  上ニ夫々  $D, E, F$  ガアツテ、 $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}, \frac{CE}{AE} = \frac{2}{3}, \frac{AF}{BF} = \frac{3}{4}$  デアルトキ、 $\triangle DEF$  ト  $\triangle ABC$  トノ比ヲ求メヨ。

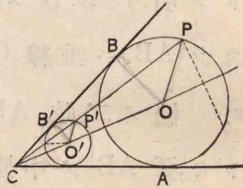
9.  $\triangle ABC$  ノ二邊  $AB, AC$  ニ交ハル直線トノ交點ヲ  $D, E$  トシ、 $AD:DB=2:1, \triangle ADE:DECB=2:3$  デアルトキ、 $AE:EC$  ヲ求メヨ。

10.  $O$  ハ定圓、 $P$  ハ定點デアアル。  $P$  カラ任意ノ割線  $PAB$  ヲ引キ、圓周トノ交點  $A, B$  ニ



於ケル切線ノ交點 C カラ PO へ垂線 CD ヲ引ケバ、其ノ足 D ハ常ニ同ジ位置ニアル。

11.  $\triangle ABC$  ノ三頂點カラ同一ノ點 O ヲ通ルヤウニ夫々對邊マデ AD, BE, CF ヲ引イテ、矩形 AO·OD, BO·OE, CO·OF ガ相等シイナラバ、O ハ垂心デア  
ル。



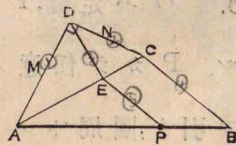
12. 與ヘラレタ二直線ニ切シ且與ヘラレタ一點ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。

13.  $\triangle ABC$  ノ A ヲ通ツテ外接圓ニ切スル直線ガ BC ノ延長ト D デ交ハレバ  $AB^2 : AC^2 = BD : CD$  デアル。又此ノ問題ニヨツテ面積ノ比  $M^2 : N^2$  ヲ線分ノ比ニ直セ。

14. 二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ定量  $K^2$  ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求め、且之ヲ作圖セヨ。

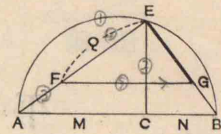
15. 二定點 A, B ト一定直線 MN ガアル。MN 上ニ一點 P ヲ求め  $AP^2 + BP^2$  ガ最小ナルヤウニセヨ。

16. 與ヘラレタ線分 AB ヲ與ヘラレタ二ツノ正方形ノ比  $M^2 : N^2$  ニ分ケヨ。

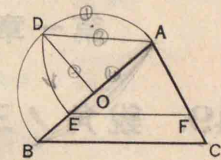


$$\frac{AD^2}{CD^2} = \frac{AF}{CE} = \frac{AP}{BP}$$

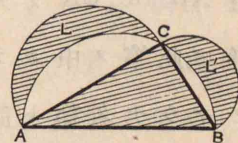
17. 與ヘラレタ正方形  $Q^2$  トノ比ガ與ヘラレタ比  $M:N$  ニ等シイ正方形ヲ作レ。



18. 與ヘラレタ三角形ヲ其ノ一邊ニ平行ナル直線デ二等分セヨ。又之ヲ與ヘラレタ比ニ分ケヨ。

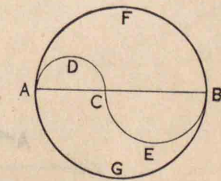


19. 直角三角形 ABC ノ三邊ノ上ニ圖ノヤウニ半圓ヲ畫クトキハ、二ツノ新月形 L, L' ノ和ハ  $\triangle ABC$  ニ等シイ。



(ひぼくらはてす Hippocrates ノ定理)

20. 圓ノ直徑 AB 上ニ一點 C ヲ取リ、AC, BC ヲ直徑トスル半圓ヲ右ノ圖ノヤウニ AB ノ反對ノ側ニ畫クトキハ、曲線形 ADCEBF ト AGBECD トノ比ハ  $BC : AC$  ニ等シイ。



又此ノ定理ニヨツテ圓ヲ定比ニ二分スル方法ト、圓ヲ任意ノ數ニ等分スル方法トヲ工夫セヨ。

$$h+k = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2} + \frac{1}{2}\sqrt{BC^2} - \frac{1}{2}\sqrt{AB^2}$$

78

sin +  
II  
Tan +  
II

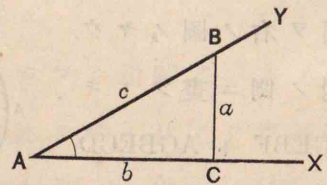
## 第二篇

# 平面三角法

## 第一章 鋭角・鈍角ノ三角函數

### 49. 鋭角ノ三角函數

∠XAYヲ鋭角トシ、其ノ一邊AY上ノ一點Bカラ他ノ邊AXへ垂線BCヲ引キ、直角三角形ABCノ三邊AB, BC, CAヲ夫々斜邊(c)、對邊(a)、底邊(b)ト呼ビ、此等ノ中カラニツツ取ツテ得ラレル比ニ次ノヤウナ名稱ト記號トヲ用ヒルコトハ既ニ學ンダ通りデアアル。



$$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c} = \sin A \quad [\text{角 } A \text{ ノ 正 弦}]$$

$$\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} = \frac{b}{c} = \cos A \quad [\text{角 } A \text{ ノ 餘 弦}]$$

$$\frac{\text{對邊}}{\text{底邊}} = \frac{a}{b} = \tan A \quad [\text{角 } A \text{ ノ 正 切}]$$

$$\frac{\text{底邊}}{\text{對邊}} = \frac{b}{a} = \cot A \quad [\text{角 } A \text{ ノ 餘 切}]$$

〔注意〕 以上ノ外ニ正割ト餘割トガアル。

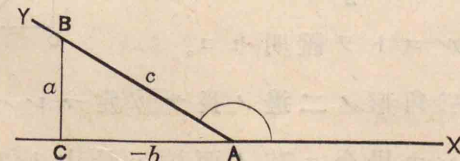
$$\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos A} = \sec A \quad [\text{角 } A \text{ ノ 正 割}]$$

$$\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin A} = \text{cosec } A \quad [\text{角 } A \text{ ノ 餘 割}]$$

然シ此等ヲ用ヒルコトガ少イカラ詳説シナイ。

### 50. 鈍角ノ三角函數

∠XAYガ鈍角デアルトキハ、BカラAXへ引イタ垂線ノ足CハXAノ延長上ニアルカラ、直角三角形ABCノ一邊ACノ長サ(b)ガ角Aガ鋭角ノ場合ト反對ノ向キノ長サトナル。故ニ之ヲ負ノ長サ(-b)トシテ次ノヤウニ定メル。



$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = -\frac{b}{c},$$

$$\tan A = -\frac{a}{b}, \quad \cot A = -\frac{b}{a}$$

例へバ  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}, \quad \cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

又上ノ定義カラ或角 A ト其ノ補角  $180^\circ - A$  トノ三角函數ニハ次ノ關係ガアルコトガワカル。

$$\sin A = \sin(180^\circ - A)$$

$$\cos A = -\cos(180^\circ - A)$$

$$\tan A = -\tan(180^\circ - A)$$

故ニ鈍角ノ三角函數ノ値ハ其ノ補角(銳角)ノ三角函數ノ値デ定メルコトガ出來ル。

**問 1.**  $135^\circ$  ト  $150^\circ$  トノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

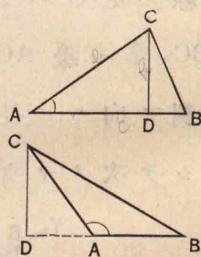
**問 2.**  $\triangle ABC$  ノ二邊  $AC, AB$  ヲ

夫々  $b, c$  デ表ハシ、其ノ面積

ヲ  $S$  デ表ハセバ

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

デアルコトヲ證明セヨ。



**問 3.** 三角形ノ二邊ノ長サガ定マレバ、其ノ夾角ガドンナ場合ニ其ノ面積ハ最大デアルカ。

## 51. $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ノ三角函數

第49節ノ定義ニ就イテ考ヘルト、 $c$  ノ値ヲ定メテ置ケバ角  $A$  ガ小トナルニ從ツテ  $a$  ノ値ハ漸次小ト

ナリ、角  $A$  ガ限リナク小トナレバ  $a$  ノ値モ限リナク小トナル。依ツテ

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\text{同様ニ} \quad \tan 0^\circ = 0$$

$$\text{又} \quad \sin 180^\circ = 0$$

$$\tan 180^\circ = 0$$

$$\text{及ビ} \quad \cos 90^\circ = 0$$

次ニ角  $A$  ガ  $90^\circ$  ニ近ヅクト  $a$  ノ値ハ  $c$  ノ値ニ近ヅクカラ

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\text{同様ニ} \quad \cos 0^\circ = 1$$

次ニ角  $A$  ガ  $0^\circ$  カラ増シテ次第ニ  $90^\circ$  ニ近ヅクト、正切ノ値ハ  $0$  カラ増大シテ角  $A$  ガ  $90^\circ$  ニ近ヅクト其ノ値ハ限リナク大トナリ、ドンナ大ナル數ヨリモ大トナル。之ヲ略言シテ  $90^\circ$  ノ正切ハ無限大デアルトイヒ、次ノヤウナ記號デ表ハス。

$$\tan 90^\circ = \infty$$

$$\text{同様ニ} \quad \cot 0^\circ = \infty$$

**問** 角  $A$  ガ  $0^\circ$  カラ  $180^\circ$  マデ變ズルトキ  $\sin A, \cos A, \tan A$  ノ變化ヲ表ハスぐらふヲ畫ケ。

## 52. 三角法

幾何學デ三角形ハ三邊或ハ二邊ト其ノ夾角ナドガ與ヘラレルト定マルコトヲ既ニ學ンダガ、與ヘラレタ邊ヤ角ナドノ數値ニヨツテ未知ノ邊ヤ角ナドノ數値ヲ算出スルコトハ特別ノモノノ外ハ出來ナカッタ。

三角法ハ三角函數ノ性質ヲ研究シ、又之ニヨツテ三角形ノ邊ト角トノ數量的關係ヲ求めテ、其等ヲ算出スル方法ト、之ヲ高サヤ距離等ノ測量ニ應用スル方法トヲ考究スル學問デアアル。

**注意** 初メテ我國ノ沿岸ヲ測量シテ精確ナ地圖ヲ作ツタノハ伊能忠敬デアアル。伊能忠敬ハ寛政十二年、齡五十六歳ノ身ヲ以テ此ノ測量ヲ始メ極メテ簡單ナ器械デ前代未聞ノ大事業ヲ成シ遂ゲタ。其ノ地圖ハ甚ダ精確ナモノデ、後年外國人ガ優レタ器械デ測量シタモノト違ハナカッタ。



伊能忠敬  
(西曆 1745-1818)

## 53. 同角ノ三角函數ノ關係

[1] 逆數關係 正切ト餘切トノ定義カラ

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}, \quad \tan A \cot A = 1 \quad (1)$$

又 
$$\sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \cos A \sec A = 1$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}, \quad \sin A \operatorname{cosec} A = 1$$

[2] 相除關係 次ノ關係モ定義カラ容易ニワカル。

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \quad (2)$$

依ツテ  $\sin A = \cos A \tan A$ ,  $\cos A = \sin A \cot A$

**問 1.**  $\tan x + \cot x = 2$  カラ  $\tan x$  ノ値ヲ求メヨ。

[3] 平方關係 第49節ト第50節トノ直角三角形

ABCニ於テ ACノ正負ニ關ハラズ

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$$

兩邊ヲ  $\overline{AB}^2$  デ割レバ

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

之ヲ次ノヤウニ記ス。

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad (3)$$

從ツテ  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ ,  $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

同様ニ  $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ ,  $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$



**問 2.** 因数分解ニヨリ  $\sin^4 A - \cos^4 A$  ハ  $\sin^2 A - \cos^2 A$  ニ等シイコトヲ示セ。

**問 3.**  $\cos^2 A - \sin^2 A$  ヲ  $2\cos^2 A - 1$  及ビ  $1 - 2\sin^2 A$  ニ變化セヨ。

### 54. 三角函数ノ一ツデ他ヲ表ハス法

**例**  $\sin A$  ヲ以テ他ノ三角函数ヲ表ハセ。

**解** 公式(3)カラ

$$\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

從ツテ公式(2)カラ

$$\tan A = \pm \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

$$\cot A = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A}$$

但シ符號ハ  $A$  ガ銳角ノトキハ + ヲ取リ,  $A$  ガ鈍角ノトキハ - ヲ取ルコトトスル。

**問 1.**  $\cos A$  ヲ以テ他ノ函数ヲ表ハセ。

**問 2.**  $\tan A$  ヲ以テ他ノ函数ヲ表ハセ。

**問 3.**  $\tan A = \frac{8}{15}$  ナルトキ,  $\sin A, \cos A$  ノ値ヲ求メヨ。

**問 4.**  $\sin A = \frac{12}{13}$  トシテ他ノ函数ヲ求メヨ。

### 55. 三角恒等式

**例 1.**  $(1 + \cos A)^2 + (1 + \sin A)^2 = 3 + 2(\sin A + \cos A)$  ヲ證明セヨ。

**證明** 左邊  $= 1 + 2\cos A + \cos^2 A + 1 + 2\sin A + \sin^2 A$   
 $= 2 + (\cos^2 A + \sin^2 A) + 2(\cos A + \sin A)$   
 $= 2 + 1 + 2(\cos A + \sin A)$   
 $= 3 + 2(\sin A + \cos A)$

**問 1.**  $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2$  ヲ證明セヨ。

**例 2.**  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)$  ヲ證明セヨ。

**證明** 左邊  $= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)$   
 $= (\sin \alpha + \cos \alpha) \{ (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha \}$   
 $= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)$

**問 2.**  $\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - 3\sin^2 A \cos^2 A$  ヲ證明セヨ。

### 56. 三角方程式

未知角ノ三角函数ヲ含ム等式ヲ三角方程式トイフ。

**例**  $3\sin x = 2\cos^2 x$  ヲ解ケ。

**解**  $\cos^2 x$  ヲ  $1 - \sin^2 x$  ニ代ヘテ整頓スルト

$2\sin^2x + 3\sin x - 2 = 0$  [ $0 \leq x \leq 180^\circ, \sin x \geq 0$ ]  
 之カラ  $(\sin x + 2)(2\sin x - 1) = 0$   
 $\sin x = \frac{1}{2}$  或ハ  $-2$  [ $2\sin x + 2 = 0$ ]  
 然ルニ  $\sin x = -2$  ハ不可能デアル。(何故カ)  
 故ニ  $\sin x = \frac{1}{2}$  カラ [ $0 \leq \sin x < 1$ ]  
 $x = 30^\circ$  或ハ  $150^\circ$  **答**  $30^\circ, 150^\circ$

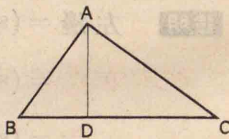
問 次ノ方程式ヲ解ケ。

1  $3\tan^2x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$

2  $\sin^2x + \sin x = \frac{2}{3}$  (卷末ノ真數表ヲ用ヒヨ)

問題 6

1. 直角三角形 ABC 二於テ直  
角ノ頂點 A カラ斜邊 BC (a)  
ニ垂線 AD ヲ引クト



AD = a sin B sin C デアルコトヲ證明セヨ。

2. 一角ガ等シイニツノ三角形ノ面積ノ比ハ各三  
角形ニ於ケル其ノ角ヲ夾ム二邊ノ矩形ノ比ニ等  
シイコトヲ第50節問2ノ公式ヲ用ヒテ證明セヨ。

3. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

1  $(1 - \sin^2 A) \tan^2 A = \sin^2 A$

2  $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A$

3  $\tan A + \sec A = \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}}$  (第49節注意参照)

4  $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$

5  $\frac{\sin \theta + 2\sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \tan \theta$

6  $\frac{1}{1 - \sin A} + \frac{1}{1 + \sin A} = 2\sec^2 A$

7  $(2 - \cos^2 A)(1 + 2\cot^2 A) = (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A)$

4. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$(x \cos A - y \sin A)^2 + (x \sin A + y \cos A)^2$

5. 次ノ方程式ヲ解ケ。(x, y ヲ未知數トスル)

$$\begin{cases} x \sin A + y \cos A = 1 \\ x \cos A - y \sin A = 1 \end{cases}$$

6. 次ノ方程式ニ適スル x ノ値ヲ言ヘ。

1  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2  $\tan x = 1$

3  $2\cos x + \sqrt{2} = 0$

7. 一ツノ圓ノ周上ノ定點 B カラ出ル弦ノ長サハ、  
此ノ弦ト B ヲ通ル此ノ圓ノ切線トノナス角ノ正  
弦ニ比例スルコトヲ證明セヨ。

## 第二章 加法定理・減法定理

## 57. 正弦・餘弦ノ加法定理

A ト B トヲ任意ノ二角トスレバ

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{cases} \quad (4)$$

**證明**  $\angle XOY$  ヲ A,  $\angle YOZ$  ヲ B デ表ハセバ, 其ノ和

$\angle XOZ$  ハ A+B デアル。

今  $\angle XOZ < 90^\circ$  トシ, OZ

上ニ一點 P ヲ取り, P カ

ヲ OX, OY へ夫々垂線

PM, PN ヲ引キ, N カラ

OX, PM へ夫々垂線 NQ, NC ヲ引ケバ

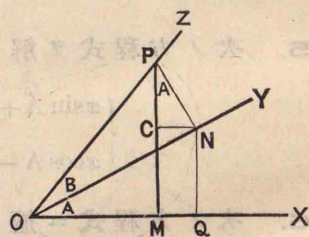
$$\angle CPN = \angle QON = A$$

$$\sin(A+B) = \frac{MP}{OP} = \frac{QN+CP}{OP} = \frac{QN}{OP} + \frac{CP}{OP}$$

$$= \frac{QN \cdot ON}{ON \cdot OP} + \frac{CP \cdot NP}{NP \cdot OP}$$

$$= \frac{QN}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{CP}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$



$$\text{同様} = \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

## 58. 正弦・餘弦ノ減法定理

$$\begin{cases} \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{cases} \quad (5)$$

**證明**  $A > B$  トシ,  $\angle XOY$  ヲ A,  $\angle YOZ$  ヲ B トシ,

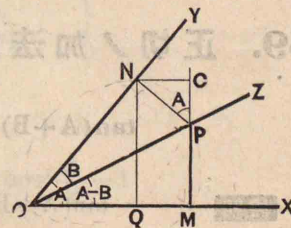
OZ ヲ OX ト OY トノ間

ニアルヤウニスレバ,

$\angle XOZ$  ハ A-B デアル。

前節ト同様ノ作圖ヲス

ルト



$$\begin{aligned} \sin(A-B) &= \frac{MP}{OP} = \frac{QN-PC}{OP} \\ &= \frac{QN}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{PC}{NP} \cdot \frac{NP}{OP} \\ &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{aligned}$$

$$\text{同様} = \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

**注意** 1. 本節及ビ前節ノ證明デハ, A, B, A+B, A-B ハ何レモ  $90^\circ$  ヨリ小ナル角ト假定シタガ, サウデナイ場合モ同様ノ方法デ證明セラレル。

**注意** 2. 以下 A-B = 就イテハ A > B デアル場合ダケヲ論ズルコトトスル。

問 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$1 \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos 75^\circ$$

$$2 \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sin 75^\circ$$

$$3 \quad \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} = \cot 75^\circ$$

$$4 \quad \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3} = \cot 15^\circ$$

### 59. 正切ノ加法定理・減法定理

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad (6)$$

證明  $\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

終リノ式ノ分母子ヲ  $\cos A \cos B$  デ割レバ

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad \text{換符同順}$$

同様ニ次ノ關係モ證明セラレル。

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \quad (7)$$

問 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$1 \quad \tan(45^\circ \pm \theta) = \frac{1 \pm \tan \theta}{1 \mp \tan \theta} \quad (\text{複號同順})$$

$$2 \quad \cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A} \quad (\text{複號同順})$$

### 60. 倍角ノ三角函數

公式(4)及ビ(6)ニ於テ B ヲ A トスルト

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$2 \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2 \sin^2 A$$

$$= 2 \cos^2 A - 1$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \quad (8)$$

系  $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ ,

$$\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$$

問 1. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$1 \quad \left( \sin \frac{\theta}{2} \pm \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 = 1 \pm \sin \theta \quad (\text{複號同順})$$

$$2 \quad 1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}, \quad 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

問 2.  $3A = 2A + A$  トシテ次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$1 \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$2 \quad \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$3 \quad \tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

### 61. 半角ノ三角函數

前節カラ

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \end{aligned} \right\} (9)$$

從ツテ  $\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

但シ根號ノ前ノ符號ハ  $\frac{A}{2}$  ノ大サニヨリ適當ニ定メナケレバナラナイ。

問 1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

1  $\sin 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$

2  $\cos 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

3  $\tan 22^\circ 30' = \sqrt{2}-1$

問 2. 一邊ガ  $a$  ナル正八角形ノ面積ヲ求メヨ。

又其ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

## 62. 正弦・餘弦ノ積

公式(4)及ビ(5)ニ加法及ビ減法ヲ施スト

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin A \cos B &= \sin(A+B) + \sin(A-B) \\ 2 \cos A \sin B &= \sin(A+B) - \sin(A-B) \\ 2 \cos A \cos B &= \cos(A+B) + \cos(A-B) \\ 2 \sin A \sin B &= \cos(A-B) - \cos(A+B) \end{aligned} \right\} (10)$$

問  $2 \cos 50^\circ \sin 30^\circ = \sin 80^\circ - \sin 20^\circ$  ヲ證明セヨ。

## 63. 正弦・餘弦ノ和及ビ差

前節ノ公式ニ於テ  $A+B=\alpha$ ,  $A-B=\beta$  トスレバ

$$A = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad B = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad \text{デアルカラ,}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \cos \beta - \cos \alpha &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{aligned} \right\} (11)$$

例  $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ$  ヲ簡單ニセヨ。

解  $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ = 2 \sin \frac{1}{2}(50^\circ + 10^\circ) \cos \frac{1}{2}(50^\circ - 10^\circ)$   
 $= 2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ = 2 \times \frac{1}{2} \times \cos 20^\circ$   
 $= \cos 20^\circ$

問 次ノ等式ヲ證明セヨ。

1  $\cos 35^\circ - \cos 125^\circ = \sqrt{2} \cos 10^\circ$

2  $\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A - B)}{\tan \frac{1}{2}(A + B)}$

3  $\frac{\sin A + \sin 4A + \sin 7A}{\cos A + \cos 4A + \cos 7A} = \tan 4A$

## 問題 7

1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

①  $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

②  $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

③  $\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\beta + \cos\beta)$

④  $\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$  (複號同順)

⑤  $\cos\theta \pm \sin\theta = \sqrt{2} \sin(45^\circ \pm \theta)$   
 $= \sqrt{2} \cos(45^\circ \mp \theta)$  (複號同順)

⑥  $\sin^2 A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

⑦  $\cos 4A = 1 - 8 \cos^2 A + 8 \cos^4 A$

⑧  $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$

⑨  $\tan \frac{A}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$

2. 次ノ式ヲ積ノ形ニ變ヘヨ。

①  $\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A$

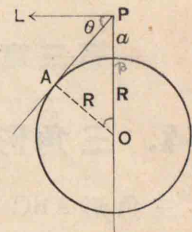
②  $\sin A + \sin(A + 120^\circ) + \sin(A + 240^\circ)$

3. 公式(4)及ビ(6)ヲ用ヒテ次ノ式ヲ展開セヨ。

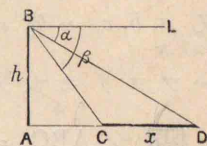
①  $\sin(A+B+C)$       ②  $\cos(A+B+C)$

③  $\tan(A+B+C)$

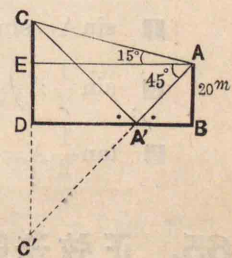
4. 高サ  $a$  米ノ山頂カラ地平線ヲ望ム線(地球面ヘノ切線ト同ジ方向)ノ俯角ヲ  $\theta$  トスレバ, 地球ノ半徑ハ  $\frac{a \cos \theta}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta}$  米デアルコトヲ證明セヨ。



5. 海濱ニアル高サ  $h$  米ノ高樓カラ海上ニアル二船ガ同ジ方向ニ見エ, 且其ノ俯角ガ夫々  $\alpha$  及ビ  $\beta$  デアルコトヲ知ツタ。然ラバ此ノ二船ノ距離ハ幾米カ。



6. 湖水面上 20 m ノ處カラ風船球ヲ望ムニ其ノ仰角ハ  $15^\circ$  デ, 其ノ像ノ俯角ハ  $45^\circ$  デアルトイフ。然ラバ湖水面上風船球ノ高サハ何程カ。



第三章 三角形ノ角ト邊トノ關係

64. 三角形ノ角ト邊

三角形 ABC ノ角ヲ A, B, C デ表ハシ, 其ノ對邊ヲ夫夫 a, b, c デ表ハス。サウスルト, 角 A, B, C ハ何レモ 0° ト 180° トノ間ニアル。ソシテ  $A+B+C=180^\circ$  デアル。又 a, b, c ハ常ニ正數デ, 且何レノ二ツノ和モ殘リノ一ツヨリモ大デアル。

問  $\triangle ABC$  ニ於テ, 次ノ關係ガアルコトヲ證明セヨ。

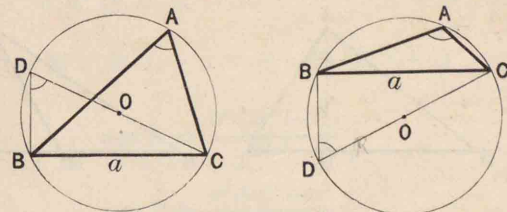
- 1  $\sin A = \sin(B+C)$       2  $\cos A = -\cos(B+C)$
- 3  $\sin \frac{1}{2} A = \cos \frac{1}{2} (B+C)$     4  $\cos \frac{1}{2} A = \sin \frac{1}{2} (B+C)$
- 5  $\tan \frac{1}{2} A = \cot \frac{1}{2} (B+C)$     6  $\sin 2A = -\sin 2(B+C)$

65. 正弦法則 *Sine Rule*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (12)$$

證明  $\triangle ABC$  ニ外接圓ヲ畫キ, C カラ直徑 CD ヲ引キ, BD ヲ結ブト

$A < 90^\circ$  ナルトキハ  $D=A$   
 $90^\circ > A > 90^\circ$  ナルトキハ  $D=180^\circ - A$



故ニ何レノ場合デモ

$$\sin D = \sin A$$

然ルニ  $BC = CD \sin D$

依ツテ外接圓ノ半徑ヲ R デ表ハスト

$$2R = \frac{a}{\sin A}$$

同様ニ  $2R = \frac{b}{\sin B}$  及  $2R = \frac{c}{\sin C}$

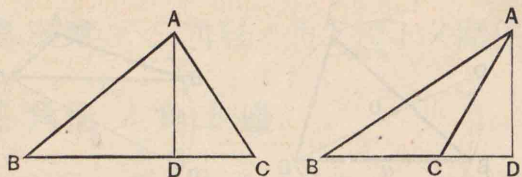
$$\text{故ニ} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

注意  $A=90^\circ$  ノトキニモ同ジ等式ハ成立ツ。

問  $\triangle ABC$  ニ於テ,  $\angle A$  ガ  $60^\circ$  デ邊 BC ガ 6cm デアル。其ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

66. 第一餘弦法則

$$\left. \begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



**證明**  $a = BC = BD + DC$  (上ノ左圖)  
 $= AB \cos B + AC \cos C$   
 $= c \cos B + b \cos C$

若シ C が鈍角デアルトキ(上ノ右圖), 又ハ B が鈍角デアルトキハ BC ハ BD - CD トナリ,  $\cos C$  又ハ  $\cos B$  が負數トナツテ同ジ等式ヲ得ル。

同様ニ  $b$  及ビ  $c$  ノ式モ求メラレル。

**問** C が直角デアルトキ同ジ等式ガ成立ツカ。

### 67. 第二餘弦法則

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

**證明** 公式(13)ノ三式ノ兩邊ニ夫々  $a, -b, -c$  ヲ掛ケテ邊々相加ヘルト

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

他ノ式モ同様ニ求メルコトガ出來ル。

**注意** 第46節ノ問8ニヨツテモ證明スルコトガ出來ル。

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

**問** 1.  $b = 12m, c = 9m, A = 120^\circ$  ナルトキ  $a$  ヲ計算セヨ。

**問** 2. 一角ガ  $60^\circ$  デ二邊ガ夫々  $4cm, 3cm$  デアル平行四邊形ノ兩對角線ノ長サヲ求メヨ。

### 68. 正切法則

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)} \quad (16)$$

**證明**  $\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R(\sin A + \sin B)} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



問 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\text{① } \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} \quad \text{② } \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}$$

### 69. 半角ノ正弦・餘弦・正切

公式(8)ノ系及ビ(15)ニヨツテ

$$\begin{aligned} 2\sin^2 \frac{A}{2} &= 1 - \cos A \\ &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \\ &= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \end{aligned}$$

三角形ノ周ノ半分(半周)ヲ  $s$  トスレバ

$$a+b+c=2s$$

$$a+b-c=2(s-c)$$

$$a-b+c=2(s-b)$$

之ヲ上ノ式ニ代入シテ

$$2\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{aligned} \right\} \text{同様に} \quad (18)$$

又上ト同様ニシテ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\text{從ツテ} \left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned} \right\} (20)$$

問 次ノ等式ヲ證明セヨ。

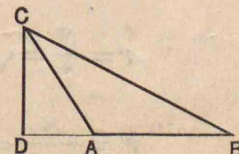
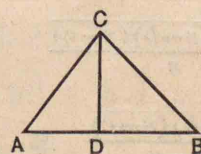
$$(s-a)\tan \frac{A}{2} = (s-b)\tan \frac{B}{2} = (s-c)\tan \frac{C}{2}$$

### 70. 三角形ノ面積

三角形 ABC ノ面積ヲ  $S$  デ表ハセバ

$$\text{[i]} \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \quad (21)$$

$$\text{[ii]} \quad S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (22)$$



**証明** [i] (第50節問2ヲ参照シテ學生之ヲ證明セヨ)

[ii]  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  ノ右邊ヲ  $\frac{1}{2}bc \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$  トシテ、之ニ公式(18)及ビ(19)ヲ用ヒルト次式ヲ得ル。

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(ひーろー Hero 又ハへろん Heron ノ公式)

**問 1.** 三角形ノ二邊ガ 30m ト 12m トデ其ノ夾角ガ 120° デアル。其ノ面積ヲ求メヨ。

**問 2.** 三邊ガ夫々 17m, 24m, 35m デアル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

**問 3.** 三角形ノ三邊ノ長サガ夫々 39cm, 40cm, 25cm デアル。39cm ノ邊ニ對スル高サヲ求メヨ。

**問 4.**  $S = \frac{1}{2}a^2 \sin B \sin C \operatorname{cosec} A$ ,  $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$  ヲ證明セヨ。—正弦則

### 71. 三角形ノ内接圓・傍接圓ノ半徑

内接圓ノ半徑ヲ  $r$ , 傍接圓ノ半徑ヲ  $r'$ ,  $r''$  及ビ  $r'''$  デ表ハセバ

$$r = \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad (23)$$

及ビ  $r' = \frac{S}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$  等 (24)

**証明** 右ノ圖ニ於テ

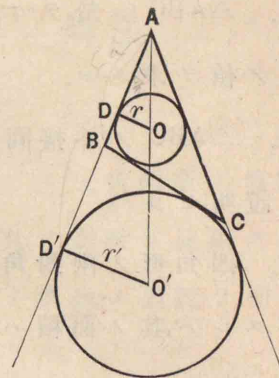
$$r = OD = AD \tan \frac{A}{2}$$

$$\cong (s-a) \tan \frac{A}{2}$$

$$r' = O'D' = AD' \tan \frac{A}{2}$$

$$= s \tan \frac{A}{2}$$

之ニ公式(20)ヲ用ヒテ證明セラレル。



**問** 三邊ガ 3, 5, 6 デアル三角形ノ内接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

### 問題 8

1.  $\triangle ABC$  ニ次ノ關係ガアルコトヲ證明セヨ。

①  $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

②  $\sin A + \sin B > \sin C$

③  $a + b + c = (b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C$

2.  $\triangle ABC$  =  $\sin^2 A = \sin^2 C - \sin^2 B$  ナル關係ガアルトキハ、此ノ三角形ハドンナ三角形デアルカ。

3.  $\triangle ABC$  = 於テ  $a=7, b=3, c=5$  ナルトキ、Aノ大サヲ求メヨ。

4.  $\triangle ABC$  に於テ  $a=7, b=15, c=20$  ナルトキ,  $\cos \frac{C}{2}$  ノ値ヲ求メヨ。

5.  $\triangle ABC$  ノ外接圓ノ半徑ハ  $\frac{abc}{4S}$  ニ等シイコトヲ證明セヨ。

6. 四角形ノ兩對角線ヲ  $d, d'$  トシ其ノ夾角ヲ  $\theta$  トスレバ, 其ノ面積ハ  $\frac{1}{2}dd'\sin\theta$  デアルコトヲ證明セヨ。

7. 圓ニ内接スル四角形  $ABCD$  ニ於テ相隣レル二角  $A$  ト  $B$  トノ正弦ノ比ハ對角線  $BD$  ト  $AC$  トノ比ニ等シイコトヲ證明セヨ。

又  $\angle CAD=\alpha, \angle BAC=\beta, \angle ABD=\gamma$  トスレバ,

$$CD = \frac{AB \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} \quad \text{デアルコトヲ證明セヨ。}$$

8. 前問デ  $AB, BC, CD, DA$  ヲ夫々  $a, b, c, d$  トシ, 四角形  $ABCD$  ノ面積ヲ  $S$  トスレバ

$$\text{① } \sin B = \frac{2S}{ab+cd} \quad \text{② } \cos B = \frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}$$

デアルコトヲ證明セヨ。

$$S = \frac{1}{2}(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

## 第四章 三角形ノ解法

### 72. 三角函數ノ對數表

三角函數ヲ含ム計算ニ今マデハ三角函數ノ眞數表ヲ使ツタガ, 複雑ナ計算デハ其ノ對數ヲ使用スル方ガ便利デアルカラ, 三角函數ノ眞數ノ對數ヲ列ベテアル三角函數ノ對數表ヲ用ヒル。

三角函數ノ對數表ノ組織ハ大略眞數表及ビ數ノ對數表ト同ジデアルガ, タゞ三角函數ノ値ハ1ヨリモ小サイモノガ多イカラ其ノ對數ノ指標ハ負數ガ多イ。シカシ表中ニ負ノ指標ヲ記入スルコトヲ避ケテ, 指標ニ10ヲ加ヘタモノガアル。之ヲ表對數トイヒ, 之ヲ表ハスニハ  $L\sin, L\cos$  等トスル。

故ニ例ヘバ  $\log \sin A = L\sin A - 10$  デアル。

本書ノ附表ニ載セテアルノハ10'飛ビノ四桁ノ表對數デアル。

次ニ其ノ用例ヲ示ス。

例 1.  $L\sin 28^\circ 47'$  ヲ求メヨ。

解 表ヨリ  $L\sin 28^\circ 40' = 9.6810$

及ビ  $L\sin 28^\circ 50' = 9.6833$

角ノ變化ガ微小ナトキハ之ニ對應スル三角函  
數ノ對數ノ變化ハ其ノ角ノ變化ニ正比例スル

(之ヲ比例部分ノ法則トイフ)トシテ差支ナイ。  
然ルニ角10'ノ増加ニ伴フ對數ノ増加ハ 0.0023  
(之ハ表ノ中ニ表差トシテ Lsin ノ行ノ右ニ記シ  
テアル)デアルカラ 7'ニ對スル増加ハ次ノ比例  
式デ求メラレル。

$$10' : 7' = 0.0023 : x \quad \therefore x = 0.0016$$

依ツテ

$$L\sin 28^\circ 47' = 9.6810 + 0.0016 = \underline{9.6826} \quad (\text{答})$$

此ノ計算ヲ次ノヤウニ記ス。

Lsin 28°47'		
28°40'.....	9.6810	表差=23
7'.....	16*	23×0.7=16*
Lsin 28°47'	<u>9.6826</u>	(答)

問 1. Ltan 43°32' 及 ビ Lsin 63°23' ヲ求メヨ。

例 2. logcos 17°31'40" ヲ求メヨ。

logcos 17°31'40"		
17°40'.....	1.9790	表差=4
-8'20".....	3*	0.4×8 $\frac{1}{3}$ =3*
logcos 17°31'40"	<u>1.9793</u>	(答)

問 2. logcot 18°35'10" ヲ求メヨ。

例 3. logsin A = 1.4488 カラ A ヲ求メヨ。

logsin A = 1.4488		
47.....	16°10'	表差=44
41.....	9'.3*	41=9.3*
A =	<u>16°19'.3</u>	(答)

問 3. 次ノ式カラ A ヲ求メヨ。

1 Lsin A = 9.8436      2 Ltan A = 9.4213

3 logtan A = 1.2007      4 logcos A = 1.4890

問 4. Lsin 13°10' = 9.3575, Lsin 13°20' = 9.3629 カラ  
Lsin 13°17'20" ヲ求メヨ。

### 73. 三角形ノ解法

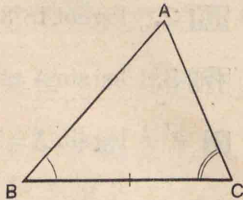
三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合ガアル。

- [1] 一邊ト其ノ兩端ノ角トヲ知ル場合。
- [2] 二邊ト其ノ夾角トヲ知ル場合。
- [3] 二邊ト其ノ一對角トヲ知ル場合。
- [4] 三邊ヲ知ル場合。

### 74. [1]ノ場合ノ解法

a ト B, C トヲ知ルトキハ次ノ公式ヲ用ヒル。

$$(公式) \begin{cases} A = 180^\circ - (B+C) \\ b = \frac{a \sin B}{\sin A} \\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} \end{cases}$$



對數ヲ用ヒルタメ第二式第三式ハ夫々之ヲ

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

トスベキデアルガ、煩ヲ避ケルタメ以下ノ諸節デハ一々此ノヤウナ式ハ示サナイ。

**例**  $a = 142m$ ,  $B = 47^\circ 35'$ ,  $C = 61^\circ 43'$  トシテ三角形ヲ解ケ。

**解**

$$A = 180^\circ - (B+C)$$

$$A = 180^\circ - (47^\circ 35' + 61^\circ 43') = 70^\circ 42'$$

$$\text{又} \quad \log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

$\log a = 2.1523$	$\log a = 2.1523$
$\log \sin B = \bar{1}.8682$	$\log \sin C = \bar{1}.9448$
$-\log \sin A = 0.0251$	$-\log \sin A = 0.0251$
$\log b = 2.0456$	$\log c = 2.1222$

$$\therefore b = 111$$

$$\therefore c = 132.5$$

**答**  $A = 70^\circ 42'$ ,  $b = 111m$ ,  $c = 132.5m$

**注意** 上ノ對數計算ニヨツテ得タ結果ハ勿論近似値デアル。

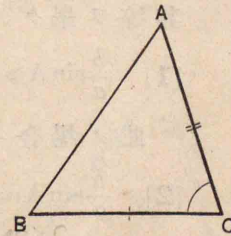
**問 1.**  $a = 485.6m$ ,  $B = 38^\circ 52'$ ,  $C = 80^\circ 26'$  ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

**問 2.**  $A = 32^\circ 47'$ ,  $B = 44^\circ 17'$ ,  $b = 372.7m$  ヲ知ツテ  $a$  ヲ計算セヨ。

### 75. |2|ノ場合ノ解法

$a, b$  ト  $C$  トヲ知ルトキハ次ノ公式ヲ用ヒル。

$$(公式) \begin{cases} \frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{C}{2} \\ \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \\ c = \frac{(a-b) \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \quad (\text{第 68 節 問}) \end{cases}$$



先ヅ第一式カラ  $\frac{1}{2}(A+B)$ , 第二式カラ  $\frac{1}{2}(A-B)$  ヲ求メ、之ヲ加減シテ  $A$  ト  $B$  トヲ算出シ、次ニ第三式ニヨツテ  $c$  ヲ計算スル。

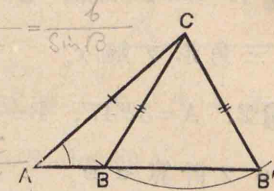
**問** 次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。

**1**  $a = 456.1m$ ,  $b = 296.9m$ ,  $C = 74^\circ 20'$

**2**  $a = 522m$ ,  $b = 320m$ ,  $C = 34^\circ 22'$

76. [3]ノ場合ノ解法

a, b ト A トヲ知ルトキハ次ノ公式ヲ用ヒル。

$$(公式) \begin{cases} \sin B = \frac{b \sin A}{a} \\ C = 180^\circ - (A + B) \\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} \end{cases}$$


**吟味** 第一式カラ B ヲ定メルトキニ a, b, A ノ値ニヨリ二ツノ解ヲ得ル場合(兩意ノ場合)ト、一ツノ解ヲ得ル場合ト、不能ノ場合トガ起ル。次ニ其等ヲ擧ゲルト、

[1]  $\frac{b}{a} \sin A > 1$  ノトキハ  $\sin B > 1$  デアルカラ、此ノ場合ハ不能デアル。

[2]  $\frac{b}{a} \sin A = 1$  ノトキハ  $\sin B = 1$  デアルカラ、 $B = 90^\circ$  デアル。依ツテ  $A < 90^\circ$  ナルトキニ限ツテ一ツノ解ガアル。

[3]  $\frac{b}{a} \sin A < 1$  ノトキハ  $\sin B < 1$  デアルカラ、第一式ニ適スル B ノ値ハ二ツアツテ、一ツハ鋭角、一ツハ鈍角デアル。ソレデ  $a \geq b$  又ハ  $a < b$  ナルニ從ツテ一ツ又ハ二ツノ解ガアル。

**注意** 以上ノ結果ハ  $b \sin A$  ガ頂點 C カラ對邊 AB へ引

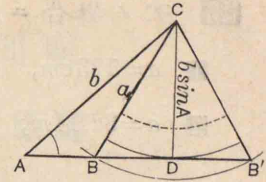
$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$  對邊  $> 0$  時  $B = 90^\circ$   $A < 90^\circ$  時ニ解一  
 $= 0$   $B = \alpha$   
 $< 0$   $B = \beta$   $a, b, A, B$  ノ大小關係

イタ垂線 CD ノ長サデアアルコ

トニ着目スレバヨクワカル。

**問** 次ノ場合ニ三角形ヲ解

ケ。



1  $a = 250 \text{ cm}, c = 125 \text{ cm}, A = 120^\circ$

$B = 34^\circ 20', C = 25^\circ 40', b = 112.8$

2  $A = 30^\circ, a = 3 \text{ m}, b = 3\sqrt{3} \text{ m}$

$B = 60^\circ, C = 90^\circ, c = 6$

3  $c = \sqrt{2} \text{ m}, b = 1 \text{ m}, B = 30^\circ$

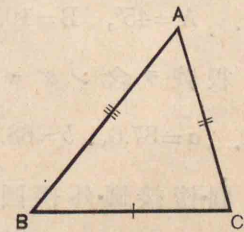
$A = 15^\circ, C = 45^\circ, a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$15^\circ, 45^\circ, a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

77. [4]ノ場合ノ解法

a, b, c ヲ知ルトキハ次ノ公式ヲ用ヒル。

$$(公式) \begin{cases} \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{cases}$$



**注意** 1. 上ノ公式ト公式(23)カラ出來ル次ノ式モ實際ノ計算ニハ便利デアル。

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}, \tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b}, \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}$$

**注意** 2. 此ノ解法ノヤウニ A, B, C ヲ別々ニ求メタ場合ニハ其ノ和ガ  $180^\circ$  ニ等シイカ否カラ驗セヨ。但シ其ノ場合、和ガ 1 分内外ノ誤差ヲ生ズルハ已ムヲ得ナイ。

*C = 25^\circ 40'*  
*B = 34^\circ 20'*  
*A = 120^\circ*  
*b = 112.8*  
*c = 125*  
*a = 250*

問 次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。

1  $a=123\text{ cm}, b=113\text{ cm}, c=103\text{ cm}$

2  $a=32.94\text{ m}, b=45.16\text{ m}, c=15.42\text{ m}$

問題 9

1. 次ノ各部分ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

1  $B=60^\circ 40', C=59^\circ 10', a=10.62$

2  $B=82^\circ 20', C=40^\circ 20', b=479$

3  $b=20.71, c=18.87, A=55^\circ 12'$

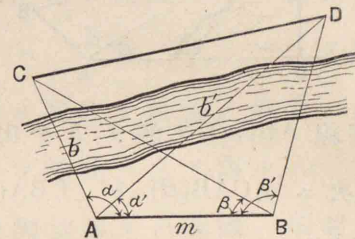
4  $a=317, b=533, c=510$

2.  $A=45^\circ, B=105^\circ, AB=c$  トシテ BC 及ビ CA ヲ根號ヲ含ンダママノ式デ表ハセ。

3.  $a=87.6, b=68.3, c=74.3$  トシテ面積及ビ内接圓・傍接圓・外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

第五章 測量問題

78. 近ヅキ得ナイ二點ノ距離



$\triangle ABC + \triangle DAB$   
又スレモ同一平面ニシテ

C, D ヲ二點トシ之ヲ望ミ得ル適當ナ二點 A, B ヲ選ンデ基線 AB(m) ヲ測リ, A 點デ  $\angle BAC(\alpha), \angle BAD(\alpha')$  及ビ  $\angle CAD(\theta)$  ヲ測リ, 又 B 點デ  $\angle ABC(\beta), \angle ABD(\beta')$  ヲ測ル。サウスルト

$$\triangle ABC \text{ カラ } AC = \frac{m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\triangle ABD \text{ カラ } AD = \frac{m \sin \beta'}{\sin(\alpha' + \beta')}$$

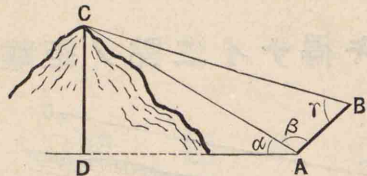
ヲ得ル。依ツテ  $\triangle ACD$  カラ  $\angle ACD, \angle ADC$  ヲ求メ夫々  $\gamma, \delta$  デ表ハスト

$$CD = \frac{(AC - AD) \cos \frac{1}{2} \theta}{\sin \frac{1}{2} (\gamma - \delta)}$$

之ニヨツテ CD ヲ求メルコトガ出來ル。

注意 四點 A, B, C, D ガ同ジ平面上ニアルトスレバ  $\theta$  ヲ測ルニ及バナイ。

### 79. 山ノ高サ



先ヅ適當ナ基線  $AB(m)$  ヲ測リ,  $A$  デ山頂  $C$  ノ仰角  $CAD(\alpha)$  ヲ測リ, 次ニ  $\angle CAB(\beta)$  ト  $\angle CBA(\gamma)$  トヲ測ル。サウスルト,  $\triangle ABC$  カラ

$$AC = \frac{m \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

然ルニ  $CD = AC \sin \alpha$

故ニ  $CD = \frac{m \sin \gamma \sin \alpha}{\sin(\beta + \gamma)}$

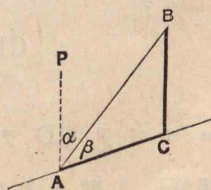
**問 1.** 上ノ圖デ

$\angle CAB = 105^\circ$ ,  $\angle CBA = 30^\circ$ ,  $\angle CAD = 60^\circ$ ,  $AB = 30m$

デアレバ山ノ高サ ( $CD$ ) ハドウカ。

**問 2.** 坂路ノ上ニ立ツテキル塔  $BC$  ガアル。此

ノ坂路上ノ一點  $A$  デ塔頂ト塔脚トヲ視テ,  $\angle BAP(\alpha)$  及ビ  $\angle BAC(\beta)$  ヲ得タ。此ノ塔ノ高サヲ求メヨ。但シ  $AC$  ノ長サヲ  $m$  トスル。



### 80. 三角測量

大キナ地形ヲ測量スルニハ其ノ地面上ニ若干ノ地點ヲ選ビ, 此等ヲ頂點トスル數多ノ三角形ヲ以テ地面ヲ被フモノト考ヘル。ソシテ此等ノ三角形ノ諸邊ノ中最モ便宜ナ數邊ノ長サハ之ヲ基線トスルタメニ極メテ精密ニ之ヲ測ル。

陸軍陸地測量部デハ全國ノ地圖ヲ作ルタメニ次ノ基線ヲ測ツテキル。

相模野基線	神奈川県	高座郡	5210.2125 m
三方原基線	静岡県	濱名郡	10839.9757 m
饗庭野基線	滋賀縣	高島郡	3065.7239 m
西林村基線	德島縣	阿波郡	2832.2124 m
天神野基線	鳥取縣	東伯郡	3301.8051 m
久留米基線	福岡縣	三井郡	3161.0071 m
笠野原基線	鹿兒島縣	肝屬郡	5875.5088 m
鹽野原基線	山形縣	最上郡	5129.5872 m
須坂基線	長野縣	上高井郡	3291.9120 m
鶴兒平基線	青森縣	上北郡	4006.0309 m
札幌基線	北海道	札幌市	4539.7703 m
クニネベツトヒ別基線	同	目梨郡	4069.8502 m
クニネベツトヒ問基線	同	宗谷郡	2677.5035 m
沖繩基線	沖繩縣	中頭郡	4151.6773 m
エト羅フ促基線	北海道	シヤナ郡	4105.6081 m

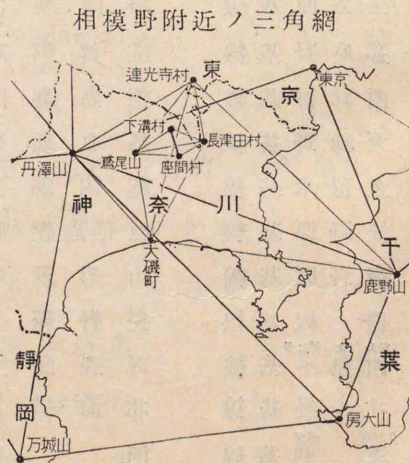


宜蘭基線	臺灣臺北州羅東郡	4225.8415 m
埔里社基線	同 臺中州能高郡	2575.7965 m
鳳山基線	同 高雄州鳳山郡	4961.3844 m
大谷基線	樺太 豊原郡	4999.6897 m
敷香基線	同 敷香郡	4999.4504 m

此等ノ基線ト各地點ニ於テ測ツタ他ノ地點ニ向ヘル直線間ノ角トヲ以テ順次間接ニ三角形ノ解法ヲ用ヒテ各地點間ノ距離ヲ測量スル。

此ノヤウナ測量ヲ三角測量トイヒ、三角形ノ大小ニヨツテ一等、二等、三等ノ別ガアル。又地面ヲ被ヘル三角形ノ群ヲ三角網トイフ。但シ

大地測量ノヤウニ地面上甚ダ遠イ諸點間ノ距離ヲ測ルトキニハ、之ヲ直線ト見做サズシテ、球面ノ大圆弧ヨリナル球面三角形ノ邊トナスベキデアル。從ツテ其ノ計算ハ



相模野附近ノ三角網  
基線(下溝村・座間村間)ヲ一邊トスル小三角形カラ次第ニ三角形ヲ擴大シテ終ニ一等三角形ノ一邊(丹澤山・鹿野山間)ヲ作ルコトヲ示ス。

球面三角法<sup>\*</sup>ニヨラナケレバナラナイ。

### 問題 10

- 縮尺  $\frac{1}{600}$  ノ圖面上ニ  $\triangle ABC$  ノ土地ガアル。今之ヲ圖面ノ上デ測ルニ  $\angle ABC = 15^\circ$ ,  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $BC = 40\text{cm}$  デアル。此ノ土地ノ廣サヲ計算セヨ。
- 海濱ニ聳エル山ノ高サ  $CD$  ヲ測ルタメニ  $365\text{m}$  距タル二船  $A, B$  ニ於テ  $\angle BAC = 67^\circ 16'$ ,  $\angle ABC = 54^\circ 20'$ , 仰角  $CAD = 35^\circ 30'$  ヲ測ツタ。之カラ山ノ高サヲ算定セヨ。(148頁ノ上圖ヲ見ヨ)
- 或山ノ頂上デ同ジ方向ニアル二ツノ家屋ノ俯角ヲ測ツテ  $23^\circ 20'$  ト  $18^\circ 10'$  トヲ得タ。又此ノ兩家屋ノ距離ハ  $440\text{m}$  デアル。此ノ山ノ高サヲ求メヨ。但シ兩家屋ハ同ジ水平面上ニアルモノトスル。
- $N 15^\circ W$  ノ方位ニ向ヒ一直線ノ道路ヲ進行シタ人ガ、正北ニ當ツテ一ツノ塔ヲ見テカラ  $200\text{m}$  進ンダトキ再ビ此ノ塔ヲ北東ノ方位ニ見タトイフ。然ラバ此ノ塔ヲ正北ニ見タトキノ位置カラ塔マデノ距離ハ幾米カ(米ノ小數第一位未滿四捨五入)。

\* 三角法ヲニツニ分ケ、平面上ノ三角形ニ關スルモノヲ平面三角法トイヒ、球面三角形ニ關スルモノヲ球面三角法トイフ。

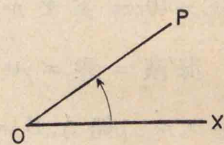
$AB = \frac{200 \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{200\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 200\sqrt{6} \approx 489.9$

### 第六章 一般ノ角ノ三角函數

#### §1. 一般ノ角

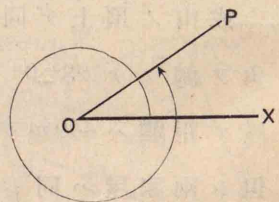
∠XOP ハ其ノ頂點 O ヲ一端トスル半直線ガ其ノ角ノ平面上ヲ OX ノ位置カラ OP ノ位置マデ廻轉シテ出來タモノト考ヘル。

此ノトキ OX ヲ角ノ主線, OP ヲ角ノ動徑トイフ。



角ノ大小ハ動徑ガ主線カラ發シテ其ノ位置ニ達スルマデニ廻轉シタ量ノ多少ニヨルモノデアルカラ, 動徑ガ OX ヲ發シテ幾回

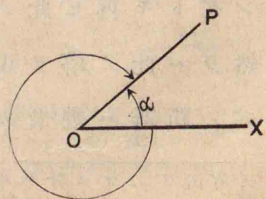
モ OX ノ位置ヲ通過シテ OP ノ位置ニ來タモノトモ考ヘラレル。從ツテ ∠XOP



ヲ 360° ヨリモ大キイ角ト考ヘルコトガ出來ル。

又動徑ガ主線カラ廻轉スル方向ハ次ノ圖ニ示スヤウニ二ツアル。此ノ相反

スル二ツノ方向ヲ區別スルタメニ角ノ大サニ正負ノ符號ヲ附ケテ, 時計ノ針ト反對



ノ方向ニ廻轉シテ出來タ角ヲ正角トシ, 時計ノ針ト同ジ方向ニ廻轉シテ出來タ角ヲ負角トスル。

以上ノ事柄カラ一般ノ角ノ大サニハ正負ノアラユル値及ビ 0 ガアルコトヲ知ル。故ニ前圖ニ示ス ∠XOP ハ正負無數ノ角ヲ表ハスガ, 其ノ中ノ最小ナ正角ヲ  $\alpha$  トスルト, 其ノ總テノ角ノ値ハ次ノ式デ表ハサレル。但シ  $n$  ハ 0 又ハ正負ノ整數ヲ表ハス。

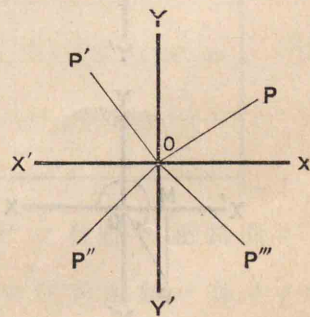
$$\alpha + n \cdot 360^\circ$$

此ノ正負ノ意ハ此ノ如ク

#### §2. 象限

圖ノヤウニ直交スル二直線 XOX', YOY' デ分ケラレタ平面ノ四部分ヲ象限トイフ。此ノトキ半直線 OX

ヲ角ノ主線トシ, OP ヲ動徑トスレバ, OP ガ ∠XOY 内ニアルトキハ ∠XOP ハ第一象



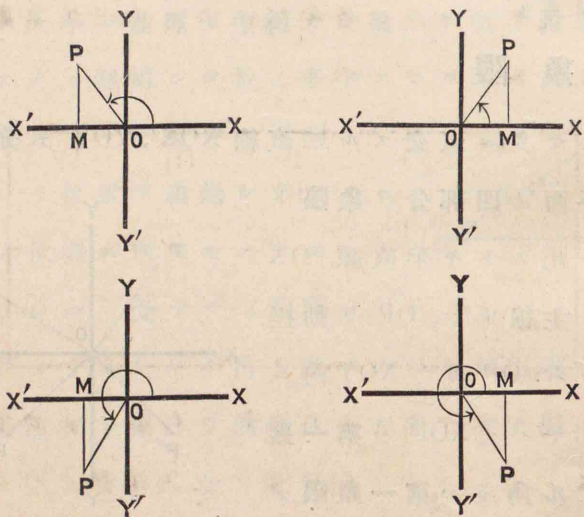
限ニアル角或ハ第一象限ノ

角トイヒ, OP ガ ∠YOX' 内, ∠X'OY' 内, ∠Y'OX 内ニアルニ從ツテ其ノ角ハ夫々第二, 第三, 第四象限ニアル角或ハ第二, 第三, 第四象限ノ角トイフ。

問  $120^\circ, 225^\circ, 405^\circ, -30^\circ, -300^\circ, 750^\circ$  ハ各第何象限ノ角デアルカ。

### 83. 一般ノ角ノ三角函數

$\angle XOP$  ヲ  $\theta$  デ表ハシ,  $OX$  ヲ主線,  $OP$  ヲ動徑トスレバ, 角  $\theta$  ノ三角函數ハ  $OP$  上ノ一點  $P$  カラ  $OX$  或ハ其ノ延長上へ垂線  $PM$  ヲ引イテ銳角ヤ鈍角ノ場合ト同様ニ次ノヤウニ定メル。



$$\sin \theta = \frac{MP}{OP}, \quad \cos \theta = \frac{OM}{OP},$$

$$\tan \theta = \frac{MP}{OM}, \quad \cot \theta = \frac{OM}{MP}$$

ソシテ垂線  $MP$ , 動徑  $OP$ , 其ノ射影  $OM$  ノ長サニ關シテ次ノヤウニ正負ノ規約ヲ設ケル。

- [1] 動徑  $OP$  ハ常ニ正トスル。
- [2] 垂線  $MP$  ハ  $XOX'$  ニ關シテ  $OY$  ト同ジ側ニアルトキハ正トシ,  $OY'$  ト同ジ側ニアルトキハ負トスル。
- [3] 射影  $OM$  ハ  $OX$  上ニアルトキハ正トシ,  $OX'$  上ニアルトキハ負トスル。

此ノ規約ニヨツテ各象限ニ於ケル三角函數ノ符號ハ次ノ表ノヤウニナル。

象限 函數	I	II	III	IV
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

既ニ述ベタヤウニ動徑  $OP$  ノ位置ハ正負共ニ無數ノ角ヲ表ハスカラ, 同ジ値ノ三角函數ヲ有スル角  $\theta$  ハ無數ニアル。今其ノ中ノ最小ナ正角ヲ  $\alpha$  トスルト, 此等ノ總テノ角ノ三角函數ハ皆夫々  $\alpha$  ノ三角函數ニ等シイ。即チ

$$\left. \begin{aligned} \sin(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \tan \alpha \end{aligned} \right\} \text{(25)}$$

等

但シ  $n$  ハ正負ノ整数又ハ 0 デアル。

從ツテ 或角ニ  $360^\circ$  ノ任意整数倍ヲ加減スルモ

其ノ三角函数ノ値ハ變ハラナイ。

**問 1.** 次ノ各角ノ三角函数ノ符號ヲイヘ。

$135^\circ, 265^\circ, 275^\circ, -10^\circ, -91^\circ, -1000^\circ$

**問 2.** 次ノ各角ノ三角函数ヲ求メヨ。

$390^\circ, 765^\circ, 10860^\circ, -330^\circ, -1020^\circ$

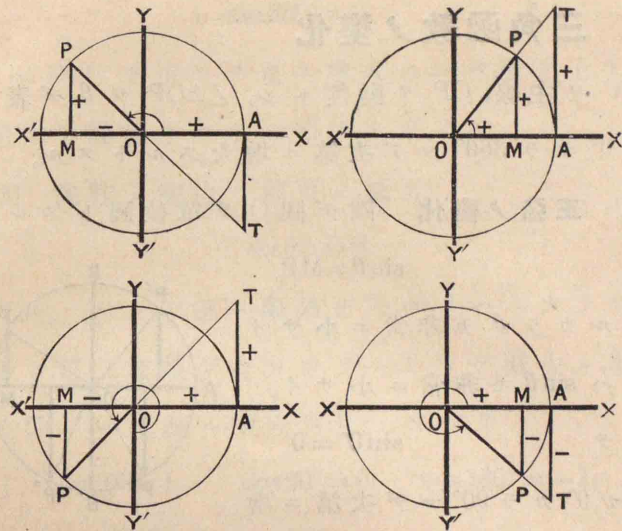
**問 3.** 正弦ガ  $\frac{1}{2}$  ニ等シイ角ヲ三ツイヘ。

### 84. 三角函数ヲ線分デ表ハスコト

$\angle XOP$  ノ頂點  $O$  ヲ中心トシ、單位ノ長サヲ半徑トスル圓(之ヲ單位圓トイフ)ヲ畫キ、主線  $OX$ 、動徑  $OP$  ト夫々  $A, P$  デ交ハラシメ且  $A$  ニ於ケル其ノ圓ノ切線ト  $OP$  トノ交點ヲ  $T$  トスレバ、 $OP$  ト  $OA$  トノ數値ハ共ニ 1 デアルカラ、 $\angle XOP$  ヲ  $\theta$  デ表ハスト、

$$\sin \theta = MP, \quad \cos \theta = OM, \quad \tan \theta = AT$$

但シ  $MP, OM, AT$  ハ夫々其ノ數値ヲ表ハスモノト



シ、正トモ、負トモ又 0 トモナル。

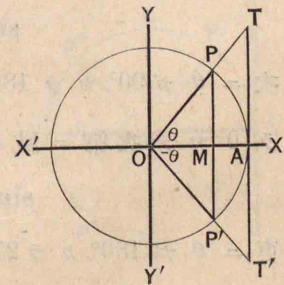
### 85. 負角ノ三角函数

右ノ圖デ

$$\angle XOP = \theta, \quad \angle XOP' = -\theta$$

トシ、此ノ二角ノ三角函数ヲ

比較シテ次ノ公式ヲ得ル。



$$\left. \begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \end{aligned} \right\} \text{(26)}$$

**問**  $-45^\circ, -30^\circ, -60^\circ, -120^\circ$  ノ三角函数ヲイヘ。

## 86. 三角函數ノ變化

OA ヲ主線, OP ヲ動徑トシ,  $\angle AOP$  ヲ  $\theta$  デ表ハシ,  
 $\theta$  ガ  $0^\circ$  カラ  $360^\circ$  マデ次第ニ増大スルトスル。

[1] 正弦ノ變化 圖デ圓 O ヲ單位圓トスレバ

$$\sin \theta = MP$$

デアアルカラ  $\theta$  ガ非常ニ小サイ

トキハ  $\sin \theta$  モ非常ニ小サイ。

ソシテ

$$\sin 0^\circ = 0$$

$\theta$  ガ  $0^\circ$  カラ  $90^\circ$  マデ次第ニ増  
 大スルトキ  $\sin \theta$  ハ之ニ伴ツテ 0 カラ 1 マデ次第ニ  
 増大スル。ソシテ

$$\sin 90^\circ = 1$$

次ニ  $\theta$  ガ  $90^\circ$  カラ  $180^\circ$  マデ増大スルトキ  $\sin \theta$  ハ 1  
 カラ 0 マデ次第ニ減少スル。ソシテ

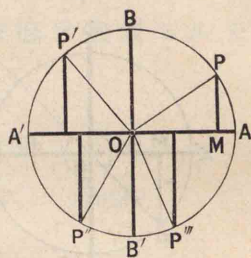
$$\sin 180^\circ = 0$$

更ニ  $\theta$  ガ  $180^\circ$  カラ  $270^\circ$  マデ増大スルトキ  $\sin \theta$  ハ常  
 ニ負デ其ノ絶對値ハ 0 カラ 1 マデ次第ニ増大スル。

ソシテ

$$\sin 270^\circ = -1$$

$\theta$  ガ  $270^\circ$  カラ  $360^\circ$  マデ増大スルトキ,  $\sin \theta$  ハ尙負  
 デ其ノ絶對値ハ 1 カラ 0 マデ減少スル。ソシテ



$$\sin 360^\circ = 0$$

$\theta$  ガ  $360^\circ$  ヲ超エテ更ニ増大スレバ, 復タ上ト同一  
 ノ變化ヲ繰返スコトハ明ラカデアアル。

[2] 餘弦ノ變化 前頁ノ圖デ

$$\cos \theta = OM$$

デアアル。ソレデ第一象限デハ  $\cos \theta$  ハ 1 カラ 0 マデ  
 減少シ, 第二象限デハ 0 カラ  $-1$  マデ減少シ, 第三, 第  
 四象限デハ反對ニ増大スル。ソシテ

$$\cos 0^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1,$$

$$\cos 270^\circ = 0, \quad \cos 360^\circ = 1$$

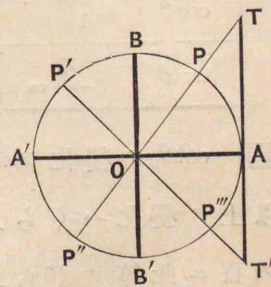
[3] 正切ノ變化 次圖デ圓 O ヲ單位圓トスレバ

$$\tan \theta = AT$$

ソシテ

$$\tan 0^\circ = 0$$

$\theta$  ガ  $0^\circ$  カラ  $90^\circ$  マデ次第ニ  
 増大スレバ,  $\tan \theta$  ハ 0 カラ次  
 第ニ増大シ,  $\theta$  ガ十分  $90^\circ$  ニ近



ヅケバ,  $\tan \theta$  ハ如何ニ大ナル正數ヨリモ更ニ大トナ  
 ル。然シ  $\theta$  ガ  $90^\circ$  ヲ超エルト同時ニ  $\tan \theta$  ハ俄ニ負ト  
 ナツテ其ノ絶對値ハ如何ナル數ヨリモ大デアアル。

故ニ

$$\tan 90^\circ = \pm \infty$$

$\theta$  が  $90^\circ$  から  $180^\circ$  マデ増大スルトキハ、 $\tan\theta$  ハ常ニ負デ其ノ絶對値ハ  $\infty$  カラ  $0$  マデ減少スル。ソシテ

$$\tan 180^\circ = 0$$

$\theta$  が第三象限ニアルトキハ  $\tan\theta$  ハ第一象限ノ場合ト同ジ變化ヲナシ、第四象限ニ於テハ第二象限ノ場合ト同ジ變化ヲスル。ソシテ

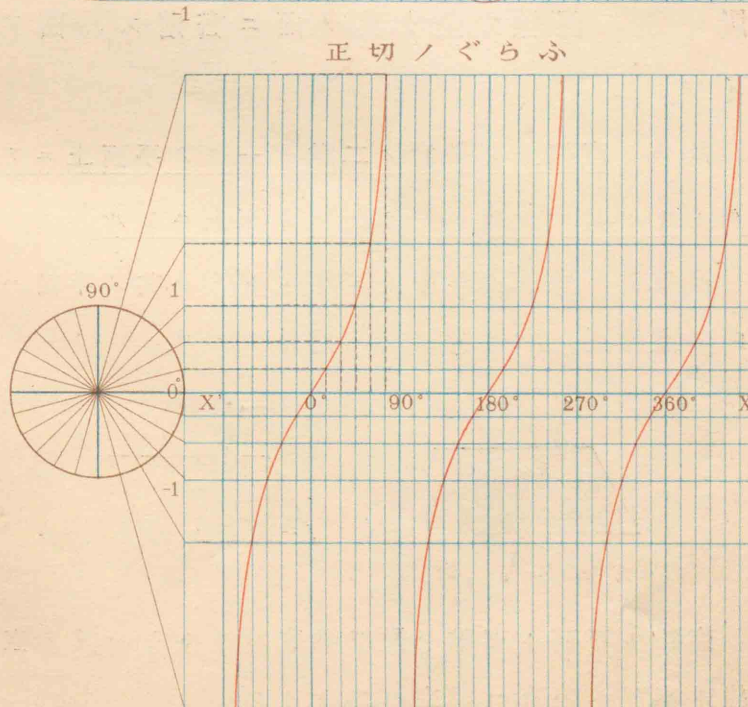
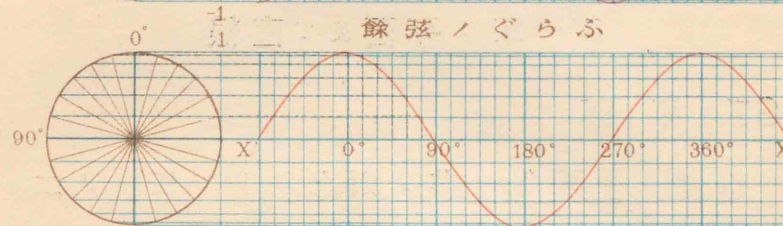
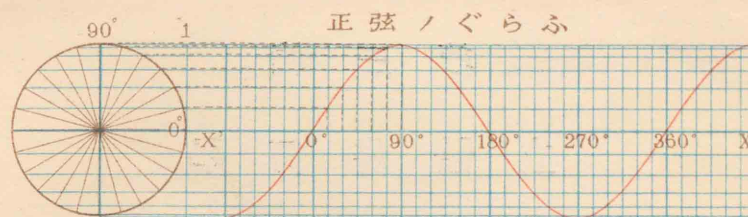
$$\tan 270^\circ = \pm\infty, \quad \tan 360^\circ = 0$$

以上三ツノ三角函數ノ變化ハ次表ノ通りデアル。

$\theta$ 函數	第一象限 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$	第二象限 $90^\circ \rightarrow 180^\circ$	第三象限 $180^\circ \rightarrow 270^\circ$	第四象限 $270^\circ \rightarrow 360^\circ$
$\sin \theta$	増 $0 \rightarrow 1$	減 $1 \rightarrow 0$	減 $0 \rightarrow -1$	増 $-1 \rightarrow 0$
$\cos \theta$	減 $1 \rightarrow 0$	減 $0 \rightarrow -1$	増 $-1 \rightarrow 0$	増 $0 \rightarrow 1$
$\tan \theta$	増 $0 \rightarrow +\infty$	増 $-\infty \rightarrow 0$	増 $0 \rightarrow +\infty$	増 $-\infty \rightarrow 0$

問  $\cot\theta$  ノ變化ヲ考究セヨ。

以上ノ變化ハぐらふデ示スト一層明ラカデアル。次ノ頁ニ此等ノぐらふヲ示ス。此等ノ曲線ハ夫々  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$  ノぐらふデ、之ヲ夫々正弦曲線、餘弦曲線、正切曲線トイフ。





# 第三篇 立體幾何學

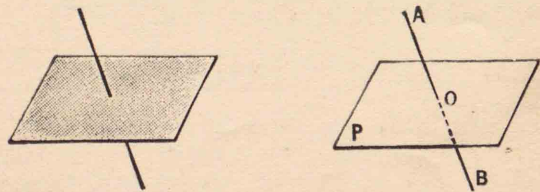
## 第一章 平面及直線

### 87. 平面

**定義** 平面トハ其ノ面上ニアル任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全ク其ノ面ニ密着スル面ヲイフ。  
ニ密着スル  
ニ含マレル  
エニアル

故ニ 直線上ノ任意ノ二點ガ一ツノ平面上ニアルトキハ、其ノ直線ハ全ク此ノ平面上ニアル。

直線或ハ點ガ或平面上ニアルトキハ、其ノ平面ハ此ノ直線或ハ點ヲ含ム又ハ通ルトイフ。



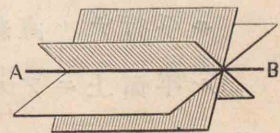
直線ト平面トガ唯一點ヲ共有スルトキハ、其ノ直線ト平面トハ互ニ相交ハルトイフ。

**注意** 平面ハ何レノ方向ヘモ無限ニ擴ガツテキルモノデアルガ、之ヲ書キ表ハスニハ其ノ上ニアル圖形(適當ナ圖形ガナイトキハ平行四邊形)デ示ス。例ヘバ前圖ニ於ケル平面Pノヤウデアル。

### 88. 平面ノ決定

平面上ニアル一直線ヲ固定シテモ其ノ平面ハ此ノ直線ヲ軸トシテ自由ニ廻轉スルコトガ出來ル。

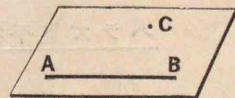
然シ更ニ此ノ直線外ニ平面上ノ一點ヲ固定スレバ其ノ平面ハ廻轉スルコトガ出來ナイ、即チ全ク定マル。



**公理一** 一直線ト其ノ上ニナイ一點トヲ含ム平面ハ唯一ツシカナイ。

右ノ圖デ、直線ABト點Cトヲ含ム平面ハ唯一ツシカナイ。

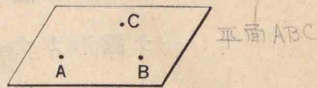
此ノ公理ヲ通例次ノヤウニ述ベル。



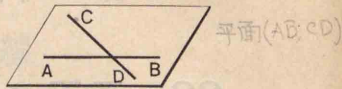
一直線ト其ノ上ニナイ一點トハ一平面ヲ決定スル。

系 次ノ各、ハ一平面ヲ決定スル。

[1] 一直線上ニナイ三點。



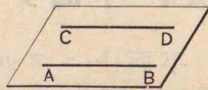
[2] 相交ハル二直線。



[3] 平行ナル二直線。

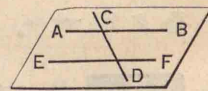
(平行線 AB, CD ハ同ジ平面上ニアル。

ソシテ其ノ平面ハ AB ト CD 上ノ一  
點 C トデ決定スルカラデア)



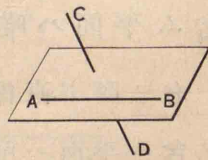
問 相交ハル二直線ノ一ツニ交ハツテ他ノ一ツ  
ニ平行ナル直線ハ總テ原ノ二直線デ決定サレ  
ル平面上ニアル。

注意 空間ニアル二直線ノ配置ハ  
必ズ次ノ何レカ一ツデア。



[1] 同ジ平面上ニアル場合(相交  
ハルカ、又ハ平行デア)。

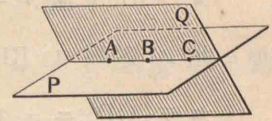
[2] 同ジ平面上ニナイ場合(相交  
ハラズ且平行デナイ)。



### 89. 平面ノ交ハリ

定理一 一點(A)ヲ共有スル二平面(P, Q)ハ此ノ點  
(A)ヲ通ル一一直線ヲ共有スル。  
テ交ハル。

× 證明 二面ノ出會フ處ハ線



デアカラ、二平面 P, Q ガ  
一點 A ヲ共有スルトキハ、

其ノ出會フ處ハ A ヲ通ル線デア。

今其ノ線上ニ於テ點 A ノ外ニ任意ノ二點 B, C  
ヲ取レバ、三點 A, B, C ハ一直線上ニアル。

何故ナレバ、若シサウデナイトスレバ、一直線上  
ニナイ三點ヲ含ム平面ガ P ト Q トニツアルコ  
トニナリ、公理一ニ背クカラデア。

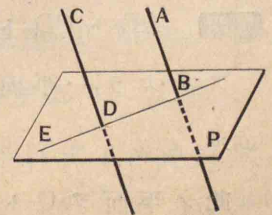
故ニ二平面 P, Q ハ A ヲ通ル唯一ツノ直線ヲ共  
有スル。

定義 二平面ガ一直線ヲ共有スルトキハ、  
其ノ二平面ハ相交ハルトイヒ、其ノ直線ヲ交  
線又ハ交ハリトイフ。

定理二 平行線 (AB, CD) ノ一ツ (AB) ニ交ハル平  
面 (P) ハ他ノ一ツ (CD) ニモ交ハル。

× 證明 直線 AB ト平面 P ト

ノ交點ヲ B トスルト、P ト  
AB, CD ノ決定スル平面 Q



トハ此ノ點 B ヲ共有スル



カラ B ヲ通ル一直線デ交ハル。(定理一)

此ノ交線ヲ BE トスルト, BE ハ AB ニ交ハル  
カラ CD ニモ交ハル。其ノ交點ヲ D トスレバ,  
P ト CD トハ此ノ點 D ヲ共有スル。

次ニ直線 CD 上ノ D デナイ點ハ皆平面 P ノ外  
ニアル。

何故ナレバ, 若シ CD 上ノ他ノ一點例ヘバ C ガ  
P ノ上ニアルトスルナラバ, 一直線 BD ト其ノ  
上ニナイ一點 C トヲ含ム平面トシテ P ト Q ト  
ノ二ツヲ得ルカラデアル。

故ニ平面 P ハ CD ニ交ハル。

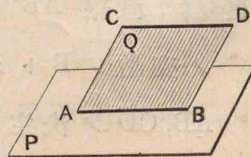
### 90. 直線ト平面トノ平行

**定理三** 平行線 (AB, CD) ノ一ツ (AB) ヲ含ミ, 他ノ一  
ツ (CD) ヲ含マナイ平面 (P) ハ後ノ直線 (CD) ニ交ハラ  
ナイ。

了ル。

**證明** AB ト CD トハ平行デ  
アルカラ, 一平面ヲ決定ス  
ル。

此ノ平面ヲ Q トスルト, 二



平面 P ト Q トノ交線ハ AB デアル。

依ツテ若シ P ガ CD ニ交ハルナラバ, 其ノ交點  
ハ AB ト CD トノ交點デナケレバナラナイ。

然ルニ AB ト CD トハ交ハラナイ。

故ニ直線 CD ハ平面 P ニ交ハラナイ。

**定義** 直線ト平面トガ交ハラナイトキハ,  
此ノ兩者ハ互ニ平行デアルトイフ。

故ニ定理三ハ次ノヤウニ述ベルコトガ出來ル。

**平行線ノ一ツヲ含ミ, 他ノ一ツヲ含マナイ平面ハ  
後ノ直線ニ平行デアル。**

又定理三ハ次ノヤウニ述ベルコトモ出來ル。

**一直線ガ之ヲ含マナイ平面上ノ一直線ニ平行デ  
アレバ, 初メノ直線ハ其ノ平面ニ平行デアル。**

**問 1.** 一直線ト一平面トノ空間ニ於ケル總テノ  
配置ヲ問フ。(第88節注意参照)

**定理四** 一平面 (P) ニ平行ナル一直線 (AB) ヲ含ム  
平面 (Q, R 等) ト其ノ平面 (P) トノ交線 (CD, EF 等) ハ其ノ  
直線 (AB) ニ平行デ且互ニ平行デアル。

**證明** 直線 AB ハ平面 P ニ平行デアアルカラ此ノ  
平面ト交ハラナイ。依ツテ AB ハ P 上ニアル

直線 CD ト交ハラナイ。

ソシテ AB ト CD トハ共

ニ同ジ平面 Q ノ上ニア

ル。

故ニ  $CD \parallel AB$

同様ニ EF, GH 等モ亦 AB ニ平行デア

ル。次ニ CD ト EF トハ平行デア

ル。何故ナレバ、若シサウデナイトスレバ、此ノ兩直

線ハ共ニ平面 P 上ニアルカラ相交ハル。其ノ

交點ヲ K トスレバ、AB ト其ノ上ニナイ一點 K

トヲ含ムニ平面 Q, R ガ出来ルカラデア

ル。同様ニ交線ノ何レノ二ツモ亦平行デア

ル。系一 一直線 (AB) ニ平行ナル平面 (P) 上ノ一點 (C)

ヲ通ツテ此ノ直線ニ平行ナル直線 (CD) ヲ引クトキ

ハ、其ノ直線ハ全ク此ノ平面 (P) 上ニアル。

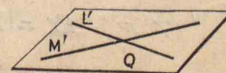
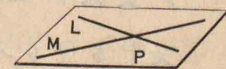
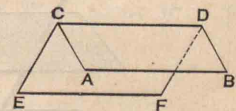
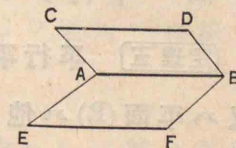
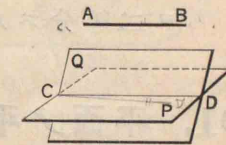
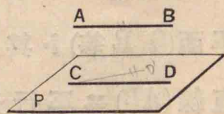
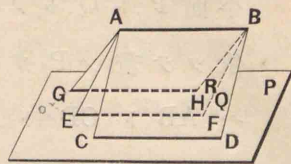
(何故ナレバ AB ト C トノ決定スル

平面ト P トノ交線ヲ CD トスルト、

CD ガ C ヲ通ツテ AB ニ平行ナル

直線デア

ル。系二 同ジ直線 (AB) ニ平行ナル二平面 (P, Q) ノ



交線 (CD) ハ其ノ直線 (AB) ニ平行デア

ル。(何故ナレバ CD 上ノ一點 C ヲ通ツテ AB ニ平行ナル直線

ヲ引クト、此ノ直線ハ平面 P 上ニア

リ、又平面 Q 上ニアル(系一)。故ニ此

ノ直線ガ即チ CD デアルカラデア

ル)

系三 平行線 (CD, EF) ヲ一ツツ含ムニツノ平

面ノ交線 (AB) ハ此ノ平行線 (CD,

EF) ノ各々ニ平行デア

ル。系四 同ジ直線 (AB) ニ平行ナ

ル二直線 (CD, EF) ハ互ニ平行デア

ル。(何故ナレバ AB ト CD トノ決定スル平面ト、EF ト CD 上ノ

一點 C トノ決定スル平面トノ交線

ハ AB ニ平行デア

ルカラ、即チ CD デ

アル。ソシテ此ノ交線ハ又 EF ニ

モ平行デア

ル(系三)カラデア

系五 相交線 (L, M) ガ夫々此等ト同ジ平面上ニ

ナイ他ノ相交線 (L', M') ニ平行デ

アレバ、此ノ二組ノ相交線ノ決定

スル平面 (P, Q) ハ交ハラナイ。

(歸膠法)

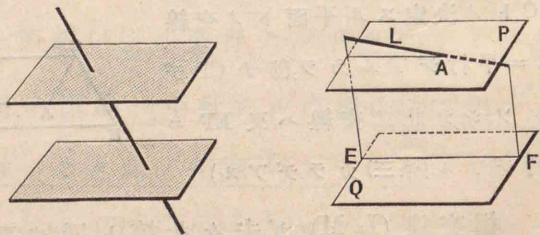
**問 2.** 折面四邊形(四頂點ガ悉クハ同ジ平面上ニ  
ナイモノ)ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二直線ハ互ニ他  
ヲ二等分スル。

### 91. 平面ノ平行

**定義** 二平面ガ交ハラナイトキハ、此ノ二  
平面ハ平行デアルトイフ。

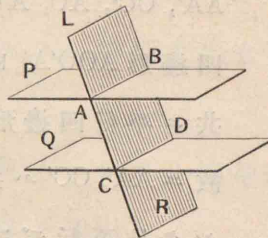
**定理五** 平行平面(P, Q)ノ一ツ(P)ニ交ハル直線(L)  
又ハ平面(R)ハ他ノ一ツ(Q)ニモ交ハル。

**證明** [1] 假ニ直線Lガ平面Qニ交ハラナイト  
シ、LトQ上ノ任意ノ點Eトヲ含ム平面トQト



ノ交線ヲ EF トスルト、Lハ EF ニ平行デア  
ル。又 PトQトハ平行デアルカラ EFハPニ平行デ  
アル。故ニLハ全クPニ含マレル。(定理四系一)  
コレハ假設ニ戻ル。故ニLハ平面Qニ交ハル。

[2] 二平面PトRトノ交線ヲ AB トシ、Rノ  
上ニ於テ AB 上ノ任意ノ  
點Aヲ通ツテ ABニ交ハ  
ル直線Lヲ引クト、LハP  
ニ交ハルカラ又平面Qニ  
モ交ハル。(上ノ[1])



ソシテ其ノ交點Cハ二平面RトQトノ上ニア  
ル。故ニ二平面RトQトハCヲ通ル一直線デ  
交ハル。

**定理六** 一平面ガ平行平面ニ交ハレバ、其ノ交線  
ハ平行デアル。

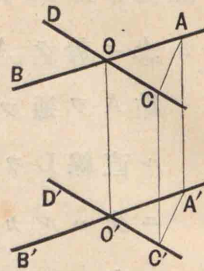
(學生之ヲ證明セヨ)

**問** 平行平面ガ他ノ平行平面ニ交ハレバ、其ノ四  
ツノ交線ハ互ニ平行デアル。

**定理七** 一組ノ相交線(AOB, COD)ガ夫々他ノ一  
組ノ相交線(A'O'B', C'O'D')ニ平行デアルトキハ、其ノ  
夾角ハ相等シイカ、又ハ互ニ補角デアル。

**證明** O及ビO'カラAB及ビA'B'ノ上ニ、CDト  
C'D'トノ決定スル平面ノ同ジ側ニ、OAニO'A'ナ  
ルヤウニA'及ビA'ヲ取り、同様ニCD及ビC'D'

ノ上ニC及ビC'ヲ取り、OO',  
AA', CC', AC, A'C'ヲ結ブト、  
四邊形AOO'A'トCOO'C'トハ  
共ニ平行四邊形デアアル。  
故ニAA', CC'ハ共ニOO'ニ等  
シク且平行デアアル。



從ツテ四邊形AA'C'Cハ平行四邊形デアアル。

依ツテ  $AC=A'C'$

故ニ  $\triangle AOC \equiv \triangle A'O'C'$

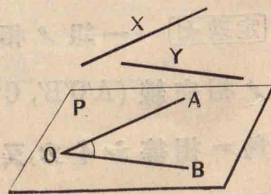
故ニ  $\angle AOC = \angle A'O'C'$

同様ニ  $\angle AOD$  ト  $\angle A'O'D'$  ナドモ相等シイ。

又  $\angle AOC$  ト  $\angle B'O'C'$  ナドハ互ニ補角デアアル。

**定義** 同ジ平面上ニナイ二直線ノナス角

トハ任意ノ一點カラ其  
ノ直線ノ各ニ平行ニ引  
イタ二直線ノ夾角ヲイ  
フ。



若シ其ノ夾角ガ直角デアルトキハ、其ノ二直線ハ  
互ニ垂直デアルトイフ。

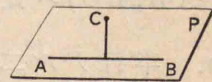
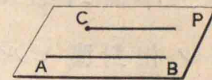
一定、証明  
1. 特別、場合ヲモフ  
2. 任意、ニ、場合  
合、ヲ、モフ、証明

### 問題 11

1. 三平面ハドンナ配置ニアルカ。特別ナ場合ヲモ舉ゲヨ。
2. 與ヘラレタ一點ヲ通ツテ與ヘラレタ一直線ニ平行ナル直線ト垂直ナル直線トヲ引ケ。

**注意** 本問題ハ立體幾何學ニ於ケル作圖題デアアル。

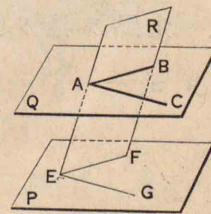
立體幾何學ニ於ケル作圖題ノ解法ハ其ノ正確ナ圖形ヲ畫クコトハ出來ナイカラ、次ノ方法ニヨツ



テ解答トナル圖形ノ位置ノ決定法ヲ論定スレバヨイ。

- [1] 第88節ニヨツテ平面ヲ作ルコト。
- [2] 既ニ位置ヲ定メタ平面上ニ於テ平面幾何學デ定メタ作圖ヲナスコト。

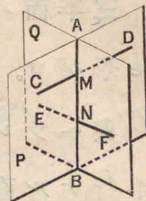
3. 一定點ヲ通ツテ一定平面ニ平行ナル直線ヲ引ケ。又平行ナル平面ヲ作レ。
4. 同ジ點ヲ通ツテ同ジ平面ニ



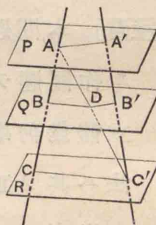
平行ナル直線ヲ引ケバ、其等ノ直線ハ皆其ノ點ヲ通ツテ此ノ平面ニ平行ナル平面上ニアル。

5. 與ヘラレタ一直線ヲ通り、此ノ直線ト同ジ平面上ニナイ與ヘラレタ直線ニ平行ナル平面ヲ作レ。

6. 一定點 A ヲ通ツテ同ジ平面上ニナイ二定直線 CD, EF ニ交ハル直線ヲ引ケ。



7. 二直線 ABC, A'B'C' ガ平行ナル三平面 P, Q, R ニ交ハルトキハ、其ノ相對應セル部分 (AB, BC 及ビ A'B', B'C') ハ比例ヲナス。



8. 平行ナル二平面間ニ夾マレル

線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。又此ノ線分ヲ定比ニ分ケル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 立體幾何學デハ點ノ軌跡ガ面デアアルコトガアル。又點ノ軌跡ノ外ニ線ノ軌跡モアル。

9. 定點ヲ通り定平面ニ平行ナル直線ノ軌跡ヲ求メヨ。

### 第二章 垂線

#### 92. 垂線・斜線

定理八 相交線 (OC, OD) ノ各ニ垂直ナル直線 (OA) ハ、此ノ二直線ノ決定スル平面上ニアツテ、其ノ交點 (O) ヲ通ル任意ノ直線 (OE) ニ垂直デアアル。

證明 OC, OE, OD = 夫々 C, E, D デ交ハル任意ノ直線ヲ引キ、又 AO ヲ B マデ延長シテ、OB=OA ナラシメ、二點 A, B ヲ各、三點 C, E, D ニ結ブト、OC, OD ハ共ニ AB ノ垂直二等分線デアアル。

故ニ AC=BC

及ビ AD=BD

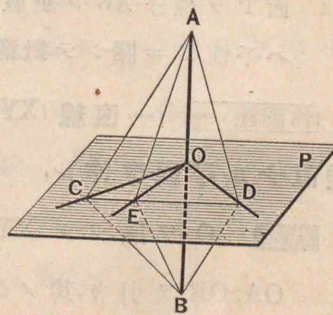
故ニ  $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$

故ニ  $\angle ACD = \angle BCD$

故ニ  $\triangle ACE \equiv \triangle BCE$

故ニ AE=BE

故ニ  $OA \perp OE$



系 一平面ニ交ハル直線ガ、其ノ交點ヲ通ル其ノ平面上ノ二直線ノ各ニ垂直デアレバ、其ノ直線ハ其ノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直デアアル。

系ニ 直線 AB が相交ニ直線 OC, OD, 各ニ垂直ナラバ AB ハ平面 (OC, OD) 上ノ總テノ直線ニ垂直デアアル

一直線ト一平面トガ垂直ナラバ、コノ直線ハ、一平面上ノズベテ、  
直線ト垂直デアル。

**定義** 平面ニ交ハル直線ガ、其ノ交點ヲ通ル此ノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直デアレバ、此ノ直線ヲ其ノ平面ノ垂線トイヒ、此ノ直線ト其ノ平面トハ互ニ垂直デアルトイフ。

又平面ニ交ハツテ垂直デナイ直線ヲ其ノ平面ノ斜線トイフ。

垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲ其ノ垂線又ハ斜線ノ足トイフ。

**注意** 前頁ノ圖デ、直線 AB ト平面 P トハ互ニ直交スルトモイヒ、斜線ト平面トハ互ニ斜交スルトイフ。又平面 P ヲ線分 AB ノ垂直二等分面トイフ。又二點 A, B ハ平面 P ニ關シテ對稱デアルトイフ。

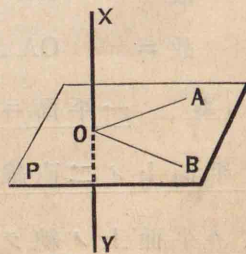
**作圖題一** 一直線 (XY) 上ノ一點 (O) ヲ通ツテ、之ニ垂直ナル平面ヲ作レ。

**作圖** O ヲ通ツテ XY ニ垂直ナル任意ノ二直線 OA, OB ヲ引キ、其ノ二直線ノ決定スル平面 P ヲ作レ。

P ハ求メル平面デアアル。

**證明** (學生之ヲナセ)

**吟味** 若シ O ヲ通ツテ XY ニ



XYLAO }  
XYLB O }  
∴ XY ⊥ P

垂直ナル平面ガ P ノ外ニアルナラバ、之ヲ Q トシテ XY ヲ含ミ P, Q ノ交線ヲ含マナイ任意ノ平面 R ヲ作ルト、R ト P, Q トノ交線ハ共ニ R 上ニアツテ O ヲ通り XY ニ垂直デアアル。之ハ不合理デアアル。

依ツテ求メル平面ハ唯一ツニ限ル。 (定理)

**系一** 一直線上ノ一點ヲ通ツテ之ニ垂直ナル直線ハ、皆此ノ點ヲ通ツテ此ノ直線ニ垂直ナル平面上ニアアル。

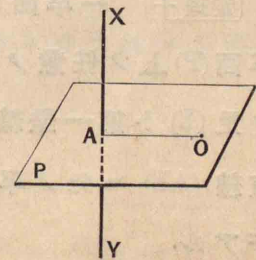
**系二** 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ、其ノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分面デアアル。

**作圖題二** 一直線 (XY) 上ニナイ一點 (O) ヲ通ツテ之ニ垂直ナル平面ヲ作レ。

**作圖** O カラ XY ニ垂線 OA ヲ引キ、其ノ足 A ヲ通ツテ XY ニ垂直ナル平面ヲ作レバ之ガ求メル平面デアアル。

**證明** (學生之ヲナセ)

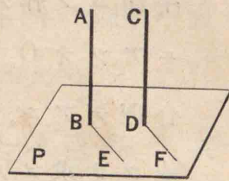
**吟味** 求メル平面ハ唯一ツシカナイ。



【定理九】 平行線 (AB, CD) ノーツ (AB) ニ垂直ナル平面 (P) ハ他ノーツ (CD) ニモ垂直デアル。

【證明】 二直線 AB, CD ハ平行デ、

平面 P ハ AB ニ交ハルカラ CD ニモ交ハル(定理二)。其ノ交點ヲ D トスル。



D ヲ通ツテ P 上ニ任意ノ直線 DF ヲ引キ、B カラ DF ニ平行ニ BE ヲ引クト、 $\angle CDF$  ハ  $\angle ABE$  ニ等シイカ又ハ補角デアル。(定理七)

ツシテ  $\angle ABE$  ハ直角デアル。(假設)

故ニ  $\angle CDF$  ハ直角デアル。

故ニ平面 P ハ CD ニ垂直デアル。

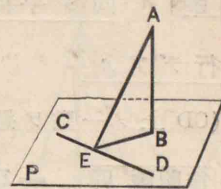
### 93. 三垂線ノ定理

【定理十】 一平面 (P) ノ垂線 (AB) ノ足 (B) カラ此ノ平面 (P) 上ノ任意ノ直線 (CD) へ垂線 (BE) ヲ引ケバ、其ノ足 (E) ト第一垂線 (AB) 上ノ任意ノ點 (A) トヲ結ブ直線 (AE) ハ此ノ平面 (P) 上ノ其ノ直線 (CD) ニ垂直デアル。(三垂線ノ定理)

【證明】 CD ハ相交ハル二直線 AB, BE ノ各ニ垂直

デアルカラ、平面 ABE ニ垂直デアル。

從ツテ平面 ABE 上ノ直線 AE ハ CD ニ垂直デアル。



AB ⊥ P  
CD ⊥ BE  
∴ AB ⊥ CD  
∴ AE ⊥ CD

【系一】 一平面 (P) 外ノ一點 (A) カラ此ノ平面 (P)

及ビ其ノ上ノ任意ノ直線 (CD) へ夫々垂線 (AB, AE) ヲ引クト、其ノ足ヲ結ブ直線 (BE) ハ其ノ直線 (CD) ニ垂直デアル。

CD ⊥ AE (仮定)  
∴ AB ⊥ P  
CD ⊥ P 上ノ直線  
∴ AB ⊥ CD  
∴ BE ⊥ CD

【系二】 一平面 (P) 外ノ一點 (A) カラ此ノ平面 (P) 上

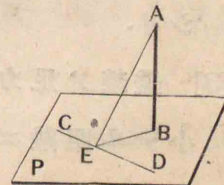
ノ任意ノ直線 (CD) ニ垂線 (AE) ヲ引キ、其ノ足 (E) カラ其ノ平面 (P) 上ニ其ノ直線 (CD) ニ垂線 (BE) ヲ引キ、之ニ初メノ點 (A) カラ垂線 (AB) ヲ引クト、其ノ垂線 (AB) ハ平面 (P) ニ垂直デアル。

AB ⊥ BE (仮定)  
AE ⊥ CD  
BE ⊥ CD  
∴ AB ⊥ CD  
∴ BE ⊥ CD  
∴ AB ⊥ P

【作圖題三】 一平面 (P) 外ノ一點 (A) カラ此ノ平面 へ垂線ヲ引ケ。

【作圖】 (上ノ系二ニヨレ)

【吟味】 求メル垂線ハ唯一ツニ限ル。



系 同ジ平面(P)ニ垂直ナル二直線(AB, CD)ハ  
平行デアル。

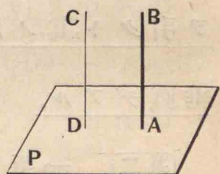
(CD 上ノ一點ヲ通り ABニ平行ナル直線ハ CDニ合スル)

作圖題四 一平面(P)上ノ一點(A)ヲ通ツテ、此ノ  
平面ヘ垂線ヲ引ケ。

作圖 ① 平面P外ニ任意ノ點Cヲ取ツテ、Cカラ

此ノ平面Pヘ垂線CDヲ引  
ク。 (作圖題三)

② AカラCDニ平行ニAB  
ヲ引ク。



ABハ求メル垂線デアル。

吟味 求メル垂線ハ唯一ツシカナイ。

定理十一 一平面(P)外ノ一點(M)カラ此ノ平面  
ヘ垂線ト斜線トヲ引クト、

- [1] 垂線ハ總テノ斜線ヨリモ小デアル。
- [2] 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲ有スル斜線ハ相等  
シイ。
- [3] 垂線ノ足カラ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ、  
小ナル距離ニ足ヲ有スルモノヨリモ大デアル。  
MOヲ平面Pノ垂線トシ、MA, MB, MC等ヲ其ノ斜

線トスレバ、

[1] MOハMA, MB等ヨリ

モ小デアル。

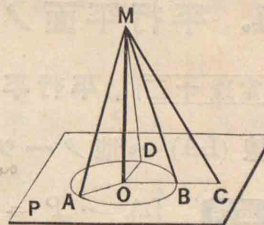
[2] OB=OA ナラバ

MB=MA デアル。

[3] OC>OA ナラバ

MC>MA デアル。

(學生之ヲ證明セヨ)



系一 此ノ定理ノ逆モ真デアル。

(轉換法)

問1. 一平面外ノ一點カラ此ノ平面ヘ垂線ト斜  
線トヲ引クトキハ、相等シイ斜線ハ垂線ト等角  
ヲナシ、大ナル斜線ハ小ナル斜線ヨリモ垂線ト  
大ナル角ヲナス。又此ノ逆モ真デアル。

問2. 一點カラ一平面ニ至ル定長ノ斜線ノ足ノ  
軌跡ハ一ツノ圓周デアル。

系二 一直線上ニナイ三定點カラ等距離ニアル  
點ノ軌跡ハ、此ノ三點ヲ通ル圓ノ中心ヲ通ツテ此ノ  
圓ノ平面ニ垂直ナル直線デアル。

定義 一點カラ一平面ヘ引イタ垂線ノ長  
サヲ其ノ點ト平面トノ距離トイフ。



### 94. 平行平面ノ共通垂線

**定理十二** 平行平面 (P, Q) ノ一ツ (P) ニ垂直ナル直線 (LA) ハ他ノ一ツ (Q) ニモ垂直デアル。

**證明** LA ハ P ニ交ハルカラ, Q ニモ交ハル。其

ノ交點ヲ夫々 A, B トスル。

B 點カラ Q 上ニ任意ノ直線

BD ヲ引キ, BD, BL ノ決定ス

ル平面ト P トノ交線ヲ AC

トスルト, BD ハ AC ニ平行

デアル。

(定理六)

然ルニ LA ハ AC ニ垂直デアル。

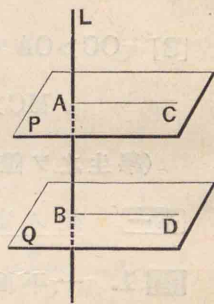
故ニ LB ハ BD ニ垂直デアル。

從ツテ LA ハ Q ニ垂直デアル。

**注意** 此ノ定理ニヨツテ平行二平面ハ共通垂線ヲ有スルトイフ。

**系** 平行平面ノ間ニアル共通垂線ノ部分ハ皆等シイ。

**定義** 平行平面ノ間ニアル共通垂線ノ部分ノ長サヲ其ノ平行平面ノ距離トイフ。



**定理十三** 同ジ直線 (AB) ニ垂直ナル二平面 (P, Q) ハ互ニ平行デアル。

**證明** AB ヲ含ム任意ノ二平面ト P トノ交線ヲ

夫々 AC 及ビ AE トシ, Q ト

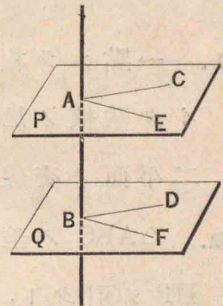
ノ交線ヲ夫々 BD 及ビ BF ト

スルト,

$$AC \parallel BD, AE \parallel BF$$

故ニ P, Q ハ平行デアル。

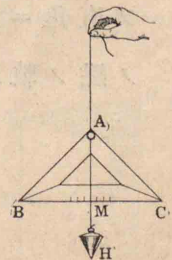
(定理四系五)



### 95. 鉛直線・水平面

錘ヲ吊シタトキノ絲ノ方向ヲ鉛直線トイヒ, 鉛直線ニ垂直ナル平面ヲ水平面トイフ。ソシテ水平面上ニアル直線ヲ水平線トイヒ, 二ツノ水平線ノ夾ム角ヲ水平角トイフ。

**問1.** 右ノ圖ニ示スヤウナ装置デ水平線 (BC) ヲ求メルコトガ出來ル。其ノ装置ヲ工夫セヨ。



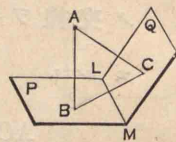
**問2.** 水準器デ或面ガ水平面デア

ルカドウカラ知ルニハ, 水準器ヲ其ノ面上デニ

ツノ異ナル方向ニ置イテ見ルコトガ必要デ且十分デアルコトヲ證明セヨ。

### 問題 12

1. 一點カラ相交ハルニ平面ヘ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ其ノ二平面ノ交線ニ垂直デアル。

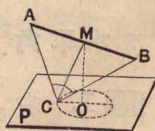


2.  $\triangle ABC$  ノ垂心 H ヲ通ツテ  $\triangle ABC$  ノ平面ヘ垂線 HP ヲ引クト, AP ト BC トハ垂直デアル。

3. 平行四邊形ノ一對角線ヲ通ル平面ハ他ノ對角線ノ兩端カラ等距離ニアル。

4. 與ヘラレタ一直線ヲ通り且與ヘラレタ二點カラ等距離ニアル平面ヲ作レ。

5. 一平面外ニ與ヘラレタ一直線ヲ直角ニ見ルヤウナ此ノ平面上ノ點ノ軌跡ハ一ツノ圓周デアル。

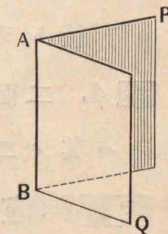


## 第三章 二面角及ビ多面角

### 96. 二面角

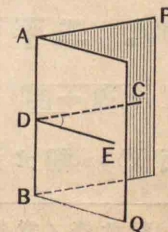
**定義** 同ジ直線デ終ルニ平面ヨリ成ル圖形ヲ二面角トイヒ,其ノ直線ヲ二面角ノ稜,其ノ二平面ヲ二面角ノ面トイフ。

例ヘバニ平面 ABP, ABQ ガ共ニ直線 AB デ終ルト考ヘルト,此ノ二平面ハ二面角ヲ作ル。之ヲ二面角 PABQ 又ハ二面角 AB ト記ス。



今此ノ二面角ノ稜 AB ヲ含ム一平面ガ面 ABP ノ位置カラ稜ヲ軸トシテ廻轉シ,角内ヲ周ツテ他ノ面 ABQ ニ重ナツタトキハ,此ノ平面ハ此ノ二面角ヲ畫ク又ハ此ノ二面角ダケ廻轉シタトイフ。ソシテ二面角ノ大小ハ此ノ廻轉ノ量デワカル。

二面角ノ各ノ面ノ上ニ其ノ稜ノ上ノ任意ノ一點カラ夫々稜ニ垂線ヲ引イテ出來ル角ハ其ノ頂點ノ位置ニ關ハラズ大サガ一定デアル。



此ノ角ヲ二面角ノ平面角トイヒ、此ノ平面角ノ大サヲ其ノ二面角ノ大サトスル。

平面角ノ相等シイ二面角ハ相等シイ。

- 問 1. 對稜二面角<sup>\*</sup>ハ相等シイ。
- 問 2. 一平面ガ平行平面ニ交ハルトキ出來ル二組ノ錯二面角<sup>\*</sup>及ビ四組ノ同位二面角<sup>\*</sup>ハ夫々相等シイ。
- 問 3. 二面角ノ大サヲ表ハス平面角ノ二等分線ト稜トヲ含ム平面ハ其ノ二面角ヲ二等分スル。
- 問 4. 二面角ノ二面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ其ノ二面角ノ二等分面デアアル。

**定義** 直二面角トハ其ノ平面角ガ直角デアアル二面角ヲイフ。

二平面ノナス二面角ガ直二面角デアレバ、其ノ二平面ハ互ニ垂直デアアルトイフ。

## 97. 二平面ノ垂直

- 定理十四 一平面(Q)ノ垂線(CD)ヲ含ム任意ノ平面(P)ハ、初メノ平面(Q)ニ垂直デアアル。

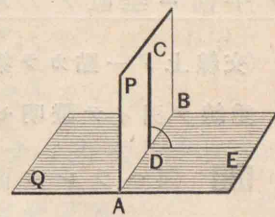
\* 此等ノ意義ハ別ニ定義ヲ掲ゲナクトモ明ラカデアラウ。

**證明** P, Q ノ交線 AB ハ D ヲ通ル。今 Q 上ニ D

カラ AB ニ垂線 DE ヲ引クト、CD ガ Q ニ垂直デアアルカラ  $\angle CDE$  ハ直角デアアル。

ソシテ  $\angle CDE$  ハ二平面 P,

Q ノナス二面角ノ平面角デアアル。



故ニ P ハ Q ニ垂直デアアル。

**注意** 鉛直線ヲ含ム平面ハ水平面ニ垂直デアアル。此ノ平面ヲ直立面又ハ鉛直面トイフ。

**定理十五** 二平面 (P, Q) ガ互ニ垂直デアレバ、其ノ一ツ(P)ノ上ニアツテ其ノ交線 (AB) ニ垂直ナル直線 (CD) ハ他ノ一ツ (Q) ニ垂直デアアル。

**證明** 上ノ圖ニ於テ、Q 上ニ D ヲ通ル AB ノ垂線

DE ヲ引クト、 $\angle CDE$  ハ直角デアアル。(假設)

故ニ CD ハ AB ト DE トニ垂直デアアル。

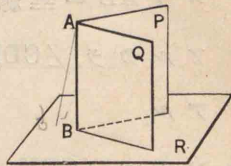
從ツテ CD ハ Q ニ垂直デアアル。

**系一** 二平面ガ互ニ垂直デアレバ、其ノ一ツノ上ノ一ノ點カラ他ノ一ツヘ引イタ垂線ハ全ク初メノ平面上ニアアル。

系二 相交ハル二平面ガ共ニ第三ノ平面ニ垂直

デアレバ、其ノ交線ハ此ノ第三ノ平面ニ垂直デアアル。

(交線上ノ一點カラ第三ノ平面ヘ垂線ヲ引イテ證明セヨ)  $AB \perp PQ$

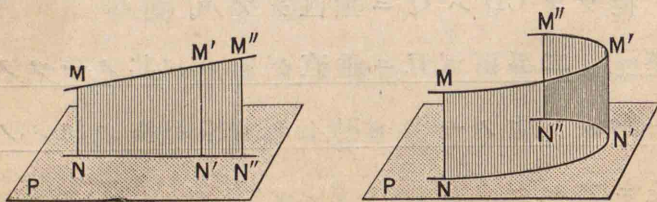


問 與ヘラレタ直線ヲ含ミ且與ヘラレタ平面ニ垂直デアアル平面ヲ作レ。

### 98. 正射影

定義 一點カラ一平面ヘ引イタ垂線ノ足ヲ此ノ平面上ニ投ジタ其ノ點ノ正射影トイフ。

又一平面上ニ投ジタ線ノ正射影トハ此ノ平面上ニ投ジタ其ノ線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ヲイフ。



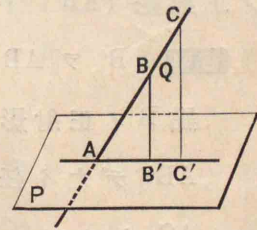
前ノ圖デ、Pヲ平面、 $MM'M''$ ヲ任意ノ線トシ、點Mガ此ノ線上ヲ運動スルモフト考ヘルト、P上ニ投ジタ此ノ點ノ正射影ハ線  $NN'N''$ ヲ畫ク。之ガP上ニ投ジタ線  $MM'M''$ ノ正射影デアアル。

注意 正射影ヲ單ニ射影トイフコトガアル。

定理十六 平面(P)ニ直交シナイ直線(ABC)ノ、此ノ平面上ニ投ジタ正射影ハ直線デアアル。

證明 ABC上ノ任意ノ點B

カラPニ垂線  $BB'$ ヲ引キ、  
ABCト  $BB'$ トノ決定スル  
平面QトPトノ交線ヲ  
 $AB'C'$ トスルト、QハPニ  
垂直デアアル。



(定理十四)

故ニABC上ノ總テノ點カラPヘ引イタ垂線及ビ  $AB'C'$ 上ノ總テノ點カラPヘ引イタ垂線ハ皆Q上ニアル。

(定理十五系一)

故ニABC上ノ總テノ點ノ正射影ハ  $AB'C'$ 上ニアル。ソシテ又  $AB'C'$ 上ノ總テノ點ハABC上ノ點ノ正射影デアアル。

故ニ直線ABCノ正射影ハ直線  $AB'C'$ デアアル。

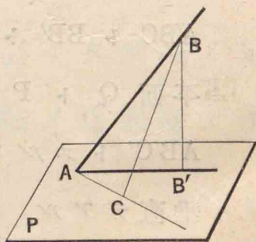
(平面Pニ直交シナイ直線ABC、此平面上ニ投ジタ正射影ハ  $AB'C'$ ヲ含ミ、Pニ垂直ナ平面QトPトノ交線デアアル)

**問 1.** 直線ガ平面ニ垂直デアレバ其ノ射影ハ點  
 デ、直線ガ平面ニ平行デアレバ其ノ射影ハ之ニ  
 平行ナル直線デアル。逆モ真デアル。

**問 2.** 相等シク且平行ナル二線分ガ同ジ平面上  
 ニ投ジタ射影ハ相等シク且平行デアル。

**定理十七** 平面(P)ノ斜線(AB)ガ、此ノ平面上ニ  
 アツテ其ノ足(A)ヲ通ル諸直線トナス角ノ中デ、其  
 ノ正射影(AB')トナス銳角ガ最小デアル。

**證明** B'ヲAB上ノ任意ノ  
 點Bノ正射影トシ、P上ノ  
 AB'デナイ任意ノ直線ヲ  
 ACトスル。  
 今 ACヲAB'ニ等シク取  
 レバ、 $\triangle BAB'$ ト $\triangle BAC$ ト  
 ニ於テ、ABハ共通、 $AB'=AC$ 且 $BB'<BC$ デアル。  
 故ニ  $\angle BAB'<\angle BAC$

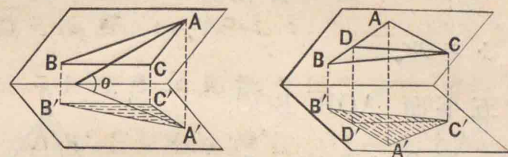


**99. 直線ト平面トノナス角**

**定義** 直線ト平面トノナス角トハ其ノ直  
 線ト其ノ正射影トノナス銳角ヲイフ。

**問 1.** 平面ト $\angle\alpha$ ヲナス線分 $a$ ガ其ノ平面上ニ  
 投ジタ正射影ノ長サハ $a\cos\alpha$ デアル。

**問 2.**  $\triangle ABC$ ガ其ノ平面ト $\angle\theta$ ヲナス平面上ニ  
 投ジタ正射影ノ面積ハ $\triangle ABC$ ノ面積 $=\cos\theta$   
 ヲ掛ケタモノデアル。



又面積Pナル多角形デアルト、其ノ正射影ノ面  
 積ハ $P\cos\theta$ デアル。

**問 3.** 一ツノ丘ガアツテ、其ノ麓カラ頂上マデ直  
 線状ヲナス坂道ノ長サガ1050mデ、頂上カラ麓  
 ヲ望ム俯角ハ $30^\circ$ デアル。此ノ丘ノ高サヲ求  
 メヨ。

**注意** 或點ヲ觀測スルトキ、其ノ視線ト眼ヲ通ル水平面  
 トノ角ヲ其ノ點ガ水平面ヨリモ高イトキハ仰角又ハ  
 高度トイヒ、水平面ヨリモ低イトキハ俯角トイフコト  
 ハ既ニ知ツテキル。

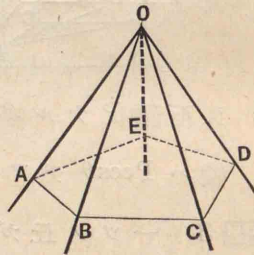
**問 4.** 二本ノ木ガ同ジ水平面ニ直立スル。此ノ  
 水平面ノ上デ此ノ二本ノ木ノ頂ヲ視ル仰角ガ  
 相等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

### 100. 多面角

**定義** 一點ヲ共有シ且ニツツツ順次ニ交ハル三ツ以上ノ平面ヨリ成ル圖形ヲ**多面角**トイフ。  
(立体角)

多面角ヲ作ル平面ハ皆相隣レル二平面ノ交線デ終ルモノトスル。

例ヘバ五平面 AOB, BOC, COD 等ガ一點 O ヲ共有シテ, 直線 OA, OB, OC 等デ交ハルトキハ, 五平面ノ多面角(之ヲ O-ABCDE ト記ス)ガ出來ル。



O ヲ多面角ノ**頂點**トイヒ, 各平面ヲ其ノ**面**, 交線 OA, OB, OC 等ヲ其ノ**稜**, 相隣レル稜ノ夾ム角 AOB, BOC, COD 等ヲ其ノ**面角**トイフ, 又相隣レル二面ノナス二面角ヲ其ノ**稜角**トイフ。

多面角ハ其ノ面數ニヨツテ**三面角, 四面角, 五面角**等ニ區別スル。

多面角ノ總テノ稜ヲ一平面デ截レバ, 此ノ平面ト其ノ多面角ノ各面トノ交線デーツノ多角形ガ出來ル。之ヲ多面角ノ**截面**又ハ**底面**トイフ。

截面ガ凸多角形デアル多面角ヲ**凸多面角**トイフ。

**定理十八** 三面角ノ各面角ハ他ノ二ツノ面角ノ和ヨリモ小デアル。

**證明** 三面角 O-ABC ニ於テ  $\angle AOC$  ヲ最大ナ面角トスル。

二稜 OA, OC ト A, C

デ交ハル任意ノ直線

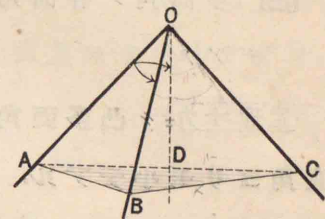
AC ヲ引キ,  $\angle AOC$  ノ内

ニ OA ト  $\angle AOB$  ニ等

シイ角ヲ作ル直線 OD ヲ引イテ, AC トノ交點

ヲ D トシ, 稜 OB 上ニ OD ニ等シク OB ヲ取リ,

AB, BC ヲ結ブト



$$\triangle AOB \cong \triangle AOD$$

故ニ  $AB = AD$

然ルニ  $\triangle ABC$  ニ於テ

$$AC < AB + BC$$

故ニ  $DC < BC$

依ツテ  $\triangle ODC$  ト  $\triangle OBC$  トカラ

$$\angle DOC < \angle BOC$$

兩邊ニ夫々等角 AOD, AOB ヲ加ヘルト

$\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$

ソシテ  $\angle AOB < \angle AOC + \angle BOC$

及ビ  $\angle BOC < \angle AOC + \angle AOB$

面ハ勿論デアル。

問 多面角ノ各面角ハ残りノ面角ノ和ヨリモ小デアル。

定理十九 凸多面角(O-ABC.....)ノ面角ノ和ハ4直角ヨリモ小デアル。

證明 任意ノ截面 ABC.....ヲ作り其ノ内ノ任意ノ點 Pヲ截面ノ各頂點ニ結ブト、截面上ニ出來ル三角形ノ數ハ、Oヲ共通

ノ頂點トシ截面ノ各邊ヲ

底トスル、多面角ノ各面上

ノ三角形ノ數ニ等シイ。

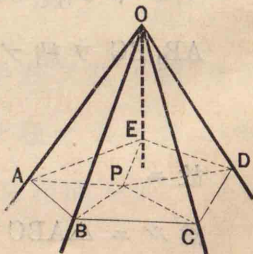
故ニ此ノ二組ノ三角形ノ

内角ノ總和ハ等シイ。

然ルニ  $\angle EAB < \angle OAE + \angle OAB$  (定理十八)

$\angle ABC < \angle OBA + \angle OBC$

$\angle BCD < \angle OCB + \angle OCD$



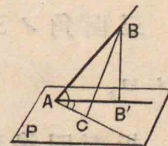
此等ノ不等式ヲ邊々相加ヘルト、Pヲ共通ノ頂點トスル組ノ三角形ノ底角ノ總和ハ、Oヲ共通ノ頂點トスル組ノ三角形ノ底角ノ總和ヨリモ小デアルコトガワカル。

故ニ面角 AOB, BOC, COD,.....ノ和ハ點 Pノ周リニアル角ノ和即チ4直角ヨリモ小デアル。

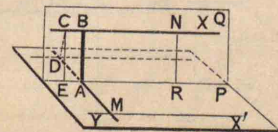
問題 13

1. 一點カラ相交ハル二平面ヘ夫々垂線ヲ引クト、其ノ二ツノ垂線ノ夾角ハ夫々其ノ二平面ノナス二面角ノ平面角ニ等シイ。

2. ABヲ平面 Pノ斜線、Aヲ其ノ足、AB'ヲ其ノ正射影トシ、ACヲAヲ通ルP上ノ任意ノ直線トスルト、 $\angle B'AC$ ガ大キクナルニ從ツテ  $\angle BAC$ ハ大キクナルコトヲ證明セヨ。

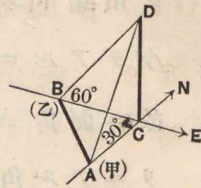


3. 同ジ平面上ニナイ二直線ニ交ハル共通垂線ヲ引ケ。ソシテ其ノ共通垂線ガ此ノ二直線間ヲ結ブ最短線分デアルコトヲ證



明セヨ。

4. 海上デ相距タルコト  $2\text{ km}$  ノ甲乙二艦デ、同時ニ  
或飛行船ノ方位及ビ仰角ヲ測  
ツタラ、甲艦デハ北方ニ仰角  $30^\circ$ 、  
乙艦デハ東方ニ仰角  $60^\circ$  ヲ得  
タ。此ノ飛行船ノ高サヲ求メ  
ヨ。



5. 三面角ノ各稜角ヲ二等分スル三平面ハ同ジ直  
線ヲ通ル。
6. 三面角ノ三面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求  
メヨ。
7. 三面角ノ三稜ト等角ヲナス直線ヲ引ケ。
8. 三面角ノ三稜カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求  
メヨ。
9. 折面四邊形ノ角ノ和ハ4直角ヨリモ小デア  
ル。



第四章 角嚮及ビ角錐

101. 多面體

**定義** 幾ツカノ平面デ圍マレタ立體ヲ多  
面體トイフ。

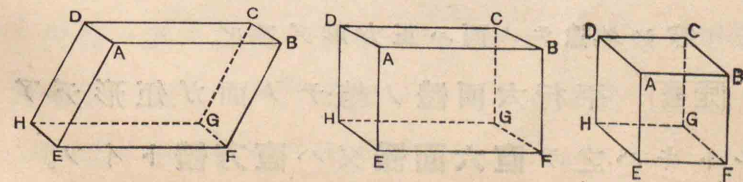
多面體ノ限界ハ多角形デア  
ル。此等ノ多角形ヲ  
多面體ノ面トイヒ、其ノ邊及ビ頂點ヲ夫々多面體ノ  
稜及ビ頂點トイフ。又同ジ面上ニナイニツノ頂點  
ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ對角線トイフ。

多面體ハ少クトモ四面ヲ有  
スル。ソシテ其ノ面  
數ニヨツテ四面體・五面體・六面體等ニ區別スル。

多面體ノ何レノ面ヲ擴ゲル  
モ、其ノ體內ニ入ラナ  
イモノヲ凸多面體トイフ。

本書デハ凸多面體ノミヲ論  
ズル。

**定義** 相對スル面ガ互ニ平  
行デア  
ル六面  
體ヲ平行六面體トイフ。





問1. 平行六面體ハ次ノ性質ヲ有スル。

1 三組ノ對面ハ各、合同ナル平行四邊形デア  
ル。

2 四ツヅツ相等シク且平行デア  
ル12ノ稜ガ  
アル。

3 四ツヅツ相等シイ24ノ面角ガ  
アル。

4 二ツヅツ相等シイ12ノ二面角ガ  
アル。

5 四ツノ對角線ハ其ノ中點デ相  
交ハル。此  
ノ交點ヲ平行六面體ノ中心トイフ。

問2. 平行六面體ノ中心ヲ通リ、且  
兩端ガ其ノ面  
上ニアル線分ハ皆此ノ中心デ二等分  
セラレ  
ル。此ノヤウナ立體ヲ點對稱ヲ有スル  
立體トイヒ、其ノ點ヲ對稱ノ中心ト  
イフ。

問3. 平行六面體ノ一ツノ頂點カラ  
出ル三稜ガ  
互ニ垂直デアレバ、相隣レル面ハ互ニ  
垂直デ、總  
テノ面ハ矩形デア  
ル。又此ノ場合ニ同ジ頂點  
カラ出ル三稜ガ相等シイトキハ總  
テノ稜ハ相  
等シク、總テノ面ハ正方形デア  
ル。

定義 平行六面體ノ總テノ面ガ矩  
形デア  
ルトキハ、之ヲ直六面體又ハ直方體  
トイフ。

又平行六面體ノ總テノ面ガ正方形  
デア  
ルトキハ、之ヲ立方體又ハ單ニ立方  
トイフ。

問4. 直方體ノ稜ハ之ニ交ハル面ニ  
垂直デア  
ル。

問5. 直方體ノ對角線ハ皆相等シイ。  
ソシテ其  
ノ平方ハ一頂點カラ出ル三稜ノ平方  
ノ和ニ等  
シイ。  
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

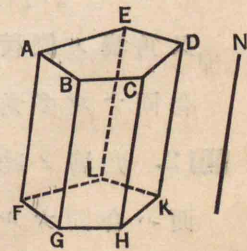
$AC^2 = AA'^2 + A'C'^2$   
 $= AA'^2 + Ad^2 + dc^2$   
 $= AA'^2 + Ad^2 + AB^2$

問6. 立方體ノ面ハ皆合同ナル正  
方形デ、其ノ對  
角線ノ平方ハ一稜ノ平方ノ3倍ニ  
等シイ。  
 $d = \sqrt{3}a$      $d^2 = 3a^2$

### 102. 角嚮

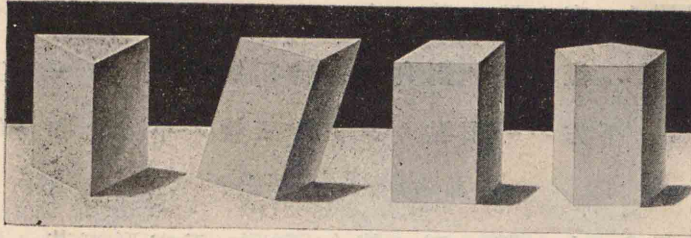
定義 二面ガ平行デ且他ノ面ガ皆  
同ジ直  
線ニ平行デア  
ル多面體ヲ角嚮トイフ。

角嚮ノ平行ナル二面ヲ其ノ  
底面又ハ底トイヒ、他ノ面(同ジ  
直線ニ平行ナル)ヲ其ノ側面ト  
イフ。側面ノ交線ヲ側稜トイ  
ヒ、兩底面ノ距離ヲ高サトイフ。



角嚮ハ其ノ底面ノ邊數ニヨツテ三角嚮・四角嚮・五角嚮等ニ區別スル。上圖ハ五角嚮デ、之ヲ  
ABCDE-FGHL 又ハ ABCDE-F ト記ス。

【定義】 側稜ガ底面ニ垂直デアアル角壘ヲ直角壘トイヒ、サウデナイモノヲ斜角壘トイフ。



【定義】 底面ガ正多角形デアアル直角壘ヲ正角壘トイフ。

角壘ノ總テノ側稜ニ交ハツテ且之ニ垂直デアアル截面ヲ其ノ直截面トイフ。

問1. 角壘ノ側面ハ皆平行四邊形デアアル(直角壘ノ側面ハドウカ)。

又角壘ノ側稜ハ互ニ平行デ且相等シク、兩底ハ合同ナル多角形デアアル。

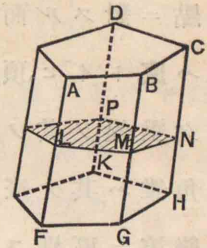
問2. 角壘ノ總テノ側稜ニ交ハルニツノ平行截面ハ合同ナル多角形デアアル。

問3. 側稜ガ  $a$  デ其ノ傾キ(側稜ト底面ノ垂線トノナス角)ガ  $\alpha$  デアル斜角壘ノ高サハ  $a \cos \alpha$  デアル。

略X【定理二十】 角壘ノ側面積ハ其ノ直截面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ。

【證明】  $ABCD \dots \dots FGHK \dots \dots$  ヲ角壘、 $LMNP \dots \dots$  ヲ其ノ直截面トスルト

$\square AG = LM \cdot AF$   
 $\square BH = MN \cdot BG$   
 $\square CK = NP \cdot CH$   
.....



且  $AF = BG = CH = \dots \dots$  デアルカラ  
角壘ノ側面積ハ  $(LM + MN + NP + \dots \dots) AF$  ニ等シイ。

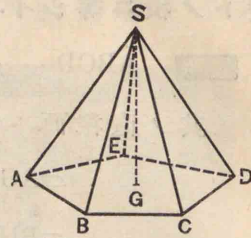
【系】 直角壘ノ側面積ハ其ノ底ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

問4. 底面ノ一邊ガ  $a$  米、高サガ  $h$  米デアアル正六角壘ノ側面積ト全面積トヲ求メヨ。

### 103. 角錐

【定義】 一ツノ多角形ト、其ノ邊ヲ夫々底邊トシ其ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トデ圍ム多面體ヲ角錐トイフ。

同シ頂點ヲ共有スル三角形ノ面ヲ角錐ノ側面、其ノ共通ノ頂點ヲ其ノ頂點、側面ノ交線ヲ其ノ側稜トイフ。又頂點ニ對スル面ヲ角錐ノ底面、又ハ底トイヒ、頂點カラ之ヘ引イタ垂線ヲ其ノ高サトイフ。



角錐ハ其ノ底面ノ邊數ニヨツテ三角錐、四角錐、五角錐等ニ區別スル。上圖ハ五角錐デ、之ヲO-ABCDEト記ス。

**定理二十一** 角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキハ

[1] 側稜及ビ高サハ相似ニ分ケラレル。

[2] 截面ト底面トハ相似デアル。

**證明** S-ABCD……ヲ角錐トシ、A'B'C'D'……ヲ

其ノ底面ニ平行ナル截面ト

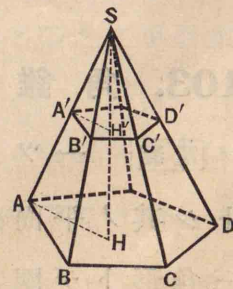
シ、SHヲ角錐ノ高サトシ、截

面トノ交點ヲH'トスル。

[1] A'H'トAHトハ平行

ナル二平面ト平面SAHトノ

交線デアルカラ平行デアル。



故ニ  $\frac{SA'}{A'A} = \frac{SH'}{H'H}$

同様ニ  $\frac{SB'}{B'B}, \frac{SC'}{C'C}$  等モ皆  $\frac{SH'}{H'H}$  ニ等シイ。

故ニ  $\frac{SA'}{A'A} = \frac{SB'}{B'B} = \frac{SC'}{C'C} = \dots = \frac{SH'}{H'H}$

[2] 截面ト底面トノ角ハ其ノ邊ガ夫々平行デ且同ジ方向デアルカラ夫々順ニ相等シイ。又截面ト底面トノ對應邊ノ比ハ明ラカニ SA':SA, SB':SB 等ニ等シイカラ皆等シイ。

故ニ 截面A'B'C'D'……∞底面ABCD……

**系一** 截面ト底面トノ比ハ之カラ頂點マデノ距離ノ比ノ二乗比ニ等シイ。

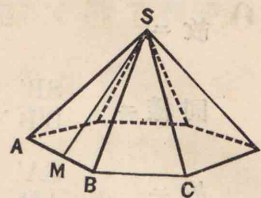
**系二** 等底等高ナル二ツノ角錐ノ各頂點カラ等距離デ底面ニ平行ナル截面ハ等積デアル。

**注意** 前頁ノ下圖ニ於ケル角錐 S-ABCD…、S-A'B'C'D'…ノヤウナモノヲ相似多面體トイフ。相似多面體ノ對應スル稜ノ比ハ皆相等シイ。此ノ比ヲ兩形ノ相似比トイフ。

**定義** 底面ガ正多角形デ、且底面上ニ投ジタ頂點ノ正射影ガ底面ノ中心トナル角錐ヲ正角錐トイフ。

正角錐ノ側面ハ皆合同ナル  
等脚三角形デアル。

頂點カラ底面ノ邊ヘ引イタ  
垂線ヲ其ノ斜高トイフ。



**定理二十二** 正角錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高ト  
ノ積ノ半分ニ等シイ。

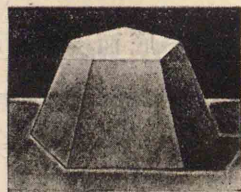
**證明** (學生之ヲ證明セヨ)

**問** 高サガ  $a$  米、底面ノ一邊ガ  $b$  米デアル正六角  
錐ノ側面積ヲ求メヨ。

#### 104. 角錐臺 (平截頭角錐)

**定義** 角錐ノ底面ニ平行ナル截面ト底面  
トノ間ニアル部分ヲ角錐  
臺トイフ。

截面ト底面トヲ共ニ角錐臺  
ノ底面又ハ底トイヒ、其ノ間ノ  
距離ヲ其ノ高サトイフ。



**問** 正角錐臺ノ側面積ハ、其ノ兩底ノ周ノ和ノ半  
分ト斜高(側面デアル梯形ノ高サ)トノ積ニ等シ  
イ。

#### 105. 立體ノ體積

**定義** 立體ガ占メル空間ノ部分ノ大サヲ  
其ノ體積トイフ。

體積ヲ計ルニハ通常單位ノ長サヲ一稜トスル立  
方體ノ體積ヲ以テ單位トスル。

**定理二十三** 等高デ且底面ガ合同デアルニツノ  
直角嚮ハ合同デアル。

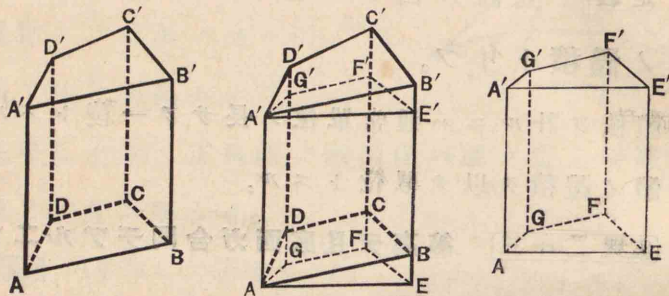
**系** 同ジ頂點カラ出ル三稜ガ夫々相等シイ直  
方體ハ合同デアル。又一稜ガ相等シイ立方體ハ合  
同デアル。

#### 106. 角嚮ノ體積 = 底面積 $\times$ 高サ

**定理二十四** 斜角嚮ハ其ノ直截面ヲ底面トシ其  
ノ側稜ヲ高サトスル直角嚮ト等積デアル。

**證明**  $ABCD-A'B'C'D'$  ヲ斜角嚮トシ、其ノ稜  $AA'$  ノ  
兩端ヲ通り之ニ垂直ナル平面ヲ作ツテ直角嚮  
 $A'EFG-A'E'F'G'$  ヲ作ルト、ニツノ立體  $ABCDEF$   
ト  $A'B'C'D'E'F'G'$  トハ合同デアル。何故ナレバ  
面  $A'EFG$  ト  $A'E'F'G'$  トハ合同デ、且稜  $EB, FC, GD$

ハ夫々  $E'B', F'C', G'D'$  = 等シク何レモ上ノ合同ナル面ニ垂直デアアルカラデアアル。



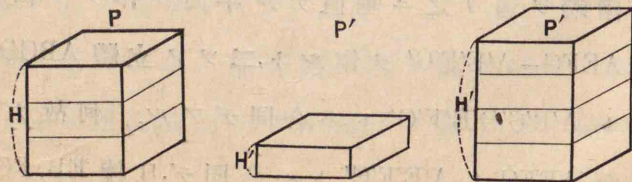
故ニ此ノ立體  $A'B'C'D'E'F'G'$  ト  $ABCDEF$  トノ各、ニ立體  $ABCD A'E'F'G'$  フ加ヘテ出來ル斜角臺  $ABCD-A'B'C'D'$  ト直角臺  $A'EFG-A'E'F'G'$  トハ等積デアアル。

### 107. 直方體ノ體積

**定理二十五** 底面ガ合同デアアルニツノ直方體

$(P, P')$  ノ比ハ其ノ高サ  $(H, H')$  ノ比ニ等シイ。

**證明** [1]  $H = mH'$  ( $m$  ハ 整數) トスル。



此ノ場合ハ  $H$  フ  $m$  等分シテ各分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル截面ヲ作ルト,  $P$  ハ  $P'$  ニ合同デアアル  $m$  箇ノ部分ニ分ケラレル。

故ニ  $P:P' = m:1 = H:H'$

[2]  $H = \frac{n}{m}H'$  ( $m, n$  ハ 整數) トスル。

此ノ場合ハ  $\frac{1}{m}H'$  ニ等シイ長サヲ各、ノ部分トスルヤウニ  $H'$  ト  $H$  トヲ等分スルト,  $H'$  ハ  $m$  等分セラレ,  $H$  ハ  $n$  等分セラレル。ソシテ其ノ各、ノ分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル截面ヲ作ルト,  $P$  ト  $P'$  トハ夫々  $n$  箇ト  $m$  箇トニ等分セラレ, 其ノ各、ノ部分ハ皆合同デアアル。

故ニ  $P:P' = n:m = H:H'$

**系** 二稜ガ夫々相等シイニツノ直方體ノ比ハ

第三稜ノ比ニ等シイ。

**定理二十六** 等高ノニツノ直方體ノ比ハ其ノ底

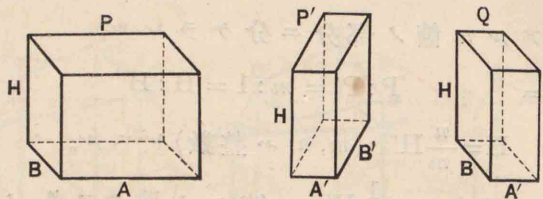
ノ比ニ等シイ。

**證明**  $P$  ト  $P'$  トヲニツノ直方體トシ, 底ノ二邊ヲ夫々  $A, B$  及ビ  $A', B'$ , 高サヲ  $H$  トスル。

今  $A', B, H$  フ三稜トスル直方體ヲ  $Q$  トスルト,

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{A'} \quad \text{及ビ} \quad \frac{Q}{P'} = \frac{B}{B'} \quad (\text{定理二十五系})$$

故ニ  $\frac{P}{P'} = \frac{A}{A'} \times \frac{B}{B'} = \frac{A \cdot B}{A' \cdot B'}$



即チ P ト P' トノ比ハ其ノ底ノ比ニ等シイ。

**系一** ニツノ直方體ノ比ハ其ノ三稜ヲ表ハス數  
值ノ積ノ比ニ等シイ。

**系二** 直方體ノ體積ヲ表ハス數値ハ其ノ三稜ヲ  
表ハス數値ノ積ニ等シイ。從ツテ底面(以下數値ト  
イフ語ヲ略スル)ト高サトノ積ニ等シイ。

**系三** 立方體ノ體積ハ其ノ稜ノ三乘冪ニ等シイ。

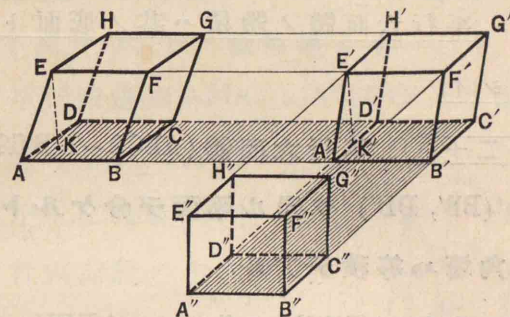
**注意** 數ノ三乘冪ヲ其ノ立方トイフ。

### 108. 平行六面體ノ體積

**定理二十七** 平行六面體 (ABCD-EFGH) ハ之ト等  
底等高ノ直方體ニ等シイ。

**證明** 稜 AB ヲ延長シ其ノ上ニ A'B' ヲ AB ニ等  
シク取り、A' 及ビ B' ヲ通リ AB' ニ垂直ナル平面

ヲ作り、AB ニ平行ナル三ツノ稜ノ延長ト交ハ  
ラシメルト、直四角嚮 A'D'H'E'-B'C'G'F' ヲ得ル。



次ニ此ノ直四角嚮 A'G' ノ稜 D'A' ヲ延長シ、其ノ  
上ニ D''A'' ヲ D'A' ニ等シク取り、A'' 及ビ D'' ヲ  
通リ D'A'' ニ垂直ナル平面ヲ作り、上ノ直四角  
嚮ノ D'A' ニ平行ナル三ツノ稜ノ延長ヲ截ラシ  
メルト、直方體 A''B''C''D''-E''F''G''H'' ヲ得ル。

然ルニ此ノ直方體 A''G'' ト平行六面體 AG トヲ  
見ルニ、兩底 A''C'' ト AC トハ底ト高サトヲ夫々  
等シクスル平行四邊形ト矩形デアルカラ等積  
デアル。且此ノ兩四角嚮ノ高サハ共ニ平行デ  
アル二平面間ノ距離デアルカラ相等シイ。

ソシテ平行六面體 AG ハ直四角嚮 A'G' ニ等積  
シ、且 A'G' ト直方體 A''G'' トハ等積デアル。

故ニ平行六面體 AG ハ之ト等底等高デアアル直  
方體 A''G'' ニ等シイ。

**系** 平行六面體ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ  
積ニ等シイ。

**定理二十八** 平行六面體 (ABCD-A'B'C'D') ヲニツ  
ノ對稜 (BB', DD') ヲ通ル平面デ分ケルト, 出來ルニ  
ツノ三角壙ハ等積デアアル。

**證明** 直截面 EFGH ヲ作ルト,  $\triangle EFH$  ト  $\triangle GHF$  ト

ハ合同デ, 此ノ兩三角形ハ

夫々三角壙 ABD' ト BCD'

トノ直截面デアアル。

故ニ三角壙 ABD' ト BCD'

トハ夫々  $\triangle EFH$  ト  $\triangle GHF$

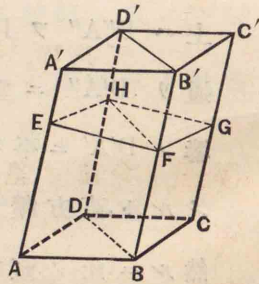
トヲ底面トシ BB' ヲ高サ

トスルニツノ直三角壙ト等積デアアル。ソシテ

此ノ兩直三角壙ハ合同デアアル。

故ニ三角壙 ABD' ト BCD' トハ等積デアアル。

**注意** 三角壙 ABD', BCD' ハ其ノ各面及ビ稜角ガ夫々相  
等シイケレドモ, ABCD-A'B'C'D' ガ直角壙デアアル場合  
ノ外ハ合同デナイ。



### 109. 三角壙ノ體積

**定理二十九** 三角壙 (ABC-A'B'C') ノ體積ハ其ノ底  
面 (ABC) ト高サ (h) トノ積ニ等シイ。

**證明** 平行四邊形 ABDC ト A'B'D'C' トヲ作り, DD'

ヲ結ビテ平行六面體 AD'

ヲ作ルト, 三角壙 ABC' ハ此

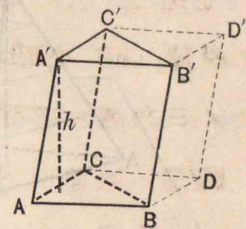
ノ平行六面體ノ半分デア

ル。 (定理二十八)

故ニ

$$\text{三角壙 } ABC' = \frac{\square ABDC \times h}{2} \quad (\text{定理二十七系})$$

$$= \triangle ABC \times h$$



**系一** 角壙ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ニ等  
シイ。

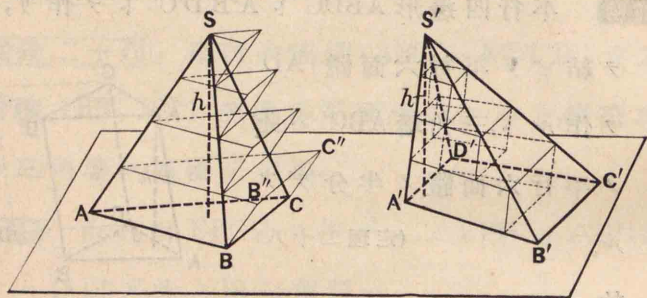
(何故ナレバ任意ノ角壙ハ之ト等高デアアル若干ノ三角壙  
ニ分ケルコトガ出來ルカラデアアル)

**系二** 等底等高ノ角壙ハ相等シク, 等高(又ハ等底)  
ノ角壙ノ比ハ底(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ。

**問** 正三角壙ガアツテ, 其ノ底ノ一邊ハ a 米デ高  
サハ h 米デアアル。其ノ體積ハ幾立方米デアアルカ。  
又正六角壙ニ就イテ同ジ問題ヲ解ケ。

### 110. 角錐ノ體積

◎ **定理三十** 等底 (ABC, A'B'C'D') 等高 (h) ナルニツノ角錐 (S-ABC, S'-A'B'C'D') ハ等積デアル。



**證明** ニツノ角錐ノ體積ヲ夫々  $V, V'$  トスル。今兩角錐ノ高サヲ  $n$  等分シ、各分點ヲ通り夫々底面ニ平行ナル平面ヲ作ルト、兩角錐ノ對應スル截面ハ夫々相等シイ。 (定理二十一系二)  
 次ニ角錐  $S-ABC$  ノ方ニハ上ノ各截面ヲ下底トシ稜  $SA$  ノ各部分ヲ夫々其ノ一稜トスル  $n$  箇ノ角錐ヲ作り、又角錐  $S'-A'B'C'D'$  ノ方ニハ上ノ各截面ヲ上底トシ稜  $S'A'$  ノ各部分ヲ夫々其ノ一稜トスル  $(n-1)$  箇ノ角錐ヲ作ルト、此等ノ兩角錐ハ上カラ順ニ夫々相等シク、 $S-ABC$  ノ方が最下ノ一ツ  $ABC''$  ダケ多イ。

故ニ此ノヤウニ作ツタ角錐ノ和ヲ夫々  $P$  ト  $P'$  トスルト、 $P$  ト  $P'$  トノ差ハ角錐  $ABC''$  デアル。

$$故ニ \quad P - P' = \triangle ABC \times \frac{h}{n}$$

$n$  ヲ大キクスルト此ノ差ハドンナニモ小トナル。ソシテ此ノ差ハ  $V$  ト  $V'$  トノ差ヨリモ大デアルコトハ勿論デアル。

故ニ若シ  $V$  ト  $V'$  トガ等シクナイトシテ其ノ差ヲ  $d$  トスルト、 $d$  ハ或一定ノ量デ

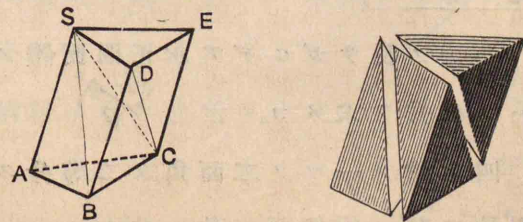
$$P - P' > d$$

コレハ不合理デアル。

$$故ニ \quad V = V'$$

**問 1.** 平行四邊形ヲ底トスル四角錐ノ頂點ト底ノ對角線トヲ含ム平面ハ之ヲ二等分スル。

◎ **定理三十一** 三角錐 (ABC-SDE) ハ之ヲ等積デアルニツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。





**證明** 三角嚙 ABC-SDE ハ S ヲ共通ノ頂點トスル三ツノ三角錐 S-ABC, S-BCD, S-CDE ニ分ケルコトガ出來ル。

ソシテ第一ト第二トハ等底 SAB, SBD ヲ有シ C ヲ共通ノ頂點トスルモノト見ルコトガ出來ルカラ等積デアアル。

同様ニ第二ト第三モ等積デアアル。

從ツテ此等ノ三ツノ三角錐ハ等積デアアル。

**系一** 三角錐ハ等底等高ノ三角嚙ノ三分ノ一ニ等シイ。

**系二** 角錐ハ之ト等底等高ノ角嚙ノ三分ノ一ニ等シイ。

從ツテ角錐ノ體積ヲ  $V$  トシ、底面積ヲ  $B$ , 高サヲ  $h$  トスルト、
$$V = \frac{1}{3} Bh$$

**系三** 等高(又ハ等底)ノ二ツノ角錐ノ比ハ底(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ。

**問 2.** 一稜ノ長サガ  $a$  デアル正四面體ノ體積ヲ表ハス公式ヲ求メヨ。

**問 3.** 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ對稜ヲ其ノ兩側面ノ比ニ分ケル。

問題 14

1. 直六面體ガアル。其ノ對角線ノ長サハ  $14\text{cm}$  デ、三稜ノ長サノ比ハ  $2:3:6$  デアルトイフ。此ノ直六面體ノ體積ヲ求メヨ。

2. 平行六面體ノ十二ノ稜ノ平方ノ和ハ四ツノ對角線ノ平方ノ和ニ等シイ。

3. 四面體デハ、

① 對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ同ヅ點ヲ通ル。

② 各稜角ヲ二等分スル平面ハ同ヅ點ヲ通り、其點ハ各面カラ等距離ニアル。

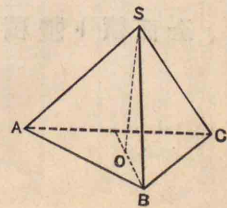
③ 各頂點ヲ對面ノ重心ニ結ブ四ツノ線分ハ同ヅ點デ交ハリ、且此ノ點デ互ニ  $3:1$  ニ分ケラレル(此ノ點ヲ四面體ノ重心トイフ)。

4. 正四面體 S-ABC デハ、

① 頂點カラ底ヘ引イタ垂線ハ底ノ重心ヲ通ル。

② 對稜ハ互ニ直角ヲナス。

③ 二面角ノ大サヲ求メヨ。但シ  $\sin 70^\circ = 0.9397$ ,  $\sin 71^\circ = 0.9455$  ヲ與ヘタトスル。  $70^\circ 32'$



⑤ 四面體ノ各頂點カラ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

6. 角錐ノ底ニ平行ナル截面ヲ作り、其ノ面積ガ底ノ半分ニ等シヤウニセヨ。

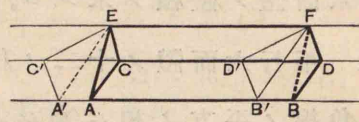
7. 同ジ平面ノ上ニナイ三ツノ平行線ガアツテ、之

カラ定長ノ三線分ヲ

截リ取ル任意ノ平行

ナル二平面ヲ作ルト、

出來ル三角嚮ハ皆等積デアル。



8. 正四面體內ノ任意ノ點カラ各面ヘ引イタ垂線ノ和ハ其ノ高サニ等シイ。

⑨ 三角錐 S-ABC ニ於テ SA=8m, SB=10m デアレバ、 $\angle ASB$  ノ二等分線 SE ト稜 SC トノ決定スル

平面ハ此ノ三角錐ノ體積ヲドンナ比ニ分ケルカ。

10. 底ノ一邊ガ 4cm, 側稜ガ 10cm デアル正四角錐ノ全面積ト體積トヲ求メヨ。

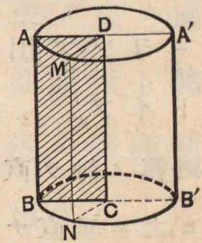


### 第五章 直圓嚮・直圓錐・球\*

#### 111. 直圓嚮

**定義** 矩形ガ其ノ一邊ヲ軸トシテ其ノ周リニ一廻轉シタトキ、他ノ三邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面デ圍マレタ立體ヲ直圓嚮トイフ。

軸ニ垂直ナル二邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面ハ等シイ圓デ、之ヲ直圓嚮ノ底面又ハ底トイヒ、他ノ邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面ハ一ツノ曲面デ之ヲ其ノ側面トイフ。



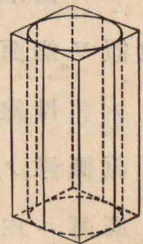
又軸ノ長サ(即チ兩底ノ距離)ヲ直圓嚮ノ高サトイヒ、軸ニ對スル邊ノ各ノ位置ヲ側面ノ母線トイフ。

**問 1.** 直圓嚮ノ底ノ周

上ノ任意ノ點カラ軸

ニ平行ニ引イタ直線

ハ母線デアル。



直圓嚮ノ兩底ニ内接又

ハ外接スル底面ヲ有スル直角嚮ヲ其ノ直圓嚮ニ内

\* 直圓嚮、直圓錐及ビ球等ヲ總稱シテ曲面體トイフ。

接又ハ外接スル直角嚮トイフ。

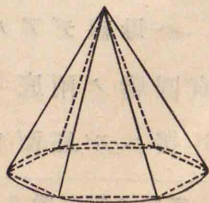
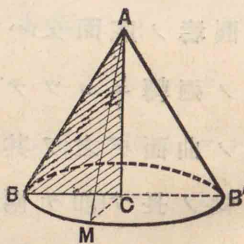
問2. 直圓嚮ノ軸ニ垂直ナル平面デノ截面ハ底ニ等シイ圓デアアル。

### 112. 直圓錐

定義 直角三角形ガ直角ノ一邊ヲ軸トシテ其ノ周リニ一廻轉シタトキ、他ノ二邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面デ圍マレタ立體ヲ直圓錐トイフ。

廻轉ノ軸ヲ直圓錐ノ高サトイヒ、之ニ垂直ナル邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル圓ヲ其ノ底面又ハ底トイフ。又斜邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面ヲ直圓錐ノ側面トイヒ、斜邊ノ各ノ位置ヲ側面ノ母線、其ノ交點ヲ直圓錐ノ頂點トイフ。ソシテ母線ノ長サヲ直圓錐ノ斜高トイフ。

直圓錐ノ頂點ヲ頂點トシ其ノ底面ニ内接スル多角形ヲ底トスル角錐ヲ其ノ直圓錐ニ内接スル角錐トイフ。



問 直圓錐ノ軸ニ垂直ナル截面ハ圓デアアル。

### 113. 直圓嚮・直圓錐ノ表面積ト體積

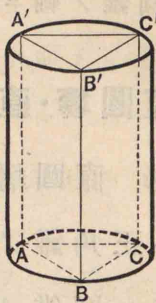
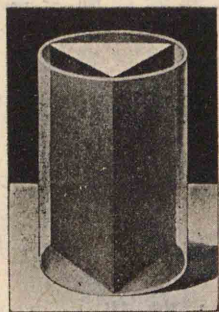
公理二 直圓嚮又ハ直圓錐ニ内接スル正角嚮又ハ正角錐ノ側面積ト體積トハ夫々其ノ圓嚮又ハ圓錐ノ側面積ト體積トヨリモ小デアアル。サレド其ノ角嚮又ハ角錐ノ底ノ邊數ヲ多クスルコトニヨツテ其ノ側面積ト體積ヲ如何程デモ其ノ圓嚮又ハ圓錐ノ側面積ト體積トニ近迫セシメルコトガ出來ル。

此ノ事實ヲ通例次ノヤウニ述ベル。

直圓嚮又ハ直圓錐ノ側面積ト體積トハ夫々之ニ内接スル正角嚮又ハ正角錐ノ底ノ邊數ガ無限ニ増シタトキノ其ノ側面積ト體積トノ極限デアアル。

注意 圓ノ周(及ビ面積)ハ之ニ内接スル正多角形ト外接スル正多角形トノ邊數ガ限リナク増シタトキノ其ノ周(及ビ面積)ノ共通ノ極限デアアル。

定理 三十二 直圓嚮ノ側面積ハ底ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。



**證明** 直圓壘 = 内接スル正多角壘ヲ作ルト、此ノ内接角壘ノ側面積ハ其ノ底ノ周ト其ノ高サ(即チ其ノ圓壘ノ高サ)トノ積ニ等シイ。(定理二十系) 今此ノ内接角壘ノ底ノ邊數ヲ無限ニ増ストキハ、其ノ周ハ無限ニ此ノ圓壘ノ底ノ周ニ近迫シ、同時ニ此ノ角壘ノ側面積ハ無限ニ此ノ圓壘ノ側面積ニ近迫スル。

故ニ此ノ角壘ノ側面積ノ極限即チ圓壘ノ側面積ハ其ノ底ノ周(圓周)ト高サトノ積ニ等シイ。

**系** 直圓壘ノ高サヲ  $h$ 、其ノ底ノ半徑ヲ  $r$  トスルト、

$$\text{側面積} = 2\pi rh, \quad \text{全面積} = 2\pi r(h+r)$$

**問 1.** 高サガ底ノ直徑ニ等シイ直圓壘ノ側面積ハ底ノ半徑ノ平方ニ比例スル。

$$\left. \begin{aligned} \text{壘ノ體積} &= \text{底} \times \text{高} \\ \text{錐ノ體積} &= \frac{1}{3}(\text{底} \times \text{高}) \end{aligned} \right\}$$

**定理 三十三** 直圓錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ。

(定理二十二ニヨリ前定理ノ證明ニ準ジテ之ヲ證明セヨ)

**系** 直圓錐ノ斜高ヲ  $h'$ 、其ノ底ノ半徑ヲ  $r$  トスルト、

$$\text{側面積} = \pi r h', \quad \text{全面積} = \pi r(h' + r)$$

**問 2.** 直圓錐ノ側面積ハ、高サノ中點ヲ通ツテ底ニ平行ナル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シイ。

**定理 三十四** 直圓壘ノ體積ハ其ノ底ト高サトノ積ニ等シク、直圓錐ノ體積ハ其ノ底ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

(定理二十九系一及ビ定理三十一系二ヲ用ヒテ之ヲ證明セヨ)

**系** 直圓壘又ハ直圓錐ノ高サヲ  $h$ 、其ノ底ノ半徑ヲ  $r$  トスルト、

$$\text{直圓壘ノ體積} = \pi r^2 h$$

$$\text{直圓錐ノ體積} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

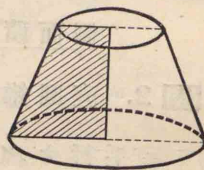
**問 3.** 矩形ノ二隣邊ヲ  $a, b$  トシ、此ノ二邊ヲ各軸トシテ、此ノ矩形ヲ廻轉シテ生ズルニツノ直圓壘ノ體積ノ比ヲ求メヨ。



### 114. 直圓錐臺

**定義** 直圓錐ノ底面ト之ニ平行ナル截面トノ間ニアル部分ヲ直圓錐臺トイフ。

梯形ノ一邊ガ其ノ底ニ垂直デアルトキ、此ノ邊ヲ軸トシテ一廻轉スルト直圓錐臺ガ出來ル。軸ノ長サヲ其ノ高サトイヒ、之ニ對スル邊ヲ其ノ斜高(母線)トイフ。

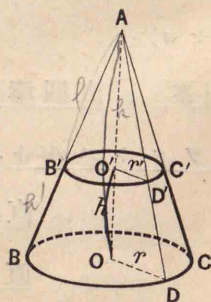


⑨ **定理三十五** 直圓錐臺ノ兩底ノ半徑ヲ  $r$  ト  $r'$  トシ、其ノ高サヲ  $h$ 、斜高ヲ  $h'$  トシ、側面積ヲ  $F$ 、體積ヲ  $V$  トスルト、

[1]  $F = \pi h'(r+r')$

[2]  $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$

**證明** 兩底ヲ BDC ト B'D'C' トシ、其ノ中心ヲ夫々 O, O' トスル。側面ヲ延長シテ出來ル直圓錐ノ頂點ヲ A トスレバ、



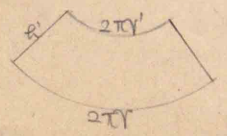
[1] F ハニツノ直圓錐 A-BDC, A-B'D'C' ノ側面積ノ差デアアルカラ、

$$F = \pi r(AD) - \pi r'(AD') \quad (\text{定理三十三})$$

$$F = (\text{直圓錐 } S\text{-}A\text{O}\text{ノ側面積}) - (\text{直圓錐 } S\text{-}A\text{O}'\text{ノ側面積}) \\ = \pi r(l+r') - \pi r'l = \pi r r' - \pi l(r-r')$$

$$\text{然ルニ } \frac{l}{r+r'} = \frac{r}{r'} \therefore \frac{l}{r} = \frac{r+r'}{r'} = \frac{r}{r-r'} \therefore l(r-r') = r r' \\ F = \pi r r' + \pi r r' = \pi r r'(r+r')$$

(見-前) 切り取りは梯形ノ面積ガ出來ル  
 $\therefore F = \pi R'(r+r')$



$$\text{然ルニ } \frac{AD}{r} = \frac{AD'}{r'} = \frac{AD-AD'}{r-r'} = \frac{h'}{r-r'}$$

$$\therefore AD = \frac{h'r}{r-r'}, \quad AD' = \frac{h'r'}{r-r'}$$

$$\therefore F = \pi \left( \frac{h'r^2}{r-r'} - \frac{h'r'^2}{r-r'} \right)$$

$$= \pi h' \times \frac{r^2-r'^2}{r-r'}$$

$$= \pi h'(r+r')$$

[2] V ハ直圓錐 A-BDC ト A-B'D'C' トノ差デアアルカラ、

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(AO) - \frac{1}{3}\pi r'^2(AO') \quad (\text{定理三十四})$$

$$\text{ツシテ } \frac{AO}{r} = \frac{AO'}{r'} = \frac{AO-AO'}{r-r'} = \frac{h}{r-r'} \text{ デアルカラ}$$

[1] ト同様ノ方法デ

$$V = \frac{1}{3}\pi h \times \frac{r^3-r'^3}{r-r'}$$

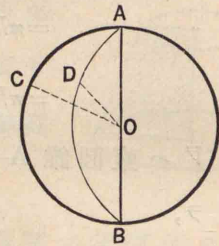
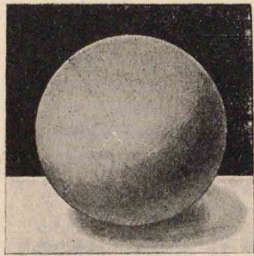
$$= \frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$$

**系** 直圓錐臺ノ側面積ハ軸ヲ垂直ニ二等分スル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シイ。

**問** 口徑 30cm, 底徑 20cm, 深サ 25cm ノばけつニ滿ツル水ノ重サヲ求メヨ。但シ  $\pi = \frac{22}{7}$  トセヨ。

## 115. 球

**定義** 半圓ガ其ノ直徑ヲ軸トシテ其ノ周リニ一廻轉シタトキ、其ノ弧ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面デ圍マレタ立體ヲ球トイフ。



弧ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面ヲ球面トイフ。球面ハ此ノ半圓ノ中心カラ等距離ニアル點ノ軌跡デアルコトハ明ラカデアル。此ノ中心ヲ球ノ中心トイヒ、中心カラ球面上ノ各點ニ至ル線分ヲ球ノ半徑トイフ。又中心ヲ通り兩端ガ球面デ終ル線分ヲ其ノ直徑トイフ。

球面ハ其ノ中心ニ關シテ對稱デアル。

**問1.** 半徑ノ等シイ球ハ合同デアル。

**問2.** 同ジ平面上ニナイ四ツノ點ヲ通ル球面ハ唯一ツシカナイ。(問題14ノ5參照) 此ノ球面ハ其ノ四點ヲ頂點トスル四面體ニ外接スルトイフ。

## 116. 球ノ截面

**定理 三十六** 球ヲ平面デ截ツタ面ハ圓デアル。

**證明** 截面Pガ球ノ中心ヲ通ラナイトシ、Pト球面トノ出會フ線ヲABCトスル。

OカラPへ垂線OM

ヲ引クトMハ定點

デアル。今ABC上

ノ任意ノ點ヲAト

シ、OA、AMヲ結ブ

ト、OA、OMノ長サハ一定デアルカラMAノ長

サモ一定デアル。 $r^2 = R^2 - h^2$

故ニAハ截面P上ノMヲ中心トスル圓周上ニアル

②次ニ此ノ圓周上ニ任意ノ點Bヲ取ルト、

$MB=MA$  デアルカラ  $OB=OA$  デアル。

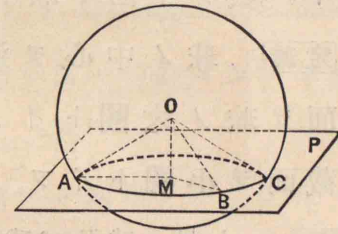
故ニBハ此ノ球面上ノ點デアル。

依ツテ此ノ截面ハ圓デアル。

(PガOヲ通ル場合ハ、學生之ヲ證明セヨ)

**系** 中心カラ等距離ニアル截面ハ皆相等シク、

中心カラ遠イ距離ニアル截面ハ近イ距離ニアル截



① 小円ノ面積  
 $\gamma^2 = \gamma'^2 - r^2$   
 $\gamma = \gamma' \cos \alpha$  (傾度ヲ計ル)

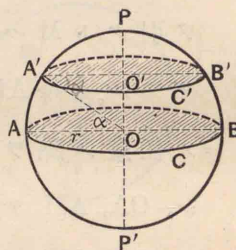
面ヨリモ小デアル。

(何故ナレバ、球ノ半径ヲ  $r$ 、截面ノ半径ヲ  $r'$  トシ、兩中心ノ距離ヲ  $d$  トスルト、 $r'^2 = r^2 - d^2$  デアルカラデアル)

**定義** 平面ト球トガーツノ圓ヲ共有スルトキハ、其ノ平面ト球トハ相交ハルトイフ。

**定義** 球ノ中心ヲ通ル截面ヲ球ノ大圓トイヒ、他ノ截面ヲ小圓トイフ。

地球ノ大圓ヲ大圓トス。



**系** 大圓ハ球及ビ球面ヲ

二等分スル。

**問1.**  $\angle AOA' = \alpha$  トスルト  $O'A'$  (截面ノ半径)  $= r \cos \alpha$  デアル。但シ  $r$  ハ球ノ半径トスル。

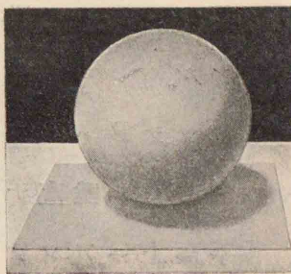
**定義** 球ノ大圓又ハ小圓ノ中心ヲ通り其ノ圓ニ垂直ナル直線ヲ其ノ圓ノ軸トイヒ、軸ト球面トノ交點ヲ其ノ圓ノ極トイフ。

**問2.** 大圓又ハ小圓ノ軸ハ球ノ中心ヲ通り、其ノ極ハ其ノ圓周上ノ總テノ點カラ等距離ニアル。

### 117. 球ノ切線ト切平面

**定義** 直線又ハ平面ト球面トガ唯一點ヲ

共有スルトキハ、此ノ兩者ハ相切スルトイヒ、其ノ點ヲ切點トイフ。ソシテ此ノ直線及ビ平面ヲ夫々球ノ切線及ビ切平面トイフ。



**系** 球ノ切線又ハ切平面ハ切點ニ至ル半径ニ垂直デアアル。逆モ亦真デアアル。

**問** 四面體ノ四面ニ切スル球面ノ中心ヲ求メヨ。  
 (問題14ノ3[2]参照)

此ノ球ヲ四面體ノ内接球トイフ。

### 118. ニツノ球

**定義** 一ツノ球ノ一部分ガ他ノ球ノ内ニアルトキハ、此ノ兩球ハ相交ハルトイフ。

**定理 三十七** ニツノ球面ノ交ハリハ圓周デ、其ノ圓ノ平面ハ兩球ノ共通中心線ニ垂直デアアル。

**證明** 二ツノ球面  $O, O'$  ノ交ハリノ上ノ任意ノ點ヲ  $B$  トスルト、 $\triangle OBO'$  ニ於テ  $OO'$  ノ位置ト大サトガ一定デ且他ノ二邊ノ長サモ一定デアアル。故ニ  $B$  カラ  $OO'$  へ引イタ垂線ノ長サハ一定デ、

其ノ足 P ハ定點デ  
アル。

依ッテ B ハ P ヲ通  
リ  $OO'$  ニ垂直ナル

平面上ニアッテ P  
ヲ中心トスルーツ

ノ圓周上ニアル。

② 次ニ此ノ圓周上ニ  
任意ノ點 A ヲ取ル

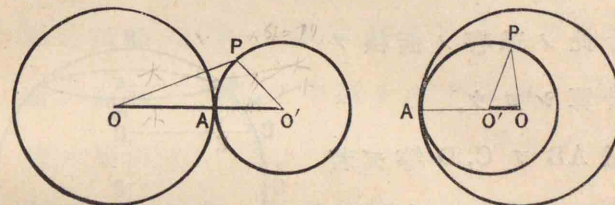
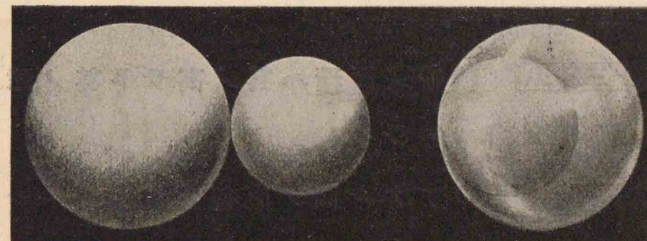
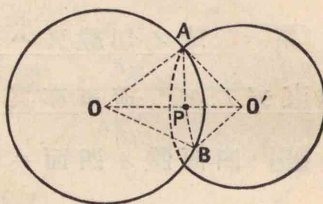
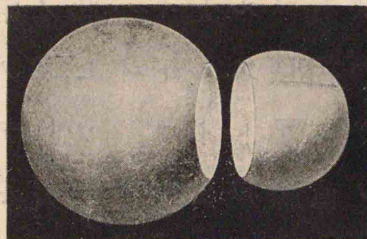
ト,  $OO'$  ハ圓 P ノ平面ニ垂直デ且  $PA, PB$  ハ相等  
シイカラ  $OA, O'A$  ハ夫々  $OB, O'B$  ニ相等シイ。

依ッテ A ハ兩球面ノ交ハリノ上ノ點デアル。

依ッテ兩球面ノ交ハリハーツノ圓周デ, 其ノ圓  
ノ平面ハ共通中心線  $OO'$  ニ垂直デアル。

**定義** 二ツノ球面ガ唯一點ヲ共有スルト  
キハ, 此ノ兩球ハ**相切スル**トイヒ, 其ノ點ヲ其  
ノ**切點**トイフ。

二ツノ球面ガ相切スルトキ, 各ガ他ノ外ニアルト  
キハ**外切スル**トイヒ, 其ノーツガ全ク他ノ内ニアル  
トキハ**内切スル**トイフ。



**問 1.** 共通中心線上ノ一點ヲ共有スル二ツノ球  
面ハ相切スル。

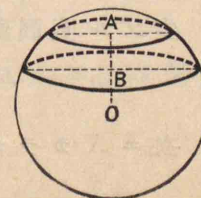
**問 2.** 相切スル二ツノ球面ノ切點ハ其ノ共通中  
心線上ニアル。

**問 3.** 二ツノ球ノ位置ト其ノ中心間ノ距離及ビ  
半徑トノ間ノ關係ハドウカ。

### 119. 球 帶

**定義** 平行ナル二ツノ截  
面ノ間ニアル球面ノ部分ヲ  
**球帶**トイフ。

此ノ兩截面ノ距離ヲ球帶ノ高





サ又ハ厚サトイフ。

**定理 三十八** 球帯ノ面積ハ其ノ高サト其ノ球ノ大圓ノ周トノ積ニ等シイ。

**證明** 中心ガOデアル圓ノ直徑PP'ヲ軸トシテ弧ACBヲ廻轉スルト一ツノ球帯ヲ生ズル。

今此ノ球帯ノ面積ヲ計算シヨウ。

弧ABヲC,D等デ若干ニ等分シ,弦AC,CD等ヲ引キ,Oカラ弦ACへ垂線OMヲ引キ,又

PP'ノ上ニ投ジタA,M,C,Bノ正射影ヲ夫々A',M',C',B'トスルト,A'B'ハ此ノ球帯ノ高サデアル。

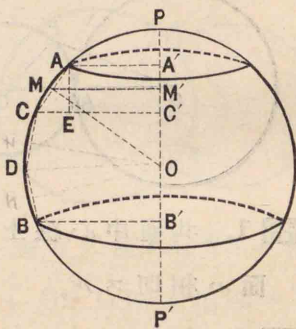
先ヅ弦ACノ廻轉ニヨツテ生ズル曲面ノ面積ヲ求メルニ,此ノ面積ハACC'A'ノ廻轉ニヨツテ生ズル直圓錐臺ノ側面積デアルカラ

$$2\pi MM' \cdot AC \quad (\text{定理三十五系})$$

次ニAカラCC'へ垂線AEヲ引クト

$$\triangle ACE \text{ の } \triangle MOM'$$

[∵ ACLMO, AE ⊥ MM', CE ⊥ DM']



$$\text{故ニ} \quad \frac{AC}{AE} = \frac{OM}{MM'}$$

$$\text{故ニ} \quad MM' \cdot AC = OM \cdot AE$$

ソシテ  $AE = A'C'$  デアルカラ

上ノ側面積ハ

$$2\pi OM \cdot A'C' \quad \text{デアル。}$$

故ニ折線ACD...Bノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面ノ面積ハOMヲ半徑トスル圓周トA'B'トノ積ニ等シイ。

弧ABノ分點ノ數ヲ無限ニ増ストキハ,此ノ折線ノ極限ハ弧ABトナリ,OMノ極限ハ球ノ半徑トナル。ソシテ上ノ曲面ノ面積ノ極限ハ球帯ノ面積デ

$$2\pi \times (\text{半徑}) \times A'B' \quad \text{トナル。}$$

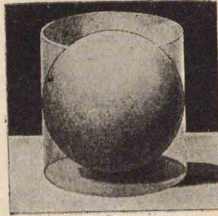
故ニ球帯ノ面積ハ大圓周ト高サトノ積ニ等シイ。

### 120. 球ノ表面積ト體積

**定理 三十九** 球ノ半徑ヲrトスルト,其ノ表面積ハ  $4\pi r^2$  デアル。

(球帯ノ面積カラ之ヲ誘導セヨ)

6.7 **問 1.** 球ノ表面積ハ之ニ外接スル直圓壺ノ側面積ニ等シク、其ノ全面積ノ三分ノ二ニ等シイ。



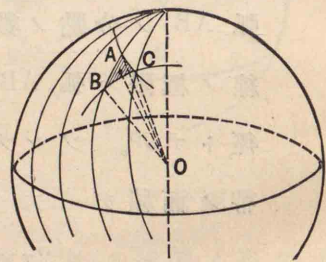
(あるきめです Archimedes ノ定理)

**定理 四十** 球ノ半徑ヲ  $r$  トスレバ、其ノ體積ハ

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \text{ デアル。}$$

**證明** 球面上ニ多數ノ點ヲ取り、此等ヲニツヅツ

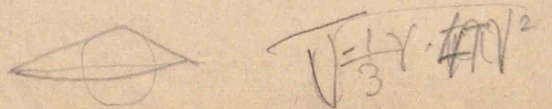
結ンデ三角形ヲ作ルト、各面ガ皆三角形デアアル多面體ガ此ノ球ニ内接スルコトナル。



此ノ多面體ノ頂點ヲ悉ク球ノ中心ニ結ブト、此ノ多面體ハ多クノ三角錐ノ總和ト見做スコトガ出來ル。

ソシテ球面上ニ取ル點ノ數ヲ無限ニ増セバ、此ノ多面體ノ體積ヲ如何程デモ球ノ體積ニ近迫セシメルコトガ出來ル。

ソシテ此ノ時其ノ表面積ハ如何程デモ球ノ表



面積ニ近迫シ、且又此ノ多面體ヲ作ル諸三角錐ノ高サハ如何程デモ球ノ半徑ニ近迫スル。

然ルニ三角錐ノ體積ハ

$$\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高サ})$$

デアアルカラ、上ノ三角錐ノ總和ノ極限デアアル球ノ體積ハ

$$\frac{1}{3} \times (\text{球ノ表面積}) \times (\text{半徑}) \text{ デアル。}$$

故ニ球ノ體積ハ  $\frac{4}{3}\pi r^3$  デアル。

6.7 **問 2.** 鑄鐵球ガアツテ、其ノ重量ハ 36kg デアル。其ノ直徑ハ幾ラカ。但シ鑄鐵ノ比重ハ 7.2 トスル。



あるきめです (287-212 B.C.頃)

6.7 **問 3.** 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壺ノ體積ノ三分ノ二ニ等シイ。(あるきめですノ定理)

### 問題 15

1. 直徑 1m, 高サ 2m ノ直圓壺カラ最大ナ四角壺ヲ取ルナラバ、其ノ體積ハ幾ラカ。
2. 2l ノ水ヲ底ノ半徑 5cm アル直圓壺形ノ器ニ

移シ入レルトキハ、水面ノ高サハ幾ラトナルカ。

但シ  $\pi=3.1416$  トセヨ。

3. 直圓錐ヲ其ノ頂點カラ底ヘ引イタ垂線ノ中點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ出來ル二ツノ部分ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

4. 雨ノ日ニ屋外ニ置イタ口徑  $30\text{cm}$ 、底徑  $18\text{cm}$ 、深サ  $24\text{cm}$  ノばけつニ水ガ其ノ深サノ半分ダケ溜ツタトイフ。一平方米ノ地面ノ上ニ降ツタ雨量ハ幾立デアツタカ。

5. 直角三角形ノ直角ノ二邊ガ  $6\text{cm}$ 、 $8\text{cm}$  デアルモノガアル。此ノ三角形ヲ其ノ斜邊ヲ軸トシテ一廻轉シテ出來ル立體ノ體積ヲ求メヨ。

6. 球面外ノ一點カラ此ノ球ヘ引イタ切線ハ皆相等シク且其ノ切點ハ同ジ小圓ノ周上ニアル。

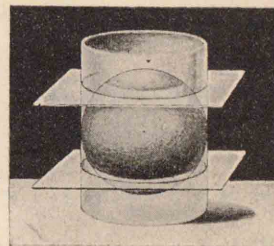
7. 二ツノ定點カラノ距離ノ比ガ一定デアアル點ノ軌跡ハ一ツノ球面デアアル。

8. 半徑ガ  $10\text{cm}$  デアル球面ト此ノ球ノ中心カラ  $8\text{cm}$  ダケ距タツタ平面トノ交ハリニ内接スル正三角形ノ面積ヲ求メヨ。

9. 内徑  $12\text{cm}$  ノ中空ノ直圓筒ヲ直立セシメ、其ノ上

ニ直徑  $36\text{cm}$  ノ球ヲ載セタトキ、球面ノ最モ低イ點ハ圓筒ノ上端ノ面カラ幾ラノ距離ニアルカ。

10. 直圓壺ニ内接スル球ガアル。此ノ球ト直圓壺トヲ直圓壺ノ軸ニ垂直ナル二平面デ截ルトキハ、此ノ二平面ノ間ニアル直圓壺ノ側面積ト球帶ノ面積トハ相等シイ。



11. 稜ノ長サガ  $a$  デアル正四面體ニ外接スル球ト内接スル球トノ半徑ヲ求メヨ。

12. 半徑ガ  $6\text{cm}$  デアル圓  $O$  ノ平面上ノ一點ヲ  $A$  トシ、 $OA$  ヲ  $10\text{cm}$  トスル。今  $A$  カラ此ノ圓ニ切線  $AB$  ヲ引キ、 $B$  ヲ切點トシ、 $OA$  ヲ軸トシテ此ノ圖形ヲ一廻轉スルトキ出來ル立體ノ全表面積ヲ求メヨ。

13. 直圓錐ノ斜高ガ其ノ底ノ直徑ニ等シイトキハ、其ノ體積ト此ノ直圓錐ニ内接スル球ノ體積トノ比ハ  $9:4$  ニ等シイ。

## 補習問題

### 第一 證明問題

#### [1] 等角問題

1.  $\triangle ABC$  = 於テ  $AB=AC$  デアル。今形内 = 一點  $P$  ヲ取リ  $\angle APB = \angle APC$  ナルヤウニスルト、 $\angle BAP = \angle PAC$  デアル。
2. 一點  $P$  カラ一ツノ圓 =  $A$  デ切スル切線  $PA$  ヲ引キ  $PA$  ノ中點  $M$  カラ其ノ圓ト  $B, C$  デ交ハル任意ノ直線  $MBC$  ヲ引ケバ  $\angle MPB = \angle MCP$  デアル。
3.  $\triangle ABC$  ノ  $\angle B, \angle C$  ノ二等分線ガ對邊 = 交ハル點ヲ夫夫  $D, E$  トシ、 $ED$  ノ延長ガ  $BC$  = 交ハル點ヲ  $F$  トスルト、 $AF$  ハ  $\angle A$  ノ外角ヲ二等分スル。
4. 正方形  $ABCD$  ノ  $B$  ヲ通り  $AC$  = 平行線ヲ引キ、其ノ上 =  $E$  ヲ取リ ( $C$  ト  $E$  トヲ  $AB$  ノ同ジ側ニ)  $AE=AC$  ナルヤウニスレバ  $\angle CAE = 2\angle BAE$  デアル。
5.  $A, B$  ヲ一直線上ノ二點トシ、 $C, D$  ヲ他ノ一直線上ノ二點トスルト、 $\angle ADC$  ト  $\angle CBA$  トヲ二等分スル直線ノナス角  $BOD$  ハ  $\angle DAB$  ト  $\angle BCD$  トノ和ノ半分 = 等シイ。
6. 一線分  $AB$  ノ同ジ側 = アル二ツノ異ナル三角形  $CAB, DAB$  = 於テ、 $AC=AD$  デ且  $BC=BD$  デアルコトハ出來ナイコトヲ證明セヨ。

## [2] 圓座問題

7. 四ツノ點ガ同ジ圓周上ニアル(圓座デアル)コトヲ斷定スル基礎定理ヲ述ベヨ。
8. 四角形ノ二組ノ對邊ヲ延長シテ出來ル角ノ二等分線ガ直交スルトキハ、此ノ四角形ハ圓ニ内接スル。
9.  $\triangle ABC$  デ  $\angle A = 60^\circ$  ナルトキ此ノ三角形ノ垂心ヲ  $H$ 、内心ヲ  $O$  トスルト、四點  $B, O, H, C$  ハ同ジ圓周上ニアル。
10. 圓  $O$  ノ外部ニアル二點  $P, Q$  カラ切線  $PA, PB$  及ビ  $QC, QD$  ヲ引キ  $AB, CD$  ノ中點ヲ  $M, N$  トスレバ、四角形  $PQNM$  ハ圓ニ内接スル。
11.  $\triangle ABC$  ノ頂角  $A$  ノ二等分線ガ底邊ト交ハル點ヲ  $P$  トシ、 $AP$  ヲ延長シテ其ノ上ニ  $Q$  ヲ取り  $AP, AQ$  ノ包ム矩形ヲ  $AB, AC$  ノ包ム矩形ニ等シクスレバ、 $Q$  ハ  $\triangle ABC$  ノ外接圓ノ周上ニアル。
12. 三角形ノ各邊ノ中點、各頂點カラ對邊ヘ引イタ垂線ノ足及ビ各頂點ト垂心トノ距離ノ中點トノ九ツノ點ハ同ジ圓周上ニアル。(此ノ點ヲ三角形ノ九點圓トイフ)

## [3] 直線平行問題

13. 二直線ガ平行デアルコトヲ證明スルニ用ヒル定理ヲ列舉セヨ。
14. 四角形  $ABCD$  ノ邊  $AB, BC$  ヲ直徑トスル圓ノ共通弦ト

$CD, DA$  ヲ直徑トスル圓ノ共通弦トハ互ニ平行デアル。

15. 一ツノ圓ノ中心  $C$  ハ他ノ圓  $O$  ノ周上ニアル。此ノ二圓ノ交點ヲ  $A, B$  トシ、圓  $O$  ノ周上ノ任意ノ點  $P$  カラ  $PXB, PAY$  ヲ引キ圓  $C$  ト夫々  $X, Y$  デ交ハラシメレバ  $AX \parallel BY$  デアル。
16.  $\triangle ABC$  ノ頂點  $A$  カラ  $\angle B, \angle C$  ノ二等分線ヘ引イタ垂線ノ足ヲ夫々  $F$  及ビ  $G$  トスレバ  $F$  ト  $G$  トヲ結ブ直線ハ  $BC$  ニ平行デアル。
17. 四角形  $ABCD$  ノ對角線  $AC$  ノ中點ヲ  $O$  トシ、 $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$  及ビ  $\angle DOA$  ヲ二等分スル直線ガ  $AB, BC, CD$  及ビ  $DA$  ト交ハル點ヲ夫々  $E, F, G, H$  トスレバ、 $EF \parallel GH$  デアル。

## [4] 直線直交問題

18.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $AB = 2BC, \angle B = 2\angle A$  デアレバ  $\angle C$  ハ直角デアル。
19.  $\triangle ABC$  ノ外接圓ノ弧  $AB, AC$  ノ中點ヲ結ブ直線ハ  $\angle A$  ノ二等分線ト直交スル。
20. 正二十角形  $A_1A_2A_3 \dots A_{20}$  ニ於テ、二直線  $A_1A_8$  ト  $A_3A_{16}$  トハ垂直デアル。
21. 頂點  $A$  ヲ共有シ底邊ガ等シイ二ツノ三角形  $ABC, ADE$  ノ外接圓ノ共通切線ハ其ノ共通弦ノ延長ニ垂直デアル。

22.  $\triangle ABC$  の邊  $BC$  の中點  $M$  を通り之に垂直ナル直線が外接圓周に交ハル點ヲ  $P, Q$  トシ、 $P, Q$  カラ  $AB$  に垂線  $PR, QS$  を引ケバ  $\triangle RSM$  は直角三角形デアル。

23. 定圓ノ任意ノ直徑  $AB$  上ノ一點  $P$  を通り  $AB$  に垂直ナル弦  $CD$  を作り、 $C, D$  に於ケル此ノ圓ノ切線ノ交點ヲ  $Q$  トシ、 $P, Q$  を通ル任意ノ圓ト與ヘラレタ圓トノ交點ヲ  $E$  トスレバ、 $E$  に於ケル二圓ノ切線ハ互に垂直デアル。

#### [5] 直線定方向問題

24.  $P$  は定圓ノ周上ノ定點デ、 $A, B$  は此ノ圓に交ハル任意ノ圓トノ交點トシ、 $PA, PB$  が此ノ第二ノ圓ト交ハル點ヲ  $X, Y$  トスレバ、 $XY$  は方向ガ一定デアル。

25.  $AB$  を直徑トスル半圓周上ノ任意ノ二點ヲ  $P, Q$  トシ、 $AP$  と  $BQ$  とノ交點ヲ  $X, AQ$  と  $BP$  とノ交點ヲ  $Y$  トスルト、 $XY$  は常ニ一定ノ方向ヲ有スル。

26. 定圓  $O$  ノ周上ノ定點  $C$  を中心トスル一ツノ定圓ガアル。今圓  $O$  ノ周上ノ任意ノ點  $P$  カラ圓  $C$  に引イタ二ツノ切線ガ圓  $O$  と交ハル點ヲ  $A, B$  トスルト、 $AB$  は常ニ一定ノ方向ヲ有スル。

#### [6] 三點一直線上問題

27.  $ABCDEF$  は圓に内接スル正六角形デアル。今  $AC$  と

$BD$  とノ交點ヲ  $P, BE$  と  $CF$  とノ交點ヲ  $Q, AE$  と  $DF$  とノ交點ヲ  $R$  トスルト、 $P, Q, R$  は一直線上ニアル。

28.  $\triangle ABC$  ノ外接圓ノ  $\angle C$  内ニアル弧  $AB$  上ノ任意ノ點ヲ  $M$  トシ邊  $AB, BC$  上ニ夫々  $R$  と  $P$  とヲ取り又  $CA$  ノ延長上ニ  $Q$  を取り、 $\angle MPB = \angle MQA = \angle MRB$  ナルヤウニスルト、三點  $P, Q, R$  は一直線上ニアル。

29.  $A$  に於テ外切スル二ツノ圓ガアル、此ノ二圓ト夫々  $B, C$  に於テ外切スル第三ノ圓  $O$  を畫キ、 $AB, AC$  ノ延長ガ再び圓  $O$  と交ハル點ヲ夫々  $D, E$  トスレバ、三點  $O, D, E$  は一直線上ニアル。

30.  $\triangle ABC$  ノ  $B, C$  に於ケル内角及ビ外角ノ二等分線ニ  $A$  カラ垂線ヲ引ケバ、其ノ四ツノ足ト邊  $AB, AC$  ノ中點トハ皆同ジ直線上ニアル。

31. 三角形ノ垂心、重心、外心及ビ九點圓ノ中心ハ同一ノ直線上ニアル。

#### [7] 三圓周集交問題

32.  $\triangle ABC$  ノ邊  $BC, CA, AB$  上又ハ其ノ延長上ニ夫々任意ノ點  $D, E, F$  を取レバ、 $\triangle AEF, \triangle BFD, \triangle CDE$  ノ外接圓周ハ一點ニ集交スル。

33. 三角形ニ外接圓ヲ畫キ、其ノ形外ニアル弓形ヲ其ノ弦デ形内ニ折込ムト、其ノ三ツノ弧ハ一點ニ集交スル。

## [8] 三直線集交問題

34.  $\triangle ABC$  ノ二邊  $AB, AC$  ノ上ニ形外ニ正方形  $ABDE, ACGF$  ヲ畫キ,  $A$  カラ  $BC$  ニ垂線  $AP$  ヲ引クト,  $AP, BG, CD$  ハ一點ニ集交スル。
35. 平行四邊形  $PQRS$  ノ各頂點ガ夫々一ツツ他ノ一定平行四邊形  $ABCD$  ノ各邊ノ上ニアルトキハ, 此ノ二ツノ平行四邊形ノ對角線ハ一點ニ集交スル。
36. 四角形  $ABCD$  = 於テ  $AB \parallel CD$  デ,  $AB+CD=BC$  ナラバ,  $\angle ABC, \angle BCD$  ノ二等分線ハ  $AD$  上デ交ハル。
37. 圓ニ外接スル四角形  $ABCD$  ノ邊  $AB, BC, CD, DA$  ノ切點ヲ夫々  $E, F, G, H$  トスレバ,  $EG, FH, AC, BD$  ハ一點ニ會スル。
38.  $\triangle ABC$  ノ各邊ノ上ニ形外ニ正三角形  $BCA', CAB', ABC'$  ヲ畫クトキハ, 此ノ三ツノ三角形ノ外接圓周ハ一點ニ會スル。ソシテ  $AA', BB', CC'$  ハ一點ニ集交スル。
39. 平行四邊形  $ABCD$  ノ邊  $AB$  ニ平行ニ  $EF$  ヲ引キ  $BC$  ニ平行ニ  $GH$  ヲ引キ,  $AD, BC, AB, CD$  トノ交點ヲ夫々  $E, F, G, H$  トシ, 又  $EF$  ト  $GH$  トノ交點ヲ  $P$  トスレバ,  $\square AH, \square BP, \square CE$  ノ對角線ハ一點ニ會スル。

## [9] 線分相等問題

40.  $H$  ヲ  $\triangle ABC$  ノ垂心,  $O$  ヲ外心トシ,  $AB$  上ニ  $AH$  ニ等シク  $AD$  ヲ取り,  $AC$  上ニ  $AO$  ニ等シク  $AE$  ヲ取レバ,  $DE$

ハ此ノ三角形ノ外接圓ノ半徑ニ等シイ。

41.  $\triangle ABC$  ノ頂點  $B, C$  及ビ外心  $O$  ヲ通ル圓周ト  $AB$  又ハ其ノ延長トノ交點  $Q$  ト  $C$  トヲ結ベバ,  $QA=QC$  デアル。
42. 圓  $O$  外ノ一點  $P$  カラ切線  $PC$  ト割線  $PAB$  トヲ引キ又切點  $C$  ヲ通ル直徑  $CD$  ヲ引キ  $BD, PO$  ヲ結ビ  $A$  ヲ通り  $PO$  ニ平行ニ  $AEF$  ヲ引キ  $CD, BD$  ト夫々  $E, F$  デ交ラシメレバ,  $AE=EF$  デアル。
43. 頂角  $A$  ガ  $60^\circ$  デアル三角形デ二底角  $B$  ト  $C$  トノ二等分線ガ夫々對邊ト交ハル點ヲ  $D, E$  トシ,  $BD$  ト  $CE$  トノ交點ヲ  $O$  トスルト,  $OD=OE$  デアル。
44. 圓ノ相交ハル二弦  $CF, DG$  ノ交點  $E$  ヲ通り  $FG$  ニ平行線ヲ引キ  $CD$  ノ延長ト  $A$  デ交ハラシメレバ,  $EA$  ハ  $A$  カラ引イタ切線ニ等シイ。
45.  $\triangle ABC$  ヲ  $\angle A$  ヲ直角トスル三角形トシ,  $AB, AC$  ノ外方ニ正方形  $ABDE, ACFG$  ヲ作り,  $CD$  ト  $AB$  トノ交點ヲ  $M$ ,  $BF$  ト  $AC$  トノ交點ヲ  $N$  トスルト,  $AM=AN$  デアル。
46. 中心ガ  $O$  デアル圓ノ周上ニ直徑ノ兩端デナイヤウニ二點  $A, B$  ヲ取り,  $A$  ヲ通ル任意ノ弦  $AC$  ト  $A, B, O$  ヲ通ル圓周トノ交點ヲ  $P$  トスルト,  $PB=PC$  デアル。
47. 圓周上ノ二點  $A, B$  = 於ケル切線ノ交點ヲ  $C$  トシ, 直徑  $EF$  ノ  $E$  = 於ケル切線  $ET$  ト  $FA, FC, FB$  トノ交點ヲ夫々  $G, I, H$  トスレバ,  $I$  ハ  $GH$  ノ中點デアル。

48.  $\square ABCD$  ノ内側ニ正三角形  $BCE, CDF$  ヲ作ルトキ,  
 $\triangle AEF$  ハ正三角形デアアル。
49.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle B$  ガ  $\angle C$  ノ2倍デ,  $A$  カラ  $BC$  ヘ引イ  
 タ垂線ノ足ヲ  $D$  トシ,  $BC$  ノ中點ヲ  $E$  トスルト,  $AB=2DE$   
 デアル。

## [10] 線分不等問題

50.  $\triangle ABC$  ノ内接圓ガ  $AB, AC$  ニ切スル點ヲ夫々  $F, E$  ト  
 シ, 之ト同心ナル圓周ガ線分  $AF, CE$  ト交ハル點ヲ夫々  
 $E', F'$  トスレバ  $E'F' > EF$  デアル。
51.  $\triangle ABC$  ノ邊  $AB$  上ノ一點  $D$  カラ  $DE$  ヲ引イテ  $AC$  ト  $E$   
 デ交ハラシメ  $\angle AED$  ヲ  $\angle B$  ニ等シカラシメルトキ, 若シ  
 $AB > AC$  ナレバ  $BE > CD$  デアル。
52. 圓ノ直徑  $AB$  上ノ一點  $C$  カラ  $AB$  ニ垂線  $CD$  ヲ引キ圓  
 周ト  $D$  デ交ハラシメ, 又  $AC, BC$  ヲ對角線トスルニツノ  
 正方形ヲ畫キ, 其ノ  $AB$  ノ同ジ側ニアル頂點ヲ  $E, F$  トス  
 ルト,  $EF$  ハ  $CD$  ヨリモ大デアアル。
53.  $\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  トニ於テ  $\angle A = \angle D, AB + AC = DE + DF,$   
 $AB \sim AC > DE \sim DF$  デアルナレバ,  $BC > EF$  デアル。
54.  $\triangle ABC$  ノ中線  $AD$  上ノ任意ノ點ヲ  $P$  トシ,  $AB > AC$  ナ  
 レバ  $AB + PC > AC + PB$  デアル。
55. 圓ノ弦  $AB$  デ分ケラレタ弧ノ一ツノ二等分點  $C$  ト他

ノ弧上ノ任意ノ點  $D$  トヲ通ル直線  $CD$  上ノ任意ノ點ヲ  
 $E$  トスルト,  $AD$  ト  $BD$  トノ差ハ  $AE$  ト  $BE$  トノ差ヨリ  
 モ小デナイ。

56. 半徑ガ夫々  $a, b$  ( $a > b$  トスル) ナル二圓  $A, B$  ガアル。  
 中心  $A, B$  ヲ結ブ線分ノ中點ヲ  $M$  トシ, 又圓  $A$  ノ周上ノ  
 任意ノ點  $P$  ト圓  $B$  ノ周上ノ任意ノ點  $Q$  トヲ結ブ線分  
 $PQ$  ノ中點ヲ  $N$  トスルト,  $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \geq MN \geq \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$  デアル。
57.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle A > \angle B > \angle C$  ナルトキ,  $\angle A, \angle B, \angle C$  内  
 ノ傍接圓ノ半徑ヲ夫々  $r_a, r_b, r_c$  トスルト,  $r_a > r_b > r_c$  デアル。

## [11] 切線・切圓問題

58. ニツノ圓ガ  $P$  デ外切シ一ツノ直線ガ此ノ二圓ニ  $A, B$   
 デ切スルトキハ  $AB$  ヲ直徑トスル圓ハ此ノ二圓ノ中心  
 ヲ結ブ直線ニ切スル。
59. 圓  $O$  外ノ一點  $C$  カラ此ノ圓ニ引イターツノ切線ノ切  
 點ヲ  $A$  トシ,  $C$  ヲ通り  $O$  ヲ通ラナイ任意ノ割線ト圓周ト  
 ノ交點ヲ  $E, F$  トスル。又  $A$  ヲ通り  $CO$  ト圓内ノ點  $D$  デ交  
 ハル弦ヲ引キ, 若シ  $E, D, O, F$  ガ圓座デアレバ  $AD$  ト圓周  
 トノ交點ハ  $C$  カラ圓  $O$  ニ引イタ他ノ切線ノ切點デアアル。
60. 一ツノ直線  $AB$  ニ垂直ニ  $AB$  ノ同ジ側ニ  $AC, BD$  ヲ  
 引キ  $AB^2 = AC \cdot BD$  ナルヤウニスレバ,  $AC$  及ビ  $BD$  ヲ直徑  
 トスルニツノ圓ハ互ニ相切スル。



61. 圓ノ弦 AB ノ中點 Mヲ通ル弦 CDヲ引キ, Dカラ ABニ平行ニ DEヲ引キ圓周ト Eデ交ハラシメ, CEヲ結ビ ABト Fデ交ハラシメレバ, 三點 E, F, Mヲ通ル圓ハ初メノ圓ニ切スル。
62.  $\triangle ABC$  ノ  $\angle A$  ノ二等分線ヲ ADトスル。今 Dニ於テ BCニ切シ且 Aヲ通ル圓ヲ畫ケバ此ノ圓ハ  $\triangle ABC$  ノ外接圓ニ切スル。

## [12] 多角形ノ面積問題

63. 三角形ノ重心ヲ通ル直線ガ其ノ三角形ノ面積ヲ二等分スルノハドンナ場合カ。
64. 四角形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點ヲ夫々 M, Nトシ, MNト CDトノ交點ヲ Qトスレバ  $\triangle QAB = \frac{1}{2}ABCD$  デアル。
65. 四角形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點ヲ夫々 M, Nトシ, MN上ノ任意ノ點ヲ Pトスレバ  

$$\triangle PAB + \triangle PCD = \triangle PBC + \triangle PAD$$
 デアル。
66. 正方形 ABCDニ於テ  $\triangle ABC$  ノ内心 Oカラ AD, CDヘ夫々垂線 OE, OFヲ引ケバ, 正方形 EOFDノ2倍ハ ABCDニ等シイ。
67. M, Nヲ四角形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點トシ M, Nカラ夫々 BD, ACニ平行線ヲ引キ其ノ交點 Oヲ各邊ノ中點ニ結ブ四直線ハ ABCDヲ四等分スル。

## [13] 比例問題

68.  $\triangle ABC$ ニ於テ Dハ ABノ中點, Eハ ACノ三等分點デ Aニ近イモノトスル。ソシテ CDト BEトノ交點ヲ Pトシテ比  $PB:PE$ ノ値ヲ求メヨ。
69. 一點 Oカラ出ル四ツノ直線 OA, OB, OC, ODガアツテ  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 45^\circ$ トスル。今一ツノ直線ガ之ヲ夫々 A, B, C, Dデ截ツテ且  $AO=DO$ ナルヤウニスルト, ABト CDトハ ADト BCトノ比例中項デアアル。
70. 二點 A, Bヲ通ル三ツノ圓ヲ  $O_1, O_2, O_3$ トシ, Aヲ通ル二直線ト此ノ三圓周トノ交點ヲ夫々  $L_1, L_2, L_3; M_1, M_2, M_3$ トスレバ  $L_1L_2:L_2L_3 = M_1M_2:M_2M_3$ デアアル。
71.  $\triangle ABC$ ノ邊 AB上ニ ABノ中點デナイ任意ノ點 Pヲ取り, Pカラ BCニ平行ニ直線  $PP_1$ ヲ引キ, ACトノ交點ヲ  $P_1$ トスル。次ニ  $P_1$ カラ ABニ平行ニ  $P_1P_2$ ヲ引キ BCトノ交點ヲ  $P_2$ トスル。次ニ又  $P_2$ カラ ACニ平行ニ  $P_2P_3$ ヲ引キ ABトノ交點ヲ  $P_3$ トスル。此ノヤウニ作圖ヲ續ケルナラバ點  $P_1, P_2, P_3, \dots$ ノ中ニ Pト一致スルモノガアルカ。ソシテ其ノ始メノモノハ  $P_1$ カラ第何番目ノ點デアアルカ。
72. 圓ノ内接四角形 ABCDノ對角線ノ交點ヲ Eトスルト  $AB \cdot AD : BC \cdot CD = AE : CE$ デアアル。
73. 直角三角形 ABCノ斜邊 AB上ニ一點 Dヲ取り, 又 AB

ノ延長上ニ一点 E ヲ取り  $\angle BCD = \angle A = \angle BCE$  ナルヤウニスルト、 $AD:BD = EA^2:EC^2$  デアル。

74. AD ハ  $\triangle ABC$  ノ  $\angle A$  ノ二等分線デ DE, DF ガ夫々  $\angle ADB$ ,  $\angle ADC$  ヲ二等分シテ邊 AB, AC ニ夫々 E, F デ交ハレバ  $\triangle BEF : \triangle CEF = BA : CA$  デアル。

75. ニツノ同心圓ガアル。外圓周上ノ一点 A カラ内圓ニ切線 AP, AQ ヲ引キ切點 Q, P ヲ通ル直線 QPR ガ外圓ト交ハル點ヲ R トシ、直線 APB ト外圓トノ交點ヲ B トスレバ  $RA^2:RB^2 = QR:PR$  デアル。

76. P ニ於テ内切スルニツノ圓ガアル。其ノ共通ノ中心線ニ垂直ナルニツノ直線ガ外圓ニ A, B デ、又内圓ニ C, D デ夫々交ハレバ  $PA:PB = PC:PD$  デアル。

#### [14] 面積問題ノ續キ

77. AB ハ圓ノ直徑デ CD ハ之ニ垂直ナル弦デアル。CD 上ニ一点 M ヲ取り AM, BM ガ圓ト再ビ交ハル點ヲ夫々 E, F トスルト  $CE \cdot DF = CF \cdot DE$  デアル。

78. 圓ノ直徑 AB 上ノ一定點 P ヲ通ル任意ノ弦 CPD ヲ引キ弦 AC, AD 又ハ其ノ延長ガ AB ニ垂直ナル弦 GPH 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ M, N トスレバ、PM ト PN トノ包ム矩形ハ常ニ  $PG^2$  ニ等シイ。

79. 中心ガ O デアル圓ノ任意ノ弦 AD 上ニ任意ノ二點 B,

C ヲ取り, OB, OC ヲ結ビ線分 AB, BC, CD, OB, OC ノ間ニ成立ツ關係ヲツノ式デ示セ。

80.  $\triangle ABC$  ニ於テ底 BC ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分及ビ外分スル點ヲ夫々 D 及ビ E トシ、DE ノ中點ヲ M トスルト、 $MA^2 = MC \cdot MB$  デアル。

81. 三角形ノ三頂點カラ互ニ平行ナル直線ヲ引イテ夫々對邊又ハ其ノ延長ト交ハラシメレバ、其ノ交點ヲ頂點トスル三角形ト原ノ三角形トノ面積ノ關係ハドウカ。

#### [15] ぴたごらすノ定理

82. 直角三角形 ABC ノ各邊ヲ一邊トシ其ノ外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ畫キ A カラ BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ H トスレバ、 $\triangle BDH = \triangle ABF$ ,  $\triangle CDH = \triangle CAE$  デアル。

83. 二等邊三角形ノ一邊 AB ニ垂線 CD ヲ引キ D カラ底邊 BC へ垂線 DE ヲ引クト  $AB^2 = PA^2 + PD^2$  デアル。

84.  $\triangle ABC$  ノ邊 BC 上ニ任意ノ點 P ヲ取り  $AB^2 - AP^2 = BP \cdot PC$  ナルトキハ、此ノ三角形ハ下シナ三角形デアルカ。

85. 一ツノ圓ト其ノ周上ノ一点 O ラ中心トスル一ツノ圓トノ交點ヲ B, C トシ、初メノ圓ノ弧 BOC 上ノ任意ノ點ヲ A トスレバ  $AB \cdot AC = OB^2 - OA^2$  デアル。

86. P, Q, R ハ夫々  $\triangle ABC$  ノ三邊 BC, CA, AB 上ノ點デアル。此ノ三點ヲ通ツテ夫々 BC, CA, AB ニ垂直ナル三直

線ガ一點ニ會スルタメニ必要デ十分ナル條件ハ

$$\overline{BP}^2 - \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - \overline{AQ}^2 + \overline{AR}^2 - \overline{BR}^2 = 0$$

デアルコトヲ證明セヨ。

87.  $\triangle ABC$  ノ邊  $BC$  ノ兩側ニ正三角形  $BCD, BCD'$  ヲ作レバ,  
 $\overline{AD}^2 + \overline{AD}'^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$  デアル。

### [16] 定量問題

88. 線分  $AB$  ヲ  $C$  デ分ケテ  $AC, BC$  ノ上ニ  $AB$  ノ同ジ側ニ  
 正三角形  $PAC, QBC$  ヲ作レバ,  $AQ, BP$  ノ交角ノ大サハ一  
 定デアアル。
89.  $\triangle ABC$  ノ底  $BC$  ト頂角  $A$  トガ一定デアルトキ,  $B, C$  カ  
 ラ對邊ヘ引イタ垂線ノ足ヲ  $E, F$  トスレバ,  $EF$  ノ長サハ  
 一定デアアル。
90.  $A, B$  ラ一ツノ圓周上ノ二定點トシ,  $O$  ラ其ノ圓内ノ一  
 點トスル。  $AO, BO$  ヲ結ビ之ヲ延長シテ此ノ圓周ト  $P$  及  
 ビ  $Q$  デ交ハラシメルトキ,  $PQ$  ノ長サヲ常ニ一定ナルヤ  
 ウニスレバ,  $O$  點ノ位置ニ關セズ  $\triangle OPQ$  ノ外接圓ノ大サ  
 ハ一定デアアル。
91. 對角線ノ長サト其ノ夾角トガ一定デアレバ, 此ノ四角  
 形ノ面積ハ一定デアアル。
92. 平行四邊形内ノ任意ノ點カラ各邊ヘ引イタ垂線ノ足  
 ヲ結ビテ出來ル四角形ノ面積ハ一定デアアル。

93. 定線分ヲ内分シ其ノ各部分ノ上ニ正三角形ヲ作レバ,  
 其ノ高サノ和ハ一定ノ長サデアアル。外分スル場合ハド  
 ウカ。
94. 定マツタ矩形ニ内接スル平行四邊形ノ各邊ヲ其ノ矩  
 形ノ對角線ニ平行ナラシメルト, 此ノ平行四邊形ノ周ハ  
 一定ノ長サデアアル。
95. 半圓ノ直徑  $AB$  上ニ中心  $O$  ノ兩側ニ  $O$  カラ等シイ距  
 離ニ  $C, D$  ヲ取り,  $C, D$  ヲ通ツテ任意ノ平行線  $CP, DQ$  ヲ  
 引キ半圓周ト  $P, Q$  デ交ハラシメレバ, 矩形  $CP \cdot DQ$  ノ面積  
 ハ一定デアアル。
96.  $A$  ラ半徑ガ  $r$  デアル圓周上ノ任意ノ點トシ,  $O$  ラ其ノ  
 中心トスル。今  $P$  ラ圓外ノ一定點トシ,  $OP$  上ニ一點  $Q$   
 ヲ取り  $OP \cdot OQ = r^2$  ナルヤウニスルト, 比  $AP : AQ$  ハ一定デ  
 アル。
97. 相交ハル二圓  $O, O'$  ニ於テ其ノ交點ノ一ツヲ  $A$  トシ,  
 任意ノ割線ヲ引キ, 圓  $O$  ト  $B, C$  デ, 圓  $O'$  ト  $D, E$  デ交ハラシ  
 メルト比  $AB \cdot AC : AD \cdot AE$  ハ一定デアアル。
98. 正方形  $ABCD$  ニ外接スル圓ニ於テ弧  $AD$  上ノ任意ノ  
 一點ヲ  $P$  トスレバ, 比  $(PC+PA) : PB$  及ビ  $(PC-PA) : PD$  ハ  
 各ハ一定デアアル。
99.  $AB$  ハ定圓  $O$  ノ定直徑デアアル。  $AB$  ニ平行ナル動弦ヲ  
 $PQ$  トスレバ,  $\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$  ノ値ハ一定デアアル。

100. 圓ノ一ツノ直徑上ニ中心カラ等距離ニアル二點ヲ A, B トシ, Bヲ通ル任意ノ弦ヲ CD トスレバ,  $\triangle ACD$  ノ三邊ノ平方ノ和ハ一定デアアル。

## [17] 定點通過問題

101. 定角  $O$  ノ二邊上ニ定點 A, B ガアル。OA, OB ノ延長上ニ夫々點 P, Q ヲ取り  $AP \cdot BQ = OA \cdot OB$  ナルヤウニスルト, 直線 PQ ハ常ニ OA, OB ヲ二隣邊トスル平行四邊形ノ一頂點ヲ通ル。
102. 定圓外ノ一定點 A カラ圓周マデ任意ノ線分 AB ヲ引キ, B カラ之ニ垂直ナル弦 BC ヲ引ケバ, C ヲ通ツテ BC ニ垂直ナル直線ハ一ツノ定點ヲ通ル。
103. 定圓  $O$  外ニアル定直線 XY 上ノ任意ノ點カラ此ノ圓ニ二切線ヲ引ケバ, 其ノ切點ヲ結ブ直線ト  $O$  カラ XY へ引イタ垂線トノ交點ハ一ツノ定點デアアル。
104. A ハ定圓周上ノ定點, B ハ定直線 X 上ノ定點デアアル。A, B ヲ通ル任意ノ圓ガ X ト交ハル點ヲ C トシ, 定圓周ト交ハル點ヲ D トスレバ, 直線 CD ハ或定點ヲ通ル。
105. 一定點 P カラ定圓  $O$  ニ任意ノ割線ヲ引キ圓トノ交點ヲ A, B トシ, A, B ニ於ケル此ノ圓ノ切線ノ交點ヲ C トスレバ三點 A, B, C ヲ通ル圓周ハ必ズ一定點ヲ通ル。
106. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 AB, AC ノ二等分點ヲ夫々

M, N トシ弧 BC 上ノ任意ノ點ヲ P トスル。今 PM, PN ガ邊 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスルト, DE ハ或定點ヲ通過スル。

## [18] 定圓切線問題

107.  $O, O'$  ヲ中心トスル二ツノ定圓ノ交點ヲ A, B トシ圓  $O$  ノ周上ノ任意ノ點 P カラ引イタ直線 PA, PB ガ圓  $O'$  ト交ハル點ヲ C, D トスレバ, 弦 CD ガ圓  $O'$  ノ直徑デナイナラバ常ニ或一ツノ定圓ニ切スル。
108. 定圓ニ内接スル  $\triangle ABC$  ノ頂點 A ガ定點デ二邊 AB, AC ノ積ガ一定デアレバ, 底 BC ハ他ノ一定圓ニ切スル。
109. 平行線 AB, CD ガアル。今 AB 上ノ定點 T デ AB ニ切スル任意ノ圓ヲ畫イテ CD ト交ハル點ヲ X, Y トスレバ, X, Y ニ於ケル此ノ圓ノ切線ハ皆一ツノ定圓ニ切スル。
110. 平行線甲乙ト甲上ニ一點 A トガ與ヘラレタトキ, 甲乙ノ上ニ夫々 P, Q ヲ取り  $\angle QPA = 2\angle QAP$  ナルヤウニスレバ, 直線 PQ ハ或一ツノ定圓ニ切スル。 判學期夏期

## 第二 軌跡問題

## [1] 動點定線上問題

111.  $O$  ヲ中心トスル圓周上ノ一定點 A カラ任意ノ弦 AP

ヲ引キ、次  $A =$  於ケル切線上  $= AP =$  等シク  $AT$  ヲ取  
リ、 $TP$  ト  $AO$  トノ交點ヲ  $Q$  トスルト、 $AP$  ノ移動ニ伴ツ  
テ  $Q$  點ハドシテ範圍ニ移動スルカ。

112. 弧  $AB$  上ノ定點  $C$  ヲ通ツテ任意ノ直線ヲ引キ、弦  $AB$   
及ビ其ノ弧又ハ共軌弧ト夫々  $D, E$  デ交ハラシメレバ  
 $\triangle ADE$  ノ外接圓ノ中心ハ一定直線ノ上ニアル。

113.  $XX', YY'$  ハ  $A =$  於テ相交ハル二直線デアル。此ノ二  
直線上ニ夫々中心ヲ有シ  $A$  ヲ通ル任意ノ二ツノ圓周ヲ  
畫ケバ、其ノ共通切線ノ交點ハ常ニ二ツノ定直線ノ中ノ  
一ツノ上ニアル。

114. 一定點  $O$  カラ一定圓ニ任意ノ割線ヲ引キ、其ノ交點ヲ  
 $P, Q$  トシ、弦  $PQ$  上ニ一ノ點  $R$  ヲ取り  $OP:OQ$  ガ  $PR:RQ =$   
等シイヤウニスレバ、 $R$  ハ常ニ一定直線ノ上ニアル。

115.  $AB$  ハ一定圓  $O$  ノ定弦デ、 $AC$  ハ  $A$  カラ出ル此ノ圓ノ任  
意ノ弦デアル。然ラバ  $AB, AC$  ヲ二隣邊トスル平行四  
邊形ノ對角線ノ交點  $P$  ハ一ツノ定圓ノ周上ニアル。

116. 直角三角形ノ直角ノ頂點ハ定點デ斜邊ノ兩端ガ一ツ  
ノ定圓ノ周上ヲ動クトキハ、此ノ三角形ノ外心ハ他ノ一  
定圓ノ周上ヲ動ク。

117.  $PQ$  ヲ定圓  $O$  ノ定弦  $AB$  デ二等分セラレル任意ノ弦  
トスレバ、 $P, Q$  デ圓  $O$  ニ切スル二切線ノ交點ハ常ニ一  
ツノ定圓ノ周上ニアル。

## [2] 直線軌跡

118. 二等邊三角形  $ABC$  ノ頂點  $A$  ヲ中心トスル任意ノ圓ニ  
底  $BC$  ノ兩端カラ引イタ切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

119. 直角  $AOB$  内ノ一ノ點  $P$  カラ  $OA, OB$  ニ引イタ垂線ノ足  
ヲ  $C$  及ビ  $D$  トスルトキ、 $PC+2PD$  ガ定線分  $L =$  等シイヤ  
ウニ  $P$  點ヲ取り  $P$  ノ軌跡ヲ求メヨ。

120.  $\triangle ABC$  ノ頂點  $A$  ト對邊  $BC$  上ノ動點  $D$  トヲ結ビ其ノ  
延長上ニ一ノ點  $P$  ヲ取り  $\triangle ACD:\triangle BPD = \overline{CD}^2:\overline{BD}^2$  ナルヤウ  
ニスルトキ、 $P$  ノ軌跡ヲ求メヨ。

121. 直交スル二定直線  $甲乙$  ガアツテ、 $A, B$  ヲ  $甲$  ノ上ノ二  
ツノ定點、 $P$  ヲ  $乙$  ノ上ノ任意ノ點トスルトキ、 $A, B =$  於テ  
夫々  $PA, PB =$  垂直ナル二直線ノ交點  $Q$  ノ軌跡ハ  $甲 =$  直  
交スル一ツノ直線デアル。

122. 定圓内ノ定點ヲ通ル弦ノ兩端ニ於ケル此ノ圓ノ切線  
ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

## [3] 圓軌跡弧軌跡

123. 定圓ノ定直徑  $AB$  ノ一端  $A =$  於テ切線  $AT$  ヲ引キ、次  
ニ  $B$  カラ任意ノ直線  $BQT$  ヲ引イテ圓周及ビ切線  $AT$  ト  
ノ交點ヲ夫々  $Q$  及ビ  $T$  トスル。今  $QT$  上ニ  $P$  點ヲ取り、 $P$   
ト  $AT$  トノ距離ヲ  $PQ =$  等シクスルトキ  $P$  ノ軌跡ヲ求  
メヨ。

124. 與ヘラレタ圓周上ニ中心ヲ置キ一定ノ半徑ヲ有スル圓ヲ作り之ニ一定ノ方向ヲ有スル切線ヲ引クトキ其ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。
- 125. 定圓ノ任意ノ弦ヲ分ケテ其ノ二部分ノ包ム矩形ガ定量  $K^2$ ニ等シヤウナ分點ノ軌跡ヲ求メヨ。
- ✓126. 定直線  $XY$  ト其ノ上ニナイ定點  $O$  ガアル。今或圖形ノ上ノ任意ノ點ヲ  $P$  トシ、 $OP$  又ハ其ノ延長上ニ  $Q$  點ヲ取り、矩形  $OP \cdot OQ$  ノ面積ヲ一定ナラシメルトキ、 $Q$  ノ軌跡ガ  $XY$  デアレバ  $P$  ノアル圖形ハドンナ圖形デアアルカ。
- ✓127. 定圓周上ノ定點  $A$  カラ出ル此ノ圓ノ弦  $AB$  ノ中點ニ垂線  $MC$  ヲ立テ  $MA=MC$  ナラシメルトキ  $C$  ノ軌跡ヲ求メヨ。
128.  $AB$  ヲ定圓ノ定弦トシ、 $PQ$  ヲ長サダケガ一定デアアル此ノ圓ノ移動スル弦トスルトキ、 $AP$  ト  $BQ$  トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。
- 129.  $\triangle ABC$  ノ底  $BC$  ヲ固定シ頂角  $A$  ノ大サガ一定デアアルトキ其ノ重心  $G$  ノ軌跡ヲ求メヨ。
- ✓130.  $\angle XOY$  ヲ定マツタ銳角トシ、二邊  $OX, OY$  上ニ夫々定點  $A, B$  ガアツテ  $OA=OB$  デアル。今此ノ角ノ内部ニ  $P$  點ヲ取り  $\angle OPA=\angle OPB$  デアルヤウニスル  $P$  ノ軌跡ヲ求メヨ。
131.  $\triangle ABC$  ヲ正三角形トシ、 $P$  ヲ動點トスル。今  $P$  ガ二角

- $\angle APB, \angle APC$  ガ相等シヤウニ動クトキ  $P$  ノ軌跡ヲ求メヨ。
132. 矩形  $ABCD$  ノ一組ノ對邊  $AB, CD$  ニ對スル二角  $\angle APB, \angle DPC$  ガ相等シヤウニ動クトキ  $P$  點ノ軌跡ヲ求メヨ。  
又  $ABCD$  ガ正方形デアレバドウカ。
- ✓133. 與ヘラレタ圓ノ任意ノ弦  $AB$  ノ延長上ニ點  $P$  ヲ取り、 $AB=BP$  ナルヤウニ  $P$  點ヲ取レバ  $P$  點ハドンナ範圍ノ内ニアルカ。
- ✓134. 相交ハル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ定線分  $L$  ヨリモ小デアアル點ノ存在スル範圍ヲ定メヨ。

### 第三作圖題

#### [1] 點ヲ求メル問題

135. 與ヘラレタ線分  $AB$  上ノ一定點  $O$  ヲ通ル直線  $CD$  上ニ一~~ニ~~點  $P$  ヲ求メ  $PA:PB=AO:BO$  ナルヤウニセヨ。
- ✓136. 圓  $O$  ト直線  $X$  ト  $X$  上ノ一~~ニ~~點  $A$  トガ與ヘラレタトキ、 $X$  上ニ一~~ニ~~點  $P$  ヲ求メ  $P$  カラ圓  $O$  ニ引イタ切線ガ  $AP$  ニ等シヤウニセヨ。
- ✓137.  $XX', YY'$  ヲ二ツノ與ヘラレタ平行線トシ、 $A, B$  ヲ  $XX'$  上ニ對シ  $YY'$  ト反對ノ側ニ與ヘラレタ點トスル。  $YY'$  上ニ一~~ニ~~點  $C$  ヲ求メ  $AC, BC$  ガ  $XX'$  カラ截リ取ル線分ノ長サヲ與ヘラレタ長サ  $l$  ニ等シクセヨ。

138.  $\triangle ABC$  の頂点  $A$  を通つて  $BC$  に平行に引いた直線上に点  $D$  を定め  $AC$  と  $BD$  との交点を  $E$  とし、 $\triangle ABE$  が  $\triangle AED$  の 2 倍であるやうにせよ。
139. 三點  $A, B, C$  が一定直線上に此の順に與へられたとき、此の直線上に一點  $O$  を求め、 $OB$  が  $OA, OC$  の比例中項であるやうにせよ。
140. 與へられた角内に一定點  $P$  がアル。此の角の一辺上に一點  $A$  を求め、 $A$  と他ノ邊トノ距離ガ  $AP$  に等しいやうにせよ。

## [2] 圓ヲ畫ク問題

141. 與へられた直線上に中心ヲ有シ與へられた一點ヲ通り且與へられた圓周ヲ二等分スル圓周ヲ畫ケ。
142. ニツノ與へられた點  $A, B$  を通りニツノ與へられた圓  $O$  を  $G, H$  で截ル圓周ヲ畫キ、弦  $GH$  が圓  $O$  の直徑トナルやうにせよ。
143. 所設ノ圓ノ中心ヲ通ル一定直線上に中心ヲ置キ其ノ圓ト直交シ且一定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。  
 [注意] 交點ニ於ケル二圓ノ切線ガ直交スルトキ其ノ二圓ハ直交スルトイフ。
144. 正三角形  $ABC$  の二邊ニツノ切シ且互ニ外切スル三ツノ等圓ヲ畫ケ。

## [3] 直線ヲ引ク問題

145.  $AB, CD$  は平行線で  $P$  は  $AB$  上ノ一定點である。今他ノ一定點  $Q$  を通り  $AB, CD$  に夫々  $X, Y$  で交ハル直線ヲ引キ  $XY = XP$  であるやうにせよ。
146. 與へられた點  $P$  を通ル直線ヲ引キ、與へられた角  $XOY$  ノ二邊ヲ夫々  $A, B$  で截リ  $OA + OB$  を與へられた長サニ等しいやうにせよ。又矩形  $PA \cdot PB$  が與へられた正方形ニ等しいやうにせよ。
147. 銳角  $AOC$  と其ノ頂點  $O$  を通り角内ニアル直線  $OB$  が與へられたとき、與へられた長サ  $l$  に等しい線分  $ABC$  を引キ、 $OA, OB, OC$  と夫々  $A, B, C$  で交ハラシメ、 $AB = BC$  ナルやうにせよ。
148. 一定點  $P$  を通つて二ツノ直線ヲ引キ三ツノ半直線  $OX, OY, OZ$  と夫々  $A, B, C$  で交ハラシメ  $\triangle OAB = \triangle OBC$  ナルやうにせよ。
149. 或紙上ニ畫カれた二直線  $AB, CD$  がアル。此ノ二直線ハ平行デナク又紙上デハ交ハラナイモノである。今紙上ノ一定點  $P$  を通り  $AB, CD$  ノ交點ヲ通ルベキ直線ヲ引ケ。
150. 一定直線  $XY$  ノ兩側ニ二ツノ一定點  $A, B$  がアル。今  $XY$  上ニ長サガ與へられた線分  $PQ$  を置キ  $AP$  と  $BQ$  とガ平行であるやうにせよ。

151. 定圓内ノ定點 Pヲ通ル弦 APBヲ引キ AP-PBヲ與ヘラレク長サニ等シクセヨ。

又  $AP=2PB$  ナルヤウニセヨ。

152. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツ Aヲ通ツテ一直線ヲ引キ各圓トノ交點ヲ夫々 P, Qトシ矩形 AP·AQガ與ヘラレク正方形  $K^2$ ニ等シイヤウニセヨ。

153. 一ツノ直線 Xト一ツノ圓 Oトガ與ヘラレ、一ツノ直線ヲ引キ Xト Aデ、圓 Oト B, Cデ交ハラシメ、AB, ACヲ夫夫與ヘラレク長サ M, Nニ等シクセヨ。

154. 與ヘラレク線分 ABヲ單位トシテ測ツタトキ長サガ  $\sqrt{3}$ デ表ハサレル線分ヲ作圖セヨ。

#### [4] 三角形ノ作圖問題

155. 一ツツ頂點ヲ置ク三ツノ同心圓周ガ與ヘラレテ正三角形ヲ作レ。

156. 周ト高サトヲ知ツテ二等邊三角形ヲ作レ。

157. 頂角ト高サト周トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

158. 頂角ト其ノ一邊ヘノ中線ノ長サト面積  $(2K^2)$ トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

159.  $\triangle ABC, \triangle DEF$ ヲ二ツノ與ヘラレク三角形トシ、 $\triangle ABC$ ニ相似デ  $\triangle DEF$ ニ等積デアル三角形ヲ作レ。

160. 二邊  $a, b$ ト  $a$ ノ對角 Aトガ與ヘラレクトキ三角形ヲ

作圖シテ二ツノ解答ヲ得タトキ、此ノ二ツノ三角形ノ第三邊ヲ  $c_1, c_2$ トスレバ、 $b^2 = a^2 + c_1 c_2$ デアルコトヲ證明セヨ。

#### [5] 多角形ノ作圖問題

161. 二ツノ定メラレク平行線間ノ定點ヲ一頂點トシ、他ノ二頂點ヲ一ツツ其ノ平行線上ニ置ク正方形ヲ作レ。

162. 周ガ與ヘラレク矩形ヲ與ヘラレク圓ニ内接センメヨ。

163. 與ヘラレク圓ニ外接シ、與ヘラレク長サノ邊ヲ有スル菱形ヲ作レ。

164. 兩對角線ノ長サト其ノ交角ノ大サト一組ノ隣邊ノ和トヲ知ツテ梯形ヲ作レ。

165. 外接圓ノ半徑、兩底ノ差及ビ高サトヲ知ツテ等脚梯形ヲ作レ。

166. 定圓外ニ二定點 A, Bガアル。此ノ圓周上ニ二點 C, Dヲ求メ四邊形 ACDBガ平行四邊形デアルヤウニセヨ。

167. AB, ADノ長サ, BC:CDノ値及ビ  $\angle D$ ノ大サト、 $\triangle ACD$ ノ面積ガ與ヘラレクトキ四邊形 ABCDヲ作レ。

#### [6] 面積ノ等積變形・分割問題

168. 與ヘラレク平行四邊形ヲ頂角ガ與ヘラレク角ニ等シイ二等邊三角形ニ變化セヨ。



169. 與ヘラレタ多角形ヲ等積ナル正三角形ニ變形セヨ。
170. 與ヘラレタ四角形 ABCD ノ邊 AB 上ニ之ト等積ナル菱形ヲ作レ。
171. 與ヘラレタ直線ニ平行ナル直線デ與ヘラレタ三角形ヲ二等分セヨ。
172. 一ツノ邊ニ平行ナル二直線デ與ヘラレタ三角形ヲ三部分ニ分ケテ其ノ比ヲ與ヘラレタ比  $l:m:n$  ニ等シイヤウニセヨ。
173. 與ヘラレタ圓ヲ其ノ同心圓周デ  $l, m, n$  ニ比例スル三部分ニ分ケヨ。

## [7] 極大極小問題

174. 定圓ノ周上ノ一點カラ其ノ圓外ニアル一定圓ニ引イタ二ツノ切線ノ交角ガ最大及ビ最小ナル點ノ位置ヲ定メヨ。
175. 二定點 A, B ヲ一定直線又ハ一定圓周上ノ一點 P ニ結び  $\angle APB$  ヲ最大ナラシメル P ノ位置ヲ求メヨ。
176. 一ツノ圓周ト之ニ出會ハナイ一ツノ直線ガ與ヘラレタトキ、此ノ各ノ上ニ端ヲ有シ、他ノ與ヘラレタ直線ニ平行ナル最小線分ヲ引ケ。
177. 一ツノ平板上ニ二個ノ極メテ細イ留針 P, Q ヲ固定シ、三角定木 ABC ヲ其ノ二邊 AB, AC ガ常ニ此ノ留針ニ觸レ

ルヤウニ其ノ板上ニ動カストキ定木ノ一尖端 A カラ P 及ビ Q ニ至ル長サノ和ガ最大トナル A 點ノ位置ヲ求メヨ。

178. 與ヘラレタ底 AB 上ニ立ツ  $\triangle ABC$  ノ二邊ノ和  $AC+BC$  ガ一定デアレバ、 $AC=BC$  ナルトキガ此ノ三角形ノ面積ハ最大デアル。
179. 同底等高ノ三角形ノ中デ周ノ最小デアルノハ二等邊三角形デアル。
180. 一ツノ與ヘラレタ角 XOY ノ二邊 OX, OY ノ上ニ夫々 A, B ヲ取り  $OA+OB$  ガ一定デアルヤウニスレバ、 $OA=OB$  ナルトキニ

1 三角 OAB ノ面積ハ最大デアル。

2 線分 AB ハ最小デアル。

3 圓 OAB ハ最小デアル。

181. A ハ定圓 O ノ周上ノ定點デ XY ハ定弦デアル。A カラ弦 APQ ヲ引キ XY ト P デ交ハラシメ矩形 AP-PQ ガ最大デアルヤウニセヨ。
182. 一ツノ定圓ノ外ニ二定點 A, B ガアル。此ノ圓周上ヲ弦 PQ ノ長サガ一定デアルヤウニ動ク二點 P, Q ガアルトキ、PQ ガドンナ位置ニアルトキ  $\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2$  ガ最大又ハ最小デアルカ。

## 第四 計算問題

183.  $\triangle ABC$  ノ二邊  $BC, CA$  上ニ夫々點  $P, Q$  ヲ  $BP:PC=m:n$ ,  
 $CQ:QA=p:q$  ナルヤウニ取り,  $AP, BQ$  ノ交點ヲ  $R$  トシ, 比  
 $AR:RP$  ノ値ヲ  $m, n, p, q$  デ表ハセ。
184. 一邊ガ  $a$  デアル正三角形  $ABC$  ノ二邊  $AB, AC$  ノ中點  
ヲ結ブ線分上ノ任意ノ點ヲ  $D$  トシ,  $BD$  ノ延長ト邊  $AC$   
トノ交點及ビ  $CD$  ノ延長ト  $AB$  トノ交點ヲ夫々  $E, F$  ト  
スル。  $CE=x, BF=y$  トシテ  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  ノ値ヲ求メヨ。
185. 四邊形  $ABCD$  ノ邊  $AB, BC, CD, DA$  上ニ夫々  $P, Q, R, S$   
ヲ取り  $\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QB} = \frac{CR}{RD} = \frac{AS}{SD} = \frac{m}{n}$  ナラシメルトキ  $PQRS$   
ト  $ABCD$  トノ比ヲ求メヨ。
186.  $\triangle ABC$  ノ三邊ヲ  $a, b, c$  トシ各角ノ二等分線ノ長サヲ  
 $a, b, c$  デ表ハセ。
187. 兩底ガ  $a, b$ , 高サガ  $h$  デアル梯形ヲ底ニ平行シテ二等  
分スル線分ノ長サヲ計算セヨ。
188.  $AB$  ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ  $A$  及ビ中心  $C$  カラ引イ  
タ平行線  $AD, CE$  ガ半圓周ト交ハル點ヲ夫々  $D$  及ビ  $E$   
トスル。今梯形  $ADEC$  ノ面積ガ  $\triangle BED$  ノ2倍ナルトキ  
 $\angle BAD$  ノ大サヲ求メヨ。
189. 半徑  $10\text{ cm}$  ノ圓周ヲ  $3:4:5$  ニ分ケル點ヲ  $A, B, C$  トシ  
テ  $\triangle ABC$  ノ面積ヲ求メヨ。

190. 三ツノ圓  $O, P, Q$  ガアル, 其ノ二ツツツノ共通内切線及  
ビ共通外切線ノ長サガ  $P$  ト  $Q$  トデハ夫々  $4\text{ cm}$  ト  $30\text{ cm}$ ,  
 $Q$  ト  $O$  トデハ夫々  $6\text{ cm}$  ト  $40\text{ cm}$ ,  $O$  ト  $P$  トデハ夫々  $10\text{ cm}$   
ト  $36\text{ cm}$  デアル。各圓ノ半徑ヲ求メヨ。
191. 同ジ圓ニ内接外接スル同邊數ノ二ツノ正多角形ガア  
ル。其ノ面積ノ比ハ  $3:4$  デアル。邊數ヲ求メヨ。
192. 圓周率ヲ  $\pi$  トスルト  $3 < \pi < 4$  デアルコトヲ證明セヨ。
193. 半徑  $15\text{ cm}$  ト  $5\text{ cm}$  トノ二ツノ丸太ヲ並ベテ縛ルニ要  
スル針金ノ一廻リ分ノ長サヲ計算セヨ。但シ圓周率ハ  
 $\frac{22}{7}$  トセヨ。
194. 半徑  $a$ , 中心角  $120^\circ$  ノ扇形ニ内接スル圓ノ半徑ヲ計算  
セヨ。
195. 一邊ガ  $a$  デアル正三角形ニ四ツノ等圓ヲ二ツツツ相  
切スルヤウニ内接スルトキニ其ノ半徑ヲ求メヨ。
196. 一定三角形ガ一定直線ノ上ヲ轉ツテ一廻轉スルマデ  
ニ其ノ外心ノ畫ク三ツノ圓弧ノ長サノ和ハ其ノ三角形  
ノ外接圓ノ周ニ等シイ。
197. 直角三角形  $ABC$  ニ内接圓ヲ畫キ, 之ニ外切シ  $\angle C$  ノ二  
邊ニ切スル圓ヲ畫キ, 更ニ其ノ圓ニ外切シ  $\angle C$  ノ二邊ニ  
切スル圓ヲ畫キ順次カヤウニ  $C$  ノ方ニ無數ノ圓ヲ畫ク  
トキ, 其ノ直徑ノ和ヲ求メヨ。但シ邊  $AB$  ハ最短デ  $BC,$   
 $CA$  ハ順次  $3\text{ cm}$  ツツ長イトスル。

## 第五 三角法問題

198. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

$$\text{1} \quad \tan A \sin A + \cos A = \sec A \quad \text{2} \quad \frac{1}{1-\sin A} + \frac{1}{1+\sin A} = 2\sec^2 A$$

199. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)$$

200. 角  $A, B$  ノ共ニ正ノ鋭角トシ,  $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ナルトキ  $\cos(A+B)$  ノ値ヲ求メヨ。

201.  $\sin 18^\circ, \cos 18^\circ, \sin 36^\circ, \cos 36^\circ$  ノ値ヲ求メヨ。

202.  $\cos 57^\circ + \cos 25^\circ - \sin 34^\circ$  ノ積ノ形ニ直セ。

203.  $x, y, z$  ガ等差級數デアレバ

$$\frac{\tan y}{\tan(y-z)} = \frac{\sin x + \sin z}{\sin x - \sin z} = \frac{\tan \frac{1}{2}(x+z)}{\tan \frac{1}{2}(x-z)}$$

デアルコトヲ證明セヨ。

204.  $3 \tan \theta = 1$  トシテ  $2 \cos 2\theta - \sin 2\theta$  ノ値ヲ求メヨ。

205.  $\frac{\cos 3\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin 3\theta}{\cos \theta} = \cot \theta - \tan \theta$  ノ證明セヨ。

206.  $A+B+C=180^\circ$  ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

207.  $x^2 + 6x + 7 = 0$  ノ二根ヲ  $\tan \alpha, \tan \beta$  トシテ,  $\alpha + \beta$  ノ値ヲ求メヨ。但シ  $\alpha, \beta$  ハ共ニ  $180^\circ$  ヨリモ小サイ正角トスル。

208. 次ノ無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。

$$a \sin \theta, a \sin \theta \cos \theta, a \sin \theta \cos^2 \theta, \dots$$

209.  $0^\circ < A < 45^\circ$  ナルトキハ

$$\frac{\sin(A+B) - 4 \sin A + \sin(A-B)}{\cos(A+B) - 4 \cos A + \cos(A-B)}$$

ノ値ハ 0 ト 1 トノ間ニアルコトヲ證明セヨ。

210. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\text{1} \quad \cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0 \quad (0^\circ < x < 360^\circ \text{ トスル})$$

$$\text{2} \quad 4 \cos 2\theta + 3 \tan^2 \theta = 3 \quad (90^\circ < \theta < 270^\circ \text{ トスル})$$

$$\text{3} \quad \sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0^\circ < x < 180^\circ \text{ トスル})$$

211.  $\triangle ABC$  ニ於テ次ノ式ヲ證明セヨ。

$$a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0$$

212.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $A$  カラ  $BC$  へ引イタ垂線ノ長サヲ  $a$  ト

$\angle B$  ト  $\angle C$  トデ表ハセ。

213.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $a, b, c$  ガ等差級數デアレバ,  $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2} = 3$

デアルコトヲ證明セヨ。

214. 半径ガ夫々  $2\text{cm}, 4\text{cm}, 6\text{cm}$  デアル三圓ガ互ニ外切スル

トキ, 三ツノ切點ヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

215.  $a = 20\sqrt{3}, b = 60, A = 30^\circ$  ナルトキ三角形ヲ解ケ。

216. 直線狀ノ道路ヲ進ム人ガアル。此ノ道路上ノ一點  $A$

ニ於テ道路ト  $30^\circ$  ノナス方向ニ二物體  $P, Q$  ヲ認メ, ソレカ

ラ  $1\text{km}$  進ンデ  $B$  點ニ至リココカラ再ビ  $P, Q$  ヲ望ンデ

$\angle PBQ = 60^\circ$  ナルコトヲ知ツタ。ソシテ此ノ角度ハ此ノ

人ガ  $P, Q$  ヲ見込ム角ノ中ノ最大ナモノデアアル。  $P, Q$  ノ

距離ヲ求メヨ。

217. 市街電車ト高架電車トガアツテ、其ノ軌道ハ夫々高サノ差ガ  $5m$  デアルニツノ水平面上ニアル直線デ且  $60^\circ$  ノ角ヲナス。ソシテ市街電車ノ速サハ毎秒  $4m$ 、高架電車ノ速サハ毎秒  $10m$  デアル。然ラバ兩電車ガ同時ニ交叉點ヲ通過シテカラ  $t$  秒後ニ於ケル兩電車ノ距離ハ幾米デアルカ。

### 第六 立體幾何學問題

218. 二平面ガ交ハルトキ其ノ上ノ一直線ガ他ノ面ノ上ノ其ノ射影トナス銳角ハ其ノ直線ガ兩平面ノ交線ニ垂直デアルトキ最大トナル。
219. 教室ノ床ノ平面ガ壁ノ面ト垂直デアルカドウカラ知ルニハドウスレバヨイカ。
220. 相交ハル二平面上ニ各一ツツツ定點  $P, Q$  ガアル。今交線上ニ一點  $R$  ヲ定メテ  $PR+QR$  ガ最小ナルヤウニスルニハ  $R$  ノ位置ヲドコニスレバヨイカ。
221. 直角三角形ノ直角ノ一邊ガ一平面ニ平行デアレバ、此ノ平面上ニ投ジタ其ノ正射影モ亦直角三角形デアル。
222. 四面體ノ各頂點ヲ夫々其ノ對面ノ重心ニ結ブ四ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。
223. 一稜ノ長サガ  $a$  糰デアル正四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ線分ハ此ノ二稜ニ垂直デアルコトヲ證明シ、且其ノ長

サヲ求メヨ。

224. 四面體  $ABCD$  = 於テ面  $BCD$  内ニ一點  $P$  ヲ取レバ  
 $\angle BAC + \angle BAD > \angle PAC + \angle PAD$  デアル。
225. 四面體  $O-ABC$  = 於テ  $C$  ヲ通ル平面  $CDE$  ヲ作り稜  $OA, OB$  ヲ夫々  $D, E$  デ截ルトキ、四面體  $O-ABC$  ト  $O-CDE$  トノ比ヲ求メヨ。
226. 正六角錐ガアツテ、其ノ底ノ一邊ノ長サハ  $30cm$  デ、側稜ト高サトハ  $30^\circ$  ノ角ヲナス。此ノ角錐ノ體積ヲ求メヨ。
227. 角錐臺ノ體積ハ兩底ト其ノ比例中項トノ和ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。
228. 高サガ  $20cm$  ノ直圓錐ト底ノ半徑ガ  $10cm$  ノ直圓臺ガアツテ、此ノ兩者ハ等積デ且側面積ガ相等シイ。然ラバ此ノ直圓錐ノ底ノ半徑ト直圓臺ノ高サトハ各幾ラカ。
229. 直徑  $4cm$  ノ球ヲ一邊  $6cm$  ノ正三角形ノ三邊デ支ヘタトキ、球ノ最高點ト此ノ三角形ノ面トノ距離ヲ求メヨ。
230. 半徑  $r$  ノ球ニ内接スル直圓錐ノ側面積ヲ其ノ底面積ノ  $2$  倍ニ等シクスルトキ、其ノ高サヲ求メヨ。

## 計算問題ノ答

### 問題 5 [108—110 頁]

4. 1:3:5:7:9      8. 2:7      9. 3:2

### 問題 6 [120—121 頁]

4.  $x^2+y^2$       5.  $x = \sin A + \cos A, y = \cos A - \sin A$

### 問題 7 [128—129 頁]

2. **1**  $4 \cos 4A \cos 2A \cos A$       **2** 0  
 3. **1**  $\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$   
**2**  $\cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \cos B \sin C \sin A - \cos C \sin A \sin B$   
**3**  $\frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}$   
 5.  $\frac{h \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$  米      6.  $20\sqrt{3}$  米

### 問題 8 [137—138 頁]

2. 直角三角形      3.  $120^\circ$       4. 0.447

### 問題 9 [146—146 頁]

1. **1**  $A = 60^\circ 10', b = 10.67, c = 10.51$       **2**  $A = 57^\circ 20', a = 406.8, c = 312.8$   
**3**  $B = 67^\circ 27', C = 57^\circ 21', a = 18.52$       **4**  $A = 35^\circ 18', B = 76^\circ 18', C = 68^\circ 24'$   
 2.  $BC = \sqrt{2}c, CA = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}c$       3. 面積 2469, 内接圓ノ半徑 21.4,  
 傍接圓ノ半徑 89.1, 52.5, 60.8, 外接圓ノ半徑 45.3

### 問題 10 [151—151 頁]

1. 60.86 平方米      2. 202.2 米      3. 603.6 米      4. 244.9 米強

### 問題 13 [195—196 頁]

4. 1095 米強

### 問題 14 [215—216 頁]

1. 288 立方糎      4. **3**  $70^\circ 32'$       9. 4:5  
 10.  $(32\sqrt{6} + 16)$  平方糎,  $\frac{32}{3}\sqrt{23}$  立方糎

問題 15 [233-235 頁]

1. 1 立方米    2. 25.4 糎    3. 1:7    4. 59.2 立  
 5. 241 立方糎強    8.  $27\sqrt{3}$  平方糎    9. 約 1.03 糎  
 11.  $\frac{\sqrt{6}}{4}a, \frac{\sqrt{6}}{12}a$     12. 約 482.5 平方糎

補習問題

第四 計算問題

183.  $\frac{(m+n)q}{mp}$     184.  $\frac{3}{a}$     185.  $\frac{2mn}{(m+n)^2}$     186.  $\sqrt{bc\left\{1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right\}}$  等  
 187.  $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$     188.  $60^\circ$     189.  $25(3+\sqrt{3})$  平方糎  
 190. 13 cm, 17 cm, 23 cm    191. 6    193. 108 cm (約)  
 194.  $(2\sqrt{3}-3)a$     195.  $\frac{\sqrt{3}}{12}a$     197.  $3(\sqrt{10}+1)$  糎

第五 三角法問題

199. 1    200.  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$     201.  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}$   
 202.  $4 \sin 16^\circ 5' \sin 56^\circ 5' \cos 17^\circ$     204. 1    207.  $45^\circ$  或  $\wedge 225^\circ$   
 208.  $a \cot \frac{\theta}{2}$     210. ①  $120^\circ, 240^\circ$     ②  $135^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 225^\circ$     ③  $105^\circ$   
 212.  $\frac{a \sin B \sin C}{\sin(B+C)}$     214. 4.8 平方糎  
 215.  $B=60^\circ, C=90^\circ, c=40\sqrt{3}$  或  $\wedge B=120^\circ, C=30^\circ, c=20\sqrt{3}$   
 216.  $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$  糎    217.  $\sqrt{156t^2+25}$  米 或  $\wedge \sqrt{76t^2+25}$  米

第六 立體幾何學問題

223.  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  糎    225. OA:OB:OD:OE    226. 40500 立方糎  
 228. 22.7 cm, 34.3 cm    229. 3 cm    230.  $\frac{3}{2}r$

算入對數表

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0000	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.0020	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036
0.0040	0.0044	0.0048	0.0052	0.0056	0.0060	0.0064	0.0068	0.0072	0.0076
0.0080	0.0084	0.0088	0.0092	0.0096	0.0100	0.0104	0.0108	0.0112	0.0116
0.0120	0.0124	0.0128	0.0132	0.0136	0.0140	0.0144	0.0148	0.0152	0.0156
0.0160	0.0164	0.0168	0.0172	0.0176	0.0180	0.0184	0.0188	0.0192	0.0196
0.0200	0.0204	0.0208	0.0212	0.0216	0.0220	0.0224	0.0228	0.0232	0.0236
0.0240	0.0244	0.0248	0.0252	0.0256	0.0260	0.0264	0.0268	0.0272	0.0276
0.0280	0.0284	0.0288	0.0292	0.0296	0.0300	0.0304	0.0308	0.0312	0.0316
0.0320	0.0324	0.0328	0.0332	0.0336	0.0340	0.0344	0.0348	0.0352	0.0356
0.0360	0.0364	0.0368	0.0372	0.0376	0.0380	0.0384	0.0388	0.0392	0.0396
0.0400	0.0404	0.0408	0.0412	0.0416	0.0420	0.0424	0.0428	0.0432	0.0436
0.0440	0.0444	0.0448	0.0452	0.0456	0.0460	0.0464	0.0468	0.0472	0.0476
0.0480	0.0484	0.0488	0.0492	0.0496	0.0500	0.0504	0.0508	0.0512	0.0516
0.0520	0.0524	0.0528	0.0532	0.0536	0.0540	0.0544	0.0548	0.0552	0.0556
0.0560	0.0564	0.0568	0.0572	0.0576	0.0580	0.0584	0.0588	0.0592	0.0596
0.0600	0.0604	0.0608	0.0612	0.0616	0.0620	0.0624	0.0628	0.0632	0.0636
0.0640	0.0644	0.0648	0.0652	0.0656	0.0660	0.0664	0.0668	0.0672	0.0676
0.0680	0.0684	0.0688	0.0692	0.0696	0.0700	0.0704	0.0708	0.0712	0.0716
0.0720	0.0724	0.0728	0.0732	0.0736	0.0740	0.0744	0.0748	0.0752	0.0756
0.0760	0.0764	0.0768	0.0772	0.0776	0.0780	0.0784	0.0788	0.0792	0.0796
0.0800	0.0804	0.0808	0.0812	0.0816	0.0820	0.0824	0.0828	0.0832	0.0836
0.0840	0.0844	0.0848	0.0852	0.0856	0.0860	0.0864	0.0868	0.0872	0.0876
0.0880	0.0884	0.0888	0.0892	0.0896	0.0900	0.0904	0.0908	0.0912	0.0916
0.0920	0.0924	0.0928	0.0932	0.0936	0.0940	0.0944	0.0948	0.0952	0.0956
0.0960	0.0964	0.0968	0.0972	0.0976	0.0980	0.0984	0.0988	0.0992	0.0996
0.1000	0.1004	0.1008	0.1012	0.1016	0.1020	0.1024	0.1028	0.1032	0.1036

數ノ對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374					
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755					
12	0792	0823	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106					
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430					
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732					
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014					
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279					
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529					
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765					
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989					
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201					
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404					
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598					
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784					
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962					
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133					
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298					
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456					
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609					
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757					
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900					
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038					
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172					
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302					
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428					
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551					
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670					
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786					
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899					
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010					
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117					
43. 42. 41. 39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 29. 28.															
比 例 部 分	1	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	
	2	9	8	8	8	7	7	7	7	6	6	6	6	6	
	3	13	13	12	12	11	11	11	10	10	10	9	9	8	
	4	17	17	16	16	15	15	14	14	14	13	13	12	11	
	5	22	21	21	20	19	19	18	18	17	17	16	15	14	
	6	26	25	25	23	23	22	22	21	20	20	19	19	17	
	7	30	29	29	27	27	26	25	25	24	23	22	22	20	
	8	34	34	33	31	30	30	29	28	27	26	25	23	22	
	9	39	38	37	35	34	33	32	32	31	30	29	28	26	25

	0	1	2	3	4	5	6	7	8					
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107					
41	6118	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201					
42	6212	6222	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294					
43	6304	6315	6325	6335	6345	6355	6365	6375	6385					
44	6395	6405	6415	6425	6435	6444	6454	6464	6474					
45	6484	6493	6503	6511	6521	6532	6542	6551	6561					
46	6571	6580	6590	6600	6609	6618	6628	6637	6646					
47	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6711	6720	6729					
48	6738	6747	6756	6765	6774	6783	6792	6801	6810					
49	6819	6828	6837	6846	6855	6864	6873	6882	6891					
50	6900	6909	6918	6927	6936	6945	6954	6963	6972					
51	6981	6990	6999	7008	7017	7026	7035	7044	7053					
52	7062	7071	7080	7089	7098	7107	7116	7125	7134					
53	7143	7152	7161	7170	7179	7188	7197	7206	7215					
54	7224	7233	7242	7251	7260	7269	7278	7287	7296					
55	7305	7314	7323	7332	7341	7350	7359	7368	7377					
56	7386	7395	7404	7413	7422	7431	7440	7449	7458					
57	7467	7476	7485	7494	7503	7512	7521	7530	7539					
58	7548	7557	7566	7575	7584	7593	7602	7611	7620					
59	7629	7638	7647	7656	7665	7674	7683	7692	7701					
60	7710	7719	7728	7737	7746	7755	7764	7773	7782					
61	7791	7800	7809	7818	7827	7836	7845	7854	7863					
62	7872	7881	7890	7899	7908	7917	7926	7935	7944					
63	7953	7962	7971	7980	7989	7998	8007	8016	8025					
64	8034	8043	8052	8061	8070	8079	8088	8097	8106					
65	8115	8124	8133	8142	8151	8160	8169	8178	8187					
66	8196	8205	8214	8223	8232	8241	8250	8259	8268					
67	8277	8286	8295	8304	8313	8322	8331	8340	8349					
68	8358	8367	8376	8385	8394	8403	8412	8421	8430					
69	8439	8448	8457	8466	8475	8484	8493	8502	8511					
70	8520	8529	8538	8547	8556	8565	8574	8583	8592					
27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 19. 18. 17. 16. 15. 14.														
比 例 部 分	1	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
	2	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3
	3	8	8	8	7	7	7	6	6	6	5	5	5	4
	4	11	10	10	10	9	9	8	8	7	7	6	6	6
	5	14	13	13	12	12	11	11	10	9	9	8	8	7
	6	16	16	15	14	14	13	13	11	11	10	10	9	8
	7	19	18	18	17	16	15	15	13	13	12	11	11	10
	8	22	21	20	19	18	18	17	15	14	14	13	12	11
	9	24	23	23	22	21	20	19	17	16	15	14	14	13

### 數ノ對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0823	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
43. 42. 41. 39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 29. 28.										
比例部分	1	4	4	4	4	4	3	3	3	3
	2	9	8	8	8	7	7	7	6	6
	3	13	13	12	12	11	11	11	10	10
	4	17	17	16	16	15	15	14	14	13
	5	22	21	21	20	19	18	18	17	16
	6	26	25	25	23	23	22	22	21	20
	7	30	29	29	27	27	26	25	24	23
	8	34	34	33	31	30	30	29	28	27
	9	38	38	37	35	34	33	32	31	30
	0	38	37	35	34	33	32	31	30	29

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6623	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.										
1	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2
2	5	5	5	5	4	4	4	3	3	3
3	8	8	8	7	7	7	6	6	5	5
4	11	10	10	10	9	9	8	8	7	7
5	14	13	13	12	12	11	11	10	9	9
6	16	16	15	14	14	13	13	11	10	10
7	19	18	18	17	16	15	15	13	12	11
8	22	21	20	19	18	18	17	15	14	13
9	24	23	23	22	21	20	19	17	16	15

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647	00689	00732	00775	00817
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072	01115	01157	01199	01242
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494	01536	01578	01620	01662
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912	01953	01995	02036	02078
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325	02366	02408	02449	02490
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735	02776	02816	02857	02898
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141	03181	03222	03262	03302
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543	03583	036		



三角函数ノ對數表 (其ノ一)

三角函数ノ真數表

角	sin	cos	tan	cot	sec	cosec	角
0°	0.0000	1.0000	0.0000	∞	1.0000	∞	90°
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	1.0002	57.299	89°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	1.0006	28.654	88°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	1.0014	19.107	87°
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	1.0024	14.336	86°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	1.0038	11.474	85°
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84°
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.0075	8.2055	83°
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82°
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81°
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80°
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79°
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78°
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77°
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76°
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75°
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74°
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73°
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72°
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70°
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69°
22°	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68°
23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67°
24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66°
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65°
26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64°
27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63°
28°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62°
29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61°
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60°
31°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59°
32°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58°
33°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57°
34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56°
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55°
36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54°
37°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53°
38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52°
39°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51°
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50°
41°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49°
42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48°
43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47°
44°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46°
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45°

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	角
0° 0'	-∞		-∞		∞	10.0000		0° 90'
10'	7.4637	3011	7.4637	3011	12.5363	0000	0	50'
20'	7648	1760	7648	1761	2352	0000	0	40'
30'	9408	1250	9409	1249	0591	0000	0	30'
40'	8.0658	969	8.0658	969	11.9342	0000	0	20'
50'	1627	792	1627	792	8373	0000	0	10'
1° 0'	8.2419	669	8.2419	670	11.7581	9.9999	1	0° 89'
10'	3088	580	3089	580	6911	9999	0	50'
20'	3668	511	3669	512	6331	9999	0	40'
30'	4179	458	4181	457	5819	9999	0	30'
40'	4637	413	4638	415	5362	9998	1	20'
50'	5050	378	5053	378	4947	9998	1	10'
2° 0'	8.5428	348	8.5431	348	11.4569	9.9997	1	0° 88'
10'	5776	321	5779	322	4221	9997	0	50'
20'	6097	300	6101	300	3899	9996	0	40'
30'	6397	280	6401	281	3599	9996	0	30'
40'	6677	263	6682	263	3318	9995	1	20'
50'	6940	248	6945	249	3055	9995	1	10'
3° 0'	8.7188	235	8.7194	235	11.2806	9.9994	1	0° 87'
10'	7423	222	7429	223	2571	9993	1	50'
20'	7645	212	7652	213	2348	9993	1	40'
30'	7857	202	7865	202	2135	9992	1	30'
40'	8059	192	8067	194	1933	9991	1	20'
50'	8251	185	8261	185	1739	9990	1	10'
4° 0'	8.8436	177	8.8446	178	11.1554	9.9989	1	0° 86'
10'	8613	170	8624	171	1376	9989	0	50'
20'	8783	163	8795	165	1205	9988	1	40'
30'	8946	158	8960	158	1040	9987	1	30'
40'	9104	152	9118	154	0882	9986	1	20'
50'	9256	147	9272	148	0728	9985	2	10'
5° 0'	8.9403	142	8.9420	143	11.0580	9.9983	2	0° 85'
10'	9545	137	9563	138	0437	9982	1	50'
20'	9682	134	9701	135	0299	9981	1	40'
30'	9816	129	9836	130	0164	9980	1	30'
40'	9945	125	9966	127	0034	9979	1	20'
50'	9.0070	122	9.0093	123	10.9907	9.9977	2	10'
6° 0'	9.0192	119	9.0216	120	10.9784	9.9976	1	0° 84'
10'	0311	115	0336	117	9664	9975	1	50'
20'	0426	113	0453	114	9547	9973	2	40'
30'	0539	109	0567	111	9433	9972	1	30'
40'	0648	107	0678	108	9322	9971	1	20'
50'	0755	104	0786	105	9214	9969	2	10'
7° 0'	9.0859	102	9.0891	104	10.9109	9.9968	2	0° 83'
10'	0961	99	0995	101	9005	9966	2	50'
20'	1060	97	1095	98	8904	9964	2	40'
30'	1157	95	1194	97	8806	9963	1	30'
40'	1252	93	1291	94	8709	9961	2	20'
50'	1345	91	1385	93	8615	9959	2	10'
8° 0'	9.1436	89	9.1478	91	10.8522	9.9958	1	0° 82'

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	角
8° 0'	9.1436	89	9.1478	91	10.8522	9.9958	0° 90'
10'	1525	87	1569	89	8431	9956	50'
20'	1612	85	1658	87	8342	9954	40'
30'	1697	84	1745	86	8255	9952	30'
40'	1781	83	1831	84	8169	9950	20'
50'	1863	82	1915	82	8085	9948	10'
9° 0'	9.1943	79	9.1997	81	10.8003	9.9946	0° 89'
10'	2022	78	2078	80	7922	9944	50'
20'	2100	76	2158	78	7842	9942	40'
30'	2176	75	2236	77	7764	9940	30'
40'	2251	73	2313	76	7687	9938	20'
50'	2324	73	2389	74	7611	9936	10'
10° 0'	9.2397	71	9.2463	73	10.7537	9.9934	0° 88'
10'	2468	70	2536	73	7464	9931	50'
20'	2538	68	2609	73	7391	9929	40'
30'	2606	68	2680	71	7320	9927	30'
40'	2674	68	2750	70	7250	9924	20'
50'	2740	66	2819	69	7181	9922	10'
11° 0'	9.2806	64	9.2887	66	10.7113	9.9919	0° 87'
10'	2870	64	2953	66	7047	9917	50'
20'	2934	64	3020	67	6980	9914	40'
30'	2997	63	3085	65	6915	9912	30'
40'	3058	61	3149	64	6851	9909	20'
50'	3119	60	3212	63	6788	9907	10'
12° 0'	9.3179	59	9.3275	61	10.6725	9.9904	0° 86'
10'	3238	58	3336	61	6664	9901	50'
20'	3296	57	3397	61	6603	9899	40'
30'	3353	57	3458	61	6542	9896	30'
40'	3410	57	3517	59	6483	9893	20'
50'	3466	55	3576	59	6424	9890	10'
13° 0'	9.3521	54	9.3634	57	10.6366	9.9887	0° 85'
10'	3575	54	3691	57	6309	9884	50'
20'	3629	53	3748	57	6252	9881	40'
30'	3682	52	3804	56	6196	9878	30'
40'	3734	52	3859	55	6141	9875	20'
50'	3786	51	3914	55	6086	9872	10'
14° 0'	9.3837	50	9.3968	53	10.6032	9.9869	0° 84'
10'	3887	50	4021	53	5979	9866	50'
20'	3937	50	4074	53	5926	9863	40'
30'	3986	49	4127	53	5873	9859	30'
40'	4035	49	4178	51	5822	9856	20'
50'	4083	48	4230	52	5770	9853	10'
15° 0'	9.4130	47	9.4281	50	10.5719	9.9849	0° 83'
10'	4177	46	4331	50	5669	9846	50'
20'	4223	46	4381	50	5619	9843	40'
30'	4269	46	4430	49	5570	9839	30'
40'	4314	45	4479	49	5521	9836	20'
50'	4359	45	4527	48	5473	9832	10'
16° 0'	9.4403	44	9.4575	48	10.5425	9.9828	0° 82'

三角函数ノ對數表 (其ノ一)

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	
0° 0'	-∞		-∞		∞	10.0000		0° 90°
10'	7.4637		7.4637		12.5363	0000	0	50'
20'	7648	3011	7648	3011	2352	0000	0	40'
30'	9408	1760	9409	1761	0591	0000	0	30'
40'	8.0658	1250	8.0658	1249	11.9342	0000	0	20'
50'	1627	969	1627	969	8373	0000	0	10'
1° 0'	8.2419	792	8.2419	792	11.7581	9.9999	0	0° 89°
10'	3088	669	3089	670	6911	9999	0	50'
20'	3668	580	3669	580	6331	9999	0	40'
30'	4179	511	4181	512	5819	9999	0	30'
40'	4637	458	4638	457	5362	9998	1	20'
50'	5050	413	5053	415	4947	9998	0	10'
2° 0'	8.5428	378	8.5431	378	11.4569	9.9997	1	0° 88°
10'	5776	348	5779	348	4221	9997	0	50'
20'	6097	321	6101	322	3899	9996	1	40'
30'	6397	300	6401	300	3599	9996	0	30'
40'	6677	280	6682	281	3318	9995	1	20'
50'	6940	263	6945	263	3055	9995	0	10'
3° 0'	8.7188	248	8.7194	249	11.2806	9.9994	1	0° 87°
10'	7423	235	7429	235	2571	9993	0	50'
20'	7645	222	7652	223	2348	9993	1	40'
30'	7857	212	7865	213	2135	9992	1	30'
40'	8059	202	8067	202	1933	9991	1	20'
50'	8251	192	8261	194	1739	9990	1	10'
4° 0'	8.8436	185	8.8446	185	11.1554	9.9989	1	0° 86°
10'	8613	177	8624	178	1376	9989	0	50'
20'	8783	170	8795	171	1205	9988	1	40'
30'	8946	163	8950	165	1040	9987	1	30'
40'	9104	158	9118	158	0882	9986	1	20'
50'	9256	152	9272	154	0728	9985	1	10'
5° 0'	8.9403	147	8.9420	148	11.0580	9.9983	2	0° 85°
10'	9545	142	9563	143	0437	9982	1	50'
20'	9682	137	9701	138	0299	9981	1	40'
30'	9816	134	9836	135	0164	9980	1	30'
40'	9945	129	9966	130	0034	9979	2	20'
50'	9.0070	122	9.0093	127	10.9907	9977	1	10'
6° 0'	9.0192	122	9.0216	123	10.9784	9.9976	1	0° 84°
10'	0311	119	0336	120	9664	9975	2	50'
20'	0426	115	0453	117	9547	9973	1	40'
30'	0539	113	0567	114	9433	9972	1	30'
40'	0648	109	0678	111	9322	9971	2	20'
50'	0755	107	0786	108	9214	9969	1	10'
7° 0'	9.0859	104	9.0891	105	10.9109	9.9968	1	0° 83°
10'	0961	102	0995	104	9005	9966	2	50'
20'	1060	99	1093	101	8904	9964	2	40'
30'	1157	97	1194	98	8806	9963	1	30'
40'	1252	95	1291	97	8709	9961	2	20'
50'	1345	93	1385	94	8615	9959	2	10'
8° 0'	9.1436	91	9.1478	93	10.8522	9.9958	1	0° 82°

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	
8° 0'	9.1436		9.1478		10.8522	9.9958		0° 82°
10'	1525	89	1569	91	8431	9956	2	50'
20'	1612	87	1658	89	8342	9954	2	40'
30'	1697	85	1745	87	8255	9952	2	30'
40'	1781	84	1831	86	8169	9950	2	20'
50'	1863	82	1915	84	8085	9948	2	10'
9° 0'	9.1943	80	9.1997	82	10.8003	9.9946	2	0° 81°
10'	2022	79	2078	81	7922	9944	2	50'
20'	2100	78	2158	80	7842	9942	2	40'
30'	2176	76	2236	78	7764	9940	2	30'
40'	2251	75	2313	77	7687	9938	2	20'
50'	2324	73	2389	76	7611	9936	2	10'
10° 0'	9.2397	74	9.2463	74	10.7537	9.9934	2	0° 80°
10'	2468	71	2536	73	7464	9931	3	50'
20'	2538	70	2609	73	7391	9929	2	40'
30'	2606	68	2680	71	7320	9927	2	30'
40'	2674	68	2750	70	7250	9924	3	20'
50'	2740	66	2819	69	7181	9922	2	10'
11° 0'	9.2806	66	9.2887	68	10.7113	9.9919	3	0° 79°
10'	2870	64	2953	66	7047	9917	2	50'
20'	2934	64	3020	67	6980	9914	3	40'
30'	2997	63	3085	65	6915	9912	2	30'
40'	3058	61	3149	64	6851	9909	3	20'
50'	3119	61	3212	63	6788	9907	2	10'
12° 0'	9.3179	60	9.3275	63	10.6725	9.9904	3	0° 78°
10'	3238	59	3336	61	6664	9901	3	50'
20'	3296	58	3397	61	6603	9899	2	40'
30'	3353	57	3458	61	6542	9896	3	30'
40'	3410	57	3517	59	6483	9893	3	20'
50'	3466	56	3576	59	6424	9890	3	10'
13° 0'	9.3521	55	9.3634	58	10.6366	9.9887	3	0° 77°
10'	3575	54	3691	57	6309	9884	3	50'
20'	3629	54	3748	57	6252	9881	3	40'
30'	3682	53	3804	56	6196	9878	3	30'
40'	3734	52	3859	55	6141	9875	3	20'
50'	3786	52	3914	55	6086	9872	3	10'
14° 0'	9.3837	51	9.3968	54	10.6032	9.9869	3	0° 76°
10'	3887	50	4021	53	5979	9866	3	50'
20'	3937	50	4074	53	5926	9863	3	40'
30'	3986	49	4127	53	5873	9859	4	30'
40'	4035	49	4178	51	5822	9856	3	20'
50'	4083	48	4230	52	5770	9853	3	10'
15° 0'	9.4130	47	9.4281	47	10.5719	9.9849	4	0° 75°
10'	4177	47	4331	50	5669	9846	3	50'
20'	4223	46	4381	50	5619	9843	3	40'
30'	4269	46	4430	49	5570	9839	4	30'
40'	4314	45	4479	49	5521	9836	3	20'
50'	4359	45	4527	48	5473	9832	4	10'
16° 0'	9.4403	44	9.4575	44	10.5425	9.9828	4	0° 74°

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	
16° 0'	9.4403		9.4575		10.5425	9.9828		0° 74°
10'	4447	44	4622	47	5378	9825	3	50'
20'	4491	44	4669	47	5331	9821	4	40'
30'	4533	42	4716	46	5284	9817	4	30'
40'	4576	43	4762	46	5238	9814	3	20'
50'	4618	42	4808	46	5192	9810	4	10'
17° 0'	9.4659	41	9.4853	45	10.5147	9.9806	4	0° 73°
10'	4700	41	4898	45	5102	9802	4	50'
20'	4741	41	4943	45	5057	9798	4	40'
30'	4781	40	4987	44	5013	9794	4	30'
40'	4821	40	5031	44	4969	9790	4	20'
50'	4861	40	5075	44	4925	9786	4	10'
18° 0'	9.4900	39	9.5118	43	10.4882	9.9782	4	0° 72°
10'	4939	39	5161	43	4839	9778	4	50'
20'	4977	38	5203	42	4797	9774	4	40'
30'	5015	38	5245	42	4755	9770	4	30'
40'	5052	37	5287	42	4713	9765	5	20'
50'	5090	38	5329	42	4671	9761	4	10'
19° 0'	9.5126	36	9.5370	41	10.4630	9.9757	4	0° 71°
10'	5163	37	5411	41	4589	9752	5	50'
20'	5199	36	5451	40	4549	9748	4	40'
30'	5235	36	5491	40	4509	9743	5	30'
40'	5270	35	5531	40	4469	9739	4	20'
50'	5306	36	5571	40	4429	9734	5	10'
20° 0'	9.5341	35	9.5611	40	10.4379	9.9730	4	0° 70°
10'	5375	34	5650	39	4350	9725	5	50'
20'	5409	34	5689	39	4311	9721	4	40'
30'	5443	34	5727	38	4273	9716	5	30'
40'	5477	34	5766	39	4234	9711	5	20'
50'	5510	33	5804	38	4196	9706	5	10'
21° 0'	9.5543	33	9.5842	38	10.4158	9.9702	4	0° 69°
10'	5576	33	5879	37	4121	9697	5	50'
20'	5609	33	5917	38	4083	9692	5	40'
30'	5641	32	5954	37	4046	9687	5	30'
40'	5673	32	5991	37	4009	9682	5	20'
50'	5704	31	6028	37	3972	9677	5	10'
2								

三角函数ノ對數表 (其ノ二)

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	
<b>24° 0'</b>	<b>9.6093</b>		<b>9.6486</b>		<b>10.3514</b>	<b>9.9607</b>		<b>0' 66°</b>
10'	6121	28	6520	34	3480	9602	5	50'
20'	6149	28	6553	33	3447	9596	6	40'
30'	6177	28	6587	34	3413	9590	6	30'
40'	6205	28	6620	33	3380	9584	6	20'
50'	6232	27	6654	34	3346	9579	5	10'
<b>25° 0'</b>	<b>9.6259</b>		<b>9.6687</b>		<b>10.3313</b>	<b>9.9573</b>		<b>0' 65°</b>
10'	6286	27	6720	33	3280	9567	6	50'
20'	6313	27	6752	32	3248	9561	6	40'
30'	6340	27	6785	33	3215	9555	6	30'
40'	6366	26	6817	32	3183	9549	6	20'
50'	6392	26	6850	33	3150	9543	6	10'
<b>26° 0'</b>	<b>9.6418</b>		<b>9.6882</b>		<b>10.3118</b>	<b>9.6537</b>		<b>0' 64°</b>
10'	6444	26	6914	32	3086	9530	7	50'
20'	6470	26	6946	32	3054	9524	6	40'
30'	6495	25	6977	31	3023	9518	6	30'
40'	6521	25	7009	32	2991	9512	6	20'
50'	6546	24	7040	31	2960	9505	7	10'
<b>27° 0'</b>	<b>9.6570</b>		<b>9.7072</b>		<b>10.2928</b>	<b>9.9499</b>		<b>0' 63°</b>
10'	6595	25	7103	31	2897	9492	7	50'
20'	6620	25	7134	31	2866	9486	7	40'
30'	6644	24	7165	31	2835	9479	7	30'
40'	6668	24	7196	31	2804	9473	6	20'
50'	6692	24	7226	30	2774	9466	7	10'
<b>28° 0'</b>	<b>9.6716</b>		<b>9.7257</b>		<b>10.2743</b>	<b>9.9459</b>		<b>0' 62°</b>
10'	6740	24	7287	30	2713	9453	6	50'
20'	6763	23	7317	30	2683	9446	7	40'
30'	6787	24	7348	31	2652	9439	7	30'
40'	6810	23	7378	30	2622	9432	7	20'
50'	6833	23	7408	30	2592	9425	7	10'
<b>29° 0'</b>	<b>9.6856</b>		<b>9.7438</b>		<b>10.2562</b>	<b>9.9418</b>		<b>0' 61°</b>
10'	6878	22	7467	29	2533	9411	7	50'
20'	6901	23	7497	30	2503	9404	7	40'
30'	6923	22	7526	29	2474	9397	7	30'
40'	6946	23	7556	30	2444	9390	7	20'
50'	6968	22	7585	29	2415	9383	8	10'
<b>30° 0'</b>	<b>9.6990</b>		<b>9.7614</b>		<b>10.2386</b>	<b>9.9375</b>		<b>0' 60°</b>
10'	7012	22	7644	30	2356	9368	7	50'
20'	7033	21	7673	29	2327	9361	7	40'
30'	7055	22	7701	28	2299	9353	8	30'
40'	7076	21	7730	29	2270	9346	8	20'
50'	7097	21	7759	29	2241	9338	8	10'
<b>31° 0'</b>	<b>9.7118</b>		<b>9.7788</b>		<b>10.2212</b>	<b>9.9331</b>		<b>0' 59°</b>
10'	7139	21	7816	28	2184	9323	8	50'
20'	7160	21	7845	29	2155	9315	8	40'
30'	7181	21	7873	28	2127	9308	7	30'
40'	7201	20	7902	29	2098	9300	8	20'
50'	7222	21	7930	28	2070	9292	8	10'
<b>32° 0'</b>	<b>9.7242</b>		<b>9.7958</b>		<b>10.2042</b>	<b>9.9284</b>		<b>0' 58°</b>

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	
<b>32° 0'</b>	<b>9.7242</b>		<b>9.7958</b>		<b>10.2042</b>	<b>9.9284</b>		
10'	7262	20	7986	28	2014	9276		
20'	7282	20	8014	28	1986	9268		
30'	7302	20	8042	28	1958	9260		
40'	7322	20	8070	28	1930	9252		
50'	7342	20	8097	27	1903	9244		
<b>33° 0'</b>	<b>9.7361</b>		<b>9.8125</b>		<b>10.1875</b>	<b>9.9236</b>		
10'	7380	19	8153	28	1847	9228		
20'	7400	20	8180	28	1820	9219		
30'	7419	19	8208	28	1792	9211		
40'	7438	19	8235	27	1765	9203		
50'	7457	19	8263	28	1737	9194		
<b>34° 0'</b>	<b>9.7476</b>		<b>9.8290</b>		<b>10.1710</b>	<b>9.9186</b>		
10'	7494	18	8317	27	1683	9177		
20'	7513	19	8344	27	1656	9169		
30'	7531	18	8371	27	1629	9160		
40'	7550	19	8398	27	1602	9151		
50'	7568	18	8425	27	1575	9142		
<b>35° 0'</b>	<b>9.7586</b>		<b>9.8452</b>		<b>10.1548</b>	<b>9.9134</b>		
10'	7604	18	8479	27	1521	9125		
20'	7622	18	8506	27	1494	9116		
30'	7640	18	8533	27	1467	9107		
40'	7657	17	8559	26	1441	9098		
50'	7675	18	8586	27	1414	9089		
<b>36° 0'</b>	<b>9.7692</b>		<b>9.8613</b>		<b>10.1387</b>	<b>9.9080</b>		
10'	7710	18	8639	26	1361	9070		
20'	7727	17	8666	27	1334	9061		
30'	7744	17	8692	26	1308	9052		
40'	7761	17	8718	26	1282	9042		
50'	7778	17	8745	27	1255	9033		
<b>37° 0'</b>	<b>9.7795</b>		<b>9.8771</b>		<b>10.1229</b>	<b>9.9023</b>		
10'	7811	16	8797	26	1203	9014		
20'	7828	17	8824	27	1176	9004		
30'	7844	16	8850	26	1150	8995		
40'	7861	17	8876	26	1124	8985		
50'	7877	16	8902	26	1098	8975		
<b>38° 0'</b>	<b>9.7893</b>		<b>9.8928</b>		<b>10.1072</b>	<b>9.8965</b>		
10'	7910	17	8954	26	1046	8955		
20'	7926	16	8980	26	1020	8945		
30'	7941	15	9006	26	994	8935		
40'	7957	16	9032	26	968	8925		
50'	7973	16	9058	26	942	8915		
<b>39° 0'</b>	<b>9.7989</b>		<b>9.9084</b>		<b>10.0916</b>	<b>9.8905</b>		
10'	8004	15	9110	26	890	8895		
20'	8020	16	9135	25	865	8884		
30'	8035	15	9161	26	839	8874		
40'	8050	15	9187	26	813	8864		
50'	8066	16	9212	25	788	8853		
<b>40° 0'</b>	<b>9.8081</b>		<b>9.9238</b>		<b>10.0762</b>	<b>9.8843</b>		

L cos 差 L cot 通差 L tan L sin 差 角

L cos 差 L cot 通差 L tan L sin 差

三角函数ノ對數表 (其ノ二)

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	
<b>24° 0'</b>	<b>9.6093</b>		<b>9.6486</b>		<b>10.3514</b>	<b>9.9607</b>		<b>0° 66°</b>
10'	6121	28	6520	34	3480	9602	5	50'
20'	6149	28	6553	33	3447	9596	6	40'
30'	6177	28	6587	34	3413	9590	6	30'
40'	6205	28	6620	33	3380	9584	6	20'
50'	6232	27	6654	34	3346	9579	5	10'
<b>25° 0'</b>	<b>9.6259</b>		<b>9.6687</b>		<b>10.3313</b>	<b>9.9573</b>		<b>0° 65°</b>
10'	6286	27	6720	33	3280	9567	6	50'
20'	6313	27	6752	32	3248	9561	6	40'
30'	6340	27	6785	33	3215	9555	6	30'
40'	6366	26	6817	32	3183	9549	6	20'
50'	6392	26	6850	33	3150	9543	6	10'
<b>26° 0'</b>	<b>9.6418</b>		<b>9.6882</b>		<b>10.3118</b>	<b>9.9537</b>		<b>0° 64°</b>
10'	6444	26	6914	32	3086	9530	7	50'
20'	6470	26	6946	32	3054	9524	6	40'
30'	6495	25	6977	31	3023	9518	6	30'
40'	6521	26	7009	32	2991	9512	6	20'
50'	6546	24	7040	31	2960	9505	7	10'
<b>27° 0'</b>	<b>9.6570</b>		<b>9.7072</b>		<b>10.2928</b>	<b>9.9499</b>		<b>0° 63°</b>
10'	6595	25	7103	31	2897	9492	6	50'
20'	6620	25	7134	31	2866	9486	6	40'
30'	6644	24	7165	31	2835	9479	7	30'
40'	6668	24	7196	31	2804	9473	6	20'
50'	6692	24	7226	30	2774	9466	7	10'
<b>28° 0'</b>	<b>9.6716</b>		<b>9.7257</b>		<b>10.2743</b>	<b>9.9459</b>		<b>0° 62°</b>
10'	6740	24	7287	30	2713	9453	6	50'
20'	6763	23	7317	30	2683	9446	7	40'
30'	6787	23	7348	31	2652	9439	7	30'
40'	6810	23	7378	30	2622	9432	7	20'
50'	6833	23	7408	30	2592	9425	7	10'
<b>29° 0'</b>	<b>9.6856</b>		<b>9.7438</b>		<b>10.2562</b>	<b>9.9418</b>		<b>0° 61°</b>
10'	6878	22	7467	29	2533	9411	7	50'
20'	6901	22	7497	30	2503	9404	7	40'
30'	6923	22	7526	29	2474	9397	7	30'
40'	6946	23	7556	30	2444	9390	7	20'
50'	6968	22	7585	29	2415	9383	7	10'
<b>30° 0'</b>	<b>9.6990</b>		<b>9.7614</b>		<b>10.2386</b>	<b>9.9375</b>		<b>0° 60°</b>
10'	7012	22	7644	30	2356	9368	7	50'
20'	7033	21	7673	29	2327	9361	7	40'
30'	7055	22	7701	28	2299	9353	8	30'
40'	7076	21	7730	29	2270	9346	7	20'
50'	7097	21	7759	29	2241	9338	8	10'
<b>31° 0'</b>	<b>9.7118</b>		<b>9.7788</b>		<b>10.2212</b>	<b>9.9331</b>		<b>0° 59°</b>
10'	7139	21	7816	28	2184	9323	8	50'
20'	7160	21	7845	29	2155	9315	8	40'
30'	7181	21	7873	28	2127	9308	7	30'
40'	7201	20	7902	29	2098	9300	8	20'
50'	7222	20	7930	28	2070	9292	8	10'
<b>32° 0'</b>	<b>9.7242</b>		<b>9.7958</b>		<b>10.2042</b>	<b>9.9284</b>		<b>0° 58°</b>
	L cos	差	L cot	通差	L tan	L sin	差	角

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	
<b>32° 0'</b>	<b>9.7242</b>		<b>9.7958</b>		<b>10.2042</b>	<b>9.9284</b>		<b>0° 58°</b>
10'	7262	20	7986	28	2014	9276	8	50'
20'	7282	20	8014	28	1986	9268	8	40'
30'	7302	20	8042	28	1958	9260	8	30'
40'	7322	20	8070	28	1930	9252	8	20'
50'	7342	20	8097	27	1903	9244	8	10'
<b>33° 0'</b>	<b>9.7361</b>		<b>9.8125</b>		<b>10.1875</b>	<b>9.9236</b>		<b>0° 57°</b>
10'	7380	19	8153	28	1847	9228	8	50'
20'	7400	20	8180	27	1820	9219	9	40'
30'	7419	19	8208	28	1792	9211	8	30'
40'	7438	19	8235	27	1765	9203	8	20'
50'	7457	19	8263	28	1737	9194	9	10'
<b>34° 0'</b>	<b>9.7476</b>		<b>9.8290</b>		<b>10.1710</b>	<b>9.9186</b>		<b>0° 56°</b>
10'	7494	18	8317	27	1683	9177	9	50'
20'	7513	19	8344	27	1656	9169	8	40'
30'	7531	18	8371	27	1629	9160	9	30'
40'	7550	19	8398	27	1602	9151	9	20'
50'	7568	18	8425	27	1575	9142	9	10'
<b>35° 0'</b>	<b>9.7586</b>		<b>9.8452</b>		<b>10.1548</b>	<b>9.9134</b>		<b>0° 55°</b>
10'	7604	18	8479	27	1521	9125	8	50'
20'	7622	18	8506	27	1494	9116	9	40'
30'	7640	18	8533	27	1467	9107	9	30'
40'	7657	17	8559	26	1441	9098	9	20'
50'	7675	18	8586	27	1414	9089	9	10'
<b>36° 0'</b>	<b>9.7692</b>		<b>9.8613</b>		<b>10.1387</b>	<b>9.9080</b>		<b>0° 54°</b>
10'	7710	18	8639	26	1361	9070	10	50'
20'	7727	17	8666	27	1334	9061	9	40'
30'	7744	17	8692	26	1308	9052	9	30'
40'	7761	17	8718	26	1282	9042	9	20'
50'	7778	17	8745	27	1255	9033	9	10'
<b>37° 0'</b>	<b>9.7795</b>		<b>9.8771</b>		<b>10.1229</b>	<b>9.9023</b>		<b>0° 53°</b>
10'	7811	16	8797	26	1203	9014	9	50'
20'	7828	17	8824	27	1176	9004	10	40'
30'	7844	16	8850	26	1150	8995	9	30'
40'	7861	17	8876	26	1124	8985	10	20'
50'	7877	16	8902	26	1098	8975	10	10'
<b>38° 0'</b>	<b>9.7893</b>		<b>9.8928</b>		<b>10.1072</b>	<b>9.8965</b>		<b>0° 52°</b>
10'	7910	17	8954	26	1046	8955	10	50'
20'	7926	16	8980	26	1020	8945	10	40'
30'	7941	15	9006	26	994	8935	10	30'
40'	7957	16	9032	26	968	8925	10	20'
50'	7973	16	9058	26	942	8915	10	10'
<b>39° 0'</b>	<b>9.7989</b>		<b>9.9084</b>		<b>10.0916</b>	<b>9.8905</b>		<b>0° 51°</b>
10'	8004	15	9110	26	890	8895	10	50'
20'	8020	16	9135	25	865	8884	11	40'
30'	8035	15	9161	26	839	8874	10	30'
40'	8050	16	9187	26	813	8864	10	20'
50'	8066	15	9212	25	788	8853	11	10'
<b>40° 0'</b>	<b>9.8081</b>		<b>9.9238</b>		<b>10.0762</b>	<b>9.8843</b>		<b>0° 50°</b>
	L cos	差	L cot	通差	L tan	L sin	差	角

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	L cos	差	
<b>40° 0'</b>	<b>9.8081</b>		<b>9.9238</b>		<b>10.0762</b>	<b>9.8843</b>		<b>0° 50°</b>
10'	8096	15	9264	26	0736	8832	11	50'
20'	8111	15	9289	25	0711	8821	11	40'
30'	8125	14	9315	26	0685	8810	11	30'
40'	8140	15	9341	26	0659	8800	10	20'
50'	8155	15	9366	25	0634	8789	11	10'
<b>41° 0'</b>	<b>9.8169</b>		<b>9.9392</b>		<b>10.0608</b>	<b>9.8778</b>		<b>0° 49°</b>
10'	8184	15	9417	25	0583	8767	11	50'
20'	8198	14	9443	26	0557	8756	11	40'
30'	8213	15	9468	25	0532	8745	11	30'
40'	8227	14	9494	26	0506	8733	12	20'
50'	8241	14	9519	25	0481	8722	11	10'
<b>42° 0'</b>	<b>9.8255</b>		<b>9.9544</b>		<b>10.0456</b>	<b>9.8711</b>		<b>0° 48°</b>
10'	8269	14	9570	26	0430	8699	12	50'
20'	8283	14	9595	25	0405	8688	11	40'
30'	8297	14	9621	26	0379	8676	12	30'
40'	8311	14	9646	25	0354	8665	11	20'
50'	8324	13	9671	25	0329	8653	12	10'
<b>43° 0'</b>	<b>9.8338</b>		<b>9.9697</b>		<b>10.0303</b>	<b>9.8641</b>		<b>0° 47°</b>
10'	8351	13	9722	25	0278	8629	12	50'
20'	8365	14	9747	25	0253	8618	11	40'
30'	8378	13	9772	25	0228	8606	12	30'
40'	8391	13	9798	26	0202	8594	12	20'
50'	8405	14	9823	25	0177	8582	12	10'
<b>44° 0'</b>	<b>9.8418</b>		<b>9.9848</b>		<b>10.0152</b>	<b>9.8569</b>		<b>0° 46°</b>
10'	8431	13	9874	26	0126	8557	12	50'
20'	8444	13	9899	25	0101	8545	12	40'
30'	8457	13	9924	25	0076	8532	13	30'
40'	8469	12	9949	25	0051	8520	12	20'
50'	8482	13	9975	26	0025	8507	13	10'
<b>45° 0'</b>	<b>9.8495</b>		<b>10.0000</b>		<b>10.0000</b>	<b>9.8495</b>		<b>0° 45°</b>
	L cos	差	L cot	通差	L tan	L sin	差	角

頁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

中等教育  
幾何三角法教科書  
[增 課]  
定價 金壹圓

昭和七年九月六日 初版印刷  
昭和七年九月十日 初版發行  
昭和七年九月十五日 訂正再版印刷  
昭和七年九月二十日 訂正再版發行



著者 林 鶴 一  
發行者 東京開成館  
代表者 松本繁吉  
印刷者 寺井藤左工門

販賣所 東京市日本橋區吳服橋二丁目5 林平書店  
販賣所 大阪市東區北久寶寺町四丁目角 三木佐助

發行所 東京開成館  
振替貯金口座 東京五三二番

株式會社秀英舎印刷

目錄  
卷之三  
附錄

附錄一  
附錄二  
附錄三

一 論 林 齊 魯  
二 論 水 濟 寧  
三 論 法 濟 寧

四 論 水 濟 寧  
五 論 水 濟 寧

附 錄  
附 錄

第四學年第九學級

田上悦郎

