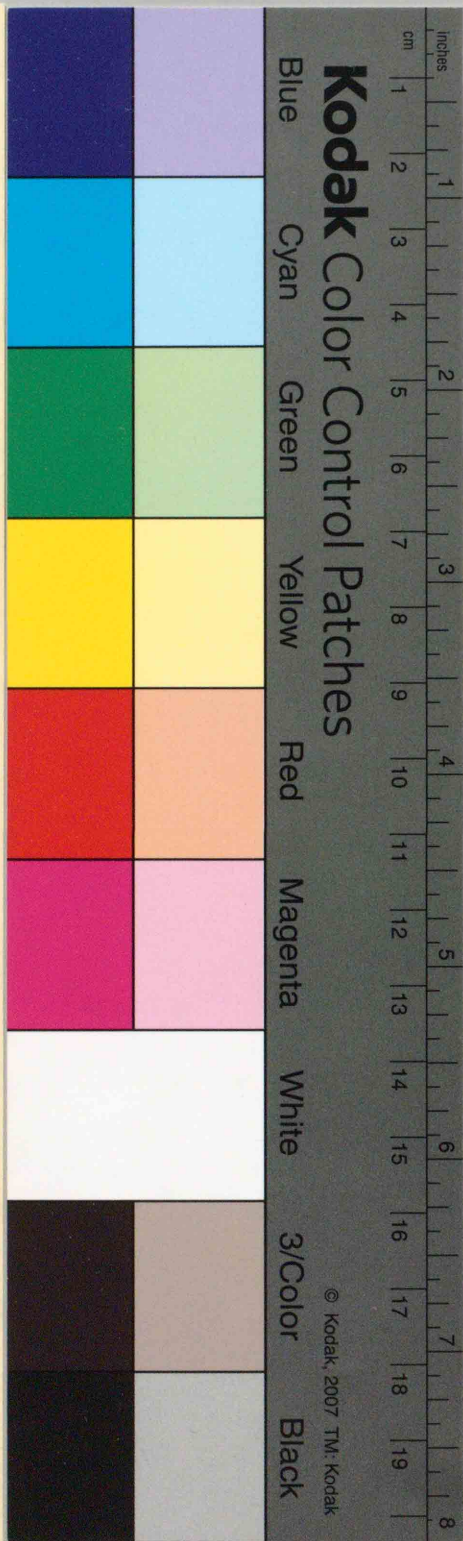


40216

教科書文庫

4.
414
44-1938.
20000. 26599

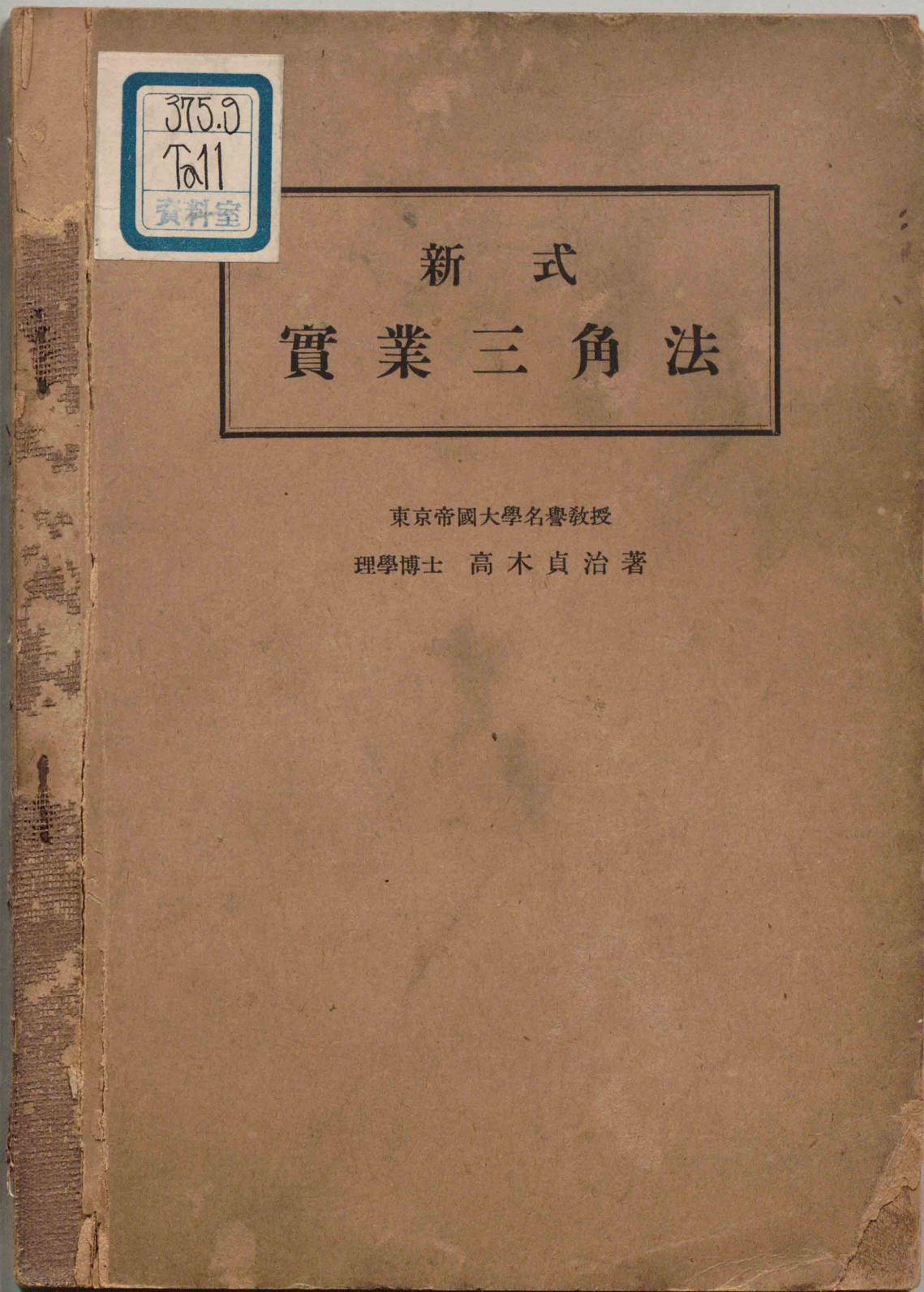


Kodak Gray Scale

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19



© Kodak, 2007 TM: Kodak



375.0
Ta11
資料室

新式
實業三角法

東京帝國大學名譽教授
理學博士 高木貞治著



378.9

Tail

資 料 室

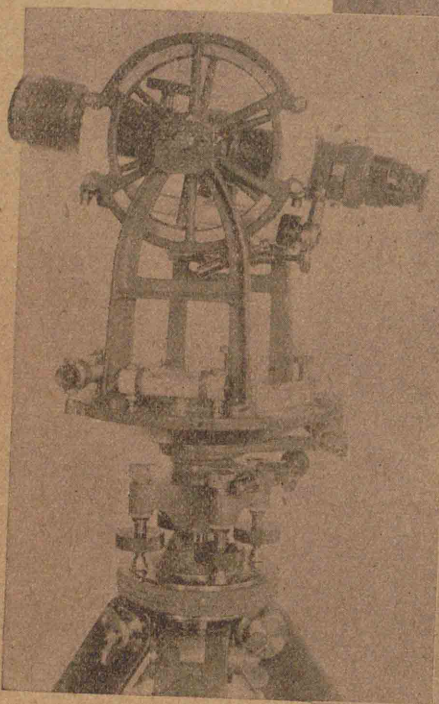
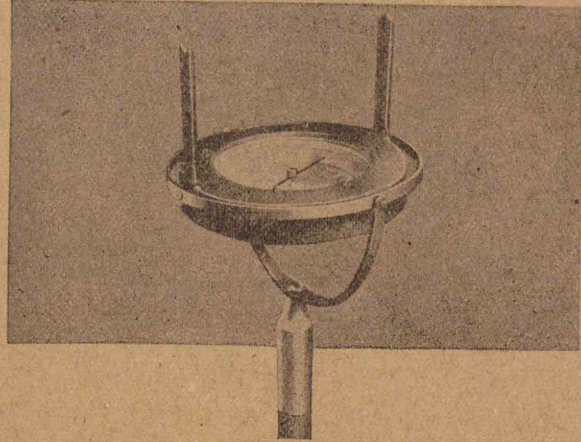
文部省檢定済
昭和十三年十二月十五日 實業學校數學科用

新式 實業三角法

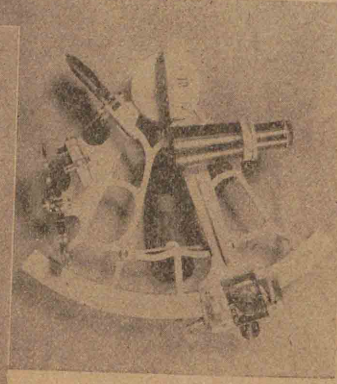
東京帝國大學名譽教授 理學博士

高木貞治
著

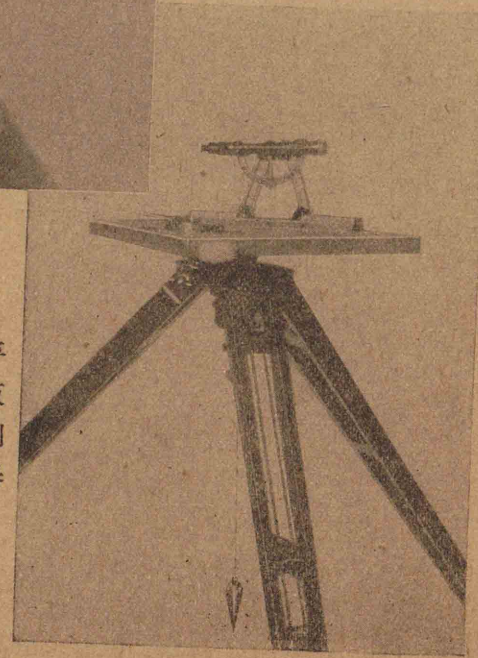
伊能忠敬が全國ヲ實測スルトキ常ニ用ヒタ小方位盤



經緯儀



六分儀



平板測器

廣島大學
圖書部



緒 言

本書ハ實業學校用三角法教科書トシテ編纂シタモノデアル。本書ヲ編纂スルニ當リ著者ハ、實業學校ニ於ケル數學教育ノ理想ト實際トヲ參酌シテ特ニ次ノ方針ニヨツタ。

1. 記述ヲ平易ニシ、生徒ノ理解シ易イヤウニシタ。
2. 教材ハ出來ルダケ緊縮シ、而モソノ配列ハ從來ノ數學的系統ニ捉ハレズ“易ヨリ難ヘ”説キ及ボスヤウニシタ。
3. 實用價值ノ多イ教材ヲ主トシテ、困難ナル論理的證明ノ如キハコレヲ省クコトニシタ。

以上ノ方針ニヨリ、多數ノ圖ヲ挿入シテ理解ニ便ナルヤウニシ、且ツ平易ナ練習問題ヲ比較的多クシテ定理ノ理解ト應用トヲ全カラシメルヤウニシタ。尙、代數學トノ連絡上對數應用ノ必要ナ三角形ノ解法及ビ測量ニ關スル計算問題ヲ後廻シニシタノデ、銳角ノ三面函數ニ次イデ直ニ一般角ノ三角函數及ビ加法定理ヲ説クコトニシタガ徒ラニ公式ノ機械的證明ニ沒頭スルコトナク、常ニ函數的ノ考察ニ注意ヲ拂フコトヲ怠ラヌヤウニシタ。

又卷末ニ附録トシテ弧度法及ビ簡單ナル三角方程式ノ解法ヲ述べ、教授ニ餘裕アル場合ノ補充ニ供シタ。

上記本書編纂ノ趣旨ハ實際教授者諸賢ノ同意ヲ得ルモノト信ズルガ、更ニ使用上ノ忠言ニヨリ版ヲ重ネテ完璧タラシメタイト思フ。

昭和十三年十月

著 者 識 ス

目 次

第 1 章 鋭角ノ三角函數

1. 鋭角ノ三角函數	1
2. 餘角ノ三角函數	2
3. 三角函數ノ變動	4
4. 三角函數ノ眞數表	6
5. 直角三角形ノ邊ト角トノ關係	6
6. 三角函數相互ノ關係	10
7. 一ツノ三角函數ヲ知ツテ他ヲ求メルコト	12

第 2 章 一般角ノ三角函數

8. 一般角...	14
9. 一般角ノ三角函數	16
10. 負角ノ三角函數	20
11. 餘角ノ三角函數	22
12. 三角函數ノ値ノ變化	24

第 3 章 加法定理・減法定理

13. 正弦・餘弦ノ加法定理...	29
14. 正弦・餘弦ノ減法定理...	31
15. 正切ノ加法定理・減法定理	32
16. 二倍角ノ三角函數	33

17. 半角ノ三角函數 34
 18. 三倍角ノ三角函數 36
 19. 正弦又ハ餘弦ノ代數和 37

第4章 三角形ニ關スル公式

20. 三角形ノ原素 41
 21. 正弦法則 42
 22. 餘弦法則 44
 23. 正切法則 45
 24. 半角ノ正弦・餘弦・正切 47
 25. 三角形ノ面積 49

第5章 三角形ノ解法

26. 三角函數ノ對數 52
 27. 三角形ノ解法 55
 28. 一邊ト二角トヲ知ル場合 56
 29. 二邊トソノ夾角トヲ知ル場合 57
 30. 二邊トソノ一對角トヲ知ル場合 58
 31. 三邊ヲ知ル場合 61

第6章 測量ノ問題

32. 測量ノ術語 64
 33. 距離ノ測定 66
 34. 高さノ測定 69

附 錄 弧度法ト三角方程式ノ解法

1. 弧度法 74
 2. $\sin x = a (-1 \leq a \leq 1)$ ノ一般解 76
 3. $\cos x = b (-1 \leq b \leq 1)$ ノ一般解 77
 4. $\tan x = t (-\infty < t < +\infty)$ ノ一般解 78
 5. 三角方程式ノ解法 79

答 [1-2]

附 表 [1-17]

三角函數ノ對數表

數ノ對數表

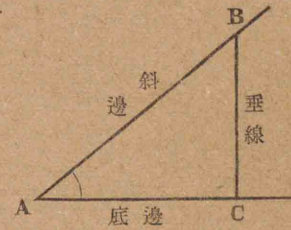
公式一覽表



第1章 銳角ノ三角函數

1. 銳角ノ三角函數

銳角 A ノ一邊上ノ任意ノ點 B カラ他ノ邊へ垂線 BC ヲ下セバ、直角三角形 ABC ノ角 A ガ一定デアルカラ、垂線 BC、底邊 AC、斜邊 AB ノ相互ノ比ハ、點 B ノ位置ノ如何ニ拘ハラズ、一定ノ値ヲ有スル。



之等ノ比ヲ示スニ次ノヤウナ名稱ト記號トヲ用ヒ、總稱シテ角 A ノ三角函數トイフ。

正弦 (sine)	= $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$	$\sin A = \frac{BC}{AB}$
餘弦 (cosine)	= $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$	$\cos A = \frac{AC}{AB}$
正切 (tangent)	= $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$	$\tan A = \frac{BC}{AC}$
餘切 (cotangent)	= $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$	$\cot A = \frac{AC}{BC}$
正割 (secant)	= $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$	$\sec A = \frac{AB}{AC}$
餘割 (cosecant)	= $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$	$\text{cosec } A = \frac{AB}{BC}$

即チ $\cot A$ ハ $\tan A$ ノ逆數, $\sec A$ ハ $\cos A$ ノ逆數,
 $\operatorname{cosec} A$ ハ $\sin A$ ノ逆數デアル。

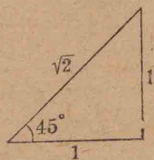
注意 三角函數ノ値ハ上ニ述ベタコトカラワカルヤウ
 ニイヅレモ不名數デアル。

前頁ノ圖デ角 A ガ 45° ノトキニハ、垂線ト底邊ト
 ハ等シク、斜邊ハ垂線ノ $\sqrt{2}$ 倍デアル。故ニ

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1 \quad \cot 45^\circ = 1$$



問 1. 前頁ノ圖デ $AB=5$, $BC=3$ ナラバ、角 A ノ
 三角函數ノ値ハドウカ。

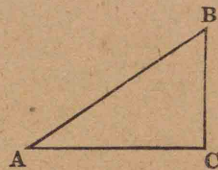
問 2. 前頁ノ圖デ $AC:BC=12:5$ ナラバ、角 A
 ト角 B トノ三角函數ノ値ハドウカ。

2. 餘角ノ三角函數

直角三角形 ABC ニ於ケル $\angle C$ ヲ直角トスレバ

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \cos A$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \sin A$$



$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \cot A \quad \cot B = \frac{BC}{AC} = \tan A$$

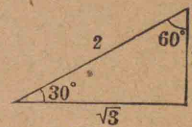
$$\sec B = \frac{AB}{BC} = \operatorname{cosec} A \quad \operatorname{cosec} B = \frac{AB}{AC} = \sec A$$

サテ $\angle B = 90^\circ - \angle A$ デアルカラ

或角ノ餘弦、餘切、餘割ハ夫々ソノ角ノ餘角ノ正弦、
 正切、正割ニ等シイ。

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \cos A & \cos(90^\circ - A) &= \sin A \\ \tan(90^\circ - A) &= \cot A & \cot(90^\circ - A) &= \tan A \\ \sec(90^\circ - A) &= \operatorname{cosec} A & \operatorname{cosec}(90^\circ - A) &= \sec A \end{aligned} \right\} (1)$$

前ノ圖デ $\angle A = 30^\circ$ ナラバ $\angle B = 60^\circ$
 デ、 $AB:BC:AC = 2:1:\sqrt{3}$ デアル。
 故ニ



$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sec 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

問 1. $\angle A = 18^\circ$ ナラバ $\sin 2A = \cos 3A$

問 2. $\tan A = \cot A$ ナル鋭角 A ノ値ヲ求メヨ。

問 3. $\cos x = \sin \frac{x}{2}$ カラ鋭角 x ノ値ヲ求メヨ。

3. 三角函數ノ變動

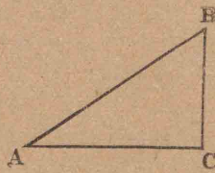
鋭角 A ノ大キサガ變ハレバ、ソレニ伴ツテソノ三角函數ノ値モ變ハル。

(一) sin A 及ビ cos A ノ變動

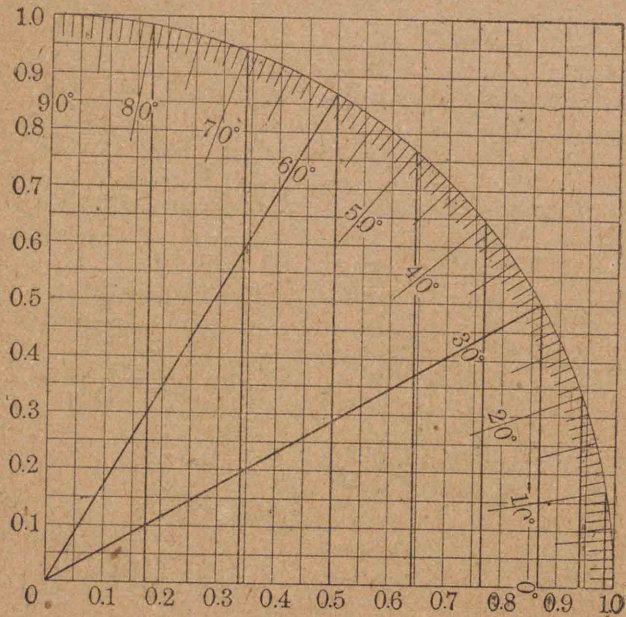
右ノ圖ニ於テ

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$



デアルカラ、斜邊 AB ノ長サヲ一定ニ保チツツ角 A



ノ大キサヲ變ヘルトキニ、垂線 BC ト底邊 AC トガドノヤウニ變ハルカラ見レバ、sin A ト cos A トノ變動スル狀況ヲ知ルコトガ出來ル。即チ

角 A ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ増大スルトキニ、

sin A ハ 0 カラ 1 マデ次第ニ増大シ、

cos A ハ 1 カラ 0 マデ次第ニ減小スル。

前頁ノぐらふガラ任意ノ鋭角ノ sin ト cos トノ概略ノ値ヲ見ルコトガ出來ル。

(二) tan A ノ變動

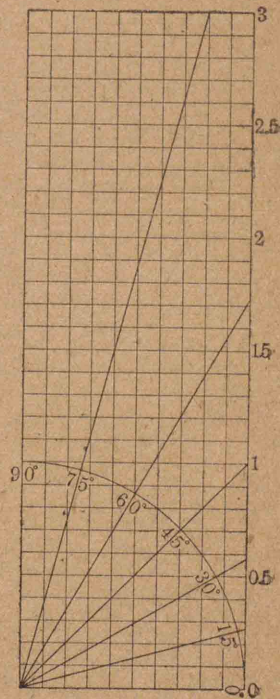
又
$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

デアルカラ、底邊 AC ノ長サヲ一定ニ保チツツ A ノ大キサヲ變ヘルトキハ、垂線 BC ガドノヤウニ變ハルカラ見レバ、tan A ノ變動スル狀況ヲ知ルコトガ出來ル(右ノぐらふ參照)。即チ

角 A ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ増大スルトキニ、

tan A ハ 0 カラ ∞ マデ次

第ニ増大スル。



注意 ∞ ハ無限大ノ記號デ限リナク増大シテ遂ニハ如何程デモ大キクナルコトヲ示スノデアアル。

4. 三角函數ノ眞數表

次頁 = 0° カラ 90° マデノ角ノ三角函數ノ 1° 刻ミノ表(小數第四位未滿四捨五入)ヲ掲ゲル。コノヤウナ表ヲ眞數表トイフ。

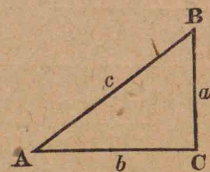
注意 眞數表ノ計算法ハ高等數學ニ屬スルカラ、ココデハ説明スルコトガ出來ナイ。然シ 4 頁ノぐらふト眞數表トヲ比較シテ見ルガヨイ。

問 眞數表ヲヨク見テ次ノ問ニ答ヘヨ。

- [1] $\sin 75^\circ$ ノ値ハドウカ。
- [2] $\tan A = \frac{1}{2}$ ナラバ、角 A ハ約幾度デアルカ。
- [3] $\cos x = \frac{1}{3}$ ナラバ x ノ値ハ約幾度カ。

5. 直角三角形ノ邊ト角トノ關係

直角三角形 ABC デ $\angle C$ ヲ直角トシ、 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ ニ對スル邊ノ長サヲ夫々 a 、 b 、 c デ表ハスコトニスル。然ラバ



	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0°	0.0000	0.0000	1.0000	∞	∞	1.0000	90°
1°	0.0175	0.0175	1.0002	57.2987	57.2900	0.9998	89°
2°	0.0349	0.0349	1.0006	28.6537	28.6363	0.9994	88°
3°	0.0523	0.0524	1.0014	19.1073	19.0811	0.9986	87°
4°	0.0698	0.0699	1.0024	14.3356	14.3007	0.9976	86°
5°	0.0872	0.0875	1.0038	11.4737	11.4301	0.9962	85°
6°	0.1045	0.1051	1.0055	9.5668	9.5144	0.9945	84°
7°	0.1219	0.1228	1.0075	8.2055	8.1443	0.9925	83°
8°	0.1392	0.1405	1.0098	7.1853	7.1154	0.9903	82°
9°	0.1564	0.1584	1.0125	6.3925	6.3138	0.9877	81°
10°	0.1736	0.1763	1.0154	5.7588	5.6713	0.9848	80°
11°	0.1908	0.1944	1.0187	5.2408	5.1446	0.9816	79°
12°	0.2079	0.2126	1.0223	4.8097	4.7046	0.9781	78°
13°	0.2250	0.2309	1.0263	4.4454	4.3315	0.9744	77°
14°	0.2419	0.2493	1.0306	4.1336	4.0108	0.9703	76°
15°	0.2588	0.2679	1.0353	3.8637	3.7321	0.9659	75°
16°	0.2756	0.2867	1.0403	3.6280	3.4874	0.9613	74°
17°	0.2924	0.3057	1.0457	3.4203	3.2709	0.9563	73°
18°	0.3090	0.3249	1.0515	3.2361	3.0777	0.9511	72°
19°	0.3256	0.3443	1.0576	3.0716	2.9042	0.9455	71°
20°	0.3420	0.3640	1.0642	2.9238	2.7475	0.9397	70°
21°	0.3584	0.3839	1.0711	2.7904	2.6051	0.9336	69°
22°	0.3746	0.4040	1.0785	2.6695	2.4751	0.9272	68°
23°	0.3907	0.4245	1.0864	2.5593	2.3559	0.9205	67°
24°	0.4067	0.4452	1.0946	2.4586	2.2460	0.9135	66°
25°	0.4226	0.4663	1.1034	2.3662	2.1445	0.9063	65°
26°	0.4384	0.4877	1.1126	2.2812	2.0503	0.8988	64°
27°	0.4540	0.5095	1.1223	2.2027	1.9626	0.8910	63°
28°	0.4695	0.5317	1.1326	2.1301	1.8807	0.8829	62°
29°	0.4848	0.5543	1.1434	2.0627	1.8040	0.8746	61°
30°	0.5000	0.5774	1.1547	2.0000	1.7321	0.8660	60°
31°	0.5150	0.6009	1.1666	1.9416	1.6643	0.8572	59°
32°	0.5299	0.6249	1.1792	1.8871	1.6003	0.8480	58°
33°	0.5446	0.6494	1.1924	1.8361	1.5399	0.8387	57°
34°	0.5592	0.6745	1.2062	1.7883	1.4826	0.8290	56°
35°	0.5736	0.7002	1.2208	1.7434	1.4281	0.8192	55°
36°	0.5878	0.7265	1.2361	1.7013	1.3764	0.8090	54°
37°	0.6018	0.7536	1.2521	1.6616	1.3270	0.7986	53°
38°	0.6157	0.7813	1.2690	1.6243	1.2799	0.7880	52°
39°	0.6293	0.8098	1.2868	1.5890	1.2349	0.7771	51°
40°	0.6428	0.8391	1.3054	1.5557	1.1918	0.7660	50°
41°	0.6561	0.8693	1.3250	1.5243	1.1504	0.7547	49°
42°	0.6691	0.9004	1.3456	1.4945	1.1106	0.7431	48°
43°	0.6820	0.9325	1.3673	1.4663	1.0724	0.7314	47°
44°	0.6947	0.9657	1.3902	1.4396	1.0355	0.7193	46°
45°	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	0.7071	45°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{b}{a}$$

カラ次ノコトガワカル。

[1] 斜邊ニ一ツノ鋭角ノ \sin ヲ掛ケレバ、ソノ角ニ對スル邊ヲ得ル。

$$c \sin A = a \quad c \sin B = b$$

[2] 斜邊ニ一ツノ鋭角ノ \cos ヲ掛ケレバ、ソノ角ニ接スル他ノ邊ヲ得ル。

$$c \cos A = b \quad c \cos B = a$$

[3] 直角ノ一邊ニソレニ接スル鋭角ノ \tan (又ハソレニ對スル角ノ \cot) ヲ掛ケレバ、直角ニ接スル他ノ一邊ヲ得ル。

$$b \tan A = a \quad a \tan B = b$$

$$(a \cot A = b \quad b \cot B = a)$$

問 1. 6 頁ノ圖デ $c=250(\text{m})$, $\angle A=40^\circ$ ナルトキ a , b ノ長サヲ求メヨ。(眞數表ヲ用ヒヨ)

注意 三角形ノ既知ノ邊又ハ角ノ値カラ未知ノ邊又ハ角ノ値ヲ計算スルコトヲ三角形ヲ解クトイフ。

問 2. $a=12(\text{cm})$, $\angle B=30^\circ$ ナル直角三角形ヲ解ケ。

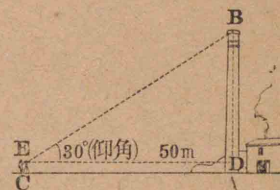
問 3. 邊ガ 3, 4, 5 ナル三角形ノ角ハ約幾度カ。

問題 (1)

- 長サ a ナル直線ガソレト θ ナル角ヲナス直線ノ上ニ投ズル正射影ノ長サヲ求メヨ。
- 半徑 r ナル圓ニ於テ、中心角 A ニ對スル弦ノ長サハ $2r \sin \frac{A}{2}$ デ、又中心カラソノ弦マデノ距離ハ $r \cos \frac{A}{2}$ デアル。

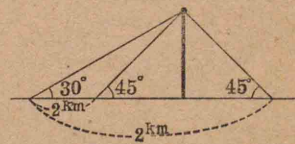
3. 底邊ガ 12 cm, 頂角ガ 80° ナル二等邊三角形ノ高サハ幾ラカ。

4. 煙突ノ基底カラ 50 m ノ距離ノ處デソノ頂上ノ仰角 (64 頁参照) ガ 30° ナラバ、煙突ノ高サ



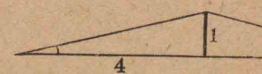
ハ幾ラカ。但シ觀測者ノ眼ノ高サバ地上 1.6 m トスル。

5. 一直線ノ道路ヲ進行スルトキニ、ソノ道路ト 30° ノ角ヲナス方向ニ見エタ塔ガ 2 km 進ンダトキ道路ト 45° ノ角ヲナス方向ニ見エタトスレバ、コノ塔カラ道路マデノ距離ハ幾



ラカ。(二ツノ場合ガアルコトニ注意セヨ)

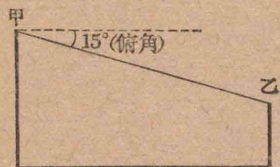
6. 屋根ノ勾配ガ $\frac{1}{4}$ ナラバ、ソノ傾斜ハ約幾度カ。



7. 傾斜 25° ノ坂路ヲ改修シテ傾斜ヲ 12° ニスレバ、ソノ長サハ約幾倍ニナルカ。

8. 標高 1075 m ナル甲ノ山ノ頂上カラ乙ノ山ノ頂上ノ俯角 (65 頁参照) ガ 15° デ

アツテ、五萬分ノ一ノ地圖デハコノ二ツノ山頂ノ間ノ距離ガ 3.8 cm デアツタ



トスレバ、乙ノ山ノ高サハ幾 m カ。

6. 三角函數相互ノ關係

三角函數ノ定義カラ同ジ角 A ノ三角函數相互ノ間ニハ恆ニ次ノ關係ノアルコトガワカル。

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cdot \operatorname{cosec} A &= 1 \\ \cos A \cdot \sec A &= 1 \\ \tan A \cdot \cot A &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan^2 A + 1 &= \sec^2 A \\ \cot^2 A + 1 &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

注意 1. $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ ナドヲ略シテ $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ナドト記ス。

注意 2. 公式 (4) ハ直角三角形 ABC デ $a^2 + b^2 = c^2$ ノ兩邊ヲ c^2 デ割ツテ導クコトガ出來ル。又公式 (5) ハ (4) ノ兩邊ヲ $\cos^2 A$ 又ハ $\sin^2 A$ デ割ツテ (2), (3) ヲ用ヒテ導クコトガ出來ル。

問題 (2)

- $\sin A = \tan A \cdot \cos A$, $\cos A = \frac{\sin A}{\tan A}$ ヲ證明セヨ。
- $\sin A \cdot \sec A \cdot \cot A$ ハ 1 ニ等シイコトヲ示セ。
- $\tan A + \cot A = 2$ ナラバ A ノ値ハドウカ。

次ノ等式ヲ證明セヨ。(4—8)

- $\cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$
- $\sin^2 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \cos^4 A$
- $\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = (\tan \theta + \cot \theta)^2$
- $\sec A - \cos A = \sin A \cdot \tan A$
- $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \cdot \sin^2 A$

次式ヲ簡單ニセヨ。(9—10)

- $(\cos A + \sin A)^2 + (\cos A - \sin A)^2$
- $(\tan A - 1)^2 + (\cot A - 1)^2 - (\sec A - \operatorname{cosec} A)^2$

7. 一ツノ三角函數ヲ知ツテ他ヲ求メルコト

鋭角 A ノ三角函數ノ中ノ一ツノ値ヲ知レバ、公式 (2), (3), (4) ニヨツテ、他ノ三角函數ノ値ヲ求メルコトガ出來ル。

例 1. $\sin A$ ヲ知ツテ他ノ三角函數ヲ求メルコト。

解 公式 (4) ニヨツテ

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

公式 (3), (2) カラ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \quad \cot A = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

又ハ次ノ例ノヤウニ幾何學的ノ方法ニヨルコトモ出來ル。

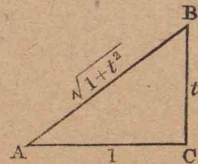
例 2. $\tan A$ ヲ知ツテ $\sin A$, $\cos A$ ヲ求メルコト。

解 $\tan A = t$ ト置ケバ

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = t$$

故ニ $AC = 1$ トスレバ $BC = t$

從ツテ $AB = \sqrt{1 + t^2}$



$$\text{故ニ} \quad \sin A = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{即チ} \quad \sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

注意 六ツノ三角函數ヲ併用スルノハ分數式又ハ根式ヲ避ケルノガ主ナル目的デアル。

問題 (3)

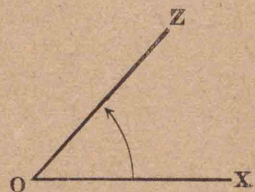
- $\sin A = \frac{2}{3}$ ナルトキ、他ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。
- $\cos A = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ナルトキ、 $\sin A$, $\tan A$ ヲ求メヨ。
- $\cot A = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$ ナルトキ、 $\sin A$, $\cos A$ ヲ求メヨ。
- $(\sec \theta - \tan \theta)^2$ ヲ $\sin \theta$ デ表ハセ。
- $\tan \theta = \sqrt{2}$ ナルトキ $\frac{\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta}{\sec \theta - \cos \theta}$ ノ値ヲ求メヨ。

第 2 章 一般角ノ三角函數

8. 一般角

角 XOZ ハツノ頂點 O ヲ一端トスル半直線ガソノ角ノ平面上ニ於テ OX ノ位置カラ OZ ノ位置マデ廻轉シテ生ジタモノト考ヘル

トキ, OX ヲコノ角ノ首線, OZ ヲ廻轉線又ハ動徑トイフ。



廻轉線ガ廻轉スルノニツノ向キガアル。コノ相反スルニツノ向キヲ區別スルタメニ角ニ正負ノ符號ヲ附ケテ, 時計ノ針ノ廻リ方ト反對ノ向キニ廻轉シテ生ズル角ヲ正角トシ, ソノ反對ノ向キニ廻轉シテ生ズル角ヲ負角トスル。

又廻轉線ガ角ノ首線 OX ノ位置カラ出發シテ幾回モ OX ノ位置ヲ通過シテ最後ノ位置ニ來タモノトモ考ヘラレルカラ, 360° ヨリ大ナル角モ, -360° ヨリ小ナル角モ考ヘルコトガ出來ル。之ニヨツテ

角ノ大サハ正負及ビ零ノアラユル値ヲ取ルモノトスル。之ヲ一般角トイフ。

一般ノ角ニ於テハ動徑ハ限リナク廻轉スルコトガ出來ルカラ廻轉線ノ一ツノ位置ニヨツテ表ハサレル角ハ $\alpha, \alpha+360^\circ, \alpha+360^\circ \times 2, \dots$ 等無數ニアル。一般ニ首線ト動徑トノナス最小ノ正ノ角ヲ α トスレバコノ二線ノナス總テノ角ハ一ツノ式

$$\alpha + n \cdot 360^\circ$$

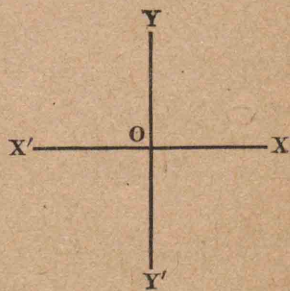
デ表ハサレル。但シ n ハ零又ハ正負ノ整數トスル。

例 1. 次ノ角ノ廻轉線ノ位置ヲ示セ(圖ヲ畫ケ)。

$$420^\circ, 600^\circ, -120^\circ, -300^\circ$$

例 2. 60° ト廻轉線ヲ共有スル角ノ中デ 500° ト 1000° トノ間ニアル角ヲ求メヨ。

OX ヲ首線トスル角 XOZ ガ 90° ニ等シイトキノ廻轉線ノ位置ヲ OY トシ, OX, OY ノ延長ヲ夫々 OX', OY' トスレバ二直線 XOX', YOY' ハ直交シテ角ノ平面ヲ四ツニ分ケル。コノ各部分ヲ象限トイヒ, $XOY, YOX', X'OY', Y'OX$ ヲ順次ニ第一象限, 第二象限, 第三象限, 第四象限トイフ。



角ノ廻轉線ガ第一象限内ニアルトキハ之ヲ第一象限ノ角トイヒ、第二象限内ニアルトキハ之ヲ第二象限ノ角トイフ。ソノ他モ之ニ準ズル。

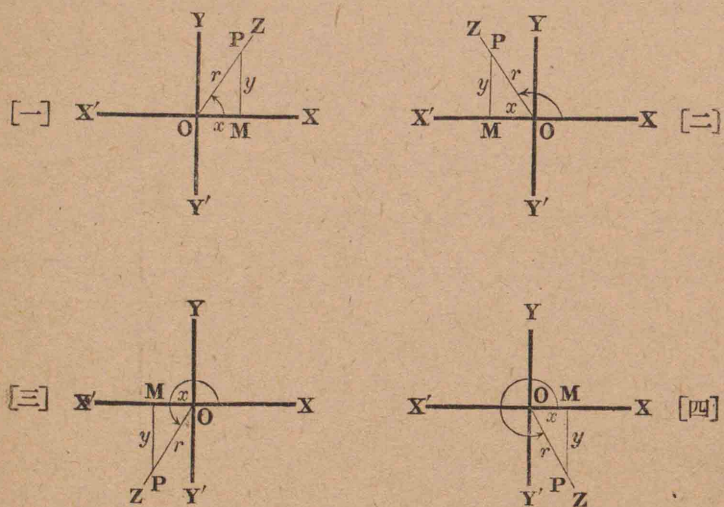
例ヘバ 225° ハ第三象限ノ角デ -300° ハ第一象限ノ角デアアル。

問 3. 次ノ角ハ各何象限ノ角カ。

$480^\circ, -480^\circ, -317^\circ$

9. 一般角ノ三角函數

角 XOZ ノ頂點 O ヲ原點トスル直交軸 XOX', YOY' ヲ作り、 $\angle XOZ$ ガ 90° ノトキ OZ ハ OY ト一致スル



モノトスル。今、 OZ 上ニ任意ノ一點 P ヲトリ、 OP ノ長サヲ r トシ、直交軸ニ關スル點 P ノ坐標ヲ x, y トスルトキ、廻轉線 OZ ニヨツテ表ハサレル一般角ヲ θ トスレバ、 r, x, y ノ比ヲ角 θ ノ三角函數トイヒ、銳角ノ場合ト同ジク次ノヤウニ定義スル。

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{r}{y}$$

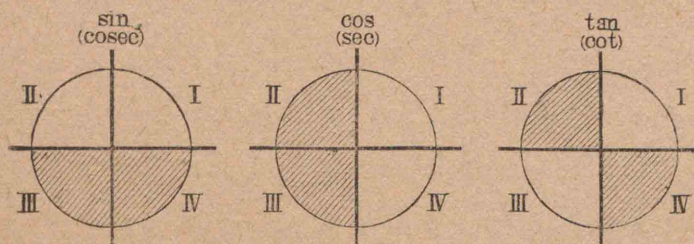
$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

坐標 x, y ノ符號ニヨツテ各象限ノ角ノ三角函數ノ符號ハ次ノ表ノヤウニナル。

象限 函數	一	二	三	四	象限 函數
$\sin \theta$	+	+	-	-	$\operatorname{cosec} \theta$
$\cos \theta$	+	-	-	+	$\sec \theta$
$\tan \theta$	+	-	+	-	$\cot \theta$

次ノ圖デ陰影ヲ附ケテナイ象限ノ角ノ三角函數ガ正デアアル。



注意 上ニ述ベタ定義ニヨレバ、三角函数ハ角ノ首線ト廻轉線トノ位置ダケデ全ク定マルノデアルカラ、角ノ値ガ 360° ノ倍数ダケ増減シテモソノ三角函数ノ値ハ變ハラナイ。

$$\text{即チ } \sin(\alpha + n \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + n \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + n \cdot 360^\circ) = \tan \alpha$$

等デアル。依ツテ三角函数ハ 360° ヲ週期トスルトイフ。

問 1. 次ノ角ノ三角函数ノ値ヲ示セ。

$$120^\circ, 135^\circ, 300^\circ, -150^\circ$$

問 2. 次ノ角ノ三角函数ヲ 0° ト 360° トノ間ノ角ノ同ジ三角函数デ表ハセ。

$$760^\circ, -500^\circ$$

三角函数相互ノ關係ヲ示ス公式 (2) — (5) ハ一般ノ角ニモ當ハマル。

ソシテコレ等ノ公式ヲ用ヒルトキハ角 θ ノ三角函数六ツノ中、一ツヲ知ツテソノ他ヲ誘導スルコトガ出來ル。但シ (4), (5) ヲ用ヒテ根號ヲ有スル式ヲ得タ場合ニハ θ ガ何象限ノ角ナルカヲ知ツテソノ符號ヲ適當ニ定メネバナラナイ。

例 θ ガ第四象限ノ角デ $\cot \theta = -\frac{3}{2}$ ナルトキ他ノ三角函数ヲ求メヨ。

解 θ ガ第四象限ノ角デアルカラ \cos ト \sec トノ外ハ皆負デアル。

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = -\sqrt{1 + \cot^2 \theta}$$

$$= -\sqrt{1 + \frac{9}{4}} = -\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{13}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

問 1. θ ハ第二象限ノ角デ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ナルトキ

$\cos \theta$ 及ビ $\tan \theta$ ヲ求メヨ。

問 2. θ ハ第三象限ノ角デ $\cos \theta = -\frac{4}{7}$ ナルトキ

他ノ三角函數ヲ求メヨ。

問 3. $\cot \theta = -\frac{12}{5}$ 及ビ $\cos \theta > 0$ ナルトキ $\sin \theta, \cos \theta,$

$\tan \theta$ ノ値ヲ求メヨ。

問 4. $180^\circ < \theta < 360^\circ$ デ $\cos \theta = -\frac{5}{13}$ ナルトキ $\sin \theta,$

$\tan \theta$ ノ値ヲ求メヨ。

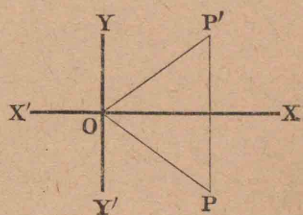
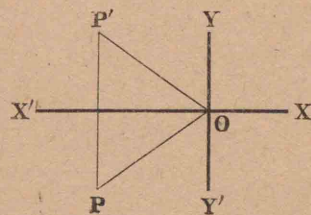
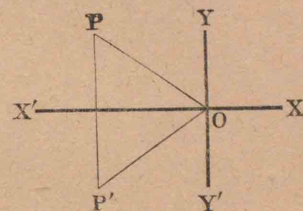
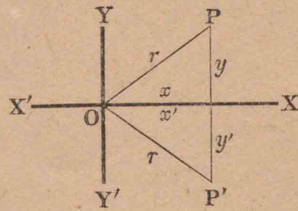
10. 負角ノ三角函數

$\angle XOZ = \theta, \angle XOZ' = -\theta$ トスレバ OZ ト OZ' トハ直線 XX' = 關シテ對稱ノ位置 = アル。

今 OZ, OZ' ノ上 = 夫々點 $P(x, y), P'(x', y')$ ヲトシ $OP = OP' = r$ トスレバ

$$x' = x \quad y' = -y$$

$$\therefore \sin(-\theta) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin \theta$$



$$\cos(-\theta) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\tan \theta$$

即チ

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

(6)

例 $\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos(-30^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-315^\circ) = \tan(-360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

問 次ノ角ノ \sin, \cos, \tan ヲ求メヨ
 $-30^\circ, -45^\circ, -60^\circ, -300^\circ$

11. 餘角ノ三角函數

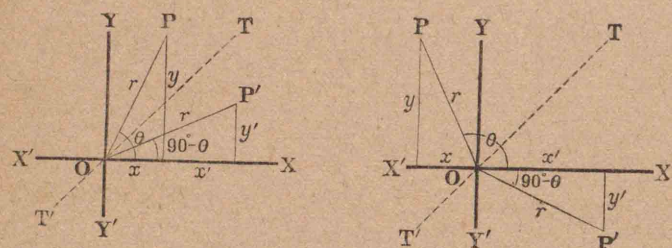
一般ニ角 θ ノ餘角ハ $90^\circ - \theta$ デアル。今

$$\angle XOZ = \theta, \quad \angle XOZ' = 90^\circ - \theta$$

トスレバ

$$\angle XOZ + \angle XOZ' = 90^\circ$$

デアルカラ OZ ト OZ' トハ常ニ $\angle XOY$ ノ二等分線



TT' ニ關シテ對稱デアル。故ニ OZ, OZ' ノ上ニ夫
 夫 $P(x, y), P'(x', y')$ ヲトリ, $OP = OP' = r$ トスレバ

$$x' = y \quad y' = x$$

$$\therefore \sin(90^\circ - \theta) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \cot \theta$$

即チ

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - \theta) &= \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta) &= \sin \theta \\ \tan(90^\circ - \theta) &= \cot \theta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

コノ關係ハ θ ノ符號ヲ變ヘテモ成立スルカラ θ
 ノ代リニ $-\theta$ ヲ代入スレバ

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ + \theta) &= \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \cos(90^\circ + \theta) &= \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \tan(90^\circ + \theta) &= \cot(-\theta) = -\cot \theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

例 $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$

$$\cos 100^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

問 1. 次ノ三角函數ヲ 45° 未滿ノ正角ノ三角函
 數デ表ハセ。

$$\sin 72^\circ, \quad \cos 125^\circ, \quad \tan(-58^\circ)$$

問 2. 次ノ三角函數ノ値ヲ三角函數ノ眞數表カ
 ラ求メヨ。

$$\sin 123^\circ, \quad \cos 155^\circ, \quad \tan 117^\circ$$

問 3. 上ノ公式デ $\theta = 90^\circ + \theta$, 及ビ $90^\circ - \theta$ ヲ代入
 シテ, 次ノ公式ヲ導ケ。

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ + \theta) &= -\sin \theta \\ \cos(180^\circ + \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(180^\circ + \theta) &= \tan \theta \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \sin(180^\circ - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan \theta \end{aligned} \right\}$$

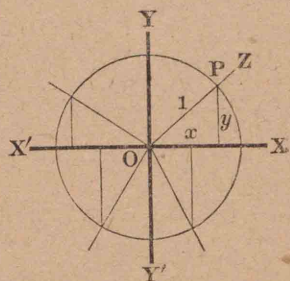
12. 三角函數ノ値ノ變化

OX ヲ首線, OZ ヲ廻轉線トスル角 XOZ ヲ θ デ表ハシ, θ ガ 0° ヨリ 360° マデ次第ニ増ストキ, 之ニ從ツテソノ三角函數ノ値ガ變化スル有様ヲ考究シヨウ。

[1] 正弦及ビ餘弦ノ變化

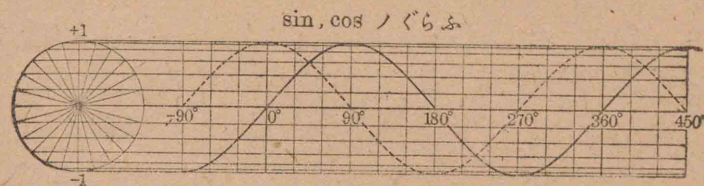
O ヲ原點トスル直交軸 XOX', YOY' ヲトリ, θ ガ 90° トナルトキノ OZ ノ位置ヲ

OY トスル。OZ 上ニ長サノ單位ニ等シク OP ヲトリ, P ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ



$$\sin \theta = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \theta = \frac{x}{1} = x$$

故ニ P ガ O ヲ中心トシ, 半徑 1 ナル圓周上ヲ移動スルニ從ツテ y 及ビ x ノ變化スル状態ニヨリ $\sin \theta$ 及ビ $\cos \theta$ ノ變化ノ状態ヲ知ルコトガ出來ル。ソノ變化ノ状態ヲぐらふデ示セバ次頁ノ圖ノヤウニナル。實線デ示シタ波狀ノ曲線ハ $\sin \theta$ ノぐらふデ之ヲ正弦曲線トイフ。又破線ノ曲線ハ $\cos \theta$ ノぐらふデアアル。之ハ $\sin \theta$ ノぐらふヲ左へ 90° ダケズラセタモノデアアル。ソレハ公式 $\cos \theta = \sin(90^\circ + \theta)$ ニヨツテ明カデアアル。

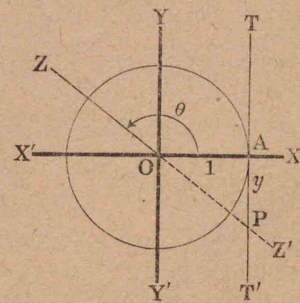
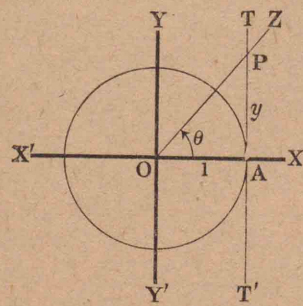


$\sin \theta$ ト $\cos \theta$ ハ共ニ $+1$ ト -1 トノ間ニアツテ週期的ニ増減スル。

[2] 正切及ビ餘切ノ變化

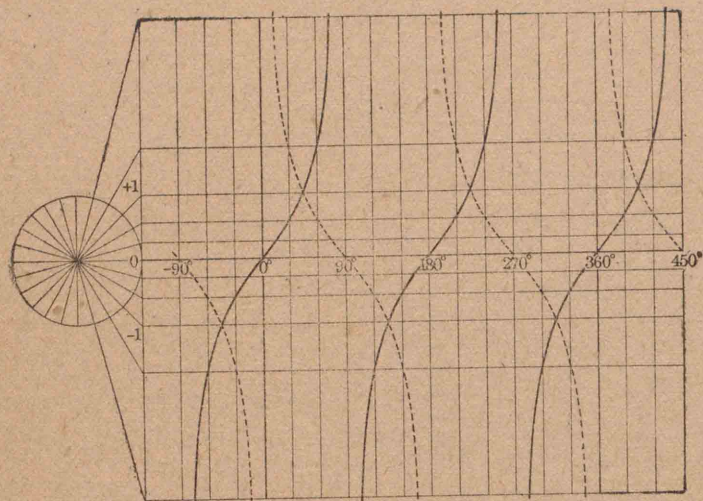
OX 上ニ長サノ單位ニ等シク OA ヲトリ, A ニ於テ OX ニ垂直ナル直線 TT' ヲ引キ, OZ 又ハソノ延長 OZ' トノ交點ヲ P (x, y) トスレバ $x=1$ デアルカラ

$$\tan \theta = \frac{y}{1} = y, \quad \text{從ツテ} \quad \cot \theta = \frac{1}{y}$$



故ニ $\tan \theta$ ノ變化ハ直線 TT' 上ノ點 P ノ縱坐標 y ノ變化ニ同ジク, $\cot \theta$ ノ變化ハソノ逆數ノ變化ト同ジデアアル。ぐらふデソノ變化ノ状態ヲ示スト次ノ

tan, cot ノぐらふ



圖ノヤウニナル。實線ハ $\tan \theta$ ノぐらふデ破線ハ $\cot \theta$ ノぐらふデアル。

θ ガ -90° カラ 0° ヲ經テ $+90^\circ$ マデ増大スルトキ $\tan \theta$ ハ $-\infty$ カラ 0 ヲ經テ $+\infty$ マデ次第ニ増大スル。ソレカラ先ハ 180° ノ週期ヲ以テ同様ノ變化ヲ繰リ返ス。 θ ガ増大シツツ 90° ヲ通過スル際ニ $\tan \theta$ ノ變化ハ不連続デ、 $+\infty$ カラ俄カニ $-\infty$ ニ飛ブノデアル。

象限ノ分界ニ當ル角ノ三角函數ノ値ハ次ノ通リデアル。

	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$+\infty$ $-\infty$	0	$+\infty$ $-\infty$	0
cot	$-\infty$ $+\infty$	0	$-\infty$ $+\infty$	0	$-\infty$ $+\infty$
sec	1	$+\infty$ $-\infty$	-1	$-\infty$ $+\infty$	1
cosec	$-\infty$ $+\infty$	1	$+\infty$ $-\infty$	-1	$-\infty$ $+\infty$

問 1. $\sec \theta$, $\text{cosec } \theta$ ノぐらふヲ畫ケ

問 2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\cos 0^\circ + \sin 90^\circ + \cos 180^\circ}{\tan 0^\circ + \sin 180^\circ + \text{cosec } 90^\circ}$$

問題 (4)

1. 次ノ角ノ \sin , \cos , \tan ヲ求メヨ。

$$225^\circ, 300^\circ, 330^\circ$$

2. x ガ 480° 又ハ -480° ナルトキ $\sin x + \cos x$ ト $\tan x - \cot x$ トノ値ヲ求メヨ。

3. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\sin A + \sin(A + 90^\circ) + \sin(A + 180^\circ) + \sin(A + 270^\circ)$$

$$\cos A + \cos(A - 90^\circ) + \cos(A - 180^\circ) + \cos(A - 270^\circ)$$

4. $\cos A = \frac{2p}{p^2+1}$ ナルトキ $\tan A$ フ求メヨ。
5. $\cos \theta = \frac{5}{13}$ デ $180^\circ < \theta < 360^\circ$ ナルトキ $\sin \theta, \tan \theta$ ノ値ヲ求メヨ。
6. $\cot \theta = -\frac{2}{3}$ デ $0 < \theta < 180^\circ$ ナルトキ $\sin \theta, \cos \theta$ ノ値ヲ求メヨ。
7. $2\sin^2 x = \cos x + 1$ ナルトキ $\sin x, \cos x$ フ求メヨ。
8. 0° ト 360° トノ間デ $\cos 2x = 0$ ナル角 x フ求メヨ。
9. $0^\circ < x < 180^\circ, \sin^2 x + 2\cot^2 x = 1$ フ満足スル角 x フ求メヨ。
10. $0^\circ < x < 180^\circ, 0^\circ < y < 180^\circ$ デ

$$\sin(x-y) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(x+y) = \frac{1}{2}$$

フ満足スル角 x 及ビ y フ求メヨ。

11. $\cos(\alpha+\beta) = 1$ ナルトキハ $\cos \alpha = \cos \beta$ ナルコトヲ示セ。
12. θ フ如何ナル角トスルモ $x + \frac{1}{x} = \sin \theta$ フ満足セシメル實數 x ハ存在シナイコトヲ示セ。

第 3 章 加法定理・減法定理

13. 正弦餘弦ノ加法定理

二角 α, β ノ正弦及ビ餘弦ヲ知ツテ $\alpha + \beta$ ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メルニハ次ノ公式ヲ用ヒル。

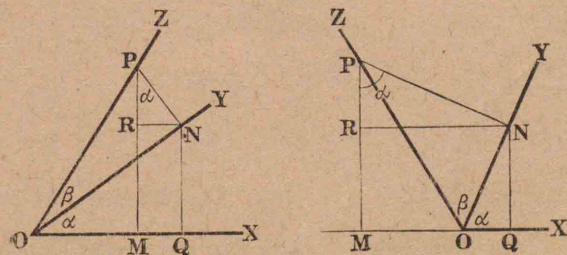
$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

之ヲ正弦及ビ餘弦ノ加法定理トイフ。

〔證明〕 α 及ビ β フ共ニ正ノ銳角トスレバ $\alpha + \beta$ ハ 180° ヨリモ小デアル。

サテ $\angle XOY = \alpha, \angle YOZ = \beta$ トスル。OZ 上ノ一點 P カラ OX, OY = 夫々垂線 PM, PN ヲ引キ, N カラ OX, PM = 夫々垂線 NQ, NR ヲ引ケバ

$$\angle RPN = \angle QON = \alpha$$



OP フ長サノ單位ニトレバ

$$\sin(\alpha + \beta) = MP = MR + RP = QN + RP$$

$$\text{然ル} = QN = ON \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$$

$$RP = PN \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{又} \cos(\alpha + \beta) = OM = OQ - MQ = OQ - RN$$

$$\text{然ル} = OQ = ON \cos \alpha = \cos \beta \cos \alpha$$

$$RN = PN \sin \alpha = \sin \beta \sin \alpha$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

尙コノ定理ハ α, β ノ大サ及ビ符號ノ如何ニ拘ハラズ適用スルコトガ出來ル。

今 α, β ヲ正ノ銳角トシ、 $\alpha' = \alpha + 90^\circ$ トスレバ

$$\sin(\alpha' + \beta) = \sin(\alpha + \beta + 90^\circ) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \sin \alpha' \cos \beta + \cos \alpha' \sin \beta$$

$$\cos(\alpha' + \beta) = \cos(\alpha + \beta + 90^\circ) = -\sin(\alpha + \beta)$$

$$= -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \cos \alpha' \cos \beta - \sin \alpha' \sin \beta$$

カヤウニシテ α ヲ次第ニ 90° ズツ増シテモ加法定理ハ成リ立ツカラ、 α ガ任意ノ正角デアルトキニモ成リ立ツ。 β ニツイテモ同様デアアル。又任意ノ負角ハ正ノ角カラ 360° ノ或ル倍數

ヲ引イタモノト考ヘルコトガ出來ル。然ルニ正ノ角カラ 360° ノ倍數ヲ引イテモソノ三角函數ハ變ラヌカラ加法定理ハ α 又ハ β ガ負角デアルトキニモ成リ立ツノデアアル。

14. 正弦餘弦ノ減法定理

前節ニ示シタ加法定理ハ α, β ガ正又ハ負ノ任意ノ角デアルトキニ成リ立ツカラ

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\{\alpha + (-\beta)\}$$

$$= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\{\alpha + (-\beta)\}$$

$$= \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\text{即チ} \left. \begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

コノ二公式ヲ正弦及ビ餘弦ノ減法定理トイフ。

問 1. $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ ヲ用ヒテ $\sin 75^\circ$ 及ビ $\cos 75^\circ$ ヲ求メヨ。

問 2. $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ ヲ用ヒテ $\sin 15^\circ$ 及ビ $\cos 15^\circ$ ヲ求メヨ。

問3. A, B は鋭角で $\sin A = \frac{12}{13}$, $\sin B = \frac{4}{5}$ ナルト
キ $\sin(A+B)$, $\sin(A-B)$ ヲ求メヨ。 A 又ハ B ガ
鈍角ナラバドウカ。

問4. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$[1] \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$[2] \cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A + \cos^2 B - 1$$

$$[3] \sin A + \cos A = \sqrt{2} \sin(A+45^\circ)$$

$$[4] \cos A - \sin A = \sqrt{2} \cos(A+45^\circ)$$

15. 正切ノ加法定理・減法定理

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (11)$$

コノ公式ヲ正切ノ加法定理トイフ。

証明 正弦・餘弦ノ加法定理ニヨリ

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

終リノ式ノ分母子ヲ $\cos \alpha \cos \beta$ デ割レバ

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

又 β ヲ $-\beta$ = 代ヘテ次ノ公式(正切ノ減法定理)ヲ
得ル。

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

問1. $\tan 15^\circ$ 及ビ $\tan 75^\circ$ ヲ求メヨ。

問2. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\tan(45^\circ + \theta) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta}$$

問3. $x^2 - px + q = 0$ ノ根ヲ $\tan A, \tan B$ トスレバ

$$\tan(A+B) = \frac{p}{1-q}$$

ナルコトヲ證セヨ。

問4. 次ノ公式ヲ導ケ。

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}, \quad \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

16. 二倍角ノ三角函數

$\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ 及ビ $\tan(\alpha + \beta)$ = 對スル公式
= 於テ $\beta = \alpha$ トスレバ次ノ公式ガ得ラレル。

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

次ノ公式モ重要デアル(證明ハ生徒自ラセヨ)。

$$[1] \quad 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$[2] \quad 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$[3] \quad \tan \theta = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$[4] \quad \sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$[5] \quad \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

17. 半角ノ三角函數

公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ に於て $\alpha = \frac{\theta}{2}$ と置
ケバ次ノ公式ヲ得ル。(前節 [1], [2] 参照)

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上ノ公式ハ $\cos \theta$ ヲ知ツテ $\frac{\theta}{2}$ ノ三角函數ヲ求メル
場合ニ有用デアル。但シ根號ノ前ノ符號ハ θ ノ大
サニヨリ $\frac{\theta}{2}$ ガ第何象限ノ角ニナルカラ知ツテ適當
ニ定メナケレバナラナイ。

$\tan \frac{\theta}{2}$ ハ根號ナシニ次ノ公式ニヨツテ求メラレル。
(前節 [3] 参照)

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

例 1. $\cos A = \frac{4}{5}$, $270^\circ < A < 360^\circ$ ナルトキ $\sin \frac{A}{2}$,
 $\cos \frac{A}{2}$ ヲ求メヨ。

解 $270^\circ < A < 360^\circ \quad \therefore 135^\circ < \frac{A}{2} < 180^\circ$

故ニ $\frac{A}{2}$ ハ第二象限ノ角デアルカラ $\sin \frac{A}{2}$ ハ正
デ $\cos \frac{A}{2}$ ハ負デアル。依ツテ

$$\sin \frac{A}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = - \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = - \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = - \frac{3}{\sqrt{10}}$$

例 2. $22^\circ 30'$ ノ三角函數ヲ求メヨ。

解 $22^\circ 30'$ ハ第一象限ノ角デアルカラ

$$\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 22^\circ 30' = \frac{1 - \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\cot 22^\circ 30' = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

問 1. $90^\circ < \theta < 180^\circ$ デ $\sin \theta = \frac{24}{25}$ ナルトキ $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ 及ビ $\tan \frac{\theta}{2}$ ノ値ヲ求メヨ。

問 2. 一邊 a ナル正八角形ノ面積及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

18. 三倍角ノ三角函數

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) \\ &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \text{同様} = \quad \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \end{aligned} \quad (14)$$

問 1. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$[1] \quad \sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$[2] \quad \cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

問 2. $\Lambda = 18^\circ$ ナルトキハ $\sin 2\Lambda = \cos 3\Lambda$ デアル。

之カラ次ノ式ヲ導ケ。

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

19. 正弦又ハ餘弦ノ代數和

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

之カラ次ノ公式ヲ得ル。

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

(15)

$$\text{ココデ} \quad \alpha + \beta = P, \quad \alpha - \beta = Q$$

ト置ケバ

$$\alpha = \frac{P+Q}{2}, \quad \beta = \frac{P-Q}{2}$$

トナルカラ(13)ハ次ノヤウニナル。

$$\left. \begin{aligned} \sin P + \sin Q &= 2 \sin \frac{P+Q}{2} \cos \frac{P-Q}{2} \\ \sin P - \sin Q &= 2 \cos \frac{P+Q}{2} \sin \frac{P-Q}{2} \\ \cos P + \cos Q &= 2 \cos \frac{P+Q}{2} \cos \frac{P-Q}{2} \\ \cos P - \cos Q &= -2 \sin \frac{P+Q}{2} \sin \frac{P-Q}{2} \end{aligned} \right\} (16)$$

(13) 及 ビ (14) の二角ノ正弦又ハ餘弦ノ代數和ヲ積ノ形ニ變ジ、若クハ積ヲ代數和ノ形ニ變ズル場合ニ對シル。

例 1. $\sin 4x - \sin 2x$ ヲ積ニ直セ。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sin 4x - \sin 2x &= 2 \cos \frac{4x+2x}{2} \sin \frac{4x-2x}{2} \\ &= 2 \cos 3x \sin x \end{aligned}$$

例 2. $\sin 4x \sin 2x$ ヲ代數和ニ直セ。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad -2 \sin 4x \sin 2x &= \cos(4x+2x) - \cos(4x-2x) \\ &= \cos 6x - \cos 2x \end{aligned}$$

$$\therefore \sin 4x \sin 2x = -\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 2x)$$

問 1. 次ノ各式ヲ積ニ直セ。

$$\begin{aligned} [1] \quad \sin 4\theta + \sin 2\theta & \quad [2] \quad \sin 5\theta - \sin \theta \\ [3] \quad \cos 2\theta + \cos 4\theta & \quad [4] \quad \cos 3\theta - \cos 5\theta \\ [5] \quad \sin 75^\circ - \sin 15^\circ & \quad [6] \quad \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \end{aligned}$$

問 2. 次ノ積ヲ代數和ニ直セ。

$$\begin{aligned} [1] \quad \sin 4x \cos 2x & \quad [2] \quad \cos 6x \sin 2x \\ [3] \quad \cos \theta \cos 5\theta & \quad [4] \quad \sin \alpha \sin 3\alpha \end{aligned}$$

問 題 (5)

- $90^\circ < x < 180^\circ$, $180^\circ < y < 270^\circ$ デ $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\tan y = \frac{3}{4}$ ナルトキ $\sin(x+y)$ 及 ビ $\cos(x-y)$ ノ値ヲ求メヨ。
- $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$ デ $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\frac{8}{17}$ ナルトキ $\tan(\alpha+\beta)$ 及 ビ $\tan(\beta-\alpha)$ ノ値ヲ求メヨ。

3. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$[1] \quad (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$[2] \quad \frac{1 + \sin A}{1 - \sin A} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{A}{2} \right)$$

$$[3] \quad \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} = \tan(A+B)$$

$$[4] \quad 4 \cos A \cos(A+120^\circ) \cos(A+240^\circ) = \cos 3A$$

$$[5] \quad \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

4. $A+B+C=180^\circ$ ナラバ

$$[1] \quad \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$[2] \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

5. A, B, C が等差級數ヲナストキハ

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \tan B$$

6. $\frac{\tan(A-B)}{\tan A} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = 1$ ナラバ

$$\tan A \tan B = \tan^2 C$$

7. $\sin(A+B+C)$ ト $\cos(A+B+C)$ トヲ A, B, C ノ \sin ト \cos トデ表ハセ。

8. $\tan(A+B+C)$ ヲ A, B, C ノ \tan デ表ハセ。

9. A, B ハ正角デ $A+B < 90^\circ$ ナラバ

$$[1] \sin(A+B) < \sin A + \sin B$$

$$[2] \tan(A+B) > \tan A + \tan B$$

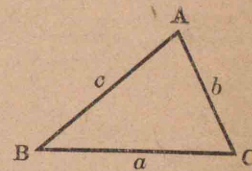
10. θ ガ 0° ヨリ 360° マデ増ストキニ $\cos \theta + \sin \theta$ ガ正デアル範圍ヲ示セ。又コノ式ノ最大ノ値ヲ求メヨ。

第 4 章 三角形ニ關スル公式

20. 三角形ノ原素

三角形ノ三ツノ邊ト三ツノ角トヲ三角形ノ原素トイフ。

三角形 ABC = 於テ角 A, B, C = 對スル邊ノ長サヲソレゾレ a, b, c デ表ハスコトニ定メル。



A, B, C ハ 0° ト 180° トノ間ノ正角デ

$$A+B+C=180^\circ$$

從ツテ

$$B+C=180^\circ-A, \quad \frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

依ツテ

$$\sin(B+C)=\sin A, \quad \cos(B+C)=-\cos A$$

$$\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}, \quad \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}, \quad \tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$$

ナドノ關係ガアル。

注意 三角形ノ角ハ 0° ト 180° トノ間ニアルカラ、ソノ \cos 又ハ \tan ノ値ヲ知レバ角ノ値ハ確定スルガ、 \sin ノ値ヲ知ツテ角ノ値ヲ確定スルコトハ出来ナイ

問 三角形 ABC = 於テ

$$\sin A = \frac{1}{2}, \quad \cos(B-C) = \frac{1}{2}$$

ナルトキ A, B, C ヲ求メヨ。

21. 正弦法則

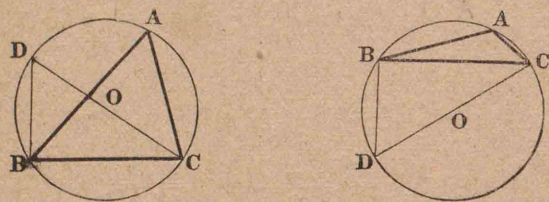
定理 三角形ノ三邊ハソノ對角ノ正弦ニ比例スル。

即チ $\triangle ABC$ = 於テ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (17)$$

之ヲ正弦法則トイフ。

證明 $\triangle ABC$ ノ外接圓ニ於テ C ヨリ直徑 CD ヲ引キ, BD ヲ結ベバ $\angle CBD$ ハ直角デアルカラ



$$BC = CD \sin D$$

然ルニ $A < 90^\circ$ ナルトキハ $\angle D = \angle A$

$A > 90^\circ$ ナルトキハ $\angle D = 180^\circ - \angle A$

何レノ場合デモ $\sin D = \sin A$

$$\therefore BC = CD \sin A$$

依ツテ外接圓ノ半徑ヲ R デ表ハセバ

$$a = 2R \sin A$$

即チ

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

A ガ直角ナルトキハ $\sin A = 1$, $a = 2R$ デアルカラ上式ハ矢張り成立スル。

$$\text{同様ニ} \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

問 1. $\triangle ABC$ ノ頂點 C ヨリ對邊 AB = 下セル垂線ノ長サヲ h トスレバ

$$h = a \sin B = b \sin A$$

之カラ正弦法則ヲ導ケ。

問 2. $\triangle ABC$ = 於テ次ノ各式ヲ證明セヨ。

$$[1] \quad \sin A + \sin B > \sin C$$

$$[2] \quad a \sin A - b \sin B = c \sin(A-B)$$

$$[3] \quad \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 0 \quad \text{ナラバ} \quad C = 90^\circ \quad \text{デアル。}$$

問 3. $a \cos A = b \cos B$ ナラバ $\triangle ABC$ ハ二等邊三角形ナルカ若シクハ直角三角形デアル。

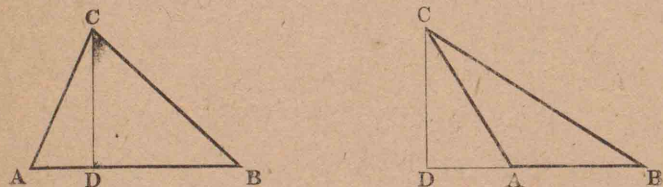
22. 餘弦法則

定理 三角形ノ各邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリコノ二邊トソノ夾角ノ餘弦トノ連乘積ノ2倍ヲ引イタモノニ等シイ。

$$\left. \begin{aligned} \text{即チ} \quad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

之ヲ餘弦法則トイフ。

證明 Cヨリ AB又ハソノ延長ニ下セル垂線ヲ CDトスレバ、幾何ノ定理ニヨリ、Aガ銳角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD$$

デアル。然ルニ Aガ銳角ナルカ又ハ鈍角ナルカニ從ツテ

$$AD = AC \cos A$$

$$\text{又ハ} \quad AD = AC \cos(180^\circ - A) = -AC \cos A$$

デアルカラ、何レニシテモ

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos A$$

$$\text{即チ} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

次ニ Aガ直角ナルトキハ $a^2 = b^2 + c^2$ デ且 $\cos A = 0$ デアルカラ上ノ式ハ成立スル。即チ上ノ式ハ Aノ如何ニ拘ラス常ニ成立ツ。他ノ二式モ同様デアル。

問 1. $\triangle ABC$ ニ於テ次式ヲ證明セヨ。

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

問 2. 前問ノ等式カラ $\cos A, \cos B, \cos C$ ヲ求メテ餘弦法則ヲ導ケ。

問 3. $\triangle ABC$ ニ於テ次ノ式ヲ證明セヨ。

$$[1] \quad a + b + c = (b + c) \cos A + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C$$

$$[2] \quad \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

$$[3] \quad c(a \cos B - b \cos A) = a^2 - b^2$$

23. 正切法則

定理 三角形ノ二邊ノ差ト和トノ比ハソノ二邊ノ對角ノ差半ノ正切ト、和半ノ正切トノ比ニ等シイ。

例へバ

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}$$

【證明】 正弦法則 = ヨリ

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}$$

之カラ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A-B}{2} &= \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \\ \tan \frac{B-C}{2} &= \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \\ \tan \frac{C-A}{2} &= \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

【注意】 コレ等ヲ Napier ノ公式トイフ。

問 1. $\triangle ABC$ = 於テ $b=10$ cm, $c=5$ cm, $A=60^\circ$ ナル

トキ他ノ二角ヲ求メヨ。

問 2. $\triangle ABC$ = 於テ次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$[1] \sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}$$

$$[2] \cos \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}$$

24. 半角ノ正弦・餘弦・正切

半角ノ公式及ビ餘弦法則 = ヨリ

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

$$= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

今 $a+b+c=2s$ ト置ケバ

$$a-b+c=2(s-b), \quad a+b-c=2(s-c)$$

ヂアルカラ上ノ式カラ

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{4(s-b)(s-c)}{2bc}$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\text{同様 = シテ } \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \quad (20)$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

又 $2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A$ ニヨツテ同様ノ計算ヲナセ
バ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned} \right\} (21)$$

從ツテ(18)ト(19)ニヨリ

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned} \right\} (22)$$

コレ等ノ公式ハ三角形ノ三邊ノ長サヲ知ル場合
ニ對數計算ニヨリ角ヲ計算スルノニ用ヒラレル。

問 1. $\triangle ABC$ ニ於テ次ノ各等式ヲ證明セヨ。

$$[1] \quad a \cos^2 \frac{B}{2} + b \cos^2 \frac{A}{2} = s$$

$$[2] \quad (s-a) \tan \frac{A}{2} = (s-b) \tan \frac{B}{2} = (s-c) \tan \frac{C}{2}$$

$$[3] \quad \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

問 2. $\triangle ABC$ ニ於テ三邊 a, b, c ガ等差級數ヲナ
ストキ次ノ式ヲ證明セヨ。

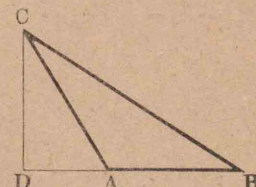
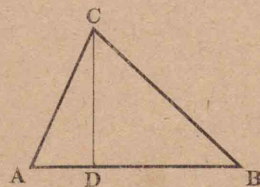
$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2} = 3$$

25. 三角形ノ面積

定理 三角形ノ面積ハ二邊トソノ夾角ノ正弦
トノ積ノ半分ニ等シイ。

即チ $\triangle ABC$ ノ面積ヲ S デ表セバ

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \quad (23)$$



證明 頂點 C ヨリ對邊 AB ニ垂線 CD ヲ引ケバ

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

$$\text{然ルニ} \quad CD = b \sin A$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

ソノ他モ同様デアル。

$$\text{系} \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

之ニ

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

ヲ代入スレバ

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (21)$$

トナル。之ハ既ニ學ンダ Heron ノ公式デアル。

問 1. 二邊ガ 20 cm, 25 cm デソノ夾角ガ 72° デアル三角形ノ面積ヲ計算セヨ(平方糎ノ位マデ)。

問 2. $\triangle ABC$ ニ於テ $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ ヲ證明セヨ。

問題 (6)

- $\triangle ABC$ ニ於テ $a = 12$ cm, $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$ ナラバ b , c ハ幾 cm カ。
- 三邊ノ長サガ 7 cm, 9 cm, 13 cm ナル三角形ノ最大角ヲ求メヨ。
- $a:b:c = 2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$ ナルトキ $\triangle ABC$ ノ最小角ヲ求メヨ。

4. $\triangle ABC$ ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$[1] \quad a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0$$

$$[2] \quad \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{\sin(B-C)}{\sin A}$$

$$[3] \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\cos C - \cos B}{1 + \cos A}$$

$$[4] \quad \tan A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$$

$$[5] \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\cot A} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{\cot B} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\cot C}$$

5. $\sin A = 2 \sin C \cos B$ ナラバ $\triangle ABC$ ハ二等邊三角形デアル。6. $\cos A + \cos B = \sin C$ ナラバ $\triangle ABC$ ハ直角三角形デアル。7. $\triangle ABC$ ノ A ヨリ引イタ中線ノ長サハ

$$\frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$$

デアル。

8. $\triangle ABC$ ノ角 A ノ二等分線ノ長サハ

$$\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$$

デアル。



第 5 章 三角形ノ解法

26. 三角函数ノ對數

三角形ニ關スル計算ニ於テモ對數ガ利用サレル。コノ場合ニ三角函数ノ値ソレ自身ヨリハツノ對數ノ値ヲ直接ニ知ルコトヲ得レバ便利デアルカラ、之ヲ表ニシタモノガアル。之ヲ三角函数ノ對數表ト稱スル。

三角函数ノ對數表ノ組織ハ大略眞數表及ビ數ノ對數表ト同ジデアルガ、タゞ三角函数ノ値ハ 1 ヨリ小ナルモノガ多イカラソノ對數ノ指標ハ負數ガ多イ。

注意 1. 表中ニ負號ヲ一々附ケルコトハ印刷上不便デアルカラ對數ノ眞ノ値ニ 10 ヲ加ヘテ正數トシタモノヲ表ニシタモノガアル。カヤウナ場合ニハ之ヲ表對數トイヒ、Lsin, Lcos 等ト書ク。

故ニ $\log \sin A = L \sin A - 10$ デアル。

本書ノ卷末ニ載セテアルモノハ 10' 飛ビノ四桁ノ對數表デアル。次ニソノ用例ヲ示ス。

例ヘバ $\log \sin 32^\circ 46'$ ヲ求メルニ、

表ニヨリ $\log \sin 32^\circ 40' = \bar{1}.7322$

$$\log \sin 32^\circ 50' = \bar{1}.7342$$

角ノ變化ガ微小ナルトキハ之ニ伴フ三角函数ノ變化ハホゞ角ノ變化ニ正比例スルモノト見做シテ概算スル。之ヲ比例部分ノ理ト稱スル。

ソコデ $32^\circ 40'$ ヨリ角ガ 10' 増加シテ $32^\circ 50'$ トナル間ニソノ正弦對數ハ 0.0020 ダケ増加スル故 $32^\circ 40'$ ヨリ 6' 増加シテ $32^\circ 46'$ トナル間ニソノ正弦ノ對數ガ増加スル値ヲ x トスレバ

$$10 : 6 = 0.0020 : x$$

$$\therefore x = 0.0012$$

$$\text{依ツテ } \log \sin 32^\circ 46' = \bar{1}.7322 + 0.0012$$

$$= \bar{1}.7334$$

コノ計算ニ於ケル 0.0020 ハ小數ノ末位ヲ單位トスレバ 20 ニナル。カヤウナ數ヲ表差トイヒ、表中 $\log \sin$ ノ行ノ右ニ記シテアル。 $\log \cos$ ニ對スル表差モ同様デアル。

$\log \tan$ 及ビ $\log \cot$ ノ表差ハ共通デアルカラ表ノ中央ニ通差トイフ欄ヲ設ケテ載セテアル。

注意 2. 又計算ノ手數ヲ省クタメニ各ノ表差ニ對シテソノ $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}$ ヲ表トシタモノヲ對數表ノ下ニ添ヘタモノモアル。之ヲ比例部分ノ表トイフ。

28. 一 邊 ト 二 角 ト ヲ 知 ル 場 合

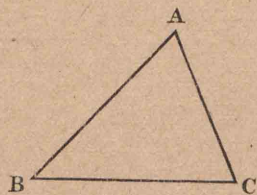
與ヘラレタ一 邊ヲ a トスル。與ヘラレタ二 角ハ A, B, C ノ中ノ何レトスルモ殘リノ一ツハ

$$A+B+C=180^\circ$$

カラ求メラレル。

次ニ正弦法則ニヨリ

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$



例 $a=34.9^*$, $B=98^\circ 43'$, $C=31^\circ 19'$ ナル三角形ヲ解ケ。

解 $A=180^\circ - (B+C) = 49^\circ 58'$

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

$$\log \sin A = \bar{1}.8841$$

$\log a = 1.5428$	$\log a = 1.5428$
$\log \sin B = \bar{1}.9949$	$\log \sin C = \bar{1}.7158$
$-\log \sin A = 0.1159$	$-\log \sin A = 0.1159$
$\log b = 1.6536$	$\log c = 1.3745$
$b = 45.04$	$c = 23.69$

$$\text{(答)} \quad A=49^\circ 58', \quad b=45.0, \quad c=23.7$$

注意 上ノ對數計算ニヨツテ得タ結果ハ勿論近似値デアル。

* 長サノ單位ヲ略スル。以下同様

例 次ノ原素ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$A=73^\circ 8', \quad C=55^\circ 29', \quad b=484$$

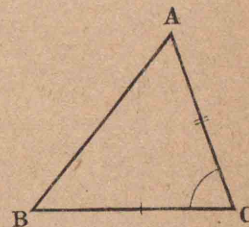
29. 二 邊 ト ソ ノ 夾 角 ト ヲ 知 ル 場 合

a, b 及ビ C ヲ與ヘラレタ二 邊トソノ夾角トシ、且 $a > b$ トスル。

先ツ $A+B=180^\circ - C$ ヲリ

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \quad (1)$$

$$\text{又} \quad \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \quad (2)$$



(1) ヲリ $\frac{A+B}{2}$, (2) ヲリ $\frac{A-B}{2}$ ヲ得ルカラ、之ヲ加減

シテ A, B ヲ得ル。次ニ

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (A-B)}$$

ニヨツテ c ヲ得ル。(179 頁問 2 [2])

注意 A, B ヲ得タ上ハ正弦法則ニヨツテ c ヲ求メルコトガ出來ルガ、上ノ公式ニヨレバ $\log a$ 又ハ $\log b$ ヲ求メル必要ガナイカラ便利デアル。

例 $a=48.78$, $b=31.01$, $C=68^\circ 34'$ ナル三角形ヲ解ケ。

解 $\frac{C}{2} = 34^\circ 17'$

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - 34^\circ 17' = 55^\circ 43'$$

$$a-b=17.77, \quad a+b=79.79$$

$$\log \tan \frac{A-B}{2} = \log(a-b) - \log(a+b) + \log \cot \frac{C}{2}$$

$$\log c = \log(a+b) + \log \sin \frac{C}{2} - \log \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\log(a+b) = 1.9020$$

$$\log(a-b) = 1.2497$$

$$-\log(a+b) = \bar{2}.0980$$

$$\log \cot \frac{C}{2} = 0.1664$$

$$\log \tan \frac{A-B}{2} = \bar{1}.5141$$

$$\frac{A-B}{2} = 18^\circ 5'$$

$$\therefore A = 73^\circ 48'$$

$$B = 37^\circ 38'$$

$$\log \cos \frac{A-B}{2} = \bar{1}.9780$$

$$\log(a+b) = 1.9020$$

$$\log \sin \frac{C}{2} = \bar{1}.7507$$

$$-\log \cos \frac{A-B}{2} = 0.0220$$

$$\log c = 1.6747$$

$$\therefore c = 47.28$$

(答) $A = 73^\circ 48'$, $B = 37^\circ 38'$, $c = 47.28$

例 次ノ原素ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$a=276, \quad b=200, \quad C=57^\circ 35'$$

30. 二邊トソノ一對角トヲ知ル場合

a, b, A ヲ與ヘラレタモノトスレバ先ヅ正弦法則

ニヨリ

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

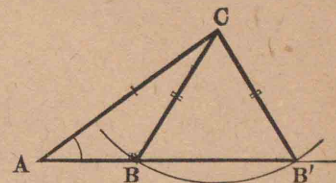
之ヨリ B ヲ求メ、從ツテ

$$C = 180^\circ - (A+B)$$

ヲ得ル。次ニ再ビ正弦法

則ヲ用ヒテ

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$



例 a, b, A ノ値ニヨリ種々ノ場合ヲ生ズル。

[1] $\frac{b \sin A}{a} > 1$ ナルトキハ $\sin B > 1$ トナルカラ

解ガナイ。

[2] $\frac{b \sin A}{a} = 1$ ナルトキハ $\sin B = 1$, 從ツテ $B = 90^\circ$ 。

故ニコノ場合ニハ $A \geq 90^\circ$ ナルトキハ $C \leq 0^\circ$

ニナルカラ不可能デ $A < 90^\circ$ ナラバ唯一ツノ

解ガアル。

[3] $\frac{b \sin A}{a} < 1$ ナルトキハ $\sin B < 1$ トナリ B ノ

値ハ二ツアル。一ツハ銳角、一ツハ鈍角デア

ル。然シ $a \geq b$ ナラバ $A \geq B$ デアルカラ B

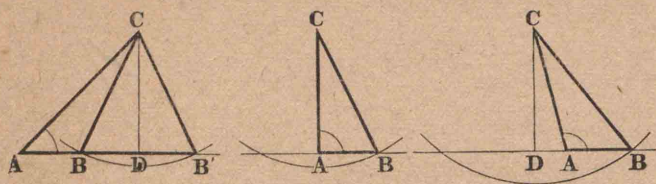
ハ銳角デナケレバナラヌ。即チ解ハ唯一ツ

デアル。若シ $a < b$ ナラバ B ヲ銳角トシテモ、

鈍角トシテモ、之ニ應ジテ C ノ二ツノ値ヲ得

ル。即チコノ場合ニハ二ツノ解ガアル (之

ヲ兩意ノ場合トイフ)。



注意 $b \sin A$ ハ C カラ AB へノ垂線 CD ノ長サデアル。

例 $a=286.9, b=402.8, A=38^\circ 20'$ ナル三角形ヲ解ケ。

例解 $\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

$$\log a = 2.4578$$

$\log b = 2.6051$	
$\log \sin A = \bar{1}.7926$	
$-\log a = \bar{3}.5422$	
<hr/>	
$\log \sin B = \bar{1}.9399$	
$\therefore B = 60^\circ 33'$	$B' = 119^\circ 27'$
$A + B = 98^\circ 53'$	$A + B' = 157^\circ 47'$
$C = 81^\circ 7'$	$C' = 22^\circ 13'$
$\log a = 2.4578$	$\log a = 2.4578$
$\log \sin C = \bar{1}.9947$	$\log \sin C' = \bar{1}.5776$
$-\log \sin A = 0.2074$	$-\log \sin A = 0.2074$
<hr/>	
$\log c = 2.6599$	$\log c' = 2.2428$
$\therefore c = 457.0$	$c' = 174.9$

(答) $B = 60^\circ 33', C = 81^\circ 7', c = 457$ 又ハ
 $B' = 119^\circ 27', C' = 22^\circ 13', c = 174.9$

例 次ノ原素ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$a=395, b=449, A=42^\circ 17'$$

31. 三邊ヲ知ル場合

コノ場合ニハ半角ノ正切ヲ與ヘル公式

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ニヨツテ三ツノ角ヲ求メルコトガ出來ル。

實際ノ計算デハ先ヅ

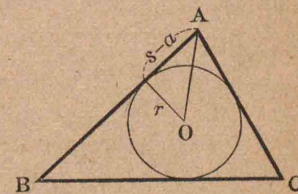
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

ヲ計算シテ

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}$$



トスルノガ便利デアル。 r ハ内接圓ノ半徑デアル。

例 $a=279.5, b=411.9, c=306.6$ ナル三角形ヲ解ケ。

$$\text{例} \quad \log r = \frac{1}{2} \{ \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c) - \log s \}$$

$$\log \tan \frac{A}{2} = \log r - \log(s-a)$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = \log r - \log(s-b)$$

$$\log \tan \frac{C}{2} = \log r - \log(s-c)$$

$s=499$	$\log s=2.6981$
$s-a=219.5$	$\log(s-a)=2.3414$
$s-b=87.1$	$\log(s-b)=1.9400$
$s-c=192.4$	$\log(s-c)=2.2842$
	$-\log s = \bar{3}.3019$
	$2 \log r = 3.8675$

$$\therefore \log r = 1.9338$$

$$-\log(s-a) = \bar{3}.6586$$

$$\log \tan \frac{A}{2} = \bar{1}.5924 \quad \therefore \frac{A}{2} = 21^\circ 22'$$

$$\log r = 1.9338$$

$$-\log(s-b) = \bar{2}.0600$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = \bar{1}.9938 \quad \therefore \frac{B}{2} = 44^\circ 36'$$

$$\log r = 1.9338$$

$$-\log(s-c) = \bar{3}.7158$$

$$\log \tan \frac{C}{2} = \bar{1}.6496 \quad \therefore \frac{C}{2} = 24^\circ 3'$$

$$\text{(答)} \quad A = 42^\circ 44', B = 89^\circ 12', C = 48^\circ 6'$$

注意 コノ例ノヤウニ A, B, C ヲ別々ニ求メタ場合ニハ
ソノ和ガ 180° = 等シイカ否カヲ驗セ。但シソノ和ニ
1 分内外ノ誤差ヲ生ズルコトガアルガ、之ハ四桁ノ對
數表ヲ用ヒル場合已ムヲ得ナイノデアアル。

問 次ノ原素ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$a=983.8, \quad b=700.4, \quad c=881.6$$

問題 (7)

次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。(1—5)

- | | | |
|---------------------|-----------|-----------|
| 1. $A=38^\circ 45'$ | B=105°19' | b=111.2 |
| 2. $a=270$ | c=500 | B=102°18' |
| 3. $b=920$ | c=128 | B=29°34' |
| 4. $a=858$ | b=972 | A=54°42' |
| 5. $a=624$ | b=489 | c=878 |

第6章 測量ノ問題

32. 測量ノ術語

距離ヤ高サ等ヲ測量スルニハ先ヅ適當ナ場所ニ適當ナ線分ヲ定メテ、ソノ長サヲ直接ニ精密ニ測リ置キ、之ヲ一邊トスル或三角形ヲ解クノデアル。

カヤウニ直接ニ測ツテ置ク線分ハ測量ノ基礎トナルカラ之ヲ**基線**ト稱ヘル。

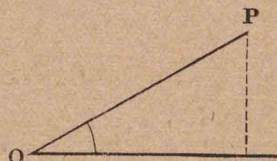
地面上ノ二點間ノ距離ヲ直接ニ測ルニハ測鎖又ハ卷尺ヲ用ヒル。

重錘ヲ絲デ吊ストキ絲ノトル方向ヲ**鉛直線**トイヒ、鉛直線ヲ含ム平面ヲ**鉛直面**トイフ。

鉛直線ニ垂直ナ平面ヲ**水平面**トイヒ、水平面上ノ直線ヲ**水平線**トイフ。又二ツノ水平線ノナス角ヲ**水平角**トイフ。

水平線ヲ決定スルニハ水準器ヲ用ヒル。

観測點Oカラ他ノ一點Pヲ見ルトキ、半直線OPガOヲ通ル水平面トナス角ヲ、Pガ水平面ノ上方ニアルトキ

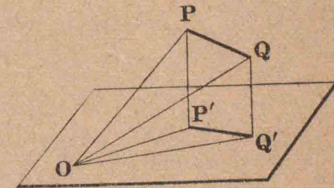


ハ**仰角**又ハ**高度**トイヒ、Pガ水平面ノ下方ニアルト

キハ**俯角**又ハ**深度**トイフ。

仰角俯角又ハ水平角ヲ測ルニハ**經緯儀**(とらんしつと)ヲ用ヒル。

観測點Oト他ノ二點P、Qトヲ連結スル二直線ノナス角ヲ二點P、Qノ**視角**トイフ。Oヲ通ル水平面



上ニ於ケルP、Qノ正射影ヲP'、Q'トスルトキP'Q'ヲP、Qノ**水平距離**トイヒ、 $\angle P'OQ'$ ヲP、Qノ**水平角**トイフコトガアル。

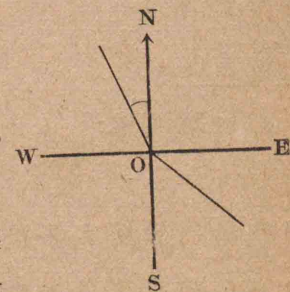
観測點Oヨリ一ツノ物體Mヲ視ルトキ丁度Mヲ夾ムヤウニOカラ引イタ二直線ノナス角ヲMノ**視角**トイフ。

水平面ヤ鉛直面ノ上ニナイ視角ヲ測ルニハ**六分儀**(せくすたんと)ヲ用ヒル。

水平面内ニ於テ一點カラ視ル他ノ點ノ方向ヲ**方位**トイフ。

通例、陸地測量ニ於テ方位ヲ言ヒ表ハスニハ、北又ハ南ヲ基準トシ、ソレヨリ東又ハ西ニ偏

スル角度ヲ以テスル。例ヘバ北 $25^{\circ}30'$ 西 ($N 25^{\circ}30' W$)



ヲ得ル。依ツテ $\triangle PAQ$ = 於テ二邊 AP, AQ 及ビソノ夾角 θ ガ既知デアルカラ PQ ノ長サヲ求メ得ル。

即チ $AQ=a, AP=b, PQ=x$

ト置ケバ

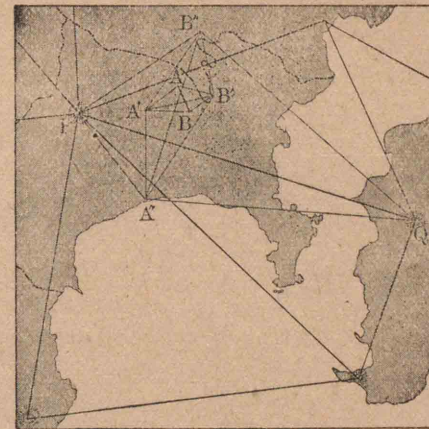
$$\tan \frac{\angle APQ - \angle AQP}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{\theta}{2}$$

$$x = \frac{(a+b) \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\angle APQ - \angle AQP}{2}}$$

注意 1. 上記ノ方法ハ A, B, P, Q ガ同一平面上ニナイトキニモ適用シ得ルノデアルガ, A, B, P, Q ガ同一平面上ニアルトキハ $\theta = \alpha - \alpha'$ デアル。實際測量ニ於テ PQ ノ水平距離ヲ測ルトキニハ, A カラ B, P, Q ノ方位ヲ觀測シテ水平角 α, α', θ ヲ求メルノデアル。コノ場合ニハ B = 於テモ水平角 PBQ ヲ求メテ $\triangle PBQ$ カラモ PQ ヲ求メテ驗算ヲスルガヨイ。

注意 2. 基線 AB ハ精密ニ測リ易イ場所ニ選ブコトヲ要スル。若シ A, B カラ P 又ハ Q ガ望ミ得ナイトキニハ, 次ノ圖ニ示スヤウニ, 先ヅ AB ヲ基線トシテ $A'B'$ ヲ求メ, 次ニ $A'B'$ ヲ基線トシテ $A''B''$ ヲ求メテ遂ニ PQ ヲ求メルノデアル。

陸地測量(三角測量)ハコノ理ニ基ヅクモノデ, 各地方ニ適當ナ基線ヲ設ケテ非常ニ精密ナ方法ニヨツテソ



ノ長サヲ測リ, 上記ノ方法ニヨツテ次第ニ多數ノ三角形ヲ測定シテ, カヤウナ三角網デソノ地方ノ全部ヲ被ウテ各地ノ位置ヲ決定スルノデアル。

例 南北ニ通ズル道路カラ或ル目標ヲ北東ニ望ンデカラ北へ2km進ンダトキニ, ソノ目標ガ東南東ニ見エタトイフ。ソノ目標カラ道路マデノ距離ヲ求メヨ。

34. 高サノ測定

例ヘバ山ノ高サノヤウニ, 直立體 PQ ノ基點 Q = 達シ得ナイトキ, P カラ觀測點 A ヲ通ル水平面ニ至ル鉛直線 PQ ノ長サヲ求メルコト。

[1] 直線 AQ 上ニ基線ヲトリ得ル場合。

先ヅ AQ 上ニ基線 AB ヲ測
リ、之ヲ a トスル。

次ニ A 及ビ B ニ於テ P ノ仰
角ヲ測リ、之ヲ夫々 α, β トスル。

然ルトキハ $\triangle ABP$ ニ於テ

$$AP = \frac{a \sin(180^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

從ツテ $PQ = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$

[2] 直線 AQ 上ニ基線ヲトリ得ナイ場合。

先ヅ適當ナ基線

AB ヲ測リ、之ヲ a ト
シ、次ニ

$$\angle PAB = \alpha$$

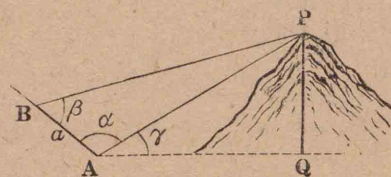
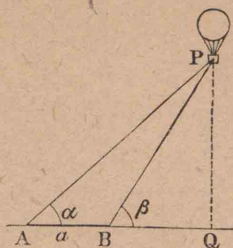
$$\angle PBA = \beta, \quad \angle PAQ = \gamma$$

ヲ測ル。然ルトキハ $\triangle PAB$ カラ

$$AP = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{從ツテ} \quad PQ = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$$

實際ニ於テハ A ハ觀測者ノ眼ノ位置デアルカラ、
上ノ圖ニ於テ PQ = 眼ノ高サヲ加ヘタモノガ眞ノ高
サデアル。然シ本書デハ特ニ斷ラナイ限リ眼ノ高サ
ハ計算ニ入レナイモノトスル。

五重ノ塔ガアル。ソノ基底カラ水平ニ



156.8m 距ツタ地點デ塔頂ヲ望ミ、仰角 $12^\circ 32'$ ヲ
得タトスレバ、塔ノ高サハ何程カ。

問題 (8)

1. 平地ニ直立シタ甲乙二ツノ柱ガアツテ、ソノ高
サハ甲ハ a m、乙ハ $3a$ m デアル。コノ平地上兩柱
ノ基底カラ等距離ニアル一ツノ地點ニ於テ乙柱
ヲ見込ム角ハ甲柱ヲ見込ム角ノ 2 倍デアルトイ
フ。コノ地點ノ各柱ヨリノ距離ヲ求メヨ。
2. 隣家ノ庭ニアル松ノ上端ヲ、地上 1m ノ點カラ
測ツテ仰角 $52^\circ 30'$ ヲ得タ。次ニコノ點ト同一鉛
直線上ニアル地上 5m ノ階上カラ測ツテ仰角
 $7^\circ 30'$ ヲ得タ。松ノ高サヲ求メヨ。
3. 水平面ト 20° ノ傾斜ヲシテキル長サ 60m ノ坂
路ガアル。今傾斜ヲ減ジテ $15^\circ 30'$ トスレバ坂路
ノ長サハ何程ニナルカ。
4. 兩岸ガ平行ナ川ガアル。ソノ一方ノ岸ニアル
二點 A, B 間ノ距離ガ 213m デ、コノ二地點カラ對
岸ノ點 C ニアル樹ヲ觀測シテ $\angle ABC = 71^\circ 24'$ 、
 $\angle BAC = 48^\circ 36'$ ナルコトガ分ツタ。川ノ幅ハ幾
ムカ。

5. 高サ 20m ノ塔ノ頂上カラ塔ノ基礎ト同一水平面上ニアツテ、ソノ正北ニ當ル二箇ノ目標 A, B ノ俯角ヲ測ツテ夫々 30° , $21^\circ 40'$ ヲ得タ。A, B 間ノ距離ハ何程カ。
6. 海上ノ一點ニ於テ絶壁ノ頂上ニ直立スル長サ 10m ノ旗竿ノ上端及ビ下端ノ仰角ヲ測ツテ夫々 $42^\circ 10'$ 及ビ $37^\circ 50'$ ヲ得タ。海面上絶壁ノ高サヲ求メヨ。
7. 正南ニ向ツテ進航スル船カラ南西ノ方向ニ重ナツテ見エタ二ツノ燈臺ガ 25 海里進ンダ後ニハ一ツハ正西ニ、一ツハ西北西ニ見エタトイフ。燈臺ノ間ノ距離ヲ求メヨ。
8. 海濱ニ聳ユル山ノ高サ CD ヲ測ルタメニ 365m 相隔タル二船 A, B カラ
 $\angle BAC = 67^\circ 16'$, $\angle ABC = 54^\circ 20'$, 仰角 $CAD = 35^\circ 30'$
 ヲ測ツタ。之ヨリ山ノ高サヲ求メヨ。
9. 北西カラ南東ニ向ツテ長サ 100m ノ堀ガアツテ、ソノ高サガ 2m デアル。太陽ノ方向ガ南 15° 西デ高度ガ 60° ナルトキ、コノ堀ノ影ノ面積ハ何程カ。
10. A, B, C ハ同一水平面上ノ三地點デ、B ハ A ノ正

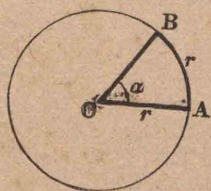
- 西, C ハ A ノ正南ニアル。A カラ北東ノ或ル目標ノ仰角ガ 60° デ、B, C カラハツレゾレ 45° , 30° デアル。AB ノ距離ガ 100m ナラバ AC ノ距離ハ何程カ。
11. 1000m 距ツタ二地點 A, B カラ氣球 C ヲ觀測スルト $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$, 又 AC ガ A ヲ通ル鉛直線トナス角ハ 60° デアル。氣球ノ地面ヨリノ高サ幾 m カ。
12. 正西ニ向ツテ v のとノ速サデ進行スル敵艦ヲ南西 a 海里ノ距離ニ於テ發見シタ我ガ艦ガ nv のとノ速サデ一直線ニ追ヒツクニハ針路ヲドウ取ツタラヨイカ。又追ヒツクマデノ時間ハ何程カ。但シ $a=10$, $v=15$, $n=\sqrt{2}$ トシテ計算セヨ。

弧度法ト三角方程式ノ解法

1. 弧度法

半径 r ナル圓 O ニ於テ半径ト等長ナル弧 AB ニ對スル中心角ヲ α トスル。

然ルトキハ全圓周ニ對スル中心角ハ 360° デ、中心角ハソノ弧ニ比例スルカラ



$$\alpha : 360^\circ = r : 2\pi r$$

$$\therefore \alpha = 360^\circ \times \frac{r}{2\pi r} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

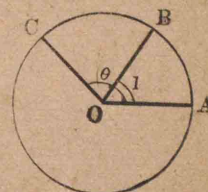
$$= 57.2957\dots = 57^\circ 17' 44''$$

デ、コノ角ノ大サハ半径 r ノ如何ニ拘ハラズ一定デアル。

コノ一定ノ角ヲ radian ト名ヅケ、之ヲ單位トシテ角ヲ測ルコトガアル。コノ場合ノ角ノ値ヲ弧度トイヒ、コノ方法ヲ弧度法トイフ。

定理 角ノ弧度ハソノ角ノ頂點ヲ中心トスル任意ノ圓ニ於テ、ソノ角ニ對スル弧ト半径トノ長サノ比ニ等シイ。

證明 $\angle AOC$ ノ弧度ヲ θ トスル。今頂點 O ヲ中心トシ任意ノ半径 r ヲ以テ圓ヲ畫キ、角ノ兩邊ト A 及ビ C ニ於テ交ハラシメ、弧 AC ノ長サヲ l トシ、 \widehat{AB} ヲ r ニ等シクトレバ



$$\theta = \frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{弧 } AC}{\text{弧 } AB} = \frac{l}{r}$$

故ニ $\angle AOC$ ノ弧度ハ l ト半径トノ比ニ等シイ。

注意 radian ヲ表ハス一定ノ記號ハナイ。又弧度法デハ單位ノ名稱 radian ヲ略スル。

主ナル角ノ度數ト弧度トヲ對照スレバ

度數	360°	180°	90°	60°	45°	30°	1°	0°
弧度	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{180}$	0

問1. 次ノ角ヲ弧度法デ表ハセ。

$$15^\circ, 48^\circ, 22^\circ 30', 270^\circ$$

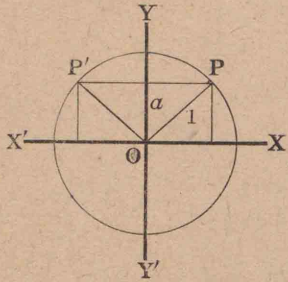
問2. 次ノ弧度ヲ有スル角ヲ六十分法デ表ハセ。

$$\frac{\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}, 0.75\pi$$

問3. 經度ノ差ガ 1° ナル赤道上ノ二點間ノ距離ヲ 111 km トスレバ地球ノ半径ハ約幾 km カ。

2. $\sin x = a$ ($-1 \leq a \leq 1$) ノ一般解

或角ノ正弦ノ値ハ唯一ツデアルガ、逆ニ同ジ値ヲ
 正弦トスル角ハ無數ニアル。
 直交軸 XOX' , YOY' フトリ、原
 點ヲ中心トシテ、半徑 1 ナル
 圓ヲ畫キ、 y 軸上ノ點 $(0, a)$
 フ通り、 x 軸ニ平行ナ直線ヲ
 引キ、圓周トノ交點ヲ P, P' ト
 スル。



然ルトキ OX フ角ノ首線トスレバ、 a フ正弦トス
 ル角ノ廻轉線ノ位置ハ OP 及ビ OP' ノ二ツデ、ソノ
 他ニハナイ。

今 OP フ廻轉線トスル一ツノ角ヲ α トスレバ、
 $\pi - \alpha$ ハ OP' フ廻轉線トスル一ツノ角デアル。

故ニ $\sin x = a$

ニ適スル總テノ角ハ α 及ビ $\pi - \alpha$ ニ夫々 360° 即チ
 2π ノ整數倍ヲ加ヘタモノデアル。即チ

$$\left. \begin{aligned} x &= 2n\pi + \alpha \\ \text{及ビ} \quad x &= (2n+1)\pi - \alpha \end{aligned} \right\}$$

但シ n ハ 0 又ハ任意ノ整數 ($\pm 1, \pm 2, \dots$) フ表ハス。

【注意】 $2n$ ハ偶數、 $2n+1$ ハ奇數ヲ表ハスカラ前ノ解ヲ一

ツニ纏メテ

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha$$

ト書キ表ハスコトガ出來ル。

【問】 次ノ各式ニ適スル x ノ一般ノ値ヲ求メヨ。

[1] $\sin x = 1$ [2] $\sin x = \frac{1}{2}$

[3] $\sin x = 0$

3. $\cos x = b$ ($-1 \leq b \leq 1$) ノ一般解

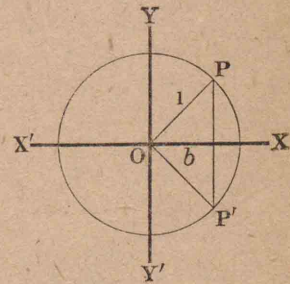
前節ト同様ニ直交軸 XOX' , YOY' フトリ、 OX フ角
 ノ首線トシ、中心ガ O 、半徑ガ 1 ナル圓周ヲ畫ク。

次ニ x 軸上ノ點 $(b, 0)$ フ通り y 軸ニ平行ナ直線
 フ引キ、圓周トノ交點ヲ P, P'

トスレバ

$$\cos x = b$$

ニ適スル角ノ廻轉線ノ位置
 ハ OP 及ビ OP' ノ二ツデソ
 ノ他ニハナイ。



而シテ OP フ廻轉線トスル一ツノ角ヲ α トスレ
 バ $-\alpha$ ハ OP' フ廻轉線トスル一ツノ角デアル。

故ニ $\cos x = b$ ニ適スル總テノ角ハ $\pm \alpha = 2\pi$ ノ任

意ノ整数倍ヲ加ヘタモノデアル。即チ

$$x=2n\pi+\alpha$$

但シ n ハ 0 又ハ任意ノ整数デアル。

㊦ 次ノ各式ニ適スル x ノ一般ノ値ヲ求メヨ。

$$[1] \cos 3x=0 \quad [2] \cos^2 x=1$$

$$[3] \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad [4] \cos x=-\frac{1}{2}$$

4. $\tan x=t$ ($-\infty < t < +\infty$) ノ一般解

直交軸 XOX' , YOY' ニ關シ坐標ガ $(1, t)$ ナル點ヲ T トスル。

原點 O ヲ中心トシ、半徑 1 ナル圓周ト直線 OT トノ交點ヲ P, P' トスレバ、 OX ヲ首線トシ、

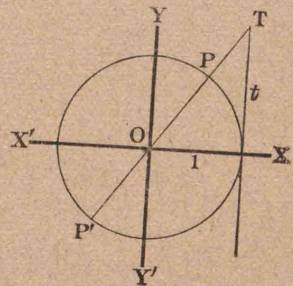
$$\tan x=t$$

ニ適スル廻轉線ノ位置ハ OP

及ビ OP' ノ二ツデソノ他ニハナイ。

今 OP ヲ廻轉線トスル一ツノ角ヲ α トスレバ、 $\pi+\alpha$ ハ OP' ヲ廻轉線トスル一ツノ角デアルカラ $\tan x=t$ ノ一般ノ解ハ

$$x=2n\pi+\alpha$$



及ビ

$$x=(2n+1)\pi+\alpha$$

デアル。之ヲ一ツニ纏メルト

$$x=n\pi+\alpha$$

但シ n ハ 0 又ハ任意ノ整数デアル。

㊦ 次ノ各式ニ適スル x ノ一般ノ値ヲ求メヨ

$$[1] \tan x=1 \quad [2] \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$[3] \tan x=-\sqrt{3}$$

5. 三角方程式ノ解法

未知角ノ三角函數ヲ含ム方程式ヲ三角方程式トイフ。

前數節デ取扱ツタ

$$\sin x=a, \quad \cos x=b, \quad \tan x=t$$

ハ三角方程式ノ基本的ノモノデアル。一般ニ三角方程式ヲ解クニハ適當ノ方法デ上ノ三ツノ何レカノ形ノ方程式ヲ導キ出シテソノ一般解ヲ求メルノデアル。

例 1. $6\cos^2 x - 5\sin x = 2$ ヲ解ケ

解 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ヲ代入シテ整頓スレバ

$$6\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$\text{故} = \sin x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{12}$$

$$\text{即チ} \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{又ハ} \quad \sin x = -\frac{4}{3} \quad (2)$$

(1)ノ一ツノ解ハ $x = \frac{\pi}{6}$ デアルカラ

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{又ハ} \quad (2n+1)\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\text{即チ} \quad x = \frac{(12n+1)\pi}{6} \quad \text{又ハ} \quad \frac{(12n+5)\pi}{6} \quad (\text{答})$$

(2)ハ不可能デアル。

例 2. $\cos \theta + \cos 3\theta = \sqrt{2} \cos 2\theta$ ヲ解ケ。

解 左邊ヲ積ノ形ニ變化スレバ

$$2 \cos 2\theta \cos \theta = \sqrt{2} \cos 2\theta$$

$$\text{故} = \cos 2\theta = 0 \quad (1)$$

$$\text{又ハ} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$(1) \text{カラ} \quad 2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{從ツテ} \quad \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$$

$$(2) \text{カラ} \quad \theta = 2n'\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\text{即チ} \quad \theta = (8n' \pm 1)\frac{\pi}{4}$$

然ルニ $8n' \pm 1$ ハ奇數デ $2n+1$ ノ中ニ含マレ
テキルカラ、解ハ

$$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4} \quad (\text{答})$$

デアル。

注意 (1)ヲ解クニハ 2θ ヲ未知角ト見做シテ $\cos x = b$ ノ
一般解ヲ適用セネバナラス。若シ(1)ノ一ツノ解ガ $\frac{\pi}{4}$
デアルコトカラ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ トスレバ一般解ガ得ラレス。

例 3. $\tan 3x = \cot x$ ヲ解ケ。

解 コノ方程式ヲ次ノヤウニ書クコトガ出来ル。

$$\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\therefore 3x = n\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8} \quad (\text{答})$$

例 4. 次ノ方程式カラ $0^\circ < x < 180^\circ$ ナル角 x ヲ求
メヨ。

$$\sin x + \sin 2x = \sin 3x$$

解 兩邊ヲ變形シテ

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\text{故} = \sin \frac{3x}{2} = 0 \quad (1)$$

答

答ハ参考ノタメニ掲ゲタノデアルカラ、ソノ数字ニ信頼セズ、
 驗算ヲシテ、十分ニ結果ヲ確メルコトガ肝要デアル。

- 頁 9. 問題 (1) 1. $a \cos \theta$ 3. 7.1508 cm 4. 30.47 m
 5. 2.73 km 又ハ 0.73 km 6. 14° 7. 約 2 倍
 8. 583 m

- 頁 11. 問題 (2) 3. $\angle A = 45^\circ$ 9. 2 10. 0

- 頁 13. 問題 (3) 1. $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cot A = \frac{\sqrt{5}}{2}$
 $\sec A = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{3}{2}$ 2. $\sin A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$,
 $\tan A = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$ 3. $\sin A = \sqrt{\frac{1-a}{2}}$, $\cos A = \sqrt{\frac{1+a}{2}}$

4. $\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ 5. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

- 頁 27. 問題 (4) 1. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$;

$-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. x が 480° ナルトキ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$; x が -480° ナルトキ $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. 0, 0 4. $\pm \frac{p^2-1}{2p}$, +, - ハ A が 第一, 第三象限 = アルトキ, 第二, 第四象限 = アルトキ = 従ッテ $\tan A$ ノ 値ガ +, - ニナルヤウニ定メル。

5. $-\frac{12}{13}$, $-\frac{12}{5}$ 6. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\frac{-2\sqrt{13}}{13}$

7. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$; 0, -1 8. $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 9. 90°

10. $x = 15^\circ, y = 45^\circ$; $x = 135^\circ, y = 165^\circ$

- 頁 39. 問題 (5) 1. $0, \frac{7}{25}$ 2. $\frac{36}{77}, -\frac{84}{13}$
7. $\sin A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C,$
 $\cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C$
8. $\frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$
10. $135^\circ > \theta > 0^\circ, 360^\circ > \theta > 315^\circ$, 最大ノ値 $\sqrt{2}$
- 頁 50. 問題 (6) 1. $b=6.212 \text{ cm}, c=8.785 \text{ cm}$ 2. $108^\circ 2'$
3. 最小角 $A=45^\circ$
- 頁 63. 問題 (7) 1. $C=35^\circ 56', a=72.17, c=67.66$
2. $C=52^\circ 23', A=25^\circ 19', b=616.9$
3. $C=3^\circ 56', A=146^\circ 30', a=1029$
4. $B=67^\circ 38', C=57^\circ 40', c=888.2; B'=112^\circ 22', C'=12^\circ 56', c'=235.3$
5. $A=43^\circ 42', B=32^\circ 48', C=103^\circ 30'$
- 頁 71. 問題 (8) 1. $\sqrt{3}a \text{ m}$ 2. 5.45 m 3. 76.8 m
4. 174.9 m 5. 15.7 m 6. 60.2 m
7. 10.36 海里強 8. 202.2 m 9. 100 m^2
10. 253 m 11. 1866 m 12. 南 75° 西, 約 1 時間 20 分
- 頁 83. 問題 3. $\frac{\pi}{10'}, \frac{5\pi}{10'}, \frac{9\pi}{10'}, \frac{13\pi}{10'}, \frac{17\pi}{10'}, \frac{3\pi}{2}$
4. $\frac{n\pi}{3}$ 5. $\frac{n\pi}{2}$
6. $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ 7. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ 8. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
9. $n\pi + \frac{\pi}{4}$ 10. $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
11. $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ, 15^\circ, 75^\circ, 195^\circ, 255^\circ$ 12. $60^\circ, 300^\circ, 180^\circ$
13. $18^\circ, 54^\circ, 90^\circ, 126^\circ, 162^\circ, 198^\circ, 234^\circ, 270^\circ, 306^\circ, 342^\circ$ 14. 60°
15. $x=2n\pi + \frac{5}{12}\pi, y=2n\pi + \frac{\pi}{4}; x=2n\pi - \frac{\pi}{4}, y=2n\pi - \frac{5}{12}\pi$
16. $x=105^\circ, y=45^\circ; x=45^\circ, y=105^\circ$

附 表

三角函數ノ對數表 (2)-(9)

數ノ對數表 (10)-(11)

比例部分ノ表 (12)

公式一覽表 (13)-(16)

注 意

- (1) 0° カラ 8° マデノ角ノ $\log \sin$ ト 82° カラ 90° マデノ角ノ $\log \cos$ ハ (2) ノ表カラ, 又コレラノ角ノ $\log \tan, \log \cot$ ハ (3) ノ表カラ求メルガヨイ。ヨツテ (4) デコレラノ角ニ該當スル部分ニハ表差ガ載セテナイ。
- (2) 數ノ對數表デ差ノ欄ニ掲ゲタ數ハ各行最終ノ假數ト次行最初ノ假數トノ表差デアル。各行中間ノ假數ニ對スル表差ヲ求メルトキニモ, コノ數ヲ參考スレバ十ノ位ニ於ケル誤算ヲ避ケルコトガデキル。
- (3) 對數表ヲ使用スルトキニハ, 比例部分ノ表 (11) ヲ引キ出シテ置ク。

(2)

log sin

角	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	
0° 0'	—	4.4637	7648	9408	*0658	*1627	*2419	*3088	*3668	*4180	50'
10'	3.4637	5051	5429	5777	6099	6398	6678	6942	7190	7425	40'
20'	7648	7859	8061	8255	8439	8617	8787	8951	9109	9261	30'
30'	9408	9551	9689	9822	9952	*0078	*0200	*0319	*0435	*0548	20'
40'	2.0658	0765	0870	0972	1072	1169	1265	1358	1450	1539	10'
50'	1627	1713	1797	1880	1961	2041	2119	2196	2271	2346	0' 89°
1° 0'	2419	2490	2561	2630	2699	2766	2832	2898	2962	3025	50'
10'	3088	3150	3210	3270	3329	3388	3445	3502	3558	3613	40'
20'	3668	3722	3775	3828	3880	3931	3982	4032	4082	4131	30'
30'	4179	4227	4275	4322	4368	4414	4459	4504	4549	4593	20'
40'	4637	4680	4723	4765	4807	4848	4890	4930	4971	5011	10'
50'	5050	5090	5129	5167	5206	5243	5281	5318	5355	5392	0' 88°
2° 0'	5428	5464	5500	5535	5571	5605	5640	5674	5708	5742	50'
10'	5776	5809	5842	5875	5907	5939	5972	6003	6035	6066	40'
20'	6097	6128	6159	6189	6220	6250	6279	6309	6339	6368	30'
30'	6397	6426	6454	6483	6511	6539	6567	6595	6622	6650	20'
40'	6677	6704	6731	6758	6784	6810	6837	6863	6889	6914	10'
50'	6940	6965	6991	7016	7041	7066	7090	7115	7140	7164	0' 87°
3° 0'	7188	7212	7236	7260	7283	7307	7330	7354	7377	7400	50'
10'	7423	7445	7468	7491	7513	7535	7557	7580	7602	7623	40'
20'	7645	7667	7688	7710	7731	7752	7773	7794	7815	7836	30'
30'	7857	7877	7898	7918	7939	7959	7979	7999	8019	8039	20'
40'	8059	8078	8098	8117	8137	8156	8175	8194	8213	8232	10'
50'	8251	8270	8289	8307	8326	8345	8363	8381	8400	8418	0' 86°
4° 0'	8436	8454	8472	8490	8508	8525	8543	8560	8578	8595	50'
10'	8613	8630	8647	8665	8682	8699	8716	8733	8749	8766	40'
20'	8783	8799	8816	8833	8849	8865	8882	8898	8914	8930	30'
30'	8946	8962	8978	8994	9010	9026	9042	9057	9073	9089	20'
40'	9104	9119	9135	9150	9166	9181	9196	9211	9226	9241	10'
50'	9256	9271	9286	9301	9315	9330	9345	9359	9374	9388	0' 85°
5° 0'	9403	9417	9432	9446	9460	9475	9489	9503	9517	9531	50'
10'	9545	9559	9573	9587	9601	9614	9628	9642	9655	9669	40'
20'	9682	9696	9709	9723	9736	9750	9763	9776	9789	9803	30'
30'	9816	9829	9842	9855	9868	9881	9894	9907	9919	9932	20'
40'	9945	9958	9970	9983	9996	*0008	*0021	*0033	*0046	*0058	10'
50'	1.0070	0083	0095	0107	0120	0132	0144	0156	0168	0180	0' 84°
6° 0'	0192	0204	0216	0228	0240	0252	0264	0276	0287	0299	50'
10'	0311	0323	0334	0346	0357	0369	0380	0392	0403	0415	40'
20'	0426	0438	0449	0460	0472	0483	0494	0505	0516	0527	30'
30'	0539	0550	0561	0572	0583	0594	0605	0616	0626	0637	20'
40'	0648	0659	0670	0680	0691	0702	0712	0723	0734	0744	10'
50'	0755	0765	0776	0786	0797	0807	0818	0828	0838	0849	0' 83°
7° 0'	0859	0869	0879	0890	0900	0910	0920	0930	0940	0951	50'
10'	0961	0971	0981	0991	1001	1011	1020	1030	1040	1050	40'
20'	1060	1070	1080	1089	1099	1109	1118	1128	1138	1147	30'
30'	1157	1167	1176	1186	1195	1205	1214	1224	1233	1242	20'
40'	1252	1261	1271	1280	1289	1299	1308	1317	1326	1336	10'
50'	1345	1354	1363	1372	1381	1390	1399	1409	1418	1427	0' 82°
8° 0'	1436	1445	1453	1462	1471	1480	1489	1498	1507	1516	50' 81°
	10'	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'	角

log cos

log tan

(3)

角	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	
0° 0'	—	4.4637	7648	9408	*0658	*1627	*2419	*3088	*3668	*4180	50'
10'	3.4637	5051	5429	5777	6099	6398	6678	6942	7190	7425	40'
20'	7648	7860	8062	8255	8439	8617	8787	8951	9109	9261	30'
30'	9409	9551	9689	9823	9952	*0078	*0200	*0319	*0435	*0548	20'
40'	2.0658	0765	0870	0972	1072	1170	1265	1359	1450	1540	10'
50'	1627	1713	1798	1880	1962	2041	2120	2196	2272	2346	0' 89°
1° 0'	2419	2491	2562	2631	2700	2767	2833	2899	2963	3026	50'
10'	3089	3150	3211	3271	3330	3389	3446	3503	3559	3614	40'
20'	3669	3723	3776	3829	3881	3932	3983	4033	4083	4132	30'
30'	4181	4229	4276	4323	4370	4416	4461	4506	4551	4595	20'
40'	4638	4682	4725	4767	4809	4851	4892	4933	4973	5013	10'
50'	5053	5092	5131	5170	5208	5246	5283	5321	5358	5394	0' 88°
2° 0'	5431	5467	5503	5538	5573	5608	5643	5677	5711	5745	50'
10'	5779	5812	5845	5878	5911	5943	5975	6007	6038	6070	40'
20'	6101	6132	6163	6193	6223	6254	6283	6313	6343	6372	30'
30'	6401	6430	6459	6487	6515	6544	6571	6599	6627	6654	20'
40'	6682	6709	6736	6762	6789	6815	6842	6868	6894	6920	10'
50'	6945	6971	6996	7021	7046	7071	7096	7121	7145	7170	0' 87°
3° 0'	7194	7218	7242	7266	7290	7313	7337	7360	7383	7406	50'
10'	7429	7452	7475	7497	7520	7542	7565	7587	7609	7631	40'
20'	7652	7674	7696	7717	7739	7760	7781	7802	7823	7844	30'
30'	7865	7886	7906	7927	7947	7967	7988	8008	8028	8048	20'
40'	8067	8087	8107	8126	8146	8165	8185	8204	8223	8242	10'
50'	8261	8280	8299	8317	8336	8355	8373	8392	8410	8428	0' 86°
4° 0'	8446	8465	8483	8501	8518	8536	8554	8572	8589	8607	50'
10'	8624	8642	8659	8676	8694	8711	8728	8745	8762	8778	40'
20'	8795	8812	8829	8845	8862	8878	8895	8911	8927	8944	30'
30'	8960	8976	8992	9008	9024	9040	9056	9071	9087	9103	20'
40'	9118	9134	9150	9165	9180	9196	9211	9226	9241	9256	10'
50'	9272	9287	9302	9316	9331	9346	9361	9376	9390	9405	0' 85°
5° 0'	9420	9434	9449	9463	9477	9492	9506	9520	9534	9549	50'
10'	9563	9577	9591	9605	9619	9633	9646	9660	9674	9688	40'
20'	9701	9715	9729	9742	9756	9769	9782	9796	9809	9823	30'
30'	9836	9849	9862	9875	9888	9901	9915	9928	9940	9953	20'
40'	9966	9979	9992	*0005	*0017	*0030	*0043	*0055	*0068	*0080	10'
50'	1.0093	0105	0118	0130	0143	0155	0167	0180	0192	0204	0' 84°
6° 0'	0216	0228	0240	0253	0265	0277	0289	0300	0312	0324	50'
10'	0336	0348	0360	0371	0383	0395	0407	0418	0430	0441	40'
20'	0453	0464	0476	0487	0499	0510	0521	0533	0544	0555	30'
30'	0567	0578	0589	0600	0611	0622	0633	0645	0656	0667	20'
40'	0678	0688	0699	0710	0721	0732	0743	0754	0764	0775	10'
50'	0786	0796	0807	0818	0828	0839	0849	0860	0871	0881	0' 83°
7° 0'	0891	0902	0912	0923	0933	0943	0954	0964	0974	0984	50'
10'	0995	1005	1015	1025	1035	1045	1056	1066	1076	1086	40'
20'	1096	1106	1116	1125	1135	1145	1155	1165	1175	1185	30'
30'	1194	1204	1214	1223	1233	1243	1252	1262	1272	1281	20'
40'	1291	1300	131								

(4) 三角函数ノ對數表 (一)

角	log sin	log tan	log cot	log cos	角
0° 0'	-∞	-∞	∞	0.0000	90°
10'	3.4637	3.4637	2.5363	0.0000	50'
20'	3.7648	3.7648	2.2352	0.0000	40'
30'	3.9408	3.9409	2.0591	0.0000	30'
40'	2.0658	2.0658	1.9342	0.0000	20'
50'	2.1627	2.1627	1.8373	0.0000	10'
1° 0'	2.2419	2.2419	1.7581	1.9999	89°
10'	2.3088	2.3089	1.6911	1.9999	50'
20'	2.3668	2.3669	1.6331	1.9999	40'
30'	2.4179	2.4181	1.5819	1.9999	30'
40'	2.4637	2.4638	1.5362	1.9998	20'
50'	2.5050	2.5053	1.4947	1.9998	10'
2° 0'	2.5428	2.5431	1.4569	1.9997	88°
10'	2.5776	2.5779	1.4221	1.9997	50'
20'	2.6097	2.6101	1.3899	1.9996	40'
30'	2.6397	2.6401	1.3599	1.9996	30'
40'	2.6677	2.6682	1.3318	1.9995	20'
50'	2.6940	2.6945	1.3055	1.9995	10'
3° 0'	2.7188	2.7194	1.2806	1.9994	87°
10'	2.7423	2.7429	1.2571	1.9993	50'
20'	2.7645	2.7652	1.2348	1.9993	40'
30'	2.7857	2.7865	1.2135	1.9992	30'
40'	2.8059	2.8067	1.1933	1.9991	20'
50'	2.8251	2.8261	1.1739	1.9990	10'
4° 0'	2.8436	2.8446	1.1554	1.9989	86°
10'	2.8613	2.8624	1.1376	1.9989	50'
20'	2.8783	2.8795	1.1205	1.9988	40'
30'	2.8946	2.8960	1.1040	1.9987	30'
40'	2.9104	2.9118	1.0882	1.9986	20'
50'	2.9256	2.9272	1.0728	1.9985	10'
5° 0'	2.9403	2.9420	1.0580	1.9983	85°
10'	2.9545	2.9563	1.0437	1.9982	50'
20'	2.9682	2.9701	1.0299	1.9981	40'
30'	2.9816	2.9836	1.0164	1.9980	30'
40'	2.9945	2.9966	1.0034	1.9979	20'
50'	1.0070	1.0093	0.9907	1.9977	10'
6° 0'	1.0192	1.0216	0.9784	1.9976	84°
10'	1.0311	1.0336	0.9664	1.9975	50'
20'	1.0426	1.0453	0.9547	1.9973	40'
30'	1.0539	1.0567	0.9433	1.9972	30'
40'	1.0648	1.0678	0.9322	1.9971	20'
50'	1.0755	1.0786	0.9214	1.9969	10'
7° 0'	1.0859	1.0891	0.9109	1.9968	83°
10'	1.0961	1.0995	0.9005	1.9966	50'
20'	1.1060	1.1096	0.8904	1.9964	40'
30'	1.1157	1.1194	0.8806	1.9963	30'
40'	1.1252	1.1291	0.8709	1.9961	20'
50'	1.1345	1.1385	0.8615	1.9959	10'
8° 0'	1.1436	1.1478	0.8522	1.9958	82°
	log cos	log cot	log tan	log sin	角

三角函数ノ對數表 (二) (5)

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	角
8° 0'	1.1436		1.1478		0.8522	1.9958		0' 82°
10'	1525	89	1569	91	8431	9956	2	50'
20'	1612	87	1658	89	8342	9954	2	40'
30'	1697	85	1745	87	8255	9952	2	30'
40'	1781	84	1831	86	8169	9950	2	20'
50'	1863	82	1915	84	8085	9948	2	10'
		80		82			2	
9° 0'	1.1943		1.1997		0.8003	1.9946		0' 81°
10'	2022	79	2078	81	7922	9944	2	50'
20'	2100	78	2158	80	7842	9942	2	40'
30'	2176	76	2236	78	7764	9940	2	30'
40'	2251	75	2313	77	7687	9938	2	20'
50'	2324	73	2389	76	7611	9936	2	10'
		73		74			2	
10° 0'	1.2397		1.2463		0.7537	1.9934		0' 80°
10'	2468	71	2536	73	7464	9931	3	50'
20'	2538	70	2609	73	7391	9929	2	40'
30'	2606	68	2680	71	7320	9927	2	30'
40'	2674	68	2750	70	7250	9924	2	20'
50'	2740	66	2819	69	7181	9922	2	10'
		66		68			2	
11° 0'	1.2806		1.2887		0.7113	1.9919		0' 79°
10'	2870	64	2953	66	7047	9917	2	50'
20'	2934	64	3020	67	6980	9914	2	40'
30'	2997	63	3085	65	6915	9912	2	30'
40'	3058	61	3149	64	6851	9909	2	20'
50'	3119	61	3212	63	6788	9907	2	10'
		60		63			2	
12° 0'	1.3179		1.3275		0.6725	1.9904		0' 78°
10'	3238	59	3336	61	6664	9901	3	50'
20'	3296	58	3397	61	6603	9899	2	40'
30'	3353	57	3458	61	6542	9896	2	30'
40'	3410	57	3517	59	6483	9893	2	20'
50'	3466	56	3576	59	6424	9890	2	10'
		55		58			2	
13° 0'	1.3521		1.3634		0.6366	1.9887		0' 77°
10'	3575	54	3691	57	6309	9884	3	50'
20'	3629	54	3748	57	6252	9881	3	40'
30'	3682	53	3804	56	6196	9878	3	30'
40'	3734	52	3859	55	6141	9875	3	20'
50'	3786	52	3914	55	6086	9872	3	10'
		51		54			3	
14° 0'	1.3837		1.3968		0.6032	1.9869		0' 76°
10'	3887	50	4021	53	5979	9866	3	50'
20'	3937	50	4074	53	5926	9863	3	40'
30'	3986	49	4127	53	5873	9859	4	30'
40'	4035	49	4178	51	5822	9856	3	20'
50'	4083	48	4230	52	5770	9853	3	10'
		47		51			3	
15° 0'	1.4130		1.4281		0.5719	1.9849		0' 75°
10'	4177	47	4331	50	5669	9846	3	50'
20'	4223	46	4381	50	5619	9843	3	40'
30'	4269	46	4430	49	5570	9839	4	30'
40'	4314	45	4479	49	5521	9836	3	20'
50'	4359	45	4527	48	5473	9832	4	10'
		44		48			4	
16° 0'	1.4403		1.4575		0.5425	1.9828		0' 74°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角

(6)

三角函数ノ對數表(三)

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	角
16° 0'	1.4403		1.4575		0.5425	1.9823		0' 74°
10'	4447	44	4622	47	5378	9825	3	50'
20'	4491	44	4669	47	5331	9821	4	40'
30'	4533	42	4716	47	5284	9817	4	30'
40'	4576	43	4762	46	5238	9814	3	20'
50'	4618	42	4808	46	5192	9810	4	10'
17° 0'	1.4659		1.4853		0.5147	1.9806		0' 73°
10'	4700	41	4898	45	5102	9802	4	50'
20'	4741	41	4943	45	5057	9798	4	40'
30'	4781	40	4987	44	5013	9794	4	30'
40'	4821	40	5031	44	4969	9790	4	20'
50'	4861	40	5075	44	4925	9786	4	10'
18° 0'	1.4900		1.5118		0.4882	1.9782		0' 72°
10'	4939	39	5161	43	4839	9778	4	50'
20'	4977	38	5203	42	4797	9774	4	40'
30'	5015	38	5245	42	4755	9770	4	30'
40'	5052	37	5287	42	4713	9765	5	20'
50'	5090	38	5329	42	4671	9761	4	10'
19° 0'	1.5126		1.5370		0.4630	1.9757		0' 71°
10'	5163	37	5411	41	4589	9752	5	50'
20'	5199	36	5451	40	4549	9748	4	40'
30'	5235	36	5491	40	4509	9743	5	30'
40'	5270	35	5531	40	4469	9739	4	20'
50'	5306	36	5571	40	4429	9734	5	10'
20° 0'	1.5341		1.5611		0.4349	1.9730		0' 70°
10'	5375	34	5650	39	4350	9725	5	50'
20'	5409	34	5689	39	4311	9721	4	40'
30'	5443	34	5727	38	4273	9716	5	30'
40'	5477	34	5766	39	4234	9711	5	20'
50'	5510	33	5804	38	4196	9706	5	10'
21° 0'	1.5543		1.5842		0.4158	1.9702		0' 69°
10'	5576	33	5879	37	4121	9697	5	50'
20'	5609	33	5917	38	4083	9692	5	40'
30'	5641	32	5954	37	4046	9687	5	30'
40'	5673	32	5991	37	4009	9682	5	20'
50'	5704	31	6028	37	3972	9677	5	10'
22° 0'	1.5736		1.6064		0.3936	1.9672		0' 68°
10'	5767	31	6100	36	3900	9667	5	50'
20'	5798	31	6136	36	3864	9661	6	40'
30'	5828	30	6172	36	3828	9656	5	30'
40'	5859	31	6208	36	3792	9651	5	20'
50'	5889	30	6243	35	3757	9646	5	10'
23° 0'	1.5919		1.6279		0.3721	1.9640		0' 67°
10'	5948	29	6314	35	3686	9635	6	50'
20'	5978	30	6348	34	3652	9629	6	40'
30'	6007	29	6383	35	3617	9624	5	30'
40'	6036	29	6417	34	3583	9618	6	20'
50'	6065	29	6452	35	3548	9613	5	10'
24° 0'	1.6093		1.6486		0.3514	1.9607		0' 66°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角

三角函数ノ對數表(四)

(7)

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	角
24° 0'	1.6093		1.6486		0.3514	1.9607		0' 66°
10'	6121	28	6520	34	3480	9602	5	50'
20'	6149	28	6553	33	3447	9596	6	40'
30'	6177	28	6587	34	3413	9590	6	30'
40'	6205	28	6620	33	3380	9584	6	20'
50'	6232	27	6654	34	3346	9579	5	10'
25° 0'	1.6259		1.6687		0.3313	1.9573		0' 65°
10'	6286	27	6720	33	3280	9567	6	50'
20'	6313	27	6752	32	3248	9561	6	40'
30'	6340	27	6785	33	3215	9555	6	30'
40'	6366	26	6817	32	3183	9549	6	20'
50'	6392	26	6850	33	3150	9543	6	10'
26° 0'	1.6418		1.6882		0.3118	1.9537		0' 64°
10'	6444	26	6914	32	3086	9530	7	50'
20'	6470	26	6946	32	3054	9524	6	40'
30'	6495	25	6977	31	3023	9518	6	30'
40'	6521	26	7009	32	2991	9512	6	20'
50'	6546	25	7040	31	2960	9505	7	10'
27° 0'	1.6570		1.7072		0.2928	1.9499		0' 63°
10'	6595	25	7103	31	2897	9492	7	50'
20'	6620	25	7134	31	2866	9486	6	40'
30'	6644	24	7165	31	2835	9479	7	30'
40'	6668	24	7196	31	2804	9473	6	20'
50'	6692	24	7226	30	2774	9466	7	10'
28° 0'	1.6716		1.7257		0.2743	1.9459		0' 62°
10'	6740	24	7287	31	2713	9453	7	50'
20'	6763	23	7317	30	2683	9446	7	40'
30'	6787	24	7348	31	2652	9439	7	30'
40'	6810	23	7378	30	2622	9432	7	20'
50'	6833	23	7408	30	2592	9425	7	10'
29° 0'	1.6856		1.7438		0.2562	1.9418		0' 61°
10'	6878	22	7467	29	2533	9411	7	50'
20'	6901	23	7497	30	2503	9404	7	40'
30'	6923	22	7526	29	2474	9397	7	30'
40'	6946	23	7556	30	2444	9390	7	20'
50'	6968	22	7585	29	2415	9383	8	10'
30° 0'	1.6990		1.7614		0.2386	1.9375		0' 60°
10'	7012	22	7644	30	2356	9368	7	50'
20'	7033	21	7673	29	2327	9361	7	40'
30'	7055	22	7701	28	2299	9353	8	30'
40'	7076	21	7730	29	2270	9346	7	20'
50'	7097	21	7759	29	2241	9338	8	10'
31° 0'	1.7118		1.7788		0.2212	1.9331		0' 59°
10'	7139	21	7816	28	2184	9323	8	50'
20'	7160	21	7845	29	2155	9315	8	40'
30'	7181	21	7873	28	2127	9308	7	30'
40'	7201	20	7902	29	2098	9300	8	20'
50'	7222	21	7930	28	2070	9292	8	10'
32° 0'	1.7242		1.7958		0.2042	1.9284		0' 58°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角

三角函数ノ對數表(五)

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	角
32° 0'	1.7242		1.7958		0.2042	1.9284		0' 58°
10'	7262	20	7986	23	2014	9276	8	50'
20'	7282	20	8014	23	1936	9268	8	40'
30'	7302	20	8042	23	1958	9260	8	30'
40'	7322	20	8070	23	1930	9252	8	20'
50'	7342	20	8097	27	1903	9544	8	10'
33° 0'	1.7361		1.8125		0.1875	1.9236		0' 57°
10'	7380	19	8153	23	1847	9228	8	50'
20'	7400	20	8180	27	1820	9219	9	40'
30'	7419	19	8208	23	1792	9211	8	30'
40'	7438	19	8235	27	1765	9203	8	20'
50'	7457	19	8263	23	1737	9194	9	10'
34° 0'	1.7476		1.8290		0.1710	1.9186		0' 56°
10'	7494	18	8317	27	1683	9177	9	50'
20'	7513	19	8344	27	1656	9169	8	40'
30'	7531	18	8371	27	1629	9160	9	30'
40'	7550	19	8398	27	1602	9151	9	20'
50'	7568	18	8425	27	1575	9142	9	10'
35° 0'	1.7586		1.8452		0.1548	1.9134		0' 55°
10'	7604	18	8479	27	1521	9125	9	50'
20'	7622	18	8506	27	1494	9116	9	40'
30'	7640	18	8533	27	1467	9107	9	30'
40'	7657	17	8559	26	1441	9098	9	20'
50'	7675	18	8586	27	1414	9089	9	10'
36° 0'	1.7692		1.8613		0.1387	1.9080		0' 54°
10'	7710	18	8639	26	1361	9070	10	50'
20'	7727	17	8666	27	1334	9061	9	40'
30'	7744	17	8692	26	1308	9052	9	30'
40'	7761	17	8718	26	1282	9042	10	20'
50'	7778	17	8745	27	1255	9033	9	10'
37° 0'	1.7795		1.8771		0.1229	1.9023		0' 53°
10'	7811	16	8797	26	1203	9014	9	50'
20'	7828	17	8824	27	1176	9004	10	40'
30'	7844	16	8850	26	1150	8995	9	30'
40'	7861	17	8876	26	1124	8985	10	20'
50'	7877	16	8902	26	1098	8975	10	10'
38° 0'	1.7893		1.8923		0.1072	1.8965		0' 52°
10'	7910	17	8954	26	1046	8955	10	50'
20'	7926	16	8980	26	1020	8945	10	40'
30'	7941	15	9006	26	994	8935	10	30'
40'	7957	16	9032	26	968	8925	10	20'
50'	7973	16	9058	26	942	8915	10	10'
39° 0'	1.7989		1.9084		0.0916	1.8905		0' 51°
10'	8004	15	9110	26	890	8895	10	50'
20'	8020	16	9135	25	865	8884	11	40'
30'	8035	15	9161	26	839	8874	10	30'
40'	8050	15	9187	26	813	8864	10	20'
50'	8066	16	9212	25	788	8853	11	10'
40° 0'	1.8081		1.9238		0.0762	1.8843		0' 50°
log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角	

三角函数ノ對數表(六)

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	角
40° 0'	1.8081		1.9238		0.0762	1.8843		0' 50°
10'	8096	15	9264	26	0736	8832	11	50'
20'	8111	15	9289	25	0711	8821	11	40'
30'	8125	14	9315	26	0685	8810	11	30'
40'	8140	15	9341	26	0659	8800	10	20'
50'	8155	15	9366	25	0634	8789	11	10'
41° 0'	1.8169		1.9392		0.0608	1.8778		0' 49°
10'	8184	15	9417	25	0583	8767	11	50'
20'	8198	14	9443	26	0557	8756	11	40'
30'	8213	15	9468	25	0532	8745	11	30'
40'	8227	14	9494	26	0506	8733	12	20'
50'	8241	14	9519	25	0481	8722	11	10'
42° 0'	1.8255		1.9544		0.0456	1.8711		0' 48°
10'	8269	14	9570	26	0430	8699	12	50'
20'	8283	14	9595	25	0405	8688	11	40'
30'	8297	14	9621	26	0379	8676	12	30'
40'	8311	14	9646	25	0354	8665	11	20'
50'	8324	13	9671	25	0329	8653	12	10'
43° 0'	1.8338		1.9697		0.0303	1.8641		0' 47°
10'	8351	13	9722	25	0278	8629	12	50'
20'	8365	14	9747	25	0253	8618	11	40'
30'	8378	13	9773	26	0227	8606	12	30'
40'	8391	13	9798	25	0202	8594	12	20'
50'	8405	14	9823	25	0177	8582	12	10'
44° 0'	1.8418		1.9848		0.0152	1.8569		0' 46°
10'	8431	13	9874	26	0126	8557	12	50'
20'	8444	13	9899	25	0101	8545	12	40'
30'	8457	13	9924	25	0076	8532	13	30'
40'	8469	12	9949	25	0051	8520	12	20'
50'	8482	13	9975	26	0025	8507	13	10'
45° 0'	1.8495		0.0000		0.0000	1.8495		0' 45°
log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角	

數ノ對數表(二)

(11)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	8
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	8
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7895	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	7
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	6
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	6
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4

比例部分(一)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
11	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.6	7.7	8.8	9.9
12	1.2	2.4	3.6	4.8	6.0	7.2	8.4	9.6	10.8
13	1.3	2.6	3.9	5.2	6.5	7.8	9.1	10.4	11.7
14	1.4	2.8	4.2	5.6	7.0	8.4	9.8	11.2	12.6
15	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	9.0	10.5	12.0	13.5
16	1.6	3.2	4.8	6.4	8.0	9.6	11.2	12.8	14.4
17	1.7	3.4	5.1	6.8	8.5	10.2	11.9	13.6	15.3
18	1.8	3.6	5.4	7.2	9.0	10.8	12.6	14.4	16.2
19	1.9	3.8	5.7	7.6	9.5	11.4	13.3	15.2	17.1
20	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0
21	2.1	4.2	6.3	8.4	10.5	12.6	14.7	16.8	18.9
22	2.2	4.4	6.6	8.8	11.0	13.2	15.4	17.6	19.8
23	2.3	4.6	6.9	9.2	11.5	13.8	16.1	18.4	20.7
24	2.4	4.8	7.2	9.6	12.0	14.4	16.8	19.2	21.6
25	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0	22.5
26	2.6	5.2	7.8	10.4	13.0	15.6	18.2	20.8	23.4
27	2.7	5.4	8.1	10.8	13.5	16.2	18.9	21.6	24.3
28	2.8	5.6	8.4	11.2	14.0	16.8	19.6	22.4	25.2
29	2.9	5.8	8.7	11.6	14.5	17.4	20.3	23.2	26.1
30	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0	21.0	24.0	27.0
31	3.1	6.2	9.3	12.4	15.5	18.6	21.7	24.8	27.9
32	3.2	6.4	9.6	12.8	16.0	19.2	22.4	25.6	28.8
33	3.3	6.6	9.9	13.2	16.5	19.8	23.1	26.4	29.7
34	3.4	6.8	10.2	13.6	17.0	20.4	23.8	27.2	30.6
35	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5	21.0	24.5	28.0	31.5
36	3.6	7.2	10.8	14.4	18.0	21.6	25.2	28.8	32.4
37	3.7	7.4	11.1	14.8	18.5	22.2	25.9	29.6	33.3
38	3.8	7.6	11.4	15.2	19.0	22.8	26.6	30.4	34.2
39	3.9	7.8	11.7	15.6	19.5	23.4	27.3	31.2	35.1
40	4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	24.0	28.0	32.0	36.0
41	4.1	8.2	12.3	16.4	20.5	24.6	28.7	32.8	36.9
42	4.2	8.4	12.6	16.8	21.0	25.2	29.4	33.6	37.8
43	4.3	8.6	12.9	17.2	21.5	25.8	30.1	34.4	38.7
44	4.4	8.8	13.2	17.6	22.0	26.4	30.8	35.2	39.6
45	4.5	9.0	13.5	18.0	22.5	27.0	31.5	36.0	40.5
46	4.6	9.2	13.8	18.4	23.0	27.6	32.2	36.8	41.4
47	4.7	9.4	14.1	18.8	23.5	28.2	32.9	37.6	42.3
48	4.8	9.6	14.4	19.2	24.0	28.8	33.6	38.4	43.2
49	4.9	9.8	14.7	19.6	24.5	29.4	34.3	39.2	44.1

比例部分(二)

(12)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	45.0
51	5.1	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6	35.7	40.8	45.9
52	5.2	10.4	15.6	20.8	26.0	31.2	36.4	41.6	46.8
53	5.3	10.6	15.9	21.2	26.5	31.8	37.1	42.4	47.7
54	5.4	10.8	16.2	21.6	27.0	32.4	37.8	43.2	48.6
55	5.5	11.0	16.5	22.0	27.5	33.0	38.5	44.0	49.5
56	5.6	11.2	16.8	22.4	28.0	33.6	39.2	44.8	50.4
57	5.7	11.4	17.1	22.8	28.5	34.2	39.9	45.6	51.3
58	5.8	11.6	17.4	23.2	29.0	34.8	40.6	46.4	52.2
59	5.9	11.8	17.7	23.6	29.5	35.4	41.3	47.2	53.1
60	6.0	12.0	18.0	24.0	30.0	36.0	42.0	48.0	54.0
61	6.1	12.2	18.3	24.4	30.5	36.6	42.7	48.8	54.9
62	6.2	12.4	18.6	24.8	31.0	37.2	43.4	49.6	55.8
63	6.3	12.6	18.9	25.2	31.5	37.8	44.1	50.4	56.7
64	6.4	12.8	19.2	25.6	32.0	38.4	44.8	51.2	57.6
65	6.5	13.0	19.5	26.0	32.5	39.0	45.5	52.0	58.5
66	6.6	13.2	19.8	26.4	33.0	39.6	46.2	52.8	59.4
67	6.7	13.4	20.1	26.8	33.5	40.2	46.9	53.6	60.3
68	6.8	13.6	20.4	27.2	34.0	40.8	47.6	54.4	61.2
69	6.9	13.8	20.7	27.6	34.5	41.4	48.3	55.2	62.1
70	7.0	14.0	21.0	28.0	35.0	42.0	49.0	56.0	63.0
71	7.1	14.2	21.3	28.4	35.5	42.6	49.7	56.8	63.9
72	7.2	14.4	21.6	28.8	36.0	43.2	50.4	57.6	64.8
73	7.3	14.6	21.9	29.2	36.5	43.8	51.1	58.4	65.7
74	7.4	14.8	22.2	29.6	37.0	44.4	51.8	59.2	66.6
75	7.5	15.0	22.5	30.0	37.5	45.0	52.5	60.0	67.5
76	7.6	15.2	22.8	30.4	38.0	45.6	53.2	60.8	68.4
77	7.7	15.4	23.1	30.8	38.5	46.2	53.9	61.6	69.3
78	7.8	15.6	23.4	31.2	39.0	46.8	54.6	62.4	70.2
79	7.9	15.8	23.7	31.6	39.5	47.4	55.3	63.2	71.1
80	8.0	16.0	24.0	32.0	40.0	48.0	56.0	64.0	72.0
81	8.1	16.2	24.3	32.4	40.5	48.6	56.7	64.8	72.9
82	8.2	16.4	24.6	32.8	41.0	49.2	57.4	65.6	73.8
83	8.3	16.6	24.9	33.2	41.5	49.8	58.1	66.4	74.7
84	8.4	16.8	25.2	33.6	42.0	50.4	58.8	67.2	75.6
85	8.5	17.0	25.5	34.0	42.5	51.0	59.5	68.0	76.5
86	8.6	17.2	25.8	3					

三 角 函 數

$$\left. \begin{array}{l} \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \\ \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (7) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sin A \operatorname{cosec} A = 1 \\ \cos A \sec A = 1 \\ \tan A \cot A = 1 \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \end{array} \right\} (3) \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ \tan^2 A + 1 = \sec^2 A \\ \cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A \end{array} \right\} (4) \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2} \\ \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 60^\circ = 2 \\ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sec 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha \pm n \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha \pm n \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \\ \tan(\alpha \pm n \cdot 360^\circ) = \tan \alpha \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{array} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta \\ \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta \\ \tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta \end{array} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ + \theta) &= -\sin \theta \\ \cos(180^\circ + \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(180^\circ + \theta) &= \tan \theta \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \sin(180^\circ - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (9)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (10)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (11)$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin P + \sin Q &= 2 \sin \frac{P+Q}{2} \cos \frac{P-Q}{2} \\ \sin P - \sin Q &= 2 \cos \frac{P+Q}{2} \sin \frac{P-Q}{2} \\ \cos P + \cos Q &= 2 \cos \frac{P+Q}{2} \cos \frac{P-Q}{2} \\ \cos P - \cos Q &= -2 \sin \frac{P+Q}{2} \sin \frac{P-Q}{2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

三 角 形

(s ハ半周, S ハ面積, R ハ外接圓ノ半徑, r ハ内接圓ノ半徑ヲ表ハスモノトスル。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A-B}{2} &= \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \\ \tan \frac{B-C}{2} &= \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \\ \tan \frac{C-A}{2} &= \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2} \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned} \right\} (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} &= \frac{r}{s-b} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \frac{r}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned} \right\} (22)$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \quad (23)$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (24)$$

昭和 13 年 11 月 10 日 初版印刷
 昭和 13 年 11 月 15 日 初版發行
 昭和 13 年 12 月 6 日 訂正再版印刷
 昭和 13 年 12 月 10 日 訂正再版發行

新 式
 實 業 三 角 法



定價金 50 錢

著 作 者 高 木 貞 治

發 行 者 東京市麴町區飯田町 2 丁目 20 番地
 中等學校教科書株式會社
 代表者 山 本 慶 治

印 刷 者 東京市牛込區市谷加賀町 1 丁目 12 番地
 (東京) 大日本印刷株式會社
 寺井藤左工門

發 行 所 東京市麴町區飯田町 2 丁目 20 番地
 中等學校教科書株式會社
 日本出版文化協會會員番號 117522

配給元 日本出版配給株式會社
 東京市神田區淡路町 2 / 9

(略名) 閉成高木實三角

