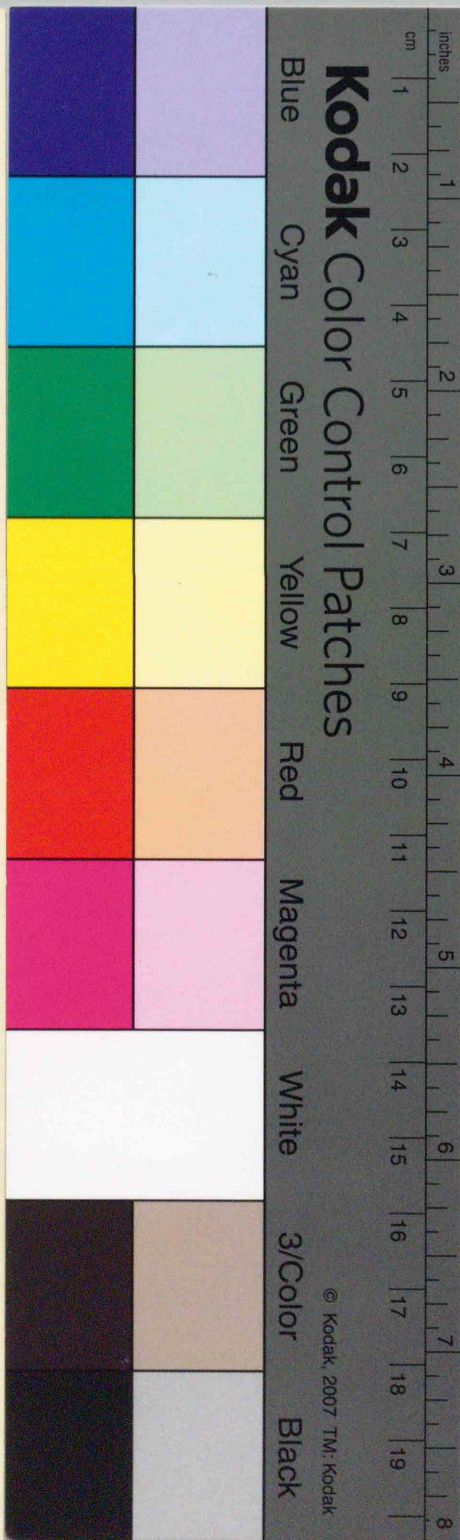


40221

教科書文庫

4
412
51-1911
20000 38041

M44
1911

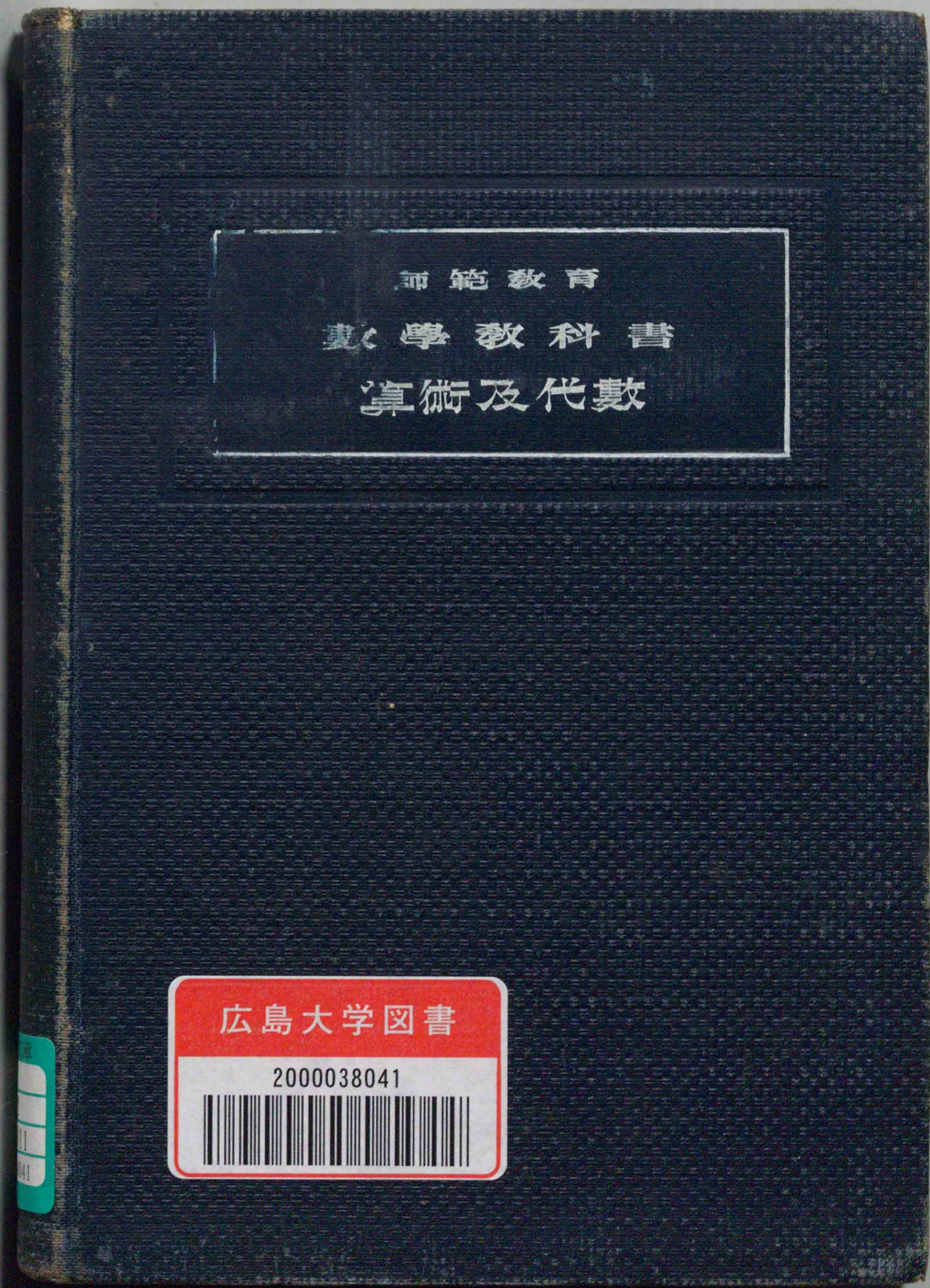


A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Kodak Gray Scale



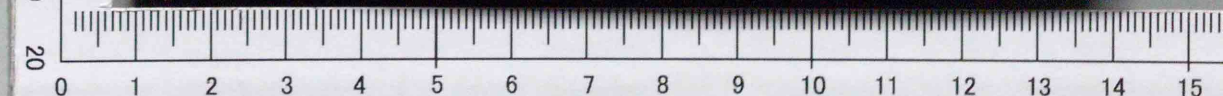
© Kodak, 2007 TM: Kodak



師範教育
 數學教科書
 算術及代數

広島大学図書

2000038041



20.9
Fall

教科書文庫

4

412

51-1911

2000038041

資料室

KAITAICHI

I. TANBA,

文部省檢定濟
明治四十四年二月廿三日 師範學校數學科用

師範教育
數學教科書

[算術及代數]

東京帝國大學理科大学教授
理學博士

高木貞治

編著



開成館藏版

東京



広島大学図書

2000038041



例言

本書は師範學校本科の教科用に充つるを目的として編纂せるものにして、材料の選擇及び排置は概して文部省所定の教授要目に準據したり。

中等教育の數學科に於て算術、代數、幾何、三角法といふが如き分科を立つることを廢止して、此等を相連絡せる一科となすべきことは、編者が年來懷抱せる意見にして、新定の師範學校教授要目によりて其が實際の教授に試験せらるるの機會を得たることは、編者の私に喜ぶ所なり。特に師範學校本科生の如く年齒稍長じ且既に算術に於ける器械的の計算に十分習熟せる生徒に對しては、此方法は最も適切なるべしと信す。

本書の内容は、目次の示す所一目瞭然たるべしと雖も、試に二三の注意を請ふべき點を擧ぐれば次の如し。

(一) 第一篇に於て算術にて學べる四則算法の原理を説くに、整數、分數、小數を一括して一層

復習の目的に適切なるを期し、且兼ねて文字の使用に習熟せしむることを圖れること。

(二) 第五篇に於て特に整数の整除に関する事項のために一章を設けて之を詳説し、小學校に於て此等の事項を教授するに十分なる素養を與へんことを期し、且直に整式の整除に関する事項に連絡し、以て整数の整除と整式の整除とにつきて趣相似たる説明を反復せるの煩を避け、以て其理會を一層確實ならしめんことを圖れること。

(三) 第六篇不定方程式の説明を利用して混合の問題の理論を詳説せること。

(四) 第五篇以下に於ては應用問題中に求積其他幾何學に関する計算を加へたること。

(五) 數及び幾何學上の量の比例に関する事項は統一して教授すべきものなるが故に、比及び比例を説ける第九篇は本書幾何學の部と連絡するやう仕組めること。

(六) 第十二篇に於て歩合、利息、年金に関する事項を一括して詳説し、且年金算の法則の平易

なる説明を試みたること。

數の四則、整数の整除、比例、歩合等從來算術に於て授けたる事項に關して、本書の説明を敷衍し又は應用問題を補足するの必要ある場合には、師範學校豫科、講習科及び同程度の算術科の教科用として嚮に公にせる廣算術教科書を參照せられんことを請ふ。

明治四十三年十月

編者

目 次

第一篇	整數,分數及ビ其四則	[1-52]
第二篇	正數,負數及ビ其四則	[53-81]
第三篇	整式	[82-117]
第一章	定義	82
第二章	整式ノ加法及ビ減法	88
第三章	整式ノ乘法	96
第四章	整式ノ除法	104
第五章	多項式ノ乘法及ビ除法ノ續キ ...	109
第四篇	一次方程式	[118-156]
第一章	一元一次方程式	118
第二章	聯立一次方程式	137
第五篇	倍數,約數,分數式	[157-195]
第一章	整數ノ倍數,約數	157
第二章	整式ノ倍數,約數	177
第三章	分數式	187
第六篇	一次方程式ノ續キ	[196-227]
第七篇	二次方程式	[228-263]

第八篇	冪及ビ冪根	[264-289]
第一章	開法	264
第二章	根數及ビ根式... ..	280
第九篇	比及ビ比例	[290-319]
第一章	數ノ比,比例式	290
第二章	量ノ比,比例スル量	302
第十篇	對數	[320-351]
第一章	一般ノ指數	320
第二章	對數ノ性質	327
第三章	對數ノ應用	335
第十一篇	級數	[352-370]
第一章	等差級數	352
第二章	等比級數	359
第十二篇	歩合及ビ利息	[371-398]
附 録		
第一	問題ノ答	
第二	數ノ對數表	



師範教育
數學教科書
算術及代數

第一篇

整數分數及ビ其四則

1. 物ヲ數フルコト。命數法。

物ノ多キ少キヲ精密ニ表スガタメニ人ノ考ヘ出セルモノヲ數トス。數ヲ言語ニ言ヒ表ス仕方ヲ命數法トイフ。

一組ノ物ハ之ヲ幾組ニモ分ツコトヲ得。此幾組ニモ分ツコトヲ或規則ニ從ヒテ行フコトガ命數法ノ基礎ニシテ,吾人ノ用フル十進ノ命數法ハ,即チ一組ノ物ヲ十ヅツニ分ツコトニ基ツケリ。

今ココニ一組ノ物アルトキ,先ツ之ヲ十ヅツノ集リ若干ト十ニ足ラヌ端下トニ分チ,次ニ此等ノ

十ヅツノ集リヲ更ニ十ヅツマトメテ、百ヅツノ集
 リトシ、又此等ノ百ヅツノ集リヲ更ニ十ヅツマト
 メテ、千ヅツノ集リトシ、千ヅツノ集リヲ更ニ十ヅ
 ツマトメテ一萬ヅツノ集リトナス。カヤウニシ
 テ初ノ一組ノ物ハ一萬、千、百、十ヅツノ集リ、及ビ一
 ツ一ツノ物各、若干ニ分タレ、其數ガ幾萬幾千幾百
 幾十幾ツナルコトヲ知ル。

一萬以上ハ一萬ヲ更ニ一萬ヅツマトメテ一億
 トシ、一億ヲ一萬ヅツマトメテ一兆トシ、サテ兆、億
 萬ガ幾千幾百幾十幾ツアルカラ數フルナリ。

カヤウニシテ數ニ命名スルトキ目當トナル一、
 十、百、千、一萬、十萬、等ヲ位トイフ。各、ノ位ヲ十合ス
 ルトキハ一段高キ位ヲ得。ヨリテ上ノ命數法ヲ
 十進法トイフ。

低キ位ヨリ始メテ、右ヨリ左へ各、ノ位ヲ順次ニ
 書キ竝ブルトキハ、次ノ如シ。

.....兆 千百十一 千百十一 千百十一
 億億億億 萬萬萬萬 千百十一

此等ノ位ハ四ツヅツニテ一段落ヲナシ、各、ノ位
 ヲ十合セテ一段高キ位ヲ作り行ク十進ノ位ノ上

ニ、更ニ、一、萬、億、兆ナル上級ノ位アリテ、此等ハ各、一
 萬ヅツ合セテ次ノ位ヲ作り行クナリ。

サテカヤウニシテ命數法ノ定マリタル上ハ、ス
 ベテノ數ヲ一、二、三、四、.....ト大小ノ順序ニ竝ベテ
 考フルコトヲ得ルガ故ニ、實際ニ物ヲ數フルトキ
 ニハ、豫メ之ヲ十ヅツニ分ツマデモナク、直ニ一ツ、
 二ツ、三ツ、四ツ、.....ト讀ミ行クコトヲ得ルナリ。

上ノ命數法ニ基ヅキ、十個ノ數字(あらびや數字)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

零 一 二 三 四 五 六 七 八 九

ヲ用ヒテ、如何ナル數ヲモ書キ表スヲ得。即チ最
 モ高キ位ヨリ始メテ、順次ニ左ヨリ右へ各、ノ位ガ
 幾ツアルカラ示スベキ數字ヲ竝ベ書キ、或位ノ闕
 ケタル處ニハ0ヲ書ク、即チ位ノ名ヲ表面ニ書キ
 表サズシテ、數字ノ位置ニヨリテ其位ヲ示スナリ

カヤウニシテ、實用上必要ナキガタメニ命數法
 ニテ命名セザリシ程ニ大ナル數ニテモ、ナホ書キ
 表スコトヲ得。例ヘバ1ノ右ニ0ヲ百個モ書キ
 竝ベテ表セル數ハ之ヲ呼ブベキ言葉ハナシ。サ
 レド是ハ或定マレル數ヲ表セリ。

2. 量ヲ計ルコト。

長サニ長短アリ、目方ニ輕重アルガ如ク、スベテ大小ノ度ヲ異ニスルコトヲ得ベキモノヲ量トイフ。面積、容量、溫度、運動ノ速サ、商品ノ價格ナド皆量ナリ。

同ジ種類ノ量ハ之ヲ比較シテ、其大小ヲ定ムルコトヲ得。量ノ大小ヲ精確ニ知ルガタメニハ、之ヲ計ル。

量ヲ計ルコトハ、第一ニ量ノ加ヘ合セ得ベキコトニ基ツク。

例ヘバ絲ノ長サガ三尺ナリトハ、其長サガ一尺ト稱スル定マレル長サヲ三ツダケ加ヘ合セタル長サニ等シキコトヲ示セリ。

一般ニ量ヲ計ルニハ、一定ノ量ヲ單位トシ、計ラントスル量ヲ之ニ比較シ、單位ヲ幾ツ加ヘ合スルトキ、之ト等シキ量ヲ得ルカヲ數フルナリ。カヤ、ウニシテ計ルベキ量ガ單位ヲ幾ツ含メルカヲ表ス數ヲ此量ノ數値トイフ。

是故ニ量ヲ計ルコトハ、畢竟數フルコトニ歸着スベク、量ノ大小ハ數ニテ表サルベシ。

3. 整数及ビ分數。

人數ガ六人ヨリ多シトイヘバ、少クトモ七人ナルベク、又六人ヨリ少シトイヘバ、多クトモ五人ナルベキガ如ク、スベテ物ノ數(個數)ノ増減ハ一個ヨリ小ナルコトヲ得ズ。之ニ反シテ長サ、目方ナドハ如何程少シニテモ増減シ得ベシ、即チ連續シテ増減スルコトヲ得ベシ。例ヘバ六尺ヨリ長キ長サハ必ズシモ七尺ニ達セズ、即チ六尺ヨリ長ク、七尺ヨリハ短キコトアリ得ベシ。

カヤウニ丁度單位ヲ幾ツカ合セタルモノニ等シカラズシテ、單位ヨリモ小ナル端下ヲモ含メル量ノ數値ハ、個數ヲ表スベキ**整数**ノミヲ用ヒテハ精確ニ表スコトヲ得ズ。**分數**ハ此缺點ヲ補ハンガタメニ出デ來レルモノニテ、分數ヲ用ヒテ量ノ數値ヲ表シ得ベキハ、量ノ**等分**シ得ベキコトニ基ツク。

二十人ノ生徒ヲ三組又ハ七組ニ等分スルコトヲ得ズ。是レ人數ニハ分ツベカラザル最小ノ限度(即チ一人)アルニヨル。サレド例ヘバ一尺ノ長サハ之ヲ幾許ニモ等分スルコトヲ得。是レ畢竟

ハ長サガ連續シテ増減シ得ベク、隨テ分ツベカラザル最小ノ限度ナキニヨルナリ。

サテ尺ヲ單位トシテ長サヲ計ルトキ、一尺ニ滿タザル端下アルトキハ、一尺ヲ例ヘバ三ツニ等分セル長サヲ單位トシテ此端下ヲ計ルベシ。此端下ガ丁度一尺ヲ三ツニ等分セル長サヲニツ合セタルモノニ等シキトキハ、其數値ハ $\frac{2}{3}$ (三分ノ二)ニシテ、即チ此端下ノ長サハ $\frac{2}{3}$ 尺ナリト云フ。一般ニ或單位ヲ用ヒテ或量ヲ計ルトキ、其數値ガ $\frac{2}{3}$ ナリトイフハ、此量ガ丁度此單位ヲ三ツニ等分セルモノヲニツ合メリト云フコトナリ。

更ニ進ミテ如何ナル量ヲ如何ナル單位ヲ用ヒテ計レルカトイフコトヲ離レテ、單ニ $\frac{2}{3}$ トハ1ヲ三ツニ等分セルモノヲニツ合セタル數ト考フルコトヲ得。此 $\frac{2}{3}$ ハ即チ分數ナリ。

1ヲ幾ツカニ等分シタル其一ツ、又ハ幾ツカヲ合セタル數ヲ分數トイヒ、1ヲ幾ツニ等分シタルカヲ示ス整数ヲ此分數ノ分母、等分シタル其一分ヲ幾ツ合セタルカヲ示ス整数ヲ分子トイフ。

4. 十進ノ分數(小數)。

1ニ滿タザル端下ヲ含メル數モ亦十進ノ命數法ニヨリテ表スコトヲ得。

整数ノ命數法ニテハ、各ノ位ハ一段低キ位ヲ十倍セルモノ、即チ各ノ位ヲ十分セルモノガ一段低キ位ニテ、最モ低キ位ハ即チ一ナリ。

此一ヲ更ニ十分シテ其一ツヲ分ト名ヅケ、分ヲ十分シテ其一ツヲ厘ト名ヅケ、以下毛絲……ナド皆之ニ倣フ。

例ヘバ七分五厘トハ分ヲ七ツト厘ヲ五ツト合セタル數ナリ。カヤウニシテ表サレタル數ヲ小數トイフ。三十六ト七分五厘ノ如ク整数ト小數トニテ成レル數ヲ帶小數トイフ。

分、厘、毛、……ヲ小數第一位、第二位、第三位……トイフ。分、厘、毛、……ハ即チ十分ノ一、百分ノ一、千分ノ一……ニ外ナラズ。又七分ハ十分ノ七、五厘ハ百分ノ五、七分五厘(即チ75厘)ハ百分ノ七十五ナリ。即チ小數ハ分母ガ10, 100, 1000ナドナル分數ニ外ナラズ。

數字ヲ用ヒテ小數(又ハ帶小數)ヲ書キ表ス仕方

ハ整数ヲ書キ表スト全ク同ジク、即チ最モ高キ位ヨリ始メテ、左ヨリ右へ各、ノ位ノ數ヲ表スベキ數字ヲ竝ベ書キ、或位ノ關ケタル處ニハ0ヲ書クナリ。但一ノ位ノ位置ヲ示スガタメニ、一ノ位ノ數字ノ次ニ小數點・ヲ置キ、例ヘバ 36.75 ナドト書クナリ。小數ノ部分ノミニテ成レル數ハ小數點ノ左ニ0ヲ添ヘテ 0.75 トヤウニ書キ、整数ノ部分ノナキコトヲ示ストキハ、一層明了ナリ。

5. 名數。

5尺, 2.5升, $\frac{2}{3}$ 貫ナドノ如ク、或量ノ單位ト數値トヲ併セ表セルヲ名數トイヒ、此名數トイフ語ニ對シテ 5, 2.5, $\frac{2}{3}$ ナドノ如キタダノ數ヲ不名數トイフコトアリ。サレド名數ニ關スル計算ハ不名數ノ計算ニ歸着スルガ故ニ、數學ニテハ不名數ノミヲ取扱フナリ。本書ニテ向後單ニ數トイフトキニハ、特別ニ其名數ナルコトヲ明言セザル限リ必ズ不名數ヲ指セルモノト知ルベシ。

6. 加法。

幾組カノ物アルトキ、之ヲ合セテ一組トナスコ

トヲ得。サテ初メノ幾組カノ物ノ數ヲ知リテ、之ヲ合セテ作レル一組ノ物ノ數ヲ求ムルコトヲ、此等ノ數ヲ加フ(寄セル)トイヒ、加ヘテ得タル數ヲ此等ノ數ノ和トイフ。例ヘバ7ト5トノ和ハ12ナリ。此事ヲ式ニテ次ノ如ク書ク。

$$7+5=12$$

多クノ數ノ和ヲ求ムルトキ、此等ノ數ノ順序ヲ如何ヤウニシテモヨク、又ハ先ヅ此等ノ數ヲ幾ツカヅツ加ヘテ更ニ其和ヲ加ヘ行キテモヨク、又加フベキ一ツノ數ヲ幾ツカノ數ノ和ニ分チテ、此一ツノ數ノ代リニ此等ノ幾ツカノ數ヲ加ヘテモヨシ。

此原則ハ加フトイフコトノ意味ヨリシテ直ニ知ラルルコトナリ。

7. 加法ノ演算。

例ヘバ7ト5トノ和ヲ求ムルニハ、7ヨリ8, 9, 10, 11, 12, ト五タビ(又ハ5ヨリ6, 7,12ト七タビ)數へ行ケバヨシ。同ジャウニ 725ト 243トノ

和ヲ求ムルニハ、726, 727.....ト 243 タビ數ヘ行ケバヨシ。サレド前節ニ説キタル原則ヲ應用シテ、カヤウナル煩シキ手數ヲ短縮スルコトヲ得。

725 ト 243 トノ和ハ 7 百ト 2 十ト 5 ト、又 2 百ト 4 十ト 3 トノ和ナレバ、先ヅ此等ノ數ヲ一部分ヅツ加ヘ、5 ト 3 トノ和 8、 2 十ト 4 十トノ和 6 十、 7 百ト 2 百トノ和 9 百ヲ求メ、サテ此等ノ數 9 百、 6 十、及ビ 8 ヲ更ニ加ヘ合セテ、求ムル和 968 ヲ得ルナリ。カヤウニシテ、スベテ加法ハ一桁ノ數ヲ加フルコトヲ反復スルニ歸着ス。加法ノ演算ノ法式ハ上ノ考ニ基ヅクモノナリ。

$$\begin{array}{r} 725 \\ 243 \\ \hline 968 \end{array}$$

例 題

1. 七斗二升五合ト二斗六升四合トヲ加フル演算ヲ説明セヨ。

2. 次ノ和ヲ求ムル演算ヲ上ノ如クニシテ説明セヨ。

$$276 + 325, \quad 240.75 + 93.508 + 27.8$$

3. 次ノ問題ハ加法ニヨリテ解キ得ベシ。其理由ヲ説明セヨ。

明治二十六年ニ生マレタル人ガ滿十九歳トナルハ明治何年ナルカ。

8. 減法。

甲乙二ツノ數アルトキ、乙ト如何ナル數トノ和ガ甲ニ等シキカヲ定ムルコトヲ甲ヨリ乙ヲ減ズ(引ク)トイヒ、甲ヲ被減數、乙ヲ減數、求ムル數ヲ差トイフ。即チ減法ハ加法ノ逆ノ計算ニシテ、二ツノ數ノ和ト、此等ノ數ノ中ノ一ツトヲ知リテ、他ノ一ツヲ求ムル計算ナリ。

是故ニ差ト減數トノ和ハ被減數ニ等シク、又被減數ヨリ差ヲ引クトキハ減數ヲ得ベシ。

例ヘバ 12 ハ 7 ト 5 トノ和ニ等シキガ故ニ、12 ヲリ 7 ヲ引クトキハ差 5 ヲ得。12 ヲリ 7 ヲ引キタル差ヲ式ニテ $12 - 7$ ト書ク。即チ

$$12 - 7 = 5$$

多クノ數ノ加法及ビ減法ヲ引續キ行フトキ、計算ノ順序ヲ如何ヤウニシ

テモ、結果ハ同ジコトナリ(但不可能ナル減法ノ出デ來ラヌヤウニスベキコト勿論ナリ)。又加フベキ數幾ツカノ代リニ其和ヲ加ヘ、又ハ引クベキ數幾ツカノ代リニ其和ヲ引キ、又ハ加フベキ數ト引クベキ數トヲ差引シテ、一ツノ數ヲ加ヘ、又ハ引キテモ結果ハ同ジコトナリ。

$$\begin{aligned} \text{例ヘバ } 7+5-3-4+2 &= 7-3+2-4+5 \\ &= (7+5+2)-(3+4) \\ &= 7+(5-3)-(4-2) = \dots\dots \end{aligned}$$

9. 減法ノ演算。

減法ノ演算ハ前節ニ述ベタル原則ニ基ヅク。

例ヘバ

$$\begin{aligned} 968-243 &= (900+60+8)-(200+40+3) \\ &= (900-200)+(60-40)+(8-3) \\ &= 700+20+5 = 725 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 968 \\ 243 \\ \hline 725 \end{array}$$

例題

1. 次ノ差ヲ求ムル演算ヲ説明セヨ。
74.36-51.32, 45-18, 1035-837
2. 八石五斗七升ヨリ五石三斗四升ヲ引ク演算ヲ説明セヨ。
3. 一尺七寸二分ヨリ六寸二分八厘ヲ引ク演算ヲ説明セヨ。

10. 式及ビ文字ノ使用。

一般ニ甲、乙ニツノ數アルトキ、甲ニ乙ヲ加ヘテモ、又ハ乙ニ甲ヲ加ヘテモ結果ハ同ジ。例ヘバ7,5ナル二ツノ數ニツキテ此事實ヲ次ノ如ク式ニ書キ表スコトヲ得。

$$7+5 = 5+7$$

又此事實ハ特ニ7,5トイフ二ツノ數ニツキテノミ然ルニアラズシテ、如何ナル二ツノ數ニツキテモ成リ立ツコトヲ一層適切ニ書キ表スニハ、次ノ如キ式ヲ用フベキナリ。

$$\text{甲} + \text{乙} = \text{乙} + \text{甲}$$

數學ニテハろゝま字 a, b, c 等ヲ用ヒテ數ヲ表ス

ヲ慣例トス。例ヘバ上ノ式ニテ二ツノ數ヲ a, b
ニテ表シ、之ヲ

$$a+b=b+a$$

ト書ク。此 a, b ハ甲、乙トイフニ異ナルコトナシ
カヤウニ通常ノ言語ノ代リニ式ヲ用フルトキ
ハ、一層簡明ニ計算ノ筋道ヲ示スコトヲ得。又文
字ヲ以テ數ヲ表ストキハ、スベテノ數ニ通用スベ
キ法則ヲ適切ニ書キ表スコトヲ得。

式トハ數字又ハ文字ニテ表サレタル數ニ計算
ヲ施スコトヲ記號ヲ用ヒテ書キ表セルモノニシ
テ、數學ニテ用ヒラルル一種ノ言語ナリト謂フベ
シ。

$7+5=12$ ノ如ク二ツノ數ノ相等シキコトヲ表
セルヲ等式トイヒ、等號 $=$ ノ兩側ニアル式ヲ等式
ノ邊(左邊、右邊)トイフ。

計算ニ關スル法則ヲ書キ表シタル等式ヲ特ニ
公式トイフ。例ヘバ

$$(a-b)+b=a$$

ハ、二ツノ數ノ差ト減數トノ和ハ被減數ニ等シト
イフ法則ヲ書キ表セル公式ナリ。

11. 加法及ビ減法ニ關スル法則。

第8節ニ説キタル加法及ビ減法ヲ引キ續キ行
フコトニ關スル法則ハ畢竟次ノ四ツノ定理ニ基
ヅクモノナリ。

(一) 或數ニ引キ續キ二ツノ數ヲ加ヘテモ、又ハ
此等ノ數ノ和ヲ加ヘテモ、結果ハ同ジ。

(二) 或數ニ二ツノ數ノ中大ナル方ヲ加ヘテ後
小ナル方ヲ引キテモ、又ハ此等ノ數ノ差ヲ加ヘテ
モ、結果ハ同ジ。

(三) 或數ヨリ引キ續キ二ツノ數ヲ引キテモ、又
ハ此等ノ數ノ和ヲ引キテモ、結果ハ同ジ。

(四) 或數ヨリ二ツノ數ノ中ノ大ナル方ヲ引キ
テ後、小ナル方ヲ加ヘテモ、又ハ此等ノ數ノ差ヲ引
キテモ、結果ハ同ジ。

此等ノ法則ヲ式ニ書キ表ストキハ次ノ如シ。

$$a+(b+c)=a+b+c \quad (1)$$

$$a+(b-c)=a+b-c \quad (2)$$

$$a-(b+c)=a-b-c \quad (3)$$

$$a-(b-c)=a-b+c \quad (4)$$

(1), (2)ノ法則ヲ應用シテ次ノ如キ公式ヲ得。

$$a+(b-c+d-e) = a+b-c+d-e \quad (5)$$

之ヲ證明スルコト次ノ如シ。

左邊ニテ a ニ加フベキ數 $b-c+d-e$ ハ $b-c+d$ 及ビ e ナルニツノ數ノ差ナリ。故ニ公式(2)ヲ應用シテ $a+(b-c+d-e)$ ハ

$$a+(b-c+d)-e$$

ニ等シキコトヲ知ル。又此式ニテ a ニ加フベキ數 $b-c+d$ ハ $b-c$ ト d トノ和ナレバ、公式(1)ニヨリテ此式ハ

$$a+(b-c)+d-e$$

ニ等シキコトヲ知ル。サテ再ビ公式(2)ヲ應用シテ、此式ガ

$$a+b-c+d-e$$

ニ等シキコトヲ知ル。故ニ(5)ノ左邊ノ數ハ右邊ノ數ニ等シキナリ。

又(3)(4)ヲ應用シテ次ノ如キ公式ヲ得。

$$a-(b-c+d-e) = a-b+c-d+e \quad (6)$$

(上文(5)ノ證明ニ倣ヒテ此公式ヲ證明セヨ)。

例題

被減數及ビ減數ノ雙方ニ同ジ數ヲ加へ、又ハ雙方ヨリ同ジ數ヲ引キテモ、差ハ變ラズ。此法則ヲ式ニ書キ表シ、且之ヲ證明セヨ。

12. 倍スルコト。

或數 A ヲ n 倍スルコト、即チ A ヲ n 個加へ合スルコトヲ、 A ニ n ヲ掛ケル(乘ズ)トイフ。加へ合セラルル數 A ヲ被乘數、加へ合スル個數 n ヲ乘數、加へ合セテ得タル和 $A+A+\dots+A$ ヲ積トイヒ、此積ヲ式ニテ表スニハ

$$A \times n$$

ト書ク。

或數ニ1ヲ掛ケルトハ、其數ヲ唯一ツ探ルコト、即チ其ママニ置クコトヲイフ。

掛ケ算ニ關スル法則ハ、寄セ算ノ法則ヨリ導キ出スコトヲ得。次ニ掲グルハ、就中最モ重要ナルモノナリ。

多クノ數ノ和ニ或整数ヲ掛ケテモ、又ハ此等ノ數ニ一ツ一ツ同ジ乘數ヲ

掛ケタル積ヲ加ヘ合セテモ、結果ハ同ジ。

例ヘバ

$$\begin{aligned}(A+B) \times 3 &= (A+B) + (A+B) + (A+B) \\ &= (A+A+A) + (B+B+B) \\ &= (A \times 3) + (B \times 3) * \end{aligned}$$

一般ニ

$$(A+B+C+\dots) \times n = A \times n + B \times n + C \times n + \dots \quad (1)$$

同ジヤウニ、二ツノ數ノ差ニ或數ヲ掛ケテモ、又ハ此等ノ數ニ一ツ一ツ此乘數ヲ掛ケタル積ノ差ヲ作リテモ、結果ハ同ジコトナリ。即チ

$$(A-B) \times n = A \times n - B \times n$$

和ト差トヲ雜ヘタル場合モ亦同ジ。例ヘバ

$$(A+B-C) \times n = A \times n + B \times n - C \times n$$

特ニ A ナル數 m 個ノ和ノ n 倍ハ A ノ n 倍ヲ m 個

* カヤウノ場合ニハ括弧ヲ略シテ單ニ $A \times 3 + B \times 3$ ト書クヲ常トス。スベテ式ニ表サレタル計算ハ左ヨリ右ヘ順次ニ行クヲ法トスレドモ、掛ケ算ト割リ算トハ加法及ビ減法ニ先ダチテ行フコトト定ム。故ニ A ノ 3 倍ニ B チ加ヘテ、其和ヲ 3 倍スルコトヲ示ストキニハ、括弧ヲ用ヒテ $(A \times 3 + B) \times 3$ ト書クナリ。

加ヘ合セタル和ニ等シ。

$$(A+A+\dots+A) \times n = A \times n + A \times n + \dots + A \times n$$

即チ

$$A \times m \times n = A \times n \times m \quad (2)$$

或數ニ引續キ二ツノ整數ヲ掛ケルトキ、其順序ヲ變ヘテモ、結果ハ同ジ。

又或數 A ノ p 倍、 q 倍、 r 倍ノ和ハ A ヲ $p+q+r$ 個加ヘ合セタル和、即チ A ノ $p+q+r$ 倍ニ等シ。

即チ

$$A \times p + A \times q + A \times r = A \times (p+q+r) \quad (3)$$

特ニ A ノ m 倍ノ n 倍ハ A ノ m 倍ヲ n 個加ヘ合セタル和ニシテ、是ハ A ノ $m \times n$ 倍ニ等シ。

$$A \times m + A \times m + \dots = A \times (m+m+\dots)$$

即チ

$$A \times m \times n = A \times (m \times n) \quad (4)$$

乘數ガ二ツヨリ多キ場合モ亦同ジ。例ヘバ

$$A \times m \times n \times p = A \times (m \times n \times p)$$

或數 A ニ引續キ多クノ整數ヲ掛ケテモ、又ハ此等ノ整數ノ積ヲ A ニ掛ケ

テモ結果ハ同ジ。

13. 乗法ノ演算。

乗數ガ整数ナルトキノ乗法ノ演算ハ前節ノ法則ニ基ヅク。

(一) 乗數ガ一桁ノ整数ナルトキ。

例ヘバ

$$\begin{aligned} 465 \times 3 &= (400 + 60 + 5) \times 3 && \begin{array}{r} 465 \\ 3 \\ \hline 1395 \end{array} \\ &= 400 \times 3 + 60 \times 3 + 5 \times 3 \\ &= 1200 + 180 + 15 = 1395 \end{aligned}$$

是ハ 465 ヲ三個加ヘ合スル寄セ算ヲ短縮セルマデニテ、前節ノ公式(1)ノ應用ナリ。但 400 ノ 3 倍ガ 1200 ナリトイフコトハ、實ハ 100 ノ 4 倍ノ 3 倍ガ 100 ノ 4×3 倍、即チ 12 倍ナリトイフコトニテ是ハ前節(4)ニ基ヅクコトナリ。

加法ノ演算ニテ例ヘバ 7 百ト 2 百トノ和ガ 9 百ナリトイフモ、實ハ前節(3)ニ基ヅクコトニテ、即チ百ノ 7 倍ト 2 倍トノ和ガ百ノ (7+2) 倍、即チ百ノ 9 倍、9 百ニ等シキナリ。

(二) 乗數ガ 30,500 ノ如キ數ナルトキ。

例ヘバ

$$\begin{aligned} 465 \times 30 &= 465 \times (10 \times 3) && \begin{array}{r} 465 \\ 30 \\ \hline 13950 \end{array} \\ &= 465 \times 10 \times 3 = 465 \times 3 \times 10 \\ &= 1395 \times 10 = 13950 \end{aligned}$$

ココニハ前節ノ(4)及ビ(2)ガ應用セラレタリ。カヤウニシテ 30,500 ノ如キ數ヲ乘ズルコトハ、一桁ノ整数ヲ乘ズルコト、及ビ 10,100 ノ如キ數ヲ乘ズルコトニ歸着ス。

サテ或數ニ 10,100,.....ヲ乘ズルニハ、此數ノ一ノ位ヲ一桁、二桁、.....右ノ方ヘ移セバヨシトイフ規則モ、實ハ前節ノ法則ニ基ヅクコトナリ。

例ヘバ

$$\begin{aligned} 645 \times 10 &= (600 + 40 + 5) \times 10 \\ &= 600 \times 10 + 40 \times 10 + 5 \times 10 \\ &= 6000 + 400 + 50 = 6450 \end{aligned}$$

ココニ 6 百ノ 10 倍ガ 6 千ニ等シトイフ處ニ、前節ノ(2)ガ應用セラレタルコトニ注意スベシ。6 百トハ百ノ 6 倍ナレバ、6 百ノ 10 倍ハ百ノ 6 倍ノ 10 倍ニテ是ハ百ノ 10 倍ノ 6 倍、即チ千ノ 6 倍、6 千ニ等シキナリ。

(三) 乗數ガ随意ノ整数ナルトキ。

例ヘバ

$$\begin{aligned} 3057 \times 285 &= 3057 \times (200 + 80 + 5) \\ &= 3057 \times 200 + 3057 \times 80 + 3057 \times 5 \\ &= 611400 + 244560 + 15285 \\ &= 871245 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3057 \\ 285 \\ \hline 15285 \\ 24456 \\ 6114 \\ \hline 871245 \end{array}$$

カヤウニシテ、スベテノ場合ニ於テ乘法ノ演算ハ、畢竟一桁ノ整数ニ一桁ノ整数ヲ掛ケルコトヲ反復スルニ歸着ス。一桁ノ整数ノ積ハ加法ニヨリテ直接ニ之ヲ求ムルコトヲ要ス。此手續ハ乘法九九ヲ記憶シテ之ヲ避クルコトヲ得ルナリ。

例題

1. 0.006ノ十倍ハ0.06ニ等シトイフコトハ第12節ノ公式(2)ニ基ツクコトナリ。之ヲ説明セヨ。
2. $0.645 \times 10 = 6.45$ ヲ説明セヨ。

3. 4.65×3 ヲ求ムル演算ヲ第12節ノ法則ニヨリテ説明セヨ。

4. 40×300 ヲ求ムル演算ヲ説明セヨ。

14. 整数ノ積。

第12節ノ公式(2)ヲ被乗數ガ1ナル場合ニ適用スルトキハ

$$(1 \times m) \times n = (1 \times n) \times m$$

即チ $m \times n = n \times m$ (1)

ヲ得。即チ

二ツノ整数ノ乘法ニテ被乗數ト乗數トヲ交換シテモ積ハ變ラズ。

掛ケ算ノ意味ヲ離レテ、唯其結果ノミヲ考フルトキニハ、被乗數ト乗數トヲ區別スル必要ナキナリ。是故ニ被乗數及ビ乗數ヲ共ニ因數トイフ。

因數ガ二ツヨリ多キトキ、即チ例ヘバ $a \times b \times c \times d$ ノ如キ累乘積ハ、本來ハ $a = b$ ヲ掛ケ、次ニ其積ニ c ヲ掛ケ、其積ニ更ニ d ヲ掛ケタル積ヲ表スモノナリ。サレド實際ハ因數ノ順序ヲ如何ヤウニシテモ、最後ノ結果ニハ變リナシ。此事モ亦第12節

ノ法則ニ基ヅクモノナリ。

先ヅ累乗積ニテ、相竝ベルニツノ因數ヲ交換シテモ積ニハ影響ナシ。例ヘバ $a \times b$ ハ $b \times a$ ニ等シキニヨリ、 $a \times b \times c$ ハ $b \times a \times c$ ニ等シ。即チ $a \times b \times c$ ナル累乗積ノ初メノニツノ因數ヲ交換シテモ積ハ變ラズ。

又例ヘバ $a \times b \times c \times d \times e$ ニテ第三ノ因數 c ト第四ノ因數 d トヲ交換シテモ積ハ變ラザルコトヲ説明センニ、 $a \times b \times c \times d \times e$ ハ $a \times b$ ナル數ニ引續キ c, d ヲ掛ケ、更ニ e ヲ掛ケタル積ナリ。サテ第12節(2)ニヨリ、引續キ c, d ヲ掛ケルモ、又ハ引續キ d, c ヲ掛ケルモ、結果ハ同ジコトナリ。故ニ $a \times b \times c \times d \times e$ ハ $a \times b \times d \times c \times e$ ニ等シキナリ。

カヤウニ累乗積ニテ相竝ベルニツノ因數ヲ交換シテモヨキニヨリ、又隨意ノ因數ヲ隨意ノ位置ニ移シテモヨシ。例ヘバ $a \times b \times c \times d \times e$ ニテ第四ノ因數 d ヲ第二ノ位置ニ移シテ $a \times d \times b \times c \times e$ トシテモヨキコトヲ説明センニ、先ヅ第四ノ因數 d ヲ之ト竝ベル第三ノ因數 c ト交換シテ $a \times b \times d \times c \times e$ ヲ得。此累乗積ニテ第三ノ位置ヲ占メタル d ヲ

第二ノ因數 b ト交換シテ $a \times d \times b \times c \times e$ ヲ得。カヤウニシテ丁度因數 d ヲ第二ノ位置ニ移スコトヲ得タリ。

サテ隨意ノ因數ヲ隨意ノ位置ニ移スコトヲ幾度モ適當ニ應用スルトキハ、スベテノ因數ヲ隨意ノ順序ニ竝べ換フルコトヲ得。例ヘバ

$$a \times b \times c \times d \times e = d \times c \times e \times b \times a$$

ナルコトヲ證明センニ、先ヅ $a \times b \times c \times d \times e$ ニテ因數 d ヲ第一ノ位置ニ移シテ $d \times a \times b \times c \times e$ ヲ得。次ニ此積ニテ因數 c ヲ第二ノ位置ニ移シテ $d \times c \times a \times b \times e$ 、次ニ e ヲ第三ノ位置ニ移シテ $d \times c \times e \times a \times b$ 、次ニ又 b ヲ第四ノ位置ニ移シテ竟ニ $d \times c \times e \times b \times a$ ニ達ス。即チ $a \times b \times c \times d \times e$ ハ $d \times c \times e \times b \times a$ ニ等シキコトヲ知り得タリ。

第12節(4)ニヨルトキハ累乗積ニテ相竝ベル幾ツカノ因數ヲ引續キ掛ケル代リニ、此等ノ因數ノ積ヲ掛ケテモヨシ。サテ因數ノ順序ヲ如何ヤウニ變ヘテモヨキガ故ニ、相竝バザル幾ツカノ因數ヲ一ツノ因數ニマツメテモヨシ。ヨリテ次ノ法則ヲ得。

整數ノ累乗積ヲ計算スルトキ、因數ノ順序ヲ如何ヤウニシテモヨク、又因數ヲ幾ツカツツ掛ケ合セテ、更ニ其結果ヲ掛ケ合セテモヨシ。又幾ツカノ因數ヲ一ツニマトムル代リニ、却テ一ツノ因數ヲ幾ツカノ因數ニ分ケテモヨシ。

例題

1. 果實ヲ a 個ツツ b 人ノ兒童ニ與フルニハ、
 b 人ニ一個ツツ a 度與フレバヨシ。此實例ニヨリテ $a \times b = b \times a$ ナルコトヲ説明セヨ。

2. 縦ニ a 個、横ニ b 個ツツヲ c 個積ミ重ネタル物ノ數ヲ種種ノ順序ニ數ヘ得ルコトニ由リテ、
 a, b, c ナル三ツノ整數ノ累乗積ガ因數ノ順序ニ關係セザルコトヲ説明セヨ。

3. $a \times b \times c \times d = d \times c \times b \times a$ ヲ説明セヨ。

15. 等分。

或數 A ヲ n 分スルコト、即チ A ヲ n 個ノ相等シ

キ部分ニ分ツコトヲ A ヲ n ニテ割ル(除ス)トイヒ、
 A ヲ被除數、 n ヲ除數、 n 分ノ結果ヲ商トイフ。 A
ヲ n ニテ割リテ得タル商ヲ式ニテ

$$A \div n$$

ト書ク。即チ $A \div n$ ハ其 n 倍ガ丁度 A ニ等シキ數ナリ。故ニ $A \div n \times n$ ハ A ニ等シ。

多クノ數ノ和ヲ n 分シテモ、又ハ此等ノ數ヲ一ツ一ツ n 分シタル商ヲ加ヘ合セテモ、結果ハ同ジ。

即チ

$$(A+B+C+\dots) \div n = A \div n + B \div n + C \div n + \dots \quad (1)$$

實際 $A \div n + B \div n + C \div n + \dots$ ヲ n 倍スルトキハ
 $A+B+C+\dots$ トナルベシ。

特ニ A ナル數 m 個ノ和ヲ n 分スルモ、又ハ A ヲ
 n 分セルモノヲ m 個加ヘ合セテモ結果ハ同ジ。

$$(A+A+\dots) \div n = A \div n + A \div n + \dots$$

$$\text{即チ} \quad A \times m \div n = A \div n \times m \quad (2)$$

又或數 A ヲ m 分シ更ニ之ヲ n 分スルトキハ、 A
ガ $m \times n$ 個ノ相等シキ部分ニ分タルベシ。故ニ

$$A \div m \div n = A \div (m \times n) \quad (3)$$

此等ノ結果ヲ綜合シテ次ノ法則ヲ得。

或數ニ引續キ多クノ整數ヲ乘除スルトキ、乘數及ビ除數ノ順序ヲ如何ヤウニ變ヘテモヨク、又ハ幾ツカノ乘數ノ代リニ其積ヲ掛ケ、幾ツカノ除數ノ代リニ其積ニテ割リテモヨシ。

例題

1. 整數 m ガ n ノ p 倍ナルトキハ

$$A \times m \div n = A \times p$$

$$A \div m \times n = A \div p$$

ナリ。此等ノ式ノ意味ヲ説明シ、且之ヲ證明セヨ。

2. 多クノ數ノ累乘積ヲ或整數ニテ割ルニ、若シ因數ノ中ノ一ツガ除數ノ幾倍カニ等シキトキニハ、此因數ノ代ニ之ヲ除數ニテ割リタル商ヲ入ルレバヨシ。次ノ例ニツキテ之ヲ證明セヨ。

$$a \times 45 \times b \div 9 = a \times 5 \times b$$

16. 除法ノ演算。

除法ノ演算ノ骨子ハ、商ノ最高位ノ數字ヲ定ムルニアリ。

- (一) 商ノ最高位ヲ定ムルコト。

例ヘバ 753 ニテ 592574 ヲ割ルニ、被除數ノ最高位ヨリ始メテ幾ツカノ數字ヲ取リテ、除數ヨリモ小ナラザル數ヲ作ラントスルニ、千ノ位マデノ數字 592 ニテハ足ラズ、百ノ位マデノ數字 5925 ニテ丁度ヨロシ。之ニヨリテ考フルニ、被除數ハ 592 千有餘、又ハ 5925 百有餘トイフ數ナレバ、753 千即チ千ノ 753 倍ヨリハ小ナレドモ、753 百即チ百ノ 753 倍ヨリハ小ナラズ。故ニ商ハ千ヨリハ小ナレドモ、百ヨリハ小ナラザル數、即チ商ノ最高位ハ百ノ位ナルコトヲ知ル。一般ニ

或整數ニテ或數ヲ割ルトキ、被除數ノ最高位ヨリ始メテ丁度除數ヨリ小ナラザル數ヲ作ルニ必要ナルダケノ數字ヲ取ルトキ、其最後ノ數字ノ位ガ即チ商ノ最高位ナリ。

例へバ除數ガ 753 ナルトキ、被除數ガ 69.2574 ナレバ商ノ最高位ハ小數第二位、又被除數ガ 7538.62 ナレバ商ノ最高位ハ十ノ位ナリ。

(二)。商ノ最高位ノ數字ヲ定ムルコト。

上ノ例ニテ 592574 ヲ 753 ニテ割ルトキ、商ハ百ノ位ヨリ始マルベキコトヲ知レリ。サテ商ノ百ノ位ノ數字ハ如何。

上ノ例ニテ作リタル數 5925 ハ 753×7 即チ 5271 ヨリハ大ニシテ、 753×8 即チ 6024 ヨリハ小ナリ。故ニ 5925 百有餘トイフ被除數ハ 7 百ノ 753 倍ナル 5271 百ヨリハ大ナレドモ、8 百ノ 753 倍ナル 6024 百ニハ達セズ。故ニ商ノ百ノ位ノ數字ハ 7 ナルコトヲ知ルベシ。

(三)。商ノ他ノ數字ヲ定ムルコト。

592574 ヲ 753 ニテ割ルトキ、商ノ百ノ位ノ數字ノ 7 ナルコトヲ知レリ。サテ 700×753 即チ 527100 ヲ 592574 ヨリ引クトキハ 65474 ヲ得。

即チ

$$592574 = 700 \times 753 + 65474$$

故ニ第 15 節(1)ニヨリテ

$$592574 \div 753 = 700 + (65474 \div 753)$$

ヨリテ求ムル商ニテ百ニ次グ位ノ數字ハ、 65474 ヲ 753 ニテ割リタル商ノ最高位ノ數字ナリ。此數字ハ(二)ニ説キタルガ如クニシテ定ムルコトヲ得。

カヤウニシテ商ノ數字ヲ最高位ヨリ始メ、順次ニ一ツ一ツ定メ行クコトヲ得ベシ。

$$\begin{array}{r}
 786.9508 \dots \\
 753 \overline{) 592574} \\
 \underline{5271} \\
 6547 \\
 \underline{6024} \\
 5234 \\
 \underline{4518} \\
 7160 \\
 \underline{6777} \\
 3830 \\
 \underline{3765} \\
 6500 \\
 \underline{6024} \\
 476
 \end{array}$$

例題

1. 次ノ除法ニテ商ノ最高位及ビ最高位ノ數字ヲ定メヨ。又其理由ヲ説明セヨ。

$$4426 \div 7 \quad 0.08 \div 3 \quad 0.08 \div 17$$

2. 36592 ヲ 753 ニテ割ルトキ、被除數ノ左ノ端ノ部分 36 ヲ除數ノ左ノ端ノ數字 7 ニテ割リテ見、又之ヨリモ一ツ大ナル數 8 ニテ割リテ見テ、商ノ最初ノ數字ハ 5 又ハ 4 ノ中ナルコトヲ知ルコトヲ得。其理由ヲ説明セヨ。

17. 除法ノ殘。商ノ近似値。

或整数ヲ他ノ整数ニテ割ルトキ、商ハ必ズシモ整数トナルモノニアラズ。例ヘバ 25 ヲ 7 ニテ割ルニ

$$25 = 3 \times 7 + 4$$

ナルガ故ニ、25 ヲ 7 分スルトキハ 3 ヅツトナリテ、ナホ 4 ガ殘ル。此殘 4 ヲ 7 分スルトキハ、1 ヨリ小サキ數ヲ得、即チ 3 ハ商ノ整数部分ニシテ、4 ヲ割リ算ノ殘トイフ。一般ニ

整数 a ヲ整数 b ニテ割ルトキ、商ノ整数部分ガ q 、殘ガ r ナルトキハ

$$a = q \times b + r$$

ニシテ、殘 r ハ除數 b ヨリモ小ナリ。

上ノ例ニテ殘 4 ヲナホ 7 ニテ割リ、商ノ小數ノ部分ヲ求ムルコトヲ得。即チ

$$25 \div 7 = 3.5714 \dots\dots$$

此 3.5714 ハ商ヲ小數第四位マデ計算セル結果ニシテ、即チ商ノ近似値ナリ。商ノ眞ノ値ハ之ヨリモ稍大ナリ。サレド其差ハ小數第四位ニ於ケル 1 ニハ達セズ。

商ノ整数ノ部分、又ハ小數某位マデ計算セル商ノ近似値ヲ、略シテ單ニ商トイフコトモアレド、此等ハ商ノ眞ノ値ニアラザルコトヲ忘ルベカラズ。

例 題

1. 整数 a ヲ整数 b ニテ割ルニ、商ノ整数部分 q ナリトイフトキ、掛ケ算ニヨリテ之ヲ驗シ、且殘ヲモ求メントス、其方法如何。

2. 0.2 ヲ 153 ニテ割リ、商ヲ小數第六位マデ計算シ、0.001307 ヲ得タリ。掛ケ算ニヨリテ此結果ヲ驗セ。

18. 分數ト除法ト。

分數 $\frac{a}{b}$ ハ 1 ヲ b 分セルモノヲ a 個ダケ合セタ

ル數ナリ。サテ此 b 分スルコトト a 倍スルコト
トノ順序ヲ變ヘテモ結果ハ同ジキニヨリ、 $\frac{a}{b}$ ハ 1
ノ a 倍ヲ b 分セルモノ即チ $a \div b =$ 等シ。故ニ

分數ハ分子ヲ分母ニテ割リタル商
ナリ。

是故ニ分子ガ分母ヨリ大ナル分數ハ 1 ヨリ大
キク、分子ガ分母ニ等シキ分數ハ 1 ニ等シ。此等
ヲ假分數トイフ。分子ガ分母ヨリ小ナル分數ハ
1 ヨリモ小ナリ。之ヲ眞分數トイフ。

假分數ハ整数ニ等シキカ、又ハ整数ト眞分數ト
ノ和(帶分數)ニ等シ。

例ヘバ $\frac{25}{7}$ ハ 25 ヲ 7 分セル商ニ等シク、25 ヲ 7
ニテ割ルキハ、商ノ整数ノ部分 3 及ビ殘 4 ヲ得。
即チ

$$25 \div 7 = (3 \times 7 + 4) \div 7 = 3 + 4 \div 7$$

故ニ

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7} = 3\frac{4}{7}$$

一般ニ分子 a ヲ分母 b ニテ割ルトキ、商ノ整数
ノ部分ガ q 、殘ガ r ナルトキハ

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

ニシテ殘 r ハ除數 b ヨリ小ナルガ故ニ、 $\frac{r}{b}$ ハ眞分
數ナリ。

分數ハ分子ヲ分母ニテ割リタル商ナルガ故ニ、
此割リ算ノ結果ヲ小數ニテ表シ、分數ヲ小數ニ改
ムルコトヲ得。例ヘバ

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0.75$$

$$\frac{25}{7} = 25 \div 7 = 3.5714 \dots$$

サレド $\frac{25}{7}$ ノ如キ分數ハ小數ニヨリテ其近似値ヲ
表シ得ルニ過ギズ。是故ニ小數ノ外ニ分數ヲ用
フル必要アルナリ。

例題

1. 178 ヲ 13 ニテ割リタル商ヲ帶分數トシテ
表セ。
2. 整数 a ヲ分母ガ n ナル假分數ニ改メント
ス。分子ハ如何ナル數カ。
3. 帶分數 $q + \frac{r}{b}$ ヲ假分數ニ改メヨ。
4. 二十三尺ヲ間ノ假分數ニテ表シ、又先ヅ二
十三尺ヲ諸等數ニ改メテ後之ヲ間ノ帶分數ニテ

表セ。又之ニヨリテ假分數ヲ帶分數ニ改メ、帶分數ヲ假分數ニ改ムル方法ヲ説明セヨ。

5. $\frac{22}{7}$ ト 3.1416 トイヅレガ大ナルカヲ決定スルニ通ノ方法ヲ示セ

19. 分數ノ變形。

分數ノ分母及ビ分子ニ同ジ整數ヲ掛ケテモ、分數ノ値ハ變ラズ。

例ヘバ $\frac{a \times n}{b \times n}$ ハ $a \times n$ ヲ $b \times n$ ニテ割リタル商ニシテ、 $a \times n$ ヲ $b \times n$ ニテ割ルハ先ヅ n ニテ割リ次ニ b ニテ割ルニ同ジク、 $a \times n$ ヲ n ニテ割リテ a ヲ得、更ニ之ヲ b ニテ割リテ $a \div b$ 即チ $\frac{a}{b}$ ヲ得。故ニ

$$\frac{a \times n}{b \times n} = \frac{a}{b}$$

是故ニ又分數ノ分母ト分子トガ同ジ整數ニテ割リ切レルトキニハ、分母及ビ分子ヲ此整數ニテ割リテモ(約分)、分數ノ値ハ變ラザルコトヲ知ルベシ。例ヘバ

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}, \quad 0.64 = \frac{64}{100} = \frac{64 \div 4}{100 \div 4} = \frac{16}{25}$$

分母ノ異ナル多クノ分數アルトキ、之ヲ分母ノ同ジキ分數ニ改ムルコト(通分)モ、亦上ノ法則ニ基

ヅクモノナリ。例ヘバ

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}, \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{b \times c}{b \times d}$$

20. 分數ノ加法及ビ減法。

分母ノ同ジキ分數ノ加法及ビ減法ハ第12節ノ法則ニ基ヅク。

例ヘバ $\frac{a}{n} + \frac{b}{n}$ ハ1ヲ n 分セルモノ即チ $\frac{1}{n}$ ノ a 倍ト b 倍トノ和ナルガ故ニ、是ハ $\frac{1}{n}$ ノ $(a+b)$ 倍即チ $\frac{a+b}{n}$ ニ等シ。同ジヤウニ $\frac{a}{n} - \frac{b}{n}$ ハ $\frac{a-b}{n}$ ニ等シ。一般ニ次ノ如キ公式成立ス。

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a+b-c}{n}$$

分數ヲ割リ算ノ商ト考フルトキハ、是ハ第15節ノ(1)ト同ジコトナリ。

分母ノ異ナル分數ハ先ヅ之ヲ通分シテ後、上ノ如クニシテ加ヘ又ハ引クコトヲ得。

例 題

1. 0.23 ハ $\frac{23}{100}$ ニ等シトイフコトニ通分ガ應用セラル。之ヲ説明セヨ。

2. $13 \div 7$ ト $5 \div 11$ トノ和ヲ小數第三位マデ計算セヨ。

21. 分數ヲ倍スルコト及ビ等分スルコト。

分數 $\frac{a}{b}$ ニ 整数 c ヲ掛ケルハ $\frac{a}{b}$ ヲ c 個加ヘ合スルコトナルガ故ニ

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

是ハ 1 ヲ b 分セルモノノ a 倍ノ c 倍ガ 1 ヲ b 分セルモノノ $(a \times c)$ 倍ニ等シトイフコトニテ、即チ第 12 節(4)ノ應用ト見做スコトヲ得。

又ハ $\frac{a}{b} \times c$ ハ a ヲ b 分シテ後 c 倍スルコトト考フルコトヲ得。サテ第 15 節(2)ニヨリ b 分スルコトト c 倍スルコトトノ順序ヲ變ヘテモヨキガ故ニ $\frac{a}{b} \times c$ ハ $a \times c \div b$ 即チ $\frac{a \times c}{b}$ ニ等シキコトヲ知ル。

分數 $\frac{a}{b}$ ヲ c 分スルハ a ヲ b 分シタルモノヲ更ニ c 分スルコトニテ、是ハ第 15 節(3)ニヨリテ a ヲ $(b \times c)$ 分スルニ同ジ。故ニ

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \times c}$$

例 題

1. $23 \div 7$ ノ 5 倍ヲ小數第三位マデ計算セヨ。
2. 分數ヲ整数ニテ割ルトキ、分子ガ此整数ニテ割リ切レルトキハ、分母ハ其ママニシテ、分子ヲ除數ニテ割レバ商ヲ得ベシ。之ヲ證明セヨ。
3. 分數ニ整数ヲ掛ケルトキ、2 ト同ジ様ナル場合アリ。之ヲ説明セヨ。

22. 分數ヲ掛ケルコト。

或數 A ニ 分數 $\frac{m}{n}$ ヲ掛ケルトハ、 A ノ n 分ノ m ヲ求ムルコト、即チ A ヲ n 分シテ後 m 倍スルコトヲイフ。

故ニ第 15 節ノ法則ニヨリ、 $A = \frac{m}{n}$ ヲ掛ケルハ A ノ m 倍ヲ n 分スルニ同ジ。

上ノ定義ニヨリ、前節ノ法則ヲ應用シテ、整数又ハ分數ニ分數ヲ掛ケルニハ、次ノ公式ニヨルベキコトヲ知ルベシ。

$$a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

小數ハ分母ガ10, 100, 1000等ナル分數ニ外ナラズ。故ニ小數ノ乘法モ、實際ハ上ノ法則ニ基ヅクモノナリ。

例ヘバ

$$7.3 \times 0.21 = \frac{73}{10} \times \frac{21}{100} = \frac{73 \times 21}{10 \times 100} = \frac{1533}{1000}$$

$$= 1533 \div 1000 = 1.533$$

小數ノ掛ケ算ヲナスニ、先ヅ小數點ニ構ハズ掛ケルハ、即チ分子ノ積ヲ計算スルニテ、次ニ位取ヲナスハ、分子ノ積ヲ分母ノ積ニテ割ルナリ。

23. 乘法ニ關スル法則。

第12節及ビ第14節ニ説キタル法則ハ乗數又ハスベテノ因數ガ整數ナルトキニ限リテ證明セラレタルモノナレドモ、因數ノ中ニ分數(又ハ小數)ガアルトキニモ、此等ノ法則ハ仍成立スベシ。

先ヅニツノ數ノ積ハ因數ノ順序ニ關係セズトイフ法則ハ因數ガ分數ナルトキニモ成立スルコトハ、分數ノ乘法ノ規則ニヨリテ明白ナリ。同ジヤウニ多クノ數ノ累乘積ニ關シテ第14節ニ説キタル法則モ亦因數ノ中ニ分數ガアルトキニモ成

立ス。

又第12節ノ公式

$$(A+B) \times n = A \times n + B \times n$$

モ乗數 n ガ整數ナリトシテ、加法ノ法則ニヨリテ證明セラレタルモノナレドモ、乗數ガ分數ナルトキニモ此法則ハ成立ス。

例ヘバ

$$(A+B) \times \frac{2}{3} = (A+B) \div 3 \times 2 = (A \div 3 + B \div 3) \times 2$$

$$= A \div 3 \times 2 + B \div 3 \times 2 = A \times \frac{2}{3} + B \times \frac{2}{3}$$

一般ニ a, b, n ガ整數又ハ分數ヲ表ストキ

$$(a+b) \times n = a \times n + b \times n$$

又因數ノ順序ハ積ニ關係ナキニヨリ

$$n \times (a+b) = n \times a + n \times b$$

乘法ノ記號 \times ハ文字ト文字、又ハ數ト文字トノ間、及ビ括弧ノ前後ニ於テハ略シテ書カヌヲ常トス。ヨリテ上ノ公式ヲ次ノ如クニ書クコトヲ得。

$$(a+b)n = an + bn \quad (1)$$

$$n(a+b) = na + nb \quad (2)$$

同ジヤウニ

$$(a-b)n = an - bn \quad (3)$$

$$n(a-b) = na - nb \quad (4)$$

又一般ニ次ノ如キ公式成立スベシ。

$$(a+b-c)n = an + bn - cn \quad (5)$$

$$n(a-b+c) = na - nb + nc \quad (6)$$

此等ノ公式ヲ應用シテ乘法ニ關スル一層複雑ナル法則ヲ得。例ヘバ

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) \\ &= (ac+ad) + (bc+bd) \\ &= ac + ad + bc + bd \quad (7) \end{aligned}$$

是ハ公式(1)ニ於ケル n ノ代リニ $c+d$ ヲ入レ、更ニ公式(2)ヲ應用シ、又第11節ノ公式(1)ヲ應用シテ括弧ヲ取り去リタルナリ。

又ハ先ヅ公式(2)ヲ應用シテ次ノ如クニシテモ同ジ結果ヲ得ベシ。

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= (a+b)c + (a+b)d \\ &= ac + bc + ad + bd \end{aligned}$$

同ジヤウニ

$$\begin{aligned} (a-b)(c-d) &= a(c-d) - b(c-d) \\ &= (ac-ad) - (bc-bd) \\ &= ac - ad - bc + bd \quad (8) \end{aligned}$$

上ノ公式(7),(8)ハ和又ハ差ノ積ニ關スル法則ヲ表セルモノニテ、カヤウノ法則ハ通常ノ言語ニテハ簡潔ニ言ヒ表スコトスラモ容易ナラズ。又此等ノ法則ヲ求メタル筋道モ式ヲ用ヒズニハ、カヤウニ明瞭ニハ示シ難カルベシ。此等ハ數學ニ於テ式及ビ文字ヲ用フル利益ヲ示スベキ一例ニ過ギザルナリ。

例 題

1. $(a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd$ ナルコトヲ二通ニ證明セヨ。

2. $(a+1)(b+1)$ ヲ得ルガタメニ ab ニ加フベキ數ハ如何。

3. 上ノ公式(1)及ビ(7)ヲ應用シテ次ノ積ヲ求めヨ。

$$3627\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \quad 3627\frac{5}{6} \times 23\frac{3}{4}$$

4. 或數ニ多クノ分數ノ和ヲ掛ケテモ、又ハ此數ニ此等ノ分數ヲ一ツ一ツ掛ケテ後加ヘ合セテモ、結果ハ同ジ。之ヲ證明セヨ。

24. 除法。

二ツノ數 A, B アルトキ, B ト如何ナル數トノ積ガ A ニ等シキカラ定ムルコトヲ A ヲ B ニテ割ル(除ス)ト云ヒ, A ヲ被除數(又ハ實), B ヲ除數(又ハ法), 求ムル數ヲ商トイフ。 A ヲ B ニテ割リタル商ヲ式ニテ $A \div B$ ト書ク。

除法ハ乘法ノ逆ノ計算ニシテ, 二ツノ數ノ積ト, 此等ノ數ノ中ノ一ツトヲ知リテ, 他ノ一ツヲ求ムル計算ナリ。是故ニ商ト除數トノ積ハ被除數ニ等シク, 又被除數ヲ商ニテ割ルトキハ除數ヲ得ベシ。

乘法ノ二ツノ因數ヲ被乘數及ビ乘數ニ區別シテ考フルトキハ, 被乘數及ビ乘數ノ中, 何レガ知ラレタル因數ニテ, 何レガ求ムベキ因數ナルカニヨリテ, 除法ニ二様ノ意義ヲ生ズベシ。

或數 A ヲ 3 分ストハ如何ナル數ノ 3 倍ガ A トナルカラ求ムルコトニテ, 乘法ノ積 A ト乘數 3 トヲ知リテ被乘數ヲ求ムルナリ。此場合ニハ除法ハ即チ等分ナリ。

又或數ノ $\frac{2}{3}$ ガ A ナルコトヲ知リテ此數ヲ求ム

ルコトモ, A ヲ $\frac{2}{3}$ ニテ割ルナリ。ココニテモ除數 $\frac{2}{3}$ ハ乘法ノ乘數ニ當リ, 求ムル商ハ被乘數ニ當ル。

サレド乘法ノ積 A ト被乘數 B トヲ知リテ乘數ヲ求ムル場合ニハ, A ヲ B ニテ割ルハ即チ A ガ B ノ幾倍ナルカ, 又ハ幾分ノ幾ツナルカラ定ムルニテ, 即チ A, B ノ比ヲ求ムルナリ。

乘法ニ於テ乘數ハ必ズ不名數ナレドモ, 被乘數ハ名數タルコトヲ得ベク, 此場合ニハ積モ亦同ジ單位ヲ用ヒテ表サレタル名數ナリ。故ニ第一ノ意味ニテノ除法ニテハ, 除數ハ不名數ニシテ, 被除數ガ名數ナルトキハ, 商モ亦同名ノ數ナリ。第二ノ意味ニテハ被除數ト除數トハ同名ノ數タルコトヲ得, 商ハ必ズ不名數ナリ。イツレノ場合ニテモ, 割り算ノ殘ハ被除數ト同名ノ數ナルベシ。殘ハ實際被除數ノ一部分ニ外ナラザレバナリ。

名數ニ關スル問題ハ畢竟不名數ニ關スル問題トシテ解クコトヲ得ベク, 不名數ノミヲ取扱フ以上ハ, 除法ノ二様ノ意義ノ區別ハ商ノ値ニハ關係セザルガ故ニ, 第 16 節ニ於テ等分ノ意義ニ基ヅキテ説明セル除法ノ演算ハ比ヲ求ムル意義ニ於ケ

ル除法ニモ適用スベキコト勿論ナリ。

25. 分數ニテ或數ヲ割ルコト。

或數 A ヲ分數 $\frac{c}{d}$ ニテ割リタル商ヲ Q ニテ表ストキハ、 $Q \times \frac{c}{d} = A$ 、随テ $Q \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = A \times \frac{d}{c}$ ニ等シカルベシ。サテ $Q \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = Q \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}\right)$ 即チ $Q \times 1$ 即チ Q ニ等シ 故ニ

$$Q = A \times \frac{d}{c}$$

即チ

$$A \div \frac{c}{d} = A \times \frac{d}{c}$$

$\frac{c}{d}, \frac{d}{c}$ ノ如ク其積ガ 1 ニ等シキニツノ數ヲ互ニ逆數トイフ。

或數ニテ除スルハ其逆數ヲ乘ズルニ同ジ。

整數又ハ分數ヲ分數ニテ割ルニハ上ノ公式ニヨルナリ 即チ

$$a \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{c}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

小數ガ除數ナル場合ニ於ケル除法ノ演算モ亦上ノ公式ニ基ツク。例ヘバ

$$\begin{aligned} 0.8 \div 0.2 &= 0.8 \div \frac{2}{10} = 0.8 \times \frac{10}{2} \\ &= 0.8 \times 10 \div 2 = 8 \div 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.0032 \div 0.037 &= 0.0032 \times \frac{1000}{37} \\ &= 3.2 \div 37 \end{aligned}$$

一般ニ小數又ハ帶小數ニテ或數ヲ割ルニハ、除數ノ小數部分ノ桁數ダケ被除數ノ一ノ位ヲ右ノ方ニ移シ、同時ニ除數ノ小數點ヲ取り去リテ之ヲ整數トナシテ後割リ算ヲ行フベシ。

26. 除法ニ關スル法則。

第15節ニ説キタル法則ハ乘數又ハ除數ガ整數ナリトシテ證明セラレタルモノナリ。又分數四則ノ法則ハ被除數及ビ除數ガ整數ナル除法ニ關スル法則ト見做シ得ベキモノナリ。サレド此等ノ法則ハ、關係セル數ガ整數ノミニアラザルトキニモ仍成立スベシ。

例ヘバ第19節ニテ分數ノ性質トシテ舉ゲタル公式 $\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$ ハ又被除數 a 及ビ除數 b ニ同ジ數

n ヲ掛ケテモ商ハ變ラズトイフ除法ノ法則ヲ言ヒ表セルモノト見做スコトヲ得。サテ a, b, n ガ整数ニアラザルトキニモ、此法則ノ仍成立スルコトハ、次ノヤウニシテ證明スルコトヲ得。

a ヲ b ニテ割リタル商ヲ q ニテ表ストキハ、 a ハ $q \times b$ ニ等シ。故ニ $a \times n$ ハ $q \times b \times n$ 即チ $q \times (b \times n)$ ニ等シ。故ニ除法ノ意味ニヨリテ q ハ $(a \times n) \div (b \times n)$ ニ等シ。即チ $a \div b$ ハ $an \div bn$ ニ等シ。

分數 $\frac{a}{b}$ ハ除法ノ商ト見做スコトヲ得ベク、且除法ニ關スル法則ハ被除數及ビ除數ガ整数ナルトキニモ又然ラザルトキニモ同様ナルガ故ニ、 a, b ガ整数ニアラザルトキニモ、 $a \div b$ ナル商ヲ分數ノ記法ヲ用ヒテ $\frac{a}{b}$ ト書ク。

例題

1. 次ノ公式ガ一般ニ成立ツコトヲ證明セヨ

$$a \div (b \times c) = a \div b \div c$$

$$a \times (b \div c) = a \times b \div c$$

$$a \div (b \div c) = a \div b \times c$$

2. 被除數及ビ除數ニ同ジ數ヲ掛ケルトキ、割リ算ノ殘ハ如何ヤウニナルカ。

1.2ヲ0.07ニテ割リ、商ヲ小數第二位マデ計算スルトキ、殘ハ幾許ナルカ。

3. $(15.4 \div 1.8) \div (0.7 \div 0.16)$ ヲ小數第三位マデ計算セヨ。

27. 冪。

或數 a ヲ n 個掛ケ合セタル積ヲ a ノ n 乗冪トイヒ、之ヲ書キ表スニ記號 a^n ヲ用フ。 a ノ肩ニ添へタル數 n ハ因數ノ數ヲ示スモノニシテ、之ヲ冪ノ指數トイフ。二乗冪、三乗冪ヲ特ニ平方、立方トイフ。又或數ノ一乗冪トハ其數自身ノコトナリト定ム。即チ a ヲ a ノ冪ト見做ストキニハ、指數ハ1ナリ。即チ $a^1 = a$

冪ノ乘法及ビ除法ハ次ノ如クニスベシ。

例ヘバ

$$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$$

a ナル因數3個ト2個トノ累乘積ハ、同ジ因數5個ノ累乘積ニ等シキナリ。一般ニ

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

同ジヤウニ

$$a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$$

此等ノ式ニテ指數 m, n, p ハ勿論整數ヲ表スモノナリ。

或數ノ冪ノ積ハヤハリ同ジ數ノ冪ニシテ, 積ノ指數ハ因數ノ指數ノ和ニ等シ。

上ノ法則ヨリ推シテ, 冪ノ除法ニ關スル法則ヲ得ルコト次ノ如シ。

$$\text{例へバ } \frac{a^5}{a^2} = \frac{a^{3+2}}{a^2} = \frac{a^3 \cdot a^2}{a^2} = a^3 (= a^{5-2})$$

一般ニ m ガ n ヨリ大ナルトキハ

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

或數ノ高キ冪ヲ低キ冪ニテ割リタル商ハヤハリ同ジ數ノ冪ニシテ, 商ノ指數ハ被除數ノ指數ヨリ除數ノ指數ヲ引キタル差ニ等シ。

又例へバ

$$(abc)^2 = abc \times abc = aabbcc = a^2 b^2 c^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

一般ニ

$$(abc \dots)^n = a^n b^n c^n \dots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

(此等ノ法則ヲ言語ニ言ヒ表セ)。

又

$$(a^3)^2 = a^3 a^3 = a^{3+3} = a^{3 \times 2} = a^6$$

$$\text{或ハ } (a^3)^2 = (aaa)^2 = a^2 a^2 a^2 = a^{2 \times 3} = a^6$$

一般ニ

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

例題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。 [1-3]

$$1. a^n \times a \quad 2. a^n \div a \quad 3. 2^{n+1} - 2^n$$

次ノ計算ヲナセ。 [4-8]

$$4. 6^5 \div 6^3 \quad 5. 0.2^3 \div 0.2^5$$

$$6. 2^2 \times 5^2 \quad 7. 2^3 \times 2^2 \div 6$$

$$8. 2^3 \times 3^2 - (3 \times 2^4)$$

$$9. a^{(m^n)} \text{ ト } (a^m)^n \text{ トノ異同ヲ説明セヨ。}$$

又 $a^{(2^3)}$ ト $(a^2)^3$ トハ相等シキカ。

$$10. \text{一萬, 一億, 一兆ヲ } 10 \text{ ノ冪トシテ表セ。}$$

11. 整数部分ニ n 桁ノ數字ヲ有スル數ハ 10^n ヨリハ小ニシテ, 10^{n-1} ヨリハ小ナラザルコトヲ説明セヨ.

12. 小數第 n 位ニ始メテ 0 ト異ナル數字ヲ有スル數ハ $\frac{1}{10^{n-1}}$ ヨリハ小ニシテ, $\frac{1}{10^n}$ ヨリハ小ナラザルコトヲ説明セヨ.

28. 算術ト代數.

算術ノ目的ハ十進法ニテ表サレタル數ヲ用ヒテ計算ヲ行ヒ, 之ヲ日常生活上必須ノ問題ニ應用スルニアリ. 代數學ニ於テハ主トシテ式及ビ文字ヲ用ヒ, 計算ノ筋道ヲ簡明ニシ, 又スベテノ數ニ通用スベキ一般ノ法則ヲ研究ス.

第二篇

正數負數及ビ其四則

29. 負數ノ意義.

代數學ニテハ計算ノ結果ヲ一般ニ通用セシムルガタメニ, 算術ニテ取扱フ數ノ外ニ, ナホ負數ト稱スル一種ノ新ナル數ヲ用フル必要アリ.

今 1, 2, 3 ト 1 ヨリ始メテ整数ヲ順次ニ並べ記シ, 之ヲ右ヨリ左へ看行クニ, 3 ヨリ 1 引キテ 2, 2 ヨリ 1 引キテ 1 ヲ得.

ナホ進ミテ 1 ヨリ 1 引キテ之ヲ 0 (零) トイヒ, 0 ヨリナホ 1 引キテ -1 (まいなす一), -1 ヨリ 1 引キテ -2, -2 ヨリ 1 引キテ -3 トイフ. 以下次第ニカヤウニシテ止マル所ナシ.

3 ヨリ 3 ヲ引ケバ殘ナシ. サレド又 3 ヨリ 3 ヲ引ケバ 0 ヲ得トイヒ, 0 ヲモーツノ數トシテ取扱フコトヲ得.

3 ヨリ 5 ヲ引クコトハ出來ズ。サレド代數學ニテハ、3 ヨリ 5 ヲ引ケバ(即チ 1 ヲ五タビ引ケバ) -2 ヲ得トイヒ、此 -2 ノ如キモノヲモーツノ數トシテ取扱フナリ。

一般ニ、減數ノ方ガ被減數ヨリ大ナルトキハ、其差ノ前ニ記號 $-$ ヲ附ケ記シテ、引算ノ結果ヲ表スナリ。

例ヘバ 3 度ヲ示セル寒暖計ガ 3 度降ルトキハ、0 度ヲ示シ、更ニ 2 度降ルトキハ -2 度ヲ示ス。

記號 $-$ ヲ數字ノ前ニ附ケテ書キ表シタル數ヲスベテ**負數**トイフ。

負數ト區別スルガタメニ、算術ニテ取扱ヘル數ヲ**正ノ數**トイフ。正ノ數ヲ書キ表スニハ、數字ノ前ニ記號 $+$ ヲ附ケテ $+1$ (ぶらす一)、 $+2$ ナドト書クベシ。サレド、特別ニ其必要ナキトキニハ、記號 $+$ ヲ略スルヲ常トス。

30. 絶對值。性質ノ符號。

代數學ニテハ、正數及ビ負數ヲスベテ數ト稱スルガ故ニ、代數學上ノ數ハイツレモニツノ部分ヨ

リ組ミ立テラレタルモノナルコトヲ忘ルベカラズ。即チ其一ツハ數ノ正負ヲ示セル記號 $+$ 、 $-$ ニシテ、之ヲ此數ノ**符號(性質ノ符號)**トイフ。又一ツハ數字ニテ表サレタル部分ニシテ、之ヲ此數ノ**絶對值**トイフ。

例ヘバ $+2$ 、 -2 ノ絶對值ハイツレモ 2 ナリ。

或數ノ符號ヲ變ヘルトハ、此數ノ性質ノ符號ガ $+$ ナラバ之ヲ $-$ ニ變ヘ、 $-$ ナラバ $+$ ニ變ヘルコトナリ。例ヘバ -2 ノ符號ヲ變フレバ $+2$ トナル。

絶對值ハツマリ算術ニテ取扱ヘルモノト同ジ意味ノ數ナリ。代數學上ヨリ言ヘバ、絶對值ハ正ノ數ナリ。

正ノ數ノ絶對值ハ其數自身ノコトニテ、負數ノ絶對值ハ其符號ヲ變ヘテ作レル正ノ數ナリ。

31. 代數學上ノ大小。

第 29 節ニ説ケルガ如クニ、正及ビ負ノ整數ヲ順次ニ竝ベテ書クトキハ次ノ如シ。

..... $+3$, $+2$, $+1$, 0 , -1 , -2 , -3 ,

又同ジャウニ、 2 ヲ分母トセル正及ビ負ノ分數ヲモ竝ベテ書クトキハ次ノ如シ。

$$\dots + 2, +1\frac{1}{2}, +1, +\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -1\frac{1}{2}, -2, \dots$$

$$(\dots + 2, +1.5, +1, +0.5, 0, -0.5, -1, -1.5, -2, \dots)$$

上ニ書キタルハ代數學上ノ數ノ大小ノ順序ナリ。即チスベテ正數ハ0ヨリ大ニシテ、負數ハ0ヨリ小ナリ。又スベテ正數ハ負數ヨリ大ナリ。サテ

二ツノ負數ノ大小ハ其絶對値ノ大小ト相反ス。

例ヘバ -10 ハ 2 ヨリモ小サク、又 -7 ハ -3 ヨリモ小サシ。 -10 度ハ 2 度ヨリモ低ク、 -7 度ハ -3 度ヨリモ低キ溫度ナリ。

例題

1. 寒暖計ガ0度ヨリナホ5度降ルトキハ、之ヲ如何ニ記スベキカ。
2. 或日寒暖計ノ示ス度數ガ -8 ナリトイフ。其意味如何。
3. $7, -5, -\frac{2}{3}, +0.5, -0.5$ ノ絶對値ヲ書ケ。
4. 絶對値ガ4及ビ $\frac{1}{2}$ ナル負數ヲ記セ。
5. 絶對値ガ5ヲ超エザル正及ビ負ノ整數ヲ大小ノ順序ニ竝ベ記セ。

6. 次ノ數ヲ大小ノ順序ニ竝ベヨ。

$$(1) 0, 2, -7 \quad (2) \frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}$$

$$(3) 0.7, -4, -0.2, 1, -1, -9, -0.9$$

32. 正數ヲ加フルコト。

正數ヲ加フトハ、算術ノ加法ト同ジヤウニ、其數ダケ増スコトヲイフ。但、ココニ「増ス」トイフハ、「代數學上ノ大小ノ意味ニテ大キクスル」コトナリ。

例ヘバ $+5 = +3$ ヲ加フレバ、 $+8$ ヲ得。即チ

$$(+5) + (+3) = +8$$

サテ、 $-5 = +3$ ヲ加フレバ如何ニトイフニ、 $-5 = 1$ 足シテ -4 、 $-4 = 1$ 足シテ -3 、カヤウニスルコト三度ニシテ -2 ヲ得。即チ

$$(-5) + (+3) = -2$$

例ヘバ零點下5度(-5 度)ヲ示セル寒暖計ガ3度昇ルトキハ、零點下2度(-2 度)ヲ示スベシ。

同ジヤウニ

$$(-5) + (+5) = 0$$

$$(-3) + (+5) = +2$$

33. 負數ヲ加フルコト。

負數ヲ加フトハ、其絶對値ダケ減ラスコトナリ。

例ヘバ $+5 = -3$ ヲ加フトハ、 $+5$ ヲ 3 ダケ減ラスコトナリ。即チ

$$(+5)+(-3)=+2$$

サテ $-5 = -3$ ヲ加フトハ、 -5 ヲ 3 ダケ減ラスコトニテ、 -5 ヨリ 1 引キテ -6 、 -6 ヨリ 1 引キテ -7 、カヤウニスルコト三度ニシテ -8 ヲ得。故ニ

$$(-5)+(-3)=-8$$

同ジャウニ

$$(+5)+(-5)=0$$

$$(+3)+(-5)=-2$$

34. 加法ノ規則。

正數及ビ負數ノ寄セ算ノ意味ヲ考ヘ、前ニ舉ゲタル例ヲ照シ合セテ、次ノ規則ヲ得。

符號同ジキニツノ數ノ和ヲ作ルニハ、此等ノ數ノ絶對値ノ和ニ、其同ジ符

號ヲ附ケヨ。

符號異ナルニツノ數ノ和ヲ作ルニハ、此等ノ數ノ絶對値ノ差ニ、絶對値ノ大ナル方ノ數ノ符號ヲ附ケヨ。

絶對値ハ同ジクシテ符號ノミ異ナルニツノ數ノ和ハ $0 =$ 等シ。

實際ニ加法ヲ行フトキニハ、正數ノ符號ヲ略シ、且一増シ又ハ減ラスナドイフコトヲ考ヘズ直ニ上ノ規則ニヨリテ計算スベシ。

$$\text{例。 } 5 + 3 = 8 \quad 5 + (-3) = 2$$

$$(-5) + (-3) = -8 \quad (-5) + 3 = -2$$

$$5 + (-5) = 0$$

a, b ニテニツノ正數ヲ表ストキハ、一般ニ

$$a + b = +(a+b) \quad (-a) + (-b) = -(a+b)$$

又 a ガ b ヨリ大ナルトキニハ、

$$a + (-b) = (-b) + a = +(a-b)$$

a ガ b ヨリ小ナルトキニハ、

$$a + (-b) = (-b) + a = -(b-a)$$

例題

1. 7ニソレゾレ次ノ數ヲ加ヘヨ。

1, 0, -1, -2, -7, -8, -9, -10

2. -4ニソレゾレ次ノ數ヲ加ヘヨ。

5, 4, 3, -4, -5

3. $-\frac{1}{2}$ ニソレゾレ次ノ數ヲ加ヘヨ。

2, $1\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, -1, $-1\frac{1}{2}$, -2, $-2\frac{1}{2}$

4. 次ノ數ヲ先ヅ順次ニ左ヨリ右ヘ加ヘ行キ、
次ニハ右ヨリ左ヘ加ヘ行キテ、結果ヲ比較セヨ。

(1) 9, -7, -3, 6, -5, 4, -2, 8, -1

(2) -6, 7.5, -3.2, 0.8, -0.3, -1.5, -0.4

5. 正數 a, b ノ和ヲ c ニテ表ストキハ、次ノ寄
セ算ノ結果如何。

$a+b$ $(-a)+(-b)$ $c+(-a)$ $a+(-c)$

$(-b)+c$ $(-c)+b$

35. 應用。

例。或時 a 度ヲ示セル寒暖計ガ b 度昇レルト
キハ、此寒暖計ハ今何度ヲ指スカ。答 $a+b$ 度。

今 $a=-5, b=7$ トスレバ、 $a+b=-5+7=2$

又 $a=-5, b=3$ トスレバ、 $a+b=-5+3=-2$

(此計算ノ意味如何)。

又 $a=7, b=-5$ トスレバ、 $a+b=7+(-5)=2$

サテ、 -5 ヲ加フトイフコトハ、 5 ヲ引クコトナ
レバ、 5 度降レルコトヲ「 -5 度昇レリ」ト言フコ
トヲ得。故ニ此計算ノ意味ハ 7 度ヲ指セル寒
暖計ガ 5 度降ル(-5 度昇ル)トキハ 2 度ヲ指ス
トイフコトナリ。

カヤウニ負數ヲ用フルトキハ、始ノ溫度 a 及ビ
變化セル度數 b ガ正數ニテモ、負數ニテモ、後ノ溫
度ハ必ズ $a+b$ 度ナリト言フコトヲ得。唯昇レル
度數ガ負數ナルトキハ、是ハ實ハ其絶對値ノ度數
ダケ降レルコトヲ示スモノト心得レバヨシ。

例題

1. 甲地ハ此處ヨリ東方 a 里、乙地ハ甲地ヨリ
東方 b 里ニアリ。乙地ハ此處ヨリ東方幾里ノ距
離ニアルカ。次ノ數ニツキテ結果ヲ求め、且其意
味ヲ説明セヨ。

(1) $a=5, b=3$ (2) $a=5, b=-3$

(3) $a=3, b=-5$ (4) $a=-3, b=5$

(5) $a=-5, b=3$ (6) $a=-5, b=-3$

2. 今年15歳ノ人ハ a 年後ニハ幾歳トナルカ。
又 a ガ -7 及ビ -17 ナルトキ、結果ヲ求メ、其意味
ヲ説明セヨ。

36. 減法ノ規則。

減法ハ加法ノ逆ナリ。即チ正數ヲ引クトハ、其
數ダケ減ラスコトニテ、

負數ヲ引クトハ其絶對値ダケ増ス
コトヲイフ。

例ヘバ $+5$ ヲ引クトハ、 5 ダケ減ラスコトニテ、
是ハ -5 ヲ加フルニ同ジ。又 -5 ヲ引クトハ、 5
ダケ増スコトニテ、即チ $+5$ ヲ加フルニ同ジ。ヨ
リテ次ノ規則ヲ得。

或數ヲ減ズルニハ、其符號ヲ變ヘテ
加ヘヨ。

例. $(+3)-(+5)=(+3)+(-5)=-2$

$(-3)-(+5)=(-3)+(-5)=-8$

$(+3)-(-5)=+3+(+5)=+8$

$(-3)-(-5)=(-3)+(+5)=+2$

注意。被減數ガ減數ヨリ大ナルトキハ、差ハ
正數ニシテ、被減數ガ減數ヨリ小ナルトキハ、差
ハ負數ナリ。(上ノ例ヲ參照セヨ)。

例題

1. 3 ヲリソレゾレ $2, 1, 0, -1, \dots -5$ ヲ引
ケ。又 -3 ヲリ、此等ノ數ヲ引ケ。

2. 次ノ引キ算ヲナシ、其結果ヲ驗セ。

$0-5$ $0-(-8)$ $12-(-15)$

$(-18)-20$ $(-10)-(-7)$ $(-10)-(-25)$

3. 13 ト如何ナル數トノ和ガ 7 トナルカ。

4. 6 ヲリ如何ナル數ヲ引クトキハ、殘ガ 10 ト
ナルカ。

5. 如何ナル數ニ 9 ヲ加フルトキハ、和ガ -15
トナルカ。又 -15 ヲリ如何ナル數ヲ減ズルトキ
ハ、差ガ 9 トナルカ。

6. 和 -2 ヲ得ルガタメニ、 -15 ニ加フベキ數
ヲ求メヨ。又差 -2 ヲ得ルガタメニ、 -15 ヲリ減
ズベキ數ヲ求メヨ。

7. 正數 a, b ノ和ヲ c ニテ表ストキハ, 次ノ減法ノ結果如何.

$$c-a \quad a-c \quad (-a)-(-c) \quad (-c)-(-a)$$

8. 或數ヲ 0 ヨリ引クトキハ, 如何ナル數ヲ得ルカ.

37. 應用.

例. a 度ヲ指セル寒暖計ガ幾度昇ルトキハ, b 度ヲ指スカ. 答 $b-a$ 度.

今 $a=5, b=7$ トスレバ, $b-a=7-5=2$

又 $a=-5, b=7$ トスレバ, $b-a=7-(-5)=12$
(此等ノ計算ノ意味如何).

又 $a=7, b=5$ トスレバ, $b-a=5-7=-2$

前ニ 7 度ヲ示セル寒暖計ガ, 今 5 度ヲ示スハ, 2 度降レルナリ. サテ -2 度昇ルトイフハ, 實ハ 2 度降ルコトナリト考フルトキハ, 上ノ一般ノ答 $b-a$ ガ, 此場合ニモ正シキ結果ヲ與フルコトナル.

又 $a=-5, b=-7$ トスレバ, $b-a=(-7)-(-5)=-2$
(此計算ノ意味ヲ説明セヨ).

例題

1. 今年 a 歳ノ人ハ, 幾年ノ後 b 歳トナルカ.
次ノ數ニツキテ結果ヲ求メ, 且之ヲ説明セヨ.

$$(1) a=13, b=72 \quad (2) a=15, b=12$$

2. 暮ニ a 度ヲ指セル寒暖計ガ夜間ニ b 度降レリ. 此寒暖計ハ翌朝何度ヲ指スカ. 次ノ數ヲ一般ノ答ニアテハメテ, 其結果ヲ説明セヨ.

$$(1) a=5, b=8 \quad (2) a=-5, b=8$$

$$(3) a=0, b=4 \quad (4) a=0, b=-4$$

3. 甲ハ此處ヲ東ニ距ルコト a 町, 乙ハ b 町ナリ. 乙ハ甲ヲ東ニ距ルコト幾許ナルカ. 次ノ數ニツキテ結果ヲ求メヨ.

$$(1) a=42, b=72 \quad (2) a=15, b=9$$

4. 甲ガ乙ヨリ受取ルベキ金 a 圓, 及ビ甲ヨリ乙ニ拂フベキ金 b 圓アリ. 甲ハ乙ヨリ差引金幾圓ヲ受取ルベキカ. 次ノ數ニツキテ結果ヲ求メ且其意味ヲ説明セヨ.

$$(1) a=52, b=37 \quad (2) a=37, b=52$$

38. 代數和。

例へバ、 $5-3$ ハ本來ハ5ヨリ3ヲ引キタル差ヲ表スモノナレド、之ヲ5ト-3トノ和ト見テモヨシ。又 $-7-(-3)+(-2)$ ハ $-7+3-2$ 即チ $-7, +3, -2$ ノ和ニ等シ。

スペテ多クノ數ノ加法及ビ減法ヲ引續キ行フトキ、之ヲ正數又ハ負數ノ和ト見做スコトヲ得。カヤウノ和ヲ特ニ代數和トイフ。

例へバ $a-b+c$ ハ $a, -b, c$ ノ代數和ナリ。

又例へバ、甲ハ先ヅ乙ヨリ a 圓ヲ受取り、次ニ乙ニ b 圓ヲ拂ヒ、次ニ乙ヨリ c 圓ヲ受取り、次ニ又乙ニ d 圓ヲ拂フベキトキハ、清算ノ結果、甲ガ得ベキ金高ハ幾許ナルカ。 答 $a-b+c-d$ 圓。

即チ此金高ヲ表ス數ハ $a, -b, c, -d$ ノ代數和ナリ。

サテ受渡ノ金高ガ前ノ通リナルトキハ、受取り又ハ拂渡ス順序ハ如何ヤウナリトモ、結局ノ差引勘定ハ同ジクシテ、ツマリ受取ルベキ金高ノ合計ヨリ、拂渡スベキ金高ノ合計ヲ引クコトトナル。又受取り又ハ拂渡スベキ金高ヲ一部分ツツ取り

マトメ、或ハ差引キ行キテモ、結局ノ勘定ニハ變リナシ。正數及ビ負數ノ寄セ算ノ仕方ハ、受取り又ハ拂渡ス金高ノ差引勘定ト正ニ相同ジ。ヨリテ一般ニ次ノ法則ヲ得。

多クノ數ノ代數和ヲ計算スルトキニハ、此等ノ數ノ順序ヲ如何ヤウニ變へテモヨク、又此等ノ數ヲ一部分ツツ加へ行キテモヨシ。

又此代數和ヲ計算スルニハ、正數ノ和ヨリ、負數ノ絶對値ノ和ヲ減ズレバヨシ。

$$\begin{aligned} \text{例. } a-b+c-d &= a-d-b+c = -b+c-d+a = \dots \\ &= (a-b)+(c-d) = a+(-b+c)-d = \dots \\ &= (a+c)-(b+d) \end{aligned}$$

($a=8, b=10, c=2, d=6$ トシテ、之ヲ驗セ)。

例題

1. 次ノ代數和ヲ計算セヨ。

$$7-12+20-8 \qquad -13+25-20-6$$

$$\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1 \qquad -3-4-7$$

2. -6 ヨリ -8 ヲ引キ、次ニ -5 ヲ加ヘ、次ニ 6 ヲ引クコトヲ代數和トシテ書キ表セ。

3. $8-15-10$ ナル代數和ヲ計算セヨ。又此代數和ヲ組ミ立ツル各ノ數ノ符號ヲ變フルトキハ、結果如何。

39. 乘法ノ規則。

正數ヲ乘ズトイフコトハ、全ク算術ニテ説明シタルト同ジ。

例ヘバ $(-5) \times 3 = (-5) + (-5) + (-5) = -15$

又 $(-15) \times \frac{2}{3}$ ハ -15 ノ三分ノ二即チ先ヅ -15 ヲ三分シテ(是ハ如何ナル數カ)、後之ヲ二倍セルモノ即チ -10 ニ等シ。

負數ヲ乘ズトハ、其絶對値ヲ乘ジテ後、符號ヲ變フルコトナリ。

例ヘバ $5 \times (-3) = -15$, $(-5) \times (-3) = 15$

上ニ説明セル掛ケ算ノ意味ニヨリテ、次ノ規則ヲ得。

符號ノ同ジキ二ツノ數ノ積ヲ作ル

ニハ、其絶對値ノ積ニ符號+ヲ附ケヨ。
符號ノ異ナル二ツノ數ノ積ヲ作ルニハ、其絶對値ノ積ニ符號-ヲ附ケヨ。

$$\begin{array}{l} \text{例一. } 5 \times 3 = 15 \\ \quad \quad \quad (-5) \times (-3) = 15 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 5 \times 3 = 15 \\ (-5) \times (-3) = 15 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} (-5) \times 3 = -15 \\ 5 \times (-3) = -15 \end{array}$$

一般ニ

$$(+a) \times (+b) = +(ab) \quad (-a) \times (+b) = -(ab)$$

$$(-a) \times (-b) = +(ab) \quad (+a) \times (-b) = -(ab)$$

$$\text{例二. } 2 \times 3 \times 4 = 24 \quad -2 \times 3 \times 4 = -24$$

$$-2 \times 3 \times -4 = 24 \quad -2 \times -3 \times -4 = -24$$

一般ニ、多クノ數ノ累乘積ヲ計算スルニハ、先ヅ因數ノ絶對値ヲ掛ケ合セ、因數ノ中ニ負數ガナキカ、又ハ負數ガ偶數ダケアルトキニハ、符號+ヲ附ケ、又負數ガ奇數ダケアルトキニハ、符號-ヲ附クベシ。

是故ニ、因數ノ中ニ負數ガアルトキニモ、因數ノ順序ハ積ニ影響セザルコトヲ知ルベシ

40. 除法ノ規則。

除法ハ乘法ノ逆ナリ。

$$\text{例. } \left. \begin{array}{l} \frac{15}{3} = 5 \\ \frac{-15}{-3} = 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{-15}{3} = -5 \\ \frac{15}{-3} = -5 \end{array} \right\}$$

$$\text{驗. } \begin{array}{ll} 3 \times 5 = 15 & 3 \times (-5) = -15 \\ (-3) \times 5 = -15 & (-3) \times (-5) = 15 \end{array}$$

符號ノ同ジキニツノ數ノ商ヲ作ルニハ、先ヅ其絶對値ニツキテ除法ヲ行ヒ、其商ニ符號ヲ附ケヨ。符號ノ異なるニツノ數ノ商ヲ作ルニハ、先ヅ其絶對値ニツキテ除法ヲ行ヒ、其商ニ符號ヲ附ケヨ。

一般ニ

$$\frac{+a}{+b} = +\left(\frac{a}{b}\right) \quad \frac{-a}{+b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{-a}{-b} = +\left(\frac{a}{b}\right) \quad \frac{+a}{-b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

例題

1. 次ノ積ヲ求メヨ。

$$7 \times 4 \quad (-7) \times 4 \quad 7 \times (-4) \quad (-7) \times (-4) \quad (-1) \times (-1)$$

$$4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{6} \quad (-2.5) \times (-1.2)$$

2. 次ノ商ヲ求メヨ。

$$28 \div 7 \quad (-28) \div 7 \quad 28 \div (-7) \quad (-28) \div (-7)$$

$$6 \div (-1) \quad (-4) \div (-8) \quad \left(-\frac{1}{4}\right) \div \left(-\frac{1}{8}\right) \quad 3 \div (-2.5)$$

3. 次ノ式ヲ計算セヨ。

$$(-2) \times (-3) \times (-4) \quad 7 \times (-5) \times (-2) \times (-4)$$

$$(-7) \times 6 \times (-2) \quad 15 \times (-2) \div (-6)$$

$$(-28) \div 12 \times (-9) \quad 24 \div (-2) \div (-8) \div (-4)$$

4. 次ノ冪ヲ計算セヨ。

$$(-5)^2 \quad (-2)^3 \quad (-1)^6 \quad (-1)^7$$

5. 或數ニ-1ヲ掛ケルトキハ、積ハ如何。

6. -12ニ如何ナル數ヲ掛ケルトキハ、積ガ60トナルカ、又-60トナルカ。

7. 18ヲ如何ナル數ニテ割ルトキハ、商ガ-3トナルカ。又實-18, 商3ナルトキハ、法ハ如何。

8. 如何ナル數ヲ7ニテ割ルトキハ、商ガ-5トナルカ。又此7, -5ヲ-7, 5ト改ムルトキハ如何。

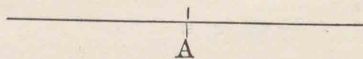
9. $ab=c$ ナルトキ、次ノ積及ビ商ヲ求メヨ。

$$a(-b) \quad (-a)b \quad (-a)(-b) \quad \frac{c}{a} \quad \frac{c}{-a} \quad \frac{-c}{a} \quad \frac{-c}{-a}$$

41. 應用。

例へバ一分ニ三尺ヅツノ速サニテ、直線上ヲ運

動スル物アリ。此物今 A ニアリトスレバ、今ヨリ五分後ニハ何處ニアルベキカ。



答。(1) 此物右へ進ムトキハ、

A ヨリ右へ15尺ノ處。

(2) 此物左へ退クトキハ、

A ヨリ左へ15尺ノ處。

右へノ距離ヲ正數、左へノ距離ヲ負數ニテ表スコトスルトキハ、A ヨリノ距離

$$(1) \text{ニテハ} \quad (+3) \times 5 = +15$$

$$(2) \text{ニテハ} \quad (-3) \times 5 = -15$$

(尺)ノ處ニアリト言フベシ。

又今ヨリ五分前ニハ此物何處ニアリタルカ。

答。(3) 此物右へ進ムトキハ、

A ヨリ左へ15尺ノ處。

(4) 此物左へ退クトキハ、

A ヨリ右へ15尺ノ處。

今ヨリ五分前トイフ時間ヲ -5 ニテ表スコトスルトキハ、A ヨリノ距離

$$(3) \text{ニテハ} \quad (+3) \times (-5) = -15$$

$$(4) \text{ニテハ} \quad (-3) \times (-5) = +15$$

(尺)ノ處ニアリタリト言フベシ。

(1), (2), (3), (4) ノ四ツノ場合ニテ、距離ノ左右、時間ノ前後ヲ區別スルニ、數ノ正負ヲ用ヒ、次ノ結果ヲ得タリ。

	速サ	時間	距離	速サ	時間	距離
(1)	3,	5,	15	(2) -3,	5,	-15
(3)	3,	-5,	-15	(4) -3,	-5,	15

一般ニ速サヲ v , 時間ヲ t , 求ムル距離ヲ s ニテ表スコトキハ、 $vt = s$ ナリ。

例題

次ノ數ヲ用ヒテ、一問題ヲ言明シ、公式ニヨリテ答ヲ出セ。

1. 速サ每秒15(尺), 時間 -4 (秒), 距離ヲ求メヨ。
2. 速サ每秒 -6 (尺), 距離18(尺), 時間ヲ求メヨ。
3. 時間 -2 (時), 距離 -4.5 (里), 速サヲ求メヨ。

42. 零。

此節ニテハ0ノ關係セル四則ヲ一マトメニシ

テ説クベシ。

(加法)。或數ト0トノ和ハ其數自身ニ等シ。即チ a ガ如何ナル數ナリトモ

$$a+0=0+a=a$$

(減法)。減法ハ加法ノ逆ナルコトヨリ、次ノ規則ヲ得。

或數ヨリ0ヲ引キタル殘ハ其數自身ナリ。

$$a-0=a$$

又 a ヲ引クハ $-a$ ヲ加フルニ同ジキニヨリ、0ヨリ或數ヲ引クトキハ、其數ノ符號ヲ變へタル數ヲ得。

$$0-a=-a$$

(乘法)。或數ト0トノ積ハ常ニ0ニ等シ。

$$0 \times a = a \times 0 = 0$$

累乗積ニテ、因數ノ中ニ0ガアルトキハ、積ハ0ニ等シ。又積ガ0ナルハ、因數ノ中ニ少クトモ一ツハ0ガアルトキニ限ル。

(除法)。 a ガ0ニアラザルトキ、0ヲ a ニテ割ル

トハ、 a ト如何ナル數トノ積ガ0トナルカヲ定ムルコトナリ。サテ a ハ0トナラザルガ故ニ、 a ト0トヲ掛ケ合スルトキニ限リ、積ハ0トナル。故ニ0ヲ a ニテ割リタル商ハ0ナリ。即チ a ガ0ニアラザルトキハ、

$$\frac{0}{a} = 0$$

次ニ a ヲ0ニテ割レバ如何ニトイフニ、0ニ如何ナル數ヲ掛ケテモ積ハ0トナリ、決シテ a トナルコトナシ。故ニ a ヲ0ニテ割ルコトヲ得ズ。又0ヲ0ニテ割レバ如何ニトイフニ、0ニ如何ナル數ヲ掛ケテモ0トナルガ故ニ、商ヲ定ムルコトヲ得ズ。

0ヲ除數トシテ或數ヲ割ルコトヲ得ズ。

43. 代數學ノ公式ハ正數ニモ負數ニモ當テハマルコト。

第一篇ニテ學ビタル四則ニ關スル諸ノ公式ハ、正數ニモ負數ニモ當テハマル。

例ヘバ

$$a-(b-c)=a-b+c$$

トイフ公式ニテ $a=-3, b=-2, c=+5$ トナス
トキハ、左邊ハ

$$-3 - \{-2-5\} \text{ 即チ } 4$$

トナリ、右邊モ亦

$$-3 - (-2+5) \text{ 即チ } 4$$

トナル。

公式ガ負數ニモ當テハマルノミナラズ、正數バ
カリヲ取扱ヘル算術ニテハ、或制限ノ下ニ於テノ
ミ通用スベキ公式ガ、負數ヲモ取扱フ代數學ニテ
ハ、一般ニ通用スル場合アリ。

例ヘバ、算術ニテハ、上ノ公式

$$a-(b-c)=a-b+c$$

ハ a ガ b ヨリ大ナルトキニ限リテ通用スルモノ
ナリ。例ヘバ $a=5, b=7, c=3$ ナルトキハ、左邊ハ
 $5-(7-3)$ 即チ 1 ニ等シ。サテ右邊ハ $5-7+3$ トナ
リ、 5 ヨリ 7 ヲ引クコトハ算術ニテハ出來ザリシ
コトナリ。サレド負數ヲモ用フルトキハ、 $5-7+3$
ハ $-2+3$ 即チヤハリ 1 ニ等シクナリテ、公式ガ當

テハマルナリ。

注意. 正數ノ四則ニ關スル公式ガ負數ニモ
當テハマルトイフハ、奇妙ナルコトノヤウニ見
ユレドモ、實際ハ正數ノ四則ニ關スルスベキノ
公式ニ當テハマルヤウニ、負數ノ四則ノ意味ガ
定メラレタルナリ。例ヘバ、上ノ公式ニテ $b=0,$
 $c=5$ トナストキハ、左邊ハ $a-(0-5)$ 即チ $a-(-5)$
トナリ、右邊ハ $a-0+5$ 即チ $a+5$ トナル。 a ヨリ
 -5 ヲ引クハ a ニ 5 ヲ加フルニ同ジト定メタ
ルハ、之ニ基ヅクナリ。

44. 文字ハ正數ヲモ負數ヲモ 表シ得ベキコト。

代數學ノ公式ハ正數ニモ、負數ニモ當テハマル
ガ故ニ、公式ノ中ノ文字ハ正數ヲモ負數ヲモ表ス
コトヲ得。故ニ例ヘバ、 a ト書キタリトテ、是ハ必
ズシモ正數ヲ表セルニアラズ。又 $-a$ ハ a ノ符
號ヲ變ヘタル數ヲ表ス。是ハ必ズシモ負數ニハ
アラズ。 a ガ 2 ナルトキハ、 $-a$ ハ -2 ヲ表セド
モ、 a ガ -2 ナルトキハ、 $-a$ ハ $+2$ ヲ表スベシ。

文字ガ正數ヲモ負數ヲモ表スコトヲ得ルガタ
メニ、多クノ公式ヲマトメテ一ツノ公式トナスコ
トヲ得ル場合アリ。

例ヘバ第23節ノ公式(1)

$$(a+b)n = an+bn$$

ニテ、 b ノ代ニ $-b$ ヲ入ルルトキハ、

$$\{a+(-b)\}n = an+(-b)n$$

即チ

$$(a-b)n = an-bn$$

ヲ得、是レ即チ第23節ノ公式(3)ナリ。

同ジャウニ、第23節ノ公式(7)

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

ニテ b, d ヲ $-b, -d$ ニ代フルトキハ、公式(8)

$$(a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd$$

ヲ得ベシ。

注意. 代數學ノ公式ハ0ニモ當テハマル、故
ニ又文字ハ0ヲモ表スコトヲ得。但割リ算ノ
除數ガ文字ニテ表サレタルトキニハ、之ヲ0ト
ナスコトヲ得ザルコト勿論ナリ。公式ハ一般
ニ通用ストイフトモ、除數ヲ0トナスコトヲ得

ズトイフ唯一ノ制限アルコトヲ記憶スベシ。

問題 第一

1. $a+b=c$ ナルトキハ、 $c-a$ 及ビ $c-b$ ハ如何。
 $a=5, b=-7$ トシテ先ヅ c ヲ求メ、次ニ結果ヲ驗セ。

2. 公式 $a-(b-c)=a-b+c$ ニテ c ヲ $-c$ ニ變フ
ルトキハ、如何ナル公式ヲ得ルカ。

3. 公式 $(a+b)c=ac+bc$ ニ次ノ數ヲ當テハメテ
之ヲ驗セ。

a	7,	-6,	-3,	4
b	-5,	-4,	-2,	-4
c	4,	-2,	-4,	5

4. 公式 $\frac{x+y}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}$ ニ次ノ數ヲ當テハメテ
之ヲ驗セ。

x	5,	9,	9,	-1
y	3,	-6,	-15,	1
a	2,	3,	-3,	-1

5. 公式 $(a-b)(c-d) = ac-bc-ad+bd$ ニテ $a=0,$
 $c=0$ トナストキハ、如何ナル公式ヲ得ルカ。又之
ヲ言語ニテ言ヒ表セ。

6. 絶對値ガ4ヲ超エザル正及ビ負ノ整數及ビ0ヲ大小ノ順序ニ從ヒテ、順次ニ x ニ當テハメテ、次ノ式ノ値ヲ計算セヨ。

$$(3+x)(x-2)$$

7. $(-a)^2$ 及ビ $-a^2$ ノ意味ヲ説明シ、 a ヲ1トシテ其値ヲ求メヨ。又 a ヲ-1トスルトキハ如何。

8. $(-a)^3$ 及ビ $-a^3$ ノ意味ヲ説明セヨ。又 a ガ負數ナルトキ、此等ノ數ノ符號及ビ絶對値ハ如何。

9. 毎年 a 圓ヲ得テ b 圓ヲ費ス人、現今 s 圓ヲ有ス。 n 年ノ後ニハ、此人幾圓ヲ有スベキカ。

次ノ數ヲ一般ノ結果ニ當テハメヨ。

$$a \quad b \quad s \quad n$$

$$(1) \quad 600, \quad 480, \quad 800, \quad 10$$

$$(2) \quad 600, \quad 750, \quad 800, \quad 5$$

X 10. 華氏寒暖計ノ度數 f ヲ攝氏寒暖計ノ度數 c ニ改ムル公式ヲ作レ。此公式ヲ用ヒテ、次ノ華氏ノ度數ヲ攝氏ノ度數ニ改メヨ。

$$212 \text{ 度}, \quad 50 \text{ 度}, \quad 32 \text{ 度}, \quad 0 \text{ 度}, \quad -13 \text{ 度}, \quad -40 \text{ 度}$$

11. 同一ノ直線上ヲ左ヨリ右ヘ運動スル甲乙二個ノ物ガ、今同ジ處ニアリ。其速度一分毎ニ甲

ハ u 尺、乙ハ v 尺ナリ。今ヨリ n 分ノ後ニハ、甲ハ乙ヨリモ幾尺右ノ方ニアルベキカ。

次ノ數ニツキテ一問題ヲ言明シ、結果ヲ求メ、且其意味ヲ説明セヨ。

$$(1) \quad u = 15, \quad v = 10, \quad n = 4$$

$$(2) \quad u = 10, \quad v = 15, \quad n = 4$$

(3) 甲ハ一分毎ニ十五尺ノ速度ニテ右ヘ動キ、乙ハ一分毎ニ十尺ノ速度ニテ左ヘ動クトキハ、上ノ一般ノ結果ニテ u, v ヲ如何ナル數トナスベキカ。

(4) 今ヨリ四分前ニ於ケル甲乙ノ距離ヲ求ムルニハ、 n ヲ如何ナル數トナスベキカ。

12. 上ノ問題ニテ、甲乙ノ運動ノ方向及ビ時間ノ前後ノ如何ナルニ關セズ、常ニ同ジ式ヲ用ヒテ結果ヲ出スコトヲ得。如何ニスレバヨキカ。又一般ニ結果ガ負數ナルトキハ、其意味如何。

第三篇

整式

第一章 定義

45. 整式。

例へば

$$3ax \quad (1)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{3y}{5} \quad (3)$$

ノ如ク、文字ニテ表サレタル數ヲ除數トセル割リ算ヲ含マス式ヲ整式トイフ。

$$\frac{2a}{3b}, \frac{x+a}{x-a}$$

ナドハ整式ニアラズ、カヤウノ式ヲ分數式トイフ。

46. 項、一項式、多項式。

前節ニテ例ニ舉ゲタル整式ノ中、(1)ハ寄セ算及ビ引キ算ヲ含マズ。カヤウノ式ヲ一項式(又ハ單項式)トイフ。

又(2)ハ a^2 , $2ab$, b^2 ナル一項式ヲ+-ノ記號ニテ

結ビ付ケタルモノナリ。カヤウノ整式ヲ多項式トイフ。此多項式(2)ハ a^2 , $-2ab$, b^2 ナル三ツノ一項式ノ代數和ナリ。此等ノ一項式ヲ多項式ノ項トイフ。

多項式ヲ其項ノ數ニ因リテ二項式、三項式ナドト名ヅクルコトアリ。例へば前節ノ式(3)ハ二項式ニシテ、 $\frac{x}{2}$ 及ビ $-\frac{3y}{5}$ ハ其ニツノ項ナリ。

47. 係數。

例へば $ab \times 2$ ハ a , b 及ビ 2 ノ積ヲ表セリ。サテ因數ノ順序ハ積ニ關係ナキガ故ニ、此積ヲ $2ab$ ト記シテモヨシ。一項式ガ數字ノ因數ヲ含ムトキハ、カヤウニ之ヲ眞先ニ記スヲ法トス。

又 $-7abaab$ ノ如キ積ハ、同ジ因數ヲ集メ、冪ノ記法ヲ用ヒテ $-7a^3b^2$ ト記スナリ。

$2ab$ ノ 2 、又ハ $-7a^3b^2$ ノ -7 ノ如キ、數字ノ因數ヲ此項ノ係數トイフ。

又時トシテハ、例へば $3ax$ ノ x ノミニ著眼シテ、 $3a$ ヲ係數トイフコトアリ。此場合ニハ、精密ニ $3ax$ ニ於ケル x ノ係數ハ $3a$ ナリト斷ルコトヲ忘ルベ

カラス。例へバ $-5abx^2$ = 於ケル x^2 ノ係數ハ $-5ab$
又 $(p-q)x$ = 於ケル x ノ係數ハ $p-q$ ナリ。

注意. $\frac{a}{3}, \frac{-3x}{4}$ ナドハ之ヲ $\frac{1}{3}a, -\frac{3}{4}x$ ト書キテ
モヨシ。故ニ此等ノ式ニテハ $\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$ ヲ係數ト
イヒテヨシ。又 a ノ係數ハ $1, -a$ ノ係數ハ -1
ナリ。

48. 同類項。

例へバ $5x, -3x$

又ハ $2ab, -9ab, -3ab, 5ab$

ノ如ク、文字ニテ表サレタル因數ノ同ジキ項ヲ同
類項トイフ。

$5, -2$ ナドノ如ク數字ノミニテ表サレタル項
モ、同類項ナリ。

同一ノ多項式ノ中ニ含マレタル同類項ハ、之ヲ
約メテ一ツノ項トナスコトヲ得。例へバ

$$5x - 3x = (5 - 3)x = 2x$$

$$2ab - 9ab - 3ab + 5ab$$

$$= (2 - 9 - 3 + 5)ab = -5ab$$

同類項ヲ約ムルニハ、係數ノ代數和

ニ文字ノ部分ヲ附記スベシ。

一般ニ $ax - bx + cx$ ノ如キ式ニテ $a, -b, c$ ヲ係
數ト見做ストキハ、上ノ規則ヲ次ノ如ク式ニ書キ
表スコトヲ得。

$$ax - bx + cx = (a - b + c)x$$

此規則ハ第23節ノ公式(5)ニ基ツクモノナリ。

例. $3a - b - 2a + 5b + 6a - 7b$

$$= (3a - 2a + 6a) + (-b + 5b - 7b)$$

$$= 7a - 3b$$

是ハ代數和ニテ加法ノ順序ヲ變ヘテモヨク
又一部分ツツ加法ヲナシ行キテモヨシトイフ
法則ヲ應用シテ、同類項ヲ約メタルナリ。

49. 整式ノ整頓。

多項式ノ各項ヲ第47節ニ説キタルガ如クニシ
テ、規則正シク記シ、スベテノ同類項ヲ約ムルコト
ヲ式ノ整頓トイフ。スベテ式ハ之ヲ整頓シ、規則
正シク記シテ取扱フコト肝要ナリ。

注意. 式ヲ規則正シク書クトキニハ、文字ヲ
 a, b, c ノ順ニ書クベシ。例へバ $2b + 3a$ ヲ $3a + 2b$,

又 y^2x を xy^2 と書クガ如シ。但、特別ノ理由アルトキハ、固ヨリ此限ニアラズ。

例題

1. $\frac{x^2}{2} - 3x^2y + xy^2 - \frac{2}{3}xy^4$ ナル式ニツキテ、次ノ問ニ答ヘヨ。

- (1) 各項ノ係數。
- (2) 各項ニ於ケル x ノ冪ノ係數。
- (3) 各項ニ於ケル y ノ冪ノ係數。

次ノ式ヲ整頓セヨ。 [2-7]

2. $4a + 5b - 7 - 2a - b + 3$

3. $ab - 12ac - 6cb + 3ac$

4. $-\frac{1}{5}mn + \frac{2}{5}mn + nm$

5. $\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3}$

6. $bc - 6ab + 3cb - ba$

7. $-xy^2 + 9x^2y - yx^2 + 7y^2x$

50. 代數學ノ計算。

算術ニテハ常ニ數字ニテ表サレタル數ヲ取扱フガ故ニ、或式ノ示セル計算ヲ實行スルトキハ、其結果ハ又數字ニテ表サレタル一ツノ數トナル。

例ヘバ $7+5$ ハ 12 ニ等シ。

代數學ニテハ、如何ナル數ヲモ代表シ得ベキ文字ヲ用フルタメニ、稍、趣ヲ異ニセリ。例ヘバ $a+b$ ハ a, b ナル文字ニテ表サレタル二ツノ數ノ和ナル一ツノ數ヲ示セドモ、此式 $a+b$ ヲ一層簡單ニ書キ縮ムルコトヲ得ズ。

a, b ナル文字ガ如何ナル數ヲ表セルカヲ知ルトキ、始メテ計算ヲ實行シテ、此式 $a+b$ ノ數値ヲ求ムルコトヲ得、例ヘバ $a=7, b=5$ ナルトキハ $a+b=12$ トナリ、又 $a=\frac{3}{4}, b=\frac{2}{5}$ ナルトキハ $a+b=\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{23}{20}$ トナル。

サレド或場合ニハ、文字ヲ含メル式ヲ書キ縮ムルコトヲ得。例ヘバ第48節ニ述ベタル同類項ヲ約ムルコトノ如キハ其一例ナリ。

又例ヘバ $2a \times 3b$ ハ 2 ト a トノ積ト、3 ト b トノ積トヲ掛ケ合スベキコトヲ表セリ。サテ累乗積ニテ因數ノ順序ヲ如何ヤウニシテモヨキガ故ニ、上ノ積ヲ $2 \times 3 \times a \times b$ ト書キテモヨク、更ニ之ヲ $6ab$ ト書クコトヲ得。即チ

$$2a \times 3b = 6ab$$

カヤウニ代數學ニ於ケル計算ハ、畢竟式ノ變形、即チ式ノ値ヲ變ヘズシテ其形ヲ簡單ニスルコトニ外ナラズ。

第二章 整式ノ加法及ビ減法

51. 加法。

多項式ノ加法ハ第11節ノ公式

$$a+(b-c+d-e)=a+b-c+d-e$$

ニ基ツク。

例一。 $3x+7y-4z-6 = 5x-3y+z-1$ ヲ加ヘヨ。

$$\begin{aligned} (3x+7y-4z-6)+(5x-3y+z-1) \\ = 3x+7y-4z-6+5x-3y+z-1 \\ = 8x+4y-3z-7 \end{aligned}$$

多項式ヲ加ヘ合スルニハ、スベテノ項ヲ其ママ書キ竝ベテ、同類項ヲ約ムベシ。

例二。 $7ax-5by+3cz$ ト $2by-ax$ ト $3by-5cz$ トノ

和ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned} (7ax-5by+3cz)+(2by-ax)+(3by-5cz) \\ = 7ax-5by+3cz+2by-ax+3by-5cz = 6ax-2cz \end{aligned}$$

又ハ始ヨリ同類項ヲ縦ニソロヘテ書キ竝ベ次ノ如クニシテ計算シテモヨシ。

$$\begin{array}{r} 7ax-5by+3cz \\ -ax+2by \\ \hline 3by-5cz \\ \hline 6ax \qquad -2cz \end{array}$$

52. 應用。

例。甲乙丙ノ三ツノ數アリ。今是ヨリ次ノ三ツノ數ヲ作ル。

- (1) 甲ト乙トノ和ヨリ丙ヲ引キタル殘。
- (2) 乙ト丙トノ和ヨリ甲ヲ引キタル殘。
- (3) 丙ト甲トノ和ヨリ乙ヲ引キタル殘。

此三ツノ數ノ和ヲ簡單ニ書キ表セ。

甲乙丙ノ代ニ a, b, c ト書クトキハ、此等ノ數ハ次ノ如シ。

- (1) $a+b-c$
- (2) $b+c-a$
- (3) $c+a-b$

之ヲ加ヘテ $a+b+c$

ヲ得。故ニ求ムル和ハ、モトノ三ツノ數ノ和ニ等シ。即チ

$$(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)=a+b+c$$

(甲乙丙ヲ 15, 20, 25 トシテ之ヲ驗セ)。

例 題

次ノ多項式ノ和ヲ求メヨ。[1-6]

1. $2a+5b, 7a+3b$
2. $x+3y+5z, 2x+4y-7z$
3. $m-10n, 3m+4n, 12n-5m$
4. $2x+3y-5, 7y-3x+4, 8-5y+4x$
5. $x^2+xy+y^2, -x^2-2xy+3y^2, xy-4y^2$
6. $a+\frac{1}{3}b-\frac{3}{4}c, -\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}b+\frac{1}{2}c, 2a-\frac{2}{3}b$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。[7-9]

7. $(a+b+c+d)+(a-b+c-d)$
 $+ (a-b-c+d) + (a+b-c-d)$
8. $(p^2-pq)+(2p^2+q^2)+(q^2-qp)$
9. $(3x-7y-6z)+(y-8x+2z)+(3z+2x-4y)$
10. 甲乙ノ二ツノ數アリ。甲ノ7倍ト乙ノ3

倍トノ和、及ビ甲ノ4倍ヨリ乙ノ5倍ヲ引キタル差ヲ作り、此二ツヲ加ヘ合セタル結果ヲ簡單ニ書キ表セ。甲乙ヲ 5, 6 トシテ結果ヲ驗セ。

11. 甲乙丙ノ三ツノ數アリ。甲ヨリ乙ヲ引キタル差ト、乙ヨリ丙ヲ引キタル差トノ和ヲ簡單ニ表セ。甲乙丙ヲ 4, 0, -3 トシテ結果ヲ驗セ。

53. 減法。

多項式ノ減法ハ第11節ノ公式

$$a-(b-c+d-e)=a-b+c-d+e$$

ニ基ツク。

例一。 $8a+6c$ ヨリ $5a-7b+8c$ ヲ引ケ。

$$\begin{aligned} (8a+6c)-(5a-7b+8c) \\ =8a+6c-5a+7b-8c \\ =3a+7b-2c \end{aligned}$$

多項式ヲ引クニハ、其各項ノ符號ヲ變ヘテ之ヲ被減數ノ次ニ書キ並べ、同類項ヲ約ムベシ。

例二。 $6xy-4ax-7cx$ ヨリ $3ax-7cx+8xy-by$ ヲ引ケ。

$$\begin{aligned} & (6xy - 4ax - 7cz) - (3ax - 7cz + 8xy - by) \\ & = 6xy - 4ax - 7cz - 3ax + 7cz - 8xy + by \\ & = -2xy - 7ax + by \end{aligned}$$

又ハ始ヨリ同類項ヲ縦ニソロヘテ書キ、次ノ如クニシテ計算シテモヨシ。

$$\begin{array}{r} 6xy - 4ax \quad -7cz \\ 8xy + 3ax - by - 7cz \\ \hline -2xy - 7ax + by \end{array}$$

例題

次ノ引キ算ヲナセ。[1-5]

1. $(12a - 5b) - (9a - 13b)$
2. $(-7a + 3b - 4c) - (6a - 5c + 3b)$
3. $(2x + 5y - 7z) - (4y - 8x - 10z)$
4. $(7l + 15m - 5n) - (-18m - 2l + 6n)$
5. $\left(p^2 - \frac{2}{3}pq - \frac{1}{2}q^2\right) - \left(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}pq + \frac{3}{4}q^2\right)$
6. 0ヨリ $8mx + 6mn - 3ny - 7m^2$ ヲ引ケ。
7. xy ヨリ $x^2 - y^2 + \frac{1}{2}xy$ ヲ引ケ。
8. $7a - 2b + 6c =$ 如何ナル式ヲ加フルトキハ、
 $2a + 8c - 5b$ ヲ得ルカ。

次ノ計算ノ結果ヲ簡明ニ書キ表セ。[9-10]

9. 甲乙二數ノ和ヨリ其差ヲ引キタル殘。
10. 甲乙二ツノ數アルトキ、甲ノ8倍ト乙ノ5倍トノ和ヨリ、甲ノ3倍ト乙ノ4倍トノ差ヲ引キタル殘。

54. 括弧用法。

第11節ニ擧ゲタル公式

$$a + (b - c + d - e) = a + b - c + d - e \quad (1)$$

$$a - (b - c + d - e) = a - b + c - d + e \quad (2)$$

ヲ見ルニ、

(1)ニテハ、左邊ノ括弧ヲ取り去リタル式ガ其マ右邊ニアリ。

一般ニ、+ノ次ニ來ル括弧ハ其ママ取去リテヨシ。又逆ニ二ツ以上ノ項ヲ其ママ括弧ノ中ニ入レテ、其前ニ符號+ヲ附ケテモヨシ。

例一. $(a+b) + (a-b) = a+b+a-b = 2a$

例二. $2x+3y-5z = 2x+(3y-5z)$

例三. $2x-3y+5z = 2x+(-3y+5z)$

又(2)ニテハ、左邊ノ括弧ノ中ニ包マレタル $+b$
 $-c$, $+d$, $-e$ ナル項ガ、右邊ニテハイヅレモ其符號
 ヲ變ヘテ $-b$, $+c$, $-d$, $+e$ トナリタリ。

一般ニ、 $-$ ノ次ニ來ル括弧ヲ取去ル
 トキハ、同時ニ之ニ包マレタル各項ノ
 符號ヲ變フベシ。又逆ニ二ツ以上ノ
 項ヲ、符號ヲ變ヘテ括弧ノ中ニ入レテ、
 其前ニ符號 $-$ ヲ附ケテモヨシ。

例四。 $a+b-(a-b)=a+b-a+b=2b$

例五。 $x-y+z=x-(y-z)$

例六。 $x+y-z=x-(-y+z)$

例七。 $a-\{a-(b-c)\}=a-\{a-b+c\}$
 $=a-a+b-c=b-c$

又ハ $a-\{a-(b-c)\}=a-a+(b-c)=b-c$

外ノ括弧ニ包マレタル項ハ a ト $-(b-c)$ トナ
 リ。故ニ外ノ括弧ヲ取去リタルトキハ、 $-(b-c)$
 ヲ $+(b-c)$ ニ變ヘタリ。 $(b-c)$ ヲ一ツノ文字ノヤ
 ウニ取扱フベキコトニ注意スベシ。

例題

次ノ式ノ括弧ヲ取去リテ、整頓セヨ。 [1-8]

1. $a+(2a-b)-(a-2b)$

2. $(x-y)-(2y-3x+5)+(2x-3y+5)$

3. $7p-\left(\frac{1}{2}p+r\right)-\left(p-\frac{1}{3}r\right)$

4. $a-\{b-(a-c)\}$

5. $-(x^2-y^2)-\{y^2-(x^2-z^2)\}$

6. $ab-(a+b)-\{ab-(a-b)\}$

7. $2a-\{b-(a-2b)\}$

8. $-\{a-(b-c)\}-\{b-(c-a)\}-\{c-(a-b)\}$

次ノ式ノ大ナル括弧 $\{ \}$ ノミヲ取去リ、結果ヲ簡
 單ニセヨ。 [9-10]

9. $a-\{c-(a-c)\}$

10. $\{a+(b-c)\}+\{5x-(b-c)\}-\{2a-(b-c)\}$

11. (1) $x+y-2z-3w$, (2) $2a-3b+5c-d$ ナル式

ニテ、第二項以下ヲ括弧ノ中ニ入レ、其括弧ノ前ニ
 符號 $+$ ノ附クヤウニセヨ。又符號 $-$ ノ附クヤウ
 ニセヨ。

第三章 整式ノ乘法

55. 一項式ノ乘法。

一項式ノ乘法ハ、第14, 23, 27節ニ説キタル累乗積及ビ冪ノ積ニ關スル法則ニ基ヅク。

例一。 $3a \times 7b = 3 \times 7 \times a \times b = 21ab$

例二。 $8ab \times (-2ac) = 8 \times (-2) \times aabc = -16a^2bc$

例三。 $6a^2bx \times (-8ab^2) \times (-2abx^2)$
 $= 6 \times (-8) \times (-2) \times a^2aabb^2bxx^2 = 96a^4b^4x^3$

一項式ノ積ヲ作ルニハ、先ヅ符號ニ注意シテ係數ヲ掛ケ合セ、次ニ同ジ文字ノ冪ヲ約ムベシ。

例題

次ノ積ヲ求メヨ。 [1-6]

1. $5a \times 12b$

2. $8x \times (-2y)$

3. $-4ax \times bx$

4. $5a^2 \times 3bc \times (-7ab^2c^2)$

5. $-3ax \times \frac{1}{2}ay \times \left(-\frac{2}{3}xy\right)$

6. $\frac{4}{5}x^2y \times \left(-\frac{1}{4}y^2z\right) \times 5z^2x$

次ノ冪ヲ簡單ニセヨ。 [7-12]

7. $(x^2)^2$ 8. $(-xy^2)^2$ 9. $(-xy^2)^3$
 10. $\left(\frac{1}{2}a^3\right)^2$ 11. $\left(-\frac{1}{3}a^2bx\right)^3$ 12. $\left(-\frac{2}{3}ab^2c^2\right)^2$

56. 多項式ト一項式トノ乘法。

多項式ト一項式トノ乘法ハ、第23節ノ公式(6)

$$n(a-b+c) = na - nb + nc$$

ニ基ヅク。

例一。 $4(x-y+z) = 4x - 4y + 4z$

例二。 $-\frac{2}{5}(5a-10b-2c)$
 $= \left(-\frac{2}{5}\right)5a + \left(-\frac{2}{5}\right)(-10b) + \left(-\frac{2}{5}\right)(-2c)$
 $= -2a + 4b + \frac{4}{5}c$

例三。 $-3ax(7x-2y-1) = -21ax^2 + 6axy + 3ax$

多項式ニ一項式ヲ乘ズルニハ、符號ニ注意シテ、多項式ノ各項ニ此一項式ヲ乘ズベシ。

例題

次ノ積ヲ求メヨ。 [1-8]

1. $8(3a-7b+c)$

2. $-12(x^2-2xy+y^2)$

$$3. \frac{5}{7}(ab-bc+ca) \quad 4. (mn+2m-3n) \times \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$5. 2p(5a-4b-7c) \quad 6. -5ab(2a^2-7ab-5b^2)$$

$$7. \frac{3}{8}pq\left(-\frac{1}{3}pq+\frac{2}{3}p^2-\frac{8}{9}q^2\right)$$

$$8. \left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}xy-y^2\right) \times (-3xy)$$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。[9-12]

$$9. a(a+b-c)+b(b+c-a)+c(c+a-b)$$

$$10. x-2(y+3x)-3\{y+2(x-y)\}$$

$$11. 3(6x+15)-5(8x-10)-7(4x-7)$$

$$12. 12\left\{\frac{3}{2}(x-1)-\frac{2}{3}(x+2)+\frac{1}{4}(x-3)-4\right\}$$

57. 多項式ノ乘法。

$$\begin{aligned} \text{例へバ} \quad (a-b+c)(x-y) \\ &= a(x-y)-b(x-y)+c(x-y) \\ &= (ax-ay)-(bx-by)+(cx-cy) \\ &= ax-ay-bx+by+cx-cy \end{aligned}$$

二ツノ多項式ヲ掛ケ合スルニハ、第一ノ多項式ノ各項ト第二ノ多項式ノ各項トヲ、符號ニ注意シテ掛ケ合セテ、其代數和ヲ作レ。

上ノ例ニテ、例へバ a ト x トノ積ハ ax 、 $-b$ ト x トノ積ハ $-bx$ 、又 $-b$ ト $-y$ トノ積ハ $+by$ トナリテ、積ノ中ニ現レタリ。

$$\text{例一. } (x+y)(x-y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$

$$\begin{aligned} \text{例二. } (3a-b)(2a+5b) &= 6a^2 + 15ab - 2ab - 5b^2 \\ &= 6a^2 + 13ab - 5b^2 \end{aligned}$$

例 題

次ノ積ヲ求メヨ。[1-10]

$$1. (a+b)(a+2b)$$

$$2. (2x-y)(x+2y)$$

$$3. (a-5)(2-a)$$

$$4. (ax+by)(ax-by)$$

$$5. (mx+ny)^2$$

$$6. \left(3-\frac{1}{2}p\right)\left(7-\frac{2}{3}q\right)$$

$$7. (x+y-z)(x-y+z) \quad 8. (2a-b+c)(2a+b-c)$$

$$9. (a-b)(a^2+ab+b^2) \quad 10. (a-b)(b-c)(c-a)$$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。[11-12]

$$11. (7x-4)(x-3)-(26-7x)(1-x)$$

$$12. (a+b)(x-y)-(a-b)(x+y)$$

58. 乘法ノ公式。

次ニ乘法ニ關スル二三ノ重要ナル公式ヲ掲グ。此等ノ公式ハ斷エズ應用セララルモノナルガ故

ニ、之ヲ記憶スルコトヲ要ス。

$$\left. \begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

第一ノ式ニテ b ヲ $-b$ ニ代フルトキハ第二ノ式ヲ得。(掛ケ算ヲナシテ此公式ヲ確メヨ)。

二ツノ數ノ和ノ平方ハ此等ノ數ノ平方ト此等ノ數ノ積ノ二倍トノ和ニ等シク、又二ツノ數ノ差ノ平方ハ此等ノ數ノ平方ノ和ヨリ此等ノ數ノ積ノ二倍ヲ減ジタル差ニ等シ。

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (II)$$

二ツノ數ノ和ト差トノ積ハ此等ノ數ノ平方ノ差ニ等シ。

此等ノ公式ヲ求積ノ問題ニツキテ、次ノ如クニ説明スルコトヲ得。

次ノ圖ニテ ABCD, AEKG, KHCF ハイヅレモ正方形ナリトス。即チ正方形 ABCD ハ直線 EKF 及ビ GKH ニヨリテ二ツノ正方形ト二ツノ相等シキ矩形トニ分タレタリ。今 AE, EB ノ長サヲソ

レゾレ a, b トシ正方形

ABCD ノ面積ヲ二様ニ

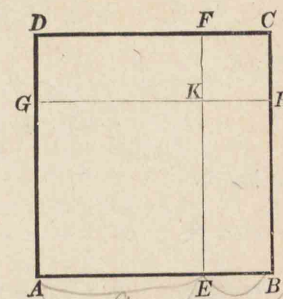
算スルトキハ (I) ノ第一ノ

式ヲ得ベシ。

又 AB, EB ノ長サヲソレ

ゾレ a, b トシテ、(I) ノ第二

ノ式ヲ説明シ、又 AB, AE ノ長サヲ a, b トシテ (II) ノ公式ヲ説明スルコトヲ得。



公式 (I), (II) ヲ應用シテ計算ヲ手短ニナシ得ベキ場合少カラズ。

例一. $19^2 = (20-1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

例二. $72 \times 68 = (70+2)(70-2) = 70^2 - 2^2 = 4896$

例三. $(ay-bx)^2 = (ay)^2 - 2ay(bx) + (bx)^2$
 $= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$

例四. $(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2$
 $= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

例五. $(x-y+z)(x+y-z) = \{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$
 $= x^2 - (y-z)^2 = x^2 - (y^2 - 2yz + z^2)$
 $= x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$

二項式ノ積ヲ計算スルニ、次ノ公式ニヨルコトヲ得。

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad (\text{III})$$

此式ニテ b ヲ a ニ代フルトキハ (I) ヲ得、又 b ヲ $-a$ ニ代フルトキハ (II) ヲ得。

$$\begin{aligned} \text{例六. } (x+3)(x+2) &= x^2 + (3+2)x + 3 \times 2 \\ &= x^2 + 5x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例七. } (a-3)(a+2) &= a^2 + (-3+2)a + (-3) \times 2 \\ &= a^2 - a - 6 \end{aligned}$$

立方ヲ含メル公式ノ中、最モ重要ナルハ次ノ二ツナリ。

$$\left. \begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

$$\left. \begin{aligned} (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 - b^3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 + b^3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

(IV), (V) ノ第一ノ式ニテ b ヲ $-b$ ニ代フルトキハ第二ノ式ヲ得。

問題 第二

公式ヲ應用シテ次ノ掛ケ算ノ結果ヲ求メヨ。

[1-20]

$$1. 31^2 \quad 2. 98^2 \quad 3. 53 \times 47$$

$$4. (3a-7)^2 \quad 5. (-4x+3y)^2$$

$$6. (5a-2)(5a+2) \quad 7. (-2x+y)(-2x-y)$$

$$8. (a+b+c)(a+b-c) \quad 9. (a+b+c)(a-b-c)$$

$$10. (x+y)^2(x-y)^2 \quad 11. (x-a)(x+a)(x^2+a^2)$$

$$12. (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$13. (x+6)(x+8), (x-6)(x-8), (x-6)(x+8), (x+6)(x-8)$$

$$14. (2a+5b)(2a-7b) \quad 15. (2-7x)(5-7x)$$

$$16. (b-c)(c-a) \quad 17. (a+b+2c)(a+b-3c)$$

$$18. (x-2y)^3 \quad 19. (a+b+c)^3$$

$$20. (x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

21. 第58節公式(III), 例四ノ公式及ビ(IV)ノ第一ノ式ヲ求積ノ問題ニヨリテ説明セヨ。

22. 直線 AB ノ中點ヲ M トシ、此直線又ハ其延長ノ上ノ一點ヲ P トスルトキ、 AP , PB ヲ二ツノ邊トスル矩形ノ面積ハ AM , MP ヲ邊トセル二ツノ正方形ノ面積ノ差ニ等シキコトヲ説明セヨ。

第四章 整式ノ除法

59. 一項式ノ除法。

例一. $12ab$ ヲ $3a$ ニテ割レ。

$$\frac{12ab}{3a} = \frac{12}{3} \times \frac{a}{a} \times b = 4b$$

例二. $-14a^2bc$ ヲ $7ab$ ニテ割レ。

$$\frac{-14a^2bc}{7ab} = \frac{-14}{7} \times \frac{a^2}{a} \times \frac{b}{b} \times c = -2ac$$

例三. $6x^4y^2z$ ヲ $-8x^2yz$ ニテ割レ。

$$\frac{6x^4y^2z}{-8x^2yz} = \frac{6}{-8} \times \frac{x^4}{x^2} \times \frac{y^2}{y} \times \frac{z}{z} = -\frac{3}{4}x^2y$$

二ツノ一項式ノ商ヲ作ルニハ、先ツ符號ニ注意シテ係數ノ除法ヲ行ヒ、次に被除數ノ文字ノ因數ノ中ヨリ除數ノ文字ノ因數ヲ盡ク取り去ルベシ。

同ジ文字ノ冪ガ被除數ニモ除數ニモ含マレタルトキニハ、第27節ニ説キタル冪ノ除法ヲ應用スベシ。

例四. $12(a-b)^2xy$ ヲ $3(a-b)x$ ニテ割レ。

$$\frac{12(a-b)^2xy}{3(a-b)x} = 4(a-b)y$$

被除數及ビ除數ノ因數ノ中ニ括弧ニ包マレタル式ガアルトキハ、之ヲ一ツノ文字ノヤウニ取扱ヒテ、割リ算ヲ行フコトヲ得。

例題

次ノ商ヲ求メヨ。

1. $\frac{8ab}{4a}$

2. $\frac{15x^2y}{3xy}$

3. $\frac{2m^2n}{-3n}$

4. $\frac{mnp}{-7mnp}$

5. $\frac{-9a^2bc^4}{-6abc}$

6. $\frac{1}{3}x^3y^2z \div \frac{1}{6}x^2yz$

7. $-\frac{4}{5}a^2b^3x^5 \div \left(-\frac{4}{7}b^2x^5\right)$

8. $m^2p^5x \div \left(-\frac{8}{15}p^3\right)$

9. $\frac{6a^2bx-y^3}{2a(x-y)^2}$

60. 法ガ一項式ナル場合ノ除法。

多項式ヲ一項式ニテ割ルコトハ公式

$$\frac{an-bn+cn}{n} = a-b+c$$

ニ基ツク。(第15節(I), 第20節参照)

例一. $6ad+4bd-8cd$ ヲ $2d$ ニテ割レ。

$$\frac{6ad+4bd-8cd}{2d} = \frac{6ad}{2d} + \frac{4bd}{2d} - \frac{8cd}{2d} = 3a+2b-4c$$

例二. $12a-18a^2+15abx$ ヲ $-6a$ ニテ割レ。

$$\frac{12a-18a^2+15abx}{-6a} = -2+3a-\frac{5}{2}bx$$

多項式ヲ一項式ニテ割ルニハ、符號ニ注意シテ、多項式ノ各項ヲ此一項式ニテ割ルベシ。

例 題

次ノ商ヲ求メヨ。

1. $\frac{8a^2-16ab}{8}$

2. $\frac{21ab+28a^2}{7a}$

3. $\frac{x^2yz-xy^2z+xyz^2}{xyz}$

4. $\frac{18ax+6a^2x-24a^2x^2}{-12ax}$

5. $\frac{21mx+9m^2-12m^2x}{-6m}$

問題 第三

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。 [1-10]

1. $(x-2)(x+9)-(x-7)(x-6)$

2. $(3x-1)(2-x)-2(x+2)(x-3)$

3. $(x-a)(2x-b)-(x-b)(2x-a)$

4. $\{(x+a)+(x-a)\}\{(x+a)-(x-a)\}$

5. $a^2-(a-2)(a-1)$

6. $(x+y)^2-(x+y-2)(x+y-1)$

7. $(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)$

8. $(a-b)(c-d)+(a-c)(d-b)+(a-d)(b-c)$

9. $6\left(\frac{3x-1}{2}-\frac{2x-5}{3}\right)$

10. $15\left(x+\frac{5x-8}{3}-\frac{3x-8}{5}\right)$

11. 或矩形ノ地所ノ間口ハ a 間ニテ、奥行ハ是ヨリ b 間ダケ長シ。此地所ノ周圍及ビ面積ヲ求メヨ。

12. 直方體ノ高サハ a 尺ニシテ、底ノ二ツノ邊ハ高サノ m 倍及ビ n 倍ナリ。體積及ビ面積ハ幾許ナルカ。

13. 邊ノ長サ a 間ナル正方形ノ一邊ヲ b 間延バシ、他ノ一邊ヲ b 間縮メテ矩形ヲ作ルトキハ、面積ノ増減幾許ナルカ。

14. 一直線上ニ四ツノ點 A, B, C, D ヲ順次ニ探ルトキ、AB, CD ヲ邊トセル矩形ト AD, BC ヲ邊トセル矩形トノ面積ノ和ハ、AC, BD ヲ邊トセル矩形ノ面積ニ等シ。之ヲ證明セヨ。

15. 二桁ノ整数ト其數字ヲ逆ノ順序ニ書キテ作リタル數トノ和(又ハ差)ハ 11(又ハ 9)ニテ割り切レル。其商ハ如何ナル數カ。例ヲ舉ゲヨ。

16. 或整数ト其數字ノ和トノ差ハ9ニテ割リ切レルコトヲ四桁ノ整数ニツキテ證明セヨ。

17. 甲乙二種ノ米アリ。一升ノ價、甲ハ a 錢ニテ、乙ハ是ヨリモ d 錢ダケヤスシ。甲三升、乙二升ヲ混ズルトキハ、平均一升ノ價幾許ナルカ。

a ヲ18, d ヲ5トシテ、問題ヲ言明シ、結果ヲ計算セヨ。

18. 甲乙丙ノ三ツノ數アリ。先ヅ甲ト乙トヲ平均シ、其結果ヲ更ニ丙ト平均セリ。此結果ヲ式ニ書ケ。又是ト甲乙丙ノ平均トノ差ヲ求メヨ。

甲乙丙ヲ96, 90, 87トシテ驗セ。

19. 次ノ計算ヲ式ニ表シ其結果ヲ簡單ニセヨ。

- (1) 二數ノ和ノ半分ニ差ノ半分ヲ加フ。
- (2) 二數ノ和ノ半分ヨリ差ノ半分ヲ引ク。
- (3) 二數ノ和ノ半分ヨリ一方ノ數ヲ引ク。
- (4) 二數ノ差ノ半分ヲ被減數ヨリ引ク。

20. 二ツノ數ノ積ハ其和ノ半分ト差ノ半分トノ平方ノ差ニ等シ。之ヲ證明セヨ。

第五章 多項式ノ乘法及ビ 除法ノ續キ

61. 整式ノ次數。

例ヘバ, $2ax^2$ (即チ $2axx$) ナル一項式ハ文字ニテ表サレタル因數三ツヲ含メリ。故ニ之ヲ三次ノ式トイフ。又 $a^2-2ab+b^2$ ナル三項式ノ三ツノ項ハイツレモ二次ナリ。

一項式ニ含マレタル文字ノ因數ノ數ヲ此一項式ノ次數トイフ。

但、幕トシテ入リタル文字ハ、其指數ノ示セルダケ數フベキモノトス。

多項式ノ各項ノ次數ノ中ノ最大ナルモノヲ此多項式ノ次數トイフ。

例ヘバ, x^3-3x^2+3x-1 ハ三次ノ式ナリ。

又 $2ax^2$ ニテ、特ニ x ナル文字ノミニツキテ言フトキハ、此式ハ x ナル因數二ツヲ含メリ。故ニ之ヲ x ニツキテハ二次ナリトイフ。 $a^2-2ab+b^2$ ノ第一項、第二項、第三項ハ a ニツキテハ二次、一次、零次

ニテ、又 b ニツキテハ零次、一次、二次ナリ。

同ジャウニ、 ax^2+bx+c ハ x ニツキテハ二次ノ式ナリ。

62. 昇冪及ビ降冪。

前節ノ多項式 $a^2-2ab+b^2$ ノ第一項、第二項、第三項ハ、 a ニツキテ順次ニ二次、一次、零次ニテ、即チ此式ハ a ノ降冪ニ排列セラレタリ。又 b ニツキテハ、順序ニ零次、一次、二次ニテ、即チ此式ハ b ノ昇冪ニ排列セラレタリ。又

$$x^3-3x^2+3x-1$$

ハ x ノ降冪ニ排列セラレ、

$$3-7y^2+5y^3$$

ハ y ノ昇冪ニ排列セラル。

$$x^3+2y^3-3axy^2$$

ハ x ニツキテモ、 y ニツキテモ不規則ニ排列セラレタルガ、今項ノ順序ヲ變ヘテ

$$x^3-3axy^2+2y^3$$

ト書クトキハ、此式ハ x ノ降冪ニ排列セラレ、同時ニ y ノ昇冪ニ排列セラル。

例 題

1. $yx^2-3x^2y+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}xy^2$ ナル式ニテ、各項ノ次數、式ノ次數、 x ニツキテノ各項ノ次數及ビ x ニツキテノ式ノ次數ハ幾許ナルカ。又 y ニツキテハ如何。

2. $x^3+y^3+1-3xy$ フ x ノ降冪ニ排列セヨ。

63. 多項式ノ乘法。

例一. $3x^2+2x+5 = x+2$ フ掛ケヨ。

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+5 \\ x+2 \\ \hline 3x^3+2x^2+5x \dots\dots\dots (3x^2+2x+5) \times x \\ 6x^2+4x+10 \dots\dots\dots (3x^2+2x+5) \times 2 \\ \hline 3x^3+8x^2+9x+10 \end{array}$$

乗數ノ二ツノ項 x 及ビ 2 フ被乘數ノ各項ニ掛ケテ得タル、スベテノ一項式ヲ加フルトキハ、求ムル積ヲ得ベシ。

サテ上ノ演算ニテハ因數ヲ x ノ降冪ニ排列シテ、算術ニ於ケル掛ケ算ノ如クニ計算ヲナシ、同類項ヲ約ムル便利ヲ圖リタルナリ。

例二. $x^3-2x+1 = x^2-4x-2$ フ掛ケヨ。

$$\begin{array}{r} x^3 \quad -2x + 1 \\ x^2 - 4x - 2 \\ \hline x^5 \quad -2x^3 + x^2 \\ -4x^4 \quad +8x^2 - 4x \\ \hline \quad -2x^3 \quad +4x - 2 \\ x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 9x^2 \quad -2 \end{array}$$

上ノ例ニテ、被乗數ニ二次ノ項ガ缺ケタルニヨリ、其位置ヲ空ケタルコトニ注意スベシ。

注意。上ノ如キ方法ニテ掛ケ算ヲ行フトキニハ、先ヅ因數ヲ或文字ノ降冪(又ハ昇冪)ニ排列シテ後、計算ヲ始ムルコト肝要ナリ。

例題

次ノ積ヲ計算セヨ。

1. $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
2. $(x^3 + x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$
3. $(1 + 4x - 10x^2)(1 - 6x + 3x^2)$
4. $(x^3 - 2x - 1)(x^2 + x + 1)$
5. $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x + y)$
6. $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a + b + c)$
7. $(a - 3)(a - 1)(2 + a)(5 + a)$
8. $(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)(1 - x^2 + x^4)$

64. 多項式ノ除法。

例一。 $2a^2 + 3ab + b^2$ ヲ $a + b$ ニテ割レ。

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \text{商} \\ a+b \overline{) 2a^2 + 3ab + b^2} \\ \underline{2a^2 + 2ab \dots\dots\dots} (a+b)2a \\ ab + b^2 \\ \underline{ ab + b^2 \dots\dots\dots} (a+b)b \end{array}$$

ココニ實及ビ法ハ a ノ降冪ニ排列セラレタリ。先ヅ實ノ始ノ項 $2a^2$ ヲ法ノ始ノ項 a ニテ割リ、 $2a$ ヲ得。是レ即チ商ノ第一項ナリ。之ヲ法 $a + b$ ニ掛ケテ、其積ヲ實ヨリ引キ、殘 $ab + b^2$ ヲ得。

次ニ殘ノ中、 a ニツキテ最モ高キ次數ノ項 ab ヲ法ノ始ノ項 a ニテ割リ、 b ヲ得。是レ即チ商ノ第二項ナリ。之ヲ法 $a + b$ ニ掛ケテ、其積ヲ第一段ノ殘ヨリ引クニ、殘ナシ。

第一段ニテ實ヨリ引キタルハ、法 $a + b$ ト $2a$ トノ積ニテ、第二段ニテ引キタルハ、法 $a + b$ ト b トノ積ナリ。

ツマリ、全體ニテ法 $a + b$ ト $2a + b$ トノ積ヲ、實ヨリ引キテ、殘ナシ。即チ

$$\begin{aligned} 2a^2 + 3ab + b^2 &= (a + b)(2a + b) \\ \text{故ニ} \quad \frac{2a^2 + 3ab + b^2}{a + b} &= 2a + b \end{aligned}$$

例二。 $x^3 - a^3$ を $x - a$ にて割る。

$$\begin{array}{r} x^2 + ax + a^2 \quad \text{商} \\ x-a \overline{) x^3 - a^3} \\ \underline{x^3 - ax^2} \\ ax^2 \\ \underline{ax^2 - a^2x} \\ a^2x - a^3 \\ \underline{a^2x - a^3} \\ 0 \end{array}$$

即ち

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$$

例三。 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ を $a + b + c$ にて割る。

$$\begin{array}{r} a^2 - a(b+c) + (b^2 - bc + c^2) \\ a+(b+c) \overline{) a^3 - 3abc + (b^3 + c^3)} \\ \underline{a^3 + a^2(b+c)} \\ -a^2(b+c) - 3abc \\ \underline{-a^2(b+c) - a(b+c)^2} \\ a(b^2 - bc + c^2) + (b^3 + c^3) \\ \underline{a(b^2 - bc + c^2) + (b^3 + c^3)} \\ 0 \end{array}$$

此例ニテハ、被除数及ビ除数ヲ a ノ降冪ニ排列シ、且 a ニツキテ同ジ次数ノ項ヲ括リテ、計算シタリ。

上ノ結果ヲ次ノ如クニ書クコトヲ得。

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

65. 多項式ノ除法ノ残。

例ヘバ $2x^3 - 7x^2 + 8x + 4$ を $x^2 - x + 1$ にて割ルニ、實

及ビ法ヲ x ノ降冪ニ排列シテ、演算ヲ行フトキ、

$$\begin{array}{r} 2x - 5 \\ x^2 - x + 1 \overline{) 2x^3 - 7x^2 + 8x + 4} \\ \underline{2x^3 - 2x^2 + 2x} \\ -5x^2 + 6x + 4 \\ \underline{-5x^2 + 5x - 5} \\ x + 9 \end{array}$$

第二段ニ至リ、商ノ二ツノ項 $2x - 5$ ト残 $x + 9$ トヲ得。此残 $x + 9$ ハ除数 $x^2 - x + 1$ ヨリモ、 x ニツキテ次数低キガ故ニ、ナホ割リ算ヲ繼續セントスルトキハ、商ノ第三項ハ $\frac{1}{x}$ トナリテ、分母ニ x ヲ含メル分数式トナル。ヨリテ第二段ニテ演算ヲ止ムベシ。

サテ上ノ演算ハ、被除数ヨリ除数ト $2x - 5$ トノ積ヲ引キタル残ガ、 $x + 9$ ニ等シキコトヲ示ス。即ち此演算ノ結果ハ、次ノ式ニテ表サルベシ、

$$2x^3 - 7x^2 + 8x + 4 = (x^2 - x + 1)(2x - 5) + (x + 9)$$

或ハ

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 8x + 4}{x^2 - x + 1} = 2x - 5 + \frac{x + 9}{x^2 - x + 1}$$

$2x - 5$ ヲ商ノ整式ノ部分、 $x + 9$ ヲ除法ノ残トイフ。

一ツノ多項式ヲ他ノ多項式ニテ割ルトキ、除数ヲ或文字ノ降冪ニ排列シテ、割リ算ヲ行フトキハ、残ハ其文字ニ

ツキテ除數ヨリモ低キ次數ヲ有ス。

例ヘバ、上ノ例ニテ除數ハ x ニツキテ二次、殘ハ一次ナリ。

一般ニ、整式 A ヲ整式 B ニテ割リ、商ノ整式ノ部分 Q 及ビ殘 R ヲ得タリトスルトキハ、

$$A = BQ + R$$

此式ニヨリテ割リ算ノ結果ヲ驗スコトヲ得。

注意。商ガ分數式ヲ含ミテモヨシトスレバ、勿論何處マデモ割リ算ヲ續ケ行クコトヲ得。サスレバ殘モ又分數式ヲ含ムベシ。

又上ニ言ヘルコトハ、除數ヲ或文字ノ降冪ニ排列シテ割リ算ヲ行フ場合ニノミ通用スベキモノナリ。例ヘバ上ノ例ノ二ツノ整式ヲ x ノ昇冪ニ排列シテ割ルトキハ、商モ殘モ、ヤハリ x ノ昇冪ニ排列セラレ、演算ノ進行スルニ從ヒテ殘ノ次數ハ高マリ行クベシ(此計算ヲ試ヨ)。

問題 第四

次ノ問題ニテ前ノ式ヲ後ノ式ニテ割レ。[1-10]

1. $a^2 + 3ab + 2b^2, a + b$

2. $2x^2 + 3x - 35, 2x - 7$

3. $42a^2 - 25a - 1, 6a - 1$

4. $x^2 + 2xy + 2y^2, x - y$

5. $10x^2 + 11ax - 5a^2, 2x + 3a$

6. $x^4 - y^4, x + y$

7. $60a^2 - 46a + 15, 3 - 5a$

8. $x^3 - y^3 + 1 + 3xy, x - y + 1$

9. $a^3 + b^3 + a^2b^2, a^2 + b^2 + ab$

10. $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc,$

$$x^2 - (a + b)x + ab$$

11. $x^3 - 2ax^2 + (a^2 + ab - b^2)x - ab(a - b), x - (a - b)$

12. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + z^3, x + y + z$

13. $2x^3 - 7xy^2 + 3y^3$ ヲ $x + y$ ニテ、始ハ x ノ降冪ニ排列シ、次ニハ y ノ降冪ニ排列シテ割リ、イヅレモ商ノ整式ノ部分及ビ殘ヲ求メヨ。

14. $1 + x^7$ ヲ $1 + x^2$ ニテ割レ(x ノ昇冪ニ排列シテ割リ、商五項ト殘トヲ求メ、計算ノ結果ヲ等式ニ書キ表セ)。

15. 1 ヲ $1 + x$ ニテ割リ、商ヲ x ノ五次ノ項マデ求メ、計算ノ結果ヲ等式ニ書キ表セ。

第四篇 一次方程式

第一章 一元一次方程式

66. 方程式。根。

例へバ、次ノ如キ問題アリ。

或數ニ24ヲ加フルトキハ、丁度モトノ數ノ5倍トナル。或數トハ如何。

此問題ヲ解クガタメニ、求ムル數ヲ x ニテ表ストキハ、題意ニヨリ $5x$ ト $x+24$ トハ相等シカルベシ。即チ

$$5x = x + 24 \quad (1)$$

x ヲ如何ナル數トナサバ、此等式ノ兩邊ノ數値ガ相等シクナルベキカ。カヤウノ數ハ、即チ今求メントスル數ナリ。

等式(1)ハ「 x ガ如何ナル數ヲ表ストモ、兩邊ガ相等シ」トイフ確定ノ事實ヲ明言セルモノニハアラズシテ、「兩邊ガ相等シクナルカヤウニ未知數 x ヲ定

メヨ」トイフ要求ヲ言ヒ表セルモノナリ。

カヤウニ或未知數ヲ定ムルガタメニ、假ニ設ケタル等式ヲ方程式トイフ。

未知數 x ニ或適當ナル數値ヲ與ヘテ、方程式ノ兩邊ヲ相等シクスルコトヲ得タルトキハ、 x ノ此値ハ方程式(ノ要求)ヲ満足セシムトイフ。

方程式ヲ満足セシムル未知數ノ値ヲ此方程式ノ根トイヒ、根ヲ求ムルコトヲ方程式ヲ解クトイフ。

方程式ト區別スルガタメニ、前諸篇ニ舉ゲタル公式ノ如ク、文字ガ如何ナル數ヲ表ストモ、常ニ成立ツ等式ヲ特ニ恒等式トイフ。

67. 一元一次方程式ノ解キ方。^{*}

例一。次ノ方程式ヲ解ケ。

$$5x = x + 24 \quad (1)$$

先ヅ(1)ノ兩邊ヨリ x ヲ引クトキハ、

$$5x - x = 24 \quad (2)$$

ヲ得。

即チ

$$4x = 24$$

* 一元トハ未知數ガ唯一ツナルコト、又一次トハ此未知數ノ一乗ノミガ方程式ニ含まレタルコトヲ表ス。

兩邊ヲ4ニテ割り,

$$x = 6$$

方程式(1)ノ兩邊ハ, x ヲ6トナストキハ,イッ
レモ30トナル。即チ $5 \times 6 = 6 + 24 = 30$

故ニ, $x=6$ ハ方程式(1)ヲ満足セシムルモノニ
シテ,6ハ方程式(1)ノ根ナリ。

例二。次ノ方程式ヲ解ケ。

$$5x = 24 - x \quad (3)$$

兩邊ニ x ヲ加ヘテ,

$$5x + x = 24 \quad (4)$$

即チ $6x = 24$

故ニ $x = 4$

驗。 $5 \times 4 = 24 - 4$

故ニ, $x=4$ ハ方程式(3)ヲ満足セシム。即チ4
ハ方程式(3)ノ根ナリ。

サテ,例一ニテ(1)ト(2)トヲ比較スルニ,(1)ニテ右
邊ニアリシ項 x ハ,(2)ニテハ符號ガ變リテ $-x$ ト
ナリテ左邊ニ移レリ。

又例二ニテ(3)ト(4)トヲ比較スルニ,(3)ニテ右邊
ニアリシ項 $-x$ ハ,(4)ニテハ符號ガ變リテ左邊ニ

移レリ。

一般ニ,方程式ノ兩邊ニ同ジ數ヲ加ヘ又ハ引ク
トイフ筋道ヲ,一一考フルマデモナク,器械的ニ

方程式ノ一邊ノ或項ノ符號ヲ變ヘ
テ之ヲ他ノ邊ニ移シテ差支ナシ。

例三。 $4(3x-2) - 2(4x-17) = 3(4-x)$ ヲ解ケ。

兩邊ノ括弧ヲ外ヅシ,

$$12x - 8 - 8x + 34 = 12 - 3x$$

x ヲ含メル項(未知項)ヲ左邊ニ, x ヲ含マザル項
(既知項)ヲ右邊ニ集メテ,

$$12x - 8x + 3x = 12 + 8 - 34$$

兩邊ヲ約メテ,

$$7x = -14$$

故ニ $x = -2$

驗。 $4\{3 \times (-2) - 2\} - 2\{4 \times (-2) - 17\} = 3\{4 - (-2)\}$

(兩邊共ニ18ニ等シ)

故ニ $x=-2$ ハ求ムル根ナリ。

例四。 $1 - \frac{3x+2}{4} - \frac{x}{2} = 0$ ヲ解ケ。

方程式ニ含マレタル分數ノ分母ノ最小公倍

數 4 ヲ兩邊ニ掛ケテ,

$$4 - (3x + 2) - 2x = 0$$

是ヨリ前ノ如クニシテ,

$$5x = 2$$

ヲ得。兩邊ヲ 5 ニテ割リ,

$$x = \frac{2}{5}$$

ヲ得。

$$\text{驗。} \quad 1 - \frac{3 \times \frac{2}{5} + 2}{4} - \frac{\frac{2}{5}}{2} = 0$$

此例ニ示セルガ如ク、方程式ガ分數ヲ含ムトキニハ、先ヅ分母ノ(最小)公倍数ヲ兩邊ニ掛ケテ、方程式ヲ分數ヲ含マヌ形ニ改ムベシ。カヤウニスルコトヲ分母ヲ拂フトイフ。

以上ノ例ニヨリテ次ノ規則ヲ得。

一元一次方程式ヲ解クニハ、先ヅ分母ヲ拂ヒ、括弧ヲ外ヅシ、未知項ト既知項トヲ別別ニ兩邊ニ集メテ之ヲ約メ、サテ未知數ノ係數ニテ兩邊ヲ割ルベシ。

例 題

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $3x - 2 = 13$

△ 2. $3x - 5 = x + 7$

○ 3. $x + 12 = 33 - 2x$

△ 4. $3(2+x) - 16 = 4(x-1)$

△ 5. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = x - 5$

△ 6. $\frac{x}{2} + 5x + \frac{1}{4} = 4 - \frac{3}{4}x$

7. $\frac{1}{5}(x+2) - \frac{2}{3}(x-1) = 2$

8. $\frac{5x-2}{8} - 6 = \frac{3x-3}{5}$

9. $\frac{3x}{5} - \frac{2x-1}{8} = \frac{x}{2} - \frac{7}{10}$

10. $\frac{2x-5}{3} - \frac{5x-3}{8} + 2\frac{2}{3} = 0$

68. 應用問題。

例一。甲ハ金 56 圓ヲ有シ、乙ハ金 12 圓ヲ有ス。

今甲ヨリ金幾圓ヲ乙ニ與フルトキハ、甲ノ所有金ガ乙ノ所有金ノ 3 倍トナルカ。

求ムル金高ヲ x 圓トス。甲ガ乙ニ x 圓ヲ與

フルトキハ、甲ノ所有金ハ $(56-x)$ 圓、乙ノ所有金ハ $(12+x)$ 圓トナル。ヨリテ次ノ方程式ヲ得。

$$56-x = 3(12+x) \quad (1)$$

之ヲ解キテ、

$$x = 5$$

ヲ得。即チ甲ハ金 5 圓ヲ乙ニ與フベキナリ

$$\begin{array}{l} \text{驗。} \quad 56 - 5 = 51 \\ \quad \quad 12 + 5 = 17 \end{array} \quad \begin{array}{l} 51 \\ 17 \times 3 \end{array}$$

注意。 算術ニテ學ベルガ如キ方法ニテ上ノ問題ヲ解クニハ、次ノ如クニスベシ。

甲乙ノ間ニ金錢ノ移動ハアレドモ、全體ノ金高ハ變ラズ、移動ノ前モ後モ $56+12=68$ 圓^{*}ナリ。サテ移動ノ後ニハ甲ノ所有金ハ乙ノ所有金ノ三倍、從テ全體ノ金高 68 圓ハ乙ノ所有金ノ四倍、即チ乙ノ所有金ハ $68 \div 4 = 17$ 圓^{*}ナルベシ、故ニ乙ハ $17-12=5$ 圓ヲ甲ヨリ受取ルベキナリ。

上ノ方程式(1)ノ兩邊ニ $12+x$ ヲ加フルトキハ

$$68 = 4(12+x)$$

* 本書ニテハ、カヤウノ場合ニ、便宜上、稍、不精確ナガラ、單位ノ名ヲ等式ノ末尾ニ一度ダケ書ク。

ヲ得。兩邊ヲ 4ニテ割リ、

$$17 = 12+x$$

ヲ得。是レ即チ移動後ニ於ケル乙ノ所有金ナルコトニ注意スベシ。

方程式ヲ用フル解法ノ特色ハ一旦問題ノ意味ヲ方程式ニ書キ表シタル上ハ、其後ノ計算ノ意味ヲ一考フルマデモナク、器械的ニ式ノ計算ヲ行ヒテ自然ニ求ムル數ニ到達スルコトヲ得ル所ニアルナリ。

例二。 或人資本金一萬圓ヲ二口ニ分チ、吳服店ト雜貨店トヲ開キタルニ、吳服店ニテハ二割ノ利益ヲ得、雜貨店ニテハ二割ノ損ヲナシ、差引六百圓ノ利益ヲ得タリ。二口ノ資本金各、幾許ナルカ。

吳服店ノ資本金ヲ x 圓トスルトキハ、雜貨店ノ資本金ハ $(10000-x)$ 圓ナリ。サテ題意ニヨリテ次ノ方程式ヲ得。

$$\frac{2}{10}x - \frac{2}{10}(10000-x) = 600$$

之ヲ解キテ、

$$x = 6500$$

ヲ得。

故ニ吳服店ノ資本金ハ 6500 圓, 雜貨店ノ資本金
ハ $10000 - 6500 = 3500$ 圓ナルベシ。

$$\text{驗. } 6500 \times 0.2 = 1300$$

$$3500 \times 0.2 = \frac{700}{600}$$

(上ノ問題ヲ算術ニテ學ベル方法ニテ解キ試
ヨ。又上ノ問題ニテ雜貨店ニ於ケル損失ノ步
合ガ一割五分ナリトスルトキハ如何)。

例三。しつ上等下等合セテ八枚ヲ買ヘリ。其
一枚ノ代金, 上等ハ一圓八十錢, 下等ハ一圓二十錢
ナリ。サテ代金ヲ拂フトキ, 誤リテ上等ト下等ト
ノ枚數ヲ取違へタルガタメニ, 二圓四十錢ダケ拂
ヒ過ギタリ。實際ハ幾許拂ヒテ然ルベキカ。

上等しつ x 枚ヲ買ヘリトスルトキハ, 下等ノ
ハ $8-x$ 枚ヲ買ヘルコトトナル。此代金合セテ,

$$180x + 120(8-x)$$

錢ニシテ, 是レ實際ノ代金ナリ。

今枚數ヲ上下取り換へテ勘定スルトキハ,

$$180(8-x) + 120x$$

錢トナル。サテ是ガ實際ノ代金ヨリ 240 錢ダ

ケ多シトイフガ故ニ, 次ノ方程式ヲ得,

$$180(8-x) + 120x = 180x + 120(8-x) + 240 \quad (1)$$

兩邊ヨリ $120x$ 及ビ $120(8-x)$ ヲ引キテ,

$$60(8-x) = 60x + 240 \quad (2)$$

兩邊ヲ 60 ニテ割リ,

$$8-x = x+4$$

是ヨリ $x = 2$

ヲ得。即チ上等 2 枚, 下等 $8-2$ 即チ 6 枚ヲ買ヘ
リ。故ニ實際拂フベキ代金ハ

$$180 \times 2 + 120 \times 6 = 1080$$

錢, 即チ十圓八十錢ナリ。

$$\text{驗. } 180 \times 6 + 120 \times 2 = 1320, 1320 - 1080 = 240$$

此例ニテ, 方程式ヲ作ルニ, 求ムベキ代金ヲ直ニ
未知數トセザリシコトニ注意スベシ。

注意。又上ノ方程式(1)ヲ解クニハ少シク特
別ノ工夫ヲ用ヒタリ。方程式(2)ハ下等ノしつ
ニ對シテ拂ヒ過ギタル金高ト, 上等しつニ對シ
テ拂ヒ足ラザリシ金高トノ差ガ即チ勘定ノ誤
240 錢ナルコトヲ示ス。始ヨリ此事實ニ着眼
スルトキハ, 上ノ問題ヲ算術ニテ學ベルガ如キ

方法ニテ解クコトヲ得ベシ。(之ヲ試ヨ)。

例題

1. 或數ノ3倍ニ35ヲ加フルトキハ、此數ノ10倍ヲ得。或數トハ如何。
2. 或數ノ5倍ヲ100ヨリ減ジタル殘ハ、其數ヲ48ヨリ減ジタル殘ニ等シ。或數トハ如何。
3. 或數ヨリ18ヲ減ジタル殘ハ、其數ノ五分ノ一ヨリ6ダケ多シ。或數トハ如何。
4. ニツノ數ノ和ハ37ニシテ、大ナル方ハ小ナル方ノ2倍ヨリ5ダケ少シ。此等ノ數ヲ求メヨ。
5. 80ヲ甲乙二部ニ分テ、甲ノ3倍ガ乙ノ5倍ヨリモ104ダケ大キクナルヤウニセヨ。
6. 東ノ倉ニ百二十俵、西ノ倉ニ九十八俵ノ米ヲ積ミタリ。ニツノ倉ノ俵數ヲ等シクスルニハ、東ノ倉ヨリ西ノ倉ニ幾俵ヲ送ルベキカ。
7. 水トあるこゝるトノ混合液若干升ノ中、水ハ全量ノ五分ノ一ヨリ二升少ク、あるこゝるハ全量ノ半分ヨリ三斗二升多シ。水トあるこゝるトノ分量ヲ求メヨ。
8. 周圍ハ百六十間ニシテ、間口ハ奥行ノ七分

ノ三ナル矩形ノ地所ノ面積ヲ求メヨ。

9. 米若干ノ中、半分ハ一升ニツキ二十錢、又四分ノ一ハ十八錢、又其殘ハ十七錢ニテ、此代金合セテ十五圓ナリ。各、幾許ヲ買ヘルカ。
10. 或人某地ニ行カントスルニ、毎時三十二町ノ速サニテ歩行スルトキハ、定刻ヨリ一時間後ルベク、又毎時一里二十四町ヲ走ル人力車ニ乗ルトキハ、定刻ヨリ二十四分早ク到着スベシ。某地マデノ距離幾里ナルカ。

69. 負根ノ解釋。

例。父ハ今年三十七歲、子ハ九歲ナリ。幾年ノ後、父ノ年齢ハ子ノ年齢ノ五倍トナルカ。

x 年ノ後、父ノ年齢 $37+x$ ガ子ノ年齢 $9+x$ ノ5倍トナレリトスルトキハ、次ノ方程式ヲ得。

$$37+x=5(9+x) \quad (I)$$

之ヲ解キテ、

$$x=-2$$

サテ、是ハ何事ヲ示スカ。今ヨリ -2年後トハ、實ハ 2年前トイフコトナリ。之ヲ驗スニ

$$37-2=35 \quad 9-2=7$$

即チ2年前ニハ父ノ年齢ハ35,子ノ年齢ハ7ニシテ,35ハ7ノ5倍ナリ。

若シ問題ノ末段,幾年ノ後トアルヲ改メテ全ヨリ幾年前トナサバ,此年數ヲ x トシテ次ノ方程式ヲ得ベシ。

$$37-x=5(9-x) \quad (2)$$

之ヲ解キテ,

$$x=2$$

ヲ得。

上ノ方程式(1)ノ x ノ符號ヲ變ヘタルモノガ,即チ(2)ナルガ故ニ,(1)ニテ $x=-2$ トナスモ,又ハ(2)ニテ $x=2$ トナスモ,結果ハ同ジコトナリ。即チ $x=-2$ ガ(1)ヲ満足セシムルトキハ, $x=2$ ハ(2)ヲ満足セシムベキナリ。

70. 不可能ナル問題。

例一。甲乙二種ノ茶,一斤ノ價,甲ハ85錢,乙ハ80錢ナリ。兩種合セテ17斤ノ代金13圓ナルトキ,各種ノ斤數ヲ求メヨ。

甲ヲ x 斤トスルトキハ,乙ハ $17-x$ 斤ニシテ,

其代金合セテ $85x+80(17-x)$ 錢ナリ。故ニ,次ノ方程式ヲ得。

$$85x+80(17-x)=1300$$

之ヲ解キテ,

$$x=-12$$

ヲ得。サテ,甲ガ -12 斤ナリトハ意味ナキコトナリ。即チ此問題ニ適スル答ナシ。

注意一。上ノ方程式ノ根ガ負數トナリシハ,左邊ヨリ出ヅル 80×17 ガ右邊ノ1300ヨリ大ナルニヨル。サテ 80×17 ガ1300ヨリ大ナルハ,價ノ安キ乙茶ノミ17斤ニテ,其價既ニ13圓ヲ超過スルコトヲ示ス。

注意二。若シ乙種ノ茶ノ斤數ヲ x ニテ表ストキハ,方程式 $85(17-x)+80x=1300$ ヲ得,之ヲ解キテ $x=29$ ヲ得。サレド乙種ノ茶ノ斤數ハ勿論17ヨリ少キコトヲ要スルガ故ニ,カヤウニシテモ,問題ニ適スル答ノナキコトヲ知ルベシ。

例二。二組ノ學生アリ。甲組ハ45人ニシテ,乙組ハ40人ナリ。今甲組ヨリ幾人ヲ乙組ニ編入スルトキハ,二組ノ人數ガ相等シクナルカ。

甲組ヨリ乙組ニ編入スベキ人數ヲ x トスル
トキハ、次ノ方程式ヲ得。

$$45-x=40+x$$

之ヲ解キテ、

$$x=2\frac{1}{2}$$

ヲ得。サレド人數ハ分數タルコトヲ得ズ。

故ニ此問題ニ適スル答ナシ。

上ノ例一ニテハ、求ムル數ハ17ヨリ小ナル正ノ
數ナルコトヲ要シ、又例二ニテハ、整數ナルコトヲ
要スルガ如ク、方程式ニハ書キ表サレザル或條件
(制限)ガ、問題ノ中ニ含マルルガタメニ、方程式ヨリ
求メタル數ガ問題ニ適合セザルコトアリ。

方程式ヲ應用シテ問題ヲ解クニハ、
先ヅ問題ノ意味ヲ方程式ニ書キ表シ、
次ニ此方程式ヲ解キ、最後ニ方程式ヨ
リ求メタル數ガ問題ニ適合スルカ否
カヲ驗スベシ。

例 題

1. 連続セル三ツノ整數ノ和56ナリ。此等ノ

整數ヲ求メヨ。

2. 今年父ハ三十歳、子ハ四歳ナリ。幾年ノ後
父ノ年齢ガ子ノ年齢ノ四倍トナルカ。

3. 今年父ハ四十五歳、子ハ十九歳ナリ。幾年
ノ後、父ノ年齢ハ子ノ年齢ノ三倍トナルカ。

4. 一斤十七錢五厘ノ砂糖ト十五錢ノト、合セ
テ六十四斤ヲ買ヒ、九圓二十錢ヲ拂ヘリ。各、幾斤
ヲ買ヒタルカ。

5. 甲ハ金70圓ヲ有シ、乙ハ金65圓ヲ有ス。今
甲ガ幾圓ヲ乙ニ與フルトキハ、乙ノ所有金ガ甲ノ
所有金ノ五分ノ四トナルカ。

問 題 第 五

次ノ方程式ヲ解ケ。[1-10]

1. $5x-2\{x+4(1+2x)\}=0$

2. $3x+\frac{x}{5}=2x$

3. $\frac{2x-10}{3}-\frac{3x-40}{11}=15-\frac{57-x}{5}$

4. $\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{4}\right)=4\frac{8}{9}$

5. $3(2x-1)=\frac{2}{3}(2x-1)+7$

6. $1.2x - 7.2 = 0.5x + 12.4$
 7. $2(1.7x - 1) + 5.9 = 3x + 5.22$
 8. $(x-1)(x-2) = (x-3)(x+1)$
 9. $(4x+17)(x-4) + (3x-10)(x+3) = 7(x+3)(x-4)$
 10. $x(x+1)(x+2) = (x-1)(x-2)(x+6)$

11.* 某巡洋艦敵ノ運送船ヲ追跡ス。毎時ノ速度、巡洋艦ハ20哩、運送船ハ16哩、彼我ノ距離36哩ナリ。幾時間ニシテ追及スベキカ。

12. 或國ノ國債、戰爭ノタメニ三分ノ一ヲ増セルガ、平和克復後若干年間ニ一億圓ヲ償却セリ。サテ利率ハ戰爭前ノ五分ヨリ低落シテ、四分五厘トナレルガタメニ、現今支辨スル利子ノ年額ハ戰爭前ニ同ジ。現今ノ國債幾許ナルカ。

13. ニツノ數ノ和ハ16ニシテ、其平方ノ差ハ32ナリ。此ニツノ數ヲ求メヨ。

14. ニツノ數ノ差ハ4ニシテ、其平方ノ差ハ112ナリ。此ニツノ數ヲ求メヨ。

* 一通リ方程式ヲ用ヒテ問題ヲ解クコトニ熟練シタル上ハ、算術ニテナス如キ綜合的ノ解キ方ヲ試ムルコト肝要ナリ。方程式ヲ用フル解法ヨリシテ綜合的ノ解法ノ楔子トナル點ヲ見出スコトニ最モ注意スベシ。

15. 基石ヲ眞四角ニ竝ベントセルニ、十個餘レリ。ヨリテ今一列竝ベ増シテ眞四角ニセントセルニ、十五個不足セリ。基石ノ數ヲ求メヨ。

16. 甲乙二人ノ歳入相等シ。サテ甲ハ毎年其歳入ノ五分ノ一ヲ貯蓄シ、乙ハ毎月甲ヨリモ十圓ヅツ多ク費シ、三年ノ終ニ至リテ六十圓ノ負債ヲ生ゼリ。歳入ヲ求メヨ。

17. 甲ノ所有金ハ乙ノ所有金ヨリモ六圓多シ。サテ始ニ甲ハ乙ノ所有金ニ等シキ金高ヲ乙ニ與へ、次ニ乙ハ甲ノ所有金ニ等シキ金高ヲ甲ニ與へ、次ニ甲ハ又乙ノ所有金ニ等シキ金高ヲ乙ニ與へタルニ、兩人ノ所有金同額トナレリ。甲乙兩人ノ所有金合セテ幾許ナルカ。

18. 金若干圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分配スルニ、甲ハ先ヅ十圓ト殘ノ四分ノ一トヲ取り、次ニ乙ハ二十圓ト殘ノ四分ノ一トヲ取り、丙ハ其殘ヲ悉ク取りテ丁度全額ノ三分ノ一ヲ得タリ。分配セラレタル金額及ビ各ノ取り前ヲ求メヨ。

19. 甲一人ナラバ二十日、乙一人ナラバ三十日ニテ成就スル仕事ヲ、始ニ甲一人ニテ若干日爲シ、

其残ヲ乙一人ニテ引受ケ、甲ヨリ十日多ク働キテ全ク成就セシメタリ。甲ハ幾日働キタルカ。

20. 甲ガ五十歩進メル後ヲ乙ガ追ヒ行クニ、甲ノ四歩スル間ニ乙ハ三步シ、甲ガ三步ニテ行ク所ヲ乙ハ二歩ニテ行ク。乙ハ幾歩シテ甲ニ追ヒツクベキカ。

21. 180ヲ四部ニ分チ、甲ニ4足スモ、乙ヨリ4引クモ、又丙ヲ2倍スルモ、丁ヲ2分スルモ、同ジ數ヲ得ルヤウニセヨ。

22. 諸國ヲ遊歴スル人、東京ヲ出發シテヨリ長崎ニ到着スルマデニ所持金ノ四分ノ三ヲ費シ、長崎ニテ三十圓ノ爲替ヲ受取り、九州旅行中ニ所持金ノ七分ノ三ヲ費シ、歸途ニ又殘金ノ五分ノ三ヲ費シ、旅費合計百七十四圓ヲ費セリ。此人出發ノ際、幾許ノ旅費ヲ持チタリシカ。

第二章 聯立一次方程式

71. 未知數ニツヲ含メル方程式。

例。甲乙二種ノ茶アリ 一斤ノ價、甲ハ45錢、乙ハ36錢ナリ。今之ヲ混合シテ、平均一斤42錢ノ茶ヲ得ントス。各、幾斤ヲ混ズベキカ。

甲 x 斤、乙 y 斤ヲ混ズルトキハ、原價ハ

$$45x + 36y$$

錢ニシテ、混合セル茶ノ全量ハ $x + y$ 斤、其代價ハ

$$42(x + y)$$

錢ナルベシ。ヨリテ

$$45x + 36y = 42(x + y)$$

y ヲ既知數ノ如クニ取扱ヒテ、此方程式ヲ解キ、

$$x = 2y$$

ヲ得。

今 y ヲ1, 2, 3, ……トナストキハ x ハ2, 4, 6, ……トナル。又 $y = \frac{x}{2}$ ナルニヨリ、 x ヲ1, 2, 3, ……トナストキハ、 y ハ $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, ……トナル。故ニ答ハ次ノ如ク幾通りモアリ。

$$\left. \begin{array}{l} \text{甲 2 斤} \\ \text{乙 1 斤} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{甲 4 斤} \\ \text{乙 2 斤} \end{array} \right\} \dots \text{又ハ} \left. \begin{array}{l} \text{甲 1 斤} \\ \text{乙 } \frac{1}{2} \text{ 斤} \end{array} \right\} \dots$$

甲乙兩種トモ隨意ニ混合スルコトヲ得ズ。混合ノ比ハ 2:1 ナルコトヲ要ス。サレド、一種ヲ隨意ニ採リ、之ニ應ジテ他ノ一種ノ斤數ヲ定メ、平均價ヲ 42 錢トナスコトヲ得。

一般ニ、唯一ツノ方程式ガ二ツノ未知數ヲ含ムトキハ、此方程式ハ未知數相互ノ關係ヲ定ムルニ止リ、未知數ノ値ヲ確定スルコトヲ得ズ。

72. 聯立方程式。

例。前節ノ例ニテ、混合セル茶ノ全量ヲ 27 斤トナストキハ、如何。

此場合ニハ、前ニ得タル方程式 $x=2y$ ノ外、ナホ

$$x+y=27$$

ナル方程式ヲ得。故ニ求ムル斤數 x, y ハ

$$\left. \begin{array}{l} x=2y \\ x+y=27 \end{array} \right\}$$

ナル二ツノ方程式ヲ同時ニ満足セシムル數ナ

リ。

カヤウノ一組ノ方程式ヲ聯立方程式(聯立二元一次方程式)トイフ。

上ノ方程式ハ、次ノ如クニシテ解キ得ベシ。

y ニ如何ナル値ヲ與フトモ、 x ヲ $2y$ トナストキハ、第一ノ方程式ダケハ満足セシヌラル。サテ x, y ノ値ガ同時ニ又第二ノ方程式ヲモ満足セシムルヤウニスルニハ、第二ノ方程式ノ x ノ代ニ $2y$ ヲ入レテ得タル方程式

$$2y+y=27$$

ニヨリテ y ヲ定ムベシ。此方程式ハ未知數 y ノミヲ含メリ、之ヲ解キテ、

$$y=9$$

ヲ得。ヨリテ

$$x=2y=18$$

$$\text{故ニ} \quad \text{根} \left\{ \begin{array}{l} x=18 \\ y=9 \end{array} \right. \quad \text{答} \left\{ \begin{array}{l} \text{甲 十八斤} \\ \text{乙 九斤} \end{array} \right.$$

$$\text{驗.} \quad \text{甲 18 斤ノ價} \quad 45 \times 18 = 810 \text{ (錢)}$$

$$\text{乙 9 斤ノ價} \quad 36 \times 9 = 324 \text{ (錢)}$$

$$\text{合セテ 27 斤ノ價} \quad 1134 \text{ (錢)}$$

$$\text{平均一斤ノ價} \quad 1134 \div 27 = 42 \text{ (錢)}$$

一般ニ、二ツノ未知數ノ値ヲ確定スルニハ、此等ノ未知數ノ關係ヲ表ス方程式ニツアルコトヲ要ス。

例題

1. 甲乙二ツノ數アリテ、甲ノ二倍ト乙ノ三倍トノ和ハ、甲ノ三倍ト乙トノ和ニ等シ。此二ツノ數ノ關係如何。若シ此二ツノ數ノ和ガ45ナラバ、甲乙各、幾許ナルカ。

2. 甲乙二種ノ砂糖アリ。甲六斤、乙三斤ノ價ハ甲二斤乙八斤ノ價ニ等シ。兩種ノ砂糖一斤ノ價ノ關係如何。

3. 十八金、十四金ノ金塊ヲ熔和シテ、品位 0.65ノ金塊ヲ得ントス。熔和ノ比ヲ求メヨ。

4. 丁度其數字ノ和ノ四倍ニ等シキ二桁ノ整數アリ。二ツノ數字ノ關係如何。

十ノ位ノ數字ヲ1, 2, 3, 4トシテ、此數ヲ定メヨ。又十ノ位ノ數字ガ4ヨリ大ナルコトヲ得ルカ。

5. 或二桁ノ整數ニ9ヲ加フルトキハ、其數字入レ換ルトイフ。二ツノ數字ノ關係如何。

73. 聯立二元一次方程式ノ解キ方。(其一)

例。次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$4x + 3y = 18 \quad (1)$$

$$6x - 7y = 4 \quad (2)$$

上ノ方程式ハ前節ノ例ニ示セル通りニシテ解クコトヲ得。先ヅ(1)ヨリ

$$3y = 18 - 4x$$

即チ
$$y = \frac{18 - 4x}{3} \quad (3)$$

之ヲ(2)ノ y ニ代入シテ、

$$6x - \frac{7(18 - 4x)}{3} = 4$$

ヲ得。此方程式ハ未知數 x ノミヲ含メリ。之ヲ解キテ、

$$x = 3$$

ヲ得。サテ(3)ノ $x = 3$ ヲ代入シテ、

$$y = 2$$

ヲ得。根 $x = 3, y = 2$

驗。
$$4 \times 3 + 3 \times 2 = 18$$

$$6 \times 3 - 7 \times 2 = 4$$

解キ方ノ要點ハ次ノ如シ。

先ツ與ヘラレタル方程式ノ中ノ一ツ,例ヘバ(1)ニヨリテ,未知數ノ中一ツ,例ヘバ y ヲ x ヲ含メル式(3)ニテ表シ,之ヲ方程式(2)ノ y ニ代入シテ, x ノミヲ含メル方程式ヲ得。是ヨリ x ヲ求メ,其値ヲ用ヒテ先ニ求メタル式(3)ヨリ y ヲ求ムベシ。

74. 聯立二元一次方程式ノ 解キ方。(其二)

上ニ示セル解キ方ニテハ,代入ノ際ニ分數ガ入り來リテ,計算ガ煩ハシクナル。此不便ヲ避クルニハ,次ノ如キ解キ方ニヨルベシ。

$$(1) \quad 4x+3y=18 \quad | \quad 7 \quad | \quad 6 \quad 3$$

$$(2) \quad 6x-7y=4 \quad | \quad 3 \quad | \quad -4 \quad -2$$

(1)ノ兩邊ニ7ヲ,又(2)ノ兩邊ニ3ヲ掛ケ,

$$28x+21y=126$$

$$18x-21y=12$$

ヲ得。此等ノ方程式ニテハ,未知數 y ノ係數ガ符號ノミ異ナル數トナレリ。ヨリテ邊邊相加ヘテ y ヲ消去シ,

$$46x=138$$

即チ $x=3$

又先ツ x ヲ消去シテ y ヲ求メント欲セバ,(1)ノ兩邊ニハ6,(2)ノ兩邊ニハ-4ヲ掛ケテ後,加フベシ。6,-4ヲ掛ケル代ニ3,-2ヲ掛ケテモヨシ。

即チ $12x+9y=54$

$$-12x+14y=-8$$

加ヘテ, $23y=46$

即チ $y=2$

解キ方ノ要點ハ次ノ如シ。

先ツ方程式ヲ整頓シテ未知項ト既知項トヲ別別ニ兩邊ニ集メ,サテ兩邊ニ適當ナル數ヲ掛ケテ二ツノ方程式ニ於ケル一ツノ未知數ノ係數ヲ符號ノミ異ナル數トナシテ後,加法ニヨリテ此未知數ヲ消去シテ,今一ツノ未知數ヲ定ム。

注意一。勿論二ツノ方程式ニ於ケル同ジ未知數ノ係數ガ相等シクナルヤウニシテ後,減法ヲ行ヒテ,此未知數ヲ消去シテモヨシ。サレド

上ノ如クニスルトキハ、計算ノ誤ヲ避ケ易シ。

注意二。 上ノ例ニテ $x=3$ ヲ求メタル後(1),(2)ニ此値ヲ入レテ、 y ヲ二通ニ計算シテ見ルトキハ、 y ノ値ヲ求ムルト同時ニ、結果ヲ驗シタルコトトナル。又是ハ y ノ値ノミノ驗ニハアラス、 x ノ値モ同時ニ驗サルルコトトナルナリ。

例。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{2x+3y}{5} = 10 - \frac{y}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3x}{4} + \frac{3x-4y}{6} + 1 = 0 \quad (2)$$

(1)ノ兩邊 = 15ヲ掛ケテ分母ヲ拂ヒ、

$$3(2x+3y) = 150 - 5y$$

整頓シテ、

$$6x + 14y = 150$$

兩邊ヲ2ニテ割リ、

$$3x + 7y = 75 \quad (3)$$

ヲ得。同ジャウニ(2)ヲ整頓シテ、

$$15x - 8y = -12 \quad (4)$$

ヲ得。

サテ(3),(4)ヨリ x, y ヲ求ムルニ、此場合ニハ先

ヅ x ヲ消去スルガ便利ナリ。即チ(3)ノ兩邊ニ5ヲ掛ケテ(4)ヲ引キ、(又ハ(4)ノ兩邊ノ符號ヲ變ヘテ加ヘ)、

$$43y = 387$$

即チ $y = 9$

ヲ得。之ヲ(3)又ハ(4)ニ代入シテ、

$$x = 4$$

ヲ得。即チ根ハ

$$x = 4, y = 9$$

ナリ。(驗ヲ行ヘ)。

問題 第六

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \quad y = 7 - 2x \quad 2. \quad 5x + 3y = 14$$

$$3x + 4y = 18 \quad 3x + 8y = 27$$

$$3. \quad x + y = 47 \quad 4. \quad 7x - y = 16$$

$$x - y = 13 \quad 2x + 6y = 36$$

$$5. \quad 3x - 7y = 42 \quad 6. \quad 4x - y = 6$$

$$7x + 2y = 43 \quad 8x + 3y + 8 = 0$$

$$7. \quad 3x - 4y = 1 \quad 8. \quad 2x + 3y - 25 = 0$$

$$6x + 12y = 7 \quad 5x + 4y - 3 = 0$$

175
42
93

9. $y = 3x - 2 = 7x + 6$

10. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3$

$2x - \frac{y}{4} = 5$

12. $\frac{x}{3} - y = 6 + 8y$

$\frac{x}{2} - y = 9 + 2y$

14. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 4$

$\frac{7y}{2} = 11 + \frac{3x}{2} + y$

11. $\frac{x}{2} + 5y = 19$

$4x + \frac{3}{4}y + 5 = 0$

13. $3x = 2(y + 11)$

$\frac{x}{3} + \frac{3}{4}y = 18$

15. $2x = \frac{y-3}{5} + \frac{5x-2}{2}$

$2y = \frac{x-5}{3} + \frac{7y-7}{2}$

75. 聯立三元一次方程式ノ解キ方。

例。次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$2x - 5y + 3z = 1 \quad (1)$

$7x + 3y - 2z = 7 \quad (2)$

$5x + 2y + z = 12 \quad (3)$

先ヅ(1)ト(3)トヲ組ミ合セテ、 z ヲ消去スルガ
タメニ、(3)ノ兩邊 $\times 3$ ヲ掛ケテ(1)ヲ引キ、

$13x + 11y = 35 \quad (4)$

ヲ得。次ニ又(2)ト(3)トヨリ z ヲ消去シテ、

$17x + 7y = 31 \quad (5)$

ヲ得。

カヤウニシテ得タル二ツノ方程式(4),(5)ハ未知數 x, y ノミヲ含メリ。之ヲ解キテ、

$x = 1, y = 2$

ヲ得。サテ(1),(2),(3)ノ中、イヅレカーツヲ採リ、 x, y ノ値ヲ代入シテ z ヲ求ム。例ヘバ(3)ヲ採レバ、

$5 \times 1 + 2 \times 2 + z = 12$

即チ $z = 3$

ヲ得。故ニ根ハ次ノ如シ、

$x = 1, y = 2, z = 3$

(驗ヲ行ヘ)。

聯立三元一次方程式ヲ解クニハ、三ツノ方程式ノ中、イヅレカーツト、他ノ二ツトヲ各組ミ合セテ、一ツノ未知數ヲ消去スベシ。カヤウニシテ他ノ二ツノ未知數ノミヲ含メル二ツノ方程式ヲ得。此聯立二元方程式ヨリ二ツ

-2-6-2-77

ノ未知數ヲ求メ、其値ヲ與ヘラレタル
方程式ノ中、イツレカーツニ代入シテ、
今一ツノ未知數ヲ求ムベシ。

注意。 上ノ例ニテ、 $x=1$, $y=2$ ヲ求メタル後、
(1),(2),(3)ニ此値ヲ入レテ、 z ヲ求ムルトキハ、同時
ニ結果ヲ驗スコトヲ得。(第74節ノ注意ニヲ參
照セヨ)。

$$2 \times 1 - 5 \times 2 + 3z = 1 \quad z = 3$$

$$7 \times 1 + 3 \times 2 - 2z = 7 \quad z = 3$$

$$5 \times 1 + 2 \times 2 + z = 12 \quad z = 3$$

問題 第七

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

- | | |
|-------------------|-----------------|
| 1. $x+y+z=9$ | 2. $2x-y+z=3$ |
| $x+y-z=1$ | $x-2y+z=0$ |
| $2x+y+3z=20$ | $x-y+2z=5$ |
| 3. $x+y=1$ | 4. $2x+3y+5z=3$ |
| $x+z=2$ | $2x+3y=10z$ |
| $y+z=\frac{3}{2}$ | $6x-9y+5z=1$ |

$$5. \quad z=5x+2y \quad 6. \quad 2x+y-2z=20$$

$$3x+2y+4z=29 \quad 3x-\frac{y}{2}+z=10$$

$$7x-y-3z=4 \quad 5x+y-\frac{z}{3}=20$$

$$7. \quad x+y+z=6$$

$$x-1=y-2=z-3$$

$$8. \quad -x+y+z=x-y+z=x+y-z=1$$

$$9. \quad \frac{2x-y}{3} = \frac{3y+2z}{4} = \frac{x+z}{2}$$

$$2x-y+5z=7$$

$$10. \quad 2x+y-z-2u=5$$

$$x-2y+z+u=2$$

$$x-3y+2z+2u=6$$

$$2x+2y-2z-u=11$$

76. 應用問題。

例一。矩形ノ地所ノ間口ヲ一間縮メ、奥行ヲ三尺延バストキハ、面積六坪減リ、又間口ヲ三尺延バシ、奥行ヲ二尺四寸縮ムルトキハ、面積ハ變ラズ。此地所ノ面積幾許ナルカ。

間口ヲ x 間、奥行ヲ y 間トスルトキハ、次ノ方

程式ヲ得。

$$(x-1)\left(y+\frac{1}{2}\right)=xy-6$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{24}{60}\right)=xy$$

括弧ヲ外ヅシ、兩邊ヨリ xy ヲ引キ、

$$\frac{1}{2}x-y-\frac{1}{2}=-6$$

$$-\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{5}=0$$

分母ヲ拂ヒ、整頓シテ、

$$x-2y=-11$$

$$-4x+5y=2$$

之ヲ解キテ、

$$x=17, \quad y=14$$

故ニ求ムル面積ハ (17×14) 坪即チ 238 坪ナリ。

(驗ヲ行ヘ)。

× 例二。三種ノ合金アリ。甲ハ金二分、銀三分、銅四分ヲ含ミ、乙ハ金三分、銀四分、銅五分ヲ含ミ、丙ハ金四分、銀三分、銅五分ヲ含ム。今之ヲ熔和シテ、金十五ぐらむ、銀十八ぐらむ、銅二十四ぐらむヲ含メル合金ヲ作ラントス。三種各、幾ぐらむヲ採ルベキカ。

甲 x ぐらむ、乙 y ぐらむ、丙 z ぐらむヲ採ルコ

トヲ要ストスルトキハ、次ノ方程式ヲ得。

$$\frac{2}{2+3+4}x+\frac{3}{3+4+5}y+\frac{4}{4+3+5}z=15$$

$$\frac{3}{2+3+4}x+\frac{4}{3+4+5}y+\frac{3}{4+3+5}z=18$$

$$x+y+z=15+18+24$$

分母ヲ拂ヒテ、

$$8x+9y+12z=540 \quad (1)$$

$$4x+4y+3z=216 \quad (2)$$

$$x+y+z=57 \quad (3)$$

(2),(3)ヨリ x ヲ消去スルトキハ、(y モ同時ニ消去セラレ)、

$$z=12$$

ヲ得。之ヲ(1)及ビ(3)ニ代入シテ、

$$8x+9y=396$$

$$x+y=45$$

之ヲ解キテ、

$$x=9, \quad y=36$$

ヲ得。

答 甲 9 ぐらむ、乙 36 ぐらむ、丙 12 ぐらむ。

問題第八*

1. 二ツノ數ノ和ハ57ニ等シク,其差ハ13ニ等シ。此二ツノ數ヲ求メヨ。
2. 鶴龜合セテ23匹,其足數合セテ68本ナリ。各,幾匹居ルカ。
3. 甲乙二種ノ茶,一斤ノ價,甲ハ五十五錢,乙ハ五十錢ナルヲ混合シテ,平均一斤五十二錢ノ茶三十五斤ヲ得ントス。各,幾斤ヲ混ズベキカ。
4. 二十二金,十八金ノ金塊合セテ28ぐらむノ中ニ含マルル純金ノ量22ぐらむナリ。二種ノ金塊ノ目方各,幾許ナルカ。
5. しつ二枚,ト靴下五枚トノ價合セテ三圓六十五錢ニシテ,しつ三枚ノ價ハ靴下十四枚ノ價ヨリモ十錢高シ。一枚ノ價各,幾許ナルカ。
6. 今ヨリ十二年前ニハ,父ノ年齢ハ子ノ年齢ノ七倍ナリシガ,今ヨリ十三年後ニハ,父ノ年齢ハ子ノ年齢ノ二倍トナルベシ。父子現在ノ年齢ヲ求メヨ。

*第134頁ノ註參照。

7. 或慈善家金若干圓ヲ貧民ニ分配スルニ,一人ニ十二圓ヅツ與フルトキハ,五十圓餘リ,又一人ニ十五圓ヅツ與フルトキハ,二十五圓不足ストイフ。金高及ビ人數ヲ求メヨ。
8. 或會ノ費用ヲ會員若干人ニ割リ當ツルニ,若シ會員ノ數ガ今三人ダケ多カリシナラバ,一人ノ負擔額ハ二圓ヅツ減ズベク,又會員ガ二人ダケ少カリシナラバ,一人ノ負擔額ハ二圓ヅツ増スベシトイフ。費用ノ總額幾許ナルカ。 中学
9. 或矩形ノ地所ノ間口ヲ三間廣ゲ,奥行ヲ五間縮ムルトキハ,坪數ハ四坪減ジ,又間口ヲ二間廣ゲ,奥行ヲ三間延バストキハ,坪數ハ六十四坪増スベシトイフ。現在ノ間口及ビ奥行ヲ求メヨ。
10. 十年前ニハ百二十五圓ニテ出來上リシ物が,材料ハ七割五分,賃錢ハ十割騰貴セル今日ニテハ,二百三十圓ヲ要ストイフ。原料及ビ賃錢ハ現今幾許ナルカ。
11. 米二十五俵,麥三十俵ヲ241圓ニテ買セ,之ヲ272.8圓ニ賣リ,米ハ一割二分,麥ハ一割五分ノ利ヲ得タリ。一俵ノ買價各,幾許ナルカ。

中学中学

12. 二組ノ人夫アリ。乙組ヨリ五十人ヲ甲組ニ移ストキハ、甲組ノ人數ハ乙組ノ人數ノ三倍トナリ、又甲組ヨリ二十五人ヲ乙組ニ移ストキハ、甲九人ニ對シ乙七人ノ割合トナル。二組ノ人數各、幾許ナルカ。

13. 232 ヲ甲乙丙ノ三部ニ分チ、甲ニ乙丙ノ和ノ半分ヲ加ヘテモ、又乙ニ甲丙ノ和ノ三分ノ一ヲ加ヘテモ、又丙ニ甲乙ノ和ノ四分ノ一ヲ加ヘテモ同ジ數ヲ得ルヤウニセヨ。

14. 金若干圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分ツニ、甲ノ取前ハ乙丙ノ取前ノ和ノ七分ノ四ヨリモ三十圓多ク、乙ノ取前ハ甲丙ノ取前ノ和ノ八分ノ三ヨリモ三十圓多ク、又丙ノ取前ハ甲乙ノ取前ノ和ノ十分ノ一ヨリモ三十圓多シ。三人ノ取前各、幾許ナルカ。

15. 三種ノ金塊合セテ九十斤アリ。其品位、甲ハ0.9、乙ハ0.8、丙ハ0.72ナリ。甲乙兩種ヲ熔和スルトキハ、品位0.84ノ金塊ヲ得ベク、甲丙兩種ヲ熔和スルトキハ、品位0.78ノ金塊ヲ得ベシ。三種ノ金塊ノ目方各、幾許ナルカ。

16. 二種ノあるこゝる溶液ヲ等分ニ混合スルトキハ、比重0.87トナリ、又之ヲ5:7ノ割合ニ混合スルトキハ、比重0.875トナル。兩種ノ比重各、幾許ナルカ。(比重 a トハ一りゝとるノ目方 a きろぐらむトイフニ同ジ)。

17. 三種ノ金塊アリ。甲2ぐらむ、乙1ぐらむ純金2ぐらむヲ熔和スルトキハ、品位0.92ノ金塊ヲ得。乙150ぐらむ、丙80ぐらむ、銅36ぐらむヲ熔和スルトキハ、品位0.75ノ金塊ヲ得。又甲、乙、丙ヲ6、9、10ノ割合ニ熔和スルトキハ、品位0.78ノ金塊ヲ得。各種金塊ノ品位ヲ求メヨ。

18. 甲乙兩地ノ距離五里ナリ。或人此間ヲ往復スルニ、往ニハ四時三十五分、復ニハ四時四十分ヲ費セリ。歩行ノ速度、毎時上リハ一里、下リハ四十二町、平地ハ三十九町ナリ。兩地間ノ平坦ナル道路ノ里程ヲ求メヨ。

19. 三桁ノ整數アリ。此數ハ其數字ノ和ノ二十六倍ニ等シク、此數ニ198ヲ加フルトキハ、數字ガ逆ノ順序ニナリ、又兩端ノ數字ノ和ハ中ノ數字ノ二倍ニ等シ。此數ヲ求メヨ。

20. 或學校ノ生徒ノ總員五百六十人ニシテ、五年生ハ一年生ノ三分ノ一、三年生ト四年生トノ總員ハ一年生ト同ジク、二年生ト三年生トノ總員ハ五年生ノ四倍ニシテ、四年生ト二年生トノ人員ハ4:7ノ割合ナリ。各級ノ人數ヲ求メヨ。

第 五 篇

倍數 約數 分數式

第 一 章 整數ノ倍數約數

77. 倍數。約數。

或整數ヲ他ノ整數ニテ割ルニ通常ハ割リ切レズ。^{*}ソノ割リ切レルハ例外ナリ。整數 a ガ整數 b ニテ割リ切レルトキハ、 a ヲ b ノ倍數、又 b ヲ a ノ約數トイフ。

或數ノ a 倍、 b 倍、 c 倍ノ和ハ此數ノ $(a+b+c)$ 倍ニ等シク、或數ノ a 倍ト b 倍トノ差ハ此數ノ $(a-b)$ 倍ニ等シ。又或數ノ a 倍ノ b 倍ハ此數ノ ab 倍ニ等シ。

或數ノ倍數ノ和又ハ差、又ハ倍數ノ倍數ハ此數ノ倍數ナリ。

^{*}本章ニテ割リ切レルトイフハ商ガ整數ニ等シキコトヲ指ス。又本章ニテ單ニ數トイフハ整數ノコトナリト知ルベシ。

例題

1. 偶數ノ一ノ位ノ數字ハ0又ハ偶數、奇數ノ一ノ位ノ數字ハ奇數ナルコトヲ證明セヨ。
2. ニツノ偶數又ハニツノ奇數ノ和(又ハ差)ハ偶數ニシテ、一ツノ偶數ト一ツノ奇數トノ和ハ奇數ナリ。之ヲ證明セヨ。
3. 5ノ倍數ヲ鑑別スル方法如何。
4. 或整數ト其數字ノ和トノ差ハ9ニテ割リ切レル。之ヲ證明セヨ。
5. 234, 50764ガ9ノ倍數ナルカ否カラ除法ヲ用ヒズシテ鑑別セヨ。又9ニテ割リ切レヌトキハ、割リ算ノ殘ハ如何。
6. 整數 a, r ノ差及ビ b, s ノ差ガイツレモ m ニテ割リ切レルトキハ、 ab ト rs トノ差モ亦 m ニテ割リ切レル。之ヲ證明セヨ。
7. 次ノ等式ノ兩邊ノ數ヲ9ニテ割リタル殘ヲ割リ算ヲナサズシテ求メテ、此式ガ正シキカ、正シカラザルカラ判斷セヨ。

$$297547 = 129 \times 2307 + 73$$

78. 素數。

1ヨリ外ノ整數ハ、スベテ少クトモニツノ約數ヲ有ス。1及ビ其數自身即チ是ナリ。サテ

1ト其數自身トノ外ニ約數ナキ數ヲ素數トイフ。

1トイフ數ハ素數ノ中ニハ入レザルモノトス。200未滿ノ素數ハ次ノ如シ。

2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89	97	101	103
107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197
199								

79. 素因數ニ分解スルコト。

スベテ素數ニアラザル整數ハ之ヲ素數ノ積トシテ表スコトヲ得。即チ素因數ニ分解スルコトヲ得。之ヲナスニハ此數ヲ順次ニ其約數ナル素數ニテ割リ行クベシ。或ハ先ヅ此數ヲニツノ因數ニ分チ、次ニ各ノ因數ヲ更ニニツノ因數ニ分チ、

次第ニカヤウニシテ終ニスベテノ因數ガ分解スベカラザルニ至リテ止ムベシ。

例ヘバ

$$140 = 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 35 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

又ハ $140 = 14 \times 10 = 2 \times 7 \times 2 \times 5$

或數ヲ如何ヤウニシテ素因數ニ分解シテモ、分解ノ結果ハ唯一通りニ限ルベシ。

或數ヲ素因數ニ分解シタルトキ、同ジ因數ガ幾ツモ出デ來ルトキハ、之ヲマトメテ冪ノ形ニ書ケバ、分解ノ結果ガ特ニ明瞭ニナル。例ヘバ

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

80. 素數ノ特性。

例ヘバ10及ビ14ハイヅレモ素數3ニテ割リ切レズ、其積 10×14 即チ140モ亦素數3ニテ割リ切レズ。一般ニ

或素數ニテ割リ切レヌ數ノ積ハ亦此素數ニテ割リ切レズ。積ガ或素數

ニテ割リ切レルハ、因數ノ中少クトモ一ツガ此素數ニテ割リ切レルトキニ限ル。

是ハ素數特有ノ性質ニシテ、素數ナラザル數ニツキテハ、カヤウノ事實ハ一般ニ成リ立タズ。例ヘバ、8及ビ15ハイヅレモ6ニテ割リ切レズ。サレド8ト15トノ積120ハ6ニテ割リ切レル。是ハ6ハ 2×3 ニ等シク、8ガ6ニテ割リ切レヌハ、8ハ素因數2ヲ含メドモ、3ヲバ含マヌニヨリ、又15ガ6ニテ割リ切レヌハ、15ハ素因數3ヲ含メドモ、2ヲバ含マヌニヨル。サレド8ト15トノ積ハ素因數2及ビ3ヲ含ムガ故ニ、6ニテ割リ切レルナリ。

上ノ原則ヨリ推シテ次ノ定理ヲ得。

或數ノ約數ハ此數ノ含メルモノヨリ外ノ素因數ヲ含マズ。又其素因數ヲ此數ノ含メル度數ヨリモ多クハ含マズ。

例ヘバ $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ ノ約數ハ 2, 5, 7 ヨリ外

ノ素因數ヲ含ムコトヲ得ズ。又素因數2ヲバニツヨリ多ク, 5, 7ヲバーツヨリ多ク含ムコトヲ得ズ。故ニ $15=3 \times 5$ 又ハ $40=2^3 \times 5$ ナドハ 140ノ約數ニアラズ。

或數ノ倍數ハ此數ノ含メル素因數ヲバ盡ク含ムベシ。又此數ガ同ジ素因數ヲ幾ツモ含ムトキハ, 此數ノ倍數ハ其素因數ヲ少クトモ同ジ度數ダケ含ムベシ。

例ヘバ $140=2^2 \times 5 \times 7$ ハ $15=3 \times 5$ ノ倍數ニアラズ。又 $40=2^3 \times 5$ ノ倍數ニモアラズ。

次ニ述ブル最大公約數, 最小公倍數ヲ求ムル方法ハ上ノ定理ニ基ヅクモノナリ。

例題

1. 次ノ數ヲ素因數ニ分解セヨ。

91 1000 1001 120 221 31416

2. 1ヨリ10マデノ整數ノ累乘積ヲ素因數ニ分解セヨ。
ハ素數ニアラス

3. 1ヨリ100マデノ整數ノ累乘積ノ中ニハ,

素因數3ガ幾ツ合マルルカ。

4. a^2 ヨリ小ナル整數ノ中, a ヨリ小ナル素數ニテ割切レヌモノハ必ズ素數ナリ。其理由如何。

5. 素因數ニ分解スルコトヲ應用シテ次ノ數ノ約數ヲ盡ク求メヨ。

30 81 140

6. 1300ノ約數ナル奇數ヲ盡ク舉ゲヨ。

81. 公約數。最大公約數。

二ツ以上ノ數ニ共通セル約數ヲ其公約數トイヒ, 公約數ノ中最大ナルモノヲ最大公約數トイフ。

例ヘバ12ト18トノ公約數ハ1, 2, 3, 6ニシテ, 6ハ其最大公約數ナリ。

素因數ニ分解スルコトヲ應用シテ, 二ツ以上ノ數ノ最大公約數ヲ求ムルコトヲ得。

例. 396, 168, 360ノ最大公約數ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r} 396 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \\ 168 = 2^3 \times 3 \times 7 \\ 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \\ \hline \text{最大公約數} = 2^2 \times 3 = 12 \end{array}$$

396, 168, 360ノ公約數ハ此等三ツノ數ニ共通セルモノヨリ外ノ素因數ヲ含ムコトヲ得ズ。サテ三ツノ數ニ共通セル素因數ハ2ニツト3ニツトナリ。此等ノ素因數ヲ盡ク採リテ作レル積 $2^2 \times 3$ ハ即チ求ムル最大公約數ナリ。

二ツ以上ノ數ノ最大公約數ヲ求ムルニハ、此等ノ數ノスベテニ共通セル素因數ヲ盡ク掛ケ合スベシ。

注意一。 共通セル素因數ヲ盡ク採ラズシテ其一部分ヲ採ルトキハ、其他ノ公約數ヲ得。即チ公約數ハ最大公約數ノ素因數ノ一部分ヲ含メル數ナリ。故ニ公約數ハスベテ最大公約數ノ約數ナリ。

實際ノ演算ニハ、一一素因數ニ分解スルマデモナク、次ノ如クニシテ計算スルナリ。

$$\begin{array}{r} 4 \) \ 396 \ 168 \ 360 \\ 3 \) \ 99 \ 42 \ 90 \\ \hline 33 \ 14 \ 30 \end{array}$$

$$\text{最大公約數 } 4 \times 3 = 12$$

396, 168, 360ヲ其公約數4ニテ割リ、其商99, 42,

90ヲ更ニ其公約數3ニテ割ルニ、其商33, 14, 30ニハ(1ヨリ外ノ)公約數ナシ。サテ順次ニ求メ行キタル公約數4, 3ノ積ガ即チ求ムル最大公約數ナリ。

注意二。 上ノ演算ニテ順次出スベキ公約數ハ必ズシモ素因數ナルコトヲ要セズ。上ノ例ニテ始メニ公約數4ニテ割レルハ、即チ共通ノ素因數2ニツヲ一マトメニシテ一時ニ出セルナリ。又最後ノ商33, 14, 30ガ(1ヨリ外ノ)公約數ヲ有セザルコトガめのこニテ判然セザルナラバ、之ヲ素因數ニ分解シテ見ルベシ。

82. 公倍數。最小公倍數。

二ツ以上ノ數ニ共通セル倍數ヲ其公倍數トイヒ、公倍數ノ中ニテ最小ナルモノヲ其最小公倍數トイフ。

例ヘバ4ト6トノ公倍數ハ12, 24, 36等ニシテ、12ハ其最小公倍數ナリ。

二ツ以上ノ數ノ公倍數ハ其數ニ限リナシ。最小公倍數ノ倍數ハスベテ公倍數ナリ。

第80節ノ定理ヲ應用シテニツ以上ノ數ノ最小公倍數ヲ求ムルコトヲ得。

例。120, 180, 210ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned} 120 &= 2^3 \times 3 \times 5 \\ 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 210 &= 2 \times 3 \times 5 \times 7 \end{aligned}$$

$$\text{最小公倍數} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$$

120, 180, 210ノ公倍數ハ此等ノ數ノイヅレニ含マレタル素因數ヲモ盡ク含ムベシ。即チ少クトモ2三ツ, 3二ツ, 5一ツ, 7一ツヲ含ムコトヲ要ス。サテ此等ノ素因數ノ積 $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ ハ既ニ三ツノ數ノ公倍數ナルガ故ニ, 是レ即チ求ムル最小公倍數ナリ。

最小公倍數ノ中ニ含マルル因數 $2^3, 3^2, 5, 7$ ハ與ヘラレタル三ツノ數ノ中, 少クトモ一ツニ含マルル素因數ノ冪ニシテ且其中ニテ最大ナル指數ヲ有スルモノナルコトニ注意スベシ。

ニツ以上ノ數ノ最小公倍數ハ, 此等ノ數ノ中ニ含マルル各ノ素因數ノ最高冪ノ積ニ等シ。

注意一。ニツ以上ノ數ノ最小公倍數ハ此等

ノ數ノイヅレニテモ割リ切レルガタメニ丁度入用ナルダケノ素因數ノミヲ含メリ。故ニ此等ノ數ノ公倍數ハ必ズ最小公倍數ノ中ニ含マレタル素因數ヲ盡ク含ムベシ。即チ公倍數ハ最小公倍數ノ倍數ナリ。

幾ツカノ數ノ積ハ勿論此等ノ數ノ公倍數ナリ。サレド必ズシモ其最小公倍數ニハアラズ。最小公倍數ヲ得ルニハ, 此積ノ中ヨリ若干ノ不用ナル素因數ヲ省キ去ルコトヲ要ス。即チ與ヘラレタル數ノ中, ニツ以上ニ共通セル素因數ハ一ツダケ採リテ, 其他ヲ省クナリ。上ノ例ニツキテ此手續ヲ示セバ次ノ如シ。

120	2,	2,	2,	3,	5
180	2,	2,	3,	3,	5
210	2,		3,	5,	7
最小公倍數 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$					

與ヘラレタル數ノ中, イヅレノニツニモ共通ノ素因數ナキトキニハ, 此等ノ數ノ積ガ即チ最小公倍數ナリ。

最小公倍數ヲ求ムル演算ハ次ノ如クニスルコトヲ得。

$$\begin{array}{r}
 2) \ 120 \ 180 \ 210 \\
 3) \ 60 \ 90 \ 105 \\
 5) \ 20 \ 30 \ 35 \\
 2) \ 4 \ 6 \ 7 \\
 \quad 2 \ 3 \ 7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 120 = 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2 \\
 180 = 2 \times 3 \times 5 \times 2 \quad \times 3 \\
 210 = 2 \times 3 \times 5 \quad \quad \times 7
 \end{array}$$

$$\text{最小公倍数 } 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2520$$

第一段ニテハ 120, 180, 210 ニ共通セル素因數 2 ヲ出シ第二段ニテハ 60, 90, 105 ニ共通セル素因數 3 ヲ出シ第三段ニテハ 20, 30, 35 ニ共通セル素因數 5 ヲ出シ第四段ニテハ 4, 6 ニ共通セル素因數 2 ヲ出シ, 2 ニテ割リ切レザル 7 ハ其ママ第五段ニオロス。第五段ニ至リテ, モハヤニツ以上ノ數ニ共通セル素因數ナシ。ヨリテ逐次ニ出ダセル素因數 2, 3, 5, 2 ト最終ノ段ニ殘レル因數 2, 3, 7 トヲ盡ク掛ケ合セテ求ムル最小公倍数 2520 ヲ得。

上ノ演算ニテ逐次左側ニ出セルハ 120, 180, 210 ノ中ノニツ以上ニ共通セル素因數ニテ, 最終ノ段ニ殘レルハニツ以上ニ共通セザル因數ナリ。

注意二。 上ノ演算ニテ逐次ニ出スベキ公約數ハ素因數ナルコトヲ要ス。素數ナラザル因數ヲ出ストキハ, 結果ガ不用ノ因數ヲ含ムコト

アルベシ。例ヘバ, 上ノ例ニテ, 第三段ニテ 20 ト 30 トニ共通セル因數 10 ヲ出シ, 10 ニテ割リ切レザル 35 ヲ其ママ第四段ニオロストキハ, 正シキ結果ヲ得ズ(其理由如何)。

サレド, スベテノ數ニ共通セル因數ハ素數ナラズトモ出シテヨシ。例ヘバ, 上ノ例ニテ, 先ヅ 120, 180, 210 ニ共通セル因數 6 又ハ 10 ナドヲ一時ニ出シテモヨシ(其理由如何)。

83. 最大公約數ヲ求ムル一般ノ方法。

ニツノ整數ガ與ヘラレタルトキ, 其大ナル方ヲ a , 小ナル方ヲ b ト名ヅケンニ, a ガ若シ b ニテ割リ切レルナラバ, b ハ即チ a, b ノ最大公約數ナリ。

a ガ b ニテ割リ切レヌトキハ, a ヲ b ニテ割リタル殘ヲ c トスルトキハ, a, b ノ最大公約數ハ b, c ノ最大公約數ニ等シ。

其故如何ニトイフニ, c ハ a ヲ b ニテ割リタル殘ナレバ

$$a = (b \text{ノ倍數}) + c$$

ヨリテ又

$$c = a - (b \text{ノ倍數})$$

第一ノ式ヨリ a ハ b ト c トノ公約數ニテ割リ切レルコトヲ知ル。故ニ b ト c トノ公約數ハ又 a ト b トノ公約數ナリ。

又第二ノ式ヨリ c ハ a ト b トノ公約數ニテ割リ切レルコトヲ知ル。故ニ a ト b トノ公約數ハ又 b ト c トノ公約數ナリ。

是故ニ a ト b : ノ公約數ハ、全體ニ於テハ b ト c トノ公約數ト同ジコトナリ。特ニ a, b ノ最大公約數ハ b, c ノ最大公約數ニ等シ。

サテ b ガ c ニテ割リ切レルトキハ、 c ハ即チ b, c ノ最大公約數、從テ又 a, b ノ最大公約數ナリ。

b ガ c ニテ割リ切レザルトキハ、 b ヲ c ニテ割リタル殘ヲ d トスルトキ、 c ト d トノ最大公約數ガ即チ b ト c ト、從テ又 a ト b トノ最大公約數ナリ。

是ヨリ推シテ次ノ規則ヲ得。

二ツノ整數 (a, b) ノ最大公約數ヲ求ムルニハ、先ヅ大ナル方ノ數 (a) ヲ小ナル方ノ數 (b) ニテ割ルベシ。割リ切レ

タルトキハ、小ナル方ノ數ハ即チ求ムル最大公約數ナリ。又割リ切レザルトキハ、此割リ算ノ殘 (c) ニテ前回ノ除數タリシ數 (b) ヲ割リ、此割リ算ノ殘 (d) ニテ更ニ前回ノ殘 (c) ヲ割リ、次第ニカヤウニシテ終ニ割リ切レタルトキ、除數トシタル數ハ即チ求ムル最大公約數ナリ。

素因數ノ見出シ難キニツノ整數ノ最大公約數ヲ求ムルニハ、上ノ方法ニヨルベシ。

例。2261 ト 7854 トノ最大公約數ヲ求メヨ。

7854 ヲ 2261 ニテ割リ、殘 1071 ヲ得、2261 ヲ 1071 ニテ割リ、殘 119 ヲ得、1071 ヲ 119 ニテ割ルニ殘ナシ。故ニ求ムル最大公約數ハ 119 ナリ。

7854 ト 2261 トノ公約數ハ、全體ニ於テ、2261 ト 1071 トノ公約數ニ同ジク、又 2261 ト 1071 トノ公約數ハ、1071 ト 119 トノ公約數ニ同ジ。サテ 1071 ハ 119 ニテ割リ切レルガ故ニ 1071 ト 119 トノ公約數ハ即チ 119 ノ約數ニ外ナラズ。故

ニ 7854 ト 2261 トノ最大公約數ハ 119 ナルノミナラズ、7854 ト 2261 トノ公約數ハ即チ 119 ノ約數ニ外ナラズ。一般ニ二ツノ數ノ公約數ハ其最大公約數ノ約數ナリ(第81節參照)。

84. ニツヨリ多クノ數ノ最大公約數。

三ツノ整數 a, b, c ノ公約數ハ固ヨリ a ト b トノ公約數ニシテ、且同時ニ c ノ約數ナリ。サテ a ト b トノ公約數ハ a, b ノ最大公約數ノ約數ナルガ故ニ a, b, c ノ公約數ハ a, b ノ最大公約數ト c トノ公約數ナリ。又逆ニ a, b ノ(最大)公約數ト c トノ公約數ハ勿論 a, b, c ノ公約數ナリ。

故ニ a, b, c ノ最大公約數ハ a, b ノ最大公約數ト c トノ最大公約數ナリ。ヨリテ次ノ規則ヲ得。

三ツノ數ノ最大公約數ヲ求ムルニハ、先ヅ其中ノ二ツノ數ノ最大公約數ヲ求メ、サテ此數ト殘レル一ツノ數ノ最大公約數ヲ求メヨ。是レ即チ與ヘラレタル三ツノ數ノ最大公約數ナリ。

三ツヨリ多クノ數ノ最大公約數ヲ求ムルニモ、此例ニヨルベシ。

85. 最小公倍數ヲ求ムル一般ノ方法。

二ツノ數 a, b ヲ其最大公約數 g ニテ割リタル商ヲ p, q トスルトキハ、 p, q ハ公約數ヲ有セズ。

サテ

$$a = pg, \quad b = qg$$

ナルニヨリ、 a, b ノ最小公倍數ハ

$$pqg \text{ 即チ } \frac{ab}{g} \left(\text{即チ } a \times \frac{b}{g} \text{ 又ハ } b \times \frac{a}{g} \right)$$

ニ等シ。ヨリテ次ノ規則ヲ得。

二ツノ數ノ最小公倍數ヲ求ムルニハ、其最大公約數ニテ二ツノ數ノ中ノ一ツヲ割リテ得タル商ヲ他ノ一ツノ數ニ掛ケヨ。此積ハ即チ求ムル最小公倍數ナリ。

三ツノ數ノ最小公倍數ヲ求ムルニハ、先ヅ其中ノ二ツノ數ノ最小公倍數ヲ求メ、次ニ此數ト第三

ノ數トノ最小公倍數ヲ求メヨ。是レ即チ求ムル最小公倍數ナリ。(前節ニ説明シタルヤウニシテ其理由ヲ説明セヨ)。

三ツヨリ多クノ數ノ最小公倍數ヲ求ムルニモ此例ニヨルベシ。

問題 第九

1. 次ノ二組ノ數ノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ求メヨ。

(1) 151700, 344400 (2) 3604, 4028

2. 120, 168, 216ノ公約數ヲ盡ク書ケ。

3. 3480ヲ割リテモ, 3711ヲ割リテモ, 15ノ殘ルヤウナル除數ヲ求メヨ。

4. 20ニテ割リテモ, 35ニテ割リテモ, 13ガ殘ルヤウナル被除數ハ如何ナル數ナルベキカ。

5. 長サ一尺四寸四分, 幅九寸六分, 厚サ五寸四分ノ木片ヲ成ルベク大ナル立方ニ切り分ケントス。立方ノ邊ノ長サ及ビ其數幾許ナルカ。

6. 前ノ問題ノ木片ヲ幾ツモ積ミ重ネテ, 成ルベク小サキ立方ヲ作ラントス。木片幾個ヲ要ス

ルカ。

7. 6ニテモ, 8ニテモ割リ切レル數ハ必ズ其積48ニテ割リ切レルカ。又6ニテモ, 7ニテモ割リ切レル數ハ必ズ其積42ニテ割リ切レルカ。

8. 幾ツカノ整數ノイヅレニテモ割リ切レル數ハ此等ノ數ノ最小公倍數ニテ割リ切レルコトヲ證明セヨ。

9. 1278, 1618, 1805ヲ或數ニテ割ルニ, 殘ハ皆同ジ。除數ヲ求メヨ。

10. 二ツ以上ノ數ノ最大公約數ヲ求ムルトキ此等ノ數ノ中ノ一ツガ他ノ一ツノ倍數ナルトキニハ, 之ヲ省キ去リテヨシ。例ヘバ8, 24, 36ノ最大公約數ハ8ト36トノ最大公約數ニ等シ。之ヲ證明セヨ。

11. 二ツ以上ノ數ノ最小公倍數ヲ求ムルトキ, 前ノ問題ニ言ヘルコトニ類似セル法則ガ成リ立ツ。之ヲ説明セヨ。

12. a, b, c, d ガ相異ナル素數ナルトキ

$$a^3 b^4 c^2 \text{ト } a^5 b^3 c^4 d$$

トノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ求メ, 且其積ガ

此等二ツノ數ノ積ニ等シキコトヲ説明セヨ。

X 13. 整數 a, b, c ノ中ニ或素因數 p ガツレゾレ l, m, n 個ダケ含マレタルトキ, ab, ac, bc ノ最大公約數ノ中ニ此素因數 p ノ含マルル度數ハ l, m, n ノ中最大ナルモノ一ツヲ除キタル他ノ二ツノ和ニ等シキコトヲ説明セヨ。又是ニヨリテ abc ガ ab, ac, bc ノ最大公約數ニテ割リ切レ, 其商ハ a, b, c ノ最小公倍數ニ等シキコトヲ證明セヨ。

14. 二ツノ整數 a, b ノ最小公倍數 l ガ a ノ q 倍, b ノ p 倍ニ等シトスルトキハ, a ハ p ニテ, 又 b ハ q ニテ割リ切レ, 且其商ハイヅレモ a, b ノ最大公約數 g ニ等シ。之ヲ説明セヨ。

15. 27.54, 17.34 ヲ或數ニテ割ルニ, 商ハイヅレモ整數ナリ。カヤウノ除數ハ數限リナクアルコトヲ説明シ, 又其中最大ナルモノヲ求メヨ。

16. 或數ヲ 13.2, 23.4, 15.6 ナル三ツノ數ニテ割ルニ, 商ハイヅレモ整數ナリ。カヤウノ被除數ノ中最低ナルモノヲ求メヨ。

17. 長サ $28\frac{3}{4}$ 尺, 幅 $26\frac{5}{6}$ 尺ナル矩形ヲ二ツノ邊ニ平行ナル直線ニテ成ルベク大ナル正方形ニ分

タントス。正方形ノ邊ノ長サ及ビ其數ヲ求メヨ。

18. 車ノ前ノ輪ハ周リ $3\frac{5}{6}$ めしとる, 後ノ輪ハ $2\frac{3}{4}$ めしとるナリ。車ガ動キ出セルトキ, 二ツノ輪ノ地面ニツケル處ガ, 再ビ同時ニ地面ニツクマデニハ, 車ハ幾めしとる進ムベキカ。

第二章 整式ノ倍數約數

86. 整式ノ倍數及ビ約數。

因數分解。

整式 A ガ整式 B ニテ割リ切レルトキ, 即チ商ガ整式ニ等シキトキハ, A ヲ B ノ倍數, B ヲ A ノ約數トイフ。

例ヘバ ax ハ $abxy$ ノ約數, 又 $a^2 - b^2$ ハ $a - b$ ノ倍數ナリ。

二ツ以上ノ整式ニ共通セル約數, 倍數ヲ此等ノ整式ノ公約數, 公倍數トイフ。

一ツノ整式ヲ多クノ整式ノ積ノ形ニ書キ表スコト, 即チ因數ニ分解スルコトヲ應用シテ整式ノ

公約數、公倍數ナドヲ求ムルコトヲ得。次ニ因數分解ノ最モ簡單ナル場合ヲ示スベシ。

87. 一項因數。

例一。 $a^2b - ab^2 = ab(a-b)$

各項ニ共通セル ab ヲ因數トナシテ括ルナリ。

例二。 $a(a-b) + 2b(b-a) = a(a-b) - 2b(a-b)$
 $= (a-b)(a-2b)$

是ハ $(a-b)$ ヲ一ツノ文字ノヤウニ取扱ヒテ、例一ノ如クニセルナリ。

例題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| 1. $ax + bx - cx$ | 2. $x^2y + xy^2$ |
| 3. $6a^2b - 9ab^2$ | 4. $a^2bc + ab^2c + abc^2$ |
| 5. $x(x+a) - 2a(x+a)$ | 6. $2(x-1)^2 - 3(1-x)$ |

88. 特別ナル公式ノ應用。

第58節ニ掲ゲタル公式

$$\left. \begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 - b^3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 + b^3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad (4)$$

ヲ應用シテ、整式ヲ因數ニ分解シ得ベキ場合アリ。

例一。 $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$
 $= (2x+3y)^2$

例二。 $a^2 - 1 = a^2 - 1^2 = (a-1)(a+1)$

例三。 $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$
 $= (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$

例四。 $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$
 $= (x-2y)\{x^2 + x(2y) + (2y)^2\}$
 $= (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

例五。 $a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$
 $= (a-b)(a+b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

是ハ公式(2),(3)ヲ引續キ應用セルナリ。

例六。 $x^2 + 7x + 12 = x^2 + (3+4)x + 3 \times 4$
 $= (x+3)(x+4)$

是ハ公式(4)ノ應用ニシテ、 $ab=12$, $a+b=7$ ト

ナルヤウニめこのニテ a , b ヲ求メタルナリ。

即チ $\left. \begin{aligned} 12 &= 1 \times 12 & 12 &= 2 \times 6 & 12 &= 3 \times 4 \\ 1+12 &= 13 & 2+6 &= 8 & 3+4 &= 7 \end{aligned} \right\}$ ノ中ニテ最

後ノ一組ヲトルナリ。

$$\begin{aligned} \text{例七. } x^2 - 3xy - 10y^2 &= x^2 + (2y - 5y)x + 2y \times (-5y) \\ &= (x + 2y)(x - 5y) \end{aligned}$$

是ハ公式(4)ヲ稍、複雑ナル場合ニ應用セルモノニテ、ツマリ10ヲ二ツノ因數ニ分チ、其差ガ3トナルヤウニスルコトヲ骨子トス。

例題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $x^2 - 2x + 1$ | 2. $a^2 + 4ab + 4b^2$ |
| 3. $x^2 - x + \frac{1}{4}$ | 4. $25a^2 + 9b^2 - 30ab = (5a - 3b)^2$ |
| 5. $4 - x^2$ | 6. $4x^2 - 9a^2 = (2x - 3a)^2$ |
| 7. $x^3 - a^3$ | 8. $25(a + b)^2 - 9(a - b)^2$ |
| 9. $a^3 + 8$ | 10. $(2x + y)^3 - (x + 2y)^3$ |
| 11. $x^2 + 3x + 2$ | 12. $x^2 - 5x + 6$ |
| 13. $x^2 + 3x - 10$ | 14. $x^2 - 3x - 18$ |

89. 複雑ナル場合。

多項式ノ項ヲ適當ニ取リマトメ、又ハ種種ノ公式ヲ引キ續キ應用シテ、此多項式ヲ因數ニ分解スルコトヲ得ル場合アリ。次ニ二三ノ例ヲ示スベシ。

$$\begin{aligned} \text{例一. } ax + by - bx - ay &= ax - bx - (ay - by) \\ &= (a - b)x - (a - b)y = (a - b)(x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例二. } x^2 - (a - b)x - ab \\ &= x^2 - ax + bx - ab \\ &= x(x - a) + b(x - a) = (x - a)(x + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例三. } a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc \\ &= a^2 + 2a(b - c) + (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= a^2 + 2a(b - c) + (b - c)^2 \\ &= (a + b - c)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例四. } a^2 - b^2 - c^2 + 2bc &= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= a^2 - (b - c)^2 = \{a - (b - c)\} \{a + (b - c)\} \\ &= (a - b + c)(a + b - c) \end{aligned}$$

問題第十

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $ab + cd - (ad + bc)$ | 2. $2a^2 + 4ab - 6b^2$ |
| 3. $x^2 + (a - b)x - ab$ | 4. $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$ |
| 5. $a(a - b) + b(b - a)$ | |
| 6. $a^2b(x^2 - xy) + ab^2(y^2 - xy)$ | 7. $x^{12} - 1$ |
| 8. $(x + a)(x + b) - (y + a)(y + b)$ | |

9. $ab(c+d^2)+cd(a^2+b^2)$
 10. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$
 11. $a^2+b^2-(c^2+d^2)+2ab-cd$
 12. x^4-5x^2+4 13. $2ab-a^2-b^2+c^2$
 14. $(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2$
 15. $(a-3b)a^2-(b-3a)b^2$

90. 整式ノ最大公約數.

一項式又ハ因數ニ分解セラレタル整式ノ最大公約數ヲ求ムルニハ、整數ノ最大公約數ヲ求ムルト同ジヤウナル方法ニヨルコトヲ得。

例一. a^3b^2c , a^4bd , a^2b^2cd ノ最大公約數ヲ求メヨ。

各式ニ共通セル因數ハ a ニツト b 一ツトナリ。此等ノ因數ノ積

$$a^2b$$

ハ即チ求ムル最大公約數ナリ。

注意。整式ノ最大公約數トハ公約數ノ中ニテ次數ノ最大ナルモノナリ。

例二. $36x^4y^6z^3$, $48x^5y^5z^3$ ノ最大公約數ヲ求メヨ。

各式ニ共通ナル文字ノ因數ハ x 四ツ, y 五ツ,

ズ三ツナリ。此等ノ因數ノ積ニナホ係數 36, 48ノ最大公約數 12ヲ掛ケテ

$$12x^4y^5z^3$$

ヲ得。是レ即チ求ムル最大公約數ナリ。

例三. $4x^2(x-3)$, $6x(x+1)(x-3)$ ノ最大公約數ヲ求メヨ。

括弧ニ包マレタル因數ヲ一ツノ文字ノヤウニ取扱ヒ、例二ノ如クニシテ、求ムル最大公約數

$$2x(x-3)$$

ヲ得。

例四. x^3+8 , $2x^2-8$, x^2+5x+6 ノ最大公約數ヲ求メヨ。

$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$2x^2-8=2(x+2)(x-2)$$

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

最大公約數 $x+2$

例題

次ノ式ノ最大公約數ヲ求メヨ。

1. a^2bc , ab^2c , abc^2
2. a^5bc , $a^3b^2c^2$, abc^3
3. $12m^5n^4$, $16m^3n^5p^2$
4. $a^3b^2(x^2-y^2)$, $a^2b^3(x-y)$

5. $x^3+y^3, 2x^2-2xy+2y^2$
 6. $a^2+8a+15, a^2+3a-10$
 7. $(x-1)^2, 1-x^2, x^3-1$
 8. $x^2-8x+7, x^2-2x-35$

91. 整式ノ最小公倍數。

例一。 $8a^3bc^2, 12a^2b^2d$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

二ツノ式ノ中ニ含マレタル各ノ文字ノ因數ノ最高冪 a^3, b^2, c^2, d ノ積ニ、ナホ係數 8, 12 ノ最小公倍數 24 ヲ掛ケテ

$$24a^3b^2c^2d$$

ヲ得。是レ即チ求ムル最小公倍數ナリ。

注意。整式ノ最小公倍數トハ公倍數ノ中ニテ次數ノ最小ナルモノヲイフナリ。

例二。 $4a^2(a-b)^2, 6ab(b^2-a^2)$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

第二ノ式ハ $6ab(b-a)(b+a)$ 即チ $-6ab(a-b)(a+b)$ ニ等シ。ヨリテ括弧ニ包マレタル因數ヲ一ツノ文字ノヤウニ取扱ヒ、求ムル最小公倍數

$$12a^2b(a-b)^2(a+b)$$

ヲ得。

例三。 $x^2y-xy^2, xy^2+y^3, x^2-y^2$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

$$x^2y-xy^2=xy(x-y)$$

$$xy^2+y^3=y^2(x+y)$$

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

最小公倍數 $xy^2(x-y)(x+y)$

例題

次ノ式ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

1. ax, bx
2. a^2bc, ab^2c, abc^2
3. $8a^2x^3, 12a^3x^3, axy^2$
4. $ab^2(x+y), a^2b(x^2-y^2)$
5. $x^3-8, x^3+8, 4-x^2$
6. $3a-3, a^2+a+1, 1-a^3$
7. $6(a^2+ab), 8(ab-b^2), 10(a^2-b^2)$
8. $x^2-14x+49, x^2-4x-21$
9. $x^2-3x+2, x^2-5x+6, x^2-4x+3$
10. $(a-b)(a-c), (b-a)(b-c), (c-a)(c-b)$

92. 或文字ノ降冪ニ排列セラレタル整式ノ最大公約數及ビ最小公倍數。

或文字ノ降冪ニ排列セラレタル多項式ノ最大

公約數及ビ最小公倍數ヲ求ムルニハ、第83-85節ニ
説明セル整數ノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ求
ムル方法ニヨルコトヲ得。

例。次ノ二ツノ整式ノ最大公約數及ビ最小公
倍數ヲ求メヨ。

$$4x^3 - 8x^2 - 19x + 21, \quad x^2 - 4x + 3$$

第一ノ式ヲ第二ノ式ニテ割リ、殘 $x-3$ ヲ得。

此殘ニテ前回ノ除數タリシ第二ノ式ヲ割ルニ
殘ナシ。ヨリテ求ムル最大公約數ハ

$$x-3$$

ナリ。

又此等二ツノ式ノ最小公倍數ハ

$$\begin{aligned} (4x^3 - 8x^2 - 19x + 21) \times \frac{x^2 - 4x + 3}{x-3} \\ = (4x^3 - 8x^2 - 19x + 21)(x-1) \\ = 4x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 40x - 21 \end{aligned}$$

ナリ。

例 題

次ノ式ノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ求メヨ。

[1-4]

1. $2x^2 + 5x + 2, \quad 2x^3 + 3x^2 - x - 1$

2. $x^3 - 1, \quad x^4 + x^2 + 1$

3. $x^4 - x^2 - 2x - 1, \quad x^5 - 2x^2 - 3x - 1$

4. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8, \quad 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12, \quad x^3 - 22x + 24$

5. 整式 A ヲ整式 B ニテ割リ、商 q 殘 C ヲ得。

次ニ B ヲ C ニテ割リ、商 r 殘 D ヲ得、次ニ C ヲ D ニ
テ割ルニ、商 s ヲ得テ割リ切レタリ。 D ニテ A 及
ビ B ヲ割ルトキハ、商ハ如何。

第 三 章 分 數 式

93. 分 數 式。

整式 A ヲ整式 B ニテ除シタル商ヲ

$$\frac{A}{B}$$

ト書ク。カヤウノ式ヲ分數式トイヒ、
被除數 A ヲ其分子、除數 B ヲ其分母ト
イフ。

分子ガ分母ニテ割リ切レルトキハ、分數式ハ一

ツノ整式ニ等シ。サレド是ハ例外ノ場合ニテ、一般ニハ或整式ヲ他ノ整式ニテ割ルトキ、割ヲ切レヌガ常ナリ。

分數式ニ關スル計算ノ法則ハ第一篇ニ説キタ分數ノ計算ノ法則ト全ク同ジコトナリ。

94. 約分。乘法及ビ除法。

$$\text{例一. } \frac{12a^2bx}{8ab^2y} = \frac{3ax}{2by}$$

左邊ノ分數式ノ分母及ビ分子ヲ共通ノ因數 $4ab$ ニテ割ルナリ。

$$\text{例二. } \frac{x^2+10x+21}{x^2-9} = \frac{(x+3)(x+7)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x+7}{x-3}$$

$$\text{例三. } \frac{3a}{4b} \times \frac{8c}{9a} = \frac{3a \times 8c}{4b \times 9a} = \frac{2c}{3b}$$

$$\begin{aligned} \text{例四. } \frac{3a(a-b)}{b(a+b)} \div \frac{3(a^2-b^2)}{2ab} \\ = \frac{3a(a-b) \times 2ab}{b(a+b) \times 3(a^2-b^2)} = \frac{2a^2}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

問題 第十一

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$1. \frac{12a^2bx}{18ab^2y}$$

$$2. \frac{2-2x^2}{4(x-1)^2}$$

$$3. \frac{x^2-2x-15}{x^2-9}$$

$$4. \frac{(x-1)(x^6-1)}{(x^2-1)(x^3-1)}$$

$$5. \frac{2a}{3b} \times \frac{9b^2}{6a^2}$$

$$6. \frac{x^3}{yz} \times \frac{y^3}{zx} \times \frac{z^3}{xy}$$

$$7. \left(\frac{a^2x}{b^2y}\right)^2 \times \left(\frac{by}{ax}\right)^3$$

$$8. \frac{x^2y-xy^2}{x^2+xy} \times \frac{x^2-y^2}{xy-y^2}$$

$$9. \frac{-5a^2b}{6xy^2} \div \frac{3ab^2}{4x^2y}$$

$$10. \frac{m^2-n^2}{xz-yz} \div \frac{n-m}{z}$$

$$11. \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} \div \frac{(y-x)^2}{y^2-x^2}$$

$$12. \frac{a-b}{b} \times \frac{3a}{a+b} \div \frac{a^2-b^2}{2ab}$$

95. 通分。加法及ビ減法。

$$\begin{aligned} \text{例一. } \frac{am+bn}{2mn} + \frac{am-bn}{2mn} \\ = \frac{(am+bn)+(am-bn)}{2mn} = \frac{2am}{2mn} = \frac{a}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例二. } m+n - \frac{m^2+n^2}{m+n} = \frac{(m+n)^2}{m+n} - \frac{m^2+n^2}{m+n} \\ = \frac{(m+n)^2 - (m^2+n^2)}{m+n} = \frac{2mn}{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例三. } \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)} \\ = \frac{a(a+b) - b(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

先ヅ分母ノ積 $(a-b)(a+b)$ ヲ公分母トシテ通分シテ後引キ算ヲ行フナリ。

$$\begin{aligned}
 \text{例四. } & \frac{1}{(a-b)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(x-b)} \\
 &= \frac{1}{(a-b)(x-a)} - \frac{1}{(a-b)(x-b)} \\
 &= \frac{x-b}{(a-b)(x-a)(x-b)} - \frac{x-a}{(a-b)(x-a)(x-b)} \\
 &= \frac{(x-b)-(x-a)}{(a-b)(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{(a-b)(x-a)(x-b)} \\
 &= \frac{1}{(x-a)(x-b)}
 \end{aligned}$$

先ヅ分母ノ最小公倍數 $(a-b)(x-a)(x-b)$ ヲ求メ、之ヲ公分母トシテ通分シテ後、減法ヲ行ヒ、其結果ヲ約分スルナリ。

又ハ次ノヤウニシテモヨシ。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(a-b)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(x-b)} &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) \\
 &= \frac{1}{a-b} \frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{(x-a)(x-b)}
 \end{aligned}$$

問題 第十二

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\begin{array}{ll}
 \text{1. } \frac{x+z}{y} + \frac{x-z}{y} & \text{2. } \frac{4x-3y}{a} - \frac{3x-4y}{a} \\
 \text{3. } \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} & \text{4. } \frac{x-y}{3a} + \frac{2x+y}{6a} - \frac{x-2y}{12a}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{5. } \frac{x}{bc} + \frac{y}{ca} + \frac{z}{ab} & \\
 \text{6. } \frac{4m-5}{8} - \frac{3m+7}{12} - \frac{6-m}{18} & \\
 \text{7. } \frac{a}{1-a} + \frac{a}{1+a} + \frac{a}{a^2-1} & \\
 \text{8. } \frac{x}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{(x-y)^2} & \text{9. } \frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2+x+1}{x+1} \\
 \text{10. } a-b - \frac{a^2+b^2}{a-b} & \text{11. } 1 - \frac{a-b}{a+b} \\
 \text{12. } \frac{x-7}{x^2+6x+5} + \frac{x-1}{x^2+12x+35} & \\
 \text{13. } \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a} & \text{14. } \frac{a}{x(a-x)} + \frac{x}{a(x-a)} \\
 \text{15. } \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)} &
 \end{array}$$

96. 繁分數式。

分數式 $\frac{A}{B}$ ノ分子 A 及ビ分母 B ハ、モト整式ナレドモ、 $\frac{A}{B}$ ハ A ヲ B ニテ除シタル商ヲ示スモノトスル以上ハ、 A, B ハ又分數式ナルコトヲ得。カヤウノ式ヲ繁分數式トイフ。

繁分數式ハ割リ算ヲ實行シテ、之ヲ通常ノ分數式ニ改ムルコトヲ得。

$$\text{例一. } \frac{\frac{a^2b^2}{x^2-y^2}}{\frac{ab}{x-y}} = \frac{a^2b^2}{x^2-y^2} \div \frac{ab}{x-y} = \frac{ab}{x+y}$$

$$\begin{aligned} \text{例二. } \frac{x - \frac{x-a}{1+ax}}{1 + \frac{x(x-a)}{1+ax}} &= \left(x - \frac{x-a}{1+ax}\right) \div \left(1 + \frac{x(x-a)}{1+ax}\right) \\ &= \frac{a(x^2+1)}{1+ax} \div \frac{1+x^2}{1+ax} = \frac{a(x^2+1)(1+ax)}{(1+ax)(1+x^2)} = a \end{aligned}$$

又ハ與ヘラレタル繁分數式ノ分母及ビ分子ノ双方ニ $1+ax$ ヲ掛ケテ、次ノ如クシテモヨシ

$$\text{上ノ式} = \frac{x(1+ax) - (x-a)}{1+ax + x(x-a)} = \frac{ax^2 + a}{1+x^2} = a$$

$$\begin{aligned} \text{例三. } 1 + \frac{a}{1+a + \frac{2a^2}{1-a}} &= 1 + \frac{a(1-a)}{(1+a)(1-a) + 2a^2} \\ &= 1 + \frac{a-a^2}{1+a^2} = \frac{1+a}{1+a^2} \end{aligned}$$

問題 第十三

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$1. \frac{1+x - \frac{1}{1+x}}{1-x - \frac{1}{1-x}}$$

$$2. \frac{a}{a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}}}$$

$$3. \frac{\frac{x+y}{y} + \frac{y}{x-y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$4. \frac{5x^2 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5x}}$$

$$5. \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$6. \frac{\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a}}{\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a}}$$

$$7. \frac{ab}{a^2 - (b+c)^2} \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right)$$

$$8. \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \left(q - \frac{pq}{p+q}\right) \left(p + \frac{pq}{p-q}\right)$$

97. 分數式ノ數値。

分數式ノ分母及ビ分子ニ含マレタル文字ニ定マレル數値ヲ與フルトキハ、分數式モ亦定マレル數値ヲ得。

$$\text{例ハバ, } \frac{3x-2y+1}{x+y-1} \quad (A)$$

ニテ、 $x=1, y=1$ トスルトキハ、

$$(A) = \frac{3-2+1}{1+1-1} = 2$$

$x=1, y=-1$ トスルトキハ、

$$(A) = \frac{3+2+1}{1-1-1} = -6$$

$x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{2}$ トスルトキハ、

$$(A) = \frac{2-1+1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1} = 12$$

$x=1, y=2$ ト ス ル ト キ ハ,

$$(A) = \frac{0}{2} = 0$$

ト ナ ル。

又 $x=2, y=-1$ ト ス ル ト キ ハ,

$$(A) = \frac{9}{0}$$

ト ナ ル。サテ如何ナル數ニ 0 ヲ 掛 ケ テ モ, 0 ト ナ
ルコトナキガ故ニ, 此場合ニハ (A) = 數値ナシ。(第
42節參照)。

ナホ $x = \frac{1}{5}, y = \frac{4}{5}$ ト ス ル ト キ ハ,

$$(A) = \frac{0}{0}$$

ト ナ ル。0 = 如何ナル數ヲ 掛 ケ テ モ, 積ハ 0 ト ナ
ルガ故ニ, $\frac{0}{0}$ = モ 意義ナシ。(第42節參照)。

分子ガ 0 ト ナ リ テ, 分母ガ 0 ト ナ ラ
ザルトキハ, 分數式ノ 數値ハ 0 ナリ。
又分子ノ如何ニ 關セズ, 分母ガ 0 ト ナ
ルトキハ, 分數式ニ 數値ナシ。

例 題

1. 分數式

$$\frac{x+2y-1}{x^2+y^2-1}$$

ニ テ

$$(1) \quad x=3, y=2$$

$$(2) \quad x=3, y=-1$$

$$(3) \quad x = \frac{5}{13}, y = \frac{12}{13}$$

$$(4) \quad x = \frac{-3}{5}, y = \frac{4}{5}$$

ト ス ル ト キ, 其數値如何。

$$2. \text{ 分數式 } \frac{8x-6}{(x-1)^2} \text{ ノ 數値ヲ } 0 \text{ ト スルニハ,}$$

x = 如何ナル數値ヲ 與フルコトヲ 要スルカ。

$$3. \text{ 分數式 } \frac{x+y-5}{x^2+1}, \frac{x-y-1}{y^2+3} \text{ ノ 數値ヲ 同時}$$

ニ 0 ト ナスニハ, x 及ビ y = 如何ナル數値ヲ 與フ
ルコトヲ 要スルカ。

第六篇 一次方程式ノ續キ

98. 分數式ヲ含メル方程式。

例一.
$$\frac{7x-4}{x-1} - \frac{7x-26}{x-3} = 0 \quad (1)$$

ヲ解ケ。

左邊ヲ一ツノ分數式ニ約メテ

$$\frac{(7x-4)(x-3) - (7x-26)(x-1)}{(x-1)(x-3)} = 0 \quad (2)$$

サテ左邊ノ分數式ノ値ヲ0ニスルニハ、其分子ヲ0トナスコトヲ要シ、分子ヲ0ニスルニハ、次ノ方程式ヨリ x ヲ求ムベシ、

$$(7x-4)(x-3) - (7x-26)(x-1) = 0 \quad (3)$$

或ハ $8x-14=0$

即チ
$$x = \frac{7}{4}$$

ヨリテ x ヲ $\frac{7}{4}$ トナストキハ、(2)ノ左邊ノ分數式ノ分子ハ0トナル。サレド、若シ同時ニ其分母モ亦0トナラバ、此分數式ニ數値ナシ(第97節參照)。然ルニ x ヲ $\frac{7}{4}$ トナストモ、(2)ノ左邊ノ分數

式ノ分母ハ0トナラズ。故ニ x ヲ $\frac{7}{4}$ トナストキハ(2)ノ左邊ノ分數式ハ0トナル。ヨリテ $\frac{7}{4}$ ハ(2)ノ根、從テ又(1)ノ根ナリ。

實際ノ計算ハ次ノ如クニスベシ。

(1)ノ兩邊ニ分母ノ最小公倍數 $(x-1)(x-3)$ ヲ掛ケテ分母ヲ拂フトキハ、

$$(7x-4)(x-3) - (7x-26)(x-1) = 0$$

ヲ得(是レ即チ上ノ(2)ノ分子ヲ0ニ等シト置キテ作レル方程式(3)ニ外ナラズ)。之ヲ解キテ、

$$x = \frac{7}{4}$$

ヲ得。

此値ヲ方程式(1)ニ入レテミルニ、分數式ノ分母ハ0トナラズ(方程式(1)ニ含マレタル分數式ノ分母ノ積ハ即チ(2)ノ分母ナルコトニ注意スベシ)。ヨリテ $x = \frac{7}{4}$ ハ方程式(1)ノ根ナリ。

分數式ヲ含メル方程式ヲ解クニハ、兩邊ニ分母ノ最小公倍數ヲ乘ジテ分母ヲ拂ヒ、カヤウニシテ得タル方程式ヲ解キテ未知數ノ値ヲ定ムベシ。其

値ガ與ヘラレタル方程式ニ含マレタル分數式ノ分母ヲ0トナサザルトキハ、是レ即チ求ムル根ナリ。

例二。次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{2x-1}{2y}$$

$$\frac{3x+5}{x+1} = \frac{4y+7}{y+1} - 1$$

第一ノ方程式ノ兩邊ニ $2y(y-1)$ ヲ掛ケテ分母ヲ拂ヒ、

$$2y(x-1) = (2x-1)(y-1)$$

整頓シテ、

$$2x - y = 1 \quad (1)$$

又第二ノ方程式ノ兩邊ニ $(x+1)(y+1)$ ヲ掛ケテ分母ヲ拂ヒ、整頓シテ

$$3x - 2y = -1 \quad (2)$$

ヲ得。(1),(2)ヲ組ミ合セテ解キ、

$$x = 3, \quad y = 5$$

ヲ得。

驗. $\frac{3-1}{5-1} = \frac{2 \times 3 - 1}{2 \times 5}, \quad \frac{3 \times 3 + 5}{3+1} = \frac{4 \times 5 + 7}{5+1} - 1$

x 及ビ y ノ値ガ、與ヘラレタル方程式ニ含マレタル分數式ノ分母ヲ0トナラシメザルコトニ注意スベシ。

例三。次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{5y} + \frac{1}{z} = 7\frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{2}{z} = 10\frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{5x} - \frac{1}{2y} + \frac{4}{z} = 16\frac{1}{10}$$

カヤウノ方程式ヲ解クニハ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ヲ未知數ト見做スベシ。今

$$\frac{1}{x} = u, \quad \frac{1}{y} = v, \quad \frac{1}{z} = w$$

ト置キテ、上ノ方程式ヲ書キ改ムルトキハ次ノ如シ。

$$3u - \frac{4v}{5} + w = \frac{38}{5}$$

$$\frac{u}{3} + \frac{v}{2} + 2w = \frac{61}{6}$$

$$\frac{4u}{5} - \frac{v}{2} + 4w = \frac{161}{10}$$

之ヲ解キテ、

$$u = 2, \quad v = 3, \quad w = 4$$

ヲ得。故 =

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{4}$$

例 題

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $\frac{x-1}{x+1} = 0$

2. $\frac{x-6}{x-8} = 3$

3. $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{2x+7}$

4. $\frac{2x+1}{3x+2} = \frac{5}{8}$

5. $\frac{x-2}{x-6} = \frac{x-7}{x+9}$

6. $\frac{5}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{8}{x}$

7. $\frac{x+1}{y+1} = \frac{2}{3}$

8. $\frac{x-7}{2y} = 4$

$\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{6y} + \frac{11}{10} = \frac{2x-5y}{5y}$

9. $\frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1$

10. $\frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 1$

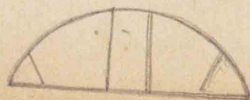
$\frac{15}{x} + \frac{22}{y} = 16$

$\frac{5}{y} + \frac{4}{z} - \frac{6}{x} = 5$

$\frac{9}{x} + \frac{7}{y} - \frac{8}{z} = 6$

99. 應用問題。

例一。白米ノ小賣相場一升ニツキ、上米ハ中米ヨリモ二錢、中米ハ下米ヨリモ三錢高シ。サテ上



米ヲ六圓、下米ヲ三圓ダケ買ヒテモ、又ハ全額ヲ以テ中米ノミヲ買ヒテモ、同量ノ米ヲ得ベシトイフ。一升ノ價各、幾許ナルカ。

中米一升ノ價ヲ x 錢トスルトキハ、上米ハ $x+2$ 錢、下米ハ $x-3$ 錢ナリ。ヨリテ次ノ方程式ヲ得。

$$\frac{600}{x+2} + \frac{300}{x-3} = \frac{900}{x}$$

兩邊ヲ 300 ニテ割リ、次ニ $x(x+2)(x-3)$ ヲ掛ケテ分母ヲ拂ヒ、

$$2x(x-3) + x(x+2) = 3(x+2)(x-3)$$

之ヲ解キテ、

$$x = 18$$

ヲ得。ヨリテ一升ノ價上米ハ 20 錢、中米ハ 18 錢、下米ハ 15 錢ナリ。(驗ヲ行へ)。

例二。坂道ニ沿ヒテ甲乙丙ノ三驛アリ。甲ヨリ乙マデハ上リ、乙ヨリ丙マデハ下リニテ、下リハ上リヨリ一里半ダケ遠シ。サテ甲丙ノ間ヲ往復スルニ、往ニハ六時間、復ニハ六時間半ヲ要セリトイフ。進行ノ速サ、下リハ上リノ一倍半ナリトシ

テ, 甲乙, 乙丙間ノ距離ヲ計算セヨ。

甲乙ノ距離ヲ x 里トスルトキハ, 乙丙ノ距離ハ $x + \frac{3}{2}$ 里ナリ。又上リハ一時間ニ y 里ノ速サナリトスルトキハ, 下リハ $\frac{3y}{2}$ 里ノ速サナリ。ヨリテ, 次ノ方程式ヲ得,

$$\frac{x}{y} + \frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{3y}{2}} = 6 \quad (1)$$

$$\frac{x + \frac{3}{2}}{y} + \frac{x}{\frac{3y}{2}} = 6 \frac{1}{2} \quad (2)$$

之ヲ整頓シテ,

$$\frac{x}{y} + \frac{2x+3}{3y} = 6$$

$$\frac{2x+3}{2y} + \frac{2x}{3y} = \frac{13}{2}$$

例一ノ如クニシテ, 之ヲ解キ,

$$x = 3 \quad (y = 1)$$

ヲ得。ヨリテ甲乙ノ間ハ三里, 乙丙ノ間ハ四里半ナリ。(驗ヲ行へ)。

注意。又ハ(1)(2)ヨリ引キ算ヲナシテ,

$$\frac{\frac{3}{2}}{y} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}y} = \frac{1}{2}$$

ヲ得。是ヨリ $y = 1$ ヲ得。

此方程式ハ $\frac{3}{2}$ 里ヲ行クニ上リト下リトニテ $\frac{1}{2}$ 時間ノ差アルコトヲ表セリ。是レ實ハ問題ノ意味ヨリ直ニ知ラルルコトナリ。

問題 第十四

1. 分母ト分子トノ差ガ48ニ等シキ或分數ヲ約分スルトキハ $\frac{2}{5}$ トナル。分母及ビ分子ヲ求メヨ。

2. $\frac{3}{7}$ ノ分母ト分子トニ同ジ數ヲ加ヘテ作レル分數ノ値 $\frac{2}{3}$ ニ等シ。如何ナル數ヲ加ヘタルカ。

3. 或仕事ヲ仕上グルニ, 乙ハ甲ノ一倍半, 丙ハ甲ノ二倍ノ時間ヲ費シ, 三人共ニ働クトキハ, 此仕事ヲ十二時間ニテ仕上グベシ。各一人ニテハ幾時間ヲ要スルカ。 $\frac{1}{x} + \frac{1}{1.5x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{12}$

4. 砂糖若干斤ヲ二圓七十錢ニテ買ヘリ。若シ砂糖ノ値段ガ一割下落セバ, 同ジ金高ニテ二斤

$$x \text{斤} - 270 \text{錢} = 270 \text{錢}$$

$$\frac{270}{x} \times \frac{9}{10} = x + 2$$

$$270 \times \frac{9}{10} = 270 + 2x$$

ダケ多ク買ヒ得ベシトイフ。一斤ノ價現在幾許ナルカ。

5. 240海里ヲ隔テタル港ニ向ヒテ進航セル汽船ガ、目的地ヨリ48海里手前ノ所ニテ機關ニ損所ヲ生ジタルガタメニ、速度ヲ10の $\frac{1}{2}$ とオソクシテ航海ヲ續ケ、丁度始ヨリ4の $\frac{1}{2}$ とダケ少キ速度ニテ全航路ヲ進ミタルト同ジ時間ヲ費シテ、入港シタリトイフ。始ノ速度ヲ求メヨ。

X 6. 甲乙二種ノ茶アリ。甲16圓、乙18圓ダケヲ混合シタルニ、平均一斤ノ價甲ヨリモ十五錢安ク、乙ヨリモ十錢高クナレリ。兩種一斤ノ價各、幾許ナルカ。

X 7. 或仕事ヲナスニ乙ハ甲ヨリモ六日長クカカル。甲ガ四日働キタル後、乙ガ甲ニ代リタルニ、丁度甲ガ全體ヲ仕上グルニ要スルダケノ日數ヲ經テ出來上レリ。各、一人ニテハ幾日ニテ此仕事ヲナスベキカ。

8. 或仕事ヲナスニ、甲八日間、乙五日間共ニ働キテモ、甲六日間、丙九日間共ニ働キテモ、又ハ乙十日間、丙六日間共ニ働キテモ、出來上ル。甲乙丙一

人ツツニテハ、各、幾日間ニテ出來上ルカ。 (1298)

9. ニツノ管ヲ同時ニ開クトキハ、三十分ニテ水桶ヲ充スベシ。或時ニツノ管ヲ開キテヨリ十八分ノ後、一方ノ管塞ガリタルガタメニ、八分後レテ桶滿チタリトイフ。各管一ツツツニテハ、桶ヲ充スニ幾時間ヲ要スルカ。

10. 或水夫、三里漕ギ上リテ五里漕ギ下ルニハ八時間ヲ費シ、二里漕ギ上リテ四里漕ギ下ルニハ五時三十六分ヲ費ス。靜水ニテ此水夫ノ漕グ速サト、水流ノ速サトヲ計算セヨ。

100. 既知數ガ文字ニテ表サレタル方程式。

例一。 $a(x-a) = b(x-b)$ ヲ解ケ。

此問題ニテハ、 a, b ヲ既知數ト見做シ、未知數 x ヲ a 及ビ b ヲ含メル式ニテ表サントスルナリ。

兩邊ノ括弧ヲ外ヅシ、項ヲ移シテ、

$$ax - bx = a^2 - b^2$$

即チ $(a-b)x = a^2 - b^2$

x ノ係數 $(a-b)$ ニテ兩邊ヲ割リ,

$$x = a + b$$

驗. $a(a+b-a) = ab, b(a+b-b) = ab$

例二. $\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a-b}{x}$ ヲ解ケ.

兩邊ニ $x(x-a)(x-b)$ ヲ掛ケテ,分母ヲ拂ヒ,

$$ax(x-b) - bx(x-a) = (a-b)(x-a)(x-b)$$

即チ $ax^2 - bx^2 = (a-b)\{x^2 - (a+b)x + ab\}$

又ハ $0 = (a-b)\{- (a+b)x + ab\}$

$a-b$ ニテ兩邊ヲ割リ,

$$- (a+b)x + ab = 0$$

是ヨリ

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

ヲ得.

(此結果ヲ驗セ).

例三. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c + d \quad (1)$$

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = a + b \quad (2)$$

(1)ノ兩邊ニハ ab , (2)ノ兩邊ニハ cd ヲ掛ケテ分母ヲ拂ヒ,

$$bx + ay = ab(c + d) \quad (3)$$

$$dx + cy = cd(a + b) \quad (4)$$

ヲ得. サテ y ヲ消去スルガタメニ(3)ノ兩邊ニハ c , (4)ノ兩邊ニハ $-a$ ヲ掛ケテ加へ,

$$bcx - adx = abc^2 - a^2cd$$

即チ

$$(bc - ad)x = ac(bc - ad)$$

ヲ得. 兩邊ヲ $bc - ad$ ニテ割リ,

$$x = ac$$

ヲ得. 同ジヤウニシテ(3),(4)ヨリ x ヲ消去シ(又ハ(1)或ハ(2)ニ x ノ値ヲ代入シ),

$$y = bd$$

ヲ得. 即チ根ハ次ノ如シ.

$$x = ac, \quad y = bd$$

(此結果ヲ驗セ).

問題 第十五

次ノ方程式ヲ解ケ.

$$1. \quad ax - b = cx - d$$

$$2. \quad \frac{a}{b}(x-a) + \frac{b}{a}(x-b) = x$$

$$\frac{b-d}{a-c}$$

$$a+b$$

3. $a(x-b) - b(x-a) = a^2 - b^2$

4. $(x-1)(x-a) = (x-a-1)^2$

5. $\frac{x-a}{a-b} - \frac{x+a}{a+b} = \frac{2ax}{a^2-b^2}$

6. $1 + \frac{x-b}{x-a} = \frac{2(x-b)}{x}$

7. $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{x^2-ab}$

8. $x+y = 2a$

$ax - by = bx + ay$

9. $a(x+y) - b(x-y) = a^2 - b^2$

$a(x-y) + b(x+y) = 2ab$

10. $(a+h)x + (b-h)y = c$

$(b+k)x + (a-k)y = c$

11. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{b}{x} + \frac{a}{y} = 1$

12. $y+z-x = a$

$z+x-y = b$

$x+y-z = c$

101. 應用問題。

例一。今年甲ハ a 歳、乙ハ b 歳ナリ。甲ノ年齢 $a+b$ a^2+1 $\frac{a^2+a+1}{a+1}$ a^2 $b-a$ $\frac{2ab}{a+b}$ $\frac{2ab}{a+b}$ $y = a-b$ $x = a+b$ ガ乙ノ年齢ノ n 倍トナルハ、何時ナルカ。

甲ガ $a+x$ 歳トナルトキ、其年齢ガ丁度乙ノ年齢 $b+x$ ノ n 倍トナルトスルトキハ、次ノ方程式ヲ得。

$$a+x = n(b+x)$$

之ヲ解キテ、

$$x = \frac{a-nb}{n-1}$$

ヲ得。

ヨリテ此時

甲ハ $a + \frac{a-nb}{n-1}$ 即チ $\frac{n(a-b)}{n-1}$

乙ハ $b + \frac{a-nb}{n-1}$ 即チ $\frac{a-b}{n-1}$

歳ナリ。

次ノ數ヲ用ヒテ、一問題ヲ言明シ、上ニ得タル公式ニヨリテ、答ヲ出セ。

(1) $a = 50, b = 18, n = 2$

(2) 一般ニ、 $n = 2$ ナルトキ。

(3) $a = 50, b = 29, n = 4$

(4) 一般ニ、 a ガ nb ヨリモ小ナルトキ、根ノ解釋如何。

例二。時計ノ長針ト短針トガ重ナル時刻ヲ求メヨ。

XII ヨリ x 區劃ノ處ニテ長針ト短針トガ重ナレリトス。

短針ハ一區劃ヲ行クニ12分ヲ要スルガ故ニ、 x 區劃ヲ行クニハ $12x$ 分ヲ要ス。此間ニ長針ハ時計面ヲ n 度廻リテ、丁度 XII ヨリ x 區劃ノ處ニ來レリトスルトキハ、此時間ハ $60n+x$ 分ナリ、ヨリテ次ノ方程式ヲ得。

$$12x = 60n + x$$

之ヲ解キテ、

$$x = \frac{60n}{11}$$

ヲ得。

今 $n=1$ トスルトキハ、 $x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ ヲ得。即チ一時五分十一分ノ五ニ兩針ハ重ナル。

又 $n=2$ トスルトキハ、 $x = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}$ ヲ得。

即チ二時十分十一分ノ十ニ兩針ハ再ビ重ナル。

($n=11$ トナシテ、結果ヲ解釋セヨ)。

例三。甲乙二種ノ茶アリ。一斤ノ價、甲ハ a 錢、乙ハ b 錢ナリ。之ヲ混合シテ、一斤 m 錢ノ茶ヲ得

ントス。混合ノ比ヲ求メヨ。

又混合スベキ茶ノ全量ヲ k 斤トナスニハ、甲乙各、幾斤ヅツヲ混ズベキカ。

甲茶 x 斤ト乙茶 y 斤トヲ混ズベシトスルトキハ、其價ハ $(ax+by)$ 錢トナル。而シテ其平均價 m 錢ナルベシトイフニヨリ、

$$ax+by = m(x+y) \quad (1)$$

$$\text{即チ} \quad (a-m)x = (m-b)y$$

故ニ

$$\frac{x}{y} = \frac{m-b}{a-m} \quad (2)$$

即チ混合ノ割合ハ上 $m-b$ 斤ニツキ下 $a-m$ 斤ナルベシ。

又混合スル茶ノ全量ヲ k 斤トナスニハ

$$x+y = k \quad (3)$$

トナスコトヲ要ス。

(1),(3) ヲ組ミ合セテ解キ、次ノ結果ヲ得。

$$\left. \begin{aligned} x &= k \frac{m-b}{a-b} \\ y &= k \frac{a-m}{a-b} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$a=50$, $b=38$, $m=42$ トシテ、(2)ニヨリテ x, y ノ

比ヲ求メヨ。ナホ $k=90$ トシテ、(4)ニヨリテ x, y ヲ定メヨ。

例 題

- 鶴龜合セテ a 匹、其足數合セテ b 本ナリ。鶴龜各、幾匹ナルカ。
次ノ數ヲ用ヒテ、一一問題ヲ言明シ、且答ヲ出セ
(1) $a=10, b=30$ (2) $b=2a+c$
- 二ツノ數ノ平均ハ m ニシテ、其差ハ d ナリ。此二ツノ數ヲ求メヨ。
次ノ數ヲ用ヒテ、一一問題ヲ言明シ、答ヲ出セ。
(1) $m=60, d=8$ (2) $d=\frac{2}{3}m$
- 活栓ヲ具ヘタル二ツノ桶ニ水ヲ入レタリ。其水ノ量、甲ハ V 、乙ハ v ナリ。甲ノ桶ノ活栓ヲ開ケバ、一分毎ニ A ダケノ水流レ出デ、乙ノ桶ノ活栓ヨリハ a ダケノ水流レ出ヅ。今同時ニ活栓ヲ開クトキハ、幾分ノ後ニ至リ、二ツノ桶ノ水ノ分量ガ相等シクナルカ。又此相等シキ分量ヲ求メヨ。
(1) V ヲ一斗二升、 v ヲ八升、 A ヲ八合、 a ヲ三合トシテ、答ヲ出セ。

- V, v ハ前ノ通りニテ、 A ヲ三合、 a ヲ八合トスルトキハ如何。
- 活栓ノ代ニ、管ヨリ毎分 A 及ビ a ダケノ水ヲ入ルルコトトスルトキハ如何。
- 時計ノ二ツノ針ガ反對ノ方向ニ一直線ヲナス時刻ヲ求ムル公式ヲ作り、之ヲ次ノ場合ニ應用セヨ。
(1) 三時ト四時トノ間。
(2) 十二時ノ直グ後。
(3) 十二時ノ直グ前。
- 二十金ト十四金トノ金塊ヲ熔和シテ、十八金ノ金塊 a ぐらむヲ得ントス。各、幾ぐらむヲ取ルベキカ。
- 一圓ニツキ a 升ノ上米ト b 升ノ下米トヲ混合シテ、一圓ニツキ m 升ノ中米ヲ得ントス。混合ノ比ヲ定メヨ。
又中米 c 升ヲ得ルニハ、上下各、幾升ヲ混ズベキカ。

102. 幾何學ノ問題ノ例。

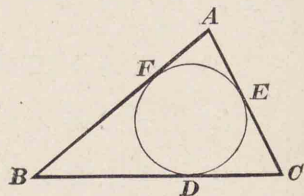
例。三角形ノ内接圓ノ切點ニヨリテ分タルル邊ノ各部ノ長ヲ求メヨ。

三角形ABCノ頂點A, B, Cニ對スル邊BC, CA, ABノ長サヲ, a, b, c ニテ表シ, 又此等ノ邊ノ上ノ切點ヲD, E, Fト名ヅケ, 求ムル長サヲ次ノ如ク表ス。

$$AE = AF = x$$

$$BF = BD = y$$

$$CD = CE = z$$



サテ x, y, z ハ次ノ方

程式ヲ満足セシムベキモノナリ。

$$y+z=a, \quad z+x=b, \quad x+y=c$$

之ヲ解キテ,

$$x = \frac{-a+b+c}{2}, \quad y = \frac{a-b+c}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2}$$

又ハ三角形ノ周圍ノ半分ヲ s ニテ表ストキ, 即チ

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

ト置クトキハ,

$$x = s-a, \quad y = s-b, \quad z = s-c$$

(此結果ヲ言語ニテ言ヒ表セ)。

例題

1. 三角形ABCニテ角A, B, Cニ對スル邊ノ長サヲ a, b, c トスルトキ, BCニ傍切スル圓ニヨリテ内分又ハ外分セラレタル三ツノ邊ノ各部ノ長サヲ求メヨ。

2. 直角三角形ノ二ツノ邊ヲ a, b , 斜邊ヲ c ニテ表ストキ, 内接圓ノ半徑ノ長ヲ求メヨ。

又面積ハ周圍ノ半ト内接圓ノ半徑トノ積ニ等シキコトヨリピタゴラスノ定理ヲ出セ。

3. 半徑 r, r' ナル二ツノ圓ノ中心ノ距離 d ナルトキ, 中心線ノ上ニ中心ヲ有シ, 此等ノ二ツノ圓周ヲ二等分スル圓ノ半徑ヲ求メヨ。

4. 半徑 r ナル圓ノ一ツノ直徑ヲAB, 中心ヲOトスルトキ, 此圓トAO, BOヲ直徑トスル圓トニ切スル圓ノ半徑ノ長サヲ求メヨ。

5. 梯形ノ兩底 a, b 及ビ高サ h ヲ知リテ, 平行セザル二ツノ邊ノ延長ト底トニテ作ラルル二ツノ三角形ノ面積ヲ求メヨ。

103. 方程式ノ不可能。

例一。次ノ方程式ヲ解ケ。

$$14x + 3\{x - 5(x + 7)\} = 2x + 9$$

左邊ヲ整頓シ未知項ト既知項トヲ兩邊ニ集ムルトキハ未知項ハ消滅シ、

$$0 = 114$$

ヲ得。是レ上ノ方程式ハ x ヲ如何ナル數トナストモ、満足セシメラレザルコトヲ示スモノナリ。實際、上ノ方程式ノ左邊ハ $2x - 105 =$ 等シク、即チ右邊ヨリ 114 ヲ減ジタルモノナリ

即チ上ノ方程式ハ根ヲ有セズ。カヤウノ方程式ハ不可能ナリトイフ。

例二。若干人ニ若干ノ金ヲ分配スルニ、人數ガ二人少キトキハ、一人ノ取前ハ三圓ヅツ増シ、又人數ガ四人多キトキハ、一人ノ取前ハ六圓ヅツ減ルベシトイフ。人數及ビ金高ヲ求メヨ。

人數ヲ x 、一人ノ取前ヲ y 圓、即チ金高ヲ xy 圓トスルトキハ、次ノ方程式ヲ得。

$$(x-2)(y+3) = xy$$

$$(x+4)(y-6) = xy$$

之ヲ整頓シテ、

$$3x - 2y = 6 \quad (1)$$

$$-6x + 4y = 24 \quad (2)$$

(2)ノ兩邊ノ符號ヲ變へ、又 2 ニテ割レバ、

$$3x - 2y = -12 \quad (3)$$

ヲ得。サテ x, y ハ如何ナル數ナルカハ知ラズ、(1)ハ $3x - 2y$ ガ 6 = 等シカルベキコトヲ表シ、又(2)ヨリ得タル(3)ハ同ジ數ガ -12 = 等シカルベキコトヲ表ス。是レ有り得ベカラザルコトナリ。

即チ問題ノ事實ハ前後矛盾セリ。故ニ此問題ハ不可能ナリ。

試ニ(1),(2)ヨリ y ヲ消去スルガタメニ、(1)ノ兩邊ニ 2 ヲ掛ケ、(2)ヲ加フルトキハ

$$0 = 36$$

ヲ得。是レ(1),(2)ガ矛盾セルコトヲ示スモノナリ。

注意。方程式ニ根ハアリテモ、其根ガ問題ニ適セザルコトアリ(第70節參照)。サレド、上ノ例ニ示セルハ之ト異ナリテ、方程式ガ根ヲ有セザルガタメニ、問題ニ適スル數ナキナリ。

104. 方程式ノ不定。

例一。次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{7x-5}{3} - \frac{11}{6}x = \frac{x-5}{2} + \frac{5}{6}$$

分母ヲ拂ヒ、整頓シテ、未知項ト既知項トヲ兩邊ニ集ムルニ、既知項モ未知項モ共ニ消滅シテ

$$0=0$$

ヲ得。是レ上ノ方程式ノ兩邊ハ x ヲ如何ナル數トナストモ常ニ同ジ數値ヲ有スルコトヲ示スモノナリ。實際上ノ方程式ノ左邊モ右邊モ共ニ $\frac{3x-10}{6}$ ニ等シ。

カヤウニ方程式ヲ満足セシムル數ガイクツトイフ限リナクアルトキニハ、此方程式ハ不定ナリトイフ。

例二。三ツノ數アリ。甲乙ノ和ハ24ニ、甲丙ノ和ハ18ニ等シク、乙ハ丙ヨリモ6ダケ多シ。此等ノ數ヲ求メヨ。

甲乙丙ヲ x, y, z ニテ表ストキハ次ノ方程式ヲ得。

$$x+y=24 \quad (1)$$

$$x+z=18 \quad (2)$$

$$y-z=6 \quad (3)$$

(1),(2)ヨリ x ヲ消去スルトキハ

$$y-z=6$$

ヲ得。是レ(3)ト同ジキ方程式ナリ。即チ問題ニ示セル第三ノ事實ハ既ニ第一、第二ノ中ニ含まレタルナリ。故ニ實際ハ三ツノ未知數ヲ求ムルガタメニ、二ツノ方程式ガ與ヘラレタルニ過ギズ。

三ツノ未知數ノ中一ツ例ヘバ z ノ値ヲ隨意ニ定メ、サテ(3)ヨリ y ヲ求メ、次ニ(1)又ハ(2)ヨリ x ヲ求ムルコトヲ得。故ニ根ハ幾通ニテモ求ムルコトヲ得ベシ。聯立方程式(1),(2),(3)ハ不定ナリ。

105. 混合ノ問題。

第71節及ビ第101節ニ於テ聯立二元一次方程式ヲ應用シテ二種ノ物ノ混合ニ關スル問題ヲ解キタリ。本節ニ於テハ不定ナル方程式ノ例トシテ二種ヨリ多クノ物ノ混合ニ關スル問題ヲ説クベシ。

例。三種ノ茶、一斤ノ價上ハ a 錢、中ハ b 錢、下ハ c 錢ナリ。之ヲ混合シテ平均一斤ノ價 m 錢ノ茶ヲ得ントス。如何ヤウニ混合スベキカ。

平均價ハ上茶ヨリモ高クハナラズ、又下茶ヨリモ安クハナラズ。ヨリテ m ハ a 、 b ヨリハ小サクシテ c ヨリハ大ナリト假定スベシ。

上 x 斤、中 y 斤、下 z 斤ヲ混ズルモノトスルトキハ、次ノ方程式ヲ得。

$$ax + by + cz = m(x + y + z)$$

即チ

$$(a - m)x + (b - m)y = (m - c)z$$

ヨリテ x 、 y ニハ隨意ノ値ヲ與へ、

$$z = \frac{a - m}{m - c}x + \frac{b - m}{m - c}y$$

ナル式ニヨリテ z ノ値ヲ定ムルコトヲ得。

或ハ分數ヲ避クルガタメニ、

$$x = (m - c)u$$

$$y = (m - c)v$$

從テ $z = (a - m)u + (b - m)v$

ト置キ、 u 、 v ニハ隨意ノ値ヲ與へ、此等ノ式ヨリ x 、 y 、 z ヲ定ムルトキハ、ヨク問題ニ適合スル數

ヲ得ベシ。即チ混合ノ割合ハ不定ナリ。

實際ノ演算ハ次ノヤウニスルコトヲ得。

平均價	一斤ノ價	平均價 トノ 差	混合ノ割合		上, 中, 下
			上ト下	中ト下	
m	a	$a - m$ 過	$m - c$		$(m - c)u$
	b	$b - m$ 過		$m - c$	$(m - c)v$
	c	$m - c$ 不足	$a - m$	$b - m$	$(a - m)u + (b - m)v$

平均價ノ外ナホ混合スベキ全量ヲ與フルトモ、問題ハ不定ナリ。

例ヘバ $a = 250$ 、 $b = 180$ 、 $c = 120$ 、 $m = 160$ トスルトキハ

$$x = 4u, \quad y = 4v, \quad z = 9u + 2v \quad (2)$$

ヲ得。今混合スベキ全量ヲ 32 斤トスルニハ

$$x + y + z = 32$$

トスルコトヲ要ス。即チ

$$4u + 4v + (9u + 2v) = 32$$

又ハ

$$13u + 6v = 32$$

ヨリテ v ニハ隨意ノ値ヲ與へ

$$u = \frac{32 - 6v}{13}$$

ヨリ u ヲ定メ、 u 、 v ノ値ヲ (2) ニ代入シテ x 、 y 、 z

ヲ定ムルコトヲ得。

v ニハ随意ノ値ヲ與ヘ得ベキガ故ニ問題ハ不定ナリ。(サレド x , 從テ u ハ正數ナルコトヲ要スルガ故ニ, $6v$ ハ32ヨリ大ナルコトヲ得ズ, 即チ v ハ $\frac{16}{3}$ ヲ超ユルコトヲ得ズ)。

問題 第十六

次ノ方程式ヲ解ケ。 [1-4]

1. $(x-1)(x-4)=(x-2)(x-3)$

2. $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

3. $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$

4. $2(x+y)-(x-y)=5$

$$3(3x-y)-5(x-3y)=14$$

5. 或矩形ノ地所ノ間口及ビ奥行ヲ4間ヅツ縮ムルトキハ,面積ハ28坪減ジ,又間口及ビ奥行ヲ各,4間ヅツ延バストキハ,面積ハ60坪増ス。此地所ノ周圍幾間ナルカ。

又末段60坪トアルヲ,46坪ト改ムルトキハ如何。

6. 或二桁ノ整數ヲ二倍シテ36ヲ加フルモ,又ハ其數字ヲ置キ換ヘテ後,二倍シテ36ヲ引クモ,結

果ハ同ジ。又此數ノ十ノ位ノ數字ハ一ノ位ノ數字ヨリモ4ダケ少シ。此數ヲ求メヨ。

又二ツノ數字ノ差4トアルヲ,3ト改ムルトキハ,如何。

7. 甲ハ砂糖上三斤,中二斤,下四斤ヲ買ヒテ,代金一圓四十四錢ヲ拂ヒ,乙ハ上五斤,中四斤,下六斤ヲ買ヒテ,二圓四十錢ヲ拂ヒ,丙ハ上四斤,中八斤ヲ買ヒ,二圓ヲ出シテつり錢十錢ヲ受取レリ。三種ノ砂糖一斤ノ價,各幾許ナルカ。

若シ此問題ガ不可能ナラバ,丙ノつり錢ニ誤アリシモノトシテ,之ヲ正セ。

8. 珈琲一斤ノ價,甲ハ二十七錢,乙ハ三十五錢,丙ハ四十錢ナリ。今之ヲ混合シテ平均一斤三十七錢ノ品ヲ作ラントス。

(1) 混合ノ斤數ノ公式ヲ作レ。

(2) 混合スル全量ヲ六十五斤トスルトキハ,甲ヲ十五斤ヨリモ多ク入ルルコトヲ得ザルコトヲ説明セヨ。

(3) 甲ト乙トノ斤數ノ比ヲ1:2トスルトキハ,甲,乙,丙ノ混合ノ割合如何。

(4) 甲九斤,乙十二斤=丙幾斤ヲ混ズベキカ。

(5) 甲六斤,丙三十斤=乙幾斤ヲ混ズベキカ

問題 第十七

次ノ方程式ヲ解ケ。[1-10]

$$1. \frac{2x-13}{x-5} + \frac{2x}{x+4} = 4$$

$$2. \frac{x-3}{x-5} - \frac{x-4}{x-6} = \frac{x-5}{x-7} - \frac{x-6}{x-8}$$

$$3. \frac{mx-a}{nx-b} = \frac{mx-b}{nx-a}$$

$$4. \frac{m}{x+a} + \frac{n}{x+b} = \frac{m+n}{x}$$

$$5. \frac{x-a-1}{x-a} - \frac{x-a}{x-a+1} = \frac{x-b-1}{x-b} - \frac{x-b}{x-b+1}$$

$$6. \frac{y+1}{x-1} = \frac{y+2}{x}$$

$$x+y=8$$

$$7. \frac{x}{a+c} + \frac{y}{b+c} = \frac{x}{a-c} + \frac{y}{b-c} = 1$$

$$8. \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a$$

$$\frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2}$$

$$9. x+y+z=1 \quad 10. \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = d$$

$$ax+by+cz=d \quad \frac{a}{x} - \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m$$

$$a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = n$$

11. 甲ハ乙ヨリモ毎時 a 里ツツ多ク歩ミテ, d 里ダケ先ニアリシ乙ニ n 里行キテ追ヒツキタリ。甲乙ノ速度ヲ求メヨ。

12. 一里ヲ行クニ, 甲ハ乙ヨリモ a 分早く, 又甲ハ d 分先ニ出發セル乙ニ n 分ニテ追ヒツクベシ。甲乙ノ速度ヲ求メヨ。

13. 或地ニ行クニ若干時間ヲ要セリ。若シ速度ヲ毎時 d 里ダケ増サバ, 前ニ要シタル時間ノ $\frac{m}{n}$ ダケニテ到着スルコトヲ得。始ノ速度ヲ求メヨ。

14. s 圓ニテ米ヲ買ハバ a 石ヲ得ベク, 麥ヲ買ハバ b 石ヲ得ベシ。サテ此金高ニテ米ト麥ト合セテ c 石ヲ買ヘリ。各幾石ヲ買ヒ得シカ。

15. 上米 a 圓ト下米 b 圓トヲ混合スルトキハ, 平均一升ニツキ上米ヨリモ m 錢安ク, 下米ヨリモ n 錢高クツクトイフ。各種一升ノ價幾許ナルカ

16. 甲乙二人ニテ前後二回若干碼ノ競走ヲナセルニ、始ニハ乙ハ甲ヨリ t 秒先ニ出デテ a 碼負ケ、次ニハ $a+d$ 碼先ニ出デテ $t-e$ 秒負ケタリ。乙ノ速ヲ求メヨ。

又競走距離ヲ A 碼トシテ甲ノ速ヲ求メヨ。

17. (1) 次ノ方程式ヨリ、 x, y ノ關係ヲ定メヨ。

$$a(x+y) = b(x-y)$$

(2) ニツノ數ノ和ハ其差ノ五倍ナリ。此ニツノ數ノ比如何。

18. (1) 次ノ方程式ヨリ、 x, y ノ關係ヲ定メヨ。

$$ax+by = bx+ay+k$$

(2) 米五俵ト麥三俵トノ價ハ、米三俵ト麥五俵トノ價ヨリ四圓二十錢高シ。米一俵ト麥一俵トノ價ノ差如何。

19. 次ノ聯立方程式ヲ

(1) 分母ヲ拂ヒテ解ケ。

(2) $\frac{x}{y}$ 及ビ $\frac{1}{y}$ ヲ未知數ト見做シテ解ケ。

$$\frac{2x-1}{y} = 6, \quad \frac{3x-4}{y} = \frac{3}{2}$$

20. 次ノ聯立方程式ヨリ、既知項ヲ消去シテ、直

接ニ x, y ノ比ヲ求メヨ。(又根ヲ求メテ驗セ)。

$$11x-7y = 3$$

$$8x+9y = 4$$

第七篇

二次方程式

106. 平方根。

例へバ、方程式 $x^2=4$ ヲ解クニ、是ハ如何ナル數ノ平方ガ4トナルカヲ定メントスルナリ。サテカヤウノ數ハ二ツアリ。

$$2 \text{ 及ビ } -2$$

是ナリ。

2 及ビ -2 ノ外ニハ、平方ガ4トナル數ナシ。是レ2ヨリ大(又ハ小)ナル正數ノ平方ハ4ヨリ大(又ハ小)ニシテ、又絶對値ガ2ヨリ大(又ハ小)ナル負數ノ平方ハ4ヨリ大(又ハ小)ナル正數ナレバナリ。

平方ガ或數 a ニ等シキヤウナル數、即チ方程式

$$x^2 = a$$

ノ根ヲ a ノ平方根トイヒ、之ヲ \sqrt{a} ト書ク。

一般ニ、或正數ノ平方根ハ二ツアリ。一ツハ正、一ツハ負ニシテ、其絶對値ハ相等シ。

\sqrt{a} ハ a ノ平方根二ツノ中、イヅレカーツヲ表スモノニテ、他ノ一ツハ即チ $-\sqrt{a}$ ナリ。

注意 數字ニテ表サレタル數ノ平方根ノ記號ハ、平方根ノ正ナル方ヲ表スモノトス。例へバ $\sqrt{4}$ トハ2ノコトニテ、 -2 ヲバ $-\sqrt{4}$ ト書ク。サレド、文字ニテ表サレタル數ノ平方根ハ然ラズ、例へバ $\sqrt{c^2}$ ハ c 又ハ $-c$ ニ等シク、 c ハ必ズシモ正數ナラズ、又 $-c$ ハ必ズシモ負數ナラズ。

107. 二次方程式ノ例。

例一。 $(2x-7)^2=9$ ヲ解ケ。

$$2x-7=3 \quad \text{又ハ} \quad 2x-7=-3$$

$$\text{ヨリテ} \quad x=5 \quad \text{又ハ} \quad x=2$$

(此結果ヲ驗セ)。

例二。 $x^2+2x-35=0$ ヲ解ケ。

既知項 -35 ヲ右邊ニ移シテ、

$$x^2+2x=35$$

左邊ヲ平方ノ形ニスルガタメニ、兩邊ニ1ヲ加

$$x^2 + 2x + 1 = 36$$

即チ $(x+1)^2 = 36$

例一ノ如クニシテ、之ヲ解キ、

$$x = 5 \quad \text{又ハ} \quad x = -7$$

例三。(3x-1)(2-x) = 2-3(x-1)ヲ解ケ。

括弧ヲ外ヅシ、整頓シテ

$$3x^2 - 10x = -7$$

ヲ得。サテ左邊ヲ平方ノ形ニスルガタメニ、先
ヅ兩邊ヲ3ニテ割リ、

$$x^2 - \frac{10x}{3} = -\frac{7}{3}$$

即チ $x^2 - 2\left(\frac{5}{3}\right)x = -\frac{7}{3}$

次 $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ ヲ兩邊ニ加へ、

$$x^2 - 2\left(\frac{5}{3}\right)x + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

即チ $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

ヨリテ $x - \frac{5}{3} = \pm \frac{2}{3}$

故ニ $x = \frac{5 \pm 2}{3}$

即チ $x = \frac{7}{3}$ 又ハ $x = 1$

例題

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $9x^2 = 144$

2. $3(x-7)^2 = 243$

3. $3x^2 - 17 = 8 - x^2$

4. $\frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{25}{6}$

5. $a^2x^2 - b^2 = 0$

6. $x^2 - 2x = 15$

7. $4x^2 + 4x = 63$

8. $3x^2 - 8x = 11$

108. 一般ノ解キ方。根ノ公式。

一般ニ、一元二次方程式ヲ整頓スルトキハ、次ノ
如キ形ノ方程式ヲ得、

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

a, b, cハ既知數ニシテ、之ヲ方程式ノ係數トイフ。

此方程式ヲ解クコト次ノ如シ。

先ヅcヲ右邊ニ移シ、兩邊ニ4aヲ掛ケテ

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

即チ $(2ax)^2 + 2(2ax)b = -4ac$

兩邊ニ b^2 ヲ加ヘテ、

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac$$

ヲ得。此方程式ノ左邊ヲ平方ノ形ニ書キ、

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

ヲ得。ヨリテ

$$b^2 - 4ac \text{ ナル式ヲ } D \text{ ニテ表ス}$$

トキハ

$$2ax + b = \pm \sqrt{D}$$

是ヨリ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (2)$$

ヲ得。即チ根ハ

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{及ビ} \quad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

ナリ。

上ノ(2)ハ即チ二次方程式(1)ノ根ノ公式ナリ。スベテ一元二次方程式ヲ解クニハ、此公式ニヨリテ直ニ根ヲ計算スベシ。

例一。 $x^2 + (x+1)^2 = \frac{13}{6}x(x+1)$ ヲ解ケ。

分母ヲ拂ヒ、括弧ヲ外ヅシ、項ヲ集メテ整頓シ、

$$x^2 + x - 6 = 0$$

即チ $a = 1, b = 1, c = -6$

$$D = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25, \sqrt{D} = 5$$

故ニ $x = \frac{-1 \pm 5}{2}$

即チ $x = 2$ 又ハ $x = -3$

例二。 $(a-b)x^2 = a + bx$ ヲ解ケ。

整頓シテ、 $(a-b)x^2 - bx - a = 0$

即チココニテハ、(1)ノ a, b, c ニ相當スルモノハ、

$$a-b, -b, -a$$

ナリ。ヨリテ

$$D = (-b)^2 - 4(a-b)(-a) = b^2 - 4ab + 4a^2 = (b-2a)^2$$

$$\sqrt{D} = (b-2a)$$

故ニ $x = \frac{b \pm (b-2a)}{2(a-b)}$

重號ノ中 $\left\{ \begin{array}{l} + \text{ヲトレバ } x = -1 \\ - \text{ヲトレバ } x = \frac{a}{a-b} \end{array} \right\}$ ヲ得。

例三。 $\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-2} = \frac{12}{x-3}$ ヲ解ケ。

分母ノ最小公倍数 $(x-1)(x-2)(x-3)$ ヲ兩邊ニ乗ジテ分母ヲ拂ヒ、

$$4(x-2)(x-3) + 5(x-1)(x-3) = 12(x-1)(x-2)$$

整頓シテ、

$$3x^2 + 4x - 15 = 0$$

之ヲ解キテ、

$$x = \frac{5}{3} \text{ 又ハ } x = -3$$

ヲ得。此等ノ値ハ、イツレモ與ヘラレタル方程式ニ含マレタル分數式ノ分母ヲ0トナラシメザルガ故ニ、共ニヨク與ヘラレタル方程式ヲ満足セシムベシ。(第98節參照)。

二次方程式

$$ax^2+2bx+c=0$$

ヲ解クニハ、兩邊ニ a ヲ掛ケテ、上ノ如クニスレバヨシ。(此解法ヲ試ヨ)。根ハ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

ナリ。(上ノ公式(2)ニテ、 b ノ代ニ $2b$ ヲ入ルルトキハ、此式ヲ得ベシ)。

一元二次方程式ニテ、 x ノ係數ガ偶數ナルトキニハ、此公式ヲ用フルガ便利ナリ。但、ココニテハ、 b ハ x ノ係數ノ半分ナルコトヲ忘ルベカラズ。

例ヘバ例三ノ方程式 $3x^2+4x-15=0$ ニテハ

$$a=3, \quad b=2, \quad c=-15$$

$$\text{故ニ} \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 3 \times (-15)}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{49}}{3} = \frac{-2 \pm 7}{3}$$

即チ根ハ $\frac{5}{3}$ 及ビ -3 ナリ。

一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

ハ二ツノ根ヲ有ス。此等ノ根ハ公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ニヨリテ計算スルコトヲ得。

又二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ ノ根ハ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

ナリ。

問題 第十八

公式ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ。

- | | |
|------------------------|--|
| 1. $6x^2-5x+1=0$ | 2. $x^2-x=12$ |
| 3. $(x-2)(x-3)=20$ | 4. $7x^2+26x+15=0$ |
| 5. $3x^2-10x+7=0$ | 6. $\frac{2+x^2}{3} - \frac{x-x^2}{2} = 1-x+x^2$ |
| 7. $x^2=1-x$ | 8. $x^2-10ax=39a^2$ |
| 9. $x^2-ab=(a-b)x$ | 10. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$ |
| 11. $(x-a)^2=bx$ | 12. $ax^2=bx$ |
| 13. $x+\frac{12}{x}=7$ | 14. $\frac{1}{3x-1} = \frac{2x}{1-x}$ |

15. $\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{2x-4}$ 16. $\frac{x-5}{x+3} = \frac{x-2}{2x+3}$
17. $\frac{x-1}{x+5} = \frac{x+4}{x+6} + 1$ 18. $\frac{7}{x+1} + \frac{8}{x+2} = \frac{18}{x+3}$
19. $\frac{x+5}{x-1} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{2(x+9)}{x+1}$
20. $\frac{a}{x+b} + \frac{b}{x-2a} + \frac{1}{2} = 0$
21. $\frac{ax+b}{a+bx} = \frac{cx+d}{c+dx}$
22. $\frac{n}{x-m} + \frac{m}{x-n} = \frac{2(m+n)}{x}$
23. $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 24. $\frac{x^2}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$
25. $\frac{3x+7}{x-3} = 2x-7 + \frac{2(1-x^2)}{3-x}$

109. 應用問題。

例一。周圍 68 間、面積 288 坪ナル矩形ノ地所ノ間口及ビ奥行ヲ求メヨ。

間口ヲ x 間トスルトキハ、奥行ハ $\frac{68}{2} - x$ 即チ $34 - x$ 間ニシテ、面積ハ $x(34-x)$ 坪ナリ。ヨリテ次ノ方程式ヲ得、

$$x(34-x) = 288$$

之ヲ解キテ、 $x=16$ 又ハ $x=18$ ヲ得。

故ニ間口 16 間、奥行 34-16 即チ 18 間、又ハ間口 18 間、奥行 34-16 即チ 16 間ナリ。

$$\text{驗。} \quad 16 \times 18 = 288, \quad (16+18) \times 2 = 68$$

例二。縦ハ横ヨリ二間長キ矩形ノ地所ノ面積 288 坪ナリ。縦横各、幾間ナルカ。

縦ヲ x 間トスルトキハ、横ハ $x-2$ 間ナリ。ヨリテ次ノ方程式ヲ得、

$$x(x-2) = 288$$

之ヲ解キテ $x=18$ 又ハ $x=-16$ ヲ得。

故ニ縦 18 間、横 18-2 即チ 16 間ナリ(驗ヲ行ヘ)。 $x=-16$ ハ問題ニ適セズ。

例三。或人二千圓ヲ預ケ、一個年ノ後元金及ビ利息ヲ受取リ、之ニ八百圓ヲ足シテ、又前ト同ジキ利率ニテ預ケ、一個年ノ後、元利合計三千四十五圓ヲ受取レリ。年利率幾許ナルカ。

x ヲ年利率トスルトキハ、始ノ一個年ノ元利合計ハ $2000(1+x)$ 圓ナリ。之ニ 800 圓ヲ足シテ、年利率 x ニテ預クルトキハ、一個年後ノ元利合計ハ $\{2000(1+x) + 800\}(1+x)$ 圓トナル。故ニ

次ノ方程式ヲ得、

$$\{2000(1+x)+800\}(1+x)=3045$$

之ヲ解キテ、

$$x=0.05 \quad \text{又ハ} \quad x=-\frac{49}{20}$$

ヲ得。故ニ年利率ハ五分ナリ(此結果ヲ驗セ)。

$x=-\frac{49}{20}$ ハ問題ニ適セズ。

例四。二人ノ職工或仕事ヲナスニ、甲ハ乙ヨリモ六日早く仕上グ。又兩人共ニ此仕事ヲナストキハ、四日ニテ出来上ル。甲乙別別ニ此仕事ヲナストキハ、各、幾日ヲ要スルカ。

甲ハ x 日ニテ仕上グトスルトキハ、乙ハ $x+6$ 日ニテ仕上グベシ。ヨリテ次ノ方程式ヲ得、

$$\frac{1}{x+6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

分母ヲ拂ヒ、 $4x+4(x+6)=x(x+6)$

整頓シテ、 $x^2-2x-24=0$

之ヲ解キテ、 $x=6$ 又ハ $x=-4$

ヲ得。是ハイヅレモ方程式(1)ヲ満足セシム。

サレド負根 $x=-4$ ハ問題ニ適セズ。

即チ甲ハ六日、乙ハ十二日ニテ仕上グ。

(又乙ガ此仕事ヲ仕上グルニ要スル日數ヲ未知數トシテ、解キ試ヨ)。

問題第十九

1. 或正數ノ五分ノ一ト七分ノ一トノ積ハ百四十ナリ。或數トハ如何。
2. 三ツノ連続セル正ノ整數ノ平方ノ和ハ245ナリ。此三ツノ數ヲ求メヨ。
3. 二ツノ數ノ和ハ23、積ハ120ナリ。此二ツノ數ヲ求メヨ。
4. 或數ト其逆數トノ和ガ2.9ニ等シキコトヲ知リテ此數ヲ求メヨ。
5. 二ツノ正數ノ差ハ2ニシテ、其逆數ノ差ハ $\frac{1}{2}$ ナリ。此等ノ數ヲ求メヨ。
6. 正方形ノ地所ノ間口ニ沿ヒテ、幅二間ダケ道路ニ組入レラレタルガタメニ、此地所ノ面積ハ624坪トナレリ。此地所ノ間口幾間ナルカ。
7. 或立方體ノ邊ノ長サヲ二寸ヅツ延バストキハ、體積三百八十六立方寸ヲ増スベシトイフ。此立方體ノ一邊ノ長サ幾許ナルカ。

8. 縦三尺、横二尺ノ鏡ニ、縦横トモ同ジ幅ノ縁ヲ附ケタルニ、鏡ト縁トノ面積相等シクナレリトイフ。縁ノ幅ヲ求メヨ。

9. 間口ハ奥行ヨリモ六間長キ矩形ノ地所ヲ圍メル幅三間ノ道路ノ面積ハ、丁度此地所ノ面積ニ等シ。此地所ノ間口及ビ奥行ヲ求メヨ。

10. 同ジ利率ニテ、單利ト半年毎ノ複利トニテ、元金百圓一個年ノ利息ガ九錢ダケ違フトイフ。年利率幾許ナルカ。

11. 或人二百十圓ヲ借り、一年ノ後百二十一圓ヲ返シ、其後又一年ヲ經テ百二十一圓ヲ返シテ、丁度皆濟トナレリ。年利率幾許ナルカ。

12. 二石二斗五升ノ酒ヲ入レタル桶ヨリ、若干ヲ汲出シテ、之ヲ水ニテ補ヒ、又前ト同ジ分量ダケ汲出シテ、水ヲ入レタルニ、桶ニアルハ、僅ニ六割四分ノ酒ヲ含メリトイフ。毎次汲出シタルハ幾許ヅツナルカ。

13. 或吳服商人、百五十圓ニテ端物若干端ヲ仕入レ、之ヲ一端ニツキ一圓五十錢ヅツニ賣リテ二十四端ノ原價ニ等シキ利益ヲ得タリ。仕入レタ

ル端數ヲ求メヨ。

14. 或集會ノ費用合計十八圓ヲ各會員ニ等分ニ割當ツル筈ナリシニ、會員二人不參セルガタメニ、殘ノ會員ハ一人ニツキ三十錢ヅツ多ク負擔スルコトトナレリ。會員ノ數ヲ求メヨ。

15. 桶ニ水ヲ入ルルニ、大管ヲ用フレバ、小管ヲ用フルヨリモ十分早ク滿ツ。或時此二ツノ管ヲ用ヒタルニ、十分ニシテ大管ハ閉塞シ、其後五分ヲ經テ桶滿チタリ。大管及ビ小管ヲ別別ニ用フルトキハ、幾分ニテ滿ツルカ。

16. 或人七千五百圓ニテ株券若干ヲ買ヒ、其後相場ガ一株ニツキ二十五圓ヅツ上リシトキ、二十株ダケヲ殘シ、其餘ヲ賣リ拂ヒテ、八千圓ヲ得タリ。買入レタル株數ヲ求メヨ。

17. 上下二種ノ品物アリ。一圓ニツキ下ハ上ヨリモ一個安シ。上下各、一圓ヅツヲ賣ルニ、誤リテ上ト下トヲ取り違へテ渡セルガタメニ、五錢ノ損ヲナシタリ。兩種一個ノ價各、幾許ナルカ。

18. 上中下三種ノ品物アリ。一個ノ價、中ハ上ヨリモ八錢、下ハ中ヨリモ十二錢安シ。四圓ニテ

上、六圓ニテ下ノ品ヲ買フト同ジ個數ヲ中ノ品ノ
ミニテ調フルニハ、八十錢ダケ餘計カカルトイフ
一個ノ價各、幾許ナルカ。

19. 同時ニ或鐵道ノ兩端驛ヲ發セル二ツノ列
車ガ出發後十二時間ヲ經テ擦レ違ヒ、甲ハ乙ヨリ
モ七時間早ク終端驛ニ著キタリ。二ツノ列車ガ
全距離ヲ行クニ要スル時間各、幾許ナルカ。

20. 頂角ガ直角ニシテ半徑ガ r ナル扇形ニ内
接スル圓ノ半徑ヲ求メヨ。

21. 半徑 r ナル圓ト互ニ直角ニ交ル其二ツノ
切線トニ切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ。

22. 邊ノ長サ a 寸ナル正方形ニ面積 s 平方寸
ナル正方形ヲ内接セシメヨ。

$$\text{又(1) } a=12, s=74 \quad (2) a=5, s=12.5$$

$$(3) a=10, s=148 \quad \text{トシテ結果ヲ算出セヨ。}$$

110. 根ト係數トノ關係。

二次方程式

$$x^2+px+q=0$$

ノ二ツノ根

$$\frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$$

ヲ a, β ニテ表ストキハ

$$a+\beta = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} + \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = -p$$

又

$$\begin{aligned} a\beta &= \left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \right) \left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \{ (-p)^2 - (\sqrt{p^2-4q})^2 \} = q \end{aligned}$$

一元二次方程式ノ項ヲ一邊ニ集メ、
 x^2 ノ係數ニテ兩邊ヲ割り、方程式ヲ

$$x^2+px+q=0$$

ナル形ニスルトキハ、根ノ和ハ x ノ係
數ノ符號ヲ變ヘタルモノノ即チ $-p$ ニ
等シク、又根ノ積ハ既知項 q ニ等シ。

例一。 $x^2+x=a^2+a$ ヲ解ケ。

此方程式ニテハ a ガ一ツノ根ナルコトメの
こニテ知り得ベシ。サテ二ツノ根ノ和ハ -1
ニ等シキニヨリ、今一ツノ根ハ $-1-a$ ナルコト
ヲ知ルベシ。即チ根ハ a 及ビ $-(a+1)$ ナリ。

又ハ二ツノ根ノ積ガ $-(a^2+a)=$ 等シキコトヲ
利用シテ、第二ノ根 $-(a+1)$ ヲ求ムルコトヲ得。

例二。二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二ツノ根ノ
平方ノ和ヲ直接ニ(根ノ式ヲ用ヒズニ)定メヨ。

上ノ方程式ノ兩邊ヲ x^2 ノ係數ニテ割ルトキ

ハ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ヲ得。故ニ二ツノ根ヲ α, β トスルトキハ

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ヨリテ

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \end{aligned}$$

例三。二ツノ數ノ和ハ15ニシテ、其積ハ54ナリ、
此二ツノ數ヲ求メヨ。

二ツノ數ノ中ノ一ツヲ x トスルトキハ、他ノ
一ツハ $15-x$ ナルニヨリ、次ノ方程式ヲ得。

$$x(15-x) = 54$$

即チ求ムル二ツノ數ハイヅレモ方程式

$$x^2 - 15x + 54 = 0$$

ヲ満足セシムルモノナリ。サテ此方程式ノ二
ツノ根ノ和ハ15、積ハ54ニ等シキガ故ニ、求ムル
數ハ上ノ二次方程式ノ二ツノ根

6及ビ9

ニ外ナラズ。

一般ニ和ハ p 、積ハ q ニ等シキ二ツノ數ハ二次
方程式

$$x^2 - px + q = 0$$

ノ二ツノ根ナリ。

例題

1. 二ツノ數ノ和ハ7ニシテ、積ハ12ナリ。此
等ノ數ヲ求メヨ。

2. 二ツノ正數ノ積ハ6ニシテ、其平方ノ和ハ
13ナリ。此等ノ數ヲ求メヨ。

3. 1ハ次ノ二次方程式ノ一ツノ根ナルコト
ヲ確メ、他ノ一ツノ根ヲ書ケ。

$$(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$$

4. 次ノ二次方程式ノ根ヲめ ϕ ノこニテ求メヨ。

$$x^2 - ax = c^2 - ac$$

5. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ逆數ノ和

及ビ根ノ平方ノ逆數ノ和ヲ求メヨ。

6. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ α, β トスルトキハ、二次式 ax^2+bx+c ハ $a(x-\alpha)(x-\beta)$ ニ等シ。之ヲ證明セヨ。

111. 判別式。虚數。

例ヘバ方程式 $x^2+1=0$ ヲ解カントスルニ、

$$x^2 = -1$$

ヨリテ

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

ヲ得。

又方程式 $x^2+x+1=0$ ヲ解クニ、ココニテハ

$$a=1, b=1, c=1, D=1^2-4=-3$$

ヨリテ

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

ヲ得。

サテ正數ニテモ負數ニテモ、其平方ハ必ズ正數ニシテ、決シテ -1 、又ハ -3 ノ如キ負數トナルコトナシ。故ニ $\sqrt{-1}$ 又ハ $\sqrt{-3}$ ナル記號ニテ表サルベキモノハ、是マデ取扱ヒ來レル數ノ中ニハナシ。即チ上ニ擧ゲタル二次方程式ハ根ヲ有セズ。

$\sqrt{-1}$ 、 $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ノ如ク負數ノ平方根ヲ含メ

ル式ヲ虚數トイヒ、虚數ニ對シテ正數、負數及ビ0ヲ實數トイフ。

ヨリテ又上ノ二次方程式ノ根ハ虚數ナリトモイフ。

初等數學ニテハ實數ノミヲ取扱フガ故ニ、向後單ニ數トイフハ實數ヲ指スモノトス。

一般ニ二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

ノ二ツノ根

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (D=b^2-4ac)$$

ハ D ガ正數ナルトキハ實數ニシテ、 D ガ負數ナルトキハイツレモ虚數ナリ。

又 D ガ0ナルトキハ二ツノ根ハ共ニ $-\frac{b}{2a}$ トナル。即チ方程式ハ唯一ツノ根ヲ有スルノミナリ。

カヤウニ二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ性質ハ、 D ノ符號ニヨリテ判別スルコトヲ得ルガ故ニ、 D 即チ b^2-4ac ヲ上ノ二次方程式ノ判別式トイフ。

例題

次ノ二次方程式ノ根ノ性質ヲ判別セヨ。[1-6]

1. $2x^2+x-1=0$ 2. $4x^2+21x+5=0$

3. $6x^2-11x+3=0$ 4. $4x^2+12x+9=0$

5. $9x^2-24x+16=0$ 6. $5x^2-3x+4=0$

7. 二次方程式 $x^2+px+q=0$ ノ既知項 q ガ負數ナルトキハ、此方程式ハ實根ヲ有シ、二ツノ根ノ中一ツハ正數、一ツハ負數ナルコトヲ證明セヨ。
(二ツノ根ノ積ニ着眼セヨ)。

8. 二次方程式 $x^2+px+q=0$ ガ實根ヲ有シ、且既知項 q ガ正數ナルトキハ、二ツノ根ハイヅレモ p ト反對ナル符號ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

9. 上ノ二ツノ問題ノ結果ヲ應用シテ、1ヨリ6マデノ方程式ノ根ノ符號ヲめこのニテ定メヨ。

10. 或正數ト其逆數トノ和ガ a ニ等シキコトヲ知リテ、此數ヲ求メヨ。又此問題ハ a ガ2ヨリ小ナラザルトキニ限リテ解キ得ベキコトヲ説明セヨ。

11. 和ハ $2p$ ニ、積ハ q ニ等シキ二ツノ正數ハ、 q ガ p^2 ヨリ大ナラザルトキニ限リテ存在スルコト

ヲ證明セヨ。

12. 二ツノ正數ノ和ガ與ヘラレタルトキハ、此等ノ二ツノ數ガ相等シキトキニ積ガ最モ大キクナル。又二ツノ正數ノ積ガ與ヘラレタルトキハ、此等ノ二ツノ數ガ相等シキトキニ、其和ガ最モ小サクナル。之ヲ證明セヨ。

112. 一元二次方程式ヲ用ヒテ 解キ得ル方程式ノ例。

二次ヨリモ高次ナル方程式ハ、一般ニ之ヲ解クコト困難ナレド、或特別ナル形ノモノハ、二次方程式ノ如クニシテ、之ヲ解クコトヲ得。次ニ一ニノ例ヲ示ス。

例一. $x^4-13x^2+36=0$ ヲ解ケ。

$$x^2=y \text{ ト置クトキハ,}$$

$$y^2-13y+36=0$$

之ヲ解キテ,

$$y=4 \quad \text{又ハ} \quad y=9$$

ヲ得。

$$\text{ヨリテ} \quad x^2=4 \quad \text{即チ} \quad x=\pm 2$$

又ハ $x^2=9$ 即チ $x=\pm 3$

與ヘラレタル方程式ハ四ツノ根ヲ有ス。

例二。 $\frac{x^2-6}{x} - \frac{5x}{x^2-6} = 4$ ヲ解ケ。

$$\frac{x^2-6}{x} = X \text{ ト置クトキハ,}$$

$$X - \frac{5}{X} = 4$$

之ヲ解キテ, $X=5$ 又ハ $X=-1$

ヲ得。ヨリテ

$$\frac{x^2-6}{x} = 5 \quad (1)$$

$$\text{又ハ} \quad \frac{x^2-6}{x} = -1 \quad (2)$$

(1)ヲ解キテ, $x=6$ 又ハ $x=-1$

(2)ヲ解キテ, $x=2$ 又ハ $x=-3$

ヲ得。即チ根ハ 6, 2, -1, -3 ノ四ツナリ。

問題 第二十

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ 2. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

3. $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4}$

4. $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$

5. $(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 12) = 280$

6. $(x^2 - a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4(bx - ac)^2$

7. $\frac{x+1}{x^2} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{3}{2}$ 8. $\frac{6x}{2x^2+1} + \frac{2x^2+1}{3x} = 3$

9. $x^4 - 2x^3 + x^2 = 36$

10. $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$

113. 平方根ヲ含メル方程式ノ例。

例一。 $x = \sqrt{x+6}$ (1)

ヲ解ケ。

(1)ノ兩邊ヲ平方シテ,

$$x^2 = x + 6 \quad (2)$$

之ヲ解キテ,

$$x = 3 \text{ 又ハ } x = -2$$

ヲ得。

サテ $x=3$ ヲ驗スニ, $\sqrt{3+6}=3$ ニテ,是ハ方程式(1)ヲ満足セシム。

次ニ $x=-2$ ヲ驗スニ, $\sqrt{-2+6}=2$ ニテ是ハ方程式(1)ヲ満足セシメズ。

注意。上ノ $x=-2$ ナル値ヲ方程式(1)ノ $x =$ 代入スルトキハ,右邊ハ $\sqrt{4}$ トナリ,左邊ハ -2

トナル。故ニ $x = -2$ ハ方程式

$$x = -\sqrt{x+6} \quad (1_a)$$

ヲ満足セシム。即チ方程式(2)ノ根 $x=3$ 及ビ $x=-2$ ハ、或ハ方程式(1)ヲ、又或ハ方程式(1_a)ヲ満足セシム。

一般ニ、或方程式ノ兩邊ニ立テル式ヲ A 及ビ B ニテ表ストキハ、此方程式ヲ

$$A = B \quad (1)$$

ト書クコトヲ得。此方程式ノ兩邊ヲ平方シテ作レル方程式ハ

$$A^2 = B^2 \quad (2)$$

ナリ。此方程式(2)ハ $A=B$ ナルトキニハ、勿論満足セシメラル。サレド又

$$A = -B \quad (1_a)$$

ナルトキニモ、(2)ハ満足セシメラル。即チ(1)ノ根ハ必ズ(2)ノ根ナレドモ、逆ニ(2)ノ根ハ必ズ(1)ノ根ナリトハ言フコトヲ得ズ。(2)ノ根ガ(1)ヲ満足セシムルカ否カハ、驗ヲ行ヒテ後ニ始メテ知リ得ベシ。(方程式(2)ノ根ノ中(1)ヲ満足セシメザルモノハ必ズ(1_a)ヲ満足セシム)。

上ノ例ニテハ、 A ハ x 、 B ハ $\sqrt{x+6}$ ニテ

$$A^2 = B^2 \quad \text{即チ} \quad x^2 = x+6$$

ノ二ツノ根ノ中、一ツ($x=3$)ハ

$$A = B \quad \text{即チ} \quad x = \sqrt{x+6}$$

ヲ満足セシメ、又一ツ($x=-2$)ハ

$$A = -B \quad \text{即チ} \quad x = -\sqrt{x+6}$$

ヲ満足セシム。

例二。 $2x - \sqrt{x^2 - 3x - 3} = 9 \quad (1)$

ヲ解ケ。

項ヲ移シ、平方シテ

$$(2x-9)^2 = x^2 - 3x - 3$$

之ヲ解キテ、

$$x = 7 \quad \text{又ハ} \quad x = 4$$

ヲ得。サテ驗ヲ行フニ、 $x=7$ ハ與ヘラレタル方程式(1)ヲ満足セシム。サレド $x=4$ ハ方程式(1)ヲ満足セシメズ。故ニ $x=4$ ハ(1)ノ平方根ノ前ノ符號ヲ變ヘテ作レル方程式

$$2x + \sqrt{x^2 - 3x - 3} = 9$$

ヲ満足セシムルコトヲ知ル。(驗ヲ實行セヨ)。

問題 第二十一

次ノ方程式ヲ解ケ(結果ヲ驗セ)。

1. $\sqrt{x-8}=5$
2. $3\sqrt{3x+4}-x=4$
3. $x+\sqrt{x-4}=6$
4. $\sqrt{x}+\sqrt{4+x}=3$
5. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5\sqrt{x}$
6. $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2}=\sqrt{8x-7}$
7. $\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=x$
8. $\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{\sqrt{x^2+1}}=4$
9. $3+\sqrt{x^2+x-1}=2x$
10. $\sqrt{ax+b^2}-\sqrt{bx+a^2}=a-b$

114. 聯立二次方程式。

一般ニ聯立二次方程式ヲ解クコトハ難ケレドモ、次ニ二三ノ最モ簡單ナル場合ヲ示サントス。

例一。次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$2x-y=2 \quad (1)$$

$$4x^2+2xy+y^2=49 \quad (2)$$

(1)ニヨリ y ヲ x ヲ含メル式ニテ表シ

$$y=2(x-1)$$

ヲ得。之ヲ(2)ニ代入シテ

$$4x^2+4x(x-1)+4(x-1)^2=49$$

此方程式ハ未知數 x ノミヲ含メル二次方程式ナリ。之ヲ解キテ、

$$x=\frac{5}{2} \quad \text{又ハ} \quad x=-\frac{3}{2}$$

ヲ得。サテ(1)ニテ、

$$x=\frac{5}{2} \quad \text{トナストキハ、} \quad y=3$$

$$x=-\frac{3}{2} \quad \text{トナストキハ、} \quad y=-5$$

ヲ得。故ニ根ハ次ノ二組ナリ。

$$\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-5 \end{cases}$$

例二。次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$2xy-7x-5y+19=0 \quad (1)$$

$$xy-4x-3y+12=0 \quad (2)$$

(2)ノ兩邊ニ -2 ヲ掛ケテ(1)ニ加フルトキハ、

xy ノ項ハ消去セラレ

$$x+y-5=0$$

ヲ得。是ト(1)又ハ(2)トヲ組ミ合セ、例一ノ如クニシテ解キ、次ノ二組ノ根ヲ得。

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{例三. } x^2 + 2xy - 4y^2 = 20 \quad (1)$$

$$2x^2 + xy - 20y^2 = 16 \quad (2)$$

ヲ解ケ。

カヤウニ二ツノ方程式ニ含マレタル未知項
ガ二次ノ項ノミナルトキニハ、先ヅ二ツノ方
程式ヨリ既知項ヲ消去スベシ。

即チ(1),(2)ノ兩邊ニソレゾレ-4,5ヲ掛ケテ加
ヘ合セ

$$6x^2 - 3xy - 84y^2 = 0$$

又ハ

$$2x^2 - xy - 28y^2 = 0$$

ヲ得。此方程式ヲ x ヲ未知數トセル一元二次
方程式ト見做シテ(y ヲ既知項ノ如クニ取扱ヒ
テ)解キ、

$$x = \frac{y \pm \sqrt{225y^2}}{4} = \frac{y \pm 15y}{4}$$

$$\text{即チ } x = 4y \quad (3)$$

$$\text{又ハ } x = -\frac{7}{2}y \quad (4)$$

ヲ得

(3)ト(1)又ハ(2)トヲ組ミ合セ、例一ノ如クニシ
テ解キ、

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 又ハ } \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

ヲ得。次ニ(4)ト(1)又ハ(2)トヲ組ミ合セテ解キ

$$\begin{cases} x = -14 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 又ハ } \begin{cases} x = 14 \\ y = -4 \end{cases}$$

ヲ得。即チ根ハ四組アリ。

問題 第二十二

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \quad x - y = 4$$

$$2. \quad xy = 75$$

$$xy = 12$$

$$x + y = 2(x - y)$$

$$3. \quad 2x + y = 5$$

$$4. \quad 9(x - 1) = 5(y - 1)$$

$$8x^2 - 4xy + y^2 = 10$$

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y = 3$$

$$5. \quad x + \frac{1}{y} = 1$$

$$6. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$$

$$y + \frac{1}{x} = 4$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{17}{12}$$

$$7. \quad x^2 + xy = 28$$

$$8. \quad x^2 + xy + y^2 = 19$$

$$xy - y^2 = 3$$

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$9. \quad 2x^2 - xy + y^2 = 2y$$

$$10. \quad x^2 + y^2 = 41$$

$$2x^2 + 4xy = 5y$$

$$xy = 20$$

$$11. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$$

$$xy = 6$$

$$12. \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{13}{36}$$

115. 應用問題。

例一。直線 MN ノ外ニ二ツノ點 A, B アリ。A, B ヨリ此直線ヘ下セル垂線ノ長サハソレゾレ 4 尺, 5 尺ニシテ, 其足ノ間ノ距離 MN ハ 15 尺ナリ。今直線 MN ノ上ニテ AP, PB ノ長サノ和ガ 18 尺トナルヤウナル點 P ラ求メントス。P ヨリ M, N マデノ距離ヲ計算セヨ。

MP ラ x 尺トス

ルトキハ NP ハ

$(15-x)$ 尺ニシテ,

AP, BP ハソレゾレ

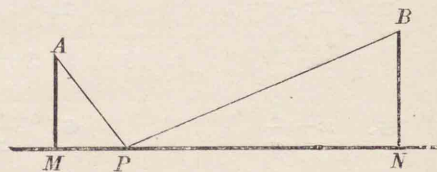
$\sqrt{x^2+4^2}$ 尺, $\sqrt{(15-x)^2+5^2}$ 尺ナリ。ヨリテ次ノ方

程式ヲ得。

$$\sqrt{x^2+4^2} + \sqrt{(15-x)^2+5^2} = 18$$

$\sqrt{x^2+4^2}$ ヲ右邊ニ移シテ後, 兩邊ヲ平方シ,

$$(15-x)^2 + 5^2 = 18^2 - 36\sqrt{x^2+4^2} + x^2 + 4^2$$



ヲ得。整頓シ, 項ヲ移シ,

$$6\sqrt{x^2+16} = 5x+15$$

再ビ兩邊ヲ平方シテ,

$$36(x^2+16) = 25x^2 + 150x + 225$$

ヲ得, 之ヲ解キテ,

$$x = 3 \text{ 又ハ } \frac{117}{11}$$

$$\text{從テ } 15-x = 12 \text{ 又ハ } \frac{48}{11}$$

ヲ得。此等ノ根ハイツレモヨク問題ニ適ス。(驗ヲ行ヘ)。

例二。直角三角形ノ斜邊 a 及ビ面積 S ヲ知リテ, 二ツノ邊ヲ求メヨ。

二ツノ邊ヲ x, y トスルトキハ, 次ノ方程式ヲ得。

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$xy = 2S$$

第二ノ方程式ノ兩邊ニ 2 ヲ掛ケテ, 第一ノ方程式ニ加ヘ, 又引キテ

$$(x+y)^2 = a^2 + 4S, \quad (x-y)^2 = a^2 - 4S$$

平方根ノ正ノ値ヲトリ, 又 x ヲ長キ邊トシテ,

$$x+y = \sqrt{a^2+4S}, \quad x-y = \sqrt{a^2-4S}$$

ヲ得。故ニ

$$x = \frac{\sqrt{a^2+4S}}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4S}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{a^2+4S}}{2} - \frac{\sqrt{a^2-4S}}{2}$$

注意。 上ノ問題ハ a^2-4S ガ負數ナラザルトキ、即チ S ガ $\frac{a^2}{4}$ ヨリ大ナラザルトキニ限リテ解ヲ有ス。故ニ直角三角形ノ面積ハ其斜邊ノ平方ノ四分ノ一ヲ超ユルコトナキヲ知ルベシ。又 S ガ $\frac{a^2}{4}$ ニ等シキトキハ a^2-4S ハ 0 トナリ、 x, y ノ値ハ相等シクナル。ヨリテ與ヘラレタル斜邊ヲ有スル直角三角形ノ中、面積ノ最大ナルモノハ二等邊直角三角形ナルコトヲ知ルベシ。

問題 第二十三

1. ニツノ數ノ和ハ 10 ニ等シク、其逆數ノ和ハ $\frac{5}{12}$ ニ等シ。此等ノ數ヲ求メヨ。
2. ニツノ正數ノ平方ノ差ハ其積ノ $\frac{5}{6}$ ニ等シ。此等ノ數ノ比ヲ求メヨ。又此等ノ數ノ和ガ其積

ヨリモ 3 ダケ小ナルトキ、此等ノ數ヲ求メヨ。

3. 或數ガ其平方根ヨリモ 0.25 ダケ小キコトヲ知リテ此數ヲ求メヨ。

4. ニツノ數ノ和ハ 13 ニ等シク其平方根ノ差ハ 1 ニ等シ。此等ノ數ヲ求メヨ。

5. 上下二種ノ砂糖若干斤ノ代價、上種一圓四十八錢、下種二圓四錢ヲ拂ヘリ。一斤ノ價、上ハ下ヨリ一錢五厘高ク、又買ヒタル斤數、上ハ下ヨリ四斤少シ。各種ノ斤數及ビ價格ヲ計算セヨ。

6. 甲乙二人資本金合セテ三千圓ヲ出シテ事業ヲ營メリ。甲ハ十個月間、乙ハ八個月間其資本ヲ出シ、利益分配ノ際甲ハ資本ヲ合セテ千五百圓、乙ハ同ジク二千百六十圓ヲ取レリ。兩人ノ出資額各、幾許ナルカ。

7. 二百四十哩ヲ隔ツル兩停車場ヨリ、ニツノ列車ガ同時ニ相向ヒテ出發シ、途中ニテ行き違ヒテヨリ、一ハ四時間、又一ハ九時間ニテ各、先方ノ停車場ニ到着セリトイフ。各列車ノ速度ヲ求メヨ。

8. 千三百圓ヲ二口ニ分チ、之ヲ相異ナル利率ニテ貸シ、二口ヨリ同額ノ利息ヲ得タリ。若シ甲

ノ口ヲ乙ノ利率ニテ貸サバ、一個年ノ利息三十六圓トナルベク、又乙ノ口ヲ甲ノ利率ニテ貸サバ、一個年ノ利息四十九圓トナルベシトイフ。各口ノ金高及ビ利率ヲ求メヨ。

9. ニツノ列車ガ三百哩ノ距離ヲ行クニ要スル時間ノ差八時間ナリ。若シ雙方トモ速度ヲ毎時五哩ヅツ増ストキハ、此差ハ三時間ダケ減スベシトイフ。速度ヲ求メヨ。

10. 或教室ノ床ハ千二百六十平方尺、側面ハ五百四平方尺及ビ三百六十平方尺ナリ。此教室ノ縦横及ビ高サ各、幾間ナルカ。

11. 半徑 r 寸ナル圓ノ中心ヨリ d 寸ノ距離ニアル點ヲ通ジテ長サ a 寸ノ弦ヲ引クトキハ、此點ニテ内分又ハ外分セラルル弦ノ二ツノ部分ノ長サ幾許ナルカ。又

$$(1) \quad r = 10, \quad d = 8, \quad a = 13$$

$$(2) \quad r = 5, \quad d = 13, \quad a = 7$$

トシテ結果ヲ求メヨ。

12. 直角三角形ノ周圍 2ρ 及ビ面積 S ヲ知リテ三ツノ邊ノ長サヲ求メヨ。又周圍 12 寸、面積 6 平

方寸ナルトキ、結果ヲ算出セヨ。

又周圍ノ與ヘラレタル直角三角形ノ中、面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

13. 邊ノ長サ a 、相對スル邊ノ距離 h ナル菱形ノ二ツノ對角線ノ長サヲ求メヨ。

14. 三角形ノ三ツノ中線ノ長サ h, k, l ヲ知リテ、三ツノ邊ヲ求メヨ。

15. 直角三角形ノ斜邊ト他ノ二ツノ邊トノ差ガ a, b ナルトキ三ツノ邊ヲ求メヨ。

第八篇 冪及ビ冪根

第一章 開法

116. 冪及ビ冪根。

a ナル因數 n 個ノ積ヲ a^n ニテ表シ、之ヲ a ノ n 乗冪トイフ。

逆ニ、 a ナル數ヲ知リテ、如何ナル數ノ n 乗冪 a^n トナルカラ定ムルコト、即チ

$$x^n = a$$

ナル方程式ニ適スル數 x ヲ求ムルコトヲ、 a ノ n 乗ニ開グトイフ。求ムル數 x ハ即チ a ノ n 乗根ニテ、之ヲ表スニ

$$\sqrt[n]{a}$$

ナル記號ヲ用フ。但、 $n=2$ ノ場合即チ平方根ハ特ニ指數ヲ略シテ \sqrt{a} ト書ク。

a ガ正數ナルトキハ、其 n 乗根ノ中、正數ナルモノ必ズ唯一ツアリ。

是故ニ二ツノ正數 a, b ノ n 乗冪ガ相等シキトキハ、此等ノ二ツノ正數モ亦相等シ。如何トナラバ a ガ b ヨリ大(又ハ小)ナラバ、 a^n モ亦 b^n ヨリ大(又ハ小)ナレバナリ。

n ガ偶數ナルトキハ、正數 a ノ n 乗根ノ正ナルモノノ外ニ、ナホ之ト絶對値ヲ等シクセル負ノ n 乗根アリ。

例ヘバ、 $2^2=4$ ト同時ニ $(-2)^2=4$ 、故ニ 4 ノ平方根ハ 2 又ハ -2 ナリ。

又 $3^4=81$ ト同時ニ $(-3)^4=81$ 、故ニ 81 ノ四乗根ハ 3 及ビ -3 ナリ。

n ガ偶數ニシテ、 a ガ負數ナルトキハ、 a ノ n 乗根ハ、正數ニテモ負數ニテモナシ。

例ヘバ $\sqrt{-4}$ 、 $\sqrt[4]{-81}$ ノ如シ。此等ハ所謂虛數ナリ。

n ガ奇數ニシテ、 a ガ正數ナルトキハ、 $\sqrt[n]{a}$ モ亦正數、 a ガ負數ナルトキハ、

$\sqrt[n]{a}$ モ亦負數ニシテ, $\sqrt[n]{a}$ ト $\sqrt[n]{-a}$ トハ、
符號ノミ異ナル數ナリ。

例へバ $\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{-8} = -2$
 $\sqrt[5]{32} = 2, \quad \sqrt[5]{-32} = -2$

以上ノ結果ヲ綜合シテ次ノ表ヲ得。

n	a	$\sqrt[n]{a}$
偶	正	正 及 ビ 負
偶	負	ナシ (虚數)
奇	正	正
奇	負	負

注意. n ガ偶數ナルトキハ、正數 a ノ n 乗根
ノ正ノ方ヲ $\sqrt[n]{a}$ ニテ表スコトトス。サスレバ、
 n 乗根ノ負ノ方ハ $-\sqrt[n]{a}$ ナリ。又 n ガ奇數ナ
ルトキハ、負數 $-a$ ノ n 乗根ハ正數 a ノ n 乗根
ノ符號ヲ變ヘタルモノナリ。ヨリテ、此篇ニテ
ハ、正數ノ冪根ノ正ノ値ノミヲ論ズベシ

例 題

1. $\frac{a}{b}$ ノ平方、立方及ビ n 乗冪ヲ求メヨ。

2. $\frac{a^2}{b^2}$ ノ平方根ヲ求メヨ。
3. $\frac{-a^3}{b^3}$ ノ立方根ヲ求メヨ。
4. $(-a)^2, (-a)^3$ ヲ求メヨ。又一般ニ $(-a)^n$ ヲ求メ
ヨ。
5. n ガ奇數ナルトキ、 $\sqrt[n]{-a^n}$ ヲ求メヨ。又 n
ガ偶數ナルトキハ、如何。
6. 如何ナル正數ノ四乗冪ガ $(-2)^4 = 16$ ニ等シキカ。
7. $-a^n$ ト $(-a)^n$ トノ異同ヲ説明セヨ。

117. 冪根ニ關スル法則。

(I) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$

兩邊ノ n 乗ヲ比較スルニ、

$$(\sqrt[n]{ab})^n = ab$$

又 $(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$

故ニ上ノ等式ノ正シキコトヲ知ル。

一般ニ、積ノ n 乗根ハ各因數ノ n 乗
根ノ積ニ等シ。

(II) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

左邊ノ n 乗ハ $a^m = a^m$ ニ等シ。サテ右邊ノ n 乗ガ

果シテ a^m トナルカヲ驗シミルニ、

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \{\sqrt[n]{a}\}^m = a^m$$

ヨリテ上ノ等式ノ正シキコトヲ知ル。

一般ニ、引續キテ或數ノ冪ヲ作り、又冪根ヲ求ムルトキ、其順序ヲ如何ヤウニシテモヨシ。

$$(III) \quad \sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

右邊ノ np 乗ガ a^{mp} トナルコトヲ確ムレバヨシ。サテ、

$$(\sqrt[n]{a^m})^{np} = \{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$$

故ニ上ノ等式ノ正シキコトヲ知ル。

一般ニ、或數ノ冪ヲ作り、又冪根ヲ求ムルトキ、冪ノ指數ト冪根ノ指數トヲ同ジ數ニテ除シテモヨシ。(故ニ又同ジ數ヲ乘ジテモヨシ)。

例 題

1. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$(1) a^{m+n} \div a^n \quad (2) a^n \div a^{m+n} \quad (3) \sqrt{a^2 b^4 c}$$

$$(4) \sqrt[4]{x^6 y^2} \quad (5) \sqrt[5]{a^{mn}} \quad (6) \sqrt[m]{a^n}$$

2. $\sqrt[n]{a^m}$ ヲ m 乗ニ開ケ。

3. $(\sqrt[n]{a})^m$ ヲ n 乗セヨ。

4. a ノ m 乗根ノ n 乗根ハ a ノ mn 乗根ニ等シキコトヲ證明セヨ。

5. 或數ノ 4 乗根、6 乗根、8 乗根、12 乗根ヲ求ムルニハ如何ヤウニスベキカ。

6. $\sqrt[n]{a^{mn+p}} = a^n \times \sqrt[n]{a^p}$ ヲ證明セヨ。

118. 數ノ開法。

冪根ヲ求ムル計算ヲ開法トイフ。指數 n ガ 2 又ハ 3 ナル場合即チ開平及ビ開立ノ外ハ、直接ニ開法ヲ行フコト甚ダ煩シ。第十篇ニ至リ、對數表ヲ用ヒテ、一般ニ任意ノ正數ノ n 乗根ノ近似値ヲ求ムル方法ヲ學ブベシ。ココニハ、算術ニテ學ビタル開平及ビ開立ノ演算ノ方法ノ理由ヲ説明セントス。

119. 開平ノ仕方。

或數ノ平方根ヲ求ムルニハ、先ヅ其最高位ヲ定ムルコトヲ要ス。サテ十進法ノ各ノ位ノ平方ヲ大サノ順序ニ竝べ見ルトキハ次ノ表ヲ得。

..... ..

100 ²	=	1 00 00
10 ²	=	1 00
1 ²	=	1
0.1 ²	=	0.01
0.01 ²	=	0.00 01
.....	

サテ 數ノ 大小ト 其平方根ノ 大小トハ 相伴フガ 故ニ、10000 ト 100 トノ 間ニアル 數即チ 整數部分ニ 三桁又ハ 四桁ノ 數字ヲ 有スル 數ノ 平方根ハ 100 ト 10 トノ 間ノ 數即チ 整數部分ニ 二桁ノ 數字ヲ 有スル 數ナリ。又 0.01 ト 0.0001 トノ 間ニアル 數即チ 小數第三位又ハ 第四位ヨリ 始マル 數ノ 平方根ハ 0.1 ト 0.01 トノ 間ノ 數即チ 小數第二位ヨリ 始マル 數ナリ。カヤウニシテ 或數ノ 最高位ト 其平方根ノ 最高位トヲ 對照スルトキハ 次ノ 如シ。

原	桁數	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
數	位	千	百	十	萬	千	百	十	一	十	百	千	十	百	千	十	百
平方根	位	千	百	十	一	十	百	千	一	十	百	千	十	百	千	一	百
	桁數	4	3	2	1	1	2	3	4								

例一、1369ノ平方根ヲ求メヨ。

先ヅ一ノ位ヨリ左へ二桁毎ニ 13|69ト 句切ヲ ナシ、此句切ヲ一十ト讀ミテ平方根ハ十ノ位ヨリ 始マルコトヲ知ル。次ニ第一ノ句切ノ數13ヲ 超エザル最大ノ平方數ハ 3² 即チ 9ナルコトヨリ、1369ハ 30² ト 40² トノ 間ニアルコト、即チ平方根ノ十ノ位ノ數字ハ 3ナルコトヲ知ル。

サテ一ノ位ノ數字ヲ x ニテ表シ、

$$\sqrt{1369} = 30 + x$$

ト置キ、是ヨリ x ヲ求メントス。

兩邊ヲ平方シテ、

$$1369 = 900 + 2 \times 30x + x^2$$

$$\text{ヨリテ} \quad 469 = 60x + x^2 \tag{1}$$

$$\text{又ハ} \quad \frac{469}{60} = x + \frac{x^2}{60}$$

此式ノ左邊ノ商ノ整數部分ハ 7ナリ。故ニ x ハ 8ヨリ小ナルコトヲ知ル。ヨリテ一ノ位ノ數字ハ 7ナラント推察シ、(1)ノ右邊ニテ、試ニ x ヲ 7トナシテ、之ヲ左邊ト比較セントス。

サテ(1)ノ右邊ハ、 $60x + x^2$ 即チ $(60+x)x$ ニシテ、 x

ヲ7トスルトキハ、其値ハ 67×7 即チ 469 トナリ、丁度(1)ノ左邊ニ等シ。是ニヨリテ、求ムル平方根ハ37ナルコトヲ知ル。

實際ノ演算ハ次ノ如クニスルナリ。

$$\begin{array}{r} 37 \\ 1369 \\ 9 \\ 67 \quad 469 \\ \quad 469 \end{array} \quad \text{答 } 37$$

例二。140827ノ平方根ヲ求メヨ。

計算ノ筋道ヲ明ニセンガタメニ、順次ニ出テ來ル數ヲ文字ニテ表シ行カントス(274頁參照)。

先ヅ求ムル平方根ハ百ノ位ヨリ始マリ、且ツ百ノ位ノ數字ハ3ナルコトヲ知ル。ヨリテ

$$N = 140827$$

ト置キ、 N ヨリ $a=300$ ノ平方即チ

$$a^2 = 90000 \quad (1)$$

ヲ引キテ、殘 $N - a^2 = 50827 \quad (2)$

ヲ得。次ニ例一ノ如クニシテ、平方根ノ十ノ位ノ數字ハ7ナルコトヲ推知シ、

$$b = 70$$

トス。サテ

$$N - (a+b)^2 = (N - a^2) - (2a+b)b$$

又 $2a+b = 600+70 = 670 \quad (3)$

$$(2a+b)b = 670 \times 70 = 46900 \quad (4)$$

ナルガ故ニ、之ヲ(2)ヨリ引キテ、殘

$$N - (a+b)^2 = 3927 \quad (5)$$

ヲ得。

次ニ又一ノ位ノ數字ヲ求メンガタメニ

$$\sqrt{N} = a + b + x$$

ト置キ、是ヨリ

$$N - (a+b)^2 = 2(a+b)x + x^2$$

$$\text{即チ } \frac{N - (a+b)^2}{2(a+b)} = x + \frac{x^2}{2(a+b)}$$

ヲ得。ヨリテ左邊ノ數値ヲ計算シ、前ノヤウニシターノ位ノ數字ヲ推定セントス。左邊ノ被除數ハ(5)ニテ求メタル數ナリ。又除數 $2(a+b)$ モ直接ニ之ヲ計算スルヲ要セズ、次ノ如クニシテ既出ノ數ヨリ組ミ立ツルコトヲ得。即チ

$$2a+b = 670 \quad (3)$$

$$b = 70$$

加ヘテ $2(a+b) = 740$

$$\text{故ニ } \frac{N - (a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{3927}{740} = 5.***$$

ヨリテ x ハ 6 ヨリ小, 從テ 一ノ位ノ數字ハ 5
ナルコトヲ推知シ

$$c = 5$$

ト置キテ $(a+b+c)^2$ ヲ計算シ, 之ヲ N ト比較セン
トス。サテ

$$N - (a+b+c)^2 = \{N - (a+b)^2\} - \{2(a+b) + c\}c$$

$$\text{又} \quad 2(a+b) + c = 745 \quad (6)$$

$$\{2(a+b) + c\}c = 745 \times 5 = 3725 \quad (7)$$

之ヲ (5) ヨリ引キテ, 殘

$$N - (a+b+c)^2 = 202 \quad (8)$$

ヲ得。即チ

$$140827 - 375^2 = 202$$

ヨリテ, 求ムル平方根ノ整數部分ハ 375 ナリ。

上ノ演算ハ, 次ノ如ク排列セラル。文字及ビ
式ノ番號ヲ對照シテ, 計算ノ進行ヲ追跡スベシ。

	$\frac{a+b+c}{N}$
(3)	(1) $\frac{a^2}{N}$
	(2) $\frac{N - a^2}{N}$
	(4) $\frac{(2a+b)b}{N}$
(6)	(5) $\frac{N - (a+b)^2}{N}$
	(7) $\frac{\{2(a+b) + c\}c}{N}$
	(8) $\frac{N - (a+b+c)^2}{N}$

	375
	<u>140827</u>
(3)	(1) 9
	(2) <u>508</u>
	(4) 469
(6)	(5) <u>3927</u>
	(7) 3725
	(8) <u>202</u>

同ジャウニシテ, ナホ根ノ小數部分ヲ幾桁ニ
チモ求メ行クコトヲ得。

例三. 0.0000074 ノ平方根ヲ求メヨ。

	0.0027202
	<u>0.0000074</u>
	4
47	<u>340</u>
	329
542	<u>1100</u>
	1084
54402	<u>160000</u>
	108804
	<u>51196</u>

先ヅ一ノ位ヨリ右ヘ二桁毎ニ句切ヲ附ケ, 第
三ノ句切ニテ始メテ 0 ナラザル數字ヲ得。此
句切ヲ一, 二, 三ト讀ミテ, 求ムル平方根ハ小數第
三位ヨリ始ルコトヲ知ル。

例二ノ如クニシテ根ヲ計算スルニ, 第四段ニ
至リ, 1600 ヲ 5440 ニテ割ラントスルニ商ニハ 1

モ立タズ。ヨリテ根ノ四番目ノ數字ハ0ナリ。サテ1600ノ右ニナホ00ヲ附ケテ160000トナシ、544ノ右ニモ0ヲ一ツ附ケ54400ニテ160000ヲ割リテ、根ノ五番目ノ數字ガ2ナルコトヲ知ルナリ。

例四。 $\frac{3}{7}$ ノ平方根ヲ求メヨ

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0.42857142\dots} = 0.6546\dots$$

分數ノ平方根ヲ求ムルニハ、先ヅ此分數ヲ小數ニ改メテ後、開平ヲ行フナリ。上ノ例ニテ、平方根ヲ小數第四位マデ求ムルニハ $\frac{3}{7}$ ノ小數部分ヲ其二倍ノ桁數ダケ即チ小數第八位マデ計算シテオクベキコトニ注意スベシ。

例 題

1. 次ノ數ノ平方根ヲ求メヨ。

(1) 5929 (2) 107584 (3) 116.4241

2. 73.959 ノ平方根ヲ小數第五位マデ求メヨ。

3. 次ノ二次方程式ヲ解ケ。(根ガ開キ切レザルトキハ、小數第五位マデ計算セヨ)。

(1) $96x^2 + 11x - 35 = 0$

(2) $1500x^2 - 40x - 1643 = 0$

(3) $x^2 - x - 4 = 0$

(4) $7x^2 + 23x = 31$

120. 開立ノ仕方。

開立ノ仕方モ、亦開平ト同様ナル理由ニ基ツクリ。今例ニツキテ、其大畧ヲ説明セントス。

例。16220329 ノ立方根ヲ求メヨ。

演算ハ次ニ示スガ如シ。

		$\frac{2 \ 5 \ 3}{16 \overline{)220}329}$
	(1)	8
	(2)	$\underline{8 \ 220}$
(4) 65	(3) 1200	
	(5) 325	(7) 7625
	(6) $\underline{1525}$	
	25	
(10) 753	(9) $\overline{187500}$	(8) 595329
	(11) 2259	
	(12) $\underline{189759}$	(13) $\underline{569277}$
		(14) $\underline{26052}$

		$\frac{a+b+c}{N}$
(4) $3a+b$	(3) $3a^2$	(1) a^3
	(5) $(3a+b)b$	(2) $\overline{N-a^3}$
	(6) $\underline{3a^2+3ab+b^2}$	(7) $\underline{3a^2b+3ab^2+b^3}$
	b^2	(8) $\overline{N-(a+b)^3}$
(10) $3(a+b)+c$	(9) $\overline{3(a+b)^2}$	(13) $\underline{3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3}$
	(11) $\underline{3(a+b)+c}$	(14) $\underline{N-(a+b+c)^3}$
	(12) $\underline{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2}$	

ココニモ亦逐次算出スベキ數ニ番號ヲ附ケ
又別ニ文字ヲ用ヒテ此等ノ數ヲ表シ、是ニヨリ
テ其成立ヲ明ニシ、且通覽對照ノ便ニ供セリ。

演算ノ要點ハ次ノ如シ。

(第一段)。立方根ノ位取り及ビ根ノ首位(百ノ位)
ノ數字ヲ決定スルコト。

先ヅ一ノ位ヨリ左へ三桁毎ニ句切ヲナシ、此
等ノ句切ヲ一十百ト讀ミテ、立方根ハ百ノ位ヨ
リ始マルコトヲ知ル。(其理由如何)。

第一ノ句切ノ數字16ノ中ニ含マルル最大ナ
ル立方數ハ 2^3 即チ8ナリ。故ニ立方根ノ百ノ
位ノ數字ハ2ナルコトヲ知ル。(其理由如何)。

首位ノ立方 $a^3=8000000$ 即チ(1)ヲ開クベキ數
 $N=16220329$ ヨリ引キ、此殘ヲ(2)トス。

第二段。(3)ヨリ(8)ニ至ル。

先ヅ $3a^2=1200$ ニテ $N-a^2=8220329$ ヲ割リテ、根
ノ十ノ位 $b=50$ ヲ決定ス。

b ヲ定メタル上ハ、 $(a+b)^3$ ヲ N ヨリ引クコト
ヲ要ス。其筋道ハ(3)ヨリ(8)マデノ數ノ成立ヲ
見テ知ルベシ。此殘ハ即チ(8)ナリ。

(第三段)。(9)ヨリ(14)ニ至ル。

先ヅ注意スベキハ、(5)、(6)及ビ b^2 ヲ加ヘテ、(9)即
チ $3(a+b)^2$ ヲ作ルコトナリ。

次ニ $3(a+b)^2$ ニテ $N-(a+b)^3$ ヲ割リテ、根ノ一ノ
位ノ數字 $c=3$ ヲ決定ス。

c ヲ定メタル上ハ、 $(a+b+c)^3$ ヲ N ヨリ引クコ
トヲ要ス。此計算ヲナスガタメニ、(9)ヨリ(14)マ
デノ數ヲ順次ニ算出スベシ。(14)ハ即チ開立ノ
殘ナリ。

以上ノ計算ニヨリテ、

$$16220329 - (253)^3 = 26052$$

ナルコトヲ知リ得タリ。即チ立方根ノ整數部
分ハ253(開立ノ殘ハ26052)ナリ。

ナホ進ミテ根ノ小數部分ヲモ求メント欲セ
バ、第四段ニ移リ、第三段ト同様ナル計算ヲナス
ベシ。此演算ヲ繼續シテ、立方根ヲ如何程ニテ
モ望ムママニ精密ニ(小數以下幾桁ニテモ)計算
スルコトヲ得ベキナリ。

例 題

次ノ數ノ立方根ヲ求メヨ。[1-4]

1. 132651 2. 658503
 3. 5451776 4. 58863869
 5. $\sqrt[3]{0.8}$ ヲ小數第四位マデ計算セヨ。
 6. $\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ ヲ小數第三位マデ計算セヨ。

第二章 根數及ビ根式

121. 開キ切レル冪根。

開キ切レヌ冪根。

整數ノ平方ハ勿論整數ニシテ、之ヲ平方數トイフ。分數ノ平方ハ其分母及ビ分子ノ平方ヲ分母及ビ分子トセル分數ニシテ、原ノ分數ガ既約分數ナルトキハ、其平方ハ分母モ分子モ共ニ平方數ナル既約分數ナリ。例ヘバ

$$\left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{8^2}{15^2} = \frac{64}{225}$$

ニシテ、 $\frac{8}{15}$ ノ分母15ト分子8トニ公約數ナキガ故ニ、其平方ナル225ト64トニモ公約數ナク、從テ $\frac{64}{225}$ ハ既約分數ナリ。

故ニ分數(整數ニ等シキ假分數ノ外)ノ平方ハ決シテ整數ニ等シカラズ。

之ヨリ推シテ次ノ事實ヲ知ルベシ。

整數ヲ平方ニ開クトキ、若シ開キ切レルナラバ、平方根ハ必ズ整數ナリ。又分數ノ平方根ガ丁度或分數トナルハ、原ノ分數ヲ既約分數ニ改ムルトキ、分母及ビ分子ガイヅレモ平方數ナルトキニ限ル。

故ニ平方數ナラザル整數又ハ分母及ビ分子ノ中イヅレカガ平方數ナラザル既約分數ハ平方ニ開キ切レズ。平方根ハ整數ニモ分數ニモ等シカラズ、從テ有限ノ小數又ハ循環小數トモナルコトナシ。

上ニ説キタルコトハ、立方根又ハ隨意ノ指數ノ冪根ニモ同ジヤウニ當テハマルベシ。

122. 不盡根數及ビ根式。

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ ノ如ク、開キ切レザル冪根ヲ不盡根數トイフ。不盡根數ハ小數トシテ精密ニ表スコトヲ得ズ。サレ

ト、如何程ニテモ望ミ通り之ニ近キ小
數ヲ定ムルコトヲ得ベシ。

例ヘバ、上ノ二ツノ不盡根數ヲ、小數第六位マデ
計算スルトキハ、次ノ如シ。

$$\sqrt{2} = 1.414213\text{.....}$$

$$\sqrt[3]{5} = 1.709975\text{.....}$$

此等ノ小數ノ第六位未滿ヲ切捨テタル

$$1.414213$$

$$1.709975$$

ハ、 $\sqrt{2}$ 又ハ $\sqrt[3]{5}$ ニ等シカラズ。サレド、其誤差ハ
イツレモ 0.000001 即チ百萬分ノ一ヨリモ小ナリ
カヤウノ數ヲ不盡根數ノ近似値トイフ。

不盡根數ニ四則ヲ施スニハ、其近似
値ニ同一ノ算法ヲ施スベシ。採リタ
ル近似値ガ愈、精密ナルニ隨ヒテ、結果
モ亦愈、精密トナル。

例ヘバ $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ ヲ求メントスルニ、二ツノ根數
ヲ小數第四位マデ採リテ加フルトキハ、3.1241 ヲ
得、又小數第六位マデ採リテ加フルトキハ、3.124188

ヲ得。此等ハイツレモ $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ ノ近似値ニシ
テ、後者ハ前者ヨリモ一層精密ナリ。(此等ノ近似
値ト $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ ノ實際ノ値トノ差ハ約幾許ナル
カ)。

\sqrt{a} , $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt[3]{a^2-ab+b^2}$ ノ如ク、根號ヲ含メル式
ヲ根式トイフ。

例 題

1. $\sqrt{14} + \sqrt{15}$ ノ近似値ヲ小數第五位マデ求
メヨ。
2. $\sqrt{2931} - \sqrt{2930}$ ヲ小數第二位マデ求メヨ。
又小數第四位マデ求メヨ。

123. 根數及ビ根式ノ變形。

(第一)。根式又ハ根數ハ、根號ノ中ヨ
リ開キ切レル因數ヲ出シテ、之ヲ簡單
ニスルコトヲ得。

$$\text{例一。* } \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$$

(兩邊ノ平方ヲ比較シテ之ヲ驗セ)。

* a, b ハイツレモ正數ナリトス。以下之ニ倣フ。(第116節
注意参照)

例二. $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

例三. $\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^3 \times 6} = 2\sqrt[3]{6}$

(第二). 根號ノ中ニアル式ガ分數ナルトキハ, 此式ヲ變形シテ, 分母ガ根號ヲ含マヌヤウニスルコトヲ得.

例四. $\sqrt{\frac{3}{37}} = \sqrt{\frac{3 \times 37}{37^2}} = \frac{\sqrt{111}}{37}$

例五. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 3^2}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

注意. 例四ニテ $\frac{3}{37}$ ノ平方根ヲ, 例ヘバ小數第五位マデ計算セントスルトキ, 先ヅ $\frac{3}{37}$ ヲ小數ニ改メテ後, 開平ヲ行フニハ, $\frac{3}{37}$ ヲ小數第十位マデ計算スル必要アリ. サレバ平方根ヲ $\frac{\sqrt{111}}{37}$ ナル形ニ改メテ計算スル方便利ナリ. 例五モ同様ナリ.

(第三). 根式ノ係數ヲ, 根號ノ中ニ組ミ入ルルコトヲ得.

例六. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ (例一參照).

例七. $2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48}$ (例三參照).

高次ノ冪根ヲ含メル式及ビ數ニツキテモ, 同

様ノ變形ヲナシ得ベキコト, 勿論ナリ.

例 題

1. 次ノ根式及ビ根數ヲ簡單ニセヨ.

(1) $\sqrt{25a^2b^4}$ (2) $\sqrt[3]{-8a^3x^6}$ (3) $\sqrt{\frac{a^2x}{9y}}$

(4) $\sqrt{75}$ (5) $\sqrt{80}$ (6) $\sqrt{375}$

2. 次ノ式ヲ分母ガ根號ヲ含マヌ形ニ改メヨ.

(1) $\sqrt{\frac{c}{ab}}$ (2) $\sqrt{\frac{7}{12}}$ (3) $\sqrt[3]{\frac{68}{75}}$

3. $\frac{3}{\sqrt{10}}$ ヲ小數第六位マデ計算セヨ.

4. 次ノ式ヲ根號ノ中ニマトメヨ.

(1) $5\sqrt{7}$ (2) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$

5. $3\sqrt{5}$ ト $4\sqrt{3}$ トハ, イヅレガ大ナルカ.

124. 同類根數ノ加法及ビ減法.

例ヘバ

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ノ如ク, 同一ノ不盡根數ヲ因數トセル數ヲ同類根數トイフ.

同類根數ノ加法, 減法ハ次ノ例ニヨルベシ.

例一. $\sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3+5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

注意. $\sqrt{18} + \sqrt{50}$ ノ如キ和ヲ計算スルトキ, 二

ツノ根數ヲ別別ニ計算シテ後ニ加フルヨリモ、
上ノ如ク變形シテ後、計算スル方遙ニ便利ナリ。

$$\begin{aligned} \text{例二. } 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108} \\ = 2\sqrt[3]{4} + 10\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = 9\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例三. } \frac{5}{\sqrt{18}} - \frac{3}{\sqrt{8}} &= \frac{5\sqrt{2}}{6} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ &= \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

例 題

1. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$(1) \sqrt{12} + \sqrt{75} \quad (2) 2\sqrt{3} + 3\sqrt{1\frac{1}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}}$$

$$(3) 3\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{96} + 5\sqrt[3]{36 \times 9}$$

2. 次ノ數ヲ小數第三位マデ計算セヨ。

$$(1) \sqrt{490} + 4\sqrt{40} - 4\sqrt{90} \quad (2) \sqrt{96} - \frac{7}{\sqrt{96}}$$

125. 同次ノ根數ノ乘法及ビ除法。

$$\text{例一. } \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (\text{兩邊ヲ平方シテ驗セ。})$$

$$\text{例二. } 3\sqrt[3]{2} \times 5\sqrt[3]{3} = 15\sqrt[3]{6}$$

$$\begin{aligned} \text{例三. } (1 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) \\ = 3 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 4 = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{例四. } \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{90}}{3} = \sqrt{10}$$

$$\text{又ハ} \quad = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \text{例五. } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{6} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例六. } \frac{c+d\sqrt{m}}{a+b\sqrt{m}} &= \frac{(c+d\sqrt{m})(a-b\sqrt{m})}{(a+b\sqrt{m})(a-b\sqrt{m})} \\ &= \frac{(ac-bdm) + (ad-bc)\sqrt{m}}{a^2 - b^2m} \end{aligned}$$

例四乃至例六ニ示セルガ如ク、分母ガ根數ヲ
含メル分數ハ、分母及ビ分子ニ適當ナル數ヲ掛
ケテ、之ヲ分母ニ根號ノナキ形ニ改ム(分母ヲ有
理化ス)ルコトヲ得。複雑ナル根數ノ計算ニテ
ハ、必ズ先ヅカヤウニ變形シテ後、開法ヲ行フベ
シ。

例 題

1. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$(1) (2 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) \quad (2) (8 + \sqrt{5})(2\sqrt{5} - 3)$$

$$(3) (1 + \sqrt{7} + \sqrt{8})(1 - \sqrt{7} + \sqrt{8})$$

$$(4) (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})^2$$

2. 次ノ式ヲ分母ガ根號ヲ含マヌ形ニ改メヨ。

$$(1) \frac{\sqrt{40}}{3\sqrt{5}} \quad (2) \frac{4\sqrt[3]{7}}{5\sqrt[3]{2}} \quad (3) \frac{5}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$$

$$(4) \frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}} \quad (5) \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} + \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

3. 次ノ數ヲ小數第五位マデ計算セヨ。

$$(1) \sqrt{10} \times \sqrt{14} \quad (2) \frac{11}{3\sqrt{11}-5}$$

4. 次ノ方程式ヲ解ケ(根ヲ小數第三位マデ計算セヨ)。

$$(1) (7x-5)\sqrt{6} = (5x-7)\sqrt{3}$$

$$(2) 3\sqrt{10}(x-1) = 4(x+1)$$

126. $a + \sqrt{d}$ ナル形ノ式ノ平方根。

例. $5+2\sqrt{6}$ ノ平方根ヲ簡單ニセヨ。

$$\text{試} = \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (1)$$

ト置キテ, x, y ヲ求メントス。

兩邊ヲ平方シテ,

$$5+2\sqrt{6} = x+y+2\sqrt{xy}$$

$$\text{ヨリテ} \quad \left. \begin{array}{l} x+y=5 \\ xy=6 \end{array} \right\} \quad (2)$$

トナルヤウニ x, y ヲ定ムルトキハ, (1) ハ満足セ

シメラルベシ。サテ聯立方程式(2)ヨリ x, y ハ

3, 2 ナルコトヲ知ル。ヨリテ

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

例 題

1. 次ノ根數ヲ簡單ニセヨ。

$$(1) \sqrt{10+2\sqrt{21}} \quad (2) \sqrt{28-5\sqrt{12}}$$

$$(3) \frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} \quad (4) \frac{5}{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}$$

2. 次ノ方程式ヲ解ケ(根ヲ小數第五位マデ計算セヨ)。

$$(1) \sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3}-1)x - 1 = 0$$

$$(2) x^2 - 4x + 9 = \sqrt{8}(2x-5)$$

$$(3) x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

第九篇

比及ビ比例

第一章 數ノ比 比例式

127. 比ノ定義。

二ツノ數 a, b ノ比 $a:b$ ノ値ハ、 a ヲ b ニテ割リテ得タル商 $\frac{a}{b}$ ナリ。故ニ a, b ノ比ノ値ガ r ナリトイフハ

$$\frac{a}{b} = r \quad \text{又ハ} \quad a = br$$

ト同ジ事ヲ表ス。

$a:b$ ナル比ニテ、 a ヲ前項、 b ヲ後項トイフ。

比ノ兩項ニ同ジ數ヲ掛ケ、又ハ兩項ヲ同ジ數ニテ割リテモ、其値ハ變ラズ。

$$a:b = ma:mb$$

$$a:b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$$

128. 逆比。

a, b ノ逆比(又ハ反比)トハ、 a ノ逆數ト b ノ逆數

トノ比 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ ノコトナリ。

サテ $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ ノ兩項ニ ab ヲ乘ズルトキハ $b:a$ ヲ得。故ニ a, b ノ逆比ハ $b:a$ ニ等シ。

逆比ニ對シテ、 $a:b$ ヲ特ニ a, b ノ正比トイフコトアリ。

逆比ノ値ハモトノ比ノ値ノ逆數ニ等シ。(之ヲ證明セヨ)。

129. 複比。

$m:n$ 及ビ $p:q$ ナル二ツノ比ノ前項ノ積ヲ前項トシ、其後項ノ積ヲ後項トセル比 $mp:nq$ ヲ $m:n$ 及ビ $p:q$ ナル二ツノ比ノ複比トイフ。

上ノ複比ヲ次ノ如ク書キ表スコトアリ。

$$\left. \begin{array}{l} m:n \\ p:q \end{array} \right\}$$

同ジ様ニ、 $m:n, p:q, r:s$ ナル三ツノ比ヨリ前項ノ積及ビ後項ノ積ヲ採リテ作りタル比 $mpr:nqs$ ヲ、上ノ三ツノ比ノ複比トイフ。

$m:n$ ナル比ニツノ複比ハ、 $m^2:n^2$ ナリ。之ヲ $m:n$ ノ平方比トイフ。又 $m:n$ ナル比三ツノ複比

ハ $m^3 : n^3$ ニシテ、之ヲ $m : n$ ノ立方比トイフ。

複比ノ値ハ之ヲ組立ツル比ノ値ノ積ニ等シ。

例ヘバ $\frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$

例 題

1. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q}$ ハ $mq : np$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

2. 次ノ比ヲ兩項ガ成ルベク小サキ整數ナル比ニ改メヨ。

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{5} \quad \frac{7}{12} : \frac{14}{15} \quad \frac{13}{24} : \frac{39}{32}$$

3. 三ツノ數アリ。甲ト乙トノ比ハ $a : b$ 、又乙ト丙トノ比ハ $c : d$ ナリ。甲ト丙トノ比ヲ求メヨ。又此比ハ $a : b$ ト $c : d$ トノ複比ニ等シキコトヲ證明セヨ。

4. $a : b$ 、 $b : c$ 、 $c : d$ ノ複比ヲ求メヨ。

5. $7 : 12$ ノ平方比及ビ $3 : 2$ ノ立方比ヲ書ケ。

6. 上下二種ノ品物アリ。上12個ト下17個トノ價ハ、上8個ト下32個トノ價ニ等シ。上下一個ノ價ノ比ヲ求メヨ。

7. 甲ガ m 歩スル間ニ乙ハ n 歩シ、甲ガ p 歩ニテ行ク距離ヲ、乙ハ q 歩ニテ行ク。甲乙歩行ノ速

サノ比如何。

8. 甲乙ノ矩形ノ宅地アリ。間口ノ比ハ $a : a'$ 、奥行ノ比ハ $b : b'$ ニシテ、又甲 m 坪ノ價ハ乙 n 坪ノ價ニ等シ。此兩地ノ價ノ比ヲ求メヨ。

130. 比例式。

二ツノ比ノ相等シキコトヲ表セル等式ヲ比例式トイフ。

例ヘバ $a : b = c : d$

ノ如シ。此場合ニハ a 、 b ハ c 、 d ニ比例ス、又ハ a 、 b 、 c 、 d ハ比例ヲナストイヒ、 a 、 d ヲ此比例ノ外項、 b 、 c ヲ其内項トイフ。

a 、 b 、 c 、 d ガ比例ヲナストキハ d ヲ a 、 b 、 c ノ第四比例項トイフ。

131. 比例式ノ性質。

a 、 b 、 c 、 d ガ比例ヲナストキハ、

$$a : b = c : d$$

即チ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

此兩邊ニ bd ヲ掛ケテ

$$ad = bc$$

比例式ノ外項ノ積ト内項ノ積トハ
相等シ。

逆ニ a, b, c, d ナル四ツノ數アリテ、 a, d ノ積ガ
 b, c ノ積ニ等シキトキ、即チ

$$ad = bc$$

ナルトキハ、此兩邊ヲ bd ニテ割リテ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

即チ

$$a:b = c:d$$

$ad = bc$ ナルトキハ、四ツノ數 a, b, c, d
ハ比例ヲナス。

四ツノ數 a, b, c, d ガ比例ヲナストキハ、上ノ性
質ニヨリ、次ノ八通りノ比例式ヲ得。此等ハイッ
レモ、 $ad = bc$ ト同ジ事ヲ表セルナリ。

$$(1) \quad a:b = c:d \quad (5) \quad b:a = d:c$$

$$(2) \quad a:c = b:d \quad (6) \quad c:a = d:b$$

$$(3) \quad d:b = c:a \quad (7) \quad b:d = a:c$$

$$(4) \quad d:c = b:a \quad (8) \quad c:d = a:b$$

132. 互ニ比例スル二組ノ數。

A, B ガ a, b ニ比例スルトキ、即チ $A:B = a:b$ ナル

トキハ、前節ニ説キタルガ如ク $A:a = B:b$ 即チ

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

ナリ。一般ニ

$$A, B, C, \dots$$

$$a, b, c, \dots$$

ナル二組ノ數アルトキ、 A, B ハ a, b ニ、 A, C ハ a, c
ニ、……比例スルトキハ、

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \dots$$

ニシテ、從テ B, C ハ b, c ニ比例シ、 A, B, C, \dots ノ中
イヅレノ二ツノ數ヲ探ルモ、此等ハ、 a, b, c, \dots ノ
中之ニ對應スル二ツノ數ニ比例ス。ヨリテ $A, B,$
 C, \dots ハ a, b, c, \dots ニ比例ストイフ。此場合ニ

$\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}$ ナド相等シキ數ヲ t ト置クトキハ、

$$A = at, \quad B = bt, \quad C = ct, \dots$$

今 p, q, r, \dots ヲ隨意ノ數トナストキ、

$$pA + qB + rC + \dots = (pa + qb + rc + \dots)t$$

故ニ $pa + qb + rc + \dots$ ガ 0 ニ等シカラザルトキハ

$$\frac{pA + qB + rC + \dots}{pa + qb + rc + \dots} = t$$

チ

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \dots = \frac{pA+qB+rC+\dots}{pa+qb+rc+\dots}$$

又 $pa+qb+rc+\dots=0$ ナルトキニハ、同時ニ又

$$pA+qB+rC+\dots=0$$

ナリ。

133. 應用。

例一。二ツノ數ノ比ガ $7:3$ ニ等シキトキ、此等二ツノ數ノ和ト差トノ比ヲ求メヨ。

二ツノ數ヲ x, y トスルトキハ

$$x = 7t, \quad y = 3t$$

ト置クコトヲ得。故ニ

$$x+y = 10t, \quad x-y = 4t$$

ヨリテ和ト差トノ比ハ $10:4$ 又ハ $5:2$ ニ等シ。

例二。金 S 圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ $a:b:c$ ノ割合ニ分配スルトキハ、三人ノ取前各、幾許ナルカ。(比例配分)

甲乙丙ノ取前ヲ at 圓, bt 圓, ct 圓ト置クコトヲ得。故ニ

$$(a+b+c)t = S$$

ヨリテ

$$t = \frac{S}{a+b+c}$$

故ニ

$$at = \frac{aS}{a+b+c}$$

$$bt = \frac{bS}{a+b+c}$$

$$ct = \frac{cS}{a+b+c}$$

例三。直角三角形ノ直角ヲ挾メル二ツノ邊ノ比ハ $m:n$ ニシテ、斜邊ハ d 尺ナリ。二ツノ邊ノ長ヲ求メヨ。

二ツノ邊ヲ mt 尺, nt 尺ト置クコトヲ得。

サテ

$$(mt)^2 + (nt)^2 = d^2$$

ヨリテ

$$t = \frac{d}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

故ニ

$$mt = \frac{md}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$nt = \frac{nd}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

134. 連比例。

a, b, c ナル三ツノ數アリテ、

$$a:b = b:c$$

ナルトキハ、 a, b, c ハ連比例ヲナストイヒ、 b ヲ a, c ノ比例中項、 c ヲ a, b ノ第三比例項トイフ。

二ツノ數ノ比例中項ハ其積ノ平方根ニ等シ。

$$\text{又} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

ナル相等シキ比ヲ r ト名ヅクルトキハ、

$$r = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

ナリ。故ニ a, b, c ガ連比例ヲナストキハ、 $a:c$ ハ $a:b$ 又ハ $b:c$ ノ平方比ニ等シ。

一般ニ、 a, b, c, d, \dots, k, l 等ノ數ノ間ニ

$$a:b = b:c = c:d = \dots = k:l$$

ナル比例ガ成立ツトキハ、 a, b, c, d, \dots, k, l 等ハ連比例ヲナストイフ。

比ノ數ガ n 個(文字ノ數ハ $n+1$)ナルトキハ、

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots = \frac{k}{l}$$

ヨリ。

$$\frac{a}{l} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{c}\right)^n = \dots = \left(\frac{k}{l}\right)^n$$

ヲ得。

問題 第二十四

1. a, b, c, d ガ比例ヲナストキハ、次ノ比例式ノ成立ツコトヲ證明セヨ。

$$(1) \quad a+b:b = c+d:d$$

$$(2) \quad a+b:a-b = c+d:c-d$$

$$(3) \quad ma+nb:pa+qb = mc+nd:pc+qd$$

2. 甲乙二ツノ數ノ比ガ $9:5$ ナルトキ、甲ノ 2 倍ト乙ノ 3 倍トノ和ト甲ノ 8 倍ト乙ノ 10 倍トノ差トノ比ヲ求メヨ。

3. 二ツノ數ノ和ト差トノ比ガ $a:b$ ニ等シキトキ、此等ノ數ノ比ヲ求メヨ。

4. $a+b, a-b, a^2-b^2$ ノ第四比例項ヲ求メヨ。

5. $16a, 4ab^2$ ノ比例中項ヲ求メヨ。

6. 次ノ二ツノ數ノ第三比例項ヲ求メヨ。

$$(1) \quad 8a^2b, 2ab^2 \quad (2) \quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

7. a, b, c ガ a', b', c' ニ比例スルトキハ

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{\sqrt[n]{pa^n + qb^n + rc^n}}{\sqrt[n]{pa'^n + qb'^n + rc'^n}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

8. a, b ガ a', b' ニ比例スルトキハ

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{\sqrt{pa^2 + qab + rb^2}}{\sqrt{pa'^2 + qa'b' + rb'^2}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

9. $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c}$ ナルトキ x, y, z ノ比ヲ求メヨ。

10. 金 S 圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分チ、其取前ノ比ヲ甲ト乙トハ $a:b$ 、乙ト丙トハ $c:d$ トナルヤウニセヨ。

11. ニツノ邊ノ比ガ $a:b$ ナル矩形ノ面積 S 平方尺ナリ。ニツノ邊ヲ求メヨ。

12. 直角三角形ノ斜邊ト一邊トノ比ハ $13:12$ ニシテ、他ノ一邊ハ 10 尺ナリ。面積ヲ求メヨ。

13. 三ツノ數ノ比ハ $7:5:4$ ニシテ、甲ノ 3 倍、乙ノ 4 倍、丙ノ 6 倍ノ和ハ 780 ナリ。此等ノ數ヲ求メヨ。

14. 三ツノ分數ノ和ハ $\frac{98}{225}$ ニシテ、分子ノ比ハ $2:3:4$ 、分母ノ比ハ $9:5:15$ ナリ。此等ノ分數ヲ求メヨ。

15. 百めしとるノ競走ニテ甲ガ乙ニ勝ツコト五めしとる、丙ニ勝ツコト十めしとるナリ。乙ト

丙トガ此競走ヲナストキハ、乙ハ丙ニ幾めしとる勝ツベキカ。

16. ニツノ整數ノ比ハ $57:78$ ニシテ、其最大公約數ハ 5 ナリ。此等ノ整數ヲ求メヨ。

17. ニツノ整數ノ比ハ $14:10$ ニシテ、其最小公倍數ハ 140 ナリ。此等ノ整數ヲ求メヨ。

18. 兄弟ノ年齢ノ比、現今ハ $3:2$ ナレド、六年後ニハ $4:3$ トナルベシトイフ。現今ノ年齢各、幾許ナルカ。

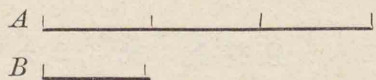
19. 甲乙二人ノ所持金ノ比 $3:2$ ナリシニ、甲ハ十五圓ヲ費シ、又乙ハ五圓ヲ費シタルガタメニ、所有金ノ比ハ $7:5$ トナレリ。兩人ノ所有金各、幾許ナリシカ。

20. 兵數ノ比 $A:B$ ナル東西兩軍ガ交戦シタルニ、戦死者ノ數ノ比ハ $a:b$ 、生還者ノ數ノ比ハ $a':b'$ ナリシトイフ。兩軍ニ於ケル戦死者ト生還者トノ數ノ比ヲ求メヨ。

第二章 量ノ比 比例スル量

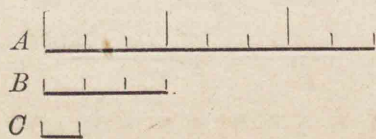
135. 通約スベキ量。

例へバ A ナル直線ノ長サヲ計ラントスルニ、先ヅ B ナル長サ(例へバ一寸)ヲ取り、 A ハ丁度 B ヲ三ツ合セタル長サナルコトヲ知ルトキハ、 A ノ長サハ $3B$ (例へバ3寸)ナリトイフ。 B ヲ單位トスルトキハ、 A ノ數値ハ3ナリ。



A ガ丁度 B ニテ計リ切レザルトキハ、 B ヲ幾ツカニ等分シテ得タル小ナル單位ヲ用ヒテ A ヲ計ル。例へバ B ヲ三等分シタル長サ C ヲ採リ、 A ハ丁度 C ヲ八ツ合セタル長サナルコトヲ知レリトスルトキハ、 A ノ長サハ $\frac{8}{3}B$ (例へバ $\frac{8}{3}$ 寸) ニシテ、 B ヲ單位トスルトキ A ノ數値ハ $\frac{8}{3}$ ナリ。

此場合ニハ A ハ C ノ八倍、 B ハ C ノ三倍ナリ。



A 、 B ナル二ツノ量ガ丁度 C ナル量ノ幾倍カニ等シクナルトキハ、 C ヲ A 、 B ノ公度(公約量)トイヒ、 A 、 B ヲ通約スベキ量トイフ。

136. 通約スベカラザル量。

サレド、又二ツノ量 A 、 B ガ公度ヲ有セザルコトアリ。例へバ、正方形ノ一邊ト其對角線、又ハ圓ノ半径ト其周圍トノ如キ、是レナリ。

公度ヲ有セザル二ツノ量ヲ通約スベカラザル量トイフ。

A ト B トガ公度ヲ有セザルトキハ、 B ヲ單位トスルトキ、 A ノ數値ヲ整数又ハ分數ニテ表スコトヲ得ズ(其故如何)。サレド、分數(又ハ小數)ヲ用ヒテ如何程ニテモ之ニ近キ數値ヲ求ムルコトヲ得。例へバ B ヲ一萬ニ等分シテ之ヲ C ト名ツケ、 A ハ C ノ 31415 倍ヨリハ大ニシテ、31416 倍ヨリハ小ナルコトヲ知リ得タリトセバ、 B ヲ單位トスルトキ、 A ノ數値ハ 3.1415 ヲリハ大ニシテ、3.1416 ヲリ

ハ小、即チ A ノ 數 値 ハ $3.1415\dots$ ナリ。カヤウニシテ、 A ノ 數 値 ヲ 小 數 第 四 位 マデ 求 ム ル コト ヲ 得 タリ。ナホ精密ナル結果ヲ得ント欲セバ、 B ヲ 十 萬、百 萬、千 萬、 \dots ニ 等 分 シテ 上 ノ 如 ク スベシ。カヤウニシテ A ノ 數 値 ヲ 小 數 第 五 位、第 六 位、第 七 位、 \dots マデ 定 ム ル コト ヲ 得。

上ノ $3.1415\dots$ ナル 數 ノ 右 ノ 端 ニ \dots ヲ 記 シタルハ、其部分ノ數字ヲ求ムルコトヲ得ズトイフニハアラスシテ、其部分ノ數字ヲ求メザリシナリ。之ヲ求メント欲セバ、其數字ハ幾桁ニテモ求メ得ラルベシ。

B ヲ 單 位 ト シテ ノ A ノ 數 値 ガ 整 數 又 ハ 分 數 ニテ表シ得ザルトキニモ、此數値ハ或定マレル數ニテ、如何程ニテモ思フママ之ニ近キ分數(又ハ小數)ヲ求ムルコトヲ得。カヤウニ整數又ハ分數ニ等シカラザル數ヲ無理數トイヒ、之ニ對シテ整數及ビ分數ヲ有理數トイフ。

例ヘバ、 $\sqrt{2} = 1.414213\dots$ 、 $\pi = 3.141592\dots$ ナドハ無理數ナリ。

注意。有理數ヲ十進法ニテ表ストキハ整數

又ハ桁數ニ限アル小數($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ナド)、又ハ循環小數($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{15}$ ナド)ヲ得。無理數ハ桁數ノ限ナキ不循環小數ニ等シ。

或量ヲ計ルトキ、計ルベキ量ト單位トニ公度アルトキハ、其數値ハ整數又ハ分數(有理數)ナリ。

計ルベキ量ト單位トニ公度ナキトキハ、其數値ハ無理數ナリ。

137. ニツノ量ノ比。

A , B ナルニツノ量ガ公度 C ヲ有スルトキ、例ヘバ A ハ C ノ m 倍、 B ハ C ノ n 倍ナルトキハ、 A , B ノ比($A:B$)ノ値ハ $\frac{m}{n}$ ナリトイフ。

故ニ A ノ B ニ對スル比 $A:B$ ノ値ハ、 B ヲ單位トシテ A ヲ計リテ得タル數値ニ外ナラス。

A ト B トガ公度ヲ有セザルトキニモ、 B ヲ單位トシテ A ヲ計リテ得タル數値(無理數)ヲ A , B ノ比ノ値トス。

138. 量ノ比ト數ノ比ト。

A, B ヲ同ジ單位 C ニテ計リ,其數値ヲ a 及 ビ b トシ,例ヘバ $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}$ トスルトキハ,

$$A = \frac{m}{n} C = \frac{mq}{nq} C$$

又
$$B = \frac{p}{q} C = \frac{np}{nq} C$$

即チ A ハ「 C ノ nq 分ノ一」ノ mq 倍,又 B ハ「 C ノ nq 分ノ一」ノ np 倍ニシテ,「 C ノ nq 分ノ一」ハ A, B ノ公度ナリ。

故ニ $A:B$ ハ $\frac{mq}{np}$ ニ等シ。

サテ $\frac{mq}{np}$ ハ丁度 $\frac{m}{n}$ ヲ $\frac{p}{q}$ ニテ割リテ得タル商ニ等シ。ヨリテ

$$A:B = \frac{a}{b}$$

二ツノ量 A, B ノ比ハ同ジ單位 C ヲ用ヒテ A, B ヲ計リテ得タル數値 a, b ノ比ニ等シ。

(a, b ガ無理數ナルトキハ, $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ ヲ其近似値ト考フベシ)。

カヤウニ,スベテ量ノ比ハ之ヲ數ノ比ニ改ムルコトヲ得ルガ故ニ,數學ニテハ數ノ比ノミヲ論ズレバヨシ。

注意。二ツノ量 A, B ノ比トイフトキニハ, A, B ハ同ジ種類ノ量,即チ例ヘバ共ニ長サ,又ハ共ニ目方ナルベキコト,勿論ナリ。サレド, $A:B=C:D$ ノ如キ比例式ニテハ, A, B, C, D ガ盡ク同ジ種類ノ量ナルコトヲ要セズ。例ヘバ,第一ノ比ノ兩項 A, B ハイヅレモ長サ,第二ノ比ノ兩項 C, D ハイヅレモ面積ナルコトアルベシ。量ノ比ヲスベテ數ノ比ニ改メテ考フルトキハ,此等ノ注意ハ不用ナリ。

139. 相伴ヒテ變動スル量。

互ニ比例スル量。

例ヘバ底邊ガ與ヘラレタル三角形ノ面積ト高サトノ間ニハ,次ノ關係アリ。

底ヲ a 寸,高サヲ x 寸,面積ヲ y 平方寸トスルトキハ,

$$y = \frac{ax}{2} \quad \text{又ハ} \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{2}$$

ナリ。此式ニテ、 a ハ定マレル數ナレド、 x 及ビ y ハ然ラズ。 x, y ノ中、一方ニ種種ノ値ヲ與フルトキハ、之ニ應ジテ他ノ一方モソレゾレ定マレル値ヲ採ルベシ。即チ x, y ハ相伴ヒテ變動スル量ヲ表セル數ナリ。

一般ニ、相伴ヒテ變動スル二ツノ數 x, y ガ

$$\frac{y}{x} = k \quad (1)$$

(但、 k ハ或定マレル數ナリ)ナル關係ニヨリテ結び附ケラルルトキ、 x', y' 及ビ x'', y'' ヲ此等二ツノ數ノ相應ズル二組ノ値トスルトキハ、

$$\frac{y'}{x'} = k, \quad \frac{y''}{x''} = k$$

ナルガ故ニ、

$$\frac{y'}{y''} = \frac{x'}{x''} \quad \text{即チ} \quad y' : y'' = x' : x''$$

即チ x, y ハ相伴ヒテ、而モ常ニ相等シキ比ニテ變動ス。是故ニ x, y ハ互ニ比例ストイフ。

例ヘバ、與ヘラレタル底ヲ有スル三角形ノ面積ハ、其高サニ比例シ、又定マレル一様ノ速度ヲ以テ運動スル物體ノ通過スル距離ハ運動ノ時間ニ比例ス。

逆ニ相伴ヒテ變動スル甲乙二ツノ量ガ常ニ相

等シキ比ヲ以テ變動スルトキハ、此等二ツノ量ノ相應セル値ヲ表ス數 x, y ノ間ニハ必ズ(1)ノ如キ關係アルベシ。其故如何トナラバ、今甲ガ1ナル値ヲ採ルトキ、乙ハ k ナル値ヲ採ルモノトスルトキハ、 k ハ或定マレル數ナリ。又甲ガ x ナル値ヲ採ルトキ、之ニ應ジテ乙ハ y ナル値ヲ採ルトスルトキハ、甲ト乙トハ相等シキ比ニテ變動ストイフガ故ニ、

$$y : k = x : 1$$

即チ

$$\frac{y}{x} = k$$

140. 互ニ比例スル量ノ鑑別。

甲乙二ツノ量ガ相伴ヒテ變動スルトキ、甲ガ増大スルトキハ、乙モ亦増大シ、(從テ甲ガ減少スルトキハ乙モ亦減少シ)、シカモ甲ガ2倍、3倍、…… n 倍トナルトキ、乙モ亦2倍、3倍、…… n 倍トナルトキハ、是ヨリ直ニ甲、乙ハ比例スル量ナルコトヲ知ルベシ。即チ變動ノ比ガ整數ナルトキニ、甲乙ガ必ズ相等シキ比ヲ以テ變動スルナラバ、變動ノ比ガ整數ナラザルトキニモ、甲乙ハ必ズ相等シキ比ヲ

以テ變動スベシ。

甲ガ x, x' ナル値ヲ探ルトキ、乙ガ之ニ應ジテ探ル値ヲ y, y' ニテ表ストキ、先ヅ變動ノ比ガ分數ナル場合ヲ考フルガタメニ

$$x' : x = \frac{m}{n} \quad \text{即チ} \quad nx' = mx$$

トスルトキハ、甲ガ x ナル値ヲ探ルトキ、乙ハ y ナル値ヲ探ルガ故ニ、甲ガ mx トナルトキハ、乙ハ my ナル値ヲ探ルベシ。又甲ガ x' ナルトキ乙ハ y' ナルガ故ニ、甲ガ nx' トナルトキハ乙ハ ny' トナル。サテ nx' ト mx トハ相等シキガ故ニ、 ny' ハ my ニ等シ、即チ

$$y' : y = \frac{m}{n}$$

即チ變動ノ比ガ分數ナルトキニモ、甲乙ハ相等シキ比ヲ以テ變動ス。

次ニ變動ノ比ガ無理數ナル場合ヲ考ヘンガタメニ、例ヘバ此比ノ値ヲ小數第四位マデ探リテ

$$x' : x = 1.4142 \dots\dots$$

即チ此比ノ値ハ $\frac{14142}{10000}$ ヨリハ大キク、 $\frac{14143}{10000}$ ヨリハ小サシトスルトキハ、甲ガ $\frac{14142}{10000}x$ ナル値ヲ探ルトキ、乙ハ $\frac{14142}{10000}y$ ナル値ヲ探ルベク、甲ガ

$\frac{14142}{10000}x$ ヨリモ大キクナルトキハ、乙モ亦 $\frac{14142}{10000}y$ ヨリ大キクナル。サテ x' ハ $\frac{14142}{10000}x$ ヨリ大ナルガ故ニ、 y' ハ $\frac{14142}{10000}y$ ヨリモ大ナリ。同ジャウニ x' ハ $\frac{14143}{10000}x$ ヨリ小ナルガ故ニ y' ハ $\frac{14143}{10000}y$ ヨリハ小ナリ。即チ y' ハ $\frac{14142}{10000}y$ ト $\frac{14143}{10000}y$ トノ間ニアリ。故ニ

$$y' : y = 1.4142 \dots\dots$$

ニシテ $y' : y$ ハ $x' : x$ ト小數第四位マデハ一致スベシ。サテ $x' : x$ ノ値ヲ小數幾位マデ探ルトモ、 $y' : y$ ノ値ハ其位マデハ之ト一致スベキガ故ニ

$$x' : x = y' : y$$

即チ甲乙ハ互ニ比例スル量ナリ。

例ヘバ高サノ與ヘラレタル矩形ノ面積ハ其底ニ伴ヒテ變動シ、底ノ増シ又ハ減ルニ伴ヒテ、面積モ亦増シ又ハ減リ、底ガ2倍、3倍、……トナルトキハ面積モ亦2倍、3倍、……トナルコト明ナリ。是ニヨリテ面積ハ底ニ比例スルコトヲ知ル。

141. 逆比例。

例ヘバ、與ヘラレタル面積ヲ有スル三角形ノ底

ト高サトノ間ニハ、次ノ關係アリ。

與ヘラレタル面積ヲ a 平方寸、高サヲ x 寸、底ヲ y 寸トスルトキハ、

$$xy = 2a$$

ナリ。此場合ニモ、二ツノ數 x, y ガ唯一ツノ方程式ニヨリテ結び附ケラレルガ故ニ、此等二ツノ數 x, y ハ相伴ヒテ變動ス。

一般ニ、相伴ヒテ變動スル二ツノ數 x, y ガ

$$xy = k$$

(k ハ或定マレル數ナリ)ナル式ニヨリテ結び附ケラレルトキハ、

$$x = k \frac{1}{y} \quad \text{又ハ} \quad y = k \frac{1}{x}$$

即チ x, y ハ各、他ノ一方ノ逆數ニ比例ス。今 x', y', x'', y'' ヲ x, y ノ相應ズル二組ノ値トスルトキハ、

$$x'y' = x''y'' (=k)$$

$$\text{即チ} \quad y' : y'' = \frac{1}{x'} : \frac{1}{x''} \quad \text{又ハ} \quad x' : x'' = \frac{1}{y'} : \frac{1}{y''}$$

ニシテ、 x, y ハ相伴ヒテ、而モ各、他ノモノノ逆比ヲ以テ變動ス。カヤウノ二ツノ數 x, y ハ互ニ逆比例ヲナストイフ。

例ヘバ、面積ノ與ヘラレタル三角形ノ底ト高サトハ互ニ逆比例ヲナス。又一様ノ速度ヲ以テ運動スル物體ガ定マレル距離ヲ通過スルニ要スル時間ハ、速度ニ逆比例ス。

142. 複比例。

例ヘバ三角形ノ底ヲ x 寸、高サヲ y 寸、面積ヲ z 平方寸トスルトキハ、 x, y, z ナル三ツノ數ノ間ニハ次ノ關係アリ。

$$z = \frac{1}{2}xy$$

カヤウニ x, y, z ナル三ツノ數ガ唯一ツノ方程式ニヨリテ結び附ケラレルガ故ニ、此等三ツノ數ノ中、イヅレカ二ツニ定マリタル値ヲ與フルトキ、他ノ一ツモ亦之ニ應ジテ或定マリタル値ヲ探ル。即チ x, y, z ハ相伴ヒテ變動ス。

一般ニ x, y, z ナル三ツノ相伴ヒテ變動スル數ガ

$$z = kxy$$

(k ハ或定マレル數ナリ)ナル方程式ニヨリテ結び附ケラレルトキ、 x', y', z' 及ビ x'', y'', z'' ヲ此等ノ數

ノ相應ズル二組ノ値トスルトキハ、

$$z' = kx'y', \quad z'' = kx''y''$$

ナルガ故ニ、

$$\frac{z'}{z''} = \frac{x'y'}{x''y''} \quad \text{即チ} \quad z':z'' = \begin{cases} x':x'' \\ y':y'' \end{cases}$$

即チ z ハ x 及ビ y ノ「變動ノ比」ノ複比ヲ以テ變動ス。カヤウノ場合ニハ z ハ x 及ビ y ニ複比例ストイフ。

次ノ問題ハ應用上甚ダ重要ナリ。

甲乙二ツノ量ニ伴ヒテ變動スル丙ナル量アリ。甲ガ定マレル値ヲ保有シテ、乙ノミ變動スルトキハ、丙ハ乙ニ比例シ、又乙ガ定マレル値ヲ保有シテ甲ノミ變動スルトキハ、丙ハ甲ニ比例ス。今甲乙共ニ變動スルトキハ、丙ノ變動如何。

甲乙ニ各、1ナル値ヲ與フルトキ、之ニ應ジテ丙ガ採ル値ヲ k ト名ヅクベシ。 k ハ或定マリタル數ナリ。サテ甲ハ此1ナル値ヲ保有シ、乙ハ y ナル値ヲ採ルトキハ、之ニ應ジテ丙ハ z' ナル値ヲ採ルモノトスレバ、題意ニヨリテ

$$z':k = y:1 \quad \text{即チ} \quad z' = ky$$

次ニ乙ハ y ナル値ヲ保有シ、甲ガ x ナル値ヲ採ルトキ、丙ハ之ニ應ジテ z ナル値ヲ採ルトスレバ、題意ニヨリテ

$$z:z' = x:1 \quad \text{即チ} \quad z = z'x$$

上ノ二ツノ式ヨリ次ノ等式ヲ得、

$$z = kxy$$

サテ x, y, z ハ畢竟甲乙丙ガ相應ジテ採ル任意ノ一組ノ値ナルガ故ニ、丙ハ甲乙ニ複比例スルコトヲ知ル。

上ノ説明ニテ、甲乙丙ノ相應ズル三組ノ値ヲ考へタルコトニ注意スベシ。即チ次ノ如シ。

甲	1	1	x	
乙	1	y	y	$z':k = y:1$
丙	k	z'	z	$z:z' = x:1$

例ヘバ、底ガ定マレルトキハ、三角形ノ面積ハ其高サニ比例シ、又高サガ定マレルトキハ、面積ハ底ニ比例ス。サテ底モ高サモ共ニ變動スルトキハ、面積ハ底ト高サトニ複比例ス。

又例ヘバ頂角 A ノ定マレル三角形ノ面積ハ二ツノ邊 AB, AC ノ長サニ伴ヒテ變動シ、 AB ガ定マ

レルトキニハ面積ハ AC ノ長サニ比例シ、

$$(\triangle ABC : \triangle ABC' = AC : AC')$$

AC ガ定マレルトキニハ、面

積ハ AB ノ長サニ比例ス。

$$(\triangle ACB : \triangle ACB' = AB : AB')$$

ヨリテ二ツノ邊 AB, AC ガ共

ニ變動スルトキハ、面積ハ AB,

AC ノ長サニ複比例ス。故ニ

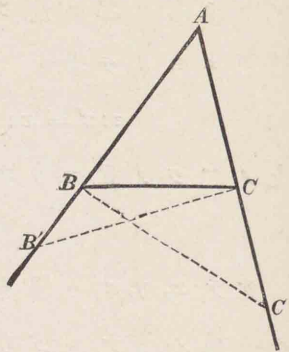
AB, AC ノ長サヲ x, y , 面積ヲ z ニテ表ストキハ

$$z = kxy$$

ニシテ、 k ハ或定マリタル數ナリ。(k ハ即チ x, y ガ共ニ 1 ナルトキノ z ノ値即チ頂角ガ定マレル角 A ニシテ、二邊ガ長サノ單位ニ等シキ二等邊三角形ノ面積ヲ表ス數ナリ。例へバ A ガ直角ナルトキハ k ハ $\frac{1}{2}$ ニシテ、 A ガ 60° ノ角ナルトキハ k ハ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ナリ)。

問 題 第 二 十 五

1. 甲乙二ツノ量ガ互ニ比例ヲナシ、甲ガ7ナル値ヲ探ルトキ、乙ハ15ナル値ヲ探ル。甲ガ21ナ



ル値ヲ探ルトキ、乙ハ如何ナル値ヲ探ルカ。

又一般ニ甲乙ノ相應ズル値ノ關係ヲ式ニ書キ表セ。

2. 甲乙二ツノ量ガ比例ヲナシ、甲ガ7.5ナル値ヲ探ルトキ、乙ハ2.25ナル値ヲ探ル。甲ガ12ダケ増ストキハ、乙ハ幾許増スカ。

3. 甲乙ハ互ニ逆比例シ、 a, b ハ其相應ズル一組ノ値ナリ。一般ニ甲乙ノ相應ズル値 x, y ノ間ニ如何ナル關係アルカ。

4. 甲乙二ツノ量ガ逆比例ヲナシ、甲ガ8ナル値ヲ探ルトキ、乙ハ $6\frac{1}{4}$ ナル値ヲ探ル。甲ガ2ダケ増ストキハ、乙ハ幾許減ルカ。

5. 丙ハ甲乙ニ複比例シ、甲ガ a , 乙ガ b ナル値ヲ探ルトキ、丙ハ c ナル値ヲ探ル。甲ガ A , 乙ガ B ナルトキ、丙ノ値ハ如何。

6. 甲乙二ツノ量ニ伴ヒテ變動スル丙ナル量アリ。甲ガ定マレル値ヲ保有シテ乙ノミ變動スルトキハ、丙ハ乙ニ比例シ、又乙ガ定マレル値ヲ保有スルトキハ、丙ハ甲ニ逆比例ス。今甲乙ガ各、1ナル値ヲ探ルトキ、丙ハ b ナル値ヲ探ルトスルト

キ、一般ニ甲乙丙ノ相對應スル値 x, y, z ノ間ニハ如何ナル關係アルカ。

7. 比重 d ナル物體 v 立方センチメートルノ目方ヲ w ぐらむトスルトキ、 d, v, w ノ間ニ如何ナル關係アルカ。又是ニヨリテ、次ノ問ニ答ヘヨ。

(1) 同一ノ物質ヨリ成レル物體ノ體積ト其目方トノ關係如何。

(2) 相等シキ體積ヲ有スル二ツノ物體ノ比重ト目方トノ關係如何。

(3) 種種ノ物體ヲ同ジ目方ダケ採ルトキ、其體積ト比重トノ關係如何。

(4) 一般ニ物體ノ目方ハ其比重及ビ體積ニ伴ヒテ如何ヤウニ變動スルカ。

8. 同ジ長サヲ相異ナル單位ヲ用ヒテ計ルトキハ、種種ノ數値ヲ得。單位ト數値トノ關係如何。

9. 振子ガ一回振ルニ費ス時間ハ振子ノ長サノ平方根ニ比例ス。長サ 994 ミリメートルノ振子ガ一秒ニ一回振ルトキハ、一秒ニ四回振ル振子ノ長サ幾許ナルカ。

10. 金剛石一からっとノ價ガ其金剛石ノ目方ニ

比例スルトキハ、金剛石ノ目方ト其代價トノ關係如何。又 3 からっとノ金剛石ノ價ガ 7200 圓ナルトキハ、5 からっとノ金剛石ノ價幾許ナルカ。

11. 扇形ノ面積ハ頂角ト半徑トニ伴ヒテ變動ス。半徑ガ定マレルトキハ、面積ハ頂角ニ比例シ、又頂角ガ定マレルトキハ、面積ハ半徑ノ平方ニ比例ス。頂角 α 度、半徑 r 寸ナル扇形ノ面積幾平方寸ナルカ。

12. 家族ノ人數同ジケレバ、生活費ハ時間ニ比例シ、又定マレル時間ニテハ、一部ハ定額ニシテ、一部ハ人數ニ比例スルモノトスルトキ、家族四人ノ三個月間ノ生活費ハ二百二十五圓、家族五人ノ四個月間ノ生活費ハ三百六十圓ナラバ、家族六人ノ一個年間ノ生活費ハ幾許ナルベキカ。

第十篇 對數

第一章 一般ノ指數

143. 指數ガ分數ナル冪ノ意義。

或數 a ノ冪ノ平方根ヲ求ムルニハ、其指數ヲ 2 分スレバヨシ。

例ヘバ、 $\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$, $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$, $\sqrt{a^{2m}} = a^m$

同ジヤウニ、例ヘバ $\sqrt{a^3}$ ヲ $a^{\frac{3}{2}}$, 又 $\sqrt{a^5}$ ヲ $a^{\frac{5}{2}}$ トモ書ク。

a^m ノ n 乗根ハ、 m ガ n ニテ割切レルトキニハ $a^{\frac{m}{n}}$ ニ等シ。同ジヤウニ、 m ガ n ニテ割切レヌトキニモ、 a^m ノ n 乗根ノコトヲ、 $a^{\frac{m}{n}}$ ナル記號ヲ用ヒテ冪ノ形ニ書キ表ス。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

例 題

1. 次ノ式ノ意味如何。

(1) $9^{\frac{1}{2}}$ (2) $8^{\frac{2}{3}}$ (3) $a^{\frac{3}{4}}$ (4) $a^{\frac{1}{n}}$

2. $\sqrt[3]{a^{10}}$, $(\sqrt[3]{a})^8$, $\sqrt[8]{a}$ ヲ冪ノ形ニ書ケ。

3. $a^{\frac{1}{2}}$ ノ平方及ビ $a^{\frac{2}{3}}$ ノ立方ヲ求メヨ。

4. $a^{1.5}$, $a^{0.25}$ ノ意味如何。

5. $a^{\frac{2}{4}}$ ト $a^{\frac{1}{2}}$ トハ相等シ。其理由如何。

一般ニ、 $a^{\frac{m}{n}}$ ト $a^{\frac{mp}{np}}$ トハ相等シ。其理由如何。

6. a ノ n 乗根ノ m 乗冪ヲ a ノ一ツノ冪トシテ書キ表セ

144. 指數ガ 0 又ハ負數ナル冪ノ意義。

m, n ガ正ノ整數ニテ、 m ガ n ヨリ大ナルトキハ

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

此式ニテ m ト n トガ相等シキトキハ、左邊ハ 1 トナリ、右邊ハ a^0 トナル。ヨリテ

a^0 ハ 1 ヲ表セル記號ナリト定ム。

即チ $a^0 = 1$

又 n ヲ $m+p$ トスルトキハ、左邊ハ $\frac{1}{a^p}$ トナリ、右邊ハ a^{-p} トナル。ヨリテ

a^{-p} ハ $\frac{1}{a^p}$ ヲ表セル記號ナリト定ム。

即チ
$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

ナホ一般ニ、 p ガ分數ナルトキニモ、
 $\frac{1}{a^p}$ ヲ a^{-p} ト書ク。

例ヘバ、 $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ 、又 $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

例 題

1. 次ノ式ノ意味如何。

(1) a^{-1} (2) a^{-3} (3) $a^{-\frac{1}{3}}$ (4) $(xy)^{-\frac{1}{2}}$

2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(1) 10^{-3} (2) $10^{-0.5}$ (3) $a^{-5} \times a^{-3}$
(4) $a^5 \times a^{-7}$ (5) $a^3 \div a^{-2}$ (6) $a^{-5} \div a^3$

3. a ノ逆數ノ平方ヲ a ノ冪トシテ書キ表セ。

4. a ノ立方根ノ平方ノ逆數ヲ a ノ冪トシテ
書キ表セ。

145. 一般ノ指數ヲ有スル冪 ニ關スル計算。

冪ニ關スル計算ハ、指數ガ分數又ハ
負數ナル場合ニモ、正ノ整數ヲ指數ト

セルトキト同ジキ規則ニ從フ。即チ

(一) M, N ガ如何ナル數ナリトモ、

$$\left. \begin{aligned} a^M a^N &= a^{M+N} \\ \frac{a^M}{a^N} &= a^{M-N} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

第一ノ公式ニテ、 N ヲ $-N$ ニ代フルトキハ、第二
ノ公式ヲ得。

例一。 $a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$

即チ $\sqrt{a} \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^5}$

(兩邊ヲ六乗シテ、之ヲ驗セ)。

例二。 $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$

即チ $\sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$

(兩邊ヲ六乗シテ驗セ)。

(二) M, N ガ如何ナル數ナリトモ、

$$(a^M)^N = a^{MN} \quad (II)$$

例三。 $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$

即チ $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$

例四。 $(a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{3}}$

即チ $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

(兩邊ノ六乗ヲ比較シテ此等ノ等式ヲ驗セ)。

(三) M が如何ナル數ナリトモ,

$$\left. \begin{aligned} (abc)^M &= a^M b^M c^M \\ \left(\frac{a}{b}\right)^M &= \frac{a^M}{b^M} \end{aligned} \right\} \quad \text{(III)}$$

例五. $(abc)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$

即チ $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c}$

例題

1. 上ノ公式(I)ノ第一式ヲ次ノ場合ニ當テハメテ,其意味ヲ説明シ,且之ヲ驗セ。

(1) $M = -3, N = -5$ (2) $M = -3, N = \frac{5}{2}$

(3) $M = \frac{2}{3}, N = \frac{1}{3}$ (4) $M = \frac{2}{3}, N = -\frac{1}{2}$

2. 上ノ公式(II)ヲ次ノ場合ニ當テハメテ,其意味ヲ説明シ,且之ヲ驗セ。(但 m, n, p ハ正ノ整數ナリトス)。

(1) $M = -2, N = -1$ (2) $M = \frac{1}{6}, N = 4$

(3) $M = \frac{1}{m}, N = mn$ (4) $M = \frac{1}{mp}, N = np$

3. 上ノ公式(III)ヲ次ノ場合ニ當テハメテ,其意味ヲ説明シ,且之ヲ驗セ。

(1) $M = -2$ (2) $M = \frac{2}{3}$ $M = -\frac{1}{2}$

146. 應用。

例一. $\sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$ ヲ掛ケヨ。

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$$

例二. $\sqrt[3]{a^2} \sqrt{b^3} \sqrt{c} = \sqrt{a} \sqrt[3]{b} \sqrt[4]{c^2}$ ヲ掛ケヨ。

$$(\sqrt[3]{a^2} \sqrt{b^3} \sqrt{c})(\sqrt{a} \sqrt[3]{b} \sqrt[4]{c^2}) = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{4}}$$

$$= a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2} + \frac{1}{3}} c^{\frac{1}{2} + \frac{2}{4}}$$

$$= a^{\frac{7}{6}} b^{\frac{11}{6}} c^1 = \sqrt[6]{a^7 b^{11} c^6}$$

又ハ $= a^{1 + \frac{1}{6}} b^{1 + \frac{5}{6}} c^1$

$$= abc \sqrt[6]{ab^5}$$

例三. $\sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{y^2} \div \sqrt{x} \sqrt[4]{y}$ ヲ一ツノ冪根トシテ表セ。

$$\frac{\sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x} \sqrt[4]{y}} = \frac{x^{\frac{3}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{3}{3} - \frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{2}{6}} = (xy^2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{xy^2}$$

例四. a ガ 1 ヨリ大ナル正數ナルトキ, $\sqrt[3]{a^2}$ ト $\sqrt[4]{a^3}$ トノ大小ヲ比較セヨ。

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{a^8}, \quad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{a^9}$$

サテ a ハ 1 ヨリ大ナル正數ナルガ故ニ, a^8 ハ a^9 ヨリモ小ナリ。故ニ, $\sqrt[3]{a^2}$ ハ $\sqrt[4]{a^3}$ ヨリモ小ナリ。

上ノ例ニテ、 $\frac{2}{3}$ ハ $\frac{3}{4}$ ヨリモ小ナリ。而シテ $a^{\frac{2}{3}}$ ハ $a^{\frac{3}{4}}$ ヨリモ小ナリ。一般ニ、

a ガ1ヨリ大ナル正數ナルトキハ、指數 L ガ大キクナルニ從ヒ、 a^L モ亦大キクナル。

a ガ1ヨリ小ナルトキハ、 L ガ大キクナルニ從ヒ、 a^L ハ小サクナル。

例 題

指數ノ法則ヲ應用シテ、次ノ式ヲ一ツノ根數又ハ根式ニ改メヨ。[1-6]

1. $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{7}$ 2. $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[4]{6}$

3. $\sqrt[3]{m^2} \sqrt{n^3} \times \sqrt{m^3} \sqrt[4]{n^2}$ 4. $\sqrt[3]{12^2} \div \sqrt{3^3}$

5. $\sqrt{4^3} \times \sqrt[3]{5} \div \sqrt[4]{10^2}$ 6. $\sqrt[3]{a^2} \sqrt{b^3} \div \sqrt{a^3} \sqrt[4]{b}$

7. $10^{2.5}$ ト $\sqrt[5]{10^{12}}$ トノ大小ヲ比較セヨ。

8. 10^{-2} , $10^{-1.5}$, $10^{0.5}$, 1 ヲ大小ノ順序ニ並ベヨ。

9. $10^{0.4}$, $10^{0.5}$ ト 3 トノ大小ヲ開法ヲ用ヒズニ決定セヨ。

第二章 對數ノ性質

147. 指數ト冪トノ値ノ關係。

1ヨリ大ナル數例ヘバ2ヲ採リ、其冪ヲ作り、

$$2^L = N$$

ト置キ、指數 L ニ二三ノ數値ヲ與ヘテ、 N ヲ計算スルトキハ、次ノ結果ヲ得。

L	N
..
-4	0.0625
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
..

此表ニヨリテ觀レバ、指數 L ガ0ナルトキハ、 N ハ1ニシテ、 L ガ順次ニ増大スルトキハ N モ亦順次ニ増大ス。又 L ガ負數トナリテ、順次ニ減少(代數學上ノ意味ニテ)スルトキハ、 N モ亦順次ニ減少ス。而シテ N ハ必ズ正數ナリ。

上ノ例ニテハ、指數 L ヲ整數トナシタレド、指數 L ガ分數ナルトキニモ、亦同ジ關係アリ。

例ヘバ、 L ニ分母ガ2, 4ナル二三ノ分數ノ値ヲ與ヘテ、 N ヲ計算シ、之ヲ上ノ表ノ中ヘ入ルルトキハ、次ノ如シ。

$$2^{0.5} = 2^{\frac{1}{2}} = 1.41 \dots$$

$$2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}} = 2.82 \dots$$

$$2^{0.25} = 2^{\frac{1}{4}} = 1.18 \dots$$

$$2^{1.25} = 2^{\frac{5}{4}} = 2.37 \dots$$

又

$$2^{-0.5} = 2^{-\frac{1}{2}} = 0.70 \dots$$

$$2^{-1.5} = 2^{-\frac{3}{2}} = 0.35 \dots$$

$$2^{-0.25} = 2^{-\frac{1}{4}} = 0.84 \dots$$

$$2^{-1.25} = 2^{-\frac{5}{4}} = 0.42 \dots$$

一般ニ、1ヨリ大ナル
正數 E ノ冪ヲ作り、

$$E^L = N$$

ト置クトキハ、指數 L ガ0ナルトキハ、
 N ハ1ニシテ、ソレヨリ L ガ順次ニ増
大スルニ從ヒ、 N モ亦順次ニ増大シ、 L
ガ順次ニ減少スルニ從ヒ、 N モ亦順次
ニ減少ス。(第146節参照)。

N ハ必ず正數ニシテ、 L ガ正數ナル

L	N
.....
-2	0.25
-1.5	0.35...
-1.25	0.42...
-1	0.5
-0.5	0.70...
-0.25	0.84...
0	1
0.25	1.18...
0.5	1.41...
1	2
1.25	2.37..
1.5	2.82..
2	4
.....

トキハ、 N ハ1ヨリ大ニ、 L ガ負數ナル
トキハ、 N ハ1ヨリ小ナリ。

148. 對數ノ意義。

前節ノ例ニテ、 N ヲ3トナシ、

$$2^x = 3$$

トナル如キ指數 x ヲ求メントスルニ、前節ノ表ニ
ヨリテ 2^2 即チ4ハ3ヨリ大ナルガ故ニ、求ムル指
數 x ハ2ヨリ小ナリ。又 $2^{1.5}$ 即チ2.82.....ハ3ヨ
リ小ナルガ故ニ、求ムル指數 x ハ1.5ヨリハ大ナ
ルコトヲ知ル。即チ x ハ1.5ト2トノ間ニアル
數ナリ。此指數ヲ精密ニ定ムルトキハ

$$2^{1.584.....} = 3$$

トナル。

此等式ノ意味ハ、 $2^{\frac{1584}{1000}}$ 即チ2ノ1584乗冪ノ1000
乗根ハ殆ド3ニ等シトイフコトナリ。

一般ニ1ト異なる正數 E 及ビ隨意
ノ正數 N ヲ與フルトキハ、

$$E^L = N$$

トナルヤウナル指數 L ハ必ず唯一ツ

アリ。此指數 L ヲバ E ヲ底トセル N ノ對數トイフ。

即チ E ヲ底トセル N ノ對數トハ、 E ノ幾乗冪ガ N ニ等シクナルカヲ示セル指數ナリ。

E ヲ底トセル N ノ對數トイフコトヲ式ニテ

$$\log_E N$$

ト書ク。^{*} ヨリテ、

$$E^L = N \quad \text{及ビ} \quad L = \log_E N$$

ハ、畢竟同ジ事ヲ表セリ。

例ヘバ、

$$2^3 = 8 \quad \text{故ニ} \quad \log_2 8 = 3$$

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{故ニ} \quad \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$10^{-2} = 0.01 \quad \text{故ニ} \quad \log_{10} 0.01 = -2$$

指數 L ガ正數ニテモ負數ニテモ、冪 E^L 即チ N ハ必ズ正數ナリ。故ニ

負數ハ對數ヲ有セズ。

又 E ガ1ヨリ大ナリトスレバ、 L ガ正數ナルト

^{*} \log トハ對數ノ原語 logarithm ノ略語ナリ。之ヲ「ろぐ」ト訓ム。

キハ、 N ハ1ヨリ大キク、 L ガ負數ナルトキハ、 N ハ1ヨリ小ナリ。即チ底ガ1ヨリ大ナルトキハ、1ヨリ大ナル數ノ對數ハ正數ニシテ、1ヨリ小ナル正數ノ對數ハ負數ナリ。

$$\text{又一般ニ、} \quad E^0 = 1$$

$$\text{故ニ} \quad \log_E 1 = 0$$

1ノ對數ハ0ナリ。

$$\text{又} \quad E^1 = E$$

$$\text{故ニ} \quad \log_E E = 1$$

底ノ對數ハ1ナリ。

例 題

- 3ヲ底トスルトキ、9, 27, 81ノ對數ハ如何。
又 $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ ノ對數ハ如何。
- 10ヲ底トスルトキ、次ノ數ノ對數ヲ書ケ。
1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001
- $\sqrt{16} = 4$ ナルコトヲ知リテ、 $\log_{16} 4$ ヲ求メヨ。
- $\frac{1}{4^2} = 0.0625$ ヲ、對數ヲ用ヒテ書キ表セ。
- $\log_E N = 0.25$ ナルトキ、 E ヲ幾乗スレバ、 N ヲ得ベキカ。

149. 積及ビ商ノ對數。

底ハ定マレル數 E ナルトキ、 a ノ對數 l 及ビ b ノ對數 m ヲ知リテ、 ab 及ビ $\frac{a}{b}$ ノ對數ヲ求ムルコト。

$$\text{先ツ} \quad \log_E a = l \quad \text{即チ} \quad E^l = a$$

$$\text{又} \quad \log_E b = m \quad \text{即チ} \quad E^m = b$$

$$\text{ヨリテ,} \quad ab = E^l \times E^m = E^{l+m}$$

$$\text{故ニ} \quad \log_E ab = l+m = \log_E a + \log_E b$$

$$\text{又} \quad \frac{a}{b} = \frac{E^l}{E^m} = E^{l-m}$$

$$\text{故ニ} \quad \log_E \frac{a}{b} = l-m = \log_E a - \log_E b$$

積ノ對數ハ因數ノ對數ノ和ニ等シク、商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ引キテ得タル差ニ等シ。

例一。 $\log_2 8 = 3$, $\log_2 32 = 5$ ヲ知リテ、 8×32 即チ 256 及ビ $\frac{8}{32}$ 即チ 0.25 ノ對數(底 2) ヲ求メヨ。

$$\log_2 256 = 3+5 = 8$$

$$\text{驗.} \quad 2^8 = 256$$

$$\text{又} \quad \log_2 0.25 = 3-5 = -2$$

$$\text{驗.} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

例二。 E ヲ底トセル a, b, c ノ對數ヲ知リテ、 abc ノ對數ヲ求メヨ。

$$\log_E abc = \log_E ab + \log_E c = \log_E a + \log_E b + \log_E c$$

因數ハ幾ツアルモ、積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シ。

例三。 E ヲ底トセル a ノ對數ガ l ナルトキ、 $\frac{1}{a}$ ノ對數ヲ求メヨ。

$$\log_E 1 = 0$$

$$\log_E a = l$$

$$\text{故ニ} \quad \log_E \frac{1}{a} = 0-l = -l = -\log_E a$$

或數ノ逆數ノ對數ハ、モトノ數ノ對數ノ符號ヲ變ヘタルモノナリ。

150. 冪及ビ冪根ノ對數。

E ヲ底トセル a ノ對數 l ヲ知リテ、 a^n ノ對數ヲ求ムルコト。

$$\text{先ツ} \quad \log_E a = l$$

$$\text{即チ} \quad E^l = a$$

$$\text{ヨリテ,} \quad a^n = (E^l)^n = E^{nl}$$

$$\text{故ニ} \quad \log_E a^n = nl = n \log_E a$$

或數ノ冪ノ對數ハ、モトノ數ノ對數ニ冪ノ指數ヲ乘ジテ得タル積ニ等シ。

例一。 $\log_2 4 = 2$ ヲ知リテ、 $\log_2 64$ ヲ求メヨ。

$$\log_2 64 = \log_2 4^3 = 3 \log_2 4 = 3 \times 2 = 6$$

驗。 $2^6 = 64$

例二。 $\log_2 4 = 2$ ヲ知リテ、 $\log_2 \sqrt[3]{4}$ ヲ求メヨ。

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 4^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_2 4 = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

驗。 $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

例三。 E ヲ底トセル a ノ對數ヲ知リテ、 $\sqrt[n]{a^m}$ ノ對數ヲ求メヨ。

$$\log_E \sqrt[n]{a^m} = \log_E a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_E a$$

例四。 E ヲ底トセル a ノ對數ヲ知リテ、 $\frac{1}{a}$ ノ對數ヲ求メヨ。

$$\log_E \frac{1}{a} = \log_E a^{-1} = -1 \times \log_E a = -\log_E a$$

(前節例三參照)

前節及ビ本節ニ述ベタル性質ニヨリ、數ノ掛ケ算、割リ算ハ其對數ノ寄セ算、引キ算ニ歸シ、又數ノ自乘及ビ開法ハ其對數ヲ倍スルコト及ビ等分スルコトニ歸スルヲ知ル。是レ實用ノ計算ニ對數

ヲ應用シテ便益アル所以ナリ。

例 題

1. 10ヲ底トスルトキハ、2ノ對數ハ0.30103...ニシテ、3ノ對數ハ0.47712...ナリ。是ニヨリテ10ヲ底トシテ、次ノ數ノ對數ヲ求メヨ。

$$6, 4, 12, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

2. 前ノ問題ノ對數ヲ用ヒテ、次ノ數ノ對數ヲ求メヨ。

$$20, 200, 0.2, 0.03, 0.009, \sqrt{0.3}$$

3. $\log_E a = l$ ヲ知リテ、次ノ數ノ對數ヲ求メヨ。

$$aE, aE^n, a^m E^n, \frac{a}{E}, \frac{a}{E^n}, \frac{E}{a}$$

4. 10ヲ底トスルトキ、或數ノ一ノ位ヲ1桁、2桁、...、 n 桁右へ移ストキハ、對數ハ如何ヤウニ變ルカ。又一ノ位ヲ左へ移ストキハ如何。

第三章 對數ノ應用

151. 常用對數。

實用ノ計算ニハ10ヲ底トセル對數

ヲ用フ、之ヲ常用對數トイフ。常用對數ノ記號ニハ底ヲ略ス。

例ヘバ、常用對數ニテ7ノ對數ヲ $\log 7$ ト書ク。是ハ $\log_{10} 7$ ノコトナリ。又或數 N ノ常用對數ガ L ナリトハ

$$10^L = N$$

トイフニ同ジ。

以下單ニ對數ト言フハ常用對數ヲ指ス。

152. 指標及ビ假數。

1ノ對數ハ0, 10ノ對數ハ1(第148節參照)ナルガ故ニ, 1ト10トノ間ノ數ノ對數ハ0ト1トノ間ニアリ, 即チ1ヨリ小ナル正數ナリ。

例ヘバ

$$\log 2 = 0.30103$$

$$\log 6.583 = 0.81842$$

整數部分ガ一桁ナル正數ノ對數ハ1ヨリ小ナル正數ナリ。

整數部分ガ一桁ナル數ノ對數ヲ知ルトキハ, 是ヨリ容易ニ隨意ノ正數ノ對數ヲ求ムルコトヲ得。

例ヘバ $65.83 = 10 \times 6.583$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad \log 65.83 &= \log 10 + \log 6.583 = 1 + 0.81842 \\ &= 1.81842 \end{aligned}$$

又 $658.3 = 10^2 \times 6.583$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad \log 658.3 &= \log 10^2 + \log 6.583 = 2 + 0.81842 \\ &= 2.81842 \end{aligned}$$

同ジャウニ $\log 6583 = 3.81842$

$$\log 65830 = 4.81842$$

次ニ又 $0.6583 = 10^{-1} \times 6.583$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad \log 0.6583 &= \log 10^{-1} + \log 6.583 \\ &= -1 + 0.81842 \end{aligned}$$

又 $0.06583 = 10^{-2} \times 6.583$

$$\text{故ニ} \quad \log 0.06583 = -2 + 0.81842$$

同ジャウニ $\log 0.006583 = -3 + 0.81842$

カヤウニ, 1ヨリ小ナル正數ノ對數ハ負數ナリ。サレド, 負ナル對數ヲ取扱フニハ, 之ヲ一ツノ負數ノ形ニ書キ表サズシテ, 上ノ例ニ示セルガ如ク, 負ノ整數ト1ヨリ小ナル正ノ小數トノ代數和トシテ書キ表ス方ガ便利ナリ。但, 記號ヲ縮ムルガタメニ, 整數部分ノ數字ノ上ニ符號一ヲ記シ, 其右ニ

正ナル小數部分ヲ書キ添フルヲ慣例トス。例へバ、上ノ例ノ $-1+0.81842$ ヲ $\bar{1}.81842$ 又 $-2+0.81842$ ヲ $\bar{2}.81842$ ト記スナリ。

對數ノ整數部分(正又ハ負)ヲ對數ノ指標トイヒ、小數部分(必ズ正)ヲ其假數トイフ。

今上ノ例ニ出デタル數ト對數トヲ表ニシテ示ストキハ次ノ如シ。

數	對數
	指標 假數
6583	3.81842
658.3	2.81842
65.83	1.81842
6.583	0.81842
0.6583	$\bar{1}.81842$
0.06583	$\bar{2}.81842$
0.006583	$\bar{3}.81842$

上ノ取り極メノ結果トシテ次ノ法則ヲ得。

數字ハ同ジクシテ、一ノ位ノ位置ノミノ異ナル數ノ對數ハ、假數同ジクシ

テ、指標ノミ異ナリ。

153. 指標ヲ定ムル法則。

對數ノ指標ハ次ノ如クニシテ之ヲ定ムルコトヲ得。

前節ノ例ニツキテ觀ルニ、1ヨリ大ナル數ニテハ、整數部分ノ桁數ガ1, 2, 3, 4等ナルトキ、其對數ノ指標ハ0, 1, 2, 3等ナリ。一般ニ、

整數部分ニ n 桁ノ數字ヲ有スル數ハ

$$\begin{aligned} \text{少クトモ } & \overbrace{10 \dots 0}^n \text{ 即チ } 10^{n-1} \text{ ヲ下ラズ,} \\ \text{多クトモ } & \overbrace{100 \dots 0}^{n+1} \text{ 即チ } 10^n \text{ ニ達セズ.} \end{aligned}$$

ヨリテ其對數ハ $n-1$ ヨリ小ナラズシテ、 n ヨリハ小ナリ。故ニ對數ノ整數部分即チ指標ハ $n-1$ ナリ。

又1ヨリ小ナル正數ニテハ、小數第一位、第二位、第三位等ニ始メテ0ト異ナル數字ヲ有スル數ノ對數ノ指標ハ、 $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ 等ナリ。一般ニ、

小數第 n 位ニ始メテ0ト異ナル數字ヲ有スル數ハ

$$\begin{aligned} \text{少クトモ } & \overbrace{0.0 \dots 001}^n \text{ 即チ } 10^{-n} \text{ ヲ下ラズ,} \\ \text{多クトモ } & \overbrace{0.0 \dots 01}^{n-1} \text{ 即チ } 10^{-(n-1)} \text{ ニ達セズ.} \end{aligned}$$

故ニ其對數ハ $-n$ ヨリ小ナラズシテ $-(n-1)$ ヨリハ小、即チ $-n$ ト 1 ヨリ小ナル正數トノ和ニ等シ。故ニ對數ノ指標ハ \bar{n} ナリ。

整數部分 n 桁ノ數ノ對數ノ指標ハ $n-1$ ニテ、又小數第 n 位ニ始メテ 0 ト異ナル數字ヲ有スル數ノ對數ノ指標ハ \bar{n} ナリ。

例ヘバ、6583.76ノ對數ノ指標ハ 3 、又 0.000658376 ノ對數ノ指標ハ $\bar{4}$ ナリ。

數ノ最高位ト其對數ノ指標トノ關係ハ次ノ表ニ示スガ如シ。

.. 萬 千 百 十	一	分 厘 毛 絲 ..
.. 4 3 2 1	0	$\bar{1} \bar{2} \bar{3} \bar{4}$..

或數ノ對數ノ指標ヲ定ムルニハ、其數ノ一ノ位ヲ 0 トヨミ、其次ノ位ヨリ左又ハ右へ順次 $1, 2, 3, \dots$ ト數へ行クベシ。此數ノ最高キ位ガ n 番目ニ當ルトキハ、求ムル指標ハ n 又ハ \bar{n} ナリ。

例。 6583.76 0.000658376
 $\longleftarrow 3210$ $\overrightarrow{0.1234}$

例 題

1. 次ノ數ノ對數ノ指標ヲ求メヨ。

176, 17.6, 17.683, 207500

7, 0.7, 0.00852, 0.0001003

2. $\log 753$ ノ假數ハ 0.87679 ナルコトヲ知リテ、次ノ數ノ對數ヲ求メヨ。

753000, 7530, 75.3, 7.53

0.753, 0.00753, 0.0000753

3. 或數ノ對數ノ指標ガ 2 ナルトキハ、此數ノ最高キ位ハ如何。又指標ガ -2 ナルトキハ如何。

4. $\log 2 = 0.30103$ ナルコトヲ知リ、 2^{100} ノ桁數ヲ求メヨ。

5. 或數ノ對數ガ -1.75362 ナルトキ、此對數ノ指標及ビ假數ヲ求メヨ。

154. 對數表。

數ノ常用對數ヲ表ニ作りテ、計算ノ用ニ供スルモノヲ對數表トイフ。

對數ノ指標ハ前節ニ述べタル規則ニヨリテ容易ニ定メ得ベキガ故ニ、對數表ニハ之ヲ掲ゲズ。

對數表ニ載セタルハ、末位未滿ヲ四捨五入セル假數ノ近似値ニシテ、且小數點ヲ省キタルモノナリ。例ヘバ、753ノ對數ヲ表ヨリ引クニ、87679トアルハ、 $\log 753$ ノ假數ノ小數第五位未滿ノ部分ヲ四捨五入スルトキハ 0.87679トナルトイフコトナリ。

極メテ精密ナル計算ヲナスニハ、七桁乃至十桁ノ對數表ヲ用ヒ、又サホド精密ヲ要セザル計算ニハ四桁又ハ五桁ノ對數表ヲ用フ。

(本書ノ説明ハ附録五桁ノ對數表ニヨル)。

155. 對數表ノ用法。(其一)

數ヲ與ヘテ其對數ヲ求ムルコト。

例一。37.56ノ對數ヲ求メヨ。

先ヅ一ノ位ヨリ左へ0, 1トヨミテ、指標ハ1ナルコトヲ知ル。サテ表ヨリ3756ノ假數ヲ求メテ57473ヲ得。ヨリテ

$$\log 37.56 = 1.57473$$

同ジヤウニシテ

$$\log 3756 = 3.57473$$

$$\log 0.003756 = \bar{3}.57473$$

ヲ得。

例二。 $\log 64576$ ヲ求メヨ。

先ヅ指標ハ4ナリ。サテ假數ヲ求ムルニ、五桁ノ數ノ對數ハ表ニナシ。ヨリテ次ノ如クス先ヅ表ヨリ6457及ビ其次ノ數6458ノ對數ノ假數ヲ求ムルニ、

$$\log 6457 \text{ノ假數ハ } 81003$$

$$\log 6458 \text{ノ假數ハ } 81010$$

ナリ。此等ノ假數ノ差7ヲ6457ニ對スル表差トイフ。

サテ $\log 6457.6$ ノ假數ハ上ノ二ツノ假數ノ間ニアリ。之ヲ計算スルニハ、數ノ増ス割合ト對數ノ増ス割合トホボ同ジコトナリト見テ差支ナシ。之ヲ比例部分ノ理トイフ。

サテ數ガ1増シテ假數ハ7増スガ故ニ、^{*}數ガ0.6増シテ假數ハ 7×0.6 即チ4.2増ス。ヨリテ

$$\log 6457.6 \text{ノ假數} = \log 6457 \text{ノ假數} + 4.2$$

$$= 81007(\text{四捨五入}).$$

$$\text{故ニ } \log 64576 = 4.81007$$

*實ハ表ニ載セタル數及ビ假數ノ末位ノ1, 末位ノ7ナリ。

例三。 $\log 0.168385$ を求む。

1683 の假數 22608 表差 26

0.8 に對スル比例部分 20.8 (= 26 × 0.8)

0.05 に對スル比例部分 1.3 (= 26 × 0.05)

$$\log 0.168385 = \bar{1}.22630$$

注意。 26×0.8 及び 26×0.05 ナル積ハ、表ニテ比例部分(又ハ $P.P.$)ト題セル欄ニ掲ゲタル、掛ケ算ノ表ヨリ寫シ取ルベシ。

例題

次ノ數ノ對數ヲ求む。

- | | | |
|---------------|------------|------------|
| 1. 3467 | 2. 586.3 | 3. 4.827 |
| 4. 0.03289 | 5. 54632 | 6. 0.54872 |
| 7. 0.00090807 | 8. 2865.32 | 9. 13.2807 |
| 10. 0.0597325 | | |

156. 對數表ノ用法。(其二)

或數ノ對數ヲ知リテ、此數ヲ求ムルコト。

* 比例部分ノ原語 Partes Proportionales (Proportional parts) ノ略ナリ。四桁ノ對數表ニハ比例部分ノ表ヲ載セズ。

例一。 $\log x = 2.36399$ ヨリ x を求む。

假數 36399 を表ヨリ求む、 x ノ數字ハ 2312 ナルコトヲ知ル。指標 $\bar{2}$ ニヨリテ小數點ノ位置ヲ定む、

$$x = 0.02312$$

ヲ得。

例二。 $\log x = 1.36387$ ヨリ x を求む。

假數 36387 ハ表ニナシ。表ニ掲ゲタル假數ニテ 36387 ニ最モ近キニツハ、

$$36380 \quad (2311 \text{ ノ假數})$$

及び 36399 (2312 ノ假數)

ニシテ、表差ハ 19 ナリ。

ヨリテ小數點ノ位置ヲ考ヘザルトキハ、

$$x = 2311 + d$$

ナリ。サテ比例部分ノ理ニヨリ、

$$19 \times d = 36387 - 36380 = 7$$

即チ $d = \frac{7}{19} = 0.4$ (四捨五入)。

故ニ x ノ數字ハ 23114 ナルコトヲ知ル。サテ指標 1 ニヨリテ小數點ノ位置ヲ定む、

$$x = 23.114$$

ヲ得。

計算ノ形式ハ次ノ如シ。但、 $\frac{7}{19}$ ノ計算ハ比例部分ノ表ニヨリテナスベシ。

表差19	比例部分
36387	19
36380.....2311	1 1.9
<u>7</u>	2 3.8
57.....3	3 5.7
13	4 7.6
114.....6	5 9.5
<u>16</u>	6 11.4
x = 23.114	7 13.3
	8 15.2
	9 17.1

例 題

次ノ數ヲ對數トセル數ヲ求メヨ。

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 1. 3.45712 | 2. 5.95298 | 3. 0.53441 |
| 4. 2.76103 | 5. 3.48073 | 6. 1.21942 |
| 7. 1.84543 | 8. 3.88059 | |

157. 對數計算ノ例。

例一。372.49 × 0.86528 ヲ計算セヨ。

求ムル數ヲxトスルトキハ

$$\log x = \log 372.49 + \log 0.86528$$

サテ $\log 372.49 = 2.57112$
 $\log 0.86528 = \bar{1}.93716$
 故ニ $\log x = 2.50828$
 $x = 322.31$

注意 ココニxノ値五桁ヲ採リ、以下四捨五入セリ。スベテ對數ヲ用フル計算ハ結果ノ近似値ヲ與フルニ過ギズ。一般ニ五桁ノ表ヲ用フルトキハ、結果ノ最高位五桁ヨリ多クヲ採ルコト無用ナリ。而モ五桁目ノ數字ガ既ニ不確ナリ。

例二。 $x = \frac{1}{23.865}$ ヲ計算セヨ。

$$\log x = -\log 23.865$$

$$\log 23.865 = 1.37776$$

故ニ $\log x = -(1.37776) = (2 - 1.37776) - 2 = \bar{2}.62224$

ヨリテ $x = 0.041903$

對數ノ符號ノ變ヘ方ニ注意スベシ。

例三。 $x = (0.8782)^8$ ヲ求メヨ。

$$\log x = 8 \log 0.8782$$

$$\log 0.8782 = \bar{1}.94359$$

$$\begin{array}{r} 0.94359 \times 8 \dots\dots 7.54872 \\ -1 \quad \times 8 \dots\dots -8 \end{array}$$

ヨリテ $8 \times \log 0.8782 = \bar{1}.54872$

故ニ $x = 0.35377$

注意。負ノ指標ヲ有スル對數ニ、或數ヲ乘スルニハ、指標ト假數トニ別別ニ其數ヲ乘ジテ、其積ノ代數和ヲ求ムベシ。

例四。 $x = \sqrt[5]{0.71637}$ ヲ求メヨ。

$$\log x = \frac{1}{5} \log 0.71637$$

$$\log 0.71637 = \bar{1}.85514$$

$$\begin{aligned} \text{ヨリテ } \log x &= \frac{\bar{1}.85514}{5} = \frac{-5 + 4.85514}{5} \\ &= \bar{1}.97103 \end{aligned}$$

故ニ $x = 0.93548$

注意。指標ガ負數ナル對數ヲ正ノ整數 n ニテ割ルニハ、指標ガ n ノ倍數トナルヤウニシ、假數ニ正ノ整數部分ヲ足シテ之ヲ補ヒテ後、割リ算ヲ行フベシ。

158. 應用。

例一。直角三角形ノ斜邊ハ二十六間三尺、直角ヲ挾メル邊ノ中、一ツハ十九間五尺ナリ。他ノ一ツノ邊ヲ求メヨ。

斜邊ヲ a 、一ツノ邊ヲ b ニテ表ストキハ、求ム

ル邊ハ $\sqrt{a^2 - b^2}$ ナリ。サテ a^2, b^2 ヲ計算スルニ對數表ヲ用フルコトヲ得、又 $a^2 - b^2$ ノ平方根ヲ求ムルニモ對數表ヲ用フルコトヲ得。サレド、此場合ニハ幸ニシテ $a^2 - b^2$ ヲ因數ニ分解スルコトヲ得ルガ故ニ、之ヲ利用シテ大ニ計算ノ手數ヲ省クコトヲ得。

即チ

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\log \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \{ \log(a+b) + \log(a-b) \}$$

サテ $a = 26.5, b = 19.833 \dots$

$$a+b = 46.333 \quad \log 46.333 = 1.66589$$

$$a-b = 6.6667 \quad \log 6.6667 = 0.82391$$

$$\log(a^2 - b^2) = 2.48980$$

$$\log \sqrt{a^2 - b^2} = 1.24490$$

故ニ $\sqrt{a^2 - b^2} = 17.575$

即チ求ムル邊ハ十七間三尺五寸弱ナリ。

例二。次ノ方程式ヨリ x ヲ求メヨ。

$$2^x = 3$$

兩邊ノ對數ヲ相等シト置キ、

$$x \log 2 = \log 3$$

$$\begin{aligned} \text{即チ} \quad x &= \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0.47712}{0.30103} \\ \text{故ニ} \quad \log x &= \log 47712 - \log 30103 \\ &= 0.67863 - 0.47861 = 0.20002 \\ \text{故ニ} \quad x &= 1.585 \end{aligned}$$

問 題 第二十六

對數表ヲ用ヒテ次ノ計算ヲナセ。 [1-12]

- | | |
|--|--|
| 1. 3.625×587.42 | 2. $0.9753 \div 0.01286$ |
| 3. $(2.634)^2$ | 4. $(0.12894)^3$ |
| 5. $\sqrt{21.875}$ | 6. $\sqrt[3]{75.347}$ |
| 7. $\sqrt[4]{0.1586^2}$ | 8. $(0.0354)^6$ |
| 9. $\frac{-213 \times 3.75}{35.762}$ | 10. $\frac{8750 \times 1.34}{(3.1416)^3 \times 450}$ |
| 11. $\frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \times \sqrt{1.05}}$ | 12. $\sqrt{1 - (0.76528)^2}$ |

13. 邊ノ長サ一吋ナル正方形ニ外接セル圓ノ周圍ヲ計算セヨ。

14. 三ツノ邊ガ十九間四尺,十七間三尺,十五間二尺ナル三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

15. 菱形ノ邊ノ長サハ七寸六分,一ツノ對角線

ハ一尺一寸三分ナリ。相對スル邊ノ距離幾許ナルカ。(分ノ位マデ算出セヨ)。

16. 縦二尺四寸七分,横一尺三寸五分ナル鉛板ノ目方一貫二百三十匁ナリ。鉛ノ比重ヲ11.37トシテ此鉛板ノ厚サヲ厘ノ位マテ求メヨ。

17. 惑星ガ太陽ヲ一周スル時間ノ平方ハ惑星ト太陽トノ平均距離ノ立方ニ比例ス。太陽ヨリノ平均距離,木星ハ地球ノ約5.203倍ニシテ,地球ハ約 $365\frac{1}{4}$ 日ニテ太陽ヲ一周ス。木星ガ太陽ヲ一週スルニハ幾日ヲ要スルカ。

18. 次ノ方程式ヨリ x ヲ求メヨ。

$$(1) \quad 5^x = 17 \quad (2) \quad 3^{x+2} = 5 \times 7^{x-1}$$

19. 2.7183ヲ底トスルトキハ,10ノ對數如何。

20. 2^{64} ハ幾桁ノ數ナルカ。又其最高位三桁ノ數字ヲ求メヨ。

第十一篇

級數

第一章 等差級數

159. 等差級數。

例へば、

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

ノ如ク、整數ヲ自然ノ順序ニ並ベテ之ヲ見ルニ、各ノ數ニ1ヲ加フルトキハ、其次ノ數ヲ得。

$$\text{又 } 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, \dots$$

ニテハ、各ノ數ニ $-\frac{1}{2}$ ヲ加フルトキハ、其次ノ數ヲ得。

多クノ數ノ引續キタルトキ、各ノ數ニ或定マリタル數ヲ加ヘテ其次ノ數ヲ得ルトキハ、此等ノ數ハ**等差級數**(又ハ**算術級數**)ヲナセリトイフ。

級數ヲ組立ツル各ノ數ヲ此級數ノ

項トイフ。

等差級數ノ或項ヲ得ンガタメニ其前ノ項ニ加フベキ數ハ、始終相同ジ。

之ヲ此級數ノ**公差**トイフ。

上ノ二ツノ例ニテハ、公差ハ $1, -\frac{1}{2}$ ナリ。

等差級數ノ初項ト公差トヲ知ルトキハ、此級數ヲ書キ並ブルコトヲ得。即チ初項ヲ a 、公差ヲ d トスルトキハ、級數ハ

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5)$$

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d, \quad \dots$$

ナリ。

ココニ各項ニ於ケル d ノ係數ハ、其項ノ番號ヲ示セル數ヨリモ1ダケ少シ。一般ニ、

初項 a 、公差 d ナル等差級數ノ第 n 項ハ

$$a+(n-1)d$$

ナリ。

此式ニテ n ヲ $1, 2, 3, \dots$ トナストキハ、等差級數ノ第一項、第二項、第三項、……ヲ得。ヨリテ上ノ

式ヲ初項 a , 公差 d ナル等差級數ノ公項トイフ。

例。初項ハ 3, 第七項ハ 15 ナル等差級數ノ公差ヲ求メヨ。又其公項及ビ第百項ヲ求メヨ。

公差ヲ d トスルトキハ, 第七項ハ $3+6d$ ナリ。

$$\text{故} = 3+6d = 15$$

$$\text{即チ} \quad d = 2$$

故ニ公項ハ

$$3+(n-1)d \quad \text{即チ} \quad 2n+1$$

ニシテ, 第百項ハ $2 \times 100 + 1$ 即チ 201 ナリ。

160. 等差中項。

二ツノ數 a, b ガ與ヘラレタルトキ, 此二ツノ數ノ間ニ m 箇ノ數ヲ入レテ, 其全體ヲ等差級數トナサントス。如何ナル數ヲ入ルベキカ。

此等差級數ハ a, b ヲ入レテ, スベテ $m+2$ 項ヨリ成リ, a ハ初項, b ハ第 $m+2$ 項ナリ。ヨリテ公差ヲ d トスルトキハ,

$$a+(m+2-1)d = b$$

$$\text{即チ} \quad d = \frac{b-a}{m+1}$$

ヨリテ求ムル數ハ

$$a + \frac{b-a}{m+1}, a + 2\frac{b-a}{m+1}, \dots, a + m\frac{b-a}{m+1}$$

即チ

$$\frac{ma+b}{m+1}, \frac{(m-1)a+2b}{m+1}, \dots, \frac{a+mb}{m+1}$$

ニテ, k 番目ノ數ハ

$$a+k\frac{b-a}{m+1} \quad \text{即チ} \quad \frac{(m-k+1)a+kb}{m+1}$$

ナリ。

カヤウニシテ二ツノ與ヘラレタル數 a, b ノ間ニ入レタル數ヲ等差中項トイフ。

例 題

1. 初項 7, 公差 6 ナル等差級數ヲ第六項マデ書ケ。又其公項ヲ書ケ。
2. 初項ハ 120, 第十七項ハ 100 ナル等差級數ノ公差ヲ求メヨ。
3. 第十五項ハ 100, 第二十一項ハ 148 ナル等差級數ノ初項ヲ求メヨ。
4. 2 ト 87 トノ間ニ四個ノ等差中項ヲ入レヨ。
5. 12 ト 58 トノ間ニ二十二箇ノ等差中項ヲ入ルルトキ, 其第七番目ノ項ヲ求メヨ。
6. 22 ト 48 トノ間ニ若干ノ等差中項ヲ入レタ

ルニ、第三番目ノ中項ハ30トナレリ。中項ノ數幾許ナルカ。

7. 初項 a , 次項 b ナル等差級數ノ公項ヲ作レ。

8. 等差級數ノ或項ハ a , 其次ノ項ハ b ナルトキ, a ナル項ヨリ逆ニ數ヘテ n 番目ニ當ル項ハ如何。

161. 等差級數ノ和。

等差級數ノ初項 a , 公差 d , 末項 l , 項數 n ナルトキ, 此等 n 項ノ和ヲ S トスルトキハ,

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a+(n-1)d\}$$

又此級數ヲ逆ノ順序ニ書クトキハ,

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + \{l-(n-1)d\}$$

是ヨリ寄セ算ニヨリテ,

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) = n(a+l)$$

$$\text{故ニ} \quad S = \frac{n(a+l)}{2} \quad (1)$$

又初項 a , 公差 d , 項數 n ヨリ等差級數ノ和 S ヲ求ムルニ, 末項 l ハ $a+(n-1)d$ ニ等シキニヨリ, 上ノ公式ニ代入シテ次ノ公式ヲ得。

$$S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} \quad (2)$$

例一。整數ヲ自然ノ順序ニ並べ, 其始ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

初項 1, 末項 n , 項數 n ナルガ故ニ, (1) ニヨリテ

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{即チ} \quad 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

例二。初項 3, 公差 2 ナル等差級數ノ始ノ十三項ノ和ヲ求メヨ。

$$S = \frac{13\{2 \times 3 + (13-1) \times 2\}}{2} = 195$$

問題 第二十七

1. 等差級數 1, 5, ...ノ十項ノ和ヲ求メヨ。
2. 等差級數 $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \dots$ ノ十六項ノ和ヲ求メヨ。
3. 初項 $\frac{3}{2}$, 第七項 3 ナル等差級數ノ第十項ヨリ第二十項マデノ和ヲ計算セヨ。
4. 10, 12, ...ナル等差級數幾項ノ和ガ70トナルカ。
5. 初項 15, 八項ノ和 40 ナル等差級數ノ末項及ビ公差ヲ求メヨ。
6. 三桁ノ奇數ハ幾ツアルカ。又其和ハ如何。

7. $1+(2+3)+(4+5+6)+\dots$ ナル式ノ第 n 番目ノ項ヲ計算セヨ。

8. 一直線ニ五間ヅツ隔テテ八個ノ球ヲ置キタリ。最初ノ球ヨリ十間手前ノ處ヨリ發足シ、其處ニ置キタル籠ノ中ニ此等ノ球ヲ一ツ一ツ運ビ入レントス。全體ニテ幾許ノ距離ヲ歩ムベキカ。

9. 或人ノ遺産四千五百圓ヲ遺子若干人ニ、年齢ノ順序ニ從ヒテ百五十圓ヅツノ差ヲ設ケテ分配シタルニ、長子ノ取前ハ末子ノ取前ノ二倍ナリシトイフ。子女ノ數幾人ナルカ。

10. 1 ニ始マル若干ノ連續セル奇數ノ和ハ、平方數ナルコトヲ證明セヨ。

11. 等差級數五項ノ和 35 ニシテ、其平方ノ和 335 ナリ。此等ノ數ヲ求メヨ。

12. 初項 17 、第十項 10 ナル等差級數ノ項ハ、幾番目マデ正數ナルカ。又此級數幾項マデノ和ガ正數ナルカ。

第二章 等比級數

162. 等比級數。

例ヘバ、

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

ノ如ク引續キタル數アリテ、各ノ數ニ 2 ヲ乘ズルトキハ、其次ノ數ヲ得。

又例ヘバ、

$$18, 6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$$

ニテハ各ノ數ニ $\frac{1}{3}$ ヲ乘ズルトキハ、其次ノ數ヲ得。

多クノ數ノ引續キタルトキ、各ノ數ニ或定マリタル數ヲ乘ジテ次ノ數ヲ得ルトキハ、此等ノ數ハ**等比級數**(又ハ**幾何級數**)ヲナセリトイフ。

等比級數ノ或項ト其前ノ項トノ比ハ始終相同ジ。之ヲ此級數ノ**公比**トイフ。

上ノ二ツノ例ニテハ、公比ハ $2, \frac{1}{3}$ ナリ。

初項 a 、公比 r ナル等比級數ハ

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

ニシテ、其第 n 項ハ

$$ar^{n-1}$$

ナリ。是レ即チ公項ナリ。

注意。等比級數ノ項ハ連比例ヲナス。即チ

$$a : ar = ar : ar^2 = ar^2 : ar^3 = \dots = \frac{1}{r}$$

163. 等比中項。

二ツノ數 a, b ガ與ヘラレタルトキ、此二ツノ數ノ間ニ m 個ノ數ヲ入レテ、其全體ヲ等比級數トナサントス。如何ナル數ヲ入ルベキカ。

a ハ初項、 b ハ第 $m+2$ 項ナルガ故ニ、公比ヲ r トスルトキハ、

$$ar^{m+1} = b$$

即チ

$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}$$

ヨリテ求ムル數ハ

$$a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}, a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{m+1}}, \dots, a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{m+1}}$$

即チ

$$\sqrt[m+1]{a^m b}, \sqrt[m+1]{a^{m-1} b^2}, \dots, \sqrt[m+1]{a b^m}$$

ニテ、其 k 番目ノ數ハ

$$a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{m+1}} \quad \text{即チ} \quad \sqrt[m+1]{a^{m-k+1} b^k}$$

ナリ。

カヤウニシテ二ツノ與ヘラレタル數 a, b ノ間ニ入レタル數ヲ等比中項トイフ。

164. 等比級數ノ和。

初項 a 、公比 r ナル等比級數ノ n 項ノ和ヲ S トスルトキハ、

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

兩邊ニ r ヲ掛ケテ、

$$Sr = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

引キテ、

$$S(1-r) = a(1-r^n)$$

故ニ

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{又ハ} \quad S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

例一。初項 3、公比 2 ナル等比級數四項ノ和ヲ求メヨ。

$$S = \frac{3(2^4-1)}{2-1} = 45$$

例二。初項 7、公比 $\frac{1}{10}$ ナル等比級數六項ノ和ヲ求メヨ。

$$S = \frac{7 \times \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = 7.77777$$

問題 第二十八

1. 初項 1, 公比 3 ナル等比級數ノ始ノ五項及ビ公項ヲ書ケ。
2. 初項 3, 公比 $\frac{1}{2}$ ナル等比級數ノ第四項ヲ求メヨ。
3. 初項 -5, 公比 -2 ナル等比級數ノ第六項ヲ求メヨ。
4. $24a$ ト $192a^4$ トノ間ニ二ツノ等比中項ヲ入レヨ。
5. 336 ト 21 トノ間ニ三ツノ等比中項ヲ入レヨ。
6. 等比級數ヲナセル三ツノ數ノ和ハ 35 ニシテ, 其平方ノ和ハ 525 ナリ。此三ツノ數ヲ求メヨ。
7. 等比級數 1, 3, …… 五項ノ和ヲ求メヨ。
8. 等比級數 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ 六項ノ和ヲ求メヨ。
9. 等比級數 $1, \sqrt{2}, \dots$ 十二項ノ和ヲ求メヨ。

10. 等比級數ノ初項ハ 3 ニシテ, 三項ノ和ハ $\frac{19}{3}$ ナリ。公比ヲ求メヨ。
11. 等比級數ノ始ノ k 項ノ和ヲ作り, 又其次ノ k 項ノ和ヲ作り, 次第ニカヤウニナシ行クトキハ, 此等ノ和ハ一ツノ等比級數トナルベシ。之ヲ證明セヨ。
12. 等比級數ノ項ノ對數ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。
13. 初項 375, 公比 $\frac{1}{3}$ ナル等比級數ノ項ノ中, 始メテ $\frac{1}{10000}$ ヨリ小トナルモノノ番號如何(對數表ヲ用ヒテ計算セヨ)。
14. 等比級數ノ和ヲ求ムルコトヲ應用シテ, 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$
 又右邊ノ k 番目ノ項ヲ書ケ。

165. 無限等比級數。

初項 a , 公比 r ガ共ニ正數ナルトキハ, 等比級數ノ各項ハ皆正數ナリ。サテ公比 r ガ 1 ヨリ大ナルトキハ, 項ハ順次増大スルガ故ニ, 項數ノ増スニ

從ヒテ、等比級數ノ和モ亦漸次増大シテ竟ニハ如何程ニテモ大キクナルベシ。公比 r ガ1ナルトキモ亦然リ。

サレド、公比 r ガ1ヨリ小ナルトキハ、大ニ是ト異ナリ。

例ヘバ、初項 $\frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ ナル等比級數 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$
 n 項ノ和ハ

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

ナルガ故ニ、項數 n ヲ如何程増ストモ、上ノ等比級數ノ和ハ決シテ1ヨリ大トナルコトナシ。

且又 n ガ増スニ從ヒ、 $\frac{1}{2^n}$ ハ漸次小クナルガ故ニ、上ノ等比級數ノ和ハ項數ヲ増スニ從ヒ、愈、1ニ近ヅクベシ。

一般ニ、初項 a 、公比 r ナル等比級數 n 項ノ和ハ

$$\frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n$$

ニ等シ。サテ公比 r ガ正數ニテモ又負數ニテモ、其絶對値ガ1ヨリ小ナルトキハ、 r^n ノ絶對値ハ n ガ増セバ増ス程小クナリテ、止マル所ナシ。故ニ

上ノ和ノ式ノ第二ノ項ハ n ガ愈、増大スルニ伴ヒ、絶對値ニ於テ愈、小トナル。是ニヨリテ上ノ等比級數ノ和ハ、項數 n ヲ何處マデモ増シ行クトキハ、限ナク $\frac{a}{1-r}$ ニ近ヅクコトヲ知ルベシ。

此事實ヲ次ノ如ク簡單ニ言ヒ表スコトヲ得。

公比 r ノ絶對値ガ1ヨリ小ナル等比級數ノ和ハ、項數ガ限ナク大トナルトキ、

$$\frac{a}{1-r}$$

ナル**極限**ニ近迫ス。 $(a$ ハ此級數ノ初項ナリ)。

例。初項12、公比 $\frac{1}{25}$ ナル等比級數ノ和ノ極限ヲ求メヨ。

求ムル極限ハ

$$\frac{12}{1-\frac{1}{25}} \quad \text{即チ} \quad 12.5$$

ナリ。

166. 循環小數。

例ヘバ $0.7\dot{2}$ ナル循環小數、即チ

$$0.727272\dots\dots$$

ヲ見ルニ、是ハ

$$0.72 = \frac{72}{100}$$

$$0.0072 = \frac{72}{100} \times \frac{1}{100}$$

$$0.000072 = \frac{72}{100} \times \frac{1}{100^2}$$

.....

等ノ數ヲ限ナク加ヘタル和ニ等シト考フルコトヲ得。

サテ此等ノ數ハ、初項 $\frac{72}{100}$ 、公比 $\frac{1}{100}$ ナル等比級數ヲナセリ。此等比級數ノ和ノ極限ハ

$$\frac{\frac{72}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{72}{100 - 1} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$$

トナル。即チ

$$0.7\dot{2} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$$

又例ヘバ $3.1\dot{2}5\dot{9}$ ヲ分數ニ改ムルニ、

$$3.1\dot{2}5\dot{9} = (31 + 0.2\dot{5}9) \div 10$$

$$\text{故ニ } 3.1\dot{2}5\dot{9} = \frac{31 + \frac{259}{10^3 - 1}}{10} = \frac{31 \times (10^3 - 1) + 259}{(10^3 - 1) \times 10}$$

$$= \frac{31 \times 10^3 + 259 - 31}{(10^3 - 1) \times 10} = \frac{31259 - 31}{9990} = \frac{422}{135}$$

一般ニ、スベテノ數字ガ循環スル循環小數ヲ分數ニ改ムルニハ、循環スル數字一節ヲ其ママ竝ベテ書キ表シタル整數ヲ分子トシ、循環スル數字ノ桁數ダケヲ竝ベテ書キ表シタル整數ヲ分母トナスベシ。

循環セザル部分ヲ含メル循環小數ヲ分數ニ改ムルニハ、循環セザル部分ト循環スル部分一節トノ數字ヲ其ママニ竝ベテ書キ表シタル整數ト循環セザル部分ノ數字ノミヲ竝ベテ書キ表シタル整數トノ差ヲ分子トシ、分母ニハ循環スル數字ノ桁數ダケヲ竝ベ、其右ニナホ小數部分ニ於ケル循環セザル數字ノ桁數ダケヲ竝ベテ書キ表シタル整數ヲ置クベシ。

例 題

次ノ無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求メヨ。[1-3]

$$1. \quad 5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \dots$$

$$2. \quad 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \dots$$

$$3. \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

4. 初項 a , 公比 $\frac{1}{2}$ ナル無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求メヨ。

5. 次ノ循環小數ヲ分數ニ改メヨ。

0.408 5.136 0.00054 0.00054

問題 第二十九

1. 13ノ倍數ナル四桁ノ整數ノ和ヲ求メヨ。

2. 初項 5, 公差 -3 ナル等差級數ニテ -60 ハ第幾項ナルカ。又ハ第幾項ノ次ニ位スルカ。

3. 項數 n ガ奇數ナルトキハ, 中央ニ位スル項ノ番號如何。又項數 n ガ偶數ナルトキハ, 中央ニ位スル二ツノ項ノ番號如何。

4. 等差級數 n 項ノ平均(相加平均數)ハ n ガ奇數ナルトキハ中央ノ項ニ等シク, n ガ偶數ナルトキハ中央ニ竝ベル二ツノ項ノ平均ニ等シキコトヲ證明セヨ。

5. $1+(1+r)+(1+r+r^2)+\dots$ ナル級數ノ公項及ビ n 項ノ和ヲ求メヨ。

6. 第 p 項ヲ P , 第 q 項ヲ Q , 第 r 項ヲ R トスルトキハ, 等差級數ニテハ

$$(q-r)P+(r-p)Q+(p-q)R=0$$

又等比級數ニテハ

$$P^{q-r}Q^{r-p}R^{p-q}=1$$

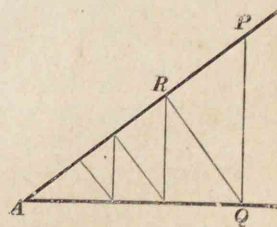
ナルコトヲ證明セヨ。

7. 等比級數ノ初項 a , 末項 l 及ビ項數 n ヲ知リテ, 其和ヲ求メヨ。

8. 梯形ノ平行セザル邊ノ一ツヲ n 個ノ相等シキ部分ニ分チ, 此等ノ分點ヲ通ジテ底ニ平行セル直線ヲ引クトキハ, 此等ノ直線ノ梯形ノ平行セザル二ツノ邊ノ間ニ挾マレタル部分ノ長サハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

9. 前ノ問題ニ於テ梯形ノ底ヲ a, b , 高サヲ h トスルトキ, 平行線ノ間ニ挾マレタル n 個ノ梯形ヲ假ニ矩形ト見做シテ梯形ノ全面積ノ近似値ヲ計算セヨ。又 n ヲ限りナク大キクナシ行クトキハ, 此近似値ハ如何ヤウニナリ行クカ。

10. 角 A ノ一ツノ邊ノ上ノ一ノ點 P ヲリ他ノ邊ヘ垂線 PQ ヲ下シ, Q ヲリ更ニ AP へ



垂線 QR ヲ下シ、次第ニカヤウニナシ行クトキハ、PQR ノ如キ直角三角形ヲ限ナク作り得ベシ。此等ノ直角三角形ノ面積ハーツノ無限等比級數ヲ作ルコトヲ證明シ、又其和ガ限ナク三角形 APQ ノ面積ニ近ヅクコトヲ驗セ。

又垂線 PQ, QR, ……モ等比級數ヲナシ、其和ハ $AP \cot \frac{A}{2}$ ニ限ナク近ヅクコトヲ證明セヨ。

第十二篇 歩合及ビ利息

167. 歩合。

或數ヲ標準トシテ他ノ數ヲ之ニ比較シ其比ノ大小ヲ言ヒ表ストキニハ、比ノ値ヲ小數ニテ表スガ便利ナリ。日常生活上ノ事物ニ關係スル場合ニハ小數トシテ表サレタル比ヲ特ニ歩合トイフ。

歩合ヲ言ヒ表ストキニハ、特ニ十分ノ一ヲ單位トシテ之ヲ割トイヒ、割ノ十分ノ一、百分ノ一等ハ通常ノ小數ノ位ノ名ヲ用ヒ、分厘等トイフ。例ヘバ或數ノ二割トハ其數ノ十分ノ二ノコトニテ、又二割五分 (2.5 割) トハ十分ノ二個半ヲイフ。故ニ歩合ノ分厘ハ百分ノ一、千分ノ一ノコトニテ、小數ノ位ノ分厘ヨリハ一段ヅツ低シ。歩合ノ分ヲ又歩トモ書ク。

歩合ハ又所謂百分率ヲ用ヒテ百ニツキ若干トイフヤウニシテ表サル。100ニツキ p ト云フコトヲ又 p ぱいせんど (又ハぶろつえんと) トイヒ、之ヲ $p\%$

ト書ク。即チ $p\%$ ハ $\frac{p}{100}$ ト云フニ同ジ。

又千ニツキ若干ト云フコトヲ $\%$ (ぶろみる)トイフ記號ニテ表スコトアリ。例ヘバ $3\frac{1}{2}\%$ ハ 35% ニ同ジ。

168. 元高,歩合高,歩合及ビ其關係。

或數 A ヲ標準トシテ他ノ數 R ヲ之ト比較シテ R ノ A ニ對スル歩合ガ r ナリトイフトキニハ,
 r ハ即チ $R:A$ ナル比ノ値ナリ。標準トセル數 A ヲ元高,之ト比較セル數 R ヲ歩合高トイフ。

故ニ元高,歩合高,及ビ歩合ノ關係ハ次ノ式ニヨリテ表サル。

$$r = R \div A$$

$$R = A \times r$$

$$A = R \div r$$

此等ノ式ヲ用ヒテ, A, R, r ノ中ニツヲ知リテ他ノ一ツヲ求ムルコトヲ得。

上ノ關係ハ甚ダ簡單ナレドモ,スベテ歩合ヲ應用セル問題ニアリテ,解法ノ楔子ハ歩合ノ元高ノ何ナルカラ判斷スルニアリ。例ヘバ原價若干ノ品物ヲ賣價若干ニテ賣リ,歩合若干ノ利益ヲ得,又

ハ損失ヲナセリトイフトキニハ,元高ハ原價ニシテ賣價ニハアラス。

上ノ例ニテハ原價ハ元高,利益又ハ損失ノ高ハ歩合高ニテ,賣價ハ即チ元高ト歩合高トノ和又ハ差ナリ。

今假ニ元高ト歩合高トノ和ヲ合計高,又元高ヨリ歩合高ヲ引キタル殘ヲ殘高ト名ヅケ,之ヲ S ニテ表ストキハ

合計高ノ場合ニハ

$$S = A + R = A(1+r)$$

又殘高ノ場合ニハ

$$S = A - R = A(1-r)$$

是ニヨリテ A, R, S, r ノ中ニツヲ知リテ他ノ二ツヲ求ムルコトヲ得。應用ノ機會最モ多キハ,合計高又ハ殘高ト歩合トヲ知リテ元高ヲ求ムル場合ニシテ,此場合ニハ次ノ式ヲ用フベキナリ。

$$A = \frac{S}{1+r} \quad \text{又ハ} \quad \frac{S}{1-r}$$

例題

1. 或試験ニテ受験者ノ中 27% ダケ合格セリ。幾ばしせんとガ不合格ナリシカ。

2. 最近ノ豫算ニヨルニ、帝國歳出ノ約三割ハ軍事費ニテ、軍事費ノ四割二分ハ海軍費ナリ。海軍費ハ歳出ノ幾割ナルカ。

3. 地球全面積ノ8%、陸地面積ノ32%ガ亞細亞洲ニ屬ス。地球ノ面積ノ幾ば1せんとガ海ナルカ。

4. 或人五分ノ周旋料ヲ拂ヒテ、八千圓ニテ地所ヲ買入レ、其後三分ノ周旋料ヲ拂ヒテ、之ヲ八千五百圓ニテ賣拂ヘリ。此損益勘定如何。

5. 家屋二棟ヲ各、二千四百圓ニテ賣リタルニ、一ハ二割五分ノ利ニ當リ、一ハ二割五分ノ損ニ當レリ。此損益高差引幾許ナルカ。

6. 物價騰貴シテ、或商人ノ仕入レオキタル商品ハ時價ノ二割引ニ賣リテモ、ナホ一割二分ノ利益アルベシトイフ。仕入値段六圓ノ品ハ時價幾許ナルカ。

7. 代金ノ $r\%$ 引ニテ買フ約束ナリシヲ、品物ヲ $r\%$ 多ク受取ルコトトナシタリ。損益ノ歩合ヲ求メヨ。

8. 或保險會社ニテ倉庫及ビ貯藏ノ商品ヲ、建

物ハ千分ノ二十、商品ハ千分ノ十五ノ歩合ニテ保險セルニ、保險金高一萬七千九百四十圓、保險料三百四十七圓十錢ナリ。倉庫及ビ商店ノ保險料各、幾許ナルカ。

169. 内割。外割。

或品物ヲ賣價若干ニテ賣リテ、例ヘバー割ノ利益ヲ得タリトイフトキニハ、賣價ノ一割ガ利益ニ當ルニハアラズシテ、賣價ハ原價ノ外ニ、原價ノ一割ニ相當スル利益ヲ加ヘタルモノニ等シ。即チ賣價10ニツキ利益1ノ割合ニアラズシテ、賣價11ニツキ利益1ノ割合ナリ。カヤウノ場合ニ賣價ヲ標準トシテ利益ノ歩合ヲ簡單ニ言ヒ表スガタメニ利益ハ賣價ノ外一割ニ當ルトイフ。一般ニ、

外割歩合 r トハ元高 $1+r$ ニツキ歩合高 r トイフコトナリ。

外割歩合ト區別スルガタメニハ、通常ノ歩合ヲ特ニ内割歩合トイフ。

例一。金參百圓ノ内二割、外二割ハ各、幾許ナルカ。

$$\text{内割} \quad 10:2 = 300:x \quad x = 60(\text{圓})$$

$$\text{外割} \quad 12:2 = 300:x \quad x = 50(\text{圓})$$

例二。外割歩合二割五分ハ内割歩合幾許ナルカ。

外二割五分ハ元高 1.25 ニツキ歩合高 0.25 ノ割合ナリ。故ニ、内割歩合ハ

$$0.25 \div 1.25 = 0.2$$

即チ二割ナリ。

一般ニ、元高ヲ A 、歩合ヲ r トスルトキ、歩合高ハ、内割歩合ニテハ Ar 、外割歩合ニテハ $\frac{Ar}{1+r}$ ナリ。故ニ其差ハ

$$Ar - \frac{Ar}{1+r} = Ar \left(1 - \frac{1}{1+r}\right) = \frac{Ar}{1+r}$$

ニシテ、即チ Ar^2 ヨリモ小ナリ。故ニ r ガ小サキ數ナルトキハ、内割及ビ外割ノ歩合高ノ差ハ元高ニ比較シテハ一層小キ數ナリ。例ヘバ歩合ガ $\frac{1}{100}$ ナルトキハ、此差ハ元高ノ $\frac{1}{10000}$ ヨリモ小ナリ。

170. 利息。單利。

金錢ヲ使用シタル報酬トシテ、使用者(借主、債務者)ガ所有者(貸主、債權者)ニ拂フ金錢ヲ利息トイフ。

利息ハ使用金額即チ元金ノ高及ビ使用期間ノ長短ニヨリテ増減アリ。利息ノ割合ハ定マレル期間(通常一ケ年)ニ於ケル利息ノ元金ニ對スル歩合ニヨリテ言ヒ表ス。之ヲ利率トイフ。

例ヘバ年利六分トハ元金 1 ニツキ一個年ノ利息 0.06 ノ割合トイフコトナリ。又月利五厘トハ元金 1 ニツキ一個月ノ利息 0.005 ノ割合トイフコトニテ、即チ年利六分ニ當ル。月利ヲ用フルコトハ稀ナレドモ、短期ノ貸借ニハ日歩ヲ用フルヲ常トス。例ヘバ日歩八厘トハ元金百圓一日ノ利息八厘ノ割合トイフコトナリ。

元金ヲ A 、利率ヲ r 、期間ヲ t 、利息ヲ R 、元利合計ヲ S ニテ表ストキハ

$$R = Art$$

$$S = A(1+rt)$$

ナリ。即チ利息算ニテハ、元金ガ元高、利息ガ歩合高ニシテ、利率ト期間トノ積ガ歩合ナリ。但利率ト期間トハ同一ノ單位ヲ用ヒテ表スコトヲ要ス。例ヘバ年利五分、四個月ノ利息ガ元金ニ對スル歩合ハ $0.05 \times \frac{4}{12}$ ニシテ、月利五厘、二個年ノ利息ガ元

金ニ對スル歩合ハ 0.005×24 ナリ。

元金,利率,期間,利息(又ハ元利合計)ノ中,三ツヲ知ルトキハ,上ノ式ニヨリテ他ノ一ツヲ求ムルコトヲ得。

上ノ方法ニテハ,利息ハ期間ニ比例シ,從テ毎期末ノ元利合計ハ等差級數ヲナス。カヤウニシテ利息ヲ計算スルヲ單利法トイフ。

171. 手形ノ割引。

例ヘバ支拂金高四千圓,支拂期日ハ二個月後ナル手形ヲ銀行ニ賣渡サントスルニ,假ニ銀行ガ此手形ヲ券面ノ金高四千圓ニテ買受クルモノトスルトキハ,銀行ハ二個月間無利息ニテ此金ヲ貸スト同ジキ勘定トナルベシ。サレバ券面ノ金高ヨリ若干ヲ引キ去リテ之ヲ賣買ノ値トナスコトハ至當ナルベシ。カヤウニスルコトヲ手形ノ割引トイフ。

割引高ハ通常手形面ノ金高及ビ支拂期日マデノ期間ニ比例シ,其割合ハ利率ト同ジヤウニシテ表サル。即チ手形面ノ金高ヲ A ,割引ノ歩合ヲ r ,期間ヲ t ,割引高ヲ R ,現金渡高ヲ S ニテ表ストキ

$$R = Art$$

$$S = A - R = A(1 - rt)$$

上ノ例ニテ割引歩合ヲ年六分トスルトキハ,
 $rt = 0.06 \times \frac{2}{12} = 0.01$ ニシテ割引高ハ 4000×0.01 即チ40圓,現金渡高ハ3960圓ナリ。

カヤウノ割引ハ實際期間ノ短キトキニ限リテ行ハルルコトニテ,又期間ガ非常ニ長キ場合ニ,カヤウナル方法ヲ適用スルトキハ,割引高ガ却テ券面ノ高ヨリモ多クナルガ如キ不都合ヲ生ズベシ。

上ノ例ニテ,銀行ハ今3960圓ヲ出シテ手形ヲ買受ケ,二個月ノ後ニ至リテ,手形面ノ金高4000圓ヲ受取ルガ故ニ,此取引ハ恰モ元金3960圓ヲ二個月間貸シテ利息40圓ヲ得ルニ同ジク,其利率ハ年利 $\frac{40}{3960} \times \frac{12}{2}$ 即チ $0.0606 \dots$ ニ當リ,割引ノ歩合ヨリハ少シク高クツクベシ。

今利率 r , 期間 t ニテ元利合計ガ券面ノ金高 A トナルベキ元金ヲ求ムルトキハ,此元金ハ

$$\frac{A}{1 + rt}$$

トナル。之ヲ期間 t ノ後ニ受取ルベキ金高 A ノ

現價トイフ。現價ヲ以テ手形ノ賣買ノ値トスル計算ヲ真割引法トイフ。真割引ト區別スルガ爲ニ上ニ説キタル實際慣用ノ方法ヲ銀行割引トイフ。

真割引ニテハ、手形面ノ金高ハ元利合計ニ、割引高ハ利息(現價ハ元金)ニ當リ、割引歩合ハ手形面ノ金高ノ外割歩合ナリ。銀行割引ニテハ、手形面ノ金高ヲ元金トセル利息ヲ割引高トナスガ故ニ、割引歩合ハ手形面ノ金高ノ内割歩合ナリ。

割引ヲ行フ場合ニハ、通常期間ガ短キガタメニ利息ノ歩合ハ小キ數ニテ、從テ外割ト内割トノ差ガ比較的ニ甚ダ少クナルナリ。上ノ例ニテ年利六分、二個月間ノ利息ノ歩合ハ一分ニシテ、真割引高ト銀行割引高トノ差ハ手形面ノ金高ノ約一萬分ノ一ニモ達セズ*。且真割引ノ計算ハ割リ算ヲ要スル不便アルガ故ニ實用ニ適セズ。通常單ニ割引トイフハ銀行割引ノコトナリト知ルベシ。

手形ノ割引ヲ金錢ノ貸借ト見做ストキハ、手形ヲ賣ル人ハ借主、買フ人ハ貸主ニシテ、利息ノ歩合

*第169節參照。

ハ割引歩合ヨリ極メテ少シ高クツクコトトナルナリ。

問題 第三十

1. 年利五分ニテ年年 a 圓ノ利息ヲ生ムベキ元金幾許ナルカ。
2. 四分利公債ヲ九十六圓ノ相場ニテ買入ルルトキハ、利廻リ幾許ニ當ルカ。
3. 二口ノ貸金合セテ五千五百圓、甲ハ年利八分、十一個月間、乙ハ年利一割、九個月間、此利息合セテ四百八圓七十五錢ナリ。二口ノ元金各、幾許ナルカ。
4. 二個年半ノ單利ガ元利合計ノ二割ニ當ルトキハ利率幾許ナルカ。
5. 券面千八百圓ノ手形ヲ支拂期日前四十五日ニ日歩二錢八厘ニテ割引セル手形仲買人ノ得ベキ利率幾許ナルカ。
6. 割引歩合年六分、期間三個月、現金受取高千八百十二圓ナリ。割引高ヲ求メヨ。
7. 内割歩合 r ニ相當スル外割歩合ヲ p トス

ルトキ、 r, r' ノ中、一ツヲ知リテ他ノ一ツヲ求ムル公式ヲ作レ。

8. 毎月末金 a 圓ヲ預ケ行クトキ、年利率ヲ r トシテ一年ノ終ノ元利合計ヲ求メヨ。

9. 利率 r 、期間 t ナルトキ、利息ヲ前拂トシテ元金ノ中ヨリ差引クトキハ、事實上ノ利率ハ幾許ナルカ。

10. 銀行割引高ト眞割引高トノ差ハ眞割引高ヨリ同ジ期間ニ生ズル利息ニ等シ。之ヲ説明セヨ。

172. 複利法。

銀行預金、郵便貯金ナドニテハ半年毎、一年毎ナド定期ニ利息ヲ計算シテ、之ヲ次期ノ元金ニ繰入ルルガ故ニ、利息ガ次期ノ元金ノ一部トナリテ、更ニ利息ヲ生ジ行クナリ。カヤウニシテ利息ヲ勘定スルヲ複利(重利)法トイフ。

元金ヲ A 、一期ノ利率ヲ r ニテ表ストキハ、第一期ノ終ニハ元利合計 $A(1+r)$ トナル。是即チ第二期ノ元金ナリ。ヨリテ第二期ノ終ニハ元利合計

ハ $A(1+r)^2$ トナル。次第ニカヤウニシテ、毎期末ノ元利合計ハ等比級數ヲナス。一般ニ、

元金 A 、年利率 r 、一年毎ノ複利ニテ n 年ノ元利合計ヲ S トスルトキハ

$$S = A(1+r)^n$$

又ハ $\log S = \log A + n \log(1+r)$

n 年後ニ至リテ元利合計ガ A トナルベキ元金ヲ n 年後ニ受取ルベキ金額 A ノ現價トイフ。年利率 r 、一年毎ノ複利ニテハ、此現價ハ

$$\frac{A}{(1+r)^n}$$

ナリ。

複利ノ計算ヲ簡便ニスルガタメニハ、 r 及ビ n ノ種種ノ値ニ對スル $(1+r)^n$ 及ビ $(1+r)^{-n}$ ナル式ニテ、表サレタル數ノ表ヲ用フベシ。又ハ對數表ヲ應用スルコトヲ得。サレド、スベテ表ニ載セタルハ、小數某位未滿ヲ四捨五入セル近似値ナルガ故ニ、計算ノ結果モ又之ニ應ズル誤差ヲ有スベキコトニ注意スルヲ要ス。

例一。元金六千五百圓、年利五分五厘、一年毎ノ

複利ニテ六年間ノ元利合計幾許ナルカ。

$$\begin{aligned}\log S &= \log 6500 + 6 \log 1.055 \\ &= 3.95241\end{aligned}$$

故ニ $S = 8962.2$ (圓)

例二。前ノ問題ニテ六年五個月ノ元利合計ハ幾許ナルカ。

六個年ノ終ノ元利合計ハ

$$6500 \times (1.055)^6$$

ニシテ、是レ即チ七年目ノ始ノ元金ナリ。故ニ其年五個月目ノ終ノ元利合計ハ

$$\begin{aligned}S &= 6500 \times (1.055)^6 \times \left(1 + \frac{5}{12} \times 0.055\right) \\ &= 6500 \times (1.055)^6 \times 1.02292\end{aligned}$$

$$\log S = \log 6500 + 6 \log 1.055 + \log 1.02292$$

$$= 3.96226$$

故ニ $S = 9167.8$ (圓)

前頁ノ公式ハ期數 n ガ整数ナルトキニ限リ通用スルモノナルコトヲ記憶スベシ。

例三。元金九千圓、年利五分、一年毎ノ複利ニテ幾年ノ後、元利合計一萬五千圓ヲ得ベキカ。

$$9000 \times (1.05)^n = 15000$$

即チ $n \log 1.05 = \log 15 - \log 9$

ヨリテ、 $n = \frac{\log 1.66667}{\log 1.05} = \frac{0.22185}{0.02119}$

$$\log n = \log 22185 - \log 2119 = 1.01993$$

$$n = 10.47$$

即チ年數ハ10ヨリ大ニシテ11ヨリハ小ナリ。

サテ十年末ニ於ケル元利合計ハ

$$9000 \times (1.05)^{10}$$

圓ニテ之ヲ元金トスルトキ、幾月ノ後、元利合計

ガ15000圓トナルカラ定ムルコトヲ要ス。

求ムル月數ハ

$$\left(\frac{15000}{9000 \times (1.05)^{10}} - 1 \right) \div 0.05 \times 12$$

ナリ。

ヨリテ、先ヅ

$$x = \frac{15000}{9000 \times (1.05)^{10}}$$

ヲ計算スルニ

$$\log x = \log 15 - \log 9 - 10 \log 1.05$$

$$= 0.22185 - 0.21190 = 0.00995$$

$$x = 1.023$$

$$\frac{0.023 \times 12}{0.05} = 5.5 \dots$$

即チ求ムル月數ハ五月強ナリ。

注意。上ニ得タル $n=10.47$ ヨリ年ノ小數部分ヲ月數ニ改メテモ殆ド同ジ結果ヲ得。是ハ比例部分ノ理ニ基ヅクコトナリ。

問題 第三十一

1. 元金二千四百圓,二個年ノ利息ガ單利ト一年毎ノ複利トニテ四圓八十六錢ダケ違フトキ,年利幾許ナルカ。
2. 三年間ノ利息ガ單利ニテ千二百圓,一年毎ノ複利ニテ千二百六十一圓ナリ。元金及ビ利率ヲ求メヨ。
3. 元金一圓未滿ニハ利息ヲ附ケズトスルトキ,年利五分一年毎ノ複利ニテ,元金二十圓及ビ二百圓ノ十年後ノ元利合計各,幾許ナルカ。
對數表ヲ用ヒテ次ノ問題ヲ解ケ。[4-10]
4. 元金八千五百三十五圓,年利四分五厘,一年毎ノ複利ニテ十二個年ノ元利合計幾許ナルカ。
5. 元金五百六十圓,年利六分,一年毎ノ複利ニテ三年四個月ノ元利合計幾許ナルカ。
6. 元金三千圓,年利五分五厘,一年毎ノ複利ニ

テ元利合計ガ四千圓トナルハ幾年ノ後ナルカ。

7. 元金一萬二千圓ヲ一年毎ノ複利ニテ五年間預ケ,元利合計一萬六千五百圓ヲ得タリ。年利幾許ニ當ルカ。
8. 年利四分八厘,一年毎ノ複利ニテ五個年後ニ受取ルベキ二千圓ノ現價幾許ナルカ。
9. 年利五分,一年毎ノ複利ニテ十個年後ニ二千圓,十五個年後ニ三千圓ヲ得ントス。今幾許ノ元金ヲ預ケ置クベキカ。
10. 年利五分,一年毎ノ複利ニテ元利合計ガ元金ノ二倍トナルハ幾年ノ後ナルカ。

173. 年賦積立。

例ヘバ毎年末,金 a 圓ツヅテ預ケ行クトキハ,年利 r ,一年毎ノ複利ニテ, n 年目ノ終ニハ,元利合計幾許トナルカ。

先ヅ初年末ニ預ケタル a 圓ハ n 年目ノ終ニ至リ,元利合計 $a(1+r)^{n-1}$ 圓トナリ,又第二年末ニ預ケタル a 圓ハ, n 年目ノ終ニ至リ,元利合計 $a(1+r)^{n-2}$ 圓トナル。カヤウニ, $1+r$ ノ指數ハ次第ニ1ツヅ

減リ行キテ、第 n 年末ニ預ケタル a 圓ハソノママ
 a 圓ナリ。

故ニ求ムル元利合計ヲ S 圓トスルトキハ、

$$S = a\{1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1}\}$$

$$\text{故ニ} \quad S = \frac{a}{r} \{(1+r)^n - 1\}$$

例一。毎年末百圓ヅツヲ預ケ行クトキハ、年利
五分、一年毎ノ複利ニテ、三十個年ノ終ニハ元利合
計幾許トナルカ。

$$a = 100, \quad r = 0.05, \quad n = 30$$

$$\text{故ニ} \quad S = \frac{100}{0.05} (1.05^{30} - 1) = 6644 \text{ (圓)}.$$

注意。 1.05^{30} ノ計算ハ對數表ニヨルベシ。

例二。年利五分、一年毎ノ複利ニテ、十五個年ノ
終ニ元利合計四千圓ヲ得ルニハ、毎年末幾圓ヅツ
預ケ行クベキカ。

$$S = 4000, \quad r = 0.05, \quad n = 15$$

$$\text{故ニ} \quad 4000 = \frac{a}{0.05} (1.05^{15} - 1)$$

$$\text{ヨリテ,} \quad a = \frac{4000 \times 0.05}{1.05^{15} - 1} = 185.4 \text{ (圓)}.$$

注意。 1.05^{15} ノ計算及ビ $1.05^{15} - 1$ ニテ割ルト
キニハ、對數表ヲ用フベシ。

174. 年賦償却。

甲ハ乙ヨリ A 圓ヲ、年利 r 、一年毎ノ複利ニテ借
入レタリ。ソレヨリ甲ハ一年目毎ニ若干圓ヅツ
乙ニ返済シ、 n 年目ノ終ニ至リテ皆済トナレリ。
年賦金ヲ求メヨ。

年賦金ヲ a 圓トス。

一年目ノ終ニハ元利合計 $A(1+r)$ 圓トナルニヨ
リ、二年目ノ元金ハ

$$A(1+r) - a$$

圓ナリ。故ニ二年目ノ終ニハ元利合計

$$\{A(1+r) - a\}(1+r)$$

圓トナリ、三年目ノ元金ハ $\{A(1+r) - a\}(1+r) - a$ 即チ

$$A(1+r)^2 - a(1+r) - a$$

圓ナリ。次第ニカヤウニシテ $n+1$ 年目ノ元金ハ
0 トナルベシ。故ニ

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a(1+r) - a = 0$$

或ハ

$$\begin{aligned} A(1+r)^n &= a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a \\ &= \frac{a}{r} \{(1+r)^n - 1\} \end{aligned} \quad (1)$$

故ニ次ノ公式ヲ得。

$$a = \frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}$$

注意。上ノ(1)式ノ左邊ハ元金 A , n 年間ノ元利合計ヲ表シ、又右邊ハ年額 a ヅツ n 年間ノ年賦積立ノ元利合計ニ等シ。是ハサモアルベキコトナリ。甲ガ毎年乙ニ a 圓ヅツ返済スルヲ、假ニ甲ガ毎年乙ニ a 圓ヅツ貸スモノト考フルトキハ、 n 年ノ後ニ至リテ、甲乙ノ貸借相殺トナルベケレバナリ。

例。金千圓ヲ年利五分、一年毎ノ複利ニテ借入レ之ヲ十五個年賦ニテ返済セントス。年賦金幾許ナルカ。

$$A = 1000, \quad r = 0.05, \quad n = 15$$

$$\text{故ニ} \quad a = \frac{1000 \times 0.05}{1 - 1.05^{-15}} = 96.3 \text{ (圓)}.$$

175. 年金ノ現價。

永續シテ、又ハ定期ノ年限ノ間、年年一定ノ金高ヲ受取ルヲ年金トイフ。

年利率ヲ r トスルトキ、 n 年間、毎年 a 圓ヅツノ定期年金ノ現價如何。

現價ヲ A 圓トス。

第一年目、第二年目、 \dots 、第 n 年目ニ受取ルベキ a 圓ノ現價ハツレゾレ

$$\frac{a}{1+r}, \quad \frac{a}{(1+r)^2}, \quad \dots, \quad \frac{a}{(1+r)^n} \quad (1)$$

圓ナリ(第 172 節参照)。故ニ求ムル現價 A ハ上ノ等比級數ノ和ニ等シ。即チ

$$A = \frac{a}{1+r} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

$$\text{又ハ} \quad A = \frac{a}{r} \{1 - (1+r)^{-n}\}$$

注意一。元金 A 圓ノ貸借ガ年賦金 a 圓ヅツニテ n 年間ニ償却セラルルトキハ、貸主ハ即チ n 年間、毎年 a 圓ヅツノ定期年金ノ所有者ナリ。故ニ元金 A ハ即チ此年金ノ現價ニ外ナラズ(前節ノ公式参照)。

永續年金ノ現價トハ、年年其年金ノ高ダケノ利息ヲ生ムベキ元金ノコトナリ。故ニ年金ノ高ヲ a 、年利率ヲ r トスルトキハ、現價 A' ヲ求ムル公式ハ次ノ如シ。

$$A' = \frac{a}{r}$$

注意二。上ニ舉ゲタル級數(1)ガ限ナク引續

クモノトスルトキハ(公比 $\frac{1}{1+r}$ ハ 1 ヨリ小ナル
ガ故ニ)級數ノ和ノ極限ハ

$$\frac{\frac{a}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}} \quad \text{即チ} \quad \frac{a}{r}$$

トナル。即チ定期年金ノ現價ハ、年數 n ガ大キ
クナルニ從ヒテ、限ナク永續年金ノ現價ニ近ヅ
クナリ。

例一。二十年間、毎年百圓ヅツノ定期年金ノ現
價ヲ、年利五分トシテ計算セヨ。

$$a = 100, \quad r = 0.05, \quad n = 20$$

$$\text{故ニ} \quad A = \frac{100}{0.05} \times \{1 - 1.05^{-20}\} = 1246 \text{ (圓)}.$$

例二。毎年五十圓ヅツノ永續年金ノ現價ヲ年
利四分八厘トシテ計算セヨ。

$$a = 50, \quad r = 0.048$$

$$A' = \frac{50}{0.048} = 1042 \text{ (圓)}.$$

176. 綜合的ノ説明。

前三節ニ舉ゲタル年賦積立、年賦償却及ビ年金
ノ現價ニ關スル公式ハ、又次ノ如クニシテ綜合的
ニ説明スルコトヲ得。

先ヅ年利率ヲ r トスルトキハ、年額 a ナル永續
年金ノ現價ハ $\frac{a}{r}$ ナリ。又今ヨリ n 年後ニ始マル
年額 a ノ永續年金ノ現價ハ即チ今ヨリ n 年後ニ
受取ルベキ金高 $\frac{a}{r}$ ノ現價

$$\frac{a}{r(1+r)^n}$$

ナリ。今年ノ始ニ一時ニ此金額ヲ受取ルトキハ、
 n 年間ニ此金額ガ増殖シテ丁度 $\frac{a}{r}$ トナリ、其後年
年 a ダケノ利息ヲ生ジ行クベキナリ。

今年ヨリ始マル年額 a ノ永續年金
ノ現價ト n 年後ヨリ始マル同額ノ永
續年金ノ現價トノ差

$$\frac{a}{r} - \frac{a}{r(1+r)^n} \quad \text{即チ} \quad \frac{a}{r} \{1 - (1+r)^{-n}\}$$

ハ即チ今ヨリ n 年間年額 a ノ定期年
金ノ現價 A ニ等シ。

之ヲ説明スルガタメニ、假ニ今ヨリ n 年間ハ每
年末甲ニ年金 a ヲ與ヘ、其後ハ永久ニ乙ニ年金 a
ヲ與フルモノト考ヘンニ、年金ヲ受取ルモノハ最
初ノ n 年ト其後ト異ナレドモ、年金ヲ支拂フ側ヨ

リ言へバ、今ヨリ永久ニ年金 a ヲ與フベキナレバ、
 年利率ヲ r トスルトキハ即時ニ $\frac{a}{r}$ ダケノ元金ヲ
 準備スレバ充分ナリ。即チ此元金ヨリ生ズル年
 年ノ利息 a ヲ始 n 年間ハ甲ニ拂ヒ、其後ハ乙ニ拂
 へバヨシ。

サテ今此金高 $\frac{a}{r}$ ヲ甲乙兩人ノ所屬ナルニツノ
 部分ニ分タントスルニ、乙ニ屬スベキハ、即チ n 年
 後ニ至リテ元利合計 $\frac{a}{r}$ トナルベキ元金即チ
 $\frac{a}{r}(1+r)^n$ ナレバ、甲ニ屬スベキハ殘餘

$$A = \frac{a}{r} \left\{ 1 - (1+r)^{-n} \right\}$$

ナルベク、是レ即チ今ヨリ n 年間年額 a ノ定期年
 金ノ現價ニ外ナラズ。

n 年間年額 a ノ定期年金ノ現價 A ハ即チ年賦
 金 a ニテ n 年間ニ償却セラレベキ元金ニ外ナラ
 ズ故ニ年賦金 a ハ

$$a = \frac{Ar}{1 - (1+r)^{-n}}$$

ナル式ニヨリテ求メ得ベシ。是ハ既ニ前節ノ注
 意ニ説キタルコトナリ。

年賦積立ノ元利合計ヲ求ムルコトモ亦定期年

金ノ現價ト連絡シテ説明スルコトヲ得。

假ニ甲ガ今ヨリ n 年間年額 a ノ定期年金ノ現
 價 A ヲ銀行ニ預ケ、銀行ハコノ年金ヲ乙ニ拂フモ
 ノトスルトキハ、甲ノ預金ハ n 年ノ後ニ至リテ丁
 度盡クベシ。サテ乙ハ年年受取リタル年金 a ヲ
 同ジ利率ニテ同ジ銀行ニ預ケ行キタリトスルト
 キ、 n 年ノ後ニ至リ乙ノ積立テタル總額 S ハ如
 何ト考フルニ、銀行ハ年年 a 圓ヲ支拂ヒテ直ニ又
 a 圓ヲ預カリタルコトトナルガ故ニ、預ケ主コソ
 甲ヨリ乙ニ換ハレ、 n 年後ニ於ケル預金ノ總高 S
 ハ最初預リタル元金 A ヲ n 年間ニ生ゼル元利
 合計ニ外ナラス。是故ニ

$$S = A(1+r)^n = \frac{a}{r} \left\{ (1+r)^n - 1 \right\}$$

ニシテ、是レ即チ年額 a ツツ n 年間積立テタル元
 利合計ナリ。

上ニ説キタルコトヲ總括スルトキハ次ノ表ヲ
 得ベシ。

	a	A	S	r	n
定期年金	年金額	現價	—	年利率	年數
年賦償却	年賦金	元金	—		
年賦積立	積立年額	—	元利合計		

$$Ar = a\{1 - (1+r)^{-n}\}$$

$$S = A(1+r)^n$$

問題 第三十二

1. 毎年末五十圓ヅツ預ケ行クトキハ、年利四分五厘、一年毎ノ複利ニテ、十五個年ノ終ニ元利合計幾許トナルカ。
2. 年利六分、一年毎ノ複利ニテ十個年ノ終ニ元利合計五千圓ヲ得ルニハ、毎年末金幾許ヅツ預ケ行クベキカ。
3. 或人五千圓ヲ年利五分、一年毎ノ複利ニテ借入レ、之ヲ十個年賦ニテ返済セントス。年賦金幾許ナルカ。
4. 或人千五百圓ヲ、年利六分五厘、一年毎ノ複利ニテ借入レ、三年間据置キ、其後五個年賦ニテ返済セントス。年賦金幾許ナルカ。

5. 三十年間、毎年八十圓ヅツノ定期年金ノ現價ヲ、年利四分五厘トシテ計算セヨ。
6. 利率ヲ年五分トスルトキハ、永續年金百五十圓ノ現價幾許ナルカ。
7. 五千圓ヲ年利五分ニテ預ケ置キ、年年五百圓ヅツヲ引出ストキハ、幾年ニテ預金ハ盡クルカ。又最後ノ年ノ終ニハ幾許ヲ得ベキカ。
8. 年年百圓ヅツ三十個年間積立テ、其後二十個年間等額ノ年金ヲ得ントス。年金額幾許ナルカ。(年利五分トシテ計算セヨ)。
9. 今年末ヨリ始メ、向フ三十個年間毎年定額ノ積立金ヲナシ行キ、其後二十個年間年年三百圓ノ年金ヲ得ントス。年利五分トシテ積立年額ヲ求メヨ。
10. 今年生マレタル子ノ教育資金トシテ向フ十個年間等額ノ金ヲ積立テ行キ、其後八個年間据置キ、子ガ滿十八歳トナルトキ、元利合計二千五百圓ヲ得ントス。年利四分トシテ積立金ノ年額ヲ計算セヨ(圓位未滿、切上ゲ)。
11. 保險金百圓ニツキ保險料前金拂毎年四圓

五十六錢ノ割ニテ五千圓ノ生命保險ノ契約ヲナセル人、契約ヲナシテヨリ十二個年目ニ死亡セリ。若シ年年保險料ト等額ノ貯金ヲナセリトセバ、十二個年ノ終マデニ、其元利合計ハ保險金ヨリ多クナルカ、又ハ少キカ。年利五分トシテ其差ヲ圓ノ位マデ計算セヨ。

12. $2n$ 年間、 A 圓ノ年金ヲ共有セル甲乙兩人協議シテ、隔年ニ其年金全額ヲ別別ニ取ルコトトセリ。甲ガ初年末ニ取り始ムルトキハ、甲ハ今幾許ヲ乙ニ拂フベキカ。

又 $A=375$, $n=12$, $r=0.045$ トシテ此金高ヲ計算セヨ。

答

問題 第一 [79—81]

1. $c-a=b$, $c-b=a$, $c=-2$, $(-2)-5=-7$,
 $(-2)-(-7)=5$ 2. $a-(b+c)=a-b-c$
 5. $(-b)(-d)=bd$ 6. 14, 6, 0, -4, -6, -6, -4, 0, 6
 7. 1, -1; 1, -1 9. $s+n(a-b)$ 圓。
 10. 100, 10, 0, $-17\frac{7}{9}$, -25, -40 11. $n(u-v)$

問題 第二 [102—103]

1. 961 2. 9604 3. 2491
 4. $9a^2-42a+49$ 5. $16x^2-24xy+9y^2$
 6. $25a^2-4$ 7. $4x^2-y^2$
 8. $a^2+2ab+b^2-c^2$ 9. $a^2-b^2-2bc-c^2$
 10. $x^4-2x^2y^2+y^4$ 11. x^4-a^4 12. $x^4+x^2y^2+y^4$
 13. $x^2+14x+48$, $x^2-14x+48$, $x^2+2x-48$, $x^2-2x-48$
 14. $4a^2-4ab-35b^2$ 15. $10-49x+49x^2$
 16. $-c^2+ca+cb-ab$ 17. $a^2+2ab+b^2-ac-bc-6c^2$

18. $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
 19. $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
 20. $-x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$

問題 第三 [106—108]

1. $20x - 60$ 2. $-5x^2 + 9x + 10$
 3. $-ax + bx$ 4. $4ax$ 5. $3a - 2$
 6. $3x + 3y - 2$ 7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$
 8. 0 9. $5x + 7$ 10. $31x - 16$
 11. $(4a + 2b)$ 間, $(a^2 + ab)$ 坪. 12. mna^3 立方尺,
 $2(m + n + mn)a^2$ 平方尺. 13. b^2 坪減 ν .
 17. $(a - \frac{2}{5}d)$ 錢. 18. $\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2}, \frac{a}{12} + \frac{b}{12} - \frac{c}{6}$

問題 第四 [116—117]

1. $a + 2b$ 2. $x + 5$ 3. $7a - 3$, 殘 -4
 4. $x + 3y$, 殘 $5y^2$ 5. $5x - 2a$, 殘 a^2
 6. $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$ 7. $-12a + 2$, 殘 9
 8. $x^2 + xy + y^2 - x + y + 1$
 9. $a^6 - a^5b + a^3b^3 - ab^5 + b^6$

10. $x - c$ 11. $x^2 - (a + b)x + ab$
 12. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz - yz$
 13. $2x^2 - 2xy - 5y^2$, 殘 $8y^3$; $3y^2 - 10xy + 10x^2$, 殘 $-8x^3$
 14. $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^7$, 殘 $x^8 - x^9$
 15. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$, 殘 x^6

問題 第五 [133—136]

1. $-\frac{8}{13}$ 2. 0 3. 17 4. 5
 5. 2 6. 28 7. 3.3 8. 5
 9. 2 10. $\frac{2}{3}$ 11. 9 時間.
 12. 5 億圓. 13. 9, 7 14. 16, 12
 15. 154 16. 500 圓. 17. 16 圓.
 18. 90 圓, 各 30 圓. 19. 8 日.
 20. 300 步. 21. 36, 44, 20, 80 22. 160 圓.

問題 第六 [145—146]

1. 2, 3* 2. 1, 3 3. 30, 17
 4. 3, 5 5. 7, -3 6. $\frac{1}{2}, -4$
 7. $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ 8. -13, 17 9. -2, -8

* 實 $x=2, y=3$ 以下之 = 做 7.

10. 3, 4 11. -2, 4 12. 18, 0
13. 18, 16 14. 6, 8 15. 2, 3

問題 第七 [148—149]

1. 3, 2, 4 2. 1, 2, 3 3. $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}$
4. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ 5. 3, -4, 7 6. 5, -8, -9
7. 1, 2, 3 8. 1, 1, 1 9. 9, 6, -1
10. 7, 9, 8, 5

問題 第八 [152—156]

1. 35, 22 2. 12, 11 3. 14斤, 21斤。
4. 6瓦, 22瓦。 5. 120錢, 22錢。 6. 47, 17
7. 350圓, 25人。 8. 120圓。 9. 8間, 17間。
10. 140圓, 90圓。 11. 5.8圓, 3.2圓。
12. 250人, 150人。 13. 40, 88, 104
14. 110圓, 90圓, 50圓。 15. 20畝, 30畝, 40畝。
16. 0.84, 0.9 17. 0.9, 0.8, 0.69
18. 3里9町。 19. 234
20. 180, 140, 100, 80, 60

問題 第九 [174—177]

1. (1) 4100, 12742800 (2) 212, 68476
2. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 3. 21, 33, 77, 231
4. 153, 293, 433, ... 一般 = $140n + 13$ (n 、整數)
5. 6分。3456個。 6. 864個。
9. 17 15. 1.02 16. 514.8
17. $1\frac{11}{12}$ 尺, 210 18. $126\frac{1}{2}$ ぬり と る。

問題 第十 [181—182]

1. $(a-c)(b-d)$ 2. $2(a-b)(a+3b)$
3. $(x+a)(x-b)$ 4. $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$
5. $(a-b)^2$ 6. $ab(x-y)(ax-by)$
7. $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
8. $(x-y)(x+y+a+b)$ 9. $(ac+bd)(ad+bc)$
10. $(a-b-c)^2$
11. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$
12. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
13. $(a-b+c)(b+c-a)$
14. $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$ 15. $(a-b)^3$

問題 第十一 [188—189]

1. $\frac{2ax}{3by}$ 2. $\frac{1+x}{2(1-x)}$ 3. $\frac{x-5}{x-3}$
 4. x^2-x+1 5. $\frac{b}{a}$ 6. xyz
 7. $\frac{ay}{bx}$ 8. $x-y$ 9. $-\frac{10ax}{9by}$
 10. $\frac{m+n}{y-x}$ 11. $-\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ 12. $\frac{6a^2}{(a+b)^2}$

問題 第十二 [190—191]

1. $\frac{2x}{y}$ 2. $\frac{x+y}{a}$ 3. $\frac{2a}{a^2-b^2}$
 4. $\frac{7x}{12x}$ 5. $\frac{ax+by+cz}{abc}$ 6. $\frac{22m-111}{72}$
 7. $\frac{a}{1-a^2}$ 8. $\frac{-3xy-y^2}{(x-y)^2(x+y)}$ 9. $\frac{2x^3}{x^2-1}$
 10. $\frac{-2ab}{a-b}$ 11. $\frac{2b}{a+b}$ 12. $\frac{2x-10}{x^2+8x+7}$
 13. $a+b$ 14. $\frac{a+x}{ax}$ 15. 0

問題 第十三 [192—193]

1. $-\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ 2. $\frac{a^2-1}{a^2-2}$ 3. $\frac{x^3}{x^2-y^2}$

4. $5x^2-x$ 5. $\frac{1}{4}$ 6. $\frac{x^2+a^2}{2ax}$
 7. $\frac{1}{(a-b-c)c}$ 8. $\frac{p^2q^2}{p^2+q^2}$

問題 第十四 [203—205]

1. $\frac{32}{80}$ 2. 5 3. 26時, 39時, 52時。
 4. 15錢。 5. 16のり。 6. 1圓, 75錢。
 7. 12日, 18日。 8. 12日, 15日, 18日。
 9. 50分, 1時15分。 10. 1.5里, 1里。

問題 第十五 [207—208]

1. $\frac{b-d}{a-c}$ 2. $a+b$ 3. $a+b$
 4. $\frac{a^2+a+1}{a+1}$ 5. $\frac{a^2}{b-a}$ 6. $\frac{2ab}{a+b}$
 7. $\frac{2ab}{a+b}$ 8. $a+b, a-b$ 9. $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}$
 10. $\frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+b}$ 11. $a+b, a+b$
 12. $\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$

問題 第十六 [222-224]

1. 不可能。 2. 不定。 3. 不可能。
 4. 不可能。 5. 22間。 不可能。
 6. 15, 26, 37, 48, 59 不可能。 7. つり八錢。
 8. (1) 甲 x 斤 乙 y 斤 丙 z 斤ヲ混ズベシトスルト
 キ $z = \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}y$ (3) 3, 6, 14 (4) 38 斤。 (5) 15 斤。

問題 第十七 [224-227]

1. $\frac{28}{11}$ 2. $\frac{13}{2}$ 3. $\frac{a+b}{m+n}$
 4. $\frac{-(m+n)ab}{ma+nb}$ 5. $\frac{a+b-1}{2}$ 6. 5, 3
 7. $\frac{a^2-c^2}{a-b}, \frac{c^2-b^2}{a-b}$ 8. $(a+b)^2, (a-b)^2$
 9. $\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}, \frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}, \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$
 10. $\frac{2a}{m+n}, \frac{2b}{d-m}, \frac{2c}{d-n}$
 11. 毎時甲 $\frac{an}{d}$ 里, 乙 $\frac{a(n-d)}{d}$ 里。
 12. 一里ヲ行クニ要スル時間, 甲 $\frac{an}{d}$ 分, 乙 $\frac{a(n+d)}{d}$ 分。
 13. 毎時 $\frac{md}{n-m}$ 里。 14. $\frac{a(c-b)}{a-b}$ 石, $\frac{b(a-c)}{a-b}$ 石。

15. $\frac{am(m+n)}{am-bn}$ 錢, $\frac{bn(m+n)}{am-bn}$ 錢。
 16. 乙毎秒 $\frac{d}{e}$ 碼, 甲 $\frac{Ad}{(A-a)e-td}$ 碼。
 17. (1) x, y ノ比 $b+a:b-a$ (2) 3:2
 18. (1) x, y ノ差 $\frac{p}{a-b}$ (2) 2.1 圓。
 19. $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$ 20. 11:4

問題 第十八 [235-236]

1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 2. 4, -3 3. 7, -2
 4. -3, $-\frac{5}{7}$ 5. 1, $\frac{7}{3}$ 6. 1, 2
 7. $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 8. $13a, -3a$ 9. $a, -b$
 10. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ 11. $\frac{2a+b \pm \sqrt{4ab+b^2}}{2}$
 12. 0, $\frac{b}{a}$ 13. 3, 4 14. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$
 15. 4, $-\frac{5}{2}$ 16. 9, -1 17. -7, -8
 18. 6, $-\frac{5}{3}$ 19. 7, $\frac{5}{3}$ 20. $2a-b, -2(a+b)$
 21. ± 1 22. $m+n, \frac{2mn}{m+n}$
 23. -1 24. 3 25. 1

問題第十九 [239-242]

1. 70 2. 8, 9, 10 3. 8, 15 4. 2.5, 0.4
 5. $\sqrt{5} \pm 1$ 6. 26間。 7. 7寸。 8. 5寸。
 9. 18間, 12間。 10. 六分。 11. 一割。
 12. 4.5斗。 13. 120端。 14. 12人。 15. 20分, 30分。
 16. 100株。 17. 25錢, 20錢。 18. 80錢, 72錢, 60錢。
 19. 21時, 28時。 20. $(\sqrt{2}-1)r$ 21. $(3 \pm 2\sqrt{2})r$
 22. 内接セル正方形ノ頂點ハ與ヘラレタル正
 方形ノ邊ヲ $\frac{a+\sqrt{2S-a^2}}{2}$ 寸, $\frac{a-\sqrt{2S-a^2}}{2}$ 寸ナルニ
 ツノ部分ニ分ツ。(1)頂點ハ正方形ノ邊ヲ7
 寸, 5寸ニ分ツ。(2)頂點ハ正方形ノ邊ノ中央
 ニアリ。(3)頂點ハ正方形ノ邊ヲ12寸, 2寸ニ
 外分ス。

問題第二十 [250-251]

1. $\pm 3, \pm 4$ 2. 1, 2 3. $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$
 4. 1, 2, 3, 4 5. 1, -8, $\frac{-7 \pm \sqrt{-55}}{2}$
 6. $a+b-c, -a+b+c, a-b+c, -a-b-c$
 7. $1, -\frac{1}{2}, -1 \pm \sqrt{-1}$ 8. $1, \frac{1}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$

9. 3, -2, $\frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2}$ 10. 2, 1, $\frac{1}{2}$

問題第二十一 [254]

1. 33 2. 20, -1 3. 5
 4. $\frac{25}{36}$ 5. 1 6. 7
 7. 2, 0 8. 0, $\pm \sqrt{8}$ 9. $\frac{10}{3}$
 10. $x=4(a+b); \sqrt{ax+b^2}=2a+b, \sqrt{bx+a^2}=2b+a$
 $x=0, \sqrt{ax+b^2}=-b, \sqrt{bx+a^2}=-a$

問題第二十二 [257-258]

1. 6, 2; -2, -6 2. 15, 5; -15, -5
 3. $\frac{3}{2}, 2; \frac{1}{2}, 4$ 4. 1, 1
 5. $\frac{1}{2}, 2$ 6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$
 7. $\pm 4, \pm 3; \pm \frac{7}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
 8. $\pm 3, \pm 2; \pm 2, \pm 3$
 9. 0, 0; 1, 2; $\frac{15}{22}, \frac{9}{22}$
 10. $\pm 5, \pm 4; \pm 4, \pm 5$
 11. 2, 3; 3, 2 12. 2, 3; -3, -2

問題第二十三 [260-263]

1. 4, 6 2. $3:2, \frac{5+\sqrt{97}}{4}, \frac{5+\sqrt{97}}{6}$
3. 0.25 4. 9, 4
5. 上8斤, 下12斤, 上18.5錢, 下17錢。
6. 1200圓, 1800圓。 7. 每時24哩, 16哩。
8. 甲600圓, 七分。乙700圓, 六分。
9. 25哩, 15哩。 10. 7間, 5間, 2間。
11. $\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(r^2 - d^2)}}{2}$ 寸, $\frac{\sqrt{a^2 + 4(d^2 - r^2)} \pm a}{2}$ 寸。
12. $\frac{1}{2} \left\{ p + \frac{S}{p} \pm \sqrt{p^2 + \frac{S^2}{p^2} - 6S} \right\}$, 斜邊 $p - \frac{S}{p}$
13. $\sqrt{a(a+h)} \pm \sqrt{a(a-h)}$
14. $\frac{2}{3} \sqrt{2(h^2 + l^2) - h^2}$, $\frac{2}{3} \sqrt{2(l^2 + h^2) - l^2}$,
- $\frac{2}{3} \sqrt{2(h^2 + k^2) - l^2}$
15. $a + \sqrt{2ab}$, $b + \sqrt{2ab}$, $a + b + \sqrt{2ab}$

問題第二十四 [299-301]

2. $3:2$ 3. $a+b:a-b$ 4. $(a-b)^2$
5. $8ab$ 6. $\frac{b^3}{2}, \frac{1}{2}$
9. $b+c-a:c+a-b:a+b-c$

10. $\frac{acS}{ac+bc+bd}, \frac{bcS}{''}, \frac{bdS}{''}$
11. $\sqrt{\frac{aS}{b}}, \sqrt{\frac{bS}{a}}$ 12. 120平方尺。
13. 84, 60, 48 14. $\frac{4}{45}, \frac{6}{25}, \frac{8}{75}$
15. $5\frac{5}{19}$ 米。 16. 95, 130
17. 28, 20 18. 18, 12
19. 120圓, 80圓。 20. $\frac{a'b'A-a'B}{a'aB-bA}, \frac{b'b'A-a'B}{b'aB-bA}$

問題第二十五 [316-319]

1. $45, \frac{x}{y} = \frac{7}{15}$ 2. 3.6
3. $xy = ab$ 4. $1\frac{1}{4}$
5. $\frac{ABc}{ab}$ 6. $z = k\frac{y}{x}$
7. $w = dv$ (1) 正比例 (2) 正比例 (3) 逆比例 (4) 複比例。
8. 逆比例。
9. $62\frac{1}{8}$ 及び 1 とる。
10. 代價ハ目方ノ平方ニ比例ス。20000圓。
11. $\frac{\pi ar^2}{360}$ 12. 1260圓。

問題 第二十六 [350-351]

1. 2129.4 2. 75.84 3. 6.9381
 4. 0.0021438 5. 4.6771 6. 2.0552
 7. 0.5909 8. 0.0000000019679
 9. -22.335 10. 0.84033 11. 1.9973
 12. 0.6437 13. 4.4429 寸. 14. 128.48 坪.
 15. 7.6 寸弱. 16. 4 厘. 17. 4334.8 日.
 18. (1) 1.7604 (2) 2.9903 19. 2.3026
 20. 二十桁, 184

問題 第二十七 [357-358]

1. 190 2. 48 3. 55 4. 5
 6. 450 個, 247500 7. $\frac{n(n^2+1)}{2}$
 8. 440 間. 9. 5 人. 11. 1, 4, 7, 10, 13
 12. 22, 44

問題 第二十八 [362-363]

1. 3^{n-1} 2. $\frac{3}{8}$ 3. 160 4. $48a^2, 96a^3$
 5. $\pm 168, 84, \pm 42$ 6. 5, 10, 20 7. 121

8. $\frac{665}{486}$ 9. $63(\sqrt{2}+1)$ 10. $\frac{2}{3}$ 又ハ $-\frac{5}{3}$
 13. 15

問題 第二十九 [368-370]

1. 3810807
 2. 第二十二項ト第二十三項トノ間.
 3. $\frac{n+1}{2}; \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$
 5. $\frac{r^n-1}{r-1}, \frac{r(r^n-1)}{(r-1)^2} - \frac{n}{r-1}$
 7. $\frac{\frac{n}{b^{n-1}} - \frac{n}{a^{n-1}}}{\frac{1}{b^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}}$
 9. $\frac{(a+b)h}{2} - \frac{(b-a)h}{2n}$, n ガ 限 ナク 大ク ナルト キ
 ハ 此 數 ハ 限 ナク $\frac{(a+b)h}{2} =$ 近 迫 ス.

問題 第三十 [381-382]

1. $20a$ 圓. 2. 0.0417 弱.
 3. 2250 圓, 3250 圓. 4. 一割.
 5. 日歩 2.83 錢強. 6. .18 圓.
 7. $r' = \frac{r}{1-r}, r = \frac{r'}{1+r'}$
 8. $a\left(12 + \frac{11r}{2}\right)$ 9. $\frac{r}{1-rt}$

問題 第三十一 [386-387]

- | | |
|---------------------|----------------|
| 1. 四分五厘。 | 2. 八千圓, 五分。 |
| 3. 32.4 圓; 325.6 圓。 | 4. 14476 圓。 |
| 5. 680.33 圓。 | 6. 5 年 4.5 月。 |
| 7. 0.0658 | 8. 1582 圓。 |
| 9. 2671 圓。 | 10. 14 年 2 月強。 |

問題 第三十二 [396-398]

- | | |
|--|-------------|
| 1. 1120.3 圓。 | 2. 379.3 圓。 |
| 3. 647.5 圓。 | 4. 436 圓。 |
| 5. 1303 圓。 | 6. 3000 圓。 |
| 7. 十五年, 105 圓。 | 8. 533 圓。 |
| 9. 56.27 圓。 | 10. 153 圓。 |
| 11. 1189 圓少シ。 | |
| 12. $\frac{A}{2} \cdot \frac{1-(1+r)^{-2n}}{2+r}$, 59.81 圓。 | |

五 桁 對 數 表

一 [386-387]

圓, 五分。

圓。

4.5 月。

圓。

2 月強。

二 [396-398]

3 圓。

圓。

圓。

圓。

圓。

五 桁

五 桁 對 數 表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00 000	00 000	30 103	47 712	60 206	69 897	77 815	84 510	90 309	95 424
1	00 000	04 139	07 918	11 394	14 613	17 609	20 412	23 045	25 527	27 875
2	30 103	32 222	34 242	36 173	38 021	39 794	41 497	43 136	44 716	46 240
3	47 712	49 136	50 515	51 851	53 148	54 407	55 630	56 820	57 978	59 106
4	60 206	61 278	62 325	63 347	64 345	65 321	66 276	67 210	68 124	69 020
5	69 897	70 757	71 600	72 428	73 239	74 036	74 819	75 587	76 343	77 085
6	77 815	78 533	79 239	79 934	80 618	81 291	81 954	82 607	83 251	83 885
7	84 510	85 126	85 733	86 332	86 923	87 506	88 081	88 649	89 209	89 763
8	90 309	90 849	91 381	91 908	92 428	92 942	93 450	93 952	94 448	94 939
9	95 424	95 904	96 379	96 848	97 313	97 772	98 227	98 677	99 123	99 564
10	00 000	00 432	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 819	07 188	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 026	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	22 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 428	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 739	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 136	43 297	43 457	43 616	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 996
31	49 136	49 276	49 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 244	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	55 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 066	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 246
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	64 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 128	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 896	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
51	70 757	70 842	70 927	71 012	71 096	71 181	71 265	71 349	71 433	71 517
52	71 600	71 684	71 767	71 850	71 933	72 016	72 099	72 181	72 263	72 346
53	72 428	72 509	72 591	72 673	72 754	72 835	72 916	72 997	73 078	73 159
54	73 239	73 320	73 400	73 480	73 560	73 640	73 719	73 799	73 878	73 957
55	74 036	74 115	74 194	74 273	74 351	74 429	74 507	74 586	74 663	74 741
56	74 819	74 896	74 974	75 051	75 128	75 205	75 282	75 358	75 435	75 511
57	75 587	75 664	75 740	75 815	75 891	75 967	76 042	76 118	76 193	76 268
58	76 343	76 418	76 492	76 567	76 641	76 716	76 790	76 864	76 938	77 012
59	77 085	77 159	77 232	77 305	77 379	77 452	77 525	77 597	77 670	77 743
60	77 815	77 887	77 960	78 032	78 104	78 176	78 247	78 319	78 390	78 462
61	78 533	78 604	78 675	78 746	78 817	78 888	78 958	79 029	79 099	79 169
62	79 239	79 309	79 379	79 449	79 518	79 588	79 657	79 727	79 796	79 865
63	79 934	80 003	80 072	80 140	80 209	80 277	80 346	80 414	80 482	80 550
64	80 618	80 686	80 754	80 821	80 889	80 956	81 023	81 090	81 157	81 224
65	81 291	81 358	81 425	81 491	81 558	81 624	81 690	81 757	81 823	81 889
66	81 954	82 020	82 086	82 151	82 217	82 282	82 347	82 413	82 478	82 543
67	82 607	82 672	82 737	82 802	82 866	82 930	82 995	83 059	83 123	83 187
68	83 251	83 315	83 378	83 442	83 506	83 569	83 632	83 696	83 759	83 822
69	83 885	83 948	84 011	84 073	84 136	84 198	84 261	84 323	84 386	84 448
70	84 510	84 572	84 634	84 696	84 757	84 819	84 880	84 942	85 003	85 065
71	85 126	85 187	85 248	85 309	85 370	85 431	85 491	85 552	85 612	85 673
72	85 733	85 794	85 854	85 914	85 974	86 034	86 094	86 153	86 213	86 273
73	86 332	86 392	86 451	86 510	86 570	86 629	86 688	86 747	86 806	86 864
74	86 923	86 982	87 040	87 099	87 157	87 216	87 274	87 332	87 390	87 448
75	87 506	87 564	87 622	87 679	87 737	87 795	87 852	87 910	87 967	88 024
76	88 081	88 138	88 195	88 252	88 309	88 366	88 423	88 480	88 536	88 593
77	88 649	88 705	88 762	88 818	88 874	88 930	88 986	89 042	89 098	89 154
78	89 209	89 265	89 321	89 376	89 432	89 487	89 542	89 597	89 653	89 708
79	89 763	89 818	89 873	89 927	89 982	90 037	90 091	90 146	90 200	90 255
80	90 309	90 363	90 417	90 472	90 526	90 580	90 634	90 687	90 741	90 795
81	90 849	90 902	90 956	91 009	91 062	91 116	91 169	91 222	91 275	91 328
82	91 381	91 434	91 487	91 540	91 593	91 645	91 698	91 751	91 803	91 855
83	91 908	91 960	92 012	92 065	92 117	92 169	92 221	92 273	92 324	92 376
84	92 428	92 480	92 531	92 583	92 634	92 686	92 737	92 788	92 840	92 891
85	92 942	92 993	93 044	93 095	93 146	93 197	93 247	93 298	93 349	93 399
86	93 450	93 500	93 551	93 601	93 651	93 702	93 752	93 802	93 852	93 902
87	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399
88	94 448	94 498	94 547	94 596	94 645	94 694	94 743	94 792	94 841	94 890
89	94 939	94 988	95 036	95 085	95 134	95 182	95 231	95 279	95 328	95 376
90	95 424	95 472	95 521	95 569	95 617	95 665	95 713	95 761	95 809	95 856
91	95 904	95 952	95 999	96 047	96 095	96 142	96 190	96 237	96 284	96 332
92	96 379	96 426	96 473	96 520	96 567	96 614	96 661	96 708	96 755	96 802
93	96 848	96 895	96 942	96 988	97 035	97 081	97 128	97 174	97 220	97 267
94	97 313	97 359	97 405	97 451	97 497	97 543	97 589	97 635	97 681	97 727
95	97 772	97 818	97 864	97 909	97 955	98 000	98 046	98 091	98 137	98 182
96	98 227	98 272	98 318	98 363	98 408	98 453	98 498	98 543	98 588	98 633
97										

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389	44 43 42
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	1 4.4 4.3 4.2
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242	2 8.8 8.6 8.4
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	3 13.2 12.9 12.6
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078	4 17.6 17.2 16.8
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	5 22.0 21.5 21.0
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	6 26.4 25.8 25.2
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302	7 30.8 30.1 29.4
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	8 35.2 34.4 33.6
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100	9 39.6 38.7 37.8
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493	41 40 39
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	1 4.1 4.0 3.9
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269	2 8.2 8.0 7.8
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	3 12.3 12.0 11.7
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032	4 16.4 16.0 15.6
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	5 20.5 20.0 19.5
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	6 24.6 24.0 23.4
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151	7 28.7 28.0 27.3
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	8 32.8 32.0 31.2
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	9 36.9 36.0 35.1
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243	38 37 36
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	1 3.8 3.7 3.6
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	2 7.6 7.4 7.2
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307	3 11.4 11.1 10.8
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	4 15.2 14.8 14.4
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003	5 19.0 18.5 18.0
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	6 22.8 22.2 21.6
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	7 26.6 25.9 25.2
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025	8 30.4 29.6 28.8
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	9 34.2 33.3 32.4
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694	35 34 33
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024	1 3.5 3.4 3.3
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	2 7.0 6.8 6.6
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	3 10.5 10.2 9.9
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001	4 14.0 13.6 13.2
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	5 17.5 17.0 16.5
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	6 21.0 20.4 19.8
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	7 24.5 23.8 23.1
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270	8 28.0 27.2 26.4
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	9 31.5 30.6 29.7
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891	32 31 30
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198	1 3.2 3.1 3.0
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	2 6.4 6.2 6.0
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	3 9.6 9.3 9.0
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107	4 12.8 12.4 12.0
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	5 16.0 15.5 15.0
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	6 19.2 18.6 18.0
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	7 22.4 21.7 21.0
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	8 25.6 24.8 24.0
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	9 28.8 27.9 27.0
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	29 28
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	1 2.9 2.8
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	2 5.8 5.6
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	3 8.7 8.4
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	4 11.6 11.2
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	5 14.5 14.0
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	6 17.4 16.8
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	7 20.3 19.6
158	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112	8 23.2 22.4
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	9 26.1 25.2
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656	27 26
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	1 2.7 2.6
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	2 5.4 5.2
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	3 8.1 7.8
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	4 10.8 10.4
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	5 13.5 13.0
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	6 16.2 15.6
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	7 18.9 18.2
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	8 21.6 20.8
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	9 24.3 23.4
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274	25
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	1 2.5
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	2 5.0
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	3 7.5
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	4 10.0
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	5 12.5
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	6 15.0
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	7 17.5
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	8 20.0
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	9 22.5
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744	24 23
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	1 2.4 2.3
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	2 4.8 4.6
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	3 7.2 6.9
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	4 9.6 9.2
185	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	5 12.0 11.5
186	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161	6 14.4 13.8
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	7 16.8 16.1
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	8 19.2 18.4
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	9 21.6 20.7
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081	22 21
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307	1 2.2 2.1
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533	2 4.4 4.2
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758	3 6.6 6.3
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981	4 8.8 8.4
195	29 003	026	048	070							

數 對 數 表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298	22 21
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514	1 2.2 2.1
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728	2 4.4 4.2
203	750	771	792	814	835	856	878	899	920	942	3 6.6 6.3
204	963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154	4 8.8 8.4
205	31 175	197	218	239	260	281	302	323	345	366	5 11.0 10.5
206	387	408	429	450	471	492	513	534	555	576	6 13.2 12.6
207	597	618	639	660	681	702	723	744	765	785	7 15.4 14.7
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994	8 17.6 16.8
209	32 015	035	056	077	098	118	139	160	181	201	9 19.8 18.9
210	222	243	263	284	305	325	346	366	387	408	20
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613	1 2.0
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818	2 4.0
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021	3 6.0
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224	4 8.0
215	244	264	284	304	325	345	365	385	405	425	5 10.0
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626	6 12.0
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826	7 14.0
218	846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025	8 16.0
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223	9 18.0
220	242	262	282	301	321	341	361	380	400	420	19
221	439	459	479	498	518	537	557	577	596	616	1 1.9
222	635	655	674	694	713	733	753	772	792	811	2 3.8
223	830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005	3 5.7
224	35 025	044	064	083	102	122	141	160	180	199	4 7.6
225	218	238	257	276	295	315	334	353	372	392	5 9.5
226	411	430	449	468	488	507	526	545	564	583	6 11.4
227	603	622	641	660	679	698	717	736	755	774	7 13.3
228	793	813	832	851	870	889	908	927	946	965	8 15.2
229	984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154	9 17.1
230	36 173	192	211	229	248	267	286	305	324	342	18
231	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530	1 1.8
232	549	568	586	605	624	642	661	680	698	717	2 3.6
233	736	754	773	791	810	829	847	866	884	903	3 5.4
234	922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088	4 7.2
235	37 107	125	144	162	181	199	218	236	254	273	5 9.0
236	291	310	328	346	365	383	401	420	438	457	6 10.8
237	475	493	511	530	548	566	585	603	621	639	7 12.6
238	658	676	694	712	731	749	767	785	803	822	8 14.4
239	840	858	876	894	912	931	949	967	985	003	9 16.2
240	38 021	039	057	075	093	112	130	148	166	184	17
241	202	220	238	256	274	292	310	328	346	364	1 1.7
242	382	399	417	435	453	471	489	507	525	543	2 3.4
243	561	578	596	614	632	650	668	686	703	721	3 5.1
244	739	757	775	792	810	828	846	863	881	899	4 6.8
245	917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076	5 8.5
246	39 094	111	129	146	164	182	199	217	235	252	6 10.2
247	270	287	305	322	340	358	375	393	410	428	7 11.9
248	445	463	480	498	515	533	550	568	585	602	8 13.6
249	620	637	655	672	690	707	724	742	759	777	9 15.3
250	794	811	829	846	863	881	898	915	933	950	

數 對 數 表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950	18
251	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123	1 1.8
252	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295	2 3.6
253	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466	3 5.4
254	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637	4 7.2
255	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807	5 9.0
256	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976	6 10.8
257	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145	7 12.6
258	41 102	179	196	212	229	246	263	280	296	313	8 14.4
259	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481	9 16.2
260	497	514	531	547	564	581	597	614	631	647	17
261	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814	1 1.7
262	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979	2 3.4
263	996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144	3 5.1
264	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308	4 6.8
265	325	341	357	374	390	406	423	439	455	472	5 8.5
266	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635	6 10.2
267	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797	7 11.9
268	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959	8 13.6
269	975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120	9 15.3
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281	16
271	297	313	329	345	361	377	393	409	425	441	1 1.6
272	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600	2 3.2
273	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759	3 4.8
274	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917	4 6.4
275	933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075	5 8.0
276	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232	6 9.6
277	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389	7 11.2
278	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545	8 12.8
279	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700	9 14.4
280	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855	15
281	871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010	1 1.5
282	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163	2 3.0
283	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317	3 4.5
284	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469	4 6.0
285	484	500	515	530	545	561	576	591	606	621	5 7.5
286	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773	6 9.0
287	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924	7 10.5
288	939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075	8 12.0
289	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225	9 13.5
290	240	255	270	285	300	315	330	345	359	374	14
291	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523	1 1.4
292	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672	2 2.8
293	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820	3 4.2
294	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967	4 5.6
295	982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114	5 7.0
296	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261	6 8.4
297	276	290	305	319	334	349	363	378	392	407	7 9.8
298	422	436	451	465	480	494	509	524	538	553	8 11.2
299	567	582	596	611	625	640	654	669	683	698	9 12.6
300	712</										

對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
300	47	712	727	741	756	770	784	799	813	828	842	
301		857	871	885	900	914	929	943	958	972	986	
302	48	001	015	029	044	058	073	087	101	116	130	
303		144	159	173	187	202	216	230	244	259	273	
304		287	302	316	330	344	359	373	387	401	416	
305	43	0	444	458	473	487	501	515	530	544	558	
306		572	586	601	615	629	643	657	671	686	700	
307		714	728	742	756	770	785	799	813	827	841	
308		855	869	883	897	911	926	940	954	968	982	
309		996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122	
310	49	136	150	164	178	192	206	220	234	248	262	
311		276	290	304	318	332	346	360	374	388	402	
312		415	429	443	457	471	485	499	513	527	541	
313		554	568	582	596	610	624	638	651	665	679	
314		693	707	721	734	748	762	776	790	803	817	
315		831	845	859	872	886	900	914	927	941	955	
316		969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092	
317	50	106	120	133	147	161	174	188	202	215	229	
318		243	256	270	284	297	311	325	338	352	365	
319		379	393	406	420	433	447	461	474	488	501	
320		515	529	542	556	569	583	596	610	623	637	
321		651	664	678	691	705	718	732	745	759	772	
322		786	799	813	826	840	853	866	880	893	907	
323		920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041	
324	51	055	068	081	095	108	121	135	148	162	175	
325		188	202	215	228	242	255	268	282	295	308	
326		322	335	348	362	375	388	402	415	428	441	
327		455	468	481	495	508	521	534	548	561	574	
328		587	601	614	627	640	654	667	680	693	706	
329		720	733	746	759	772	786	799	812	825	838	
330		851	865	878	891	904	917	930	943	957	970	
331		983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101	
332	52	114	127	140	153	166	179	192	205	218	231	
333		244	257	270	284	297	310	323	336	349	362	
334		375	388	401	414	427	440	453	466	479	492	
335		504	517	530	543	556	569	582	595	608	621	
336		634	647	660	673	686	699	711	724	737	750	
337		763	776	789	802	815	827	840	853	866	879	
338		892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007	
339	53	020	033	046	058	071	084	097	110	122	135	
340		148	161	173	186	199	212	224	237	250	263	
341		275	288	301	314	326	339	352	364	377	390	
342		403	415	428	441	453	466	479	491	504	517	
343		529	542	555	567	580	593	605	618	631	643	
344		656	668	681	694	706	719	732	744	757	769	
345		782	794	807	820	832	845	857	870	882	895	
346		908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020	
347	54	033	045	058	070	083	095	108	120	133	145	
348		158	170	183	195	208	220	233	245	258	270	
349		283	295	307	320	332	345	357	370	382	394	
350		407	419	432	444	456	469	481	494	506	518	

對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
350	54	407	419	432	444	456	469	481	494	506	518	
351		531	543	555	568	580	593	605	617	630	642	
352		654	667	679	691	704	716	728	741	753	765	
353		777	790	802	814	827	839	851	864	876	888	
354		900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011	
355	55	023	035	047	060	072	084	096	108	121	133	
356		145	157	169	182	194	206	218	230	242	255	
357		267	279	291	303	315	328	340	352	364	376	
358		388	400	413	425	437	449	461	473	485	497	
359		509	522	534	546	558	570	582	594	606	618	
360		630	642	654	666	678	691	703	715	727	739	
361		751	763	775	787	799	811	823	835	847	859	
362		871	883	895	907	919	931	943	955	967	979	
363		991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098	
364	56	110	122	134	146	158	170	182	194	205	217	
365		229	241	253	265	277	289	301	312	324	336	
366		348	360	372	384	396	407	419	431	443	455	
367		467	478	490	502	514	526	538	549	561	573	
368		585	597	608	620	632	644	656	667	679	691	
369		703	714	726	738	750	761	773	785	797	808	
370		820	832	844	855	867	879	891	902	914	926	
371		937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043	
372	57	054	066	078	089	101	113	124	136	148	159	
373		171	183	194	206	217	229	241	252	264	276	
374		287	299	310	322	334	345	357	368	380	392	
375		403	415	426	438	449	461	473	484	496	507	
376		519	530	542	553	565	576	588	600	611	623	
377		634	646	657	669	680	692	703	715	726	738	
378		749	761	772	784	795	807	818	830	841	852	
379		864	875	887	898	910	921	933	944	955	967	
380		978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081	
381	58	092	104	115	127	138	149	161	172	184	195	
382		206	218	229	240	252	263	274	286	297	309	
383		320	331	343	354	365	377	388	399	410	422	
384		433	444	456	467	478	490	501	512	524	535	
385		546	557	569	580	591	602	614	625	636	647	
386		659	670	681	692	704	715	726	737	749	760	
387		771	782	794	805	816	827	838	850	861	872	
388		883	894	906	917	928	939	950	961	973	984	
389		995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095	
390	59	106	118	129	140	151	162	173	184	195	207	
391		218	229	240	251	262	273	284	295	306	318	
392		329	340	351	362	373	384	395	406	417	428	
393		439	450	461	472	483	494	506	517	528	539	
394		550	561	572	583	594	605	616	627	638	649	
395		660	671	682	693	704	715	726	737	748	759	
396		770	780	791	802	813	824	835	846	857	868	
397		879	890	901	912	923	934	945	956	966	977	
398		988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086	
399	60	097	108	119	130	141	152	163	173	184	195	
400		206	217	228	239	249	260	271	282	293	304	

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
400	60	206	217	228	239	249	260	271	282	293	304	
401		314	325	336	347	358	369	379	390	401	412	
402		423	433	444	455	466	477	487	498	509	520	
403		531	541	552	563	574	584	595	606	617	627	
404		638	649	660	670	681	692	703	713	724	735	
405		746	756	767	778	788	799	810	821	831	842	
406		853	863	874	885	895	906	917	927	938	949	11
407		959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045	*055	1 1.1
408	61	066	077	087	098	109	119	130	140	151	162	2 2.2
409		172	183	194	204	215	225	236	247	257	268	3 3.3
410		278	289	300	310	321	331	342	352	363	374	4 4.4
411		384	395	405	416	426	437	448	458	469	479	5 5.5
412		490	500	511	521	532	542	553	563	574	584	6 6.6
413		595	606	616	627	637	648	658	669	679	690	7 7.7
414		700	711	721	731	742	752	763	773	784	794	8 8.8
415		805	815	826	836	847	857	868	878	888	899	9 9.9
416		909	920	930	941	951	962	972	982	993	*003	
417	62	014	024	034	045	055	066	076	086	097	107	
418		118	128	138	149	159	170	180	190	201	211	
419		221	232	242	252	263	273	284	294	304	315	
420		325	335	346	356	366	377	387	397	408	418	10
421		428	439	449	459	469	480	490	500	511	521	1 1.0
422		531	542	552	562	572	583	593	603	613	624	2 2.0
423		634	644	655	665	675	685	696	706	716	726	3 3.0
424		737	747	757	767	778	788	798	808	818	829	4 4.0
425		839	849	859	870	880	890	900	910	921	931	5 5.0
426		941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033	6 6.0
427	63	043	053	063	073	083	094	104	114	124	134	7 7.0
428		144	155	165	175	185	195	205	215	225	236	8 8.0
429		246	256	266	276	286	296	306	317	327	337	9 9.0
430		347	357	367	377	387	397	407	417	428	438	
431		448	458	468	478	488	498	508	518	528	538	
432		548	558	568	579	589	599	609	619	629	639	
433		649	659	669	679	689	699	709	719	729	739	
434		749	759	769	779	789	799	809	819	829	839	
435		849	859	869	879	889	899	909	919	929	939	
436		949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038	9
437	64	048	058	068	078	088	098	108	118	128	137	1 0.9
438		147	157	167	177	187	197	207	217	227	237	2 1.8
439		246	256	266	276	286	296	306	316	326	335	3 2.7
440		345	355	365	375	385	395	404	414	424	434	4 3.6
441		444	454	464	473	483	493	503	513	523	532	5 4.5
442		542	552	562	572	582	591	601	611	621	631	6 5.4
443		640	650	660	670	680	689	699	709	719	729	7 6.3
444		738	748	758	768	777	787	797	807	816	826	8 7.2
445		836	846	856	865	875	885	895	904	914	924	9 8.1
446		933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021	
447	65	031	040	050	060	070	079	089	099	108	118	
448		128	137	147	157	167	176	186	196	205	215	
449		225	234	244	254	263	273	283	292	302	312	
450		321	331	341	350	360	369	379	389	398	408	

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
450	65	321	331	341	350	360	369	379	389	398	408	
451		418	427	437	447	456	466	475	485	495	504	
452		514	523	533	543	552	562	571	581	591	600	
453		610	619	629	639	648	658	667	677	686	696	
454		706	715	725	734	744	753	763	772	782	792	
455		801	811	820	830	839	849	858	868	877	887	10
456		896	906	916	925	935	944	954	963	973	982	1 1.0
457		992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077	2 2.0
458	66	087	096	106	115	124	134	143	153	162	172	3 3.0
459		181	191	200	210	219	229	238	247	257	266	4 4.0
460		276	285	295	304	314	323	332	342	351	361	5 5.0
461		370	380	389	398	408	417	427	436	445	455	6 6.0
462		464	474	483	492	502	511	521	530	539	549	7 7.0
463		558	567	577	586	596	605	614	624	633	642	8 8.0
464		652	661	671	680	689	699	708	717	727	736	9 9.0
465		745	755	764	773	783	792	801	811	820	829	
466		839	848	857	867	876	885	894	904	913	922	
467		932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015	
468	67	025	034	043	052	062	071	080	089	099	108	
469		117	127	136	145	154	164	173	182	191	201	
470		210	219	228	237	247	256	265	274	284	293	9
471		302	311	321	330	339	348	357	367	376	385	1 0.9
472		394	403	413	422	431	440	449	459	468	477	2 1.8
473		486	495	504	514	523	532	541	550	560	569	3 2.7
474		578	587	596	605	614	624	633	642	651	660	4 3.6
475		669	679	688	697	706	715	724	733	742	752	5 4.5
476		761	770	779	788	797	806	815	825	834	843	6 5.4
477		852	861	870	879	888	897	906	916	925	934	7 6.3
478		943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024	8 7.2
479	68	034	043	052	061	070	079	088	097	106	115	9 8.1
480		124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	
481		215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	
482		305	314	323	332	341	350	359	368	377	386	
483		395	404	413	422	431	440	449	458	467	476	
484		485	494	502	511	520	529	538	547	556	565	
485		574	583	592	601	610	619	628	637	646	655	
486		664	673	681	690	699	708	717	726	735	744	8
487		753	762	771	780	789	797	806	815	824	833	1 0.8
488		842	851	860	869	878	886	895	904	913	922	2 1.6
489		931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011	3 2.4
490	69	020	028	037	046	055	064	073	082	090	099	4 3.2
491		108	117	126	135	144	152	161	170	179	188	5 4.0
492		197	205	214	223	232	241	249	258	267	276	6 4.8
493		285	294	302	311	320	329	338	346	355	364	7 5.6
494		373	381	390	399	408	417	425	434	443	452	8 6.4
495		461	469	478	487	496	504	513	522	531	539	9 7.2
496		548	557	566	574	583	592	601	609	618	627	
497		636	644	653	662	671	679	688	697	705	714	
498		723	732	740	749	758	767	775	784	793	801	
499		810	819	827	836	845	854	862	871	880	888	
500		897	906	914	923	932	940	949	958	966	975	

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
500	69	897	906	914	923	932	940	949	958	966	975	
501		984	992	*001	*010	*018	*027	*036	044	*053	*062	
502	70	070	079	088	096	105	114	122	131	140	148	
503		157	165	174	183	191	200	209	217	226	234	
504		243	252	260	269	278	286	295	303	312	321	
505		329	338	346	355	364	372	381	389	398	406	
506		415	424	432	441	449	458	467	475	484	492	
507		501	509	518	526	535	544	552	561	569	578	
508		586	595	603	612	621	629	638	646	655	663	
509		672	680	689	697	706	714	723	731	740	749	
510		757	766	774	783	791	800	808	817	825	834	
511		842	851	859	868	876	885	893	902	910	919	
512		927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003	
513	71	012	020	029	037	046	054	063	071	079	088	
514		096	105	113	122	130	139	147	155	164	172	
515		181	189	198	206	214	223	231	240	248	257	
516		265	273	282	290	299	307	315	324	332	341	
517		349	357	366	374	383	391	399	408	416	425	
518		433	441	450	458	466	475	483	492	500	508	
519		517	525	533	542	550	559	567	575	584	592	
520		600	609	617	625	634	642	650	659	667	675	
521		684	692	700	709	717	725	734	742	750	759	
522		767	775	784	792	800	809	817	825	834	842	
523		850	858	867	875	883	892	900	908	917	925	
524		933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008	
525	72	016	024	032	041	049	057	066	074	082	*090	
526		099	107	115	123	132	140	148	156	165	173	
527		181	189	198	206	214	222	230	239	247	255	
528		263	272	280	288	296	304	313	321	329	337	
529		346	354	362	370	378	387	395	403	411	419	
530		428	436	444	452	460	469	477	485	493	501	
531		509	518	526	534	542	550	558	567	575	583	
532		591	599	607	616	624	632	640	648	656	665	
533		673	681	689	697	705	713	722	730	738	746	
534		754	762	770	779	787	795	803	811	819	827	
535		835	843	852	860	868	876	884	892	900	908	
536		916	925	933	941	949	957	965	973	981	989	
537		997	*006	*014	022	*030	*038	*046	*054	*062	*070	
538	73	078	086	094	102	111	119	127	135	143	151	
539		159	167	175	183	191	199	207	215	223	231	
540		239	247	255	263	272	280	288	296	304	312	
541		320	328	336	344	352	360	368	376	384	392	
542		400	408	416	424	432	440	448	456	464	472	
543		480	488	496	504	512	520	528	536	544	552	
544		560	568	576	584	592	600	608	616	624	632	
545		640	648	656	664	672	679	687	695	703	711	
546		719	727	735	743	751	759	767	775	783	791	
547		799	807	815	823	830	838	846	854	862	870	
548		878	886	894	902	910	918	926	933	941	949	
549		957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028	
550	74	036	044	052	060	068	076	084	092	099	107	

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
550	74	036	044	052	060	068	076	084	092	099	107	
551		115	123	131	139	147	155	162	170	178	186	
552		194	202	210	218	225	233	241	249	257	265	
553		273	280	288	296	304	312	320	327	335	343	
554		351	359	367	374	382	390	398	406	414	421	
555		429	437	445	453	461	468	476	484	492	500	
556		507	515	523	531	539	547	554	562	570	578	
557		586	593	601	609	617	624	632	640	648	656	
558		663	671	679	687	695	702	710	718	726	733	
559		741	749	757	764	772	780	788	796	803	811	
560		819	827	834	842	850	858	865	873	881	889	
561		896	904	912	920	927	935	943	950	958	966	
562		974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043	
563	75	051	059	066	074	082	089	097	105	113	120	
564		128	136	143	151	159	166	174	182	189	197	
565		205	213	220	228	236	243	251	259	266	274	
566		282	289	297	305	312	320	328	335	343	351	
567		358	366	374	381	389	397	404	412	420	427	
568		435	442	450	458	465	473	481	488	496	504	
569		511	519	526	534	542	549	557	565	572	580	
570		587	595	603	610	618	626	633	641	648	656	
571		664	671	679	686	694	702	709	717	724	732	
572		740	747	755	762	770	778	785	793	800	808	
573		815	823	831	838	846	853	861	868	876	884	
574		891	899	906	914	921	929	937	944	952	959	
575		967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035	
576	76	042	050	057	065	072	080	087	095	103	110	
577		118	125	133	140	148	155	163	170	178	185	
578		193	200	208	215	223	230	238	245	253	260	
579		268	275	283	290	298	305	313	320	328	335	
580		343	350	358	365	373	380	388	395	403	410	
581		418	425	433	440	448	455	462	470	477	485	
582		492	500	507	515	522	530	537	545	552	559	
583		567	574	582	589	597	604	612	619	626	634	
584		641	649	656	664	671	678	686	693	701	708	
585		716	723	730	738	745	753	760	768	775	782	
586		790	797	805	812	819	827	834	842	849	856	
587		864	871	879	886	893	901	908	916	923	930	
588		938	945	953	960	967	975	982	989	997	*004	
589	77	012	019	026	034	041	048	056	063	070	078	
590		085	093	100	107	115	122	129	137	144	151	
591		159	166	173	181	188	195	203	210	217	225	
592		232	240	247	254	262	269	276	283	291	298	
593		305	313	320	327	335	342	349	357	364	371	
594		379	386	393	401	408	415	422	430	437	444	
595		452	459	466	474	481	488	495	503	510	517	
596		525	532	539	546	554	561	568	576	583	590	
597		597	605	612	619	627	634	641	648	656	663	
598		670	677	685	692	699	706	714	721	728	735	
599		743	750	757	764	772	779	786	793	801	808	
600		815	822	830	837	844	851	859	866	873	880	

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
600	77	815	822	830	837	844	851	859	866	873	880	
601		887	895	902	909	916	924	931	938	945	952	
602		960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025	
603	78	032	039	046	053	061	068	075	082	089	097	
604		104	111	118	125	132	140	147	154	161	168	
605		176	183	190	197	204	211	219	226	233	240	8
606		247	254	262	269	276	283	290	297	305	312	1 0.8
607		319	326	333	340	347	355	362	369	376	383	2 1.6
608		390	398	405	412	419	426	433	440	447	455	3 2.4
609		462	469	476	483	490	497	504	512	519	526	4 3.2
610		533	540	547	554	561	569	576	583	590	597	5 4.0
611		604	611	618	625	633	640	647	654	661	668	6 4.8
612		675	682	689	696	704	711	718	725	732	739	7 5.6
613		746	753	760	767	774	781	789	796	803	810	8 6.4
614		817	824	831	838	845	852	859	866	873	880	9 7.2
615		888	895	902	909	916	923	930	937	944	951	
616		958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021	
617	79	029	036	043	050	057	064	071	078	085	092	
618		099	106	113	120	127	134	141	148	155	162	
619		169	176	183	190	197	204	211	218	225	232	
620		239	246	253	260	267	274	281	288	295	302	7
621		309	316	323	330	337	344	351	358	365	372	1 0.7
622		379	386	393	400	407	414	421	428	435	442	2 1.4
623		449	456	463	470	477	484	491	498	505	511	3 2.1
624		518	525	532	539	546	553	560	567	574	581	4 2.8
625		588	595	602	609	616	623	630	637	644	650	5 3.5
626		657	664	671	678	685	692	699	706	713	720	6 4.2
627		727	734	741	748	754	761	768	775	782	789	7 4.9
628		796	803	810	817	824	831	837	844	851	858	8 5.6
629		865	872	879	886	893	900	906	913	920	927	9 6.3
630		934	941	948	955	962	969	975	982	989	996	
631	80	003	010	017	024	030	037	044	051	058	065	
632		072	079	085	092	099	106	113	120	127	134	
633		140	147	154	161	168	175	182	188	195	202	
634		209	216	223	229	236	243	250	257	264	271	
635		277	284	291	298	305	312	318	325	332	339	
636		346	353	359	366	373	380	387	393	400	407	
637		414	421	428	434	441	448	455	462	468	475	6
638		482	489	496	502	509	516	523	530	536	543	1 0.6
639		550	557	564	570	577	584	591	598	604	611	2 1.2
640		618	625	632	638	645	652	659	665	672	679	3 1.8
641		686	693	699	706	713	720	726	733	740	747	4 2.4
642		754	760	767	774	781	787	794	801	808	814	5 3.0
643		821	828	835	841	848	855	862	868	875	882	6 3.6
644		880	895	902	909	916	922	929	936	943	949	7 4.2
645		956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017	8 4.8
646	81	023	030	037	043	050	057	064	070	077	084	9 5.4
647		090	097	104	111	117	124	131	137	144	151	
648		158	164	171	178	184	191	198	204	211	218	
649		224	231	238	245	251	258	265	271	278	285	
650		291	298	305	311	318	325	331	338	345	351	

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
650	81	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351	
651		358	365	371	378	385	391	398	405	411	418	
652		425	431	438	445	451	458	465	471	478	485	
653		491	498	505	511	518	525	531	538	544	551	
654		558	564	571	578	584	591	598	604	611	617	
655		624	631	637	644	651	657	664	671	677	684	
656		690	697	704	710	717	723	730	737	743	750	
657		757	763	770	776	783	790	796	803	809	816	
658		823	829	836	842	849	856	862	869	875	882	
659		889	895	902	908	915	921	928	935	941	948	
660		954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014	
661	82	020	027	033	040	046	053	060	066	073	079	7
662		086	092	099	105	112	119	125	132	138	145	1 0.7
663		151	158	164	171	178	184	191	197	204	210	2 1.4
664		217	223	230	236	243	249	256	263	269	276	3 2.1
665		282	289	295	302	308	315	321	328	334	341	4 2.8
666		347	354	360	367	373	380	387	393	400	406	5 3.5
667		413	419	426	432	439	445	452	458	465	471	6 4.2
668		478	484	491	497	504	510	517	523	530	536	7 4.9
669		543	549	556	562	569	575	582	588	595	601	8 5.6
670		607	614	620	627	633	640	646	653	659	666	9 6.3
671		672	679	685	692	698	705	711	718	724	730	
672		737	743	750	756	763	769	776	782	789	795	
673		802	808	814	821	827	834	840	847	853	860	
674		866	872	879	885	892	898	905	911	918	924	
675		930	937	943	950	956	963	969	975	982	988	
676		995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052	
677	83	059	065	072	078	085	091	097	104	110	117	
678		123	129	136	142	149	155	161	168	174	181	
679		187	193	200	206	213	219	225	232	238	245	
680		251	257	264	270	276	283	289	296	302	308	6
681		315	321	327	334	340	347	353	359	366	372	1 0.6
682		378	385	391	398	404	410	417	423	429	436	2 1.2
683		442	448	455	461	467	474	480	487	493	499	3 1.8
684		506	512	518	525	531	537	544	550	556	563	4 2.4
685		569	575	582	588	594	601	607	613	620	626	5 3.0
686		632	639	645	651	658	664	670	677	683	689	6 3.6
687		696	702	708	715	721	727	734	740	746	753	7 4.2
688		759	765	771	778	784	790	797	803	809	816	8 4.8
689		822	828	835	841	847	853	860	866	872	879	9 5.4
690		885	891	897	904	910	916	923	929	935	942	
691		948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004	
692	84	011	017	023	029	036	042	048	055	061	067	
693		073	080	086	092	098	105	111	117	123	130	
694		136	142	148	155	161	167	173	180	186	192	
695		198	205	211	217	223	230	236	242	248	255	
696		261	267	273	280	286	292	298	305	311	317	
697	85	323	330	336	342	348	354	361	367	373	379	
698		386	392	398	404	410	417	423	429	435	442	
699		448	454	460	466	473	479	485	491	497	504	
700		510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
700	84	510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	
701		572	578	584	590	597	603	609	615	621	628	
702		634	640	646	652	658	665	671	677	683	689	
703		696	702	708	714	720	726	733	739	745	751	
704		757	763	770	776	782	788	794	800	807	813	
705		819	825	831	837	844	850	856	862	868	874	
706		880	887	893	899	905	911	917	924	930	936	
707		942	948	954	960	967	973	979	985	991	997	
708	85	003	009	016	022	028	034	040	046	052	058	
709		065	071	077	083	089	095	101	107	114	120	
710		126	132	138	144	150	156	163	169	175	181	
711		187	193	199	205	211	217	224	230	236	242	
712		248	254	260	266	272	278	285	291	297	303	
713		309	315	321	327	333	339	345	352	358	364	
714		370	376	382	388	394	400	406	412	418	425	
715		431	437	443	449	455	461	467	473	479	485	
716		491	497	503	509	516	522	528	534	540	546	
717		552	558	564	570	576	582	588	594	600	606	
718		612	618	625	631	637	643	649	655	661	667	
719		673	679	685	691	697	703	709	715	721	727	
720		733	739	745	751	757	763	769	775	781	788	
721		794	800	806	812	818	824	830	836	842	848	
722		854	860	866	872	878	884	890	896	902	908	
723		914	920	926	932	938	944	950	956	962	968	
724		974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028	
725	86	034	040	046	052	058	064	070	076	082	088	
726		094	100	106	112	118	124	130	136	141	147	
727		153	159	165	171	177	183	189	195	201	207	
728		213	219	225	231	237	243	249	255	261	267	
729		273	279	285	291	297	303	308	314	320	326	
730		332	338	344	350	356	362	368	374	380	386	
731		392	398	404	410	415	421	427	433	439	445	
732		451	457	463	469	475	481	487	493	499	504	
733		510	516	522	528	534	540	546	552	558	564	
734		570	576	581	587	593	599	605	611	617	623	
735		629	635	641	646	652	658	664	670	676	682	
736		688	694	700	705	711	717	723	729	735	741	
737		747	753	759	764	770	776	782	788	794	800	
738		806	812	817	823	829	835	841	847	853	859	
739		864	870	876	882	888	894	900	906	911	917	
740		923	929	935	941	947	953	958	964	970	976	
741		982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035	
742	87	040	046	052	058	064	070	075	081	087	093	
743		099	105	111	116	122	128	134	140	146	151	
744		157	163	169	175	181	186	192	198	204	210	
745		216	221	227	233	239	245	251	256	262	268	
746		274	280	286	291	297	303	309	315	320	326	
747		332	338	344	349	355	361	367	373	379	384	
748		390	396	402	408	413	419	425	431	437	442	
749		448	454	460	466	471	477	483	489	495	500	
750		506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	

7
1 0.7
2 1.4
3 2.1
4 2.8
5 3.5
6 4.2
7 4.9
8 5.6
9 6.3

6
1 0.6
2 1.2
3 1.8
4 2.4
5 3.0
6 3.6
7 4.2
8 4.8
9 5.4

5
1 0.5
2 1.0
3 1.5
4 2.0
5 2.5
6 3.0
7 3.5
8 4.0
9 4.5

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
750	87	506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	
751		564	570	576	581	587	593	599	604	610	616	
752		622	628	633	639	645	651	656	662	668	674	
753		679	685	691	697	703	708	714	720	726	731	
754		737	743	749	754	760	766	772	777	783	789	
755		795	800	806	812	818	823	829	835	841	846	
756		852	858	864	869	875	881	887	892	898	904	
757		910	915	921	927	933	938	944	950	955	961	
758		967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018	
759	88	024	030	036	041	047	053	058	064	070	076	
760		081	087	093	098	104	110	116	121	127	133	
761		138	144	150	156	161	167	173	178	184	190	
762		195	201	207	213	218	224	230	235	241	247	
763		252	258	264	270	275	281	287	292	298	304	
764		309	315	321	326	332	338	343	349	355	360	
765		366	372	377	383	389	395	400	406	412	417	
766		423	429	434	440	446	451	457	463	468	474	
767		480	485	491	497	502	508	513	519	525	530	
768		536	542	547	553	559	564	570	576	581	587	
769		593	598	604	610	615	621	627	632	638	643	
770		649	655	660	666	672	677	683	689	694	700	
771		705	711	717	722	728	734	739	745	750	756	
772		762	767	773	779	784	790	795	801	807	812	
773		818	824	829	835	840	846	852	857	863	868	
774		874	880	885	891	897	902	908	913	919	925	
775		930	936	941	947	953	958	964	969	975	981	
776		986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037	
777	89	042	048	053	059	064	070	076	081	087	092	
778		098	104	109	115	120	126	131	137	143	148	
779		154	159	165	170	176	182	187	193	198	204	
780		209	215	221	226	232	237	243	248	254	260	
781		265	271	276	282	287	293	298	304	310	315	
782		321	326	332	337	343	348	354	360	365	371	
783		376	382	387	393	398	404	409	415	421	426	
784		432	437	443	448	454	459	465	470	476	481	
785		487	492	498	504	509	515	520	526	531	537	
786		542	548	553	559	564	570	575	581	586	592	
787		597	603	609	614	620	625	631	636	642	647	
788		653	658	664	669	675	680	686	691	697	702	
789		708	713	719	724	730	735	741	746	752	757	
790		763	768	774	779	785	790	796	801	807	812	
791		818	823	829	834	840	845	851	856	862	867	
792		873	878	883	889	894	900	905	911	916	922	
793		927	933	938	944	949	955	960	966	971	977	
794		982	988	993	998	*004	009	*015	*020	*026	*031	
795	90	037	042	048	053	059	064	069	075	080	086	
796		091	097	102	108	113	119	124	129	135	140	
797		146	151	157	162	168	173	179	184	189	195	
798		200	206	211	217	222	227	233	238	244	249	
799		255	260	266	271	276	282	287	293	298	304	
800		309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	

6
1 0.6
2 1.2
3 1.8
4 2.4
5 3.0
6 3.6
7 4.2
8 4.8
9 5.4

5
1 0.5
2 1.0
3 1.5
4 2.0
5 2.5
6 3.0
7 3.5
8 4.0
9 4.5

數 對 數 表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
800	90	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	
801		363	369	374	380	385	390	396	401	407	412	
802		417	423	428	434	439	445	450	455	461	466	
803		472	477	482	488	493	499	504	509	515	520	
804		526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	
805		580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	
806		634	639	644	650	655	660	666	671	677	682	
807		687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	
808		741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	
809		795	800	806	811	816	822	827	832	838	843	
810		849	854	859	865	870	875	881	886	891	897	
811		902	907	913	918	924	929	934	940	945	950	6
812		956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004	1 0.6
813	91	009	014	020	025	030	036	041	046	052	057	2 1.2
814		062	068	073	078	084	089	094	100	105	110	3 1.8
815		116	121	126	132	137	142	148	153	158	164	4 2.4
816		169	174	180	185	190	196	201	206	212	217	5 3.0
817		222	228	233	238	243	249	254	259	265	270	6 3.6
818		275	281	286	291	297	302	307	312	318	323	7 4.2
819		328	334	339	344	350	355	360	365	371	376	8 4.8
820		381	387	392	397	403	408	413	418	424	429	9 5.4
821		434	440	445	450	455	461	466	471	477	482	
822		487	492	498	503	508	514	519	524	529	535	
823		540	545	551	556	561	566	572	577	582	587	
824		593	598	603	609	614	619	624	630	635	640	
825		645	651	656	661	666	672	677	682	687	693	
826		698	703	709	714	719	724	730	735	740	745	
827		751	756	761	766	772	777	782	787	793	798	
828		803	808	814	819	824	829	834	840	845	850	
829		855	861	866	871	876	882	887	892	897	903	
830		908	913	918	924	929	934	939	944	950	955	5
831		960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007	1 0.5
832	92	012	018	023	028	033	038	044	049	054	059	2 1.0
833		065	070	075	080	085	091	096	101	106	111	3 1.5
834		117	122	127	132	137	143	148	153	158	163	4 2.0
835		169	174	179	184	189	195	200	205	210	215	5 2.5
836		221	226	231	236	241	247	252	257	262	267	6 3.0
837		273	278	283	288	293	298	304	309	314	319	7 3.5
838		324	330	335	340	345	350	355	361	366	371	8 4.0
839		376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	9 4.5
840		428	433	438	443	449	454	459	464	469	474	
841		480	485	490	495	500	505	511	516	521	526	
842		531	536	542	547	552	557	562	567	572	578	
843		583	588	593	598	603	609	614	619	624	629	
844		634	639	645	650	655	660	665	670	675	681	
845		686	691	696	701	706	711	716	722	727	732	
846		737	742	747	752	758	763	768	773	778	783	
847		788	793	799	804	809	814	819	824	829	834	
848		840	845	850	855	860	865	870	875	881	886	
849		891	896	901	906	911	916	921	927	932	937	
850		942	947	952	957	962	967	973	978	983	988	

數 對 數 表

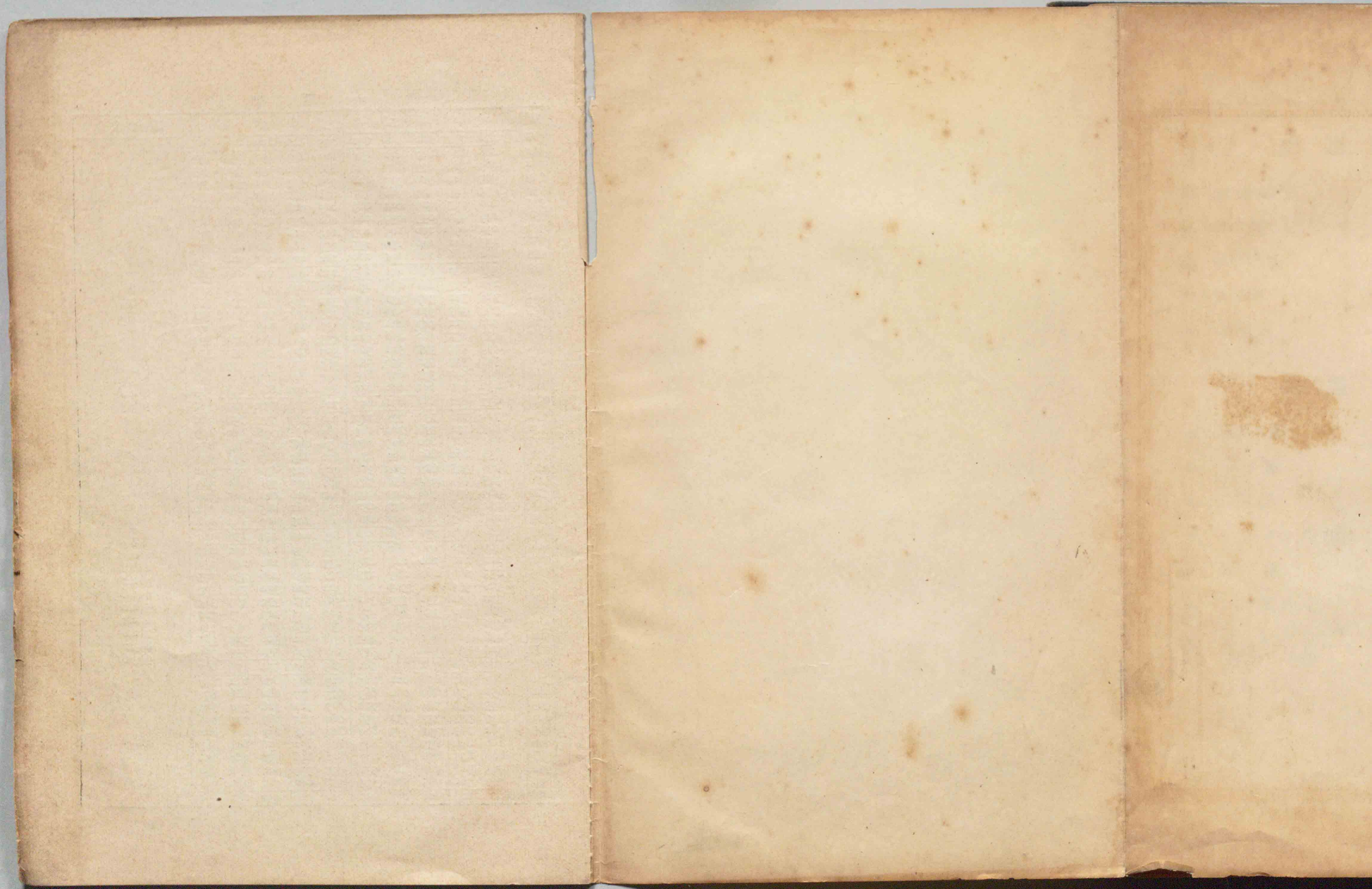
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
850	92	942	947	952	957	962	967	973	978	983	688	
851		993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039	
852	93	044	049	054	059	064	069	075	080	085	090	
853		095	100	105	110	115	120	125	131	136	141	
854		146	151	156	161	166	171	176	181	186	192	
855		197	202	207	212	217	222	227	232	237	242	6
856		247	252	258	263	268	273	278	283	288	293	1 0.6
857		298	303	308	313	318	323	328	334	339	344	2 1.2
858		349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	3 1.8
859		399	404	409	414	420	425	430	435	440	445	4 2.4
860		450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	5 3.0
861		500	505	510	515	520	526	531	536	541	546	6 3.6
862		551	556	561	566	571	576	581	586	591	596	7 4.2
863		601	606	611	616	621	626	631	636	641	646	8 4.8
864		651	656	661	666	671	676	682	687	692	697	9 5.4
865		702	707	712	717	722	727	732	737	742	747	
866		752	757	762	767	772	777	782	787	792	797	
867		802	807	812	817	822	827	832	837	842	847	
868		852	857	862	867	872	877	882	887	892	897	
869		902	907	912	917	922	927	932	937	942	947	
870		952	957	962	967	972	977	982	987	992	997	5
871	94	002	007	012	017	022	027	032	037	042	047	1 0.5
872		052	057	062	067	072	077	082	086	091	096	2 1.0
873		101	106	111	116	121	126	131	136	141	146	3 1.5
874		151	156	161	166	171	176	181	186	191	196	4 2.0
875		201	206	211	216	221	226	231	236	240	245	5 2.5
876		250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	6 3.0
877		300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	7 3.5
878		349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	8 4.0
879		399	404	409	414	419	424	429	433	438	443	9 4.5
880		448	453	458	463	468	473	478	483	488	493	
881		498	503	507	512	517	522	527	532	537	542	
882		547	552	557	562	567	571	576	581	586	591	
883		596	601	606	611	616	621	626	630	635	640	
884		645	650	655	660	665	670	675	680	685	689	
885		694	699	704	709	714	719	724	729	734	738	
886		743	748	753	758	763	768	773	778	783	787	4
887		792	797	802	807	812	817	822	827	832	836	1 0.4
888		841	846	851	856	861	866	871	876	880	885	2 0.8
889		890	895	900	905	910	915	919	924	929	934	3 1.2
890		939	944	949	954	959	963	968	973	978	983	4 1.6
891		988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032	5 2.0
892	95	036	041	046	051	056	061	066	071	075	080	6 2.4
893		085	090	095	100	105	109	114	119	124	129	7 2.8
894		134	139	143	148	153	158	163	168	173	177	8 3.2
895		182	187	192	197	202	207	211	216	221	226	9 3.6
896		231	236	240	245	250	255	260	265	270	274	
897		279	284	289	294	299	303	308	313	318	323	
898		328	332	337	342	347	352	357	361	366	371	
899		376	381	386	390	395	400	405	410	415	419	
900		424	429	434	439	444	448	453	458	463	468	

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
900	95	424	429	434	439	444	448	453	458	463	468	
901		472	477	482	487	492	497	501	506	511	516	
902		521	525	530	535	540	545	550	554	559	564	
903		569	574	578	583	588	593	598	602	607	612	
904		617	622	626	631	636	641	646	650	655	660	
905		665	670	674	679	684	689	694	698	703	708	
906		713	718	722	727	732	737	742	746	751	756	
907		761	766	770	775	780	785	789	794	799	804	
908		809	813	818	823	828	832	837	842	847	852	
909		856	861	866	871	875	880	885	890	895	899	
910		904	909	914	918	923	928	933	938	942	947	
911		952	957	961	966	971	976	980	985	990	995	5
912		999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042	1 0.5
913	96	047	052	057	061	066	071	076	080	085	090	2 1.0
914		095	099	104	109	114	118	123	128	133	137	3 1.5
915		142	147	152	156	161	166	171	175	180	185	4 2.0
916		190	194	199	204	209	213	218	223	227	232	5 2.5
917		237	242	246	251	256	261	265	270	275	280	6 3.0
918		284	289	294	298	303	308	313	317	322	327	7 3.5
919		332	336	341	346	350	355	360	365	369	374	8 4.0
920		379	384	388	393	398	402	407	412	417	421	9 4.5
921		426	431	435	440	445	450	454	459	464	468	
922		473	478	483	487	492	497	501	506	511	515	
923		520	525	530	534	539	544	548	553	558	562	
924		567	572	577	581	586	591	595	600	605	609	
925		614	619	624	628	633	638	642	647	652	656	
926		661	666	670	675	680	685	689	694	699	703	
927		708	713	717	722	727	731	736	741	745	750	
928		755	759	764	769	774	778	783	788	792	797	
929		802	806	811	816	820	825	830	834	839	844	
930		848	853	858	862	867	872	876	881	886	890	4
931		895	900	904	909	914	918	923	928	932	937	1 0.4
932		942	946	951	956	960	965	970	974	979	984	2 0.8
933		988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030	3 1.2
934	97	035	039	044	049	053	058	063	067	072	077	4 1.6
935		081	086	090	095	100	104	109	114	118	123	5 2.0
936		128	132	137	142	146	151	155	160	165	169	6 2.4
937		174	179	183	188	192	197	202	206	211	216	7 2.8
938		220	225	230	234	239	243	248	253	257	262	8 3.2
939		267	271	276	280	285	290	294	299	304	308	9 3.6
940		313	317	322	327	331	336	340	345	350	354	
941		359	364	368	373	377	382	387	391	396	400	
942		405	410	414	419	424	428	433	437	442	447	
943		451	456	460	465	470	474	479	483	488	493	
944		497	502	506	511	516	520	525	529	534	539	
945		543	548	552	557	562	566	571	575	580	585	
946		589	594	598	603	607	612	617	621	626	630	
947		635	640	644	649	653	658	663	667	672	676	
948		681	685	690	695	699	704	708	713	717	722	
949		727	731	736	740	745	749	754	759	763	768	
950		772	777	782	786	791	795	800	804	809	813	

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
950	97	772	777	782	786	791	795	800	804	809	813	
951		818	823	827	832	836	841	845	850	855	859	
952		864	868	873	877	882	886	891	896	900	905	
953		909	914	918	923	928	932	937	941	946	950	
954		955	959	964	968	973	978	982	987	991	996	
955	98	000	005	009	014	019	023	028	032	037	041	
956		046	050	055	059	064	068	073	078	082	087	
957		091	096	100	105	109	114	118	123	127	132	
958		137	141	146	150	155	159	164	168	173	177	
959		182	186	191	195	200	204	209	214	218	223	
960		227	232	236	241	245	250	254	259	263	268	
961		272	277	281	286	290	295	299	304	308	313	5
962		318	322	327	331	336	340	345	349	354	358	1 0.5
963		363	367	372	376	381	385	390	394	399	403	2 1.0
964		408	412	417	421	426	430	435	439	444	448	3 1.5
965		453	457	462	466	471	475	480	484	489	493	4 2.0
966		498	502	507	511	516	520	525	529	534	538	5 2.5
967		543	547	552	556	561	565	570	574	579	583	6 3.0
968		588	592	597	601	605	610	614	619	623	628	7 3.5
969		632	637	641	646	650	655	659	664	668	673	8 4.0
970		677	682	686	691	695	700	704	709	713	717	9 4.5
971		722	726	731	735	740	744	749	753	758	762	
972		767	771	776	780	784	789	793	798	802	807	
973		811	816	820	825	829	834	838	843	847	851	
974		856	860	865	869	874	878	883	887	892	896	
975		900	905	909	914	918	923	927	932	936	941	
976		945	949	954	958	963	967	972	976	981	985	
977		989	994	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029	
978	99	034	038	043	047	052	056	061	065	069	074	
979		078	083	087	092	096	100	105	109	114	118	
980		123	127	131	136	140	145	149	154	158	162	4
981		167	171	176	180	185	189	193	198	202	207	1 0.4
982		211	216	220	224	229	233	238	242	247	251	2 0.8
983		255	260	264	269	273	277	282	286	291	295	3 1.2
984		300	304	308	313	317	322	326	330	335	339	4 1.6
985		344	348	352	357	361	366	370	374	379	383	5 2.0
986		388	392	396	401	405	410	414	419	423	427	6 2.4
987		432	436	441	445	449	454	458	463	467	471	7 2.8
988		476	480	484	489	493	498	502	506	511	515	8 3.2
989		520	524	528	533	537	542	546	550	555	559	9 3.6
990		564	568	572	577	581	585	590	594	599	603	
991		607	612	616	621	625	629	634	638	642	647	
992		651	656	660	664	669	673	677	682	686	691	
993		695	699	704	708	712	717	721	726	730	734	
994		739	743	747	752	756	760	765	769	774	778	
995		782	787	791	795	800	804	808	813	817	822	
996		826	830	835	839	843	848	852	856	861	865	
997		870	874	878	883	887	891	896	900	904	909	
998		913	917	922	926	930	935	939	944	948	952	
999		957	961	965	970	974	978	983	987	991	996	
1000	00	000	004	009	013	017	022	026	030	035	039	



明治四十三年十一月一日印
 明治四十三年十一月五日發
 明治四十四年二月九日訂正再版印刷
 明治四十四年二月十二日訂正再版發行

師範
 教育
 數學教科書算術及代數

定價 金 壹 圓



著者 高木貞治

發行者 西野虎吉

印刷者 野村宗十郎

發行所 開成館

販賣所 三木佐助

販賣所 林平次郎

東京市小石川區小日向水道町七十三番地

東京市京橋區築地三丁目十一番地

東京市小石川區小日向水道町七十三番地

大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角

東京市日本橋區數寄屋町九番地

株式會社東京樂活版造所印刷

738

東京帝國大學理科學教授

理學博士

高木貞治

著

廣算術教科書

上下全二册

新算術教科書

全一册
(師範豫科用)

師範數學教科書
算術及代數

全一册

師範數學教科書
平面幾何

全一册
(附三角法)

師範數學教科書
立體幾何

全一册

開成館藏版

