Book

metry

M. Kuroda

大正九年三月六日
文部省檢定濟
師範學校中學校數學科教科書

幾何學教科書

【立體】

黒田稔 著

培風館

發行

緒　言

本書ハ曩ニ發行セル幾何學教科書平面ノ部ノ續篇ニシテ，專ラ立體幾何學ヲ說キタルモノナリ。著述ノ趣旨ハソノ平面ノ部ノ緒言既ニソノ大要ヲ悉クシタリト雖モ，特ニ本書ニ於テ注意セシ要點ヲ擧グレバ次ノ如シ。

I. 立體幾何學教授ニ於テ最モ重要ナルハ,空間ニ關スル觀察力及ビ想像力ヲ養成シ，併セテ立體圖形ノ大サニ關スル明確ナル知識ヲ與フルニアリ。サレバ本書ニ於テハ專ラコレニ重キヲ置ケリ。

II. 立體幾何學ヲ學ブニ當リテ生徒ノ特ニ感ズル困難ハ，主トシテ立體圖形ヲ想像スルコトノ難キ點ニアリ。而シテ，コノ困難ヲ除去スルニ最モ有效ナル一ツノ方法ハ，立體圖形ノ描法ヲ會得セシムルニアリ。故ニ本書ニ於テハ透視圖法ニヨル最モ明確ナル多クノ挿圖ヲ添ヘ置ケリ。生徒ハコレニ就キテ立體圖形ノ描法ヲ學ビ，以テ立體幾何學ノ諸問題ヲ解釋スル手引トナスベシ。

III. 立體幾何學ノ困難ヲ除去スル他ノ一ツノ方法ハ，模形ヲ適當ニ使用シテ空間観察ノ基礎ヲ作ルニアリ。サレバ生徒ハ厚紙ヲ以テ最モ基本的ナル數種ノ模形ヲ作リコレヲ使用スルヲヨシトス。就中直線及ビ平面ノ關係ヲ示スモノハ，基礎的觀念ヲ與フル上ニ極メテ重要ナルヲ以テ，著者ノ特別ノ考案ニ成レルモノヲ作リコレヲ卷末ニ添附セリ。

IV. 平面及ビ直線ニ關スル事項ハ立體幾何學ノ基礎ヲナスモノナレバ，決シテ輕視スベキニアラズ。然レドモ又餘リニコレヲ精細ニ取扱フトキハ，所論單調トナリテ，生徒ノ興味ヲ減殺スル恐レナシトセズ。故ニ本書ニ於テ，コレ等ノ事項ヲ論ズルニ當リテハ，餘リニ簡單ナラズ，又餘リニ繁雜ナラズ，ヨクソノ中庸ヲ得ンコトヲ努メタリ。

V. 幾何學ヲ學ブニ當リテ，生徒ガ常ニ心得トスベキハ，自カラ定理ヲ發見シ，ソノ證明モ亦自カラコレヲ工夫シ，以テ幾何學ノ全系統ヲ自己ノ獨力ニヨリテ組ミ立テンコトヲ努ムベキコトコレナリ。サレバ曩ニ著述セル平面ノ部ニ於テハ，時々豫備問題ヲ提出シテコノ研究法ヲ奬勵セリ。本書ニ於テハ，陽ハニ豫備問題ヲ設クルコトナシト雖モ，コノ研究法ハ飽クマデコレヲ尊重シ，コレニ適セシメンガ爲ニ最モ深ク意ヲ用ヒテ教材ヲ排列セリ。

大正六年十月

著者識ス

目　次

第三篇　立體幾何學

第三篇

立體幾何學

第一章

直線及ビ平面

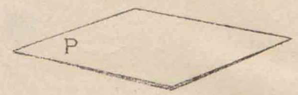
第一節

基本ノ性質

<u>238</u> 平面幾何學ニ於テハ，專ラ一平面上ニアル圖形ヲ論ジタリシガ，コレヨリ學ブ立體幾何學ニ於テハ，一般ニ空間ニ於ケル圖形ヲ取扱ヒ，ソノ形，大サ，及ビ位置等ニ關スル諸性質ニツキテ攻究ス。

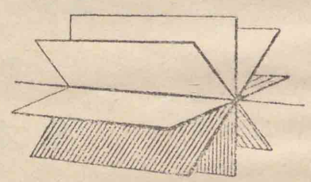
<u>239</u> 回定義回 <u>一ツノ表面上ノ任意ノ二點ヲ過ル直線ガ，全クコレト密着スルトキハ</u>，<u>ソノ表面ヲ平面ト云フ</u>。(21條) 單ニ平面ト稱スルトキハ，何レノ方向ニモ窮リ無ク擴リタルモノヲ意味ス。然レドモコレヲ表ハスニハ，通例ソノ上ニ畫キタル平行四邊形ヲ以テシ，ソノ平行四邊形内ニ大文字 P，

Q，R 等ノ一字ヲ記シテコレヲ指示ス．



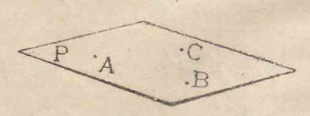
240　前條ノ定義ニヨルトキハ，一直線上ノ二點ガ一ツノ平面上ニアルトキハ，ソノ直線ハコノ平面ニ密着スルコト明カナリ．一直線ガ一平面ト密着スルトキハ，ソノ直線ハコノ平面上ニアリト云ヒ，コノ平面ハソノ直線ヲ含ム又ハ過ルト云フ．

241　平面上ノ二點ヲ固定スルトキハ，平面ハコノ二點ヲ過ル直線ヲ軸トシテ，自由ニ廻轉スルコトヲ得．然レドモ更ニソノ直線上ニアラザル第三點ヲ固定スルトキハ，平面ハ全ク固定ス．卽チ次ノ公理アリ．



公理 I　同一直線上ニアラザル三點ヲ含ム平面ハ一ツアリ。而シテ唯一ツニ限ル。

カクノ如ク或要素ヲ含ム平面ガ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ルトキハ，コレ等ノ要素ハ一平面ヲ定ムト云フ．卽チコノ公理ハ次ノ如ク述ブルヲ得．

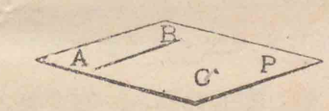


同一直線上ニアラザル三點ハ一平面ヲ定ム。

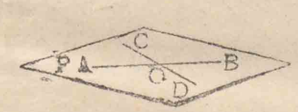
242　次ノ定理ハ前條ノ公理ヨリ直ニ推定スルコトヲ得．

? 定理 103　(a)　一直線トソノ上ニアラザル一點トハ一平面ヲ定ム。(b)　二ツノ相交ル直線ハ一平面ヲ定ム。(c)　二ツノ平行直線ハ一平面ヲ定ム。

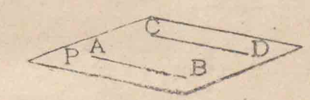
(a)



(b)



(c)



243　空間ニ於ケル二ツノ直線ノ相互ノ位置ニ關シテ次ノ三ツノ場合アリ．

(I)　相交ル．

(II)　平行．

(III)　相交ラズ又平行ナラズ．

(I) (II) ノ場合ニ於テハ二ツノ直線ハ同一平面上ニアリ．

(III) ノ場合ニ於テハ同一平面上ニアラズ.

故ニ立體幾何學ニ於テ, 二ツノ直線ガ平行ナルコトヲ證明スルニ當リテハコノ二直線ガ相交ラザルコトヲ確カムルノミニテハ不十分ナリ. 更ニソレ等ノ直線ガ同一平面上ニアルコトヲ確カムルヲ要ス.

總テ立體幾何學ニ於テ, 或圖形ニ就キテ平面幾何學ノ定理ヲ應用スル時ニハ, 必ズソノ圖形ガ同一平面上ニアルコトヲ確ムルヲ要ス.

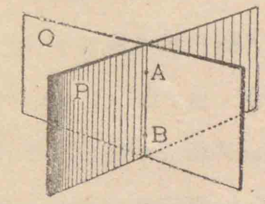
244　一點ヲ共有スル二ツノ平面ヲ作ルトキハ, コノ二ツノ平面ハ更ニソノ他ノ點ヲ共有ス. 即チ次ノ公理アリ.

公理 II　二ツノ平面ハ唯一ツノ點ニ於テハ出會フコトヲ得ズ.

245　**定理104**　二ツノ平面ガ出會ノトキハコレ等ノ平面ハ唯一ツノ直線ヲ共有ス.

P, Q ヲ出會フ二ツノ平面トス. 然ルトキハ P, Q ハ唯一ツノ直線ヲ共有スベシ.

(證明)　A, B ヲ兩平面ニ共通ナル任意ノ二點トシ, AB ヲ結ブ.



然ルトキハ, 直線 AB ハ平面 P 上ニアリ.　(240 條)

又 AB ハ平面 Q 上ニアリ. 故ニ AB ハ兩平面上ニアリ.

而シテ AB 外ノ點ハ皆兩平面ニ共通ナラズ.　(定理 103)

故ニ P, Q ハ直線 AB ノミヲ共有ス.

246　**定義**　二ツノ平面ガ一ツノ直線ヲ共有スルトキハ, コノ二ツノ平面ハ相交ルト云ヒ, ソノ直線ヲ二ツノ平面ノ交線又ハ交リト云フ.

練習問題

(1)　一定點ヲ過ル直線ガ一定直線ニ沿ウテ動クトキハ, ソノ直線ハ常ニ同一平面上ニアルコトヲ證明セヨ.

(2)　一直線ガ常ニ自己ニ平行ニ且一定直線ニ沿ウテ動クトキハ, ソノ直線ハ常ニ同一平面上ニアルコトヲ證明セヨ.

(3)　四點ガ同一平面上ニアラザルトキハ, コレ等ノ內ノ點ニヨリテ定メラルヽ平面ハ幾箇アルカ. 又同樣ノ五點ノトキハ如何.

(4)　同一點ヲ過ル三ツノ直線アリ, コノ三直線ガ同一平面

上ニアラザルトキ，コレ等ノ内ノ直線ニヨリテ定メラルヽ平面ノ數ヲ求ム。

(5) A，B，C，D ハ同一平面上ニアラザル四點ナルトキ，コレヲ順次ニ結ビツケテ生ズル四邊形ノ二ツノ對角線 AC BD ハ相交ラザルコトヲ證明セヨ。

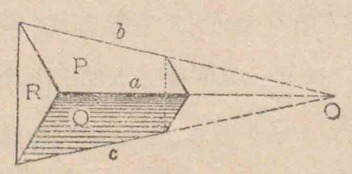
〔注意〕 カクノ如キ四邊形ヲ歪メル四邊形ト云フ。

第二節

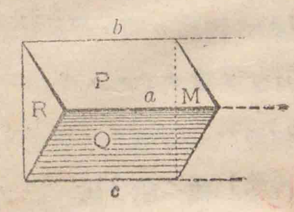
平行ナル平面及ビ直線

247 定理105 同一直線ヲ含マザル三ツノ平面ガ二ツヅツ相交ルトキハ，ソノ三ツノ交リハ同一ノ點ヲ過ルカ又ハ互ニ平行ナリ。

(i)



(ii)



P，Q，R ヲ二ツヅツ相交ル三ツノ平面トシ，a，b，c ヲソレゾレ P ト Q トノ交リ，P ト R トノ交リ，Q ト R トノ交リトス。

然ルトキハ a，b，c ハ同一ノ點ヲ過ルカ又ハ平行ナルベシ。

(證明) a，b ハ一平面 P 上ニアルガ故ニ相交ルカ又ハ平行ナリ。

(i) a，b ガ相交ルトシテ，ソノ交點ヲ O トス。

然ルトキハ O ハ a 上ニアルガ故ニ a ヲ含ム平面 Q 上ニアリ。

又 O ハ b 上ニアルガ故ニ b ヲ含ム平面 R 上ニアリ。故ニ O ハ Q ト R トノ交リ c 上ニアリ。故ニ a，b，c ハ同一ノ點 O ヲ過ル。

(ii) a，b ガ平行ナリトス。然ルトキハ b，c ハ相交ルコトヲ得ズ。何トナレバモシ b，c ガ相交ルトセバ (i) ニヨリテ a，b モ亦相交ルベケレバナリ。

而シテ b，c ハ同一平面 R 上ニアリ。故ニ $b \parallel c$.

同樣ニ $a \parallel c$.

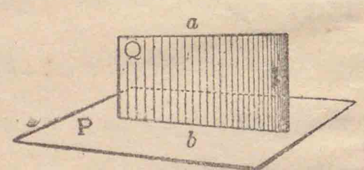
卽チ a，b，c ハ互ニ平行ナリ。

〔系〕 同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。

$a \parallel b$, $c \parallel b$ ナリトスレバ $a \parallel c$ ナルベシ。(本定理ノ圖(ii)參照)

(證明)　$a \parallel b$ ナルガ故ニ a, b ハ一平面 P ヲ定ム。又 $c \parallel b$ ナルガ故ニ c, b ハ一平面 R ヲ定ム。a 上ノ一點ヲ M トスレバ，M ト c トハ一平面 Q ヲ定ム。P，Q ノ交リヲ d トスレバ本定理ニヨリテ　$d \parallel b$.　又　$d \parallel c$.
而シテ假設ニヨリ $a \parallel b$. 故ニ d ト a ハ同一直線ナリ。
故ニ　$a \parallel c$.

248　**定理106**　**二ツノ直線ガ平行ナルトキハ，ソノ一ツノ直線ノミヲ含ム平面ハ，他ノ直線ト出會ハズ。**



a, b ヲ平行ナル二ツノ直線トシ，b ヲ含ミテ a ヲ含マザル平面ヲ P トス。然ルトキハ a ト P トハ出會ハザルベシ。

(證明)　$a \parallel b$ ナルガ故ニ a, b ハ一平面 Q ヲ定ム。モシ a ト P トガ出會フトスレバ，ソノ出會フ交點ハ Q 上ニアリ。

從ツテソノ點ハ P，Q ノ交リ b 上ニアルベシ。故ニ a, b ハ出會ハザルベカラズ。コレ假設ニ反ス。
故ニ a ト P トハ出會ハズ。

249　回定義回　一ツノ直線ト一ツノ平面トガ出會ハザルトキハ，ソノ直線ト平面トハ平行ナリト云フ。

一ツノ直線ト一ツノ平面トノ相互ノ位置ニ關シテ次ノ三ツノ場合アリ。

(I)　一點ニ於テ出會フ。コノ時，平面ト直線ハ相交ルト云フ。

(II)　直線ハ平面ニ含マル。

(III)　平行。

250　定理106ヨリ直ニ次ノ定理ヲ推定スルコトヲ得。

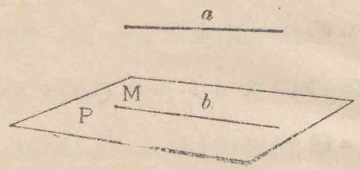
定理107　**一ツノ平面上ノ直線ニ平行ナル直線ハ，ソノ平面ニ平行ナルカ又ハコレニ含マル。**

【系1】　一ツノ平面 (P) ト，コレニ平行ナル直線 (a) ヲ含ム平面 (Q) トノ交リ (b) ハ，コノ直線 (a) ニ平行ナリ。

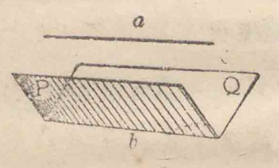
(248 條ノ圖參照)

【系2】　一ツノ直線 (a) ガ一ツノ平面 (P) ニ平行ナルトキ

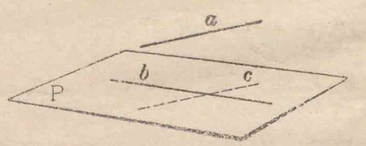
ハ，ソノ平面上ノ一點(M)ヲ過リテソノ直線(a)ニ平行ニ引ケル直線(b)ハ，ソノ平面(P)上ニアリ．



【系3】 二ツノ平面(P，Q)ノ交リ(b)ニ平行ナル直線(a)ハ，ソノ各平面ニ平行ナリ．又逆ニ二ツノ相交ル平面ノ各ニ平行ナル直線(a)ハソノ二ツノ平面ノ交リ(b)ニ平行ナリ．



【系4】 同一平面上ニアラザル二直線(a，b)ノ一ツ(b)ヲ含ミテ，他(a)ニ平行ナル平面ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル．



（證明） b上ノ一點ヲ過リテaニ平行ニ直線cヲ引ク．然ルトキハb，cハ一平面Pヲ定ム 而シテコノ平面Pハaニ平行ナリ． （定理107）

P以外ニbヲ含ミテaニ平行ナル平面Qアリトスレバ，

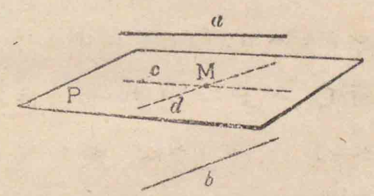
P，Qノ交リbハaニ平行ナラザルベカラズ．（系3）

コレ假設ニ反ス．

故ニbヲ含ミテaニ平行ナル平面ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル．

【系5】 一點(M)ヲ過リテ，同一平面上ニアラザル二直線(a，b)ニ平行ナル平面ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル．

（證明） Mヲ過リテソレゾレa及ビbニ平行ニ直線c及ビdヲ引ク．然ルトキハc，dハ一平面Pヲ定ム．而シテPハa及ビbニ平行ナリ．



（定理107）

P以外ニMヲ過リテa及ビbニ平行ナル平面Qアリトスレバ，P，Qノ交リハaニ平行ナラザルベカラズ．（系3）同様ニP，Qノ交リハbニ平行ナラザルベカラズ．従ツテa，bハ平行ナラザルベカラズ．コレ假設ニ反ス．

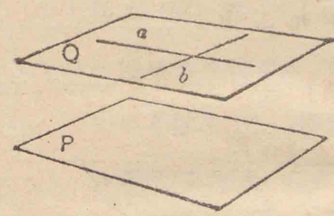
故ニMヲ過リテa及ビbニ平行ナル平面ハ一ツアリ，而シテ唯一ニ限ル．

251 定理108 相交ル二ツノ直線ガ，各一ツノ平面ニ平行ナルトキハ，ソノ二直線ノ定ムル平面ハコノ平面ト出會ハズ。

a, b ヲ相交ル二ツノ直線トシ

$a \parallel P$, $b \parallel P$ ナリトス。

然ルトキハ a, b ノ定ムル平面 Q ハ P ニ出會ハザルベシ。



(證明) モシ P, Q ガ出會フトスレバ，ソノ交リハ a 及ビ b ニ平行ナラザルベカラズ。 (定理107 系3)

從ツテ a, b ハ平行ナラザルベカラズ。コレ假設ニ反ス。

由ツテ P, Q ハ出會フコトヲ得ズ。

252 定義 二ツノ平面ガ出會ハザルトキハ，コノ二ツノ平面ハ平行ナリト云フ。

二ツノ平面ノ相互ノ位置ニ關シテハ次ノ二ツノ場合アリ。

(I) 出會フ．即チ相交ル。

(II) 平行。

253 定理108ヨリ直ニ次ノ定理ヲ得．

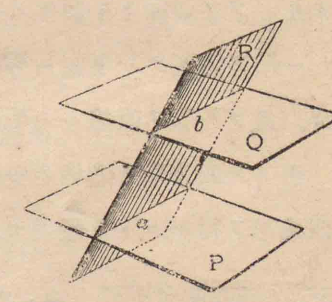
定理109 一平面上ノ相交ル二ツノ直線ガ，ソレゾレ他ノ平面上ノ相交ル二ツノ直線ニ平行ナルトキハ，コノ二ツノ平面ハ平行ナリ。

【系】 一ツノ平面外ノ一點ヲ過リテコレニ平行ナル平面ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル。

254 定理110 一ツノ平面ガ二ツノ平行ナル平面ト交ルトキハ，ソノ交リハ平行ナリ。

P, Q ヲ二ツノ平行ナル平面トシ，一ツノ平面 R ガ P 及ビ Q ト交ル直線ヲソレゾレ a, b トス。

然ルトキハ $a \parallel b$ ナルベシ。



(證明) P, Q ハ平行ナルヲ以テ，ソノ各平面上ニアル直線 a 及ビ b ハ出會フコトヲ得ズ。而シテ a, b ハ一平面 R 上ニアリ。

故ニ $a \parallel b$.

練習問題

(1) 二ツノ平行直線ガ，二ツノ平行ナル平面ニヨリテ截リ取ラルヽ部分ハ相等シ．コレヲ證明セヨ．

(2) 同一ノ平面ニ平行ナル二ツノ平面ハ互ニ平行ナルコトヲ證明セヨ．

(3) 平行ナル二ツノ平面ノ一ツニ交ル直線ハ他トモ交ルコトヲ證明セヨ．

(4) 平行ナル二ツノ平面ノ一ツニ交ル平面ハ他トモ交ルコトヲ證明セヨ．

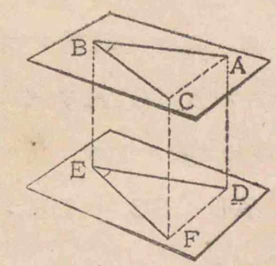
(5) 一ツノ直線ノ一平面上ニ於ケル影ガ，ソノ直線ニ平行ナルトキ，ソノ直線ト平面トノ相互ノ位置如何．

(6) 一點ヲ過リテ一平面ニ平行ナル直線ハ幾ツ引クコトヲ得ルカ．且ソレ等ノ直線ハ一平面上ニアルコトヲ證明セヨ．

(7) 歪メル四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブトキハ一ツノ平行四邊形ヲ得ルコトヲ證明セヨ．

255 定理 111 一ツノ角ノ二邊ガ，コレト同一平面上ニアラザル他ノ角ノ二邊ニソレゾレ平行ニシテ，且ソノ二角ノ頂點ヲ結ブ直線ノ

同側ニアルトキハ，ソノ二角ハ相等シ．



二ツノ角 ABC，DEF ニ於テ BA ハ ED ニ平行，BC ハ EF ニ平行ニシテ，且 BE ノ同側ニアリトス．

然ルトキハ $\angle ABC = \angle DEF$ ナルベシ．

（證明）$BA = ED$，$BC = EF$ ナル樣ニシ，CF，AD，BE，AC，DF ヲ結ブ．

然ルトキハ四邊形 ABED 及ビ BCFE ハ平行四邊形ナリ．

故ニ AD 及ビ CF ハ共ニ BE ニ等シク且コレニ平行ナリ．

從ッテ AD，CF ハ相等シク且平行ナリ．

故ニ四邊形 ACFD ハ平行四邊形ナリ．

故ニ　$AC = DF$.

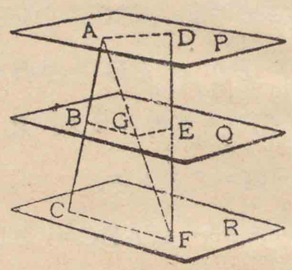
故ニ　$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

故ニ　$\angle ABC = \angle DEF$.

256 定理 112 二ツノ直線ガ三ツノ平行ナル平面ニヨリテ截ラルルトキハ，ソノ對應ス

ル分ノ比ハ相等シ。

三ツノ平行ナル平面 P, Q, R ガ, 二ツノ直線トソレゾレ A, B, C 及ビ D, E, F ニ於テ交ルトス。然ルトキハ AB : BC = DE : EF ナルベシ。



(證明) AF ヲ結ビ平面 Q ト G ニ於テ交ラシム。AD, GE, GB, CF ヲ結ブ。

然ルトキハ AC, AF ノ定ムル平面ト Q 及ビ R トノ交リハソレゾレ BG, CF ニシテ, FA, FD ノ定ムル平面ト P 及ビ Q トノ交リハソレゾレ AD 及ビ GE ナリ。

故ニ　BG ∥ CF, GE ∥ AD.　(定理 110)

故ニ　AB:BC = AG:GF,

AG:GF = DE:EF.　(定理 78)

故ニ　AB:BC = DE:EF.

【系】 二ツノ直線ガ四ツ以上ノ平行ナル平面ニヨリテ截ラルルトキハ, ソノ對應スル分ノ比ハ相等シ。

257 立體ヲ發光點ニテ照ラストキハ, 適當ノ位置ニアル

一平面上ニソノ影トシテ一ツノ平面形ヲ生ズ。コノ影ヲソノ平面上ニ於ケル立體ノ射影ト云フ。尚一般ニ射影ノ定義ヲ述ブレバ次ノ如シ。

回定義回 一ツノ立體外ノ一定點ト, ソノ立體内ノ一點トヲ結ブ直線ヲ, 一平面ニテ截斷シテ得ラレタル點ノ軌跡ヲ, ソノ立體ノコノ平面上ニ於ケル射影ト云フ。而シテソノ一定點(發光點)ヲ射影ノ中心ト云ヒ, 射影ノ中心ト立體内ノ一點トヲ結ブ直線(光線)ヲ射影線ト云フ。

立體幾何學ニ於テハ, 射影ヲ畫キテ以テ立體ヲ表ハス。射影ノ形ハ, 立體ノ形ニ關係スルノミナラズ, 又射影スベキ平面ノ位置及ビ射影ノ中心ノ位置ニ關係ス。

モシ射影ノ中心ヲ非常ニ遠クスルトキハ, 各射影線ハ殆ンド平行トナルベシ。各射影線ガ平行ナルトキノ射影ヲ平行射影ト云ヒ, ソノ他ノ場合ニ於ケル射影ヲ中心射影ト云フ。

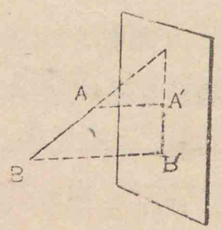
258 平行射影ニ關スル次ノ定理ハ容易ニコレヲ證明スルコトヲ得ベシ。

(a) 一ツノ直線(射影線ニ平行ナラザル)ノ平行射影ハ一ツノ直線ナリ。

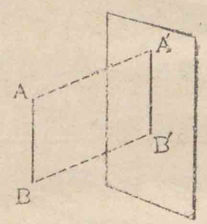
(b) 射影スベキ平面ニ平行ナル一ツノ線分ノ平行射影ハ,

ソノ線分ニ等シク且コレニ平行ナリ.

(a)

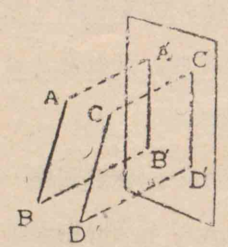


(b)

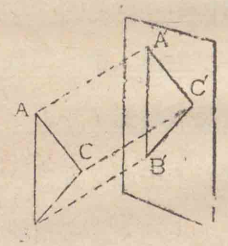


(c) 平行直線ノ平行射影ハ又平行ナリ.

(c)



(d)



(d) 射影スベキ平面ニ平行ナル多角形ノ平行射影ハ原形ト合同ナリ.

練習問題

(1) 平行四邊形ノ平行射影ハ又平行四邊形ナリ. コレヲ證明セヨ.

(2) 矩形, 正方形ノ平行射影ハ必ズシモ矩形, 正方形ナラ

ザルコトヲ圖ヲ畫キテ說明セヨ.

(3) 一ツノ圓ノ平面ニ平行ナル平面上ニ於ケルソノ圓ノ平行射影ハ, 原ノ圓ト合同ナル圓ナルコトヲ證明セヨ.

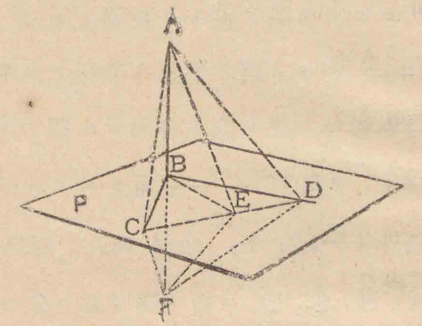
(4) ABCD ハ一平面上ニアル四邊形ニシテ, M ハソノ平面外ノ一點ナリ. 今線 MA, MB. MC, MD ヲソレゾレ A', B', C', D' ニ於テ同ジ比ニ分ツトキハ, A'B'C'D' ハ平面四邊形ニシテ且四邊形 ABCD ニ相似ナリ. コレヲ證明セヨ.

第三節

垂直ナル平面及ビ直線, 二面角

259 定理113 相交ル二ツノ直線ノ交點ヲ過リテ, ソノ各ニ垂直ナル直線ハ, コノ二直線ノ定ムル平面上ニアリテ, ソノ交點ヲ過ル總テノ直線ニ垂直ナリ.

BC, BD ヲ平面 P 上ニアル相交ル二ツノ直線トシ, AB ヲソノ各ニ垂直ナル直線ナリトス.



然ルトキハ AB ハ P 上ニアリテ B ヲ過ル總テノ直線ニ垂直ナルベシ。

（證明） P 上ニアリテ B ヲ過ル任意ノ直線ヲ BE トス。

直線 CD ヲ引キ，BC，BE，BD トソレゾレ C，E，D ニ於テ交ラシム。

AB ヲ延長シテ F ニ至ラシメ，AB = BF ナラシム。

AC，AD，AE，FC，FD，FE ヲ結ブ。

然ルトキハ BC 及ビ BD ハ AF ノ垂直二等分線ナルガ故ニ

$AC = FC, \quad AD = FD.$

故ニ $\triangle ACD \cong \triangle FCD, \quad \angle ACE = \angle FCE.$

故ニ $\triangle ACE \cong \triangle FCE, \quad AE = FE.$

故ニ $\triangle ABE \cong \triangle FBE, \quad \angle ABE = \angle FBE.$

由ッテ $AB \perp BE.$

故ニ AB ハ P 上ニアリテ B ヲ過ル總テノ直線ニ垂直ナリ。

260 ◎定義◎ 一ツノ平面ト交ル一ツノ直線ガ，ソノ平

面上ニアリテソノ交點ヲ過ル總テノ直線ニ垂直ナルトキハ，コノ直線ハソノ平面ノ垂線ナリト云ヒ，平面ト直線トハ互ニ垂直ナリト云フ。

一ツノ平面ト交リテコレニ垂直ナラザル直線ヲ，ソノ平面ノ斜線ト云フ。

垂線又ハ斜線ガ平面ト出會フ點ヲソノ足ト云フ。

コノ定義ニヨリ前定理ハ次ノ如ク述ブルコトヲ得。

定理 114 相交ル二ツノ直線ノ交點ヲ過リテ，ソノ各ニ垂直ナル直線ハ，コノ二直線ノ定ムル平面ニ垂直ナリ。

261 ◎定義◎ 同一平面上ニアラザル二ツノ直線ノナス角トハ，ソノ各ニ平行ニシテ相交ル二ツノ直線ノナス角ヲ云フ。

コレニ由ッテ前定理ヨリ次ノ定理ヲ導クヲ得。

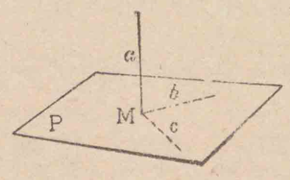
定理 115 一ツノ平面上ノ相交ル二ツノ直線ト直角ヲナス直線ハソノ平面ニ垂直ナリ。

〔系〕 平面ニ垂直ナル直線ハ，ソノ平面上ニアル總テノ直線

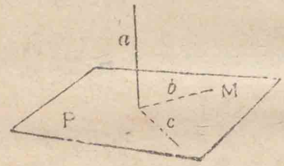
ト直角ヲナス.

262 $\boxed{\text{定理}\ 116}$ 一ツノ點ヲ過リ一ツノ直線ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ, 而シテ唯一ツニ限ル.

(i)



(ii)



M ヲ一點, a ヲ一直線トス.

然ルトキハ, M ヲ過リテ a ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ, 而シテ唯一ツニ限ルベシ.

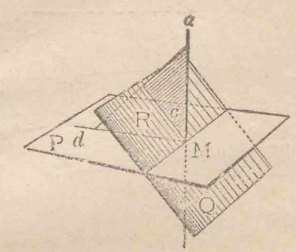
(證明) (i) M ガ a 上ニアリトス.

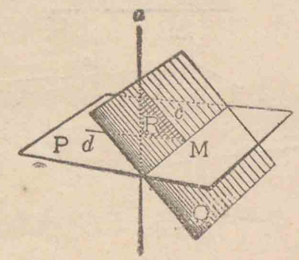
M ニ於テ a ニ二ツノ垂線 b 及ビ c ヲ引ク. 然ルトキハ b, c ノ定ムル平面 P ハ M ヲ過リテ a ニ垂直ナリ. (定理 114)

(ii) M ガ a 外ニアリトス.

M ヨリ a ニ垂線 b ヲ引キ, ソノ足ニ於テ, a ニ他ノ垂線 c ヲ引ク. 然ルトキハ b, c ノ定ムル平面 P ハ M ヲ過リテ

a ニ垂直ナリ. (定理 114)





P 以外ニカクノ如キ平面 Q アリトシ, a ヲ含ム一ツノ平面 R ヲ作リ, P ト d ニ於テ, Q ト c ニ於テ交ラシム.

然ルトキハ c 及ビ d ハ共ニ a ニ垂直ニシテ, 同一ノ點ヲ過リ, 且 a ト共ニ同一平面 R 上ニアリ.

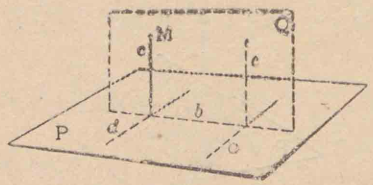
コレ不合理ナリ.

故ニ M ヲ過リテ a ニ垂直ナル平面ハ唯一ツニ限ル.

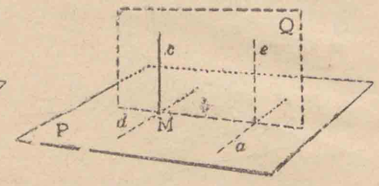
〔系〕 一ツノ直線上ノ一點ニ於テコレニ垂直ナル總テノ直線ハ, 皆コノ點ヲ過ギソノ直線ニ垂直ナル平面上ニアリ.

263 $\boxed{\text{定理}\ 117}$ 一ツノ點ヲ過リ, 一ツノ平面ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ, 而シテ唯一ツニ限ル.

(i)



(ii)



M ヲ一ツノ點，P ヲ一ツノ平面トス．

然ルトキハ M ヲ過リテ P ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ルベシ．

（證明） (i) M ガ P 外ニアリトス．

P 上ニ一直線 a ヲ引キ，M ヲ過リテ a ニ垂直ナル平面 Q ヲ作リ，P ト b ニ於テ交ラシム． （定理 116）

Q 上ニ於テ M ヲ過リテ b ニ垂線 c ヲ引ク．

P 上ニ於テ c ノ足ヲ過リテ a ニ平行ニ直線 d ヲ引ク．

又 Q 上ニ於テ a, b ノ交リヲ過リテ c ニ平行ニ直線 e ヲ引ク．

然ルトキハ $\angle cd = \angle ae$. （定理 111）

〔c ト d トナス角ヲ $\angle cd$ ニテ表ハス．ソノ他コレニ準ズ〕

然ルニ $\angle ae = \angle R$.

故ニ $\angle cd = \angle R$.

同 $\angle cb = \angle R$.

故ニ c ハ b, d ノ定ムル平面 P ニ垂直ナリ （定理 114）

モシ c 以外ニ M ヲ過リテ P ニ垂直ナル直線 c' アリトスレバ，

c 及ビ c' ハ共ニソノ定ムル平面ト P トノ交リニ垂直ナラザルベカラズ．コレ不合理ナリ．

故ニ M ヲ過リテ P ニ垂直ナル直線ハ只一ツニ限ル．

(ii) M ガ P 上ニアリトス．

P 上ニ M ヲ過ラザル一直線 a ヲ引ク．

〔以下 (i) ノ場合ニ於ケルガ如シ〕．

【系】 平面外ノ一點ヨリ，コレニ引ケル諸直線ノ內，垂線ハ最モ小ナリ．

264 回定義回 平面外ノ一點ヨリ，ソノ平面ニ引ケル垂線ノ長サヲソノ點トソノ平面トノ距離ト云フ．

練習問題

(1) 二ツノ三角定規ヲ用ヒテ一平面ノ垂線ヲ定ムル方法ヲ述ベヨ．

(2) 一ツノ平面外ノ一點ヨリコレニ引ケル斜線ノ內，垂線ト相等シキ角ヲナス二ツノ斜線ハ相等シク，垂線ト大ナル角ヲナス斜線ハ，小ナル角ヲナス斜線ヨリ大ナルコトヲ證明セ

ヲ。

(3) 平面 P 外ノ一點 M ヨリ, P 及ビソノ上ノ一直線 a ニ垂線 MB 及ビ ME ヲ引クトキハ, コレ等ノ垂線ノ足ヲ結ビツクル直線 BE ハ a ニ垂直ナリ. コレヲ證明セヨ.

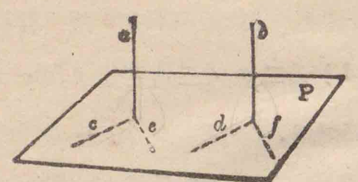
〔注意〕 コノ定理ヲ三垂線ノ定理ト云フ.

(4) 平面 P 外ノ一點 M ヨリ, P ニ垂線 MB ヲ引キ, ソノ足 B ヨリ P 上ノ一直線 a ニ垂線 BE ヲ引クトキハ, ソノ足 E ト M トヲ結ビツクル直線ハ a ニ垂直ナリ. コレヲ證明セヨ.

265 **定理118** **二ツノ平行直線ノ一ツガ一ツノ平面ニ垂直ナルトキハ, 他モ亦コレニ垂直ナリ.**

a, b ヲ二ツノ平行直線トシ, a ハ一ツノ平面 P ニ垂直ナリトス。

然ルトキハ b モ亦 P ニ垂直ナルベシ.



(證明) a ノ足ヲ過リテ, P 上ニ任意ノ二直線 c, e ヲ引ク

b ハ P ト交ルヲ以テ, ソノ交點ヲ過リテ c, e ニ平行ニソレゾレ d, f ヲ引ク. 然ルトキハ d, f ハ P 上ニアリ

而シテ $\angle ac = \angle bd$, $\angle ae = \angle bf$. (定理111)

然ルニ $\angle ac = \angle R$, $\angle ae = \angle R$. (假設)

故ニ $\angle bd = \angle R$, $\angle bf = \angle R$.

因ッテ $b \perp P$. (定理114)

【系】 同一ノ平面ニ垂直ナル二ツノ直線ハ平行ナリ.

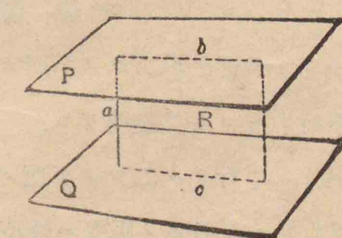
練習問題

平行四邊形ノ一ツノ對角線ヲ含ム任意ノ平面ト他ノ對角線ノ兩端トノ距離ハ相等シキコトヲ證明セヨ.

266 **定理119** **二ツノ平行ナル平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ニモ亦垂直ナリ.**

P, Q ハ平行ナル平面ニシテ, 直線 a ハ P ニ垂直ナリトス.

然ルトキハ a ハ亦 Q ニモ垂直ナルベシ.



(證明) a ヲ含ム一ツノ平面 R ヲ作リ, P, Q トソレゾ

レ b, c ニ於テ交ラシム。

然ルトキハ　$b \parallel c$.　（定理 110）

然ルニ　$a \perp b$.

故ニ　$a \perp c$.

同様ニ a ヲ含ム他ノ平面 S ヲ作リ，P 及ビ Q トソレゾレ d 及ビ e ニ於テ交ラシメテ a ハ e ニ垂直ナルコトヲ證明シ得.

故ニ　$a \perp Q$.　（定理 114）

【系1】 同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ平面ハ平行ナリ.

【系2】 平行ナル二ツノ平面ノ間ニアル共通垂線ノ部分ノ長サハ一定ナリ.

267 ◎定義◎ 平行ナル二ツノ平面ノ間ニアル共通垂線ノ部分ノ長サヲ，ソノ平行平面ノ距離ト云フ.

❋練習問題❋

(1) 平行ナル二ツノ平面ニソレゾレ垂直ナル二ツノ直線ハ平行ナルコトヲ證明セヨ。

(2) 平行ナル二ツノ平面ノ各ノ上ノ二點ヲ結ブ線分ノ内ニテ，ソノ二平面ノ距離ハ最小ナリ。コレヲ證明セヨ。

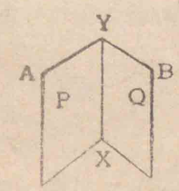
268 ◎定義◎ 同一ノ直線ニ於テ終ル二ツノ平面

ル圖形ヲ，二面角ト云ヒ，ソノ直線ヲ二面角ノ稜，コノ二ツノ平面ヲソノ面ト云フ。

二面角ノ一面ガソノ稜ヲ軸トシテ，他面ノ位置ニ至ルマデ廻轉スルトキノ廻轉ノ大サヲ以テ二面角ノ大サトス。

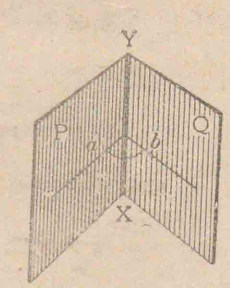
二面角ヲ表ハス記號ニ次ノ二ツアリ。

(i) 圖ニ於ケル二面角ヲ二面角 PQ ト記スルガ如クソノ各面ヲ表ハス二文字ヲ列ベテ記ス.



(ii) 圖ニ於ケル二面角ヲ AYXB ト記スルガ如ク，各面上ニ一點ヅツヲトリ，ソノ二點ヲ表ハス文字ノ間ニ稜上ノ二點ヲ表ハス文字ヲ記ス。

269 ◎定義◎ 二面角 (PQ) ノ稜 (XY) 上ノ一點ヲ過リ，コレニ垂直ニ，各ノ面上ニ引ケル二ツノ直線 (a, b) ノナス角ヲ，ソノ二面角ノ平面角ト云フ。



二面角 (PQ) ノ平面角 (ab) ハ，ソノ頂點ノ位置ニ拘ハラズ，ソノ大サ一定ナリ。而シテ一面 (P) ガ稜ヲ軸トシテ，他面 (Q) ノ位置ニ至ルマデ廻轉スルト

キハ，平面角ノ一邊 (a) ハソノ平面角 (ab) ダケ回轉ス。

故ニ二面角ノ大サハ，ソノ平面角ノ大サニ同ジ、由テ二面角ノ大サハ，ソノ平面角ノ大サニテ表ハス。例ヘバ平面角ガ直角ナルトキハ，ソノ二面角ハ直角ナリト云フガ如シ。

270　對稜二面角，同位二面角，錯二面角等ノ定義ハ平面幾何學ニ於ケル對頂角，同位角，錯角等ノ定義ニ準ジテ知ルベシ。

※練習問題※

(1)　二面角ノ稜ニ垂直ナル平面ニテ，ソノ二面ヲ截ルトキハ，ソノ交リノナス角ハ，二面角ノ平面角ナリ。コレヲ證明セヨ。

(2)　二面角ニ於テソノ平面角ノ二等分線ト稜トヲ含ム平面ハ，ソノ二面角ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。

(3)　次ノ諸定理ヲ證明セヨ。

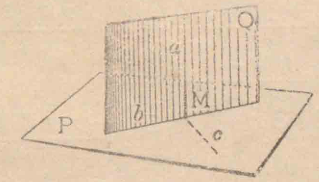
(a)　對稜二面角ハ相等シ。

(b)　平行ナル二ツノ平面ニ，一ツノ平面ガ交リテナス同位二面角ハ相等シ。又錯二面角モ相等シ。

(c)　一ツノ二面角ノ二面ガソレゾレ他ノ二面角ノ二面ニ平行ナルトキハ，二ツノ二面角ハ相等シキカ又ハ補角ヲナス。

271　回定義回、二ツノ平面ノナス二面角ガ直角ナルトキハ，ソノ二ツノ平面ハ互ニ垂直ナリ，又ハ直角ニ交ルト云フ。

272　定理120　一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ，ソノ平面ニ垂直ナリ。



a ヲ平面 P ノ垂線トシ，a ヲ含ム平面ヲ Q トス。

然ルトキハ Q ⊥ P ナルベシ。

(證明)　P，Q ノ交リヲ b トシ．a ノ足ヲ M トス。平面 P 上ニ，M ヲ過リテ b ニ垂線 c ヲ引ク。

然ルトキハ a ハ P ノ垂線ナルヲ以テ

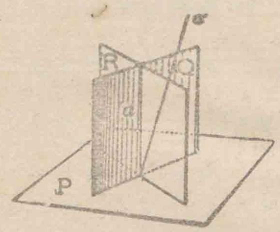
$$a \perp b, \qquad a \perp c.$$

故ニ $\angle ac$ ハ二面角 PQ ノ平面角ニシテ且直角ナリ。

故ニ　　　Q ⊥ P.

【系1】 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ，ソノ第一ノ平面上ノ一點ヨリ交リニ引ケル垂線ハ第二ノ平面ニ垂直ナリ。

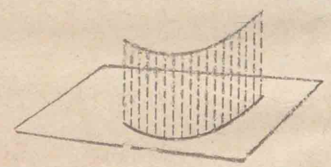
【系2】 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ，第一ノ平面上ノ一點ヨリ第二ノ平面ニ引ケル垂線ハ第一ノ平面ニ含マル。



【系3】一ツノ平面(P)ニ垂直ナル二ツノ平面(Q，R)ノ交リ(a)ハ，ソノ平面(P)ニ垂直ナリ。

【系4】一ツノ平面ニ垂直ナラザル直線ヲ含ミテ，ソノ平面ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル。

273 ◎定義◎ 一ツノ平面上ニ投ズル一點ノ正射影トハ，コノ點ヨリソノ平面ニ引ケル垂線ノ足ナリ。



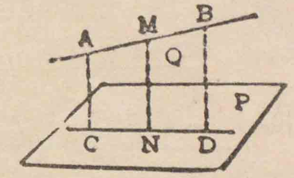
一ツノ平面上ニ投ズル一ツノ線ノ正射影トハ，ソノ線上ノ點ノソノ平面上ニ投ズル正射影ノ軌跡ナリ。

〔注意〕正射影ハ平行射影ノ特別ノ場合ナリ。

274 定理121 一ツノ平面ノ斜線ノ，ソノ平面上ニ投ズル正射影ハ，ソノ直線上ノ任意ノ二點ノ正射影ヲ結ブ直線ナリ。

C，D ヲ斜線 AB 上ノ二點 A，B ノ平面 P 上ニ投ズル

正射影ナリトス。



然ルトキハ直線 CD ハ P 上ニ投ズル AB ノ正射影ナルベシ

（證明） AC ⊥ P，BD ⊥ P ナルヲ以テ AC ∥ BD.

故ニ AC，BD ハ一平面ヲ定ム，コレヲ Q トス。

然ルトキハ Q ハ P ニ垂直ナリ。 （定理 120）

故ニ AB 上ノ任意ノ點 M ヨリ P ニ引ケル垂線 MN ハ Q ニ含マル。（定理 120 系 2） 故ニソノ足 N ハ P ト Q トノ交リ CD 上ニアリ。

即チ AB 上ノ任意ノ點ノ正射影ハ CD 上ニアリ。

次ニ CD 上ノ任意ノ一點ヲ N トシ，N ニ於テ P ニ垂線 NM ヲ引クトキハ，NM ハ Q ニ含マレ，AB ト交ル。コノ交點ヲ M トスレバ N ハ M ノ正射影ナリ。

即チ CD 上ノ任意ノ一點ハ AB 上ノ一點ノ正射影ナリ。

因ッテ CD ハ AB ノ正射影ナリ。

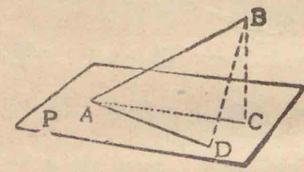
【系1】一ツノ平面ノ垂線ノ，ソノ平面上ニ投ズル正射影ハ一點ナリ。

【系2】一ツノ平面ニ平行ナル直線ノ，ソノ平面上ニ投ズ

ル正射影ハ，ソノ直線ニ平行ナル直線ナリ.

275 定理122 一ツノ平面ノ斜線ガ，コノ平面上ニアリテソノ足ヲ過ル諸直線トナス角ノ中，ソノ正射影トナス鋭角ガ最小ナリ.

AC ヲ平面 P 上ニ投ズル AB ノ正射影トシ，AD ヲ P 上ニ於テ A ヲ過ル任意ノ直線トス.



然ルトキハ $\angle BAC < \angle BAD$ ナルベシ.

(證明) B ノ正射影ヲ C トシ，AD ヲ AC ニ等シクトリ，BD ヲ結ブ.

然ルトキハ $\triangle BAC$，$\triangle BAD$ ニ於テ

$AB = AB$，$AC = AD$，$BC < BD$.

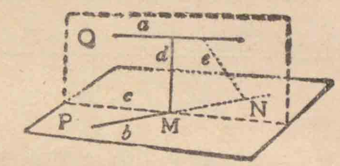
故ニ $\angle BAC < \angle BAD$.

276 ◎定義◎ 一ツノ直線ト，一平面上ニ投ズルソノ正射影トノナス鋭角ヲ，ソノ直線ト平面トノナス角ト云フ.

277 定理123 同一ノ平面上ニアラザル

二直線ニ共通ナル垂線ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル

(證明) a，b ヲ同一ノ平面上ニアラザル二直線トス.



b ヲ含ミテ，a ニ平行ナル平面 P ヲ作ル. (定理 107 系 4)

a ヲ過リテ P ニ垂直ナル平面 Q ヲ作ル. (定理 120 系 4)

P ト Q トノ交リヲ c トスレバ，c ハ b ト必ズ相交ル.

ソノ交點ヲ M トス. M ヲ過ギ，Q 上ニ於テ c ニ垂線 d ヲ引ク.

然ルトキハ $a \parallel c$ ナルヲ以テ $d \perp a$.

又 $d \perp P$. (定理 120 系 1)

故ニ $d \perp b$.

即チ d ハ a 及ビ b ニ共通ナル垂線ナリ.

次ニ共通ノ垂線 e アリトシ，e ト b トノ交リヲ N トス.

然ルトキハ $a \perp e$，$a \parallel c$ ナルヲ以テ e ハ c ト直角ヲナス.

而シテ $e \perp b$ 故ニ $e \perp P$.

因ツテ e ハ Q ニ含マレ，N ハ c 上ニアルベシ.

故ニ N ハ M ト相合ス. 從ツテ e ハ d ト相合ス.
即チ a, b ニ共通ナル垂線ハ只一ツニ限ル.

【系】 同一平面上ニアラザル二直線間ニ引ケル線分ノ内, ソノ共通垂線ノ長サハ最モ小ナリ.

※練習問題※

(1) 一ツノ線分ノ長サヲ a トシ, コノ直線ト一ツノ平面トノナス角ヲ α トスレバ, ソノ平面上ニ投ズルソノ線分ノ正射影ハ $a\cos\alpha$ ナルコトヲ證明セヨ.

(2) 一ツノ直線ハソレト交ル二ツノ平行平面ト相等シキ角ヲナスコトヲ證明セヨ.

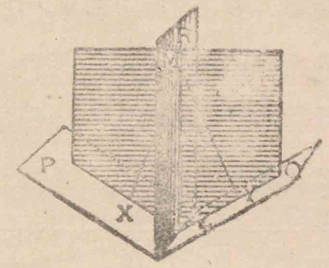
(3) 正方形 ABCD ノ中心 O ニ於テ, ソノ正方形ノ平面ニ垂直線 OP ヲ引キ, OP ノ長サヲ 2寸4分ナラシム. 今 AB ヲ 1寸4分トスルトキ平面 PAB ト平面 ABCD ノナス二面角ノ cosine ヲ求ム.

(4) 平行ナル二ツノ平面ノ一ツニ垂直ナル平面ハ, 他ニモ亦垂直ナルコトヲ證明セヨ.

(5) 相交ル二ツノ平面外ノ一點ヲ過リテ, 兩平面ニ垂直ナル一ツノ平面ヲ作リ得ルコトヲ證明セヨ.

(6) 二面角 PQ ノ二等分面 R 上ノ點ハ, ソノ二面角ノ

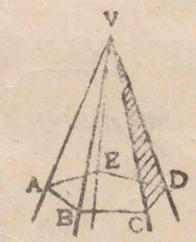
各面ヨリ等距離ニアリ, 又逆ニ二面角ノ各面ヨリ等距離ニアル點ハ, ソノ二面角ノ二等分面上ニアリ, コレヲ證明セヨ.



第四節

立體角

278 ◻定義◻ 一點ニ於テ出會フ三ツ以上ノ平面ヨリ成ル圖形ヲ立體角或ハ多面角ト云フ.

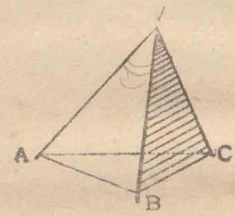


而シテソノ點ヲ立體角ノ頂點, 相隣レル二ツノ平面ノ交リヲソノ稜, 相隣レル二ツノ稜ノ間ニアル平面ノ部分ヲソノ面, 相隣レル二ツノ稜ノナス角ヲソノ面角ト云フ.

圖ニ於ケル立體角ヲ V−ABCDE ト記スルガ如ク, 頂點ヲ表ハス文字ノ次ニ小ナル横線ヲ引キ, ソノ次ニ各稜上ノ一點ヲ表ハス文字ヲ順次ニ列ベ記シテ以テ立體角ヲ表ハス.

同數ノ稜ヲ有スル二ツノ立體角ニ於テ，同ジ向キニ順次ニトリタル面角及ビ二面角ガ，ソレゾレ相等シキトキハ，二ツノ立體角ハ重ネ合スコトヲ得．カクノ如キ二ツノ立體角ハ相等シト云フ．

立體角ノ總テノ稜ト交ル一ツノ平面ニヨリテノ截口ガ凸多角形ナルトキハ，ソノ立體角ヲ凸立體角ト云フ．

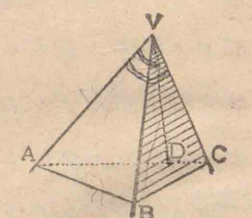


立體角ハソノ面ノ數ニヨリテ三面角，四面角，五面角等ニ區別ス．圖ニ於ケル V−ABC ハ三面角ナリ．

279 定理124 三面角ノ二ツノ面角ノ和ハ，他ノ一ツノ面角ヨリ大ナリ．

V−ABC ヲ三面角トス．

然ルトキハ $\angle AVB + \angle BVC > \angle AVC$ ナルベシ．



（證明） モシ $\angle AVC$ ガ他ノ二角ノ何レカニ等シキカ，又ハコレヨリ小ナルトキハ，證明ヲ要セズシテ明カナリ．

モシ $\angle AVC$ ガ他ノ二角ノ何レヨリモ大ナルトキハ，平面 AVC 上ニ直線 VD ヲ引キ，$\angle AVD = \angle AVB$ ナラシム．

然ルトキハ VD ハ $\angle AVC$ ノ兩邊ノ間ニアリ．

VA，VC 上ニソレゾレニ A，C ヲトリ，AC ヲ結ビ VD ト D ニ於テ交ラシム．VD = VB ナル樣ニ VB ノ上ニ B ヲトリ，AB，BC ヲ結ブ．

然ルトキハ $\triangle AVB \cong \triangle AVD$．

故ニ $AB = AD$．

而シテ $AB + BC > AD + DC$．

故ニ $BC > DC$．

故ニ $\triangle VBC$，$\triangle VDC$ ニ於テ

$VB = VD$，$VC = VC$，$BC > DC$．

故ニ $\angle BVC > \angle DVC$．

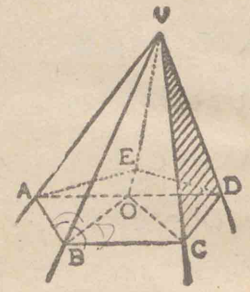
而シテ $\angle AVB = \angle AVD$．

故ニ $\angle AVB + \angle BVC > \angle AVC$．

【系】 多面角ノ一ツノ面角ハ他ノ面角ノ和ヨリ小ナリ．

280 定理125 凸立體角ノ總テノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ．

V−ABCDE ヲ凸立體角トス.



然ルトキハ

$\angle AVB + \angle BVC + \angle CVD + \cdots\cdots$

$< 4\angle R.$ ナルベシ.

(證明) 總テノ稜ト交ル一平面ニテ立體角ノ各面ヲ截リ, ソノ截口ヲ ABCDE トス.

ABCDE 內ニ任意ノ一點 O ヲトリ, コレト A, B, C, D, E トヲ結ブ.

然ルトキハ O ヲ共通ノ頂點トスル三角形ヲ得ベク, コノ三角形ノ數ハ V ヲ共通ノ頂點トスル三角形ノ數ニ等シ.

然ルニ $\angle VBA + \angle VBC > \angle ABO + \angle OBC$, (定理 124)

$\angle VAB + \angle VAE > \angle BAO + \angle OAE$, 等

故ニ V ヲ頂點トスル總テノ三角形ノ底角ノ和ハ, O ヲ頂點トスル總テノ三角形ノ底角ノ和ヨリ大ナリ.

然ルニコノ兩種ノ三角形ノ內角ノ總和ハ相等シ.

故ニ V ニ於ケル頂角ノ和ハ, O ニ於ケル頂角ノ和ヨリ小ナリ.

即チ $\angle AVB + \angle BVC + \angle CVD + \cdots\cdots < 4\angle R.$

★雜 問 題★

(1) 三面角ノ一ツノ面角ハ他ノ二ツノ面角ノ差ヨリ大ナルコトヲ證明セヨ.

(2) 三面角ノ二ツノ面角相等シキトキハ, コレニ對スル稜ニ於ケル二面角ハ相等シキコトヲ證明セヨ. 又コノ逆ハ眞ナルカ.

(3) D ヲ三面角 V−ABC 內ノ一點トスルトキハ

$$\angle AVD + \angle BVD + \angle CVD > \frac{1}{2}(\angle AVB + \angle BVC + \angle CVA).$$

ナルコトヲ證明セヨ.

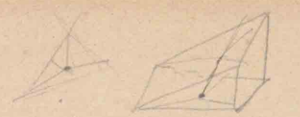
(4) 二點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

〔注意〕 平面幾何學 149 條ノ軌跡ノ定義ヲ次ノ如ク改ムレバ立體幾何學ニ於ケル軌跡ノ定義トナル.

或條件ヲ充タス點ハ, 皆或線又ハ或表面上ニアリ, 而シテコノ線又ハ表面上ノ點ハ, 皆ソノ條件ヲ充タストキハ, コノ線又ハ表面ヲソノ條件ヲ充タス點ノ軌跡ト云フ.

(5) 與ヘラレタル平面ヨリ, 與ヘラレタル距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

(6) 相交ル二ツノ平面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

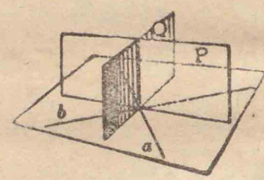


(7)　二ツヅツ相交ル三ツノ平面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

(8)　一ツノ平面外ノ一定點ヨリ與ヘラレタル距離ニアルソノ平面上ノ點ノ軌跡ヲ求ム。

(9)　一ツノ三角形ノ三ツノ頂點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

(10)　二ツノ相交ル直線 a, b ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。



(11)　三面角ノ三稜ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

(12)　一定點ヨリ一定直線ヲ含ム無數ノ平面ニ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム。

(13)　一點ヲ過リテ一ツノ平面ニ垂線ヲ引クコトヲ求ム。

〔注意〕　立體幾何學ノ作圖題ニ於テハ、平面幾何學155條ニ述ベタル三ツノ作圖ノ外，次ノ三ツノ作圖ハ始メヨリ可能ナリト假定ス。

(i)　同ジ直線上ニアラザル三點ヲ過ル平面ヲ作ルコト。

(ii)　任意ノ點ヲ中心トシ，任意ノ半徑ヲ有スル球ヲ作ルコト。

(iii)　定メラレタル平面上ニ於テ，平面幾何學ノ作圖ヲ行フコト。

(14)　一點ヲ過リテ一直線ニ垂直ナル平面ヲ作レ。

(15)　一ツノ與ヘラレタル直線ヲ含ミ，一ツノ與ヘラレタル平面ニ垂直ナル平面ヲ作レ。

(16)　平面 P ノ同ジ側ニ二點 A，B アリ。今 P 上ニ一點 C ヲ AC + CB ガ最小ナル樣ニ定メヨ。

(17)　二面角ヲ二等分スル平面ヲ作レ。

(18)　同一平面上ニアラザル二直線アリ。今ソノ何レノ上ニモアラザル一點ヲ過リテ，コノ二直線ニ交ル直線ヲ引クコトヲ求ム。

(19)　三角形 ABC ノ平面外ノ一點ヲ過リテ一直線ヲ引キ，A，B，C ヨリソノ直線ニ引ケル三ツノ垂線ノ足ガ同一點ナル樣ニセヨ。

(20)　二等邊三角形ノ底邊ヲ含ム任意ノ平面ハ，ソノ二邊ト等角ヲナスコトヲ證明セヨ。

(21)　三面角ノ三ツノ二面角ノ二等分面ハ同一直線ヲ過ルコトヲ證明セヨ。

(32)　一ツノ平面上ニ投ズル三角形ノ三ツノ頂點ノ正射影ヲ

結ビツクルトキニ生ズル三角形ヲ原三角形ノ正射影ト云フ。今三角形ノ平面ト一ツノ平面トノナス角ヲ α トスルトキハコノ平面上ニ投ズルソノ三角形ノ正射影ノ面積ハ，原三角形ノ面積ニ $\cos\alpha$ ヲ乘ジタルモノニ等シ。コレヲ證明セヨ。

(23)　OA，OB，OC ノ各ハ他ノ二ツト直角ヲナストキ，

(i)　OX，OY，OZ ガソレゾレ BC，CA，AB ニ垂直ナルトキハ △XYZ ハ △ABC ノ垂足三角形ナリ。

(ii)　OP ガ平面 ABC ニ垂線ナルトキハ，P ハ △ABC ノ垂心ナリ。コレヲ證明セヨ。

(24)　歪メル四邊形ノ四ツノ角ノ和ハ 360° ヨリ小ナルコトヲ證明セヨ。

(25)　ABCD ハ室ノ床ニシテ A'B'C'D' ハソノ天井ナリ。今室ノ長サ AB = 7.50 米突，幅 AD = 6.00 米突，高サ AA' = 4.50 米突ナルトキ次ノ二平面ノナス二面角ノ cosine ヲ求ム。

(i)　平面 ABC'D' 及ビ床，(ii)　平面 AB'C'D ト床。

第二章

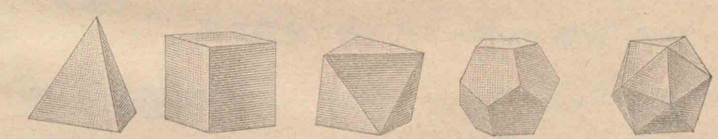
多面體

第一節

角壔及ビ角錐

281　回定義回　平面ニテ圍マレタル立體ヲ多面體ト云フ。多面體ノ境界ヲナセル平面ノ部分ヲ，多面體ノ面ト云ヒ，面ノ交リヲソノ稜，稜ノ交リヲソノ頂點ト云フ。又同ジ面上ニアラザル二ツノ頂點ヲ結ブ直線ヲ多面體ノ對角線ト云フ。

多面體ハ四ツ以上ノ面ヲ有ス。多面體ノ面ノ數ガ四，五，六等ナルニ從ツテ，コレヲ四面體，五面體，六面體 等ト云フ。



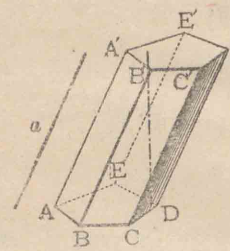
四面體　六面體　八面體　十二面體　二十面體

多面體ノ何レノ面ヲ延長スルモ，多面體ヲ截ラザルトキハ，コレヲ凸多面體ト云フ。

本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズ。

282　回定義回　一ツノ直線ニ平行ナル三ツ以上ノ平面ト，

コレニ交ル二ツノ平行ナル平面トニヨリテ圍マレタル多面體ヲ角壔ト云フ.



平行ナル二ツノ面ヲ角壔ノ底面ト云ヒ,他ノ面ヲ側面ト云ヒ,側面ノ交リヲ側稜ト云フ. 又兩底面ノ距離ヲ角壔ノ高サト云フ.

上圖ニ於ケル角壔ヲ ABCDE−A'B'C'D'E', 又ハ ABCDE−A' ト記スルガ如ク, (i) 兩底面ヲ表ハス文字ノ間ニ小ナル横線ヲ引クカ, 又ハ (ii) 一底面ヲ表ハス文字ノ次ニ小ナル横線ヲ引キ, ソノ次ニ他ノ底面ノ一頂點ノ文字ヲ記シ, 以テ角壔ヲ表ハス記號トス.

283 前條ノ定義ヨリ直ニ次ノ定理ヲ得.

定理 126 角壔ノ側面ハ平行四邊形ナリ。

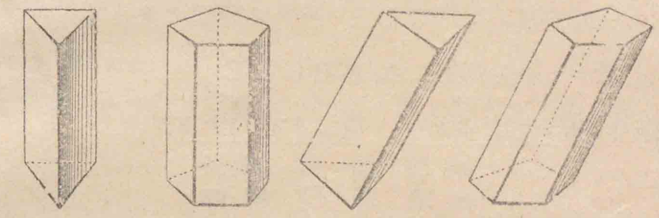
【系1】 角壔ノ側稜ハ平行ニシテ, ソノ長サ相等シ.

【系2】 角壔ノ兩底面ハ合同ナル多角形ナリ.

284 ◎定義◎ 角壔ノ底面ノ邊數ガ三,四,五等ナルニ從ツテ, コレヲ三角壔, 四角壔, 五角壔等ト云フ.

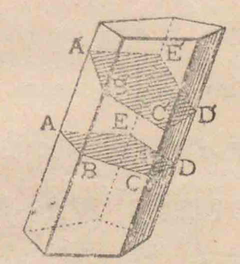
角壔ノ側稜ガ底面ニ垂直ナルトキハ, コレヲ直角壔ト云ヒ,

然ラザルトキハ, コレヲ斜角壔ト云フ. 又底面ガ正多角形ナル直角壔ヲ正角壔ト云フ.

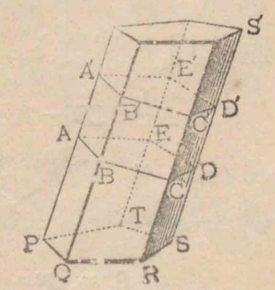


直三角壔　直五角壔　斜三角壔　斜五角壔

285 ◎定義◎ 一ツノ平面ガ多面體ヲ截リテ生ズル多角形ヲ, ソノ截面ト云フ. 角壔ノ側稜ニ垂直ナル截面ヲソノ直截面ト云フ.



286 **定理 127** 一ツノ角壔ノ總テノ側稜ニ交ル二ツノ平行ナル截面ハ合同ナリ。



角壔 PQRST−S' ノ總テノ側稜ニ交ル二ツノ平行截面ヲ ABCDE, A'B'C'D'E' トス.

然ルトキハ $ABCDE \cong A'B'C'D'E'$ ナルベシ.

(證明) 多面體 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ ハ一ツノ角壔ニシテ, $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ ハソノ底面ナリト考フルコトヲ得. 故ニ $ABCDE \cong A'B'C'D'E'$. (定理 126, 系 2)

【系】 直角壔ノ直截面ハ底面ト合同ナリ.

❋練 習 問 題❋

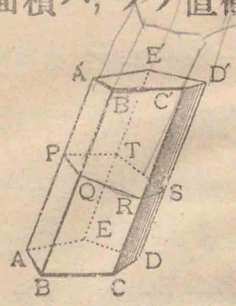
(1) 直角壔ノ側面ハ矩形ナルコトヲ證明セヨ.

(2) 直角壔ノ高サハソノ側稜ニ等シキコトヲ證明セヨ.

(3) 斜角壔ノ側稜ヲ a トシ, 側稜ト底面ノ垂線トノナス角ヲ α トスレバ高サハ $a\cos\alpha$ ニ等シキコトヲ證明セヨ.

［注意］ 側稜ト底面ノ垂線トノナス角ヲ斜角壔ノ傾キト云フ.

287 定理 128 角壔ノ側面積ハ, ソノ直截面ノ周ト側稜トノ積ニ等シ.



角壔 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ ノ側面積ヲ S, ソノ直截面 PQRST ノ周ヲ p, ソノ稜ヲ e トスレバ

$$S = pe. \quad ナルベシ.$$

(證明) $\square ABB'A' = AA' \cdot PQ$.

$\square BCC'B' = BB' \cdot QR = AA' \cdot QR$. 等.

故ニ $S = (PQ + QR + \ldots\ldots) AA'$.

故ニ $S = pe$.

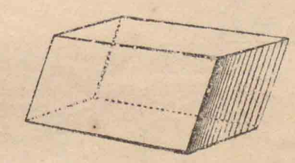
【系】 直角壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シ.

❋練 習 問 題❋

(1) 正三角壔ノ底面ノ一邊5寸ニシテ, ソノ側面積195平方寸ナルトキ, ソノ側稜ヲ求ム.

(2) 正六角壔ノ高サ h ニシテ, 底面ノ内接圓ノ半徑ガ r ナルトキハ, ソノ側面積ハ $4\sqrt{3}rh$ ナルコトヲ證明セヨ.

288 ◻定義◻ 底面ガ平行四邊形ナル角壔ヲ平行六面體ト云フ.



平行六面體

289 定理 129 平行六面體ノ三双ノ相對スル面ハソレゾレ平行ニシテ且合同ナル平行四邊形ナリ.

【系1】 平行六面體ハ, ソノイヅレノ面ニテモ底面ト見做シ得ベキ角壔ナリ.

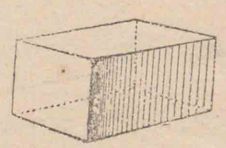
【系2】 平行六面體ノ稜ハ，一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ何レカニ等シク且コレニ平行ナリ.

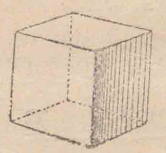
【系3】 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ皆ソノ中點ニ於テ交ル.

〔注意〕 コノ點ヲ平行六面體ノ中心ト云フ.

【系4】 平行六面體ノ一ツノ頂點ニ於ケル三ツノ平面角ガ各直角ナルトキハ，ソノ各ノ面ハ皆矩形ナリ.

290 ◻定義◻ 平行六面體ノ各ノ面ガ矩形ナルトキハ，コレヲ直六面體ト云ヒ，各ノ面ガ正方形ナル直六面體ヲ立方ト云フ.


直六面體


立方

〔注意〕 直六面體ニ於テ，特ニソノ三稜ト云フトキハ，ソノ一頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ヲ指ス.

❋練習問題❋

(1) 平行六面體ノ平面角ノ中，四ツヅツハ必ズ相等シキコトヲ證明セヨ.

(2) 平行六面體ノ中心ヲ過リテ，兩端ガソノ面ニ終ハレル線分ハ，ソノ中心ニ於テ二等分セラルヽコトヲ證明セヨ.

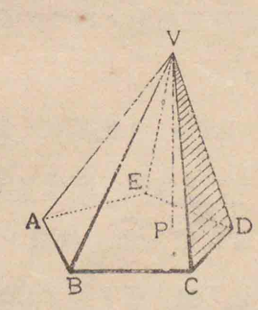
(3) 直六面體ノ對角線ハ相等シ. 而シテ一ツノ對角線上ノ正方形ハ，ソノ三ツノ稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ. コレヲ證明セヨ.

(4) 直六面體ノ三稜ノ長ガ 8 寸, 10 寸, 12 寸ナルトキ，ソノ對角線ノ長サヲ求ム.

(5) 立方ノ一稜ガ 4 寸ナルトキ，ソノ對角線ノ長サヲ求ム.

(6) 直六面體ノ三ツノ稜ヲ表ハス數ガ a, b, c ナルトキ，ソノ表面積ヲ求ム.

291 ◻定義◻ 一ツノ立體角ノ各面ト一ツノ平面トニヨリテ圍マレタル多面體ヲ角錐ト云フ.



立體角ノ頂點ヲ角錐ノ頂點ト云ヒ，頂點ヲ含ム面ヲ角錐ノ側面，殘リノ一面ヲソノ底面ト云フ. 而シテ側面ノ交リヲ角錐ノ側稜ト云ヒ，頂點ヨリ底面ニ引ケル垂線ヲ角錐ノ高サト云フ.

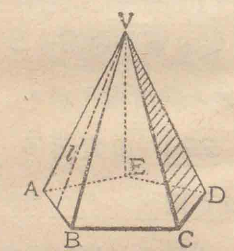
角錐ノ側面ハ皆三角形ニシテ，底面ハ側面ノ數ト同數ノ邊ヲ有スル多角形ナリ

上圖ニ於ケル角錐ヲ V－ABCDE ト記スルガ如ク，頂點ヲ表ハス文字ノ次ニ小ナル横線ヲ引キ，ソノ次ニ底面ヲ表ハス文字ヲ記シ，以テ角錐ヲ表ハス記號トス。

292 ◻定義◻ 角錐ノ底面ノ邊數ガ三，四，五等ナルニ從ッテ，コレヲ三角錐，四角錐，五角錐等ト云フ。

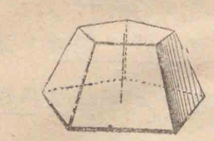
四面體ハ即チ三角錐ナリ。

角錐ノ底面ハ正多角形ニシテ，ソノ頂點ハ底面ノ中心ニ於テコレニ引ケル垂線上ニアルトキハ，コノ角錐ヲ正角錐又ハ直角錐ト云フ。



正角錐ノ側稜ハ皆相等シク，側面ハ皆合同ナル二等邊三角形ナリ。コノ二等邊三角形ノ高サヲ正角錐ノ斜高ト云フ。

293 ◻定義◻ 角錐ノ底面トコレニ平行ナル截面トノ間ニアル角錐ノ部分ヲ角錐臺ト云フ。截面ト原角錐ノ底面トヲ角錐臺ノ底面，ソノ他ノ面ヲソノ側面ト云ヒ，兩底面ノ距離ヲソノ高サト云フ。

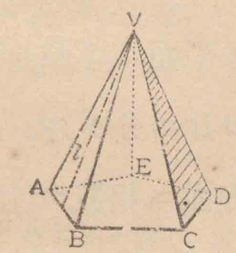


正角錐臺ノ側面ハ皆合同ナル梯形ナリ。コノ梯形ノ高サヲ

正角錐臺ノ斜高ト云フ。

294 $\boxed{\text{定理 130}}$ 正角錐ノ側面積ハ，ソノ底面ノ周ト斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シ。

正角錐 V－ABCDE ノ側面積ヲ S，底面ノ周ヲ p，斜高ヲ l トス。



然ルトキハ $S=\dfrac{pl}{2}$ ナルベシ。

(證明) $S=\triangle VAB+\triangle VBC+\cdots\cdots$

故ニ $S=(AB+BC+\cdots\cdots)\times\dfrac{l}{2}=\dfrac{pl}{2}.$

295 $\boxed{\text{定理 131}}$ 正角錐臺ノ側面積ハ，ソノ兩底面ノ周ノ和ト斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シ。〔各側面ハ合同ナル梯形ナルコトニ注意スベシ〕

練習問題

(1) 正六角錐ノ斜高1寸，ソノ底面ノ一邊8分ナルトキ，側面積及ビ全表面積ヲ求ム。

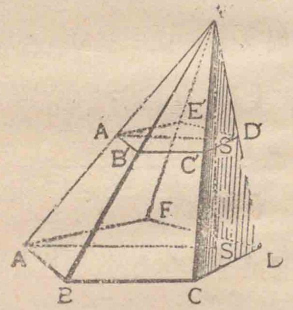
(2) 正四角錐ノ高サ4寸，底面ノ一邊6寸ナルトキ，側面積ヲ求ム。

(3) (2)ニ於ケル正四角錐ノ底面ニ平行ナル截面ガ高サヲ

二等分スルトキ，ソノ正角錐臺ノ側面積ヲ求ム。

(4) 正角錐臺ノ側面積ハ，ソノ兩底面ヨリ等距離ニアル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シキコトヲ證明セヨ。

296 定理132 角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ (*a*) 高サ及ビ側稜ハ同ジ比ニ分タル。(*b*) 截面ハ底面ニ相似ナリ。



角錐 V−ABCDE ノ高サヲ VS トシ，底面ニ平行ナル截面ヲ A′B′C′D′E′ トシ，コノ截面トVSトノ交リヲ S′ トス。

然ルトキハ

(*a*) $VS' : S'S = VA' : A'A = VB' : B'B = \cdots\cdots$

(*b*) $A'B'C'D'E' \sim ABCDE$ ナルベシ。

(證明) (*a*) AS，A′S′ ヲ結ブ．然ルトキハ AS，A′S′ ハ平行ナル二平面ト平面 VAS トノ交リナルガ故ニ平行ナリ．

故ニ $VS' : S'S = VA' : A'A,$

同樣ニ $VS' : S'S = VB' : B'B.$ 等.

故ニ $VS' : S'S = VA' : A'A = VB' : B'B = \cdots\cdots$

(*b*) ABCDE 及ビ A′B′C′D′E′ ニ於テ，∠A，∠B 等ノ二邊ハソレゾレ ∠A′，∠B′ 等ノ二邊ニ平行ニシテ，且頂點ヲ結ブ直線ノ同側ニアリ．故ニコレ等ノ角ハソレゾレ相等シ．

而シテ $\triangle VAB \sim \triangle VA'B'$，$\triangle VBC \sim \triangle VB'C'$ 等ナルガ

故ニ $AB : A'B' = VB : VB'$，$VB : VB' = BC : B'C'$. 等

故ニ $AB : A'B' = BC : B'C'$. 等.

因ッテ $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

【系1】 角錐ノ底面トコレニ平行ナル截面トノ比ハ，頂點ヨリコノ二面ニ至ル距離ノ二乘比ニ等シ．

【系2】 底面ト高サトガ相等シキ二ツノ角錐ニ於テ，頂點ヨリ等距離ニアリテ底面ニ平行ナル兩截面ハ相等シ．

練 習 問 題

(1) 一ツノ角錐ノ二ツノ平行截面ノ比ハ，頂點ヨリコノ二面ニ至ル距離ノ二乘比ニ等シキコトヲ證明セヨ．

(2) 二ツノ等高ナル角錐ニ於テ，頂點ヨリ等距離ニアル二ツノ截面ノ比ハ，ソノ底面ノ比ニ等シキコトヲ證明セヨ．

(3) 角錐ノ高サガ *h* ナルトキ，頂點ヨリ何程ノ距離ニアル截面(底面ニ平行ナル)ガ底面ノ二分ノ一ナルカ，又三分ノ一

ナルカ, 又九分ノ一ナルカ.

(4) 正三角錐臺ノ兩底面ノ一邊ハソレゾレ 10 糎, 及ビ 12 糎ニシテソノ高サハ 8 糎ナリ. 全角錐ノ高サヲ求ム.

第二節

角壔及ビ角錐ノ體積

297 回定義回 立體ノ內ニアル空間ノ大サヲソノ體積ト云フ. 二ツノ立體ノ體積ガ相等シキトキハ, ソノ二ツノ立體ハ相等シ, 又ハ等積ナリト云フ.

二ツノ立體ガ全ク相重ネ合スコトヲ得ルトキハ, 二ツノ立體ハ合同ナリト云フ.

二ツノ合同ナル立體ハ相等シ.

然レドモ二ツノ立體ガ相等シキタメニハ必ズシモ合同ナルコトヲ要セズ. 例ヘバ三角壔ノ體積ハ四角壔ノ體積ニ相等シキコトアルガ如シ.

298 定理 133 高サ相等シク底面合同ナル二ツノ直角壔ハ合同ナリ.

【系】 三ツノ稜ガソレゾレ相等シキ二ツノ直六面體ハ合同ナリ.

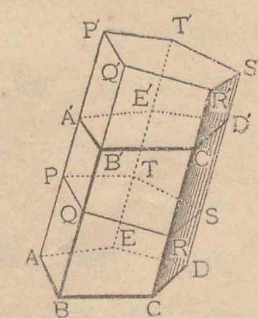
299 定理 134 斜角壔ハソノ直截面ヲ底面トシ, ソノ側稜ヲ高サトスル直角壔ニ等シ.

ABCDE−A′B′C′D′E′ ヲ斜角壔トシ, ソノ直截面 PQRST ヲ底面トシ, 側稜ガ AA′ ニ等シキ直角壔ヲ PQRST−P′Q′R′S′T′ トス.

然ルトキハ 斜角壔 ABCDE−A′B′C′D′E′

=直角壔 PQRST−P′Q′R′S′T′ ナルベシ

(證明) 斜角壔 ABCDE−A′B′C′D′E′ ノ側稜ハ直角壔 PQRST−P′Q′R′S′T′ ノ側稜ニ等シ.



故ニ AP = A′P′, BQ = B′Q′ 等.

而シテ ABCDE ≅ A′B′C′D′E′,

PQRST ≅ P′Q′R′S′T′.

且二ツノ多面體

ABCDE−PQRST,

A′B′C′D′E′−P′Q′R′S′T′

ノ相對應スル角ハ悉ク相等シ. 故ニコノ二ツノ多面體ハ全ク

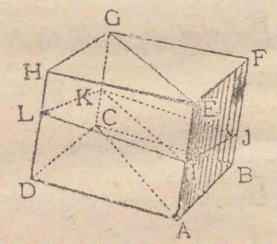
相重ネ合スコトヲ得。

故ニコノ二ツノ多面體ハ相等シ。由ツテコノ双方ニ多面體 PQRST−A'B'C'D'E' ヲ加ヘタルモノハ相等シ。

故ニ　　斜角壔 ABCDE−A'B'C'D'E'

　　　　= 直角壔 PQRST−P'Q'R'S'T'.

300　定理135　平行六面體ノ一双ノ相對スル稜ヲ含ム平面ハ，コレヲ相等シキ二ツノ三角壔ニ分ツ。



ABCD−EFGH ヲ平行六面體トシ，コレヲ相對スル稜 AE，CG ヲ含ム平面ニテ二ツノ三角壔

ABC−EFG，ACD−EGH

ニ分チタリトス。然ルトキハ

　　三角壔 ABC−EFG = 三角壔 ACD−EGH

ナルベシ。

(證明)　IJKL ヲ平行六面體ノ一ツノ直截面トス。平行六面體ノ相對スル面ハ平行ナルガ故ニ，コレト一ツノ平面トノ交リハ平行ナリ。

故ニ　　IJ ∥ LK，IL ∥ JK.

故ニ　　IJKL ハ平行四邊形ナリ。

而シテコノ直截面ト平面 ACGE トノ交リ IK ハ ▱IJKL ノ對角線ナリ。

故ニ　　△IJK ≅ △IKL.

然ルニ　角壔 ABC−EFG ハ △IJK ヲ底面トシ，AE ヲ高サトスル直角壔ニ等シク，角壔 ACD−EGH ハ △IKL ヲ底面トシ，AE ヲ高サトスル直角壔ニ等シ

而シテ　コノ二ツノ直角壔ハ合同ナリ。　　(定理 133)

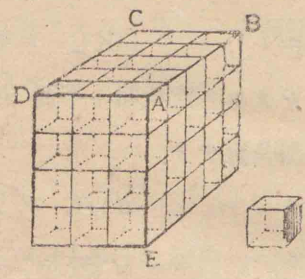
故ニ　　三角壔 ABC−EFG = 三角壔 ACD−EGH.

301　體積ヲ測ルニハ，長サノ單位ヲ一稜トスル立方ノ體積ヲ以テソノ單位トス。或立體ノ體積ガ，體積ノ單位ノ n 倍ナルトキハ"ソノ體積ヲ表ハス數ハ n ナリ"，或ハ"ソノ體積ノ數値ハ n ナリ"ト云フ。又コレヲ略シテ"ソノ體積ハ n ナリ"ト云フ。〔本書ニ於テハカク略述スルコト多シ。例ヘバ次ノ定理ニ於ケルガ如シ。〕

302　定理136　直六面體ノ體積ハ，ソノ三ツノ稜ノ積ニ等シ。

ABCD−E ヲ直六面體トシ，ソノ體積ヲ V，ソノ三稜

AB，AD，AE ヲソレゾレ a, b, c トス。



然ルトキハ $V=abc$ ナルベシ。

（證明）(1) a, b, c ガ整數ナリトス。AB，AD，AE ヲソレゾレ a, b, c ニ等分シ，各分點ヲ過リテソレゾレ稜ニ垂直ナル平面ヲ作ル。

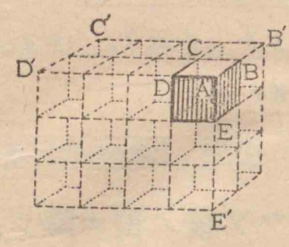
然ルトキハ直六面體 ABCD−E ハ abc 箇ノ相等シキ立方ニ分タル。而シテコノ各立方ノ一邊ハ長サノ單位ニ等シキヲ以テ，ソノ體積ハ體積ノ單位ニ等シ。

故ニ　立方 ABCD−E ハ abc 箇ノ體積ノ單位ヲ含ム。

故ニ　　　$V = abc$.

(II) a, b, c ノ中ニ分數アリトシ，總テヲ分數ノ形ニ表ハシタルトキ

$a=\dfrac{l}{p},\ b=\dfrac{m}{q},\ c=\dfrac{n}{r}$　トス。



AB ヲ延長シ，AB ノ p 倍ニ等シク AB′ ヲ，AD ヲ延長シ，AD ノ q 倍ニ等シク AD′ ヲ，AE ヲ延長シ，AE ノ r 倍ニ等シク AE′ ヲトル

而シテ AB′, AD′, AE′ ヲ三稜トスル直六面體 AB′C′D′−E′ ヲ作ル。

然ルトキハ，AB′, AD′, AE′ ヲ表ハス數ハソレゾレ整數 l, m, n ナルヲ以テ，直六面體 AB′C′D′−E′ ヲ表ハス數ハ (1) ニヨリ lmn ニ等シ。

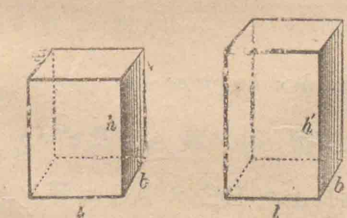
然ルニ直六面體 AB′C′D′−E′ ハ直六面體 ABCD−E ノ pqr 倍ニ等シ。

故ニ　　　$V = \dfrac{lmn}{pqr} = abc$.

【系1】 直六面體ノ體積ハソノ底面ト高サトノ積ニ等シ。

【系2】 立方ノ體積ハソノ一稜ノ三乘ニ等シ。

【系3】 底面相等シキ二ツノ直六面體ノ比ハ，ソノ高サノ比ニ等シ。



【系4】 高サ相等シキ二ツノ直六面體ノ比ハ，ソノ底面ノ比ニ等シ。

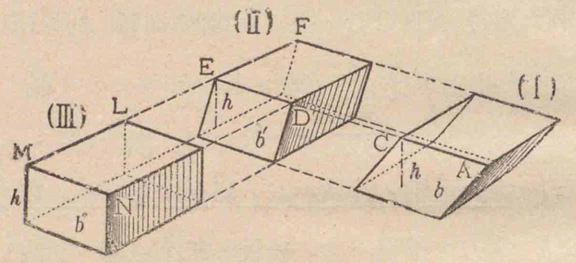
＊練習問題＊

(1) 一がろんガ 231 立方吋ナルトキハ，深サ 2 呎，幅 1.5

呎，長サ３呎ナル直六面體形ノ箱ノ容積ハ幾がろんナルカ。

(2) 立方ノ表面積216平方分ナルトキ，ソノ體積ヲ求ム。

303 定理137 平行六面體ノ體積ハ，ソノ底面ト高サトノ積ニ等シ。



(I) ニテ表ハサレタル平行六面體ノ體積ヲ V，底面ヲ b，高サヲ h トス。

然ルトキハ $V = b \times h$ ナルベシ。

(證明) 平行六面體(I)ノ稜 AC 及ビコレニ平行ナル面ヲ延長シ，AC ノ延長上ニ DE ヲ AC ニ等シクトル。

D 及ビ E ヲ過リ，AE ニ垂直ナル二ツノ平面ヲ作リテ，平行六面體(II)ヲ作ル。然ルトキハ (I)＝(II) (定理 134)

又平行六面體(II)ノ稜 FE 及ビソレニ平行ナル面ヲ延長シ，FE ノ延長上ニ FE ニ等シク LM ヲトル。

L 及ビ M ヲ過リテ FM ニ垂直ナル二ツノ平面ヲ作リテ，平行六面體(III)ヲ作ル。

然ルトキハ (II) = (III). (定理 134)

故ニ (I) = (III).

然ルニ (III) ノ稜 LM 及ビ MN ハソレゾレニ出會フ面ニ垂直ナリ。 (作圖)

故ニ (III) ハ直六面體ナリ．而シテ

(I) ノ底面 b = (II) ノ底面 b' = (III) ノ底面 b''.

(等底等高ナル平行四邊形)

而シテ (I) 及ビ (III) ハ同ジ高サ h ヲ有ス。

然ルニ (III) = $b'' \times h$.

故ニ (I) = $b'' \times h = b \times h$.

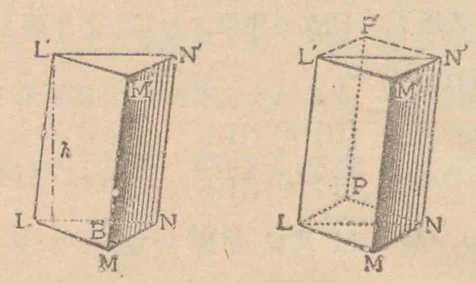
即チ $V = b \times h$.

304 定理138 三角壔ノ體積ハソノ底面ト高サトノ積ニ等シ。

三角壔 LMN−L'M'N' ノ體積，底面及ビ高サヲソレゾレ V，B，h トス。

然ルトキハ $V = B \times h$ ナルベシ。

(證明) 平行四邊形 LMNP 及ビ L'M'N'P' ヲ完成シ，

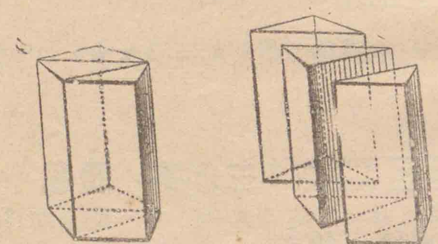


PP′ ヲ結ビテ平行六面體 LMNP−L′M′N′P′ ヲ作ル。

然ルトキハ　三角壔 LMN−L′M′N′ ハコノ平行六面體ノ二分ノ一ナリ。 (定理 135)

故ニ　$V = \frac{1}{2} LMNP \times h = B \times h.$

【系1】 任意ノ角壔ノ體積ハ，ソノ底面ト高サトノ積ニ等シ。



(三角壔ニ分チテ證明スルコトヲ得。)

【系2】 底面及ビ高サガ相等シキ二ツノ角壔ハ相等シ。

【系3】 底面相等シキ二ツノ角壔ノ比ハ，ソノ高サノ比ニ等シク，高サノ相等シキ二ツノ角壔ノ比ハソノ底面ノ比ニ等シ。

※練習問題※

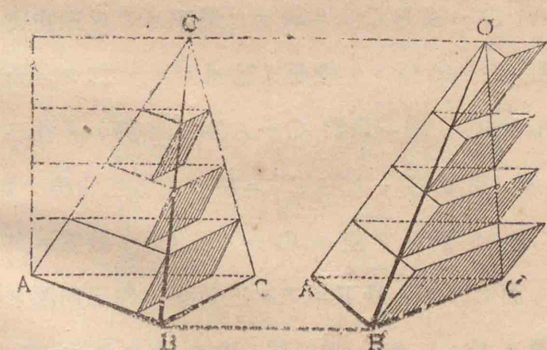
(1) 角壔ノ體積ハ，ソノ直截面ト側稜トノ積ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(2) 底面ガ菱形ナル平行六面體ノ高サ a ニシテ又ソノ底面ノ一邊及ビ一對角線モ a ニ等シト云フ。ソノ體積ヲ求ム。

(3) 一ツノ斜角壔ノ底面ハ 20，側稜 10，ソノ傾キハ 45° ナルトキ，ソノ體積ヲ求ム。

(4) 一ツノ角壔ノ底面ハ 10，ソノ側稜ノ底面上ニ於ケル正射影ハ 2，ソノ傾キハ 30° ナリ。角壔ノ體積ヲ求ム。

305 定理139 底面ト高サトガ相等シキ二ツノ三角錐ハ相等シ。



O−ABC 及ビ O′−A′B′C′ ヲ相等シキ底面 ABC，

$A'B'C'$ ヲ有シ，且相等シキ高サヲ有スル二ツノ三角錐トシ，ソノ體積ヲソレゾレ V 及ビ V' トス。

然ルトキハ $V = V'$ ナルベシ。

（證明） 二ツノ三角錐ノ各ノ高サヲ同ジ數ニ等分シ，ソノ各分點ヲ過リテ底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキハ，兩角錐ニ於テ對應スル截面ハソレゾレ相等シ。 （定理132，系2）

今角錐 $O-ABC$ ニ於テハ，ソノ各截面ヲ上ノ底面トシ，二ツノ隣レル截面ノ距離ヲ高サトシ，OA ニ平行ナル側稜ヲ有スル三角壔ヲ作ル。 又角錐 $O'-A'B'C'$ ニ於テハ，ソノ各截面及ビ角錐ノ底面ヲ下ノ底面トシ，二ツノ隣レル截面ノ距離ヲ高サトシ，$O'A'$ ニ平行ナル側稜ヲ有スル三角壔ヲ作ル。

然ルトキハ $O'-A'B'C'$ ニ於ケル最下ニアル三角壔ヲ除ケバ，兩角錐ニ於テ對應スル截面ヲ底面トスル二ツノ三角壔ハソレゾレ相等シ。 故ニ角錐 $O-ABC$ ニ於ケル各三角壔ノ和ヲ P トシ，角錐 $O'-A'B'C'$ ニ於ケル各三角壔ノ和ヲ P' トスレバ，P' ト P トノ差ハ $O'-A'B'C'$ ノ最下ニアル三角壔ニ等シ。而シテコノ最下ニアル三角壔ハ各三角錐ノ高サヲ等分スル數ヲ增ストキハ如何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得。卽チ $P'-P$ ハ如何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得。

然ルニ $P' > V',\quad P < V.$

故ニ モシ V ト V' トガ相等シカラズシテ $V' > V$ トスレバ $V'-V$ ハ一定ノ正量ニシテ

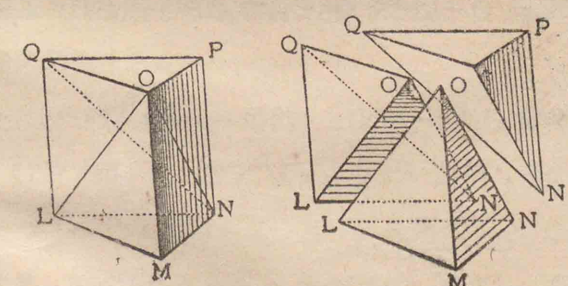
$$P'-P > V'-V$$

ナラザルベカラズ。然レドモコレ不合理ナリ。何トナレバ如何程ニテモ小ナラシメ得ル量 $P'-P$ ガ常ニ一定ノ正量 $V'-V$ ヨリ大ナルコトハ不可能ノコトナレバナリ。

故ニ $V' > V$ ナル能ハズ。同様ニ $V > V'$ ナル能ハズ。

因ッテ $V' = V$.

306 定理140 三角錐ノ體積ハ，ソノ底面ト高サトノ積ノ三分一ノニ等シ。



三角錐 $O-LMN$ ノ體積ヲ V，ソノ高サヲ h，ソノ底面 LMN ヲ B トス。

然ルトキハ　$V=\frac{1}{3}B\times h$　ナルベシ。

（證明）LMN ヲ底面トシ，OM ニ等シク且コレニ平行ナル側稜ヲ有スル三角壔 OPQ－MNL ヲ作ル。

然ルトキハ　コノ三角壔ハ三角錐 O－LMN 及ビ四角錐 O－LNPQ ヨリ成ル。

今 OQ，ON ヲ含ム平面ニテ四角錐 O－LNPQ ヲ截ルトキハ，二ツノ三角錐 O－LNQ 及ビ O－NQP ヲ得。

然ルニ　角錐 O－LNQ＝角錐 O－NQP　（定理 139）

角錐 O－NQP ハ角錐 N－QOP ト考フルコヲ得。

角錐 N－QOP＝角錐 O－LMN.　（定理 139）

故ニ　三ツノ三角錐ハ相等シ。

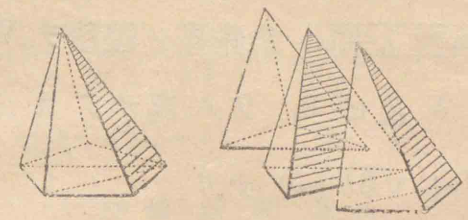
從ツテ三角錐 O－LMN ハ三角壔 OPQ－MNL ノ三分ノ一ナリ。

然ルニ三角壔 OPQ－MNL ノ體積ハ $B\times h$ ニ等シ。（定理 138）

故ニ　三角錐ノ體積ハ　$\frac{1}{3}B\times h$　ニ等シ。

卽チ　$$V=\frac{1}{3}B\times h.$$

【系1】任意ノ角錐ノ體積ハ，ソノ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



〔三角錐ニ分チテ證明スルコトヲ得。〕

【系2】底面及ビ高サガ相等シキ二ツノ角錐ハ相等シ。

【系3】底面相等シキ二ツノ角錐ノ比ハ，ソノ高サノ比ニ等シク，高サ相等シキ二ツノ角錐ノ比ハソノ底面ノ比ニ等シ。

練習問題

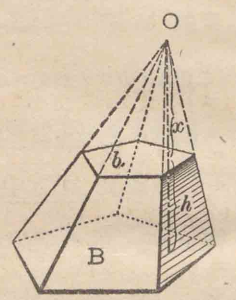
(1)　一邊6分ナル正三角形ヲ底面トスル角錐アリ，ソノ一ツノ側稜ハ15分ニシテ，コノ側稜ト底面トナス角ハ30°ナリ。角錐ノ體積ヲ求ム。

(2)　正六角錐ノ底面ノ一邊ハ6寸，高サハ8寸ナルトキ，ソノ體積ヲ求ム。

(3)　えじぷとノ大ぴらみつど(Pyramid of Ghizeh)ハ正四角錐ニシテ，ソノ底面ノ一邊ハ233米突，高サハ146.5米突ナリ。ソノ體積ヲ求ム，又ソノ一立方米突ノ平均ノ重サヲ3噸ト假定スルトキハ，ソノ重量幾何ナルカ。

307 定理141 角錐臺ノ體積ヲ V ソノ兩底面積ヲ b 及ビ B, ソノ高サヲ h トスレバ

$$V=\frac{h}{3}(B+\sqrt{Bb}+b)$$ ナリ。



(證明) 角錐臺ノ各側面ヲ延長シテ, 角錐ヲ作リ, ソノ頂點ヲ O トス。O ト角錐臺ノ上ノ底面トノ距離ヲ x トス。然ルトキハ V ハ二ツノ角錐ノ差ナルヲ以テ

$$V=\frac{1}{3}B(h+x)-\frac{1}{3}bx$$
$$=\frac{1}{3}\left[Bh+Bx-bx\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[Bh+x(B-b)\right] \qquad (1)$$

然ルニ $B:b=(h+x)^2:x^2$ (定理132 系1)

故ニ $\sqrt{B}:\sqrt{b}=h+x:x$

故ニ $\sqrt{B}-\sqrt{b}:\sqrt{b}=h:x$

故ニ $x=\frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$

コノ x ノ値ヲ (1) ニ置ケバ

$$V=\frac{1}{3}\left[Bh+\frac{h\sqrt{b}(B-b)}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right]=\frac{1}{3}h\left[B+\sqrt{b}(\sqrt{B}+\sqrt{b})\right]$$
$$=\frac{1}{3}h\left[B+\sqrt{Bb}+b\right].$$

練習問題

(1) 正四角錐臺ノ上底, 下底ノ一邊ハソレゾレ 6 寸, 7 寸ニシテ, 高サハ 8 寸ナルトキ, ソノ體積ヲ求ム。

(2) 正六角錐臺ノ上底, 下底ノ一邊ハソレゾレ 6 糎, 10 糎ニシテ, 側稜ハ 5 糎ナルトキソノ體積ヲ求ム。

(3) 一稜 1 寸ナル立方ト同ジ底面, 同ジ高サヲ有スル正角錐ノ體積及ビ全表面積ヲ求ム。且コノ正角錐ヲ底面ヨリ 5 分ノ距離ニアル平面ニテ截リタルトキニ生ズル正角錐臺ノ體積及ビ全表面積ヲ求ム。

(4) 三角錐ノ體積ハ 50 立方寸ニシテ, ソノ底面ハ 12 平方寸ナリ。今コノ角錐ヲ底面ヨリ 6 寸ノ距離ニアル平面ニテ截ルトキニ生ズル角錐臺ノ體積ヲ求ム。

第三節

正多面體

308 〔定義〕 多面體ノ面ガ皆合同ナル多角形ニシテ，ソノ立體角モ亦皆相等シキトキハ，コノ多面體ヲ正多面體ト云フ．例ヘバ立方ノ如シ．

309 〔定理 142〕 正多面體ハ五種ヨリ多カラズ。

サテ正多面體ノ各面ハ正多角形ナリ。(定義) 而シテソノ立體角ハ三ツ以上ノ面ヲ有シ，一立體角ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。 (定理 125)

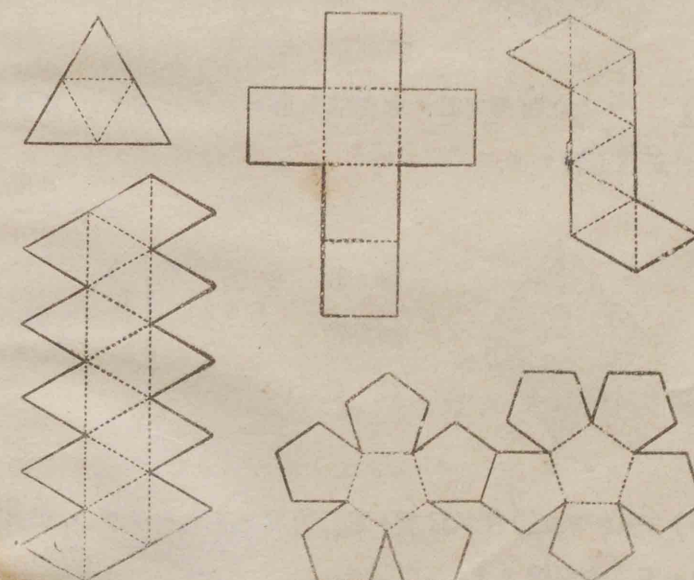
故ニ正多面體ノ面ハ，ソノ一角ガ 120° ヨリ小ナル正多角形ナラザルベカラズ。從ツテソノ面ハ正三角形，正方形，正五角形ニ限ル。何トナレバ正六角形ノ一角ハ 120° ニ等シク，正七角形及尚多クノ邊數ヲ有スル正多角形ノ一角ハ 120° ヨリ大ナレバナリ。

然ルニ正三角形ノ一角ハ 60° ナルヲ以テ，正三角形三ツ，四ツ又ハ五ツニテ一ツノ立體角ヲ作リ得ベク，六ツ以上ニテハ作ルコトヲ得ズ。正方形ノ一角ハ 90° ナルヲ以テ，正方形三

ツニテ一ツノ立體角ヲ作リ得ベク，四ツ以上ニテハ作ルコトヲ得ズ。正五角形ノ一角ハ 108° ナルヲ以テ，正五角形三ツニテ一ツノ立體角ヲ作リ得ベク，四ツ以上ニテハ作ルコトヲ得ズ。故ニ正多面體ハソノ立體角ガ

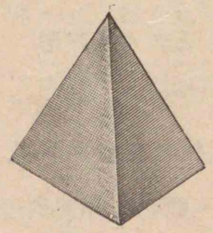
(1) 三ツノ正三角形，　(2) 四ツノ正三角形，
(3) 五ツノ正三角形，　(4) 三ツノ正方形，
(5) 三ツノ正五角形，

ヨリ成ルモノニ限ル。即正多面體ハ五種ヨリ多カラズ。

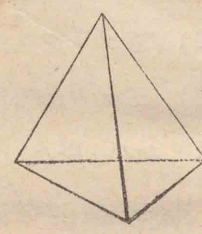


310 前條ニ記セル五種ノ正多面體ノ模形ヲ作ルニハ，厚紙ヲ前ノ圖ノ如ク切リ，點邊ニ沿ウテ折リ曲グベシ.

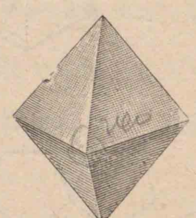
(1) 一ツノ立體角ガ三ツノ正三角形ヨリナルトキハ，正多面體ハ正四面體ナリ.



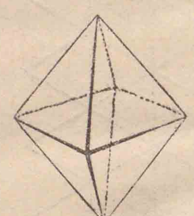
面數 4
頂點數 4
稜數 6



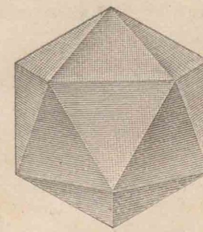
(2) 一ツノ立體角ガ四ツノ正三角形ヨリナルトキハ，正多面體ハ正八面體ナリ.



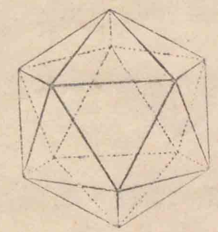
面數 8
頂點數 6
稜數 12



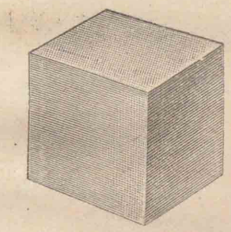
(3) 一ツノ立體角ガ五ツノ正三角形ヨリナルトキハ，正多面體ハ正二十面體ナリ.



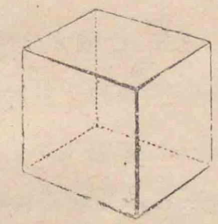
面數 20
頂點數 12
稜數 30



(4) 一ツノ立體角ガ三ツノ正方形ヨリナルトキハ，正多面體ハ正六面體ナリ.

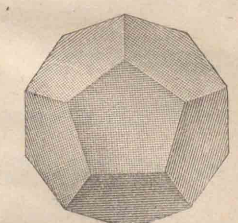


面數 6
頂點數 8
稜數 12

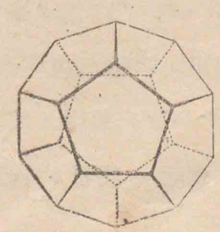


〔注意〕 正六面體ハ立方ナリ.

(5) 一ツノ立體角ガ三ツノ正五角形ヨリナルトキハ，正多面體ハ正十二面體ナリ.



面數 12
頂點數 20
稜數 30



★雜　問　題★

(1) 正八面體ノ一稜 $2a$ ナルトキ，ソノ表面積及ビ體積ヲ求ム。

(2) 直六面體ノ三稜ヲ測リテ 8.5 糎, 7.4 糎及ビ 6.0 糎ヲ得タリ. コノ實測ニ於ケル誤差ノ上ノ限リヲ 1 粍トセバ，直六面體ノ體積ヲ，コノ數値ヲ用ヒテ計算シタルトキノ誤差ノ上ノ限リ如何.

(3) 一邊 10 糎ナル等邊三角形ノ一邊ヲ過ル一平面上ニ於ケルコノ三角形ノ正射影ガ 34.64 平方糎ナルトキ三角形ノ平面トコノ平面トノナス角ヲ求ム.

〔コノ角ノ cosine ヲ求メ，而ル後表ヲ用ヒヨ。〕

(4) 正六角錐ノ底面ノ一邊 4 糎, 高サ 8 糎ナルトキ

(i) ソノ側面積ヲ 1 平方糎ノ十分ノ一マデ正シク求メヨ。

(ii) ソノ體積ヲ 1 立方糎ノ十分ノ一マデ正シク求メヨ。

(5) 一ツノ角錐ノ底面ハ一邊 6 分ナル正方形ニシテ，ソノ各側面ハ等邊三角形ナリ。コノ表面ノ展開圖ヲ作レ。

(6) 一ツノ角錐ノ底面ハ一邊 5 寸ナル正六角形ニシテ，ソノ各側面ハ底面ト 60° ノ角ヲナストキ，ソノ角錐ノ體積ヲ求ム。

(7) 正四面體ノ一ツノ頂點ヨリ，ソレニ對スル面ニ引ケル垂線ノ足ハソノ面ノ中心ナルコトヲ證明セヨ。

(8) 正四面體ノ一ツノ頂點ヨリ，ソレニ對スル面ニ引ケル垂線ハ，ソノ足ヨリ他ノ一面ニ引ケル垂線ノ三倍ナルコトヲ證明セヨ。

(9) 正四面體ノ一ツノ頂點ヨリソレニ對スル面ニ引ケル垂線ノ長サヲ p, ソノ一稜ノ長サヲ $2m$ トスルトキハ $3p^2=8m^2$ ナルコトヲ證明セヨ。

(10) 正四面體ノ一稜ノ長サ $2m$ ナルトキ，ソノ全表面積及ビ體積ヲ求ム。

(11) 正四面體ノ二ツノ面ノナス二面角ノ近似値ヲ計算セヨ。

〔表ヲ用ヒヨ。〕

(12) 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ハ皆ソノ中點ニ於テ交ルコトヲ證明セヨ。

(13) 四面體ノ各稜ノ上ノ正方形ノ和ハ，相對スル稜ノ中點ヲ結ブ線分ノ上ノ正方形ノ和ノ四倍ニ等シ。コレヲ證明セヨ。

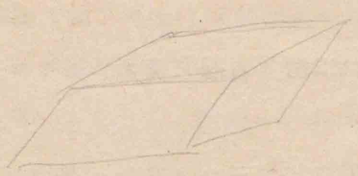
(14) 四面體ノ相對スル二ツノ稜ニ平行ナル平面ニヨリテノ截面ハ平行四邊形ナルコトヲ證明セヨ。

(15) 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ，ソレニ對スル稜ヲ，ソノ二面角ノ兩面ノ比ニ分ツコトヲ證明セヨ。

(16) OA，OB，OC ハ立方ノ一頂點 O ヲ過ル三稜ニシテ，ソノ各ノ長サハ a ニ等シキトキ，角錐 O－ABC ノ體積ハ $\frac{1}{6}a^3$ ニ等シ。コレヲ證明セヨ。

(17) 立方ヲ一ツノ平面ニテ截リ，ソノ截面ヲ正六角形ナラシメヨ。

(18) 空間ニ於テ互ニ相交ラザル三ツノ直線ガ與ヘラレタルトキ，コノ三直線ヲ稜トスル平行六面體ヲ作レ。



第三章

曲面體

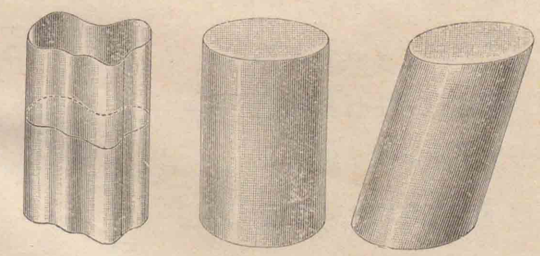
第一節

圓壔及ビ圓錐

311 ◻定義◻ 一直線ガ常ニ一定ノ直線ニ平行ニ，且一ツノ定曲線ニ沿ウテ動クトキニ生ズル表面ヲ壔面ト云フ。ソノ動ク所ノ直線ヲ壔面ノ母線，曲線ヲソノ準線ト云フ。

準線ガ閉ヂタル曲線ナルトキ，壔面ヲ二ツノ平行ナル平面ニテ截リテ生ズル立體ヲ壔ト云フ，ソノ平行ナル二面ヲ壔ノ底面，壔面(壔ノ境界タル部分)ヲ壔ノ側面ト云フ。

〔注意〕 角壔ハ準線ガ多角形ナル壔ナリ。



312 ◻定義◻ 壔ノ底面ガ圓ナルトキハ，ソノ壔ヲ圓壔

ト云ヒ，側面ノ母線ガ底面ニ垂直ナル圓壔ヲ直圓壔ト云フ.

直圓壔ノ兩底面ハ合同ナル圓ナリ. 底面ノ半徑ヲ直圓壔ノ半徑ト云フ.

直圓壔ノ兩底面ノ中心ヲ結ブ直線ハ底面ニ垂直ナリ. コノ直線ヲ直圓壔ノ軸ト云フ.

直圓壔ノ兩底面ノ距離ヲ，ソノ高サト云フ. 高サハ軸及ビ母線ノ兩底面ノ間ニアル部分ノ長サニ等シ.

〔注意〕 圓壔ヲ表ハス記號ハ角壔ノ場合ニ準ジテ知ルベシ.

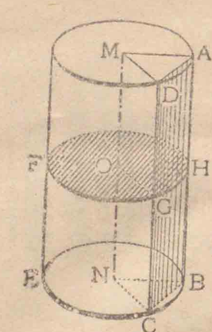
313 定理143 **矩形ガ，ソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體ハ直圓壔ナリ.**

練習問題

(1) 直圓壔ノ軸ニ垂直ナル平面ニヨル截面ハ圓ナルコトヲ證明セヨ.

(2) 直圓壔ノ軸ニ平行ナル平面ニヨル截面ハ矩形ナルコトヲ證明セヨ.

(3) 兩底面ガ直圓壔ノ兩底面ニ內接スル直角壔ヲ作レ.

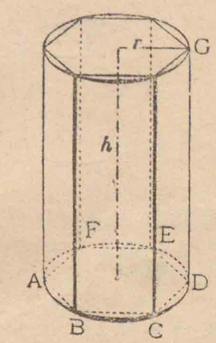


〔注意〕 カクノ如キ直角壔ハ，直圓壔ニ內接スト云フ.

(4) 兩底面ガ直圓壔ノ兩底面ニ外接スル直角壔ヲ作レ.

〔注意〕 カクノ如キ直角壔ハ，直圓壔ニ外接スト云フ.

314 定理144 **直圓壔ノ側面積ハ，ソノ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シ.**



直圓壔ノ底面ノ周ヲ p，高サヲ h，側面積ヲ S トス. 然ルトキハ

$$S = p \times h.$$

ナルベシ.

(證明) 直圓壔ニ內接スル任意ノ正角壔 ABCDEF−G ヲ作リ，ソノ底面ノ周ヲ p'，側面積ヲ S' トスレバ

$$S' = p' \times h. \qquad \text{(定理 128 系)}$$

今內接正角壔ノ底面ノ邊數ヲ無限ニ增ストキハ，ソノ底面ハ直圓壔ノ底面ニ窮リナク近ヅクヲ以テ S ト S' トノ差及ビ $p \times h$ ト $p' \times h$ トノ差ハ窮リナク小サクナルベシ.

而シテ內接正角壔ノ底面ノ邊數ハ如何ニ大ナリトモ常ニ

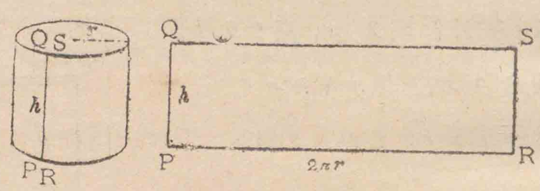
$$S' = p' \times h$$

故ニ S 及ビ $p'\times h$ ガソレゾレ同時ニ窮リナク近ヅクコトヲ得ル S 及ビ $p\times h$ ハ相等シカラザルベカラズ。

即チ $$S = p\times h.$$

【系】直圓壔ノ半徑ヲrトシ，高サヲhトスレバ，ソノ側面積ハ $2\pi rh$ ニ等シク，全表面積ハ $2\pi r(h+r)$ ニ等シ。

〔注意〕コノ定理ハ次ノ如ク說明スルコトヲ得。



直圓壔ノ側面ヲソノ母線 PQ ニ沿ウテ切リ，コレヲ一平面上ニ展開シタリト考フ。然ルトキハ側面ハ矩形 PQRS ノ形ヲナスベシ。但シ PQ 及ビ PR ハソレゾレ直圓壔ノ高サ及ビ底面ノ周ナリ。因ッテ

$$側面積 = PR\cdot PQ = 2\pi rh.$$

315 前條ト同樣ノ方法ニヨリ定理 138 系 1 ヨリ次ノ定理ヲ導クコトヲ得ベシ。

定理145 直圓壔ノ體積ハ，ソノ底面ト高サトノ積ニ等シ

【系】直圓壔ノ半徑ヲrトシ，高サヲhトスレバ，ソノ體積ハ πr^2h ニ等シ。

練習問題

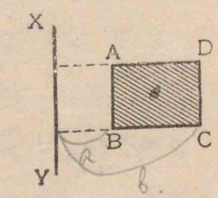
(1) 一ツノ矩形ノ二邊ヲ a, b トシ $a>b$ トスルトキ，ソレゾレ各邊ヲ軸トシテ，コノ矩形ヲ一廻轉セシムルトキニ生ズル二ツノ直圓壔ノ體積ハ何レガ大ナルカ

(2) 直圓壔ノ側面積ハ 440 ニシテ，ソノ高サハ 7 ナルトキ，底面ノ半徑ヲ求ム。但 $\pi=\frac{22}{7}$ トシテ計算セヨ。

(3) 與ヘラレタル直線ヨリ與ヘラレタル距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

(4) 底面ノ一邊 a, 高サ h ナル正四角壔ヨリ最大ノ直圓壔ヲ切リトルトキ，ソノ直圓壔ノ體積及ビ側面積ヲ求ム。

(5) 水道鐵管ノ長サ 18m., 外面ノ半徑 5.4cm., 內面ノ半徑 4.8cm. ナルトキ，ソノ重サヲ求ム。但鐵ノ比重ヲ 7.79 トシπヲ 3.14 トス。



(6) XY ハ矩形 ABCD ノ平面上ニアリテ，ソノ一邊ニ平行ナリトス。矩形 ABCD ガ XY ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル輪形ノ立體ノ體積ハ，底面

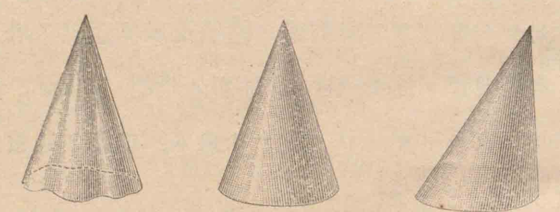
ハ ABCD ニシテ，高サハ ABCD ノ重心ガ一廻轉ノ際通過スル圓周ノ長サニ等シキ直角壔ノ體積ニ等シ。コレヲ證明セヨ。(Pappus ノ問題)

316 回定義回 一直線ガ常ニ一定點ヲ過リ，且一ツノ定曲線ニ沿ウテ動クトキニ生ズル表面ヲ錐面ト云フ。

ソノ動ク所ノ直線ヲ錐面ノ母線，定曲線ヲソノ準線，定點ヲソノ頂點ト云フ。

準線ガ閉ヂタル曲線ナルトキ，錐面ヲ一平面ニテ截リテ生ズル立體ヲ錐ト云フ。ソノ平面ナル面ヲ錐ノ底面，錐面（錐ノ境ヲナス部分）ヲ錐ノ側面，錐面ノ頂點ヲ錐ノ頂點ト云フ。

〔注意〕 角錐ハ準線ガ多角形ナル錐ナリ。



317 回定義回 錐ノ底面ガ圓ナルトキハ，コレヲ圓錐ト云フ。圓錐ノ底面ノ中心ト，ソノ頂點トヲ結ビツクル直線ヲ，圓錐ノ軸ト云フ。

圓錐ノ軸ガ底面ニ垂直ナルトキハ，ソノ圓錐ヲ直圓錐ト云フ。

直圓錐ノ底面ノ半徑ヲ，直圓錐ノ半徑，頂點ト底面トノ距離ヲソノ高サト云フ。

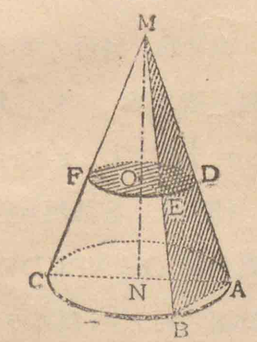
直圓錐ノ側面ノ母線ノ長サハ皆相等シ。コレヲ直圓錐ノ斜高ト云フ。

318 定理146 直角三角形ガ，ソノ直角ノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體ハ直圓錐ナリ。

❋練習問題❋

(1) 直圓錐ノ軸ニ垂直ナル平面ニヨル截面ハ圓ナルコトヲ證明セヨ。

(2) 直圓錐ノ頂點ヲ含ム平面ニヨル截面ハ二等邊三角形ナルコトヲ證明セヨ。



(3) 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニヨル截面ハ皆合同ナル二等邊三角形ナルコトヲ證明セヨ。

〔注意〕 コノ二等邊三角形ノ頂角ヲ直圓錐ノ頂角ト云フ。

(4) 直圓錐ノ底面ニ内接スル多角形ヲ底面トシ，ソノ頂點

ヲ頂點トスル角錐ヲ作ルトキハ，ソノ側稜ハ直圓錐ノ側面ノ母線ナルコトヲ證明セヨ。

〔注意〕 カクノ如キ角錐ハ直圓錐ニ內接スト云フ。

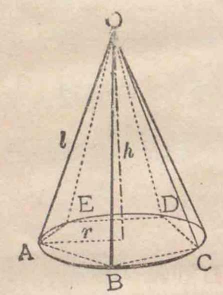
(5) 直圓錐ノ底面ニ外接スル多角形ヲ底面トシ，ソノ頂點ヲ頂點トスル角錐ヲ作ルトキハ，ソノ各側面ハ直圓錐ノ側面ト唯一ツノ母線ニ於テ出會フコトヲ證明セヨ。

〔注意〕 カクノ如キ角錐ハ直圓錐ニ外接スト云フ。

319 定理 147 直圓錐ノ側面積ハ，ソノ底面ノ周ト斜高トノ積ノ二分一ニ等シ。

直圓錐ノ底面ノ周ヲ p，斜高ヲ l，側面積ヲ S トス。然ルトキハ

$S=\frac{1}{2}p\times l$ ナルベシ。



(證明) 直圓錐ニ內接スル任意ノ正角錐 O−ABCDE ヲ作リ，ソノ底面ノ周ヲ p'，斜高ヲ l'，側面積ヲ S' トスレバ

$$S'=\frac{1}{2}p'\times l'. \quad \text{(定理 130)}$$

今內接正角錐ノ底面ノ邊數ヲ無限ニ増ストキハ，ソノ底面ハ直圓錐ノ底面ニ窮リナク近ヅクヲ以テ S', p', l' ハソレゾレ

S, p, l ニ窮リナク近ヅク可シ。故ニ S ト S' トノ差及ビ $\frac{1}{2}p\times l$ ト $\frac{1}{2}p'\times l'$ トノ差ハ窮リナク小サクナルベシ。

而シテ內接正角錐ノ底面ノ邊數ガ如何ニ大ナリトモ常ニ

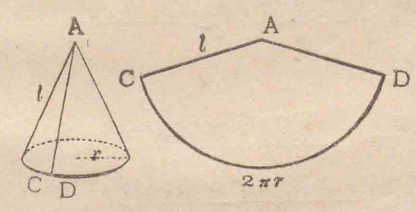
$$S'=\frac{1}{2}p'\times l'.$$

故ニ S' 及ビ $\frac{1}{2}p'\times l'$ ガソレゾレ同時ニ窮リナク近ヅクコトヲ得ル S 及ビ $\frac{1}{2}p\times l$ ハ相等シカラザルベカラズ。

即チ
$$S=\frac{1}{2}p\times l.$$

【系】 直圓錐ノ半徑ヲ r，斜高ヲ l トスレバ，ソノ側面積ハ πrl ニ等シ。而シテソノ全表面積ハ $\pi r(l+r)$ ニ等シ。

〔注意〕 コノ定理ハ次ノ如ク說明スルコトヲ得。



直圓錐ノ側面ヲソノ母線 AC ニ沿ウテ切リ，コレヲ一平面上ニ展開シタリト考フ。然ルトキソノ側面ハ扇形 ACD ノ形ヲナスベシ。但シ扇形ノ半徑 AC 及ビ弧 CD ハ，ソレゾレ直圓錐ノ斜高 l 及ビ底面ノ周 $2\pi r$ ニ等シ。

因ッテ直圓錐ノ側面積ヲ求ムルニハ，コノ扇形ノ面積ヲ求ム

レバ可ナリ。然ルニ

$$(\text{扇形ACD}):(l\ \text{ヲ半徑トスル圓}) = 2\pi r : 2\pi l.$$

卽チ $(\text{扇形ACD}):\pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l.$

故ニ 扇形ACD ノ面積ハ πrl ニ等シ。

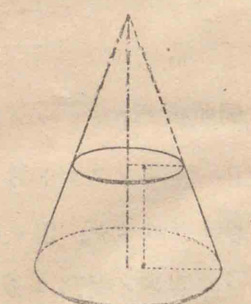
故ニ直圓錐ノ側面積ハ πrl ニ等シ。

320 前條ト同樣ノ方法ニヨリテ定理 140 系 1 ヨリ次ノ定理ヲ導クコトヲ得。

定理 148 直圓錐ノ體積ハ，ソノ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

【系】 直圓錐ノ半徑ヲ r，高サヲ h トスレバ，ソノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ニ等シ。

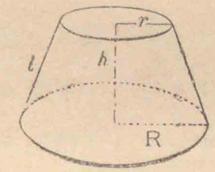
321 回定義回 直圓錐ノ底面トコレニ平行ナル截面トノ間ニアル直圓錐ノ部分ヲ直圓錐臺ト云フ。コノ截面及ビ原直圓錐ノ底面ヲ直圓錐臺ノ底面ト云ヒ，原直圓錐ノ母線ノ兩底面ノ間ニアル部分ノ長サヲ直圓錐臺ノ斜高ト云ヒ，兩底面ノ距離ヲソノ高サト云フ。



322 直圓錐臺ノ底面ニ內接スル正多角形ヲ底面トスル正角錐臺ヲ考ヘ，314 條ト同樣ノ方法ニヨリ次ノ諸定理ヲ導クコトヲ得ベシ。

定理 149 直圓錐臺ノ側面積ハ，ソノ兩底面ノ周ノ和ト，斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シ。

【系】 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ R，r トシ，斜高ヲ l トスレバ，側面積ハ $\pi l(\mathrm{R}+r)$ ニ等シ。



定理 150 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ R, r トシ，高サヲ h トスレバソノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi h(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}r+r^2)$ ナリ。

※練 習 問 題※

(1) 直圓錐ノ高サヲ h トシ，ソノ半徑ヲ r トスレバ，ソノ側面積ハ $\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(2) 直圓錐臺ノ側面積ハ，兩底面ニ平行ニシテコレヨリ等距離ニアル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(3) 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ R，r トシ，高サヲ h トスルトキ，ソノ側面積ヲ求ム。

(4) 直圓錐ノ側面積ヲ S，體積ヲ V，頂角ノ半分ヲ α，高サヲ h トスルトキ，次ノ諸式ヲ證明セヨ．

(i) $S = \dfrac{\pi h^2 \tan\alpha}{\cos\alpha}$，　$V = \dfrac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha$.

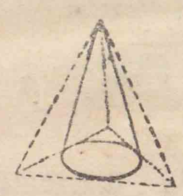
(ii) $S = \dfrac{\pi r^2}{\sin\alpha}$，　$V = \dfrac{1}{3}\dfrac{\pi r^3}{\tan\alpha}$.

由ツテ頂角ヲ等シクスル二ツノ直圓錐ノ體積ノ比ハ高サノ三乘比ニ等シキコトヲ證明セヨ．

(5) 直圓壔又ハ直圓錐ノ底面ノ一ツノ切線ト切點ヲ過ル母線トノ定ムル平面ハ，ソノ母線外ノ點ニ於テソノ側面ニ出會ハザルコトヲ證明セヨ．

〔注意〕 コノ平面ヲ直圓壔又ハ直圓錐ノ切平面ト云フ．

(6) 直圓錐ガ正四面體ニ內接スルトキ（卽チ直圓錐ノ底面ハ正四面體ノ一面ニ內接シ，ソノ側面ハ他ノ三面ニ切スルトキ）兩體ノ體積ノ比ヲ求ム．



(7) 3寸，4寸，5寸 ヲ三邊トスル三角形ガソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル三ツノ立體ノ體積及ビ全表面積ヲ求ム．

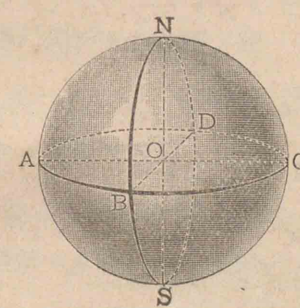
(8) 直圓錐臺形ノばけつノ高サ 1尺2寸，兩底面ノ直徑 1尺及ビ 8寸ナルトキハソノ容量何升ナルカ．

(9) 直圓錐ノ天幕ノ高サ 12 尺，底面ノ直徑 12 尺ナルトキ，コレヲ造ルニ要セシ布ノ廣サヲ求ム．但縫目ハ考ニ入レザルモノトス．

第二節

球

323 ◻定義◻ 半圓ガソノ直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體ヲ球ト云ヒ，球ヲ圍ム曲面ヲ球面ト云フ．ソノ半圓ノ中心ヲ球又ハ球面ノ中心，中心ト球面上ノ一點トヲ結ブ線分ヲ球又ハ球面ノ半徑，中心ヲ過リテ兩端ガ球面ニ終ハレル線分ヲ球又ハ球面ノ直徑，直徑ノ兩端ヲ對點ト云フ．



混同スル恐ナキトキハ球面ノコトヲ又球トモ呼ブ．

上ノ定義ヨリ直ニ次ノ定理ヲ得．

(α) 球ノ總テノ半徑ハ相等シ．從ツテソノ總テノ直徑ハ

相等シ．

(*b*) 一定點ヨリ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ，ソノ點ヲ中心トシソノ距離ヲ半徑トスル球面ナリ．

(*c*) 中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ小ナル點ハ球ノ内ニアリ，半徑ニ等シキ點ハ球面上ニアリ，半徑ヨリ大ナル點ハ球ノ外ニアリ．又コノ逆モ眞ナリ．

(*d*) 半徑相等シキ二ツノ球ハ合同ナリ．

❋練習問題❋

(1) 前ノ圖ニ就キテ球ノ中心，半徑，直徑，對點等ヲ指示セヨ．

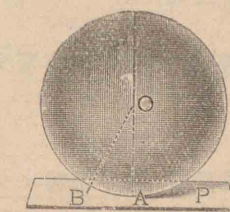
(2) 一ツノ線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム．

(3) 同ジ中心ヲ有スル球面ハ出會フコト能ハズ．コレヲ證明セヨ．

324 定理151 球面上ノ一點ニ於テ，ソノ點ヘノ半徑ニ垂直ナル平面ハ，ソノ他ノ點ニ於テ再ビ球面ト出會ハズ．

O ヲ中心トスル球面上ノ一點 A ニ於テ，半徑 OA ニ垂

直ナル平面ヲ P トス．



然ルトキハ A 以外ノ點ニ於テ P ハ球面ト出會ハザルベシ．

(證明) P 上ノ A 以外ノ任意ノ一點ヲ B トシ，OB ヲ結ブ．

然ルトキハ $OB > OA$. (定理 117 系)

故ニ B ハ球面外ニアリ．

卽チ P 上ノ A 以外ノ點ハ皆球面ノ外ニアリ．

故ニ P ハ A 以外ノ點ニ於テハ球面ト出會ハズ．

〔系〕 球面上ノ一點ニ於テ，ソノ點ヘノ半徑ニ垂直ナル直線ハ再ビ球面ト出會ハズ．

325 定義 球面ト唯一ツノ點ニ於テ出會フ平面又ハ直線ハ，ソノ點ニ於テ球ニ切スト云フ．而シテソノ平面又ハ直線ヲソレゾレ球ノ切平面又ハ切線ナリト云ヒ，ソノ球面ト出會フ點ヲ切點ト云フ．

前條ノ定理及ビ系ハ次ノ如ク述ブルコトヲ得．

定理152 球面上ノ一點ニ於テ，ソノ點ヘノ半徑ニ垂直ナル平面又ハ直線ハ，ソノ點ニ於

テ球ニ切ス。

【系 1】 球ノ切平面又ハ切線ハ切點ニ於ケル半徑ニ垂直ナリ。

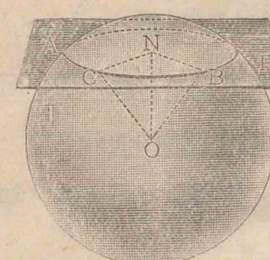
【系 2】 球ノ切線ハソノ切點ニ於ケル切平面上ニアリ。

【系 3】 一平面又ハ一直線ト，球ノ中心トノ距離ガ半徑ニ等シキトキハ，ソノ平面又ハ直線ハ球ニ切ス。

【系 4】 球面上ノ一點ヲ過リ，ソノ點ヘノ半徑ニ斜ナル平面又ハ直線ハソノ他ノ點ニ於テ球面ト出會フ。

〔注意〕 カクノ如キ平面又ハ直線ハ球ト交ルト云フ。

326 定理 153 一ツノ平面ガ球ト交ルトキハ，ソノ截面ハ圓ナリ。



平面 P ガ O ヲ中心トスル球ト交ルトス。

然ルトキハソノ截面 ABC ハ圓ナルベシ。

(證明) O ヨリ P ニ垂線 ON ヲ引ク，截面ノ周上ノ任意ノ二點ヲ B，C トシ，NB，NC ヲ結ブ。

然ルトキハ $\triangle ONB$，$\triangle ONC$ ニ於テ

$ON = ON$， $OB = OC$， $\angle ONB = \angle ONC = \angle R$.

故ニ $\triangle ONB \cong \triangle ONC$.

故ニ $NB = NC$.

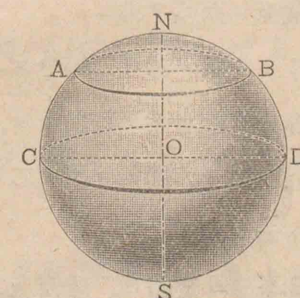
由ツテ截面ノ周 ABC 上ノ總テノ點ハ N ヨリ等距離ニアリ。

故ニ截面ハ N ヲ中心トスル圓ナリ。

【系 1】 截面ノ中心ト球ノ中心トヲ結ブ直線ハソノ截面ニ垂直ナリ。

【系 2】 球ノ中心ヨリ等距離ニアル截面ハ相等シク，中心ヨリノ距離ガ増加スルニ從ツテ截面ハソノ大サヲ減ズ。

【系 3】 球ノ中心ヲ過ル截面ハ最大ノ截面ニシテソノ半徑ハ球ノ半徑ニ等シ。



327 定義 球ノ中心ヲ過ル平面ニヨル截面ヲ球ノ大圓ト云ヒ，ソノ他ノ平面ニヨル截面ヲ球ノ小圓ト云フ。

球ノ大圓又ハ小圓ノ平面ニ垂直ナル直徑ヲソノ圓ノ軸ト云ヒ，

軸ノ兩端ヲソノ圓ノ極ト云フ.

圖ニ於テ CD ハ大圓, AB ハ小圓, SN ハソノ軸, S 及ビ N ハソノ極ナリ.

328 定理 154 (a) 球面上ノ三點ヲ過リテ一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得, 而シテ唯一ツニ限ル。

(b) 對點ナラザル二點ヲ過リテ一ツノ大圓ヲ畫クコトヲ得。而シテ唯一ツニ限ル。

練習問題

(1) 地球ヲ球ト考フルトキ, ソノ赤道, 經度線, 緯度線等ハ如何ナル種類ノ圓ナルカヲ述ベヨ.

(2) 小圓ノ軸ハソノ中心ヲ過ルコトヲ證明セヨ.

(3) 球ノ半徑 10 吋ナルトキ, 中心ヨリ 5 吋ノ距離ニアル截面ノ面積ヲ求ム.

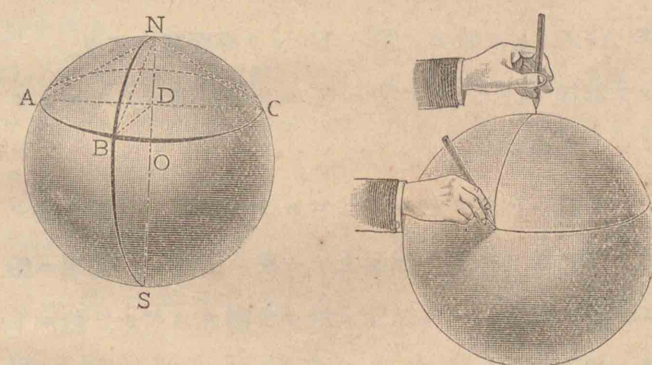
(4) 大圓ハ球ヲ二等分スルコト及ビ二ツノ大圓ハ互ニ他ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ.

〔注意〕 大圓ニヨリテ二等分セラレタル球ノ各部分ヲ半球ト云フ.

329 定義 球面上二點ノ間ニ引ケル大圓ノ小ナル弧ノ長サヲ, ソノ二點ノ球面上ニ於ケル距離ト云フ.

コノ距離ハソノ二點間ニ, 球面上ニ引ケル線ノ中ニテ最小ナルモノナリ. 〔コノ證明ハ本書ニ於テ論ズル範圍外ニ屬ス。〕 故ニ大洋ヲ航海スルニ當リソノ航路ヲ大圓ニ沿ウテトルヲ最モ便宜トス

330 定理 155 球面ノ一ツノ圓周上ノ總テノ點ハ, ソノ二ツノ極ノ各ヨリ等距離ニアリ.



O ヲ中心トスル球面上ノ圓周 ABC ノ極ヲ N 及ビ S トス.

然ルトキハ圓周 ABC 上ノ總テノ點ハ N 或ハ S ヨリ等距離ニアルベシ.

(證明) 圓周 ABC 上ノ任意ノ二點ヲ A, B トシ, 大

圓 NAS 及ビ NBS ヲ引ク. D ヲ圓 ABC ノ平面トソノ軸 NS トノ交リトス. 直線 AD, BD, NA, NB ヲ引ク.

然ルトキハ　$\triangle NAD$, $\triangle NBD$ ニ於テ

$ND = ND$, $DA = DB$,

$\angle NDA = \angle NDB = 90°$.

故ニ　$NA = NB$.

故ニ　$\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$.

即チ圓周 ABC 上ノ總テノ點ハ N ヨリ等距離ニアリ.

同様ニシテ圓周 ABC 上ノ點ハ S ヨリ等距離ニアルコトヲ證明スルコトヲ得ベシ.

〔注意〕 前圖ニ示スガ如キ方法ニヨリテ球面上ニ圓ヲ畫クコトヲ得. 即チ絲ノ一端ヲ球面上ノ一點ニ固着シ, 他端ニ鉛筆ヲ附シテ絲ヲ緊張シツヽ球面ニ沿ウテ動カスベシ. 然ルトキハ鉛筆ハ圓ヲ畫ク.

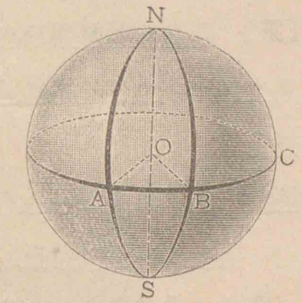
331 定義 球面上ニ於テ, 一ツノ圓周上ノ點ト, ソレニ近キ極トノ距離ヲ, ソノ圓ノ極距離ト云フ.

練習問題

(1) 大圓ノ極距離ハ四分ノ一圓周ナルコトヲ證明セヨ.

(2) 球面上ニ於ケル二點ノ距離ハ, ソノ距離ナル大圓弧ガ

球ノ中心ニ於テ對スル角ヲ以テ表ハスコトアリ今地球ノ北極ヨリノ距離ガ 90° ナル點ノ軌跡ヲ求ム.

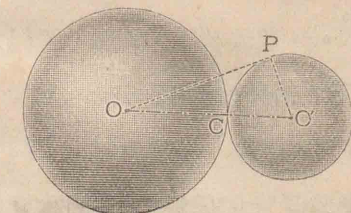


(3) 直徑 12 寸ナル球面ノ中心ト, ソノ上ノ一ツノ小圓ノ平面トノ距離ガ球ノ半徑ノ二分ノ一ニ等シキトキハ, ソノ小圓ノ極距離ハ何度ナルカ.

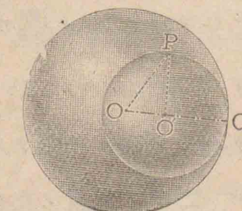
(4) 球ノ小圓ノ極距離ハ 60° ニ等シク, 球ノ半徑ハ 13 分ナリ. 今ソノ小圓ノ平面ノ球ノ中心ヨリノ距離及ビソノ半徑ヲ求ム.

332 定理 156 二ツノ球面ガ, ソノ中心線上ノ一點ニ於テ出會フトキハ, 二ツノ球面ハ再ビ他ノ點ニ於テ出會フコトナシ.

(I)



(II)



平面幾何學定理 54 ト同様ニシテ證明スルコトヲ得.

【系】 二ツノ球面ガソノ中心線上ニアラザル一點ニ於テ出會フトキハ, 一ツノ球面ノ一部分ハ他ノ内ニ, 一部分ハ他ノ外ニアリ.

333 ◻定義◻ 二ツノ球面ガ唯一ツノ點ニ於テ出會フトキハ, 二ツノ球ハ相切スト云ヒ, ソノ點ヲ切點ト云フ.

コノ際各ノ球ガ他ノ外ニアルトキハ (I 圖) 二ツノ球ハ外切スト云ヒ, 一ツノ球ガ他ノ内ニアルトキハ (II 圖) 二ツノ球ハ内切スト云フ. 二ツノ球面ノ一ツノ一部分ハ他ノ内ニ, 一部分ハ他ノ外ニアルトキハ, 二ツノ球ハ相交ルト云フ.

前定理ハ次ノ如ク述ブルコトヲ得.

定理 157 二ツノ球面ガ, ソノ中心線上ノ一點ニ於テ出會フトキハ二ツノ球ハ相切ス.

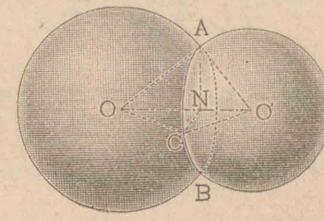
334 **定理 158** 二ツノ球ガ相交ルトキハ, ソノ交リハ一ツノ圓ナリ.

O, O′ ヲ中心トスル二ツノ球ガ相交ルトス.

然ルトキハソノ交リハ圓ナルベシ.

(證明) 二ツノ球面ノ交リ ABC 上ノ任意ノ一點ヲ C トシ, C ヨリ OO′ ニ垂線 CN ヲ引ク.

然ルトキハ △OCO′ ノ三邊ハ一定ナルガ故ニ, CN 及ビ ON ハ一定ナリ.



故ニ N ハ OO′ 上ノ定點ニシテ, C ハ N ヨリ定距離ニアリ.

而シテ C ハ N ヲ過リテ OO′ ニ垂直ナル平面上ニアリ.

故ニ交リ ABC ハ N ヲ中心トセル圓ナリ.

【系】 二ツノ球ノ中心線ハソノ交リノ中心ヲ過リ且ソノ平面ニ垂直ナリ.

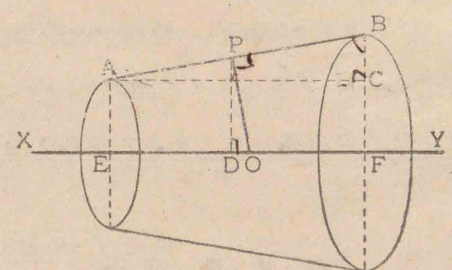
練習問題

(1) 二ツノ圓ノ關係ト, 二ツノ球ノ關係トノ間ニ類似ノ點アリ. コレヲ列擧セヨ.

(2) 二ツノ球ガ相切スルトキハ, ソノ切點ニ於テ共通ノ切平面ヲ作リ得ルコトヲ證明セヨ.

(3) 二ツノ球ノ半徑ハ 10分及ビ 24分ニシテ，ソノ中心ノ距離 26分ナルトキ，ソノ交リノ面積ヲ求ム。

335 定理159 一ツノ線分ガ，コレト同一平面上ニアリテコレヲ截ラザル一ツノ直線ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル表面ノ面積ハ，ソノ線分ノ中點ニ於テ，コレニ垂直ニ軸マデ引ケル線分ヲ半徑トスル圓周ト，ソノ線分ノ軸上ニ投ズル正射影トノ積ニ等シ。



線分ヲ AB，軸ヲ XY，AB ノ XY 上ノ正射影ヲ EF トシ，AB ノ中點 P ニ於テ AB ニ引ケル垂線ガ XY ト出會フ點ヲ O トス。然ルトキハ

AB ノ一廻轉ニヨリテ生ズル表面積ハ $EF \times 2\pi OP$ ニ

等シカルベシ。

（證明） PD ヲ XY ニ垂直ニ引キ，AC ヲ XY ニ平行ニ引キ BF ト C ニ於テ交ハラシム。

AB ノ一廻轉ニヨリテ生ズル表面ハ直圓錐臺ノ側面ナルガ故ニ，ソノ表面積 $= \dfrac{AB}{2}(2\pi AE + 2\pi BF)$

$$= AB \times 2\pi\left(\frac{AE + BF}{2}\right), \quad \text{（定理 149）}$$

$$= AB \times 2\pi PD.$$

然ルニ $\triangle ABC \sim \triangle POD.$

故ニ $AB : OP = AC : PD.$

故ニ $AB \times PD = OP \times AC.$

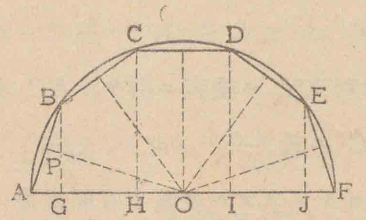
故ニ $AB \times 2\pi PD = EF \times 2\pi OP.$

即チ AB ノ一廻轉ニヨリテ生ズル表面ハ $EF \times 2\pi OP$ ニ等シ。

【注意】 AB ガ XY ニ平行ナルトキ又ハソノ一端ガ XY 上ニアルトキニモ，同様ノ結果ヲ得ベシ。

336 定理160 球面ノ面積ハ，ソノ直徑ト大圓周トノ積ニ等シ。

半圓 ABF ガソノ直徑 AOF ヲ軸トシテ，一廻轉スルト



キニ生ズル球面ノ面積ヲ S，ソノ半徑ヲ r トス.

然ルトキハ $S = 2r \times 2\pi r$ ニ等シカルベシ.

（證明） 半圓 ABF ノ周ヲ B，C，D 等ニ於テ任意ノ數ニ等分シ，弦 AB，BC，CD 等ヲ引キ，又 B，C，D 等ヨリ AF ニ垂線 BG，CH，DI 等ヲ引ク.

半圓ノ中心 O ヨリ各弦ニ垂線ヲ引クトキハ，コレ等ノ垂線ハ皆 O ヨリ AB ニ引ケル垂線 OP ニ等シ

而シテコレ等ノ垂線ハ各弦ヲ二等分ス. 故ニ（定理 159）ニヨリ

〔AB ノ一廻轉ニヨリテ生ズル表面積〕$= AG \times 2\pi.OP$，

〔BC ノ一廻轉ニヨリテ生ズル表面積〕$= GH \times 2\pi.OP$，等.

故ニ總テノ弦ノ一廻轉ニヨリテ生ズル表面積ノ總和ヲ S' トスレバ $S' = (AG + GH + \cdots\cdots + JF)2\pi.OP$

$= AF \times 2\pi.OP = 2r \times 2\pi.OP$.

今半圓周ノ分點ノ數ヲ無限ニ增ストキハ，S' ハ窮リナク S ニ近ヅキ $(2r \times 2\pi.OP)$ ハ窮リナク $(2r \times 2\pi r)$ ニ近ヅク

而シテ半圓周ノ分點ノ數ガ如何ニ大ナリトモ常ニ

$$S' = 2r \times 2\pi.OP.$$

故ニ S' 及ビ $2r \times 2\pi.OP$ ガソレゾレ同時ニ窮リナク近ヅクコトヲ得ル S 及ビ $2r \times 2\pi r$ ハ相等シカラザルベカラズ.

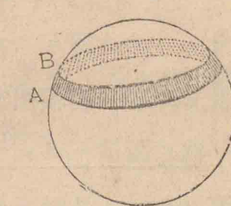
即チ $$S = 2r \times 2\pi r.$$

【系1】 半徑 r ナル球面ノ面積ハ $4\pi r^2$ ニ等シ

【系2】 球面ノ面積ハソノ大圓ノ面積ノ四倍ニ等シ.

【系3】 二ツノ球ノ面積ノ比ハソノ半徑ノ二乘比ニ等シ.

337 ◻定義◻ 二ツノ平行ナル平面ノ間ニアル一ツノ球面ノ部分ヲ球帶ト云フ. コノ二平面ノ距離ヲ球帶ノ高サト云フ.



圓ノ弧 AB ガソノ直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキハ球帶ヲ生ズ.

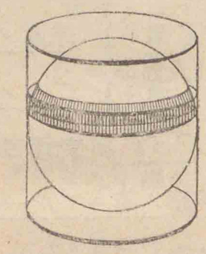
由ッテ弧 AB ヲ任意ノ數ニ等分シ，前條ノ方法ニヨリ次ノ定理ヲ證明スルコトヲ得.

定理 161 球帶ノ面積ハソノ高サト球ノ大圓ノ周トノ積ニ等シ.

(1) 地球ヲ半徑 4000 哩ノ球トシ，ソノ表面積ヲ求ム．
但 $\pi = 3.1416$．

(2) 直圓壔又ハ直圓錐ノ底面ハ一ツノ球面ニ切シ，ソノ側面ハソノ球面ト唯一ツノ圓周ニ於テ出會フトキハ，直圓壔又ハ直圓錐ハソノ球ニ外接スト云ヒ，球ハ直圓壔又ハ直圓錐ニ內接スト云フ．

今次ノ定理ヲ證明セヨ．



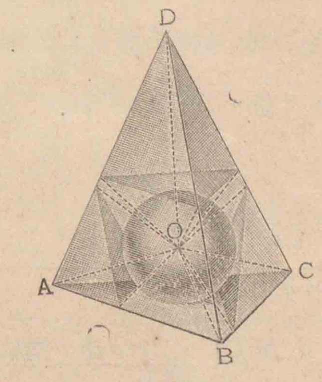
球ノ面積ハ，コレニ外接スル直圓壔ノ側面積ニ等シ．又球及ビソノ外接直圓壔ヲ直圓壔ノ軸ニ垂直ナル二ツノ平面ニテ截ルトキハ，ソノ間ニアル直圓壔ノ側面ノ部分及ビ球帶ハ面積相等シ．

(3) 球ノ面積ハコレニ外接スル直圓壔ノ全表面積ノ三分ノ二ニ等シキコトヲ證明セヨ．(Archimedes ノ定理)

(4) 球ノ直徑ヲ n 等分シ，ソノ各分點ヲ過リテ，ソノ直徑ニ垂直ナル平面ヲ作ルトキハ，コレ等ノ平面ハ球面ヲ n 等分スルコトヲ證明セヨ．

338 定理 162 球ノ體積ハソノ表面積ト半徑トノ積ノ三分ノ一ニ等シ．

中心 O ナル球ノ表面積ヲ S，半徑ヲ r トシ，體積ヲ V トス．
然ルトキハ $V = \frac{1}{3}Sr$ ナルベシ．



(證明) 各面ガ球ニ切スル任意ノ多面體即チ外接多面體 D−ABC ノ如キヲ作リ，ソノ表面積ヲ S'，體積ヲ V' トス．

球ノ中心 O ト多面體ノ各頂點トヲ結ビテ，多面體ヲ O ヲ頂點トスル角錐 O−ABC 等ニ分ツ．

然ルトキハ，コレ等ノ角錐ノ高サハ皆 r ニ等シキヲ以テ，ソノ體積ハソノ底面ト $\frac{r}{3}$ トノ積ニ等シ．

因ツテ $$V' = S' \times \frac{r}{3}.$$

今多面體ノ各立體角內ニ於テ球ニ切スル平面ヲ作リテ，前ヨリモ面數多キ外接多面體ヲ作ル．コノ方法ヲ繰返シテ外接多面體ノ面數ヲ無限ニ增ストキハ S' ト S ノ差，從ツテ $S' \times \frac{r}{3}$ ト $S \times \frac{r}{3}$ トノ差 及ビ V' ト V トノ差ハ何程ニテモ小サクスルコトヲ得ベシ．

而シテ外接多面體ノ面數ガ如何ニ多クトモ

$$V' = S' \times \frac{r}{3}.$$

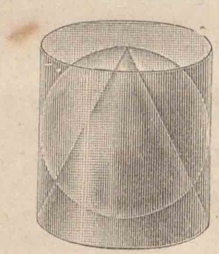
故ニ V 及ビ $S' \times \dfrac{r}{3}$ ガソレゾレ同時ニ窮リナク近ヅクコトヲ得ル V 及ビ $S \times \dfrac{r}{3}$ ハ相等シカラザルベカラズ.

卽チ $$V = S \times \frac{r}{3}.$$

【系1】 球ノ半徑ヲ r トスレバ, ソノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ナリ.

【系2】 二ツノ球ノ體積ノ比ハ, ソノ半徑ノ三乘比ニ等シ.

練習問題



(1) 球ノ體積ハ, ソレニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シ。コレヲ證明セヨ. (Archimedes ノ定理)

(2) 球ニ外接スル直圓壔, 球及ビソノ直圓壔ニ內接スル直圓錐ノ體積ノ比ハ 3 : 2 : 1 ニ等シ。コレヲ證明セヨ。

〔注意〕 直圓錐ノ底面 直圓壔ノ一底面ト同ジク, ソノ頂點ハ直圓壔ノ他ノ底面ノ中心トナルトキハ, 直圓錐ハ直圓壔ニ內接スト云フ。

(3) 直徑 6 cm., 高サ 28 cm. ナル直圓壔ノ兩端ニ同ジ直徑ノ半球ヲ附着セシメタル立體アリ. コレト等シキ體積ヲ有スル球ノ直徑ヲ求ム。

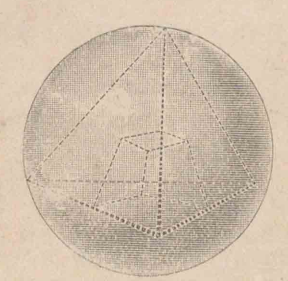
(4) 雨滴ヲ球ナリトスルトキ, 一ツノ雨滴ノ直徑ハ他ノ雨滴ノ直徑ノ二倍ニ等シトセバ, ソノ重量ノ比及ビ表面積ノ比如何。又空氣中ヲ下降スルトキ何レノ速度ガ大ナルカ.

雜 問 題

(1) 二定點ヨリ等距離ニアリテ且他ノ一定點ヨリ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

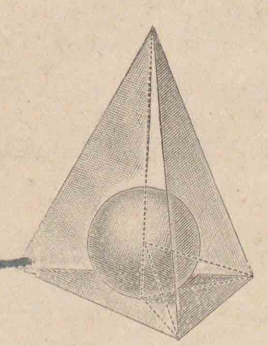
(2) 一直線上ニアラザル三點ヲ過ル球ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

(3) 二ツノ相交ル平面ニ切スル球ノ中心ノ軌跡ヲ求ム。



(4) 三面角ノ三面ニ切スル球ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

(5) 四面體ノ四ツノ頂點ヲ過ル球面ハ一ツアリ. 而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證明セヨ.



〔注意〕 一ツノ球面ガ四面體ノ各頂點ヲ過ルトキハ, 球ハ四面體ニ外接スト云ヒ, 四面體ハ球ニ內接スト云フ. ソノ他ノ多面體ニ於テモ同樣ノ定義アリ.

(6) 四面體ノ四ツノ面ニ切スル

球面ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證明セヨ。

〔注意〕 一ツノ球面ガ四面體ノ各面ニ切スルトキハ，球ハ四面體ニ内接スト云ヒ，四面體ハ球ニ外接スト云フ．ソノ他ノ多面體ニ於テモ同樣ノ定義アリ。

(7) 直圓錐ノ底面ニ平行ナル截面ヲ作リ，ソノ側面ヲ二等分セヨ。

(8) 直圓錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキニ生ズル直圓錐臺ノ側面積ハ，直圓錐ノ側面積ノ $\frac{8}{9}$ ナルトキ，直圓錐ノ底面ノ半徑ト截面ノ半徑トノ比ヲ求ム。

(9) 球外ノ一點ヨリ引ケル切線ハ相等シ．而シテ切點ノ軌跡ハ球ノ小圓ナリ．コレヲ證明セヨ。

(10) 直徑 6 cm. ノ鉛ノ球ヲ鑄直シテ，長サ 4 cm.，外法ノ直徑 10 cm. ノ鉛管ヲ作ル時ハ，ソノ鉛管ノ厚サ何程ナルカ。

(11) 半徑 2 寸ト 4 寸ノ二ツノ鉛球ヲ鑄直シテ高サ 6 寸ノ直圓壔ヲ作ルトキ，ソノ直圓壔ノ半徑ヲ求メヨ．且前ノ二ツノ球ノ表面積ノ和ハ直圓壔ノ全表面積ニ等シキコトヲ證セヨ。

(12) 次ノ諸立體ノ體積ヲ求ム。

a) 一邊 a ナル等邊三角形ガ，ソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體。

b) 一邊 a ナル等邊三角形ガ，ソノ一頂點ヲ過リソノ對邊ニ平行ナル一直線ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體。

c) 一邊 a ナル正方形ガ，ソノ一ツノ頂點ヲ過リテ對角線ニ平行ナル一直線ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體。

d) 一邊 a ナル正六角形ガソノ一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキニ生ズル立體。

(13) 地球ヲ半徑 4000 哩ノ球ト考フルトキ，ソノ熱帶及ビ溫帶ノ面積ヲ計算セヨ。 但 $\sin 23°30' = 0.39875$, $\sin 60°30' = 0.91706$.

(14) 地球ヲ球ト假定シ，且北極星ハ天球ノ北極ニアリト假定スルトキハ，或地點ニ於ケル北極星ノ高度ハソノ地點ノ緯度ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(15) 雨天ニ屋外ニ置キタル口徑 1 尺，底徑 6 寸，深サ 8 寸ナルばけつニ水ノ溜レルコト，ソノ深サノ半分ニ至リシト云フ．一坪ノ面積ノ中ニ降レル雨量ハ幾斗幾升ナルカ．但 1 升ヲ 64.8 立方寸トシテ計算セヨ。

(16) 球トコレニ外接スル立方トノ面積ノ比及ビ體積ノ比ハ何レモ $\pi:6$ ナルコトヲ證明セヨ.

(17) 底面ノ半徑 5 寸, 高サ 1 尺 2 寸ノ直圓錐ニ內接スル球ノ面積及ビ體積ヲ求ム.

補習問題

(1) AB, AC ハ 45° ノ角ヲナス二ツノ直線ニシテ AB ノ長サハ 15 糎ニ等シ. 今 B ニ於テ平面 BAC ニ垂線 BD ヲ引キソノ長サヲ 10 糎ニ等シクシ, D ヨリ AC ニ垂線 DE ヲ引クトキ DE ノ長サヲ求ム.

(2) ABCD ハ四面體ニシテ ∠BAC, ∠BDC ノ二等分線ハ同一ノ點ニ於テ BC ト交ル. 然ルトキハ ∠ABD, ∠ACD ノ二等分線ハ又 AD 上ノ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證明セヨ.

(3) 一平面外ノ一定點ヨリ, コノ平面上ノ定點ヲ過リ, コノ平面上ニアル直線ヘ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム.

(4) 與ヘラレタル一直線ヲ過ギ且二ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ナル平面ヲ作レ.

(5) 同一ノ平面上ニアラザル三ツノ平行直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

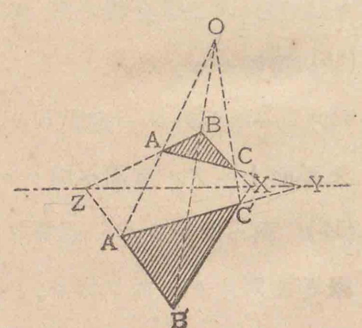
(6) 一定ノ長サノ線分ノ兩端ガソレゾレ同一平面上ニアラズシテ直交スル二直線上ヲ運動スルトキハ, ソノ中點ハ常ニ一ツノ定圓周上ニアルコトヲ證明セヨ.

(7) A, B ハソレゾレ二平面 P, Q ノ上ニアル點ナリ, P, Q ノ交リ上ニ一點 C ヲ AC + CB ガ最小ナル様ニ定メヨ.

(8) 二點 A, B 及ビ一直線 a ハ同一平面上ニアラザルトキ, a 上ニ一點 C ヲ AC + CB ガ最小ナル様ニ定メヨ.

(9) AB, BC, CD ハ立方ノ稜ニシテ AD ハソノ對角線ナルトキ, 平面 ABD ト平面 ACD トノナス角ハ 60° ナルコトヲ證明セヨ.

(10) △ABC, △A′B′C′ ハ同一平面上ニアラザル二ツノ三角形ニシテ, ソノ平面ハ平行ナラズ, 且三直線 AA′, BB′, CC′ ハ同一點ヲ過ル. 然ルトキハ AB ト A′B′, BC ト B′C′, CA ト A′C′ トノ交點ハ同一直線上ニアリ. コレヲ證明セヨ.



(11) 立方ト正八面體トガ同一ノ球ニ内接スルトキハ, ソノ表面積ノ比ハソノ體積ノ比ニ等シキコトヲ證明セヨ.

(12) 直三角壔ノ底面ハ半徑 5 寸ナル圓ニ内接スル正三角形ニシテ, ソノ側面積ハ 135 平方寸ナルトキ, ソノ角壔ノ高サヲ求ム.

(13) 直六面體ノ三稜ノ比ハ 3:4:5 ニシテソノ總表面積ハ 2350 平方寸ナルトキ, ソノ三稜ノ長サ及ビ體積ヲ求ム.

(14) 平行六面體内ニ任意ニ一點ヲトリテ, コレヲ各頂點ト結ブトキニ生ズル六ツノ四角錐ノ中, 相對スル面ヲ底面トスル二ツノ角錐ノ和ハ相等シ. コレヲ證明セヨ.

(15) 底面ノ一邊 5 寸, 高サ 3 寸ナル正三角錐ノ體積ヲ求ム.

(16) 斜角壔ノ底面ハ半徑 6 寸ナル圓ニ内接スル正六角形ニシテ側稜ハ 8 寸, ソノ底面上ニ於ケル正射影ハ 3 寸ナルトキソノ斜角壔ノ體積ヲ求ム.

(17) 正四面體ノ一ツノ頂點ヨリソレニ對スル面ニ引ケル垂線ノ長サ 5 糎ナルトキ, ソノ總表面積及ビ體積ヲ求ム.

(18) 一稜ノ長サ 2 尺ナル立方ヨリ, ソノ一頂點ニ於テ出會フ三稜ノ中點ヲ過ル平面ニテ截リトリタル三角錐ノ體積ヲ求ム.

(19) 高サ 180 呎ノ正角錐臺狀ノ煙突アリ, ソノ上底及ビ下底ハソレゾレ一邊 10 呎, 16 呎ノ正方形ニシテ, ソノ煙道ハ

底面ノ一邊 6 呎ノ正方形ナル直角壔ナリト云フ．コノ煙突ノ實質ノ體積ヲ求ム．

(20)　一對角線ノ長サ 30 糎ナル立方ノ體積及ビ表面積ヲ求ム．

(21)　四面體ノ一ツノ頂點ニ於ケル三ツノ平面角ガ直角ナルトキハ，ソノ頂點トソノ對面ノ垂心トヲ結ブ直線ハコノ面ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ．

(22)　四面體ノ相對スル二双ノ稜ガ互ニ垂直ナルトキハ，他ノ一双モ亦垂直ナルコトヲ證明セヨ．

(23)　一ツノ線分ノ平方ハ，互ニ直角ニ交ル三ツノ直線ノ各ノ上ニ投ズルソノ線分ノ正射影ノ平方ノ和ニ等シキコトヲ證明セヨ．

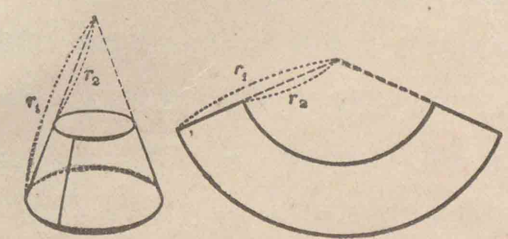
(24)　四面體ノ各頂點トコレニ對スル面ノ重心トヲ結ビツクル直線ハ同一ノ點ヲ過リ，コノ點ニ於テ各 3 ト 1 トノ比ニ分カタルヽコトヲ證明セヨ．

〔注意〕　コノ點ヲ四面體ノ重心ト云フ．

(25)　四面體ノ重心ト，コノ體ヲ截ラザル平面トノ距離ハ，各頂點トコノ平面トノ距離ノ和ノ四分ノ一ニ等シキコトヲ證明セヨ．

(26)　直圓錐ノ體積ハ 314，高サハ 3 ナルトキソノ側面積ヲ求ム．　但 $\pi = 3.14$．

(27)　直圓錐臺ノ側面積ハ，ソノ兩底面ノ周ノ和ト斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シキコトヲ，次ノ展開圖ニ就キテ説明セヨ．

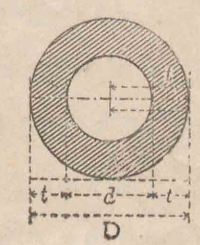


扇形ノ角ヲ α° トスレバ，側面積 $S = \dfrac{\alpha}{360}\left(\pi r_1^2 - \pi r_2^2\right)$

$$= \frac{\alpha}{360}\pi(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\left(\frac{\alpha}{360}2\pi r_1 + \frac{\alpha}{360}2\pi r_2\right).$$

(28)　高サ 1 寸 2 分，底面ノ直徑 1 寸 6 分ナル直圓錐ヲ，ソノ底面ニ平行ニシテコレヨリ 9 分ノ距離ニアル平面ニテ截ルトキニ生ズル直圓錐臺ノ側面積及ビ體積ヲ求ム．

(29)　直圓壔形ノ管アリ(兩底面ナキ)，ソノ外法ノ直徑ハ D，内法ノ直徑ハ d，厚サハ t，長サハ l ナルトキハソノ管ノ實質ノ體積ハ $\dfrac{1}{2}\pi l t(D + d)$ ナルコトヲ證明セヨ．



(30) 直徑 16 寸, 長サ 12 尺ノ直圓壔形ノ材木ヲ創リテ造リ得ベキ最大ナル正四角壔ノ體積ヲ求ム。

(31) 直徑 1 尺, 長サ 6 尺ノ直圓壔形ノ材木ヲ創リテ造リ得ベキ最大ノ正六角壔ノ體積ヲ求ム。

(32) 底面ノ半徑 5 寸, 斜高 14 寸ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。但シ 1 立方寸ニ滿タザル端數ハ四捨五入スベシ。

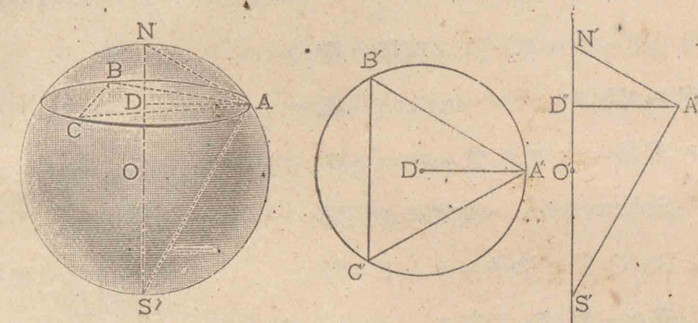
(33) 直徑 6 寸ナル直圓壔形ノ桶ノ一部ニ水ヲ入レタルアリ。今一ツノ物體ヲ全部コノ水中ニ沒入セシニ水面ハ前ヨリ 2 寸高クナレリト云フ。ソノ物體ノ體積ヲ求ム。

(34) 矩形ノ鐵葉板アリ, ソノ二邊ハ a, b ニシテ $a>b$ ナリ。コレヲ卷キテ直圓壔ノ茶筒ヲ作ラントスルニ二ツノ方法アリ。何レガ容積大ナルカ。但合セ目ハ重リ合ハズト假定ス。

(35) 水中ニ浮ブ長サ 3 米, 直徑 30 糎ノ直圓壔ノ材木ヲ見ルニ, ソノ底面ノ鉛直直徑ハ 20 糎ダケ水中ニアリ。今ソノ材木ニヨリ排除セラレタル水ノ體積及ビ重サヲ求ム。

(36) 長サ 8 間 幅 5 間ノ敷地内ニ直徑 1 丈 8 尺, 深サ 5 尺ノ圓池ヲ掘リ, ソノ掘リ上ゲタル土ヲ以テ殘リノ地面ノ地上ゲヲナストキハ地面ノ高マルコト幾何ナルカ。

(37) 與ヘラレタル實球體ノ直徑ハ次ノ方法ニヨリテ求ムルコトヲ得。



I. 球面上ニ任意ノ點 N ヲトリ, N ヲ極トスル小圓 ABC ヲ畫ク。〔兩脚器ヲ用フルカ又ハ 330 條ノ注意ニヨル。〕

圓周 ABC 上ニ任意ノ三點 A, B, C ヲトリ, 兩脚器ヲ用ヒテ弦 AB, BC, CA ノ長サヲ求ム。

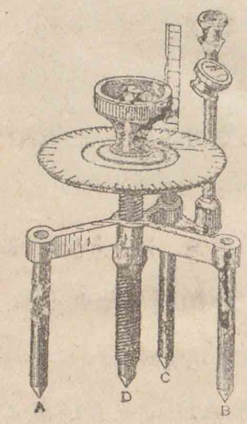
II. 紙面上ニコノ三ツノ弦ヲ三邊トスル三角形 A'B'C' ヲ作リ, ソノ外接圓ヲ畫キ外心 D' ヲ求ム。A'D' ヲ結ブ。

III. 又紙面上ニ D'A' ニ等シク D''A'' ヲ引キ, D'' ニ於テ D''A'' ニ垂線 N'S' ヲ引ク。而シテ弦 NA ノ長サヲ兩脚器ニテ求メ, コノ長サヲ半徑トシ A'' ヲ中心トシテ圓ヲ畫キ N'S' ト N' ニ於テ交ラシメ, A''N' ヲ結ブ。A'' ニ於テ

A″N′ ニ垂線ヲ引キ N′S′ ト S′ ニ於テ交ラシム。然ルトキハ N′S′ ハ所要ノ直徑ナリ。

コレヲ證明セヨ。

(38) 與ヘラレタル球ノ直徑ハ圖ニ示スガ如キ Spherometer ト稱スル器械ニヨリテ求ムルコトヲ得 Spherometer ハ固定セル三脚 A，B，C 及ビ捻子ニテ上下ニ動カシ得ル一脚 D ヲ有ス。コレニテ球面ノ直徑ヲ求メンニハ，先ヅ A，B，C ノ三脚ノ尖端ヲ球面上ニ置キ，次ニ捻子ヲ動カシテ D 脚ノ尖端ヲ球面上ニアラシム。而シテ D 脚ノ尖端ノ平面 ABC ヨリノ距離ヲ度盛ニテ見ルトキハ，コレニヨリ所要ノ直徑ヲ決定シ得ベシ。コノ理由ヲ證明セヨ.



(39) 一定直線ヲ含ム平面ニヨリテ定球ヲ截ルトキ，ソノ截面ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

(40) 一定直線ヲ含ム平面ニヨリテ定球ヲ截リ，ソノ截面ノ

半徑ヲシテ與ヘラレタル線分ト等シカラシメヨ。

(41) 二定點ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡 (空間ニ於ケル) ヲ求ム。

(42) 球ノ體積ト，ソレニ內接スル立方ノ體積トノ比ヲ求ム。

(43) 直徑 3 寸ノ鉛球ヲ打延バシテ厚サ 1 分ノ平圓板ヲ作ラントス. 直徑何寸ノ圓板ヲ得ベキカ.

(44) 立方ト球トガ等積ナルトキ，立方ノ一稜ト球ノ半徑トノ比ヲ求ム。

(45) 地球，月，太陽ノ半徑ノ比ヲ 11：3：1203 トスルトキ，ソノ體積ノ比ヲ求ム。

(46) 正方形及ビソノ內接圓及ビ外接圓ガ，ソノ對角線ヲ軸トシテ廻轉スルトキニ生ズル三ツノ立體ノ表面積及ビ體積ノ比ヲ求ム。

(47) 一稜 $2a$ ナル正四面體ニ內接スル球及ビ外接スル球ノ半徑ヲソレゾレ r 及ビ R トスレバ $R = 3r = \frac{a}{2}\sqrt{6}$ ナルコトヲ證明セヨ。

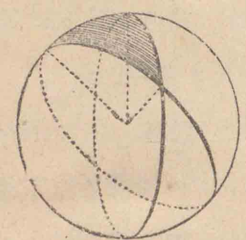
(48) 球面上相交ル二ツノ圓周ノ一ツノ交點ニ於テ各圓ニ引ケル切線ノナス角ハ，他ノ交點ニ於テ各圓ニ引ケル切線ノナス角ニ等シキコトヲ證明セヨ. [同一平面上ニアル二ツノ圓

ニツキテモ同樣ノ定理ヲ得.〕

〔注意〕 コノ角ヲ二ツノ圓周ノナス角トイヒ, 圓周ヲソノ邊, 圓周ノ交點ヲソノ頂點ト云フ.

(49) 二ツノ大圓ノナス角ハ (a) ソノ平面ノナス角ニ等シ. (b) ソノ頂點ヲ極トスル大圓周ノ, ソノ二邊ノ間ニ夾マレタル弧ガ中心ニ於テ對スル角ニ等シ. コレヲ證明セヨ.

(50) 球面上三ツノ大圓ノ劣弧ニヨリテ圍マレタル球面ノ部分ヲ球面三角形ト云フ. コノ三ツノ弧ヲ球面三角形ノ邊, ソノ二邊ノナス角ヲ球面三角形ノ角, ソノ角ノ頂點ヲ球面三角形ノ頂點ト云フ. 今 球面三角形ニ就キテ次ノ定理ヲ證明セヨ.



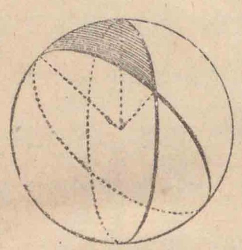
球面三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ.

ノ定理ヲ得.〕

ノ角ヲ二ツノ圓周ノナス角トイヒ，圓周ヲツ
點ヲソノ頂點ト云フ.

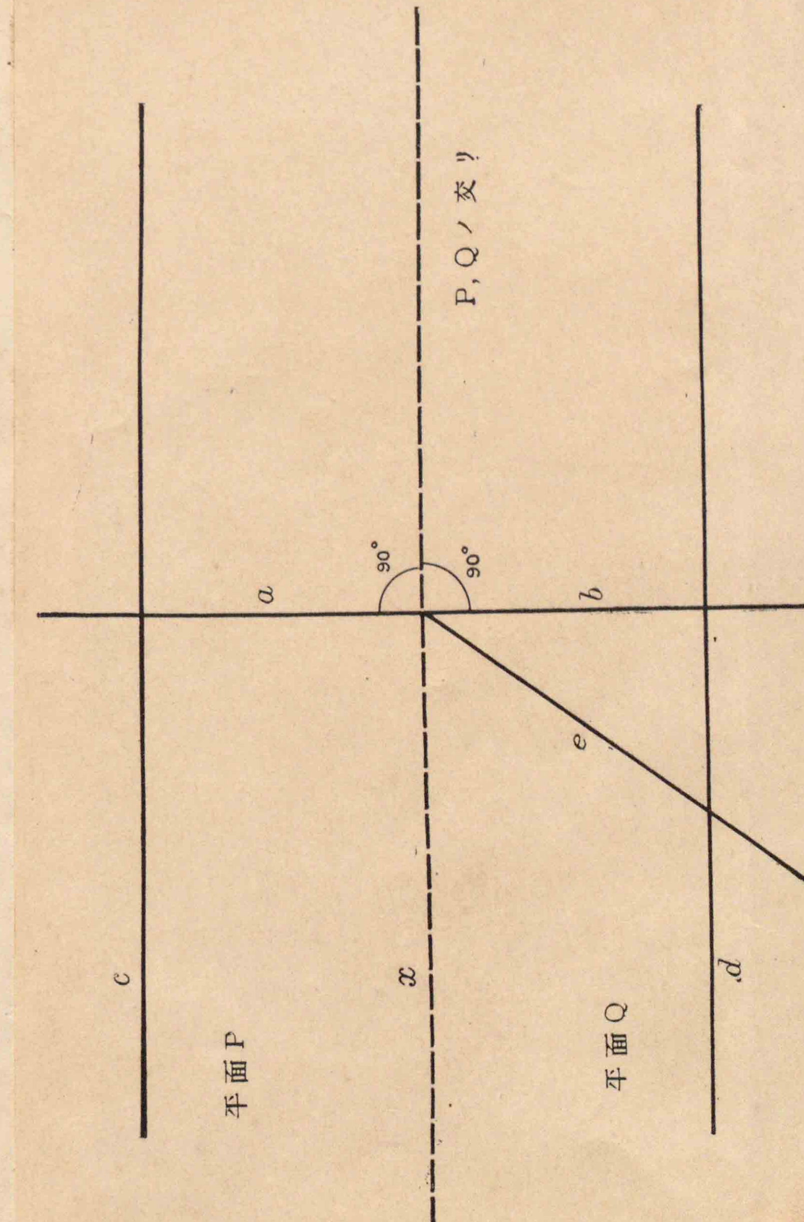
圓ノナス角ハ (a) ソノ平面ノナス角ニ等シ.
極トスル大圓周ノ，ソノ二邊ノ間ニ夾マレタ
テ對スル角ニ等シ．コレヲ證明セヨ.

ツノ大圓ノ劣弧ニヨ
球面ノ部分ヲ球面三
ノ三ツノ弧ヲ球面三
二邊ノナス角ヲ球面
ノ角ノ頂點ヲ球面三



フ. 今 球面三角形ニ就キテ次ノ定理ヲ證明

邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ.



海軍兵学校

※幾何學教科書〔立體〕奥付※

大正6年11月2日發行
大正6年12月24日訂正再版發行
大正8年12月18日訂正印刷
大正8年12月21日訂正三版發行
大正9年2月25日訂正印刷
大正9年2月28日訂正四版發行

著作者 黒田稔

發行者 山本慶治
東京市神田區錦町一丁目六番地

印刷者 新井長治郎（東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地）

印刷所 株式會社 秀英舍（東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目二十七番地）

發行所 培風館
東京市神田區錦町一丁目六番地
電話神田三七七四
振替東京三二六一七

定價 ★金34錢★
昭和二年度臨時定價 金58錢

昭和三年度臨時定價金五拾七錢