PLANE GEOMETRY

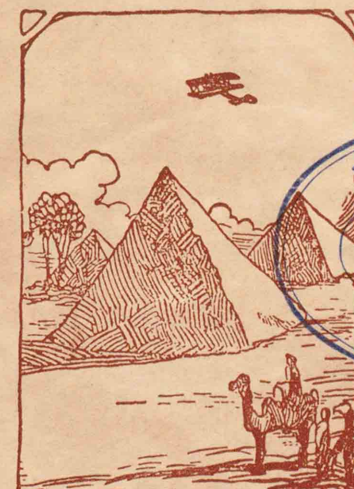
A NEW EDITION

SHUBUNKWAN

大正十五年三月十一日
文部省檢定濟
師範學校・中學校數學科用

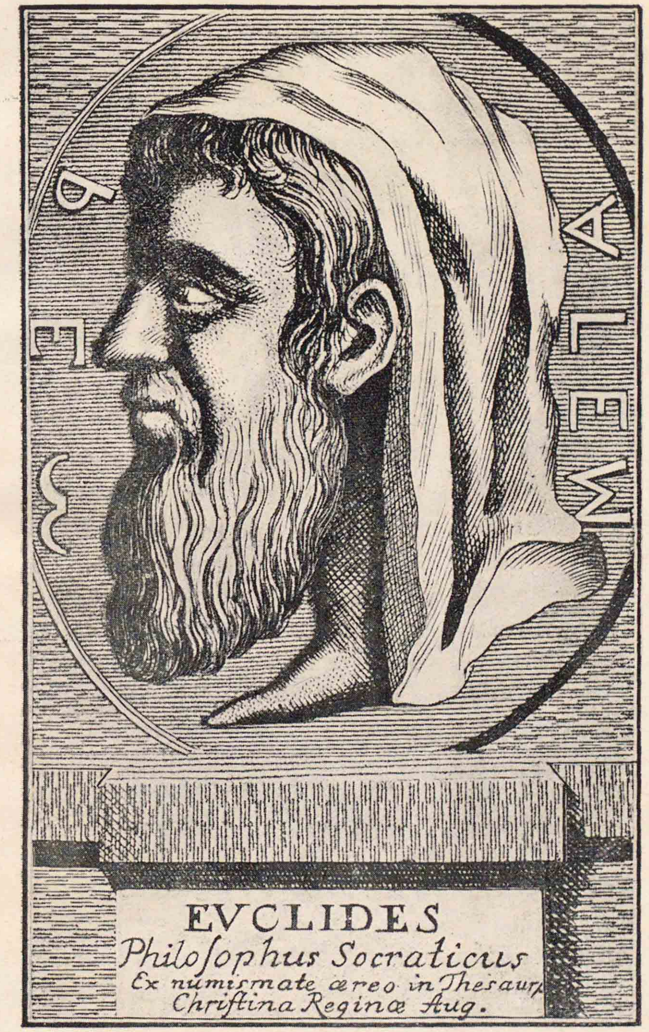
中等教育
平面
幾何學教科書

廣島高等師範學校附屬中學校
數學研究會著



東京
修文館藏版

ユークリツド


EVCLIDES
Philosophus Socraticus
Ex numismate aereo in Thesaur.
Christina Reginae Aug.

「ユークリツド」Euclid

(紀元前 330 年頃—275 年頃)

「アレキサンダー」大王「マケドニア」王トナルヤ希臘，小亞細亞ヲ征服シ埃及ヲ占領セリ。王ハ地中海沿岸「ナイル」河口ニ一大都市ヲ建設セント企テ之ヲ「アレキサンドリア」ト名ヅケタリ。

大王ノ死後ソノ領地ハ分割サレ埃及ハ「トレミー」王ノ手ニ歸シタリ。「トレミー」王ハ「アレキサンドリア」ヲ首府トシ宮殿ノ近接地ニ一大大學ヲ建設シ多クノ賢人哲人ヲ集メタリ。此ノ大學ハ實ニ世界最初ノ大學ナリ。ソノ中心タル圖書館ハ又宏大ニシテ創立僅カニ 40 年ヲ經ザルニ早クモ 60 萬卷ノ書ヲ有スルニ至レリトイフ。

「ユークリツド」ハ實ニ當大學最初ノ大數學者ナリキ。彼ノ名聲嘖々タリシコトハ彼ノ著書ノ代名詞トシテ「ユークリツド」ノ名ノ用ヒラレタリシ事ヲ以テシテモ知ラル。

彼ノ著書「エレメンツ」Elements ハ二千年後ノ今日迄數學教科書ノ見本トセラルルモノニシテ英國ニ於テハ今尙幾何學ノ別名トシテ「ユークリツド」ノ名ヲ用フトイフ。

「ユークリツド」幾何學ハ綜合的ニ成レルモノニシテソノ證明ノ如キモ整然トシテ立派ナルモノ多シ。然レドモ之レ却テ初學者ヲシテ學ビ難カラシムル處ノモノナリ。カツテ「トレミー」王之ヲ學ビソノ難キニ苦シミ「ユークリツド」ニ向ヒ「幾何學ニハ更ニ學ビ易キ方法ハナキカ」ト問ヒタルニ彼ハ即座ニ「幾何學ニ王道ナシ」ト答ヘタリト。

幾何學ヲ學ブ生徒ノ中ニモ「トレミー」王ノ如キ歎ヲモラスモノアラン。「幾何學ニ初學者ノ道アラシムル」コトハ吾ガ數學研究會ノ不斷ノ努力ナリ。

「ユークリツド」ハ又學問ハ學問ノ爲ニ學ブベキコトヲ主張シ利ニ趨ルコトヲ惡メリ。幾何學ヲ學バントスル一青年アリ。「ユークリツド」ニ對ヒテ「幾何學ヲ學ババ如何ナル利得アリヤ」ト問ヒタルニ彼憤然色ヲナシ「彼ガ如キハ利ヲ得ルタメニノミ學問ヲナスモノナレバ只ソレ之ヲトラセヨ」トテ奴隸ヲシテ一銅貨ヲ與ヘシメタリトイフ。

緒　　言

幾何學教授ノ目的ハ空間概念ノ確立ト科學的精神ノ養成トニアリ。サレバ幾何學ニ對スル生徒ノ熱烈ナル興味ヲ喚起シ,自發的研究心ヲ盛ニシ,以テ自ラ工夫考察ヲナサシムルコトニヨリテ其ノ目的ヲ達セザルベカラズ。然リト雖モ幾何學ノ內容タルヤ,モト演繹的綜合的ニ成レルモノナレバ初學者ニハ學ンデ之レヲ知ルコトト雖モ容易ナルコトニアラズ。故ニ生徒ヲシテ幾何學ニ對スル興味ヲ深カラシムル第一階梯トシテ,幾何學ヲ教ヘ易クシ,而モ學ビ易カラシムルコト最モ肝要ナリ。

本會ハ曩ニ中等教育幾何學新教科書ヲ著シ特ニ

1　幾何學ノ初步ニ於ケル實驗實測ノ導入

2　生徒ノ能力ニ適應セル教材ノ配列

3　問題ノ二行式配列ニヨル自習指導

等ニ留意シ,會員協力シテ幾何學ノ教授ヲ研究シ,ソノ改善ヲ謀ルコトヲ努メタリ。爾來幾歲,之レヲ教授ノ實際ニ徵シテ其ノ方針ノ誤ナラザリシ確信ヲ得タリト雖モ,猶不備ノ點多キヲ思ヒ,實地教授ヨリ得タル多年ノ經驗ヲ基トシ,併セテ歐米各國ノ教科書及ビ地方ノ教授實際

家ノ有益ナル批正ヲ參考ニシ,ココニ改訂ヲ加ヘ,津山教授ノ嚴正ナル校閲ヲ經タリ。

然レドモ吾人ハ之ヲ以テ完全ナリト信ズル者ニ非ズ。幸ニ數學教授ニ熱心ナル諸賢ノ批正ヲ仰ギ以テ完璧ノモノタラシメ數學教授上ニ貢献スルトコロアラバ啻ニ吾人ノ喜ノミニ止ラザルナリ。

今其ノ特ニ留意セル諸點ヲ列擧セン。

1 幾何學ノ基礎ヲ確實ナラシメ,幾何學ヲシテ入リ易キモノナラシメン爲ニ,實驗的材料ヲ一層多ク取入レ,殊ニ「嚴密ナル言ヒ表ハシ方」「幾何學的證明」等ノ項ヲ入レ,幾何學ノ眞意ヲ徹底セシメンコトヲハカレリ。

2 實際問題ヲ多クシテ,幾何學ニ對スル興味ヲ深カラシメ,工夫考察ノ力ヲ養フコトニ努メタリ。

3 直觀ノ教育上價値アルコトハ,何人モ認ムルトコロナリ。殊ニ幾何學ノ大部分ハ圖形ノ考究ニアリテ,ソノ一線一畫何レモ重要ナル意味ヲ有シ,苟モ忽ニスベカラザルモノナリ。故ニ圖形ヲシテ見易カラシメ,ソノ印象ヲ深カラシムルコトハ幾何學學習上多大ノ効果ヲ齎スモノナリ。

本書ハ特ニ此ノ點ニ留意シ,殆ド毎頁圖形ヲ挿入シ,且各篇ノ終ニハ圖形ニヨル總括復習ヲ掲ゲタリ。此等圖形ノ中ニハ特ニ本會ノ創案ニ成ルモノ多ク,且重要ナルモノハ色刷ヲ以テシ,幾何學研究ヲ遺憾ナカラシメタリ。コレ本會ガ幾何學ヲ學ビ易ク且教ヘ易カラシムルタメニ努力セル結果ニシテ,我ガ國ニ於ケル他ノ教科書中未ダ曾テ見ザルトコロナリ。

4 早クヨリ本逆ノ二定理ヲ對照研究セシメテ軌跡學習ノ豫備トナシ,且數多ノ實例ヲ掲ゲ,軌跡ノ意味ヲ徹底セシメンコトヲハカレリ。

5 生徒ノ能力及ビ幾何學ノ體系ニ差支ナキ限リ,立體ニ關スル材料ヲ多クシ,立體ト平面トノ關係ヲ密ニセリ。

6 代數トノ連絡ヲハカリ,函數概念ノ養成ニ努メタリ。

7 數學者ノ傳記又ハ數學ニ關スル歴史ヲ挿入シ,興味ヲ深カラシメタリ。

8 書中平易ナルモノハ,定理ニテモ其ノ證明ヲ省キ,或ハ單ニ發問ノ形ニ止メ,又練習問題ニテモ困難ナルモノニハ,或ハ綿密ナル解ノ指導ヲナシ,或ハ解析ヲ與ヘ或ハ注意ヲ與ヘ以テ其ノ考ヘ方ヲ指導セリ。殊ニ問題相互ノ引用ヲ明カニシテ研究ノ緒ヲ與フル等,生徒ノ自發研究ヲ指導スル上ニ多大ナル努力ヲ拂ヘリ。

9 幾何學ニ於テハ或ハ底邊上ノ點及ビソノ延長上ノ點或ハ圓ノ內切外切等ノ如ク性質ノ類似セルモノ多ク此ノ兩性質ヲ相對的ニ研究セシムルコトハ幾何學ノ實力ヲ養成スルニ極メテ有効ナルモノニシテ本會ノ創案ニ成ル問題ノ二行式配列ハヨクソノ價値ヲ發揮セシムルコトヲ得ルモノナリ。卽チ屢此ノ性質ヲ兩々相對セシメテ揭ゲ一ツヲ教室ノ研究用トシ他ヲ家庭又ハ教室外ノ復習用トナストキハ學習ニモ便ニシテ益々生徒ノ自發的研究心ヲ盛ナラシムルモノナリ。

尙問題ノ二行式配列ハ宿題ノ過重ヲ防ギ教授ソ進行ヲ圓滑ナラシムルモノト信ズ。

10 尙舊版ニ於テハ理解ヲ確實ニシ推理ヲ練習スル爲ニ卷末ニ復習ノ部ヲ設ケタルモ,本書ニテハ之ヲ別冊トシ教科書ト對照シテ研究ヲ便ナラシメ一層ソノ主旨ヲ徹底セシムル如ク努メタリ。

因ニ書中挿入セル圖ハ大部分東光,片倉兩氏ノ手ニナリタルモノナリ。記シテ以テ兩氏ニ謝意ヲ表ス。

第一篇
幾何學ノ基礎

第一章　點ト直線

第二章　角

第三章　圓

第四章　多角形

第五章 幾何學的證明

第二篇

直線形

第一章 三角形ノ合同

第二章 作圖題

第三章 平行線

第四章 多角形ノ內角ノ總和

第五章 二等邊三角形及直角三角形

第六章 三角形ノ角及邊ノ不等

第七章 平行四邊形

第三篇
圓

第一章 弧及弦

第二章 弓形角

第三章 切線及切圓

第四篇
軌跡及作圖題

第一章 軌跡

第二章 作圖題

第五篇
面積

第一章 三角形及平行四邊形ノ面積

第一篇

幾何學ノ基礎

第一章 點ト直線

1. 嚴密ナル言ヒ表ハシ方

吾々ノ日常用フル言葉ハ夫々意味ヲ有シ,互ニ語リ合フ中ニソノ意味ヲ了解スルモノナリ。例ヘバ

「鉛筆ニテ文字ヲ書ク」

ト言ヘバ,「鉛筆」トハ何カ,「文字」トハ何カ,「書ク」トハ何ヲスルコトカト夫々意味ヲ有シ,言フ人ノ思ヘルコトト聞ク人ノ了解スルコトトガ一致スルコトニヨリテ互ニ意志ノ通ズルモノナリ。今モシ

「文字ヲ書クモノヲ鉛筆トイフ」

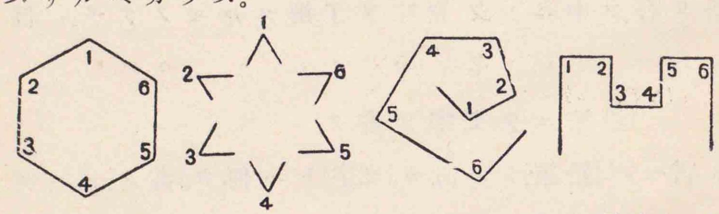
ト言ヘバ「ペン」モ筆モ皆鉛筆ノ部類ニ入ルコトトナリ,鉛筆ト他ノモノトノ區別ヲ明カニスルコト困難ナリ。故ニ此ノ言ヒ表ハシ方ハ不正確ナリトイハザルベカラズ。又

「無色透明ナル液體ヲ水トイフ」

トイヘバ「アルコール」モ水ノ一種ナリトイフコトトナリ,之モ亦不正確ナル言ヒ表ハシ方トイフベキナリ。又

「六角形トハ六ツノ角ニテ成ル形ナリ」

トイヘバ,下圖ノ如キ形ハ何レモ六角形ナリトイハザルベカラズ。



カクノ如ク,言語ハソノ意味ヲ正確且嚴密ニ述ベザレバ種々ノ誤ヲ生ズルモノニシテ,

用語ノ意味ヲ明カニスルコトト

之ヲ正確ニ言ヒ表ハスコト

トハ極メテ肝要ノコトナリ。殊ニ今ヨリ學バントスル幾何學ノ如キハ,極メテ正確ナル理論ノ上ニ成リ立ツモノナレバ,其ノ用語ハ苟クモ忽ニスベキモノニアラズシテ,最モ正確且嚴密ナルベキモノナリ。

2. 點

問 次ノ圖ニ於テ何レガ眞ノ點ニ近キモノカ。

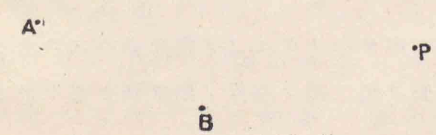
點ヲ表ハスニハ通常上ノ如ク丸星ヲ以テスレドモ何レモ眞ノ點ニアラズシテ極メテ小ナル圓ナリトイフ方ガ寧ロ適當ナリ。故ニ嚴密ニイフトキハ

點ハ位置アリテ大サナキモノナリ。

トスベキナリ。…………………………………(A)

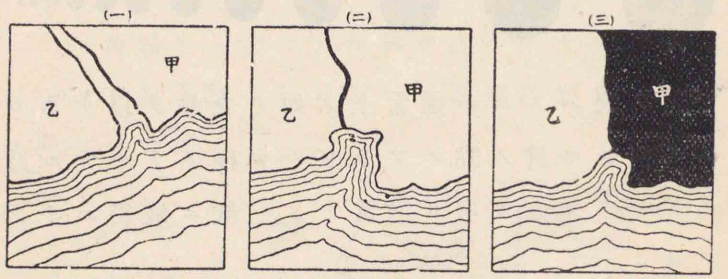
然レドモ位置アリテ大サナキモノハ之ヲ實際ニ示スコトハ困難ナリ。故ニ矢張リ小ナル丸星ヲ以テ之ヲ代表スルモノトス。

點ヲ呼ブニハ點A,點B,點Pノ如クス。



3. 線

問一 次ノ圖中第一圖ニ於ケル甲乙兩地ノ境界ヲナスモノハ何カ。第二圖,第三圖ニ於テハ如何。

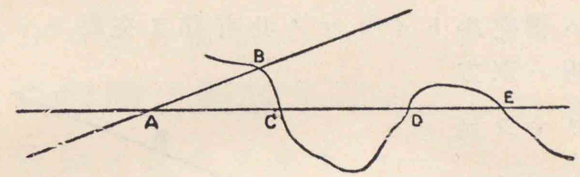


通常第二圖ノ如キ境界ヲ線トイヘドモ嚴密ニイフトキハ是モ亦線トイフコトヲ得ズ。第三圖ノ如ク白キ部分ト黑キ部分トノ境界ナル幅モ厚サモナキモノヲ線トイフ。即チ

線ハ長サアリテ幅モ厚サモナキモノナリ。……………………………………(*B*)

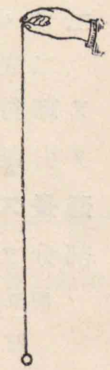
然レドモ幅モ厚サモナキモノヲ書キ表ハスコトハ困難ナルコトナレバ矢張リ第二圖ノ境界ノ如ク細ク書キテ之ニ代用スルモノトス。

問二 線ト線トノ出會フトコロハ何カ。

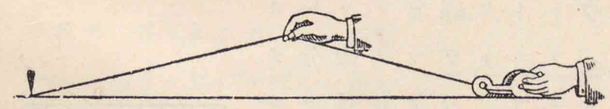


線ニ二種類アリ。眞直ナル線即チ**直線**ト曲レル線即チ**曲線**トナリ。

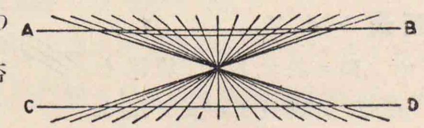
線ヲ呼ブニハソノ上ノ二ツ又ハ三ツ以上ノ點ノ名ヲ以テスルモノトス。直線*AB*,曲線*BCDE*ノ如シ。



問三 直線狀ヲナスモノノ例ヲ擧ゲヨ。



問四 *AB,CD* ハ直線ナルカ否カヲ驗セ。

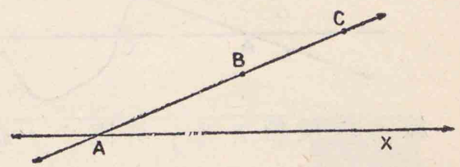


二點ヲ通ル直線ハ唯一ツアリ。……(1)

即チ直線ハソノ上ノ二點ニテ定マルモノニシテ二點ヲ共有スルスベテノ直線ハ全ク相重リテ一直線トナル。

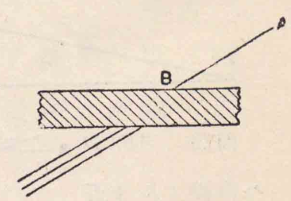
二直線ガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキハソノ二直線ハ**相交ル**トイヒ,ソノ共有點ヲ**交點**トイフ。

直線ハ双方ヘ限リナク延ビタルモノニシテ唯直線AXトイヘバ**無限直線**ヲ指シ,**線分** AB トイヘバ**有限直線**(直線ノ一部分ニシテ點Aト點Bトノ間)ヲ指ス。



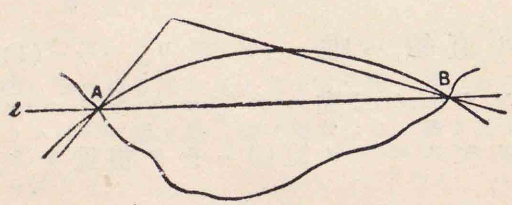
二ツノ線分 AB,BC ノ和ヲ $AB+BC$ ノ如ク書ク。

二點ヲ兩端トセル線分ヲ引クコトヲソノ二點ヲ**結付ク**トイヒ,線分ヲソレヨリ引延バスコトヲソノ線分ヲ**延長ス**トイフ。ソノ延長セル部分ヲ**延長**トイフ。



問五　右ノ圖ニ於テ下ノ三直線ノ何レガ AB ノ延長ナルカヲ驗セ。

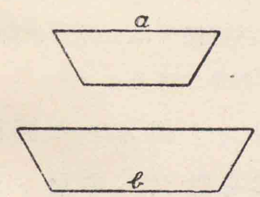
直線ヲ表ハスニ唯一字ヲ以テスルコトアリ。例ヘバ直線 l ノ如シ。

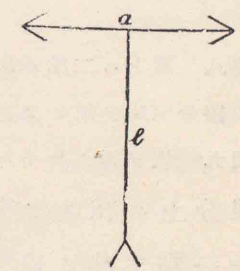


二點間ニ引ケル種々ノ線ノ中ニテ線分ハ最モ短シ。……………………(2)

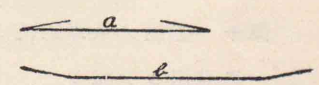
二點間ノ距離トハソノ二點ヲ結ベル線分ノ長サヲイフ。………………(C)

問六　線分a,bノ長サヲ測リテ比較セヨ。



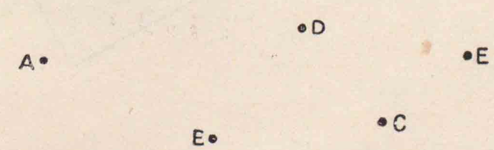


問七　點Aヨリ B,C,D ノ各點ヲ通リテ點Eニ到ルニ如何ナル順ニ通ルガ最モ近キカ。

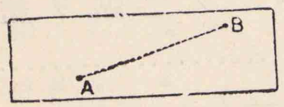


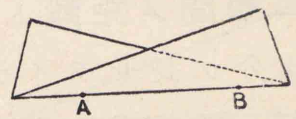
是ヲ物指ニテ測リ決定セヨ。又「コンパス」ニテ各二點間ノ距離ヲ一直線ニ移スコトニヨリテ決定セヨ。

又最モ遠キ途ヲ通ル順序如何。



紙ヲ折レバソノ折リ目ハ一直線ヲナスモノナリ。





問八 紙上ニ二點A,Bヲ定メ紙ヲ折リテ線分ABヲ作レ。

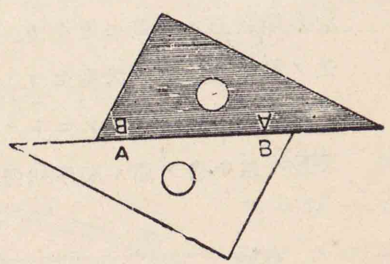
線分ABヲ用ヒテ定規ノ縁ガ一直線ナルカ否カヲ驗セ。

問九 紙ヲ折ルコトニヨリテ線分ヲ二等分セヨ。

線分上ニ在リテ其ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニ在ル一點ヲ其ノ線分ノ**二等分點**又ハ**中點**ト云フ。 ……………(D)

問十 定規ノ縁ガ正確ナル直線ヲナスカ否カヲ直線ノ性質ヲ利用シテ驗セ。

唯一回全ク重レバ縁ハ直線ナリトイヒ得ルカ。

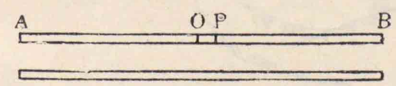


問　　題

1 一直線上ニ五ツノ點A,B,C,D,Eガ此ノ順序ニ且$AB=7cm$, $BC=4cm$, $BD=9cm$, $BE=12cm$ナル様ニトレ。CD,DEノ長サハ何cmナルカヲ計算ニヨリテ出セ。又物指ニテ測リテ比較セヨ。

(1) 線分ABヲABノ方向ニ延長シテBCヲ$12cm$, BAノ方向ニ延長シテADヲ$5cm$ニトリ,次ニDCノ兩端ヨリ$16cm$ノ點ヲCD上ニトリ,ソノ二點間ノ距離ガ$8cm$アル如クスルニハ線分ABノ長サヲ何程トスベキカ。

注意 二通ノ圖ヲ書ケ。

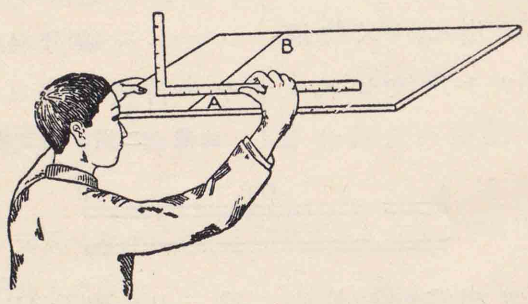


2 長サ相等シキ眞直ナル二本ノ棒アリ。ソノ眞中ノ點ヲ他ノ器具ヲ用ヒズニ驗ス方法如何。

(2) Pヲ線分AB上ノ任意ノ一點トシABノ中點Oヲ求メPA,PBノ差トPOトヲ物指ヲ用ヒテ比較セヨ。又物指ヲ用ヒズシテ$OP=\dfrac{PA\sim PB}{2}$ナル理由ヲ明カニセヨ。

4. 平　面

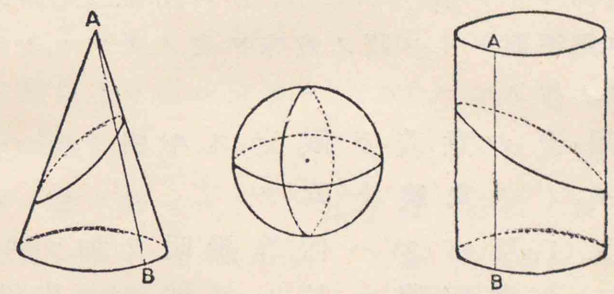
直線ヲ引クニハ平カナル面即チ**平面**ト直線定規トヲ要ス。直線定規ノ縁ヲ表面上如何ナル位置ニ置クトモソノ縁ガ常ニ全クソノ面ニ密着スルガ如キ面ハ平面ナリトイフコトヲ得ベシ。



幾何學ニ於テハ平面ノ意義ヲ次ノ如ク定ム

一ツノ面ニ於テソノ面上ノ**任意ノ二點**ヲ通ル直線ガ全クソノ上ニ在ルトキハソノ面ヲ**平面**トイフ。⋯⋯⋯(E)

問一　多クノ直線ガ面ニ全ク密着シテモナホ平面ナラザル面ガアルカ。



問二　平面ナリト思ハルルモノノ例ヲ擧ゲヨ。

問　　題

3　直六面體ニハ幾ツノ平面,幾ツノ直線,幾ツノ點ガアルカ。

(3)　大工ガ板ヲ平ニ削ランニハ鉋ノ刄ハ如何ニアルベキカ。

5. 定義及公理

前節マデノ(A),(B),(C),(D),(E)ハ點,線,二點間ノ距離,中點,平面トイフ語ノ意味ヲ定メタルモノナリ。カクノ如ク,

用語ノ意義ヲ限定スル如ク述ベタルモノヲ**定義**ト云フ。

又(1)及ビ(2)ハ何等説明ヲ加フルコトナク幾何學ニ於ケル推理ノ基礎トシテ眞ナリト認ムルトコロノ事項ナリ。之ヲ**公理**トイフ。

既ニ算術,代數ニテ學ビタル公理ヲ擧ゲンニ, A, B, C, D ヲ同種ノ量, m ヲ任意ノ正ノ數トスレバ,

1 $A=B, A=C$ ナラバ $B=C$

2 $A=B, C=D$ ナラバ $A\pm C=B\pm C$
$A\pm C=B\pm D$

3 $A=B$ ナラバ $mA=mB$

4 $A<B, C=D$ ナラバ $mA<mB$
$A\pm C<B\pm C$
$A\pm C<B\pm D$

5 $A<B, C<D$ ナラバ $A+C<B+D$

問　題

4 紙上ニ五ツノ點ヲ書キ其レ等ノ二點又ハ三點以上ヲ通ル直線ヲ作リ點ノ位置ニヨル直線ノ數ヲ調ベヨ。

注意 一點ヨリ他ノ點ニ引キ得ル直線ノ數ヲ考ヘヨ。

(4) 一直線上ニ三點 A, B, C, ソノ直線外ニ三點 D, E, F アリ,是レ等ノ諸點ノ二ツ又ハ三ツ以上ヲ通ル直線ノ數如何。

注意 點ノ位置ニヨル直線ノ數ヲ調ベヨ。

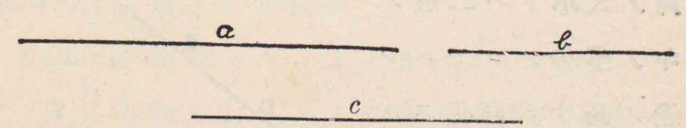
線分 a,b,c ガ圖ノ如ク與ヘラレタルトキ,次ノ式ニテ表ハス線分ヲ「コンパス」ト定規トヲ用ヒテ書ケ。但シ分數ノモノハ「コンパス」ノ開キヲ加減シテ等分セヨ。

5 $\dfrac{a+b}{2}$

(5) $a-\dfrac{a+b}{2}$

6 $3a-2b+c$

(6) $\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b-\dfrac{1}{3}c$

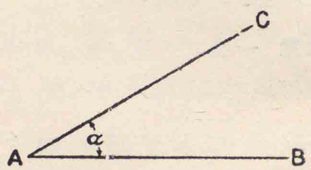


第二章　角

6. 角

定義　一點ヨリ引ケル二ツノ直線ハ**角ヲナス**又ハ**角ヲ夾ム**ト云フ。ソノ點ヲ角ノ**頂點**,ソノ二直線ヲ角ノ**邊**トイフ。

圖ニ於テ點Aハ角ノ頂點,直線AB,ACハ角ノ二邊ナリ。

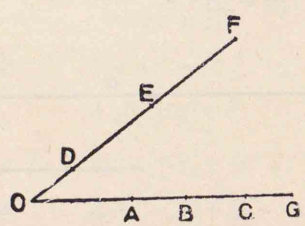


之ヲ角BAC又ハ角CABトイヒ，$\angle BAC$, $\angle CAB$ノ如ク書ク。

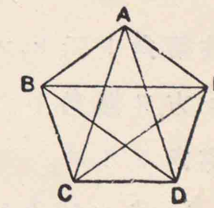
又紛(マギ)ルル恐ナキトキハ單ニ角A,角α(アルファ)ト呼ビ$\angle A$ 又ハ $\angle\alpha$(アルファ) ト書ク。

問一　圖ニアル角ノ名ヲ色々ニイヘ。

角ノ大小トハ二邊ノ**開キノ多少**ノコトニシテ邊ノ長サニ關係スルコトナシ。



問二　圖ニアル總テノ角ヲ讀メ。



幾ツカノ角ヲ加減スルコトヲ次ノ如ク書ク。

$$\angle EAB-(\angle DAC+\angle CAB)$$
$$=\angle EAD$$

二ツノ角ヲソノ頂點ト二邊トガ全ク重ナル樣ニ置クコトヲ得ルトキハソノ二角ハ相等シ。

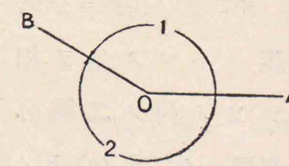
問三　上圖ニ於テ次ノ角ノ大サヲ比較セヨ。

$\angle BEC$ト$\angle BDC$,　$\angle DCA$ト$\angle ABD$,

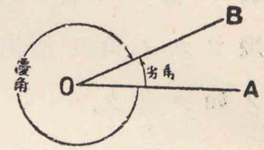
AB,DCノナス角ト$\angle ACE$, AD,CEノナス角ト$\angle BAE$

7. 共軛角・接角

$\angle AOB$ハ二邊ノ間ノ開キヲシメスモノニシテ邊OBガOヲ中心トシテ廻轉シテ開クト考フルニ初メOBガOAニ重リタル位置ヨリOBマデ廻轉スルニ**1**ノ方向ニ行クトソノ反對ニ**2**ノ方向ニ行クトノ二通アリ。從テ一點ヨリ引ケル二直線ハ常ニ二ツノ角ヲ表ハス事トナル。

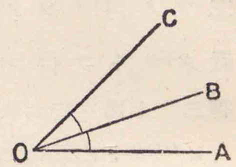


コノ二ツノ角ヲ互ニ**共軛角**ト云ヒ,ソノ大ナル方ヲ**優角**,小ナル方ヲ**劣角**トイフ。



通常$\angle AOB$トイフトキハ劣角ヲ指スモノナリ。

問一　次ノ圖ニ於テ $\angle AOB$ ト $\angle BOC$ トニ共通ナルモノハ何カ。



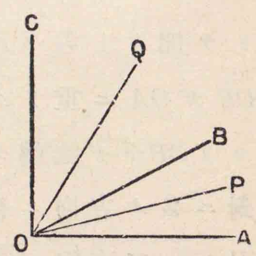
定義　頂點ト一ツノ邊トヲ共有シ,且コノ共有邊ノ兩側ニ在ル二ツノ角ヲ**接角**トイフ。

問二　$\angle AOB+\angle BOC-\angle COP=\angle AOP$ノ圖ヲ書ケ。

問三　一ツノ角ヲ書キ紙ヲ折返スコトニヨリテ之ヲ相等シキ二ツノ接角ニ分テ。

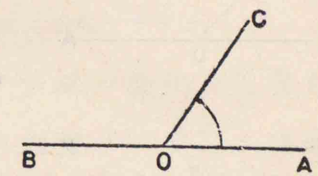
定義　一ツノ角ヲ相等シキ二ツノ接角ニ分ツ直線ヲソノ角ノ**二等分線**トイフ。

問四　$\angle AOB(\angle\alpha)$ ト $\angle BOC$ ($\angle\beta$)(ビータ)トノ各々ノ二等分線ヲ夫々OP,OQトスルトキ$\angle POQ$ノ大サヲ表ハス式ヲ$\angle\alpha$,$\angle\beta$ヲ用ヒテ作レ。



8. 直角·鋭角·鈍角

直線AB上ノ一點Oヨリ直線OCヲ引ケバ接角$\angle AOC$, $\angle BOC$ヲ生ズ。

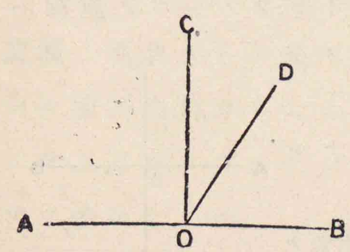


問一　上ノ圖ニ於テ直線OCガ漸次Oノ廻リヲ迴轉スルトキノ$\angle AOC$ト$\angle BOC$トノ大サノ變化ヲ述べヨ。

定義　一ツノ直線ガ他ノ一ツノ直線ト交リテ生ズル接角ガ相等シキトキハ各ノ角ヲ**直角**ナリトイフ。

直角ノ略號トシテ **R.∟** ヲ用フ。

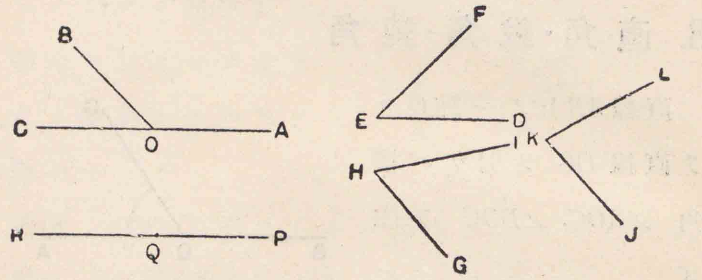
$\angle AOC$ ト $\angle BOC$ トガ相等シキトキハ各角ハR.∟ナルガ故ニ



($\angle AOC+\angle BOC$)ハ2R.∟ナリ。

即チ $\angle AOB$モ2R.∟ナリ。

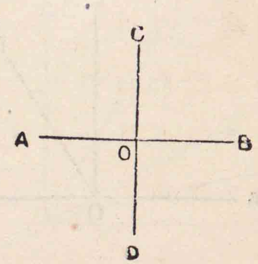
又($\angle AOD+\angle BOD$)モ2R.∟ナリ。



問二 上ノ圖ニ於テ $(\angle AOB+\angle BOC)$, $(\angle DEF+\angle GHI+\angle JKL)$, $\angle PQR$ ガ夫々 2R.∟ ナルカ否カヲ驗セ。

一ツノ角ノ二邊ガソノ頂點ノ兩側ニ一直線トナラバソノ角ハ 2R.∟ ナリ又頂點ヲ共有スル幾ツカノ角ヲ合セテ 2R.∟ トナル如キトキハソノ共通ナラザル二邊ハ一直線トナル。

定義 二直線ガ相交リテ直角ヲナストキハ其ノ二直線ハ互ニ**垂直ナリ**トイヒ,ソノ一ツノ直線ハ他ノ一ツノ直線ノ**垂線**,ソノ交點ヲ垂線ノ**足**トイフ。



AB ト CD トガ互ニ垂直ナルコトヲ $AB\perp CD$ ト書ク。

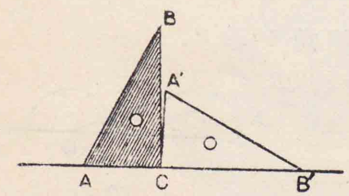
問三 AB, CD ガ交リ $\angle AOC$ ガ直角ナレバ $\angle BOC, \angle AOD, \angle BOD$ ハ如何。

問四 紙ヲ折ルコトニヨリテ紙上ニ畫キタル一直線上ノ一點ヨリ之ニ垂線ヲ立テヨ。

又ソノ直線外ノ一點ヨリ之ニ垂線ヲ立テヨ。

定義 一ツノ直線ガ他ノ直線ニ交リテ垂直ナラザルトキハ前者ヲ後者ノ**斜線**,ソノ交點ヲ斜線ノ足トイフ。

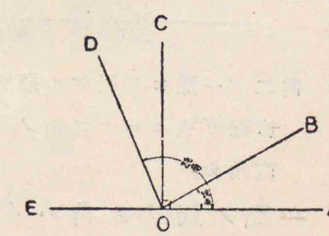
垂線ヲ引クニハ三角定規ノ直角ノ部分ヲ用フルコトアリ。



問五 圖ノ如クシテ一ツノ三角定規ノ直角ノ部ノ正否ヲ驗セ。

問六 圖ノ如クナルトキハ $\angle ACB$ ハ直角ヨリ $\angle BCA'$ ノ半分ダケ小ナル理ヲ考ヘヨ。

定義 直角ヨリ小ナル角ヲ**鋭角**,直角ヨリ大ニシテ二直角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ。



9. 角ノ單位·餘角·補角

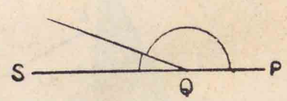
角ノ單位トシテハ直角ノ他ニ度(°)分(′)秒(″)ヲモ併セ用フ。

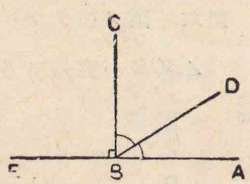
$$1R.\llcorner=90^\circ \quad 1^\circ=60' \quad 1'=60''$$

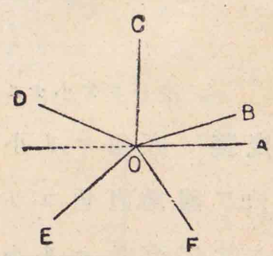
圖上ノ角ヲ測ルニハ分度器ヲ用ヒ,天文學及ビ實地測量等ニ於テハ角ヲ精密ニ測ルタメ經緯儀(セオドライト),六分儀(セクスタント)等ヲ用フ。

定義 二角ノ和ガ一直角ニ等シキトキハ各々ノ角ヲ他ノ角ノ**餘角**ト云ヒ,二角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ各々他ノ角ノ**補角**ト云フ。

問一 圖ニ於テ∠ABDノ餘角∠PQRノ補角ハ夫々何度ナルカ。

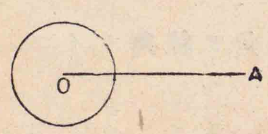


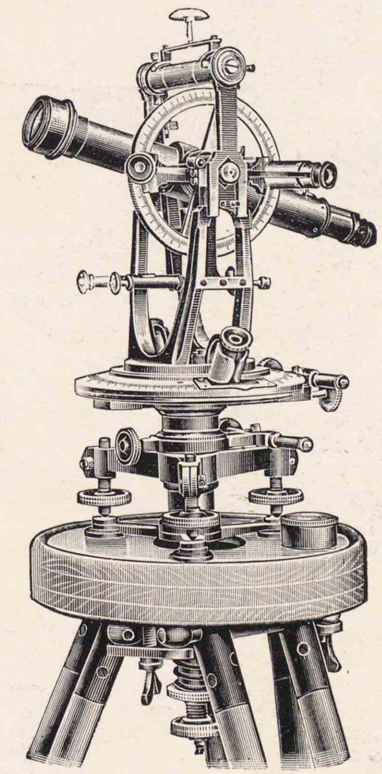




問二 一點ヨリ引ケル幾ツカノ直線ガ次々ニナス角ノ和ハ何直角カ。

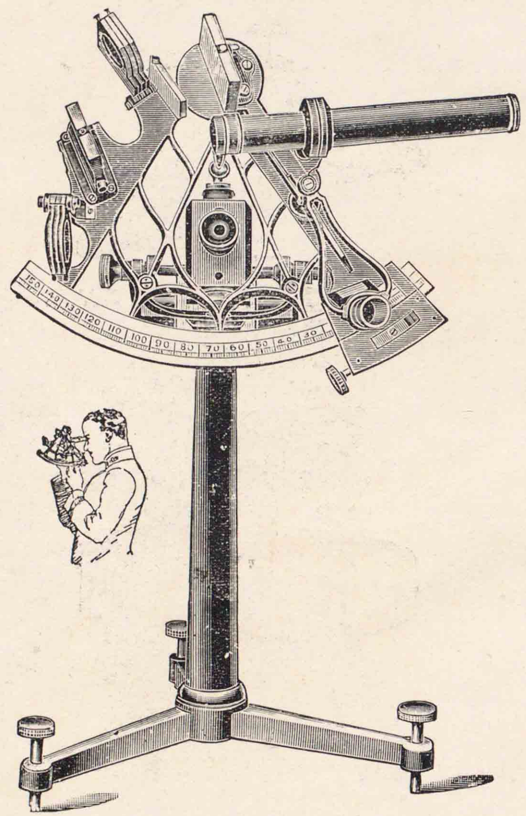
一點ノ周リノ角ハ4直角ナリ。





經 緯 儀

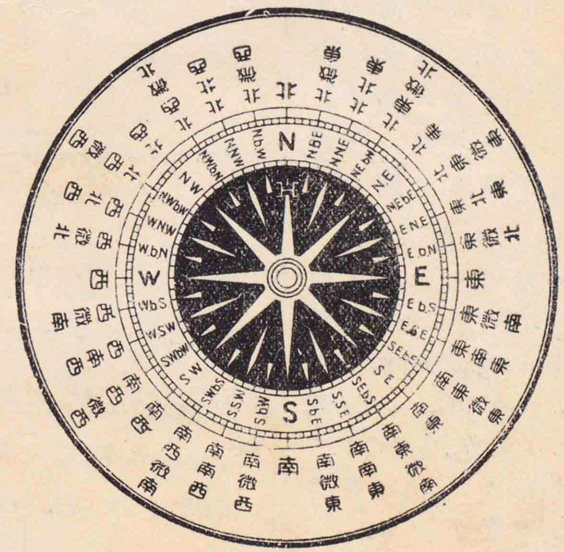
(*Theodolite*)



六　分　儀

(Sextant)

次ニ方位ヲ知ルタメニ用フル羅針盤面（ラシンバンメン）ノ圖ヲ示サン。



問　　題

7　$23^\circ.5$ ノ餘角,補角ハ夫々何度ナルカ。

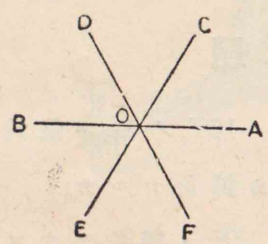
8　或角ハソノ餘角ノ2倍ナリトイフ。ソノ角ハ何度ナルカ。

(7)　150° ノ $\frac{5}{9}$ ハ鋭角ナルカ鈍角ナルカ。

(8)　互ニ補角ヲナス二角ノ差ガ 15° ナリト云フ。各角ノ大サ如何。

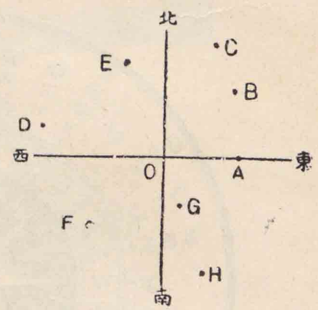
9 或汽船ガ或地點ヨリ北西ノ方向ニ6浬進ミ,次ニ北東ノ方向ニ8浬進ミタリ。然ラバ今ノ地點ハモトノ地點ノ何方向,何浬ノ處ニ在ルカヲ圖ヲ書キテ測レ。

10 ABヲ直線, Oヲソノ上ノ點トス。Oヨリ直線ABノ一方ニOC, OD, 他ノ側ニOE, OFヲ引キ$\angle AOC$, $\angle COD$, $\angle DOB$, $\angle BOE$, $\angle EOF$, $\angle FOA$ヲ皆相等シクスレバ各角ハ夫々何度ナルカ。



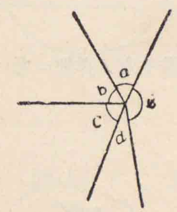
又OCトOE, ODトOFトハ夫々一直線トナルコトヲ說明セヨ。

(9) Oヨリ見タルA, B, C, D, E, F, G, Hノ方位如何。

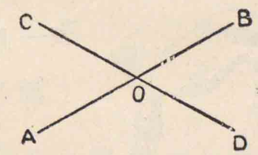


(10) 一點Oヨリ直線OA, OB, OC, OD, OEヲ此ノ順序ニ引キテ生ジタル$\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOA$ガ夫々$\angle AOB$ノ2倍, 3倍, 4倍, 5倍トナル如クセントス。各角ヲ何度トスベキカ。

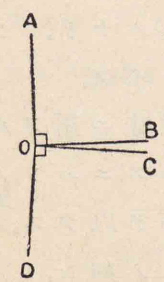
11 圖ニ於テ $\angle a = 50°$, $\angle b = 60°$, $\angle c = 75°$, $\angle d = 30°$ナラバ$\angle e$ハ何度ナルカ。



(11) 二直線AB, CDガ一點Oニ於テ交リ$\angle AOC$ガ$40°$ナラバ他ノ角ハ夫々如何。

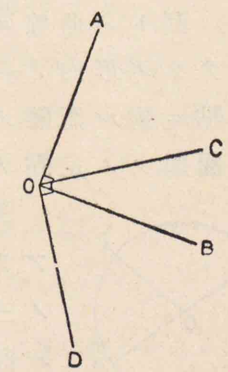


12 圖ニ於テ $\angle AOB$, $\angle COD$ガ直角, $\angle BOC$ガ$12°$ナラバ$\angle AOD$ハ何度ナルカ。一般ニ$\angle AOD$ト$\angle BOC$トノ關係如何。



又$\angle BOC$ノ二等分線ハ$\angle AOD$ヲ二等分スル理由ヲ云ヘ。

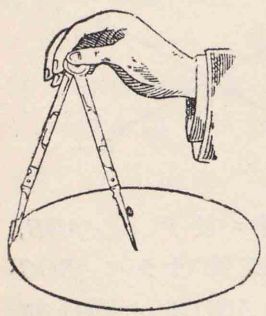
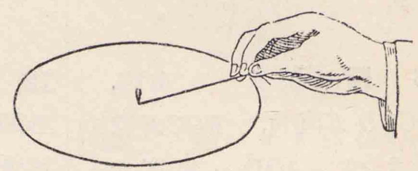
(12) 圖ニ於テ $\angle AOB$, $\angle COD$ガ$90°$ナラバ$\angle BOC$ト優角AODトノ關係如何。



又$\angle BOC$ノ二等分線ハ優角AODヲ二等分スル理由ヲ云ヘ。

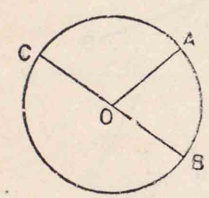
第三章　圓

10. 圓ノ基本性質

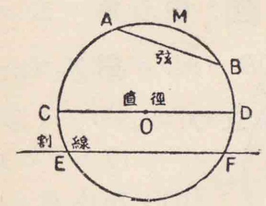
問一　圖ニヨリテ圓ノ畫キ方ヲ詳細ニ考ヘヨ。

定義　圓トハ曲線ニテ圍マレタル平面ノ一部分ニシテソノ形內ノ一定點ヨリソノ曲線上ノスベテノ點ニ到ル距離ノ相等シキモノナリ。ソノ曲線ヲ**圓周**,ソノ定點ヲ圓ノ**中心**トイフ。



圓ヲ圓周ノ意味ニ用フルコトアリ。圓ヲ表ハスニハソノ周上ノ三點或ハ中心ヲ以テス。例ヘバ圓 ABC, 圓 O ノ如シ。

定義　圓ノ中心ヨリ圓周上ノ一點ニ引ケル線分ヲ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ兩端ガ圓周ニアル線分ヲ**直徑**トイフ。



定義　圓周ノ一部分ヲ**弧**ト云フ。弧 AB 又ハ弧 AMB ヲ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AMB}$ ト書ク。

定義　圓周上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ**弦**ト云フ。

定義　圓周ト二點ニ於テ交ル直線ヲソノ圓ノ**割線**ト云フ。

割線 EF トイヘバ双方ニ延ビタル無限直線ノコトニシテ弦 EF ハソノ一部分ナリ。

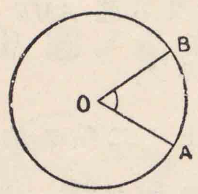
問二　半徑2.5糎ノ圓ヲ畫キ此ノ圓周上ノ一點 A ヨリ兩方ニ3糎ノ弦 AB ト2糎ノ弦 AC トヲ引キ, $AB+AC$ ト BC トノ大サヲ比較セヨ。

定義　直徑ニヨリテ分タレタル圓ノ二ツノ部分ヲ**半圓**ト云フ。

問三　中心ノ知ラレザル圓ノ中心ヲ紙ヲ折ルコトニヨリテ求メヨ。

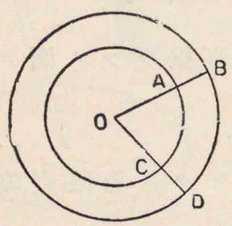
問四　一ツノ圓ノ直徑ヲ畫キ之ヲ AB トシ, 圓周上ニ任意ノ點 P ヲ求メ $\angle APB$ ノ大サヲ調ベヨ。

定義 圓ノ二ツノ半徑ノナス角ヲ**中心角**ト云フ。



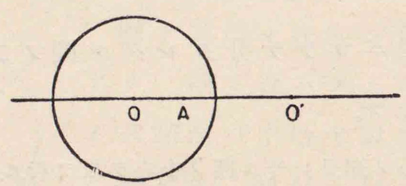
中心角 AOB ハ $\overset{\frown}{AB}$ ニ**對ス**,又ハ $\overset{\frown}{AB}$ ノ上ニ**立ツ**ト云フ。

定義 同一ノ點ヲ中心トセル幾ツカノ圓ヲ**同心圓**ト云フ。



問五 二ツノ同心圓ノ間ニ在ル半徑ノ部分ハ何處モ相等シキ理由ヲイヘ。

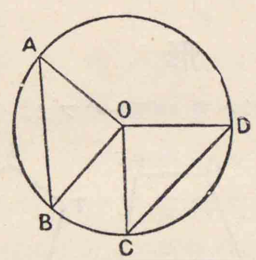
問六 次ノ圖ニ於テ O' ヲ中心トシ $O'A$ ヲ半徑トシテ圓ヲ書ケバ圓 O ト圓 O' トハ幾ツノ點ニテ交ルカ。



定義 二ツノ圓ノ中心ヲ通ル直線ヲ**中心線**ト云ヒ,中心間ノ距離ヲ**中心距離**ト云フ。

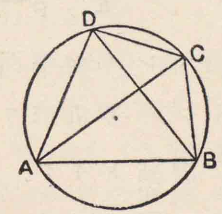
問　題

13 圓 O ニ相等シキ弦 AB, CD ヲ引キ中心角 AOB, COD ヲ作リ,ソノ大サヲ測リテ比較セヨ。



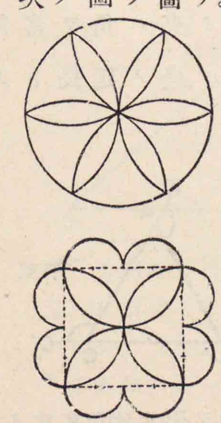
(13) 圓 O ニ相等シキ中心角 AOB, COD ヲ作リ,弦 AB, CD ヲ測リテソノ長サヲ比較セヨ。

(14) 圖ニ於ケルスベテノ角ヲ測リテ相等シキ角ヲ見出セ。

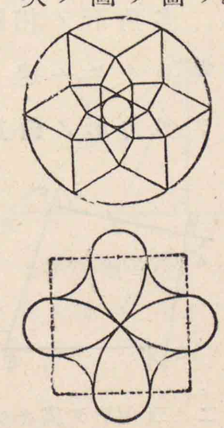


(14) 問題14ニ於テ $\angle ADC$ ト $\angle ABC$ 及 $\angle DAB$ ト $\angle DCB$ トノ關係ヲ調ベヨ。

15 次ノ圖ヲ書ケ。



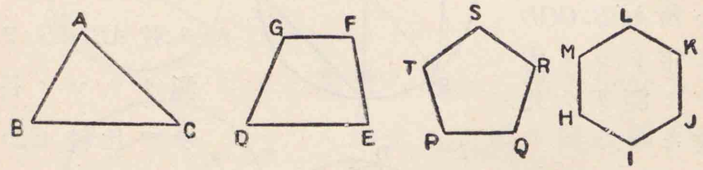
(15) 次ノ圖ヲ書ケ。



第四章 多　角　形

11. 多　角　形

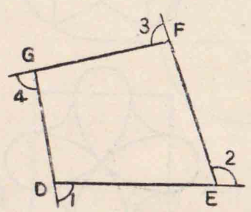
問一　次ノ圖ノ形ハ夫々何トイフカ。

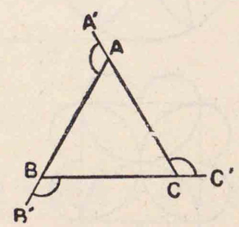


定義　線分ニテ圍マレタル平面ノ一部分ヲ**直線形**又ハ**多角形**トイフ。多角形ヲ圍ム各線分ヲ**邊**トイヒ,邊ノ交點ヲ**頂點**トイフ。

スベテノ邊ノ和ヲ**周**ト云フ。

定義　多角形ノ相隣レル二邊ノ夾ム角ヲ多角形ノ**內角**トイヒ,一邊ト之ニ隣レル邊ノ延長トノナス角ヲ多角形ノ**外角**ト云フ。





問二　三角形ヲ書キソノ三ツノ內角ヲ測リテ和ヲ求メヨ。

定義　多角形ノ廣サヲ多角形ノ**面積**ト云フ。

面積ノ單位ニハ一平方糎,一平方米等アリ。

多角形ハ邊又ハ角ノ數ニヨリテ**三邊形,四邊形,五邊形**又ハ**三角形,四角形,五角形**等トイフ。

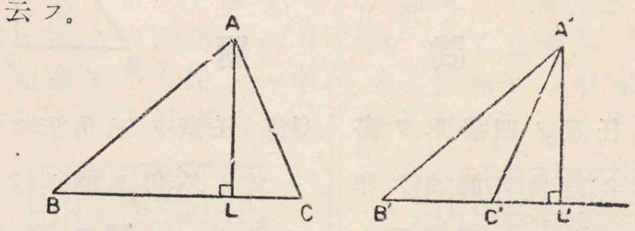
定義　スベテノ邊ガ皆相等シク,スベテノ內角ガ皆相等シキ多角形ヲ**正多角形**ト云フ。

圖ノ如キ多角形ヲ呼ブニ三角形ABC,四邊形$DEFG$,正五邊形$PQRST$,正六角形$HIJKLM$等トイフ。

三角形ABCヲ$\triangle ABC$ト書ク。

問三　六邊形ヲ一直線ニテ截ラバ夫々何邊形ノ多角形ニ分タルルカ。種々ノ場合ヲ作リテ調ベヨ。

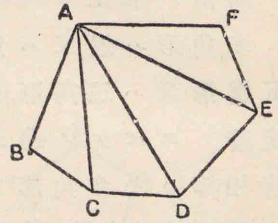
定義　三角形ノ一ツノ頂點ヨリソノ對邊ニ下セル垂線ノ長サヲソノ邊ヲ**底邊**トセル場合ノ**高サ**ト云フ。



問四　$\triangle ABC$ノ面積ハ何平方糎ナルカ,上圖ニ依リテ測レ。又ACヲ底トシ之トBヨリ之ニ到ル高サトニヨリテ面積ヲ測レ。又ABヲ底トシ之トCヨリ之ニ到ル高サトニヨリテ面積ヲ測レ。

$\triangle A'B'C'$ニツイテモ同樣ニ實測セヨ。

定義　多角形ノ相隣ラザル頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ**對角線**ト云フ。

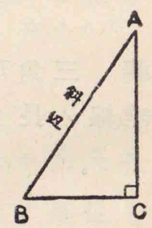


問五　スベテノ角ガ直角ナル四邊形ヲ畫キソノ對角線ノ長サヲ比較セヨ。

問六　七邊形ノ一頂點ヨリ出ヅル對角線ハ何本ナルカ。又對角線ノ總數如何。

問七　n 邊形ノ對角線ノ總數ハ $\frac{n(n-3)}{2}$ ナル式ニテ表ハスコトヲ得。其ノ理由ヲ述ベヨ。

定義　一内角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイヒ,直角ニ對スル邊ヲ直角三角形ノ**斜邊**トイフ。



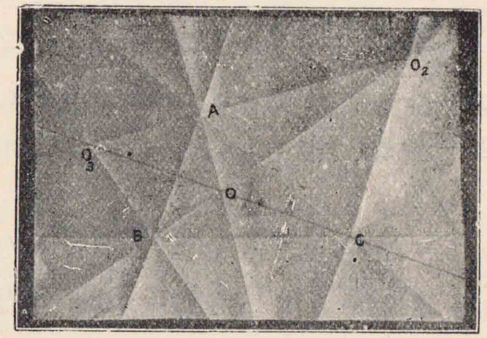
問　題

16　任意ノ四邊形ヲ書キ,ソノ内角ヲ測リテ和ヲ求メ,何レノ四邊形ニツキテモ内角ノ和ハ一定ナルコトヲ驗セ。

(16)　任意ノ三角形ヲ書キソノ外角ヲ測リテ和ヲ求メヨ。**問二**ニヨリテ三ツノ内角ノ和ヲ知レバ外角ハ計算ニヨリテ知リ得ルコトヲ示セ。

17　三角形ヲ書キ分度器ヲ用ヒテ三ツノ内角ノ二等分線ヲ引キ如何ニナルカヲ調ベヨ。又紙ヲ折リテ驗セ。

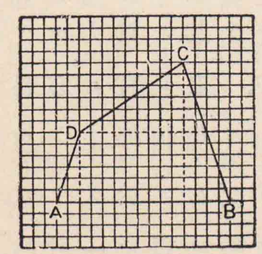
(17)　三角形ヲ書キ一内角ノ二等分線ト他ノ二内角ニ隣レル二ツノ外角ノ二等分線トヲ引ケバ如何ニナルカ。



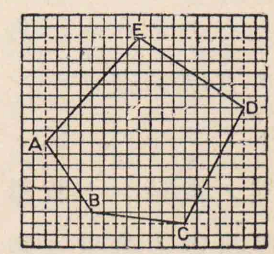
18　三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ垂線ヲ下シテ如何ニナルカヲ調べヨ。又紙ヲ折リテ驗セ。

(18)　三角形ヲ書キソノ各頂點ト對邊ノ中點トヲ結ビテ三線分ヲ作ラバ如何ニナルカ。

19　次ノ四邊形 *ABCD* ノ面積ヲ一方眼ヲ一平方糎トシテ計算セヨ。



(19)　次ノ五邊形ノ面積ヲ一方眼ヲ一平方糎トシテ計算セヨ。



第五章　幾何學的證明

12. 幾何學的證明

問一　三角形ノ三ツノ內角ノ和ハ何直角ニ等シキカ。

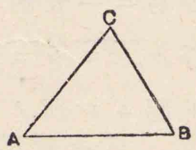
問二　三角形ノ三ツノ內角ノ各々ノ二等分線ハ如何ニナルカ。

吾々ハ既ニ28頁,31頁ニ於テ三角形ノ內角ノ和ハ二直角ニ等シキコト,三角形ノ三ツノ內角ノ各々ノ二等分線ハ一點ニ會スルコトヲ知リ得タリ。然レドモコハ僅カニ一二ノ實驗ノ結果ニヨリテ恐ラクハスベテノ三角形ニ就キテモ眞ナルベシト推察シタルニ過ギズ。サレバ之ヲ如何ナル三角形ニモ通ジテ誤ラザル一般的ノ理法ナリトハ斷定シ難キニ非ズヤ。モシ斯クト斷定セントセバ,アラユル三角形ニ就キテ其ノ眞ナルヤ否ヤヲ實驗シ盡サザルベカラズ。之レ實ニ容易ノコトナランヤ。況ンヤ斯ノ如キ幾何學上ノ事項ハ其ノ數殆ンド枚擧ニ遑アラザルニ於テヲヤ。是等無數ノ事項ニ關シ悉ク實驗ヲ以テ一般的ノ

理法ヲ見出スコトハ人力ノ到底企テ及ブベカラザル所ニシテ若シ斯クノ如クセバ一生ヲ實驗ニ費ストモナホ得ル所極メテ少ナカルベシ。果シテ然ラバ吾等ハ容易ニ一般的ノ理法ヲ見出シ得ベカラザルカ。否々。モシココニ何人モ見テ以テ直チニ眞ナリト認ムル所ノコトアリ,之ヲ基トシテ如何ナル場合ニモ通ジテ誤ラザル嚴密ニシテ而モ正確ナル方法ニヨリ理論ノ研究ヲ進メ以テ一ノ結論ニ到達シタリトセバソノ結論ノ確カニ一般的ノ理法タルコトヲ認メザルモノ無カルベシ。而モ斯クシテ理論ノ上ノ研究ニヨリテ一般的ノ理法ヲ見出スコトハ吾等人智ノ容易ニ能クスル所ナリ。

故ニ幾何學ニ於テハサキニ述ベタル定義,公理ヲ基トシ,之ヨリ出發シテ理論ノ上ヨリ種々ノ事項ヲ研究シテソノ正シキヲ確メ,更ニ是等ヲ基トシテ他ノ事項ノ研究ニ進ム如クシ以テ無數ノ一般的ノ理法ノ考究ヲナス。サレバソノ理論ノ推究モ極メテ嚴正ヲ要スルコト論ヲ待タザルナリ。

二點間ニ引ケル種々ノ線ノ中ニテ線分ハ最モ短シ。トノコトハ吾人ノ既ニ眞ナリト認メタルトコロノコトナリ。〔7頁(2)〕



即チ A, B ヲ二定點トシ C ヲ直線 AB 外ノ點トスレバ

$$AB<AC+BC$$

故ニ

三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ。トイフコトモ眞ナリ。

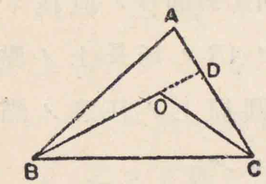
又 AB ヲ $\triangle ABC$ ノ最大邊トスレバ上ノ式ヨリ,

$$AB-BC<AC \qquad 〔12頁4〕$$

$$AB-AC<BC \qquad 〔12頁4〕$$

故ニ　三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ。ト云フコトモ眞ナリ。

斯クシテ進ミ行ケバ



$\triangle ABC$ 内ニ任意ノ一點 O ヲトレバ

$$AB+AC>OB+OC$$

ナルコトモ眞ナリト云フコトヲ得。何トナレバ

BO ヲ延長シ AC トノ交點ヲ D トスレバ

$\triangle ABD$ ニ於テ　$AB+AD>BD$　〔前頁〕

$\triangle DOC$ ニ於テ　$DO+DC>OC$　〃

故ニ　$AB+AD+DO+DC>(BO+OD)+OC$　〔12頁5〕

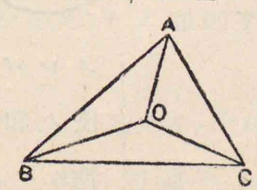
$AB+\ (AD+DC)\ >BO+OC$　〔12頁4〕

$AB+AC\ >OB+OC$

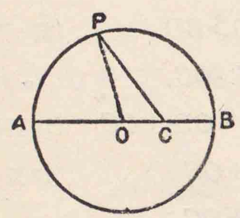
問　題

20 34頁ノコトヲ用ヒテ $2(AO+BO+CO)$ $>AB+BC+CA$ ナル理ヲ說ケ。

(20) 上ノコトヲ用ヒテ $AO+BO+CO$ $<(AB+BC+CA)$ ノ理ヲ說ケ。



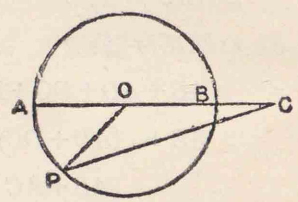
21 AB ヲ圓 O ノ直徑トシ C ヲ OB 上ノ點, P ヲ圓周上ノ任意ノ點トスレバ $CP<CA$ ナル理ヲ云ヘ。



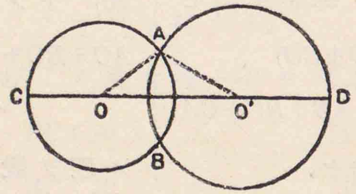
(21) AB ヲ圓 O ノ直徑トシ C ヲ AB ノ延長上ノ點, P ヲ圓周上ノ任意ノ點トスレバ

$CP<CA$

ナル理ヲ說ケ。



22 二ツノ圓ガ交レバソノ中心間ノ距離ハ二圓ノ半徑ノ和ヨリ小ナル理ヲ說ケ。



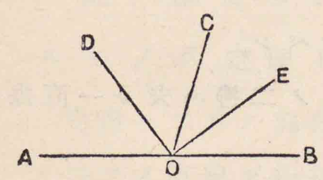
(22) 圖ノ如ク相交ル二圓ノ中心線ガ兩圓ト交ル點ヲ C,D トスレバ CD ハ兩圓ノ直徑ノ和ヨリ小ナル理ヲ說ケ

角ノ二邊ガソノ頂點ノ兩側ニ一直線トナラバソノ角ハ 2R.∟ ナリ。〔18頁〕

トノ事ハ既ニ吾人ノ眞ナリト認メタルトコロナリ。之ヨリ進ンデ

二ツノ直線ノナス接角ノ二等分線ハ互ニ垂線ナリ。

トノコトヲ考究セン。即チ



二直線 CO, AB ガ接角 $\angle AOC, \angle BOC$ ヲナシ, OD, OE ガ夫々此ノ二角ノ二等分線ナリトスレバ

$\angle AOD=\angle DOC$

$\angle BOE=\angle EOC$ ナル故

$\angle AOD+\angle BOE=\angle DOC+EOC$ ナリ。〔12頁2〕

故ニ $\angle DOC$ ト $\angle EOC$ トノ和即チ $\angle DOE$ ハ $\angle AOB$ ノ二分ノ一ナリ。

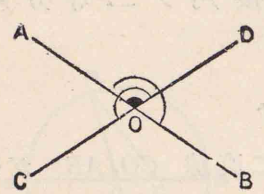
$\angle AOB$ ハ 2R.∟ ナル故 $\angle DOE$ ハ 1R.∟ ナリ

即チ DO ト EO トハ互ニ垂直ナリ。

次ニ

二ツノ直線ガ相交レバソノ相向ヒ合ノ角(**對頂角**)ハ相等シ。

トイフコトノ眞ナルコトヲ論定セン。



二直線 AB, CD ガ O ニ於テ相交ル二直線ナリトスレバ $\angle AOC=\angle BOD$

$\angle AOD=\angle BOC$

ナルベシ。

何トナレバ $\angle AOB, \angle COD$ ノ二邊ハ夫々一直線ナル故

$\angle AOD+\angle DOB=2R.\llcorner$

$\angle AOD+\angle AOC=2R.\llcorner$

$\angle AOD+\angle DOB=\angle AOD+\angle AOC$ 〔12頁1〕

故ニ $\angle DOB=\angle AOC$ ナリ。〔12頁2〕

次ニ之ト同樣ニシテ

$\angle AOD=\angle BOC$ モ論定スルコトヲ得。

依テ上ノコトハ眞ナリ。

13. 定理

前節ニ述ベタルガ如ク,

幾何學ニ於テハ定義公理ノ如キ何人モ眞ナリト認メタル事項ヲモトトシ之ヨリ出發シテ理論ノ上ヨリ他ノ新シキ事項ヲ研究シ,ソノ眞ナルコトヲ斷定シ行クモノニシテ,

此ノ論定セラレタル事項ヲ述ベタルモノヲ**定理**ト云フ。

定理ハ二ツノ部分ヨリ成ル。

<u>二ツノ直線ガ相交レバソノ對頂角ハ相等シ。</u>

ノ如ク始ノ部分ハ假ニ然リト定メタル條件ニシテ之ヲ**假設**ト云ヒ,後ノ部分ハ假設ヨリ論究スレバ當然起リ來ルベキ結論ニシテ之ヲ**終結**ト云フ。

假設ヨリ出發シテ終結ノ正シキコトヲ論ズル方法ヲ**證明**ト云フ。

注意 問題ニハ證明セヨト記サザルモノアレドモ多クハ定理ノ如ク證明ヲ要求スルモノナリ。

問 題

38頁ノ定理ヲ用ヒテ次ノ問題ヲ解ケ。

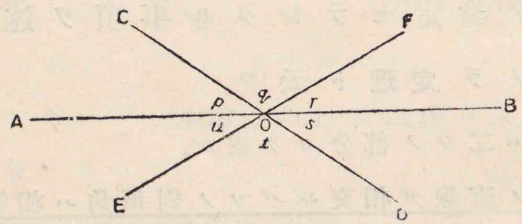
23 下圖ノ如ク三ツノ直線 AB, CD, EF ガ一點 O ニ於テ交リ六ツノ角ヲナス。此ノ六ツノ角ノ大サヲ知ルニハ何レノ角ヲ測レバ足ルカ。

(23) 下圖ニ於テ

$\angle u = 30°$

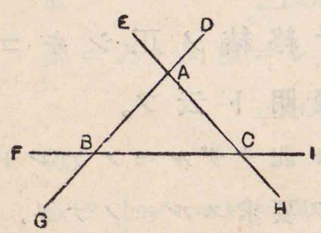
$\angle q = 125°$

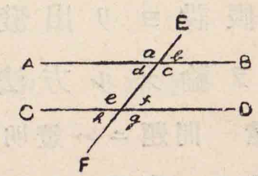
ナラバ他ノ角ノ大サハ夫々何度ナルカ。



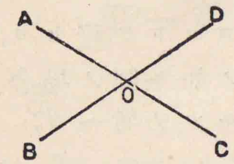
24 圖ノ如ク三ツノ直線ヲ書キタル場合ノ相等シキ角ノ組ハ何々ナルカ。

(24) 圖ニ於テ $\angle c = \angle e$ ナラバ他ノ等シキ角ノ組ハ何々カ。





25 一ツノ點ヨリ引ケル四直線ニヨリテ生ズル四ツノ角ガ一ツオキニ等シキ時ハ是等ノ直線ハ二ツ宛一直線ヲナス。



假設 OA, OB, OC, OD ハ O ヨリ引ケル四直線ニシテ $\angle AOB = \angle COD, \angle BOC = \angle DOA$ ナリトスレバ

終結 AO, OC 及 BO, OD ハ夫々一直線ヲナスベシ。

證明 一點ヨリ出ヅル數多ノ直線ガ順次ニナス角ハ合セテ四直角ナリ。 〔9節〕

故ニ $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 4R.\angle$

然ルニ $\angle AOB = \angle COD$

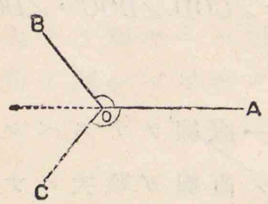
$\angle BOC = \angle DOA$ ナル故

$\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle DOA = 2R.\angle$ 〔12頁2〕

接角ノ和ガ二直角ナルトキハ其ノ隣ラザル邊ハ一直線ヲナス故 AO, OC ハ一直線ヲナス。〔8節〕

BO, OD ノ一直線ヲナス事モ同様ニ證スルヲ得。

26　一點Oヨリ出ヅル三直線OA, OB, OCノナス角AOBトAOCトガ何レモ鈍角ニシテ且相等シキトキハAOノ延長ハ$\angle BOC$ヲ二等分ス。

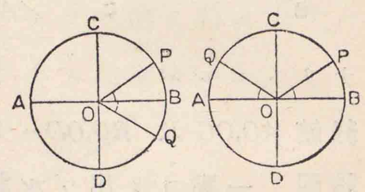


27　直線AOC上ノ點Oヨリ反對ノ側ニOB, ODヲ引クトキ

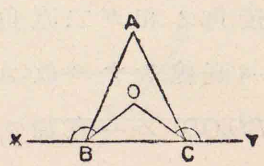
$$\angle AOB = \angle COD$$

ナラバOB, ODハ一直線ヲナスコトヲ證セヨ。

(26)　一ツノ圓ノ直徑ト等シキ角ヲナス二ツノ半徑ハ此ノ直徑ニ垂直ナル直徑トモ等シキ角ヲナスコトヲ證セヨ。尙下ノ如キ圖ノ場合ノ他ナキカヲ考ヘヨ。



(27)　$\triangle ABC$ノ$\angle B = \angle C$ナルトキBCノ延長ヲCY, CBノ延長ヲBXトシ$\angle ABC$, $\angle ACB$ノ二等分線BO, COガOニ於テ交ルトセバ$\angle OBX = \angle OCY$ナリ。



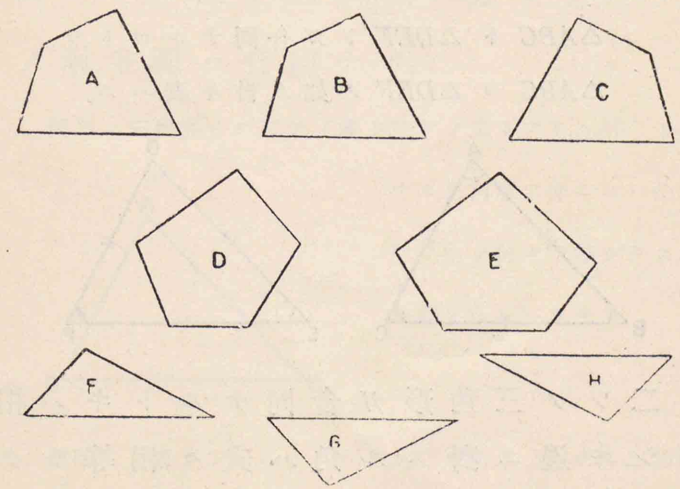
第二篇

直　線　形

第一章　三角形ノ合同

14. 合　同

問一　次ノ圖形ノ何レト何レトヲ全ク重ネ合ハスコトヲ得ルカヲ驗セ。



定義　全ク重ネ合ハスコトヲ得ル二ツノ圖形ハ互ニ合同又ハ全等ナリト云フ。

二ツノ圖形ガ合同ナル場合ニモ

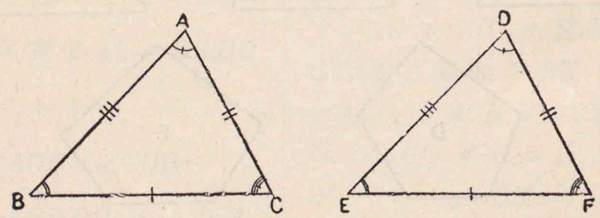
(1)　一ツノ圖形ヲソノママ平面上ヲ移動シテ他ノ圖形ニ全ク重ネ合スコトヲ得ル場合ト

(2)　一ツノ圖形ヲ裏返シテ移動スルコト.ニヨリテ他ノ圖形ニ全ク重ネ合スコトヲ得ル場合トノ二通アリ。是等ヲ區別スル必要ノアルトキハ

(1)ヲ**順ニ合同**　(2)ヲ**逆ニ合同**ナリトイフ。

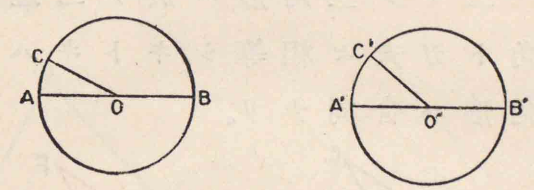
$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トガ合同ナルコトヲ

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ノ如ク書キ表ハス。



二ツノ三角形ガ合同ナルトキハ相等シキ邊ニ對スル角ハ夫々相等シク,相等シキ角ニ對スル邊ハ夫々相等シ。又兩三角形ノ面積ハ相等シ。

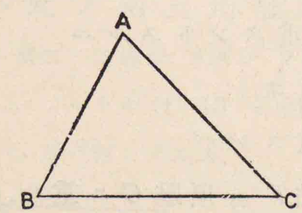
問二　重ネ合セズシテ二ツノ圓ノ合同ナルコトヲ知ルニハ何ヲ知レバヨキカ。



半徑ノ相等シキ二圓ハ合同ナリ。

又一ツノ圓ヲ直徑ニテ分チタルトキノ兩半圓ハ合同ナリ。

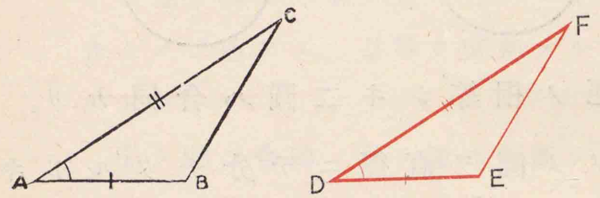
問三　三角形ニハ三ツノ邊ト三ツノ角トアリ,$\triangle ABC$ ト合同ナル三角形ヲ作ルニハ此ノ六ツノ中ノ何々ヲ等シクスル三角形ヲ作レバヨキカ。



問四　二邊ガ $5cm$, $6cm$ ニシテソノ夾角ガ 30° ナル三角形ヲ二ツ書キ互ニ重ネ合ハセテ見ヨ。

15. 三角形ノ合同(一,二)

定理 二ツノ三角形ニ於テ二邊トソノ夾角トガ夫々相等シキトキハ此ノ兩三角形ハ合同ナリ。



假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$AB=DE,\ AC=DF,\ \angle A=\angle D$ ナルトキハ

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ナルコトヲ證セン。

證明 $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ニ重ネントスルニ

先ヅ DE ヲ AB ニ全ク重ネ,

$\angle EDF$ ヲ $\angle BAC$ ニ重ヌレバ

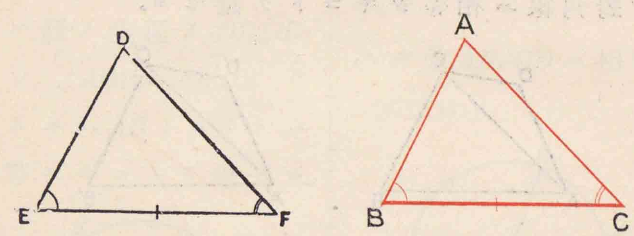
$DF=AC$ ナル故頂點 F ハ頂點 C ニ重ル。

故ニ三ツノ頂點 D ヲ A ニ,E ヲ B ニ,F ヲ C ニ重ヌルコトヲ得。

故ニ $\triangle DEF$ ハ全ク $\triangle ABC$ ニ重ル。

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

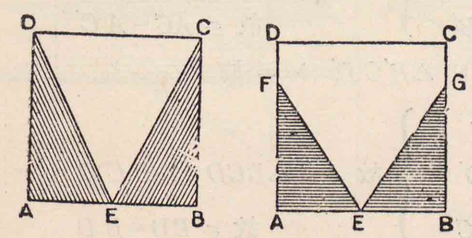
問一 二ツノ三角形ニ於テ一邊ト其ノ兩端ノ二角トガ夫々相等シキ時ハ此ノ兩三角形ハ全ク重ネ合スコトヲ得ルコトヲ示セ。



依テ次ノ三角形合同ノ定理ヲ得。

定理 二ツノ三角形ニ於テ一邊トソノ兩端ノ二角トガ夫々相等シキトキハ此ノ兩三角形ハ合同ナリ。

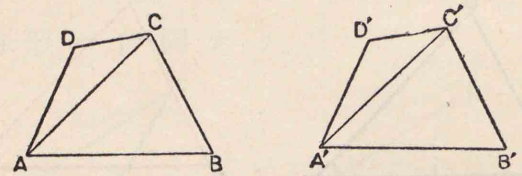
問二 四邊形 $ABCD$ ノ四邊ガ相等シク四角ガ何レモ直角ナルトキ (1) AB ノ中點 E ト D,C トヲ結ベバ合同ノ三角形ハ何レナルカ。



(2) E ヨリ $\angle AEF$ ト $\angle BEG$ トガ等シクナルヤウニ EF,EG ヲ引ケバ合同ノ三角形ハ何レナルカ。

問　題

1　二ツノ四邊形ガ合同ナルトキハソノ相對應スル對角線ハ相等シキコトヲ證セヨ。



假設　四邊形 $ABCD$ ト $A'B'C'D'$ トガ合同ニシテ AC ト $A'C'$, BD ト $B'D'$ トガ相對應スル對角線ナリトスレバ

終結　$AC=A'C', BD=B'D'$ ナルコトヲ證セン。

證明　四邊形 $ABCD$ ト $A'B'C'D'$ トガ合同ナル故

$\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$$\left.\begin{aligned} AB&=A'B' \\ BC&=B'C' \\ \angle B&=\angle B' \end{aligned}\right\} \text{故ニ}\quad \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$

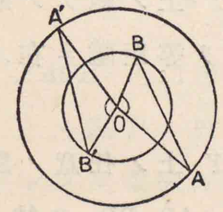
故ニ $AC=A'C'$

$\triangle BCD$ ト $\triangle B'C'D'$ トニ於テ

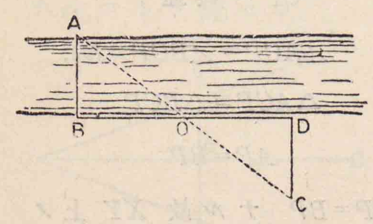
$$\left.\begin{aligned} BC&=B'C' \\ CD&=C'D' \\ \angle C&=\angle C' \end{aligned}\right\} \text{故ニ}\quad \triangle BCD\equiv\triangle B'C'D'$$

故ニ $BD=B'D'$

2　圖ノ如ク中心 O ナル同心圓アリ。大ナル圓ノ半徑ヲ OA, OA', 小ナル圓ノ半徑ヲ OB, OB' トシ $\angle AOB=\angle A'OB'$ ナルトキハ AB ト $A'B'$ トハ相等シキコトヲ證セヨ。

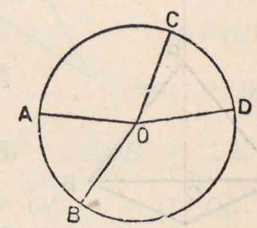


3　三角形ノ合同ノ理ヲ用ヒ圖ノ如クシテ川幅ヲ測ル方法ヲ考ヘヨ。

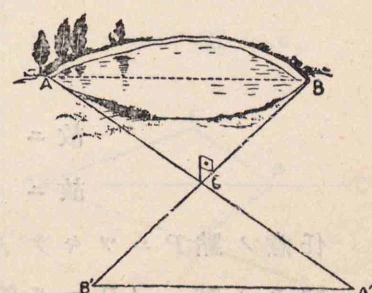


(2)　中心 O ナル一ツノ圓ノ中心角 AOB, COD ガ相等シキトキハ之ニ對スル弦 AB, CD ハ相等シ。

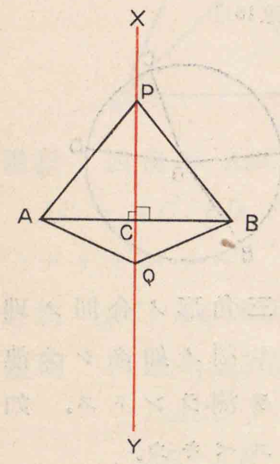
〔27頁(13)〕



(3)　三角形ノ合同ノ理ヲ用ヒ圖ノ如クシテ池ノ幅ヲ測ラントス。如何ニスベキカ。



4　**定線分**（長サト位置トノ定マレル線分）ヲ垂直ニ二等分スル直線上ノ總テノ點ハソノ線分ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ。



假設　AB ヲ定線分, XY ヲ AB ノ中點 C ニ於テ之ニ垂直ナル直線トスレバ

終結　XY 上ノ總テノ點ハ A,B ヨリ等距離ニ在ルベシ。

證明　XY 上ノ任意ノ點ヲ P トシ, AP, BP ヲ結べ。

$\triangle ACP$ ト $\triangle BCP$ トニ於テ

$AC=BC$

CP ハ共通

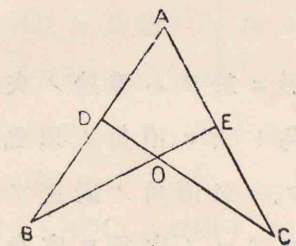
$\angle ACP=\angle BCP=R.\angle$

故ニ　$\triangle ACP\equiv\triangle BCP$

故ニ　$AP=BP$

任意ノ點 P ニツキテ $AP=BP$ ナル故 XY 上ノ總テノ點ハ A,B ヨリ等距離ニ在リ。

5　圖ニ於テ $AB=AC$　$AD=AE$ ナラバ $BE=CD$ ナルコトヲ證セヨ。



(5)　問題 5 ノ證明ヨリ進ミ BE ト CD トノ交點ヲ O トスレバ

$OD=OE$

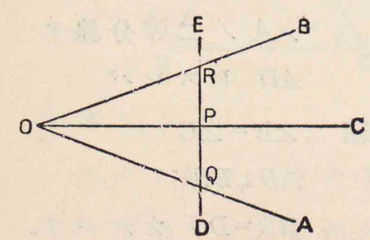
$BO=CO$ ナルコトヲ證セヨ。

6　$\angle AOB$ ノ二等分線 OC 上ノ點 P ニ於テ OC ニ下シタル垂線ガ AO, BO ト Q,R ニ於テ交レバ

$OQ=OR$

$PQ=PR$

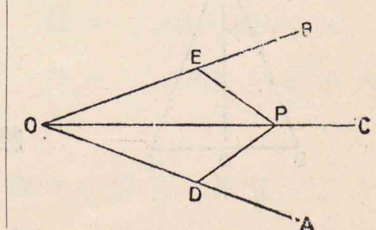
ナルコトヲ證セヨ。



(6)　$\angle AOB$ ノ二等分線ヲ OC トシ OA,OB 上ニ $OD=OE$ ナル樣ニ D,E ヲトリ OC 上ノ任意ノ點 P ト結付クルトキハ

$DP=EP$

ナルコトヲ證セヨ。



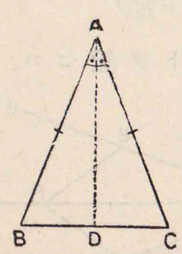
16. 二等邊三角形(一)

定義 二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**ト云フ。

二等邊三角形ニ於テハ等邊ノ夾角ヲ特ニ二等邊三角形ノ**頂角**ト云ヒ,頂角ノ頂點ヲ二等邊三角形ノ**頂點**ト云フ。又頂角ノ對邊ヲ**底邊**ト云ヒ,底邊ノ兩端ニアル二ツノ內角ヲ**底角**ト云フ。

問一 二等邊三角形ヲ畫キ紙面ヲ折リ等邊ヲ重ネテ見ヨ。折リ目ハ頂角及ビ底邊ヲ如何ニスルカ。又兩底角ノ大サ如何。

定理 二等邊三角形ノ二ツノ底角ハ相等シク頂角ノ二等分線ハ底ヲ垂直ニ二等分ス。



假設 $\triangle ABC$ ニ於テ
$AB=AC$ トシ
$\angle A$ ノ二等分線ヲ
AD トスレバ

終結 $\angle B=\angle C$
$AD\perp BC$
$BD=DC$ ナルベシ。

證明 $\triangle ABD$ ト $\triangle ACD$ トニ於テ

$$\left.\begin{aligned}&AB=AC\\&AD\ \text{ハ共通}\\&\angle BAD=\angle CAD\end{aligned}\right\}\ \text{故ニ}\quad \triangle ABD\equiv\triangle ACD$$

故ニ $\angle B=\angle C$ ……即チ兩底角ハ相等シ。

又 $BD=CD$

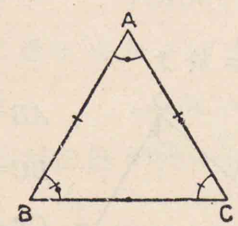
$\angle ADB=\angle ADC,\ \angle ADB+\angle ADC=2\text{R∟}$ ナル故

$\angle ADB=\angle ADC=\text{R∟}$ ……即チ $AD\perp BC$

即チ二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底ヲ垂直ニ二等分ス。

上ノ定理ヨリ容易ニ次ノコトノ眞ナルヲ知ル。

三邊ノ相等シキ三角形ハ正三角形ナリ。



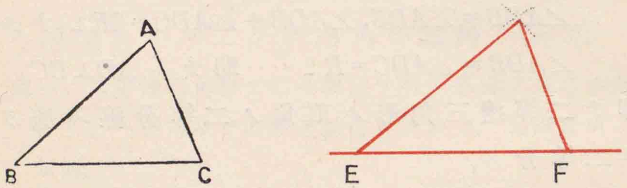
即チ $AB=AC$ 故ニ $\angle C=\angle B$
$BC=AC$ $\angle A=\angle B$
故ニ $\angle A=\angle B=\angle C$
故ニ $\triangle ABC$ ハ正三角形ナリ。

カクノ如ク一ツノ定理ヨリ容易ニ推定シ得ル如キ事項ヲソノ定理ノ**系**トイフ。

17. 三角形ノ合同(三)

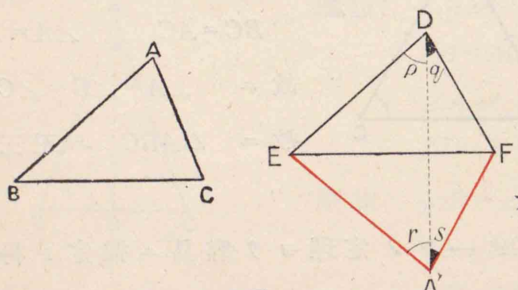
問一 三角形 ABC ヲ書ケ。他ニ直線ヲ書キ此ノ上ニ EF ヲ BC ニ等シクトレ。E ヲ中心トシ AB ヲ半徑トシテ圓ヲ書キ，F ヲ中心トシ AC ヲ半徑トシテ圓ヲ書キ，兩圓ノ交點ヲ D トシ，DE, DF ヲ結ベバ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トノ三邊ハ夫夫如何。

三邊ガ夫々相等シキ三角形ハ全ク重ネ得ルカ。



定理 三邊ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ合同ナリ。

假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ



$AB=DE,$

$BC=EF,$

$CA=FD$

ナルトキハ

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ニ重ヌルニ圖ノ如ク $\triangle ABC$ ガ $\triangle EFA'$ ノ位置ヲトル如クセヨ。

DA' ヲ結ベ。$\angle D, \angle A'$ ガ DA' ニヨリテ分タレタル角ヲ夫々 $\angle p, \angle q, \angle r, \angle s$ トス。

$\triangle EDA'$ ニ於テ，

$DE=A'E$ ナル故 $\angle p=\angle r$

$\triangle FDA'$ ニ於テ，

$DF=A'F$ ナル故 $\angle q=\angle s$

故ニ $\angle p+\angle q=\angle r+\angle s,$

故ニ $\angle EA'F=\angle EDF$

$\angle BAC=\angle EDF$

故ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

二邊ト夾角トガ夫々相等シ。

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

依テ三邊ガ夫々相等シキ兩三角形ハ合同ナリ。

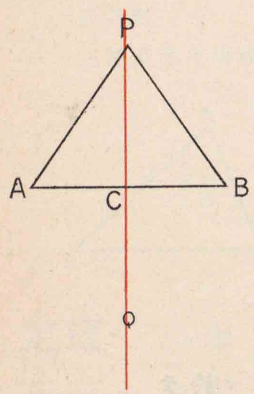
問二 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ ヲ重ネ F ガ DA' ノ上ニ在ラバ如何ニナルカ。

問三 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ ヲ重ネ F ガ DA' ノ E ト同側ニアラバ如何ニナルカ。

問　題

7　定線分ノ兩端ヨリ等距離ニ在ルスベテノ點ハソノ定線分ノ垂直二等分線上ニ在リ。

假設　AB ヲ定線分トシ點 P ヲ $AP=BP$ ナル任意ノ點トス。



終結　P ハ線分 AB ノ垂直二等分線上ニ在ルベシ。

證明　點 P ガ AB ノ垂直二等分線上ニ在ルタメニハ AB ノ中點 C ト P トヲ結ビタル直線 CP ガ AB ノ垂直二等分線トナレバ可ナリ。

$\triangle ACP$ ト $\triangle BCP$ トニ於テ

$AP=BP$,　$AC=BC$,　CP ハ共通

故ニ　$\triangle ACP \equiv \triangle BCP$

故ニ　$\angle ACP = \angle BCP$　且 $\angle ACP + \angle BCP = 2R.\llcorner$

ナル故　$\angle ACP = R.\llcorner$　即チ　$PC \perp AB$

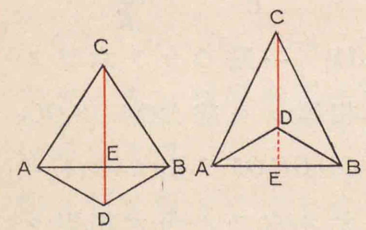
即チ CP ハ AB ノ垂直二等分線ナリ。

任意ノ點 P ニツキテ上ノコトハ正シ。故ニ A,B ヨリ等距離ニ在ルスベテノ點ハ AB ノ垂直二等分線上ニ在リ。

問　問題 **7** ヲ 50 頁ノ問題 **4** ト比較セヨ。

8　同ジ線分ノ上ニ兩側又ハ同ジ側ニ二ツノ二等邊三角形ヲ作レバソノ二ツノ頂點ヲ結付クル直線又ハソノ延長ハ各頂角ヲ二等分シ且底邊ヲ垂直ニ二等分ス。

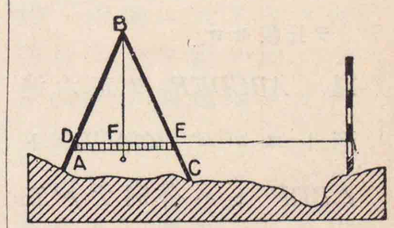
注意　初メニ $\triangle ADC$ ト $\triangle BDC$ トヲ比較セヨ。



9　中心 O ナル圓ノ二ツノ弦 AB, CD ガ相等シキトキハ之レニ對スル中心角 $\angle AOB = \angle COD$

〔27頁13〕

(8)　下ノ圖ハ BD, BE ガ等シキ框（ワク）ニシテ之レヲ地面ニ垂直ニ立テ B ヨリ釣リタル錘（スイ）ノ糸ガ DE ノ中點 F ニ來ル如クスレバ DE ハ水平トナルコトヲ說明セヨ。

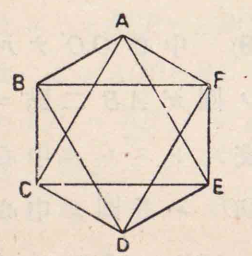


(9)　中心 O, O' ナル二ツノ圓ガ A, B 二點ニ於テ交ルトスレバ中心線 OO' ハ各圓ノ中心角 $\angle AOB, \angle AO'B$ ヲ二等分ス

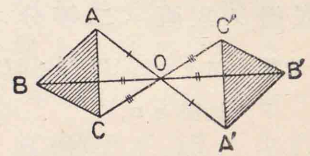
10　正三角形 ABC ノ邊 AB,BC,CA 上ニ夫々點 A',B',C' ヲトリ AA',BB',CC' ヲ各邊ノ $\frac{1}{3}$ ナル如クシ A',B',C' ヲ結ベバ $\triangle A'B'C'$ ハ正三角形ナルコトヲ證セヨ。又 $\frac{1}{3}$ ヲ他ノ數トシテハ如何。

注意　$\triangle AA'C'$, $\triangle BB'A'$, $\triangle CC'B'$ ヲ比較セヨ。

11　$ABCDEF$ ヲ正六邊形トスレバ $\triangle ACE$ ト $\triangle BDF$ トハ合同ナル正三角形ナリ。



(10)　$\triangle ABC$ ノ各頂點ヲ一點 O ニ結ビ AO,BO,CO ノ延長上ニ夫々點 A',B',C' ヲトリ $A'O=AO$, $B'O=BO$, $C'O=CO$ ノ如クセバ $\triangle A'B'C'$ ハ $\triangle ABC$ ト合同ナリ。



(11)　一點 O ヨリ六ツノ相等シキ線分 OA,OB,OC,OD,OE,OF ヲ引キ次々ニナス六ツノ角ガ相等シキトキハ AB,BC,CD,DE,EF,FA ヲ結付ケテ生ジタル六邊形 $ABCDEF$ ハ正六邊形ナリ。

12　四邊形 $ABCD$ ノ各邊相等シク各角ガ皆直角ナルトキ AB,AD ノ中點ヲ夫々 P,Q トスレバ

$$CP=CQ=DP=BQ$$

〔47頁問二(1)〕

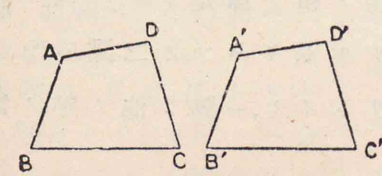
13　四邊形 $ABCD$ ト $A'B'C'D'$ トアリテ

$$AB=A'B',\quad BC=B'C'$$
$$CD=C'D',\quad DA=D'A'$$

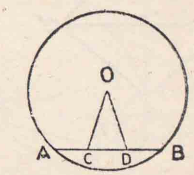
ナルトキハ兩四邊形ハ合同ナルカ。

他ニ何ヲ等シクスレバ合同トナルカ。

〔48頁問題1〕

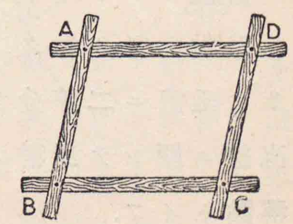


(12)　圓ノ一ツノ弦ヲ三等分スル二點ト中心トヲ結ブトキハ中心ヲ頂點トスル二等邊三角形トナルコトヲ證明セヨ。

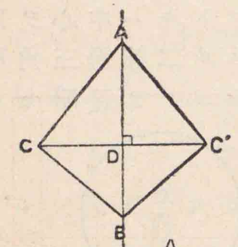


注意　$\triangle ACO$, $\triangle BDO$ ヲ比較セヨ。

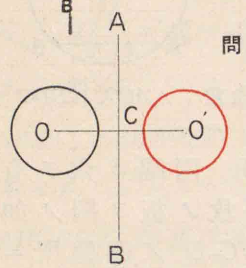
(13)　兩端ニ穴ヲ有スル四枚ノ板ヲ圖ノ如ク A,B,C,D ノ四箇所ニテ釘ニ通シテ框ヲ作ラバ形ノ固定シタルモノガ出來ルカ。固定スルニハ如何ナルコトヲナスベキカ。



18. 對 稱



問一 CC' ガ AB ト直角ニ交リテ $\triangle ABC$ ト $\triangle ABC'$ トガ合同ナルトキ AB ヲ折目トシテ $\triangle ABC$ ヲ折返セバ如何ニナルカ。



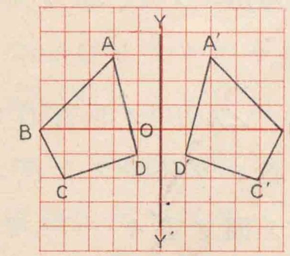
問二 OO' ハ AB ニ垂直ナル線分ニシテ $OC=O'C$ 且圓 O ト圓 O' トノ半徑相等シ。AB ヲ折目トシテ圓 O ヲ折返セバ如何ニナルカ。

定義 一直線ヲ折目トシテ平面ヲ折返シタルトキソノ直線ノ一方ノ圖形ガ他方ノ圖形ニ全ク重リ合フトキハ此ノ兩圖形ハソノ直線ニ關シテ互ニ**對稱**ナリトイヒ,ソノ直線ヲ**對稱軸**トイフ。

又點 O, O' ノ如ク二點ヲ結ブ線分ガ一直線ニ依リテ垂直ニ二等分サルルトキハソノ二點ハソノ直線ニ關シテ對稱ナリトイヒ,一點ヲ他ノ點ノ**對稱點**トイフ。

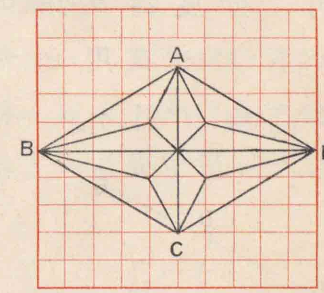
問 題

14 圖ニ於テ四邊形 $ABCD$, $A'B'C'D'$ ハ軸 YY' ニ關シテ對稱ナルコトヲ證セヨ。

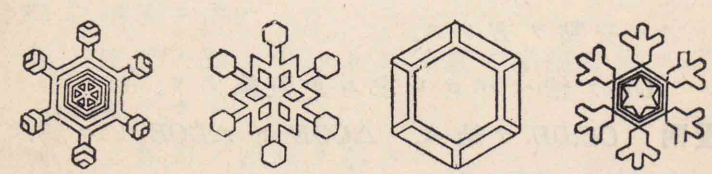


15 正三角形ハ三ツノ對稱軸ヲ有スルコトヲ證セヨ。

(14) 下ノ圖ノ對稱軸ハ何カ。



(15) 下圖ハ雪ノ結晶ヲ示ス。何本ノ對稱軸ヲ有スルカ。



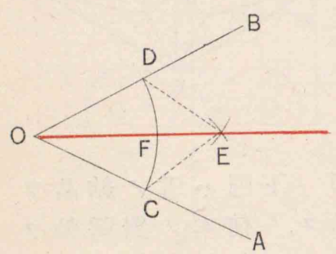
16 直線 AB ノ同側ニ三點 P, Q, R アリ。ソノ對稱點ヲ P', Q', R' トセバ $\triangle PQR$ ト $\triangle P'Q'R'$ トハ合同ナルコトヲ證セヨ。

(16) 紙ヲ折リ針ニテ多クノ穴ヲ作リ或形ヲ書キ紙ヲ開クトキハ如何ナル圖形ヲ得ルカ。

第二章 作 圖 題

19. 作 圖 題

例 分度器ヲ用ヒズニ定規ト「コンパス」トノミヲ用ヒテ角 AOB ヲ二等分スル直線ヲ引ケ。



作圖 $\angle AOB$ ノ頂點 O ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ OA, OB ト C, D ニ於テ交ラシム。C, D ヲ中心トシ線分 CD ノ半分ヨリ大ナル半徑ヲ以テ圓ヲ書キソノ交點ヲ E トス。

OE ヲ結ベバコレ求ムル直線ナリ。

證明 CE, DE ヲ結ベ。$\triangle COE$ ト $\triangle DOE$ トニ於テ

$$\left.\begin{aligned} &OC=OD \\ &OE \text{ハ共通} \\ &CE=DE \end{aligned}\right\} \text{故ニ} \quad \triangle COE \equiv \triangle DOE$$

故ニ $\angle COE=\angle DOE$

即チ OE ハ $\angle AOB$ ノ二等分線ナリ。

上ノ如ク

定義 與ヘラレタル條件ニ適フ圖形ヲ幾何學ノ理ニヨリテ作ルコトヲ求ムル問題ヲ**作圖題**ト云ヒ,求メ得タル圖形ヲ**作圖ノ解**トイフ。

前章迄ニ於テハ圖形ヲ作ルニ尺度,分度器等ヲモ併セ用ヒタルガ今後ハ特ニ斷リタル場合ノ他ハ作圖題ニ於テ使用スル器具ハ直線定規ト「コンパス」トノ二種ニ限リ

直線定規ヲ以テハ

(1) 二點ヲ通ル直線ヲ引クコト。

(2) 有限直線ヲ延長スルコト。

ヲナシ得ルモノトシ,

「コンパス」ニテハ

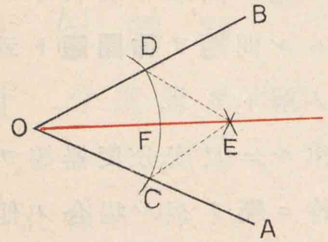
(3) 任意ノ點ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書クコト。

(4) 二點間ノ距離ヲ移スコト。

ヲナシ得ルモノトス。

作圖題ノ解ニハ先ヅ作圖法ヲ示シ,次ニカクシテ得タル圖形ガ與條件ニ適フコトヲ證明スルモノトス。

問一 62頁ノ作圖題ニ於テ OE ヲ折目トシテ△OCEヲ折返セバ如何ニナルカ。



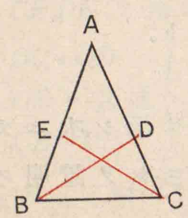
問二 弧 CD ト直線 OE トノ交點ヲ F トスレバ $\overset{\frown}{CF}$ ト $\overset{\frown}{DF}$ トハ如何ニナルカ。

OE ハ $\overset{\frown}{CD}$ ヲ二等分ス。

問 題

17 一直線上ノ一點ヨリ他ノ直線ヲ引キ,生ジタル接角ノ各ヲ二等分セヨ。

18 二等邊三角形ヲ書キ,ソノ底角ノ二等分線ヲ作レ。



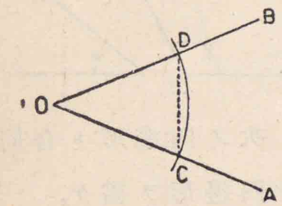
(17) 一ツノ弧ヲ書キ之ヲ二ツノ部分ニ分チ,一方ヲ他ノ三倍ナル如クセヨ。

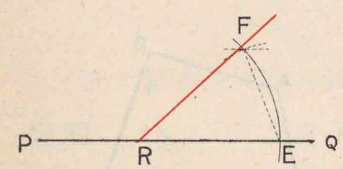
(18) 問題18ニ於テ BD ト CE トノ長サノ相等シキコトヲ證セヨ。

注意 △ABD, △ACE ヲ比較セヨ。又ハ △BCD, △CBE ヲ比較セヨ。

20. 基本的作圖題

作圖題 定直線 PQ 上ノ一與點 R ヲ頂點トシ, RQ ヲ一邊トシテ $\angle AOB$ ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引ケ。





作圖 O ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ角ノ二邊 OA, OB ト夫々 C, D ニ於テ交ラシム。R ヲ中心トシ,同ジ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ RQ ヲ E ニ於テ截ル。E ヲ中心トシ, CD ヲ半徑トシテ圓ヲ書キ圓 R ト F ニ於テ交ラシム。

RF ヲ結ベバ RF ハ求ムル直線ナリ。

證明 CD, EF ヲ結べ, △COD ト △ERF トハ作圖ニヨリテ三邊夫々相等シ。

故ニ $\triangle COD \equiv \triangle ERF$

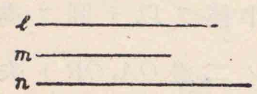
故ニ $\angle QRF = \angle AOB$

問 RF ノ他ニ PQ 上ノ點 R ヨリ PQ ト $\angle AOB$ ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引キ得ルカ。

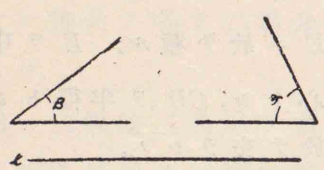
問　　題

19　次ノ三線分ヲ三邊トスル三角形ヲ作リ,ソノ内角ノ和ニ等シキ角ヲ作レ。

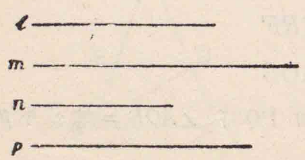
（54頁問一ヲ見ヨ）



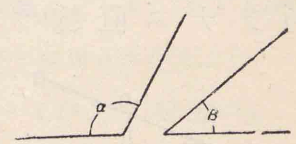
20　l ヲ一邊トシ,$\angle\beta$,$\angle\gamma$（ビータ,ガンマ）ヲソノ兩端ノ角トセル三角形ヲ作レ。



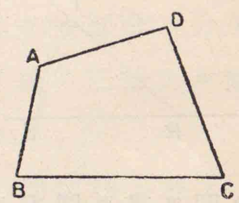
21　次ノ四線分ヲ次ノ順序ニ四邊トスル四邊形ヲ作レ。〔59頁13參照〕



(19)　次ノ二角ノ和及ビ差ヲ作レ。

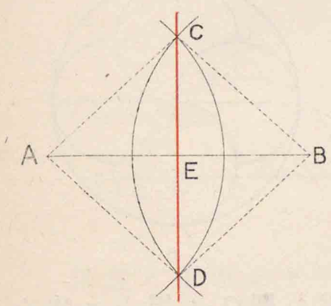


(20)　次ノ四邊形ト合同ナル四邊形ヲ書ケ。



(21)　問題21ニ於テ l,m ノナス角ガ問題20ノ $\angle\beta$ ト等シキ四邊形ヲ作レ。

作圖題　定線分 AB ノ垂直二等分線ヲ作レ。



AB ノ垂直二等分線ヲ作ラントス。

作圖　A,B ヲ中心トシ AB ノ半分ヨリモ大ナル任意ノ相等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ,其ノ交點ヲ C,D トス。

CD ヲ結べバ CD ハ AB ノ垂直二等分線ナリ。

證明　AB ト CD トノ交點ヲ E トシ,AC,BC,AD,BD ヲ結べ。$\triangle ACD$ ト $\triangle BCD$ トハ如何。（57頁8ヲ見ヨ）

$\angle ACE$ ト $\angle BCE$ トハ如何。

$\triangle ACE$ ト $\triangle BCE$ トハ如何。

$CE\perp AB,\qquad AE=BE$

即チ　CD ハ AB ノ垂直二等分線ナリ。

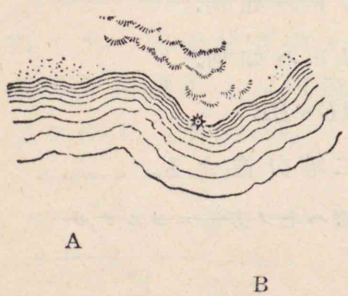
注意　線分ノ中點ヲ求ムル作圖ハ上ノ方法ニヨルナリ。

問　題

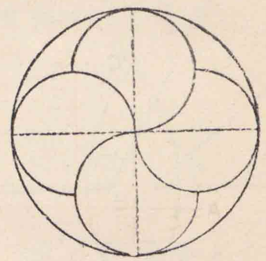
22　三邊ガ $3cm, 3.5cm, 4cm$ ノ三角形ヲ書キ各邊ノ垂直二等分線ヲ作リテ如何ニナルカヲ調ベヨ。〔證明不要〕

三邊ガ $3cm, 4cm, 5cm$ ノ三角形ニツイテナセ。又三邊ガ $2cm, 4cm, 5cm$ ノ三角形ニツイテナセ。

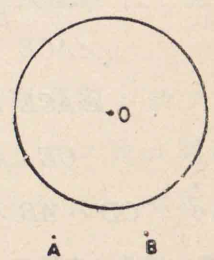
23　海上ノ A, B 二箇所ニ暗礁アリ。A, B 二點ヨリ等距離ノ海岸ニ燈臺ヲ建テントス。ソノ地點ヲ作圖ニヨリテ求メヨ。



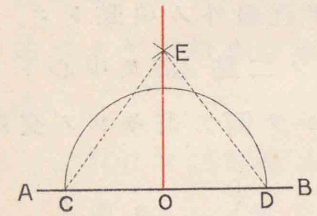
(22)　次ノ圖ヲ書ケ。



(23)　圓 O ノ周上ニ中心ヲ置キテ A, B 二點ヲ通ル圓ヲ書ケ。



作圖題　與直線 AB 上ノ與點 O ニ於テ此ノ直線ニ垂線ヲ引ケ。



作圖　O ヲ中心トシ任意ノ半徑ニテ直線 AB ヲ C, D ニテ截レ。C, D ヲ中心トシ，CO ヨリ大ナル任意ノ相等シキ半徑ノ圓ヲ書キソノ二圓ノ交點ヲ E トス。EO ヲ結ベバ EO ハ求ムル直線ナリ。

證明　CE, DE ヲ結ベ

$\triangle COE$ ト $\triangle DOE$ トヲ比較セヨ。

$\angle COE$ ハ如何ナル角カ。

注意　OE ハ $\angle AOB$ ノ二等分線ニシテコノ作圖ハ62頁ノ方法ト同一ナリ。一ツノ角ノ二等分線ハ唯一ナリ。故ニ

與直線上ノ與點ニ於ケル此ノ直線ノ垂線ハ唯一ツナリ。

問　題

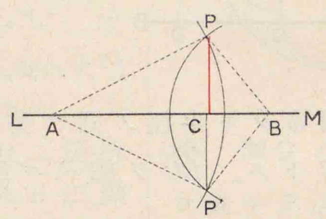
24　$135°$ ノ角ヲ作レ。

(24)　$22°30'$ ノ角ヲ作レ。

作圖題　與直線 LM 外ノ與點 P ヨリ之ニ垂線ヲ立テヨ。

LM ヲ與直線, P ヲ與直線外ノ與點トス。

作圖　LM 上ノ任意ノ二點 A,B ヲ中心トシ AP, BP ヲ夫々半徑トシテ圓ヲ書キソノ交點ヲ P' トス。



直線 PP' ト LM トノ交點ヲ C トセバ CP ハ求ムル垂線ナリ。

證明　AP, AP', BP, BP' ヲ結ビ57頁ノ問題8ト同様ニシテ先ヅ $\triangle ABP$ ト $\triangle ABP'$ トノ合同ナルコトヲノベヨ。

次ニ $\triangle ACP$ ト $\triangle ACP'$ トノ合同ナルコトヲノベヨ。

$\angle ACP$ ト $\angle ACP'$ トハ等シクシテ直角ナリ。

故ニ　$CP \perp LM$

注意　以上述ベタル作圖題ハ何レモ基本的ノ作圖題ニシテ使用スルコト極メテ多キモノナレバ今後是等ノ基本的ノ作圖ヲ用フル場合ニハ上ニ述ベタルガ如キ詳細ナル作圖法ヲ述ベズシテ唯

1. $\angle AOB$ ヲ二等分ス。
2. 直線 PQ 上ノ點 R ニ $\angle AOB$ ヲ移ス。
3. 線分 AB ノ垂直二等分線ヲ作ル。
4. 直線 AB 上ノ點 O ニ垂線ヲ立テル。
5. 直線 LM 外ノ點 P ヨリ之ニ垂線ヲ下ス。

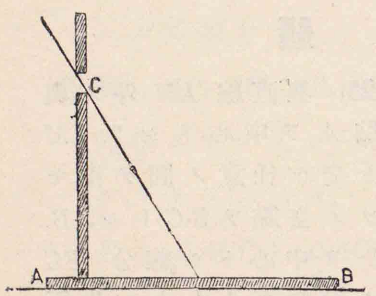
等ノ如ク簡單ニ述ブルコトトス。

問　題

25　與直線 LM 上ニ中心ヲ置キ LM 外ノ與點 C ヲ通ルスベテノ圓ハ LM ニ關スル C ノ對稱點ヲ通ルコトヲ證セヨ。

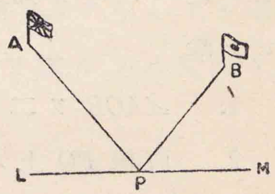
(25)　與直線 LM 外ノ與點 A ヲ中心トシテ LM ト交ル任意ノ圓ヲ書キソノ交點ヲ B,C トシ, B,C ヲ中心トシ,線分 BC ノ半分ヨリ大ナル半徑ノ相等シキ圓ヲ書キソノ交點ヲ D トセバ AD ハ如何ナル線ナルカ。又ソノ理如何。　〔57頁8參照〕

26 光ガ平面鏡ニ當レバ反射ス。此ノ場合ニ於テハ光ノ投ジタル點ニテ平面鏡ニ垂線ヲ立ツレバソノ垂線ハ投ジタル光ト反射スル光ト等シキ角ヲナス。圖ノ如クCヨリ入リタル光ガ鏡ノ面ABニ投ズルトキノ反射光線ノ方向ヲ作圖セヨ。



27 入ル光ト反射スル光トガ鏡ノ面トナス角ハ如何。

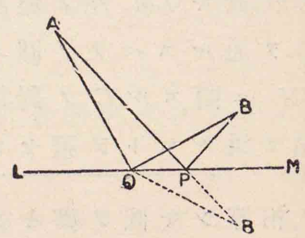
(23) Aヨリ直線LM上ノ一點Pニ到リBニ行ク最モ近キ道ハLMニ關スルBノ對稱點トA



トヲ結ブ直線ガLMト交ル點ヲP點トスレバ可ナリ。點Pヲ求ム。

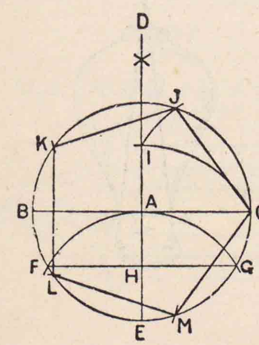
(27) 問題(26)ニ於テLM上ニP以外ノ任意ノ點Qヲトレバ

$$AQ+BQ>AP+BP$$



28 斜邊ガ$7cm$ニシテソノ一端ノ角ガ65頁ノ$\angle AOB$ニ等シキ直角三角形ヲ作レ。

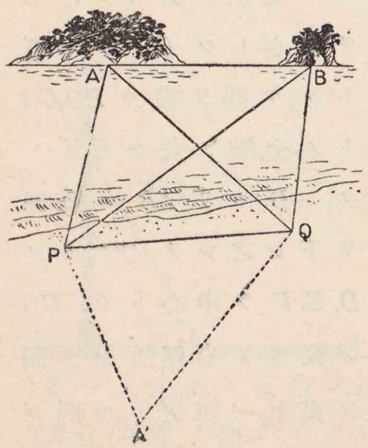
29 次ノ圖ハ正五邊形ノ作圖ニシテソノ方法ノ順序ニ符號ヲ附ケタルモノナリ。即チ點Aハ圓BCEノ中心, AEハBCニ垂直, FGハAEノ垂直二等分線,弧CIハ點Hヲ中心トシ,弧IJハ點Cヲ中心トス。之ニ從ツテ此ノ圖ヲ書ケ。



(23) 等邊ガ5cm,底角ガ45°ナル二等邊三角形ヲ作レ。

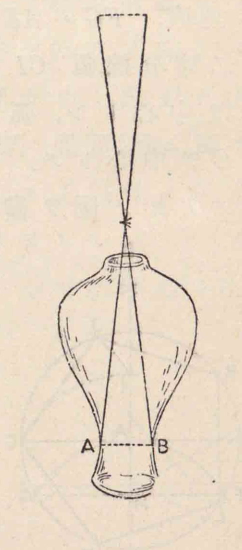
(29) 正三角形ヲ書キ之レヲABCトシ, A,B,Cヨリ各對邊ニ垂線ヲ下シ之レヲAL, BM, CNトシソノ交點ヲOトス。$\angle ANC$ノ二等分線トALトノ交點ヲDトス。Oヲ中心トシODヲ半徑トシテ圓ヲ書キBO, COトノ交點ヲ夫々E, Fトス。DヨリABニ垂線ヲ下シ之レヲDGトス。D, E, Fヲ中心トシ, DGノ長サヲ半徑トシテ圓ヲ書ケバ如何ナル圖ガ出來ルカ。(證明不要)

30 海岸ニ在リテ沖合ニ在ル二島ノ距離ヲ測ラントスルニA,B,Q,Pガ同一平面上ニアリトスレバ點Pニテ$\angle APQ$, $\angle BPQ$, 點Qニテ$\angle AQP$, $\angle BQP$ノ四ツノ角及ビPQノ長サヲ測リテ計算スレバ可ナリ。PQヲ軸トセルABノ對稱圖ヲP,Qニ於ケル角ヲ移スコトニヨリテ書ケ。



(30) 圖ノ如ク二本ノ箸ヲ用ヒテ深キ瓶ノ内部ノ底ノ直徑ABヲ測ラントス。

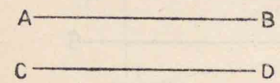
ソノ方法及ビ理由如何。



第三章 平行線

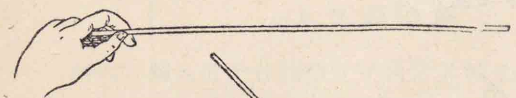
21. 平行線タルベキ二直線

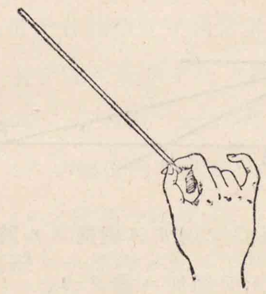
定義 同一ノ平面上ニ在リテ決シテ相交ルコトナキ二直線ヲ**平行線**トイフ。

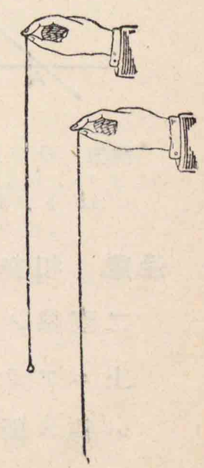


二直線AB,CDノ平行ナルコトヲ$AB \parallel CD$ノ如ク書ク。

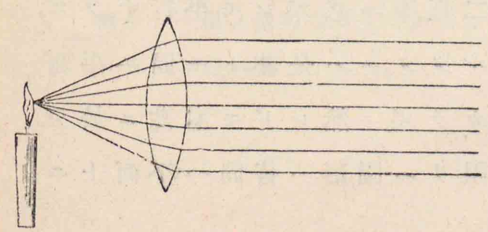
問一 双方ヘ如何程延長スルモ相交ラズシテ而モ平行ナラザル二直線アリヤ。







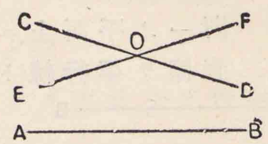
問二 平行線ノ例ヲアゲヨ。



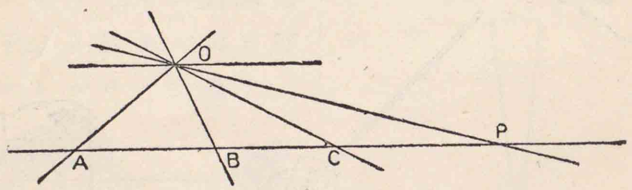
平行線ノ公理 一點ヲ通リテ與直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

問三 二直線 CD, EF ガ O ニ於テ交ルトキ

$\left.\begin{array}{l}AB \parallel CD\\ AB \parallel EF\end{array}\right\}$ タリ得ルカ。



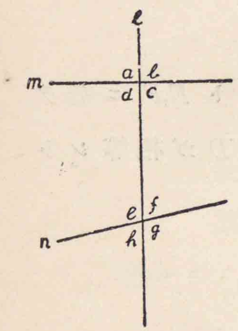
問四 平行線ノ一ツニ交リ之ト同一ノ平面ニ在ル直線ハ他ノ一ツノ直線トモ交ルカ。



問五 O ヲ通ル直線ガ O ノ周リヲ廻轉スル時ハソノ直線ト AB トノ交點ハ AB 上ヲ如何ニ動クカ。

注意 相交ラザル二直線ハ必ズシモ平行ナラズ。二直線ノ平行ナルタメニハ是非トモ同一平面上ニアラザルベカラズ。然レドモ本書ニ於テハ特ニ斷リナキ限リハ圖形ハ皆同一平面上ニ在ルモノトス。

定義 一ツノ直線ガ二ツノ直線ト交ル時ハ八ツノ角ヲ生ズ。之ヲ次ノ如ク命名ス。



$\angle a$, $\angle b$, $\angle g$, $\angle h$ ヲ**外角**

$\angle c$, $\angle d$, $\angle e$, $\angle f$ ヲ**內角**

$\angle c$ ト $\angle f$ 又ハ $\angle d$ ト $\angle e$ ヲ**同傍內角**

$\angle c$ ト $\angle e$ 又ハ $\angle d$ ト $\angle f$ ヲ**錯角**

$\angle a$ ト $\angle e$, $\angle b$ ト $\angle f$, $\angle c$ ト $\angle g$, $\angle d$ ト $\angle h$ ヲ**同位角**。

問六 圖ニ於テ各相等シキ角ヲアゲヨ。

問七 圖ニ於テ互ニ補角ヲナス角ヲアゲヨ。

問八 $\angle a=95^\circ$ $\angle g=120^\circ$ ナラバ

1. $\angle f$ ノ同位角ハ何度カ。
2. $\angle e$ ノ錯角ハ何度カ。

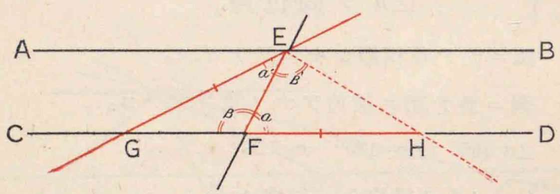
問九 二直線ニ一直線ガ交ルトキ一組ノ同位角 ($\angle a$ ト $\angle e$) ガ等シケレバ他ニ等シキ角ノ組ハ何々ナルカ。

問十 一組ノ錯角 $\angle d$ ト $\angle f$ トガ等シキトキ互ニ補角ヲナス角ノ組ハ何々ナルカ。

定理 一直線ガ二直線ニ交リテナス錯角相等シケレバソノ二直線ハ平行ナリ。

假設 直線 EF ガ二直線 AB, CD ト E,F ニ於テ交リソノナス錯角 $\angle AEF, \angle EFD$ ガ相等シトセヨ。

終結 $AB \parallel CD$ ナルベシ。



證明 今モシ AB ト CD トガ EF ニ交リ
錯角 $\angle\alpha=\angle\alpha'$ ナルニモ拘ラズ
AB, CD ガ平行ナラズシテ
交ルトスレバ必ズ不合理トナルベシ。

何トナレバ假リニ AB ガ EG ノ如クナリテ CD ト G ニテ交ルトシ。

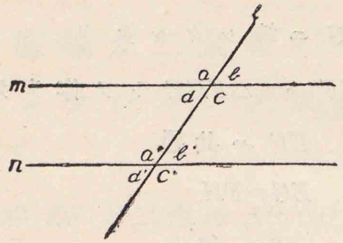
FH ヲ EG ニ等シクシテ
$\triangle EGF$ ト $\triangle FHE$ トヲ作リテ比較スルニ
EF ハ共通
$EG=FH$
$\angle\alpha=\angle\alpha'$
故ニ $\triangle EGF \equiv \triangle FHE$
故ニ $\angle\beta=\angle\beta'$
然ルニ $\angle\alpha+\angle\beta=2R.\llcorner$ ナル故
$\angle\alpha'+\angle\beta'=2R.\llcorner$ トナリ
GE,EH ハ一直線トナル。

然レバ G,H ヲ通ル直線ガ二本アルコトトナリ不合理ナリ。

故ニ二直線ガ一直線ニ交リテナス錯角相等シクシテシカモ相交ルコトナシ。

即チ $AB \parallel CD$

系一 一直線ガ二直線ニ交リテナス
(1) 同位角ガ相等シキトキ
(2) 同傍内角ガ補角ヲナストキハ
ソノ二直線ハ互ニ平行ナリ。

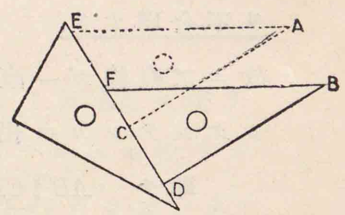


直線 l ガ二直線 m, n ニ交リテナス八ツノ角ノ中ニ

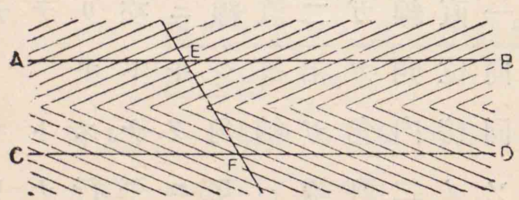
$$\left.\begin{array}{l}\angle c=\angle a' \\ \angle d=\angle b'\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\angle a=\angle a' \\ \angle b=\angle b' \\ \angle c=\angle c' \\ \angle d=\angle d'\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\angle c+\angle b'=2R.\llcorner \\ \angle d+\angle a'=2R.\llcorner\end{array}\right\}$$

ノ中ノ一ツノコトガ成立ツトキハ他ノコトハスベテ成立チテ　$m=n$　ナリ。

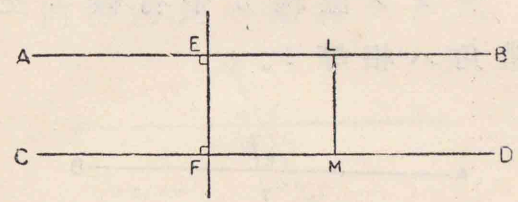
問十一　EA, FB ノ平行ナルハ如何ナル理ニヨルカ。AC, BD ハ如何。



問十二　圖ニ於ケル角ヲ測リテ AB, CD ノ平行ナルカ否カヲ驗セ。



系二　同一ノ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。



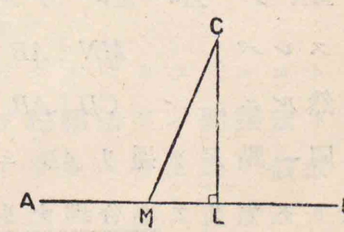
定義　平行線ニ垂直ナル直線ヲソノ平行線ノ**共通垂線**トイヒ,共通垂線ノ平行線間ニ在ル線分ノ長サヲ此ノ**平行線間ノ距離**トイフ。

EF, LM ハ共ニ平行線 AB, CD ノ距離ナリ。

系三　一直線外ノ一點ヨリ此ノ直線ニ下シ得ル垂線ハ唯一ツナリ。

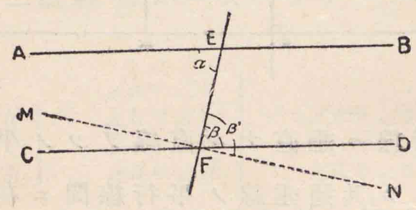
CL モ CM モ AB ニ垂直ナラバ如何。〔系二〕

定義　直線外ノ一點ヨリソノ直線ニ下セル垂線ノ長サヲソノ**點ト直線トノ距離**ト云フ。



22. 平行線ニヨル角

定理　一ツノ直線ガ平行線ニ交リテナス錯角ハ相等シ。



假設　二直線 AB, CD ガ平行ニシテ直線 EF ガ之ニ交レバ

終結　ソノナス錯角 $\angle\alpha=\angle\beta$

證明　今假リニ錯角ガ相等シカラズトシ

MN ヲ　$\angle\alpha=\angle\beta'$　ナル如キ錯角ヲナス直線トスレバ　$MN \parallel AB$

然ルニ　$CD \parallel AB$　ナル故

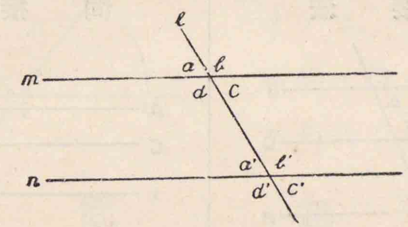
同一點 F ヲ通リ AB ニ平行ナル二直線アルコトトナリテ不合理ナリ。

故ニ　錯角 $\angle\alpha=\angle\beta$ ナラザルベカラズ。

系　一直線ガ二平行線ニ交ルトキハ

(1)　ソノナス同位角ハ相等シ。

(2)　同傍內角ハ補角ヲナス。



問一　二直線 m, n ガ平行ナラバ之ニ直線 l ガ交リテ生ズル八ツノ角ノ間ニ如何ナル關係ガアルカ。

23. 直接證明法ト間接證明法

78頁,82頁ノ證明法ヲ見レバ前章ニトリタル方法トハ大ニ異ルコトアルヲ知ルベシ。即チ

1 先ヅ定理ガ成立セズトシ終結ヲ否定シテ論ヲ始メ,終ニハ

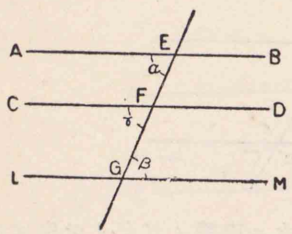
2 不合理ナル結論ニ導キ

3 以テソノ定理ノ眞ナラザルベカラザルコトヲ斷定スル方法ニシテ之ヲ**歸謬法**又ハ**間接法**ト云フ。之ニ對シ前章マデトリタル方法即チ假設ヨリ論ヲ進メテ終結ヲ導キ出ス方法ヲ**直接法**ト云フ。

定理 同一ノ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

假設 $AB \parallel LM,\ CD \parallel LM$ **終結** $AB \parallel CD$

直接法



證明

一ツノ直線ヲ引キLMトGニ於テ交ラシムレバAB, CDトモ交ルベシ。ソノ交點ヲE, Fトセヨ。

$AB \parallel LM$ナル故$\angle\alpha = \angle\beta$

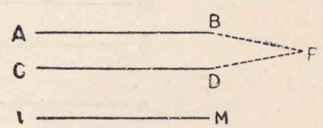
$CD \parallel LM$ナル故$\angle\gamma = \angle\beta$

故ニ $\angle\alpha = \angle\gamma$

AB, CDニ直線ガ交リソノナス同位角ガ相等シ。

故ニ $AB \parallel CD$

間接法



證明

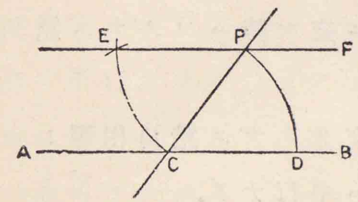
假ニ$AB \parallel CD$ナラズトスレバ何處カノ一點ニ於テ交ルベシ。ソノ點ヲPトセヨ。

然レバ一點Pヲ通リLMニ平行ナル二本ノ直線ガアルコトトナリ、不合理ナルコトトナル。

故ニAB, CDハ交ルコトナシ。

即チ $AB \parallel CD$

作圖題 直線AB外ノ一與點Pヲ通リテ之ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

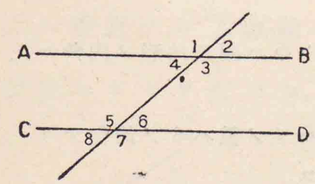


作圖法ヲ述ベテ證明ヲナセ。

直線CPハ何ノタメニ必要ナルカ。

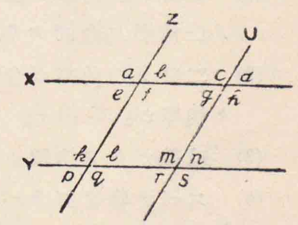
問題

31 $AB \parallel CD$ニシテ$\angle 3$ガ$135°$ナラバ他ノ角ハ夫々何度ナルカ。



32 二等邊三角形ノ底ニ平行ニ引ケル直線ハ等邊ト交リテ相等シキ角ヲナス。

(31) $X \parallel Y, Z \parallel U$ナルトキ相等シキ角及ビ其ノ組ノ名ヲ云ヘ。



(32) 二等邊三角形ノ頂點ヲ通リ底ニ平行ニ引ケル直線ハ頂角ノ外角ヲ二等分ス。

24. 定理ノ逆

次ノ定理ヲ比較シテ見ヨ。

一直線ガ二平行線ニ交ル時ハソノナス錯角ハ相等シ。

一直線ガ二直線ニ交リテナス錯角相等シキ時ハソノ二直線ハ平行ナリ。

上ノ二定理ノ如ク

或定理ノ假設ト終結トヲ取換ヘテ述ベタルモノヲ原定理ノ逆ト云フ。

問一　次ニ述ベタル事項ノ逆ヲイヘ。

(1)　二ツノ三角形ノ三邊ガ夫々相等シキトキハコノ二ツノ三角形ハ合同ナリ。

(2)　二ツノ三角形ガ合同ナルトキハ兩三角形ノ内角ハ夫々相等シ。

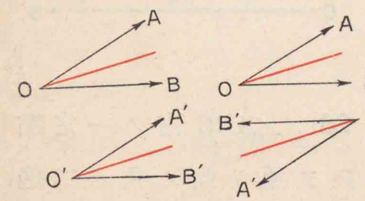
(3)　或數ガ6ノ倍數ナルトキハソノ數ハ3ノ倍數ナリ。

(4)　スベテ物ヲ打テバ音ヲ發ス。

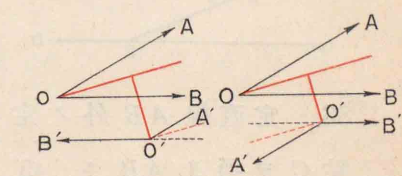
或定理ガ眞ナリトモソノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ。ソノ眞ナリヤ否ヤハ別ニ證明ヲナシテ斷定スベキモノナリ。

問　題

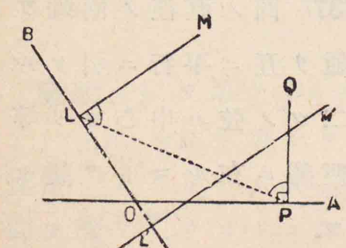
33　一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ平行ナラバ二ツノ角ハ相等シキカ,又ハ互ニ補角ヲナス。



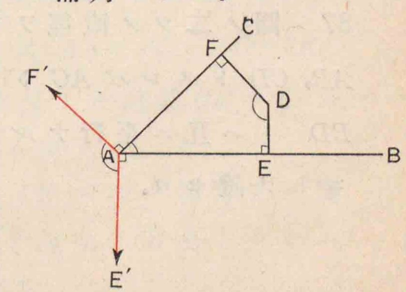
(33)　一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ト平行ナルトキハソノ二角ノ二等分線ハ互ニ平行ナルカ,重ナルカ,又ハ垂直ナリ。



34　相交ハル二直線ノ各ニ垂直ナル二直線ハ相交ルコトヲ證セヨ。



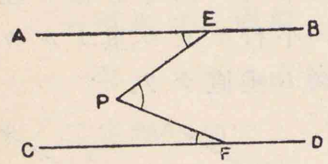
(34)　二ツノ角ノ二邊ガ互ニ垂直ナルトキハソノ二角ハ相等シキカ,又ハ補角ヲナス。



35　圖ニ於テ　$AB \parallel CD$ ナレバ

$\angle EPF = \angle AEP + \angle CFP$

注意　P ヲ通リ　AB　ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

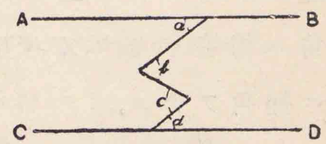


36　定直線 AB 外ノ定點 C ヲ通リ AB ト 45° ノ角ヲナス直線ヲ引ケ。

37　圓ノ二ツノ直徑ヲ AB, CD トスレバ AC ト BD トハ互ニ平行ナルコトヲ證セヨ。

(35)　圖ニ於テ　$AB \parallel CD$ ナレバ

$\angle b - \angle c = \angle a - \angle d$



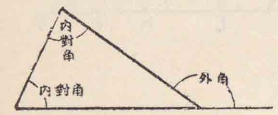
(36)　$\angle ABC$ 内ノ一定點 P ヲ通リ此ノ角ノ二邊ト夫々平行ナル二邊ヲ有スル角ヲ作レ。

(37)　圓ノ直徑ノ兩端ヲ通リ互ニ平行ニ引ケル二ツノ弦ハ中心ヨリ等距離ニ在ルコトヲ證セヨ。

第四章　多角形ノ内角ノ總和

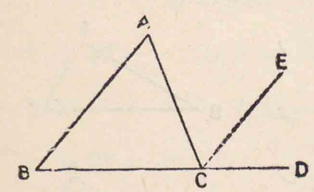
25. 三角形ノ内角ノ總和

定義　三角形ノ一ツノ外角ニ隣ラザル二ツノ内角ノ各々ヲソノ外角ノ**内對角**トイフ。



定理　三角形ノ外角ハソノ内對角ノ$\left\{\begin{array}{l}\text{和ニ等シク}\\\text{何レヨリモ大ニ}\end{array}\right\}$シテ又ソノ三ツノ内角ノ和ハ二直角ニ等シ。

假設　$\angle ACD$ ヲ $\triangle ABC$ ノ一外角トス。



終結

$\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

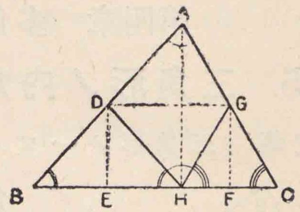
又 $\angle A + \angle B + \angle C = 2R.\llcorner$

證明　C ヲ通リ BA ニ平行ナル直線 CE ヲ引ケ。

$\angle A$, $\angle B$ ト等シキ角ハ何レカ。

注意　上ニ用ヒタル直線 CE ノ如ク適當ナル**補助ノ線**ヲ引クコトニヨリテ證明ヲ容易ナラシムルコトアリ。〔82頁, 84頁, 87頁參照〕

問一　$\triangle ABC$ ノ如キ紙ヲ點線ニヨリテ圖ノ如ク曲ゲ各頂點ヲ H ニ集メルコトニヨリテ前定理ノ正シキコトヲ驗シ見ヨ。

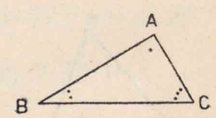


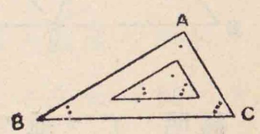
問二　直角三角形トハ何カ。

定義　一內角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**ト云フ。又スベテノ內角ガ皆銳角ナル三角形ヲ**銳角三角形**トイフ。

系一　直角三角形ノ二ツノ銳角ハ互ニ餘角ナリ。

系二　一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ相等シキトキハ殘リノ一角モ亦相等シ。



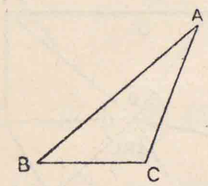


問　題

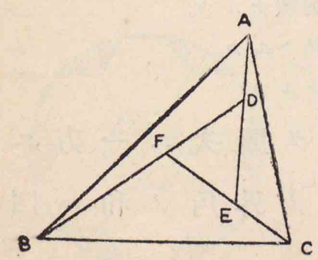
38　正三角形ノ一內角ノ大サ如何。

(38)　30°ノ角ヲ作レ。又直角ヲ三等分セヨ。

39　次ノ三角形ノ角ヲ夫々內角ニ持チ且 AB ト等シキ一邊ヲ有スル三角形ヲ作レ。（三通）



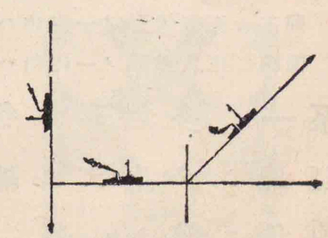
40　圖ニ於テ何レノ角ガ何レノ三角形ノ外角ナルカ。又 $\triangle ABC$ ノ內角ノ和ハ $\triangle DEF$ ノ內角ノ和ナルコトヲ圖ニヨリテ證セヨ。



(39)　二ツノ直角三角形ニ於テ斜邊ト一銳角トガ夫々相等シキトキハ此ノ二ツノ直角三角形ハ合同ナリ。

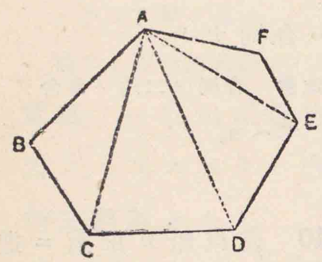
注意　合同ノ二通ノ場合ヲ考ヘヨ。

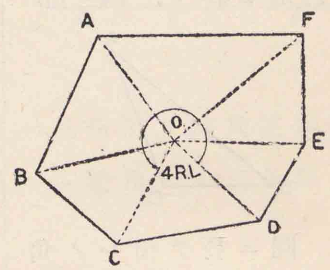
(40)　或汽船ガ正南ニ進ミ來リシガ正東ニ進路ヲ變ジ次ニ東北ニ方向ヲ變ジタリ。初メノ進路ヨリ何度廻轉シタルカ。



26. 多角形ノ內角及外角ノ總和

定理 n 邊形ノ內角ノ總和ハ $2(n-2)$R.∟ナリ。





三角形ノ數	$n-2$	n
スベテノ三角形ノ內角ノ總和	2R.∟$\times(n-2)$	2R.∟$\times n$
多角形ノ內角ノ總和	$2(n-2)$R.∟	$(2n-4)$R.∟

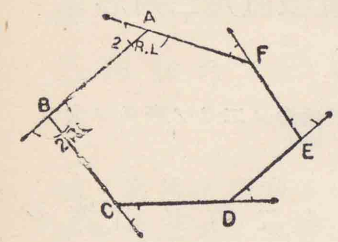
問一 七邊形ノ內角ノ總和ハ何直角ナルカ。

問二 十五邊形ノ內角ノ總和ハ何度ナルカ。

問三 正五邊形ノ一內角ハ何直角ナルカ。

問四 正八邊形ノ一內角ハ何度ナルカ。

系一 多角形ノ各邊ヲ順次ニ一方ニ延長シテ生ズル總テノ外角ノ和ハ四直角ニ等シ。



證明 各頂點ニ於ケル內角及外角ノ和 2R.∟

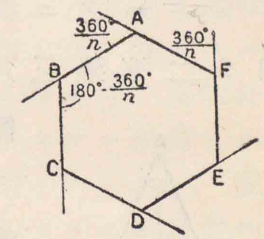
ソレ等ノ總和 $2n$R.∟

多角形ノ內角ノ總和 $(2n-4)$R.∟

差即チ外角ノ總和 4R.∟

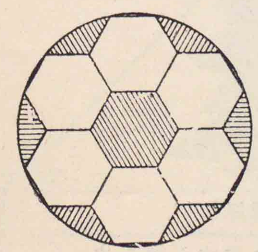
系二 正 n 邊形ノ一內角ハ $\left(2-\frac{4}{n}\right)$R.∟ 即チ

$$180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$$ ニ等シ。

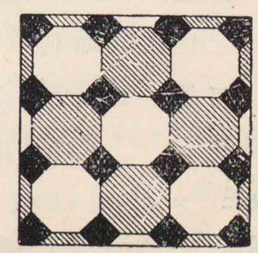


問題

41 大サノ等シキ正六角形ノ瓦ハ圖ノ如ク敷キツメ得ル理ヲイヘ。



(41) 圖ノ如ク邊ノ等シキ正方形ト正八邊形トハ敷詰メ得ル理ヲ云ヘ。

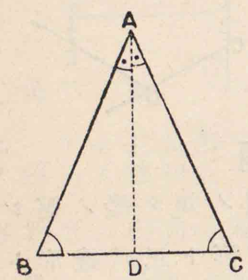


第五章 二等邊三角形及直角三角形

27. 二等邊三角形(二)

問一 頂角ガm度ナル二等邊三角形ノ二ツノ底角ノ大サ如何。(52頁ヲ見ヨ)

定理 一ツノ三角形ノ二角ガ相等シキトキハ之ニ對スル邊モ亦相等シ。即チ二等邊三角形ナリ。



假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=\angle C$ トセバ

終結 $AB=AC$

證明 補助線トシテ$\angle A$ノ二等分線 AD ヲ引キ $\triangle ABD$ ト $\triangle ACD$ トヲ作レ。

$\angle ADB = 2R\llcorner - (\angle BAD + \angle B)$

$\angle ADC$ ハ如何。

何故 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ カ

故ニ $AB=AC$

問二 コノ定理ト52頁ノ定理トノ關係如何。

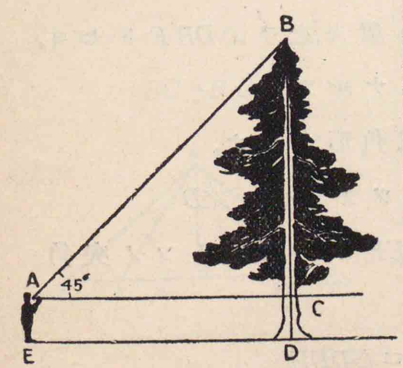
問三 ココニ用ヒタル證明ヲ52頁ニテナシ得ルカ。

系 三ツノ角ガ相等シキ三角形ハ正三角形ナリ。(53頁參照)

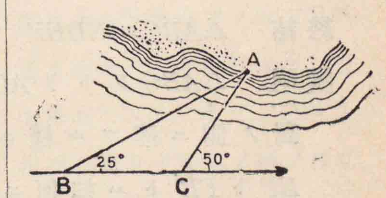
問題

42 底邊ト頂角トガ相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ合同ナルカ。

43 直立セル立木ノ高サヲ測ラントシ14.5米距リタル點Aニテ眼ト等シキ高サノ點Cト頂上Bトヲ見タルニ$\angle BAC$ハ45°ナリシト。目ノ高サヲ1.5米トセバ立木ノ高サハ何程ナルカ。



(42) 或汽船ガ進行中,船中ノ一人ガ陸地ノ一地點Aノ方向ト進行ノ方向ノ角ヲ測リタルニ25°ヲ得タリ。後6.5粁進行シタルニ同様ナル角ガ50°トナレリト。後ノ點トAトノ距離如何。

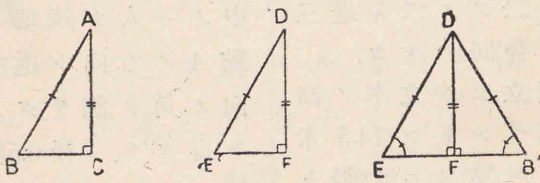


(43) $\triangle ABC$ノ$\angle B, \angle C$ノ二等分線ノ交點ヲ通リBCニ平行ニ引ケル直線ガAB, ACト夫々D,Eニ於テ交ルトキハ $DE=BD+CE$

28. 直角三角形ノ合同

問一　二ツノ直角三角形ノ合同ナル場合ヲアゲヨ。

定理　斜邊ト一邊トガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ハ合同ナリ。



假設　$\triangle ABC, \triangle DEF$ ハ $\angle C, \angle F$ ガ夫々直角ナル三角形ニシテ $AB=DE, AC=DF$ ナリトセバ

終結　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明　$\triangle ABC$ ヲトリ AC ヲ DF ニ重ネ B ヲ E ト反對ノ側ニ落ツル樣ニ置キ,之ヲ $\triangle DB'F$ トセヨ。

EF ト FB' トハ如何ニナルカ。

$\triangle DEB'$ ハ如何ナル三角形ナルカ。

$\angle E=\angle B'=\angle B$　從ツテ　$\angle A=\angle D$

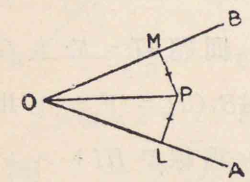
故ニ　$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トハ二邊トソノ夾角トガ夫々相等シ。

故ニ　　$\triangle ABC \equiv \triangle DEE$

問二　此ノ證明ニ要スル定理ヲ調ベヨ。

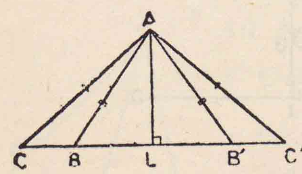
問　題

44　一ツノ角ノ二邊ヨリ等距離ニ在ル點ハソノ角ノ二等分線上ニ在ルコトヲ證セヨ。

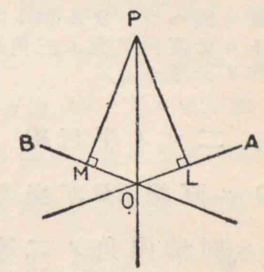


45　圖ノ如ク直線外ノ一點 A ヨリ相等シキ斜線 AB, AB' 及ビ AC, AC' ヲ引ケバ

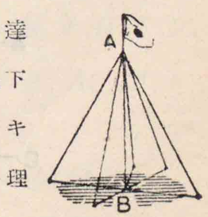
$BC=B'C'$



(44)　問題44ノ逆ヲ述ベテ之ヲ證明セヨ。



(45)　圖ノ如ク竿 AB ガ平地ニ直立スルトキハソノ根下 B ヲ通リ平地ニ引ケル直線ハ AB ト垂直ナルモノナリ。 A ヨリ出ヅル等シキ長サノ綱ノ端ガ夫々地面ニ達スル點ハ根下ヨリ相等シキ距離ニ在ル理由ヲノベヨ。



＊ AB ヲ平面ノ垂線トイフ。

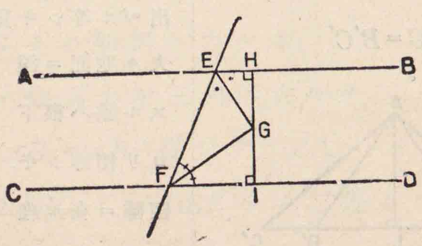
46 斜邊ト直角ヲ夾ム一邊トノ和及ビ直角ヲ夾ム他ノ一邊トヲ知リテ直角三角形ヲ作レ。

注意 與ヘラレタル和ト一邊トニテ直角ヲ夾ム三角形ヲ作リテ考ヘヨ。

47 二ツノ平行線 AB, CD ニ直線 EF ガ交リテナス同傍内角ノ二等分線ノ交點ヲ G トスレバ $\triangle EGF$ ハ直角三角形ナリ。

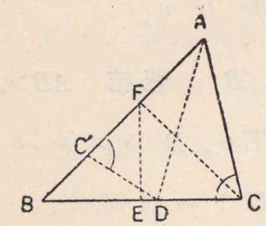
(46) 高サヲ知リテ正三角形ヲ書ケ。

(47) 問題**47**ニ於テ G ヨリ AB, CD ニ下セル共通ナル垂線ヲ HI トスレバ G ヲ頂點トセル $\triangle EGF$ ノ高サハ HI ノ半分ナルコトヲ證セヨ。



第六章 三角形ノ角及邊ノ不等

29. 邊ノ不等ナル三角形



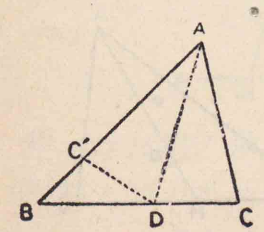
問一 圖ノ如ク邊 AB,AC ノ長サノ異ル三角形ヲ畫キ, $\angle C$ ト $\angle B$ トヲ比較スル爲ニ邊 AC ガ邊 AB ノ上ニ來ル如ク折リ曲ゲテ見ヨ。又邊 AB,AC ヲ比較スルタメニ點 B ヲ點 C ニ重ネテ折リ曲ゲテ見ヨ。

定理 一ツノ三角形ノ二邊ガ不等ナルトキハ大邊ニ對スル角ハ小邊ニ對スル角ヨリ大ナリ。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$

終結 $\angle C>\angle B$

證明 $\angle A$ ノ二等分線ガ底ト交ル點ヲ D トシ, AB 上ニ AC ニ等シク AC' ヲトリ $C'D$ ヲ結ベ。



$\angle C$ ト $\angle AC'D$ トハ如何。

$\angle AC'D$ ト $\angle B$ トハ如何。

$\angle C$ ト $\angle B$ トハ何レガ大ナルカ。

定理 一ツノ三角形ノ二角ガ不等ナルトキハ大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリ大ナリ。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle C > \angle B$ **終結** $AB > AC$

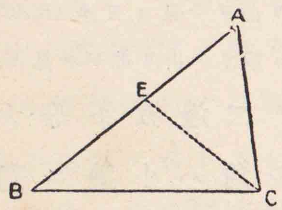
證明 直線 CE ヲ引キ $\angle BCE = \angle B$ トスレバ

BE ト CE トハ如何。

BA ト $(CE+EA)$ トハ如何。

AC ト $(CE+EA)$ トハ如何。

AC ト AB トハ如何。

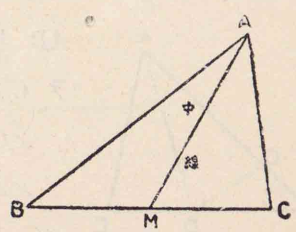


問二 前頁ノ定理ト本頁ノ定理トノ關係如何。

問三 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB \gtreqless AC$ ナラバ $\angle B$ ト $\angle C$ トハ如何。

問四 問三ノ逆ニツキ $\angle B, \angle C$ ノ大小ト AB, AC ノ大小トノ關係ヲ調ベヨ。

定義 三角形ノ頂點トソノ對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ三角形ノ**中線**ト云フ。



問　題

48 直線外ノ一定點ヨリ之ニ垂線ト斜線トヲ引キテソノ大小ヲ研究セヨ。

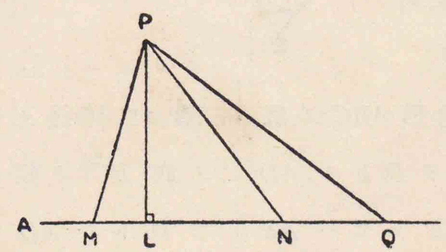
(48) 直線外ノ一定點ヨリ之ニ引ケル最小ナル線分ハ垂線ナルコトヲ證セヨ。

系 直線外ノ一點ヨリ之ニ引ケル線分ノ中

1 垂線ハ最モ短ク,

2 垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ在ル點ニ引ケル斜線ハ小ナル距離ニ在ル點ニ引ケル斜線ヨリ大ナリ。

而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ。



49 三角形ノ最大邊ノ兩端ノ角ハ共ニ鋭角ナルコトヲ證セヨ。

(49) 底邊ガ最大邊ナル二等邊三角形ノ頂角ノ大サノ範圍ハ如何。

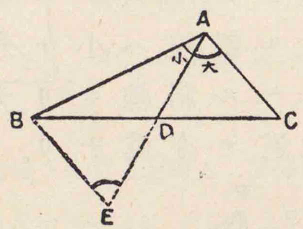
50 三角形ノ一頂點ヨリ出ヅル中線ガ對邊ノ半分ヨリ小ナルカ,等シキカ,又ハ大ナルカニ從ツテ其ノ頂角ハ鈍角,直角又ハ鋭角ナリ。

注意 三角形ノ内角ノ和ヲ考ヘヨ。

(50) 四邊形ノ最大邊ト最小邊ト相對スルトキハ最小邊ノ兩端ニ於ケル二ツノ角ハ夫々之ニ對スル角ヨリモ大ナリ。

注意 對角線ヲ引キテ考ヘヨ。

51 三角形ノ中線ガ之ヲ夾ム二邊トナス角ノ中大邊トナス角ハ小邊トナス角ヨリ小ナリ。



(51) 三角形ノ中線ハ中線ヲ夾ム二邊ノ和ノ半分ヨリ小ナリ。

52 正三角形 ABC ノ底 BC 上ノ點ヲ D トシ,AD ノ中點ヲ E トセバ AE ハ CE ヨリ小ナリ。

注意 $\triangle CDE$ ノ邊ヲ比較セヨ。89頁

(52) 二等邊三角形 ABC ノ底 BC ノ延長上ノ點ヲ D トシ AD ヲ結ベバ AD ハソノ等邊ヨリモ大ナリ。

53 圓ノ中心ヲ O,直徑 AB 上ノ點ヲ P,圓周上ノ點ヲ C トスレバ CP ノ大サハ AP ト BP トノ間ニ在リ。〔36頁21ヲ見ヨ〕

(53) 問題**53**ニ於テ $\angle OCP$ ハ常ニ $\angle OPC$ ヨリ小ナルコトヲ證セヨ。

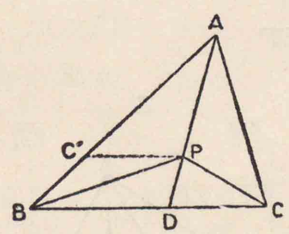
54 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ニシテ $\angle A$ ノ二等分線ガ BC ト D ニ於テ交ルトセバ

$BD>CD$

注意 AB 上ニ AC ニ等シク AC' ヲトリ,$C'D$ ヲ結ビ $C'D$ ト BD トヲ比較セヨ。

(54) $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ トシ $\angle A$ ノ二等分線 AD 上ノ點ヲ P トスレバ

$AB-AC$ ガ $BP-CP$ ヨリ大ナリ。



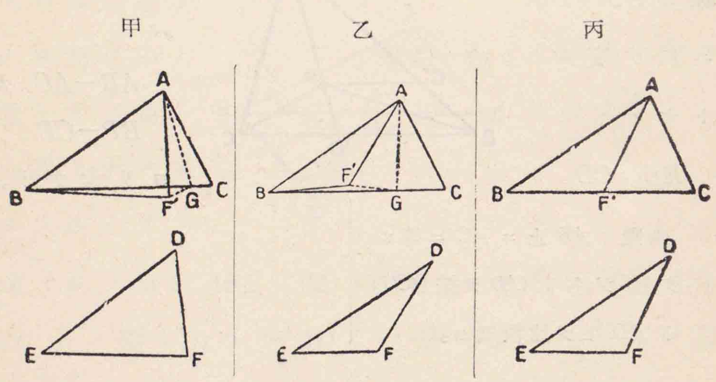
30. 二邊ノ等シキ二ツノ三角形

定理 二ツノ三角形ニ於テ二邊ガ夫夫相等シクソノ夾角ガ不等ナルトキハ大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリ大ナリ。

假設 $\triangle ABC,\ \triangle DEF$ ニ於テ $AB=DE,\ AC=DF$

$\angle A>\angle D$

終結 $BC>EF$



證明 $\triangle DEF$ ヲトリ DE ヲ AB ニ重ネ頂點 F ト C トヲ AB ノ同側ニアル如クスレバ $\angle A>\angle D$ ナル故 DF ハ $\angle BAC$ 內ニ來ル。

F ノ位置ニヨリテ(甲),(乙),(丙)ノ三ツノ場合トナル。

(甲),(乙)ニ於テ

$\angle F'AC$ ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ G トシ $F'G$ ヲ結ビ,

$\triangle AF'G$ ト $\triangle ACG$ トノ合同ナルコトヲ證セヨ。

故ニ $F'G=CG$

$BC=BG+GC=BG+GF'>BF'$

$\therefore\ BC>EF$

又丙ノ場合ハ如何。

問題

55 同圓又ハ等圓ニ於テ異ル中心角ニ對スル弦ノ大小如何。

56 $\triangle ABC$ ノ底 BC ヲ延長シソノ上ニ $CD=AB$ ナルヤウニ點 D ヲ取ルトキハ $AD>BC$ ナリ。

注意 $\triangle CAB$ ト $\triangle ACD$ トヲ比較セヨ。

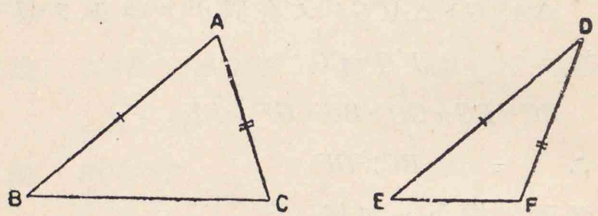
(55) YY' ハ線分 XX' ノ垂直二等分線ニシテ P ガ YY' ニ對シテ X ト同側ニアラバ $PX'>PX$

(56) 線分 AB ノ中點 C ヲ通リ線分 CD ヲ引キ $\angle ACD$ ヲ $\angle BCD$ ヨリ大ナラシムレバ

$\angle CAD<\angle CBD$

注意 AD, BD ノ大小ヲ考ヘ $\angle A, \angle B$ ヲ比較セヨ。

定理 二ツノ三角形ノ二邊ガ夫々相等シク第三邊ガ不等ナルトキハ大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリ大ナリ。



假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ
$AB=DE,\ AC=DF,\ BC>EF$ ナラバ

終結 $\angle A>\angle D$

證明 モシ $\angle A$ ガ $\angle D$ ヨリ大ナラズトセバ
$\angle A=\angle D$ カ $\angle A<\angle D$ ナラザルベカラズ。
$\angle A=\angle D$ ナラバ $BC=EF$ ナルベク
$\angle A<\angle D$ ナラバ $BC<EF$ ナルベキ筈ナルニ
$BC>EF$ ニシテ此ノ何レニモアラズ。
故ニ $\angle A>\angle D$ ナラザルベカラズ。

問一 104 頁ノ定理ト 106 頁ノ定理トノ關係如何。

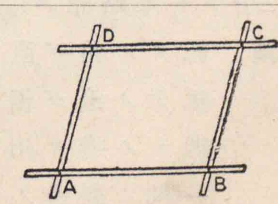
問二 106 頁ノ定理ノ證明法ハ如何ナル種類ノ方法カ。ソノ證明ノ出發點ハ如何。

問三 100 頁ノ定理ヲ 99 頁ノ定理ガ證明サレタルモノトシ前頁ノ如キ方法ニテ證明セヨ。

問 題

57 點 P ハ $\triangle ABC$ ノ三頂點ヨリ等距離ニ在ル點ニシテ $AB>BC>CA$ ナラバ
$\angle APB>\angle BPC>\angle CPA$

58 次ノ圖ハ A, B, C, D 四點ニテ自由ニ動キ得ル四邊形ノ組手ニシテ BC, AD ハ相等シク且常ニ平行ナル如クス。
AC ガ大トナレバ BD ハ小トナルコトヲ證セヨ。



(57) 三角形ノ一頂點ヨリ出ヅル二邊ガ等シカラザルトキハソノ頂點ト對邊ノ中點トヲ結ブ直線ハ對邊ニ垂直ナラザルコトヲ證セヨ。

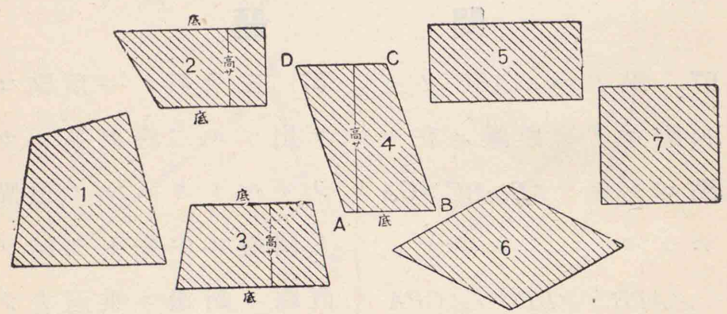
(58) $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ナルトキ BC ノ中點ヲ D トシ AD 上ニ點 X ヲトレバ $BX>CX$

第七章　平行四邊形

31. 平行四邊形ノ性質

問一　四邊形ノ內角ノ和ハ何直角ナルカ。

問二　次ノ四邊形ノ名稱ヲイヘ。



定義　二双ノ相對スル邊ガ平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**ト云フ。平行四邊形ノ一邊ヲ底邊トセルトキハ是レトソノ對邊トノ間ノ距離ヲ**高サ**ト云フ。

平行四邊形 $ABCD$ ヲ ▱$ABCD$ ト記ス。又 ▱AC, ▱BD トモ略記ス。

定義　總テノ角ガ直角ナル四邊形ヲ**矩形**トイフ。
總テノ邊ガ相等シキ四邊形ヲ**菱形**トイフ。
總テノ邊ガ相等シキ矩形ヲ**正方形**トイフ。
一双ノ對邊ノ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイ

ヒ，平行ナル二邊ヲソノ**底**トイフ。又兩底間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

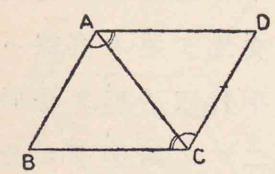
平行ナラザル二邊ノ相等シキ梯形ヲ**等脚梯形**トイフ。

定理　平行四邊形ニ於テハ

(1) 對角線ハ之ヲ全等ナル二ツノ三角形ニ分チ，

(2) 相對スル角ハ相等シク，

(3) 相對スル邊ハ相等シ。

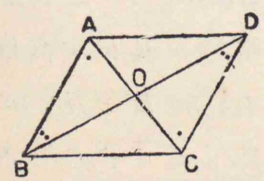


證明　何故 $\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トハ合同ナルカ。

$AB=CD,\ BC=DA,$

$\angle A=\angle C,\ \angle B=\angle D$

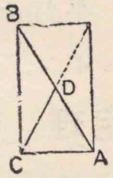
(4) 對角線ハ互ニ他ヲ二等分ス。



證明　$\triangle AOB$ ト $\triangle COD$ トノ合同ナルコトヨリ考ヘヨ。

系一　矩形ノ兩對角線ハ長サ相等シ。

系二　直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點ヨリ等距離ニ在リ。



問三　二平行線ノ距離ハ何處モ相等シキカ。

問　　題

59　等脚梯形ノ兩底角ハ相等シ。

60　平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ガ對邊ノ間ニ在ル部分ハソノ交點ニヨリテ二等分セラル。

61　三ツノ平行線上ニ各頂點ヲ有シ,對應邊ガ夫々平行ナル三角形ハ何レモ合同ナルコトヲ證セヨ。

(59)　等脚梯形ノ對角線ハ相等シ。

(60)　平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ハソノ平行四邊形ヲ合同ナル二ツノ四邊形ニ分ツ。

(61)　▱$ABCD$ ノ對角線 AC ニ平行ニ引ケル直線ガ邊 BA, BC 及ビ DA, DC ノ延長ト夫々 F, G, E, H ニテ交レバ $EF=GH$

32. 平行四邊形タルベキ四邊形

定理　四邊形ノ

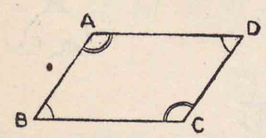
(1) 相對スル角ガ各々相等シキトキ,

(2) 相對スル邊ガ各々相等シキトキ,

(3) 二ツノ對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキ,

(4) 一双ノ對邊ガ平行ニシテ且相等シキトキ,

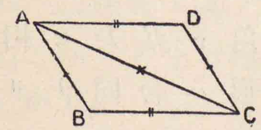
ハ平行四邊形ナリ。



(1)

$\angle B$ ト $\angle C$ トハ如何。

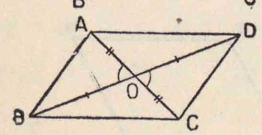
$AB \parallel DC,\ BC \parallel AD$



(2)

$\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トハ如何。

$AB \parallel DC, BC \parallel AD$

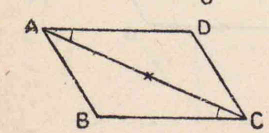


(3)

AC, BD ノ交點ヲ O トセバ,

$\triangle AOB$ ト $\triangle COD$ トハ如何。

$AB \parallel DC, BC \parallel AD$



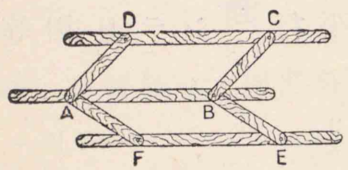
(4)

$\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トハ如何.

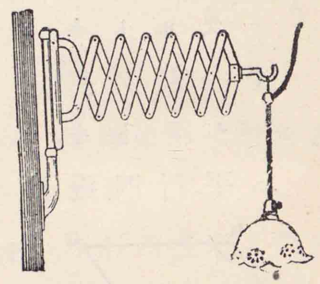
$AB \parallel DC$

問　題

62 圖ハ平行線ヲ書ク裝置ナリ。ソノ構造及ビ平行線ヲ書キ得ル理ヲ説明セヨ。

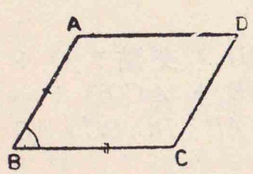


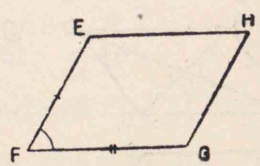
(62) 下ノ如キ裝置ニヨリテ柱ヨリ電燈ノ距離ヲ自由ニセントス。構造ヲ如何ニスベキカ。又ソノ理由ヲ説明セヨ。



33. 合同ナル平行四邊形

定理　二隣邊トソノ夾角トガ夫々相等シキ二ツノ平行四邊形ハ合同ナリ。





假設　▱$ABCD$ ト ▱$EFGH$ トニ於テ

$AB=EF$, $BC=FG$, $\angle B=\angle F$ トスレバ

終結　▱$ABCD \equiv$ ▱$EFGH$

證明　▱$ABCD$ ヲ ▱$EFGH$ ノ上ニ重ネテ見ヨ。

AB ト EF ヲ重ネ, BC ト FG トヲ重ヌルヲ得。

CD ト GH トハ如何。

AD ト EH トハ如何。

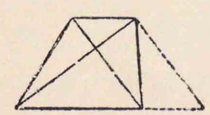
▱AC ト ▱EG トハ全ク重ル故合同ナリ。

系　二隣邊ガ夫々相等シキ二ツノ矩形ハ合同ナリ。

問　題

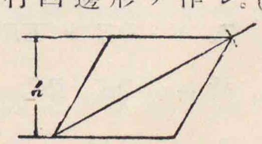
63 二隣邊ト其ノ夾角トヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

64 兩底ト兩對角線トノ長サヲ知リテ梯形ヲ作レ。



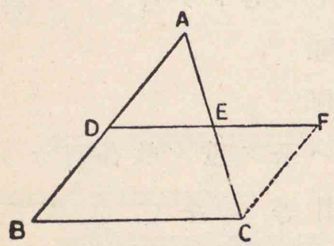
(63) 二對角線ト高サトヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

(64) 高サ,一對角線及ビ一邊底ナラズヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。(解二)



34. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線

定理 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行ニシテ且底ノ半ニ等シ。



假設 $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トスレバ

終結 $DE \parallel BC$

$DE=\frac{1}{2}BC$

證明 DE ヲ延長シテ EF ヲ DE ニ等シクトリ, CF ヲ結べバ,

$\triangle ADE$ ト $\triangle CFE$ トハ如何。

$AD \parallel CF$, $AD=CF$

$BD \parallel CF$, $BD=CF$

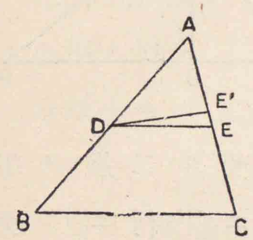
四邊形 $DBCF$ ハ如何ナル形カ。

BC ト DF トハ如何。

又 DE ト EF トハ如何。

故ニ $DE \parallel BC$, $DE=\frac{1}{2}BC$

系一 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ底邊ニ平行ニ引ケル直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ通ル。



證明 BC ニ平行ナル直線 DE ガ AC ノ中點ヲ通ラズトスレバ E ノ他ノ點ガ中點ナルベシ。ソノ點ヲ E' トスレバ $DE' \parallel BC$ トナリ不合理トナル。

故ニ BC ニ平行ナル直線ハ必ズ AC ノ中點ヲ通ル。

問一 DE ノ延長ト C ヨリ AB ニ平行ニ引ケル直線ト F ニ於テ交ラシメ直接法ニヨリテ證セヨ。

問 題

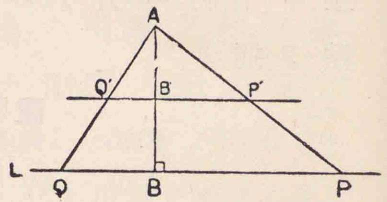
65 三角形ノ三邊ノ中點ノ二ツ宛ヲ結付クル線分ハソノ三角形ヲ四ツノ合同ナル三角形ニ分ツコトヲ證セヨ。

(65) 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結付ケテ生ズル四邊形ハ如何ナル形カ。

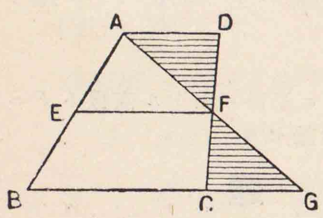
原四邊形ガ矩形,菱形,正方形ナルトキハ如何。

66 直線外ノ定點Aヨリ之ニ引ケル線分ノ中點ヲ結ブ直線ハソノ點ヨリソノ直線ヘ下セル垂線ノ中點ヲ通リソノ直線ニ平行ナリ。

(66) 問題**66**ノ逆ヲノベテ之ヲ證セヨ。



系二 梯形ノ平行ナラザル二邊ノ中點ヲ結付クル線分ハ底ニ平行ニシテ且兩底ノ和ノ半ニ等シ。



$\triangle ADF$ト$\triangle GCF$トヲ比較セヨ。

EFハ$\triangle ABG$ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ナルコトニ注意セヨ。

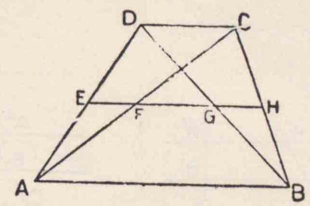
系三 梯形ノ平行ナラザル二邊ノ一ツノ中點ヲ通リ底ニ平行ニ引ケル直線ハ他ノ中點ヲ通ル。

注意 直接法ト間接法トノ兩樣ノ證明ヲ試ミヨ。

問 題

67 梯形$ABCD$ノ二邊AB, CDヲ平行ナリトセバAD, AC, BD, BCノ中點ハ同一直線上ニ在リ。

(67) 問題**67**ニ於テAC, BDノ中點ヲ結ブ線分ハAB, CDノ差ノ半分ニ等シ。



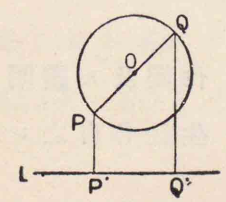
68 圓Oノ直徑ヲPQトシP, Qヨリ圓周ト交ラザル定直線Lニ下セル垂線ヲPP', QQ'トセバ

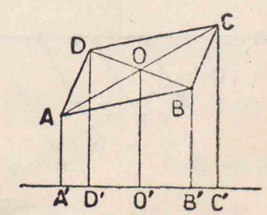
$$PP'+QQ'$$

ハ直徑ノ位置ニ拘ラズ常ニ一定ナリ。

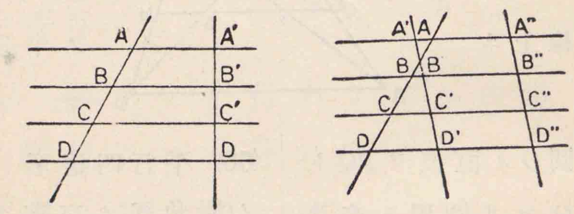
(68) 平行四邊形$ABCD$ノ對角線ノ交點ヲOトシ, A, B, C, D及ビOヨリ平行四邊形ヲ截ラザル直線ニ下セル垂線ヲAA', BB', CC', DD', OO'トスレバ

$$AA'+BB'+CC'+DD'=4OO'$$





系四 三ツ以上ノ平行線ガ之ニ交ル直線ヨリ等シキ部分ヲ截取ルトキハ他ノ之ニ交ル直線ヨリモ等シキ部分ヲ截取ル。

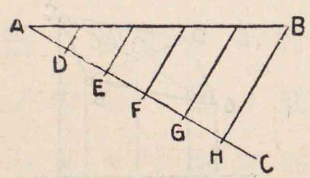


證明 $ACC'A'$ ヲ梯形ト考フレバ如何。

$BDD'B'$ 〃 〃 〃

$A'B'=B'C'=C'D'$

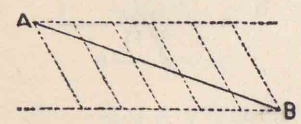
作圖題 與線分ヲ五等分セヨ。



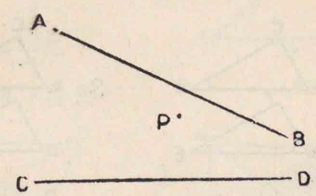
作圖及ビ證明

生徒各自之レヲナセ。

69 線分 AB ヲ等分スルニ圖ノ如キ方法ニヨランヨトス。方法及ビ理由ヲ述ベヨ。



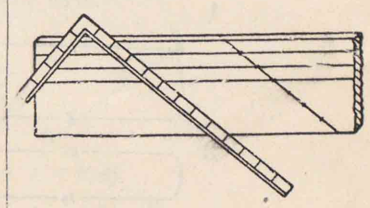
70 圖ノ如キ二直線 AB, CD 上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ引キ與點 P ガ中點ナル如クセヨ。



71 ▱$ABCD$ ノ 邊 BC, DA ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ AE, CF ハ BD ヲ三等分ス。

注意 111頁(4), $AE \parallel CF$

(69) 荒キ目盛アル物指ニテ板ノ巾ヲ七等分スル方法ヲ述ベヨ。



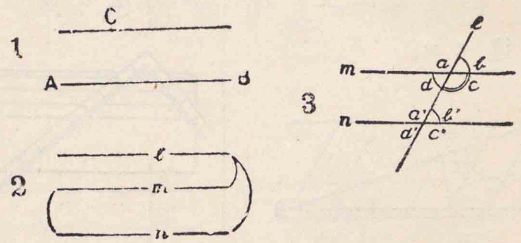
(70) 問題70ノ如キ線分ハ唯一本ナルコトヲ證セヨ。

注意 間接法 111頁(3)

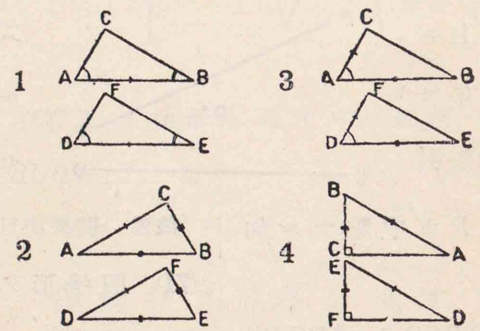
(71) 四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結付クル二本ノ線分並ニ二對角線ノ中點ヲ結付クル線分ハ互ニ二等分ス。 **注意** 各邊ノ中點ヲ順次ニ結付ケテ見ヨ。

摘 要

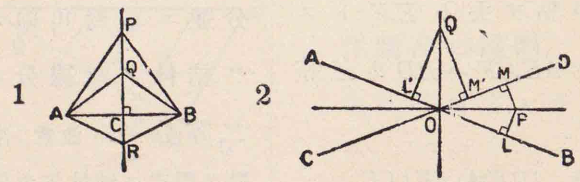
(1) 平行線ニツキテ



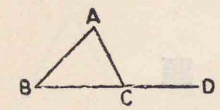
(2) 兩三角形ノ合同



(3) 線分ノ垂直二等分線及角ノ二等分線



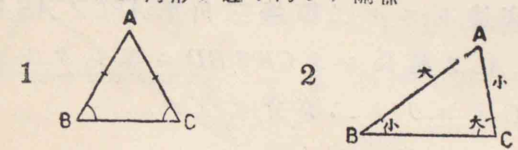
(4) 多角形ノ內角.外角



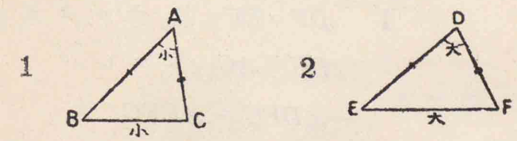
2 內角ノ和 $2(n-2)R.\llcorner$

3 外角ノ和 $4R.\llcorner$

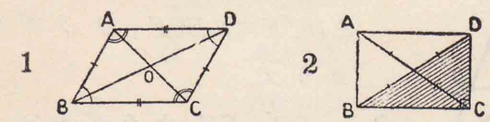
(5) 一ツノ三角形ノ邊ト角トノ關係



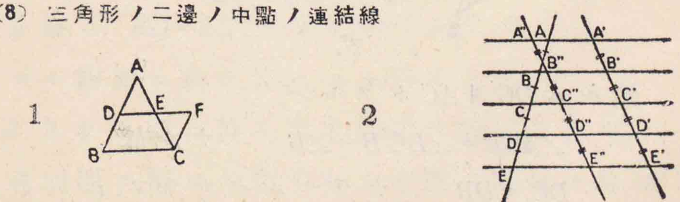
(6) 二邊ガ夫々相等シキ二ツノ三角形



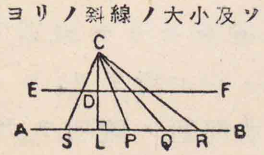
(7) 平行四邊形ノ性質



(8) 三角形ノ二邊ノ中點ノ連結線



(9) 一點ヨリノ斜線ノ大小及ソノ中點

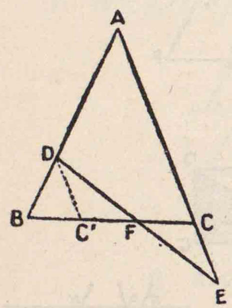


35. 問題ノ解析

雜　　題

72　BCヲ底邊トスル二等邊三角形ABCノAB上ニ點DヲトリACヲ延長シテCEヲBDニ等シクトルトキハDEハBCニヨリテ二等分セラル。

考ヘ方（一）



1　$DF=EF$　ナルタメニハ

$DC' \parallel AC$　トスレバ

$\angle DFC'=\angle EFC$

$\angle C'DF=\angle CEF$　ナル故

$\triangle DC'F\equiv\triangle ECF$　ナラザルベカラズ。

2　$DC'=CE$　ナラザルベカラズ。

然ルニ$DC' \parallel AC$トスレバ

$\angle ACB=\angle DC'B=\angle B$　ナル故

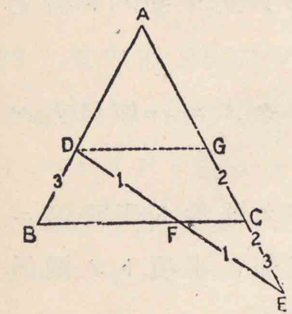
$DC'=DB$　ナラザルベカラズ。

3　即チ$DB=CE$ナラザルベカラズ。

コレ假設ニ於テ定マレル所ナリ。

3,2,1ト逆ニ進ミテ本問題ノ證明ヲナセ。

考ヘ方（二）



1　$DF=EF$　ナルタメニハ

$DG \parallel BC$トスレバ

$\triangle DGE$　ニ於テCガ中點

2　即チ　$CE=CG$　ナラザルベカラズ。

$AB=AC$

$\left.\begin{array}{l}\angle ABC=\angle ADG\\ \angle ACB=\angle AGD\end{array}\right\}$ ナル故

$\angle ADG=\angle AGD$

故ニ　$AD=AG$

$BD=CG$

3　故ニ　$BD=CE$ナラザルベカラズ。

コレ假設ニ於テ定マレル所ナリ。

3, 2, 1ト逆ニ進ミテ本問題ノ證明ヲナセ。

或問題ヲ解クニ當リソノ問題ノ假設ト終結トノ關係ガ複雜ニシテ容易ニソノ解法ヲ發見スルコト能ハザルコトアリ。カカル場合ニハ上ニナシタルガ如ク

1 先ヅ證明スベキ事項ガ成リ立ツモノト假定シ,

2 次ニ此ノ假定ガ成リ立ツタメニハ如何ナル條件ガ必要ナルカヲ尋ネ,

3 次第ニ逆ニ進ミテソレ等ノ條件ト假設等ニ於テ與ヘラレタル事項又ハ既知ノ事項トノ關係ヲ明カニスルマデ考ヘ方ヲ進ム。

カクノ如クスルコトヲ問題ノ**解析ヲナス**ト云フ。

問題ノ解析ヲナシテ既知條件ト未知條件トノ關係ヲ明カニセバ假設ヨリ出發シテ解析ニテトリ來リタル方法ヲ逆ニ進メバ容易ニ其ノ問題ノ證明ヲナスコトヲ得ルモノナリ。

問題ノ解析ハ證明發見ノ方法ナレバ之ヲ證明ノ中ニ表ハスコトヲ要セザルモノナリ。

問題**72**ノ如ク

二線分ノ相等シキコトヲ證明センニハ

1 合同ナル兩三角形ノ對應邊

2 二等邊三角形ノ二等邊

3 平行四邊形ノ對邊

4 間隔ノ相等シキ平行線ニ截ラルル線分等ノ

中ノ何レカニナルヤウ考ヲ導クベシ。

73 正方形 $ABCD$ ノ對角線 BD 上ニ BP ヲ BC ニ等シクトリ P ニ於ケル BD ノ垂線ガ DC ト Q ニ於テ交ルトキハ $PD=PQ=QC$

(**73**) 平行四邊形ノ對角線ニソノ對角線ノ通ラザル二頂點ヨリ下シタル垂線ハ長サ相等シ。

二角ノ相等シキコトヲ證明センニハ

1 二角ガ對頂角ナルコト

2 合同ナル三角形ノ對應角ナルコト

3 二等邊三角形ノ兩底角ナルコト

4 相等シキ角ノ餘角(補角)ナルコト

5 平行線ニヨル錯角又ハ同位角ナルコト

6 平行四邊形ノ相對スル角ナルコト

等ノ何レカニナルヤウ考ヲ導クベシ。

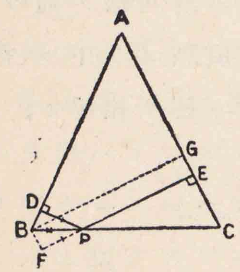
74 直角三角形 ABC ノ直角頂 A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ下セバ

$$\angle B=\angle DAC$$

$$\angle C=\angle DAB$$

(**74**) 與直線 l ノ同側ニ二點 A,B アリ。A ノ l ニ關スル對稱點ヲ A' トシ $A'B$ ト l トノ交點ヲ P トスレバ AP, BP ハ l ト等角ヲナス。〔72頁(**26**)〕

75 二等邊三角形ノ底ノ上ノ任意ノ一點ヨリ等邊ニ下セル垂線ノ和ハ常ニ一定ナリ。



解析 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB=AC$ トシ P ヲ BC 上ノ點トシ $PD\perp AB, PE\perp AC$ トス。

$(PD+PE)$ ガ一定ナルコトヲ考ヘントスルニ

EP ヲ延長シテ $PF=PD$ トスレバ $PD+PE=EF$

EF ノ一定ナルコトヲイヘバ可ナリ。

$BG\perp AC$ トシ, BG ガ EF ニ等シキナラバ EF ハ一定ノ長サトナル故 $BFEG$ ガ矩形ナルコトヲイヘバ可ナリ。

即チ $\angle F$ ガ R.∟ ナラバ可ナリ。

$\angle F=$R.∟ ナルタメニハ $\triangle PBD\equiv\triangle PBF$ ナラバ可ナリ。

$\angle EPC=\angle FPB$ ナル故 $\angle EPC=\angle DPB$ ナラバ可ナリ。

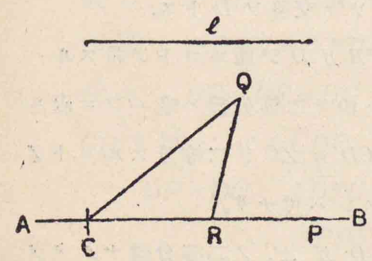
故ニ $\triangle DPB$ ト $\triangle EPC$ ニ於テ $\angle PBD=\angle PCE$ ナラバ可ナリ。

コレ假設ヨリ明カナルトコロナリ。

證明 解析ヲ逆ニタドリテ證明ヲナセ。

76 二等邊三角形ノ底ノ延長ノ上ノ點ヨリ等邊又ハソノ延長ノ上ニ下セル垂線ノ差ハ如何。

77 直線 AB 上ニ點 P, 外ニ Q アリ。直線上ニ點 R ヲ求メ $(PR+QR)$ ヲ與ヘラレタル長サ l トセヨ。



注意 點 R ハ唯一ツナルカ。

78 三邊ノ中點ノ位置ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

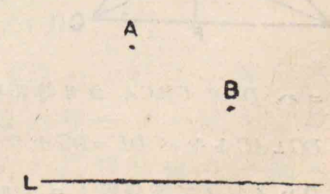
〔115頁65參照〕

(76) 正三角形内ノ一點ヨリ三邊ニ下セル垂線ノ和ハ常ニ一定ナリ。

注意 點ヲ通リテ底ニ平行ナル線ヲ引キテ考ヘヨ。

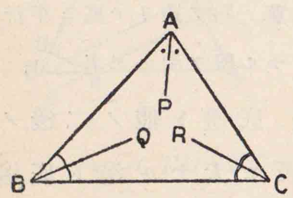
(77) 底邊ト他ノ二邊ノ差及ビ大ナル邊ト底邊トノナス角ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

(78) 二點 A, B ノ各ヲ通ル直線ト與直線 L トニテナル正三角形ヲ書ケ。



36. 三角形ノ内心,傍心,外心,垂心,重心

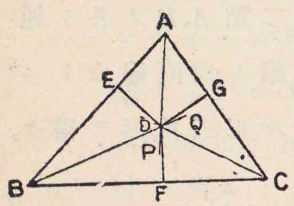
問題79 三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ一點ニ會シソノ交點ハ三邊ヨリ等距離ニ在リ。



解析1. AP,BQ,CRヲ夫々$\angle A,\angle B,\angle C$ノ二等分線トス。此ノ三直線ガ一點ニ會スルコトヲ證センニハ先ヅソノ中ノ二線ガ一點ニ交ラザルベカラズ。

$\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}<2R.\llcorner$ ナル故

AP, BQハCノ側ニ於テ交ル。ソノ交點ヲDトス。



2 CRガDヲ通ルコトヲ證スルニハ一角ノ二等分線ハ唯一ツニ限ル故CDガ$\angle C$ヲ二等分スルコトヲ證スレバ可ナリ。

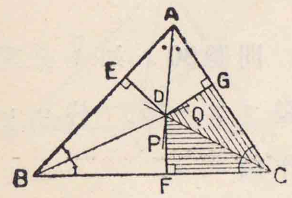
CDガ$\angle C$ノ二等分線ナルタメニハDガCB,CAヨリ等距離ニ在ラザルベカラズ。$DF\perp BC$, $DG\perp AC$トセバ$DF=DG$ナラザルベカラズ。$DE\perp AB$トスレバ

Dハ$\angle A$ノ二等分線上ニアル故$DE=DG$

Dハ$\angle B$ノ二等分線上ニアル故$DE=DF$ 故ニ$DF=DG$

證明 $\angle PAB+\angle QBA=\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}<2R.\llcorner$

AP,BQハABニ交リテ同傍内角ガ互ニ補角ヲナサザルヲ以テ相交ハル。ソノ交點ヲDトス。



DヨリAB,BC,CAニ垂線ヲ下シコレヲDE,DF,DGトス。

$\triangle ADE$ト$\triangle ADG$トニ於テ

$\angle DAE=\angle DAG$ ADハ共通

$\left.\begin{aligned}\angle ADE&=1R.\llcorner-\angle DAE\\ \angle ADG&=1R.\llcorner-\angle DAG\end{aligned}\right\}$ 相等シ

故ニ $\triangle ADE\equiv\triangle ADG$ $\therefore$ $DE=DG$

同様ニ $\triangle BDE\equiv\triangle BDF$ $\therefore$ $DE=DF$

故ニ $DE=DF=DG$

CDヲ結ベバ$\triangle CDF$ト$\triangle CDG$トニ於テ

$DF=DG$, $\angle DFC=\angle DGC=R\llcorner$, CDハ共通

$\therefore$ $\triangle CDF\equiv\triangle CDG$

故ニ$\angle DCF=\angle DCG$ 即CDハ$\angle C$ヲ二等分ス。而シテ$\angle C$ノ二等分線ハ唯一ツニ限ル。故ニ三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ一點ニ會シ,ソノ交點ハ三邊ヨリ等距離ニ在リ。

注意 問題79ハ31頁ノ問題17ニ於テ實驗ニヨリソノ眞ナル事ヲ研究シタルトコロナリ。

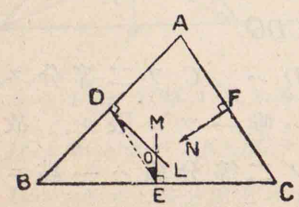
定義 三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ノ交點ヲ三角形ノ**內心**ト云フ。

80 三角形ノ一內角及ビ他ノ二內角ニ隣レル外角ノ二等分線ハ一點ニ會シ,ソノ交點ハ三邊ヨリ等距離ニ在リ。

(80) 問題80ノ如キ交點ハ幾ツアルカ。皆コレヲ作圖セヨ。

定義 三角形ノ一內角及ビ他ノ二內角ニ隣レル外角ノ二等分線ノ交點ヲ**傍心**ト云フ。

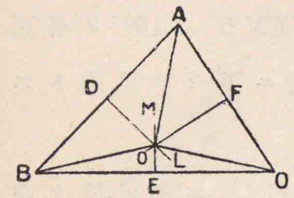
81 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ一點ニ會シ,ソノ交點ハ三頂點ヨリ等距離ニ在リ。



解析

△ABCノ三邊AB,BC,CAノ各ノ垂直二等分線DL,EM FNガ一點ニ會スルコトヲ證スルニハ,先ヅ其ノ中

ノ二直線ガ一點ニ交ルコトヲ證セザルベカラズ。〔87頁問題34ヲ見ヨ。〕



DL,EMノ交點ヲOトス。

FNガOヲ通ルコトヲ證スルニハ一線分ノ垂直二等分線ハ唯一ツニ限ル故

(1) OトACノ中點Fトヲ結ブ直線ガACニ垂直ナルコトカ,或ハ

(2) OヨリACヘ下セル垂線ガACノ中點ヲ通ルコトカヲ證スレバ可ナリ。

(1) ナルタメニハ

△OAF≡△OCFナラザルベカラズ。

OA=OC

然ルニOハAB,BCノ垂直二等分線上ノ點ナリ。故ニ OA=OB=OC

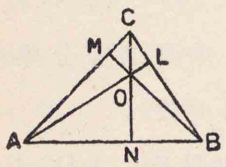
證明 各自證明ヲナセ。

定義 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ノ交點ヲ三角形ノ**外心**ト云フ。

82 鋭角三角形ノ三ツノ頂點ヲ通ル圓ヲ書ケ。

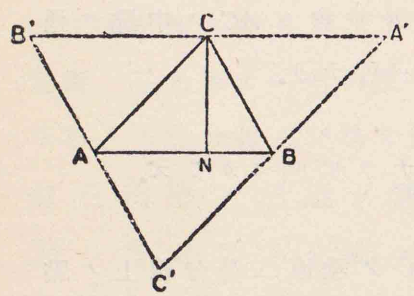
(82) 問題82ヲ直角並ニ鈍角三角形ニツキテ研究セヨ。

83 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ下セル垂線ハ一點ニ會ス。



假設 AL, BM, CN ヲ $\triangle ABC$ ノ各頂點ヨリ對邊ニ下セル垂線トスレバ

終結 AL, BM, CN ハ一點ニ於テ交ルベシ。

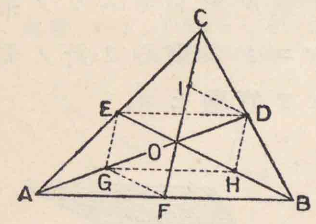


證明 $\triangle ABC$ ノ各頂點ヲ通リ對邊ニ平行ニ引ケル直線ニ依リテ生ズル三角形ヲ $A'B'C'$ トセバ AL, BM, CN ハ $\triangle A'B'C'$ ノ各邊ノ垂直二等分線トナルコトヲ考ヘヨ。

定義 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ下セル三垂線ノ交點ヲソノ三角形ノ**垂心**ト云フ。

(83) 問題83ヲ $\triangle ABC$ ガ直角及ビ鈍角三角形ノ場合ニツキテ研究セヨ。

84 三角形ノ三中線ハ一點ニ會シ,其ノ交點ト頂點トノ距離ハ其ノ頂點ヨリ出ヅル中線ノ $\frac{2}{3}$ ナリ。



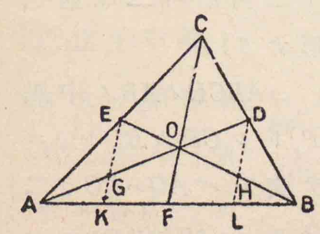
證明

1 $\triangle ABC$ ノ三中線ヲ AD, BE, CF トス。何故 AD, BE ハ交ルカ。

2 G ヲ AO ノ中點トシ H ヲ BO ノ中點トスレバ GH, DE ハ如何。四邊形 $GHDE$ ハ何カ。對角線 GD, EH ハ如何。AD, BE ハ各其ノ長サノ $\frac{2}{3}$ ノ點ニ於テ交ル。

3 AD ト CF トハ如何ナル點ニテ交ルカ。BE モ CF モ共ニ AD ノ $\frac{2}{3}$ ノ點ヲ通ル。

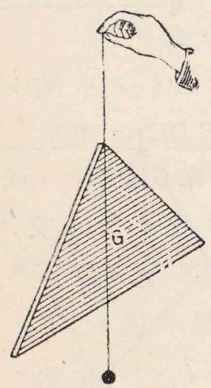
即チ三中線ハ共ニ一點ニ會シ,ソノ交點ト頂點トノ距離ハ其ノ頂點ヨリ出ヅル中線ノ $\frac{2}{3}$ ナリ。

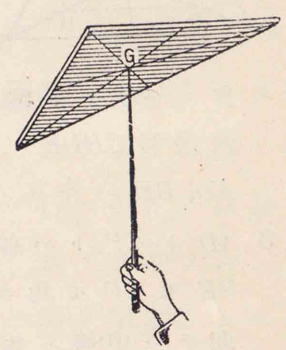


(84) 84 ノ證明ノ 3 ノ代リニ CO ヲ結ビソノ延長ト AB トノ交點ヲ F トスレバ F ハ AB ノ中點トナリ,, $CO=2OF$ トナルコトヲ證セ。

定義 三角形ノ三中線ノ交點ヲ其ノ三角形ノ重心ト云フ。

厚サ一樣ナル三角形ノ板ノ一頂點ヲ糸ニテ釣リ,糸ノ一端ニ重錘ヲ付ケテ垂ルルトキハソノ糸ハソノ三角形ノ重心ヲ通ルコト又重心ヲ針ノ先ニテ支フレバ釣リ合フコトヲ實驗セヨ。





85 三角形ノ二ツノ中線ノ中,大ナル邊ニ到ルモノハ小ナル邊ニ到ルモノヨリ小ナリ。

注意 中線ト底トノナス角ヲ考ヘヨ。

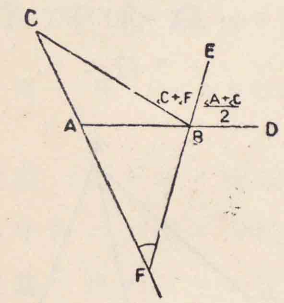
86 正三角形ノ內心,外心,重心,垂心ハ皆同一ノ點ナルコトヲ證セヨ。

(85) 二ツノ中線ガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ。

(86) ▱$ABCD$ノABノ中點ヲPトシCPガBDトQニ於テ交レバAQハBCヲ二等分ス。(△ABCヲ注意セヨ。)

87 △ABCノ∠Bノ外角ノ二等分線ト邊CAノ延長トノナス角ハ∠Aト∠Cトノ差ノ半ニ等シ。

注意 (一) $\angle CBE = \angle F + \angle C$
(二) $\angle ABF$ノ內角ニヨレ。



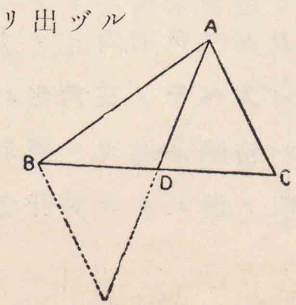
88 四邊形ノ相隣レル二角ノ二等分線ノナス角ハ他ノ二角ノ和ノ半ニ等シ。

(87) △ABCノ∠Bノ二等分線ト∠Cノ外角ノ二等分線トノナス角ハ∠Aノ半ニ等シ。

注意 ∠Cノ外角ノ半分ハ$\dfrac{\angle A+\angle B}{2}$

(88) 四邊形ノ外角ヲ二等分スル四直線ニヨリテ成ル四邊形ノ對角ハ互ニ補角ヲナス。

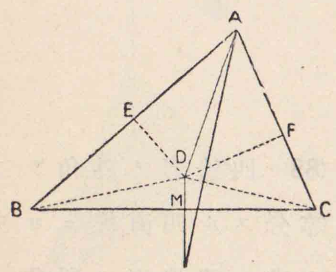
89 一頂點ヨリ出ヅル二邊ト中線トガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ合同ナリ。

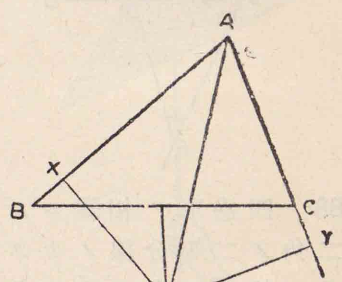


(89) 一頂點ヨリ出ヅル二邊ト中線トノ長サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

90 $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ト邊 BC ノ垂直二等分線トハ決シテ三角形内ニ於テ交ラザルコトヲ證セヨ。

(90) $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ト邊 BC ノ垂直二等分線トノ交點ヲ D トシ D ヨリ AB, AC 或ハ其ノ延長ヘ垂線 DX, DY ヲ引クトキハ $AX=AY, BX=CY$ ナルコトヲ證セヨ。





注意 交點 D ガ三角形内ニアリトシテ此ノ證明ヲ進ムル時ハ**スベテノ三角形ハ二等邊三角形ナリ**トノ誤レル結論ニ達ス。圖形ハナルベク正確ニ書キテ證明ヲ進ムルコト肝要ナリ。

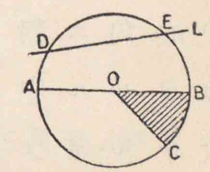
第三篇

圓

第一章 弧及弦

37. 中心角ト弧及弦

問一 圖ニ於ケル各部分ノ名稱ヲイヘ。

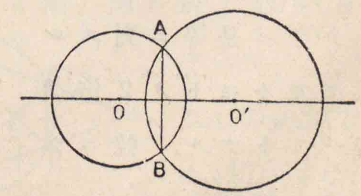


定義 弧トソノ兩端ニ引ケル兩半徑ニテ圍メル圓ノ一部分ヲ**扇形**ト云フ。

定義 圓ノ一ツノ弦ハ圓周ヲ二ツノ弧ニ分ツ。此ノ二ツノ弧ヲ互ニ他ノ**共軛弧**ト云ヒ,二ツノ大サ相等シカラザルトキハ大ナルモノヲ**優弧**,小ナルモノヲ**劣弧**ト云フ。

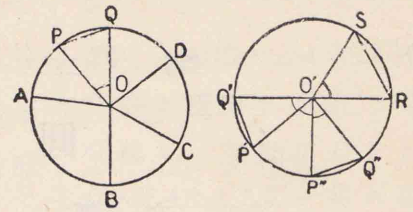
單ニ弧ト云フトキハ通常劣弧ヲ指スモノナリ。

問二 二圓ノ大小ハ何ニヨリテ定マルカ。



定義 相交ル二圓ノ交點ヲ結ブ線分ヲ二圓ノ**共通弦**ト云フ。

問三 一ツノ圓又ハ二ツノ等圓ニ於テ弧ト中心角ト弦トノ間ノ關係如何。



定理 同圓又ハ等圓ニ於テ相等シキ中心角ニ對スル弧ハ相等シク,相等シカラザル中心角ニ對スル弧ノ中ニテ大ナルモノニ對スル弧ガ大ナリ。

此ノ逆モ亦眞ナリ。

問　題

1 圓周ヲ 8 等分セヨ。

2 同圓又ハ等圓ニ於テ一ツノ中心角ガ他ノ中心角ノ 2 倍, 3 倍‥‥トナラバ是等ニ對スル弧モ夫々モトノ 2 倍, 3 倍‥‥トナル。弦ニツイテハ如何。

(1) 圓周ヲ 12 等分セヨ。

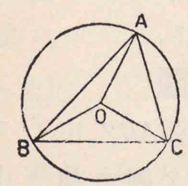
(2) PQ, PR ヲ夫々圓ノ直徑及ビ弦ナリトスレバ PR ニ平行ナル半徑ハ $\overset{\frown}{QR}$ ヲ二等分ス。

定理 同圓又ハ等圓ニ於テ等弦ニ對スル弧ハ相等シク,不等ナル弦ニ對スル弧ノ中,大弦ニ對スル劣弧ハ小弦ニ對スル劣弧ヨリ大ナリ。

此ノ逆モ亦眞ナリ。

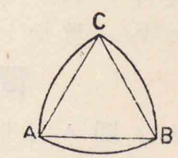
問　題

3 $\triangle ABC$ ヲ圓 O ニ內接スル不等邊三角形トスレバ $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ 及 $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ ノ大小如何。



(3) 正三角形 ABC ノ各頂點ヲ中心トシ, A, B, C ヲ通ル弧ヲ書ケバ

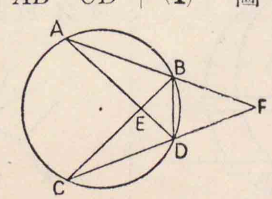
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$



4 圖ニ於テ $AB = CD$ ナラバ

$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

$\triangle AEB \equiv \triangle CED$



(4) 圖ニ於テ $AD = CB$ ナラバ

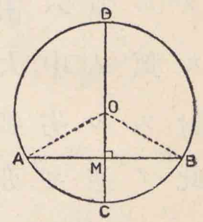
$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

$\triangle AFD \equiv \triangle CFB$

定理 圓ノ弦ニ垂直ナル直徑ハソノ弦ヲ二等分ス。

問四 直徑 CD ハ共軛弧 ACB, ADB ヲ如何ニスルカ。

問五 此ノ定理ノ逆ハ如何。



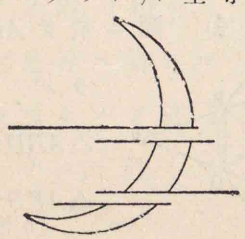
系一 弦ノ中點ヲ通ル直徑ハソノ弦ニ垂直ナリ。

系二 弦ノ垂直二等分線ハ中心ヲ通ル。

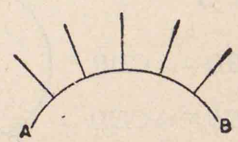
上ノ如ク**假設**ガ複雜ニシテ**二ツ以上**ノ條件ヲ含ム**定理ノ逆**ハ系一,系二ノ如ク假設ノ一ツト終結トヲ取リカヘタルモノニシテソノ逆ノ數ハ假設ノ條件ノ數ト等シ。其ノ内或モノハ眞ニシテ他ノモノハ眞ナラザルコトアリ。

問　題

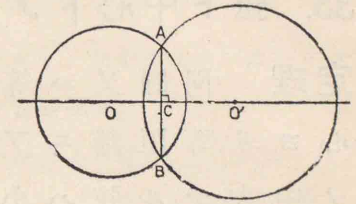
5 次ノ圖ノ月形(二ツノ圓弧ニテナル)ト全等ナル月形ヲ書ケ。



(5) 弧 AB ノ中心ヲ求メズシテ圖ノ如キ中心ヨリノ放射線ヲ引ケ。



系三 相交ル二圓ノ中心線ハソノ共通弦ヲ垂直ニ二等分ス。



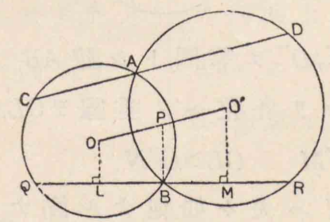
問　題

6 中心 O, O' ナル二圓ガ A, B ニ於テ交ル。A ヲ通リ OO' ニ平行ナル割線ガ二圓ト夫々 C, D ニ於テ交レバ

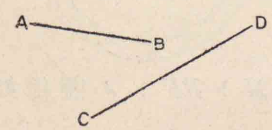
$CD = 2OO'$

(6) 圖ニ於テ OO' ノ中點ヲ P トシ BP ニ垂直ナル割線ガ二圓ト夫々 Q, R ニ於テ交ルトキハ

$QB = BR$



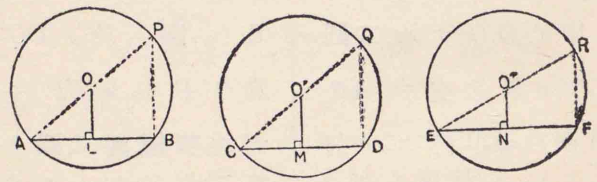
7 二線分 AB, CD ヲ夫々弦トスル同心圓ヲ書ケ。



(7) 二定點ヲ通ルスベテノ圓ノ中心ハ同一直線上ニ在リ。

38. 弦ト中心トノ距離

定理　同圓又ハ等圓ニ於テ等弦ハ中心ヨリ等距離ニアリ。　又不等ナル弦ノ中大ナル弦ハ小ナル弦ヨリ中心ニ近シ。



假設　圓 O, O', O'' ヲ等圓トシ,弦 $AB=CD$, 弦 $AB<EF$ トシ,中心ヨリ各弦ヘノ垂線ヲ $OL, O'M, O''N$ トセバ

終結　$OL=O'M$　　$OL>O''N$

證明　L, M, N ハ夫々如何ナル點ナルカ。

A, C, E ヨリ直徑ヲ引キ之ヲ AP, CQ, ER トセヨ。

劣弧 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{EF}$ ノ大小如何。

劣弧 $\overset{\frown}{BP}, \overset{\frown}{DQ}, \overset{\frown}{FR}$ ノ大小如何。　從テ弦 BP, DQ, FR ノ大小如何。

OL ト PB, $O'M$ ト QD, $O''N$ ト RF トノ關係如何。

最後ニ $OL, O'M, O''N$ ノ大小如何。

前定理ノ逆モ亦眞ナリ。

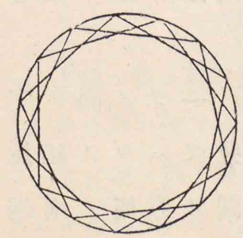
問一　前定理ノ證明ヲ逆ニタドリテ前定理ノ逆ヲ直接ニ證明セヨ。又間接法ニヨリテ證明セヨ。

問二　圓ノ弦ノ中ニテ最大ナルモノハ何カ。

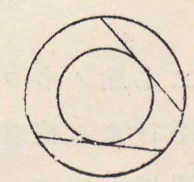
問三　圓內ノ一點ヲ通ル弦ノ中ニテ最大及ビ最小ナルモノハ何カ。

問　題

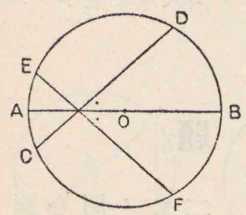
8　一ツノ圓ノ等シキ弦ノ中點ハスベテ此ノ圓ト同心ナル圓周上ニ在リ。



(8)　二ツノ同心圓ノ中ノ內圓上ノ點ヲ中點トセルスベテノ弦ノ長サハ相等シ。



9　圓內ノ一點ヲ通リ直徑及ビ之ト等角ヲナス二ツノ弦ヲ引クトキハ兩弦ハ長サ相等シ。



10　相等シキ二ツノ圓ノ中心ヲ結付クル直線ニ平行ナル直線ハ二圓ヨリ相等シキ弧ヲ截リ取ル。

11　二定點ノ各ヲ通過シテ平行ナル直線ヲ引キ,定圓周ニ交ラシメテ生ズル二弦ノ長サヲ相等シカラシメヨ。

(9)　三邊ガ不等ナル三角形ノ三頂點ガ一ツノ圓周上ニ在ルトキハ此ノ圓ト同心ナル圓ガ此ノ三角形ノ三邊(又ハ其ノ延長)ヨリ截リ取ル弦ハ不等ニシテソノ長サノ順ハ三邊ノ長サノ順ニ等シ。

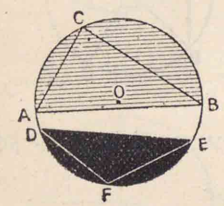
(10)　二ツノ等圓ノ中心ヲ結付クル線分ノ中點ヲ通ル直線ニテ截ラルル兩圓ノ弧ハ相等シ。

(11)　一ツノ圓ノ定マレル弦又ハソノ延長ニソノ圓ノ直徑ノ兩端ヨリ垂直ニ下シタル弦ハ長サ相等シ。

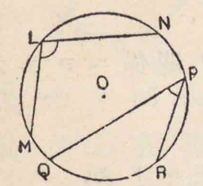
第二章　弓形角

39. 圓周角

定義　弧トソノ兩端ヲ結ベル弦トニテ圍メル圓ノ一部分ヲ**弓形**トイフ。而シテ其ノ弧ノ上ノ一點ト弦ノ兩端トヲ結ベル二線分ノナス角ヲ其ノ**弓形角**トイフ。

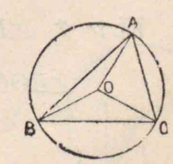


定義　圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ弦ノナス角ヲ其ノ角ノ二邊ノ間ニ在ル弧ノ**上ニ立ツ圓周角**ト云フ。

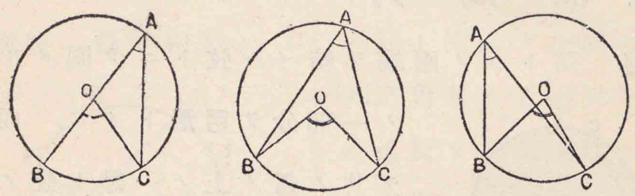


問一　上圖ニ於テ圓周角 QPR, MLN ガ立ツト同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ何々カ。

問二　右ノ圖ニ於テ圓周角ト之ニ對應スル中心角トヲイヘ。



定理 圓周角ハ之ト同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半ニ等シ。



假設 $\angle BAC$ ヲ圓周角, $\angle BOC$ ヲソノ圓周角ト同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角トスレバ

終結 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$

證明 $\angle BAC$ ト中心 O トノ位置ノ關係ニヨリテ上圖ノ如ク三ツノ場合ヲ生ズ。

(1) 中心ガ圓周角ノ一邊上ニ在ルトキ。

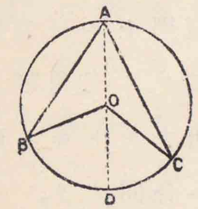
$\triangle AOC$ ハ二等邊三角形ナルヲ以テ

$$\angle A=\angle C$$

而シテ $\angle BOC$ ハ $\triangle AOC$ ノ外角ナルヲ以テ

$$\angle BOC=\angle A+\angle C$$
$$=2\angle A$$
$$\therefore\ \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$$

(2) 中心ガ $\angle BAC$ ノ内ニ在ルトキ。



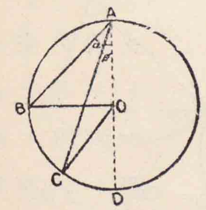
AO ヲ結ビソノ延長ガ圓周ト交ル點ヲ D トセヨ。

$\angle BOD$ ト $\angle BAD$ トハ如何。

$\angle COD$ ト $\angle CAD$ トハ如何。

故ニ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$

(3) 中心ガ $\angle BAC$ ノ外ニ在ルトキ。



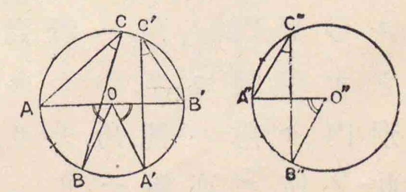
$$\angle BOD=2\angle\alpha,\ \angle COD=2\angle\beta$$
$$\angle BOC=2(\angle\alpha-\angle\beta)$$
$$\angle BAC=\angle\alpha-\angle\beta$$

故ニ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$

系一 同弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ。

從テ又同弓形内ノ角ハ相等シ。

系二 同圓又ハ等圓ニ於テ等弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ。



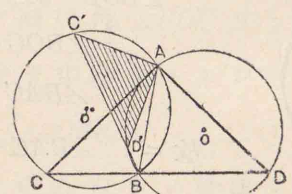
逆モ亦眞ナリ。

問　題

12　圓內ノ一點 E ヲ通ル二弦ヲ AB, CD トスレバ $\triangle AEC$ ト $\triangle DEB$ トハ互ニ等角ナリ。

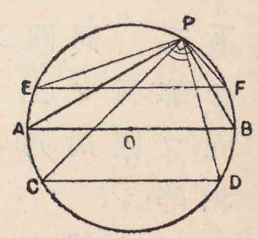
(12)　同圓周上ニ三頂點ヲ持ツ二ツノ三角形ガ互ニ等角ナルトキハ兩三角形ハ合同ナリ。

13　二等邊三角形 ACD ノ底又ハソノ延長上ノ點ヲ B トスレバ $\triangle ABC, \triangle ABD$, ($\triangle ABC', \triangle ABD'$) ノ各ノ三頂點ヲ通ル二ツノ圓ハ相等シ。

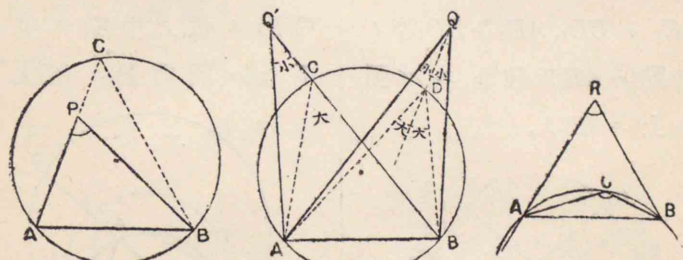


(13)　二ツノ等圓ガ A, B ニ於テ交ルトキ B ヲ通ル直線ト兩圓トノ交點ヲ $C, D, (C', D')$ トスレバ $\triangle ACD$($\triangle AC'D'$) ハ二等邊三角形ナリ。

系三　半圓內ノ角ハ直角ナリ。半圓ヨリ大ナル弓形內ノ角ハ銳角ニシテ半圓ヨリ小ナル弓形內ノ角ハ鈍角ナリ。此ノ逆モ亦眞ナリ。



系四　弓形ト同ジ側ニ在ル點ガソノ弦ニ張ル角ハソノ點ガ內ニ在ルカ外ニ在ルカニ從テソノ弓形角ヨリ大ナルカ小ナルカナリ。此ノ逆モ亦眞ナリ。

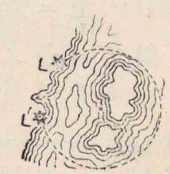


問三　點 Q' ニツイテトリタル證明ハ點 R ニツイテハ如何。又點 Q ニツイテトリタル證明ハ點 R ニツイテハ如何。

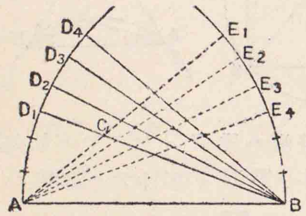
問　題

14　燈臺 L, L' ハ二ツノ暗礁ノタメニ設ケラレタルモノニシテ海圖上ニ圓ヲ書キテソノ危險區域ヲ示セリ。船ガコノ區域ニ入ラザルヤウニ航海スルニハ如何ニスベキカ。

(14)　系三ヲ用ヒテ與直線上(外)ノ與點ヲ通リ是レニ垂線ヲ引ケ。



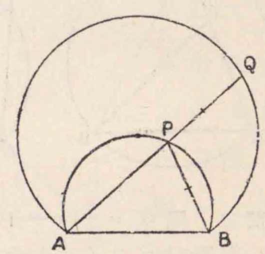
15 二定點A,Bヲ中心トシ線分ABヲ半徑トシテ書キタル弧ノ上ニ
$\widehat{D_1D_2}=\widehat{D_2D_3}=\cdots\cdots=\widehat{E_1E_2}=\widehat{E_2E_3}\cdots$ ノ如クトレバAE_1トBD_1, AE_2トBD_2等ノ交點ハABヲ弦トスル弧ノ上ニ在リ。



16 圓ノ二弦AB,CD又ハソノ延長ガ一點Eニ於テ交ルトキハ$\angle AEC$ハ$\widehat{AC},\widehat{BD}$ノ上ニ立ツ中心角ノ和又ハ差ノ半ニ等シ。

注意 $\triangle AED$ニツキテ研究セヨ。又ハDヨリBAニ平行線ヲ引キテ研究セヨ。

(15) 弦ABナル弓形ノ弧ノ上ニ任意ノ點PヲトリAPヲQマデ延長シテPQヲBPニ等シクトルトキハ點QハABヲ弦トシ弓形ノ弧ノ中點ヲ中心トセル圓周上ニ在リ。



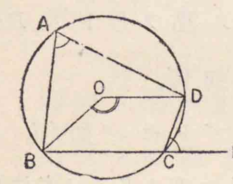
(16) 二圓ガA,B二點ニ於テ交ル。一ツノ圓周上ノ任意ノ點PヨリA,Bヲ通ル割線PA,PBヲ引キ他ノ圓トQ,Rニ於テ交ラシムレバ弦QRハPノ位置ニ拘ラズ一定ナリ。

注意 $\angle QAR$ニツキテ研究セヨ。點Pヲ一圓周上ニ動カシテ種々ノ場合ヲ考ヘヨ。

40. 內接四邊形

定義 多角形ノ總テノ頂點ガ同一圓周上ニ在ルトキハ其ノ多角形ハ**圓ニ內接ス**トイヒ,圓ハ**多角形ニ外接ス**トイフ。而シテ此ノ多角形ヲ**內接多角形**,圓ヲ**外接圓**トイフ。

定理 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。



相對スル二角ノ立ツト同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ考ヘテ證セヨ。

系一 圓ニ內接スル四邊形ノ外角ハソノ內對角(內角ノ對角)ニ等シ。

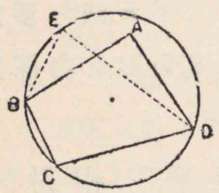
問一 圓ニ內接スル平行四邊形ハ何カ。

問題

17 對角線AC,BDヲ引キテ上ノ定理ヲ證セヨ。

(17) ABガ直徑ニシテA,P,Q,R,Bガ圓周上ニ此ノ順序ニアレバ$\angle APQ+\angle QRB=270°$

系二 相對スル角ガ互ニ補角ヲナス四邊形ハ圓ニ內接スルコトヲ得。



假設 四邊形 $ABCD$ ニ於テ $\angle A+\angle C=2R.\llcorner$ トスレバ

終結 四邊形 $ABCD$ ハ圓ニ內接スベシ。

證明 B,C,D 三點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。

$\overset{\frown}{BCD}$ ノ共軛弧上ノ任意ノ點ヲ E トシ, BE, DE ヲ結ベバ $\angle A$ ト $\angle E$ トハ如何。

點 A ガ圓 BCD 上ニ在ラズトセバ如何。

問二 四點 A,B,C,D ガ同一圓周上ニ在ルタメノ條件如何。

問 題

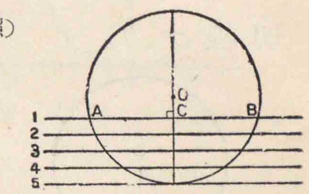
18 $\triangle ABC$ ノ各頂點ヨリ對邊ヘノ垂線ヲ AL, BM, CN トシ垂心ヲ S トスレバ A,B,C,L,M,N,S ノ中ノ四點ヲ通ル圓ハ何々ナルカ。

(18) 平行四邊形 $ABCD$ ノ二頂點 A,B ヲ通ル圓ガ AD, BC 又ハソノ延長ト夫々 E,F ニ於テ交ルトキハ E,F,C,D ハ同一圓周上ニ在リ。

第三章 切線及切圓

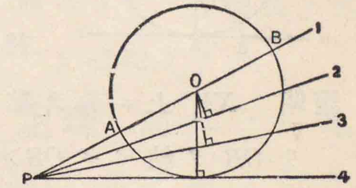
41. 切　　線

問一 圓ノ割線トハ何カ。(25頁參照)



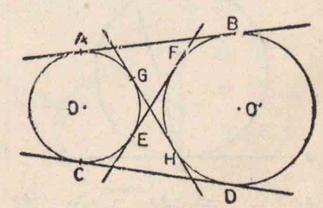
問二 半徑ニ垂直ナル割線ガ次第ニ中心ヲ遠ザカレバ點 A, B, C ハ如何ニナリ行クカ。

問三 圓外ノ一定點ヲ通ル割線ガ次第ニ中心ヲ遠ザカレバ交點 A, B ハ如何ニナリ行クカ。

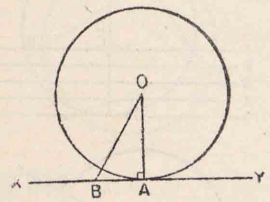


定義 圓周ト唯一點ニ於テ出會フ直線ヲソノ圓ノ**切線**ト云ヒ,ソノ點ヲ**切點**ト云フ。又圓ハ切點ニ於テ直線ニ**切ス**ト云フ。

定義 二圓ノ何レニモ切スル直線ヲソノ二圓ノ**共通切線**ト云ヒ,二圓ガソノ切線ノ同側ニアルトキハ**外共通切線**,反對ノ側ニ在ルトキハ**內共通切線**ト云フ。



定理 圓周上ノ點ニ於テソノ一點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ハソノ圓ノ切線ナリ。



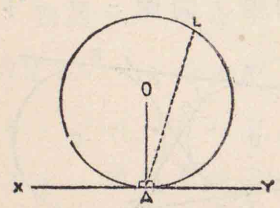
假設 XY ヲ半徑 OA ノ一端 A ニ於テ之ニ垂直ナル直線トス。

終結 XY ハ圓ノ切線ナリ。

證明 XY 上ニ於テ點 A 以外ノ任意ノ點 B ヲトリ OB ヲ結ベバ $OB>OA$ (何故カ)

故ニ XY 上ノ點 A 以外ノスベテノ點ハ圓外ニ在リ。即チ XY ハ圓 O ト唯一點ニ於テ出會フヲ以テ圓 O ノ切線ナリ。

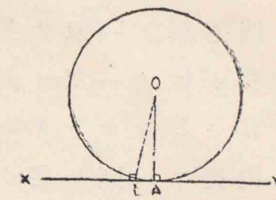
系一 切線ト切點ニ引ケル半徑トハ互ニ垂直ナリ。



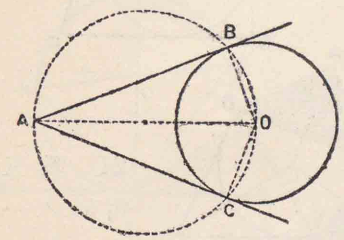
間接法ニテ此ノ證明ヲ試ミヨ。

系二 切點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル。

系三 中心ヨリ切線ニ下ス垂線ハ切點ヲ通ル。



作圖題 圓外ノ一點ヨリコノ圓ニ切線ヲ引ケ。



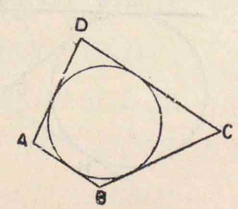
圖ニヨリテ作圖法ヲ述ベテ證明ヲナセ。

定理 圓外ノ一點ヨリ其ノ圓ニ引ケル切線ノ切點マデノ長サハ相等シ。

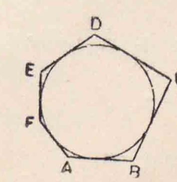
定義 多角形ノ總テノ邊ガ同一圓ニ切スルトキハソノ多角形ハ圓ニ**外接ス**ト云ヒ,圓ハ多角形ニ**內接ス**ト云フ。

問 題

19 圓ニ外接スル四邊形ノ相對スル邊ノ和ハ相等シ。



(19) 圓ニ外接スル六邊形ノ一ツ置ニトリタル邊ノ和ハ相等シ。

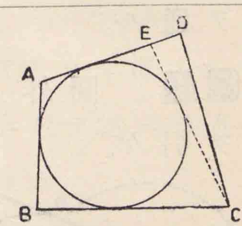


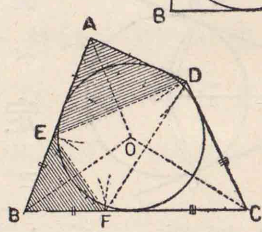
20 四邊形ノ一双ノ對邊ノ和ガ他ノ一双ノ對邊ノ和ニ等シキトキハ之ニ内接スル圓ヲ書クコトヲ得。

間接法 $ABCD$ ノ四邊ガ圓ニ切セズトセバ如何。

直接法 $\angle A, \angle B, \angle C$ ノ二等分線ハ DE, EF, FD ノ垂直二等分線トナリテ一點ニ會スル故ソノ交點ハ四邊ヨリ等距離ニ在リ。

(20) 與長ノ周ヲ有シ圓ニ外接シ得ル四邊形ヲ作レ。 （解ノ數ヲ考ヘヨ）





21 與三角形ノ三邊ニ切スル圓（**内接圓**）ヲ書ケ。
〔130 頁ヲ見ヨ〕

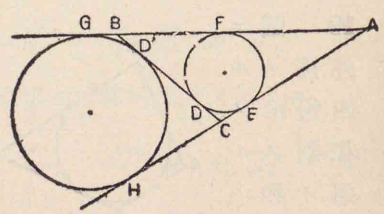
(21) 與三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓（**傍接圓**）ヲ書ケ。
〔130 頁ヲ見ヨ〕

22 圖ニ於テ $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ トシ $a+b+c=2s$ トスレバ

$AG=AH=s$

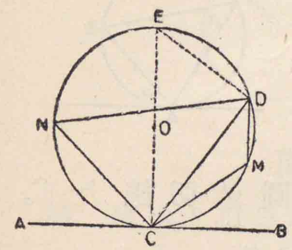
$AE=AF=s-a$

(22) 圖ニ於テ線分 BF, BD', DD' ヲ s,a,b,c ニテ表ハセ、



42. 切線ト弦トノナス角

定理 切線ト其ノ切點ヲ通ル弦トノナス角ハ此ノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。



假設 AB ヲ點 C ニ於テ切スル圓 O ノ切線, CD ヲ C ヨリ引ケル弦トスレバ

終結 $\angle BCD$ ハ $\overset{\frown}{CMD}$ ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シク, $\angle ACD$ ハ $\overset{\frown}{CND}$ ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

證明 $\overset{\frown}{CND}$ 上ニ任意ノ一點 N ヲトリ圓周角 CND ヲ作リ C ヲ通ル直徑 CE ヲ引キ ED ヲ結ブトキハ

$\angle BCD$ ト $\angle DCE$ トハ如何。

$\angle DCE$ ト $\angle CED$ トハ如何。

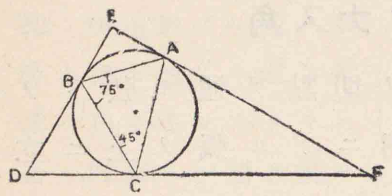
$\angle CED$ ト $\angle CND$ トハ如何。

故ニ $\angle BCD = CND$

次ニ $\angle BCD$ ト $\angle ACD$ トハ如何。

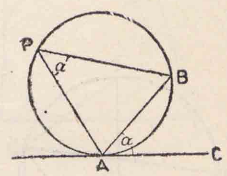
$\angle CND$ ト $\angle CMD$ トハ如何。

故ニ $\angle ACD = \angle CMD$



問一 圖ニ於テ三角形DEFノ三邊ハ圓トA, B, Cニ於テ切ス。圖ニ於ケル各角ノ大サハ夫々何程ナルカ。

系 圓ノ弦ト其ノ一端ヨリ引ケル直線トノナス角ガ其ノ角内ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ト等シケレバ其ノ直線ハ其ノ圓ノ切線ナリ。

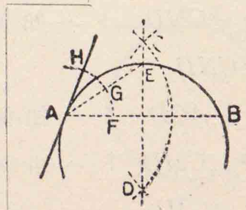


直接法,間接法ノ兩樣ニ之ヲ證セヨ。

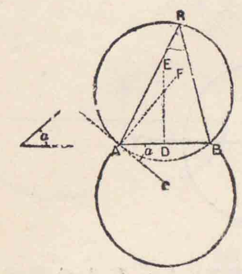
問題

23 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ノ交點ニ於テ此ノ交點ト四邊形ノ二頂點トヲ通ル圓ニ切スル直線ハ四邊形ノ一邊ニ平行ナリ。

(23) 圖ハ圓ノ中心ヲ求メズシテ弧上ノ點Aニ切線ヲ引ク一方法ナルコトヲ述べヨ。又上ノ系ニヨラバ如何。



作圖題 與線分AB上ニ與角αヲ含ム弓形ヲ作レ。



ABヲ與線分,$\angle\alpha$ヲ與角トシAB上ニ與角ヲ含ム弓形ヲ作ルコト

AC, DE, AFハ如何ナル直線カ。

ABノ下ニモ作レ。

問題

24 底邊ト頂角及頂點ヨリ底ニ引ケル中線トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

25 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ヲ直徑トスル圓ト斜邊トノ交點ニ於ケル切線ハ他ノ邊ヲ二等分ス。

26 與圓外ノ與點ヨリ割線ヲ引キテ與圓ヨリ與角ヲ含ム弓形ヲ截リ取レ。〔139頁定理, 143頁8〕

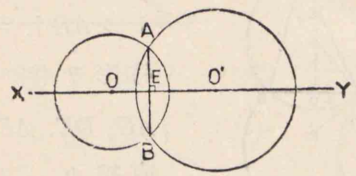
(24) 底邊,頂角及底ノ一端ヨリ對邊ニ下ス垂線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

(25) 線分ABヲC, Dニ於テ三等分シCD上ニ作リタル正三角形ヲCDPトスルトキハAPハB, C, Pヲ通ル圓ニ切ス。

(26) 與圓ニ内接スル三角形ヲ書キソノ各角ヲ45°, 60°, 75°トセヨ。〔148頁(12)〕

43. 二ツノ圓

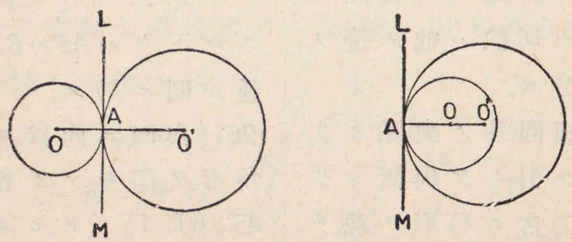
問一　二ツノ圓ハ幾ツノ點ニ於テ交ルカ。



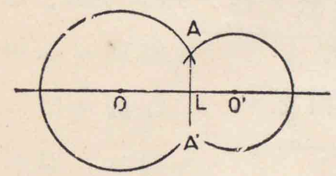
問二　二ツノ圓ノ中心 O, O' ガ直線 XY 上ニ在リテ遠ザカリ行カバ A, B ノ二點ハ如何ニナルカ。

又 O, O' ガ近ヅキ行カバ如何。

定義　二ツノ圓ガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキハソノ二ツノ圓ハ**相切ス**ト云ヒ,ソノ各ガ全ク他ノ外ニ在ルトキハ**外切**,一ツガ他ノ内ニ在ルトキハ**内切**ト云フ。而シテソノ共有點ヲ**切點**ト云フ。



定理　相切スル二圓ノ切點ハソノ中心線上ニ在リ。

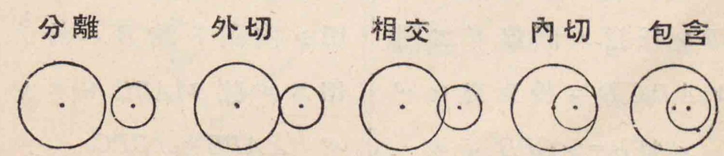


證明　何トナレバモシ二圓ノ切點ガ中心線 OO' 上ニ在ラズシテ點 A ノ如キ位置ニ在リトスレバ OO' ニ關スル點 A ノ對稱點 A' ハ又兩圓ノ出會フ點トナリ兩圓ハ相交ルコトトナル。故ニ二圓ノ切點ハ直線 OO' ノ外ニ在ラズ。即チ中心線上ニ在リ。

系一　相切スル二圓ハ切點ニ於テ同一ノ切線ヲ有ス。

證明　切點ヲ通リ中心線ニ垂直ナル直線ヲ引ケバ共ノ直線ハ兩圓ノ半徑ニ垂直ナレバナリ。

二圓ノ位置ニツキテハ次ノ五通ノ場合アリ。



系二　二圓ノ半徑ヲ夫々 $r, r'(r>r')$ トシ其ノ中心距離ヲ d トスレバ

(1)　$d>r+r'$ ナラバ各圓ハ全ク他ノ外ニアリ。

(2)　$d=r+r'$ ナラバ外切ス。

(3)　$r+r'>d>r-r'$ ナラバ相交ル。

(4)　$d=r-r'$ ナラバ内切ス。

(5)　$d<r-r'$ ナラバ一圓ガ全ク他ノ内ニアリ。

コレ等ノ逆モ亦眞ナリ。

問　　題

27　二圓ガ P ニ於テ切(内,外)スルトキ P ヲ通ル二直線ヲ引キ一圓ト A, D 他ノ圓ト B, E ニ於テ交ラシムレバ $AD \parallel BE$

注意　161頁系一,157頁定理

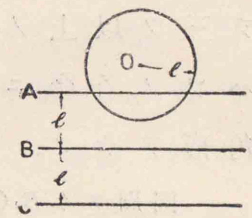
28　二圓ガ P ニ於テ内切シ任意ノ直線ガ二圓ト A, B, C, D ニ於テ交レバ

$\angle APB = \angle CPD$

(27)　相(内,外)切スル二圓アリ。ソノ切點 P ヲ通リテ直線ヲ引キ二圓ト夫々 A, B ニ於テ交ラシムレバ A, B ニ於ケル切線ハ互ニ平行ナリ。

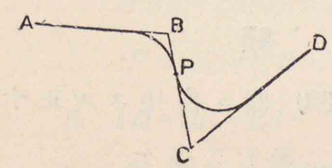
(28)　二圓ガ P ニ於テ内切シ内圓ト點 B ニ於テ切スル弦ヲ ABC トスレバ　$\angle APB = \angle BPC$

29　圓ニ於テ直線 C ニ切シ圓 O ノ中心ヲ通ル圓ノ中心ハ直線 B ニ切シ圓 O ニ外切スル圓ノ中心ナルコトヲ證セヨ。



30　三圓アリ。ソノ中心ヲ A, B, C トシ,ソノ半徑ヲ夫々5糎, 2糎, 7糎トス。$BC=5$糎, $CA=6$糎, $AB=7$糎トスレバ三圓ハ如何ナル位置ニ在ルカ。

31　圖ノ如ク點 P ニ於テ共ニ直線 BC ニ切シ,夫々直線 AB, CD ニ切スル二ツノ圓弧ヲ書ケ。



(29)　圖ニ於テ直線 A ニ切シ圓 O ノ中心ヲ通ル圓ノ中心ハ直線 B ニ切シ圓 O ト内切スル圓ノ中心ナルコトヲ證セヨ。

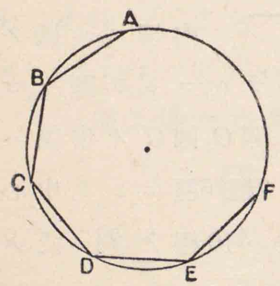
(30)　圓 O, 圓 O' ノ半徑ハ夫々7糎, 6糎ニシテ中心距離ハ10糎ナリ。此ノ兩圓ニ切スル圓ノ大サ及ビ中心距離ノ和又ハ差ヲ種々ノ場合ニツキテ研究セヨ。

(31)　三ツノ等圓ノスベテト内切スル圓ヲ書ケ。

注意　三圓ガ全ク離レタルトキト三圓ガ相交ルトキトヲ考ヘヨ。

44. 圓ノ内接外接正多角形

定理 圓周ヲ三ツ以上ノ相等シキ弧ニ分ツトキハソノ各弧ニ對スル弦ハ一ツノ正多角形ヲナス。



圓周ヲ A, B, C, D ……ニ於テ若干等分シタリトセバ内接多角形 $ABCD$ …ハ正多角形ナリ。

證明 等弧ニ對スル弦ハ相等シキヲ以テ

$AB = BC = CD = \cdots\cdots$

又 $\angle B, \angle C, \angle D$ ……等ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ナル故相等シ。

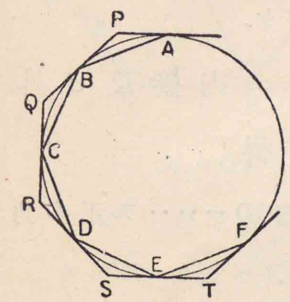
故ニ内接多角形 $ABCDE$ ……ハ正多角形ナリ。

問　　題

32 圓ニ内接スル正八邊形ヲ書ケ。

(32) 圓ニ内接スル正十二邊形ヲ書ケ。

定理 圓周ヲ三ツ以上ノ相等シキ弧ニ分ツトキハ各分點ニ引ケル切線ノナス外接多角形ハ正多角形ナリ。



假設 圓周ヲ A,B,C,D ……ニ於テ若干等分シ,各分點ニ引ケル切線ヲ夫々 PQ, QR, RS ……トスレバ

終結 外接多角形 $PQRS$ …ハ正多角形ナリ。

證明 $PA = PB, QB = QC, RC = RD$ ……(何故カ)

$\therefore$ $\triangle PBA$, $\triangle QCB$, $\triangle RDC$ ……ハ二等邊三角形ニシテソノ各底角ハ夫々 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}$ ……ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シキヲ以テ何レモ相等シク且底モ相等シ。

$\therefore$ $\triangle PBA \equiv \triangle QCB \equiv \triangle RDC \equiv \cdots\cdots$

$\therefore$ $\angle P = \angle Q = \angle R = \cdots\cdots$

且 $PQ = QR = RS = \cdots\cdots$

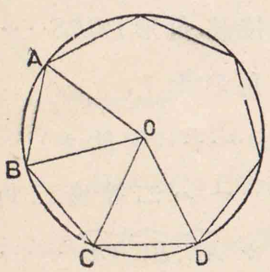
故ニ外接多角形 $PQRS$ …ハ正多角形ナリ。

問　　題

33 分度器ヲ用ヒテ與圓ニ內接スル正五邊形ヲ畫ケ。〔73頁29ヲ見ヨ〕

(33) 分度器ヲ用ヒテ與圓ニ外接スル正十邊形ヲ畫ケ。

定理 正多角形ニハ之ニ內接及ビ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得。



假設 $ABCD\cdots\cdots$ヲ正多角形トス。

終結 之ニ內接又ハ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得。

證明 $\angle A$, $\angle B$ ノ二等分線ノ交點ヲOトス。

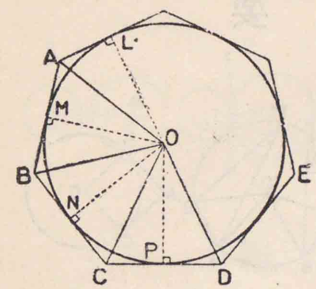
$\triangle OAB$ ハ如何ナル三角形カ。OC, OD ヲ結ベ。

$\triangle OAB \equiv \triangle OBC$　何故カ。

從テ　$\triangle OBC \equiv \triangle OCD$　何故カ。

故ニ　$OA = OB = OC = OD = \cdots\cdots\cdots$

即チ多角形ノ各頂點ハ同一圓周上ニ在リ。



前證明ニ於テ正多角形ノ外接圓ノ中心ヲOトシOヨリ各邊ニ垂線ヲ下シ之レヲOL, OM, ON, OP・トスレバ相等シキ弦ハ中心ヨリ等距離ニ在ル故

$$OL = OM = ON = OP \cdots\cdots$$

故ニOヲ中心トシ, OLヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ此ノ圓ハ正多角形ノ各邊ニ切ス。

問　　題

34 各邊相等シキ內接多角形ハ正多角形ナリ。

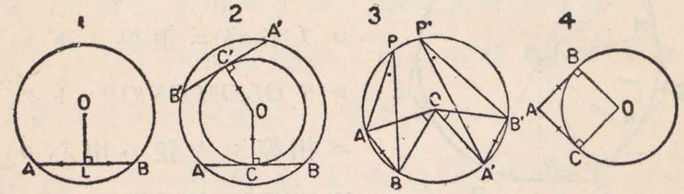
35 各邊相等シキ外接多角形ハ正多角形ナルカ。邊數ガ奇數ナルトキト偶數ナルトキトヲ區別シテ考ヘヨ。

(34) 各角相等シキ外接多角形ハ正多角形ナリ。

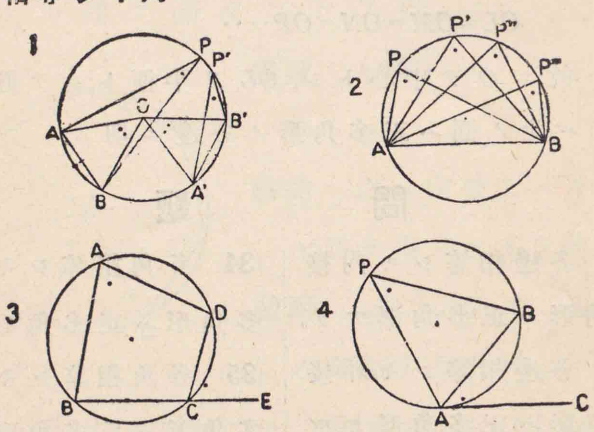
(35) 各角相等シキ內接多角形ハ正多角形ナルカ。邊數ガ奇數ナルトキト偶數ナルトキトヲ區別シテ考ヘヨ。

摘 要

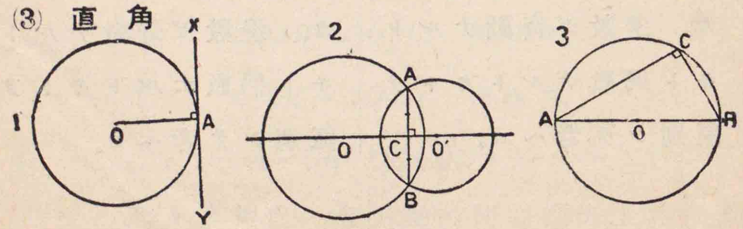
(1) 相等シキ線分及弧



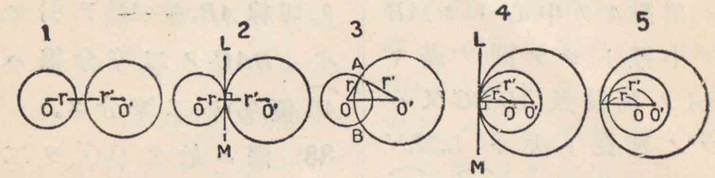
(2) 相等シキ角



(3) 直 角

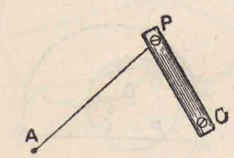


(4) 二圓ノ位置ノ關係



雜 題

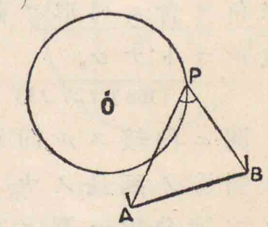
36



棒 OP ガ O ノ周リヲ廻轉スルモノトス。A ト P トニ「ゴム」糸ノ兩端ヲ固定スレバ P ガ廻轉スルトキ糸ノ最モ伸ビタルトキト最モ縮ミタルトキトノ位置如何。

注意 36頁(21)

(36)



「ゴム」糸ノ兩端ヲ A,B ニ固定シ一點 P ニテ糸ヲ張リテ定圓周上ヲ動カストキハ $\angle APB$ ノ最大トナル點 P ノ位置ハ $\triangle APB$ ノ外接圓ガ圓 O ニ外切スル切點ナルコトヲ證セヨ。

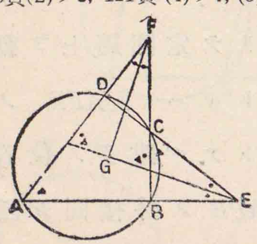
37　平行四邊形 $ABCD$ ノ頂點Aヲ中心トシ,ABヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ BAノ延長及AD,BC又ハソノ延長ト夫々 L,M,N ニ於テ交レバ $\widehat{LM}=\widehat{MN}$

38　直徑ナラザル弦ハ同心圓ノ各ヨリ等シキ弓形角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ルコトナシ。

〔168頁(2)ノ1〕

39　圓ニ內接スル四邊形ノ對邊ノ延長ノナス角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ。

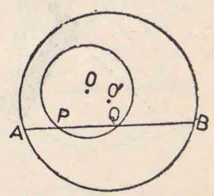
〔168頁(2)ノ3, 121頁(4)ノ1, (5)ノ1〕



(37)　一圓周上ノ點Aヨリ切線AB,弦ACヲ引ケバ$\angle BAC$ノ二等分線ハ$\widehat{AC}$(優,劣)ヲ二等分ス。

(38)　圓ニ於テO,O'ヲ二圓ノ中心トス。弦ノ分APトBQトノ相等シキ割線ノ位置如何。

〔168頁(1)ノ1〕

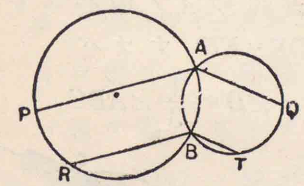


(39)　圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナル時ハ其ノ交點ヨリ一邊ニ下セル垂線ノ延長ハ其ノ對邊ヲ二等分ス。

(Brahmagupta（ブラーマグプタ）ノ定理)

Brahmagupta(598—660年頃) ハ印度ノ數學者ナリ。天文學ニ關スル大部ノ書ヲ著シソノ中ニテ算術,代數,幾何等ニツイテ論ゼリ。

40　二點A,Bニ於テ相交ル二圓アリ。A,Bヲ通ル一ツノ圓ノ平行ナル二弦ヲAP,BRトシ,他ノ圓ノ平行ナル二弦ヲAQ,BTトスレバ弦$PR=QT$



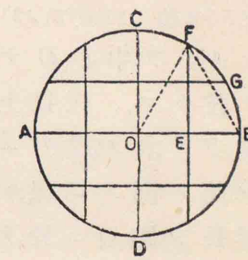
41　二角トソノ外接圓ノ半徑トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。〔159頁.(26)〕

42　$\triangle ABC$ノ垂心ヲS,頂點Cヨリ引ケル$\triangle ABC$ノ外接圓ノ直徑ヲ CD トスレバ　$AS=BD$

〔168頁(3)ノ3, 121頁(7)ノ1〕

ヨリ四邊形 $ADBS$ ヲ考ヘヨ。

(40)　AOB,CODヲ一ツノ圓ノ互ニ直角ニ交ル直徑トス。半徑OA,OB,OC,ODノ中點ヲ通リ此ノ二直徑ノ各ニ平行ナル弦ハ全圓周ヲ12等分ス。



注意　$\triangle OBF$ハ如何ナル三角形カ。$\angle COF$ノ大サ如何。

(41)　二角トソノ內接圓ノ半徑トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

(42)　$\triangle ABC$ノ垂心ヲS, ASガ底BCトD,外接圓ノ周トEニ於テ交レバ

$$SD=DE$$

〔168頁(2)ノ2, 120頁ノ(2)ノ3〕

43 $\triangle ABC$ ノ外接圓周上ノ任意ノ點 P ヨリ三邊 AB, BC, CA 或ハソノ延長ニ下セル垂線ヲ PL, PM, PN トセバ N ハ同一直線上[*]ニ在リ。

〔BP, PC ヲ結ベ,168頁(2)ノ3〕

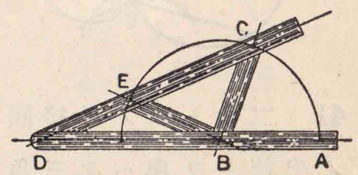
44 AB ヲ中心 O ナル圓ノ弦トス。弧 AB 上ニ一點 P ヲ求メ,點 P ニ於ケル此ノ圓ノ切線ガ AB ノ延長ト點 Q ニ於テ交リ $BP=BQ$ ナラバ OP ハ $\angle AOB$ ヲ三等分ス。

(**43**) $\triangle ABC$ ノ三邊 AB, BC, CA ニ形外ノ點 P ヨリ下セル垂線ヲ PL, PM, PN トシ L, M, N ガ一直線上ニ在レバ點 P ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓周上ニ在リ。

〔BP, PC ヲ結ベ,168頁(2)ノ2,3〕

(**44**) 次ノ圖ニ於テ點 B ガ圓 ECA ノ中心ニシテ $DE=EB$ ナラバ

$$\angle D=\frac{1}{3}\angle ABC$$



作圖不能問題

問題44ニ於ケル點 Q,(**44**)ニ於ケル割線 DEC ノ作圖ヲナスコトヲ得レバ任意ノ角ノ三等分ヲナスコトヲ得。然レドモ角ノ三等分ハ定規ト「コンパス」トノミヲ用ヒテ作圖シ能ハザル所謂作圖不能問題トシテ知ラレタル所ノモノナリ。尚圓ノ正方化問題トシテ知ラレタル與圓ト等積ノ正方形ヲ作圖スルコト,立方倍積問題トシテ知ラレタル與立方體ノ2倍ノ體積ヲ有スル立方體ノ一稜ヲ作圖スルコトモ角ノ三等分ト共ニ古來ヨリ有名ナル作圖不能問題ナリ。

* 此直線ヲ Simson 線トイフ。Robert Simson (ロバート シムソン) (1687—1768) ハ Glasgow 大學ノ教授ニシテ古代ノ幾何學ニ關スル重要ナル著書アリ。

第四篇

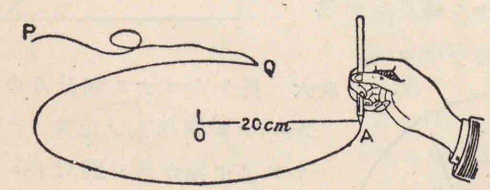
軌跡及作圖題

第一章 軌跡

45. 軌跡

問一 點ガ動キタル跡ハ何カ。

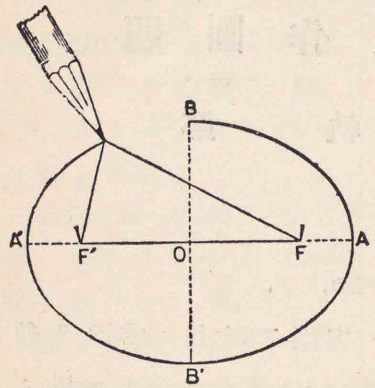
ヨク尖リタル鉛筆ノ尖端ヲ紙上ニ當テテ動カセバ線ヲ書クコトヲ得。コレニヨリテモ點ノ動キタル跡 (PQ) ハ線ナリト云フコトヲ得。

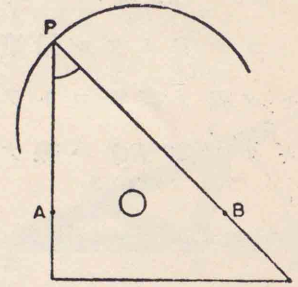


問二 圖ノ如ク一端ヲ「ピン」O ニ固定シタル糸ノ他端ニ鉛筆ノ先ヲ結付ケ OA ヲ $20cm$ トシ,糸ヲ張リツツ線ヲ書ケバ如何ナル線トナルカ。

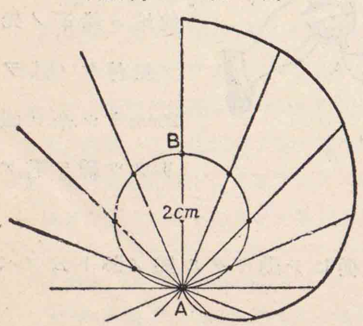
問三 圓ハ如何ナル條件ニ從ヒテ動キタル點ノ跡ト云フベキカ。

問四 $3cm$ 隔タリタル二點 F, F' ニ「ピン」ヲ挿シ,之レニ糸ノ兩端ヲ結付ケテ $5cm$ ノ長サトナル如クシ,糸ヲ鉛筆ノ尖端ニカケ,糸ヲ張リツツ動カセバ楕圓ヲ畫クコトヲ得。楕圓ハ如何ナル條件ニ從ヒテ動キタル點ノ跡ナルカ。



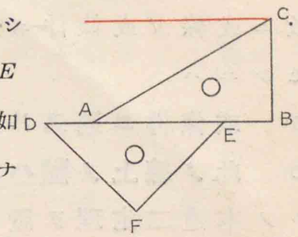


問五 二點 A, B ヲ定メ,圖ノ如ク直角三角形ノ二邊ガ常ニ A, B ヲ通ル如ク動カセバ頂點 P ハ如何ナル條件ニテ動キ,如何ナル線ヲ畫クカ。



問六 長サ $4cm$ ナル線分ガ直徑 $2cm$ ナル圓周上ノ定點 A ヲ通リソノ中點ガ同ジ圓周上ニアル樣ニ動クトキハソノ線分ノ兩端ハ如何ナル線ヲ畫クカ。此ノ如クシテ畫ケル曲線ヲ「カーディオイド」(心臟形曲線)ト云フ。

問七 直角三角形 DEF ヲ固定シ他ノ直角三角形ノ邊 AB ヲ邊 DE ニ沿ウテ辷ラストキハ點 C ハ如何ナル條件ニヨリテ動キ,如何ナル線ヲ畫クカ。

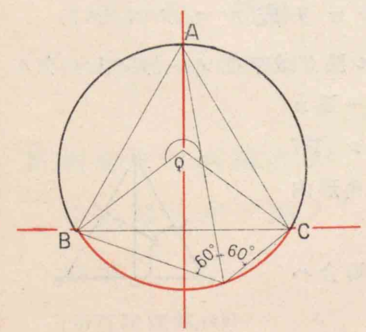


上ニ示シタル幾ツカノ**問**ノ如ク點ガ或條件ニ從ヒツツ動クトキハ或定マリタル形ノ線ヲ得。

定義 或幾何學的條件ニ從ツテ動キタル點ノ跡ヲソノ條件ニ適スル點ノ**軌跡**ト云フ。

或條件ニ適スル點ハ悉ク或線上ニ在ルモソノ線上ノ點ハ悉クソノ條件ニ適ストハ定ラズ。

又線上ノ點ガ悉ク條件ニ適ストモ條件ニ適スル點ガ悉ク此ノ線上ニ在リト云フ事ヲ得ズ。



例ヘバ $\triangle ABC$ ヲ正三角形トシ, $\angle APB = \angle APC = 60°$ ナル點 P ハ悉ク $\triangle ABC$ ノ外接圓周上ニ在ルモ, $\triangle ABC$ ノ外接圓周上ノ點ハ悉ク此ノ條件ヲ滿足スル點ナラズ。(弧 BPC 上ノミ)

又 $\angle BAC$ ノ二等分線上ノ點 Q ハ悉ク $\angle AQB = \angle AQC$ ノ點ナルモ $\angle AQB = \angle AQC$ ナル如キ點ハ悉ク $\angle BAC$ ノ二等分線上ニ在ラズ。(BC ノ延長上)

故ニ或線ガ或條件ニ適スル點ノ軌跡ナリト斷定センニハ

(a)　**或條件ニ適スル點ハ悉ク或線上ニ在リ。**

(b)　**此ノ線上ノ點ハ悉ク其條件ヲ滿足ス。**

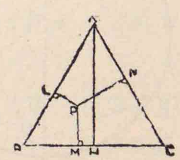
トノ本逆二定理ヲ證明セザルベカラズ。

例ヘバ「楕圓ハ二定點ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ナリ」ト斷定センニハ

1　F,F' ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ハ悉ク楕圓上ニ在リ。トイフ定理ト

1　ソノ楕圓上ノ點ハ悉ク F,F' ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ナリ。トイフ逆定理トヲ證明セザルベカラズ。然レドモコノ證明ハ高等數學ノ範圍ニ屬シ初等數學ニ於テハナシ能ハザル所ノモノナリ。初等數學ニ於テ取扱フ軌跡ハ直線,圓又ハ之レ等ノ一部分ヨリ成ルモノトス。

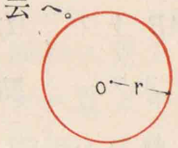
注意　時トシテハ條件ニ適スル點ガ或平面ノ一部ノ上ニ在ルコトアリ。例ヘバ正三角形内ノ一點ヨリ各邊ヘノ垂線ノ和ガ高サニ等シ〔127頁(76)〕キ點ノ軌跡トイヘバ正三角形内全部トナル。



本書ニ於テハ軌跡ガ平面トナル場合ハ論ゼザルモノトス。

次ニ軌跡中ノ重要ナルモノヲ擧ゲン。各ニツキテ本逆ノ二定理ヲ云ヘ。

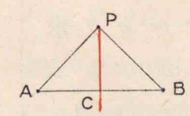
1　一定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡



圓

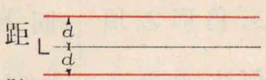
2　二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡

〔50頁問題4, 56頁問題7〕



二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線

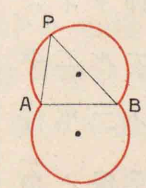
3　定直線ヨリ一定距離ニ在ル點ノ軌跡



定直線ノ平行二直線

4　一與線分ニ一定角ヲ張ル點ノ軌跡

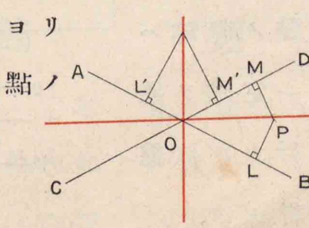
〔147頁系一,149頁系四〕



線分上ニ立ツ二ツノ圓弧

5　相交ル二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡

〔97頁問題44,(44)〕



二直線ノナス角ヲ二等分スル二直線

問 題.

1 定長線分 AB 上ノ一點 O ヲ固定シ A ヲ一廻轉スレバ B ノ軌跡ハ如何ナル線ナルカヲ求メヨ。

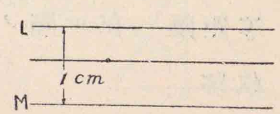
2 定線分 AB ノ上ニ立ツ二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ハ何ナルカヲ求メ,本逆二定理ヲイヘ。

3 距離 1cm ナル二平行線アリ。此ノ二平行線ニ下シタル垂線ノ和ガ 1cm ナル點ノ軌跡ハ平行線間ノ一定點ヲ通リコレニ平行ナル直線ナリト云ヒ得ルカ。

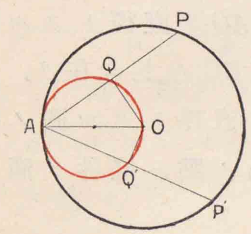
(1) 定圓ノ定長弦ノ中點ノ軌跡ハ如何ナル線トナルカヲ述べ本逆二定理ヲ云ヘ。〔143頁8,(8)〕

(2) 二定點 A,B ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ハ何ナルカヲ求メ本逆二定理ヲ云ヘ。〔141頁(7)〕

(3) 二ツノ平行線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。(175頁問七)



例題一 與圓周上ノ一點ヨリ引ケル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。



圓 O ノ周上ノ定點 A ヨリ引ケル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム。

證明 1 A ヨリ引ケル任意ノ弦ヲ AP トシ AP ノ中點 Q (條件ニ適スル點) ト O トヲ結ベバ $AP \perp OQ$ 即チ $\angle AQO = R.\llcorner$

故ニ Q ハ OA ヲ直徑トセル圓周上ニアリ。

2 次ニ AO ヲ直徑トスル圓周上ニ任意ノ點 Q' ヲトリ AQ' ヲ通ル弦 AP' ヲ引ケ。

OQ' ヲ結ベバ $\angle OQ'A$ ハ半圓内ノ角ナルヲ以テ直角ナリ。故ニ Q' ハ弦 AP' ノ中點ナリ。故ニ OA ヲ直徑トスル圓周上ノ點ハ與條件ヲ滿足ス。

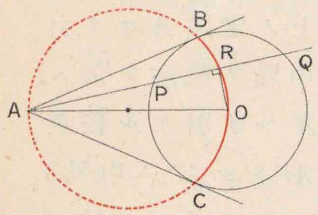
即チ A ヨリ引ケル圓 O ノ弦ノ中點ノ軌跡ハ OA ヲ直徑トスル圓周ナリ。

問 題

4 定圓ニ切スル定半徑ノ圓ノ中心ノ軌跡如何。**注意** 軌跡ハ二ツノ同心圓。

(4) 與圓内ノ與點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡如何。

例題二 定圓外ノ一定點ヨリ之レニ引ケル割線ニヨリテ生ズル弦ノ中點ノ軌跡如何。



1 RハAOヲ直徑トスル圓ノ弧BCノ上ニ在リ。

2 OAヲ直徑トスル圓ノ弧BC上ノ點ハ條件ヲ滿足ス。

定點Aヨリ定圓Oニ引ケル割線ニテ生ズル弦ノ中點ノ軌跡ハAOヲ直徑トシ,Aヨリ圓Oニ引ケル切線ノ切點間ノ**圓弧**ナリ。

例題二ノ如ク軌跡ガ直線ノ一部分又ハ圓ノ一部分ナルトキハ**軌跡ノ限界**ヲ明カニスベシ。

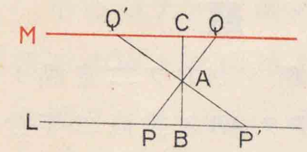
問 題

5 定圓ノ弦ニシテ定直線ニ平行ナルモノノ中點ノ軌跡ヲ求ム。

(5) 定線分ヲ一邊トセル菱形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム。

例題三 定點ヲ中點トシ長サノ變ズル線分ノ一端ガ定直線上ヲ動クトキ他ノ一端ノ軌跡如何。

定直線ヲL,定點ヲAトス。長サノ變ズル線分ノ一端ガL上ニ在リテAヲ中點トセル如ク動クトキ他ノ一端ノ軌跡ヲ求ム。



證明 1. $AB\perp L$, $AC=AB$トスレバCハ條件ニ適スル**特殊點**ナリ。

L上ノ任意ノ點PトAトヲ結ビ之ヲ延長シ$AQ=AP$トスレバQハ條件ニ適スル**一般點**ナリ, CQヲ結べ。

$\triangle ACQ\equiv\triangle ABP$ 何故カ

故ニ $\angle ACQ=\angle ABP=R.\llcorner$

即チQハCヲ通リLニ平行ナル無限直線M上ニ在リ。

2 次ニ直線M上ニ任意ノ點Q'ヲトリ$Q'A$ヲ結ビ之レヲ延長シ,直線LトP'ニ於テ交ラシメヨ。

$\triangle ACQ'\equiv\triangle ABP'$ 何故カ

故ニ $AP'=AQ'$

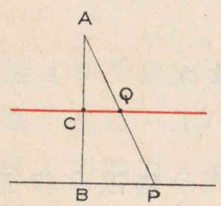
即チ直線M上ノ點ハ與條件ヲ滿足ス。

即チ直線Lニ一端ヲ有シAヲ中點トセル線分ノ他端ノ軌跡ハ直線Lニ平行ニシテAヨリノ距離ガAト直線Lトノ距離ニ等シキ直線ナリ。

問 題

6 定點Aヨリ定直線Lニ引ケル線分ノ中點ノ軌跡如何。

〔116頁 **66**,**(66)**ヲ見ヨ〕



7 二ツノ等圓ニ共ニ外(內)切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。

8 弦AB上ニ立ツ定弧ノ上ニ任意ノ點PヲトリAPヲ結ビ之レヲ延長シテ$PQ=PB$ナラシムル點Qノ軌跡如何。

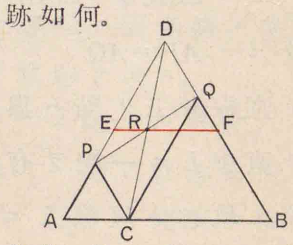
〔150頁**(15)**〕

注意 限界ヲ定メヨ。

(6) A,Bヲ二定點トス。PヲABノ垂直二等分線上ニトリAPヲ延長シPQヲAPニ等シカラシムルトキ點Qノ軌跡如何。

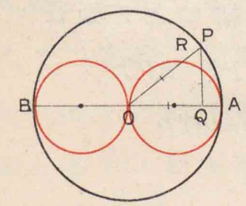
(7) 相交ル二直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。

(8) 定線分ABノ上ニ任意ノ點CヲトリAC,BC上ニABノ同側ニ正三角形ACP,BCQヲ作ルトキ線分PQノ中點Rノ軌跡如何。

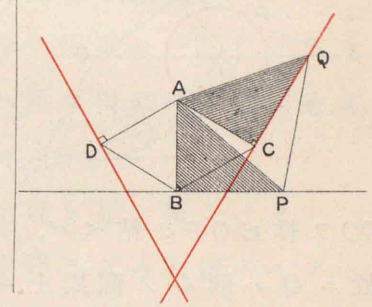


注意 RハAB外ノ一點ヨリABヘ引ケル線分ノ中點ナルコトヲ注意セヨ。

9 中心Oナル定圓ノ直徑ヲAOBトシ,圓周上ノ動點PヨリAOBニ垂線PQヲ下シ,OP上ニ$OR=OQ$ニトリタルトキ點Rノ軌跡如何。



(9) 定直線外ノ定點ヨリ定直線ニ到ル線分ノ上ニ立ツ正三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム。



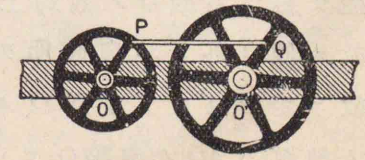
注意 問題**9**,**(9)**ノ如ク軌跡ガ二ツ以上ノ線ニテ成ルコトアリ。

10 O,O'ナル二ツノ車ノ軸ハ固定ス。

$PQ \parallel OO'$

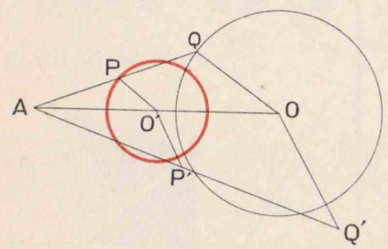
且$PQ=OO'$

ナリ。然ラバ車Oノ廻轉スルトキ點Qハ如何ナル線ヲ書クカ。



(10) 定線分AB上ニ立チ對角線APガ定長ナル平行四邊形$ABPQ$ノ頂點Qノ軌跡如何。

例題四 定點Aヨリ定圓Oノ圓周上ノ點ニ引ケル線分ノ中點ノ軌跡ハAOノ中點ヲ中心トシ定圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓ナリ。



證明 軌跡タルベキ圓O'ノ周上ニ任意ノ點PヲトリAPヲ結ビ之ヲ延長シテ$PQ=AP$ナラシメヨ。

QOヲ結ビ$O'P$ヲ結ベバ、 $OQ=2O'P$

故ニQハ圓Oノ圓周上ニ在リ。

故ニ圓O'ノ圓周上ノ點ハ悉ク與條件ヲ滿足ス。

次ニ圓O'ノ圓周上ニ在ラザル任意ノ點P'ヲトリ、AP'ヲ結ビ之ヲ延長シテP'ヲ中點ナラシムル樣ニ$P'Q'$ヲAP'ニ等シクセバ、

$$OQ'=2O'P'\neq OQ$$

從テ點Q'ハ圓Oノ圓周上ニアラズ。

故ニ圓O'外ニハ與條件ヲ滿足スル點ナシ。

故ニ定點Aヨリ定圓Oノ周ニ引ケル線分ノ中點ノ軌跡ハAOノ中點O'ヲ中心トシ圓Oノ半徑ノ半

ヲ半徑トセル圓ナリ。

軌跡ヲ證明スルニ此ノ例題ノ如キ方法ヲトル場合アリ。

即チ此ノ例題ニ於テハ

(b) **或線上ノ點ハ悉ク與條件ヲ滿足ス。**

(c) 此ノ線外ニハ與條件ヲ滿足スル點ナシ。即チ**此線上ニ在ラザル點ハ悉ク與條件ヲ滿足セズ。**

トイフ二定理ヲ證明シタルナリ。

(b)ト(c)トノ如キ形ノ定理ヲ互ニ**裏**トイフ。

(a)ト(c)トノ如キ形ノ定理ヲ互ニ**對偶**トイフ。

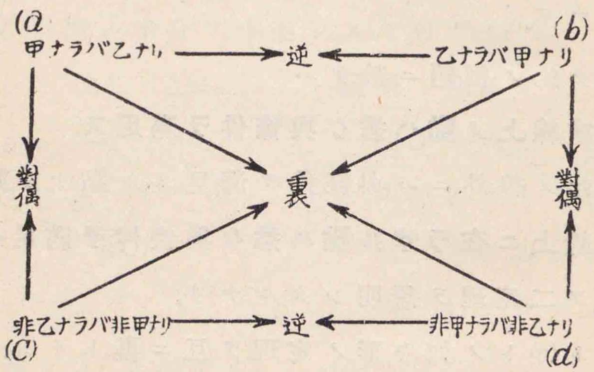
或定理ガ眞ナレバソノ對偶ハ必ズ眞ナルモ裏ハ必ズシモ眞ナラズ。

例題四ニ倣ヒテ次ノ軌跡ヲ證明セヨ。

11 定圓ノ直徑ヲABトス。半圓上ヲ半徑ニ等シキ長サノ弦PQガ動クトキAP, BQノ延長ノ交點Rノ軌跡ハABノ上ニ立チ$60°$ノ角ヲ含ム圓周ノ一部分ナリ。

(11) 直角ニ交ル二直線ニ兩端ヲ有シテ動ク定長線分ノ中點ノ軌跡ハ二直線ノ交點ヲ中心トシ定長線分ノ半ヲ半徑トスル圓周ナリ。

今定理ノ假設ヲ甲,終結ヲ乙ナル文字ヲ以テ表シテ定理ノ關係ヲ示セバ次ノ如シ。



或線ガ或條件ニ適スル點ノ軌跡タルコトヲ證明センニハ一定理ト其ノ逆又ハ裏ヲトリテ證明セザルベカラズ。

問　題

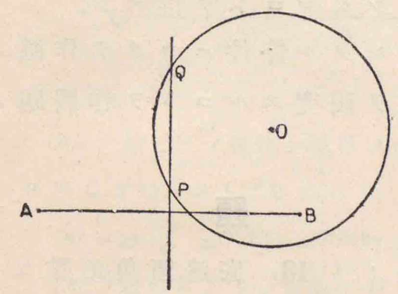
12 三角形ノ底邊ノ位置及ビ大サト頂角トガ與ヘラレタルトキソノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ。
〔128頁79. 177頁4〕

(12) 定長線分PQガ定角CABノ二邊ニ兩端ヲ置キテ動クトキ$\triangle APQ$ノ外接圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。〔95頁42〕

第二章 作 圖 題

46. 作圖題

例題一 二定點A, Bヨリ等距離ニ在リテ他ノ一定點Oヨリハ$1.5cm$ノ距離ニ在ル點ヲ求ム。



考ヘ方 Pヲ求ムル點トスレバ$AP=BP$ナル故PハA, Bヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡即チABノ垂直二等分線上ニ在リ。又$OP=1.5cm$ナル故PハOヨリ$1.5cm$ナル距離ニ在ル點ノ軌跡即チOヲ中心トシ$1.5cm$ヲ半徑トセル圓周上ニ在リ。

作圖 ABヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ヲ作レ。又點Oヲ中心トシテ半徑1.5糎ノ圓ヲ書ケ。此ノ直線ト圓トノ交點P, Qハ求ムル點ナリ。

證明 PハABノ垂直二等分線上ニ在ル故$AP=BP$
又Pハ圓Oノ圓周上ニ在ル故　$OP=1.5cm$
即チ點Pハ與條件ヲ滿足ス。

同様ニ點 Q モ亦與條件ヲ滿足ス。

吟味　垂直二等分線ガ圓ト交ハレバ解 2, 切スレバ解 1, 出會ハザレバ解ナシ。

例題一ノ如ク軌跡ヲ使用スルコトニヨリテ作圖題ノ解ヲ容易ナラシムルコトヲ得ベシ。

作圖題ニ於テ與ヘラレタル條件ニヨリテ作圖ノ能不能及ビ解ノ數等ヲ研究スルコトヲ作圖題ノ吟味トイフ。

問　題

13　相交ル二與直線ノ各ヨリ等距離ニ在リテ他ノ一與直線ヨリ 2 糎ノ距離ニ在ル點ヲ求ム。

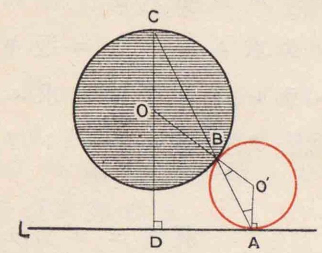
14　定圓 O ニ外(內)切シソノ圓外ノ一定點 P ヲ通リ且與半徑ノ圓ヲ書ケ。　**注意**　179頁問題

(13)　底邊, 頂角, 頂點ヨリ共底ヘノ垂線ノ長サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

(14)　同心ナル二定圓ニ切シ, 此ノ同心圓ノ間ニ在ル一定點ヲ通ル圓ヲ書ケ。

例題二　定直線 L ト定圓 O トアリ。定點 A ニ於テ L ニ切シ圓 O ニ切スル圓ヲ書クコトヲ研究セヨ。

先ヅ圓 O' ノ如ク外切スル場合ニツキテ考究スベシ。



1　中心 O' ガ求メラルレバ作圖スルコトヲ得。$O'A$ ヲ結ベバ $O'A \perp L$
$O'O$ ヲ結ベバ切點 B ヲ通ル。

2　點 B ヲ知ルコトヲ要ス。

AB ヲ結ビソノ延長ト圓 O ノ交點ヲ C トス。

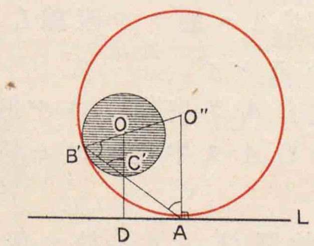
3 點 C ヲ知ルコトヲ要ス。

OC ヲ結ベ。$\angle O'AB = \angle O'BA = \angle OBC = \angle OCB$ 故ニ $OC \parallel O'A$

CO ノ延長ト L トノ交點ヲ D トスレバ　$OD \perp L$

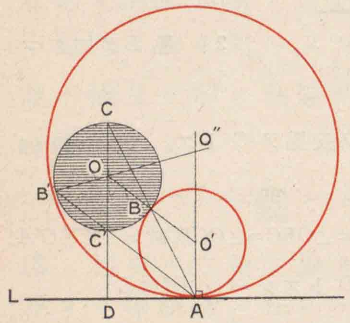
4 點 D ヲ知ルコトヲ要ス。

點 D ハ O ヨリ L ニ垂線ヲ下スコトニヨリテ知ラレ, 順次 D, C, B, O' ト求ムルコトヲ得テ圓 O' ヲ作圖スルコトヲ得。



內切スル圓 O' ニツキテモ點 O'', B', C', D ノ關係ヲ研究スルコトヲ得テ圓 O'' ノ作圖法ヲ知ルコトヲ得。

例題二ニ於テナシタルガ如ク先ヅ作圖ノ解ヲ得タルモノト假定シテ求ムルモノニ近キ圖ヲ書キ之ヲ研究シテ與ヘラレタル條件ト求ムル部分トノ關係ヲ知リ作圖法ヲ發見スルコトヲ**作圖ノ解析**ト云フ。



解析ニヨリテ作圖法ヲ發見シ得タル後ハ次ノ如ク解答ヲナスモノトス。

作圖 點 A ニ於テ直線 L ニ垂線ヲ立テヨ。

O ヨリ L ニ垂線 OD ヲ立テ DO ノ延長及ビ DO ト圓 O トノ交點ヲ夫夫 C, C' トス。CA ヲ結ビ之ト圓 O トノ交點ヲ B, AC' ヲ結ビ此ノ延長ト圓 O トノ交點ヲ B' トス。

$OB, B'O$ ノ延長ガ A ニ於ケル直線 L ノ垂線トノ交點ヲ O', O'' トスレバ

O' ヲ中心トシ $O'A$ ヲ半徑トスル圓‥‥外切

O'' ヲ中心トシ $O''A$ ヲ半徑トスル圓‥‥內切

ハ求ムル圓ナリ。

證明 $O'A \perp L$ ナル故圓 O' ハ A ニ於テ與直線 L ニ切ス。 $CD \perp L$ 故ニ $CD \parallel O'A$

$\angle OCB = \angle O'AB$

然ルニ $\angle OCB = \angle OBC = \angle O'BA$

故ニ $\angle O'AB = \angle O'BA$

故ニ $O'A = O'B$

OO' ガ兩圓ノ半徑ノ和ニ等シキヲ以テ圓 O' ハ圓 O ニ外切ス。

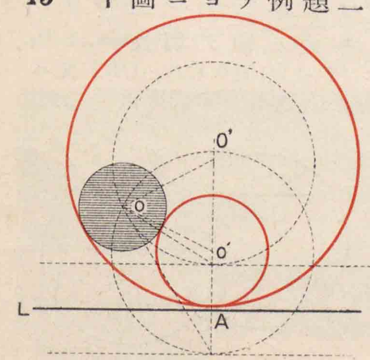
又同樣ニシテ OO'' ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキ故圓 O'' ト圓 O トハ互ニ內切ス。

吟味

(1) 直線 L ガ圓 O ト出會ハザルトキ	內切 1, 外切 1
(2) 直線 L ガ圓 O ニ交ルトキ	
1. 與點 A ガ圓外ニアルトキ	外切 2
2. 與點 A ガ圓內ニアルトキ	內切 2
3. 與點 A ガ交點ナルトキ	解ナシ
(3) 直線 L ガ圓 O ニ切スルトキ	
1. 與點 A ガ切點ナラザルトキ	外切 1
2. 與點 A ガ切點ト合スルトキ	內切外切解無數

各自上ノ各場合ノ作圖ヲナセ。

15 下圖ニヨリ例題二ノ解析及ビ作圖ヲナセ。



(15) 與圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切シ他ノ與直線ニ切スル圓ヲ書ケ。

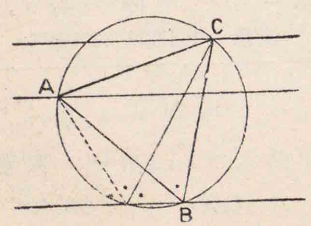
注意 163頁29, (29)參照

16 二角ト周ノ長サトヲ知リテ三角形ヲ作レ。
〔66頁**20**, 121頁(**4**)ノ**1**〕

17 四邊トソノ順序トヲ知リテ梯形ヲ作ル。
〔121頁(**7**)ノ**1**, 66頁**19**〕

18 定圓外ノ定點 A ヨリ此ノ圓ニ割線 ABC ヲ引キ圓ト B,C ニ於テ交ラシメ $AB=BC$ ナラシメヨ。(一) 184頁例題四
(二) Cヲ通ル直徑ノ他端ヲ A, B ト結ビテ見ヨ。

19 三頂點ガ夫々三ツノ與平行線上ニ在ル如キ正三角形ヲ作レ。

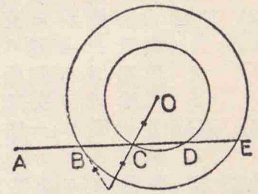


(**16**) 一對角線ト一邊トノ和ヲ知リテ正方形ヲ作レ。〔66頁**20**, 121頁(**4**)ノ**1**〕

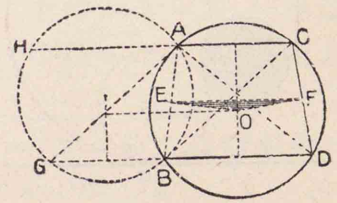
(**17**) 二平行邊ノ和,二對角線,他ノ一邊ヲ知リテ梯形ヲ作レ。〔113頁(**64**)〕

(**18**) 二ツノ同心圓ヲ一定點ヲ通ル一直線ニテ截リ外圓ノ弦ヲ內圓ノ弦ノ三倍ナラシメヨ。

注意 (一)圖ヲ見ヨ。(二)又本頁問題**18**ニヨレ。

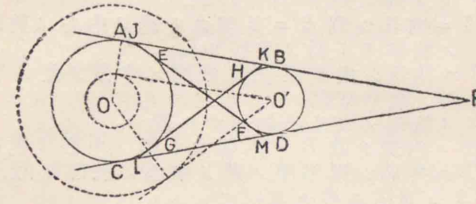


(**19**) 定圓周上ノ二定點ヨリ平行ナル二弦ヲ引キソノ和ヲ與長ニセヨ。
〔(一) 141頁**6**, (二) $\triangle OEF$ 又ハ (三) $\triangle AGD$ ヲ研究セヨ。〕



20 二圓ノ外共通切線ヲ引ケ。

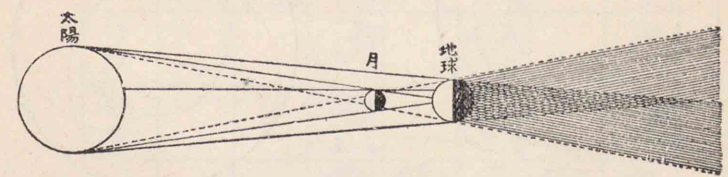
(**20**) 二圓ノ內共通切線ヲ引ケ。

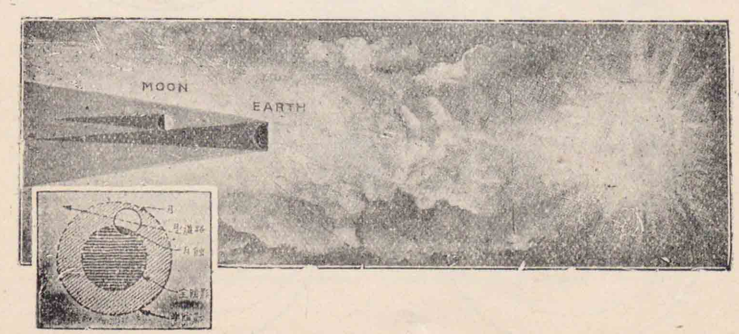


21 AB, CD ヲ外共通切線 EF, GH ヲ內共通切線トシ EF, GH ノ延長ガ AB, DC ト交ル點ヲ J,M,L,K トセバ $JM=LK=AB=CD$

(**21**) 圖ニ於テ $JK=LM=EF=GH$

次ノ圖ハ日蝕月蝕ノ理ヲ說明スルモノニシテ共通切線ヲ用ヒテ畫ケルモノナリ。





22　同心ナル二定圓ト第三ノ定圓トニ切スル圓ヲ畫ケ。

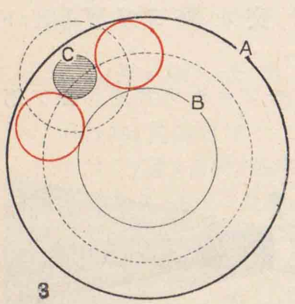
研　究　(一) 次ノ圖ニ於テ

1　圓 A ニ內切シ圓 B ニ外切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。
又ソノ軌跡タル圓ノ半徑如何。
圓 C ニ外切シ與半徑 (A,B 兩圓ノ半徑ノ差ノ半分) ノ圓ノ中心ノ軌跡如何。
二ツノ軌跡ノ交リハ如何ナル點カ。

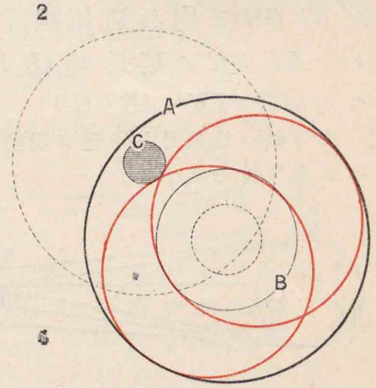
2　圓 A ニ內切シ圓 B ヲ內切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。
圓 C ニ外切シ與半徑ノ圓ノ中心ノ軌跡如何。

3,4 モ 1,2 ト同様ニ考ヘヨ。

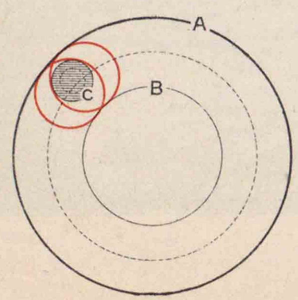
1



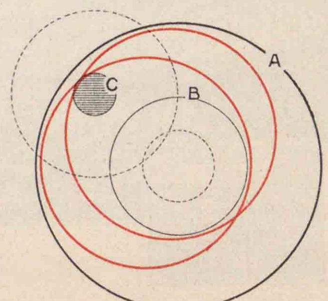
2



3



4



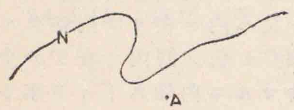
研　究　(二)

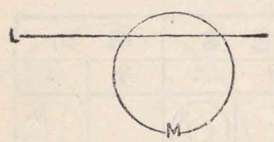
問題　22ハ甚ダ複雜ニシテ之レガ吟味ヲナスコト極メテ困難ナルモ秩序正シク整理シテ場合ヲ落チナク究メルコトハ有益ナル研究ナリト思ヒソノ一方法ヲ與ヘテ生徒諸子ノ參考ニ供セン。

(二)　A, B, C ノ三圓ノ位置ニツイテ次ノ如キ21ノ場合アリ。而シテ各場合ニ於ケル解ノ數ハソノ欄內ノ數ノ如クニシテ總計62アリ。便宜上圓 C ヲ主トシ內切,包含ヲ二種ニ分チ他ノ圓ガ圓 C ノ內ニ含マレ,又ハ內ニ在リテ內切スルトキハ**ヲ含ム,ヲ內切ス**トイヒ,圓 C ガ他ノ圓內ニ在リテ全ク含マレ又ハ內切スル時ハ**ニ含マル,ニ內切ス**トイフ事トス。

C ╲ A / B		分離	外切	相交	包含 ヲ	包含 ニ	內切 ヲ	內切 ニ
分離		0	2	4		8		6
外切				4		6		4
相交				4		4		4
包含	ヲ			4	0	0	2	2
包含	ニ					0		
內切	ヲ			4		2		2
內切	ニ					2		

23 與直線 L ト與曲線 N トニ兩端ヲ置キ定點 A ヲ中點トセル線分ヲ書ケ。〔181 頁〕





24 定弧 ACB 上ニ點 C ヲ求メ弦 AC ト BC トノ差ヲ與長ナラシメヨ。

注意 CA 上ニ CB ニ等シク CP ヲトリテ $\angle APB$ ノ大サヲ考ヘヨ。〔182 頁 **8**〕

25 定圓 O ヲ既知角 α ノ下ニ見得ル點ヲ他ノ定圓周上ニ求メヨ。

(22) 同心ナル二定圓ト與直線トニ切スル圓ヲ書ケ。

注意 同心ナル二定圓ト與直線トノ位置ニヨリ五ツノ場合アリテ解ノ數ニハ 4, 2, 0 ノ三通リヲ生ズ。

(23) 問題 **23** ニ於テ與直線 L ノ代リニ定圓 M トスレバ如何。

(24) 定弧 ACB 上ニ點 C ヲ求メ弦 AC ト BC トノ和ヲ與長ナラシメヨ。

〔150 頁 (**15**), 182 頁 **8**〕

(25) 定點 A ヲ通リテ與半徑ノ圓ヲ書キ他ノ定點 B ヨリ既知角 α ニ見得ル如クセヨ。

第 五 篇

面 積

第一章 三角形及平行四邊形ノ面積

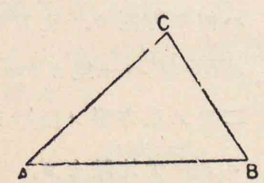
47. 平行四邊形ノ面積

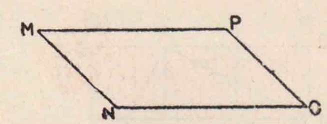
定義 **平面形ノ面積**トハソノ境界内ノ平面ノ廣サノコトナリ。（29頁ヲ見ヨ）

二ツノ平面形ノ面積ガ相等シキトキハ此ノ二ツノ平面形ハ等積ナリトイフ。

問一 今マデニ學ビタル等積ナル平面形ニハ何々ガアルカ。（44頁ヲ見ヨ）

問二 等積ナル二ツノ平面形ハ合同ナルカ。

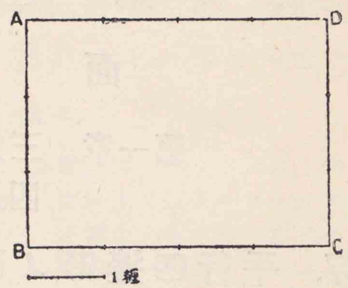




$\triangle ABC$ ト $\square MNOP$ トノ等積ナルコトヲ

$\triangle ABC = \square MNOP$ ト書ク。

問三　矩形 $ABCD$ ノ面積ハ何平方糎ナルカ。

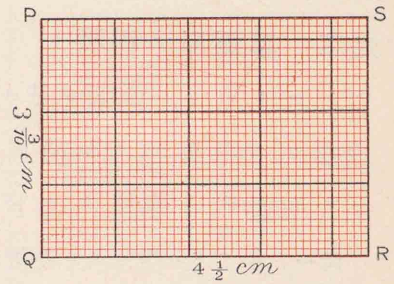


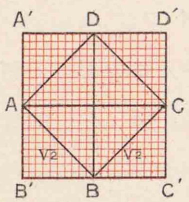
問四　矩形 $PQRS$ ノ面積ハ何平方糎ナルカ。

長サノ單位ニ何ヲトラバ兩邊ガ整數トナルカ。

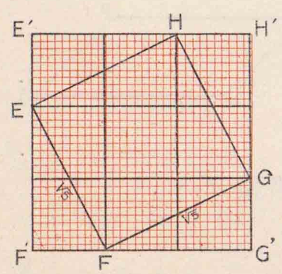
縱横何糎ヅツナルカ。

$\frac{1}{100}$平方糎卽チ一平方粍ノ數ハ如何。



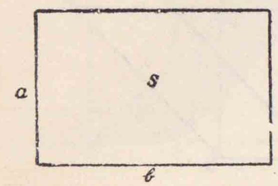


問五　$ABCD$ ハ一邊ガ $\sqrt{2}$ cm ナル正方形ナリ。面積ハ何平方糎カ。正方形 $A'B'C'D'$ ハ一邊ガ 2cm ナリ。二ツノ正方形ノ面積ヲ圖ニヨツテ比較セヨ。



問六　正方形 $EFGH$ ガ 5 平方糎ナルコトヲ圖ト計算トノ兩方ヨリ出セ。

定理　矩形ノ面積ヲ表ハス數ハソノ二隣邊ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シ。



矩形ノ縱横ヲ夫々 a 糎, b 糎, ソノ面積ヲ s 平方糎トスレバ a, b ノ値ガ整數, 分數ノ何レニテモ

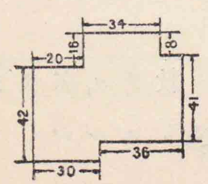
$$s=ab \quad ナリ。$$

上ノ定理ヲ略シテ次ノ如ク云フ。

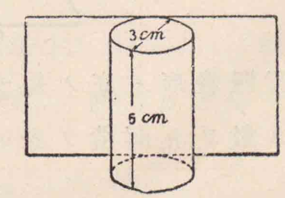
矩形ノ面積ハ其ノ二隣邊ノ積ニ等シ。

問　題

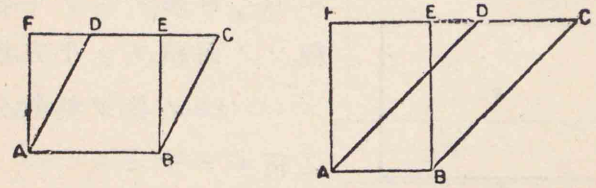
1　次ノ圖ニ於テ各邊ハスベテ直角ヲナス。又數ハソノ長サヲ米ニテ測リタル數ヲ表ハスモノトシテ此ノ面積ヲ計算セヨ。



(1)　直圓壔ノ側面ヲ圖ノ如ク截リ開ケバ矩形トナル。圖ノ直圓壔ノ側面積ハ何程ナルカ。



定理　平行四邊形ハ之ト等底等高ノ矩形ト等積ナリ。

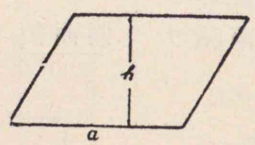


證明　$\triangle ADF$ ト $\triangle BCE$ トハ如何。

四邊形 $ABCF$ ト平行四邊形 $ABCD$, 並ニ矩形 $ABEF$ トヲ比較セヨ。

$$\square ABCD = \square ABEF$$

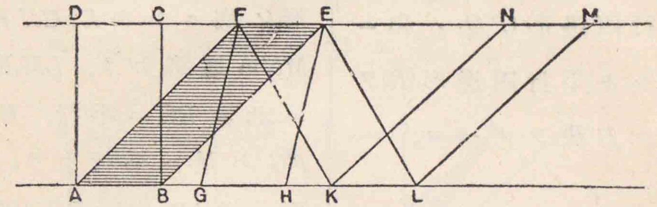
系一　平行四邊形ノ面積ハ底邊ト高サトノ積ニ等シ。



平行四邊形ノ底ノ長サヲ表ハス數ヲ a, 高サヲ表ハス數ヲ h, 面積ヲ表ハス數ヲ S トスレバ

$$S = ah$$

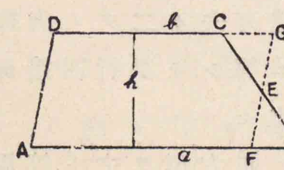
系二　等底等高ナル二ツノ平行四邊形ハ等積ナリ。



問　上圖ニ於テ四邊形 $ABCD$ ハ矩形, 四邊形 $ABEF$, $EFGH$, $EFKL$, $KLMN$ ハスベテ平行四邊形ナリ。面積ノ關係如何。

系三　等底(高)等積ナル二ツノ平行四邊形ハ等高(底)ナリ。

系四　梯形ハ之ト等高ニシテソノ兩底ノ和ノ半ニ等シキ底ヲ有スル平行四邊形ト等積ナリ。



E ヲ CB ノ中點トシ $GF \parallel DA$ トスレバ

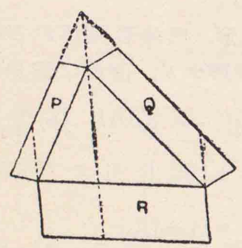
$\triangle BEF$ ト $\triangle CEG$ トハ如何。

$\square AFGD$ ノ底邊及ビ高サ如何。

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

問題

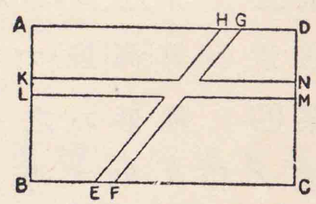
2 圖ニヨリテ二ツノ平行四邊形(P,Q)ノ和ニ等シキ平行四邊形(R)ヲ作ル方法ヲノベヨ。



3 高サ15糎,底邊ガ22糎ナル矩形ヲ下底ガ上底ノ三倍ニシテ之ト等高ナル梯形ニ化セ。

4 與平行四邊形ヲ之ト等積ニシテ且一邊ガ與長ナル矩形ニ化セ。

(2) 圖ニ於テ$ABCD$ハ矩形ノ底ニシテ$EFGH.KLMN$ハ通路ナリ。LM,KNハ共ニBCニ平行, EH,FGハ互ニ平行ナリ。而シテ$AB=20m, BC=35m$ $KL=EF=2m$ナリ。通路以外ノ面積何程ナルカ。

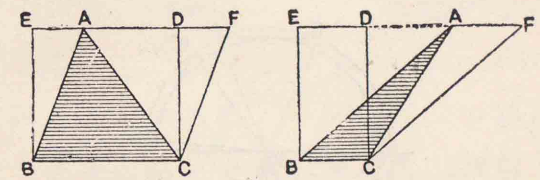


(3) 與平行四邊形ヲ二隣邊ガ夫々二ツノ與線分ニ等シキ平行四邊形ニ化セ。

(4) 正方形ヲ之ト等周ノ矩形ニ改ムレバ面積ハ減ズルコトヲ證セヨ。

48. 三角形ノ面積

定理 三角形ノ面積ハ之ト等底等高ナル矩形ノ面積ノ半ニ等シ。



證明 圖ノ如ク$\triangle ABC$ト等底等高ナル矩形$BCDE$及ビAB,BCヲ二邊トセル平行四邊形$ABCF$ヲ作レ。

$\triangle ABC$ト$\square ABCF$, $\square BCDE$トヲ比較セヨ。

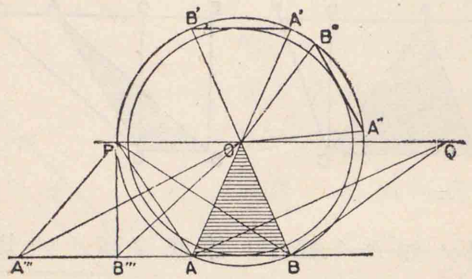
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \square BCDE$$

系一 三角形ノ面積ハソノ底ト高サトノ積ノ半ニ等シ。

三角形ノ底ヲa糎,高サヲh糎トシソノ面積ヲS平方糎トスレバ $S=\frac{1}{2}ah$

系二 三角形ノ面積ハ之ト等底等高ナル平行四邊形ノ面積ノ半ニ等シ。

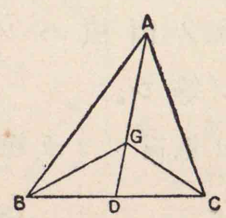
系三 等底等高ナル二ツノ三角形ハ等積ナリ。



系四 等底(高)等積ナル二ツノ三角形ハ等高(底)ナリ。

問題

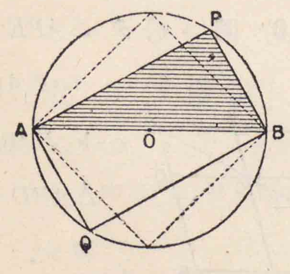
5 Gヲ$\triangle ABC$ノ重心トセバ$\triangle ABG$ト$\triangle BCG$ト$\triangle CAG$トハ等積ナリ。



(5) $\triangle ABC$ニ關シテ$\triangle ABG$, $\triangle BCG$, $\triangle CAG$ノ等シキ點Gハ重心以外ニ三ツアリ,之ヲ求メヨ。

6 平行四邊形$ABCD$內ノ任意ノ點Pト各頂點トヲ結付クルトキハ相對スル二ツノ三角形ノ面積ノ和ハ $\square ABCD$ ノ半分ナリ。

7 與ヘラレタル圓ノ中ヨリ最モ面積ノ廣キ矩形ヲ截リトラントス。如何ニスベキカ。



8 五邊形$ABCDE$ヲDヲ頂點トシ底邊ガABト重ナリ且之ト等積ナル三角形ニ改メヨ。

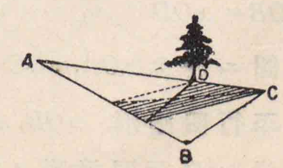
(6) $\square ABCD$ノ一頂點Dヨリ直線ヲ引キBCト點E, ABノ延長ト點Fニ於テ交ラシムレバ

$$\triangle ABE=\triangle CEF$$

注意 双方ニ$\triangle CED$ヲ加ヘヨ。

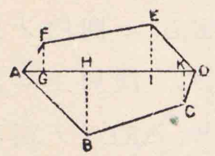
(7) K, Lハ圓內ノ二定點ナリ。圓周上ニ點Xヲトリ$\triangle KLX$ノ面積ヲ最大ナラシメヨ。

(8) 三角形狀ノ畑アリ。ソノ邊上ニ立テル樹木ノ根本ヲ通ル溝ニヨリテソノ面積ヲ二等分セントス。溝ヲ如何ニ設クベキカ。



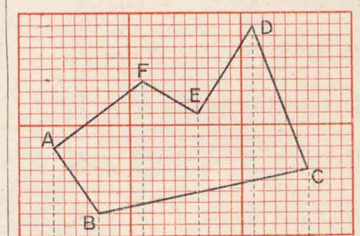
9 次ノ圖ノ如キ多角形ノ面積ヲ求メントシ，ソノ各部ヲ測リタルニ

$AG=10m$, $GH=20m$
$HI=30m$, $IK=15m$
$KD=5m$, $BH=30m$
$CK=15m$, $FG=13m$
$EI=22m$,

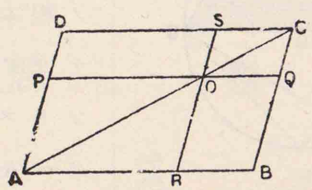


ヲ得タリ。面積如何。

(9) 一方眼ヲ1平方糎トシテ下圖ニ於ケル不規則ナル圖形 $ABCDEF$ ノ面積ヲ計算セヨ。



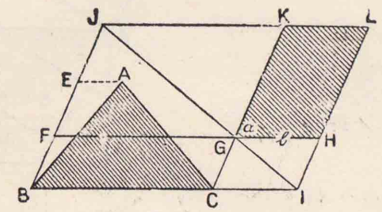
10 ▱$ABCD$ ノ對角線上ノ點 O ヲ通リ二邊ニ平行ナル直線 PQ, RS ヲ引ケバ
▱OB=▱OD



(10) 圖ニ於テ △APR ト △ASQ トノ和ハ △ABD ニ等シ。

圖ニ於テ▱OA,▱OC ヲ平行四邊形ノ**對角線ニ沿フ平行四邊形**, ▱OB, ▱OD ヲ平行四邊形ノ對角線ニ沿フ平行四邊形ノ**餘形**ト云フ。

11 圖ニヨリテ與三角形 ABC ヲ,一角ヲ與角 α, 一邊ヲ與長 l ナル如キ平行四邊形トナス作圖法ヲノベテ證明セヨ。

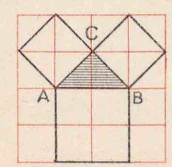


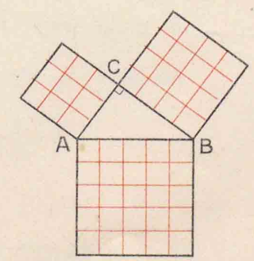
(11) ▱$ABCD$内ノ一點 O ヲ通リ各邊ニ平行ニ引キテ生ズル ▱OB,▱OD ガ相等シケレバ O ハ對角線AC上ニ在リ。**注意** OA, OC ヲ結ベバ AOC ハ平行四邊形ヲ二等分ス。

第二章 線分ノ上ノ正方形及線分ノ包ム矩形

49. 「ピタゴラス」ノ定理

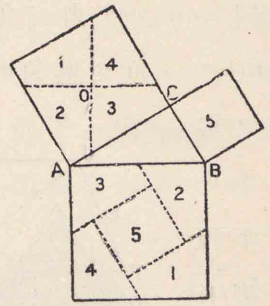
問一 △ABC ノ∠C ヲ直角トシ,AB,BC,CA ノ上ニ圖ノ如ク正方形ヲ作リ正方形ノ面積ノ關係ヲ調ベヨ。

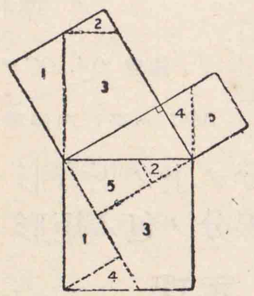




問二　右ノ圖ノ如ク直角三角形 ABC ヲ畫キ各邊ヲ一邊トセル正方形ヲ畫キ之ヲ切リテ重ネ合サバ如何ナルコトガ知ラルルカ。

O ハ正方形ノ對角線ノ交點ナリ。

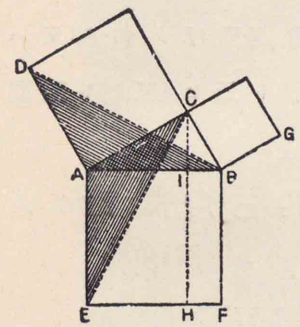




問三　問二ノ切リ方ヲ左圖ノ如クカヘテ驗セヨ。

之レ等ノ實驗ニヨリテ「ピタゴラス」ノ發見セル次ノ定理ノ眞ナルコトヲ知ル。次ニアゲタル證明ハ「ユークリッド」ノナセルモノナリト云フ。

定理　直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ノ面積ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ面積ノ和ニ等シ。



$\triangle ABC$ ノ $\angle C$ ヲ直角トシ, AB, BC, CA ノ上ノ正方形ヲ夫々 AF, CG, CD トセバ

(正方形 AF)＝(正方形 CD)
＋(正方形 CG)

證明　C ヨリ AB ニ下セル垂線 CI ノ延長ト EF トノ交點ヲ H トス。CE, BD ヲ結ベ。

$\triangle ACE$ ト $\triangle ADB$ トハ如何。

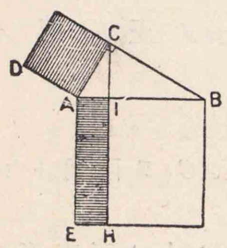
$\triangle ACE$ ト ▭AH トハ如何。

$\triangle ADB$ ト 正方形 CD トハ如何。

▭AH＝正方形 CD

同様ニ ▭BH＝正方形 CG

故ニ (正方形 AF)＝(正方形 CD)＋(正方形 CG)



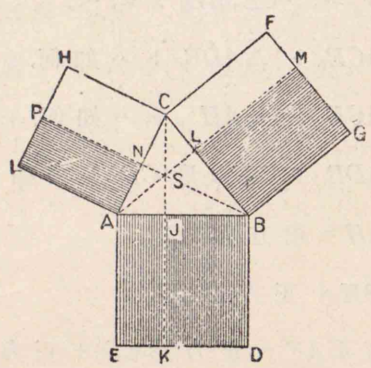
或線分ノ上ノ正方形例ヘバ線分ABノ上ノ正方形ヲAB^2ト略記ス。又二線分ヲ二邊トセル矩形例ヘバ矩形$AEHI$ヲ二線分AE, AIノ**包ム**(又ハ**ナス**)矩形ト云ヒ$AE.AI$ト略記ス。

$\angle C$ ヲ直角トセル直角三角形ABCノ斜邊ABニ垂線CIヲ下セバ

$$AC^2 = AB.AI, \qquad BC^2 = AB.BI$$

問　　題

12　$\triangle ABC$ノ$\angle C$ガ鋭角ナルトキハAB^2ハ(AC^2+BC^2)ヨリ何程小ナルカ。



(12)　問題12ニ於テ$\angle C$ガ鈍角ナラバ如何。

ピタゴラス

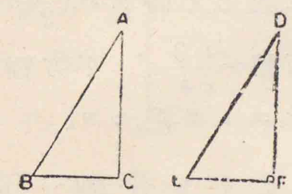
PYTHAGORAS

「ピタゴラス」Pythagoras (紀元前569年頃—500年頃)

「ピタゴラス」ハ紀元前569年頃地中海ノ「サモス」島ニ生ル。「ターレス」派ノ學ヲ重ンジ「エジプト」ニ學ビ從諸處ヲ遍歷シテ伊太利ノ南方ニ位スル「クロトン」ニ到リココニ居ヲ定メテ有名ナル「ピタゴラス」學校ヲ起セリ。彼ハ此ノ學校ニ於テ哲學，數學,自然科學等ノ諸學科ヲ教授セリ。此ノ學校ニ於ケル彼ノ成功ハ實ニ偉大ナルモノニシテ聽衆常ニ講堂ニ溢レ社會各般ノ人々皆ココニ集レリ。當時公開ノ席ニ出ヅルコトヲ禁ゼラレタル婦女子ト雖モ尚其ノ禁ヲ破リテ聽講ヲ競ヘル程ナリキ。彼ノ妻ハ此ノ熱心ナル聽講者ノ一人「テアノ」ナリキ。「テアノ」ハソノ夫ノ傳記ヲ著シタリト。

聽衆ノ中ニ一派ノ團結ヲ組織セルモノアリ。「ピタゴラス」派トイフハ卽チコレニシテ彼等ハ皆同胞ノ情ヲ以テ交リ其ノ間極メテ親密ナルモノナリキ。而シテソノ派ニ屬スル人々ハソレ等ノ發見セル事項及ビ教理ハ決シテ之ヲ口外セザルコトヲ約シ且克已，節制，純潔，服從ヲ以テ彼等ノ堅キ信條トナセリ。而シテ此ノ學派ハ漸次盛大ニ赴キソノ秘密的團結モ社會的ニ又政治的ニ一ノ勢力ヲ得ルニ到リシガ之ガ却テ低部「イタリア」ニ住メル民主黨ノ反感ヲ買ヒソノ黨中ニ起リシ一揆ノタメニ學校ヲ破壞サレ「ピタゴラス」及ビソノ子弟等ハ皆コノ一揆ノタメニ殺害セラルルニ到レリ。時ハ紀元前500年頃ナリキ。彼ハ偉大ナル數學者ニシテ又倫理學者タリ哲學者タリキ。サレバ彼ノ說キシ倫理學，哲學ハ皆數學ノ基礎ノ上ニ建テラレタルモノナリ、彼ハ又天文學，機械學，音樂ニモ長ジタルガ秘密ヲ重ンジタリシヲ以テ著書トシテ後世ニ殘セルモノナカリキ。「ピタゴラス」ノ定理ハ幾何學ニ於ケル最モ重要ニシテ且興味アル定理ナレバソノ證明法ノ發見サレタルモノ100種ヲ下ラズ。本書ニトレルモノハ「ユークリツド」ノ發見ニカカルモノナリトイフ。

「ピタゴラス」ノ定理ノ逆



假設 $\triangle ABC$ ニ於テ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

終結 $\angle C = R.\llcorner$

證明 $\angle DFE = R.\llcorner$ トシ，

$DF = AC,\ EF = BC$ トスレバ

$$DE^2 = DF^2 + EF^2$$

然ルニ $\quad AC^2 + BC^2 = AB^2$

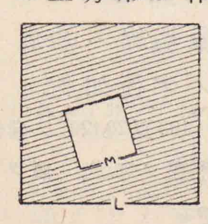
$\therefore \quad DE^2 = AB^2$ 　卽チ $DE = AB$

故ニ $\quad \triangle DEF \equiv \triangle ABC$

$\therefore \quad \angle C = \angle F = R.\llcorner$

問　題

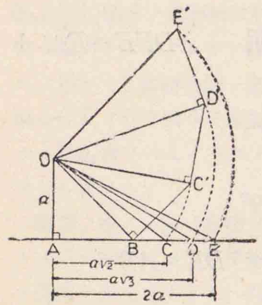
13 下ノ圖ニ於テ陰線ヲ施シタル部ノ面積ニ等シキ正方形ヲ作レ。



(13) 半徑5糎ナル圓ノ中心Oヨリ12糎ノ距離ニ在ル點Aヨリ此ノ圓ニ引ケル二切線ノ切點マデノ各線分ノ長サ及ビ二切點ヲ結ブ弦ノ長サヲ計算セヨ。

(糎ノ小數二位未滿四捨五入)

14 下圖ハ共ニ$a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{5}$等ノ長サヲ表ハス線分ヲ求ムル方法ナルコトヲ說明セヨ。



15 四邊形 $ABCD$ ノ對角線ガ互ニ垂直ニ交ルトキハ

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$$

16 直角三角形ノ直角ヲ夾ム邊ガ a 糎, b 糎ナルトキハソノ直角頂ヨリ斜邊ヘノ垂線ノ長サ及ビ內接圓ノ半徑如何。

注意 直角三角形ノ面積ニヨレ

(14) 一邊ガ a 糎ナル正三角形ノ高サハ$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 糎, 面積ハ$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方糎ナルコトヲ證セヨ。

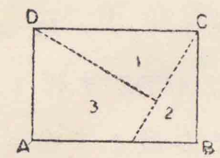
(15) $\triangle ABC$ 內ノ一點ヨリ BC, CA, AB ニ下セル垂線ノ足ヲ X, Y, Z トスレバ

$$AZ^2+BX^2+CY^2$$
$$=BZ^2+CX^2+AY^2$$

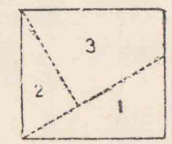
(16) 二圓ノ中心距離ハ $10cm$, 內共通切線ハ $6cm$, 外共通切線ハ $8cm$ ナリ。兩圓ノ半徑如何。

注意 193頁20, (20) ヲ參照シ兩半徑ノ和, 差ノ値ヲ計算セヨ。

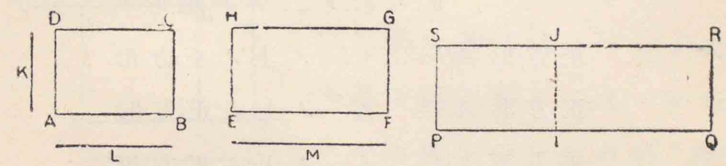
17 矩形 $ABCD$ ヲ等積ノ正方形ニ改メヨ。



(17) 矩形 $ABCD$ ヲ圖ノ如ク截リテ正方形トセヨ。



50. 線分ノナス矩形及正方形



$ABCD, EFGH, PQRS$ ハ皆高サノ相等シキ矩形ナリ。

問一 ($\square AC+\square EG$) ガ $\square PR$ ト等シキタメノ條件如何。

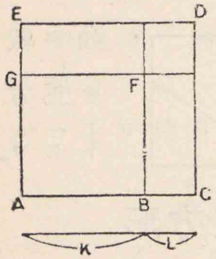
問二 高サヲ線分 K, AB ヲ線分 L, EF ヲ線分 M トシ $PQ=L+M$ トスレバ $K.(L+M)$ ニ等シキ面積如何。

定理 二線分ノ和ト一線分トノ包ム矩形ハ二線分ノ各ト一線分トノ包ム二ツノ矩形ノ和ニ等シ。

線分 K, L, M ノ長サヲ a cm, b cm, c cm トスレバ

$$a(b+c)=ab+ac$$ ヲ得。

コレ即チ上ノ定理ニ相當スル恒等式ナリ。



AB ヲ線分 K ニ, BC ヲ線分 L ニ等シクトリ,ソノ和 AC ノ上ニ正方形 $ACDE$ ヲ作リ, B 及ビ G ヨリ正方形ノ二邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ正方形ヲ二ツノ正方形ト二ツノ矩形トニ分テバ

正方形 $AD=(K+L)$ ノ上ノ正方形
正方形 $AF=$ K ノ上ノ正方形
正方形 $FD=$ L ノ上ノ正方形
$\square CF=\square EF=K.L$

故ニ

$$(K+L)^2=K^2+L^2+2K.L$$

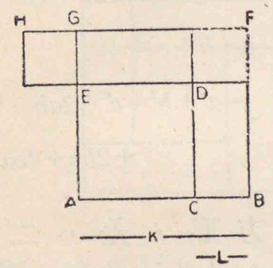
定理 二線分ノ和ノ上ノ正方形ハ各線分ノ上ノ正方形ト二線分ノ包ム矩形ノ二倍トノ和ニ等シ。

線分 K ヲ $a\,cm$, L ヲ $b\,cm$ トスレバ

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \quad ヲ得。$$

故ニ上ノ定理ノ證明ハ又此ノ恒等式ノ幾何學的證明トモナル。

定理 二線分ノ差ノ上ノ正方形ハ二線分ノ上ノ正方形ノ和ヨリ二線分ノ包ム矩形ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ。



AB ヲ線分 K ニ, BC ヲ線分 L ニ等シクトリ AB ノ上ニ正方形ヲ書キ $AE=AC$ ニトリ C, E ヲ通リ正方形ノ二邊ニ平行ナル直線ヲ引キ正方形 AF ヲ二ツノ正方形ト二ツノ矩形トニ分チ,尙 GE ノ上ニ正方形ヲ書ケバ。

正方形 $AD=(K-L)^2$
正方形 $AF=K^2$
正方形 $DF=$ 正方形 $HE=L^2$
$\square DH=\square CF=K.L$

故ニ $$(K-L)^2=K^2+L^2-2K.L$$

線分 K, L ヲ夫々 $a\,cm$, $b\,cm$ トスレバ

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab \quad ヲ得。$$

從テ上ノ定理ノ證明ハ此ノ恒等式ノ幾何學的證明トモナル。

問　　題

次ノ恒等式ヲ幾何學的ニ證セヨ。

18　$(3x)^2=9x^2$

19　$(a+b)(c+d)$

$=ac+bc+ad+bd$

(18)　$(x+3)(y+4)$

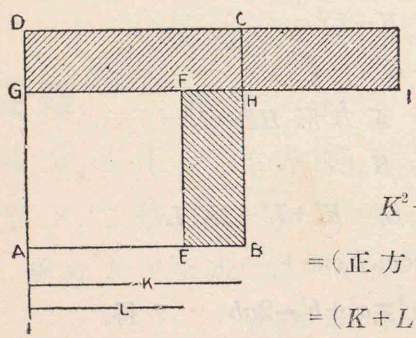
$=xy+4x+3y+12$

(19)　$(a+b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab$

$+2bc+2ca$

定理　二線分ノ上ノ正方形ノ差ハ二線分ノ和ト差トノ包ム矩形ニ等シ。



$▭FB=▭CI$

$GI=K+L$

$GD=K-L$

K^2-L^2

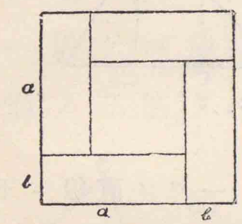
$=(\text{正方形}\,AC)-(\text{正方形}\,AF)$

$=(K+L)(K-L)$

$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$　トノ關係如何。

問　　題

20　次ノ圖ニヨリテ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ ヲ證セヨ。



21　直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ差ノ上ノ正方形ト直角三角形ノ面積ノ四倍トノ和ハ斜邊ノ上ノ正方形ニ等シ。

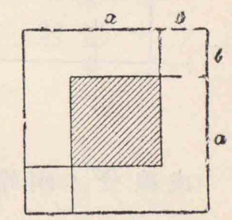
注意(一)　斜邊ノ上ノ正方形ヲ四ツノ直角三角形ト正方形トニ分テ。

(二)　二邊ノ差ノ上ノ正方形ノ式ヲ變化セヨ。

22　C ヲ二等邊三角形ノ頂點，D ヲ底邊 AB 上ノ任意ノ點トスレバ

$AC^2-DC^2=AD.BD$

(20)　次ノ圖ニヨリテ $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$ ヲ證セヨ。



(21)　二隣邊ノ和ガ定マレル矩形ノ中ニテ面積ノ最大ナルモノハ何カ。

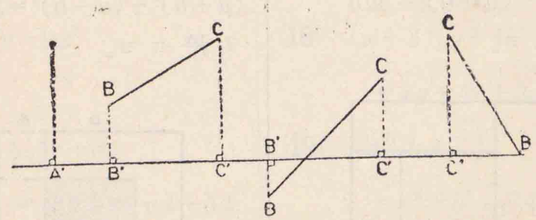
注意(一)　圖ノ上ニテ考ヘヨ。

(二)　代數式ノ上ヨリ考ヘヨ。

(22)　問題**22**ニ於テ D ガ AB ノ延長上ニアラバ如何。

注意　C ヨリ AB ヘノ垂線ヲ用ヒヨ。

定義 一點ヨリ一直線ニ下シタル垂線ノ足ヲソノ直線上ニ投ズルソノ**點ノ正射影**トイフ。



定義 或線分ノ兩端ヨリ他ノ一ツノ直線ニ下シタル垂線ノ足ノ間ノ線分ヲソノ直線上ニ投ジタルソノ**線分ノ正射影**トイフ。

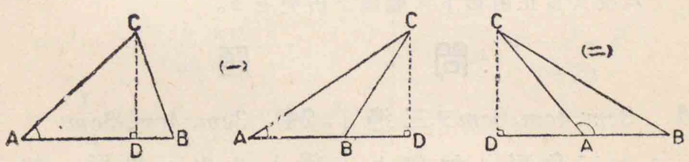
問 題

23 二直線 AB, CD ガ O ニ於テ直交ス。O ヨリ出ヅル定線分 OP ガ O ノ周リヲ廻轉スルトキ OP ガ AB, CD ノ上ニ投ズル正射影ノ長サヲ研究セヨ。

(23) 直交セル二直線上ニ投ズル或線分ノ正射影ノ上ノ正方形ノ和ハソノ線分ノ位置如何ニ關セズ常ニ一定ナルコトヲ證セヨ。

51. 三角形ノ各邊ノ上ノ正方形

定理 三角形ノ銳(鈍)角ノ對邊上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ二邊ノ一ツト此ノ邊又ハ其ノ延長上ニ於ケル他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ダケ小(大)ナリ。



$\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A$ ヲ(一)銳角,(二)鈍角トシ C ヨリ邊 AB 又ハソノ延長ヘノ垂線ヲ CD トスレバ

(一) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD$

(二) $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AD$

證明 $\triangle CBD$ ニ於テ $\angle D$ ハ直角ナル故

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 \\ &= (AB \mp AD)^2 + AC^2 - AD^2 \\ &= AB^2 \mp 2AB \cdot AD + AD^2 + AC^2 - AD^2 \end{aligned}$$

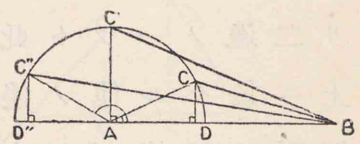
故ニ $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2AB \cdot AD$

問一　問題12, (12) ノ如キ圖ニヨリテ本定理ヲ證セヨ。

系　$\triangle ABC$ ニ於テ　$BC^2 \gtreqless AB^2+AC^2$

ニ從ツテ　$\angle A \gtreqless 90^\circ$

問二　$\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ヲ一定トシ, $\angle A$ ヲ變ズルトキ



BC^2 ノ變化ト AC ガ AB 上ニ投ズル正射影トノ關係ヲ研究セヨ。

問　題

24　$3cm, 4cm, 6cm$ ヲ三邊トスル三角形ハ如何ナル三角形ナルカ。

25　同上,三邊ヲ表ハス數ガ $m^2+n^2,\ m^2-n^2,\ 2mn$ ナルトキハ如何。*

26　$\triangle ABC$ ノ各頂點ヨリ對邊ヘノ垂線ヲ AD, BE, CF トスレバ

$AB.AF=AC.AE$

(24)　$3cm, 4cm, 3cm$ ヲ三邊トスル三角形ハ如何ナル三角形ナルカ。

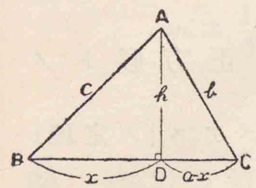
(25)　同上,三邊ガ $12cm, 13cm, 5cm$ ナルトキハ如何。

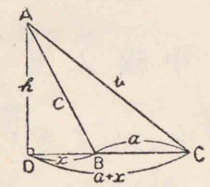
(26)　$\angle C$ ヲ鈍角トセル二等邊三角形 ABC ニ於テ A ヨリ BC ノ延長ヘ下セル垂線ヲ AD トスルトキハ

$AB^2=2BC.BD$

* m, n ニ正ノ整數ヲ入レテ計算スレバ三邊ノ長サヲ整數ヲ以テ表ハスコトヲ得ル直角三角形ヲ得。

例題　三邊ノ長サヲ表ハス數 a, b, c ニテ $\triangle ABC$ ノ高サ及ビ面積ヲ表ハス式ヲ作レ。





$a+b+c=2s$

$AD=h,$

BD ヲ x トス。

$b^2=a^2+c^2\mp 2ax$

$\pm 2ax=a^2-b^2+c^2$

$$x=\frac{a^2-b^2+c^2}{\pm 2a}$$

$$\begin{aligned}
h^2&=c^2-x^2\\
&=c^2-\frac{(a^2-b^2+c^2)^2}{(2a)^2}\\
&=\frac{1}{4a^2}\{4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2\}\\
&=\frac{1}{4a^2}\{2ac+(a^2-b^2+c^2)\}\{2ac-(a^2-b^2+c^2)\}\\
&=\frac{1}{4a^2}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)\\
&=\frac{4}{a^2}s(s-b)(s-c)(s-a)
\end{aligned}$$

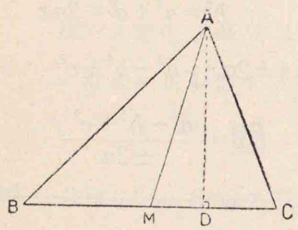
$h=\dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　(正ノミヲトリ)

$\triangle ABC$ ノ面積 $=\dfrac{1}{2}ah=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

27　三邊ガ $7cm, 8cm, 9cm$ ノ三角形ノ面積如何。

(27)　二隣邊ガ $17cm, 10cm$ 對角線ガ $21cm$ ノ平行四邊形ノ面積如何。

定理 三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ底ノ半分ノ上ノ正方形ト頂點ヨリ底ニ引ケル中線ノ上ノ正方形トノ和ノ二倍ニ等シ。(「アポロニアス」ノ定理)



$\triangle ABC$ ニ於テ AM ヲ中線トスレバ

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

ナルベシ。

證明 A ヨリ BC ニ下セル垂線 AD ガ AM ト重ナラズシテ $\angle AMB$ ガ鈍角ナリトスレバ,

$$AB^2=AM^2+BM^2+2BM\cdot DM$$

$\triangle ACM$ ニ於テ

$$AC^2=AM^2+CM^2-2CM\cdot DM$$

$$\therefore\ AB^2+AC^2=BM^2+CM^2+2AM^2$$

$$\therefore\ AB^2+AC^2=2(BM^2+AM^2)$$

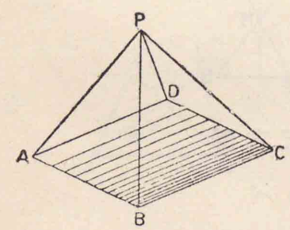
D ト M ト重ナラバ如何。

$\triangle ABC$ ノ三邊及ビ A ヨリノ中線ノ長サヲ表ハス數ヲ a, b, c, m_a トスレバ

$$m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$$

問 題

28 $ABCD$ ヲ矩形トシ, P ヲ任意ノ一點トスレバ(必ズシモ同一平面上ノモノナルヲ要セズ)



$$AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$$

29 三邊ガ $4cm, 6cm, 7cm$ ナル三角形ノ三中線ノ長サヲ求ム。

30 A, B ヲ二定點トシ AP^2+BP^2 ガ一定面積 L^2 ナル點 P ノ軌跡如何。

(**28**) 平行四邊形ノ各邊ノ上ノ正方形ノ和ハ其ノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

(**29**) $\triangle ABC$ ノ $a=22cm$, $b=20cm$, $c=18cm$ ナル中線 m_c ノ長サヲ求ム。

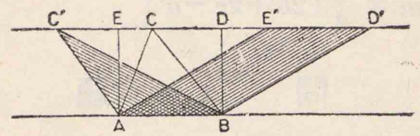
(**30**) A, B ヲ二定點トシ AP^2-BP^2 ガ一定ノ面積 L^2 ナル點 P ノ軌跡ヲ求ム。

注意 軌跡ハ AB 又ハソノ延長上ニアリテ $AC^2-BC^2=L^2$ ナル如キ點 C ヲ通ル。

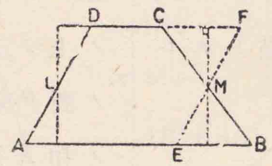
摘 要

(1) 三角形,平行四邊形及梯形ノ面積

1



2



(2) 線分ノナス矩形又ハ正方形

A, B, C ヲ三線分トセバ

1 $(A+B)C = A\cdot C + B\cdot C$

2 $(A\pm B)^2 = A^2 + B^2 \pm 2A\cdot B$

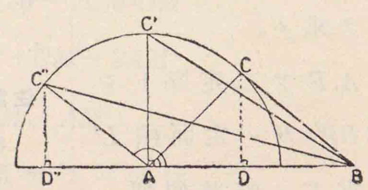
3 $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

(3) $\triangle ABC$ ノ各邊ノ上ノ正方形

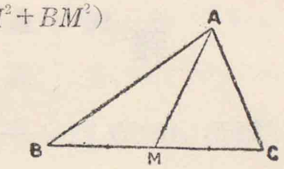
1 $\angle A = 90^\circ$

2 $\angle A < 90^\circ$

3 $\angle A > 90^\circ$

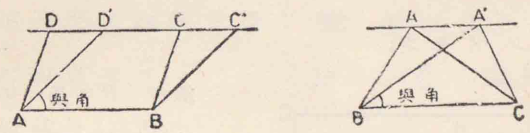


4 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

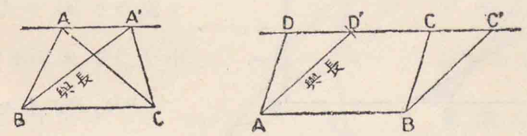


(4) 等積變形

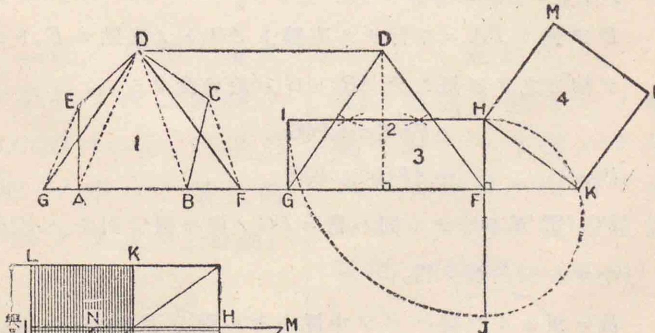
1



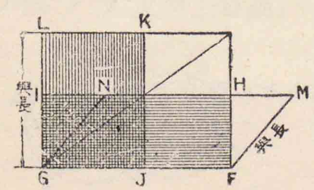
2



3

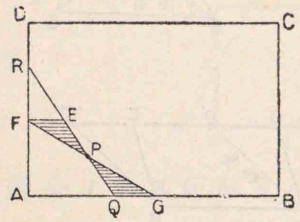


4



雜 題

例題一 矩形 $ABCD$ 內ノ一點 P ヲ通ル直線ニテソノ一角ヨリ最モ小ナル三角形ヲ截リ落スニハ如何ニスベキカ。



解析 P ヲ通ル任意ノ直線ヲ引キ AB,AD ト Q,R ニ於テ交ラシム。$\triangle AQR$ ヲ最小ナラシメントス。

$PR>PQ$ トセヨ。

PR 上ニ PQ ニ等シク PE ヲトレ。

E ヲ通リ BA ニ平行ナル直線ト AD トノ交點ヲ F トシ, FP ヲ結ビ之ヲ延長シテ AB ト G ニ於テ交ラシム。

$$\triangle PEF \equiv \triangle PQG$$

故ニ $\triangle AFG < \triangle AQR$

PQ, PR ガ不等ナル間ハ常ニ FG ノ如キ線ヲ引キ $\triangle AQR$ ヨリ小ナル三角形ヲ得。

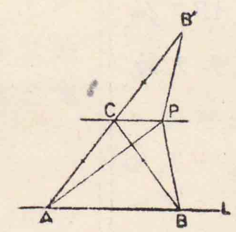
故ニ求ムル直線ハ P ヲ中點トセル線分ナリ。

作圖 119頁問題**70**ヲ見ヨ。

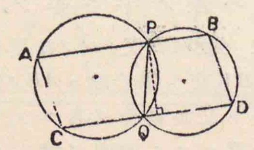
又ハ110頁系二ニヨレ。

31 與角內ノ與點ヲ通リ與角ノ二邊ニ終ル線分ヲ一對角線トシ與角ノ頂點ヲ一頂點トスル平行四邊形ノ面積ヲ最小ナル如クセヨ。

32 定線分 AB 上ニ立ツ等積ノ三角形ノ中ニテ二等邊三角形ノ周ガ最モ小ナリ。



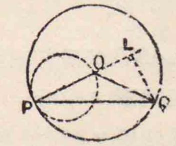
33 二圓ノ交點 P,Q ヲ通ル平行ナル二直線ヲ APB,CQD トス。四邊形 $ABDC$ ノ中ニテ最大面積ノモノヲ求ム。〔141頁6〕



(31) 與ヘラレタル二隣邊ヲ有スル平行四邊形ノ中ニテ面積ノ最大ナルモノ如何。

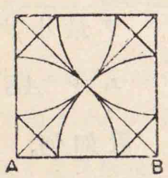
(32) AB ハ與直線 L 上ヲ動ク與長ノ線分ニシテ P ハ直線 L 外ノ與點ナリ。$(PA+AB+PB)$ ヲ最小ナラシムル AB ノ位置如何。

(33) 與圓ノ弦トソノ兩端ニ引ケル半徑ニテ生ズル三角形ノ面積ヲ最大ナラシムル弦ノ位置如何。〔205頁7又ハ本頁(31)〕



34 二邊ノ長サガ $a$cm, $b$cm, ソノ夾角ガ45°ナル三角形ノ面積如何。

35 次ノ圖ハ正方形内ニ正八邊形ヲ作圖スルコトヲ示ス。果シテ正八邊形ナルカ。ABヲ$2a$糎トシ,一邊ノ長サヲ計算セヨ。



36 梯形$ABCD$ノ平行ナラザル邊CDノ中點ヲEトセバ$\triangle AEB$ハ梯形ノ半ニ等シ。

注意 $\triangle AEB$ガ平行四邊形又ハ三角形ノ半分ニナル樣ニ補助線ヲ引ケ。

(34) 二邊ノ長サガ $a$cm, $b$cm, ソノ夾角ガ60°ナル平行四邊形ノ面積如何。

(35) 問題35ニ於ケル正八邊形ノ面積ヲ計算セヨ。

(36) $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ガ同底AB上ニ立ツ。線分CDノ中點ヲEトセバ$\triangle ABE$ハ$\triangle ABC$ト$\triangle ABD$トノ和又ハ差ノ半ニ等シ。

注意 先ヅCD又ハソノ延長ガABト交ル場合,次ニABノ延長ト交ル場合ヲ考ヘヨ。又計算ニヨル證明モ試ミヨ。

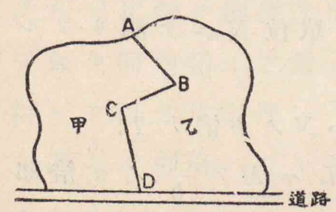
37 矩形$ABCD$ノ邊BC, CD上ニ夫々任意ノ點X, Yヲトルトキハ

$2\triangle AXY+BX\cdot DY=\square AC$

注意 X, Yヲ通リ矩形ノ二邊ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

38 梯形ニ於テ兩對角線上ノ正方形ノ和ハ平行ナラザル二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ平行二邊ノ包ム矩形ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。〔226頁(3)〕

39 甲乙兩地ヲ$ABCD$ノ線ニテ境セリ。之レヲAヨリ出ヅル一直線ニテ分チ兩地ノ面積ガ變ラザル如クセヨ。



(37) 平行四邊形$ABCD$內ノ一點Pヲ通リ二邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ生ズル平行四邊形PB, PDノ差ハ$\triangle PAC$ノ二倍ナリ。 207頁(11)參照

(38) 相交ル二圓ノ中心線ガ二圓周ト四點A, B, C, Dニ於テ此ノ順序ニ交ルトキハ矩形$AD\cdot BC$ト矩形$AB\cdot CD$トノ和ハ兩圓ノ直徑ノ包ム矩形ニ等シ。〔226頁(2)〕

(39) 與三角形ノ面積ヲ邊上ノ一定點ヲ通ル二直線ニヨリテ三等分セヨ。〔205頁(8)〕

注意 (一)定點ガ頂點ナル場合
(二)定點ガ邊ヲ三等分セル兩端ノ分ノ上ニアル場合
(三)定點ガ中間ノ分ノ上ニアル場合
ヲ區別シテ解ケ。

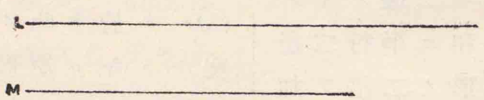
第 六 篇

比 及 比 例

第一章 數及線分ノ間ノ比及比例

52. 數及量ノ間ノ比及比例

問一 次ノ二線分 L, M ノ比ハ如何。



二線分 L, M ノ比ヲ求ムルニ L ノ長サヲ M ノ長サニテ測リ切レザルトキアリ。カカルトキハ他ノ單位ヲ定メテ L, M ヲ測リソノ數値ヲ以テ $\frac{L}{M}$ ノ値トス。

同種類ノ二量ノ比ハ各ヲ同單位ニテ測リタル數ニテ表ハスコトヲ得。

何トナレバ L, M ヲ共通ノ單位 N ニテ測リタル數値ヲ a, b トスレバ

L ハ N ノ a 倍, M ハ N ノ b 倍ナリ。

故ニ N ハ M ノ $\frac{1}{b}$ ニシテ L ハ M ノ $\frac{1}{b}$ ノ a 倍即チ $\frac{a}{b}$ 倍ナリ。　故ニ $\frac{L}{M} = \frac{a}{b}$

同種類ノ二量ガ共通ノ單位ヲ以テ共ニ測リ切ルコトヲ得ル場合ハ二量ハ**公約量ヲ有ス**ト云ヒ,公約量ヲ有スル二量ハ**通約シ得ベキ量**ナリト云フ。此ノ場合ニ於テハ二量ノ比ノ値ハ整數,分數ノ何レカヲ以テ表ハスコトヲ得。

問二 正三角形ノ一角ト正五邊形ノ一角トハ通約シ得ベキ量カ。又ソノ比ノ値如何。

同種類ノ二量ガ公約量ヲ有セザルトキハ二量ハ**通約シ得ベカラザル量**ナリト云ヒ,ソノ比ノ値ハ整數,分數ノ何レヲ以テシテモ表ハシ得ザル數即チ**無理數**トナル。

$$\text{數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數}\\ \text{分數}\left(\begin{array}{l}\text{有限小數}\\ \text{循環小數}\end{array}\right)\end{cases}\\ \text{無理數（不循環無限小數）}\end{cases}$$

問三 無理數ノ例ヲアゲヨ。

幾何學ニ於テハ線分,弧,角,面積等ノ間ニ存スル比及ビ比例ノ關係ヲ考究スレドモ,上ニ述ベタルガ如ク同種類ノ二量ノ比ハ之ヲ數ノ比ニ置換ヘ得ルヲ以テ代數學ニテ學ビタル數ノ比及ビ比例ニ關スル事項ハ之レヲ幾何學ニモ適用シ得ルモノトス。

次ニ代數學ニテ學ビタル數ノ間ノ比及ビ比例ノ關係ノ中ニテ重要ナルモノヲ擧ゲン。

a,b,c,d ナル四數アリテ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラバ a,b,c,d ハ**比例ヲナス**トイヒ,d ヲ a,b,c ノ**第四比例項**トイフ。

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラバ $ad=bc$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\ 等$$

又
$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$
$$\frac{a\pm b}{a\mp b}=\frac{c\pm d}{c\mp d}$$

a,b,c ナル三數アリテ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ナラバ a,b,c ハ**連比例ヲナス**トイヒ,c ヲ a,b ノ**第三比例項**トイヒ,b ヲ a,c ノ**比例中項**トイフ。

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ナラバ $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\cdots\cdots=\frac{p}{q}$(第$n$項)$=k$ ナラバ

$$\frac{a}{q}=\frac{a^n}{b^n}=\frac{b^n}{c^n}\cdots\cdots=k^n$$

又 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\cdots\cdots=k$ ナラバ

$$k=\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+d'+\cdots\cdots}$$
$$=\frac{pa+qb+rc+\cdots\cdots}{pa'+qb'+rc'+\cdots\cdots}$$

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ ヲ比 $\frac{a}{b}$ ト比 $\frac{c}{d}$ トノ**複比**トイフ。

$\left(\frac{a}{b}\right)^2,\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdots\cdots$ 等ヲ夫々 $\frac{a}{b}$ ノ比ノ**二乘比,三乘比**等トイフ。

問題

1 $a, 2a, 3a$ ノ第四比例項ヲ求メヨ。

2 $30cm$ ノ線分 AB 上ニ點 C ヲ求メ $AC:CB$ ヲ $2:3$ ナル如クスレバ AC, CB ノ長サ各何程ナルカ。

3 一直線上ニ五點 A, B, C, D, E ガ此ノ順序ニアリテ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{CD}{DE}\quad ナラバ$$
$$\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{CD}=\frac{BC}{DE}$$

(1) $\frac{1}{2}$ ト $\frac{1}{6}$ トノ第三比例項ヲ求メヨ。

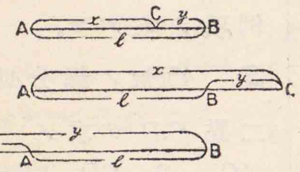
(2) $45cm$ ノ線分 AB 上ニ二點 C,D ヲ求メ $\frac{AC}{CD}=\frac{2}{3}$, $\frac{CD}{DB}=\frac{6}{5}$ ナル如クセントス各分ノ長サ何程ナルカ。

(3) 一圓周上ニ點 A,B,C,D,E,F ガコノ順ニアリテ $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}:\overset{\frown}{EF}:\overset{\frown}{FA}$ ニシ,A,D ガ一ツノ直徑ノ端ナラバ,B ト E,C ト F ハ夫々如何。

53. 三角形ノ底ノ平行線ニヨル比例線

定義 線分上ニ在ル一點ハソノ線分ヲ**内分ス**トイヒ,ソノ延長上ニ在ル一點ハ之ヲ**外分ス**トイフ。而シテコノ線分ノ兩端ト分點トノ距離ヲ各ソノ分トイフ。

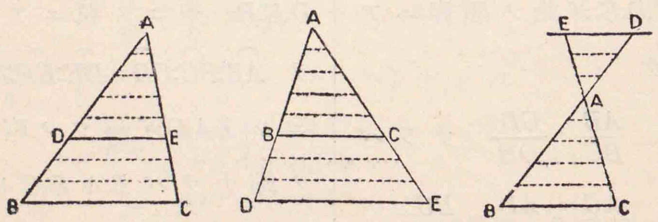
今線分ノ長サヲ l 糎,各ノ分ヲ x 糎, y 糎トセバ



内分ニ於テハ $x+y=l$

外分ニ於テハ $x\sim y=l$

定理 三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シキ比ニ内分又ハ外分ス。



$\triangle ABC$ ノ底 BC ニ平行ナル直線ガ AB, AC 及ビソノ延長トノ交點ヲ D, E トセバ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ ナルベシ。

證明 AD, DB ガ共ニ或長サノ整數倍ナルトキ即チ公約量ヲ有スルトキ公約量ニテ測リタル數ヲ m, n トスレバ

$$\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n} \quad ナリ。$$

AD, DB ヲ夫々 m 個, n 個ニ等分シ,ソノ分點ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC ト交ラシムレバ AE ハ m 個ニ, CE ハ n 個ニ等分サルベシ。

$$故ニ \quad \frac{AE}{EC}=\frac{m}{n} \quad ナリ。$$

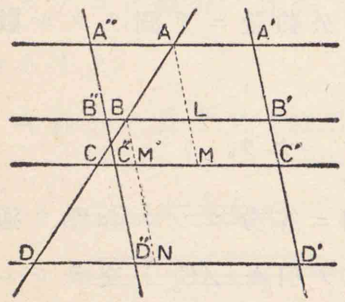
$$依テ \quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

注意 本定理ハ AD, DB ガ公約量ヲ有セザルトキト雖モ眞ナリ。然レドモソノ證明ハ本書ノ程度トシテハ稍高キニ過グルヲ以テココニハ之ヲ省クコトトセリ。

系一 本定理ヨリ又次ノ比例式ヲ得。

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}, \quad \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$$

系二 一組ノ平行線ガ二直線ニ交ルトキソノ各ヨリ截リ取ル相對應スル分ノ比ハ相等シ。



證明 $AM \parallel A'D'$ トセバ

$AL=A'B',\ LM=B'C'$

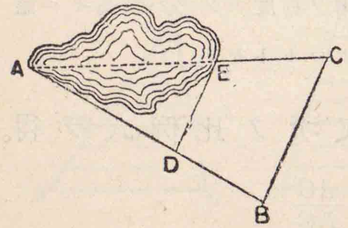
又 $\frac{AB}{AL}=\frac{BC}{LM}$

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$

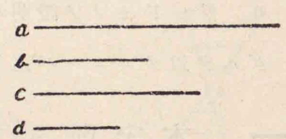
同様ニ $=\frac{CD}{C'D'}$

問　題

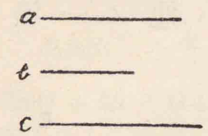
4 圖ニ於テ $DE \parallel BC$, $AD=63$米, $DB=36$米, $EC=41.6$米ナリ。AEノ長サ如何。

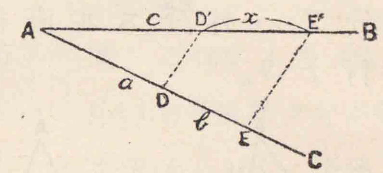


(4) 線分aヲ三線分b,c,dノ比ニ分テ。



作圖題 與三線分ノ第四比例項ヲ求ム。





5 與線分ヲ7:3ノ比ニ内分及ビ外分セヨ。

6 直角三角形ABCノ$\angle C$ガ直角ニシテ邊AC BCハ夫々, 16cm, 12cmナリ。斜邊上ニテAヨリ5cmノ距離ニ在ル點Pヨリ二邊ニ平行ニ引キテ生ズル矩形ノ面積ヲ計算セヨ。

7 ▱$ABCD$ノ對角線AC上ノ一點Oヲ通リ二邊ニ平行ニ引ケル直線ガAD, BCトE, F, AB, DCトG, Hニ於テ交レバ

$$\frac{EO}{OF}=\frac{GO}{OH}.$$

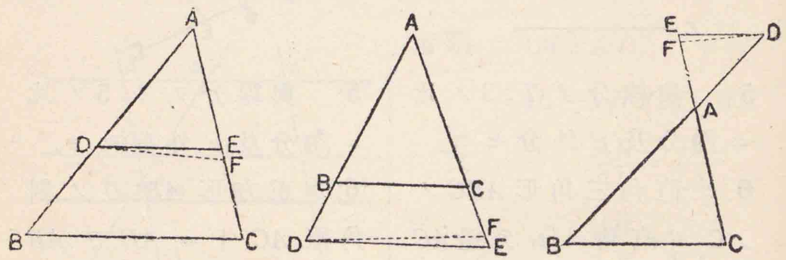
(5) 與線分ヲ2:5ノ比ニ内分及ビ外分セヨ。

(6) 正方形$ABCD$ノ對角線AC上ニAEヲABニ等シクトリEヨリ正方形ノ二邊ニ平行線ヲ引キテ生ズル正方形AEハモトノ正方形ノ半分ノ面積ヲ有ス。

(7) 平行四邊形$ABCD$ノ邊AB上ニAKヲABノ四分ノ一ニトリKDトACトノ交點ヲLトセバALハACノ$\frac{1}{5}$ナリ。

注意 CD上ニ$CM=\frac{CD}{4}$ノ點ヲトリBMヲ結べ。

定理 三角形ノ二邊ヲ相等シキ比ニ内分又ハ外分スル直線ハ他ノ一邊ニ平行ナリ。



△ABC ニ於テ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ナラバ $DE \parallel BC$

證明 D ヨリ BC ニ平行ニ引ケル直線ト AC トノ交點ヲ F トスレバ

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AD}{DB}=\frac{AF}{FC}\\ \text{然ルニ}\ \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\end{array}\right\}\quad \text{故ニ}\ \frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EC}$$

$$\text{故ニ}\ \frac{AF\pm FC}{FC}=\frac{AE\pm EC}{EC}$$

$$\text{即チ}\ \frac{AC}{FC}=\frac{AC}{EC}$$

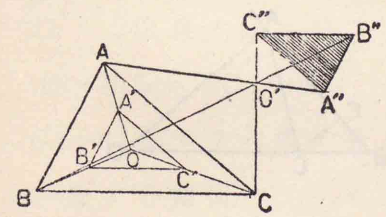
故ニ $FC=EC$

E ト F トハ一致シ $DE \parallel BC$

注意 線分 AB ヲ C ニ於テ $2:3$ ニ分ツトハ $\frac{AC}{CB}=\frac{2}{3}$ ノコトニシテ $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{2}$ ノコトニアラズ。

問 題

8 △ABC ノ各頂點ヲ一點 O ニ結ビ OA 上ニ一點 A' ヲトリ圖ノ如ク $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$ ナラシムレバ $A'C' \parallel AC$



9 $\angle XOY$ 内ノ定點 P ヲ通ル直線ヲ引キ OX, OY ト A,B ニ於テ交ラシメ $AP:PB$ ヲ與比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ。

10 與ヘラレタル周ヲ有シ,三邊ガ $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ノ比ヲナス三角形ヲ作レ。〔214頁(14)〕

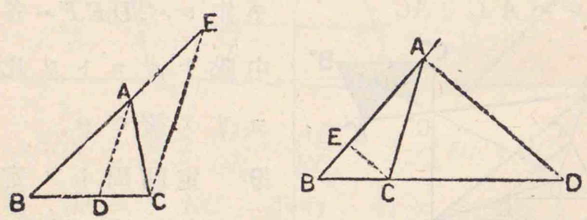
(8) △ABC ノ邊 AB, BC, CA 上ニ各頂點ヲ有シ各邊ヲ夫々△ABC ノ各邊ニ平行ナラシムル如キ△DEF ヲ作レバ, D,E,F ハ各邊ノ中點ナルコトヲ比例ニヨリテ證セヨ。

(9) 定圓周上ノ定點 A ヨリ弦ヲ引キ定弦 BC ニヨリテ定比 $m:n$ ニ分(内分,外分)タルル如クセヨ。

(10) △ABC ノ邊 AB 上ノ點 D ヨリ BC ニ平行ニ引ケル直線ト AC トノ交點ヲ E, C ヨリ EB ニ平行ナル直線ト AB ノ延長トノ交點ヲ F トセバ AB ハ AD,AF ノ比例中項ナリ。

54. 頂角ノ二等分線ニヨル比例線

定理　三角形ノ一角ノ二等分線ハ其ノ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分シ其ノ角ニ隣レル外角ノ二等分線ハ同邊ヲ同比ニ外分ス。



證明　AD ヲ $\triangle ABC$ ノ $\angle A$(又ハ A ノ外角)ノ二等分線トス。

BA ノ延長(又ハ BA 上)ニ AC ニ等シク AE ヲトリ C ト E トヲ結ベバ

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AE} \qquad \text{且 } AD \parallel CE \quad \text{何故カ,}$$

$$\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

問一　本定理ノ逆ヲ述ベ此ノ圖ヲ用ヒテ直接ニ證セヨ。

問二　又間接法ニテ證セヨ。

系　三角形ノ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分又ハ外分スル點ト頂點トヲ結ブ直線ハ頂角又ハソレニ隣レル外角ヲ二等分ス。

問　題

11　242頁ノ圖ニ於テ $AB=10.5cm$, $BC=9cm$ $CA=8.4cm$ ナラバ底ノ分ノ長サ各如何。

12　$\triangle ABC$ ノ底 BC ヲ三等分スル點ヲ D,E トセバ AD,AE ガ共ニ頂角 A ヲ三等分スルコトナシ。

13　D ヲ $\triangle ABC$ ノ底 BC ノ中點トシ $\angle ADB, \angle ADC$ ノ二等分線ガ AB,AC ト夫々 E,F ニテ交レバ $EF \parallel BC$

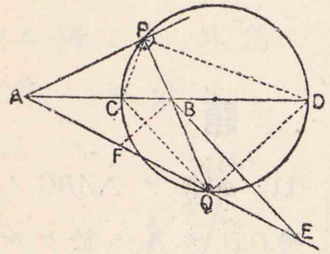
(11)　a,b,c ヲ $\triangle ABC$ ノ三邊, D,D' ヲ A ニ於ケル內角,外角ノ二等分線ガ BC 又ハソノ延長ト交ル點トセバ $DD'=\dfrac{2abc}{b^2-c^2}$

(12)　四邊形 $ABCD$ ノ $\angle A$, $\angle C$ ノ二等分線ガ BD 上ニテ交ラバ $\angle B, \angle D$ ノ二等分線ハ AC 上ニテ交ル。

(13)　$\triangle ABC$ ノ中線 AD ノ延長上ニ T ヲトリ $\angle BDT$, $\angle CDT$ ノ二等分線ガ AB, AC ノ延長ト夫々 EF ニテ交レバ $EF \parallel BC$

55. 「アポロニアス」ノ圓

軌跡 二定點 A, B ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡如何。



A, B ヲ二定點トシ, A, B ヨリ距離ノ比ガ $\frac{m}{n}$ ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求メントス。

證明 1. AB ヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ内分,外分スル點ヲ C, D トスレバ, C, D ハ與條件ヲ滿足スル特殊點ナリ。

P ヲ $\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n}$ ナル如キ一般ノ點トス。

CP, DP ヲ結ベ。

$\angle CPB$, $\angle BPD$ ハ如何。

$\angle CPD$ ハ如何。

故ニ P ハ AB ヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ内分,外分スル點ノ間ノ線分 CD ヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。

2. 次ニ CD ヲ直徑トスル圓周上ニ任意ノ點 Q ヲ求メ AQ, BQ ヲ結ビ

$\frac{AQ}{BQ}=\frac{m}{n}$ ナルコトヲ證セン。

CQ, DQ ヲ結ベバ $\angle CQD=R.\llcorner$

$BE \parallel CQ$ トスレバ

$\frac{AC}{CB}=\frac{AQ}{QE}=\frac{m}{n}$ ナル故 $\frac{AQ}{BQ}=\frac{m}{n}$ ナルニハ

$QE=BQ$ ナラザルベカラズ。

$BF \parallel DQ$ トスレバ

$\frac{AD}{DB}=\frac{AQ}{QF}=\frac{m}{n}$ ナル故 $\frac{AQ}{BQ}=\frac{m}{n}$ ナルニハ

$QF=BQ$ ナラザルベカラズ。

即チ $BQ=QE=QF$ ナラザルベカラズ。

然ルニ $\angle FBE=\angle CQD=R.\llcorner$ ナル故

Q ハ直角三角形 EBF ノ斜邊ノ中點ナラザルベカラズ。

然ルニ $\frac{AQ}{QE}=\frac{m}{n}=\frac{AQ}{QF}$

故ニ $QE=QF=BQ$

故ニ $\frac{AQ}{BQ}=\frac{m}{n}$

「アポロニアス」 Apollonius ハ小亞細亞ニ生レ,「ユークリッド」,「アルキメデス」ト共ニ有名ナル希臘古代ノ數學者ニシテ圓錐曲線論ノ著者トシテ其ノ名殊ニ高シ。紀元前260年頃ヨリ200年頃ノ人ナリ。

定義 線分 AB ヲ C,D ニ於テ同ジ比ニ內分,外分スルトキハ AB ハ點 C 及ビ D ニ於テ**調和ニ分タレ**タリトイヒ,A,C,B,D ヲ**調和列點**トイフ。

問　　題

14. 底邊,二邊ノ比及ビ次ノ要素ノ一ツヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

(a) 頂角

注意 (一) 147頁系二及ビ243頁系ニヨレ。

(二)「アポロニアス」ノ圓ヲ用ヒヨ。

(b) 頂角ノ二等分線

15 $\triangle ABC$ ノ三頂點ヨリノ距離ノ比ガ $1:2:3$ ナル如キ點ヲ求メヨ。

16 線分 AB ヲ C,D ニ於テ調和ニ分チ,O ニ於テ二等分スルトキハ OC, OB,OD ハ連比例ヲナス。

(14) 定直線上ニ三定點 A,B,C アリ。他ノ與直線上ニ點 P ヲ求メ,$\angle APB$ ト $\angle BPC$ トヲ等シカラシメヨ。

(15) 定直線上ニ四點 A,B,C,D アリテ $\dfrac{AB}{3}=BC=CD$ ナリ。AB,BC,CD ヲ等角ニ見ル如キ點ヲ求ム。

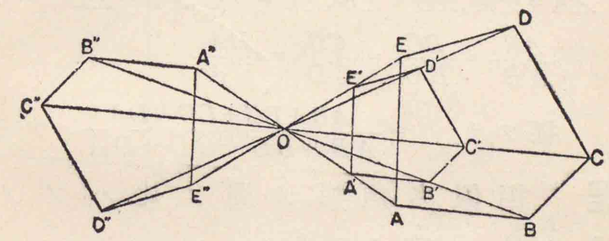
(16) 線分 AB ヲ C,D ニ於テ調和ニ分ツトキ AD,CD,BD ヲ x,y,z トセバ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$$

第二章 相　似　形

56. 相　似　形

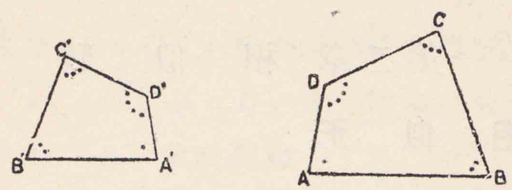
問一　次ノ圖ハ各邊ガ互ニ平行ナリ。五邊形 $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$, $A''B''C''D''E''$ ノ間ノ關係如何。



定義 一ツノ多角形ノ角ト他ノ一ツノ多角形ノ角ト順次ニ夫々相等シキトキハ此ノ二ツノ多角形ハ互ニ**等角ナリ**トイフ。而シテソノ相等シキ角ヲ**對應角**トイヒ,對應角ノ頂點ノ間ニ在ル邊ヲ**對應邊**トイフ。

定義 二ツノ多角形ガ互ニ等角ニシテ且對應邊ノ比ガ皆相等シキトキハ此ノ二ツノ多角形ハ**相似ナリ**トイヒ,對應邊ノ比ヲ**相似ノ比**ト云フ。

二ツノ多角形ノ相似ナルコトヲ記號 $\backsim$ ヲ用ヒテ五邊形 $ABCDE \backsim$ 五邊形 $A'B'C'D'E'$ ノ如ク書ク。



四邊形 $ABCD \backsim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ナラバ

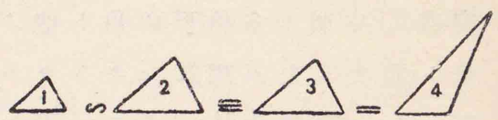
$\angle A=\angle A', \angle B=\angle B', \angle C=\angle C', \angle D=\angle D'$ ニシテ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

從ツテ $=\dfrac{AB+BC+CD+DA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}$ ナリ。

定理 相似多角形ノ周ノ比ハソノ對應邊ノ比ニ等シ。

問二 三角形ニ於ケル相似ト合同トノ關係如何。



定理 同邊數ノ正多角形ハ互ニ相似ナリ。

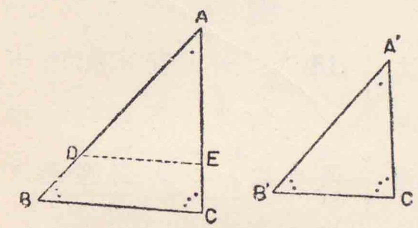
問題

17 梯形ノ底ニ平行ナル直線ヲ引キテ生ズル二ツノ梯形ハモトノ梯形ト相似ナルカ。

(17) 二隣邊ガ 7cm, 9cm ナル矩形ト相似ニシテ周圍ガ 88cm ナル矩形ノ面積ハ何程ナルカ。

57. 相似ナル三角形

定理 互ニ等角ナル二ツノ三角形ハ相似ナリ。



$\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$\angle A=\angle A', \angle B=\angle B'$

從ツテ $\angle C=\angle C'$

ナラバ

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

證明 $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネ $\triangle ADE$ ノ如キ位置ヲトラシメヨ。

$DE \parallel BC$ 　何故カ

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$ 　即チ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

又 $\angle B$ ト $\angle B'$ トヲ重ヌルコトニヨリ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

故ニ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

問一　一鋭角ノ相等シキ二ツノ直角三角形ハ互ニ相似ナルカ。

問二　頂角ノ相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ互ニ相似ナルカ。

問　題

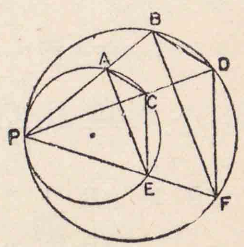
18　二ツノ互ニ相似ナル三角形ノ相對應スル垂線ノ比ハソノ對應邊ノ比ニ等シ。

19　三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ BC ト D, 外接圓ノ周ト E ニテ交レバ $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$

20　定線分 AB ヲ $1:3$ ニ內分又ハ外分スル點ヲ通ル任意ノ直線ヘ A, B ヨリ下セル垂線ノ比ハ $1:3$ ナリ。

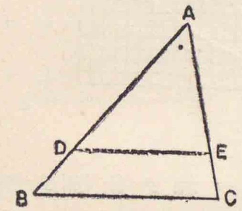
(18)　二ツノ互ニ相似ナル三角形ノ外接圓ノ半徑ノ比ハソノ對應邊ノ比ニ等シ。

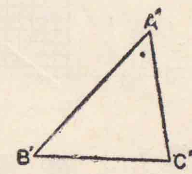
(19)　圖ニ於テ P ハ切點ナリ。$\triangle ACE \backsim \triangle BDF$



(20)　$\triangle ABC$ ノ三頂點 A, B, C ヨリ下セル垂線ノ比ガ $1:2:3$ ナル如キ直線ヲ引ケ。(解四)

定理　二ツノ三角形ノ一角ト其ノ角ヲ夾ム二邊ノ比トガ夫々相等シキトキハ兩三角形ハ相似ナリ。





$\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$\angle A = \angle A'$,

$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ ナラバ

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

證明　$\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネ $\triangle ADE$ ノ如キ位置ヲトラシメヨ。

D, E ハ AB, AC ヲ如何ナル比ニ分ツカ。

DE ト BC トハ如何。

$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$

$\therefore \ \triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$

問　題

21　二ツノ相似三角形ノ相對應スル中線ノ比ハ相似ノ比ニ等シ。

(21)　二ツノ相似多角形ノ相對應スル對角線ノ比ハ對應邊ノ比ニ等シ。

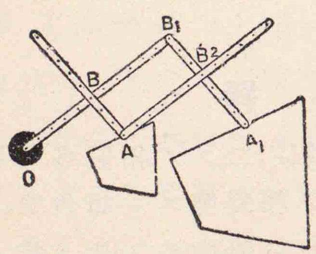
22 $y=2x$ ヲ圖示スレバ直線トナルコトヲ證セヨ。

23 伸縮模寫器(pantograph)ヲ圖ノ如クBAB_2B_1ガ平行四邊形ニシテ $\frac{OB}{B_1B_2}=\frac{OB_1}{B_1A_1}$ ノ如クセバ

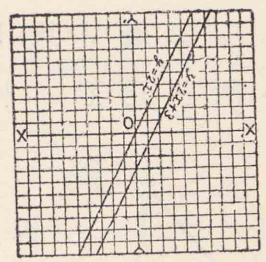
(1) O,A,A_1ハ一直線ヲナスコト。

(2) Aガ直線上ヲ動ケバA_1ハ直線ヲ書クコト。

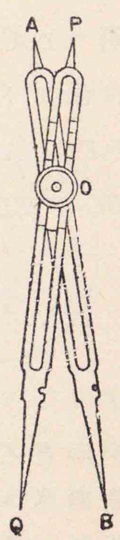
(3) A,A_1ノ書ク直線形ハ互ニ相似ナルコトヲ證セヨ。



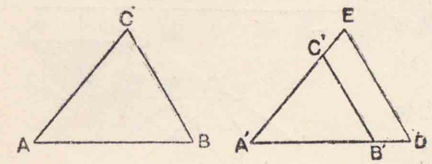
(**22**) $y=2x+3$ ヲ圖示スレバ直線トナルコトヲ證セヨ。



(**23**) 圖ノ如ク比例コンパスニ於テ $QO=3PO$ $BO=3AO$ ナラバBQハPAノ3倍ニ等シ。



定理 二ツノ三角形ノ三邊ガ夫々比例ヲナストキハ兩三角形ハ相似ナリ。



$\triangle ABC$ト$\triangle A'B'C'$トニ於テ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$$

ナラバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

證明

$A'D=AB$トシ,$\triangle A'B'C'$ト相似ナル$\triangle A'DE$ヲ作レバ

$$\frac{A'D}{A'B'}=\frac{DE}{B'C'}=\frac{EA'}{C'A'}$$

然ルニ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$

故ニ $DE=BC,\ EA'=CA$

$\therefore\ \triangle A'DE\equiv\triangle ABC$

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

問　題

24 二ツノ相似三角形ノ對應邊ヲ平行ニ置ケバ對應スル頂點ヲ結ブ直線ハ一點ニ會ス。

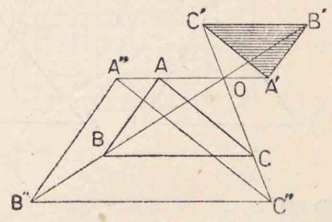
(**24**) 問題**24**ニ於テ相似多角形ナラバ如何。又合同圖形ナラバ如何。

注意 247頁ノ圖ヲ見ヨ。

25 三邊ガ $8cm$, $12cm$, $18cm$ ノ三角形アリ。是ト三角ト二邊トヲ等シクスル三角形ヲ作レ。(三通)

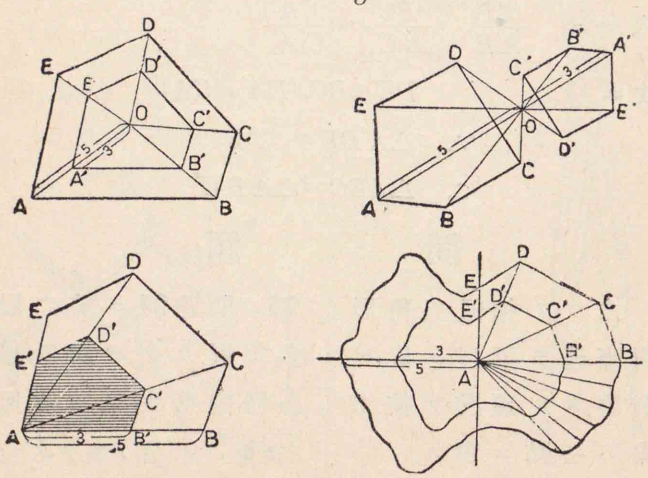
(25) 二隣邊ガ$27cm$, $18cm$ ノ矩形アリ。是ト相似ニシテ且一邊ガ此ノ矩形ノ一邊ト等シキ矩形ヲ作レ。(二通)

26 $\triangle ABC$ ノ各頂點ヲ任意ノ一點 O ト結ビOA, OB, OC ヲ相等シキ比ニ内分叉ハ外分スル點ヲ A', B', C' トセバ
$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$〔58頁(10)〕

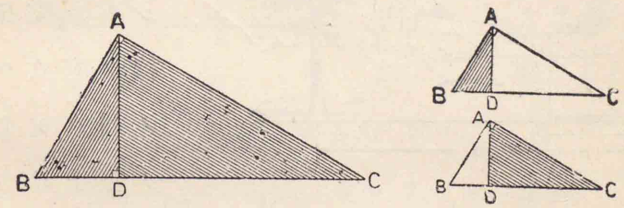


(26) 多角形$ABCDE$ト相似ニシテ對應邊ガ$\frac{3}{5}$ナル多角形ヲ作レ。

圖ハ直線形及ビ曲線形ノ$\frac{3}{5}$ノ縮圖ヲ示ス。



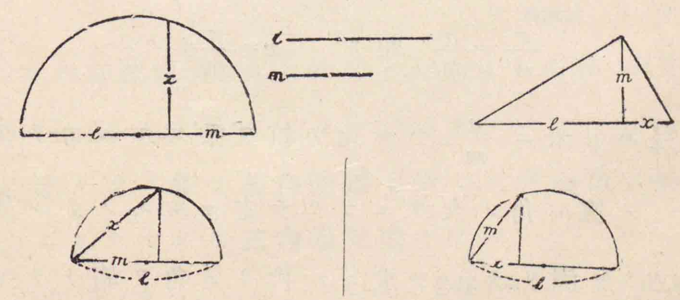
定理 直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ニ垂線ヲ下ストキハ垂線ハ斜邊ノ分ノ比例中項ニシテ直角ヲ夾ム邊ハ夫々之ニ隣レル斜邊ノ分ト斜邊トノ比例中項ナリ。



問題

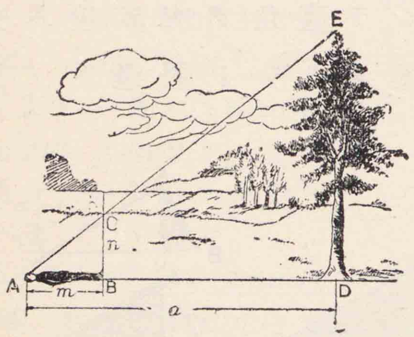
27 二線分 l,m ノ比例中項ヲ作圖ニヨリテ求メヨ。

(27) 二線分 l,m ノ第三比例項ヲ作圖ニヨリテ求メヨ。



58. 三角函數

問一 日ノ照リテ影ノアルトキ立木ノ高サヲ測ル方法如何。



今地上ニ直立セル立木ノ高サDEヲ測ラントシ,點Bニ棒ヲ直立シ,圖ノ如クシテ木ノ頂上Eヲ見通シ,直線AEト棒トノ交ル點Cヲ求メAB,BC,ADヲ測リ夫々m米,n米,d米アリタリトスレバ

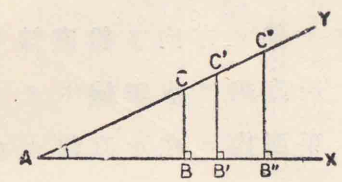
$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ ナル故

DEヲx米トセバ

$$\frac{x}{d}=\frac{n}{m} \quad 即チ \quad x=\frac{n}{m}d$$

是ハd米ニ$\frac{n}{m}$ナル比ノ値ヲ乗ズルニアリテ$\frac{n}{m}$ノ値ハ角ノ大サニヨリテ定マルモノナル故AB,BCヲ測リテm,nヲ求ムル代リニ角ヲ測リテモ

可ナリ。此ノ場合ニハ角ニ應ズル$\frac{n}{m}$ノ値ヲ知ラザルベカラズ。



$\angle A$ノ一邊AX上ノ任意ノ點B,B',B''ニ垂線ヲ立テAYトノ交點ヲC,C',C''トセバ $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \backsim \triangle AB''C''$

故ニ $\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B''C''}{AC''}$ コレヲ$\angle A$ノ**正弦**ト云ヒ **$sinA$** ト書ク。

$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB''}{AC''}$ コレヲ$\angle A$ノ**餘弦**ト云ヒ **$cosA$** ト書ク。

$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}$ コレヲ$\angle A$ノ**正切**ト云ヒ **$tanA$** ト書ク。

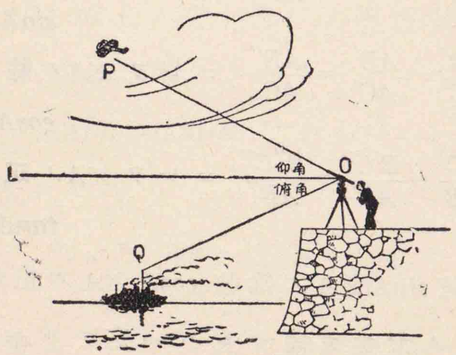
$\angle A$ノ正弦$sinA$,$\angle A$ノ餘弦$cosA$,$\angle A$ノ正切$tanA$ノ値ハ$\angle A$ノ大サガ定マレバ一定ナルモノニシテ是等ノ比ノ値ヲ**三角函數**ト云ヒ,三角函數ノ値ヲ表ニセルモノヲ**三角函數表**ト云フ。

---

sin. cos. tan ハ *sine, cosine, tangent.* ノ略ナリ。

次ノ頁ニ掲ゲタル三角函數表ハ0°ヨリ90°ニ至ル各度毎ノ正弦,餘弦,正切ヲ表ハスモノニシテ,小數第三位未滿ヲ四捨五入セルモノナリ。

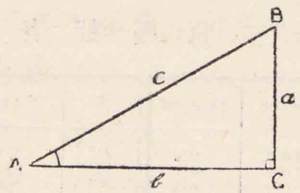
重錘ヲ吊シタル絲ノ方向ヲ**鉛直線**トイヒ,鉛直線ニ垂直ナル直線ヲ**水平線**トイフ。又鉛直線ヲ含ム平面內ニ在ル直線ガ水平面ノ上方ニ水平線トナス角ヲ**仰角**,下方ニ水平線トナス角ヲ**俯角**トイフ。



三角函數表

000

角	Sine	Cosine	Tangent	角	Sine	Cosine	Tangent
0°	.000	1.000	.000	45°	.707	.707	1.000
1°	.017	1.000	.017	46°	.719	.695	1.036
2°	.035	.999	.035	47°	.731	.682	1.072
3°	.052	.999	.052	48°	.743	.669	1.111
4°	.070	.998	.070	49°	.755	.656	1.150
5°	.087	.996	.087	50°	.766	.643	1.192
6°	.105	.995	.105	51°	.777	.629	1.235
7°	.122	.993	.123	52°	.788	.616	1.280
8°	.139	.990	.141	53°	.799	.602	1.327
9°	.156	.988	.158	54°	.809	.588	1.376
10°	.174	.985	.176	55°	.819	.574	1.428
11°	.191	.982	.194	56°	.829	.559	1.483
12°	.208	.978	.213	57°	.839	.545	1.540
13°	.225	.974	.231	58°	.848	.530	1.600
14°	.242	.970	.249	59°	.857	.515	1.664
15°	.259	.966	.268	60°	.866	.500	1.732
16°	.276	.961	.287	61°	.875	.485	1.804
17°	.292	.956	.306	62°	.883	.469	1.881
18°	.309	.951	.325	63°	.891	.454	1.963
19°	.326	.946	.344	64°	.899	.438	2.050
20°	.342	.940	.364	65°	.906	.423	2.145
21°	.358	.934	.384	66°	.914	.407	2.246
22°	.375	.927	.404	67°	.921	.391	2.356
23°	.391	.921	.424	68°	.927	.375	2.475
24°	.407	.914	.445	69°	.934	.358	2.605
25°	.423	.906	.466	70°	.940	.342	2.747
26°	.438	.899	.488	71°	.946	.326	2.904
27°	.454	.891	.510	72°	.951	.309	3.078
28°	.469	.883	.532	73°	.956	.292	3.271
29°	.485	.875	.554	74°	.961	.276	3.487
30°	.500	.866	.577	75°	.966	.259	3.732
31°	.515	.857	.601	76°	.970	.242	4.011
32°	.530	.848	.625	77°	.974	.225	4.331
33°	.545	.839	.649	78°	.978	.208	4.705
34°	.559	.829	.675	79°	.982	.191	5.145
35°	.574	.819	.700	80°	.985	.174	5.671
36°	.588	.809	.727	81°	.988	.156	6.314
37°	.602	.799	.754	82°	.990	.139	7.115
38°	.616	.788	.781	83°	.993	.122	8.144
39°	.629	.777	.810	84°	.995	.105	9.514
40°	.643	.766	.839	85°	.996	.087	11.430
41°	.656	.755	.869	86°	.998	.070	14.301
42°	.669	.743	.900	87°	.999	.052	19.081
43°	.682	.731	.933	88°	.999	.035	28.636
44°	.695	.719	.966	89°	1.000	.017	57.290
45°	.707	.707	1.000	90°	1.000	.000	—



直角三角形 ABC ニ於テ三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ a, b, c ニテ表ハセバ

$$\frac{a}{c}=\sin A \qquad \therefore\ a=c\sin A$$

$$\frac{b}{c}=\cos A \qquad \therefore\ b=c\cos A$$

$$\frac{a}{b}=\tan A \qquad a=b\tan A$$

故ニ直角三角形ニ於テハ一鋭角ト一邊トヲ知レバ三角函數表ニヨリテ他ノ二邊ノ長サヲ計算スルコトヲ得。

例ヘバ256頁ノ圖ニ於テ $d=24$ 米, $\angle A=38°$ ナラバ

$$x=24\tan 38°$$
$$=24\times 0.781$$
$$=18.744$$

即チ　立木ノ高サハ約18.7米ナリ。

問　　題

28 斜邊ガ15cm,一鋭角ガ63°ナル直角三角形ノ二邊如何。

29 正弦ガ $\frac{3}{5}$ ナル角ヲ畫ケ。又此ノ角ハ約何度ナルカ。

30 崖ノ基礎ヨリ30米離レタル處ニテ崖上ヲ見タルニ仰角30°アリタリ。崖ノ高サ如何。

31 300米ノ糸ヲ以テ凧ヲ揚ゲタルニ糸ハ水平線ト35°ノ角ヲナセリトイフ。糸ハ一直線ヲナスモノト假定シテ凧ノ地上ヨリノ垂直ノ高サヲ計算セヨ。

32 半徑2.5糎ナル圓ニ内接スル正十五邊形ノ周及ビ面積ヲ計算セヨ。

(28) 直角三角形ノ一鋭角ガ27°,直角ヲ夾ム一邊ガ26cmナルトキ他ノ邊ヲ求ム。(二通)

(29) $\tan A=\frac{4}{7}$ ナル $\angle A$ ノ作圖ヲナセ。$\angle A$ ハ約何度カ。

(30) 直立セル樹木ノ根本ヨリ10米離レタル處ニテ樹ノ上端ヲ見タルニ仰角60°アリタリ。樹木ノ高サ何程ナルカ。

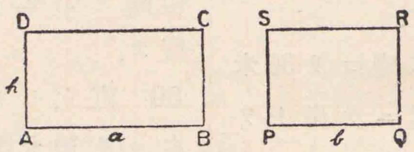
(31) 直圓錐形ヲナス山ノ麓ヨリ山上マデ25°ノ角ヲナシテ登ル長サ250米ナル一直線ノ道アリ。此ノ山ノ高サ及ビ山麓ノ周圍何程ナルカ。

(32) 半徑 a 糎ナル圓ニ外接スル正十二邊形ノ周如何。

第三章 面積ノ比

59. 平行四邊形及三角形ノ面積ノ比

定理 二ツノ等高(底)ナル矩形ノ面積ノ比ハソノ底(高サ)ノ比ニ等シ。



二ツノ矩形 AC, PR ガ等高ナリトスレバ

$$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{AB}{PQ} \quad \text{ナルベシ。}$$

證明 矩形ノ高サ AD 及ビ底邊 AB, PQ ヲ或單位ニテ測リタル數ヲ h, a, b トスレバ $\square AC, \square PR$ ノ中ニアル單位面積ノ數ハ ah, bh ナリ。

故ニ $$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{ah}{bh}=\frac{a}{b}$$

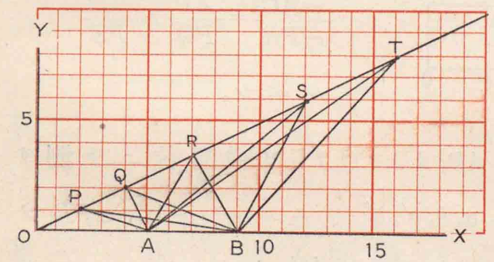
然ルニ $\frac{c}{b}$ ハ $\frac{AB}{PQ}$ ニ等シ。

故ニ $$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{AB}{PQ}$$

上ノ定理ヲ「等高(底)ナル矩形ノ面積ハ底(高サ)ニ比例ス」トイフコトヲ得。

系一 二ツノ等底ナル矩形ノ面積ハ高サニ比例ス。

系二 二ツノ等高(等底)ナル平行四邊形又ハ三角形ノ面積ハソノ底(高サ)ニ比例ス。



圖ニ於テ三角形ノ底邊ヲ4トシ x 軸ニ面積ヲ, y 軸ニ高サヲトレバ $x=2y$ 即チ $x \propto y$

問題

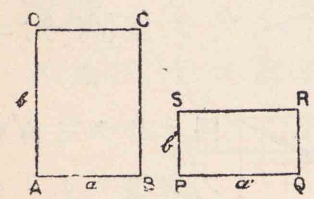
33 矩形 $ABCD$ 內ノ一點 O ヲ通リ二邊ニ平行ナル直線ヲ引ケバ
$\square AO : \square BO = \square DO : \square CO$

34 AD ガ $\triangle ABC$ ノ底ト D ニ於テ交ル。AD 上ニ一點 P ヲトレバ
$\triangle APB : \triangle APC = BD : CD$

(33) 四邊形ノ對角線ハ之ヲ四ツノ比例ヲナス三角形ニ分ツ。

(34) AD, BC ガ平行ナル梯形ノ對角線ノ交點ヲ O トスレバ, $\triangle AOB$ $\triangle COD$ ハ他ノ二ツノ三角形ノ比例中項ナリ。〔237頁系一〕

定理 二ツノ矩形ノ比ハソノ底ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シ。



$ABCD, PQRS$ ヲ矩形トスレバ

$$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{AB}{PQ}\times\frac{AD}{PS}$$

ナルベシ。

證明 矩形ノ邊 AB, AD, PQ, PS ヲ或單位ニテ測リタル數ヲ夫々 a, b, a', b' トスレバ $\square AC, \square PR$ ノ單位面積ノ數ハ夫々 $ab, a'b'$ ナリ。

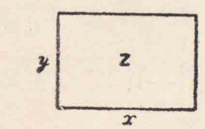
故ニ
$$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{ab}{a'b'}$$
$$=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}$$

然ルニ $\frac{a}{a'}=\frac{AB}{PQ}$　　$\frac{b}{b'}=\frac{AD}{PS}$

$$\therefore \quad \frac{\square AC}{\square PR}=\frac{AB}{PQ}\times\frac{AD}{PS}$$

上ノ定理ハ又次ノ如ク云フコトヲ得。

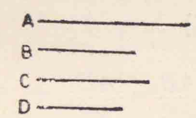
「矩形ノ面積ハソノ底ト高サトニ複比例ス。」



矩形ノ二邊ノ長サヲ x 糎, y 糎, 面積ヲ z 平方糎トスレバ

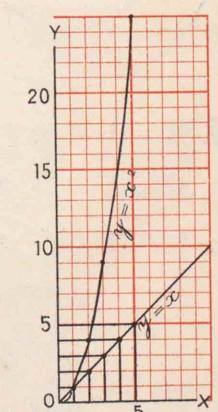
$z=xy$ 即チ $z\propto xy$ ナリ。

系一 A, B, C, D ガ線分ナレバ $\frac{A}{B}$ ト $\frac{C}{D}$



トノ複比ハ $\frac{\square A.C}{\square B.D}$

系二 平行四邊形ノ面積ハソノ底ト高サトニ複比例ス。



系三 正方形ノ面積ハソノ一邊ノ二乘ニ比例ス。

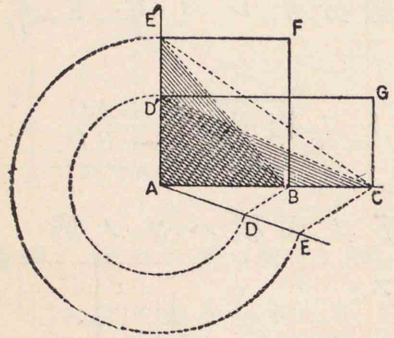
系四 三角形ノ面積ハソノ底ト高サトニ複比例ス。

問題

35 甲乙二ツノ平行四邊形ノ高サノ比ガ 3:5, 底ノ比ガ 8:9 ニシテ甲ノ面積ハ168平方糎ナリト。乙ノ面積如何。

(35) 對角線ガ $a$cm, $b$cm ナル二ツノ正方形ノ面積ノ比如何。

定理　四ツノ線分ガ比例ヲナストキハソノ内項ノ包ム矩形ハ外項ノ包ム矩形ニ等シ。



AB, AC, AD, AE ハ四線分ニシテ

$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$ ナラバ

$\square AB.AE=\square AC.AD$

ナルベシ。

證明　A ニ於テ AB ニ垂線ヲ立テ,AD, AE ニ等シク AD', AE' ヲトリ,AB, AE' 及 AC, AD' ノ包ム矩形ヲ作リ, BD', CE' ヲ結ベバ $BD' \parallel CE'$ 何故カ。

$\triangle BE'D'$ ト $\triangle D'CB$ トハ如何。

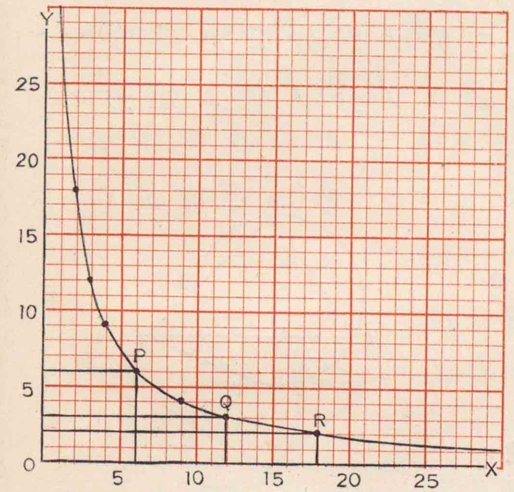
$\triangle BE'A$ ト $\triangle AD'C$ トハ如何。

$\square AF$ ト $\square AG$ トハ如何。

$\square AB.AE=\square AC.AD$

注意　本定理ノ逆モ此ノ證明ヲ逆ニタドリテ證スルコトヲ得。又本定理及ビソノ逆ヲ線分ノ比ヲ數ノ比ニ置換ヘテ證明スルコトヲ得。

系一　等積ナル矩形ノ底ト高サトハ反比例ス。



矩形ノ面積ヲ a 平方糎,底ヲ x 糎,高サヲ y 糎トスレバ

$xy=a$

$x \propto \frac{1}{y}$ ナリ。

系二　二ツノ線分ノ包ム矩形ハソノ比例中項ノ上ノ正方形ニ等シ。

問　題

36　a ヲ與線分ノ長サトシ,$a\sqrt{6}$ ノ線分ヲ書ケ。

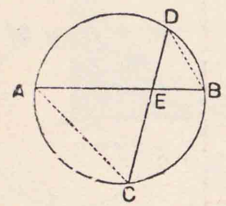
37　$\square ABCD$ ノ A ヲ通ル直線ト對角線 BD, 邊 BC, DC 又ハ延長ト E, F, G ニテ交レバ $EA^2=EF.EG$

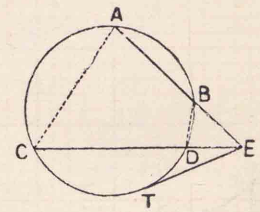
(36)　a ヲ與線分ノ長サトシ,$a\sqrt{\frac{5}{7}}$ ノ線分ヲ書ケ。

(37)　與三角形ト等積ニシテ高サト頂角トガ與ヘラレタル三角形ヲ作レ。　**注意**　先ヅ底邊ヲ求メヨ。

60. 圓ノ弦ノ分ノ包ム矩形

定理 一定點ニ於テ內分又ハ外分セラレタル弦ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ常ニ一定ナリ。





圓ノ任意ノ二弦

AB, CD 又ハソノ延長ガ定點 E ニ於テ交レバ

$$AE.EB = CE.ED$$

證明 $\triangle AEC$ ト $\triangle DEB$ トハ如何。

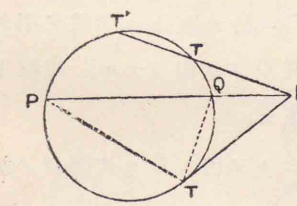
$$\frac{AE}{ED} = \frac{CE}{EB}$$

故ニ $AE.EB = CE.ED$

系一 外分セラレタル弦ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ其ノ分點ヨリ引ケル切線ノ上ノ正方形ニ等シ。

$$ET^2 = EA.EB = EC.ED$$

系二 圓外ノ一點トソノ圓周上ノ一點トヲ結ブ線分ノ上ノ正方形ガ此ノ點ニテ外分セラルル弦ノ二ツノ分ノ包ム矩形ニ等シキトキハ其ノ線分ハソノ圓ニ切ス。



直接法 $\triangle ETP \backsim \triangle ETQ$

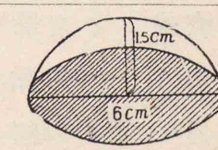
間接法 ET ガ切線ナラズシテ圓ト他ノ點 T' ニテ交ルトセバ $ET^2 = ET.ET'$ 、

問 題

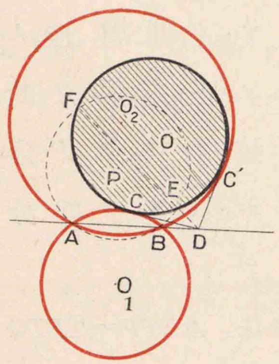
38 直徑 12cm ナル圓ニ於ケル長サ 9cm ノ弦ノ三等分點ハ中心ヨリ何程ノ距離ニアルカ。

(38)* 弦ガ 6cm ナル圓弧ノ中點ト弦ノ中點トノ距離ガ 1.5cm ナル圓ノ半徑如何。

* 「レンズ」ノ曲率半徑ヲ計算スルニハ此ノ問題ノ如キ計算ニヨルナリ。



39 與圓ニ切シ與圓外ノ二與點ヲ通ル圓ヲ書ケ。



解析 與圓ヲO,二與點ヲA,Bトス。假ニ解ヲ得タリトシ,之ヲ圓O_1,圓O_2,ソノ切點ヲC,C'トス。先ヅ圓O_1ニツイテ研究スベシ。

1 切點Cヲ知レバ作圖ヲナスコトヲ得。

點Cニ於テ圓O_1ニ切線ヲ引ケバ圓Oノ切線トナル。切線トA,Bヲ結ブ直線トノ交點ヲDトス。

2 點Dヲ知レバ點Cヲ求ムルコトヲ得。Dヨリ圓Oノ割線DEFヲ引ケバ

$$DE.DF=DC^2=DA.DB$$

$ABEF$ヲ通リテ圓ヲ書クコトヲ得。

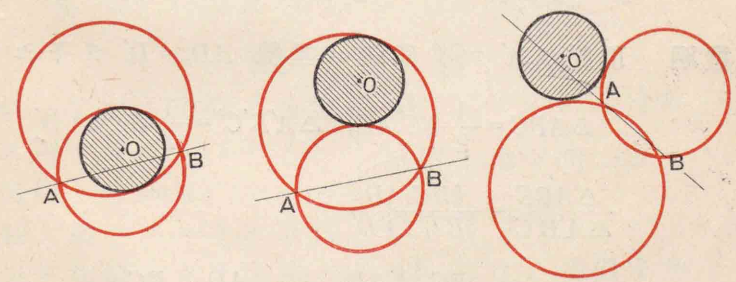
3 A,Bヲ通リ圓Oト交ル圓ヲ書クコトヲ得バ點D,從ツテ點Cヲ求ムルコトヲ得。

作圖 A,B二點ヲ通リ圓Oト交ル任意ノ圓ヲ書キソノ交點ヲE,Fトシ, FEノ延長トA,Bヲ通ル直線トノ交點ヲDトス。Dヨリ圓Oニ切線ヲ引キソノ切點ヲC,C'トス。A,B,C及ビA,B,C'ヲ通ル二ツノ圓ハ求ムル圓ナリ。

證明 圓ABCハ圓Oト外切,圓ABC'ハ圓Oト內切スルコトヲ云ヘ。

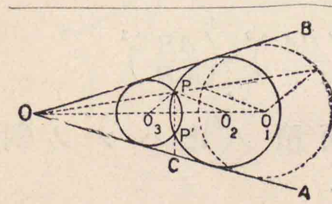
吟味 EFガABト平行ナラバEF,ABハ共ニP圓ノ平行弦ナル故中心OトABノ中點トヲ結ビ付クル直線又ハソノ延長ト圓Oトノ交點ガ切點C,C'ナリ。故ニ一般ニ解二ツアリ。

注意 ABガ圓Oト交ラザレバ內切,外切各一圓
ABガ圓Oト交レバ共ニ內切スル二圓
ABノ延長ガ圓Oト交レバ共ニ外切スル二圓アリ。



問題

40 與直線ニ切シ,ソノ同側ニ在ル二與點ヲ通ル圓ヲ書ケ。

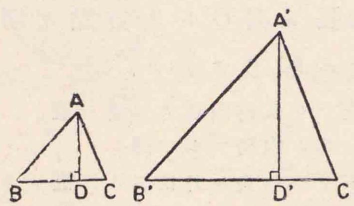


(40) 與角內ノ與點ヲ通リソノ角ノ二邊ニ切スル圓ヲ書ケ。

圖ハ二樣ノ解法ヲ示ス。

61. 相似形ノ面積ノ比

定理 相似三角形ノ面積ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ。



$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ ナラバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

證明 頂點A, A'ヨリ底邊ニ垂線$AD, A'D'$ヲ下セバ

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}BC.AD,\quad \triangle A'B'C'=\frac{1}{2}B'C'.A'D'$$

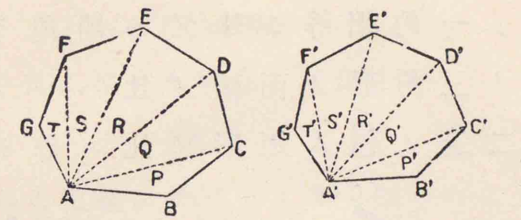
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}BC.AD}{\frac{1}{2}B'C'.A'D'}$$

$$=\frac{BC}{B'C'}\times\frac{AD}{A'D'}\qquad \frac{AD}{A'D'}=\frac{BC}{B'C'}$$

$$=\frac{BC}{B'C'}\times\frac{BC}{B'C'}$$

$$=\left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2=\left(\frac{CA}{C'A'}\right)^2=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

系 相似多角形ノ面積ノ比ハソノ對應邊ノ二乘比ニ等シ。



$$\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\frac{P}{P'}=\frac{Q}{Q'}=\cdots\cdots\cdots=\frac{P+Q+R+S+T}{P'+Q'+R'+S'+T'}$$

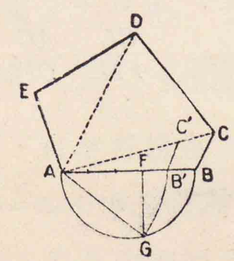
$$=\frac{\text{多角形}ABCDEFG}{\text{多角形}A'B'C'D'E'F'G'}$$

問 二ツノ同邊數ノ正多角形ノ面積ノ比如何。

問題

41 二ツノ相似多角形ノ周ノ比ハ3:4ナリ。面積ノ比如何。

42 與ヘラレタル五邊形ト相似ニシテ面積ノ$\frac{3}{5}$ナル五邊形ヲ作レ。

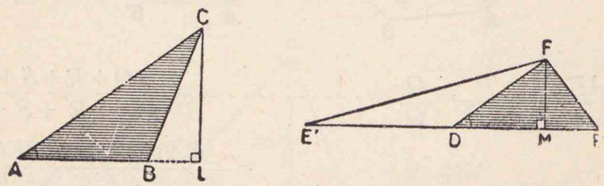


(41) 二ツノ正八邊形ノ面積ノ比ガ36:121ナリ。周ノ比如何。

(42) 二ツノ相似多角形アリ。ソノ對應スル一邊ハ5cmト7cmトナリ。此ノ兩多角形ノ和ナル面積ヲ有シ之ト相似ナル多角形ヲ作レ。

注意 $5^2+7^2=x^2$

定理 一角相等シキ(又ハ補角ヲナス)二ツノ三角形ノ面積ノ比ハソノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シ。



$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $\angle A=\angle D$ ナリトスレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB.AC}{DE.DF}$$

證明 頂點 C,F ヨリ底邊ニ垂線ヲ下シ之レヲ CL, FM トスレバ $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB.CL$, $\triangle DEF=\frac{1}{2}DE.FM$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{\frac{1}{2}AB.CL}{\frac{1}{2}DE.FM}$$

$$\triangle CAL\backsim\triangle FDM$$

$$=\frac{AB.CL}{DE.FM} \qquad \frac{CL}{FM}=\frac{AC}{DF}$$

$$=\frac{AB.AC}{DE.DF}$$

$\triangle DE'F$ ノ如ク $\angle E'DF$ ガ $\angle A$ ノ補角ナルトキハ ED ヲ延長シテ DE ヲ $E'D$ ニ等シクトレバ,

$$\triangle DE'F=\triangle DEF$$

故ニ一角ノ等シキ場合ト同様ナリ。

問題

43 一角相等シキ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハソノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シ。

44 ▱$ABCD$ ノ邊 AB ハ5糎, BC ハ8糎ナリ。AB,BC,CD,DA 上ニ順次ニ AE ヲ2糎, BF ヲ4.8糎, CG ヲ1糎, DH ヲ4糎ニトレバ四邊形 $EFGH$ ノ面積ハ▱$ABCD$ ノ幾分ナルカ。

注意 $\frac{\triangle AEH}{▱AC}=\frac{\triangle AEH}{2\triangle ABD}$

45 與平行四邊形ト等積ニシテ與頂角ヲ有スル二等邊三角形ヲ作レ。

(43) 圓 O 外ノ點 P ヨリ切線 PA,PB ヲ引ケバ $\triangle PAB:\triangle AOB=PA^2:OA^2$

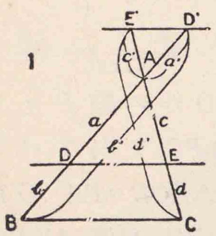
(44) $\triangle ABC$ ノ邊 AB,BC,CA 上ニ二點ヅツ D,D'; E,E'; F,F' ヲトリ $AD:DB=BE:EC=CF:FA=1:2$, $AD':D'B=BE':E'C=CF':F'A=2:1$ ナラシムレバ $\triangle DEF=\triangle D'E'F'$

(45) 三角形 PQR ニ於テ $PQ=PR=10cm$, $QR=8cm$ ナリ。底邊 QR ヲ $1:3$ ニ分ツ點 S ト PQ,PR 上ニ P ヨリ夫々 $4cm,7cm$ ニトリタル點 T,V トヲ結ビテ分タルル三ツノ部分ノ面積ノ比如何。

摘 要

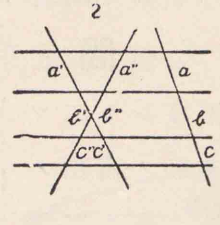
(1) 比 例 線

1



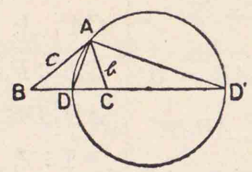
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

2



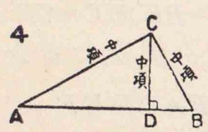
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

3

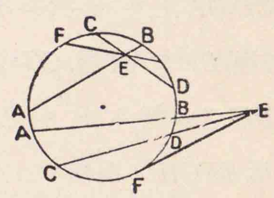


$$\frac{c}{b}=\frac{BD}{DC}=\frac{BD'}{D'C}$$

4

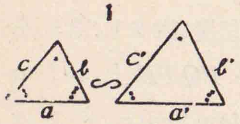


5

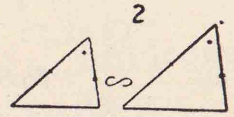


(2) 相 似 形

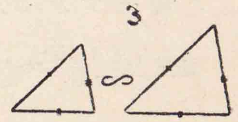
1



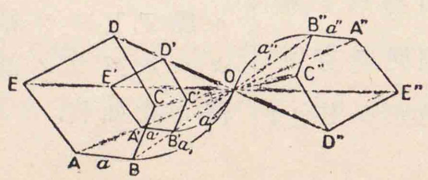
2



3

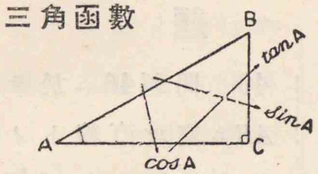


4



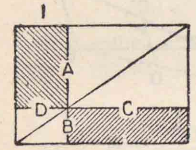
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

(3) 三角函數

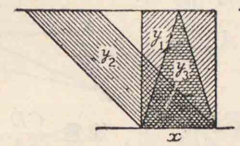


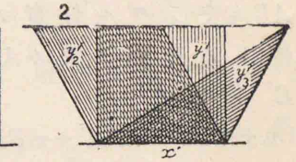
(4) 面積ノ比

1



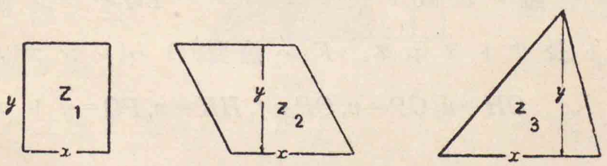
2



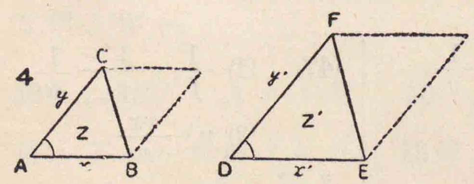


$$\frac{x}{x'}=\frac{y_1}{y'_1}=\frac{y_2}{y'_2}=\frac{y_3}{y'_3},\quad y_1\propto x\quad y_2\propto x\quad y_3\propto x$$

3 $z\propto xy,$ $z_2\propto xy$ $z_3\propto xy$

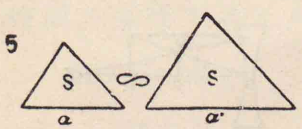


4

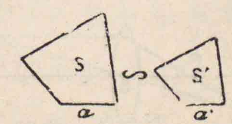


$$\frac{z}{z'}=\frac{xy}{x'y'}$$

5



$$\frac{s}{s'}=\frac{a^2}{a'^2}$$



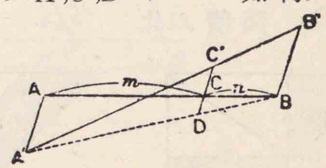
雜 題

46 線分ABヲ$m:n$ノ如ク内分セル點ヲCトシA,C,Bヲ通リテ引ケル平行ナル三直線ト線分ABニ交ラザル任意ノ直線トノ交點ヲ夫々A',C',B'トセバ

$(m+n)CC'=nAA'+mBB'$

〔276頁(2)〕

(46) 問題**46**ニ於テ線分ABニ交ル直線トノ交點ヲA',C',B'トセバ如何。



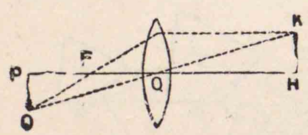
注意 $\frac{CD}{AA'}$, $\frac{DC'}{BB'}$ヲ考ヘヨ。

下圖ハ「レンズ」ニヨリテ像ヲ生ズル場合ヲ示ス。HKヲ物體ノ位置ト長サトスレバPQハソノ像ノ位置ト長サトヲ示ス。Fハ焦點,Oハ「レンズ」ノ中心ナリ。$OH=u, OP=v, OF=f, HK=x, PQ=y$トスレバ,

47 (1) $\frac{1}{f}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$

(2) $y=\frac{xf}{u-f}$

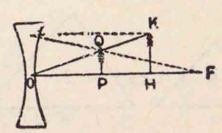
ヲ證セヨ。



(47) (1) $\frac{1}{f}=\frac{1}{v}-\frac{1}{u}$

(2) $y=\frac{vx}{u}$

ヲ證セヨ。

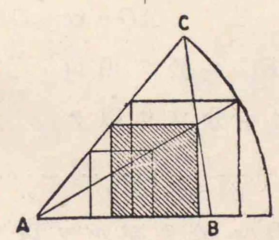


48 二ツノ圓ノ平行ナル半徑ノ端ヲ通ル直線ハ常ニコノ二圓ノ中心線上ノ同一點ヲ通ル。

〔276頁(2)〕

(48) 二圓ノ中心ヲO,O'トシ内外共通切線ノ交點ヲ夫々P,QトスレバP,Qハ中心距離OO'ヲ調和ニ分ツ。〔276頁(2)〕

49 與ヘラレタル三角形内ニ一邊ガソノ三角形ノ一邊ト重リ他ノ二頂點ガ夫々他ノ二邊ノ上ニアル正方形ヲ作レ。



(49) 扇形ニ正方形ヲ内接セヨ。但シ一邊ハ半徑ト重リ頂點ハ弧ノ上ニアル如クセヨ。

50 $\triangle ABC$ノAヨリ對邊ヘ下セル垂線ヲh,外接圓ノ直徑ヲdトセバ

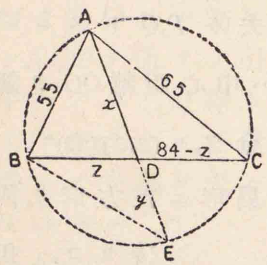
$AB.AC=hd$

〔276頁(2)〕

(50) ABヲ弦トセル與圓周上ニ點Pヲ求メAP,BPノ包ム矩形ヲ與面積L^2ナラシメヨ。

注意 問題50ニヨル。

51 三邊ガ $84cm, 65cm, 55cm$ ナル三角形ノ最大角ノ二等分線ノ長サ如何。



解 $\triangle ABC$ ノ $BC=84\ m$, $CA=65cm$, $AB=55cm$ トスレバ最大角ハ $\angle A$ ナリ。

ソノ二等分線ヲ AD トス。

$AD=xcm, DE=ycm, BD=zcm$ トスレバ $\triangle ABC$ ニ於テ頂角ノ二等分線ハ底ヲ他ノ二邊ノ比ニ分ツヲ以テ

$$\frac{55}{65}=\frac{z}{84-z}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 AE, BC ガ D ニ於テ交ルヲ以テ

$$xy=z(84-z)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\angle BAD=\angle CAD,\ \angle C=\angle E$ ナル故 $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$

ナルヲ以テ $\dfrac{55}{x+y}=\dfrac{x}{65}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1), (2), (3) ヲ解クニ

(1) ヨリ $\qquad z=\dfrac{55\times 84}{120}=\dfrac{11\times 7}{2}=\dfrac{77}{2}$

(3) ヨリ $\qquad x^2+xy=55\times 65$

(2) ヲ入レテ $\qquad x^2+z(84-z)=55\times 65$

z ヲ入レテ $\qquad x^2=55\times 65-\dfrac{77}{2}\times\left(84-\dfrac{77}{2}\right)$

$$x^2=\frac{7293}{4}$$

$$x=\pm\frac{85.4}{2}\text{弱}=\pm 42.7\text{弱}$$

正ノ値ヲトリ $\qquad AD=42.7cm$弱

52 $\triangle ABC$ ノ $a=16cm$, $b=12cm$, $c=20cm$ ナリ。$\angle A$ ノ二等分線ノ長サヲ求ム。

53 梯形ノ上底 $5cm$, 下底 $15cm$. 高サ $8cm$ ナリ。對角線ノ交點ヲ通リテ底ニ平行ニ引ケル直線ノ平行ナラザル邊ノ間ニ在ル部分ノ長サヲ計算セヨ。又平行ナラザル邊ヲ延長シテ小ナル底ノ上ニ生ズル三角形ノ高サ如何。

54 二邊 a,b トソノ夾角ノ二等分線トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

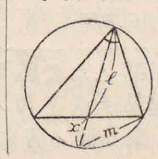
注意 276頁(1)ノ3
求ムル三角形ノ頂角ノ二等分線ト底トノ交點ヨリ AC ニ平行線ヲ引キテ解析ヲナセ。

(**52**) $\triangle ABC$ ノ三邊ヲ acm, bcm, ccm, トスレバ $\angle A$ ノ二等分線ハ

$\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$ 糎

(**53**) 梯形 $ABCD$ ノ上底 AD ハ 7 米, 下底 BC ハ 12 米ナリ。邊 AB 上ニ在リテ $AE:EB$ ノ比ガ $2:3$ ノ如キ點 E ヲ通リテ底ニ平行ニ引ケル直線ガ平行ナラザル二邊ノ間ニアル線分ノ長サ如何。

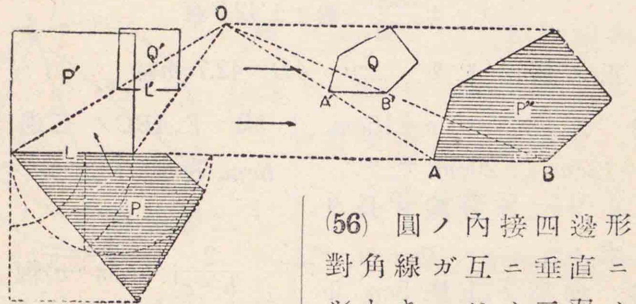
(**54**) 頂角, 底邊, 頂角ノ二等分線ヲ知リテ三角形ヲ作レ。



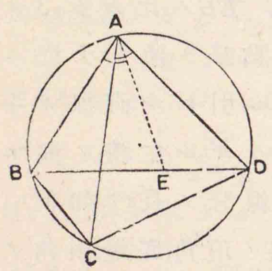
注意 $(l+x)x=m^2$

55　與五邊形ト相似ニシテ他ノ與四邊形ト等積ナル多角形ヲ作レ。

(55)　與正方形ヲ正六邊形ニ變ゼヨ。



56　圓ニ內接スル四邊形ノ二双ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハソノ兩對角線ノ包ム矩形ニ等シ。



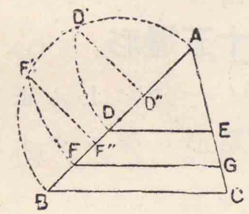
注意　$\triangle BAE \backsim \triangle CAD$
$AB.CD = AC.BE$

(56)　圓ノ內接四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ニ交ルトキハソノ二双ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ此ノ四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シ。

問題56ヲ Ptolemy ノ定理ト云フ。

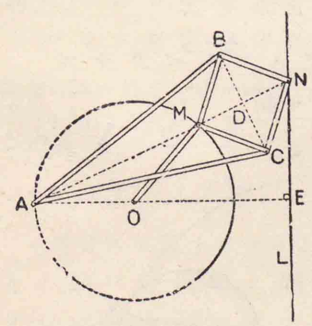
「**トレミー**」ハ二世紀ニ於ケル「ニヂプト」ノ偉大ナル天文學者ニシテ又數學者ナリ。彼ハ幾分地球ノ自轉ヲ感知セザルニハアラザルモ宇宙ノ中心ハ地球ナリト考ヘ太陽ト惑星トハ地球ヲ中心トシテ廻轉セリト說ケリ「コペルニカス」(1473—1543) 出デテ地動說ヲ唱フルニ到ルマデ千餘年間ノ天文科學界ノ權威ヲナセリ。彼ハ又數學ニ於ケル發明發見モ多ク角ノ單位ノ度分秒,圓周率ノ値トシテノ $3\frac{17}{120}$ (=3.1416) 等モ彼ノ著書中ニ初メテ見ラルル所ナリ。

57　與三角形ノ面積ヲ底ニ平行ナル直線ニヨリテ三等分セヨ。

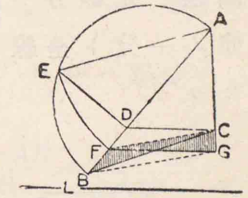


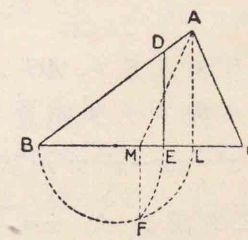
58　與點 A ヨリ與直線 L ニ引ケル任意ノ線分 AN ヲ $AM.AN = k^2$ ナル樣ニ分ツ點 M ノ軌跡如何。

注意　A ヨリ L ニ下セル垂線上ニ特殊點ヲトリテ考ヘヨ。



(57)　與三角形ヲソノ面積及ビ二邊ノ位置ヲ變ヘズシテ底邊ヲ與直線ニ平行ナル如クセヨ。
又三角形ノ面積ヲ底ノ垂線ニヨリテ二等分セヨ。





(58)　一直線上ニ三點 A, B, C ガ此ノ順序ニ在リ。A, B ヲ通ル圓ニ C ヨリ引ケル切線ノ切點ノ軌跡如何。

圖ハ「ポーシエリエー」ノ連節機ヲ示スモノナリ。$AB = AC$, $AO = MO$, $MB = BN = NC = CM$ ニシテ幾ツカノ棒ヲ頂點ニ於テ自由ニ動キ得ル如ク連節セルモノニシテ上ノ軌跡ヲ實際ニ示スモノ卽チ直線ヲ畫ク器具ナリ。

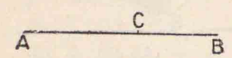
$$AM.AN = (AD + MD)(AD - MD) = AD^2 - MD^2 = AB^2 - MB^2 = k^2$$

第七篇

圓周及圓ノ面積ノ計算

62. 圓ノ内接正十邊形正十五邊形

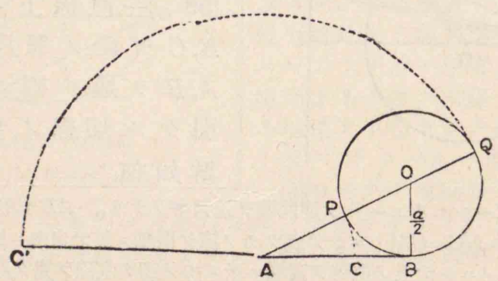
作圖題　定線分ヲ内分シ其ノ一分ノ上ノ正方形ガ他ノ一分ト全線トノ包ム矩形ニ等シクナル如クセヨ。



解析　代數ヲ用ヒテ,解析センニ,定線分ABノ長サヲa糎トシ,點Cニ於テ求ムル如ク分チタリトシ,ACノ長サヲx糎トスレバBCハ$(a-x)$糎トナリ,題意ヲ滿足スルニハ

$x^2=a(a-x)$ ナル式ガ成立タザルベカラズ。

之ヲ解ケバ　$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=-\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$



作圖　Bニ於テABニ垂線ヲ立テ$BO=\dfrac{AB}{2}$ヲ半徑トシ,Oヲ中心トシテ圓ヲ畫キAOヲ結ベバAOハ$\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ニ相當ス。

AO及ビソノ延長ト圓トノ交點ヲ夫々P,QトセバAPハ$\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}-\dfrac{a}{2}\right)$ニ相當ス。

AB上ニAPニ等シクACヲトレバ點CハABヲ求ムル如ク分ツ。

證明　$\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AB}{AP}$　　$\dfrac{AQ-AB}{AB}=\dfrac{AB-AP}{AP}$

$\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{CB}{AP}$　　$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CB}{AC}$　$\therefore AC^2=AB.CB$

定義　定線分ヲ内分シソノ一分ノ上ノ正方形ガ他ノ一分ト全線トノ包ム矩形ニ等シクナル如クスルコトヲ定線分ヲ**中末比ニ分ツ**ト云フ。

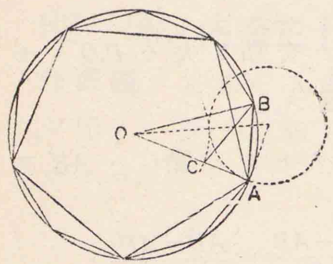
注意　圖ニ於テAQハ$\dfrac{a\sqrt{5}}{2}+\dfrac{a}{2}$ノ長サヲ表シ,$C'B$ハ$a+\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}+\dfrac{a}{2}\right)$ヲ表ス。$-\dfrac{a\sqrt{5}}{2}-\dfrac{a}{2}$ヲ$x^2=a(a-x)$ニ入ルレバ$\left(-\dfrac{a\sqrt{5}}{2}-\dfrac{a}{2}\right)^2=a\left\{a+\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}+\dfrac{a}{2}\right)\right\}$トナリテ滿足ス。故ニ$C'$ハ$AB$ヲ「中末比ニ外分スル」點トイフコトヲ得,

上ノ如ク幾何學ノ問題ヲ解析スルニ**代數學**ヲ用フレバ便ナルコトアリ。

1　二邊ノ差ガa糎,ソノ面積ガb^2平方糎ナル矩形ヲ作レ。

(1)　周ト面積トヲ與ヘテ矩形ヲ作レ。

作圖題　定圓ニ內接スル正十邊形及ビ正五邊形ヲ作レ。



解析　內接正十邊形ノ一邊ヲ AB トセバ中心角

$\angle AOB = \frac{2}{5}R.\llcorner$　(164 頁)

$\angle OAB$ ノ大サ如何。

BC ヲ $\angle OBA$ ノ二等分線トセバ OC, BC, AB ノ長サハ夫々如何。

$\triangle OAB$ ト $\triangle ABC$ トハ如何。

$\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{AC},\ \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{AC}$　$\therefore\ OA \cdot AC = OC^2$

即チ內接正十邊形ノ長サニ等シキ OC ハ OA ヲ中末比ニ分チタル長キ分ニ等シ。

又正五邊形ノ一邊ハ $\widehat{AB}$ ノ二倍ノ弧ニ對スル弦ニ等シ。

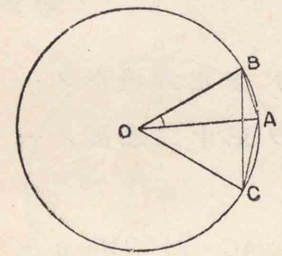
作圖,證明　生徒各自之ヲ試ミヨ。

問題

2　頂角ガ各底角ノ三倍ナル二等邊三角形ヲ作レ。

(2)　上圖ニ於テ CB ハ圓 OCB ノ內接正五邊形ノ一邊ナリ。

作圖題　定圓ニ內接スル正十五邊形ヲ作レ。



解析　AB ヲ正十五邊形ノ一邊トスレバ

$\angle AOB = \frac{4}{15}R.\llcorner = \frac{4}{6}R.\llcorner - \frac{4}{10}R.\llcorner$

故ニ　$\angle AOB$ ハ正六邊形ト正十邊形トノ各邊ガ中心ニ對スル角ノ差ナリ。

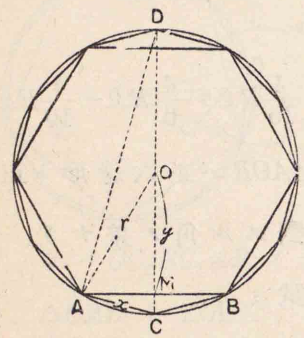
作圖,證明　生徒各自之ヲ試ミヨ。

問一　コレマデ學ビタルコトニテ作圖シ得ル圓ノ內接正多角形ハ何々カ。

或一ツノ圓ノ內接正多角形ヲ作圖シ得レバ角ヲ二等分スルコトヲ用ヒテ邊數ガ二倍ナル內接正多角形ヲ書クコトヲ得。故ニ以上ノ各章ニ於テ學ビ來リタル所ニヨリテ作圖シ得ル正多角形ヲ擧グレバ 3×2^n, 4×2^n, 5×2^n, 15×2^n ノ邊數ヲ有スル正多角形トナル。但シ n ハ 1 ヨリ始マル正ノ整數又ハ 0 ナリ。

63. 内接外接正多角形ノ邊長ノ計算

例題一 半徑 r ナル圓ニ内接スル正十二邊形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ。



解 AB ヲ正六邊形ノ一邊, AC ヲ正十二邊形ノ一邊トス。

$AB=r,\quad AC=x,\quad OM=y$ トス。

AO, AD ヲ結べ。

$\triangle CAD$ ハ直角三角形ナル故 $AC^2=CD.CM$

$$x^2=2r(r-y)$$

$$y^2=r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{3}{4}r^2,\qquad y=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$x^2=2r\left(r-\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)=r^2(2-\sqrt{3})$$

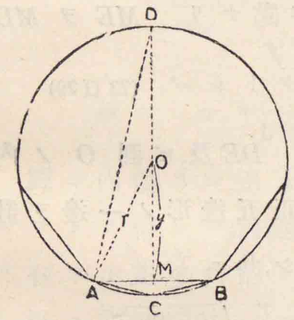
$$x=r\sqrt{2-\sqrt{3}}\quad=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}r$$

問　　題

3 圓($r=1$)ノ内接正十二邊形ノ周如何。

(3) 問題 **3** ニ於ケル正十二邊形ノ面積如何。

例題二 半徑 r ナル圓ノ内接正 n 邊形ノ一邊 a_n ヲ知リテ内接正 $2n$ 邊形ノ一邊 a_{2n} ヲ計算セヨ。又逆ニ a_{2n} ヲ知リテ a_n ヲ計算セヨ。



解 正 n 邊形ノ一邊 $AB=a_n$ ヲ知リテ正 $2n$ 邊形ノ一邊 $AC=a_{2n}$ ヲ求メントスルニ

$OM=y$ トスレバ

$$(a_{2n})^2=2r(r-y)$$

$$y=\sqrt{r^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-\frac{(a_n)^2}{4}}\quad\therefore (a_{2n})^2=2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{(a_n)^2}{4}}\right)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-(a_n)^2}}}$$

又逆ニ a_{2n} ヲ知リテ a_n ヲ計算センニ

$$AC.AD=AM.DC=2\triangle DAC$$

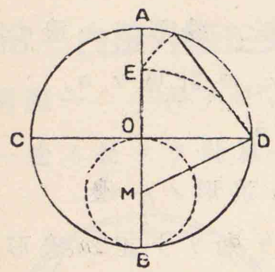
$$\therefore\quad a_{2n}\sqrt{4r^2-(a_{2n})^2}=\frac{a_n}{2}2r$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{a_{2n}\sqrt{4r^2-(a_{2n})^2}}{r}}$$

問　　題

4 $a_6=r$ ナルコトヲ知リテ a_3 及ビ a_{12} ヲ求ム。

(4) $a_4=r\sqrt{2}$ ナルコトヲ知リテ a_8 ヲ求ム。

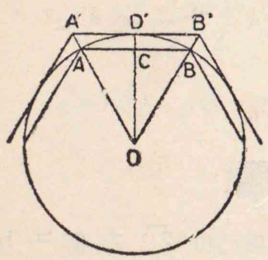


圖ニ於テ AOB ト COD トハ互ニ垂直ナル直徑ニシテ M ハ OB ノ中點ナリ。ME ヲ MD ニ等シクトレバ (73頁29)

5 OE ハ圓 O ノ內接正十邊形ノ一邊 $a_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$ ニ等シキコトヲ計算ニヨリテ示セ。

(5) DE 及ビ圓 O ノ內接正五邊形ノ一邊ヲ計算シ,共ニ $a_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ニ等シキコトヲ示セ。

例題三 圓ノ內接正 n 邊形ノ一邊 a_n ヲ知リテ外接正 n 邊形ノ一邊 a'_n ヲ計算セヨ。又 a'_n ヲ知リテ a_n ヲ計算セヨ。



解 AB ヲ內接正 n 邊形ノ一邊 a_n トシ,O ヨリ AB ヘ垂線 OC ヲ下シ,之ガ圓ト交ル點ヲ D' トシ,D' ニ於ケル切線ト半徑 OA,OB ノ延長トノ交點ヲ A', B トセバ $A'B'$ ハ外接正 n 邊形ノ一邊 a'_n ニ等シ,

$$\triangle AOB \backsim \triangle A'OB'$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{OD'}{OC} \text{ 而シテ } OC^2=AO^2-AC^2$$

$$\frac{a'}{a_n}=\frac{r}{\sqrt{r^2-\frac{a^{2n}}{4}}}$$

故ニ $\quad \boldsymbol{a}_n=\dfrac{2\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{r}}{\sqrt{(4\boldsymbol{r}^2-\boldsymbol{a}_n)}}$

圓ニ內接スル正 n 邊形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトヲ得レバ,例題二ニヨリテソノ 2 倍ノ邊數ヲ有スル正多角形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトヲ得。又例題三ニヨリテ各正多角形ニ應ズル外接正多角形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトヲ得ル故,理論上ヨリハ圓ニ內接スル正多角形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトヲ得レバ此ノ邊數ノ 2^n 倍ナル內接外接正多角形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトヲ得。從テソノ邊數倍ナル周ノ長サヲ計算スルコトヲ得。

問　　題

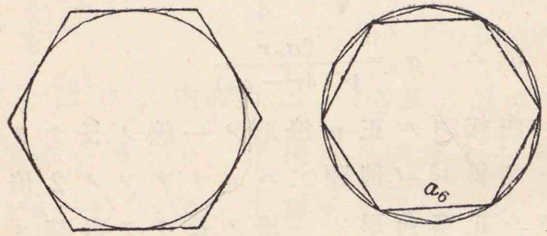
6 半徑 r ナル圓ニ外接スル正五邊形ノ一邊ハ $2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ナルコトヲ證セヨ。

(6) 半徑10糎ノ圓ニ外接スル正六邊形ノ周及ビ面積ヲ求ム。

88

64. 圓ノ周及面積

一ツノ圓ヲ書キ之ニ內接及ビ外接スル正六邊形ヲ書キ次第ニソノ邊數ノ二倍ナル內接及ビ外接正多角形ヲ書キ行クモノトスルニ



圓ノ內接正六邊形ノ一邊ヲ a_6 トセバ周ハ $6a_6$ ニシテ………十二邊形…………a_{12}…………$12a_{12}$ ナリ。而シテ　$6a_6 < 12a_{12} < 24a_{24} < 48a_{48} \cdots\cdots$

カクノ如ク內接正多角形ノ邊數ヲ次第ニ二倍スルコトヲ續ケ行クトキハソノ周ト圓周トノ差ハ次第ニ小トナリ,邊數ガ極リナク增ストキハソノ內接正多角形ノ周ハ終ニハ圓ノ周トナルト見做スコトヲ得。

又外接正多角形ノ邊數ヲ二倍シ行クコトニヨリテモソノ周ハ圓周トナルト見做スコトヲ得。

圓ノ內接外接正多角形ノ周ガ圓周ト一致スルト見ラルルトキハソノ面積モ一致スルト見ルコトヲ得。

次ニ半徑 r ナル圓ノ內接,外接正六邊形ヨリ始メテ邊數ヲ倍シタルトキノ周ノ長サヲ表示セン。

邊數	內接正多角形ノ周	外接正多角形ノ周
6	$2r\times3.0000000$	$2r\times3.4641016$
12	$2r\times3.1058285$	$2r\times3.2153903$
24	„ 3.1326286	„ 3.1596599
48	„ 3.1393502	„ 3.1460862
96	„ 3.1410320	„ 3.1427146
192	„ 3.1414526	„ 3.1418730
384	„ 3.1415577	„ 3.1416627
89 768	„ 3.1415847	„ 3.1416101
1536	„ 3.1415904	„ 3.1415970

之ニヨリテモ $2na_{2n}$ ノ周ハ $2r$ ノ 3.145904 倍ト 3.1415970倍トノ間ニアリテ圓周ハ圓ノ直徑ノ約 **3.14159** 倍ナルコトヲ知ル。 $\frac{22}{7}$ $\frac{355}{113}$

問題

7 半徑 3cm ト 7cm トナル圓アリ。之ニ內接スル正20邊形ノ周ノ比如何。

(7) 半徑 2:3 ナル二ツノ圓ノ各ニ外接スル正 768 邊形ノ周ノ比如何。

圓ニ內接及外接スル正多角形ヲ書キテ圓周ヲ計算シ,圓周率ノ近似値トシテ $\frac{22}{7}$ ヲトリタルハ「アルキメデス」ナリ。

アルキメデス

Archimedes (287－212 B.C.)

「アルキメデス」Archimedes (紀元前287－212)

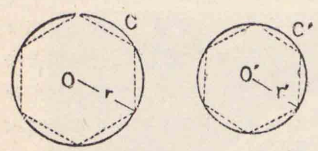
「アルキメデス」ハ「ユークリツド」ト同時代ノ大數學者ニシテ「シシリー」島ニ生レ「アレキサンドリア」大學ニ學ビタル人ナリ。

彼ハ深ク純粹科學ヲ重ンジタレバ科學ヲ實用ニ供スルコトヲ以テ却テ科學ノ價値ヲ墮スモノナリト考ヘタリ。然レドモ彼ハ非凡ナル發明的天才ヲ有シソノ發明セルモノニシテ世人ヲ益シタルモノ極メテ多シ。「ナイル」ノ溪ヲ灌漑スルニ用フル「ポンプ」ノ發明ノ如キモソノ一ツナリ。時ノ政府ニシテ彼ノ工學的天才ヲ要スル難事起ルヤ恒ニ彼ヲ呼ビテ之ガ解決ノ任ニ當ラシメタリト。「吾ニ支點ヲ與ヘヨ然ラバ地球ヲモ動カサン」トハ大船ヲ建造シテ而モ進水シ能ハザリシ「ヒーロー」王ニ槓杆ノ理ヲ說キテ之ヲ應用セシメ容易ニ進水ニ成功セシメタリシトキニ王ニ答ヘタル有名ナル言葉ナリ。又或時「ヒーロー」王ハ「アルキメデス」ニ命ジテソノ王冠ガ純金ナルヤ否ヤヲ鑑定セシメタリ。彼ソノ方法ニ苦シミタルモ漸クニシテ入浴中ニ之ヲ發見シ喜ビノ餘リ裸體ノママ「余ハ發見セリ」ト呼ビ我ガ家ニ馳セ歸リタリト。物理學ニ於ケル「アルキメデス」ノ原理トイフハ彼ガ此ノ時ノ發見ニカカルモノナリ。

「ローマ」人來ツテ「シラキウス」市ヲ攻撃スルヤ彼ハ種々ノ戰具ヲ發明シテ「ローマ」ノ兵ヲ苦シメヨク三年ノ長キニ亘リテソノ市ヲ支ヘシメタリト。

「ローマ」ノ大將「マルセルス」ノ率ユル一兵卒ハ突然「アルキメデス」ノ書齋ニ入リ來レリ。時恰モ彼ハ砂上ニ圓ヲ畫キテ幾何學ノ研究ヲナシ居タリシガ兵卒ノ爲ニソノ圖ヲ消サレンコトヲ懼レテ「圖ヲ踏ム勿レ」ト大喝セリ。兵卒之ヲ以テ侮辱サレタリト誤リソノ「アルキメデス」タルコトヲ知ラズシテ直ニ彼ヲ殺害セリ。之全クソノ大將ノ意ニ反シテナシタル無智ナル一兵卒ノ處業ニシテ大將イタク之ヲ惜シミ「アルキメデス」ノ天才ヲ記念スルタメ壯麗ナル墓碑ヲ建設セリ。ソノ碑面ニ刻ミタル圖形ハ圓壔ニ球ヲ內接セルモノニシテ彼ノ發見セル有名ナル球ノ表面積並ニ體積ニ關スル公式ニチナミテ畫ケルモノナリ。

定理　二ツノ圓周ノ比ハ半徑ノ比ニ等シ。



圓 O, O' ノ周及ビ半徑ヲ c, c', r, r' トスレバ

$$\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}$$

證明　各圓ニ任意ノ同邊數ノ内接正 n 邊形ヲ作リソノ周ヲ p_n, p'_n トセバ

$$\frac{p_n}{p'_n}=\frac{r}{r'}$$

次ニ邊數ヲ二倍シタルトキノ周ヲ p_{2n}, p'_{2n} トセバ

$$\frac{p_{2n}}{p'_{2n}}=\frac{r}{r'}$$

次第ニカクノ如クシテ邊數ヲ限リナク增シテ行クトモ各正多角形ノ周ハ矢張リ半徑ノ比ニ等シ。然シテ兩正多角形ノ周ハ限リナク圓周ニ近ヅク。

$$p_n \longrightarrow p_{2n} \longrightarrow P_{4n} \longrightarrow \cdots\cdots c$$
$$p'_n \longrightarrow p'_2 \longrightarrow P'_{4n} \longrightarrow \cdots\cdots c'$$

故ニ　$$\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}$$

系一　圓ノ周ハ半徑ニ比例ス。

系二　圓周ノ直徑ニ對スル比ハ常ニ一定ナリ。

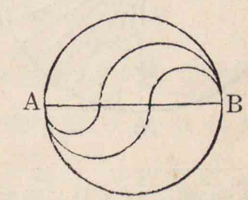
任意ノ二圓ニツイテ $\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}=\frac{2r}{2r'}$ ナリ。故ニ $\frac{c}{2r}=\frac{c'}{2r'}$ ハ何レノ圓ニツイテモ一定ナリ。此ノ比ノ値ハ**無理數**ニシテ之ヲ π ナル文字ヲ以テ表サバ　　$c=2\pi r$　　ナリ。

π ヲ**圓周率**ト稱ス。ソノ値ノ小數點以下30位迄ハ $\pi=3.141592653589793238462643383279\cdots\cdots$ ナレドモ實用上ニハ $\frac{22}{7}$, 3.1416, $\frac{355}{113}$ 等ヲ用フ。

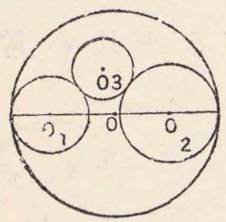
問　　題

8　一直線上ニ中心ヲ有シ互ニ外切スル任意ノ幾ツカノ圓ノ周ノ和ハソレ等ノ圓ノ直徑ノ和ヲ直徑トセル圓周ニ等シ。

(8)　中心ガ直徑 AD 上ニアル半圓ニテナル曲線 ABD, ACD ハ長サ相等シ。



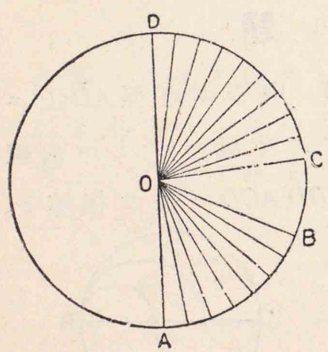
9　圖ニ於テ



圓 O_1, O_2, O_3 ノ周ノ和ハ圓 O ノ周ヨリ大ナリ。

(9)　直徑1米ノ二ツノ車ノ軸ノ間ヲ3米隔テテ同方向ニ回轉セントス。何米ノ「ベルト」ヲ要スルカ。又2米ヲ隔テテ異方向ニ回轉セシメントセバ「ベルト」何米ヲ要スルカ。

定理　同圓又ハ等圓ニ於テ弧ノ比ハ之ニ對スル中心角ノ比ニ等シク扇形ノ面積ノ比ハソノ中心角ノ比ニ等シ。



證明　弧 AB, CD ガ通約シ得ルトシ,公約量ニ等シク測リタル各分點ニ半徑ヲ引ケバ,中心角 AOB, COD 及ビ扇形 AOB, COD ハ $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CD}$ ヲ截リタルト等シキ數ニ等分サルベシ。故ニ

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}=\frac{\text{扇形}AOB}{\text{扇形}COD}$$

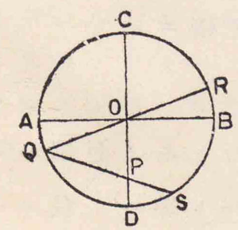
本定理ハ $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CD}$ ガ通約シ得ベカラザル場合ニモ眞ナリ。

問　　題

10　圓ノ切線 PAQ ノ切點 A ヨリ弦 AB, AC ヲ引ケバ $\angle PAB : \angle BAC : \angle CAQ = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA}$

11　圖ニ於テ AOB, COD ハ直角ニ交ル直徑ニシテ P ハ OD 上ノ任意ノ點 QO, QP ハ相等シ。然ラバ $3\overset{\frown}{BR} = \overset{\frown}{BS}$

注意　Q ヨリ OD ニ垂直ナル弦ヲ引キテ考ヘヨ。

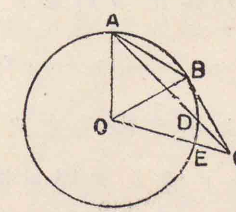


12　5cm ノ弦ノ上ニ立チ45°ノ角ヲ含ム弓形ノ弧ノ長サハ何程ナルカ。

(10)　圓 O ノ半分ノ半徑ヲ有スル二圓ガ共ニ圓 O ニ內切シソノ切點ヲ夫々 A, B トス。此ノ二圓ノ點 O ノ他ノ交點ヲ C トスレバ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

注意　$\angle AOC = \angle BOC$

(11)　圖ニ於テ O ハ圓ノ中心ニシテ OA, AB, BC ハ相等シク BC ハ切線ナリ。然ラバ $\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{DE} = 2:1$

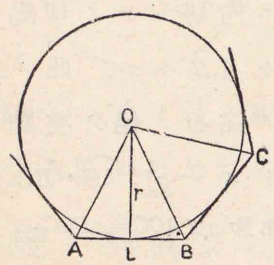


(12)　10cm ノ弦ノ上ニ立チ120°ノ角ヲ含ム弓形ノ弧ノ長サハ何程ナルカ。

定理 半徑 r ナル圓ノ面積ハ πr^2 ナリ。

s ヲ圓ノ面積トシ r ヲ半徑ノ長サトスレバ

$$s=\pi r^2$$ ナルベシ。



證明 圓ニ外接スル任意ノ正多角形ノ周ヲ p_n トスレバ

$$p_n=AB+BC+\cdots\cdots\cdots$$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}OL\cdot AB$$ ナル

故正多角形ノ面積ハ

$\triangle OAB$ ノ n 倍ニシテ之ヲ s_n トスレバ

$$s_n=\frac{1}{2}rp_n$$

今外接正多角形ノ邊數ヲ2倍ニスレバ

$$s_{2n}=\frac{1}{2}rp_{2n}$$

邊ノ數ヲ限リナク增シタルトキノ面積ハ圓ノ面積 s ト等シク,周ハ圓ノ周 $2\pi r$ ト等シト見ルコトヲ得。

故ニ $$s=\frac{1}{2}r.2\pi r$$

即チ $$s=\pi r^2$$

系一 圓ノ面積ハ半徑ノ二乘ニ比例ス。

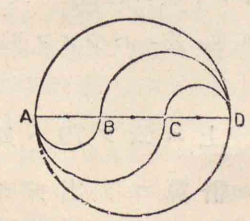
系二 扇形ノ面積ハ其ノ弧ト半徑トノ積ノ半分ナリ。

問　題

13 圓ノ面積ヲ同心圓ニヨリテ三等分セヨ。

注意 283頁57參照

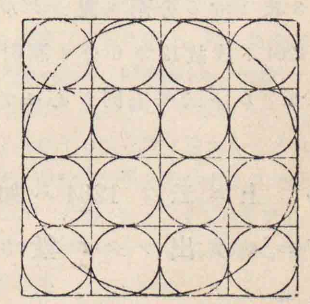
14 一ツノ圓ノ直徑 AD ヲ B, C ニ於テ三等分シ AB, AC, BD, CD ヲ夫々直徑トシテ半圓ヲ書キ曲線 ABD, ACD ニテ圓ヲ三ツニ分ツトキハソノ各部分ノ面積ハ相等シ。



(13) 半徑ガ6糎ト8糎ナル二圓ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ書ケ。

注意 273頁(42)參照

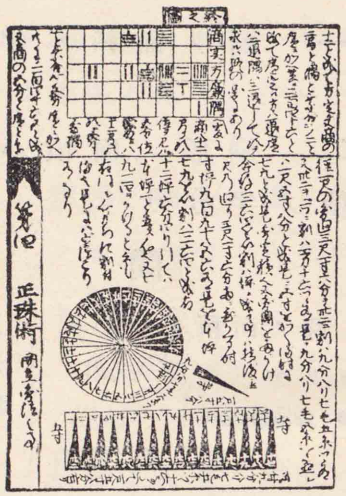
(14) 圖ノ如ク一ツノ正方形ヲ16ノ正方形ニ等分セバ各正方形ニ內接スル圓ノ面積ノ和ハ大ナル正方形ニ內接スル圓ノ面積ニ等シ。



圖ハ凡 250 年前ノ書ナル

改算記

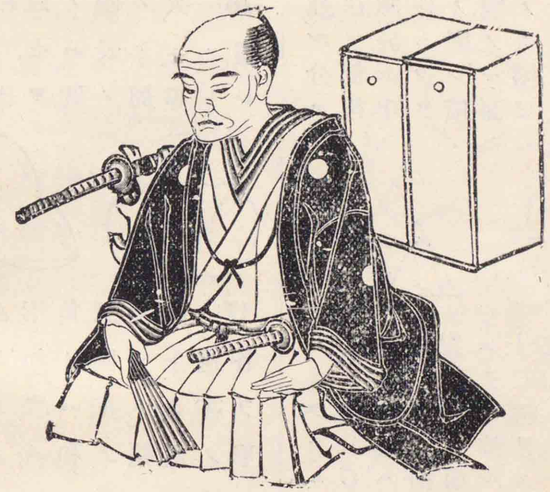
ノ一頁ヲ寫セルモノニシテ，次ニ此ノ說明ノ部ヲ再錄セリ。



徑一尺ノ圓廻 3 尺 1 寸 6 分ヲ 32 ニ割ハ 9 分 8 厘 7 毛 5 糸ヅツ有,又 32 ヲ二ツニ割ハ一方 16 ヅツ有,是ニ 9 分 8 厘 7 毛 5 糸ヅツ懸レバ 1 尺 5 寸 8 分ト成,是ニ 5 寸ヲカクル時ニ 79 ト成,是圓定積也。又圓周ヲ兩々カケ合後 1264 ヲ以割ハ坪ニ成事ハ指渡シ尺ノ廻リ 3 尺 1 寸 6 分兩々置,カクル時寸坪 998.56 有,是ヲ本坪 79 ヲ以割ハ 1264 ト成故 12 坪 6 分 4 厘引テハ本坪 1 ト直ス心也。 又 7914 ヲカケルト云モ右同シ心モテニ割付ル也。是ニハ少ノコリ有ナリ。

15 上ニ云フ 1264 ハ如何ニシテ出シタル數ナルカ。

(15) 上ニ云フ 79 ハ如何ナル計算ヨリ出デタルモノナルカ。

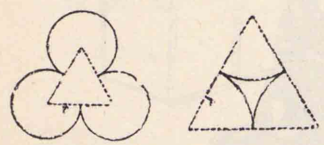


東京數學物理學會記事第二期四卷ヨリ轉寫

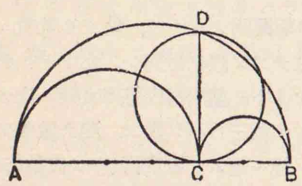
關孝和 (西曆1642—1708) ハ上野ノ國藤岡ノ人ナリ。幼ヨリ數理ニ長ズ。六才ニシテ人ノ計算ヲナセルヲ見テソノ誤ヲ指摘シ，九才ニシテ塵劫記(算術書)ニ通ジ，人皆神童ト唱セリト。德川四代將軍家綱ニ仕ヘテ勘定吟味役トナリ，納戶組頭ニ昇進シテ祿三百石ヲ賜フ。深ク數學ヲ硏究シテ數理ノ微妙ヲ究メ，前人未到ノ境ニ進ム。點竄術(今ノ代數)ヲ創始シ圓理術ヲ發明ス。實ニ本朝數學ノ鼻祖タリ。人呼ンデ算聖トナス。

圓理術ハ圓ノ周及ビ面積，球ノ體積ノ計算ヲナス方法ヲ論ズルモノニシテ今ノ所謂微分積分學ノ如キモノナリ。微分積分學ノ創始者トシテ世界ニ知ラレタルモノニ「ニウトン」(1642—1727) ト「ライブニツツ」(1616—1716) トアリ。關氏ハ之ト年代ヲ同ジクシテソノ班ニ列ス。實ニ世界數學ノ奇蹟ニシテ又我ガ國數學界ノ誇トイフベシ。

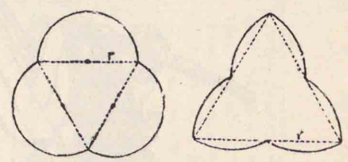
16　次ノ圖ノ作圖法如何。又次ノ圖ニ於ケル弧ニテ圍マレタル部分ノ周及ビ面積ヲ半徑 r ニテ表ハセ。



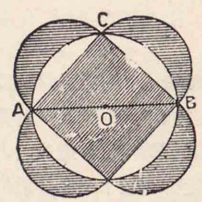
17　AB上ニ點Cヲトリ，AB,AC,BCヲ直徑トシテABノ同側ニ半圓ヲ書クトキハ,是等ノ半圓ニテ圍マレタル面積ハCニ立テタル垂線ノ圓マデノ部分CDヲ直徑トセル圓ノ面積ニ等シ。



(16)　次ノ圖ノ面積ヲ半徑 r ニテ表ハセ。又之レト等周ノ圓ヲ書ケ。



(17)　直角三角形ABCノ各邊上ニ圖ノ如ク半圓ヲ書クトキハ二ツノ月形ノ面積ノ和ハ$\triangle ABC$ニ等シ。

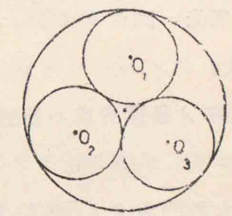


問題(17)ハ希臘ノ數學者「ヒポクロテイーズ」Hippocrates (紀元前440年頃ノ人)ノ發明セル所ナリ。ヒポクロテイーズ「ハ圓ノ正方化問題ヲ研究シタルモ遂ニ解クコトヲ得ズシテ圖ノ如ク圓弧ニテ圍ミタル月形ヲ正方形ニ化スルコトヲ發見セリ。

尙立方倍積問題ハ $\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{2a}$ ヲ解クコト,卽チ a ト $2a$ トノ間ニ二ツノ比例中項ヲ入ルルコトニ歸スルコトヲ發見セリ。亦世界最古ノ數學教科書ヲ著シタル人ナリトイハル。

18　直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ニ下セル垂線ニテ分タレタル兩三角形ノ內接圓ノ面積ノ比ハ斜邊ノ二ツノ分ノ比ニ等シ。〔250頁18.(18)〕

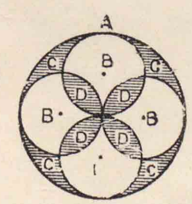
(18)　等圓O_1, O_2, O_3ガ半徑r



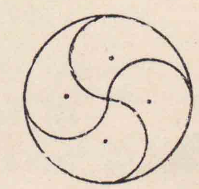
ナル圓ニ內接シ又互ニ外切ス。各等圓ノ面積ハ大圓ノ幾分ニ當ルカ。

下ノ圖ハ圓ノ面積ヲソノ內ニ書ケル圓ノミニヨリテ四等分スル一方法ナリ。

19　次ノ圖ニ於テCノ部ノ面積トDノ部ノ面積トノ等シキコトヲ示セ。



(19)　問題19ニ依リ次ノ圖ニ於テハ圓ノ面積ハ四等分サレタルコトヲ示セ。



此ノ問題ハ「**ナポレオン**」Napoleon ガ埃及遠征ノ途次船中ニ於テソノ幕僚ニ課シタリトイハルル興味アルモノナリ。

「ナポレオン」ハ

「數學ノ發達完成ハ國家ノ繁榮ト密接ナル關係ヲ有ス」

トイヒタルガ如ク極メテ數學ヲ重ンジタル英傑ニシテ當時有名ナル大數學者タル「**ラグランジユ**」Lagrange,「**ラプラース**」Laplace,「**モンジユ**」Monge 等ヲ招キテ厚ク之ヲ遇セリトイフ。

索　引（發音順ヲ主トシ必ズシモ字音順ニハヨラヌコトトセリ。數字ハ教科書ノ頁數ナリ。）

大正十五年三月十一日
文部省檢定濟
師範學校並中學校數學科用

大正十四年十二月二十三日　印　　刷
大正十四年十二月二十六日　發　　行
大正十五年 二 月二十四日　訂正再版印刷
大正十五年 二 月二十七日　訂正再版發行

中等教育
平面幾何學敎科書

定價	金壹圓拾參錢

廣島高等師範學校附屬中學校
著作者　數學研究會
代表者　津山三郎
發行兼印刷者　鈴木政雄
東京市神田區表神保町二番地
發行者　鈴木常松
大阪市東區博勞町五丁目五十六番地

發行所　東京市神田區表神保町二番地　振替口座東京二六四四番　東京 修文館
發行所　大阪市東區博勞町五丁目五六　振替口座大阪四七一番　大阪 修文館

(大阪　濱田印行)

修文館