GEOMETRY

大正五年十一月三十日
文部省檢定濟
師範學校，中學校教科用書

幾何學
新
教科書
平面

菊池大麓
著

第四版

大日本圖書株式會社

緒　言

明治二十一年文部省初メテ余ノ編纂シタル幾何學教科書ヲ發行シタルヨリ此ニ二十七年餘ナリ. 其後明治三十二年ニ至リ余ハ更ニ小教科書ヲ編纂發行シタリ; 後者ハ中學教育ノ程度ニ隨ヒ內容ノ分量ヲ減ジタリト雖モ大體ノ組織ニ於テハ前者ト大差ナカリシ.

然ルニ近時幾何學ノ基礎ニ關スル研究大ニ其ノ步ヲ進メ, 到底イウクリッドノ公理ヲ以テ完全ナルモノトシテ滿足ス可カラザルニ至レリ. 是ニ於テカ幾何學ヲ其ノ基礎ヨリシテ教授セントスルモ中學生徒ノ知力發達ノ程度ニ於テハ之ニ對シ興味ヲ感ゼシムルコトハ扨置キ, 之ヲ了解セシムルコトスラモ極メテ困難ナルコトトナリ, 從前ノ幾何學教授ノ方針ヲ固守スルコトノ可否ハ數學教育上ノ一大問題トナレリ. 甚シキニ至リテハ, 從前ノ演繹的幾何學ハ全然之ヲ廢ス可シト

主張スル者サヘ出デ來タレリ; 然レドモ斯クノ如キハ普通敎育ニ於ケル幾何學敎授ノ効用ノ少クトモ一半ヲ減却セントスルモノト云ハザル可カラズ. 幾何學ハ吾人ノ棲息スル空間ノ性質ヲ知ラシムルト同時ニ又演繹推理法ノ最好ノ演習ナルコトヲ忘ル可カラズ, 是レ實ニ其ノ普通敎育ニ於ケル重要ナル一學科タル以所ナリ.

是ニ於テカ中等學校ノ幾何學敎授ニ於テ推理ノ出發點ヲ幾何學ノ論理的哲學的基礎ヨリセズシテ, 寧ロ夫レ等ヨリ推定ス可ク而カモ生徒ニアリテハ直覺ニ依リテ眞ナリト許容ス可キ命題ヨリス可シトノ議論大ニ勢力ヲ得ルニ至レリ.*

余ハ幾何學ノ基礎ニ關スル研究ノ發達ニ鑑ミ, 歐米敎育界ノ議論ヲ參考シ, 又吾邦中等敎育ノ趨勢ヲ思ヒ, 此ニ一大決心ヲ以テ本書ヲ編纂スルニ至レリ. 內容ノ改正ハ今一々此ニ擧グ可キニ非ズト雖モ其ノ主要ナルモノハ從來ヨリモ公理ト

* 東洋學藝雜誌第四百二號乃至第四百五號揭載英國文部省ノ「中學校に於ける幾何學の敎へ方に關する覺書」參照.

シテ假定或ハ許容スル事項ノ範圍ヲ擴メ生徒ガ直覺的ニ認メ得ル事項ヲモ一々證明スルノ煩ヲ避ケ, 之ヲ公理的トシタルコトト, 面積及ビ比例ニ於テ通約ス可カラザル量ニモ適用ス可キイウクリッド流ノ巧妙ナル而カモ生徒ハ其ノ妙味ヲ解スル能ハザルノミナラズ却テ其ノ了解ニ困ム如キ方法ヲ捨テ, 通約ス可キ量ニ就テ代數學的方法ニ依リテ說明シ通約ス可カラザル量ニ就テハ公理的ニ之ヲ假定シタルコト, 等ナリ. 然レドモ余ハ常ニ之レ公理的假定ニシテ論理上此ニ證明サレザルモノ有ルコトヲ明記セリ, 此點ハ充分ナル注意ヲ要スルモノナレバナリ.

尙ホ本書ニ於テハ生徒ニ多クノ事項ヲ授クルヨリモ寧ロ其ノ應用ノ能力ヲ發達セシムルニ力ムルノ方針ヲ取リタリ. 此主意ニ依リ證明ノ際ニモ餘リ管管シキ事ハ之ヲ省略シ生徒ヲシテ自カラ之ヲ補充セシムルコトトセリ. 演習問題ノ容易ナルモノヲ增加シタルモ亦之ニ外ナラズ; 而シテ授業ノ時數及ビ生徒ノ學力等ニ依リテ取捨・

スル ノ便宜ヲ謀リ大小ノ活字ヲ用キタリ.

本書中不完全ナル所固ヨリ鮮少ナラザルベシ;本書ヲ使用サルル諸君ニ於テ改良ヲ要ス可キ點ニ心付カルルコトアラバ教示ノ勞ヲ惜マレザランコト著者ノ切ニ希望スル所ナリ.

大正四年十月

著者識

第二版ニ於テ大ニ訂正ヲ加ヘ,第三版ニ於テハ更ニ多少ノ訂正ヲ施シタル外雜問題二百八十餘題ヲ加ヘタリ,是レ本文中ニ揭載シタル諸問題ヲ補ヒ或ハ之ヲ換フ可キ必要有ル場合ニ於テ敎師ノ選擇スル材料ニ供シ,又ハ生徒自ラ學力補足ノ爲練習スル用ニ資センガ爲ナリ.

大正五年九月

著者識

目次

第一編　直線形

第一節　緒論

1　幾何學ハ物ノ形,大サ及ビ位置ニ關スル眞理ヲ攻究スル學科ナリ. 凡ソ吾人ノ觀察スル物ノ諸性質及ビ之ヨリ起リ來ル所ノ種々ノ關係ヲ攻究スルハ理學ノ本分ニシテ,其物ノ何レノ性質ニ著眼スルカニ從テ之ガ分科ヲ生ズ. 幾何學ニ於テハ物ノ諸性質ノ中ニ就テ唯其ノ形,大サ及ビ位置ノ三ツニノミ注目シ,他ハ之ヲ顧ミザルナリ;卽チ幾何學上物體ヲ觀察スルニハ,其物體ガ充タシ居ル所ノ空間ノ部分ガ緊要ナルモノニシテ,之ヲ充タス物質ノ如何ハ更ニ關セザルナリ. 故ニ或ハ　幾何學ハ空間ノ性質ヲ攻究スル學科ナリト云フ.

2　斯クノ如ク物體ヲ組織スル物質及ビ其物

質ニ屬スル性質ニ關セズ,唯其ノ形,大サ及ビ位置ニ就テノミ考フル時ハ之ヲ**立體**ト名ク. 幾何學ニ於テハ總テノ物體ヲ立體トシテ考フ.

3 立體ハ空間ニ於テ若干ノ場所ヲ充タス卽チ空間ノ一部分ナリ;其ノ境界ヲ**表面**ト名ク.

表面ハ一ッノ立體ノ充タス空間ノ部分ト他トノ境界ナルヲ以テ表面ニハ厚サナシ. 厚サハ無シト雖モ廣ガリ有リテ其ノ上ニ諸部分ヲ區畫スルコトヲ得;而シテ表面ノ一部分ト他ノ部分トノ境界ヲ**線**ト云フ. 二ッノ表面ノ交ル所モ亦線ナリ.

線ニハ厚サ無キハ勿論又幅モ無ク,唯長サ有ルノミ. 線ノ上ニモ亦諸部分有リテ,二ッノ部分ノ境界ハ**點**ナリ.

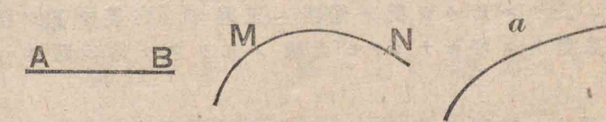
點ニハ厚サモ幅モ無ク又長サモ無シ,卽チ空間ニ於テ少シノ大サヲモ有セズ,唯位置有ルノミ. 線ノ交ル所及ビ線ノ端ハ點ナリ.

立體,表面,線及ビ點,及ビ此等ノ任意ノ集合ヲ**圖形**ト名ク.

4 以上ノ如ク,立體,表面,線及ビ點ハ吾人ガ想像ヲ以テ物質ト離シテ心ニ想見スル抽象的ノモノナリ. 表面ニハ厚サ無キコト上述ノ如シ;紙ノ如キモノノ窮リ無ク薄クナリタルモノト考フルコトヲ得ベシ. 線ニハ厚サモ幅モナシ;絲又ハ針金ノ如キモノノ限リ無ク細クナリタルモノト考フルコトヲ得ベシ. 點モ亦實質點(粒ノ如キ)ノ無限ニ小クナリタルモノト考フルコトヲ得ベシ.

5 幾何學ヲ學ブニ際シテ,紙上ニ鉛筆,ペン,烏口,等ヲ以テ線(スヂ)ヲ引キテ線ヲ表ハスト雖モ之レ固ヨリ眞ノ幾何學的ノ線ニ非ズ,唯假ニ之ヲ代表スルニ過ギズ.

同樣ニ,點モ亦多少ノ大サアルモノヲ以テ假ニ其ノ位置ヲ示ス,而シテ之ニ A, B, C, 等ノ文字ヲ附シ, A點, B點, 等,或ハ點A, 點B, 等ト呼ビテ之ヲ指示ス.



線ハ其ノ上ノ點ノ文字ヲ取リテ AB 線又ハ線 MN, 等ト呼ブ,或ハ之ニ $a, b, c,$ 等ノ文字ヲ附シテ a 線又ハ線 a 等ト呼ブコトアリ.

6　線ノ中ニ於テ最單ナルモノヲ**直線**トス.

直線トハ眞直(マツスグ)ナル線ト云フコトニテ眞直トハ何人モ稍漠然ト其ノ意味ヲ知ルト雖モ嚴正ナル**定義***ヲ下スコトハ甚ダ困難ナリ. 因リテ次ノ**公理****ヲ以テ之ガ標準ヲ定ム.

公理　二ッノ點ヲ通リ一ッノ直線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ッニ限ル.

言ヒ換ヘレバ,二點ハ一直線ヲ確定ス.

7　我々ガ實地ニ直線ヲ引クニハ定規ヲ用キル;與ヘラレタル二點ヲ通ル直線ヲ引クニハ定規ノ緣ヲ其二點ニ當テ烏口或ハ鉛筆ヲ其緣ニ沿フ

*或ル語ニ定義ヲ下ストハ其ノ意義ヲ定ムルコトナリ. 幾何學ニ於テハ用キル所ノ術語ニ正確ナル定義ヲ下シ以テ推理ノ基礎トス可キナレドモ「直線」ノ如ク之ヲ爲シ難キモノアリ.

**公理トハ證明ヲ用キズシテ眞ナリト許容スル事項ナリ.

テ動カシ,其ノ痕ガ直線ナリトス. 而シテ之ヲ驗スニハ定規ノ緣ノ他ノ部分ヲ二點ニ當テ,又定規ヲ反對ノ側ヨリ之ニ當テテ前ニ引キタル線ト一致スルヤ否ヤヲ試ム可シ; 二點ハ一直線ヲ確定スルヲ以テ,之レ等ガ皆一致セザル時ハ其ガ直線ナラザルコトヲ示ス. 一度定規ノ緣ガ正シク直線ナルコトヲ確メタル時ハ之ヲ當テテ以テ線ノ直線ナルカ否カヲ驗スヲ得.

二ッノ點ヲ通ル直線ヲ引クコトヲ其二點ヲ結ビ付クルト云フ.

8　斯ク幾多ノ直線ヲ取ルモ其ガ同ジ二點ヲ通ル時ハ皆一致スルヲ以テ

總テノ直線ハ合同ナリ

ト云フ. 同一直線ノ諸部分ガ互ニ合同ナルコトモ亦此ノ中ニ含マル.

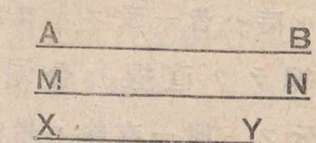
9　直線ハ双方ヘ窮リ無キモノトス: 特ニ直線ノ或ル一部分ヲ考フル時ハ之ヲ**線分***ト云ヒ,

*線分ハ或ハ有限直線トモ云フ.

其ノ端ヨリ外ヘ引キ延バシタル部分ヲ其ノ **延長** ト云フ.

10 二ツノ線分ノ長サヲ比較スルニハ一ツヲ他ノ上ニ重ネ, 其ノ一端ヲ相合セシム. 他ノ端モ亦相合スル時ハ二線分ハ相等シ; 他ノ端ガ相合セズシテ, 一ツガ他ヨリ外ニ出ル時ハ其ノ端ガ外ニアル方ノ線分ガ他ヨリ大ナリ或ハ長シ, 内ニアル方ガ他ヨリ小ナリ或ハ短シト云フ.

實地ニ於テハ二ツノ線分ヲ重ヌルコト困難ナリ; 因リテ仲介者ヲ用キル, 度器(モノサシ)又ハ兩脚規ノ如キ是ナリ. 兩脚規ハ又一直線ノ上ニ任意ノ長サヲ截リ取ル爲ニ用キルコトヲ得.



=, >, < ヲ「等シ」「ヨリ大ナリ」「ヨリ小ナリ」ノ略記トシテ用キルコト有リ. 例ヘバ AB = MN ハ線分 AB ガ線分 MN ニ等シキコトヲ; AB > XY ハ線分 AB ガ線分 XY ヨリ大ナルコトヲ; XY < AB ハ線分 XY ガ線分 AB ヨリ小ナルコトヲ表ハス.

又 +, − ヲ用キルコトアリ, 何ト何ノ和或ハ差ノ記號ナリ.

11 公理 二ツノ點ヲ結ビ付クル線分ノ長サハ其二點ノ間ノ最短距離ナリ.

之ヲ單ニ其二點間ノ **距離** ト稱ス.

12 演習トシテ, 直線ヲ引キ其ノ上ニ, (i) 直接ニ度器ヲ以テ, 又 (ii) 兩脚規ヲ用キテ種々ノ長サ(例ヘバ次ノ如キ)ヲ截リ取ル可シ. (iii) 又目分量ヲ以テ之ヲ截リ取リ兩脚規或ハ度器ヲ以テ之ヲ驗ス可シ.

7分5厘; 3寸; 2寸7分; 2寸5分; 1寸8分; 1寸5分; 1寸2分; 10 *cm.*; 7 *cm.*; 5 *cm.*; 4 *cm.*; 2.5 *cm.*; 1 *cm.*; 等.

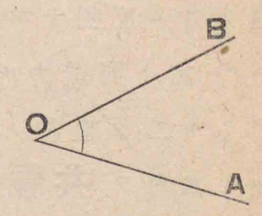
13 表面ノ中ニ於テ最單ナルモノヲ **平面** トス. 平面トハ平(タヒラ)ナル表面ト云フコトニテ, 例ヘバ鏡ノ面ノ如キモノナリ. 幾何學ニ於テハ, 平面トハ其ノ上ニ任意ニ二ツノ點ヲ取ル時ハ之ヲ結ビ付クル直線ガ常ニ全ク其表面上ニ在ルモノトス. 木工ガ其ノ削リタル板ガ平面ナルカ否ヲ驗ス爲ニ之ニ定規ノ緣ヲ所々ニ當テテ試ミルハ卽チ此定義ヲ實地ニ應用スルモノナリ.

14 吾人ハ先ヅ一平面上ニ在ル圖形ニ就テ論ズベシ. 幾何學ノ此部分ヲ**平面幾何學**ト名ク. 一平面上ニ限ラザル圖形ヲ論ズルモノヲ**立體幾何學**ト云フ.

第二節 角

15 一ツノ點ニ於テ出會フ二ツノ直線ハ**角**ヲ爲ス又ハ角ヲ夾ムト云フ. 其點ヲ角ノ**頂點**, 其二直線ヲ角ノ**邊**ト云フ.

圖ノ如ク二直線 OA, OB ガ O ニ於テ出會フ時ハ其ノ爲ス角ヲ角 AOB ト呼ブ; O ハ其ノ頂點, OA, OB ハ其ノ二邊ナリ. 或ハ角ヲ呼ブニ單ニ其ノ頂點ノ文字ヲ以テスルコトアリ, 例ヘバ此角ヲ角 O ト云フガ如シ.

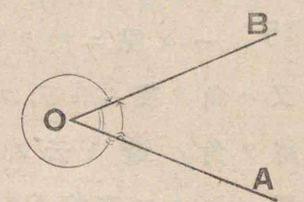


角ノ略記ニ ∠ ヲ用キ, 角 AOB ヲ ∠AOB ト記スルコトアリ, 或ハ AOB ノ上ニ ︿ ヲ附シ $\widehat{AOB}$ ト記スルコトアリ.

16 一ツノ直線ガ最初一ツノ角(例ヘバ上圖ノ角 AOB)ノ一邊(例ヘバ OA)ト合シタル位置ニ在リ, 頂點ヲ中心トシテ廻轉シ, 他ノ邊(OB)ト合スル時

ハ，其直線ハ頂點ノ廻リニ此角 (AOB) ダケ廻轉シタリト云フ，或ハ此角ヲ畫キタリト云フ．角ノ大小ハ此廻轉ノ度ニ同ジ．

此廻轉ノ仕方ニ圖ニ於テ矢ヲ以テ示ス如ク二ッアリ，一ッハ時計ノ針ノ廻リ方ニ反對ナルモノ，



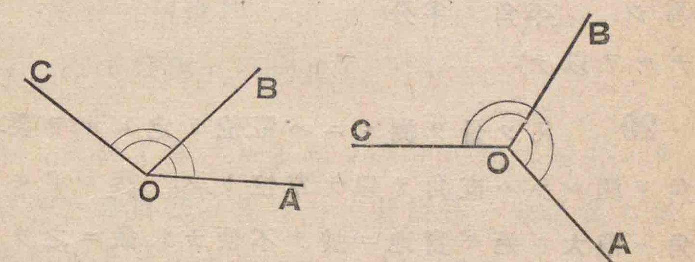
一ッハ之ト同樣ナルモノナリ．故ニ一ッノ點ヨリ引ケル二ッノ直線ノ爲ス角ハ實ニ二ッ有リ；斯クノ如キ二角ヲ **共軛角** ト稱シ，其ノ大ナルモノヲ **優**(共軛)角ト云ヒ，小ナルモノヲ **劣**(共軛)角ト云フ．單ニ二ッノ直線ノ爲ス角ト云ヘバ通常劣角(圖ニ於テ二重線ヲ以テ示セルモノ)ヲ指スモノト知ル可シ．

17 二ッノ角ノ大小ヲ比較スルニハ，線分ノ長サヲ比較スル時ノ如ク〔§10〕*，之ヲ重ネ合ハス可シ；卽チ一ッノ角ヲ他ノ上ニ頂點ト一邊ガ一致

* 括弧〔 〕內ノ§ハ條ノ記號：〔§10〕ト記シタルハ第10條ヲ參照ス可シトノコトナリ；以下同ジ．

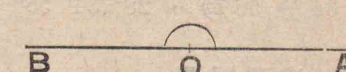
スル樣ニ重ネ，第二邊モ亦一致スル時ハ二角ハ合同ニシテ相等シ；第二邊ガ一致セザル時ハ其ガ外ニ落ル方ノ角ガ他ヨリ大ナリトス．

18 圖ノ如ク，三直線 OA, OB, OC ガ一點 O ニ於テ出會ヒ，角 AOB, BOC ヲ爲ス時ハ此二角



ヲ **接角** ト稱ス；角 AOC ヲ二ッノ接角 AOB, BOC ノ **和** トス．

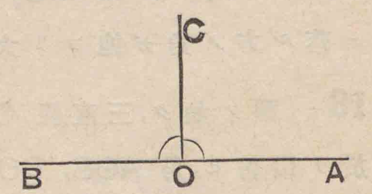
19 角ノ二邊ガ一直線ヲ爲ス時ハ其角ヲ **平角** ト云フ．總テノ直線ハ合同ナルヲ以テ〔§8〕，



總テノ平角ハ合同ニシテ相等シ．

平角ノ半分ヲ **直角** ト名ク．圖ニ於テ，角 AOB

ガ平角ニシテ, 角 AOC ガ角 BOC ニ等シキ時ハ角 AOC 及ビ角 BOC ハ各平角ノ半分ニシテ直角ナリ.



總テノ直角ハ相等シ (平角ノ半分ナルヲ以テ).

20 凡ソ量ヲ測ルニハ單位ヲ定ムルヲ要ス. 角ヲ測ルニハ直角ヲ以テ單位トス. 然レドモ直角ハ稍大ニ過ギ實地ニ於テ不便ナリ, 故ニ之ヲ小分シテ單位ヲ設クルコト次ノ如シ. 直角ノ九十分ノ一ヲ度ト稱シ, 一度ノ六十分ノ一ヲ分(フン)ト稱シ, 一分ノ六十分ノ一ヲ秒ト稱ス. 度, 分, 秒ノ略記ヲ ° ′ ″ トシ, 數字ノ肩ニ之ヲ附ス, 例ヘバ 28度 34分 56秒ハ 28° 34′ 56″ ト記ス.

21 演習問題.

(1) 平角ハ何度ナリヤ?

(2) 直線ガ頂點ノ廻リニ一周廻轉スル時ニ畫ク角ハ何度ナリヤ? 幾直角ニ等シキヤ?

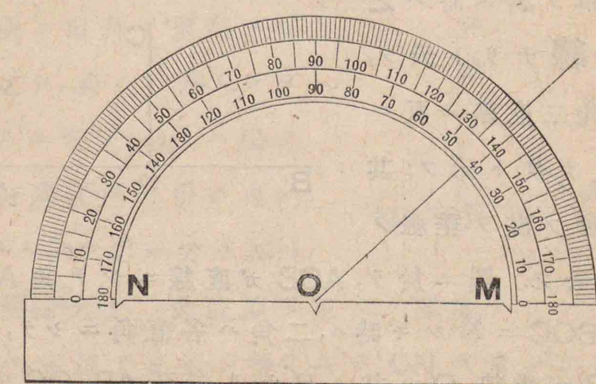
(3) 次ノ時刻ニ於テ時計ノ短針ト長針ノ間ノ角ハ何度ナリヤ?

(i) 三時. (ii) 六時. (iii) 九時. (iv) 二時. (v) 五時
(vi) 十時. (vii) 十二時十五分過. (viii) 三時半.

(4) 時計ノ長針ハ二十分間ニ何度ノ角ヲ畫クヤ? 短針ハ何度?

(5) 三十分間ニハ何度?

22 直線ヲ度ルニ度器ヲ用ヰル如ク, 紙上ノ角ヲ測ルニ分度器ヲ用ヰル. 分度器ハ普通圖ノ如キ半圓形ノモノナリ.



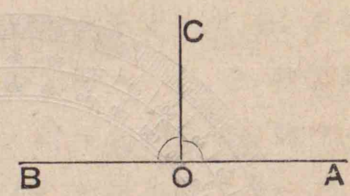
之ヲ以テ角ノ大サ卽チ度數ヲ測ルニハ分度器

ノ中心 O ヲ角ノ頂點ノ上ニ, OM ヲ角ノ一邊ノ上ニ重ネ, 他ノ邊ガ分度器ノ線ト交ル所ニ記シタル數ガ其角ノ度數ナリ.

分度器ハ與ヘラレタル角ノ度數ヲ測ル時ニ用キルノミナラズ, 度數ガ與ヘラレタル角ヲ作ルニ用キ得ルコト明ナリ.

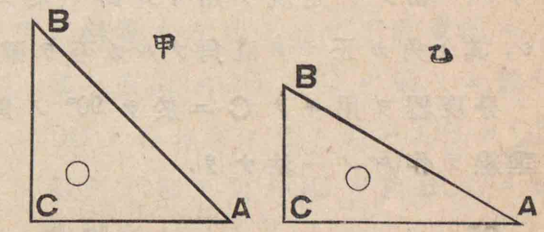
演習トシテ任意ノ角ヲ作リテ其ノ度數ヲ測リ又度數ヲ與ヘテ角ヲ作ル可シ. 且目分量ヲ以テ之ヲ測リ或ハ作ルコトヲ練習ス可シ.

23 一ツノ直線ガ他ノ一ツノ直線ノ上ニ立チテ之ト直角ヲ爲ス時ハ之ニ**垂線**ナリト云フ, 或ハ此二直線ハ互ニ**垂直**ナリト云フ; 其ノ出會フ點ヲ垂線ノ**足**ト云フ.

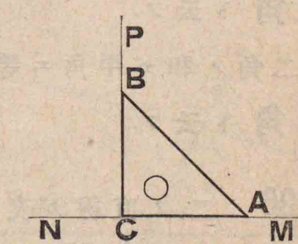


圖ニ於テ, AOB ガ直線ニシテ角 AOC ガ角 BOC ニ等シキ時ハ, 二角ハ各直角ニシテ, OC ハ AB ニ垂線, O ハ其ノ足ナリ. 又 AB, OC ハ互ニ垂直ナリ.

24 一ツノ直線ニ垂線ヲ引クニハ三角定規ヲ用キル. 三角定規ニハ二種アリ: 一ハ圖ノ甲ノ如キ形ニシテ, 角 C ハ直角, 角 A 及ビ角 B ハ何レモ直角ノ半分卽チ 45° ナリ; 一ハ乙ノ如キ形ニシテ, 角 C ハ直角, 角 A ハ 30°, 角 B ハ 60° ナリ



今一ツノ直線 MN ノ一點 C ニ於テ之ニ垂線ヲ引カントスル時ハ三角定規ノ直角ノ頂點ヲ C ニ當テ, 其ノ一邊 CA ヲ CM ニ當テ, CB ニ沿フテ直線 CP ヲ引ク可シ. CP ハ卽チ C ニ於テ MN ニ垂線ナリ.



此直線ガ正シク垂線ナリヤヲ驗スニハ, 定規ヲ裏返シ邊 CA ヲ CN ニ當テテ見ル可シ. CP ガ此位置ニ於ケル CB ト一致セザル可

カラズ, 否ザレバ垂線ナラズ; 引キ方其ノ宜シキヲ得ザリシカ或ハ定規ガ正シカラザルモノト知ル可シ. 初メテ定規ヲ用キル時ニ於テ善ク之ヲ驗シ, 其ノ角ガ正シク直角ナルカ否ヲ確ムルヲ要ス.

分度器ヲ用キテ C ニ於テ 90° ノ角ヲ作ルモ亦垂線ヲ作ルノ一法ナリ.

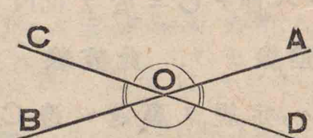
25 直角ヨリ小ナル角ヲ **銳角** ト云フ.

直角ヨリ大ニシテ平角ヨリ小ナル角ヲ **鈍角** ト云フ.

二角ノ和ガ直角ニ等シキ時ハ各、ノ角ヲ他ノ **餘角** ト云フ.

二角ノ和ガ平角ニ等シキ時ハ各、ノ角ヲ他ノ **補角** ト云フ.

26 二ッノ直線ガ交ル時ハ其ノ交點ニ於テ四ッノ角ヲ爲ス, 其ノ向ヒ合ヒノモノヲ **對頂角** ト名ク.



二直線 AB, CD ガ

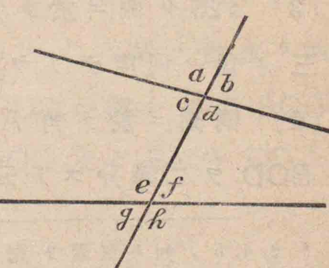
O 點ニ於テ交リ, 四ッノ角 AOC, COB, BOD, DOA ヲ爲ス. 角 AOC ト角 BOD ハ對頂角ナリ, 又角 COB ト角 DOA モ對頂角ナリ.

二ッノ對頂角ガ相等シキコトハ殆ド直覺的ニ之ヲ見ル可シ. 或ハ直線 AOB ヲ O ノ廻リニ廻轉セシメ, OA ガ OC ト合スルニ至ル時ハ OB ガ OD ト合スルコト明ナリ, 卽チ角 AOC ガ角 BOD ニ等シキコト明ナリ. 故ニ,

公理 對頂角ハ相等シ.

27 一組ノ直線ヲ截ル直線ヲ **截線** ト云フ.

一双ノ直線ヲ截ル截線ハ各交點ニ於テ四ッノ角ヲ爲ス; 此八ッノ角ニ位置ノ關係ニ依リテ夫々特別ノ名ヲ命ズルコト次ノ如シ.

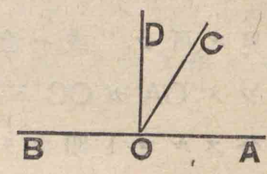


八ッノ角ヲ圖ノ如ク a, b, c, d, e, f, g, h トスル時ハ, a, b, g, h ハ **外角**; c, d, e, f ハ **內角**; c ト f, 及ビ d ト e ハ **錯角**; a ト e, b ト f, c ト g,

及ビ d ト h ハ夫々**同位角**ト云フ.

28 演習問題.

(1) 直線 OC ガ直線 AB ト O ニ於テ出會ヒ二ツノ接角 AOC, COB ヲ爲ス; DO ハ O ニ於テ AB ニ垂線ナリ. 角 AOC ガ (i) 60° (ii) 75° ナル時ハ角 COD 及ビ角 COB ハ何度ナリヤ?



(2)* 同圖ニ於テ角 AOC ヲ二等分スル直線** 及ビ角 COB ヲ二等分スル直線ハ互ニ垂直ナリト云フ; 其ノ理由ヲ說明セヨ.***

(3) §26 ノ圖ニ於テ角 COB ガ 34° ナル時ハ他ノ三ツノ角ハ何度ナリヤ?

(4) 同圖ニ於テ角 AOC ノ二等分線ノ延長ハ角 BOD ヲ二等分スト云フ; 其ノ理由如何?***

* 2, 4, 5 ノ如キ問題ヲ(圖ニ依ラザル)一般ノ詞ニテ言ヒ表ハスコトハ良キ演習ナリ.

** 略シテ角 AOC ノ**二等分線**ト云フ.

*** 斯ク理由ヲ述ブルコトヲ**證明**ト云フ

(5) 同圖ニ於テ角 AOD 及ビ角 COB ノ二等分線ハ一直線ナルコトヲ證明セヨ.

(6) 二直線 AOB, COD ガ O ニ於テ交リ, 角 AOC ハ直角ナリ. O ニ於ケル他ノ角モ亦直角ナルコトヲ證明セヨ.

(7) 一双ノ錯角ガ相等シキ時ハ他ノ一双ノ錯角モ相等シク, 又四双ノ同位角ハ夫々相等シク, 又截線ノ同ジ側ニ在ル內角ノ和ハ二平角ニ等シキコトヲ證明セヨ.

(8) 二直線 AB, BC ハ一點 D ニ於テ互ニ補角ナル角ニ對ス, (言ヒ換ヘレバ角 ADB, BDC ハ互ニ補角ナリ). A, D, C ハ一直線ノ上ニ在リ.*

(9) OA, OB, OC, OD ハ O ニ於テ出會フ四直線ニシテ, 角 AOB ガ角 COD ニ等シク, 角 BOC ガ角 DOA ニ等シ. AO ト OC 及ビ BO ト OD ハ夫夫一直線ナリ.*

(10) 互ニ補角ナル二角ノ中, 小ナル角ガ大ナル角ノ半分ナル時ハ二角ハ夫々何度ナリヤ?

*斯クノ如ク言ヒ切ルハ「之ヲ證明セヨ」トノ意ナリ

(11) 書物ノ一ページノ隅ヲ折リ返セバ，其ノ一ツノ縁ガ二ツニ折レテ一ツノ角ヲ爲ス；此角ヲ二等分スル直線ハ折リ目ト直角ヲ爲スコトヲ證明セヨ

29* **定理**トハ幾何學上ノ眞事ヲ述ベタルモノニシテ，**公理**〔§6 底註〕ト異ナリ，既ニ眞ナリト認メタル事項ニ依リテ證明スルニ非ザレバ眞ナリト許容セザルモノナリ．

定理ハ二ツノ部分ヨリ成ル．第一，**假設**，即チ假ニ然ナリトスル所ノ事項；第二，**終結**，即チ假設ヨリ起リ來ル可キ事項ナリ．例ヘバ，下ノ§32ノ定理，即チ「一ツノ直線ガ一双ノ直線ト交リ相等シキ錯角ヲ爲ス時ハ，其二直線ハ平行ナリ」ニ於テ「一直線ガ一双ノ直線ト交リテ相等シキ錯角ヲ爲スコト」ガ假設ニシテ，「其二直線ガ平行ナルコト」ガ終結ナリ．

定理ヲ§35ノ如キ形式ニ即チ「同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハ平行ナリ」ト云フ如ク述ベタル場合ニ於テハ，「二直線ガ同一ノ直線ニ平行ナルコト」ガ假設ニシテ，「其二直線ガ平行ナルコト」ガ終結ナリ．

定理ヨリシテ直ニ推定シ得可キ事項ヲ其定理ノ**系**ト云フ．

* 本條ハ適宜ノ時期マデ後廻シトシテ差支ナシ．

第三節　平行線

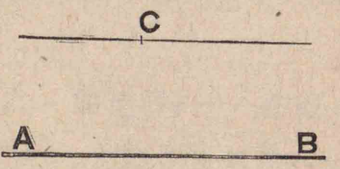
30　一平面上ニ任意ニ二直線ヲ取リ之ヲ充分ニ双方ヘ延長スル時ハ何レノ方ニ於テカ交ルヲ通例トス．或ル特別ノモノニ限リ何程延長スルモ交ラザルモノ有リ．斯クノ如ク，

一平面上ニ在ル直線ニシテ双方ヘ何程延長スルモ交ラザルモノヲ**平行線**ト名ク．

平行線ニ付テハ次ノ公理有リ：

公理　一ッノ與ヘラレタル點ヲ通リ一ッノ與ヘラレタル直線ニ平行ナル直線ハ一ッ有リ而シテ唯一ッニ限ル．

即チ AB ガ任意ノ一直線，C ガ任意ノ一點ナル時ハ C ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ハ一ッ有リ，而シテ唯一ッアルノミトス．

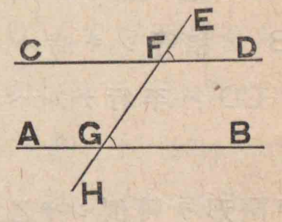


平行ノ記號ニ // ヲ用キルコトアリ，例ヘバ

AB // CD ハ「AB ハ CD ニ平行ナリ」ト誦ム可シ

31　平行線ハ同ジ方位*ヲ有スル直線ナリ．

然レバ一截線ガ一双ノ平行線ト交ル時ハ其ノ爲ス同位角ガ相等シキコトハ公理的ト看做スヲ得．又一截線ガ一双ノ直線ト交リテ相等シキ同位角ヲ爲ス時ハ其二直線ガ平行ナルコトモ公理的ト看做スヲ得．



32　然レドモ次ノ如ク定義及ビ公理ヨリシテ之ヲ證明スルヲ得．**

定理　一ッノ直線ガ一双ノ直線ト交リ相等シキ錯角ヲ爲ス時ハ，其二直線ハ平行ナリ．

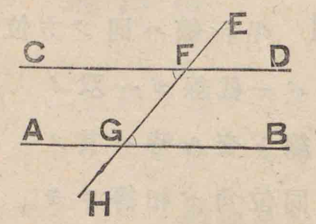
---

*方位ナル語ハ幾何學上正確ナル定義ヲ下スコト困難ナルモノナルヲ以テ之ヲ平行線ノ定義ニ於テ用キル可キニアラズ：此ニ掲ゲタルハ平行線ノ通俗的説明ニシテ，其ノ定義ハ前條ニ述ベタルガ如シ．

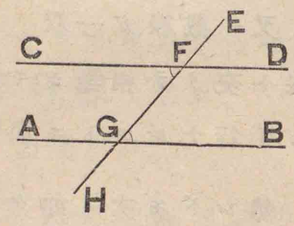
**生徒ノ程度ニ依リ次ノ二定理ハ §31 ニ述ベタル如ク公理トシテ證明ヲ省キ置キテ可ナリ．

圖ニ於テ，直線EFGHガ直線AB, CDヲ截リ，其ノ為ス所ノ錯角CFG, FGBガ相等シキ時ハ，AB, CDハ平行ナルベシ．

(甲)



(乙)



甲圖形ヲ轉倒シテ乙圖形ノ如クシ，之ヲ甲ノ上ニ重ネ，乙ノHGFEガ甲ノEFGHノ上ニ重ナリ，乙ノF點ガ甲ノG點ノ上ニ重ナル様ニセヨ．乙ノFGハ甲ノGFニ同ジキヲ以テ，乙ノG點ハ甲ノF點ノ上ニ重ナル．

假設ニ依リテ，乙ノ角GFCハ甲ノ角FGBニ等シキヲ以テ，乙ノ直線FCハ甲ノ直線GBノ上ニ重ナル．

同ジ理ニ依リテ，乙ノBGハ甲ノCFノ上ニ重ナル
故ニ甲圖形及ビ乙圖形ハ合同ナリ．

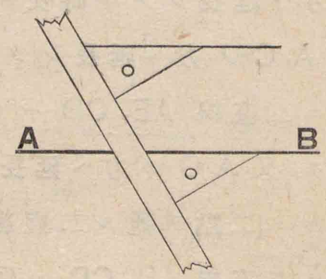
然レバ，若シ甲圖形ニ於テ二直線AB, CDガB, Dノ方ヘ延長シタル時交ルナラバ，乙圖形ニ於テハ，A, Cノ方ヘ延長シタル時ニ交ル；
故ニ二直線AB, CDハB, Dノ方ヘ延長シタル時モ，又A, Cノ方ヘ延長シタル時モ交ル；
然ルニ二點ヲ通ル二直線有ル能ハズ（§6）；
故ニ二直線AB, CDハ何方ヘ延長スルモ交ハラザルモノナリ即チ平行ナリ．

系　同位角ガ相等シキ時又ハ截線ノ同ジ側ニ在ル内角ノ和ガ一平角ニ等シキ時モ亦二直線ハ平行ナリ．

同位角EFD, FGBガ相等シキ時ハ角EFDハ對頂角CFGニ等シキヲ以テ，錯角CFG, FGBガ相等シ．又角DFG, FGBノ和ガ一平角ニ等シキ時ハ，角DFG, CFGノ和モ亦一平角ニ等シキヲ以テ，錯角CFG, FGBハ相等シ．因リテ系ヲ得．

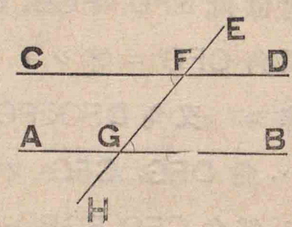
演習問題．同一直線ニ垂直ナル直線ハ平行ナリ．之ヲ證明セヨ．

33 平行線ヲ引クニハ通常前條ノ定理ヲ應用シ三角定規ヲ用キル.



例ヘバ AB ガ與ヘラレ,之ニ平行線ヲ引カントスル時ハ先ヅ三角定規ノ一邊ヲ之ニ當テ,次ニ(通常ノ)定規ヲ他ノ一邊ニ當テ,定規ヲ固定シ置キテ三角定規ヲ之ニ沿フテ滑ラス時ハ前ニ AB ニ當リタル邊ハ常ニ AB ニ平行ナリ.

34 定理 截線ガ一双ノ平行線ト交ル時ハ相等シキ錯角ヲ爲ス.



圖ニ於テ,直線 EFGH ガ平行線 AB, CD ヲ截ル時ハ,其ノ爲ス所ノ錯角 CFG, FGB ハ相等シカルベシ.

G ニ於テ角 CFG ニ等シキ錯角ヲ爲ス直線ハ CD ニ平行ナリ〔§32〕;

而シテ G ヲ通リ CD ニ平行ナル直線ハ唯一ッ〔§30〕

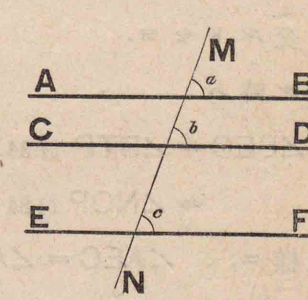
卽チ AB 有ルノミ〔假設〕;

故ニ AB ノ爲ス角 FGB ハ錯角 CFG ニ等シ.

系 同位角ガ相等シク,又截線ノ同ジ側ニ在ル內角ガ互ニ補角ナルコトモ明ナリ.

演習問題. 一直線ニ垂直ナル直線ハ之ニ平行ナル總テノ直線ニ垂直ナリ. 之ヲ證明セヨ.

35 定理 同一ノ直線ニ平行ナル二ッノ直線ハ互ニ平行ナリ.



圖ニ於テ, AB, CD ガ何レモ EF ニ平行ナル時ハ互ニ平行ナルベシ

截線 MN ヲ引ケ.

AB, EF ガ平行ナルヲ以テ, $\angle a = \angle c$ 〔§34系〕;

CD, EF ガ平行ナルヲ以テ,

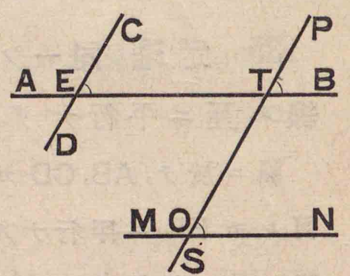
$\angle b = \angle c$ 〔§34系〕;

因リテ $\angle a = \angle b$;

故ニ, AB, CD ハ平行ナリ 〔§32〕.

36 定理 二ツノ直線ガ夫々他ノ二ツノ直線ニ平行ナル時ハ前者ノ夾ム鋭角ハ後者ノ夾ム鋭角ニ等シク，鈍角ハ鈍角ニ等シ．

二直線 AB, CD ガ夫々二直線 MN, PS ニ平行ナル時ハ，AB, CD ノ夾ム鋭角 BEC ハ MN, PS ノ夾ム鋭角 NOP ニ等シク，鈍角 AEC ハ鈍角 MOP ニ等シカルベシ．



AB, PS ガ T ニ於テ交ルトセヨ．

然ルトキハ

$\angle BEC = \angle BTP$ 〔§34系〕

$= \angle NOP$ 〔§34系〕．

同様ニ，　$\angle AEC = \angle ATP$ 〔§34系〕

$= \angle MOP$ 〔§34系〕．

37 演習問題．

（1）二ツノ角ノ邊ガ夫々平行ナル時ハ二角ノ二等分線ハ平行ナルカ或ハ垂直ナリ．

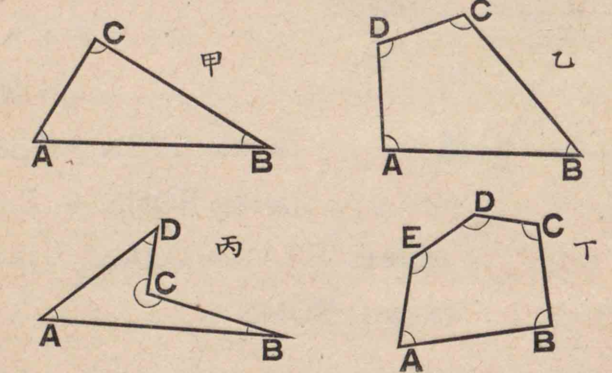
（2）二ツノ鋭角ガ相等シクシテ，其ノ一邊ガ平行

ナル時ハ他ノ一邊ハ平行ナルカ，或ハ相等シキ角ノ二倍ノ大サノ角ヲ夾ム．

（3）前問題ノ角ガ鈍角ナル場合ヲ吟味セヨ．

第四節　三角形

38 **平面形**トハ線ヲ以テ圍ミタル平面ノ一部分ナリ. 其ノ線分ヲ以テ圍ミタルモノヲ **多角形** ト稱ス; 三ッノ線分ヲ以テ圍ミタルモノヲ **三角形** ト云ヒ, 四ッ, 五ッ, 六ッ, 等ヲ以テ圍ミタルモノヲ夫々 **四邊形, 五邊形, 六邊形,*** 等ト云フ.



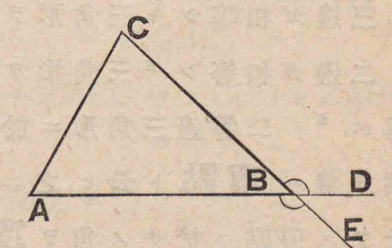
多角形ノ境界タル線分ヲ其ノ **邊** ト稱シ, 邊ノ交點ヲ其ノ **頂點** ト稱ス. 上ノ圖ニ於テ, A, B,

* 四角形, 五角形, 等トモ云フ, 又三角形ヲ三邊形トモ云フ; 然レドモ本文ニ揭ゲタル名稱ヲ普通トス.

C, D, 等ハ頂點ナリ; AB, BC, CA (甲圖), AB, BC, CD, DA (乙及ビ丙圖), AB, BC, CD, DE, EA, (丁圖), 等ハ其ノ邊ナリ. 多角形ヲ呼ブニ其ノ頂點ノ文字ヲ以テス, 例ヘバ三角形 ABC, 四邊形 ABCD, 五邊形 ABCDE, 等ノ如シ.

39 多角形ノ二邊ノ夾ム角ヲ其ノ **內角** 或ハ單ニ其ノ **角** ト云フ; 圖ニ於テ弧ヲ以テ示シタルモノ是レナリ. 總テノ內角ガ平角ヨリ小ナルモノヲ **凸多角形** ト稱ス; 凸多角形ハ總テノ頂點ガ外ヘ凸出ス. 上ノ圖ニ於テ, 甲, 乙, 丁ハ凸多角形ナリ, 丙ハ C ニ於テノ內角ガ平角ヨリ大ニシテ凸多角形ニアラズ.

凸多角形ニ於テ一邊ト隣邊ノ延長トノ夾ム角ヲ **外角** ト云フ. 圖ニ於テ, 邊BC ト邊AB ノ延長 BD トノ爲ス角 CBD ハ頂點 B ニ於テノ外角ナリ. CB ヲ延長スル時ハ外角 ABE ヲ得;



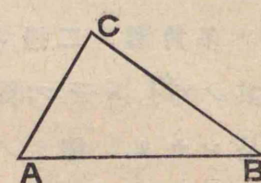
而シテ二外角ハ對頂角ニシテ相等シ.

40 三角形ニハ六ツノ要素アリ,三邊ト三角是レナリ. 三邊ニ就テハ,何レノ二ツヲ取ルモ其ノ和ガ第三邊ヨリ大ナリ,然ラザレバ第11條ノ公理ニ反ス. 卽チ

CA + AB > BC,

AB + BC > CA,

BC + CA > AB.



故ニ又何レノ二邊ノ差モ第三邊ヨリ小ナリ.

邊ニ就テハ此條件ノ外ニハ何等ノ制限ナクシテ,邊ノ長サハ無制限ナリ.

三邊ガ相等シキ三角形ヲ**正三角形**ト稱ス.

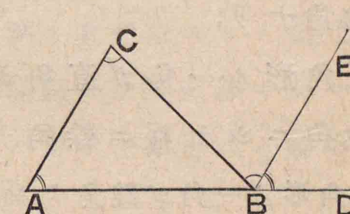
二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**ト稱ス.* 二等邊三角形ニ於テハ相等シキ邊ノ交點ヲ特ニ**頂點**ト云ヒ,之ニ對スル邊ヲ**底邊**ト云フ. 頂點ニ於テノ角ヲ**頂角**,底邊ノ兩端ニ在ル內角ヲ**底角**ト云フ.

*或ハ等脚三角形トモ云フ

41 三角形ノ角ニハ一ツノ制限アリ,卽チ

定理 三角形ノ三ツノ角ノ和ハ一平角ニ等シ.

圖ニ於テ,三角形 ABC ノ三ツノ角 A, B, C ノ和ハ一平角ニ等シカルベシ.



任意ノ一邊 AB ヲ延長シ,又 B ヲ通リ AC ニ平行線 BE ヲ引ケ;

然ル時ハ $\angle ACB = \angle CBE$ 〔§ 34〕,

又 $\angle CAB = \angle EBD$ 〔§ 34 系〕;

因リテ $\angle ACB + \angle CAB = \angle CBE + \angle EBD$
$= \angle CBD$;

故ニ $\angle ACB + \angle CAB + \angle ABC = \angle CBD + \angle ABC$
$=$ 平角,

卽チ三ツノ角ノ和ハ一平角ニ等シ.

斯クノ如ク三角形ノ角ノ大サニハ制限アリ. 三ツノ角ノ中二ツガ與ヘラルル時ハ第三角ハ自然確定シ直ニ之ヲ知ルヲ得.

系　三角形ノ外角ハ之ニ隣ラザル二ッノ内角ノ和ニ等シ; 從テ其ノ一ッヨリ大ナリ.

42 三角形ノ角ノ和ガ一平角ニ等シキヲ以テ,

三角形ノ一角ガ鈍角ナラバ, 他ノ二角ハ各鋭角ナリ;

三角形ノ一角ガ直角ナラバ, 他ノ二角ハ各鋭角ニシテ互ニ餘角ナリ〔§ 25〕.

三角形ノ一角ガ鈍角ナルモノヲ**鈍角三角形**ト云フ.

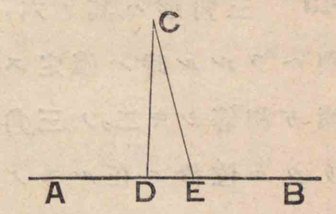
三角形ノ一角ガ直角ナルモノヲ**直角三角形**ト云フ.　直角三角形ニ於テ直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**ト云フ.

三角形ノ角ガ三ッ共ニ鋭角ナルモノヲ**鋭角三角形**ト云フ.

43 **定理**　一直線外ノ一點ヨリ之ヘ一ッヨリ多クノ垂線ヲ引クヲ得ズ.

若シ一點 C ヨリ直線 AB ヘ二ッノ垂線 CD, CE ヲ引クヲ得ルトセバ, 三角形 CDE ニハ二ッノ直角

有ルコトトナリ, 第41條ノ定理ニ戻ル.　故ニ C ヨリ AB ヘ唯一ッノ垂線ヲ引キ得ルノミ.



一點ヨリ一直線ヘ引ケル垂線ノ長サヲ其點ノ其直線ヨリノ**距離**ト云フ; 而シテ之レガ其點ヨリ其直線ニ至ル最短キ線ナルコトハ直覺シ得ルト雖正式ノ證明ヲ後ニ〔§ 53 系, 60〕掲ク.

44 **演習問題.**

(1) 三角形ノ二角ガ相等シキ時ハ各、鋭角ナリ.

(2) 一ッノ角ノ邊ガ夫々他ノ一ッノ角ノ邊ニ垂直ナル時ハ二角ハ相等シキカ或ハ補角ナリ.

(3) 三角形 ABC ノ頂點 A 及ビ B ヨリ對邊ヘ引ケル垂線 AD, BE ガ O ニ於テ交ル時ハ

$$\angle AOE = \angle C.$$

(4) 三角形 ABC ノ B 及ビ C ニ於テノ外角ノ二等分線ノ夾ム角ハ A ニ於テノ外角ノ半分ニ等シ.

(5) 三角形 ABC ノ角 B 及ビ C ノ二等分線ガ O ニ於テ交ル時ハ $\angle BOC =$ 直角 $+ \frac{1}{2}\angle A$.

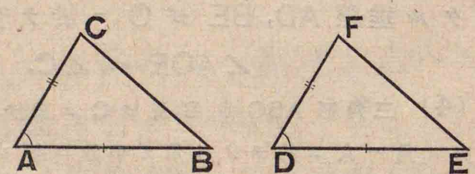
45 三角形ハ其ノ六ツノ要素ノ中ノ或ルモノガ與ヘラルル時ハ確定ス. 言ヒ換ヘレバ,其等ノ要素ガ相等シキ二ツノ三角形ハ同一ノ三角形ノ異ナリタル位置ニ在ルモノト見做スヲ得,卽チ**合同**ナリ. 以下三角形ノ合同ノ場合ニ就テ論ズベシ.

46 定理 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ二邊ニ等シク,且此二邊ノ夾ム角ガ相等シキ時ハ,二ツノ三角形ハ合同ナリ.

圖ノ三角形 ABC, DEF ニ於テ,

$AB = DE$, $AC = DF$, 及ビ $\angle BAC = \angle EDF$.

然ル時ハ二ツノ三角形ハ合同ナルベシ.



三角形ABCヲ三角形DEFノ上ニ重ネ,A點ハD點ノ上ニ,邊ABハ邊DEノ上ニ重ナル樣ニセヨ.

$AB = DE$ キヲ以テ,B點ハE點ノ上ニ重ナル;

又 $\angle BAC = \angle EDF$ キヲ以テ,邊ACハ邊DFノ上ニ重ナル;

而シテ $AC = DF$ キヲ以テ,C點ハF點ノ上ニ重ナル.

斯クB點ハE點ノ上ニ,C點ハF點ノ上ニ重ナルヲ以テ,邊BCハ邊EFト合ス (§6);

故ニ三角形ABC, DEFハ合同ナリ.

合同ノ記號ニ≡ヲ用キル,又三角形ノ記號ニ△ヲ用キル; 卽チ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ハ「三角形ABCハ三角形DEFニ合同ナリ」ト誦ム可シ.

47 演習問題.

(1) 三角形ABCノ邊BAヲDマデ延長シ, $AD = BA$ トシ,又邊CAヲEマデ延長シ, $AE = CA$ トス. $BE = CD$ キコトヲ證明セヨ.

(2) 三角形ABCノ邊BCヲMニ於テ二等分シ,AMヲ結ビ付ケ,之ヲDマデ延長シ,$MD = AM$ トス. BDヲ結ビ付クル時ハ, $BD \parallel AC$.

(3) 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ

直角ニ二等分ス.*

(4) 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ノ上ニ在ル各點ハ底邊ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

(5) 一ツノ線分ヲ直角ニ二等分スル直線**ノ上ノ各點ハ線分ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニアリ.

(6) 四點 A, B, C, D アリ; B ハ A ノ西五里ニ在リ, C ハ A ノ北西二里ニ在リ, D ハ A ノ北五里ニ在リ. C ハ B 及ビ D ヨリ相等シキ距離ニ在ルコトヲ證明セヨ.

(7) 二等邊三角形ノ相等シキ邊 AB, AC ノ上ニ X, Y ヲ $AX = AY$ キ様ニ取レ: $\triangle AXC \equiv \triangle AYB$.

48 定理 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ二角ニ等シク, 且此二角ノ間ニ在ル邊ガ相等シキ時ハ, 二ツノ三角形ハ合同ナリ.

圖ノ三角形 ABC, DEF ニ於テ,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, 及ビ 邊 $AB =$ 邊 DE:

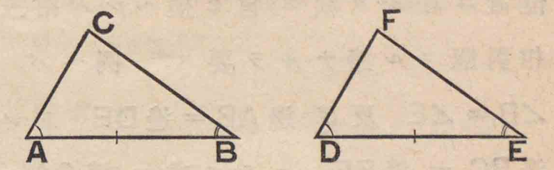
然ル時ハ二ツノ三角形ハ合同ナルベシ.

---

* A ヲ二等邊三角形 ABC ノ頂角, D ヲ角 A ノ二等分線 AD ガ BC ト交ル點トシ, $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ ヲ證明ス可シ

** 之ヲ略シテ線分ノ垂直二等分線ト云フ

三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ重ネ, A 點ハ D 點ノ上ニ, 邊 AB ハ邊 DE ノ上ニ重ナル様ニセヨ.



$AB = DE$ キヲ以テ, B 點ハ E 點ノ上ニ重ナル;

$\angle BAC = \angle EDF$ キヲ以テ, 邊 AC ハ邊 DF ノ上ニ重ナル;

$\angle ABC = \angle DEF$ キヲ以テ, 邊 BC ハ邊 EF ノ上ニ重ナル;

故ニ AC ト BC ノ交點 C ハ DF ト EF ノ交點 F ノ上ニ重ナル;

因リテ三角形 ABC, DEF ハ合同ナリ.

49 前條ノ定理ニ於テ「二角ノ間ニ在ル邊ガ相等シ」トシタレドモ, 二角ガ夫々二角ニ等シキ時ハ第三角モ亦相等シ〔§ 41〕キヲ以テ何レノ一邊ガ相等シトスルモツマリ此定理ニ歸着ス, 但シ相等シキ邊ガ兩三角形ニ於テ相等シキ角ニ對シテ同ジ

位置ニ在ルヲ要ス，言ヒ換ヘレバ兩三角形ニ於テ相對應スル邊ナルヲ要ス．例ヘバ，$\angle A = \angle D$，$\angle B = \angle E$ 及ビ 邊 $AB =$ 邊 DE トシタレドモ，邊 $BC =$ 邊 EF ニテモ或ハ 邊 $CA =$ 邊 FD ニテモ可ナリ．邊 $BC =$ 邊 FD 又ハ 邊 $CA =$ 邊 DE ニテハ三角形ハ合同ナラズ．

故ニ前條ノ定理ハ之ヲ次ノ如ク擴張シテ可ナリ．

定理　一ツノ三角形ノ二角ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ二角ニ等シク且相對應スル一邊ガ相等シキ時ハ二ツノ三角形ハ合同ナリ．

50　演習問題．

(1)　三角形ノ一角ノ二等分線ガ其角ニ對スル邊ニ垂線ナル時ハ三角形ハ二等邊ナリ．

(2)　兩端ガ二ツノ平行線ノ上ニ在ル一ツノ線分アリ；其ノ中點ヲ通ル總テノ直線ノ平行線ノ間ニ在ル部分ハ其點ニ於テ二等分セラル．

(3)　一ツノ角ノ二等分線上ノ各點ハ其ノ二邊ヨリ相等シキ距離ニ在リ．

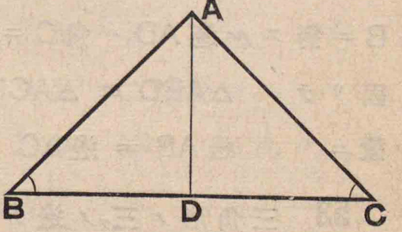
(4)　§48 ノ圖ニ於テ，C, F ヨリ之ニ對スル邊ヘ夫々垂線 CX, FY ヲ引ク時ハ $CX = FY$.

51　定理　三角形ノ二邊ガ相等シキ時ハ之ニ對スル角モ亦相等シ．

三角形 ABC ニ於テ，邊 $AB =$ 邊 AC：

然ル時ハ　$\angle ABC = \angle ACB$ カルベシ．

角 A ヲ二等分スル直線ヲ引キ邊 BC トDニ於テ出會ハシメヨ．



二ツノ三角形 ABD, ACD ニ於テ，

$AB = AC$,　$AD = AD$,*　$\angle BAD = \angle CAD$;

因リテ　$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$　[§46]：

故ニ　$\angle ABC = \angle ACB$.

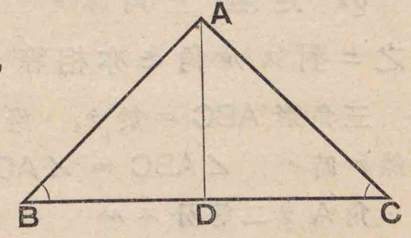
52　定理　三角形ノ二角ガ相等シキ時ハ之ニ對スル邊モ亦相等シ．

三角形 ABC ニ於テ，$\angle ABC = \angle ACB$：

*或ハ「邊 AD ハ（兩形ニ）共通ナリ」ト述ブルモ可ナリ．

然ル時ハ　AB = AC　カルベシ.

角Aヲ二等分スル直線ヲ引キ, 邊BCトDニ於テ出會ハシメヨ.



二ツノ三角形 ABD, ACD ニ於テ, ∠B=∠C, ∠BAD =∠CAD, 及ビ角Bニ對スル邊ADハ角Cニ對スル邊ADニ同ジ;

因リテ　△ABD ≡ △ACD　(§49);

故ニ　邊AB = 邊AC.

53 三角形ノ三ツノ邊ガ相等シキ時ハ, 三ツノ角モ亦相等シク(§51), 又三ツノ角ガ相等シキ時ハ, 三ツノ邊モ亦相等シ(§52). 故ニ正三角形(§40)ハ三ツノ邊及ビ三ツノ角ガ相等シキモノナリ.

三ツヨリ多クノ邊ノ多角形ニ於テハ邊ガ皆相等シキモ角ハ必ズシモ相等シカラズ, 角ガ皆相等シキモ邊ハ必ズシモ相等シカラズ. 故ニ一般ニ多角形ニ就テハ,

總テノ邊ガ相等シク且總テノ角ガ相等シキ多

角形ヲ **正多角形** ト稱ス

ト定義セザル可カラズ.

54 演習問題.

(1) 二等邊三角形ノ底角ヲ二等分スル二直線ト底邊ハ二等邊三角形ヲ成ス.

(2) 正三角形ノ一角ハ何度ナリヤ?

(3) 二等邊三角形ノ頂點ヲ通リ底邊ニ平行ナル直線ハ頂點ニ於テノ外角ヲ二等分ス.

(4) 二等邊三角形ノ頂點ニ於テノ外角ヲ二等分スル直線ハ底邊ニ平行ナリ.

(5) 同ジ底邊ノ上ニ立ツ所ノ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線或ハ其ノ延長ハ底邊ヲ直角ニ二等分ス.

(6) 底邊及ビ頂角ガ相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ合同ナリ.

(7) §47ノ問題(7)ニ於テ三角形 BXC, CYB ノ合同ナルコトヲ證明セヨ.

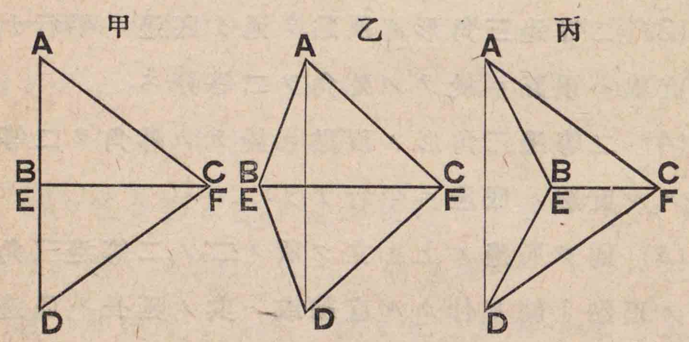
(8) 正三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ夫々正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ畫ク時ハ, (i) DC, CE ハ一直線ナリ; (ii) AD = BE = CF; (iii) DEF ハ正三角形ナリ.

55 定理 一ッノ三角形ノ三邊ガ夫々一ッノ他ノ三角形ノ三邊ニ等シキ時ハ二ッノ三角形ハ合同ナリ.

三角形 ABC, DEF ニ於テ,

BC = EF, CA = FD, AB = DE:

然ル時ハ二ッノ三角形ハ合同ナルベシ.



三角形 DEF ノ邊 EF ヲ三角形 ABC ノ邊 BC ノ上ニ重ネ, E 點ハ B 點ノ上ニ重ナリ, 二ッノ三角形ガ BC 卽チ EF ノ反對ノ側ニ在ル樣ニセヨ.

BC = EF キヲ以テ F 點ハ C 點ノ上ニ重ナル.

AD ヲ結ビ付ケヨ.

(i) 若シ AD ガ (甲圖ニ於ケル如ク) B 點卽チ E 點ヲ通ル時ハ, CA = FD キヲ以テ,

$\angle CAB = \angle FDE$.

(ii) 若シ AD ガ (乙及ビ丙圖ニ於ケル如ク) B 點卽チ E 點ヲ通ラザル時ハ, BA = ED キヲ以テ,

$\angle BAD = \angle EDA$ (§ 51);

又 CA = FD キヲ以テ, $\angle CAD = \angle FDA$ (§ 51);

因リテ角 BAD 及ビ角 CAD ノ和(乙圖)或ハ差(丙圖)ナル角 BAC ハ角 EDA 及ビ角 FDA ノ和或ハ差ナル角 EDF ニ等シ.

故ニ (i) (ii) 何レノ場合ニ於テモ三角形 ABC, DEF ハ二邊ト夾角ガ夫々相等シクシテ合同ナリ (§ 46).

56 演習問題.

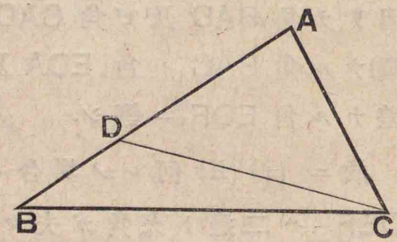
(1) ACB, ADB ハ同ジ底邊 AB ノ上ニ其ノ同ジ側ニ在ル二ッノ三角形ニシテ, AC = BD 及ビ AD = BC. AD, BC 或ハ其ノ延長ガ O 點ニ於テ出會フ時ハ三角形 AOB ハ二等邊ナリ.

又 $\triangle OAC \equiv \triangle OBD$.

(2) 四邊形 ABCD ニ於テ, AB = AD, CB = CD: AC ガ角 A 及ビ角 C ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ

(3) 二等邊三角形ABCノ底角B, Cノ二等分線ガO點ニ於テ出會フ: OAハ角Aヲ二等分ス.

57 三角形ノ二邊ガ相等シキ時ハ之ニ對スル角ガ相等シク,又二角ガ相等シキ時ハ之ニ對スル邊ガ相等シキコトハ前ニ證明シタルガ,其ガ相等シカラザル時ハ如何?



例ヘバ三角形ABCニ於テ,邊AB > 邊ACナル時ハ,ABノ上ニADヲACニ等シク取リ,CDヲ結ビ付ケヨ; 然ル時ハ $AC = AD$ キヲ以テ,

$\angle ADC = \angle ACD$;

今 $\angle ADC > \angle ABC$ 〔§41系〕;

因リテ $\angle ACD > \angle ABC$;

然ルニ $\angle ACB > \angle ACD$ ナルコト勿論ナリ;

故ニ $\angle ACB > \angle ABC$.

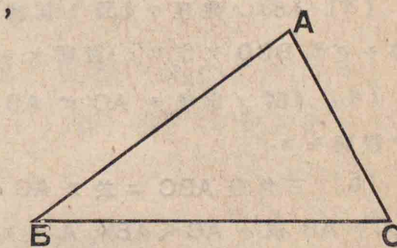
因リテ次ノ定理ヲ得:

定理 三角形ノ二邊ガ相等シカラザル時ハ大ナル邊ニ對スル角ガ小ナル邊ニ對

スル角ヨリ大ナリ.

58 角ガ相等シカラザル時ハ次ノ定理ヲ得:

定理 三角形ノ二角ガ相等シカラザル時ハ大ナル角ニ對スル邊ガ小ナル角ニ對スル邊ヨリ大ナリ.



三角形ABCニ於テ, $\angle C > \angle B$ ナル時ハ, 邊AB > 邊AC ナルベシ.

第一, 邊ABハ邊ACニ等シキ能ハズ. 何トナレバ,若シ $AB = AC$ キ時ハ $\angle C = \angle B$ カルベケレバナリ〔§51〕.

第二, 邊ABハ邊ACヨリ小ナル能ハズ. 何トナレバ,若シ $AB < AC$ ナル時ハ, $\angle C < \angle B$ ナルベケレバナリ〔§57〕.

故ニ邊ABハ邊ACニ等シカラズ又之ヨリ小ナラズ,卽チ 邊AB > 邊AC.

系 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ邊ヨリ大

ナリ.

59 演習問題.

(1) 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ他ノ邊ヨリ大ナリ.

(2) 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ邊 BC トDニ於テ交ル時ハ, $BA > BD$ 及ビ $CA > CD$.

(3) §58 ノ定理ヲ§57ト同様ノ方法ヲ以テ(即チ角Bニ等シク角BCDヲ作リテ)證明セヨ.

(4) §57ノ定理ヲ AC ガ AB ニ等シクナルマデ延長シテ證明セヨ.

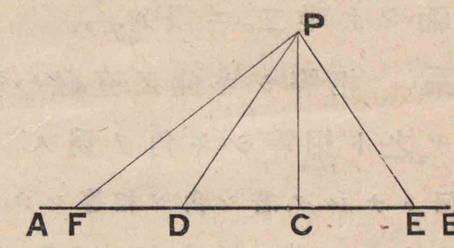
(5) 三角形 ABC ニ於テ AC ハ AB ヨリ大ナラズ(即チ $AC = AB$ 或ハ $AC < AB$). A ヨリ BC 上ノ一點 G ヘ引ケル直線 AG ハ AB ヨリ小ナリ.

60 定理 直線外ノ一點ヨリ之ヘ引ケル直線ノ中,

(i) 垂線ハ最短シ;

(ii) 垂線ト相等シキ角ヲ爲ス直線ハ相等シ;

(iii) 垂線ト大ナル角ヲ爲ス直線ガ小ナル角ヲ爲スモノヨリ大ナリ.



圖ニ於テ PC ハ直線AB外ノ一點Pヨリノ垂線; PD, PE ハ垂線ト相等シキ角 CPD, CPE ヲ爲ス二直線; PF ハ之ヨリ大ナル角 CPF ヲ爲ス直線トセヨ:

然ル時ハ, (i) PC ハ他ノ直線ヨリ小ナルベシ; (ii) $PD = PE$ ナルベシ; (iii) $PF > PD$ ナルベシ.

(i) ハ §58系ニ依リテ明ナリ.

(ii) 三角形 PCD, PCE ハ, $\angle CPD = \angle CPE$, $\angle PCD = \angle PCE$, 邊 PC ハ共通ナルヲ以テ, 合同ナリ. 因リテ $PD = PE$.

(iii) 三角形 PDF ニ於テ角 PDF ハ鈍角ナリ: 故ニ之ニ對スル邊 PF ハ邊 PD ヨリ大ナリ (§58).

此定理ヨリシテ直ニ次ノ系ヲ得.

系 直線外ノ一點ヨリ其直線ヘ二ツノ相等シキ(垂線ヨリ大ナル)直線ヲ引クコトヲ

得，而シテ唯二ッニ限ル.

系　相等シキ此二直線ハ垂線ノ兩側ニ於テ之ト相等シキ角ヲ爲ス.

何トナレバ，若シ角ガ相等シカラザレバ，(iii) ニ依リテ一ッガ他ヨリ大ナルベケレバナリ.

61 二ッノ三角形ノ合同ニ就テハ既ニ次ノ如キ場合有ルコトヲ見タリ.

(i) 二邊ト夾角ガ夫々相等シキ時〔§ 46〕;

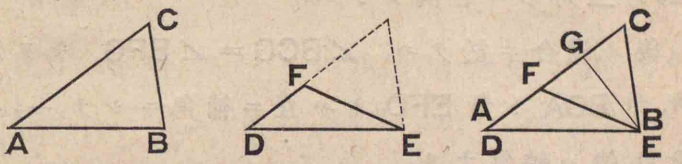
(ii) 二角ト對應邊ガ夫々相等シキ時〔§ 48, 49〕;

(iii) 三邊ガ夫々相等シキ時〔§ 55〕.

何レモ三角形ノ六ッノ要素ノ中三ッガ夫々相等シキ時ナリ;而シテ三ッノ角ガ夫々相等シキ場合ハ三ッノ角ノ間ニ成リ立ツ關係〔§ 41〕ニ依リテ實際唯二ッノ角ガ夫々相等シキ場合ト同一ナルヲ以テ，之ヲ除外シ，三ッノ要素ガ夫々相等シキ場合ハ以上三ッノ外ニハ唯次ノ一ッアルノミ:

(iv) 二邊ト其ノ一ッニ對スル角ガ夫々相等シキ時. 因リテ此場合ニ於テハ如何ナルベキカヲ吟味セン.

二ッノ三角形 ABC, DEF ニ於テ, AB = DE, BC = EF, 及ビ BC ニ對スル角 BAC ガ EF ニ對スル角 EDF ニ等シトセヨ.



三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ重ネ，A 點ハ D 點ノ上ニ，邊 AB ハ邊 DE ノ上ニ重ナル樣ニセヨ;

AB = DE キヲ以テ B 點ハ E 點ノ上ニ重ナル;

又 ∠BAC = ∠EDF キヲ以テ AC ハ DF ノ上ニ重ナル;

故ニ BC, EF ハ同一ノ點(B, E ノ重ナリタル點)ヨリ同一ノ直線(AC ト DF ノ重ナリタル線)ニ至ル二ッノ相等シキ直線ナリ;

因リテ BC, EF ハ B (E) 點ヨリ AC (DF) へ引ケル垂線 BG ノ同ジ側ニ或ハ反對ノ側ニ之ト相等シキ角ヲ爲ス直線ナリ〔§ 60 系〕:

若シ同ジ側ニ在ル時ハ二直線ハ重ナリ合ヒ，三角形 ABC, DEF ハ合同ナリ；若シ反對ノ側ニ在ル時ハ二直線ハ重ナリ合ハズ，二ツノ三角形ハ合同ナラズ.

後ノ場合ニ於テハ，$\angle BCG = \angle BFG$ キヲ以テ，角 BCA ト角 EFD トハ互ニ補角ニシテ，一ツハ鋭角，他ハ鈍角ナリ.

62 斯クノ如ク，(iv) ノ場合ニ於テハ二ツノ三角形ハ合同ナルコトアリ又合同ナラザルコトアリ；若シ合同ナラザル時ハ二双ノ相等シキ邊ノ他ノ一双 (AB, DE) ニ對スル角 (ACB, DFE) ノ中一ツハ鋭角，他ハ鈍角ナリ.

故ニ此角ガ兩三角形ニ於テ鋭角，直角或ハ鈍角ナル時ハ三角形ハ合同ナリ.

因リテ次ノ定理ヲ得.

定理　一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ二邊ニ等シク，且一双ノ相等シキ邊ニ對スル角ガ相等シキ時ハ二ツノ三角形ハ次ノ場合ニ於テ合同ナリ：

(甲)　他ノ一双ノ相等シキ邊ニ對スル角ガ兩三角形ニ於テ鋭角或ハ直角或ハ鈍角ナル時；

(乙)　相等シキ二ツノ角ガ直角或ハ鈍角ナル時；

(丙)　相等シキ角ニ對スル邊ガ各三角形ニ於テ他ノ相等シキ邊ヨリ小ナラザル時.

蓋シ(乙)，(丙)ハ何レモ(甲)ト同一ノ事ニ歸シ，上ニ說明セル如ク三角形ハ合同ナリ.

最重要ナルハ相等シキ角ガ直角ナル場合ナリ；因リテ特ニ之ヲ次ニ揭ク：

定理　二ツノ直角三角形ハ斜邊及ビ他ノ一邊ガ夫々相等シキ時ハ合同ナリ.

63　演習問題.

(1)　二ツノ直角三角形ニ關スル前條ノ定理ヲ，一般ノ定理ノ特別ノ場合トシテ推定セズ，獨立ニ證明セヨ.

(2) 一ツノ角ノ二邊ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ其角ノ二等分線ノ上ニ在リ.

(3) 二等邊三角形ABCノ頂點Aヨリ底邊BCヘ垂線ADヲ引ク時ハ $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$.

(4) 三角形ノ二頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ガ相等シキ時ハ三角形ハ二等邊ナリ.

(5) 三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ引ケル直線ハ其頂點ニ於テ出會フ二邊ノ大ナルモノヨリ小ナリ; 二邊ガ相等シキ時ハ之ヨリ小ナリ.

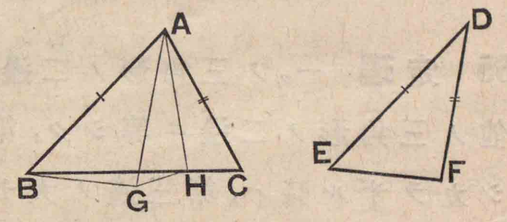
(6) 二ツノ三角形ABC, DEFニ於テ, A, Dヨリ夫々對邊BC, EFヘ垂線AG, DHヲ引キ, $AG=DH$, $AB=DE$ 及ビ $BC=EF$ ナル時ハ三角形ハ合同ナリ.

64 定理 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ二邊ニ等シク, 夾角ガ相等シカラザル時ハ, 角ノ大ナルモノノ第三邊ガ他ヨリ大ナリ.

圖ノ三角形ABC, DEFニ於テ,

$AB=DE$, $AC=DF$ 及ビ $\angle BAC > \angle EDF$:

然ル時ハ $BC > EF$ ナルベシ.



三角形DEFヲ三角形ABCノ上ニ重ネ, D點ハA點ノ上ニ重ナリ, 邊DEハ邊ABノ上ニ重ナル樣ニセヨ.

$AB=DE$ ナルヲ以テ, E點ハB點ノ上ニ重ナル;

$\angle BAC > \angle EDF$ ナルヲ以テ, 邊DFハABトACノ間ニ落チAGノ位置ヲ取ル;

角CAGノ二等分線AHヲ引キBCトHニ於テ交ラシメ, BG, GHヲ結ビ付ケヨ;

三角形ACH, AGHニ於テ, $AC=DF=AG$,

邊AHハ共通ニシテ, $\angle CAH=\angle GAH$;

故ニ三角形ACH, AGHハ合同ナリ;

因リテ　$BC=BH+HC=BH+HG > BG$ (§40),

即チ　$BC > EF$.

G點ガBCノ上ニ落ツルコトアルベシ; 此場合ニ於テハBCガBG即チEFヨリ大ナルコト勿論

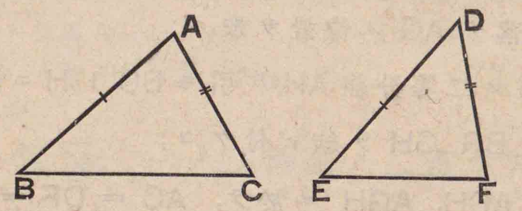
ナリ.

65 定理 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ二邊ニ等シク, 第三邊ガ相等シカラザル時ハ, 第三邊ノ大ナルモノノ夾角ガ他ヨリ大ナリ.

二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ,

AB = DE, AC = DF 及ビ BC > EF:

然ル時ハ ∠BAC > ∠EDF ナルベシ.



何トナレバ若シ ∠BAC > ∠EDF ナラザル時ハ,

∠BAC = ∠EDF キカ

或ハ ∠BAC < ∠EDF ナルノ外ナシ.

然ルニ若シ ∠BAC = ∠EDF カラバ,

BC = EF カルベシ〔§46〕;

然レドモ假設ニ依リテ, BC > EF;

故ニ角 BAC ハ角 EDF ニ等シカラズ.

又若シ ∠BAC < ∠EDF ナラバ, BC < EF ナルベシ〔§64〕;

故ニ角 BAC ハ角 EDF ヨリ小ナラズ.

因リテ角 BAC ハ角 EDF ヨリ大ナリ.

66 演習問題.

(1) D ハ三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ニシテ, 角 ADB ガ鈍角ナル時ハ邊 AB ハ邊 AC ヨリ大ナリ.

(2) D ハ三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ニシテ邊 AB ガ邊 AC ヨリ大ナル時ハ角 ADB ハ鈍角ナリ.

(3) 線分ノ垂直二等分線ノ上ニ在ラザル點ハ其ノ兩端ヨリノ距離相等シカラズ.

(4) 三角形 ABC ニ於テ AB > AC; BA, CA ノ上ニ相等シキ線分 BD, CE ヲ截ル時ハ, BE > CD.

(5) 同ジ三角形ニ於テ, AB, AC ヲ夫々 F, G マデ延長シ, BF = CG トスル時ハ CF > BG.

(6) 三角形 ABC ノ邊 BA, CA ノ上ニ相等シキ線分 BD, CE ヲ截リ, BE > CD ナル時ハ AB > AC.

67 演習問題（第四節諸定理應用）.

(1) 一直線ガ二ツノ平行線ヲ截ル時ハ其ノ同ジ側ニ在ル二ツノ內角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ.

(2) 三角形ノ各頂點ヲ通リ對邊ニ平行線ヲ引ク時ハ元ノ三角形ト共ニ四ツノ合同三角形ヲ得.

(3) 二等邊三角形ノ底邊ノ一端ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ガ底邊ト為ス角ハ頂角ノ半分ニ等シ.

(4) 二等邊三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ハ又一ツノ二等邊三角形ヲ作ル.

(5) 三角形 ABC ノ各邊ノ上ニ其ノ外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ作ル時ハ AD = BE = CF.

(6) 三角形ノ二角ノ二等分線ノ交點ハ三邊ヨリ相等シキ距離ニアリ.

(7) 三角形ノ二外角ノ二等分線ノ交點ハ三邊ヨリ相等シキ距離ニアリ.

(8) 三角形ノ角 B 及ビ角 C ノ二等分線ガ I ニ於テ出會フ時ハ, AI ハ角 A ヲ二等分ス.

〔本條ノ(6)及ビ § 62〕.

(9) 三角形ノ頂點 B 及ビ C ニ於テノ外角ノ二等分線ガ O ニ於テ出會フ時ハ, AO ハ角 A ヲ二等分ス.

(10) 三角形 ABC ノ邊 AB 及ビ AC ノ垂直二等分線ガ O ニ於テ出會フ時ハ, OA = OB = OC.

〔§ 47 ノ(5).〕

(11) 前問題ノ O 點ヨリ邊 BC ヘ引ケル垂線ハ BC ヲ二等分ス; 言ヒ換ヘレバ, O 點ハ BC ノ垂直二等分線ノ上ニアリ.

(12) 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ BC ノ中點 D ヘ引ケル直線 AD ハ BA+AC ノ半分ヨリ小ナリ. 〔AD ヲ延長シ DE ヲ AD ニ等シクシ, EB ヲ結ビ付ケ, § 46 及ビ § 40 ヲ應用ス可シ.〕

(13) 三角形 ABC ノ頂點ヨリ其ノ內ノ一點 O ヘ引ケル直線 OA, OB, OC ノ和ハ三角形ノ周*ノ半分ヨリ大ナリ.

(14) 四邊形 ABCD ニ於テ AD ハ最大邊, BC ハ最小邊ナリトス; 然ル時ハ ∠ABC > ∠ADC 及ビ ∠BCD > ∠BAD.

(15) 一直線 AB ノ上ニ, 二直線 OX, OY ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ一般ニ二個アリ: 之ヲ見出セ. 〔§ 63 ノ(2)及ビ § 50 ノ(3).〕 如何ナル場合ニ於テ唯一點アルカ?

(16) 線分 AB ノ中點 C ヨリ任意ノ直線 CP ヲ引キ, CP ヲ CA ニ等シクス: 然ル時ハ角 APB ハ直角ナリ.

(17) 三角形 ABC ノ二頂點 B, C ヲ其ノ內ノ一點 D ト結ビ

---

* 周トハ多角形ノ邊ノ和ナリ.

付クル時ハ, $BD+DC<BA+AC$, 而シテ $\angle BDC>\angle BAC$.
〔BDヲ延長シテACトEニ於テ出合ハシメ, §40及ビ§41ヲ應用セヨ.〕

(18)　(13)ニ於テ, OA, OB, OCノ和ハ周ヨリ小ナリ.

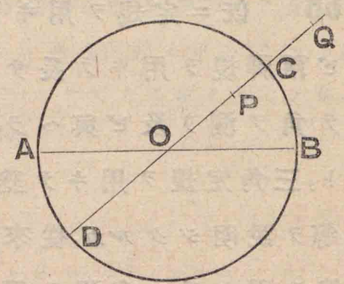
(19)　直線ニ流ルル河ノ同ジ側ニ二點A, Bアリ; Aヨリ發シテ河ニ至リテ後Bニ達スル最短經路ハ往路(Aヨリ河ニ至ル)ト歸路(河ヨリBニ至ル)トガ河ト相等シキ角ヲ爲スモノナリ　〔§48, §46及ビ§40.〕

第五節　圓及ビ作圖

68　既ニ定規ヲ用キテ直線ヲ引クコト, 度器及ビ兩脚規ヲ用キテ長サヲ度ルコト, 分度器ヲ用キテ角ヲ測リ及ビ與ヘラレタル大サノ角ヲ作ルコト, 三角定規ヲ用キテ垂線及ビ平行線ヲ畫クコト, 等ヲ説明シタルガ, 從來ノ初等幾何學ニ於テハ, 直線ヲ引ク爲ニ定規ヲ用キルコト, 及ビ長サヲ移シ(即チ與ヘラレタル長サノ線分ヲ截リ取リ)幷ニ圓ヲ畫ク爲ニ兩脚規ヲ用キルコトノ外, 他ノ器械ノ使用ヲ許容セザリシナリ. 本節ニ於テハ此二器械ノミヲ用キテ基礎的作圖ヲ爲スコト及ビ其ノ應用ノ一端ヲ述ベントス; 然レドモ之ニ先立チテ圓ナルモノノ性質ニ付テ少シク述ベザル可カラズ.

69　兩脚規ノ一尖端ヲ紙上ノ一點ニ固定シ, 他ノ尖端ヲ紙上ニ動カス時ハ其ノ動キタル跡ハ圖ノ如キ一ツノ線ヲ爲ス. 此線上ノ點ハ皆定點ヨ

リ一定ノ距離ニ在リ. 此線ヲ**圓周**ト稱シ,其ノ圍ミタル形ヲ**圓***ト稱ス. 定點ヲ圓ノ**中心**ト稱ス.



圖ニ於テO點ガ中心ナリ.

中心ヲ通リ双方周ニ於テ終ル線分ヲ**直徑**ト稱ス; 圖ノ AB, CD ノ如シ.

中心ヨリ周マデ引ケル線分ヲ**半徑**ト稱ス; 圖ノ OA, OB, OC, OD ノ如シ. 半徑ハ直徑ノ半分ニシテ,其ノ長サガ卽チ圓周ノ各點ノ中心ヨリノ一定ノ距離ナリ.

70 圓內ノ點ハ皆中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ小ナリ; 圖ノ P 點ノ如ク, $OP < OC$. 圓外ノ點ハ皆中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ大ナリ; 圖ノ Q 點ノ如ク, $OQ > OC$.

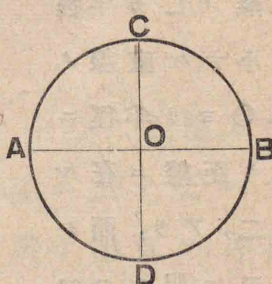
---

*圓ナル語ハ時々圓周ノ意味ニ用キルコトアリ. 圓周ハ畧シテ周ト云フコトアリ.

又中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ小ナル點ハ皆圓ノ內ニ在リ; 大ナル點ハ皆圓ノ外ニ在リ.

71 圓ハ其ノ中心ト半徑ノ長サトニ依リテ確定ス. 言ヒ換ヘレバ,中心ガOニ在リテ半徑ガOAニ等シキ圓ハ唯一ツアルノミ. 故ニ半徑ガ之ニ等シキ圓ヲ此圓ノ上ニ,中心ガ重ナル樣ニ,置ク時ハ二ツノ圓ハ全ク相合ス. 之レ吾人ガ直覺的ニ知リ得ル所ナリ; 因リテ之ヲ公理トス.

公理 半徑ガ相等シキ圓ハ合同ナリ.



特ニ記ス可キコトハ合同ナル圓ハ中心サヘ合スル時ハ如何樣ニ重ヌルモ相合スルコト是レナリ. 或ハ之ヲ次ノ如ク述ブルモ同一ナリ:

圓ハ之ヲ中心ノ廻リニ廻轉スルモ常ニ合ス.

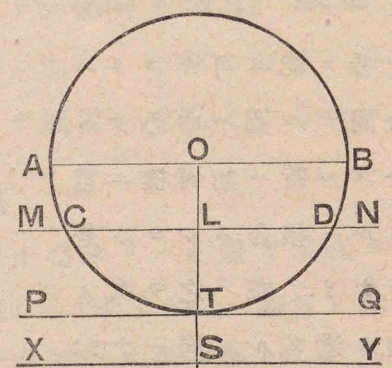
例ヘバ圖ノ圓ヲ OA ガ OB ト合スルマデ廻轉スル時ハ直徑AOBノ兩側ニ在リタル部分ハ其ノ位

置ヲ交換シ而カモ相合ス. 故ニ

公理 直徑ハ圓ヲ二ツノ合同ナル部分ニ分ツ.

各部分ヲ**半圓**ト稱ス. 互ニ垂直ナル二ツノ直徑ハ圓ヲ四ツノ合同ナル部分ニ分ツ; 之ヲ**四分圓**又ハ**象限**ト云フ.

72 直徑ABノ上ニOヨリ半徑ニ等シキ距離ニ在ル點ハ唯A, Bノ二點ノミ; 故ニ直徑ハ圓ト二點, 唯二點ニ於テ交ル.



MNノ如ク中心ノ距離OLガ半徑ヨリ小ナル直線ノ上ニOヨリ半徑ニ等シキ距離ニ在ル點ハ二ツアリ, 而シテ唯二ツニ限ル〔§60系〕. 故ニMNハ圓ト二ツノ點C, Dニ於テ交ル. 斯クノ如ク圓ト二點ニ於テ交ル直線ヲ**割線**ト稱ス. 其ノ圓內ニ

在ル部分(CD)ヲ**弦**ト稱ス, 卽チ弦トハ兩端ガ圓周ノ上ニ在ル線分ナリ.

中心ノ距離ガ半徑ニ等シキ直線(PQノ如キ)ノ上ニハ垂線ノ足(T)ヨリ他ニ中心ヨリノ距離ガ半徑ニ等シキ點ナシ〔§60〕. 斯クノ如ク圓ト唯一點ニ於テ出會フ直線ヲ其ノ**切線**ト稱シ, 其點ヲ**切點**ト稱ス: 圓ト直線トハ其點ニ於テ相切スト云フ.

切線ハ切點ヘ引ケル半徑ニ垂直ナリ.

中心ノ距離ガ半徑ヨリ大ナル直線(XYノ如キ)ハ全ク圓ト出會ハズ.

因リテ次ノ定理ヲ得:

定理 一直線ハ, 圓ノ中心ノ距離ガ半徑ヨリ小ナル時ハ, 圓ト二點ニ於テ交ル; 半徑ニ等シキ時ハ唯一點ニ於テ出會フ; 半徑ヨリ大ナル時ハ全ク出會ハズ.

73 二圓ノ相對シテノ位置ニ就テハ後ニ〔§136〕述ブル所アルベシ. 此ニハ唯次ノ事項ヲ述ベ置

カン,作圖ノ上ニ必要有レバナリ:

二圓周ハ其ノ中心ノ間ノ距離ガ半徑ノ和ヨリ小ニシテ,其ノ差ヨリ大ナル時ハ二點ニ於テ交ル,而シテ唯二點ニ限ル.

74 作圖題* ニ於テハ先ヅ其題ノ解法ナル作圖ヲ示シ,次ニ其解ガ要求ノ條件ヲ滿足スルモノナルコトヲ證明スルヲ要ス. 證明ノ爲ニ作圖ヲ要スルコトモアルベシ.

作圖題 與ヘラレタル線分ヲ二等分スルコト.

AB ヲ與ヘラレタル線分トス.

A及ビBヲ中心トシ,同ジ任意ノ半徑** ヲ以テ二ツノ圓*** ヲ畫キ, C, D ニ於テ交ラシメヨ;

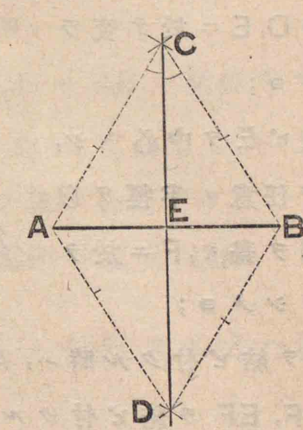
C, D ヲ結ビ付ケ, AB ト E ニ於テ交ラシメヨ.

E ハ AB ノ中點ナリ.

*作圖題トハ或ル圖形ヲ作ルコトヲ求ムル問題ナリ.

**此半徑ガ餘リ小ナル時ハ二圓周ハ交ラザル可シ〔§73〕.

***「圓ヲ畫キ」ト云フモ,交點ヲ得ルコトガ要項ナルヲ以テ之ヲ得ル丈ケノ部分ヲ畫ケバ足レリ.



AC, BC, AD, BD ヲ結ビ付ケヨ;

二ツノ三角形 ACD, BCD ニ於テ, AC = BC, AD = BD, CD = CD;

故ニ三角形ハ合同ニシテ〔§55〕,

∠ACD = ∠BCD.

又二ツノ三角形 ACE, BCE ニ於テ,

AC = BC, CE = CE, ∠ACE = ∠BCE;

故ニ三角形ハ合同ニシテ〔§46〕, AE = BE,

即チ E ハ AB ノ中點ナリ.

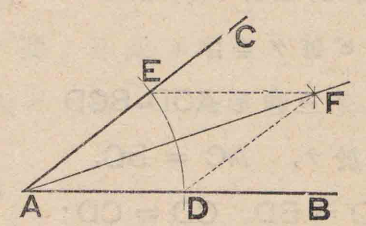
此作圖ニ於テ, CD ハ AB ヲ二等分スルノミナラズ,之ニ垂直ナリ,即チ CD ハ AB ノ垂直二等分線ナリ

75 作圖題 與ヘラレタル角ヲ二等分スルコト.

BAC ヲ與ヘラレタル角トス.

中心A及ビ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ二邊ト

夫々D, Eニ於テ交ラシメヨ;
D及ビEヲ中心トシ, 同ジ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, Fニ於テ交ラシメヨ;



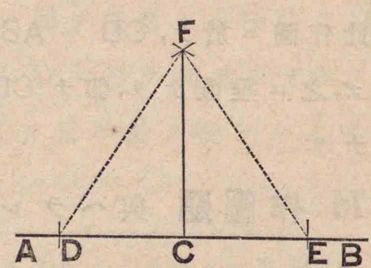
AFヲ結ビ付クル時ハ, AFハ角BACヲ二等分ス.

DF, EFヲ結ビ付クル時ハ, 三角形ADF, AEFハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ;
故ニ $\angle BAF = \angle CAF$.

76 作圖題 直線上ノ一點ヨリ之ニ垂線ヲ引クコト.

Cヲ直線AB上ノ一點トス.

中心C及ビ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, CAトDニ於テ, CBトEニ於テ交ラシメヨ;



D及ビEヲ中心トシ, 同ジ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ

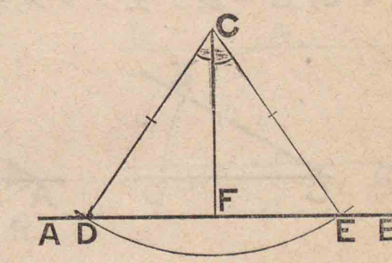
畫キFニ於テ交ラシメヨ;
CFヲ結ビ付クル時ハ, CFハABニ垂線ナリ.

DF, EFヲ結ビ付クル時ハ, 三角形DCF, ECFハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ;
因リテ $\angle DCF = \angle ECF =$ 直角 (§ 19).

77 作圖題 直線外ノ一點ヨリ之ヘ垂線ヲ引クコト.

CヲAB外ノ一點トス.

中心C及ビ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, ABトD及ビEニ於テ交ラシメヨ;



CD, CEヲ結ビ付ケ, 角DCEノ二等分線ヲ引キ(§ 75), ABトFニ於テ交ラシメヨ;
CFハABニ垂線ナリ.

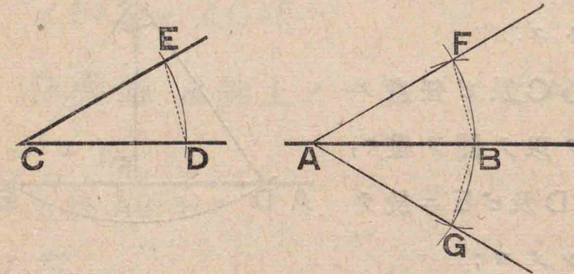
三角形DCF, ECFニ於テ, 二邊ト夾角ガ夫々相等シキヲ以テ, 二ツノ三角形ハ合同ナリ;

因リテ　∠CFD = ∠CFE = 直角.

78 作圖題 一直線上ノ與ヘラレタル一點ニ於テ其直線ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ爲ス直線ヲ引クコト.

A ヲ直線 AB 上ノ與ヘラレタル點, C ヲ與ヘラレタル角トス.

中心C及ビ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ,二邊ト夫々 D, E ニ於テ交ラシメヨ;



中心 A 及ビ半徑 CD ヲ以テ圓ヲ書キ AB ト B ニ於テ交ラシメヨ;

中心 B 及ビ半徑 DE ヲ以テ圓ヲ書キ,前ノ圓ト F 及ビ G ニ於テ交ラシメヨ;

AF, AG ヲ結ビ付クル時ハ,角 BAF, BAG ハ何レモ角 C ニ等シ.

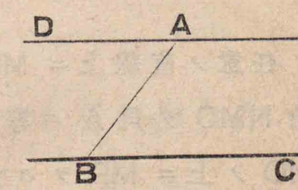
DE, BF, BG ヲ結ビ付ケヨ.

三角形 CDE, ABF, ABG ハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ.

因リテ　∠DCE = ∠BAF = ∠BAG.

79 作圖題 任意ノ一點ヲ通リ,與ヘラレタル直線ニ平行線ヲ引クコト.

A ヲ任意ノ一點, BC ヲ與ヘラレタル直線トス.



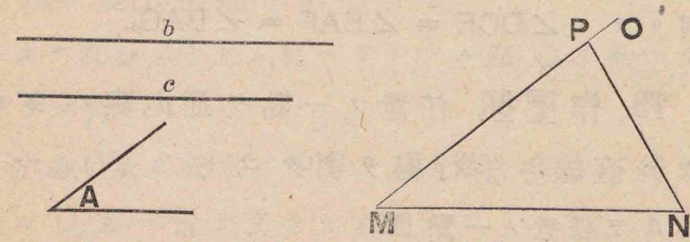
BC 上ニ任意ノ一點 B ヲ取リ, AB ヲ結ビ付ケヨ;

A ニ於テ角 CBA ニ等シク角 BAD ヲ作ル時ハ (§ 78), 錯角 CBA, BAD ガ相等シキヲ以テ, AD ハ BC ニ平行ナリ (§ 32).

80 之ヨリ以上ノ作圖法ヲ應用シテ三ツノ要素ガ與ヘラレタル三角形ヲ作ル方法ヲ示スベシ.

作圖題　二邊ト夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

b, c ヲ與ヘラレタル二邊, A ヲ與ヘラレタル角トス.

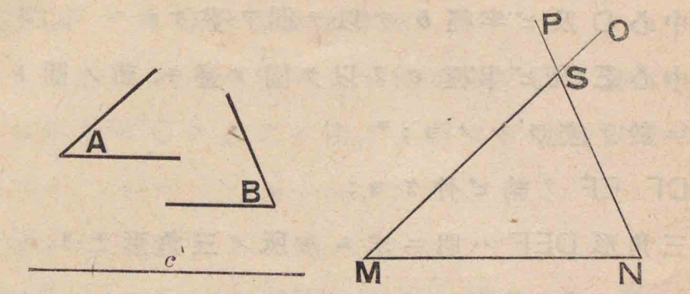


任意ノ直線上ニ MN ヲ b ニ等シク取レ;
角 NMO ヲ角 A ニ等シク作レ;
MO ノ上ニ MP ヲ c ニ等シク取リ, PN ヲ結ビ付ケヨ;
MNP ガ求ムル所ノ三角形ナルコト明カナリ.

81 作圖題 二角ト其ノ間ニ在ル邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

A, B ヲ與ヘラレタル二角, c ヲ與ヘラレタル邊トス.

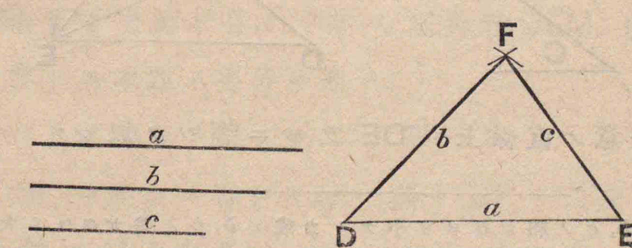
任意ノ直線上ニ MN ヲ c ニ等シク取レ;



角 NMO ヲ A ニ等シク作レ;
角 MNP ヲ B ニ等シク作レ;
MO ト NP ガ S ニ於テ交ル時ハ MNS ガ求ムル所ノ三角形ナルコト明ナリ.

82 作圖題 三邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

a, b, c ヲ與ヘラレタル三邊トス.



任意ノ直線上ニ DE ヲ a ニ等シク取レ;

中心 D 及ビ半徑 b ヲ以テ圓ヲ畫ケ;

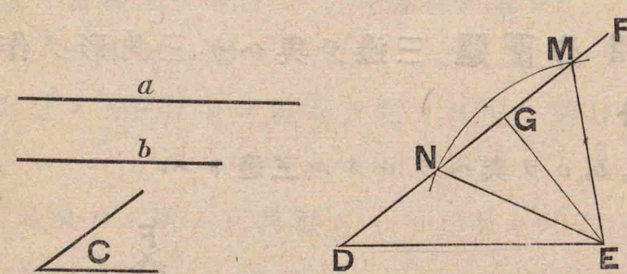
中心 E 及ビ半徑 c ヲ以テ圓ヲ畫キ, 前ノ圓ト F ニ於テ交ラシメヨ;*

DF, EF ヲ結ビ付ケヨ;

三角形 DEF ハ明ニ求ムル所ノ三角形ナリ.

83 作圖題 二邊ト其ノ一ツニ對スル角テ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

a, b ヲ與ヘラレタル二邊トシ, C ヲ b ニ等シキ邊ニ對スル與ヘラレタル角トス.



任意ノ直線上ニ DE ヲ a ニ等シク取レ;

*b, c ノ和ガ a ヨリ小ナルカ或ハ b, c ノ差ガ a ヨリ大ナル時ハ二圓ハ交ラズ〔§73〕, 三角形ハ成立セズ, 是レ §40 ト合ス.

角 EDF ヲ角 C ニ等シク作レ;

E ヲ中心トシ, b ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ケ.

a, b 及ビ C ノ大サニ依リテ種々ノ場合ガ起リ來ル.

(甲) C ガ鋭角ナル時.

(i) b ガ E ヨリ DF ヘ引ケル垂線 EG ヨリ小ナル時ハ圓ハ DF ト交ラズ〔§72〕;

本題ハ解ナシ.

(ii) b ガ EG ニ等シキ時ハ, 三角形 DEG ガ求ムル所ノ三角形ナルコト明ナリ.

(iii) b ガ EG ヨリ大ニシテ, a ヨリ小ナル時ハ圓ハ DF ト D ノ同ジ側ニ在ル二點 M, N ニ於テ交ル;

EM, EN ヲ結ビ付クル時ハ, 三角形 DEM, DEN ハ何レモ本題ノ要件ニ適ス;

因リテ此場合ニ於テハ二ツノ解アリ.

(iv) b ガ a ニ等シキ時ハ, 圓ト DF ノ二交點ノ中, N ハ D ト合ス;

因リテ此場合ニハ唯一ツノ解(DEM)有ルノミ.

(v) bガaヨリ大ナル時ハ二交點ノ中,NハDノMニ反對ノ側ニ在リテ,
三角形DENハ要件ニ適セズ;
因リテ此場合ニ於テモ唯一ッノ解有ルノミ.

(乙) 次ニ,Cガ直角ナル時ハ,bハ斜邊ナルヲ以テ,bガaヨリ大ナラザル時ハ解ナシ;
bガaヨリ大ナル時ハ圓ハDFトDノ反對ノ側ニ在ル二點ニ於テ交ル;
因リテ二ッノ三角形ヲ得ルモ,此二ッハ合同ナリ;
故ニ唯一ッノ解アルノミ.

(丙) Cガ鈍角ナル時ハ,之ニ對スル邊bハaヨリ大ナラザル可カラズ,然ラザレバ解ナシ;
圓ハDFトDノ反對ノ側ニ在ル二點ニ於テ交ル;
二交點ヲEト結ビ付クル時ハ二ッノ三角形ノ中,一ッハ要件ニ適シ,一ッハ適セザルコト明ナリ;
因リテ此場合ニ於テハ唯一ッノ解アルノミ.

§61, §62ト對照ス可シ.

84 演習問題.

(1) §75, §76ノ作圖ニ於テ二圓ハFノ外尚ホ

他ノ一點ニ於テ交ル:之ヲ採ル時ハ如何?

(2) 與ヘラレタル線分ノ上ニ正三角形ヲ作ルコト.

(3) 直角ヲ三ッニ等分スルコト.

(4) $15°$, $30°$, $45°$, $22\frac{1}{2}°$, $75°$, $105°$, $120°$, $150°$ノ角ヲ作ルコト.

(5) ABハ中心Oナル圓ノ弦,Cハ其ノ中點ナリ;OCハABニ垂線ナルコトヲ證明セヨ.

(6) 與ヘラレタル線分ヲ斜邊トシテ,直角二等邊三角形ヲ作ルコト.

(7) 斜邊ト一鋭角ヲ與ヘテ直角三角形ヲ作ルコト.

(8) 二等邊三角形ノ底邊及ビ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ヲ與ヘテ之ヲ作ルコト.

(9) 一直線CDノ反對ノ側ニ二點A, Bアリ:CDノ上ニ一點Pヲ $\angle APC = \angle BPD$ ナル樣ニ見出セ.

(10) 二等邊三角形ノ底邊及ビ頂角ト一底角トノ和ヲ與ヘテ之ヲ作ルコト

(11) 二等邊三角形ノ頂角ガ各底角ノ四倍ナリ,之ヲ作レ

(12) 底邊ト頂角ヲ與ヘテ二等邊三角形ヲ作ルコト.

(13) 三角形ノ一頂點ヨリ,對邊ト交リ且他ノ二頂點ヨリ之ヘ引ケル垂線ガ相等シキ様ナル直線ヲ引クコト.*

(14) 問題(9)ニ於テA, BガCDノ同ジ側ニ在ル時ハ作圖法如何?**

(15) 圓內ノ或ハ圓外ノ與ヘラレタル點ヨリ其ノ周ヘ最長キ直線及ビ最短キ直線ヲ引クコト.

---

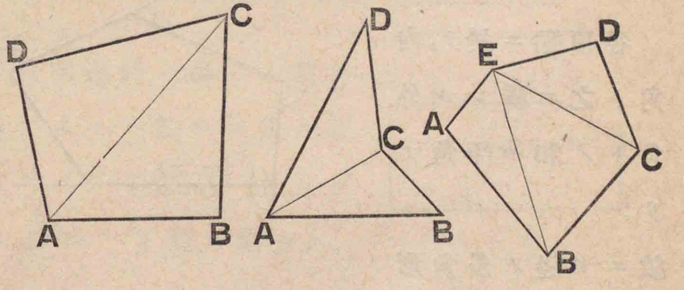
*斯クノ如キ問題ノ解ヲ企ツルニ當テハ先ヅ解ヲ得タリトシ,其圖ヨリシテ諸線及ビ角ノ關係ヲ推究シテ解ノ要點ヲ探ル可シ. 例ヘバ,此問題ニ於テ解ヲ得タリトスル時ハ二ツノ三角形有リテ,其ノ二角ガ夫々相等シ(直角及ビ對頂角ナルヲ以テ); 故ニ一邊ガ相等シケレバ,三角形ハ合同ニシテ,從テ(其ノ他ノ一邊ナル)垂線ガ相等シカルベシ. 因リテ問題ハ如何ニシテ二ツノ三角形ノ一邊ヲ相等シカラシムベキカニアリ.

**此問題ニ於テ解ヲ得タリトシテ圖ヲ作リ,(9)ト比較參照シテ解法ヲ求ム可シ

第六節 四邊形

85 多角形ノ相隣ラザル二頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ其ノ**對角線**ト稱ス.

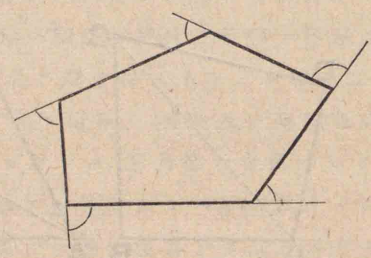
四邊形ハ一對角線ニ依リテ之ヲ二ツノ三角形



ニ分ツコトヲ得,而シテ其二ツノ三角形ノ內角ノ和ハ四邊形ノ內角ノ和ナリ. 故ニ四邊形ノ內角ノ和ハ二平角卽チ四直角ニ等シ(§41). 同樣ニ,五邊形ハ之ヲ三ツノ三角形ニ分ツコトヲ得; 其ノ內角ノ和ハ三ツノ三角形ノ內角ノ和ニシテ,三平角卽チ六直角ニ等シ. 一般ニ, n 邊ノ多角形ハ $(n-2)$ 三角形ニ分ツコトヲ得; 因リテ次ノ定理ヲ得:

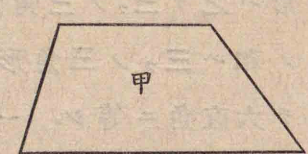
定理 n邊ノ多角形ノ內角ノ和ハ$(n-2)$平角卽チ$2(n-2)$直角ニ等シ.

86 定理 凸多角形ノ各邊ヲ順次ニ延長シテ得ル所ノ外角ノ和ハ常ニ 4 直角ニ等シ.

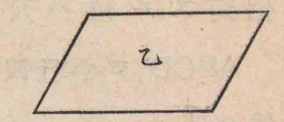


各頂點ニ於テ,內角ト之ニ隣レル外角トノ和ハ平角ナリ;
故ニ n邊ノ多角形ノ總テノ內角ト外角トノ和ハ n平角ニ等シ;
然ルニ內角ノ和ハ$(n-2)$平角ニ等シ;
故ニ總テノ外角ノ和ハ 2平角卽チ 4直角ニ等シ.

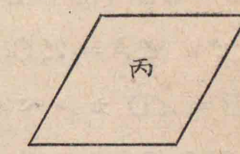
87 四邊形ノ一双ノ相對スル邊ガ平行ナルモノヲ**梯形**(ハシゴガタ)ト云フ.(甲圖ノ如シ.)



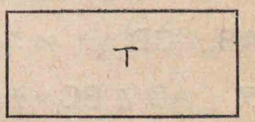
四邊形ノ二双ノ邊ガ平行ナルモノヲ**平行四邊形**ト云フ.(乙圖ノ如シ.)



平行四邊形ノ總テノ邊ガ相等シキモノヲ**菱形**(ヒシガタ)ト云フ.(丙圖ノ如シ.)



平行四邊形ノ總テノ角ガ相等シキモノ卽チ各角ガ直角ナルモノヲ**矩形**(サシガタ)ト云フ.(丁圖ノ如シ.)



平行四邊形ノ總テノ邊ガ相等シク且各角ガ直角ナルモノヲ**正方形**ト云フ.(戊圖ノ如シ.) 正方形ハ§53ノ定義ニ依リテ正四邊形ト稱ス可キモノナリ.

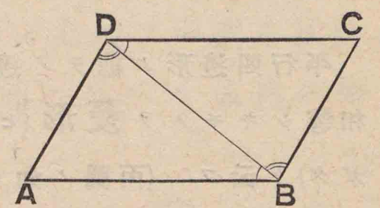
88 定理 平行四邊形ノ相對スル邊及ビ

相對スル角ハ夫々相等シ.

ABCD ヲ平行四邊形トセヨ.

然ル時ハ

AB = CD, AD = BC,



及ビ　∠A = ∠C,

∠B = ∠D カルベシ.

對角線 BD ヲ引ケ.

二ツノ三角形 ABD, CDB ニ於テ,

AB // CD　ナルヲ以テ，∠ABD = ∠CDB (§ 34),

又　AD // BC　ナルヲ以テ，∠ADB = ∠CBD;

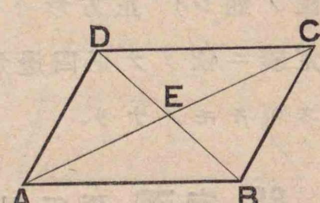
而シテ邊 BD ハ共通ナリ;

故ニ　△ABD ≡ △CDB　ニシテ,

AB = CD,　AD = BC,　及ビ　∠A = ∠C;

又 ∠B = ∠ABD + ∠CBD = ∠CDB + ∠ADB
= ∠D.

之ヨリシテ容易ニ次ノ諸系ヲ得.



系　平行四邊形ノ各對角線ハ之ヲ二ツノ合同ナル三角形ニ分ツ.

△ABD ≡ △CDB,　△ADC ≡ △CBA.

系　平行四邊形ノ相隣レル二角ノ和ハ一平角ニ等シ.

∠A + ∠B = ∠B + ∠C = ∠C + ∠D = ∠D + ∠A
= 一平角. (§ 34 系).

斯クノ如ク平行四邊形ノ一角ハ其ノ對角ニ等シク，隣角ノ補角ナルヲ以テ，平行四邊形ニ於テハ一角ヲ知ル時ハ總テノ角ヲ知ル. 特別ノ場合トシテ次ノ系ヲ得:

系　平行四邊形ハ，一角ガ直角ナル時ハ，矩形ナリ.

系　平行四邊形ハ，相隣レル二邊ガ相等シキ時ハ，菱形ナリ.

系　二ツノ對角線ハ各他ヲ二等分ス.

89　演習問題.

(1)　對角線ガ相等シキ平行四邊形ハ矩形ナリ

(2)　對角線ガ各他ニ垂直ナル平行四邊形ハ菱

形ナリ.

(3) 矩形ノ對角線ハ相等シ.

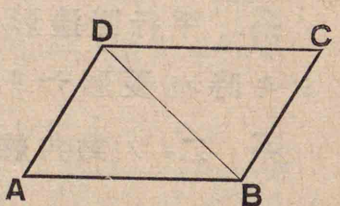
(4) 菱形ノ對角線ハ各他ニ垂直ニシテ角ヲ二等分ス.

(5) 正多角形ノ外角ガ各〻正三角形ノ内角ニ等シ; 其多角形ハ何邊ナリヤ?

(6) 與ヘラレタル一點ヲ通リ, 二ツノ與ヘラレタル平行線ノ間ニ在ル部分ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ樣ニ直線ヲ引クコト. 通例二ツノ解アルコトヲ説明セヨ.*

90 四邊形ハ如何ナル條件ガ充タサルル時ハ平行四邊形ナル可キカ, 言ヒ換ヘレバ, 如何ナル場合ニ於テ二双ノ相對スル邊ガ平行ナル可キカヲ論ゼン.

(甲) 相對スル邊ガ夫夫相等シキ時ハ, 三角形 ABD, CDB ハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ;



*§ 84 底註ニ説明シタル如ク解ヲ得タリトシテ圖ヲ作リ, 此直線ガ何ニ平行ナル可キカヲ考ヘヨ.

因リテ $\angle ABD = \angle BDC$,

及ビ $\angle ADB = \angle DBC$;

故ニ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ 〔§ 32〕.

(乙) 相對スル角ガ夫々相等シキ時ハ,

$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$;

因リテ各〻ノ和ハ四邊形ノ内角ノ和ノ半分ニ等シ, 即チ一平角ニ等シ;

故ニ $AD \parallel BC$ 〔§ 32 系〕.

同樣ニ $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C =$ 一平角;

故ニ $AB \parallel DC$.

(丙) 一双ノ相對スル邊ガ平行ニシテ且相等シキ時, 即チ $AB = DC$, $AB \parallel DC$ ナル時ハ, 三角形 ABD, CDB ニ於テ,

$AB = CD$, BD ハ共通ニシテ,

$\angle ABD = \angle CDB$ 〔§ 34〕;

因リテ三角形ハ合同ニシテ, $\angle ADB = \angle CBD$;

故ニ $AD \parallel BC$ 〔§ 32〕.

以上(甲),(乙),(丙)ヲ綜合シテ次ノ定理ヲ得:

定理 四邊形ハ,(甲)相對スル邊ガ夫々相

等シキ時；或ハ(乙)相對スル角ガ夫々相等シキ時；或ハ(丙)一双ノ相對スル邊ガ夫々相等シク且平行ナル時ハ，平行四邊形ナリ.

91 演習問題.

(1) 對角線ガ各他ヲ二等分スル四邊形ハ平行四邊形ナリ.

(2) 二ッノ平行線ノ間ノ垂直距離即チ之ニ垂直ナル直線ノ其ノ間ニ在ル部分ノ長サハ常ニ同ジ.*

(3) 二ッノ對角線ト一邊ヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作ルコト.

(4) 一對角線ヲ與ヘテ正方形ヲ作ルコト.

(5) 四邊形ノ對角線ガ相等シクシテ各他ヲ直角ニ二等分スル時ハ四邊形ハ正方形ナリ.

(6) S, T ハ夫々平行四邊形 ABCD ノ邊 AB, CD ノ中點ナリ；BSDT ハ平行四邊形ナリ.

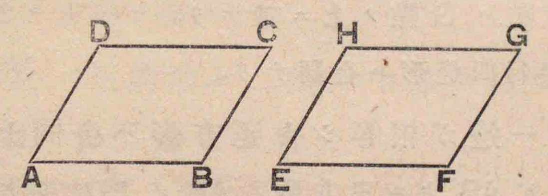
(7) 各他ヲ直角ニ二等分スル二線分ノ端ヲ結ビ付クル

*此長サヲ二平行線ノ**距離**ト云フ.

時ハ菱形ヲ成ス

(8) ABCD, ABXY ガ何レモ平行四邊形ナル時ハ CDYX モ亦平行四邊形ナリ.

92 定理 一ッノ平行四邊形ノ相隣レル二邊ト一角ガ夫々一ッノ他ノ平行四邊形ノ相隣レル二邊ト一角ニ等シキ時ハ，二ッノ平行四邊形ハ合同ナリ.



二ッノ平行四邊形 ABCD, EFGH ニ於テ，

AB ＝ EF, AD ＝ EH, 及ビ ∠A ＝ ∠E：

然ル時ハ二ッノ平行四邊形ハ合同ナルベシ.

平行四邊形 ABCD ヲ平行四邊形 EFGH ノ上ニ重ネ，A點ハ E 點ノ上ニ重ナリ，邊 AB ハ邊 EF ノ上ニ重ナル様ニセヨ.

AB＝EF キヲ以テ B點ハ F 點ノ上ニ重ナル；又 ∠BAD＝∠FEH キヲ以テ，AD ハ EH ノ上ニ

重ナル；

而シテ，AD＝EH キヲ以テ，D點ハH點ノ上ニ重ナル；

BC ト FG ハ何レモ B 卽チ F 點ヲ通リ，AD 卽チ EH ニ平行ナルヲ以テ，BC ハ FG ノ上ニ重ナル〔§30 公理〕；

同樣ニ DC ハ HG ノ上ニ重ナル：

故ニ C 點ハ G 點ノ上ニ重ナリ，

二ツノ平行四邊形ハ合同ナリ．

系 一邊ガ相等シキ正方形ハ合同ナリ．

一邊ガ AB ナル正方形ヲ AB ノ上ノ 正方形ト云フ．

系 相隣レル二邊ガ夫々相等シキ矩形ハ合同ナリ．

二邊ガ AB, AC ナル矩形ヲ AB, AC ノ包ム矩形ト云ヒ，又略シテ矩形 AB, AC トモ云フ．

93 演習問題．

(1) 一邊ト一角ガ夫々相等シキ二ツノ菱形ハ

合同ナリ．

(2) 與ヘラレタル線分ノ上ニ正方形ヲ畫クコト．

(3) 相隣レル二邊ヲ與ヘテ矩形ヲ作ルコト．

(4) 相隣レル二邊ト一角ヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作ルコト．

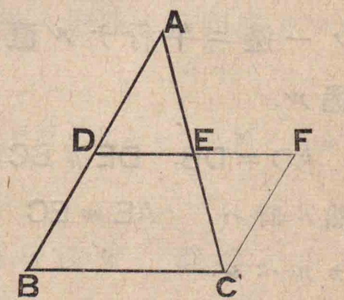
94 平行四邊形ノ性質ハ其ノ應用少カラズ；次ニ其ノ二三ヲ揭グ．

定理 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ第三邊ニ平行ナリ．

三角形 ABC ニ於テ，

AD＝DB, AE＝EC：

然ル時ハ DE // BC ナルベシ．



DE ヲ延長シ，EF ヲ DE ニ等シクシ，CF ヲ結ビ付ケヨ．

二ツノ三角形 ADE, CFE ニ於テ，

AE＝EC, DE＝EF, 及ビ ∠AED＝∠CEF；

因リテ三角形ハ合同ニシテ,

$\angle DAE = \angle FCE$ 及ビ $AD = CF$;

因リテ $DA \parallel CF$ 〔§ 32〕 卽チ $BD \parallel CF$;

又 $AD = DB$ キヲ以テ, $BD = CF$;

$BD = CF$ 及ビ $BD \parallel CF$ ナルヲ以テ,

BCFD ハ平行四邊形ニシテ〔§ 90〕, $DE \parallel BC$.

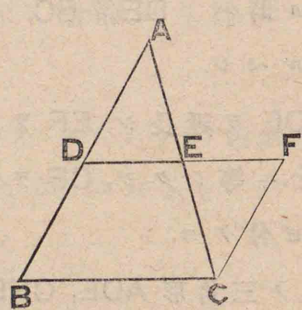
系 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ第三邊ノ半分ナリ.

$DE = \frac{1}{2} DF = \frac{1}{2} BC.$

95 定理 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ他ノ一邊ニ平行ナル直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル.

$AD = DB$, $DE \parallel BC$:

然ル時ハ $AE = EC$ カルベシ.



CF ヲ AB ニ平行ニ引キ, DE ノ延長ト F ニ於テ交ラシメヨ,

BCFD ハ平行四邊形ニシテ,

$BD = CF$ 〔§ 88〕 $= AD$ 〔假設〕,

又 $\angle DAE = \angle ECF$ 及ビ $\angle ADE = \angle EFC$ 〔§ 34〕;

故ニ $\triangle ADE \equiv \triangle CFE$;

因リテ $AE = EC$.

96 演習問題.

(1) 三角形ノ三邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ之ヲ四ツノ合同三角形ニ分ツ.

(2) 四邊形ノ隣邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ一ツノ平行四邊形ヲ成ス.

(3) 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點ヨリ等距離ナリ.

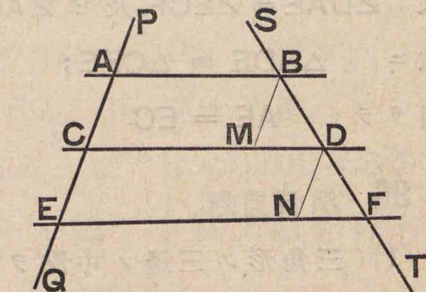
(4) 四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ビ付クル二直線ハ各他ヲ二等分ス.

97 定理 一組ノ平行線ガ一截線ノ上ニ相等シキ線分ヲ截リ取ル時ハ總テノ截線ノ上ニ相等シキ線分ヲ截リ取ル.

平行線 AB, CD, EF ガ一截線 PQ ノ上ニ相等

シキ線分 AC, CE ヲ截リ取ルトセヨ：

然ル時ハ任意ノ他ノ截線 ST ノ上ニモ亦相等シキ線分 BD, DF ヲ截リ取ルベシ.*



B, D ヲ通リ, BM, DN ヲ PQ ニ平行ニ引ケ；

ABMC, CDNE ハ平行四邊形ニシテ,

$AC = BM$　及ビ　$CE = DN$；

然ルニ　$AC = CE$；

故ニ　$BM = DN$.

又　$\angle MBD = \angle NDF$,

及ビ　$\angle BDM = \angle DFN$ 〔§ 34 系〕；

因リテ　$\triangle BMD \equiv \triangle DNF$ 〔§ 49〕；

故ニ　$BD = DF$.

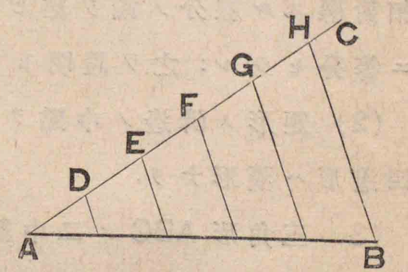
§ 95 ノ定理ハ此定理ニ於テ ST ガ A ヲ通リ, A

*三ツノ平行線ガ截リ取ル二ツノ線分ニ就テ證明スト雖モ此證明法ハ幾個ノ線分ニモ應用スルヲ得ルコト明ナリ.

ト B ガ合シタル特別ノ場合ニ外ナラズ.

98 上ノ定理ヲ應用シテ次ノ作圖題ヲ解スルコトヲ得：

作圖題　與ヘラレタル線分ヲ任意ノ數ニ等分スルコト.



AB ヲ與ヘラレタル線分トス：

之ヲ任意ノ數, 假ニ五ツトセン, ニ等分スルニハ, 一端 A ヲ通リ, 任意ノ直線 AC ヲ引ケ；

而シテ其ノ上ニ任意ノ長サ AD ヲ取リ,

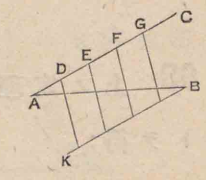
各 AD ニ等シク四ツノ線分 DE, EF, FG, GH ヲ截リ取レ；

BH ヲ結ビ付ケ,

D, E, F, G ヲ通リ BH ニ平行線ヲ引ケ.

此等ノ平行線ハ前條ノ定理ニ依リテ AB ヲ五ツニ等分ス.

99 演習問題.



(1) 前條ノ作圖ニ於テ, AC ノ上ニ四ツノ線分ヲ截リ取リタル後, B ヲ通リテ AC ニ平行ニ BK ヲ引キ, 其ノ上ニ AD ニ等シク四線分ヲ截リ, 相對應スル線分ノ端ヲ結ビ付クル時ハ, AB ハ五ツニ等分セラル: 之ヲ證明セヨ.

(2) 矩形ノ隣邊ノ中點ヲ結ビ付ケテ得ル所ノ四邊形ハ菱形ナリ.

(3) 三角形 ABC ノ二中線* BE, CF ガ G ニ於テ交ル; GB, GC ノ中點ヲ夫々 H, K トス: HKEF ガ平行四邊形ナルコトヲ證明セヨ.

(4) 前問題ニ於テ G ハ BE 及ビ CF ノ三等分點ノ一ナルコトヲ證明セヨ.

(5) 三角形 ABC ノ一邊 BC ノ上ニ任意ニ一點 X ヲ取ル時ハ, AX ハ AB, AC ノ中點ヲ結ビ付クル直線ニ依リテ二等分セラル.

---

*三角形ノ一頂點ヲ對邊ノ中點ト結ビ付クル直線ヲ**中線**ト云フ.

(6) 三角形ノ三邊ノ中點ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

(7) 一角內ノ一點 P ヲ通リ, 二邊ノ間ニアル部分ガ P ニ於テ二等分サルル樣ニ直線ヲ引クコト.

(8) 角 BAC 外ノ一點 P ヲ通リ直線 PBC ヲ PB ガ BC ニ等シキ樣ニ引クコト.

第七節　軌　跡

100　圓周上ノ點ハ皆其ノ中心ナル一定點ヨリ其ノ半徑ニ等シキ一定ノ距離ニ在リ〔§ 69〕.而シテ圓ノ外或ハ內ニ在ル點ハ皆中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ大ナルカ或ハ小ナルヲ以テ〔§ 70〕,中心ヨリ半徑ニ等シキ距離ニ在ル點ハ皆圓周ノ上ニ在リ.

斯クノ如ク,(i) 或ル線ノ上ノ點ハ皆或ル條件ヲ充タシ,又 (ii) 其條件ヲ充タス點ハ皆其線ノ上ニ在ル時ハ,其線ハ其條件ヲ充タス點ノ **軌跡** ナリト云フ.

圓周ハ一定點ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ナリ.

101　二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ムルニ,§ 47 ノ問題 (5) ニ依リテ二點ヲ結ビ付クル線分ノ垂直二等分線ノ上ノ各點ハ二點ヨリ等距離ナリ;又 § 66 ノ問題 (3) ニ依リテ垂直二等分線

ノ上ニ在ラザル點ハ二點ヨリ等距離ナラズ,言ヒ換ヘレバ,二點ヨリ等距離ナル點ハ總テ垂直二等分線ノ上ニ在リ. 故ニ,

定理　二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二點ヲ結ビ付クル線分ノ垂直二等分線ナリ.

102　軌跡ガ一ツヨリ多クノ線ナルコト有リ.例ヘバ,相交ル二直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ムルニ,§ 50 ノ問題 (3) ニ依リテ二直線ノ為ス角ノ二等分線上ノ各點ハ其二直線ヨリ等距離ナリ;又 § 63 ノ問題 (2) ニ依リテ二直線ヨリ等距離ナル點ハ皆其ノ為ス角ノ二等分線ノ上ニ在リ.而シテ二直線ノ為ス角ノ二等分線ハ二ツ有リ;故ニ,

定理　相交ル二直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其ノ為ス角ヲ二等分スル二直線ナリ.

103　斯クノ如ク,或ル線ガ或ル條件ヲ充タス

點ノ軌跡ナルコトヲ確定スルニハ二ツノ事項ヲ證明スルヲ要ス,卽チ

(i) 其線ノ上ニ在ル點ガ其條件ヲ充タスコト;

(ii) 其條件ヲ充タス點ガ其線ノ上ニ在ルコト,

是レナリ.

104 前條ノ (i) 及ビ (ii) ヲ比較スルニ, (i) ノ假設(線ノ上ニ在ルコト)ガ (ii) ノ終結ニシテ, (i) ノ終結(條件ヲ充タスコト)ガ (ii) ノ假設ナリ; 斯クノ如キ關係有ル二ツノ定理ハ各他ノ **逆** ナリト云フ. 逆定理ノ例ハ既ニ數多アリタリ; 今其ノ中ノ或ルモノヲ次ニ揭グ:

§ 32 ノ定理ト § 34 ノ定理; § 51 ノ定理ト § 52 ノ定理; § 60 ノ定理ノ (ii) ト同系ノ第二; § 88 ト § 90 ノ (甲)(乙); § 94 ノ定理ト § 95 ノ定理,等.

一定理ハ眞ナルモ其ノ逆ハ必ズシモ眞ナリト斷定ス可カラズ; 二者各〻別々ニ其ノ眞否ヲ攻究スルヲ要ス. 一定理ノ眞ナルヨリシテ直ニ其ノ逆ヲ眞ナリトセントスルハ普通人ノ陷リ易キ論理上ノ誤謬ナリ,最モ注意ヲ要ス.

105 演習問題.

(1) 一直線ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其ノ兩側ニ於テ之ニ平行ナル二ツノ直線ナリ.

(2) 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ハ之ヲ結ビ付クル線分ノ垂直二等分線ナリ.

(3) 同ジ底邊ノ上ニ立ツ二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

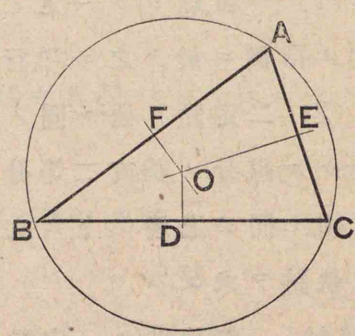
(4) 一直線外ノ一定點ヨリ之ヘ引ケル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

(5) O ハ一定點ニシテ, P ハ一直線ノ上ヲ動ク點ナリ; OP ノ延長ノ上ニ OP ニ等シク PQ ヲ取ル時ハ Q ノ軌跡ハ何ナリヤ?

(6) 一定ノ長サノ線分ガ直角ニ交ル二直線ノ間ニ滑ル時ハ線分ノ中點ノ軌跡ハ交點ヲ中心トセル一圓周ナリ. (§ 96 ノ問題 (3).)

106 軌跡ヲ應用シテ定理ノ證明又ハ作圖題ノ解ヲ得ルコト少カラズ: 次ニ其ノ二三ノ例ヲ揭グ.

定理　三角形ノ三邊ヲ直角ニ二等分スル三直線ハ一點ヲ通ル.



三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ノ垂直二等分線ガ O ニ於テ交ルトセヨ;

O ハ三點 A, B, C ヨリ等距離ナリ (§ 101);

故ニ O ハ BC ノ垂直二等分線ノ上ニ在リ (§ 101);

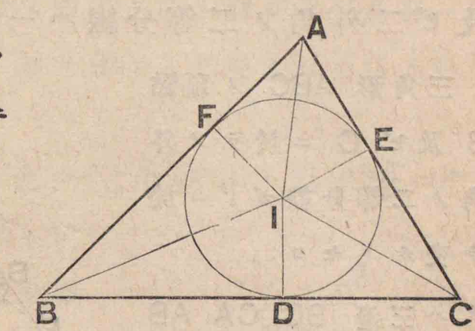
因リテ定理ヲ得.

O點ハ三角形ノ三頂點ヨリ等距離ナルヲ以テ, 中心 O, 半徑 OA ナル圓ハ三頂點ヲ通ル. 斯クノ如キ圓ヲ三角形ノ **外接圓** ト稱シ, 其ノ中心ヲ **外心** ト稱ス.

一般ニ一ツノ多角形ノ總テノ頂點ヲ通ル圓ヲ其ノ **外接圓** ト稱ス. 圓ハ多角形ニ外接シ, 多角形ハ圓ニ内接スト云フ.

107　定理　三角形ノ角ヲ二等分スル三

直線ハ一點ヲ通ル.



三角形 ABC ノ二角 B, C ノ二等分線ガ I ニ於テ交ルトセヨ;

I ハ三邊 BC, CA, AB ヨリ等距離ナリ (§ 102);

故ニ I ハ角 A ノ二等分線ノ上ニ在リ (§ 102);

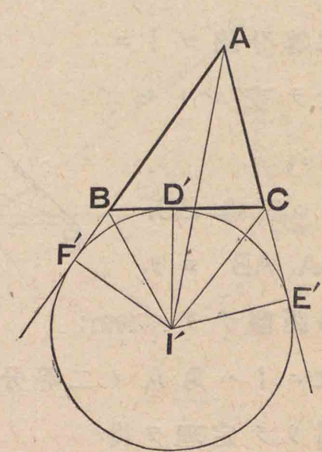
因リテ定理ヲ得.

I 點ヨリ三邊ヘ引ケル垂線ヲ夫々 ID, IE, IF トスル時ハ, ID＝IE＝IF キヲ以テ, I ヲ中心トシ, ID ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ク時ハ, 各邊ハ其圓ノ切線ナリ (§ 72). 斯クノ如キ圓ヲ三角形ノ **内接圓** ト稱シ, 其ノ中心ヲ **内心** ト稱ス.

一般ニ一ツノ多角形ノ總テノ邊ガ切線ナル圓ヲ其ノ **内接圓** ト稱ス. 又多角形ハ其圓ニ外接スト云フ.

108 定理 三角形ノ一內角ノ二等分線及ビ二外角ノ二等分線ハ一點ヲ通ル.

三角形 ABC ノ頂點 B 及ビ C ニ於テノ外角ノ二等分線ガ I′ ニ於テ交ルトセヨ;



I′ ハ三邊 BC, CA, AB ヨリ等距離ナリ〔§102〕;

故ニ I′ ハ角 A ノ二等分線ノ上ニ在リ〔§102〕;

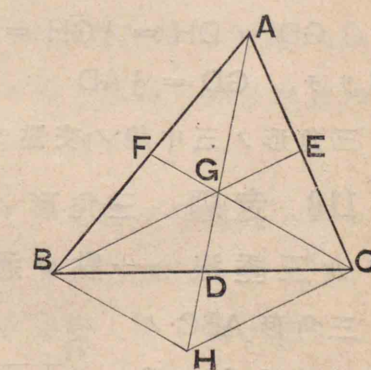
因リテ定理ヲ得.

I′ ヨリ邊 BC 及ビ邊 CA, AB ノ延長ヘ引ケル垂線ヲ I′D′, I′E′, I′F′ トスル時ハ, I′D′ = I′E′ = I′F′ キヲ以テ, I′ ヲ中心トシ, I′D′ ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ク時ハ, 各邊ハ其圓ノ切線ナリ. 斯クノ如キ圓ヲ三角形ノ **傍接圓** ト稱シ, 其ノ中心ヲ **傍心** ト稱ス. 一ツノ三角形ニハ三ツノ傍接圓及ビ傍心有ルコト明ナリ.

109 次ニ揭グル定理ノ證明ハ軌跡ニ依ルモノニアラズト雖モ前三定理ト同ジク三角形ニ關係アル重要ナル點ニ付テノ定理ナルヲ以テ此ニ揭グ.

定理 三角形ノ三中線ハ一點ヲ通ル.*

三角形 ABC ノ頂點 B, C ヲ通ル中線 BE, CF ガ G ニ於テ交ルトセヨ;



AG ヲ結ビ付ケ, 之ヲ延長シテ, BC ト D ニ於テ交リ, 又 B ヲ通リ CF ニ平行ナル直線ト H ニ於テ交ルトセヨ;

HC ヲ結ビ付ケヨ.

FG ハ AB ノ中點ヲ通リ BH ニ平行ナルヲ以テ,

AG = GH〔§95〕;

GE ハ AH, AC ノ中點ヲ結ビ付クルヲ以テ,

*此定理ハ又§99ノ問題(3),(4)ニ依リテ證明スルヲ得.

GE // HC〔§ 94〕;

因リテ BGCH ハ平行四邊形ニシテ，其ノ對角線ハ各他ヲ二等分ス〔§ 88 系〕;

故ニ　BD = DC;

即チ D ハ BC ノ中點ニシテ，AD ハ中線ナリ;

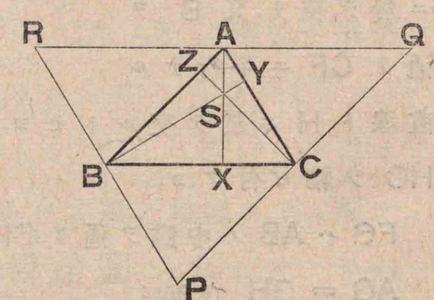
故ニ三ツノ中線 AD, BE, CF ハ一點 G ヲ通ル.

$$GD = DH = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}AG;$$

因リテ，$GD = \frac{1}{3}AD$.

三角形ノ三中線ノ交點ヲ其ノ **重心** ト稱ス.

110　定理　三角形ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル三垂線ハ一點ヲ通ル.



三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヲ通リ，各對邊ニ平行線ヲ引ク時ハ三角形 PQR ヲ得;

BCQA, BCAR ハ何レモ平行四邊形ニシテ，

AQ = BC = AR,

即チ A ハ QR ノ中點ナリ;

同樣ニ，B, C ハ夫々 RP, PQ ノ中點ナリ;

故ニ A, B, C ヨリ對邊 BC, CA, AB ヘ引ケル垂線ハ三角形 PQR ノ邊ノ垂直二等分線ナリ;

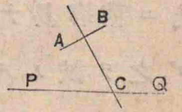
故ニ其三直線ハ一點ヲ通ル〔§ 106〕.

此點ヲ三角形ノ **垂心** ト稱ス.

S ガ三角形 ABC ノ垂心ナル時ハ，四點 A, B, C, S ノ中何レノ點ニテモ他ノ三點ノ成ス三角形ノ垂心ナルコト圖ニ依リテ明ナリ

111　軌跡ニ依リテ解ヲ得ル作圖題ハ甚ダ多シ; 此ニ其ノ簡單ナルモノノ二三ヲ揭グ.

(1)　一直線ナル鐵道線路ノ同ジ側ニ在ル二村ヨリ等距離ナル處ニ停車場ヲ設ケント欲ス，其ノ位置如何?



之ヲ幾何學的文句ニ譯ス時ハ，

「一直線 PQ ノ上ニ其ノ同ジ側ニ在ル二點 A, B ヨリ等距離ナル點ヲ求ム」トナル.

二點ヨリ等距離ナル點ハ皆之ヲ結ビ付クル線分 AB ノ垂直二等分線ノ上ニ在ルヲ以テ〔§ 101〕,

此直線トPQトノ交點Cガ求ムル所ノ點ナリ.

(2) 與ヘラレタル一直線ノ上ニ一ツノ他ノ與ヘラレタル直線ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ヲ求ム.

§105 ノ問題(1)ヲ應用シテ二點ヲ得ルコト明ナリ.

(3) 與ヘラレタル二點ヨリ等距離ニシテ又相交ル二直線ヨリ等距離ナル點ヲ求ム.

§101 及ビ §102 ヲ應用シテ二點ヲ得.

112 三角形ノ三ツノ要素ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコトハ§80乃至§83ニ於テ之ヲ示シ,其他種々ノ三角形ノ作圖題ヲ演習問題トシテ揭ゲタリ. 三角形ノ作圖題ハ甚ダ多ク,中ニハ頗ル困難ニシテ初學者ニハ到底企テ難キモノモ少カラズ; 今此ニ稍容易ナルモノノ二三ヲ演習問題トシテ揭グ,之ヲ試ムルニ當テ§84ノ底註ノ注意ヲ忘ル可カラズ.

演習問題.

(1) 三ツノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト 〔先ヅ§109ノ三角形 GBH ヲ作ル可シ.〕

(2) 底邊,* 一底角,及ビ他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

(3) 二邊,及ビ第三邊ヘノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

(4) 底邊,高サ** 及ビ外接圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

---

* 三角形ニ於テ任意ノ一邊ヲ底邊ト見做スコトヲ得; 之ニ對スル頂點ヲ特ニ頂點ト稱ス.

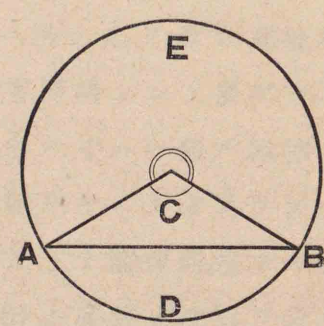
** 三角形ノ高サトハ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ノ長サナリ.

第二編　圓

第一節　弧及ビ弦

113　圓ニ付テハ第一編第五節ニ於テ少シク述ベタレドモ僅ニ作圖ニ必要ナル二三ノ主要ナル性質ヲ示スニ止マレリ; 本編ニ於テハ圓ノ重要ナル性質ヲ論ゼントス.

圓周ノ一部分ヲ**弧**ト云フ. 合セテ全周ヲ爲ス二ッノ弧ヲ**共軛弧**ト云ヒ,其ノ大ナルモノヲ**優弧**,小ナルモノヲ**劣弧**ト云フ. 圖ニ於テ,



ADB, AEB ハ共軛弧ニシテ, ADB ハ劣弧, AEB ハ優弧ナリ.

今弧 AB ノ兩端ヲ中心ト結ビ付クル時ハ角

ACB ヲ得; 角 ACB モ優,劣,二ッノ共軛角アリ〔§ 16〕而シテ優角 ACB ハ優弧 AEB ニ對シ, 劣角 ACB ハ劣弧 ADB ニ對シ,各、其弧ノ上ニ立ツト云フ.

一ッノ弧ノ上ニ立ツ角ヲ其弧ニ對スル**中心ニ於テノ角**ト云フ; 或ハ略シテ**中心角**トモ云フ.

A, B ヲ結ビ付クル弦 AB モ亦弧及ビ中心ニ於テノ角ニ對ス; 然レドモ同ジ弦 AB ガ劣弧 ADB 及ビ中心ニ於ケル劣角 ACB ニ對スルモノトモ, 又ハ優弧 AEB 及ビ優角 ACB ニ對スルモノトモ看做スコトヲ得.

二ッノ半徑ト其ノ端ノ間ニアル弧ヲ以テ圍ミタル形ヲ**扇形**(アフギガタ)ト云フ. 同ジ二ッノ半徑ヲ以テ截リ取ル扇形ニモ亦優,劣, 二ッノ共軛扇形アリ.

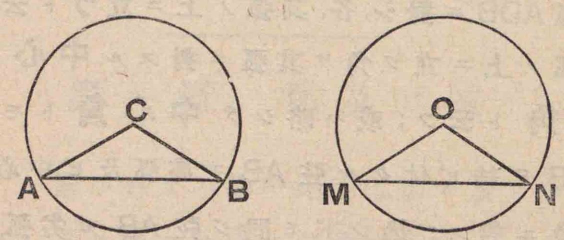
114　**定理**　同ジ或ハ合同ナル圓ノ相等シキ弧ハ相等シキ中心角及ビ弦ニ對ス.

AB, MN ヲ合同ナル圓ノ相等シキ弧トセヨ:*

---

*同ジ圓ハ二ッノ合同ナル圓ノ重ナリ居タルモノト見做シ,之ヲ二ッニ離シテ,更ニ本條ノ如ク重ネ合ハス可シ.

然ル時ハ中心角 ACB ハ中心角 MON ニ等シク,
弦 AB ハ弦 MN ニ等シカルベシ.



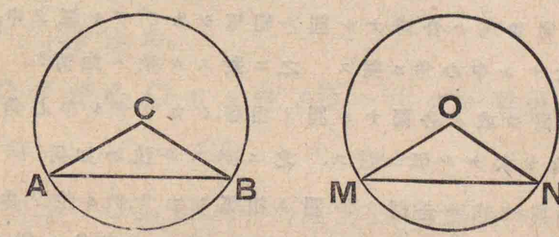
一ッノ圓ヲ他ノ上ニ,中心ガ中心ノ上ニ,及ビ A 點ガ M 點ノ上ニ重ナル樣ニ,重ヌル時ハ,
弧 AB ハ弧 MN ニ等シキヲ以テ, B 點ハ N 點ノ上ニ重ナル;
因リテ, $\angle ACB = \angle MON$, 及ビ $AB = MN$.

115 前條ト全ク同樣ニ,次ノ定理ヲ證明スルヲ得:

定理 同ジ或ハ合同ナル圓ノ相等シキ中心角ハ相等シキ弧及ビ相等シキ弦ニ對ス.

116 **定理** 同ジ或ハ合同ナル圓ノ相等シキ弦ハ相等シキ弧及ビ相等シキ中心角ニ對ス.

AB, MN ヲ合同ナル圓ノ相等シキ弦トセヨ:
然ル時ハ弧 AB ハ弧 MN ニ等シク, 中心角 ACB ハ中心角 MON ニ等シカルベシ.



三角形 ACB, MON ハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ;
因リテ $\angle ACB = \angle MON$.
故ニ,前條ノ定理ニ依リテ,弧 AB = 弧 MN.

117 演習問題.

(1) 同ジ圓ニ於テ中心ニ於テノ一ッノ角ガ他ノ角ノ二倍ナル時ハ前者ニ對スル弧ハ後者ニ對スル弧ノ二倍ナリ;之ヲ證明セヨ. 弦モ亦二倍ナリヤ?

（2）前問題ノ逆ヲ述ベ，之ヲ證明セヨ．弦ハ如何？

（3）圓周上ノ一點ヲ通リ與ヘラレタル長サノ弦ヲ引クコト．

（4）PQ, QR, RS, ST ガ一圓ノ相等シキ弦ナル時ハ，PR ＝ QS ＝ RT．

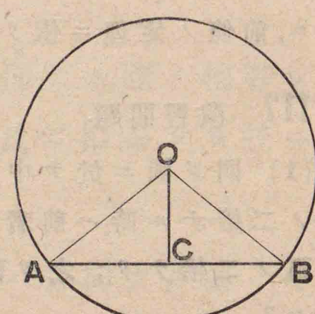
（5）同シ或ハ合同ナル圓ノ相等シカラザル弧ノ中，大ナル弧ガ大ナル中心角ニ對ス．之ニ對スル弦ハ如何？

（6）同シ或ハ合同ナル圓ノ相等シカラザル中心角ノ中，大ナル角ガ大ナル弧ニ對ス．之ニ對スル弦ハ如何？

（7）同シ或ハ合同ナル圓ノ相等シカラザル弦ノ中，大ナル弦ガ大ナル劣弧及ビ大ナル中心ニ於ケル劣角ニ對ス．

118　定理　中心ヨリ弦ノ中點ヘ引ケル直線ハ弦ニ垂直ナリ．

O ヲ圓ノ中心，C ヲ弦 AB ノ中點トセヨ：然ル時ハ OC ハ AB ニ垂直ナルベシ．



AO, BO ヲ結ビ付ケヨ；

三角形 AOC, BOC ニ於テ，

AO ＝ BO，AC ＝ BC，OC ハ共通ナリ；

因リテ　△AOC ≡ △BOC；

故ニ　∠ACO ＝ ∠BCO ＝ 直角．

119　定理　中心ヨリ弦ヘ引ケル垂線ハ之ヲ二等分ス．

OC ヲ中心 O ヨリ弦 AB ヘ引ケル垂線トセヨ：然ル時ハ AC ＝ BC カルベシ．

三角形 AOC, BOC ハ直角三角形ニシテ，斜邊 AO, BO ガ相等シク，OC ハ共通ナリ；

因リテ　△AOC ≡ △BOC〔§ 62〕；

故ニ　AC ＝ BC．

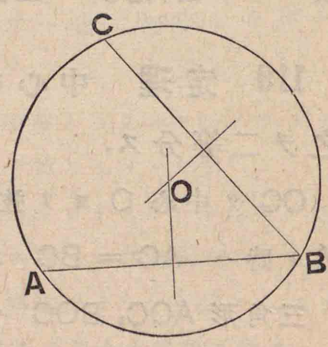
120　定理　弦ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ通ル．

此定理ハ前二條ノ定理ヨリ推定ス可ク，又 § 101 ノ定理ノ系トモ見ル可シ．因リテ證明ハ之ヲ略ス．

之ニ依リテ，又ハ § 101 ニ依リテ，次ノ作圖題ヲ

解スルコトヲ得：

作圖題　與ヘラレタル三點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.



A, B, C ヲ與ヘラレタル三點トス.

AB 及ビ BC ヲ結ビ付ケ，其ノ垂直二等分線ヲ引キ，O ニ於テ交ラシメヨ；

O ハ三點 A, B, C ヨリ等距離ナルヲ以テ〔§ 101〕，

O ヲ中心トシ，半徑 OA ヲ以テ圓ヲ畫ク時ハ，此圓ハ A, B, C ヲ通ル.

此圓ハ三角形 ABC ノ外接圓ナリ〔§ 106〕.

三點ガ一直線ノ上ニ在ル時ハ AB 及ビ BC ノ垂直二等分線ハ平行ニシテ交ラズ；因リテ此題ハ解ナシ.

121　前條ノ作圖ニ於テ，A, B ヨリ等距離ナル

點ハ必ズ AB ノ垂直二等分線ノ上ニ在リ〔§ 101〕；又 B, C ヨリ等距離ナル點ハ必ズ BC ノ垂直二等分線ノ上ニ在リ〔§ 101〕. 故ニ A, B, C ヨリ等距離ナル點ハ必ズ此二直線ノ上ニ在ラザル可カラズ，卽チ其ノ交點 O ヨリ他ニ有ル可カラズ. 故ニ，

定理　一直線ノ上ニ在ラザル三點ヲ通ル圓ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル，或ハ，一直線ノ上ニ在ラザル三點ハ一圓ヲ確定ス.

因リテ，二圓ハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ交ル能ハザルコト明ナリ.

122　§ 120 ノ作圖ハ圓周或ハ弧ガ與ヘラレタル時其ノ中心ヲ見出スコトニ應用スルヲ得，卽チ其ノ上ニ任意ニ三點ヲ取リテ可ナリ.

123　演習問題.

(1)　中心ヨリ弦ヘ引ケル垂線ハ其弦ニ對スル弧ヲ二等分ス.

(2)　二ツノ弦(直徑ナラザル)ハ各々他ヲ二等分ス

ルコトナシ.

(3) 圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ハ之ニ垂直ナル直徑ナリ.

(4) 平行ナル二弦ハ圓周ヨリ相等シキ弧ヲ截リ取ル.

(5) 一直線ガ二ツノ同心圓* ト夫々 A, B, 及ビ C, D ニ於テ交ル時ハ AC = BD. 〔§ 119〕.

(6) 與ヘラレタル弧ヲ二等分スルコト.

(7) PQ, PR ハ圓周上ノ一點 P ヲ通ル直徑及ビ弦ナリ; PR ニ平行ナル半徑ハ弧 QR ヲ二等分ス.

(8) 矩形ニ外接圓有リ得ルヤ?

(9) 一般ニ平行四邊形ニ外接圓有リ得ルヤ?

124 定理 同ジ或ハ合同ナル圓ニ於テ, 相等シキ弦ハ中心ヨリ等距離ナリ.

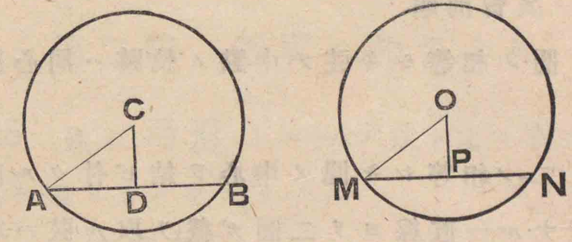
又逆ニ, 中心ヨリ等距離ナル弦ハ相等シ.

AB, MN ガ合同ナル圓ノ相等シキ弦, CD, OP ガ夫々中心 C, O ヨリ引ケル垂線ナリトセヨ:

然ル時ハ CD = OP カルベシ.

---

*同心圓 トハ同一ノ點ヲ中心トセル圓ナリ.



AC, MO ヲ結ビ付ケヨ.

AD = ½ AB, MP = ½ MN 〔§ 119〕 キヲ以テ,

AD = MP.

因リテ直角三角形 ACD, MOP ニ於テ, 斜邊ト一邊ガ夫々相等シ;

故ニ三角形ハ合同ニシテ, CD = OP.

次ニ, 中心ヨリ夫々弦 AB, MN ヘ引ケル垂線 CD, OP ガ相等シキ時ハ,

AB = MN カルベシ.

直角三角形 ACD, MOP ニ於テ, 斜邊ト一邊ガ夫々相等シキヲ以テ,

三角形ハ合同ニシテ, AD = MP;

然ルニ AB = 2 AD, MN = 2 MP 〔§ 119〕;

故ニ AB = MN.

125　演習問題.

(1) 圓ノ相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ハ同心圓ナリ.

(2) 二ツノ相等シキ圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ニ平行ナル一直線ヨリ二圓ガ截リ取ル弦ハ相等シ.

(3) 二弦ガ其ノ交點ヲ通ル直徑ト相等シキ角ヲ爲ス時ハ相等シ.

(4) 頂角ガ120°ナル二等邊三角形ノ外接圓ノ半徑ハ其ノ相等シキ邊ニ等シ.

(5) 同ジ圓或ハ合同ナル圓ニ於テ,大ナル弦ハ小ナル弦ヨリ中心ニ近シ

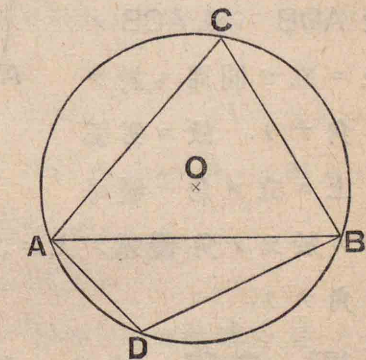
(6) (5)ノ逆ヲ述ベ之ヲ證明セヨ.

(7) 圓內ノ一點ヲ通ル弦ノ中,最短キハ其點ヲ通ル半徑ニ垂直ナルモノナリ.

第二節　圓周ニ於テノ角

126　圓ノ**弓形**トハ一ツノ弦ト之ニ對スル弧ヲ以テ圍ミタル形ナリ.

弓形ニ**優弓形**卽チ弦ト優弧ヲ以テ圍ミタルモノト,**劣弓形**卽チ弦ト劣弧ヲ以テ圍ミタルモノトアリ. 圖ニ於テACBハ優弓形, ADBハ劣弓形ナリ.

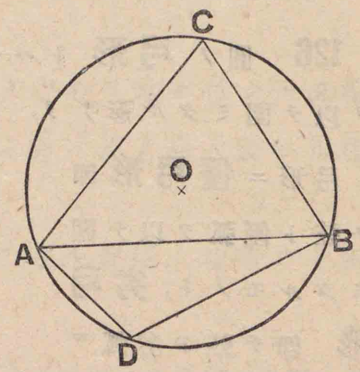


弓形ノ弧ノ兩端ヨリ其弧ノ上ノ一點ヘ引ケル二直線ノ爲ス角ヲ其**弓形ニ於テノ角**ト云フ. 角ACBハ優弓形ACBニ於テノ角,角ADBハ劣弓形ADBニ於テノ角ナリ.

弧ノ兩端ヨリ之ト共軛ナル弧上ノ一點ヘ引ケル二直線ノ爲ス角ヲ其弧ノ上ニ立ツ所ノ**圓周ニ**

於テノ角ト云フ,或ハ略シテ**圓周角**ト云フ.

弧 ADB ノ兩端 A, B ヨリ弧 ACB 上ノ一點 C ヘ引ケル二直線 AC, BC ノ爲ス角 ACB ハ弧 ADB ノ上ニ立ツ圓周ニ於テノ角ナリ; 角 ADB ハ弧 ACB ノ上ニ立ツ圓周ニ於テノ角ナリ. 故ニ劣弧ノ上ニ立ツ角ハ優弓形ニ於テノ角,優弧ノ上ニ立ツ角ハ劣弓形ニ於テノ角ナリ.



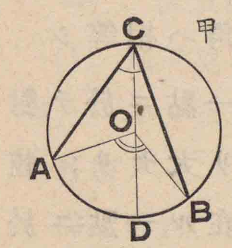
127 定理 中心ニ於テノ角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周ニ於テノ角ノ二倍ナリ.

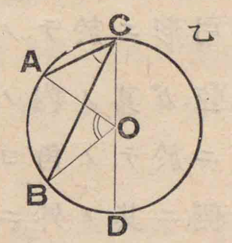
角 AOB ヲ弧 AB ノ上ニ立ツ中心ニ於テノ角, 角 ACB ヲ同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周ニ於テノ角トセヨ:

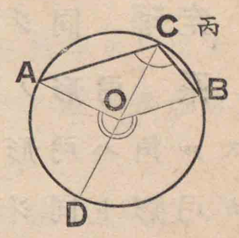
然ル時ハ角 AOB ハ角 ACB ノ二倍ナルベシ.

CO ヲ結ビ付ケ,之ヲ延長シテ圓周ト再ビ D ニ

於テ出會ハシメヨ.







(甲及ビ乙圖ニ於テハ AB ハ劣弧ナリ,丙圖ニ於テハ優弧ナリ.)

OA = OC キヲ以テ, $\angle OAC = \angle OCA$ 〔§ 51〕;

然ルニ $\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$ 〔§ 41 系〕,

故ニ $= 2\angle OCA$;

同様ニ $\angle BOD = 2\angle OCB$;

故ニ二角 AOD, BOD ノ和(甲及ビ丙圖)或ハ差(乙圖)ナル角 AOB ハ二角 OCA, OCB ノ和或ハ差ナル角 ACB ノ二倍ナリ.

128 定理 同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周ニ於テノ角ハ相等シ.

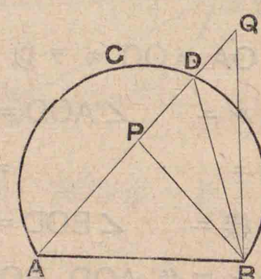
前條ニ依リテ何レモ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心ニ於テノ角ノ半分ナレバナリ.

此定理ハ亦次ノ如ク述ブルヲ得.

定理　同ジ弓形ニ於テノ角ハ相等シ.

系　弓形ノ弦ガ其ノ内ノ一點ニ於テ對スル角ハ弓形ニ於テノ角ヨリ大ナリ; 弦ガ弓形ト同ジ側ニ其ノ外ニ在ル一點ニ於テ對スル角ハ之ヨリ小ナリ.

AB ハ弓形 ACB ノ弦, P ハ其ノ內ノ一點ナル時ハ, AP ヲ結ビ付ケ, 之ヲ延長シテ弧トDニ於テ交ラシメヨ; 角 APB ハ角 ADB ヨリ大ナリ〔§41系〕.



同樣ニ, Q ガ弓形ト同ジ側ニ其ノ外ニ在ル一點ナル時ハ, 角 AQB ハ角 ADB ヨリ小ナリ〔§41系〕.

系　與ヘラレタル線分ノ同ジ側ニ於テ, 其ガ常ニ一定ノ角ニ對スル樣ナル點ノ軌跡ハ其直線ヲ弦トセル一圓弧ナリ.

129　演習問題.

(1)　同ジ底邊 AB ノ同ジ側ニ相等シキ頂角ヲ有スル二ツノ三角形アル時ハ同一ノ圓ガ兩三角形ニ外接ス.

(2)　圓內ノ一點ニ於テ交ル二弦 AB, CD ノ爲ス角 APC ハ弧 AC 及ビ BD ノ上ニ立ツ中心角ノ和ノ半分ニ等シ.

(3)　二弦 AB, CD ガ圓外ノ一點 P ニ於テ交ル時ハ角 APC ハ弧 AC 及ビ BD ノ上ニ立ツ中心角ノ差ノ半分ニ等シ.

(4)　AOB, COD ハ一圓ノ互ニ垂直ナル二直徑ナリ; OA ノ上ニ任意ニ OE ヲ取リ, OD ノ上ニ之ニ等シク OF ヲ取ル時ハ, BF ハ DE ニ垂直ナリ　又 BF, DE ノ延長ガ圓周ト夫夫 K, L ニ於テ交ル時ハ, 弧 KL ハ圓周ノ四分ノ一ナリ.

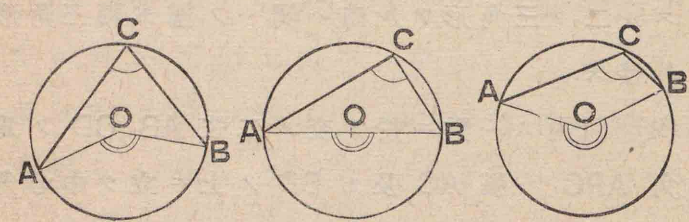
(5)　圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナル時ハ其ノ交點ヨリ一邊ヘ引ケル垂線ノ延長ハ對邊ノ中點ヲ通ル.*

130　**定理**　圓周ニ於テノ角ハ其ノ立ツ

---

*ブラーメグプタノ定理ト稱ス.　印度ノ數學者 Brahmegupta ノ發見スル所ナリト云フ.

所ノ弧ガ劣弧ナル時ハ鋭角,半圓周ナル時ハ直角,優弧ナル時ハ鈍角ナリ.



角 ACB ヲ弧 AB ノ上ニ立ツ圓周ニ於テノ角,角 AOB ヲ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心ニ於テノ角トスル時ハ,

角 ACB ハ角 AOB ノ半分ナリ;

而シテ弧 AB ガ劣弧ナル時ハ角 AOB ハ平角ヨリ小ナリ,

故ニ其ノ半分ナル角 ACB ハ直角ヨリ小ナリ.

弧 AB ガ半圓周ナル時ハ,角 AOB ハ平角ナリ,

故ニ角 ACB ハ直角ナリ.

弧 AB ガ優弧ナル時ハ,角 AOB ハ平角ヨリ大ナリ,

故ニ角 ACB ハ直角ヨリ大ナリ

此定理ノ最重要ナル部分ハ次ノ如ク述ブルヲ得:

定理 半圓ニ於テノ角ハ直角ナリ.*

131 前條ノ定理ノ逆ハ次ノ如シ

定理 弧ハ,其ノ上ニ立ツ圓周ニ於テノ角ガ鋭角,直角,或ハ鈍角ナルカニ依リテ,劣弧,半圓周或ハ優弧ナリ.

此定理ハ前條ト同樣ニ證明スルヲ得.

又總テ斯クノ如キ場合ニ於テハ次ノ如ク推定スルヲ得.

角ガ鋭角ナル時ハ,弧ハ劣弧ナラザル可カラズ;何トナレバ,若シ弧ガ劣弧ナラズシテ半圓周又ハ優弧ナラバ,角ハ前條ノ定理ニ依リテ直角又ハ鈍角ナル可ケレバナリ.

同ジ理ニ依リテ,角ガ直角ナル時ハ,弧ハ半圓周ナラザル可カラズ;

又角ガ鈍角ナル時ハ,弧ハ優弧ナラザル可カラズ.

因リテ定理ヲ得.

*此定理ハギリシヤノ數學者タ−レス Thales ノ發見ナリト云フ.

132 演習問題.

(1) AD ハ三角形 ABC ノ邊 BC ヘ垂線ナリ, AE ハ外接圓ノ直徑ナリ. 二ツノ三角形 ABE, ADC ハ等角*ナリ.

(2) 三角形ノ二邊ヲ直徑トシテ畫キタル圓ハ第三邊或ハ其ノ延長ノ上ニ於テ交ル.

(3) 二等邊三角形ノ相等シキ邊ノ一ツヲ直徑トシテ畫キタル圓ハ底邊ヲ二等分ス.

(4) 菱形ノ各邊ヲ直徑トシテ畫キタル四圓ハ共通ノ一點ニ於テ交ル

(5) AB ハ圓ノ一弦, P ハ圓周上任意ノ點ナリ; AP, BP ノ爲ス角ノ二等分線ハ各〻二定點ノ一ツヲ通ル.

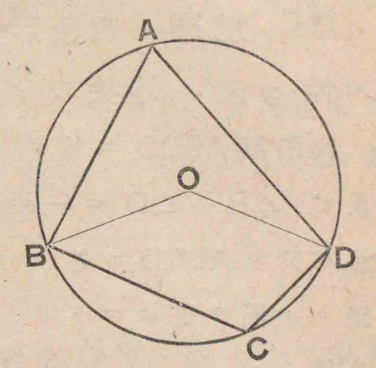
(6) 一線分ノ一端ヨリ(之ヲ延長スルコトナク)之ニ垂線ヲ引クコト.

(7) 斜邊ト直角ヨリ對邊ヘ引ケル垂線トヲ與ヘテ直角三角形ヲ作ルコト.

133 **定理** 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ナリ.

*三ツノ角ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ等角ナリト云フ

四邊形 ABCD ガ中心 O ナル圓ニ內接スルモノトセヨ:



然ル時ハ,

$\angle A + \angle C =$ 平角,

$\angle B + \angle D =$ 平角

カルベシ.

OB, OD ヲ結ビ付ケヨ.

角 A ハ弧 BCD ノ上ニ立ツ中心角 BOD ノ半分ナリ;

角 C ハ弧 BAD ノ上ニ立ツ中心角 BOD ノ半分ナリ;

故ニ $\angle A + \angle C$ ハ O ニ於ケル二ツノ共軛角ノ和ノ半分ナリ, 卽チ二平角ノ半分ナリ;

因リテ, $\angle A + \angle C =$ 一平角.

故ニ又 $\angle B + \angle D =$ 一平角.

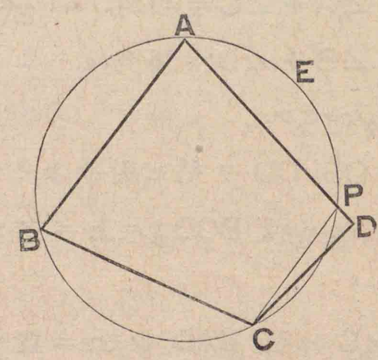
系 圓ニ內接スル四邊形ノ一外角ハ其ノ內對角*ニ等シ.

*內對角トハ外角ニ隣ル內角ニ對スル內角ナリ.

134 定理 四邊形ノ對角ガ互ニ補角ナル時ハ之ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

四邊形 ABCD ニ於テ, $\angle A+\angle C=$ 一平角, 及ビ $\angle B+\angle D=$ 一平角 トセヨ:

然ル時ハ ABCD ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得ベシ.



三頂點, A, B, C ヲ通ル圓ガ D ヲ通ラザル時ハ, AD 或ハ其ノ延長ガ弧 AEC ト P 點ニ於テ交ルトシ, CP ヲ結ビ付ケヨ:

$\angle B+\angle CPA=$ 一平角 (§133);

然ルニ $\angle B+\angle CDA=$ 一平角 (假設);

故ニ $\angle CPA=\angle CDA$;

是レ §41 ノ系ニ戻ル;

故ニ斯クノ如キコトハ有ル能ハズ, 即チ三點, A, B, C ヲ通ル圓ハ亦 D ヲ通ラザルヲ得ズ,

即チ ABCD ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

本定理ノ應用上屢、起ル場合ハ二ツノ對角ガ各直角ナル時ナリ.

此證明法ハ背理ニ歸スル論法又ハ間接證明法ト稱シ頗ル有力ナル方法ナリ. §32, §58, §131 等ノ方法モ亦之ニ外ナラズ.

135 演習問題.

(1) 三角形 ABC ノ外心 O ヨリ邊 BC ヘ垂線 OD ヲ引ク時ハ, 角 BOD ハ角 A 或ハ其ノ補角ニ等シ.

(2) 三角形 ABC ノ頂點 B, C ヨリ對邊ヘ引ケル垂線 BE, CF ガ H ニ於テ交ル時ハ四邊形 AEHF ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

(3) ABCD ハ中心 O ナル圓ニ內接スル四邊形ニシテ, 角 A ハ $60°$ ナリ:

$$\angle OBD+\angle ODB=\angle CBD+\angle CDB.$$

(4) 垂足三角形* ノ二邊ハ其ノ交點ヲ通ル元ノ三角形ノ邊ト相等シキ角ヲ爲ス.

---

*垂足三角形 トハ三角形ノ各頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ結ビ付ケテ得ル所ノ三角形ナリ

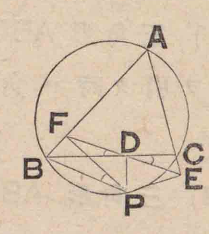
(5) 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ二邊 AB, CD ヲ延長シテ E ニ於テ交ラシメ, 又二邊 BC, AD ヲ延長シテ F ニ於テ交ラシム. B, E, F, D ヲ通ル圓ヲ畫クコトヲ得ル時ハ, EF ハ其ノ直徑ナリ; 又 AC ハ元ノ圓ノ直徑ナリ.

(6) 三角形ノ外接圓ノ周ノ上ノ任意ノ一點ヨリ三邊或ハ其ノ延長ヘ引ケル垂線ノ足ハ一直線ノ上ニ在リ.*

---

* 此定理ヲ**シムソン**(Simson) ノ定理ト稱シ, 其直線ヲ其點ニ付テ三角形ノ**シムソン**線ト云フ.

此定理ノ證明ハ此種ノ問題ノ好例ナルヲ以テ此ニ其ノ大畧ヲ示ス.



ABC ハ三角形; D, E, F ハ外接圓ノ周上ノ一點 P ヨリ邊ヘ引ケル垂線ノ足トス; FD ト DE ガ一直線ナルコトヲ證明スルヲ要ス.

∠CDE = 直角 − ∠PDE = 直角 − ∠PBF (§128 系及ビ §133 系) = ∠BPF = ∠BDF (§128): 因リテ FD, DE ハ一直線ナリ

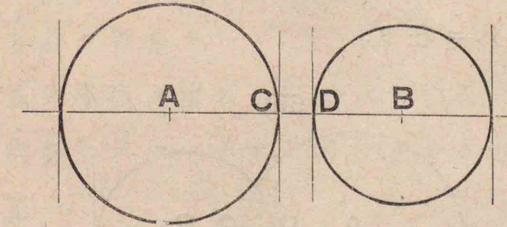
第三節　二圓及ビ切線

136 二圓ノ相對シテノ位置ニハ次ノ如ク五ッノ異リタル場合アリ.

最初二圓ハ遠ク相隔リタルモノトシ, 其ノ中心ヲ同一直線ノ上ニ於テ漸次相近ヅク樣ニ二圓ヲ動カスト想像セヨ.*

(i) 二圓ノ中心ノ間ノ距離ガ半徑ノ和ヨリ大ナル間ハ二圓ハ各全ク他ノ外ニ在リ.

(i)



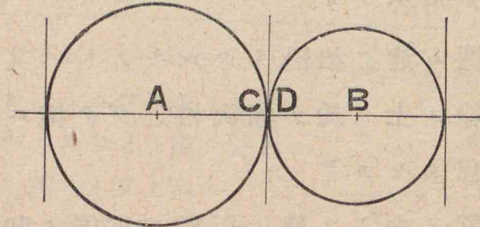
(ii) 中心ノ間ノ距離ガ漸次減少シテ丁度半徑

---

* 圖ニ於テ中心線(中心ヲ結ビ付クル直線ノ略)ガ二圓周ニ出會フ點ニ於テノ切線(中心線ニ垂直ナル (§72)) ヲ引キ二圓ノ關係ヲ一層明ニセントセリ.

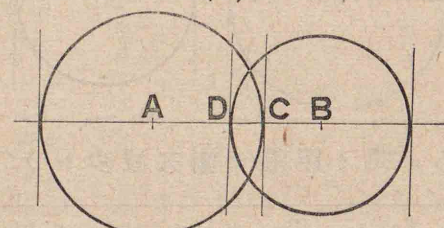
ノ和ニ等シクナル時ハ,二圓ハ唯一點ニ於テ出會ヒ,其ノ他ニ於テハ各、他ノ外ニ在リ. 此場合ニ於テ二圓ハ外切スト云フ.

(ii)



(iii) 中心ノ距離ガ半徑ノ和ヨリ小ニシテ,其ノ差ヨリ大ナル間ハ,二圓ハ各、一部分他ノ内ニ,一部分他ノ外ニ在リ.

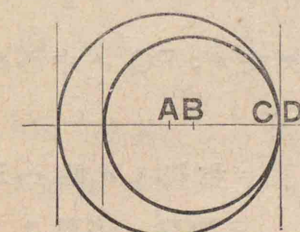
(iii)



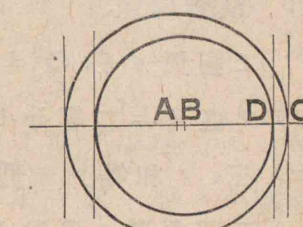
(iv) 中心ノ距離ガ半徑ノ差ニ等シクナル時ハ

二圓ハ復唯一點ニ於テ出會ヒ,其ノ他ニ於テハ一ツガ他ノ内ニ在リ. 此場合ニ於テ二圓ハ内切スト云フ.

(iv)



(v)



(v) 中心ノ距離ガ半徑ノ差ヨリ小トナル時ハ一圓ハ全ク他ノ内ニ在リ. 終ニ距離ガ零トナル時ハ中心ガ相合ス.

二圓ノ半徑ガ相等シキ特別ノ場合ニ於テハ二圓ハ内切スルコトナク,(iii)ヨリシテ直ニ相合スルニ至ル.

(ii)及ビ(iv)ノ位置ヲ併セテ二圓ハ相切スト云ヒ,其ノ出會フ點ヲ**切點**ト云フ. 切點ハ中心線ノ上ニ在リ.

(iii)ニ於テ圓周ハ中心線ノ上ニ在ラザル二點

ニ於テ交ル.

以上本條ニ於テ述ベタルコトハ吾人ガ直覺ニ依リテ認メ得ル所ニシテ公理的トス.

137 演習問題.

(1) 二圓周ガ P, Q ニ於テ交ル; PQ ハ中心線ニ依リテ直角ニ二等分セラル.

(2) 三ツノ相等シキ圓ガ互ニ相切スル時ハ,三中心ハ正三角形ノ頂點ナリ. 三切點モ亦然リ.

(3) 一圓ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム

(4) 一圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

(5) 一圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫クコト.

(6) 二圓ノ交點 A, B ヲ通リ直線 PAQ, RBS ヲ引キ,二圓周ト夫々 P, Q, 及ビ R, S ニ於テ再ビ交ラシムル時ハ,弦 PR, QS ハ平行ナリ.

(7) 二圓ノ二交點ノ一ヲ通ル各圓ノ直徑ノ他

ノ端ヲ結ビ付クル直線ハ他ノ交點ヲ通ル.*

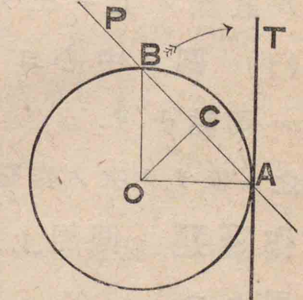
(8) 互ニ相切スル三ツノ相等シキ圓ヲ畫クコト. 〔問題 (2)〕

(9) 定マレル二圓ニ外切スル任意ノ圓ヲ畫ク時ハ,其ノ中心ト定マレル圓ノ中心トノ距離ノ差ハ常ニ同ジ.

(10) 問題 (8) ノ三圓ニ切スル圓ヲ畫クコト

138

圓周上ノ一點 A ヲ通リ半徑 OA ニ垂直ナル直線 AT ハ A 點ニ於テ圓ニ切スル切線ナリ〔§ 72〕.



A ヲ通ル其他ノ直線 AP ハ中心 O ヨリ之ヘ引ケル垂線 OC ガ半徑 OA ヨリ小ナルヲ以テ〔§ 60〕, 他ノ一點 B ニ於テ圓ト交ル〔§ 72〕. 今 AP ヲ A ノ廻リニ廻轉スル時ハ (矢ノ向キニ), AP ハ漸次 AT ニ近ヅキ, B 點ハ漸次 A ニ近ヅク, 而シテ終ニ AP

*二直徑ノ端ヲ他ノ交點ト結ビ付クル二直線ガ一直線ヲ爲スコトヲ證明ス可シ.

ガ AT ト合スル時ハ B ハ A ト合ス 故ニ切線ハ割線ノ二交點ガ漸次相近ヅキ,終ニ相合シタル極限ノ位置ニ於ケルモノナリトスルヲ得.*

便宜ノ爲メ切線ノ諸性質ヲ次ニ掲グ.

(甲) 切線ハ切點ヘノ半徑ニ垂直ナリ.

(乙) 圓周上ノ一點ニ於テ其點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ハ切線ナリ.

(丙) 圓ノ中心ハ切點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線ノ上ニ在リ.

(丁) 圓ノ中心ヨリ切線ヘ引ケル垂線ノ足ハ切點ナリ.

之ニ依リテ次ノ作圖ヲ爲スコト容易ナリ.

作圖題 圓周上ノ一點ニ於テ之ニ切線ヲ引クコト.

其點ヲ通ル半徑ニ其點ニ於テ垂線ヲ引ク可キノミ.

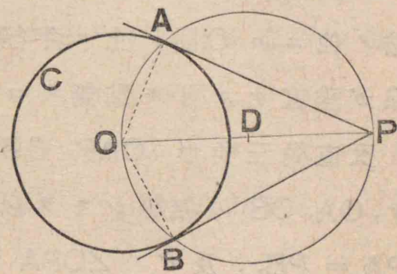
139 作圖題 圓外ノ一點ヨリ之ニ切線

*切線ノ此定義ハ高等幾何學ニ於テ採用ス可キモノナリ

ヲ引クコト.

P ヲ中心 O ナル圓外ノ一點トス.

OP ヲ結ビ付ケ, OP ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ,* 元ノ圓ト A, B ニ於テ交ラシメヨ. PA, PB ヲ結ビ付ケヨ.



OA, OB ヲ結ビ付クル時ハ角 OAP, OBP ハ半圓ニ於テノ角ナルヲ以テ,直角ナリ;
故ニ PA, PB ハ切線ナリ.

140 前條ヨリシテ直ニ次ノ定理ヲ得:

定理 圓外ノ一點ヨリ之ニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得而シテ唯二ツニ限ル.

元ノ圓ト OP ヲ直徑トセル圓トハ其ノ中心ノ

* OP ノ中點 D ヲ求メ〔§ 74〕, 中心 D, 半徑 DO ヲ以テ圓ヲ畫ク可シ.

間ノ距離 OD ガ半徑ノ和卽チ OD＋OA ヨリ小ニシテ,半徑ノ差卽チ OD～OA ヨリ大ナリ. 故ニ二圓周ハ二點 A,B ニ於テ交ル (§136). 又此二點ノ他ニハ O圓ノ上ニ半徑トP點ヨリ引ケル直線ガ垂直ナル可キ點無キコト明ナリ.*

又直角三角形 OAP, OBP ハ斜邊ガ共通ニシテ, OA, OB ハ相等シキヲ以テ合同ナリ. 因リテ PA＝PB, 及ビ ∠OPA＝∠OPB. 故ニ次ノ定理ヲ得.

定理 圓外ノ一點ヨリ圓ヘ引ケル二切線ハ相等シク, 且中心ヲ其點ト結ビ付クル直線ト相等シキ角ヲ爲ス.

141 演習問題.

(1) 一圓ノ相等シキ弦ハ皆一ツノ同心圓ニ切ス.

(2) 相交ル二直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

---

* §128 系ニ依リテ, OP ヲ斜邊トセル直角三角形ノ頂點ハ圓 OAPB ノ周ノ上ニ在ルコトヲ要ス.

(3) 二平行線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

(4) 一圓ガ四邊形ノ四邊ニ切スル時ハ對邊ノ和ハ相等シ.

(5) 四邊共ニ一圓ニ切スル平行四邊形ハ菱形ナリ.

(6) 中心 O ナル圓外ノ一點 P ヨリ之ニ切線 PA, PB ヲ引ク時ハ OP ハ弦 AB ヲ直角ニ二等分ス.

(7) PA, PB ハ P 點ヨリ O 圓ヘ引ケル二切線ナリ: OP ハ角 AOB ヲ二等分ス.

(8) 弦ハ其ノ兩端ニ於ケル切線ト相等シキ角ヲ爲ス.

(9) 弦 AB ノ兩端ニ於ケル切線 PA, PB ガ弦ニ等シキ時ハ切線ノ夾角及ビ弦ガ中心ニ於テ對スル角ハ何度ナリヤ?

(10) 平行ナル二切線ガ他ノ一切線ト S, T ニ於テ交ル時ハ ST ハ中心ニ於テ直角ニ對ス.

(11) 與ヘラレタル圓ノ切線ニシテ (甲) 一定直線ニ平行ナルモノ, (乙) 之ニ垂直ナルモノ, (丙) 之ト與ヘラレタル角ヲ爲スモノヲ引クコト.

142 **定理** 相切スル二圓ハ切點ニ於テ

共通ナル切線ヲ有ス.

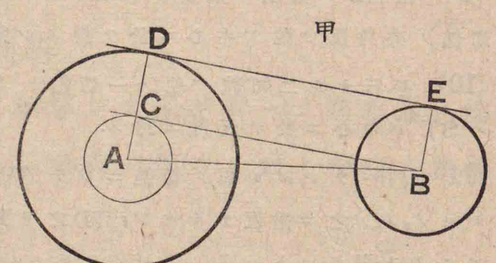
中心ガ A, B ナル二圓ガ C ニ於テ相切スル時ハ, C 點ハ AB ノ上ニ在リ〔§ 136〕;
故ニ C ニ於テ AB ニ垂直ナル直線 CT ハ兩圓ニ切線ナリ.

之ニ依リテ, 相切スル二圓ノ切點ニ於テノ共通切線ハ直ニ之ヲ引クコトヲ得.

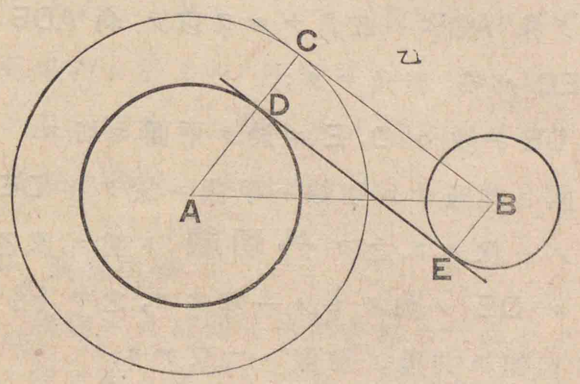
143　作圖題　二圓ノ共通ナル切線ヲ引クコト.

A, B ヲ二圓ノ中心トシ, A 圓ノ半徑ヲ B 圓ノ半徑ヨリ大ナリトス.

A ヲ中心トシ, 二圓ノ半徑ノ差(甲圖)及ビ和(乙圖)ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ケ;



B ヨリ此圓ニ切線ヲ引キ, C ニ於テ切セシメヨ;*



AC ヲ結ビ付ケ, A 圓ト D ニ於テ交ラシメヨ;
B ヨリ AC ニ平行線ヲ引ケ;
此平行線ト B 圓トノ二交點ノ中, BC ノ D ト同ジ側ニ在ルモノヲ E トセヨ;
DE ヲ結ビ付クル時ハ, DE ハ求ムル所ノ切線ナリ.

AC = AD − BE (甲圖), 或ハ = AD + BE (乙圖);
因リテ　BE = CD;
又　BE // CD;

*混雜ヲ避クル爲ニ圖ヲ(甲)(乙)二ツニ別チ且 B ヨリ引ク可キ二切線〔§ 140〕ノ中唯一ツヲ引ク

故ニ BCDE ハ平行四邊形ナリ,
而シテ角 ACB ハ直角ナルヲ以テ, 角 ADE 及ビ角 BED ハ各, 直角ナリ;
故ニ DE ハ夫々 D, E ニ於テ兩圓ニ切ス.

兩圓ニ共通ナル切線ハ甲圖ニ於ケル DE ノ如キモノ一双アリ, 之ヲ **外切線** ト稱ス, 又乙圖ニ於ケル DE ノ如キモノ一双アリ, 之ヲ **內切線** ト稱ス, 卽チ共通ノ切線ハ二双アリ.

144 前條ニ於テハ二圓ガ各, 全ク他ノ外ニ在ル場合ヲ取リタルガ, 二圓ガ外切スル時ハ二ツノ內切線ハ合シテ切點ニ於テノ共通切線トナル; 故ニ共通切線ハ一双ト一ツ有リ.

二圓ガ交ル時ハ唯外切線ノ一双有ルノミ.

二圓ガ內切スル時ハ一双ノ外切線ガ合シテ切點ニ於テノ共通切線トナル; 故ニ共通切線ハ唯一ツノミ.

一圓ガ全ク他ノ內ニ在ル時ハ共通切線無シ.

145 § 143 ニ於テハ二圓ノ半徑ヲ相等シカラズトシタルガ, 若シ相等シキ時ハ乙圖ノ作圖ニハ差支ナシト雖モ甲圖ニ於テハ第三圓ヲ畫クヲ得ズ. 此場合ニ於テハ A 及ビ B ニ於テ中心線ニ垂線ヲ引キ, 垂線ガ二圓ト交ル點ヲ結ビ付クル時ハ, 外切線ヲ得ルコト明ナリ.

146 **演習問題.**

(1). 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル一直線ガ再ビ各圓ト交ル點ニ於テノ切線ハ平行ナリ.

(2) 一圓ノ一半徑ガ他ノ一圓ノ直徑ナル時ハ二圓ハ內切シ, 切點ヲ通ル外圓ノ弦ハ內圓ノ周ニ於テ二等分セラル.

(3) 二圓ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫クコト.

(4) 二圓ノ一交點 A ヲ通リ一定直線 BAC 及ビ任意ノ一直線 PAQ ヲ引キ, 二圓周ト夫々 B, C 及ビ P, Q ニ於テ交ラシム. BP, CQ ノ交點 R ノ軌跡ハ或ル圓弧ナリ.*

(5) 二圓ノ交點ヲ通ル一直線ヲ, 二圓ガ其ヨリ截リ取ル

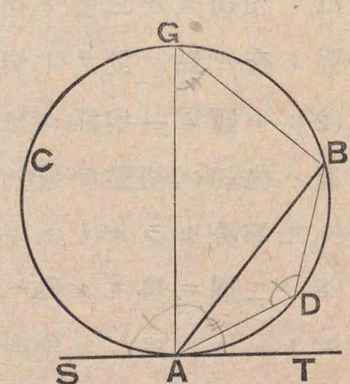
*角 BRC ガ一定ノ大サナルコトヲ證明シ, § 128 系ヲ應用ス可シ.

弦ガ相等シキ樣ニ,引クコト

147 定理 切線及ビ切點ヲ通ル弦ノ夾ム角ハ隣リノ弓形ニ於テノ角ニ等シ.

ST ヲ A ニ於テノ切線, AB ヲ A ヲ通ル弦トセヨ:

然ル時ハ角 BAT ハ弓形 ACB* ニ於テノ角ニ等シク,角 BAS ハ弓形 ADB ニ於テノ角ニ等シカルベシ.



直徑 AG ヲ引キ, BG ヲ結ビ付ケヨ. 角 GAT 及ビ角 ABG ハ何レモ直角ナリ〔§138 ノ(甲)及ビ§130〕;

因リテ $\angle BAT =$ 直角 $- \angle BAG = \angle AGB$;

即チ角 BAT ハ弓形 ACB ニ於テノ角ニ等シ.

*弓形 ACB ハ弦 AB ヲ境界トシテ角 BAT ニ接スル弓形即チ其ノ隣リノ弓形,弓形 ADB ハ角 BAS ノ隣リノ弓形ナリ.

又 $\angle BAS =$ 平角 $- \angle BAT =$ 平角 $- \angle AGB$
$= \angle ADB$ 〔§133〕.

此定理ノ逆モ亦眞ナリ,即チ一直線 AT ガ弦 AB ト爲ス角 BAT ガ弓形 ACB ニ於テノ角ニ等シキ時ハ A ニ於テノ切線モ亦 AB ト之ニ等シキ角ヲ爲スヲ以テ切線ハ AT ト合ス,即チ AT ハ切線ナリ.

148 演習問題.

(1) 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル二直線ガ各圓ヨリ截リ取ル弧ノ弦ハ平行ナリ

(2) 二圓周ガ P, Q ニ於テ交ル; 一圓周ノ一點 A ヲ之ト結ビ付ケ,之ヲ延長シテ他ノ圓周ト夫々 B, C ニ於テ交ラシムル時ハ BC ハ A ニ於テノ切線ニ平行ナリ

(3) 圓ノ弦ハ其ノ一端ヲ通ル直徑ト其ノ端ヨリ他ノ端ニ於テノ切線ヘノ垂線トノ夾ム角ヲ二等分ス.

(4) ABCD ハ圓ニ內接スル四邊形, E ハ其對角線ノ交點ナリ; E ニ於テ三角形 AEB ノ外接圓ニ

切スル直線ハ CD ニ平行ナリ.

(5) 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル直線ハ二圓ヨリ等シキ角ヲ含ム弓形* ヲ截リ取ル.

(6) 二圓ガ P 點ニ於テ外切シ，一直線ガ夫々 A, B ニ於テ之ニ切ス; AB ヲ直徑トシテ畫キタル圓ハ P ヲ通リ中心線ニ切ス.

(7) 與ヘラレタル一線分ノ上ニ與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ畫クコト.〔§147 ヲ應用シテ中心ヲ求ム可シ.〕

(8) 與ヘラレタル圓ヨリ與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ルコト.

(9) 底邊，頂角及ビ他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.〔問題(7)ヲ應用ス可シ.〕

---

*或ル角ヲ含ム弓形トハ其弓形ニ於テノ角ガ其角ニ等シキモノヲ云フ.

第四節 內接形及ビ外接形

149 多角形ノ總テノ頂點ヲ通ル圓ハ之ニ外接スト云ヒ，多角形ハ圓ニ內接スト云フコトハ §106 ニ述ベタリ. 又多角形ノ總テノ邊ニ切スル圓ハ之ニ內接スト云ヒ，多角形ガ圓ニ內接スト云フコトハ §107 ニ述ベタリ.

三角形ニハ一ツノ外接圓及ビ一ツノ內接圓アルコトモ亦 §106 及ビ §107 ニ示セリ. 然レドモ四邊形以上ニ於テハ必ズシモ然ラズ; 例ヘバ四邊形ニ外接圓ヲ畫キ得ルハ其ノ對角ガ補角ナルモノニ限リ (§134), 又內接圓ヲ畫キ得ルハ其ノ對邊ノ和ガ相等シキモノニ限ル* ガ如シ.

150 定理 圓周ヲ任意ノ數ノ相等シキ弧ニ分ツ時ハ，其ノ弦ノ成ス內接形ハ正多角形ナリ; 又各分點ニ於テノ切線ノ成ス外

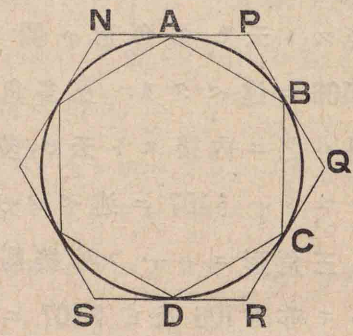
---

*是レ §141 ノ問題(4)ノ逆ニシテ間接證明法〔§134〕ニ依リテ之ヨリ推定シ得可シ.

接形モ正多角形ナリ.

圓周ヲ $A, B, C, D,$ 等ニ於テ n ノ相等シキ弧ニ分チ, $AB, BC, CD,$ 等ヲ其ノ弦, $NP, PQ, QR, RS,$ 等ヲ其ノ切線トセヨ:

然ル時ハ $ABCD$…… ハ内接正多角形, $PQRS$…… ハ外接正多角形ナルベシ.



相等シキ弧ニ對スル弦ハ相等シキヲ以テ, 多角形 $ABCD$……… ノ邊ハ皆相等シ〔§ 114〕;

角 $A, B, C,$ 等ハ各, 圓周ヨリ相等シキ弧ヲ二ッダケ引キ去リタル弧ノ上ニ立ツ圓周ニ於テノ角ナルヲ以テ, 相等シ〔§ 128〕;

因リテ $ABCD$……… ハ内接正多角形ナリ.

$PA = PB,\ QB = QC,\ RC = RD,$ 等〔§ 140〕;

因リテ三角形 $PAB, QBC, RCD,$ 等ハ二等邊三角形ナリ, 而シテ其ノ各底角ハ, 隣リノ弓形卽チ各, 相等シキ弦 $AB, BC, CD,$ 等ニ對スル優弓形ニ於

ケル角ニ等シキヲ以テ, 相等シ;

因リテ此等ノ二等邊三角形ハ底邊ト底角ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ;

卽チ $\angle P = \angle Q = \angle R = \cdots\cdots,$

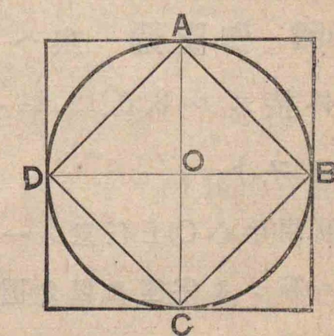
及ビ $PA = PB = QB = QC = RC = RD = \cdots\cdots;$

多角形 $PQRS$……… ノ各邊ハ此等ノ線分二ッヨリ成ルヲ以テ相等シ;

故ニ $PQRS$……… ハ外接正多角形ナリ.

斯クノ如クナルヲ以テ, 與ヘラレタル圓ニ内接或ハ外接スル正多角形ヲ作ルコトノ問題ハ圓周ヲ等分スルコトノ問題ニ歸着ス.

151 作圖題 與ヘラレタル圓ニ内接及ビ外接スル 4, 8, 16, 32 …… 邊ノ正多角形ヲ作ルコト.



互ニ垂直ナル直徑 AC, BD ヲ引ク時ハ, 弧 AB, BC, CD, DA ハ中心ニ於テ直角ニ對シ, 各,

圓周ノ四分ノ一ナリ〔§ 71 或ハ § 115〕;

故ニ AB, BC, CD, DA ヲ結ビ付クル時ハ,內接正方形ヲ得.

又 A, B, C, D ニ於テ切線ヲ引ク時ハ外接正方形ヲ得.

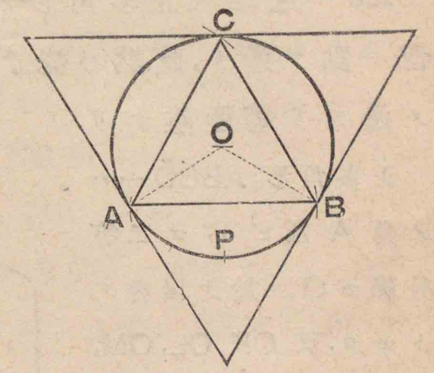
中心ヨリ各弦ニ垂直ナル直線ハ弦ニ對スル中心角ヲ二等分シ,因リテ又弧ヲ二等分ス.

斯クノ如クニシテ各弧ヲ二等分スル時ハ圓周ハ 8 ニ等分セラレ, 8 邊ノ內接及ビ外接正多角形ヲ作ルコトヲ得.

同樣ニ, 16 邊, 32 邊, 等, 總テ 2^n 邊ノ內接及ビ外接正多角形ヲ作ルコトヲ得.

152 作圖題 與ヘラレタル圓ニ內接及ビ外接スル 3, 6, 12, 24……… 邊ノ正多角形ヲ作ルコト.

圓周(中心 O)上任意ノ一點 P ヲ中心トシ,圓ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ,元ノ圓トA,B ニ於テ交ラシメヨ;



A ヲ中心トシ,半徑 AB ヲ以テ圓ヲ畫キ,元ノ圓ト B ノ他ニ一點 C ニ於テ交ラシメヨ.

三角形 AOP, BOP ハ何レモ作圖ニ依リテ正三角形ナルコト明ナリ;

故ニ角 AOB ハ正三角形ノ角ノ二倍ニシテ平角ノ三分ノ二ナリ;

角 AOC モ亦然リ〔§ 116〕;

因リテ角 BOC モ亦平角ノ三分ノ二ナリ;

故ニ弧 AB, BC, CA ハ相等シク,

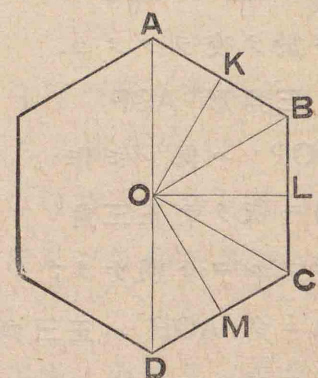
三角形 ABC ハ內接正三角形ナリ.

A, B, C ニ於テ切線ヲ引ク時ハ,外接正三角形ヲ得.

又此等ノ弧ヲ續ケテ二等分スル時ハ, 6, 12, 24 邊等ノ內接及ビ外接正多角形ヲ作ルコトヲ得.

153 定理 正多角形ノ角ノ二等分線ハ皆一點ヲ通リ,此點ハ總テノ頂點及ビ總テノ邊ヨリ等距離ナリ.

正多角形 ABCD…… ノ角 A 及ビ B ノ二等分線ガ O ニ於テ出會フトセヨ,又 OK, OL, OM, 等ハ O ヨリ邊ヘ引ケル垂線トセヨ:



然ル時ハ OC, OD, 等ハ角 C, D 等ヲ二等分シ,

OA = OB = OC = OD = ……,

及ビ OK = OL = OM = …… カルベシ.

三角形 OBA, OBC ニ於テ, AB = BC, OB ハ共通ニシテ, ∠OBA = ∠OBC キヲ以テ,

三角形ハ合同ニシテ, $\angle OCB = \angle OAB = \frac{1}{2}\angle A$,

而シテ $\angle C = \angle A$ キヲ以テ, $= \frac{1}{2}\angle C$,

即チ OC ハ角 C ヲ二等分ス;

同樣ニ, OD, 等ハ角 D, 等ヲ二等分ス;

即チ多角形ノ角ノ二等分線ハ皆 O ヲ通ル.

角 OAB, OBA, OBC, OCB, 等ハ相等シキ角ノ半分ニシテ互ニ相等シ;

故ニ OA = OB = OC = ………

直角三角形 OBK, OBL ニ於テ,

∠OBK = ∠OBL, 斜邊 OB ハ共通ナリ;

故ニ三角形ハ合同ニシテ (§ 49), OK = OL;

同樣ニ OL = OM, ……… 等;

因リテ OK, OL, OM, 等ハ相等シ.

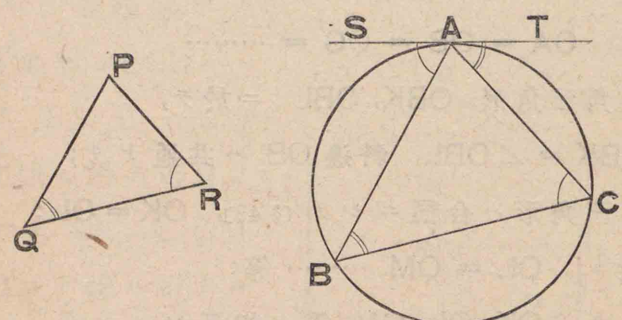
154 然レバ, O ヲ中心トシ半徑 OA ヲ以テ畫キタル圓ハ總テノ頂點ヲ通ル, 即チ外接圓ナリ. 又中心 O, 半徑 OK ヲ以テ畫キタル圓ハ總テノ邊ニ切ス, 即チ內接圓ナリ. 故ニ,

定理 正多角形ニハ外接圓及ビ內接圓有リ.

之ヲ畫クニハ二角ノ二等分線ノ交點ヲ中心トスレバ可ナリ.

155 作圖題 與ヘラレタル圓ニ內接シ,

與ヘラレタル三角形ニ等角ナル三角形ヲ作ルコト.



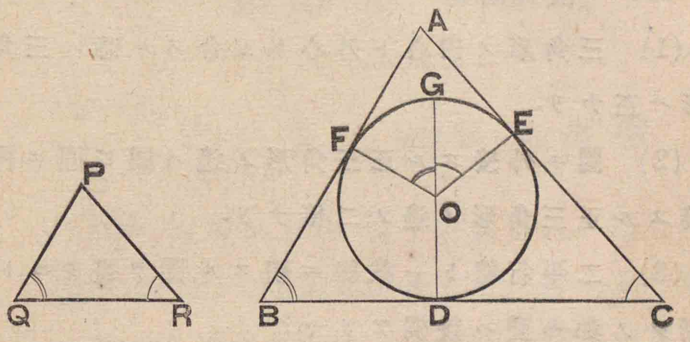
PQR ヲ與ヘラレタル三角形, ABC ヲ與ヘラレタル圓トス.

圓周上任意ノ一點 A ニ於テ切線 SAT ヲ引ケ;
弦 AB ヲ角 SAB ガ角 R ニ等シキ様ニ引ケ;
弦 AC ヲ角 TAC ガ角 Q ニ等シキ様ニ引ケ;
BC ヲ結ビ付ケヨ;

$\angle ABC = \angle TAC$ (§ 147) $= \angle PQR$;
及ビ $\angle ACB = \angle SAB$ (§ 147) $= \angle PRQ$:
因リテ三角形 ABC ハ要スル所ノ三角形ナリ.

156 作圖題 與ヘラレタル圓ニ外接シ

與ヘラレタル三角形ニ等角ナル三角形ヲ作ルコト.



PQR ヲ與ヘラレタル三角形, O ヲ與ヘラレタル圓 DEF ノ中心トス.

任意ノ直徑 DOG ヲ引ケ;
角 GOE, GOF ヲ OG ノ反對ノ側ニ於テ夫々角 PRQ, PQR ニ等シク作レ;
D, E, F ニ於テ切線ヲ引キ三角形 ABC ヲ作レ.

角 ODB, OFB ハ各直角ナルヲ以テ, 四邊形 ODBF ハ一圓ニ内接ス (§ 134);
因リテ $\angle DBF = \angle FOG$ (§ 133 系) $= \angle Q$;
同様ニ $\angle DCE = \angle R$.
故ニ三角形 ABC ハ三角形 PQR ニ等角ニシテ,

圓 DEF ニ外接ス

157 演習問題.

(1) 三角形ノ內心ト外心トガ合スル時ハ三角形ハ正ナリ.

(2) 圓ニ外接スル正三角形ノ邊ハ同ジ圓ニ內接スル正三角形ノ邊ノ二倍ナリ.

(3) 二平行線ト一截線ニ切スル圓ヲ畫クコト. 斯クノ如キ圓ハ幾個アリヤ?

(4) 三ツノ相交ル直線ニ切スル圓ハ幾個アリヤ?

(5) 三角形ノ二ツノ傍心ヲ結ビ付クル直線ハ內心ト第三傍心ヲ結ビ付クル直線ニ垂直ナリ.

(6) 三角形 ABC ノ二頂點 B, C, 其ノ內心, 及ビ邊 BC ニ對スル傍心ヲ通リ一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得.

(7) 二ツノ傍心ト二ツノ頂點ヲ通リ, 一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得.

(8) 三角形ノ各頂點ヲ通リ, 他ノ二頂點ト外心トヲ結ビ付クル直線ニ平行ナル二直線ヲ引ク時ハ, 此六直線ノ成ス六邊形ノ邊ハ皆相等シク, 角ハ二ツヅツ相等シ.

(9) 正多角形ノ一外角ハ一邊ガ外接圓ノ中心ニ於テ對スル角ニ等シ

第三編　面積

第一節　矩形ノ面積

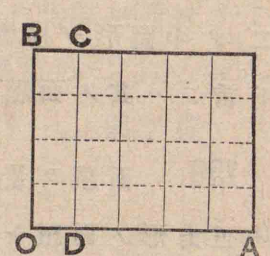
158 平面形ノ**面積**トハ其形內ニ在ル平面ノ量ナリ. 二ツノ平面形ガ合同ナル時ハ其ノ面積ガ相等シキコト勿論ナリト雖モ面積ガ相等シキコトハ其ガ合同ナル時ニ限ラズ; 二形ガ合同ナラザル時ニ於テモ面積ハ相等シキコト有リ. 以下二ツノ平面形ガ相等シ, 或ハ一ツガ他ノ二倍ナリナド言フハ其ノ面積ニ就テ云フナリ.

159 面積ヲ量ル單位ハ通例長サノ單位ノ上ノ正方形ノ面積トス. 長サノ單位ニ大小種々アルガ如ク面積ノ單位ニモ亦種々アリ. 大ナル土地ノ面積ハ方里卽チ邊ガ一里ナル正方形ノ面積ヲ單位トス; 又一間ガ長サノ單位ナル時ハ, 坪或ハ步卽チ邊ガ一間ナル正方形ノ面積ヲ單位トス.

更ニ小ナル單位ヲ便宜トスル時ハ平方尺,平方寸(卽チ邊ガ一尺,一寸ナル正方形ノ面積),等ノ單位アリ. メートル法ニ於テハ平方メートル,平方センチメートル,等ノ單位ヲ使用ス.

要スルニ,面積ノ單位ハ或ル正方形ノ面積ヲ以テ之ニ充ツ.*

160 此ニ一ツノ矩形アリ,其ノ二邊,OA, OB ノ長サハ夫々長サノ單位ノ a 倍及ビ b 倍ナリトシ, a, b ハ整數ナリトス.** **N** ヲ以テ長サノ單位ヲ表ハス時ハ,邊ノ長サハ a**N** 及ビ b**N** ヲ以テ表ハス可シ. 矩形ノ邊 OA ヲ a ニ等分シ,各分點ヲ通リテ OB ニ平行線ヲ引ク時ハ,矩形ハ OBCD ノ如キ小矩形 a ニ分タレ,各小矩



*補助單位ハ必ズシモ正方形ノ面積ナラズ;例ヘバ,歩ハ正方形ノ面積ナレドモ,畝,反,町ハ 30 歩, 300 歩, 3000 歩ニシテ或ル正方形ノ面積ト云フニアラズ.

**圖ニ於テハ, $a=5$, $b=4$ トセリ.

形ノ一邊ハ **N** ニ等シク,一邊ハ OB 卽チ b**N** ニ等シ. 今邊 OB ヲ b ニ等分シ,各分點ヲ通リテ OA ニ平行線ヲ引ク時ハ,各小矩形ハ更ニ各邊ガ **N** ニ等シキ矩形卽チ **N** ノ上ノ正方形ニ分タル,而シテ其ノ數ハ小矩形毎ニ b ナルヲ以テ總計 ab ニ等シ. 因リテ矩形ハ各邊ガ **N** ニ等シキ正方形ニ分タレ,其ノ數ハ ab ナリ. 故ニ **N** ノ上ノ正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トシ, **M** ヲ以テ之ヲ表ハス時ハ,矩形ノ面積ハ ab**M** ヲ以テ之ヲ表ハス可シ.

161 a, b ノ一ツ或ハ兩者ガ整數ナラザル時ハ之ガ整數トナル可キ單位ヲ取ル可シ.

例ヘバ $a=5\frac{2}{3}$, $b=2\frac{4}{7}$ トセヨ;

然ル時ハ $a=17/3=119/21$, $b=18/7=54/21$

キヲ以テ, $\mathbf{N}'=\mathbf{N}/21$ ナル單位ヲ取ル時ハ

$\mathrm{OA}=119\mathbf{N}'$, $\mathrm{OB}=54\mathbf{N}'$.

故ニ $\mathbf{N}'$ ノ上ノ正方形ノ面積ヲ $\mathbf{M}'$ トシ,之ヲ面積ノ單位トスル時ハ,前條ト同樣ニ矩形ノ面積ハ $(119\times54)\,\mathbf{M}'$ ニ等シ.

而シテ **M** ハ各邊ガ **N** 卽チ $21\mathbf{N}'$ ナル正方形ノ

面積ナルヲ以テ，$M = (21 \times 21) M' = 21^2 M'$.

故ニ 矩形ノ面積 $= (119 \times 54) M' = (119 \times 54) M/21^2$

$= (119/21 \times 54/21) M = abM$，即チ前ノ如シ.

162 a, b ガ帶小數ナリトセヨ；例ヘバ $a = 5.637$, $b = 4.281$. 此場合ニ於テハ $N_1 = N/1000$ ナル單位ヲ取ル可シ. 然ル時ハ $OA = 5637 N_1$, $OB = 4281 N_1$.

故ニ N_1 ノ上ノ正方形ノ面積 M_1 ヲ面積ノ單位トスル時ハ，矩形ノ面積ハ $(5637 \times 4281) M_1$ ニ等シ. M ハ各邊ガ $1000 N_1$ ニ等シキ正方形ノ面積ナルヲ以テ，$M = (1000)^2 M_1$.

故ニ　矩形ノ面積 $= (5637 \times 4281) M_1$

$= (5637 \times 4281) M/(1000)^2 = (5637/1000 \times 4281/1000) M$

$= (5.637 \times 4.281) M = abM$，　即チ前ノ如シ.

163 然レドモ OA, OB ガ通約ス可カラザル長サナル時ハ，a, b ノ一ッ或ハ兩者ガ整數或ハ分數ナラズ，又之ヲ小數トシテ表ハサントスルモ盡クルコトナシ. 斯クノ如キ場合ニ於テハ之ヲ適宜ノ點ニ於テ打切リテ面積ヲ算出ス可シ，而シテ打切

リ點ノ如何ニ依リテ眞ノ面積トノ差即チ**誤差**ヲ何程ニテモ小クスルコトヲ得.

例ヘバ或ル小單位 N_1 ヲ取リ，邊 OA ノ長サガ mN_1 ト $(m+1)N_1$ トノ間ニ在リ，邊 OB ノ長サガ nN_1 ト $(n+1)N_1$ トノ間ニアル時ハ (m, n ハ整數)，眞ノ面積ハ $(m+1)(n+1)M_1$ ト mnM_1 トノ間ニ在ルコト明ナリ. 故ニ之ヲ打切リテ mnM_1 トスル時ハ眞ノ面積トノ差即チ誤差ハ $(m+1)(n+1)M_1 - mnM_1$ 即チ $(m+n+1)M_1$ ヨリ小ナリ. 例ヘバ，單位ガ N ナル時，$a = 5.64783\cdots\cdots$, $b = 4.35216\cdots\cdots$ ナリトセヨ. N_1 ヲ N ノ 1/1000 トシ，$m = 5647$, $n = 4352$ ト打切ル時ハ，面積 $= (5647 \times 4352) M_1 = (5.647 \times 4.352) M$.

而シテ誤差ハ $(m+n+1) M_1$ 即チ $(5647 + 4352 + 1) M_1$ 即チ $10000 M_1$ ヨリ小ナリ. 故ニ元ノ單位 N ガ一尺ナリシトセバ，N_1 ハ一厘ニシテ，矩形ノ面積ヲ (5.647×4.352) 平方尺トスル時ノ誤差ハ 10,000 平方厘即チ一平方寸ヨリ小ナリ.

誤差ヲ尙ホ小ナラシメントンバ，N_1 ヲ更ニ小ナルモノ，例ヘバ N ノ 1/100,000 トセヨ；即チ N

ガ一尺ナラバ, N_1 ハ一絲ナリ. 然ル時ハ a, b ヲ倘ホ二位下マデ取ルヲ要ス, 卽チ $m = 564783$, $n = 435216$ トス可シ. 面積ヲ (5.64783×4.35216) 平方尺トスル時ハ, 誤差ハ $(564783+435216+1)$ 平方絲 $= 1,000,000$ 平方絲 $= 1$ 平方分ヨリ小ナリ. 是レ總面積ノ二十四萬分ノ一ヨリ小ニシテ, 實ニ取ルニ足ラザル小數ナリ, 而モ必要アラバ倘ホ何程ニテモ小クスルコトヲ得.

164 以上述ベタル所ヲ綜合シテ次ノ結果ヲ得.

Nガ長サノ單位, Mガ面積ノ單位卽チNノ上ノ正方形ノ面積ヲ表ハス時ハ, 邊ノ長サガ aN, bN ナル矩形ノ面積ハ abM ニ等シ.

卽チ m ガ矩形ノ內ニ在ル面積ノ單位ノ數ナル時ハ $m = ab$.

此結果ハ前四條ニ於テ說明シタル如ク, a, b ガ整數, 分數或ハ小數(限リ有ル)ナル場合, 言ヒ換ヘレバ, 二邊ガ通約ス可キ長サナル場合ニ於テハ嚴

密ニ正確ナリト雖モ, 二邊ガ通約ス可カラザル長サナル場合ニ於テハ結果ハ眞ノ面積ニ何程ニテモ近ク, 眞ノ面積トノ差卽チ誤差ヲ何程ニテモ小クスルコトヲ得ト云フニ止マル.

165 Nハ長サノ單位ヲ表ハスモノトシタリ; 故ニNトNトヲ相乘ズルト云フコトハ長サニ長サヲ掛ケルト云フコトニテ普通掛ケ算ノ定義ニテハ何等ノ意味ヲ成サズ. 此場合ニ於テ掛ケ算ニ一ツノ新ナル意味ヲ與ヘ, NニNヲ乘ズルニハ恰モNガ普通ノ代數學的記號ナルガ如クニ之ヲ取扱ヒ, N^2 ヲ得, 而シテ此新記號 N^2 ハNノ上ノ正方形ノ面積ヲ表ハスモノト解釋ス可シ. 然ル時ハ前條ノ定理ハ簡單ニ之ヲ述ブルコトヲ得, 卽チ

二邊ガ aN, bN ナル矩形ノ面積ハ abN^2 ナリ

例ヘバ3寸ニ4寸ノ矩形ノ面積ハ12平方寸ナリ, 12間ニ14間ノ矩形ナル地面ノ地積ハ168坪ナリト云フガ如シ.

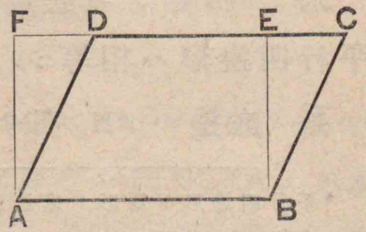
同樣ノ意味解釋ニ依リテ,二邊ガ AB, CD ナル矩形ヲ略シテ AB·CD ト記シ, AB ノ上ノ正方形ヲ略シテ AB^2 ト記スコトアルベシ; 而シテ之ヲ AB, CD ノ包ム矩形, AB ノ上ノ正方形ト讀ム可シ.

第二節　多角形ノ面積

166　平行四邊形ノ何レノ邊ニテモ之ヲ底邊ト看做スコトヲ得; 底邊ト對邊トノ距離(§91 ノ問題(2))ヲ其平行四邊形ノ **高サ** ト云フ.

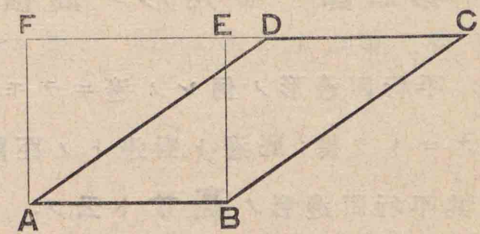
三角形ニ於テモ亦何レノ邊ヲモ底邊ト看做スコトヲ得, 對角ノ頂點ヨリ之ヘ引ケル垂線ノ長サヲ其ノ **高サ** ト云フ(§112).

167　定理　平行四邊形ハ等シキ底邊及ビ等シキ高サノ矩形ニ等シ.



ABCD ヲ平行四邊形, ABEF ヲ同ジ底邊 AB 及ビ等シキ高サ AF ノ矩形トセヨ: 然ル時ハ ABCD, ABEF ハ相等シカルベシ.*

三角形 AFD, BEC ニ於テ, ∠AFD = ∠BEC,



∠ADF = ∠BCE (§34 系), 及ビ AD = BC キヲ以テ, 三角形ハ合同ナリ (§49);
因リテ同ジ四邊形 ABCF ヨリ夫々此二ツノ相等シキ三角形ヲ減ジタル殘リハ相等シ,
即チ　ABCD = ABEF.

系　相等シキ底邊及ビ相等シキ高サノ平行四邊形ハ相等シ.

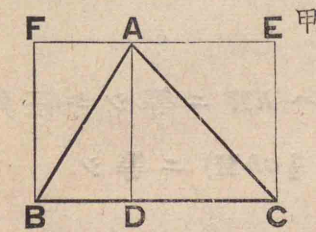
系　底邊ハ aN, 高サハ hN ニ等シキ平行

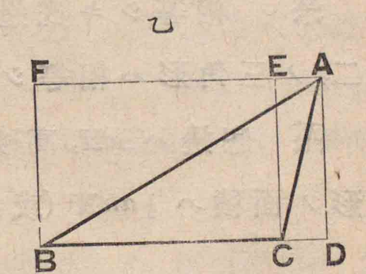
---

*平行四邊形ト矩形ト底邊及ビ高サガ相等シキ時ハ之ヲ圖ノ如ク同ジ底邊ノ上ニ置クコトヲ得, 而シテ對邊ハ一直線ヲ成ス. 本ページノ圖ト前ページノ圖トハ故ラニ平行四邊形ノ異ナリタルモノヲ畫ケリ.

四邊形ノ面積ハ ahN^2 (或ハ ahM) ニ等シ.

168 定理　三角形ハ等シキ底邊及ビ等シキ高サノ矩形ノ半分ニ等シ.





ABC ヲ三角形, BCEF ヲ同ジ底邊 BC 及ビ等シキ高サ AD ノ矩形トセヨ:
然ル時ハ　$\triangle ABC = \frac{1}{2} BCEF$ カルベシ.*
$\triangle ABD = \frac{1}{2} BDAF$ (§88 系),
及ビ　$\triangle ACD = \frac{1}{2} DCEA$ (§88 系);
故ニ三角形 ABD 及ビ ACD ノ和(甲圖)或ハ差(乙圖)ナル三角形 ABC ハ矩形 BDAF, DCEA ノ和或

---

*三角形ト矩形ト底邊及ビ高サガ相等シキ時ハ圖ノ如ク同ジ底邊ノ上ニ置クコトヲ得, 而シテ三角形ノ頂點ハ矩形ノ對邊或ハ其ノ延長ノ上ニ在リ.

ハ差ナル矩形 BCEF ノ半分ニ等シ.

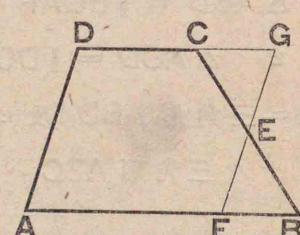
系 三角形ハ等シキ底邊及ビ等シキ高サノ平行四邊形ノ半分ニ等シ.

系 相等シキ底邊及ビ相等シキ高サノ二ツノ三角形ハ相等シ.

系 底邊ハ aN, 高サハ hN ニ等シキ三角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}ah$N² (或ハ $\frac{1}{2}ah$M) ニ等シ.

169 定理 梯形ハ其ノ平行ナル二邊ノ和ノ半分ニ等シキ底邊及ビ此二邊ノ距離ニ等シキ高サノ矩形ニ等シ.

ABCD ヲ二邊 AB, CD ガ平行ナル梯形トセヨ.



E ヲ BC ノ中點トシ, E ヲ通リ, FEG ヲ AD ニ平行ニ引キ, AB, DC 或ハ其ノ延長ト夫々 F, G ニ於テ出會ハ

シメヨ;

三角形 BEF, CEG ニ於テ, BE = CE,
∠BEF = ∠CEG, 及ビ ∠FBE = ∠GCE (§ 34)
キヲ以テ, 三角形ハ合同ニシテ, FB = CG;

因リテ AFECD + △BEF = AFECD + △CEG,

即チ梯形 ABCD ハ平行四邊形 AFGD ニ等シ.

然ルニ AB+DC = AF+FB+DC = AF+CG+DC
= AF+DG = 2AF;

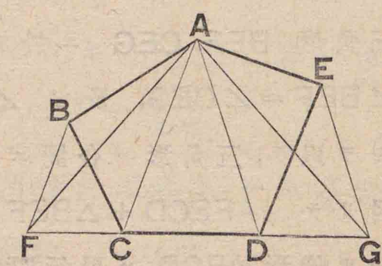
故ニ梯形 ABCD ハ底邊 AF ガ $\frac{1}{2}$(AB+DC) ニ等シク, 高サハ AF, DC ノ距離ニ等シキ平行四邊形ニ等シ:

因リテ定理ヲ得.

系 二ツノ平行邊ハ aN, bN ニ等シク, 其ノ距離ハ hN ニ等シキ梯形ノ面積ハ $\frac{1}{2}(a+b)h$N² (或ハ $\frac{1}{2}(a+b)h$M) ニ等シ.

170 作圖題 與ヘラレタル多角形ニ等シキ三角形ヲ作ルコト.

ABCDE ヲ與ヘラレタル多角形トス.



AC ヲ結ビ付ケヨ；

B ヲ通リ AC ニ平行ニ BF ヲ引キ, CD ノ延長ト F ニ於テ交ラシメヨ；

AF ヲ結ビ付ケヨ；

三角形 ABC, AFC ハ同ジ底邊 AC ノ上ニ在リテ, 等シキ高サナルヲ以テ相等シ；

故ニ多角形 ABCDE ハ多角形 AFDE ニ等シ.

AD ヲ結ビ付ケ, E ヲ通リテ AD ニ平行ニ EG ヲ引キ, CD ノ延長ト G ニ於テ交ラシムル時ハ, 三角形 ADE, ADG ハ相等シ〔§168 系〕:

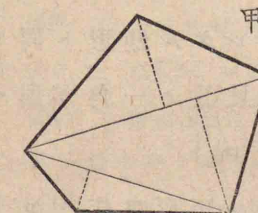
因リテ三角形 AFG ハ多角形 AFDE ニ等シク, 多角形 ABCDE ニ等シ,

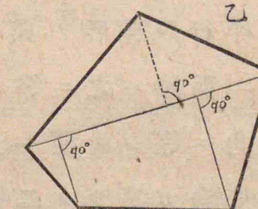
即チ求ムル所ノ三角形ナリ

圖ニ於テ五邊形ヲ取リタルモ, 何邊ニテモ續ケテ此作法ヲ行フ時ハ終ニ三角形ヲ得.

171　多角形ノ面積ヲ知ラント欲スル時ハ (i) 之ヲ前條ノ方法ニ依リ等シキ面積ノ三角形ニ變形シ, §168 ヲ應用シテ等シキ面積ノ矩形ヲ得可シ.

(ii) 或ハ之ヲ對角線ニ依リテ數多ノ三角形ニ分チ (甲圖ノ如ク), 各三角形ニ就テ其ノ底邊及ビ高サヲ測リテ之ニ等シキ矩形ヲ得, 以テ其ノ面積ヲ知ル可シ.


甲



乙

(iii) 或ハ之ヲ三角形ト梯形トニ分チ (乙圖ノ如ク), 各三角形及ビ梯形ニ等シキ矩形ヲ得, 以テ其ノ面積ヲ知ル可シ.

(ii) 及ビ (iii) ハ實地ニ地積ヲ測ルニ當リテ普通用キラルル所ノ方法ナリ.

172　演習問題.

(1) D ガ三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ナル時ハ，三角形 ABD, ACD ハ相等シ.

(2) 三角形 ABC ノ邊 BC ノ上ニ D ヲ BD ガ BC ノ 1/3 ニ等シキ様ニ取ル時ハ $\triangle ABD = \frac{1}{3}\triangle ABC$.

(3) 三角形ノ頂點ヲ通リ之ヲ二等分スル直線ヲ引クコト.〔問題(1)ヲ應用ス可シ〕

(4) 菱形ハ其ノ對角線ヲ邊トセル矩形ノ半分ニ等シ.

(5) 平行四邊形ヲ，與ヘラレタル矩形ト同ジ底邊ノ上ニ，面積ハ之ニ等シク，且其ノ一角ガ與ヘラレタル角ニ等シキ様ニ，作ルコト

(6) 底邊ガ高サノ二倍ナル矩形ヲ作ルコト．同ジ底邊ノ上ニ之ニ等シキ菱形ヲ作ルコト．此菱形ノ一角ハ 30° ナルコトヲ證明セヨ.

(7) 與ヘラレタル三角形ニ等シキ矩形ヲ作ルコト.

(8) E ハ三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點，F ハ邊 BC ノ上ニ B ト E ノ間ノ一點ナリ：ED ヲ AF ニ平行ニ引キ AC ト D ニ於テ交ラシムル時ハ，

$\triangle DFC = \frac{1}{2}\triangle ABC$.〔AE ヲ結ビ付ケヨ.〕

(9) 三角形ノ一邊上ノ與ヘラレタル點ヲ通リ之ヲ二等分スル直線ヲ引クコト.〔前問題ノ應用.〕

(10) 三角形 ABC ノ中線 BE, CF ガ G ニ於テ交ル時ハ四邊形 AEGF ハ三角形 BGC ニ等シ.

(11) E ハ三角形 ABC ノ中線 AD 上ノ點ナリ：三角形 ABE, ACE ハ相等シ

(12) ABCD ハ平行四邊形ニシテ，P, Q ハ夫々邊 AB, AD ノ中點ナリ：三角形 APQ ハ平行四邊形ノ 1/8 ニ等シ.

(13) D ハ三角形 ABC ノ一邊 BC 上ノ一點，E ハ AD ノ中點ナリ：$\triangle EBC = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

(14) 三角形 ABC ノ邊 BC ニ平行線ガ邊 AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ル時ハ，$\triangle ABE = \triangle ACD$.

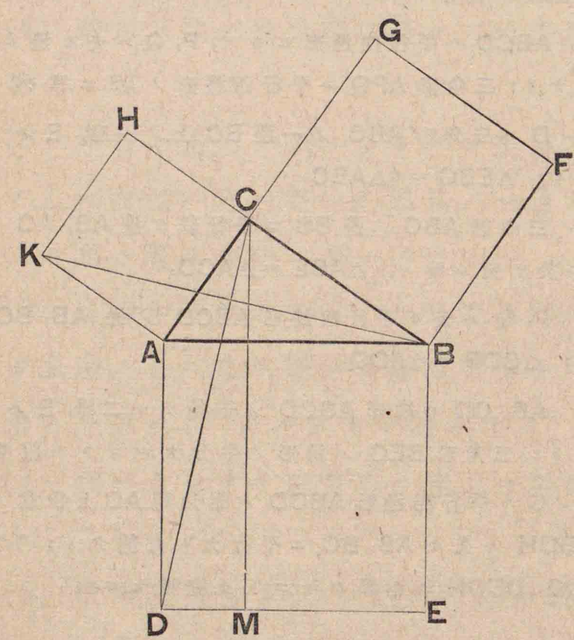
(15) P, Q ハ夫々平行四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC 上ノ點ナリ：$\triangle CDP = \triangle ADQ$.

(16) AB, CD ハ梯形 ABCD ノ平行ナル二邊，E ハ AD ノ中點ナリ：三角形 BEC ハ梯形ノ半分ナルコトヲ證明セヨ

(17) O ハ平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上任意ノ一點，EOF, GOH ハ夫々 AB, BC ニ平行ナル直線ナリ：平行四邊形 BFOG, DEOH ハ相等シキコトヲ證明セヨ.

第三節　矩形及ビ正方形

173　**定理**　直角三角形ニ於テ,斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.



三角形 ABC ニ於テ角 C ヲ直角トセヨ;

然ル時ハ　$AB^2 = AC^2 + BC^2$　カルベシ.

各邊ノ上ニ正方形ヲ作リ, CM ヲ AD ニ平行ニ引キ, BK, CD ヲ結ビ付ケヨ.

三角形 BAK, CAD ニ於テ, $BA = AD$, $AK = AC$, 及ビ　$\angle BAK = \angle BAC +$ 直角 $= \angle CAD$　キヲ以テ,二ツノ三角形ハ合同ナリ;

正方形 ACHK ハ三角形 BAK ト同ジ底邊 AK 及ビ同ジ高サ AC ナルヲ以テ,

$AC^2 = 2\triangle BAK$ (§ 168);

同樣ニ,　矩形　$AD \cdot DM = 2\triangle CAD$;

故ニ　　$AC^2 =$ 矩形 $AD \cdot DM$.

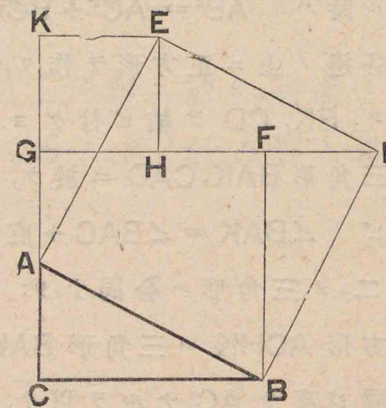
同樣ニ　　$BC^2 =$ 矩形 $BE \cdot EM$;

而シテ矩形 $AD \cdot DM$ ト矩形 $BE \cdot EM$ トハ合セテ正方形 ABED 卽チ AB ノ上ノ正方形ヲ成ス:

因リテ　$AC^2 + BC^2 = AB^2$.

此定理ハ頗ル重要ナルモノニシテ,其ノ發見者ニ因ミテ **ピタゴラス** Pythagoras ノ定理ト名ク.

174　又次ノ如キ分解法ニ依リテ此定理ノ眞ナルヲ見ル可シ.



ABC ハ元ノ三角形, BCGF ハ BC ノ上ノ正方形, GHEK ハ AC ノ上ノ正方形ニ等シキ正方形トス. HD ヲ BC ニ等シク取リ, AE, ED, BD ヲ結ビ付クル時ハ, ABDE ハ AB ノ上ノ正方形ナル可ク, 四ツノ三角形 ABC, AEK, BDF, DEH ハ合同ナル可シ. 因リテ定理ヲ得: 證明ハ甚簡易ナリ, 演習トシテ試ム可シ.

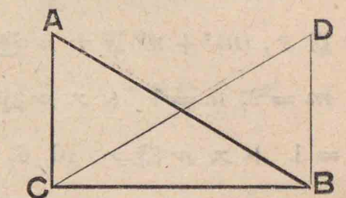
175 ピタゴラスノ定理ノ逆モ亦眞ナリ.

定理 一ツノ三角形ノ一邊ノ上ノ正方形ガ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シキ時ハ, 之ニ對スル角ハ直角ナリ.

三角形 ABC ニ於テ,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ トセヨ:

然ル時ハ角 C ハ直角ナルベシ.



B ヨリ BC ニ垂線 BD ヲ引キ, AC ニ等シクシ, CD ヲ結ビ付ケヨ.

角 B ハ直角ナルヲ以テ,

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 = BC^2 + AC^2$$
$$= AB^2$$ 〔假設〕;

因リテ, AB = CD;

故ニ二ツノ三角形 ABC, DBC ハ, 三邊ガ夫々相等シキヲ以テ, 合同ナリ;

因リテ $\angle ACB = \angle CBD =$ 直角.

176 三角形ノ邊ガ夫々 3, 4, 5 單位ニ等シキ時ハ 5 ニ對スル角ハ直角ナリ; 絲ノ上ニ三尺, 四尺, 五尺ノ長サヲ續ケテ標記シ, 之ヲ邊トシテ三角形ヲ作ル時ハ直角三角形ヲ得. 是レ度(モノサシ)ノミヲ以テ直角ヲ作ルニ屢〻用キラルル簡便法ナリ.

三角形ノ邊ノ長サガ夫々單位 N ノ m^2+n^2, $2mn$, m^2-n^2 倍ナル時ハ邊ノ上ノ正方形ハ $(m^2+n^2)^2N^2$, $4m^2n^2N^2$, $(m^2-n^2)^2N^2$ ニシテ,

$(m^2+n^2)^2 = m^4+2m^2n^2+n^4 = (m^2-n^2)^2+4m^2n^2$ キヲ以テ, (m^2+n^2)N ナル邊ニ對スル角ハ直角ナリ.

$m=2$, $n=1$ トスル時ハ, 5, 4, 3 ヲ得; $m=3$, $n=1$ トスル時ハ 10, 6, 8 ヲ得; $m=3$, $n=2$ トスル時ハ, 13, 12, 5 ヲ得, 等.

177 演習問題

(1) AD ガ三角形 ABC ノ頂點 A ヨリノ垂線ナル時ハ, $AB^2 \sim AC^2 = BD^2 \sim CD^2$.

(2) 三角形 ABC ニ於テ C ハ直角ナリ: AC, BC ノ上ニ夫々 D, E ヲ取ル時ハ,

$$AE^2 + BD^2 = DE^2 + AB^2.$$

(3) 四邊形 ABCD ノ對角線ガ直角ニ交ル時ハ, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

(4) 二ッノ與ヘラレタル正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

(5) 二ッノ與ヘラレタル正方形ノ差ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

(6) 三ッノ與ヘラレタル正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

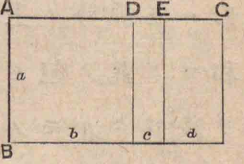
(7) O ガ矩形 ABCD 内ノ一點ナル時ハ,
$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$.

(8) § 176 ニ説明セル關係ヲ利用シテ線分ノ一端ニ於テ之ニ垂線ヲ引クコト.

178

次ニ掲グル如キ諸定理ハ或ハ § 164, 165 ヨリ推究スルヲ得可ク或ハ之ヲ § 174 ニ説明セル如キ分解及ビ組ミ合ハセニ依リテ證明スルヲ得. 此ニハ唯其ノ圖ヲ掲ゲ證明ハ演習トシテ殘シ置ク.

(i) 二ッノ線分ノ包ム矩形ハ其ノ一ット他ヲ分チタル諸部分トノ包ム矩形ノ和ニ等シ.



AB, AC ガ與ヘラレタル線分, AD, DE, EC ハ AC ヲ分チタル諸部分ナル時ハ,

$AB\cdot AC = AB\cdot AD + AB\cdot DE + AB\cdot EC$.

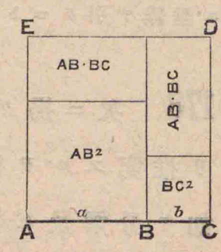
$a\mathrm{N}\cdot(b+c+d)\mathrm{N} = a\mathrm{N}\cdot b\mathrm{N} + a\mathrm{N}\cdot c\mathrm{N} + a\mathrm{N}\cdot d\mathrm{N}$.

(ii) 二ッノ線分ノ和ノ上ノ正方形ハ各線分ノ上ノ正方形ト其ノ包ム矩形ノ二倍トノ和ニ等シ.

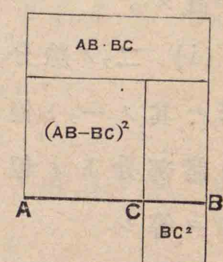
AB, BC ガ與ヘラレタル二線分ナル時ハ,

$(AB+BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB\cdot BC.$

$$\begin{aligned}(a\mathbf{N}+b\mathbf{N})^2 &= (a+b)^2\mathbf{N}^2\\ &= (a^2+b^2+2ab)\mathbf{N}^2\\ &= a^2\mathbf{N}^2+b^2\mathbf{N}^2\\ &\quad +2ab\mathbf{N}^2\\ &= (a\mathbf{N})^2+(b\mathbf{N})^2\\ &\quad +2(a\mathbf{N})(b\mathbf{N}).\end{aligned}$$



(iii) 二線分ノ差ノ上ノ正方形ハ各線分ノ上ノ正方形ノ和ヨリ其ノ包ム矩形ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ.

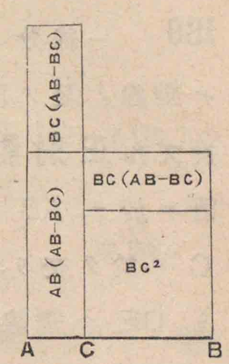


AB, BC ガ與ヘラレタル二線分ナル時ハ,

$(AB-BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC.$

$$\begin{aligned}(a\mathbf{N}-b\mathbf{N})^2 &= (a-b)^2\mathbf{N}^2 = (a^2+b^2-2ab)\mathbf{N}^2\\ &= a^2\mathbf{N}^2+b^2\mathbf{N}^2-2ab\mathbf{N}^2\\ &= (a\mathbf{N})^2+(b\mathbf{N})^2-2(a\mathbf{N})\cdot(b\mathbf{N}).\end{aligned}$$

(iv) 二線分ノ上ノ正方形ノ差ハ其ノ和ト其ノ差トノ包ム矩形ニ等シ.

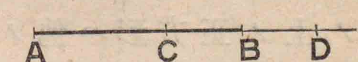


AB, BC ガ與ヘラレタル二線分ナル時ハ,

$$\begin{aligned}AB^2 - BC^2 &\\ &= (AB+BC)\cdot(AB-BC).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2\mathbf{N}^2-b^2\mathbf{N}^2 &= (a^2-b^2)\mathbf{N}^2\\ &= (a+b)(a-b)\mathbf{N}^2\\ &= (a+b)\mathbf{N}\cdot(a-b)\mathbf{N}.\end{aligned}$$

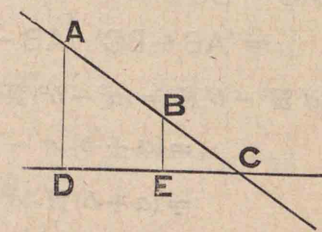
179 一線分上ノ一點ハ之ヲ內分スト云フ; 其ノ延長ノ上ノ一點ハ之ヲ外分スト云フ. 各部分ヲ其ノ **分** ト云フ.



圖ニ於テ, AB ヲ線分トスル時ハ, C 點ハ之ヲ內分シ, D 點ハ之ヲ外分ス; AC, BC 或ハ AD, BD ハ其ノ分ナリ. 線分ハ, 內分サルル時ハ, 其ノ分ノ和ニ等シク; 外分サルル時ハ, 差ニ等シ. 圖ニ於テ, AB = AC + BC = AD ∼ BD.

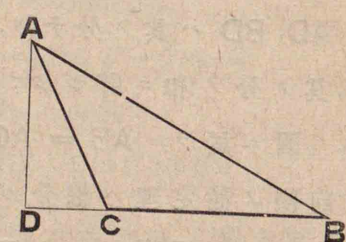
前條ノ諸定理ハ線分ガ內分或ハ外分サレタル時ノ定理ト看做スコトヲ得.

180　一線分ノ兩端ヨリ一直線ヘ垂線ヲ引ク時ハ垂線ノ足ノ間ニ在ル線分ヲ直線ノ上ニ線分ノ投ズル**正射影**ト云フ.



圖ニ於テ, AB ト DE ガ C ニ於テ交リ, A, B ヨリ DE ヘ垂線 AD, BE ヲ引ク時ハ, DE ハ AB ガ DC ノ上ニ投ズル正射影ナリ, 又 DC ハ AC ノ正射影ナリ.

181　**定理**　鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ大ナルコト一邊ト他ノ邊ガ其ノ上ニ投ズル正射影トノ包ム矩形ノ二倍ナリ.

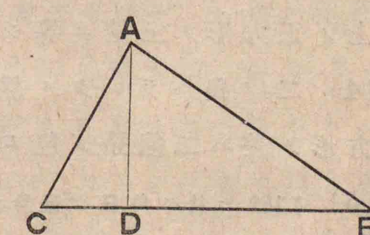


三角形 ABC ノ角 C ガ鈍角, AD ハ BC ノ延長ニ垂線ナリトセヨ:

然ル時ハ　$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC\cdot CD$ カルベシ.

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad 〔§\ 173〕$$
$$= AD^2 + (BC + CD)^2$$
$$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC\cdot CD \quad 〔§\ 178\ (ii)〕$$
$$= (AD^2 + CD^2) + BC^2 + 2BC\cdot CD$$
$$= AC^2 + BC^2 + 2BC\cdot CD. \quad 〔§\ 173〕.$$

182　**定理**　三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルコト一邊ト他ノ邊ガ其ノ上ニ投ズル正射影トノ包ム矩形ノ二倍ナリ.



三角形 ABC ノ角 C ハ鋭角, AD ハ BC ニ垂線ナリトセヨ:

然ル時ハ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC\cdot CD \quad カルベシ.$$
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad 〔§\ 173〕$$
$$= AD^2 + (BC - CD)^2$$

$$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \quad (§178\,(iii))$$
$$= (AD^2 + CD^2) + BC^2 - 2BC \cdot CD$$
$$= AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$$

183　演習問題.

(1) 三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ底邊ノ半分ノ上ノ正方形及ビ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル中線ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シ.

(2) 線分 AB ガ C ニ於テ二等分サレ, P ニ於テ任意ニ内分或ハ外分サルル時ハ,

$AP^2 + BP^2 = 2AC^2 + 2CP^2$, 又 $AP \cdot PB + CP^2 = AC^2$.

(3) 正三角形ノ中線ノ上ノ正方形ハ邊ノ半分ノ上ノ正方形ノ三倍ニ等シ.

(4) 二ツノ與ヘラレタル線分ノ和及ビ差ノ上ノ正方形ノ差ハ二線分ノ包ム矩形ノ四倍ニ等シ.

(5) §182 ニ於テ角 B ガ直角ナル時ハ如何?

(6) 三角形ノ三邊ノ上ノ正方形ノ和ノ三倍ハ三中線ノ上ノ正方形ノ和ノ四倍ナリ. (問題(1).)

第四編　比例ノ應用

第一節　比及ビ比例

184　**比**トハ二ツノ數或ハ量ノ間ノ一種ノ關係ニシテ次ノ如ク之ヲ表ハス.

二ツノ數 a ト b ノ比ハ $a:b$ ト記シ, a/b ナル商ヲ以テ其ノ値トスルコトハ既ニ代數學ニ於テ學ビタル所ナリ.

同ジ種類*ノ二ツノ量, A, B, ガ同ジ種類ノ第三ノ量 N ヲ丁度若干度含ム時ハ, A, B ハ通約ス可キ量ナリ. A, B ガ通約ス可キ量ニシテ, $A = aN$, $B = bN$ ナル時ハ, 二量 A ト B ノ比ハ a ト b ノ比即チ $a:b$ ニ同ジクシテ, a/b ナル商ヲ以テ其ノ値トス.

*同ジ種類ノ量トハ長サト長サ, 面積ト面積, 重サト重サ, 時間ト時間ノ如キチ云フ　長サト面積又ハ重サ, 重サト時間, 等ノ如キハ異ナレル種類ノ量ナリ

比ハ同ジ種類ノ量ノ間ニノミ成リ立ツ關係ナルコト明ナリ.

比ノ値ハ一ツノ無名數ナリ.

A ト B ノ比ノ記號トシテ $A:B$ 或ハ A/B ヲ用ヰル　A/B ト記ス時ハ A ヲ B ニテ割ルガ如クナレドモ之レ唯比ヲ表ハス記法ノミ. $A=aN$, $B=bN$ キ時ハ A/B ハ aN/bN ニシテ,之ヲ普通ノ分數ノ如ク取扱ヒ N ヲ相殺スルトキハ a/b トナル,是レ A ト B ノ比ノ値ナリ. 普通ニ長サヲ以テ長サヲ割リ又ハ面積ヲ以テ面積ヲ割ルナド言フハ此意義ニ外ナラズ.

A ヲ比 $A:B$ ノ **前項**, B ヲ **後項** ト稱ス.

185 此ニ同種類ノ二量 A, B アリ,其ノ比ハ a/b トス,又他ノ同種類ノ二量 P, Q アリ (A, B トハ同種類ニテモ又ハ異種類ニテモ),其ノ比ハ p/q トス. 今 A ト B ノ比ガ P ト Q ノ比ニ等シキ時ハ,即チ $a/b=p/q$ キ時ハ, A, B, P, Q ハ **比例** ヲ成ス或ハ **比例** ストト云フ.

之ヲ $A:B=P:Q$ 或ハ $A:B::P:Q$ ト記ス.

A ト Q ヲ比例ノ **外項**, B ト P ヲ **中項** ト稱ス; 前項 A ハ前項 P ニ,後項 B ハ後項 Q ニ對應スト云フ. Q ヲ A, B, P ノ **第四比例項** ト稱ス.

同種類ノ三量, A, B, C ガ比例ヲ成ストハ $A:B=B:C$ キヲ云フ. 此場合ニ於テ, C ヲ A, B ノ **第三比例項**, B ヲ A ト C ノ間ノ,或ハ單ニ A ト C ノ **比例中項** ト稱ス.

186 斯クノ如ク量ノ比ハ數ノ比ノ如ク其ノ値ハ或ル分數ナルヲ以テ,代數學ニ於テ得タル比及ビ比例ニ關スル定理ハ亦量ノ比ニモ適應スルコト明ナリ. 便宜ノ爲,比例ニ關スル主ナル定理若干ヲ次ニ掲グ.

(甲)　$A:B=P:Q$* キ時ハ,　$B:A=Q:P$

(乙)　$A:B=C:D$* キ時ハ,　$A:C=B:D$.

(丙)　$A=B$ キ時ハ　　$A:C=B:C$,　及ビ
　　$C:A=C:B$.

---

*比例ヲ成ス量ガ皆同種類ナルヲ要スル時ハ「アルファベット」中ノ同部分ノ文字ヲ用ヰ,異同何レニテモ宜シキ時ハ異ナレル部分ノ文字ヲ用ヰル.

(丁) $A:C=B:C$ 或ハ $C:A=C:B$ キ時ハ，
$A=B$.

(戊) 三ッノ與ヘラレタル量ニハ唯一ッノ第四比例項アルノミ．二ッノ與ヘラレタル量ニハ唯一ッノ第三比例項及ビ唯一ッノ比例中項アルノミ．

(己) $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$ キ時ハ，
$mA+nC+pE+\cdots:mB+nD+pF+\cdots$
$=A:B$.

(庚) $A:B=P:Q$ キ時ハ，$A:A\pm B=P:P\pm Q$.

(辛) $A:B=P:Q$ 及ビ $B:C=Q:R$ キ時ハ，
$A:C=P:R$.
又 $A:B=Q:R$ 及ビ $B:C=P:Q$
キ時ハ $A:C=P:R$.

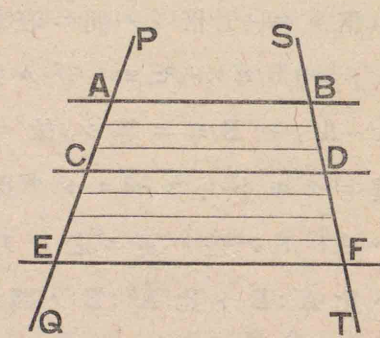
187 A, B ガ各丁度若干度含ム第三量（§ 184 ノ N ノ如キ）無キ時ハ，A, B ハ通約ス可カラザル量ナリト云フ．此場合ニ於テハ通約ス可キ量ノ場合ト異リ，A ト B ノ比ノ値ヲ正確ニ表ハス可キ分數（a/b ノ如キ）無シ：因リテ次ノ如クスルヲ要ス．

A', A'' ナル二量アリテ，其ノ一ッ A' ハ A ヨリ大ニシテ，A'' ハ A ヨリ小ナル時ハ，比 $A:B$ ハ比 $A':B$ ヨリ小ニシテ，比 $A'':B$ ヨリ大ナルコトヲ公理的ニ假定ス．今 A', A'' ハ二ッ共ニ B ト通約ス可キ量ニシテ且其ノ差ハ何程ニテモ小ナル樣ニ取ルコトヲ得．例ヘバ B/n ヲ單位トシ，A ガ此單位ノ m 倍ト $(m+1)$ 倍トノ間ニ在ル時ハ，$A'=(m+1)B/n$, $A''=mB/n$ トセヨ．然ル時ハ A' ト A'' トノ差，$A'-A''$，ハ B/n ニ等シ，故ニ n ヲ大クスル時ハ何程ニテモ小クスルコトヲ得．而シテ A ト A' 或ハ A'' トノ差ハ更ニ之ヨリ小ナリ．故ニ比 $A:B$ ハ比 $A':B$ ト比 $A'':B$ ノ間ニアルヲ以テ二ッノ商 $(m+1)/n$ ト m/n トノ間ニアリ．而シテ此二ッノ差ハ何程ニテモ小クスルコトヲ得ルヲ以テ，比 A/B ノ値ヲ m/n トスル時ハ眞ノ値トノ差即チ誤差ハ何程ニテモ小クスルコトヲ得．因リテ通約ス可カラザル量ニ付テモ其ノ比ノ値ヲ或ル分數ニ等シトシテ差支ナシト公理的ニ假定ス．

第二節　比例セル線分

188　定理　一組ノ平行線ハ二ツノ截線ヲ比例セル線分ニ分ツ.

平行線 AB, CD, EF ガ截線 PQ, ST ヲ夫々線分 AC, CE; BD, DF ニ分ツトセヨ:



然ル時ハ

$$AC : CE = BD : DF$$

カルベシ.

N ハ或ル單位ニシテ,

$AC = mN$, $CE = nN$* トセヨ.

AC, CE ヲ各、N ニ等シキ m 及ビ n ノ線分ニ分チ,各分點ヲ通リテ AB ニ平行線ヲ引ケ;

*m, n ハ整數; 圖ニ於テハ $m = 3$, $n = 4$ トセリ.

此等ノ平行線ハ BD, DF ヲ夫々 m, n ノ相等シキ線分ニ分ツ〔§ 97〕;

其ノ各、ノ長サヲ N′ トスル時ハ, $BD = mN'$, $DF = nN'$;

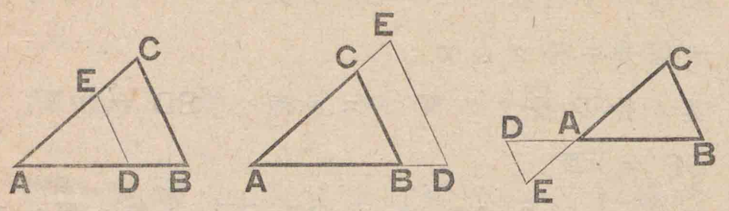
因リテ　AC : CE 及ビ BD : DF ノ値ハ何レモ m/n ナリ:

故ニ　$AC : CE = BD : DF$.

系　$AC : AE = BD : BF$.〔§ 186 (庚)〕.

189　前條ノ證明ハ AC, CE ガ通約ス可カラザル長サナル時ハ $AC = mN$, $CE = nN$ ト云フ如キ單位 N 無キヲ以テ適用スルヲ得ズ. 然レドモ § 187 ニ説明セル如ク N ヲ小クスル時ハ AC : CE ニ何程ニテモ近キ或ル分數 m/n ヲ得可キヲ以テ,此定理ガ何程ニテモ眞ニ近キコトハ證明サレタルナリ. 其ガ嚴正ニ眞ナルコトハ此ニハ公理トシテ假定スルニ止ム.

190　定理　三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ比例セル分ニ分ツ.



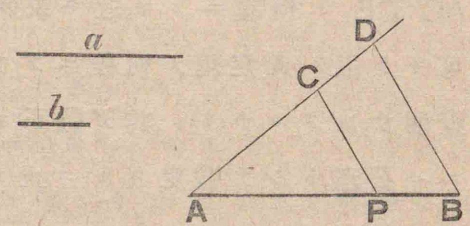
三角形ABCノ邊BCニ平行ナル一直線DEガ邊AB, AC或ハ其ノ延長ト夫々D, Eニ於テ出會フ時ハ，　AD:DB = AE:EC

及ビ　AD:AB = AE:AC

キコトハ§188ニ依リテ明ナリ

191 作圖題　與ヘラレタル線分ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル分ニ内分スルコト.

ABヲ與ヘラレタル線分; a, bヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二線分トス.



Aヲ通リ任意ニ一直線ヲ引キ，其ノ上ニACヲaニ等シク，CDヲbニ等シク取レ;

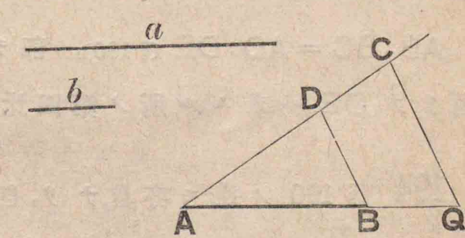
BDヲ結ビ付ケ，BDニ平行ニCPヲ引キ，ABトPニ於テ出會ハシメヨ.

AP:PB = AC:CD　〔§190〕 $= a:b$;

故ニABハPニ於テ與ヘラレタル比ニ内分サレタリ.

192 作圖題　與ヘラレタル線分ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル分ニ外分スルコト.

前條ト同樣ノ作圖ヲ爲ス可シ; 但CDヲCヨリAノ方ヘ取ル可シ.



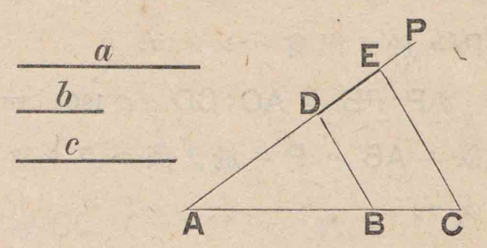
此作圖題ハaガbニ等シキ時ハD點ガA點ト合シテ不可能トナル，固ヨリ然カアル可キ筈ナリ.

193 作圖題　與ヘラレタル三直線ノ第四比例項ヲ作ルコト.

a, b, cヲ與ヘラレタル三直線トス.

任意ノ一直線上ニABヲaニ等シク，BCヲb

ニ等シク取レ;
又Aヲ通ル他ノ任意ノ一直線AP上ニADヲcニ等シク取レ;

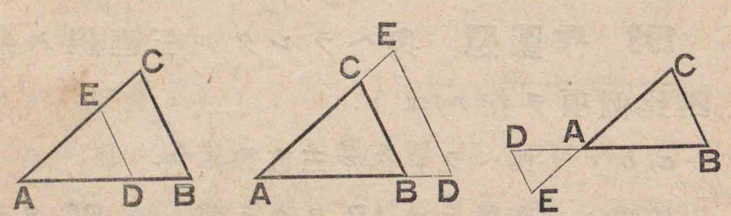


BDヲ結ビ付ケ, BDニ平行ニCEヲ引キ, APトEニ於テ出會ハシメヨ.

AB:BC=AD:DE (§190), 卽チ $a:b=c:$DE;
因リテDEハ求ムル所ノ第四比例項ナリ.

194 §190ノ逆モ亦眞ナリ, 卽チ次ノ如シ.

定理 三角形ノ二邊ヲ比例セル分ニ分ツ直線ハ第三邊ニ平行ナリ.



DEガ三角形ABCノ二邊AB, ACト夫々D, Eニ於テ出會ヒ, AD:DB=AE:EC トセヨ;
然ル時ハDEハBCニ平行ナルベシ.

AD:DB=AE:EC キヲ以テ,

AD:AB=AE:AC (§186 (庚));

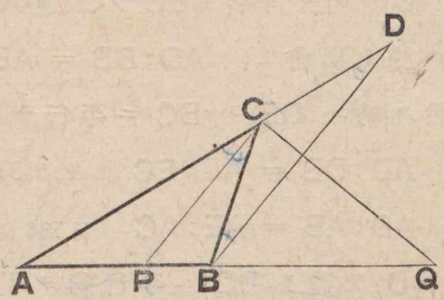
今Dヲ通リBCニ平行線ヲ引キ, ACトE′ニ於テ出會ハシムル時ハ, AB:AD=AC:AE′ (§190);
因リテ AC:AE=AC:AE′;
故ニ AE=AE′,
卽チE′ハEト合シ, DE′ハDEト合ス;
故ニDEハBCニ平行ナリ.

系 AD:AB=AE:AC キ時ハDEハBCニ平行ナリ.

195 **定理** 三角形ノ頂點ニ於テノ內角及ビ外角ヲ二等分スル直線ハ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分ス.

三角形ABCノ頂點Cニ於テノ內角ACB及ビ外角BCDヲ二等分スル直線CP, CQガ底邊AB

ト夫々P, Q ニ
於テ出會フト
セヨ:
然ル時ハ
AP:PB
= AC:CB



及ビ AQ:QB = AC:CB カルベシ.

B ヲ通リ CP ニ平行ニ BD ヲ引キ AC ノ延長ト D ニ於テ出會ハシメヨ;

∠CBD = ∠BCP 〔§ 34〕 = ∠ACP 〔假設〕

= ∠CDB 〔§ 34 系〕;

因リテ CB = CD:

CP ハ三角形 ABD ノ底邊 BD ニ平行ナルヲ以テ,

AP:PB = AC:CD = AC:CB.

同樣ニ, B ヨリ CQ ニ平行線ヲ引キ,

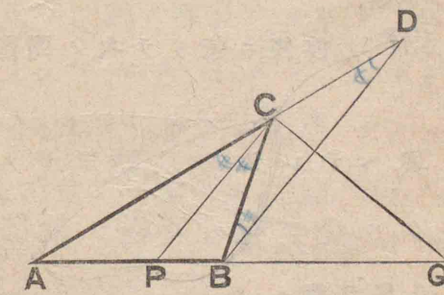
AQ:QB = AC:CB

ヲ證明スルコトヲ得.

196 前條ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ; 即チ

定理 三角形ノ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分スル點ヲ頂點ト結ビ付クル直線ハ頂點ニ於テノ內角及ビ外角ヲ二等分ス.

三角形 ABC
ノ底邊 AB ヲ
P, Q ニ於テ比
AC:CB ニ內
分及ビ外分シ
タリトセヨ:



然ル時ハ CP, CQ ハ C ニ於テノ內角及ビ外角ヲ二等分スベシ.

CP ニ平行ニ BD ヲ引キ, AC ノ延長ト D ニ於テ出會ハシメヨ:

AP:PB = AC:CB 〔假設〕 = AC:CD 〔§ 190〕;

因リテ, CB = CD;

故ニ ∠CBD = ∠CDB;

然ルニ ∠CBD = ∠BCP 〔§ 34〕,

及ビ ∠CDB = ∠ACP 〔§ 34 系〕;

故ニ　　$\angle ACP = \angle BCP$,

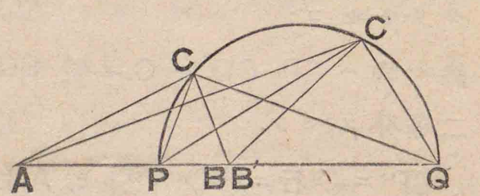
即チ CP ハ角 ACB ヲ二等分ス.

同様ニ，B ヲ通リテ CQ ニ平行線ヲ引キ，CQ ガ角 BCD ヲ二等分スルコトヲ證明スルヲ得.

197　前條ニ依リテ次ノ問題ヲ解スルコトヲ得.

與ヘラレタル二點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ヲ求ム.

A, B ヲ與ヘラレタル二點トシ，AB ガ P 及ビ Q ニ於テ與ヘラレタル比ニ内分及ビ外分サレタリトセヨ.



C ヲ軌跡上ノ一點トシ，AC, BC, PC, QC ヲ結ビ付ケヨ；

然ル時ハ　　$AC : CB = AP : PB$,

及ビ　　　$AC : CB = AQ : QB$;

故ニ CP, CQ ハ三角形 ABC ノ C ニ於テノ内角及ビ外角ヲ二等分ス〔§ 196〕；

因リテ角 PCQ ハ直角ナリ；

故ニ C ハ PQ ヲ直徑トセル圓周ノ上ニ在リ.

尙ホ此圓周ガ求ムル所ノ軌跡ナルコトヲ確定スルニハ此圓周上ノ點ノ A, B ヨリノ距離ガ比 $AP : PB$ ヲ有スルコトヲ證明スルヲ要ス.

C′ ヲ此圓周上任意ノ一點トシ，AC′, PC′, QC′ ヲ結ビ付ケ，角 AC′P ニ等シク角 PC′B′ ヲ作リ，AQ ト B′ ニ於テ出會ハシメヨ；

C′P ハ角 AC′B′ ヲ二等分シ，C′Q ハ之ニ垂直ナルヲ以テ，C′Q ハ C′ ニ於ケル外角ヲ二等分ス；

因リテ　$AP : PB' = AC' : C'B' = AQ : QB'$　〔§ 195〕；

故ニ　　$AP : AQ = PB' : B'Q$　〔§ 186,（乙）〕；

又　　　$AP : PB = AQ : QB$　〔假設〕：

即チ　　$AP : AQ = PB : BQ$;

因リテ　$PB' : B'Q = PB : BQ$,

即チ　　$PB' : PQ = PB : PQ$　〔§ 186,（庚）〕；

因リテ　$PB' = PB$ ク, B' ハ B ト合シ,

$$AC' : C'B = AP : PB.$$

故ニ求ムル所ノ軌跡ハ PQ ヲ直徑トセル圓周ナリ.

此圓ヲアポロニウス (Apollonius) ノ圓ト名ク.

198 演習問題.

(1) 三角形 ABC ノ邊 AB 上ノ一點 D ヨリ BC ニ平行ニ DE ヲ引キ, AC ト E ニ於テ交ラシメ, AB ニ平行ニ EF ヲ引キ, BC ト F ニ於テ交ハラシムル時ハ, $AD : DB = BF : FC$.

(2) 三角形 ABC ノ邊 AB 上ノ一點 D ヨリ BC ニ平行ニ DE ヲ引キ, AC ト E ニ於テ交ラシメ, BE ニ平行ニ CF ヲ引キ, AB ノ延長ト F ニ於テ交ラシムル時ハ, $AD : AB = AB : AF$.

(3) 二ツノ三角形 ABC, ABD ノ共通邊 AB 上ノ一點 E ヨリ, AC ニ平行ニ EF ヲ, AD ニ平行ニ EG ヲ引キ, 夫々 BC, BD ト F, G ニ於テ交ラシムル時ハ, FG ハ CD ニ平行ナリ.

(4) 二ツノ與ヘラレタル線分ノ第三比例項ヲ

作ルコト.

(5) 與ヘラレタル線分ヲ他ノ線分ニ相似ニ* 分ツコト.

(6) D ハ三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ナリ; 角 ADB 及ビ角 ADC ノ二等分線ガ夫々 AB, AC ト F, E ニ於テ出會フ時ハ EF ハ BC ニ平行ナリ.

(7) 相交ル二直線ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ハ交點ヲ通ル二直線ナリ.

(8) (7) ニ於ケル軌跡ヲ引クコト.

(9) 一定點 O ヲ通ル直線ガ二ツノ定マレル平行線ト P, Q ニ於テ交ル; $OP : OQ$ ハ一定ノ比ナリ.

(10) O ハ定點ニシテ, P ハ一定直線ノ上ヲ動ク點ナリ: OP ノ上ニ Q 點ヲ　$OQ : OP$ ガ一定ノ比ニ等シキ樣ニ取ル時ハ, Q ノ軌跡ハ P ノ動ク直線ニ平行ナル直線ナリ.

(11) O ハ三角形 ABC 内ノ一點ニシテ, 角 BOC, COA, AOB ノ二等分線ガ夫々 BC, CA, AB ト P, Q, R ニ於テ出會フ時ハ, $(BP/PC) \times (CQ/QA) \times (AR/RB) = 1$.

(12) § 191, § 192 ニ於テ, b ガ最初甚小ニシテ, 夫ヨリ漸次増大シ, a ニ等シクナリ, 尙ホ増大シテ甚大トナルニ際シ P, Q 二點ノ位置ノ變化ヲ追跡セヨ.

* 卽チ第二線分ノ分ノ比ニ等シキ比ヲ有スル分ニ.

(13) 二點 P, Q ガ二點 A, B ニ付テ調和共軛點* ナル時ハ，A, B ハ P, Q ニ付テ調和共軛點ナリ．

---

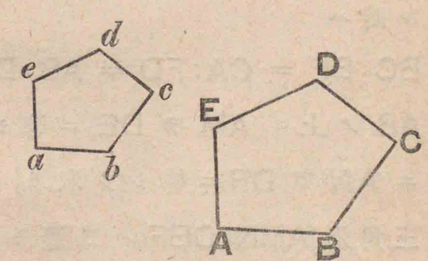
*AB ガ P, Q ニ於テ同ジ比ニ内分及ビ外分サルル時ハ，AB ハ P, Q ニ於テ**調和ニ分タレタリ**ト云フ．又四點 A, P, B, Q ハ調和列點ナリト云フ；又 P, Q ハ A, B ニ付テ各他ノ調和共軛點ナリト云フ．

第三節　相似多角形

199　二ツノ多角形ノ（同ジ順ニ取リタル）角ガ夫々相等シキ時ハ**等角ナリ**ト云フ．一ツノ形ノ角ハ夫々他ノ形ノ之ニ等シキ角ニ對應シ，二ツノ對應角ノ間ニ在ル邊ハ相對應スト云フ．

等角ニシテ，對應邊ガ比例ヲ成ス多角形ハ**相似ナリ**ト云フ．

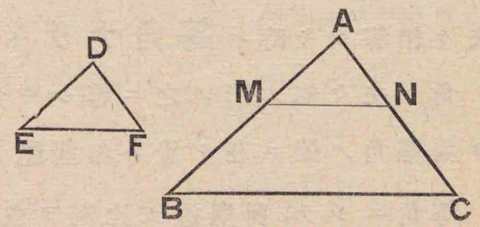
圖ニ於テ，



ABCDE, *abcde* ハ二ツノ相似五邊形ニシテ，角 A, B, C, D, E ハ夫々角 a, b, c, d, e ニ等シクシテ，$\mathrm{AB}:ab=\mathrm{BC}:bc=\mathrm{CD}:cd=\mathrm{DE}:de=\mathrm{EA}:ea$．角 A, B, C, D, E ハ夫々角 a, b, c, d, e ニ對應シ，又邊 AB, BC, CD, DE, EA ハ夫々邊 ab, bc, cd, de, ea ニ對應ス．

二ツノ多角形ガ同一多角形ニ相似ナル時ハ又互ニ相似ナリ.

200 定理 等角三角形ハ相似ナリ.



三角形ABC, DEF ニ於テ, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, 及ビ 従テ $\angle C = \angle F$ トセヨ:

然ル時ハ

$BC:EF = CA:FD = AB:DE$ カルベシ.

AB ノ上ニ AM ヲ DE ニ等シク取リ, 又 AC ノ上ニ AN ヲ DF ニ等シク取リ, MN ヲ結ビ付ケヨ.

三角形 AMN, DEF ハ二邊ト夾角ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ;

因リテ $\angle AMN = \angle DEF = \angle ABC$;

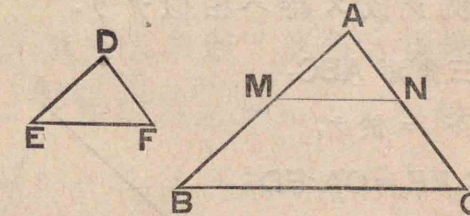
故ニ $MN \parallel BC$;

因リテ $AB:AM = AC:AN$,

卽チ $AB:DE = AC:DF$.

同様ニ $AB:DE = BC:EF$ ヲ證明スルコトヲ得.

201 定理 二ツノ三角形ノ一角ガ相等シク,之ヲ夾ム邊ガ比例ヲ成ス時ハ,三角形ハ相似ナリ.



三角形ABC, DEF ニ於テ, 角Aハ角Dニ等シク, $AB:DE = AC:DF$ トセヨ:

然ル時ハ三角形ハ相似ナルベシ.

AB ノ上ニ AM ヲ DE ニ等シク取リ, AC ノ上ニ AN ヲ DF ニ等シク取リ, MN ヲ結ビ付ケヨ.

三角形 AMN, DEF ハ二邊ト夾角ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ;

假設ニ依リ, $AB:DE = AC:DF$;

故ニ $AB:AM = AC:AN$;

因リテ MN ハ BC ニ平行ナリ (§ 194);

故ニ $\angle ABC = \angle AMN = \angle DEF$:

因リテ三角形 ABC, DEF ハ等角ニシテ, 相似ナリ.

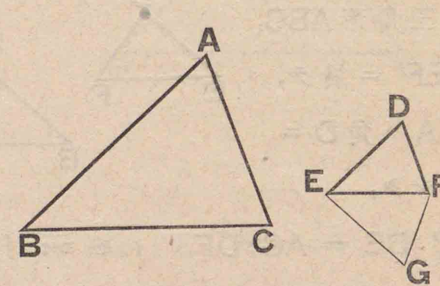
202 定理 二ツノ三角形ハ其ノ對應邊ガ比例ヲ成ス時ハ相似ナリ.

三角形 ABC, DEF ニ於テ,

$BC:EF = CA:FD = AB:DE$

トセヨ:

然ル時ハ三角形ハ相似ナルベシ.



角 ABC ニ等シク角 FEG ヲ作レ (EF ノ角 FED ニ反對ノ側ニ), 又角 ACB ニ等シク角 EFG ヲ作レ (EF ノ角 EFD ニ反對ノ側ニ).

然ル時ハ三角形 ABC, GEF ハ等角ニシテ, 相似ナリ;

因リテ $AB:GE = BC:EF = CA:FG$;

然ルニ $AB:DE = BC:EF = CA:FD$ 〔假設〕;

因リテ $GE = DE$ 及ビ $FG = FD$;

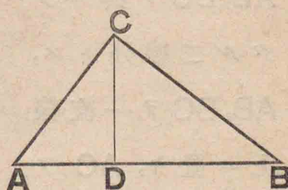
故ニ三角形 GEF, DEF ハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ;

因リテ三角形 ABC, DEF ハ等角ニシテ, 相似ナリ.

203 定理 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ハ之ヲ元ノ三角形ニ, 及ビ互ニ相似ナル二ツノ三角形ニ分ツ.

CD ヲ直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線トセヨ:

然ル時ハ三角形 ABC, ACD, CBD ハ相似ナルベシ.



三角形 ABC, ACD ハ直角三角形ニシテ, 角 A ガ共通ナルヲ以テ, 等角ナリ:

同樣ニ三角形 ABC, CBD モ等角ナリ;

故ニ三ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ.

因リテ　$AB:BC = BC:BD$,

及ビ　$AB:AC = AC:AD$,　即チ

系　直角三角形ノ一邊ハ斜邊ト斜邊ノ上ニ其ノ投スル正射影ノ比例中項ナリ.

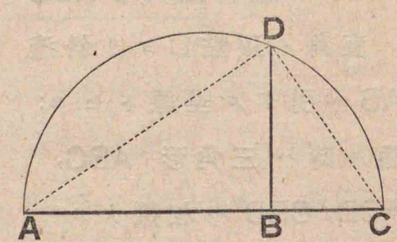
又　$AD:CD = CD:BD$,　即チ

系　垂線ハ斜邊ノ二分ノ比例中項ナリ.

204　作圖題　與ヘラレタル二線分ノ比例中項ヲ作ルコト.

AB, BC ヲ與ヘラレタル二線分トス.

AB, BC ヲ一直線ノ上ニ置キ, AC ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫ケ;



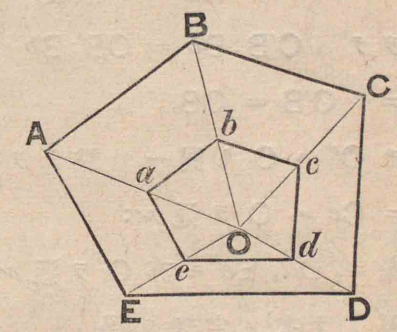
B ヨリ AC ニ垂線ヲ引キ半圓ノ周ト D ニ於テ交ラシメヨ

AD, CD ヲ結ビ付クル時ハ, ADC ハ直角三角形ニシテ (§ 130), DB ハ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘノ

垂線ナリ;

故ニ DB ハ AB, BC ノ比例中項ナリ (§ 203 系).

205　二ツノ相似多角形 ABCDE, *abcde** ヲ其ノ一双ノ對應邊 AB, *ab* ガ平行ナル樣ニ置ケ.



A*a*, B*b* ヲ結ビ付ケ, 之ヲ延長シテ, O ニ於テ出會ハシメヨ.

$\angle ABC = \angle abc$ (假設),

及ビ　$\angle ABO = \angle abO$ (§ 34, 系);

故ニ　$\angle OBC = \angle Obc$;

因リテ　$BC \parallel bc$:

同樣ニ他ノ對應邊モ夫々平行ナリ.

三角形 OAB, O*ab* ハ相似ナリ (§ 200);

因リテ　$AB:ab = OB:Ob$:

*五邊形ヲ取リタレドモ何邊形ニテモ同樣ナリ: 以下之ニ準ズ.

Cc ヲ結ビ付ケ,其ノ延長ガ Bb ト出會フ點ヲ O′ トスル時ハ,三角形 O′BC, O′bc ハ相似ニシテ,

$$O'B : O'b = BC : bc$$

$$= AB : ab \text{（假設）} = OB : Ob;$$

因リテ　$O'B : Bb = OB : Bb$　(§ 186, (庚));

故ニ　$O'B = OB$,

卽チ O′ ハ O ト同一ノ點ナリ;

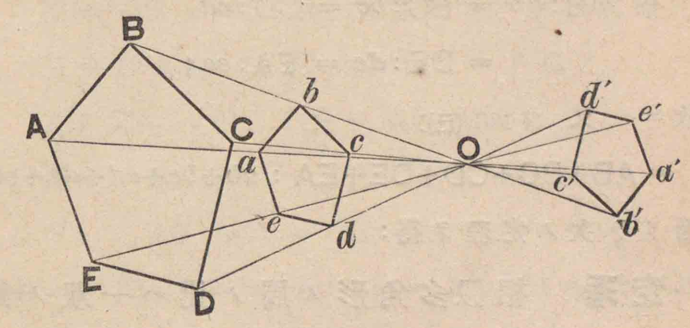
故ニ Cc ハ O ヲ通ル:

同樣ニ, Dd, Ee モ亦 O ヲ通ル.

因リテ次ノ定理ヲ得

定理　二ツノ相似多角形ハ對應邊ガ夫々平行ニシテ,對應スル頂點ヲ結ビ付クル直線ガ一點ヲ通ル樣ニ置クコトヲ得.

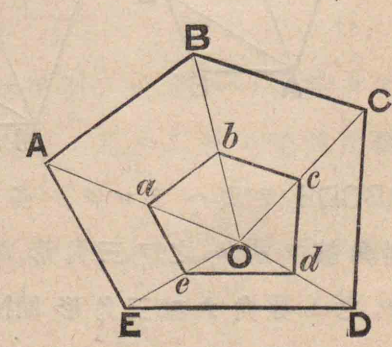
206　前條ノ圖ニ於テ O 點ハ兩形ノ內ニ在リテ,其ノ一ツ *abcde* ハ全ク ABCDE ノ內ニ在レドモ,或ハ本條ノ圖ノ如ク,O點ハ兩形ノ外ニ在リテ, *abcde* ハ全ク或ハ一部分 ABCDE ノ外ニ在ルコトヲ得; 又同圖ノ *a′b′c′d′e′* ノ如キ位置ニ在ルコトヲ得. 前條ノ證明ハ何レノ場合ニモ適應ス.



二形ガ啻ニ相似ナルノミナラズ,合同ナル時ハ, $AB = ab$; 而シテ $AB \parallel ab$ ナル時ハ Aa, Bb ハ平行ナリ (§ 90); 其他 Cc, Dd, Ee モ皆平行ナリ.

207　**定理**　相似多角形ハ同數ノ相似三角形ニ分ツコトヲ得.

相似多角形ハ § 205 ニ依リテ圖ノ如キ位置ニ置クコトヲ得. 然レバ兩形ガ同數ノ相似三角形



ニ分タルルコト明ナリ.

今 $\mathrm{AB}:ab = \mathrm{BC}:bc = \mathrm{CD}:cd$

$= \mathrm{DE}:de = \mathrm{EA}:ea$;

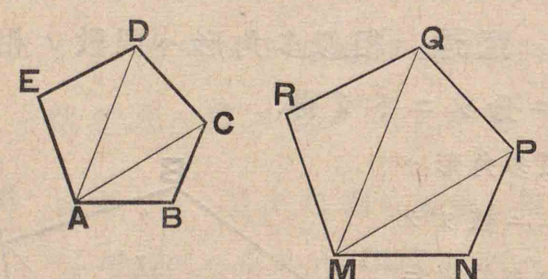
故ニ　又 〔§186 (己)〕

$= \mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EA} : ab+bc+cd+de+ea.$

因リテ次ノ定理ヲ得:

定理　相似多角形ノ周ノ比ハ一双ノ對應邊ノ比ニ等シ.

208　作圖題　與ヘラレタル多角形ニ相似ナル多角形ヲ作ルコト.



ABCDE ヲ與ヘラレタル多角形トス.

對角線ヲ引キ,之ヲ三角形 ABC, ACD, ADE ニ分チ,之ト等角ナル三角形 MNP, MPQ, MQR ヲ

作ル時ハ, MNPQR ガ求ムル所ノ多角形ナリ.

MNPQR ガ ABCDE ト等角ナルコト明白ナリ.

三角形 ABC, MNP ガ等角ナルヲ以テ,

$\mathrm{AB}:\mathrm{MN} = \mathrm{BC}:\mathrm{NP} = \mathrm{AC}:\mathrm{MP}$;

同樣ニ,　$\mathrm{AC}:\mathrm{MP} = \mathrm{CD}:\mathrm{PQ} = \mathrm{AD}:\mathrm{MQ}$;

及ビ　$\mathrm{AD}:\mathrm{MQ} = \mathrm{DE}:\mathrm{QR} = \mathrm{EA}:\mathrm{RM}$;

故ニ　$\mathrm{AB}:\mathrm{MN} = \mathrm{BC}:\mathrm{NP} = \mathrm{CD}:\mathrm{PQ} = \mathrm{DE}:\mathrm{QR}$

$= \mathrm{EA}:\mathrm{RM}$;

因リテ, ABCDE, MNPQR ハ相似ナリ

此作圖ニ於テ,最初三角形 MNP ヲ作ルニ當リテ, MN ハ任意ニ之ヲ取ルコトヲ得,即チ任意ノ線分ガ與ヘラレタル多角形ノ一邊ニ對應スル樣ニスルコトヲ得.

209　演習問題.

(1)　三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一頂點ヨリ對邊ヘノ垂線及ビ其頂點ヲ通ル二邊ノ第四比例項ナリ

(2)　三角形 ABC ノ角 C ノ二等分線ガ對邊 AB ニ D ニ於テ,外接圓ニ P ニ於テ出會フ時ハ,

AC:CP = CD:BC.

(3) 相似三角形ノ外接圓ノ半徑ノ比ハ對應邊ノ比ニ等シ.

(4) 一點ヨリ引ケル三直線ガ二ツノ平行線ト夫々 A, B, C 及ビ P, Q, R ニ於テ交ル時ハ,

AB:BC = PQ:QR.

(5) 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 B ヲ中心トシ,半徑 BC ヲ以テ圓ヲ畫キ, AC ト再ビ D ニ於テ交ラシムル時ハ, BC ハ AC, CD ノ比例中項ナリ.

(6) 二直線 AB, CD 或ハ其ノ延長ガ E ニ於テ交リ, AE:CE = DE:BE キ時ハ, A, B, C, D ヲ通ル圓ヲ畫クコトヲ得.

(7) 三角形 ABC ノ頂點 C ヨリ對邊ヘ垂線 CD ヲ引キ, AD:DC = DC:DB キ時ハ,角 ACB ハ直角ナリ.

(8) AM, DN ハ二ツノ相似三角形 ABC, DEF ノ中線ナリ: ∠AMB = ∠DNE 及ビ AM:DN = AB:DE.

(9) 圓ノ平行ナル二切線ガ A 點ニ於テ切スル第三ノ切線ト P, Q ニ於テ交ル: 圓ノ半徑ハ AP, AQ ノ比例中項ナリ.

(10) CA, CB ハ圓ノ互ニ垂直ナル半徑, DE ハ任意ノ弦ナリ: BD, BE ガ AC ト夫々 F, G ニ於テ交ル時ハ,三角形 BFG, BDE ハ相似ナリ.

(11) 二ツノ二等邊三角形ノ頂角ガ相等シキ時ハ其ノ高サノ比ハ底邊ノ比ニ等シ.

(12) 一定點 A ヲ通リ,二定直線 OX, OY ト P, Q ニ於テ交リ, OP, OQ ガ與ヘラレタル比ヲ有スル直線ヲ引クコト.

(13) 邊ノ數ガ同ジキ二ツノ正多角形ノ周ノ比ハ其ノ外接圓ノ半徑ノ比ニ等シ.

(14) 一定點 A ヲ通リ,二定直線 OX, OY ト P, Q ニ於テ交リ, PA:AQ ガ與ヘラレタル比ニ等シキ直線ヲ引クコト.

(15) 鋭角三角形 ABC ノ頂點 A 及ビ B ヨリ對邊ヘ垂線 AD, BE ヲ引ク時ハ三角形 ABC, DEC ハ相似ナリ

(16) D ガ三角形 ABC ノ邊 BC 上ノ一點ナル時ハ三角形 ABD, ACD ノ外接圓ノ直徑ノ比ハ AB:AC ニ等シ.

(17) 三角形ABCノ外接圓ノ切線ADガBCノ延長トDニ於テ交ル時ハ, ABD及ビACDノ外接圓ノ直徑ノ比ハAD:CDニ等シ.

(18) 外切スル二圓ノ(切點ヲ通ラザル)共通切線ノ二切點ノ間ニ在ル部分ハ二圓ノ直徑ノ比例中項ナリ

(19) Dガ二等邊三角形ABCノ底邊BC或ハ其ノ延長ノ上ノ一點ナル時ハ三角形ABD及ビACDノ外接圓ハ相等シ.

(20) 二圓ノ共通切線ノ各双ノ交點ハ中心線ヲ半徑ノ比ニ內分及ビ外分ス.

(21) ABC, DEFハ相似三角形, P, Qハ邊AB, BC上ノ任意ノ點, X, Yハ夫々邊DE, EFノ上ニ於テP, Qニ對應スル點*ナリ: PQ:XY=AB:DE.

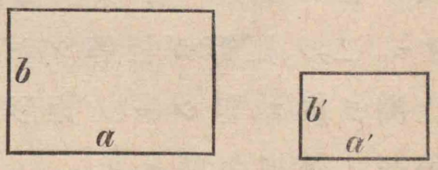
(22) 同ジ底邊BC及ビ同ジ高サノ三角形ABC, DBCノ邊AC, DBガEニ於テ交ル; Eヲ通リBCニ平行ナル直線ガAB, DCト夫々F, Gニ於テ交ル時ハ, EF=EG.

(23) 三角形ノ三角ト周トヲ與ヘテ之ヲ作ルコト.

*卽チ AP:PB=DX:XE 及ビ BQ:QC=EY:YF.

第四節　比例ト面積

210 二ツノ矩形アリ,其ノ底邊及ビ高サガ夫々 aN, bN; $a'N$, $b'N$ ニ等シキ時ハ,其ノ面積ハ abN^2, $a'b'N^2$ ナリ (§165). 卽チ其ノ底邊ノ比ハ a/a', 高サノ比ハ b/b' ニシテ,面積ノ比ハ $ab/a'b'$ ナリ; 故ニ $a=a'$ キ時ハ,面積ノ比ハ b/b' ニ等シ; 又 $b=b'$ キ時ハ,面積ノ比ハ a/a' ニ等シ. 因リテ,



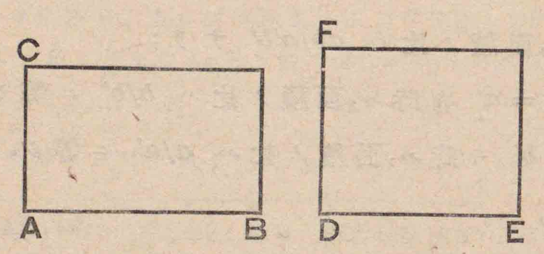
定理 相等シキ高サノ矩形ハ其ノ底邊ニ比例シ,相等シキ底邊ノ矩形ハ其ノ高サニ比例ス.

一般ニ平行四邊形ニ付テモ亦同樣ナリ.

系　相等シキ高サノ三角形ハ其ノ底邊ニ比例シ,相等シキ底邊ノ三角形ハ其ノ高サニ比例ス.

211 定理 四ッノ線分ガ比例ヲ成ス時ハ,外項ノ包ム矩形ハ中項ノ包ム矩形ニ等シ.

逆ニ,二ッノ矩形ガ相等シキ時ハ其ノ四邊ハ比例ヲ成ス,但シ一ッノ矩形ノ邊ガ外項,他ノ矩形ノ邊ガ中項ナリ.



AB, AC, DE, DF ハ四ッノ線分ニシテ,

AB : DE = DF : AC トセヨ:

然ル時ハ矩形 AB·AC ハ矩形 DE·DF ニ等シカルベシ.

$AB = a\mathrm{N}$, $AC = b\mathrm{N}$, $DE = m\mathrm{N}$,

$DF = n\mathrm{N}$ トスル時ハ,

假設ニ依リテ $a/m = n/b$;

故ニ $ab = mn$:

然ルニ 矩形 $AB\cdot AC = ab\mathrm{N}^2$,

矩形 $DE\cdot DF = mn\mathrm{N}^2$;

故ニ $AB\cdot AC = DE\cdot DF$

次ニ,矩形 AB·AC ガ矩形 DE·DF ニ等シトセヨ:

然ル時ハ $AB : DE = DF : AC$ カルベシ.

$AB\cdot AC = DE\cdot DF$ キヲ以テ, $ab = mn$;

故ニ $a/m = n/b$;

然ルニ $AB : DE = a/m$, $DF : AC = n/b$;

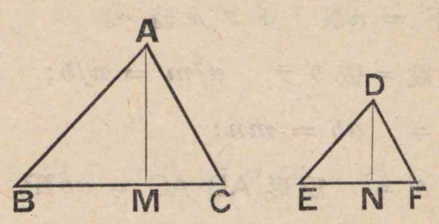
故ニ $AB : DE = DF : AC$.

212 定理 相似三角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シ.

ABC, DEF ヲ相似三角形トセヨ:

然ル時ハ $\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2$ カルベシ.

A, D ヨリ夫々對邊 BC, EF ヘ垂線 AM, DN ヲ引ケ.



直角三角形 ABM, DEN ニ於テ, 角 B ハ角 E ニ等シキヲ以テ, 三角形ハ等角ナリ;

因リテ, $AM:DN = AB:DE = BC:EF$;

今 $BC = a\mathrm{N}$, $AM = b\mathrm{N}$, $EF = a'\mathrm{N}$, $DN = b'\mathrm{N}$ キ時ハ, $\triangle ABC : \triangle DEF = ab/a'b'$ 〔§168, 系〕;

然ルニ $AM:DN = BC:EF$ キヲ以テ,

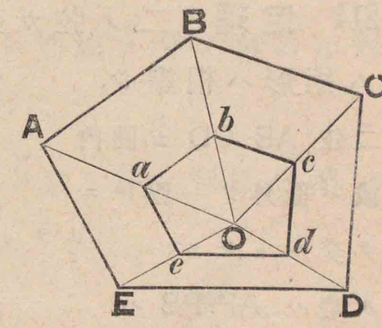
$$b/b' = a/a';$$

故ニ $$ab/a'b' = a/a' \times b/b' = (a/a')^2 = a^2/a'^2$$
$$= BC^2 : EF^2 \text{ 〔§164〕};$$

即チ $\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2$.

213 定理 相似多角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シ.

ABCDE, $abcde$ ヲ相似多角形トセヨ:



然ル時ハ,

$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2$$

カルベシ

相似多角形ハ同數ノ相似三角形ニ分ツコトヲ得〔§207〕, 而シテ相似三角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シキヲ以テ,

$$\triangle OAB : \triangle Oab = AB^2 : ab^2,$$
$$\triangle OBC : \triangle Obc = BC^2 : bc^2 = AB^2 : ab^2,$$
$$\triangle OCD : \triangle Ocd = CD^2 : cd^2 = AB^2 : ab^2,$$

....

因リテ

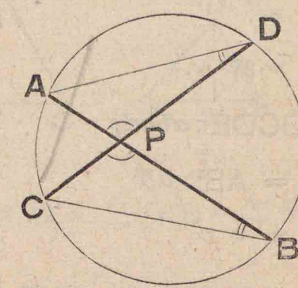
$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \cdots\cdots :$$
$$\triangle Oab + \triangle Obc + \triangle Ocd + \cdots\cdots$$
$$= AB^2 : ab^2 \text{ 〔§186 (己)〕};$$

故ニ $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2$.

214 定理 二ツノ弦ガ交ル時ハ其ノ分ノ包ム矩形ハ相等シ.

二弦 AB, CD ガ圓内ノ或ハ圓外ノ一點 P ニ於テ交ルトセヨ:

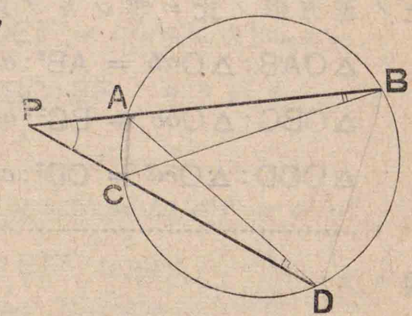
然ル時ハ $AP \cdot PB$ ハ $CP \cdot PD$ ニ等シカルベシ.



AD, BC ヲ結ビ付ケヨ.

二ツノ三角形 APD, CPB ニ於テ,

$\angle PDA = \angle PBC$ (§ 128),



及ビ

$\angle APD = \angle CPB$

(對頂角或ハ同一角ナルヲ以テ);

故ニ三角形 APD, CPB ハ等角ニシテ,

$AP : CP = PD : PB$;

因リテ $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.

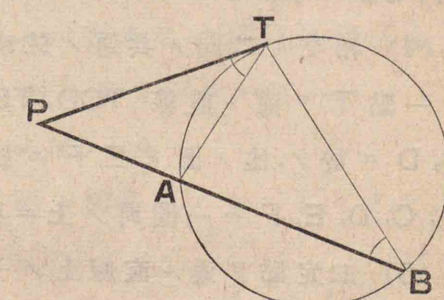
215 定理 切線ガ割線ト出會フ時ハ, 切線ノ上ノ正方形ハ割線ノ分ノ包ム矩形ニ等シ.

切線 PT ガ圓ニ T ニ於テ切シ, 割線 PAB ガ圓ト A, B ニ於テ交ルトセヨ:

然ル時ハ,

$PT^2 = PA \cdot PB$

カルベシ.



TA, TB ヲ結ビ付ケヨ.

三角形 PTA, PTB ニ於テ,

$\angle PTA = \angle PBT$ (§ 147),

及ビ角 P ハ共通ナルヲ以テ, 三角形ハ等角ナリ;

故ニ $PA : PT = PT : PB$;

因リテ $PT^2 = PA \cdot PB$.

216 演習問題.

(1) 三角形 ABC ノ角 BCA ハ三角形 DBC ノ

角 BCD ニ等シ:三角形ノ比ハ AC:CD ニ等シ.

(2) §214 ノ定理ノ逆ヲ證明セヨ.

(3) 三角形 ABC ノ頂點 B, C ヨリ對邊ヘ垂線 BE, CF ヲ引キ H ニ於テ交ラシムル時ハ,

BH·HE = CH·HF, AF·AB = AE·AC, 及ビ BH·BE = BF·BA.

(4) 相交ル二圓ノ共通ノ弦或ハ其ノ延長ノ上ノ一點 T ヲ通リ直線 TCD, TEF ヲ引キ一圓ト C, D ニ於テ,他ノ圓ト E, F ニ於テ交ラシムル時ハ, C, D, E, F ハ一圓周ノ上ニ在リ.

(5) 二定點ヲ通ル直線上ノ一點ヨリ此二點ヲ通ル總テノ圓ヘ引ケル切線ハ皆相等シ.

(6) 直角三角形ノ直角 C ノ二等分線ガ AB ト E ニ於テ交リ,外接圓ト D ニ於テ交ル時ハ矩形 CD·CE ハ三角形 ABC ノ二倍ニ等シ.

(7) 同ジ圓ニ內接スル正方形及ビ正六邊形ノ邊ノ上ニ作リタル正三角形ノ比ヲ求ム.

(8) 三角形 ABC ノ中線 AD, BE ガ G ニ於テ交ル:三角形 AGB ト DGE ノ比ヲ求ム.

(9) 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ガ X ニ於テ交ル時ハ AX·BC = AD·BX 及ビ AX·XC = BX·XD.

(10) 二ツノ相似三角形 AXC, BYD ノ底邊 AC, BD ハ一直線 AD ノ上ニ在リ; AD ト XY ガ O ニ於テ交ル時ハ, OA·OD = OB·OC.

(11) 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ邊 AB, DC ヲ延長シテ Y ニ於テ交ラシムル時ハ,

YA·BD = YD·CA.

(12) 正方形ノ邊ト對角線ノ上ニ畫キタル正三角形ノ比ヲ求ム.

(13) 正六邊形ノ邊ヲ双方ヘ延長シ,其ノ交點ヲ結ビ付ケテ,一ツノ正六邊形ヲ得:二ツノ正六邊形ノ比ハ 1:3 ナリ

(14) 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ヲ引キ之ヲ二等分スルコト.

(15) 與ヘラレタル矩形ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

(16) 與ヘラレタル二點ヲ通リ,與ヘラレタル一

直線ニ切スル圓ヲ畫クコト

(17) 相似三角形ノ比ハ其ノ外接圓或ハ內接圓ノ半徑ノ上ノ正方形ノ比ニ等シ.

(18) §214ニ於テ，矩形AP·PBハ半徑及ビ中心ヲPト結ビ付クル線分ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ.

(19) 三角形ABC, DEFニ於テ角Aガ角Dニ等シキ時ハ三角形ノ比ハ(AC : DF) × (AB : DE)ニ等シ.

(20) 直角三角形ノ斜邊ノ上ニ畫キタル多角形ハ他ノ二邊ノ上ニ(三角形ノ邊ガ各多角形ノ對應邊ナル樣ニ)畫キタル相似多角形ノ和ニ等シ.*

(21) 圓ニ內接セル四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ハ對邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シ.**

(22) 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナル時ハ，對邊ノ包ム矩形ノ和ハ四邊形ノ二倍ナリ.

(23) 相交ル二圓ノ共通弦ハ共通切線ヲ二等分ス.

(24) 與ヘラレタル多角形ニ等シキ正方形ヲ作ルコト

(25) 與ヘラレタル二點ヲ通リ與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クコト.

---

*之レ**ピタゴラス**ノ定理〔§173〕ノ擴張ナリ.

之ヲプトレメウス**(Ptolemaeus)ノ定理ト名ク.

雜問題

I

1 相交ル二直線ノ爲ス四角ヲ二等分スル直線ハ互ニ垂直ナル二ツノ直線ヲ成ス.

2 二角AOB, CODハ同一ノ頂點Oヲ有ス；邊AOハ邊COニ，邊BOハ邊DOニ垂直ナリ：然ル時ハ角AOBハ角CODニ等シキカ或ハ其ノ補角ナリ.

3 二等邊三角形ニ於テハ，

(*a*) 頂角ノ二等分線ハ底邊ノ中點ヲ通リ之ニ垂直ナリ；

(*b*) 頂點ヨリ底邊ヘノ垂線ハ底邊ノ中點ヲ通リ頂角ヲ二等分ス；

(*c*) 頂點ト底邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ底邊ニ垂直ナリ，又頂角ヲ二等分ス；

(*d*) 底邊ノ垂直二等分線ハ頂點ヲ通リ，頂角ヲ二等分ス；

(*e*) 底邊ノ兩端ヨリ夫々對邊ノ中點ヘ引ケ

ル二直線ハ相等シ;

(*f*) 底邊ノ兩端ヨリ夫々對邊ヘ引ケル垂線ハ相等シ.

4 頂點Aナル角ノ一邊上ニ二點B, C有リ, 又他ノ邊上ニ二點D, E有リテ, AB ハ AD ニ等シク, AC ハ AE ニ等シキ時ハ, BE ハ CD ニ等シ.

5 一ツノ四邊形ノ三邊ガ夫々他ノ一ツノ四邊形ノ(同ジ順ニ取リタル)三邊ニ等シク, 又其ノ角モ夫々相等シキ時ハ, 二ツノ四邊形ハ合同ナリ.

6 正三角形ノ各邊ノ上ニ其ノ端ヨリ同ジ距離ニ一ツヅツ三ツノ點ヲ取ル時ハ, 之ヲ結ビ付クル直線ハ正三角形ヲナス.

7 一ツノ角ノ二等分線上ノ一點ヨリ各邊ニ平行ナル直線ヲ引キ他ノ邊ト出會ハシムル時ハ, 此二ツノ線分ハ相等シ.

8 二等邊三角形ABCノ底角B及ビCノ二等分線ガ夫々對邊ニD及Eニ於テ出會フ時ハ, BD ハ CE ニ等シ.

9 四邊形ABCDノ邊AB, AD ハ相等シク; 對角線AC ハ角BADヲ二等分スル時ハ邊CB, CD ハ相等シク, 對角線AC ハ角BCDヲ二等分ス.

10 三角形ABCニ於テ, 角B ハ角Aノ二倍ナリ; 角Bノ

二等分線ガ AC ニ D ニ於テ出會フ時ハ BD ハ AD ニ等シ.

11 四邊形ABCDニ於テ, $AD=BC$, 及ビ對角線AC, BDガ相等シキ時ハ $\angle ADC=\angle BCD$. AC, BDガOニ於テ交ル時ハ, 三角形OCDハ二等邊ナリ.

12 二ツノ平行線ヨリ等距離ナル任意ノ一點ヲ通リ, 二直線AB及ビCDヲ引キ平行線ト夫々A, B; C, Dニ於テ交ラシムル時ハ, $AC=BD$.

13 三角形ABCノ頂點B, CヨリBP, CQヲ夫々BA, CAニ垂直ニ引キ且之ニ等シクシ, P, QヨリBCノ延長ヘ垂線PM, QNヲ引ク: 角B及ビ角Cガ何レモ鋭角ナラバ, $BC = PM+QN$; 何レカ鈍角ナラバ, $BC = PM \sim QN$.

14 三角形ABCノ角Cノ二等分線ガ邊ABトE點ニ於テ出會ヒ, E點ヲ通リBCニ平行線ヲ引キ, ACトFニ於テ, Cニ於ケル外角ノ二等分線トGニ於テ交ラシムル時ハ $EF=FG$.

15 直角三角形ハ二ツノ二等邊三角形ニ分ツコトヲ得.

16 三角形ABCノ角Cガ角A及ビ角Bノ和ニ等シキ時ハ, 邊ABハCヲABノ中點ト結ビ付クル直線ノ二倍ナリ.

17 二等邊三角形ノ頂點ヲ底邊ノ上ノ一點ト結ビ付クル直線ハ相等シキ邊ヨリ小ナリ.

18 三角形ABCノ邊ABノ上ニ(若シACガABヨリ大ナラバ,之ヲ延長シテ)ADヲACニ等シク取リ;又同樣ニ邊ACノ上ニ(或ハ之ヲ延長シテ)AEヲABニ等シク取リ;DEヲ結ビ付ケ,BCトF點ニ於テ交ラシメヨ:然ル時ハAFハ角BACヲ二等分ス.

19 三角形ノ一角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ハ(甲)其角ヲ夾ム各邊ト他ノ二角ノ和ノ半分ニ等シキ角ヲ爲ス;(乙)第三邊ト他ノ二角ノ差ノ半分ニ等シキ角ヲ爲ス.

20 三角形ノ一角ノ二等分線ト其ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線トノ爲ス角ハ他ノ二角ノ差ノ半分ニ等シ.

21 中線ガ之ニ隣ル二邊ト爲ス角ノ中,小ナル邊ト爲ス角ガ大ナル邊ト爲ス角ヨリ大ナリ.

22 三角形ノ一角ノ二等分線ハ其ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ト中線トノ間ニ在リ.

23 二等邊三角形ノ底角ノ二等分線ノ夾ム角ハ底角ニ隣ル外角ニ等シ.

24 三角形ABCノ中線AEヲ延長シテEFヲAEニ等シクシ,中線CGヲ延長シテGHヲCGニ等シクス:FB,HBハ一直線上ニ在リ.

25 正五邊形ノ各ノ角ハ直角ノ何分ナリヤ?

26 n邊ノ正多角形ノ各ノ內角ノ大サヲ求ム.

27 平行四邊形ノ一ッノ對角線ガ角ヲ二等分スル時ハ,其平行四邊形ハ菱形ナリ.

28 平行四邊形ノ相對スル角ノ二等分線ハ平行ナルカ或ハ合同ナリ.

29 A,B,Cハ一直線上ノ三點ニシテ,AB=BC:A,CヨリA,Cノ間ヲ通ラザル一直線ヘ引ケル垂線ノ和ハBヨリ引ケル垂線ノ二倍ナリ.

30 一ッノ四邊形ノ一双ノ相對スル邊ハ平行ナレドモ相等シカラズ;他ノ一双ノ邊ハ相等シケレドモ平行ナラズ:然ル時ハ相對スル角ハ互ニ補角ナリ.

31 四邊形ABCDノ角A及ビBハ相等シキ鈍角ニシテ,ABハCDニ平行ナリ:AD=BC.

32 ABCDハ平行四邊形,E,Fハ夫々AD,BCノ中點ナリ:BE,DFハACヲ三等分ス.

一直線上ノ一點ヨリ其ノ反對ノ側ニ相等シキ距離ニ其直線上ニ在ル二點ハ其點ニ付テ對稱ナリト云フ.一ッノ平面圖形ニ於テ,其ノ各點ニ對シテ,必ズ或ル一定點ニ付テ之ニ對稱ナル點有ル時ハ,此圖形ハ其定點ニ付テ對稱ナリ或ハ點對稱ヲ

有ツト云フ:定點ヲ對稱ノ中心或ハ單ニ中心ト云フ.

一直線ガ一ツノ平面圖形ヲ二ツノ部分ニ分チ,此直線ヲ折リ目トシテ一ツノ部分ヲ折リ返セバ全ク他ノ部分ノ上ニ重リ合フ樣ナル時ハ,其平面圖形ハ其直線ニ付テ對稱ナリ或ハ線對稱ヲ有ツト云フ. 其直線ヲ對稱ノ軸ト稱ス;又其直線ハ圖形ヲ對稱ニ分ツト云フ.

33 平行四邊形ハ其ノ對角線ノ交點ニ付テ點對稱ヲ有ツ.

34 二等邊三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ハ其ノ對稱ノ軸ナリ.

35 四邊形ガ其ノ對角線ノ交點ニ付テ對稱ナル時ハ,其四邊形ハ平行四邊形ナリ.

36 菱形ハ其ノ各ノ對角線ニ付テ對稱ナリ.

37 四邊形ガ其ノ對角線ノ各ニ付テ線對稱ヲ有ツ時ハ,其四邊形ハ菱形ナリ

38 平行四邊形ガ其ノ對角線ノ一ツニ付テ對稱ナル時ハ,其平行四邊形ハ菱形ナリ

39 二等邊三角形ノ底邊ノ上ニ在ル點ノ他ノ二邊ヨリノ距離ノ和ハ一定ノ長サナリ.

點ガ底邊ノ延長ノ上ニ在ル時ハ如何?

40 相等シク且平行ナル線分ハ任意ノ直線ノ上ニ相等シキ正射影ヲ投ズ.

41 凸五邊形ノ邊ヲ延長シテ五ツノ尖點アル星形ヲ得. 尖點ニ於ケル角ノ和ハ二直角ニ等シ.

42 平行四邊形ノ角ノ二等分線ハ一ツノ矩形ヲ成シ,其ノ對角線ハ元ノ平行四邊形ノ邊ニ平行ナリ.

43 正方形ニ付テ問題(6)ト同樣ノ定理ヲ證明セヨ.

44 三角形 ABC ノ頂點 B, C ヨリ A ヲ通ル任意ノ直線ニ垂線 BP, CQ ヲ引キ, M ガ BC ノ中點ナル時ハ MP=MQ

45 一定點ヨリ一定直線ヘ之ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ爲ス直線ヲ引クコト.

46 一邊ハ與ヘラレタル直線ノ上ニ在リテ,他ノ二邊ハ各與ヘラレタル一點ヲ通ル正三角形ヲ作ルコト.

47 二ツノ對角線ヲ與ヘテ菱形ヲ作ルコト.

48 與ヘラレタル角 BAC 內ノ與ヘラレタル點 O ヲ通リ,直線 BOC ヲ BO ガ CO ノ二倍ナル樣ニ引クコト.

49 與ヘラレタル角 BAC 外ノ與ヘラレタル點 O ヨリ直線 OBC ヲ, OB ガ BC ノ二倍ナル樣ニ引クコト.

50 與ヘラレタル一直線ノ反對ノ側ニ在ル與ヘラレタル二點ヨリ其直線上ノ一點ヘ引ケル二直線ガ其直線ト相等シキ角ヲ爲ス樣ニ其點ヲ定ムルコト. 二點ガ同ジ側ニ在ル時ハ如何ニス可キカ?

51 直角ノ半分ニ等シキ角ヲ六ッニ等分スルコト.

52 一點ヲ通ル三ッノ與ヘラレタル直線有リ; 一直線ヲ, 此三ッノ間ニ在ル其ノ二部分ガ相等シキ樣ニ引クコト.

53 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB 上ニ一點 D ヲ之ヨリ AC ヘ引ケル垂線 DE ガ BD ニ等シキ樣ニ定ムルコト.

54 二直線 AB, AC 及ビ AB 上ノ一點 P ガ與ヘラル; P ヲ通リ AC ト Q 點ニ於テ交ル直線ヲ, 角 APQ ガ角 AQP ノ三倍ナル樣ニ引クコト.

55 與ヘラレタル一點ヨリ二ッノ與ヘラレタル平行線ヘ互ニ垂直ニシテ相等シキ二線分ヲ引クコト

56 與ヘラレタル一線分ニ等シク且與ヘラレタル一直線ニ平行ニシテ兩端ガ與ヘラレタル二直線ノ上ニ在ル線分ヲ引クコト

57 斜邊ト他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ直角三角形ヲ作ルコト.

58 斜邊ト他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ直角三角形ヲ作ルコト.

59 與ヘラレタル直線ヲ斜邊トシテ, 一ッノ鋭角ガ他ノ二倍ナル直角三角形ヲ作ルコト. 斜邊ハ短キ邊ノ二倍ナルコトヲ證明セヨ.

60 底邊, 一ッノ底角, 及ビ他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト

61 底邊, 底角ノ差, 及ビ他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ, 三角形ヲ作ルコト.

62 周及ビ角ヲ與ヘテ, 三角形ヲ作ルコト.

63 一邊, 及ビ他ノ二邊ヘノ中線ヲ與ヘテ, 三角形ヲ作ルコト.

64 底邊, 頂角, 及ビ他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ, 三角形ヲ作ルコト.

65 頂角, 其ノ一邊及ビ頂角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ヲ與ヘテ, 三角形ヲ作ルコト.

66 頂角ガ各底角ノ四倍ナル二等邊三角形ヲ與ヘラレタル底邊ノ上ニ作ルコト.

67 正方形ノ內ニ正三角形ヲ, (甲) 一頂點ガ正方形ノ一邊ノ中點ニ在ル樣ニ; (乙) 一頂點ガ正方形ノ一頂點ニ在ル樣

ニ;作ルコト.

68 A, B ハ與ヘラレタル二ツノ平行線上ノ定點ナリ:此二直線上ニ二點 P, Q ヲ APBQ ガ菱形ナル樣ニ定ムルコト.

69 菱形ヲ,其ノ二邊ハ三角形 ABC ノ邊 AB, AC ノ上ニ在リ又一頂點ハ邊 BC ノ上ニ在ル樣ニ作ルコト.〔§89(4)〕

70 菱形 PQRS ヲ,其ノ對角線 PR ハ與ヘラレタル一直線ノ上ニ在リ且邊 PQ, QR, RS ハ夫々定點 L, M, N ヲ通ル樣ニ作ルコト.〔問題(50)ヲ應用スベシ.〕

71 與ヘラレタル二直線ヨリ與ヘラレタル距離ニ在ル點ヲ定ムルコト. 斯ノ如キ點ハ幾個有リヤ?

72 菱形ヲ,其ノ一頂點ハ與ヘラレタル平行四邊形ノ一邊上ノ一定點ニ在リ,他ノ三頂點ハ夫々他ノ三邊ノ上ニ在ル樣ニ作ルコト.

II

1 一定點ヲ通リ,中心ガ一定直線ノ上ニ在ル圓ハ他ノ一定點ヲ通ル.

2 正方形ノ對角線上ノ任意ノ一點ヲ通リ邊ニ平行ナル二直線ト邊トノ交點ハ對角線ノ交點ヲ中心トセル一圓周ノ上ニ在リ.

3 圓ハ其ノ中心ニ付テ對稱ナリ,卽チ圓ノ中心ハ其ノ對稱ノ中心ナリ.

4 圓ハ其ノ直徑ニ付テ對稱ナリ,卽チ圓ノ直徑ハ其ノ對稱ノ軸ナリ.

5 一直線ガ圓ノ對稱ノ軸ナル時ハ其ノ直徑ナリ.

6 二圓ノ交點ヲ通リ一直線ヲ引キ,其ノ端ハ各一ツノ圓周ノ上ニ在リトス:圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ガ此直線ノ上ニ投ズル正射影ハ其ノ半分ニ等シ.

7 一ツノ多角形ノ邊ノ垂直二等分線ガ皆同一ノ點ニ於テ出會フ時ハ,其多角形ノ總テノ頂點ヲ通ル圓ヲ畫クコトヲ得.

8 AB ハ中心 C ナル圓ノ弦ナリ;圓周上ノ一點 D ヨリ之ヘ垂線 DE ヲ引ク時ハ,角 ADE ハ角 BDC ニ等シ.

9 圓ニ內接スル四邊形ノ一双ノ相對スル邊ガ相等シキ時ハ,他ノ一双ハ平行ナリ.

10 與ヘラレタル圓內ノ一定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ハ或ル圓周ナリ.

11 二圓 ABCD, ABEF ノ交點 A, B ヲ通リ任意ノ平行線 DAF, CBE ヲ引キ圓ト夫々 D, F; C, E ニ於テ交ラシムル時ハ, DAF＝CBE.

12 四邊形 ABCD ノ對角線ガ O 點ニ於テ交ル:三角形 OAB, OBC, OCD, ODA ノ外接圓ノ中心ハ一ツノ平行四邊形ノ頂點ニ在リ

13 二ツノ平行ナル弦ノ端ヲ結ビ付クル直線ハ相等シ

14 AB ハ相交ル二圓ノ共通ノ弦ナリ:一圓周上ノ任意ノ一點ヲ通リ二直線 CAD, CBE ヲ引ク時ハ弧 DE ノ大サハ一定ナリ.

15 一圓周上ノ一點 C ヲ通リ二直線 ACB, DCE ヲ引キ圓周ト夫々 A, D ニ於テ出會ハシム:角 ACE ノ二等分線ガ圓周ト交ル點ハ A 及ビ D ヨリ等距離ナリ.

16 圓ノ內接四邊形ノ一外角ノ二等分線及ビ其ノ內對角ノ二等分線ハ圓周ノ上ニ於テ出會フ.

17 相等シキ二圓ノ交點 A, B ノ中 A ヲ通リ一直線 CAB ヲ引キ圓周ト夫々 C, D ニ於テ交ラシムル時ハ CB=DB.

18 圓ニ內接スル三角形ノ外ニ在ル三ツノ弓形ニ於テノ角ノ和ハ四直角ニ等シ.

19 圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形ナラザル可カラズ.

20 ABCD ハ圓ニ內接スル四邊形ニシテ, AB, CD ノ延長ガ P ニ於テ交リ, AD, BC ノ延長ガ Q ニ於テ交ル時ハ, 角

APC 及ビ角 AQC ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ.

21 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ノ中點 D ヲ通リ之ニ垂直ニ EDF ヲ引キ, DE 及ビ DF ヲ DA ニ等シクスル時ハ, CE, CF ハ角 C 及ビ之ニ隣ル外角ヲ二等分ス.

22 三角形 ABC ノ一邊 AB ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, EF ガ其圓ノ BC ニ平行ナル直徑ナル時ハ BE, BF ハ B ニ於ケル內角及ビ外角ヲ二等分ス.

23 三角形 ABC ノ頂點 A, B ヨリ對邊ヘ垂線 AD, BE ヲ引キ, DE ヲ結ビ付クル時ハ, 角 ABE, ADE ハ相等シ.

24 直徑 AB ナル半圓周ノ任意ノ一點 P ヨリ AB ヘ垂線 PM ヲ引キ, AM, BM ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, PA, PB ヲ結ビ付ケ, 半圓周ト Q, R ニ於テ交ラシムル時ハ QR ハ共通ノ切線ナリ.

25 A, B ハ二直線 OA, OB 上ノ點ナリ; A ヨリ OB ヘ垂線 AC ヲ引キ, C ヨリ OA ヘ垂線 CD ヲ引ク; 又 B ヨリ OA ヘ垂線 BE ヲ引キ, E ヨリ OB ヘ垂線 EF ヲ引ク時ハ DF ハ AB ニ平行ナリ

26 菱形ノ二對角線ノ短キモノヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, 其圓ト四邊トノ交點ヲ其對角線ノ端ト筋違ニ結ビ付ケテ得ル所ノ平行四邊形ハ元ノ菱形ト等角ナル菱形ナリ.

27 三角形 ABC ノ頂點 A 及ビ C ヨリ對邊ヘ

引ケル垂線ガ E ニ於テ交リ, BD ガ外接圓ノ直徑ナル時ハ AE ハ CD ニ等シク, AC, ED ハ各他ヲ二等分ス.

28 三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足ハ此垂線ノ延長ガ外接圓ノ周ニ出會フ點ト垂心トノ半途ニ在リ.

29 三角形ノ一ッノ頂點ヨリ其ノ垂心マデノ距離ハ外心ヨリ其頂點ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ノ二倍ナリ.

30 P ハ圓弧 APB ノ上ノ任意ノ點ナリ; AP ヲ延長シ, 其ノ上ニ PQ ヲ PB ニ等シク取ル時ハ, Q ノ軌跡ハ或ル圓弧ナリ.

31 O 點ガ三角形 ABC ノ垂心ナル時ハ, 角 BOC, COA, AOB ハ夫々角 A, B, C ニ等シキカ, 或ハ其ノ補角ナリ.

32 四ッノ點有リ, 各他ノ三ッノ成ス三角形ノ垂心ナリ; 此四ッノ中何レニテモ三ッヲ通ル圓ハ皆相等シ.

33 三角形ノ邊ノ上ニ其ノ外ニ畫キタル正三

角形ニ外接スル三ッノ圓ハ同一ノ點ヲ通ル.

34 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ヘ引ケル垂線 AD ノ足ヨリ他ノ邊ヘ垂線 DE, DF ヲ引ク時ハ, B, E, F, C ヲ通ル一ッノ圓ヲ畫クコトヲ得.

35 邊ノ數ガ偶數ナル直線形ノ邊ガ皆同ジ圓ニ切スル時ハ, 一ッオキニ取リタル邊ノ和ハ相等シ.

36 相切スル二圓ノ平行ナル直徑ノ端ヲ結ビ付クル直線ハ切點ヲ通ル.

37 四邊形ノ對邊ノ和ガ相等シキ時ハ之ニ內接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

38 相等シキ二圓ガ常ニ相切シ, 又夫々直角ニ交ル二ッノ與ヘラレタル直線ノ一ッニ常ニ切スル樣ニ動ク; 二ッノ圓ノ切點ノ軌跡ヲ求ム.

39 AB ハ圓 APQB ノ一定弦ナリ; PQ ハ同ジ圓ノ弦ニシテ, 其ノ長サハ一定セリ: AP, BQ ガ R 點ニ於テ出會フ時ハ, PQ ハ如何ナル位置ニ在ルモ, R ハ常ニ一定圓周ノ上ニ在リ.

40 直角三角形ニ於テ直角ヲ夾ム邊ノ一ッヲ直徑トシテ圓ヲ畫ク時ハ, 此圓ト斜邊トノ交點ニ於

テ之ニ切スル直線ハ他ノ邊ヲ二等分ス.

41 外切スル二定圓ニ外切スル任意ノ圓ノ中心ノ二定圓ノ中心ヨリノ距離ノ差ハ常ニ其ノ半徑ノ差ニ等シ.

42 二等邊三角形ノ內接圓ノ切點ヲ結ビ付ケテ得ル所ノ三角形ハ二等邊ナリ.

43 二等邊三角形ノ各頂點ニ於テ其ノ外接圓ノ切線ヲ引ク時ハ,三切線ハ二等邊三角形ヲナス.

又此二ツノ三角形ガ共ニ正三角形ナルニ非ラザレバ,其ノ頂角ハ相等シカラズ.

44 二等邊三角形ノ二ツノ相等シキ傍接圓ノ半徑ハ其ノ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ニ等シ.

45 底邊及ビ頂角ガ與ヘラレタル三角形ノ內心ノ軌跡ハ二ツノ圓弧ナリ.

46 D, E, F ヲ三角形 ABC ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足トス;三角形 ABC ノ垂心 O ガ其ノ內ニ在ル場合(卽三角形 ABC ガ銳角ナル場合)ニ於テハ O ハ三角形 DEF ノ內心; A, B, C ハ其ノ傍心ナリ. 三角形 ABC ガ鈍角又ハ直角ナル時ハ如何?

47 一ツノ三角形ニ關スル下ノ九ツノ點ヲ通リ一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得:(イ)各邊ノ中點;(ロ)各頂

點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足;(ハ)各頂點ト垂心トノ半途ノ點.

此圓ヲ其三角形ノ九點圓ト稱ス.*

48 三角形ノ外心,垂心,重心,及九點圓ノ中心ハ同一直線ノ上ニ在リテ,九點圓ノ中心ハ外心ト垂心ノ半途ニ在リ.

49 九點圓ノ半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半分ナリ.

50 中心 O ナル一圓周上任意ノ一點 P ヨリ一定直徑ヘ

---

* 九點圓ノ性質ヲ證明スル方法ハ二三有リ;次ニ揭グルモノハ其ノ一ナリ. 圖ハ之ヲ略ス:生徒ハ之ヲ作ル可シ.

ABC ヲ三角形, AX, BY, CZ ヲ A, B, C ヨリ對邊ヘ引ケル垂線, S ヲ垂心トセヨ.

XYZ ノ外接圓ガ AS, BS, CS ト夫々 P, Q, R ニ於テ交ルトセヨ:ZQ ヲ結ビ付ケヨ.

SB ヲ直徑トセル圓ハ X, Z ヲ通ル〔§ 130, 128〕;

∠ZQS=∠ZXY〔§ 128〕=2∠ZXS〔§ 135 ノ (4)〕;

故ニ Q ハ圓 BZSX ノ中心ニシテ, SB ノ中點ナリ:

同樣ニ P, R ハ夫々 SA, SC ノ中點ナリ.

次ニ, XYZ ノ外接圓ガ三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ト夫夫 D, E, F ニ於テ再ビ交ルトセヨ:QD ヲ結ビ付ケヨ.

∠QDB=∠QYX〔§ 133 ノ系〕=∠SCX〔SYCX ハ一圓ニ內接スルヲ以テ〕;

故ニ QD ∥ SC; 而シテ Q ハ SB ノ中點ナルヲ以テ, D ハ BC ノ中點ナリ〔§ 95〕:

同樣ニ, E, F ハ夫々 CA, AB ノ中點ナリ.

垂線 PN ヲ引ク時ハ角 OPN ノ二等分線ハ皆二定點ノ中ノ一ツヲ通ル.

51 三圓ガ A, B, C ニ於テ外切ス: A 點ヲ B, C ト結ビ付ケ, AB, AC ヲ延長シテ圓 BC ト D, E ニ於テ再ビ交ラシムル時ハ, DE ハ其圓ノ直徑ニシテ他ノ二圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ニ平行ナリ.

52 四邊形ノ各邊ヲ直徑トシテ圓ヲ畫ク時ハ, 相隣ル二圓ノ共通ノ弦ハ他ノ二圓ノ共通ノ弦ニ平行ナリ.

53 二ツノ同心圓アリ; 内圓ニ切スル外圓ノ弦

卽チ九點 X, Y, Z, P, Q, R, D, E, F ハ同一圓周ノ上ニ在リ.

此九點圓ノ中心 N ハ其ノ弦 DX, EY ノ垂直二等分線ノ交點ナリ; 外心 O ハ D, E ニ於テ邊 BC, CA ノ垂線ノ交點ナリ; 因リテ, N ハ OS ノ中點ナリ.

G ヲ重心トセヨ: $GA=2GD$;
OG ヲ結ビ付ケ, 之ヲ延長シテ AX ト S′ ニ於テ交ラシメヨ;
GA ノ中點 a ト S′A ノ中點 b ヲ結ビ付クル時ハ, $ab/\!/GS'$:
及ビ $ab=\frac{1}{2}GS'$.
三角形 DOG, Aba ニ於テ, $DG=Aa$, $\angle ODG=\angle aAb$ 〔§ 34〕;
及ビ $\angle OGD=\angle AGS'=\angle Aab$;
故ニ $OG=ab=\frac{1}{2}GS'$.
同樣ニ, OG ガ BY ト S″ ニ於テ交ル時ハ, $OG=\frac{1}{2}GS''$;
故ニ, S′ ト S″ トハ同一ノ點ニシテ AX ト BY ノ交點卽チ垂心ナラザル可カラズ;
故ニ O, G, N, S ハ同一ノ直線ノ上ニ在リ.

N ハ OS ノ中點, Q ハ BS ノ中點ナルヲ以テ, $NQ=\frac{1}{2}OB$;
卽チ九圓點ノ半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半分ナリ.

ハ皆相等シクシテ切點ニ於テ二等分セラル.

54 任意ノ一圓ガ一定圓及ビ一定直線ニ切スル時ハ切點ヲ結ビ付クル直線ハ定圓ノ周上ノ一定點ヲ通ル.

55 圓ニ外接スル四邊形ノ一双ノ對邊ガ圓ノ中心ニ於テ對スル角ノ和ハ二直角ニ等シ.

56 圓外ノ一點ヨリ引ケル二切線ノ夾ム角ハ切點ヲ結ビ付クル弦ト一切點ヲ通ル直徑トノ夾ム角ノ二倍ナリ.

57 圓外ノ一點 T ヨリ二切線 TA, TB 及ビ任意ノ一割線 TCD ヲ引キ, CD ノ中點 V ヲ切點 A, B ト結ビ付クル時ハ, TV ハ角 AVB ヲ二等分ス.

58 一定直線ニ其ノ上ノ一定點ニ於テ切スル一組ノ圓有リ; 定直線ニ平行ナル他ノ一定直線ガ此等ノ圓ト交ル點ニ於テノ切線ハ皆或ル一定ノ圓ニ切ス.

59 CA, CB ハ互ニ垂直ナル一圓ノ二ツノ半徑ナリ; A ヲ CB 上ノ一點 D ト結ビ付ケ, 之ヲ延長シテ圓ト E ニ於テ交ラシメ, E ニ於テノ切線ガ CB ノ延長ト F ニ於テ交ル時ハ, DEF ハ二等邊三角形ナリ.

60 圓ノ直徑 BA ヲ延長シテ AP ヲ半徑ニ等シクシ, P ヨリ切線 PEC ヲ引キ, C ニ於テ圓ニ切シ, A ニ於テノ切線

トEニ於テ交ラシム；BCノ延長ガAEノ延長トDニ於テ交ル時ハ，ECDハ二等邊三角形ナリ．

61 P, Qハ夫々一線分ABノ上ニ其ノ同ジ側ニ在ル二ツノ弓形ノ周上ノ二點ナリ；角PAQ, PBQノ二等分線ガRニ於テ交ル時ハ角ARBハ一定ノ角ナリ

62 前問題ニ於テAP, BPヲ結ビ付ケ，之ヲ延長シテ他ノ弓形ノ周ト夫々C, Dニ於テ交ラシメ，AD, BCノ延長ガSニ於テ交ル時ハ，角ASBハ一定ノ角ナリ

63 一圓ニ內接スル六邊形ノ相隣レル二邊ガ其ノ對邊ニ平行ナル時ハ他ノ二邊モ亦平行ナリ．

64 圓ニ內接スル四邊形ノ一双ノ對邊ト相等シキ角ヲ爲ス一直線ハ他ノ一双トモ相等シキ角ヲ爲ス

65 一ツノ四邊形ガ一圓ニ內接シ一圓ニ外接スル時ハ相對スル切點ヲ結ビ付クル二直線ハ互ニ垂直ナリ．

66 三角形ABCノ頂點A, Bヨリ對邊ヘ直線AP, BQヲ引キ，∠APB=∠AQB=一定角：線分PQハ同ジ底邊AB及ビ相等シキ頂角ノ總テノ三角形ニ於テ同一ノ長サナリ．

67 AOB, CODハ一圓ノ互ニ垂直ナル直徑，弧AC上ノ一點Eヨリ弦EFGヲ引キCODトFニ於テ，圓周トGニ於テ交ラシム：EFガ半徑ニ等シキ時ハ，弧BGハ弧AEノ三倍ナリ

68 內切スル二圓ノ中ノ內圓ニ切スル外圓ノ弦ガ切點ニ於テ分タルル二ツノ分ハ二圓ノ切點ニ於テ相等シキ角ニ對ス．

69 二圓ガP, Qニ於テ交ル：一圓周上ノ一點Aヲ之ト結ビ付ケ，之ヲ延長シテ他ノ圓周ト夫々B, Cニ於テ交ラシムル時ハBCハAヲ通ル直徑ニ垂直ナリ．

70 ABハ半圓ノ直徑，C, Dハ其ノ周上ノ任意ノ二點ナリ：A及ビBヲC及ビDト結ビ付クル四直線ガ新ニE, Fニ於テ交ル時ハEFノ延長ハABニ垂直ナリ

71 A, Pハ中心Cナル圓周上ノ二點ニシテ，Pニ於テノ切線ガCAノ延長トBニ於テ交ル；PDガPヨリCAヘ引ケル垂線ナル時ハ，PAハ角BPDヲ二等分ス．

72 中心O, O′ナル二圓ガ二點P, Qニ於テ交リ，圓Oノ弦QAハ圓O′ニ切ス；P點ヲ通リ任意ノ直線BPCヲ引キ二圓ト夫々B, Cニ於テ交ラシムル時ハCQハABニ平行ナリ．

73 二圓ガP, Qニ於テ交ル；Pニ於テ兩圓ニ切線PA, PBヲ引キ各他ノ圓トA, Bニ於テ交ラシム：PQハ角AQBヲ二等分ス．

74 AOB, CODハ一圓ノ互ニ垂直ナル二直徑ナリ；圓周上ノ任意ノ一點Pニ於テノ切線ガCODノ延長トQニ於テ交リ，AP, BPガCOD或ハ其ノ延長ト夫々R及ビSニ於テ交ル時ハ，RQ=QS

75 三角形ノ内心及ビ傍心ヲ結ビ付クル六直線ハ夫々一頂點ヲ通ル

76 三角形 ABC ノ内接圓ガ邊 BC, CA, AB ニ夫々 P, Q, R ニ於テ切シ, 邊 BC ト他ノ二邊ノ延長ニ切スル傍接圓ノ切點ヲ夫々 X, Y, Z トセヨ: BC+CA+AB = $2s$ トスル時ハ,

(*a*) AY = AZ = s; (*b*) AR+BP+CQ = s;

(*c*) AQ = AR = $s-a$; (*d*) CY = CX = $s-b$;

(*e*) BZ = BX = $s-c$; (*f*) CP = $s-c$ = BX;

(*g*) PX = $b \sim c$.

77 問題75ノ六直線ハ外接圓トノ交點ニテ二等分セラル.

78 三角形 ABC ノ傍接圓ガ夫々邊 BC, CA, AB ニ X, X′, X″ ニ於テ切スル時ハ, AX′ = BX, BX″ = CX′, CX = AX″.

79 直角三角形ノ内接圓ノ直徑ト斜邊ノ和ハ他ノ二ツノ邊ノ和ニ等シ.

80 三角形ノ内接圓ノ切點ヲ結ビ付ケテ得ル所ノ三角形ハ鋭角ナリ

81 外切スル二圓ノ二ツノ共通切線ノ切點ヲ夫々 H, K; L, M トス: 四邊形 HKML ニ内接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

82 三角形ノ二邊ノ位置ト其ノ周ガ與ヘラル時ハ第三邊ハ常ニ一定圓ニ切ス.

83 三角形 ABC ノ邊 BC ニ平行ニ DE ヲ引ク時ハ三角形 ABC, ADE ノ外接圓ハ相切ス.

84 三角形ノ外心ト内心ヲ結ビ付クル直線ガ一頂點ヲ通ル時ハ, 其三角形ハ二等邊ナリ.

85 圓ニ内接スル等邊直線形ハ又等角ナリ.

86 圓ニ内接スル等角直線形ハ必ズ等邊ナリヤ?

87 正多角形ハ, 其ノ邊ノ數ガ偶數ナル時ハ, 對稱ノ中心ヲ有ツ; 若シ邊ノ數ガ奇數ナル時ハ, 對稱ノ中心ナシ

88 n 邊ノ正多角形ハ, n ガ偶數ニテモ, 奇數ニテモ n ノ對稱ノ軸ヲ有ツ.

89 圓ニ内接スル四邊形ノ邊 AD, BC ヲ延長シテ E ニ於テ交ラシムル時ハ三角形 CDE ノ外接圓ノ E ニ於テノ切

線ハ AB ニ平行ナリ.

90 CA, CB ハ互ニ垂直ナル半徑ナリ; B ヨリ任意ノ弦 BP ヲ引キ, CA ト N ニ於テ交ラシム: 三角形 ANP ノ外接圓ハ AB ニ切ス.

91 AB, CD ハ平行ナル線分ナリ; AD, BC ガ E ニ於テ交ル時ハ三角形 ABE, CDE ノ外接圓ハ相切ス.

92 三角形 ABC ノ頂點 A ヲ內心 I ト結ビ付ケ, 之ヲ延長シテ外接圓ト P ニ於テ交ラシムル時ハ PB=PC=PI.

93 圓ニ內接スル四邊形ノ對邊ヲ延長シテ P, Q ニ於テ交ラシメ, 斯ク四邊形ノ外ニ作ラレタル二ツノ三角形ノ外接圓ヲ畫キ, 其ノ第二交點ヲ R トスル時ハ, P, Q, R ハ一直線ノ上ニ在リ.

94 三角形 ABC ノ角 C ノ二等分線ト邊 AB ノ垂直二等分線ト D ニ於テ交ル時ハ ∠ACB+∠ADB=2直角.

95 直徑 AB ナル半圓ノ周上ニ任意ノ二點 C, D アリ; AD, BC ノ交點ヲ E トシ三角形 CDE ノ外接圓ヲ畫ク時ハ半圓ト直角ニ交ル.*

96 三角形 ABC ノ外接圓ノ C ニ於テノ切線ガ AB ト D ニ於テ交ル; 中心 D, 半徑 DC ヲ以テ圓ヲ畫キ AB ト E ニ於テ交ラシムル時ハ, CE ハ角 ACB ヲ二等分ス.

* 二ツノ曲線ノ爲ス角トハ交點ニ於テノ切線ノ夾ム角ナリ.

97 二ツノ三角形ノ底邊及ビ頂角ガ相等シキ時ハ, 其ノ外接圓ノ半徑モ亦相等シ.

98 AB, AC ハ位置ノ定マレル二直線, BC ハ長サノ定マレル一線分ナリ; AB, AC ノ垂直二等分線ガ D ニ於テ交ル時ハ, AD ノ長サハ BC ノ總テノ位置ニ於テ同一ナリ

99 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ一直線ヲ引キ BC ト D ニ於テ, 外接圓ト E ニ於テ, 交ラシムル時ハ, 三角形 BDE ノ外接圓ハ AB ニ切ス

100 A, B ハ圓內ノ二點ナリ: 圓周上ニ一點 P ヲ, PA, PB ノ延長ガ圓周ト H, K ニ於テ交ル時弦 HK ガ最大ナル樣ニ定メヨ.

101 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ D, E, F トシ, 外心ヲ O トスル時ハ OA, OB, OC ハ夫夫 EF, FD, DE ニ垂直ナリ

102 圓ニ外接スル矩形ハ正方形ナラザル可カラズ.

103 三角形ノ垂心ト外接圓ノ周上ノ任意ノ點トヲ結ビ付クル直線ハ三角形ノ其點ニ關シテノしむそん線ニ二等分セラル.

104 外切スル二圓有リ; 其ノ切點ヲ通リ與ヘラレタル長サノ直線ヲ, 兩端ガ各一圓周上ニ在ル樣ニ引クコト

105 相切スル相等シキ二圓周ノ上ニ兩端及二ツノ三等分點ガ有ル直線ヲ引クコト.

106 二圓ノ交點ヲ通リ,各ノ圓周上ニ一ツヅツ端ガ有ル最大ナル直線ヲ引クコト.

107 與ヘラレタル圓周上ノ一點ニ於テ之ニ切線ヲ,先ヅ其ノ中心ヲ見出スコトナクシテ,引クコト

108 相交ラザル二圓周ノ上ニ端ガ有ル最長キ及最短キ直線ヲ引クコト.

109 與ヘラレタル直徑ニ平行ニ,與ヘラレタル長サノ弦ヲ引クコト.

110 與ヘラレタル點ヲ通リ一ツノ直線ヲ二ツノ與ヘラレタル點ヨリ之ヘ引ケル垂線ガ其ノ反對ノ側ニ在リテ相等シキ樣ニ引クコト

111 圓ノ直徑ノ延長ノ上ニ,一點ヲ,其ヨリ引ケル切線ノ長サガ與ヘラレタル線分ニ等シキ樣ニ定メヨ.

112 與ヘラレタル一點ヨリ與ヘラレタル圓ヘ割線ヲ,圓内ニ在ル其ノ部分ガ與ヘラレタル長サニ等シキ樣ニ,引クコト.

113 與ヘラレタル一圓ニ切シ,他ノ與ヘラレタル圓内ニ在ル部分ガ與ヘラレタル長サニ等シキ樣ニ一直線ヲ引クコト.

114 與ヘラレタル二圓ノ割線ヲ各圓内ニ在ル其ノ部分ガ夫々與ヘラレタル長サニ等シキ樣ニ引クコト.

115 圓ヲ二ツノ弓形ニ分チ,一ツノ弓形ニ於テノ角ハ他ニ於テノ角ノ二倍ナル樣ニスルコト.

116 Aハ中心Cナル圓内ノ一點ナリ:圓周上ニ一點Pヲ,CAガ其點ニ於テ最大角ニ對スル樣ニ定ムルコト.

117 頂角,其ノ一邊,及對邊ヘ引ケル垂線ヲ與ヘテ,三角形ヲ作ルコト.

118 底邊,頂角,及ビ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

119 底邊,頂角,及ビ底邊ヘ引ケル中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

120 底邊,頂角,及ビ内接圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

121 底邊,頂角,及ビ頂角ノ二等分線ガ底邊ト交ル點ヲ與ヘテ,三角形ヲ作ルコト.

122 與ヘラレタル點ヲ中心トシ,與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クコト. 通例二ツノ解有ルコトヲ證明セヨ. 唯一ツノ解有ル場合有リヤ?

123 與ヘラレタル點ヲ通リ,與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫クコト.

124 二ツノ與ヘラレタル點ヲ通リ,中心ハ與ヘラレタル直線ノ上ニ在ル圓ヲ畫クコト.

125 與ヘラレタル直線ニ與ヘラレタル點ニ於テ切シ且與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クコト.

126 夫々三ツノ與ヘラレタル點ノ一ツヲ中心トシ,相切スル三ツノ圓ヲ畫クコト.

127 與ヘラレタル一點ヲ通リ,與ヘラレタル直線ニ與ヘラレタル點ニ於テ切スル圓ヲ畫クコト.

128 與ヘラレタル圓ニ切シ,與ヘラレタル一點ヲ通リ且中心ガ此點ヲ通ル與ヘラレタル直線ノ上ニ在ル圓ヲ畫クコト.

129 與ヘラレタル點ヲ中心トシ,與ヘラレタル圓ト其ノ一直徑ノ兩端ニ於テ交ル圓ヲ畫クコト.

130 與ヘラレタル圓及ビ與ヘラレタル直線ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫クコト

131 與ヘラレタル直線ニ與ヘラレタル點ニ於テ切シ,同直線上ノ與ヘラレタル二點ヨリ引ケル切線ガ平行ナル樣ニ圓ヲ畫クコト.

132 與ヘラレタル圓及ビ之ニ切スル二ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫クコト.

133 三角形ノ三邊ヨリ相等シキ弦ヲ截リ取ル一圓ノ中心ヲ求ムルコト

III

1 與ヘラレタル直線ヲ分チタル二ツノ分ノ包ム矩形ハ二ツノ分ガ相等シキ時ニ最大ナリ.

2 與ヘラレタル直線ヲ內分シタル二ツノ分ノ上ノ正方形ノ和ハ二ツノ分ガ相等シキ時ニ最小ナリ.

3 三角形ノ二ツノ邊ノ上ノ正方形ノ差ハ其二ツノ邊ノ出會フ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足ガ之ヲ分ツ二ツノ分ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ.

4 平行四邊形ノ邊ノ上ノ正方形ノ和ハ其ノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

5 四邊形ノ邊ノ上ノ正方形ノ和ハ其ノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ヨリ對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線ノ上ノ正方形ノ四倍ダケ大ナリ.

6 四邊形ノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ對邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナリ.

7 三角形ノ重心ヨリ各頂點ヘ引ケル直線ノ上ノ正方形ノ和ノ三倍ハ三邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

8* 中心 O ナル圓ノ弦 BC ガ A ニ於テ內分或ハ外分サルル時ハ,矩形 $AB \cdot AC = OA^2 \sim OB^2$.

9* 同一ノ點ヲ通ル圓ノ弦或ハ割線ハ皆其點ニ於テ相等シキ矩形ヲ包ム分ニ內分或ハ外分セラル.

10 二直線ガ其ノ交點ニ於テ相等シキ矩形ヲ包ム分ニ內分或ハ外分サルル時ハ,二直線ノ四端ヲ通ル圓ヲ畫クコトヲ得.

11 問題 8 ニ於テ, A ガ圓ノ內ニ在ル時ハ,矩形 $AB \cdot AC$ ハ A ヲ通リ OA ニ垂直ナル弦ノ半分ノ上ノ正方形ニ等シ.

12 問題 8 ニ於テ A ガ圓ノ外ニ在ル時ハ,矩形 $AB \cdot AC$ ハ A ヨリ引ケル切線ノ上ノ正方形ニ等シ. 又逆ニ, A ヨリ圓ヘ引ケル直線 AP ノ上ノ正方形ガ矩形 $AB \cdot AC$ ニ等シキ時ハ, AP ハ切線ナリ.

13 與ヘラレタル周ノ矩形ノ中,正方形ガ最大ナリ

* 問題 8 及ビ之ニ關係有ル諸問題ハ後ニ(§ 214 及ビ諸問題)揭ゲト雖比例ヲ用キズ,本編 § 183 ノ問題 (2) ニ依リテ證明スルヲ得

14 三角形ノ垂心ガ各垂線ヲ分ツ分ノ包ム矩形ハ相等シ.

15 三角形ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル三ツノ直線ガ同一ノ點ヲ通リ,此點ニ於テ相等シキ矩形ヲ包ム分ニ分タルル時ハ,此點ハ垂心ナリ.

16 OA, OB ハ中心 C ナル圓外ノ點 O ヨリ之ヘ引ケル切線ナリ; AB ノ中點 D ヲ通リ弦 PDQ ヲ引ク時ハ, OC ハ角 POQ ヲ二等分ス.

17 前問題ニ於テ, OP ガ圓周ト R ニ於テ交ル時ハ, DA ハ角 PDR ヲ二等分ス.

18 線分 AB ヲ $AP^2 = AB \cdot BP$ キ樣ニ P 點ニ於テ內分或ハ外分スルコト.*

19 與ヘラレタル圓ニ內接スル正十邊形ヲ畫クコト.**

* 斯ク分ツコトヲ英語ニテ Medial section ト云ヒ,又 extreme and mean ratio (或ハ中外比ト譯ス) ニ分ツト云フ.

** O ヲ圓ノ中心, OA ヲ一ツノ半徑トシ, OA ヲ B ニ於テ, $OA \cdot AB = OB^2$ キ樣ニ內分シ,弦 AC ヲ OB ニ等シク取ル時ハ AC ハ正十邊形ノ一邊ナリ. 〔BC, OC ヲ結ビ付ケ,三角形 ABC, OAC ガ何レモ二等邊ナルコトヲ證明ス可シ; 然ル時ハ ∠AOC ハ三角形ノ角ノ五分ノ一ナルコト明ナリ.〕

20* 與ヘラレタル圓ニ內接スル正十五邊形ヲ畫クコト.

21 一ツノ與ヘラレタル直線ヲ,其ノ二ツノ分ノ包ム矩形ガ與ヘラレタル正方形ニ等シキ樣ニ內分及ビ外分スルコト. 與ヘラレタル正方形ノ大サニ如何ナル制限有リヤ?

22 一ツノ與ヘラレタル直線ヲ,其ノ二ツノ分ノ上ノ正方形ノ差ガ與ヘラレタル正方形ニ等シキ樣ニ內分又ハ外分スルコト

23 平行四邊形ヲ與ヘラレタル點ヲ通ル直線ニ依リテ二等分スルコト.

24 與ヘラレタル直線形ニ等シキ矩形ヲ作ルコト.

25 正三角形內ノ一點ヨリ三邊ヘ引ケル垂線ノ和ハ其ノ高サニ等シ.

26 一邊ガ aN ナル正三角形ノ面積ヲ求ム.

27 一邊ガ aN ナル正六邊形ノ面積ヲ求ム

28 一邊ガ aN, 一邊ガ bN ニシテ夾角ガ $60°$ ナル平行四邊形ノ面積ヲ求ム.

29 相等シキ二圓周ノ各ガ他ノ中心ヲ通ル: 半徑ガ aN ナル時ハ,兩圓ニ共通ナル部分ノ面積ハ何程ナリヤ?**

30 一圓ノ同ジ直徑ノ上ニ中心ヲ有シ其ノ半徑ヲ直徑トシタル二圓有リ,大圓ノ半徑ガ aN ナル時ハ二小圓ガ大圓

* 圓周ノ十五分ノ一ハ其ノ六分ノ一ト十分ノ一ノ差ニ等シ.

** 半徑 aN ナル圓ノ面積ハ πa^2N^2 ナリトス〔附錄II〕.

ヨリ截リ取リタル殘リノ面積ハ何程ナリヤ?

31 一圓(半徑 aN)ヨリ(i)內接正三角形,(ii)內接正方形ガ截リ取リタル殘リノ面積ハ何程ナリヤ?

32 一圓周(半徑 aN)ト(i)外接正三角形,(ii)外接正方形トノ間ノ面積ハ何程ナリヤ?

IV

1 三角形 ABC 內ノ點 O ヲ通リ,直線 AO, BO, CO ヲ引キ,對邊ト夫々 X,Y,Z ニ於テ交ラシムル時ハ,三角形 AOB, AOC ノ比ハ BX, CX ノ比ニ等シ.

2 APB ハ直徑 AB, 中心 C ナル半圓; N ハ CB 上ノ任意ノ點ニシテ, AB ヲ T マデ延長シ, $CT:AC=AC:CN$ トス; T ヨリ引ケル切線ガ半圓ニ P ニ於テ切スル時ハ,角 CNP ハ直角ナリ.

3 二ツノ平行線分 AB, A′B′ ガ夫々 C 及 C′ 點ニ於テ同ジ比ニ二ツ共ニ內分サレ或ハ二ツ共ニ外分サルル時ハ, AA′, BB′, CC′ ハ同一ノ點ヲ通ル.

4 直線 DEF ガ三角形ノ邊 BC, CA, AB ト夫々 D, E, F 點ニ於テ交リ, AB 及 AC ト相等シキ角ヲ爲ス: 然ル時ハ $BD:CD=BF:CE$.

5 D ハ三角形 ABC ノ邊 AC 上ノ點, E ハ邊 AB 上ノ點ナリ: BD, CE ガ各他ヲ比 4:1 ニ分ツ時ハ, D, E ハ夫々 CA, BA ヲ比 3:1 ニ分ツ.

6 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ邊 BC ト D ニ於テ交リ, 角 ADB, ADC ノ二等分線ガ邊 AB, AC ト夫々 E, F 點ニ於テ交ル時ハ, 三角形 BEF ト三角形 CEF ノ比ハ BA ト AC ノ比ニ等シ.

7 圓ニ內接スル六邊形ノ相對スル邊ヲ延長シテ交ハラシムル時ハ, 三ツノ交點ハ一直線ノ上ニ在リ.

8 同ジ或ハ合同ナル圓ニ於テ, 中心角及ビ圓周角ハ之ニ對スル弧ニ比例ス. 扇形モ亦同ジ.

9 三角形ノ三邊ノ長サヲ $a\mathrm{N}, b\mathrm{N}, c\mathrm{N}$ トシ, 外接圓ノ半徑ヲ $r\mathrm{N}$ トスル時ハ, 其ノ面積ハ $(abc/4r)\,\mathrm{N}^2$ ナリ.

10 三角形 ABC ノ頂點 A ニ於テノ內角或ハ外角ノ二等分線 AD ガ底邊 BC ト D ニ於テ交ル時ハ,
$AD^2 = AB \cdot AC \sim BD \cdot CD$.

11 三角形ノ外接圓ノ直徑及ビ內接圓ノ半徑ノ包ム矩形ハ內接圓ノ中心ヲ通ル外接圓ノ弦ノ分(內心ニ於テ分タレタル)ノ包ム矩形ニ等シ

12 圓外ノ點ヨリ切線及ビ割線ヲ引キ, 又同點ヨリ切線ニ等シキ長サノ任意ノ直線ヲ引ク時ハ, 此直線ハ其ノ端ヲ割線ト圓トノ二交點ト結ビ付クル二直線ト圓トノ二交點ヲ通ル弦ニ平行ナリ

13 三角形 ABC ノ邊 BC 上ノ一點 D ヨリ夫夫邊 AB, AC ニ平行ニ DE, DF ヲ引キ, AC, AB ト E, F ニ於テ交ラシムル時ハ三角形 AEF ハ三角形 FBD, EDC ノ間ノ比例中項ナリ.

14 一ツノ角ガ相等シキ二ツノ三角形ノ比ハ其角ヲ夾ム邊ノ比ノ相乘比ニ等シ.

15 二ツノ三角形ノ一角ガ相等シク且之ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ガ相等シキ時ハ, 二ツノ三角形ハ相等シ.

16 鋭角三角形 ABC ノ邊 BC ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, 邊 AB ノ上ニ AD ヲ A ヨリノ切線ニ等シク取リ, DE ヲ AB ニ垂直ニ引キ, AC ノ延長ト E ニ於テ交ラシムル時ハ, 三角形 ABC, ADE ハ相等シ.

17 三角形 ABC ノ邊上ニ夫々 D, E, F 點ヲ $BD:DC = CE:EA = AF:FB = 1:2$ キ樣ニ取ル時ハ, 三角形 ABC ト DEF ノ比ハ如何?

18 四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ハ對邊ノ包ム矩形ノ和ヨリ小ナリ*

19 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ邊 BC ト D ニ於テ交ル時ハ, $BA \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2$.

20 三角形ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ比ハ邊ノ比ノ反比ニ等シ.

21 一直線ガ三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ト夫夫 A′, B′, C′ 點ニ於テ交ル時ハ,三ツノ比 $AB':B'C$, $CA':A'B$, $BC':C'A$ ノ相乘比ハ 1 ニ等シ.

22 三角形ノ邊 BC, CA, AB 或ハ其ノ延長ノ上ニ各々一點 A′, B′, C′ 有リ;但シ A′, B′, C′ ノ中,二ツダケ邊ノ上ニ在リテ,一ツハ延長ノ上ニ在ルカ,或ハ皆延長ノ上ニ在リトス:而シテ比 $AB':B'C$, $CA':A'B$, $BC':C'A$ ノ相乘比ガ 1 ニ等シキ時ハ,三點 A′, B′, C′ ハ一直線上ニ在リ.

23 三角形ノ外角ノ二等分線ガ夫々對邊ト交ル三點ハ一直線上ニ在リ.

24 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ノ頂點ト頂點ヲ

*唯四邊形ニ外接スル圓ヲ畫キ得ル場合ニ限リ之ニ等シ.〔§ 216 (21).〕

結ビ付クル直線 AA′, BB′, CC′ ガ一點ヲ通ル時ハ,相對應スル邊ノ交點 P, Q, R ハ一直線上ニ在リ:逆ニ,二ツノ三角形ノ邊ノ交點 P, Q, R ガ一直線上ニ在ル時ハ,相對應スル頂點ヲ結ビ付クル三直線ハ一點ヲ通ル.

25 任意ノ點 O ヲ直線形ノ頂點 A, B, C, … ニ結ビ付ケ, OA, OB, OC, … 上ニ $a, b, c, \ldots$ 點ヲ

$$Oa:OA=Ob:OB=Oc:OC\ldots$$

キ樣ニ取ル時ハ,形 $abc\ldots$ ハ形 ABC… ニ相似ナリ.

26 O ハ定點, P ハ與ヘラレタル圓周上ノ點ナリ: OQ ハ OP ト一定ノ角ヲ爲シ,之ト一定ノ比ヲ有ス: Q 點ノ軌跡ハ一圓周ナリ.

27 A, P, B, Q ガ調和列點ニシテ, M ガ AB ノ中點ナル時ハ, MA ハ MP, MQ ノ比例中項ナリ.

28 A, P, B, Q ガ調和列點ナル時ハ, QA, QP, QB ハ調和級數ヲ爲ス,又 AP, AB, AQ モ調和級數ヲ爲ス.

29 雜問題 III ノ (17) ニ於テ, OP ガ AB ト S ニ於テ交ル時ハ, O, R, S, P ハ調和列點ナリ.

30 圓外ノ一定點 O ヨリ定圓ヘ割線 OPQ ヲ引ク時ハ, P, Q ニ付テ O ノ共軛點ノ軌跡ヲ求ム. O ガ圓ノ內ニ在ル場合ヲ吟味セヨ.

31 三角形ノ底邊上ノ任意ノ一點ヨリ二邊ニ平行線ヲ

引テ得ル所ノ平行四邊形ノ對角線ノ交點ハ或ル定直線ノ上ニ在リ.

32　三角形ABCノ角Bノ二等分線ニ垂直ニADヲ引キ,DヨリBCニ平行ニDEヲ引キ,ACトEニ於テ交ラシムル時ハEハACノ中點ナリ.

33　圓ノ直徑ABニ垂直ナル弦CD上任意ノ一點Eヲ通リAE,BEヲ引キ圓ト夫々F,Gニ於テ交ラシムル時ハ四邊形CFDGノ相隣レル二邊ノ比ハ他ノ二邊ノ比ニ等シ.

34　ABハ圓ノ直徑,Pハ周上ノ一點ナリ;APノ反對ノ側ニ之ト相等シキ角ヲ爲ス直線PC,PDヲ引キ,ABトC,Dニ於テ交ラシムル時ハ,　AC:BC=AD:BD.

35　三角形ABCノ角Aノ二等分線ガBCトDニ於テ交リ,OハBCノ中點ナリ:OD:OB=AB～AC:AB+AC.

36　四邊形ノ二邊ハ平行ニシテ,一ッハ他ノ二倍ナリ:對角線ノ交點ハ其ノ三等分點ナリ.

37　三角形ABCノ邊ACヲ延長シテCD=ACトシ,邊ABニ平行ニ任意ノ一直線ヲ引キ,AC,BCト夫々E,Fニ於テ交ラシメ,EG,FHヲDBニ平行ニ引キ,ABト夫々G,Hニ於テ交ラシムル時ハ,　AG=BH.

38　與ヘラレタル二點A,Bヨリ與ヘラレタル直線CDヘ垂線AC,BDヲ引キ,AD,BCノ交點EヨリCDヘ垂線EFヲ引ク時ハAF,BFハCDト相等シキ角ヲ爲ス.

39　平行四邊形ABCDノ頂點ヨリ對角線ヘ垂線ヲ引キ,夫々E,F,G,Hニ於テ交ラシムル時ハ,EFGHハABCDニ

相似ナル平行四邊形ナリ.

40　一ッノ圓ノ二ッノ平行ナル切線トS,Tニ於テ交ル第三ノ切線アリ;Pガ其ノ切點ナル時ハ矩形SP·PTハ第三切線ノ位置ニ係ラズ,常ニ同ジ大サナリ.

41　角Cガ直角ナル三角形ABCノ頂點A,BヨリABニ垂線ヲ引キ,BC,ACノ延長ト夫々E,Dニ於テ交ラシムル時ハ,三角形ECDハ三角形ABCニ等シ.

42　三角形ABCノ角Bノ二等分線ガA及ビCヲ通リ對邊ニ平行ナル直線ト夫々E,Fニ於テ交ル時ハ三角形CBE,ABFハ相等シ.

43　ABCDハ圓ニ內接スル四邊形ニシテ,角ACB,ADBノ二等分線CE,DEガ對角線BD,ACト夫々F,Gニ於テ交ル時ハ,　EF:EG=ED:EC.

44　三角形ABCノ角Cノ二等分線ガABトDニ於テ交リ,之ヲEマデ延長シ,矩形CD·CEヲ矩形AC·CBニ等シクス:邊ABト角Cガ與ヘラルル時ハEノ位置ハ一定ナリ

45　圓ノ內接正多角形ハ邊ノ數ガ半分ナル內接及ビ外接正多角形ノ間ノ比例中項ナリ

46　二ッノ二等邊三角形ハ其ノ比ガ底邊ノ二乘比ニ等シキ時ハ相似ナリ.

47　正三角形ノ外接圓ノ周上ノ一點ヲ頂點ト結ビ付クル時ハ,其三直線ノ中一ッハ他ノ二ッノ和ニ等シ.

48　二等邊三角形ABCノ底邊BCノ端B,Cヨリ夫々邊AB,ACヘ垂線ヲ引キ,Dニ於テ交ラシムル時ハ,矩形

BC·AD ハ矩形 AB·DB ノ二倍ナリ.

49 夫々圓周上ノ與ヘラレタル二點ヲ通リ,平行ニシテ,互ト與ヘラレタル比ヲ有スル弦ヲ引クコト.

50 一ツノ點ニ於テ出會フ三直線有リ;一直線ヲ,其三直線ガ之ヨリ截リ取ル二部分ガ夫々與ヘラレタル長サニ等シキ樣ニ引クコト.

51 與ヘラレタル直線ノ上ニ與ヘラレタル直線形ニ相似ナル直線形ヲ作ルコト

52 與ヘラレタル一直線形ニ等シク,他ノ與ヘラレタル一直線形ニ相似ナル直線形ヲ作ルコト.

53 三角形內ノ一點ヲ三頂點ト結ビ付ケテ得ル三ツノ三角形ガ相等シキ樣ニ其點ヲ定ムルコト

54 三角形 ABC ノ邊 AB 或ハ其ノ延長ノ上ノ與ヘラレタル點 P ヨリ AC 或ハ其ノ延長ヘ一直線ヲ BC ニ依リテ二等分サルル樣ニ引クコト.

55 線分 AB 上ニ一點 C アリ: AB ノ延長ノ上ニ一點 P ヲ $PA:PB=CA:CB$ キ樣ニ定ムルコト

56 底邊,頂角及ビ二邊ノ包ム矩形ヲ與ヘテ,三角形ヲ作ルコト.

附 錄

1 圓 ノ 周

1 圓ノ弧ハ之ニ對スル弦ヨリ大ナルコトハ公理的トス: 故ニ圓ニ內接スル正多角形ノ周ハ圓周ヨリ小ナリ,而シテ邊ノ數ヲ二倍スレバ,其多角形ノ周ハ元ノ多角形ノ周ヨリ大クシテ,圓ノ周ニ等シキコトニ近シ: 邊ノ數ヲ二倍スル毎ニ周ハ常ニ圓周ニ等シキコトニ近ヅキ,邊ノ數ヲ多クスレバ,其ノ周ト圓周トノ差ヲ何程ニテモ小クスルヲ得; 故ニ內接形ノ邊ノ數ヲ究リ無ク多クシタル時,其ノ周ノ極限ハ外接圓ノ周ナリ.

同樣ニ,一ツノ點ヨリ圓ヘ引ケル二ツノ切線ハ切點ノ間ノ弧ヨリ大ナルコトハ公理的トス: 然レバ圓ニ外接スル正多角形ノ周ハ圓周ヨリ大ナリ,而シテ其ノ邊ノ數ヲ究リ無ク多クシタル時,其ノ周ノ極限ハ圓ノ周ナリ.

2　二ツノ圓ノ周ノ比ハ其ノ半徑ノ比ニ等シ.

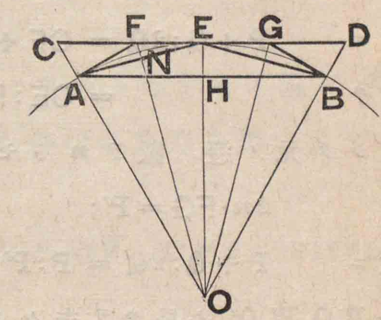
各々ノ圓ニ內接スル n 邊ノ正多角形ヲ作ル時ハ，其ノ周ノ比ハ，n ガ幾ツナルモ，常ニ圓ノ半徑ノ比ニ等シ〔§209 (13)〕. 故ニ n ヲ究リ無ク多クシタル時ノ極限ナル圓周ノ比モ亦此比ニ等シ.

故ニ圓周ト直徑ノ比ハ何レノ圓ニテモ常ニ同一ナリ. 圓周ト直徑ノ此比ヲ **圓周率** ト稱シ，ギリシヤ文字ノ π (パイト誦ム) ヲ以テ之ヲ表ハス. 圓周ト直徑トハ實ニ通約ス可カラザル長サナリ: 故ニ π ノ値ハ嚴正ニ或ル分數或ハ小數ヲ以テ表ハス可カラズト雖モ其ノ近似ノ値ハ種々ノ方法ニ依リテ頗ル精密ニ計算サレタリ. 次ニ其ノ方法ノ一ツヲ揭グ.

3　一ツノ圓ノ內接及外接正多角形ノ周ヲ與ヘ，邊ノ數ガ其ノ二倍ナル內接及外接正多角形ノ周ヲ計算スルコト.

AB ヲ中心 O ナル圓ニ內接スル正多角形ノ一

邊トシ，CD ヲ之ニ外接スル同ジ數ノ邊ノ正多角形ノ一邊ニシテ，弧 AB ノ中點 E ニ於テノ切線ナリトス.



CA, DB ガ中心 O ニ於テ交ルコトハ容易ニ證明スルヲ得.

AE, BE ヲ結ビ付ケヨ; 然ル時ハ，AE ハ邊ノ數ガ二倍ナル內接形ノ一邊ナリ.

切線 AF, BG ヲ引ケ; 然ル時ハ FG ハ邊ノ數ガ二倍ナル外接形ノ一邊ナルコトハ容易ニ證明スルヲ得.

與ヘラレタル外接形及ビ內接形ノ周ヲ夫々 P, Q トシ，邊ノ數ガ二倍ナル外接形及內接形ノ周ヲ P′, Q′ トセヨ.

OC ハ與ヘラレタル外接形ニ外接スル圓ノ半徑ナルヲ以テ，

$$P:Q = OC:OE$$ 〔§209 (13)〕;

今 OF ハ角 COE ヲ二等分スルヲ以テ,

$$OC:OE = CF:FE \quad [§195];$$

故ニ $P:Q = CF:FE;$

故ニ $P+Q:2Q = CF+FE:2FE;$

卽チ $= CE:FG;$

而シテ元ノ邊ノ數ヲ n トセバ, $2n\cdot CE = P,$

又 $2n\cdot FG = P';$

故ニ $P+Q:2Q = P:P';$

今 P, Q, P', Q' ノ長サヲ夫々 $pN, qN, p'N, q'N$ (N ハ長サノ單位) トスル時ハ,

$$pN+qN:2qN = pN:p'N;$$

卽チ $p+q:2q = p:p',$

故ニ $$p' = \frac{2pq}{p+q}. \qquad (i)$$

又三角形 AEH, EFN ハ相似ナルヲ以テ,

$$AH:AE = EN:EF;$$

故ニ $Q:Q' = Q':P';$

卽チ $q:q' = q':p';$

因リテ $$q' = \sqrt{p'q}. \qquad (ii)$$

故ニ p, q ガ與ヘラレタル時ハ, (i) ニ依リテ p' ヲ

計算シ, 夫ヨリ (ii) ニ依リテ q' ヲ計算スルヲ得.

4 直徑ガ長サノ單位ニ等シキ圓ノ周ヲ計算スルコト.

(此圓周ノ長サヲ表ハス數ハ卽チ π ノ値ナリ.)

直徑ガ 1 ナルヲ以テ, 外接正方形ノ周ノ長サハ 4 ナリ;

內接正方形ノ周ノ長サハ $2\sqrt{2}$ 卽チ 2·8284271… ナリ;

故ニ上ノ (i) 及ビ (ii) 式ニ於テ $p=4$, $q=2.8284271$ トスレバ, $p'=3{\cdot}3137085$, $q'=3{\cdot}0614675$ ヲ得;

是レ外接及ビ內接正八邊形ノ周ノ長サナリ;

是レヨリシテ, 續ケテ (i) 及ビ (ii) 式ヲ用キテ, 正十六邊形, 正三十二邊形等ノ周ノ長サヲ計算スルヲ得;

卽チ次ノ表ノ如シ (但シ何レモ近似算ナルハ勿論ナリ):—

邊ノ數	外接正多角形ノ周	內接正多角形ノ周
4	4·0000000	2·8284271
8	3·3137085	3·0614675
16	3·1825979	3·1214452
32	3·1517249	3·1365485
64	3·1441184	3·1403312
128	3·1422236	3·1412773
256	3·1417504	3·1415138
512	3·1416321	3·1415729
1024	3·1416025	3·1415877
2048	3·1415951	3·1415914
4096	3·1415933	3·1415923
8192	3·1415928	3·1415926

而シテ圓周ハ內接正多角形ノ周ヨリ大ニシテ,外接正多角形ノ周ヨリ小ナリ;故ニ直徑ガ1ナル圓ノ周ハ 3·1415926 ヨリ大ニシテ, 3·1415928 ヨリ小ナリ.

故ニπノ値ハ大概 3·1415927 トシテ可ナリ;

尙ホ精密ニ之ヲ計算スレバ,

$$\pi = 3.14159265358979 32\ldots\ldots$$

ヲ得.

5 圓ノ半徑ガ r**N**, 周ガ c**N** ナル時ハ,

$$c = 2\pi r.$$

II 圓ノ面積

附錄 I ニ於ケルト同樣ニ圓ノ內接及ビ外接正多角形ノ面積ノ(邊ノ數ヲ究リ無ク多クシタル時ノ)極限ハ圓ノ面積ナリ.

圓ノ半徑ヲ r**N**, 周ヲ c**N**, 面積ヲ n**M** (**M** ハ面積ノ單位) トシ, 外接正多角形ノ周ヲ p**N**, 面積ヲ m**M** トセヨ.

$$m\mathrm{M} = \tfrac{1}{2}r\mathrm{N}\cdot p\mathrm{N} \quad 卽チ \quad m = \tfrac{1}{2}rp.$$

邊ノ數ハ如何ニ多キモ, m/p ハ常ニ $\frac{1}{2}r$ ニ等シ.

故ニ $\quad n/c = \frac{1}{2}r;$

因リテ $\quad n = \frac{1}{2}cr = \pi r^2.$

圓ノ扇形ノ面積ヲ得ルコト次ノ如シ.

同ジ或ハ合同ナル圓ニ於テハ,中心角ハ之ニ對スル弧ニ比例スルコトハ通約ス可キ場合ニ付テハ §114 及ビ §115 ニ依リテ容易ニ證明スルヲ得可ク,通約ス可カラザル場合ニ於テモ亦 §163 ト同樣ニ何程ニテモ眞ニ近クスルコトヲ得.〔§188 及ビ §189 參照.〕 扇形ニ付テモ亦同樣ニ,其ノ面積ハ其ノ弧及ビ其ノ角ニ比例スルコトヲ證明スルヲ得.〔雜問題 IV (8).〕

故ニ,扇形ノ弧ノ長サヲ $l\mathbf{N}$ トシ,其ノ面積ヲ $s\mathbf{M}$ トスル時ハ,

$$s\mathbf{M} : n\mathbf{M} = l\mathbf{N} : 2\pi r\mathbf{N},$$

即チ
$$s = nl/2\pi r = \pi r^2 l/2\pi r = \tfrac{1}{2}rl.$$

又扇形ノ角ガ θ 度ナル時ハ,

$$s\mathbf{M} : n\mathbf{M} = \theta^\circ : 360^\circ,$$

即チ
$$s = \pi r^2\theta/360.$$

幾何學新教科書

平面

大正四年十月廿九日印刷 同年十一月一日發行
大正四年十二月十七日訂正印刷 同年十二月二十日再版發行
大正五年十月七日訂正印刷 同年十月十日三版發行
大正五年十一月廿七日訂正印刷
大正五年十一月三十日四版發行

定價金六拾六錢 大正十一年度 臨時定價金壹圓貳拾五錢

著作者
菊池大麓
東京市小石川區竹早町百廿四番地

發行兼印刷者
大日本圖書株式會社
東京市京橋區銀座壹丁目廿二番地
代表者 專務取締役 宮川保全

發行所
大日本圖書株式會社
東京市京橋區銀座壹丁目廿二番地
郵便振替 東京二一九番

印刷所株式會社東京築地活版製造所