新制立體幾何學

廣島高等師範學校附屬中學校
數學研究會著

東　京
修文館藏版

文部省檢定濟

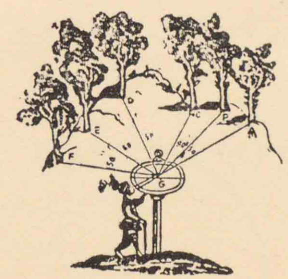
昭和四年十一月二十七日　師範學校竝中學校數學科用

新制立體幾何學

廣島高等師範學校

附屬中學校

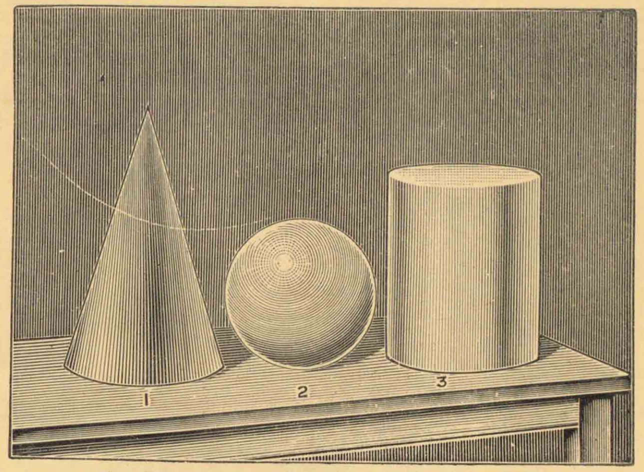
數學研究會著



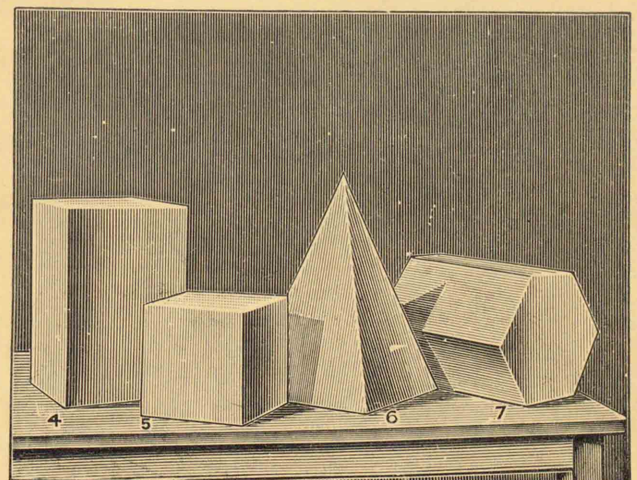
東　京

修文館發行

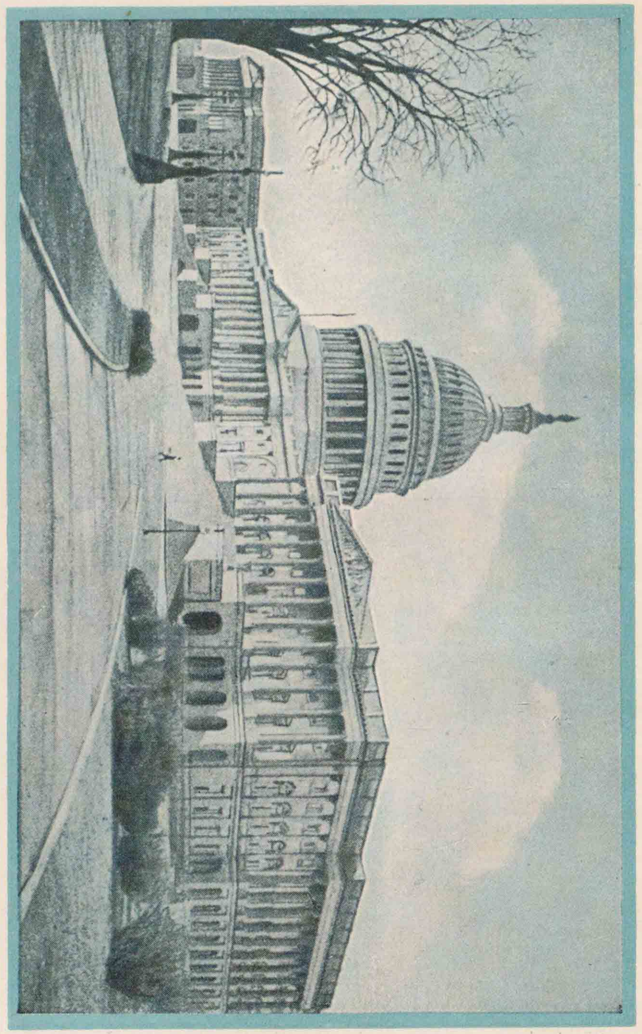
各種ノ立體



1 圓錘　2 球　3 圓壔



4 正四角壔　5 立方體　6 正四角錘　7 正六角壔



幾何學圖形ノ組合セヨリ成ル大建築

緒　　言

本會ハ中等教育數學教育ニ關シ研究ヲ重ヌル事玆ニ漸ク年アリ，其ノ結果數學各分科ノ教科書ヲ著作シテ之ヲ公刊シタル所，數學教育ノ實際ニ當ラルル諸賢ノ贊同ヲ得タルハ本會ノ光榮トスル所ナリ。然ル所，該教科書ノ中"中等教育立體幾何學教科書"ハ大正十二年(1923)三月ノ發行ニ係リ[1]，今日ヨリスレバ修正スベキ點少シトセズ，又實際教授ニ當ラルル各位ノ熱心ナル批正ヲモ得タレバ，玆ニ改版シテ本書ヲ著作發行セントス[2]。改版ニ際シ一言編纂ノ主旨ヲ述ベン。

抑モ立體幾何學ハ一般的ニシテ，平面幾何學ハ其ノ特殊ノ場合ヲ限定論述スルニ過ギズ。而モ吾人ノ日常接スル器物ハ皆立體幾何學的ノモノニシテ，圖トシテ描ク場合ノ外，平面幾何形體ヲ實際ニ求ムルハ至難ノ事ナリ。即チ吾人ノ知識トシテハ立體幾何學ノ概念コソ緊要ナレ。平面幾何學ハ之ガ附隨ノ形タルベキモノナルノミ。然ルニ平面幾何學ガ思考陶冶ニ資スル點多キト，其ノ學習ガ立體幾何學ヨリ容易ニシテ直觀シ得ル便アルニヨリ，殆ンド之ヲ主體トシ，立體幾何學ヲ輕視シ來レリ。

---

(1) 大正十二年五月七日，師範學校並ニ中學校數學科用トシテ文部省ノ檢定濟。

(2) 本會ハ其ノ後女子師範學校並ニ高等女學校用トシテ"女子教育立體幾何學教科書"ヲ著作セリ。(昭和四年一月三十日檢定濟。)

加フルニ,高等學校ト中學校ノ聯絡ガ中學校第四學年修了ニ基準ヲオク爲,中學校第五學年ノ教材ナル立體幾何學ハ殆ンド厄介視サルル現狀ナリ。之レ甚ダ憂フベキ現象ト言ハザルヲ得ズ。

顧ミテ數學教育ノ實質的價値ヲ考フルトキ,函數概念ノ養成ト相俟ツテ**空間概念ノ養成**ハ最モ重大ナル使命ナリ。而モ之ヲ最モヨク可能ナラシムルハ立體幾何學ナリトス。此ノ意味ニ於テ,吾人ハ立體幾何學ノ教授ヲ相當考慮スベキモノナリト信ズ。卽チ教材タルベキ此ノ教科書ノ著作ニ際シ研究討議シ,力ヲ注ギタル點少シトセズ。今此等ノ點ヲ擧ゲテ教授ノ參考ニ供セン。

(1) 推理ヲ主トスル幾何學ノ學習ニハ,推理ノ過程ニ間隙ノ存スル事ハ許サレザル所ニシテ,然ルトキハ却ツテ學習ヲ困難ナラシムルモノナリ。卽チ幾何學ハ簡易ナルガ故ニ平易ナリトイフヲ得ズ。故ニ本書ニハ立體幾何學ニ於テ,重要ナリト認メラルル定理ハ大體之ヲ網羅シ,且推理ノ過程ニ於テ假定スルガ如キハ殆ンドナサザルヲ以テ,小冊子ナリトハイヘ全卷ヲ通ジ推理ノ體系ハ完全ニ保タレタリ。

(2) 立體幾何學ヲ入リ易キモノタラシメンガ爲ニ,卷頭ニ於テ,生徒ノ既ニ熟知セル直六面體ヲ觀察セシメ空間ニ於ケル直線及ビ平面ニ關スル基礎ノ概念ヲ與フルヤウ工夫セリ。

(3) 生徒ノ能力ニ應ジテ教授ノ步ヲ進メンコトヲ圖リ,自明ノ事項ハ其ノ理論ヲ避ケ,定理ノ如キモ容易ナルモノハ,或ハ發問ノ形ニ止メ,或ハ全ク之ヲ略シ,困難ナルモノハ問題ニマデモ備考ヲ附シ,又ハ圖ヲ挿入シテ思考ノ緒ヲ與ヘタリ。

(4) 立體幾何學ノ問題ニ依リ思考ノ練習ノミヲナス事ハ,啻ニ難澁ノ嫌アルノミナラズ,生徒ノ興味ヲ失ヒ,本科ノ空間概念涵養ニ力アル長所ヲモ失フニ至ル恐レアリ。

本書ニハ思考的練習問題ト共ニ實際的問題ヲ多ク取リ入レ,本文ノ所說ト相俟ツテ空間ノ概念ヲ獲得スルニ努メタリ。卽チ本書ハ學トシテノ立體幾何學ヲ論ズルコトヲ主トスルニアラズシテ,人間教育トシテ幾何常識ヲ述ブルモノナリ。

(5) 立體幾何學學習ノ困難ナル一原因ハ,之ヲ直觀シ難ク,或ハ正確ナル圖ニ示ス事容易ナラザル點ニアリ。故ニ特ニ本書ニハ**正確ナル**圖ヲ多數挿入シ,一ニハ理解ヲ助クルト共ニ,他方之ニ依リ興味ヲ深カラシムルヤウ努力セリ。

(6) 上級學年ノ生徒ハ綜合的證明ニハ慣レナガラ計算ヲ嫌ヒ,或ハ正確ナル計算ヲナシ得ザルニ至レルモノアリ。本書ニ於テハ出來得ル限リ問題ヲ實際化シ,生徒ヲシテ事ニ當リ工夫考案ヲナサシムルヤウニ導クト共ニ,實際問題ニ處シ計算ヲナシ得ルヤウ計算問題ヲモ相當ニ編ミ入レタリ。

(7) 卷末ニハ復習ノ部トシテ摘要ノ章ヲ設ケ,且雜問題ヲ課シテ理解ヲ一層確實ニシ,推理ノ練磨ヲナサシムルヤウニ圖レリ。

(8) 各問題ノ間ニ滑カナル連續的關係ヲ保タシメ,且**練習問題ハ總テ二行式ニ排列セリ**。右側ニアルモノハ多クハ左側ニアルモノノ類題ニシテ教室ニ於テハ先ヅ左側ニアルモノヲ取扱ヒ,右側ニアルモノハ家庭ニ於ケル生徒自習用ニ充テントスルモノナリ。之レ一ニハ宿題過重ノ弊ヲ避ケ,他方又生徒ノ自學自習ニ依リ學習事項ノ確實ナル理解ヲ得ル助ケトナルモノナリ。[3]

本書ハ毎週二時間ニテ半年間ニ裕ニ教授シ終ル筈ナ

[3]此ノ問題排列法ハ本會ノ創案ニカカリ，多年研究ノ結果教授上利便ナリトシテ採リ來レル所ニシテ，本會著作ニ係ルスベテノ教科書ナ一貫スル方法ナリ。コレ亦本會著作ノ教科書ノ特色トスル點ナリ。

ルモ,若シヨリ短時間ニ終ヘントマルル方ハ唯左側ノ問題ヲ課スルノミニテモ一通リ其ノ目的ヲ達シ得ルコトト信ズ。

之ヲ要スルニ,本書ハ立體幾何學ヲ教ヘ易ク,學ビ易ク,而モ興味深キモノタラシメ,生徒ノ學習ノ効果ヲ大ナラシムル事ヲ理想トシテ材料ヲ選擇シ,且之ヲ排列シタルモノナリ。然レドモ實際教授ニ當リ不十分ノ點アルヤモ圖ラレズ。數學教授ニ熱心ナル各位ノ批正ヲ俟ツヤ切ナルモノアリ。

著　者　識

新制立體幾何學

目　次

第一篇

平　面

第一章　空間ニ於ケル直線及平面

第二章 二面角及多面角

第二篇
多面體

第三章 平行六面體

第四章 角壔

第五章 角錐

第六章 正多面體

第三篇
廻轉體

第七章 直圓壔

第八章 直圓錐

—(目次終リ)—

新制立體幾何學

第一篇

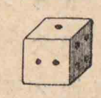
平　面

第一章

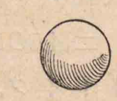
空間ニ於ケル直線及平面

1. 立體幾何學ノ基礎

問一　「マッチ」箱ハ如何ナル形ヲナスカ。



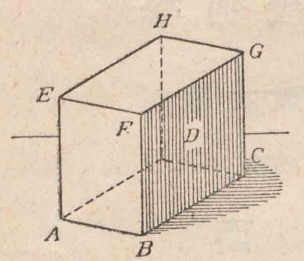
問二　雙六ノ賽(サイ)ハ如何ナル形ヲナスカ。



問三　「マッチ」箱ノ表面ト「ボール」ノ表面トノ差違如何。

既ニ諸子ガ算術等ニテ學ビタル**直六面體**(**直方體**)ニ就キテ觀察ヲ試ミン。

直六面體ハ六ツノ平面ニテ圍マレ**稜**ト言ハルル十二本ノ直線及ビ**頂點**ト名ヅケラルル**八ツノ點**ヲ有ス。



今直六面體ノ各頂點ヲ,圖ノ如ク,A, B, C, D, E, F, G及ビHトスレバ,十二本ノ稜ハAB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG及ビDHニシテ,六ツノ平面ハ▭ABCD, ▭EFGH, ▭ABFE, ▭BCGF, ▭CDHG及ビ▭DAEHナリ。

問四 十二本ノ稜ノ中,平行ナルモノハ何々ナルカ。又平行ナル稜ハ幾組アルカ。

問五 互ニ垂直ナル稜ハ何々ナルカ。

▭ABCDノ平面トEH, 或ハFGトハ互ニ**平行ナリ**トイフ。

問六 ▭ABCDノ平面ニ平行ナル直線ヲ全部擧ゲヨ。又他ノ平面ニ平行ナル直線如何。

▭ABCDノ平面トEA, 或ハFBトハ互ニ**垂直ナリ**トイフ。

問七 ▭ABCDノ平面ニ垂直ナル直線ヲ全部擧ゲヨ。又他ノ平面ニ垂直ナル直線如何。

▭ABCDノ平面ト▭EFGHノ平面トハ互ニ**平行ナリ**トイフ。

問八 平行ナル平面ハ何々カ。又幾組アルカ。

▭ABCDノ平面ト▭BCGFノ平面トハ**相交リ**

互ニ垂直ナリトイフ。

問九 ▭ABCDノ平面ニ垂直ナル平面ヲ全部擧ゲヨ。又他ノ平面ニ垂直ナル平面如何。

直線ABトAEトハ同一平面▭AF上ニ在リテ,且互ニ垂直ナリ。又ABトEFトモ同一平面▭AF上ニ在リテ,且互ニ平行ナリ。コレニ反シABトHDトハ**同一平面上ニ無シ**。又▭AFト▭BGノ二平面ハ相交ル。此ノトキ二平面ハ**二面角**ヲナストイヒ,直六面體ニ於テハ▭AFト▭BGトノナス二面角ハ直角ナリ。又一點Fニ於テ相交ル三平面▭AF, ▭CF, ▭HFハ**三面角**ヲナストイフ。

問十 前頁ノ圖ニ於テ,三面角ヲナス平面ハ何々カ。

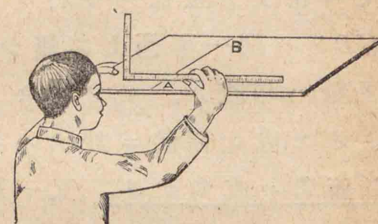
幾何學トハ圖形ノ性質ヲ論究スル學問ナリ。而シテ同一平面上ニ在ル圖形ノミヲ考究スル幾何學ハ之ヲ**平面幾何學**トイヒ,之ニ反シ同一平面上ニ在ラザル圖形ヲ考究スル幾何學ヲ**立體幾何學**或ハ**空間幾何學**トイフ。

從ッテ立體幾何學ハ同一平面上ニアラザル面,線及ビ點ノ位置大サ及ビ形ニ就キテ論ズ。

本書ハ專ラ立體幾何學ノミヲ考究ス。

2. 平面及曲面

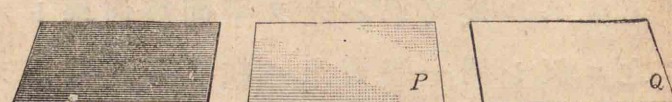
定義　一ツノ面ニ於テ,其ノ面上ノ任意ノ二點ヲ過ル直線ガ全ク其ノ上ニ在ルトキハ其ノ面ヲ平面トイフ。



問一　或面ガ平面ナルカ否カヲ檢査スルニハ如何ニスベキカ。

問二　平面ト思ハルル實例ヲ擧ゲヨ。

平面ハ限リナク廣キモノナリ。然レドモ之ヲ書表ハスニハ,便宜上矩形ヲ斜ニ見タル形ヲ以テシ,之ヲ**平面P**,或ハ**平面Q**ト呼ブ。



問三　一ツノ面上ニ於テ,其ノ面上ノ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ其ノ面ニ密著セザルコトアリヤ。

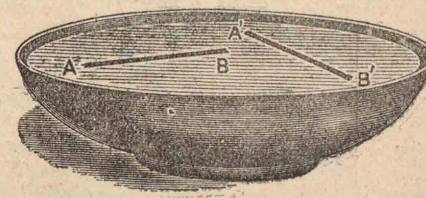
定義　平面ニアラザル面ヲ**曲面**トイフ。

問四　曲面ノ例ヲ擧ゲヨ。

3. 直線ト平面ノ位置

平面ノ定義ヨリ次ノ事ハ直チニ知ラル。

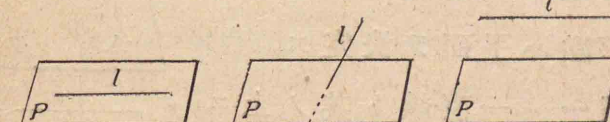
一直線上ノ二點ガ一ツノ平面上ニアラバ,其ノ直線ハ全ク其ノ平面上ニ在リ。



點ガ平面上ニアルトキハ,此ノ平面ハ其ノ點ヲ**通ル**,又ハ**含ム**トイフ。

直線ガ全ク一平面上ニ在ルトキハ,此ノ平面ハ其ノ直線ヲ**通ル**,又ハ**含ム**トイフ。

空間ニ於ケル一直線lト一平面Pトノ相對的位置ニハ次ノ三通リノ場合アリ。

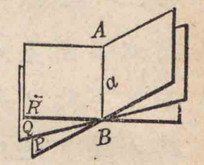


(一)ハ平面Pガ直線lヲ**含ム**場合ニシテ,(二)ノ如ク一直線ト一平面トガ唯一點ヲ共有スルトキハ,其ノ直線ト平面トハ**相交ル**トイヒ,(三)ノ如ク一點ヲモ共有セザルトキハ,其ノ直線ト平面トハ**平行ナリ**トイフ。

4. 平面ノ決定

問一 空間ニ於ケル一直線ノ位置ヲ固定スルニハ幾ツノ點ヲ要スルカ。

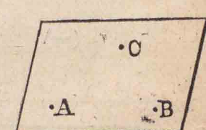
問二 一直線ヲ通ル平面ハ幾ツアルカ。



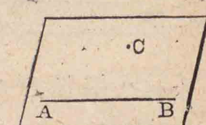
問三 空間ニ於ケル一平面ノ位置ヲ固定スルニハ幾ツノ點ヲ要スルカ。

定義 若干ノ點,或ハ線,又ハ點ト線トヲ含ム平面ガ一ツアリテ而シテ唯一ツニ限ルトキハ,此等ノ點,或ハ線,又ハ點ト線トハ**平面ヲ決定ス**トイフ。

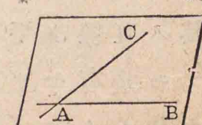
公理 一直線上ニアラザル三點ハ平面ヲ決定ス。



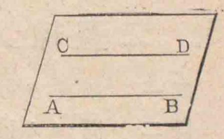
系一 一直線ト其ノ上ニアラザル一點トハ平面ヲ決定ス。



系二 相交ル二直線ハ平面ヲ決定ス。



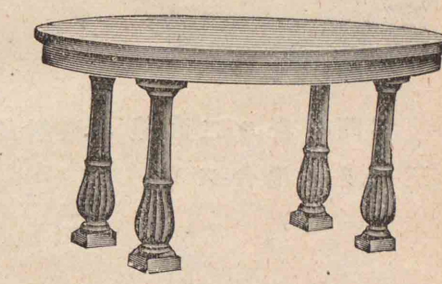
系三 平行ナル二直線ハ平面ヲ決定ス



問 題

1. 二ツ宛三點ニ於テ交ル三直線ハ同一平面上ニ在ルコトヲ證明セヨ。

(1) 床ノ上ニテガタガタスル四脚ノ卓ノ坐リヲヨクスルニハ,其ノ脚ヲ如何ニスレバ可ナルカ。



2. 相交ル二定直線ノ各ノ上ノ任意ノ點ヲ結ブ直線ハ,其ノ二定直線ノ定ムル平面上ニアリ。

(2) 二定平行線ノ各ノ上ノ任意ノ點ヲ結ブ直線ハ,其ノ平行線ノ定ムル平面上ニアリ。

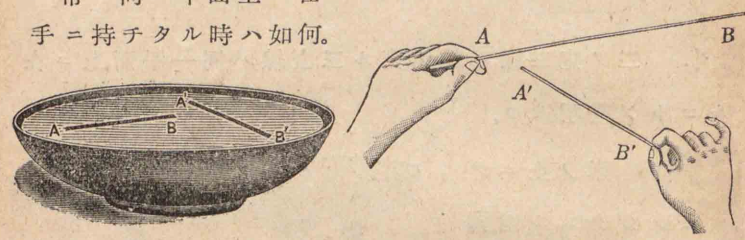
3. 同一直線上ニ在ラザル三點ト,ソレラノ何レヲモ通ラザル相交ル二直線トアリ。此等ノ中ノ點ト點,點ト直線,直線ト直線トニテ決定サルル平面ハ幾ツアルカ。

5. 二直線ノ位置

問一　相交ラザル總テノ直線ハ互ニ平行ナルカ。

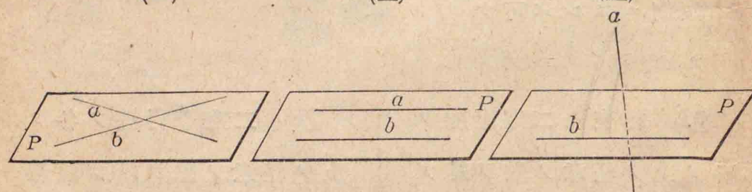
問二　同一ノ直線ニ垂直ナル直線ハ總テ互ニ平行ナナルカ。

問三　次ノ左ノ圖ノ如ク,水ニ浮ベル二本ノ棒$AB, A'B'$ハ常ニ同一平面上ニ在ルカ。又右ノ圖ノ如ク,二本ノ棒ヲ手ニ持チタル時ハ如何。



空間ニ在ル二直線ノ相對的位置ニ就テハ次ノ三通リノ場合アリ。

(一)　(二)　(三)



(一)　二直線ハ相交ル。

(二)　二直線ハ平行ナリ。

(三)　二直線ハ交ラズ,而モ平行ナラズ。

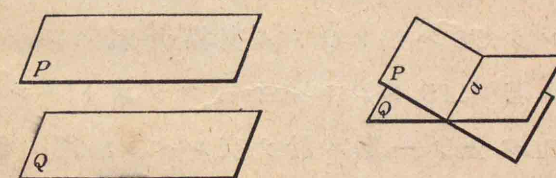
而シテ(一),(二)ノ場合ハ二直線ハ同一平面上ニアリ,(三)ノ場合ハ二直線ハ同一平面上ニナシ。

故ニ今後ハ二直線ガ交ラザルガ故ニ平行ナリトカ,或ハ平行ナラザルガ故ニ交ルトカイフ事ヲ得ズ。二直線ノ平行ナル事ヲ證スルニハ,(1)二直線ハ同一平面上ニ在リテ,(2)相交ラザル事ヲ言ハザルベカラズ。

6. 二平面ノ位置

定義　如何程延長スルモ出會ハザル二平面ハ互ニ**平行ナリ**トイフ。

二平面ガ出會ハバ唯一ツノ直線ヲ共有ス。此ノトキ其ノ二平面ハ相**交ル**トイフ。



平面PトQトガ平行ナルトキハ,之ヲ$P /\!/ Q$ト書ク。又PトQトガ交リテナス直線aヲ二平面ノ**交リ**或ハ**交線**トイフ。

4.　同一平面上ニ在ラザル二直線上ノ一點宛ヲ連ヌル直線中ニハ互ニ平行ナルモノナシ。

注意　歸謬法ニヨセ

P5 (8)

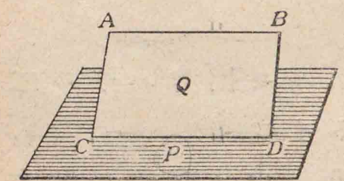
(4)　直方體ニハ平行ナル稜ガ幾組アルカ。又平行ナル平面ハ幾組アルカ。

四本一組　3組

平面　3組

7. 直線ト平面トノ平行

定理 二直線ガ平行ナルトキハ,其ノ一ツノ直線ノミヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行ナリ。



證明 AB, CD ヲ平行ナル二直線トシ, CD ヲ含ミ AB ヲ含マザル平面ヲ P トセヨ。

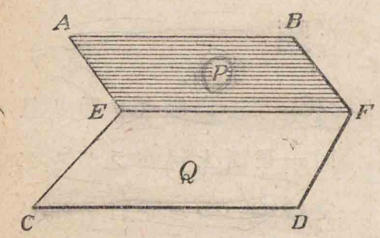
$AB \parallel CD$ ナル故, AB,CD ハ一平面 Q ヲ決定ス.

而シテ CD ハ P ト Q トノ交線ナリ。

故ニ若シ AB ト P トガ平行ナラズトスレバ, AB ハ CD ノ上ノ一點ニ於テ交ルベシ。之レ假設ニ反ス。

故ニ　　平面 $P \parallel AB$.

系 平行ナル二直線ノ一ツヲ含ミ,他ヲ含マザル二平面ノ交線ハ其ノ二直線ニ平行ナリ。



證明 AB ヲ含ミ CD ヲ含マザル平面ヲ P, CD ヲ含ミ AB ヲ含マザル平面ヲ Q トシ, P, Q ノ交線ヲ EF トスレバ

$AB \parallel CD$ ナル故,　　平面 $P \parallel CD$.　同一平面上ニアリ

而シテ CD, EF ハ同一平面上ニ在リ。

故ニ　$EF \parallel CD$.　同様ニ　$EF \parallel AB$.

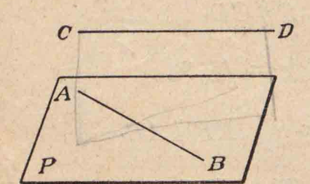
5. 定平面 P 外ノ與點 A ヲ過ル直線ヲ作リ P 上ノ定直線 CD ニ平行ナラシメヨ。

(5) 與點 A ヲ通ル平面ヲ作リ A ヲ過ラザル定直線 CD ニ平行ナラシメヨ。

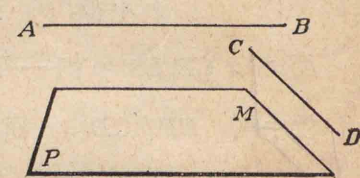
注意 立體幾何學ニ於ケル作圖題ハ,平面幾何學ニ於ケルガ如ク與條件ヲ滿足スル實際ノ圖形ヲ求ムルニアラズシテ,唯其ノ方法ヲ推理上ニテ決定スルニ過ギズ。但シ一直線上ニアラザル三點,相交ル二直線,或ハ平行ナル二直線ニテ平面ヲ決定スル事,二定平面ノ交線及ビ定平面ト定直線トノ交點ヲ求ムル事等ハ可能ナルモノトス。

問題

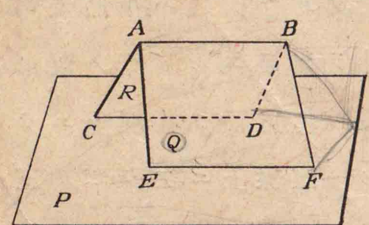
6. 同一平面上ニアラザル二定直線AB, CDアリ。ABヲ含ミCDニ平行ナル平面ヲ作レ。



(6) 一與點Mヲ通リ,且同一平面上ニ在ラザル二定線AB, CDニ平行ナル平面ヲ作レ。



定理 一ツノ平面ト,之ニ平行ナル一ツノ直線ヲ含ム平面トノ交線ハ,其ノ直線ニ平行ニシテ,其ノ交線ハ互ニ平行ナリ。



平面Pニ平行ナル直線ABヲ含ム平面ヲQ, Rトシ,此等ノ平面トPトノ交線ヲ夫夫EF, CDトスレバ

(一) $CD \parallel AB$, $EF \parallel AB$

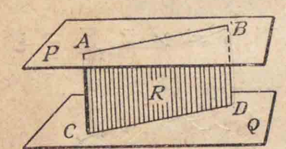
(二) $CD \parallel EF$

證明 (一) $P \parallel AB$, 故ニABハCDト交ラズ。而シテAB, CDハ同一平面上ニ在リ。

故ニ $CD \parallel AB$. 同様ニ $EF \parallel AB$.

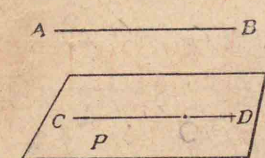
(二) CD, EFハ共ニ平面P上ニ在リ。若シCD, EFガ平行ナラズトスレバ,此ノ二直線ハ同一平面P上ニ在ル故,或一點ニ於テ交ルベシ。然ラバ其ノ交點トABトハ二ツノ平面Q, Rヲ決定スルコトトナル。之レ不合理ナリ。

故ニ $CD \parallel EF$.



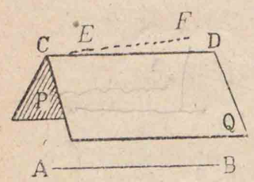
系一 平行ナル二平面ト他ノ一平面トノ交線ハ互ニ平行ナリ。

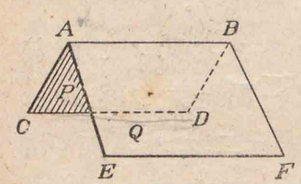
ABトCDトハ同一平面上ニアルカ否カ。又ABトCDトガ交ルトスレバ平面PトQトハ如何ニナルカ。



系二 一平面上ノ一點ヲ過リ,其ノ平面ニ平行ナル直線ニ平行ニ引ケル直線ハ其ノ平面上ニ在リ。

CDガ平面P上ニナシトスレバ,AB, CDノ決定スル平面トPトノ交線ハ如何ニナルカ。





系三　同一直線ニ平行ナル二平面ノ交線ハ其ノ直線ニ平行ナリ。

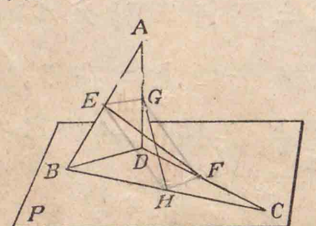
系四　同一直線 AB ニ平行ナル二直線 CD, EF ハ互ニ平行ナリ。

證明　AB, CD 及ビ AB, EF ノ決定スル平面ヲ夫々 P, Q トス。然ルトキハ, EF ト C トノ決定スル平面ハ AB ニ平行ニシテ, 且コレト P トノ交線ハ CD ニ一致ス。………何故カ。

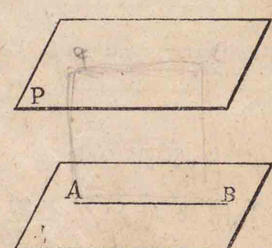
故ニ　　$CD \parallel EF$.

問　　題

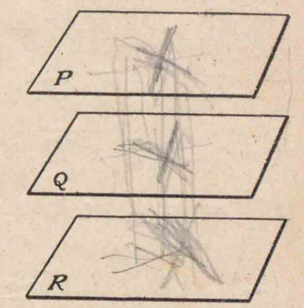
7. 四ツノ頂點ガ同一平面上ニ在ラザル四邊形(歪(ヒズミ)四邊形)ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二線分ハ互ニ他ヲ二等分ス。



(7) 二平行平面ノ一ツノ上ニアル任意ノ直線ハ他ノ平面ニ平行ナリ。



8 同一ノ平面ニ平行ナル二平面ハ互ニ平行ナリ。



9 一與點ヲ過リ同一平面上ニ在ラザル二定直線ニ交ル直線ヲ引ケ。

10 同一平面上ニ在ラザル二直線上ニ夫々一點宛ヲ求メ,其ノ二點ヲ結ブ直線ヲシテ一定直線ニ平行ナラシメヨ。

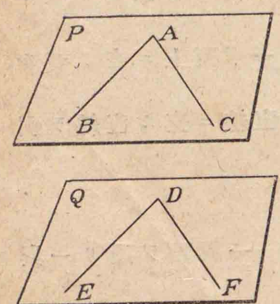
(9) 何レノ二ツヲ取ルモ同一平面上ニ在ラザル三定直線ニ交ル直線ヲ引ケ。

(10) 一與點ヲ過リ一與直線ニ交ル直線ヲ引キ,與平面ニ平行ナラシメヨ。

定理 相交ル二直線ガ夫々他ノ相交ル二直線ニ平行ナルトキハ,

(一) 前者ノ定ムル平面ハ後者ノ定ムル平面ニ平行ナリ。

(二) 前者ノ夾ム角ハ後者ノ夾ム角ニ等シキカ,又ハ補角ヲナス。



(一) $AB \parallel DE$

$AC \parallel DF$ トシ

AB, AC 及ビ DE, DF ノ決定スル平面ヲ夫々 P, Q トス。

證明 P, Q 二平面ガ平行ナラズトスレバ,

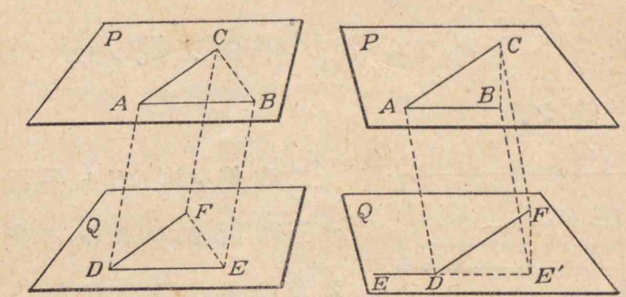
AB, AC ハ共ニ P, Q 二平面ノ交線ニ平行ナラザルベナラズ。……… 何故カ。

之レ不合理ナリ。

故ニ P, Q 二平面ハ交ラズ。

$$\therefore \quad P \parallel Q.$$

(二) 甲 乙



$\angle BAC = \angle EDF.$ $\angle BAC + \angle EDF = 2R\llcorner.$

證明 (甲) $AB = DE, AC = DF$ ノ如ク B, E, C, F ヲ定メ, AD, BE, CF 及ビ BC, EF ヲ引クトキハ

$AD \,\underline{\parallel}\, BE,\quad AD \,\underline{\parallel}\, CF$ ……… 何故カ。

$$\therefore \quad BE \,\underline{\parallel}\, CF$$

故ニ四邊形 CE ハ平行四邊形ナリ。

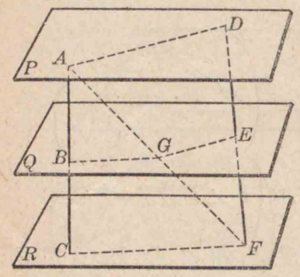
從ッテ $BC = EF$

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

$$\therefore \quad \angle ABC = \angle EDF.$$

(乙) モ DE ヲ延長スレバ同樣ニシテ證スルコトヲ得。

定理　任意ノ二直線ガ平行ナル三平面ニ交ルトキハ,ソレラノ平面ノ間ノ分ノ比ハ相等シ。



二直線 AB, DE ト平行ナル三平面 P, Q, R トノ交點ヲ夫々 A, B, C, D, E, F トスレバ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$ ナリ。

證明　A, F ヲ結ビ,之ト平面 Q トノ交點ヲ G トシ,A ト D, B ト G, C ト F, E ト G トヲ結ブトキハ

$BG \parallel CF$,　　$EG \parallel AD$………何故カ。(P13 三.1)

従ッテ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GF},$$

$$\frac{DE}{EF}=\frac{AG}{GF}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

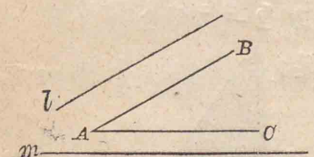
P18(4.1)

問　題

11.　一點 O ニ於テ交ル三ツノ線分 AOA', BOB', COC' アリ。點 O ガ其ノ各線分ノ中點ナルトキハ,$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ノ定ムル二平面ハ平行ナリ。

(11)　任意ノ一點ヨリ同一平面上ニ在ラザル二直線ニ平行ナル二ツノ直線ヲ引ケバ,其ノ二直線ノナス角ハ一定ナリ。

定義　一點ヨリ同一平面上ニ在ラザル二直線ニ平行ニ引ケル二直線ノナス角ヲ初メノ**二直線ノナス角**トイフ。



故ニ平行ナラザル二直線ハ常ニ角ヲナス。若シ其ノ二直線ガ同一平面上ニアラザルトキハ,上ノ方法ニ依リ之ヲ測ル。

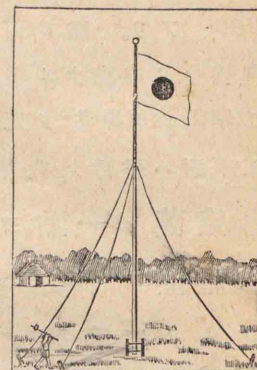
P18(10)

12.　相交ル二直線ノ各ガ一平面ニ平行ナルトキハ,其ノ二直線ノ決定スル平面ハ其ノ平面ニ平行ナリ。

(12)　一點ヨリ一平面ニ平行ニ引ケル數多ノ直線ハ同一平面上ニ在リ。

8. 直線ト平面トノ垂直

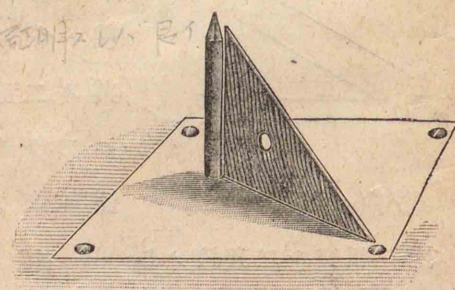
問一 旗竿ヲ地面ニ眞ツ直グニ立ツルトハ如何ニスル事ナルカ。



定義 平面ニ交ル直線ガ其ノ交點ヲ過ル其ノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直ナルトキハ,其ノ直線ヲ其ノ平面ノ**垂線**トイヒ,其ノ直線ト其ノ平面トハ**互ニ垂直ナリ**トイフ。又平面ニ垂直ナラザル直線ヲ其ノ平面ノ**斜線**トイフ。

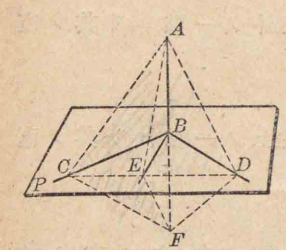
アラユル線トカ直角ヲナスコトヲ
証明スレバ足ル

問二 机上ニ鉛筆ヲ立テ,之ガ机ノ平面ニ垂直ナル事ヲ知ルニハ少クトモ如何ナル檢査ヲ必要トスルカ。



故ニ次ノ定理アリ。

定理 相交ル二直線ノ交點ヲ過リ其ノ各ノ直線ニ垂直ナル直線ハ,其ノ二直線ノ定ムル平面ニ垂直ナリ。



$AB\perp BC$, $AB\perp BD$ ニシテ,BC, BD ノ決定スル平面ヲ P トスレバ

$$AB\perp P$$

證明 AB ヲ延長シテ $BF=AB$ トシ,CD 上ノ任意ノ一點 E ヲトレバ

$$\triangle ACD\equiv\triangle FCD.\quad 從ッテ\ \triangle ACE\equiv\triangle FCE$$

$$\therefore\ AE=EF \qquad \therefore\ AB\perp BE.$$

故ニ AB ハ平面 P ニ垂直ナリ。

故ニ此ノ定理ニ依リ,一直線ガ一平面ニ垂直ナル事ヲ斷定スルニハ,其ノ直線ガ其ノ平面上ニアル相交ル二直線ト夫々垂直ナル事ヲ證明スレバ足ル。

P24 (6) P24 (5)

13. 與直線 AB 外ノ一點 C ヲ通リ,其ノ直線ニ垂直ナル平面ヲ作レ。

14. 同一平面上ニ在ラザル二定直線上ニ兩端ヲ有スル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

P33 15

(13) 與直線 AB 上ノ一點 C ヲ通リ,其ノ直線ニ垂直ナル平面ヲ作レ。

(14) 平行ナル二ツノ平面上ニ兩端ヲ有スル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

問一 同一平面上ニ於テ,一直線外ノ一點ヨリ其ノ直線ニ幾ツノ垂線ヲ引キ得ルカ。

問二 同一平面上ニ於テ,一直線上ノ一點ヨリ其ノ直線ニ幾ツノ垂線ヲ立テ得ルカ。

上ノ場合ト同樣ニ,立體幾何學ニ於テモ次ノ如キ定理アリ。

定理 直線外(又ハ內)ノ一點ヲ通リ其ノ直線ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアリ。

若シ此ノ如キ平面ガ二ツ以上アリトスレバ,其ノ一點ヲ通リ,同一平面上ニ於テ其ノ直線ニ二ツ以上ノ垂線ヲ得ルコトトナリテ不合理ニ陷ル。

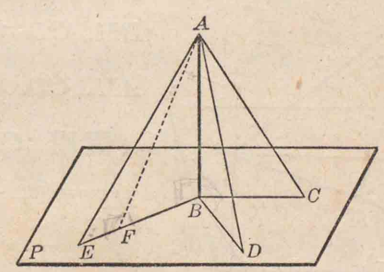
定理 平面外(又ハ內)ノ一點ヨリ其ノ平面ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得。

定義 平面外ノ一點ヨリ其ノ平面ニ引ケル垂線ト其ノ平面トノ交點ヲ**垂線ノ足**トイヒ,其ノ點ヨリ其ノ垂線ノ足ニ至ル線分ノ長サヲ其ノ點**ト平面トノ距離**トイフ。

定理 平面外ノ一點ヨリ其ノ平面ニ垂線及ビ斜線ヲ引クトキハ,

(一) 垂線ノ足ヨリ等距離ニ於テ平面ニ出會フ斜線ハ相等シク,

(二) 垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ於テ平面ニ出會フ斜線ハ,小ナル距離ニ於テ之ニ出會フ斜線ヨリ大ナリ。



證明 $AB \perp P$

$BC=BD$ ナリトスレバ

$\triangle ABC \equiv \triangle ABD$

從ッテ $AC=AD$.

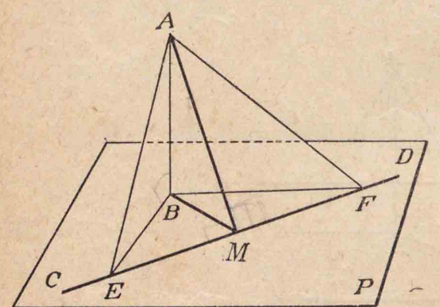
證明 $AB \perp P$, $BC<BE$ ナリトシ,BE上ニBCニ等シクBFヲ取レバ

$AC=AF<AE$.

系 此ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ。

9. 三垂線ノ定理

定理 一平面ニ垂線ヲ引キ,其ノ足ヨリ其ノ平面上ノ任意ノ直線ニ垂線ヲ引クトキハ,後ノ垂線足ト前ノ垂線中ノ一點トヲ結ブ直線ハ初メ平面上ニトリタル直線ニ垂直ナリ。之ヲ**三垂線ノ定理**トイフ。



$AB\perp$ 平面 P,
$BM\perp CD$ ナルトキハ
$AM\perp CD$.

證明 CD上ニME, MFヲ等シク取リ,A及ビBヲ各E, Fト結べ。

然ルトキハ $AM\perp CD$ ナルタメニハ $AE=AF$ ナルコトヲ要ス。又 $AE=AF$ ナルタメニハ $BE=BF$ ナルコトヲ要ス。然ラバ果シテ $BE=BF$ ナルカ。

生徒ハ各自此ノ證明ヲ試ミヨ。

問　題

15. 平面外ノ一點ヨリ其ノ平面ト其ノ平面上ノ任意ノ一直線トニ垂線ヲ引ケバ,其ノ二ツノ垂線足ヲ結ブ直線ハ其ノ直線ニ垂直ナリ。

(15) $\triangle ABC$ ノ垂心 H ヲ過リ $\triangle ABC$ ノ定ムル平面ニ垂線 HP ヲ引ケバ,AP ト BC トノナス角ハ直角ナリ。

16. 平面外ノ一點ヨリ其ノ平面ニ垂線ヲ引ケ。

(16) 平面内ノ一點ヨリ其ノ平面ニ垂線ヲ引ケ。

17. 二定點ヨリ等距離ニアル點ハ如何ナル平面上ニアルカ。

定義 線分ノ中點ヲ過ギ,之ニ垂直ナル平面ヲ其ノ線分ノ**垂直二等分面**トイフ。

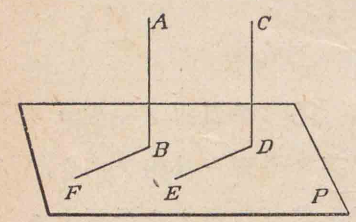
(17) 線分ノ垂直二等分面上ノ點ハ線分ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ。

18. 二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(18) 一平面ニ垂直ナル直線ハ其ノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直ナリ。

10. 平行平面

定理 平行ナル二直線ノ一ツガ一平面ニ垂直ナルトキハ,他ノ一ツモ亦之ニ垂直ナリ。



$AB \parallel CD$ $AB \perp$ 平面 P ナルトキハ

$CD \perp$ 平面 P.

證明 AB, CD ガ P ト交ル點ヲ夫々 B, D トシ,P 上ニ於テ D ヲ過リ任意ノ直線 DE ヲ引キ,B ヲ過リ DE ニ平行ニ BF ヲ引ケ。

然ルトキハ $AB \parallel CD$ $BF \parallel DE$

$\therefore$ $\angle ABF = \angle CDE$

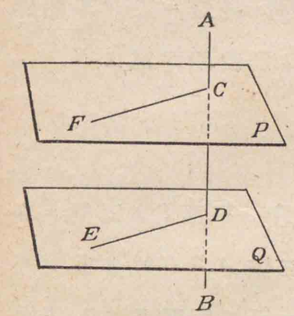
然ルニ $\angle ABF = R.\llcorner$

$\therefore$ $\angle CDE = R.\llcorner$ $\therefore$ $CD \perp$ 平面 P.

系 同一平面ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

問 平行ナル二平面ノ一ツニ交ル直線ハ他ノ一ツニモ交ルカ。

定理 平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ,他ノ一ツニモ亦垂直ナリ。



平面 $P \parallel$ 平面 Q

$AB \perp$ 平面 P ナルトキハ

$AB \perp$ 平面 Q.

證明 AB ガ P, Q ト交ル點ヲ夫々 C, D トシ,Q 上ニ於テ D ヲ過ル任意ノ直線 DE ヲ引キ,DE, AD ノ定ムル平面ト P トノ交線ヲ CF トスレバ,

$CF \parallel DE$………何故カ。

然ルニ $AB \perp CF$

$\therefore$ $AB \perp DE$

$\therefore$ $AB \perp$ 平面 Q.

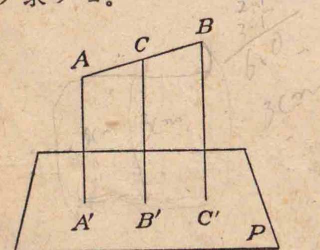
系 同一直線ニ垂直ナル二平面ハ互ニ平行ナリ。

定義 平行ナル二平面ノ間ニ在ル共通垂線ノ部分ノ長サヲ,其ノ**平行二平面ノ距離**トイフ。

問題

19. 平行ナル二平面ノ各ノ上ノ一點宛ヲ結ブ線分ノ中ニテ,其ノ二平面ノ距離ハ最短ナリ。

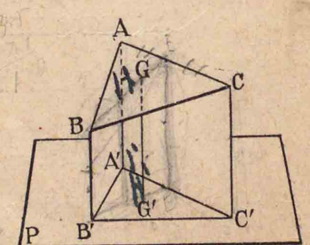
20. 長サ 2.5 米, 3.5 米ナル二本ノ杙ヲ地面ニ垂直ニ立テ,眞直ナル竿ノ兩端ヲ支ヘ,尙其ノ竿ノ中央ヲ地面ニ垂直ナル杙ニテ支ヘタリ。中央ノ杙ノ長サヲ求メヨ。

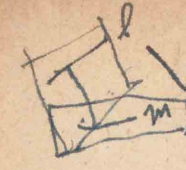


(19) 15頁ニ於ケル問題8ノ別證明ヲ試ミヨ。

(20) 平面 P ノ同側ニ在ル三點 A, B, C ヨリ其ノ平面ニ至ル距離ヲ AA', BB', CC' トシ,其ノ三點ヲ結ビテ得ル三角形ノ重心 G ヨリノ距離ヲ GG' トスレバ

$$AA'+BB'+CC'=3.GG'.$$

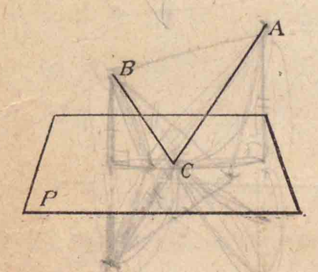




l 平面ニ m ガ含マレル場合ハ無,
含マレナイ場合ハ一つ

21. 同一平面上ニ在ラザル二定直線ニ交リ,且第三定直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ。(吟味)

22. 定平面 P 上ニ一點 C ヲ求メ,C ヨリ P ノ同側ニアル二定點 A, B ニ至ル距離ノ和ヲシテ最小ナラシメヨ。

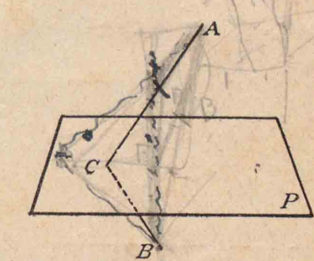


備考 平面 P ニ關スル點 B ノ對稱點ヲ考ヘヨ。

23. 問題22ニ於テ,A ト B トガ平面 P ノ反對側ニアルトキハ如何。

(21) 同一平面上ニ在ラザル定直線ト定圓周トニ交リ,且他ノ定直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ。吟味

(22) 定平面 P 上ニ一點 C ヲ求メ,C ヨリ P ノ兩側ニアル二定點 A, B ニ至ル距離ノ差ヲシテ最大ナラシメヨ。

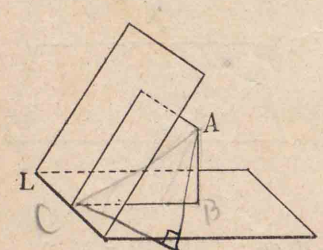


備考 問題22ニ同ジ。

(23) 問題(22)ニ於テ,A ト B トガ平面 P ノ同側ニアルトキハ如何。

24. 問題22ノ平面P上ニ於テ,AC, BCノ比ガ夫々A,BヨリPニ至ル距離ノ比ニ等シキ點Cノ軌跡ヲ求メヨ。

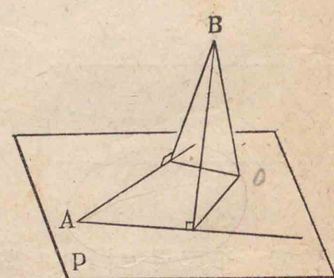
25. 定直線LトL外ノ定點Aトアリ。AヨリLヲ含メル任意ノ平面ヘ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。



Cヲ通リLニ垂直ナル平面

(24) 問題24ニ於テ問題(22)ノ如キ場合ハ如何。

(25) 定平面PトP内ノ定點A及ビP外ノ定點Bトアリ。BヨリAヲ過ルP上ノ任意ノ直線ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。



AOヲ直径トスル
円周上ニアリ

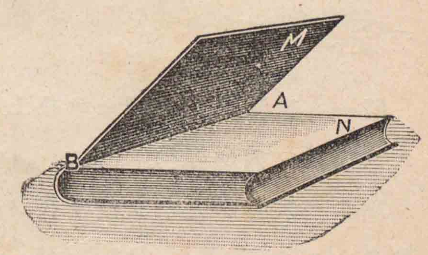
第二章

二面角及多面角

11. 二面角

定義 相交ル二平面ノ開キヲ**二面角**トイヒ,其ノ二平面ハ**二面角ヲナス**トイフ.又其ノ交線ヲ二面角ノ**稜**トイフ。

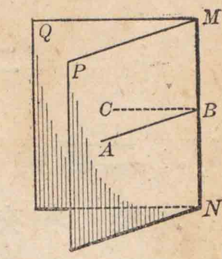
例ヘバ右ノ圖ノ如クオケバ,書籍ノ表紙Mト紙Nトハ二面角ヲ作リ其ノ綴ヂ目ABハ卽チ其ノ稜ナリ。



二面角ハ其ノ稜ヲ表ハス直線ノ兩側ニ各平面上ノ二點ノ名ヲ附シテ之ヲ表ハス。

例ヘバ二面角 $M-AB-N$ トイフガ如シ。

定義 二面角ノ稜上ノ任意ノ一點ヨリ其ノ稜ニ垂直ニ各平面上ニ引ケル二直線ノナス角ヲ**二面角ノ平面角**トイフ。



今圖ニ於テ稜 MN ヲ軸トシ平面 P ヲ平面 Q ノ位置マデ廻轉スルトキハ,平面角 ABC ノ一邊 AB ハ $\angle ABC$ ダケ廻轉ス。故ニ二面角ノ大サハ平面角 $\angle ABC$ ノ大サニ等シ。故ニ

二面角ノ大サハ其ノ平面角ノ大サヲ以テ定ム。

問一 書籍ヲ全ク開キテ机上ニ置ケバ,其ノ紙面ノナス二面角ノ大サ如何。

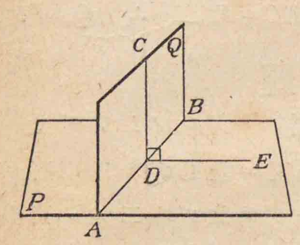
問二 教室ノ左右ノ壁ト後ノ壁トハ如何ナル大サノ角ヲナスカ

定義 二ツノ平面ノナス二面角ガ直角ナルトキハ,其ノ二ツノ平面ハ**互ニ垂直ナリ**トイフ。

問三 直六面體ヲナス平面ノ二ツヲトルトキハ如何ナル狀態ニアルカ。(二ツノ場合アリ。)

12. 平面ノ垂直

定理 二平面 (P, Q) ガ互ニ垂直ナルトキハ,其ノ一平面 (Q) 上ノ一點 (C) ヨリ其ノ交線 (AB) ニ垂線 (CD) ヲ引ケバ,其ノ垂線 (CD) ハ他ノ平面 (P) ニ垂直ナリ。



證明 AB ト CD トノ交點ヲ D トシ,D ヨリ AB ニ垂直ニ P 上ニ DE ヲ引クトキハ,

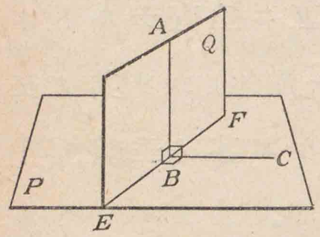
$P \perp Q$ ナル故 $\angle CDE = R.\llcorner$

又 $\angle CDA = R.\llcorner$ $\therefore$ $CD \perp P$.

系一 二平面 (P, Q) ガ互ニ垂直ナルトキハ,其ノ一平面 (Q) 上ノ一點 (C) ヨリ他ノ平面 (P) ニ引ケル垂線 (CD) ハ,其ノ平面 (Q) 上ニ在リ。

系二 同一平面 (P) ニ垂直ナル二平面 (Q, R) ノ交線 (AB) ハ,其ノ平面 (P) ニ垂直ナリ。

定理 平面(P)ニ垂直ナル直線(AB)ヲ含ム平面(Q)ハ,其ノ平面(P)ニ垂直ナリ。

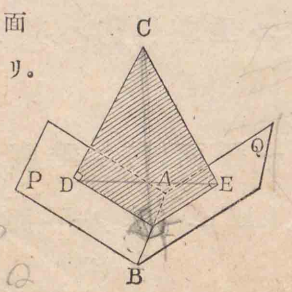


證明 P, Qノ交線EFトABトノ交點ヲBトシ,P上ニ於テBヨリEFニ垂直ニBCヲ引キ,P, Qノナス二面角ノ平面角ABCヲ作ルトキハ $AB \perp P$ ナル故 $\angle ABC = R.\angle$ $\therefore$ $Q \perp P$.

問題

1. 互ニ平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル平面ハ他ノ一ツニモ亦垂直ナリ。

2. 相交ル二平面外ノ一點ヨリ其ノ各ノ平面ニ引ケル二垂線ノ定ムル平面ハ,初メノ二平面ノ交線ニ垂直ナリ。



定理 P(34)ニヨリ
ΔCDF⊥P
AB⊥PE…
∴ΔCDF⊥P
同様ニΔCEF⊥Q
故ニ

(1) 何レノ二ツヲトルモ互ニ垂直ナル三平面ニヨリテ生ズル三ツノ交線ハ又二ツ宛互ニ垂直ナリ。

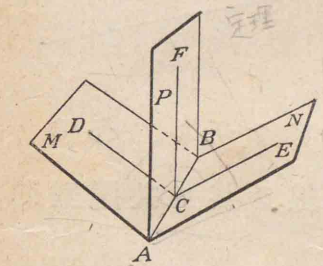
(2) 相交ル二平面ノ交線ニ垂直ナル平面ハ初メノ二平面ノ各ニ垂直ナリ。

3. 同一直線上ニ在ラザル三點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 相交ル二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 二面角$M-AB-N$ノ二等分面Pヲ作ルニハ如何ニスベキカ。

定理

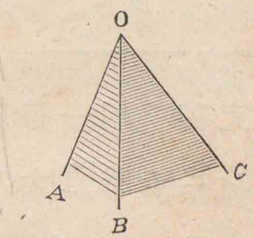


6. 相交ル二平面ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

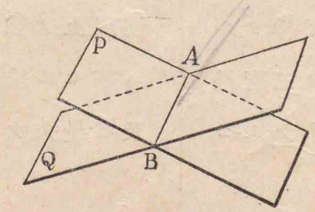
(3) 同一平面上ニ在ラザル四點ヨリ等距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

(4) 一點ニ於テ交ル三直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

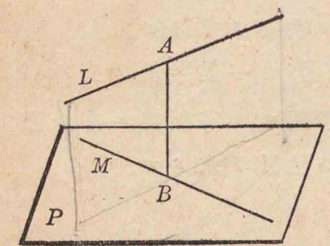
(5) 一點ニ於テ交ル三平面ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。



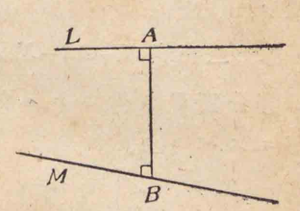
(6) 相交ル二平面ヨリノ距離ノ比ガ 3:2 ナル如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。



7. 平面P上ノ定直線MトP上ニ在ラザル定直線Lトニ交ル直線ABヲ引キ,Pニ垂直ナラシメヨ。



(7) 同一平面上ニ在ラザル二定直線L, Mニ共通ナル垂線ABヲ引ケ。



定義 同一平面上ニアラザル二直線ノ何レニモ垂直ナル一直線ヲ其ノ**共通垂線**トイフ。

8. 同一平面上ニ在ラザル二定直線L, Mノ各ノ上ノ一點宛ヲ結ビ付クル線分ノ中ニテ,其ノ二直線ノ共通垂線ハ最小ナルコトヲ證セヨ。

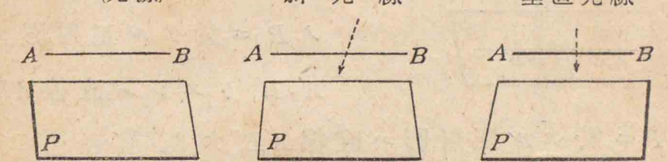
(8) 一ツノ平面ト之ニ交ラザル圓トアリ。其ノ圓周上ノ點ヨリ其ノ平面ニ下セル垂線ノ中ノ最小及ビ最大ナルモノ如何。

13. 直線ト平面トノナス角

問一 次ノ圖ニ於テ線分ABノ平面Pニ投ズル影ハ如何ニナルカ。

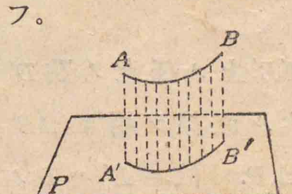
(一) 放射光線　　(二) 平行光線

S(光源)　　斜光線　　垂直光線



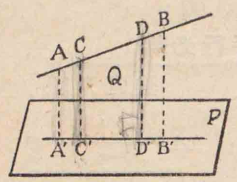
定義 一點ヨリ一平面ニ引ケル垂線ノ足ヲ,其ノ點ノ其ノ平面ニ於ケル**正射影**トイフ。

又平面外ノ線上ノ點ノ其ノ平面ニ於ケル正射影ノ軌跡ヲ,其ノ線ノ其ノ平面ニ於ケル**正射影**トイフ。



一般ニ平面ニ垂直ナラザル直線ノ其ノ平面ニ於ケル正射影ハ直線ナルモ,曲線ヲ任意ノ位置ニ置クトキハ其ノ正射影ハ直線トナラズ。

定理 平面ニ垂直ナラザル直線ノ其ノ平面ニ於ケル正射影ハ直線ナリ。



平面Pニ垂直ナラザル直線AB上ノ二點A, BノPニ於ケル正射影ヲA', B'トスレバ,直線ABノPニ於ケル正射影ハ直線$A'B'$ナリ。

證明 二垂線AA', BB'ハPニ垂直ナル平面Qヲ決定ス。而シテ此ノ平面ハ直線$AB, A'B'$ヲ含ム。

故ニAB上ノ任意ノ點CヨリPニ引キタル垂線ハQ上ニ在リテ$A'B'$ニ交ル。其ノ交點ヲC'トスレバC'ハ卽チCノ正射影ナリ。

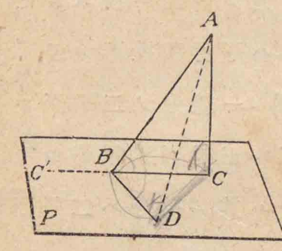
故ニAB上ノ總ベテノ點ノ正射影ハ$A'B'$上ニ在リ。

次ニ$A'B'$上ノ任意ノ點D'ヨリQ上ニ於テAA'ニ平行ナル直線ヲ引キ,ABトノ交點ヲDトスレバ$DD' \perp P$. 故ニD'ハDノ正射影ナリ。

故ニ$A'B'$上ノ總テノ點ハAB上ノ或點ノ正射影ナリ。

故ニABノPニ於ケル正射影ハ直線$A'B'$ナリ。

定理 一平面ノ斜線ガ其ノ平面ニ於ケル其ノ正射影トナス鋭角ハ,其ノ斜線ト其ノ平面上ノ何レノ直線トノナス鋭角ヨリモ小ナリ。



ABヲ平面Pノ斜線,BCヲ其ノ正射影トシテ,Bヲ通リP上ニ任意ノ直線BDヲ引クトキハ　$\angle ABC < \angle ABD$.

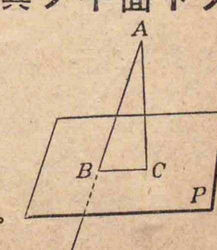
證明 點Cヲ點Aノ正射影トセヨ。BCニ等シクBDヲトリ,A, Dヲ結ブトキハ$\triangle ABC$ト$\triangle ABD$トニ於テ,

$BC = BD$　ABハ共通　$AC < AD$………何故カ.

故ニ　$\angle ABC < \angle ABD$.

問　斜線ABハP上ノ如何ナル直線ト最大ノ角ヲナスカ。

定義 一直線ガ一平面ニ於ケル其ノ正射影トナス角ヲ**其ノ直線ト其ノ平面トノナス角**トイフ。



例ヘバ直線ABノ平面Pニ於ケル正射影ヲBCトスレバ,$\angle ABC$ヲ**以テABト平面Pトノナス角**トス。

問題

9\. 互ニ平行ナル二直線ノ一平面ニ於ケル正射影ハ,特別ノ場合ヲ除ク外平行ナル二直線ナリ。

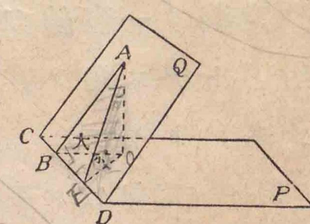
10\. 或線ノ相交ル二平面ノ各ニ於ケル正射影ガ共ニ直線ナルトキハ,其ノ線ハ如何ナル線ナルカ。

11\. 矩形ノ紙 $ABCD$ アリ。AB ハ8糎,BC ハ6糎ナリ。之ヲ對角線 AC ニ沿ウテ折リ曲ゲ,平面 ABC ト CDA トヲ垂直ナラシメタルトキ,線分 BD ノ平面 ABC ニ於ケル正射影ノ長サヲ求メヨ。

(9) 垂直ナラザル二平面ノ一ツノ上ノ平行四邊形ガ他ノ平面ニ投ズル正射影ハ平行四邊形ナリ。

(10) 一線分ノ二平面ニ投ズル正射影ガ相等シキトキハ其ノ線分ハ二平面ト等角ヲナス。

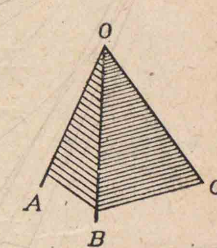
(11) 直線 CD ニ於テ交ル二平面 P, Q アリ。Q 上ノ一點 A ヨリ Q 上ニ引ケル直線ノ中 CD ニ垂直ナルモノハ,P ト最大ノ角ヲナス。



14. 多面角

問一 一點ニ於テ出會フ三ツノ平面ニヨリテ生ズル二面角ハ幾ツアルカ。

定義 三ツ以上ノ平面ガ一點ニ於テ出會ヒ尖形ヲナストキハ,相隣レル二面角ノ稜ノナス角ヲ**面角**トイヒ,ソレ等ノ面角ガ**多面角ヲナス**トイフ。

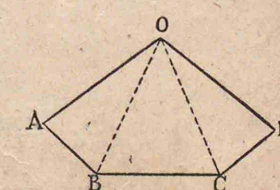


而シテ面角ノ共通頂點ヲ多面角ノ**頂點**トイフ。

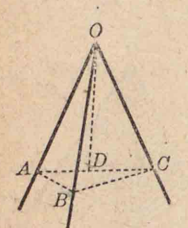
例ヘバ圖ニ於テ,$\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ ハ面角ニシテ,コレ等ノ面角ハ多面角 O-ABC ヲナストイフ。點 O ハ多面角 O-ABC ノ頂點ナリ。

多面角ハコレヲ作ル面角ノ數ニ從ッテ**三面角**,**四面角**等トイフ。

問二 紙ヲ圖ノ如ク截リヌキ,點線ヲ折目トシテ之ヲ折リ曲グルトキハ,常ニ三面角ヲ作リ得ベキカ。



定理　三面角ノ二ツノ面角ノ和ハ他ノ一ツノ面角ヨリ大ナリ。



三面角O-ABCニ於テ,面角AOCヲ三ツノ面角中ノ最大ナルモノトスルモ

$$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC.$$

ナリ。

證明　平面AOC上ニ於テ$\angle AOB$ニ等シク$\angle AOD$ヲトリ,OD上ノ一點Dヲ通リ平面AOC上ニ於テ直線ADCヲ引キ,ODニ等シクOBヲ取レバ

$$\triangle AOB\equiv\triangle AOD$$

$$\therefore\quad AD=AB$$

又　$BC>DC$……何故カ。

$\triangle BOC$ト$\triangle DOC$トニ於テ

$OB=OD$,

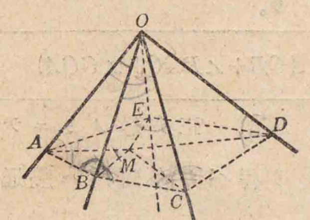
OCハ共通,

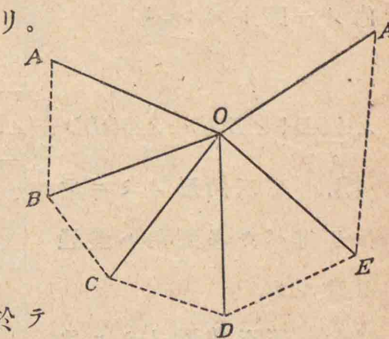
$BC>DC$

$$\therefore\quad \angle BOC>\angle DOC$$

$$\therefore\quad \angle AOB+\angle BOC>\angle AOC.$$

定理　一ツノ多面角ノ總テノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。





多面角O-$ABC\cdots E$ニ於テ

$$\angle AOB+\angle BOC+\cdots\cdots+\angle EOA<4R.\llcorner$$

證明　此ノ多面角ヲ各稜ト交ル平面ニテ截リ,各稜トノ交點ヲ夫々$A,B,C,\cdots E$トシ,多角形$ABC\cdots E$內ニ一點Mヲトリ,之ト多角形ノ各頂點トヲ結ベバ

$$\angle OBA+\angle OBC>\angle ABC=\angle ABM+\angle MBC$$

$C,D\cdots\cdots A$ヲ頂點トスル三面角ニ於テモ亦同樣ナリ。從ッテOヲ共通頂點トセル總テノ三角形ノ底角ノ和ハMヲ共通頂點トセル總テノ三角形ノ底角ノ和ヨリ大ナリ。而シテ三角形ノ數ハ,兩者何レノ場合ニ於テモ同數ニシテ夫々ノ內角ノ和ハ相等シキヲ以テ,點Oニ於ケル面角ノ和ハ點Mニ於ケル角ノ和ヨリ小ナリ。

故ニ　$\angle AOB+\angle BOC+\cdots\cdots+\angle EOA<4R.\llcorner$

12. Dヲ三面角$O\text{-}ABC$內ノ一點トスレバ

(12) 歪四邊形ノ四ツノ內角ノ和ハ$4R.L$ヨリ小ナリ。

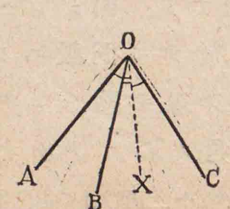
$$\angle AOD+\angle BOD+\angle COD>\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC+\angle COA)$$

13. 正三角形ノミニテ作リ得ベキ多面角ハ幾通リアルカ。

14. 正五角形ノミニテ作リ得ベキ多面角ハ幾通リアルカ。

15. 三面角ノ三ツノ面角ガ相等シキトキハ,其ノ各稜ヲ稜トスル二面角モ亦相等シ。

16. 三面角ノ頂點ヲ過リ三ツノ稜ト等角ヲナス直線ヲ引ケ。

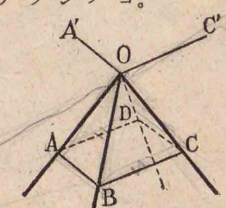


(13) 正方形ノミニテ作リ得ベキ多面角ハ幾通リアルカ。

(14) 正六角形ノミニテ多面角ガ作ラルルカ。

(15) 二等邊三角形ノ底邊ヲ含ム任意ノ平面ハ其ノ等邊ト等角ヲナス。

(16) 四面角ヲナス四ツノ平面ヲ一平面ニテ截リ其ノ截口ヲシテ平行四邊形ナラシメヨ。



(第 二 篇)

多 面 體

第 三 章

平 行 六 面 體

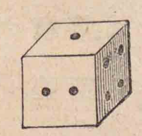
15. 立體及多面體

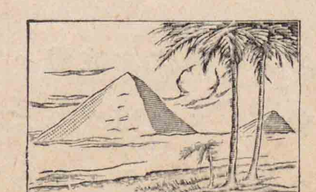
定義 空間ノ有限ノ部分ヲ**立體**トイヒ,數多ノ平面ニテ圍マレタル立體ヲ**多面體**トイフ。

而シテ多面體ヲ境界スル平面ノ一部分ヲ多面體ノ**面**トイヒ,面ト面トノ交線ヲ其ノ**稜**トイヒ,稜ト稜トノ交點ヲ**頂點**トイフ。

多面體ハ其ノ面ノ數ニヨリ之ヲ**四面體**,**五面體**,**六面體**等トイフ。

問一 多面體ノ實例ヲ擧ゲヨ。





定義 立體ノ**體積**トハ其ノ面ニ依リテ圍マレタル空間ノ一部分ノ大サナリ。

問二 體積ヲ測ル**單位**ノ名ヲ擧ゲヨ。

問三 既ニ諸子ノ知レル體積ノ測リ方ヲ述ベヨ。

定義 立體ヲ作ル面ノ面積ノ和ヲ其ノ**表面積**トイフ。依テ表面積ヲ求ムルニハ各面ノ面積ヲ求メ,其ノ和ヲ作ルベシ。

多面體ニアリテハ表面ハ總テ多角形ナルヲ以テ,容易ニ其ノ表面積ハ求メラルベシ。

定義 二ツノ立體ノ體積ガ相等シキトキハ,其ノ二ツノ立體ハ**相等シ**,又ハ**等積ナリ**トイヒ,二ツノ立體ヲ全ク重ネ合スコトヲ得ルトキハ,其ノ二ツノ立體ハ**合同ナリ**トイフ。

従ツテ合同ナル立體ハ等積ナルモ,等積ナル立體ハ必ズシモ合同ナラズ。例ヘバ四面體ト六面體トハ等積タリ得ルモ合同ナラザルガ如シ。

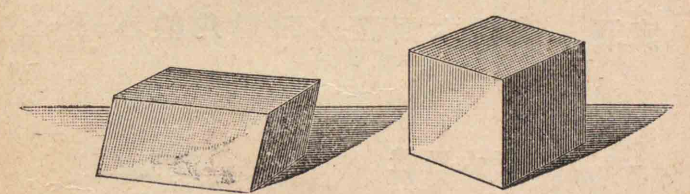
16. 平行六面體

問一 直方體ニハ稜ガイクツアルカ。又頂點ノ數如何。

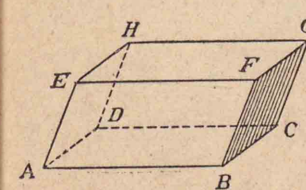
問二 六面體ノ實例ヲ擧ゲヨ。

問三 方解石ノ結晶ハ如何ナル形ナルカ。

定義 相對スル二面ガ夫々平行ナル六面體ヲ**平行六面體**トイフ。



定理 平行六面體ノ各面ハ總テ平行四邊形ナリ。



證明 平面$ABCD$ハ平面$EFGH$ト平行ニシテ,此ノ二平面ニ一平面$ABFE$ガ交ル故,$AB \parallel EF$,同様ニ $AE \parallel BF$ 故ニ $ABFE$ ハ平行四邊形ナリ。

他ノ平面モ同様ニ證明スルコトヲ得。

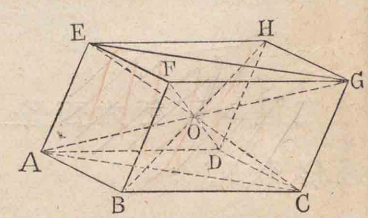
系一 平行六面體ノ十二ノ稜ハ四ツ宛其ノ長サ相等シ。

$AB=DC=HG=EF,\ AE=BF=CG=DH$ 等。

系二 平行六面體ノ平行ナル二面ハ合同ナル平行四邊形ナリ。

$\square AF\equiv\square DG,\ \square AC\equiv\square EG,\ \square AH\equiv\square BG.$

定理 平行六面體ノ四對角線ハ同一ノ點ヲ通ル。



$A-G$ ヲ平行六面體トスレバ

AG, BH, CE, DF ハ同一ノ點ヲ通ル。

證明 $AE \mathbin{\underline{\parallel}} CG$………何故カ。

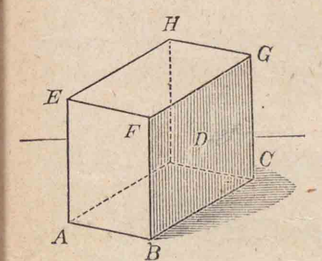
故ニ EC ハ AG ノ中點ヲ通ル。之ヲ點 O トスレバ BH, FD モ亦點 O ヲ通ル。………何故カ。

故ニ四對角線ハ同一點 O ヲ通ル。

17. 直六面體(直方體)及立方體

定義 平行六面體ノ相隣レル二面ノナス二面角ガ總テ直角ナルトキ,之ヲ**直六面體**(或ハ**直方體**)トイフ。

定理 直六面體ノ各面ハ總テ矩形ナリ。



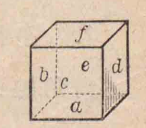
證明 $\angle EFB$ ハ二面角 $E\text{-}FG\text{-}B$ ノ平面角ナリ。然ルニ定義ニ依リ二面角 $E\text{-}FG\text{-}B$ ハ直角ナリ。

$\therefore\ \angle EFB=R.\llcorner$

故ニ $\square ABFE$ ハ矩形ナリ。

定義 直六面體ノ一頂點ヨリ出ヅル三ツノ稜ヲ其ノ**縱,横,高サ**トイフ。

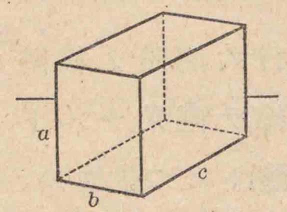
定義 縱,横,高サノ等シキ直六面體ヲ**立方體**(或ハ**正六面體**)トイフ。



從ッテ,立方體ノ各面ハ總テ合同ナル正方形ナリ。

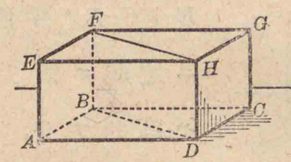
$\square a\equiv\square b\equiv\square c\equiv\square d\equiv\square e\equiv\square f.$

問題



1. 縦,横,高サ夫々 a 糎, b 糎, c 糎ナル直六面體ノ表面積ヲ求メヨ。

(1) 一稜ノ長サ a 糎ナル立方體ノ表面積ヲ求メヨ。



2. 直六面體 A-G ヲ圖ノ如ク平面 $BDHF$ ニテ截ルトキハ,四邊形 $BDHF$ ハ矩形ナリ。

3. 直六面體ノ四ツノ對角線ハ相等シ。

4. 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ其ノ十二稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

(2) 問題2ニ於テ, $AB=a$, $AD=b$, $AE=c$ ナルトキ $\square BDHF$ ノ面積ヲ求メヨ。

(3) 一稜ノ長サ a 糎ナル立方體ノ對角線ノ長サハ $a\sqrt{3}$ 糎ナリ。

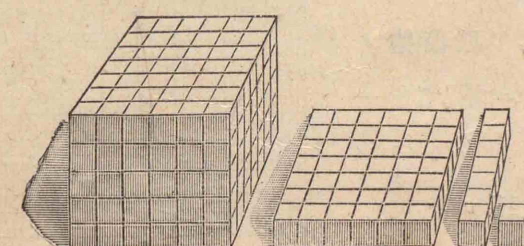
(4) 何レノ二ツヲトルモ同一平面上ニ在ラザル三直線上ニ三稜ヲ有スル平行六面體ヲ作レ。

18. 平行六面體ノ體積

定義　一稜ノ長サガ單位ノ長サナル立方體ノ體積ヲ以テ體積ノ單位トス。

我ガ國ノ度量衡法及ビ其ノ施行令等ニハ立方米,立方粉,立方糎(cc)ヲ規定シ,外ニ竏,竡,立(l),竕,竰ヲ定メラレタル事ハ諸子ノ熟知スル所ナリ。

問一　直六面體ノ體積ヲ求ムル方法ヲ述ベヨ。



問二　縦7糎,横6糎,高サ5糎ナル直六面體ノ體積ヲ求メヨ。

問三　問二ノ計算ヲ,上ノ圖ニ就イテ說明セヨ。

故ニ次ノ定理アリ。

定理　直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ縦,横及ビ高サヲ表ハス數ノ連乘積ニ等シ。

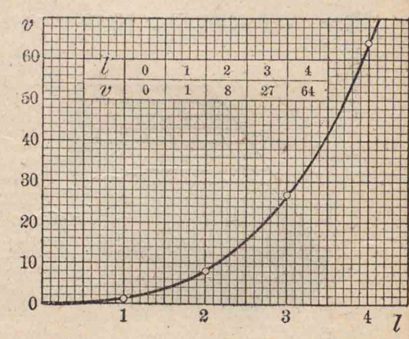
コノ定理ヲ略シテ「**直六面體ノ體積ハ縱,橫,高サノ積ニ等シ**」トイフコトアリ。

今直六面體ノ縱,橫,高サヲ夫々l,w,hトシ,其ノ體積ヲvトスレバ

$$v=lwh.$$

系一 立方體ノ體積ヲ表ハス數ハ一稜ノ長サヲ表ハス數ノ三乘ニ等シ。

之モ「立方體ノ體積ハ一稜ノ三乘ニ等シ」ト略稱ス。以後他ノ定理モ之ニ準ズ。一稜ノ長サヲlトスレバ其ノ體積vハ



$$v=l^3.$$

vトlトノ關係ヲ「グラフ」ニ描ケバ上圖ノ如シ。

5. 縱ハ橫ノ2倍,高サハ橫ノ3倍ナル直六面體ノ體積ヲ求メヨ。但シ橫ハa糎アリ。

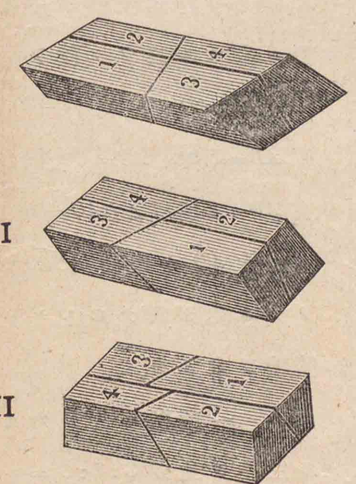
(5) 體積720立方糎ノ立方體ノ一稜ノ長サヲ求メヨ。

又表面積ガ294平方糎ノ立方體ノ體積如何。

問 同大ノ矩形ノ厚紙ヲ積ミ重ネ之ヲ斜ニズラストキハ如何ナル形ヲ得ルカ。其ノ間ニ體積ノ變化アリヤ。

定義 平行六面體ノ一雙ノ相對スル面ヲ**底面**ト呼ブ事アリ。之ニ對シ其ノ平行平面間ノ距離ヲ平行六面體ノ**高サ**トイフ。又兩底面ノ間ニアル稜ヲ**側稜**トイフ。

定理 平行六面體ノ體積ハ其ノ底面積ト高サトノ積ニ等シ。*



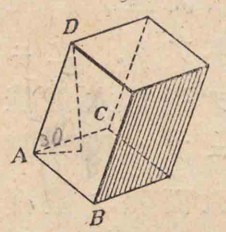
II
III

今試ミニ,平行六面體ヲ一底面ニ垂直ニ且一稜ニ垂直ナル平面ニテ二ツニ截リ,其ノ位置ヲ交換スルトキ一雙ノ面ハ底面ニ垂直トナル(*II*)。次ニ始メノ稜ニ隣ル稜ニ垂直ニ且底面ニ垂直ナル平面ニテ之ヲ截リ,其ノ位置ヲ交換スレバ直六面體*III*ヲ得。而モ*I*=*II*=*III*ニシテ*III*ノ底面積ハ*I*ノ底面積ト等シク,*III*ノ高サハ*I*ノ高サナリ。故ニ

平行六面體ノ體積＝底面積×高サ.

*備考 之ガ理論的證明ハ59頁ニ讓ル。

6. 底面積ガ50平方糎ニシテ,其ノ側稜ガ20糎ナル平行六面體ノ體積ヲ求メヨ。但シ其ノ側稜ト底面トノナス角ヲ30°ナリトス。



7. 平行六面體ノ一頂點ニ會スル三ツノ稜ヲ AB, AC, AD トス。

$AB=6$糎, $AC=5$糎, $AD=15$糎, $\angle BAC=30°$ ニシテ,AD ノ平面 ABC ニ於ケル正射影ガ12糎ナルトキノ體積ヲ求メヨ。

8. 底面ガ菱形ナル平行六面體アリ。其ノ高サハ a 糎ニシテ,底面ノ一邊及ビ一對角線モ a 糎ナルトキノ體積ヲ求メヨ。

(6) 底面積ガ30平方糎ニシテ,其ノ側稜ガ10糎ナル平行六面體ノ體積ヲ求メヨ。但シ其ノ稜ノ底面ニ於ケル正射影ヲ6糎ナリトス。

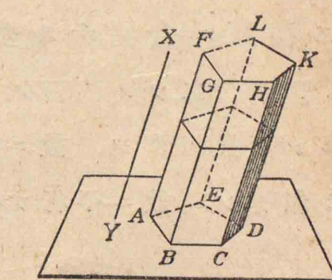
(7) 平行六面體ノ一頂點ニ會スル三ツノ稜ヲ AB, AC, AD トス。

$AB=5$糎, $AC=5$糎, $AD=8$糎, $\angle BAC=60°$ ニシテ,AD ト平面 ABC トノナス角ガ60°ナルトキノ體積ヲ求メヨ。

(8) 一頂點ニ於テ會スル三稜ノ比ガ $3:5:6$ ニシテ,其ノ體積ガ2430立方糎ナル直六面體アリ。其ノ各稜ノ長サヲ求メヨ。

第四章 角壔

19. 角壔



定義 一ツノ直線ニ平行ナル三ツ以上ノ平面ト之ニ交ル二ツノ平行ナル平面トニヨリテ圍マレタル多面體ヲ**角壔**(タウ)トイフ。

問 稜 AF, BG, CH 等ハ平行ニシテ且等シ。又多角形 $ABC\cdots\cdots$, $FGH\cdots\cdots$ ハ合同ナリ。其ノ理由如何。

定義 角壔ノ平行四邊形ナル面ヲ其ノ**側面**トイヒ,他ノ二ツノ平行ナル平面ヲ其ノ**底面**トイフ。

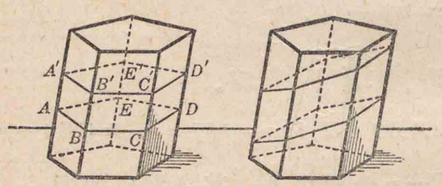
側面ト側面トノ交線ヲ角壔ノ**側稜**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。

角壔ハ底面ノ邊ノ數ニヨリ之ヲ**三角壔**,**四角壔**,**五角壔**等トイフ。

定義　多面體ヲ一平面ニテ截リタルトキ生ズル多角形ヲ其ノ**截面**(セツ)トイヒ,角壔ノ側稜ニ垂直ナル截面ヲ其ノ**直截面**トイフ。

定理　角壔ノ總テノ側稜ニ交ル平行ナル截面ハ合同ナル多角形ナリ。

證明　二ツノ截面ノ相對應スル邊ハ夫々平行ニシテ且相等シ。故ニ其ノ相對應スル角モ亦夫々相等シ。故ニ平行ナル截面ハ合同ナリ。



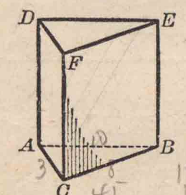
定義　側稜ガ底面ニ垂直ナル角壔ヲ**直角壔**トイヒ,垂直ナラザルモノヲ**斜角壔**トイフ。又底面ガ正多角形ナル直角壔ヲ**正角壔**トイフ。

前章ニ述ベタル平行六面體ハ斜四角壔ノ一種ニシテ,直六面體ハ直四角壔ノ一種ナリ。又立方體ハ正四角壔ノ一種ナリ。

問　題

1. 直角壔ノ側面ハ矩形ナリ。

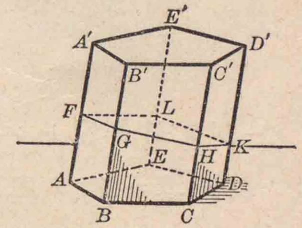
2. 直三角壔アリ。其ノ底面ノ三邊ハ 8 糎,10 糎,11 糎ニシテ,高サハ 15 糎ナリ。其ノ側面積ヲ求メヨ。



3. 直角壔ノ側面積ヲ求ムル公式ヲ作レ。

(1)　正角壔ノ側面ハ合同ナル矩形ナリ。

(2)　~~底面ノ三邊ガ夫々~~ a 糎,b 糎,c 糎,高サ d 糎ナル直三角壔ノ側面積ヲ求メヨ。

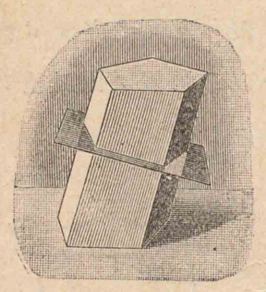


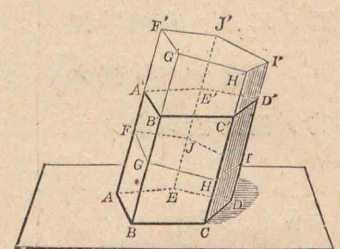
(3)　斜角壔ノ側面積ハ其ノ直截面ノ周ト其ノ側稜トノ積ニ等シ。

19

20. 角壔ノ體積

定理 斜角壔ノ體積ハ其ノ直截面ヲ底面トシ,其ノ側稜ヲ高サトスル直角壔ニ等シ。





$A-D'$ ヲ斜角壔トシ,其ノ直截面ヲ FI トスレバ,此ノ斜角壔ハ FI ヲ底面トシ,AA' ヲ高サトスル直角壔ニ等シ。

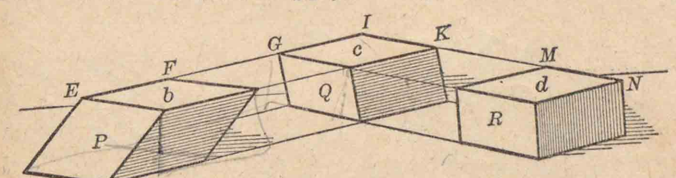
證明 FF' ヲ AA' ニ等シクトリ,F' ヲ通リ平面 FI ニ平行ナル平面ヲ作リ,直角壔 $F-I'$ ヲ作ルトキハ,多面體 $A'-I'$ ヲ下方ニズラスコトニヨリテ,多面體 $A-I$ ニ重ネ合スコトヲ得。

故ニ　多面體 $A'-I'=A-I$

此ノ雙方ヘ多面體 $F-D'$ ヲ加フルトキハ

斜角壔 $A-D'$＝直角壔 $F-I'$.

今此ノ定理ニ依リ平行六面體ノ體積ニ關スル定理(53頁)ヲ理論的ニ說明セン。



今 P ヲ與ヘラレタル平行六面體トシ,其ノ底面積ヲ b,高サヲ h トスレバ,其ノ體積ヲ表ハス數 v ハ

$$v=bh.$$

證明 P ノ稜 EF 及ビ之ニ平行ナル各稜ヲ延長シテ EF ノ延長上ニ EF ニ等シク GI ヲトリ,G, I ヲ通リ EI ニ垂直ナル平面ニテ此等ノ稜ヲ截ルトキハ,底面ガ$\square GK$ナル平行六面體 Q ヲ得。其ノ底面積 c ハ b ニ等シ。

同樣ニシテ IK ノ延長上ニ IK ニ等シク MN ヲトリ,M, N ヲ通リ MN ニ垂直ナル平面ニテ MN ニ平行ナル稜ヲ截ルトキハ,直六面體 R ヲ得。其ノ底面積 d ハ c ニ等シ。且此等三ッノ六面體ハ何レモ高サ h ヲ共有スルガ故ニ

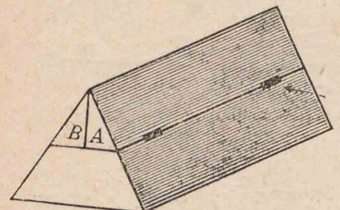
$$P=Q=R$$

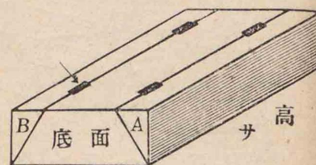
然ルニ　$R=dh=bh$

$$\therefore\ v=bh$$

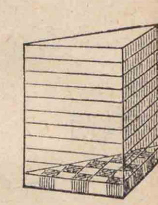
即チ　**平行六面體ノ體積＝底面積×高サ.**

問　次ノ圖ニ依リ直三角壔ノ體積ノ求メ方ヲ考ヘ出セ。

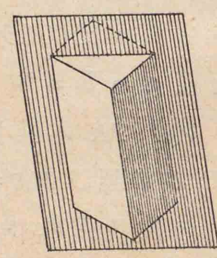


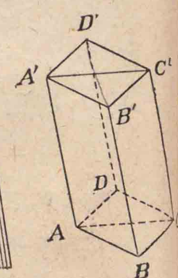


定理　三角壔ノ體積ハ其ノ底ト高サトノ積ニ等シ。



三角壔 $ABC\text{-}A'$ ノ底面ヲ a トシ,高サヲ h トスレバ,其ノ體積ヲ表ハス數 v ハ ah ニ等シ。





證明　BA, BC, BB' ヲ三稜トスル平行六面體 $ABCD\text{-}B'$ ヲ作ル時ハ

三角壔　$ABC\text{-}A' = \frac{1}{2} ABCD\text{-}B'$ ····何故カ。

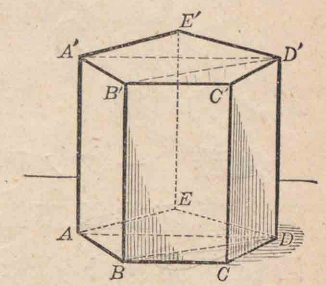
然ルニ　$ABCD\text{-}B' =$ 底面 $ABCD \times h$

而シテ底面 $ABCD = 2a$

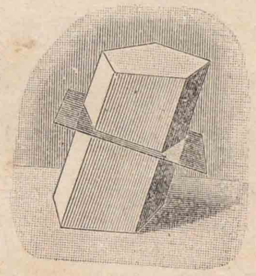
故ニ　$v = \frac{1}{2} \times 2ah$

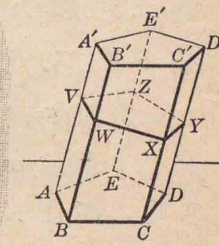
即チ　$v = ah.$

系一　多角壔ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ニ等シ。



多角壔ノ底面ヲ三角形ニ分チ,多角壔ヲ三角壔ノ和トシテ考ヘヨ。





系二　斜角壔ノ體積ハ其ノ直截面ト側稜トノ積ニ等シ。

斜角壔 $A\text{-}D'$ ノ直截面ヲ $V\text{-}Y$ トシ,側稜ヲ AA' トスレバ　斜角壔 $A\text{-}D' = (V\text{-}Y) \cdot AA'.$

58頁ノ定理ヲ參照セヨ。

4. 一邊ノ長サ4糎ナル正六邊形ノ上ニ立ツ高サ8糎ナル斜角壔ノ體積ヲ求メヨ。

5. 側稜10糎ニシテ,側稜ノ底面ノ平面ニ於ケル正射影6糎ナル斜角壔ノ高サヲ求メヨ。

(4)　各邊ノ長サガ夫々6糎,8糎,10糎ナル三角形ノ上ニ立ツ高サ9糎ナル三角壔ノ體積ヲ求メヨ。

(5)　問題5ニ於テ,底面積15平方糎ナルトキ,ソノ體積ヲ求メヨ。

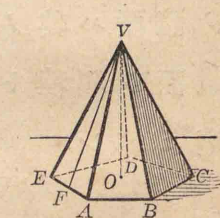
第五章

角錐

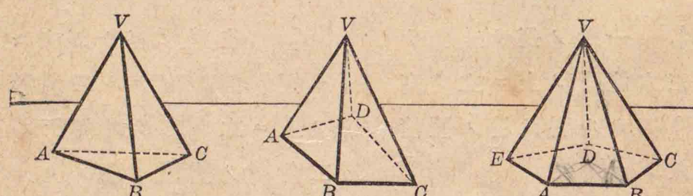
21. 角錐

定義 一ツノ面ガ多角形ニシテ,他ノ總テノ面ガ共通頂點ヲ有スル三角形ナル多面體ヲ**角錐**トイヒ,其ノ多角形ヲ角錐ノ**底面**,三角形ナル面ヲ**側面**,共通頂點ヲ其ノ**頂點**トイフ。

又側面ト側面トノ交線ヲ**側稜**トイヒ,頂點ヨリ底面ニ至ル距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。



角錐ハ底面ノ邊ノ數ニヨリ之ヲ**三角錐**,**四角錐**,**五角錐**等トイフ。三角錐ハ之ヲ**四面體**トイフコトアリ。



定義 底面ガ正多角形ニシテ,頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ノ足ガ其ノ正多角形ノ中心ト合スルモノヲ**正角錐**トイフ。

問題

1. 正角錐ノ側面ハ二等邊三角形ナリ。

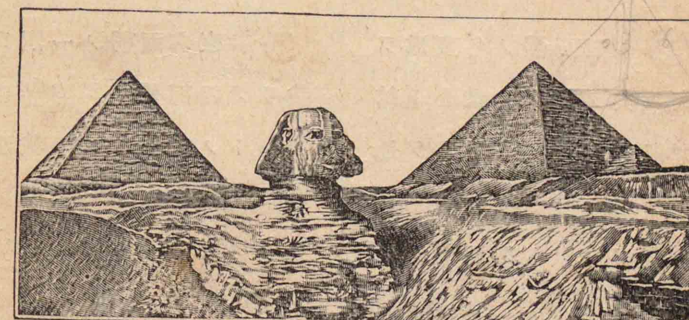
(1) 正角錐ノ側面ノ高サハ皆相等シ。

定義 正角錐ノ側面ナル二等邊三角形ノ高サヲ其ノ**斜高**トイフ。

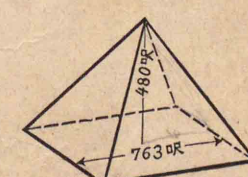
前頁ノ圖ニ於テVFハ卽チ斜高ナリ。

2. 正角錐ノ側面積ハ其ノ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シ。

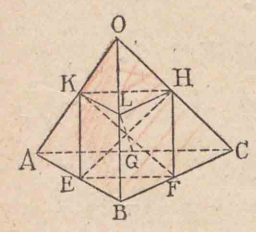
(2) 正三角錐アリ。其ノ斜高ハ6糎,高サハ$2\sqrt{3}$糎ナリ。全表面積ヲ求メヨ。



3. 埃及ノ「ピラミツド」ハ何レモ完全ナル正四角錐ナリトイフ。其ノ中「ギゼー」ニアルモノノ大サハ右ノ圖ノ如シ。其ノ側面積ヲ求メヨ。

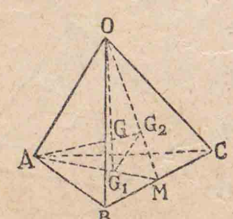


4. 四面體 $O\text{-}ABC$ ノ各稜ノ中點ヲ圖ノ如ク E,F,G,H,K,L トスレバ,其ノ各稜ノ上ノ正方形ノ和ハ $4(KF^2+EH^2+GL^2)$ ニ等シ。

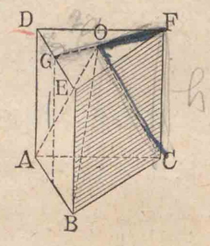


5. 四面體ノ各頂點ヲ夫々其ノ對面ノ重心ト結ブ四直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

其ノ一點ヲ四面體ノ重心トイフ。



(4) 圖ノ如ク高サ h,底面ノ一邊ガ a ナル正三角壔ニ内接スル正角錐ノ側稜ノ上ノ正方形ノ和ハ $3h^2+a^2$ ニ等シ。



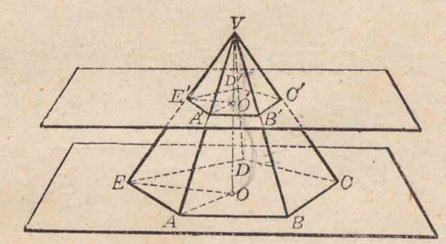
(5) 直六面體ノ一隅ヲ截リテ四面體 $A\text{-}BCD$ ヲ作リ,モトノ頂點 A ヨリ截面 BCD ニ垂線ヲ下シ其ノ足ヲ O トスレバ,O ハ $\triangle BCD$ ノ垂心ナリ。

22. 角錐臺

定理 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ

(一) 側稜及ビ高サハ同ジ比ニ分タル。

(二) 截面ト底面トハ相似多角形ナリ。



證明 角錐 $V\text{-}ABCDE$ ノ截面ヲ $A'B'C'D'E'$ トセバ

(一) $\dfrac{VA'}{VA}=\dfrac{VB'}{VB}=\dfrac{VC'}{VC}=\dfrac{VD'}{VD}=$………何故カ。

(二) $\angle ABC=\angle A'B'C'$, $\angle BCD=\angle B'C'D'$…何故カ。

又 $\dfrac{VA'}{VA}=\dfrac{A'B'}{AB}$, $\dfrac{VA'}{VA}=\dfrac{B'C'}{BC}$……何故カ。

故ニ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}$………

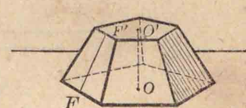
故ニ多角形 $ABCDE \backsim$ 多角形 $A'B'C'D'E'$.

相似形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ二乘ニ等シイ。

系 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其ノ截面ノ面積ノ比ハ頂點ヨリ其ノ截面ニ至ル距離ノ二乘比ニ等シ。

定義 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リタルトキハ,底面ト截面トノ間ニ在ル部分ヲ**角錐臺**トイフ。

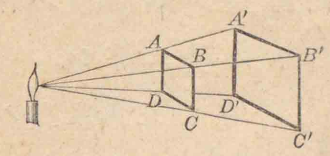
此ノトキ,其ノ截面及ビ元ノ角錐ノ底面ヲ角錐臺ノ**底面**トイヒ,前者ヲ**上底**,後者ヲ**下底**ト呼ビテ區別スルコトアリ。又底面間ノ距離ヲ角錐臺ノ**高サ**トイフ。



正角錐ヨリ作レル角錐臺ヲ**正角錐臺**トイヒ,正角錐臺ノ側面ノ梯形ノ高サヲ其ノ**斜高**トイフ。

6. 等高ナル二ツノ角錐ヲ底面ニ平行ニシテ且各頂點ヨリ等距離ニ在ル平面ニテ截レバ,其ノ截面ノ比ハ底面ノ比ニ等シ。

(6) 等底等高ナル二ツノ角錐ヲ底面ニ平行ニシテ且各頂點ヨリ等距離ニ在ル平面ニテ截レバ,其ノ截面ハ相等シ。



7. 光ノ照ラス面積ハ光源ヨリ其ノ場所ニ至ル距離ト如何ナル關係ニアルカ。

8. 角錐ノ底面ノ面積ハ其ノ側面ノ面積ノ和ヨリ小ナリ。

9. 正六角錐臺ノ兩底面ノ周ハ夫々 p 糎, p' 糎ニシテ斜高ハ h 糎ナリ。其ノ全表面積ヲ求メヨ。

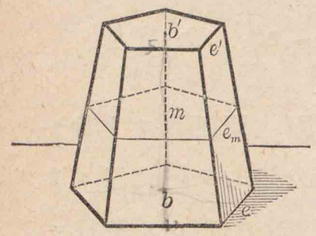
$\frac{(p+p')}{2} \times h$

(7) 問題7ヨリ考ヘテ,光ノ明ルサハ光源ヨリノ距離ト如何ナル關係ニアルカ。

(8) 四面體ノ二雙ノ對稜ガ互ニ垂直ナルトキハ,他ノ一雙ノ對稜モ亦互ニ垂直ナリ。

(9) 問題9ニ於ケル角錐臺ヲ一部分トシテ有スル元ノ角錐ノ高サヲ求メヨ。

定理 正角錐臺ノ側面積ハ兩底ノ周ノ和ノ半ト斜高トノ積ニ等シ。



正角錐臺ノ底面ノ周ヲ夫々 s, s' トシ,斜高ヲ l トスレバ 側面積 $=\frac{s+s'}{2}.l$

證明 正角錐臺ノ側面ハ合同ナル梯形ヨリ成リ;其ノ高サハ斜高ナリ。故ニ其ノ一ツノ梯形ノ面積ハ,底面ノ正多角形ノ一邊ヲ e, e' トスレバ

$$\frac{e+e'}{2}.$$

此ノ如キ面ガ何程アルカ。從ッテ其ノ面積ノ和ハ如何。

系一 正角錐臺ノ側面積ハ,兩底ヨリ等距離ニアル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シ。

何トナレバ $\frac{e+e'}{2}$ ハ兩底ヨリ等距離ニアル截面ノ一邊 e_m ニ等シケレバナリ。

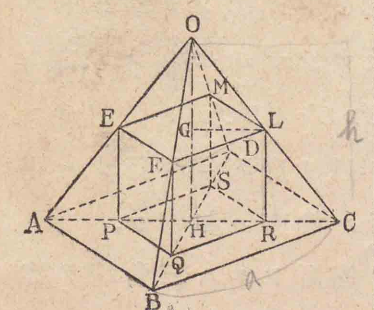
系二 正 n 角錐臺ノ側面積ハ,兩底ノ多角形ノ一邊ノ和ノ半ト斜高トノ積ノ n 倍ニ等シ。

何トナレバ $\frac{s+s'}{2}=\frac{ne+ne'}{2}=\frac{e+e'}{2}.n.$

10. 上底ノ一邊 5cm, 下底ノ一邊 11cm ニシテ斜高 13.5cm ナル正五角錐臺ノ側面積ヲ求メヨ。

11. 兩底ノ一邊ノ長サハ夫々 6 糎, 8 糎ニシテ,側稜ガ 9 糎ナル正三角錐臺ノ全表面積ヲ求メヨ。

12. 高サハ h 糎ニシテ,底面ノ一邊ノ長サハ a 糎ナル正四角錐 O-$ABCD$ ニ圖ノ如ク內接セル立方體 P-L ノ體積ヲ求メヨ。



(10) 正角錐臺アリ。上底ノ周ハ 19cm, 下底ノ周ハ 27cm ニシテ斜高ハ 6cm ナリ。側面積ヲ求メヨ。

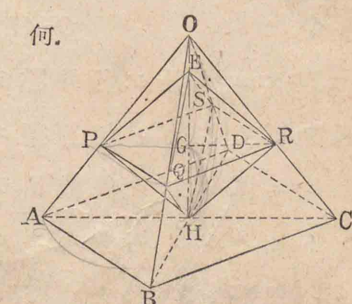
(11) 正六角錐臺ノ上底下底ノ一邊ハ夫々 6 糎,10 糎ニシテ高サハ 3 糎ナリ。其ノ側面積ヲ求メヨ。

(12) 問題12ノ如キ四角錐 O-$ABCD$ 內ニ

$PQ \parallel AB,\quad QR \parallel BC,$

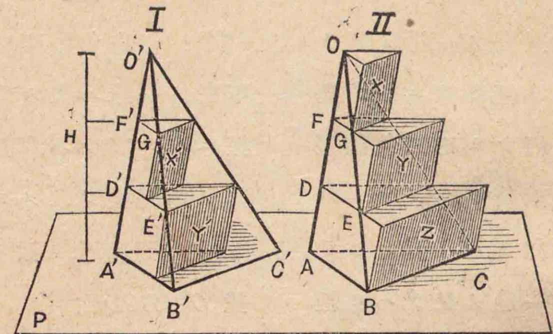
$RS \parallel CD,\quad SP \parallel AD$

ニシテ且各面ガ正三角形ナル八面體 E-H ガ圖ノ如クアルトキ,QR ノ長サ如何。



23. 角錐ノ體積

定理 底面ト高サトノ相等シキ二ツノ三角錐ハ相等シ。



二ツノ三角錐 $O\text{-}ABC$ ト $O'\text{-}A'B'C'$ トニ於テ,底面 ABC ハ $A'B'C'$ ニ等シク,高サガ共ニ H ナリトス。

證明 $O\text{-}ABC$ ト $O'\text{-}A'B'C'$ トガ等シカラズトスレバ,ソノ何レカ一方ガ大ナラザルベカラズ。

今 $O\text{-}ABC>O'\text{-}A'B'C'$ ト假定セヨ。

H ヲ n 等分シ,各分點ヲ通リ底面ニ平行ナル平面ヲ引クトキハ,相對應スル截面ハ相等シ。

故ニ圖ノ如ク,各截面ヲ底面トスル三角壔ヲ作ルトキハ,ソノ相對應スル截面ヲ底面トセル三角壔ハ相等シ。即チ $X=X',\quad Y=Y'$

然ルニ $O\text{-}ABC<X+Y+Z,\quad O'\text{-}A'B'C'>X'+Y'$

故ニ $(O\text{-}ABC)-(O'\text{-}A'B'C')<X+Y+Z-(X'+Y')=Z$

サテ此ノ三角壔 Z ハ n ヲ限リナク大ナラシムルトキハ,其ノ高サハ限リナク小トナリ,其ノ極限ニ於テハ 0 トナル。

然ルニ假定ノ如ク,二ツノ三角錐ニ大サノ差アリトスレバ,此ノ差ハ Z ヨリ小ナラザルベカラズ。之レ不合理ナリ。

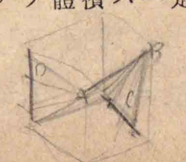
故ニ $O\text{-}ABC$ ト $O'\text{-}A'B'C'$ トハ等シカラザルベカラズ。

即チ $O\text{-}ABC=O'\text{-}A'B'C'$.

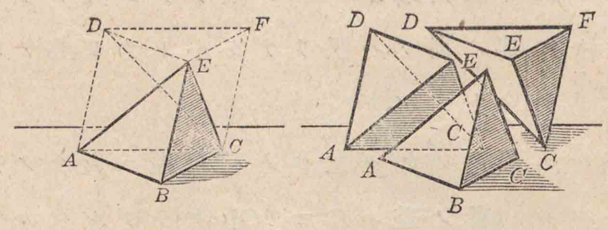
問題

13. 同一平面上ニ在ラザル三平行線ノ一ツノ上ニ一定ノ長サ AB ヲトリ,他ノ二ツノ上ニ夫々點 C,D ヲ任意ニトルトキハ四面體 $ABCD$ ノ體積ハ一定ナリ。

(13) 一平面上ニ在ラザル二直線上ニ夫々一定ノ長サノ線分 AB,CD ヲ任意ノ位置ニトルトキハ四面體 $ABCD$ ノ體積ハ一定ナリ。



定理 三角錐ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



三角錐E-ABCニ於テ,其ノ底面ヲaトシ,高サヲhトスレバ其ノ體積ハ$\frac{1}{3}ah$ナリ。

證明 AB,BE,BCヲ三稜トスル三角壔ABC-DEFヲ作ルトキハ,此ノ角壔ハ三角錐E-ABCト四角錐E-$ACFD$トノ和ニ等シ。

四角錐E-$ACFD$ヲ二ツノ三角錐E-ACDトE-CFDトニ分ツトキハ,ソレ等ノ底面ACDハDCFニ等シク,且高サガ共通ナルヲ以テ

$$E\text{-}ACD=E\text{-}CFD$$

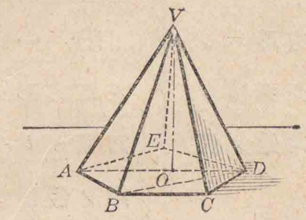
又三角錐E-ACD,E-ABCハ頂點Cヲ共有シ底面EADハ底面EABニ等シキヲ以テE-$ACD=E$-ABC

故ニ $$E\text{-}ABC=\frac{1}{3}ABC\text{-}DEF$$

然ルニ $$ABC\text{-}DEF=ah$$

故ニ $$E\text{-}ABC=\frac{1}{3}ah.$$

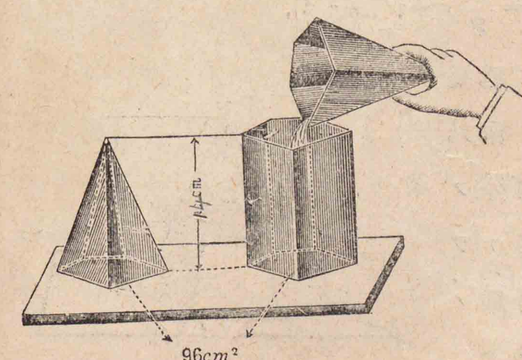
系 多角錐ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



14. 埃及ニアル「ギゼー」ノ「ピラミツド」(63頁問題3)ノ體積ヲ求メヨ。

(14) 底面積等シク,且高サ等シキ角錐ト角壔ノ體積ノ關係如何。從ツテ圖ノ如キ實驗ヲナセバ角錐ノ水ガ何杯ニテ角壔ヲ滿タシ得ルカ。

又此ノ角錐及ビ角壔ノ體積ヲ求メヨ。



15. 一邊ノ長サガ6糎ナル正三角形ヲ底トスル正角錐アリ,其ノ側稜ガ底面トナス角ハ45°ナリ。其ノ體積ヲ求メヨ。

16. 底面ガ正方形ニシテ高サガ h 糎,全表面積ガ t 平方糎ナル正角錐ノ體積ヲ求メヨ。

(15) 四邊形 $ABCD$ ヲ底トシ,高サ20糎ナル角錐アリ。其ノ長サ $AB=9$ 糎, $BC=12$ 糎, $CD=14$ 糎, $AD=14$ 糎, $AC=15$ 糎ナリ。其ノ體積ヲ求メヨ。

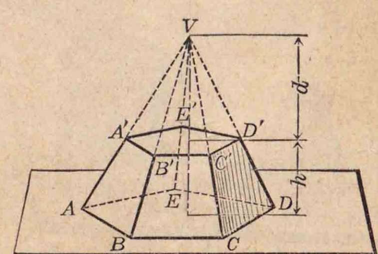
(16) 一邊ノ長サ a 糎ナル正方形ヲ底面トシ,全表面積ガ t 平方糎ナル正角錐ノ體積ヲ求メヨ。

24. 角錐臺ノ體積

定理 角錐臺ノ體積 v ハ兩底面積ヲ夫々 a, b トシ,高サヲ h トスレバ,

$$v=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b).$$

證明 側稜ヲ延長シテ元ノ角錐ヲ作リ,截リ棄テタル部分ノ體積ヲ v'',其ノ高サヲ d トシ,又元ノ角錐ノ體積ヲ v' トスレバ



$$\begin{aligned} v&=v'-v'' \\ &=\frac{1}{3}a(h+d)-\frac{1}{3}bd \\ &=\frac{1}{3}\{ah+(a-b)d\} \cdots\cdots\cdots(1) \end{aligned}$$

然ルニ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{(d+h)^2}{d^2}$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{d+h}{d}$$

$$d=\frac{bh+h\sqrt{ab}}{a-b}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)ヲ式(1)ニ代入シ

$$v=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b).$$

17. 上底,下底ガ夫々4平方糎,9平方糎ニシテ,高サ5糎ナル三角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

18. 一ツノ角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其ノ截リトリタル角錐トモトノ角錐トノ體積ノ比ハソレ等ノ高サノ三乘比ニ等シ。

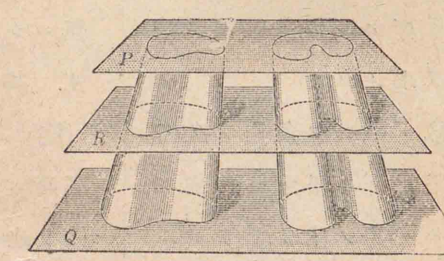
(17) 正六角錐臺ノ上底,下底ノ一邊ハ夫々6糎,10糎ニシテ且側稜ハ5糎ナリ。其ノ體積ヲ求メヨ。

(18) 高サ2粉ノ角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ之ヲ二等分スルニハ,頂點ヨリ何程ノ距離ニ於テ截ルベキカ。

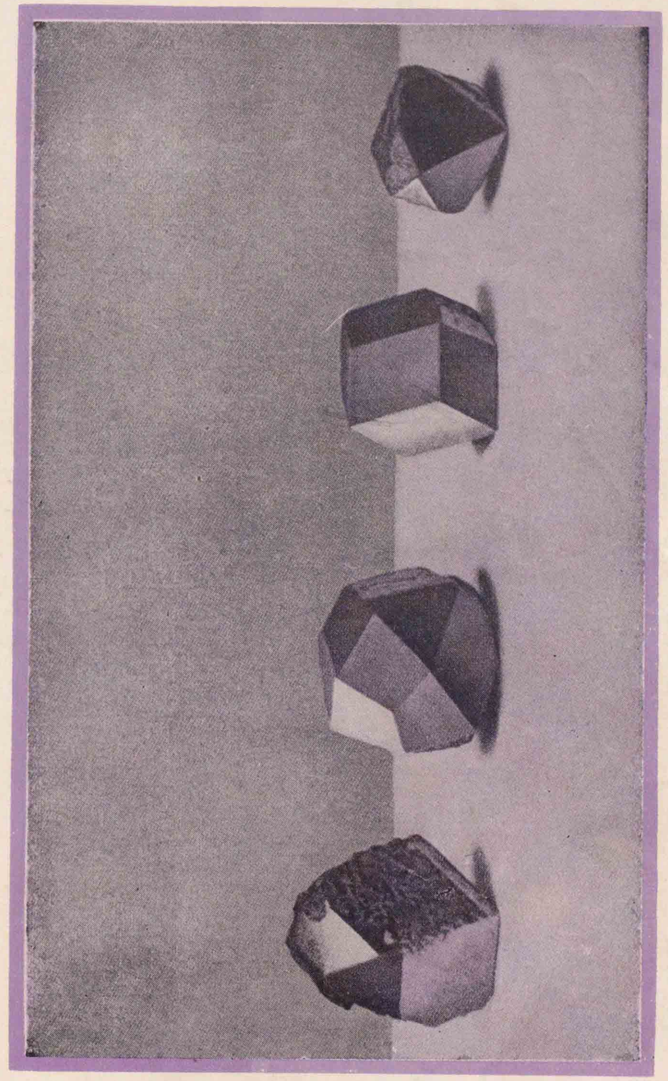
備考

立體ノ體積ヲ求ムルニ「カヴァリエリ」ノ原則ト稱スルモノアリ。之ヲ基本原則トシテ種々ノ立體ノ體積ヲ求ムルコトヲ論究スレバ容易ニ各定理ヲ得ベシ。特ニ角錐,角錐臺及ビ第七章ニ述ベントスル圓錐,圓錐臺ノ體積ハ容易ニ求メラル。今參考ノ爲此ノ原則ヲ述ベン。

原則 平行ナル二平面間ニ夾マルル二ツノ立體ガ,其等ノ平面ニ平行ナル任意ノ平面ニヨリテ截ラルルトキ,常ニ相等シキ截面ヲ生ズルトキハ,此等ノ二ツノ立體ノ體積ハ相等シ。

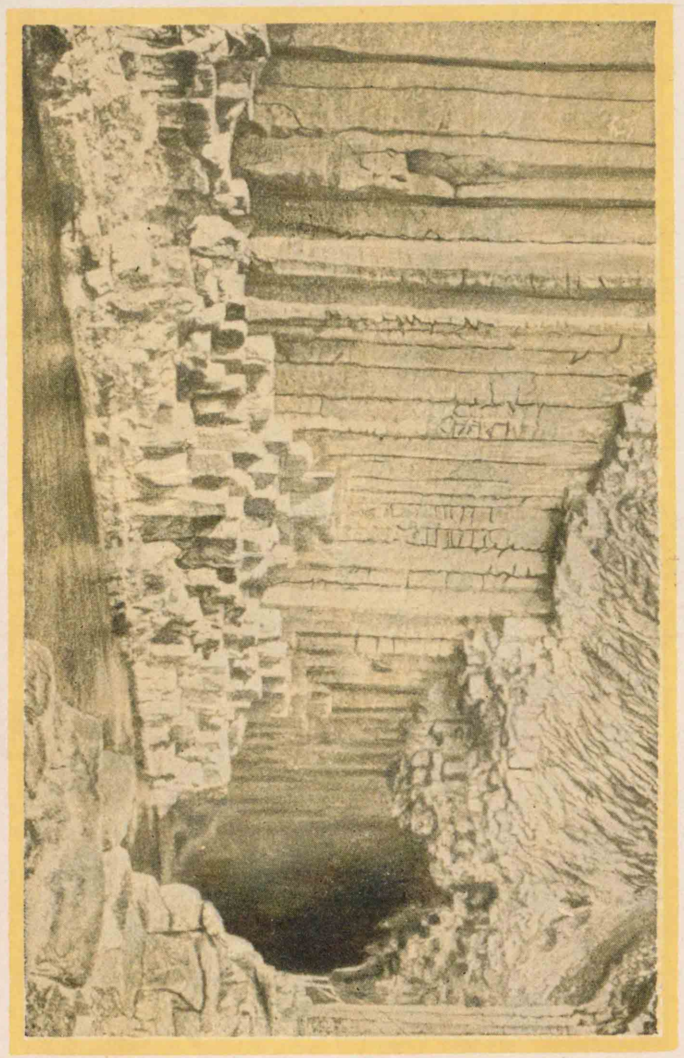


之ハ「カヴァリエリ」*R. Cavalieri* (1598—1647) ノ發見シタル所ナリ。彼ハ「ガリレオ」ノ高弟ニシテ,「ボロニア」大學ノ數學教授ナリキ。1629年彼ノ思想ニ浮ビタル「不可分法」ハ實ニ「ニウトン」ノ微積分學ノ先驅トモ言フベキモノナリトイフ。



天然ニ生ジタル多面體

鑛物ノ結晶



天然ニ生ジタル角壔

「フォンガル」ノ洞窟

第六章

正多面體

25. 正多面體

定義　正多面體トハ總テノ面ガ合同ナル正多角形ニシテ,且總テノ多面角ガ合同ナル多面體ナリ。

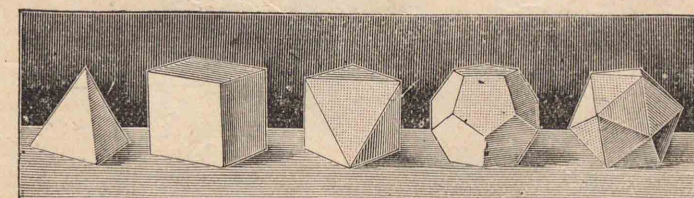
問一　總テノ面ガ正三角形ノミナル正多面體ニ幾通リノ場合ガアルカ。(44頁問題13ヲ見ヨ。)

問二　總テノ面ガ正方形ノミ,又ハ正五邊形ノミニテハ如何。

問三　正六邊形ノミヲ以テ多面角ヲ作リ得ルカ。

定理　正多面體ハ唯五種ニ限ル。

正四面體, 正六面體, 正八面體, 正十二面體, 正二十面體



問題

1.　一稜ノ長サ $2a$ 糎ナル正四面體ノ表面積ヲ求メヨ。

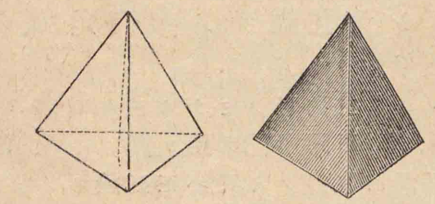
2.　一稜ノ長サ a 糎ナル正八面體ノ體積ヲ求メヨ。

(1)　一稜ノ長サ a 糎ナル正二十面體ノ表面積ヲ求メヨ。

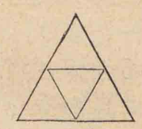
(2)　一稜ノ長サ $2a$ 糎ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ。

正多面體ハ次ノ如ク其ノ表面ノ展開圖ヲ描キ，紙ヲ切拔キテ容易ニ之ヲ作ル事ヲ得。

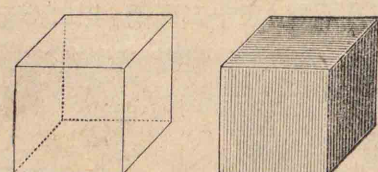
正四面體



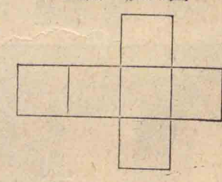
表面ノ展開圖



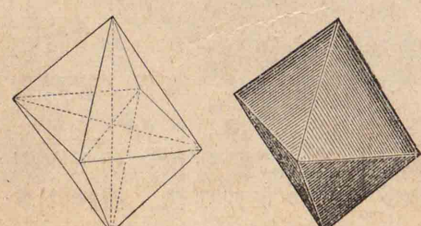
正六面體



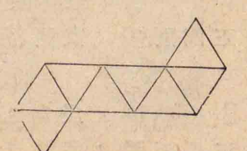
表面ノ展開圖



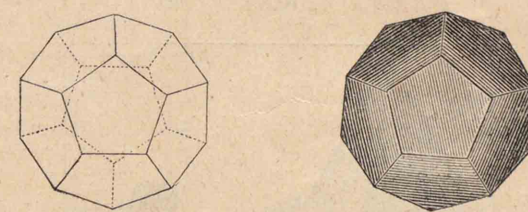
正八面體



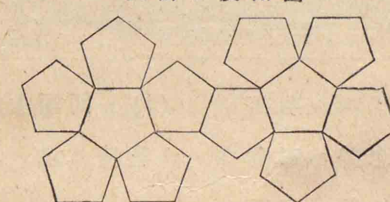
表面ノ展開圖



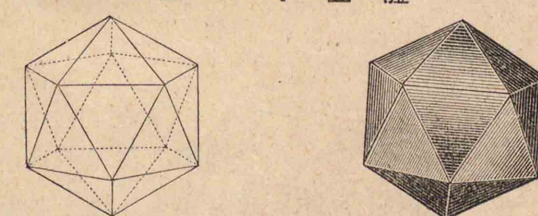
正十二面體



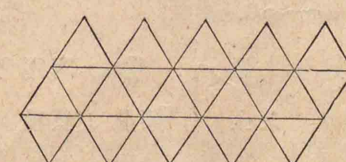
表面ノ展開圖



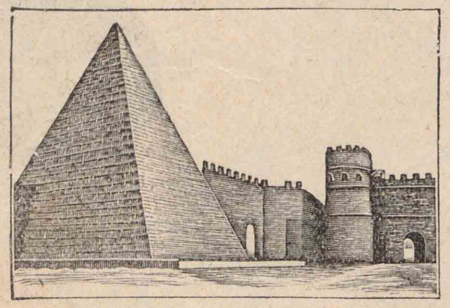
正二十面體



表面ノ展開圖

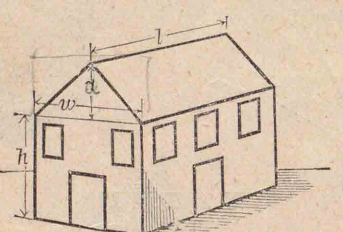


雜問題



1. 羅馬ニアル「シエステイアス」ノ記念碑ハ正四角錐ニシテ,高サ$37m$,底面ノ一邊$30m$ナリトイフ。側面積ヲ求メヨ。

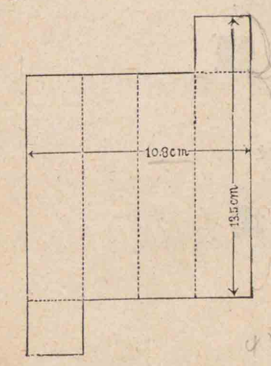
(1) 問題1ニ於ケル碑ノ體積ヲ求メヨ。



2. 圖ノ如キ建物ノ屋根ノ面積ヲ求メヨ。又全表面積ヲ求メヨ。

(2) 問題2ニ於ケル建築物ノ體積ヲ求メヨ。

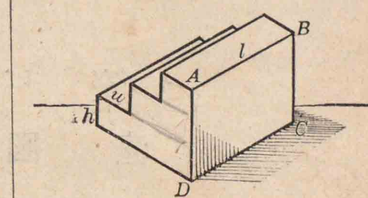
3.



上圖ノ如キ「ボール」紙ヲ折リ曲ゲテ底面ガ正方形ニナル角柱ヲ作ラバ,其ノ表面積及ビ體積ハ夫々何程ナルカ。

4. 正八面體ノ相隣ラザル頂點ヲ結ブ三ツノ線分ハ相等シキコトヲ證セヨ。

(3)



圖ノ如キ三段ヨリナル階段アリ。$ABCD$ノ面ハ壁ニ接スルトキ,之ヲ作ルニ要スル板ノ面積ハ何程ナルカ。但シ板ノ厚サハ考ヘザルモノトス。

(4) 四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ガ相等シク,且互ニ垂直ナルトキハ其ノ四面體ハ正四面體ナリ。

第三篇

廻　轉　體

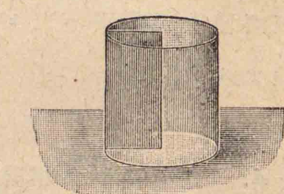
第七章

直　圓　壔

26. 直圓壔ノ性質

定義　直圓壔トハ矩形ガ其ノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル立體ナリ。

其ノ廻轉軸ヲ直圓壔ノ**軸**トイヒ,軸ニ垂直ナル二對邊ニヨリテ生ズル二ツノ等圓ヲ其ノ**底面**トイフ。



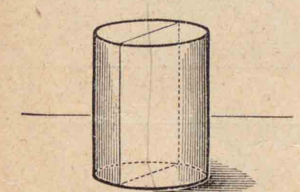
又軸ニ平行ナル邊ヲ直圓壔ノ**母線**トイヒ,母線ニヨリテ生ズル曲面ヲ其ノ**側面**トイフ。

直圓壔ノ軸ノ長サヲ其ノ**高サ**トイフ。卽チ直圓壔ノ軸ハ其ノ底面間ノ距離ニ等シ。

問　題

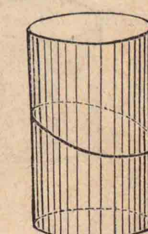
1. 直圓壔ノ兩底面ハ等圓ナリ。

2. 直圓壔ノ母線ヲ含ム平面ニテノ截面ハ矩形ナリ。

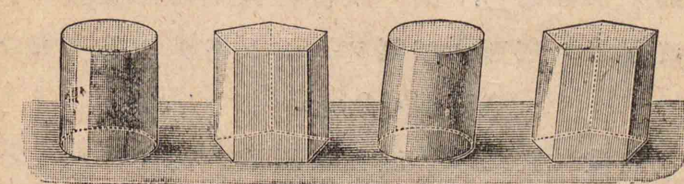


(1) 直圓壔ノ軸ニ垂直ナル平面ニテノ截面ハ等圓ナリ。

注意1.　直圓壔ヲ底面ニ平行ナラズ,又母線ヲ含マザル平面ニテ截ルトキハ橢圓ト稱スル曲線ヲ生ズ。



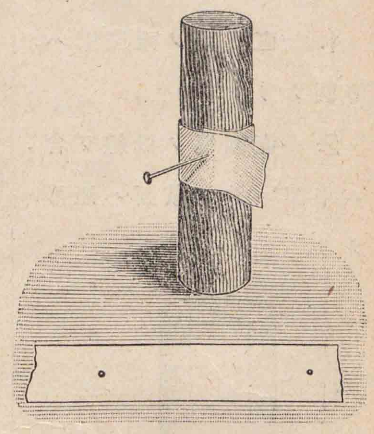
注意2.　直圓壔ノ外ニ**斜圓壔**ナルモノノアルコト尙直角壔ニ對シ斜角壔ノアルガ如シ。サレド本書ニハ之ヲ述ベズ。

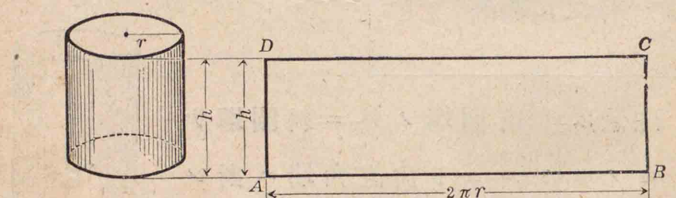


27. 直圓壔ノ側面積

問 直圓壔ノ周ヲ測ル種々ノ方法ヲ案出セヨ。

定理 直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シ。





證明 直圓壔ノ側面ノ展開圖 $ABCD$ ヲ考ヘヨ。其ノ形ハ如何。其ノ縱横ハ夫々如何。

直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ r トシ,高サヲ h トセバ

$$\text{側面積} = 2\pi rh.$$

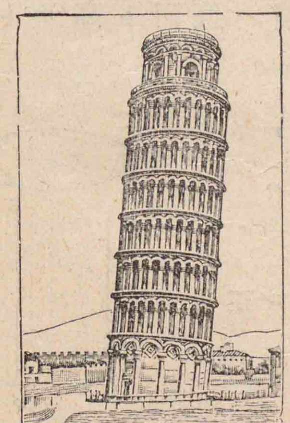
注意 直圓壔ノ直徑ヲ正確ニ測定スルニハ「キヤリパー」ヲ用フ。(119頁參照)

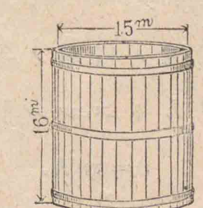
3. 底面ノ半徑 5cm 高サ 10cm ノ直圓壔ノ側面積ヲ求メヨ。

4. 直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ r,高サヲ h トシテ其ノ全表面積ヲ表ハス公式ヲ作レ。

(3) 底面ノ直徑 7 米高サ 20 米ナル直圓壔ノ側面積ヲ求メヨ。

(4) 次ノ如キ直圓壔狀ノ桶ヲ作ルニ要スル板ハ何平方米ナルカ。但シ蓋ハ要セズ。又板ノ厚サハ考ヘニ入レザルモノトス。

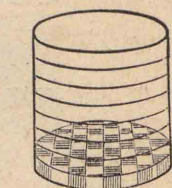




圓壔形ヲナセル代表的建築物ハ伊太利ノ「ピザ」ノ斜塔ナリ。高サ 179 呎ニシテ,モト直立セルモノナランガ,今日ハ傾ケリ。「ガリレオ」ガ塔上ヨリ落體ノ實驗ヲセル有名ナル建築物ナリ。

28. 直圓壔ノ體積

問　右ノ圖ニ依リ直圓壔ノ體積ヲ求ムル方法ヲ考ヘヨ。

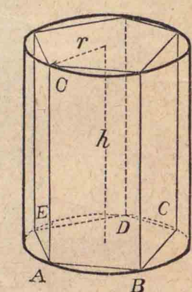


定義　一ツノ直圓壔ト同高ニシテ其ノ底面ニ內接(又ハ外接)スル多角形ヲ底面トスル直角壔ハ其ノ直圓壔ニ**內接**(又ハ**外接**)ストイフ。

定理　直圓壔ノ體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シ。

直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ r トシ，高サヲ h トスレバ，體積 v ハ

$$v=\pi r^2 h.$$



證明　直圓壔ニ內接スル正角壔ヲ作リ其ノ底面積ヲ a トスルトキハ，其ノ體積 v' ハ ah ナリ。

今內接正多角壔ノ底面ナル正多角形ノ邊數ヲ限リナク大ナラシムルトキハ極限ニ於テハ a 及ビ v' ハ夫々直圓壔ノ底面積 πr^2 及ビ其ノ體積 v トナル。故ニ　　$v=\pi r^2 h.$

5.　重サノ原器ハ直圓壔ニシテ，其ノ底面ノ直徑並ニ高サハ共ニ 39mm アリ。其ノ體積ヲ求メヨ。又之ヨリ原器ヲ作ル白金「イリジウム」ノ合金ノ比重ヲ求メヨ。

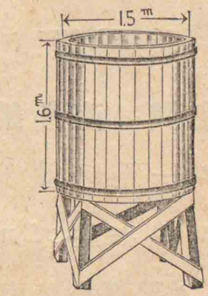
〔備考〕原器ハ白金90%，「イリジウム」10%ノ合金ニテ作ラル。

6.　側面積ハ 198 平方糎ニシテ，高サ 9 糎ナル直圓壔ノ體積ヲ求メヨ。

但シ $\pi=\dfrac{22}{7}$ ナリトス。

7.　次ノ圖ノ如ク水平ニ置カレタル圓壔形ノ水槽アリ。底面ノ半徑ハ 20 糎，長サ 2 米ニシテ最モ深キ部分ノ水ノ深サ 30 糎ナラバ，其ノ水ノ體積如何。

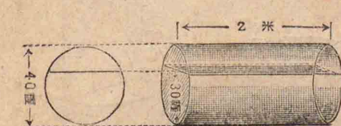
(5)　次ノ桶ノ容積ヲ求メヨ。

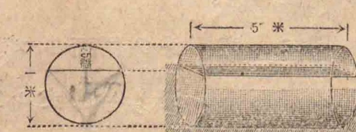


6　體積ハ 1980 立方糎ニシテ高サ 10 糎ナル直圓壔ノ全表面積ヲ求メヨ。

但シ　$\pi=\dfrac{22}{7}$ ナリトス。

(7)　圖ノ如ク水中ニ浮ベル圓壔形ノ材木アリ。長サ 5 米，其ノ切口ノ直徑 1 米ニシテ，浮ベル部分ノ最高ナル高サハ 25 糎ナラバ此ノ材木ノ重サ幾瓩ナルカ。

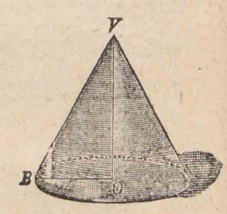




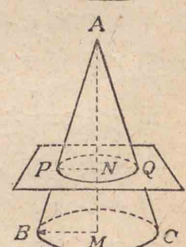
第八章
直圓錐

29. 直圓錐ノ性質

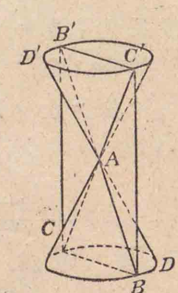
定義　直圓錐トハ直角三角形ガ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル立體ナリ。



其ノ廻轉軸ヲ直圓錐ノ**軸**トイヒ,軸ニ垂直ナル邊ニヨリテ生ズル圓ヲ其ノ**底面**トイフ。



斜邊ヲ直圓錐ノ**母線**,其ノ長サヲ**斜高**トイヒ,母線ニヨリテ生ズル曲面ヲ其ノ**側面**トイフ。軸ト母線トノ交點ヲ直圓錐ノ**頂點**トイヒ,軸ノ長サヲ其ノ**高サ**トイフ。



問一　直圓錐ノ直截面ハ圓ナルコトヲ證セヨ。

問二　直圓錐ノ側面トソノ頂點ヲ通ル平面トノ交リハ相交ル二直線ナルコトヲ證セヨ。

直圓錐ヲ其ノ軸ニ垂直ナル平面ニテ截レバ圓ヲ得,又其ノ頂點ヲ通ル平面ニテ截レバ**相交ル二直線**ヲ得。然レドモ,直圓錐ノ平面ニヨル截面ハ,其ノ截リ方ニヨリテ尙次ノ如キ三通リノ形トナル。

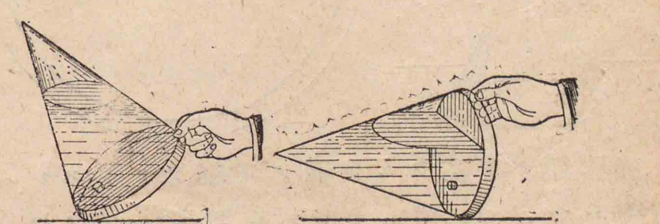
(一)　軸ニ垂直ナラザル平面ニテ總テノ母線ヲ截レバ**橢圓**ト稱スル曲線ヲ得。

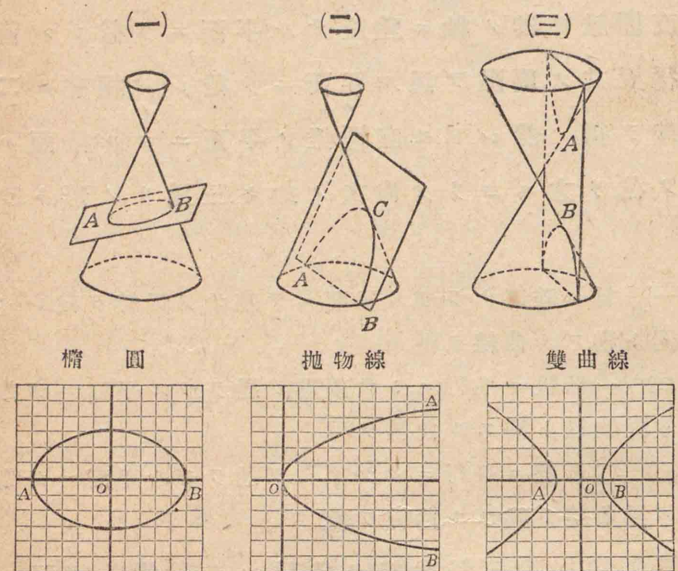
(二)　一母線ニ平行ニシテ頂點ヲ通ラザル平面ニテ截レバ**拋物線**ト稱スル曲線ヲ得。

(三)　二母線ニ平行ニシテ頂點ヲ通ラザル平面ニテ截レバ**雙曲線**ト稱スル曲線ヲ得。

圓,橢圓,拋物線,雙曲線ヲ總稱シテ**圓錐曲線**又ハ**二次曲線**トイフ。

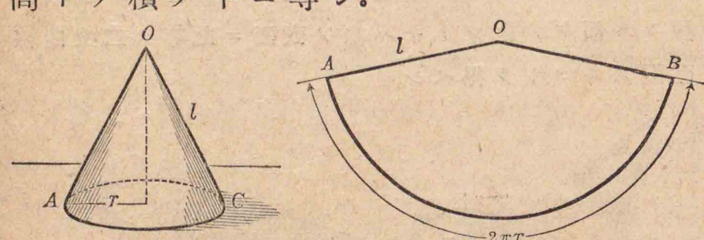
〔**備考**〕「ガラス」或ハ「セルロイド」等ノ如ク透明ナル物質ニテ直圓錐ヲ作リ,中ニ着色セル水ヲ半分位容レ,直圓錐ヲ種々ニ傾ケテ置クトキハ,水ノ表面ニ此等ノ二次曲線ヲ直觀スルコトヲ得ベシ。





30. 直圓錐ノ側面積

定理 直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半ニ等シ。



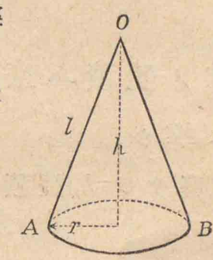
直圓錐ノ斜高ヲl,底面ノ半徑ヲrトスレバ,側面積ハπrlナリ。何トナレバ,直圓錐$O\text{-}AC$ノ展開圖

$O\text{-}AB$ヲ作レバ之レ扇形ニシテ,其ノ半徑ハl,其ノ弧ハ$2\pi r$,其ノ全圓周ハ$2\pi l$ナレバ,

扇形$O\text{-}AB=\pi l^2\times\dfrac{2\pi r}{2\pi l}$, 故ニ **側面積** $=\pi rl$.

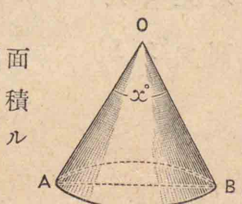
問題

1. 底面ノ半徑ハrニシテ斜高lナル直圓錐ノ全表面積ハ$\pi r(r+l)$ナルコトヲ證セヨ。



定義 圓錐ノ軸ヲ含ム截面ニヨリテ生ズル二直線ノナス角ヲ圓錐ノ**頂角**ト云フ。

2. 側面積ガ底面積ノ2倍ナル直圓錐ノ頂角ノ大サヲ求メヨ。

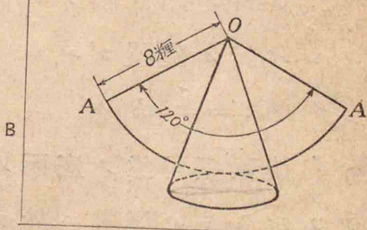


(1) 底面ノ半徑ハrニシテ高サhナル直圓錐ノ全表面積ハ

$\pi r(r+\sqrt{h^2+r^2})$

ナルコトヲ證セヨ。

(2) 半徑ガ8糎ニシテ中心角ガ120°ナル扇形ヲ側面トシテ作リタル直圓錐ノ全表面積ヲ求メヨ。



3. 口徑18cm,高サ8cmノ圓錐形ノ部分ト,直徑2cm,高サ7cmノ圓壔形ノ部分トヨリ成ル漏斗ヲ作ル「ブリキ」板ノ面積ヲ求メヨ。但シ接ギ目ハ計算ニ入レズ,且$\pi=\dfrac{22}{7}$ナリトス。

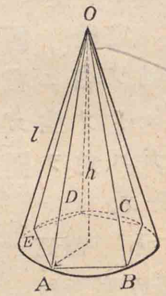
31. 直圓錐ノ體積

定義 一ツノ直圓錐ト頂點ヲ共有シ,其ノ底面ニ內接(又ハ外接)スル多角形ヲ底面トスル直角錐ハ其ノ直圓錐ニ**內接**(**又ハ外接**)**ス**トイフ。

定理 直圓錐ノ體積ハ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

底面ノ半徑ヲ r,高サヲ h,體積ヲ v トスレバ

$$\boldsymbol{v=\frac{1}{3}\pi r^2 h.}$$



證明 直圓錐ニ內接スル正多角錐ヲ作リ,其ノ底面積ヲ a,高サヲ h トスレバ,其ノ體積 v' ハ

$$v'=\frac{1}{3}ah$$

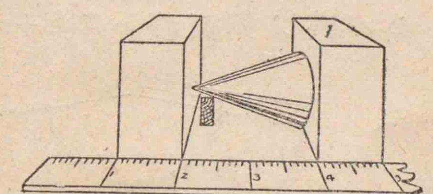
今內接正多角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク大ナラシムルトキハ,極限ニ於テ底面積ハ直圓錐ノ底面積 πr^2 トナリ,其ノ體積ハ直圓錐ノ體積 v トナル。卽チ

$$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

4. 直圓錐ノ高サハ次ノ圖ノ如クシテ測ル事ヲ得。底面ノ直徑ハ1糎ナル直圓錐ノ高サガ次ノ圖ノ如クナルトキノ體積ヲ求メヨ。但シ物指ハ糎指ニシテ,最小一刻ミハ粍ナリ。

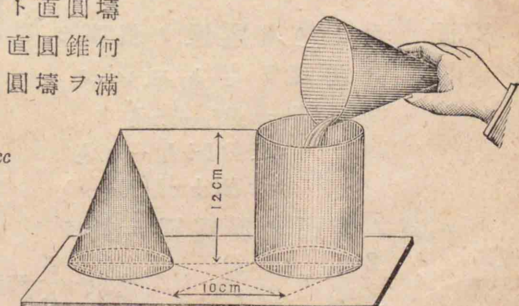
(4) 93頁問題2ニ依リテ與ヘラレタル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。但シ底面ノ半徑ヲ r 糎トセヨ。

(5) 問題5ノ圖ニ於ケル圓錐及ビ圓壔ノ體積ヲ求メヨ。

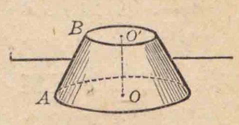


5. 底面積等シク,且高サ等シキ直圓錐ト直圓壔トノ容器アリ。直圓錐何杯ノ水ヲ以テ直圓壔ヲ滿シ得ルカ。

6. 體積ハ 660cc ニシテ,高サ 10cm ナル直圓錐ノ全表面積ヲ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トセヨ。



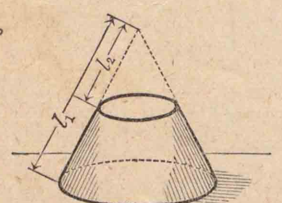
32. 直圓錐臺

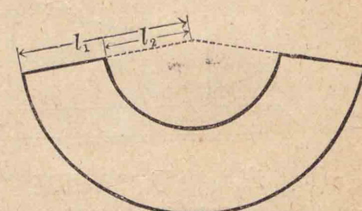


定義 底面ト之ニ平行ナル截面トノ間ニ在ル直圓錐ノ部分ヲ**直圓錐臺**トイヒ,其ノ截面及ビ原直圓錐ノ底面ヲ直圓錐臺ノ**底面**トイフ。

而シテ原直圓錐ノ母線ノ兩底ノ間ノ部分ヲ其ノ**斜高**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。

定理 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ R, r トシ,斜高ヲ l トセバ,其ノ側面積ハ $\pi(R+r)l$ ナリ。





證明 モトノ直圓錐ノ斜高ヲ l_1,切リトラレタル直圓錐ノ斜高ヲ l_2 トスレバ

側面積 $=\pi Rl_1-\pi rl_2$

$=\pi R(l+l_2)-\pi rl_2$

$=\pi Rl+\pi l_2(R-r)$

然ルニ,其ノ側面ノ展開圖ニ於テ

$\frac{2\pi l_1}{2\pi l_2}=\frac{2\pi R}{2\pi r}$ 　即チ $\frac{l_1}{l_2}=\frac{R}{r}$,

$\therefore \frac{l_1-l_2}{l_2}=\frac{R-r}{r}$

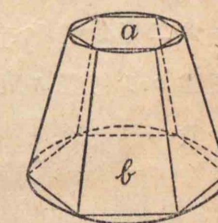
$l_2=(l_1-l_2)\frac{r}{R-r}=\frac{lr}{R-r}$,

故ニ側面積ハ $\pi Rl+\pi rl$

$\therefore$ **側面積** $=\pi(R+r)l.$

定理 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ R, r トシ,高サヲ h,其ノ體積ヲ v トスレバ,

$$v=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$$



證明 直圓錐臺ニ內接スル角錐臺ヲ作リ,其ノ底面積ヲ a, b, 高サヲ h トスレバ,其ノ體積 v' ハ

$$v'=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b)$$

今角錐臺ノ底面ノ多角形ノ邊數ヲ限リナク多クスルトキハ,極限ニ於テハ其ノ底面積 a, b ハ直圓錐ノ底面積 $\pi R^2, \pi r^2$ トナリ,又 v' ハ直圓錐臺ノ體積 v トナル。即チ

$$v=\frac{h}{3}(\pi R^2+\sqrt{\pi R^2\pi r^2}+\pi r^2)$$

$$=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$$

或ハ又74頁ノ定理ト同樣ニシテ直接ニモ證明スルコトヲ得。

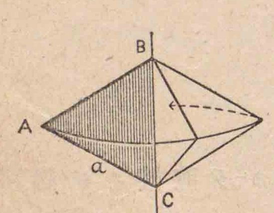
7. 兩底面ノ半徑ガ夫夫 2cm, 8cm ニシテ高サ 6cm ナル直圓錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

8. 高サ 18 糎ナル直圓錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ二等分スルニハ其ノ頂點ヨリ何糎ノ距離ニ於テ截ルベキカ。

$1 : \frac{1}{2} = 18^3 : x^3$

$x^3 = 18^3 \cdot \frac{1}{2}$

9. 一邊ノ長サ a 糎ナル正三角形ノ一邊ヲ軸トシテ之ヲ廻轉スルトキ,生ズル立體ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

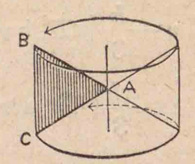


(7) 兩底面ノ半徑ガ 3 糎ト 5 糎トナル半立容リノ「コツプ」ヲ作ルニハ高サヲ何糎ニスベキカ。

(8) 底面ノ半徑ガ 8 糎ニシテ高サ 12 糎ナル直圓錐ヲ底面ヨリ 9 糎ノ距離ニ於テ之ニ平行ナル平面ニテ截リトリタル圓錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トセヨ。

(9) 問題9ニ於ケル廻轉軸ヲ一頂點ヲ過リ,其ノ對邊ニ平行ナル直線トスレバ如何。

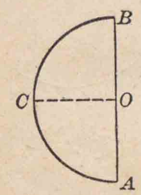


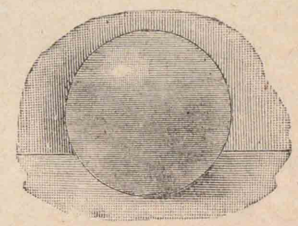
第九章

球

33. 球ノ性質

定義 球トハ半圓ガ直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル立體ナリ。





其ノ半圓ノ作ル曲面ヲ**球面**トイヒ,半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**トイフ。

又球ノ中心ト球面上ノ一點トヲ結ブ線分ヲ其ノ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ兩端ガ球面上ニ在ル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ。

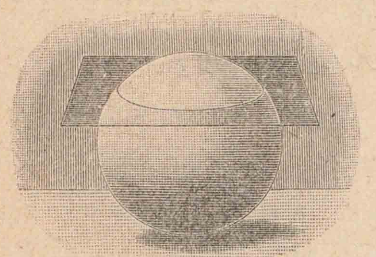
上ノ定義ニヨリ球ノ總テノ半徑ハ半圓ノ半徑ニ等シキヲ以テ相等シ。

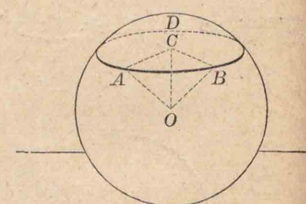
從ッテ半徑ノ 2 倍ナル直徑モ亦相等シ。

問一 一定點ヨリ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

問二 一定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角頂ノ軌跡ヲ求メヨ。

定理 球ヲ平面ニテ截レバ其ノ截面ハ圓ナリ。





中心Oナル球ヲ一平面ニテ截リ其ノ截面ヲABDトスレバABDハ圓ナリ。

證明 中心Oヨリ截面ニ垂線OCヲ引キ,Cト截面ノ周ノ上ノ任意ノ點A, B, Dトヲ結ブトキハ

$AC=BC=CD$………何故カ。

故ニ截面ABDハCヲ中心トスル圓ナリ。

系一 球ノ中心ト截面ノ中心トヲ結ビ付クル直線ハ截面ニ垂直ナリ。

上圖ニ於テ球ノ中心Oト截面ノ中心Cトヲ含ム任意ノ平面ト截面トノ交線ヲADトセヨ。

然ラバ $AD \perp OC$………何故カ。

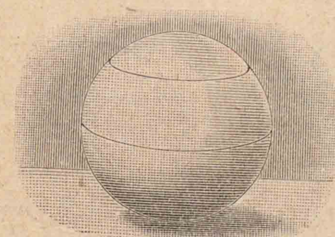
系二 球ノ中心ヨリ等距離ニ在ル截面ハ相等シク,中心ヨリ不等ナル距離ニ在ル二ツノ截面ニ於テハ,中心ニ近キモノハ遠キモノヨリ大ナリ。

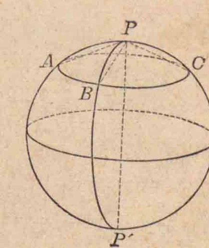
前圖ニ於テ $AC^2=AO^2-CO^2$

故ニCOガ減少スルニ從ッテACハ增大ス。

問三 二與點ヲ通ル平面ニテ與球ヲ截リ,其ノ截面ヲシテ最大ナラシメヨ。且解ノ數ヲ吟味セヨ。

定義 球ノ中心ヲ通ル平面ニヨリテノ截面ヲ球ノ**大圓**トイヒ,他ノ平面ニヨリテノ截面ヲ**小圓**トイフ。





大圓又ハ小圓ニ垂直ナル直徑ヲ其ノ圓ノ**軸**トイヒ,軸ノ兩端ノ二點ヲ其ノ圓ノ**極**トイフ。

又大圓ニヨリテ分タレタル球ノ各部分ヲ**半球**トイフ。

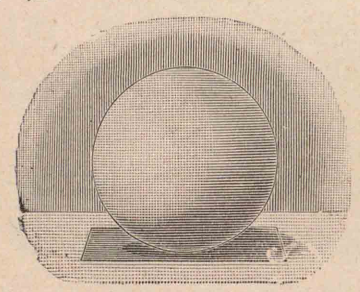
例ヘバ前圖ニ於テ,PP'ハ小圓ABCノ軸ニシテ,P,P'ハ其ノ極ナリ。

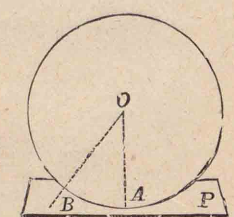
問四 二ツノ大圓ハ互ニ二等分ス。

問五 球ノ中心ヨリ其ノ半徑ニ等シキ距離ニ在ル平面ハ如何ナル狀態ニアルカヲ考ヘヨ。

定義 球面ト唯一點ヲ共有スル平面ヲ球ノ**切平面**トイヒ,球面ト唯一點ヲ共有スル直線ヲ球ノ**切線**トイフ。其ノ平面又ハ直線ハ其ノ點ニ於テ球ニ**切ス**トイヒ,其ノ點ヲ**切點**トイフ。

定理 球面上ノ一點ニ於テ其ノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル平面ハ其ノ球ニ切ス。





球面上ノ一點Aニ於テ半徑OAニ垂直ナル平面ヲPトスレバPハ球Oノ切平面ナリ。

證明 P上ニ於テA以外ノ任意ノ點BヲトリOト結ブトキハ $OB>OA$

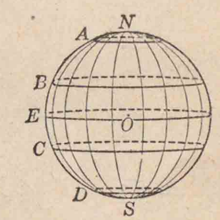
故ニ點Bハ球面外ニ在リ。故ニPハ球ニ切ス。

系一 球面上ノ一點ニ於テ其ノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ハ其ノ球ニ切ス。

系二 球ニ切スル直線又ハ平面ハ其ノ切點ヲ通ル半徑ニ垂直ナリ。

問題

1. 地球ヲ球ト見做ストキハ赤道及ビ經緯度ヲ表ハス線ハ如何ナル種類ノ圓トナルカ。



(1) 地球上ノ三點ヲ通ル圓ヲ書ケバ其ノ圖ハ地球上ニ在リ。

2. 球ノ大圓又ハ小圓ノ切線ハ又球ノ切線ナリ。

3. 球外ノ一點ヨリ其ノ球ニ切線ヲ引ケ。

4. 半徑5糎ナル球ノ中心ヨリ4糎ノ距離ニ在ル小圓ノ面積ヲ求メヨ。

(2) 同一ノ點ニ於テ球ニ切スル二直線ノ定ムル平面ハ又其ノ球ニ切ス。

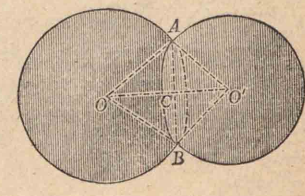
(3) 球外ノ一點ヲ通ル其ノ球ノ切平面ヲ作レ。

(4) 半徑6糎ナル球ノ小圓ノ周ヲ通ル半徑ト其軸トノナス角ガ60°ナルトキハ其ノ小圓ノ面積如何。

問 二球ノ相對的位置ニハ幾通リノ場合ガアルカ。

定義 唯一點ヲ共有スル二ツノ球ハ**互ニ切ス**トイヒ,其ノ各ガ他ノ外ニ在ルトキハ**外切**,一ツガ他ノ内ニ在ルトキハ**内切ス**トイフ。

定理 二ツノ球面ガ交ルトキハ,其ノ交リハ其ノ中心線ニ垂直ナル圓ノ周ナリ。



證明 中心線ヲ含ム平面ニテ二球ヲ截リタルトキノ大圓ヲ O, O' トシ,其ノ交點 A, B ヲ結ブ線分ト中心線 OO' トノ交點ヲ C トセヨ。

OO' ヲ軸トシテコレ等ノ大圓ヲ廻轉スルトキハ球 O, O' ヲ得。

而シテ $AB \perp OO'$, $AC=BC$ ナルヲ以テ,二球面ノ交リハ OO' ニ垂直ニシテ,C ヲ中心トシ AC ヲ半徑トスル圓ノ周ナリ。

問題

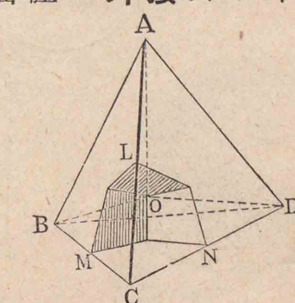
5. 相交ル二球ノ半徑ハ夫々6糎,8糎ニシテ,其ノ中心距離ハ10糎ナリ。其ノ交リノ圓ノ面積ヲ求メヨ。

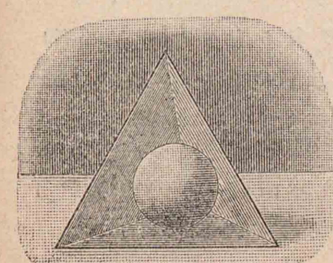
(5) 相交ル二球ノ半徑ハ夫々5糎,6糎ニシテ其ノ交リノ圓ノ半徑ハ4.7糎ナリ。其ノ二球ノ中心距離ヲ求メヨ。

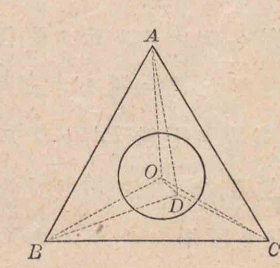
定義 多面體ノ各面ガ一ツノ球面ニ切スルトキハ其ノ球ハ多面體ニ**内接ス**トイヒ,多面體ノ各頂點ガ一ツノ球面上ニ在ルトキハ,其ノ球ハ多面體ニ**外接ス**トイフ。

6. 四面體 $A\text{-}BCD$ ニ外接スル球ヲ作レ。

(6) 四面體 $A\text{-}BCD$ ニ内接スル球ヲ作レ。

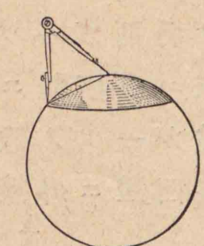






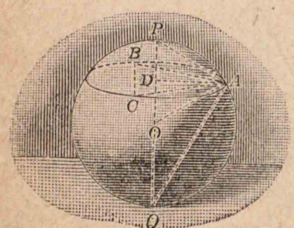
7. 一稜ノ長サ6糎ナル正四面體ニ外接スル球ノ半徑ヲ求メヨ。

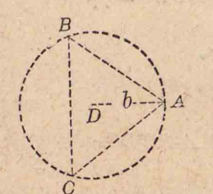
8. 「コンパス」ノ一端ヲ球面上ニ置キテ其ノ球面上ニ畫ケル小圓ノ半徑ヲ知ルニハ如何ニスベキカ。但シ球ノ直徑ハ既知トス。

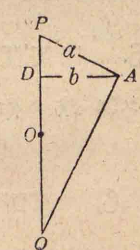


(7) 問題7ニ於ケル正四面體ニ內接スル球ノ半徑ヲ求メヨ。

(8) 「コンパス」ノ兩端ノ距離ヲ a 糎トシテ,球面上ニ畫ケル小圓ノ半徑ガ b 糎ナルトキハ其ノ球ノ直徑ハ $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ 糎ナリ。







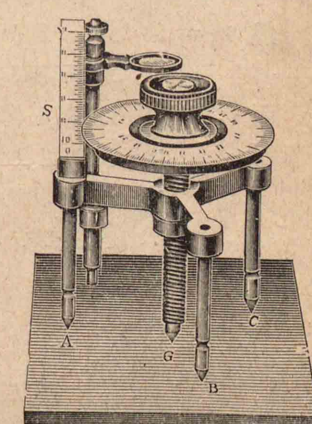
〔備考〕與ヘラレタル球ノ直徑ヲ求ムルニハ「コンパス」ノ一端ヲ球面上(P)ニ置キテ畫ケル小圓ノ半徑(AD)ト「コンパス」ノ兩端ノ距離(PA)トヲ知レバ可ナリ。

球面ノ直徑ヲ測ルニ用ヒラルル**球面計**(スフエロメーター)(*Spherometer*)ハ即チ此ノ理ヲ應用セルモノナリ。

球面計 (*Spherometer*) ハ次ノ圖ノ如キ器械ニシテ,固定セル三脚 A, B, C ト其ノ中央ニ於テ上下シ得ル一脚 G トヲ備フ。而シテ其ノ三脚 A, B, C ノ尖端 A, B, C ハ正三角形ヲナス。

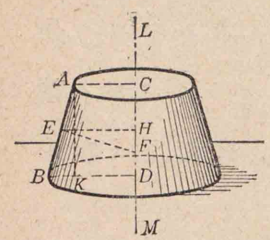
用法 PD(106頁ノ圖)ノ長サヲ求ムルニハ,先ヅ脚 G ノ尖端ガ平面 ABC ニ觸ルルトキノ S ノ讀ミト四脚ノ先端 A, B, C, G ノ各ガ與球面上ニ在ルトキノ S ノ讀ミトノ差ヲトル。

正三角形 ABC ノ外接圓ノ半徑ハ一邊 AB ノ長サヲ測ルコトニ依リテ之ヲ知ルコトヲ得。然ルニ三脚 ABC ハ固定スルガ故ニ,一ツノ球面計ニ於テハ AB ノ長サハ既知ナリ。從ツテ $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ半徑モ既知ナレバ,結局 PD ノ長サヲ測レバ可ナリ。



34. 球ノ表面積

定理 直圓錐臺(又ハ直圓錐,或ハ直圓壔)ノ側面積ハ其ノ斜高(又ハ母線)ノ中點ニ於テ之ニ垂直ニ軸マデ引ケル線分ヲ半徑トセル圓周ト其ノ高サトノ積ニ等シ。



直圓錐臺ノ斜高ABノ中點Eニ於テ之ニ垂直ニ軸LMマデ引ケル線分ヲEFトシ,高サヲCDトスレバ其ノ側面積ハ$2\pi EF\cdot CD$ナリ。

證明 上底,下底ノ半徑ヲ夫々AC,BDトシ,Eヨリ軸ニ引ケル垂線ヲEH,AヨリBDニ引ケル垂線ヲAKトスレバ,側面積ハ$\pi AB(AC+BD)$ナリ。

然ルニ $AC+BD=2EH$

$\therefore\ \pi AB(AC+BD)=2\pi AB\cdot EH$

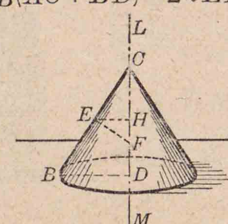
而シテ $\triangle ABK\backsim\triangle EFH$……何故カ。

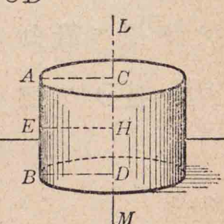
$\therefore\ AB:AK=EF:EH$

$\therefore\ AB\cdot EH=EF\cdot AK=EF\cdot CD$

$\therefore\ \pi AB(AC+BD)=2\pi EF\cdot CD.$

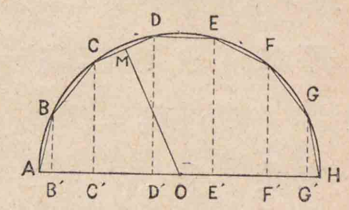
問 上ノ例ニ倣ヒ右ノ圖ニ依リテ直圓錐及ビ直圓壔ノ場合ヲ證明セヨ。





定理 球ノ表面積ハ大圓ノ周ト直徑トノ積ニ等シ。

球ノ半徑ヲrトスレバ其ノ表面積ハ$2\pi r\cdot 2r$ナリ。



證明 半徑rナル半圓$ABGH$ガ直徑AHヲ軸トシテ廻轉シ球面ヲ生ズルモノトス。

今此ノ半圓周ヲn等分シ,各分點ヲ順次ニ結ビ弦AB,BC,CD,………,GHヲ作リ,中心Oヨリ各弦ニ垂線ヲ引クトキハ,ソレ等ノ垂線ハ皆相等シク且弦ヲ二等分ス。

故ニ弦AB,BC,CD,………,GHガAHヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル曲面ハ夫々 $2\pi MO\cdot AB'$, $2\pi MO\cdot B'C'$, $2\pi MO\cdot C'D'$,……… $2\pi MO\cdot G'H$ ニ等シ。

故ニ之等ノ曲面積ノ總和ヲSトスレバ

$$S=2\pi MO(AB'+B'C'+C'D'+\cdots\cdots+G'H)=2\pi MO\cdot AH$$

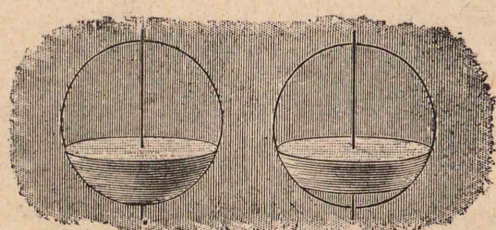
然ルニ半圓周ノ等分數nヲ限リナク増ストキハS及ビMOノ極限ハ夫々球ノ表面積及ビ其ノ半徑トナル。故ニ球ノ表面積ハ$2\pi r\cdot 2r$ナリ。

系一 球ノ表面積ハ其ノ大圓ノ面積ノ四倍ニ等シ。

球ノ半徑ヲrトスレバ表面積ハ$4\pi r^2$ナリ。

系二 球ノ表面積ハソレニ外接スル直圓壔ノ側面積ニ等シ。

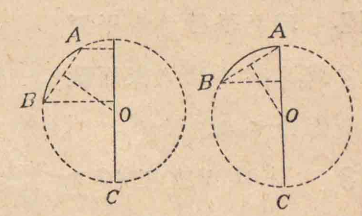
定義 平行ナル二平面ノ間ニ在ル球ノ部分ヲ**球分**トイヒ,其ノ二平行面ニヨル球ノ截面ヲ球分ノ**底**,兩底間ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。而シテ二平行面ノ一ツガ球ノ切平面ナルトキハ其ノ球分ヲ**一ツノ底ノ球分**又ハ**缺球**トイフ。



球分ノ曲面ヲ**球帶**,缺球ノ曲面ヲ**缺球面**トイフ。

系三 球帶及ビ缺球面ノ面積ハ其ノ大圓ノ周ト高サトノ積ニ等シ。

半圓ノ代リニ弧ABヲトルトキハ本定理ト同樣ニシテ之ヲ證スルコトヲ得。

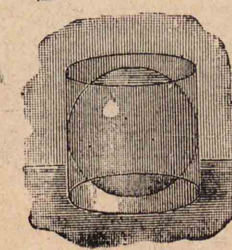


9. 半徑10cmノ「ゴム」毬ヲ皮ニテ覆ハントス。少クトモ幾何ノ皮ヲ要スルカ。但シ縫代(ヌヒシロ)ハ計算ニ入レズ。

10. 地球ノ赤道ノ長サハ約四萬粁ナリ。其ノ表面積ヲ求メヨ。

但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トス。

11. 球ノ表面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ全表面積ノ三分ノ二ニ等シキコトヲ證セヨ。



(9) 「ヴアレーボール」ノ球ハ直徑 21cm ナリ。之ヲ包ム皮ノ總面積ヲ求メヨ。

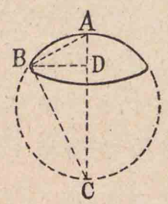
但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トス。

(10) 月ノ直徑ヲ約三千五百粁トシテ地球ノ表面積ト月ノ表面積トノ比ヲ求メヨ。

(11) 半徑ガa糎,b糎ナル二球ノ表面積ノ和ニ等シキ表面積ヲ有スル球ノ半徑ヲ求メヨ。

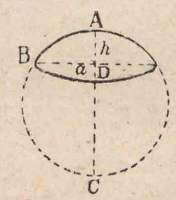
12. 球ヲ平行ナル平面ニテ截リ其ノ球ノ表面積ヲ十等分セヨ。

13 弧ABガ直徑ACヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル缺球面ノ面積ハ弦ABヲ半徑トスル圓ノ面積ニ等シ。

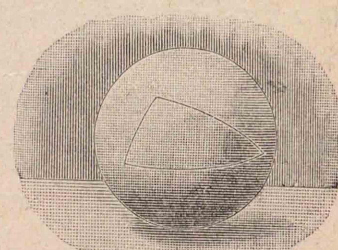


(12) 全表面積ガ110平方糎ナル球面上ニ面積11平方糎ナル球帶アリ。其ノ高サヲ求メヨ。

(13) 高サハh,底面ノ半徑ハaナル缺球ノ全表面積ハ$\pi(h^2+2a^2)$ナリ。

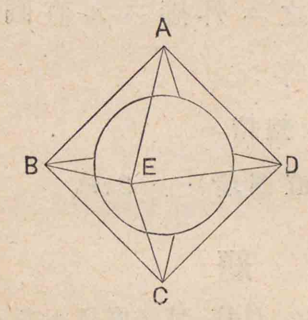


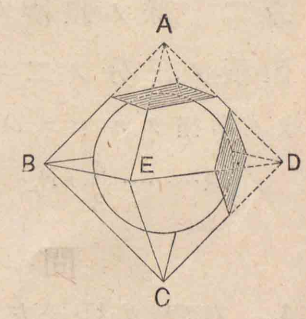
〔**備考**〕球面上ニ大圓ノ弧ニテ圍マレタル圖形ヲ作ルコトヲ得。三ツ以上ノ大圓ノ弧ヨリ成ル球面ノ部分ヲ**球面多角形**トイヒ,其ノ弧ヲ球面多角形ノ邊トイフ。球面多角形ニハ邊ノ數ニ依リ**球面三角形**,**球面四角形**等ノ名アリ。平面上ノ三角形ニ就キテ研究スル平面三角法ニ對シ,球面三角形ニ就キテ研究スル數學ノ一分科ヲ**球面三角法**トイフ。天文學地理學等ニ應用セラル。



35. 球ノ體積

定理 球ノ體積ハ其ノ表面積ト半徑トノ積ノ三分ノ一ニ等シ。





球ノ體積ヲvトシ其ノ表面體ヲs,半徑ヲrトスレバ $v=\frac{1}{3}sr$ ナリ。

證明 球ニ外接スル任意ノ多面體A-Cヲ作リ其ノ各頂點ト球ノ中心トヲ結べバ,多面體A-Cハ其ノ各面ヲ底面トシ,rヲ高サトスル角錐ニ分タル。故ニ此ノ多面體ノ體積ヲv',其ノ表面積ヲs'トスレバ$v'=\frac{1}{3}s'r$ナリ。今圖ニ示ス如ク球ノ切平面ヲ以テ外接多面體ノ各多面角ヲナス所ノ部分ヲ截リトリ外接多面體ノ面ノ數ヲ限リナク增シ行クトキハv',s'ノ極限ハ夫々v,sトナル。

故ニ　$v=\frac{1}{3}sr.$

系一　半徑 r ナル球ノ體積ヲ v トスレバ

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3$$

ナリ。

系二　球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シ。

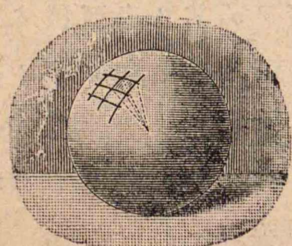
球ノ半徑ヲ r トスレバ體積ハ

球……… $\frac{4}{3}\pi r^3$,　直圓壔……… $2\pi r^3$.

問題

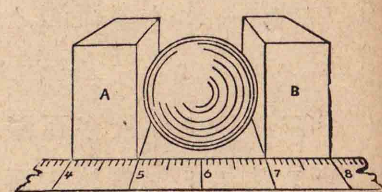
14. 表面積ガ154平方糎ナル球ノ體積ヲ求メヨ。

15. 球ヲ其ノ中心ヲ頂點トスル多クノ角錐ニ分ツコトニ依リテ體積ヲ求ムル公式ヲ作レ。



(14) 球ノ直徑ハ次ノ圖ノ如クシテ測ルコトヲ得。其ノ方法ヲ述べ,且此ノ球ノ體積ヲ求メヨ。

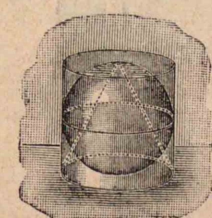
但シ物指ハ糎指ニシテ最小目盛ハ粍ナリ。



16. 地球ノ體積ヲ求メヨ。但シ地球ハ球ナリトシ,其ノ赤道ハ約4千萬米アリ。

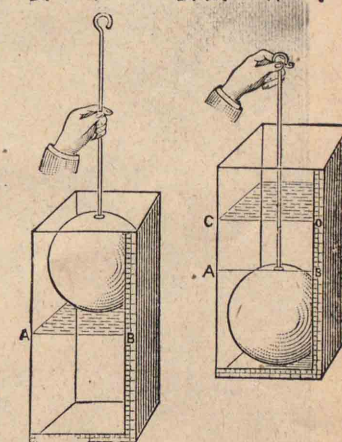
17. 內法ノ縱横各10糎ナル正四角壔ノ容器ニ深サ10糎ダケ水ヲ入レ,此ノ中ニ直徑10糎ナル球ヲ入ルルトキハ,水ハ何糎上ルカ。

18. 直徑ト高サトガ相等シキ直圓壔ト之ニ內接スル球及ビ直圓錐トノ體積ノ比ハ3:2:1ニ等シ。

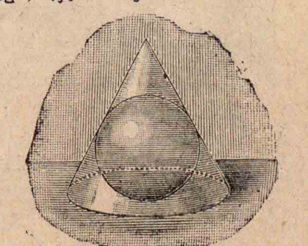


(16) 太陽ノ體積ヲ求メヨ。但シ太陽ノ直徑ハ約 14×10^5 粁アリ。

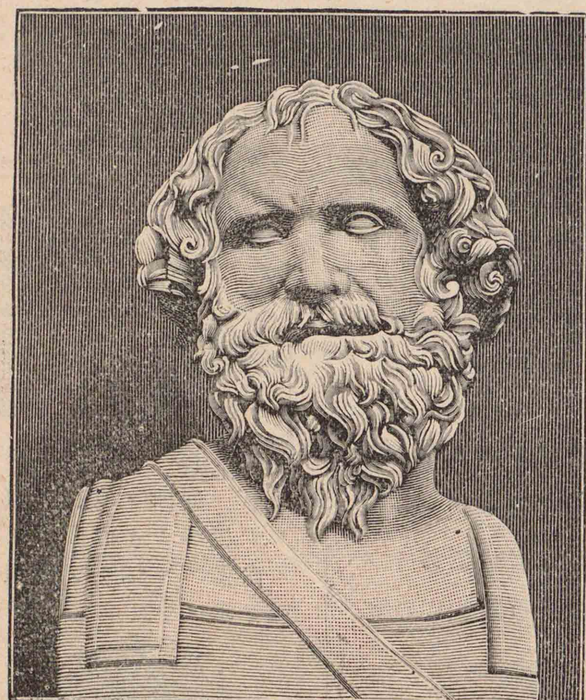
(17) 問題17ノ結果ヨリ,球ノ直徑ヲ知リテ其ノ體積ヲ求ムル公式ヲ作レ。



(18) 底面ノ直徑ト母線トガ相等シキ直圓錐ト之ニ內接スル球トノ體積ノ比ヲ求メヨ。



アルキメデス



ARCHIMEDES (287-212 B.C.)

アルキメデスノ小傳

球ノ體積ガ，之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ$\frac{2}{3}$倍ナル事（第35節系二及ビ問題18參照），及ビ球ノ表面積ガ其ノ大圓ノ面積ノ4倍ナル事（第34節系一參照）ハ共ニ今ヨリ約二千二百年以前「**アルキメデス**」ノ發見スル所ナリトイフ。

「アルキメデス」(Archimedes)（紀元前287—212）ハ「ユークリツド」ト同時代ノ大數學者ニシテ「シシリー」島ニ生レ「アレキサンドリア」大學ニテ學ビタル人ナリ。

彼ハ深ク純粹科學ヲ重ンジタレバ科學ヲ實用ニ供スルコトヲ以テ却ツテ科學ノ價値ヲ墮スモノナリト考ヘタリ。然レドモ彼ハ非凡ナル發明的天才ヲ有シ，ソノ發明セルモノニシテ世人ヲ益シタルモノ極メテ多シ。「ナイル」ノ溪ヲ灌漑スルニ用フル「ポンプ」ノ發明ノ如キモソノ一ツナリ。時ノ政府ハ彼ノ工學的天才ヲ要スル難事起ルヤ恒ニ彼ヲ呼ビテ之ガ解決ノ任ニ當ラシメタリト。「吾ニ支點ヲ與ヘヨ。然ラバ地球ヲモ動カサン。」トハ大船ヲ建造シテ，而モ進水シ能ハザリシ「ヒーロー」王ニ槓杆ノ理ヲ說キテ之ヲ應用セシメ，容易ニ進水ニ成功セシメタリシトキニ王ニ答ヘタル有名ナル言葉ナリ。又或時「ヒーロー」王ハ「アルキメデス」ニ命ジテソノ王冠ガ純金ナリヤ否ヤヲ鑑定セシメタリ。彼ソノ方法ニ苦シミタルモ漸クニシテ入浴中ニ之ヲ發見シ，喜ビノ餘リ裸體ノママ「余ハ發見セリ」ト叫ビ，我ガ家ニ馳セ歸リタリト。物理學ニ於ケル「アルキメデス」ノ原理トイフハ彼ガ此ノ時ノ發見ニカカルモノナリ。

「ローマ」人來ツテ「シラキウス」市ヲ攻擊スルヤ，彼ハ種々ノ戰具ヲ發明シテ「ローマ」ノ兵ヲ苦シメ，ヨク三年ノ長キニ亘リテソノ市ヲ支ヘシメタリトイフ。

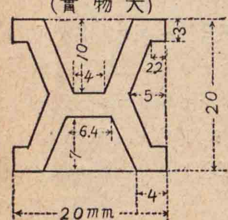
「ローマ」ノ大將「マルセルス」ノ率ユル一兵卒ハ突然「アルキメデス」ノ書齋ニ入リ來レリ。時恰モ彼ハ砂上ニ圓ヲ畵キテ幾何學ノ硏究ヲナシ居タリシガ，兵卒ノ爲ニソノ圖ヲ消サレンコトヲ懼レテ「圖ヲ踏ム勿レ」ト大喝セリ。兵卒之ヲ以テ侮辱サレタリト誤リ，ソノ「アルキメデス」ナルコトヲ知ラズシテ直チニ彼ヲ殺害セリ。之レ全クソノ大將ノ意ニ反シテナシタル無智ナル一兵卒ノ處業ニシテ大將イタク之ヲ惜シミ，「アルキメデス」ノ天才ヲ記念スルタメ莊麗ナル墓碑ヲ建設セリ。ソノ碑面ニ刻ミタル圖形ハ圓壔ニ球ヲ內接セルモノニシテ，上述セル彼ノ發見ノ定理ニ因メルモノナリ。

雜問題

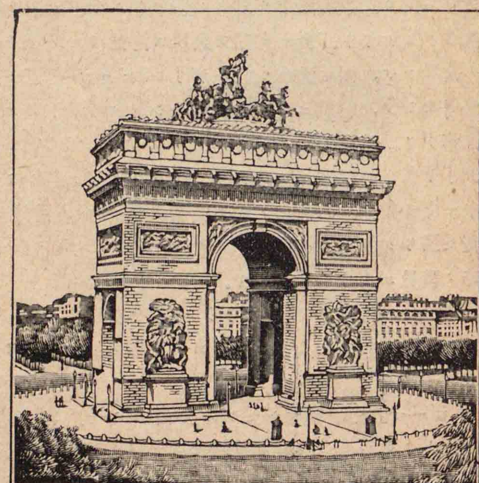
1. 「メートル」法ノ長サノ原器ハ角壔ニシテ,其ノ長サハ $102cm$ アリ。其ノ切斷面ハH字形ニシテ次ノ圖ノ如キ寸法ヲ有ス。其ノ體積ヲ求メヨ。

(1) 長サノ原器ヲ作ル金屬(白金90%,イリジウム10%ノ合金)ハ重サノ原器ト同一ニシテ,其ノ比重ハ21.46ナリ。其ノ重量ヲ求メヨ。

長サノ原器ノ切口
(實物大)

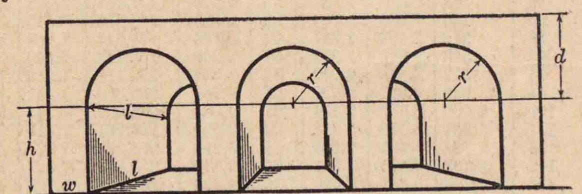


圖中寸法ノ單位ハ總テmmナリ。



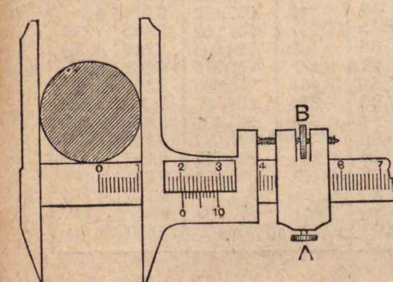
2. 巴里ノ凱旋門ハ總丈162呎ニシテ,幅ハ147呎,奥行73呎ナリ。其ノ「アーチ」ノ高サハ地上96呎,幅ハ48呎ニシテ,其ノ上方ハ半圓形ナリ。「アーチ」ノ部ノ體積ヲ求メヨ。

3. 次ノ圖ハ三ツノ等シキ「アーチ」ヲ有スル石橋ナリ。各「アーチ」ハ直六面體及ビ半圓壔ヨリ成リ,各「アーチ」ノ間隔及ビ兩端ノ石ノ部分ノ幅ハ相等シ。石材ノ體積ヲ求メヨ。

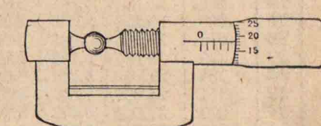


(3) 問題3ニ於テ$l=50m, w=5m, h=10m, r=6m, d=12m$ナラバ所要ノ石材ハ何立方米ナルカ。

4. 「キャリパー」ニテ長サ $1m$ ノ鐵棒ノ直徑ヲ測リタルニ $2.56cm$ アリタリ。其ノ體積ヲ求メヨ。又鐵ノ比重ヲ 7.8 トシテ其ノ重サヲ求メヨ。



(4)



「マイクロメーター」ニテ散彈一粒ノ直徑ヲ測リタルニ $4.18mm$ アリタリ。其ノ體積ヲ求メヨ。又鉛ノ比重ヲ 11.4 トシテ其ノ重サヲ求メヨ。

平方・立方・平方根・立方根ノ表

數	平方	立方	平方根	立方根	數	平方	立方	平方根	立方根
1	1	1	1.000	1.000	51	2,601	132,651	7.141	3.708
2	4	8	1.414	1.259	52	2,704	140,608	7.211	3.732
3	9	27	1.732	1.442	53	2,809	148,877	7.280	3.756
4	16	64	2.000	1.587	54	2,916	157,464	7.348	3.779
5	25	125	2.236	1.709	55	3,025	166,375	7.416	3.802
6	36	216	2.449	1.817	56	3,136	175,616	7,483	3.825
7	49	343	2.645	1.912	57	3,249	185,193	7.549	3.848
8	64	512	2.828	2.000	58	3,364	195,112	7.615	3.870
9	81	729	3.000	2.080	59	3,481	205,379	7.681	3.892
10	100	1,000	3.162	2.154	60	3,600	216,000	7 745	3.914
11	121	1,331	3.316	2.223	61	3,721	226,981	7.810	3.936
12	144	1,728	3.464	2.289	62	3,844	238,328	7 874	3.957
13	169	2,197	3.605	2.351	63	3,969	250,047	7.937	3.979
14	196	2,744	3.741	2.410	64	4,096	262,144	8.000	4.000
15	225	3,375	3.872	2.466	65	4,225	274,625	8.062	4.020
16	256	4,096	4.000	2.519	66	4,356	287,496	8.124	4.041
17	289	4,913	4.123	2.571	67	4,489	300,763	8.185	4.061
18	324	5,832	4.242	2.620	68	4,624	314,432	8.246	4.081
19	361	6,859	4.358	2.668	69	4,761	328,509	8.306	4.101
20	400	8,000	4.472	2.714	70	4,900	343,000	8.366	4.121
21	441	9,261	4.582	2.758	71	5,041	357,911	8.426	4.140
22	484	10,648	4.690	2.802	72	5,184	373,248	8.485	4.160
23	529	12,167	4.795	2.843	73	5,329	389,017	8.544	4.179
24	576	13,824	4.898	2.884	74	5,476	405,224	8.602	4.198
25	625	15,625	5.000	2.924	75	5,625	421,875	8.660	4.217
26	676	17,576	5.099	2.962	76	5,776	438,976	8.717	4.235
27	729	19,683	5.196	3.000	77	5,929	456,533	8.774	4.254
28	784	21,952	5.291	3.036	78	6,084	474,552	8.831	4.272
29	841	24,389	5.385	3.072	79	6,241	493,039	8.888	4.290
30	900	27,000	5.477	3.107	80	6,400	512,000	8.944	4.308
31	961	29,791	5.567	3.141	81	6,561	531,441	9.000	4.326
32	1,024	32,768	5.656	3.174	82	6,724	551,368	9.055	4.344
33	1,089	35,937	5.744	3.207	83	6,889	571,787	9.110	4.362
34	1,156	39,304	5.830	3.239	84	7,056	592,704	9.165	4.379
35	1,225	42,875	5.916	3.271	85	7,225	614,125	9.219	4.396
36	1,296	46,656	6.000	3.301	86	7,396	636,056	9.273	4.414
37	1,369	50,653	6.082	3.332	87	7,569	658,503	9.327	4.431
38	1,444	54,872	6.164	3.361	88	7,744	681,472	9.380	4.447
39	1,521	59,319	6.244	3.391	89	7,921	704,969	9.433	4.464
40	1,600	64,000	6.324	3.419	90	8,100	729,000	9.486	4.481
41	1,681	68,921	6.403	3.448	91	8,281	753,571	9.539	4.497
42	1,764	74,088	6.480	3.476	92	8,464	778,688	9.591	4.514
43	1,849	79,507	6.557	3.503	93	8,649	804,357	9.643	4.530
44	1,936	85,184	6.633	3.530	94	8,836	830,584	9.695	4.546
45	2,025	91,125	6.708	3.556	95	9,025	857,375	9.746	4.562
46	2,116	97,336	6.782	3.583	96	9,216	884,736	9.797	4.578
47	2,209	103,823	6.855	3.608	97	9,409	912,673	9.848	4.594
48	2,304	110,592	6.928	3.634	98	9,604	941,192	9.899	4.610
49	2,401	117,649	7.000	3.659	99	9,801	970,299	9.949	4.626
50	2,500	125,000	7.071	3.684	100	10,000	1,000,000	10.000	4.641

附　　録

第一篇　摘　要

◎平面ノ決定及同一平面上ニ在ル直線

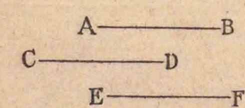
1 同一直線上ニ在ラザル三點
2 相交ル二直線
3 平行ナル二直線
……ハ夫々一平面ヲ決定ス。

4 定直線上ノ一定點ヲ過リ之ニ垂直ナル總テノ直線ハ此ノ點ニ於テ其ノ直線ニ垂直ナル平面上ニ在リ。

◎二直線ノ平行

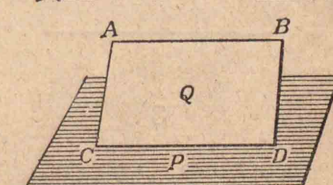
1

$AB \parallel CD$, $AB \parallel EF$ ナラバ　$CD \parallel EF$



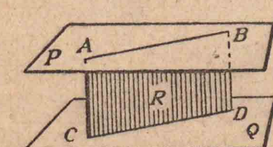
2

$AB \parallel P$ナラバ$AB \parallel CD$
又$AB \parallel CD$ナラバ$AB \parallel P$



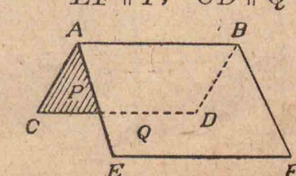
3

$P \parallel Q$ナラバ$AB \parallel CD$



4

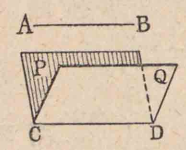
$AB \parallel CD \parallel EF$ナラバ
$EF \parallel P$,　$CD \parallel Q$



5

$AB \parallel P, AB \parallel Q$

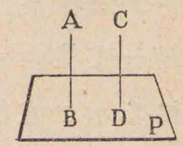
ナラバ$AB \parallel CD$



6

$AB \perp P, CD \perp P$

ナラバ$AB \parallel CD$

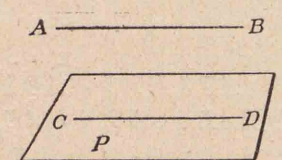


◎直線ト平面トノ平行及二平面ノ平行

1

$AB \parallel CD$

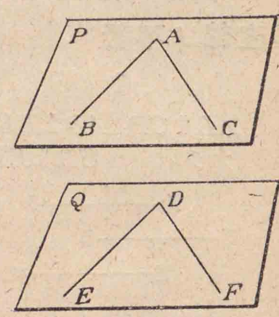
ナラバ$AB \parallel P$



2

$AB \parallel DE, AC \parallel DF$

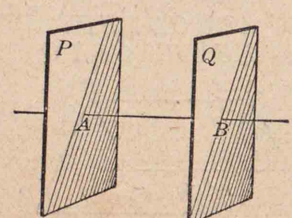
ナラバ　$P \parallel Q$



3

$AB \perp P,\ AB \perp Q$

ナラバ　$P \parallel Q$

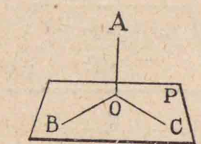


◎直線ト平面トノ垂直

1

$AO \perp BO, AO \perp CO$

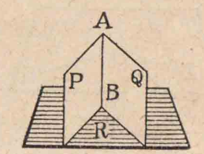
ナラバ　$AO \perp P$



2

$P \perp R,\quad Q \perp R$

ナラバ　$AB \perp R$

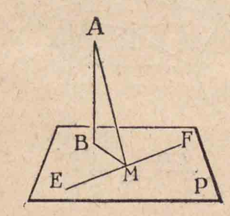


◎垂直ナル直線及平面

1

$AB \perp P, BM \perp EF$

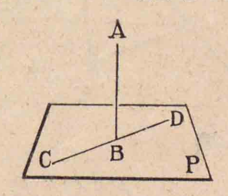
ナラバ　$AM \perp EF$



2

$AB \perp P$

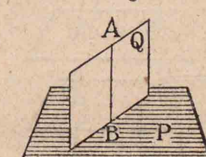
ナラバ　$AB \perp CD$



3

$AB \perp P$

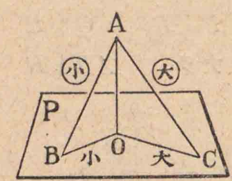
ナラバ$Q \perp P$



◎線分及角ノ大小

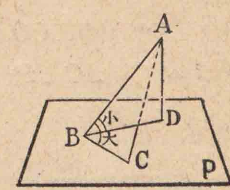
1

$AO \perp P$



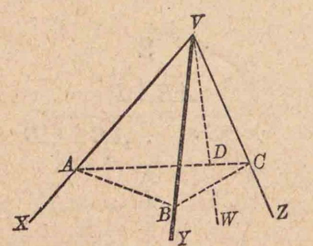
2

$AD \perp P$



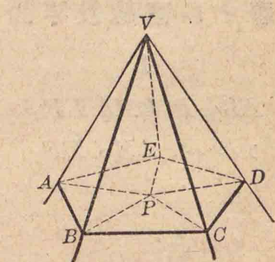
3

$\angle AVC < \angle AVB + \angle BVC,$



4

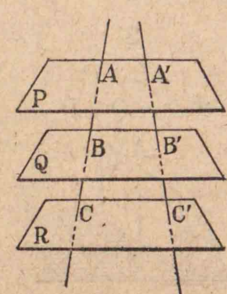
$\angle AVB + \angle BVC + \cdots < 4R.\llcorner$



◎比例線

5

$P \parallel Q \parallel R$ ナラバ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$



雜 問 題

1. 折線 $ABCD$ ニ於テ $\angle BCD$ ガ直角ニシテ, AB ガ平面 BCD ニ垂直ナルトキハ, CD ハ平面 ABC ニ垂直ナリ。

注意 平面 ABC 上ニ於テ點 C ヨリ AB ニ平行ナル直線 CE ヲ引キテ考ヘヨ。

2. 各面角ガ直角ナル三面角 P-ABC ノ各稜上ノ點ヲ夫々 A, B, C トシ, 頂點 P ヨリ平面 ABC ニ垂線 PO ヲ引クトキハ, O ハ $\triangle ABC$ ノ垂心ナリ。

3. 一與平面上ニ於テ, 其ノ平面外ノ二定點ヲ直角ニ見ルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(1) 三面角ノ二ツノ面ガ互ニ垂直ナルトキハ, 其ノ任意ノ稜ニ垂直ナル平面ニテノ截面ハ直角三角形ナリ。

注意 一平面上ノ直線ニ垂直ナル平面ハ其ノ平面ニ垂直ナルコトニ注意セヨ。

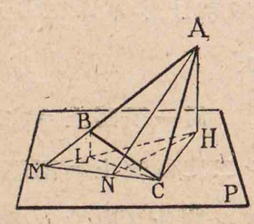
(2) 直線 AB ニ於テ交ル二平面 P, Q アリ。一點 E ヨリ P, Q ノ各ニ垂線 EC, ED ヲ引キ, D ヨリ P ヘ垂線 DF ヲ引クトキハ $CF \perp AB$ ナリ。

(3) 同一平面上ニ在ラザル二定直線上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ與比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 相交ル二平面 P, Q アリ。其ノ交線上ニ一點ヲ求メ,其ノ點ヨリ P 上ノ點 A ト Q 上ノ點 B トニ至ル距離ノ和ヲシテ最小ナラシメヨ。

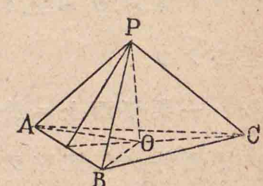
注意 交線ヲ軸トシテ平面ヲ他ノ平面ニ重ナルマデ廻轉セヨ。

5. 三角形 ABC ノ平面 P ニ於ケル正射影ノ面積ハ $\triangle ABC$ ノ面積ニ ABC ノ平面ト P トノナス角ノ餘弦ヲ乘ジタルモノニ等シ。



(4) 直線 XY 上ニ一點 C ヲ求メ, C ヨリ二點 A, B ニ至ル距離ノ差ヲシテ最大ナラシメヨ。但シ二點 A, B ト XY トハ同一平面上ニ在ラザルモノトス。

(5) 二ツノ面角 $\angle BPC$, $\angle APC$ ガ互ニ直角ナル三面角 P-ABC ノ各稜上ニ夫夫點 A, B, C ヲトリ, 點 P ノ平面 ABC ニ於ケル正射影ヲ O トセバ $\triangle APB$ ハ $\triangle AOB$ ト $\triangle ABC$ トノ比例中項ナリ。



第二篇 摘要

◎平行六面體ノ性質及其體積

1 相對スル面ハ合同ナル平行四邊形ナリ。

2 四對角線ハ同一點ニ於テ相會ス。

3 其ノ體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シ。

◎角壔ノ性質及其體積

1 側稜ニ交ル平行ナル截面ハ合同ナル多角形ナリ。

2 其ノ體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シ。

◎角錐及角錐臺

1 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ

(一) 側稜及ビ高サハ同ジ比ニ分タル。

(二) 底面ト截面トハ相似多角形ニシテ,其ノ面積ノ比ハ其ノ頂點ヨリ底面及ビ截面ニ至ル距離ノ自乘比ニ等シ。

2 角錐ノ體積ハ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

雜　問　題

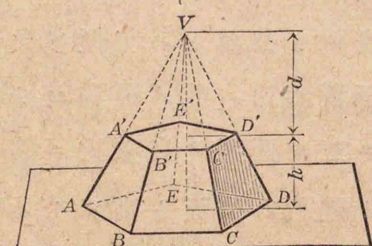
1. 四面體ヲ相對スル二稜ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ其ノ截面ハ平行四邊形ナリ。

2. 正角錐ノ底面上ノ任意ノ一點ヨリ各側面ヘ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ。

3. 正四面體ノ高サヲ h トシ,一稜ノ長サヲ a トスルトキハ

$$3h^2=2a^2.$$

4. 角錐臺ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ其ノ截面積ヲシテ兩底ノ比例中項ナラシメヨ。



(1) 四面體ヲ平面ニテ截リ,其ノ截面ヲシテ菱形ナラシメヨ。

(2) 四面體ノ一ツノ二面角ノ二等分面ハ,ソレニ對スル稜ヲ其ノ二面角ヲナス二面ノ面積ノ比ニ分ツ。

(3) 立方體ノ對角線ヲ d ニテ表ハセバ其ノ體積ハ $\frac{\sqrt{3}}{9}d^3$ ナリ。

(4) 角錐臺ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ其ノ角錐臺ヲ二等分セヨ。

第三篇　摘　　要

◎直圓壔ノ側面積及其體積

直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ r トシ,高サヲ h トセバ

1　側面積 $=2\pi rh$

2　體　積 $=\pi r^2h$

◎直圓錐ノ側面積及其體積

直圓錐ノ底面ノ半徑ヲ r トシ,母線ヲ l, 高サヲ h トスレバ

1　側面積 $=\pi rl$

2　體　積 $=\frac{1}{3}\pi r^2h$

◎直圓錐臺ノ側面積及其體積

兩底ノ半徑ヲ夫々 r R トシ,側高ヲ l トスレバ

1　側面積 $=\pi(r+R)l$

兩底ノ面積ヲ夫々 a, b トシ,高サヲ h トスレバ

2　體　積 $=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b)$ ……… (角錐臺モ同ジ。)

◎**球ノ性質**

1 平面ニヨリテノ截面ハ圓ナリ。

2 中心ヨリ等距離ニ在ル截面ハ相等シ。

3 二球面ノ交リハ其ノ中心線ニ垂直ナル圓ノ周ナリ。

◎**球ノ表面積及其體積**

球ノ半徑ヲrトスレバ

1 表面積$=4\pi r^2$

2 體 積$=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

◎**球帶及缺球面ノ面積**

球帶及ビ缺球面ノ屬スル球ノ半徑ヲrトシ,其ノ高サヲhトスレバ

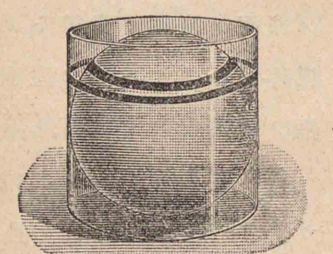
面積$=2\pi rh$ ナリ。

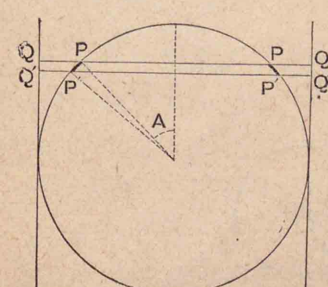
雜 問 題

1. 底部ハ半球ニシテ上部ハ直圓壔狀ナル試驗管ノ直徑ハ6糎,圓壔部ノ長サハ15糎ナリ。其ノ容積ヲ求メヨ。

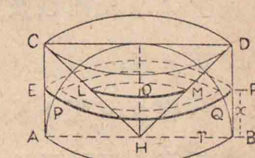
(1) 直圓錐臺形ノ「バケツ」アリ。ソノ內法高サハ20糎,兩底ノ半徑ハ夫々15糎,10糎ナリ。其ノ容積ヲ求メヨ。

2. 球ニ外接スル直圓壔ト其ノ球トヲ,圓壔ノ底面ニ平行ナル二平面ニテ截ルトキハ,其ノ二平面ノ間ニアル圓壔ノ側面積ト球帶ノ面積トハ相等シ。





(2) 圖ノ如ク高サガ底面ノ半徑ニ等シキ直圓壔ニ半球ト直圓錐トヲ內接セシメ,之ヲ圓壔ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,半球ノ截面積ハ圓壔ノ截面積ト圓錐ノ截面積トノ差ニ等シ。



3. 同心ナル二球ヲ一平面ニテ截ルトキハ,其ノ截面ノ二球面ノ間ニ在ル部分ノ面積ハ一定ナリ。

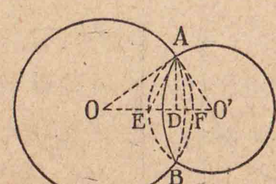
4. 半徑 r ナル球ニ外接スル直圓錐ノ高サガ球ノ直徑ノ 2 倍ナルトキ,其ノ直圓錐ノ全表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

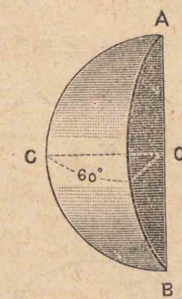
5. 半徑ガ 8 糎ト 6 糎トナル相交ル二球アリ。其ノ交リナル圓ノ半徑ガ 4.8糎ナルトキハ兩球面ノ露出セル部ノ表面積如何。

(3) 半徑 r ナル球ノ外ニアリテ中心ヨリ h ナル距離ニ在ル定點ヨリ,其ノ球ニ引ケル切線ノ切點ノ軌跡ナル小圓ノ面積ヲ求メヨ。

(4) 半徑 6 糎ナル球ニ內接スル直圓錐アリ。其ノ底面ノ直徑ト母線トガ相等シキトキハ其ノ直圓錐ノ體積幾許ナルカ。

(5) 問題5ニ於テ,二球ガ交リテ生ズル瓢(ヒサゴ)狀ノ體積ヲ求メヨ。



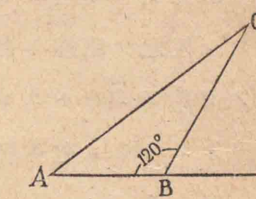


6. 半徑 r ナル半圓 ABC ガ直徑 AB ヲ軸トシテ $60°$ 廻轉シテ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。

7. 球ニ內接スル平行六面體ハ直六面體ナルコトヲ證セヨ。

8. 同一平面上ニ在ラザル四點ヲ通ル球面ヲ作レ。

9. 體積ガ一立方米ニ等シキ球ノ直徑ヲ求メヨ。



(6) 上圖ニ於テ三角形 ABC ガ AB ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。

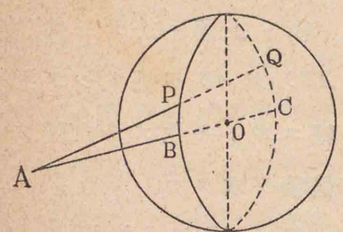
但シ AB ヲ 5 糎,BC ヲ 8 糎,$\angle ABC=120°$ トス。

(7) 半徑 r ナル球ニ內接セル立方體ノ體積ヲ求メヨ。

(8) 相交リ且同一平面上ニ在ラザル二定圓周ヲ含ム球面ヲ作レ。

(9) 一稜ノ長サガ a 糎ナル立方體ニ外接スル球ノ體積ヲ求メヨ。

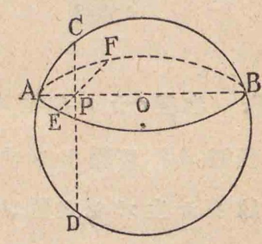
10. 球外ノ一定點Aヨリ引ケル任意ノ直線ト球面トノ交點ヲP,Qトスレバ,二線分AP,AQノ包ム矩形ハ一定ナリ。



11. $800g$ノ球アリ。之ト同質ニシテ直徑ガ其ノ$\frac{1}{2}$ナルモノノ目方ハ何程ナルカ。

又比重ヲ11.3トシテモトノ球ノ體積ヲ求ム。

(10) 球面內ノ一定點ヲ通リテ引ケル互ニ垂直ナル三ツノ弦ノ上ノ正方形ノ和ハ一定ナリ。



(11) 半徑ガ夫々3糎,4糎ナル二ツノ金屬球ヲ熔解シテ中空ナル直圓壔ノ管ヲ作ラントス。外側ノ直徑ヲ1糎,厚サヲ2粍トスレバ,其ノ長サハ幾糎トナルカ。

問題ノ答

答數ヲ求ムル練習問題ノ答ノミヲココニ掲グ。

頁	番號	答	番號	答
7	3	最多 8, 最少 1		
9			(4)	直線 3組, 平面 3組
28	20	$3m$		
40	11	$\sqrt{30.88}\,cm$,(約$5.56cm$)		
44	13	3 通リ	(13)	1 通リ
	14	1 通リ	(14)	作ラレズ。
50	1	$2(ab+bc+ca)\,cm^2$	(1)	$6a^2cm^2$ (2) $c\sqrt{a^2+b}$ m^2
52	5	$6a^3\ cc$	(5)	$9cm$, $343cc$
54	6	$500cc$	(6)	$240cc$
	7	$135cc$	(7)	$150cc$
	8	$\frac{\sqrt{3}}{2}a^3\ cc$,(約$0.866a\ cc$)	(8)	$9cm$, $15cm$, $18cm$
57	2	$435cm^2$	(2)	$(a+b+c)h\ cm^2$
61	4	$192\sqrt{3}\ cc$,(約$332.5cc$)	(4)	$216cc$
	5	$8cm$	(5)	$120cc$
63			(2)	$(108\sqrt{2}+72\sqrt{3})cm^2$, (約$277.4cm^2$)
	3	935652平方呎弱		
67	9	$\frac{(p+p')h}{2}+\frac{\sqrt{3}(p^2+p'^2)}{24}\ cm^2$	(9)	$\frac{p\sqrt{144h^2-3(p-p')}}{12(p-p')}cm$

頁	番號	答	番號	答
69	10	$540cm^2$	(10)	$138cm^2$
	11	$(84\sqrt{5}+25\sqrt{3})cm^2$, (約$241.1cm^2$)	(11)	$48\sqrt{21}cm^2$, (約$219.9cm^2$)
	12	$\left(\frac{ah}{a+h}\right)^3 cc$	(12)	$\frac{2ah}{2h+\sqrt{2}a} cm$
73	14	93147040立方呎	(14)	3杯. 角錐, 448cc. 角壔, 1344cc
74	15	18cc	(15)	950cc
	16	$\frac{t^2h}{3(4h^2+2t)} cc$	(16)	$\frac{a\sqrt{t^2-2a^2t}}{6} cc$
75	17	$31\frac{2}{3} cc$	(17)	$294\sqrt{3} cc$, (約509.2cc)
			(18)	$\sqrt[3]{4} dm$, (約15.87cm)
79	1	$4\sqrt{3}a^2\ cm^2$	(1)	$5\sqrt{3}a^2\ cm^2$
	2	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\ cc$	(2)	$\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\ cc$
82	1	$2395.6m^2$弱	(1)	$11100m^3$
	2	屋根, $2l\sqrt{\frac{w^2}{4}+a^2}$; 表面積, $2\left(hw+hl+l\sqrt{\frac{w^2}{4}+a^2}\right)+wa$	(2)	$(h+\frac{1}{2}a)wl$
83	3	$131.22cm^2$; 78.732cc	(3)	$3(h+u)l+12hu$
87	3	$314cm^2$	(3)	$439.6m^2$
	4	$2\pi(h+r)r$	(4)	$9.30m^2$强
89	5	46.5891426cc; 比重, 21.46	(5)	$2.826m^3$弱
	6	316.5cc	(6)	$516.7cm^2$
	7	202.26 l	(7)	$\left(\frac{25\sqrt{3}}{4}+\frac{50\pi}{3}\right)\times 50kg$, (約3159.25kg)

頁	番號	答	番號	答
93	2	60°	(2)	$\frac{256}{9}\pi\ cm^2$, (約$89cm^2$)
	3	$384.6cm^2$		
95	4	0.522cc	(4)	$\frac{1}{\sqrt{3}}\pi r^3\ cc$ (約$1.82r^3\ cc$)
	5	3杯	(5)	圓錐, 314cc. 圓壔, 942cc
	6	$516.7cm^2$		
98	7	528cc	(7)	9.74cm强
	8	$9\sqrt[3]{4}\ cm$, (約14.28cm)	(8)	792cc
	9	$\sqrt{3}\pi a^2\ cm^2$, (約$5.44a\ cm^2$), $\frac{\pi}{4}a^2\ cc$	(9)	$2\sqrt{3}\pi a^2\ cm^2$, (約$10.88a^2\ cm^2$ $\frac{\pi}{2}a^3\ cc$
103	4	$9\pi\ cm^2$, (約$28.3cm^2$弱)	(4)	$27\pi cm^2$, (約$848cm^2$)
105	5	$(4.8)^2\pi\ cm^2$, (約$72.3cm^2$)	(5)	5.44cm弱, 2.02cm强
106	7	$\frac{3}{2}\sqrt{6}\ cm$, (約3.67cm强)	(7)	$\frac{\sqrt{6}}{2}cm$, (約1.22cm强
111	9	$1257cm^2$	(9)	$1386cm^2$
	10	509百萬平方粁	(10)	1600 : 121, (約13倍)
			(11)	$\sqrt{a^2+b^2}\ cm$
112			(12)	$\frac{\sqrt{35}}{10}cm$, (約0.5916cm)
114	14	180cc	(14)	4.19cc
115	16	$108\times 10^{10}km^3$	(16)	$14.37\times 10^{15}km^3$
	17	$\frac{\pi}{6}dm$, (約0.52dm)	(17)	$v=0.52d^3$ (dハ直徑)
			(18)	$\frac{9}{4}$
118	1	157.896cc	(1)	3.38844816kg

頁	番號	答	番號	答
	2	318338立方呎		
119	3	$(4wh+4wd+6rd-\frac{3}{2}\pi r^2)l$	(3)	$35118m^3$弱
	4	$514.72cc$, $4014.8g$	(4)	$38.24mm^3$, $436mg$
(10)	1	$480{\cdot}7cc$	(1)	$994{\cdot}8cc$
(12)			(3)	$\pi(r^2-\frac{r^4}{h^2})$
	4	$14\pi r^2$,(約$44.0r^2$)	(4)	$81\pi cc$, (約$254.5cc$)
	5	$771.6cm^2$弱	(5)	$3263.2cc$弱
(13)	6	$\frac{2}{9}\pi r^3$, (約$0.7r^3$)	(6)	$240\pi cc$, (約$754cc$)
			(7)	$\frac{8\sqrt{3}r^3}{9}$, (約$1.54r^3$)
	9	$62cm$	(9)	$\sqrt{3}\pi a\ cc$ (約$5.44a\ cc$)
(14)	11	$100g$, $70{\cdot}8cc$	(11)	$758.3cm$

――(終り)――

文部省檢定濟

昭和四年十一月二十七日　師範學校竝中學校數學科用

昭和四年 八 月廿二日 印　　刷
昭和四年 八 月廿五日 發　　行
昭和四年十一月 五 日 訂正再版印刷
昭和四年十一月 十 日 訂正再版發行

新制立體幾何學

定價	金五拾五錢

著作者　廣島高等師範學校附屬中學校
數學研究會
代表者　曾田梅太郎

發行兼印刷者　鈴木政雄
東京市神田區神保町一丁目二五ノ一

發行者　鈴木常松
大阪市東區博勞町五丁目五十六番地

發行所　東京市神田區神保町一丁目二五ノ一　振替口座東京二六四四番　東京　修文館

發行所　大阪市東區博勞町五丁目五六　振替口座大阪四七一番　大阪　修文館

交進社印刷所印行

廣島縣師範学校一部四年
橋本軍夫

修文館