改訂

師範教育

代數學教科書

下卷

何故に数学を学習するか
頭を緻密にする。　精神を落着かせ忍耐力を強からしむ。
実社会に立ち頭を働かす時の用意。　推理力を養ふ。
決断力を養ふ。　敏捷となる。　服従の気風を得る。
思考を敏快せしむ。　頭を練る体操となる。
入学試験に応ずるため。
余は工科を目的とする　工科には数学を要する　故にこれを学ぶ
数学を知りはじめて物の道理を知ることを得る。
計算に熟達する。　諸学科の基となる。
数学なくては国家は其体面を保持するを得ず
国家社会を益し皇恩に報いんがため。
数学なるものは教育家工学家等専門に数学に従事するもの、外吾人の
日常生活には大なる関係なし、家計を取締するには珠盤一つあれば
こと足り三角法幾何等は直接に吾人の生活に必要なし　然らば何の目
的理由を以て数学を学ぶか？　曰く吾人の能力を増進せしむるにあり
吾人の能力はこれを費さざる時は大いに衰へこれを大いに費せば大いに発達
す　即ち数学は体操の如し　今若し体操を度生上必要なしとしなさ
ざる時は身体ゆがみ衰へ健康なる身体また精神を以て諸事に従事する
ことあたはず　即ち数学は頭脳の体操に異ならず　これを利用する人は大いに
頭脳発達し而して諸難事をとくに苦しむことなし、故に吾人は頭脳の
鍛錬に数学を習得せざるべからず。

大正八年二月十二日
文部省檢定濟

改訂

師範教育

代數學教科書

下卷

東京高等師範學校教授
理學博士
國枝元治
編纂

東京 寶文館藏版

目　次

改訂

師範教育

代數學教科書

下卷

第八編 開法

第一章 冪及根

126. 冪. 或數ノ冪ヲ求ムルコトハ乘法ノ格段ナル場合ニ外ナラズ,從テ次ニ揭グル冪ニ關スル法則ノ多クハ既ニ知レル所ノモノナリ.

本章ニ於テハ m, n, p 等ハ別段ノ斷リナキトキハ正ノ整數ヲ表スモノトス.

(1) 同ジ數ノ幾ツカノ冪ノ積ハ各冪ノ指數ノ和ヲ指數トセル同ジ數ノ冪ニ等シ. (第41節參照)

即チ $a^m\times a^n=a^{m+n}$,

一般ニ $a^m\times a^n\times a^p\times\ldots\ldots=a^{m+n+p+\ldots\ldots}$.

(2) 或數ノ冪ノ冪ハ二ツノ指數ノ積ヲ指數トセル同ジ數ノ冪ニ等シ.

例ヘバ $(a^m)^2=a^m\times a^m=a^{m+m}=a^{2m}$,

$(a^m)^3=a^m\times a^m\times a^m=a^{m+m+m}=a^{3m}$,

一般ニ $(a^m)^n=a^{mn}$.

注意. 從テ明ニ $(a^m)^n=(a^n)^m$ ナリ.

(3) 或數ノ二ツノ冪ニ於テ,高次ノ冪ヲ低次ノ冪ニテ除シタル商ハ兩指數ノ差ヲ指數トセル同ジ數ノ冪ニ等シク,又低次ノ冪ヲ高次ノ冪ニテ除シタル商ハ兩指數ノ差ヲ指數トセル同ジ數ノ冪ノ逆數ニ等シ. (第47節參照)

即チ $m>n$ ナルトキハ $a^m\div a^n=a^{m-n}$,

$m<n$ ナルトキハ $a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}$.

注意. $m=n$ ナルトキハ明ニ $a^m\div a^n=1$ ナリ.

(4) 幾ツカノ數ノ積ノ冪ハ各數ノ同ジ次數ノ冪ノ積ニ等シ.

奇數 $=2n+1$
偶數 $=2n$

例ヘバ $(ab)^2=ab\times ab=aabb=a^2b^2$,

$(ab)^3=ab\times ab\times ab=aaabbb=a^3b^3$.

一般ニ $(ab)^m=a^mb^m$.

同様ニ $(abc\ldots\ldots)^m=a^mb^mc^m\ldots\ldots$

(5) 分數ノ冪ハ分子ノ同ジ次數ノ冪ヲ分子トシ,分母ノ同ジ次數ノ冪ヲ分母トセル分數ニ等シ.

例ヘバ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{aa}{bb}=\dfrac{a^2}{b^2}$,

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{aaa}{bbb}=\dfrac{a^3}{b^3}$.

一般ニ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$.

127. 正數ノ冪ト負數ノ冪.

正數ノ冪ハ常ニ正數ナリ,負數ノ冪ハ其ノ指數ガ偶數ナルトキハ正數ニシテ奇數ナルトキハ負數ナリ.

(第29節參照)

即チ一般ニ $(+a)^m=a^m$.

又 $(-a)^{2m}=a^{2m}$, $(-a)^{2m+1}=-a^{2m+1}$.

此ノ事柄ハ又次ノ如ク言ヒ表スコトヲ得.

或數ノ偶數次ノ羃ハ正數ニシテ,奇數次ノ羃ハ其ノ數ト同符號ノ數ナリ.

今單項式ノ羃ヲ求ムル二三ノ例ヲ示サン.

例 1. $(-3a^4b^2c)^3=(-3)^3a^{4\times3}b^{2\times3}c^3=-27a^{12}b^6c^3$.

例 2. $(-2x^3y^2)^4=(-2)^4x^{3\times4}y^{2\times4}=16x^{12}y^8$.

例 3. $\left(\dfrac{4a^2b^3c}{3xy^2}\right)^3=\dfrac{(4a^2b^3c)^3}{(3xy^2)^3}=\dfrac{64a^6b^9c^3}{27x^3y^6}$.

例題

次ノ羃ヲ計算セヨ.

1. $(a^2x^2y^4)^2$. 2. $(-3a^2b^3c)^3$. 3. $(-2x^3y^2)^4$.

4. $(a^4x^2y)^6$. 5. $(-4abx^3)^5$. 6. $(-a^5x^3y^4)^8$.

7. $\left(\dfrac{a^2b^3}{cd}\right)^3$. 8. $\left(-3\dfrac{x^4y}{a^3b^2}\right)^5$. 9. $\left(-\dfrac{a^2xy}{ab^3c}\right)^4$.

128. 多項式ノ羃. 多項式ノ羃ノ公式ノ或モノハ既ニ之ヲ知レリ,今尚二三ヲ附加シテ之ヲ再記セン.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

此等ノ公式ハ直接ノ計算ニヨリテ知ラルベシ,而シテ何レモ後ニ述ブル二項定理ノ格段ナル場合ニ外ナラズ.

尙多項式ノ平方ノ公式ノ一二ヲ示セバ

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad$$
$$+2bc+2bd+2cd.$$

一般ニ多項式ノ平方ヲ作ルニハ,先ヅ各項ノ平方ヲ作リ,次ニ各項ト其ノ項ヨリ後ニアル各項トノ積ノ二倍ヲ作リテ之ヲ總テ加フベシ.

偖上ノ諸公式ニ於ケルガ如ク多項式ノ羃ノ括弧ヲ去リテ右邊ノ如キ式トナスコトヲ展開スルト云フ.

次ニ此等ノ諸公式ヲ應用シテ多項式ノ羃ヲ展開スル一二ノ例ヲ示サン.

例 1. $(3x-2y)^4$ ヲ展開セヨ.

解 原式$=(3x)^4+4(3x)^3(-2y)+6(3x)^2(-2y)^2$
$+4(3x)(-2y)^3+(-2y)^4$

$$=81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$$ 答.

例 2. $(a^2+2b^2-4c^2)^2$ ヲ展開セヨ.

解 原式 $=(a^2)^2+(2b^2)^2+(-4c^2)^2+2(a^2)(2b^2)$

$$+2(a^2)(-4c^2)+2(2b^2)(-4c^2)$$

$$=a^4+4b^4+16c^4+4a^2b^2-8a^2c^2-16b^2c^2$$ 答.

例　題

次ノ式ヲ計算セヨ.

1. $(2-3x^2)^2$.　2. $(ax-2by)^3$.　3. $(a^2-2c^2)^4$.

4. $(2-3x+x^2)^2$.　5. $(2x-3y^2)^4$.　6. $(3a-4bx+3cy)^2$.

7. $(a+b+c)^3$.　8. $(a^2+2bx)^5$.　9. $(1+x+x^2-x^3)^2$.

129. 根. 或數 a ガ他ノ數 b ノ n 乘ニ等シキトキハ b ヲ a ノ n 乘根又ハ第 n 冪根ト云フ.

a ノ n 乘根ヲ示スニ $\sqrt[n]{a}$ ナル記號ヲ用フ. 因テ $a=b^n$ ナルトキハ $b=\sqrt[n]{a}$ ナリ.

例ヘバ $125=5^3$ ナリ,故ニ $5=\sqrt[3]{125}$ ナリ.

$\sqrt[n]{a}$ ニ於テ $\sqrt[n]{\ }$ ヲ根號ト云ヒ, n ヲ根指數ト云フ.

二乘根ヲ自乘根又ハ平方根トモ云ヒ,三乘根ヲ立方根トモ云フ.

平方根ヲ表ストキニ限リ根指數ヲ省略ス. 即チ a ノ平方根ヲ表スニ $\sqrt{a}$ ヲ以テス.

偖上ノ定義ニヨリ

$$\sqrt[n]{a^n}=a,\ \text{又}\ (\sqrt[n]{a})^n=a$$

ナルコト明ナリ. 即チ或數ノ冪根ヲ求ムルコトハ冪ヲ求ムルコトノ逆算ナリ.

因テ冪根ニ關スル法則ハ冪ニ關スル法則ヨリ容易ニ推知スルコトヲ得ベシ.

(1) m ガ n ノ倍數ナルトキハ或數ノ m 乘ノ n 乘根ハ其ノ數ノ $\frac{m}{n}$ 乘ニ等シ.

即チ $$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

何トナレバ $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$ ナルガ故ナリ.

例ヘバ $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$, 又 $\sqrt[2]{a^8}=a^{\frac{8}{2}}=a^4$.

(2) 或數ノ m 乘根ノ n 乘根ハ其ノ數ノ mn 乘根ニ等シ.

即チ $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

何トナレバ $(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^{mn}=[(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^n]^m=[\sqrt[m]{a}]^m=a$ ナルガ故ナリ.

注意. 從テ明ニ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ ナリ.

例ヘバ $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[2\times3]{a}=\sqrt[6]{a}$.

(3) 幾ツカノ數ノ積ノ m 乘根ハ各數ノ m 乘根ノ積ニ等シ.

即チ $\sqrt[m]{abc\ldots\ldots}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\ldots\ldots$

何トナレバ

$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\ldots\ldots)^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m(\sqrt[m]{c})^m\ldots\ldots$$
$$=abc\ldots\ldots$$

ナルガ故ナリ.

例ヘバ $\sqrt{9a^2b^2}=\sqrt{9}\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=3ab$,

又 $\sqrt[3]{a^3b^3c}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{c}=ab\sqrt[3]{c}$.

(4) 分數ノ m 乘根ハ分子ノ m 乘根ヲ分子トシ,分母ノ m 乘根ヲ分母トセル分數ニ等シ.

即チ $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

何トナレバ $\left(\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\dfrac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}=\dfrac{a}{b}$ ナルガ故ナリ.

例ヘバ $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}$, 又 $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{2}{3}$.

130. 正數ノ冪根ト負數ノ冪根.

正數ノ偶數乘根ニハ正ト負トノ二ツアリ. 但其ノ絕對値ハ相等シ.

例ヘバ $(+a)^2=+a^2$, 又 $(-a)^2=+a^2$.

故ニ $+a^2$ ノ平方根ハ $+a$ ト $-a$ トナリ.

一般ニ $(+a)^{2m}=+a^{2m}$, 又 $(-a)^{2m}=+a^{2m}$.

故ニ $+a^{2m}$ ノ $2m$ 乘根ハ $+a$ ト $-a$ トナリ.

負數ノ偶數乘根ハ存在セズ.

何トナレバ正數モ負數モ其ノ偶數乘ハ皆正數トナリ,決シテ負數トナルコトナキガ故ナリ. 例ヘバ $\sqrt{-25}$ ハ存在セズ.

正數ノ奇數乘根ハ正數ニシテ,負數ノ奇數乘根ハ負數ナリ.

例ヘバ $(+a)^3=+a^3$ 又 $(-a)^3=-a^3$.

故ニ $\sqrt[3]{+a^3}=+a$, $\sqrt[3]{-a^3}=-a$.

一般ニ $(+a)^{2m+1}=+a^{2m+1}$, 又 $(-a)^{2m+1}=-a^{2m+1}$.

故ニ $\sqrt[2m+1]{+a^{2m+1}}=+a$, $\sqrt[2m+1]{-a^{2m+1}}=-a$.

例ヘバ $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[3]{-8}=-2$.

131. 單項式ノ開法.
一般ニ冪根ヲ求ム

ル方法ヲ開法ト云フ. 特ニ平方根及立方根ヲ求ムル方法ヲ夫夫開平法,開立法ト云フ.

今單項式ノ開法ノ二三ノ例ヲ示サン.

例 1. $\sqrt{4a^2x^4}=\sqrt{4}\sqrt{a^2}\sqrt{x^4}=2\cdot a\cdot x^{\frac{4}{2}}=2ax^2.$

注意. $4a^2x^4$ ノ平方根ハ茲ニ見出シタル $2ax^2$ ト其ノ符號ヲ變ジタル $-2ax^2$ トノ二ツナリ. サレド前者ノ符號ヲ變ズレバ後者トナルガ故ニ茲ニテハ根號 $\sqrt{}$ ハ二ツノ平方根中前者ヲ表スコトトスベシ,從テ後者ヲ表スニハ $-\sqrt{}$ ヲ以テス.

茲ニテハ一般ニ $\sqrt[2m]{}$ ハ二ツノ偶數乘根中外見上正ナルモノヲ表スコトトスベシ.

例 2. $\sqrt[3]{27a^3x^6y^9}=\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{x^6}\sqrt[3]{y^9}$

$$=3\cdot a\cdot x^{\frac{6}{3}}\cdot y^{\frac{9}{3}}=3ax^2y^3.$$

例 3. $\sqrt[3]{-x^3y^6z^3}=\sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{y^6}\sqrt[3]{z^3}$

$$=-1\cdot x\cdot y^{\frac{6}{3}}\cdot z=-xy^2z.$$

例 4. $\dfrac{9x^2}{16a^2}$ ノ平方根ヲ求ム.

解 $\sqrt{\dfrac{9x^2}{16a^2}}=\dfrac{\sqrt{9x^2}}{\sqrt{16a^2}}=\dfrac{3x}{4a}.$ 答 $\dfrac{3x}{4a},\ -\dfrac{3x}{4a}.$

例 題

次ノ開法ヲ行ヘ.

1. $\sqrt{25x^4}.$ 2. $\sqrt[3]{-27b^6x^9}.$ 3. $\sqrt{49a^2x^4y^8}.$

4. $\sqrt[3]{x^6y^{12}z^9}.$ 5. $\sqrt[4]{16x^4y^8}.$ 6. $\sqrt[5]{32x^5y^{10}}.$

7. $\sqrt{\dfrac{9b^4y^6}{a^2x^4}}.$ 8. $\sqrt[3]{\dfrac{c^3}{8a^3b^6}}.$ 9. $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81x^4y^8}}.$

10. $36a^2b^4x^6$ 及 $\dfrac{64x^4y^2}{25a^2}$ ノ平方根ヲ求ム.

第二章 開 平 法

132. 整式ノ開平法. 單項式ノ開平法ハ前節ノ單項式ノ開法ノ特別ナル場合ニ過ギズ. 因テ茲ニハ多項式ノ開平法ヲ說明スベシ.

公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ニヨレバ $a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ハ明ニ $a+b$ ナリ.

多項式ノ開平法ノ運算ハ全ク上ノ公式ニ基ク.

先ヅ $a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ヲ求ムル方法ヲ示サン.

運算

$$\begin{array}{r|l}
 & a^2+2ab+b^2\ (\ a+b \quad \text{答.} \\
 & a^2 \\ \hline
2a+b & 2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

說明 先ヅ原式ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列シ,初項ノ平方根 a ヲ根ノ初項トス,a^2 ヲ原式ヨリ減ジ剩

餘ノ初項 $2ab$ ヲ a ノ二倍即チ $2a$ ニテ除シテ得タル商 b ヲ根ノ第二項トス. 偖 $2a$ ニ b ヲ加ヘタル $2a+b$ ニ b ヲ乘ジタル積ヲ上ノ剩餘ヨリ減ズレバ殘ナシ.

斯シテ原式ヨリ a^2 ト $(2a+b)b$ 卽 $2ab+b^2$ トノ和ヲ減ジタルコトトナル. 然ルニ殘ナキニヨリ原式ハ $a^2+2ab+b^2$ 卽チ $(a+b)^2$ ニ等シ. 因テ $a+b$ ハ所要ノ平方根ナリ. 尙其ノ符號ヲ變ジタル $-(a+b)$ モ上ノ式ノ一ツノ平方根ナリ.

次ニ上ノ運算ニ於テ最後ニ尙剩餘ヲ得タルトキハ

$$(\overline{a+b}+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

ナル關係ヨリ $a+b$ ヲ一ツノモノト考ヘ全ク同樣ノ方法ヲ繰返セバ可ナリ.

例 1. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ ノ平方根ヲ求ム.

運算

$$\begin{array}{rl}
 & a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2\ (\ a+b-c \quad \text{答.}\\
 & a^2\\ \hline
2a+b\ ) & 2ab-2ac+b^2\\
 & 2ab \qquad\quad +b^2\\ \hline
2a+2b-c\ ) & -2ac \qquad -2bc+c^2\\
 & -2ac \qquad -2bc+c^2\\ \hline
 & 0
\end{array}$$

注意. $-(a+b-c)$ モ亦上式ノ一ツノ平方根ナリ.

サレド本章ニ於テハ繁ヲ避ケンガタメ單ニ前者ノミヲ擧ゲ後者ハ一一記載セザルコトトスベシ.

例 2. $4x^6+32x^5+80x^4+60x^3-8x+1$ ノ平方根ヲ求ム.

運算

$$\begin{array}{rl}
 & 4x^6+32x^5+80x^4+60x^3-8x+1\ (\ 2x^3+8x^2+4x-1 \quad \text{答.}\\
 & 4x^6\\ \hline
4x^3+8x^2\ ) & 32x^5+80x^4\\
 & 32x^5+64x^4\\ \hline
4x^3+16x^2+4x\ ) & 16x^4+60x^3\\
 & 16x^4+64x^3+16x^2\\ \hline
4x^3+16x^2+8x-1\ ) & -4x^3-16x^2-8x+1\\
 & -4x^3-16x^2-8x+1\\ \hline
 & 0
\end{array}$$

例 3. $4a^2+8ab+5b^2$ ノ平方根ヲ求ム.

運算

$$\begin{array}{rl}
 & 4a^2+8ab+5b^2\ )\ 2a+2b\\
 & 4a^2\\ \hline
4a+2b\ ) & 8ab+5b^2\\
 & 8ab+4b^2\\ \hline
 & b^2
\end{array}$$

答 $2a+2b$, 開平剩餘 b^2.

之ハ開キ切レヌ場合ナリ. 第二剩餘 b^2 ヲ得タル後根ノ第三項ヲ求メントスレバ分數式ヲ得ベキガ故ニ茲ニテ演算ヲ中止ス. 斯ノ如キ場合ノ剩餘ヲ開平剩餘ト云フ.

代數式ハ一般ニ平方ニ開キ切レヌガ普通ナリ, 唯其ノ式ガ丁度或整式ノ平方ニ等シキトキニ限リ開キ切レル. 平方ニ開キ切レル式ヲ完全平方

式或ハ單ニ完全平方ト云フ.

例　題

次ノ諸式ノ平方根ヲ求ム.

1. $4x^4+16x^2+16$.　　2. $a^2x^2-10abx+25b^2$.
3. $a^2+4b^2+c^2-4ab-2ac+4bc$.
4. $9x^4-30x^3+19x^2+10x+1$.
5. $x^4-4ax^3-2a^2x^2+12a^3x+9x^4$.
6. $x^6+4x^5-10x^3+4x+1$.

133. 數ノ開平法. 數ノ開平法モ亦整式ノ開平法ト同樣ナル理法ニヨル.

(1) **平方根ノ位.**

$\ldots\ldots,\ 0.01^2=0.0001,\ \ 0.1^2=0.01,\ \ 1^2=1,$

又　$1^2=1,\ \ 10^2=100,\ \ 100^2=10000,\ \ \ldots\ldots\ldots$

之ニヨリテ二位ノ整數ノ平方ハ 100 ト 10000 トノ間ノ數卽チ三位若クハ四位ノ數ナリ. 一位ノ數ノ平方ハ一位若クハ二位ノ數ナリ.

又小數第一位ヨリ始マル數ノ平方ハ 1 ト 0.01 トノ間ノ數卽チ小數第一位若クハ第二位ヨリ始マル數ナリ. 小數第二位ヨリ始マル數ノ平方ハ小數第三位若クハ第四位ヨリ始マル數ナリ.

之ヲ逆ニ考フレバ與ヘラレタル數ノ平方根ノ最高位ハ容易ニ知ルコトヲ得ベシ.

今或數ノ最高位ト其ノ平方根ノ最高位トノ關係ヲ示セバ次ノ如シ.

	整數			小數		
原數ノ最高位	第六位 第五位	第四位 第三位	第二位 第一位	第一位 第二位	第三位 第四位	第五位 第六位
平方根ノ最高位	第三位	第二位	第一位	第一位	第二位	第三位

之ニヨリテ小數點ヨリ左或ハ右ニ二桁每ニ區切レバ平方根ノ最高位ヲ知ルコトヲ得ベシ.

例ヘバ 148225 ヲ區切レバ 14|82|25 トナリ,從テ此ノ數ノ平方根ノ最高位ハ百ノ位ナリ.

又 0.004356 ヲ區切レバ 0.00|43|56 トナリ,從テ此ノ數ノ平方根ハ小數第二位ヨリ始マル.

(2) **開平ノ仕方.** 今 2209 ノ平方根ヲ求ムル方法ヲ示サン.

運算

```
     22|09 ( 47   答.
     16
 87 ) 609
      609
     ----
        0
```

說明 (I) 平方根ハ明ニ十ノ位ヨリ始マル.

(II) 偖 2209 ハ 40^2 卽チ

1600 ト 50^2 卽チ 2500 トノ間ノ數ナレバ其ノ平方根ハ四十幾ツト云フ數ナリ. 實際ニハ 22 ダケニ着目シテ其ノ中ニ含マルル最大ノ平方數ハ $4^2=16$ ナレバ平方根ノ十ノ位ハ 4 ナルヲ知ル.

(III) 1600 ヲ減ジテ剩餘 609 ヲ得. 今所要ノ平方根ヲ $40+x$ トスレバ

$$\begin{aligned}2209 &= (40+x)^2 = 40^2+80x+x^2\\ &= 40^2+(80+x)x\end{aligned}$$

ナルニヨリ $609=(80+x)x$ ナリ.

故ニ 609 ヲ 40 ノ二倍ナル 80 ニテ除スレバ略 x ハ見出サルベシ. 實際整商 7 ヲ得.

(IV) 80+7 卽チ 87 ニ 7 ヲ乘ジテ 609 ヨリ引ケバ殘ナシ.

故ニ所要ノ平方根ハ 47 ナリ.

注意. 玆ニテハ正ノ平方根ヲ求ムルモノトス.

例 1. 148225 ノ平方根ヲ求ム.

運算

```
     14|82|25 ( 385
      9
 68 ) 582
      544
765 ) 3825
      3825
         0
```

答 385.

說明 第二位ノ 8 ヲ求ムルニハ第二ノ區切迄用ヒ前例ト同理ニヨリ 532 ヲ 30 ノ二倍 60 ニテ除シテ求ムベシ.

偖第二剩餘 $3825=148225-(380)^2$ ナリ.

故ニ一ノ位ノ數ヲ求ムルニハ上ニ述ベタルト同理ニヨリ 380 ノ二倍 760 ニテ 3825 ヲ除シテ 5 ナルコトヲ知ル.

例 2. 0.001849 ノ平方根ヲ求ム.

運算

```
     0.00|18|49 ( 0.043
          16
     83 ) 249
          249
            0
```

答 0.043.

例 3. 4880625 ノ平方根ヲ求ム.

運算

```
          4|88|06|25 ( 2209.213
          4
     42 ) 88
          84
   4409 ) 40625
          39681
  44182 ) 94400
          88364
 441841 ) 603600
          441841
4418423 ) 16175900
          13255269
           2920631
```

答 2209.213 强.

之ハ開キ切レザル場合ナリ.

(3) **分數ノ開平法.** $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ナルニヨリ分母ガ開キ切レルトキハ分母及分子ヲ別別ニ開クベシ. 然ラザルトキハ先ヅ其ノ分數ヲ小數ニ化シテ後其ノ平方根ヲ求ムルヲ便利ナリトス.

例 4. $\sqrt{\frac{441}{625}}=\frac{\sqrt{441}}{\sqrt{625}}=\frac{21}{25}$.

例 5. $\frac{13}{32}$ ノ平方根ヲ求ム. (小數第三位未滿切捨)

解　$\sqrt{\frac{13}{32}}=\sqrt{0.40625}=0.637\ldots\ldots$　　答 0.637.

例 6. $\frac{5}{13}$ ノ平方根ヲ求ム. (小數第四位未滿四捨五入)

解　結局小數第五位迄求ムル必要アルガ故ニ $\frac{5}{13}$ ヲ小數ニ化シ其ノ第十位迄求メテ後開平法ヲ行フベシ. 即

$$\sqrt{\frac{5}{13}}=\sqrt{0.3846153846\ldots\ldots}=0.62017\ldots\ldots$$

答 0.6202.

別解　或ハ次ノ如クスルモ亦可ナリ.

$$\sqrt{\frac{5}{13}}=\sqrt{\frac{5\times13}{13\times13}}=\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{13^2}}=\frac{\sqrt{65}}{13}$$

$$=\frac{8.06225\ldots}{13}=0.62017\ldots\ldots$$

例題

次ノ諸數ノ平方根ヲ求ム.

1. 625.　2. 80089.　3. 17161.

4. 30.1401.　5. 0.6084.　6. 10.9561.

7. 1234321.　8. 6275025.

次ノ諸數ノ平方根ヲ求ム,開キ切レザル場合ニハ小數第三位迄求メ端下ヲ切捨テヨ.

9. $\frac{3}{4}$.　10. 1234.　11. 1485.62.

12. $4\frac{5}{12}$.　13. 29.4832.　14. 54.634258.

問題十九

1. 或直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ長サハ夫夫一尺六寸及一尺二寸ナリ. 斜邊ノ長サヲ求ム. 但直角三角形ニ於テハ恒ニ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シ.

2. 一邊ガ二尺ナル正方形ノ對角線ノ長サヲ求ム. (尺ノ小數第三位未滿切捨)

3. 直徑二尺五寸ノ圓ニ內接スル矩形ノ一邊ハ二尺ナリト云フ. 他ノ一邊ヲ求ム.

4. 二數ノ比ハ 5:3 ニシテ其ノ積ハ 7935 ナリト云フ. 二數各如何.

5. 矩形ノ地面アリ,其ノ間口ト奥行トノ割合ハ 7:5 ナリ,而シテ其ノ坪數ハ三萬五千八百四十坪ナリト云フ. 間口奥行各何間ナルカ.

6. 直徑一尺二寸ノ丸太アリ,之ヨリ幾寸角ノ柱ヲ切取ルコトヲ得ルカ. (一分未滿ハ切捨テヨ)

7. 元金五千圓一年毎ノ複利ニテ二年間ノ元利合計五千六百十八圓ナリト云フ. 利率ヲ求ム.

8. 元金千二百圓ヨリ生ズル二年間ノ單利ト複利トニヨル利息ノ差二圓四十三錢ナリト云フ. 年利率幾許ナルカ.

9. 次ノ各數ノ平方根ヲ求ム.

(一) 73229.7721.　　(二) 414.9369.

(三) 19154.56.　　(四) 0.12334144.

10. $x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ ガ丁度或整式ノ平方ナルタメニ a, b ノ取ルベキ値ヲ求ム.

第三章 開立法 (Cube root)

134. 整式ノ開立法. 單項式ノ開立法ハ

第 131 節ニ述ベタル單項式ノ開法ノ特別ナル場合ニ過ギズ. 因テ玆ニハ多項式ノ開立法ヲ說明スベシ.

公式　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ニヨレバ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ノ立方根ハ明ニ $a+b$ ナリ. 多項式ノ開立法ノ運算ハ全ク上ノ公式ニ基ク. 玆ニ先ヅ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ノ立方根ヲ求ムル方法ヲ示サン.

運算

$$
\begin{array}{rrl}
 & & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \,(\,a+b \quad \text{答.} \\
 & 3a^2 & a^3 \\ \cline{3-3}
3a+b & 3ab+b^2 & \quad 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \cline{2-2}
 & 3a^2+3ab+b^2 & \quad 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \cline{3-3}
 & & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

說明　先ヅ原式ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列シ,初項ノ立方根 a ヲ根ノ初項トシ,其ノ立方 a^3 ヲ原式ヨリ減ズベシ.

次ニ初項 a ノ平方ノ三倍卽チ $3a^2$ ヲ左方ニ書キ又其ノ左ニ a ノ三倍卽チ $3a$ ヲ書ク. 而シテ $3a^2$ ヲ以テ剩餘ノ初項ヲ除シテ商 b ヲ得,之ヲ根ノ第二項トス.

偖 b ヲ $3a$ ニ加ヘテ $3a+b$ トナシ,之ニ b ヲ乘ジタル $3ab+b^2$ ヲ $3a^2$ ニ加フレバ $3a^2+3ab+b^2$ トナル,之

ニ b ヲ乘ジテ剩餘ヨリ減ズベシ.

斯シテ原式ヨリ a^3 ト $(3a^2+3ab+b^2)b$ 卽チ $3a^2b+3ab^2+b^3$ トノ和ヲ減ジタルコトトナル. 然ルニ殘ナキニヨリ原式ハ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 卽チ $(a+b)^3$ ニ等シ. 因テ $a+b$ ハ所要ノ立方根ナリ.

次ニ上ノ運算ニ於テ最後ニ尚剩餘ヲ得タルトキハ $(\overline{a+b}+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$ ナル關係ヨリ $a+b$ ヲ一ツノモノト考ヘ全ク同樣ノ方法ヲ繰返セバ可ナリ.

例. $8x^6-12x^5+42x^4-37x^3+63x^2-27x+27$ ノ立方根ヲ求ム.

運算

$$
\begin{array}{l}
8x^6-12x^5+42x^4-37x^3+63x^2-27x+27\ (2x^2-x+3 \\
8x^6 \\
\hline
12x^4 \\
\qquad -6x^3+x^2 \quad (6x^2-x) \\
\hline
12x^4-6x^3+x^2 \qquad -12x^5+42x^4-37x^3 \\
\qquad\qquad x^2 \qquad -12x^5+6x^4-x^3 \\
\hline
12x^4-12x^3+3x^2 \qquad 36x^4-36x^3+63x^2-27x+27 \\
\qquad -2x \\
\hline
6x^2-3x+3 \\
\qquad 18x^2-9x+9 \\
\hline
12x^4-12x^3+21x^2-9x+9 \qquad 36x^4-36x^3+63x^2-27x+27 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

說明 根ノ第二項 $-x$ ヲ求メ,其ノ運算ヲ終リ,次ニ根ノ第三項ヲ求メントスルニ際シ,左方ニ $2x^2-x$ ノ平方ノ三倍ヲ書クニハ $3(2x^2-x)^2$ ヲ計算スルヨリモ $\}$ ニテ示シタル三ツノ式ヲ加ヘテ求ムルガ便利ナリ.

又其ノ左ニ $3(2x^2-x)$ ヲ書クニハ $6x^2-x=(-x)\times 2$ 卽チ $-2x$ ヲ加フルガ便利ナルニヨリ上ノ如クニシテ運算シタルナリ. 答 $2x^2-x+3$.

例題

次ノ各式ノ立方根ヲ求ム.

1. $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$.
2. $125a^3x^3+75a^2x^2y+15axy^2+y^3$.
3. $x^6-3x^5+5x^3-3x-1$.
4. $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$.

135. 數ノ開立法. 數ノ開立法モ整式ノ開立法ト同樣ナル理法ニヨル.

(1) **立方根ノ位.**

$\ldots\ldots,\quad 100^3=1000000,\quad 10^3=1000,\quad 1^3=1,$

又 $1^3=1,\quad 0.1^3=0.001,\quad 0.01^3=0.000001,\quad \ldots\ldots$

之ニヨリテ或數ノ最高位ト其ノ立方根ノ最高位トノ關係ハ容易ニ知ルヲ得. 卽チ次ノ如シ.

	整數			小數		
原數ノ最高位	第九位 第八位 第七位	第六位 第五位 第四位	第三位 第二位 第一位	第一位 第二位 第三位	第四位 第五位 第六位	第七位 第八位 第九位
立方根ノ最高位	第三位	第二位	第一位	第一位	第二位	第三位

之ニヨリテ小數點ヨリ三桁毎ニ區切レバ立方根ノ最高位ハ容易ニ知ルコトヲ得ベシ.

例 1. 66430125 ヲ區切レバ 66|430|125, 因テ此ノ數ノ立方根ノ最高位ハ百ノ位ナリ.

例 2. 0.000000216 ヲ區切レバ 0.000|000|216, 因テ此ノ數ノ立方根ノ最高位ハ小數第三位ナリ.

(2) **開立ノ仕方.**

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ナル公式ニヨレバ

例ヘバ $35^3=(30+5)^3=30^3+3(30^2\times 5)+3(30\times 5^2)+5^3$ ナリ. 偖 $35^3=42875$ ナリ. 今此ノ 42875 ノ立方根ヲ求ムル運算ヲ次ニ示サン. [(甲)ヲ見ヨ]

運算

```
(甲)          42|875 (35
              27
                ─────
      2700     15875
95     475
     ─────
      3175     15875
              ──────
                   0
```

```
(乙)                        a³+3a²b+3ab²+b³ ( a+b
                            a³
                            ─────────────────
           3a²                 3a²b+3ab²+b³
3a+b        (3a+b)b
          ─────────────
          3a²+3ab+b²            3a²b+3ab²+b³
                               ─────────────
                                           0
```

説明 (乙)ニ於テ $a=30$, $b=5$ トスレバ(甲)ト全ク同ジモノトナル,故ニ(甲)(乙)ヲ比較對照スレバ別ニ説明ヲ要セザルベシ.

尚立方根ガ三桁トナルモノノ例ヲ示サン.

例 1. 152273304 ノ立方根ヲ求ム.


```
(甲)                                152|273|304 ( 534  答.
                                    125
                                    ───────
                   7500              27273
    153)            459)
       |          ──────
       }           7959}              23877
       |              9)            ─────────
      6)          ──────              3396304
    ────          842700
    1594            6376
                  ──────
                  849076              3396304
                                    ─────────
                                            0
```

今 $A=152273304$, $a=500$, $b=30$, $c=4$ トシテ之ヲ整式ノ開立法ト比較セン.

```
(乙)                                      A                  ( a+b+c
                                          a³
                                          ────────
                    3a²                   A  −a³
 3a + b)               (3a+b)b
       |            ─────────────}        3a²b+3ab²+b³
       }            3a²+3ab+b²  }        ──────────────
       |                    b²  )         A  −(a  +b)³
    2b)             ──────────
──────────          3(a+b)²
3(a+ b)+c                {3(a+b)+c}c
                    ──────────────────────
                    3(a+b)²+3(a+b)c+c²    3(a+b)²c+3(a+b)c²+c³
                                          ──────────────────────
                                          A  −(a  +b  +c)³
```

之モ亦(甲)(乙)ヲ對照スレバ別ニ説明ヲ要セザルベシ. 但 } ヲ以テ連結セルハ其等ノ式又ハ數ノ和ヲ見出スコトヲ示ス. 而シテ之ハ甲ニ於テハ夫夫 530×3 及 $530^2\times 3$ ヲ見出ス便法ニシテ,乙ニ於テハ夫夫 $3(a+b)$ 及 $3(a+b)^2$ ヲ見出ス便法ナリ.

例 2. 30 ノ立方根ヲ求ム. 答 3.10723 强.

運算

```
                                  30      ( 3.10723
                                  27
                                 ----
              2700               3000
 91)            91)
   |          ----|              2791
   |          2791|             ---------
   |             1)             209000000
  2)          --------
 ----         28830000
 9307)           65149)
     |        --------|          302266043
     |        28895149|         -----------
     |              49)           6733957000
   14)        ----------
 -----        2896034700
 93212)           186424)
      |       ----------|         5792442248
      |       2896221124|        -------------
      |                4)          941514752000
     4)       ------------
 ------       289640755200
 932163            2796489
              ------------        868930655067
              289643551689       --------------
                                   72581096933
```

注意. 288300 ニテ 209000 ヲ除スルニ整商ナシ, 故ニ小數第二位ハ 0 ナリ. 小數第三位ニ移ルニハ $3100^2 \times 3$ ハ 28830000 トナリ, 3100×3 ハ 9300 トナルニヨリ夫夫第一行ニハ 0 ヲ一ツ, 第二行ニハ 0 ヲ二ツ添ヘレバ可ナリ.

又此ノ例ハ開キ切レザル場合ナリ.

(3) **分數ノ開立法.** 分數ノ立方根ヲ求ムルニハ, 分母ガ立方數ナルトキハ分子ノ立方根ヲ分母ノ立方根ニテ割ルベシ.

然ラザル場合ハ先ヅ其ノ分數ヲ小數ニ直シテ後其ノ立方根ヲ求ムベシ. 或ハ場合ニヨリ次ノ如クスルモ亦可ナリ.

例 3. $\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{4\times5^2}{5^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{100}}{5}\doteqdot\dfrac{4.64}{5}\doteqdot0.93.$*

例　題

次ノ諸數ノ立方根ヲ求ム. 開キ切レザル場合ニハ小數第二位迄求メ, 端下ヲ切捨テヨ.

1. 2197.　　2. 5433.　　3. 3.375.

4. 0.004096.　　5. 42.　　6. 9800344.

7. 5683247.　　8. 20910518875.

9. $\dfrac{5}{8}$.　　10. $\dfrac{12}{125}$.　　11. $\dfrac{7}{9}$.　　12. $\dfrac{355}{113}$.

問　題　二　十

1. 次ノ式ノ六乘根ヲ求ム.

$$x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64.$$

次ノ羃根ヲ求ム. 開キ切レザルモノハ小數第三位迄求メ, 端下ヲ切捨テヨ.

2. $\sqrt[3]{2.718281828}$.　　3. $\sqrt[6]{244140625}$.

4. $\sqrt[6]{40.353607}$.　　5. $\sqrt[9]{42720835.145912}$.

6. 一升ノ容積ヲ有スル立方體ノ一稜ノ長サ

$\sqrt[3]{64827}=40.2$

* $\doteqdot$ ハ其ノ右ニアル數ガ左ニアル數ノ近似値ナルヲ示ス.

幾寸ナルカ. 厘位迄求メ,端下ヲ四捨五入セヨ.

7. 球ノ體積ハ其ノ直徑ノ立方ニ比例スルモノナリ. 甲乙二球アリ,甲ノ體積ハ乙ノ體積ノ十倍ナリト云フ,甲ノ直徑ハ乙ノ直徑ノ何倍ナルカ.

小數第三位迄求メ,端下ヲ切捨テヨ. $\sqrt[3]{10} = 2.154$

8. 球ノ半徑ヲ r ニテ表セバ其ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ニテ表サル. 今 $\pi=3.1416$ トシテ一斗ノ容積ヲ有スル球ノ直徑ヲ計算セヨ. 厘ノ位迄求メ,端下ヲ四捨五入セヨ.

9. 一年毎ノ複利ニテ金四千五百圓ヲ三ヶ年間貸シ,元利合計五千三百五十九圓五十七錢二厘ヲ得タリト云フ. 年利率ヲ求ム.

第四章　無理數及無理式

136. 無理數. 或整數若クハ分數ノ平方ニ等シキ數ヲ**完全ナル平方數**ト云フ. 完全ナル平方數ノ平方根ハ恒ニ求ムルコトヲ得レドモ然ラザル數ハ所謂開キ切レヌ數ニシテ其ノ平方根ニ當ルベキ整數若クハ分數ハ求ムルコトヲ得ズ.

例ヘバ 2 ハ完全ナル平方數ニアラズ,故ニ之ニ

開平法ヲ行ヘバ 1.414213...... トナリテ其ノ演算ニハ際限ナシ. $\sqrt{3} = 1.732......$

故ニ $\sqrt{2}$ ニテ表サルベキ數ハ整數ニアラザルハ勿論又分數ニモアラズ. 之ハ單ニ二乘スレバ 2 トナル數ナリト解釋スベキモノナリ.

今 2 ニ開平法ヲ行ヒテ得タル結果ヲ分ノ位,厘ノ位,毛ノ位,......ニ止メタルモノト其等ノ末位ニ 1 ヲ足シタルモノトヲ列記スレバ次ノ如シ.

1.4,　1.41,　1.414,　1.4142,　1.41421,　1.414213,　......

1.5,　1.42,　1.415,　1.4143,　1.41422,　1.414214,　......

此ノ二組ノ數ニツキテ考フルニ,第一組ノ各數ハ何レモ $\sqrt{2}$ ヨリモ小ニシテ第二組ノ各數ハ何レモ $\sqrt{2}$ ヨリモ大ナリ. 從テ第一組ノ各數ハ何レモ第二組ノ各數ヨリハ小ナレドモ此ノ二組ノ數ハ桁數ノ增スニ從テ次第ニ相近ヅクコト限ナシ. 卽チ $\sqrt{2}$ ハ斯ノ如ク限ナク相接近スル二組ノ數ノ間ニ挾マルル數ナリ.

斯ノ如ク,整數ニモ又分數ニモアラズシテ二組ノ限ナク相接近スル數ノ間ニ挾マルベキ數ヲ**無理數**ト云フ. 無理數ト區別スルタメニ整數及分

數ヲ有理數ト云フ.

$\sqrt{2}$ ト同樣ニ考フレバ $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$ ノ如キハ何レモ亦無理數ナリ.

一般ニ正ノ有理數 a ガ丁度或有理數ノ n 乘ニ等シカラザル場合ハ $\sqrt[n]{a}$ ハ無理數ナリ. 斯ノ如キ無理數ヲ又**不盡根數**トモ云フ.

又圓周率 3.1415926...... モ一ツノ無理數ナリ. サレド圓周率ハ不盡根數ニハアラズ.

無理數ニモ正負ノ二種アリ. 例ヘバ 2 ノ平方根ナル $\sqrt{2}$ ハ正ノ無理數ニシテ, $-\sqrt{2}$ ハ負ノ無理數ナリ.

137. 無理數ノ近似値. 無理數ハ其ノ値ヲ有理數ニテ表スコトヲ得ザレドモ, 一般ニ之ヲ二組ノ限ナク相接近スル有理數ノ間ニ挾ムコトヲ得ルモノナリ. 此ノ二組ノ數ヲ其ノ無理數ノ近似値ト云フ. 而シテ其ノ小ナル組ノ各數ヲ**不足ナル近似値**, 大ナル組ノ各數ヲ**過剩ナル近似値**ト云フ.

例ヘバ前節ニ述ベタル第一組ノ一數 1.4142 ハ $\sqrt{2}$ ノ不足ナル近似値ニシテ, 又第二組ノ一數

1.415 ハ $\sqrt{2}$ ノ過剩ナル近似値ナリ.

138. 無理式. 代數式ノ羃根ノ開キ切レザルモノヲ**無理式**又ハ**根式**ト云フ.

例ヘバ $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt[3]{a^2b}$ 等ハ皆無理式ナリ.

不盡根數及無理式ニ於テ何乘根ナルカヲ示ス數ヲ其ノ**次數**ト云フ.

例ヘバ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ ハ何レモ二次ノ不盡根數ニシテ, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a+b}$ ハ何レモ三次ノ根式ナリ.

注意. 以下本書ニ於テハ別段ノ斷ナキトキハ n ガ偶數ナルトキ $\sqrt[n]{}$ ハ n 乘根ノ正ナル方ヲ表スコトトス. 例ヘバ $\sqrt{9}=3$ ニシテ又 $\sqrt{2}$ ハ 2 ノ平方根ノ正ナル方ヲ表ス, 從テ $-\sqrt{9}=-3$ ニシテ又 $-\sqrt{2}$ ハ 2 ノ平方根ノ負ナル方ヲ表ス. 又 $a>0$ ナルトキハ $\sqrt{a^2}=a$, $a<0$ ナルトキハ $\sqrt{a^2}=-a$ ナリ.

139. 無理數ノ演算. 無理數ノ演算ハ有理數ノ場合ト同法則ニ從フモノトス.

例ヘバ $\sqrt[m]{abc\ldots\ldots}=\sqrt{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\ldots\ldots$*

ナル法則ハ $\sqrt[m]{abc\ldots\ldots}$, $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{c}$, ... ガ有理數ナルト無理數ナルトニ拘ラズ眞ナルベシ. 何ト

* 文字 a, b, c 等ハ正ノ數ナリトス. 以下皆之ニ倣フ.

ナレバ無理數ノ演算ハ有理數ノ演算ト同法則ニ從フガ故ニ既ニ證明セルト全ク同様ニシテ

$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\ldots\ldots)^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m(\sqrt[m]{c})^m\ldots\ldots$$

$$=abc\ldots\ldots,$$

$$\therefore\ \sqrt[m]{abc\ldots\ldots}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\ldots\ldots$$

同様ニシテ第一章ニ述ベタル冪根ニ關スル諸法則ハ開キ切レルト開キ切レザルトニ論ナク,常ニ眞ナルコトヲ知ル.

此等ノ諸法則ハ a, b, c 等ガ無理數ナルトキニモ亦適用シ得ベシ.

例ヘバ $\sqrt[m]{\sqrt{2}\sqrt[3]{5}}=\sqrt[m]{\sqrt{2}}\sqrt[m]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[2m]{2}\sqrt[3m]{5}.$

例　題

次ノ等式ヲ證明セヨ.

1. $\sqrt[4]{(\sqrt[3]{5})^8}=\sqrt[3]{25}.$　　2. $\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}.$

3. $\sqrt[3]{a^3b^2}=a\sqrt[3]{b^2}.$　　4. $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\sqrt{2}.$

5. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^5}}=\dfrac{1}{a}.$　　6. $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{12}}{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}}=2.$

140. 不盡根數及無理式ノ變形.

(I) 有理數ハ之ヲ外見上不盡根數ノ形ニ表スコトヲ得.

例 1. $5=\sqrt{5^2}=\sqrt[3]{5^3}=\sqrt[n]{5^n},$

又 $a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}.$

(II) 不盡根數ハ之ヲ次數ガ原ノ次數ノ倍數ナル不盡根數ノ形ニ表スコトヲ得.

例 2. $\sqrt{3}=\sqrt[6]{(\sqrt{3})^6}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27},$

又 $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{(\sqrt[m]{a})^{mn}}=\sqrt[mn]{a^n}.$

(III) 不盡根數ハ開キ切レル因數ヲ根號外ニ出シテ係數トナシ,之ヲ簡單ニスルコトヲ得.

例 3. $\sqrt{a^4b}=\sqrt{a^4}\sqrt{b}=a^2\sqrt{b}.$

例 4. $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\times3}=\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}.$

(IV) 不盡根數ノ係數ハ之ヲ根號內ニ入ルルコトヲ得.

例 5. $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}.$

例 6. $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\times5}=\sqrt[3]{40}.$

(V) 根號內ニアル式ガ分數ナルトキハ此ノ式ヲ變形シテ分母ガ根號ヲ含マヌ樣ニスルコトヲ得.

例 7. $\sqrt{\dfrac{5}{21}}=\sqrt{\dfrac{5\times21}{21^2}}=\dfrac{\sqrt{105}}{21}.$

例 8. $\sqrt[3]{\dfrac{7}{24}}=\sqrt[3]{\dfrac{7}{2^3\times 3}}=\sqrt[3]{\dfrac{7\times 3^2}{2^3\times 3^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{63}}{6}.$

例 9. $\sqrt[3]{\dfrac{c}{ab}}=\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^2c}{a^3b^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2c}}{ab}.$

例題

1. 次ノ數ヲ六次ノ不盡根數ノ形ニ化セヨ。
$\sqrt{5}$, 2, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{10}$.

2. 次ノ數ヲ十二次ノ不盡根數ノ形ニ直セ。
$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{b^3}$, $\sqrt[6]{c^5}$, $\sqrt{d}$.

3. 次ノ數ノ開キ切レル因數ヲ根號外ニ出セ。
$\sqrt{4x^2y^4}$, $\sqrt[3]{-27a^3}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{48}$, $\sqrt{450}$.

4. 次ノ數ノ係數ヲ根號內ニ入レヨ。
$2\sqrt[3]{14}$, $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{21}$, $a\sqrt{bc}$, $m\sqrt[3]{n^2}$.

5. 次ノ式ヲ分母ガ根號ヲ含マザル形ニ直セ。
$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, $\sqrt{\dfrac{5}{18}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{43}{24}}$.

141. 同類根數. 幾ツカノ數ガ同ジ無理因數*ヲ有スルトキハ之ヲ同類根數ト云フ.

例ヘバ $4\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ ハ同類根數ナリ. $3\sqrt{a}$, $b\sqrt{a}$

* 不盡根數ナル因數ヲ無理因數ト云フ.

モ亦然リ. 又 $\sqrt[3]{24}$, $5\sqrt[3]{3}$ モ實ハ同類根數ナリ, 何トナレバ $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\times 3}=2\sqrt[3]{3}$ ナルガ故ナリ.

同類根數ノ加法及減法ハ次ノ如クニ之ヲ行フ.

例 1. $3\sqrt{20}+4\sqrt{5}-6\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
$=6\sqrt{5}+4\sqrt{5}-6\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
$=(6+4-6+2)\sqrt{5}=6\sqrt{5}.$

例 2. $a\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{b^3x}-3c\sqrt[3]{x}=a\sqrt[3]{x}+2b\sqrt[3]{x}-3c\sqrt[3]{x}$
$=(a+2b-3c)\sqrt[3]{x}.$

注意. $3\sqrt{20}+2\sqrt{5}$ ノ如キ數ノ近似値ヲ求ムルニハ之ヲ $8\sqrt{5}$ ノ如ク變形シテ後計算スベシ.

例題

次ノ諸式ヲ簡單ニセヨ.

1. $\sqrt{20}+\sqrt{45}$.　　2. $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$.

3. $4\sqrt{63}+4\sqrt{7}-6\sqrt{28}$.

4. $\sqrt{12}+\sqrt{75}$ ヲ小數第三位迄計算セヨ.

142. 同次根數. 同次根數ノ乘法及除法ハ次ノ如クニ之ヲ行フ.

例 1. $4\sqrt{3}\times 3\sqrt{11}=12\sqrt{3}\sqrt{11}=12\sqrt{33}$.

例 2. $\sqrt[4]{a+b}\times\sqrt[4]{a-b}=\sqrt[4]{(a+b)(a-b)}=\sqrt[4]{a^2-b^2}$.

例 3. $\dfrac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{7}\sqrt{5}}{4\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{35}}{20}.$

同次ナラザル場合モ同次ニ化シテ後乘法或ハ除法ヲ行フコトヲ得.

例 4. $7\sqrt{2}\times3\sqrt[3]{5}=7\sqrt[6]{8}\times3\sqrt[6]{25}=21\sqrt[6]{8\times25}$

$$=21\sqrt[6]{200}.$$

例 5. $2\sqrt{5}\div7\sqrt[3]{3}=2\sqrt[6]{125}\div7\sqrt[6]{9}$

$$=\frac{2\sqrt[6]{125}}{7\sqrt[6]{9}}=\frac{2}{7}\,\frac{\sqrt[6]{125}\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{9}\sqrt[6]{3^4}}$$

$$=\frac{2}{7}\,\frac{\sqrt[6]{125\times81}}{3}=\frac{2\sqrt[6]{10125}}{21}.$$

注意. 同次根數ニ化スルニハ各次數ノ最小公倍數ヲ次數トセル不盡根數ノ形ニ化スルヲ可トス. 又次數ノ異ナル不盡根數ノ大小ヲ比較スルニモ同次根數ニ化スルコトニヨリテナスヲ得.

複雜ナル不盡根數ノ乘法ハ多項式ノ乘法ト同様ノ方法ニテ之ヲ行フベシ.

例 6. $(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

$$=30-8\sqrt{10}+9\sqrt{10}-24=6+\sqrt{10}.$$

例 7. $(\sqrt{a}-2\sqrt{b})(3\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$$=3a-6\sqrt{ab}+\sqrt{ab}-2b=3a-2b-5\sqrt{ab}.$$

例題

次ノ式ヲ計算セヨ.

1. $2\times\sqrt{15}\times\sqrt{51}.$　　2. $5\sqrt[3]{21}\times2\sqrt[3]{147}.$

3. $a\sqrt{x^3}\times x\sqrt{ax}.$　　4. $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{b^2}{x}}\times\sqrt{\dfrac{x^3}{3b^4}}.$

5. $\sqrt[3]{54}\times3\sqrt{16}.$　　6. $5\sqrt{27}\div4\sqrt{18}.$

7. $6\sqrt{14}\div2\sqrt{27}.$　　8. $3\sqrt{12}\div2\sqrt[3]{9}.$

9. $(7\sqrt{a}-2\sqrt{b})(3\sqrt{a}-\sqrt{b}).$

10. $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2.$　　11. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2.$

12. $(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}).$

143. 分母ヲ有理化スルコト.

例ヘバ　$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-(\sqrt{b})^2=a^2-b,$

又　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$

因テ一ツノ有理數ト二次ノ不盡根數トノ和ト差トノ積, 又ハ二ツノ二次ノ不盡根數ノ和ト差トノ積ハ何レモ有理數トナル.

之ヲ應用スレバ二次ノ不盡根數ヲ分母ニ有スル式ノ分母ヨリ根號ヲ取去ルコトヲ得.

例 1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$ ノ分母ヨリ根號ヲ取去レ.

解
$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{6+\sqrt{3}}{12-1}=\frac{6+\sqrt{3}}{11}\quad 答.$$

斯ノ如ク分母ヨリ根號ヲ取去ルコトヲ**分母ヲ有理化スル**ト云フ.

例 2. $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$ ノ分母ヲ有理化セヨ.

解
$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-2\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}-2\sqrt{b})}$$
$$=\frac{a-\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}+2b}{a-4b}$$
$$=\frac{a+2b-3\sqrt{ab}}{a-4b}\quad 答.$$

問題　二十一

次ノ式ヲ展開セヨ.

1. $(\sqrt{2x-a}-\sqrt{a-x})^2$.　**2.** $(\sqrt{a^2+b^2}-2\sqrt{a^2-b^2})^2$.

次ノ分數式ノ分母ヲ有理化スベシ.

3. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$.　**4.** $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$.

5. $\dfrac{5-3\sqrt{6}}{4+3\sqrt{6}}$.　**6.** $\dfrac{2a-\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-b}$.

7. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.　**8.** $\dfrac{2\sqrt{a+b}-3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$.

9. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$.

10. $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}$.

11. $\dfrac{3-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.　**12.** $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

第九編　二次方程式

第一章　一元二次方程式

144. 一元二次方程式.

一元二次方程式ノ一般ナル形ハ次ノ如シ.

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (a\neq 0)$$

偖既知數 a, b, c ノ中 a 以外ノモノハ0ナルコトモアルベシ. 若 b ガ0ナルトキ,即チ未知數 x ノ一次ノ項ヲ含マザルトキハ之ヲ**純二次方程式**ト
$(ax^2+c\neq 0)$
云ヒ, x ノ二次ノ項モ一次ノ項モ共ニ有スルトキハ之ヲ**雑二次方程式**ト云フ.
$(a\neq 0,\ b\neq 0$

145. 因數分解ニヨル解法.

例 1. $x^2+2x-15=0$ ヲ解ケ.

解 左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-3)(x+5)=0.$$

偖左邊ノ因數ノ何レカガ0トナレバ左邊ハ0トナル. 從テ左邊ノ因數ノ各ヲ0ナラシムル x ノ値ハ何レモ此ノ方程式ノ根ナリ.

$$\therefore\ x-3=0,\quad \text{之ヨリ}\quad x=3,$$

或ハ　$x+5=0,$　之ヨリ　$x=-5.$

因テ所要ノ根ハ次ノ如シ.

答　$x=3$ 或ハ $-5.$

斯ノ如ク一元二次方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メ,之ヲ簡單ニシタル式ガ因數ニ分解シ得ルトキハ其ノ各因數ヲ0ニ等シト置キテ得ベキ二ツノ一次方程式ヲ解クコトニヨリテ所要ノ根ヲ求ムルコトヲ得ルナリ.

例 2. $(x-4)(x+1)=2(x-2)$ ヲ解ケ.

解 先ヅ括弧ヲ去レバ

$$x^2-3x-4=2x-4,$$

移項スレバ　$x^2-5x=0,$

即チ　$x(x-5)=0.$

$\therefore\ x=0$ 或ハ $x-5=0.$　$x=0$ カ又ハ $x-5=0$ ノトキ

之ヨリ　$x=0$ 或ハ 5 答.

注意. (1) 上例ニ見ルガ如ク二次方程式ハ一般ニ二ツノ根ヲ有ス.

(2) 因數分解ニヨル解法ハ簡單ニシテ便利ナレドモ唯容易ニ因數ニ分解シ得ル場合ニ限リ用

$(x-2a)(x-a)$　　$(x+a)(x-b)$

フベシ,一般ニハ次ノ諸節ノ方法ニヨルヲ可トス.

例　題

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $(x+1)(2x-3)=0$.　　2. $x^2-5x+6=0$.
3. $x^2-7x+10=0$.　　4. $x^2-x+2=x+17$.
5. $4x^2+x=x+9$.　　6. $7x(x-3)=2(x-3)$.
7. $(x+7)(2x-3)=5(x+7)$.　　8. $x^2-6x+9=0$.
9. $x^2-3ax+2a^2=0$.　　10. $x^2+(a-b)x-ab=0$.

146. 純二次方程式ノ解法. x ノ一次ノ項ヲ含マヌ故,其ノ一般ナル形ハ $ax^2=b$ ト書クヲ得. 今之ニツキテ解法ヲ示サン.

$a \neq 0$ ナルニヨリ兩邊ヲ a ニテ除スレバ

$$x^2=\frac{b}{a},$$

故ニ x ハ $\frac{b}{a}$ ノ平方根ニ等シ.

即チ　$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

注意. $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ トアルハ $+\sqrt{\frac{b}{a}}$ 或ハ $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ トスベキヲ纒メテ記セルナリ. 斯ノ如キ符號 $\pm$ ヲ複號ト云フ.

例 1. $3x^2-75=0$ ヲ解ケ.

解　移項シテ兩邊ヲ 3 ニテ除スレバ

$$x^2=25,$$

之ヨリ　$x=\pm5$ 答.

例 2. $(x-3)(x+3)=1$ ヲ解ケ.

解　左邊ノ括弧ヲ外セバ　$x^2-9=1$,

移項スレバ　$x^2=10$,

之ヨリ　$x=\pm\sqrt{10}$ 答.

注意. 根ヲ得タルトキハ之ヲ原方程式ノ未知數ニ代入シテ其ノ正否ヲ驗スベシ.

例　題

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $x^2+5=41$.　　2. $8x^2-5=3x^2+20$.
3. $12(x^2-3)+8(x^2+2)=0$.
4. $(2x-5)(2x+5)=11$.　　5. $(x+2)^2-4(x+8)=21$.

147. 雜二次方程式ノ解法.

例 1. $(x-4)^2=1$ ヲ解ケ.

解　此ノ方程式ハ $x-4$ ヲ一ツノ未知數ノ如クニ考フレバ之ハ純二次方程式ナリ.

此ノ儘平方ニ開ケバ　　$x-4=\pm1$,

移項スレバ　　$x=4\pm1$,

之ヨリ　　$x=5$ 或ハ 3 答.

1. 移項、(其ノ他ノ項)。
〃 二乗ニ移シテ其ノヲ加ヘル。

例 2.　$x^2+6x-16=0$ ヲ解ケ.

解　此ノ方程式ヲ解クニハ,先ヅ例 1 ノ如ク純二次方程式ト見做シ得ル形ニ直スベシ.

先ヅ x ヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ

$$x^2+6x=16,$$

左邊ノ式ヲ平方ノ形ニ直サンガタメニ x ノ係數 6 ノ半分ノ二乘卽チ 9 ヲ兩邊ニ加フレバ

$$x^2+6x+9=25,$$

卽チ　　$(x+3)^2=25.$

平方ニ開ケバ　　$x+3=\pm5$,

之ヨリ　　$x=2$ 或ハ -8 答.

注意. (1) 一般ニ x^2+px ナル式ハ其ノ x ノ一次ノ項ノ係數 p ノ半分ノ平方卽チ $\frac{p^2}{4}$ ヲ加フレバ完全ナル平方式トナル. 卽チ

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2+2\left(\frac{p}{2}\right)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

(2) 若方程式ニ於テ x^2 ノ係數ガ 1 ニアラザル場合ハ先ヅ兩邊ヲ此ノ係數ニテ除スベシ.

例 3.　$4x^2+25=-20x$ ヲ解ケ.

解　x ヲ含ム項ヲ左邊ニ,x ヲ含マザル項ヲ右邊ニ移シ,兩邊ヲ x^2 ノ係數 4 ニテ除スレバ

$$x^2+5x=-\frac{25}{4},$$

x ノ係數ノ半分 $\frac{5}{2}$ ノ平方 $\frac{25}{4}$ ヲ兩邊ニ加フレバ

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{25}{4}+\frac{25}{4},$$

卽チ　　$\left(x+\frac{5}{2}\right)=0,$　　右辺が0ニナッテ居ル

$$\therefore\ x+\frac{5}{2}=0,\quad 之ヨリ\quad x=-\frac{5}{2}\ 答.$$

注意. 一般ニ二次方程式ノ根ハ二ツアレドモ此ノ例ニ於テハ唯一ツナリ. サレド斯カル場合ニハ方程式ハ二ツノ相等シキ根(等根)又ハ二重根ヲ有スト云フ.

以上ノ諸例ニ示セルガ如ク一般ニ二次方程式ヲ解クニハ次ノ規則ニ從フベシ. 卽チ

未知數 x ヲ含ム諸項ヲ一邊ニ,之ヲ含マザル項ヲ他邊ニ移シテ同類項ヲ約シ,次ニ x^2 ノ係數ニテ兩邊ヲ除シタル後 x ノ係數ノ半分ノ平方ヲ兩邊ニ

加ヘ,兩邊ヲ平方ニ開キテ得ベキ一次方程式ヲ解クベシ.

例題

次ノ二次方程式ヲ解ケ.

1. $2x^2-6x=x^2+15.$　　2. $x^2-1=20x-97.$

3. $(2x+2)(x+3)=x^2+4x+27.$

4. $4x^2-8x-24=3x^2-40.$

5. $x^2+5x=14.$　　6. $x^2-11x=2x^2-x+25.$

7. $5x^2-21x+1=5-2x.$　　8. $2x^2-16x+2=0.$

9. $2x(3x-4)=4x+12.$　　10. $\dfrac{x^2-1}{3}=\dfrac{(x+2)^2}{2}.$

148. 一元二次方程式ノ根ノ公式.

今一元二次方程式ノ一般ナル形

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

ヲ取リテ其ノ根ヲ求メン.

先ヅxヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ

$$ax^2+bx=-c,$$

$a\neq0$ナルベキニヨリaニテ兩邊ヲ除スレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

xノ係數ノ半分ノ二乘$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ヲ兩邊ニ加フレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

卽チ　$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

平方ニ開ケバ　$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

之ヨリ　$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 或ハ } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

卽チ　$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

之ガ一元二次方程式(1)ノ根ノ公式ナリ.

此ノ公式ヲ記憶シテ其ノ應用ニ習熟スベシ.

例 1. $6x^2-13x+2=0$ ヲ解ケ.

解 前節ニ述ベタル方法ニテモ解クコトヲ得レドモ茲ニハ上ノ公式ヲ應用スベシ.

但$a=6,\ b=-13,\ c=2$ヲ公式ニ代入スレバ

$$x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\times6\times2}}{2\times6}$$

$$=\frac{13\pm\sqrt{169-48}}{12}=\frac{13\pm11}{12}.$$

卽チ　$x=2$ 或ハ $\dfrac{1}{6}$　答.

例 2. $3x^2+ax-3bx=ab$ ヲ解ケ.

解　移項シテ未知數 x ニ着目シテ纏ムレバ

$$3x^2+(a-3b)x-ab=0.$$

公式ニヨリ　$x=\dfrac{-(a-3b)\pm\sqrt{\{(a-3b)^2-4\times3\times(-ab)\}}}{2\times3}$

$$=\frac{-(a-3b)\pm\sqrt{a^2+6ab+9b^2}}{6}$$

$$=\frac{-(a-3b)\pm(a+3b)}{6}.$$

之ヨリ　　$x=b$ 或ハ $-\dfrac{a}{3}$ 答.

注意. 一元二次方程式ハ一般ニ

$$x^2+px+q=0$$

ナル形ニ表スコトヲ得. 此ノ時ノ根ハ次ノ如シ.

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad 又ハ\quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

例題

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $5x^2+14x=55.$　　2. $3x^2+35=22x.$

3. $x^2+10x=42-x.$　　4. $3x^2+27=30+x-5x^2.$

5. $x^2-29x+5=11-4x^2.$ 6 or $-\frac{1}{5}$　　6. $x^2-4=\dfrac{x-9}{3}.$ $\frac{1+\sqrt{37}}{6}$ or $\frac{1-\sqrt{37}}{6}$

7. $(x-1)(2x-3)=15x-39.$ 7 or 3

8. $\dfrac{2-x^2}{3}-\dfrac{x-x^2}{2}=1-\dfrac{5}{3}x+x^2.$ 1 or $\frac{2}{3}$

9. $(x-4)(3x-1)=7x-x^2-21.$ $\frac{5}{2}$ 等根

10. $x^2-2ax+a^2=b^2.$ $(a+b)$ or $(a-b)$　　11. $abx^2+(a^2-b^2)x=ab.$

12. $x^2+1+\dfrac{m^2+n^2}{mn}x=0.$

149. 一元二次方程式應用問題.

次ニ二次方程式ヲ用ヒテ解キ得ベキ應用問題ノ解法ヲ示サン.

例1. 二桁ノ數アリ,一ノ位ノ數字ハ十ノ位ノ數字ヨリモ5ダケ多ク,且其ノ數ハ數字ノ積ノ二倍ヨリモ1ダケ少ナシト云フ. 其ノ數ヲ求ム.

解　十ノ位ノ數字ヲ x トスレバ一ノ位ノ數字ハ $x+5$ ニ等シ,從テ此ノ數ハ $10x+(x+5)$ ナルベシ.

因テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得ベシ.

$$2x(x+5)-1=10x+(x+5).$$

移項シテ簡約スレバ　$2x^2-x-6=0.$

之ヲ解ケバ　$x=2$ 或ハ $-\dfrac{3}{2}.$

偖題意ニヨリ x ハ一桁ノ正ノ整數ナラザルベカラズ. 故ニ $-\dfrac{3}{2}$ ハ方程式ノ根ナレドモ問題ニハ適合セズ. 故ニ十ノ位ノ數字ハ2ナリ,從テ一ノ位ノ數字ハ 2+5 卽チ 7 ナリ.　　答 27.

例 2. 毎秒 v 尺ノ初速度ヲ以テ一物體ヲ眞上ニ投ゲ上グルトキ t 秒後ニ於ケル其ノ物體ノ高サ(投ゲ上ゲタル所ヨリノ距離)ヲ s 尺トスレバ此ノ v, t, s ノ間ニハ通常 $s=vt-16t^2$ ナル關係アリト云フ. 今毎秒40尺ノ初速度ニテ投ゲ上ゲタルモノガ16尺ノ高サニアルハ投ゲ上ゲタルトキヨリ幾秒後ナルカ.

解 上ノ式ニ $v=40,\ s=16$ ヲ代入スレバ

$$16=40t-16t^2,$$

移項スレバ $$16t^2-40t+16=0.$$

t ヲ未知數トスル此ノ方程式ヲ解ケバ

$$t=\frac{1}{2} \text{ 或ハ } 2.$$

答 $\frac{1}{2}$ 秒後, 或ハ 2秒後.

倍二ツノ結果ヲ得タル所以ヲ考フルニ, 投ゲ上ゲタルモノガ上リ行ク途中ニ於テ一度16尺ノ高サヲ有スルコトアルベク, 次ニ上リツメテ後落下スルトキ其ノ落下ノ途中ニ於テ再ビ16尺ノ高サヲ有スルコトアルベシ. 即チ $\frac{1}{2}$ 秒後ハ上ル途中ニ於テ16尺ノ高サニ達シタル時ニ當リ, 2秒後ハ下ル途中ニ於ケル其ノ時ニ相當スルナリ.

注意. 二次方程式ノ根ヲ得タルトキハ其ガ問題ニ適合スルヤ否ヤヲ吟味スベシ, 而シテ適合スルモノヲ取リテ答トシ, 他ハ之ヲ捨ツベシ.

問題 二十二

1. 甲乙二個ノ正數アリ, 甲ハ乙ノ三分ノ一ニシテ其ノ二數ノ積ハ432ナリト云フ. 二數如何.

2. 甲乙二個ノ正數アリ, 其ノ平方ノ和ハ769ニシテ甲ハ乙ノ二倍ヨリモ1ダケ大ナリト云フ. 此ノ二數ヲ求ム.

3. 二桁ノ數アリ, 一ノ位ノ數字ハ十ノ位ノ數字ノ二倍ニシテ各數字ノ積ハ此ノ數ヨリモ16ダケ小ナリト云フ. 仍テ問フ此ノ數如何.

4. 長方形ノ運動場アリ, 長サハ幅ヨリモ20間長クシテ其ノ面積ハ2925坪アリト云フ. 此ノ運動場ノ長サト幅トヲ計算セヨ.

5. 或正數ノ二倍ヲ42ヨリ減ジタル殘餘ト此ノ數ヲ12ニ加ヘタル和トノ積ハ此ノ數ノ十五倍ヨリモ40ダケ大ナリト云フ. 或數トハ如何.

6. 父子ノ年齡ノ差ハ20ニシテ其ノ積ノ十分

$(x+20)+80=\frac{2(x+20)}{10}$

ノ一ハ父ノ年齡ヲ超過スルコト180ナリト云フ. 父子ノ年齡各幾何ナルカ.

7. 矩形ノ大廣間アリ,周圍ハ44間,疊數ハ240疊アリト云フ. 此ノ廣間ノ縱横各幾間ナルカ.

$x(22-x)=120$

8. 或人2000圓ヲ一年每ノ複利ニテ預ケ,二ケ年ノ後之ヲ受取リタルニ元利合計2247圓20錢トナレリト云フ. 年利率幾許ナ $2000\times(1+x)^2=22472$

9. 縱ハ横ヨリ六寸長キ畫額ノ周圍ニ幅三寸ノ額緣ヲ附ケタルニ其ノ面積ハ丁度原ノ面積ノ二倍トナリタリ. 此ノ畫額ノ縱横各何程ナルカ.

$2x(x+6)=(x+6)(x+12)$

10. 兵卒若干名アリ,之ヲ充實方陣ニ並ベタルトキノ前面ノ一列ノ人數ハ之ヲ厚サ四人ナル中空ノ方陣ニ列ベタルトキノ前面ノ一列ノ人數ヨリモ十六人少ナシト云フ. 兵卒ノ數ヲ求ム.

11. 或立方體ノ稜ノ長サヲ三寸宛增ストキハ體積ニ於テ千六百四十七立方寸ヲ增スベシト云フ. 此ノ立方體ノ稜ノ長サヲ問フ.

12. 或人420圓ヲ借リテ一ケ年ノ後242圓ヲ返濟シ,又一ケ年ヲ經テ242圓ヲ返濟シタルニ丁度皆濟トナレリト云フ. 年利率ヲ求ム.

13. 一隊ノ兵士ヲ矩形ニ並ベシニ,一行ノ人員ハ一列ノ人員ヨリモ八人多ク,一行ノ人員及一列ノ人員ヲ尙八人宛增サンニハ更ニ現在ノ人員ダケヲ要スベシト云フ. 兵士ノ人員ヲ問フ.

14. 長サ30間,幅20間ノ運動場ニ於テ周圍ニ一樣ナル廣サノ競走道ヲ割キ取リタルニ運動場ノ面積141坪ヲ減ジタリト云フ. 道ノ廣サ如何.

15. 例2ニ於テ若每秒36尺ノ初速度ニテ投ゲ上ゲタル場合ニハ18尺ノ高サニアルハ投ゲ上ゲタルトキヨリ幾秒後ナルカ.

第二章 虛數

150. 虛數. 正數ノ平方根ハ有理數又ハ無理數ノ何レカニテ表スコトヲ得レドモ,負數ノ平方根ハ既ニ述ベタルガ如ク全ク意味ナキモノナリ.

然レドモ二次方程式ノ根ヲ求ムルニ當リテハ負數ノ平方根ヲ要スル場合往往ニシテ之アリ.

例ヘバ$x^2+4=0$ヲ解カンニ,先ヅ移項シテ$x^2=-4$トナル,卽チ-4ノ平方根ヲ求メザルベカラズ.

然ルニ數ノ正負ニ關セズ其ノ平方ハ必ズ正數ナルガ故ニ上ノ方程式ニ適合スル x ノ値ナキナリ.

斯ノ如キ場合ニモ尙二次方程式ニ根アリトセンニハ負數ノ平方根ノ如キモノヲ一ツノ數ト考フル必要アリ. 玆ニ於テ吾人ハ數ノ意味ヲ擴張シテ次ニ示スガ如キ方法ニヨリ -4 ノ平方根ノ如キモノモ亦一種ノ數トスルナリ.

先ヅ $\sqrt{-1}$ ヲ一ツノ新數トシ, i ヲ以テ之ヲ表シ, 且 $i^2=-1$ トス. 今 a ヲ以テ任意ノ有理數若クハ無理數トスルトキ ai 即チ $a\sqrt{-1}$ ヲ**虛數**ト云フ. 但 ai ニ於テ a ハ i ノ係數ノ如クニ取扱フモノトス.

例ヘバ $2i$, $-2i$ ハ虛數ニシテ ai ニ於ケル a ガ夫夫 2, -2 ナル場合ナリ.

虛數ヲ用フレバ負數ノ平方根ヲ求ムルコトヲ得ベシ.

例ヘバ $-4=4\times(-1)=2^2\times i^2=(2i)^2$ ナルガ故ニ $\sqrt{-4}=2i$ ナリ. 又同樣ニシテ

$$\sqrt{-9}=3i, \qquad \sqrt{-5}=\sqrt{5}\,i.$$

一般ニ a ガ正數ナルトキハ $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}=\sqrt{a}\,i.$

虛數ニ對シ有理數及無理數ヲ**實數**ト云フ.

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

両方負数なれば成立せず

151. 虛數ノ演算.

虛數ノ演算ハ實數ト同法則ニ從フモノト定ム.

例. $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}=2i+3i=5i,$

$\sqrt{-4}-\sqrt{-9}=2i-3i=-i,$

の符は −1

$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=2i\times3i=6i^2=-6,$

$\sqrt{-4}\div\sqrt{-9}=2i\div3i=\frac{2}{3}.$ (iを消す)

注意. 虛數ニ虛數ヲ乘ズルトキ注意ヲ要ス.

例ヘバ $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{36}=6$ トスレバ誤ナリ. 之ハ必ズ上ノ例ニ示スガ如ク先ヅ i ヲ用ヒテ表シ, 且 $i^2=-1$ ナルコトヲ嚴守セザルベカラズ. $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ハ a, b ガ兩方共ニ負數ナルトキハ通用セズ.

152. 平方根ハ二ツアルコト.

正數ノ平方根ハ正負ノ二ツノ實數ナルコト既ニ知レルガ如シ, 而シテ負數ノ平方根モ亦二ツアルナリ.

例ヘバ正數 a ノ平方根ハ $\sqrt{a}$ ト $-\sqrt{a}$ トニシテ負數 $-a$ ノ平方根ハ $\sqrt{a}\,i$ ト $-\sqrt{a}\,i$ トノ二ツナリ.

從テ零ナラザル實數ノ平方根ハ恒ニ二ツアリ.

注意. 本書ニ於テハ a ガ正數ナルトキハ $\sqrt{-a}$

a — $\pm\sqrt{a}$

$-a$ — $\pm\sqrt{a}\,i$

$i^2=-1$

ハ $\sqrt{a}i$ ヲ表シ，$-\sqrt{-a}$ ハ $-\sqrt{a}i$ ヲ表スモノトス.

例題

次ノ各式ヲ簡約セヨ.

1. $\sqrt{-49}-2\sqrt{-1}+3\sqrt{-4}$.
2. $(3+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-2})$.
3. $(\sqrt{5}+4\sqrt{-3})(\sqrt{5}-4\sqrt{-3})$.
4. $1\div\sqrt{-1}\div\sqrt{-1}$.　　5. $\sqrt{-75}\div\sqrt{-3}$.
6. $(a+bi)^2$.　　7. $(a+bi)(c+di)$.
8. $(a+bi)^2+(a-bi)^2$.　　$i^2 \times i = -i$
9. i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8 ノ値ヲ求ム.

-1　$-i$

153. 二次方程式ニ於ケル應用.

實數ト虛數トヲ用フレバ如何ナル二次方程式ニテモ必ズ其ノ根ヲ求ムルコトヲ得ルナリ.

例. $x^2-4x+13=0$ ヲ解ケ.

解 移項スレバ　$x^2-4x=-13$.

兩邊ニ $(-2)^2$ ヲ加フレバ　$x^2-4x+(-2)^2=-13+4$

卽チ　$(x-2)^2=-9$,

平方ニ開ケバ　$x-2=\pm 3i$.

之ヨリ　$x=2+3i$　或ハ　$2-3i$　答.

或ハ二次方程式ノ根ノ公式ヲ應用スレバ

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 13}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i.$$

驗. $x=2+3i$ ナルトキハ

原方程式ノ左邊$=(2+3i)^2-4(2+3i)+13$

$=4+12i-9-8-12i+13=0$.

又 $x=2-3i$ ナルトキハ

原方程式ノ左邊$=(2-3i)^2-4(2-3i)+13$

$=4-12i-9-8+12i+13=0$.

注意. 方程式ノ根ガ虛數ヲ含ムトキハ之ヲ虛根ト云ヒ，根ガ實數ナルトキハ之ヲ實根ト云フ.

實數ト虛數トノ代數的ノ和ヲモ亦虛數ト稱スレドモ，特ニ之ヲ複素數トモ云フ．上ノ方程式ノ二根ハ何レモ複素數ナリ.

154. 應用問題ヲ解クニ當リテ方程式ノ根トシテ虛數ヲ得ルコトアラバ之ハ問題ニ解答ナキコトヲ示セルナリ.

例. 每秒40尺ノ初速度ヲ以テ眞上ニ投ゲ上ゲタルモノガ106尺ノ高サニ達スルハ幾秒後ナル

カ. 但第149節例2ノ公式 $s=vt-16t^2$ ヲ用ヒヨ.

解 $s=106,\ v=40$ ヲ代入スレバ

$$106=40t-16t^2.$$

之ヲ解ケバ $\boxed{t=\frac{5\pm 9i}{4}}$. 複素数

之ハ虚根ナリ,故ニ此ノ問題ニハ解答ナシ. 即チ毎秒40尺ノ初速度ニテ投ゲ上グルトキハ106尺ノ高サニ上ラザル中ニ落下シ始ムベク決シテ其ノ高サ迄上ラザルナリ.

問題 二十三

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $x^2+x+1=0$. 2. $x^2-4x+8=0$.

3. $3x-1=(x+1)(4x+7)$.

4. $7x^2-26=(2x-2)(4x+7)$.

5. $4(x-2)-5(x+1)=(x-1)(x+2)$.

6. $\frac{x+1}{3}+\frac{x^2+3}{2}=1$. 7. $x^2-2ax+a^2+b^2=0$.

8. 長サ8尺ノ直線ヲ二ツノ部分ニ分チ,其ノ各部分ヲ一邊トスル二ツノ正方形ノ面積ノ和ヲ36平方尺ナラシメントス. 各部分ノ長サヲ求ム. 又其ノ和ヲ25平方尺ナラシメンニハ各部分ノ長サヲ何程トスベキカ.

9. 矩形ノ相隣ル二邊ノ和ガ42寸,面積ガ432平方寸ナリト云フ. 各邊ノ長サ如何. 若面積ガ500平方寸ナリトスレバ各邊ノ長サ如何.

第三章 二次方程式ノ理論

155. 二次方程式ノ根ノ吟味.

一元二次方程式ノ一般ナル形

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (\text{但 } a\neq 0)$$

ニ於テ a, b, c ハ實數ヲ表スモノトシ,其ノ二根

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ノ性質ヲ吟味スベシ.

此ノ二根ハ根號内ニアル式 b^2-4ac ノ正負如何ニヨリテ種種ノ場合ヲ生ズベシ.

(1) $b^2-4ac>0$ ナル場合. 此ノ場合ニハ根號内ノ數ガ正數ナルニヨリ二根ハ實數ニシテ且不等ナリ. 若 a, b, c ガ有理數ニシテ且 b^2-4ac ガ完全ナル平方數ナルトキハ二根ハ根號ヲ含マザルニヨリ共ニ有理數ナリ. 又 b^2-4ac ガ完全ナル平方

$D=b^2-4ac>0$ x — 実数 不等根) 実根
〃 $=0$ x — 〃 等根
〃 <0 x — 虚数 不等根 — 虚根

數ナラザルトキハ二根ハ共ニ無理數ナリ.

(2) $b^2-4ac=0$ ナル場合. 此ノ場合ニハ

$\alpha=\beta=-\dfrac{b}{2a}$ トナル,因テ二根ハ實數ニシテ且相等シ.

(3) $b^2-4ac<0$ ナル場合. 此ノ場合ニハ根號內ノ數ハ負數ナルニヨリ二根ハ共ニ虛數ヲ含ミ且不等ナリ.

因テ　方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ

(イ) 實根ヲ有スルガタメノ條件ハ

$$b^2-4ac\geqq0;$$

(ロ) 虛根ヲ有スルガタメノ條件ハ

$$b^2-4ac<0;$$

又(ハ) 等根ヲ有スルガタメノ條件ハ

$$b^2-4ac=0$$

ナリ. 斯ノ如ク b^2-4ac ノ値ノ如何ニヨリテ根ノ性質ヲ判別スルコトヲ得ルガ故ニ此ノ式ヲ一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ**判別式**ト云フ.

注意. 以上ノ吟味ニヨレバ一元二次方程式ハ恒ニ二ツノ實根若クハ二ツノ虛根ヲ有ス.

例　題

1. 次ノ方程式ハ實根,虛根ノ何レヲ有スルカ.

実根ノ條件 $b^2-4ac\geqq0$
虚〃 —— <0
等根ノ —— $=0$

又實根ナルトキハ等根不等根ヲ區別セヨ.

(一) $3x^2-4x-7=0$.　(二) $6x^2-2x+\dfrac{1}{6}=0$.

(三) $4x^2+5x+11=0$.　(四) $(2x+3)(x-5)-3=0$.

2. 方程式 $4x^2-12x+c=0$ ガ等根ヲ有スルタメニ c ハ如何ナル數値ヲ取ルベキカ.

3. 方程式 $x^2+(k+2)x+(k^2-7)=0$ ガ等根ヲ有スルタメニ k ハ如何ナル數値ヲ取ルベキカ.

4. 方程式 $ax^2-(2a+b)x+2b=0$ ハ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ. 但 a, b ハ實數トス. (二乗ノ形ニナルハ実根ナリ)

156. 根ト係數トノ關係.

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ノ和及積ヲ計算スレバ

$$\alpha+\beta=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

卽チ　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}.$

之ヲ二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ**根ト係數トノ關係**ト云フ.

又二次方程式ガ $x^2+px+q=0$ ナル形ヲ有スルトキハ其ノ根ト係數トノ關係ハ次ノ如シ.

$$\alpha+\beta=-p,\qquad \alpha\beta=q.$$

根ト係數トノ關係ヲ用フレバ次ニ示スガ如ク種種ノ問題ヲ解クコトヲ得ベシ.

例 1.　二數ノ和ハ 29 ニシテ其ノ積ハ 100 ナリト云フ. 其ノ二數ヲ求ム.

解　根ト係數トノ關係ヨリ考フレバ方程式 $x^2-29x+100=0$ ノ二根ノ和ハ 29 ニ等シク,其ノ積ハ 100 ニ等シ. 故ニ所要ノ二數ハ此ノ方程式ノ二根ニ等シカルベシ. 因テ之ヲ解キテ 4 及 25 ナルコトヲ知ル.　　　答 4, 25.

例 2.　視察ニヨリ $(x+3)(x+1)=5\times3$ ヲ解ケ.

解　視察ニヨリ $x=2$ ガ一ツノ根ナルヲ知ル. 次ニ x^2 ノ係數ハ 1 ニシテ既知數ノ項ハ 3−15 卽チ −12 トナリ,之ガ二根ノ積ニ等シキ故,他ノ根ハ $\dfrac{-12}{2}$ 卽チ −6 ナリ.　　　答 2 或ハ −6.

例 3.　二次方程式 $x^2-14x+45=0$ ノ二根ノ差ヲ求ム.

解　方程式ヲ解ケバ勿論求ムルコトヲ得レドモ茲ニハ根ト係數トノ關係ヲ用ヒテ之ヲ求メン.

二根ノ大ナル方ヲ α,小ナル方ヲ β トスレバ

$$\alpha-\beta=\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}.$$

然ルニ　　$\alpha+\beta=14,\qquad \alpha\beta=45.$

$$\therefore\ \alpha-\beta=\sqrt{14^2-4\times45}=\sqrt{16}=4\quad 答.$$

157. 與ヘラレタル二數ヲ根トスル一元二次方程式.

與ヘラレタル二數 α,β ヲ根トスル一元二次方程式ヲ $x^2+px+q=0$ トスレバ根ト係數トノ關係ニヨリテ

$$p=-(\alpha+\beta),\qquad q=\alpha\beta.$$

故ニ所要ノ方程式ハ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ナリ.

例.　$-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ.

解　所要ノ方程式ヲ $x^2+px+q=0$ トスレバ

$$p=-\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4},\quad q=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{8}.$$

故ニ所要ノ方程式ハ　$x^2-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{8}=0,$

卽チ　　$8x^2-2x-3=0$　答.

例　題

1.　$3x^2-4x+1=0$ ノ二根ノ和及積ヲ求ム.

2. $6x^2+5x-12=0$ ノ二根ノ和及積ヲ求ム.

3. 方程式 $x^2-3x+1=0$ ノ二根ヲ α, β トシテ $\alpha^2+\beta^2$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ノ値ヲ求ム.

4. 方程式 $3x^2-14x+11=0$ ノ二根ノ差ヲ求ム.

5. $x^2-5x+2k=0$ ノ二根ノ積ガ 3 ナルタメニ k ノ取ルベキ値ヲ求ム.

6. $3x^2-2kx-14=0$ ノ二根ノ差ガ 5 ナルタメニ k ノ取ルベキ値ヲ求ム.

7. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トシテ次ノ等式ヲ證明セヨ.

(一) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$. (二) $\alpha^3+\beta^3=\frac{-(b^3-3abc)}{a^3}$.

8. 視察ニヨリ次ノ方程式ヲ解ケ.

(一) $(x-2)(x+1)=5\times 8$. (二) $x^2-2x=a^2-2a$.

(三) $(x+4)(x-6)=(a+4)(a-6)$.

9. 次ノ數ヲ二根トスル二次方程式ヲ作レ.

(一) $4, -3$. (二) $\frac{1}{2}, \frac{7}{3}$. (三) $-3, -7$.

(四) $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$. (五) $3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}$.

10. 二數ノ和ハ 20, 積ハ 96 ナリ. 二數ヲ求ム.

158. 二次三項式ノ因數分解. 二次方

程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ α, β ニテ表セバ之ノ左邊ノ二次式ハ根ト係數トノ關係ニヨリ次ノ如ク因數ニ分解スルコトヲ得.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

因テ一般ニ二次三項式 ax^2+bx+c ハ之ヲ 0 ニ等シト置キタル二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根 α, β ヲ知ルトキハ直チニ之ヲ因數ニ分解スルヲ得.

例 1. $6x^2-x-15$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解 方程式 $6x^2-x-15=0$ ノ根ハ $\frac{5}{3}$ 及 $-\frac{3}{2}$ ナリ.

因テ $$6x^2-x-15=6\left(x-\frac{5}{3}\right)\left\{x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$=6\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$
$$=(3x-5)(2x+3) \quad 答.$$

例 2. $8x^2-10x-25$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解 $8x^2-10x-25=0$ ノ根ハ $\frac{5}{2}$ 及 $-\frac{5}{4}$ ナリ.

因テ $$8x^2-10x-25=8\left(x-\frac{5}{2}\right)\left\{x-\left(-\frac{5}{4}\right)\right\}$$
$$=8\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)$$
$$=(2x-5)(4x+5) \quad 答.$$

意. 第五編ニ述ベタル二次三項式ノ因數分解ノ方法ハ視察ニヨリテ行フモノナレバ一般ノ場合ニ之ヲ用フルコトヲ得ザレドモ,茲ニ述ベタル方法ハ廣ク一般ノ場合ニ應用スルコトヲ得ルナリ.

問題　二十四

1. 次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ.

(一) x^2-5x+6.　(二) $4x^2-19x+21$.

(三) $5x^2-38x+48$.　(四) $15x^2-14x-8$.

(五) $14x^2-15x-11$.　(六) $3x^2-17x-28$.

次ノ方程式ヲ解ケ.

2. $(x-a)(x+b)=(p-a)(p+b)$.

3. $(x-a)^2-b^2=a^2-b^2$.

4. 方程式 $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$ ノ根ハ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ平方ニ等シキコトヲ證明セヨ.

5. 次ノ各方程式ノ根ハ何レモ負數ナルコトヲ方程式ヲ解カズシテ示セ.

(一) $x^2+4x+3=0$.　(二) $3x^2+21x+10=0$.

6. 方程式 $x^2-3x+5=0$ ノ根ヲ α,β トシ, $\alpha+\beta$

ト $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ トヲ根トスル二次方程式ヲ作レ.

7. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ根ヲ α,β トシ, $\alpha\beta$ ト $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ トヲ根トスル二次方程式ヲ作レ.

8. 長サ a 尺ナル直線ヲ二ツノ部分ニ分チ,其ノ包ム矩形ノ面積ヲ s 平方尺トナル樣ニセヨ.

第四章　分數方程式

159. 未知數ヲ含メル式ニテ兩邊ヲ乘除スルコト. 方程式ノ兩邊ガ整式ナルトキ,此ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム同一ノ整式ヲ乘ズレバ餘分ノ根ヲ生ズベシ,而シテ其ハ兩邊ニ乘ジタル式ヲ 0 ニ等シト置キタル方程式ノ根ナリ.

例ヘバ $3x=4$ ノ根ハ $x=\dfrac{4}{3}$ ナリ. 今此ノ兩邊ニ $x-7$ ヲ乘ズレバ $3x(x-7)=4(x-7)$, 卽チ

$$(x-7)(3x-4)=0$$

トナリテ之ノ根ハ $x=\dfrac{4}{3}$ 或ハ $x=7$ ノ二ツナリ.

卽チ $x-7$ ヲ 0 ニ等シト置キタル方程式ノ根卽チ $x=7$ ナル餘分ノ根ヲ生ジタリ.

又方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム同一ノ因數ア

ルトキ,此ノ因數ニテ兩邊ヲ除シテ得ベキ方程式ノ根ハ原方程式ノ根ヨリモ不足ス,而シテ此ノ不足ノ根ハ兩邊ヲ除シタル式ヲ0ニ等シト置キタル方程式ノ根ナリ.

例ヘバ $x^2-9=5x-15$ ヲ書キ直セバ

$$(x+3)(x-3)=5(x-3)$$

トナル. 今此ノ兩邊ヲ $x-3$ ニテ除スレバ $x+3=5$ トナリ,其ノ根ハ $x=2$ 唯一ツナリ.

然ルニ原方程式ニハ此ノ他ニ尙 $x=3$ ト云フ根アリ,而シテ之ハ $x-3$ ヲ0ニ等シト置キタル方程式ノ根ナリ.

以上ノ事柄ヲ注意セズニ妄ニ未知數ヲ含ム式ニテ方程式ノ兩邊ヲ乘除スベカラズ.

160. 二次方程式ニ導カルル分數方程式.

例 1. $\dfrac{x^2+2}{(x-2)(x-3)}+1+\dfrac{6}{x-2}=0$ ヲ解ケ.

解 先ヅ通分シテ加ヘ合スレバ

$$\frac{2x^2+x-10}{(x-2)(x-3)}=0,$$

左邊ヲ既約分數式ニ直セバ $\dfrac{2x+5}{x-3}=0.$

左邊ノ分子ヲ0ニ等シト置キタル方程式

$$2x+5=0$$

ヲ解ケバ $x=-\dfrac{5}{2}$ 答.

一般ニ分數方程式ヲ解クニハ,與ヘラレタル方程式ノ各項ヲ一邊ニ集メテ一ツノ既約分數式ニ化シ,然ル後此ノ分數式ノ分子ヲ0ニ等シト置キテ得ベキ方程式ヲ解クベシ.

此ノ方法ニテ若原方程式ノ分母ヲ0ナラシムル値ヲ得ルコトアラバ元來分母ガ0ナリトハ意味ナキコトナレバ斯ノ如キ根ハ暫ク捨テテ採用セザルコトトスベシ.

又若所得ノ既約分數式ノ分子ガ未知數ヲ含マザルコトアラバ方程式ハ根ヲ有セザルナリ.

通常ハ次ノ例ノ如クニ解クヲ便利ナリトス.

例 2. $\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x-1}=1$ ヲ解ケ.

解 兩邊ニ分母ノ最小公倍數ヲ乘ジテ移項スレバ $4+3x-x^2=0.$

之ヲ解ケバ　$x=4$ 或ハ -1 答.

偖此ノ方法ニ於テハ分母ノ最小公倍數ヲ兩邊ニ乘ジタルニヨリ若所得ノ未知數ノ値ノ中ニ分母ノ最小公倍數ヲ0ナラシムルモノアラバ之ハ或ハ餘分ノ根ニシテ原方程式ノ根ニハアラザルベシ. 若餘分ニ生ジ來レル根ニアラズトスルモ此ノ値ハ原方程式ノ分母ヲ0ナラシムルニヨリ之ヲ捨テテ採用セザルコトトスベシ.

偖例2ニ於テハ $x=4$ 或ハ -1 ハ何レノ分母ヲモ0ナラシメズ. 故ニ此等ノ値ハ何レモ所要ノ根ナリ.

例 3. $1+\dfrac{8}{x^2-1}=\dfrac{4}{x-1}$ ヲ解ケ.

解 分母ヲ拂ヘバ　$x^2-1+8=4(x+1)$,

即チ　$x^2-4x+3=0.$

之ヲ解ケバ　$x=1$ 或ハ 3.

$x=1$ ハ分母ヲ0ナラシム. 故ニ之ハ根ニアラズ.

答 $x=3$.

注意. 上ニ示セル如ク一般ニ分母ヲ0ナラシムル値ハ之ヲ捨テ然ラザルモノノミヲ採リテ之ヲ所要ノ根トスレバ可ナリ.

例　題

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.　　2. $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{10}{3}$.

3. $\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{4}{x+5}=\dfrac{1}{2}$.　　4. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{6}$.

5. $\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{x-4}{5-x}=\dfrac{2}{3}$.　　6. $\dfrac{x-1}{x-4}-\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{11}{12}$.

7. $\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{10}{x+11}=\dfrac{2}{3x}$. 4 or　　8. $\dfrac{3(x-1)}{x+1}-\dfrac{2(x+1)}{x-1}=5$. 2 or $\frac{-10}{6}$

9. $\dfrac{3}{2x-1}+\dfrac{4}{2x-3}=\dfrac{15}{2x+3}$. 10 or 3

10. $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}$. 1 or $-\frac{8}{6}$

11. $x+\dfrac{1}{a}=a+\dfrac{1}{x}$. $\frac{2a^2}{2a}$ or $\frac{-2}{2a}$　　12. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{b}+\dfrac{b}{x}$.

161. 應用問題.

例. 等速度ヲ以テ進行スル汽車アリ, 300哩ヲ距ツル二ツノ停車場間ヲ馳スルニ要スル時間ハ其ノ速度毎時間5哩少ナキ時ヨリモ二時間ダケ短シト云フ. 此ノ汽車ノ速度毎時間幾許ナルカ.

解 汽車ノ速度ヲ毎時間 x 哩トスレバ300哩ヲ馳スルニ要スル時間ハ $\dfrac{300}{x}$ 時間, 毎時間5哩ダケ

少ナキ速度ニテ馳スルニ要スル時間ハ $\frac{300}{x-5}$ 時間ナルベシ. 因テ題意ニヨリ

$$\frac{300}{x-5}-2=\frac{300}{x}.$$

此ノ方程式ヲ解ケバ $x=30$ 或ハ -25.

-25 ハ明ニ題意ニ適セズ. 因テ所要ノ速度ハ每時間30哩ナリ. 答 30哩.

問題 二十五

1. 鷄卵ヲ一圓二十錢ダケ買フニ,若十個ニツキ六錢宛高價ナラバ買ヒ得ベキ數ハ十個少ナカルベシト云フ. 鷄卵十個ノ價ヲ問フ. $\frac{120}{x}=\frac{120}{x+6}+1$

2. 二列車アリ,其ノ速サ一ハ他ヨリモ每時間4里ダケ小ナルタメニ48里ノ鐵路ヲ走スルニ二時間多クヲ要スト云フ. 二列車ノ速サ各如何. $\frac{48}{x}=\frac{48}{x-4}$

3. 或人7哩ノ路ヲ旅行スルニ一哩ヲ行キタル後速度ヲ每時一哩ダケ增セシタメ半時間早ク目的地ニ達シタリ. 此ノ人ノ要シタル時間如何.

4. 甲乙二工夫共ニ一ノ仕事ヲ若干日ニテ成就ストテ云フ,若兩人此ノ仕事ノ半分ヲ別別ニ成サバ甲ハ前ヨリモ一日速ク乙ハ前ヨリモ三日遲ク

成就スベシト云フ. 仍テ問フ甲乙共ニ此ノ仕事ニ從事スルトキハ幾日ヲ要スルカ.

5. 二ツノ正數ノ差ハ4ニシテ,其ノ逆數ノ差ハ1ナリト云フ. 此ノ二數ヲ求ム.

6. 三百八十四坪ノ矩形ノ地面アリ,一邊ヲ六間增シ他ノ邊ヲ四間縮ムレバ,二十四坪ヲ減ズベシト云フ. 各邊ノ長サ如何.

7. 或工事ヲナスニ,甲ハ乙ヨリモ十日早ク成就スベシ,今甲乙共同シテ十二日間働キタル後甲ハ休ミテ乙ノミニテナシタルニ尙十二日ヲ要シタリト云フ. 甲乙別別ニ其ノ仕事ヲナサバ各幾日ヲ要スベキカ.

8. 150哩ヲ距ツル鐵路ノ兩端ヨリ相向ツテ同時ニ出發シタル列車アリ,途中相會シテヨリ一ハ二時間他ハ四時間半ヲ經テ何レモ終點ニ達シタリト云フ. 兩列車ノ速サヲ計算セヨ.

9. 矩形及正方形アリ,其ノ面積相等シク且正方形ノ一邊ハ矩形ノ幅ヨリモ三尺長シ,今若矩形ノ幅ヲ三尺減ジ長サヲ八尺增スモ其ノ面積ハ變ゼズト云フ. 矩形ノ長サ及幅何程ナルカ.

10. 或人鐵道株若干ヲ金二千五百圓ニテ買ヒ，二十五株ヲ除キテ他ヲ一株ニツキ五圓ノ利ヲ得テ賣リシニ金二千二百五十圓ヲ得タリト云フ．幾株ヲ買ヒシカ．

11. 二ツノ桶アリ，一ハ水若干升ヲ入レ他ハ酒若干升ヲ入ル，而シテ其ノ升數水ハ酒ノ半分ナリ．今兩桶ヨリ八升宛汲ミ出シ互ニ之ヲ入レ換ヘタルニ兩桶內ノ液ハ同ジ强サノ混合酒トナリタリト云フ．水ト酒トノ升數各何程ナルカ．

12. 或人金80圓ヲ以テ雞卵ヲ買ヒ入レシニ，內500個ハ腐敗シタルヲ以テ殘全體ヲ一個ニツキ原價ヨリモ1錢宛高價ニ賣リテ金25圓ノ利益ヲ得タリト云フ．雞卵一個ノ原價ヲ問フ．

13. 或商船甲港ヲ解纜シテ乙港ニ向ヒタル後一時間ヲ經テ或軍艦甲港ヲ拔錨シ商船ト同一航路ヲ取リテ乙港ニ向ヒ四十八海里ヲ進行シタルトキ商船ニ追付キ，ソレヨリ尙二時間ヲ經テ軍艦ハ乙港ニ達シ，商船ハ出帆セシ時ヨリ六時四十分ヲ經テ乙港ニ達セリト云フ．甲乙兩港間ノ航路幾海里ナルカ．

14. 甲乙二人ノ旅客アリ，甲ガA地ヲ出發シテB地ニ向ヒタルト同時ニ乙ハB地ヲ出發シテA地ニ向ヒタリ，而シテ途中ニテ兩人相會スル迄ニ甲ハ乙ヨリモ二十一里多ク步ミ居タリ，且其ノ後甲ハ四日ヲ經テB地ニ達シ，乙ハ九日ヲ經テA地ニ達シタリト云フ．A，B兩地ノ距離ヲ求ム．

第五章 無理方程式

162. 兩邊ヲ二乘スルコト． 一般ニ方程式 $A=B$ ト其ノ兩邊ヲ二乘シテ得タル方程式 $A^2=B^2$ トハ其ノ根ガ一致セザルガ普通ナリ．

何トナレバ $A=B$ ノ根ハ $A-B=0$ ノ根ト同一ナレドモ，$A^2=B^2$ ノ根ハ $A^2-B^2=0$ 卽チ $(A-B)(A+B)=0$ ノ根ト同一ナリ．故ニ $A^2=B^2$ ナル方程式ハ $A=B$ ナル方程式ノ根ノ他ニ尙 $A+B=0$ 卽チ $A=-B$ ナル方程式ノ根ヲ含ム．

$A=-B$ ナル方程式ガ根ヲ有セザルトキニ於テ兩邊ヲ二乘スルモ根ノ增加ヲ來サズ．サレド一般ニハ原方程式ノ根ニアラザル根ヲ含ムコトト

ナルナリ.

163. 無理方程式. 未知數ニ關スル無理式ヲ含ム方程式ヲ**無理方程式**ト云フ.

次ニ二次方程式ニ歸セシメテ之ヲ解クコトヲ得ベキ無理方程式ヲ例示セン.

例 1. $x-\sqrt{x+2}=0$ ヲ解ケ.

解 移項スレバ $x=\sqrt{x+2}$,

兩邊ヲ二乘スレバ $x^2=x+2$.

之ヲ解ケバ $x=2$ 或ハ -1.

偖兩邊ヲ二乘シタルニヨリ原方程式ノ根以外ノモノヲ含メルコトヲ豫期セザルベカラズ.

故ニ所得ノ値ヲ原方程式ニ代入シテ驗スルニ;

$x=2$ ヲ代入スレバ原方程式ノ左邊$=2-\sqrt{2+2}=0$ トナル. 故ニ $x=2$ ハ原方程式ヲ滿足ス.

$x=-1$ ヲ代入スレバ

原方程式ノ左邊$=-1-\sqrt{-1+2}=-2$ トナル.

故ニ $x=-1$ ハ原方程式ヲ滿足セズ. 答 $x=2$.

注意. 前節ニ述ベシ所ニヨレバ $x=-1$ ハ二乘セザル前ノ方程式ノ右邊ノ符號ヲ變ジタル方程式 $x=-\sqrt{x+2}$ ノ根ナルベシ. 實際 $x=-1$ ハ之ヲ

滿足スルナリ.

斯ノ如ク解法ノ途中ニ入リ來ル原方程式ノ根ニアラザル未知數ノ値ヲ**無緣根**ト稱ス.

一般ニ無理方程式ヲ解クニハ,適宜移項シテ兩邊ヲ二乘シテ之ヲ整方程式トナシ,之ヲ解キテ得タル未知數ノ値ヲ原方程式ニ代入シテ之ヲ滿足スルモノダケヲ採ルベシ.

若所得ノ未知數ノ値ガ何レモ原方程式ヲ滿足セザルコトアラバ原方程式ハ不合理ナル式ニシテ根ヲ有セザルモノト知ルベシ.

例 2. $2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=3$ ヲ解ケ.

解 移項スレバ $2\sqrt{x+2}=3+\sqrt{2x-3}$,

兩邊ヲ二乘スレバ $4(x+2)=9+6\sqrt{2x-3}+2x-3$,

移項スレバ $2x+2=6\sqrt{2x-3}$,

兩邊ヲ 2 ニテ除シテ後之ヲ二乘スレバ

$x^2+2x+1=9(2x-3)$, 即チ $x^2-16x+28=0$.

之ヲ解ケバ $x=2$ 或ハ 14.

之ヲ原方程式ニ代入スレバ次ノ如シ.

$x=2$ ナルトキハ 左邊$=2\sqrt{2+2}-\sqrt{4-3}=3$,

$x=14$ ナルトキハ 左邊$=2\sqrt{14+2}-\sqrt{28-3}=3$.

卽チ何レモ原方程式ヲ滿足ス.

答 $x=2$ 或ハ 14.

例 3. $x^2-5x+6\sqrt{x^2-5x-3}=10$ ヲ解ケ.

解 之ヲ解クニ普通ノ方法ニヨレバ四次方程式トナルベキニヨリ特別ノ工夫ヲ要ス.

先ヅ兩邊ヨリ3ヲ減ズレバ

$$x^2-5x-3+6\sqrt{x^2-5x-3}=7.$$

$\sqrt{x^2-5x-3}$ ヲ一ツノ未知數ノ如ク考ヘ,之ヲ y ニヲ表セバ方程式ハ

$$y^2+6y=7$$

トナル. 之ヲ解ケバ $y=1$ 或ハ -7 ヲ得.

倩 y 卽チ $\sqrt{x^2-5x-3}$ ノ値ハ正數(或ハ0)ナルベキニヨリ -7 ニ等シキコトヲ得ズ. 故ニ

$$\sqrt{x^2-5x-3}=1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

兩邊ヲ二乘スレバ

$$x^2-5x-3=1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

之ヲ解ケバ $\qquad x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}.$

此ノ値ヲ原方程式ニ代入スル代リニ次ノ如ク考ヘテ之ヲ驗スベシ.

此ノ二根ハ何レモ(2)ヲ滿足スルガ故ニ(1)ヲ

滿足ス. 且(1)ヲ滿足スル値ハ又明ニ原方程式ヲ滿足ス.

答 $x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}.$

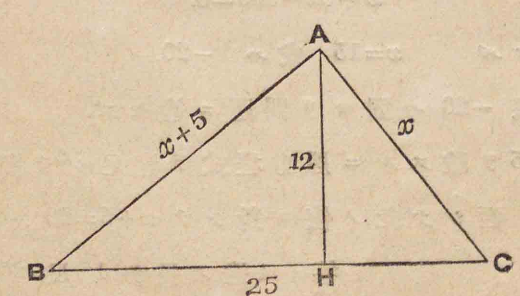
例題

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $2\sqrt{x}=3x-1.$
2. $\sqrt{x^2+x+4}=2(x-1).$
3. $x+2\sqrt{x+2}=1.$
4. $x=2\sqrt{x^2-12}.$
5. $\sqrt{x^2-5x-1}=x+12.$
6. $2x-\sqrt{2x^2-17}=5.$
7. $\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1.$
8. $\sqrt{x^2+9}+x^2=21.$
9. $\sqrt{4-3x}=\sqrt{x}-\sqrt{4-x}.$
10. $2\sqrt{x^2-4x-1}=9+4x-x^2.$

164. 應用問題.

例. 三角形アリ,底邊ハ25尺,高サハ12尺,他ノ二邊ノ差ハ5尺ナリ. 此ノ二邊ノ長サヲ求ム.



解　所要ノ二邊ノ中,小ナル邊ACノ長サヲx尺トナスベシ. 然ルトキハ大ナル邊ABノ長サハ$x+5$尺ナルベシ.

偖ぴたごらすノ定理ニヨリ(圖ヲ見ヨ)

$$BH=\sqrt{(x+5)^2-12^2},\qquad HC=\sqrt{x^2-12^2}.$$

因テ次ノ方程式ヲ得.

$$\sqrt{(x+5)^2-12^2}+\sqrt{x^2-12^2}=25.$$

移項スレバ　$\sqrt{(x+5)^2-12^2}=25-\sqrt{x^2-12^2}$,

兩邊ヲ二乘スレバ

$$(x+5)^2-12^2=625-50\sqrt{x^2-12^2}+x^2-12^2,$$

移項シテ簡約シ,兩邊ヲ10ニテ除スレバ

$$5\sqrt{x^2-12^2}=60-x,$$

兩邊ヲ二乘スレバ　$25(x^2-12^2)=3600-120x+x^2$,

移項シテ兩邊ヲ24ニテ除スレバ

$$x^2+5x-300=0.$$

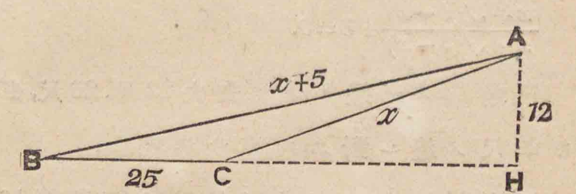
之ヲ解ケバ　$x=15$　或ハ　-20.

偖負根 -20 ハ固ヨリ問題ニ適セズ.

正根15ヲ驗スルニ原方程式ヲ滿足シテ問題ニ適合ス. 而シテ此ノ値ニ對シテ$x+5=20$トナル.

答　二邊ノ長サ15尺, 20尺.

注意. 問題ニハ三角形ガ如何ナル種類ナルカヲ示サズ,故ニ或ハ次ノ圖ノ如キモノナルヤモ知レズ.



此ノ場合ニハ方程式ハ

$$\sqrt{(x+5)^2-12^2}-\sqrt{x^2-12^2}=25$$

トナル,而シテ之ヲ解ケバ矢張$x=15$或ハ-20ヲ得, -20ハ勿論問題ニ適セズ, 15ハ此ノ方程式ヲ滿足セズ. 故ニ玆ニ示セル圖ノ如キ場合ニハアラザルナリ.

問題　二十六

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}=8.$
2. $\sqrt{(2x+1)}+\sqrt{(7x-27)}=\sqrt{(3x+4)}.$
3. $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-7x+12}=\sqrt{2}.$
4. $2x^2+\sqrt{x^2+3x-8}=226-6x.$
5. $\sqrt{x^2-6x+16}+(x-3)^2=13.$

6. $\sqrt{(a-x)}+\sqrt{(b-x)}=\sqrt{(a+b-2x)}$.

7. $\dfrac{1}{x+\sqrt{(2-x^2)}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{(2-x^2)}}=1$.

8. $\dfrac{x+\sqrt{(3-x)}}{x-\sqrt{(3-x)}}+3=0$.

9. 三角形ノ三邊ノ長サ夫夫22尺,26尺,40尺ナルトキ22尺ノ邊ニ對スル高サヲ問フ.

10. 周圍24間ナル直角三角形ノ面積24坪ナリト云フ. 其ノ三邊ヲ求ム.

第六章　高次方程式

165. 剰餘ノ定理.

例. 除法ヲ施サズシテ x^2+3x+4 ヲ $x-2$ ニテ除シタルトキノ剰餘ヲ求ム.

解 x^2+3x+4 ヲ $x-2$ ニテ除シタルトキノ商ヲQ, 剰餘ヲRニテ表セバ次ノ關係アリ.

$$x^2+3x+4=(x-2)Q+R.$$

茲ニRハ $x-2$ ヨリモ低次ナルベキニヨリ x ヲ含マズ, 從テ x ノ値ニヨリ變ズルモノニアラズ.

因テ今此ノ等式ニ於テ $x=2$ ト置ケバ $x-2$ ハ0トナルガ故ニ $(x-2)Q$ ノ値モ亦0トナル. 故ニ

$$2^2+3\times2+4=0+R,$$

即チ　　$R=2^2+3\times2+4=14$　答.

定理. x ニ關スル整式ヲ $x-a$ ニテ除シタルトキノ剰餘ハ其ノ整式中ノ x ニ a ヲ代入シテ得ベキ値ニ等シ.

之ヲ剰餘ノ定理ト云フ.

此ノ定理ノ證明ハ上例ニ於ケルト同樣ナリ.

例 1. x^2-ax+a^2 ヲ $x-a$ ニテ除シタルトキノ剰餘ヲ求ム.

解 $R=a^2-a\times a+a^2=a^2$　答.

例 2. $3x^2-11x+10$ ヲ $x+2$ ニテ除シタルトキノ剰除ヲ求ム.

解 $R=3\times(-2)^2-11\times(-2)+10=44$　答.

166. 剰餘ノ定理ノ應用.

定理. x ニ關スル或整式中ノ x ニ a ヲ代入シテ得ベキ値ガ0ナルトキハ其ノ整式ハ $x-a$ ニテ整除セラル.

其ノ理由ハ剰餘ガ零トナルハ整除セラルル場合ニ限ルコトニヨル.

例 1. $x^3+2x^2-16x+3$ ハ $x-3$ ニテ整除セラルルカ.

解 $x=3$ ヲ代入スレバ

$$3^3+2\times3^2-16\times3+3=27+18-48+3=0.$$

故ニ整除セラル.

例 2. x^5-a^5 ハ $x-a$ ニテ整除セラルルカ.

解 $x=a$ ヲ代入スレバ $a^5-a^5=0$, 故ニ整除セラル.

注意. 一般ニ x^n-a^n ハ n ガ奇數ナルト偶數ナルトニ拘ラズ $x-a$ ニテ整除セラル,又 n ガ偶數ナルトキハ $x+a$ ニテモ整除セラル.

次ニ x^n+a^n ハ n ガ奇數ナルトキ $x+a$ ニテ整除セラル,而シテ $x-a$ ニテハ如何ナル場合ニモ整除セラレズ.

例　題

次ノ除法ノ剩餘ヲ求ム.

1. $(x^2-4x+3)\div(x-3)$.

2. $(x^2-2x+15)\div(x+5)$.

3. 次ノ第一式ハ第二式ニテ整除セラルルカ.

(一) $x^2-4x-21$, $x-7$.　(二) $2x^2+3x-2$, $x+8$.

(三) x^3+3x^2+3x+1, $x+1$.

4. $2x^3-x-m$ ガ $x-1$ ニテ整除セラルルタメニ m ハ如何ナル値ヲ有スベキカ.

5. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ハ $a-b$ ニテ整除セラルルコトヲ證明セヨ.

6. 10^8-1 ハ 9 及 11 ノ倍數ナルコトヲ示セ.

167. 高次方程式. 二次ヨリモ高次ノ方程式ハ一般ニ之ヲ解クコトハ初等代數學ノ範圍外ニ屬ス. 因テ玆ニハ特別ナル場合ノミヲ論ズベシ.

(1) **因數ニ分解セラルル場合.**

例. $x^3+3x^2-x-3=0$ ヲ解ケ.

解 左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x+3)(x+1)(x-1)=0.$$

左邊ノ値ガ 0 トナルニハ三因數中ノ何レガ 0 トナルモ可ナリ,又其ノ何レカガ 0 トナルヲ要ス.

$$\therefore\ x+3=0,\ x+1=0,\ 或ハ\ x-1=0.$$

之ヨリ　$x=-3,\ -1$ 或ハ 1 答.

(2) **視察ニヨリ或根ガ見出サルル場合.**

例 1. $x^3+1=2x$ ヲ解ケ.

解　視察ニヨリ1ガ一ツノ根ナルコトヲ知ル.

因テ $x^3-2x+1=0$ ノ左邊ハ $x-1$ ニテ整除セラル,

即チ方程式ハ $(x-1)(x^2+x-1)=0$ トナル.

而シテ方程式 $x^2+x-1=0$ ヲ解ケバ

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

答　$x=1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或ハ $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

例 2.　$x^3-6x^2+5x+12=0$ ヲ解ケ.

解　$x=-1$ ト置ケバ左邊ハ0トナル,故ニ -1 ハ一ツノ根ナリ. 從テ此ノ左邊ハ $x+1$ ナル因數ヲ含ム,即チ方程式ハ $(x+1)(x^2-7x+12)=0$ トナル.

而シテ $x^2-7x+12=0$ ヲ解ケバ $x=3$ 或ハ 4.

答　$x=-1,\ 3,$ 或ハ 4.

168. (3) $aX^2+bX+c=0$ ノ形ニ導カルル場合.

例 1.　方程式 $x^4-5x^2+6=0$ ヲ解ケ.

解　$x^2=X$ ト置ケバ　$X^2-5X+6=0,$

之ヨリ　$X=2$ 或ハ 3,　即チ $x^2=2$ 或ハ 3.

之ヨリ　$x=\pm\sqrt{2}$　或ハ　$\pm\sqrt{3}$　答.

例 2.　方程式 $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$ ヲ解ケ.

解　$x^2-x=X$ ト置ケバ　$X^2-8X+12=0.$

之ヨリ　$X=2$ 或ハ 6,

$\therefore\ x^2-x=2$ 或ハ $x^2-x=6.$

$x^2-x=2$ ヲ解ケバ　$x=-1$ 或ハ 2,

$x^2-x=6$ ヲ解ケバ　$x=-2$ 或ハ 3.

答　$x=-1,\ -2,\ 2,$ 或ハ 3.

例 3.　方程式 $\frac{x^2}{x-1}-\frac{x-1}{x^2}=\frac{8}{3}$ ヲ解ケ.

解　$\frac{x^2}{x-1}=X$ ト置ケバ　$X-\frac{1}{X}=\frac{8}{3}.$

分母ヲ拂ヘバ　$3X^2-8X-3=0.$

之ヲ解ケバ　$X=3$ 或ハ $-\frac{1}{3}.$

$\therefore\ \frac{x^2}{x-1}=3$ 或ハ $\frac{x^2}{x-1}=-\frac{1}{3}.$

之ヲ解ケバ　$x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 或ハ $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$ 答.

169. (4) 相反方程式.

方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メ之ヲ整頓シタルトキ其ノ一邊ノ左右ノ兩端ヨリ同ジ番號ノ項ノ係數ガ夫夫相等シキカ或ハ絶對値ハ相等シキモ符號ガ相反セル如キ方程式ヲ**相反方程式**ト云フ.

例ヘバ　$ax^4-bx^3+cx^2-bx+a=0.$

$$ax^3+bx^2-bx-a=0$$

ノ如キハ皆相反方程式ナリ.

此ノ種ノ方程式ノ解法ハ次ノ如シ.

例 1.　$3x^3+8x^2+8x+3=0$　ヲ解ケ.

解　左邊ヲ書キ直セバ

$$3(x^3+1)+8(x^2+x)=0,$$

卽チ　$$(x+1)\{3(x^2-x+1)+8x\}=0,$$

$\therefore$　$x+1=0$　或ハ　$3x^2+5x+3=0.$

之ヲ解ケバ　$x=-1$　或ハ　$\dfrac{-5\pm\sqrt{11}i}{6}$　答.

例 2.　$2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$　ヲ解ケ.

解　明ニ x ハ 0 ニアラズ,從テ x^2 モ亦 0 ニアラズ. 故ニ x^2 ニテ兩邊ヲ除シテ書キ直セバ

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0,$$

$x+\dfrac{1}{x}=y$ ト置ケバ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$ トナル.　因テ

$$2(y^2-2)-9y+14=0.$$

之ヲ解ケバ　$y=2$　或ハ　$\dfrac{5}{2},$

$\therefore$　$x+\dfrac{1}{x}=2$　或ハ　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}.$

之ヨリ　$x=1$ (等根), 2　或ハ　$\dfrac{1}{2}$　答.

例　題

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $x^3+1=0.$
2. $x^4-1=0.$
3. $x^3-3x+2=0.$
4. $x^3-x^2-3x-1=0.$
5. $2x^3+x^2-2x-1=0.$
6. $2x^4-8x^2+6=0.$
7. $x^4-7x^2-18=0.$
8. $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{5}{2}.$
9. $(x^2-x)^2-4(x^2-x)=12.$
10. $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{17}{4}.$
11. $x^3-2x^2-2x+1=0.$
12. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0.$

170. 立方根ハ三ツアルコト.

先ヅ 1 ノ立方根ヲ知ランニハ $x^3=1$ ナル方程式ノ根ヲ求ムレバ可ナリ.

移項スレバ　$$x^3-1=0,$$

因數ニ分解スレバ　$$(x-1)(x^2+x+1)=0,$$

$\therefore$　$x-1=0,$　或ハ　$x^2+x+1=0,$

$\therefore$　$x=1,$ $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$　或ハ　$\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$

因テ 1 ノ立方根ハ三ツアルナリ.

偖上ノ三根中複素數ナル根ヲ表スニ通常 ω ナル文字ヲ用フ.

(オメガ)

今 $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\omega$ トスレバ他ノ根 $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ハ ω^2 ニ等シ. 何トナレバ實際計算スレバ

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

トナルガ故ナリ.

因テ1ノ立方根ハ $1, \omega, \omega^2$ ノ三ツナリ.

偖一般ニ一ツノ實數 a ノ立方根ヲ x トスレバ

$$x^3=a,\ \text{即チ}\ x^3=(\sqrt[3]{a})^3.$$

従テ

$$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3=1.$$

因テ $\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}}$ ハ1ノ立方根ニ相等スルニヨリ

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}}=1,\ \omega\ \text{或ハ}\ \omega^2.$$

因テ x ノ値即チ a ノ立方根ハ

$$\sqrt[3]{a},\quad \omega\sqrt[3]{a},\quad \omega^2\sqrt[3]{a}$$

ノ三ツナリ. 但 $\sqrt[3]{a}$ ハ實數,他ハ皆虚數ナリ.

故ニ一般ニ實數ノ立方根ハ三ツアリ. 其ノ一ツハ實數ニシテ他ノ二ツハ虚數ナリ.

注意. 一般ニ任意ノ數ノ n 乗根ハ n 個アリ. 其ノ證明ハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ玆ニハ述ベズ.

問題　二十七

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $4x^4-3x^2-10=0.$　　2. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}.$

3. $x(x-1)(x+1)=6\times7\times8.$

4. $(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)=12.$

5. $x^3+10x^2-53x+42=0.$　$x-1$

6. $x^2+x+1=\dfrac{42}{x^2+x}.$　　7. $x(x+1)(x+2)=24.$　$(x-2)$

8. $6x^4+5x^3-33x^2-5x+6=0.$

9. 直角三角形アリ,斜邊ノ長サハ15尺,面積ハ54平方尺ナリト云フ. 他ノ二邊ノ長サヲ求ム.

10. 二等邊三角形アリ,其ノ相等シキ邊ノ長サハ25寸ニシテ其ノ面積ハ168平方寸ナリト云フ. 其ノ底邊ノ長サヲ求ム.

11. 半徑5尺ナル圓ニ內接スル矩形ノ面積48平方尺ナルトキ,其ノ二邊ノ長サ如何.

12. 三角形ABCニ於テ邊ABハ一尺,邊ACハ八寸ニシテ頂點Aヨリノ垂線ADガ底邊BCヲ分ツ二ツノ部分BD, DCノ包ム矩形ガ $\dfrac{135}{4}$ 平方寸ナルトキ,底邊BCノ長サヲ求ム.

第七章 聯立二次方程式

171. 一次ト二次トノ聯立方程式.

一般ノ聯立二次方程式ノ解法ハ三次以上ノ一元方程式ノ解法ニ歸シ,初等代數學ノ範圍外ニ屬ス. 因テ茲ニハ唯特別ナル場合ノミヲ論ズベシ.

一次ト二次トノ方程式ヨリ成ル場合ハ其ノ解法比較的單純ナリ,即チ次ノ如シ.

例 1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$2x+y=13, \qquad xy=15.$$

解 第一式ヨリ $y=13-2x$ ヲ得,之ヲ第二式ニ代入スレバ

$$x(13-2x)=15, \quad 即チ \quad 2x^2-13x+15=0.$$

之ヲ解ケバ $\quad x=5$ 或ハ $\dfrac{3}{2}$.

$x=5$ ナルトキハ $\quad y=13-2\times5=3,$

$x=\dfrac{3}{2}$ ナルトキハ $\quad y=13-2\times\dfrac{3}{2}=10.$

$$答 \quad \begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases} \quad 或ハ \quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}, \\ y=10. \end{cases}$$

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} xy+4x-5y=8 \quad \cdots\cdots \quad (1) \\ 2xy-3x+2y=7 \quad \cdots\cdots \quad (2) \end{cases}$$

解 此ノ場合ハ何レモ一次方程式ニアラズ,然レドモ二次ノ項ガ唯一種ナレバ之ヲ消去スルコトニヨリテ次ノ如ク一次方程式ヲ誘出スルヲ得.

(1) ノ兩邊ヲ 2 倍シ (2) ト邊邊相減ズレバ

$$11x-12y=9, \quad 之ヨリ \quad y=\frac{11x-9}{12}.$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$x\frac{11x-9}{12}+4x-5\frac{11x-9}{12}=8,$$

即チ $\qquad 11x^2-16x-51=0.$

之ヲ解ケバ $\quad x=3$ 或ハ $-\dfrac{17}{11}.$

$x=3$ ナルトキハ $\quad y=\dfrac{11\times3-9}{12}=2,$

$x=-\dfrac{17}{11}$ ナルトキハ $\quad y=\dfrac{11\times\left(-\dfrac{17}{11}\right)-9}{12}=-\dfrac{13}{6}.$

$$答 \quad \begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases} \quad 或ハ \quad \begin{cases} x=-\dfrac{17}{11}, \\ y=-\dfrac{13}{6}. \end{cases}$$

例題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1. $\begin{cases} x+y=11, \\ xy=24. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y=8, \\ xy=105. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=21, \\ x^2+y^2=221. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x-4y=5, \\ 4x^2+y^2=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+y=14, \\ x^2-2xy+2y^2=29. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} xy-x+2y=44, \\ 5x-2xy+6y=-3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{9}{20}. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}=3, \\ 5(x-1)=3(y+2). \end{cases}$

172. 二ツノ二次方程式.

例. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} 3x^2+xy+2y^2=32 \quad \ldots\ldots (1) \\ x^2-xy+6y^2=12 \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

解 斯ノ如ク二ツノ方程式ニ於テ未知數ヲ含ム項ガ何レモ皆二次ナル場合ニハ次ノ如クスレバ必ズ解クコトヲ得ベシ.

先ヅ此ノ二方程式ヨリ既知數ノ項ヲ消去スベシ. 即チ(1)及(2)ノ兩邊ニ夫夫3及8ヲ乘ジテ邊邊相減ズレバ

$$x^2+11xy-42y^2=0,$$

yヲ既知數ノ如ク考ヘテ之ヲ解ケバ

$$x=3y \text{ 或ハ } -14y.$$

$x=3y$ トスレバ(1)ハ $32y^2=32$, 即チ $y^2=1$ トナリ, 之ヨリ $y=\pm1$ ヲ得.

倘 $y=1$ ナルトキハ $x=3$,

又 $y=-1$ ナルトキハ $x=-3$.

次ニ $x=-14y$ トスレバ(1)ハ $576y^2=32$, 即チ $y^2=\dfrac{2}{36}$ トナリ, 之ヨリ $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ ヲ得.

倘 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ ナルトキハ $x=-\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$,

又 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ ナルトキハ $x=\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$.

答 $\begin{cases} x=3, \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3, \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{7\sqrt{2}}{3}, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{6} \end{cases}$ 或ハ $\begin{cases} x=\dfrac{7\sqrt{2}}{3}, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}. \end{cases}$

注意. 此ノ解法ノ要點ハ既知數ノ項ヲ消去シテ $ax^2+bxy+cy^2=0$ ナル形ノ方程式ヲ求メ, 之ヨリ $x=my$ ナル形ノ式ヲ導クニアリ.

例題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1. $\begin{cases} x^2+2xy=24, \\ 2xy-y^2=7. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x^2-3y^2=2, \\ 3x^2+y^2=91. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2 - xy = 0, \\ 3y^2 + 5xy = 102. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 21. \\ xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = xy + 1. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - 3y^2 = 36, \\ 2x^2 - 11xy - 6y^2 = 60. \end{cases}$

173. 雜問題. 尚特別ノ工夫ニヨリテ解キ得ベキ二三ノ例ヲ示サン.

例 1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} x + y = 8 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1) \\ xy = 15 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2) \end{cases}$$

解 之ハ 171 節又ハ 156 節例 1 ノ方法ニテ容易ニ解キ得ベシト雖モ茲ニハ其ノ別法ヲ述ベン.

先ヅ (1) ノ兩邊ヲ二乘スレバ

$$x^2 + 2xy + y^2 = 64,$$

(2) ノ兩邊ヲ 4 倍スレバ　$4xy = 60,$

邊邊相減ズレバ　$x^2 - 2xy + y^2 = 4,$

平方ニ開ケバ　$x - y = \pm 2.$

之ト (1) トヲ組合スレバ

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2 \end{cases} \quad 或ハ \quad \begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

之ヲ解ケバ $\begin{cases} x = 5, \\ y = 3 \end{cases}$ 或ハ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 5 \end{cases}$ 答.

注意. 此ノ解法ノ要點ハ $x+y$ ト $x-y$ トノ値ヲ見出スニアリ.

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ xy = 33, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 90, \\ xy = 27, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 12, \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}$$

ノ如キ聯立方程式モ亦例 1 ト同樣ノ考ヘニテ解キ得ベシ. 此ノ種ノ解法ノ用ヒラルル場合少ナカラズ.

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 117 \ . \ . \ . \ . \ . \ (1) \\ x^2 - xy + y^2 = 63. \ . \ . \ . \ . \ . \ (2) \end{cases}$$

解 之ハ第 172 節ノ方法ニテ解キ得ベシト雖, 茲ニハ例 1 ト略同樣ニ $x+y$ ト $x-y$ ノ値ヲ見出スコトニヨリテ解カン

先ヅ兩式ヲ邊邊相減ズレバ

$$2xy = 54, \quad 卽チ \quad xy = 27,$$

之ヲ第一式ト邊邊相加ヘテ　$x^2 + 2xy + y^2 = 144,$

又第二式ヨリ邊邊相減ジテ　$x^2 - 2xy + y^2 = 36.$

此ノ兩式ノ兩邊ヲ平方ニ開ケバ

$$x+y=\pm 12,\qquad x-y=\pm 6.$$

因テ次ノ四組ノ方程式ヲ得.

$$\begin{cases}x+y=12,\\x-y=6.\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-12,\\x-y=6.\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=12,\\x-y=-6.\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-12,\\x-y=-6.\end{cases}$$

之ヲ解ケバ次ノ四組ノ根ヲ得.

答 $\begin{cases}x=9,\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-9\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=9\end{cases}$ 或ハ $\begin{cases}x=-9,\\y=-3.\end{cases}$

例 3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases}x+y=5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)\\x^3+y^3=35 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)\end{cases}$$

解 (2)ノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=35,$$

之ニ(1)ヲ代入シ,兩邊ヲ5ニテ除スレバ

$$x^2-xy+y^2=7.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

(1)ノ兩邊ヲ二乘シテ(3)ト邊邊相減ズレバ

$$3xy=18,\quad 即チ\quad xy=6.$$

因テ之ヲ(1)ト組合セテ $\begin{cases}x+y=5,\\xy=6.\end{cases}$

之ヲ解ケバ $\left.\begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}\right\}$ 或ハ $\left.\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\}$ 答.

例 4. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases}2xy-x^2=3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)\\x^2+4xy+3x=40-6y-4y^2 \;.\;.\;.\; (2)\end{cases}$$

解 (2)ヲ移項シテ書キ直セバ

$$(x+2y)^2+3(x+2y)-40=0,$$

$x+2y$ ヲ未知數ノ如クニ見做シテ之ヲ解ケバ

$$x+2y=5\quad 或ハ\quad -8.$$

$$\left.\begin{matrix}x+2y=5 \text{ ト (1) トヨリ} \begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases} 或ハ \begin{cases}x=\frac{3}{2},\\y=\frac{7}{4}\end{cases}\\ x+2y=-8 \text{ ト (1) トヨリ}\\ \begin{cases}x=\frac{-4+\sqrt{10}}{2},\\y=\frac{-12-\sqrt{10}}{4}\end{cases} 或ハ \begin{cases}x=\frac{-4-\sqrt{10}}{2},\\y=\frac{-12+\sqrt{10}}{4}\end{cases}\end{matrix}\right\} 答.$$

例 5. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases}xy+xz=14 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)\\yz+yx=18 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)\\zx+zy=20 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)\end{cases}$$

解 (1)ト(2)トヲ邊邊相加フレバ

$$2xy+xz+yz=32,$$

之ヨリ(3)ヲ邊邊相減ズレバ $2xy=12,$

$$\therefore\quad xy=6. \quad\dots\dots\dots\quad (4)$$

(1) ト (4) トヨリ　$xz=8. \quad\dots\dots\dots\quad (5)$

(2) ト (4) トヨリ　$yz=12 \quad\dots\dots\dots\quad (6)$

(4) ト (5) トヲ邊邊相乘ズレバ

$$x^2yz=48,$$

之ト (6) トヨリ　$x^2=4,\quad \therefore\ x=\pm 2.$

$x=2$ ナルトキハ (4) ト (5) トヨリ

$$y=3,\quad z=4.$$

又 $x=-2$ ナルトキハ　$y=-3,\quad z=-4.$

答 $\begin{cases} x=2,\quad y=3,\quad z=4; \\ \text{或ハ}\ x=-2,\quad y=-3,\quad z=-4. \end{cases}$

問題　二十八

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1. $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2+y^2=90. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-xy+y^2=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2-xy+y^2=13. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} xy-x=5, \\ 2xy+y-6x=12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y=3, \\ x^3-y^3=9. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 7(x^2+y^2)=25(x^2-y^2), \\ xy=48. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=2y, \\ 2x^2+4xy=5y. \end{cases}$　　8. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$　　10. $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}=30. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2(x+y)^2=9(x+y)+18, \\ (x-y)^2=6-(x-y). \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+y^2-16=2xy, \\ xy(xy-11)=12. \end{cases}$　　13. $\begin{cases} x^2=ax+by, \\ y^2=ay+bx. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x(y+z)=5, \\ y(z+x)=9, \\ z(x+y)=8. \end{cases}$　　15. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=10, \\ (y+z)(y+x)=14, \\ (z+x)(z+y)=35. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y+z=7, \\ x^2+y^2+z^2=45, \\ xy=20. \end{cases}$

174. $a+\sqrt{b}$ ナル形ノ數ノ平方根.

定理. a, b, c, d ガ有理數ニシテ $\sqrt{b}, \sqrt{d}$ ガ無理數ナル場合ニ $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ナルトキハ $a=c$, $b=d$ ナリ.

何トナレバ $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ナルトキハ

$$a-c+\sqrt{b}=\sqrt{d},$$

兩邊ヲ二乘スレバ

$$(a-c)^2+2(a-c)\sqrt{b}+b=d,$$

移項スレバ　$2(a-c)\sqrt{b}=d-b-(a-c)^2$

トナル,而シテ $a-c \neq 0$ トスレバ此ノ等式ノ左邊ハ無理數,右邊ハ有理數トナル,從テ此ノ等式ハ成立セズ. 故ニ $a-c=0$ 卽チ $a=c$ ナリ, 從テ又 $b=d$ ナリ.

注意. 逆ニ $a=c, b=d$ ナルトキハ $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ナルコト明ナリ.

上ノ定理ヲ應用スレバ $a+\sqrt{b}$ ナル形ノ數ノ平方根ヲ次ニ示スガ如ク變形スルコトヲ得.

例. $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$ ヲ二ツノ平方根ノ和ニ直セ.

解 $\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ト置キ有理數 x, y ヲ求ムレバ可ナリ.

之ノ兩邊ヲ二乘スレバ $11+2\sqrt{30}=x+y+2\sqrt{xy},$

$$\therefore \ x+y=11, \quad xy=30.$$

之ヲ解ケバ $x=5, y=6$, 或ハ $x=6, y=5.$

何レノ値ヲ取ルトモ

$$\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{5}+\sqrt{6} \quad 答.$$

注意. $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ ナル形ノトキハ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ト置クベシ.

例　題

次ノ數ヲ有理數ノ平方根ノ和或ハ差ニ直セ.

1. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$　　2. $\sqrt{14+8\sqrt{3}}.$

3. $\sqrt{33-4\sqrt{35}}.$　　4. $\sqrt{45-30\sqrt{2}}.$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ.

5. $\dfrac{3}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}.$　　6. $\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{8+\sqrt{60}}.$

175. 應用問題.

例. 若干個ノ林檎ヲ若干名ノ兒童ニ等分シタルニ,各一人ノ分ケ前ハ兒童ノ數二人多キトキノ分ケ前ヲ14ヨリ減ジタル差ニ等シク,若林檎ノ總數二個多ク兒童ノ數一人少ナキトキハ各一人ノ分ケ前ハ10個ナルベシト云フ. 林檎ノ總數及兒童ノ人數各如何.

解 x ヲ以テ兒童ノ數, y ヲ以テ林檎ノ總數トスベシ. 然ルトキハ $\dfrac{y}{x}$ ハ各兒童ノ分ケ前ヲ表シ, $\dfrac{y}{x+2}$ ハ兒童二名多キトキノ分ケ前, $\dfrac{y+2}{x-1}$ ハ林檎

ノ數二個多ク兒童ノ數一名少ナキトキノ分ケ前ヲ表スベシ. 因テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=14-\dfrac{y}{x+2}. \quad\ldots\ldots & (1)\\[2mm] \dfrac{y+2}{x-1}=10\ldots\ldots\ldots & (2)\end{cases}$$

(2)ヨリ $y+2=10(x-1)$, 即チ $y=10x-12$,

(1)ヨリ $y(x+2)=14x(x+2)-xy$;

即チ $2xy+2y=14x^2+28x$,

即チ $xy+y=7x^2+14x$.

yノ代リニ $10x-12$ ヲ置キ換フレバ

$$x(10x-12)+10x-12=7x^2+14x,$$

即チ $3x^2-16x-12=0$.

之ヲ解ケバ $x=6$ 或ハ $-\dfrac{2}{3}$ ヲ得.

偖負根ハ題意ニ適セズ. 故ニ

$x=6$, 從テ $y=10\times6-12=48$.

答 兒童六名, 林檎四十八個.

問題 二十九

1. 甲乙二數アリ, 甲ノ平方ハ乙ノ平方ノ二倍ヨリモ7ダケ多ク, 乙ノ三倍ハ甲ノ二倍ヨリモ1

ダケ多シト云フ. 甲乙ノ二數ヲ求ム.

2. 二桁ノ數アリ, 十ノ位ノ數字ト一ノ位ノ數字トノ積ノ二倍ハ其ノ數ヨリモ2ダケ大ニシテ, 其ノ數ニ18ヲ加ヘタルモノハ其ノ數ノ數字ノ位置ヲ轉倒シテ得ル數ニ等シト云フ. 其ノ數ヲ問フ.

3. 二個ノ正數アリ, 其ノ平方ノ和ハ137ニシテ其ノ積ハ其ノ和ノ三倍ヨリモ1ダケ少ナシト云フ. 其ノ二數ヲ求ム.

4. 甲乙二種ノ酒アリ, 甲酒ハ乙酒ヨリモ一升ニツキ15錢ダケ高價ナリト云フ. 或人甲酒若干升ヲ買ヒ其ノ代價トシテ金24圓ヲ仕拂ヒ, 又乙酒ヲ甲酒ヨリモ八升ダケ多ク買ヒテ21.6圓ヲ仕拂ヒタリ. 此ノ人ノ買ヒシ兩種ノ酒ノ升數ヲ求ム.

5. 長サハ幅ヨリモ30間長キ矩形ノ池ノ外圍ニ或幅ノ道路ヲ築キシニ, 其ガ爲ニ800坪ノ地面ヲ要セリ, 而シテ道路ノ外周180間ナリト云フ. 此ノ道路ノ幅及池ノ面積ヲ求ム.

6. 三百六十浬ヲ隔ツル兩港ヨリ, 二ツノ軍艦同時ニ相向ツテ出發シ途中ニテ相會シテヨリ一

ハ八時間,他ハ十八時間ニテ各先方ニ到着シタリト云フ. 軍艦ノ速度幾何ナルカ.

7. 甲乙二人同ジ日數間或仕事ニ從事シ,甲ハ此ノ日數ノ間一日モ休業セズシテ賃金12.8圓ヲ受ケ,又乙ハ此ノ間ニ四日間休ミテ賃金7.2圓ヲ受ケタリ,若乙ガ一日モ休業セズ甲ガ四日間休業セシナラバ兩人同額ノ賃金ヲ受クベシト云フ. 此ノ日數及甲乙兩人一日ノ賃金幾何ナルカ.

8. 1800圓ヲ二部ニ分チ之ヲ相異ナル利率ニ貸シタルニ其ノ利息相等シ,若甲部ヲ乙ノ利率ニテ貸サバ一ケ年ノ利息トシテ100圓ヲ得ベク,又乙部ヲ甲ノ利率ニテ貸サバ一ケ年64圓ノ利息ヲ得ベシト云フ. 各部ノ金額及利率ヲ求ム.

9. 或旅客列車ガ甲驛ヲ發シテ乙驛ニ向ヒタルト同時ニ貨物列車ガ乙驛ヲ發シテ甲驛ニ向ヒ$43\frac{1}{5}$分間ノ後兩列車相會シ,其ノ後貨物列車ハ旅客列車ヨリモ36分ダケ早ク先方ノ驛ニ達シタリト云フ. 甲乙兩驛ノ距離ヲ36哩ナリトスレバ兩列車ノ速度毎時幾何ナルカ.

10. 或商人絹手巾若干ヲ買ヒ,四打ヲ引キ去リ

テ其ノ餘ヲ原價ノ三割ノ利益ヲ以テ賣リシニ,收得金ハ總元金ヨリモ16圓ダケ少ナカリキ,若全體ヲ二割ノ利益ヲ得テ賣リタランニハ純益金ハ24圓ナルベシト云フ. 此ノ商人ハ手巾幾打ヲ買ヒシカ,又手巾一打ノ價何程ナルカ.

11. 或軍隊ガ三回ノ戰鬪ヲナシ,毎戰將校36名下士卒一割宛ヲ失ヒタリ,而シテ第二戰ノ終ニ生存セシ將校ノ數ト下士卒ノ數トノ比ハ第一戰ノ終ニ於ケル比ノ三分ノ二ニシテ,第三戰ノ終ニ生存セシ下士卒ノ數ハ第二戰ノ終ニ生存セシ將校ノ數ノ平方ニ等シカリシト云フ. 最初ノ將校ノ數及下士卒ノ數ヲ求ム.

12. 或大廣間ニ疊數百四十四疊ヲ敷クコトヲ得,又其ノ相隣レル二ツノ側壁ノ面積ハ七百二十平方尺及八百十平方尺ナリト云フ. 此ノ大廣間ノ縱横及天井ノ高サヲ求ム.

第八章 不等式及極大極小

176. 不等式. 不等號ヲ以テ二ツノ代數式(又ハ數)ヲ連結セルモノヲ不等式ト云フ.

例ヘバ　$2ab<a^2+b^2$ . . . . (1)

$x-3>5$ . . . . (2)

ハ何レモ不等式ナリ.

不等式ニ二種アリ. 上ニ示セル不等式(1)ハa, bガ相異ナル實數ナルトキハ其ノ値ノ如何ニ拘ラズ成立ス,斯ノ如キ不等式ヲ**絕對的不等式**ト云フ;不等式(2)ハxノ値ガ8ヨリモ大ナルトキニ限リ成立ス,斯ノ如キ不等式ヲ**條件附不等式**ト云フ.

一般ニ此ノ(2)ノ如キ條件附不等式ニ於テ其ノ式中ノ或文字(未知數)ノ取リ得ベキ値ノ限界ヲ求ムルコトヲ其ノ**不等式ヲ解ク**ト云フ. 例ヘバ上ノ不等式(2)ヲ解キテ得ベキ答ハ$x>8$ナリ.

偖既ニ知ル如ク數ノ大小ハ其ノ正負如何ニ拘ラズ其ノ差ノ正負ニヨリテ判知シ得ルナリ.

卽チ　$a-b>0$ ナルトキハ　$a>b$,

$a-b<0$ ナルトキハ　$a<b$.

注意. 不等式ヲ論ズルトキハ數ハ實數ノ範圍ニ限ルモノトス.

177. 不等式ノ性質.

(1)　不等式ノ兩邊ニ同一ノ數ヲ加

ヘ,或ハ兩邊ヨリ同一ノ數ヲ減ズルモ不等號ノ向ハ變ゼズ.

例ヘバ $a>b$ ナルトキハ

$$a+c>b+c \quad 又 \quad a-c>b-c.$$

如何ニモ $a>b$ ナルガ故ニ $a-b>0$ ナリ.

然ルニ　$(a+c)-(b+c)=a-b$,

因テ　$(a+c)-(b+c)>0$,　$\therefore\ a+c>b+c$.

同樣ニシテ　$a-c>b-c$.

之ニヨリ不等式ニ於テモ其ノ任意ノ項ノ符號ヲ變ジテ他ノ邊ニ移ス(移項スル)コトヲ得ルナリ.

例. $5x-4>4x+1$ ニ於テxヲ含ム項ヲ左邊ニ,然ラザル項ヲ右邊ニ移セバ $5x-4x>1+4$, 卽チ $x>5$ トナル.

(2)　不等式ノ兩邊ヲ同一ノ正數ニテ乘除スルモ不等號ノ向ハ變ゼズ.

例ヘバ $a>b$ ニシテ m ガ正數ナルトキハ

$$ma>mb \quad 又 \quad \frac{a}{m}>\frac{b}{m}.$$

如何ニモ $a>b$ ナルガ故ニ $a-b>0$ ナリ.

且mハ正數ナルガ故ニ　$m(a-b)>0$,

因テ　$ma-mb>0,\quad \therefore\ ma>mb.$

同様ニシテ　$\dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m}.$

例. 不等式 $\dfrac{x}{3}>2$ ノ兩邊ニ 3 ヲ乘ズレバ $x>6$ トナル.

(3)　不等式ノ兩邊ヲ同一ノ負數ニテ乘除スレバ不等號ノ向ヲ變ズ.

例ヘバ $a>b$ ニシテ m ガ負數ナルトキハ

$$ma<mb\quad 又\quad \frac{a}{m}<\frac{b}{m}.$$

如何ニモ $a>b$ ナルガ故ニ $a-b>0$ ナリ.

且 m ハ負數ナルガ故ニ　$m(a-b)<0,$

因テ　$ma-mb<0,\quad \therefore\ ma<mb.$

同様ニシテ　$\dfrac{a}{m}<\dfrac{b}{m}.$

例. 不等式 $-4x>15$ ノ兩邊ヲ -4 ニテ除スレバ $x<-\dfrac{15}{4}$ トナル.

178. 條件附不等式ノ解法.

(1)　**一次ノ不等式.**

例. $\dfrac{7}{3}x+2>\dfrac{14}{5}x+9$ ヲ解ケ.

解　兩邊ニ 15 ヲ乘ズレバ　$35x+30>42x+135,$

移項スレバ　$-7x>105,$

兩邊ヲ -7 ニテ除スレバ　$x<-15$ 答.

(2)　**二次ノ不等式.**

例 1. $4x^2-3x>5x+60$ ヲ解ケ.

解　移項スレバ　$4x^2-8x-60>0,$

兩邊ヲ 4 ニテ除スレバ　$x^2-2x-15>0,$

因數ニ分解スレバ　$(x+3)(x-5)>0.$

偖 $x+3$ ト $x-5$ トノ積ガ正トナルハ兩因數ガ共ニ負ナルカ或ハ共ニ正ナルトキニ限ル.

今 $x+3$ ガ零トナル x ノ値 -3 ト $x-5$ ガ零トナル x ノ値 5 トヲ界トシテ此ノ二數以外ノ總テノ實數ヲ分テバ, (I) -3 ヨリモ小ナル數, (II) -3 ト 5 トノ間ニアル數, (III) 5 ヨリモ大ナル數ノ三群トナル.

x ニ第一群ノ値ヲ與フルトキ卽チ $x<-3$ ナルトキハ $x+3<0,\ x-5<0$ ニシテ不等式ハ成立ス.

x ニ第二群ノ値ヲ與フルトキ卽チ $-3<x<5$ ナルトキハ $x+3>0,\ x-5<0$ ニシテ不等式ハ成立セズ.

x ニ第三群ノ値ヲ與フルトキ卽チ $x>5$ ナルトキハ $x+3>0,\ x-5>0$ トナリテ不等式ハ成立ス.

$\therefore\ x<-3$ 或ハ $x>5$ 答.

例 2. $\frac{3}{2}x^2+2x<\frac{2}{3}x^2+4x+\frac{3}{2}$ ヲ解ケ.

解 兩邊ニ 6 ヲ乘ズレバ

$$9x^2+12x<4x^2+24x+9,$$

移項シテ因數ニ分解スレバ

$$(x-3)(5x+3)<0,$$

兩邊ヲ 5 ニテ除スレバ $(x-3)\left(x+\frac{3}{5}\right)<0.$

偖 $x-3$ ト $x+\frac{3}{5}$ トノ積ガ負トナルハ兩因數ガ異符號ナルトキニ限ル.

先ヅ此等ノ因數ヲ零ナラシムル x ノ二ツノ値ハ 3 ト $-\frac{3}{5}$ トナルコトニ着目セヨ.

$x<-\frac{3}{5}$ ナルトキハ $x+\frac{3}{5}<0,\ x-3<0$ トナリテ不等式ハ成立セズ.

$-\frac{3}{5}<x<3$ ナルトキハ $x+\frac{3}{5}>0,\ x-3<0$ ニシテ不等式ハ成立ス.

$x>3$ ナルトキハ $x+\frac{3}{5}>0,\ x-3>0$ ニシテ不等式ハ成立セズ.

$$\therefore\ -\frac{3}{5}<x<3 \text{ 答.}$$

注意. 兩邊ガ整式ナル不等式ヲ解キテ得ベキ未知數 x ノ値ノ限界ハ其ノ不等式ノ不等號ノ代リニ等號ヲ置キ換ヘテ得ベキ方程式ノ根ナルコト上例ヨリ知ラルベシ.

例 3. $x^2+5<2x$ ヲ解ケ.

解 移項スレバ $x^2-2x+5<0.$

左邊ヲ因數ニ分解セントスルモ數ヲ實數ノ範圍ニ限ルトキハ不可能ナリ, 且之ヲ書キ直セバ

$$(x-1)^2+4<0$$

トナル, 而シテ此ノ左邊ハ x ニ如何ナル實數値ヲ與フルトモ其ノ値ハ恒ニ正トナリ, 決シテ負トナルコトナシ. 故ニ此ノ不等式ハ x ニ如何ナル値ヲ與フルトモ成立セズ.

注意. 此ノ例ノ如キ場合ニハ解ナシト云フ.

179. 絕對的不等式ノ證明.

例. a, b ガ相異ナル實數ナルトキハ $a^2+b^2>2ab$ ナルコトヲ證明セヨ.

解 上ノ不等式ガ成立スルタメニハ

$$a^2+b^2-2ab>0$$

ナレバ可ナリ. 然ルニ之ハ左邊ヲ書キ直セバ

$$(a-b)^2>0$$

トナリ,aトbトガ相異ナルトキハ明ニ成立ス.
從テ與ヘラレタル不等式モ亦成立ス.

例題

次ノ不等式ヲ解ケ.

1. $3-2x>-11.$ 2. $\frac{x}{3}>\frac{2}{5}x+4.$

3. $\frac{x}{2}-1>\frac{x}{9}+\frac{5}{14}.$ 4. $x^2-5x+4>0.$

5. $x^2-5x-14<0.$ 6. $6x^2-x-77<0.$

7. a, bガ同符號ニシテ且相異ナル實數ナルトキハ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$ ナルコトヲ證明セヨ.

8. a, b, cガ相異ナル實數ナルトキハ

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$$

ナルコトヲ證明セヨ.

9. 方程式 $x^2-6x+a=0$ ノ根ガ相異ナル實數ナルタメニ a ノ取ルベキ値ノ限界ヲ求ム.

10. $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}>0$ ヲ解ケ.

maximum / minimum

180. 二次式ノ極大及極小. xニ關スル二次ノ有理整式 ax^2+bx+c ニ於テxニ種種ノ値ヲ與フルトキハ此ノ式ハ種種ノ値ヲ取ル,而シ

テ或場合ニハxノ値ガ漸次增大シテ或値ニ達スルトキ此ノ式ノ値ハ漸次減小シテ或値mトナリ,xガ尙引續キ增大スルトキハ此ノ式ノ値ハ却テmヨリ增加スルコトアルベシ. 斯ノ如キ場合ニハmヲ此ノ二次式ノ**極小値**ト云フ.

例ヘバ二次式 $(x-2)^2+3$ ニ於テxノ値ガ2ヨリモ小ナル値ヨリ漸次增大シテ2ニ達スル迄ニ此ノ式ノ値ハ漸次減小シテ3トナリ,xガ尙引續キ增大スルトキハ此ノ式ノ値ハ却テ3ヨリ增加ス. 故ニ3ハ此ノ二次式ノ極小値ナリ.

又或場合ニハ二次式 ax^2+bx+c ニ於テxノ値ガ漸次增大シテ或値ニ達スル迄ハ此ノ式ノ値モ漸次增大シテ或値mトナリ,xガ尙引續キ增大スルトキハ此ノ式ノ値ハ却テmヨリ減小スルコトアルベシ. 斯ノ如キ場合ニハmヲ此ノ二次式ノ**極大値**ト云フ.

例ヘバ $7-(x+2)^2$ ニ於テxノ値ガ -2 ヨリモ小ナル値ヨリ漸次增大シテ -2 ニ達スル迄ハ此ノ二次式ノ値モ亦漸次增大シテ7トナリ,xガ尙引續キ增大スルトキハ此ノ式ノ値ハ却テ7ヨリ減

小ス. 故ニ 7 ハ此ノ二次式ノ極大値ナリ.

注意. ax^2+bx+c ノ値ノ極大及極小ヲ論ズルトキハ a, b, c 及 x ノ値ハ何レモ皆實數ナリトス.

一般ニ x ニ關スル二次式ハ極大値或ハ極小値ヲ有ス.

例 1. x^2+6x-7 ノ極小値ヲ求ム.

解 x ヲ含ム部分ヲ完全平方ニ直スタメニ 3^2 ヲ加ヘ且減ズレバ

$$x^2+6x-7=x^2+6x+3^2-3^2-7=(x+3)^2-16.$$

偖此ノ式ノ値ハ x ノ値ガ -3 ヨリモ小ナル値ヨリ增大シテ -3 トナルトキハ漸次減少シテ -16 トナリ, x ガ尙引續キ增大スルトキハ此ノ式ノ値ハ却テ -16 ヨリ增大ス. 故ニ -16 ガ此ノ式ノ極小値ナリ. 而シテ其ノ時ノ x ノ値ハ -3 ナリ.

例 2. $1+4x-2x^2$ ハ x ガ如何ナル値ヲ有スルトキ極大トナルカ, 又其ノ極大値ハ如何.

解 先ヅ與ヘラレタル式ヲ變形スレバ

$$1+4x-2x^2=3-2(x-1)^2$$

トナル. 偖此ノ右邊ハ $(x-1)^2$ ガ極小トナルトキ極大トナルコト明ナリ. 而シテ $(x-1)^2$ ハ $x=1$ ナルトキ極小トナル. 故ニ原式ハ $x=1$ ナルトキ極大トナル, 而シテ此ノ極大値ハ明ニ 3 ナリ.

例 3. 二ツノ正數 x, y ノ和ガ一定ナラバ積 xy ハ $x=y$ ナルトキ極大トナル. 之ヲ證明セヨ.

解 $x+y=a$ トセヨ. 然ルトキハ $y=a-x$,

$$\therefore\ xy=x(a-x)=ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.$$

此ノ式ハ明ニ $x=\frac{a}{2}$ ナルトキ極大トナル. 而シテ $x=\frac{a}{2}$ ナルトキハ $y=a-x=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$, 從テ $x=y$ ナリ. 故ニ $x+y$ ガ一定ナルトキハ積 xy ハ $x=y$ ナルトキ極大トナル.

181. 應用.

例. 周ノ長サガ一定ナル矩形ノ中, 面積ノ極大ナルモノハ正方形ナリ. 之ヲ證明セヨ.

解 矩形ノ相隣ル二邊ノ長サヲ表ス數ヲ夫夫 x, y トセヨ. 然ルトキハ明ニ周ノ長サヲ表ス數ハ $2(x+y)$ ニシテ題意ニヨリ之ハ一定ナリ, 從テ $x+y$ モ亦一定ナリ. 而シテ矩形ノ面積ヲ表ス數ハ xy ナリ. 故ニ此ノ場合ニハ前節ノ例 3 ニヨリ xy ハ $x=y$ ナルトキ極大ナリ. 即チ面積ハ其ノ

矩形ガ正方形ナルトキ極大ナリ.

例　題

次ノ式ノ極大値或ハ極小値ヲ求ム.

1. x^2-8x+3.　　2. $(x-1)(5x+1)$.

3. $4+x-2x^2$.　　4. x^2+7x-4.

5. $3+2x-x^2$.

6. 24ヲ二ツノ部分ニ分チ其ノ兩部分ノ平方ノ和ヲ極小ナラシメヨ. 又甲部ノ平方ノ三倍ト乙部ノ平方ノ二倍トノ和ヲ極小ナラシメヨ.

7. 二ツノ正數 x, y ノ積ガ一定ナラバ此ノ二數ノ和 $x+y$ ハ $x=y$ ナルトキ極小トナル. 之ヲ證明セヨ.

8. 面積ノ一定ナル矩形ノ中周ノ長サノ極小ナルモノハ正方形ナリ. 之ヲ證明セヨ.

(第三學年第一學期)

第十編　比及比例

第一章　比

182. 數ノ比. 或數 a ガ他ノ數 b ノ幾倍ナルカト云フ意味ニ於ケル a, b 間ノ關係ヲ a ノ b ニ對スル比ト云フ.

a ノ b ニ對スル比ヲ表スニ $a:b$ ヲ以テス,而シテ a ヲ比ノ**前項**, b ヲ其ノ**後項**ト云フ.

前項ガ後項ノ幾倍ナルカヲ表ス數ヲ比ノ値ト云フ. 即チ比 $a:b$ ノ値ハ $\frac{a}{b}$ ナリ.

比ト比ノ値トハ其ノ意味異ナレリ. 比ハ一ツノ關係ニシテ比ノ値ハ一ツノ數ナリ. サレド時トシテハ比ノ値ト云フベキヲ省略シシテ單ニ比ト稱スルコトアリ.

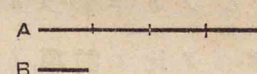
比ノ前項及後項ハ共ニ正負ノ整數,分數或ハ無理數ナルコトヲ得ベシ,從テ比ノ値モ亦然リ.

例ヘバ $3:2$ ノ値ハ $\frac{3}{2}$ ニシテ有理數ナレドモ $\sqrt{2}:3$ ノ値ハ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ニシテ無理數ナリ.

1ヨリモ大ナル値ヲ有スル比ヲ優比ト云ヒ,1ヨリモ小ナル値ヲ有スル比ヲ劣比ト云フ.

二ツノ比ガ相等シトハ其ノ値ノ相等シキコトニシテ,二ツノ比ノ大小トハ其ノ値ノ大小ノコトナリトス.

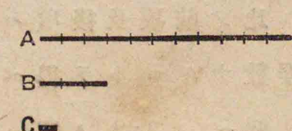
183. 倍量,約量及公度. 或量Aノ中ニ之ト同種類ノ量Bガ丁度幾ツカ含マルルトキハAヲBノ**倍量**,BヲAノ**約量**ト云フ.



例ヘバAナル長サガBナル長サノ丁度四倍ナリトスレバAハBノ倍量ニシテBハAノ約量ナリ.

偖此ノ場合ニ A=4B ナルニヨリ若Bヲ單位トシテAヲ計レバ其ノ數値ハ4ナリ.

同種類ノ二量A,Bガ何レモ之ト同種類ナル第三量Cノ倍量ナルトキハCヲA,Bノ**公度**ト云フ.



例ヘバAナル長サガBナル長サノ整數倍ナラザルトキニモBヲ假ニ三等分シタル長サ例ヘバCヲ取リテAヲ計ルトキ丁度其ノ十一倍ナルコトヲ知ルトキハA,B共ニCノ倍量ニシテCハA,Bノ公度ナリ. 偖此ノ場合ニハ $A=\frac{11}{3}B$ ナルコト圖ニヨリテ明ナリ,故ニ若Bヲ單位トシテAヲ計レバ其ノ數値ハ$\frac{11}{3}$ナリ.

一般ニ同種類ノ量A,Bガ公度Cヲ有スルトキハA,Bヲ互ニ**通約スベキ量**ト云フ.

184. 公度ヲ有セザル量. 二ツノ同種類ノ量ノ公度ハ必ズシモ存在スルモノニアラズ,却テ公度ナキ場合多數ナリ.

例ヘバ正方形ノ一邊ト其ノ對角線トノ如キ,又ハ圓ノ直徑ト其ノ周トノ如キハ公度ヲ有セザルモノノ適例ナリ.

同種類ノ量A,Bガ公度ヲ有セザルトキハ之ヲ互ニ**通約スベカラザル量**ト云フ.

同種類ノ二量A,Bガ互ニ通約スベカラザル場合ニハBヲ單位トシテAヲ計ルトキハ其ノ數値ハ無理數トナリテ整數又ハ分數ニテ表スコトヲ得ズ. サレド次ノ如クスレバ之ニ近キ數値ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 即チ例ヘバBノ一萬分ノ一ヲCト名ヅケ,之ヲ以テAヲ計リテAハCノ 14142 倍ヨリハ大ニシテ 14143 倍ヨリハ小ナルコトヲ

知ルトキハAノ數値ハ明ニ 1.4142 ヨリハ大ニシテ 1.4143 ヨリハ小ナリ,卽チ其ハ1.4142......ナルベシ. 若尙精密ニ之ヲ求メントスレバBヲ十萬,百萬,......ニ等分シタルモノヲCトシテ上ノ如クスレバ可ナリ.

185. 量ノ比. 或量Aガ之ト同種類ノ量BノＢ幾倍ナルカト云フ意味ニ於ケルA,B間ノ關係ヲAノBニ對スル比ト云フ. 之ヲ表スニA:Bヲ以テス. 吾人ハ次ニ一層深ク立チ入リテ二量ノ比ノ値ヲ考ヘントス.

(1) **A,Bガ互ニ通約スベキ場合.**

此ノ場合ニA,Bノ公度ヲCトスレバ明ニ

$$A=mC,\quad B=nC \qquad (m,\ n\ \text{ハ正ノ整數})$$

ナル關係アルベシ. 因テ

$$A=m\cdot\frac{1}{n}B=\frac{m}{n}B$$

トナリ,AハBノ$\frac{m}{n}$倍ナリ. 故ニ A:B ノ數値ハ$\frac{m}{n}$ナリ. 若mガnノ倍數ナラバ$\frac{m}{n}$ハ整數ナルベク,然ラザルトキハ一般ニ$\frac{m}{n}$ハ分數ナリ.

故ニ互ニ通約スベキ量ノ比ナルA:Bノ値トハBヲ單位トシテAヲ計リタルトキノ數値ニ外ナラズ. 而シテ其ノ數値ハ有理數ナリ.

(2) **A,Bガ互ニ通約スベカラザル場合.**

此ノ場合ニA,Bハ公度ヲ有セザルニヨリBヲn等分シタルモノヲ單位トシテAヲ計ルトキハnヲ如何ニ大ナリトスルモAハ必ズ其ノ相隣ル二ツノ整數倍例ヘバm倍,$(m+1)$倍ノ間ニ挾マルベシ. 卽チ $\quad m\cdot\frac{1}{n}B<A<(m+1)\cdot\frac{1}{n}B,$

卽チ
$$\frac{m}{n}B<A<\frac{m+1}{n}B.$$

因テBヲ單位トシテAヲ計レバAノ數値ハ$\frac{m}{n}$ト$\frac{m+1}{n}$トノ間ニアル數ナリ.

然ルニ $\frac{m+1}{n}-\frac{m}{n}=\frac{1}{n}$ ナルニヨリnヲ大キク取レバ取ル程此ノ差ハ如何樣ニモ小トナル.

卽チAノ數値ハ限ナク相接近スル二組ノ有理數ノ間ニ挾マル數ニシテ之ハ無理數ナリ.

故ニAトBトガ互ニ通約スベカラザル量ナルトキニモ比A:Bノ値ハ矢張Bヲ單位トシテAヲ計リタルトキノ數値ナリ. 但此ノ場合ノ比ノ値ハ無理數ナリ.

例ヘバ正方形ノ對角線ト一邊トノ比ノ値ハ $\sqrt{2}$ ニシテ又圓周ト其ノ直徑トノ比ノ値ハ π ニテ表ス所ノ 3.14159 ...... ナル無理數ナリ.

186. 量ノ比ト數ノ比トノ關係.

同種類ノ二量 A, B ヲ之ト同種類ノ量 C ヲ單位トシテ計リタル數値ヲ夫夫 a, b トセヨ. 然ルトキハ a, b ハ有理數ナルコトモ無理數ナルコトモアルベシ. 而シテ

$$A=aC,\quad B=bC,$$

之ヨリ

$$A=a\frac{1}{b}B=\frac{a}{b}B.$$

因テ A:B ノ値ハ $\frac{a}{b}$ ナルコト明ナリ.

即チ一般ニ二ツノ量 A ト B トノ比ハ其等ヲ同ジ單位 C ヲ用ヒテ計リタルトキノ數値 a ト b トノ比ニ等シ.

斯ノ如ク量ノ比ハ之ヲ數ノ比ニ改ムルコトヲ得ベキガ故ニ以下主トシテ數ノ比ニツキテ論ズルコトトスベシ.

187. 比ノ性質.

(1) 比ノ兩項ヲ零ナラザル同一ノ數ニテ乘除スルモ其ノ値ハ變ゼズ.

如何ニモ $a:b$ ノ値ハ $\frac{a}{b}$ ニシテ, 又 $ma:mb$ ノ値ハ $\frac{ma}{mb}$ 即チ $\frac{a}{b}$ ナルガ故ニ

$$ma:mb=a:b$$

ナリ.

或數 m ニテ除スルハ其ノ逆數 $\frac{1}{m}$ ヲ乘ズルト同樣ナルニヨリ比ノ兩項ヲ同一ノ數ニテ除スルモ其ノ値ハ變ゼズ.

二ツノ比ノ大小ハ次ノ如クシテ之ヲ比較スルコトヲ得ベシ.

今 a, b, c, d ヲ何レモ正數ナリトシテ $a:b, c:d$ ヲ比較センニ, $a:b$ ノ値ハ $\frac{a}{b}$, $c:d$ ノ値ハ $\frac{c}{d}$ ナリ, 而シテ $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$ ナルガ故ニ

$$ad>bc \text{ ナルトキハ } a:b>c:d,$$
$$ad=bc \text{ ナルトキハ } a:b=c:d,$$
$$ad<bc \text{ ナルトキハ } a:b<c:d.$$

(2) 二ツノ正數ノ比ハ兩項ニ同一ノ正數ヲ加フレバ,優比ハ其ノ値ヲ減

ジ,劣比ハ其ノ値ヲ增ス.

何トナレバ a, b, x ヲ正數トシテ比 $a:b$ ト比 $(a+x):(b+x)$ トノ値ニツキテ考フルニ

$$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}.$$

因テ $a>b$ ナルトキハ $a-b>0$ ニシテ此ノ右邊ハ正數ナリ,故ニ $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$ ナリ.

又 $a<b$ ナルトキハ $a-b<0$ ニシテ此ノ右邊ハ負數ナリ,故ニ $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$ ナリ.

全ク同樣ニシテ次ノ定理ヲ證明スルヲ得.

(3) 二ツノ正數ノ比ノ兩項ヨリ各項ノ何レヨリモ小ナル同一ノ正數ヲ減ズレバ,優比ハ其ノ値ヲ增シ,劣比ハ其ノ値ヲ減ズ.

上ノ二定理ハ又次ノ如クニ述ブルコトヲ得.

二ツノ正數ノ比ノ兩項ニ同一ノ正數ヲ加フレバ比ノ値ハ1ニ接近シ,又兩項ヨリ其ノ何レヨリモ小ナル同一ノ正數ヲ減ズレバ比ノ値ハ1ヨリ遠ザカル.

188. 反比. 比ノ兩項ヲ交換シタル比ヲ原ノ比ノ**反比**(或ハ**逆比**)ト云フ.

例ヘバ $b:a$ ハ $a:b$ ノ反比ナリ.

又 $b:a$ ノ兩項ヲ ab ニテ除スレバ $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ トナル,故ニ $a:b$ ノ反比ハ此ノ比ノ兩項ノ逆數ノ比 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ ニ等シ.

反比 $b:a$ ニ對シテ特ニ原ノ比 $a:b$ ヲ a, b ノ**正比**ト稱スルコトアリ.

189. 相乘比或ハ複比. 幾ツカノ比ノ前項ノ積ヲ前項トシ,後項ノ積ヲ後項トシタル比ヲ其等ノ比ノ**相乘比**或ハ**複比**ト云フ.

例ヘバ $ac:bd$ ハ $a:b$ ト $c:d$ トノ複比ナリ. 通常之ヲ $\left\{\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right.$ 或ハ $\left.\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right\}$ ト書ク.

同一ナル二ツノ比ノ複比ヲ其ノ**二乘比**,同一ナル三ツノ比ノ複比ヲ其ノ**三乘比**ト云フ.

例ヘバ $a^2:b^2$ ハ $a:b$ ノ二乘比ニシテ $a^3:b^3$ ハ $a:b$ ノ三乘比ナリ.

例題

1. 比 5:9 ト 3:10 トノ複比ノ値ヲ求ム.

2. 比 $3:2$ ノ二乘比ト $5:12$ トノ複比ヲ作リ,且其ノ値ヲ見出セ.

3. 次ノ比ヲ大サノ順ニ列記セヨ.

$$5:4,\quad 8:7,\quad 21:16,\quad 38:35.$$

4. $(3+x):(5+x)$ ガ $5:6$ ニ等シキタメニハ x ノ値ハ如何ナルベキカ.

5. $5x^2+2y^2=7xy$ ナルトキ $x:y$ ノ値ヲ求ム.

6. $\dfrac{7x+5y}{x+3y}=3$ ナルトキ $x:y$ ノ値ヲ求ム.

7. 或比ノ兩項ニ 3 ヲ加フレバ $2:3$ ニ等シクナリ,兩項ヨリ 3 ヲ減ズレバ $1:3$ ニ等シクナルト云フ. 或比トハ如何ナル比ナルカ.

8. 數多ノ數 $a, b, c, \ldots\ldots, k, l$ ニ於テ比 $a:l$ ハ比 $a:b, b:c, \ldots\ldots, k:l$ ノ複比ニ等シ,之ヲ證明セヨ.

190. 相等シキ多クノ比. 幾ツカノ比ガ相等シキトキハ何レノ比モ皆其等ノ比ノ前項ノ和ヲ前項トシ,後項ノ和ヲ後項トシタル比ニ等シ.(加比ノ理)

例ヘバ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ナルトキハ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

ト置ケバ $a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk.$

邊邊相加フレバ $a+c+e=k(b+d+f),$

$b+d+f\neq 0$ ナルトキハ之ヨリ $k=\dfrac{a+c+e}{b+d+f},$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}.\ \ldots\ldots\ (1)$$

但 $b+d+f\neq 0$ ナリトス.

又同様ニシテ次ノ事柄ヲモ證明スルヲ得ベシ.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}.\ \ldots\ldots\ (2)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{\sqrt[n]{pa^n+qc^n+re^n}}{\sqrt[n]{pb^n+qd^n+rf^n}}.\ \ldots\ (3)$$

茲ニ p, q, r ハ正負ノ任意ノ數ニシテ n ハ正ノ整數ナリトス,又(3)ノ各比ノ値ハ正數ナリトス.

191. 應用.

例. 直角三角形ノ周ガ p 尺ニシテ其ノ直角ヲ夾ム二邊ノ比ガ $a:b$ ナリト云フ. 其ノ二邊ノ長ヲ求ム.

解 所要ノ二邊ノ長サヲ夫夫 x 尺, y 尺トスベシ. 然ルトキハ斜邊ノ長サハ $\sqrt{x^2+y^2}$ 尺ナルベシ.

因テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=p\ \ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

(2)ヲ變形シ且前節ノ公式ヲ應用スレバ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}},$$

(1)ヲ代入スレバ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{p}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}.$

$$\therefore\ x=\frac{ap}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{bp}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

答　$\dfrac{ap}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$尺, $\dfrac{bp}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$尺.

問題　三十

1. 矩形アリ,相隣ル二邊ノ比ハ5:12ニ等シク且對角線ノ長サハ二尺六寸ナリト云フ. 其ノ二邊ノ長サヲ求ム.

2. 直角三角形アリ,其ノ斜邊ト一邊トノ比ハ$a:b$ニシテ他ノ一邊ハp尺ナリト云フ. 斜邊及其ノ一邊ノ長サヲ求ム.

3. 二數ノ比ガ$a:b$ナルトキ其ノ二數ノ和ト差トノ比ヲ求ム.

4. 比 $2x:3y$ ガ比 $(2x-m):(3y-m)$ ノ二乘比ニ等シキタメニハmハ如何ナル値ヲ有スベキカ.

5. 現今父子ノ年齢ノ比ハ2:1ニ等シク,今ヨリ10年前ニハ其ノ比ノ値$\frac{8}{3}$ナリシト云フ. 父子現今ノ年齢ヲ求ム.

6. 一ツノ比ノ各項ヨリ互ニ他ノ項ノ逆數ヲ減ジテ得ベキ比ハ原ノ比ニ等シ. 之ヲ證明セヨ.

7. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}$ ヨリ $x:y$ 及 $y:z$ ヲ求ム.

8. 二數ノ和ト差トノ比ガ$m:n$ナルトキ其ノ二數ノ比ヲ求ム.

第二章　比例

192. 比例. 四數a, b, c, dニ於テ比$a:b$ガ比$c:d$ニ等シキトキハ其等ノ四數ハ**比例ヲナス**ト云フ. 此ノ場合ニ二ツノ比ガ相等シキコトヲ示セル式ヲ**比例式**或ハ單ニ**比例**ト云フ.

比例式ヲ書キ表スニハ次ノ如クス.

$$a:b=c:d,$$

或ハ　$$a:b::c:d.$$

此ノ場合ニaトdトヲ此ノ比例式ノ**外項**,bト

cトヲ其ノ內項,dヲa, b, cノ第四比例項ト云フ.

193. 比例ノ性質.

比例式ノ外項ノ積ハ內項ノ積ニ等シ.

如何ニモ $a:b=c:d$ ナルトキハ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,
兩邊ニbdヲ乘ズレバ $ad=bc$ トナル.

逆ニ, $ad=bc$ ナルトキハ a, b, c, d ハ比例ヲナス.

如何ニモ $ad=bc$ ナルトキハ兩邊ヲ bd ニテ除スレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \therefore \ a:b=c:d.$$

四數 a, b, c, d ニ於テ $ad=bc$ ナルトキハ次ノ八ツノ比例式ガ成立スルコトハ容易ニ知ラルベシ.

$$\begin{array}{ll} a:b=c:d, & b:a=d:c, \\ a:c=b:d, & c:a=d:b, \\ d:b=c:a, & b:d=a:c, \\ d:c=b:a, & c:d=a:b. \end{array}$$

又此ノ中何レカ一ツガ成立スルトキハ $ad=bc$ ナル關係ガ成立スルニヨリ他ノ七ツモ亦成立ス.

因テ一ツノ比例式ガ成立スルトキハ其ノ內項ヲ交換シ,或ハ外項ヲ交換シタル比例式モ亦成立ス. (更迭ノ理)

又二ツノ比ガ相等シキトキハ其ノ反比モ亦相等シ. (反轉ノ理)

注意. $a:b=c:d$ ナルトキハ $ad=bc$ ナル關係成立スルニヨリ,比例ヲナセル四數ノ中何レカ三數ヲ知ルトキハ第四ノ數ヲ容易ニ見出シ得ベシ. 其ノ方法ハ算術ニ於テ學ビタル所ナリ.

194. 比例式ノ變形. 比例ニハ尙次ノ性質アリ.

$a:b=c:d$ ナルトキハ

$$(a+b):b=(c+d):d$$

ナリ. (合比ノ理)

如何ニモ $a:b=c:d$ ナルトキハ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

兩邊ニ1ヲ加フレバ $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,

卽チ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\quad \therefore \ (a+b):b=(c+d):d.$

同樣ニシテ $a:b=c:d$ ナルトキハ

$$\therefore\quad (a-b):b=(c-d):d \quad \text{(除比ノ理)}$$

又 $$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$$

ナルコトヲ證明シ得ベシ.

195. 連比例. 數多ノ數ニ於テ第一數ト第二數トノ比,第二數ト第三數トノ比,第三數ト第四數トノ比等逐次斯シテ作リタル比ガ皆相等シキトキハ其等ノ數ハ連比例ヲナスト云フ.

例ヘバ $$a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots,$$

卽チ $$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots$$

ナルトキハ $a, b, c, d, \cdots\cdots$ ハ連比例ヲナス.

三數ガ連比例ヲナストキハ第二數ヲ第一及第三ノ二數ノ比例中項ト云ヒ,第三數ヲ第一及第二ノ二數ノ第三比例項ト云フ.

例ヘバ $a:b=b:c$ ナルトキハ b ハ a, c ノ比例中項,c ハ a, b ノ第三比例項ナリ.

二數ノ比例中項ハ其ノ積ノ平方根ニ等シ.

何トナレバ $a:b=b:c$ ナルトキハ $ac=b^2$, 從テ $b=\pm\sqrt{ac}$ ナルガ故ナリ.

三數ガ連比例ヲナストキハ第一數ト第三數トノ比ハ第一數ト第二數トノ比ノ二乘比ニ等シ.

何トナレバ $a:b=b:c$ ナルトキハ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, 從テ $\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$ ナルガ故ナリ.

注意. $a:b=b:c$ ナルトキハ $\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$ ナルニヨリ,此ノ場合ニハ $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$ ナリ.

同樣ニ $a:b=b:c=c:d$ ナルトキハ

$$\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{c^3}=\frac{c^3}{d^3}$$

ナリ.

196. 次ニ二三ノ例題ヲ示サン.

例 1. $a:b=c:d,\ \ e:f=g:h$ ナルトキハ

$$ae:bf=cg:dh$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 及 $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ ナルガ故ニ此等ヲ邊邊相乘ズレバ

$$\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh},\qquad \therefore\ ae:bf=cg:dh.$$

例 2. $a:b=c:d$ ナルトキハ

$$(ab+cd):(ab-cd)=(a^2+c^2):(a^2-c^2)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解 先ヅ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ ト置ケバ $a=bk,\ c=dk.$

因テ $ab+cd=bk\cdot b+dk\cdot d=b^2k+d^2k=(b^2+d^2)k,$

$$ab-cd=b^2k-d^2k=(b^2-d^2)k,$$

$$a^2+c^2=b^2k^2+d^2k^2=(b^2+d^2)k^2,$$

$$a^2-c^2=b^2k^2-d^2k^2=(b^2-d^2)k^2.$$

$$\therefore\ \frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{(b^2+d^2)k}{(b^2-d^2)k}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2},$$

又 $$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{(b^2+d^2)k^2}{(b^2-d^2)k^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}.$$

$$\therefore\ \frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2},$$

$$\therefore\ (ab+cd):(ab-cd)=(a^2+c^2):(a^2-c^2).$$

例 3. $a:b=c:d$ ナルトキハ各ノ比ハ

$$\frac{\sqrt{(la^2+mac+nc^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}$$

ニ等シキコトヲ證明セヨ. (但各比ノ値ヲ正トス)

解 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ ト置ケバ $a=bk,\ c=dk.$

因テ $$\frac{\sqrt{(la^2+mac+nc^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}=\frac{\sqrt{(lb^2k^2+mbdk^2+nd^2k^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(lb^2+mbd+nd^2)k^2}{lb^2+mbd+nd^2}}$$

$$=\sqrt{k^2}=k.$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{\sqrt{(la^2+mac+nc^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}.$$

例題

次ノ比例式ニ於テ x ノ値ヲ求ム.

1. $3:x=21:14.$ 2. $(1+x):(4-x)=2:3.$

3. $a^2:bd=ab:x.$ 4. $a^2:ab^2=5a^2b^2:x.$

5. $(6+x):(3+2x)=(10-x):(13-3x).$

6. $(x^2-2x+3):(2x-3)=(x^2-3x+5):(2x-5).$

次ノ各二數ノ比例中項ヲ求ム.

7. $a^2,\ b^2.$ 8. $(a+b)^2,\ (a-b)^2.$

9. $a+b,\ \dfrac{c^2}{a+b}.$ 10. $\dfrac{a}{b},\ \dfrac{bc^2}{ad^2}.$

次ノ各二數ノ第三比例項ヲ求ム.

11. $a^2,\ ab.$ 12. $xy,\ y^2z^2.$

13. $(1-x)^2,\ 1-x^2.$ 14. $ax^2,\ xy.$

15. $a:b=b:c$ ナルトキハ次ノ比例ノ成立ツコトヲ證明セヨ.

(一) $a:(a+b)=(a-b):(a-c).$

(二)　$(a^2+b^2):(ab+bc)=(ab+bc):(b^2+c^2)$.

16.　$a:b=c:d,\ b:x=d:y$ ナルトキハ $a:x=c:y$ ナルコトヲ證明セヨ.

四數 a, b, c, d ガ比例ヲナストキハ次ノ比例式ガ成立ツコトヲ證明セヨ.

17.　$a^2:c^2=(a^2-b^2):(c^2-d^2)$.

18.　$(pa+qb):(ra+sb)=(pc+qd):(rc+sd)$.

19.　$(a^2+ac+c^2):(a^2-ac+c^2)=(b^2+bd+d^2):(b^2-bd+d^2)$.

20.　$\left(\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\right):\left(\dfrac{c}{p}+\dfrac{d}{q}\right)=a:c$.

21.　$(a+b):(c+d)=\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$.

variable
Constant

第三章　比及比例ノ應用

197.　變數.　例ヘバ或金塊 x 匁ノ價ヲ y 圓トシ, 其ノ金塊一匁ノ價ヲ k 圓トスレバ

$$y=kx$$

ナル關係アリ. 玆ニ x ハ種種ノ値ヲ取ルコトヲ得ベク, 之ニ從テ y モ亦種種ノ値ヲ取ルコトヲ得ベシ. 例ヘバ x ノ値ガ 1, 2, 3, ... トナルニ從テ y ノ値ハ $k, 2k, 3k,$ ...... トナルガ如シ.

此ノ例ニ於ケル x, y ノ如ク, 種種ノ値ヲ取ルコトヲ得ル數(文字)ヲ變數ト云フ.

又上ノ例ニ於テ同ジ金塊ノ種種ノ分量ノ價ヲ考フル場合ニハ一匁ノ價ヲ表ス數 k ハ通常一定ナリトスルナリ.

此ノ k ノ如ク一定ノ値ヲ取リテ變ゼザル數(文字)ヲ常數ト云フ.

198.　互ニ比例スル數.　二ツノ變數 x, y ガ相等シキ割合ヲ以テ相伴ヒテ變ズルトキハ x, y ハ互ニ比例スル或ハ正比例スルト云フ.

例ヘバ前節ノ例ニ於テ金塊ノ目方 x' 匁, x'' 匁ニ對應スル價ガ夫夫 y' 圓, y'' 圓ナルトキハ

$$y'=kx',\quad y''=kx''.$$

之ヨリ　$\dfrac{y'}{y''}=\dfrac{x'}{x''}$　卽チ　$y':y''=x':x''$.

卽チ價(圓)ヲ表ス數 y', y'' ノ比ハ之ニ對應スル目方(匁)ヲ表ス數 x', x'' ノ比ニ等シ, 換言スレバ變數 y, x ハ互ニ相等シキ割合ヲ以テ相伴ヒテ變ズ, 故ニ金塊ノ價ヲ表ス數 y ト目方ヲ表ス數 x トハ互ニ比例スル數ナリ.

y ガ x ニ比例スルコトヲ表スニ $y \propto x$ ナル記號ヲ用フ.

定理. $y \propto x$ ナルトキハ $y=kx$ ナリ.

茲ニ k ハ或常數トス.

今 y 及 x ノ夫夫相對應スル値ヲ $y', y'', y''', \ldots\ldots$ 及 $x', x'', x''', \ldots\ldots$ トセヨ.

然ルトキハ定義ニヨリ

$$y':y''=x':x'',\quad y':y'''=x':x''',\ \ldots\ldots$$

之ヨリ
$$\frac{y'}{x'}=\frac{y''}{x''}=\frac{y'''}{x'''}=\ldots\ldots$$

即チ y ノ値ト之ニ對應スル x ノ値トノ比ハ常ニ一定ナリ. 因テ此ノ一定ノ値ヲ k トスレバ

$$\frac{y}{x}=k,\qquad \therefore\ y=kx.$$

例. 45分間ニ15哩ヲ走ル汽車ガ72哩ヲ行クニ幾許ノ時間ヲ要スルカ.

解 時間ト進行スル行程トハ比例ス. 故ニ今 x 哩ヲ行クニ y 分ヲ要ストスレバ

$$y=kx.$$

然ルニ $x=15$ ナルトキ $y=45$ ナルニヨリ

$$45=k\times 15,\qquad \therefore\ k=\frac{45}{15}=3.$$

因テ $x=72$ トスレバ $y=kx=3\times 72=216.$

答 216分 即チ 3時36分.

注意. 算術ニ於ケル比例解法ニテハ行程ノ比ト之ニ對應スル時間ノ比トヲ相等シト置キタル

$$15:72=45:y$$

ヲ解キテ $y=\dfrac{72\times 45}{15}=216$ トスルナリ.

199. 互ニ反比例スル數.

變數 y ガ變數 x ノ逆數ニ比スルトキハ y ハ x ニ反比例スルト云フ.

定理. y ガ x ニ反比例スルトキハ $xy=k$ ナリ. 茲ニ k ハ或常數トス.

y ガ x ニ反比例スルトキハ y ガ $\dfrac{1}{x}$ ニ比例スルコト即チ $y \propto \dfrac{1}{x}$ ナルガ故ニ前節ノ定理ニヨリ

$$y=k\cdot\frac{1}{x}\quad 即チ\quad y=\frac{k}{x}.$$

$$\therefore\ xy=k.$$

注意. $xy=k$ ナルトキハ $y=k\dfrac{1}{x}$ 即チ $y\propto\dfrac{1}{x}$ ナルノミナラズ, 又 $x=k\dfrac{1}{y}$ 即チ $x\propto\dfrac{1}{y}$ ナリ. 故ニ y ガ x ニ反比例スルトキハ x ハ y ニ反比例ス. 因

ヲ $y \propto \frac{1}{x}$ ナルトキ y, x ハ**互ニ反比例スル**ト云フ.

例 1. 面積ガ一定ナル矩形ニ於テハ其ノ縱横ノ長サハ反比例スルコトヲ證明セヨ.

解 一定ノ面積ヲ k 平方尺トシ,此ノ面積ヲ有スル矩形ノ縱横ノ長サヲ夫夫 x 尺, y 尺トスルトキハ明ニ $xy=k$, $\therefore\ y=\frac{k}{x}$

ニシテ k ハ常數ナリ. 故ニ x, y ハ互ニ反比例ス.

例 2. 6 人ニテ 24 時間ニ仕上グル仕事ハ 8 人ニテハ何時間ニテ仕上グルカ. 答 18 時間.

解 同ジ仕事ヲ仕上グルニ要スル人數ト時間トハ明ニ反比例スベシ. 今 x 人ニテ y 時間ヲ要スルトスレバ $xy=k$ ナリ.

題意ニヨリ $x=6$ ナルトキ $y=24$, $\therefore k=6\times24=144$,

因テ $x=8$ トスレバ $y=\frac{k}{x}=\frac{144}{8}=18.$

注意. (1) 算術ニ於ケル比例解法ニテハ時間ノ比ト人數ノ反比トヲ相等シト置キタル

$$8:6=24:y$$

ヲ解キテ $y=\frac{6\times24}{8}=18$ トスルナリ.

(2) x ト y トガ正比例スル場合ニハ, x ガ 2倍, 3倍, 4倍, ... トナレバ y モ同ジク 2倍, 3倍, 4倍, ... トナル. 又 x ト y トガ反比例スル場合ニハ x ガ 2倍, 3倍, 4倍, ... トナレバ y ハ却テ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ... トナル. 二變數ガ正比例スルカ反比例スルカヲ知ルニハ此ノ事實ニヨルヲ便利ナリトス.

200. 複比例. 一ツノ變數ガ他ノ數多ノ變數ニ伴ヒテ變ズルコトアリ. 例ヘバ矩形ノ面積ヲ表ス數ハ其ノ縱横ノ長サヲ表ス二數ニ伴ヒテ變ズルガ如シ.

變數 z ガ二ツノ變數 x, y ノ積ニ比例スルトキハ z ハ x, y ニ**複比例スル**ト云フ. 此ノ場合ニハ $z=kxy$ ナルコト明ナリ. 玆ニ k ハ或常數ナリ.

定理. 變數 z ハ x ガ一定ナルトキハ y ニ比例シ, y ガ一定ナルトキハ x ニ比例スル場合ニ,若 x モ y モ變ズルトキハ z ハ x, y ニ複比例ス.

x, y ノ値ガ夫夫 x_1, y_1 ナルトキノ z ノ値ヲ z_1,

x, y ノ値ガ夫夫 x_1, y_2 ナルトキノ z ノ値ヲ z',

x, y ノ値ガ夫夫 x_2, y_2 ナルトキノ z ノ値ヲ z_2

トスルトキハ假定ニヨリ

$$\frac{z_1}{z'}=\frac{y_1}{y_2},\quad \frac{z'}{z_2}=\frac{x_1}{x_2},$$

邊邊相乘ズレバ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1y_1}{x_2y_2}$ 即チ $\frac{z_1}{x_1y_1}=\frac{z_2}{x_2y_2}$.

故ニ z ノ任意ノ値ト之ニ對應スル x, y ノ値ノ積トノ比ガ一定ナリ,此ノ一定ノ値ヲ k トスレバ

$$\frac{z}{xy}=k,\qquad \therefore\ z=kxy,$$

即チ z ハ x, y ニ複比例ス.

定理. 變數 z ガ他ノ二變數 x, y ニ複比例スルトキハ z ノ任意ノ二ツノ値ノ比ハ之ニ對應スル x ノ値ノ比ト y ノ値ノ比トノ複比ニ等シ.

何トナレバ相對應スル二組ノ値ヲ夫夫 z_1, x_1, y_1; z_2, x_2, y_2 トスレバ $z_1=kx_1y_1$, $z_2=kx_2y_2$ ナリ.

$$\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1y_1}{x_2y_2},$$

即チ
$$z_1:z_2=\left\{\begin{matrix}x_1:x_2\\ y_1:y_2\end{matrix}\right.$$

ナリ.(算術ノ複比例解法ハ此ノ理ニヨル)

注意. 或變數ガ三ツ以上ノ變數ニ伴ヒテ變ズルトキニモ亦同樣ナル事柄ノ成立スルコトアリ.

例. z ガ x, y ニ複比例シ,且 $x=2, y=6$ ナルトキ $z=9$ ナラバ z ト積 xy トノ比ノ値如何.

解 z ハ x, y ニ複比例スルガ故ニ $z=kxy$ ナリ,而シテ $x=2, y=6$ ナルトキ $z=9$ ナルガ故ニ

$$9=k\times2\times6,\quad 之ヨリ\quad k=\frac{9}{2\times6}=\frac{3}{4}.$$

$$\therefore\ z=\frac{3}{4}xy\quad 即チ\quad \frac{z}{xy}=\frac{3}{4}\quad 答.$$

例題

1. y ガ x ニ比例シ,且 $x=5$ ナルトキ $y=2$ ナリト云フ. x ノ値ガ -7 ナルトキノ y ノ値如何.
2. $y\propto x$ ナルトキハ $x\propto y$ ナルコトヲ示セ.
3. 互ニ正比例スル量ノ二三ノ例ヲ擧ゲヨ.
4. 互ニ反比例スル量ノ二三ノ例ヲ擧ゲヨ.
5. $y\propto x^2$, 及 $y\propto x^3$ ナル關係アル實例ノ一二ヲ擧ゲヨ.
6. $y\propto\frac{1}{x^2}$ ナル關係アル實例ヲ擧ゲヨ.
7. $z\propto y$ 且 $y\propto x$ ナルトキハ $z\propto x$ ナルコトヲ證明セヨ.
8. 球ノ體積ハ其ノ半徑ノ三乘ニ比例シ,且半徑1尺ノ球ノ體積4.188立方尺アリト云フ. 半徑

1 米ノ球ノ體積ハ幾立方尺アルカ.

9. 直圓錐ノ體積ハ高サガ一定ナルトキハ底面ノ半徑ノ二乘ニ比例シ,底面ガ一定ナルトキハ高サニ比例ス. 今底面ノ半徑7寸,高サ15寸ナルトキ體積770立方寸アリトスレバ底面ノ半徑3寸,體積132立方寸ナル直圓錐ノ高サハ何寸ナルカ.

10. z ハ x, y ニ伴ヒテ變ジ,y ガ一定ナルトキハ $z\propto x$ ニシテ,x ガ一定ナルトキハ $z\propto\frac{1}{y}$ ナリト云フ. x, y ノ兩方共ニ變化スルトキハ $z\propto\frac{x}{y}$ ナルコトヲ證明セヨ.

200. 連比. 例ヘバ

$$A:B=a:b,\quad B:C=b:c,\quad A:C=a:c$$

ヲ一ツニ纒メテ　$A:B:C=a:b:c$

ト書キ表スコトアリ. 斯ノ如キ場合ニ $A:B:C$ 及 $a:b:c$ ヲ夫夫 A, B, C 及 a, b, c ノ**連比**ト云フ.

上ニ示セル如ク二ツノ連比ニ於テ其ノ一方ノ何レノ二項ヲ採リテ作レル比モ皆他ノ之ニ對應スル二項ノ比ニ等シキトキハ其ノ二ツノ連比ハ相等シト云フナリ.

又比ノ性質ニヨレバ明ニ次ノ事柄ハ成立ス.

$$ma:mb:mc=a:b:c,$$

又 $$\frac{a}{m}:\frac{b}{m}:\frac{c}{m}=a:b:c.$$

卽チ連比ノ各項ヲ同一ノ數ニテ乘除シタルモノハ原ノ連比ニ等シ.

注意. $A:B=a:b,\ B:C=b:c$ ナルトキハ $A:C=a:c$ ナリ.

例 1. $A:B=k:l,\ B:C=m:n$ ナルトキ連比 $A:B:C$ ニ等シキ連比ヲ作レ.

解　$A:B=k:l$ ニヨリ $A:B=km:lm.$

$B:C=m:n$ ニヨリ $B:C=lm:ln.$

因テ複比ヲ作レバ $A:C=km:ln.$

$$\therefore\ A:B:C=km:lm:ln\quad 答.$$

例 2. $x:y:z=a:b:c$ ナルトキハ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解　$x:y:z=a:b:c$ ナルガ故ニ

$$x:y=a:b,\quad y:z=b:c,$$

$$\therefore\ x:a=y:b,\quad y:b=z:c.$$

之ヨリ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, $\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, $\therefore\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

注意. 因テ $x:y:z=a:b:c$ ト $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ トハ x, y, z ト a, b, c, トノ間ノ同ジ關係ヲ示ス.

例題

1. 次ノ關係ヨリ $x:y:z$ ニ等シキ連比ヲ作レ.

(一) $x:y=2:3$, $y:z=5:2$.

(二) $x:z=a:b$, $y:z=a:c$.

2. $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{c}=\dfrac{D}{d}$ ナルトキハ

$$A:B:C:D=a:b:c:d$$

ナルコトヲ示セ.

2. $x:(3-x):(2y-1)=1:2:5$ ヨリ x ト y トノ値ヲ求メヨ.

201. 比例配分. 或數ヲ二ツ以上ノ數ニ比例スル部分ニ分ツ算法ヲ**比例配分**又ハ**按分比例**ト云フコトハ算術ニテ知レル所ナリ. 今算術ニテ學ベル方法ヲ一般ニ說明スレバ次ノ如シ.

例ヘバ或數 m ヲ三ツノ數 a, b, c ニ比例スル三ツノ部分ニ分タントス.

所要ノ三ツノ部分ヲ x, y, z トスレバ明ニ

$$x:y:z=a:b:c,\quad \text{且}\quad x+y+z=m.$$

$$\therefore\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{m}{a+b+c}.$$

之ヨリ
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{am}{a+b+c}\\ y&=\frac{bm}{a+b+c}\\ z&=\frac{cm}{a+b+c}\end{aligned}\right\}$$

此ノ公式ハ算術ニテ學ベル比例配分ノ算法ヲ示スモノニ外ナラズ.

例. 金子2130圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分チタルニ其ノ割合 5:3:7 ナリト云フ. 各人ノ所得ヲ求ム.

解 各人ノ所得ヲ夫夫 x圓, y圓, z圓トスレバ上ノ公式ヲ應用シテ直チニ

$$x=\frac{5\times2130}{5+3+7}=710,$$

$$y=\frac{3\times2130}{5+3+7}=426,$$

$$z=\frac{7\times2130}{5+3+7}=994.$$

答 甲 710圓, 乙 426圓, 丙 994圓.

注意. 玆ニハ比例配分ノ例題ヲ掲ゲズ,學者ハ

宜シク算術教科書ノ問題ヲ利用シテ練習スベシ.

202. 混合法. 同種類ノモノニシテ品質ノ相異ナルモノノ混合ニ關スル計算ヲ**混合法**ト云フ.

混合法ハ次ノ二種類ニ分ツコトヲ得.

第一類. 混合スベキ各原料ノ價(品位)ト混合ノ割合トヲ知リテ混合物ノ價(品位)ヲ求ムル計算.

第二類. 混合スベキ各原料ノ價(品位)ト混合物ノ價(品位)トヲ知リテ混合ノ割合ヲ求ムル計算.

第一類. 次ニ例ヲ以テ其ノ方法ヲ示サン.

例. 上中下三種ノ酒アリ,一升ノ價上ハ a 錢,中ハ b 錢,下ハ c 錢ナリ. 此ノ三種ノ酒ヲ上中下ノ混合ノ割合 $l:m:n$ ナル樣ニ混合スルトキハ混合酒一升ノ價如何.

解 混合酒一升ノ價ヲ x 錢トスベシ. 今上酒 l 升ヲ採ルトスレバ中酒,下酒ハ夫夫 m升, n升宛採リテ混合スレバ可ナリ. 故ニ混合酒全部ノ價ハ $al+bm+cn$ 錢ニシテ此ノ全量ハ $l+m+n$ 升ナリ. 因テ次ノ方程式ヲ得.

$$(l+m+n)x=al+bm+cn,$$

$$\therefore\ x=\frac{al+bm+cn}{l+m+n}.$$

$$\text{答}\ \frac{al+bm+cn}{l+m+n}\text{錢}.$$

注意. 算術ニ於テ此ノ種類ノ問題ヲ解ク方法モ全ク同樣ノ理法ニヨル.

203. 混合法第二類.

(I) 原料二種ノ場合.

例 1. 上下二種ノ酒アリ,一升ノ價上ハ a 錢,下ハ b 錢ナリ,之ヲ混合シテ一升ノ價 m 錢ナル混合酒ヲ作ラントス. 混合ノ割合ヲ求ム.

解 上下各酒ノ混合ノ割合ヲ $x:y$ トスベシ. 然ルトキハ前節ト同樣ノ考ニヨリ

$$ax+by=m(x+y),$$

移項スレバ $$x(a-m)=y(m-b).$$

$$\therefore\ x:y=(m-b):(a-m).$$

答 $(m-b):(a-m)$.

注意. 上ノ問題ニ於テハ $a>b$ ナルコト勿論ナリ. 而シテ $a>m>b$ ナラザルトキハ問題ハ不能ナリ.

偖此ノ種ノ問題ヲ解クニ算術ニテハ次ノ形式

ニヨルナリ.

	一升ノ價	損益(過不足)	割　合
上　酒	a錢	$(a-m)$錢 損	$m-b$
混合酒	m錢		
下　酒	b錢	$(m-b)$錢 益	$a-m$

(II)　原料三種以上ノ場合.

例 2.　一升ノ價夫夫 a 錢, b 錢, c 錢ナル上中下三種ノ白米ヲ混ジテ一升 m 錢ナル混合米ヲ作ラントス. 混合ノ割合ヲ求ム.

解　上中下三種ノ米ノ混合ノ割合ヲ $x:y:z$ トスベシ. 然ルトキハ次ノ方程式ヲ得.

$$ax+by+cz=m(x+y+z),$$

移項スレバ　$(a-m)x+(b-m)y+(c-m)z=0,$

兩邊ヲ z ニテ除スレバ

$$(a-m)\frac{x}{z}+(b-m)\frac{y}{z}+c-m=0.$$

之ハ $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ナル二ツノ未知數ヲ含ム方程式ニシテ此ノ他ニハ方程式ナキガ故ニ $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ノ値ヲ決定スルコトヲ得ズ,卽チ其ノ値ハ限ナク多シ. 從テ $x:y:z$ ナル割合モ亦決定スルコトヲ得ズシテ限ナク多クアルナリ.

若此ノ場合ニ例ヘバ中米ト下米トノ割合ガ $p:q$ ナルコトガ與ヘラルルナラバ所要ノ割合ハ次ノ如クニシテ決定スルヲ得ベシ.

先ヅ $\frac{y}{z}=\frac{p}{q}$ ナルガ故ニ之ヲ上ノ方程式ニ代入スレバ

$$(a-m)\frac{x}{z}+(b-m)\frac{p}{q}+c-m=0,$$

之ヨリ　$$\frac{x}{z}=\frac{p(m-b)+q(m-c)}{q(a-m)}.$$

從テ　$x:y:z=\{p(m-b)+q(m-c)\}:p(a-m):q(a-m).$

注意.　斯ノ如ク三種以上ノ原料ヲ混合シテ與ヘラレタル價(品位)ヲ有スル混合物ヲ作ルトキノ混合ノ割合ハ一般ニ不定ナリ. サレド若上ノ例ニ示スガ如ク或一ツノ原料ヲ除キタル他ノモノ全部ノ割合ガ與ヘラレルナラバ原料全部ノ混合ノ割合ヲ定ムルコトヲ得ベシ.

此ノ場合ニモ(1)ノ場合ト同樣ナル形式ヲ用フルヲ便利トス.

例ヘバ一升ノ價夫夫 30 錢, 27 錢, 20 錢ノ上中下三種ノ白米ヲ混合シテ一升 24 錢ノ混合米ヲ作ラントスルニ,上下ヲ 1:2 ノ割合ニ取ルモノトスレ

バ上中下三種ノ白米ノ混合ノ割合如何.

	一升ノ價	損益	割合
上米	30錢	6錢損	1
中米	27錢	3錢損	x
混合米	24錢		
下米	20錢	4錢益	2

$$6\times1+3x=4\times2 \quad 卽チ \quad 6+3x=8,$$

之ヨリ　　$x=\dfrac{2}{3}.$

故ニ混合ノ割合ハ　　$1:\dfrac{2}{3}:2=3:2:6$　答.

算術ニ於テハ通常此ノ形式ニヨル.

注意. 混合法ノ例題モ茲ニ揭ゲズ,學者宜シク算術教科書ニツキテ練習スベシ.

問題　三十一

1. $a:b=b:c$ ナルトキ次ノ等式ノ成立ツコトヲ證明セヨ.

(一) $\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{b^3+c^3}.$

(二) $(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)=b^4+ac^3+c^4.$

2. $a:b=c:d$ ナルトキハ次ノ等式ノ成立ツコトヲ證明セヨ.

(一) $\left(\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{a}\right):\left(\dfrac{c^3}{d}+\dfrac{d^3}{c}\right)=ab:cd.$

(二) $\sqrt[n]{a^n+b^n}:\sqrt[m]{a^m-b^m}=\sqrt[n]{c^n+d^n}:\sqrt[m]{c^m-d^m}.$

(三) $(abc+bcd+cda+dab)^2=abcd(a+b+c+d)^2.$

3. a, b, c, d ガ連比例ヲナストキハ

$$a:d=(a^3+b^3+c^3):(b^3+c^3+d^3)$$

ナリ. 之ヲ證明セヨ.

4. $x:y:z=a:b:c$ ナルトキハ

(一) $\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{y+z}{b+c}=\dfrac{z+x}{c+a},$ それぞれよし

(二) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

ナルコトヲ證明セヨ.

5. a, b, c, d ガ連比例ヲナストキハ $b+c$ ハ $a+b$ ト $c+d$ トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ.

6. $\dfrac{x-y}{a-b}=\dfrac{y-z}{b-c}=\dfrac{z-x}{c-a}$ ナルトキハ

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

7. $y\propto x$ ナルトキ x^2-y^2 ハ積 xy ニ比例スルコトヲ證明セヨ.

8. y, z ガ一定ナルトキハ $u\propto x$, 又 z, x ガ一定

ナルトキハ $u\propto y$, 次ニ又 x, y ガ一定ナルトキハ $u\propto z$ ナル如ク u ガ x, y, z ニ伴ヒテ變ズルトキハ u ハ x, y, z ニ複比例スルコト卽チ $u\propto xyz$ ヲ證明セヨ.

9. 瓦斯體ノ體積ハ絕對溫度ニ正比例シ,壓力ニ反比例ストト云フ. 壓力15氣壓,絕對溫度280度ナルトキ200立方寸ノ瓦斯體アリ,壓力18氣壓トナリ且溫度300度トナラバ體積ハ幾許トナルカ.

10. 「ケプレル」ノ法則ニヨレバ遊星ノ公轉ノ周期ノ二乘ハ太陽ヨリノ距離ノ三乘ニ比例ス. 今太陽ヨリノ距離ヲ地球及金星ハ夫夫92.9百萬哩,67.2百萬哩トシテ金星ノ公轉ノ周期ヲ計算セヨ.

但地球ノ公轉ノ周期ハ$365\frac{1}{4}$日トシテ計算セヨ.

11. 比重 d ニシテ三ツノ稜ノ長サ夫夫 x, y, z 糎ナル直方體ノ目方ヲ w 瓦トスルトキハ d, x, y, z, w ノ間ニ如何ナル關係アルカ. 但水一立方糎ノ目方ヲ一瓦トス.

12. 大豆8斗ト小豆7斗ト同價ニシテ,小豆3斗5升ト米3斗ト同價ナリ,又米5升ト大麥8升ト同價ナリ,而シテ大豆1斗ト小豆2斗トノ代價ヲ合セテ7圓ナリト云フ. 大麥一圓ニツキ幾升ヲ買ヒ得ベキカ.

13. 甲乙丙三人合資シテ或事業ヲ營ムニ甲ハ a 圓ヲ l 日間,乙ハ b 圓ヲ m 日間,丙ハ c 圓ヲ n 日間出シ利益金 p 圓ヲ得タリト云フ. 此ノ利益ヲ如何ニ分配スベキカ.

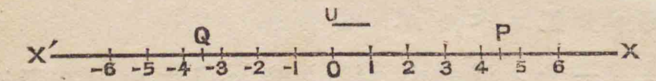
14. 一升ノ價夫夫 a 錢, b 錢, c 錢ナル甲乙丙三種ノ酒ト水トヲ混合シテ一升 m 錢ノ酒ヲ作ラントス. 混合ノ割合ヲ求ム. 但水ト甲酒及乙酒トノ割合ハ $1:p:q$ ナル樣ニセヨ.

15. 或人牛馬豚合セテ120頭ヲ賣ルニ,一頭ノ價牛馬豚夫夫80圓,65圓,25圓ニシテ平均一頭ノ價50圓ニ當ルト云フ. 若此ノ中牛ノ四分ノ一ヲ殘シ,其ノ代リニ豚32頭ヲ賣ラバ實收ニハ增減ナカルベシト云フ. 牛馬豚各何頭ナリシカ.

第四章 數ノ圖表示

204. 直線上ノ點ノ位置. 既ニ第二編ニ述ベタル如ク一ツノ水平ニ引ケル直線 XX′ ヲ

取リ,其ノ上ニ原點Oヲ定メ且長サノ單位Uガ定マレバ其ノ直線上ノ任意ノ點Pノ位置ハOPノ長サヲ表ス數ヲ以テ言ヒ表スコトヲ得ベシ. 例ヘバ圖ニ於テ點Pヲ表スニハ$+4.5$ヲ以テスルコトヲ得ベシ.



又逆ニ任意ノ實數ヲ表スニ此ノ直線上ノ點ヲ以テスルコトヲ得ベシ. 例ヘバ-3.5ヲ表スニ點Qヲ以テスルヲ得ベシ.

而シテ原點ヨリ右方ノ點ハ正數,左方ノ點ハ負數ヲ代表スルコトモ既ニ知レル所ナリ.

例題

1. 單位ノ長サヲ適宜ニ取リテ次ノ數ヲ表ス點ヲ直線XX′上ニ見出セ.

(一) 3.8. (二) 0.7. (三) -25. (四) $-\frac{18}{10}$.

(五) $-\frac{1}{4}$. (六) $3\frac{1}{5}$.

2. 長サノ單位ヲ一分ト定ムレバ次ノ諸點ハ如何ナル數ヲ代表スルカ.

(一) 原點ヨリ右方5分, 7分5厘, 1寸3分, $\sqrt{2}$寸ノ距離ニアル諸點.

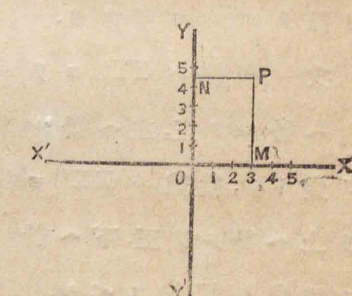
(二) 原點ヨリ左方3分, $\frac{2}{3}$寸, 1寸2分5厘ノ距離ニアル諸點.

又原點ハ如何ナル數ヲ表スカ.

205. 平面上ノ點ノ位置. 坐標.

平面上ノ點ノ位置ヲ表ス方法ハ種種アリ,通常用ヒラルル極メテ便利ナル方法ヲ次ニ示サン.

先ヅ基礎トスルタメニ一定點Oニ於テ互ニ直角ニ交ル二定直線XX′及YY′ヲ取レ. 通常XX′ヲ水平ノ方向ニ,YY′ヲ鉛直ノ方向ニ取ル.



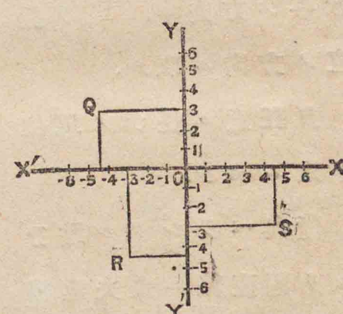
且任意ニ長サノ單位ヲ定ムベシ.

偖與ヘラレタル點Pヨリ兩直線ニ夫夫垂線PN, PMヲ引ケ. 然ルトキハ此ノ二垂線ノ長サヲ表ス數ヲ以テ點Pノ位置ヲ表スコトヲ得. 圖ニ於テ$NP=3$, $MP=4.5$ナリ,因テ點Pノ位置ヲ表スニ$(3, 4.5)$ナル一組ノ數ヲ以テス.

此ノ基礎ニ取リタル二直線 XX', YY' ヲ軸ト云ヒ,前者ヲ横軸,後者ヲ縱軸ト云フ. 又其ノ交點Oヲ原點ト稱ス.

而シテ NP ノ長サヲ表ス數ヲ P ノ横線, MP ノ長サヲ表ス數ヲ P ノ縱線ト云フ. 之ヲ用ヒテ P 點ノ位置ヲ表ストキハ此等ノ二ツノ長サヲ表ス數ヲ點 P ノ坐標ト稱ス. 卽チ前ノ圖ニ於テ P ノ坐標ハ (3, 4.5) ナリ.

偺明ニ四邊形 OMPN ハ矩形ナルニヨリ NP=OM, MP=ON ナリ,從テ NP, MP ノ代リニ夫夫 OM, ON ヲ以テスルモ可ナリ.



次ニ横線ハ YY' ヨリ右ヘ計ルヲ正,左ヘ計ルヲ負トシ,縱線ハ XX' ヨリ上ヘ計ルヲ正,下ヘ計ルヲ負ト規約スベシ.

斯ノ如クスレバ平面上ニ點ガ與ヘラルレバ其ノ坐標ハ定マリ,又坐標ガ與ヘラルレバ之ニ對應スル點ノ位置ハ定マル.

例ヘバ與ヘラレタル點ヲQトスレバ之ヨリ軸ニ

垂線ヲ引クコトニヨリテ其ノ坐標ハ (−4.5, 3) ナルコトヲ知リ得ベク,又逆ニ坐標 (4.5, −3) ガ與ヘラルルトキハ XX' 上 O ヨリ右ヘ 4.5, YY' 上 O ヨリ下ヘ 3 ノ距離ニアル點ヨリ夫夫垂線ヲ立ツレバ其ノ交點 S ハ此ノ坐標ニ對應スル點ナリ. 又次ノ如クスルモ同樣ナリ,卽チ例ヘバ坐標 (−3, −4.5) ニ對應スル點ヲ求ムルニハ,先ヅ XX' 上 O ヨリ左 3 ノ距離ニアル點ニ於テ之ニ垂線ヲ立テ,此ノ垂線上ニ於テ下方 4.5 ノ距離ニアル點 R ヲ求ムレバ之ガ所要ノ點ナリ. 今後多クハ後ノ方法ニヨルコトトスベシ.

注意. 横軸ヲ X 軸,縱軸ヲ Y 軸ト云フ. 又或點ノ坐標ヲ表ス横線ヲ横坐標,縱線ヲ縱坐標トモ云ヒ,通常夫夫文字 x, y ヲ以テ之ヲ表ス. $x=a$, $y=b$ ナル坐標ヲ有スル點ヲ單ニ點 (a,b) ト記スルコトアリ.

例題

1. 次ノ坐標ヲ有スル點ヲ求ム.

$$(1, 1),\ (3, 7),\ \left(-2, \frac{1}{2}\right),\ (-5, -4),\ \left(2.5, -\frac{3}{5}\right),$$

$x=2,\ y=-3$; $x=-3,\ y=5$.

2. 次ノ二點ヲ通ル直線ヲ引ケ.

(一) $(6, 1), (2, 5)$. (二) $(0, 3), (2, -1)$.

3. 次ノ三點ヲ頂點トスル三角形ヲ畫ケ.

(一) $(1, 2), (3, 7), (4, 5)$. (二) $(0, 0), (-1, 7), (5, 1)$.

4. 次ノ四點ヲ頂點トスル四邊形ヲ畫ケ.

(一) $(-1, -2), (-0.5, 0), (2, -1), (3, -5)$.

(二) $(-2, -1), (0, 4), (1, 1), (3, 6)$.

206. 坐標ノ應用. ぐらふ.

或量ノ變化ノ有樣ヲ一目瞭然タラシムルニハ坐標ヲ應用シテ圖式表示ヲナスヲ最モ便利トス.

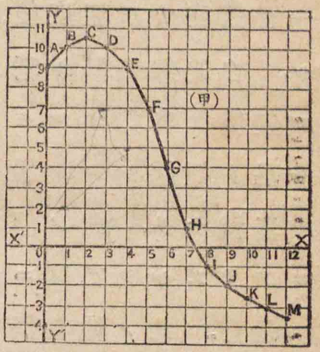
例ヘバ或場所ニ於テ或日ノ溫度ヲ毎時觀測シタルニ次ノ結果ヲ得タリトス.

時刻	正午	午後一時	二時	三時	四時	五時	六時	七時	八時	九時	十時	十一時	十二時
溫度	9°	10°	10°.5	10°	9°	7°	4°	1°	−1°	−2°	−2°.5	−3°	−3°.5

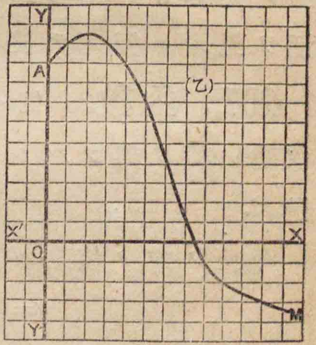
偖一般ニ溫度ハ時ト共ニ變化スルモノナリ.

今次ノ如クシテ圖ヲ畫ケバ其ノ變化ノ狀況ヲ一

目瞭然タラシムルコトヲ得ベシ.



先ヅ直交軸 OX, OY ヲ取リ各時刻ノ正午ヨリノ時間ヲ表ス數(時ヲ單位トス)ヲ橫坐標トシ,其ノ時刻ニ於ケル溫度ヲ表ス數(度ヲ單位トス)ヲ縱坐標トスル點ヲ取リ,之ヲ夫夫 A, B, C, D, …… トシ,順次ニ直線ニテ之ヲ連結セヨ. 斯シテ得タル折線 ABCD……… ヲ此ノ日ノ午後ノ溫度ノぐらふト云フ. (甲圖參照)



之ヲ見レバ點 C ハ最高ノ位置ニアリ,之ハ午後二時頃ニ於テ溫度ノ最高ナリシコトヲ示シ,又 F, G, H ノ間ニ於テぐらふハ比較的急激ニ下降ス,之ハ五時ヨリ七時ノ間ニ於テ溫度ノ下降比較的急激ナリシヲ示ス.

偖一時間ノ代リニ一層其ノ間隔ヲ短縮シ,例ヘ

バ五分毎ニ觀測ヲナシ,之ヲぐらふニ畫クトキハ一層精密ナル溫度變化ノ狀況ヲ示スコトヲ得ベシ. 自記寒暖計ト稱スル器械ハ時時刻刻ニ於ケル溫度ヲ自記スルモノ卽チ時間ノ間隔ヲ出來得ル限リ短縮シタル場合ノ溫度ノぐらふヲ自記スル器械ナリ. 此ノ器械ノ畫クぐらふハ通常折線ニアラズシテ乙圖ニ示スガ如キ一種ノ曲線ナリ.

注意. 此ノ他物價ノ高下,體重ノ增減,患者ノ體溫ノ昇降等ヲぐらふニ表ストキハ其ノ變化ノ狀況ヲ見ルニ極メテ便利ナリ.

207. 函數. 例ヘバ$2x-5$ナル式ニ於テxニ種種ノ値ヲ與フルトキハ此ノ式ノ値モ亦種種ニ變ズ.

今此ノ式ノ値ヲyヲ以テ表シ

$$y=2x-5 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ト置クトキハ,此ノ方程式ニヨリxノ種種ノ値ニ對スルyノ値ヲ算出スルコトヲ得ベシ. 其ノ値ノ二三ヲ示セバ次表ノ如シ.

x	…	0	1	2	3	4	…	…
y	…	−5	−3	−1	1	3	…	…

茲ニxハ變數ニシテyハxノ値ガ定マルニ從テ其ノ値ノ定マル變數ナリ. 斯ノ如キ場合ニyハxノ函數ナリト云フ.

一般ニ變數xノ値ガ定マルニ從テ他ノ變數yノ値ガ定マルトキハyハxノ函數ナリト云フ.
又此ノ場合ニxヲ**獨立變數**,yヲ**屬從變數**ト云フ.

例ヘバ　$y=ax+b$　又ハ　$y=ax^2+bx+c$

ノ何レニ於テモyハxノ函數ナリ. 此等ノ場合ニ於テハ獨立變數xト屬從變數yトノ間ノ關係ガ簡單ナル方程式ニテ示サレアルナリ.

場合ニヨリテハ此ノ關係ハ簡單ナル方程式ニテ表シ得ザルコトモアルナリ. 例ヘバ前節ニ示セル時ト溫度トノ關係ノ如キハ正午ヨリ或時刻迄ノ時間ヲ表ス數ヲx,其ノ時刻ニ於ケル溫度ヲ表ス數ヲyトスレバyハxノ函數ナリ,サレドyトxトノ關係ハ簡單ナル方程式ヲ以テ表スコトヲ得ザルナリ.

尙他ニ簡單ナル函數ノ二三ヲ次ニ示サン.

$$y=kx, \qquad y=\frac{k}{x}, \qquad y=kx^2, \qquad y=\frac{k}{x^2},$$

$$y=kx^3,\qquad y=\frac{k}{\sqrt{x}},\qquad y=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

此ノ中第一ハyガxニ正比例シ,第二ハxニ反比例シ,第三ハx^2ニ正比例シ,第四ハx^2ニ反比例シ,第五ハx^3ニ正比例シ,第六ハxノ平方根ニ反比例スル場合ナリ.(前章參照)

注意. 一般ニyガxノ函數ナルトキハxハ亦yノ函數ナリ. 例ヘバ方程式(1)ヲ變形スレバ

$$x=\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}$$

トナル,之ヨリxハyノ函數ナルコト明ナリ.

208. 一次式ノぐらふ. 變數xニ關スル一次式$ax+b$ノ値ヲyニテ表シ

$$y=ax+b$$

ト置キ,xノ種種ノ値ニ對應スルyノ値ヲ求メ,xノ各ノ値ヲ横坐標トシ,之ニ對應スルyノ値ヲ縱坐標トスル點ノ軌跡ナル線ヲ一次式$ax+b$ノぐらふト云フ.

例ヘバ　　$y=2x+3$　. . . . . (1)

ニ於テxニ順次0,1,2,3,4,5,......ナル値ヲ與ヘテ夫夫之ニ對應スルyノ値ヲ計算スレバ次表ノ如

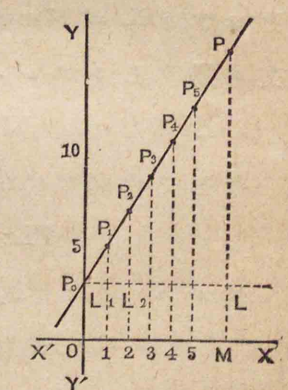
シ.

x	0	1	2	3	4	5	...	...	...	...
y	3	5	7	9	11	13	...	...	...	...

今直交軸OX,OYヲ取リ坐標ガ夫夫(0,3),(1,5),(2,7),(3,9),(4,11),(5,13),.........ナル點ヲ求メ,之ヲ$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5,$.........トセヨ. 然ルトキハ

(I) 此等ノ諸點卽チ方程式(1)ヲ滿足スルx, yノ値ヲ坐標トスル諸點ハ同一直線上ニアリ.

何トナレバ今P_2ガP_0P_1ナル直線上ニアルコトヲ證センニ,P_0ヲ通過シテOXニ平行ニ引ケル直線P_0LトP_1, P_2ノ各ヨリOXニ引ケル垂線トノ交點ヲ夫夫L_1, L_2トセヨ.



然ルトキハ明ニ

$$\angle P_0L_1P_1=\text{直角}=\angle P_0L_2P_2,$$

且　$$P_1L_1:P_0L_1=(5-3):1=2:1,$$

$$P_2L_2:P_0L_2=(7-3):2=2:1.$$

$$\therefore\ P_1L_1 : P_0L_1 = P_2L_2 : P_0L_2.$$

因テ　$\triangle P_0L_1P_1 \backsim \triangle P_0L_2P_2$, 從テ $\angle P_1P_0L = \angle P_2P_0L$,

即チ P_2 ハ P_0P_1 ナル直線上ニアリ.

同理ニヨリテ $P_3, P_4, \ldots\ldots$, 其ノ他 x ノ任意ノ値 α ニ對應スル y ノ値 β ヲ求メ, 此ノ (α, β) ヲ坐標トスル點ハ總テ此ノ P_0P_1 ナル直線上ニアリ.

(II)　此ノ直線上ノ任意ノ點ノ坐標 $x=\alpha$, $y=\beta$ ハ(1)ナル式ニ適合スベシ.

何トナレバ此ノ直線上ノ任意ノ點ヲ P トセヨ. P ヨリ OX ニ下セル垂線ガ P_0L_1 又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ L トスレバ明ニ

$$\triangle P_0L_1P_1 \backsim \triangle P_0LP,\ 從テ\ PL : P_0L = P_1L_1 : P_0L_1.$$

今 P ノ坐標ヲ (α, β) トセヨ.　明ニ

$$PL : P_0L = (\beta-3) : \alpha,$$

然ルニ　　$P_1L_1 : P_0L_1 = 2 : 1,$

$$\therefore\ (\beta-3) : \alpha = 2 : 1.$$

之ヨリ　　$\beta = 2\alpha+3.$

即チ之ハ P ノ坐標 $x=\alpha$, $y=\beta$ ガ(1)ナル式ニ適合スルコトヲ示セルナリ.

因テ一次式 $2x+3$ ノぐらふハ P_0, P_1 ニヨリテ定マル直線ナリ.

同様ノ方法ニテ一般ニ一次式 $ax+b$ ノぐらふハ一ツノ直線ナルコトヲ證明シ得ベシ.

上ノ結果ヨリ一次式 $ax+b$ ノぐらふヲ畫クニハ, x ニ或二ツノ便宜ナル値 α_1, α_2 ヲ與ヘ, 之ニ對應スル y ノ値 β_1, β_2 ヲ求メ, 二點 (α_1, β_1) 及 (α_2, β_2) ヲ求メテ之ヲ連結スル直線ヲ引ケバ可ナリ.

例ヘバ上ノ例ニ於テハ P_0, P_1 ヲ求メテ之ヲ連結スレバ所要ノぐらふヲ得ルガ如シ.

209. 一次方程式ノぐらふ. 前節ニヨレバ一次式 $ax+b$ ノぐらふトハ要スルニ方程式

$$y = ax+b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ヲ滿足スル x, y ノ値ヲ夫夫横線, 縱線トスル點ノ軌跡ニ外ナラズ. 因テ又此ノぐらふヲ此ノ方程式(1)ノぐらふ或ハ方程式(1)ガ表ス線トモ云フ.

偖一般ニ二ツノ未知數 x, y ヲ含ム一次方程式ハ(1)ノ形ニ直スコトヲ得, 因テ x, y ヲ含ム一次方程式ノぐらふハ一ツノ直線ナリ.

注意. ぐらふヲ畫クニハ方眼紙ヲ用フルヲ便利トス.

例題

1. 次ノ一次式ノぐらふヲ畫ケ.

(一) $2x-1$. (二) $5-\frac{1}{2}x$. (三) $\frac{3}{2}x+2$.

2. 次ノ方程式ノ表ス線(ぐらふ)ヲ畫ケ.

(一) $y=2x$. (二) $x-3y+4=0$.

(三) $\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x=1$. (四) $y=-\frac{5}{7}x-1$.

210. 二次式ノぐらふ. 變數 x ニ關スル二次式(或ハ二次ノ函數) ax^2+bx+c ノぐらふハ次ノ如クシテ求ムルコトヲ得ベシ.

例 1. x^2-2x-3 ノぐらふヲ求ム.

解 $y=x^2-2x-3$ ト置キ之ヲ變形スレバ

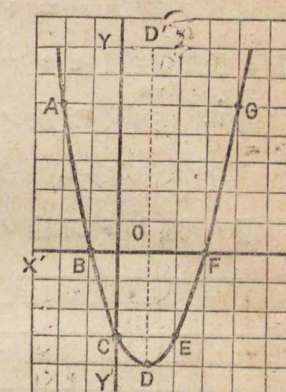
$$y=(x-1)^2-4$$

トナル. 之ニヨリ $x=1$ ナルトキ y ノ値ハ極小トナリ,其ノ値ハ -4 ナルコト直チニ知ラル. 次ニ x ノ ……, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …… ナル値ニ對應スル y ノ値ヲ求ムレバ次表ノ如シ.

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…	…	…
y	…	5	0	-3	-4	-3	0	5	…	…	…

因テ $(-2,5)$, $(-1,0)$, $(0,-3)$, $(1,-4)$, $(2,-3)$, $(3,0)$, $(4,5)$ 等ノ點ヲ求メ,之ヲ夫夫 A, B, C, D, E, F, G 等トシ,圖ニ示ス如ク,此等ノ點ヲ通過スル曲線ヲ畫ケ. 斯シテ得タル曲線ガ所要ノぐらふナリ.

偖此ノぐらふヲ畫クニ當リ次ノ性質ニ注意スルヲ要ス.



(1) 點 D$(1,-4)$ ハ y ノ極小値ニ相當スル點ナルガ故ニぐらふノ最下方ニアリ.

(2) ぐらふハ D ヲ通過シテ Y 軸ニ平行ナル直線 DD′ ニ關シテ對稱ナリ.

何トナレバ(1)ノ右邊 $(x-1)^2-4$ ニツキテ見レバ $x=1+\alpha$ ナルトキモ $x=1-\alpha$ ナルトキモ其ノ値卽チ y ハ何レモ α^2-4 トナリテ相等シ. 卽チ直線 DD′ ノ兩側ニ於テ之ヨリ等距離ノ點ノ y ノ値ハ恒ニ相等シク,從テ之ヲ連結スル直線ハ DD′ ニヨリ直角ニ二等分セラル,卽チぐらふハ DD′ ニ關シテ對稱ナリ.

(3) ぐらふハ點 A ヲ超エテ左上方ニ又點 G ヲ

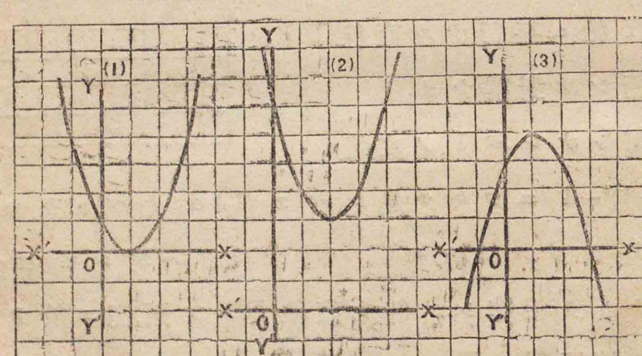
超エテ右上方ニ限ナク擴ガリ居ルナリ.

注意. 尚一層精確ナルぐらふヲ得ンニハ, x ニ成ベク小ナル間隔ノ値ヲ與ヘテ上ノ如キ方法ニテ畫ケバ可ナリ. 又一般ニ二次式 ax^2+bx+c ハ a ガ正ナルトキハ極小値ヲ有シ, a ガ負ナルトキハ極大値ヲ有スルコトニ注意スベシ. 是既ニ第180節ニ於テ注目セシコトナルベシ.

例2. 次ノ函數ノぐらふヲ畫ケ.

(1) x^2-2x+1, (2) x^2-4x+7, (3) $-x^2+2x+3$.

解 例1ト同様ノ方法ニテ畫ケバ次ノ如シ.



(1)ハ $x=1$ ナルトキ $y=0$ ナル極小値ヲ有ス.

(2)ハ $x=2$ ナルトキ $y=3$ ナル極小値ヲ有ス.

(3)ハ $x=1$ ナルトキ $y=4$ ナル極大値ヲ有ス.

注意. (1) 二次式 ax^2+bx+c ノぐらふガX軸ト出會フ點ニ於テハ $y=0$ ニシテ, 此ノ點ノ x ノ値ハ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ニ外ナラズ.

從テぐらふガX軸ト二點ニ於テ交ル場合ハ此ノ方程式ハ相異ナル實根ヲ有ス. 例1及例2ノ(3)ノぐらふヨリ $x^2-2x-3=0$ 及 $-x^2+2x+3=0$ ハ何レモ相異ナル實根ヲ有スルコトヲ知ル.

又ぐらふガX軸ニ切スル場合ハ此ノ方程式ハ等根ヲ有ス. 例2ノ(1)ノぐらふヨリ $x^2-2x+1=0$ ハ等根ヲ有スルコトヲ知ル.

又ぐらふガX軸ニ出會ハザル場合ハ實根ヲ有セザルコトヲ示ス. 例2ノ(2)ノぐらふヨリ方程式 $x^2-4x+7=0$ ハ虚根ヲ有スルモノナルコトヲ知リ得ベシ.

(2) 二次式 ax^2+bx+c ノぐらふハ何レモ同様ナル形ヲ有スル曲線ニシテ, 此ノ x ニ關スル二次式ノぐらふヲ抛物線ト云フ. 二次式 ax^2+bx+c ノぐらふヲ又方程式 $y=ax^2+bx+c$ ノぐらふトモ又此ノ方程式ノ表ス曲線トモ云フ. 抛物線ハ自然界ニ屢現ルル曲線ナリ, 斜ニ投ゲ上ゲタル物體ノ通

路,迸リ出ヅル水線ノ如キ之ナリ.

例題

次ノ二次式ノぐらふヲ畫ケ.

1. x^2-x-2.　2. $2x^2+x-3$.　3. $\frac{1}{4}x^2-x-2$.

4. $1-x^2$.　5. $-4+4x-x^2$.

次ノ方程式ノぐらふヲ畫ケ.

6. $y=3x^2$.　7. $y=\frac{4}{x}$.　8. $y=\frac{49}{x^2}$.

9. $y=\frac{2x+5}{x-3}$.　10. $y=\sqrt{36-x^2}$.

211. ぐらふノ應用. 次ニぐらふノ應用ノ一二ノ例ヲ示サン.

例 1. 聯立方程式

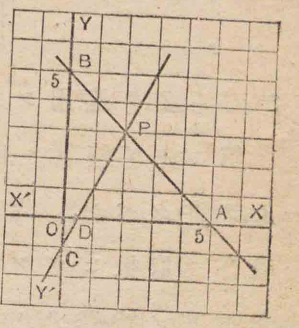
$$\begin{cases} x+y=5 \quad \dots\dots\dots (1)\\ 4x-2y=2 \quad \dots\dots\dots (2)\end{cases}$$

ヲぐらふヲ應用シテ解ケ.

解 方眼紙ヲ取リ其ノ上ニ適當ニ直交軸 XX', YY' ヲ引キ,方程式(1)ノ表ス直線 AB ト方程式(2)ノ表ス直線 CD トヲ引ケ.

而シテ此ノ二直線ノ交點 P ノ坐標ヲ圖ニツキ

テ見出セバ $x=2$, $y=3$ ナリ. 是所要ノ根ナリ.



何トナレバ P ハ AB 上ニアルガ故ニ其ノ坐標ハ方程式(1)ヲ滿足シ,同樣ニ P ハ CD 上ニアルガ故ニ其ノ坐標ハ方程式(2)ヲ滿足ス,從テ交點Pノ坐標ハ兩方程式ヲ同時ニ滿足ス.

注意. 以上ノ如クスレバ聯立二元一次方程式ハぐらふヲ應用シテ解クコトヲ得ベシ. 斯ノ如キ解法ヲ**圖式解法**ト云フ.

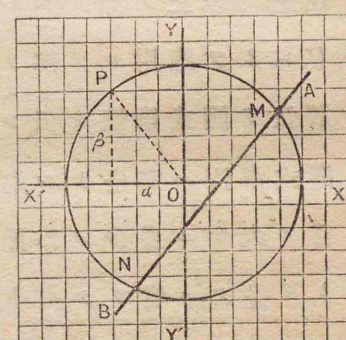
圖式解法ハ完全ナル解法ニハアラズ. 方眼紙ノ目ノ大サニ多少ノ不揃ノコトモアルベク,又ぐらふヲ畫クニ當リテモ全然幅ノナキ線ヲ引クコトノ不可能ナルコト等ニヨリテ此ノ解法ノ結果ハ多クハ所要ノ根ノ近似値タルコトヲ免レズ. 尤モ單位ノ長サノ大小ニヨリテモ亦近似ノ度合ニ精粗アルコトハ勿論ナリ.

例 2. 聯立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1) \\ 5x-4y=\ 8 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2) \end{cases}$$

ヲぐらふヲ應用シテ解ケ.

解　先ヅ適當ニ直交軸ヲ定メ,方程式(1)ノぐらふヲ畫クベシ. 此ノ方程式ハ是迄ぐらふヲ畫ク場合ニ取扱ヒタルモノトハ其ノ形ヲ異ニス. サレド其ノ特殊ナル形ヨリ次ノ如ク容易ニ其ノぐらふハOヲ中心トシ,半徑ガ5ナル圓周ナルコトヲ知リ得ベシ.



先ヅ此ノぐらふ上ニアルベキ任意ノ一點ヲPトシ,其ノ坐標ヲ $x=\alpha$, $y=\beta$ トスレバ之ハ方程式(1)ヲ滿足スベキニヨリ

$$\alpha^2+\beta^2=25$$

ナルベシ,而シテ又明ニ $\alpha^2+\beta^2=\overline{OP}^2$ (圖ヲ見ヨ)ナルベク,從テ $\overline{OP}^2=25$ ナリ. 因テ OP=5, 即チOヨリPニ至ル距離ハ5ナリ. 故ニPハOヲ中心トシ,半徑ガ5ナル圓周上ニアリ.

又此ノ圓周上ノ任意ノ一點ヲPトシ,其ノ坐標ヲ $x=\alpha$, $y=\beta$ トスレバ,半徑ガ5ナルニヨリ $\overline{OP}^2=5^2$, 且 $\overline{OP}^2=\alpha^2+\beta^2$ ナリ,從テ $\alpha^2+\beta^2=25$ ニシテPノ坐標ハ方程式(1)ヲ滿足ス.

故ニ方程式(1)ノぐらふハOヲ中心トシ,半徑ノ大サガ5ナル圓周ナリ.

此ノ圓周ヲ畫キタル後方程式(2)ノぐらふヲ畫ケ. 之ハ圖ニ示ス所ノ直線ABナルコト容易ニ知ラルベシ.

此ノ直線ト圓周トノ交點M,Nノ坐標ヲ圖ニツキテ求ムレバ

Mノ坐標 $x=4$, $y=3$; Nノ坐標 $x=-2$, $y=-4.6$ ヲ得ベシ. 此ノ二組ノ x, y ノ値ガ所要ノ根ナリ.

注意. (1) 與ヘラレタル聯立方程式ヲ解キテ上ニ得タル結果ト精確ナル値トヲ比較セヨ.

(2) 一般ニ二次方程式 $x^2+y^2=a^2$ ノぐらふハ原點ヲ中心トシ半徑ノ長サガ a ナル圓周ナリ.

例 3. 攝氏ノ溫度ト華氏ノ溫度トノ關係ヲ圖示セヨ.

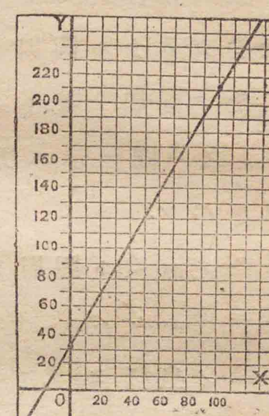
解　同ジ溫度ニ於ケル攝氏及華氏寒暖計ノ讀

ミヲ表ス數ヲ夫夫x, yトスレバ

$$y=\frac{9}{5}x+32$$

ナル關係アルコトハ既ニ知レル所ナリ.

之ハx, yニ關スル一次方程式ナリ,故ニ此ノ方程式ノぐらふハ圖ニ示セルガ如キ直線トナルナリ.



此ノぐらふヲ利用シテ何レカ一方ノ示ス溫度ヲ他ノ度數ニ改ムルコト容易ナリ.

例ヘバ攝氏ノ度數ガ與ヘラルレバ此ノ度數ヲ横坐標トスルぐらふ上ノ點ノ縱坐標ヲ求ムレバ華氏ノ度數ヲ得ルナリ.

大ナル方眼紙ヲ用ヒテ一目ノ差ヲ溫度ノ差1度ニ相當スル位ノ稍精密ナルぐらふヲ畫キ置ケバ換算ヲナストキ實用ニ供スルニ十分ナリ.

問題 三十二

次ノ聯立一次方程式ヲぐらふヲ應用シテ解ケ.

1. $y-x=2,\quad 2x-y=5.$

2. $y=19-x,\quad 3x-y=21.$

3. $x=2y+8,\quad 3x=4(2y+3).$

次ノ三方程式ハx, yノ夫夫同ジ値ニヨリテ滿足セラルルコトヲぐらふニテ示セ.

4. $y-x=1,\quad 2x-y=11,\quad 3x-2y=10.$

5. $x+y=10,\quad 4x-3y=19,\quad y=3x-18.$

圖式解法ニヨリ次ノ聯立方程式ノ根ノ近似値ヲ見出セ.

6. $2x-y=3,\quad y=2x^2-3x-1.$

7. $3x+2y=5,\quad y=4-2x^2.$

8. $x^2+y^2=100,\quad 2x-y=4.$

9. 同一ノ軸ヲ用ヒテ次ノ三ツノ方程式ノぐらふヲ畫キ其ヲ比較シ見ヨ.

(イ) $y=x^2$, (ロ) $y=3x^2$, (ハ) $y=\frac{1}{3}x^2$.

10. 次ノ記錄ニヨリ溫度ノぐらふヲ畫ケ.

時	正午	2時	4時	6時	8時	10時	夜半
溫度	15°	16°.5	13°	10°	8°	5°.5	4°.5

此ノぐらふニヨリ午後五時ノ溫度ノ近似値ヲ

求ム.

11. 尺ト米トノ換算ニ利用シ得ベキぐらふヲ畫ケ.

12. 貫ト瓩トノ換算ニ利用シ得ベキぐらふヲ畫ケ.

13. 初速度0ナル落體ノ公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ ノぐらふヲ畫ケ. 但 $g=9.8$ (秒秒米)トス.

14. 或地點Oニ於テ彈丸ヲ發射シタルニOヨリ同水面上ニ於テ2000尺ノ距離ニアル的ニ命中シ,且彈丸ハ進行中次表ニ示ス高サノ點ヲ通過シタリト云フ. 之ニヨリ彈丸ノ進路ヲ圖示シ,且Oヨリ的ノ方向900尺ノ距離ノ地上ヲ通過スルトキノ彈丸ノ高サヲ求ム.

Oヨリノ水平距離	高サ	Oヨリノ水平距離	高サ
200尺	5尺	1200尺	18尺
400尺	9尺	1400尺	18.3尺
600尺	12尺	1600尺	16尺
800尺	14.5尺	1800尺	10.2尺
1000尺	16.5尺	2000尺	0尺

15. 或凹面鏡ニ關スル實驗ニヨリ發光體及其

ノ像ノ鏡ヨリノ距離ヲ夫夫 u 尺, v 尺トシテ之ヲ計リタルニ次表ノ値ヲ得タリ.

u	6	7.5	10	14	26	40	60	90
v	30	15	10	7.6	6.2	5.7	5.5	5.3

ぐらふヲ畫キテ (1) $u=12, 20, 30$ ニ對スル v ノ近似値ヲ求メヨ. (2) $v=8, 6$ ナルトキノ u ノ近似値ヲ求メヨ.

第十一編　級數

第一章　等差級數

212. 等差級數.　或規則ニ從テ一定ノ順序ニ列ベラレタル數ノ列ヲ**級數**ト云ヒ,其ノ各數ヲ級數ノ**項**ト云フ.

級數ノ各項ヲ其ノ次ノ項ヨリ減ジタル差ガ常ニ同一ナルトキハ其ノ級數ヲ**等差級數**(又ハ**算術級數**)ト云フ.　而シテ此ノ同一ナル差ヲ**公差**(d),最初ノ項ヲ**初項**(a),最後ノ項ヲ**末項**(l)ト云フ. (n) S 和

例ヘバ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ノ如キハ 3 ヲ初項, 2 ヲ公差, 15 ヲ末項トスル所ノ等差級數ナリ.

注意.　公差ガ正數或ハ負數ナルニ從テ等差級數ノ項ハ次第ニ増大或ハ減少ス.

213. 一般項,末項.　初項及公差ヲ知ルトキハ等差級數ハ決定セラル.　例ヘバ初項ヲ a, 公差ヲ d トスレバ其ノ各項ハ

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ldots$$

ナリ.　故ニ

$$第\ n\ 項=a+(n-1)d.$$

此ノ n ニ 1, 2, 3, ... ヲ代入スレバ夫夫第一項,第二項,第三項,......ヲ得ベシ,故ニ之ヲ等差級數ノ一般項ト云フ.

級數ノ項數ガ n ナルトキハ一般項ヲ表ス式ハ末項ヲ表ス式トナル.　即チ今末項ヲ l トスレバ

$$l=a+(n-1)d.$$

此ノ公式ヲ用フレバ初項,公差,項數,末項ノ中何レカ三ツヲ知リテ他ノ一ツヲ求ムルコトヲ得ルナリ.　例ヘバ公差 d ヲ求ムレバ $d=\dfrac{l-a}{n-1}$ ナリ.

214. 二項ガ與ヘラレタルトキ.

$a=l-(n-1)d$

$n=\dfrac{l-a}{d}+1$

等差級數ノ任意ノ二項ガ與ヘラルルトキハ其ノ初項及公差ハ次ノ如クシテ知ルコトヲ得,從テ其ノ級數ヲ決定スルコトヲ得ベシ.

即チ今第 h 項ヲ α, 第 k 項ヲ β トスレバ初項 a ト公差 d トノ間ニ次ノ關係アリ.

$$a+(h-1)d=\alpha,\qquad a+(k-1)d=\beta.$$

之ハ a, d ヲ未知數トスル聯立一次方程式ニ外ナラズ,故ニ之ヲ解ケバ a, d ヲ算出シ得ベシ.

例. 第三項ガ 7, 第五項ガ 13 ナル等差級數ヲ決定セヨ.

解 初項 a 及公差 d ノ間ニハ次ノ關係アリ.

$$a+2d=7, \qquad a+4d=13.$$

之ヲ解ケバ $a=1, \quad d=3.$

從テ此ノ級數ハ次ノ如シ.

$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots\ldots \quad 答.$$

215. 等差級數ノ和. 初項ヲ a, 公差ヲ d, 末項ヲ l トシ, 且 n 項ノ和ヲ S ニテ表セバ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+(l-d)+l,$$

又 $$S=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots\ldots+(a+d)+a.$$

兩式ヲ邊邊相加フレバ

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots+(a+l)+(a+l)$$
$$=n(a+l).$$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

又 $l=a+(n-1)d$ ヲ代入スレバ

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \quad \ldots \quad (2)$$

例 1. $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-1, n$ ノ和ヲ求ム.

解 初項 1, 項數 n, 末項 n ナルガ故ニ公式 (1) ニヨリテ

$$1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad 答.$$

例 2. $4, 7, 10, 13, \ldots\ldots$ ナル等差級數ノ十二項ノ和ヲ求ム.

第n項の和を求めよ。

解 初項ガ 4, 公差ガ 3, 項數ガ 12 ナルニヨリ公式 (2) ニヨリ所要ノ和 S ハ次ノ如シ.

$$S=\frac{12}{2}\{2\times4+(12-1)\times3\}=246 \quad 答.$$

例 題

1. 次ノ等差級數ノ第二十項ヲ求ム.

(一) $2, 6, 10, \ldots\ldots$ (二) $12, 7, 2, \ldots\ldots$

(三) $x+y, x-y, x-3y, \ldots\ldots$ ✓

2. 第二項ガ 5, 第六項ガ 17 ナル等差級數ノ初項, 公差及第十五項ヲ求ム.

3. 次ノ等差級數ノ項數ヲ求ム.

(一) $13, 17, 21, \ldots\ldots, 57.$ (二) $5, 2, -1, \ldots\ldots, -55.$

✓4. 初項 5, 第二十五項 125 ナル等差級數ノ第十二項及第三十項ヲ求ム.

5. 次ノ等差級數ノ和ヲ求ム.

(一) $2, 6, 10, \ldots\ldots, 102.$

(二) 35, 29, 23, ……, -31.

(三) 3, $\frac{13}{3}$, $\frac{17}{3}$, …… 第十二項迄.

216. 等差中項. 三ツノ數ガ等差級數ヲナストキハ中間ノ數ヲ他ノ二ツノ數ノ等差中項(又ハ相加平均)ト云フ.

例ヘバ a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ b ハ a, c ノ等差中項ナリ. 而シテ $b-a=c-b$ ナリ.

$$\therefore\ b=\frac{a+c}{2}.$$

數多ノ數ガ等差級數ヲナストキハ初項ト末項トノ間ニアル總テノ數ヲ其等ノ二數ノ間ノ等差中項ト云フ.

例ヘバ等差級數 4, 7, 10, 13, 16 ニ於テ 7, 10, 13 ハ 4 ト 16 トノ間ニアル三個ノ等差中項ナリ.

與ヘラレタル二數例ヘバ a, b ノ間ニ m 個ノ等差中項ヲ挿入スルコトハ結局初項ガ a, 末項ガ b, 項數ガ $m+2$ ナル等差級數ヲ作ルコトニ歸ス.

借公差 d ヲ求ムルニハ $b=a+(m+1)d$ ヨリ

$$d=\frac{b-a}{m+1}.$$

從テ所要ノ等差中項ハ

$$a+\frac{b-a}{m+1},\ a+2\frac{b-a}{m+1},\ a+3\frac{b-a}{m+1},\ \ldots\ldots,\ a+m\frac{b-a}{m+1}$$

ナリ.

例. 3, -7 ノ間ニ 4 個ノ等差中項ヲ挿入セヨ.

解 此ノ場合ニハ $a=3$, $b=-7$, $m=4$ ナリ.

$$\therefore\ d=\frac{-7-3}{4+1}=-2.$$

因テ所要ノ等差中項ハ次ノ如シ.

$$1,\ -1,\ -3,\ -5\ \text{答.}$$

217. 公式ノ應用. 等差級數ノ公式

$$l=a+(n-1)d,\quad S=\frac{n}{2}(a+l)\ \text{或ハ}\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

$d=\frac{b-a}{m+1}$

等ニヨレバ a, d, l, n, S ノ中何レカ三ツガ與ヘラルルトキハ他ノ二ツヲ決定シ得ベシ.

其ノ中 a, d, S ヲ知ツテ n ヲ求ムル例ヲ示サン.

例. 24, 20, 16, …… ノ和ガ 72 ナリト云フ. 項數ヲ求ム.

解 所要ノ項數ヲ n トスベシ. 借初項ハ 24, 公差ハ -4 ナルガ故ニ公式ニヨリ

$$72=\frac{n}{2}\{2\times 24+(n-1)(-4)\},$$

之ヨリ $n^2-13n+36=0$, 即チ $(n-4)(n-9)=0$.

$$\therefore\ n=4\ \text{或ハ}\ 9\ \text{答.}$$

此ノ二ツノ値ハ明ニ何レモ問題ニ適合ス.

注意. $n=9$ ナルトキハ等差級數ハ

$$24,\ 20,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4,\ 0,\ -4,\ -8..$$

ニシテ終リノ 5 項ハ互ニ打チ消シテ其ノ和ハ 0 トナル,故ニ級數ノ和ハ $n=4$ ノ場合ノ和ニ等シ.

問題　三十三

1. 初項 79, 末項 7, 和 1075 ナル等差級數ノ項數ヲ求ム.

2. 初項 -3, 末項 -16, 和 -133 ナル等差級數ノ項數ヲ求ム.

3. 次ノ二數ノ等差中項ヲ求ム.

(一) 7, 21.　(二) $-5, 13$.　(三) $a-b, a+b$.

4. 次ノ二數ノ間ニ八個ノ等差中項ヲ挿入セヨ.

(一) 3, 30.　(二) $2, -\frac{1}{4}$.　(三) $a, a-9b$.

5. n^2, 1 ノ間ニ n 個ノ等差中項ヲ挿入セヨ.

6. 次ノ等差級數ノ和ヲ求ム.

(一) $2a-b,\ 4a-3b,\ 6a-5b,\ \ldots\ldots$ 第四十項迄.

(二) $\frac{1}{\sqrt{2}+1},\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}-1},\ \ldots\ldots$ 第七項迄.

(三) $(a+b)^2,\ (a^2+b^2),\ (a-b)^2,\ \ldots\ldots$ 第 n 項迄.

7. 等差級數ヲナス三數ノ和ハ 24 ニシテ其ノ平方ノ和ハ 242 ナリト云フ. 其ノ三數ヲ求ム.

8. 或人初年ニハ金二十圓ヲ貯蓄シ,次年ニハ金三十圓,三年目ニハ金四十圓等,毎年貯金ヲ十圓宛増ストキハ幾年ノ後貯金千七百圓トナルカ. 但利息ヲ算入セザルモノトス.

9. 100 ト 300 トノ間ニアル總テノ奇數ノ和ヲ求ム.

10. 1 ヨリ初マル相連續セル奇數ノ若干個ノ和ハ常ニ平方數ナルコトヲ證明セヨ.

11. 等差級數ノ項數ガ $2n+1$ ナルトキハ其ノ奇數番目ノ項ノ和ト偶數番目ノ項ノ和トノ比ハ $(n+1):n$ ニ等シキコトヲ證明セヨ.

12. 級數ノ總テノ項ノ逆數ガ等差級數ヲナストキハ其ノ級數ハ調和級數ヲナスト云フ. 例ヘバ $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\ldots$ ハ調和級數ナリ. 今 a, b, c ガ調和級數ヲナストキハ $a:c=(a-b):(b-c)$ ナルコトヲ證明セヨ.

13. 數多ノ數ガ調和級數ヲナストキ初項ト末

項トノ間ニアル總テノ數ヲ此等ノ二數ノ間ノ調和中項ト云フ．二數 a, b ノ間ノ一ツノ調和中項ヲ H トスレバ $\mathrm{H}=\dfrac{2ab}{a+b}$ ナルコトヲ證明セヨ．

14. $2n+1$ 個ノ任意ノ連續整數ノ和ハ $2n+1$ ニテ割リ切レルコトヲ證明セヨ．

第二章　等比級數

218. 等比級數. 級數ノ各項ト其ノ直前ノ項トノ比ガ何レモ皆同一ナルトキハ其ノ級數ヲ等比級數(又ハ幾何級數)ト云フ．而シテ此ノ同一ナル比ヲ公比(又ハ通比)ト云フ．

例ヘバ 3, 6, 12, 24, 48, 96 ハ公比ガ 2 ナル等比級數ナリ．

219. 一般項,末項. 初項及公比ヲ知ルトキハ等比級數ハ決定セラル．例ヘバ初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ其ノ各項ハ

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots\ldots$$

ナリ．故ニ　**第 n 項$=ar^{n-1}$**

ナリ．之ハ等比級數ノ一般項ナリ．

若級數ノ項數ガ n ナルトキハ一般項ハ其ノ儘

末項ヲ表ス式トナル．卽チ末項ヲ l トスレバ

$$l=ar^{n-1}.$$

又此ノ公式ヨリ公比 r ヲ求ムルレバ $r^{n-1}=\dfrac{l}{a}$ ナルニヨリ r ハ $\dfrac{l}{a}$ ノ $n-1$ 乘根ナリ．

220. 二項ガ與ヘラレタルトキ.

等比級數ノ任意ノ二項ガ與ヘラルルトキハ其ノ初項及公比ハ次ノ如クシテ知ルコトヲ得,從テ其ノ級數ヲ決定スルコトヲ得ベシ．

卽チ今第 h 項ヲ α, 第 k 項ヲ β トスレバ初項 a ト公比 r トノ間ニ次ノ關係アリ．

$$ar^{h-1}=\alpha,\qquad ar^{k-1}=\beta.$$

之ハ a, r ヲ未知數トスル聯立方程式ナリ,故ニ之ヲ解ケバ a, r ヲ算出シ得ベシ．

例. 第四項ガ 189, 第六項ガ 1701 ナル等比級數ヲ決定セヨ．

解　初項 a 及公比 r 間ニハ明ニ次ノ關係アリ．

$$ar^3=189,\qquad ar^5=1701.$$

之ヲ解ケバ $r=3,\ a=7$; 或ハ $r=-3,\ a=-7$.

答 $\begin{cases} 7,\ 21,\ 63,\ 189,\ 567,\ 1701,\ \ldots\ldots \\ \text{或ハ}\ -7,\ 21,\ -63,\ 189,\ -567,\ 1701,\ \ldots\ldots \end{cases}$

221. 等比級數ノ和.

初項ヲ a, 公比ヲ r トシ,且 n 項ノ和ヲ S ニテ表セバ

$$S=a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-1},$$

$$Sr=ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots+ar^n.$$

邊邊相減ズレバ　$S-Sr=a-ar^n$,

即チ　$S(1-r)=a(1-r^n)$,

$$\therefore\ S=a\frac{1-r^n}{1-r},\ 或ハ\ S=a\frac{r^n-1}{r-1}.$$

又末項 $l=ar^{n-1}$ ヲ用フレバ

$$S=\frac{a-lr}{1-r}.$$

例. 等比級數 8, 12, 18, ... ノ八項ノ和ヲ求ム.

解　初項 8, 公比 $\frac{3}{2}$ ニシテ項數 8 ナルガ故ニ公式ニヨリテ

$$S=8\times\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^8-1}{\frac{3}{2}-1}=8\times\frac{\frac{6305}{256}}{\frac{1}{2}}=\frac{6305}{16}=394\frac{1}{16}\quad 答.$$

例題

1. 次ノ等比級數ノ第八項ヲ求ム.

(一) 3, 12, 48, ...　(二) 9, -3, 1, ...

(三) 24, 4, $\frac{2}{3}$, ...　(四) 11, -33, 99, ...

2. 次ノ等比級數ノ末項ヲ求ム.

(一) 6, -18, 48, ... 第六項迄.

(二) $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{8}$, ... 第九項迄.

(三) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, ... 第十項迄.

3. 等比級數アリ,初項ハ 3 ニシテ第三項ハ 48 ナリト云フ. 此ノ級數ノ第五項ヲ求ム.

4. 等比級數アリ,第三項ハ $\frac{1}{2}$ ニシテ第六項ハ $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ ナリト云フ. 初項及公比ヲ求ム.

5. 次ノ等比級數ノ和ヲ求ム.

(一) 7, -21, 63, ... 第十項迄.

(二) 98, 14, 2, ... 第八項迄.

(三) 1, 4, 16, ... 第 n 項迄.

222. 等比中項.

三ツノ數ガ等比級數ヲナストキハ中間ノ數ヲ他ノ二數ノ**等比中項**(又ハ**相乘平均**)ト云フ.

例ヘバ a, b, c ガ等比級數ヲナストキハ b ハ a ト c トノ等比中項ナリ. 而シテ

$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ ナルニヨリ $b^2=ac$,

$$\therefore\ b=\pm\sqrt{ac}.$$

注意. a, c ノ等比中項ヲ b トスレバ b ハ又 a, c ノ比例中項ニ相當ス.

數多ノ數ガ等比級數ヲナストキハ初項ト末項トノ間ニアル總テノ數ヲ其等ノ數ノ間ノ**等比中項**ト云フ.

例ヘバ等比級數 3, 6, 12, 24, 48 ニ於テ 6, 12, 24 ハ 3 ト 48 トノ間ノ三ツノ等比中項ナリ.

與ヘラレタル二數例ヘバ a, b ノ間ニ m 個ノ等比中項ヲ挿入スルコトハ結局初項ガ a, 末項ガ b, 項數ガ $m+2$ ナル等比級數ヲ作ルコトニ歸ス.

初項. 末項

偖公比 r ヲ求ムルニハ $b=ar^{m+1}$ ヨリシテ

$$r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

l

$l=ar^{n+1}$

從テ所要ノ等比中項ハ

$$a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\quad a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2,\quad \ldots\ldots,\quad a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^m$$

ナリ.

若 $m+1$ ガ偶數ナラバ r ハ正負ノ二個ノ値アリ. 從テ所要ノ等比中項モ二樣アルベシ. (但虚數ハ之ヲ省ク)

例. 2, 162 ノ間ニ 3 個ノ等比中項ヲ挿入セヨ.

aとbの間をおりみこむ。

$b=ar^{m+1}$

解　此ノ場合ニハ $a=2$, $b=162$, $m=3$ ナリ.

$$\therefore\ r^4=\frac{162}{2}=81,$$

$$\therefore\ r=3\ \text{或ハ}\ -3.$$

因テ所要ノ等比中項ハ次ノ二通アリ.

$$\left.\begin{array}{r} 6,\ 18,\ 54 \\ \text{或ハ}\ -6,\ 18,\ -54 \end{array}\right\}\ \text{答.}$$

223. 公式ノ應用. 等比級數ノ末項及和ヲ表ス公式ニヨレバ a, r, l, n, S ノ中何レカ三ツヲ知レバ他ノ二ツハ決定シ得ベシ.

但 n ハ正ノ整數ナルコトニ注意スベシ.

例. 公比 $\frac{1}{2}$, 第四項 $\frac{5}{2}$ ナル等比級數ノ初項及初項ヨリ第八項迄ノ和ヲ求ム.

解　先ヅ初項ヲ a トスレバ明ニ

$$a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}=\frac{5}{2},\quad \text{之ヨリ}\ a=20.$$

次ニ第八項迄ノ和ヲ S トスレバ

$$S=20\times\frac{1-\frac{1}{2^8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1275}{32}=39\frac{27}{32}.$$

答　初項 20, 和 $39\frac{27}{32}$.

$h = ar^{m+1}$

例題

1. 6, 486 ノ間ニ三個ノ等比中項ヲ挿入セヨ.
2. 48, $-\frac{1}{36}$ ノ間ニ二個ノ等比中項ヲ挿入セヨ.
3. 等比級數ノ初項ハ 3 ニシテ其ノ三項ノ和ハ $\frac{19}{3}$ ナリト云フ. 公比ヲ求ム.
4. 等比級數ヲナセル三ツノ數ノ和ハ 26 ニシテ其ノ平方ノ和ハ 364 ナリ. 其ノ三數ヲ求ム.
5. 公比 $\frac{1}{2}$, 第六項 $\frac{3}{4}$ ナル等比級數ノ初項及第七項迄ノ和ヲ求ム.

224. 無限等比級數. 等比級數ノ初項ヲ a, 公比ヲ r, 項數ヲ n, 和ヲ S トスレバ

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

此ノ公式ニ於テ r ノ絶對値ガ 1 ヨリモ小ナルトキハ n ガ限ナク増大スルニ從テ r^n ノ絶對値ハ限ナク減少シテ 0 ニ近ヅキ, 從テ S ハ限ナク $\frac{a}{1-r}$ ニ近ヅクベシ. 此ノ事柄ヲ n ガ無限ニ増大スルトキノ S ノ極限ノ値ハ $\frac{a}{1-r}$ ナリト云フ.

一般ニ等比級數ノ項數ガ限ナク多キモノヲ無限等比級數ト云フ.

無限等比級數ニ於テ公比 r ノ絶對値ガ 1 ヨリモ小ナルトキハ其ノ和ハ一定ノ極限ノ値ヲ有ス, 即チ初項ガ a ナルトキハ其ノ極限ノ値ハ丁度 $\frac{a}{1-r}$ ナリ.

和ノ極限ノ値ト云フベキヲ單ニ和トモ云フ.

注意. 公比 r ノ絶對値ガ 1 ヨリモ大ナルトキハ n ガ無限ニ増大スルニ從テ S ノ絶對値モ亦無限ニ増大スベク, $r=1$ ナルトキニモ亦然リ. 又 $r=-1$ ナルトキハ項數ガ奇數ナルカ偶數ナルカニ從テ S ハ a ナルカ或ハ 0 ナリ.

例 1. 無限等比級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ ノ和ヲ求ム.

解 初項ハ 1, 公比ハ $\frac{1}{2}$ ナルガ故ニ

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.\quad 答.$$

例 2. 三角形ノ三邊ノ中點ヲ結ビ付ケテ新三角形ヲ作リ, 次ニ新三角形ノ三邊ノ中點ヲ結ビ付ケテ第三ノ三角形ヲ作リ, 斯ノ如ク無限ニ同ジ方法ヲ繰返シテ得ル所ノ總テノ三角形ノ面積ノ和ハ原三角形ノ面積ノ幾倍ナルカ.

解　三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ビ付ケテ生ズル三角形ノ面積ハ原三角形ノ面積ノ四分ノ一ナルコトハ幾何學ニ於テ知レル所ナリ.

故ニ今原三角形ノ面積ヲaトスレバ新三角形ノ面積ハ夫夫 $\frac{1}{4}a,\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 a,\ \left(\frac{1}{4}\right)^3 a,\ \ldots\ldots$ ナリ.

因テ　總和$=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4^2}a+\frac{1}{4^3}a+\ldots\ldots$

$$=\frac{\frac{1}{4}a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}a.\qquad 答\ \frac{1}{3}倍.$$

225. 循環小數.　一般ニ循環小數ハ一ツノ無限等比級數ノ和ト考フルコトヲ得. 之ニヨリテ循環小數ヲ分數ニ改ムルコトヲ得.

例 1.　$0.\dot{3}\dot{6}$ ヲ分數ニ直セ.

解　$0.\dot{3}\dot{6}=0.363636\ldots\ldots$

$$=0.36+0.0036+0.000036+\ldots\ldots$$

$$=\frac{36}{100}+\frac{36}{100^2}+\frac{36}{100^3}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{\frac{36}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{36}{100-1}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}\quad 答.$$

注意.　$0.\dot{3}\dot{6}=\frac{36}{99}$ ハ既ニ算術ニテ學ビタル純循環

小數ヲ分數ニ直ス規則ト一致スルヲ見ルベシ.

例 2.　$0.5\dot{3}1\dot{2}$ ヲ分數ニ直セ

解　$0.5\dot{3}1\dot{2}=5.\dot{3}1\dot{2}\div10$

$$=\frac{5+0.\dot{3}1\dot{2}}{10}$$

1000

$$=\frac{5+\frac{312}{1000-1}}{10}$$

$$=\frac{5\times(1000-1)+312}{(1000-1)\times10}$$

$$=\frac{5000-5+312}{999\times10}$$

$$=\frac{5312-5}{9990}=\frac{1769}{3330}\quad 答.$$

注意.　$0.5\dot{3}1\dot{2}=\frac{5312-5}{9990}$ ハ算術ニ於ケル混循環小數ヲ分數ニ直ス規則ト一致スルヲ見ルベシ.

例　題

1.　次ノ無限等比級數ノ和ヲ求ム.

(一)　$12+6+3+\ldots\ldots$

(二)　$1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\ldots\ldots$

(三)　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\ldots$

(四)　$1+\frac{a}{a+b}+\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\ldots\ldots$　(但 $a>0,\ b>0$)

30

2. 次ノ循環小數ヲ分數ニ直セ.

(一) $0.\dot{2}0\dot{5}$. (二) $0.\dot{0}0\dot{3}$. (三) $3.1\dot{4}1\dot{6}$. $\frac{6277}{1998}$

(四) $0.\dot{0}02\dot{3}$. (五) $0.032\dot{1}$.

3. 等比級數ノ各項ノ同次ノ冪ハ又等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ.

4. 無限等比級數ニ於テ第二項ハ5其ノ和ハ20ナルトキノ公比ヲ求ム.

問題 三十四

1. a, b, c, dガ等比級數ヲナストキハ$a+b, b+c, c+d$又ハ$a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2$ハ何レモ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ.

2. 等比級數ニ於テ初項ヨリk項宛ノ和ヲ作ルトキハ此等ノ和ハ又等比級數ヲナス. 之ヲ證明セヨ.

3. 等比級數ノ公比ガ正數ニシテ$\frac{1}{2}$ヨリモ小ナルトキハ各項ハ其ノ次ノ總テノ項ノ和ヨリモ大ナルコヲ證明セヨ.

4. 等比級數ノ項數ガ奇數ナルトキハ初項ト中央ノ項ト末項トハ亦等比級數ヲナスコトヲ證

明セヨ.

5. aトbトノ等差中項ヲA, 調和中項ヲH, 等比中項ヲGトスレバGハAトHトノ等比中項ナルコトヲ證明セヨ. (問題三十三, 13參照)

6. 二數ノ等比中數ハ4ニシテ調和中項ハ$\frac{16}{5}$ナリト云フ. 其ノ二數ヲ求ム.

7. 等比級數ノ第一項ハ第四項ヨリモ156ダケ小ニシテ第二項, 第三項, 第四項ノ和ハ78ナリト云フ. 此ノ級數ヲ求ム.

8. xノ絕對値ガ1ヨリモ小ナルトキハ次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ.

(一) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots$無限

(二) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots$無限

9. 除法ニヨラズシテ次ノ等式ヲ證明セヨ.

(一) $\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}$.

(二) $\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}$.

10. a, b, cガ等比級數ヲナストキハ次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ.

$$(a-b)(a+b)=a(a-c).$$

11. a, b, c ハ等比級數ヲナシ, x ハ $a, b,$ ノ等差中項, y ハ b, c ノ等差中項ナルトキハ次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ.

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad 及 \quad 2=\frac{a}{x}+\frac{c}{y}.$$

12. 1, 5, 9, 13, …… ナル級數ノ幾項ヲ取ラバ初ノ半數ノ項ノ和ト後ノ半數ノ項ノ和トノ比ガ 7:23 ニ等シクナルカ.

13. 直角三角形ノ三邊ハ等差級數ヲナシ,其ノ斜邊ハ35寸ナリト云フ. 他ノ二邊ノ長サヲ求ム.

14. 一邊1尺ナル正方形アリ,其ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビテ正方形ヲ作リ,更ニ同樣ニシテ第二ノ正方形ヨリ第三ノ正方形ヲ作ル,此ノ方法ヲ無限ニ繰返シテ得ラルル總テノ正方形ノ面積ノ和ヲ求ム.

第十二編　對　數

第一章　一般ノ指數ヲ有スル冪

226. 指數ノ意義ノ擴張. 冪ノ定義ニヨレバ其ノ指數ハ本來正ノ整數ナルベキモノナリ. サレド吾人ハ通常指數ノ意義ヲ擴張シテ一般ナル指數(負數,分數等)ヲ有スル冪ノ意義ヲ次ニ示スガ如ク定ム. 斯スレバ指數ニ關スル諸法則ガ無制限ニ適用セラルルノ便利アルニヨルナリ.

227. 分數ヲ指數トスル冪.

m, n ガ任意ノ正ノ整數ナルトキ, $a^{\frac{m}{n}}$ ハ $\sqrt[n]{a^m}$ ノコトナリト定ム.

例ヘバ $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$, $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$ ナルガ如シ.

斯ノ如ク定ムレバ第129節ニ述ベタル公式

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

ハ最早 m ガ n ニテ割切レルト否トニ拘ラズ恒ニ成立スルコトトナル.

228. 零ヲ指數トスル羃

a ガ零ナラザル任意ノ數ナルトキ，a^0 ハ 1 ノコトナリト定ム．

例ヘバ $3^0=1,\ \left(\frac{5}{7}\right)^0=1$ ナルガ如シ．

斯ノ如ク定ムレバ羃ノ除法ノ公式

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ハ $m>n$ ナルトキニ限ラズ $m=n$ ナルトキニモ亦成立スルコトトナル．

229. 負數ヲ指數トスル羃

p ガ任意ノ正數ナルトキ，a^{-p} ハ $\frac{1}{a^p}$ ノコトナリト定ム．

例ヘバ $a^{-3}=\frac{1}{a^3},\ a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$ ナルガ如シ．

斯ノ如ク定ムレバ上記ノ公式

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ハ $m<n$ ナルトキニモ亦成立スルコトトナル．

何トナレバ $m<n$ ナルトキハ $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$，又 $m-n$ ハ負數ナルニヨリ $a^{m-n}=a^{-(n-m)}=\frac{1}{a^{n-m}}$ ナルガ故ナリ．

注意． 前節及本節ニヨリ m, n ノ大小如何ニ關セズ，$a^m \div a^n = a^{m-n}$ ナル公式ハ恒ニ成立スルコトトナリタリ．

230. 一般ノ指數ヲ有スル羃ノ計算

以上ノ如ク一般指數ノ羃ノ意義ヲ定ムルトキハ m, n ガ正負ノ整數又ハ分數ノ何レヲ表ストスルモ一般ニ羃ノ公式

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$, (2) $(a^m)^n = a^{mn}$,

(3) $(ab)^m = a^m b^m$, (4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$,

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ノ成立スルコトハ容易ニ證明スルコトヲ得ベシ．

故ニ一般ノ指數ヲ有スル羃ノ計算ハ指數ガ正ノ整數ノ場合ト全ク同樣ニ取扱フコトヲ得ベシ．

尚一般ノ指數ヲ有スル羃ノ計算ヲ應用シテ根ニ關スル計算ヲ行フコトヲ得ベシ．

例 1. $(a^{-3})^{\frac{2}{3}} = a^{-3\times\frac{2}{3}} = a^{-2}$.

例 2. $(a^2 b)^{\frac{3}{4}} = (a^2)^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}}$.

例 3. $\sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{6}}$

$$= a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}} = a^1 = a.$$

例 4. $\sqrt{a}\times\frac{1}{a}\div\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\times a^{-1}}{a^{-\frac{4}{3}}}$

a^{-1}

$=a^{\frac{1}{2}-1-(-\frac{4}{3})}=a^{\frac{5}{6}}$

$=\sqrt{a^5}$

例　題

次ノ諸式ノ値ヲ求ム.

1. $(125)^{\frac{2}{3}}$.　　3, $16^{-\frac{1}{4}}$.　　3. $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

4. $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{7}{5}}$.　　5. $2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{5}{6}}$.　　6. $(3^6)^{-\frac{1}{3}}$.

7. $5^{\frac{1}{4}}\div 5^{-\frac{1}{2}}$.　　8. $4^{-2}\times 8^{\frac{1}{2}}$.　　9. $\left(\frac{25}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

次ノ諸式ヲ簡約セヨ.

10. $a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{3}{2}}$.　　11. $x^{-\frac{3}{5}}\times x^{\frac{1}{5}}$.　　12. $(a^{-3})^{\frac{5}{12}}$.

13. $a^2b^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}$.　　14. $(a^6b^{-4})^{-\frac{1}{2}}$.

15. $(\sqrt{a^{-6}})^{\frac{1}{3}}$.　　16. $(\sqrt[3]{a^2})^{-\frac{3}{2}}$.

17. $\sqrt{x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{7}}}\times\sqrt{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{7}}}$.　　18. $\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{b^4}\div\sqrt[3]{a^{-1}}\sqrt[4]{b^{-1}}$.

第二章　對數及其ノ性質

231. 對數. $a^x=n$ ナルトキハ此ノ x ヲ稱シテ a ヲ底トスル n ノ對數ト云フ. a ヲ底トスル

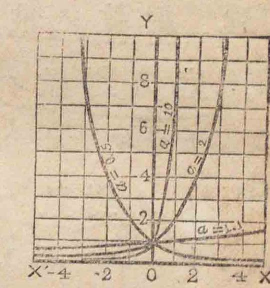
logarithm.

n ノ對數ヲ表スニ $\log_a n$ ヲ以テス.

例ヘバ $2^5=32$ ナリ,因テ5ハ2ヲ底トスル32ノ對數ナリ. 即チ $\log_2 32=5$ ナリ.

倘 $y=a^x$ ナル式ニ於テ a ヲ常數, x ヲ變數トスレバ y ハ x ノ函數ナリ.

今上ノ函數ニ於テ $a=0.5$, $a=1.1$, $a=2$, $a=10$ トシタル場合ノぐらふヲ畫ケバ次ノ如シ.



通常對數ノ底 a ニハ1ヨリモ大ナル數ヲ用ゾルモノトス.

倘此ノぐらふニツキテ見レバ $a>1$ ナルトキハ a^x ハ x ノ値ノ增大スルニ從テ其ノ値增大シ,且

$x>0$ ナルトキハ $a^x>1$,

$x=0$ ナルトキハ $a^x=1$,

$x<0$ ナルトキハ $a^x<1$

ナリ. サレド x ガ如何ナル實數値ヲ有スルトキモ a^x ハ決シテ負數トナルコトナシ.

故ニ $a>1$ ナルトキハ勿論負數ハ對數ヲ有

セザルナリ.

次ニ $a^x=n$ ニ於テ n ガ正數ナルトキハ n ノ各ノ値ニ對應スル x ノ實數値ハ必ズ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル. 而シテ x 卽チ $\log_a n$ ノ値ハ正負ノ整數,分數及無理數トモナルナリ.

注意. $a^x=n$ ニ於テ x ガ無理數トナル場合ノ說明ハ理論高尙ニ亘ルヲ以テ玆ニハ省略ス.

232. 對數ノ性質.

(I) 底ノ對數ハ1ナリ.

何トナレバ　$a^1=a$,　$\therefore\ \log_a a=1$.

(II) 1ノ對數ハ0ナリ.

何トナレバ　$a^0=1$,　$\therefore\ \log_a 1=0$.

(III) 積ノ對數ハ其ノ各因數ノ對數ノ和ニ等シ.

例ヘバ　$\log_a mn=\log_a m+\log_a n$.

何トナレバ $\log_a m=x$, $\log_a n=y$ トスレバ

$$a^x=m,\quad a^y=n,$$

$$\therefore\ mn=a^x\times a^y=a^{x+y}.$$

$$\therefore\ \log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n.$$

因數ガ三ツ以上ノ場合モ亦同樣ナリ.

例. $\log_2(4\times32\times128)=\log_2 4+\log_2 32+\log_2 128$

$$=2+5+7=14.$$

(IV) 商ノ對數ハ實ノ對數ヨリ法ノ對數ヲ減ジタル差ニ等シ.

例ヘバ　$\log_a\dfrac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$.

何トナレバ　$\log_a m=x$,　$\log_a n=y$　トスレバ

$$a^x=m,\quad a^y=n,$$

$$\therefore\ \frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},$$

$$\therefore\ \log_a\frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n.$$

例. $\log_5(3125\div25)=\log_5 3125-\log_5 25$

$$=\log_5 5^5-\log_5 5^2=5-2=3.$$

(V) 或數ノ羃ノ對數ハ其ノ數ノ對數ニ指數ヲ乘ジタルモノニ等シ.

例ヘバ　$\log_a n^p=p\log_a n$.

何トナレバ $\log_a n=x$ トスレバ　$a^x=n$.

$$\therefore\ n^p=(a^x)^p=a^{px},$$

$$\therefore\ \log_a n^p=px=p\log_a n.$$

例. $\log_3 81^5=5\log_3 81=5\times4=20.$

因テ或數ノ羃根ノ對數ハ其ノ數ノ對數ヲ根指數ニテ除シタルモノニ等シ.

例ヘバ $\log_a \sqrt[p]{m} = \dfrac{1}{p}\log_a m.$

$\sqrt[p]{m} = m^{\frac{1}{p}}$ ナルコトニヨルナリ.

例. $\log_3 \sqrt[6]{27} = \dfrac{1}{6}\log_3 27 = \dfrac{1}{6} \times 3 = 0.5.$

$\log_2 (0.125)^7 = x$
$7\log_2 0.125 = x$
$\log_2 0.125 = \frac{x}{7}$
$2^{\frac{x}{7}} = 0.125$
$= \frac{1}{8}$
$= \frac{1}{2^3}$
$= 2^{-3}$
$\therefore \frac{x}{7} - 3$
$2 = 2$
$\therefore \frac{x}{7} = -3$
$x = -21$

例題

次ノ諸式ノ値ヲ求ム.

1. $\log_2 64.$ 2. $\log_{32} 2.$ 3. $\log_{10} \sqrt[3]{0.01}.$

4. $\log_2 \sqrt[8]{64}.$ 5. $\log_2 (0.125)^7.$ 6. $\log_2 (1024)^{\frac{3}{8}}.$

7. $\log_a (x^2 y^3)^{\frac{1}{2}}$ ヲ $\log_a x$ ト $\log_a y$ トニテ表セ.

8. $\log_a \sqrt[5]{x^3 y^2}$ ヲ $\log_a x$ ト $\log_a y$ トニテ表セ.

9. $\log_a \dfrac{mn^2 p^4}{\sqrt{m^{-3} n^3 p^6}}$ ヲ $\log_a m$, $\log_a n$, $\log_a p$ ニテ表セ.

10. 次ノ方程式ヲ解ケ.

(一) $\log_3 x = 4.$ (二) $\log_{25} x = \dfrac{1}{2}.$ (三) $\log_{10} x = 5.$

(四) $\log_a (x+2) + \log_a (x-2) = 0.$

(五) $2\log_a (x-1) = 1.$

$\log_a (x+2)(x-2) = 0$

$\log_3 x = 4$ $3^4 = x$
$= 81.$

$a^0 = (x+2)(x-2) = 1$

第三章 對數表

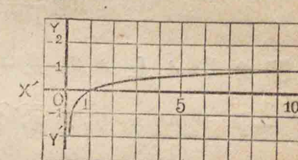
233. 常用對數. 10 ヲ底トスル對數ヲ常用對數ト云フ.

即チ $10^x = n$ ナルトキハ $\log_{10} n = x$ ナリ, 故ニ x ハ n ノ常用對數ナリ.

通常ノ計算ニハ專ラ常用對數ヲ用フ.

$\log_{10} n$ ト書クベキヲ通常略シテ $\log n$ ト書ク.

以下本章ニ於テハ單ニ對數ト云フトキハ常用對數ノコトナリト知ルベシ.



($y = \log_{10} x$ ノぐらふ)

偖 $y = \log_{10} x$ ニ於テ x ヲ變數トスレバ y ハ x ノ函數ナルコト明ナリ.

今此ノぐらふヲ書ケバ玆ニ示スガ如シ, 而シテ

$x > 1$ ナルトキハ $\log_{10} x > 0$,

$x = 1$ ナルトキハ $\log_{10} x = 0$,

$x < 1$ ナルトキハ $\log_{10} x < 0$

ナルコト明ナリ. 故ニ一般ニ一ツノ數ノ對數ハ或ハ正トナリ, 或ハ負トナル. 又 10 ノ乘羃ニアラザル數ノ對數ハ必ズ小數部ヲ有ス.

整數部のけた數より1少なきものを指數とす。

234. 對數ガ負數ナルトキ. 前述ヘ如1ヨリモ小ナル數ノ對數ハ負數ナリ.

對數ガ負數ナルトキハ其ノ小數部ハ常ニ正數ニテ記シ,整數部ノミヲ負數ニテ表スモノトス.

例ヘバ $\log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=\log\frac{1}{100}+\log\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$

$$=(-2)+\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$=-2\frac{1}{8}=-2.125=-3+0{\cdot}875$$

ト表ス. 而シテ次ノ如キ記法ヲ用フ.

$$\log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=\bar{3}.875.$$

卽チ3ノ上ノ符號—ヲ以テ此ノ對數ノ整數部ガ -3 ナルコトヲ示セルナリ.

235. 指標及假數. 對數ノ整數部ヲ其ノ指標ト云ヒ,小數部ヲ其ノ假數ト云フ.

例ヘバ $\log 100\sqrt[4]{10}=2.25$ ナリ. 玆ニ整數部ノ2ハ此ノ對數ノ指標ニシテ0.25ハ其ノ假數ナリ.

又前節ノ $\log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=\bar{3}.875$ ニ於テ -3 ガ指標ニシテ0.875ガ假數ナリ.

236. 指標. 對數ノ指標ハ通常視察ニヨリテ容易ニ之ヲ見出スコトヲ得ベシ.

倍 $10^0=1,\quad 10^1=10,\quad 10^2=100,\quad 10^3=1000,\quad \ldots\ldots$

故ニ $\log 1=0,\ \log 10=1,\ \log 100=2,\ \log 1000=3,\ \ldots\ldots$

之ニヨリテ次ノ事柄ヲ知ル.

1ト10トノ間ノ數ノ對數ハ0ト1トノ間ノ數ナリ,從テ其ノ指標ハ0ナリ.

10ト100トノ間ノ數ノ對數ハ1ト2トノ間ノ數ナリ,從テ其ノ指標ハ1ナリ.

100ト1000トノ間ノ數ノ對數ハ2ト3トノ間ノ數ナリ,從テ其ノ指標ハ2ナリ.

逐次斯ノ如シ. 因テ次ノ法則ヲ得.

1ヨリモ大ナル數ノ對數ノ指標ハ其ノ數ノ整數部ノ數字ノ數ヨリモ1ダケ小ナル數ナリ.

例ヘバ302.85ハ其ノ整數部ガ三個ノ數字ヨリ成ルガ故ニ $\log 302.85$ ノ指標ハ2ナリ.

次ニ $10^{-1}=0.1,\quad 10^{-2}=0.01,\quad 10^{-3}=0.001,\quad \ldots\ldots$

$\therefore\ \log 0.1=-1,\quad \log 0.01=-2,\quad \log 0.001=-3,\quad \ldots\ldots$

之ニヨリ次ノ事柄ヲ知ル.

1ト0.1トノ間ノ數ノ對數ハ0ト -1 トノ間ノ

數ナリ,從テ其ノ指標ハ -1 ナリ.

0.1 ト 0.01 トノ間ノ數ノ對數ハ -1 ト -2 トノ間ノ數ナリ,從テ其ノ指標ハ -2 ナリ.

0.01 ト 0.001 トノ間ノ數ノ對數ハ -2 ト -3 トノ間ノ數ナリ,從テ其ノ指標ハ -3 ナリ.

逐次斯ノ如シ. 因テ次ノ法則ヲ得.

1ヨリモ小ナル正數ノ對數ノ指標ハ其ノ數ノ小數點ト最初ノ有効數字トノ間ニアル0ノ數ヨリモ1ダケ大ナル數ヲ絶對値トスル負數ナリ.

例ヘバ $\log 0.00028$ ノ指標ハ -4 ナリ.

237. 假數. **二ツノ數ガ唯小數點ノ位置ノミニヨリテ相異ナルトキハ其ノ二ツノ數ノ對數ノ假數ハ相等シ.**

例ヘバ 1250, 125, 12.5, 1.25, 0.125 等ノ對數ハスベテ相等シキ假數ヲ有ス.

何トナレバ或數 M ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル數ハ一般ニ $\mathrm{M}\times 10^n$ 或ハ $\mathrm{M}\div 10^n$ ニ等シ. (但 n ハ正ノ整數トス)

倂 $\log(\mathrm{M}\times 10^n)=\log \mathrm{M}+\log 10^n=\log \mathrm{M}+n,$

又 $\log(\mathrm{M}\div 10^n)=\log \mathrm{M}-\log 10^n=\log \mathrm{M}-n.$

卽チ何レモ其ノ對數ハ $\log \mathrm{M}$ ト丁度整數 n ダケノ差ヲ有スルニヨリ其ノ假數ハ $\log \mathrm{M}$ ノ假數ニ等シキコト明ナリ.

因テ任意ノ一數ノ對數ヲ知ルトキハ之ト小數點ノ位置ノミヲ異ニスル數ノ對數ハ容易ニ知ルコトヲ得ベシ.

例ヘバ $\log 3=0.4771$ ナリトスレバ

$$\log 0.3=\log 3-1=\bar{1}.4771.$$

$$\log 300=\log 3+2=2.4771.$$

例題

1. 次ノ各數ノ對數ノ指標ヲ求ム.

(一) 34.62. (二) 0.000342. (三) 120304.

(四) 3.0286. (五) 0.28607. (六) 4372.95.

2. $\log 63.49=1.8027$ ナルトキハ次ノ諸數ノ對數如何.

(一) 6.349. (二) 6349. (三) 0.006349.

3. $\log 2.475=0.3936$ ナルトキ次ノ諸數ヲ對數ト

スル數ヲ求ム.

(一) 2.3936. (二) $\bar{1}.3936$. (三) $\bar{3}.3936$.

238. 對數表. 一般ニ 10 ノ整數乘冪ニアラザル數ノ對數ハ多クハ無理數ナリ.

サレド通常其ノ近似値ヲ小數若干位迄計算シ,端下ヲ四捨五入シテ實用ニ供ス.

整數ノ對數ヲ小數若干位迄採リテ之ヲ併列セル表ヲ對數表ト云フ.

前諸節ノ理ニヨリ整數ノ對數ヲ知レバ其ノ他ノ任意ノ數ノ對數ハ容易ニ知ルコトヲ得ベシ.加之任意ノ數ノ對數ノ指標ハ視察ニヨリテ見出スコトヲ得ベシ. 故ニ對數表ニ於テハ唯整數ノ對數ノ假數ノミヲ掲載セルナリ.

對數表ハ其ノ中ニ掲載シアル假數ノ桁數ガ四桁ノモノヲ四桁ノ對數表,五桁ノモノヲ五桁ノ對數表ト名ヅク,其ノ他之ニ準ズ.

239. 對數表ノ使用法. 次ニ四桁ノ對數表ニツキ對數表使用法ヲ例示セン.

例 1. log 47.2 ヲ求ム.

解 指標ハ明ニ 1 ナリ. 假數ハ對數表ニヨレバ 0.6739 ナリ. 故ニ

$$\log 47.2 = 1.6739 \quad 答.$$

例 2. log 0.00825 ヲ求ム.

解 指標ハ -3 ナリ. 假數ハ對數表ニヨレバ 0.9165 ナリ. 故ニ

$$\log 0.00825 = \bar{3}.9165 \quad 答.$$

例 3. $\log x = 3.7185$ ナル x ノ値ヲ求ム.

解 先ヅ指標ガ 3 ナルニヨリ x ノ整數部ノ桁數ハ 4 ナリ. 次ニ對數表ニヨレバ假數ガ 0.7185 ナル數ハ 523 ナリ. 故ニ $x=5230$ 答.

例 4. 對數ガ $\bar{2}.4082$ ナル數ヲ求ム.

解 指標ガ -2 ナルニヨリ所要ノ數ハ小數點ト最初ノ有効數字トノ間ニ一ツノ 0 ヲ有ス. 次ニ對數表ニヨレバ假數ガ 0.4082 ナル數ハ 256 ナリ.

故ニ 所要ノ數 $=0.0256$ 答.

240. 比例部分. 通常四桁ノ對數表ニハ 1 ヨリ 1000 迄ノ數ノ對數ガ掲載シアルナリ. 從テ四ツ以上ノ數字ヨリ成ル數ノ對數ハ對數表ノ中ヨリ直接求ムルコトヲ得ズ. 之ヲ求ムルニハ次ノ法則ヲ適用スルナリ.

法則. 二數ノ差ガ其ノ各ニ對シテ餘程小ナル場合ニハ其ノ二數ノ對數ノ差ハ其ノ二數ノ差ニ比例ス.

此ノ法則ノ理由ハ理論高尚ニ亘ルヲ以テ玆ニハ省略ス.

例 1. log 361.4 ヲ求ム。

解 指標ハ 2 ナリ. 次ニ對數表ヨリ

log 361 ノ假數ハ 0.5575,

log 362 ノ假數ハ 0.5587.

此ノ二ツノ假數ノ差(表差ト云フ)ハ 0.0012 ナリ.

二數 361 ト 361.4 トノ差 0.4 ニ對應スル二數ノ對數ノ差ヲ x トスレバ上ノ法則ニヨリ

$$1:0.4=0.0012:x,\quad \text{之ヨリ}\quad x=0.00048,$$

小數第四位未滿ヲ四捨五入シテ計算スレバ

$$\log 361.4=2.5575+0.0005=2.5580 \quad \text{答.}$$

倍 x ノ値ハ對數表中比例部分ト記セル欄內 12 ト題セル行中ニ於テ左端ノ數字 4 ノ列ニ 4.8 トシテ與ヘアル數ニ外ナラズ.

此ノ 4.8 ノ點ハ小數第四位ト第五位トノ界ナ

ルコトヲ示セルナリ.

故ニ實際ニハ次ノ形式ニヨル.

$$\begin{array}{r}
\log 361.0=2.5575\\
4\ \ldots\ldots\ldots 4.8\\
\hline
\log 361.4=2.5580
\end{array}$$

例 2. log 0.25268 ヲ求ム.

解 指標ハ −1 ナリ.

其ノ他ハ表ニヨル.

$$\begin{array}{r}
\log 0.252 \quad =\bar{1}.4014\\
6\ldots\ldots\ldots 10.2\\
8\ldots\ldots\ldots 1.36\\
\hline
\log 0.25268=\bar{1}.4026 \quad \text{答.}
\end{array}$$

例 3. 對數ガ $\bar{3}.7652$ ナル數ヲ求ム.

解 指標ガ −3 ナルニヨリ所要ノ數ハ小數點ト最初ノ有効數字トノ間ニ 2 個ノ 0 ヲ有スル小數ナリ. 次ニ對數表ニヨリ

$$\log 0.00582=\bar{3}.7649$$
$$\log 0.00583=\bar{3}.7657 \qquad \text{表差}=0.0008.$$

因テ明ニ所要ノ數ハ 0.00582 ト 0.00583 トノ間ニアリ. 倍 $\bar{3}.7652-\log 0.00582=0.0003$ ナルニヨリ,所要ノ數ヲ $0.00582+x$ トスレバ

$$0.0008:0.0003=0.00001:x.$$

之ヨリ $\qquad x=0.000004.$

$$\therefore\ \text{所要ノ數}=0.00582+0.000004=0.005824 \quad \text{答.}$$

實際ニハ次ノ形式ニヨル.

(比例部分ノ欄ヲ用フレバ)

$$\begin{array}{r} \bar{3}.7652 \\ \bar{3}.7649 \ldots\ldots\ldots\ldots 0.00582 \\ \hline 3 \\ 3.2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4 \\ \hline 0.005824 \end{array}$$ 答.

例題

1. 對數表ヲ用ヒテ次ノ數ノ對數ヲ求メヨ.

(一) 873.　(二) 65.84.　(三) 0.002478.

(四) 5.8325.　(五) 683.095.　(六) 0.15262.

2. 對數表ヲ用ヒテ次式ニ適スル x ヲ求メヨ.

(一) $\log x=2.3345$.　(二) $\log x=\bar{1}.4633$.

(三) $\log x=\bar{3}.6527$.　(四) $\log x=0.7696$.

241. 對數的計算. 對數ヲ應用スレバ乘除ノ計算ハ對數ノ加減ニ,又冪法及開法ハ對數ノ乘除ニ導キテ計算スルヲ得ルニヨリ,其ノ結果計算ヲ簡便ニシ且是迄ニ行フコトノ不可能ナリシ或種ノ計算ニ於テモ其ノ結果ノ近似値ヲ求ムルコトヲ得ルナリ.

例 1. 3.268×15.97 ヲ計算セヨ.

解　此ノ積ヲ N トスレバ

$$\log N=\log 3.268+\log 15.97.$$

借對數表ニヨリ

$$\begin{array}{r} \log 3.268=0.5142 \\ \log 15.97=1.2033 \\ \hline \log N=1.7175 \end{array}$$

$$N=52.18$$ 答.

注意. 茲ニ得タルNノ値ハ其ノ近似値ナルコト勿論ナリ. 以下皆同樣ナリ.

例 2. $23.6^3\div9806.5$ ヲ計算セヨ.

解　此ノ數ヲNトスレバ

$$\log N=\log 23.6^3-\log 9806.5=3\log 23.6-\log 9806.5.$$

借對數表ニヨリ

$$\log 23.6=1.3729 \qquad \begin{array}{r} 3\log 23.6=4.1187 \\ \log 9806.5=3.9915 \\ \hline \log N=0.1272 \end{array}$$

$$N=1.3403$$ 答.

例 3. $\log 2=0.3010$, $\log 3.973=0.5991$ ナルコトヲ知リテ $\sqrt[7]{25^3}$ ヲ計算セヨ.

解　此ノ數ヲNトスレバ

$$N=25^{\frac{3}{7}}=(5^2)^{\frac{3}{7}}=5^{\frac{6}{7}}=\left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{6}{7}},$$

$$\therefore \log N=\frac{6}{7}\log\frac{10}{2}=\frac{6}{7}(\log 10-\log 2)$$

$$=\frac{6}{7}(1-0.3010)$$

$$=0.5991,$$

$\therefore$ N=3.973 答.

例 4. $(0.4)^{2x-1}=0.003$ ナル方程式ヲ解ケ.

解 兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$(2x-1)\log 0.4=\log 0.003,$$

因テ $2x-1=\dfrac{\log 0.003}{\log 0.4}=\dfrac{\bar{3}.4771}{\bar{1}.6021}$

$$=\frac{-(3-0.4771)}{-(1-0.6021)}=\frac{2.5229}{0.3979},$$

再ビ對數ヲ應用スレバ

$$\log(2x-1)=\log 2.5229-\log 0.3979,$$

$$\begin{array}{r} \log 2.5229=0.4019 \\ \log 0.3979=\bar{1}.5998 \\ \hline \log(2x-1)=0.8021 \end{array}$$

$$2x-1=6.340,$$

$\therefore$ $x=3.670$ 答.

注意. 例 4 ノ如ク指數ニ未知數ヲ含ム方程式ヲ指數方程式ト云フ.

問題 三十五

對數表ヲ用ヒテ次ノ數ノ對數ヲ求ム.

1. 65.29^5. 2. $\sqrt{0.0876}$. 3. $\dfrac{5^3}{\sqrt[3]{89}}$.

對數表ヲ用ヒテ次ノ計算ヲナセ.

4. 2.364×934.25. 5. $(1.3872)^5$.

6. $367.21\div 1467.9$. 7. $(346.58)^{\frac{1}{12}}$.

8. $\dfrac{0.0032}{638.1\times 3.5692}$. 9. $\dfrac{0.356\times 723.54}{896.72}$.

10. $\dfrac{46.723\times\sqrt{1.2145}}{(2.264)^3\times(1.8905)^6}$.

力 11. $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, $\log 7=0.8451$ ヲ知リテ次ノ對數ヲ求メヨ.

(一) $\log 1458$. (二) $\log 0.768$. (三) $\log 42000$.

(四) $\log\sqrt[5]{39.2}$. (五) $\log\dfrac{225}{224}-\log\dfrac{20}{189}$.

力 12. 72^{15} ノ桁數ヲ問フ. (指数をみるとわかる。
(指数を出すのは対数をとる)

力 13. $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{25}$ ノ小數點以下ノ最初ノ有効數字迄ノ0ノ數ヲ問フ.

次ノ方程式ヲ解ケ.

対数をとってみるとするなり。

14. $20^{3x-7}=2^{x+5}$. 15. $16^{2x+1}\times 36^{5-x}=1468$.

16. $\log(x-1)=\log(x^2-5x+4)-\log 10$.

17. $\log\sqrt{3x+4}+\dfrac{1}{2}\log(5x+1)=\log 3+1$.

18. 面積 400 坪ノ圓形ノ地面アリ. 其ノ直徑ヲ求ム. (但 $\pi=3.1416$)

第十三編　步合算及利息算

第一章　步合算

242. 步合算ノ公式. 或數Aヲ標準トシテ他ノ數Bヲ之ニ比較シテBノAニ對スル步合ヲトハ要スルニB:Aナル比ノ値ニ外ナラズ. 玆ニ標準Aヲ元高,之ト比較セル數Bヲ步合高ト云フコトハ既ニ算術ニテ知レル所ナリ. 因テ元高,步合高,步合ノ間ノ關係ハ次ノ如シ.

$$r=\frac{B}{A},\qquad B=Ar,\qquad A=\frac{B}{r}.$$

次ニ元高ト步合高トノ和ヲ合計高ト名ヅケ,元高ヨリ步合高ヲ減ジタル差ヲ殘高ト名ヅケ,夫夫S及Dヲ以テ之ヲ表セバ次ノ如キ關係アリ.

$$S=A+B=A(1+r),$$

$$D=A-B=A(1-r).$$

此等ノ二ツノ關係ヨリA, B, S, r 又ハ A, B, D, r ノ中何レカ二ツヲ知リテ他ノ二ツヲ求ムルコトヲ得ベシ. 例ヘバAヲ求ムル公式ハ次ノ如シ.

$$A=\frac{S}{1+r}\quad 又\quad A=\frac{D}{1-r}.$$

注意. 學者ハ宜シク算術教科書ニツキテ步合算ノ問題ヲ練習スベシ.

243. 內割外割. 例ヘバ定價5圓ノ品物ヲ4圓ニ賣ラバ割引高ハ1圓ニシテ割引步合ハ$1^{圓}\div5^{圓}=0.2$ 即チ定價ノ2割引ナリ.

若割引高ノ賣價ニ對スル步合ヲ求ムレバ$1^{圓}\div4^{圓}=0.25$ 即チ2割5分ナリ. 此ノ事柄ヲ特ニ賣價ハ定價ノ外2割5分引ナリト云フ.

斯ノ如ク步合高Bノ殘高ニ對スル步合ヲ特ニ元高Aノ外割步合ト云フ.

今外割步合ヲr'ニテ表セバ

$$r'=\frac{B}{A-B}.$$

外割步合ニ對シ通常ノ步合ヲ**內割步合**ト云フ.

內割步合rト外割步合r'トノ關係次ノ如シ.

上ノ公式ニ於テ$B=Ar$ヲ代入スレバ

$$r'=\frac{Ar}{A(1-r)}=\frac{r}{1-r}.$$

即チ　$$r'=\frac{r}{1-r}.$$

之ヨリ　　$r=\frac{r'}{1+r'}$.

例　題

1. 玄米2斗ヲ舂キテ白米1斗9升ヲ得タリ. 舂耗高ハ原ノ玄米ノ内何割又外何割ニ當ルカ.

2. 内2割ハ外幾割ニ當ルカ. 外5割ハ内幾割ニ當ルカ.

3. 玄米一石ヲ内8分耗ニ舂クト外8分耗ニ舂クトニヨリ得ベキ白米ノ差何程ナルカ.

4. 定價5.5圓ノ書籍ヲ外1割引ニテ買ヒタリ, 買價如何. 又内1割引ナラバ如何.

5 或品物ヲ内1割2分引ニ賣ルト外1割2分引ニ賣ルトニテ90錢ノ差アリト云フ 此ノ品物ノ價何程ナルカ.

第二章　利息算

244. 單利法. 元金, 利息, 利率, 期間等ノ言葉ノ意味ハ既ニ算術ニ於テ熟知セル所ナリ.

元金ヲP, 利息ヲI, 利率ヲrトシ, 且期間ヲ表ス數ヲtトスレバ

$$I=Prt.$$

此ノ式ノ示ス如ク單利法ニ於テハIハP, r, tノ何レニモ比例スルナリ.

又元利合計ヲSトスレバ

$$S=P(1+rt).$$

245. 手形ノ割引. 手形ノ所持人ガ支拂期日ヨリモ前ニ其ノ金額ヲ受取ラントスル場合ニハ期日ニ至ル迄ノ利息ニ相當スル金額ヲ額面ヨリ引キ去ラルルモノナリ. 之ヲ**手形ノ割引**ト云ヒ, 引キ去ラルル金額ヲ**割引高**, 手取金ヲ**現價**, 割引ニ用フル利率ヲ**割引步合**ト云フ.

割引ニ二種アリ. 手形面ノ金高ガ割引ノ時ヨリ期日迄ニ生ムベキ利息ヲ割引スルヲ**銀行割引**ト云フ. 之ハ額面高ノ内割引ニ當ル. 又現價ト現價ガ割引ノ時ヨリ期日迄ニ生ムベキ利息トノ和ガ額面高ニ等シクナル樣ニ割引スルヲ**眞割引**ト云フ. 之ハ額面高ノ外割引ニ當ル. (算術參照)

今額面高ヲA, 割引高ヲB, 割引步合ヲr, 割引期間ヲ表ス數ヲt, 現價ヲPトスレバ次ノ關係アリ.

銀行割引　$B=Art$,　$P=A-B=A(1-rt)$,

眞割引　$P=\dfrac{A}{1+rt}$,　$B=A-P=\dfrac{Art}{1+rt}$.

例. 割引步合年6步トシテ額面250圓,現今ヨリ4ケ月後ニ支拂ハルベキ手形ノ割引高及現價ヲ求ム. 但銀行割引及眞割引ノ二樣ニ計算セヨ.

解 (1) 銀行割引　$B=250\times0.06\times\dfrac{4}{12}=5$,

$P=250-5=245$.

(2) 眞割引　$P=\dfrac{250}{1+0.06\times\dfrac{4}{12}}=245.10$弱,

$B=250-245.10$弱$=4.90$强.

答 銀行割引　割引高5圓,　現價245圓.
眞割引　割引高4.90圓强,　現價245.10圓弱.

注意. 元來割引ハ眞割引ヲ用フルヲ正當トス. サレド通常割引ノ期間ハ短キガ故ニ外割引ト內割引トノ差ハ極メテ小ナリ. 因テ計算ノ煩雜ヲ避クルタメニ一般ニハ銀行割引ヲ用フルヲ通常トス.

學者宜シク算術教科書ニツキテ手形ノ割引ニ關スル問題ノ練習ヲナスベシ.

246. 支拂期日ノ平均. 同ジ人ニ對シテ支拂フベキ期日ノ相異ナル數口ノ金高アルトキ,

之ヲ同時ニ支拂ヒテ利息ノ上ニ損益ナキ樣ニ期日ヲ定ムルコトヲ支拂期日ノ平均ト云ヒ,其ノ期日ヲ平均期日ト云フ. 但利率ハ何レノ口ノ金高ニツキテモ同樣ナリトス.

例ヘバ今ヨリl日後ニA圓,m日後ニB圓,n日後ニC圓ヲ支拂フベキ約束アルトキ,其ノ代リニ一時ニ之ヲ支拂ハンニハ其ノ平均期日ハ次ノ如ク之ヲ計算スルヲ得ベシ.

假ニ一日ヲ單位トスル割引ノ步合ヲrトスレバ三口ノ金額ノ支拂期日迄ノ利息ハ夫夫

Alr圓,　Bmr圓,　Cnr圓

ナリ. 次ニ平均期日ヲ今ヨリx日後トスレバ此ノ三口ヲ合セタルモノノx日間ニ於ケル利息ハ

$(A+B+C)xr$圓

ナリ. 因テ次ノ方程式ヲ得.

$$Alr+Bmr+Cnr=(A+B+C)xr.$$

$$\therefore\ x=\frac{Al+Bm+Cn}{A+B+C}.$$

故ニ所要ノ平均期日ハ$\dfrac{Al+Bm+Cn}{A+B+C}$日後ナリ.

注意. 上ノ方法ハ額面高ノ生ム利息ヲ相等シ

タ置キタルナレバ銀行割引ニヨレルナリ. 故ニ此ノ結果ハ又銀行割引ニヨリ各口ノ現價ヲ求メテ之ニヨリテ計算スルコトヲ得ルナリ.

例　題

1. 今ヨリ三ヶ月後ニ500圓,五ヶ月後ニ1500圓,八ヶ月後ニ1000圓ヲ支拂フ代リニ一時ニ全額ヲ支拂ハントス. 其ノ支拂期日ヲ求ム.

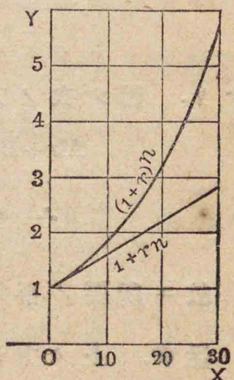
2. 五月一日ヨリ80日後ニ120圓,70日後ニ160圓,65日後ニ80圓ヲ支拂フ代リニ全額ヲ一時ニ支拂フニハ支拂期日ヲ何月何日トスベキカ.

247. 複利法. 複利法ノ簡單ナル場合ハ算術ニ於テ學ビタル所ナリ.

元金P,年利率r,一年毎ノ複利ニテn年後ノ元利合計ヲSトスレバ

$$S=P(1+r)^n \quad . \ . \ (1)$$

ナリ. 之ヨリ考フレバ複利法ニ於ケル利息ハ元金Pニ比例スレドモr及nニハ比例セズ.



今$r=0.06$トシ,nヲ變數トシテ複利法ニ於ケル元利合計ノ歩合$(1+r)^n$ト單利法ニ於ケル元利合計ノ歩合$1+rn$トノぐらふヲ畫ケバ圖ニ示スガ如シ. 之ニ因テ見ルニ複利法ノ場合ハnノ增大スルニ從テ元利合計ノ歩合ノ增大ハ次第ニ急激トナルヲ見ルベシ.

次ニ利息ヲIニテ表セバ

$$I=S-P=P\{(1+r)^n-1\} \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

注意. 利息ノ元金ニ對スル歩合ハ單利法ニテハrn,複利法ニテハ$(1+r)^n-1$ナリ,故ニ此ノぐらふハ上ノぐらふノ縱軸上1ナル點ヲ通リテ水平線ヲ引キ之ヲ橫軸トシタルモノニ外ナラズ.

248. 對數ノ應用. 複利ノ計算ニ於テハ多クノ場合對數表ヲ用フルヲ便利トス. 即チ(1)ニヨリ

$$\log S=\log P+n\log(1+r),$$

從テ　$$\log P=\log S-n\log(1+r).$$

又　$$\log(1+r)=\frac{1}{n}(\log S-\log P).$$

又　$$n=\frac{\log S-\log P}{\log(1+r)}.$$

注意. 複利法ニ於テ利息繰入期間ガ一年ナラザルトキハ,ヶハ其ノ期間ヲ單位トセル利率ニシテ,nハ期間ヲ此ノ單位期間ニテ計リタル數トスレバ可ナリ.

例 1. 年利率四分,一年每ノ複利ニテ三百圓ヲ九年九ヶ月間預ケ置クトキノ元利合計ヲ求ム.

解 九年ノ終卽チ十年目ノ初メニ於ケル元利合計ハ $300\times(1.04)^9$ 圓ナリ. 故ニ之ヨリ九ヶ月後ノ元利合計(卽チ所要ノ元利合計)ヲS圓トスレバ

$$S=300\times(1.04)^9\times\left(1+0.04\times\frac{9}{12}\right)$$
$$=300\times(1.04)^9\times1.03.$$

因テ　$\log S=\log 300+9\log 1.04+\log 1.03$
$$=2.4771+0.1530+0.0128$$
$$=2.6429$$

之ヨリ　$S=439.4.$　　　答　約439.4圓.

例 2. 年利率6分,半年每ノ複利ニテ銀行ニ預クレバ幾年後ニ元利合計ハ元金ノ二倍トナルカ.

解 半年每ノ利率ハ3分トナル. 今所要ノ年限ヲ半年ノn倍トシ,元金ヲPトスレバ

$$2P=P(1+0.03)^n \quad 卽チ \quad 2=1.03^n,$$

$$\therefore\ \log 2=n\log 1.03.$$

之ヨリ　$n=\dfrac{\log 2}{\log 1.03}=\dfrac{0.3010}{0.0128}.$

$$\log n=\log 0.3010-\log 0.0128$$
$$=\bar{1}.4786-\bar{2}.1072=1.3714,$$

因テ　$n=23.52$　　$0.5^{年}\times23.52=11.76^{年}.$

答　約11年9ヶ月.

注意. 以上ノ諸例ニ於テハ四桁ノ對數表ヲ用ヒタレバ其ノ結果ニハ多少ノ誤差アルコトニ注意スベシ. サレド尙桁數ノ多キ對數表ヲ用フレバ一層誤差ノ小ナル結果ヲ得ベシ.

問題　三十六

1. 金260圓ヲ年利率4分ノ複利ニテ18年間銀行ニ預ケ置クトキハ元利合計何程トナルカ.

2. 金七百五十圓ヲ年利率五分ノ複利ニテ預クレバ幾年ノ後元利合計ガ千八百圓トナルカ.

3. 年利率四分八厘一年每ノ複利ニテ五ヶ年ノ後ニ受取ルベキ四千圓ノ現價幾許ナルカ.

4. 元金四千八百圓ヲ五ヶ年間預ケ置キ一年每ノ複利ニテ元利合計六千六百圓ヲ得タリ. 其

ノ年利率ヲ求ム.

5. 一年毎ノ複利ニテ年利率五分ナラバ幾年ニテ又年利率四分ナラバ幾年ニテ元利合計ガ元金ノ二倍以上トナルカ.

6. 年利率六分,一年毎ノ複利ニテ十ケ年後ニ五千圓又ハ十五ケ年後ニ一萬圓ヲ得ンニハ現今幾許ノ元金ヲ預ケ置クベキカ.

249. 複利表,現價表. 複利法ニ於テ元利合計S又ハ元金(或ハ現價)Pヲ計算スル公式

$$S=P(1+r)^n,\qquad P=\frac{S}{(1+r)^n}$$

ニ於テr,nノ種種ノ値ニ對スル$(1+r)^n$又ハ$\frac{1}{(1+r)^n}$ノ値ヲ豫メ計算シテ之ヲ表ニ作リ置クトキハ至極便利ナリ. 前者ヲ複利表,後者ヲ現價表ト云フ.

算術教科書ノ卷末ニ之ヲ揭ゲ置キタリ,此ノ表ヲ用ヒテ上ノ問題ノ或モノニ應用シテ對數計算ヲ應用シタル結果ト比較シ見ヨ.

250. 年賦積立金. 年利率r,一年毎ノ複利ニテ毎年末a圓宛預クルトキ第n年目ノ終ニ於ケル元利合計Sヲ求メントス.

先ヅ最初ノ年ノ終ニ預ケタルa圓ハ第n年目ノ終ニ於テ$a(1+r)^{n-1}$圓ノ元利合計トナル.

第二年目ノ終ニ預ケタルa圓ハ第n年目ノ終ニ於テ$a(1+r)^{n-2}$圓ノ元利合計トナル.

斯ノ如ク$1+r$ノ指數ガ次第ニ1ダケ減ジ行キ第n年目ノ終ニ預ケタルa圓ハ其ノ儘a圓ナルコト明ナリ. 因テ

$$S=a+a(1+r)+a(1+r)^2+\dots\dots+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-1}$$
$$=a\{1+(1+r)+(1+r)^2+\dots\dots+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-1}\}$$

之ヨリ $$S=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}.$$

例 1. 毎年末五十圓宛預クルトキ年利率五分一年毎ノ複利ニテ二十年後ニハ元利合計幾許トナルカ.

解 公式ニ於テ $a=50,\ r=0.05,\ n=20$ ト置ケバ

$$S=\frac{50}{0.05}(1.05^{20}-1)=1000(1.05^{20}-1).$$

對數表ニヨリテ計算スレバ

$$1.05^{20}=2.655,$$
$$S=1000\times1.655=1655.$$

答 千六百五十五圓.

例 2. 年利率四分一年毎ノ複利ニテ二十五ケ

年ノ終ニ於テ元利合計五千圓ヲ得ンニハ每年末幾圓宛預クベキカ.

解　公式ニ於テ $S=5000$, $r=0.04$, $n=25$ ト置ケバ

$$5000=\frac{a}{0.04}(1.04^{25}-1),$$

$$\therefore\quad a=\frac{200}{1.04^{25}-1}.$$

對數表ヲ用ヒテ計算スレバ　　$1.04^{25}=2.661$,

$$\therefore\quad a=\frac{200}{1.661}.$$

再ビ對數表ヲ用ヒテ計算スレバ

$a=120.4$.　　　答　120.4 圓.

251. 年賦償還.　金 A 圓ヲ年利率 r, 一年每ノ複利ニテ借入レ, 每年末同額ノ金額ヲ返濟シテ n 年ノ後皆濟トナサントスルトキ其ノ年賦金 a 圓ヲ求メントス.

先ヅ第一年ノ終ノ元利合計ハ $A(1+r)$ 圓ナルガ故ニ第二年目ノ元金ハ $A(1+r)-a$ 圓ナリ, 次ニ第二年ノ終ニハ元利合計ハ $\{A(1+r)-a\}(1+r)$ 圓, 從テ第三年目ノ元金ハ $A(1+r)^2-a(1+r)-a$ 圓ナリ. 次第ニ斯ノ如ク第 $n+1$ 年目ノ元金ハ 0 トナル.

因テ

$$A(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-\dots\dots-a(1+r)-a=0,$$

移項スレバ

$$A(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\dots\dots+a(1+r)+a$$

$$=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\},$$

$$\therefore\quad a=A\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

上ノ公式ハ次ノ如クスルモ亦求ムルコトヲ得.

先ヅ元金 A 圓ノ n 年後ノ元利合計ハ $A(1+r)^n$ 圓ナリ. 別ニ每年末 a 圓宛積立ツルトキハ n 年後ノ元利合計ハ $\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}$ 圓ナリ. n 年後ニ皆濟トナルヲ以テ此ノ兩者ハ相等シ.

$$\therefore\quad A(1+r)^n=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\},$$

$$\therefore\quad a=A\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

例.　千圓ヲ年利率八分, 一年每ノ複利ニテ借入レ, 之ヲ十五ケ年賦ニテ返濟セントス. 年賦金ヲ求ム.

解　公式ニ於テ $A=1000$, $r=0.08$, $n=15$ ト置ケバ

$$a=1000\times\frac{0.08\times1.08^{15}}{1.08^{15}-1}.$$

對數表ヲ用ヒテ計算スレバ

$a=116.9$.　　　答　約 116.9 圓.

252. 年金ノ現價. 一定ノ期限間若クハ永續シテ毎年一定ノ金額ヲ受取ル株ヲ**確實年金**ト云ヒ,而シテ前者ヲ**定期年金**,後者ヲ**永續年金**ト云フ.

(I) **定期年金ノ現價.**

前者ノ公式ニ於テa圓ヲ年金,A圓ヲ現價ト考フルコトヲ得ベシ. 故ニ定期年金ノ現價ヲ求ムル公式ハ次ノ如シ.

$$A=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r(1+r)^n}$$

又ハ

$$=\frac{a}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}.$$

注意. 此ノ公式ハ又別ニ單獨ニ求ムルコトヲ得. 卽チ先ヅ第一年目,第二年目,……,第n年目ニ受取ルベキa圓ノ現價ハ夫夫

$$\frac{a}{1+r}\text{圓},\quad \frac{a}{(1+r)^2}\text{圓},\quad \ldots\ldots,\quad \frac{a}{(1+r)^n}\text{圓}$$

ナリ,之ヲ加フレバ上ノ公式ヲ得ベシ.

(II) **永續年金ノ現價.**

上ノ公式ニ於テnヲ無限ニ大ナリトスレバ

$$A=\frac{a}{r}$$

トナル. 之ハ永續年金ノ現價ニ外ナラズ.

例. 年金額150圓ノ十五年ノ定期年金ノ現價ヲ問フ. 但年利率六分,一年毎ノ複利トシテ計算セヨ.

解 公式ニ於テ $a=150,\ r=0.06,\ n=15$ ト置ケバ

$$A=\frac{150}{0.06}\left\{1-\frac{1}{(1+0.06)^{15}}\right\}=2500\times\left\{1-\frac{1}{1.06^{15}}\right\}.$$

對數表ヲ用ヒテ計算スレバ

A=1456.　　答 1456圓.

問題 三十七

1. 年利率五分五厘,一年毎ノ複利ニテ毎年末二百圓宛預クルトキ十五年後ノ預金總計ハ幾許トナルカ.

2. 或人毎年ノ終ニ五十圓宛貯金ス,年利率四分五厘ナルトキハ五十年ノ終ニハ總額幾許トナルカ.

3. 毎月末a圓宛預入レ,年利率r,一年毎ノ複利トスルトキn年後ノ元利合計ヲS圓トスレバ

$$S=\frac{a\left(12+\frac{11}{2}r\right)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

4. 或人子供ノ生レシ月ヨリ將來ノ教育費トシテ每月末五圓宛貯金セリ. 此ノ子供ガ滿十五歲トナルトキ其ノ貯金ノ總額幾何トナルカ. 但年利率四分八厘,一年每ノ複利トシテ計算セヨ

5. 年利率五分,一年每ノ複利ニテ每年末ニ等額ノ金高ヲ預ケ十ケ年目ノ終ニ元利合計千圓ヲ得ントスルニハ每年末何程宛預クベキカ.

6. 年利率六分,年金額 350 圓ナル二十ケ年ノ定期年金ノ現價ヲ求ム.

7. 或人 200 圓ノ永續年金ノ株ヲ賣拂ハントス,年利率五分ノトキハ其ノ價格如何.

8. 現今五百圓ノ負債ヲ有スル人アリ,今後一年每ニ若干圓宛八回ニ返濟セントス,年利率七分トスレバ每年拂フベキ金額如何.

9. 或人生命保險ニ加盟シ,每年四十圓ノ保險料ヲ納ムルコト廿六回ノ後間モナク死去シ遺族ハ若干ノ保險金ヲ受取リタリ,若此ノ人每年保險料ダケヲ年利率四分ニテ銀行ニ預ケ置キタランニハ總額ハ保險金ヨリモ 233 圓少ナカルベシト

云フ. 仍テ問フ保險金額如何.

10. 甲ガ乙ヨリ每年末ニ於テ 50 圓宛受取ルベキ契約ヲナシタルニ明治四十二年度ヨリハ乙ハ其ノ契約ヲ每年履行セザルヲ以テ大正八年ノ末ニ於テ甲ハ其迄ニ乙ヨリ受取ルベキ分ヲ全部纏メテ請求セントス. 其ノ金高幾許ナルカ. 但年利率 5 分,一年每ノ複利トシテ計算セヨ.

11. 或人金若干圓ヲ借リ 15 年間每年 300 圓宛返濟シテ皆濟トナリタリト云フ. 其ノ借金何程ナリシカ. 但年利率六分一年每ノ複利トシテ計算セヨ.

12. 6 年間据置其ノ後 12 年間續ク年金 5000 圓ノ現價如何. 但年利率六分トシテ計算セヨ.

附　　　錄

I. 開平法及開立法ノ省略算

1. 開平法ノ省略算.

今例ヲ擧ゲテ開平法ノ省略算ヲ説明スベシ.

例ヘバ 4880625 ノ平方根ヲ小數第三位迄求ムルコトトスベシ. 普通ノ運算ハ次ノ如シ.

運算

```
    4|88|06|25(2209.213 答.
    4
   42)88
      84
 4409)40625
      39681
  44182)94400
        88364
  441841)603600
         441841
 4418423)16175900
         13255269
          2920631
```

今根ノ整數部ヲ a トシ小數部ヲ b トスレバ

$$a=2209, \qquad b=0.213\ldots\ldots,$$

倍

$$4880625=a^2+2ab+b^2,$$

$$\therefore\ 4880625-a^2=2ab+b^2.$$

上ノ運算ニツキテ見ルニ

$$4880625-a^2=944,$$

$$\therefore\ 944=2ab+b^2.$$

此ノ兩邊ヲ$2a$ニテ除スレバ

$$\frac{944}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

之ニヨリテbノ代リニ$\frac{944}{2a}$ヲ以テスレバ$\frac{b^2}{2a}$ダケ大キクナル,換言スレバ$\frac{b^2}{2a}$ダケノ誤差ヲ生ズ.今此ノ誤差ノ限界ヲ吟味セン.

先ヅbハ小數部ナレバ1ヨリモ小ナリ.

$$\therefore\ b^2<1.$$

又aハ四桁ノ整數ナルガ故ニ少ナクトモ1000ヨリモ小ナラズ.

$$\therefore\ 2a\geqq 2000,$$

$$\therefore\ \frac{b^2}{2a}<\frac{1}{2000}.\ 卽チ\ \frac{b^2}{2a}<0.0005.$$

卽チ誤差ハ0.0005ヨリモ小ナリ.

偖 $$\frac{944}{2a}=\frac{944}{2\times 2209}=0.2136\ldots\ldots$$

ナルガ故ニ明ニ

$$0.2136\ldots\ldots>b>0.2131\ldots\ldots$$

故ニ $b=0.213\ldots\ldots$ ナルコトハ確ナリ.

因テ通常ノ方法ニテ平方根ヲ四桁ダケ求ムレバ其ノ次ノ三桁ハ割算ヲ代用シテ之ヲ求ムルコトヲ得ベシ.

一般ニ平方根ヲ$n+1$桁ダケ通常ノ方法ニテ求メ,其ノ二倍ヲ以テ最後ノ剩餘ヲ割レバ其ノ次ノn桁ダケヲ求メ得ベシ.

例. $\sqrt{2}$ヲ小數第六位迄求ム.

運算
```
          2(1.414
           1
       24)100
           96
      281)400
          281
     2824)11900
          11296
       2828)6040(213
            5656
             3840
             2828
            10120
             8484
             1636      答 1.414213.
```

說明 小數第六位迄求ムルナレバ結局平方根ヲ七桁求ムルコトトナル. 故ニ初メノ四桁ハ通常ノ方法ニテ求メ,其ノ二倍2828ニテ最後ノ剩餘604ヲ割リテ後ノ三桁ヲ求メタルナリ.

而シテ割算ノ商213ハ別ニ書クヲ要セズ續イテ1.414ノ右ニ列記シテ可ナリ.

2. 開立法ノ省略算.

次ニ例ヲ擧ゲテ開立法ノ省略算ヲ說明スベシ.

例ヘバ30ノ立方根ヲ小數第六位迄求ムルコトトセンニ,普通ノ運算ハ次ノ如シ.

運算

		30 (3.107232 答.
		27
	2700	3000
91	91	
	2791	2791
2	1	209000000
9307	28830000	
	65149	
14	28895149	202266043
93212	49	6733957000
	2896034700	
	186424	
4	2896221124	5792442248
932163	4	941514752000
	289640755200	
	2796489	
6	289643551689	868930655067
9321692	9	72581096933000
	28964634818700	
	18643384	
	28964653462084	57929306924168
		14654790008832

今根ヲ二部ニ分チテ

$$a=3.107, \qquad b=0.000232\ldots\ldots$$

トスレバ

$$30=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$\therefore \quad 30-a^3=3a^2b+3ab^2+b^3.$$

此ノ兩邊ヲ$3a^2$ニテ除スレバ

$$\frac{30-a^3}{3a^2}=b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}.$$

之ニヨリテbノ代リニ$\dfrac{30-a^3}{3a^2}$ヲ以テスレバ$\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{b^3}{3a^3}$ダケノ誤差アリ. 今此ノ誤差ノ根界ヲ吟味セン.

先ヅbハ小數第四位ヨリ始マル數ナルガ故ニ

$$b<0.001, \qquad b^2<0.000001, \qquad b^3<0.000000001.$$

又aハ一ノ位ヨリ始マルガ故ニ$a\geqq 1$, 從テ $3a^2\geqq 3$ ナリ.

$$\therefore \quad \frac{b^2}{a}<0.000001,$$

又 $$\frac{b^3}{3a^2}<0.000000001.$$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}<0.000001001.$$

即チ小數第六位ニ於テ1ダケノ誤差ヲ生ズルコトハ殆ナシト見テ可ナリ.

借前ノ運算ニツキテ見ルニ

$$30-a^3=0.006733957,$$

$$3a^2=28.960347,$$

$$\therefore \quad \frac{30-a^3}{3a^2}=\frac{0.006733957}{28.960347}=0.000232\ldots\ldots$$

トナリテ此ノ結果ハ眞ノbトハ小數第六位迄ハ異ナルコトナシ.

因テ立方根ヲ通常ノ方法ニテ四桁求ムレバ其ノ次ノ三桁ハ割算ニテ求メ得ベシ.

一般ニ立方根ヲ通常ノ方法ニテ$n+1$桁ダケ求ムレバ其ノ次ノn桁ダケハ割算ニヨリテ求メ得ベシ.

注意. 割算ヲ施ス際$30-a^3$, 及$3a^3$ノ如キハ位ニ關セズ途中ノ數ヲ其ノ儘整數ノ如ク考ヘテ計算シテ可ナリ. 前ノ例ニ於テハ

$$30-a^3 \text{ ヲ } 6733957$$

$$3a^2 \text{ ヲ } 28960347$$

ト考ヘテ次第ニ0ヲ添ヘテ計算スルナリ.

例. 5ノ立方根ヲ小數第六位迄求メヨ.

運算

```
                          5       (1.709976
                          1
   37)       300        ----
     }       259)       4000
     }       ---}
     }       559}       3913
     }        49)       ----
   14)      -----        87000000
  ----      8670000
  5109        45981)
            -------}
            8715981}     78443829
                 81)     --------
            -------       8556171
            8762043

              8762043)85561710(976
                      78858387
                      --------
                       67033230
                       61334301
                       --------
                        56989290
                        52572258
                        --------
                         4417032
```

答 1.709976.

說明 小數第六位迄求ムルナレバ結局七桁求ムルコトトナル,故ニ四桁ダケ通常ノ方法ニテ計算シ,其ノ後三桁ハ割算ヲ用ヒタリ.

問題

次ノ數ノ平方根ヲ小數第五位迄求メヨ.

1. 3.　　2. 5.3.　　3. 3.14159.

4. 414.　　5. 0.12345.　　6. $\frac{5}{49}$.

7. $\frac{17}{144}$.　　8. $\frac{23}{105}$.

次ノ數ノ立方根ヲ小數第五位迄求メヨ.

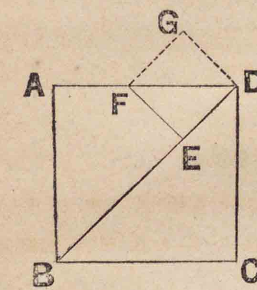
9. 10.　　10. 3000.　　11. 64.827.

12. 3.14159　　13. $\frac{7}{15}$.　　14. $\frac{355}{113}$.

II. 通約スベカラザル量ノ一例

正方形ノ一邊ト其ノ對角線ハ互ニ通約スベカラサル量ナルコトノ證明.

既ニ第184節ニ述ベシガ如ク正方形ノ一邊ト其ノ對角線トハ互ニ通約スベカラザル量ナリ. 次ニ之ヲ證明セン.



ABCD ヲ一ツノ正方形トシ,其ノ對角線BD上ニBEヲABニ等シク取リ,Eニ於テBDニ垂線EFヲ立テADトFニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

$$AF=FE=DE$$

ナルコトハ容易ニ證明スルコトヲ得. 因テ

$$DE=BD-AB \quad . \ . \ . \quad (1)$$

$$DF=AB-DE \quad . \ . \ . \quad (2)$$

ナリ. 若ABトBDトニ公度アラバ(1)ニヨリテ其ノ公度ハDEノ約量ナラザルベカラズ,從テ之ハ又ABトDEトノ公度ナリ,而シテABトDEトノ公度ハ(2)ニヨリテDFノ約量ナルベク,從テ之ハDEトDFトノ公度ナルベシ.

故ニABトBDトノ公度ハ結局DEトDFトノ公度ナリ.

然ルニDE及DFハ夫夫正方形DEFGノ邊及對角線ナリ,而シテ新正方形ノ一邊ハ原正方形ノ一邊ノ半分ヨリモ小ナルコト明ナリ,又新正方形ニツキテ同樣ナル手段ヲ施セバABトBDトノ公度ハ尙小ナル正方形ノ邊ト對角線トノ公度ナルコトヲ證明シ得ベシ.

之ヲ幾度モ繰返セバ漸次際限ナク小トナル正方形ヲ得ベク,且此等ノ正方形ノ邊ト對角線トハ共ニ原正方形ノ邊ト對角線トノ公度ノ倍量ナラザルベカラズ,是アリ得ベカラザルコトナリ. 故ニ正方形ノ一邊ト對角線トニハ公度ナシ,從テ互ニ通約スベカラザル量ナリ.

III. 級數補遺

簡單ナル級數ノ和ヲ求ムルコト

例 1. $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$ ヲ求ム.

解 $S_1=1+2+3+\ldots\ldots+n$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$$

ト置ケバ先ヅ既ニ知レル如ク

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

偖 x ノ値ノ如何ニ拘ラズ恒ニ

$$(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$$

ナリ. 今 x ノ代リニ $n, n-1, n-2, \ldots\ldots, 2, 1$ ヲ置ケバ

$$\begin{aligned}
(n+1)^3-n^3&=3n^2+3n+1,\\
n^3-(n-1)^3&=3(n-1)^2+3(n-1)+1,\\
(n-1)^3-(n-2)^3&=3(n-2)^2+3(n-2)+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
3^3-2^3&=3\cdot2^2+3\cdot2+1,\\
2^3-1^3&=3\cdot1^2+3\cdot1+1,
\end{aligned}$$

此等ノ等式ヲ邊邊相加フレバ

$$(n+1)^3-1=3S_2+3S_1+n,$$

即チ

$$3S_2=(n+1)^3-3S_1-(n+1).$$

之ヨリ

$$\begin{aligned}
S_2&=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-3\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\right\}\\
&=\frac{n+1}{3}\left\{(n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right\}\\
&=\frac{n+1}{6}n(2n+1).
\end{aligned}$$

答 $S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

例2. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots\ldots+n(n+1)$ ヲ求ム.

解 此ノ和ヲSニテ表セバ

$$\begin{aligned}S&=1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\ldots\ldots+n(n+1)\\&=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\ldots\ldots+(n^2+n)\\&=(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots\ldots+n)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$ 答.

別解 $S'=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)$ ト置クトキハ又

$$S'=0\cdot1\cdot2+1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots\ldots+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$$

此ノ兩式ヲ邊邊相減ズレバ

$$\begin{aligned}0&=3\{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots\ldots+n(n+1)\}-n(n+1)(n+2)\\&=3S-n(n+1)(n+2),\end{aligned}$$

之ヨリ $$S=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

例3. 正三角錐形ニ同大ノ球ヲ積ミ上ゲタルモノアリ,其ノ最下層ノ一邊ニハn個ノ球ガ列ビ居ルト云フ. 球ノ總數ヲ求ム.

解 題意ニヨレバ各層ハ球ガ正三角形狀ニ列ビ,一層宛上ニ進ムニ從テ其ノ一邊ニ列ベル球ノ數ハ一ツ宛減ジ最上層ニ至レバ其ノ數ハ一個トナルベシ. 而シテ先ヅ最下層ニ列ベル球ノ數ハ明ニ

$$1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

ナルベシ. 從テ所要ノ球ノ數ヲNニテ表セバ

$$\begin{aligned}N&=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)n+\ldots\ldots+\frac{1}{2}3\cdot2+\frac{1}{2}2\cdot1\\&=\frac{1}{2}\{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots\ldots+n(n+1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$ 答.

例4. $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n(2n+2)}$ ヲ求ム.

解 一般ニ $\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ ナルガ故ニ

$$\begin{aligned}\frac{2}{2\cdot4}&=\frac{4-2}{2\cdot4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\\\frac{2}{4\cdot6}&=\frac{6-4}{4\cdot6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6},\\\frac{2}{6\cdot8}&=\frac{8-6}{6\cdot8}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\\frac{2}{2n(2n+2)}&=\frac{(2n+2)-2n}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

邊邊相加ヘ且所要ノ和ヲSニテ表セバ

$$2S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}.$$

之ヨリ $$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$$ 答.

問題

1. $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+20^2$ ヲ求ム.

2. 正四角錐形ニ同大ノ球ヲ積ミ上ゲタルモノアリ,其ノ最下層ノ一邊ニハ30個ノ球ガ列ベリト云フ. 球ノ總數ヲ求ム.

3. 同大ノ球ヲ屋根形ニ積ミ上ゲタルモノアリ,最上層ニハp個ノ球ガ一列ニ列ビ最下層迄ニハn層アリト云フ. 球ノ總數ハ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+3p-2)$ ナルコトヲ證明セヨ.

4. $2\cdot4+4\cdot6+6\cdot8+\ldots\ldots+2n(2n+2)$ ヲ求ム.

5. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ ヲ求ム.

6. 20個ノ石ヲ一列ニ並ベアリ,第一第二ノ距離ハ1尺,第二第三ノ距離ハ2尺,其ノ次ノ距離ハ3尺,以下次第ニ一尺宛增シアリ. 最初第一ノ石ノ處ニ立テル人ガ此ノ石ヲ一ツ宛運ビ第一ノ石ノ處ニ全部集メントス. 此ノ石ヲ總テ運ビ終ル迄ニ幾許ノ行程ヲ歩ムコトトナルカ.

IV. 順列

1. 順列. n個ノ物ノ中ヨリr個宛種種ニ選ビ出シ,之ヲ種種ノ順序ニ一列ニ並ベタルモノヲn個ノ物ヨリr個宛採リタル順列ト云フ. 其ノn個ノ物ガ相異ナルトキr個宛採リタル順列ノ數ヲ表スニ${}_nP_r$ヲ以テス.

例ヘバ a, b, c ナル三個ノ文字ノ中ヨリ二ツ宛採リタル順列ハ

$$ab,\quad ac,\quad ba,\quad bc,\quad ca,\quad cb$$

ノ六ツナリ. 此等ハ何レモ相異ナリタル配置ニシテ,且a, b, cナル三ツノ文字ヨリ二ツ宛採リタル順列ハ此ノ他ニハナシ. 因テ ${}_3P_2=6$ ナリ.

2. 順列ノ數. n個ノ物ガ相異ナレリトス.

(I) n個ノ物ノ中ヨリ一個宛採リタル順列ノ數ハnナルコト勿論ナリ.

故ニ
$${}_nP_1=n.$$

(II) n個ノ物ノ中ヨリ二個宛採リタル順列ノ數ハ$n(n-1)$ナリ.

例ヘバあいうえおナル五ツノ文字ヨリ相異ナル二ツノ文字ヲ以テ幾種類ノ語ヲ作リ得ルカト云フニ,先ヅあノ次ニ他ノ四ツノ文字ノ各ヲ附スレバあノ字ヨリ始マル總テノ語ヲ作リ得ベシ. 又い,う,え,おノ各ノ文字ヨリ始マル總テノ語モ同樣ニシテ作リ得ベシ. 卽チ次ノ如シ.

ああああ　いいいい　うううう　ええええ　おおおお
いうえお　あうえお　あいえお　あいうお　あいうえ

斯ノ如ク與ヘラレタル文字ノ中ヨリ一ツ宛採リタルあ,い,う,え,お ノ各ニツキテ四ツ宛作リ得ベク其ノ數ハ全部ニテ 5×4 即チ 20 ナリ.

故ニ $_5P_2=5\times4$ ナリ.

一般ニ n 個ノ物ノ中ノ何レカ一ツヲ採リ之ニ殘ノ $n-1$ 個ノ物ヲ添加スルコトニヨリテ n 個ノ物ヨリ二ツ宛採リタル順列ヲ作ルコトヲ得ルヤ明ナリ. 而シテ n 個ノ物ノ各ニツキテ之ヲナセバ其ノ順列ノ總テヲ得ベシ. 因テ順列ノ總數ハ $n(n-1)$ ナリ.

$$\therefore\ _nP_2=n(n-1).$$

又ハ $$_nP_2={}_nP_1\times(n-1).$$

(III) n 個ノ物ノ中ヨリ三個宛操リタル順列ノ數ハ $n(n-1)(n-2)$ ナリ.

一般ニ n 個ノ物ノ中ヨリ二個宛採リテ作リタル順列ノ各ニ其ノ中ニ含マレザル他ノ $n-2$ 個ノ物ノ各ヲ添加スレバ n 個ノ物ノ中ヨリ三個宛採リタル順列ノ總テヲ得ベシ. 因テ

$$_nP_3={}_nP_2\times(n-2),$$

$$\therefore\ _nP_3=n(n-1)(n-2).$$

(IV) $_nP_r$ ノ公式.

上ニ示セルト同様ニシテ

$$_nP_4={}_nP_3\times(n-3)=n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$_nP_5={}_nP_4\times(n-4)=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

一般ニ

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-r+1).$$

(V) n 個ノ物ヲ悉ク採リタル順列ノ數.

$_nP_r$ ナル公式ニ於テ $r=n$ ト置ケバ

$$_nP_n=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots3\cdot2\cdot1,$$

或ハ $$_nP_n=1\cdot2\cdot3\ldots\ldots(n-2)(n-1)n.$$

偖 $1\cdot2\cdot3\ldots\ldots(n-2)(n-1)n$ 即チ 1 ヨリ n 迄ノ整數ヲ悉ク掛ケ合セタルモノヲ n ノ階乘ト云ヒ, $\underline{|n}$ 又ハ $n!$ ナル符號ヲ用ヒテ之ヲ表ハス.

因テ $$_nP_n=n!.$$

例1. 1, 2, 3, 4, 5 ノ五個ノ數字ヲ用ヒテ三桁ノ數ヲ幾個作リ得ベキカ. 但同數字ノ重用ヲ許サズ.

解 問題ハ五個ノ相異ナル物ヨリ三個宛採リタル順列ノ數ヲ求ムルコトト同様ナルベシ

即チ所要ノ數ヲ N ニテ表ハセバ

$$N={}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60 \quad 答.$$

3. 反復ヲ許ス順列. 相異ナル n 個ノ物ヨリ r 個宛採ルニ當リ同ジ物ヲ反復シテ用フルコトヲ許ストキハ其ノ順列ノ數ハ n^r ナリ

例ヘバ 1, 2, 3 ナル三ツノ數字ニテ作ルコトヲ得ル二桁ノ數ハ幾種アルカト云フニ同ジ數字ヲ反復シテ用フルコトヲ得ルガ故ニ

11, 12, 13　21, 22, 23　31, 32, 33

ナル九個ヲ得ベシ. 因テ其ノ數ハ 3^2 即チ 9 ナリ.

又 1, 2, 3 ナル三ツノ數字ニテ作ルコトヲ得ル三桁ノ數ハ幾種ナルカト云フニ上ノ順列ノ各ニ 1 或ハ 2 或ハ 3 ヲ添加スレバ各ヨリ三ツ宛ヲ作リ得ルガ故ニ其ノ數ハ $3^2\times3$ 或ハ 3^3 即チ 27 ナリ.

一般ニ n 個ノ物ヨリ r 個宛採ルニ反復ヲ許ストキハ其ノ順列ノ數ハ n^r ナリ.

注意. 反復ヲ許サザルトキハ $_nP_r$ ハ n^r ヨリモ大ナルコト能ハザルハ勿論ナレドモ,反復ヲ許ストキハ $_nP_r$ ハ n^r ヨリモ大ナルコトヲ得ルナリ.

例. 8人ノ客ヲ三ツノ應接室ニ案内スル仕方ハ幾通アルカ.

解 第一ノ客ヲ案内スル仕方ハ三通アリ,又第二ノ客或ハ第三ノ客ノ案内ノ仕方モ亦各三通アリ,因テ第一及第二ノ客ヲ案内スル仕方ハ 3×3 卽チ 3^2 通アリ,之ト第三ノ客ヲ案内スル仕方トヲ結合スレバ 3^2×3 卽チ 3^3 通アリ. 次第ニ斯ノ如クスレバ8人ノ客ヲ案内スルル仕方ハ 3^8 卽チ 6561 通アリ.

答 6561 通.

4. 悉クハ相異ナラザル物ヲ總テ採リタルトキノ順列.

例ヘバ $a, a, a, b, b, b, b, c, c, d, e, f$ ナル12個ノ文字ノ總テヲ採リタル順列ノ數ヲ N ニテ表サン.

先ヅ N 個ノ順列ノ任意ノ一ツヲ取リ其ノ中ノ三個ノ a ノ代リニ a_1, a_2, a_3 ナル三ツノ相異ナル新文字ヲ置ケ,而シテ他ノ文字ノ位置ハ其ノ儘トシ a_1, a_2, a_3 ノ位置ヲ變ズルコトニヨリテ 3! 個ノ順列ヲ得ベシ. 倩此ノ變化ヲ N 個ノ順列ノ各ニツイテ行ヘバ N×3! 個ノ順列ヲ得ベシ.

次ニ斯シテ得タル N×3! 個ノ順列ノ各ニ於テ四個ノ b ニ代フルニ b_1, b_2, b_3, b_4 ヲ置キテ前ト同樣ナル變化ヲ行ヘバ順列ノ數ハ再ビ增シテ N×3!×4! 個トナル.

倘二個ノ c ノ代リニ c_1, c_2 ヲ置キテ前ト同樣ナル變化ヲ行ヘバ順列ノ數ハ更ニ增シテ N×3!×4!×2! 個トナルベシ.

倩此等ノ N×3!×4!×2! 個ノ順列ハ12個ノ相異ナル文字ヲ悉ク採リタル順列ノ總テニ外ナラズ.

因テ
$$N\times 3!\times 4!\times 2! = 12!,$$
$$\therefore\ N = \frac{12!}{3!4!2!}.$$

一般ニ n 個ノ物ノ中 a ガ p 個, b ガ q 個, c ガ r 個アリテ其ノ他ハ皆各相異ナルトキ,其ノ n 個ノモノ全部ヲ採リテ作リタル順列ノ數ヲ N トスレバ
$$N = \frac{n!}{p!q!r!}.$$

例. 2,2,4,4,4,7,7,7 ナル八個ノ數字ヲ以テ作リ得ベキ八桁ノ數ハ幾種アルカ.

解 八個ノ數字ノ內 2 ハ二個, 4 ハ三個, 7 モ亦三個アルガ故ニ所要ノ數ヲ N トスレバ
$$N = \frac{8!}{2!\,3!\,3!} = 560 \quad 答.$$

問　題

1. a,b,c,d,e,f,g,h ナル八個ノ字母ヨリ五文字採リタル順列ノ數ヲ求ム.

2. 一級四十人ノ生徒ヨリ級長一人副級長一人ヲ選ブ仕方ハ幾通アルカ.

3. 十人ノ兒童ヲ整列セシムル仕方ハ幾通アルカ.

4. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ナル數字ヲ用ヒテ二桁ノ整數幾何ヲ作リ得ルカ. 但同一ノ數字ヲ重複シテ用フルコトヲ得ルモノトス.

5. 「ふぢはらふぢふさ」ナル八個ノ文字ヲ悉ク採リタルトキノ順列ノ數ヲ求ム.

6. いろはにほへとナル七ツノ文字ヲ排列スルニいトろトハ必ズ相隣ラシメントス,其ノ排列ノ仕方ハ幾通アルカ.

又いトろトガ決シテ相隣ラザル列ベ方ノ數ハ幾通アルカ.

7. 母音 a, e, i, o, u 及子音 h, k, l, m, n, p ヨリ各二文字ヲ採リ母音ハ必ズ偶數番目子音ハ奇數番目(例ヘバ *mine* ノ如シ)ニアル樣ニスレバ幾種ノ語ヲ作リ得ルカ.

8. 2, 3, 4, 5, 6 ノ五個ノ數字ヲ悉ク列ベテ五桁ノ偶數幾通ヲ作リ得ベキカ.

9. 六人ノ貴婦人ト同人數ノ紳士トガ悉ク一ツノ卓子ノ周圍ニ列座セントス,但男同士又女同士ハ相隣レルコトナレトス. 其ノ列ベ方ノ數ヲ問フ.

10. 若干ノ生徒ヲ六人宛一列ニ並ベル仕方ノ數ハ之ヲ四人宛一列ニ並ベル仕方ノ數ノ十二倍ニ等シト云フ. 生徒ノ數ヲ求ム.

11. 六人ノ子供ガ一列ニ圓形ニ並ブ仕方ハ5!通アルコトヲ示セ.

12. 次ノ式ニ適スル n ノ値ヲ求ム.

(一) ${}_{2n}P_3=100\times{}_nP_2$. (二) ${}_{2n}P_3=2\times{}_nP_4$.

V. 組合セ

1. 組合セ. n 個ノ物ヨリ r 個宛種種ニ選出シテ得ル所ノ群ヲ n 個ノ物ヨリ r 個宛採リタル組合セト云フ. n 個ノ物ガ相異ナルトキ,斯ノ如キ組合セノ數ヲ表スニ ${}_nC_r$ ヲ以テス.

組合セハ選出セシモノノ配列ノ順序ニハ關係ナキモノトス. 例ヘバ ab, ba ハ相異ナル順列ナレドモ組合セトシテハ同一ナリ.

例ヘバ a, b, c, d ナル四個ノ文字ヨリ二ツ宛採リタル組合セハ

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd$$

ノ六ツナリ. 此等ハ何レモ相異ナル組合セニシテ且 a, b, c, d ナル四文字ヨリ二ツ宛採リタル組合セハ此ノ他ニナシ. 因テ ${}_4C_2=6$ ナルコト明ナリ.

2. 組合セノ數.

n 個ノ相異ナル物ヨリ r 個宛採リタル組合セノ數 ${}_nC_r$ ヲ求メントス.

今 n 個ノ物ヨリ r 個宛採リテ作リタル ${}_nC_r$ 個ノ組合セ中ノ任意ノ一ツヲ取リ出シ,其ノ排列ノ順序ヲ種種ニ變ズレバ $r!$ 個ノ順列ヲ得ベシ.

偖 ${}_nC_r$ 個ノ組合セノ任意ノ一ツヨリ $r!$ 個ノ順列ヲ得ルガ故ニ總テノ組合セヨリハ ${}_nC_r\times r!$ 個ノ順列ヲ得ベク,而シテ此等ノ順列ハ皆相異ナリ,且 n 個ノ物ヨリ r 個宛採リタル順列ハ此ノ他ニハ存在セズ.

故ニ ${}_nC_r\times r!$ ハ ${}_nP_r$ ニ等シカルベシ.

即チ $${}_nC_r\times r!={}_nP_r,$$

$$\therefore\ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}.$$

但 $${}_nP_r=n(n-1)(n-2)......(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!},$$

$$\therefore\ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

注意. 此ノ等式ニヨレバ明ニ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ナリ.

例 1. 十二人ノ生徒ヨリ四人ノ選手ヲ選バントス,其ノ仕方ハ幾通アルカ.

解 十二個ノ物ヨリ四個宛採リタル組合セノ數ヲ求ムレバ可ナリ. 卽チ

$${}_{12}C_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=495. \qquad 答\ 495通.$$

例 2. 男子八人女子六人アリ,之ヲ以テ男子二人女子二人ヨリ成ル一ツノ組ヲ作ラントス. 其ノ仕方幾通アルカ.

解 八人ノ男子ヨリ二人宛採リタル組合セノ數ハ ${}_8C_2$ ニシテ六人ノ女子ヨリ二人宛採リタル組合セノ數ハ ${}_6C_2$ ナリ.

但 ${}_8C_2$ ノ組合セノ任意ノ一ツト ${}_6C_2$ ノ組合セノ任意ノ一ツトヲ採レバ所要ノ組ノ一ツヲ得ベキガ故ニ ${}_8C_2$ ノ組合セノ任意ノ一ツヨリ ${}_6C_2$ 通ノ組ヲ得ベシ. 故ニ所要ノ數ハ ${}_8C_2\times{}_6C_2$ ナル可シ. 但 ${}_8C_2=28$, ${}_6C_2=15$ ナリ.

因テ $${}_8C_2\times{}_6C_2=28\times15=420. \qquad 答\ 420通.$$

問題

1. 徵兵檢査ノ合格者四十六名アリ,其ノ內十名ダケヲ徵集セントス,其ノ仕方幾通アルカ.

2. 四十人ノ級ヨリ選手三名ヲ出ス仕方ハ幾通アルカ.

3. n 個ノ點ノ中少クトモ二點ヲ通過スル直線ノ數ノ最モ多キトキハ幾ツナルカ.

4. 十五人ノ子供ヲ五人宛赤白青ノ三組ニ分チテ遊戲ヲナサントス,其ノ組合セノ仕方幾通アルカ.

5. n ガ偶數ナル場合ニハ $r=\frac{n}{2}$ ノトキ ${}_nC_r$ ガ最大ナルコトヲ證明セヨ.

6. n ガ奇數ナル場合ニハ $r=\frac{n+1}{2}$ ノトキ ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$ ニシテ此ノ兩方ガ他ノ何レノ組合セノ數ヨリモ大ナルコトヲ證明セヨ.

7. ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ナルコトヲ ${}_nC_r$ ノ公式ヲ用ヒズシテ證明セヨ.

8. ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ ナルコトヲ證明セヨ.

9. 同一平面上ニアル n 個ノ直線ノ交點ノ最モ多キ場合ハ幾ツナルカ.

10. 同一ノ平面上ニアル五點ノ中ノ三點ヲ頂點トスル三角形ノ數ヲ求ム. 但其ノ何レノ三點モ同一直線上ニアラザルモノトス.

11. 凸多角形ノ邊ノ數 n ナルトキ其ノ對角線ノ數ハ $\frac{1}{2}n(n-3)$ ナルコトヲ證明セヨ.

12. 10人ヲ六人ト四人トノ二組ニ分ツ仕方ハ幾通アルカ.

VI. 二項定理

1. 二項定理.

乘法ニヨレバ

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc,$$

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\\&\quad=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\&\qquad+(abc+bcd+cda+dab)x+abcd.\end{aligned}$$

此等ノ式ノ右邊ヲ吟味スレバ直チニ次ノ法則ヲ發見スベシ.

(1) 項ノ數ハ左邊ノ二項因數ノ數ヨリモ1ダケ多シ.

(2) 初項ノ x ノ冪ノ指數ハ因數ノ數ニ等シク以下 x ノ冪ノ指數ハ次第ニ1宛減少ス.

(3) 初項ノ係數ハ1ニシテ第二項ノ係數ハ二項因數中ノ第二番目ノ文字ノ和, 第三項ノ係數ハ此等ノ文字ヲ二ツ宛採リタル積ノ和, 第四項ノ係數ハ此等ノ文字ヲ三ツ宛採リタル積ノ和ナリ. 以下之ニ準ジ最後ノ項ハ此等ノ文字ノ積ナリ.

一般ニ二項因數ノ數ガ n 個アルトキニモ上ノ法則ハ眞ナリ. 即チ

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+h)(x+k)\\&\quad=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots\ldots+A_n.\end{aligned}$$

玆ニ

$$A_1=a+b+c+\ldots\ldots+h+k,$$

$$A_2=ab+ac+bc+\ldots\ldots+hk,$$

$$A_3=abc+abd+\ldots\ldots+ghk,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n=abc\ldots\ldots hk.$$

假 $b, c, d, \ldots\ldots, k$ ヲ皆 a ニ等シトスレバ

$$A_1=a+a+a+\ldots\ldots+a=na,$$

$$A_2=a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots+a^2={}_nC_2a^2,$$

$$A^3=a^3+a^3+\ldots\ldots+a^3={}_nC_3a^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n=aaa\ldots\ldots a=a^n.$$

之ニヨリテ

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+{}_nC_3a^3x^{n-3}+\ldots\ldots+a^n.$$

或ハ

$$\begin{aligned}(x+a)^n&=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2x^{n-2}\\&\quad+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3x^{n-3}+\ldots\ldots+a^n.\end{aligned}$$

是即チ $(x+a)^n$ ノ展開式ヲ求ムル公式ニシテ之ヲ**二項定理**ト云フ.

例. $(a+b)^5$ ノ展開式ヲ求ム.

$$\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}a^3b^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}a^2b^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}ab^4+b^5\\&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.\end{aligned}$$ 答.

2. 一般項.

$(x+a)^n$ ノ展開式ニテ左端ヨリ第 $r+1$ 番目ニ當ル項ハ

$${}_nC_ra^rx^{n-r} \quad 即チ \quad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots r}a^rx^{n-r}$$

ナリ. 此ノ r ノ代リニ $1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ ト置ケバ第二項以下總テノ項ヲ得ベシ. 因テ之ヲ一般項ト云フ.

又 $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於ケル一般項ハ

$${}_nC_rx^r \quad 即チ \quad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots r}x^r$$

ナリ.

注意. ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ニヨリ $(x+a)^n$ ノ展開式ニ於ケル初項ト末項トヨリ同番目ノ項ノ數係數ハ相等シ.

問題

次ノ式ヲ展開セヨ.

1. $(a-3x)^5$. 2. $(a+bx)^7$. 3. $(1-2x^2)^6$.

4. $(1-x+x^2)^4$. 5. $(1-bx)^8$. 6. $(1+\sqrt{1-x^2})^5+(1-\sqrt{1-x^2})^5$.

7. $(a-3y^2)^7$ ノ第四項ヲ求ム.

8. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ ノ第五項ヲ求ム.

9. $(x-by)^{12}$ ノ第十項ヲ求ム.

10. $\left(a-\frac{x^2}{a}\right)^{24}$ ノ第二十項ヲ求ム.

11. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{28}$ ノ x ノ係數ヲ求ム.

12. m ガ正ノ整數ナルトキ $(1+x)^m$ ノ展開式ノ總テノ係數ノ和ハ 2^m ニ等シキコトヲ證明セヨ.

答

問題十九

1. 2尺. 2. 2.828尺. 3. 1.5尺.

4. 115ト69又ハ−115ト−69. 5. 224間, 160間.

6. 8寸4分. 7. 年利六分. 8. 四分五厘.

9. (一) 270.61. (二) 20.37. (三) 138.4. (四) 0.3512.

10. $a=-2,\ b=1$.

問題二十

1. $x-2$. 2. 1.395. 3. 25.

4. 1.852. 5. 7.044. 6. 四寸二厘.

7. 2.154倍. 8. 1尺7分4厘. 9. 0.06.

問題二十一

1. $x-2\sqrt{(2x-a)(a-x)}$. 2. $5a^2-3b^2-4\sqrt{a^4-b^4}$.

3. $\frac{1}{2}$. 4. $\frac{7-\sqrt{15}}{17}$. 5. $\frac{27\sqrt{6}-74}{38}$.

6. $\frac{\sqrt{ab}}{b}$. 7. $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$.

8. $\frac{7a+b-8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}$. 9. $\sqrt{3}$.

10. $\sqrt{10}+\sqrt{5}$.　　11. $-2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}-\sqrt{10}$.

12. $\dfrac{3+3\sqrt{6}-2\sqrt{21}-\sqrt{14}}{5}$.

問題 二十二

1. 36, 12.　　2. 12, 25.　　3. 24 或ハ 48.
4. 幅 45 間, 長サ 65 間.　　5. 16.
6. 父 60, 子 40.　　7. 12 間, 10 間.　　8. 0.06.
9. 18 寸, 12 寸.　　10. 576 人.　　11. 12 寸.
12. 0.1.　　13. 384 人.　　14. 1.5 間.
15. $\frac{3}{4}$ 秒及 1.5 秒.

問題 二十三

1. $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.　　2. $2(1\pm i)$.　　3. $-1\pm i$.
4. $-3\pm i\sqrt{3}$.　　5. $-1\pm i\sqrt{10}$.　　6. $\dfrac{-1\pm i\sqrt{14}}{3}$.
7. $a\pm bi$.　　8. $(4+\sqrt{2})$ 尺, $(4-\sqrt{2})$ 尺; 不能.
9. 24 寸, 18 寸; 不能.

問題 二十四

1. (一) $(x-3)(x-2)$.　　(二) $(x-3)(4x-7)$.
(三) $(x-6)(5x-8)$.　　(四) $(5x+2)(3x-4)$.

(五) $(2x+1)(7x-11)$.　　(六) $(3x+4)(x-7)$.
2. $p,\ a-b-p$.　　3. $0,\ 2a$.
6. $5x^2-18x+9=0$.　　7. $qx^2+(p-q^2)x-pq=0$.
8. $a^2-4s\geqq 0$ ナル條件ノ下ニ

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4s}}{2}\text{ 尺},\quad \frac{a-\sqrt{a^2-4s}}{2}\text{ 尺}.$$

問題 二十五

1. 24 錢.　　2. 12 里, 8 里.　　3. $1\frac{5}{6}$ 時間.
4. 3 日.　　5. $2\sqrt{2}+2,\ 2\sqrt{2}-2$.
6. 24 間, 16 間.　　7. 甲 30 日, 乙 40 日.
8. 30 哩, 20 哩.　　9. 長サ 16 尺, 幅 9 尺.
10. 100 株.　　11. 酒 24 升, 水 12 升.　　12. 2 錢.
13. 80 海里 (又 192 海里).　　14. 105 里.

問題 二十六

1. 9.　　2. 4.　　3. 3.
4. 9 或ハ -12.　　5. 0 或ハ 6.　　6. a 或ハ b.
7. $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.　　8. $\dfrac{3}{4}$.　　9. 24 尺.
10. 10 間, 8 間, 6 間.

問題 二十七

1. $\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$. 2. $\pm a,\ \pm\dfrac{1}{a}$.

3. $7,\ \dfrac{-7\pm i\sqrt{143}}{2}$. 4. $-1\pm\sqrt{6},\ -1\pm i\sqrt{2}$.

5. $1,\ 3,\ -14$. 6. $2,\ -3,\ \dfrac{-1\pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$.

7. $2,\ \dfrac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}$. 8. $2,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-7\pm\sqrt{85}}{2}$.

9. 12尺, 9尺. 10. 14寸, 48寸.

11. 8尺, 6尺. 12. 12寸.

問題 二十八

1. $(9,\ -3),\ (-3,\ 9)$. 2. $(1,\ -1)$.

3. $(3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (-3,\ -4),\ (-4,\ -3)$.

4. $(1,\ 6),\ \left(-\dfrac{5}{4},\ -3\right)$. 5. $(1,\ -2),\ (2,\ -1)$.

6. $(8,\ 6),\ (-8,\ -6),\ (8i,\ -6i),\ (-8i,\ 6i)$.

7. $(0,\ 0),\ (1,\ 2),\ \left(\dfrac{15}{22},\ \dfrac{9}{22}\right)$. 8. $\left(\dfrac{2}{3},\ 2\right)$.

9. $(2,\ 1),\ (-2,\ -1),\ (-2,\ 1),\ (2,\ -1)$.

10. $(4,\ 3),\ (-4,\ 3),\ (4,\ -3),\ (-4,\ -3)$.

11. $(4,\ 2),\ \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{7}{4}\right),\ \left(-\dfrac{9}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$.

12. $(6,\ 2),\ (-2,\ -6),\ (2,\ 6),\ (-6,\ -2)$,
$(2+\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3}),\ (2-\sqrt{3},\ -2-\sqrt{3})$,
$(-2+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}),\ (-2-\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3})$.

13. $(0,\ 0),\ (a+b,\ a+b)$,
$\left(\dfrac{a-b+\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2},\ \dfrac{a-b-\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2}\right)$,
$\left(\dfrac{a-b-\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2},\ \dfrac{a-b+\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2}\right)$.

14. $(1,\ 3,\ 2),\ (-1,\ -3,\ -2)$.

15. $(0,\ 2,\ 5),\ (0,\ -2,\ -5)$.

16. $(4,\ 5,\ -2),\ (5,\ 4,\ -2),\ (-1+\sqrt{19}i,\ -1-\sqrt{19}i,\ 9)$,
$(-1-\sqrt{19}i,\ -1+\sqrt{19}i,\ 9)$.

問題 二十九

1. 甲13, 乙9; 或ハ 甲−5, 乙−3. 2. 46.

3. 4, 11. 4. 上酒40升, 下酒48升.

5. 幅5間, 1000坪. 6. 18節, 12節.

7. 16日, 甲80錢, 乙60錢.

8. 甲部1000圓, 0.08, 乙部800圓, 0.1.

9. 30哩, 20哩. 10. 12打, 1打10圓.

11. 將校126人, 下士卒4000人.

12. 高サ 2.5 間, 縱 9 間, 横 8 間.

問題 三十

1. 1 尺, 2.4 尺.

2. 斜邊 $\frac{ap}{\sqrt{a^2-b^2}}$ 尺, 一邊 $\frac{bp}{\sqrt{a^2-b^2}}$ 尺.

3. $a+b:a-b$. 4. $\sqrt{6xy}$ 或ハ $-\sqrt{6xy}$.

5. 父 50 歳, 子 25 歳.

7. $-a+b+c:a-b+c:a+b-c$.

8. $m+n:m-n$.

問題 三十一

9. 178.6 立方寸弱. 10. 224.7 日.

11. $w=dxyz$. 12. 5.6 升强.

13. 甲 $\frac{alp}{al+bm+cn}$ 圓, 乙 $\frac{bmp}{al+bm+cn}$ 圓, 丙 $\frac{cnp}{al+bm+cn}$ 圓.

14. 甲酒 : 乙酒 : 丙酒 : 水

$=p(c-m):q(c-m):\{p(m-a)+q(m-b)+m\}:(c-m)$.

15. 40, 20, 60.

問題 三十二

1. $x=7,\ y=9$. 2. $x=10,\ y=9$. 3. $x=20,\ y=6$.

4. 點 (12, 13) ニテ三直線ガ出會フ.

5. 點 (7, 3) ニテ三直線ガ出會フ.

問題 三十三

1. 25. 2. 14. 3. (一) 14. (二) 4. (三) a.

4. (一) 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

(二) $1\frac{3}{4},\ 1\frac{2}{4},\ 1\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ 0$.

(三) $a-b,\ a-2b,\ a-3b,\ a-4b,\ a-5b,\ a-6b,\ a-7b,$

$a-8b$.

5. $n^2-n+1,\ n^2-2n+2,\ n^2-3n+3,\ \ldots\ldots, 3n-2,\ 2n-1,\ n$.

6. (一) $1640a-1600b$. (二) $14+7\sqrt{2}$.

(三) $n\{a^2+b^2-(n-3)ab\}$.

7. 3, 8, 13. 8. 17 年. 9. 20000.

問題 三十四

6. 2, 8. 7. 初項 -78, 公比 -1.

12. 八項. 13. 28 寸, 21 寸. 14. 2 平方尺.

問題 三十五

1. 9.0740. 2. $\bar{1}.4713$. 3. 1.4471.

4. 2208. 5. 5.134. 6. 0.2502.
7. 1.628. 8. 0.000001405. 9. 0.2871.
10. 0.09714. 11. (一) 3.1636. (二) $\bar{1}.8851$.
(三) 4.6232. (四) 0.3186. (五) 0.9775.
12. 28 桁. 13. 6 個. 14. 2.946. 15. −6.831.
16. 14. 17. 7. 18. 約 22.57 間.

問題 三十六

1. 約 526 圓. 2. 17 年 11 ヶ月餘.
3. 約 3163 圓. 4. 6 分 6 厘弱.
5. 14 年 2 ヶ月餘, 17 年 8 ヶ月餘.
6. 約 2793 圓, 4174 圓.

問題 三十七

1. 約 4494 圓. 2. 約 8908 圓. 4. 約 1307 圓.
5. 約 79.5 圓. 6. 約 4014 圓. 7. 4000 圓.
8. 約 83.70 圓. 9. 2000 圓. 10. 約 710.8 圓.
11. 約 2913 圓. 12. 約 29550 圓.

附 錄

I. 問 題

1. 1.73205. 2. 2.30217. 3. 1.77245.
4. 20.34699. 5. 0.35135. 6. 0.31943.
7. 0.34359. 8. 0.46802. 9. 2.15443.
10. 14.42249. 11. 4.01715. 12. 1.46459.
13. 0.77565 14. 1.46459.

III. 問 題

1. 2870. 2. 9455. 4. $\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)$.
5. $\frac{n}{n+1}$ 6. 2660 尺.

IV. 問 題

1. 6720. 2. 1560. 3. 3628800.
4. 90. 5. 3360.
6. いトろト相隣レルモノ 1440,
相隣ラザルモノ 3600.
7. 600. 8. 72. 9. 86400.
10. 8 人. 12. (一) 13. (二) 3.

V. 問　題

1. 4076350421.　**2.** 9880.　**3.** $\frac{1}{2}n(n-1)$.

4. ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 = 756756$.　**9.** ${}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$.

10. 10.　**12.** 210.

VI. 問　題

1. $a^5 - 15a^4x + 90a^3x^2 - 270a^2x^3 + 405ax^4 - 243x^5$.

2. $a^6 + 6a^5bx + 15a^4b^2x^3 + 20a^3b^3x^3 + 15a^2b^4x^4 + 6ab^5x^5 + b^6x^6$.

3. $1 - 12x^2 + 60x^4 - 160x^6 + 240x^8 - 192x^{10} + 64x^{12}$.

4. $1 - 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + 10x^6 - 4x^7 + x^8$.

5. $1 - 8bx + 28b^2x^2 - 56b^3x^3 + 70b^4x^4 - 56b^5x^5 + 28b^6x^6$
$- 8b^7x^7 + b^8x^8$.

6. $32 - 40x^2 + 10x^4$.　**7.** $-945a^4y^6$.

8. 70.　**9.** $-220b^9x^3y^9$.　**10.** $-42504\frac{x^{38}}{a^{14}}$.

11. 0.

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

比例部分

	43	42	41	39
1	4.3	4.2	4.1	3.9
2	8.6	8.4	8.2	7.8
3	12.9	12.6	12.3	11.7
4	17.2	16.8	16.4	15.6
5	21.5	21.0	20.5	19.5
6	25.8	25.2	24.6	23.4
7	30.1	29.4	28.7	27.3
8	34.4	33.6	32.8	31.2
9	38.7	37.8	36.9	35.1

	38	37	36	35
1	3.8	3.7	3.6	3.5
2	7.6	7.4	7.2	7.0
3	11.4	11.1	10.8	10.5
4	15.2	14.8	14.4	14.0
5	19.0	18.5	18.0	17.5
6	22.8	22.2	21.6	21.0
7	26.6	25.9	25.2	24.5
8	30.4	29.6	28.8	28.0
9	34.2	33.3	32.4	31.5

	34	33	32	31
1	3.4	3.3	3.2	3.1
2	6.8	6.6	6.4	6.2
3	10.2	9.9	9.6	9.3
4	13.6	13.2	12.8	12.4
5	17.0	16.5	16.0	15.5
6	20.4	19.8	19.2	18.6
7	23.8	23.1	22.4	21.7
8	27.2	26.4	25.6	24.8
9	30.6	29.7	28.8	27.9

	29	28	27
1	2.9	2.8	2.7
2	5.8	5.6	5.4
3	8.7	8.4	8.1
4	11.6	11.2	10.8
5	14.5	14.0	13.5
6	17.4	16.8	16.2
7	20.3	19.6	18.9
8	23.2	22.4	21.6
9	26.1	25.2	24.3

比例部分

	26	25	24	23
1	2.6	2.5	2.4	2.3
2	5.2	5.0	4.8	4.6
3	7.8	7.5	7.2	6.9
4	10.4	10.0	9.6	9.2
5	13.0	12.5	12.0	11.5
6	15.6	15.0	14.4	13.8
7	18.2	17.5	16.8	16.1
8	20.8	20.0	19.2	18.4
9	23.4	22.5	21.6	20.7

	22	21	19	18
1	2.2	2.1	1.9	1.8
2	4.4	4.2	3.8	3.6
3	6.6	6.3	5.7	5.4
4	8.8	8.4	7.6	7.2
5	11.0	10.5	9.5	9.0
6	13.2	12.6	11.4	10.8
7	15.4	14.7	13.3	12.6
8	17.6	16.8	15.2	14.4
9	19.8	18.9	17.1	16.2

	17	16	15	14
1	1.7	1.6	1.5	1.4
2	3.4	3.2	3.0	2.8
3	5.1	4.8	4.5	4.2
4	6.8	6.4	6.0	5.6
5	8.5	8.0	7.5	7.0
6	10.2	9.6	9.0	8.4
7	11.9	11.2	10.5	9.8
8	13.6	12.8	12.0	11.2
9	15.3	14.4	13.5	12.6

	13	12	11
1	1.3	1.2	1.1
2	2.6	2.4	2.2
3	3.9	3.6	3.3
4	5.2	4.8	4.4
5	6.5	6.0	5.5
6	7.8	7.2	6.6
7	9.1	8.4	7.7
8	10.4	9.6	8.8
9	11.7	10.8	9.9

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

明治四十四年三月十日印刷
明治四十四年三月十三日發行
明治四十四年四月一日訂正再版印刷
明治四十四年四月五日訂正再版發行
大正七年十一月十七日訂正三版印刷
大正七年十一月二十日訂正三版發行
大正八年一月三十日訂正四版印刷
大正八年二月三日訂正四版發行

下卷

定價 金六拾七錢
大正拾年度臨時 金壹圓四拾七錢

師範教育 代數學教科書 不許複製
(改訂版)

著作者 國枝元治

發行者 大葉久吉
東京市日本橋區本石町三丁目拾七番地

印刷者 青柳十一郎
東京市牛込區市谷加賀町一丁目拾貳番地

印刷所 東京秀英舍第一工場

發行所
東京市日本橋區本石町三丁目
振替口座東京二八〇番
東京寶文館

關西專賣
大阪市東區淡路町四丁目
振替口座大阪四三番
合資會社 大阪寶文館