師範教育

數學教科書

平面幾何

文部省檢定濟

明治四十四年十一月三十日 師範學校數學科用

師範教育

數學教科書

〔平面幾何〕

東京帝國大學理科大學教授
理學博士
高木貞治
編著

開成館藏版
東京

例言

本書は師範學校の教科用として編纂したるものにして,算術及代數に關係せる部分は既に發刊せられ,現に多數の學校の使用する所たり。

材料の選擇及び排置は,算術及代數の部分と同じく,文部省所定の教授要目に準據したり。題して平面幾何といふと雖も,從來算術にて授けたる求積の計算を包括す。

中等學科に於ける數學,特に幾何學の教授は二重の目的を有す,卽ち幾何學上の知識を授くると共に,演繹推理の訓練を與ふべきものなり。而も從來稍前者を犠牲として後者を偏重し過ぎたるかの觀あり。此弊を矯めんことは編者の力を致したる所なり。

本書の内容に於て別に奇を弄し異を樹つる所なしと雖も,一二特に注意を請ふべき點を擧ぐれば,次の如し。

一　第一篇,第二篇は直線圖形及び圓の性質を論じ,第一學年の教課となすべきものなり。此部分に於ては,特に嚴密なる推理に練れしむることを主としたり。

又第二篇に於て,先づ圓と直線及び二つの圓の位置の關係を說きて,直に作圖題に連續せり。是れ第一篇と作圖題とを成るべく近接せしめんが爲に外ならず。

二　第三篇は面積及び比例を論じ,第二學年の終末期に於て,代數學に於ける比及び比例の篇を了へたる後に課すべきものなり。長さ,面積又は其

比を,其數値を離れて直に之を一つの量として取扱ふこと,多年の惡習にして,又斯くすることが唯一の嚴正なる方法なるかに認められたるが如し。然れども此方法は中等教育に於て決して完全に遂行せらるべきものに非ざるが故に,實際の教授は皮相的となり,徒に生徒の思想を混亂せしむるに終るべく,且つ算術及代數と幾何學との連絡を斷ち,數學科の統一的教授の趣意に違背せるものなり。

是故に本書に於ては幾何學的の量及び比の數値を用ふることに躊躇せず,通約すべからざる量の比は,無限小數を用ひて之を表はし,生徒の常識に訴へて,理會を確實ならしむることを期せり。

圓周及び圓の面積の計算に於ても,極限の概念の淺薄なる說明を避け,專ら常識を基礎となしたり。

三 第四篇は三角函數を論じ,第三學年に於て課すべきものなり。特に其第三章に於て一般三角形の邊と角との關係を說きたり。是は,文部省所定の教授要目に缺けたる所なれども,之を三角法の續きと見做さず,寧ろ平面幾何學全體の總復習として取扱ふとき,最も有效なるべしと信ず。

卷末に數及び三角函數の四桁の對數表を添へたり。代數に於ける對數の教授にも便宜此表を用ひて妨なかるべし。

明治四十四年七月 著者

目次

定理及作圖題索引

記號

∠	角	△	三角形	▭	矩形
⊥	垂直			∥	平行
≡	合同			≃	相似

師範教育

數學教科書

平面幾何

緒論

1. 立體。面。線。點。

凡テ物體ハ空間ノ一部分ヲ占メ充タス。物體ノ物質上ノ性質ヲ離レテ,單ニ其占ムル空間ノ一部分ノ形狀,大小,位置ノミヲ考フルトキハ,之ヲ**立體**トイフ。

立體ノ境界ヲ**面**トス。

面又ハ面ノ一部分ヲ限ル境界(卽チ其邊端)ヲ**線**トス。

線又ハ線ノ一部分ヲ限ル境界(卽チ其端)ヲ**點**トス。

面ニハ廣サアレドモ厚サナシ。線ニハ長サア

レドモ,廣サ厚サナシ。點ハ全ク形狀,大小ヲ有セズ,唯位置アルノミ。

運動スル點ノ通過セル跡ハ線,運動スル線ノ掃過セル跡ハ面,運動スル面ノ掃過セル跡ハ立體ナリ。

立體,面,線,點又ハ其集リヲ**圖形**トイフ。

公理。圖形ハ其形及ビ大サヲ變ゼズシテ其位置ヲ變ズルコトヲ得。

2. 直線。

線ノ中ニテ最モ簡單ニシテ且最モ重要ナルヲ直線トス。緊張シタル細キ絲ハ直線ノ一部分ノ形象ヲ呈ス。

點ハ直線ノ上ヲ相反セル二ツノ向キニ動クコトヲ得。直線ハ双方ノ向キニ亙リテ限界ナシ。

直線 XY ノ上ニ一ツノ點 A ヲ考フルトキハ,此點 A ハ直線ヲ其兩側ナル二ツノ部分ニ分ツ。即チ一ツハ A ヨリ X ノ方ヘ限リナク延ビタル側,又一ツハ A ヨリ Y ノ方ヘ限リナク延ビタル側ナリ。此等二ツノ部分ヲ特ニ**半直線**トイヒ,A ヲ半直線

ノ端(又ハ起點)トイフ。

A ノ外ニナホ一ツノ點 B ヲ直線上ニ取ルトキハ,A,B ハ其間ニアル直線ノ一部分ヲ限ル。カヤウニ兩端ニ限界アル直線ノ一部分ヲ特ニ**線分**(又ハ有限直線)トイヒ,其他ノ部分ヲ線分ノ**延長**トイフ。線分ト區別スルガタメニ二ツノ向キニ限ナキ直線ノ全部ヲ**無限直線**トモイフ。

線分,無限直線,半直線等ノ區別ヲ明ニスルニハ,線分 AB, A,B ヲ通ル(無限)直線(又ハ單ニ直線 AB),半直線 AX ナドトイフ語ヲ用フ。

線分 AB ヲ二ツノ向キニ延長スルコトヲ得。延長ノ方向ヲ區別スルニハ,AB ノ延長,又ハ BA ノ延長トイフヲ例トス。

二ツ以上ノ線分(又ハ半直線)ガ連續シテ作レル線ヲ**折線**又ハ**屈折線**トイヒ,イヅレノ部分モ直線ニアラザル線ヲ**曲線**トイフ。

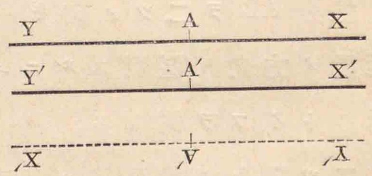
3. 直線ニ關スル公理。

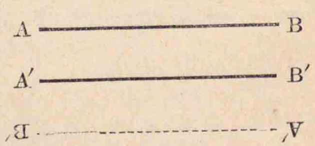
公理。 二ツノ定點ヲ通ル直線ハ必ズ唯一ツアリ。

故ニ二ツノ點ヲ共有スル直線ハ全ク相一致スベシ。又

一ツノ直線ヲ其上ノ二ツノ點ガ他ノ直線ノ上ニ落ツルヤウニ置クトキハ,二ツノ直線ハ全ク相重ナル。

一ツノ直線 XY ノ上ノ任意ノ一定點 A ガ他ノ直線 $X'Y'$ ノ上ノ任意ノ一定點 A' ノ上ニ合スルヤウニ,此等ノ直線ヲ重ネ合ハスルコトヲ得。而モカヤウニ二ツノ直線ヲ重ネ合ハスル仕方ハ二通リアリ。卽チ半直線 AX ガ半直線 $A'X'$ ノ上ニ重ナリ,從テ半直線 AY ガ $A'Y'$ ノ上ニ重ナルヤウニスルコトヲ得,又半直線 AX ガ $A'Y'$ ノ上ニ重ナリ,從テ AY ガ

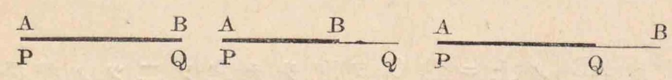




$A'X'$ ノ上ニ重ナルヤウニスルコトヲ得。是故ニ一致シ得ベキ二ツノ線分 AB, $A'B'$ ヲ重ネ合ハスルニモ,亦二通リノ仕方アリ。卽チ A ハ A' ト合ヒ, B ハ B' ト合フヤウニスルコトヲ得,又 A ハ B' ト合ヒ, B ハ A' ト合フヤウニスルコトヲ得。

4. 長サノ比較。長サノ和。

二ツノ線分 AB, PQ ガアルトキ,之ヲ重ネテ其長サヲ比較スルコトヲ得。卽チ點 A ヲ點 P ノ上ニ合ハセ,線分 AB ヲ線分 PQ ノ上ニ於テ P ニ對シテ Q ト同ジ側ニ重ナルヤウニ置クトキ,



(一) 點 B ガ點 Q ニ合スルトキハ,線分 AB, PQ ハ相等シキ長サヲ有ス,又ハ AB, PQ ハ相等シトイフ。($AB=PQ$)

(二) 點 B ガ線分 PQ ノ上(P ト Q トノ間)ニ落ツルトキハ,線分 AB ハ PQ ヨリモ短シ(小ナリ)トイフ。($AB<PQ$)

(三) 點 B ガ線分 PQ ノ延長ノ上ニ落ツルトキ

ハ(卽チQガA, Bノ間ニ來ルトキハ),線分ABハPQヨリモ長シ(大ナリ)トイフ。(AB>PQ)

二ツノ線分AB, PQガアルトキ, ABノ延長ノ上ニ於テPQニ等シキ線分BCヲ取ルトキハ,線分ACハ卽チ二ツノ線分AB, PQノ和ナリ。

二ツヨリ多クノ線分ガアルトキハ,同ジ手續ヲ幾度モ續ケ行ヒテ,此等ノ線分ノ**和**ナル一定ノ線分ヲ得。

又線分ABガ線分PQヨリモ大ナルトキハ,線分ABノ上ニ於テ, PQニ等シキ線分ACヲ取ルコトヲ得。然ラバ線分CBハ卽チ線分AB, PQノ**差**ナリ。

線分ABノ上ニ點Cヲ取リテ之ヲ二ツノ線分AC, CBニ分ツトキ,此等二ツノ線分ガ相等シキトキハ,點Cヲ線分ABノ**中點**トイフ。此場合ニ線分AC又ハCBハ線分ABノ二分ノ一$\left(\frac{1}{2}AB\right)$, 又ABハACノ二倍(2. AC)ニ等シトイフ。

二ツノ定點ヲ兩端トセル線分ノ長サヲ,此等**二ツノ點ノ距離**トイフ。

問題

線分ABノ中點ヲMトシ,直線ABノ上ニ任意ノ點Cヲ取ルトキ,線分MCハCガ線分ABノ上ニアルトキニハ,線分AC, BCノ差ノ半分ニ等シク,又Cガ線分ABノ延長ノ上ニアルトキニハ,此等ノ線分ノ和ノ半分ニ等シ。

5. 平面ニ關スル公理。

面ノ中,最モ簡單ナルモノヲ**平面**トス。平面ハ限界ヲ有セズ。靜止セル水面,善ク削ラレタル板ノ面ナドハ平面ノ一部分ノ形象ヲ呈ス。

平面ノ上ニアル二ツノ點ヲ通ル直線ハ全ク此平面ノ上ニアリ。

平面ノ上ニアル直線ハ此平面ヲ其兩側ナル二ツノ部分ニ分ツ。其一方ニアル一ツノ點ト他ノ一方ニアル一ツノ點トヲ連ヌル線ハ必ズ此直線ト交ハル。

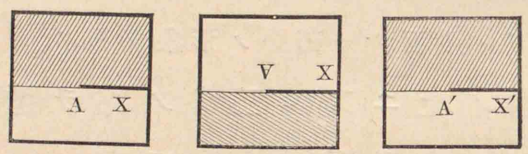
二ツノ點(從テ此二ツノ點ヲ通ル直線)ヲ共有スル平面ハ幾ツニテモアリ。サレド

同一直線上ニアラザル三ツノ點ヲ含ム(通ル)平面ハ一ツハ必ズアレドモ,一ツヨリ多クハナシ。

故ニ同一直線上ニアラザル三ツノ點ヲ共有スル平面ハ全ク相一致スベシ。

一ツノ平面ノ上ノ一ツノ半直線 AX ガ他ノ平面ノ上ノ半直線 A′X′ ト合スルヤウニ,此等ノ平面ヲ重ネ合ハスルコトヲ得。而モ之ヲナスニ二通リノ仕方アリ。即チ圖ニ於テ甲ノ平面ノ陰影ヲ

甲　乙



附ケタル一半ガ,乙ノ平面ノ陰影ヲ附ケタル一半ト重ナルヤウニスルコトヲ得。又甲ノ平面ノ陰影ヲ附ケタル一半ガ,乙ノ平面ノ陰影ヲ附ケザル一半ト重ナルヤウニスルコトヲ得。(甲ノ平面ヲ其ママ乙ノ平面ノ上ニ置クコトヲ得,又甲ノ平面ヲ裏返シテ之ヲ乙ノ平面ノ上ニ置クコトヲ得)。

平面上ノ一ツノ直線ヲ折目トシテ平面ヲ折返シ,此直線ノ一側ヲ他ノ一側ノ上ニ重ヌルコトヲ得。

6. 平面圖形。

一ツノ平面ノ上ニアル線及ビ點ヨリ成レル圖形ヲ**平面圖形**トイフ。

平面圖形ノ中ノ同一直線上ニアラザル三ツノ點ヲ他ノ平面ノ上ニ置クトキハ,圖形ハ全ク此平面ノ上ニ落ツベシ。

折線及ビ曲線ハ必ズシモ平面圖形ニアラズ。全ク一ツノ平面ノ上ニアル曲線ヲ**平面曲線**トイフ。

7. 幾何學。

幾何學ハ圖形ノ性質ヲ論ズル數學ノ一分科ニシテ,專ラ平面圖形ヲ論ズルヲ**平面幾何學**トス。

幾何學ニ於ケル講究ノ方法ハ圖形ヲ觀察シテ其性質ヲ推測スルニハアラズ,經驗又ハ觀察ニヨリテ眞正ト認メラレタル少數ノ簡單ナル原則即チ**公理**ヲ基礎トシ,專ラ推理ニヨリテ他ノ事項ノ

眞正ナルコトヲ斷定スルナリ。之ヲ證明トイフ。

證明スベキ事項ヲ言ヒ表セル命題ヲ**定理**トイヒ,一ツノ定理ニヨリテ直ニ推知シ得ベキ命題ヲ其**系**トイフ。

幾何學ノ學習ハ啻ニ重要ナル知識ヲ授クルノミニ止マラズ,精確ナル推理ノ練習トシテ敎育上最モ尊重セラルルモノナリ。

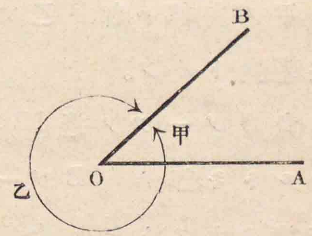
第一篇

直線圖形

第一章 角 垂線

8. 角。

同ジ點Oヨリ出ヅル二ツノ半直線OA, OBハ**角**ヲ作ル。此點Oヲ角ノ**頂點**トイヒ,二ツノ半直線OA, OBヲ角ノ**邊**トイフ。



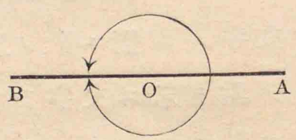
角ヲ示スニハ,其頂點ヲ示ス文字ノ兩側ニ各〻ノ邊ノ上ノ點ヲ示ス文字ヲ書ク。誤解ノ虞ナキトキニハ單ニ頂點ヲ示ス文字ノミヲ用ヒテ角ヲ示スコトヲ得。例ヘバ圖ニ示セル角ヲ角AOB又ハ單ニ角O (∠AOB, ∠O) ト書ク。

角AOBノ頂點Oヨリ出ヅル半直線ガ初メOAノ位置ニアリ,ソレヨリ此平面上ニ於テOヲ中心トシテ同ジ向キニ廻轉シ,終ニOBノ位置ニ至リ

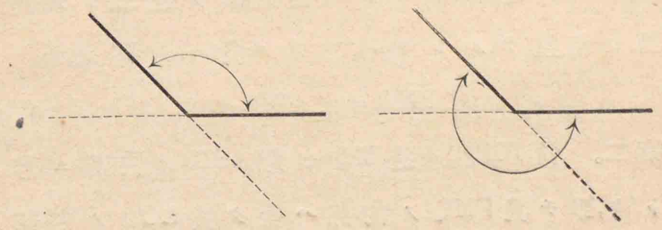
ヲ止マリタリト考フルトキハ,此半直線ハ角 AOB ダケ廻轉セリトイヒ,半直線ガ廻轉セル際ニ掃過セル平面ノ部分ヲ此角ノ內部トイヒ,其他ノ部分ヲ外部トイフ。

カヤウニ O ヨリ出ヅル半直線ガ OA ノ位置ヨリ OB ノ位置マデ廻轉スル向キハ甲,乙二通リアリ,故ニ同一ノ點ヨリ出ヅル二ツノ半直線ハ甲,乙二ツノ角ヲ作ル。甲ノ外部ハ卽チ乙ノ內部ニシテ,甲ノ內部ハ卽チ乙ノ外部ナリ。此二ツノ角ヲ共軛角トイフ。

角 O ノ一ツノ邊 OB ガ他ノ一ツノ邊 OA ノ延長ナルトキ,卽チ AOB ガ一直線ヲナストキハ,此角ヲ平角トイフ。平角ノ共軛角モ平角ナリ。



OA, OB ノ作レル角ガ平角ニアラザルトキハ,二ツノ共軛角ノ中,一ツハ其邊ノ延長ヲ內部ニ含マズ,之ヲ劣角トイフ。又一ツハ其邊ノ延長ヲ內部ニ含ム,之ヲ優角トイフ。劣角ハ全ク其邊ノ一側ニアリ,優角ハ其邊ノ兩側ニ亙ル。



注意。 是ヨリ後,單ニ角トアルハ,劣角ヲ指スモノト知ルベシ。

9. 角ノ比較。

二ツノ角 AOB, PMQ ガアルトキ,頂點 M ガ頂點 O ノ上ニ,邊 MP ガ邊 OA ノ上ニ重ナルヤウニ角 PMQ ノ平面ヲ角 AOB ノ平面ノ上ニ置クニ二通リノ仕方アリ (第5節參照)。

二ツノ角ノ大小ヲ比較スルニハ,角 PMQ ノ內部* ガ角 AOB ノ內部* ト OA ノ同ジ側ニアルヤウニ角 PMQ ノ平面ヲ角 AOB ノ平面ノ上ニ置クベシ。カヤウニスルトキ,ココニ三ツノ場合ヲ生ズ。

第一。角 PMQ ノ今一ツノ邊 MQ ガ角 AOB ノ第二ノ邊 OB ノ上ニ重ナルトキ,卽チ角 PMQ ト角 AOB

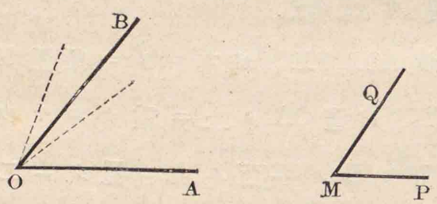
* 一層精密ニ言ハバ,角 PMQ ノ內部ノ邊 MP ニ接スル部分ガ角 AOB ノ內部ノ邊 OA ニ接スル部分ノ上ニ重ナルヤウニスルナリ。二ツノ角ノ中ニ優角ガアルトキニハ,カヤウニ言フ必要アルベシ。

トノ二ツノ邊ガソレゾレ相重ナリ且二ツノ角ノ内部ガ相重ナルトキハ,二ツノ角ハ相等シ。

$$\angle PMQ = \angle AOB$$

第二。角PMQノ邊MQガ角AOBノ内部ニ落ツルトキ,卽チ角PMQノ内部ハ全ク角AOBノ内部ノ一部分ノ上ニ重ナルトキハ,角PMQハ角AOBヨリモ小ナリ。

$$\angle PMQ < \angle AOB$$



第三。角PMQノ邊MQガ角AOBノ外部ニ落チ,卽チ角PMQノ内部ノ一部分ノミガ全ク角AOBノ内部ヲ被フトキ,角PMQハ角AOBヨリモ大ナリ。

$$\angle PMQ > \angle AOB$$

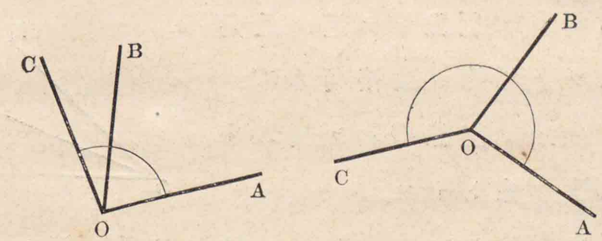
注意一。 相等シキ二ツノ角ヲ重ネ合ハスルニ二通リノ仕方アリ。例ヘバ∠AOBト∠PMQトガ相等シキトキ,邊OAヲ邊MPノ上ニ,邊OBヲ邊MQノ上ニ重ヌルコトヲ得,又邊OAヲ邊MQ

ノ上ニ,邊OBヲ邊MPノ上ニ重ヌルコトヲ得。

注意二。 角ノ大小ハ其邊ノ大小ニハ少シモ關係ナシ。元來角ノ邊ハ半直線ニテ,圖ニハ其一部分ヲ示スナリ。

10. 角ノ和。接角。

定義。 二ツノ角ガ頂點及ビ一ツノ邊ヲ共有シ,



各ノ角ノ内部ガ他ノ角ノ外部ニアルトキハ,之ヲ接角トイフ。

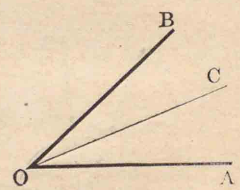
圖ニ於テ∠AOB, ∠BOCハ接角ナリ。此場合ニ二ツノ角ニ共通ナラザル邊OA, OCノ作ル二ツノ共軛角AOCノ中,OBヲ内部ニ含メルモノガ二ツノ角AOB, BOCノ**和**ナリ。

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$$

甲,乙二ツノ角ノ和ヲ作ルニハ,乙ニ等シキ甲ノ

接角ヲ作ルベシ。此等ノ接角ノ和ハ卽チ甲,乙二ツノ角ノ和ナリ。二ツヨリ多クノ角ガアルトキニハ,先ヅ其中,二ツノ角ノ和ヲ作リ,更ニ此和ト第三ノ角トノ和ヲ作リ,次第ニカヤウニシテ,スベテノ角ノ和ヲ得ベシ。此場合ニ一ツ一ツノ角ヲ次第ニ採リ行ク順序ヲ如何ヤウニシテモ,和トシテハ一定ノ大サノ一ツノ角ヲ得ベシ。

角AOBノ頂點Oヲ通リ此角ヲ二ツノ相等シキ接角AOC, COBニ分ツ直線OCヲ角AOBノ二等分線トイフ。



OCヲ折目トシテ角AOBノ平面ヲ折リ返ストキハ,邊OBハ邊OAノ上ニ重ナルベシ。

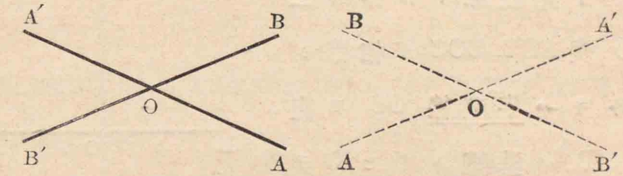
11. 對頂角。

定義。 角AOBノ二ツノ邊ナル半直線OA, OBノ延長ヲOA′, OB′トスルトキ, OA′, OB′ノ作ル角A′OB′ヲ角AOBノ**對頂角**トイフ。

定理一。 對頂角ハ相等シ。

角AOBト角A′OB′トガ對頂角ナルトキハ角

B′OA′ヲ角BOAト重ネ合ハスルコトヲ得ルヲ證明スベシ。



證。 此圖形ト全ク相等シキ圖形ヲ考ヘ,點Oハ其ママニシOB′ヲOAノ上ニ, OAヲOB′ノ上ニ重ネタリト考ヘヨ(第二ノ圖形ノ平面ヲ裏返シニシテ∠B′OAヲ∠AOB′ノ上ニ置クナリ)。シカスルトキハ, OB′ノ延長OBハOAノ延長OA′ノ上ニ重ナリ, OAノ延長OA′ハOB′ノ延長OBノ上ニ重ナル。卽チ角A′OB′ハ角BOAノ上ニ重ナル。故ニ

$$\angle AOB = \angle A'OB'$$

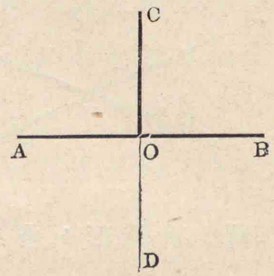
問　題

1. 或角ノ二等分線(ノ延長)ハ其對頂角ヲ二等分ス。

2. 上ノ圖ニ於テ角AOB′ノ二等分線ヲ折目トシテ平面ヲ折リ返ストキハ,角A′OB′ハ角AOBニ重ナル。

12. 垂線。

定義。 直線ABノ上ノ點Oヨリ出ヅル半直線OCト此直線トガ作ル二ツノ角AOC, BOCガ相等シキトキハ,半直線OCヲ直線ABノ**垂線**トイヒ,Oヲ此垂線ノ**足**トイフ。



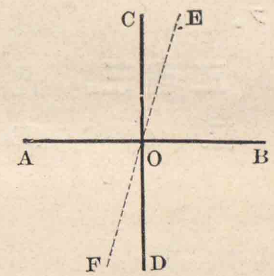
OCノ延長ヲODトセヨ。

∠BOC, ∠AOCハ相等シキガ故ニ, OCヲ折目トシテ平面ヲ折リ返ストキハ, OBハOAニ重ナル。故ニ角AODト角BODトモ亦相等シ。即チ半直線ODモ亦ABノ垂線ナリ。ヨリテ直線CDハABニ**垂直**ナリトイフ。

角AOD, BODハソレゾレ其對頂角BOC, AOCニ等シク,角AOCト角BOCトハ相等シキガ故ニ, Oヲ頂點トセル四ツノ角AOC, BOC, AOD, BODハ皆相等シ即チ半直線OAガ直線CDト作ル二ツノ角AOC, AODガ相等シキニヨリ, OAハCDノ垂線ニシテ,直線ABハ直線CDニ垂直ナリ。故ニ直線AB, CDハ**互ニ垂直**ナリ(AB⊥CD)トイフ。

定理二。 直線上ノ一ツノ點ニ於テ,此直線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

直線ABノ上ノ點OニテABニ垂直ニ交ハル直線ヲCDトスルトキ, Oヲ通リCDト異ナル直線EFヲ引クトキハ, EFハABニ垂直ナラザルコトヲ證明スベシ。



證。 半直線OEガ角AOCノ外部ニアリ,從テ角BOCノ内部ニアリトスルトキハ

$$\angle AOE > \angle AOC$$

$$\angle BOE < \angle BOC$$

サテ $CD \perp AB$

故ニ $\angle AOC = \angle BOC$

故ニ $\angle AOE > \angle BOE$

故ニ EFハABニ垂直ナラズ。

問 題

一ツノ角ノ二等分線ハ唯一ツニ限ル。

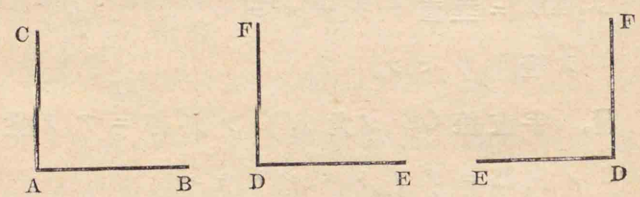
(上ノ定理ハ此問題ノ特別ノ場合ナルコトヲ說明セヨ)。

13. 直角。

定義。 二ツノ邊ガ互ニ垂直ナル角ヲ**直角**トイフ。

定理三。凡テ直角ハ相等シ。

證。 ∠BAC, ∠EDFガイヅレモ直角ナリトセヨ。



角EDFノ平面ヲ角BACノ平面ノ上ニ重ネ,頂點Dヲ頂點Aノ上ニ,邊DEヲ邊ABノ上ニ重ネ, DFヲABニ對シテACト同ジ側ニアラシメヨ。シカスルトキハACハABニ垂直ニシテ, DFモ亦Aニ於テABニ垂直ナリ。故ニDFハACニ重ナル。(定理二)卽チ角EDFハ角BACニ重ナル。故ニ

$$\angle BAC = \angle EDF$$

定義。 直角ヨリモ小ナル角ヲ**銳角**,直角ヨリモ

大ニシテ二直角ヨリハ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ。

直角ハ定マレル大サノ角ナルガ故ニ,之ヲ單位トシテ角ヲ計ルコトヲ得。

二ツノ邊ガ同一直線ヲナス角卽チ所謂平角ハ二直角ニ等シ。

直線ABノ上ノ一點Oヨリ此直線ノ同ジ側ニ幾ツカノ半直線ヲ引クトキハ,OA,OBノ作ル平角ガ幾ツカノ角ニ分タルベシ。此等ノ角ノ和ハ二直角ニ等シ。

又一ツノ點Oヨリ幾ツカノ半直線ヲ引クトキハ,Oヲ頂點トセル同ジ數ノ角ヲ得,此等ノ角ノ和ハ四直角ニ等シ。

注意一。 角ヲ一ツノ圖形ト考フルトキハ,如何ナル優角モ四直角ヨリ小ナリ。サレド角ヲ大サト觀ルトキニハ,四直角ヨリモ大ナル角ヲ考フルコトヲ得。例ヘバ二ツノ優角ノ和ハ四直角ヨリモ大ナリ。

注意二。 直角ハ角ノ單位トシテハ大キ過グルニヨリ,實用上ニハ**度,分,秒**ヲ角ノ單位トスルナリ。一直角ハ九十度(90°),一度ハ六十分(60′),一

分ハ六十秒(60″)ニ等シ。

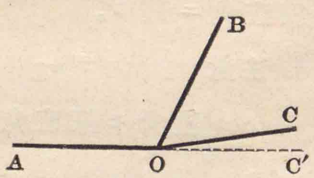
14. 補角。

定義。二ツノ角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ,此等ノ角ノ各〻ヲ他ノ一ツノ**補角**トイフ。

直線上ノ一點ヨリ一ツノ半直線ヲ引クトキニ出來ル二ツノ角ハ互ニ補角ナリ。

定理四。互ニ補角ヲナス二ツノ接角ニ共通ナラザル二ツノ邊ハ一直線ヲナス。

二ツノ接角∠AOB, ∠BOCガ補角ナルトキハ邊OA, OCハ一直線ヲナス,即チOAノ延長ハOCト重ナルベシ。



證。假ニOAノ延長ガOCト重ナラズトスルトキハ,∠AOBト∠BOCトノ和∠AOCハ二直角ニ等シカラズ,從テ∠AOBト∠BOCトハ補角ヲナサザルベシ。故ニ∠AOBト∠BOCトガ補角ナルトキハOA, OCハ一直線ヲナサザルコトヲ得ズ。

問題

直線ABノ上ノ一點Oヨリ此直線ノ兩側ニ一ツヅツ半直線OC, ODヲ引クトキ,∠AOC, ∠BODガ相等シキトキハ,OC, ODハ同一ノ直線上ニアリ。

課題第一

1. 二ツノ接角∠AOB, ∠BOCノ二等分線ノ作ル角ハ,此等ノ接角ノ和ノ半分ニ等シ。

2. 直線ABノ上ノ一點Oヨリ半直線OCヲ引クトキ,角AOC, COBノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ。

3. 點Oヨリ引ケル四ツノ半直線ヲ順次OA, OB, OC, ODトスルトキ,∠AOB, ∠CODガ相等シキトキハ,∠BOC, ∠AODノ二等分線ハ一直線ヲナス。

4. 角AOBノ二等分線ヲOMトシ,頂點Oヨリ半直線OCヲ引クトキハ,∠COMハ

(1) OCガ∠AOBノ內部ニアルトキハ,∠AOC, ∠BOCノ差ノ半分ニ等シク,

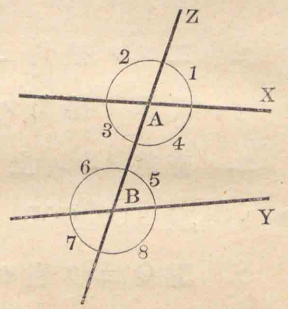
(2) OCガ∠AOBノ對頂角ノ內部ニアルトキハ,此差ノ半分ノ補角ニ等シク,

(3) OCガ其他ノ位置ニアルトキハ,∠AOC, ∠BOCノ和ノ半分ニ等シ。

第二章 平行線

15. 同位角。錯角。同傍角。

二ツノ直線X,Yガ第三ノ直線ZトソレゾレA,Bニテ交ハルトキハ,A及ビBニ於テ各,四ツノ角ヲ生ズ。A又ハBニ於ケル四ツノ角ノ中,直線X又ハYニ對シテ線分ABト反對ノ側ニアル二ツノ角ヲ**外角**トイフ。圖ノ1, 2, 7, 8ハ即チ是ナリ。



A又ハBニ於ケル他ノ二ツノ角ヲ**內角**トイフ。3, 4, 5, 6ハ即チ是ナリ。

Aニ於ケル外角(又ハ內角)トBニ於ケル內角(又ハ外角)トノ中,直線Zノ同ジ側ニアルモノヲ**同位角**トイフ。

1,5　2,6　3,7　4,8

ハ即チ是ナリ。同位ノ二ツノ角ノ對頂角ハ同位角ナリ。

A及ビBニ於ケル內角ノ中,直線Zニ對シテ反

對ノ側ニアルモノヲ**錯角**(內錯角)トイフ。3,5及ビ4,6ハ即チ是ナリ。

又A及ビBニ於ケル內角ノ中,直線Zニ對シテ同ジ側ニアルモノヲ**同傍內角**トイフ。3,6及ビ4,5ハ即チ是ナリ。

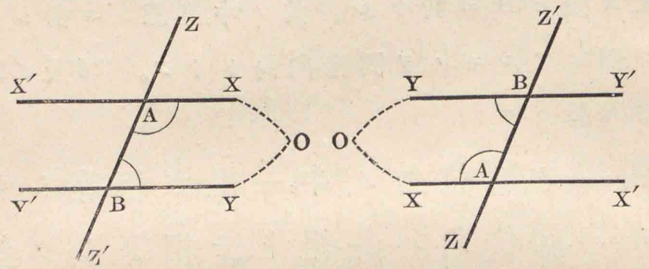
四組ノ同位角ノ中,一組ガ相等シキトキハ,同位角ハ各組トモ相等シク,錯角ハ相等シク,同傍內角ハ補角ヲナス。

一組ノ錯角ガ相等シキトキ,又ハ一組ノ同傍內角ガ補角ヲナストキモ亦同ジ。

16. 平行線。

定理五。二ツノ直線ガ他ノ一直線ト交ハリテ作レル一組ノ同傍內角ガ補角ヲナストキ(又ハ一組ノ錯角又ハ一組ノ同位角ガ相等シキトキ)ハ,此等ノ直線ハ如何程延長ストモ,決シテ出會フコトナシ。

二ツノ直線 XX', YY' ガ直線 ZZ' トソレゾレ A 及ビ B ニテ交ハリテ作レル同傍內角 $\angle XAZ'$



$\angle YBZ$ ガ補角ヲナストセヨ。然ラバ XX', YY' ハ決シテ同一ノ點ヲ通ルコトナカルベシ。

證。$\angle XAZ'$, $\angle YBZ$ ガ補角ヲナスガ故ニ

$$\angle XAZ' = \angle Y'BZ \qquad \angle YBZ = \angle X'AZ'$$

サテ此圖形ト全ク相等シキ圖形ヲ考ヘ,點 B, A ガソレゾレ點 A, B ノ位置ヲトリ,半直線 AX, BY ガ ZZ' ニ對シテ前ト反對ノ側ニアルヤウニシタリト考ヘヨ。

然ラバ,$\angle XAZ' = \angle Y'BZ$ ナルガ故ニ,AX ハ BY' ノ位置ニ來リ,從テ AX' ハ BY ノ位置ニ來ル。

又 $\angle YBZ = \angle X'AZ'$ ナルガ故ニ,BY ハ AX' ノ位置ニ來リ,從テ BY' ハ AX ノ位置ニ來ル。

即チ此圖形ハ前ノ圖形ト全ク相重ナル。

故ニ若シ AX, BY ガ同一ノ點 O ヲ通ルトセバ,BY', AX' モ亦同一ノ點ヲ通ルベク,即チ直線 XX', YY' ハ二ツノ點ヲ共有スルコトトナル。

サレド,是レ有リ得ベカラザルコトナリ。

故ニ XX', YY' ハ同一ノ點ヲ通ルコトナシ。

定義。同ジ平面上ニアル二ツノ直線 XX', YY' ガ如何程延長ストモ出會ハザルトキハ,此等ノ直線ハ互ニ**平行**ナリトイフ。($XX' \parallel YY'$)

系一。同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ直線ハ平行ナリ。

系二。直線外ノ一點ヨリ此直線ヘ一ツヨリ多クノ垂線ヲ引クコトヲ得ズ。

系三。直線外ノ一點ヨリ此直線ニ一ツノ平行線ヲ引クコトヲ得。

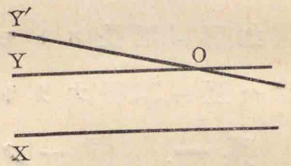
17.　平行線ノ公理。

與ヘラレタル點ヲ通リ,與ヘラレタ

ル直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

定理六。 同ジ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。

直線 Y, Y' ハイヅレモ直線 X ニ平行ナリトセヨ。然ラバ Y, Y' ハ互ニ平行ナルベシ。

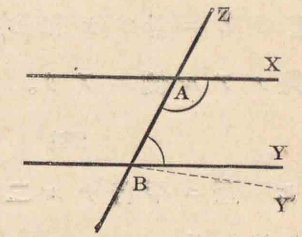


證。假ニ Y, Y' ガ點 O ニテ出會フトセヨ。然ラバ點 O ヲ通ジテ直線 X ニ平行ナル直線ガ二ツアルコトトナル。サレド是ハ上ノ公理ニヨリ,有リ得ベカラザルコトナリ。

故ニ Y, Y' ハ決シテ同一ノ點ヲ通ラズ,卽チ互ニ平行ナリ。

定理七。 互ニ平行ナル二ツノ直線ガ他ノ一直線ト交ハリテ作ル同傍內角ハ補角ヲナス。(又同位角ハ相等シク,錯角ハ相等シ)。

互ニ平行ナル直線 X, Y ガ直線 Z トソレゾレ A, B ニテ交ハルトセヨ。



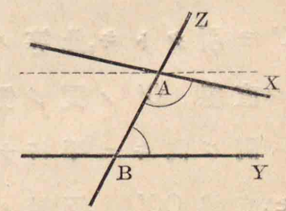
然ラバ同傍內角 $\angle XAB$, $\angle YBA$ ハ補角ヲナスベシ。

證。B ヨリ直線 Z ニ對シテ AX ト同ジ側ニ $\angle Y'BA$ ガ $\angle XAB$ ノ補角ニ等シクナルヤウニ直線 BY' ヲ作レ。然ラバ,定理五ニヨリテ,BY' ハ AX ト平行ナリ。

サテ B ヲ通ジテ AX ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ルガ故ニ,BY' ハ BY ト一致ス。

故ニ $\angle YBA$ ハ $\angle Y'BA$ ニ等シク,卽チ $\angle XAB$ ノ補角ナリ。

注意。 二直線 X, Y ガ直線 Z トソレゾレ A, B ニテ交ハリテ作レル同傍內角ガ補角ヲナサザルトキハ,X, Y ハ必ズ或點ニテ出會フ。



サテ二組ノ同傍內角ノ中,一組ハ其和二直角ヨリ小ニシテ,又一組ハ

二直角ヨリ大ナリ。而シテX,Yノ出會フ點ハ直線Zニ對シテ和ガ二直角ヨリ小ナル同傍內角ノアル側ニアリ。

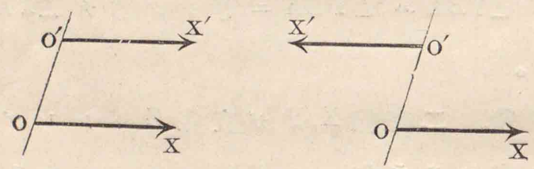
問題

1. 互ニ平行ナル二ツノ直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ垂直ナリ。

2. 相交ハル二ツノ直線ニ垂直ナル直線ハ相交ハル。

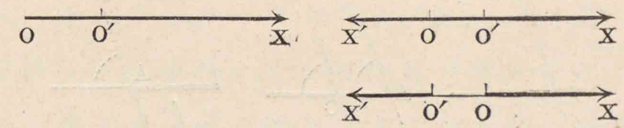
18. 方向。

點O,O'ヲ起點トシテ互ニ平行ナル半直線OX,



$O'X'$ヲ引クトキ,此等ノ半直線ガ其起點ヲ結ビ付クル直線OO'ノ同ジ側ニアルトキハ,二ツノ半直線ハ同ジ向キニ平行ナリ,又ハ**同ジ方向**ヲ有ストイヒ,直線OO'ノ反對ノ側ニアルトキハ**反對ノ方向**ヲ有ストイフ。

同一直線上ニアル二ツノ半直線OX, $O'X'$ハ其



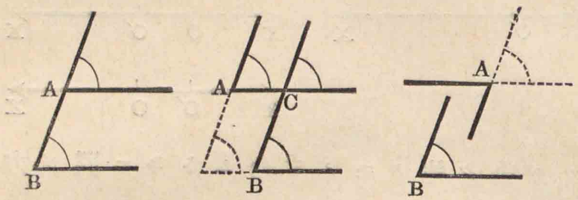
中,一ツガ全ク他ノモノヲ含ムトキニ同ジ方向ヲ有シ,然ラザルトキニ反對ノ方向ヲ有スルモノトス。此等ハ前頁ノ圖ニ於テ點O'ガ直線OXノ上ニ來レル特別ノ場合ニ外ナラズ。

相重ナル直線ハ互ニ平行ナル直線ノ特別ナル場合ナリ。

定理八。邊ガソレゾレ互ニ平行ナル二ツノ角ハ相等シキカ,又ハ補角ヲナス。邊ガイヅレモ同ジ方向ヲ有スルカ,又ハイヅレモ反對ノ方向ヲ有スルトキニハ,二ツノ角ハ相等シク,又一ツノ邊ハ同ジ方向ヲ有シ,一ツノ邊ハ反對ノ方向ヲ有スルトキニハ,二ツノ角ハ補角ヲナス。

證。先ヅ二ツノ角A,Bガ一ツノ邊ヲ共有シ,他

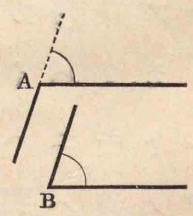
ノ一ツノ邊ガ同ジ向キニ平行ナルトキハ,此等ノ



角ハ平行ナル邊ガ共通ノ邊ト作ル同位角ナルガ故ニ相等シ。

A, B ノ二ツノ邊ガソレゾレ同ジ向キニ平行ニシテ,イヅレモ同一直線上ニアラザルトキハ, A, B ハ各,Aノ一邊ト之ニ平行ナラザルBノ一邊トノ交ハリテ作レル角Cニ等シキガ故ニ互ニ相等シ。

二ツノ邊ガイヅレモ反對ノ方向ヲ有スルトキハ,Aノ對頂角ノ二邊ハBノ二邊トソレゾレ同ジ方向ヲ有スルガ故ニ, A, B ハ相等シ。



又一ツノ邊ハ同ジ方向ヲ有シ,一ツノ邊ハ反對ノ方向ヲ有スルトキハ, Aノ第二ノ邊ヲ延長シテ作レルAノ補角ハ其邊ガBノ二ツノ邊ト同ジ方向ヲ有スルガ故ニBニ等シ。即チA, Bハ補角ヲナス。

問題

1. 邊ガソレゾレ互ニ平行ナル二ツノ角ノ二等分線ハ互ニ平行ナルカ又ハ互ニ垂直ナリ。

2. 邊ガソレゾレ垂直ナル二ツノ角ハ相等シキカ又ハ補角ヲナス。又此二ツノ角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナルカ又ハ互ニ平行ナリ。

第三章　三角形

19. 三角形。

同一直線上ニアラザル三ツノ點A, B, Cヲ二ツヅツ結ビ付クル三ツノ線分ヲ引クトキハ,一ツノ三角形ヲ生ズ。三ツノ點A, B, Cヲ三角形ノ**頂點**トイヒ,三ツノ線分BC, CA, ABヲ**邊**トイフ。各頂點ヨリ出ヅル二ツノ邊ノ作ル角ヲ三角形ノ**角**(又ハ**內角**)トイヒ,他ノ二ツノ頂點ヲ結ビ付クル邊ヲ**此角ニ對スル邊**トイフ。又一ツノ邊ト他ノ一ツノ邊ノ延長トノ作ル角ヲ三角形ノ**外角**トイフ。

三角形ノ三ツノ邊ハ平面ノ一部分ヲ圍メリ。之ヲ三角形ノ**內部**トイフ。三角形ノ內部ハ即チ

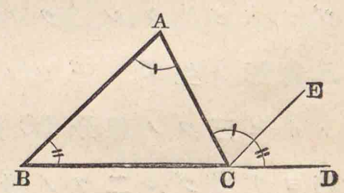
其三ツノ角ノ内部ノ共通ノ部分ナリ。

三角形ノ內部ノ一點ト外部ノ一點トヲ結ビ付クル線(直線,折線又ハ曲線)ハ三角形ノ境界ト少クトモ一ツノ點ヲ共有ス。特ニ三角形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ其內部ニ引ケル半直線ハ,其對邊ノ上ノ一點ヲ通過シテ三角形ノ外部ニ出ヅベシ。

20. 三角形ノ內角ノ和。

定理九。 三角形ノ三ツノ內角ノ和ハ二直角ニ等シ。

證。 △ABC*ノ一邊BCヲ延長シ,CヨリBAニ平行ナル直線ヲ引キ,其上ニ直線BCDニ對シテAト同ジ側ニ點Eヲ取レ。然ルトキハCEハ外角ACDノ內部ニアリテ,之ヲ二ツノ角ACE, ECDニ分ツ。故ニCニ於ケル三ツノ角BCA, ACE, ECDノ和ハ二直角ニ等シ。



サテ,此等ノ三ツノ角ノ中,∠BCAハ△ABCノ內

*三角形ABCトイフコトヲカヤウニ書ク。

角ナリ,又∠ACEト∠Aトハ直線ACガ平行線AB, CEト作レル錯角ナルガ故ニ相等シク,∠ECDト∠Bトハ直線BDガ平行線AB, CEト作レル同位角ナルガ故ニ相等シ(定理七)。

故ニ三角形ABCノ三ツノ內角ノ和ハCニ於ケル三ツノ角ノ和ニ等シク,即チ二直角ニ等シ。

定義。 三角形ノ一ツノ外角ニ接セザル二ツノ內角ヲ各,此外角ノ**內對角**トイフ。

系。 三角形ノ一ツノ外角ハ其二ツノ內對角ノ和ニ等シ,從テイヅレノ內對角ヨリモ大ナリ。

注意。 三角形ノ二ツノ內角ノ和ハ二直角ヨリ小ナリ。故ニ第17節ノ注意ニ言ヘルコトノ正シキヲ知ルベシ。

定義。 三角形ノ三ツノ內角ノ中,少クトモ二ツハ必ズ鋭角ナルヲ要ス。三ツノ角ガイヅレモ鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**トイヒ,一ツノ角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**トイフ。

一ツノ角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイ

ヒ,直角ニ對スル邊ヲ斜邊トイフ。

直角三角形ノ二ツノ鋭角ノ和ハ直角ニ等シ,即チ二ツノ鋭角ハ互ニ餘角ヲナス。

問題

1. 一ツノ角ガ他ノ二ツノ角ノ和ニ等シキ三角形ハ直角三角形ナリ。一ツノ角ガ他ノ二ツノ角ノ和ヨリモ大ナル三角形ハ鈍角三角形ナリ。一ツノ角ガ他ノ二ツノ角ノ和ヨリモ小ナルトキハ如何。

2. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ之ニ對スル邊 BC ヘ下セル垂線ノ足ガ此邊ノ上ニ落ツルトキハ,内角 B, C ハイヅレモ鋭角ナリ。又垂線ノ足ガ BC ノ延長ノ上ニ落ツルトキハ,内角 B, C ノ中,頂點ガ垂線ノ足ニ近キ方ハ鈍角ナリ。

3. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ邊 BC ト交ハル點ヲ D トスルトキ, ∠B ガ ∠C ヨリモ大ナルトキハ ∠ADB ガ鋭角, ∠ADC ガ鈍角ナリ。∠B, ∠C ガ相等シキトキハ,如何。

21. 二等邊三角形。

定義。 二ツノ邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**トイフ。

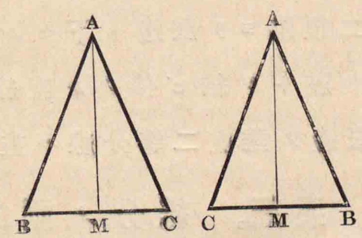
二等邊三角形ニ於テハ,相等シキ邊ニ夾マレタル角ヲ**頂角**,之ニ對スル邊ヲ**底邊**トイフ。底邊ニ接スル角,即チ相等シキ二ツノ邊ニ對スル二ツノ角ヲ**底角**トイフ。

定理十。 二等邊三角形ノ底角ハ相等シ。

△ABC ニ於テ AB=AC トセヨ。然ラバ

∠B = ∠C

ナルベシ。



證。 △ABC ト全ク相等シキ三角形ヲ考ヘ,其平面ヲ(裏返シテ) △ABC ノ上ニ置キ,頂角 A ノ邊 AC, AB ガソレゾレ AB, AC ノ上ニ重ナルヤウニシタリトセヨ(第9節注意一參照)。然ラバ AB, AC ハ相等シキガ故ニ點 C, B ハソレゾレ點 B, C ノ位置ニ合シ,從テ角 C ハ

角Bニ合ス。故ニ $\angle B$, $\angle C$ ハ相等シ。

系一。 二等邊三角形ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結ビ付クル直線ハ底邊ニ垂直ニシテ且頂角ヲ二等分ス。

證。 M ヲ底邊 BC ノ中點トセヨ。然ラバ上ノ如クニ三角形ノ位置ヲ變ヘタルトキ, C, B ガソレゾレ B, C ノ位置ニ來レルガ故ニ, M ハ其位置ヲ變ヘズ,又Aノ位置モ變ラザリシガ故ニ $\angle BAM$, $\angle CAM$ ハ相重ナリ, $\angle AMB$, $\angle AMC$ モ亦相重ナル。

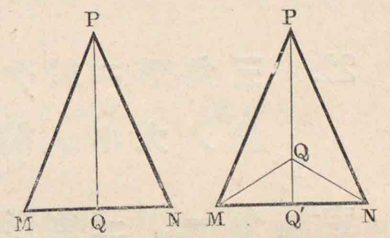
故ニ　$\angle BAM = \angle CAM$, $AM \perp BC$

系二。 二等邊三角形ニ於テ(一)頂角ノ二等分線,(二)頂點ヨリ底邊ヘ下セル垂線,(三)頂點ト底邊ノ中點トヲ結ビ付クル直線(底邊ニ對スル中線),(四)底邊ノ垂直二等分線ハ盡ク同一ノ直線ナリ。

系三。 線分ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニアル二ツノ點ヲ通ル直線ハ線分ヲ垂直ニ二等分ス。

證。 P, Q ヲ線分 MN ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニアル點トセヨ。即チ $PM=PN$, $QM=QN$ トセヨ。

サテ P, Q ノ中一ツ,例ヘバ Q ガ線分 MN ノ上ニアルトキハ, PQ ハ二等邊三角形 PMN ノ頂點 P ニ對スル中線ナルガ故ニ, PQ ハ MN ニ垂直ニシテ且之ヲ二等分ス(系一)。



次ニ P, Q ガイヅレモ直線 MN ノ上ニアラザルトキハ, MN ノ中點ヲ Q' トセヨ。然ラバ PQ', QQ' ハイヅレモ Q' ニ於テ MN ニ垂直ナルガ故ニ PQ', QQ' ハ同一直線ヲナスベシ(定理二)。即チ直線 PQ ハ MN ノ中點 Q' ヲ過ギリ,且 MN ニ垂直ナリ。

問題

1. 三角形 ABC ノ角 A ヲ二等分スル直線ガ邊 BC ニ垂直ナルトキハ, ABC ハ二等邊三角形ナリ(定理十ト同ジヤウニシテ之ヲ證明セヨ)。

2. 二等邊三角形ノ底角ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ下セル二ツノ垂線ハ相等シ。底角ノ頂點ヨリ出ヅル二ツノ中線,底角ヲ二等分シテ對邊ニ至ル二ツノ線分モ亦然リ(同上)。

3. 二等邊三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ヲ

AM トシ,之ヲ折目トシテ平面ヲ折返シテ本節ノ定理及ビ系一,ヲ證明セヨ。

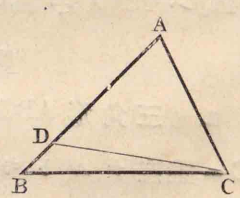
22. 三角形ニ於ケル邊及ビ角ノ大小ノ關係。

定理十一。 三角形ノ二ツノ邊ガ相等シカラザルトキハ,之ニ對スル二ツノ角モ亦相等シカラズシテ,大ナル邊ニ對スル角ノ方ガ大ナリ。

$\triangle ABC$ ニ於テ $AB > AC$ トセヨ。然ラバ

$$\angle C > \angle B$$

ナルベシ。



證。 邊 AB ノ上ニ邊 AC ニ等シク AD ヲ取レ。然ラバ $AB > AD$ ナルガ故ニ,D ハ A ト B トノ間ニアルベシ。故ニ C,D ヲ結ビ付タル直線 CD ハ角 ACB ノ内部ニアリ。故ニ

$$\angle ACB > \angle ACD$$

又 D ハ B ト A トノ間ニアルガ故ニ,$\angle ADC$ ハ三角形 BCD ノ外角ナリ。故ニ

$$\angle ADC > \angle B \qquad (\text{定理九,系})$$

サテ $AC = AD$, 故ニ

$$\angle ADC = \angle ACD \qquad (\text{定理十})$$

故ニ $$\angle ACB > \angle B$$

定理十二。 三角形ノ二ツノ角ガ相等シキトキハ,之ニ對スル二ツノ邊モ亦相等シ。三角形ノ二ツノ角ガ相等シカラザルトキハ,之ニ對スル二ツノ邊モ亦相等シカラズシテ,大ナル角ニ對スル邊ノ方ガ大ナリ。

(1) $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B = \angle C$ トセヨ。

然ラバ $AB = AC$ ナルベシ。

證。 假ニ AB, AC ハ相等シカラズトセヨ。然ラバ定理十一ニヨリテ $\angle B$, $\angle C$ モ亦相等シカラザルコトトナル。然ルニ假定ニヨリ $\angle B$, $\angle C$ ハ相等シ。故ニ AB, AC ハ不等ナルコトヲ得ズ,卽チ相等シ

(2) 次ニ$\angle B$, $\angle C$ハ相等シカラズトシ,例ヘバ

$$\angle B > \angle C$$

トセヨ。然ラバ $AC > AB$ ナルベシ。

證。假ニ AC ハ AB ヨリ大ナラズトセヨ。然ラバ AC ハ AB ニ等シキカ,又ハ AC ハ AB ヨリ小ナルベシ。

若シ $AC=AB$ トスルトキハ $\angle B=\angle C$ (定理十)

又 $AC < AB$ トスルトキハ $\angle B < \angle C$ (定理十一)

イヅレニシテモ $\angle B$ ハ $\angle C$ ヨリ大ナラザルコトトナリ,假定ニ合ハズ。

故ニ AC ハ AB ヨリ大ナリ。

系一。三角形ノ三ツノ邊ガ相等シキトキハ,三ツノ角モ亦相等シ。又逆ニ三ツノ角ガ相等シキトキハ,三ツノ邊モ亦相等シ。

カヤウノ三角形ヲ**正三角形**トイフ。

系二。直角三角形ニ於テ,斜邊ハ他ノ二ツノ邊ノイヅレヨリモ長シ。

系三。鈍角三角形ノ三ツノ邊ノ中,鈍角ニ對スルモノガ最モ長シ。

問題

1. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ邊 BC ニ交ハル點ヲ M トシ, AM ヲ折目トシテ平面ヲ折返シ,定理九系ヲ用ヒテ定理十一ヲ證明セヨ。

2. 上ノ問題ニ於テ $BM < AB$, $CM < AC$

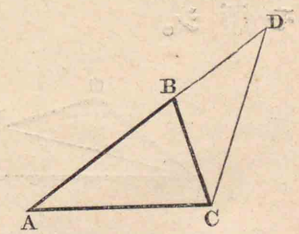
3. 上ノ問題ニ於テ $AB > AC$ ナルトキハ $\angle AMB$ ハ鈍角ナリ。又逆ニ $\angle AMB$ ガ鈍角ナルトキハ $AB > AC$ ナリ。

23. 最短距離トシテノ直線。

定理十三。三角形ノ二ツノ邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリモ大ナリ。

$\triangle ABC$ ニ於テ

$$AB+BC > AC$$



證。AB ノ延長ノ上ニ於テ BC ニ等シク BD ヲ取レ。CD ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ $\triangle BCD$ ハ二等邊三角形ナリ。

故ニ　$\angle BCD = \angle D$　(定理十)

又 D ハ AB ノ延長ノ上ニアルガ故ニ, CD ハ角

ACB ノ外部ニアリ。

故ニ　$\angle ACD > \angle BCD$

故ニ　$\angle ACD > \angle D$

故ニ　$\triangle ACD$ ニ於テ

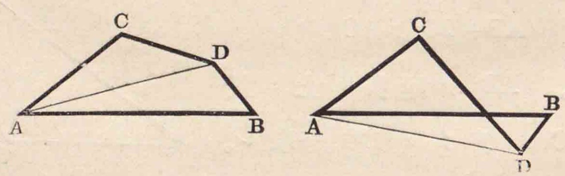
$AD > AC$　（定理十二）

サテ　$AD = AB + BD = AB + BC$

故ニ　$AB + BC > AC$

系一。三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリモ小ナリ。

系二。二ツノ點ヲ連ヌル直線ハ同ジ二ツノ點ヲ兩端トセル屈折線ヨリモ短シ。



系三。三角形ABCノ内部ノ點Pヲ頂點B,Cニ結ビ付クルトキハ

$BP + PC < BA + AC$　$(\angle P > \angle A)$

問題

1. 三角形ABCニ於テ AB＞BC トシ,邊ABノ上ニ於テ BC ニ等シク BD ヲ取リテ, AB, BC ノ差ハ AC ヨリモ小ナルコトヲ證明セヨ。

2. 三角形ノ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ垂線ヲ下シ,定理十二系二ヲ用ヒテ本定理ヲ證明セヨ。又前節ノ問題2ヲ用ヒテ證明セヨ。

24. 垂線及ビ斜線。

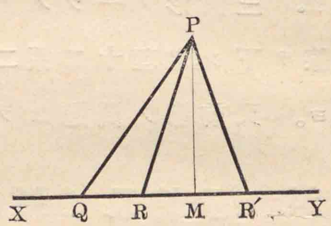
直線XYノ上ニアラザル點Pヨリ直線上ノ一點Qヘ引ケル直線PQガXYニ垂直ナラザルトキハ,PQヲ直線XYヘ引ケル**斜線**トイヒ,Qヲ此斜線ノ**足**トイフ。

定理十四。直線外ノ一點ヨリ此直線上ノ一點ヘ引ケル直線ノ中,垂線ハ最モ短シ。

二ツノ斜線ノ足ト垂線ノ足トノ距離ガ相等シキトキハ,此等ノ斜線ハ相等シ。又二ツノ斜線ノ足ト垂線ノ足

トノ距離ガ相等シカラザルトキハ,其距離ノ大ナル斜線ハ其距離ノ小ナル斜線ヨリモ長シ。

直線XYノ外ナル點Pヨリ此直線ヘ垂線PM及ビ斜線PQ, PR, PR′ヲ引キ,Q, Rハ直線XYノ上ニテMノ同ジ側,R, R′ハMノ反對ノ側ニアリテ



$$MR = MR' < MQ$$

ナリトセヨ。

然ラバ　$PQ > PM,\quad PR = PR' < PQ$

ナルベシ。

證。 先ヅ△PMQハ直角三角形ニシテ,PQハ其斜邊ナリ。故ニ

$$PQ > PM$$ (定理十二,系二)

次ニ$MR < MQ$ナルニヨリ,RハMトQトノ間ニアリ。故ニ∠PRQハ直角三角形PMRノ外角ニシテ,鈍角ナリ。故ニ鈍角三角形PRQニ於テ

$$PQ > PR$$ (定理十二,系三)

次ニ又垂線PMヲ折目トシテ平面ヲ折返ストキハ,半直線MR′ハMRニ重ナリ, MR′=MRナルガ故ニ點R′ハ點Rニ合シ, PR′ハPRニ合ス。故ニ

$$PR' = PR,\quad PR' < PQ$$

定義。 直線外ノ一點ヨリ此直線ヘ引ケル垂線ノ長サヲ**此點ト直線トノ距離**トイフ。

系一。 一直線上ノ二ツヨリ多クノ點ガ同一ノ點ヨリ相等シキ距離ニアルコトナシ。

系二。 二ツノ點ヲ結ビ付クル線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ノ點ハ,此等二ツノ點ヨリ相等シキ距離ニアリ。

系三。 直角ヲ夾メル二邊ノ中,一ツノ邊ガ定マレル直角三角形ニ於テ,他ノ一ツノ邊ガ長クナルニ從ヒテ斜邊ハ長クナル。又斜邊ガ定マレル直角三角形ニ於テ,直角ヲ夾メル二邊ノ中,

一ツガ大キクナルニ從ヒテ,他ノ一ツハ小クナル。

問題

線分 AB ノ垂直二等分線ノ上ニアラザル點ハ A, B ヨリ相等シキ距離ニアラズ, A, B ノ中,二等分線ニ對シテ此點ト同ジ側ニアル方ガ此點ニ近シ。

25. 三角形ノ合同(一)。

一ツノ三角形ノ三ツノ頂點ヲソレゾレ他ノ三角形ノ三ツノ頂點ト重ネ合ハセ得ベキトキハ,二ツノ三角形ハ全ク相等シク其三ツノ角及ビ三ツノ邊ハソレゾレ相等シク,相等シキ邊ハ相等シキ角ニ對ス。

定理十五。 二邊ト其夾角トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。

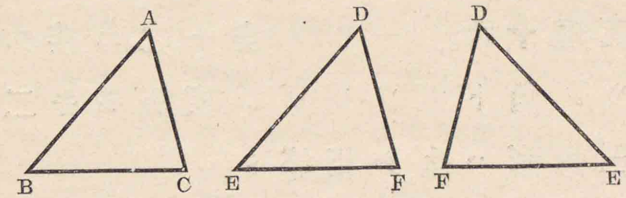
$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$$AB = DE, \quad AC = DF, \quad \angle A = \angle D$$

トセヨ。然ラバ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ハ全ク相等シ。

$(\triangle ABC \equiv \triangle DEF)$

證。 $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ置キ,邊 DE ガ之ニ等



シキ邊 AB ニ合シ,且點 F ガ AB ニ對シテ點 C ト同ジ側ニ落ツルヤウニセヨ。

然ラバ $\angle D$ ハ $\angle A$ ニ等シキガ故ニ,直線 DF ハ直線 AC ノ上ニ重ナリ,線分 DF ハ線分 AC ニ等シキガ故ニ點 F ハ點 C ニ合ス。即チ點 D, E, F ハソレゾレ點 A, B, C ニ合ス。

故ニ $$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

$$BC = EF, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$$

系。 直角ヲ夾メル二ツノ邊ガソレゾレ相等シキ二ツノ直角三角形ハ全ク相等シ。

問題

二等邊三角形ヲ其頂角ヲ二等分スル直線ニテ二ツノ三角形ニ分チ,上ノ定理ヲ應用シテ定理十及ビ系一ヲ證明セヨ。

26. 三角形ノ合同(二)。

定理十六。 一ツノ邊ト之ニ接スル二ツノ角トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。

△ABC, △DEF ニ於テ (49 頁圖參照)

BC = EF, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F

トセヨ。然ラバ

△ABC ≡ △DEF

AB = DE, AC = DF, ∠A = ∠D

證。 △DEF ヲ △ABC ノ上ニ置キ,邊 EF ヲ邊 BC ノ上ニ重ネ,點 D ガ BC ニ對シテ A ト同ジ側ニ落ツルヤウニセヨ。

然ラバ ∠E ハ ∠B ニ等シキガ故ニ,直線 ED ハ直線 BA ノ上ニ落ツ。又 ∠F ハ ∠C ニ等シキガ故ニ,直線 FD ハ直線 CA ノ上ニ落ツ。故ニ直線 ED, FD ノ交點 D ハ直線 BA, CA ノ交點 A ニ重ナル。

故ニ △ABC ≡ △DEF

系一。 二ツノ角ト其一ツニ對スル邊トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。

系二。 一ツノ鋭角ト斜邊,又ハ此鋭角ニ接スル他ノ一邊,又ハ此鋭角ニ對スル邊トガソレゾレ相等シキ二ツノ直角三角形ハ全ク相等シ。

問　題

二ツノ角ガ相等シキ三角形ノ第三ノ角ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ垂線ヲ下シ,系二ヲ應用シテ定理十二ノ始メノ部分ヲ證明セヨ。

27. 三角形ノ合同(三)。

定理十七。 三ツノ邊ガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。

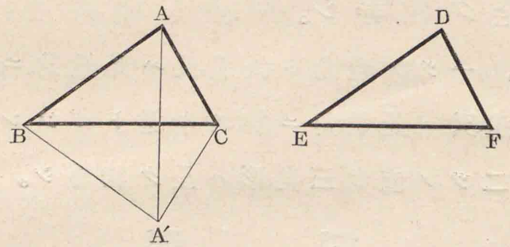
△ABC, △DEF ニ於テ

AB = DE, AC = DF, BC = EF

トセヨ。

然ラバ　△ABC ≡ △DEF

證。 △DEF ヲ △ABC ノ平面ノ上ニ置キ,邊 EF ヲ邊 BC ノ上ニ重ネ,點 D ハ BC ニ對シテ A ト反對ノ側ニ落ツルヤウニスルトキ,D ハ A′ ノ位置ニ來レ



リトセヨ。

然ラバ　$DE = A'B,\quad DF = A'C$

サテ假定ニヨリ

$$DE = AB,\quad DF = AC$$

故ニ　$AB = A'B,\quad AC = A'C$

即チB及ビCハ各二ツノ點A, A'ヨリ相等シキ距離ニアリ。

故ニ直線BCハ(AA'ヲ垂直ニ二等分シ)BA, BA'ト相等シキ角ヲ作ル(定理十,系三,系一)。

故ニ　$\angle ABC = \angle A'BC$

然ルニ作圖ニヨリ

$$\angle A'BC = \angle DEF$$

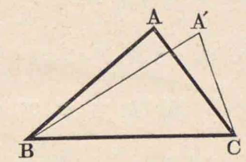
故ニ　$\angle ABC = \angle DEF$

即チ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$$BA = ED,\quad BC = EF,\quad \angle ABC = \angle DEF$$

故ニ　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$　(定理十五)

第二ノ證。$\triangle DEF$ヲ$\triangle ABC$ノ上ニ置キ,邊EFヲ邊BCノ上ニ重ネ,點DハBCニ對シテAト同ジ側ニ落ツルヤウニセヨ。假ニ點Dハ點Aノ上ニ重ナラズシテA'ノ位置ニ落チタリトセヨ。然ラバ



$$A'B = DE,\quad A'C = DF$$

故ニ　$A'B = AB,\quad A'C = AC$

即チB,Cハ各A,A'ヨリ等距離ニアルベク,從テ直線BCハ線分AA'ヲ垂直ニ二等分スベキナリ。

然レドモA,A'ハ直線BCノ同ジ側ニアルガ故ニ,BCハAトA'ノ間ニアル點ニ於テAA'ト交ハルコトヲ得ズ,從テAA'ヲ二等分スルコトヲ得ズ。

故ニ點Dハ點Aト重ナラザルヲ得ズ。

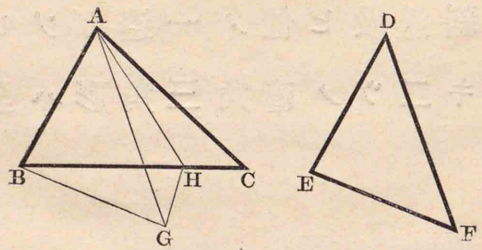
系。斜邊及ビ他ノ一邊ガソレゾレ相等シキ二ツノ直角三角形ハ全ク相等シ。

問題

二ツノ點A,Bヨリソレゾレ定マレル距離ニアル點ガ直線ABノ一側ニ一ツアルトキハ,他ノ側ニモ亦一ツアリ。サレド直線ABノ同ジ側ニカヤウノ點ガ二ツアルコトナシ。(直線ABノ上ニ於テハ如何)。

28. 相等シカラザル三角形ノ特別ノ場合。

定理十八。 二ツノ三角形ノ二邊ガソレゾレ他ノ三角形ノ二邊ニ等シク其夾角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル夾角ヲ有スル三角形ノ第三邊ガ小ナル夾角ヲ有スル三角形ノ第三邊ヨリモ大ナリ。



$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$$AB = DE,\quad AC = DF,\quad \angle A > \angle D$$

トセヨ。

然ラバ $BC > EF$

ナルベシ。

證。$\angle BAC$ ノ内部ニ $\angle BAG$ ガ $\angle D$ ニ等シクナルヤウニ AG ヲ引キ,其上ニ DF ニ等シク AG ヲ取レ。

然ラバ $\triangle ABG \equiv \triangle DEF$, $BG = EF$ (定理十五)

サテ點 G ガ BC ノ上ニアルトキハ,AG ハ $\angle BAC$ ノ内部ニアルガ故ニ,G ハ B ト C トノ間ニアルベシ。

故ニ $BG < BC$ 從テ $EF < BC$

又點 G ガ BC ノ上ニアラザルトキハ,$\angle GAC$ ノ二等分線ヲ作レ。

然ラバ此直線ハ $\angle BAC$ ノ内部ニアルガ故ニ,$\triangle BAC$ ノ邊 BC ニ交ハル。此點ヲ H トセヨ。

然ラバ $\triangle AHG \equiv \triangle AHC$ (定理十五)

$$HG = HC$$

故ニ $BC = BH + HC = BH + HG > BG$ (定理十三)

故ニ $BC > EF$

系一。 一ツノ三角形ノ二ツノ邊ガソレゾレ他ノ三角形ノ二ツノ邊ニ等シキトキハ,第三邊ノ大ナル三角形ニ於ケル其對角ハ,第三邊ノ小ナル三角形ニ於ケル其對角ヨリモ大ナリ。

(定理十二ノ證ニ倣ヒテ,之ヲ證明セヨ)。

系二。 等邊ガソレゾレ相等シキ二ツノ二等邊三角形ニ於テ,大ナル頂角ヲ有スル方ノ底邊ガ小ナル頂角ヲ有スル方ノ底邊ヨリモ大ナリ。

系三。 斜邊ノ定マレル直角三角形ニ於テ,一ツノ鋭角ガ大クナルニ從ヒテ之ニ對スル邊ハ大キクナリ,之ニ接スル邊ハ小クナル。

問題

1. 角 A ノ一ツノ邊ノ上ニ線分 AB, AC ヲ取リ他ノ邊ノ上ニソレゾレ之ニ等シク線分 AB′, AC′ ヲ取ルトキハ, BC′, B′C ハ角 A ノ二等分線ノ上ニ於テ相交ハル。

2. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ頂角ノ二等分線ノ上ノ同一ノ點ヲ通リテ對邊ニ至ル二ツノ線分ハ相等シ。

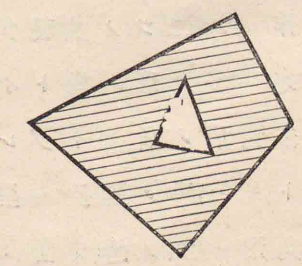
3. 二邊ト其一ツニ對スル角トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ニ於テ,相等シキ他ノ一邊ニ對スル角ハ相等シキカ又ハ互ニ補角ヲナス。

4. 中線ガ角ヲ二等分スル三角形ハ二等邊三角形ナリ。

29. 多角形ノ内角ノ和。

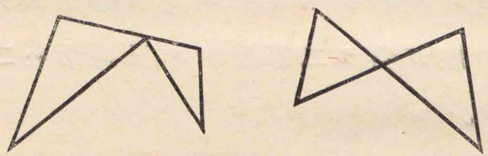
直線ヲ以テ圍マレタル平面ノ一部分ヲ**直線形**又ハ**多角形**トイヒ,多角形ヲ圍メル線分ヲ多角形ノ**邊**トイヒ,邊ノ端卽チ相隣レル二ツノ邊ノ交點ヲ多角形ノ**頂點**トイフ。

多角形ノスベテノ邊ハ起點ト終點トノ一致セルーツノ屈折線ヲナスコトヲ要ス。右ノ圖ニテ陰影ヲ附シタル場所ハ,直線ニテ圍マレタル平面ノ一部分ニハ相違ナケレドモ,



其境界ハ二ツノ全ク相離レタル屈折線ヨリ成レリ。カヤウノ圖形ハ之ヲ多角形ノ中ヘハ入レザルモノトス。

又多角形ノ二ツノ相隣ラザル邊ハ同一ノ點ヲ通ラザルコトヲ要ス。例ヘバ次ノ圖ニ示セルガ

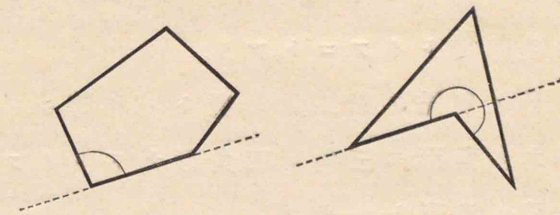


如キ屈折線ハ一ツヨリ多クノ多角形ヲ作レルモノト見做スナリ。

即チ多角形ヲ圍メル屈折線ハ平面ヲ唯二ツノ部分ニ分ツナリ。此二ツノ部分ノ中,一ツハ多角形ノ**內部**ニシテ,他ノ一ツハ多角形ノ**外部**ナリ。

多角形ノ一ツノ頂點ニ於テ相隣レル二ツノ邊ガ作レル二ツノ共軛角ノ中,多角形ノ內部ヲ含メル方ヲ多角形ノ**角**トイフ。

多角形ノ角ガイヅレモ劣角(二直角ヨリモ小)ナルトキハ,邊ノ延長ハ全ク多角形ノ外部ニアリ,又多角形ハ各、ノ邊(ヲ含メル無限直線)ノ一側ニアリ。



カヤウノ多角形ヲ**凸多角形**トイフ。サレド多角形ノ一ツノ角ガ二直角ヨリモ大ナルトキハ,此角ニ隣レル邊ノ延長ハ一部分多角形ノ內部ニ入ルベキガ故ニ,多角形ハ此邊ヲ含メル無限直線ノ兩側ニ跨ルベシ。カヤウノ多角形ヲ**凹多角形**トイフ。

スベテ三角形ハ凸多角形ナリ。サレド四角形ハ一ツノ優角ヲ有シ得ベク,從テ凹四角形ナルコトヲ得。

凸多角形ノ相隣ラザル二ツノ頂點ヲ連ヌル線分ハ全ク多角形ノ內部ニアリテ且此多角形ヲ二ツノ多角形ニ分割ス。カヤウノ線分ヲ多角形ノ**對角線**トイフ。

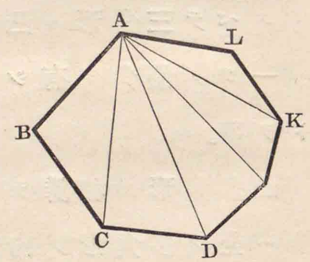
凸多角形ノ一ツノ邊ト之ニ隣レル一ツノ邊ノ延長トノ作ル角ハ全ク多角形ノ外部ニアリ。之

ヲ多角形ノ外角トイフ。外角ニ對シテ特ニ多角形ノ角ヲ內角トイフコトアリ。

多角形ノ頂點ノ數ト邊ノ數トハ相等シ。此數ニヨリテ多角形ヲ三角形,四角形ナドトイフ。n角形ヲ又n邊形トモイフ。

定理十九。 n角形ノ內角ノ和ハ$2(n-2)$直角ニ等シ。

證。 n角形ABCD…KLノ一ツノ頂點Aヨリ$n-3$個ノ對角線AC, AD,…,AKヲ引クコトヲ得,此等ノ對角線ハ多角形ABC…KLヲABC, ACD,…, AKLナル$n-2$個ノ三角形ニ分ツ。多角形ABC…KLノスベテノ內角ノ和ハ,此等ノ三角形ノ內角ノ總和ニ等シ。



サテ三角形ノ內角ノ和ハ二直角ニ等シキガ故ニ,n角形ABC…KLノ內角ノ和ハ二直角ノ$n-2$倍即チ$2(n-2)$直角ニ等シ。

(特ニ四邊形ノ內角ノ和ハ四直角ニ等シ)。

系。 凸多角形ノ外角ノ和ハ四直角ニ等シ。

證。 各頂點ニ於ケル外角ハ同ジ頂點ニ於ケル內角ノ補角ナルガ故ニ,n角形ニアリテハ,スベテノ內角及ビ外角ノ總和ハ二直角ノn倍ニ等シ。サテ內角ノ和ハ二直角ノ$n-2$倍ニ等シキガ故ニ,外角ノ和ハ二直角ノ2倍即チ四直角ニ等シ。

問題

多角形ノ內部ニアル一點ヲ各頂點ニ結ビ付ケテ多角形ヲ三角形ニ分チ,上ノ定理ヲ證明セヨ。

第四章 平行四邊形

30. 平行四邊形ノ性質。

四邊形ノ四ツノ邊ノ中,相隣ラザル二ツノ邊ヲ相對スル邊トイヒ,又四ツノ角ノ中,其頂點ガ相隣ラザル二ツノ角ヲ相對スル角トイフ。

四邊形ハ二ツノ對角線ヲ有ス。二組ノ相對スル角ノ頂點ヲ結ビ付クルモノ即チ是ナリ。

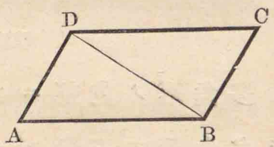
定義。 二組ノ相對スル邊ガ平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**トイフ。

定理二十。 平行四邊形ニ於テ相對スル角ハ相等シク,相對スル邊ハ相等シ。

ABCD ヲ平行四邊形トセヨ,卽チ

$AB \parallel CD$

$AD \parallel BC$



トセヨ。然ラバ

$$\angle A=\angle C,\quad \angle B=\angle D,\quad AB=CD,\quad AD=BC$$

證。 平行四邊形 ABCD ニ於テ相隣レル二ツノ角 $\angle A$, $\angle B$ ハ邊 AB ガ平行セル二ツノ直線 AD, BC ト作レル同傍內角ナリ。故ニ相隣レル二ツノ角 $\angle A$, $\angle B$ ハ補角ナリ。

同ジヤウニ相隣レル角 $\angle B$, $\angle C$ ハ補角ナリ。

相對スル角 $\angle A$, $\angle C$ ハイヅレモ $\angle B$ ニ隣レル角ナルガ故ニ,イヅレモ $\angle B$ ノ補角ナリ。故ニ

$$\angle A=\angle C$$

同ジヤウニ $\angle B=\angle D$

注意。 $\angle A$ ノ二ツノ邊 AB, AD ハソレゾレ $\angle C$ ノ二ツノ邊 CD, CB ト反對ノ向キニ平行ナリ。(定理八)。

次ニ對角線 BD ヲ引ケ。然ラバ平行四邊形 ABCD ハ二ツノ三角形 ABD, CDB ニ分タル。サテ AB, CD ハ平行ニシテ直線 BD ノ反對ノ側ニアルガ故ニ,錯角 $\angle ABD$, $\angle CDB$ ハ相等シ。同ジ理ニヨリテ $\angle ADB$, $\angle CBD$ ハ相等シ。

故ニ $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

$AB = CD$, $AD = BC$ (定理十六)

系。 互ニ平行ナル二ツノ直線ニ垂直ニシテ其間ニ夾マレタル線分ハ,スベテ相等シ。

此線分ヲ平行ナル**二直線ノ距離**トイフ。

定理二十一。 四邊形ニ於テ

(一) 相對スル角ガ二組トモニ相等シキトキ,又ハ

(二) 相對スル邊ガ二組トモニ相等

シキトキ,又ハ

(三) 一組ノ相對スル邊ガ平行ニシテ且相等シキトキハ,

此四邊形ハ平行四邊形ナリ。

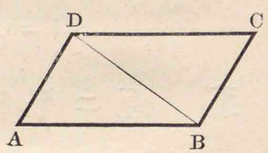
證。四邊形 ABCD ニ於テ

(一) $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$ トセヨ。然ラバ

$$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$$

サテ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4$直角

故ニ $\angle A+\angle B=2$直角



故ニ $AD \parallel BC$

同ジヤウニ $AB \parallel CD$

(二) 次ニ $AB=CD$, $AD=BC$ トセヨ。然ラバ

$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (定理十七)

故ニ $\angle ADB=\angle CBD$, $\angle ABD=\angle CDB$

故ニ $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$

(三) 次ニ又 $AB \parallel CD$, $AB=CD$ トセヨ。然ラバ

$\triangle ABD$, $\triangle CDB$ ニ於テ

$AB=CD$, BD ハ共通

又 $\angle ABD=\angle CDB$

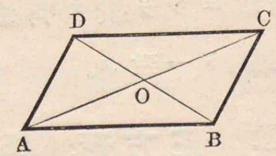
故ニ $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (定理十五)

$\angle ADB=\angle CBD$

故ニ $AD \parallel BC$

定理二十二。 平行四邊形ノ對角線ハ各他ノ對角線ヲ二等分ス。又逆ニ二ツノ對角線ガ其交點ニ於テ二等分セラルル四邊形ハ平行四邊形ナリ。

證。平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ガ O ニ於テ相交ハルトセヨ。



然ラバ $AB=CD$,

$\angle ABO=\angle CDO$,

$\angle BAO=\angle DCO$

故ニ $\triangle ABO \equiv \triangle CDO$ (定理十六)

$AO=CO$, $BO=DO$

次ニ四邊形 ABCD ニ於テ

$AO=CO$, $BO=DO$

トセヨ。然ラバ $\angle AOB=\angle COD$ ナルガ故ニ

$\triangle ABO \equiv \triangle CDO$ (定理十五)

故ニ $AB=CD$

同ジヤウニ　AD = BC

故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。(定理二十一)

問題

1. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通リ,一双ノ相對スル邊ノ間ニ夾マルル線分ハ,此點ニ於テ二等分セラル。

2. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル邊 AB, CD ノ上ニ相等シキ線分 AE, CG ヲ取リ,又 BC, DA ノ上ニ相等シキ線分 BF, DH ヲ取ルトキハ, EFGH ハ平行四邊形ニシテ,其對角線ノ交點ハ ABCD ノ對角線ノ交點ト一致ス。

31. 正方形。矩形。菱形。

四邊形ノ四ツノ角ガ相等シキトキハ,各〻ノ角ガ直角ニシテ,此四邊形ハ平行四邊形ナリ。

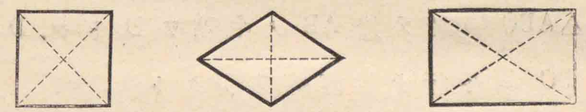
定義。 四ツノ角ガ直角ナル四邊形ヲ**矩形**トイフ。

定理二十三。 矩形ノ對角線ハ相等シ。

又對角線ガ相等シキ平行四邊形ハ

矩形ナリ。

系。 直角三角形ノ斜邊ニ對スル中線ハ斜邊ノ半分ニ等シ。又逆ニ一ツノ邊ニ對スル中線ガ其邊ノ半分ニ等シキ三角形ハ直角三角形ナリ。



定義。 四ツノ邊ガ相等シキ四邊形ヲ**菱形**トイフ。

菱形ハ平行四邊形ニシテ,其對角線ハ互ニ垂直ナリ(之ヲ證明セヨ)。

定義。 四ツノ邊ガ相等シク,四ツノ角ガ相等シキ四邊形卽チ**正四角形**ヲ特ニ**正方形**トイフ。

正方形ハ矩形ニシテ同時ニ又菱形ナリ。故ニ其角ハイヅレモ直角ニシテ對角線ハ相等シク且互ニ垂直ナリ。

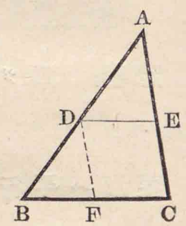
問題

對角線ガ相等シク且互ニ垂直ニ二等分スル四邊形ハ正方形ナリ。

32. 三角形ノ邊ノ中點ヲ連ヌル直線。

定理二十四。 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通ジ第二ノ邊ニ平行ナル直線ハ,第三ノ邊ヲ二等分ス。

△ABC ニ於テ邊 AB ノ中點ヲ D トシ, D ヨリ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,此直線ハ邊 AC ト A 及ビ C ノ間ニアル點ニテ出會フ。此點ヲ E トセヨ。然ラバ E ハ AC ノ中點ナルベシ。



證。 D ヨリ AC ニ平行ナル直線 DF ヲ引キ, BC ト F ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ △ADE, △DBF ニ於テ

$AD = DB,\quad \angle ADE = \angle DBF,\quad \angle DAE = \angle BDF$

故ニ $AE = DF$ (定理十六)

又 DFCE ハ平行四邊形ナルガ故ニ

$DF = EC$ (定理二十)

故ニ $AE = EC$

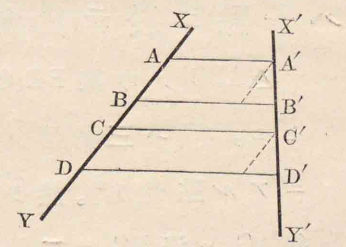
卽チ E ハ AC ノ中點ナリ。

系一。 三角形ノ二ツノ邊ノ中點ヲ連ヌル直線ハ第三ノ邊ニ平行ナリ。

證。 邊 AB ノ中點 D ヲ通ジ BC ニ平行ナル直線ハ本定理ニヨリテ AC ノ中點 E ヲ通ル。卽チ DE ハ BC ニ平行ナリ。

系二。 三角形ノ二ツノ邊ノ中點ヲ連ヌル直線ハ第三ノ邊ノ半分ニ等シ。

系三。 直線 XY ノ上ニ任意ノ相等シキ線分 AB, CD ヲ取リ, A, B, C, D ヲ通ジテ互ニ平行ナル直線ヲ引キテ他ノ直線 X′Y′ トソレゾレ A′, B′, C′, D′ ニ於テ交ハラハシムルトキハ,線分 A′B′, C′D′ ハ相等シ。



問題

1. 四邊形ノ四ツノ邊ノ中點ハ一ツノ平行四

邊形ノ頂點ナリ。

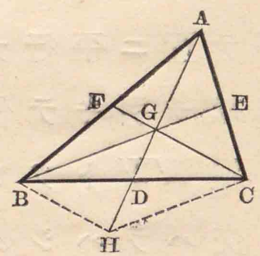
2. 四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分及ビ對角線ノ中點ヲ結ビ付クル線分ハ同一ノ點ヲ通リ且其點ニ於テ二等分セラル。

3. 一双ノ相對スル邊ガ平行ナル四邊形(**梯形**)ノ他ノ二ツノ邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ハ,平行ナル邊ニ平行ニシテ且其和ノ半分ニ等シ。

33. 三角形ノ重心。

定理二十五。 三角形ノ三ツノ中線ハ一點ニ於テ出會フ。

△ABC ノ中線 BE, CF ガ G ニ於テ相交ハルトセヨ。(G ハ三角形ノ内部ニアル點ナリ*)。然ラバ直線 AG ハ邊 BC ヲ二等分スルコトヲ證明スベシ。



證。 AG ノ延長ノ上ニ, GH ヲ AG ニ等シク取リ, BH, CH ヲ結ビ付ケヨ。然ラ

* △BCE ヲ觀ルニ, CF ハ ∠BCE ノ内部ヲ通過セリ。故ニ C ニ對スル邊 BE ノ上ノ一點(卽チ G)ヲ通ル(第 **19** 節參照)故ニ G ハ線分 BE ニ屬シ, 從テ △ABC ノ内部ニアリ。

バ △ACH ニ於テ E, G ハ邊 AC, AH ノ中點ナルガ

故ニ　　EG ∥ CH　卽チ　GB ∥ CH

同ジヤウニ　　　GC ∥ BH

故ニ BGCH ハ平行四邊形ニシテ, BC, GH ハ其對角線ナリ。故ニ直線 GH 卽チ AG ハ線分 BC ヲ二等分ス。

定義。 三角形ノ三ツノ中線ノ交ハル點ヲ三角形ノ**重心**トイフ。

系。 三角形ノ各々ノ中線ノ上ニ於テ, 頂點ト重心トノ距離ハ其中線ノ長サノ三分ノ二ニ等シ。

證。 上ノ圖ニテ BE=BG+GE, BG=CH=2.GE, 從テ BE=3GE, 故ニ $BG=\frac{2}{3}BE$

問題

1. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル邊 AB, CD ノ中點ヲソレゾレ E, F トスルトキハ AF, CE ハ對角線 BD ヲ三等分ス。

2. 三角形ノ三ツノ邊ノ中點ヲ頂點トスル三角形ノ重心ハ原ノ三角形ノ重心ト一致ス。

課題第二

1. 三角形 ABC ノ頂點 B, C ヨリ邊 AC, AB ヘ下セル垂線ノ相交ハル點ヲ O トスルトキハ, ∠ABO, ∠ACO ハ相等シク, ∠BOC ト ∠BAC トハ補角ナリ。

2. 一ツノ角ノ一邊ノ上ノ任意ノ點ヨリ此邊ニ垂直ナル直線ヲ角ノ內部ヘ引キ, 又此點ヨリ他ノ邊ヘ垂線ヲ下ストキハ, 二ツノ垂線ノ作ル角ノ二等分線ハ其同ジ側ニ於テ二ツノ邊ト相等シキ角ヲ作ル。

3. 三角形 ABC ノ頂點 B ヨリ角 A ノ二等分線ヘ垂線ヲ下シ, 邊 AC 又ハ其延長ト D ニ於テ交ハラシメ, CD ノ中點ヲ E トスルトキハ,

∠ABD ハ內角 B, C ノ和ノ半分ニ

∠CBD ハ內角 B, C ノ差ノ半分ニ

AE ハ邊 AB, AC ノ和ノ半分ニ

CE ハ邊 AB, AC ノ差ノ半分ニ

等シ。

4. 四邊形ノ相對スル角ノ二等分線ガ平行ナルカ又ハ一致スルトキハ, 他ノ二ツノ角ハ相等シ。

5. 四邊形ニ於テ最大ナル邊ト最小ナル邊トガ相對スルトキハ, 最大ナル邊ニ接スル二ツノ角ハ各〻之ニ對スル角ヨリモ小ナリ。

6. 三角形ノ內部ノ一點ヨリ三ツノ頂點ニ至ル距離ノ和ハ, 周圍ヨリハ小ニシテ, 周圍ノ半分ヨリハ大ナリ。

7. 三角形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ出ヅル中線ガ之ニ對スル邊ノ半分ヨリモ大ナルカ, 小ナルカ, 又ハ之ニ等シキカニ從ヒテ, 此角ハ銳角, 鈍角, 又ハ直角ナリ。

8. 平行ナラザル二邊ガ相等シキ梯形ノ平行ナル二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ, 此等ノ邊ニ垂直ニシテ, 二ツノ對角線及ビ平行ナラザル二邊ノ延長ハ, イヅレモ此直線ノ上ニ於テ相交ハル。

9. 二ツノ中線ガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ。又三角形ノ二ツノ相等シカラザル邊ニ對スル中線ノ中, 大ナル邊ニ對スル方ガ小ナリ。

10. 二ツノ正方形 ABCD, DEFG ガ隣接シ, 邊 DE ハ邊 DC ト同ジ方向ニ, 邊 DG ハ邊 DA ト反對ノ方向ニアリ。 AD ノ上ニ AH ヲ又 DC ノ延長ノ上ニ

CK ヲイヅレモ DE ニ等シク取ルトキハ,四邊形 BHFK ハ正方形ニシテ,直角三角形 ABH, GHF, EKF, CBK ハ相等シ。

11. 平行四邊形ノ內角ノ二等分線ハ矩形ヲ作リ,矩形ノ對角線ハ平行四邊形ノ邊ニ平行ナリ。

12. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ AB ニ垂直ニ,∠A ト反對ノ側ニ AD ヲ AB ニ等シク引キ,又 AC ニ垂直ニ ∠A ト反對ノ側ニ AE ヲ AC ニ等シク取ルトキハ,A ヨリ出ヅル △ABC ノ中線ハ DE ニ垂直ニシテ,其半分ニ等シ。(B ヨリ BF ヲ AC ニ平行ニ且 AC ニ等シク取ルトキハ,△ABF, △ADE ハ相等シ)。

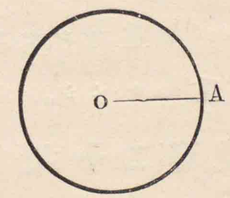
第二篇

圓

第一章　圓　作圖ノ問題

34. 定義。

定義。線分 OA ノ一端 O ヲ固定シテ此線分ヲ平面上ニ於テ廻轉セシメ,遂ニ最初ノ位置ニ復ラシムルトキ,線分ノ掃過セル平面ノ部分ヲ**圓**トイヒ,O ヲ此圓ノ**中心**トイフ。線分ノ他ノ一端 A ガ此廻轉ニ際シ通過セル跡ハ一ツノ線ニシテ,卽チ圓ノ境界ナリ。之ヲ圓**周**トイフ。



中心ヨリ圓周上ノ一點ニ至ル線分ヲ圓ノ**半徑**トイフ。圓ノ半徑ハスベテ相等シ。

中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリモ小ナル點ハ圓ノ**內部**ニアリ,中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリモ大ナル點ハ圓ノ**外部**ニアリ。

圓ノ内部ナル一ツノ點ト外部ナル一ツノ點トヲ連ヌル線ハ必ズ圓周ト交ハル。

圓ノ中心ヲ通ズル直線ノ上ニ於テ,中心ヨリノ距離ガ半徑ニ等シキ點ハ,中心ノ兩側ニ一ツヅツアリ。即チ中心ヲ通ズル直線ハ圓周ト二ツノ點ニ於テ交ハル。此等ノ點ヲ兩端トセル線分ヲ圓ノ直徑トイフ。直徑ハ半徑ノ二倍ニ等シク,中心ハ直徑ノ中點ナリ。

相等シキ半徑ヲ有スル二ツノ圓ノ平面ヲ圓ノ中心ガ相重ナルヤウニ重ネ置クトキハ,圓周モ亦全ク重ナルベシ。

定理二十六。 半徑ノ相等シキ二ツノ圓ハ全ク相等シ。

系。 直徑ハ圓ヲ全ク相等シキ二ツノ部分ニ分ツ。

直徑ニヨリテ分タレタル圓ノ二ツノ部分ヲ半圓トイフ。

問　題

1. AB, CD ガ一ツノ圓ノ直徑ナルトキハ AC, BD ハ相等シク且互ニ平行ナリ。(ACBD ハ矩形ナリ)。

2. 中心 O ヨリ外ノ點 P ヨリ圓周上ノ二點 A, B ニ至ル距離ガ相等シキトキハ, P ヲ通ル直徑ハ角 AOB, APB ヲ二等分シ, 又 AB ヲ垂直ニ二等分ス。

3. 圓ノ内部ニアル二ツノ點ヲ結ビ付クル線分ノ上ノ點ハ盡ク圓ノ内部ニアリ。

35. 圓ト直線トノ位置ノ關係。

定理二十七。 直線ト圓周トハ二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ。

中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリモ大ナル直線ハ圓周ニ交ハラズ。

中心ヨリノ距離ガ半徑ニ等シキ直線ハ圓周ト唯一ツノ點ヲ共有ス。

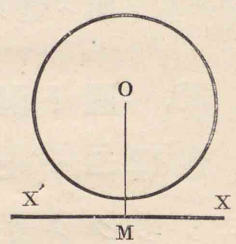
中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリモ小ナル直線ハ二ツノ點ニ於テ圓周ト交ハル。

證。 O ヲ圓ノ中心, O ヨリ直線 XX′ ヘ下セル垂

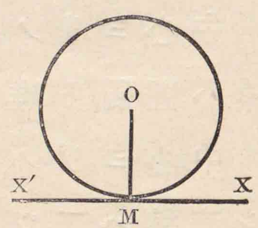
線ノ足ヲMトセヨ。直線XX'ト圓周トニ共通ナル點ハ卽チ直線XX'上ニ於テOヨリ半徑ニ等シキ距離ニアル點ナリ。故ニカヤウノ點ハ二ツヨリ多クアルコトヲ得ズ(定理十四,系一)。サテ

(一) 垂線OMハ半徑ヨリモ大ナリトセヨ。然ラバMハ圓ノ外部ニアリ。

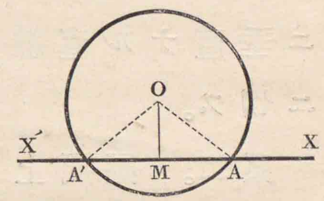
又直線XX'ノ上ノ他ノ點ハOトノ距離OMヨリモ大(定理十四),從テ半徑ヨリモ大ナルガ故ニ,盡ク圓ノ外部ニアリ。故ニ直線XX'ハ全ク圓ノ外部ニアリ,從テ圓周ニ交ハラズ。



(二) 次ニOMハ半徑ニ等シトセヨ。然ラバMハ圓周上ノ點ナリ。 直線XX'ノ上ノ他ノ點ハ,上ト同ジヤウニ,盡ク圓ノ外部ニアリ。故ニ直線XX'ハ點Mニ於テ一タビ圓周ニ觸ルル外,全ク圓ノ外部ニアリ。(圓ハ全ク此直線ノ一側ニアリ)。



(三) 次ニOMハ半徑ヨリモ小ナリトセヨ。然ラバMハ圓ノ內部ニアリ。故ニ半直線MX, MX'ハ各,圓周上ノ點A, A'ヲ通過シテ圓ノ外部ニ出ヅベシ*。卽チ直線XX'ハ圓周ト少クトモ二ツノ點ヲ共有ス。サレド二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトヲ得ザルガ故ニ,共通ノ點ハ二ツアリ。



注意。直線XX'ノ二ツノ交點ノ間ニ夾マレタル部分ハ全ク圓ノ內部ニアリ。其他ハ全ク圓ノ外部ニアリ。又圓周ハ二ツノ交點ニ於テ二ツノ部分ニ分タレ,此等ノ二ツノ部分ハ直線XX'ノ兩側ニ一ツヅツアリ。

定義。圓周ト唯一ツノ點ヲ共有スル直線ヲ其點ニ於テ圓ニ**切ス**,又ハ圓ノ**切線**ナリトイヒ,其點ヲ**切點**トイフ。

圓周ト二ツノ點ニ於テ交ハル直線ヲ**割線**トイフ。

* 半直線MXノ上ニハ必ズ圓ノ外部ニアル點アリ。(例ヘバ點XトMトノ距離ガ半徑ヨリモ大ナリトスルトキハ,Xハ圓ノ外部ニアリ)。故ニMXハ圓周上ノ點ヲ通過ス(76頁參照)。

系一。 圓周上ノ一點ヲ通ル直線ハ再ビ圓周ト交ハル,唯此點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ノミハ此點ニ於テ圓ニ切ス。

系二。 圓周上ノ一點ニ於テ唯一ツノ切線ヲ引クコトヲ得。

系三。 中心ヨリ割線ヘ下セル垂線ノ足ハ二ツノ交點ノ中點ナリ。中心ヨリ切線ヘ下セル垂線ノ足ハ切點ナリ。

問　題

二ツノ定點ヲ通ル圓ノ中心ハ盡ク同一ノ直線上ニアリ。一ツノ定點ニ於テ一ツノ直線ニ切スル圓ノ中心モ亦然リ。

36. 弦。

定義。 圓周上ノ二點ヲ結ビ付クル線分ヲ弦トイフ。

弦ハ全ク圓ノ内部ニアリ。其延長ハ圓ノ外部

ニアリ。直徑ハ中心ヲ通ル弦ナリ。

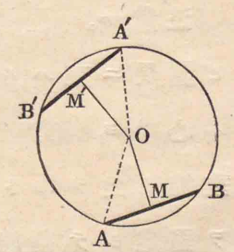
定理二十八。 中心ヨリ弦ヘ下セル垂線ハ弦ヲ二等分ス。

(前節系三)

定理二十九。 相等シキ弦ハ中心ヨリ相等シキ距離ニアリ。

弦ハ小クナルニ從ヒテ中心ニ遠ザカル。

中心Oヨリ弦AB, A′B′ヘ下セル垂線ノ足ヲソレゾレM, M′トセヨ。然ラバ



(一) AB=A′B′ ナルトキハ, OM=OM′ ナルベシ。

證。 AM, A′M′ ハソレゾレAB, A′B′ ノ半分ナルガ故ニ相等シ。故ニ直角三角形OAM, OA′M′ ニ於テ斜邊及ビ他ノ一邊ガソレゾレ相等シク,從テ第三邊モ亦相等シ(定理十七,系)。故ニ OM=OM′

(二) 次ニ AB<A′B′ トセヨ。然ラバ OM>OM′ ナルベシ。

證。 $AB<A'B'$ ナルガ故ニ, $AM<A'M'$

即チ直角三角形 OAM,OA'M' ニ於テ

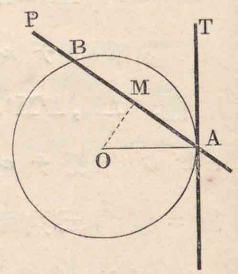
$$OA=OA' \quad AM<A'M'$$

故ニ $OM>OM'$ (定理十四,系三)

系一。 一ツノ圓ニ於テ中心ヨリノ距離ガ相等シキ弦ハ相等シ。又中心ヨリノ距離ガ大キクナルニ從ヒテ弦ハ小クナル。

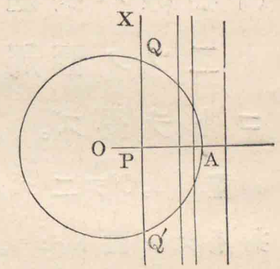
系二。 直徑ハ最大ナル弦ナリ。

注意一。 圓周上ノ定點Aヲ通ル割線APガ再ビ圓周ニ交ハル點ヲBトシ,中心Oヨリ此直線ヘ下セル垂線ノ足ヲMトセヨ。今Aヲ固定シテ割線APヲ廻轉セシムルモノト考フルニ,∠OAPガ漸次大クナルニ伴ヒ,垂線OMハ漸次大クナリ,從テ弦ABハ漸次小クナリ行キ,竟ニ∠OAPガ直角トナルトキ,BハAニ合シ,直線APハAニ於ケル切線ATニ



合スベシ。

注意二。 Oヲ圓ノ中心,Pヲ半徑OAノ上ノ一點,XヲPニ於テOAニ垂直ナル直線,Q,Q'ヲ此直線ガ圓周ニ交ハル二ツノ點トセヨ。今點PハOヨリAニ向ヒテ半徑ノ上ヲ動クモノト考フルニ,Pガ漸次中心Oニ遠ザカルニ從ヒ,弦QQ'ハ小クナリ(即チ二ツノ點Q,Q'ハ相接近シ),竟ニPガAニ合スルトキ,Q,Q'ハ共ニAニ合シ,垂線XハAニ於ケル切線ニ合ス。



問題

1. 同ジ方向ヲ有スル弦ノ中點及ビ切線ノ切點ハ同一ノ直徑ノ上ニアリ。

2. 二ツノ弦ノ相交ハル點ガ各〻ノ弦ノ中點ナルトキハ,此等ノ弦ハ直徑ナリ。

3. 圓內ノ一點ヲ通ル弦ノ中,其點ヲ通ル直徑ニ垂直ナルモノガ最モ短シ。

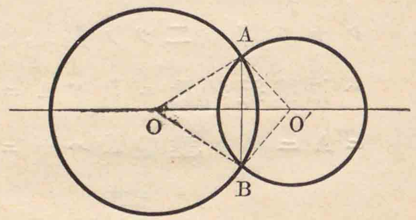
4. 一ツノ圓ニ於テ,相等シキ弦ハ盡ク他ノ一ツノ圓ニ切ス。

37. 相交ハル圓。

定理三十。 二ツノ圓周ガ二ツノ點ヲ共有スルトキハ,其中心ヲ通ル直線(中心線)ハ共通ノ弦ヲ垂直ニ二等分ス。

二ツノ圓周ハ三ツノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ。

證。 O,O′ヲ二ツノ圓ノ中心,A,Bヲ二ツノ圓周ニ共通ナル點トセヨ。然ラバO,O′ハイヅレモA,Bヨリ相等シキ距離ニアリ。



故ニOO′ハABヲ垂直ニ二等分ス。(定理十,系三)

又假ニ二ツノ圓周ガA,Bノ外ニ點Cヲ共有ストセヨ。然ラバOO′ハACヲ垂直ニ二等分スベシ。故ニA,B,Cハ同一ノ直線(AヨリOO′ヘ下セル垂線)ノ上ニアリ且同一ノ圓周ノ上ニアルベシ。サレドコレ有リ得ベカラザルコトナリ(定理二十七)。故ニ二ツノ圓周ハ三ツノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ。

注意一。 同一ノ中心ヲ有スル二ツノ圓(同心圓)周ハ共通ノ點ヲ有セズ。

系。 二ツノ圓周ガ中心線上ニアラザル一點ヲ共有スルトキハ,此等ノ圓周ハ二ツノ點ヲ共有ス。

定義。 二ツノ圓周ガ二ツノ點ヲ共有スルトキハ,二ツノ圓ハ此等ノ點ニ於テ**相交ハル**トイフ。

注意二。 一ツノ圓ノ内部ニアル點Aト外部ニアル點Bトヲ通ル圓周ハ,此圓周ト相交ハルベシ。一ツノ點ガ第二ノ圓周ノ上ヲ動クト考フルニ,此點ガAヨリBニ至ル間ニ一タビ,又Bヨリ再ビAニ復ル間ニ一タビ,第一ノ圓周ノ上ノ點ヲ通過スベキナリ(76頁參照)。

問題

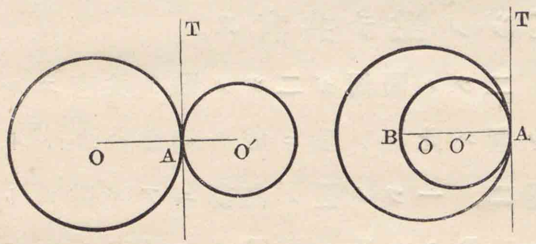
中心以外ニ圓周上ノ二ツヨリ多クノ點ヘノ距離ガ相等シキ點ナシ。

38. 相切スル圓。

定理三十一。 二ツノ圓周ガ中心線ノ上ノ一點ヲ共有スルトキハ,此等ノ

圓周ハ唯此一點ノミヲ共有シ,此點ニ於テ共通ノ切線ヲ有ス。

證。二ツノ圓*O, O′ガ中心線上ノ一點Aヲ共有ストセヨ。假ニ二ツノ圓ガAヨリ外ノ點Pヲ共



有スト考フルトキハ,此點Pガ若シ中心線上ニアラバ,二ツノ圓ハ一ツノ直徑APヲ共有スルコトトナリ,從テ全ク相合スベク,又Pガ中心線ノ上ニアラズバ,中心線OO′ハAPヲ垂直ニ二等分スベク,從テAヲ通ラザルベシ(定理三十)。故ニ二ツノ圓ハAヨリ外ノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ。

Aニ於テ中心線OO′ニ垂直ナル直線ハ卽チ二ツノ圓ニ共通ナル切線ナリ(定理二十七,系一)。

定義。二ツノ圓ガ共通ノ點ニ於テ共通ノ切線ヲ有スルトキハ,此等ノ圓ハ此共通ノ點ニ於テ**相**

* 不明ノ虞ナキトキニハ,中心ヲ表ス文字ヲ以テ圓ヲ示スナリ。

切ストイフ。

系一。中心線上ノ一點ヲ共有スル二ツノ圓ハ相切ス。

系二。相切スル二ツノ圓周ハ切點ノ外ニ共通ノ點ヲ有セズ。

定義。二ツノ圓O, O′ガAニ於テ相切スルトキ,中心O, O′ガ共通ノ切線ATノ反對ノ側ニ一ツヅツアルトキハ,圓O, O′ハATノ反對ノ側ニ一ツヅツアリ,從テ二ツノ圓ハ點Aニ於テ一タビ相觸ルル外,各〻全ク他ノ外部ニアリ。此場合ニ二ツノ圓ハ**外切**ストイフ。

中心O, O′ガ共通ノ切線ATノ同ジ側ニアルトキ,例ヘバO′ハOトAトノ間ニアリトスルトキハ,圓O′ノ直徑AO′Bノ一端Bハ圓Oノ内部ニアルベシ。故ニ圓O′ハAニ於テ一タビ圓Oニ觸ルル外全ク圓Oノ内部ニアリ。* 此場合ニハ二ツノ圓ハ**内切**ストイフ。

* 假ニ圓周O′ガ圓Oノ外部ノ點B′ヲ通ルト考フルトキハ,二ツノ圓ハ相交ハルコトトナルベシ。(前節注意ニ參照)

39. 二ツノ圓ノ位置ノ關係。

二ツノ圓周ハ二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトヲ得ザルガ故ニ,其位置ノ關係ハ次ノ五通リノ外ニ出デズ。即チ(一)二ツノ圓周ガ二ツノ點ヲ共有スルトキハ,二ツノ圓ハ相交ハル。又二ツノ圓周ガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキハ,二ツノ圓ハ(二)外切又ハ(三)內切ス。二ツノ圓周ニ共通ノ點ナキトキハ,一ツノ圓周ガ他ノ圓ノ內部及ビ外部ノ點ヲ含ムコトヲ得ザル(第37節注意二)ガ故ニ,(四)二ツノ圓ハ各〻全ク他ノ圓ノ外部ニアルカ,又ハ(五)二ツノ圓ノ中,一ツハ全ク他ノ圓ノ內部ニアリ。

此等ノ五ツノ場合ヲ二ツノ圓ノ半徑及ビ其中心ノ距離ノ大小ノ關係ニヨリテ區別スルコトヲ得ルコト,次ノ如シ。

定理三十二。(一) 二ツノ圓ガ各〻他ノモノノ外部ニアルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ和ヨリモ大ナリ。

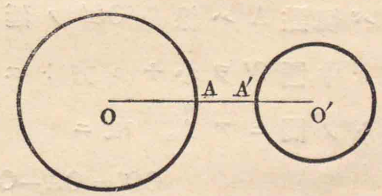
(二) 二ツノ圓ガ外切スルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ和ニ等シ。

(三) 二ツノ圓ガ相交ハルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナリ。

(四) 二ツノ圓ガ內切スルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ差ニ等シ。

(五) 二ツノ圓ノ中,一ツガ全ク他ノ一ツノ內部ニアルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ差ヨリモ小ナリ。

證。(一) 二ツノ圓O,O'ガ各〻他ノ外部ニアリトセヨ。然ラバ圓O'ノ中心O'モ亦圓Oノ外部ニアリテ,線分OO'ハ先ヅ圓周Oニ交ハリ,次ニ圓周O'ニ交ハルベシ。此等ノ交點ヲA, A'トセヨ。然ラバ



$$OO' = OA + AA' + O'A'$$

故ニ

$$OO' > OA + O'A'$$

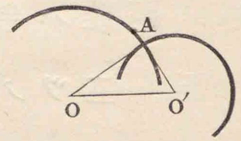
即チOO'ハ半徑ノ和ヨリモ大ナリ。

(二) 二ツノ圓ガ點Aニ於テ外切スト セヨ。然ラバAハOO'ノ上ニ於テOトO'トノ間ニアリ。

故ニ $$OO' = OA + O'A$$

即チOO'ハ半徑ノ和ニ等シ。

(三) 二ツノ圓O,O'ガ相交ハルトキハ,二ツノ圓周ハ中心線ノ上ニアラザル點Aヲ共有ス。即チAOO'ハ一ツノ三角形ニシテ,其二ツノ邊OA,O'Aハ圓O,O'ノ半徑ナリ。故ニOO'ハ半徑ノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナリ(定理十三)。

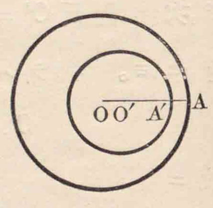


(四) 二ツノ圓ガ點Aニ於テ内切スト セヨ。然ラバ切點Aハ線分OO'ノ延長ノ上ニアリ,二ツノ圓ノ中,圓O'ヲ小ナル方トスルトキハ,點O'ハOトAトノ間ニアリ。故ニ

$$OO' = OA - O'A$$

即チOO'ハ半徑ノ差ニ等シ。

(五) 圓O'ガ全ク圓Oノ内部ニアルトキハ,OO'ノ延長ハ先ヅ圓周O'ニ交ハリ,次ニ圓周Oニ交ハルベシ,此等ノ點ヲA',Aトセヨ。然ラバ



$$OA = OO' + O'A' + A'A$$

故ニ $$OA > OO' + O'A'$$

即チ $$OO' < OA - O'A'$$

即チOO'ハ半徑ノ差ヨリモ小ナリ。

系。 二ツノ圓ノ中心ノ距離ガ(一)半徑ノ和ヨリモ大ナルカ,(二)半徑ノ和ニ等シキカ,(三)半徑ノ和ヨリモ小ニシテ半徑ノ差ヨリモ大ナルカ,(四)半徑ノ差ニ等シキカ,(五)半徑ノ差ヨリモ小ナルカニ從ヒテ,二ツノ圓ハ(一)各､全ク他ノモノノ外部ニアリ,又ハ(二)外切シ,又ハ(三)相交ハリ,又ハ(四)内切シ,又ハ(五)二ツノ圓ノ中,一ツハ全ク他ノ一ツノ内部ニアリ。

注意。 二ツノ相等シキ圓ハ,其中心ノ距離ガ半徑ノ二倍ヨリモ小ナルトキニ限リ,相交ハル。

問題

1. 圓周ノ上ニ於テ,中心以外ノ一定點ニ最モ

近キ點及ビ最モ遠キ點ハ,定點ヲ通ル直徑ノ兩端ナリ。此等ノ點ハ定點ヲ中心トシ,與ヘラレタル圓ニ內切及ビ外切スル圓ノ切點ナリ。

2. 二ツノ圓周ノ上ニ一ツヅツアル二點ノ距離ノ最モ短キモノ及ビ最モ長キモノヲ求メヨ。

3. 相切スル二ツノ圓ノ切點ヲ通ル直線ガ再ビ此等ノ圓ト相交ハル點ヲ一端トセル各圓ノ直徑ハ互ニ平行ナリ。

4. 二ツノ圓ノ相交ハル點ヲ通ル直線ガ再ビ此等ノ圓ト交ハル點ノ間ノ距離ハ,此直線ガ中心線ニ平行ナルトキニ最モ長シ。

二ツノ圓ガ相切スルトキハ如何。

40. 作圖ノ問題。

與ヘラレタル性質ヲ有スル圖形ヲ作ルコトヲ作圖トイフ。

初等幾何學ノ作圖ニ於テ用フルコトヲ許ス器械ハ**定木**及ビ**兩脚規**(こんぱす)ニ限ル。定木ハ直線ヲ引クニ用ヒ,兩脚規ハ圓ヲ作ルニ(又ハ「距離ヲ移ス」ニ)用フ。卽チ初等幾何學ニ於テ最初ヨリ爲

シ得ルモノトシテ承認セラルルハ

任意ノ一點ヨリ他ノ任意ノ一點ヘ直線ヲ引クコト,

任意ノ直線ヲ任意ニ延長スルコト,

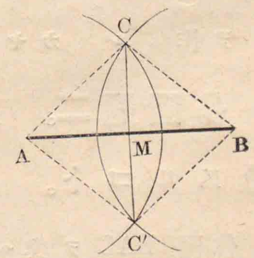
任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ作ルコト

ニ限レリ。之ヲ**作圖ノ公法**トイフ。

他ノ作圖ハスベテ上ノ三ツノ作圖ヲ反復應用シテ,之ヲ解クコトヲ要スルナリ。

41. 直線及ビ角ヲ二等分スル作圖。

作圖題一。 與ヘラレタル線分ヲ二等分スルコト。



作圖。 AB ヲ與ヘラレタル線分トセヨ。

A 及ビ B ヲ中心トシ,任意ノ相等シキ半徑ヲ以テ圓周ヲ作リ,點 C 及ビ C′ ニ於テ相交ハラシメヨ。 CC′

ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバCC′トABトノ交點MハABノ中點ナルベシ。

證。作圖ニヨリ $AC=BC$, $AC'=BC'$ 故ニ CC′ハ AB ヲ(垂直ニ)二等分ス。(定理十,系三)

注意一。圓ノ半徑ガ小サ過ギルトキニハ,二ツノ圓周ハ相交ハラザルコトアルベシ。サレド半徑ヲ適當ニ大キク(實ハABノ半分ヨリモ大キク,例ヘバABニ等シク)取ルトキハ,二ツノ圓周ハ必ズ二ツノ點ニ於テ相交ハルベシ(第39節注意參照)。

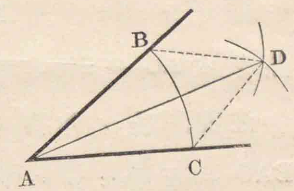
注意二。A,Bヨリ相等シキ距離ニアル點二ツヲ求ムルトキハ,之ヲ結ビ付クル直線ハABノ垂直二等分線ナリ。上ノ作圖ニテ,二ツノ圓ヲ作レルハ,カヤウノ點(C, C′)ヲ求ムルガ爲ナリ。

作圖題二。與ヘラレタル角ヲ二等分スルコト。

作圖。BACヲ與ヘラレタル角トセヨ。

二ツノ邊AB,ACノ上ニ於テ任意ノ相等シキ長

サAB,ACヲ取レ。B及ビCヨリ相等シキ距離ニアル點Dヲ求メヨ。(B及ビCヲ中心トシ,相等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ,其交點ヲDトセヨ)。ADヲ結ビ付ケヨ。



然ラバADハ∠BACヲ二等分スベシ。

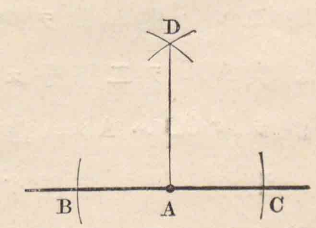
證。作圖ニヨリ, $BA=CA$, $BD=CD$, 故ニADハ∠BACヲ二等分ス(定理十七)。

42. 垂線ノ作圖。

作圖題三。與ヘラレタル直線上ノ與ヘラレタル一點ニ於テ,此直線ニ垂線ヲ引クコト。

作圖。BCヲ與ヘラレタル直線,Aヲ其上ニ與ヘラレタル點トセヨ。

直線BCノ上ニ於テAノ兩側ニ任意ノ相等シキ長サAB,ACヲ取レ。B及ビCヨリ相等シキ距離ニ



アル點Dヲ求メヨ。ADヲ結ビ付ケヨ。

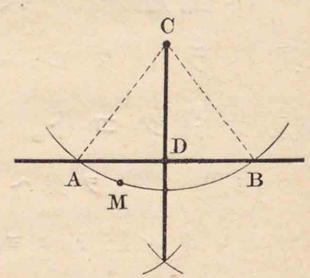
然ラバADハBCニ垂直ナルベシ(定理十,系一)。

注意。 上ノ作圖ハ前節ノ作圖題二ヲ平角BACニ應用セルモノト考フルコトヲ得。

作圖題四。 與ヘラレタル直線外ノ與ヘラレタル一點ヨリ此直線ニ垂線ヲ引クコト。

作圖。 ABヲ與ヘラレタル直線,Cヲ其上ニアラザル與ヘラレタル點トセヨ。

Cヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ,直線ABト二ツノ點A,Bニ於テ交ハラシメヨ。(卽チ與ヘラレタル直線ノ上ニ於テCヨリ相等シキ距離ニアル二ツノ點A,Bヲ求メヨ)。角ACBヲ二等分スル直線CDヲ引ケ。

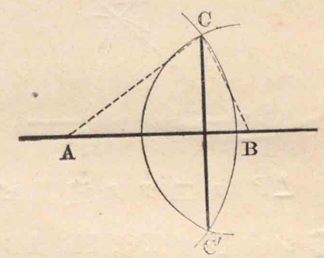


然ラバCDハABニ垂直ナルベシ(定理十,系二)。

注意。 圓ノ半徑ガ小サ過ギルトキハ,圓ガ直線ABニ交ハラザルコトアルベシ。サレド半

徑ヲ適當ニ大キク取ルトキハ(例ヘバABニ對シテCト反對ノ側ニ任意ノ點Mヲ取リ,半徑ヲCMニ等シクスルトキハ),圓ハ必ズABト二ツノ點ニ於テ交ハルベシ(定理二十七)。

第二ノ作圖。 直線上ノ任意ノ點A,Bヲ中心トシ,ソレゾレAC,BCヲ半徑トシテ圓ヲ作リ,C及ビC′ニ於テ交ハラシメヨ。CC′ヲ結ビ付ケヨ。然ラバCC′ハ求ムル垂線ナリ(定理三十)。



問題

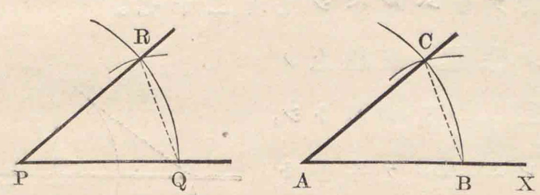
1. 邊ヲ知リテ正方形ヲ作ルコト。
2. 對角線ヲ知リテ正方形ヲ作ルコト。
3. 頂角及ビ高サ(頂點ヨリ底邊ヘ下セル垂線)ヲ知リテ二等邊三角形ヲ作ルコト。

43. 角及ビ三角形ノ作圖。

作圖題五。 與ヘラレタル半直線ヲ邊トシ,其一側ニ於テ與ヘラレタル

角ニ等シキ角ヲ作ルコト。

作圖。Pヲ與ヘラレタル角,AXヲ與ヘラレタル半直線トセヨ。



∠Pノ二ツノ邊及ビ直線AXノ上ニ任意ノ相等シキ長サPQ, PR, ABヲ取レ。Aヲ中心トシ,同ジ長サノ半徑ヲ以テ圓ヲ作レ。又Bヲ中心トシテQRニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ,AXノ任意ノ側ニ於テ,前ノ圓周トCニ於テ交ハラシメヨ。ACヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ∠Aハ∠Pニ等シカルベシ。

證。作圖ニヨリ AB=PQ, AC=PR, BC=QR

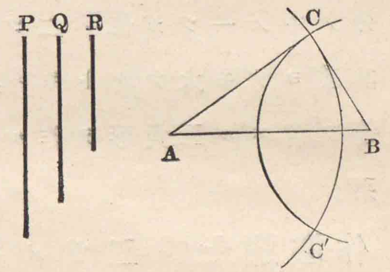
故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$, $\angle A = \angle P$

注意。上ノ作圖ニ於テA, Bヲ中心トシテ二ツノ圓ヲ作レルハ,△PQRヲABノ上ニ移スガタメナリ。同樣ノ方法ニヨリテ,次ノ問題ヲ解クコトヲ得。

作圖題六。三ツノ邊ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

P, Q, Rヲ與ヘラレタル三ツノ線分トセヨ。

AB, AC, BCガソレゾレP, Q, Rニ等シキ三角形ABCヲ作ルコトヲ要ス。



作圖。任意ノ直線ヲ引キ,其上ニPニ等シキ線分ABヲ取レ。Aヲ中心,Qヲ半徑トシテ,又Bヲ中心,Rヲ半徑トシテ,圓周ヲ作レ。Cヲ此等二ツノ圓周ノ交點トセヨ。AC, BCヲ結ビ付ケヨ。

然ラバABCハ求ムル三角形ナルベシ。

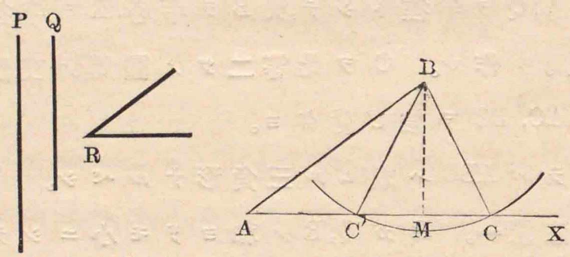
注意一。PガQ, Rノ和ヨリモ小ニシテ差ヨリモ大ナルトキノ外ハ,二ツノ圓周ハ相交ハラズ,從テ問題ニ解ナシ。

PガQ, Rノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナルトキハ,二ツノ圓周ハ直線ABノ兩側ニ一ツヅツアル點C, C'ニ於テ相交ハル,從テ問題ニ

適スル二ツノ三角形 ABC, ABC′ ヲ得。此等ノ三角形ハ全ク相等シ。

注意二。 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナリ。逆ニ三ツノ線分ノ中ノ一ツガ他ノ二ツノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナルトキハ,此等ノ線分ニ等シキ邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコトヲ得(定理三十二,系)。

作圖題七。二ツノ邊ト其一ツニ對スル角トヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。



P, Q ヲ二ツノ線分, ∠R ヲ與ヘラレタル角トセヨ。二ツノ邊ハソレゾレ線分 P, Q ニ等シク, Q ニ等シキ邊ニ對スル角ハ ∠R ニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ要ス。

作圖。 P ニ等シク線分 AB ヲ取リ, ∠R ニ等シク ∠BAX ヲ作レ。B ヲ中心トシ, Q ニ等シキ半徑ヲ以テ圓周ヲ作リ,半直線 AX ト C 及ビ C′ ニ於テ交ハラシメヨ。然ラバ ABC 及ビ ABC′ ハ求ムル三角形ナルベシ。

注意。 Q ガ B ヨリ AX ヘ下セル垂線 BM ヨリモ小ナルトキハ,圓周ハ直線 AX ニ交ハラズ。此場合ニハ問題ニ解ナシ。

Q ガ BM ニ等シキトキハ,圓周ハ M ニ於テ AX ニ切ス。此場合ニハ求ムル三角形ハ直角三角形 ABM ナリ。

Q ガ BM ヨリモ大ナルトキハ,圓周ハ二ツノ點ニ於テ直線 AX ニ交ハル。サテ Q ガ P ヨリモ小ナルトキハ,二ツノ交點ハイヅレモ半直線 AX (∠A ノ邊)ノ上ニアリ。此場合ニハ問題ニ適スル三角形ハ二ツアリ。サレド, Q ガ P ヨリモ大ナルトキハ,二ツノ交點ノ中一ツハ ∠A ノ邊ノ上ニ,又一ツハ其延長ノ上ニアリ。此場合ニハ問題ニ適スル三角形ハ唯一ツアリ。(今一ツノ交點ト A, B トヲ頂點トスル三角形ニ於テ

ハ,Aニ於ケル角ガ∠Rノ補角ニ等シ)。

(∠Rガ直角ナルトキハ如何)。

問　　題

1. 二邊ト其夾角トヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

2. 一邊ト之ニ接スル二ツノ角トヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

3. 二ツノ角ト其一ツニ對スル邊トヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

4. 一邊ヲ知リテ,正三角形ヲ作ルコト。

5. 次ノ條件ノ中,一ツニ適合スル三ツノ線分ニ等シキ邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコトヲ得。

(一) 三ツノ線分ノ中最モ大ナルモノガ,他ノ二ツノ和ヨリモ小ナルトキ。

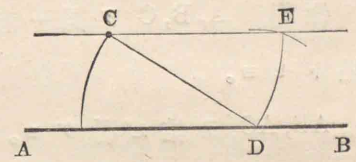
(二) 三ツノ線分ノ中最モ小ナルモノガ,他ノ二ツノ差ヨリモ大ナルトキ。

(三) 各ゝノ線分ガ他ノ二ツノ和ヨリモ小ナルトキ。

(四) 各ゝノ線分ガ他ノ二ツノ差ヨリモ大ナルトキ。

44. 平行線ノ作圖。

作圖題八。 與ヘラレタル直線外ノ一點ヨリ,此直線ニ平行ナル直線ヲ作ルコト。



作圖。ABヲ與ヘラレタル直線,Cヲ其上ニアラザル與ヘラレタル一點トセヨ。

ABノ上ニ任意ノ點Dヲ取リ,Cヲ頂點,CDヲ一邊トシテCDニ對シテAト反對ノ側ニ,∠CDAニ等シク∠DCEヲ作レ。

然ラバCEハABニ平行ナルベシ(定理五)。

問　　題

1. 三角定規ヲ用ヒテ平行線及ビ垂線ヲ引ク方法ヲ説明セヨ。

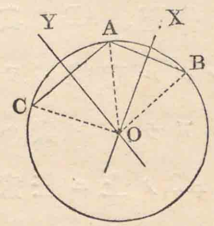
2. 與ヘラレタル直線ヨリ與ヘラレタル距離ニアル平行線ヲ引クコト。

3. 與ヘラレタル點ヲ通ジテ,與ヘラレタル直線ト與ヘラレタル角ヲ作ル直線ヲ引クコト。

45. 三ツノ點ヲ通ル圓。

作圖題九。 同一直線上ニアラザル三ツノ點ヲ通ル圓ヲ作ルコト。

作圖。 A, B, C ヲ同一直線上ニアラザル三ツノ點トセヨ。



AB, AC ヲ結ビ付ケヨ。 AB, AC ヲ垂直ニ二等分スル直線 X, Y ヲ作レ。 AB, AC ハ同一直線上ニアラザルガ故ニ,其垂線 X, Y ハ相交ハル。其交點ヲ O トセヨ。O ヲ中心, OA ヲ半徑トシテ圓ヲ作レ。是卽チ求ムル圓ナリ。

證。 O ハ AB ノ垂直二等分線ノ上ニアルガ故ニ OA=OB, 又 O ハ AC ノ垂直二等分線ノ上ニアルガ故ニ OA=OC, 故ニ O ヲ中心, OA ヲ半徑トセル圓周ハ A, B, C ヲ通ル。

系一。 同一直線上ニアラザル三ツノ點ヲ通ル圓ハ唯一ツニ限ル。

定義。 多角形ノスベテノ頂點ヲ通ル圓ヲ其**外接圓**トイヒ,多角形ハ此圓ニ**內接**ストイフ。

系二。 三角形ノ三ツノ邊ヲ垂直ニ二等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。此點ハ三角形ノ外接圓ノ中心(三角形ノ**外心**)ナリ。

系三。 三角形ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ下セル三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ通ル。

此點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。

垂心ハ三角形ノ各〻ノ頂點ヲ通リ之ニ對スル邊ニ平行ニ引ケル三ツノ直線ガ作ル三角形ノ外心ナリ。

問　題

1. 與ヘラレタル圓ノ中心ヲ求ムルコト。

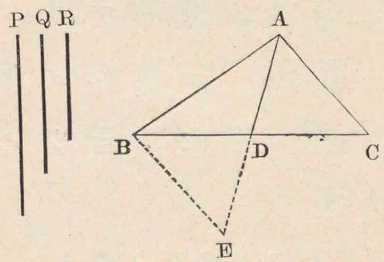
2. 與ヘラレタル點ヲ通リ,且與ヘラレタル點ニ於テ與ヘラレタル直線(又ハ圓)ニ切スル圓ヲ作ルコト。

3. 圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ,之ニ切線ヲ引クコト。

46. 問題解法ノ例。

例一。 二ツノ邊及ビ第三邊ニ對スル中線ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

P, Q ヲ與ヘラレタル二ツノ邊, R ヲ中線トセヨ。



假ニ ABC ヲ求ムル三角形ト考ヘ, $AB=P$, $AC=Q$ トセヨ。又 D ヲ BC ノ中點,從テ $AD=R$ トセヨ。AD ヲ延長シ, AD ニ等シクDE ヲ取リ, BE ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ　$\triangle EDB \equiv \triangle ADC$

故ニ　$BE = AC$

即チ AE, BE ハ知ラレタル長サニシテ, ABE ハ三ツノ邊ノ知レタル三角形ナリ。

ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖。 三ツノ邊 AB, BE, AE ガソレゾレ與ヘラレタル線分P, Q 及ビ線分 R ノ二倍ニ等シキ三角形ABE ヲ作レ。 AE ノ中點 D ヲ求メ, BD ヲ結ビ付ケ,其延長ノ上ニ BD ニ等シク DC ヲ取レ。AC

ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ ABC ハ求ムル三角形ナルベシ。

證。 作圖ニヨリ

$$DA = DE, \quad DB = DC$$

又　$\angle ADC = \angle EDB$

故ニ　$\triangle ADC \equiv \triangle EDB, \quad AC = BE = Q$

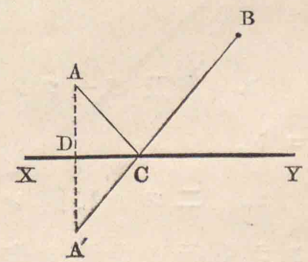
又作圖ニヨリ　$AB = P, \quad AD = R$

且 D ハ BC ノ中點,從テ AD ハ $\triangle ABC$ ノ中線ナリ。

故ニ ABC ハ求ムル三角形ナリ。

例二。 與ヘラレタル直線ノ同ジ側ニ與ヘラレタル二ツノ點ヨリ,此直線ノ上ノ一點ヘ引ケル直線ガ,與ヘラレタル直線ト相等シキ角ヲ作ルヤウニスルコト。

XY ヲ與ヘラレタル直線, A, B ヲ與ヘラレタル二ツノ點トセヨ。



假ニ XY ノ上ノ點 C ガ問題ニ適スルモノト考ヘヨ。即チ

$\angle ACX = \angle BCY$

トセヨ。BC ヲ延長シ, A ヨリ XY ヘ下セル垂線

AD ノ延長ト A′ ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ $\angle A'CX = \angle BCY = \angle ACX$

故ニ $AD = A'D$

即チ A′ ハ知ラレタル點ナリ。

ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖。A ヨリ XY ヘ垂線 AD ヲ下シ,其延長ノ上ニ AD ニ等シク DA′ ヲ取レ。A′B ヲ結ビ付ケ,直線 XY ト C ニ於テ交ハラシメヨ。AC ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ AC, BC ハ求ムル直線ナルベシ。

問 題

A 及ビ B ヨリ直線 XY ノ上ノ一點ニ至ル距離ノ和ハ,此點ガ上ノ作圖ニヨリテ得タル點 C ナルトキニ,最モ小ナリ。

課題 第三

1. 邊及ビ一ツノ對角線ヲ知リテ,菱形ヲ作ルコト。

2. 二ツノ相隣レル邊及ビ一ツノ對角線ヲ知リテ,平行四邊形ヲ作ルコト。

3. 二ツノ邊及ビ其一ツニ對スル中線ヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

4. 二ツノ對角線及ビ一ツノ邊ヲ知リテ,平行四邊形ヲ作ルコト。

5. 一ツノ邊及ビ對角線ヲ知リテ,矩形ヲ作ルコト。

6. 一ツノ邊及ビ之ニ對スル中線ト高サトヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

7. 與ヘラレタル直線ヲ任意ノ數ノ相等シキ部分ニ分ツコト。(定理二十四,系三參照)

8. 三ツノ中線ヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

9. 一ツノ角ト,之ニ接スル一ツノ邊ト,此邊ニ對スル高サトヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

10. 一ツノ角ノ邊ノ間ヘ,長サ及ビ方向ノ與ヘラレタル線分ヲ入ルルコト。

11. 一ツノ角ノ內部ニ與ヘラレタル一點ヲ通ジテ,二ツノ邊ノ間ヘ,此點ヲ中點セトル線分ヲ入ルルコト。

12. 一ツノ角,之ニ接スル一ツノ邊,及ビ他ノ二邊ノ和(又ハ差)ヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

13. 與ヘラレタル直線ニ平行ニ,與ヘラレタル

圓ノ切線ヲ引クコト。

14. 與ヘラレタル點ヲ中心トシテ,與ヘラレタル直線(又ハ圓)ニ切スル圓ヲ作ルコト。

15. 與ヘラレタル點ニ於テ,與ヘラレタル直線(又ハ圓)ニ切スル,與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ作ルコト。

第二章 中心角及ビ圓周角

47. 弧。中心角。

定義。圓周ノ一部分ヲ弧トイフ。

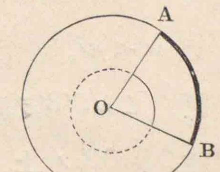
同ジ圓又ハ相等シキ圓ノ弧ハ其大小ヲ比較スルコトヲ得。卽チ重ネ合ハセ得ベキ二ツノ弧ハ相等シク,[*]又甲ノ弧ヲ乙ノ弧ノ一部分ト重ネ合セ得ベキトキハ,甲ハ乙ヨリモ小ナリ。

圓周上ノ二點A, Bハ圓周ヲ二ツノ**共軛弧**ニ分ツ。

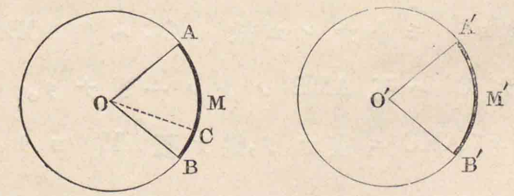
二ツノ半徑ノ作レル角ヲ**中心角**トイフ。

* 相等シキ弧ヲ重ネ合ハス仕方ハ一通ニ限ル。

二ツノ半徑OA, OBハ互ニ共軛ナル二ツノ中心角ヲ作ル。此等ノ中心角ハA, Bヲ兩端トセル二ツノ共軛弧ヲ一ツヅツ其内部ニ含メリ。此弧ヲ**此中心角ニ對ス**トイヒ。此中心角ヲ**此弧ノ上ニ立ツ**トイフ。



定理三十三。同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ中心角ハ相等シキ弧ノ上ニ立チ,相等シカラザル中心角ノ中,大ナル方ニ對スル弧ガ,小ナル方ニ對スル弧ヨリモ大ナリ。



O, O′ヲ相等シキ二ツノ圓トシ,

(一) $\angle AOB = \angle A'O'B'$

トセヨ。然ラバ

$$\widehat{AMB} = \widehat{A'M'B'}$$

ナルベシ。

證。$\angle A'O'B'$ ヲ $\angle AOB$ ニ重ネ,邊 $O'A'$, $O'B'$ ヲソレゾレ邊 OA, OB ノ上ニ重ヌルトキハ,點 A', B', ハ點 A, B ニ重ナリ,二ツノ圓周ハ全ク相重ナリ,弧 $A'M'B'$ ハ弧 AMB ニ重ナル。故ニ二ツノ弧ハ相等シ。

(二) 次ニ $\angle AOB > \angle A'O'B'$

トセヨ。然ラバ

$$\widehat{AMB} > \widehat{A'M'B'}$$

ナルベシ。

證。$O'A'$ ガ OA ノ上ニ重ナリ,$\angle A'O'B'$ ガ $\angle AOB$ ノ内部ニ落ツルヤウニ,二ツノ圓ヲ重ネ合ハスルトキハ,$O'B'$ ハ OC ノ位置ニ來ルトセヨ。然ラバ $\angle A'O'B'$ ハ $\angle AOB$ ヨリモ小ナルガ故ニ,OC ハ角 AOB ノ内部ニアリテ,C ハ弧 AMB ノ上ノ一點ナリ。卽チ弧 $A'M'B'$ ハ弧 AMC ニ重ナリ,從テ弧 AMB ヨリ小ナリ。

系。同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シク,相等シカラザル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ中,大ナル弧ノ上ニ立ツ方ガ,小ナル弧ノ上ニ立ツ方ヨリモ大ナリ。

半圓周ノ上ニ立ツ中心角ハ平角ナリ。

定義。劣角ナル中心角ニ對スル弧ハ半圓周ヨリモ小ナリ,之ヲ**劣弧**トイフ。優角ナル中心角ニ對スル弧ハ半圓周ヨリモ大ナリ,之ヲ**優弧**トイフ。

問　題

同ジ圓ニ於テ,二ツノ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ和ハ,此等ノ弧ノ和ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ニ等シ。

48. 弦ノ張ル弧。

定義。弦ハ圓周ヲ二ツノ弧ニ分ツ。此弦ハ此等ノ弧ヲ**張ル**トイフ。

一ツノ弦ト其張ル弧トニテ圍マレタル平面形ヲ**弓形**トイフ。

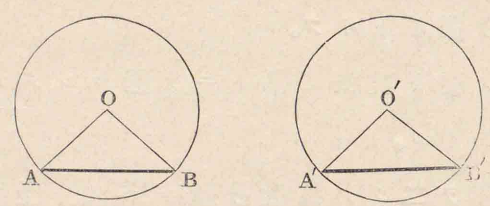
弦ハ圓ヲ二ツノ**共軛弓形**ニ分ツ。優弧ノ屬スル弓形ハ半圓ヨリモ大ナリ,之ヲ**優弓形**トイフ。又劣弧ノ屬スル弓形ハ半圓ヨリモ小ナリ,之ヲ**劣**

弓形トイフ。(劣弧ハ之ヲ張ル弦ニ對シテ中心ト反對ノ側ニアリ,優弧ハ弦ニ對シテ中心ト同ジ側ニアリ。卽チ中心ハ劣弓形ノ外部,優弓形ノ内部ニアリ)。

定理三十四。同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弧ヲ張ル弦ハ相等シ。相等シカラザル二ツノ劣弧ヲ張ル弦ノ大小ハ劣弧ノ大小ニ從ヒ,相等シカラザル二ツノ優弧ヲ張ル弦ノ大小ハ優弧ノ大小ニ反ス。

證。相等シキ二ツノ圓O,O′ニ於テ弧$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ハ相等シトセヨ。

然ラバ中心角AOB, A′O′B′ハ相等シ(定理三十三)。



故ニ△OAB, △O′A′B′ニ於テ二邊及ビ夾角ガソレゾレ相等シク,從テAB, A′B′ハ相等シ。

次ニ劣弧$\overset{\frown}{AB}$ハ劣弧$\overset{\frown}{A'B'}$ヨリモ大ナリトセヨ。

然ラバ中心角AOBハA′O′B′ヨリモ大ナリ,卽チ△OAB,△O′A′B′ニ於テ二邊ガソレゾレ相等シク,其夾角ハ相等シカラズ。故ニ大ナル夾角ヲ有スル三角形OABニ於ケル第三邊ABガ,小ナル夾角ヲ有スル三角形O′A′B′ニ於ケル第三邊A′B′ヨリモ大ナリ(定理十八)。

最後ニ,優弧$\overset{\frown}{AB}$ハ優弧$\overset{\frown}{A'B'}$ヨリモ小ナリトセヨ。

然ラバ劣弧$\overset{\frown}{AB}$ハ劣弧$\overset{\frown}{A'B'}$ヨリモ大ナリ。故ニ弦ABハ弦A′B′ヨリモ大ナリ。

系。同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弦ハ相等シキ劣弧ヲ張ル。相等シカラザル弦ノ張ル劣弧ノ大小ハ弦ノ大小ニ從ヒ,優弧ノ大小ハ弦ノ大小ニ反ス。

問題

1. 弦ノ中點ヲ通ル直徑ハ,其弦ガ張ル弧ヲ二等分ス。

2. 二ツノ弧ヲ張ル弦ノ和ハ,此等ノ弧ノ和ニ等シキ弧ヲ張ル弦ヨリモ大ナリ。

49. 圓周角。

定義。圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ弦ガ作ル角ヲ**圓周角**トイフ。

圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マレタル弧**ノ上ニ立ツ**トイフ。

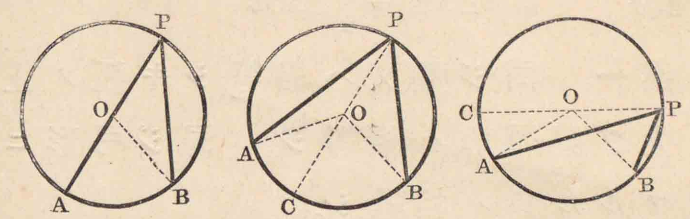
弓形ノ弧ノ上ノ一點ヲ弦ノ兩端ニ結ビ付クル直線ガ作ル圓周角ヲ此**弓形ノ含ム角**又ハ**弓形ニ於ケル角**トイフ。

故ニ弓形ガ含ム角ハ卽チ弓形ノ弧ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角ナリ。

定理三十五。圓周角ハ同ジ弧(又ハ之ニ等シキ弧)ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ。

證。圓 O ノ弧 AB ノ上ニ立ツ圓周角ヲ APB,中心角ヲ AOB トセヨ。

中心 O ガ(一) ∠APB ノ一邊例ヘバ PA ノ上ニアルカ,又ハ(二) ∠APB ノ內部ニアルカ,又ハ(三) ∠APB



ノ外部ニアルカニヨリ,三ツノ場合ヲ生ズ。

(一) 中心 O ガ PA ノ上ニアルトキハ,中心角 AOB ハ二等邊三角形 OPB ノ頂角ニ接セル外角ナリ。故ニ

$$\angle AOB = \angle OPB + \angle OBP = 2.\angle APB$$

故ニ ∠APB ハ ∠AOB ノ半分ニ等シ。

(二) 中心 O ガ圓周角 APB ノ內部ニアルトキハ,直徑 POC ヲ引ケ。然ラバ(一)ニテ證明セルコトニヨリ

$$\angle APC = \frac{1}{2}\angle AOC, \quad \angle BPC = \frac{1}{2}\angle BOC$$

故ニ

$$\angle APB = \angle APC + \angle BPC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC)$$

卽チ $$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

(三) 中心 O ガ ∠APB ノ外部ニアルトキハ

$$\angle APB = \angle BPC - \angle APC = \frac{1}{2}(\angle BOC - \angle AOC)$$

卽チ $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$

系一。 同ジ弧(又ハ相等シキ弧)ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ。同ジ弓形ニ含マルル角ハ相等シ。

系二。 半圓ガ含ム角ハ直角ナリ。

又劣弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ鋭角,優弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ鈍角ナリ。

系三。 互ニ共軛ナル二ツノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ補角ナリ。

問題

1. 二ツノ平行ナル弦ハ圓周ノ上ニ相等シキ二ツノ弦ヲ夾ム。又相等シキ弧ノ端ヲ結ビ付クル二組ノ直線ノ中,一組ハ互ニ平行ナリ。

(是ニヨリテ平行線ノ簡單ナル作圖法ヲ得ベシ)。

2. 鋭角三角形ノ外心ハ其内部ニアリ,鈍角三角形ノ外心ハ其外部ニアリ。直角三角形ノ外心ハ斜邊ノ中點ナリ。

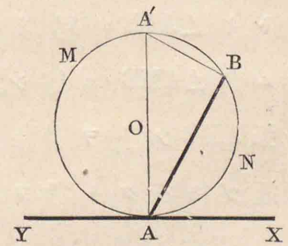
3. 三角形ノ一ツノ頂點ニ於ケル内角(又ハ外

角)ノ二等分線ト之ニ對スル邊ヲ垂直ニ二等分スル直線トハ,外接圓ノ周ノ上ニ於テ交ハル。

50. 切線ト弦トノ作ル角。

定理三十六。 切線ト其切點ヨリ引ケル一ツノ弦トノ作ル角ハ,此弦ガ其角ト同ジ側ニ於テ張ル弧ノ上ニ立ツ圓周角,卽チ此弦ニ對シテ此角ト反對ノ側ニアル弓形ノ含ム角ニ等シ。

AB ヲ圓 O ノ弦, XY ヲ A ニ於ケル切線トセヨ。然ラバ $\angle BAX$ ハ弓形 AMB ノ含ム角ニ等シク, $\angle BAY$ ハ弓形 ANB ノ含ム角ニ等シカルベシ。



證。 直徑 AOA' ヲ引キ, A'B ヲ結ビ付ケヨ。切線 XAY ト弦 AB トノ作ル二ツノ角ノ中, $\angle BAX$ ガ鋭角ナリトセヨ。

AX ハ切線ナルガ故ニ $\angle XAA'$ ハ直角ナリ。

故ニ AA' ハ $\angle XAB$ ノ外部ニアリ。故ニ A' ハ弧

AMB ニ屬シ, AA′B ハ弓形 AMB ノ含ム角ナリ。

サテ $\angle XAB$ ハ $\angle BAA'$ ノ餘角ナリ。

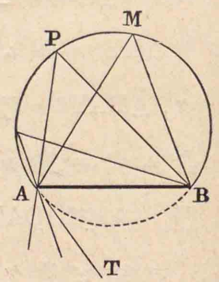
又三角形 ABA′ ニ於テ $\angle B$ ハ直角ナルガ故ニ $\angle AA'B$ ハ $\angle BAA'$ ノ餘角ナリ。

故ニ $$\angle XAB = \angle AA'B$$

即チ $\angle XAB$ ハ弓形 AMB ノ含ム角ニ等シ。

次ニ切線ト弦 AB トノ作ル鈍角 $\angle YAB$ ハ $\angle XAB$ ノ補角ナリ。又弓形 ANB ノ含ム角ハ共軛弓形 AMB ノ含ム角ノ補角ナリ。故ニ $\angle YAB$ ハ弓形 ANB ノ含ム角ニ等シ。

注意。 P ヲ弧 AMB ノ上ノ任意ノ一點トスルトキ $\angle APB$ ハ弓形 AMB ノ含ム角 $\angle AMB$ ニ等シ。今 P ガ弧 AMB ノ上ヲ動キ,漸次 A ニ近ヅキ行クト考フルトキ,直線 PB ハ漸次 AB ノ位置ニ近ヅキ,直線 PA ハ漸次 A ニ於ケル切線 AT ノ位置ニ近ヅキ,其際角 APB ノ大サハ變ラズシテ常ニ $\angle AMB$ ニ等シ。



サテ P ガ竟ニ A ニ合スルトキ,直線 PB ハ弦

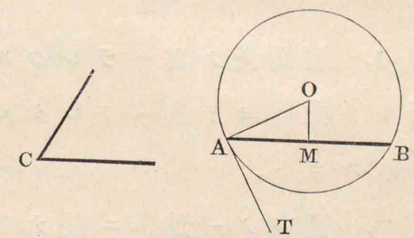
AB ニ合シ, PA ハ A ニ於ケル切線 AT ニ合ス。

故ニ $\angle TAB$ ハ $\angle AMB$ ニ等シキヲ知ルベシ。

作圖題十。 與ヘラレタル線分ノ上ニ,與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ作ルコト。

作圖。 AB ヲ與ヘラレタル直線, C ヲ與ヘラレタル角トセヨ。

$\angle BAT$ ヲ $\angle C$ ニ等シクシテ AT ヲ引ケ。AT ニ垂直ニ AO ヲ引キ,又 AB ヲ垂直ニ二等分スル直線 MO ヲ引ケ。AO, MO ハ相交ハル其交點ヲ O トセヨ。O ヲ中心, OA ヲ半徑トシテ圓ヲ作レ。然ラバ直線 AB ニ對シテ $\angle BAT$ ト反對ノ側ニアル此圓ノ弓形ハ,即チ求ムル弓形ナルベシ。



證。 MO ハ AB ヲ垂直ニ二等分スルガ故ニ, $OA=OB$ 故ニ圓 O ハ點 A, B ヲ通ル。又作圖ニヨリ $AT \perp OA$ 故ニ圓 O ハ A ニ於テ AT ニ切ス。故

ニ上ノ弓形ノ含ム角ハ∠BAT ニ等シ(定理三十六),
卽チ ∠C ニ等シ。

系。與ヘラレタル線分ヲ弦トシ,與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ハ此線分ノ兩側ニ一ツヅツアリ,而モ一ツヅツニ限ル。

問題

1. 圓周上ノ與ヘラレタル點ヨリ一ツノ弦ヲ引キテ,此圓ヨリ與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ルコト。

2. 圓內ノ一點 E ニ於テ交ハル二ツノ弦 AB, CD ノ作ル角 AEC ハ,弧 AC 及ビ BD ノ和ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

3. 圓外ノ一點ヨリ引ケル二ツノ割線ノ作ル角ハ,此等ノ割線ノ間ニ夾マレタル二ツノ弧ノ差ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

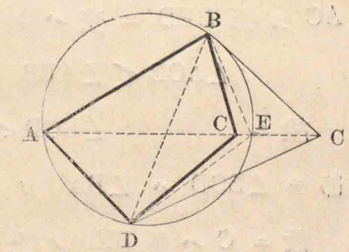
(二ツノ割線ノ中ノ一ツ又ハ双方ガ切線トナルトキハ如何)。

4. 三角形 ABC ノ邊 BC ニ對シテ A ト反對ノ

側ニアル角 BCT ガ ∠A ニ等シキトキハ,三角形 ABC ノ外接圓ハ C ニ於テ CT ニ切ス。

51. 內接四角形。

定理三十七。圓ニ內接スル四角形ノ相對スル角ハ補角ヲナス。又逆ニ相對スル角ガ補角ヲナス四角形ハ圓ニ內接シ得ベキモノナリ。



證。(一) ABCD ヲ圓 O ニ內接セル四角形, A ト C ト(又 B ト D ト)ヲ其相對スル頂點トセヨ。

然ラバ ∠A, ∠C ハ互ニ共軛ナル二ツノ弧 BCD, DAB ノ上ニ立テル圓周角ナルガ故ニ,互ニ補角ヲナス(定理三十五,系三)。

同ジヤウニ ∠B, ∠D モ互ニ補角ナリ。

(二) 次ニ四角形 ABCD ノ相對スル角 ∠A, ∠C ガ互ニ補角ナリトセヨ。

三ツノ頂點 A, B, D ヲ通ル圓周ヲ作レ。然ラバ BD ニ對シテ A ト反對ノ側ニアル弓形 BED ノ含

ム角ハ∠A ノ補角ニ等シ*。

サテ假ニ頂點 C ハ弧 BED ノ上ニアラズシテ弓形 BED ノ内部ニアリトシ對角線 AC ノ延長ガ弧 BED ト交ハル點ヲ E トセヨ。然ラバ

$$\angle ACB > \angle AEB, \quad \angle ACD > \angle AED$$

故ニ $$\angle BCD > \angle BED$$

卽チ ∠BCD ハ ∠BAD ノ補角ヨリモ大ナルベシ。

又假ニ C ハ弓形 BED ノ外部ニアリトシ,對角線 AC ガ弧 BED ニ交ハル點ヲ E トセヨ。然ラバ

$$\angle ACB < \angle AEB, \quad \angle ACD < \angle AED$$

故ニ $$\angle BCD < \angle BED$$

卽チ ∠BCD ハ ∠BAD ノ補角ヨリモ小ナルベシ。

故ニ C ハ弧 BED ノ上ニアリ。卽チ A, B, C, D ハ同一ノ圓周上ニアリ。

系一。 弓形ノ弦ガ弓形ノ内部ニアル一點ニ於テ張ル角ハ,弓形ノ含ム角ヨリモ大ナリ。又弦ガ弓形ト同ジ側ニテ其外部ニアル一點ニ於テ張ル角ハ弓形ノ含ム角ヨリモ小ナリ。

* ABCD ノ内角ハイヅレモ二直角ヨリモ小ナルガ故ニ, ABCD ハ凸四角形,從テ其對角線 BD ハ全ク四角形ノ内部ニアリ。故ニ C ハ BD ニ對シテ A ト反對ノ側,卽チ弓形 BED ト同ジ側ニアリ。

系二。 一ツノ線分ガ其同ジ側ナル二ツノ點ニ於テ相等シキ角ヲ張ルトキハ,此等ノ二ツノ點ト線分ノ兩端トハ同一ノ圓周上ニアリ。

問　題

1. 二ツノ圓ガ A 及ビ B ニ於テ相交ハルトキ A ヲ通ル二ツノ直徑ノ他ノ端ト B トハ同一直線上ニアリ。

2. 二ツノ圓ガ A 及ビ B ニ於テ相交ハルトキ, A 及ビ B ヲ通ジテ割線 PAQ, RBS ヲ引キテ二ツノ圓トソレゾレ P, R 及ビ Q, S ニ於テ交ハラシムルトキハ, PR, QS ハ平行ナリ。

二ツノ圓ガ相切スルトキハ,如何。

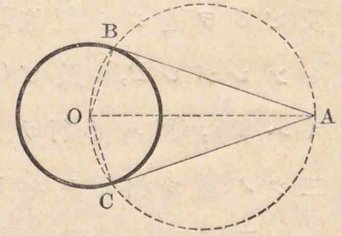
3. 三角形ノ頂點ヨリ對邊ヘ下セル三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ通ル(本節ノ定理ヲ用ヒテ之ヲ證明セヨ)。又垂線ノ足ヲ頂點トセル三角形ノ角ハ此等ノ垂線ニテ二等分セラル。

4. 三角形ABCノ外接圓ノ周ノ上ノ一點Mヨリ邊BC, CA, AB(又ハ其延長)ヘ下セル垂線ノ足D, E, Fハ同一直線上ニアリ(此直線ヲ三角形ABCニ於ケル點Mノしむそん線トイフ)。MDガ再ビ外接圓ニ交ハル點ヲNトスルトキハ上ノ直線ハANニ平行ナリ。

52. 一點ヲ通ル切線。

作圖題十一。 與ヘラレタル圓ノ外部ニ與ヘラレタル一ツノ點ヨリ,此圓ニ切線ヲ引クコト。

作圖。 Oヲ與ヘラレタル圓, Aヲ其外部ニアル與ヘラレタル點トセヨ。



OAヲ結ビ付ケ, OAヲ直徑トシテ圓周ヲ作レ。此圓周ハ圓周Oニ交ハル。其交點ヲB及ビCトセヨ。AB, ACヲ結ビ付ケヨ。然ラバAB, ACハソレゾレB, Cニ於テ圓Oニ切スベシ。

證。 作圖ニヨリ∠OBA, ∠OCAハ直角ナリ(定理

三十五,系二)。サテB, Cハ圓周Oノ上ニアリ。故ニABハBニ於テ,又ACハCニ於テ圓Oニ切ス(定理二十七,系一)。

注意一。 逆ニATヲAヨリ圓Oニ引ケル切線, Tヲ其切點トセヨ。然ラバATハ圓Oノ半徑OTニ垂直ナリ。卽チ∠OTAハ直角ナリ。故ニTハOAヲ直徑トセル圓周ノ上ニアルコトヲ要ス。故ニAヲ通ル切線ハ上ノ作圖ニヨリテ得タル二ツニ限ルベシ。

系。 圓外ノ一點ヨリ此圓ニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得。而モ唯二ツニ限ル。此等ノ切線ハ相等シク,且與ヘラレタル點ト圓ノ中心トヲ結ビ付クル直線ノ兩側ニ一ツヅツアリテ,之ト相等シキ角ヲ作ル。

$(\triangle OAB \equiv \triangle OAC, \quad AB = AC, \quad \angle OAB = \angle OAC)$

注意二。 Aガ圓周ノ上ニアルトキニハ, Aヲ通ル切線ハ唯一ツニ限ル。又圓ノ內部ニアル點ヨリ此圓ニ切線ヲ引クコトヲ得ズ。

問題

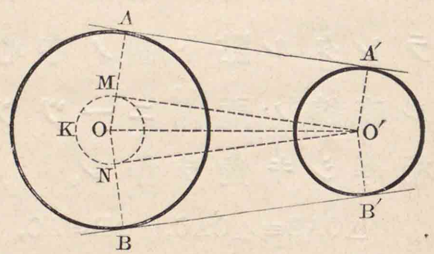
1. 圓Oノ互ニ平行ナル二ツノ切線ガ任意ノ切線ト交ハル點ヲA, Bトスルトキハ, AOBハ直角ナリ。

2. 圓ニ外切スル四邊形ノ相對スル邊ノ和ハ相等シク,又相對スル邊ガ中心ニ於テ張ル角ハ補角ヲナス。

53. 二ツノ圓ノ共通切線。

作圖題十二。 二ツノ與ヘラレタル圓ニ共通ノ切線ヲ引クコト。

O, O'ヲ與ヘラレタル圓, R, R'ヲ其半徑トセヨ。



(第一) AA'ヲ共通ノ切線, A, A'ヲ其切點ト假定シ,又二ツノ圓ガ共ニ共通ノ切線AA'ノ同ジ側ニアリトセヨ。(AA'ヲ**外側共通切線**トセヨ)。

圓Oハ圓O'ヨリモ大ナリトシ($R > R'$), O'ヨリAA'ニ平行ナル直線ヲ引キ, Mニ於テOAト交ハ

ラシメヨ。然ラバ$O'A'AM$ハ矩形,

$$OM = OA - O'A' = R - R'$$

ニシテ, $O'M$ハMニ於テ, Oヲ中心トシ, OM即チ$R-R'$ヲ半徑トセル圓Kニ切ス。ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖。 Oヲ中心トシ, $R-R'$ニ等シキ半徑ヲ以テ圓Kヲ作リ, O'ヨリ此圓ニ切線$O'M$, $O'N$ヲ引キ, M, Nヲ其切點トセヨ。OM, ONヲ延長シテ圓周OトA, Bニ於テ交ハラシメヨ。O'ヨリOA, OBト同ジ方向ニ半徑$O'A'$, $O'B'$ヲ引ケ。AA', BB'ヲ結ビ付ケヨ。然ラバAA', BB'ハ圓O, O'ノ外側共通切線ナルベシ。

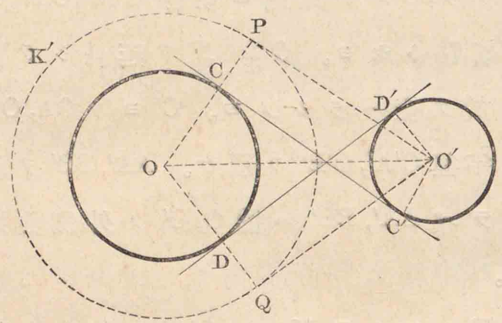
證。 作圖ニヨリテMAハ$O'A'$ニ等シク且之ニ平行ナリ。故ニ$O'A'AM$ハ平行四邊形ナリ。

サテ$\angle OMO'$ハ直角ナルガ故ニ$O'A'AM$ハ矩形,從テ$\angle OAA'$, $\angle O'A'A$ハ直角ナリ。故ニAA'ハA及ビA'ニ於テソレゾレ圓O及ビO'ニ切ス。

(第二) 與ヘラレタル圓ガ共通ノ切線CC'ノ兩側ニ一ツヅツアリトセヨ。(CC'ヲ**内側共通切線**トセヨ)。

此場合ニハ上ト同ジヤウニシテ,次ノ作圖法ヲ得。

作圖。 Oヲ中心トシ,二ツノ圓O, O'ノ半徑ノ和$R+R'$ニ等シキ半徑ヲ以テ圓K'ヲ作リ,O'ヨリ此圓ニ切線$O'P, O'Q$ヲ引ケ。OP, OQヲ結ビ付ケ,圓周OトソレゾレC, Dニ於テ交ハラシメヨ。O'ヨリOC, ODト反對ノ方向ニ,半徑$O'C', O'D'$ヲ作レ。



CC', DD'ヲ結ビ付ケヨ。然ラバCC', DD'ハ二ツノ圓O, O'ノ内側共通切線ナルベシ。

注意。 二ツノ圓ノ位置ノ關係ノ五ツノ場合ニ於ケル共通切線ノ數ハ次ノ如シ。

(一) 二ツノ圓ガ各〻他ノモノノ外部ニアルトキハ,$OO'>R+R'$,從テO'ハ圓K及ビK'ノ外部ニアリ。故ニO'ヨリ圓K及ビK'ヘ各〻二ツノ切線

ヲ引クコトヲ得,從テ外側及ビ内側共通切線ハ各〻二ツアリ。

(二) 二ツノ圓ガ外切スルトキハ,$OO'=R+R'$,從テO'ハ圓Kノ外部,圓周K'ノ上ニアリ。故ニ外側共通切線ハ二ツアレドモ,O'ヲ通ズル圓K'ノ切線ハ唯一ツニ限ルガ故ニ,内側共通切線ハ唯一ツアリ。切點ニ於ケル共通切線即チ是ナリ。

(三) 二ツノ圓ガ相交ハルトキハ,$R+R'>OO'>R-R'$,從テO'ハ圓Kノ外部,圓K'ノ内部ニアリ。故ニ外側共通切線ハ二ツアレドモ,O'ヨリ圓K'ヘ切線ヲ引クコトヲ得ザルガ故ニ内側共通切線ハナシ。

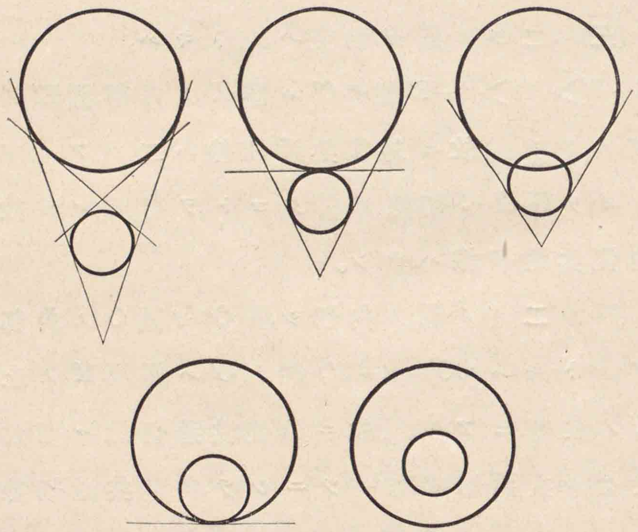
(四) 二ツノ圓ガ内切シ,圓O'ガ圓Oノ内部ニアルトキハ$OO'=R-R'$,從テO'ハ圓周Kノ上,圓K'ノ内部ニアリ。故ニ外側共通切線ハ切點ニ於ケル共通切線唯一ツニシテ,内側共通切線ハナシ。

(五) 二ツノ圓ノ中,圓O'ガ圓Oノ内部ニアルトキハ,$OO'<R-R'$,從テO'ハ圓K及ビK'ノ内部ニアリ。故ニ共通ノ切線ハ一ツモナシ。

以上ノ結果ヲ綜合スルトキハ次ノ表ヲ得。

二ツノ圓ノ位置ノ關係	外側共通切線ノ數	內側共通切線ノ數	共通切線ノ總數
隔離	二	二	四
外切	二	一	三
交會	二	○	二
內切	一	○	一
包容	○	○	○

(二ツノ圓ガ相等シキ場合ハ如何)。



問　題

1. 二ツノ圓ノ共通切線ノ切點ト中心線ガ其圓ト交ハル點トヲ結ビ付クル四ツノ直線ハ二ツヅツ平行ナリ。

2. 二ツノ圓ノ外側共通切線ト內側共通切線トガ相交ハル四ツノ點ハ,二ツノ圓ノ中心ヲ通ル同一圓周ノ上ニアリ。

二ツノ圓ガ外切スルトキハ如何。

3. 與ヘラレタル點ヲ通ジ,與ヘラレタル圓ノ與ヘラレタル長サノ弦ヲ引クコト。

第三章　軌　跡

54. 軌跡ノ定義。

二ツノ與ヘラレタル點A,Bヨリ相等シキ距離ニアル點ハ盡ク線分ABヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ニアリ,又此直線ノ上ノ點ハ盡クA,Bヨリ相等シキ距離ニアリ。卽チABノ垂直二等分線ノ上ニアル點ハ盡ク「A,Bヨリ相等シキ距離ニアリ」トイフ性質ヲ有シ,此垂直二等分線ノ上ニアラザル點ハ此性質ヲ有セズ。カヤウノ狀態ヲ簡單ニ次ノ如ク言ヒ表ハスコトヲ得。

二ツノ與ヘラレタル點A,Bヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ線分ABヲ垂直ニ二等分スル直線ナリ。

或點Pガ「二ツノ與ヘラレタル點A,Bヨリ相等シキ距離ニアリ」トイフ性質ヲ保有シツツ平面ノ上ヲ動クト考フルトキハ,此點ガ通過スベキ軌道ハ AB ノ垂直二等分線ニシテ,決シテ其外ニ逸スルコトヲ得ザルナリ。

又例ヘバ定點Oヲ中心トシ,定マレル線分Rヲ半徑トセル圓周ノ上ニアル點ハ,イヅレモ「定點OヨリRニ等シキ距離ニアリ」トイフ性質ヲ有ス。サテ此圓周以外ニ,ナホ此性質ヲ有スル點アルカトイフニ,此圓周以外ニハ,カヤウノ點一ツモアルコトナシ。故ニ定點ヨリ定距離ニアル點ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ。

軌跡ハ又一ツヨリ多クノ線ノ集リナルコトアリ。例ヘバ一ツノ直線ABヨリ定マレル距離(R)ニアル點ノ軌跡ハ如何ニトイフニ,先ヅカヤウノ點ハ AB ノ兩側ニ於テ,ABヨリRニ等シキ距離ニアル二ツノ平行線X,X′ノ上ニアルコトヲ要ス。

サテX又ハX′ノ上ノ點ノ中ニ「ABヨリRニ等シキ距離ニアルベシ」トイフ條件ニ適合セザル點ガ混ジテハアラズヤト考フルニ,カヤウノ點ハX又ハX′ノ上ニハナシ。故ニ求ムル軌跡ハ二ツノ直線X,X′ナリ。

一ツノ線X(又ハ一ツヨリ多クノ線X,X′,...)ガ或性質ヲ有スル點ノ軌跡ナリトハ

(第一) 此線Xノ上(又ハ此等ノ線X,X′,......ノ中,イヅレカノ上)ニアル點ハ與ヘラレタル性質ヲ有シ,且

(第二) 此線Xノ上ニアラザル(又ハX,X′,...ノ中イヅレノ上ニモアラザル)點ハ與ヘラレタル性質ヲ有セズ,換言スレバ,與ヘラレタル性質ヲ有スル點ハ必ズX(又ハX,X′,...ノ中ノイヅレカ)ノ上ニアルコト

ヲイフ。

55. 軌跡ノ例。(一)

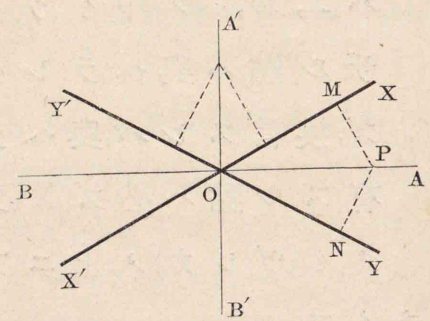
相交ハル二ツノ直線ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ,此等ノ二ツノ直線ガ作ル角ヲ二等分スル二ツノ直線ナリ。

XX', YY' ヲ O ニ於テ相交ハル二ツノ直線, AB, $A'B'$ ヲ $\angle XOY$, $\angle XOY'$ ノ二等分線トセヨ。

然ラバ

(第一) AB 又ハ $A'B'$ ノ上ニアル點 P ハ XX', YY' ヨリ相等シキ距離ニアルコト,

(第二) AB ノ上ニモ, $A'B'$ ノ上ニモアラザル點ハ XX', YY' ヨリ相等シキ距離ニアラザルコト,換言スレバ XX', YY' ヨリ相等シキ距離ニアル點ハ必ズ AB 又ハ $A'B'$ ノ上ニアルコトヲ證明



スルヲ要ス。

證。(第一) P ヲ AB 又ハ $A'B'$ ノ上ノ隨意ノ一點トシ,例ヘバ P ハ $\angle XOY$ ノ内部ニアリトセヨ。P ヨリ XX', YY' ヘ垂線 PM, PN ヲ下セ。然ラバ $\angle POX$, $\angle POY$ ハイヅレモ鋭角ナルガ故ニ,此等ノ垂線ノ足 M, N ハソレゾレ半直線 OX, OY ノ上ニ落ツベシ。サテ直角三角形 OPM, OPN ニ於テ,斜邊 OP ハ共通,又 $\angle POM$, $\angle PON$ ハ相等シキガ故ニ PM, PN ハ相等シ。

卽チ P ハ直線 XX' 及ビ YY' ヨリ相等シキ距離ニアリ。

(第二) 次ニ P ヲ直線 XX' 及ビ YY' ヨリ相等シキ距離ニアル點トセヨ。P ヨリ XX' 及ビ YY' ヘ垂線 PM, PN ヲ下セ。垂線ノ足 M, N ハ點 O トハ一致セズ。今 M, N ハソレゾレ半直線 OX, OY ノ上ニ落チタリトセヨ。然ラバ直角三角形 OPM, OPN ニ於テ斜邊 OP ハ共通ニシテ,他ノ一ツノ邊 PM, PN ハ相等シ。故ニ PM, PN ニ對スル角 POM, PON ハ相等シ,故ニ OP ハ $\angle MON$ 卽チ $\angle XOY$ ヲ二等分ス。卽チ P ハ直線 AB ノ上ニアリ。同樣ニシテ若シ M, Nガ半直線OX, OY′ノ上ニ落チタルトキハ, Pハ直線A′B′ノ上ニアリ。

卽チ XX′, YY′ヨリ相等シキ距離ニアル點ハ必ズAB 又ハ A′B′ノ上ニアリ。

故ニ AB, A′B′ハ求ムル軌跡ナリ。

注意。 上ノ證明ノ中,(第一)ノミニテハ,直線XX′, YY′ノ外ニモ,ナホ與ヘラレタル性質ヲ有スル點ガアラズヤ,疑ハシ。故ニ(第二)ガ必要ナリ。又(第二)ノミニテハ,直線XX′, YY′ノ上ニ與ヘラレタル性質ヲ有セザル點ガ混ジテハアラズヤ,疑ハシ。故ニ(第一)ガ必要ナリ。

56. 軌跡ノ例。(二)

與ヘラレタル線分ヲ見込ム角ガ與ヘラレタル角ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

ABヲ與ヘラレタル線分, ∠Cヲ與ヘラレタル角トセヨ。今 ∠APB=∠C トスルトキ,點Pノ軌跡ヲ求ムルコトヲ要ス。

ABノ上ニ∠Cニ等シキ角ヲ含ム弓形ADB, AD′BヲABノ兩側ニ作レ(作圖題十)。然ラバ此等ノ弓形ノ弧ハ卽チ求ムル軌跡ナルベシ。

證。(第一) Pヲ弧ADB又ハAD′Bノ上ニアル點トセヨ。然ラバ作圖ニヨリ ∠APB=∠C

(第二) Pヲ弧ADBノ上ニモ,又弧AD′Bノ上ニモアラザル點トセヨ。然ラバ

∠APB ≷ ∠C　(定理三十七,系一)

故ニ弧ADB, AD′Bハ求ムル軌跡ナリ。

注意。 上ノ證明ノ第二ノ部分ノ代ニ次ノ事ヲ證明シテモ,勿論同ジコトナリ。「ABガ點Pニ於テ張ル角 ∠APB ガ ∠C ニ等シトセヨ。然ラバPハ弧ADB又ハAD′Bノ上ニアルベシ」。

A, B, Pヲ通ル圓ヲ作レ。然ラバ假定ニヨリテ弓形APBノ含ム角ハ ∠C ニ等シ。故ニ弓形APBハ弓形ADB又ハAD′Bト合ス(作圖題十,系)。卽チPハ弧ADB又ハAD′Bノ上ニアリ。

系。 與ヘラレタル線分ヲ斜邊トセル直角三角形ノ頂點ノ軌跡ハ,此線分ヲ直徑トセル圓周ナリ。

課題　第四

1. 一ツノ圓ニ於ケル互ニ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 一ツノ圓ニ於ケル與ヘラレタル長サノ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

3. 一ツノ角ノ內部ニアリテ,其二邊ヘノ距離ノ和(又ハ差)ガ與ヘラレタル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 一ツノ圓ニ於ケル,與ヘラレタル點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 與ヘラレタル圓ニ切シ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

6. Aハ與ヘラレタル點,Pハ與ヘラレタル圓周(又ハ直線)ノ上ノ任意ノ點ナリ。 APノ中點ノ軌跡ハ一ツノ圓周(又ハ直線)ナルコトヲ證明セヨ。

7. 圓周上ノ任意ノ點ヨリ,與ヘラレタル方向ニ,與ヘラレタル距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

57. 軌跡ノ交リ。

例ヘバ,與ヘラレタル直線Xノ上ニ於テ,與ヘラレタル二ツノ點A, Bヨリ相等シキ距離ニアル點ヲ求メントスルニ,A,Bヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ ABヲ垂直ニ二等分スル直線Yナルガ故ニ,求ムル點ハ此直線Yノ上ニアルコトヲ要ス。又求ムル點ハ直線Xノ上ニアルコトヲ要スルガ故ニ,求ムル點ハ直線X, Yニ共通ナル點ナルコトヲ要ス。

故ニ直線X, Yガ共通ノ點ヲ有セザルトキ,卽チX, Yガ平行ナルトキニハ,問題ニ適スル點ハ存在セズ。

サテ直線X, Yニ共通ナル點ガアルトキ,其點ハ果シテ問題ニ適スルカト考フルニ,此點ハ直線Yノ上ニアルガ故ニ,A, Bヨリ相等シキ距離ニアリ。又此點ハ直線Xノ上ニアルガ故ニ,此點ハ果シテヨク問題ニ適合ス。

故ニX, Yガ相交ハルトキハ,其交點ハ卽チ求ムル點ニテ,此外ニハ問題ニ適スル點ナシ。

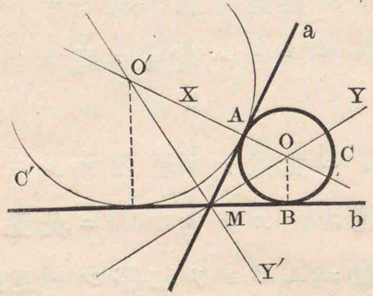
(X, Yガ一致スルトキハ如何)。

軌跡ヲ應用スル例トシテ次ノ作圖問題ヲ解クベシ。

與ヘラレタル直線aノ上ノ與ヘラ

レタル點Aニ於テ此直線ニ切シ,ナホ他ノ與ヘラレタル直線bニモ切スル圓ヲ作ルコト。

點Aニ於テ直線aニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハAニ於テ直線aニ垂直ナル直線Xナリ。又直線a, bニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハa, bガ其交點M



ニ於テ作ル角ノ二等分線Y, Y′ナリ。故ニ求ムル圓ノ中心ハXノ上ニアリテ,同時ニ又Y或ハY′ノ上ニアル點ナルコトヲ要ス。即チXトYトノ交點O,又ハXトY′トノ交點O′トヨリ外ノ點ナルコトヲ得ズ。

サテO又ハO′ヲ中心トシテ,果シテ問題ニ適スル圓ヲ作リ得ルカトイフニ,Oヲ中心,OAヲ半徑トシテ圓Cヲ作ルトキ,OAハaニ垂直ナルガ故

ニ,此圓ハAニ於テ直線aニ切ス。又Oハa及ビbヨリ相等シキ距離ニアルガ故ニ,Oヨリbヘ下セル垂線ヲOBトスルトキハ

$$OA=OB$$

故ニ此圓ハBヲ通リ且Bニ於テ直線bニ切ス。即チCハ問題ニ適スル圓ナリ。同樣ニO′ヲ中心,O′Aヲ半徑トシテ圓C′ヲ作ルトキ,此圓C′モ亦問題ニ適ス。即チ求ムル圓ハ二ツアリ。而モ唯二ツニ限ル。

(上ニ說キタルハ直線a,bガ相交ハル場合ナリ。a,bガ平行ナル場合ハ如何)。

一般ニ甲ノ性質ヲ有スル點ノ軌跡ハ線X, X′...ニシテ,乙ノ性質ヲ有スル點ノ軌跡ハ線Y, Y′...ナルトキハ甲,乙二ツノ性質ヲ兼ネ有スル點ハ線X, X′...ノ各ゝト線Y, Y′...ノ各ゝトノ交點ナリ。

(此等ノ線ニ交點ナキトキハ甲,乙二ツノ性質ヲ兼ネ有スル點ハ存在セズ。

又例ヘバXトYトガ一致スルトキニハ,此線ノ上ノ點ハ盡ク甲,乙二ツノ性質ヲ兼ネ有スベシ)。

課題 第五

1. 與ヘラレタル直線ノ上ニ中心ヲ有シ,且二ツノ與ヘラレタル點ヲ通ル圓ヲ作ルコト。

2. 一ツノ直線ニ切シ,一ツノ點ヲ通ル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ作ルコト。

3. 二ツノ直線又ハ二ツノ圓,又ハ一ツノ直線ト一ツノ圓トニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ作ルコト。

4. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリソレゾレ與ヘラレタル距離ニアル直線ヲ作ルコト。

5. 與ヘラレタル線分ヲ與ヘラレタル角ニ見込ム點ヲ,與ヘラレタル直線ノ上ニ於テ求ムルコト。

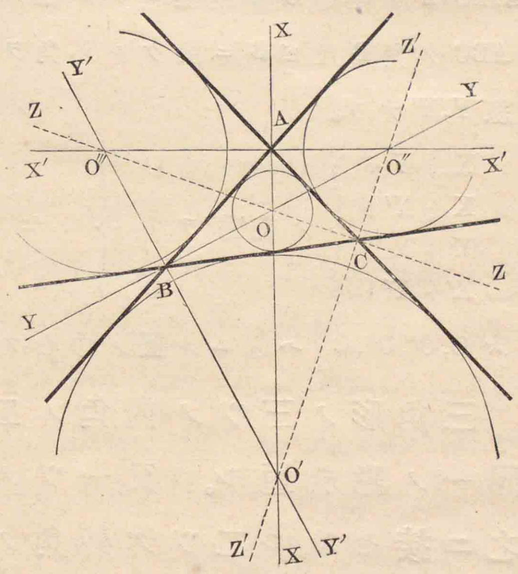
6. 二ツノ與ヘラレタル線分AB, ACヲソレゾレ與ヘラレタル角ニ見込ム點ヲ求ムルコト。

7. 底邊,頂角及ビ高サヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

8. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ和(又ハ差)ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

58. 三角形ノ內切圓,傍切圓。

作圖題十三。 三角形ノ三ツノ邊ニ切スル圓ヲ作ルコト。



三角形ABCノ三ツノ邊ニ切スル圓ヲ作ルコトハ,此圓ノ中心ヲ求ムルコト,卽チ三ツノ邊ヨリ相等シキ距離ニアル點ヲ求ムルコトニ歸ス。 カヤ

ウノ點ハ二ツノ邊 AB, AC ヨリ相等シキ距離ニアリテ,又同時ニ BA, BC ヨリモ相等シキ距離ニアル點ニ外ナラズ。

サテ AB, AC ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ三角形 ABC ノ角 A 及ビ A ニ於ケル外角ヲ二等分スル直線 X, X′ナリ。

又 BA, BC ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ三角形 ABC ノ角 B 及ビ B ニ於ケル外角ヲ二等分スル直線 Y, Y′ナリ。

$$\text{サテ}\quad \left.\begin{array}{l} X\text{ト}Y\text{ト} \\ X\text{ト}Y'\text{ト} \\ X'\text{ト}Y\text{ト} \\ X'\text{ト}Y'\text{ト} \end{array}\right\} \text{ノ交點*ヲ} \left.\begin{array}{l} O \\ O' \\ O'' \\ O''' \end{array}\right\} \text{トセヨ。}$$

然ラバ O, O′, O″, O‴ ハ求ムル圓ノ中心ナルベシ。

系。 三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル。又一ツノ內角及ビ之ニ接セザル二ツノ外角ノ二等

* 此等ノ直線ハ平行ナラズ。X,Y ガ直線 AB ト作ル一組ノ同傍內角ハ三角形ノ二ツノ角 A,B ノ半分ナルガ故ニ,其和ハ直角ヨリモ小ナリ。又例ヘバ X,Y′ ガ AB ト作ル一組ノ同傍內角ノ和ハ,コレヨリモ一直角ダケ大ナルガ故ニ,ナホ二直角ヨリモ小ナリ。

分線ハ同一ノ點ヲ通ル。

上ノ圖ニ於テ ∠C 及ビ C ニ於ケル外角ノ二等分線ヲ Z, Z′トスルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} X, Y, Z \\ X, Y', Z' \\ X', Y, Z' \\ X', Y', Z \end{array}\right\} \text{ハ} \left.\begin{array}{l} O \\ O' \\ O'' \\ O''' \end{array}\right\} \text{ヲ通ル。}$$

定義 O ヲ中心トシ,三ツノ邊ニ切スル圓ハ三角形 ABC ノ內部ニアリ。之ヲ三角形ノ**內切圓**トイヒ,其中心 O ヲ三角形ノ**內心**トイフ。

O′, O″, O‴ ヲ中心トシ,三ツノ邊ニ切スル圓ハ三角形 ABC ノ外部ニアリ。之ヲ三角形ノ**傍切圓**トイヒ,其中心 O′, O″, O‴ ヲ三角形ノ**傍心**トイフ。

問題

1. 互ニ平行ナル二ツノ直線及ビ之ニ交ハル一ツノ直線ニ切スル圓ヲ作ルコト。

2. 三角形 ABC ノ內切圓ガ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲソレゾレ D,E,F トスルトキハ,AE, AF ハ三角形ノ周圍ノ半分ト BC トノ差ニ等シク,BF, BD ハ半周ト CA トノ差ニ,CD, CE ハ半周ト AB トノ

差ニ等シ。卽チ各頂點ヨリ之ニ接スル邊ノ上ノ切點ニ至ル距離ハ,半周ト此頂點ニ對スル邊トノ差ニ等シ。

3. 三角形 ABC ノ角 A ニ對スル傍切圓ガ邊 BC ニ切スル點ヲ D′, 又邊 AB, AC ノ延長ニ切スル點ヲソレゾレ E′, F′ トスルトキハ, AE′, AF′ ハ三角形ノ半周ニ, BD′, BE′ ハ半周ト AB トノ差ニ,又 CD′, CF′ ハ半周ト AC トノ差ニ等シ。

4. 四角形ノ三ツノ角ノ二等分線ガ同一ノ點ニテ出會フトキハ,他ノ一ツノ角ノ二等分線モ亦同シ點ヲ通ル。

課題 第六

1. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,與ヘラレタル角又ハ其補角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弦ノ長サハ不易ナリ。

2. 圓ノ二ツノ定マレル半徑ヘ圓周上ノ任意ノ點ヨリ下セル垂線ノ足ノ間ノ距離ハ不易ナリ。

3. 二ツノ圓ガ A 及ビ B ニ於テ交ハルトキ,一ツノ圓周ノ上ノ任意ノ點 P ト A 及ビ B トヲ結ビ

付クル直線ガ再ヒ第二ノ圓周ト交ハル點 Q, R ヲ結ビ付クル弦 QR ノ長サハ不易ナリ。

4. 圓ニ內接スル六邊形ノ相對スル邊ノ中,二組ガ互ニ平行ナルトキハ,他ノ一組モ亦互ニ平行ナリ。

5. 三角形 ABC ノ頂點 B, C 及ビ內心 O, 傍心 O′ ハ同一ノ圓周上ニアリ.* 此圓ノ中心ハ外接圓ノ周ノ上ニアリ。

6. 圓周 O ノ上ニ中心ヲ有スル圓 O′ ガ圓 O ト A, B ニ於テ交ハルトキ,圓 O′ ノ弦 AB, AC ガ相等シキトキハ, AC ハ A ニ於テ圓 O ニ切ス(是ニヨリテ與ヘラレタル圓周上ノ一點 A ニ於テ切線ヲ引ク簡單ナル作圖法ヲ得)。

7. 弧 AB ノ中點 M ヨリ任意ノ弦 MP, MQ ヲ引キテ弦 AB ト R, S ニ於テ交ハラシムルトキハ, PQSR ハ圓ニ內接シ得ベキ四角形ナリ。

8. 相等シキ線分 AB, A′B′ ノ位置ガ與ヘラレタルトキ, △PAB, △PA′B′ ガ相等シクナルヤウニ點 P ノ位置ヲ定ムルコト。

* 145 頁ノ圖參照

9. 二ツノ圓ノ交點Aヲ通ジテ割線PAQヲ引キテ二ツノ圓周トP及ビQニ於テ交ハラシメ,

(一) PQヲ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト。

(二) 弦AP, AQヲ相等シカラシムルコト。

10. 三角形ノ頂點ヲ中心トシテ二ツヅツ相切スル三ツノ圓ヲ作ルコト。

11. 三角形ABCノ邊BC, CA, AB又ハ其延長ノ上ニソレゾレ點D,E,Fヲ取ルトキハ,圓AEF, BFD, CDEハ同一ノ點Pヲ通ル。又D, E, Fガ同一ノ直線上ニアルトキハ,圓ABCモ點Pヲ通ル。

12. 二ツノ圓ハA,Bニ於テ相交ハリ,Aヲ通ル割線CADハ此等ノ圓周トソレゾレC, Dニ於テ交ハル。Aヲ通ジテ任意ノ割線ヲ引キ,二ツノ圓トソレゾレP, Qニ於テ交ハラシムルトキハ,弦PC, QD又ハ其延長ノ交點Rノ軌跡ハB, C, Dヲ通ル圓周ナリ。

第三篇

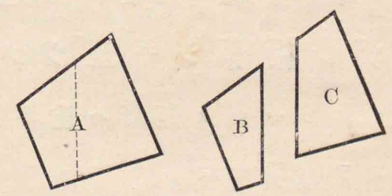
面積及ビ比例

第一章 多角形ノ面積

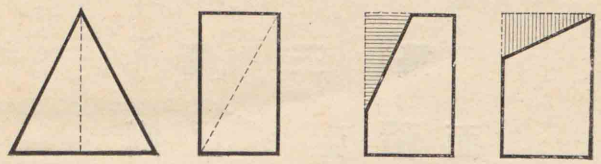
59. 面積ノ相等及ビ大小。

全ク相等シキ,即チ重ネ合ハセ得ベキ二ツノ多角形ハ相等シキ**面積**ヲ有ス。甲ノ多角形ガ其一部分トシテ乙ノ多角形ヲ含メルトキ,又ハ乙ノ多角形ト等積ナル多角形ヲ含メルトキハ,甲ノ面積ハ乙ノ面積ヨリモ大キク,乙ノ面積ハ甲ノ面積ヨリモ小ナリ。

多角形Aヲ多角形B,Cト等シキ部分ニ分チ得ベキトキハ,Aノ面積ハB,Cノ**面積ノ和**ニ等シク,Aノ面積トBノ面積トノ差ハCノ面積ニ等シ。



二ツノ多角形ガ重ネ合ハセ得ベカ



ラザル場合ニモ,此等ノ多角形ガ一ツ一ツ重ネ合ハセ得ベキ多角形ノ和又ハ差ナルトキハ,二ツノ多角形ハ相等シキ面積ヲ有スベシ。

60. 矩形ノ面積。

矩形ヲ一ツノ邊ノ上ニ立テルモノト見做シ,此邊ヲ矩形ノ**底邊**トイフ。底ニ隣レル邊ハ,底ト之ニ對スル邊,卽チ底邊ニ平行セル邊トノ間ノ距離ニ等シ。之ヲ矩形ノ**高サ**トイフ。

定理三十八。 底邊及ビ高サガソレゾレ相等シキ二ツノ矩形ハ相等シ。

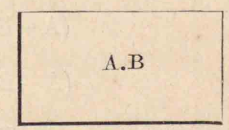
カヤウノ矩形ハ重ネ合ハセ得ベキナリ。(之ヲ證明セヨ)。

系一。 相等シキ高サヲ有スル幾ツカノ矩形ノ面積ノ和ハ,之ニ等シキ高サト,此等ノ矩形ノ底邊ノ和ニ等シキ底邊トヲ有スル一ツノ矩形ノ面積ニ等シ。

系二。 底邊ト面積トガソレゾレ相等シキ二ツノ矩形ノ高サハ相等シ。

A,B ナル二ツノ線分ニ等シキ底邊及ビ高サヲ有セル矩形ハスベテ相等シ。

カヤウノ矩形ヲ**線分** A,B **ノ包メル矩形**トイヒ,之ヲ表スニ記號□A.B 又ハ A.B ヲ用フ。



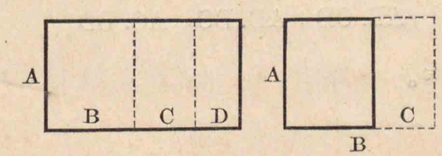
A.B, B.A ハ相等シキ矩形ナリ。

上ノ系一ヲ次ノ如ク式ニ書キ表スコトヲ得。

$$A.(B+C+D)=A.B+A.C+A.D$$

同ジヤウニ

$$A.(B-C)=A.B-A.C$$



此等ノ定理ヲ應用シテ次ノ諸定理ヲ證明スルコトヲ得。

$$(A+B).(C+D)=A.C+B.C+A.D+B.D$$

$$(A+B).(C-D)=A.C+B.C-A.D-B.D$$

$$(A-B).(C-D)=A.C+B.D-B.C-A.D$$

有限直線Aニ等シキ邊ヲ有スル正方形,即チ矩形A.Aヲ**線分Aノ上ノ平方**トイヒ,之ヲ表スニ記號A^2ヲ用フ。

上ノ定理ノ特別ノ場合トシテ次ノ定理ヲ得。

$$(A+B)^2=A^2+2.A.B+B^2$$

$$(A-B)^2=A^2-2.A.B+B^2$$

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

(上ニ掲ゲタル諸定理ヲ言語ニ言ヒ表シ,且圖形ニツキテ直接ニ之ヲ證明セヨ)。

問題

一ツノ直線ノ上ニ順次ニ四ツノ點A, B, C, Dヲ取ルトキ

$$AB.CD+AD.BC=AC.BD$$

ヲ證明セヨ。

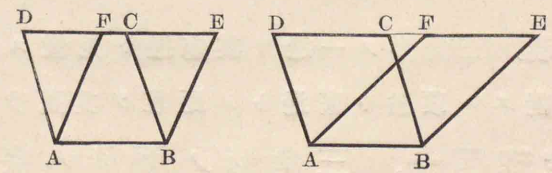
61. 平行四邊形及ビ三角形ノ面積。

定義。平行四邊形ヲ其一ツノ邊ノ上ニ立テルモノト見做シ,此邊ヲ**底邊**トイヒ,底邊及ビ之ニ平行ナル邊ノ間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

二ツノ平行線ノ上ニ一双ノ相對スル邊ヲ有スル平行四邊形ハ相等シキ高サヲ有スト言フコトヲ得。

定理三十九。同ジ底邊(又ハ相等シキ底邊)ノ上ニ立チ,相等シキ高サヲ有スル二ツノ平行四邊形ハ等積ナリ。

證。同ジ底邊ABノ上ニ立チテ,其同ジ側ニ



アル二ツノ平行四邊形ABCD, ABEFガ相等シキ高サヲ有ストセヨ。然ラバABニ對スル邊CD, EFハ(ABニ平行ナル)同一ノ直線上ニアリ。サテFDハCDトCFトノ和(又ハ差)ニ,ECハEFトCF

トノ和(又ハ差)ニ等シク, CD, EF ハイヅレモ AB ニ等シク,從テ互ニ相等シキカ故ニ

$$FD=EC$$

又　$AF=BE,\quad AD=BC$

故ニ　$\triangle AFD\equiv\triangle BEC$

サテ平行四邊形 ABCD ハ四邊形 ABED ト三角形 BEC トノ差ニ等シク,平行四邊形 ABEF ハ同ジ四邊形ト三角形 AFD トノ差ニ等シ。故ニ

$$ABCD=ABEF$$

系一。 平行四邊形ハ底邊及ビ高サヲソレゾレ等シクセル矩形ト等積ナリ。

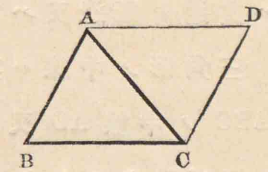
定義。 三角形ノ一邊ヲ其**底邊**ト見做ストキハ,之ニ對スル頂點ト底邊トノ距離ヲ其**高サ**トイフ。

定理四十。 三角形ノ面積ハ底邊及ビ高サヲソレゾレ等シクセル平行四邊形(特ニ矩形)ノ面積ノ半分ニ等シ。

證。 △ABC ノ頂點 A 及ビ底邊ノ一端 C ヲ通ジテ,ソレゾレ之ニ對スル邊 BC 及ビ BA ニ平行ナル

直線ヲ引キ, D ニ於テ相交ハラシメヨ。

然ラバ平行四邊形 ABCD ハ △ABC ト相等シキ底邊 (BC) 及ビ相等シキ高サヲ有ス。



サテ　$\triangle ABC\equiv\triangle CDA$

故ニ △ABC ノ面積ハ平行四邊形 ABCD ノ面積ノ半分ニ等シク,從テ底 BC ノ上ニ立チテ △ABC ト同ジ高サヲ有スル任意ノ平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シ(定理三十九)。

系一。 底邊及ビ高サガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ等積ナリ。

系二。 底邊及ビ面積ガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ノ高サハ相等シ。

問題

1. 同ジ底邊ノ上ニ立チテ其同ジ側ニアル等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ含メル直線ハ共通ノ底邊ニ平行ナリ。

2. 同ジ底邊ノ上ニ立チテ其兩側ニ一ツヅツ

アル等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル線分ハ共通ノ底邊又ハ其延長ニ二等分セラル。

3. 三角形ノ中線ハ其面積ヲ二等分ス。又三角形ABCノ中線AD又ハ其延長ノ上ノ一點OヲB,Cニ結ビ付クルトキハ，$\triangle ABO=\triangle ACO$

4. 上ノ問題**2,3**ニヨリテ,三角形ノ三ツノ中線ガ同一ノ點ヲ通ルコトヲ證明セヨ。

5. 三角形ノ三ツノ中線ハ,之ヲ六ツノ等積ナル三角形ニ分ツ。

6. 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ヨリ他ノ二邊(又ハ其延長)ガ截リ取ル線分ハ,底邊ニ對スル中線(又ハ其延長)ニ二等分セラル。

62. 多角形ト等積ナル矩形。

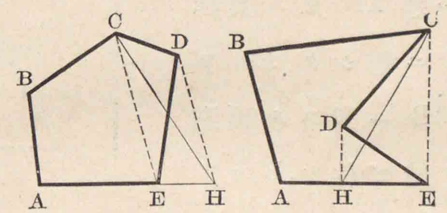
作圖題十四。 與ヘラレタル多角形ト等積ニシテ,且一ツノ邊ガ與ヘラレタル矩形ヲ作ルコト。

此問題ヲ數段ニ分チテ解クコト次ノ如シ。

(第一) 與ヘラレタル多角形ト等積

ニシテ邊ノ數ガ一ツ少キ多角形ヲ作ルコト。

作圖。 ABCDEヲ與ヘラレタル多角形トセヨ。



一ツノ頂點Eヲ其隣リ(D)ノ次ノ頂點Cニ結ビ付ケヨ。DヨリCEニ平行ニDHヲ引キEニ隣レル邊EA又ハ其延長トHニ於テ交ハラシメヨ。CHヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ多角形ABCHハABCDEト等積ニシテ且邊ノ數ハABCDEヨリモ一ツ少シ。

證。 $ABCDE=ABCDH\mp DHE$

$ABCH=ABCDH\mp DHC$

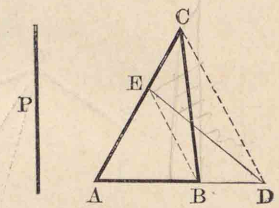
サテ $DHE=DHC$ (定理四十,系一)

故ニ $ABCDE=ABCH$

(第二) 與ヘラレタル三角形ト等積ニシテ,且一ツノ邊ガ與ヘラレタル三

角形ヲ作ルコト。

作圖。 ABC ヲ與ヘラレタル三角形,P ヲ與ヘラレタル線分トセヨ。

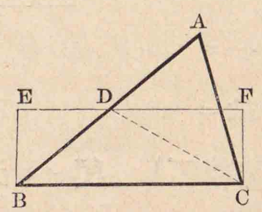


ABC ノ一邊 AB 又ハ其延長ノ上ニ P ニ等シク AD ヲ取レ。邊 AB ニ對スル頂點 C ト D トヲ結ビ付ケ,B ヨリ DC ニ平行ニ BE ヲ引キ B ニ對スル邊 AC 又ハ其延長ト E ニ於テ交ハラシメヨ。DE ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ ADE ハ求ムル三角形ナルベシ。

證。 (第一ト同ジヤウニシテ之ヲ證明セヨ)。

(第三) 與ヘラレタル三角形ト同ジ底邊ノ上ニ立チ,且之ト等積ナル矩形ヲ作ルコト。

作圖。 ABC ヲ與ヘラレタル三角形トセヨ。



邊 AB ノ中點 D ヨリ底邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ B,C ヨリ此直線ヘ垂線 BE,

CF ヲ下セ。然ラバ BCFE ハ求ムル矩形ナルベシ。

證。 (△ABC 及ビ □ BCFE ハイヅレモ △BDC ノ二倍ニ等シ)。

(第四) 一ツノ多角形 P ト一ツノ線分 A トガ與ヘラレタルトキ,P ト等積ニシテ且一ツノ邊ガ A ニ等シキ矩形ヲ作ルニハ,先ヅ第一ノ作圖ヲ繰返シテ,P ト等積ナル三角形 Q ヲ作レ。次ニ第二ノ作圖ニヨリ,Q ト等積ニシテ A ニ等シキ底邊ヲ有スル三角形 Q′ ヲ作レ。サテ第三ノ作圖ニヨリ Q′ ト同ジ底邊ノ上ニ立チ,之ト等積ナル矩形 R ヲ作レ。R ハ卽チ求ムル矩形ナリ。

問題

1. 三角形ノ一ツノ邊ノ上ノ與ヘラレタル點ヲ通ジ此三角形ヲ二等分スル直線ヲ引クコト。

2. 一ツノ邊及ビ之ニ接スル一ツノ角ヲ與ヘ,與ヘラレタル三角形ト等積ナル三角形ヲ作ルコト。

3. 角 A ノ一ツノ邊ノ上ニ二點 B,D, 又他ノ邊ノ上ニ二點 C,E ヲ取ルトキ,三角形 ABE, ADC ガ等積ナルトキハ BC,DE ハ平行ナリ。

63. 長サ及ビ面積ノ數值。

直線ノ長サハ一定ノ長サヲ單位ト定メテ之ヲ計リ,其數值ヲ求ムルコトヲ得。即チ直線ノ長短ヲ數ヲ用ヒテ精密ニ表スコトヲ得。

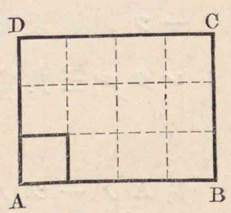
面積ヲ計ルニハ,長サノ單位ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ノ面積ヲ單位トスベシ。然ラバ

定理四十一。 矩形ノ面積ノ數值ハ其相隣レル二ツノ邊(底及ビ高サ)ノ數值ノ積ニ等シ。

或ハ略シテ

矩形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等シ。

證。 先ヅ底及ビ高サノ數值ガイヅレモ整數ナル場合ヲ考フルガタメニ,矩形ABCDノ底ABノ數值ヲ4,高サADノ數值ヲ3トセヨ。

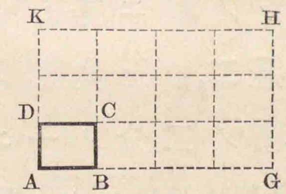


然ラバABヲ四等分シ,ADヲ三等分スルトキハ,長サノ單位ニ等シキ線分ヲ得。此等ノ各分點

ヲ通ジ,AD又ハABニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,矩形ABCDハ4×3卽チ12個ノ相等シキ正方形ニ分タレ,此等ノ正方形ノ邊ハイヅレモ長サノ單位ニ等シ。

故ニ矩形ABCDノ面積ハ面積ノ單位ノ12倍ニ等シ。卽チ其數值ハ12ナリ。

次ニ底及ビ高サノ中,一方又ハ双方ガ分數(又ハ小數)ナル場合ヲ考ヘンガタメニ,矩形ABCDノ底ABノ數值ヲ$\frac{m}{n}$,高サADノ數值ヲ$\frac{p}{q}$トセヨ。



ABヲ延長シ,ABノn倍ニ等シクAGヲ取リ,又ADヲ延長シテADノq倍ニ等シクAKヲ取リ,矩形AGHKヲ作レ。然ラバABノ數值ハ$\frac{m}{n}$ナルガ故ニ,AGノ數值ハm,又ADノ數值ハ$\frac{p}{q}$ナルガ故ニ,AKノ數值ハpナリ。

故ニ矩形AGHKノ面積ノ數值ハmpナリ。

サテ矩形AGHKヲ矩形ABCDニ等シキnq個ノ矩形ニ分チ得ベキガ故ニ,矩形ABCDノ面積ハ矩

形 AGHK ノ面積ノ nq 分ノ一ニ等シク,其數値ハ $\frac{mp}{nq}$ 卽チ

$$\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}$$

ニ等シ。

(底及ビ高サノ數値ヲ 3.57 及ビ 3.25 トシテ上ノ證明ヲ反復セヨ)。

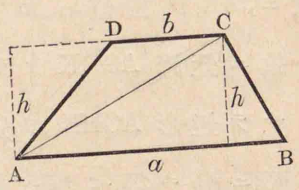
系一。 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等シ。

系二。 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ二分ノ一ニ等シ。

定義。 相對スル一双ノ邊ガ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,互ニ平行ナル二ツノ邊ヲ梯形ノ二ツノ**底**,其距離ヲ梯形ノ**高サ**トイフ。

系三。 梯形ノ面積ハ二ツノ底ノ和ト高サトノ積ノ二分ノ一ニ等シ。

證。 ABCD ヲ梯形, AB, CD ヲ二ツノ底, a, b ヲ其數値, h ヲ高サノ數値トセヨ。

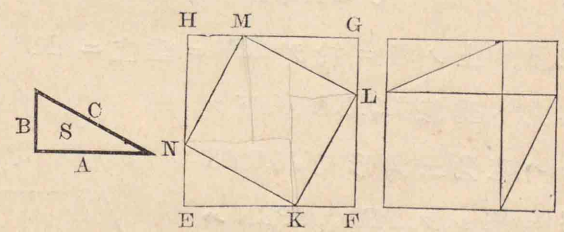


梯形 ABCD ハ △ABC,

△CDA ノ和ニ等シク,此等ノ三角形ノ面積ノ數値ハソレゾレ $\frac{ah}{2}$, $\frac{bh}{2}$ ニ等シ。故ニ梯形ノ面積ノ數値ハ $\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}$ 卽チ $\frac{(a+b)h}{2}$ ナリ。

64. ぴたごらすノ定理。

定理四十二。 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ平方ハ,直角ヲ夾メル二邊ノ上ノ平方ノ和ニ等シ。



第一ノ證。 S ヲ直角三角形, A, B ヲ其直角ヲ夾メル二邊, C ヲ斜邊トセヨ。

EF ヲ A+B ニ等シク取リ,其上ニ正方形 EFGH ヲ作リ,其邊ノ上ニ EK, FL, GM, HN ヲ A ニ等シク取レ。然ラバ KF, LG, MH, NE ハイヅレモ B ニ等シク,三角形 EKN, FLK, GML, HNM ハ直角三角形 S ニ等シ。又 KLMN ハ直角三角形 S ノ斜邊 C ノ上ノ平方ニ

等シ。

サテ正方形EFGHハKLMNト直角三角形Sノ四倍トノ和ニ等シク,Sハ矩形A.Bノ半分ニ等シ。

故ニ
$$EFGH = C^2+2.A.B$$

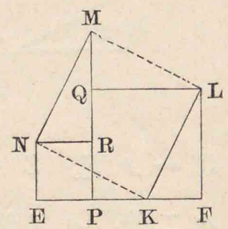
又EFGHハA+Bニ等シキ邊ヲ有スル正方形ナルガ故ニ

$$EFGH = A^2+B^2+2.A.B$$

卽チ
$$C^2+2.A.B = A^2+B^2+2.A.B$$

故ニ
$$C^2 = A^2+B^2$$

注意。 上ノ圖ニ於テEFニ垂直ニMPヲ引キ,其上ヘ垂線LQ, NRヲ下ストキハ,直角三角形QLM,RMNハSニ等シク,PFLQ, EPRNハソレゾレA,Bノ上ノ平方ニ等シ。故ニ

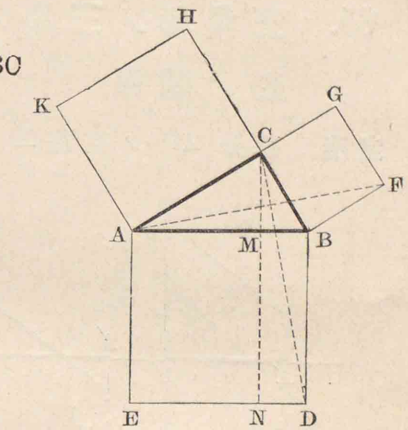


$$C^2 = NKLQR+2S = A^2+B^2$$

第二ノ證。 ABCヲ直角三角形,Cヲ直角, ABDE, BCGF, ACHKヲ三ツノ邊ノ上ノ平方トセヨ。

CヨリABヘ垂線ヲ下シ,AB及ビDEトソレゾレM及ビNニ於テ交ハラシメヨ。AF, CDヲ結

ビ付ケヨ。



然ラバ△ABF,△DBCニ於テ

$$AB = DB,$$
$$BF = BC,$$
$$\angle ABF = \angle DBC$$

故ニ

$$\triangle ABF \equiv \triangle DBC$$

サテ $\square BCGF = 2.\triangle ABF$

$\square DBMN = 2.\triangle DBC$

故ニ $\square DBMN = \square BCGF$

同ジヤウニ $\square EAMN = \square ACHK$

サテ $\square ABDE = \square DBMN + \square EAMN$

故ニ $\square ABDE = \square ACHK + \square BCGF$

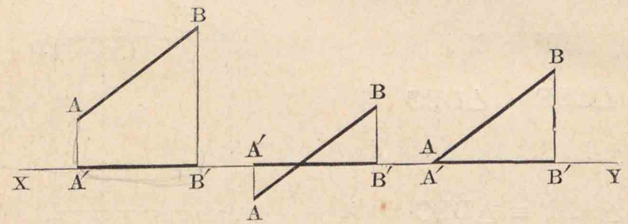
問　　題

1. 三角形ABCノ頂點AヨリBCヘ下セル垂線ノ足ヲDトスルトキハ,BD, CDノ上ノ平方ノ差ハ他ノ二邊AB, ACノ上ノ平方ノ差ニ等シ。

2. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ和(又ハ差)ニ等シキ正方形ヲ作ルコト。

65. 三角形ノ三邊ノ上ノ正方形ノ關係。

定義。 線分ABノ直線Xノ上ニ於ケル**正射影**



トハA,BヨリXヘ下セル垂線AA′,BB′ノ足ノ間ニ夾マレタル線分A′B′ヲイフ。

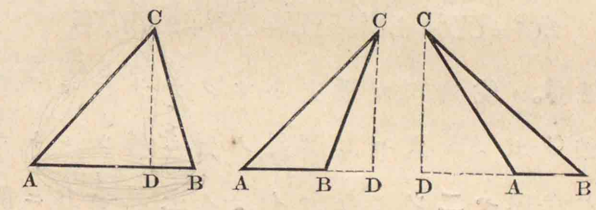
定理四十三。 三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ上ノ平方ハ他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和ヨリモ小サク,鈍角ニ對スル邊ノ上ノ平方ハ他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和ヨリモ大ナリ。* イヅレノ場合ニ於テモ,一邊ノ上ノ平方ト他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和トノ差ハ,此等ノ二ツノ邊ノ中ノ一ツト其上ニ於ケル他ノ一ツ

* 定理十八參照。

ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ニ等シ。

三角形ABCニ於テ邊ABノ上ニ於ケル邊ACノ正射影ヲADトセヨ。即チDヲCヨリABヘ下セル垂線ノ足トセヨ。

(一)　　(二)



然ラバ(一)∠Aガ鋭角ナルトキハ

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2.\overline{AB}.\overline{AD}$$

又(二)∠Aガ鈍角ナルトキハ

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2.\overline{AB}.\overline{AD}$$

ナルベシ。

證。 直角三角形BCDニ於テ

$$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2$$

又直角三角形ACDニ於テ

$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$$

サテ(一)∠Aガ鋭角ナルトキハ,BDハAB,ADノ差ニ等シ。

故ニ　$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2.\overline{AB}.\overline{AD}$

故ニ　$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2.\overline{AB}.\overline{AD}$

又(二) ∠A ガ鈍角ナルトキハ,BD ハ AB, AD ノ和ニ等シ。

故ニ　$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2.\overline{AB}.\overline{AD}$

故ニ　$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2.\overline{AB}.\overline{AD}$

注意。 鋭角 A ガ漸次小サクナリ行キテ,竟ニ頂點 C ガ AB 又ハ其延長ノ上ニ落ツルトキハ上ノ定理ハ二ツノ線分ノ差ノ上ノ平方ニ關スル第**60**節ノ定理(154頁)ニ歸着スベシ。又鈍角 A ガ漸次大クナリ行キテ,竟ニ二直角トナルトキハ,上ノ定理ハ二ツノ線分ノ和ノ上ノ平方ニ關スル第**60**節ノ定理(154頁)ニ歸着スベシ。

又鋭角 A ガ漸次大クナリ,又ハ鈍角 A ガ漸次小クナリ行キテ,竟ニ直角トナルトキハ,D ハ漸次 A ニ近ツキ行キテ, AD ハ竟ニ消滅シ,上ノ定理ハぴたごらすノ定理ニ歸着スベシ。

系。 三角形ノ一ツノ邊ノ上ノ平方ガ他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和ヨリモ大ナルカ,之ニ等シキカ,又ハ之ヨリモ小ナルカニ從テ,此邊ニ對スル角ハ鈍角,直角,又ハ鋭角ナリ。

問題

△ABC ニ於テ一ツノ頂點(A)ニ於テ交ハル二ツノ邊ノ各ト,其邊ノ上ニ於ケル他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形(B, C ヨリ AC, AB ヘ下セル垂線ノ足ヲ E, F トスルトキハ, $\overline{AB}.\overline{AF}$ ト $\overline{AC}.\overline{AE}$ ト)ハ等積ナリ。(定理四十二,第二ノ證明參照)

之ニヨリテ本節ノ定理ヲ證明セヨ。

66. 中線ノ長サ。

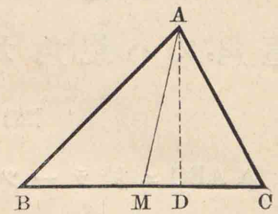
定理四十四。 三角形ノ二ツノ邊ノ上ノ平方ノ和ハ第三邊ノ半分ノ上ノ平方ト之ニ對スル中線ノ上ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ。

△ABC ニ於テ M ヲ BC ノ中點トセヨ。然ラバ

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$$

ナルベシ。

證。AB, AC ガ相等シカラザルトキハ, AM ハ BC ニ垂直ナラズ。故ニ △AMB, △AMC ニ於テ, M ニ於ケル角ハ一ツハ鈍角,一ツハ鋭角ニシテ,此角ヲ夾メル二ツノ邊ノ中ノ一ツナル MA ノ他ノ邊(MB, 又ハ MC)ノ上ニ於ケル正射影 MD ハ二ツノ三角形ニ於テ同一ナリ。



故ニ $$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{MB}^2\pm 2\overline{MB}.\overline{MD}$$

$$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2\mp 2\overline{MC}.\overline{MD}$$

サテ $$MB=MC$$

故ニ $$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

注意一。AB, AC ガ相等シキトキニモ,上ノ定理ハ成リ立ツベシ(之ヲ證明セヨ)。

注意二。三角形 ABC ノ三ツノ邊 BC, CA, AB ノ數値ヲ a, b, c 又三ツノ中線 AD, BE, CF ノ數値ヲ l, m, n トスルトキハ

$$l^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$m^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$

$$n^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

問題

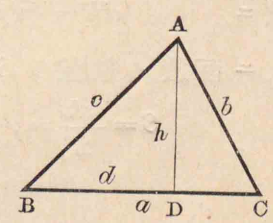
1. 平行四邊形ノ四ツノ邊ノ上ノ平方ノ和ハ對角線ノ上ノ平方ノ和ニ等シ。

2. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ定マレル點ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ。

3. 與ヘラレタル直線ノ上ニ於テ,二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ最モ小ナル點ヲ求ムルコト。

67. 三邊ヲ知リテ三角形ノ面積ヲ計算スルコト。

△ABC ニ於テ頂點 A, B, C ニ對スル邊 BC, CA, AB ノ數値ヲ a, b, c; 又 A ヨリ BC ヘ下セル垂線 AD ノ數値ヲ h, BC ノ上ニ於ケル AB ノ正射影 BD ノ數値ヲ d トセヨ。



然ラバ $$b^2=a^2+c^2\pm 2ad$$

故ニ $$d=\pm\frac{b^2-a^2-c^2}{2a}$$

ヨリテ $$h^2=c^2-d^2=c^2-\frac{(b^2-a^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$4a^2h^2 = 4a^2c^2-(b^2-a^2-c^2)^2$$
$$=\{2ac+b^2-a^2-c^2\}\{2ac-b^2+a^2+c^2\}$$
$$=\{b^2-(a-c)^2\}\{(a+c)^2-b^2\}$$
$$=(b+a-c)(b-a+c)(a+c+b)(a+c-b)$$
$$=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

今 $$2p=a+b+c$$

ト置クトキハ,即チ p ヲ三角形ノ周圍ノ半分ノ數値トスルトキハ

$$a+b+c=2p$$
$$-a+b+c=2(p-a)$$
$$a-b+c=2(p-b)$$
$$a+b-c=2(p-c)$$

故ニ $$a^2h^2=4p(p-a)(p-b)(p-c)$$

故ニ面積ノ數値ヲ S トスルトキハ,

$$S=\frac{ah}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

問　題

三角形 ABC ノ内切圓ノ半徑ヲ r, 又頂點 A, B, C ニ對スル傍切圓ノ半徑ヲソレゾレ r', r'', r''' トスルトキハ

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r'=\frac{S}{p-a}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$
$$r''=\frac{S}{p-b}=\sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}}$$
$$r'''=\frac{S}{p-c}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

課題第七

1. 四邊形ノ面積ハ,其二ツノ對角線及ビ其作ル角ニソレゾレ等シキ二邊及ビ其夾角ヲ有スル三角形ノ面積ニ等シ。

2. 平行四邊形 ABCD ノ内部ニアル點 P ヲ通ジテ邊 AB, BC ニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,B ト P ト及ビ D ト P トヲソレゾレ一對ノ相對スル頂點トセル二ツノ平行四邊形ヲ生ズ。此等ノ平行四邊形ハ P ガ對角線 AC ノ上ニアルトキニハ等積ナリ。又 P ガ對角線 AC ノ上ニアラザルトキニハ,此等ノ平行四邊形ノ面積ノ差ハ三角形 ACP ノ面積ノ二倍ニ等シ。

3. 三角形 ABC ガ與ヘラレタルトキ,三角形 ABP, ACP, BCP ガ等積トナルヤウナル點 P ヲ求ムルコト。

4. 凸四邊形ノ內部ニアル一點ヲ四ツノ頂點ニ結ヒ付クルトキニ生スル四ツノ三角形ガ等積ナルコトヲ得ルカ。

5. 四邊形ノ二ツノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ,相對スル邊ノ上ノ平方ノ和ハ相等シ。若シナホ此四邊形ガ圓ニ內接シ得ベキトキハ,此和ハ外接圓ノ直徑ノ上ノ平方ニ等シ。

6. 四邊形ノ相對スル邊ノ上ノ平方ノ和ガ相等シキトキハ,二ツノ對角線ハ互ニ垂直ナリ。

7. 四邊形ノ對角線ノ上ノ平方ノ和ハ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ上ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シ。

8. 四邊形ノ邊ノ上ノ平方ノ和ハ對角線ノ上ノ平方ノ和ヨリモ大キク,其差ハ對角線ノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ上ノ平方ノ四倍ニ等シ。

9. 與ヘラレタル線分 AB 又ハ其延長ノ上ニ點 P ヲ取リ AP, BP ノ上ノ平方ノ差ヲシテ,與ヘラレタル正方形ニ等シカラシムルコト。

10. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ上ノ平方ノ差ガ與ヘラレタル正方形ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

11. 直角三角形ニ於テ直角ヲ夾メル二邊ノ長サガ a, b ナルトキ,斜邊,斜邊ニ對スル高サ,及ビ斜邊ノ上ニ於ケル他ノ二邊ノ正射影ヲ求メヨ。

12. 正三角形ノ邊ノ長サガ a ナルトキ,高サ及ビ面積ヲ求メヨ。

13. 三角形ノ三ツノ邊ノ長サガ 13 粍,14 粍,15 粍ナルトキ,面積,三ツノ高サ,三ツノ邊ヘノ他ノ二邊ノ正射影,三ツノ中線,內切圓及ビ傍切圓ノ半徑ヲ求メヨ。

14. 梯形ノ底ハ 16 寸,44 寸,他ノ二ツノ邊ハ 30 寸,26 寸ナリ。高サ及ビ對角線ヲ求メヨ。

15. 四邊形 ABCD ニ於テ, AB ハ 10 間, BC ハ 17 間, CD ハ 20 間, DA ハ 13 間ニシテ,對角線 AC ハ 21 間ナリ。面積ヲ求メヨ。又對角線 BD ノ長サヲ求メヨ。

16. 半徑 r ナル圓ニ於テ長サ $2a$ ナル弦ト中心トノ距離ヲ求メヨ。又其結果ヲ用ヒテ定理二十九ヲ證明セヨ。

17. 半徑 15 寸,13 寸ナル二ツノ圓ノ中心ノ距離

4 寸ナリ。共通ノ弦ノ長サヲ求メヨ。

18. 半徑 r, r' ナル二ツノ圓ノ中心ノ距離 d ナルトキ,共通切線ノ(切點ノ間ニ夾マレタル部分ノ)長サヲ求メヨ。

第二章 比例線*

68. 比例線ノ基本定理。

定義。 線分 AB ノ上ノ(A ト B トノ間ニアル)點 P ハ此線分ヲ AP, BP ナル二ツノ部分ニ**內分**ストイヒ,線分 AB ノ延長ノ上ノ點 P ハ,此線分ヲ AP, BP ナル二ツノ部分ニ**外分**ストイフ。

線分 AB ハ,內分ノ場合ニハ,二ツノ部分 AP, BP ノ和ニ等シク,外分ノ場合ニハ,二ツノ部分 AP, BP ノ差ニ等シ。

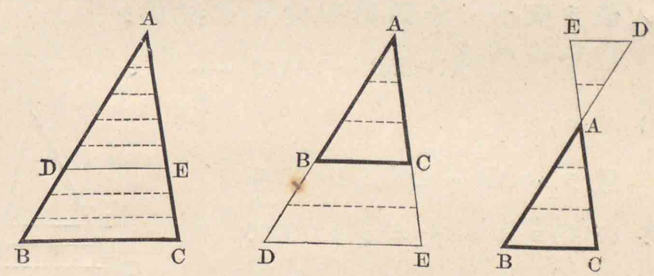
定理四十五。 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二ツノ邊ヲ相等シキ比ニ內分又ハ外分ス。

* 二ツノ量ノ比ノ意義, 比ノ値, 比例式ノ性質等ハ代數學ヲ參照セヨ。

△ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線 DE ガ他ノ二ツノ邊 AB, AC 又ハ其延長ニ交ハル點ヲ D, E トセヨ。

然ラバ $AD:DB = AE:EC$

ナルベシ。



($m=5,\ n=3$) ($m=5,\ n=2$) ($m=2,\ n=5$)

證。 $AD:DB=\frac{m}{n}$

トセヨ。但 m, n ハ二ツノ整數ナリトス。

然ラバ AD ヲ m 等分シ, DB ヲ n 等分スルトキハ, AB ハ內分ノ場合ニハ $m+n$ 個,外分ノ場合ニハ, m, n ノ差ニ等シキ個數ダケノ相等シキ部分ニ分タル。此等ノ分點ヲ通ジテ BC ニ平行ニ引ケル直線ハ AC ヲ同數ノ相等シキ部分ニ分ツ(定理二十四,系三)。而シテ AE ハ其 m 個ヲ, EC ハ其 n 個ヲ含ム。

故ニ　　$AE:EC=\frac{m}{n}$

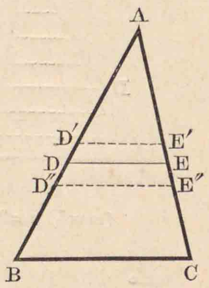
故ニ　　$AD:DB=AE:EC$

注意一。 上ノ證明ニ於テハ AD:DB ノ値ヲ有理數ト假定セリ。

AD:DB ノ値ガ無理數ナル場合ニハ, AD:DB ノ値ヲ例ヘバ小數第四位マデ採リテ

$$AD:DB=1.4142\ldots\ldots$$

トセヨ。



然ラバ AD ハ DB ノ 10000 分ノ 14142 ヨリハ大ニシテ 10000 分ノ 14143 ヨリハ小ナリ。

今 DB ノ $\frac{14142}{10000}$ ニ等シク AD′ ヲ,又 DB ノ $\frac{14143}{10000}$ ニ等シク AD″ ヲ AD 及ビ其延長ノ上ニ取ルトキハ, D ハ D′ ト D″ トノ間ニアリ。D′, D″ ヨリ BC ニ平行ニ引ケル直線ガ AC ニ交ハル點ヲ E′, E″ トスルトキハ, E ハ E′ ト E″ トノ間ニアリ。サテ本定理ニヨリテ AE′ ハ EC ノ $\frac{14142}{10000}$ ニ等シク, AE″ ハ EC ノ $\frac{14143}{10000}$ ニ等シ。故ニ AE ハ EC ノ $\frac{14142}{10000}$ ヨリハ大ニシテ EC ノ $\frac{14143}{10000}$

ヨリハ小,即チ

$$AE:EC=1.4142\ldots\ldots$$

ニシテ, AE:EC ノ値ハ小數第四位マデ AD:DB ノ値ト一致ス。

サテ AD:DB ノ値ヲ小數幾位マデ採ルトモ, AE:EC ノ値ハ其位マデ AD:DB ト一致スベシ。即チ AD:DB ト AE:EC トノ値ハ小數幾位マデニテモ合フ。

故ニ　　$AD:DB=AE:EC$

系一。 上ノ場合ニ於テ,次ノ比例式ガ成リ立ツ

$$AD:AB=AE:AC$$
$$DB:AB=EC:AC$$

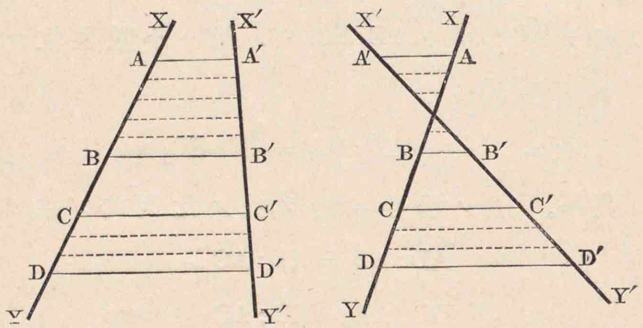
注意二。 一般ニ二ツノ直線ノ上ニ各,三ツノ點 A, B, C; A′, B′, C′ ガ順次ニアルトキ,比例式

$$AB:BC=A'B':B'C'$$
$$AB:AC=A'B':A'C'$$
$$BC:AC=B'C':A'C'$$

ノ中,一ツガ成リ立ツトキハ,他ノ二ツモ成リ立ツ。

系二。 互ニ平行ナル直線ガ之ト交ハル二ツノ與ヘラレタル直線ヨリ截リ取ル線分ハ比例ヲナス。

平行線 AA′, BB′, CC′, DD′ ガ二直線 XY, X′Y′ ニ交ハル點ヲソレゾレ A, A′; B, B′; C, C′; D, D′ トセヨ。



然ラバ　　$AB:CD=A'B':C'D'$

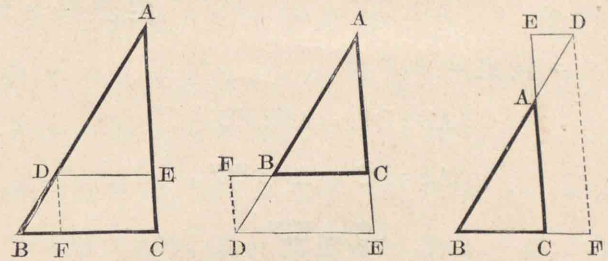
(本定理ト同ジヤウニシテ之ヲ證明セヨ)。

注意三。 本節ノ定理及ビ系一ハ系二ノ特別ノ場合ト見做スコトヲ得。

系三。 本定理ノ場合ニ於テ又次ノ比例式ガ成リ立ツ。

$$DE:BC=AD:AB=AE:AC$$

證。 D ヨリ AC ニ平行ニ直線 DF ヲ引キ，BC 又



ハ其延長ト F ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ　　$FC:BC=AD:AB$　　(系一)

サテ　　$DE=FC$

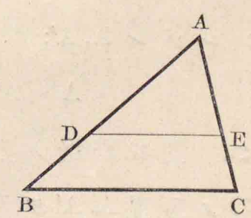
故ニ　　$DE:BC=AD:AB$

定理四十六。 三角形ノ二ツノ邊ヲ相等シキ比ニ内分(又ハ外分)スル直線ハ第三邊ニ平行ナリ。

直線 DE ガ △ABC ノ二邊 AB, AC 又ハ其延長ト交ハル點ヲ D, E トシ，

$$AD:DB=AE:EC$$

トセヨ。



然ラバ　$DE \parallel BC$

ナルベシ。

證。 B ヨリ DE ニ平行ニ直線 BC′ ヲ引キ AC ト C′ ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ　$AD:DB = AE:EC'$　(定理四十五)

然ルニ假定ニヨリテ

$$AD:DB = AE:EC$$

故ニ　$$AE:EC = AE:EC'$$

故ニ　$$EC = EC'$$

サテC'ハDEニ對シテCト同ジ側ニアルベキガ故ニ,CハC'ト合ス。故ニBCハDEニ平行ナリ。

系。上ノ圖ニ於テ $AB:AD = AC:AE$ ナルトキハ, DEハABニ平行ナリ。

問題

1. 高サノ相等シキ二ツノ矩形(又ハ平行四邊形,又ハ三角形)ノ面積ノ比ハ其底邊ノ比ニ等シ(定理四十五ト同ジ方法ニヨリテ證明セヨ)。

2. 一點Oヲ通ル三ツノ直線ガ二ツノ平行線トソレゾレ A, A'; B, B'; C, C' ニテ交ハルトキハ

$$AB:A'B' = BC:B'C'$$

3. 同ジ底邊ノ上ニ立テル二ツノ三角形ABC $A'BC$ノ頂點A, A'ヲ通ル直線ガ底邊BCトDニ於テ交ハルトキハ

$$\triangle ABC : \triangle A'BC = AD : A'D$$

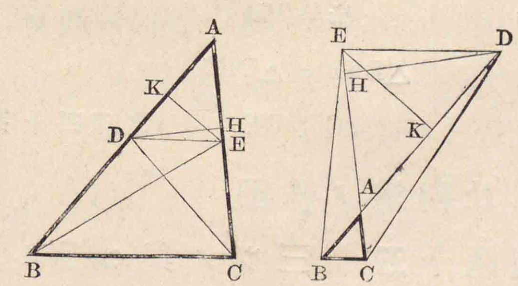
4. 三角形ABCノ中線ADノ上ノ一點OヲB,Cニ連ヌル直線ガ邊AB,ACニ交ハル點ヲソレゾレE,Fトスルトキハ,EFハBCニ平行ナリ。

5. 三角形ABCノ底邊BCニ平行ナル直線ガ他ノ二邊AB,AC又ハ其延長ニ交ハル點ヲソレゾレE,Fトシ,BF,CEノ交點ヲOトスルトキハ,AOハ三角形ABCノ中線ナリ。

69. 比例線ノ基本定理ト面積ノ基本定理トノ關係。

前節ノ定理四十五.四十六ハ又次ノヤウニシテ證明スルコトヲ得。

一定ノ單位ヲ用フルトキ, AD, DB; AE, EC ノ數



値ヲ a, b; a', b' トシ,又 D, E ヨリ AE, AD ヘ下セル垂線 DH, EK ノ數値ヲ h, k トセヨ。 BE, CD ヲ結ビ

付ケヨ。

サテ(一) $BC \parallel DE$ トセヨ。

然ラバ $\triangle DEB = \triangle DEC$ (定理四十,系一)

故ニ $bk = b'h$ (1)

又 $\triangle ADE$ ノ面積ハ ak 又ハ $a'h$ ノ二分ノ一ニ等シキガ故ニ $ak = a'h$ (2)

(1)(2)ヨリ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$

故ニ $AD : DB = AE : EC$

又(二)逆ニ $AD : DB = AE : EC$ トセヨ。

然ラバ $a : b = a' : b'$ (3)

サテ上ト同ジヤウニ

$$ak = a'h \quad (4)$$

(3)(4)ヨリ $bk = b'h$

故ニ $\triangle DEB = \triangle DEC$

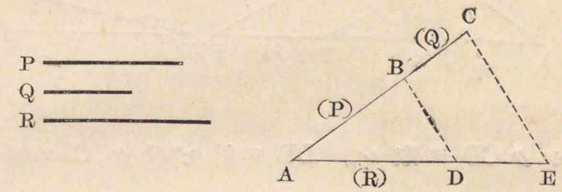
故ニ $BC \parallel DE$ (定理四十,系二)

70. 比例線ノ作圖。

作圖題十五。 三ツノ與ヘラレタル線分ノ第四比例項ヲ求ムルコト。

作圖。 P, Q, R ヲ與ヘラレタル線分トセヨ。

P ニ等シク AB ヲ取リ,其延長ノ上ニ Q ニ等シク BC ヲ取レ。A ヨリ任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ R ニ等シク AD ヲ取レ。BD ヲ結ビ付ケ,C ヨリ BD ニ



平行ニ CE ヲ引キ,AD ノ延長ト E ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ DE ハ求ムル線分ナルベシ。

證。 作圖ニヨリ $BD \parallel CE$

故ニ $AB : BC = AD : DE$ (定理四十五)

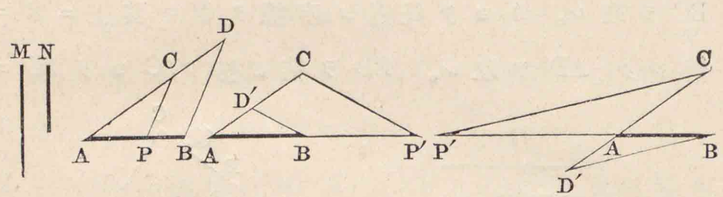
卽チ $P : Q = R : DE$

作圖題十六。 與ヘラレタル線分ヲ與ヘラレタル比ニ内分又ハ外分スルコト。

AB ヲ與ヘラレタル線分トシ,比ハ二ツノ線分 M, N ノ比トシテ與ヘラレタリトセヨ。

作圖。 (一) AB ノ一端 A ヨリ任意ノ直線ヲ引キ其上ニ M ニ等シク AC ヲ取リ,AC ノ延長ノ上ニ N

(一)　(二)



ニ等シクCDヲ取レ。DBヲ結ビ付ケ,CヨリDBニ平行ニCPヲ引キ,Pニ於テABト交ハラシメヨ。

然ラバPハABヲM:Nニ等シキ比ニ内分スベシ,即チ

$$AP:PB=M:N$$

ナルベシ(定理四十五)。

(二) CA或ハ其延長ノ上ニNニ等シクCD'ヲ取リ,D'Bヲ結ビ付ケ,CヨリD'Bニ平行ニCP'ヲ引キ,P'ニ於テABノ延長ト交ハラシメヨ。

然ラバP'ハABヲM:Nニ等シキ比ニ外分スベシ,即チ

$$AP':P'B=M:N$$

ナルベシ(定理四十五)。

注意。 $M:N=1$,即チ$M=N$ナルトキハ,D'ハAニ合スルガ故ニ上ノ作圖(二)ハ成立セズ。

系。 與ヘラレタル線分ヲ與ヘラレタル比ニ内分又ハ外分スル點ハ各〻唯一ツニ限ル。

問題

二ツノ平行線ノ上ニ各〻三ツノ點A,B,C; A',B',C'ガ順次ニアリテ

$$AB:A'B'=BC:B'C'$$

ナルトキハAA', BB', CC'ハ平行ナルカ,又ハ同一ノ點ヲ過ギル。

71. 比例線ノ性質。

定理四十七。 四ツノ直線ガ比例ヲナストキハ,外項ノ包ム矩形ト内項ノ包ム矩形トハ等積ナリ。

又逆ニ二ツノ矩形ガ等積ナルトキハ,其一ツヲ包ム二ツノ線分ヲ外項トシ,他ノ一ツヲ包ム二ツノ線分ヲ内項トセル比例ガ成リ立ツ。

(一) A,B,C,D ヲ四ツノ線分トシ

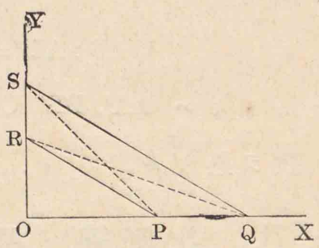
$$A:B = C:D$$

トセヨ。然ラバ

$$A.D = B.C$$

ナルベシ。

證。 點 O ニ於テ垂直ニ相交ハル二ツノ半直線 OX, OY ヲ引キ, OX ノ上ニ A, B ニ等シク OP, OQ ヲ取リ,又 OY ノ上ニ C, D ニ等シク OR, OS ヲ取レ。



然ラバ

$$OP:OQ = OR:OS$$

故ニ　$PR \parallel QS$　(定理四十六,系)

故ニ　$\triangle PRS = \triangle PRQ$　(定理四十,系一)

故ニ　$\triangle OPS = \triangle OQR$

サテ A,D ノ包ム矩形ハ △OPS ノ二倍ニ等シク, B,C ノ包ム矩形ハ △OQR ノ二倍ニ等シ。故ニ

$$A.D = B.C$$

(二) 次ニ　$A.D = B.C$

トセヨ。然ラバ

$$A:B = C:D$$

ナルベシ。

證。 假定ニヨリ　$A.D = B.C$

故ニ上ノ圖ニ於テ　$\triangle OPS = \triangle OQR$

故ニ　$\triangle PRS = \triangle PRQ$

故ニ　$PR \parallel QS$　(定理四十,系二)

故ニ　$OP:OQ = OR:OS$　(定理四十五,系一)

卽チ　$A:B = C:D$

注意。 四ツノ線分 A,B,C,D ヲ同一ノ單位ヲ用ヒテ計レル數値ヲ a, b, c, d トスルトキハ,上ノ定理ヲ次ノ如クニシテ證明スルコトヲ得。

$$A:B = a:b, \quad C:D = c:d$$

故ニ四ツノ數 a, b, c, d ノ間ニ次ノ比例式ガ成リ立ツ。

$$a:b = c:d$$

故ニ　$ad = bc$

サテ長サノ單位ニ相當セル面積ノ單位ヲ用フルトキハ, ad, bc ハソレゾレ矩形 A.D, B.C ノ面積ノ數値ナリ。故ニ

$$A.D = B.C$$

(同ジヤウニシテ(二)ヲ證明セヨ)。

系一。 二ツノ線分ノ包ム矩形ハ其比例中項ナル線分ノ上ノ平方ト等積ナリ。又正方形ノ邊ハ之ト等積ナル矩形ノ相隣レル二ツノ邊ノ比例中項ナリ。

系二。 四ツノ線分 A, B, C, D ノ間ニ,

$$A:B=C:D$$

ナル比例ガ成リ立ツトキハ,又次ノ比例ガ成リ立ツ。

$$A:C=B:D$$

問題

1. 與ヘラレタル矩形ト等積ニシテ,且一ツノ邊ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ矩形ヲ作ルコト。

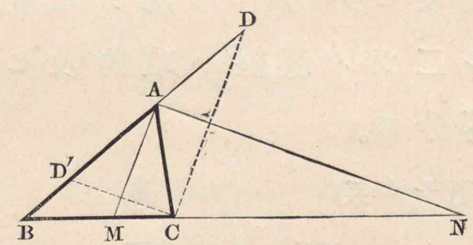
2. 二ツノ等積ナル矩形ノ底ノ比ハ高サノ反比ニ等シ。

二ツノ等積ナル三角形ニツキテモ亦然リ。

72. 三角形ノ角ノ二等分線ノ性質。

定理四十八。 三角形ノ頂角及ビ之ニ隣レル外角ノ二等分線ハ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分又ハ外分ス。

△ABC ノ頂角 BAC ノ二等分線ガ底邊 BC ニ



交ハル點ヲ M, 又外角 CAD ノ二等分線ガ底邊 BC ノ延長ニ交ハル點ヲ N トセヨ。然ラバ

$$BM:MC=BN:NC=AB:AC$$

ナルベシ。

證。 BA ノ延長ノ上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ, DC ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ

$$\angle BAM=\angle D\ (=\tfrac{1}{2}\angle BAC)$$

故ニ

$$AM \parallel DC$$

故ニ $BM:MC = BA:AD = AB:AC$ (定理四十五)

又 AB ノ上ニ AC ニ等シク AD' ヲ取リ, D'C ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ ($CD' \perp AM$, $AN \perp AM$)

故ニ $AN \parallel D'C$

故ニ $BN:NC = BA:AD' = AB:AC$ (定理四十五)

系。 三角形ノ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分及ビ外分スル點ヲ頂點ニ結ビ付クル二ツノ直線ハ頂角及ビ其外角ヲ二等分ス。

(作圖題十六,系)

問　題

三角形 ABM, ACM 又ハ ABN, ACN ノ面積ヲ比較スルコトニヨリテ上ノ定理ヲ證明セヨ。

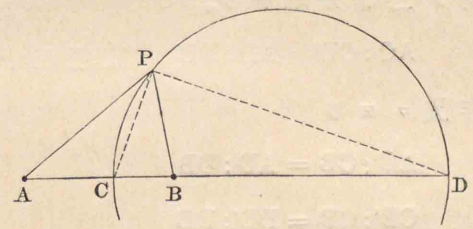
73. 二點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡。

二ツノ定點ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

二ツノ定點ヲ A, B トセヨ。

與ヘラレタル比ノ値ガ 1 ニ等シキトキハ,求ムル軌跡ハ AB ヲ垂直ニ二等分スル直線ナリ。ヨリテ與ヘラレタル比ノ値ハ 1 ニ等シカラズトセヨ。

AB ヲ與ヘラレタル比ニ内分及ビ外分スル點



ヲ C, D トセヨ。然ラバ C, D ハ求ムル軌跡ノ上ノ點ナリ。

サテ P ヲ求ムル軌跡ノ上ノ任意ノ一點トセヨ。

然ラバ $PA:PB = CA:CB = DA:DB$

故ニ CP, DP ハ三角形 ABP ノ頂角 P 及ビ其外角ノ二等分線ナリ(定理四十八,系), 故ニ $\angle CPD$ ハ直角ナリ。

故ニ A, B ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點 P ハ CD ヲ直徑トセル圓周ノ上ニアリ。

逆ニ P ヲ此圓周上ノ一點トセヨ。PC ニ對シテ

PA ト反對ノ側ニ

$$\angle CPB' = \angle CPA$$

ナルヤウニ PB′ ヲ引キ, AD ト B′ ニテ交ハラシメヨ。然ラバ PC ハ △APB′ ノ頂角 APB′ ノ二等分線ニシテ, 又 PD ハ PC ニ垂直ナルガ故ニ ∠APB′ ニ接スル外角ノ二等分線ナリ。

故ニ　$AC : CB' = AD : DB'$　(定理四十八)

然ルニ作圖ニヨリ

$$AC : CB = AD : DB$$

故ニ　$CB' : CB = DB' : DB$

故ニ　$CB' : DB' = CB : DB$　(定理四十七,系二

卽チ B, B′ ハイヅレモ CD ヲ同ジ比ニ內分スル點ナリ。故ニ B′ ハ B ト一致ス (作圖題十六,系)

故ニ CP ハ ∠APB ノ二等分線,從テ

$$PA : PB = AC : CB$$

卽チ CD ヲ直徑トスル圓周上ノ點 P ノ A, B ヨリノ距離ノ比ハ與ヘラレタル比ニ等シ。

故ニ求ムル軌跡ハ CD ヲ直徑トスル圓周ナリ。

卽チ二定點ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル(1ニ等シカラザル)比ニ等シキ點ノ軌跡ハ,二定點ヲ結ビ付クル直線ノ上ニ中心ヲ有スル一ツノ圓周ナリ。

問題

1. 同一直線上ノ線分 AB, BC ヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

2. 同一直線上ノ接續セル三ツノ線分 AB, BC CD ヲ相等シキ角ニ見込ム點ヲ求ムルコト。

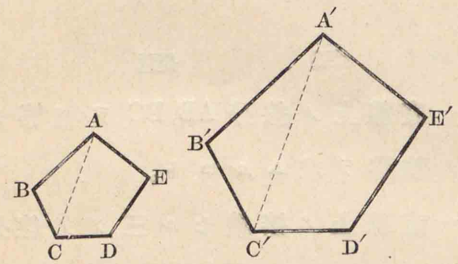
3. 本節ノ定理ノ圖ニ於テ AB 及ビ CD ヲ直徑トスル二ツノ圓周ノ交點ヲ P トスルトキハ, PA, PB ハ △CPD ノ角 CPD 及ビ其外角ノ二等分線ナリ, 從テ A, B ハ又線分 CD ヲ相等シキ比ニ內分及ビ外分ス。

第三章　相似多角形

74. 定義。

二ツノ多角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ニ於テ角 A, B, C, D, E ガ順次ニ角 A′, B′, C′, D′, E′ ニ等シキトキハ, 此等二ツノ多角形ハ等角ナリトイヒ, 相等シキ角 A, A′; B, B′; ………… ヲ相對應スル角トイフ。相對

應スル角ノ頂點ヲ連スル邊又ハ對角線ヲ相對應



スル邊又ハ相對應スル對角線トイフ。例ヘバ AB, $A'B'$ ハ相對應スル邊ニシテ AC, $A'C'$ ハ相對應スル對角線ナリ。

二ツノ多角形ガ等角ニシテ且相對應スル邊ガ比例ヲナストキ($AB : A'B' = BC : B'C' = \cdots\cdots = EA : E'A'$) ハ此等ノ多角形ハ**相似**ナリトイフ。相似多角形ノ相對應スル邊ノ比ヲ**相似ノ比**トイフ。

全ク相等シキ多角形ハ相似ナル多角形ノ特別ノ場合ナリ。

例ヘバ二ツノ正三角形,二ツノ正方形,底ト高サトノ比ガ相等シキ二ツノ矩形ハ相似ナリ。

同一ノ多角形ト相似ナル多角形ハ亦互ニ相似ナリ。

甲乙二ツノ多角形ガ相似ナルトキハ,甲ニ於ケル二ツノ邊ノ比ハ乙ニ於テ之ニ對應スル二ツノ邊ノ比ニ等シ。($AB : BC = A'B' : B'C'$)

定理四十九。 二ツノ多角形ガ等角ニシテ,相對應スル二隣邊ノ比ガソレゾレ相等シキトキ ($AB : BC = A'B' : B'C'$, $BC : CD = B'C' : C'D'$, …… $EA : AB = E'A' : A'B'$) ハ,二ツノ多角形ハ相似ナリ。

75. 三角形ノ相似。(一)

定理五十。 等角ナル二ツノ三角形ハ相似ナリ。

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, 從テ $\angle C = \angle C'$

トセヨ。

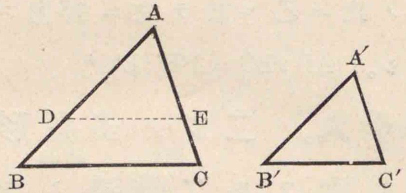
然ラバ $\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$*

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$$

ナルベシ。

* 二ツノ三角形ガ相似ナルコトヲカヤウニ書ク。但相對應スル頂點ガ同ジ位置ヘ來ルヤウニ二ツノ三角形ヲ書キ表ハスヲヨシトス。

證。 △ABC ノ邊 AB 又ハ其延長ノ上ニ A′B′ ニ



等シク AD ヲ取リ, AC 又ハ其延長ノ上ニ A′C′ ニ等シク AE ヲ取リ, DE ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ $\angle A = \angle A'$ ナルガ故ニ

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

$$\angle ADE = \angle B' = \angle B$$

故ニ $\quad DE \parallel BC$

故ニ $\quad AB : AD = AC : AE$ (定理四十五系一)

即チ $\quad AB : A'B' = AC : A'C'$

同ジヤウニ $\quad BA : B'A' = BC : B'C'$

故ニ $\quad AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

從テ $\quad \triangle ABC \backsimeq \triangle A'B'C'$

問題

1. 一ツノ鋭角ヲ等シクスル二ツノ直角三角形ハ相似ナリ。

2. 頂角ノ相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ相

似ナリ。

3. 二ツノ相似三角形ニ於テ,相對應スル邊ニ對スル高サノ比,又ハ内切圓ノ半徑ノ比,又ハ外接圓ノ半徑ノ比ハ相似ノ比ニ等シ。

76. 三角形ノ相似。(二)

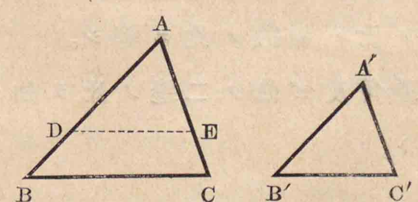
定理五十一。 二邊ノ比及ビ其夾角ガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ相似ナリ。

△ABC, △A′B′C′ ニ於テ

$$\angle A = \angle A', \quad AB : AC = A'B' : A'C'$$

トセヨ。

然ラバ $\quad \triangle ABC \backsimeq \triangle A'B'C'$ ナルベシ。



證。 AB 又ハ其延長ノ上ニ A′B′ ニ等シク AD ヲ取リ, AC 又ハ其延長ノ上ニ A′C′ ニ等シク AE ヲ取リ, DE ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ　$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ADE$

$$\angle B' = \angle ADE,\quad \angle C' = \angle AED$$

サテ假定ニヨリ

$$AB : AC = A'B' : A'C'$$

故ニ　$AB : A'B' = AC : A'C'$

故ニ　$AB : AD = AC : AE$

故ニ　$DE \parallel BC$　(定理四十六,系)

故ニ　$\angle ADE = \angle B$

故ニ　$\angle B = \angle B'$

同ジヤウニ　$\angle C = \angle C'$

故ニ　$\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$　(定理五十)

問　題

1. 二ツノ相似三角形ニ於テ,相對應スル邊ニ對スル中線ノ比ハ相似ノ比ニ等シ。

2. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

77. 三角形ノ相似。(三)

定理五十二。 三ツノ邊ガソレゾレ比例ヲナス二ツノ三角形ハ相似ニシテ,比例ニ於テ相對應スル邊ニ對スル角ガ相等シ。

$\triangle ABC,\ \triangle A'B'C'$ ニ於テ

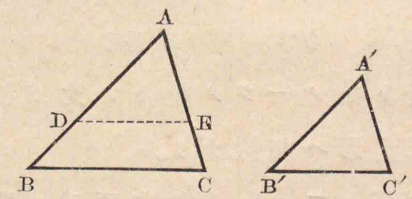
$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$$

トセヨ。

然ラバ　$\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$

$$\angle A = \angle A',\quad \angle B = \angle B',\quad \angle C = \angle C'$$

ナルベシ。



證。 AB 又ハ其延長ノ上ニ $A'B'$ ニ等シク AD ヲ取リ, AC 又ハ其延長ノ上ニ $A'C'$ ニ等シク AE ヲ取リ, DE ヲ結ビ付ケヨ。

假定ニヨリ $AB : A'B' = AC : A'C'$

故ニ　$AB : AD = AC : AE$

故ニ　$DE \parallel BC$　(定理四十六,系)

故ニ　$\angle B = \angle ADE,\quad \angle C = \angle AED$

又 $BC : DE = AB : AD$ （定理四十五,系三）

$= AB : A'B'$

然ルニ假定ニヨリ

$BC : B'C' = AB : A'B'$

故ニ $B'C' = DE$

即チ $\triangle A'B'C'$, $\triangle ADE$ ハ三ツノ邊ガソレゾレ相等シ,故ニ $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ADE$

$\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle ADE = \angle B$, $\angle C' = \angle AED = \angle C$

故ニ $\triangle ABC \backsimeq \triangle A'B'C'$ （定理五十）

問題

1. 斜邊ト他ノ一ツノ邊トノ比ガ相等シキ二ツノ直角三角形ハ相似ナリ。

2. 三角形ノ二ツノ邊ヲ內項トシ,第三邊ニ對スル高サ及ビ外接圓ノ直徑ヲ外項トシテ比例式ガ成リ立ツ。

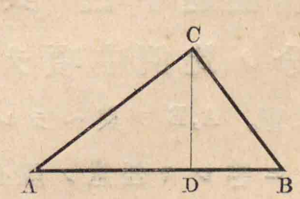
3. 圓周上ノ一點ヨリ內接四角形ノ相對スル邊ヘ下セル垂線ノ包ム矩形ハ相等シ。

4. 二等邊三角形ノ頂角ノ內部ニアリテ,底邊ヘノ距離ガ他ノ二邊ヘノ距離ノ比例中項ナル點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

78. 直角三角形ニ於ケル比例線。

定理五十三。 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ハ直角三角形ヲ之ト相似ナル二ツノ直角三角形ニ分ツ。垂線ハ其足ニヨリテ分タレタル斜邊ノ二ツノ部分ノ比例中項ニシテ,又直角ヲ夾メル各〻ノ邊ハ斜邊ト斜邊ノ上ニ於ケル其正射影トノ比例中項ナリ。

證。 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle C$ ヲ直角トセヨ。C ヨリ斜邊 AB ヘ下セル垂線ノ足ヲ D トセヨ。



然ラバ $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle CBD$ ハ互ニ等角ナリ。

故ニ $\triangle ABC \backsimeq \triangle ACD \backsimeq \triangle CBD$

從テ $AD : CD = CD : DB$

$AB : AC = AC : AD$

$AB : BC = BC : BD$

又ハ $\overline{CD}^2=\overline{AD}.\overline{DB}$

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}.\overline{AD}$$

$$\overline{BC}^2=\overline{BA}.\overline{BD}$$

注意。 後ノ二ツノ式ヨリぴたごらすノ定理ノ證明ヲ得ベシ。

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}.(\overline{AD}+\overline{BD})=\overline{AB}^2$$

問題

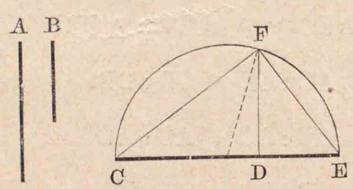
三角形ABCノ頂點Aヨリ邊BCヘ下セル垂線ADノ足ガB, Cノ間ニアリテ, ADガBD, CDノ比例中項ナルトキハ, ∠BACハ直角ナリ。

79. 比例中項ノ作圖。

作圖題十七。 與ヘラレタル二ツノ線分ノ比例中項ヲ求ムルコト。

作圖。 A, Bヲ與ヘラレタル線分トセヨ。

Aニ等シキ任意ノ線分CDヲ作リ, 其延長ノ上



ニBニ等シクDEヲ取レ。CEヲ直徑トシテ半圓周ヲ作リ, Dニ於テCEニ垂線DFヲ作リ, 圓周トFニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバDFハ求ムル線分ナルベシ(定理五十三)。

系。 二ツノ相等シカラザル線分ノ比例中項ハ此等ノ線分ノ和ノ半分ヨリモ小ナリ。

問題

1. 與ヘラレタル矩形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト。

2. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト。

80. 圓ニ於ケル比例線。

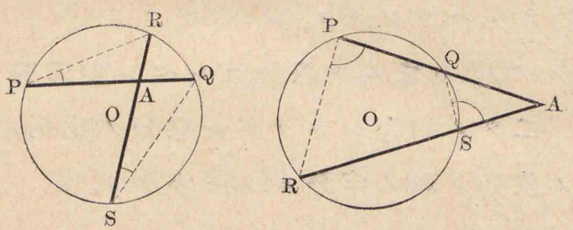
定理五十四。 圓周上ニアラザル一ツノ定點ヲ通ル弦ガ此點ニ於テ内分又ハ外分セラルル二ツノ部分ノ包ム矩形ハ一定ノ面積ヲ有ス。

圓周Oノ上ニアラザル定點ヲA, PQ, RSヲAヲ通ル二ツノ弦トセヨ。

然ラバ $\overline{AP}.\overline{AQ}=\overline{AR}.\overline{AS}$

ナルベシ。

證。 PR, QS ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ $\triangle APR$, $\triangle ASQ$

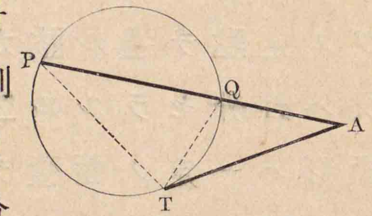


ニ於テ $\angle PAR=\angle SAQ$, $\angle APR=\angle ASQ$ 故ニ $\triangle APR$, $\triangle ASQ$ ハ等角,從テ相似ニシテ, AP ト AS ト又 AR ト AQ トハ相對應スル邊ナリ。

故ニ $AP:AR=AS:AQ$ (定理五十)

故ニ $\overline{AP}.\overline{AQ}=\overline{AR}.\overline{AS}$ (定理四十七)

系。 圓外ノ一點(A)ヨリ此圓ニ引ケル切線(AT)ノ長サハ,同ジ點ヲ通ル割線(AQP)上ノ弦(PQ)ガ此點ニ於テ外分セラルル二ツノ部分(AP, AQ)ノ比例中項ナリ。



定理五十五。 二ツノ線分ガ同一ノ點ニ於テ雙方共ニ内分又ハ外分セラル兩部分ノ包ム矩形ガ相等シキトキハ,二ツノ線分ノ兩端ナル四ツノ點ハ同一ノ圓周上ニアリ。

二ツノ線分 PQ, RS ガ點 A ニ於テ相交ハリ,又ハ PQ 及ビ RS ノ延長ガ點 A ニ於テ相交ハリ且

$$\overline{AP}.\overline{AQ}=\overline{AR}.\overline{AS}$$

トセヨ。

然ラバ P, Q, R, S ハ同一ノ圓周上ニアルベシ。

證。 $\triangle APR$, $\triangle ASQ$ ニ於テ

$$\angle PAR=\angle SAQ$$

又 $$\overline{AP}.\overline{AQ}=\overline{AR}.\overline{AS}$$

從テ $$AP:AR=AS:AQ$$

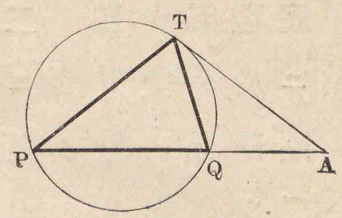
故ニ $$\triangle APR \simeq \triangle ASQ \quad (定理五十一)$$

$$\angle APR=\angle ASQ$$

故ニ P, Q, R, S ハ同一ノ圓周上ニアリ。

系。 三角形ノ底邊ノ延長ノ上ノ一點ヨリ頂點ニ至ル線分ガ此點ニ於テ外分セラレタル底邊ノ

二ツノ部分ノ比例中項ニ等シキトキハ,三角形ノ外接圓ハ頂點ニ於テ先ノ線分ニ切ス。



問題

1. 相交ハル二ツノ圓ノ共通ノ弦ノ上ノ一點Pヲ通ル直線ガ二ツノ圓トソレゾレA,B及ビC,Dニテ相交ハルトキハ

$$\overline{PA}.\overline{PB}=\overline{PC}.\overline{PD}$$

2. 相交ハル二ツノ圓ニ共通ナル弦ノ延長ノ上ノ任意ノ點ヨリ,此等ノ圓ヘ引ケル切線ハ相等シ。

3. 一ツノ圓ガ二ツノ圓O,O′トソレゾレA,B及ビA′,B′ニ於テ交ハルトキ,AB,A′B′ノ交點Eヨリ二ツノ圓ヘ引ケル切線ハ相等シ。

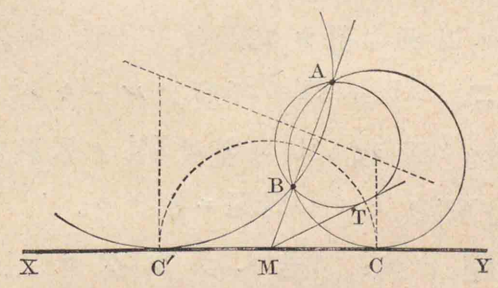
4. 三ツノ圓ガ二ツヅツ相交ハルトキハ三ツノ共通ノ弦ハ同一ノ點ヲ通ル。

5. 二ツノ相切スル圓ガ各,第三ノ圓ニ交ハルトキハ,切點ニ於ケル共通切線ト相交ハル圓ニ共通ナル二ツノ弦トハ同一ノ點ヲ通ル。

81. 應用。

作圖題十八。 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過ギリ,一ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ作ルコト。

A,Bヲ與ヘラレタル點,XYヲ與ヘラレタル直線トセヨ。



假ニ求ムル圓ガXYニ切スル點ヲCトセヨ。直線ABガXYニ交ル點ヲMトセヨ。然ラバMハ定マレル點ニシテMCハMA,MBノ比例中項ナリ(定理五十四,系)。

又逆ニMCガMA,MBノ比例中項ナルトキハ,A,B,Cヲ通ル圓ハCニ於テMC即チXYニ切ス(定理五十五,系)。

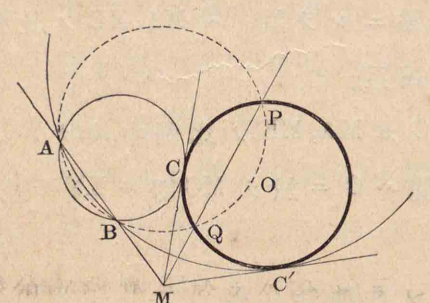
ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖。 AB ト XY トノ交點 M ヲ求メヨ。MA, MB ノ比例中項ヲ求メ,之ニ等シク XY ノ上ニ MC, MC′ ヲ取レ。A, B, C 及ビ A, B, C′ ヲ通ル圓ヲ作レ。コレ卽チ求ムル圓ナリ。

注意一。 MA, MB ノ比例中項ヲ求ムルニハ次ノヤウニスルコトヲ得。A, B ヲ通ル任意ノ圓ヲ作リ, M ヨリ此圓ヘ切線 MT ヲ引ケ。MT ハ卽チ求ムル比例中項ナリ。

注意二。 AB ガ XY ニ平行ナルトキハ,求ムル圓ハ唯一ツアリ。又 A, B ガ XY ノ反對ノ側ニ一ツヅツアルトキハ問題ニ解ナシ。

作圖題十九。 與ヘラレタル二ツノ點ヲ通リ,與ヘラレタル一ツノ圓ニ切スル圓ヲ作ルコト。



作圖。 A, B ヲ與ヘラレタル點, O ヲ與ヘラレタル圓トセヨ。

A, B 及ビ圓周 O ノ上ノ任意ノ點 P ヲ通ル圓ヲ作リ, Q ニ於テ再ビ圓周 O ト交ハラシメヨ。AB, PQ ヲ結ビ付ケ,其交點 M ヲ求メヨ。M ヨリ圓 O ヘ切線 MC, MC′ ヲ引ケ。然ラバ A, B, C 又ハ A, B, C′ ヲ通ル圓ハ求ムル圓ナルベシ。

證。 A, B, P, Q ハ M ヨリ引ケル二ツノ割線ガ圓周 ABQP ニ交ハル點ナルガ故ニ

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MP}\cdot\overline{MQ} \qquad \text{(定理五十四)}$$

又作圖ニヨリ MC ハ圓周 O ニ切スルガ故ニ

$$\overline{MP}\cdot\overline{MQ}=\overline{MC}^2 \qquad \text{(定理五十四,系)}$$

故ニ

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}^2$$

故ニ圓 ABC ハ C ニ於テ MC ニ切ス,從テ圓 O ニ切ス(定理五十五,系)。

同ジヤウニ圓 ABC′ ハ C′ ニ於テ圓 O ニ切ス。

注意一。 上ノ作圖ニ於テ AB, PQ ガ平行ナルトキハ,圓 O ヘ AB ニ平行ナル切線ヲ引キ,其切點ヲ C, C′ トスベシ。此場合ニハ O ヨリ AB ヘ下セル垂線ハ AB ヲ二等分スベシ。此垂線ガ

圓Oニ交ハル二ツノ點ガ卽チ求ムル切點 C, C' ナリ。

又圓ABPガPニ於テ圓Oニ切スルトキハ,此圓ハ卽チ求ムル圓ノ一ツナリ。此場合ニハPニ於ケル共通切線トABトノ交點ヲMトスベシ。

注意二。 與ヘラレタル點ガ圓Oノ內外ニ一ツヅツアルトキ,又ハ二ツナガラ圓周Oノ上ニアルトキハ問題ニ解ナシ(A, Bノ中ノ一ツガ圓周Oノ上ニアルトキハ如何)。

問題

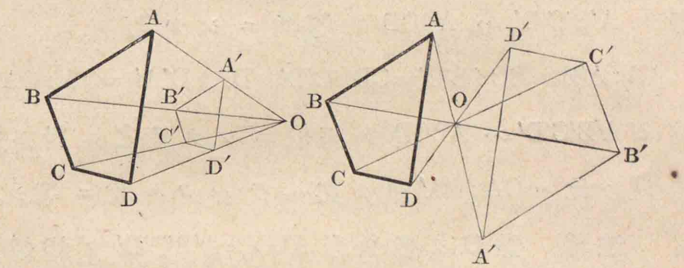
二ツノ與ヘラレタル直線ニ切シ,且一ツノ與ヘラレタル點ヲ通ル圓ヲ作ルコト。

82. 相似形ノ作圖。

作圖題二十。 與ヘラレタル多角形ト相似ニシテ,且之ニ對シテ與ヘラレタル相似ノ比ヲ有スル多角形ヲ作ルコト。

作圖。 ABCDヲ與ヘラレタル多角形,Oヲ任意ノ一點トセヨ。OA, OB, OC, ODヲ結ビ付ケヨ。OA

又ハ其延長ノ上ニ $OA:OA'$ ガ與ヘラレタル比ニ等シクナルヤウニA'ヲ取レ(作圖題十五)。A'ヨリABニ平行ニ$A'B'$ヲ引キ,OBトB'ニ於テ交ハラシ



メヨ。B'ヨリBCニ平行ニ$B'C'$ヲ引キ,OCトC'ニ於テ交ハラシメヨ。C'ヨリCDニ平行ニ$C'D'$ヲ引キODトD'ニ於テ交ハラシメヨ。$D'A'$ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ$A'B'C'D'$ハ求ムル多角形ナルベシ。

證。 作圖ニヨリ

$$\angle A'B'C' = \angle ABC$$

故ニ $$AB : A'B' = OA : OA' = OB : OB'$$

又 $$\angle B'C'D' = \angle BCD$$

故ニ $$BC : B'C' = OB : OB' = OC : OC'$$

同ジヤウニ $$CD : C'D' = OC : OC' = OD : OD'$$

故ニ又 $$OA : OA' = OD : OD'$$

故ニ $$A'D' \parallel AD$$

故ニ $AD:A'D'=OA:OA'$

$\angle CDA=\angle C'D'A'$

$\angle DAB=\angle D'A'B'$

卽チ $A'B'C'D'$ ハ $ABCD$ ト等角ニシテ且

$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DA:D'A'(=OA:OA')$

故ニ $A'B'C'D'$ ハ $ABCD$ ト相似ニシテ且之ニ對スル相似ノ比ハ $OA:OA'$ 卽チ與ヘラレタル比ニ等シ。

注意。點 O ヲ多角形 $ABCD$, $A'B'C'D'$ ノ**相似ノ中心**トイフ。

課題　第八

1. 三角形 ABC, $A'B'C'$ ノ相對應スル邊 $AB, A'B'$; $AC, A'C'$; $BC, B'C'$ ガ互ニ平行ナルトキハ,相對應スル頂點ヲ連ヌル直線 AA', BB', CC' ハ互ニ平行ナルカ又ハ同一ノ點ヲ通ル。(此點ハ卽チ二ツノ三角形ノ相似ノ中心ナリ)。

2. 二ツノ四邊形 $ABCD$, $A'B'C'D'$ ガ等角ニシテ,且 $AB:BC=A'B':B'C'$ ナルトキハ,此等ノ四邊形ハ相似ナリ。

3. 二ツノ凸四邊形ノ相對應スル邊ガ比例ヲナシ,且一組ノ相對應スル角ガ相等シキトキハ,此等ノ四邊形ハ相似ナリ。

4. 二ツノ相似多角形ニ於テ相對應スル對角線ノ比ハ相似ノ比ニ等シ。又相對應スル對角線ガ多角形ヲ二ツノ部分ニ分ツトキハ,相對應スル部分ハ相似多角形ナリ。

5. 六角形 $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$ ガ相似ナルトキハ,三角形 ACE, $A'C'E'$ モ亦相似ナリ。

6. 四角形 $ABCD$, $A'B'C'D'$ ガ相似ナルトキ對角線 AC, BD ノ交點ヲ O, 又 $A'C'$, $B'D'$ ノ交點ヲ O' トスルトキハ

$AO:A'O'=BO:B'O'=CO:C'O'=DO:D'O'$

7. 相對應スル邊ガ比例ヲナス二ツノ梯形ハ相似ナリ。

8. 二ツノ直線ヘノ距離ノ比ガ與ヘラレタル二ツノ線分ノ比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

9. 線分 AB, CD ノ位置及ビ大サガ與ヘラレタルトキ三角形 PAB, PCD ガ等積ナルヤウナル點 P ノ軌跡ヲ求ムルコト。

83. 三角形ノ面積ノ比較。

定理五十六。 二ツノ三角形ニ於テ一ツノ角ガ相等シキトキハ,此等ノ三角形ノ面積ノ比ハ相等シキ角ヲ夾メル二ツノ邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シ。

$\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ ニ於テ

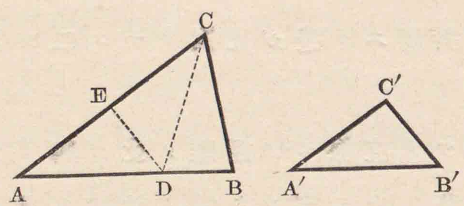
$$\angle A = \angle A'$$

トセヨ。

然ラバ

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}.\overline{AC} : \overline{A'B'}.\overline{A'C'}$$

ナルベシ。



證。 AB ノ上ニ A′B′ ニ等シク AD ヲ取リ,AC ノ上ニ A′C′ ニ等シク AE ヲ取リ,DE, DC ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ　　$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$

サテ　　$\triangle ABC : \triangle ADC = AB : AD$

$\triangle ADC : \triangle ADE = AC : AE$

故ニ　　$\triangle ABC : \triangle ADE = \begin{cases} AB : AD \\ AC : AE \end{cases}$

$= \overline{AB}.\overline{AC} : \overline{AD}.\overline{AE}$*

故ニ　　$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}.\overline{AC} : \overline{A'B'}.\overline{A'C'}$

上ノ定理ヲ次ノ如クニ言ヒ表ハスコトヲ得。

一ツノ角ガ定マレル三角形ノ面積ハ此角ヲ夾メル二ツノ邊ノ長サニ複比例ス。

系。 二ツノ三角形ニ於テ一ツノ角ガ互ニ補角ヲナストキハ,其面積ノ比ハ此等ノ角ヲ夾メル二ツノ邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シ。

問題

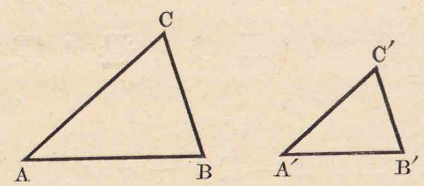
一ツノ角ガ定マレル三角形ニ於テ,此角ヲ夾メル二ツノ邊ノ中ノ一ツニ對スル高サハ他ノ一ツノ邊ニ比例スルコトニ著眼シ,數値ヲ用ヒテ上ノ定理ヲ證明セヨ。

* 二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ底ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シ(代數學參照)。

84. 相似多角形ノ面積ノ比。

定理五十七。 相似ナル二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ其相似ノ比ノ平方比ニ等シ。

證。 ABC, A'B'C' ヲ相似ナル三角形トシ,頂點A, B, C ハ A', B', C' ニ對應ストセヨ。又相似ノ比ノ値ヲ r トセヨ。



然ラバ

$$\angle A = \angle A',\quad AB : A'B' = AC : A'C' = r$$

故ニ

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \left\{\begin{array}{l} AB : A'B' \\ AC : A'C' \end{array}\right.$$

$$= \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = r^2$$

系。 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ相似ノ比ノ平方比ニ等シ。

(相似多角形ヲ一組ヅツ相似ナル三角形ニ分

割スルコトヲ得ベキガ故ニ,本定理ヲ應用シテ此系ヲ證明スルコトヲ得)。

問題

1. 相似三角形ニ於テ相對應スル高サノ比ハ相似ノ比ニ等シキコトニ著眼シ,數値ヲ用ヒテ上ノ定理ヲ證明セヨ。

2. 直角三角形ノ斜邊ノ上ニ於ケル他ノ二ツノ邊ノ正射影ノ比ハ此等ノ二ツノ邊ノ比ノ平方比ニ等シ。

3. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ガ二ツノ與ヘラレタル線分ノ比ニ等シキトキ,一ツノ多角形ヲ知リテ他ノ多角形ヲ作ルコト。

85. 作圖ニヨリテ四則及ビ開平ノ問題ヲ解クコト。

數値ガ a, b ナル線分ガ與ヘラレタルトキハ,數値ガ $a+b$ 又ハ $a-b (a>b)$ ナル線分ハ作圖ニヨリテ容易ニ求メ得ベシ。又長サノ單位ト數値ガ a, b ナル線分トガ與ヘラレタルトキハ,第四比例項ノ作圖(作圖題十五)ニヨリテ,數値ガ ab 又ハ $\frac{a}{b}$ ナル線分

ヲ作ルコトヲ得。

$$\left(1:a=b:ab,\ 又\ b:a=1:\frac{a}{b}\right)$$

次ニ又長サノ單位ト數値ガ a ナル線分トガ與ヘラレタルトキ,比例中項ノ作圖(作圖題十七)ヲ應用シテ,數値ガ $\sqrt{a}$ ナル線分ヲ作ルコトヲ得。

$$(1:\sqrt{a}=\sqrt{a}:a)$$

此等ノ方法ヲ適當ニ反復應用シテ,長サノ單位ヲ知リテ,隨意ノ有理數,又ハ有理數ノ平方根,又ハ一般ニ1トイフ數ヨリ四則及ビ開平ノミヲ用ヒテ作リ出シ得ベキ正數(例ヘバ $\frac{1+\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2-\sqrt{3}}$ ナド)ヲ數値トセル線分ヲ作ルコトヲ得,特ニ係數ガ有理數ナル二次方程式ノ實根ヲ數値トセル線分ヲ作ルコトヲ得。

問題

1. 與ヘラレタル線分ヲ長サノ單位トシテ,數値ガ $\frac{5}{7}, \sqrt{\frac{5}{7}}$ ナル線分ヲ作ルコト。

2. 數値ガ a, b ナル線分ガ與ヘラレタルトキ,數値ガ $\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2-b^2}$ ナル線分ヲ作ルコト。

3. 底邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ三角形ノ面積ヲ二等分スルコト。

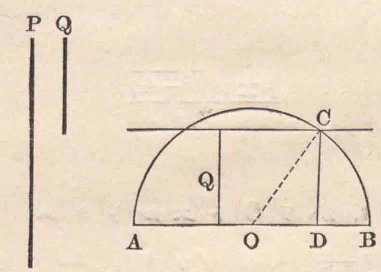
86. 作圖ニヨリテ二次方程式ヲ解クコト。

作圖題二十一。 二ツノ線分ノ和及ビ比例中項ヲ知リテ,此等ノ線分ヲ作ルコト。

P, Q ガ與ヘラレタル線分ナルトキ

$$X_1+X_2=P,\quad X_1X_2=Q^2$$

ナルヤウナル線分 X_1, X_2 ヲ作ルコトヲ要ス。



作圖。P ニ等シク線分 AB ヲ取レ。AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ作レ。AB ノ上ノ任意ノ一點ニ於テ之ニ垂直ニ,且半圓ト同ジ側ニ Q ニ等シキ線分ヲ取リ,其端ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ,半圓周ト C ニ於テ交ハラシメヨ。C ヨリ AB ヘ垂線 CD ヲ下セ。

然ラバ AD, DB ハ求ムル線分ナルベシ。

證。 $AD+DB=AB=P$

$\overline{AD}.\overline{DB}=\overline{CD}^2=Q^2$ (作圖題十七)

今二次方程式

$$x^2-px+q=0$$

ニ於テ p, q ガ正數ナルトキハ,二ツノ根ノ和ハ p, 積ハ q ニ等シ。ヨリテ P ヲ數値 p, Q ヲ數値 $\sqrt{q}$ ナル線分トスルトキハ,上ノ作圖ニヨリテ求メタル線分 X_1, X_2 ノ數値ハ卽チ上ノ二次方程式ノ二ツノ根

$$\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

ナルベシ。

實際,圓ノ中心ヲOトスルトキハ

$$\overline{OD}^2=\overline{OC}^2-\overline{CD}^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-(\sqrt{q})^2=\frac{p^2-4q}{4}$$

故ニ $$OD=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

從テ $$AD=AO+OD=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$DB=OB-OD=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

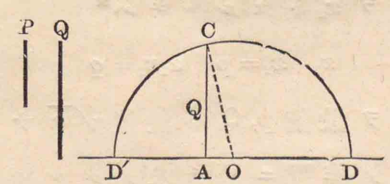
注意。逆ニ AD, DB ヲ求ムル線分トシ,DC ヲ

AB ニ垂直ニ且 Q ニ等シク取ルトキハ ∠ACB ハ直角,從テ AB ヲ直徑トセル半圓周ノ上ニアルベシ。故ニ上ノ作圖ニ於テ AB ニ平行ニ引キタル直線ガ圓周ト交ハラザルトキ,卽チ Q ガ AB ノ半分ヨリモ大ナルトキニハ,問題ニ解ナシ。此場合ニハ $\sqrt{q}>\frac{p}{2}$ 卽チ p^2-4q ハ負數ニシテ,二次方程式 $x^2-px+q=0$ ハ實根ヲ有セズ。

又 Q ガ AB ノ半分ニ等シキトキハ,D ハ圓ノ中心ト一致シ,X_1, X_2 ハ相等シクナル。此場合ニハ $\sqrt{q}=\frac{p}{2}$ 卽チ $p^2-4q=0$ ニシテ二次方程式ハ二ツノ等根ヲ有ス。

作圖題二十二。二ツノ線分ノ差及ビ比例中項ヲ知リテ此等ノ線分ヲ作ルコト。

P, Q ヲ與ヘラレタル線分トセヨ。



$X_1-X_2=P$, $X_1X_2=Q^2$

ナルガ如キ線分 X_1, X_2 ヲ作ルコトヲ要ス。

作圖。 P ノ半分ニ等シク AO ヲ取リ, A ニ於テ AO ニ垂直ニ Q ト等シク AC ヲ取レ。O ヲ中心, OC ヲ半徑トシテ圓ヲ作リ, AO ノ延長ト D 及ビ D′ ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ AD, AD′ ハ求ムル線分ナルベシ。

證。 作圖ニヨリ

$$AD = OD + OA = OC + OA$$

$$AD' = OD' - OA = OC - OA$$

故ニ $$AD - AD' = 2.AO = P$$

又 $$\overline{AD}\ \overline{AD'} = \overline{AC}^2 = Q^2 \quad \text{(作圖題十七)}$$

今二次方程式

$$x^2 - px - q = 0$$

ニ於テ p, q ガ正數ナルトキハ,此方程式ハ一ツノ正根及ビ一ツノ負根ヲ有ス。今其正根ヲ x_1,又負根ノ絶對値ヲ x_2 トスルトキハ*

$$x_1 - x_2 = p, \quad x_1 x_2 = q$$

ヨリテ P ヲ數値 p, Q ヲ數値 $\sqrt{q}$ ナル線分トスルトキハ,上ノ作圖ニ於テ求メタル線分 AD 及ビ

*代數學參照。

AD′ ノ數値ハソレゾレ x_1, x_2 卽チ

$$AD = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}, \quad AD' = \frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$$

ナルベシ。

實際 $$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + (\sqrt{q})^2 = \frac{p^2+4q}{4}$$

故ニ $$OC = \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

從テ $$AD = OA + OC = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

$$AD' = OC - OA = \frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$$

87. 應用。

作圖題二十三。 與ヘラレタル線分 AB ヲ P ニ於テ內分(又ハ外分)シ,其一分 AP ガ他ノ一分 PB ト與ヘラレタル線分 AB トノ比例中項($\overline{AP}^2 = \overline{AB}.\overline{BP}$)トナルヤウニスルコト。

(カヤウニ一ツノ線分ヲ分ツコトヲ此線分ヲ中末比ニ分ツトイフ)。

AB ヲ長サノ單位トシ, AP ノ數値ヲ x トセヨ。然ラバ內分ノ場合ニハ PB ノ數値ハ $1-x$ ナリ。故ニ x ハ次

ノ方程式ヲ滿足セシム。

$$x^2=1-x$$

又ハ
$$x^2+x-1=0 \qquad (1)$$

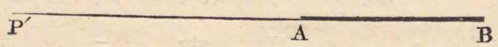
故ニ
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

サテ x ハ正數ナルコトヲ要スルガ故ニ

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

次ニ又外分ノ場合ニ於テハ,求ムル點ヲ P′ トスルトキ, AP′ ハ AB ト P′B トノ比例中項ナルガ故ニ AB, P′B ノ双方ヨリモ大ナルコトヲ得ズ,從テ P′ ハ A ニ對シテ B ト反對ノ側ニアルベシ。

サテ AP′ ノ數値ヲ x' トスルトキハ P′B ノ數値



ハ $1+x'$ トナル。故ニ x' ハ次ノ方程式ヲ滿足セシム。

$$x'^2=1+x'$$

又ハ
$$x'^2-x'-1=0$$

故ニ
$$x'=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

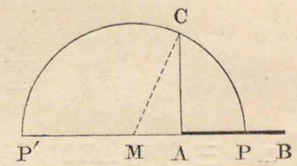
サテ x' ハ正數ナルコトヲ要スルガ故ニ

$$x'=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

即チ x' ハ方程式(1)ノ負根ノ絶對値ニ外ナラズ。

ヨリテ次ノ作圖法ヲ得(作圖題二十二)。

作圖。BA ノ延長ノ上ニ AM ヲ AB ノ半分ニ等シク取レ。A ヨリ AB ニ垂直ニ且 AB ニ等シク AC ヲ取レ。M ヲ中心, MC ヲ半徑トシテ圓ヲ作リ,



AB 及ビ其延長トP 及ビ P′ ニ於テ交ハラシメヨ。P, P′ ハ即チ求ムル點ナリ。

(PB 及ビ P′B ノ數値ヲ計算シテ

$$\overline{AP}^2=\overline{AB}\,.\,\overline{PB},\quad \overline{AP'}^2=\overline{AB}\,.\,\overline{P'B}$$

ヲ驗セ)。

問題

1. 斜邊ハ與ヘラレタル線分ニ等シク,他ノ一ツノ邊ハ斜邊ト第三邊トノ比例中項ナル直角三角形ヲ作ルコト。

2. 線分 AB ガ P 及ビ P′ ニ於テ中末比ニ內分及ビ外分セラルルトキハ, PB ハ A ニ於テ中末比ニ外分セラレ, P′B ハ A ニ於テ中末比ニ內分セラル(上圖參照)。

又 AP ヲ中末比ニ內分スルトキハ,中項ハ PB ニ等シク,又外分スルトキハ中項ハ AB ニ等シ。

又 AP′ ヲ中末比ニ內分又ハ外分スルトキハ,中項ハ AB 又ハ P′B ニ等シ。

課題　第九

1. 三角形 ABC ノ中線 BE, CF ノ交點ヲ G トスルトキハ △GBC, △GEF ハ相似ニシテ,相似ノ比ハ 2:1 ニ等シ。(是ニヨリテ三ツノ中線ガ同一ノ點ヲ通ルコトヲ證明セヨ)。

2. 三角形 ABC ノ垂心ヲ H,外接圓ノ中心ヲ O 頂點 A, B, C ニ對スル邊ノ中點ヲ A′, B′, C′ トスルトキハ, △HAB, △OA′B′ ハ相似ニシテ,相似ノ比ハ 2:1 ニ等シ。從テ重心 G ハ OH ノ上ニアリテ OG ハ OH ノ三分ノ一ニ等シ。

又 OH ノ中點ヲ中心トシ,外接圓ノ半徑ノ半分ニ等シキ半徑ヲ以テ作レル圓ハ三ツノ邊ノ中點,三ツノ垂線ノ足及ビ HA, HB, HC ノ中點ヲ通ル。(此圓ヲ三角形 ABC ノ**九點圓**トイフ)。

3. A,B ハ定點ニシテ A ヲ通ル任意ノ割線ガ

定圓ニ交ハル點ヲ M, N トスルトキハ,三角形 BMN ノ外接圓ハ B ノ外ナホ一ツノ定點ヲ通ル。

4. 二ツノ定圓ヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

5. 圓ノ直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ガ任意ノ切線ト交ハル點ヲソレゾレ P, Q トスルトキハ, AP, BQ ノ比例中項ハ半徑ニ等シ。

又逆ニ A, B ニ於ケル切線ガ直徑ノ同ジ側ニ於テ一ツノ割線ト P, Q ニ於テ交ハリ, AP, BQ ノ比例中項ガ半徑ニ等シキトキハ, PQ ハ圓ニ切ス。

6. 三角形ノ三ツノ頂點ヘノ距離ガ與ヘラレタル三ツノ線分ニ比例スル點ヲ求ムルコト。

カヤウノ點ガ二ツアルトキハ,此等ノ點ハ,三角形ノ外接圓ノ一ツノ直徑ヲ相等シキ比ニ內分及ビ外分ス。

7. 二ツノ圓ノ內側又ハ外側共通切線ノ交點ハ,二ツノ圓ノ中心ヲ兩端トセル線分ヲ半徑ノ比ニ內分又ハ外分スル點(二ツノ圓ノ相似ノ中心)ナリ。

8. A ハ定點ニシテ P ハ定直線又ハ定圓ノ上

ヲ動クトキ,線分 AP ヲ與ヘラレタル比ニ内分(又ハ外分)スル點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

9. O ヲ二ツノ圓ノ相似ノ中心,A, A′ ヲ O ヲ通ル共通切線ノ切點, P, Q; P′, Q′ ヲ O ヲ通ル任意ノ割線ガソレゾレ二ツノ圓周ニ交ハル點トスルトキハ,四ツノ直線 AP, AQ; A′P′, A′Q′ ハ二ツヅツ互ニ平行ナリ。又 AP ハ A′P′ ニ, AQ ハ A′Q′ ニ平行ナリトスルトキハ,矩形 $\overline{\mathrm{OP}}.\overline{\mathrm{OQ}'}$, $\overline{\mathrm{OP}'}.\overline{\mathrm{OQ}}$ ハ相等シク且割線ノ位置ニ關係ナキ一定ノ大サヲ有ス。

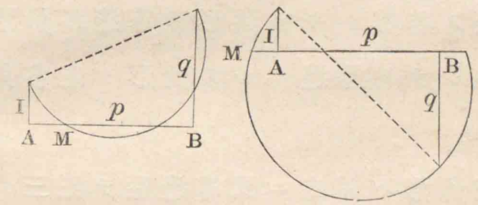
10. 定マレル三角形ト相似ナル三角形ノ一ツノ頂點ハ固定シ,第二ノ頂點ハ一ツノ定マレル直線(又ハ圓周)ノ上ヲ動クトキ,第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

11. 圓ニ内接スル四角形 ABCD ノ對角線 BD ノ上ニ點 E ヲ取リ ∠BAE ヲ ∠CAD ニ等シカラシムルトキハ, △ABE, △AED ハソレゾレ △ACD, △ABC ト相似ナリ。(是ニヨリテ次ノ**ぷとれみーノ定理**ヲ證明スルコトヲ得)。

圓ニ内接スル四角形ニ於テ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ對角線ノ包ム矩形ニ等シ。

12. 二次方程式 $x^2-px+q=0$ ノ「根ノ作圖」ハ次ノヤウニスルコトヲ得。

AB ヲ數値ガ p ノ絕對値ニ等シキ線分トシ,



其兩端ニ於テ之ニ垂直ニ數値ガ 1 及 q ノ絕對値ニ等シキ線分ヲ, q ガ正ナラバ AB ノ同ジ側ニ,又 q ガ負ナラバ反對ノ側ニ作リ,此等ノ線分ノ他ノ端ヲ結ビ付クル直線ヲ直徑トシテ作レル圓ガ AB 又ハ其延長ト交ハル一ツノ點ヲ M トスルトキハ, AM, BM ノ數値ハ根ノ絕對値ニ等シ。

第四章　正多角形

88. 正多角形。

スベテノ角ノ相等シキ多角形ヲ等角多角形,スベテノ邊ノ相等シキ多角形ヲ等邊多角形トイフ。

等角ニシテ且等邊ナル多角形ヲ**正多角形**トイフ。

等角三角形ハ同時ニ又等邊,従テ正三角形ナリ。又等邊三角形ハ同時ニ等角,従テ正三角形ナリ。サレド邊ノ數ガ三ツヨリ多キトキハ,等角多角形ハ必ズシモ等邊ナラズ,等邊多角形ハ必ズシモ等角ナラズ。(等角四角形,等邊四角形,正四角形ノ別名ハ何ゾ)。

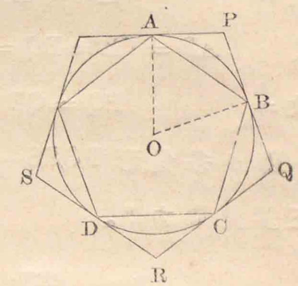
正 n 角形ノ内角ハ各,$\frac{2(n-2)}{n}$ 直角ニ等シ,即チ二直角ヨリ少キコト $\frac{4}{n}$ 直角ナリ(定理十九)。

邊數ノ同ジキ二ツノ正多角形ハ相似ナリ。

定理五十八。 圓周ヲ n 等分スル點ヲ順次ニ結ビ付クルトキハ,圓ニ内接セル正 n 角形ヲ得。又此等ノ分點ニ

於ケル切線ハ圓ニ外切セル正 n 角形ヲ作ル。

證。 圓周 O ガ A, B, C, D,………ニ於テ n 等分セラレタリトセヨ。



然ラバ多角形 ABCD……ノ内角ハイヅレモ圓周ノ n 分ノ $n-2$ ニ等シキ弧ノ上ニ立テル圓周角ナルガ故ニ,相等シ。

又此多角形ノ邊 AB, BC,……ハイヅレモ圓周ノ n 分ノ一ニ等シキ弧ヲ張ル弦ナルガ故ニ相等シ。

故ニ多角形 ABCD……ハ等角ニシテ等邊,即チ正多角形ナリ。

次ニ A ニ於ケル切線ト B ニ於ケル切線トノ交點ヲ P, B ニ於ケル切線ト C ニ於ケル切線トノ交點ヲ Q,……トセヨ。

然ラバ ∠PAB, ∠PBA ; ∠QBC, ∠QCB ; ∠RCD, ∠RDC ;………ハイヅレモ圓周ノ n 分ノ一ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ(定理三十六)キガ故ニ相等シ。

又AB, BC, CD,……モ相等シキガ故ニ二等邊三角形

PAB, QBC, RCD, ……

ハ全ク相等シ。

故ニ　$\angle P = \angle Q = \angle R = \cdots\cdots$

又　$AP = PB = BQ = QC = CR = RD = \cdots\cdots$

故ニ　$PQ = QR = RS = \cdots\cdots$

即チ多角形PQRS………ハ等角ニシテ等邊,即チ正多角形ナリ。

問題

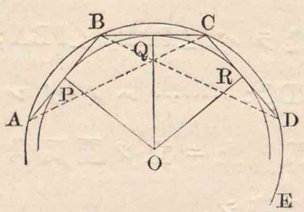
1. 圓ニ内接セル等邊多角形ハ正多角形ナリ。

2. 圓ニ外切セル等角多角形ハ正多角形ナリ。内接セル等角多角形,外切セル等邊多角形ハ如何。

89. 正多角形ト圓。

定理五十九。 正多角形ニ圓ヲ内切セシメ,又外接セシムルコトヲ得。

ABCDE……ヲ正多角形トセヨ。然ラバA, B, C, D, E, ……ハ同一ノ圓周上ニアルベク,又AB,



BC, CD, DE, ………ハ同一ノ圓ニ切スベシ。

證。 AC, BD ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ二等邊三角形BAC, CDBハ全ク相等シク,

$$\angle BAC = \angle CDB$$

故ニA, B, C, Dハ同一ノ圓周ノ上ニアリ。

即チ正多角形ノ三ツノ相隣レル頂點ヲ通ル圓ハ尚其次ノ頂點ヲモ通ル。故ニA, B, Cヲ通ル圓ハDヲ通リ,從テB, C, Dヲ通ルガ故ニ,其次ノ頂點Eヲモ通ル。次第ニカヤウニシテ此圓ハスベテノ頂點ヲ通ル。即チ正多角形ノ外接圓ナリ。

此圓ノ中心ヲOトセヨ。

然ラバAB, BC, CD,……ハ此圓ノ相等シキ弦ナルガ故ニ,Oヨリ此等ノ邊ヘ下セル垂線OP, OQ, OR, ……モ亦相等シ(定理二十九)。

故ニOヲ中心,OPヲ半徑トシテ作レル圓ハP, Q, R, ……ニ於テAB, BC, CD, ………ニ切ス。即チ正多角形ABCD……ニ内切ス。

系。 二ツノ正n角形ノ相似ノ比ハ其内切(又ハ外接)圓ノ半徑ノ比ニ等シ。

問題

1. 邊數ガ偶數ナル正多角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ビ付クルトキハ,邊數ガ半分ナル正多角形ヲ得。

2. 邊數ガ奇數ナル正多角形ノ外接圓ニ於テ,各頂點ヲ通ル直徑ノ端ハ,邊數二倍ノ內接正多角形ノ頂點ナリ。

3. 邊數ノ定マレル正多角形ノ周圍ノ長サハ其內切圓(又ハ外接圓)ノ半徑ニ比例ス。

4. 正多角形ノ面積ハ其周圍ニ等シキ底邊及ビ內切圓ノ半徑ニ等シキ高サヲ有スル三角形ノ面積ニ等シ。

90. 正方形。正六角形。

作圖題二十四。 圓ニ內接セル正方形ヲ作ルコト。

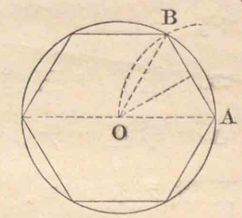
作圖。 互ニ垂直ナル二ツノ直徑 AC, BD ヲ引ケ。其端 A, B, C, D ハ內接正方形ノ頂點ナリ。

系。 直徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,內接正方形ノ周圍ノ數値ハ $2\sqrt{2}$,外切正方形ノ周圍ノ長サ

ハ 4 ナリ。

作圖題二十五。 圓ニ內接セル正六角形ヲ作ルコト。

作圖。 圓周 O ノ上ノ任意ノ點 A ヲ中心トシ,AO ヲ半徑トシテ圓ヲ作リ,圓周 O ト B ニ於テ交ハラシメヨ。然ラバ AB ハ內接正六角形ノ一邊ナルベシ。



證。 作圖ニヨリテ AOB ハ正三角形ナリ。故ニ ∠AOB ハ二直角ノ三分ノ一,即チ四直角ノ六分ノ一ニ等シ。故ニ中心角 AOB ニ對スル弧 AB ハ圓周ノ六分ノ一,從テ弦 AB ハ內接正六角形ノ一邊ナリ。

系。 直徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,內接正六角形ノ周圍ノ數値ハ 3,又外切正六角形ノ周圍ノ數値ハ $2\sqrt{3}$ ナリ。

證。 內接正六角形ト外切正六角形トノ周圍ノ比ハ O ヨリ AB ヘ下セル垂線ト OA トノ比ニ等シク,此比ノ値ハ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ニ等シ。故ニ外切正六角形

ノ周圍ノ長サハ $3\div\frac{\sqrt{3}}{2}$,卽チ $2\sqrt{3}$ ニ等シ。

問題

1. 圓ニ內接及ビ外切スル正八角形,正十六角形ヲ作ルコト。

2. 圓ニ內接及ビ外切スル正十二角形ヲ作ルコト。

3. 直角ヲ三等分スルコト。

4. 半徑 r ナル圓ニ內接及ビ外切スル正方形ノ面積ヲ求メヨ。

5. 半徑 r ナル圓ニ內接及ビ外切スル正六角形ノ面積ヲ求メヨ。

6. 一邊ノ長サガ a ナル正三角形及ビ正六角形ノ面積ハソレゾレ次ノ如シ。

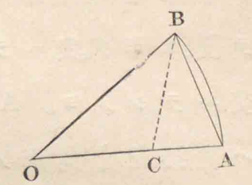
$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

91. 正五角形及正十角形。

作圖題二十六。 圓ニ內接スル正五角形及ビ正十角形ヲ作ルコト。

O ヲ與ヘラレタル圓ノ中心,OA ヲ半徑トセヨ。

假ニ內接正十角形ノ一邊 AB ヲ得タリトセヨ。



然ラバ ∠O ハ四直角ノ十分ノ一,卽チ二直角ノ五分ノ一ニ等シキガ故ニ,二等邊三角形 OAB ノ底角ハイヅレモ二直角ノ五分ノ二ニ等シ。∠OBA ヲ二等分スル直線 BC ヲ引キテ OA ト C ニ於テ交ハラシメヨ。然ラバ ∠CBO＝∠O, 又 ∠BCA＝2∠O＝∠A 故ニ OC＝CB＝AB

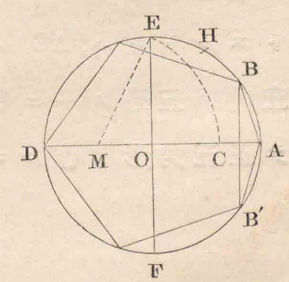
サテ BC ハ ∠OBA ノ二等分線ナルガ故ニ

$$OC:CA = OB:BA \quad (\text{定理四十八})$$
$$= OA:OC$$

故ニ
$$\overline{OC}^2=\overline{OA}.\overline{CA}$$

卽チ OC,從テ又 AB ハ OA ヲ中末比ニ內分シテ求メラルベキ中項ナリ(作圖題二十三)。

ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。



作圖。二ツノ互ニ垂直ナル直徑 AD, EF ヲ引ケ。OD ノ中點 M ヲ中心トシ, ME ヲ半徑トシテ圓ヲ作リ, C ニ於テ MA ト交ハラシメヨ。(然ラバ C ハ OA

ヲ中末比ニ內分スベシ)。Aヲ中心,COヲ半徑トシテ圓ヲ作リ,與ヘラレタル圓周トB及ビB′ニ於テ交ハラシメヨ。AB,BB′ヲ結ヒ付ケヨ。然ラバABハ內接正十角形ノ一邊,BB′ハ內接正五角形ノ一邊ナルベシ。

系。半徑rナル圓ニ內接セル正十角形ノ一邊ノ長サハ$\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ナリ。

注意。上ノ圖ニ於テAヲ中心AOヲ半徑トシテ圓ヲ作リ,半圓周ABDトHニ於テ交ハラシムルトキハ,BHハ內接正十五角形ノ一邊ナリ。(弧AHハ圓周ノ$\frac{1}{6}$,弧ABハ圓周ノ$\frac{1}{10}$ニ等シキガ故ニ弧BHハ圓周ノ$\frac{1}{15}$ニ等シ)。

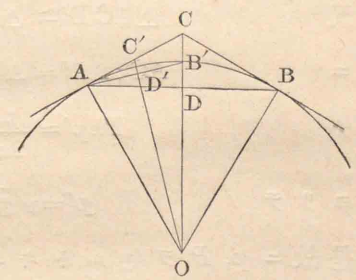
問題

正五角形ABCDEノ對角線AC,BDノ交點ヲGトスルトキハ,AGハ邊ABニ等シク,∠BACハ二直角ノ五分ノ一ニ等シ。(是ニヨリテ一邊ヲ知リテ正五角形ヲ作ルコトヲ得)。

92. 正多角形ノ周圍ヲ計算スルコト。

圓ニ內接及ビ外切セル正n角形ノ周圍ノ長サp, Pヲ知リテ,同ジ圓ニ內接及ビ外切セル正$2n$角形ノ周圍ノ長サp', P'ヲ求ムルコト。

Oヲ圓ノ中心,ABヲ內接正n角形ノ一邊トセヨ。A,Bニ於テ切線AC,BCヲ引キ其交點ヲCトセヨ。然ラバACハ外切正n角形ノ一邊ノ半分ニ等シ。



直線OCハB′ニ於テ弧ABヲ二等分シ,Dニ於テ弦ABヲ垂直ニ二等分ス。故ニAB′ハ內接正$2n$角形ノ一邊ナリ。又∠AOB′ノ二等分線ガACニ交ハル點ヲC′,AB′ニ交ハル點ヲD′トセヨ。然ラバAC′ハ外切正$2n$角形ノ一邊ノ半分ニ等シク,D′ハAB′ノ中點ナリ。

サテOC′ハ△AOCノ角Oノ二等分線ナルガ故ニ

$$AC':C'C = OA:OC \quad \text{(定理四十八)}$$

然ルニ $\triangle OAC \backsimeq \triangle ADC$

故ニ $OA:OC = AD:AC$

$$= p:P$$

故ニ $AC':C'C = p:P$

$$AC':AC = p:p+P$$

即チ $\dfrac{P'}{4n}:\dfrac{P}{2n} = p:p+P$

ヨリテ $$P' = \frac{2pP}{p+P} \qquad (1)$$

又 $\triangle AC'D' \backsimeq \triangle AB'D$

故ニ $AC':AD' = AB':AD$

即チ $P':p' = \dfrac{p'}{2n}:\dfrac{p}{2n}$

ヨリテ $$p' = \sqrt{pP'} \qquad (2)$$

是故ニ p, P ヲ知ルトキハ,先ヅ(1)ニヨリテ P' ヲ求メ次ニ(2)ニヨリテ p' ヲ求ムルコトヲ得。

注意一。 (1),(2)ハ又次ノ如クニ書キ改ムルコトヲ得。

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P'}}$$

即チ P' ノ逆數ハ P 及ビ p ノ逆數ノ相和平均數

ニ等シク,p' ノ逆數ハ p, P' ノ逆數ノ相乘平均數ニ等シ。故ニ今邊數 n ナル外切正 n 角形ノ周圍ノ長サノ逆數 A 及ビ內接正 n 角形ノ周圍ノ長サノ逆數 a ヨリ始メ,先ヅ A, a ノ相和平均數 A' ヲ求メ,次ニ a, A' ノ相乘平均數 a' ヲ求メ,更ニ A', a' ノ相和平均數 A''; a', A'' ノ相乘平均數 a'' ヲ求メ,次第ニカヤウニシテ逐次求メタル數ト其前ニ求メタル數トヨリ交代ニ相和及相乘平均數ヲ作リ行クトキハ

$$A,\ A',\ A'',\ A''' \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a,\ a',\ a'',\ a''' \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ邊數ガ n, $2n$, $4n$, $8n$, ……… ナル外切及ビ內接正多角形ノ周圍ノ長サノ逆數ナリ。

注意二。 上ノ圖ヨリ次ノ比例式ヲ得。

$$p:P = AD:AC = OD:OA$$

今圓ノ半徑ヲ r, 內接正 n 角形ノ一邊ヲ c トスルトキハ

$$AD = \frac{c}{2}, \quad OD = \sqrt{r^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$p:P = \frac{\sqrt{r^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}}{r} = \sqrt{1-\left(\frac{c}{2r}\right)^2}$$

故ニ邊ノ數nヲ限リナク大キクナシ行クトキハ,cハ限リナク小クナリ行キ,從テp,Pノ値ハ如何程ニテモ相近ヅクベシ。

問題

1. 上ノ圖ニツキテ$p'>p$, $P'<P$ナルコトヲ證明セヨ。

2. 半徑rナル圓ニ內接及ビ外切セル邊數ノ同ジ正多角形ノ一邊ヲソレゾレc, Cトスルトキハ

$$C=\frac{2cr}{\sqrt{4r^2-c^2}},\quad c=\frac{2Cr}{\sqrt{4r^2+C^2}}$$

3. 半徑rナル圓ニ內接セル正n角形及ビ正$2n$角形ノ一邊ヲソレゾレc, c'トスルトキハ

$$c'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-c^2})}$$

第五章 圓ニ關スル求積ノ問題

93. 圓周ノ長サ。圓周率。

圓ニ內接スル多角形ノ周圍ハ圓周ヨリハ短ク,圓ニ外切スル多角形ノ周圍ハ圓周ヨリハ長シ。サレド內接又ハ外切多角形ノ邊ノ數ヲ非常ニ多クシ且各邊ヲ非常ニ小クナストキハ多角形ノ周圍ハ甚シク圓周ニ接近スベシ。ヨリテ,カヤウナル多角形ノ周圍ノ長サヲ圓周ノ長サノ近似値ト見做スコトヲ得。

圓ニ內接又ハ外切セル任意ノ正多角形ノ周圍ノ長サヲ知ルトキハ,第92節ノ方法ニヨリテ順次邊數ガ二倍ナル內接又ハ外切正多角形ノ周圍ノ長サヲ算出シ行キテ如何程ニテモ精密ナル圓周ノ長サノ近似値ヲ求ムルコトヲ得。

今圓ノ直徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,內接正方形ノ周圍ノ數値ハ$2\sqrt{2}$,外切正方形ノ周圍ノ數値ハ4ナリ。是ヨリ次第ニ邊數ガ 8, 16, 32, ……

ナル內接及ビ外切正多角形ノ周圍 p, P ヲ計算シ行クトキハ次ノ結果ヲ得。

邊數	p	P
4	2.82843	4.00000
8	3.06147	3.31371
16	3.12145	3.18260
32	3.13655	3.15172
64	3.14033	3.14412
128	3.14128	3.14222
256	3.14151	3.14175
512	3.14157	3.14163
1024	3.14159	3.14160

又直徑1ナル圓ニ內接及ビ外切セル正六角形ノ周圍ノ數値3及ビ$2\sqrt{3}$ヨリ始メテ,同樣ノ計算ヲナストキハ次ノ結果ヲ得。

邊數	p	P
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187
384	3.14156	3.14166
768	3.14158	3.14161
1536	3.14159	3.14160

即チ圓周ハ直徑ノ3.14159倍ヨリハ大キク,3.14160倍ヨリハ小ナリ。

故ニ圓周ト直徑トノ比ノ近似値トシテ3.1416ヲ用フルトキハ,誤差ハ小數第五位ノ1ニ達セズ。

定理六十。 圓周ト直徑トノ比ハ一定ノ値ヲ有ス。此値ハ約3.1416ニ等シ。

此比ヲ**圓周率**トイヒ,其値ヲ表ハスニぎりしや文字π(ぱいト訓ム)ヲ用フ。3.1416ハπノ近似値ナリ。

系一。 半徑ノ長サガrナル圓周ノ長サハ$2\pi r$ナリ。

系二。 圓周ハ半徑ニ比例ス。

注意一。 πノ値ヲ小數第十位マデ示サバ,次ノ如シ。

$$\pi = 3.1415926535\cdots\cdots$$

πノ近似値トシテ$\frac{22}{7}, \frac{355}{113}$等ヲ用フルコトヲ得。此等ハイヅレモ$\pi$ノ眞ノ値ヨリハ大ナリ。$\frac{22}{7}$ノ誤差ハ此數ノ約$\frac{4}{10000}$ニシテ,$\frac{355}{113}$ハ小數

第六位マデ眞ノ値ト合フ。

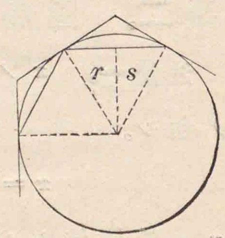
注意二。 第92節ニ言ヘルガ如クニシテ

$$A,\ a,\ A',\ a',\ A'',\ a'',\ \cdots\cdots$$

ナル數ヲ計算シ行クトキハ,此等ノ數ハ限リナク $\frac{1}{\pi}$ ニ近ヅキ行クベシ。

94. 圓ノ面積。

圓ノ面積ハ內接多角形ノ面積ヨリハ大キク,外切多角形ノ面積ヨリハ小ナリ。サレド,此等ノ多角形ノ邊ノ數ヲ限リナク增シ且各邊ヲ限リナク小クナシ行クトキハ,其面積ハ次第ニ圓ノ面積ニ近ヅキ行クベシ。



圓ノ半徑ヲ r,內接正多角形ノ周圍ノ長サヲ p,圓ノ中心ヨリ其一邊ヘ下セル垂線ノ長サヲ s トスルトキハ,內接正多角形ノ面積ノ數値ハ $\frac{ps}{2}$ ニ等シク,邊數ヲ限リナク增シ行クトキハ內接正多角形ノ周圍 p ハ限リナク圓周ノ長サ $2\pi r$ ニ近ヅキ,又 s ハ限リナク圓ノ半徑 r ニ近ヅクガ故ニ,內接正多

角形ノ面積ハ限リナク πr^2 ニ近ヅクベシ。又外切正多角形ノ周圍ノ長サヲ P トスルトキハ,其面積ハ $\frac{Pr}{2}$ ニシテ邊ノ數ヲ限リナク增シ行クトキハ,P ハ限リナク $2\pi r$ ニ近ヅクガ故ニ外切正多角形ノ面積ハ限リナク πr^2 ニ近ヅクベシ。

故ニ圓ノ面積ノ數値ハ πr^2 ナルコトヲ知ルベシ。

定理六十一。 圓ノ面積ハ其周ト同ジ長サノ底邊及ビ半徑ニ等シキ高サヲ有スル三角形ノ面積ニ等シ。

系一。 半徑ノ長サガ r ナル圓ノ面積ハ πr^2 ナリ。

系二。 圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ比例ス。

問題

1. 圓ノ面積ヲ同ジ中心ヲ有スル圓周ニテ二等分スルコト。

2. 二ツノ與ヘラレタル圓ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ作ルコト。

3. 二ツノ同心圓ノ周ニテ圍マレタル輪狀ノ

圖形ノ面積ハ小ナル圓ニ切スル大ナル圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シ。

95. 中心角,弧,及ビ扇形。

定理六十二。 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,弧ハ之ニ對スル中心角ニ比例ス。

證。 同ジ圓ニ於テ相等シキ中心角ニ對スル弧ハ相等シ。故ニ中心角ガ2倍,3倍,……ニナルトキハ之ニ對スル弧モ亦2倍,3倍,……トナル。

故ニ弧ハ中心角ニ比例ス。(算代,第**140**節)

定義。 弧ノ上ニ立ツ中心角ノ大サヲ此弧ノ弧度トイフ。

例ヘバ60°ノ弧トハ,其上ニ立ツ中心角ガ60°ノ角ナルコトヲ指ス,卽チ此弧ハ全圓周ノ六分ノ一ニ等シ。(弧度ハ弧ノ長サニアラズ)。

定義。 圓ノ二ツノ半徑及ビ其間ニ夾マレタル弧ニテ圍マレタル圖形ヲ**扇形**トイヒ,此弧ヲ扇形ノ弧,之ニ對スル中心角ヲ扇形ノ角,圓ノ半徑ヲ扇形ノ半徑トイフ。

系一。 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,扇形ノ面積ハ其角ニ比例ス。

中心角ガ漸次增大スルトキハ,弧及ビ扇形ノ面積モ亦漸次增大シ,竟ニ中心角ガ四直角トナルトキ,弧ハ全圓周トナリ,扇形ハ全圓トナル。

故ニ弧ノ全圓周ニ對スル比ハ之ニ對スル中心角ノ四直角ニ對スル比ニ等シ。扇形ノ面積ノ圓ノ面積ニ對スル比モ亦同ジ。

半徑ノ長サガr,中心角ガa度ナルトキハ,

弧ノ長サハ　$2\pi r \times \frac{a}{360}$　卽チ　$\frac{\pi a r}{180}$

扇形ノ面積ハ　$\pi r^2 \times \frac{a}{360}$　卽チ　$\frac{\pi a r^2}{360}$

ナリ。

系二。 扇形ノ面積ハ其弧ニ等シキ底及ビ半徑ニ等シキ高サヲ有スル三角形ノ面積ニ等シ。

問題

圓Oノ半徑OAヲ直徑トスル圓ヲ作リ,圓Oノ任意ノ半徑OBガコノ圓周ニ交ハル點ヲCトスルトキハ弧AB, ACハ等長ナリ。

課題　第十

1. 直徑 106 糎ナル圓ノ周圍幾糎ナルカ。

2. 周圍4.2尺ナル圓ノ面積幾平方寸ナルカ。

3. 面積 S 平方尺ナル圓ノ周ノ長サハ $2\sqrt{\pi S}$ 尺ナルコトヲ證明セヨ。

4. 半徑1.5糎,頂角22°30′ナル扇形ノ弧ノ長サ及ビ面積幾許ナルカ。

5. 半徑2尺ノ圓ニ於テ,長3尺ノ弧ノ弧度幾許ナルカ。

6. 半徑ト等長ナル弧ノ弧度ヲ秒ノ位マデ計算セヨ。

7. 1°ノ弧ノ長サガ1尺ナル圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

8. 直角三角形ノ外接圓ト直角ヲ夾メル二邊ヲ直徑トシテ三角形ノ外部ニ二ツノ半圓トヲ作ルトキニ生ズル,二ツノ新月形ノ面積ノ和ハ直角三角形ノ面積ニ等シ。

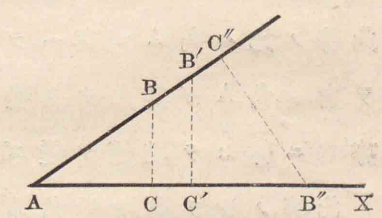
第四編

三角函數

第一章　鋭角ノ三角函數

96. 三角函數ノ定義。

鋭角AガAヘラレタルトキ,其一ツノ邊ノ上ニ任意ニ點BヲA取リ,BヨリA他ノ邊ヘ垂線BCヲ下シ,其足ヲCトセヨ。



然ラバ點Bヲ∠Aノ一邊ノ上ニ於テ何處ニ取ルトモ,又ハBヲ他ノ一邊ノ上ニ取ルトモ,三ツノ長サ AB, BC, AC ノ比ハ一定ノ値ヲ有ス。例ヘバBヲ邊AYノ上ニ取リ,又邊AYノ上ノ點B'ヨリ他ノ邊ヘ下セル垂線ヲ$B'C'$トシ,又邊AXノ上ノ點B''ヨリ他ノ邊ヘ下セル垂線ヲ$B''C''$トスルトキハ

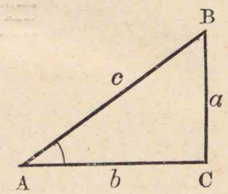
$\triangle ABC \simeq \triangle AB'C' \simeq \triangle AB''C''$ （定理五十）

故ニ　$AB : BC = AB' : B'C' = AB'' : B''C''$

$AB : AC = AB' : AC' = AB'' : AC''$

今直角三角形ABCニ於テ邊

BC,　AC,　AB



ノ長サヲ

$a,\quad b,\quad c$

トスルトキハ,此等ノ數ヲ二ツヅツ取リテ次ノ六ツノ比ヲ作ルコトヲ得。

$a:c,\ \ b:c,\ \ a:b,\ \ b:a,\ \ c:b,\ \ c:a$

此等ノ比ハ角Aガ與ヘラレタルトキハ一定ノ値ヲ有シ,角Aガ其大サヲ變ズルトキハ,此等ノ比モ亦之ニ伴ヒテ其値ヲ變ズ。

此等ノ比ヲ順次鋭角Aノ

正弦, 餘弦, 正切, 餘切, 正割, 餘割

トイヒ,之ヲ書キ表ハスニ記號

$\sin A,\quad \cos A,\quad \tan A,\quad \cot A,\quad \sec A,\quad \operatorname{cosec} A$

ヲ用フ。*

* 正弦 (sine) 餘弦 (cosine) 正切 (tangent) 餘切 (cotangent) 正割 (secant) 餘割 (cosecant) ノ記號ハ其原語ヲ略シ記スナリ。 tan A ヲ又 tg A トモ書キ, cot A ヲ又 cotg A トモ書ク。

即チ

$$\sin A = \frac{a}{c},\quad \cos A = \frac{b}{c},\quad \tan A = \frac{a}{b},$$

$$\cot A = \frac{b}{a},\quad \sec A = \frac{c}{b},\quad \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$$

上ノ六ツノ比ヲ角Aノ**三角函數**トイフ。

∠Aヲ直角三角形ABCノ一ツノ底角ト見做シ,假ニACヲ底邊, BCヲ垂線 (ABヲ斜邊) ト呼ブトキハ

正弦ハ $\dfrac{垂線}{斜邊}$

餘弦ハ $\dfrac{底邊}{斜邊}$

正切ハ $\dfrac{垂線}{底邊}$

ニシテ他ノ三ツハ,此等ノ逆數,即チ餘割ハ正弦ノ,正割ハ餘弦ノ,餘切ハ正切ノ逆數ナリ。

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A},\quad \sec A = \frac{1}{\cos A},\quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

三角函數ノ中,最モ多ク用ヒラルルモノハ正弦,餘弦,正切ニシテ餘切ハ稍,稀ニ,正割,餘割ハ一層稀ニ用ヒラル。

問題

1. 上ノ圖ニ於テ $a=3,\ b=4$ ナルトキ角Aノ

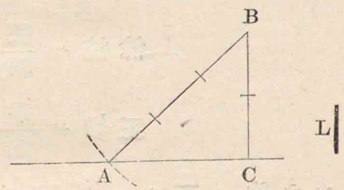
三角函數ノ値如何。

2. 上ノ圖ニ於テ角Bノ三角函數ハ如何。

97. 三角函數ヲ與ヘテ角ヲ作ルコト。

或角ノ三角函數ノ中,一ツヲ知ルトキハ,此角ヲ作ルコトヲ得。

例一。 正弦ガ$\frac{2}{3}$ナル角ヲ作ルコト。



直線ACノ上ノ任意ノ點Cニ於テ之ニ垂直ニ任意ノ線分Lノ二倍ニ等シクCBヲ取リ,Bヲ中心トシ,Lノ三倍ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ,直線ACトAニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバBACハ卽チ求ムル角ナルベシ。

證 作圖ニヨリ

$$BC : AB = \frac{2}{3}$$

故ニ

$$\sin A = \frac{2}{3}$$

例二。 正切ガ2.5ニ等シキ角ヲ作ルコト。

ACヲ任意ノ長サLノ10倍ニ等シク取リ,Cニ於テ之ニ垂直ニCBヲLノ25倍ニ等シク取レ。

然ラバBACハ卽チ求ムル角ナルベシ。

證。 $\tan A = BC : AC$

$$= 25 : 10 = 2.5$$

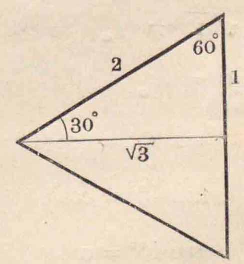
問　題

1. 餘弦ガ$\frac{1}{2}$ニ等シキ角ヲ作ルコト。

2. 斜邊ガ與ヘラレタルトキ,一ツノ鋭角ノ正弦ガ$\frac{2}{3}$ナル直角三角形ヲ作ルコト。

3. 斜邊ガ與ヘラレタルトキ,一ツノ鋭角ノ正切ガ2ニ等シキ直角三角形ヲ作ルコト。

98. 30°, 60°, 45°ノ角ノ三角函數。



正三角形ノ角ハ60°ナルガ故ニ,其一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ垂線ヲ下ストキハ,二ツノ鋭角ガ30°及ビ60°ノ角ナル直角三角形ヲ得。此

直角三角形ニ於テ30°ノ角ニ對スル邊ハ斜邊ノ半分ニ等シ。今此邊ヲ長サノ單位トスルトキハ,斜邊ノ數値ハ2,他ノ一邊ノ數値ハ$\sqrt{3}$ナリ。

ヨリテ次ノ結果ヲ得。

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$$

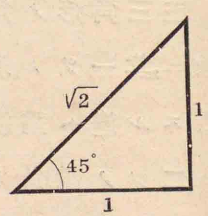
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\cot 30° = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{3} \qquad \sec 60° = 2$$

$$\operatorname{cosec} 30° = 2 \qquad \operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{3}$$

又二等邊直角三角形ノ底角ハ45°ノ角ニシテ,相等シキ邊ヲ長サノ單位トスルトキハ斜邊ノ數値ハ$\sqrt{2}$ナリ。ヨリテ次ノ結果ヲ得。



$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \cot 45° = 1$$

$$\sec 45° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$$

99. 一ツノ三角函數ヲ知リテ他ノ三角函數ヲ求ムルコト。

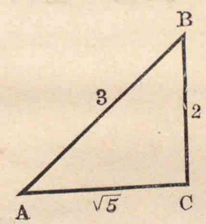
或角ノ三角函數ノ中,一ツヲ知ルトキハ,他ノ五ツヲ計算スルコトヲ得。

例ヘバ　$\sin A = \frac{2}{3}$

トセヨ。

今第96節ト同ジ記號ヲ用フルトキハ

$\sin A = BC : AB = 2 : 3$



ナルガ故ニ BC ノ$\frac{1}{2}$(即チ AB ノ$\frac{1}{3}$)ヲ長サノ單位トスルトキハ AB, BC, AC ノ數値ハソレゾレ 3, 2, $\sqrt{5}$ナリ。

故ニ　$\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$,　$\tan A = \frac{2}{\sqrt{5}}$,　$\cot A = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$\sec A = \frac{3}{\sqrt{5}}$,　$\operatorname{cosec} A = \frac{3}{2}$

問題

1. 或角ノ餘弦ガ$\frac{3}{5}$ナルトキハ,他ノ三角函數ノ値如何。

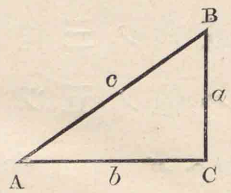
2. $\tan A = \frac{m}{n}$ナルトキ, $\sin A$, $\cos A$ヲ求メヨ

100. 三角函數ノ關係。

第96節ノ記號ヲ用フルトキハ,

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{b}{c}\div\frac{a}{c}$$



ヨリ次ノ公式ヲ得。

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A} \qquad (1)$$

又次ノ公式ハ既ニ第96節ニ揭ゲタルモノナリ。

$$\left.\begin{aligned}\cot A&=\frac{1}{\tan A}\\ \sec A&=\frac{1}{\cos A}\\ \operatorname{cosec} A&=\frac{1}{\sin A}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

此等ノ公式ハ,イヅレモ三角函數ノ定義ヨリ直ニ得ラルルモノナリ。今更ニぴたごらすノ定理ヲ用フルトキハ,次ノ公式ヲ得。

卽チ　　$a^2+b^2=c^2$

ヨリ

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2+1=\left(\frac{c}{b}\right)^2,\quad 1+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

ヲ得。ヨリテ

$$\left.\begin{aligned}(\sin A)^2+(\cos A)^2&=1\\ (\tan A)^2+1=(\sec A)^2&=\frac{1}{(\cos A)^2}\\ (\cot A)^2+1=(\operatorname{cosec} A)^2&=\frac{1}{(\sin A)^2}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

此等ノ公式ヲ用ヒ,或角ノ三角函數ノ中,一ツヲ知ルトキ,他ノ五ツヲ計算スルコトヲ得。

例ヘバ

$$\cos A=\sqrt{1-(\sin A)^2},\quad \tan A=\frac{\sin A}{\sqrt{1-(\sin A)^2}},\quad 等$$

$$\sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+(\tan A)^2}},\quad \cos A=\frac{1}{\sqrt{1+(\tan A)^2}},\quad 等$$

問題

1. $\cos A$ ヲ知リテ $\sin A$, $\tan A$ ヲ求ムル公式ヲ作レ。

2. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $\dfrac{\sin A}{\tan A}=\cos A$

(2) $\tan A+\cot A=\dfrac{1}{\sin A\cos A}$

(3) $(\cos A)^2-(\sin A)^2=2(\cos A)^2-1=1-2(\sin A)^2$

(4) $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=\dfrac{2}{(\cos A)^2}$

(5) $\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}=\dfrac{\tan A-1}{\tan A+1}$

101. 餘角ノ三角函數。

第96節ノ記號ヲ用フルトキハ∠Aハ∠Bノ餘角ニシテ

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A$$

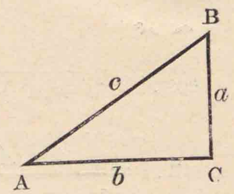
$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \cot A$$

$$\cot B = \frac{a}{b} = \tan A$$

$$\sec B = \frac{c}{a} = \operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{c}{b} = \sec A$$



即チ

或角ノ餘弦,餘切,餘割ハ其餘角ノ正弦,正切,正割ニ等シ。

コレ實ハ此等ノ三角函數ノ命名ノ基ヅク所ナリ。*

$$\cos A = \sin(90^\circ - A), \quad \sin A = \cos(90^\circ - A)$$

$$\cot A = \tan(90^\circ - A), \quad \tan A = \cot(90^\circ - A)$$

$$\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A), \quad \sec A = \operatorname{cosec}(90^\circ - A)$$

* 餘弦(co-sine)餘切(co-tangent)餘割(co-secant)ノ原語ハ餘角(complement)ノ sine, tangent, secant トイフ義ヲ表ハセリ。

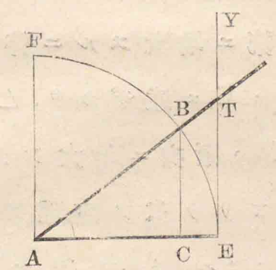
問題

1. 互ニ餘角ヲナス二ツノ角ノ正切ハ互ニ逆數ヲナス。

2. 互ニ餘角ヲナス二ツノ角ノ正弦ノ平方ノ和ハ1ニ等シ。

102. 三角函數ノ變動。

角BAEノ頂點Aヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ,B及ビEニ於テ二ツノ邊ト交ハラシメ,BヨリAEヘ垂線BCヲ下シ,又Eニ於テ切線EYヲ引キABノ延長トTニ於テ交ハラシメヨ。



然ラバ圓ノ半徑ヲ長サノ單位トスルトキハ

$$\sin A, \quad \cos A, \quad \tan A, \quad \sec A$$

ハ即チ　　BC,　AC,　ET,　AT

ノ長サノ數値ニ外ナラズ。

今邊AEヲ固定セルモノトシ,角Aガ漸次增大シ行キテ竟ニ直角EAFトナルト考フルトキハ,點

B ハ圓周ノ上ヲ點 F ノ方ヘ動キ行キ,之ニ伴ヒテ BC ハ漸次增大シ行キ,竟ニ半徑ニ等シクナルベシ。又角 A ガ漸次減少シ行キテ竟ニ邊 AB ガ邊 AE ニ合スルニ至ルトキハ, BC ハ漸次減少シ行キテ,竟ニ消失スベシ。

次ニ角 A ガ 0° ヨリ 90° マデ次第ニ增大スルトキ,點 C ハ邊 AE ノ上ニ於テ, E ヨリ A ニ向ヒテ動キ, ∠A ガ直角トナルトキ C ハ點 A ニ合ス。

又點 T ハ ∠A ガ 0° ナルトキハ E ニ合シ, ∠A ガ次第ニ增大スルニ伴ヒテ切線 EY ノ上ニ於テ,次第ニ E ニ遠ザカリ, ∠A ガ直角ニ近ヅクニ從ヒテ ET ハ漸次ニ增大シテ止ムコトナシ。

ヨリテ次ノ定理ヲ得。

或角 A ガ 0° ヨリ 90° マデ次第ニ增大スルトキハ,之ニ伴ヒテ

正弦 sin A ハ 0 ヨリ 1 マデ次第ニ增大シ,

餘弦 cos A ハ 1 ヨリ 0 マデ次第ニ減少シ,

正切 tan A ハ 0 ヨリ限リナク次第ニ增大ス。

$$\sin 0^\circ = 0 \qquad \sin 90^\circ = 1$$

$$\cos 0^\circ = 1 \qquad \cos 90^\circ = 0$$

$$\tan 0^\circ = 0 \qquad \tan 90^\circ = \infty^*$$

次ニ銳角ノ正弦及ビ正切ノ近似値ヲ「五度刻ミ」ノ表ニテ示スベシ。餘弦ハ餘角ノ正弦ニ等シキガ故ニ之ヲ揭クル必要ナシ。カヤウノ表ヲ(後ニ說ク三角函數ノ對數ノ表ニ對シテ)**眞數表**トイフ。

角	正　弦	正　切	角	正　弦	正　切
0°	0	0	50°	0.7660	1.1918
5°	0.0872	0.0875	55°	0.8192	1.4281
10°	0.1736	0.1763	60°	0.8660	1.7321
15°	0.2588	0.2679	65°	0.9063	2.1445
20°	0.3420	0.3640	70°	0.9397	2.7475
25°	0.4226	0.4663	75°	0.9659	3.7321
30°	0.5000	0.5774	80°	0.9848	5.6713
35°	0.5736	0.7002	85°	0.9962	11.4301
40°	0.6428	0.8391	90°	1.0000	∞
45°	0.7071	1.0000			

* ∞ ハ所謂「無限大」ノ記號ニシテ, tan 90° = ∞ ハ角ガ限リナク 90° ニ近ヅキ行クトキ其正切ガ限リナク大キクナルトイフコトヲ表ハヽ符牒ナリ。

問題

1. 上ノ圖ニ於テ圓ノ半徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,∠BAC ノ餘弦ハ B ヨリ AF ヘ下セル垂線ノ長サノ數値ニ等シク,又 F ニ於ケル切線ガ AB ノ延長ト交ハル點ヲ T′ トスルトキハ,∠BAC ノ餘切ハ FT′ ノ,又餘割ハ AT′ ノ長サノ數値ニ等シ。

2. 角 A ガ $0°$ ヨリ $90°$ マデ漸次增大スルトキ,其正割ハ如何ヤウニ變動スルカ。又餘切,餘割ハ如何。

3. 上ノ表ニヨリテ $\cos 25°$, $\cot 70°$ ヲ求メヨ。

4. 正切ガ 2 ニ等シキ角ハ如何程ノ大サナルカ(幾度ト幾度トノ間ニアルカ)。又餘弦ガ $\frac{3}{10}$ ナル角ハ如何。

5. 圓ノ半徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,一ツノ中心角ニ對スル弦ノ長サノ數値ハ此角ノ半分ノ正弦ノ二倍ニ等シ。(或角ノ半分ノ正弦ノ二倍ト此角ノ正弦トノ異同ヲ說明セヨ)。

又此弦ト中心トノ距離ノ數値ハ中心角ノ半分ノ餘弦ニ等シ。

6. 半徑 1 ナル圓ニ內接セル正 n 角形ノ周圍

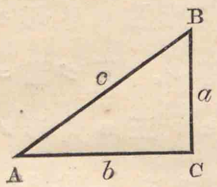
ハ $2n\sin\frac{180°}{n}$ ニシテ又此圓ニ外切セル正 n 角形ノ周圍ハ $2n\tan\frac{180°}{n}$ ニ等シ。同ジ圓ニ內接セル正 n 角形ノ周圍ト外切セル正 n 角形ノ周圍トノ比ノ値ハ $\cos\frac{180°}{n}$ ニ等シ。n ガ 6, 12, 18, 36 ナルトキ此比ノ値ヲ上ノ表ヨリ求メヨ。

第二章　直角三角形ノ解法

103. 直角三角形ノ解法。

直角三角形ノ二ツノ邊又ハ一ツノ邊ト一ツノ銳角トヲ知ルトキハ,此直角三角形ヲ作ルコトヲ得。故ニ他ノ邊又ハ角ノ大サハオノヅカラ定マル。三角函數ノ表ヲ用フルトキハ,二ツノ邊ノ長サ,又ハ一ツノ邊ノ長サト一ツノ銳角ノ度數トヲ知ルトキ,他ノ邊ノ長サ,又ハ角ノ度數ヲ計算スルコトヲ得。カヤウノ計算ヲ**直角三角形ヲ解ク**トイフ。

直角三角形 ABC ノ角及ビ邊ノ記號ハ第 **96** 節ノ通リトシテ,次ノ場合ヲ生ズ。



（一）斜邊 c 及ビ鋭角 A ガ知レタルトキ。

$$B=90^\circ-A,\quad a=c\sin A,\quad b=c\cos A$$

又ハ
$$a=c\cos B,\quad b=c\sin B$$

（二）直角ニ接スル一邊 a 及ビ鋭角 A ガ知レタルトキ

$$B=90^\circ-A,\quad c=\frac{a}{\sin A},\quad b=\frac{a}{\tan A}$$

又ハ
$$c=\frac{a}{\cos B},\quad b=a\tan B$$

（三）斜邊 c ト他ノ一ツノ邊 a トガ知レタルトキ

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad B=90^\circ-A$$

$$b=c\cos A=\frac{a}{\tan A}$$

又ハ
$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$$

（四）直角ヲ夾メル二ツノ邊 a, b ガ知レタルトキ

$$\tan A=\frac{a}{b},\quad B=90^\circ-A,\quad c=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos A}$$

斜邊 c ハ又 $\sqrt{a^2+b^2}$ トシテ求メ得ベシ。サレド此方法ハ對數計算ニ適セズ,又既ニ三角函數ノ表ヲ用フル上ハ,一ツノ鋭角ヲ求メタル後,斜邊ヲ計算スルガ便利ナリ。

實際ニ直角三角形ヲ解クニハ,對數ヲ用ヒテ計算スルナリ。其方法ハ次節ニ於テ説明スベシ。ココニハ 267 頁ニ掲ケタル眞數表ニヨリテ二三ノ解法ノ例ヲ示ス。

例一。 $c=150$(米), $A=40^\circ$; a, b ヲ求ム。

$$a=150\times\sin 40^\circ=150\times 0.6428=96.42\ (\text{米})$$

$$b=150\times\cos 40^\circ=150\times\sin 50^\circ$$
$$=150\times 0.7660=114.9\ (\text{米})$$

例二。 $a=91$(米), $b=250$(米); c, A, B ヲ求ム。

$$\tan A=\frac{91}{250}=0.364,\quad A=20^\circ,\quad B=70^\circ$$

$$c=\frac{91}{\sin 20^\circ}=\frac{91}{0.342}=266\ (\text{米})\text{強。}$$

問題

1. $b=250$(米), $A=25^\circ$ ナルトキ a ヲ求メヨ。

2. $a=120$(米), $A=75^\circ$ ナルトキ b ヲ求メヨ。

3. 直徑 5 尺ノ圓ニ於テ 150° ノ中心角ニ對ス

ル弦ノ長サ幾許ナルカ。又中心ヨリ此弦マデノ距離ヲ求メヨ。

104. 三角函數ノ對數表。

普通ノ對數表ニハ三角函數ノ表(眞數表)及ビ三角函數ノ對數表ヲ載ス。本書ノ卷末ニハ精密ナル表ヨリ拔書キシテ$0°$ヨリ$45°$マデノ正弦,餘弦,正切,餘切ノ四桁ノ對數表ヲ「$10'$刻ミ」ニ載セタリ。*

$45°$ヨリ大ナル角ノ正弦,餘弦,正切,餘切ハ其餘角ノ餘弦,正弦,餘切,正切ニ等シキガ故ニ,此表ヲ逆ノ順序ニ引キテ,$45°$ヨリ大ナル角ニモ用ヒ得ルヤウニ仕組ムコトヲ得タリ。

三角函數ノ對數ヲ計算スルトキニモ,**比例部分**ノ理(算代,第 155 節)ヲ應用スルコトヲ得。卽チ角ノ變動ガ微小ナルトキハ,其三角函數ノ對數ノ增減ハ角ノ增減ニ比例スト見做スナリ。但正弦及ビ正切ハ角ノ增大スルニ伴ヒテ增大スルニ反シ,餘弦及ビ餘切ハ角ノ增大スルニ伴ヒテ却テ減少スルコトヲ忘ルベカラズ。

* 卷末ニハ又數ノ四桁ノ對數表ヲ載セタリ。直角三角形ノ解法ニ對數ヲ應用スルトキニハ此表ヲ用フベシ。表ノ用法ハ五桁ノ表ト同樣ナリ。

注意。 甚ダ小キ角ノ正弦,正切,餘切從テ又甚シク直角ニ近キ角ノ餘弦,餘切,正切ハ其變動急劇ニシテ比例部分ノ方法ニヨリ精密ナル結果ヲ求ムルコトヲ得ズ。カヤウノ角ニ關シテハ特別ノ計算法ヲ要ス。*

105. 對數表ノ用法。(一)

角ヲ知リテ三角函數ノ對數ヲ求ムルコト。

例一。 $A=37°48'30''$ ナルトキ $\log\sin A$ ヲ求ムルコト。

先ヅ表ヨリ

$$\log\sin 37°\,40'=\bar{1}.7861$$

及ビ表差16ヲ得。

サテ比例部分ノ理ニヨリ

$$8'\,30''\text{ニ對スル比例部分}=16\times\frac{8.5}{10}=14(\text{弱})$$

ヲ得。之ヲ上ニ求メタル數ノ末位ニ加ヘ

$$\log\sin 37°\,48'\,30''=\bar{1}.7875$$

ヲ得。

例二。 $\log\cos 56°\,24'\,40''$ ヲ求ムルコト。

* 附錄參照。

$\log\cos 56°30' = \bar{1}.7419$　　表差19

$30' - 24'40'' = 5'20'' = 5'.3$

$5'$ ニ對スル比例部分　9.5

$0.3'$　〃　〃　5.7

$\log\cos 56°24'40'' = \bar{1}.7429$

問題

1. 次ノ對數ヲ求メヨ。

(1) $\log\sin 23°35'$

(2) $\log\sin 46°24'30''$

(3) $\log\cos 5°38.'6$

(4) $\log\cos 57°33'30''$

(5) $\log\tan 11°15'$

(6) $\log\tan 67°57'30''$

(7) $\log\cot 30°2.'5$

(8) $\log\cot 71°47.'5$

2. 267頁ノ表ヨリ sin 35°, tan 35° ヲ求メ,其對數ヲ求メテ,卷末ノ對數表ニ揭ゲタル數ト比較セヨ。

3. sin 32°, tan 76° ヲ計算セヨ。

106. 對數表ノ用法。(二)

三角函數ノ對數ヲ知リテ角ヲ求ムルコト。

例一。 $\log\sin A = \bar{1}.7834$ ヨリ A ヲ求ムルコト。

先ヅ表ノ log sin ノ欄ヨリ $\bar{1}.7834$ ヲ夾メル二ツノ數ヲ求ム。

$\log\sin 37°20' = \bar{1}.7828$　差 6　表差

$\log\sin A = \bar{1}.7834$　　16

$\log\sin 37°30' = \bar{1}.7844$

今　$A = 37°20' + x'$

トスルトキ,比例部分ノ理ニヨリ

$10' : x' = 16 : 6$　卽チ　$x' = \dfrac{60}{16} = 3.'75$

故ニ　$A = 37°23.'75 = 37°23'45''$

$\dfrac{60}{16}$ ヲ求ムルニハ比例部分ノ表ニヨルコトヲ得。

例二。 $\log\cos A = \bar{1}.4989$ ヨリ A ヲ求ムルコト。

$\log\cos 71°30' = \bar{1}.5015$　表差 38

$\log\cos A = \bar{1}.4989$

	26
6′	228
	320
0.8′	304
	16
0.04	152

$A = 71°36.'8$

問題

1. 次ノ條件ニヨリテ角 A ヲ定メヨ。

(1) $\log \sin A = \bar{1}.5561$

(2) $\log \sin A = \bar{1}.8632$

(3) $\log \cos A = \bar{1}.9025$

(4) $\log \cos A = \bar{1}.4891$

(5) $\log \tan A = 0.3876$

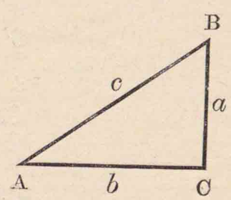
(6) $\log \cot A = 0.8436$

2. $\tan A = 2$ ナルトキ A ヲ求メヨ。

3. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキ A ヲ求メヨ。

4. 直角三角形ノ直角ヲ夾メル邊ノ中,一ツハ他ノ一ツト斜邊トノ比例中項ニ等シ。比例中項ナル邊ニ對スル鋭角ノ大サヲ計算セヨ。

107. 對數表ヲ用ヒテ直角三角形ヲ解クコト。



直角三角形 ABC ニ於ケル角及ビ邊ノ記號ハ第**96**節ノ通リトス。

例一。 $c = 327.4$(米) $A = 23° 42' 30''$

B, a, b ヲ求メヨ。

$$B = 90° - A = 66° 17' 30''$$

$a = c \sin A$ $\qquad \log a = \log c + \log \sin A$

$$\begin{aligned} \log 327.4 &= 2.5151 \\ \log \sin 23° 42' 30'' &= \bar{1}.6043 \\ \hline \log a &= 2.1194 \\ a &= 131.6 \text{(米)} \end{aligned}$$

$b = c \cos A$ $\qquad \log b = \log c + \log \cos A$

$$\begin{aligned} \log 327.4 &= 2.5151 \\ \log \cos 23° 42' 30'' &= \bar{1}.9617 \\ \hline \log b &= 2.4768 \\ b &= 299.8 \text{(米)} \end{aligned}$$

例二。 $a = 128.3$(米), $A = 38° 23' 45''$

b, c ヲ求メヨ。

$b = a \cot A$ $\qquad \log b = \log a + \log \cot A$

$$\begin{aligned} \log 128.3 &= 2.1082 \\ \log \cot 38° 23' 45'' &= 0.1010 \\ \hline \log b &= 2.2092 \\ b &= 161.9 \text{(米)} \end{aligned}$$

$$c=\frac{a}{\sin A} \qquad \log c=\log a-\log\sin A$$

$$\log 128.3 \quad =2.1082$$

$$-\log\sin 38°\,23'\,45''=0.2068^*$$

$$\log c \quad =2.3150$$

$$c \quad =206.5\,(\text{米})$$

例三。 $a=76.4$(米) $c=116.7$(米),

b, A, B ヲ求メヨ。

$$\sin A=\frac{a}{c} \qquad \log\sin A=\log a-\log c$$

$$\log 76.4 \ =1.8831$$

$$\log 116.7=2.0671$$

$$\log\sin A=\bar{1}.8160$$

$$A=40°\,53.'6$$

$$B=49°\quad 6.'4$$

$$b=c\cos A \qquad \log b=\log c+\log\cos A$$

$$\log 116.7 \quad =2.0671$$

$$\log\cos 40°\,53.'6=\bar{1}.8785$$

$$\log b \quad =1.9456$$

$$b \quad =88.22\,(\text{米})$$

* 先ヅ $-\log\sin 38°\,23'45''$ ヲカヤウニ變形スベシ。

又ハ $$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$$

$$\log b=\frac{1}{2}\{\log(c+a)+\log(c-a)\}$$

$$\log 193.1=2.2858$$

$$\log \ 40.3=1.6053$$

$$3.8911$$

$$\log b=1.9456$$

$$b=88.22\,(\text{米})$$

例四。 $a=128.5$(米), $b=34.53$(米),

A, B, c ヲ求メヨ。

$$\tan A=\frac{a}{b} \qquad \log\tan A=\log a-\log b$$

$$\log 128.5=2.1089$$

$$\log 34.53=1.5382$$

$$\log\tan A=0.5707$$

$$A=74°\,57.'6$$

$$B=15°\quad 2.'4$$

$$c=\frac{a}{\sin A} \qquad \log c=\log a-\log\sin A$$

$$\log 128.5 \quad =2.1089$$

$$-\log\sin 74°\,57.'6=0.0152$$

$$\log c=2.1241$$

$$c=133.1\,(\text{米})$$

課題　第十一

次ノ既知數ニヨリテ直角三角形ヲ解ケ。[1—6]

1. $a=72.64$ (米)　$A=38°\,42'$

2. $a=472.8$ (米)　$B=52°\,12'\,30''$

3. $b=156.79$ (間)　$A=76°\,28.'2$

4. $a=148.7$ (間)　$c=367.2$ (間)

5. $a=53.71$ (尺)　$b=59.08$ (尺)

6. $a=27$ 間 4 尺　$b=32$ 間 2 尺

7. 底邊2.7寸,頂角135°ナル二等邊三角形ノ高サ及ビ面積ヲ求メヨ。

8. 平行四邊形ノ一ツノ角ハ147° 36′ニテ,之ヲ夾メル二邊ハ3.75尺及ビ2.25尺ナリ。面積ヲ求メヨ。

9. 對角線ガ12.5尺及ビ8.75尺ナル菱形ノ角及ビ邊ヲ計算セヨ。

10. 直角ヲ夾メル二ツノ邊ガ17寸,16寸ナル直角三角形ニ於テ,斜邊ノ上ニ於ケル此等ノ邊ノ正射影ヲ求メヨ。

11. 半徑1ナル圓ニ內接セル正五角形ノ周圍及ビ面積ヲ計算セヨ。

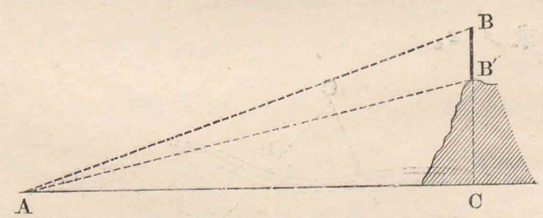
12. 2.5糎ノ弦ガ35°ノ弧ヲ張ル圓ノ半徑ヲ求メヨ。

13. 半徑1.26尺ノ圓ニ於テ1.82尺ノ弦ニ對スル中心角ヲ求メヨ。又此弦ノ上ニ立テル劣弓形ノ面積ヲ求メヨ。

108. 應用問題。

例一。 絕壁ノ上ニ立テタル高サ四間ノ旗竿ノ兩端ノ仰角ヲ平地ノ一點ヨリ測リ15° 20′及ビ14° 30′ヲ得タリ。絕壁ノ高サヲ求メヨ。

A ヲ觀測ノ地點, BB′ヲ旗竿,又BB′ノ延長ガAノ水平面ト交ハル點ヲCトセヨ。



然ラバ $BB'=4$(間), $\angle BAC=15°20'$, $\angle B'AC=14°30'$, $\angle C=90°$, 求ムル高サ $B'C$ ヲ x 間トセヨ。

サテ　$BC=AC\tan\angle BAC,\ B'C=AC\tan\angle B'AC$

故ニ $$\frac{BC}{B'C} = \frac{\tan\angle BAC}{\tan\angle B'AC}$$

即チ $$\frac{x+4}{x} = \frac{\tan 15^\circ 20'}{\tan 14^\circ 30'}$$

$$\log\frac{x+4}{x} = \log\tan 15^\circ 20' - \log\tan 14^\circ 30'$$

$$= 0.0254$$

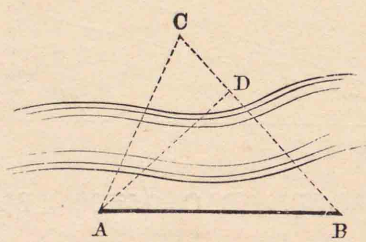
故ニ $$\frac{x+4}{x} = 1.060$$

$$\frac{4}{x} = 0.06$$

$$x = 67\ (弱)$$

即チ求ムル高サハ67間ナリ。

例二。 河岸ニ100米ノ基線ABヲ取リ,A及ビBニ於テ對岸ノ一地點ニ立テタル標杆Cヲ覘ヒ∠BAC, ∠ABCヲ測リ57°35', 46°20'ヲ得タリ。ACノ距離ヲ求メヨ。



AヨリBCヘ垂線ADヲ下シタリトセヨ。

然ラバ $$AD = AB\sin B$$

$$AC = \frac{AD}{\sin C} = \frac{AB\sin B}{\sin C}$$

サテ $$\angle C = 180^\circ - (57^\circ 35' + 46^\circ 20') = 76^\circ 5'$$

故ニ

$$\log AC = \log 100 + \log\sin 46^\circ 20' - \log\sin 76^\circ 5' = 1.8723$$

故ニ $$AC = 74.52\ (米)$$

課題　第十二

1. 塔ノ基礎ヲ距ルコト五十二間三尺ノ地點ニ於テ頂上ノ仰角ヲ測リ28°ヲ得タリ。塔ノ高サ幾許ナルカ。

2. 坂路ノ上ニA,B,Cノ三地點アリ,ABハ十二間三尺,BCハ十五間四尺ナリ。Bニ於テ測リタルAノ俯角ハ12°30',又Cノ仰角ハ10°20'ナリ。CハAヨリ幾尺高キカ。

3. 銅像ノ基石ヲ距ルコト十二間ノ地點ニ於テ銅像ノ上下兩端ノ仰角ヲ測リ26°40'及ビ17°20'ヲ得タリ。銅像ノ高サ幾尺ナルカ。

4. 船ヨリ標高1745米ノ山頂ノ仰角ヲ測リ12°30'ヲ得タリ。五萬分ノ一ノ地圖ニ於テ此山

ト船ノ位置トノ距離幾粁ナルカ。

5. 標高1075米ナル甲ノ山ノ頂上ヨリ測リタル乙ノ山ノ頂上ノ俯角 $11°30'$ ナリ。五萬分ノ一ノ地圖ニ於テ二ツノ山ノ頂點ノ距離 3.8 粁ナルトキ,乙ノ山ノ高サヲ求メヨ。

6. 或地點ニテ塔尖ノ仰角ヲ測リテ $14°30'$ ヲ得,ソレヨリ眞直ニ塔ニ向ヒテ35間進ミ,再ビ仰角ヲ測リ $17°20'$ ヲ得タリ。塔ノ高サヲ求メヨ。

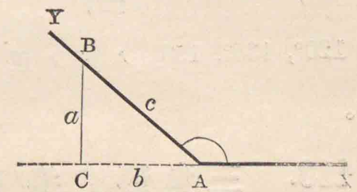
7. 河ノ堤ニ沿ヒテ五十間ヲ隔テタル兩地點A, Bヨリ對岸ノ一地點Cヲ望ミ $\angle BAC$, $\angle ABC$ ヲ測リ $62°20'$ 及ビ $78°40'$ ヲ得タリ。河幅幾許ナルカ。

8. 長サ100米ノ基線ABノ兩端ヨリ地點Cノ方向ヲ測リタルニAヨリ視テCハ正北ヨリモ $4°20'$ 東,Bハ $45°10'$ 東ニ當リ,又Bヨリ視テCハ正北ヨリモ $23°30'$ 西ニ當レリ。AC, BCノ距離ヲ求メヨ。

第三章 三角形ノ角ト邊トノ關係

109. 鈍角ノ三角函數。

鈍角XAYノ一邊AYノ上ノ任意ノ一點Bヨリ他ノ一邊AXヘ垂線BCヲ下ストキハ,其足CハAXノ延長ノ上ニ落ツ。今BC, AC, ABノ長サヲa, b, cトスルトキ



$\angle XAY$ノ三角函數ノ意味ヲ次ノ如ク定ム。

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = -\frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = -\frac{a}{b}$$

$\cot A$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$ ハ $\tan A$, $\cos A$, $\sin A$ ノ逆數ナリトス。

此等ノ三角函數モ亦邊AYノ上ニ於ケル點Bノ位置ニハ關係ナキ一定ノ値ヲ有ス。又點Bヲ他ノ邊AXノ上ニ取ルモ同樣ナリ。

上ノ定義ニヨリテ次ノ定理ヲ得。

互ニ補角ヲナス二ツノ角ノ正弦ハ相等シク,又其餘弦及ビ正切ハ絕對値ニ於テ相等シク,符號ノミ相異ナリ。卽チ

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A$$
$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A$$
$$\tan(180^\circ - A) = -\tan A$$

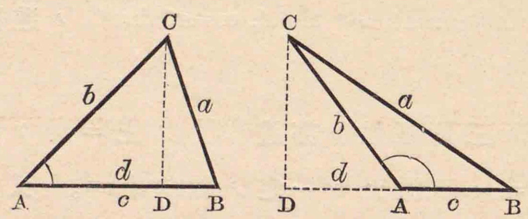
問　　　題

120°, 135°, 150° ノ角ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求メヨ。

110. 三角形ノ邊ト角トノ關係。

(其一。餘弦ヲ含メル公式)

三角形 ABC ニ於ケル三ツノ角 A, B, C ニ對スル邊 BC, CA, AB ノ長サヲ a, b, c トスルトキ,定理四十三ニヨリテ次ノ公式ガ成リ立ツ。



∠A ガ銳角ナルトキハ　$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$

∠A ガ鈍角ナルトキハ　$a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$

但 d ハ邊 AB ノ上ニ於ケル邊 AC ノ正射影 AD ノ長サヲ表ハスモノナリ。

サテ ∠A ガ銳角ナルトキハ　$\cos A = \dfrac{d}{b}$

又　∠A ガ鈍角ナルトキハ　$\cos A = -\dfrac{d}{b}$

故ニ ∠A ガ銳角ナルトキニモ,又鈍角ナルトキニモ,次ノ公式ガ成リ立ツ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

又 ∠A ガ直角ナルトキハ

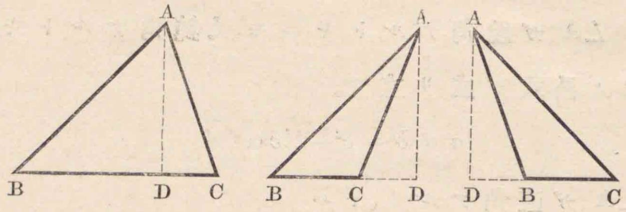
$$a^2 = b^2 + c^2$$

ニシテ, $\cos A = 0$ ナルガ故ニ,上ノ公式ハ A ガ直角ナルトキニモ成リ立ツ。

定理六十三。 三角形ノ一ツノ邊ノ(數値ノ)平方ハ他ノ二ツノ邊ノ(數値ノ)平方ノ和ヨリ,此等ノ邊ノ積ノ二倍ニ其夾角ノ餘弦ヲ乘ジタルモノヲ引キタル(代數的ノ)差ニ等シ。

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

又三角形ノ底邊ハ底邊ニ接スル角ガ二ツトモ銳角ナルトキニハ,他ノ二邊ノ正射影ノ和ニ等シク,底邊ニ接スル一ツノ角ガ鈍角ナルトキニハ,他ノ二邊ノ正射影ノ差ニ等シ。



サテ底邊ニ接スル角ノ餘弦ヲ用フルトキハ,二ツノ場合ヲ一ツノ公式ニマトメテ書クコトヲ得。卽チ

定理六十四。 三角形ノ底邊ハ他ノ二ツノ邊ニ各､其邊ト底邊トノ夾角ノ餘弦ヲ乘ジタル二ツノ積ノ(代數)和ニ等シ。

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

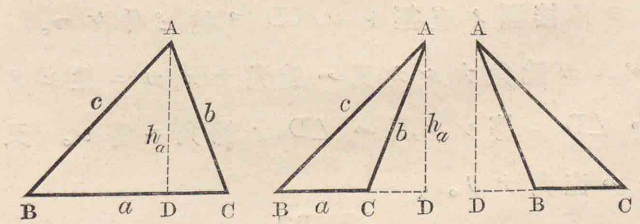
問題

公式(2)ノ三ツノ等式ヲ $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ ヲ未知數トセル聯立方程式ト見做シテ解キ,其結果ヲ(1)ト比較セヨ。

111. 三角形ノ邊ト角トノ關係。

(其二。正弦ヲ含メル公式)

三角形ABCノ邊ノ長サヲ前節ニ於ケルガ如ク a, b, c ニテ表ハシ,AヨリBCヘ下セル垂線ADノ長サヲ h_a ニテ表ハストキハ



$$\sin B = \frac{h_a}{c}, \quad \sin C = \frac{h_a}{b}$$

故ニ　$c\sin B = b\sin C = h_a$

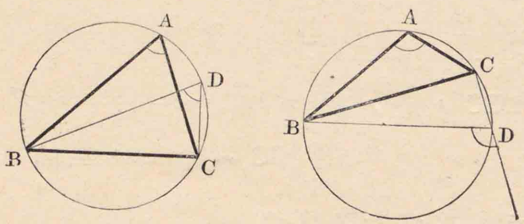
同ジヤウニ　$a\sin C = c\sin A = h_b$

$b\sin A = a\sin B = h_c$

ヨリテ
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (3)$$

定理六十五。 三角形ノ三ツノ邊ハ之ニ對スル角ノ正弦ニ比例ス。

上ノ公式ニ於ケル相等シキ三ツノ長サ $\dfrac{a}{\sin A}$, $\dfrac{b}{\sin B}$, $\dfrac{c}{\sin C}$ ハ三角形ノ外接圓ノ直徑ノ長サナリ。之ヲ證明スルコト次ノ如シ。



BD ヲ外接圓ノ直徑トシ, CD ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ A ガ鋭角ナルカ,又ハ鈍角ナルカニ從ヒテ ∠A ハ ∠D ニ等シク,又ハ ∠D ノ補角ニ等シ。又 ∠BCD ハ直角ナリ。

故ニ
$$\sin A = \sin D = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}$$

即チ $\dfrac{a}{\sin A}$ ハ外接圓ノ直徑 BD ニ等シ。

(∠A ガ直角ナル場合ハ如何)。

問 題

外接圓ノ直徑ノ長サヲ d トスルトキ, $\sin C = \dfrac{h_a}{b}$ 及ビ $\sin C = \dfrac{c}{d}$ ヨリ第77節ノ問題2ノ定理ヲ得ヨ。

112. 三角形ノ邊ト角トノ關係。

(其三。正切ヲ含メル公式)

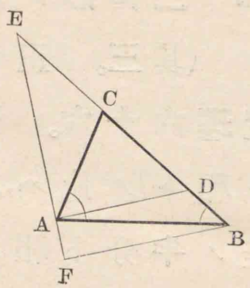
定理六十六。 三角形ノ二ツノ邊ノ差ト和トノ比ハ,之ニ對スル二ツノ角ノ差ノ半分ト和ノ半分トノ正切ノ比ニ等シ。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{b-c}{b+c} &= \frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}}\\
\frac{a-c}{a+c} &= \frac{\tan\dfrac{A-C}{2}}{\tan\dfrac{A+C}{2}}\\
\frac{a-b}{a+b} &= \frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

二ツノ邊ノ大小ハ之ニ對スル角ノ大小ニ伴フガ故ニ,上ノ公式ノ兩邊ニアル二ツノ邊及ビ二ツノ角ノ差ハイヅレモ正數ト見做シ得ベシ。

證。 △ABC ニ於テ BC > AC ($a > b$) トシ, BC 及ビ其延長ノ上ニ CA ニ等シク CD, CE ヲ取リ, AD. AE

ヲ結ビ付ケ, B ヨリ AE ヘ
垂線 BF ヲ下セ。



然ラバ $BE = a + b$

$$BD = a - b$$

又 $\angle DAE$ ハ直角, 從テ

$$AD \parallel BF$$

又
$$\angle CAD = \angle CDA = \angle EBF$$
$$\angle BAD = \angle ABF$$

故ニ
$$\angle A = \angle EBF + \angle ABF$$
$$\angle B = \angle EBF - \angle ABF$$

從テ
$$\angle EBF = \frac{A+B}{2}, \quad \angle ABF = \frac{A-B}{2}$$

故ニ
$$\tan\frac{A+B}{2} = \frac{EF}{BF}, \quad \tan\frac{A-B}{2} = \frac{AF}{BF}$$

故ニ
$$\tan\frac{A+B}{2} : \tan\frac{A-B}{2} = EF : AF$$

サテ $AD \parallel BF$ ナルガ故ニ

$$EF : AF = EB : DB = a+b : a-b$$

故ニ

$$a+b : a-b = \tan\frac{A+B}{2} : \tan\frac{A-B}{2}$$

問 題

1. 上ノ圖ニ於テ

$$AF = BD \sin\angle EBF = AB \sin\angle ABF$$
$$BF = BE \cos\angle EBF = AB \cos\angle ABF$$

ヨリ次ノ公式ヲ得ヨ。

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}, \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

2. 上ノ圖ニ於テ $\triangle ABD$, $\triangle ABE$ ニ第111節ノ定理ヲ應用シテ前ノ問題ノ公式ヲ得ヨ。

3. 問題 1ノ二ツノ公式ヨリ本節ノ公式ヲ得ヨ。

4. ABC ヲ直角三角形, C ヲ直角トスルトキ, 本節ノ公式ヨリ

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}, \quad \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$$

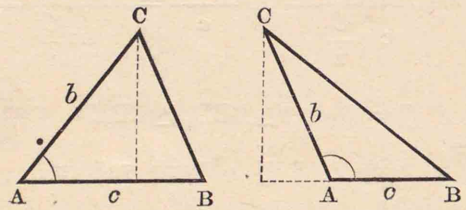
ヲ得ヨ。

又コレニヨリテ斜邊 126 米, 他ノ一邊 75.2 米ナル直角三角形ヲ解ケ。

113. 三角形ノ面積。

三角形ノ二ツノ邊及ビ其夾角,例ヘバ b, c 及ビ A ヲ知ルトキハ,三角形ノ面積ヲ計算スルコトヲ得。

三角形 ABC ニ於テ邊 AB ニ對スル高サハ $b\sin A$ ニ等シ。故ニ三角形ノ面積ヲ S トスルトキハ



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \tag{1}$$

定理六十七。 三角形ノ面積ハ二ツノ邊ト其夾角ノ正弦トノ積ノ半分ニ等シ。

(定理五十六參照)。

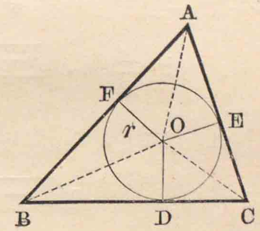
三角形ノ三ツノ邊 a, b, c ヲ知リテ其面積ヲ求ムル公式ハ第**67**節ニ於テ求メタリ。即チ

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

トスルトキハ

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

又三角形 ABC ノ內切圓ノ中心ヲ O トシ,半徑ヲ r,三ツノ邊ノ上ノ切點ヲ D, E, F トスルトキハ



$$S=rp$$

故ニ
$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \tag{2}$$

又
$$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}=p-a$$
$$\mathrm{BF}=\mathrm{BD}=p-b$$
$$\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=p-c$$

ヨリテ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{AE}}=\frac{r}{p-a}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

問題

1. p, r, a, b, c ヲ以テ OA, OB, OC ノ長サヲ表ハシ,次ノ公式ヲ得ヨ。

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

2. 本節(3)ノ第一ノ式ヲ

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{p(p-a)}}{\cos\frac{A}{2}}$$

ト書クコトヲ得。コノ相等シキ比ノ値ハ $\sqrt{bc}$ ニ等シキコトヲ證明シ,前ノ問題ノ公式ヲ得ヨ。

3. 上ノ公式(I)及ビ第111節ノ公式ヨリ次ノ公式ヲ得ヨ。

$$d=\frac{abc}{2S}$$

但 d ハ外接圓ノ直徑ヲ表ハスモノトス。

4. 上ノ公式(3)ヨリ次ノ公式ヲ得ヨ。

$$S=p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

5. 問題1,3ノ公式ヨリ次ノ公式ヲ得ヨ。

$$d=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

114. 公式一覽。

前數節ニ於テ得タル公式ヲ集メ記スコト次ノ如シ。

三角形 ABC ノ三ツノ邊 BC, CA, AB ノ長サヲ a, b, c, 此等ノ邊ニ對スル高サヲ h_a, h_b, h_c, 周圍ノ半分ヲ p, 面積ヲ S トスルトキハ

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned} a&=b\cos C+c\cos B\\ b&=c\cos A+a\cos C\\ c&=a\cos B+b\cos A\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{II})$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\qquad (\mathrm{III})$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b}&=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}\\ \frac{a-c}{a+c}&=\frac{\tan\frac{A-C}{2}}{\tan\frac{A+C}{2}}\\ \frac{b-c}{b+c}&=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{IV})$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{V})$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\qquad(\mathrm{VI})$$

115. 三角形ノ解法。

三角形ノ三ツノ邊及ビ三ツノ角ノ中,三ツヲ知リテ他ノ三ツヲ求ムルコトヲ**三角形ノ解法**トイフ。

(一) 三ツノ邊 a, b, c ヲ知ルトキハ,公式(I)ニヨリテ $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ ヲ求メ,從テ A, B, C ヲ求ムルコトヲ得。

サレド,此方法ハ對數計算ニ適セズ。ヨリテ(V)ヲ用ヒテ $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ ヲ求メ,サテ三ツノ角ヲ求ムルヲヨシトス。

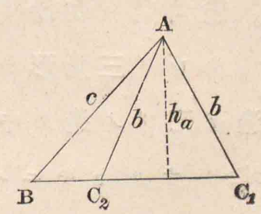
(二) 二ツノ邊 b, c 及ビ夾角 A ヲ知ルトキハ,(I)ノ第一式ニヨリテ a ヲ求ムルコトヲ得,從テ三ツノ邊ヲ知ル。

此方法モ亦對數計算ニ適セズ。サテ $\frac{A}{2}$ ト $\frac{B+C}{2}$ トハ餘角ヲナスガ故ニ(IV)ノ第三式ニヨリテ $\tan\frac{B-C}{2}$ ヲ求メ,次ニ $\frac{B+C}{2}$ ト $\frac{B-C}{2}$ トヨリ B, C ヲ求ムルヲヨシトス。b, c 及ビ A, B, C ヲ知ルトキハ(III)ニヨリテ a ヲ求ムルコトヲ得。

(三) 一ツノ邊 a 及ビ二ツノ角,從テ三ツノ角 A, B, C ヲ知ルトキハ(III)ニヨリテ b, c ヲ求ムルコトヲ得(第108節例二參照)。

(四) 三ツノ角ガ與ヘラレタル三角形ハ限リナクアリ得ベシ。サレド此等ノ三角形ハ盡ク相似ナルガ故ニ,三ツノ邊ノ比ハ定マレリ。其比ハ(III)ニヨリテ求ムルコトヲ得。

(五) ナホ殘レルハ二ツノ邊 b, c ト其一ツニ對スル角 B トガ與ヘラレタル場合ナリ。



此場合ニハ(III)ニヨリテ $\sin C$ ヲ求ムベシ。$\sin C$ ノ値ニヨリテ C ヲ定ムルトキハ,他ノ一ツノ角モ亦定マリ,從テ(III)ニヨリテ a ヲ求ムルコトヲ得。

サテ(III)ニヨリテ

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b} \qquad (1)$$

ニシテ, $\sin C$ ハ 1 ヨリ大ナルコトヲ得ザルガ故ニ

$$b < c \sin B$$

ナルトキニハ,求ムル三角形ハ存在セズ,問題ハ不可能ナリ。

又 $\qquad b = c \sin B$

ナルトキハ $\qquad \sin C = 1$

ヲ得。故ニ $\qquad C = 90°$

ニシテ求ムル三角形ハ直角三角形ナリ。

次ニ $\qquad b > c \sin B$

ナルトキハ,(1)ヨリ求メタル $\sin C$ ノ値ハ 1 ヨリ小ナリ。故ニ三角函數ノ表ヨリ正弦ガ此値ヲ有スル鋭角 C_1 ヲ求ムルコトヲ得,其補角 C_2 ノ正弦モ亦同ジ値ヲ有ス, 即チ C ノ値ハ二ツアリ。

鋭角 C_1 ハ勿論問題ニ適ス。

サレド三角形ガ鈍角ヲ有シ得ルハ,之ニ對スル邊ガ三ツノ邊ノ中,最モ大ナルトキニ限ルガ故ニ, $b > c$ ナルトキニハ鈍角 C_2 ハ問題ニ適セズ。問題ハ唯一ツノ解ヲ有スルノミ。

$$c > b > c \sin B$$

ナルトキニ限リ, C ハ C_1 又ハ C_2 ニ等シク,問題ハ二ツノ解ヲ有スベシ。

注意。 $c \sin B$ ハ h_a 即チ A ヨリ邊 BC ヘ下セル垂線ノ長サナリ(作圖題七參照)。

問題

1. 次ノ既知數ニヨリテ三角形ヲ解ケ。

(1) $a=120$, $B=73° 40'$ $C=36° 30'$

(2) $a=655$, $b=416$, $C=65° 40'$

(3) $a=147.5$, $b=126.8$, $c=122.5$

(4) $a=367$, $b=534$, $A=27° 30'$

2. 底邊(a)頂角(A)及ビ他ノ二邊ノ和又ハ差($b+c$ 又ハ $b-c$)ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト(前出)及ビ解クコト。

3. 周圍($2p$)及ビ角(A, B, C)ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト,及ビ解クコト。

4. 三ツノ邊ガ l, m, n ニ比例スル三角形ノ三ツノ角ヲ求ムルコト。

5. 三ツノ邊ガソレゾレ與ヘラレタル三ツノ線分ニ比例シ,且一ツノ高サガ與ヘラレタル線分

ニ等シキ三角形ヲ作ルコト。

6. 三ツノ高サ(h_a, h_b, h_c)ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト,及ビ解クコト。

7. 三角形ノ一ツノ角Aト之ヲ夾ム二邊ノ比$b:c$トヲ知リテ,他ノ二ツノ角ヲ求ムルコト。

8. 三ツノ互ニ平行ナル直線X,Y,Zノ上ニツレヅレ頂點A,B,Cヲ有スル正三角形ヲ作ルコト。又XトYトノ距離l,YトZトノ距離mヲ知リテ正三角形ノ邊及ビ角BAXヲ求ムルコト。

附録

一 定理ノ關係

凡テ幾何學ノ定理ハ次ノ如キ形式ニ言ヒ表ハスコトヲ得。

(一) 或圖形ガ甲ノ性質ヲ有スルトキハ,此圖形ハ乙ノ性質ヲ有ス。

此定理ニ於テ,甲ノ性質ヲ有スト云フヲ**假設**トシ,乙ノ性質ヲ有スト云フヲ**終結**トス。

例ヘバ

三角形ABCニ於テ,$AB=AC$ナルトキハ,

$\angle B=\angle C$ナリ

トイフ定理ニ於テ,

$AB=AC$ハ假設　　$\angle B=\angle C$ハ終結ナリ。

定理(一)ガ成リ立ツトキハ,次ノ定理ハ當然成リ立ツベキモノナリ。

(二) 乙ノ性質ヲ有セザル圖形ハ,甲ノ性質ヲ有セズ。

此定理(二)ハ(一)ノ終結ノ否定ヲ假設トシ,(一)ノ假

設ノ否定ヲ終結トナセルモノナリ。此定理(二)ヲ定理(一)ノ對偶トイフ。定理(一)ハ卽チ定理(二)ノ對偶ナリ。

上ノ例ニ擧ゲタル定理ノ對偶ハ次ノ如シ。

三角形ABCニ於テ∠B≠∠Cナルトキハ,
AB≠ACナリ。

一ツノ定理ガ眞ナルトキハ,其對偶ハ必ズ眞ナリ。故ニ直接ニ一ツノ定理ヲ證明スル代ニ其對偶ヲ證明シテモヨシ。本文ノ定理四,五,六,七等ノ證明ニハ此方法ヲ用ヒタリ。

定理(一)ノ假設ト終結トヲ入レ換フルトキハ,次ノ命題ヲ得。

(三) 乙ノ性質ヲ有スル圖形ハ,甲ノ性質ヲ有ス。

此命題ヲ(一)ノ逆トイフ。(三)ノ逆ハ卽チ(一)ナリ。

一ツノ定理ガ眞ナルトキ,其逆ハ必ズ眞ナリトイフコトヲ得ズ。

例ヘバ二ツノ直角ハ相等シト雖,二ツノ相等シキ角ハ必ズシモ直角ナラズ,又矩形ノ對角線ハ相

等シト雖,二ツノ對角線ガ相等シキ四邊形ハ必ズシモ矩形ナラズ。(鯨ハ水ニ棲ム哺乳動物ナルコトヲ知レルノミニテハ,未ダ直ニ水ニ棲ム哺乳動物ハ鯨ナリト斷定シ難シ)。是故ニ

本定理ト逆定理トハ別別ニ之ヲ證明スルコトヲ要ス。

例ヘバ定理五ト七ト又ハ定理十,十一ト十二トノ如キ是ナリ。

定理(一)ノ假設ノ否定ヲ假設トシ,終結ノ否定ヲ終結トスルトキハ,次ノ命題ヲ得。

(四) 甲ノ性質ヲ有セザル圖形ハ,乙ノ性質ヲ有セズ。

此命題ヲ(一)ノ裏トイフ。(四)ノ裏ハ卽チ(一)ナリ

(四)ハ(三)ノ對偶ニシテ,(二)ノ逆ナリ。故ニ(三)ガ眞ナラバ(四)モ亦當然眞ナルベク,(四)ガ眞ナラバ(三)モ亦眞ナルベシ。是故ニ

一ツノ定理ノ逆ヲ證明スル代ニ,其裏ヲ證明シテモヨシ。

「甲ノ性質ヲ有スル圖形」トイフコトヲ略シテ單

ニ(甲)ト書キ,「甲ノ性質ヲ有セザル圖形」トイフコトヲ略シテ單ニ(非甲)ト書クトキハ,上ニ擧ゲタル四ツノ命題ノ形式ハ次ノ如シ。

(一) 甲ハ乙ナリ。 (本定理)
(二) 非乙ハ非甲ナリ。 (對偶)
(三) 乙ハ甲ナリ。 (逆)
(四) 非甲ハ非乙ナリ。 (裏)

(一),(二)ノ中,イヅレカ一ツヲ證明シタルトキハ,他ノ一ツハ證明ヲ要セズシテ其眞ナルコトヲ知ルベク,(三),(四)ノ中,イヅレカ一ツガ眞ナラバ他ノ一ツモ亦眞ナリ。

サレド(一)ヲ證明シタルノミニテハ(三)又ハ(四)ガ眞ナルカ,眞ナラザルカヲ斷定スルコトヲ得ズ。

例一。

(一) 人ハ死スベキモノナリ。

(二) 死セザルモノハ人ニアラズ。

(三) 死スベキモノハ人ナリ。

(四) 人ニアラザルモノハ死セズ。

例二。

(一) 二ツノ角A,Bガ各〻直角ナルトキハ,二ツノ角A,Bハ相等シ。

(二) 二ツノ角A,Bガ相等シカラザルトキハ,A,Bノ中,少クトモ一ツハ直角ニアラズ。

(三) 二ツノ角A,Bガ相等シキトキハ,二ツノ角A,Bハ各〻直角ナリ。

(四) 二ツノ角A,Bノ中,少クトモ一ツガ直角ナラザルトキハ,二ツノ角A,Bハ相等シカラズ。

此例ニ於テ「二ツノ角A,Bガ各〻直角ナリ」ノ否定ハ「A,Bノ中,少クトモ一ツハ直角ニアラズ」ナリ。「A,Bガイヅレモ直角ニアラズ」ニテハナシ。

例三。 直線Xノ上ニアラザル一點Oヲ,此直線ノ上ノ二ツノ點A,Bニ結ビ付クルトキ,

(一) OAガXニ垂直ナルトキハ,OBハXニ垂直ナラズ。

(二) OBガXニ垂直ナルトキハ,OAハXニ垂直ナラズ。

(三) OBガXニ垂直ナラザルトキハ,OAハXニ垂直ナリ。

(四) OAガXニ垂直ナラザルトキハ,OBハ

X ニ垂直ナリ。

例四。 三角形 ABC, DEF ニ於テ AB ＝ DE, AC ＝ DF ナルトキ,

(一) $\angle A = \angle D$ ナルトキハ　$BC = EF$

(二) $BC \neq EF$ ナルトキハ　$\angle A \neq \angle D$

(三) $BC = EF$ ナルトキハ　$\angle A = \angle D$

(四) $\angle A \neq \angle D$ ナルトキハ　$BC \neq EF$

例五。 同ジ場合ニ於テ,

(一) $\angle A = \angle D$ ナルトキハ　$\angle B = \angle E$

(二) $\angle B \neq \angle E$ ナルトキハ　$\angle A \neq \angle D$

(三) $\angle B = \angle E$ ナルトキハ　$\angle A = \angle D$

(四) $\angle A \neq \angle D$ ナルトキハ　$\angle B \neq \angle E$

例六。

(一) 線分ノ兩端ヨリ等距離ニアル點ハ,此線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ニアリ。

(二) 線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ニアラザル點ハ,線分ノ兩端ヨリ等距離ニアラズ。

(三) 線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ノ點ハ,線分ノ兩端ヨリ等距離ニアリ。

(四) 線分ノ兩端ヨリ等距離ニアラザル點ハ,線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ニアラズ。

(第54節軌跡ノ定義,參照)。

「甲ハ乙ナリ」トイフ命題ガ眞ナルトキ,「乙ハ甲ナリ」トイフ逆ノ命題ガ必ズシモ眞ナラザルハ,甲ノ外ニモナホ乙ナルモノ有リ得ベキ場合アルニヨルナリ。今甲ナルモノモ,乙ナルモノモ各,唯一ツニ限リテ有リ得ベキトキ,甲ハ乙ナリトイフコトヲ證明シタルトキハ,之ヨリシテ直ニ乙ハ甲ナリトイフコトヲ推知シ得ベシ。之ヲ**同一法**トイフ。

例ヘバ定理二十四ヨリ其系一ヲ證明スルニ,此方法ヲ用ヒタリ。

又定理十ノ系一,二,三,定理四,定理七ノ證明モ此方法ノ應用ト見做スコトヲ得ベシ。

本定理ニヨリテ直ニ逆定理ヲ證明スル方法ノ他ノ著シキ場合ハ所謂**轉換法**ニシテ,定理十,十一ヲ用ヒテ定理十二ヲ證明セルハ,其一例ナリ。

三角形 ABC ニ於テ,

(一) (1) $\angle B = \angle C$ ナルトキハ

(a) $AC = AB$　(定理十)

(二)　(2)　$\angle B > \angle C$ ナルトキハ,

　　(b)　$AC > AB$

(三)　(3)　$\angle B < \angle C$ ナルトキハ,

　　(c)　$AC < AB$

(定理十一)

サテ二ツノ角 $\angle B$, $\angle C$ ノ大サノ關係ハ (1) (2) (3) ノ三ツノ中,イヅレカ一ツナラザルヲ得ズ,且此等三ツノ中,二ツガ同時ニ成リ立ツコトヲ得ズ。又 AC, AB ノ大サノ關係ニ於テモ, (a) (b) (c) ノ中,二ツガ同時ニ成リ立ツコトヲ得ザルモノナリ。故ニ今(一)ノ裏ヲ作ルトキハ,次ノ命題ヲ得。

$\angle B \neq \angle C$ ナルトキハ, $AC \neq AB$ ナリ。

サテ(二)(三)ガ既ニ證明セラレタル上ハ,此命題ハ勿論眞ナリ,即チ(一)ノ裏ガ眞ナルニヨリ,(一)ノ逆モ亦眞ナリ。即チ(二)(三)ノ眞ナルコトヨリ,直ニ(一)ノ逆ノ眞ナルコトヲ知ル。

同ジヤウニ(一)(三)ノ眞ナルコトヨリ(二)ノ逆ノ眞ナルコトヲ知リ,(一)(二)ノ眞ナルコトヨリ(三)ノ逆ノ眞ナルコトヲ知ル。

即チ(一)(二)(三)ノ眞ナルコトヨリ,其逆ガ盡ク眞ナルコトヲ知ル。即チ

三角形 ABC ニ於テ,

$AC = AB$ ナルトキハ　$\angle B = \angle C$

$AC > AB$ ナルトキハ　$\angle B > \angle C$

$AC < AB$ ナルトキハ　$\angle B < \angle C$

(定理十二)

上ノ場合ニ於テ,

「$B = C$ ノ否定」ハ「$B > C$ 又ハ $B < C$」

「$B > C$ ノ否定」ハ「$B = C$ 又ハ $B < C$」

「$B < C$ ノ否定」ハ「$B = C$ 又ハ $B > C$」

ナルコトニ注意スベシ。

又例ヘバ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $AB = DE$, $AC = DF$ ニシテ且

(一)　$\angle A = \angle D$ ナルトキハ

　　$BC = EF$　(定理十五)

(二)　$\angle A > \angle D$ ナルトキハ

　　$BC > EF$

(三)　$\angle A < \angle D$ ナルトキハ

　　$BC < EF$

(定理十八)

ナル三ツノ命題ノ眞ナルコトヨリ,直ニ其逆ノ眞ナルコトヲ知ル,即チ

$BC = EF$ ナルトキハ $\angle A = \angle D$ (定理十七)

$$\left.\begin{array}{l}BC > EF \text{ナルトキハ} \angle A > \angle D \\ BC < EF \text{ナルトキハ} \angle A < \angle D\end{array}\right\}\text{(定理十八,系)}$$

定理三十二,三十三,三十四ヨリ各々其系ヲ證明スルニハ此方法ヲ用フルコトヲ得。

二 小サキ角ノ三角函數

甚ダ小サキ角ノ正弦,正切,餘切,從テ又甚ダシク直角ニ近キ角ノ餘弦,餘切,正切ハ其變動急劇ニシテ比例部分ノ方法ニヨリテ精密ナル結果ヲ求ムルコトヲ得ズ。カヤウノ角ニ關シテハ特別ノ計算法ヲ要ス(第**104**節,注意)。

サテ或角ノ餘切ハ其角ノ正切ノ逆數ニ等シキガ故ニ,畢竟甚ダ小サキ角ノ正弦及ビ正切ニ關スル計算法ヲ考フレバ充分ナリ。

第**102**節ノ圖(265頁)ニ於テ,圓ノ半徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,角Aノ正弦及ビ正切ハソレゾレBC,ETノ數値ニ等シク,角Aガ非常ニ小ナルトキハ,BC,ETハ殆ンド弧BEト一致スルガ故ニ

甚ダ小ナル角ノ正弦及ビ正切ハ,半徑1ナル圓ニ於テ,此角ニ等シキ中心角ニ對スル弧ノ長サノ

數値ニ近キ數ナリ。

半徑1ナル圓ニ於テ弧度 a' (a分)ナル弧ノ長サハ

$$\frac{\pi a}{180\times 60}$$

ナルガ故ニ,今

$$\frac{\sin a'}{\dfrac{\pi a}{180\times 60}}=u \qquad \frac{\tan a'}{\dfrac{\pi a}{180\times 60}}=v$$

ト置クトキハ,uハ1ヨリハ稍々小,vハ1ヨリハ稍々大ナレドモ,aガ小ナルトキハ,u,vハイヅレモ1ニ近キ數ナリ。サテ

$$\log\sin a'=\log a+\log\frac{\pi}{180\times 60}+\log u$$

$$\log\tan a'=\log a+\log\frac{\pi}{180\times 60}+\log v$$

$$\log\frac{\pi}{180\times 60}=\bar{4}.4637$$

ニシテ,$\log u$ハ絕對値甚ダ小ナル負數,$\log v$ハ甚ダ小ナル正數ナリ。

故ニ

$$\log\frac{\pi}{180\times 60}+\log u=s, \qquad -s=\bar{s}$$

$$\log\frac{\pi}{180\times 60}+\log v=t, \qquad -t=\bar{t}$$

ト置クトキハ,

$$\begin{cases}\log\sin a' = \log a + s\\ \log\tan a' = \log a + t\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log a = \log\sin a' + \bar{s}\\ \log a = \log\tan a' + \bar{t}\end{cases}$$

ニシテ, s, t ハ $\bar{4}.4637$ ニ近ク, $\bar{s}, \bar{t}$ ハ 3.5363 ニ近キ數ナリ。$s, t, \bar{s}, \bar{t}$, ハ弧度 a' ノ變動スルニ伴ヒテ變動スルモノナレドモ,其變動微少ニシテ,且急劇ナラザルガ故ニ,小ナル角ノ正弦,正切ヲ計算スルニ, $s, t, \bar{s}, \bar{t}$ ノ表ヲ用フルナリ。卷末ニ掲ゲタル表ニハ,數ノ對數表ノ左側ニ 8° 未滿ノ角ニ對スル s, t ノ表ヲ又右側ニ $\bar{1}.14$ ニ達セザル $\log\sin a'$, $\log\tan a'$ ニ對スル $\bar{s}, \bar{t}$ ノ表ヲ附載セリ。

例一。 $\log\sin 4°\,32'.5$ ヲ求ムルコト。

$$\begin{aligned}4°\,32'.5 &= 272'.5\\ \log 272.5 &= 2.4354\\ 4°\,30' \text{ ニ對スル } s &= \bar{4}.4633\\ \hline \log 4°\,32'.5 &= \bar{2}.8987\end{aligned}$$

例二。 $\log\tan 87°\,43'.6$ ヲ求ムルコト。

$$90° - 87°\,43'.6 = 2°\,16'.4 = 136'.4$$

$$\begin{aligned}\tan 87°\,43'.6 &= \frac{1}{\tan 136'.4}\\ \log\tan 87°\,43'.6 &= -\log\tan 136.'4\\ \log 136.4 &= 2.1348\\ 2°\,20' \text{ ニ對スル } t &= \bar{4}.4640\\ \hline \log\tan 136'.4 &= \bar{2}.5988\\ \log\tan 87°\,43'.6 &= 1.4012\end{aligned}$$

例三。 $\log\cos A = \bar{2}.8974$ ヨリ A ヲ求ムルコト

$$A = 90° - x'$$

ト置ケ。然ラバ

$$\begin{aligned}\log\sin x' &= \bar{2}.8974\\ \bar{2}.90 \text{ ニ對スル } \bar{s} &= 3.5367\\ \hline \log x &= 2.4341\\ x &= 271.7\end{aligned}$$

$$A = 90° - 271'.7 = 85°\,28'.3$$

例四。 $\log\tan A = \bar{2}.9314$ ヨリ A ヲ求ムルコト

$$A = x'$$

トセヨ。然ラバ

$$\begin{aligned}\log\tan x' &= \bar{2}.9314\\ \bar{2}.93 \text{ ニ對スル } \bar{t} &= 3.5352\\ \hline \log x &= 2.4666\end{aligned}$$

$$x \qquad = 292.8$$

$$A = 292'.8 = 4°52'.8$$

例五。 $\log \tan A = 1.3427$ ヨリ A ヲ求ムルコト。

$$A = 90 - x'$$

ト置ケ。然ラバ

$$\log \tan x' = -1.3427 = \bar{2}.6573$$

$$\bar{2}.66 \text{ ニ對スル } \bar{t} \quad = 3.5360$$

$$\log x \qquad = 2.1933$$

$$x \qquad = 156.1$$

$$A = 90° - 156'.1 = 87°23'.9$$

例六。 $\log \cot A = 1.2265$ ヨリ A ヲ求ムルコト

$$A = x'$$

トセヨ。然ラバ

$$\log \tan x' = -1.2265 = \bar{2}.7735$$

例四ノヤウニシテ

$$x = 203.8$$

ヲ得。ヨリテ $A = 3°23'.8$

例七、 $\log \cot A = \bar{1}.0624$ ヨリ A ヲ求ムルコト。

$$A = 90° - x'$$

ト置ケ。然ラバ

$$\log \tan x' = \bar{1}.0624$$

ヨリテ $x = 395.2$

$$A = 90° - 395'.2 = 83°24'.8$$

四桁對數表

a	s	t
	$\overline{4}.46$**	
0° 0′	37	37
10′	37	37
20′	37	37
30′	37	37
40′	37	37
50′	37	38
1° 0′	37	38
10′	37	38
20′	37	38
30′	37	38
40′	37	38
50′	37	39
2° 0′	36	39
10′	36	39
20′	36	40
30′	36	40
40′	36	40
50′	35	41
3° 0′	35	41
10′	35	42
20′	35	42
30′	35	43
40′	34	43
50′	34	44
4° 0′	34	44
10′	33	45
20′	33	46
30′	33	46
40′	32	47
50′	32	48
5° 0′	32	48
10′	31	49
20′	31	50
30′	31	51
40′	30	51
50′	30	52
6° 0′	29	53
10′	29	54
20′	28	55
30′	28	56
40′	27	57
50′	27	58
7° 0′	26	59
10′	26	60
20′	25	61
30′	25	62
40′	24	63
50′	24	64

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	41
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	38
12	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*	35
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	32
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	30
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*	28
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	26
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	25
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	24
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	22
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	21
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	20
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	19
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	18
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	18
25	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*	17
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	16
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	16
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	15
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	15
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	14
31	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*	14
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	13
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	13
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	13
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	12
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	12
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	12
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	11
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*	11
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	11
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	10
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	10
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	10
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	10
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	10
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	9
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	9
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	9
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	9
50	990	998	007*	016*	024*	033*	042*	050*	059*	067*	9
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	8
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	8
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	8
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	8

$\log \sin a' = \log a + s$, $\log \tan a' = \log a + t$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
55	404	412	419	427	435	443	451	459	466	474	8
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551	8
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627	8
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701	7
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774	7
60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846	7
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917	7
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987	7
63	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*	7
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122	7
65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189	7
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254	7
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319	6
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382	6
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445	6
70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506	6
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567	6
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627	6
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686	6
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745	6
75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802	6
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859	6
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915	6
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971	6
79	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*	5
80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079	5
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133	5
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186	5
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238	5
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289	5
85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340	5
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	5
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	5
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489	5
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538	5
90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586	5
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633	5
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680	5
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727	5
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773	5
95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818	5
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863	5
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908	4
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952	4
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996	4
100	0000	004	009	013	017	022	026	030	035	039	4

log	$\bar{s}$	$\bar{t}$
	3.53**	
$\overline{3}$.00	63	63
$\overline{2}$.00	63	63
.10	63	63
.20	63	62
.30	63	62
.40	63	62
$\overline{2}$.50	63	61
.52	64	61
.54	64	61
.56	64	61
.58	64	61
$\overline{2}$.60	64	60
.62	64	60
.64	64	60
.66	64	60
.68	64	59
$\overline{2}$.70	65	59
.72	65	59
.74	65	58
.76	65	58
.78	65	57
$\overline{2}$.80	66	57
.82	66	56
.84	66	56
.86	67	55
.88	67	54
$\overline{2}$.90	67	54
.92	68	53
.94	68	52
.96	69	51
.98	69	50
$\overline{1}$.00	70	49
.01	70	48
.02	71	47
.03	71	46
.04	72	46
.05	72	45
.06	73	44
.07	73	43
.08	73	42
.09	74	41
$\overline{1}$.10	74	40
.11	75	39
.12	75	38
.13	76	37

$\log a = \log \sin a' + \bar{s} = \log \mathrm{tna}\, a' + \bar{t}$

角	logsin		logtan		logcot	logcos	差	
0° 0′	$-\infty$		$-\infty$		∞	0.0000	0	0′ **90°**
10′	$\bar{3}.4637$		$\bar{3}.4637$		2.5363	0.0000	0	50′
20′	$\bar{3}.7648$		$\bar{3}.7648$		2.2352	0.0000	0	40′
30′	$\bar{3}.9408$		$\bar{3}.9409$		2.0591	0.0000	0	30′
40′	$\bar{2}.0658$		$\bar{2}.0658$		1.9342	0.0000	0	20′
50′	$\bar{2}.1627$		$\bar{2}.1627$		1.8373	0.0000	1	10′
1° 0′	$\bar{2}.2419$		$\bar{2}.2419$		1.7581	$\bar{1}.9999$	0	0′ **89°**
10′	3088		3089		6911	9999	0	50′
20′	3668		3669		6331	9999	0	40′
30′	4179		4181		5819	9999	1	30′
40′	4637		4638		5362	9998	0	20′
50′	5050		5053		4947	9998	1	10′
2° 0′	$\bar{2}.5428$		$\bar{2}.5431$		1.4569	$\bar{1}.9997$	0	0′ **88°**
10′	5776		5779		4221	9997	1	50′
20′	6097		6101		3899	9996	0	40′
30′	6397		6401		3599	9996	1	30′
40′	6677		6682		3318	9995	0	20′
50′	6940		6945		3055	9995	1	10′
3° 0′	$\bar{2}.7188$		$\bar{2}.7194$		1.2806	$\bar{1}.9994$	1	0′ **87°**
10′	7423		7429		2571	9993	0	50′
20′	7645		7652		2348	9993	1	40′
30′	7857		7865		2135	9992	1	30′
40′	8059		8067		1933	9991	1	20′
50′	8251		8261		1739	9990	1	10′
4° 0′	$\bar{2}.8436$		$\bar{2}.8446$		1.1554	$\bar{1}.9989$	0	0′ **86°**
10′	8613		8624		1376	9989	1	50′
20′	8783		8795		1205	9988	1	40′
30′	8946		8960		1040	9987	1	30′
40′	9104		9118		0882	9986	1	20′
50′	9256		9272		0728	9985	2	10′
5° 0′	$\bar{2}.9403$		$\bar{2}.9420$		1.0580	$\bar{1}.9983$		0′ **85°**
	logcos		logcot		logtan	logsin	差	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	logcos	差	
5° 0′	$\bar{2}.9403$		$\bar{2}.9420$		1.0580	$\bar{1}.9983$	1	0′ **85°**
10′	$\bar{2}.9545$		$\bar{2}.9563$		1.0437	$\bar{1}.9982$	1	50′
20′	$\bar{2}.9682$		$\bar{2}.9701$		1.0299	$\bar{1}.9981$	1	40′
30′	$\bar{2}.9816$		$\bar{2}.9836$		1.0164	$\bar{1}.9980$	1	30′
40′	$\bar{2}.9945$		$\bar{2}.9966$		1.0034	$\bar{1}.9979$	2	20′
50′	$\bar{1}.0070$		$\bar{1}.0093$		0.9907	$\bar{1}.9977$	1	10′
6° 0′	$\bar{1}.0192$		$\bar{1}.0216$		0.9784	$\bar{1}.9976$	1	0′ **84°**
10′	0311		0336		9664	9975	2	50′
20′	0426		0453		9547	9973	1	40′
30′	0539		0567		9433	9972	1	30′
40′	0648		0678		9322	9971	2	20′
50′	0755		0786		9214	9969	1	10′
7° 0′	$\bar{1}.0859$	102	$\bar{1}.0891$	104	0.9109	$\bar{1}.9968$	2	0′ **83°**
10′	0961	99	0995	101	9005	9966	2	50′
20′	1060	97	1096	98	8904	9964	1	40′
30′	1157	95	1194	97	8806	9963	2	30′
40′	1252	93	1291	94	8709	9961	2	20′
50′	1345	91	1385	93	8615	9959	1	10′
8° 0′	$\bar{1}.1436$	89	$\bar{1}.1478$	91	0.8522	$\bar{1}.9958$	2	0′ **82°**
10′	1525	87	1569	89	8431	9956	2	50′
20′	1612	85	1658	87	8342	9954	2	40′
30′	1697	84	1745	86	8255	9952	2	30′
40′	1781	82	1831	84	8169	9950	2	20′
50′	1863	80	1915	82	8085	9948	2	10′
9° 0′	$\bar{1}.1943$	79	$\bar{1}.1997$	81	0.8003	$\bar{1}.9946$	2	0′ **81°**
10′	2022	78	2078	80	7922	9944	2	50′
20′	2100	76	2158	78	7842	9942	2	40′
30′	2176	75	2236	77	7764	9940	2	30′
40′	2251	73	2313	76	7687	9938	2	20′
50′	2324	73	2389	74	7611	9936	2	10′
10° 0′	$\bar{1}.2397$		$\bar{1}.2463$		0.7537	$\bar{1}.9934$		0′ **80°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	logsin	差	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	logcos	差	
10° 0′	$\bar{1}.2397$	71	$\bar{1}.2463$	73	0.7537	$\bar{1}.9934$	3	0′ **80°**
10′	2468	70	2536	73	7464	9931	2	50′
20′	2538	68	2609	71	7391	9929	2	40′
30′	2606	68	2680	70	7320	9927	3	30′
40′	2674	66	2750	69	7250	9924	2	20′
50′	2740	66	2819	68	7181	9922	3	10′
11° 0′	$\bar{1}.2806$	64	$\bar{1}.2887$	66	0.7113	$\bar{1}.9919$	2	0′ **79°**
10′	2870	64	2953	67	7047	9917	3	50′
20′	2934	63	3020	65	6980	9914	2	40′
30′	2997	61	3085	64	6915	9912	3	30′
40′	3058	61	3149	63	6851	9909	2	20′
50′	3119	60	3212	63	6788	9907	3	10′
12° 0′	$\bar{1}.3179$	59	$\bar{1}.3275$	61	0.6725	$\bar{1}.9904$	3	0′ **78°**
10′	3238	58	3336	61	6664	9901	2	50′
20′	3296	57	3397	61	6603	9899	3	40′
30′	3353	57	3458	59	6542	9896	3	30′
40′	3410	56	3517	59	6483	9893	3	20′
50′	3466	55	3576	58	6424	9890	3	10′
13° 0′	$\bar{1}.3521$	54	$\bar{1}.3634$	57	0.6366	$\bar{1}.9887$	3	0′ **77°**
10′	3575	54	3691	57	6309	9884	3	50′
20′	3629	53	3748	56	6252	9881	3	40′
30′	3682	52	3804	55	6196	9878	3	30′
40′	3734	52	3859	55	6141	9875	3	20′
50′	3786	51	3914	54	6086	9872	3	10′
14° 0′	$\bar{1}.3837$	50	$\bar{1}.3968$	53	0.6032	$\bar{1}.9869$	3	0′ **76°**
10′	3887	50	4021	53	5979	9866	3	50′
20′	3937	49	4074	53	5926	9863	4	40′
30′	3986	49	4127	51	5873	9859	3	30′
40′	4035	48	4178	52	5822	9856	3	20′
50′	4083	47	4230	51	5770	9853	4	10′
15° 0′	$\bar{1}.4130$		$\bar{1}.4281$		0.5719	$\bar{1}.9849$		0′ **75°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	logsin	差	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	logcos	差	
15° 0′	$\bar{1}.4130$	47	$\bar{1}.4281$	50	0.5719	$\bar{1}.9849$	3	0′ **75°**
10′	4177	46	4331	50	5669	9846	3	50′
20′	4223	46	4381	49	5619	9843	4	40′
30′	4269	45	4430	49	5570	9839	3	30′
40′	4314	45	4479	48	5521	9836	4	20′
50′	4359	44	4527	48	5473	9832	4	10′
16° 0′	$\bar{1}.4403$	44	$\bar{1}.4575$	47	0.5425	$\bar{1}.9828$	3	0′ **74°**
10′	4447	44	4622	47	5378	9825	4	50′
20′	4491	42	4669	47	5331	9821	4	40′
30′	4533	43	4716	46	5284	9817	3	30′
40′	4576	42	4762	46	5238	9814	4	20′
50′	4618	41	4808	45	5192	9810	4	10′
17° 0′	$\bar{1}.4659$	41	$\bar{1}.4853$	45	0.5147	$\bar{1}.9806$	4	0′ **73°**
10′	4700	41	4898	45	5102	9802	4	50′
20′	4741	40	4943	44	5057	9798	4	40′
30′	4781	40	4987	44	5013	9794	4	30′
40′	4821	40	5031	44	4969	9790	4	20′
50′	4861	39	5075	43	4925	9786	4	10′
18° 0′	$\bar{1}.4900$	39	$\bar{1}.5118$	43	0.4882	$\bar{1}.9782$	4	0′ **72°**
10′	4939	38	5161	42	4839	9778	4	50′
20′	4977	38	5203	42	4797	9774	4	40′
30′	5015	37	5245	42	4755	9770	5	30′
40′	5052	38	5287	42	4713	9765	4	20′
50′	5090	36	5329	41	4671	9761	4	10′
19° 0′	$\bar{1}.5126$	37	$\bar{1}.5370$	41	0.4630	$\bar{1}.9757$	5	0′ **71°**
10′	5163	36	5411	40	4589	9752	4	50′
20′	5199	36	5451	40	4549	9748	5	40′
30′	5235	35	5491	40	4509	9743	4	30′
40′	5270	36	5531	40	4469	9739	5	20′
50′	5306	35	5571	40	4429	9734	4	10′
20° 0′	$\bar{1}.5341$		$\bar{1}.5611$		0.4389	$\bar{1}.9730$		0′ **70°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	logsin	差	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	logcos	差	
20° 0′	$\bar{1}$.5341		$\bar{1}$.5611		0.4389	$\bar{1}$.9730		0′ **70°**
10′	5375	34	5650	39	4350	9725	5	50′
20′	5409	34	5689	39	4311	9721	4	40′
30′	5443	34	5727	38	4273	9716	5	30′
40′	5477	34	5766	39	4234	9711	5	20′
50′	5510	33	5804	38	4196	9706	5	10′
21° 0′	$\bar{1}$.5543	33	$\bar{1}$.5842	38	0.4158	$\bar{1}$.9702	4	0′ **69°**
10′	5576	33	5879	37	4121	9697	5	50′
20′	5609	33	5917	38	4083	9692	5	40′
30′	5641	32	5954	37	4046	9687	5	30′
40′	5673	32	5991	37	4009	9682	5	20′
50′	5704	31	6028	37	3972	9677	5	10′
22° 0′	$\bar{1}$.5736	32	$\bar{1}$.6064	36	0.3936	$\bar{1}$.9672	5	0′ **68°**
10′	5767	31	6100	36	3900	9667	5	50′
20′	5798	31	6136	36	3864	9661	6	40′
30′	5828	30	6172	36	3828	9656	5	30′
40′	5859	31	6208	36	3792	9651	5	20′
50′	5889	30	6243	35	3757	9646	5	10′
23° 0′	$\bar{1}$.5919	30	$\bar{1}$.6279	36	0.3721	$\bar{1}$.9640	6	0′ **67°**
10′	5948	29	6314	35	3686	9635	5	50′
20′	5978	30	6348	34	3652	9629	6	40′
30′	6007	29	6383	35	3617	9624	5	30′
40′	6036	29	6417	34	3583	9618	6	20′
50′	6065	29	6452	35	3548	9613	5	10′
24° 0′	$\bar{1}$.6093	28	$\bar{1}$.6486	34	0.3514	$\bar{1}$.9607	6	0′ **66°**
10′	6121	28	6520	34	3480	9602	5	50′
20′	6149	28	6553	33	3447	9596	6	40′
30′	6177	28	6587	34	3413	9590	6	30′
40′	6205	28	6620	33	3380	9584	6	20′
50′	6232	27	6654	34	3346	9579	5	10′
25° 0′	$\bar{1}$.6259	27	$\bar{1}$.6687	33	0.3313	$\bar{1}$.9573	6	0′ **65°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	logsin	差	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	logcos	差	
25° 0′	$\bar{1}$.6259		$\bar{1}$.6687		0.3313	$\bar{1}$.9573		0′ **65°**
10′	6286	27	6720	33	3280	9567	6	50′
20′	6313	27	6752	32	3248	9561	6	40′
30′	6340	27	6785	33	3215	9555	6	30′
40′	6366	26	6817	32	3183	9549	6	20′
50′	6392	26	6850	33	3150	9543	6	10′
26° 0′	$\bar{1}$.6418	26	$\bar{1}$.6882	32	0.3118	$\bar{1}$.9537	6	0′ **64°**
10′	6444	26	6914	32	3086	9530	7	50′
20′	6470	26	6946	32	3054	9524	6	40′
30′	6495	25	6977	31	3023	9518	6	30′
40′	6521	26	7009	32	2991	9512	6	20′
50′	6546	25	7040	31	2960	9505	7	10′
27° 0′	$\bar{1}$.6570	24	$\bar{1}$.7072	32	0.2928	$\bar{1}$.9499	6	0′ **63°**
10′	6595	25	7103	31	2897	9492	7	50′
20′	6620	25	7134	31	2866	9486	6	40′
30′	6644	24	7165	31	2835	9479	7	30′
40′	6668	24	7196	31	2804	9473	6	20′
50′	6692	24	7226	30	2774	9466	7	10′
28° 0′	$\bar{1}$.6716	24	$\bar{1}$.7257	31	0.2743	$\bar{1}$.9459	7	0′ **62°**
10′	6740	24	7287	30	2713	9453	6	50′
20′	6763	23	7317	30	2683	9446	7	40′
30′	6787	24	7348	31	2652	9439	7	30′
40′	6810	23	7378	30	2622	9432	7	20′
50′	6833	23	7408	30	2592	9425	7	10′
29° 0′	$\bar{1}$.6856	23	$\bar{1}$.7438	30	0.2562	$\bar{1}$.9418	7	0′ **61°**
10′	6878	22	7467	29	2533	9411	7	50′
20′	6901	23	7497	30	2503	9404	7	40′
30′	6923	22	7526	29	2474	9397	7	30′
40′	6946	23	7556	30	2444	9390	7	20′
50′	6968	22	7585	29	2415	9383	7	10′
30° 0′	$\bar{1}$.6990	22	$\bar{1}$.7614	29	0.2386	$\bar{1}$.9375	8	0′ **60°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	logsin	差	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	logcos	差	
30° 0′	1̄.6990	22	1̄.7614	30	0.2386	1̄.9375	7	0′ **60°**
10′	7012	21	7644	29	2356	9368	7	50′
20′	7033	22	7673	28	2327	9361	8	40′
30′	7055	21	7701	29	2299	9353	7	30′
40′	7076	21	7730	29	2270	9346	8	20′
50′	7097	21	7759	29	2241	9338	7	10′
31° 0′	1̄.7118	21	1̄.7788	28	0.2212	1̄.9331	8	0′ **59°**
10′	7139	21	7816	29	2184	9323	8	50′
20′	7160	21	7845	28	2155	9315	7	40′
30′	7181	20	7873	29	2127	9308	8	30′
40′	7201	21	7902	28	2098	9300	8	20′
50′	7222	20	7930	28	2070	9292	8	10′
32° 0′	1̄.7242	20	1̄.7958	28	0.2042	1̄.9284	8	0′ **58°**
10′	7262	20	7986	28	2014	9276	8	50′
20′	7282	20	8014	28	1986	9268	8	40′
30′	7302	20	8042	28	1958	9260	8	30′
40′	7322	20	8070	27	1930	9252	8	20′
50′	7342	19	8097	28	1903	9244	8	10′
33° 0′	1̄.7361	19	1̄.8125	28	0.1875	1̄.9236	8	0′ **57°**
10′	7380	20	8153	27	1847	9228	9	50′
20′	7400	19	8180	28	1820	9219	8	40′
30′	7419	19	8208	27	1792	9211	8	30′
40′	7438	19	8235	28	1765	9203	9	20′
50′	7457	19	8263	27	1737	9194	8	10′
34° 0′	1̄.7476	18	1̄.8290	27	0.1710	1̄.9186	9	0′ **56°**
10′	7494	19	8317	27	1683	9177	8	50′
20′	7513	18	8344	27	1656	9169	9	40′
30′	7531	19	8371	27	1629	9160	9	30′
40′	7550	18	8398	27	1602	9151	9	20′
50′	7568	18	8425	27	1575	9142	8	10′
35° 0′	1̄.7586		1̄.8452		0.1548	1̄.9134		0′ **55°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	logsin	差	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	logcos	差	
35° 0′	1̄.7586	18	1̄.8452	27	0.1548	1̄.9134	9	0′ **55°**
10′	7604	18	8479	27	1521	9125	9	50′
20′	7622	18	8506	27	1494	9116	9	40′
30′	7640	17	8533	26	1467	9107	9	30′
40′	7657	18	8559	27	1441	9098	9	20′
50′	7675	17	8586	27	1414	9089	9	10′
36° 0′	1̄.7692	18	1̄.8613	26	0.1387	1̄.9080	10	0′ **54°**
10′	7710	17	8639	27	1361	9070	9	50′
20′	7727	17	8666	26	1334	9061	9	40′
30′	7744	17	8692	26	1308	9052	10	30′
40′	7761	17	8718	27	1282	9042	9	20′
50′	7778	17	8745	26	1255	9033	10	10′
37° 0′	1̄.7795	16	1̄.8771	26	0.1229	1̄.9023	9	0′ **53°**
10′	7811	17	8797	27	1203	9014	10	50′
20′	7828	16	8824	26	1176	9004	9	40′
30′	7844	17	8850	26	1150	8995	10	30′
40′	7861	16	8876	26	1124	8985	10	20′
50′	7877	16	8902	26	1098	8975	10	10′
38° 0′	1̄.7893	17	1̄.8928	26	0.1072	1̄.8965	10	0′ **52°**
10′	7910	16	8954	26	1046	8955	10	50′
20′	7926	15	8980	26	1020	8945	10	40′
30′	7941	16	9006	26	0994	8935	10	30′
40′	7957	16	9032	26	0968	8925	10	20′
50′	7973	16	9058	26	0942	8915	10	10′
39° 0′	1̄.7989	15	1̄.9084	26	0.0916	1̄.8905	10	0′ **51°**
10′	8004	16	9110	25	0890	8895	11	50′
20′	8020	15	9135	26	0865	8884	10	40′
30′	8035	15	9161	26	0839	8874	10	30′
40′	8050	16	9187	25	0813	8864	11	20′
50′	8066	15	9212	26	0788	8853	10	10′
40° 0′	1̄.8081		1̄.9238		0.0762	1̄.8843		0′ **50°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	logsin	差	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	logcos	差	
40° 0′	$\bar{1}$.8081	15	$\bar{1}$.9238	26	0.0762	$\bar{1}$.8843	11	0′ **50°**
10′	8096	15	9264	25	0736	8832	11	50′
20′	8111	14	9289	26	0711	8821	11	40′
30′	8125	15	9315	26	0685	8810	10	30′
40′	8140	15	9341	25	0659	8800	11	20′
50′	8155	14	9366	26	0634	8789	11	10′
41° 0′	$\bar{1}$.8169	15	$\bar{1}$.9392	25	0.0608	$\bar{1}$.8778	11	0′ **49°**
10′	8184	14	9417	26	0583	8767	11	50′
20′	8198	15	9443	25	0557	8756	11	40′
30′	8213	14	9468	26	0532	8745	12	30′
40′	8227	14	9494	25	0506	8733	11	20′
50′	8241	14	9519	25	0481	8722	11	10′
42° 0′	$\bar{1}$.8255	14	$\bar{1}$.9544	26	0.0456	$\bar{1}$.8711	12	0′ **48°**
10′	8269	14	9570	25	0430	8699	11	50′
20′	8283	14	9595	26	0405	8688	12	40′
30′	8297	14	9621	25	0379	8676	11	30′
40′	8311	13	9646	25	0354	8665	12	20′
50′	8324	14	9671	26	0329	8653	12	10′
43° 0′	$\bar{1}$.8338	13	$\bar{1}$.9697	25	0.0303	$\bar{1}$.8641	12	0′ **47°**
10′	8351	14	9722	25	0278	8629	11	50′
20′	8365	13	9747	26	0253	8618	12	40′
30′	8378	13	9772	25	0228	8606	12	30′
40′	8391	14	9798	25	0202	8594	12	20′
50′	8405	13	9823	25	0177	8582	13	10′
44° 0′	$\bar{1}$.8418	13	$\bar{1}$.9848	26	0.0152	$\bar{1}$.8569	12	0′ **46**
10′	8431	13	9874	25	0126	8557	12	50′
20′	8444	13	9899	25	0101	8545	13	40′
30′	8457	12	9924	25	0076	8532	12	30′
40′	8469	13	9949	26	0051	8520	13	20′
50′	8482	13	9975	25	0025	8507	12	10′
45° 0′	$\bar{1}$.8495		0.0000		0.0000	$\bar{1}$.8495		0′ **45°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	logsin	差	角

	19	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	1
.6	3.8	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	2
.4	5.7	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	3
.2	7.6	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	4
o	9.5	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	5
.8	11.4	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	6
.6	13.3	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	7
.4	15.2	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	8
.2	17.1	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	9
	39	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
.8	3.9	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	1
.6	7.8	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	2
.4	11.7	12.3	12.6	12.9	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7	3
.2	15.6	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6	4
.0	19.5	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5	5
.8	23.4	24.6	25.2	25.8	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4	6
6	27.3	28.7	29.4	30.1	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3	7
.4	31.2	32.8	33.6	34.4	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2	8
.2	35.1	36.9	37.8	38.7	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1	9
	59	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
.8	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	1
.6	11.8	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	2
.4	17.7	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	3
.2	23.6	24.4	24.8	25.2	25.6	26.0	26.4	26.8	27.2	27.6	4
o	29.5	30.5	31.0	31.5	32.0	32.5	33.0	33.5	34.0	34.5	5
.8	35.4	36.6	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.2	40.8	41.4	6
.6	41.3	42.7	43.4	44.1	44.8	45.5	46.2	46.9	47.6	48.3	7
.4	47.2	48.8	49.6	50.4	51.2	52.0	52.8	53.6	54.4	55.2	8
.2	53.1	54.9	55.8	56.7	57.6	58.5	59.4	60.3	61.2	62.1	9
	81	82	84	85	86	87	89	91	93	94	
.9	8.1	8.2	8.4	8.5	8.6	8.7	8.9	9.1	9.3	9.4	1
.8	16.2	16.4	16.8	17.0	17.2	17.4	17.8	18.2	18.6	18.8	2
.7	24.3	24.6	25.2	25.5	25.8	26.1	26.7	27.3	27.9	28.2	3
.6	32.4	32.8	33.6	34.0	34.4	34.8	35.6	36.4	37.2	37.6	4
.5	40.5	41.0	42.0	42.5	43.0	43.5	44.5	45.5	46.5	47.0	5
.4	48.6	49.2	50.4	51.0	51.6	52.2	53.4	54.6	55.8	56.4	6
.3	56.7	57.4	58.8	59.5	60.2	60.9	62.3	63.7	65.1	65.8	7
.2	64.8	65.6	67.2	68.0	68.8	69.6	71.2	72.8	74.4	75.2	8
.1	72.9	73.8	75.6	76.5	77.4	78.3	80.1	81.9	83.7	84.6	9

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	1
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	2
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	3
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	4
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	5
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	6
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	7
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	8
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	9

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
1	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	1
2	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	2
3	9.3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.3	12.6	12.9	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7	3
4	12.4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6	4
5	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5	5
6	18.6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.6	25.2	25.8	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4	6
7	21.7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.7	29.4	30.1	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3	7
8	24.8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.8	33.6	34.4	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2	8
9	27.9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.9	37.8	38.7	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
1	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	1
2	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	2
3	15.3	15.6	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	3
4	20.4	20.8	21.2	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.4	24.8	25.2	25.6	26.0	26.4	26.8	27.2	27.6	4
5	25.5	26.0	26.5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.5	31.0	31.5	32.0	32.5	33.0	33.5	34.0	34.5	5
6	30.6	31.2	31.8	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.6	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.2	40.8	41.4	6
7	35.7	36.4	37.1	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.7	43.4	44.1	44.8	45.5	46.2	46.9	47.6	48.3	7
8	40.8	41.6	42.4	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.8	49.6	50.4	51.2	52.0	52.8	53.6	54.4	55.2	8
9	45.9	46.8	47.7	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.9	55.8	56.7	57.6	58.5	59.4	60.3	61.2	62.1	9

	71	73	74	75	76	77	78	79	81	82	84	85	86	87	89	91	93	94	
1	7.1	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.1	8.2	8.4	8.5	8.6	8.7	8.9	9.1	9.3	9.4	1
2	14.2	14.6	14.8	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.2	16.4	16.8	17.0	17.2	17.4	17.8	18.2	18.6	18.8	2
3	21.3	21.9	22.2	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.3	24.6	25.2	25.5	25.8	26.1	26.7	27.3	27.9	28.2	3
4	28.4	29.2	29.6	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.4	32.8	33.6	34.0	34.4	34.8	35.6	36.4	37.2	37.6	4
5	35.5	36.5	37.0	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.5	41.0	42.0	42.5	43.0	43.5	44.5	45.5	46.5	47.0	5
6	42.6	43.8	44.4	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.6	49.2	50.4	51.0	51.6	52.2	53.4	54.6	55.8	56.4	6
7	49.7	51.1	51.8	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.7	57.4	58.8	59.5	60.2	60.9	62.3	63.7	65.1	65.8	7
8	56.8	58.4	59.2	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.8	65.6	67.2	68.0	68.8	69.6	71.2	72.8	74.4	75.2	8
9	63.9	65.7	66.6	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.9	73.8	75.6	76.5	77.4	78.3	80.1	81.9	83.7	84.6	9

師範教育 數學教科書平面幾何
定價金九拾錢

明治四十四年七月廿七日印刷
明治四十四年七月三十日發行
明治四十四年十一月一日訂正再版印刷
明治四十四年十一月五日訂正再版發行

著作者 高木貞治
東京市小石川區小日向水道町七十三番地
發行者 西野虎吉
東京市京橋區築地三丁目十一番地
印刷者 野村宗十郎
東京市小石川區小日向水道町七十三番地
發行所 開成館
【振替貯金口座】東京第五參貳貳番
大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角
西部販賣所 三木佐助
東京市日本橋區數寄屋町九番地
東部販賣所 林平次郎

(株式會社東京築地活版製造所印刷)