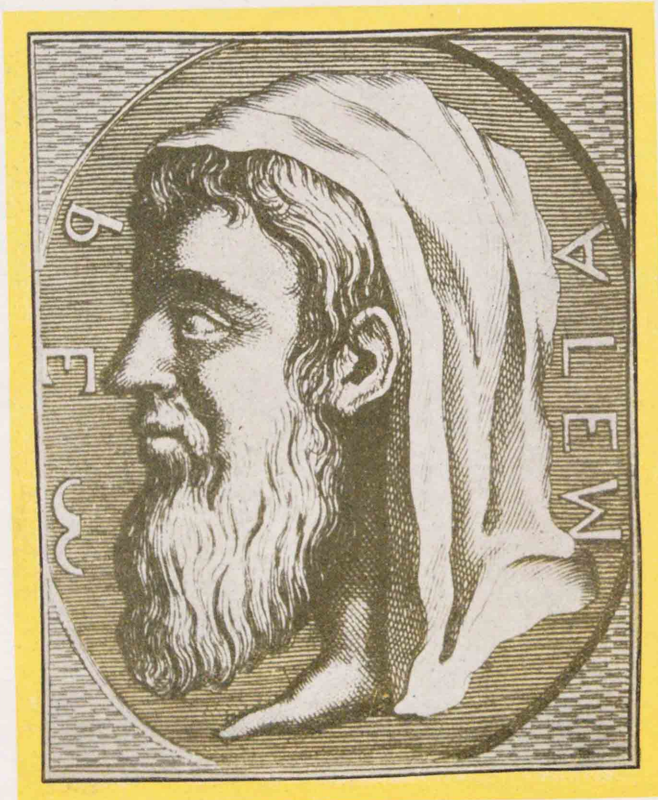
幾何

改訂版

[illegible]



Euclid（西暦紀元前330年頃—275年頃）

ぎりしや人ゆーくりっどハ，えじぷと王とれみー一世ガあれきさんどりあニ世界最初ノ大學ヲ建設シ多クノ哲人賢士ヲ集メタトキ招カレタ大數學者デ，ソノ著ハシタ幾何學原本ヲ以テ有名デアル。種々ノ幾何圖形ニ關スル性質ガ既ニソレ以前ニ發見セラレテヰタガ，コレ等ヲ整頓シテ幾何學ノ體系ヲ立テタノハソノ偉大ナ功績デアル。

文部省檢定濟
昭和十二年六月二十九日　實業學校數學科用

現代

實業新幾何

東京高等師範學校教授
阿部八代太郎
著

東京開成館

緒　言

本書ハ曩ニ實業學校用幾何教科書トシテ編纂シタ現代實業新幾何ヲ改訂シタモノデアル。

今回ノ改訂ノ眼目ハ著者ガ從來抱懷セル主義方針ノ徹底ヲ圖ルニアルガ,更ニ數學教育ノ趨勢ニ鑑ミ,算術·代數·幾何ノ相互關係ヲ一層密接ナラシメ,且教材ノ排列並ビニソノ說述ニ關シ多クノ工夫ヲ加ヘタ點ニアル。尙著者ガ初版以來特ニ意ヲ用ヒテ來タ要點ヲ記セバ次ノ通リデアル。

1. 直觀幾何ニ關スル事項ハ尋常小學校算術書及ビ拙著現代實業新算術ノ幾何教材トノ連絡ヲ密ニシ,比較的簡潔ニシタ。

2. 論證幾何ニ關シテハ或程度マデ嚴正ヲ保ツヤウニシタガ,三角形ノ合同定理ノ如キ生徒ガ直觀的ニ眞ナリト思惟スル若干ノ事柄ハ之ヲ公理的ニ取扱フコトニシタ。

3. 說明ヲ懇切ニシ,多數ノ挿圖ヲ加ヘテ生徒

ノ理解ヲ容易ナラシメルト共ニ學修ニ興味アラシメルヤウニシタ。コレガタメニ頁數ハ稍ゝ增加シタガ,實際ニハ教授ノ進行ヲ圓滑ナラシメルモノト信ズル。

4. "易ヨリ難ヘ"ノ趣旨ニ從ヒ,問題ノ選擇排列ニ深甚ノ注意ヲ拂ヒ,生徒ノ自發的學修ヲ奬メ,又卷末ニ精選セル多數ノ問題ヲ掲ゲ,餘力アル生徒ノ指導ト總括復習ノ便ヲ圖ツタ。

以上著者ハ本書ヲ現代ノ要求ニ適應サセルヤウニ努メタガ,更ニ研究ヲ積ミ,版ヲ重ネルニ從ツテ完璧タラシメンコトヲ期スル。尙コノ機會ニ舊版ニ對シテ高見ヲ寄セラレタ各位ニ厚ク謝意ヲ表スルト共ニ,今後モ實際使用上ノ高批ヲ切望スル。

昭和十二年五月

著者識

—目　次—

第1章　緒　論　[1—22]

1. 立　體 …… 1
2. 面・線・點 …… 2
3. 直　線 …… 4
4. 平　面 …… 7
5. 圖　形 …… 8
6. 圓 …… 9
7. 角 …… 13
8. 角ノ種類・角ノ測定 …… 14
9. 幾何學ノ研究法 …… 19
10. 定　義 …… 21

第2章　直線圖形　[23—86]

11. 三角形 …… 23
12. 三角形ノ合同 …… 24
13. 三角形ノ合同ニヨル證明 …… 28
14. 二等邊三角形 …… 30
15. 定理ノ形式 …… 33
16. 作圖題 …… 35
17. 三角形ノ外角 …… 40
18. 三角形ノ邊ト角トノ關係 …… 42
19. 錯角・同位角 …… 45
20. 平行線 …… 46

21. 三角形ノ內角ノ和 ………………… 51
22. 直角三角形ノ合同 ………………… 54
23. 二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形 ……… 55
24. 多角形 ………………………… 58
25. 正多角形 ……………………… 60
26. 多角形ノ內角ノ和 ………………… 62
27. 平行四邊形 …………………… 64
28. 正方形・矩形・菱形 ……………… 67
29. 平行線ノ截取ル線分 ……………… 69
30. 三角形ノ重心 …………………… 72
31. 對稱圖形 ……………………… 74
32. 矩形及ビ正方形ノ面積 …………… 77
33. 平行四邊形ノ面積 ………………… 80
34. 三角形ノ面積 …………………… 81
35. 等積變形 ……………………… 83
36. ぴたごらすノ定理 ………………… 85

第 3 章　圓　[87—115]

37. 圓ノ基本性質 …………………… 87
38. 弦 …………………………… 89
39. 三點ヲ通ル圓 …………………… 90
40. 中心角ト弧ト弦トノ關係 …………… 92
41. 圓周角 ………………………… 94
42. 切線ト割線 …………………… 98
43. 切線ト弦トノナス角 ……………… 102

44. 內接・外接 …………………… 104
45. 圓ニ內接スル四邊形 ……………… 107
46. 圓ニ外接スル四邊形 ……………… 109
47. 內接及ビ外接正多角形 …………… 110
48. 二ツノ圓 ……………………… 112

第 4 章　比　例　[116—141]

49. 比及ビ比例 …………………… 116
50. 面積ノ比 ……………………… 118
51. 內分・外分 …………………… 120
52. 比例スル線分ノ作圖 ……………… 124
53. 相　似 ……………………… 126
54. 三角形ノ相似(一) ………………… 128
55. 三角形ノ相似(二) ………………… 129
56. 三角形ノ相似(三) ………………… 131
57. 相似三角形ノ面積ノ比 …………… 133
58. 弦ノ分ノ包ム矩形 ………………… 135
59. 圓　周 ……………………… 137
60. π ノ値 …………………… 139
61. 圓ノ面積 ……………………… 140

第 5 章　三角函數　[142—154]

62. 三角函數 ……………………… 142
63. 30°, 45°, 60° ノ三角函數 ………… 145
64. 三角函數ノ關係 ………………… 147
65. 三角函數ノ眞數表 ………………… 148

66. 直角三角形ノ解法 … … … … … … … … 150
67. 應用ノ例 … … … … … … … … … … 152

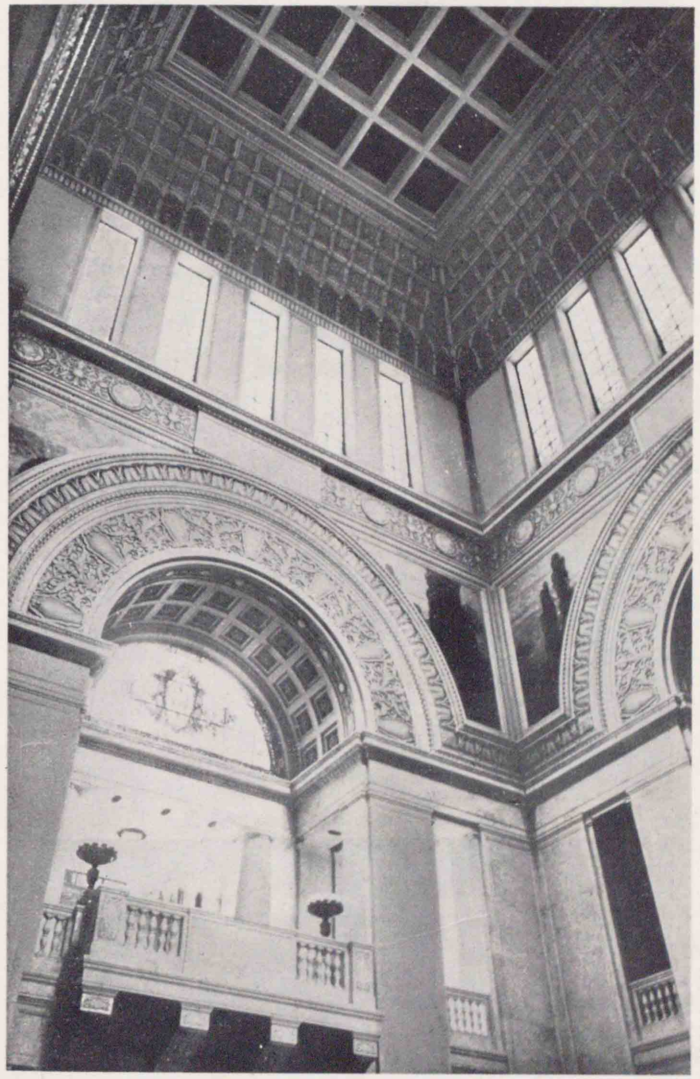
第6章　立體圖形　[155―200]

68. 平　面 … … … … … … … … … … … 155
69. 平面ノ決定… … … … … … … … … … 156
70. 二ツノ直線… … … … … … … … … … 158
71. 二ツノ平面,平面ト直線 … … … … … 159
72. 二直線ノナス角 … … … … … … … … 162
73. 平面ノ垂線… … … … … … … … … … 164
74. 二面角 … … … … … … … … … … … 167
75. 多面體 … … … … … … … … … … … 169
76. 正多面體 … … … … … … … … … … 171
77. 角　壔 … … … … … … … … … … … 172
78. 角　錐 … … … … … … … … … … … 174
79. 體　積 … … … … … … … … … … … 178
80. 角壔ノ體積… … … … … … … … … … 180
81. 角錐ノ體積… … … … … … … … … … 184
82. 直圓壔 … … … … … … … … … … … 188
83. 直圓錐 … … … … … … … … … … … 191
84. 球 … … … … … … … … … … … … 195

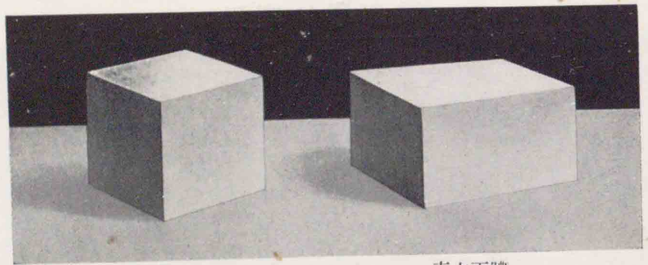
附　錄　軌　跡 … … … … … … … … [1―9]

補充問題集 … … … … … … … … … [1―20]

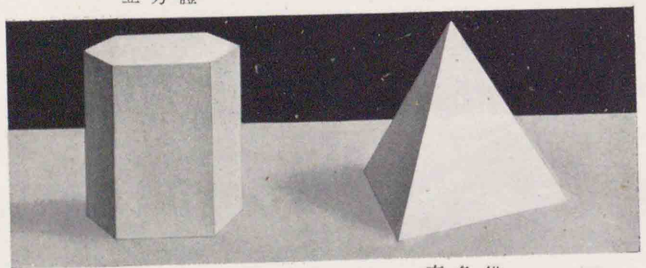
幾何學ノ應用



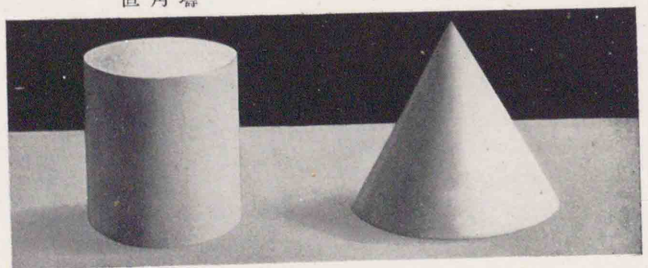
(帝國議事堂中央大ホール)



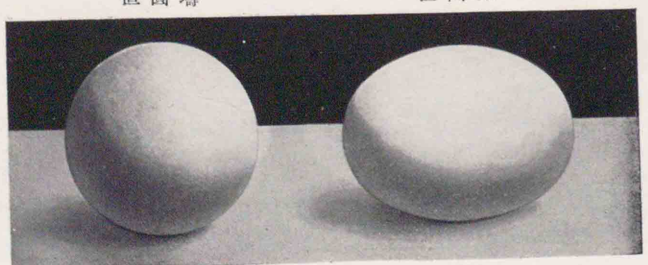
立方體　　直六面體



直角壔　　直角錐



直圓壔　　直圓錐

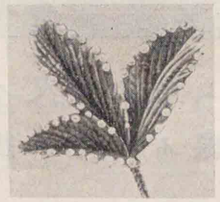


球　　楕圓體

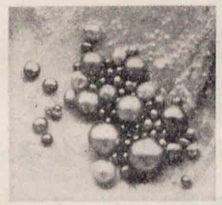
第1章　緒論

1. 立體

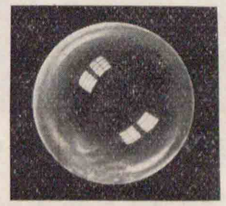
草葉ニ宿ル露モ,裝飾ニスル眞珠モ,子供ノ吹ク石鹼球（シャボンダマ）モ形ダケニツイテイヘバ何レモ球（キウ）デアル。



露



眞珠



石鹼球

カヤウニ

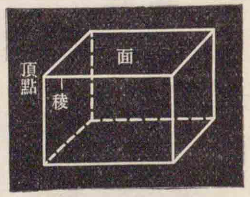
物體ノ實質ヤ色彩ヤ重サ等ヲ考ヘナイデ,唯ソノ形・大サ及ビ位置ダケニツイテ考ヘルトキハ,之ヲ**立體**トイフ。

即チ立體トハ物體ノ占メテヰル空間ノ一部分デアル。

立體ノ形ニハ種々樣々アルガ建築ヤ室內裝飾等,日常生活ニ關係ノ深イモノハ角壔・角錐・圓壔・圓錐・球ナドノヤウニ規則正シイ形ノモノガ多イ。

2. 面・線・點

例ヘバ直六面體ニツイテ觀察スルニ,コノ立體ハ六ツノ平ラナ面ニヨツテ境セラレ,各ノ面ハ四ツノ稜(リョウ)ニヨツテ境セラレ,各ノ稜ハ二ツノ頂點ニヨツテ境セラレテヰル。



スベテ立體ノ境ヲ**面**トイヒ,面ノ境又ハ面ト面トノ交リ(マジハ)ヲ**線**トイヒ,線ノ境又ハ線ト線トノ交リヲ**點**トイフ。

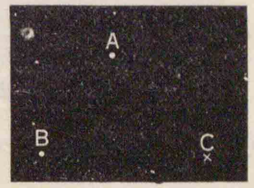
問 **1.** 直六面體,六角壔,五角錐ノ面,稜及ビ頂點ノ數ヲイヘ。又圓壔及ビ球ノ面ノ數ヲイヘ。

嚴密ニ考ヘルト,面ニハ廣サハアルガ厚サハナク,線ニハ長サハアルガ幅モ厚サモナク,點ニハ位置ダケガアツテ大サハナイ。

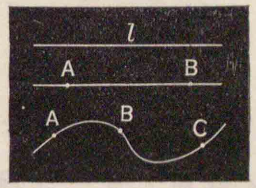
面・線・點ハ立體ニ基イテ考ヘタガ,獨立ニモ考ヘラレル。例ヘバ極メテ薄イ紙ニヨツテ面ヲ想像シ,甚ダ細イ絲ニヨツテ線ヲ想像シ,尖ツタ針先デ突イタ跡ニヨツテ點ヲ想像スルコトガ出來ル。

コノ意味デ鉛筆ヤ「ペン」デ書イテ線ヲ示シ,・ヤ

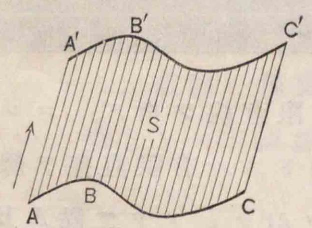
×ヲ書イテ點ヲ示ス。



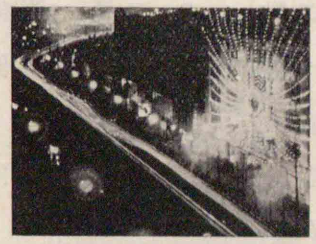
點ヲ呼ブニハソノ傍ラニA, B, C等ノ文字ヲ書キ,"點A, 點B, 點C"ナドトイフ。又線ヲ呼ブニハソノ傍ラニ小文字ヲ書キ例ヘバ"線l"トイフカ,又ハ線上ノ二ツ以上ノ點ヲ取リ,"線AB""線ABC"ナドトイフ。



注意 點ガ動ケバ線ガ出來,線ガ動ケバ面ガ出來,面ガ動ケバ立體ガ出來ル。ソレデ線ハ無限ニ多クノ點ヲ含ミ,面ハ無限ニ多クノ線ヲ含ミ,立體ハ無限ニ多クノ面ヲ含ム。



點A, B, CガA′, B′, C′ノ方ヘ動イテ,線AA′, BB′, CC′ガ出來,線ABCガA′B′C′ノ方ヘ動イテ面Sガ出來ル。



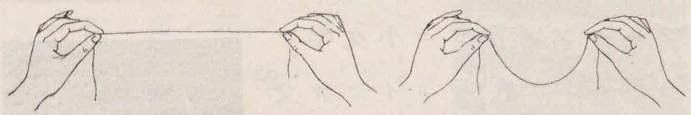
夜ノ東京日本橋通リヲ撮影シタモノデ,道路ノ白線ハ自動車ノヘっどらいとノ動イタ跡デアル。

問 **2.** 立體ガ動イタラ何ガ出來ルカ。

問 **3.** 線ガ動イテモ面ノ出來ヌ場合ハナイカ。

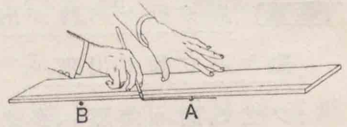
3. 直線

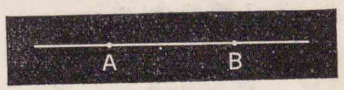
線ニハ**直線**ト**曲線**トガアル。絲ノ兩端ヲ强ク引張ルト直線狀ヲナシ,弛メルト曲線狀ヲナス。



直六面體ノ稜ヤ角錐ノ稜ハ直線デ,圓壔ヤ圓錐ノ底面ノ周ハ曲線デアル。

直線ヲ引キ,又ハ或線ガ直線カ曲線カヲ檢スルニハ定木ヲ用ヒル。





二點 A, B ヲ通ル直線ヲ**直線 AB**トイヒ,通例双方ニ限リナク延ビル無限直線ヲ指ス。コレニ對シテ二點 A, B ヲ兩端トスル有限直線ヲ**線分 AB**トイヒ,カヤウナ線分ヲ引クコトヲ**二點A,Bヲ結ブ**トイフ。

線分 AB ハ直線 AB ノ一部分デアル。

線分ハソノ兩端ヲ越エテ双方ヘ幾ラデモ引延バスコトガ出來ル。カヤウニ引延バシタ部分ヲ

ソノ線分ノ**延長**トイヒ,引延バスコトヲ**延長スル**トイフ。

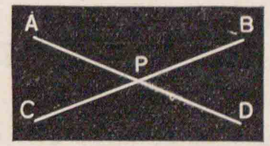
問 長サ5cmノ線分ABヲ引キ,之ヲ双方ニ3cmヅツ延長セヨ。

線分 AB ノ A ヨリ B ノ方ヘノ延長ヲ"AB ノ延長"トイヒ,又 B ヨリ A ノ方ヘノ延長ヲ"BA ノ延長"トイフ。

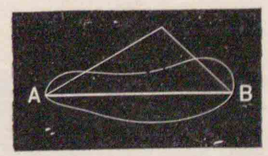
次ノ二ツノ事柄ハ直線ノ重要ナ性質デアル。

[1] **二點ヲ通ル直線ハ唯一ツダケアル。**

卽チ二點ハ一直線ヲ決定スル。從ッテ二ツノ直線ガ二點ヲ共有スレバ全ク相合スル。



二直線ガ唯一點ヲ共有スルトキハコノ二直線ハ**相交ル**トイヒ,コノ點ヲソノ二直線ノ**交點**トイフ。

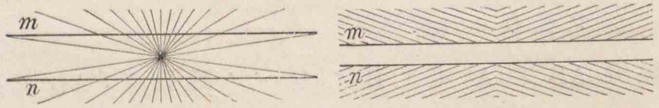


[2] **二點ヲ結ブ線分ハソノ二點間ノ最短通路デアル。**

二點ヲ結ブ線分ノ長サヲソノ**二點間ノ距離**トイフ。

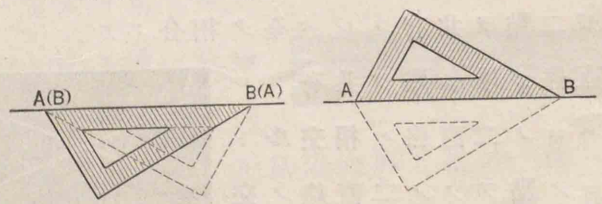
例　題 (1)

1. 次ノ線 m, n ハ直線デアルカドウカ。之ヲ檢スル方法ヲイヘ。



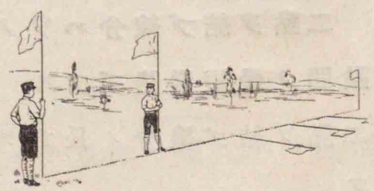
2. 紙上ニ四ツノ點 A, B, C, D ヲ取レバ,ソレ等ノ點ノ二ツヅツヲ通ル直線ハ幾本引ケルカ。點ノ列ビ方ニヨル色々ノ場合ヲ考ヘヨ。

3. 次ノ圖ヲ見テ定木ノ縁(ヘリ)ガ正シイカドウカヲ檢スル方法ヲイヘ。



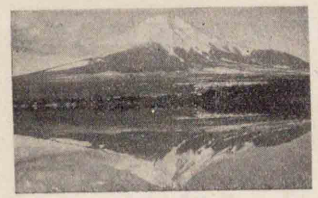
4. 射撃ニハドノヤウニシテ狙(ネラヒ)ヲ定メルカ。

5. 運動場ニ多クノ旗ヲ一直線ニ並ブヤウニ立テルニハドウスレバヨイカ。



4. 平面

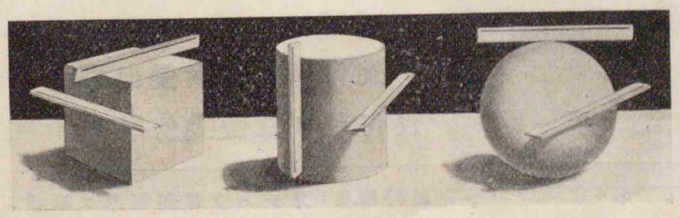
面ニハ**平面**ト**曲面**トガアル。靜カナ水面ヤ鏡ノ面ハ平面デ,こっぷノ側面ヤ電球ノ表面ナドハ曲面デアル。



或面ガ平面デアルカ曲面デアルカハ,ソノ面上ノ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全クソノ面ニ密着スルカドウカデワカル。即チ密着スレバソノ面ハ平面デ,サウデナケレバ曲面デアル。

平面上ノ二點ヲ通ル直線ハソノ平面上ニアルトイフ。

問　直六面體・圓壔・球等ニツイテ,ドノ面ガ平面デ,ドノ面ガ曲面デアルカヲ檢セヨ。



5. 圖形

立體・面・線・點又ハソレ等ノ集リヲ**圖形**トイフ。

同一ノ平面上ニアル圖形ヲ**平面圖形**トイヒ,サウデナイ圖形ヲ**立體圖形**又ハ**空間圖形**トイフ。三角形・矩形・圓等ハ平面圖形デ,直六面體・角錐・球等ハ立體圖形デアル。

圖形ニハ種々ノ性質ガアル。例ヘバ

(1) 三角形ノ三ツノ角ノ和ハ2直角デアル。

(2) 圓周ノ長サハソノ圓ノ直徑ノ約3.1416倍デアル。

ナドハ既ニ算術デモ學ンダ三角形及ビ圓ニ關スル著シイ性質デアル。

種々ナ圖形ガドンナ性質ヲ有スルカ,又或性質ヲ有スル圖形ハドウシテ畫クコトガ出來ルカナドトイフコトヲ研究スル學科ヲ幾何學トイフ。

即チ　**幾何學ハ圖形ノ性質ヲ攻究スル學科デアル。**

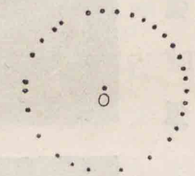
平面圖形ニ關スル幾何學ヲ**平面幾何學**トイヒ,立體圖形ニ關スル幾何學ヲ**立體幾何學**トイフ。*

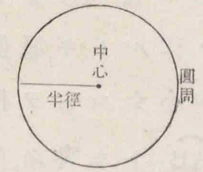
*以下第4章マデハ平面幾何學,第6章デハ立體幾何學ヲ取扱フ。

6. 圓

問 1. 紙上ニ於テ一點Oカラ 2cm ノ距離ニアル點ヲ出來ルダケ多ク取レ。

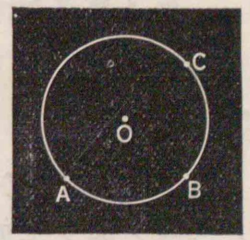
問 2. こんぱすヲ用ヒテ圓ヲ畫ク方法ヲ説明セヨ。





圓トハ一ツノ曲線デ圍マレタ**平面圖形**デ,ソノ曲線上ノスベテノ點ガ一ツノ定點カラ相等シイ距離ニアルモノデアル。ソシテコノ曲線ヲ**圓周**トイヒ,ソノ定點ヲ圓ノ**中心**,中心ト圓周上ノ點トヲ結ブ線分ヲ**半徑**トイフ。從ッテ

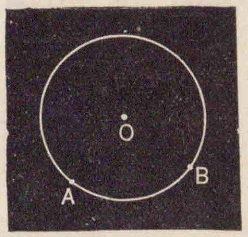
同ジ圓ノ半徑ハスベテ相等シイ。



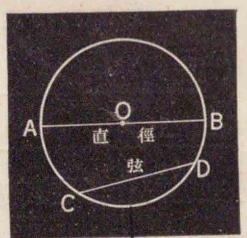
圓ヲ表ハスニハ通例中心ノ名ヲ以テスル。例ヘバ中心ガOデアル圓ヲ"圓O"トイフ。又圓周上ノ三點ヲ表ハス文字ヲ並ベテ,例ヘバ"圓ABC"トモ

イフ。紛レル恐レノナイトキニハ圓周ヲ單ニ圓トイフコトモアル。

圓周上ノ二點A,Bハソノ圓周ヲ二ツノ部分ニ分ケル。ソノ各ヲ**弧**トイフ。



例ヘバ圓Oノ周上ノ二點A,Bガ小ナル弧ABト大ナル弧ABトヲ作ルトキ,通例"弧AB"トイヘバ小ナル方ヲ指ス。弧ABヲ $\overset{\frown}{AB}$ トモ書ク。



弧ノ兩端ヲ結ブ線分ヲ**弦**トイヒ,中心ヲ通ル弦ヲ**直徑**トイフ。

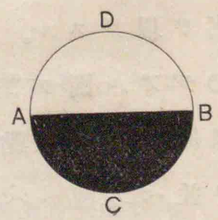
直徑ハ半徑ノ2倍デアルカラ

弦. 弧ABヲ AB.

同ジ圓ノ直徑ハスベテ相等シイ。

問 **3.** 一ツノ圓ノ直徑ヲ折目トシテソノ圓ヲ折リ重ネヨ。ドンナコトニナルカ。

直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分スル。



直徑デ分ケラレタ圓ノ二ツノ部分ノ各ヲ**半圓**トイフ。

例 題 (2)

××**1.** 運動場ニ直徑20mノ圓ヲ畫クニハドウスレバヨイカ。

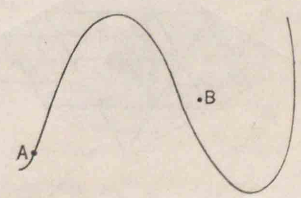
2. 半徑1.5cmノ圓ヲ畫キコノ圓周上ノ一點ヲPトシ,Pヲ一端トスル長サ2.4cm及ビ1.6cmノ弦ヲ出來ルダケ引ケ。又コノ圓デ最モ長イ弦ノ長サハ何程カ。

3. 紙上ニ5cmノ線分ABヲ引キ,コノ線上デAカラ3cm以内ニアリ,且Bカラモ3cm以内ニアル部分ヲ求メヨ。又物指ヲ使ハナイデ線分AB上ニA,Bカラ相等シイ距離ニアル點ヲ求メヨ。(コノ點ヲ線分ABノ**中點**トイフ)

4. 任意ノ線分ABヲ引キ,之ヲ直徑トスル圓ヲ畫ケ。(物指ハ使ハナイ)

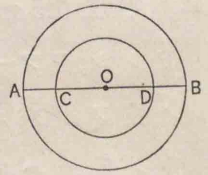
5. 4.6cmノ線分ヲ引キ,ソレヲ定木トこんぱすトヲ用ヒテ四等分セヨ。次ニ物指デ確メヨ。

6. 右ノ曲線上ニAカラ2cmノ距離ニアル點ヲ求メヨ。又Bカラ1.5cmノ距離ニアル點ヲ求メヨ。

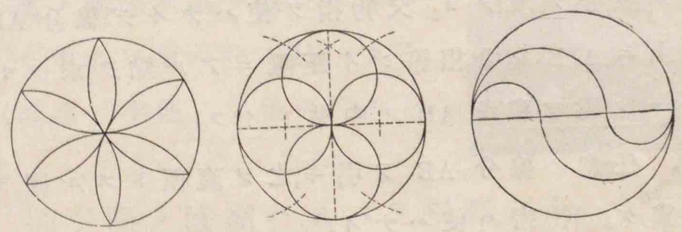


7. 三邊ガ夫々 3 *cm*, 4 *cm*, 4.5 *cm* ナル三角形ヲ畫ケ。

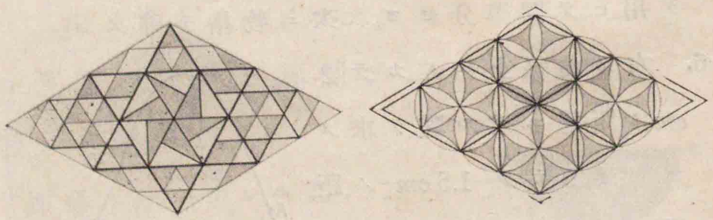
8. 同一ノ點ヲ中心トスル二ツ以上ノ圓ヲ**同心圓**トイフ。圖ノヤウニ同心圓ノ中心Oヲ通ル直線ヲ引キ,圓周トノ交點ヲ夫々A, B; C, Dトスレバ線分ACトBDトハ相等シイ。何故カ。



9. こんぱすト定木トヲ用ヒテ次ノ圖ヲ畫ケ。



10. 次ノ圖ヲ參考トシテ幾何模樣ヲ考案セヨ。

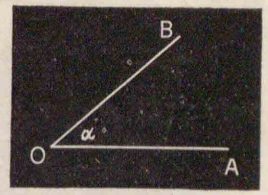


7. 角

角トハ一點カラ引イタ二ツノ直線ノナス圖形デアル。ソノ一點ヲ角ノ**頂點**トイヒ,ソノ二直線ヲ角ノ**邊**トイフ。

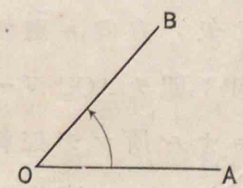
樹木ノ幹ト枝,時計ノ兩針等ハ角ヲナス。

右ノ圖ノ角デOハ頂點, OA, OBハ邊デアル。コノ角ヲ示スニハ"角AOB"ト呼ビ, ∠AOBト書ク。又他ノ角ト紛レル恐レノナイトキハ"角O"ト呼ビ∠Oト書クコトモアル。



又二邊ノ間ニ一ツノ文字ヲ書イテ角ヲ示スコトモアル。例ヘバ角 α*(∠α)ノ如キデアル。

角AOBハ一ツノ直線OBガ他ノ直線OA上ノ一點Oヲ中心トシテOAノ位置カラ或平面上デ廻轉シテ出來タモノトモ考ヘラレル。角ノ大サハコノ廻轉ノ分量デア

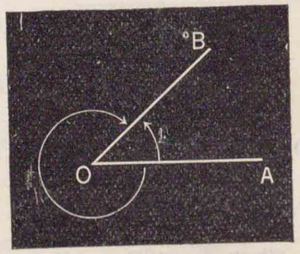


* α(アルファ)ハ β(ビーター), γ(ガンマ)等ト共ニぎりしや文字デアル。

ル。從ッテ

角ノ大サハ邊ノ長サニハ關係シナイ。

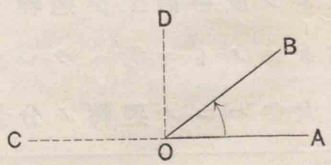
OB ガ OA ノ位置カラ圖ノ位置マデ廻轉スルノニ二ツノ向キガアル。ソノ一ツハ時計ノ針ノ廻轉ト同ジデ,他ハソレト反對デアル。故ニ一點カラ引イタ二ツノ直線ハイツデモ二ツノ角ヲ作ルモノデアルト考ヘラレル。



コノヤウナ二ツノ角ヲ互ニ**共軛角**(キョウヤク)トイヒ,ソノ大ナル方ヲ**優角**,小ナル方ヲ**劣角**トイフ。通例 ∠AOB トイヘバ劣角ノ方ヲ指スモノトスル。

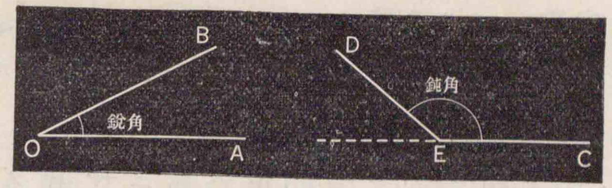
8. 角ノ種類・角ノ測定

角 AOB ノ邊 OB ガ OA ノ位置カラ O ヲ中心トシテ矢ノ方向ニ廻轉シ OC ノヤウニ OA ト正反對ノ向キ,即チ AOC ガ一直線ニナル所マデ廻轉シタトスルト,一直線 AOC モ角ヲナシテキルト考ヘラレル。



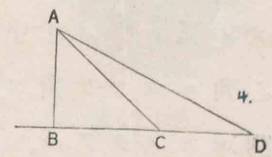
角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアッテ一直線ヲナストキハ,ソノ角ヲ**平角**トイフ。平角ノ半分ヲ**直角**トイフ。

前ノ圖ニ於テ ∠AOC ハ平角デ,又 ∠AOD=∠COD トスレバ ∠AOD 及ビ ∠COD ハ何レモ直角デアル。直角ヲ表ハスニハ記號 R∟ 又ハ ∠R ヲ用ヒル。



直角ヨリモ小サイ角ヲ**鋭角**トイヒ,直角ヨリモ大キク平角ヨリモ小サイ角ヲ**鈍角**トイフ。

問 **1.** 右ノ圖ノ中ニ出來テキルスベテノ角ヲイヘ。又ソノ種類ヲイヘ。

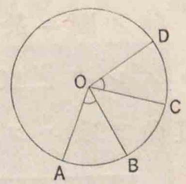


直角ハソノ大サガ一定デアルカラ,之ヲ角ノ單位トシテ用ヒルコトガ多イ。シカシ實用上デハコノ單位ハ餘リニ大キ過ギルノデ**度**(°),**分**(′),**秒**(″)ナドノ單位ヲ用ヒル。

$$1R∟=90°,\quad 1°=60',\quad 1'=60''$$

圓Oノ弧ABノ兩端ヲソノ中心ニ結ブ二ツノ半徑ノナス角AOBヲ"弧ABニ對スル**中心角**"又ハ"弧ABノ上ニ立ツ中心角"トイフ。

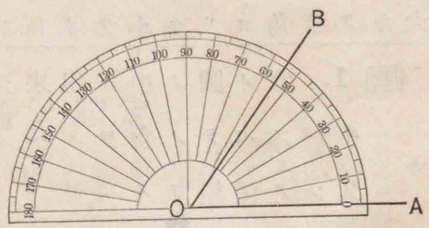
問 **2.** 一ツノ圓ニ於テ二ツノ弧ガ相等シケレバ,之ニ對スル中心角モ相等シイコトヲ實驗ニヨツテ確メヨ。



弧ノ大サガ2倍,3倍,……トナレバ之ニ對スル中心角モ2倍,3倍,……トナル。即チ

一ツノ圓ニ於テ中心角ハ弧ニ比例スル。

分度器ハ上ノ理ニヨツテ半圓形ノ透明ナ薄板ノ周ニ度盛ヲ施シソノ弧ニ對スル中心角ニヨツテ角ヲ測ルモノデアル。

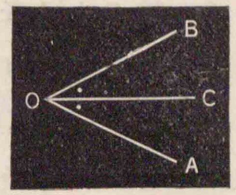


問 **3.** 上ノ圖ノ∠AOBハ何度カ。

例題 (3)

1. $\frac{2}{3}$R∟, $\frac{3}{4}$R∟ハ何度カ。又 $\frac{3}{8}$R∟ハ何度何分カ。
2. 紙ヲ折ツテ 90°, 45°, 22.5° ノ角ヲ作レ。

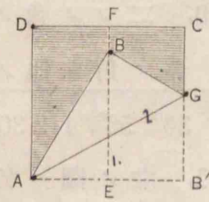
3. 角ノ頂點ヲ通リソノ角ヲ相等シイ二ツノ部分ニ分ケル直線ヲソノ**角ノ二等分線**トイフ。



分度器ヲ用ヒテ 70° ノ角ヲ畫キ,ソノ二等分線ヲ引ケ。

4. 紙ヲ折ツテ角ヲ二等分スル方法ヲイヘ。

5. 正方形ノ紙 ABCD ヲ右ノ圖ノヤウニ折ルト ∠BAG=30°, ∠DAG=60° デアル。之ヲ確カメヨ。



6. 次ノ時刻ニ於テ時計ノ兩針ハ何度ノ角ヲナスカ。

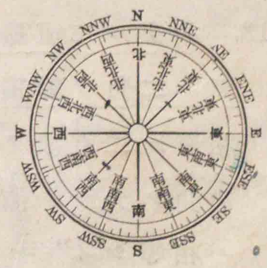
(1) 三時　(2) 八時

(3) 六時四十五分

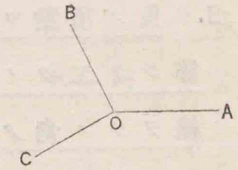
7. 次ノ圖ハ方位ヲ知ルニ用ヒル羅針盤ヲ示ス。

(1) 北ト東北東トノ二ツノ方位ノナス角ハ何度カ。

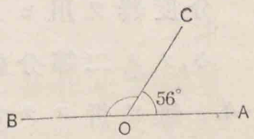
(2) 北西ノ方位ト直角ヲナス方位ハ何カ。



8. 點 O カラ任意ノ三直線 OA, OB, OC ヲ引イテ ∠AOB, ∠BOC, ∠COA ヲ測リ,且ソノ和ヲ求メヨ。

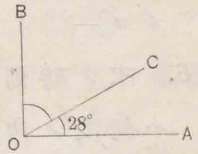


9. 右ノ圖ニ於テ AB ガ直線デ ∠AOC ガ 56° ナラバ ∠BOC ノ大サハドウカ。



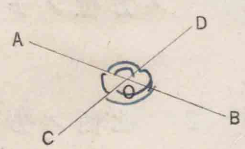
10. 二ツノ角ノ和ガ2直角ニ等シイトキハ,ソノ各ノ角ヲ他ノ角ノ**補角**トイフ。
30°, 55°, 112°30′ ノ角ノ補角ノ大サヲイヘ。

11. 右ノ圖ニ於テ ∠AOB ガ直角デ,∠AOC ガ 28° ナラバ ∠BOC ハ何度カ。



12. 二ツノ角ノ和ガ直角ニ等シイトキハ,ソノ各ノ角ヲ他ノ角ノ**餘角**トイフ。
30°, 55°, 23°33′ ノ角ノ餘角ノ大サヲイヘ。

13. 相交ル二直線ノナス四ツノ角ノ中デ相隣ラナイ二角ヲ**對頂角**トイフ。
相交ル二直線ヲ畫キ,ソノ對頂角ノ大サヲ測リ,"對頂角ハ相等シイ"コトヲ確メヨ。



9. 幾何學ノ研究法

圖形ノ性質ヲ考察スルノニ觀察ヤ實驗・實測ガ大切ナコトハ勿論デアルガ,タダソレダケデハ滿足出來ナイ。依ツテ幾何學デハ經驗ニヨツテ眞理ト認メタ若干ノ簡單ナ事柄ヲ基礎トシ,ソノ他ニツイテハ主トシテ推理ニヨツテソノ眞僞ヲ判斷スルノデアル。

經驗ニヨツテ眞理ト認メタ事柄デ,推理ノ基礎トナルモノヲ**公理**トイフ。

例ヘバ前ニ擧ゲタ

"二點ヲ通ル直線ハ唯一ツダケアル。"

"二點ヲ結ブ線分ハソノ二點間ノ最短通路デアル。" 二點

ハ何レモ公理デアル。

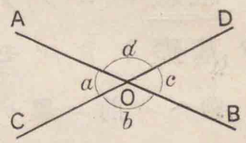
推理ニヨツテ或事柄ノ眞理デアルコトヲ說明スルコトヲ**證明**トイフ。

公理及ビ既ニ眞理デアルト確定シタ事柄ニヨツテ證明スルコトガ出來ル事項ヲ**定理**トイフ。

例ヘバ"對頂角ハ相等シイ"ハ一ツノ定理デアル。定理ヲ證明スルニハ先ヅソノ定理ニ適スル圖形ヲ書キ,コレニ適當ナ記號ヲツケテソノ**題意**ヲ述べ,然ル後ニ**證明**ニ入ルノガヨイ。之ヲ上ノ定理ニツイテ示サウ。

定理一　對頂角ハ相等シイ。

題意　二直線AB, CDガOニ於テ相交ツテナス四ツノ角ヲ$\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$トシ, $\angle a$ト$\angle c$, $\angle b$ト$\angle d$ヲ夫々對頂角トスレバ



$\angle a=\angle c$ 及ビ $\angle b=\angle d$

證明　AOB, COD ハ何レモ平角デアルカラ

$\angle a+\angle b=2R\llcorner$　　$\angle c+\angle b=2R\llcorner$

$\therefore\quad \angle a+\angle b=\angle c+\angle b$

$\therefore\quad \angle a=\angle c$

同様ニシテ　$\angle b=\angle d$

或定理カラ直チニ推知スルコトノ出來ル事柄ヲソノ定理ノ**系**トイフ。

例ヘバ次ノ事柄ハ定理一カラ得ル系デアル。

系　相交ル二直線ノナス四ツノ角ノ中

ソノ一ツガ直角ナラバ,他ノ三ツモ皆直角デアル。

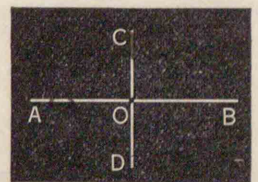
注意　本書デハ系ノ證明ハ書カナイ。生徒各自ニナセ。

10. 定義

幾何學ノヤウナ推理ヲ主トスル嚴密ナ學科デハ,用語ノ意味ヲ明瞭ニ定メ誰ニモ常ニ同ジ意味ニ解釋サレルヤウニシテ置カネバナラヌ。

用語ノ意味ヲ嚴密ニ定メタモノヲ**定義**トイフ。

例ヘバ"二直線ガ相交ツテナス角ガ直角ナルトキハ,コノ二直線ハ互ニ**垂直**デアル又ハ**直交スル**トイフ。"



"二直線ガ互ニ直交スルトキハ,ソノ一方ヲ他方ノ**垂線**トイヒ,ソノ交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。"ハ垂直,直交,垂線及ビ垂線ノ足ノ定義デアル。

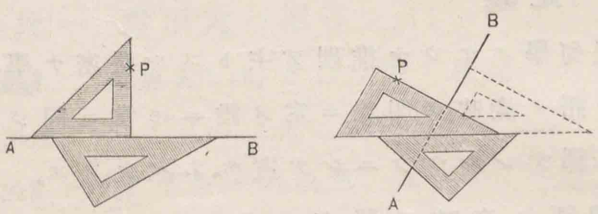
問 1.　補角·餘角·鋭角·鈍角ノ定義ヲイヘ。

二直線ガ互ニ垂直デアルコトヲ表ハスニハ記

大江政人

號⊥ヲ用ヒ,例ヘバ二直線 AB, CD ガ互ニ垂直デアルコトヲ AB⊥CD ト書ク。

問 **2.** 下圖ハ二ツノ三角定木ヲ用ヒテ一點 P カラ直線 AB ニ垂線ヲ引ク二ツノ仕方ヲ示ス。圖ヲ見テソノ方法ヲイヘ。



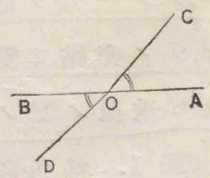
例　題 (4)

1. 二角ガ對頂角ヲナストキハ,ソノ一ツノ角ノ二等分線ヲ延長スレバ,他ノ角ヲ二等分スル。之ヲ證明セヨ。

2. 直線 AB 上ノ一點 O カラコノ直線ノ兩側ニ直線 OC, OD ヲ引キ,且

$\angle AOC = \angle BOD$

トスレバ, OC, OD ハ一直線ヲナス。之ヲ證明セヨ。

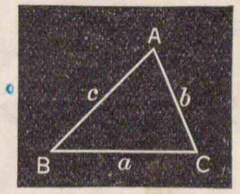


第2章　直線圖形

11. 三角形

問 **1.** 線分デ平面ノ一部分ヲ圍ムニハ少クトモ幾ツノ線分ガ必要デアルカ。

三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**三角形**トイフ。ソノ各ノ線分ヲ三角形ノ**邊**トイヒ,二邊ノ交點ヲ三角形ノ**頂點**,二邊ノ夾ム角ヲ三角形ノ**角**又ハ**內角**トイフ。



頂點ガ A, B, C ナル三角形ヲ △ABC ト書ク。

△ABC ニ於テ BC ヲ ∠A ノ**對邊**トイヒ, ∠A ヲ BC ノ**對角**トイフ。∠B ト CA, ∠C ト AB モマタ相對スル角ト邊デアル。

△ABC ノ各邊ヲ小文字デ表ハスコトガアル。コノ場合ニハ ∠A ノ對邊ヲ a, ∠B ノ對邊ヲ b, ∠C ノ對邊ヲ c デ表ハス。

問 **2.** 次ニ示ス長サノ各組ノ線分ヲ三邊トスル三角形ハ書ケルカドウカ。

（1） 3 cm, 5 cm, 6 cm　　（2） 3 cm, 4 cm, 7 cm

（3） 3 cm, 4 cm, 5 cm　　（4） 2.5 cm, 5 cm, 9 cm

二點間ノ最短通路ハソノ二點ヲ結ブ線分デアルコトカラ次ノ定理ハ容易ニワカル。

定理二　三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリモ大デアル。

系　三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリモ小デアル。

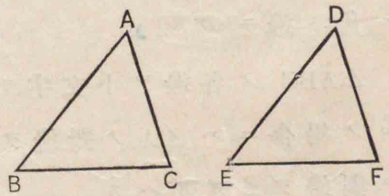
12. 三角形ノ合同

全ク重ネ合ハスコトノ出來ル二ツノ圖形ハ合同デアルトイフ。

$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トガ合同デアルコトヲ

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$　ト書ク。

合同ナル二ツノ三角形ニ於テハ,相等シイ角ニ對スル邊ハ相等シク,相等シイ邊ニ對スル角ハ相等シイ。

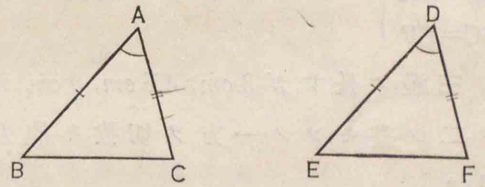


問 1.　二邊ガ 3cm ト 4cm デ,ソノ夾角ガ 50° ナル

三角形ヲ二ツ畫キ,ソノ一方ヲ切拔キ他方ニ重ネテ見ヨ。

夫々相等シイ二邊ノ長サ及ビソノ夾角ノ大サノ如何ニ拘ラズ一般ニ次ノ定理ガ成立ツ。

定理三　二邊トソノ夾角トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。



2 7

$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

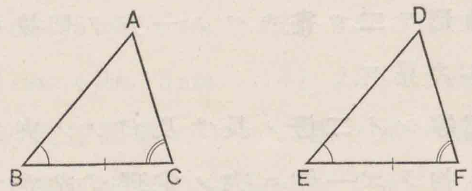
$$\left.\begin{array}{l} AB=DE \\ AC=DF \\ \angle A=\angle D \end{array}\right\}$$ ナルトキハ　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

ナル

問 2.　一邊ガ 4cm デ,ソノ兩端ニ於ケル角ガ 45° ト 75° ナル三角形ヲ二ツ畫キ,ソノ一方ヲ切リ拔キ他方ニ重ネテ見ヨ。

一般ニ次ノ定理ガ成立ツ。

定理四　二角トソノ間ノ邊トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。



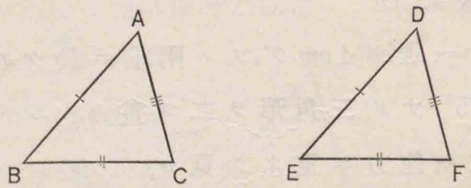
$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$$\left.\begin{array}{l}\angle B=\angle E\\ \angle C=\angle F\\ BC=EF\end{array}\right\}\text{ナルトキハ}\quad \triangle ABC\equiv\triangle DEF$$

問 **3.** 三邊ノ長サガ 3 *cm*, 4.5 *cm*, 6 *cm* ナル三角形ヲ二ツ畫キ,ソノ一方ヲ切拔キ他方ニ重ネテ見ヨ。

一般ニ次ノ定理ガ成立ツ。

定理五　三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。

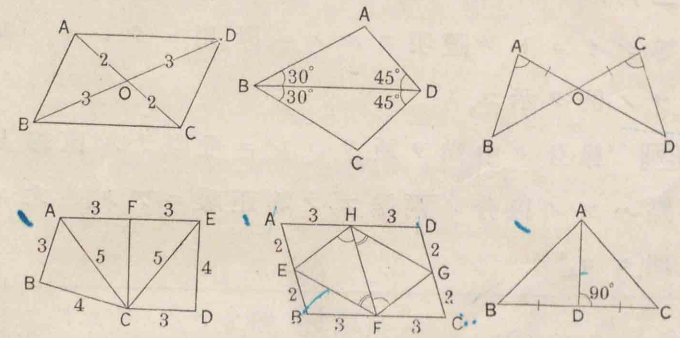


$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

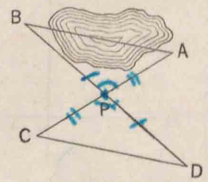
$$\left.\begin{array}{l}AB=DE\\ BC=EF\\ CA=FD\end{array}\right\}\text{ナルトキハ}\quad \triangle ABC\equiv\triangle DEF$$

例　題　(5)

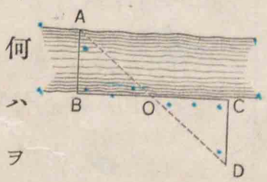
1. 次ノ圖デ,合同ナル三角形ヲ指摘セヨ。



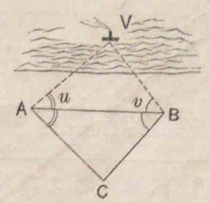
2. 右ノ圖ヲ見テ池ヲ夾ンダ二ツノ地點 A, B 間ノ距離ヲ測ル方法ヲ工夫セヨ



3. 川幅 AB ヲ測ルニハ圖ノヤウニシテ CD ヲ測レバヨイ。何故カ。但シ $\angle B=\angle C=R\angle$, O ハ BC ノ中點デ, AOD ハ一直線ヲナス。



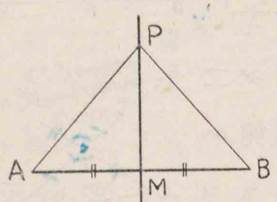
4. 右ノ圖ヲ見テ海岸ノ一點 A カラ沖ニ碇泊シテヰル船マデノ距離ヲ測ル方法ヲイへ。



13. 三角形ノ合同ニヨル證明

三角形ノ合同ノ定理ハ線分ノ等シイコトヤ,角ノ等シイコトヲ證明スルノニ屢〻用ヒラレル。次ニソノ例ヲ示ス。

例　線分ノ中點ヲ通リコレニ垂直ナル直線上ノ點ハソノ線分ノ兩端カラ等距離ニアル。之ヲ證明セヨ。*



[題意] 線分ABノ中点Mヲ通リABニ垂直ナ直線上ノ任意ノ点ヲPトスレバ

PA＝PB

デアル。

[証明] PA, PBヲ引クト △PAM, △PBMニ於テ

AM＝BM
PMハ共通
∠PMA＝∠PMB (＝RL)

デアルカラ

△PAM≡△PBM

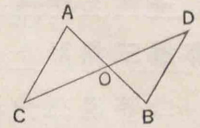
∴　PA＝PB

線分ノ中點ヲ通リ,コレニ垂直ナル直線ヲソノ線分ノ**垂直二等分線**トイフ。

* 以後"之ヲ證明セヨ"ノ句ハ省略スルコトガ多イ。

例題 (6)

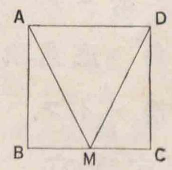
1. 二線分AB, CDガOニ於テ相交リ AO＝BO, CO＝DO ナルトキハ AC＝BD デアル。



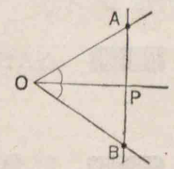
2. 正方形ABCDノ邊BCノ中點ヲMトスレバ

MA＝MD

デアル。

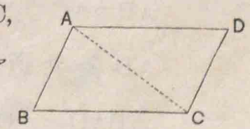


3. 角Oノ二等分線上ノ任意ノ點Pヲ通リ, OPニ垂直ニ引イタ直線ガソノ二邊ト交ル點ヲA, BトスレバOA＝OBデアル。



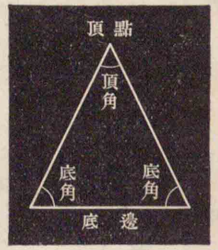
4. 四邊形ABCDノ相對スル角ノ頂點ヲ結ブ線分ACガ∠A及ビ∠Cヲ二等分スレバAB＝AD, CB＝CDデアル。

5. 四邊形ABCDニ於テAB＝DC, BC＝ADナラバ∠B＝∠Dデアル。



14. 二等邊三角形

二邊ノ相等シイ三角形ヲ**二等邊三角形**トイフ。

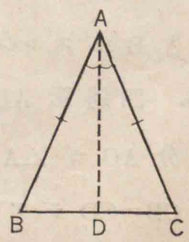


二等邊三角形ノ相等シイ二邊ガ夾ム角ヲ**頂角**トイヒ,他ノ二角ヲ**底角**,頂角ニ對スル邊ヲ**底邊**トイフ。

定理 **六** 二等邊三角形ノ二ツノ底角ハ相等シイ。

題意 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB=AC$ ナルトキハ

$\angle B=\angle C$



證明 頂角 A ノ二等分線ヲ引キ,コレガ底邊 BC ト交ル點ヲ D トスレバ,$\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} AB=AC \\ AD\text{ ハ共通} \\ \angle BAD=\angle CAD \end{array}\right\} \therefore \triangle ABD\equiv\triangle ACD \quad (\text{定理三})$$

$\therefore$ $\angle ABD=\angle ACD$ 卽チ $\angle B=\angle C$

系 **一** 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル.

系 **二** 三邊ガ相等シイ三角形ノ三ツノ角ハ相等シイ。

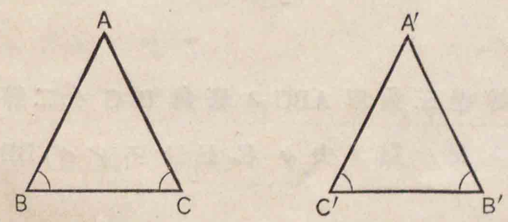
三邊ノ相等シイ三角形ヲ**正三角形**トイフ。

從ツテ上ノ系二ハ"正三角形ノ三ツノ角ハ相等シイ"トイフコトガ出來ル。

定理 **七** 二ツノ角ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル。

題意 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=\angle C$ ナルトキハ

$AB=AC$



證明 $\triangle ABC$ ヲ裏返シタモノヲ $\triangle A'C'B'$ トスレバ

$\angle B=\angle C=\angle C'=\angle B'$

$\therefore$ $\angle B=\angle C'$, $\angle C=\angle B'$

又 $BC=C'B'$.

∴ $\triangle ABC \equiv \triangle A'C'B'$ (定理四)

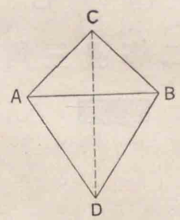
∴ $AB = A'C' = AC$

故ニ $\triangle ABC$ ハ二等邊三角形デアル。

系 三ツノ角ノ相等シイ三角形ハ正三角形デアル。

例題 (7)

1. 圖ニ於テ $AC=BC$, $AD=BD$ ナルトキハ



(1) $\angle CAD = \angle CBD$

(2) CD ハ ∠C 及ビ ∠D ヲ二等分スル。

(3) CD ハ AB ヲ垂直ニ二等分スル。

2. 二等邊三角形 ABC ノ底角 B, C ノ二等分線ガ對邊ト交ル點ヲ夫々 E, F トスレバ $BE=CF$ デアル。

3. 三角形ノ頂點トソノ對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ三角形ノ**中線**トイフ。

二等邊三角形ノ兩底角ノ頂點カラ對邊ニ引イタ中線ハ相等シイ。

15. 定理ノ形式

スベテ定理ハ**假設**及ビ**終結**ノ二ツノ部分カラ成立ツ。假設トハ始メカラ假定シテアル事柄デ、終結トハ假定ノ結果トシテ必ズ起ルト主張サレル事柄デアル。例ヘバ

"三角形 ABC ニ於テ二邊 AB, AC ガ相等シケレバ、ソノ對角 B, C ハ相等シイ。" (1)

デハ、△ABC ニ於テ

$$AB=AC$$

ガ假設デ、

$$\angle B=\angle C$$

ガ終結デアル。又

"三角形 ABC ニ於テ二角 B, C ガ相等シケレバ、ソノ對邊 AB, AC ハ相等シイ。" (2)

デハ、△ABC ニ於テ

$$\angle B=\angle C$$

ガ假設デ、

$$AB=AC$$

ガ終結デアル。

前述ノ二ツノ定理(1)ト(2)トヲ比較スルニ(2)ノ假設ハ(1)ノ終結デ,(2)ノ終結ハ(1)ノ假設デアル。カヤウニ

一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ入換ヘタモノヲソノ定理ノ逆トイフ。

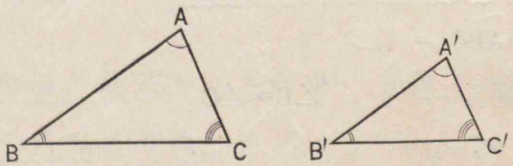
一ツノ定理ノ逆ハ眞デアルコトト,眞デナイコトトガアル。例ヘバ

"二ツノ三角形ガ合同デアレバ,ソノ一ツノ三角形ノ三ツノ角ハ夫々他ノ三角形ノ三ツノ角ニ相等シイ。"

ハ眞デアルケレドモ,ソノ逆デアル

"一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ夫々他ノ三角形ノ三ツノ角ニ相等シケレバ,コノ二ツノ三角形ハ合同デアル。"

ハ常ニ眞デアルトイフコトハ出來ナイ。



故ニ或定理ノ逆ガ眞デアルコトヲ主張スルニハ別ニ之ヲ證明セネバナラヌ。

問　次ノ事柄ノ逆ヲ述ベ且ソノ眞僞ヲイヘ。

(1)　東京ハ日本ノ首府デアル。

(2)　日曜日ハ休日デアル。

(3)　線分ノ垂直二等分線上ノ點ハソノ線分ノ兩端カラ等距離ニアル。

16. 作圖題

與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ幾何學ノ理ニヨツテ畫ク方法ヲ**作圖**トイヒ,作圖ヲ求メル問題ヲ**作圖題**トイフ。

作圖題ヲ解クニ用ヒル器具ハ**定木**ト**こんぱす**トダケニ限ルモノトスル。

定木ハ直線ヲ引キ又ハ線分ヲ延長スルタメニ用ヒ,こんぱすハ圓ヲ畫キ又ハ距離ヲ移スタメニ用ヒル。

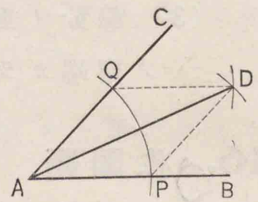
作圖題ノ幾何學的解法ニハ先ヅ**作圖**ノ方法ヲ述ベ,次ニカヤウニシテ得タ圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スルコトヲ**證明**セネバナラヌ。

次ニ述ベル五ツノ作圖題ハ他ノ作圖題ヲ解ク基本トナルモノデアル。

作圖題一　與ヘラレタ角ヲ二等分セヨ。

題意　與ヘラレタ角 BAC ヲ二等分セヨ。

作圖　A ヲ中心トシ,任意ノ半徑ノ圓弧ヲ書キ,邊 AB, AC トノ交點ヲ P, Q トスル。次ニ P 及ビ Q ヲ中心トシ,同ジ半徑ノ圓弧ヲ書キ,ソノ交點ヲ D トシ A, D ヲ結ベバ, AD ハ求メル二等分線デアル。



證明　PD, QD ヲ引ケバ, △APD, △AQD ニ於テ

AP＝AQ,　PD＝QD,　AD ハ共通

∴　△APD≡△AQD

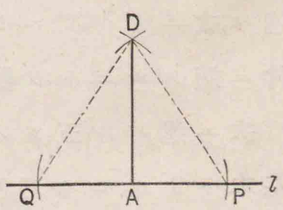
∴　∠PAD＝∠QAD

故ニ AD ハ ∠BAC ノ二等分線デアル。

作圖題二　與ヘラレタ直線上ノ一點ニ於テコノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

題意　l ヲ與ヘラレタ直線, A ヲソノ上ノ一點トシ, A ニ於テ l ニ垂線ヲ引ケ。

作圖　A ヲ中心トシ,任意ノ半徑ノ圓弧ヲ書キ, l



トノ交點ヲ P, Q トスル。次ニ P, Q ヲ夫々中心トシ, AP ヨリモ大キイ同ジ半徑ノ圓弧ヲ書キ,ソノ交點ヲ D トシ,直線 AD ヲ引ケバ,コレガ求メル垂線デアル。

證明　PD, QD ヲ引ケバ

△APD≡△AQD　　(定理五)

∴　∠DAP＝∠DAQ

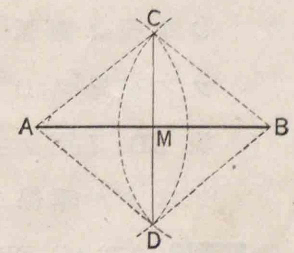
故ニ AD ハ平角 PAQ ノ二等分線デアル。

∴　DA⊥l

作圖題三　與ヘラレタ線分ヲ二等分セヨ。

題意　與ヘラレタ線分 AB ヲ二等分セヨ。

作圖　與ヘラレタ線分 AB ノ兩端 A, B ヲ夫々中心トシ, AB ノ半分ヨリモ大キイ同ジ半徑ノ圓弧ヲ書キ,ソノ二ツノ交點 C, D ヲ結ベバ, CD ガ AB ト交ル點 M ハ線分 AB ノ二等分點デアル。(11頁例題3參照)



證明　AC, AD, BC, BD ヲ引ケバ, △ACD, △BCD ニ於テ三邊ガ夫々相等シイカラ

$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$

$\therefore \quad \angle ACD = \angle BCD$

$\therefore \quad \triangle ACM \equiv \triangle BCM$　（定理三）

$\therefore \quad AM = BM$

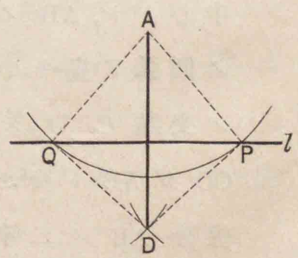
即チ M ハ線分 AB ノ二等分點デアル。

注意　CD ハ線分 AB ヲ垂直ニ二等分スル。

作圖題四　與ヘラレタ直線外ノ一點カラコノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

題意　l ヲ與ヘラレタ直線, A ヲソノ上ニナイ一點トシ, A カラ l ニ垂線ヲ引ケ。

作圖　A ヲ中心トシ, l ニ交ル任意ノ半徑ノ圓弧ヲ書キ, l トノ交點ヲ P, Q トスル。次ニ P, Q ヲ夫々中心トシ, 同ジ半徑ノ圓弧ヲ書キ, ソノ交點ヲ D トシ直線 AD ヲ引ケバ, コレガ求メル垂線デアル。



證明　AP, AQ, DP, DQ ヲ引ケバ

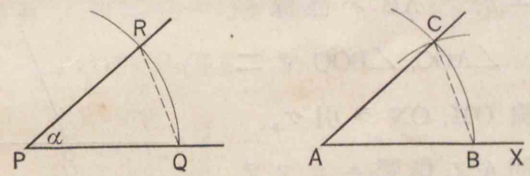
$\triangle APD \equiv \triangle AQD$　（定理五）

$\therefore \quad \angle PAD = \angle QAD$

故ニ AD ハ二等邊三角形 AQP ノ頂角 A ノ二等分線デアル。依ッテ $AD \perp QP$ 即チ $AD \perp l$

作圖題五　與ヘラレタ直線ヲ一邊トシ, 與ヘラレタ角ニ等シイ角ヲ作レ。

題意　AX ヲ與ヘラレタ直線トシ, $\angle\alpha$ ヲ與ヘラレタ角トスル。AX 上ノ一點 A カラ直線 AC ヲ引キ, $\angle XAC = \angle\alpha$ ナラシメヨ。



作圖　$\angle\alpha$ ノ頂點Pヲ中心トシ, 任意ノ半徑ノ圓弧ヲ書キ, ソノ二邊トノ交點ヲ Q, R トスル。次ニ A ヲ中心トシ, 前ト同ジ半徑ノ圓弧ヲ書キ, AX トノ交點ヲ B トスル。更ニ B ヲ中心トシ QR ヲ半徑トスル圓弧ヲ書キ, A ヲ中心トスル圓弧トノ交點ヲ C トスル。AC ヲ引ケバ $\angle XAC$ ハ求メル角デアル。

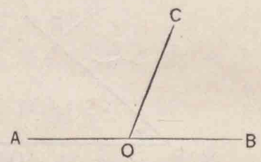
證明　$\triangle ABC \equiv \triangle PQR$　（定理五）

$\therefore \quad \angle BAC = \angle QPR = \angle\alpha$

例　題 (8)

(本例題ノ作圖ハ定木トこんぱすトダケデセヨ)

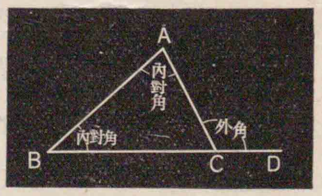
1. 與ヘラレタ圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ヲ書ケ。
2. 與ヘラレタ角ヲ四等分セヨ。
3. 與ヘラレタ三角形ノ各頂點カラソノ對邊ニ垂線ヲ引ケ。(種々ナ三角形ニツイテ試ミヨ)
4. 圖ニ於テ AB ハ直線デアル。$\angle AOC$, $\angle BOC$ ノ二等分線 OM, ON ヲ引ケ。



5. 前問4ノ作圖ニヨッテ得タ $\angle MON$ ハ直角デアルコトヲ證明セヨ。

17. 三角形ノ外角

三角形ノ一邊トソレニ隣ル邊ノ延長トノナス角ヲ三角形ノ**外角**トイフ。外角ニ對シテ三角形ノ三ツノ角ヲ**内角**トイフ。



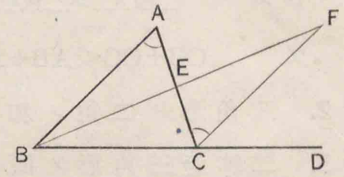
一ツノ外角ニ隣ラナイ二ツノ内角ヲ各ソノ外角ノ**内對角**トイフ。

定理 八　三角形ノ外角ハソノ内對角ノ何レヨリモ大デアル。

題意　$\triangle ABC$ ノ一ツノ外角ヲ $\angle ACD$ トスレバ

$\angle ACD > \angle A$

又　$\angle ACD > \angle B$



證明　邊 AC ノ中點ヲ E トシ, BE ヲ引キ之ヲ F マデ延長シ $EF=BE$ トシ, F ト C トヲ結べバ, $\triangle AEB$, $\triangle CEF$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{r} AE=CE \\ BE=FE \\ \angle AEB=\angle CEF \end{array}\right\} \quad \therefore \ \triangle AEB \equiv \triangle CEF$$

$$\therefore \quad \angle A=\angle ECF$$

然ルニ E ハ $\angle ABC$ ノ内ニアルカラ BF モマタコノ角ノ内ニアリ, F ハ $\angle ACD$ ノ内ニアル。

從ッテ CF ハ $\angle ACD$ ノ内ニアル。

$$\therefore \quad \angle ACD > \angle ECF$$

$$\therefore \quad \angle ACD > \angle A$$

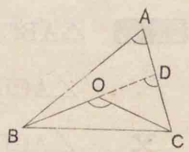
同樣ニ　$\angle ACD > \angle B$

ナルコトガ證明出來ル。(各自ニ試ミヨ)

例題 (9)

1. △ABCノ内部ニ一點Oヲ取レバ　$\angle BOC > \angle BAC$

又　$OB+OC < AB+AC$



2. 三角形ノ二角ノ和ハ2直角ヨリモ小デアル。

3. 二等邊三角形ノ底角ハ鋭角デアル。

4. 直線外ノ一點又ハ直線上ノ一點カラソノ直線ニ引イタ垂線ハ唯一ツシカナイ。

18. 三角形ノ邊ト角トノ關係

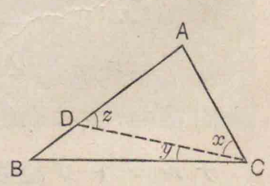
一ツノ三角形ニ於テ,二邊ガ相等シイトキハソノ對角ハ相等シク,又逆ニ二角ガ相等シイトキハソノ對邊ハ相等シイ。

定理九　三角形ノ二邊ガ不等ナルトキハ,大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリモ大デアル。

題意　△ABCニ於テ

$AB > AC$ナルトキハ

$\angle C > \angle B$



證明　邊ABノ上ニ邊ACニ等シクADヲ取リ,C,Dヲ結ブト,Dハ∠ACBノ内ニアルカラ,CDハ∠Cヲ二ツノ部分x, yニ分ケル。

サテ　$AC=AD$　∴ $\angle x = \angle z$

然ルニ　$\angle z > \angle B$　(定理八)

∴ $\angle x > \angle B$　又　$\angle C > \angle x$

∴ $\angle C > \angle B$

定理十　三角形ノ二角ガ不等ナルトキハ,大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリモ大デアル。

題意　△ABCニ於テ$\angle C > \angle B$ナルトキハ

$AB > AC$

證明　若シABガACヨリモ大デナイトスレバ,

$AB=AC$　又ハ　$AB<AC$　デアル。

然ルニ　$AB=AC$　トスレバ　$\angle C = \angle B$

又　$AB<AC$　トスレバ　$\angle C < \angle B$

トナリ,何レモ假設ニ反スル。

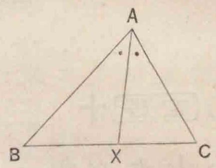
故ニ　$AB>AC$　デナケレバナラヌ。

注意　コノ證明ノヤウニ終結ガ眞デナイト假定スレ

バ,ソノ結果ガ既知ノ公理,定理或ハ假設ニ反シテ不合理ニナルカラ終結ハ眞デナケレバナラヌト斷定スル證明ノ仕方ヲ**歸謬法**(キビウハフ)トイフ。

例題　(10)

1. △ABC ノ ∠A ノ二等分線ト邊 BC トノ交點ヲ X トスレバ



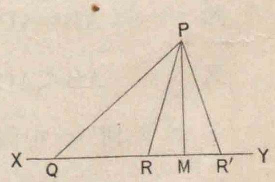
(1)　AB＞BX

(2)　AC＞CX

2. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點ヲ P トスレバ, AP ハ AB, AC ノ何レヨリモ小デアル。

3. △ABC ニ於テ AB>AC ナルトキ邊 BC 上ノ一點ヲ P トスレバ AP<AB デアル。

4. 圖ニ於テ PM ヲ點 P カラ直線 XY ニ引イタ垂線トスレバ



(1)　PM<PQ

(2)　MR=MR′ トスレバ

PR=PR′

(3)　MQ>MR トスレバ

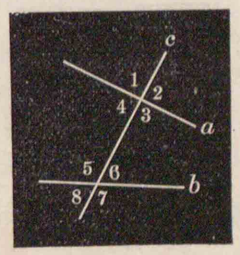
PQ>PR

直線外ノ一點カラコノ直線ニ引イタ垂線ノ長サヲソノ**點ト直線トノ距離**トイフ。

直線 XY 外ノ點 P ト XY 上ノ點 Q トヲ通ル直線 PQ ガ, XY ニ垂直デナイトキハ, 直線 PQ ハ XY ニ**斜交スル**トイヒ, PQ ヲ P カラ直線 XY ニ引イタ**斜線**, Q ヲソノ**斜線ノ足**トイフ。

19. 錯角・同位角

同一平面上ニアル二直線 a, b ガ他ノ一直線 c ト交ルトキハ八ツノ角ガ出來ル。コレ等ヲソノ相互ノ關係ニヨッテ次ノヤウニ名ヅケル。



1, 2, 7, 8 ヲ**外角**,

3, 4, 5, 6 ヲ**內角**,

3 ト 5 又ハ 4 ト 6 ヲ**錯角**,

1 ト 5, 2 ト 6, 3 ト 7 又ハ 4 ト 8 ヲ**同位角**,

3 ト 6 又ハ 4 ト 5 ヲ**同傍內角**トイフ。

問　二直線ガ他ノ一直線ト交ッテナス一組ノ同位角ガ相等シイトキハ, 他ノ同位角, 錯角, 同傍內角ハ夫々ドンナ關係ガアルカ。

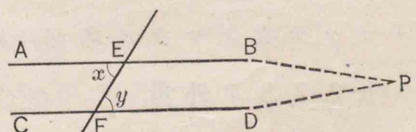
20. 平行線

同一ノ平面上ニアッテ双方ニ如何程延長シテモ相交ラナイ二直線ハ**互ニ平行デアル**トイヒ,平行ナル二直線ヲ**平行線**トイフ。

二直線 a, b ガ平行デアルコトヲ $a \parallel b$ ト書ク。

定理十一　二直線ガ他ノ一直線ト交ッテナス一組ノ錯角ガ相等シイトキハ,コノ二直線ハ互ニ平行デアル。

題意　二直線 AB, CD ガ第三ノ直線トE, Fデ交ッテ一組ノ錯角,例ヘバ $\angle x$ ト $\angle y$ トガ相等シイトキハ,ABトCDトハ平行デアル。



證明　若シAB, CDガ平行デナイトスレバ必ズ或一點Pデ交ッテ△PEFヲ作ル。ソシテPガEB, FDノ方向ニアルトキハ

$$\angle x > \angle y$$ (定理八)

又PガEA, FCノ方向ニアルトキハ

$$\angle y > \angle x$$

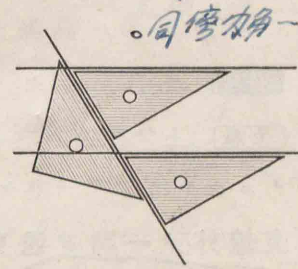
トナリ,$\angle x = \angle y$ ナル假設ニ反スル。

故ニ $\angle x = \angle y$ ナルトキハABトCDトハ相交ルコトハ出來ナイ。即チ平行デアル。

系一　二直線ガ他ノ一直線ト交ッテナス一組ノ同位角ガ相等シイトキハ,コノ二直線ハ互ニ平行デアル。

○錯角……相等シイ
○同位角……相等カッタラ
○同傍内角……二直角ヲナス
補角ヲナス

注意　三角定木ノ一ツノ縁ヲ他ノ定木ノ縁ニアテナガラ滑ベラセテ平行線ヲ引クノハ同位角ガ等シクナルヤウニシテキルノデアル。



系二　二直線ガ他ノ一直線ト交ッテナス同傍内角ガ補角ヲナストキハ,コノ二直線ハ互ニ平行デアル。

系三　同一ノ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

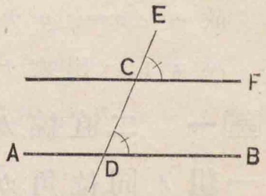
同位角

作圖題六　直線外ノ一點ヲ通リ,コノ直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

題意　ABヲ與ヘラレタ直線,CヲソノL上ニナイ

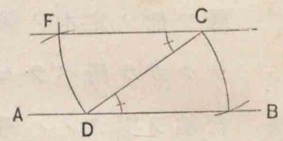
點トスル。Cヲ通リAB＝平行ナル直線ヲ引ケ。

作圖 CトAB上ノ任意ノ點Dトヲ通ル直線ECDヲ引ク。次ニEDノ同ジ側デ∠CDBト等シイ∠ECFヲ作ル直線CFヲ引ケバ,コレガ求メル直線デアル。



證明 各自ニナセ。

注意 上ノ作圖ハ右ノヤウニシテモ容易ニ畫ケル。



直線外ノ一點ヲ通リ,コノ直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

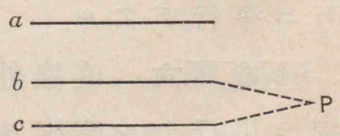
直線外ヲ通ル

コレヲ**平行線ノ公理**トイフ。平行線ハ唯一本也。

定理十二 同一ノ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

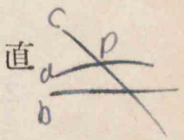
題意 $a \parallel b$, $a \parallel c$ ナルトキハ $b \parallel c$ デアル。

證明 假ニb, cガ一點Pデ相交ルトスレバ,Pヲ通リaニ平行ナル二直線b, cガアルコトニナリ,上ノ



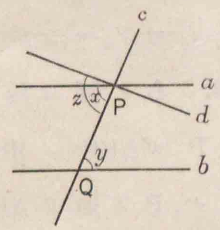
公理ニ反スル。故ニb, cハ決シテ交ラナイ。即チ平行デアル。

系 平行ナル二直線ノ一ツニ交ル直線ハ他ノ一ツニモ交ル。



定理十三 平行ナル二直線ガ他ノ一直線ト交ルトキハ,錯角ハ相等シイ。

題意 平行ナル二直線a, bガ一直線cト二點P,Qデ交ルトスレバ,錯角$\angle x$ト$\angle y$トハ相等シイ。

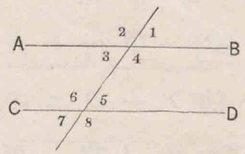


證明 假ニ$\angle x \neq \angle y$トシ,Pヲ通ル他ノ直線dヲ引イテ錯角$\angle z$ト$\angle y$トヲ等シクスレバ,dトbトハ平行デアル。(定理十一) 又假設ニヨッテaトbトモ平行デアル。故ニ$\angle x \neq \angle y$トスレバ,Pヲ通リbニ平行ナル直線ガa, d二ツアルコトトナル。コレハ平行線ノ公理ニ反スル。故ニ$\angle x = \angle y$

系 平行ナル二直線ガ他ノ一直線ト交ルトキハ,同位角ハ相等シク,同傍内角ハ互ニ補角ヲナス。

例題 (11)

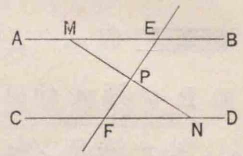
1. 右ノ圖ニ於テ, AB∥CDデ∠1=56°デアルト, 他ノ七ツノ角ノ大サハドウカ。



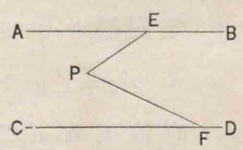
2. 前問ノ圖ニ於テ ∠1ノ二等分線ト ∠5ノ二等分線トハ互ニ平行デアル。

3. 平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ垂直デアル。

4. 右ノ圖ニ於テAB∥CDデ PガEFノ中點ナルトキハ, Pヲ通リAB, CDノ間ニ限ラレル任意ノ線分ハPデ二等分セラレル。



5. 右ノ圖ニ於テAB∥CDデ, PヲABトCDトノ間ニアル任意ノ點トスレバ



$$\angle EPF=\angle AEP+\angle CFP$$

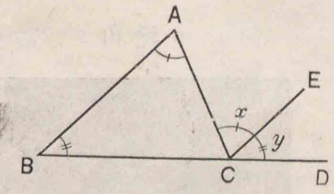
6. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々平行ナルトキハ, コノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。

21. 三角形ノ內角ノ和

定理 十四　三角形ノ三ツノ角ノ和ハ2直角ニ等シイ。

題意　△ABC ニ於テ

$\angle A+\angle B+\angle C=2R∟$



證明　一邊 BCヲ延長シテ外角ACDヲ作リ, ソノ角內ニCヲ通ツテBAニ平行ニCEヲ引ケバ

$\angle A=\angle x$ (錯角),　$\angle B=\angle y$ (同位角)

$$\therefore \angle A+\angle B+\angle C=\angle x+\angle y+\angle C$$
$$=2R∟$$

系一　三角形ノ外角ハソノ二ツノ內對角ノ和ニ等シイ。

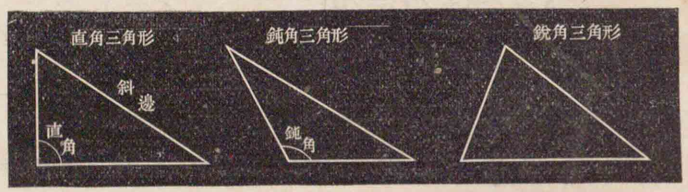
系二　一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ三角形ノ二角ニ相等シイトキハ, 殘リノ角モマタ相等シイ。

系三　二角ガ夫々相等シク, ソノ一双ノ等シイ角ニ對スル邊ガ相等シイ二ツノ三

角形ハ合同デアル。

問 **1.** 三角形ノ一角ガ直角ナラバ,他ノ二角ハ何レモ鋭角デ且互ニ餘角ヲナス。

問 **2.** 三角形ノ一角ガ鈍角ナラバ,他ノ二角ハ何レモ鋭角デアル。

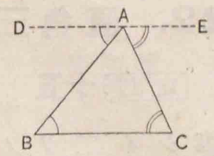


一ツノ角ガ直角デアル三角形ヲ**直角三角形**トイフ。直角三角形ニ於テハ直角ニ對スル邊ヲ特ニ**斜邊**トイフ。又一ツノ角ガ鈍角デアル三角形ヲ**鈍角三角形**トイヒ,三ツノ角ガ何レモ鋭角デアル三角形ヲ**鋭角三角形**トイフ。

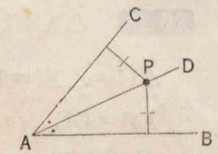
例　題　(12)

1. △ABC ニ於テ ∠C ハ 40° デ, B ニ於ケル外角ハ 100° デアル。∠A, ∠B ノ大サハ何程カ。
2. 正三角形ノ一角ノ大サハ何程カ。
3. 一角ガ 60° ナル二等邊三角形ハ正三角形デアル。

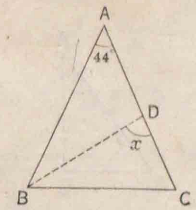
4. 圖ニ於テ DE∥BC デアル。之ヲ用ヒテ三角形ノ内角ノ和ガ2直角ニ等シイコトヲ證明セヨ。



5. 角ノ二等分線上ノ任意ノ點カラソノ二邊ニ至ル距離ハ相等シイ。

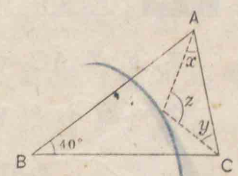


6. 圖ニ於テ △ABC ハ二等邊三角形デ頂角 A ガ 44° デアル。∠B ノ二等分線 BD ガ AC トナス角 x ハ何度カ。



7. △ABC ノ角 B ガ 40° デアルトキ,他ノ二角ノ二等分線ノナス角ノ大サハ何程カ。

(∠A+∠C=?, ∠x+∠y=?　∴ ∠z=?)



8. 二等邊三角形ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行デアル。

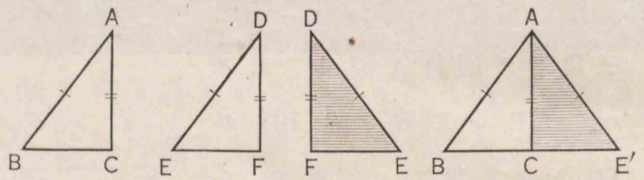
9. 一直線ガ二ツノ平行線ト交ルトキ,同傍内角ノ二等分線ハ互ニ垂直デアル。

22. 直角三角形ノ合同

[定理] **十五**　斜邊ト他ノ一邊トガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。

題意　$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l}\angle C=\angle F(=R\llcorner)\\ AB=DE\\ AC=DF\end{array}\right\}\ \text{ナルトキハ}\ \triangle ABC\equiv\triangle DEF$$



證明　$\triangle DEF$ ヲ取リ, DF ヲ之ニ等シイ AC ニ重ネ, E ヲ AC ニ對シテ B ト反對ノ側ニアルヤウニ置イタトキ E ノ落チル點ヲ E' トスルト

$$\angle ACB+\angle ACE'=2R\llcorner$$

故ニ BCE' ハ一直線ヲナス。

然ルニ $AE'=DE=AB$ デアルカラ, $\triangle ABE'$ ハ A ヲ頂點トスル二等邊三角形デアル。

$\therefore\ \angle B=\angle E'$　　$\therefore\ \angle B=\angle E$

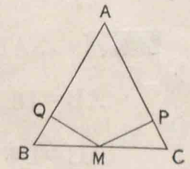
$\therefore$　　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　　(定理十四系三)

[例題] (13)

1. 角ノ内部ニアッテ,ソノ二邊カラ等距離ニアル點ハコノ角ノ二等分線上ニアル。

2. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端カラソノ對邊ニ至ル距離ハ相等シイ。

3. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點 M カラ他ノ二邊ニ至ル距離ガ相等シイトキハ $\angle B=\angle C$ デアル。



4. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B$ 及ビ $\angle C$ ノ二等分線ノ交點ヲ O トスレバ,O カラソノ三邊ニ至ル距離ハ相等シイ。又 AO ハ $\angle A$ ヲ二等分スル。

5. $\triangle ABC$ ニ於テ邊 AB, AC ノ垂直二等分線ノ交點ヲ O トスレバ,O カラソノ三頂點ニ至ル距離ハ相等シイ。又 O カラ邊 BC ニ引イタ垂線ハ之ヲ二等分スル。

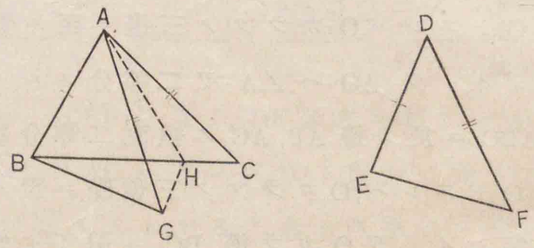
23. 二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形

二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ニ於テ,ソノ夾角ガ相等シイトキハ第三邊ハ相等シク,又第三邊ガ相等シイトキハソノ夾角ハ相等シイ。

定理 **十六**　二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ニ於テ,ソノ夾角ガ不等ナルトキハ,大ナル夾角ヲ有スル三角形ノ第三邊ハ小ナル夾角ヲ有スル三角形ノ第三邊ヨリモ大デアル。

題意　△ABC, △DEF ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} AB=DE \\ AC=DF \\ \angle A>\angle D \end{array}\right\}\text{ ナルトキ }\quad BC>EF$$



證明　∠A ノ内部ニ ∠D ニ等シク ∠BAG ヲ作リ, AG=DF ナラシメ, B ト G トヲ結ベバ

△ABG≡△DEF　∴ BG=EF

サテ G ガ BC 上ニアレバ

BC>BG=EF

又 G ガ BC 上ニナイトキハ, ∠GAC ノ二等分

線ガ BC ト交ル點ヲ H トシ, HG ヲ引ケバ

△AHG≡△AHC

∴　HG=HC

ソシテ　BH+HG>BG

∴　BH+HC>BG

∴　BC>BG=EF

系　二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ノ第三邊ガ不等ナルトキハソノ大ナル方ノ對角ハ小ナル方ノ對角ヨリモ大デアル。

例　題 (14)

O **1.** P ヲ線分 AB ノ垂直二等分線ニ對シテ A ト同側ニアル任意ノ點トスレバ PA<PB デアル。

O **2.** △ABC ニ於テ AB>AC ナルトキ,中線 AD ガ邊 BC トナス二ツノ角ノ中, ∠ADB ハ鈍角デ, ∠ADC ハ鋭角デアル。

3. △ABC ノ邊 BC ヲ D マデ延長シテ CD ヲ AB ニ等シク取レバ, AD>BC デアル。

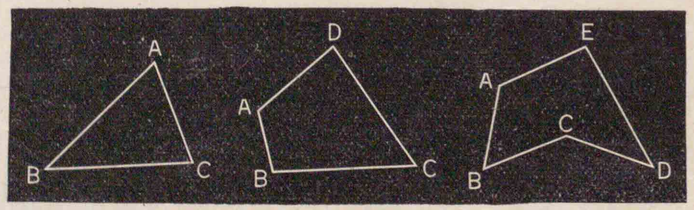
4. △ABC ニ於テ AB>AC ナルトキ,中線 AD 上ノ一點ヲ E トスレバ EB>EC デアル。

24. 多角形

相接續スル幾ツカノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**多角形**トイフ。

多角形ヲ圍ム線分ヲ多角形ノ**邊**トイヒ,スベテノ邊ノ和ヲ**周**トイフ。二隣邊ノナス形內ノ角ヲ**內角**又ハ單ニ**角**トイヒ,ソノ頂點ヲ多角形ノ**頂點**トイフ。

多角形ノ內角ノ數ト邊ノ數トハ相等シイ。ソノ數ニヨツテ多角形ヲ三角形,四角形,五角形又ハ三邊形,四邊形,五邊形等トイフ。

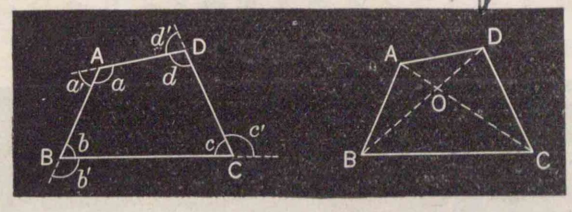


多角形ヲ呼ブニハ頂點ノ記號ヲ順ニ並ベテ"四角形ABCD, 五角形ABCDE"ナドトイフ。

多角形ノ內角ノ各ガ2直角ヨリ小ナルトキハ**凸多角形**トイヒ,一ツデモ2直角ヨリ大ナル內角ガアルトキハ**凹多角形**トイフ。

今後單ニ多角形トイヘバ凸多角形ヲ指ス。

多角形ノ一邊ノ延長トソノ隣リノ邊トノナス角ヲソノ**外角**トイフ。又相隣ラナイ二頂點ヲ結ブ線分ヲソノ**對角線**トイフ。



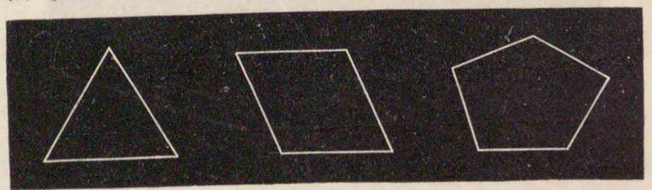
圖ニ於テ $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d$ ハ四邊形ABCDノ內角デ,$\angle a', \angle b', \angle c', \angle d'$ ハソノ外角デアル。又AC, BDハソノ對角線デアル。

例題　(15)

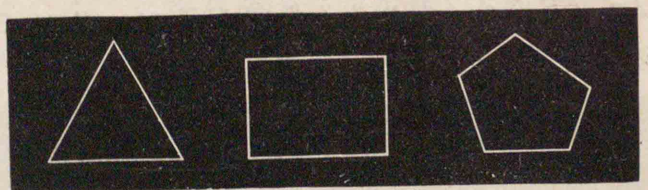
1. 六角形ノ一ツノ頂點カラハ幾ツノ對角線ガ引カレルカ。 $n-3$. ハ公式　6−3=3本
2. 五角形ニハ幾ツノ對角線ガアルカ。又十角形ニハ幾ツアルカ。 5本　35本
3. n 角形ノ對角線ノ數ヲ求メル公式ヲ作レ。 $\frac{n(n-3)}{2}$
4. 對角線ノ數ガ14ナル多角形ノ邊數ヲ求メヨ。又對角線ノ數ガ44ナル多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

25. 正多角形

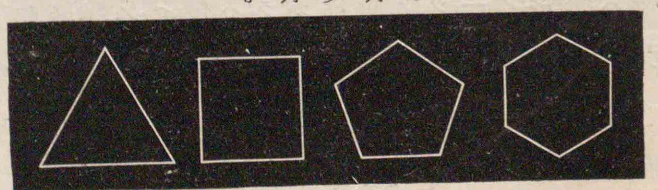
多角形ノスベテノ邊ガ相等シイモノヲ**等邊多角形**トイヒ,スベテノ角ガ相等シイモノヲ**等角多角形**トイヒ,スベテノ邊ガ相等シク且スベテノ角ガ相等シイモノヲ**正多角形**トイフ。



等邊多角形

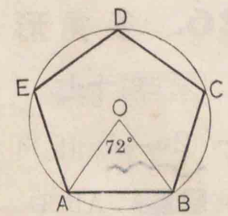


等角多角形



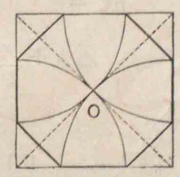
正多角形

分度器ヲ用ヒルト任意ノ正多角形ヲ畫クコトガ出來ル。例ヘバ正五角形ヲ畫クニハ一ツノ圓 O ヲ畫キ,中心角 $\frac{360^\circ}{5}$ 即チ 72° ニ對スル弧 AB ヲ作レバソノ弦 AB ハ正五角形ノ一邊デアル。次ニ BC, CD 等ガ AB ニ等シイヤウニ圓周上ニ C, D 等ノ點ヲ取リ,コレ等ノ點ヲ順次ニ結ベバヨイ。

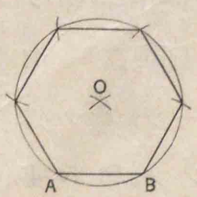


例題 (16)

1. 圓周ノ $\frac{1}{5}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}$ ナル弧ニ對スル中心角ノ大サハ各何程カ。
2. 半徑 2.5 *cm* ノ圓ヲ畫キ,之ヲ用ヒテ正三角形ヲ作レ。
3. 直徑 6 *cm* ノ圓ヲ用ヒテ正八角形ヲ作レ。
4. 右ノ圖ハ正方形ヲ基礎トスル正八角形ノ畫キ方ヲ示シテキル。之ニ倣ツテ正八角形ヲ畫ケ。



5. 右ノ圖ハ線分 AB ヲ一邊トスル正六角形ノ畫キ方ヲ示ス。圖ヲ見テソノ方法ヲ推察シ且各自練習セヨ。



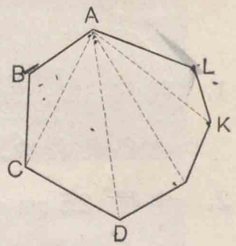
26. 多角形ノ内角ノ和

定理 **十七**　n 角形ノスベテノ内角ノ和ハ $(2n-4)$ 直角ニ等シイ。

題意　ABCD……KL ヲ n 角形トスレバ

$\angle A+\angle B+\angle C+\ldots\ldots+\angle L=(2n-4)$ R∟

證明　一ツノ頂點Aヲ通ルスベテノ對角線ヲ引ケバ,コノ多角形ハ $(n-2)$ 箇ノ三角形ニ分ケラレル。コレ等ノ三角形ノ内角ノ和ハコノ多角形ノ内角ノ和ニ等シイ。



故ニ

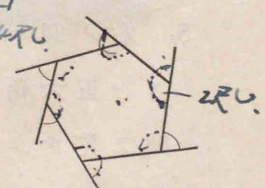
$$\angle A+\angle B+\angle C+\ldots\ldots+\angle L=2\times(n-2)\,\text{R∟}$$
$$=(2n-4)\,\text{R∟}$$

直角　内角ノ和

系 **一**　四邊形ノスベテノ内角ノ和ハ4直角ニ等シイ。

(2×4−4)RL
(8−4)RL
∴ 4RL
2RL×2=4RL

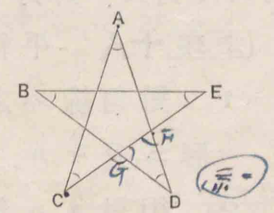
系 **二**　多角形ノ各頂點ニ一ツヅツ外角ヲ作ルトキハ,ソノ和ハ4直角ニ等シイ。



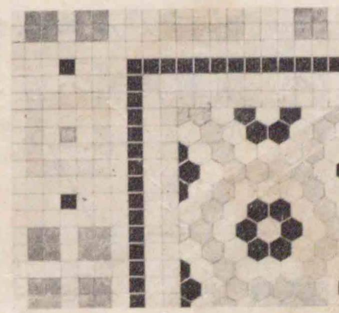
2n−(2n−4)RL
(2n−2n+4)RL
∴ 4RL.

例題 (17)

1. 五角形ノスベテノ内角ノ和ハ何程カ。
2. 正六角形ノ一ツノ内角ノ大サハ何程カ。
3. 正 n 角形ノ一ツノ内角ハ $\left(2-\frac{4}{n}\right)$R∟ ニ等シク,一ツノ外角ハ $\frac{4}{n}$R∟ ニ等シイ。　$\frac{(2n-4)RL}{n}=2-\frac{4}{n}RL.$
4. 一ツノ内角ガ 144° ナル正多角形ハ何角形デアルカ。
5. 一ツノ外角カ 45° ナル正多角形ハ何角形デアルカ。
6. 右ノ圖ハ星形五邊形トイフ。頂點 A, B, C, D, E ニ於ケル角ノ和ハ2直角ニ等シイコトヲ證明セヨ。

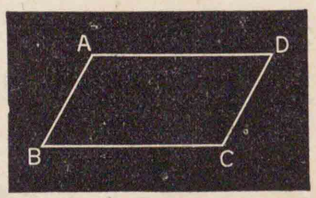


7. 正方形及ビ正六角形ノ敷石ハ圖ノヤウニ隙間ナク敷キツメルコトガ出來ル。何故カ。又正五角形ノ敷石デハドウカ。



27. 平行四邊形

四邊形ノ相對スル二双ノ邊ガ夫々**平行**ナルモノヲ**平行四邊形**トイフ。



右ノ圖ニ於テ $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$ デアル。

平行四邊形 ABCD ヲ ▱ABCD 又ハ ▱AC 或ハ ▱BD ト書ク。

▱ABCD ニ於テ邊 AB ト DC, AD ト BC トヲ**相對スル邊**又ハ**對邊**トイヒ, $\angle A$ ト $\angle C$, $\angle B$ ト $\angle D$ トヲ**相對スル角**又ハ**對角**トイフ。

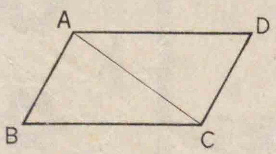
定理 **十八**　平行四邊形ニ於テハ

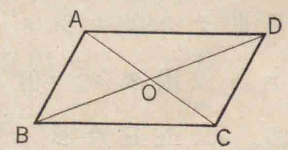
(1) 對角線ハ之ヲ合同ナル二ツノ三角形ニ分ケル。

(2) 相對スル角ハ相等シイ。

(3) 相對スル邊ハ相等シイ。

(4) 兩對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。





證明　各自ニナセ。

系　二ツノ平行線ノ間ニ夾マレル共通垂線ノ部分ノ長サハ一定デアル。

コノ部分ノ長サヲ**平行線間ノ距離**トイフ。

定理 **十九**　四邊形ハ次ノ各ノ場合ニ於テ平行四邊形デアル。

(1) 二双ノ對邊ガ夫々相等シイトキ。

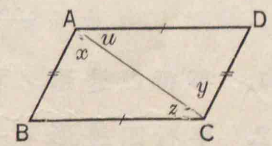
(2) 二双ノ對角ガ夫々相等シイトキ。

(3) 一双ノ對邊ガ相等シク且平行デアルトキ。

(4) 兩對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキ。

證明　四邊形 ABCD ニ於テ

(1) $AB=DC$,　$BC=AD$ トシ, 對角線 AC ヲ引ケバ



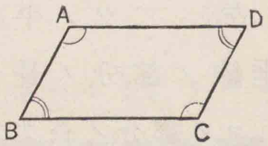
$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA \qquad \text{(定理五)}$$

$$\therefore \quad \angle x=\angle y, \quad \angle z=\angle u$$

$$\therefore \quad AB \parallel DC, \quad BC \parallel AD$$

故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

(2)　$\angle A=\angle C,\ \angle B=\angle D$



トスレバ

$$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$$

又　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4R\llcorner$

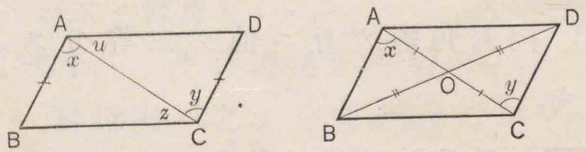
$\therefore$　$\angle A+\angle B=2R\llcorner$

$\therefore$　$AD \parallel BC$　（定理十一系二）

同様ニ　$AB \parallel DC$

故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

(3), (4) 各自ニナセ。



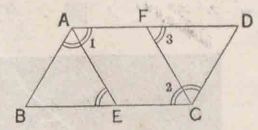
例　題　(18)

1. 平行四邊形ノ相隣ル二角ハ補角ヲナス。

2. 平行四邊形ノ一ツノ角ガ 60° ナルトキハ,他ノ角ノ大サハ何程カ。

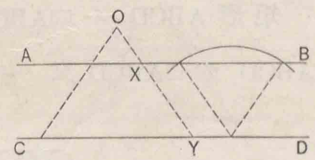
3. ▱ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點 O ヲ通ル任意ノ直線ガ邊 BC, AD 或ハソノ延長ト交ル點ヲ夫々 E, F トスレバ OE=OF デアル。

4. 平行四邊形ノ對角ノ二等分線ハ互ニ平行デアル。



5. 平行四邊形 ABCD ノ邊 BC, AD ノ中點ヲ夫々 M, N トスレバ,四邊形 AMCN ハ平行四邊形デアル。

6. 平行線 AB, CD 外ノ一點 O ヲ通リ AB, CD ト夫々 X, Y デ交ル直線ヲ引キ XY ノ長サヲ定長ナラシメヨ。



28. 正方形・矩形・菱形

平行四邊形ノ一ツノ角ガ直角ナルトキハ,スベテノ角ハ直角デアル。

スベテノ角ガ直角ナル四邊形ヲ**矩形**トイフ。

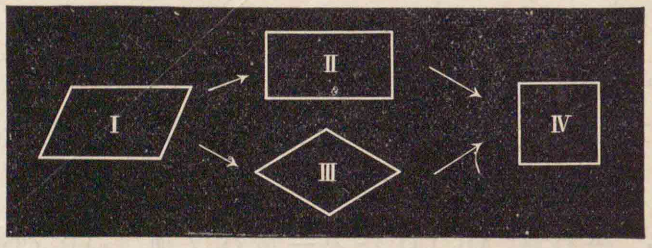
平行四邊形ノ相隣ル二邊ガ相等シイトキハ,スベテノ邊ハ相等シイ。

スベテノ邊ガ相等シイ四邊形ヲ**菱形**トイフ。

スベテノ角ガ直角デ且スベテノ邊ガ相等シイ四邊形ヲ**正方形**トイフ。

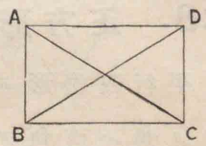
菱形・矩形・正方形ハ何レモ平行四邊形ノ特別ナ

モノデ,次ノ圖ノ矢印ハソノ關係ヲ示シテキル。

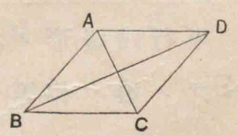


矩形 ABCD ヲ □ABCD 又ハ □AC ト書キ,正方形 ABCD ヲ □ABCD 又ハ □AC ト書ク。

例　題　(19)



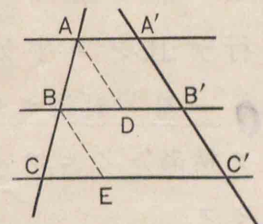
1. 矩形ノ二ツノ對角線ハ相等シイ。
2. 二ツノ對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。



3. 菱形ノ對角線ハ互ニ他ヲ垂直ニ二等分スル。
4. 四邊形ノ兩對角線ガ互ニ他ヲ垂直ニ二等分スルモノハ菱形デアル。
5. 平行四邊形ノ四ツノ角ノ二等分線ニヨツテ出來ル四邊形ハ矩形デアル。

29. 平行線ノ截取ル線分

定理 二十　多クノ平行線ガ,之ト交ル一ツノ直線カラ截取ル線分ガ相等シイトキハ,コレ等ノ平行線ニ交ル他ノ直線カラ截取ル線分モマタ相等シイ。



題意　平行線 AA', BB', CC' ガ二直線 ABC, $A'B'C'$ ト交ルトキ, $AB=BC$ ナラバ

$$A'B'=B'C'$$

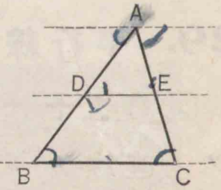
證明　A 及ビ B カラ $A'B'C'$ ニ平行ナル直線ヲ引キ,コレト BB' 及ビ CC' トノ交點ヲ夫々 D, E トスレバ,四邊形 $ADB'A'$ ハ平行四邊形ニナルカラ

$$AD=A'B' \quad \text{同様ニ} \quad BE=B'C'$$

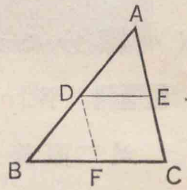
然ルニ　$AD \parallel BE$　トナルカラ

$$\left.\begin{array}{ll} & \angle BAD=\angle CBE \\ \text{又} & \angle ABD=\angle BCE \\ \text{且} & AB=BC \end{array}\right\} \quad \therefore \ \triangle ABD \equiv \triangle BCE$$

$$\therefore \ AD=BE \qquad \therefore \ A'B'=B'C'$$



[系]一　三角形ノ一邊ノ中點ヲ通ツテ他ノ一邊ニ平行ナル直線ハ第三邊ヲ二等分スル。



[系]二　三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行デ且ソノ半分ニ等シイ。

一双ノ對邊ガ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,ソノ平行ナル二邊ヲ**底邊**又ハ**底**トイフ。

平行デナイ二邊ガ相等シイ梯形ヲ**等脚梯形**トイフ。

系一,系二ノ圖ニ於ケルDBCEハ梯形デアル。

[系]三　直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點カラ等距離ニアル。

[例　題] (20)

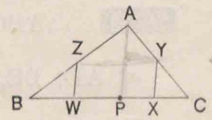
1. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル三ツノ線分ハ,ソノ三角形ヲ四ツノ合同ナル三角形ニ分ケル。

2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル四邊形ハ平行四邊形デアル。

3. 對角線ノ相等シイ四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル四邊形ハ菱形デアル。

4. 等脚梯形ノ一ツノ底邊ノ兩端ノ角ハ相等シク,相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。

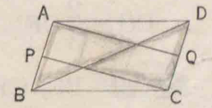
5. △ABCノ邊BC上ノ任意ノ點ヲPトシ, BP, CP, CA, ABノ中點ヲ夫々W, X, Y, Zトスレバ



(1)　XY＝WZ　　(2)　XY＋WZ＝AP

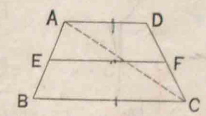
系2

6. ▱ABCDニ於テ AB, CDノ中點ヲ夫々P, QトスレバAQ, CPハ對角線BDヲ三等分スル。



7. 梯形ノ平行デナイ一邊ノ中點カラ底邊ニ平行ニ引イタ直線ハ對邊ノ中點ヲ通ル。

8. 梯形ノ平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底邊ニ平行デ,且兩底邊ノ和ノ半分ニ等シイ。



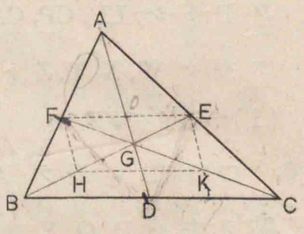
系1、系2

9. 與ヘラレタ線分ヲ三等分セヨ。又一般ニ與ヘラレタ線分ヲ若干等分スル方法ハドウカ。

30. 三角形ノ重心

定理 二十一　三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ニ於テ相交リ,且コノ交點カラ各頂點ニ至ル距離ハ夫々各中線ノ長サノ三分ノ二ニ等シイ。

題意 △ABCノ三ツノ中線ヲAD, BE, CFトスレバAD, BE, CFハ同一ノ點Gニ於テ相交リ,且



$$AG=\frac{2}{3}AD,\quad BG=\frac{2}{3}BE,$$

$$CG=\frac{2}{3}CF$$ デアル。

證明 BE, CFノ交點ヲGトシ, GB, GCノ中點ヲ夫々H, Kトスレバ

$$FE \parallel BC,\qquad FE=\frac{1}{2}BC$$

又 $$HK \parallel BC,\qquad HK=\frac{1}{2}BC$$

$$\therefore\quad FE \parallel HK \quad 且 \quad FE=HK$$

故ニHKEFハ平行四邊形トナリ

$$HG=GE,\qquad KG=GF$$

$$\therefore\quad BG=\frac{2}{3}BE,\qquad CG=\frac{2}{3}CF$$

次ニ中線ADト他ノ一ツノ中線例ヘバBEトノ交點ヲG′トスレバ,同理ニヨツテ

$$AG'=\frac{2}{3}AD,\qquad BG'=\frac{2}{3}BE$$

トナリ,從ツテ BG′=BG デ點G′ハGニ一致スル。

故ニ三ツノ中線ハ同一ノ點Gニ於テ相交リ,且

$$AG=\frac{2}{3}AD,\qquad BG=\frac{2}{3}BE,\qquad CG=\frac{2}{3}CF$$

デアル。

三角形ノ三ツノ中線ノ交點ヲ三角形ノ**重心**トイフ。

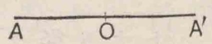
問　物理學デイフ重心ト上ニ述ベタ重心トハドウイフ關係ガアルカ。

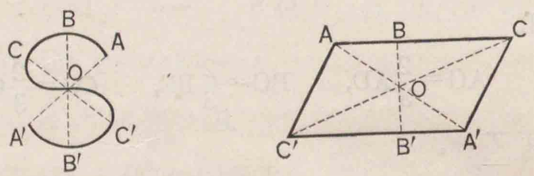
例題 (21)

1. △ABCノ重心Gハソノ三邊ノ中點D, E, Fヲ結ンデ出來ル△DEFノ重心デアル。
2. 三角形ノ重心ヲ通ル任意ノ直線ノ同ジ側ニアル二頂點カラコノ直線ニ至ル距離ノ和ハ他ノ頂點カラコノ直線ニ至ル距離ニ等シイ。

31. 對稱圖形

一點 O ガ二點 A, A′ ヲ結ブ線分ノ中點デアルトキ,コノ二點ハ**點 O ニ關シテ對稱デアル**トイヒ, A ト A′ トハ互ニ他ノ**對稱點**デアルトイフ。

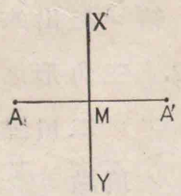




或圖形上ノ任意ノ點ノ點 O ニ關スル對稱點ガ同ジ圖形上ニアルトキニハ,ソノ圖形ハ點 O ニ關シテ對稱デアルトイヒ,O ヲ**對稱ノ中心**トイフ。

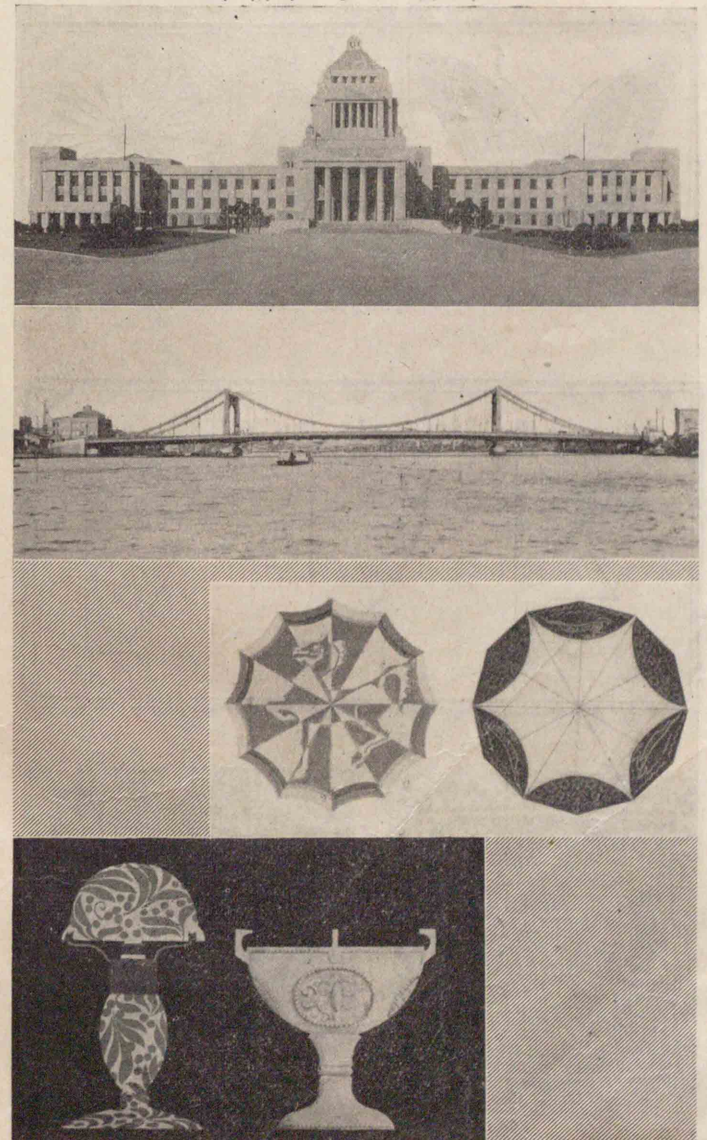
例ヘバ平行四邊形ハ兩對角線ノ交點ニ關シテ對稱デアル。

カヤウナ圖形ヲ對稱ノ中心ヲ中心トシテ 180° 廻轉スルト,圖形ノ各部分ハ同ジ圖形ノ他ノ部分ニ全ク重ナル。

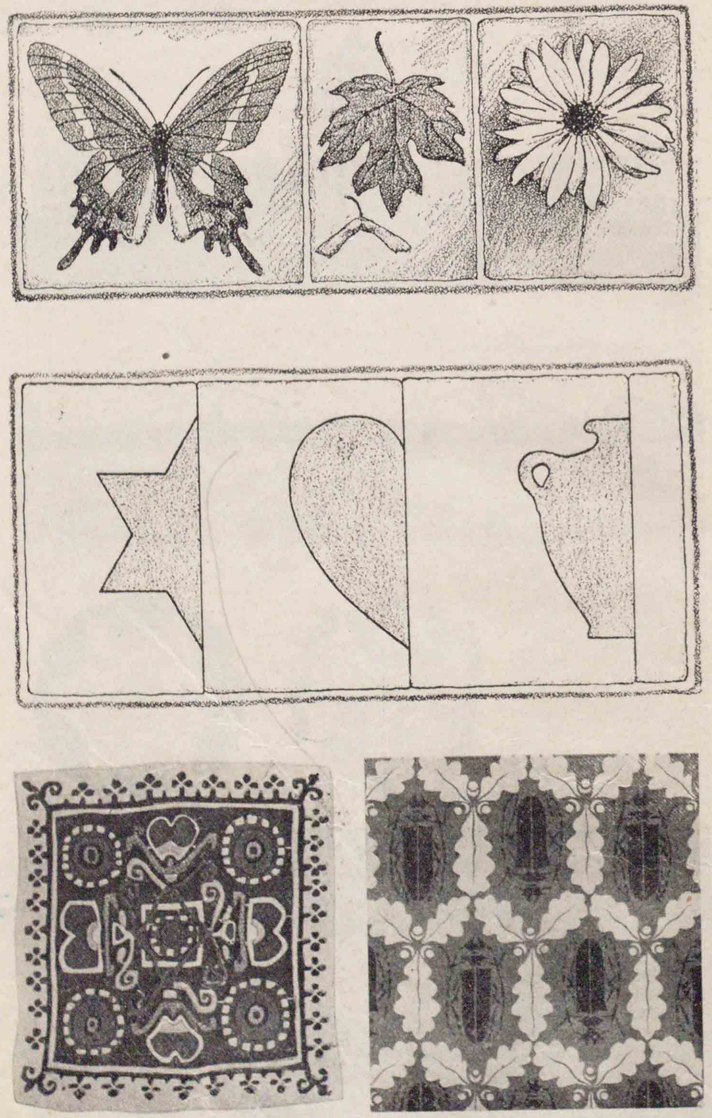


直線 XY ガ二點 A, A′ ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ナルトキ,コノ

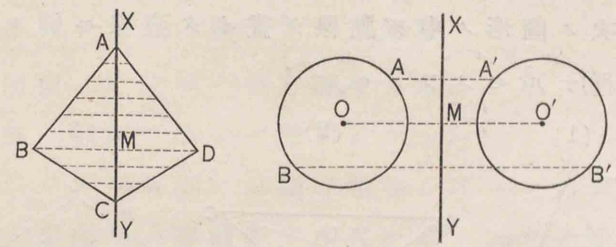
對稱圖形ノ例 (一)



對稱圖形ノ例（二）



二點ハ直線 XY ニ關シテ對稱デアルトイヒ, A ト A′ トハ互ニ他ノ**對稱點**デアルトイフ。



或圖形上ノ任意ノ點ノ直線 XY ニ關スル對稱點ガ同ジ圖形上ニアルトキニハ,ソノ圖形ハ直線 XY ニ關シテ對稱デアルトイヒ, XY ヲ**對稱ノ軸**トイフ。

例ヘバ上圖ノ四邊形 ABCD ハ對角線 AC ニ關シテ對稱デアル。

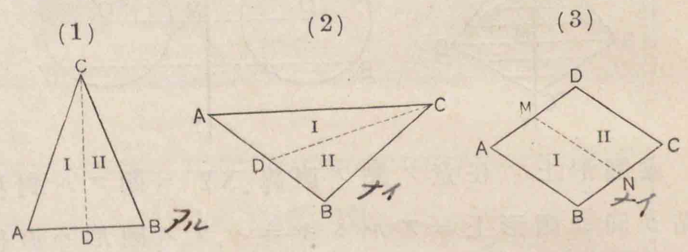
カヤウナ圖形ヲ對稱ノ軸ヲ折目トシテ折リ返セバソノ一方ノ部分ト他ノ部分トガ全ク相重ナル。

以上二種ノ對稱ヲ區別スルタメニ前者ヲ**點對稱**トイヒ,後者ヲ**線對稱**トイフコトガアル。對稱圖形ハ建築ソノ他各種ノ裝飾圖案ナドニ屢々利用サレル。

例　題 (22)

1. 點又ハ直線ニ關シテ對稱ナル圖形ヲ畫ケ。

2. 次ノ圖形ノ中デ點線デ畫イタ直線ニ關シテ對稱ナルモノヲイヘ。



3. 次ノ圖形ノ對稱ノ軸ハ何カ。　ト対角

(1) 矩形 相対スル辺ノ中線 (2)　(2) 正方形 線　(3) 菱形 対角線 ①

(4) 正三角形 中線 ③　(5) 角 二等分線 ①　(6) 圓 直経 無数

4. 正三角形ニハ對稱ノ軸ガ幾ツアルカ。又菱形ニツイテハドウカ。③デ

5. 次ノ圖形ノ對稱ノ中心ハ何カ。

(1) 正方形 対角線ノ交点 (2) 正六角形 ガイマツスルノ中心 (3) 圓 中心

6. 兩對角線ノ交點ニ關シテ對稱ナル四邊形ハ平行四邊形デアル。

7. 等脚梯形ハ兩底邊ノ中點ヲ通ル直線ニ關シテ對稱デアル。

32. 矩形及ビ正方形ノ面積

直線又ハ曲線デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**平面形**トイヒ，平面形ノ廣サヲソノ**面積**トイフ。

面積ノ單位ニハ，平方粍，平方米等ヲ用ヒルコトハ既ニ算術デ學ンダ所デアル。

二ツノ平面形ノ面積ガ相等シイコトヲコノ二ツノ平面形ハ**等積デアル**又ハ單ニ二ツノ平面形ハ**相等シイ**トイフ。

問　合同ナル平面形ハ等積デアル。等積ナル平面形ハ合同デアルトイヘルカ。ナイ

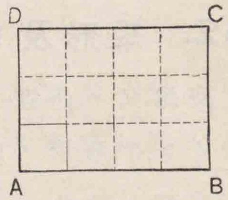
二ツノ平面形ガ等積デアルコトヲ表ハスニハ等號＝ヲ用ヒル。例ヘバ △ABC ト △DEF トガ等積デアルコトヲ △ABC＝△DEF ト書ク。

定理 二十二　矩形ノ面積ヲ表ハス數ハソノ相隣ル二邊ヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

題意　矩形 ABCD ノ相隣ル二邊 AB, AD ノ長サヲ(或同一ノ單位デ)表ハス數ヲ夫々 a, b トシ，ソノ面積ヲ(長サノ單位ニ對應スル面積ノ單位デ)表ハス數ヲ S トスレバ，

$$S=ab$$

證明 AB ヲ a 等分シ, AD ヲ b 等分シ,ソノ各分點ヲ通ッテ夫々AD, AB ニ平行ナル直線ヲ引ケバ ABCD ハ ab 箇ノ合同ナル正方形ニ分ケラレル。コノ正方形ノ一邊ハ長サノ單位ニ等シイカラ, ソノ面積ハ面積ノ單位ニ等シイ。故ニ ABCD ハ ab 箇ノ面積ノ單位ヲ含ム。



$$\therefore \quad S=ab$$

注意 1. 上ノ證明ハ a, b ガ整數ノ場合ヲ示ス。分數ソノ他ノ場合ハムヅカシイカラ省イタガ,何レノ場合デモ成立ツノデアル。

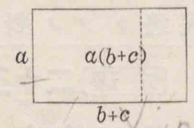
注意 2. 定理二十二ヲ略シテ矩形ノ面積ハソノ二隣邊ノ積ニ等シイト述ベルコトガアル。

系 正方形ノ面積ヲ表ハス數ハソノ一邊ヲ表ハス數ノ平方ニ等シイ。

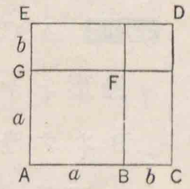
二ツノ線分 AB, BC ヲ相隣ル二邊トスル矩形ヲ**二線分AB,BCノ包ム矩形**トイヒ,ソノ面積ヲ AB·BC デ表ハス。又線分 AB ヲ一邊トスル正方形ヲ **AB ノ上ノ正方形**トイヒ,ソノ面積ヲ AB^2 デ表ハス。

例題 (23)

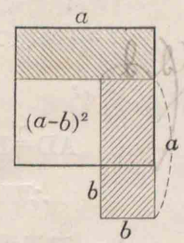
1. 二線分ノ和ト他ノ一線分トノ包ム矩形ハ初メノ二線分ノ各トコノ線分トノ包ム二ツノ矩形ノ和ニ等シイ。



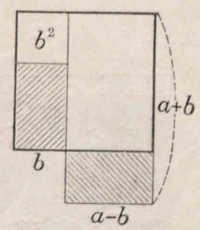
2. 二線分ノ和ノ上ノ正方形ハ各ノ線分ノ上ノ正方形ト,コノ二線分ノ包ム矩形ノ2倍トノ和ニ等シイ。



3. 二線分ノ差ノ上ノ正方形ハ各ノ線分ノ上ノ正方形ノ和カラ,コノ二線分ノ包ム矩形ノ2倍ヲ減ジタモノニ等シイ。



4. 二線分ノ和ト差トノ包ム矩形ハ各ノ線分ノ上ノ正方形ノ差ニ等シイ。

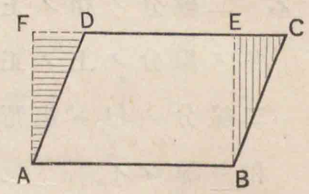


5. 上ノ四ツノ場合ニ對應スル代數公式ヲ書ケ。

33. 平行四邊形ノ面積

平行四邊形ノ任意ノ一邊ヲ**底邊**又ハ**底**トイヒ，底邊トソノ對邊トノ距離ヲ**高サ**トイフ。

定理 **二十三**　平行四邊形ノ面積ハコレト等底等高ナル矩形ノ面積ニ等シイ。



證明　ABCD ヲ平行四邊形トシ，二頂點 A, B カラ邊 CD 又ハソノ延長ニ垂線 AF, BE ヲ引キ，▱ABCD ト等底等高ナル □ABEF ヲ作レバ

AD=BC,　AF=BE,　∠AFD=∠BEC=R∠

∴　　△ADF≡△BCE

∴　四邊形 ABCF−△ADF=四邊形 ABCF−△BCE

∴　　▱ABCD=□ABEF

注意　平行四邊形ノ底邊高サ及ビ面積ヲ表ハス數ヲ夫々 a, h 及ビ S トスレバ

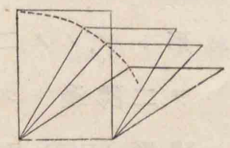
$$S=ah$$

系　底邊ト高サトガ夫々相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ハ相等シイ。

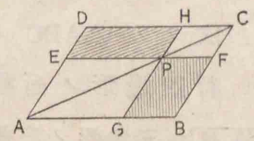
例題 (24)

1. 底邊ガ 25 cm デ，面積ガ 400 平方糎ノ平行四邊形ノ高サハ何程カ。

2. 二隣邊ノ長サガ夫々一定ナル平行四邊形ノ中デ面積ノ最大ナモノハ何カ。

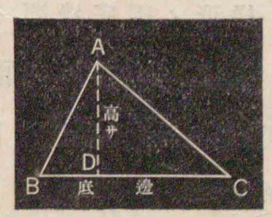


3. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ノ一點 P ヲ通リ二隣邊ニ平行ナル直線ヲ引クトキニ出來ル四ツノ平行四邊形ノ中デ，▱PA 及ビ ▱PC ヲ對角線 AC ニ沿フ平行四邊形トイヒ，▱PB 及ビ ▱PD ヲソノ**餘形**トイフ。餘形デアル ▱PB ト ▱PD トハ等積デアル。



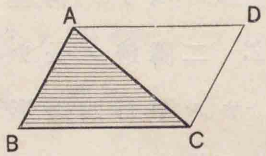
34. 三角形ノ面積

三角形ノ任意ノ一邊ヲ**底邊**又ハ**底**トイヒ，底邊ト之ニ對スル頂點トノ距離ヲソノ**高サ**トイフ。



定理 二十四　三角形ノ面積ハ之ト等底等高ナル平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シイ。

證明　ABCヲ一ツノ三角形トシ,ソノ二邊AB, BCヲ二隣邊トスル平行四邊形ABCDヲ作レバ



$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA \qquad \therefore \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} \square ABCD$$

依ッテ△ABCノ面積ハ之ト等底等高ナル平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シイ。

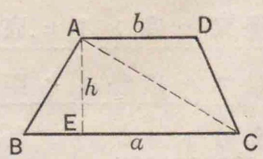
注意　三角形ノ底邊,高サ及ビ面積ヲ表ハス數ヲ夫々a,h及ビSトスレバ

$$S=\frac{1}{2}ah$$

系 一　底邊ト高サトガ夫々相等シイ二ツノ三角形ノ面積ハ相等シイ。

梯形ノ兩底邊間ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ。

系 二　梯形ノ面積ハ兩底邊ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ。



問　系二ヲ公式デ示セ。

例題 (25)

1. 底邊ガ高サヨリモ5cm長ク,面積ガ168平方糎ノ三角形ノ底邊及ビ高サヲ求メヨ。

2. △ABCノ邊BCノ中點ヲDトシ,AD上ノ任意ノ點ヲOトスレバ

(1)　△ABD=△ACD　　(2)　△ABO=△ACO

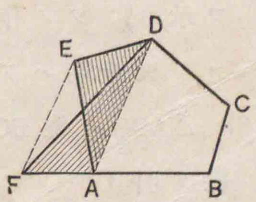
3. 三角形ノ重心ヲ三ツノ頂點ニ結ブトキハ,ソノ三角形ノ面積ハ三等分セラレル。

4. 梯形ガアル。ソノ兩底邊ノ差ガ2cm,高サガ5cmデ,面積ハ35平方糎デアル。兩底邊ノ長サハ各何程カ。

35. 等積變形

作圖題 七　與ヘラレタ多角形ト面積ガ等シクテ,邊數ガ一ツ少イ多角形ヲ作レ。

作圖　ABCDEヲ與ヘラレタ多角形トスル。對角線ADヲ引キ,頂點Eヲ通リ之ニ平行ナル



直線ヲ引キ BA ノ延長トノ交點ヲ F トスル。

FD ヲ引ケバ, FBCD ハ求メル多角形デアル。

證明 EF ∥ DA デアルカラ △FAD, △EAD ハ同ジ底邊 AD ノ上ニアツテソノ高サハ相等シイ。

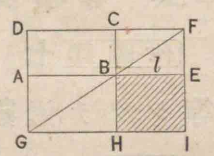
∴ △FAD＝△EAD

依ツテ双方ニ多角形 ABCD ヲ加ヘルト

多角形 FBCD＝多角形 ABCDE

例題 (26)

1. 五角形 ABCDE ト等積ナル三角形ヲ作レ。
2. 與ヘラレタ三角形ト等高等積ナル直角三角形ヲ作レ。
3. 與ヘラレタ多角形ト等積ナル矩形ヲ作レ。
4. 右ノ圖ハ矩形 ABCD ト等積ニシテ線分 l ニ等シイ一邊ヲ有スル矩形ヲ作ル方法ヲ示ス。ソノ作圖ヲ説明セヨ。又證明ハドウカ。

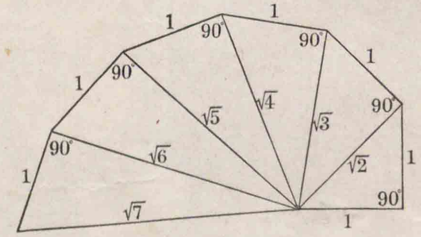


5. △ABC ノ邊 BC 上ノ與ヘラレタ點 P ヲ通ル直線ヲ引イテソノ面積ヲ二等分セヨ。

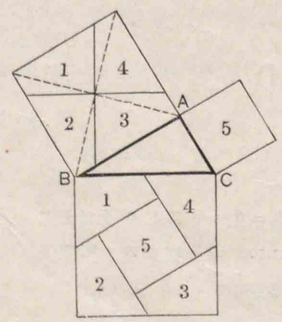
Pythagoras (西暦紀元前 582 年頃—493 年頃)

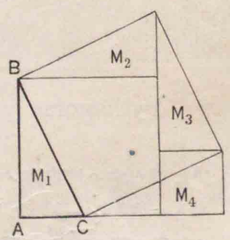
ぴたごらすハ地中海ノ Samos 島ニ生レぎりしや及ビえじぷとニ遊學シ, 後いたりやノ Croton ニ學校ヲ建テ數學及ビ哲學ヲ講ジ多數ノ學者ヲ養成シタ。

定理二十五ハ Pythagoras ノ發見シタモノデアルトイハレ之ヲ**ぴたごらすノ定理**トイフ。コノ定理ハ甚ダ重要ナモノデアル。例ヘバ次ノ圖ニ示スヤウニ單位ノ長サヲ知ツテ不盡根數 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 等ノ表ハス長サヲ求メル作圖モコノ定理ノ應用デアル.



次頁ニ示スぴたごらすノ定理ノ證明ハ Euclid ニヨツテ傳ヘラレタモノデアルガ,ソノ他ニモ多數ノ證明法ガアル。例ヘバ次ニ示スヤウナ作圖カラデモワカル。





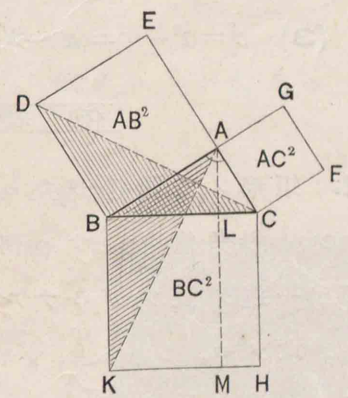
36. ぴたごらすノ定理

定理 **二十五**　直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。

題意 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A = R\llcorner$ ナラバ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

證明 AB, AC, BC ノ上ノ正方形ヲ夫々 ABDE, ACFG, BCHK トシ, A カラ BC ニ引イタ垂線 AL ノ延長ト HK トノ交點ヲ M トシ, AK, CD ヲ引ケバ, CAE ハ一直線トナリ BD ニ平行デアルカラ



$$\square BE = 2\triangle DBC$$

又　$\square BM = 2\triangle ABK$

ソシテ　$\triangle DBC \equiv \triangle ABK$

$\therefore$　$\square BE = \square BM$

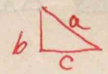
同様＝　　$\square CG = \square CM$

然ルニ　　$\square BH = \square BM + \square CM$

$\therefore\quad BC^2 = AB^2 + AC^2$

系　直角三角形ノ斜邊及ビ他ノ二邊ノ數値ヲ夫々 a, b, c トスレバ

(1)　$a^2 = b^2 + c^2$



(2)　$b^2 = a^2 - c^2 = (a+c)(a-c)$

(3)　$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

例　題　(27)

xe 1. 矩形ノ二隣邊ガ夫々 12 cm, 9 cm デアルトキ, ソノ對角線ノ長サハ何程カ。

x9 2. 一邊ノ長サガ a ナル正方形ノ對角線ノ長サヲ求メヨ。

xo 3. 一邊ノ長サガ a ナル正三角形ノ高サ及ビ面積ヲ求メヨ。

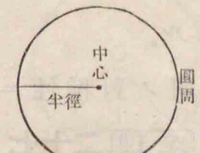
xe 4. 半徑 17 cm ノ圓ノ中心カラ 8 cm ノ距離ニアル弦ノ長サハ何程カ。

xo 5. 與ヘラレタ正方形ノ 5 倍ノ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ。

第3章　圓

37. 圓ノ基本性質

問 1. 圓・圓周・圓ノ中心・半徑・直徑ノ定義ヲイヘ。



問 2. 第1章デ學ンダ圓ノ基本性質ヲイヘ。

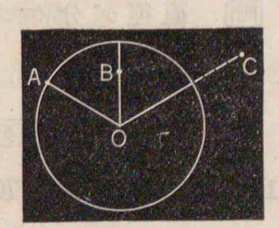
既ニ學ンダ圓ノ性質カラ次ノコトハ容易ニワカル。

一點カラ圓ノ中心ニ至ル距離ガ,

(1) 半徑ヨリモ小ナラバソノ點ハ圓內ニアリ,

(2) 半徑ニ等シイナラバソノ點ハ圓周上ニアリ,

(3) 半徑ヨリモ大ナラバソノ點ハ圓外ニアル。



從ツテ相等シイ半徑ヲ有スル二ツノ圓ノ一ツヲ取ツテ他ニ重ネ,ソノ中心ガ相合スルヤウニ置ケバ,兩圓周上ノ點ハ何レモソノ中心カラ等距離ニアルカラ,兩圓周ハ全ク相重ナル。

定理 **二十六**　半徑ノ相等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

半徑ノ相等シイ圓ヲ**等圓**トイフ。

系　直徑ノ相等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

圓ノ對稱性ニ關シテ次ノ定理ガアル。

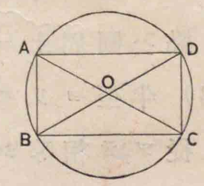
定理 **二十七**　圓周ハソノ直徑ニ關シテ對稱デアル。又ソノ中心ニ關シテ對稱デアル。

系　直徑ハ圓ヲ合同ナル二部分ニ分ケル。

問　直徑デ分ケラレタ圓ノ二部分ノ各ヲ何トイフカ。

例題 (28)

1. 矩形ノ四ツノ頂點ハソノ對角線ノ交點ヲ中心トスル同一ノ圓周上ニアル。



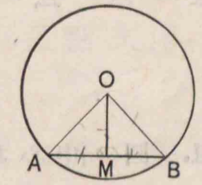
2. 一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル直徑ハソノ圓ヲ合同ナル四ツノ部分ニ分ケル。コノ四ツノ部分ノ各ヲ**四分圓**又ハ**象限**(シヤウゲン)トイフ。

△ABOニ於テ、斜辺ト他ノ一辺トガ等シイ故ニ合同デ
∴AM=BM也

38. 弦

定理 **二十八**　圓ノ中心カラ弦ニ引イタ垂線ハソノ弦ヲ二等分スル。

題意　圓ノ中心Oカラ弦ABニ引イタ垂線ノ足ヲMトスレバ　AM=MB



證明　各自ニナセ。

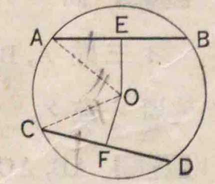
系**一**　弦ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ通ル。

系**二**　圓ノ中心ト直徑デナイ弦ノ中點トヲ通ル直線ハソノ弦ニ垂直デアル。

系**三**　弦ニ垂直ナル直徑ハソノ弦及ビ之ニ對スル弧ヲ二等分スル。

定理 **二十九**　同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル。

題意　圓Oニ於テAB, CDヲ二ツノ弦トシ, OE, OFヲ中心カラ夫々コレ等ノ弦ニ引イタ垂線トスルトキ



OB. OD ヲ結ベバ △OBE ト △OFD ニ於テ
∠OEB = ∠OFD = R∠. EB = FD.
OB = OD. ∴ △OBE ≡ △OFD
∴ OE = OF.

AB=CD ナラバ OE=OF

證明 各自ニナセ。

[系] 同圓又ハ等圓ニ於テ中心カラ等距離ニアル弦ハ相等シイ。

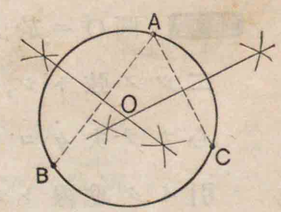
[例　題] (29)

1. 圓ノ中心カラ一ツノ弦ニ引イタ垂線ハ,コノ弦ニ平行ナルスベテノ弦ヲ二等分スル。
2. 二定點ヲ通リ且與ヘラレタ直線上ニ中心ヲ有スル圓ヲ畫ケ。
3. 直徑上ノ一點ヲ通リ,之ト等角ヲナス二ツノ弦ハ相等シイ。

39. 三點ヲ通ル圓

[作圖題]八 同一ノ直線上ニナイ三點ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。

題意 同一ノ直線上ニナイ三點 A, B, C ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。



作圖 AB, AC ヲ引キ線分

AB, AC ノ垂直二等分線ノ交點ヲ O トスル。O ヲ中心, OA ヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケバ,コレガ求メルモノデアル。

證明 各自ニナセ。

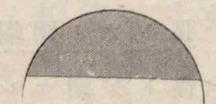
[系]一 同一ノ直線上ニナイ三點ヲ通ル圓周ハ唯一ツアル。

[系]二 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ一點デ交ル。(55 頁例題 5 參照)

コノ點ヲ三角形ノ**外心**トイヒ,三角形ノ三頂點ヲ通ル圓ヲソノ三角形ノ**外接圓**トイフ。外接圓ノ中心ハ外心デアル。

[例　題] (30)

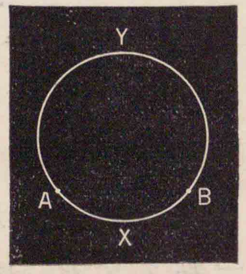
1. 與ヘラレタ圓ノ中心ヲ求メヨ。
2. 圓ノヤウナ圓ノ一部分ガ與ヘラレタトキ,ソノ圓ノ半徑ヲ求メルニハドウスレバヨイカ。



3. 直角三角形ニ外接スル圓ヲ畫ケ。
4. 前問ヲ利用シテ矩形ニ外接スル圓ヲ畫ケ。

40. 中心角ト弧ト弦トノ關係

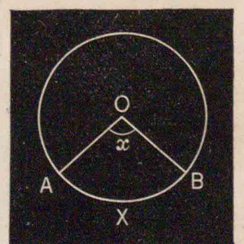
圓周上ノ二點ハコノ圓周ヲ二ツノ弧ニ分ケル。ソノ二ツノ弧ヲ互ニ**共軛弧**トイヒ,ソノ大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**トイフ。



單ニ"弧AB"トイヘバ通常A, B ヲ兩端トスル劣弧ヲ指スガ,混同スル恐レガアルトキハ"劣弧 AB,""優弧 AB"ト呼ブカ或ハ夫々ノ弧ノ上ニ一點ヲ取リ之ヲ"弧 AXB,""弧 AYB"ノヤウニ呼ブ。

問 中心角ノ定義ヲイヘ。

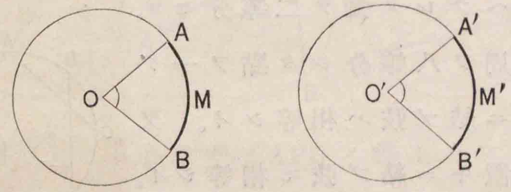
次ノ圖ニ於テ$\angle x$ハ$\overset{\frown}{AXB}$ニ對スル(又ハ$\overset{\frown}{AXB}$ノ上ニ立ツ)中心角デ,$\overset{\frown}{AXB}$ハ中心角xニ對スル弧デアル。



弧トソノ兩端ヲ通ル二ツノ半徑トデ圍マレタ圓ノ一部分ヲ**扇形**トイヒ,扇形ノ弧ニ對スル中心角ヲ**扇形ノ角**トイフ。

圓ノ二ツノ半徑ハソノ圓ヲ二ツノ扇形ニ分ケル。

定理 **三十** 同圓又ハ等圓ニ於テ,二ツノ中心角ガ相等シケレバ,ソレニ對スル弧ハ相等シイ。



證明 各自ニナセ。

系**一** 同圓又ハ等圓ニ於テ,二ツノ弧ガ相等シケレバ,ソレニ對スル中心角及ビ弦ハ夫々相等シイ。

系**二** 同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリモ大デアル。又コノ逆モ眞デアル。

系**三** 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弦ニ對スル劣弧及ビ優弧ハ夫々相等シイ。

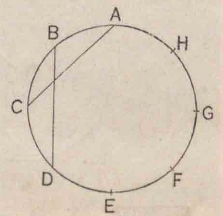
例題 (31)

1. 圓Oノ二ツノ直徑ヲAB, CDトスレバ$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$デアル。

2. 中心角ノ二等分線ハソレニ對スル弧ヲ二等分スル。コノ逆モ眞デアル。又三等分ノ場合ハドウカ。n 等分ノ場合ハドウカ。

3. 與ヘラレタ弧ヲ二等分セヨ。

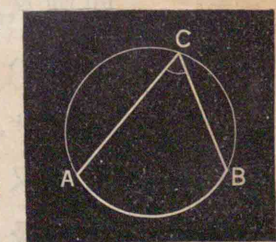
4. 圓周ヲ八等分シタ點ヲ一ツ置キニ結ブ弦ハ相等シイ。又二ツ置キニ結ブ弦モ相等シイ。



5. 同圓又ハ等圓ニ於テ, $\overset{\frown}{AB}$ ガ $\overset{\frown}{CD}$ ノ 2 倍ニ等シイトキハ, 弦 AB ハ弦 CD ノ 2 倍ヨリモ小デアル。

41. 圓周角

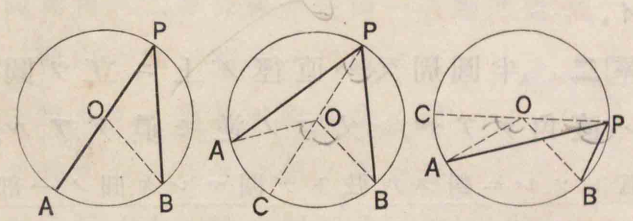
圓周上ノ一點カラ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲ**圓周角**トイフ。圓周角ハソノ二邊ノ間ニ夾マレタ**弧ノ上ニ立ツ**又ハ**弧ニ對スル**トイフ。



定理 **三十一**　圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シイ。

題意　圓 O ニ於テ弧 AB ノ上ニ立ツ圓周角ヲ

$\angle APB$ トスレバ, $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$ デアル。



證明　(1) 中心 O ガ $\angle APB$ ノ邊上ニアル場合

例ヘバ O ガ PA ノ上ニアルトキハ, $\angle APB$ ハ二等邊三角形 OPB ノ一底角デ, $\angle AOB$ ハソノ頂點ニ於ケル外角デアルカラ

$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$$

(2) 中心ガ $\angle APB$ ノ邊上ニナイ場合。

直徑 POC ヲ引ケバ

$$\angle APC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

$$\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BOC$$

コノ二式ヲ邊々相加ヘ又ハ引イテ

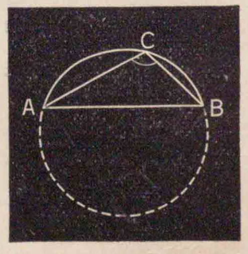
$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$$

系一　同圓又ハ等圓ニ於テ同弧又ハ等弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。又相等

シイ圓周角ニ對スル弧及ビ弦ハ夫々相等シイ。

系二　半圓周又ハ直徑ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デアル。又コノ逆モ眞デアル。

弧トソレニ對スル弦トデ圍マレタ圓ノ一部分ヲ**弓形**トイフ。

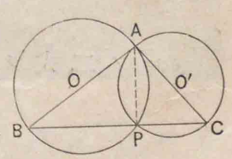


弓形ノ弧上ノ一點カラ弦ノ兩端ヘ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲソノ**弓形ノ角**又ハ**弓形ノ含ム角**トイフ。

系三　同ジ弓形ノ角ハスベテ相等シイ。

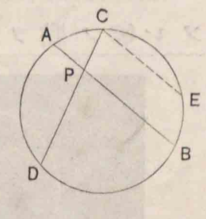
例題 (32)

1. 一ツノ圓ノ平行ナル二弦ノ間ニ夾マレタ二ツノ弧ハ相等シイ。

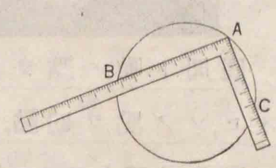


2. 三角形ノ二邊ヲ夫々直徑トスル二ツノ圓周ハ第三邊又ハソノ延長上デ相交ル。
3. 二ツノ弦 AB, CD ガ圓内ノ點Eニ於テ相交ルトキハ△AEC, △DEB ノ三ツノ角ハ夫々相等シイ。

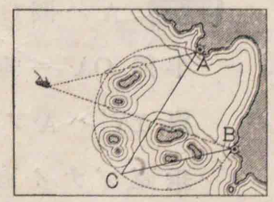
4. 一ツノ圓ニ於テ,同ジ弧ノ上ニ立ツスベテノ圓周角ノ二等分線ハ皆同一ノ點ヲ通ル。



5. 圓内ノ點デ相交ル二弦ノナス角ハ,ソノ角及ビ對頂角ノ間ニ夾マレタ二ツノ弧ノ和ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ。又二弦ガ圓外ノ點デ交ル場合ハドウカ。



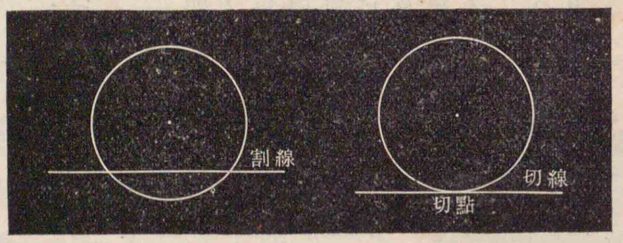
6. 曲尺ヲ用ヒテ中心ノワカラナイ圓板ニ,任意ノ點ヲ通ル直徑ヲ引クコトガ出來ルコトヲ説明セヨ。
7. 弓形ガ半圓ヨリモ大ナルカ,或ハ之ニ等シイカ,或ハ之ヨリモ小ナルカニ從ツテ弓形ノ角ハ鋭角或ハ直角或ハ鈍角デアル。



8. 右ノ圖ノA, Bハ海岸ノ二燈臺デ,弓形 ABC ハ暗礁ノアル危險區域デアル。コノ海岸ヲ安全ニ航行スルニハ如何ニスレバヨイカ。但シ ∠ACB=45° デアル。

42. 切線ト割線

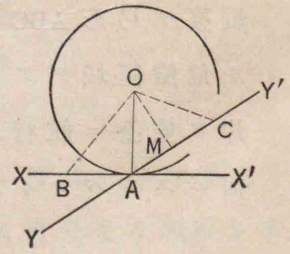
圓周ト二點ヲ共有スル直線ハ圓ニ**交ル**トイヒ，ソレ等ノ點ヲ**交點**，ソノ直線ヲ圓ノ**割線**トイフ。



圓周ト唯一點ヲ共有スル直線ハ圓ニ**切スル**トイヒ，ソノ點ヲ**切點**，ソノ直線ヲ圓ノ**切線**トイフ。

定理 三十二　圓周上ノ一點ヲ通ル直線ノ中デ，コノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナルモノハコノ圓ノ切線デ，コノ半徑ニ垂直デナイモノハコノ圓ノ割線デアル。

題意　A ハ圓 O ノ周上ノ一點，XX' ハ A ニ於テ半徑 OA ニ垂直ナル直線，YY' ハ A ヲ通リ OA ニ垂直デナイ直線トスレバ，XX' ハ圓 O ノ切線デ，YY' ハ割線デアル。



證明　XX' 上ニ A ト異ナル任意ノ點 B ヲ取レバ，OA ハ XX' ニ垂直デアルカラ OB ハ半徑 OA ヨリモ大デアル。故ニ B ハ圓外ニアル。依ツテ XX' ハ圓周ト唯一點 A ヲ共有スル。故ニ XX' ハ圓 O ノ切線デアル。

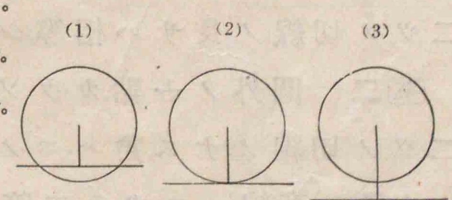
次ニ O カラ YY' ニ垂線 OM ヲ引キ，YY' 上ニ AM ニ等シク MC ヲ取レバ OC ハ半徑 OA ニ等シイカラ C ハ圓周上ニアル。ソシテ線分 AC 上ノ點ハ圓內ニ，ソノ延長上ノ點ハ圓外ニアル。依ツテ YY' ハ圓 O ト二點 A, C ヲ共有スル。故ニ YY' ハ圓 O ノ割線デアル。

系一　圓ノ切線ハソノ切點ヲ通ル半徑ニ垂直デアル。

系二　切點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル。

注意　一ツノ圓ト一ツノ直線トノ位置ノ關係ニハ次ノ三通リガアル。

(1) 相交ハル場合。
(2) 相切スル場合。
(3) 全ク出會ハナイ場合。

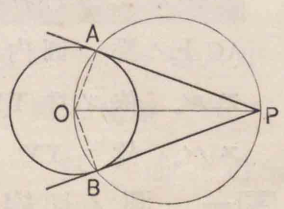


圓ノ中心ト直線トノ距離ハ(1)ノ場合ニハ半徑ヨリモ小デ,(2)ノ場合ニハ半徑ニ等シク,(3)ノ場合ニハ半徑ヨリモ大デアル。

作圖題 **九**　圓外ノ一點カラソノ圓ニ切線ヲ引ケ。

題意 圓Oノ外ニアル一點ヲPトスル。Pカラ圓Oニ切線ヲ引ケ。

作圖 O, Pヲ結ビ, OPヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,圓Oトノ交點ヲA, Bトスル。PA, PBヲ引ケバ,コレガ求メル切線デアル。



證明 各自ニナセ。

圓外ノ一點カラ,ソノ圓ニ引イタ切線ノ切點マデノ長サヲ**切線ノ長サ**トイフ。

系**一**　圓外ノ一點カラソノ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ長サハ相等シイ。

系**二**　圓外ノ一點カラソノ圓ニ引イタ二ツノ切線ノナス角ハ,コノ點ト圓ノ中心トヲ通ル直線ニヨツテ二等分セラレル。

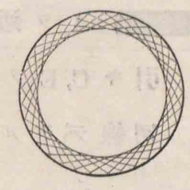
例　題 (33)

1. 定直線ABニ切スル半徑rナル圓ヲ畫ケ。カヤウナ圓ハ限リナク多クアル。ソノ中心ハ如何ナル線上ニアルカ。

2. 定直線AB上ノ定點Pニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫ケ。カヤウナ圓ハ限リナク多クアル。ソノ中心ハ如何ナル線上ニアルカ。

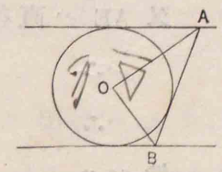
3. 二ツノ同心圓ガアル。大ナル圓ノ弦ABガ小ナル圓ニ切スルトキハ,ソノ切點MハABノ中點デアル。

4. 一ツノ圓ニ於テ相等シイ弦ノ中點ハ如何ナル線上ニアルカ。

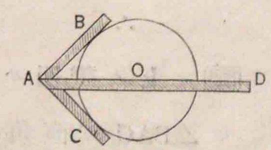


5. 圓Oノ平行ナル二ツノ切線ガ他ノ一ツノ切線ト交ル點ヲA, Bトスレバ

$$\angle \mathrm{AOB} = \mathrm{R}\llcorner$$



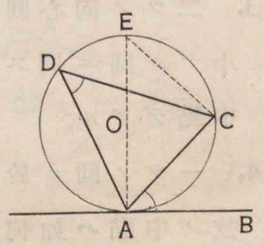
6. 右ノ圖ハ圓板ノ中心ヲ見出ス器具デアル。ソノ構造及ビ用法ヲイヘ。



43. 切線ト弦トノナス角

定理 三十三　切線トソノ切點ヲ通ル弦トノナス角ハソノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ。

題意　AB ヲ圓 O ノ周上ノ一點 A ニ於ケル切線トシ, AC ヲ A ヲ通ル一ツノ弦トスレバ $\angle BAC$ ハ $\overset{\frown}{AC}$ ノ上ニ立ツ圓周角 ADC ニ等シイ。



證明　A ヲ通ル直徑 AE ヲ引キ C, E ヲ結ベバ, AB ハ切線デアルカラ $EA \perp AB$

$\therefore \quad \angle BAC + \angle CAE = R\llcorner$

又 AE ハ直徑デアルカラ　$\angle ACE = R\llcorner$

$\therefore \quad \angle E + \angle CAE = R\llcorner$

$\therefore \quad \angle BAC = \angle E$

然ルニ　$\angle E = \angle D$

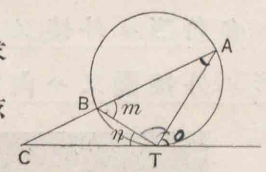
$\therefore \quad \angle BAC = \angle D$

問　上ノ證明ハ $\angle BAC$ ガ鋭角ノ場合デアル。$\angle BAC$ ガ直角又ハ鈍角ノトキハドウカ。

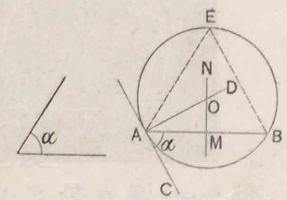
系　弦トソノ一端ヲ通ル直線トノナス角ガソノ弦ニ對シテコノ角ト反對ノ側ニアル弓形ノ含ム角ニ等シイトキハ,コノ直線ハ圓ニ切スル。

例題 (34)

1. 圖ニ於テ $\angle m = 62°$, $\angle n = 28°$ デアル。他ノ角ノ度數ヲ求メヨ。又 AB ハ如何ナル弦デアルカ。



2. 與ヘラレタ線分 AB ヲ弦トシ,與ヘラレタ角 α ヲ含ム弓形ヲ作レ。



3. AB ハ圓ノ一ツノ弦, AC ハソノ直徑デアル。B ニ於ケル切線ニ A カラ引イタ垂線ノ足ヲ D トスレバ, AB ハ $\angle CAD$ ヲ二等分スル。

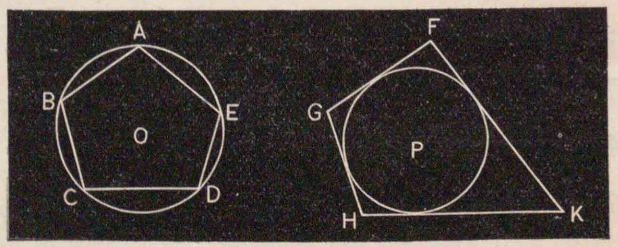
4. 弦トソノ一端ヲ通ル切線トノナス角ノ二等分線ハコノ角内ニ夾マレル弧ノ中點ヲ通ル。

44. 內接·外接

多角形ノスベテノ頂點ガ同一ノ圓周上ニアルトキハ,ソノ多角形ハ**圓ニ內接スル**トイヒ,コノ圓ハ**多角形ニ外接スル**トイフ。

又多角形ノスベテノ邊ガソノ內部ニアル同一ノ圓ニ切スルトキハ,ソノ多角形ハコノ**圓ニ外接スル**トイヒ,コノ圓ハ**多角形ニ內接スル**トイフ。

多角形ニ外接又ハ內接スル圓ヲ夫々ソノ多角形ノ**外接圓**又ハ**內接圓**トイフ。

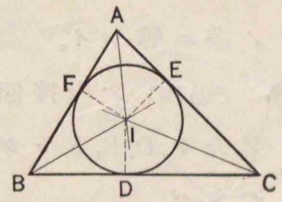


例ヘバ圖ニ於テ ABCDE ハ圓 O ニ內接スル五角形デ,FGHK ハ圓 P ニ外接スル四角形デアル。又コノトキ圓 O ハ五角形 ABCDE ノ外接圓デ,圓 P ハ四角形 FGHK ノ內接圓デアル。

同一ノ直線上ニナイ三點ヲ通ル圓ハソノ三點ヲ頂點トスル三角形ノ外接圓デアル。

作圖題 十　與ヘラレタ三角形ニ內接スル圓ヲ畫ケ。

題意　與ヘラレタ三角形 ABC ニ內接スル圓ヲ畫ケ。



作圖　△ABC ノ ∠A, ∠B ノ二等分線ノ交點 I ヲ求メ,I カラ邊 BC ニ垂線 ID ヲ引キ,I ヲ中心トシ ID ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ,コレガ求メル圓デアル。

證明　I カラ邊 CA, AB ニ垂線 IE, IF ヲ引ケバ,角ノ二等分線上ノ點ハソノ二邊カラ等距離ニアルカラ　IF=ID,　IE=ID

∴　IF=IE=ID

故ニ圓 I ハ三邊ニ切スル。依ッテ圓 I ハ求メル圓デアル。

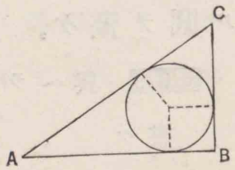
上ノ作圖カラ次ノ系ヲ得ル。

系　三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ同一ノ點デ相交リ,且コノ交點ハ三邊カラ等距離ニアル。

コノ交點ヲ三角形ノ**內心**トイフ。

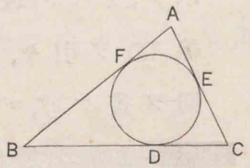
例題 (35)

1. 直角三角形ノ内接圓ノ直徑ハ斜邊ト他ノ二邊ノ和トノ差ニ等シイ。



2. △ABC ノ内接圓ガ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トシ,三角形ノ周ノ半分ヲ s デ表ハセバ

$$AE=AF=s-a$$
$$BF=BD=s-b$$
$$CD=CE=s-c$$



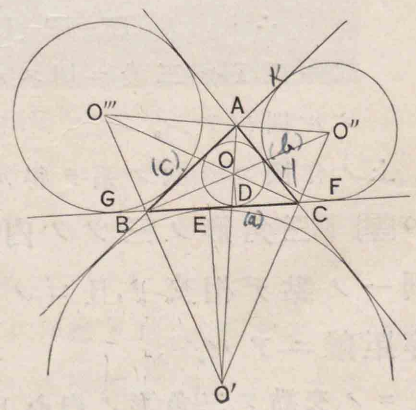
3. 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲソノ三角形ノ**傍接圓**トイヒ,傍接圓ノ中心ヲ**傍心**トイフ。

△ABC ノ三ツノ傍接圓ヲ畫ケ。

4. 右ノ圖ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1) BF=CG=s

(2) DF=b



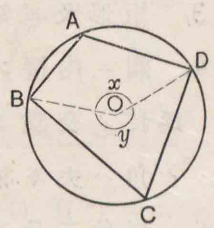
12.

45. 圓ニ内接スル四邊形

定理 **三十四**　圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。

題意　ABCD ヲ圓 O ニ内接スル四邊形トスレバ

$$\angle A+\angle C=2\mathrm{R}\llcorner$$
$$\angle B+\angle D=2\mathrm{R}\llcorner$$



證明　OB, OD ヲ引キ $\overset{\frown}{BAD}$, $\overset{\frown}{BCD}$ ノ上ニ立ツ中心角ヲ夫々 $\angle x$, $\angle y$ トスルト

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle y,\quad \angle C=\frac{1}{2}\angle x$$

$$\therefore\ \angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle x+\angle y)=2\mathrm{R}\llcorner$$

同様ニ　$\angle B+\angle D=2\mathrm{R}\llcorner$

系**一**　相對スル角ガ互ニ補角ヲナス四邊形ハ圓ニ内接スル。

四邊形ノ外角ニ隣ル内角ノ對角ヲ,ソノ外角ノ**内對角**トイフ。

系**二**　圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハソノ内對角ニ等シイ。又コノ逆モ眞デアル。

例題 (36)

1. 圓ニ内接スル平行四邊形ハ矩形デアル。

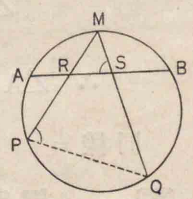
2. 圓ニ内接スル梯形ハ等脚梯形デアル。

3. 矩形及ビ等脚梯形ハ圓ニ内接スル。

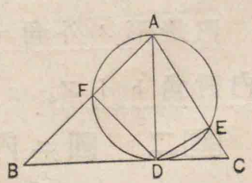
4. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ對邊 AB, DC ノ延長ノ交點ヲ E トスレバ, $\triangle CEB$, $\triangle AED$ ノ三ツノ角ハ夫々相等シイ。

5. 直角三角形ノ直角ノ頂點ト,斜邊ノ上ニソノ外側ニ畫イタ正方形ノ對角線ノ交點トヲ通ル直線ハソノ三角形ノ直角ヲ二等分スル。

6. 弧 AB ノ中點 M ヲ通ル二ツノ弦 MP, MQ ヲ引キ,弦 AB トノ交點ヲ R, S トスレバ P, Q, S, R ハ同一ノ圓周上ニアル。



7. $\triangle ABC$ ノ頂點 A カラ BC ニ垂線 AD ヲ引キ, D カラ CA, AB ニ夫々垂線 DE, DF ヲ引ケバ,四點 A, E, D, F 及ビ B, C, E, F ハ夫々同一ノ圓周上ニアル。

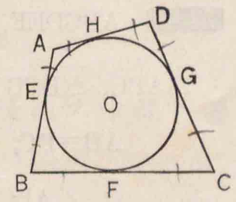


46. 圓ニ外接スル四邊形

定理 三十五　圓ニ外接スル四邊形ノ對邊ノ和ハ相等シイ。

題意　四邊形 ABCD ガ圓 O ニ外接スルトキハ

$$AB+CD=AD+BC$$



證明　邊 AB, BC, CD, DA ガ圓 O ニ切スル點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ,圓外ノ一點カラソノ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ長サハ相等シイカラ

$$AE=AH, \quad BE=BF$$

$$\therefore \quad AB=AH+BF$$

同様ニ　$$CD=DH+CF$$

$$\therefore \quad AB+CD=AD+BC$$

例題 (37)

1. 圓ニ外接スル矩形ハ正方形デアル。

2. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形デアル。

3. 六角形 ABCDEF ガ圓ニ外接スルトキハ

$$AB+CD+EF=BC+DE+FA$$

47. 內接及ビ外接正多角形

定理 **三十六**　正多角形ニハ外接圓及ビ內接圓ヲ畫クコトガ出來ル。

證明 ABCDEF ヲ一ツノ正多角形トスレバ

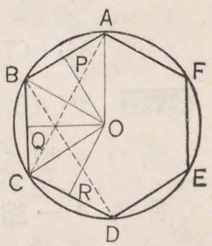
△ABC, △DCB ニ於テ

AB＝DC,　BC ハ共通,

∠ABC＝∠DCB

∴　△ABC≡△DCB

∴　∠BAC＝∠CDB



故ニ三點 A, B, C ヲ通ル圓周ハ D ヲ通ル。同様ニコノ圓周ハ順次他ノスベテノ頂點ヲ通ルコトヲ證明スルコトガ出來ル。故ニコノ圓ハ正多角形 ABCDEF ノ外接圓デアル。

次ニ ABCDEF ノスベテノ邊ハ外接圓ノ等弦トナルカラ中心 O カラ等距離ニアル。故ニ O カラ一邊 AB ニ至ル距離ヲ半徑トシ, O ヲ中心トシテ圓ヲ畫クト, コノ圓ハスベテノ邊ニ切スル。依ツテコノ圓ハ正多角形ノ內接圓デアル。

系　正多角形ノ外接圓ノ中心ト內接圓ノ中心トハ相合スル。

コノ共通ノ中心ヲ**正多角形ノ中心**トイフ。

例題 (38)

1. 正六角形ノ一邊ハソノ外接圓ノ半徑ニ等シイ。
2. 圓ニ內接(又ハ外接)スル等邊多角形ハ正多角形デアルカ。
3. 圓ニ內接(又ハ外接)スル等角多角形ハ正多角形デアルカ。
4. 正多角形ノ中心ト頂點トヲ結ブ線分ハソノ頂點ニ於ケル內角ヲ二等分スル。
5. 圓周ヲ三ツ以上ノ相等シイ弧ニ分ケ, ソノ各分點ヲ順次ニ結ブト內接正多角形ガ出來ル。
6. 圓周ヲ三ツ以上ノ相等シイ弧ニ分ケ, ソノ各分點ニ於テ切線ヲ引クト外接正多角形ガ出來ル。
7. 與ヘラレタ圓ニ內接スル正方形, 正八角形ヲ作レ。又外接スル正方形, 正八角形ヲ作レ。

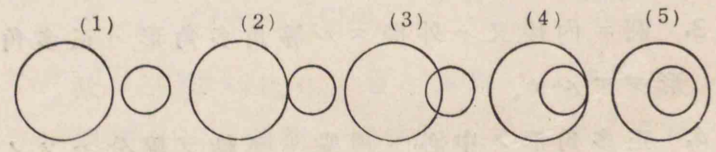
48. 二ツノ圓

二ツノ圓周ガ唯一點ヲ共有スルトキハ,二圓ハ**相切スル**トイヒ,ソノ點ヲ二圓ノ**切點**トイフ。

二ツノ圓ガ相切スルトキニ,各ノ圓ガ他ノ圓ノ外ニアレバ二圓ハ**外切スル**トイヒ,一ツノ圓ガ他ノ圓ノ內ニアレバ二圓ハ**內切スル**トイフ。

二ツノ圓周ガ二點ヲ共有スルトキハ,二圓ハ**相交ル**トイフ。

注意　二圓ノ位置ノ關係ニハ次ノ五通リガアル。



(1) 各圓ガ全ク他ノ外部ニアル場合(分離)。

(2) 外切スル場合。　(3) 相交ハル場合。

(4) 內切スル場合。

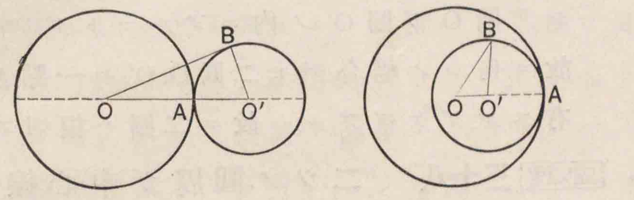
(5) 一ツノ圓ガ全ク他ノ內部ニアル場合(包含)。

二圓ノ中心ヲ通ル直線ヲソノ**中心線**トイフ。

定理 **三十七**　二ツノ圓周ガソノ中心線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,コノ二圓ハ相切スル。

題意　二圓O,O′ノ周ガソノ中心線OO′上ノ一

點Aヲ共有スルトキハ,コノ二圓ハ相切スル。



證明　(1) 共有點Aガ線分OO′上ニアルトキハ,圓O′ノ周上ニA以外ノ任意ノ點Bヲ取レバ

$$OB+O'B>OO'$$

$$\therefore\quad OB>OO'-O'B$$

$$\therefore\quad OB>OO'-O'A$$

$$\therefore\quad OB>OA$$

故ニBハ圓Oノ外ニアル。卽チ圓O′ノ周上ノA以外ノ點ハスベテ圓Oノ外ニアル。

(2) Aガ線分OO′ノ延長上ニアルトキハ圓O′ノ周上ニA以外ノ點Bヲ取レバ

$$OB<OO'+O'B$$

$$\therefore\quad OB<OO'+O'A$$

$$\therefore\quad OB<OA$$

故ニBハ圓Oノ內ニアル。卽チ圓O′ノ周上ノA以外ノ點ハスベテ圓Oノ內ニアル。

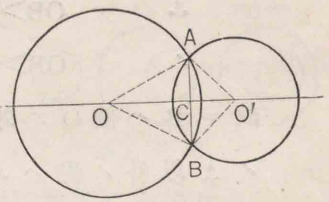
A ガ線分 O'O ノ延長ニアルトキニハ同様ニシテ圓 O ガ圓 O' ノ内ニアルコトガワカル。

故ニ何レノ場合デモ二圓 O, O' ハ一點 A ヲ共有スルダケデアル。故ニ二圓ハ相切スル。

定理 三十八　二ツノ圓周ガ中心線上ニナイ一點ヲ共有スルトキハ,コノ二圓ハ相交ル。

題意 二圓 O, O' ノ周ガ中心線 OO' 上ニナイ一點 A ヲ共有スルトキハ,コノ二圓ハ相交ル。

證明 A カラ中心線 OO' ニ垂線 AC ヲ引キ,之ヲ延長シテ AC ニ等シク CB ヲ取レバ, OO' ハ AB ノ垂直二等分線トナルカラ



$$OA=OB, \qquad O'A=O'B$$

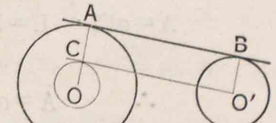
ソシテ OA, O'A ハ夫々圓 O, O' ノ半徑デアルカラ OB, O'B モマタ夫々圓 O, O' ノ半徑デアル。故ニ B ハマタ各圓ノ周上ニアル。

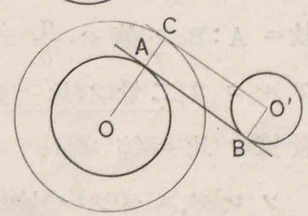
故ニ二圓ハ點 A ノ他ニ尚點 B ヲ共有スル。

即チ二圓ハ相交ル。

例題 (39)

1. 半徑ガ 12 cm 及ビ 5 cm ナル二圓ノ中心間ノ距離ガ (1) 7 cm ノトキ, (2) 10 cm ノトキ, (3) 17 cm ノトキ,二圓ノ相互ノ位置ノ關係ハドウカ。
2. 二圓ガ相切スルトキハ,ソノ切點ニ於テコノ二圓ニ共通ナ切線ヲ引クコトガ出來ル。
3. 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル割線ガ再ビコレ等ノ圓ト交ル點ヲ一端トスル各圓ノ直徑ハ互ニ平行デアル。
4. 相交ル二圓ノ交點ヲ結ブ線分ヲ二圓ノ**共通弦**トイフ。相交ル二圓ノ共通弦ハソノ中心線ニヨツテ垂直ニ二等分セラレル。
5. 二ツノ圓ガソノ共通切線ノ同ジ側ニアルトキハ,コノ切線ヲ二圓ノ**外共通切線**トイヒ,反對ノ側ニアルトキハコノ切線ヲ二圓ノ**内共通切線**トイフ。





與ヘラレタ二圓ノ外共通切線及ビ内共通切線ヲ引ケ。

第4章 比 例

49. 比及ビ比例

同種類ノ二量 A, B ニツイテ A ガ B ノ何倍デアルカトイフ關係ヲ **A ノ B ニ對スル比**トイフ。

A ノ B ニ對スル比ヲ A:B 又ハ $\frac{A}{B}$ デ表ハス。

A ガ B ノ何倍デアルカヲ示スニハ B ヲ單位トシテ A ヲ測ッテ得ラレル數値ヲイヘバヨイ。コノ數値ヲ A ノ B ニ對スル**比ノ値**トイフ。比ノ値ノコトヲ略シテ單ニ**比**トイフコトモアル。

今二量 A, B ヲ同ジ單位 C デ測ッタトキノ數値ヲ夫々 a, b トスルト

$$A=aC,\quad B=bC\quad 從ッテ\quad C=\frac{1}{b}B$$

$$\therefore\quad A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B$$

故ニ A:B ノ値ハ $\frac{a}{b}$ デアル。又 $a:b$ ノ値モ $\frac{a}{b}$ デアルカラ,二量ノ比ハ之ヲ同ジ單位デ測ッテ得ル數値ノ比ニ等シイ。

ソレデ,スベテノ量ノ比ハ之ヲ數ノ比ニ直シテ

考ヘルコトガ出來ル。幾何學デ取扱フ比例ノ問題ハ線分·弧·角·面積等ノ間ノ比及ビ比例デアルガ,算術ヤ代數デ學ンダ比及ビ比例ノ關係ハ幾何學ニモ適用スルコトガ出來ル。

四ツノ量 A, B, C, D ガ比例ヲナストキ,即チ

$$A:B=C:D$$

ナルトキハ又次ノ關係(1)—(5)ガ成立ツ。

(1) $B:A=D:C$

(2) $A+B:B=C+D:D$

(3) $A\sim B:B=C\sim D:D$

(4) $A+B:A\sim B=C+D:C\sim D$

(5) $A:C=B:D$ (四量ガ同種類ノトキ)

(6) $A, B, C, \cdots\cdots; A', B', C', \cdots\cdots$ ガ悉ク同種類ノ量デ

$A:A'=B:B'=C:C'=\cdots\cdots$ ナラバ

$(A+B+C+\cdots\cdots):(A'+B'+C'+\cdots\cdots)=A:A'$

(7) 四ツノ線分 A, B, C, D ニ於テ

$A:B=C:D$ ナルトキハ $A\cdot D=B\cdot C$

逆ニ $A\cdot D=B\cdot C$ ナラバ $A:B=C:D$

幾ツカノ比ノ値ノ積ニ等シイ値ヲ有スル比ヲコレ等ノ比ノ**複比**又ハ**相乘比**トイフ。

又相等シイ二ツノ比ノ複比ヲ各ノ**二乘比**トイヒ,相等シイ三ツノ比ノ複比ヲ各ノ**三乘比**トイフ。

A:B ト C:D トノ複比ヲ表ハスニハ

$$(A:B)(C:D) \quad 又ハ \quad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D} \quad 又ハ \quad \frac{A:B}{C:D}$$

ト書キ, A:B ノ二乘比及ビ三乘比ハ夫々

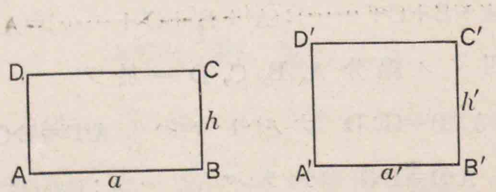
$$(A:B)^2,\ (A:B)^3 \quad 又ハ \quad \left(\frac{A}{B}\right)^2,\ \left(\frac{A}{B}\right)^3$$

ト書ク。

50. 面積ノ比

矩形ノ一邊ヲ**底邊**,ソノ隣邊ヲ**高サ**トイフコトガアル。**縱·横**トイフノモ同ジデアル。

定理三十九　二ツノ矩形ノ面積ノ比ハソノ底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。



題意　二ツノ矩形 ABCD, A'B'C'D' ノ底邊ヲ夫々 a, a', 高サヲ h, h', 面積ヲ夫々 S, S' トスレバ

$$S=ah, \quad S'=a'h'$$

$$\therefore \quad S:S'=ah:a'h'$$

然ルニ　$ah:a'h'=(a:a')(h:h')$

$$\therefore \quad S:S'=(a:a')(h:h')$$

$$\therefore \quad \square ABCD:\square A'B'C'D'=(AB:A'B')(BC:B'C')$$

系一　二ツノ正方形ノ面積ノ比ハソノ一邊ノ比ノ二乘比ニ等シイ。

系二　二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハソノ底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。

系三　二ツノ三角形ノ面積ノ比ハソノ底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。

上ノ系二及ビ系三カラ次ノコトガイヘル。

系四　底邊(又ハ高サ)ガ相等シイ二ツノ三角形又ハ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハソノ高サ(又ハ底邊)ノ比ニ等シイ。

例題 (40)

1. △ABC ノ邊 BC 上ニ一點 D ヲ取レバ

$$\triangle ABD:\triangle ACD=BD:CD$$

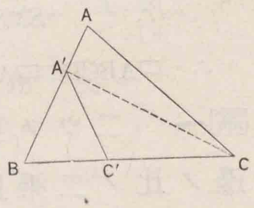
2. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ E トスル。

△AEB=4平方糎, △BEC=6平方糎,

△CED=12平方糎

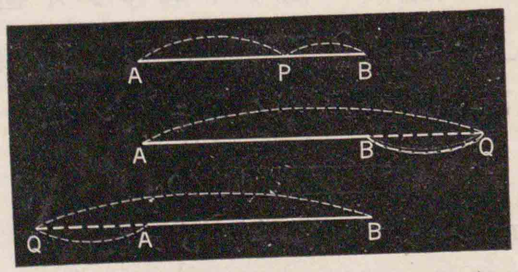
ナルトキハ △DEA ノ面積ハ何程カ。

3. 一角ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハソノ角ヲ夾ム二邊ノ比ノ複比ニ等シイ。



51. 内分・外分

線分 AB 上ノ點 P ハコノ線分ヲ**内分スル**トイヒ, AP, BP ヲソノ**分**トイフ。又線分 AB 又ハ BA ノ延長上ノ點 Q ハコノ線分ヲ**外分スル**トイヒ, AQ, BQ ヲソノ**分**トイフ。

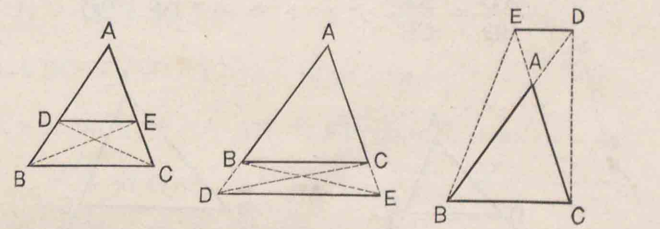


内分ノ場合ニハ原ノ線分ハ二ツノ分ノ和ニ等シク,外分ノ場合ニハソノ差ニ等シイ。

定理 四十　三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル。

題意　△ABC ニ於テ一邊 BC ニ平行ナル直線ガ他ノ二邊 AB, AC 或ハソノ延長ト交ル點ヲ夫夫 D, E トスレバ

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$$



證明　B ト E, C ト D ヲ結ベバ

$$\frac{\triangle EAD}{\triangle EDB}=\frac{AD}{BD},\quad \frac{\triangle EAD}{\triangle EDC}=\frac{AE}{CE}$$ (定理三十九系四)

然ルニ　$\triangle EDB=\triangle EDC$　(定理二十四系一)

$$\therefore\quad \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$$

本定理ヨリ次ノ比例式ヲ得ル。

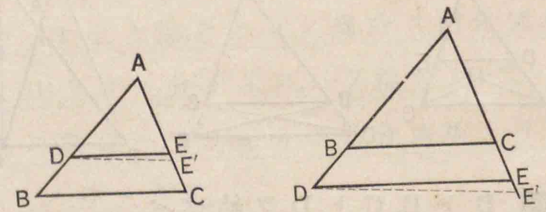
$$\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE},\quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

系　二直線ガ數多ノ平行線ニ交ルトキハ,ソノ相對應スル部分ノ比ハ皆相等シイ。

定理 **四十一**　三角形ノ二邊ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル直線ハ第三邊ニ平行デアル。

題意　直線 DE ガ △ABC ノ二邊 AB, AC 又ハソノ延長ト夫々 D, E デ交リ

$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$ ナルトキハ　DE ∥ BC



證明　D ヲ通ッテ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC 又ハソノ延長トノ交點ヲ E′ トスレバ

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AE'}{CE'}$$ (定理四十)

又假設ニヨリ　$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$

∴　$\frac{AE'}{CE'}=\frac{AE}{CE}$

從ッテ

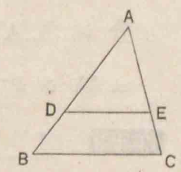
$$\frac{AE'\pm CE'}{CE'}=\frac{AE\pm CE}{CE}$$

即チ　$\frac{AC}{CE'}=\frac{AC}{CE}$　∴　$CE'=CE$

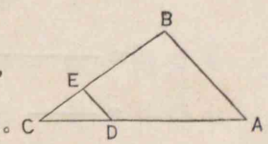
依ッテ E′ ハ E ニ一致スル。故ニ DE ∥ BC デアル。

例　題 **(41)**

1. 右ノ圖ニ於テ DE ∥ BC デ AD=10 *cm*, BD=4 *cm*, AC=12 *cm* ナラバ, AE ト CE トノ長サハ各何程カ。



2. 右ノ圖ニ於テ DE ∥ AB, CA=18 *cm*, CD=8 *cm*, CB=15 *cm* ナラバ CE ハ幾糎カ。



3. △ABC ノ邊 BC ヲ D マデ延長シテ CD=BC ナラシメ, D ト AC ノ中點 E トヲ通ル直線ト AB トノ交點ヲ F トスルトキ, DE:EF ノ値ヲ求メヨ。
4. ABCD ハ梯形デ AD ∥ BC, 對角線 AC, BD ノ交點ヲ E トスレバ AE:CE=DE:BE デアル。

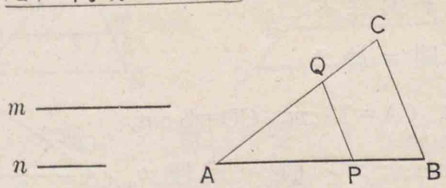
5. 四邊形 ABCD ノ邊 AB 上ノ任意ノ點 B' カラ BC ニ平行ニ $B'C'$ ヲ引キ對角線 AC ト C' デ交ラシメ, C' カラ CD ニ平行ニ $C'D'$ ヲ引キ邊 AD ト D' デ交ラシメルト, $B'D' \parallel BD$ デアル。

52. 比例スル線分ノ作圖

作圖題 十一　一ツノ線分ヲ與ヘラレタ二線分ノ比ニ內分及ビ外分セヨ。

題意　一ツノ線分 AB ヲ P ニ於テ內分又ハ外分シテ, AP:BP ヲ與ヘラレタ二線分 m, n ノ比ニ等シクナルヤウニセヨ。

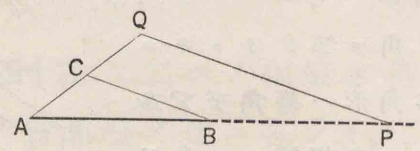
作圖　(1) 內分ノ場合。



A ヲ通ッテ AB ト一致シナイ任意ノ直線ヲ引キ, ソノ上ニ m ニ等シク AQ ヲ取リ, 次ニ AQ ノ延長上ニ n ニ等シク QC ヲ取ル。C, B ヲ結ビ, 之ニ平行ニ Q ヲ通ル直線ヲ引キ之ガ AB ト交ル點ヲ P トスレバ, P ハ求メル內分點デ

アル。

(2) 外分ノ場合。



線分 QA 上ニ n ニ等シク QC ヲ取ル。C, B ヲ結ビ之ニ平行ニ Q ヲ通ル直線ヲ引キ, 之ガ AB ノ延長ト交ハル點ヲ P トスレバ, P ハ求メル外分點デアル。

證明　各自ニナセ。

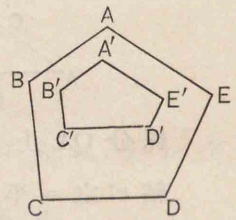
注意　$m=n$ ナルトキニ限ツテ外分點ハナイ。

例　題　(42)

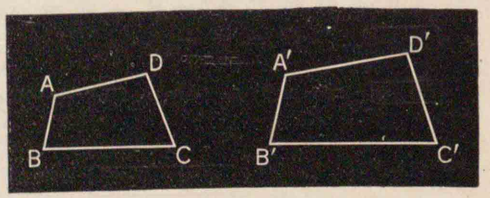
1. 與ヘラレタ線分ヲ 3 ト 5 トノ比ニ內分セヨ。
2. 與ヘラレタ線分ヲ 3 ト 5 トノ比ニ外分セヨ。
3. 與ヘラレタ三ツノ線分 a, b, c ノ第四比例項ヲ求メヨ。
4. 與ヘラレタ二ツノ線分ヲ a, b トシ, $a:b=b:x$ トナルヤウナ線分 x ヲ求メヨ。(カヤウナ線分 x ヲ二線分 a, b ノ**第三比例項**トイフ)

53. 相似

邊數ノ相等シイ二ツノ多角形ノ一方ノ角ガ順次ニ他方ノ角ニ等シイトキニハ,コノ兩多角形ハ**等角デアル**トイフ。ソシテ相等シイ角ヲ**對應角**トイヒ,對應角ノ頂點ノ間ノ邊ヲ**對應邊**トイフ。



二ツノ多角形ガ等角デ且對應邊ノ比ガスベテ相等シイトキハ,コノ兩多角形ハ**互ニ相似デアル**トイフ。



例ヘバ二ツノ四角形 ABCD, A'B'C'D' ニ於テ

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D'$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

ナルトキ,コノ二ツノ四角形ハ互ニ相似形デアル。

多角形 ABCDE…, A'B'C'D'E'… ガ相似デアルコトヲ 多角形 ABCDE… ∽ 多角形 A'B'C'D'E'… ト書ク。

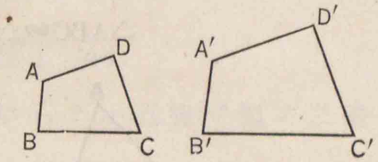
上ノ定義カラ次ノコトハ容易ニワカル。

邊數ノ相等シイ正多角形ハ互ニ相似デアル。

一ツノ多角形ニ相似ナル二ツノ多角形ハ互ニ相似デアル。

定理 **四十二**　二ツノ相似多角形ノ周ノ比ハソノ對應邊ノ比ニ等シイ。

證明　二ツノ多角形 ABCD…, A'B'C'D'…(圖デハ四角形)ガ相似デアルトキハ



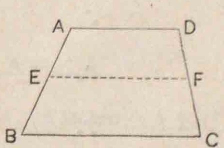
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{AB+BC+CD+\cdots\cdots}{A'B'+B'C'+C'D'+\cdots\cdots}=\frac{AB}{A'B'}$$

相似多角形ノ對應邊ノ比ヲソノ**相似比**トイフ。

例題 (43)

1. 一角ガ相等シク,之ヲ夾ム邊ガ比例ヲナス二ツノ平行四邊形ハ相似デアル。
2. 梯形ノ底ニ平行ナル直線ヲ引イテ出來ル二ツノ梯形ハ原ノ梯形ト相似デアルカ。



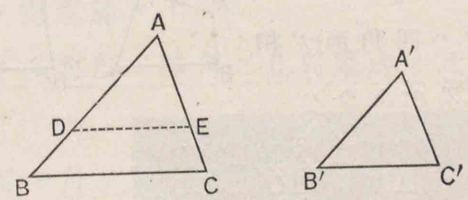
54. 三角形ノ相似(一)

定理 四十三 二角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル。

題意 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ ナルトキハ

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$



證明 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ デアルカラ

$$\angle C=\angle C'$$

次ニ $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC 或ハソノ延長上ニ夫々 $A'B'$, $A'C'$ ニ等シク AD, AE ヲ取リ D, E ヲ結ベバ $\angle A=\angle A'$ デアルカラ

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

$\therefore$ $\angle ADE=\angle B'=\angle B$

$\therefore$ $DE \parallel BC$

$\therefore$ $AB:AD=AC:AE$

卽チ $AB:A'B'=AC:A'C'$

同樣ニ $AB:A'B'=BC:B'C'$

$\therefore$ $AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'$

卽チ兩三角形ニ於テ三ツノ角ハ夫々相等シク對應邊ノ比ハスベテ相等シイ。

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

例 題 (44)

1. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ他ノ二邊 AB, AC ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ

$$DE:BC=AD:AB$$

2. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C カラ斜邊ニ引イタ垂線ヲ CD トスレバ

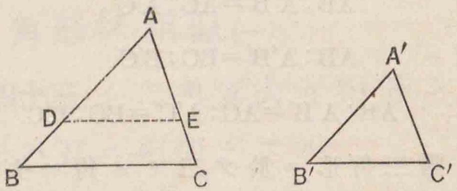
$$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle CBD$$

55. 三角形ノ相似(二)

定理 四十四 一角及ビ之ヲ夾ム二邊ノ比ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル。

題意 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $\angle A=\angle A'$,

$AB:AC=A'B':A'C'$ ナルトキハ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$



證明 AB, AC 又ハソノ延長上ニ夫々 $A'B'$, $A'C'$ ニ等シク AD, AE ヲ取リ D, E ヲ結ベバ

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

然ルニ　$AB : AC = A'B' : A'C'$

∴　$AB : A'B' = AC : A'C'$

∴　$AB : AD = AC : AE$

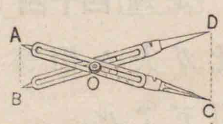
∴　$DE \parallel BC$

∴　$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$

従ッテ　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

例　題 (45)

1. 圖ニ示ス比例こんぱすニ於テ $OC = 2OA$, $OD = 2OB$ ナラバ $CD = 2AB$ デアル。



2. 二ツノ相似三角形ノ對應頂點カラ引イタ中線ノ比ハ兩三角形ノ相似比ニ等シイ。

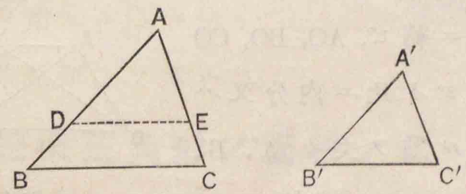
56. 三角形ノ相似(三)

定理 四十五　三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ト比例ヲナストキハ,コノ兩三角形ハ互ニ相似デアル。

題意 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$　ナルトキハ

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$



證明 AB, AC 又ハソノ延長上ニ夫々 $A'B'$, $A'C'$ ニ等シク AD, AE ヲ取リ D, E ヲ結ベバ,假設カラ

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

∴　$AB : AD = AC : AE$

∴　$DE \parallel BC$

∴　$\angle B = \angle ADE$,　$\angle C = \angle AED$

又　$BC : DE = AB : AD = AB : A'B'$

然ルニ　$BC : B'C' = AB : A'B'$

∴　　$DE=B'C'$

∴　　$\triangle ADE\equiv\triangle A'B'C'$

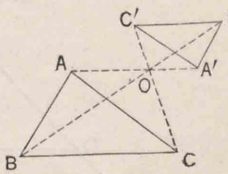
然ルニ　$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$

∴　　$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

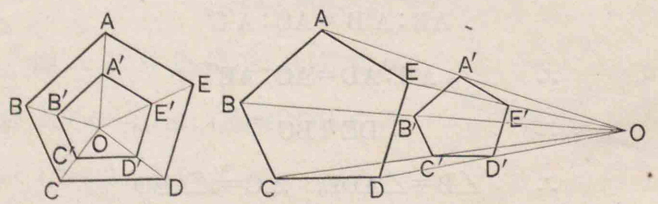
例　題　(46)

1. $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスレバ, $\triangle DEF$ ト $\triangle ABC$ トハ相似デアル。

2. $\triangle ABC$ ノ各頂點ヲ任意ノ點 O ニ結ビ, AO, BO, CO ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ夫々 A', B', C' トスレバ, $\triangle A'B'C'$ ト $\triangle ABC$ トハ相似デアル。

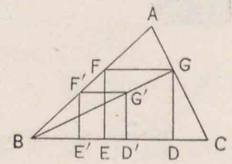


3. 次ノ圖ニヨッテ相似多角形ノ畫キ方ヲ工夫セヨ。

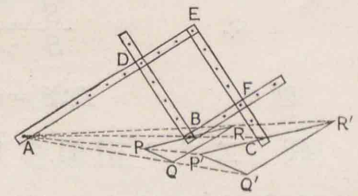


4. 與ヘラレタ多角形ト相似デ,且ソノ相似比ガ 5:2 ナル多角形ヲ作レ。

5. 與ヘラレタ三角形ニ正方形ヲ内接セシメヨ。(但シ正方形ノ二頂點ハ三角形ノ一邊上ニ,他ノ二頂點ハ夫々三角形ノ他ノ二邊上ニアルモノトスル)



6. 圖ニ示スぱんとぐらふ (Pantograph) トイヒ,圖形ノ擴大又ハ縮小ニ用ヒル。ソノ構造ト原理トヲ考ヘヨ。

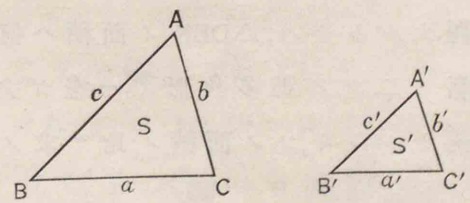


57. 相似三角形ノ面積ノ比

定理 **四十六**　二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハソノ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

題意　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ガ互ニ相似デアルトシ, ソノ面積ヲ S, S' トスレバ

$$S:S'=a^2:a'^2$$



證明　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ デアルカラ

$$\angle B = \angle B'$$

$$\therefore \quad \frac{S}{S'} = \frac{ac}{a'c'}$$

然ルニ　$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$$

$$\therefore \quad \frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a'^2}$$

即チ　$$S : S' = a^2 : a'^2$$

系　二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハソノ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

例題 (47)

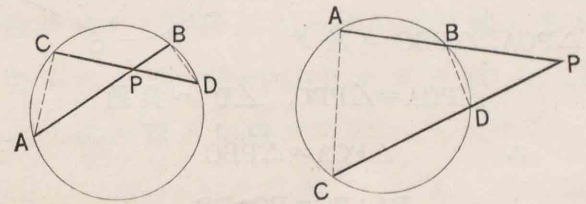
1. 二ツノ相似三角形ノ對應邊ノ比ガ5:3デ,大ナル方ノ面積ガ1平方米ナルトキハ,小ナル方ノ面積ハ何程カ。
2. $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $\angle A = \angle D$, $AB = 4\,cm$, $AC = 7\,cm$, $DE = 8\,cm$, $DF = 14\,cm$ デ, $\triangle ABC$ ノ面積ガ12平方糎ナルトキハ, $\triangle DEF$ ノ面積ハ何程カ。
3. 同邊數ノ二ツノ正多角形ノ一邊ガ夫々 $6\,cm$ 及ビ $8\,cm$ ナルトキ,ソノ面積ノ比ヲ求メヨ。

58. 弦ノ分ノ包ム矩形

定理 四十七　一ツノ圓ノ二弦叉ハソノ延長ガ相交ルトキ,ソノ交點デ內分叉ハ外分サレタ各弦ノ分ノ包ム矩形ハ相等シイ。

題意　一ツノ圓ノ二弦 AB, CD 叉ハソノ延長ノ交點ヲ P トスレバ

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



證明　AC, BD ヲ引ケバ, $\triangle PAC$, $\triangle PDB$ ニ於テ

$$\angle PCA = \angle PBD, \quad \angle PAC = \angle PDB$$

$$\therefore \quad \triangle PAC \backsim \triangle PDB$$

$$\therefore \quad PA : PD = PC : PB$$

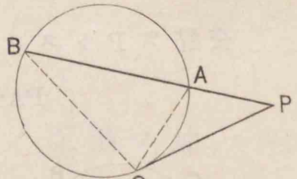
$$\therefore \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

系　二ツノ線分 AB, CD 叉ハソノ延長ガ一點 P デ相交リ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ナルトキハ,四點 A, B, C, D ハ同一ノ圓周上ニアル。

定理 四十八　圓外ノ一點ヲ通ル弦ガソノ點デ分ケラレル二ツノ分ノ包ム矩形ハ，ソノ點カラコノ圓ニ引イタ切線ノ上ノ正方形ニ等シイ。

題意　圓外ノ一點 P カラ引イタ弦ヲ AB トシ，切線ヲ PC トスレバ

$$PA \cdot PB = PC^2$$



證明　CA, CB ヲ引ケバ

$\triangle PCA$, $\triangle PBC$ ニ於テ

$\angle PCA = \angle PBC$, $\angle P$ ハ共通

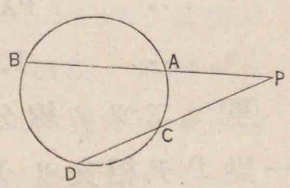
$\therefore \quad \triangle PCA \backsim \triangle PBC$

$\therefore \quad PA : PC = PC : PB$

$\therefore \quad PA \cdot PB = PC^2$

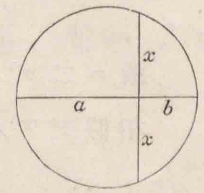
例題 (48)

1. 二直線 PAB, PCD ガ一ツノ圓ト交ル點ヲ A, B; C, D トスル。PA=5 *cm*, PC=6 *cm*, CD=4 *cm* ナルトキ AB ノ長サヲ求メヨ。



2. 相交ル二弦ノ性質ヲ利用シテ，一邊ノ長サヲ知ツテ與ヘラレタ矩形ト等積ナル矩形ヲ作レ。

3. 與ヘラレタ二線分 a, b ガ包ム矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

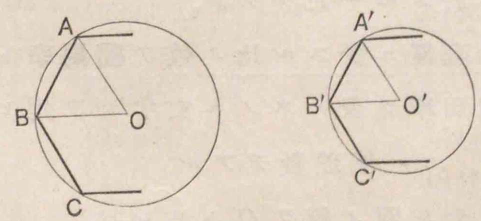


4. 相交ル二圓ノ共通弦ノ上ノ一點ヲ通ツテ各圓ノ弦 AB, CD ヲ引ケバ，四點 A, B, C, D ハ同一ノ圓周上ニアル。

5. 線分 AB ノ延長上ノ一點 P カラ他ノ線分 PC ヲ引イタトキ，$PC^2 = PA \cdot PB$ ナラバ PC ハ三點 A, B, C ヲ通ル圓ノ切線デアル。

59. 圓周

定理 四十九　圓ノ周トソノ直徑トノ比ハ一定デアル。



証明　二ツノ圓 O, O′ ニ内接スル正 n 角形ノ一邊ヲ夫々 AB, A′B′ トスレバ

$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{n}=\angle A'O'B'$$

故ニ二ツノ二等邊三角形 OAB ト O′A′B′ トハ相似デアル。

$$\therefore \quad AB:A'B'=OA:O'A'$$

$$\therefore \quad nAB:nA'B'=OA:O'A'$$

依ツテ二ツノ内接正 n 角形ノ周ノ比ハ二圓ノ半徑ノ比ニ等シイ。ソシテ n ガ限リナク增セバ内接正 n 角形ノ周ハ如何程デモ圓周ニ接近スルコトガ出來ル。故ニ二圓 O, O′ ノ周ヲ夫々 C, C', 半徑ヲ夫々 r, r' トスレバ

$$C:C'=r:r'$$

$$\therefore \quad \frac{C}{C'}=\frac{2r}{2r'} \qquad \therefore \quad \frac{C}{2r}=\frac{C'}{2r'}$$

故ニ圓ノ周ノソノ直徑ニ對スル比ハ何レノ圓ニ於テモ一定デアル。

圓周ノ直徑ニ對スル比ノ値ヲ**圓周率**トイフ。通常圓周率ヲ表ハスノニ文字 π ヲ用ヒ,之ヲぱいト讀ム。π ハ無理數デアル。

半徑 r ナル圓ノ周ヲ C トスレバ

$$\frac{C}{2r}=\pi \qquad \therefore \quad C=2\pi r$$

依ツテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 **五十**　半徑ガ r ナル圓ノ周ハ $2\pi r$ デアル。

60. π ノ値

圓ノ直徑ヲ1トスレバ圓周ノ長サハ π ニ等シイ。然ルニ圓周ノ長サハ内接正多角形ノ周ヨリハ大デ,外接正多角形ノ周ヨリハ小デアル。

今直徑1ナル圓ニ内接及ビ外接スル正六角形カラ始メテ邊數ヲ漸次倍加シタ正多角形ノ周ヲ計算スルト,次ノヤウナ結果ニナル。

邊數	内接正多角形ノ周	$<\pi<$	外接正多角形ノ周
6	3.	〃	3.464102
12	3.105828	〃	3.215391
24	3.132628	〃	3.159660
48	3.139350	〃	3.146087
96	3.141031	〃	3.142715
192	3.141452	〃	3.141874
384	3.141557	〃	3.141663
768	3.141583	〃	3.141611
1536	3.141590	〃	3.141598

即チ π ハ 3.14159 ヨリハ大デ, 3.14160 ヨリハ小デアルカラ

$$\pi=3.14159\cdots\cdots$$

注意　π ノ近似値トシテハ通常 3.14, 3.1416 又ハ $\frac{22}{7}$ ヲ用ヒル。π ノ値ヲ小數第十位マデ示スト

$$\pi=3.1415926535\cdots\cdots$$

例題　(49)

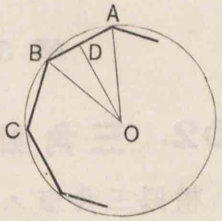
1. π ノ値ヲ 3.1416 トシテ半徑ガ 3.4 cm ナル圓周ノ長サヲ求メヨ。又周ガ 18.8496 m ナル圓ノ半徑ヲ求メヨ。
2. 次ノナヤウ周ヲ有スル圓ノ半徑ハドウカ。
   (1) 15π　(2) $2\pi a$　(3) $7\pi a$
3. 二ツノ與ヘラレタ圓周ノ和ニ等シイ周ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

61. 圓ノ面積

圓 O ニ內接スル正 n 角形ノ一邊ヲ AB トシ,中心 O カラ AB ニ引イタ垂線ヲ OD トスレバ

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}AB\cdot OD$$

$$\therefore\quad n\triangle OAB=\frac{1}{2}nAB\cdot OD$$



ソシテ邊數 n ヲ限リナク增セバ內接正 n 角形ハ如何程デモ圓ニ接近スルコトガ出來ル。從ッテ同時ニ $n\cdot AB$ ハ圓周ニ, OD ハ半徑ニ限リナク接近スル。

故ニ　圓ノ面積 $=\frac{1}{2}(2\pi r)r=\pi r^2$

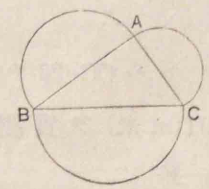
依ッテ次ノ定理ガアル。

定理 五十一　半徑ガ r ナル圓ノ面積ハ πr^2 デアル。

系　圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ比例スル。

例題　(50)

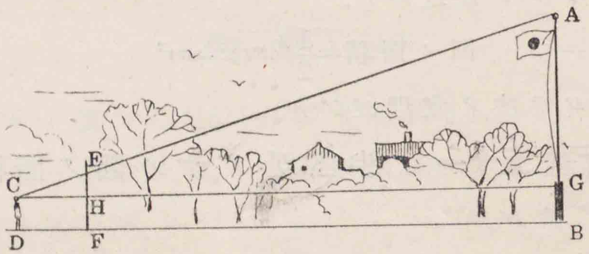
1. π ノ値ヲ 3.1416 トシテ,半徑ガ 15 cm ナル圓ノ面積ヲ求メヨ。又面積ガ 201.0624 平方米ナル圓ノ半徑ヲ求メヨ。
2. 直角三角形ノ斜邊上ニ畫イタ半圓ノ面積ハ他ノ二邊上ニ畫イタ半圓ノ面積ノ和ニ等シイ。



第5章　三角函數

62. 三角函數

相似三角形ノ定理ヲ用ヒルト,平地ニ直立シテヰルモノノ高サヲ測ルコトガ出來ル。



例ヘバ旗竿 AB ノ高サヲ測ルニ旗竿ト觀測者 CD トノ間ニ一本ノ棒 EF ヲ立テ, C カラ A ヲ見通シタ線ト棒トノ交點ヲ E トシ,又 C ヲ通ル水平線 CG ト棒及ビ旗竿トノ交點ヲ H, G トスレバ

$$\triangle CAG \backsim \triangle CEH$$

$$\therefore \quad AG:CG=EH:CH$$

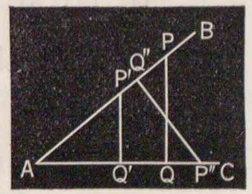
ソコデ CG 卽チ DB(d 米), CD(h 米), CH 卽チ DF(n 米), EH(m 米) ヲ實測シ, AB=x 米トスレバ,上ノ比例式カラ

$$x-h:d=m:n$$

コノ比例式ヲ解ケバ

$$x=\frac{m}{n}d+h$$

然ルニ $\frac{m}{n}$ ナル比ノ値ハ ∠ACG ノ大サガ一定ナラバ,棒ノ位置ノ如何ニ拘ラズ一定ノモノデアルカラ,種々ノ角度ニツイテ $\frac{m}{n}$ ノ値ヲ豫メ求メテ置ケバ棒ヲ立テル代リニ ∠ACG ノ大サヲ測リ,ソノ角ニ對スル $\frac{m}{n}$ ノ値ヲ利用スルコトニヨツテ一層簡單ニ,且正確ナ答數ガ得ラレル。



一般ニ ∠BAC ノ一邊上ノ任意ノ點 P, P', P'', …… カラ他ノ邊ニ垂線 PQ, P'Q', P''Q'', …… ヲ引クト, △PAQ, △P'AQ', △P''AQ'', …… ノ間ニハ次ノ關係ガアル。

$$\triangle PAQ \backsim \triangle P'AQ' \backsim \triangle P''AQ'' \backsim \cdots\cdots$$

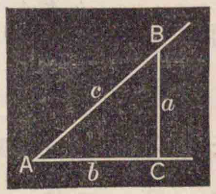
$$\therefore \quad \frac{PQ}{AP}=\frac{P'Q'}{AP'}=\frac{P''Q''}{AP''}=\cdots\cdots \qquad (1)$$

$$\frac{AQ}{AP}=\frac{AQ'}{AP'}=\frac{AQ''}{AP''}=\cdots\cdots \qquad (2)$$

$$\frac{PQ}{AQ}=\frac{P'Q'}{AQ'}=\frac{P''Q''}{AQ''}=\cdots\cdots \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ノヤウナ比ノ値ハ $\angle A$ ノ大サノ變化ニ伴ツテ變化シ, $\angle A$ ノ大サガ定マレバコレ等ノ値モマタ定マル。即チ $\angle A$ ノ函數デアル。コレ等ノ比ヲ**三角函數**トイヒ,特ニ(1), (2), (3) ノ値ヲ夫々 $\angle A$ ノ**正弦**(sine), **餘弦**(cosine), **正切**(tangent) トイフ。$\angle A$ ノ正弦ヲ **sinA**, 餘弦ヲ **cosA**, 正切ヲ **tanA** デ表ハス。

$\angle A$ ノ一邊上ノ任意ノ點 B カラ他ノ邊ニ垂線 BC ヲ引キ,直角三角形 ABC ヲ作ルトキ, AB, BC, AC ヲ夫々 $\angle A$ ニ對シテ**斜邊,垂線,底邊**ト呼ブコトニスレバ



$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} \qquad \therefore \quad a=c\sin A$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} \qquad \therefore \quad b=c\cos A$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} \qquad \therefore \quad a=b\tan A$$

正弦,餘弦,正切ハ何レモ不名數デアル。

問　上ノ圖ニツイテ $\angle B$ ノ正弦,餘弦,正切ヲ邊 a, b, c デ表ハセ。

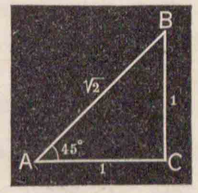
63. 30°, 45°, 60° ノ三角函數

特殊ナ角ノ三角函數ノ値ハ次ノヤウニシテ容易ニ求メルコトガ出來ル。

直角二等邊三角形 ABC ニ於テ $\angle C=90°$ トスレバ

$$\angle A=\angle B=45°$$

依ツテ　$AC=1$　トオケバ



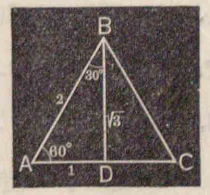
$$BC=1$$

$$AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45°$$

$$\tan 45°=\frac{1}{1}=1$$

次ニ正三角形 ABC ノ一頂點 B カラ對邊 AC ニ垂線 BD ヲ引ケバ, D ハ AC ノ中點デアル。依ツテ $AD=1$ トオケバ



$$AB=2$$

$$BD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$$

$$\cos 60°=\frac{1}{2}=\sin 30°$$

$$\tan 60°=\sqrt{3}, \quad \tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

以上ノ結果カラ次ノ表ガ得ラレル。

角 / 函數	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

例　$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$　ノ値ヲ求メヨ。

解　與式$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$　　　答　1

例　題　(51)

次ノ式ノ値ヲ求メヨ。(1−3)

1. $\tan 45^\circ - \tan 30^\circ \tan 60^\circ$
2. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ$
3. $\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

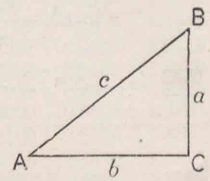
次ノ等式ヲ證明セヨ。(4—5)

4. $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ = 0$
5. $(1+\sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ + \cos 60^\circ)=\frac{7}{4}$

64. 三角函數ノ關係

△ABC ニ於テ ∠C ヲ直角トスレバ

(1)　ぴたごらすノ定理ニヨリ



$$a^2+b^2=c^2$$

$$\therefore\quad \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad \mathbf{\sin^2 A+\cos^2 A=1}$$

注意　$\sin^2 A$ ハ $(\sin A)^2$，$\cos^2 A$ ハ $(\cos A)^2$ ノ意味デアル。同様ニ $(\tan A)^2$ ヲ $\tan^2 A$ ト書ク。

(2)　三角函數ノ定義ニヨリ

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}=\frac{\sin A}{\cos A}$$

(3)　$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B$

ココニ　$B=90^\circ-A$

故ニ　$\sin A=\cos(90^\circ-A)$

同様ニシテ　$\cos A=\sin(90^\circ-A)$

例 1.　$(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A$ ヲ證明セヨ。

解　$(\sin A+\cos A)^2=\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A$

$=1+2\sin A\cos A$

例 2.　$\sin A=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ。

解　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$　カラ

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{4}\quad(\text{答})$$

例 **3.**　$\cos 72°=\sin(90°-72°)=\sin 18°$

例　題　(52)

1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

（1）$(1-\sin^2 A)\tan^2 A=\sin^2 A$

（2）$\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\sin^2 A$

（3）$\sin(45°+A)=\cos(45°-A)$

2. $\sin 68°$, $\cos 73°$ ヲ 45° ヨリ小ナル角ノ三角函數デ表ハセ。

3. $\cos A=\frac{2}{3}$ ノトキ $\sin A$, $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ。

4. $\tan A=\frac{8}{15}$ ノトキ $\sin A$, $\cos A$ ノ値ヲ求メヨ。

65. 三角函數ノ眞數表

次頁ノ表ハ 0° カラ 90° マデ 1° 毎ニ取ツタスベテノ角ノ三角函數ノ値ヲ小數第四位マデ計算(第四位未滿四捨五入)シテ求メタモノデアル。カヤウナ表ヲ**三角函數ノ眞數表**トイフ。

三角函數ノ眞數表

角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9569	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	∞
	sin	cos	tan		sin	cos	tan

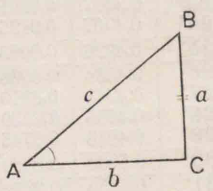
66. 直角三角形ノ解法

三角形ノ三ツノ角ト三ツノ邊トヲソノ**六要素**トイヒ,六要素ノ中,一邊ト他ノ二要素トヲ知ツテ殘リノ三要素ヲ求メルコトヲ**三角形ヲ解ク**トイフ。

直角三角形デハ一角ガ直角デアルカラ,一邊ト他ノ一要素トヲ知レバ之ヲ解クコトガ出來ル。依ツテ直角三角形ABCニ於テ角Cヲ直角トスレバ,ソノ解法ハ次ノ四ツノ場合ニ區別セラレル。

(1) Aトaトヲ知ル場合ノ解法。

$B=90°-A$ カラBヲ求メ,次ノ公式ニヨツテb, cヲ求メル。



$$b=a\tan B,\quad c=\frac{a}{\sin A}$$

例ヘバ $A=54°$, $a=4(m)$ トスレバ

$$B=90°-A=90°-54°=\underline{36°}$$

$$b=a\tan B=4\tan 36°$$

表カラ　$\tan 36°=0.7265$

∴　$b=4\times 0.7265=\underline{2.9060(m)}$

又　$c=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{4}{\sin 54°}$

表カラ　$\sin 54°=0.8090$

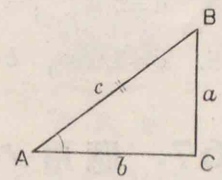
∴　$c=\dfrac{4}{0.8090}=\underline{4.944\,(m)}$

(2) Aトcトヲ知ル場合ノ解法。

$B=90°-A$

$a=c\sin A$

$b=c\cos A$

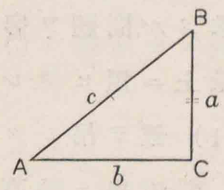


(3) cトaトヲ知ル場合ノ解法。

Aハ　$\sin A=\dfrac{a}{c}$

カラ表ニヨツテ求メラレル。

ソシテ



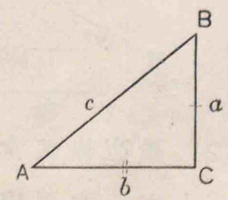
$B=90°-A$,　$b=c\cos A$　又ハ　$b=\sqrt{c^2-a^2}$

(4) aトbトヲ知ル場合ノ解法。

Aハ　$\tan A=\dfrac{a}{b}$

カラ表ニヨツテ求メラレル。

ソシテ



$B=90°-A$,　$c=\dfrac{a}{\sin A}$　又ハ　$c=\sqrt{a^2+b^2}$

例　題　(53)

次ノ各ノ場合ニ於テ直角三角形 ABC ヲ解ケ。

但シ C ヲ直角トスル。

1. $c=20(m)$,　$A=50°$　　2. $a=7(m)$,　$A=28°$

3. $a=5(m)$,　$c=13(m)$　　4. $a=3(m)$,　$b=2(m)$

5. $a=1.6(m)$,　$b=3(m)$

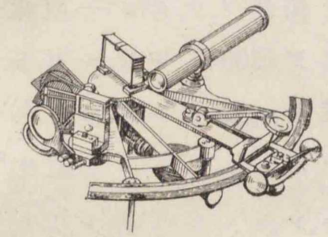
67. 應用ノ例

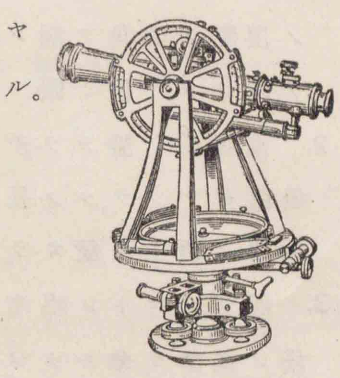
直角三角形ノ解法ヲ應用スルト,高サ・距離等ヲ求メル問題ヲ容易ニ解クコトガ出來ル。次ニ測量上ニ用ヒラレル二三ノ用語ヲ説明シヨウ。

(1) 錘ヲ吊シタトキノ糸ノ方向ヲ**鉛直線**トイヒ,鉛直線ニ垂直ナル直線ヲ**水平線**トイフ。

(2) 鉛直線ヲ含ム平面内ニアル直線ガ水平線ノ上方ニ水平線トナス角ヲ**仰角**トイヒ,下方ニ水平線トナス角ヲ**俯角**トイフ。

角度ヲ測ルニハ**經緯儀**ヤ**六分儀**ナドノ器械ヲ用ヒル。


六分儀


經緯儀

例　平地ニ直立スル樹木ノ根元カラ 30 m 隔ツタ地點デソノ尖端ノ仰角ヲ測ツタラ 28° デアツタ。コノ樹木ノ高サヲ求メヨ。但シ觀測者ノ眼ノ高サヲ 1.5 m トスル。

解　樹木ノ高サヲ x 米トスレバ

$$x-1.5=30\tan 28°$$

$$\therefore\quad x=30\tan 28°+1.5$$

ソコデ表カラ　$\tan 28°=0.5317$

$$\therefore\quad x=30\times 0.5317+1.5=17.451$$

答　17.45 m

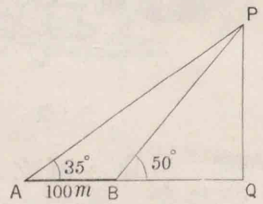
例　題　(54)

1. 平地ニ直立スル塔ノ礎カラ 100 m ノ地點デソ

ノ頂點ノ仰角ヲ測ツテ 35° ヲ得タ。塔ノ高サヲ求メヨ。但シ眼ノ高サハ 1.5m トスル。

2. 或丘陵ノ麓カラ 8° ノ傾斜ヲナセル一直線ノ道路ガアツテ,ソノ長サガ 300m デアル。コノ坂路ノ頂上ハ麓カラ幾米ノ高サニアルカ。

3. 近ヅクコトノ出來ナイ塔ノ高サヲ知ルタメニ,ソノ基底ト同一ノ水平面上ニアル或地點 A デ塔ノ頂點ノ仰角ヲ測ツタラ 35° ヲ得タ。ソレカラ塔ニ向ツテ水平線上 100m ダケ進ンダ地點 B デ再ビ頂點ノ仰角ヲ測ツタラ 50° ヲ得タ。コノ塔ノ高サヲ求メヨ。



4. 底邊ガ 125m デ,底邊ノ兩端ノ角ガ夫々 55° 及ビ 35° ナル三角形ノ面積ハ何程カ。

5. V 字形ノ峽谷ニ 30m ノ橋ガ水平ニカカツテヰル。谷ノ兩側ガ水平線ト夫々 40° 及ビ 30° ノ角度デ傾斜シテヰルトスレバ,谷底ハ橋カラ何米ノ下ニアルカ。

第6章　立體圖形

68. 平面

平面ニツイテハ第4節(7頁)デ一通リ述ベタガ,今少シ嚴密ニ定義スレバ,次ノ如クデアル。

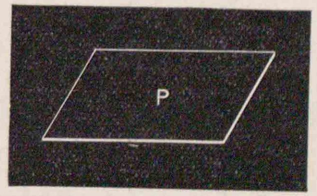
平面トハソノ面上ニアル任意ノ二點ヲ通ル直線ガ常ニ全クソノ面上ニアルヤウナ面デアル。

故ニ次ノコトガイヘル。

一直線上ノ二點ガ或平面上ニアルトキハ,ソノ直線ハ全クソノ平面上ニアル。

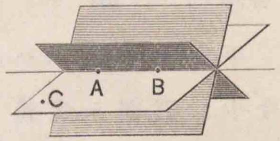
點又ハ直線ガ或平面上ニアルトキハ,コノ平面ハソノ點又ハ**直線ヲ含ム**或ハ**通ル**トイフ。平面ト直線トガ唯一點ヲ共有スルトキハ,ソノ平面ト直線トハ**相交ル**トイヒ,コノ點ヲソノ**交點**トイフ。

平面ハ空間ニ於テソノ何レノ方向ヘモ無限ニ擴ガツテヰルモノトスル。シカシ之ヲ表ハスニハ便宜上平行四邊形ヲ用ヒ,之ニ P, Q ナドノ文字ヲツケテ“平面 P”“平面 Q”ナドト呼ブ。



69. 平面ノ決定

一平面上ノ二點A,Bヲ固定スルトキハ,ソノ平面ハコノ二點ヲ通ル直線ヲ軸トシテ廻轉サセルコトガ出來ル。シカシソノ直線上ニナイ第三ノ點Cヲ通ルマデ廻轉サセルト,ソノ位置ハ定マル。卽チ



一直線上ニナイ三點ヲ含ム平面ハ唯一ツアル。

コノコトヲ次ノヤウニ述ベル。

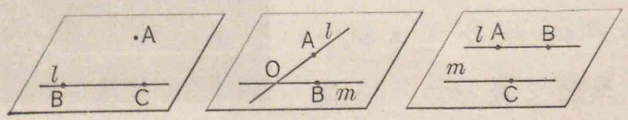
一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ決定スル。

定理 **五十二**　次ノ各ハ一平面ヲ決定スル。

(1) 一直線トソノ上ニナイ一點。

(2) 相交ル二直線。

(3) 平行ナル二直線。



證明 (1) 一直線lノ上ニナイ一點ヲAトシ,l上ニ二點B,Cヲ取レバ,lトAトヲ含ム平

面ハ三點A,B,Cヲ含ム平面ニ外ナラナイ。依ツテlトAトハ一平面ヲ決定スル。

(2) 一點Oニ於テ相交ル二直線ヲl, mトシ,ソノ上ニO以外ノ點ヲ一ツヅツ取ツテ之ヲ夫々A,BトスレバIl, mヲ含ム平面ハ一直線上ニナイ三點O,A,Bヲ含ム平面デアル。依ツテ相交ル二直線l, mハ一平面ヲ決定スル。

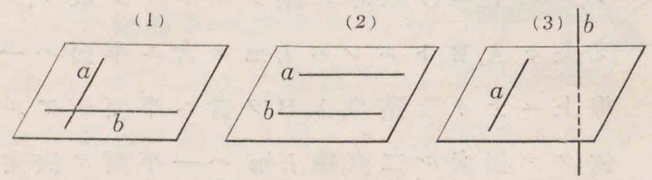
(3) 二直線l, mガ平行ナラバ,ソレハ同一平面上ニアル。ソシテl上ニ二點A,Bヲ取リ,m上ニ一點Cヲ取レバl, mヲ含ム平面ハ一直線上ニナイ三點A,B,Cヲ含ム平面デアル。依ツテ平行ナル二直線l, mハ一平面ヲ決定スル。

例題 (55)

1. 定點Aヲ通リ且定直線lト交ル任意ノ直線ハ一定ノ平面上ニアル。
2. 相交ル二直線a, b中ノaニ交リ,bニ平行ナル直線ハスベテ同一ノ平面上ニアル。

70. 二ツノ直線

空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ニハ次ノ三通リガアル。



(1) 相交ル場合。

(2) 互ニ平行デアル場合。

(3) 相交ラズ又平行デモナイ場合。

(1),(2)ノ場合ニハ二直線ハ同一ノ平面上ニアルガ, (3)ノ場合ニハ同一ノ平面上ニナイ。ソレデ空間ニ於ケル二直線ニツイテハ"相交ラナイカラ平行デアル"或ハ"平行デナイカラ相交ル"トイフコトハ出來ナイ。

故ニ二直線ノ平行デアルコトヲ證明スルニハ(1)二直線ガ同一平面上ニアルコト, (2)相交ラナイコトノ二ツヲ確メナケレバナラナイ。

注意　一般ニ立體圖形ニ平面圖形ノ定理ヲ應用スルニハ,先ヅソノ圖形ガ同一ノ平面上ニアルコトヲ確メナケレバナラナイ。

71. 二ツノ平面,平面ト直線

二ツノ平面ハ唯一ツノ直線ヲ共有スルカ,或ハ如何程延長シテモ出會ハナイカノ何レカデアル。

二ツノ平面ガ唯一ツノ直線ヲ共有スルトキハ,ソノ二平面ハ**相交ル**トイヒ,ソノ直線ヲ二平面ノ**交リ**又ハ**交線**トイフ。

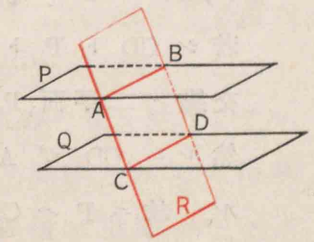
二ツノ平面ガ出會ハナイトキハソノ二平面ハ**互ニ平行デアル**トイフ。

二平面 P, Q ガ平行デアルコトヲ $P \parallel Q$ ト書ク。

定理 五十三　一平面ガ平行ナル二平面ト交ルトキハ,ソノ交線ハ互ニ平行デアル。

題意　平面 R ガ平行ナル二平面 P, Q ト夫々 AB, CD デ交ルトキハ

$AB \parallel CD$



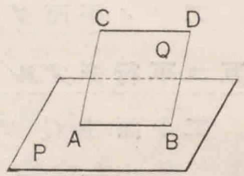
證明　P, Q ハ互ニ平行デアルカラ P上ノ直線 AB ト Q上ノ直線 CD トハ相交ラナイ。ソシテコノ二直線ハ同一ノ平面 R ノ上ニアル。故ニ $AB \parallel CD$ デアル。

平面ト直線トガ出會ハナイトキハ,コノ直線ト平面トハ**互ニ平行デアル**トイフ。

平面Pト直線 l トガ平行デアルコトヲ P∥l ト書ク。

定理 五十四 平行ナル二直線ノ一ツダケヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行デアル。

題意 AB∥CD トシ, AB ヲ含ミ CD ヲ含マナイ平面ヲ P トスレバ, P∥CD



證明 AB ト CD トハ平行デアルカラ一平面ヲ定メル。之ヲ Q トスルト, AB ハ P ト Q トノ交リデアル。

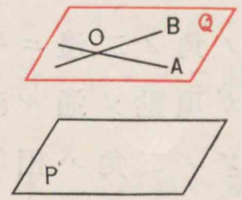
若シ CD ト P トガ平行デナイトスレバ,ソノ交點ハ二平面 P, Q ノ交線 AB ノ上ニアル。然ルニ CD ガ AB ニ交ルコトハ假設ニ反スル。故ニ P ハ CD ニ平行デアル。

系 平行ナル二直線ヲ一ツヅツ含ム二平面ノ交リハソノ各ニ平行デアル。

定理 五十五 相交ル二直線ガ同一ノ平

面ニ平行ナルトキハソノ二直線ノ定メル平面ハ初メノ平面ニ平行デアル。

題意 OA∥P, OB∥P トシ, OA, OB ノ定メル平面ヲ Q トスレバ Q∥P



證明 若シ P, Q ガ平行デナクテ相交ルモノトシ,ソノ交線ヲ l トスレバ Q 上ニ於テ OA, OB ノ中,少クトモ一ツハ l ト交ル。今 OA ガ l ト交ルモノトスレバ OA ハマタ P ト交ルコトニナル。コレハ假設ニ反スル。故ニ P, Q ガ相交ルコトハ出來ナイ。即チ Q∥P デアル。

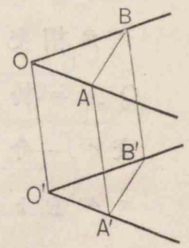
例題 (56)

1. 同一直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル。
2. 同一平面上ニナイ四點ヲ順次ニ結ンデ出來ル四邊形(**ごーしゅ四邊形**)ノ各邊ノ中點ハ一ツノ平行四邊形ノ頂點デアル。
3. 同一ノ直線ニ平行ナル二平面ノ交リハソノ直線ニ平行デアル。

72. 二直線ノナス角

[定理] **五十六**　一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ平行デ且相對應スル邊ノ各ガ頂點ヲ通ル直線ノ同ジ側ニアルトキハ，ソノ二角ハ相等シイ。

題意　$\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トニ於テ $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$ デ且 OA ト $O'A'$, OB ト $O'B'$ トガ何レモ OO' ノ同ジ側ニアルトキハ



$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

證明　$OA = O'A'$, $OB = O'B'$ ナラシメルト $OAA'O'$ 及ビ $OBB'O'$ ハ何レモ平行四邊形ニナル。

$\therefore$　$OO' = AA'$,　$OO' = BB'$　$\therefore$　$AA' = BB'$

又　$OO' \parallel AA'$,　$OO' \parallel BB'$　$\therefore$　$AA' \parallel BB'$

故ニ $ABB'A'$ ハ平行四邊形トナリ $AB = A'B'$

$\therefore$　$\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$

$\therefore$　$\angle AOB = \angle A'O'B'$

[系] **一**　任意ノ一點ヲ通ツテ,同一ノ平面

上ニナイ二ツノ定直線ニ夫々平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ一定デアル。

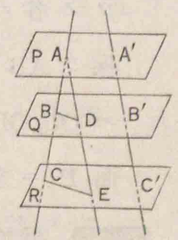
任意ノ一點カラ同一ノ平面上ニナイ二直線ニ夫々平行ニ引イタ二直線ノナス角ヲ初メノ**二直線ノナス角**トイフ。

若シコノ角ガ直角ナラバ,ソレ等ノ二直線ハ**互ニ垂直デアル**トイフ。

[系] **二**　平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ直線ニモ垂直デアル。

[例　題] (57)

1. 定點ヲ通ツテ定平面ニ平行ニ引イタスベテノ直線ハ同一ノ平面上ニアル。
2. 同一ノ直線ニ平行ナル直線ト平面トノ位置ノ關係ニツイテ說明セヨ。
3. 任意ノ直線 ABC, $A'B'C'$ ガ平行ナル三平面 P, Q, R ニ交ルトキハ相對應スル部分ハ比例ヲナス。



4. 右ノ圖デ $AB = 6\,cm$, $BC = 8\,cm$, $A'C' = 16.8\,cm$ ナラバ $A'B'$, $B'C'$ ノ長サハ何程カ。

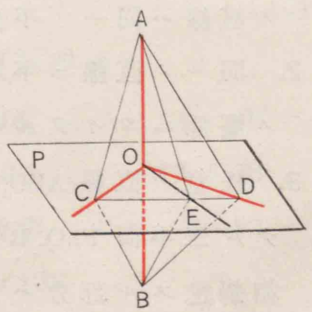
73. 平面ノ垂線

直線ガ平面ト交リ,ソノ交點ヲ通ッテソノ平面上ニ引イタスベテノ直線ニ垂直デアルトキハ,ソノ直線ト平面トハ**互ニ垂直デアル**又ハ**直交スル**トイヒ,ソノ直線ヲソノ**平面ノ垂線**トイフ。

直線ガ平面ト交リ之ト垂直デナイトキハ,ソノ直線ヲソノ**平面ノ斜線**トイヒ,垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲソノ**垂線**又ハ**斜線ノ足**トイフ。

定理 五十七　相交ル二直線ノ交點ヲ通リソノ各ニ垂直ナル直線ハ,ソノ二直線ノ定メル平面ニ垂直デアル。

題意　相交ル二直線 OC, OD ノ交點ヲ通リソノ各ニ垂直ナル直線ヲ AB トスレバ, AB ハ OC, OD ノ定メル平面 P ニ垂直デアル。



證明　平面 P 上ニ於テ O ヲ通ル任意ノ直線 OE ヲ引キ,又 OC, OD, OE ト交ル一直線ヲ引キ,ソ

ノ交點ヲ夫々 C, D, E トスル。

次ニ AB 上ニ OB ヲ AO ニ等シク取リ, A 及ビ B ヲ C, D, E ニ結ブト, OC ハ AB ノ垂直二等分線デアルカラ

$$AC=BC$$

同様ニ

$$AD=BD$$

$$\therefore \quad \triangle ACD \equiv \triangle BCD$$

$$\therefore \quad \angle ACE=\angle BCE$$

$$\therefore \quad \triangle ACE \equiv \triangle BCE$$

$$\therefore \quad AE=BE$$

$$\therefore \quad AB \perp OE$$

故ニ AB ハ平面 P ニ垂直デアル。

系一　平面ノ垂線ハソノ平面上ニアルスベテノ直線ニ垂直デアル。

系二　平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ニモマタ垂直デアル。

平面外ノ一點カラソノ平面ニ引イタ垂線ノ長サヲソノ**點ト平面トノ距離**トイフ。

平行ナル二平面ノ間ニアル共通垂線ノ部分ノ長サヲソノ**平行平面間ノ距離**トイフ。

例題 (58)

1. 平面外ノ一點カラソノ平面上ノ點ニ引イタ線分ノ中デ垂線ハ最小デアル。

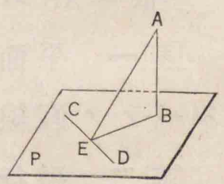
2. 平面P外ノ一點AカラPニ垂線AO及ビ斜線AB, ACヲ引クトキ

(1) OB=OC ナラバ AB=AC

(2) OB>OC ナラバ AB>AC

3. 平行ナル二平面ノ各ノ上ニアル點ヲ結ブ線分ノ中デ最小ナモノハ何カ。

4. 平面P外ノ一點Aカラコノ平面ニ垂線ABヲ引キ,ソノ足BカラP上ノ任意ノ直線CDニ垂線BEヲ引キソノ足EトAトヲ結ベバAEハCDニ垂直デアル。

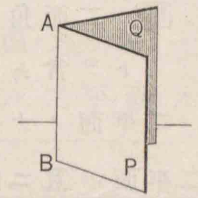


5. 平面Pカラ8 *cm*ノ距離ニアル點AカラPニ垂線ABヲ引キ,ソノ足Bヲ中心トシ半徑6 *cm*ノ圓ヲP上ニ畫キ,ソノ周上ノ任意ノ點Cニ於ケル切線上ニDヲ取リCD=24 *cm*トスレバADノ長サハ何程カ。

74. 二面角

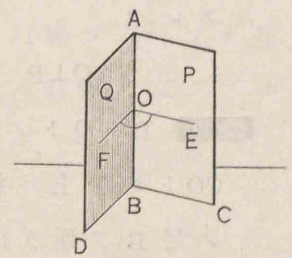
同一ノ直線デ終ル二ツノ平面ハ**二面角**ヲナストイヒ,ソノ直線ヲ二面角ノ**稜**,ソノ各平面ヲ二面角ノ**面**トイフ。

例ヘバ二平面P, Qガソノ交線ABデ終ルト考ヘレバP, Qハ二面角ヲナシ, ABハコノ二面角ノ稜デ,P, Qハソノ面デアル。



二面角ヲ示スニハ"二面角PABQ"ノヤウニ稜ノ文字ヲ二面ヲ示ス文字ノ間ニ置イテ呼ブ。又單ニ"二面角AB"ト呼ブコトモアル。

二面角PABQノ稜ノ上ノ一點OカラP, Q各平面上ニ於テ稜ニ垂線OE, OFヲ引ケバ∠EOFガ出來ル。ソシテ稜ノ上ニ於テ點Oヲ何處ニ取ルトモ∠EOFノ大サハ常ニ一定デアル。



二面角ノ稜ノ上ノ一點カラ稜ニ垂直ニ各ノ面上ニ引イタ二直線ノナス角ヲ**二面角ノ平面角**ト

イフ。

二面角ノ大サハソノ平面角ノ大サデ表ハスモノトスル。

故ニ二面角ノ平面角ノ大サガ例ヘバ 65° デアルトキハ,ソノ二面角ノ大サモ 65° デアル。

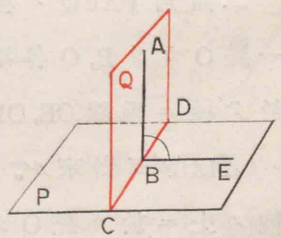
問　二面角ニ於テソノ平面角ノ二等分線ト稜トヲ含ム平面ハ,ソノ二面角ヲ二等分スル。

二平面ノナス二面角ガ直角デアルトキハ,ソノ二平面ハ**互ニ垂直デアル**又ハ**直交スル**トイフ。

定理 五十八　一ツノ平面ヘノ垂線ヲ含ム平面ハソノ平面ニ垂直デアル。

題意　平面 P ヘノ垂線 AB ヲ含ム平面ヲ Q トスレバ

$$Q \perp P$$



證明　P ト Q トノ交リヲ CD トシ,P 上ニ於テ AB ノ足 B ヲ通リ CD ニ垂線 BE ヲ引ケバ, AB ハ P ニ垂直デ CD, BE ハ共ニ P 上ニアルカラ

$$AB \perp CD, \quad AB \perp BE$$

故ニ ∠ABE ハ P, Q ノナス二面角ノ平面角デソレガ直角デアル。

$$\therefore \quad Q \perp P$$

系一　二平面ガ互ニ垂直デアルトキハ,一方ノ平面上ノ任意ノ一點カラソノ交リニ引イタ垂線ハ他ノ平面ニ垂直デアル。

系二　同一ノ平面ニ垂直ナル二平面ノ交リハソノ平面ニ垂直デアル。

例題 (59)

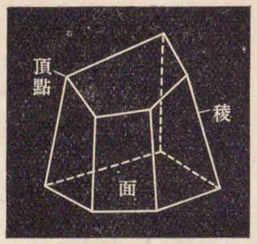
1. 二面角 PABQ ノ稜 AB ニ垂直ナル平面 R ハ P 及ビ Q ニ垂直デアル。
2. 同一ノ點ニ於テ相交ル三直線ガ二ツヅツ互ニ垂直デアルトキハ,コレ等ノ直線ヲ二ツヅツ含ム三平面ハ互ニ垂直デアル。

75. 多面體

問 1. 平面デ空間ノ一部分ヲ圍ムニハ少クトモ幾ツノ平面ガ必要デアルカ。

幾ツカノ平面デ圍マレタ立體ヲ**多面體**トイフ。

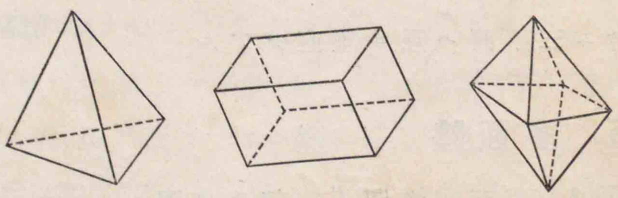
多面體ノ境ヲナシテヰル平面ノ部分ハ皆多角形デアル。コレ等ノ多角形ヲ多面體ノ**面**トイヒ,面ト面トノ交リヲ**稜**,稜ト稜トノ交點ヲ**頂點**トイフ。



多面體ニ於テ同一ノ面上ニナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲソノ**對角線**トイフ。

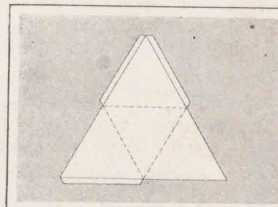
多面體ノ何レノ面ヲ延長スルモ他ノ面ニ出會ハナイモノヲ**凸多面體**トイヒ,サウデナイモノヲ**凹多面體**トイフ。以下單ニ多面體トイヘバ凸多面體ヲ指スモノトスル。

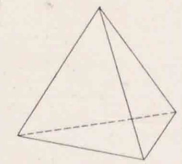
多面體ハソノ面ノ數ニヨッテ**四面體,五面體,六面體**等トイフ。

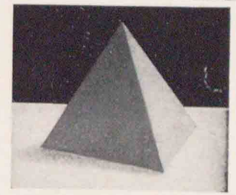


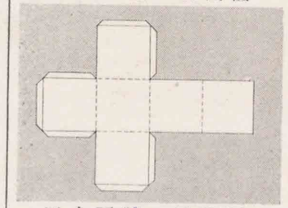
問 **2.** 平行六面體·直六面體(直方體)·立方體ハドンナ多面體デアルカ。

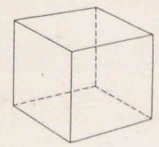
正多面體

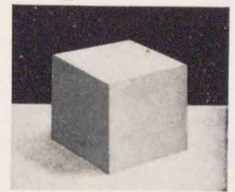

正四面體ノ展開圖

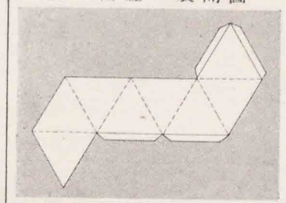

正四面體

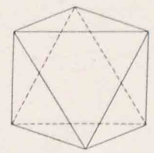


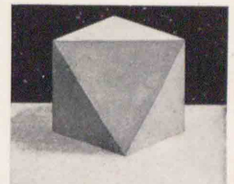

正六面體ノ展開圖

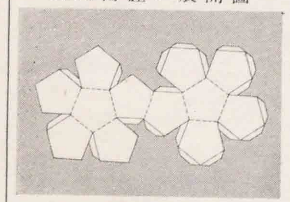

正六面體(立方體)

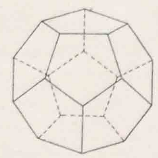


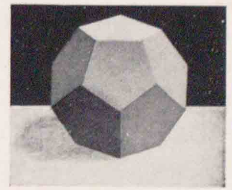

正八面體ノ展開圖

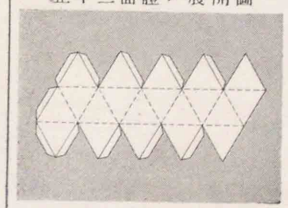

正八面體

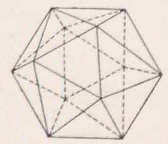


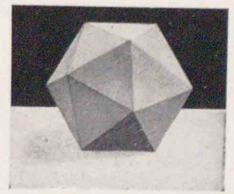

正十二面體ノ展開圖


正十二面體




正二十面體ノ展開圖


正二十面體



76. 正多面體

多面體ニ於テスベテノ面ガ合同ナル正多角形デ,且各頂點ニ集マル面ノ數ガ皆相等シイトキハ,之ヲ**正多面體**トイフ。

正多面體ニハ次ノ五種類シカナイ。(挿圖參照)

(1) 正四面體

(2) 正六面體(立方體)

(3) 正八面體

(4) 正十二面體

(5) 正二十面體

コレ等ノ正多面體ノ模型ヲ作ルニハ,厚紙ノ上ニ挿圖ノヤウニソノ面ノ展開圖ヲ書キ,之ヲ切抜キ點線ニ沿ウテ折合ハセ,各稜ヲ糊着スレバヨイ。

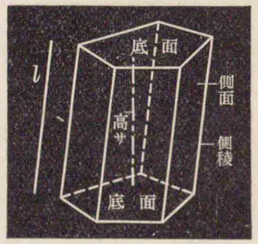
例題 (60)

1. 前ノ挿圖ヲ參考シテ正多面體ノ模型ヲ作レ。
2. 一稜ノ長サガ10cmナル正四面體ノ表面積ヲ求メヨ。
3. 一稜ノ長サガ10cmナル正八面體ノ表面積ヲ求メヨ。

77. 角壔

多面體ノ二面ガ平行デ他ノ面ハスベテ同一ノ直線ニ平行デアルトキハ,之ヲ**角壔**トイフ。

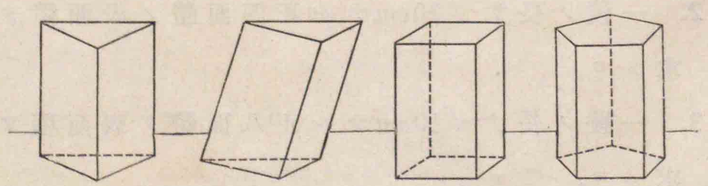
ソノ平行ナル二面ヲ角壔ノ**底面**トイヒ,同一ノ直線ニ平行ナル面ヲ**側面**,側面ノ交線ヲ**側稜**トイフ。又兩底面間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。



角壔ハソノ底面ノ邊數ニ從ッテ**三角壔,四角壔,五角壔**等トイフ。

次頁ノ定理ノ圖ハ五角壔デアッテ,之ヲ五角壔 ABCDE—A′B′C′D′E′ 又ハ五角壔 ABCDE—A′ デ表ハス。

側稜ガ底面ニ垂直デアル角壔ヲ**直角壔**トイヒ,垂直デナイモノヲ**斜角壔**トイフ。特ニ底面ガ正多角形デアル直角壔ヲ**正角壔**トイフ。



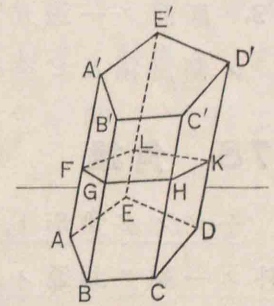
定理 **五十九**　角壔ノ側面ハ皆平行四邊形デ,ソノ兩底面ハ合同ナル多角形デアル。

證明　前頁ノ圖ニツイテ各自ニナセ。

角壔ノスベテノ側稜ニ交リ,且之ニ垂直ナル平面デ截ッタ截口ヲソノ**直斷面**トイフ。

定理 **六十**　角壔ノ側面積ヲ表ハス數ハソノ側稜ノ長サト直斷面ノ周トヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

題意　角壔 ABCDE—A′B′C′D′E′ ノ側面積ヲ表ハス數ヲ S トシ, ソノ側稜 AA′ 及ビ直斷面 FGHKL ノ周ヲ表ハス數ヲ夫々 l, p トスレバ　$S=lp$



證明　側面積ハ ▱AB′, ▱BC′, ▱CD′ 等ノ和デアル。又直斷面ノ邊 FG, GH, HK 等ハ夫々 AA′, BB′, CC′ 等ニ垂直デアルカラ

$$S=AA'\cdot FG+BB'\cdot GH+CC'\cdot HK+\cdots\cdots$$

然ルニ　$AA'=BB'=CC'=\cdots\cdots$

$$\therefore\quad S=AA'(FG+GH+HK+\cdots\cdots)$$

∴ $S=lp$

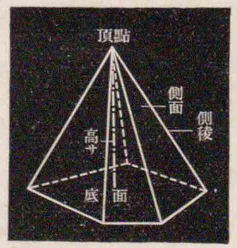
系 直角壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

例題 (61)

1. 角壔ヲスベテノ側稜ト交ル平行平面デ截ルトキハ,ソノ斷面ハ合同ナル多角形デアル。
2. 側面積ガ 180 平方糎デ,底面ガ一邊 5 cm ノ正三角形ナル直角壔ノ側稜ノ長サヲ求メヨ。
3. 底面ノ一邊ガ a 糎,高サガ h 糎ナル正六角壔ノ側面積及ビ全表面積ヲ求メヨ。

78. 角錐

一ツノ多角形ト,ソノ各邊ヲ底邊トシソノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トデ圍マレタ多面體ヲ**角錐**トイフ。



コノ多角形ヲ角錐ノ**底面**トイヒ,三角形ヲ**側面**トイフ。側面ト側面トノ交リヲ**側稜**トイヒ,スベテノ側面ガ共有スル一

點ヲ**頂點**トイフ。角錐ノ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ長サヲソノ**高サ**トイフ。

角錐ハソノ底面ノ邊數ニ從ッテ**三角錐**,**四角錐**,**五角錐**等トイフ。次頁ノ圖ハ四角錐デ,之ヲ四角錐 S—ABCD デ表ハス。

角錐ノ底面ガ正多角形デ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ足ガ底面ノ中心ト一致スルトキハ,ソノ角錐ヲ**正角錐**又ハ**直角錐**トイフ。

正角錐ノ側面ハ合同ナル二等邊三角形デアル。ソシテ正角錐ノ頂點カラ底面ノ各邊ニ至ル距離ハ一定デアル。コノ距離ヲ正角錐ノ**斜高**トイフ。

定理 **六十一** 角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキハ

(1) 側稜及ビ高サヲ同ジ比ニ分ケル。

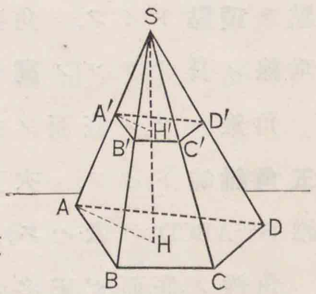
(2) 斷面ト底面トハ相似デアル。

題意 角錐 S—ABCD ニ於テ, A'B'C'D' ヲソノ底面ニ平行ナル斷面トシ,頂點カラ底面ニ引イタ垂線 SH トコノ斷面トノ交點ヲ H' トスレバ

(1) $SA':A'A=SB':B'B=\cdots\cdots=SH':H'H$

(2) 斷面 $A'B'C'D' \backsim$ 底面 $ABCD$

證明 (1) A'H', AH ハ平行ナル二平面ト平面SAHトノ交線デアルカラ平行デアル。



$\therefore$ SA' : A'A = SH' : H'H

同樣ニ

SB' : B'B = SC' : C'C = …… = SH' : H'H

(2) 斷面及ビ底面ハ同邊數ノ多角形デ,ソノ各邊ガ夫々平行デ且同方向ヲ有スルカラ等角デアル。又 A'B' ∥ AB, A'H' ∥ AH デアルカラ

A'B' : AB = SA' : SA = SH' : SH

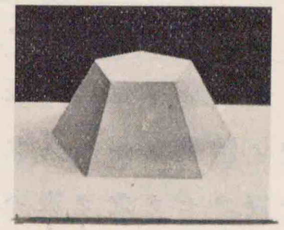
同樣ニ他ノ對應邊ノ比モ SH' : SH ニ等シイ。故ニ兩多角形ノ對應邊ノ比ハ皆相等シイ。

$\therefore$ 斷面A'B'C'D' ∽ 底面ABCD

系一　角錐ノ底面トコレニ平行ナル斷面トノ面積ノ比ハ,頂點カラソレ等ノ兩面ニ至ル距離ノ二乘比ニ等シイ。

系二　底面積ト高サトガ夫々相等シイ二ツノ角錐ノ各底面ニ平行デ且各頂點カラ等距離ニアル斷面ノ面積ハ相等シイ。

角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ,ソノ斷面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**角錐臺**トイフ。



斷面並ニ角錐ノ底面ヲ角錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

正角錐臺ノ側面ハ合同ナル梯形デアル。コノ梯形ノ高サヲ正角錐臺ノ**斜高**トイフ。

定理 六十二　正角錐ノ側面積ハ底面ノ周ノ半分ト斜高トノ積ニ等シイ。

證明　各自ニナセ。

系　正角錐臺ノ側面積ハ兩底面ノ周ノ和ノ半分ト斜高トノ積ニ等シイ。

例題 (62)

1. 高サ 12 *cm*, 底面積45平方糎ナル角錐ヲ底面ニ平行デ且頂點カラ 4 *cm* ノ距離ニアル平面デ截ルトキニ出來ル斷面ノ面積ヲ求メヨ。
2. 高サ 4 *cm*, 底面ノ一邊ガ 6 *cm* ナル正四角錐ノ全表面積ヲ求メヨ。

79. 體積

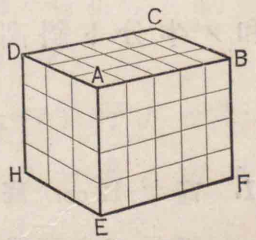
立體ノ表面ニヨツテ圍マレタ空間ノ部分ノ大サヲソノ**體積**トイフ。

體積ノ單位ニハ長サノ單位ヲ一稜トスル立方體ノ體積ヲ用ヒ,長サノ單位ノ名ニ立方トイフ語ヲ冠ラセテ之ヲ表ハス。

例ヘバ長サノ單位ガ米ナルトキハ,之ニ對應スル體積ノ單位ハ立方米デアル。

定理 六十三　直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハソノ一ツノ頂點デ出會フ三稜ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

題意 直六面體ノ一頂點Aデ出會フ三稜AB, AD AEノ長サヲ表ハス數ヲ夫々a, b, cトシ,ソノ體積ヲ表ハス數ヲVトスレバ



$$V=abc$$

證明 (1) a, b, c ガ整數ナル場合。

例ヘバAB, AD, AEノ長サガ夫々5cm, 3cm, 4cm

ナラバ,ABヲ5等分シ,ADヲ3等分シ,AEヲ4等分シ,ソノ各分點ニ於テ夫々稜ニ垂直ナル平面ヲ作ルト,コノ直六面體ハ5×3×4箇ノ相等シイ立方體ニ分ケラレル。ソシテコノ各立方體ノ一稜ノ長サハ1cmデアルカラ,ソノ體積ハ1立方糎デアル。故ニコノ直六面體ノ體積ハ5×3×4立方糎デアル。

同樣ニシテa, b, cガドンナ整數デアツテモ

$$V=abc$$

ナルコトガ知ラレル。

(2) a, b, c ガ分數ナル場合。

a, b, cガ分數デ $a=\frac{p}{l}$, $b=\frac{q}{m}$, $c=\frac{r}{n}$ ナラバ AB ノ l 倍, AD ノ m 倍, AE ノ n 倍ヲ三稜トスル直六面體ヲ作レバコノ直六面體ノ三稜ノ長サヲ表ハス數ハ夫々p, q, rトナリ,コレ等ハ何レモ整數デアル。依ツテソノ體積ヲV'トスレバ,(1)ノ證明ニヨリ

$$V'=pqr$$

然ルニ $$V'=lmnV$$

$$\therefore\quad V=\frac{V'}{lmn}=\frac{pqr}{lmn}=\frac{p}{l}\cdot\frac{q}{m}\cdot\frac{r}{n}=abc$$

系一　直六面體ノ體積ヲ V,底面積ヲ S,高サヲ h トスレバ $V=Sh$ デアル。

系二　立方體ノ體積ヲ表ハス數ハソノ一稜ノ長サヲ表ハス數ノ立方ニ等シイ。

例　題　(63)

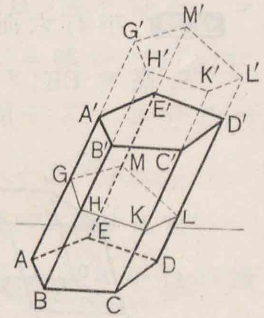
1. 内法長サ 35 cm, 幅 28 cm, 深サ 24 cm ナル箱ノ容積ハ幾立デアルカ。
2. 體積ガ 729 立方糎ナル立方體ノ全表面積ヲ求メヨ。
3. 直六面體ノ三稜ノ比ガ 2:3:4 デ,體積ハ 3 立方米デアルトキ,ソノ三稜ノ長サハ各幾糎カ。

80. 角壔ノ體積

定理六十四　斜角壔ノ體積ハソノ直斷面ヲ底面トシ,側稜ヲ高サトスル直角壔ノ體積ニ等シイ。

題意　斜角壔 ABCDE—A′B′C′D′E′ ノ體積ハ,ソノ直斷面 GHKLM ヲ底面トシ側稜 AA′ ニ等シイ高サヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シイ。

證明　側稜 AA′ ヲ延長シテ,ソノ上ニ GG′=AA′ ナルヤウニ G′ ヲ取リ, G′ ヲ通ツテ GHKLM ニ平行ナル平面ヲ作リ,各側面ノ延長トノ交リヲ夫々 G′H′, H′K′, K′L′, L′M′ 及ビ M′G′ トスレバ, GHKLM--G′H′K′L′M′ ハ直角壔デ,ソノ側稜ハ AA′ ニ等シク,底面ハGHKLMデアル。



多面體 ABCDE—GHKLM ト多面體 A′B′C′D′E′—G′H′K′L′M′ トハ相對應スル稜,角及ビ面ガ夫々皆相等シク,一方ヲ AA′ ニ沿ウテ移動スレバ他ニ重ネ合ハスコトガ出來ル。故ニソノ體積ハ相等シイ。

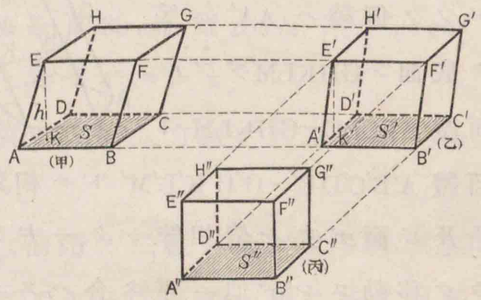
故ニコノ二ツノ多面體ニ夫々同一ノ多面體 GHKLM—A′B′C′D′E′ ヲ加ヘタモノハ相等シイ。即チ斜面壔 ABCDE—A′B′C′D′E′ ノ體積ハ直角壔 GHKLM—G′H′K′L′M′ ノ體積ニ等シイ。

系　平行六面體ノ一双ノ相對スル稜ヲ含ム平面ハ之ヲ相等シイ體積ヲ有スル二ツノ三角壔ニ分ケル。

定理 **六十五**　平行六面體ノ體積ヲ表ハス數ハソノ底面積ト高サトヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

題意　平行六面體 ABCD—EFGH (甲) ノ底面積ヲ S, 高サ EK ヲ h トシ, ソノ體積ヲ V トスレバ

$$V=Sh$$



證明　平行六面體(甲)ノ稜 AB ヲ延長シ, ソノ上ニ A′B′ ヲ AB ニ等シク取リ A′, B′ ヲ通リ AB′ ニ垂直ナル平面ヲ作リ, AB ニ平行ナル各稜ノ延長ト交ラシメルト直四角壔 A′D′H′E′—B′C′G′F′ (乙)ヲ得ル。コノ側稜 A′B′ ハ(甲)ノ側稜 AB ニ等シク, 面 A′H′ ハ稜 AB ニ垂直ナル直斷面デアルカラ(甲)ハ(乙)ト等積デアル(定理六十四)。

次ニコノ直四角壔(乙)ノ稜 D′A′ ヲ延長シ, ソノ

上ニ D″A″ ヲ D′A′ ニ等シク取リ, A″ 及ビ D″ ヲ通リ D′A″ ニ垂直ナル平面ヲ作リ, (乙)ノ稜 D′A′ ニ平行ナル各稜ノ延長ト交ラシメルト直六面體 A″B″C″D″—E″F″G″H″ (丙)ヲ得ル。コノ側稜 D″A″ ハ(乙)ノ側稜 D′A′ ニ等シク, 面 A″F″ ハ稜 D′A″ ニ垂直ナル直斷面デアルカラ(乙)ハ(丙)ト等積デアル(定理六十四)。ソシテ

直六面體(丙)ノ體積＝底面積 S''×高サ A″E″

然ルニ S, S'' ハ共ニ S' ト等底等高ノ平行四邊形ノ面積デ相等シク, 又 A″E″ ハ高サ h ニ等シイ。

$$\therefore \quad V=Sh$$

系　角壔ノ體積ヲ V, 底面積ヲ S, 高サヲ h トスレバ $V=Sh$ デアル。

例題 **(64)**

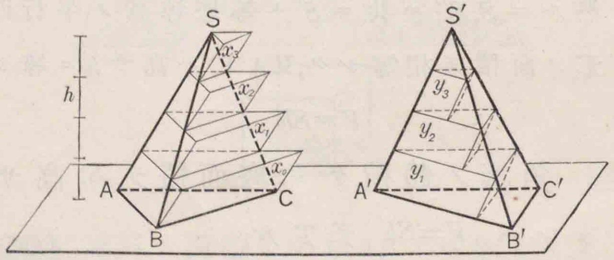
1. 三角壔ノ側稜ノ長サガ $1\,m$ デ, ソノ直斷面ノ三邊ノ長サガ夫々 $9\,cm$, $12\,cm$, $15\,cm$ デアルトキソノ體積ハ幾立方糎カ。

2. 正六角壔ノ底面ノ一邊ガ $6\,cm$ デ側稜ノ長サガ $15\,cm$ デアル。ソノ體積ヲ求メヨ。

81. 角錐ノ體積

定理 **六十六**　底面及ビ高サガ夫々相等シイ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

題意　二ツノ三角錐 S—ABC, S′—A′B′C′ ニ於テ底面 ABC ト A′B′C′ トノ面積ガ相等シク且,高サガ共ニ h ナルトキ,ソノ體積ヲ夫々 V, V' トスレバ　$V=V'$



證明　假ニ $V>V'$ デアルトスル。今,兩三角錐ノ側稜 SA, S′A′ ヲ夫々 n 等分(例ヘバ圖ノヤウニ 4 等分)シ,ソノ各分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル平面デ兩角錐ヲ截レバ,ソノ相對應スル斷面ノ面積ハ夫々相等シイ。

ソコデ,三角錐 S—ABC デハソノ底面 ABC 及ビ今,作ツタ $(n-1)$ 箇ノ斷面ヲ夫々下底トシ

SA ニ平行ナル側稜ヲ有スル n 箇ノ三角壔 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ ヲ作リ,又三角錐 S′—A′B′C′ デハ今,作ツタ $(n-1)$ 箇ノ斷面ヲ上底トシ, S′A′ ニ平行ナル側稜ヲ有スル $(n-1)$ 箇ノ三角壔 $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$ ヲ作ルト

$$x_0+x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots>V>V'>y_1,+y_2+y_2+\cdots\cdots$$

且　$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3,\ \cdots\cdots$

$$\therefore\quad V-V'<x_0$$

然ルニ角壔 x_0 ノ高サハ $\dfrac{h}{n}$ デアルカラ, n ヲ限リナク增セバ x_0 ハ如何程デモ小トナル筈デアルガ,上ノ結果デハソレハ一定量 $V-V'$ ヨリ大デアルカラ不合理デアル。

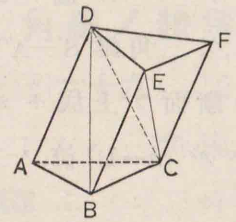
故ニ $V>V'$ デアルコトハ出來ナイ。

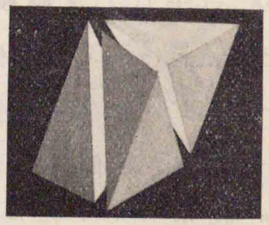
又同樣ニ $V<V'$ デアルコトモ出來ナイ。

$$\therefore\quad V=V'$$

定理 **六十七**　三角壔ハ體積ノ相等シイ三ツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。

證明　三角壔ヲ ABC—DEF トシ,之ヲ二平面 DEC, DBC デ截ルト三ツノ三角錐 D—ECF, D—BCE, D—ABC ヲ得ル。ソシテ三角錐 D—ECF, D—BCE





ニ於テ,高サハ何レモDカラ平面 BCFE ニ至ル距離デ,又ソノ底面 ECF, BCE ハ相等シイ。

故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

次ニ三角錐 D—BCE ト D—ABC 卽チ C—BED ト C—ABD トハ高サガ何レモCカラ平面ABEDニ至ル距離デ又ソノ底面BED, ABD ハ相等シイ。

故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積モ相等シイ。

故ニコレ等三ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

系一 三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

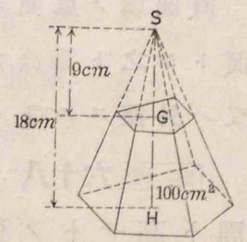
系二 任意ノ角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

從ッテ角錐ノ體積ヲ V, 底面積ヲ S, 高サヲ h トスレバ $V=\frac{1}{3}Sh$

例題 (65)

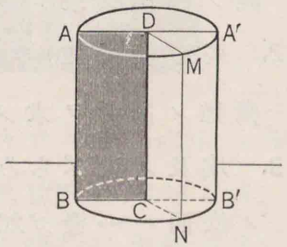
1. 底面ノ一邊ガ $8\,cm$ デ,高サガ $12\,cm$ ナル正四角錐ノ體積ヲ求メヨ。
2. 底面積ガ 120 平方糎デ,體積ガ 600 立方糎ナル角錐ノ高サヲ求メヨ。
3. 埃及ノ大ぴらみっどノ底面ハ一邊ガ $200\,m$ ノ正方形デ,ソノ側面ハ何レモ正三角形デアルトイフ。ソノ體積ヲ求メヨ。

4. 底面積ガ 100 平方糎デ高サガ $18\,cm$ ノ角錐ヲ,頂點カラ $9\,cm$ ノ距離ニアッテ底面ニ平行ナル平面デ截ッテ出來ル角錐ノ體積ヲ求メヨ。又之ニヨッテ出來ル角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。(定理六十一ノ系一ヲ参照セヨ)



82. 直圓壔

矩形ガソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ他ノ三邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面デ圍マレタ立體ヲ**直圓壔**トイフ。



軸ニ垂直ナル二邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面ハ相等シイ圓デ,之ヲ直圓壔ノ**底面**トイフ。又軸ニ平行ナル邊ヲ直圓壔ノ**母線**トイヒ,母線ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面ヲ**側面**トイフ。軸トシタ邊ノ長サ即チ兩底面間ノ距離ヲ直圓壔ノ**高サ**トイヒ,底面ノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**トイフ。

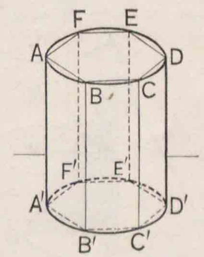
直圓壔ノ底面ニ內接又ハ外接スル多角形ヲ底面トシ之ト等高ナル直角壔ハソノ直圓壔ニ**內接**又ハ**外接**スルトイフ。

定理 六十八　直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シク,ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

題意　直圓壔ノ半徑ヲr,高サヲhトシ,ソノ側

面積ヲSトスレバ　　$S=2\pi rh$

又ソノ體積ヲVトスレバ　$V=\pi r^2h$



證明　直圓壔ニ於テソノ底面ニ內接スル正n角形ヲ作リ之ヲ底面トシ,ソノ直圓壔ト等高ナル直角壔ヲ作ルト,nヲ限リナク增シタ極限ニ於テハ,コノ直角壔ノ底面及ビ側面ハ夫々直圓壔ノ底面及ビ側面トナル。

今,內接直角壔ノ底面ノ周及ビ面積ヲ夫々p及ビS',高サヲhトスレバ,ソノ側面積及ビ體積ハ夫々ph及ビ$S'h$デアル。ソシテnヲ限リナク增加スレバ,pハ直圓壔ノ底面ノ周$2\pi r$トナリ,S'ハ直圓壔ノ底面積πr^2トナル。

依ツテ直圓壔ノ側面積及ビ體積ハ夫々

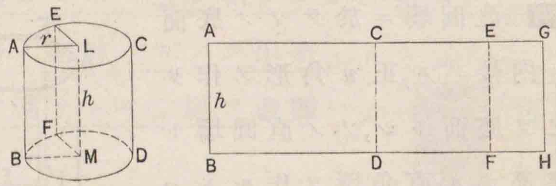
$$S=\text{底面ノ周}\times\text{高サ}=2\pi rh$$

$$V=\text{底面積}\times\text{高サ}=\pi r^2h$$

トナル。

注意　直圓壔ノ側面ヲ一ツノ母線ABニ沿ウテ截リ,之ヲ平面上ニ展開スレバ矩形ABHGヲ得ル。ソシ

テ AB ト BH トハ夫々直圓壔ノ母線及ビ底面ノ周ニ等シイ。

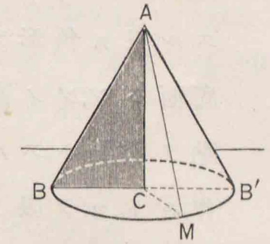


例題 (66)

1. 直圓壔ノ半徑ヲ r, 高サヲ h トスレバ,ソノ全表面積ハ $2\pi r(r+h)$ デアル。
2. 高サ 34 cm, 半徑 15 cm ナル直圓壔ノ側面積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。
3. 底面ノ內徑 30 cm, 深サ 40 cm ナル直圓壔形ノ水槽ガアル。幾立ノ水ヲ入レ得ルカ。
4. 長サ 10 m ノ銅線ノ目方ガ 6.5 g デアル。銅ノ比重ヲ 8.8 トスレバ,コノ銅線ノ直徑ハ幾粍デアルカ。粍ノ小數第一位マデ求メヨ。
5. 直斷面ノ外徑ガ D, 內徑ガ d デ長サガ l ナル鐵管ノ體積ハ $\frac{1}{4}\pi l(D+d)(D-d)$ デアル。

83. 直圓錐

直角三角形ガソノ直角ノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ,他ノ二邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面デ圍マレタ立體ヲ**直圓錐**トイフ。



軸ニ垂直ナル邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル圓ヲ直圓錐ノ**底面**トイヒ,コノ斜邊ヲ直圓錐ノ**母線**トイヒ,母線ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面ヲ**側面**トイフ。

又軸トシタ邊ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**トイヒ,母線ノ長サヲ直圓錐ノ**斜高**トイフ。又母線ノ交點ヲ直圓錐ノ**頂點**トイフ。

直圓錐ノ底面ニ內接又ハ外接スル多角形ヲ底面トシ,直圓錐ト頂點ヲ共有スル角錐ハソノ直圓錐ニ**內接**又ハ**外接**スルトイフ。

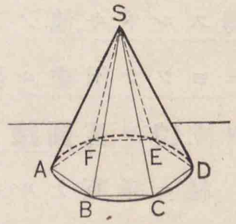
定理 **六十九**　直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シク,體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

題意　直圓錐ノ底面ノ半徑ヲ r, 斜高ヲ l, 高サ

ヲhトシ,ソノ側面積ヲS,體積ヲVトスレバ

$$S=\frac{1}{2}\times 2\pi rl=\pi rl,\qquad V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

證明 直圓錐ノ底面ニ內接スル正n角形ヲ作リ,之ヲ底面トシ,ソノ直圓錐ノ頂點ヲ頂點トスル直角錐ヲ作ルト,nヲ限リナク增シタ極限ニ於テハ,コノ直角錐ノ底面及ビ側面ハ夫々ソノ直圓錐ノ底面及ビ側面トナル。



今,內接直角錐ノ底面ノ周及ビ面積ヲp, M,高サヲhトシ,又側面ノ二等邊三角形ノ高サヲl'トスレバ,ソノ側面積S'及ビ體積V'ハ夫々

$$S'=\frac{1}{2}pl',\qquad V'=\frac{1}{3}Mh$$

ソシテnヲ限リナク增加スレバp及ビMハ夫々直圓錐ノ底面ノ周及ビ面積トナリ,又l'ハ直圓錐ノ斜高lトナルカラ

$$S=\frac{1}{2}\times\text{底面ノ周}\times\text{高サ}=\pi rl$$

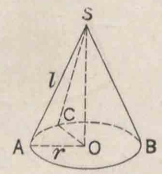
$$V=\frac{1}{3}\times\text{底面積}\times\text{高サ}=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

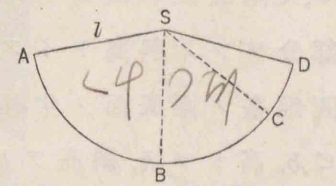
系 直圓錐ノ底面ノ半徑ヲr,高サヲhト

シ,ソノ側面積ヲSトスレバ

$$S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

注意 直圓錐ノ側面ヲ一ツノ母線SAニ沿ウテ截リ之ヲ平面上ニ展開スルト扇形SADヲ得ル。扇形ノ半徑SAハ直圓錐ノ斜高lニ等シク,扇形ノ弧ABDハ直圓錐ノ底面ノ周$2\pi r$ニ等シイ。

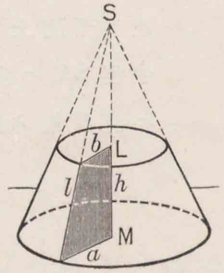




例題 (67)

1. 半徑5cm,高サ12cmナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。但シ$\pi=3.1416$トスル。
2. 半徑8cm,斜高15cmナル直圓錐ノ全表面積ヲ求メヨ。但シ$\pi=3.1416$トスル。
3. 漏斗ノ直圓錐狀ノ部分ノ口徑ガ12cmデ,深サガ10cmデアル。コノ部分ノ容積ハ約幾立デアルカ。但シ$\pi=3.1416$トスル。
4. 一邊ノ長サガa糎ナル正三角形ヲ,ソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ出來ル立體ノ全表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

5. 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ,ソノ斷面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**直圓錐臺**トイフ。ソノ斷面ト底面トヲ共ニ直圓錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲソノ**高サ**トイヒ,又兩底面ノ間ニアル母線ノ部分ヲソノ**斜高**トイフ。



直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ a 及ビ b, 高サヲ h, 斜高ヲ l トスレバ,ソノ側面積 S 及ビ體積 V ハ次ノ式デ表ハサレル。

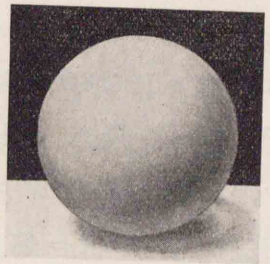
$$S=\pi l(a+b),\qquad V=\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

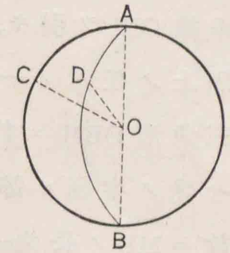
6. 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ガ 10 cm, 20 cm デ高サガ 24 cm デアルトキ,ソノ全表面積及ビ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。

7. 雨天ノトキ屋外ニ置イタ口徑32cm,底徑20cm,深サ24cmノばけつニ水ガソノ深サノ半分ダケ溜ツタトイフ。コノ時ノ雨量ハ一平方米ニツキ幾立デアルカ。

84. 球

半圓ガソノ直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ,ソノ弧ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面デ圍マレタ立體ヲ**球**トイフ。

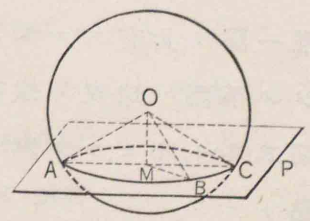




コノ曲面ヲ**球面**トイヒ,ソノ半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**,中心カラ球面上ノ一點ニ至ル線分ヲ球ノ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ球面上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ。

定理 七十 球ヲ平面デ截ルトキハ,ソノ斷面ハ圓デアル。

題意 中心Oナル球ヲ平面Pデ截リABCヲソノ斷面トスレバ,ABCハ圓デアル。

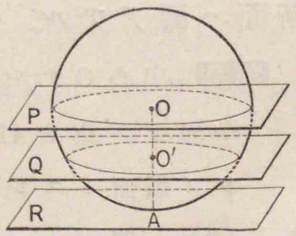


證明　平面Pガ球ノ中心Oヲ通ルトキハ斷面ノ周上ノ點ハ平面P上ニアツテ,Oカラノ距離ガ球ノ半徑ニ等シイ。故ニ斷面ハOヲ中心トシ,球ノ半徑ニ等シイ半徑ノ圓デアル。

又平面PガOヲ通ラナイトキハ,OカラPニ垂線OMヲ引キ,ソノ足ヲMトシ,斷面ABCノ周上ノ任意ノ一點Bヲ取リBM,BOヲ引ケバ,三角形OBMニ於テ角Mハ直角デ,又斜線OBハ球ノ半徑ニ等シク,且OMハ一定デアル。故ニMBノ長サモ一定デアル。故ニ斷面ABCハP上ニ於テMヲ中心,MBヲ半徑トスル圓デアル。

球ノ中心ヲ通ル平面デ截ツタ斷面ヲ球ノ**大圓**トイヒ,中心ヲ通ラナイ平面デ截ツタ斷面ヲ**小圓**トイフ。

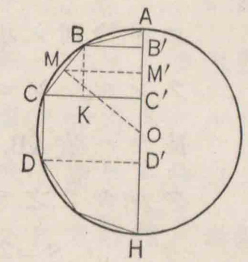
又一ツノ平面ガ球面ト唯一點ヲ共有スルトキハ,ソノ平面ハ球又ハ球面ニ**切スル**トイヒ,ソノ點ヲ**切點**トイフ。



定理七十一　半徑ガrナル球ノ表面積ハ$4\pi r^2$デアル。

證明　中心O,半徑rナル半圓ABC……Hガ直徑AHヲ軸トシテ一廻轉スルト半徑ガrナル球ガ出來ル。

コノ半圓周ヲn等分シ,ソノ各分點B, C, D, ……カラAHニ垂線ヲ引キ,ソノ足ヲ夫々B′, C′, D′, ……トスレバ,コノ半圓ノ廻轉ニ伴ツテ三角形ABB′,梯形B′BCC′等カラ夫々直圓錐又ハ直圓錐臺ガ出來ル。コレ等ノスベテノ立體ノ側面積ノ和ヲS'トスル。サテ,ソノ中ノ一ツデアル梯形B′BCC′ニツイテ考ヘルニ,ソノ側面積ハ$\pi BC(BB'+CC')$デアル。依ツテBCノ中點MカラAHニ垂線MM′ヲ引ケバ,コノ側面積ハ$2\pi BC\cdot MM'$トナル。



ソコデO,Mヲ結ビ,又BカラCC′ニ垂線BKヲ引ケバ　$\triangle BCK \backsim \triangle MOM'$

從ツテ　$BC:MO=BK:MM'$

即チ　　$BC:MO=B'C':MM'$

$\therefore$　　$BC\cdot MM'=MO\cdot B'C'$

故ニコノ側面積ハ又 $2\pi MO\cdot B'C'$ トナル。

他ノ梯形ニツイテモ同様ノコトガイハレ,又三角形 ABB′ ハ梯形ノ平行ナル一邊ガ零トナツタ特別ノ場合ト考ヘレバ同様ノ結果ガ得ラレル。ソシテコレ等ノ結果ニ於テ MO ノ長サハ弦 AB, BC, …… ニツイテスベテ一定デアルカラ,之ヲ r' トスレバ

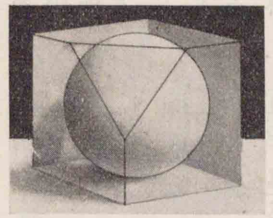
$$S'=2\pi r'AB'+2\pi r'B'C'+\cdots\cdots$$
$$=2\pi r'(AB'+B'C'+\cdots\cdots)$$
$$=2\pi r'\cdot AH=4\pi r'r$$

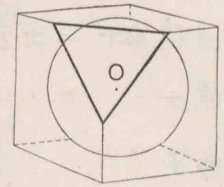
ソコデ n ヲ限リナク増加スレバ,r' ノ極限ハ球ノ半徑 r ニ, S' ノ極限ハ球ノ表面積 S トナルカラ

$$S=4\pi r^2$$

定理 七十二　半徑ガ r ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル。

證明 半徑ガ r ナル球ノ體積ヲ求メルタメニ,スベテノ面ガ皆コノ球ニ切スル一ツノ多面





體ヲ取リ,ソノ各面ノ面積ヲ $A_1, A_2, \cdots\cdots$ トシ,中心 O トソノ各頂點トヲ結ベバ,コノ多面體ハ O ヲ共通ノ頂點トシ,各面ヲ底面トスル角錐ニ分ケラレ,コレ等ノ角錐ノ高サハ皆球ノ半徑 r ニ等シイ。依ツテコノ多面體ノ表面積及ビ體積ヲ夫々 S' 及ビ V' トスレバ

$$S'=A_1+A_2+\cdots\cdots$$
$$V'=\frac{1}{3}rA_1+\frac{1}{3}rA_2+\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{3}rS'$$

サテ,コノ多面體ヲソノ各頂點トOトノ間ニ於テ球面ニ切スル平面デ截ルコトニヨツテソノ面ノ數ヲ増シ,各面ノ面積ヲ小サクスルコトガ出來ル。例ヘバ外接スル正六面體カラ始メテ漸次面ノ數ヲ限リナク増セバ,V' ノ

極限ハ球ノ體積Vトナリ,S'ノ極限ハ球ノ表面積$4\pi r^2$ニナル。

故ニ　　$V=\frac{1}{3}r\cdot 4\pi r^2$

即チ　　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

例題 (68)

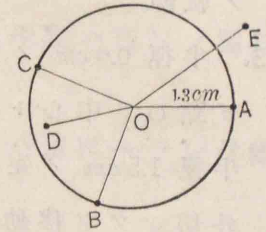
1. 半徑ガ12cmナル球ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。但シ$\pi=3.1416$トスル。
2. 半徑ガ7cmナル球ト體積ガ相等シクテ,底面ノ半徑ガ8cmナル直圓錐ノ高サヲ求メヨ。
3. 球ニ外接スル直圓壔ノ側面積ハソノ球ノ表面積ニ等シイ。
4. 球ノ體積ハソノ外接直圓壔ノ體積ノ$\frac{2}{3}$ニ等シイ。
5. 體積ガ1lナル球ノ半徑ヲ求メヨ。但シ$\pi=\frac{22}{7}$トスル。

附　錄

軌　跡

1. 軌跡

次ノ圖ハ點Oヲ中心トスル半徑1.3cmノ圓周デアル。A,B,Cノヤウニコノ圓周上ニアル點ハ皆O點カラノ距離ガ1.3cmニ等シイガ,D,EノヤウニコノI圓周上ニナイ點ハ皆O點カラノ距離ガ1.3cmニ等シクナイ。故ニコノ圓周ハ定點Oカラ1.3cmノ距離ニアルトイフ條件ニ適スルスベテノ點ノ位置ヲ表ハス圖形ト考ヘラレル。



カヤウニ或條件ニ適スルスベテノ點ノ位置ヲ表ハス圖形ヲソノ條件ニ適スル點ノ**軌跡**トイフ。

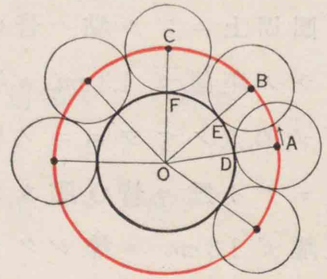
依ツテ定點Oカラ1.3cmノ距離ニアル點ノ軌跡ハOヲ中心トスル半徑1.3cmノ圓周デアル。

與ヘラレタ條件ニ適スル點ノ軌跡ハ平面上デハ線トナリ,空間デハ面又ハ線トナルコトガ多イ。

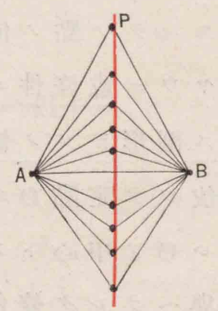
例題 (1)

次ノ軌跡ハドンナ圖形カ。(圖形ダケヲ言ヒ表ハセ,證明ハイラナイ)

1. 定點Pカラ $2\,cm$ ノ距離ニアル點ノ軌跡。
2. 一ツノ定直線XYカラ $1\,cm$ ノ距離ニアル點ノ軌跡。
3. 半徑 $0.6\,cm$ ノ圓周ガ點Oヲ中心トスル半徑 $1.5\,cm$ ノ定圓ニ外切シツツ移動スルトキ,ソノ動圓ノ中心ノ軌跡。



4. 二定點A, Bカラ相等シイ距離ニアル點ノ軌跡。



5. 二ツノ平行ナル直線カラ相等シイ距離ニアル點ノ軌跡。
6. 相交ル二直線ニ至ル距離ガ相等シイ點ノ軌跡。

2. 軌跡ノ證明

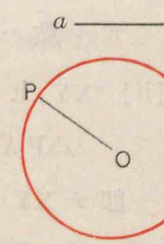
或條件ニ適スル點ノ軌跡ハ,ソノ條件ニ適スル**スベテ**ノ點ヲ含ミ且カヤウナ點**ノミ**ヲ含ム圖形デアルカラ,或圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スル點ノ軌跡デアルコトヲ斷定スルニハ,次ノ二項ヲ證明シナケレバナラナイ。

[i] **與ヘラレタ條件ニ適スル點ハ皆ソノ圖形ノ上ニアル。**

[ii] **ソノ圖形ノ上ニアル點ハ皆與ヘラレタ條件ニ適スル。**

定理一　一ツノ定點カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ定點ヲ中心トシ,ソノ定距離ヲ半徑トスル圓周デアル。

證明　Pヲ定點Oカラ a ニ等シイ距離ニアル任意ノ點トスレバ,PハOヲ中心トシ a ヲ半徑トスル圓周上ニアル。



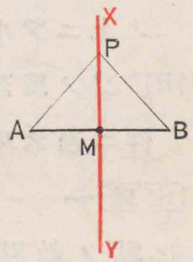
逆ニコノ圓周上ノ點トOトノ距離ハスベテ a ニ等シイ。

故ニOカラaニ等シイ距離ニアル點ノ軌跡ハコノ圓周デアル。

定理 二　二ツノ定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。

證明　A, Bヲ二定點トスル。

[i]　PヲA, Bカラ等距離ニアル任意ノ點トスレバ　PA=PB



依ツテPトABノ中點Mトヲ結ベバ　$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$

$\therefore \quad \angle PMA = \angle PMB$

$\therefore \quad PM \perp AB$

故ニPハABノ垂直二等分線XYノ上ニアル。即チA, Bカラ等距離ニアル點ハ皆XYノ上ニアル。

[ii]　XY上ノ任意ノ點ヲP′トスレバ

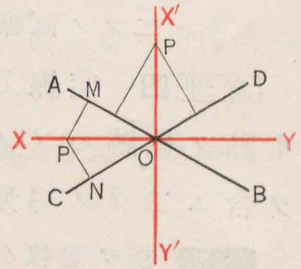
$\triangle P'AM \equiv \triangle P'BM \quad \therefore \quad P'A = P'B$

即チXY上ノ點ハ皆A, Bカラ等距離ニアル。

[i], [ii]ニヨリA, Bカラ等距離ニアル點ノ軌跡ハABノ垂直二等分線XYデアル。

定理 三　相交ル二直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二直線ノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線デアル。

證明　Pヲ相交ル二直線AB, CDカラ等距離ニアル任意ノ點トシ,PカラAB, CDニ垂線PM, PNヲ引クト



PM=PN

故ニPトAB, CDノ交點Oトヲ結ベバ

$\triangle POM \equiv \triangle PON$

$\therefore \quad \angle POM = \angle PON$

故ニPハAB, CDノナス角ヲ二等分スル二直線XY, X′Y′ノ何レカノ上ニアル。

次ニXY上ノ任意ノ點P′カラAB, CDニ垂線P′M′, P′N′ヲ引クト

$\angle P'OM' = \angle P'ON'$

$\therefore \quad \triangle P'OM' \equiv \triangle P'ON'$

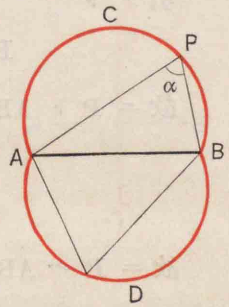
$\therefore \quad P'M' = P'N'$

即チXY上ノ任意ノ點ハ皆AB, CDカラ等距離

離ニアル。同樣ニ $X'Y'$ 上ノ任意ノ點モマタ AB, CD カラ等距離ニアル。

故ニ O ニ於テ相交ル二直線 AB, CD カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線 XY, $X'Y'$ デアル。

定理 四　定線分ヲ視ル角ガ定角ニ等シイ點ノ軌跡ハ,ソノ線分ヲ弦トシ,ソノ定角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル。



證明　P ヲ定線分 AB ヲ視ル角ガ定角 α ニ等シイ任意ノ點トスレバ, P ハ AB ヲ弦トシ $\angle\alpha$ ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧 $\overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{ADB}$ ノ何レカノ上ニアル。

逆ニ $\overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{ADB}$ ノ上ニ任意ノ點 P' ヲ取レバ $\angle AP'B$ ハ $\angle\alpha$ ニ等シイ。

故ニ AB ヲ視ル角ガ $\angle\alpha$ ニ等シイ點ノ軌跡ハ二ツノ弧 $\overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{ADB}$ デアル。

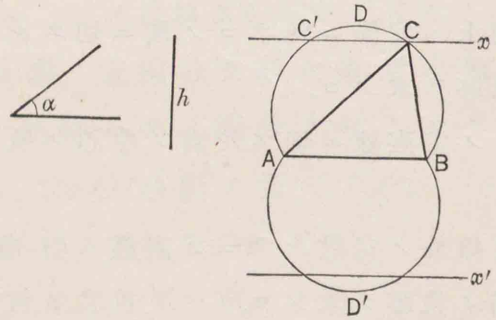
系　定線分ヲ視ル角ガ直角ニ等シイ點ノ軌跡ハ,ソノ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

例　題　(2)

1. 二ツノ定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。
2. 一直線上ノ定點ニ於テコノ直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。
3. 圓周上ノ定點ニ於テコノ圓ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。
4. 二ツノ定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。
5. 一直線外ノ定點カラコノ直線ニ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
6. 一ツノ圓ニ於テソノ圓內ニアル定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
7. 定線分ヲ底邊トシ且一定ノ面積ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。
8. 定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。
9. 空間ニ於テ二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。
10. 空間ニ於テ同一ノ直線上ニナイ三定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

3. 軌跡ノ應用

[作圖題] 底邊ノ位置及ビ大サ,高サ,頂角ノ大サヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。



【考ヘ方】 AB ヲ與ヘラレタ底邊, $\angle\alpha$ ヲ與ヘラレタ頂角, h ヲ與ヘラレタ高サトスル。

今 △ABC ヲ畫イタトスルト,頂點 C ハ AB カラ h ニ等シイ距離ニアル點ノ軌跡上ニアル。

又 C ニ於テ AB ニ對スル角ハ α ニ等シイカラ,頂點 C ハ線分 AB ヲ視ル角ガ α ニ等シイ點ノ軌跡上ニアル。

故ニ C ハコノ二ツノ軌跡ノ交點トシテ求メルコトガ出來ル。

作圖 AB ニ平行デ, h ニ等シイ距離ニアル直

線 x 及ビ x' ヲ引ク。次ニ AB ヲ弦トシテ $\angle\alpha$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ弧 ADB, AD′B ヲ作ル。直線 x 又ハ x' ト弧 ADB 又ハ AD′B トノ交點ノ一ツヲ C トスレバ, △ABC ハ求メル三角形デアル。

證明 △ABC ノ底邊ハ AB デアル。頂角 C ハ $\angle\alpha$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ角デアルカラ $\angle\alpha$ ニ等シイ。又 C カラ AB ニ至ル距離ハ x 又ハ x' ト AB トノ距離ニ等シイカラ h ニ等シイ。故ニ △ABC ハ與ヘラレタ條件ニ適スル。

[例題] (3)

1. 斜邊及ビ直角ノ頂點カラ斜邊ニ引イタ垂線ノ長サヲ知ツテ直角三角形ヲ畫ケ。
2. 頂角ノ大サ,底邊及ビ之ニ引イタ中線ノ長サヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。
3. 與ヘラレタ直線上ニ中心ヲ有シ,且二定點ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。
4. 定點ヲ通リ,且定直線上ノ與ヘラレタ點ニ於テソノ直線ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

補充問題集

I. 直線圖形

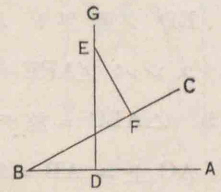
1. △ABC ノ ∠B, ∠C ノ二等分線ノ交點ヲ I トスレバ

$$\angle BIC = R\llcorner + \frac{1}{2}\angle A$$

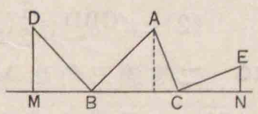
2. △ABC ノ ∠B ノ二等分線ト ∠C ノ外角ノ二等分線トノ交點ヲ E トスレバ

$$\angle BEC = \frac{1}{2}\angle A$$

3. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ一ツノ角ノ二邊ニ夫々垂直ナルトキハ，コノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。

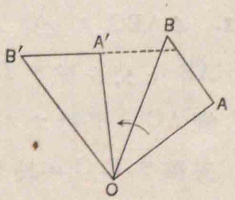


4. △ABC ノ頂點 B, C ニ於テ夫々 AB, AC ニ垂線 BD, CE ヲ引キ，BD＝AB, CE＝AC ナラシメ D, E カラ直線 BC ニ垂線 DM, EN ヲ引ケバ DM±EN＝BC



【∠B 又ハ ∠C ガ鈍角ノ場合ノ圖ヲモ畫イテ考ヘヨ】

5. △OAB ヲ頂點 O ヲ固定シテ矢ノ方向ニ廻轉シ △OA′B′ ノ位置ニ置クトキ ∠AOA′＝$x°$ トスレバ ∠BOB′ ハ何度カ。又 AB

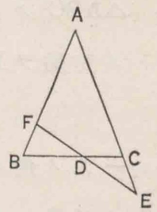


ト $A'B'$ トノナス角ハ何度カ。

6. 凸四邊形 ABCD ノ四邊ノ中, AD ガ最大デ BC ガ最小デアルトキハ $\angle B$ ハ $\angle D$ ヨリモ大デ, $\angle C$ ハ $\angle A$ ヨリモ大デアル。

7. 四邊形ノ相隣ル二角ノ二等分線ノナス角ハ他ノ二角ノ和ノ半分ニ等シイ。

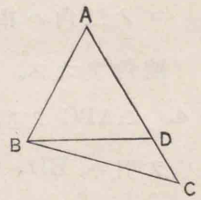
8. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ點ヲ D トシ, AC ノ延長上ニ點 E ヲ取リ CE=CD ナラシメ, ED ノ延長ト AB トノ交點ヲ F トスレバ $\angle AFE=3\angle AEF$ デアル。



9. △ABC ニ於テ AC>AB ナルトキ AC 上ニ AB ニ等シク AD ヲ取レバ

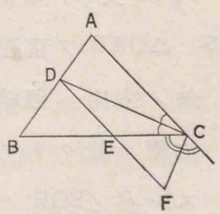
(1) $\angle ABD=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle C)$

(2) $\angle CBD=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle C)$



10. 二等邊三角形 ABC ノ底邊ノ一端 B カラ對邊 AC ニ引イタ垂線ノ足ヲ D トスレバ, $\angle DBC$ ハ頂角 A ノ半分デアル。

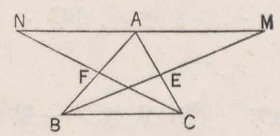
11. △ABC ノ $\angle C$ ノ二等分線ガ邊 AB ト交ル點ヲ D トシ, D ヲ通リ邊 AC ニ平行ナル直線ト BC トノ交點ヲ E, C ニ於ケル外角ノ二等



分線トノ交點ヲ F トスレバ DE=EF デアル。

【DE, EF ノ各ヲ EC ト比較セヨ】

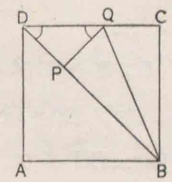
12. △ABC ノ二ツノ中線 BE, CF ヲ夫々 M, N マデ延長シテ BE=EM, CF=FN ナラシメルトキハ三點 M, A, N ハ同一ノ直線上ニアル。



【M ト A, N ト A トヲ結ベバ △BCE ト △MAE, △BCF ト △ANF トハ夫々合同デアル】

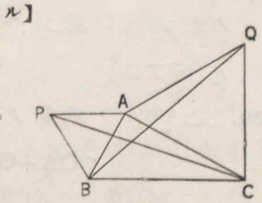
13. 正方形 ABCD ノ對角線 BD 上ニ BC ニ等シク BP ヲ取リ, P ニ於テ BD ニ垂線 PQ ヲ引キ CD トノ交點ヲ Q トスレバ

PD=PQ=QC



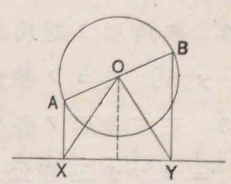
【△PDQ ハ直角二等邊三角形デアル】

14. △ABC ノ外側ニ二ツノ正三角形 ABP 及ビ ACQ ヲ作レバ CP=BQ デアル。又 CP ト BQ トノ夾ム角ノ大サハドウカ。



【△APC ト △ABQ トノ關係ヲ考ヘヨ】

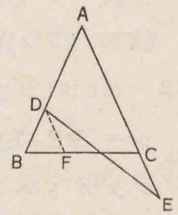
15. 圓ノ直徑ノ兩端 A, B カラ任意ノ直線ニ垂線 AX, BY ヲ引クトキ, ソノ足 X, Y ハコノ圓ノ中心カラ等距離ニアル。



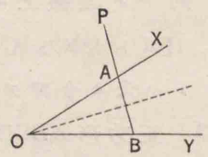
16. 角Aヲ共有スル二ツノ三角形ABCトADEトニ於テ

$$AB=AC,\quad AB+AC=AD+AE$$

ナルトキハ, BCハDEヲ二等分スル。

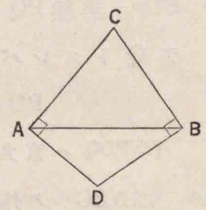


17. $\angle XOY$外ノ一點Pヲ通ル直線ヲ引キ,ソノ二邊OX, OYトノ交點ヲ夫々A, BトシOA=OBナラシメヨ。



【二等邊三角形ノ性質ヲ利用セヨ】

18. 右ノ圖ニ於テ$AC>BC$, $AD\perp AC$, $BD\perp BC$デアレバ$BD>AD$



19. 三角形ノ最大角ヲ夾ム二邊上ノ點ヲ結ブ線分ハ最大邊ヨリモ小デアル。

20. △ABCノ內部ノ一點ヲOトスレバ

$$2(OA+OB+OC)>BC+CA+AB$$

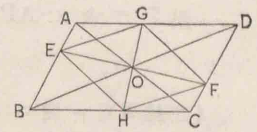
21. 二ツノ線分AB, CDガ相交ルトキハ

$$2(AB+CD)>AC+CB+BD+DA>AB+CD$$

22. 多角形ノ對角線ノ總數ガ54ナルトキ,ソノ邊數ヲ求メヨ。又コノ多角形ノ內角ノ總和ハ何程カ。

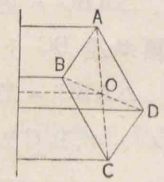
23. 正五角形ノ各內角ハソノ頂點ヲ通ル二ツノ對角線ニヨツテ三等分セラレル。

24. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ニ於テ直交スル二直線ガ各邊ト交ル點ヲ順次ニ結ンデ出來ル四邊形ハ菱形デアル。



25. 平行四邊形ABCDヲ截ラナイ一直線ヘ頂點A, B, C, Dカラ引イタ垂線ノ長サヲ夫々x, y, z, uトスレバ

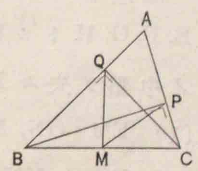
$$x+z=y+u$$



26. △ABCノ邊AB, AC上ニソノ外側ニ正三角形APB, AQCヲ作リ,邊BC上ニ正三角形BRCヲ原三角形ト同ジ側ニ作ルトキハ,四邊形APRQハ平行四邊形デアル。

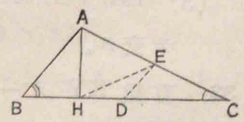
27. △ABCノ二頂點B, Cカラ對邊ニ夫々垂線BP, CQヲ引キ,邊BCノ中點ヲMトスレバ

$$MP=MQ$$



28. △ABCニ於テ$\angle B=2\angle C$ナルトキ,邊BCノ中點ヲDトシ,AカラBCニ引イタ垂線ノ足ヲHトスレバ

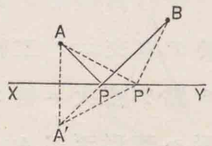
$$DH=\frac{1}{2}AB$$



【EヲACノ中點トスレバ$DE=\frac{1}{2}AB$, 從ツテ△DEHガ二等邊三角形デアルコトヲイヘバヨイ】

29. 直線XYノ同ジ側ニ二點A, Bガアルトキ, XY上ニ

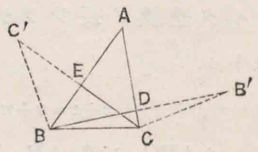
一點Pヲ求メ $AP+BP$ ヲ最小ナラシメヨ。



【直線XYニ關スルAノ對稱點ヲ取ッテ考ヘヨ】

30. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle C=2\angle B$ ナルトキハ，$\angle A$ ノ二等分線ガ邊BCト交ル點ヲDトスレバ $AB-AC=CD$

31. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ナルトキ，B, Cカラ夫々ソノ對邊ニ引イタ垂線ヲ BD, CE トスレバ $BD>CE$



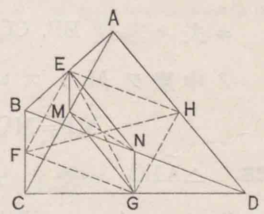
【圖ハ $\angle ACB$ ガ鋭角ナル場合ヲ示ス，コレガ鈍角ナル場合ヲモ考ヘヨ】

32. 四邊形ABCDノ邊AB, BC, CD, DAノ中點ヲ夫々E, F, G, Hトシ，對角線AC, BDノ中點ヲ夫々M, Nトスレバ

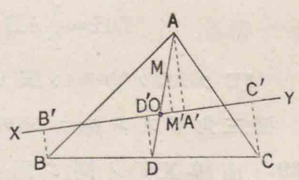
(1) $EM \parallel GN$, $MG \parallel EN$

(2) EGハMNノ中點ヲ通ル。

(3) EG, FH, MNハ一點ニ於テ交ル。

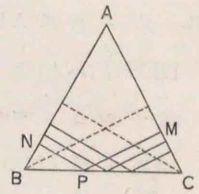


33. 直線XYノ一ツノ側ニ一點A，他ノ側ニ二點B, Cガアル。B, CカラXYニ引イタ二ツノ垂線ノ和ガAカラ之ニ引イタ垂線ニ等



シイトキハ，XYハ $\triangle ABC$ ノ重心ヲ通ル。

34. 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點カラソノ二邊ニ至ル距離ノ和ハ一定デアル。



II. 面積

35. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル平行四邊形ノ面積ハ原形ノ半分ニ等シイ。

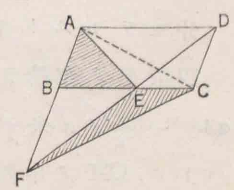
36. $\triangle ABC$ ノ二邊AB, ACノ中點ヲ夫々X, Yトシ，CX, BYノ交點ヲOトスレバ，$\triangle AXY=3\triangle XOY$ デアル。

【Oハ $\triangle ABC$ ノ重心デアル】

37. 平行四邊形ABCDノ内ニ一點Pヲ取レバ

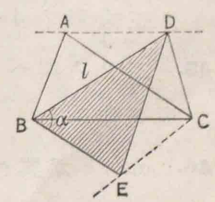
$$\triangle APB+\triangle CPD=\frac{1}{2}\,\text{▱}ABCD$$

38. 平行四邊形ABCDノ頂點Dヲ通ッテ直線ヲ引キ，邊BC及ビABノ延長トノ交點ヲ夫々E, Fトスレバ $\triangle ABE=\triangle CEF$



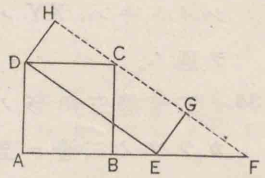
【$\triangle ACD=\triangle ABC=\triangle DCF$ ナルコトヲ考ヘヨ】

39. $\triangle ABC$ ト等積デ，ソノ一邊ハ與ヘラレタ線分 l ニ等シク，ソノ一角ハ與ヘラレタ角 α ニ等シイ三角形ヲ作レ。



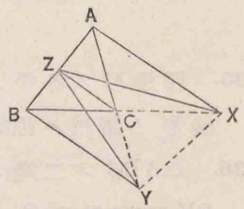
【先ヅ $\triangle DBC$ ニ變形シ次ニ $\triangle DBE$ ニ變形スル】

40. 右ノ圖デ ABCD ハ正方形デ DEGH ハ矩形デアル。ソノ等積ナルコトヲ證明セヨ。

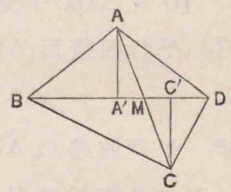


【正方形 ABCD ト 平行四邊形 CDEF トヲ比較セヨ】

41. △ABC ノ三ツノ頂點 A, B, C ヲ通ツテ互ニ平行ナル直線ヲ引キ各ノ對邊又ハソノ延長トノ交點ヲ夫々 X, Y, Z トスレバ △ABC, △AYZ, △BZX, △CXY ハ皆等積デアル。



42. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ガ他ノ對角線 BD ニヨツテ二等分セラレルトキハ, BD ハコノ四邊形ノ面積ヲ二等分スル。



43. 一邊ガ a 米ナル正三角形 ABC ノ邊 AB ノ中點ヲ M トシ, CM ノ中點ヲ N トスレバ AN ノ長サハ何程カ。

44. 菱形ノ兩對角線ノ上ノ正方形ノ和ハソノ一邊ノ上ノ正方形ノ 4 倍ニ等シイ。

45. 二ツノ與ヘラレタ正方形ノ和又ハ差ニ等シイ正方形ヲ作レ。

46. a, b, c ガ與ヘラレタ三ツノ線分ナルトキ

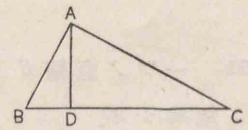
(1) $x^2=a^2+b^2+c^2$　(2) $x^2=a^2+b^2-c^2$

ヲ満足スル線分 x ヲ作圖セヨ。

47. 與ヘラレタ線分 AB 又ハソノ延長上ニ一點 P ヲ取リ, PA^2-PB^2 ヲ與ヘラレタ正方形ニ等シカラシメヨ。

【B ニ於テ AB ニ垂線 BC ヲ引キ, BC ヲ與ヘラレタ正方形ノ一邊ニ等シク取リ C ヲ A 及ビ P ニ結ンデ考ヘヨ】

48. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ D トスレバ



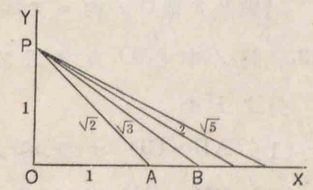
(1) $AB^2=BD\cdot BC$　(2) $AC^2=CD\cdot CB$

(3) $AD^2=BD\cdot DC$

【ぴたごらすノ定理ノ證明法カラ考ヘヨ】

49. 互ニ垂直ナル二直線 OX, OY ガアル。OY 上ニ點 P ヲ取リ, OP ノ長サヲ 1 トスル。

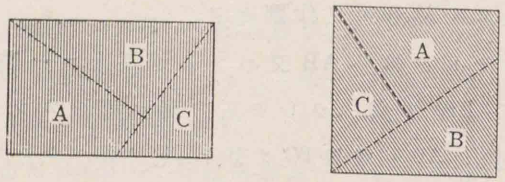
(1) OX 上ニ點 A ヲ取リ OA ヲ 1 トスレバ PA ハ $\sqrt{2}$ ヲ示ス。何故カ。



(2) $OB=AP=\sqrt{2}$ トシ B, P ヲ結ベバ BP ハ $\sqrt{3}$ ヲ示ス。何故カ。

(3) 上ト同様ニシテ $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ 等ヲ作圖セヨ。

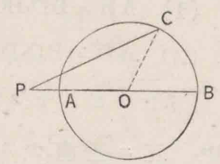
50. 矩形ノ布ヲ三ツニ截チ,之ヲ接ギ合ハセテ正方形ノ布ヲ作ル截チ方及ビ接ギ方ヲ次ノ頁ノ圖ニツイテ考ヘヨ。但シ接ギ目ノタメニ布ハ狭マラナイモノトセヨ。



III. 圓

51. 一ツノ直線ガ二ツノ同心圓ノ間ニ夾マレル部分ハ相等シイ。

52. 一點Pカラ圓Oノ周ヘ引イタ線分ノ中,中心ヲ通ルモノガ最大デアリ,又延長ガ中心ヲ通ルモノガ最小デアル。



【點Pガ圓Oノ內ニアル場合ヲモ考ヘヨ】

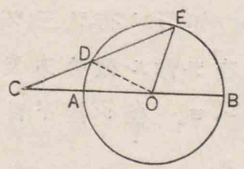
53. 圓ノ中心Oカラ二ツノ弦AB, CDニ垂線OM, ONヲ引クトキ

(1) AB>CD ナラバ OM<ON

(2) OM<ON ナラバ AB>CD

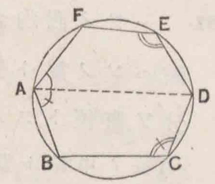
54. △ABCニ於テ∠B>∠Cナルトキハ,ソノ外心カラ二邊AB, ACニ至ル距離ハ何レガ大デアルカ。

55. 圓Oノ弦EDヲCマデ延長シCDヲコノ圓ノ半徑ニ等シクシ,Cヲ通ル直徑ABヲ引クトキハ∠BOE=3∠Cデアル。



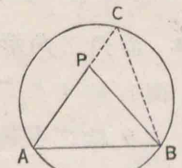
56. △ABCノ外接圓ノ弧AB, ACノ中點ヲ通ル直線ハ∠BACノ二等分線ニ垂直デアル。

【97頁例題5參照】



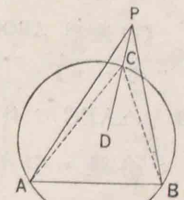
57. 圓ニ內接スル六角形ノ一ツ置キノ內角ノ和ハ4直角ニ等シイ。

58. ABヲ弦トスル弓形ガアル。ABニ對シテ弓形ト同ジ側ニ一點Pヲ取ルトキ



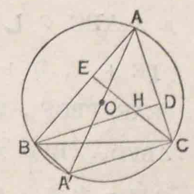
(1) Pガ弓形內ニアレバ,∠APBハ弓形ノ角ヨリモ大デアル。

(2) Pガ弓形外ニアレバ,∠APBハ弓形ノ角ヨリモ小デアル。

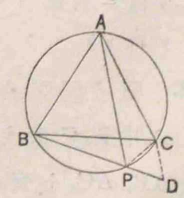


59. 三角形ノ各頂點カラ對邊ニ引イタ垂線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル。コノ點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。

△ABCノ垂心ヲHトシ,Aヲ一端トスル外接圓ノ直徑ノ他端ヲA′トスレバ,四邊形HBA′Cハ平行四邊形デアル。

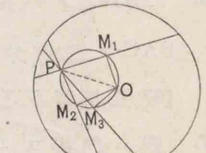


60. 正三角形ABCノ外接圓ノ弧BC上ノ任意ノ一點ヲPトスレバ,PAハPBトPCトノ和ニ等シイ。



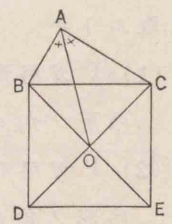
【BPヲ延長シPC=PDナラシメ△APC

ト△BDCトガ合同ナルコトヲイヘ】



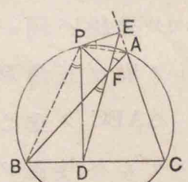
61. 一ツノ圓内ノ定點ヲ通ル弦ノ中點ハソノ點ト圓ノ中心トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周上ニアル。

【弦ノ中點ト圓ノ中心トヲ通ル直線ハソノ弦ニ垂直デアル】



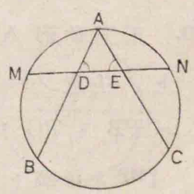
62. 直角三角形ノ直角ノ頂點ト,斜邊上ニコレト反對ノ側ニ書イタ正方形ノ對角線ノ交點トヲ結ブ直線ハソノ三角形ノ直角ヲ二等分スル。

【四邊形 ABOC ガ圓ニ內接スルコトヲ考ヘヨ】



63. △ABC ノ外接圓周上ノ一點 P カラ各邊ニ引イタ垂線ノ足ハ一直線上ニアル。コノ直線ヲ P 點ニ關スル △ABC ノ**しむそん線**トイフ。

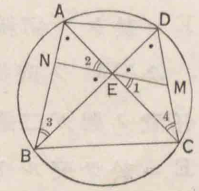
【E ト F, D ト F トヲ結ベバ,四邊形 PEAF, PBDF ハ圓ニ內接シ $\angle AFE=\angle APE$, $\angle BFD=\angle BPD$ デアル。又四邊形 APBC ガ圓ニ內接スルコトカラ $\angle APE=\angle BPD$ ヲ得ル】



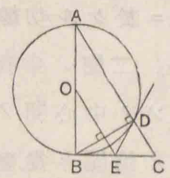
64. 圓ノ二ツノ弦 AB, AC ニ對スル弧ノ中點ヲ夫々 M, N トシ,弧 MN ガ弦 AB, AC ト交ル點ヲ D, E トスレバ

△ADE ハ二等邊三角形デアル。

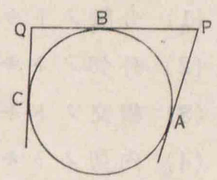
【$\angle D$ ト $\angle E$ トノ相等シイコトヲイヘ】



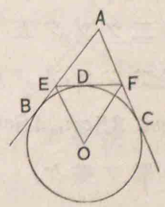
65. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ直交スルトキハ,對角線ノ交點ヲ通リ且一邊ニ垂直ナル直線ハ之ニ對スル邊ノ中點ヲ通ル。



66. 直角三角形 ABC ノ直角ヲ夾ム一邊 AB ヲ直徑トスル圓ガ斜邊 AC ト交ル點 D ニ於テコノ圓ニ引イタ切線ハ BC ヲ二等分スル。



67. 圓周上ノ三點 A, B, C ニ於ケル切線ガ右ノ圖ノヤウニ二點 P, Q デ交レバ　AP+QC=PQ デアル。



68. 圓 O 外ノ一點 A カラコノ圓ニ二ツノ切線 AB, AC ヲ引キ,劣弧 BC 上ノ任意ノ一點 D ニ於ケル切線トノ交點ヲ E, F トスレバ

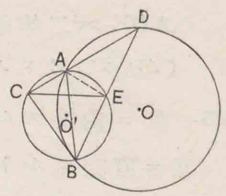
(1) AE+AF+EF=2AB

(2) $\angle EOF=R\llcorner-\dfrac{\angle A}{2}$

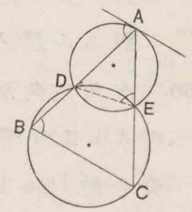
【$R\llcorner-\dfrac{\angle A}{2}$ ハ A ニ於ケル外角ノ半分デアル】

69. 二圓 O, O′ ガ A, B デ交リ,圓 O′ ノ弦 BC ガ B ニ於ケル圓 O ノ切線デアル。弦 CA ノ延長ト圓 O トノ交點

ヲ D トシ, DB ト圓 O′ トノ交點ヲ E トスレバ, CE ハ圓 ADE ノ點 E ニ於ケル切線デアル。



70. △ABC ノ底邊 BC ヲ弦トスル任意ノ圓ガ二邊 AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ルトキハ,圓 ADE ノ A ニ於ケル切線ハ BC ニ平行デアル。



71. 二圓ノ半徑ヲ夫々 r, r' $(r>r')$ トシ, ソノ中心間ノ距離ヲ d トスレバ,二圓ノ位置ニ從ツテ次ノ關係ガアル。

(1) 分離ノトキハ　$d>r+r'$

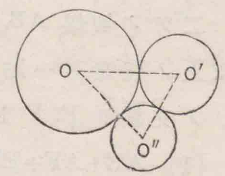
(2) 外切ノトキハ　$d=r+r'$

(3) 相交ノトキハ　$r-r'<d<r+r'$

(4) 內切ノトキハ　$d=r-r'$

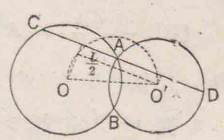
(5) 包含ノトキハ　$d<r-r'$

72. 二ツヅツ互ニ外切スル三ツノ圓ガアツテ,ソノ中心間ノ距離ハ夫々 5cm, 3.5cm, 4.5cm デアル。コノ三ツノ圓ヲ畫ケ。



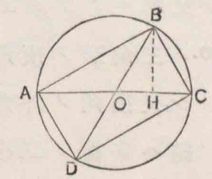
【三ツノ圓ノ半徑ノ長サヲ求メナケレバナラナイ】

73. A, B 二點デ相交ル二圓ガアル。點 A ヲ通ル直線ヲ引キ各圓ト交ル點ヲ夫々 C, D トシ,線



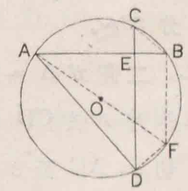
分 CD ヲ與ヘラレタ長サ l ニ等シカラシメヨ。

74. 與ヘラレタ圓ニ內接スル矩形ノ中デ面積ノ最大ナモノヲ截取ルニハドウスレバヨイカ。



【圖ニ於テ BH ノ長サニ着眼セヨ】

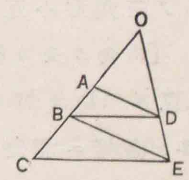
75. 圓 O ノ二弦 AB, CD ガ E ニ於テ直交スルトキハ $AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$ ハソノ圓ノ直徑ノ上ノ正方形ニ等シイ。



76. 半徑ガ a 糎ナル圓ニ內接スル正六邊形ノ面積ヲ求メヨ。

IV. 比及ビ比例

77. 右ノ圖ニ於テ $BD \parallel CE$, $AD \parallel BE$ デアレバ OB ハ OA ト OC トノ比例中項デアル。



78. △ABC ノ二邊 AB, AC ト相等シイ角ヲナス直線ガ三邊 BC, CA, AB 又ハソノ延長ト夫々 D, E, F デ交ルトキハ

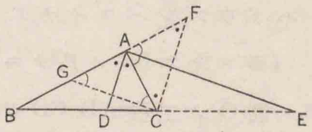
$$BD:CD=BF:CE$$

【C ヲ通ツテ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ DEF ト交ラシメヨ】

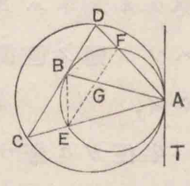
79. 梯形ノ對角線ノ交點ヲ通ツテ底邊ニ平行ナル直線

ヲ引ケバ平行デナイ二邊ニ夾マレル線分ハ對角線ノ交點ニヨツテ二等分セラレル。

80. 三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ二邊ノ比ニ內分シ,又頂角ノ外角ノ二等分線ハ底邊ヲ二邊ノ比ニ外分スル。



81. 二圓ガAニ於テ內切スルトキ,外圓ノ弦CDガBニ於テ內圓ニ切シ, AC及ビADガ內圓ノ周ト交ル點ヲ夫々E, Fトスレバ

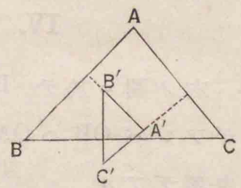


$$AE:AF=BC:BD$$

【ABハ∠CADヲ二等分スル】

82. 三邊ガ夫々互ニ垂直ナル二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル。

【內角ガ夫々相等シクナルコトヲイヘ】

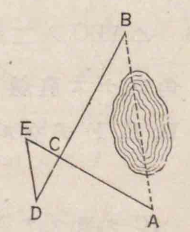


83. 直接ニ測定出來ナイ二點A, B間ノ距離ヲ知ルタメニ右ノ圖ノヤウニシテ

$AE=80m$, $CE=20m$, $BD=100m$,

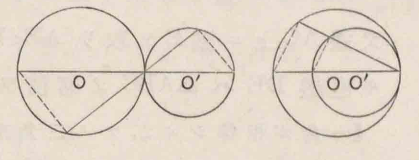
$CD=25m$, $DE=30m$

ナル結果ヲ得タ。A, B間ノ距離ハ何程カ。



84. 二圓ガ相切スルトキ,ソノ切點ヲ通ル一ツノ直線カ

ラコノ兩圓ガ截取ル二ツノ弦ノ比ハ兩圓ノ直徑ノ比ニ等シイ。



85. 圓ニ內接スル△ABCノ頂點Bヲ通リACニ平行ナル直線トCニ於ケル切線トノ交點ヲDトスレバ

$$BC^2=AC \cdot BD$$

86. △ABCノ頂點Aニ於ケル外接圓ノ切線ガ邊BCノ延長トDデ交ルトキハ

$$AB^2:AC^2=BD:CD$$

【△ABDト△CADトハ相似デアル】

87. 二等邊三角形ノ頂點Aカラ任意ノ直線ヲ引キ,底邊BCトPデ,外接圓ノ周トQデ交ラシメルトキハ矩形AP·AQハ一定デアル。

【$AP \cdot AQ=AB^2$ナルコトヲ考ヘヨ】

88. 圓ノ二ツノ平行ナル切線ガ點Aニ於テ切スル第三ノ切線ト交ル點ヲP, Qトスレバ,コノ圓ノ半徑ハAPトAQトノ比例中項デアル。

【P及ビQヲ中心ニ結ベ】

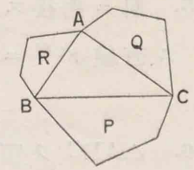
89. 平行四邊形ABCDノ頂點Aヲ通ル直線ガ對角線BD及ビ邊BC, CD又ハソノ延長ト夫々E, F, Gデ交ルトキハ, AEハEFトEGトノ比例中項デアル。

【△AEDト△FEB, △ABEト△GDEトハ夫々相似デアル】

90. $\triangle ABC$ ノ邊 AB 上ニ點 D ヲ取リ $BD:DA=2:3$ トシ, 又邊 AC 上ニ點 E ヲ取リ $AE:EC=4:5$ トスル。コノトキ直線 DE ハ $\triangle ABC$ ノ面積ヲ如何ナル比ニ分ケルカ。

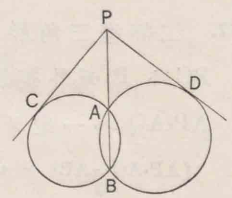
【一角ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ヲ考ヘヨ】

91. 直角三角形ノ各邊ヲ對應邊トシテソノ上ニ相似ナル多角形ヲ畫クトキハ斜邊ノ上ノ多角形ノ面積ハ他ノ二ツノ多角形ノ面積ノ和ニ等シイ。



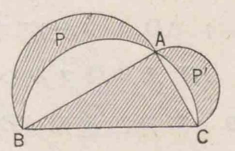
【$Q:P=AC^2:BC^2$, $R:P=AB^2:BC^2$ ナル關係トぴたごらすノ定理トカラ考ヘヨ】

92. 相交ル二圓ノ共通ナ弦ノ延長上ノ一點カラ各ノ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ長サハ相等シイ。



93. 半徑ガ r ナル圓ニ內接スル正三角形ノ一邊トソレニ對スル劣弧トデ圍マレタ弓形ノ面積ヲ求メヨ。

94. 直角三角形ABCノ三邊ノ上ニ右ノ圖ノヤウニ半圓ヲ畫クトキニ生ズル新月形 P ト P′ トノ和ハ $\triangle ABC$ ノ面積ニ等シイ。



【三邊上ノ半圓ノ面積ハ夫々 $\frac{\pi AB^2}{8}$, $\frac{\pi AC^2}{8}$, $\frac{\pi BC^2}{8}$ デアル。$P+P'=\frac{\pi AB^2}{8}+\frac{\pi AC^2}{8}+\triangle ABC-\frac{\pi BC^2}{8}$】

95. 一邊ノ長サガ a 糎ナル正三角形ノ各頂點ヲ中心トシテ半徑ガ a 糎ノ圓ヲ畫クトキ三圓ニ共通ナ部分ノ面積ヲ求メヨ。

96. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $\cos^4 A-\sin^4 A=2\cos^2 A-1$

(2) $(1+\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2=3+2(\sin\theta+\cos\theta)$

(3) $\dfrac{\sin^2 A}{1+\cos A}=1-\cos A$

97. $\cos A=0.3$ ナルトキ $\sin A$ 及ビ $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ。

98. 方程式 $2\sin^2 x+\sin x-2=0$ ヲ解ケ。

99. 方程式 $3\tan^2 x-4\sqrt{3}\tan x+3=0$ ヲ解ケ。

100. 一直線ヲナス道路ヲ歩行スル人ガ道路ト$45°$ノ角ヲナス方向ニ一ツノ樹木ヲ見タ。更ニ$100m$ダケ進ンデ再ビソノ樹木ヲ見タトコロガ道路ト$60°$ノ角ヲナス方向ニアツタトイフ。コノ道路ト樹木トノ距離ヲ求メヨ。

V. 軌跡及ビソノ應用

101. 軌跡トイフ言葉ヲ用ヒテ圓ノ定義ヲイヘ。

102. 定線分ヲ底邊トスル二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

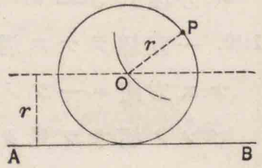
103. 定點ト定直線上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ一定ノ比ニ內分又ハ外分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

104. 點 O ニ於テ直交スル二直線 AB, CD ノ上ニ兩端ヲ有スル定長ノ線分 LN ノ中點 M ノ軌跡ヲ求メヨ。

105. 定圓 O ノ周上ノ定點 A ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

106. 定圓 O ノ周上ノ定點 A ヲ通ル任意ノ弦 AB ヲ P マデ延長シテ BP=AB ナラシメルトキ,點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。(AB ガ直徑デアルトキノ P ニ相當スル點ヲ C トスレバ,軌跡ハ AC ヲ直徑トスル圓周デアル)

107. 定圓 O ノ直徑 AB ノ一端 A ヲ通ル任意ノ弦 AP ノ延長トP ニ於ケル切線 PC ニ B カラ引イタ垂線 BC ノ延長トノ交點ヲ Q トスレバ,點 Q ノ軌跡ハ B ヲ中心トシ AB ヲ半徑トスル圓周デアル。



108. 定點 P ヲ通リ,且定直線 AB ニ切スル半徑 r ナル圓ヲ畫ケ。

109. 二ツノ定直線ニ切シ,且與ヘラレタ長サノ半徑ノ圓ヲ畫ケ。

110. 一ツノ定直線ト一ツノ定圓トニ切シ,且與ヘラレタ長サノ半徑ノ圓ヲ畫ケ。

111. 二定圓ニ切シ,且與ヘラレタ長サノ半徑ノ圓ヲ畫ケ。

112. 二定點ヲ通リ,且一ツノ定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

113. 底邊ノ位置及ビ大サ,高サ及ビ底邊ノ一端カラ引イタ中線ノ大サヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。

114. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ和ヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。

115. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ差ヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。

昭和六年十一月二十日初版印刷　昭和六年十一月二十五日初版發行
昭和七年十月十日修正再版發行　昭和十二年五月卅一日修正三版發行
昭和十二年六月十二日　訂正四版印刷
昭和十二年六月十六日　訂正四版發行

現代
實業新幾何

定價 金九拾五錢

著作者　阿部八代太郎

東京市小石川區小日向水道町84
發行者　東京開成館
代表者　松本繁吉

東京市京橋區湊町三丁目12
印刷者　大壁早治

東京市小石川區小日向水道町84
發行所　東京開成館
振替口座・東京5322番

東京市日本橋區呉服橋二丁目5
東部販賣所　林平書店

大阪市東區北久寶寺町四丁目角
西部販賣所　三木佐助

大倉印刷所　印刷

広島

広島縣立八重實業学校
男子部第二学年
大坪政人

大坪政人

筒賀村立筒賀中學校
第三学年
大坪文夫

山形縣[illegible]郡荷賀村荷賀村
立荷賀中學校
大沼文夫

愛[illegible]縣立[illegible]賀[illegible]業學校
大江政人