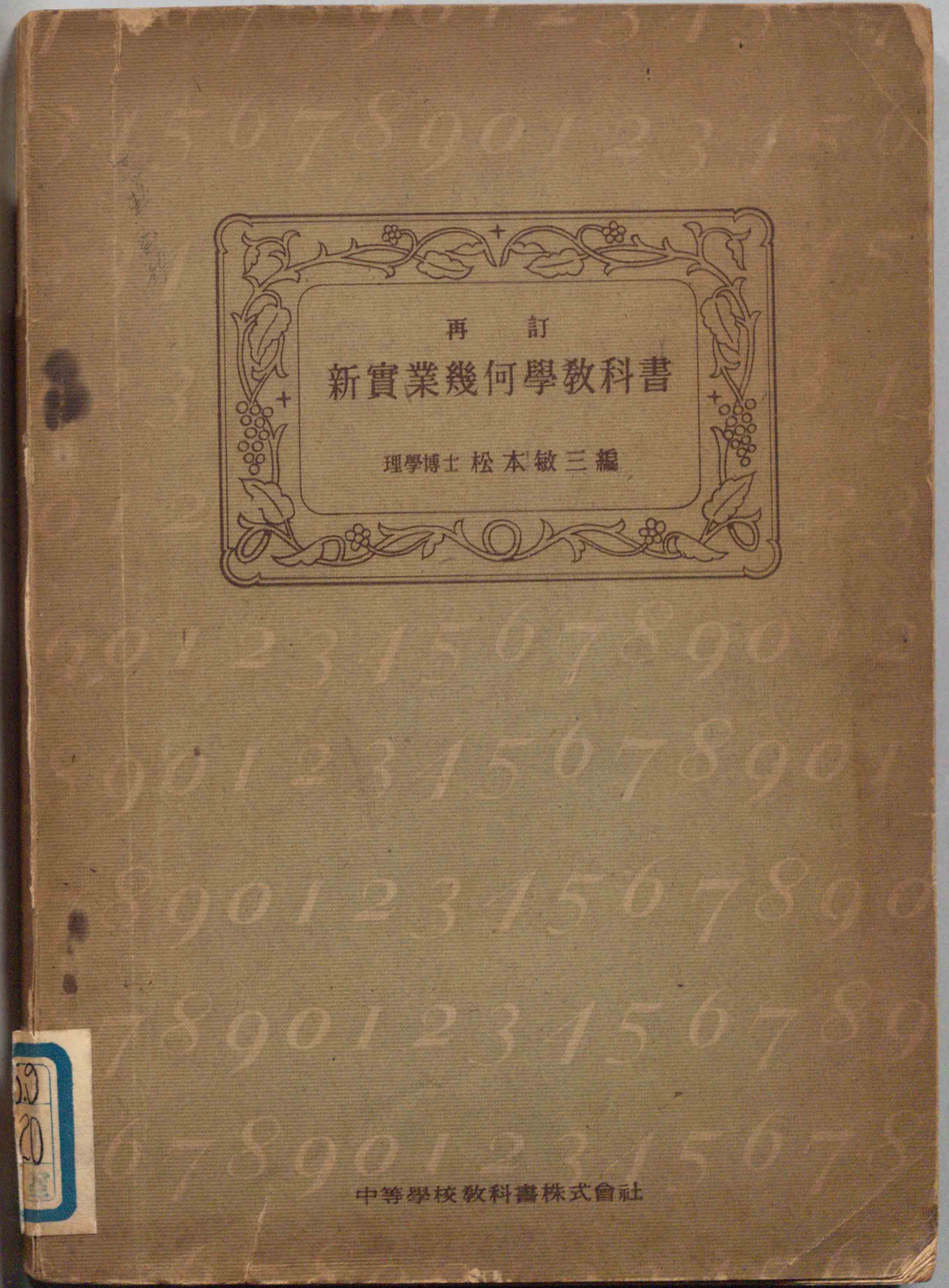
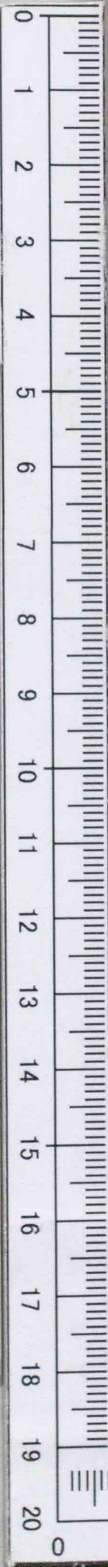
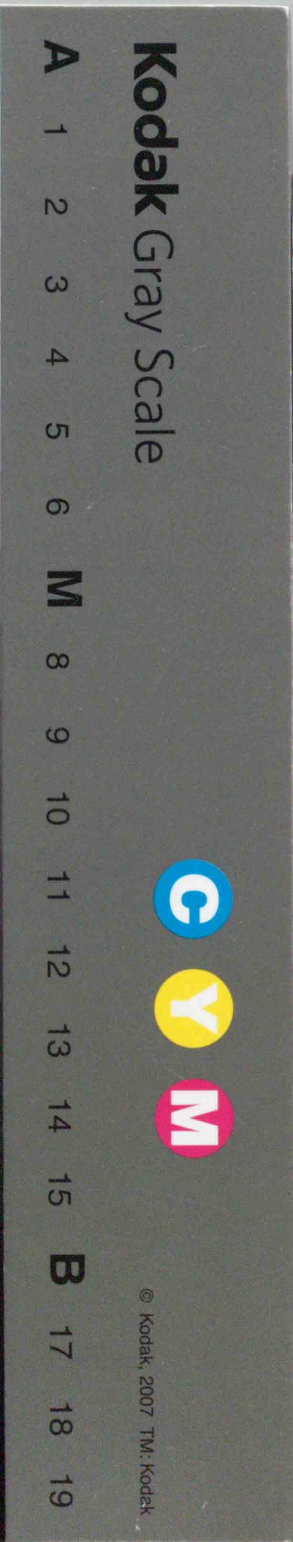
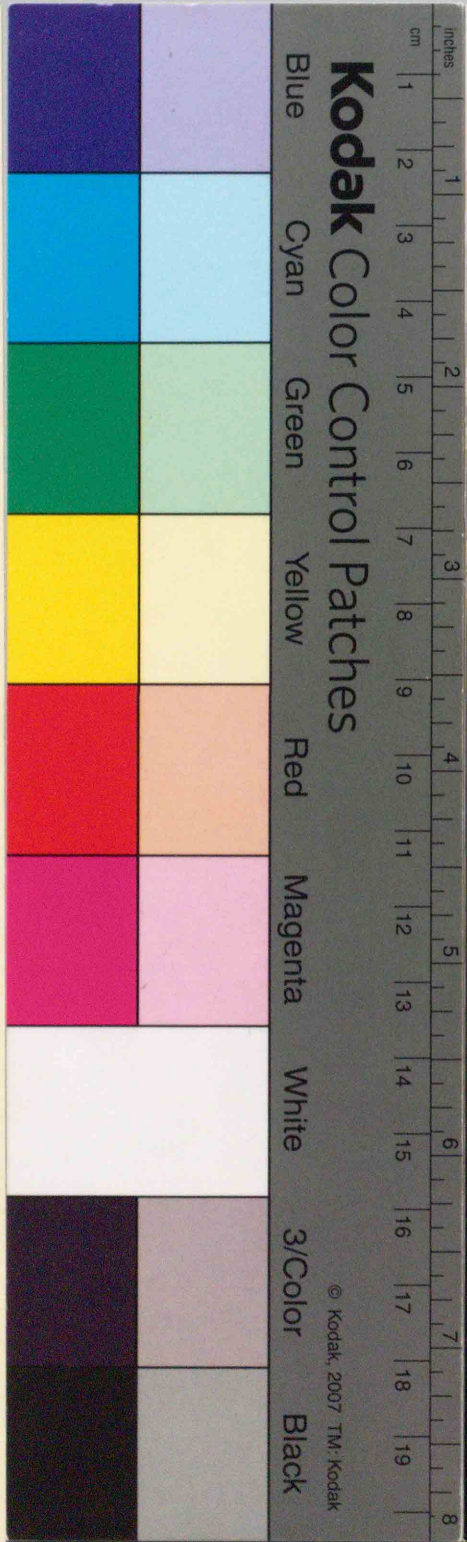


40214

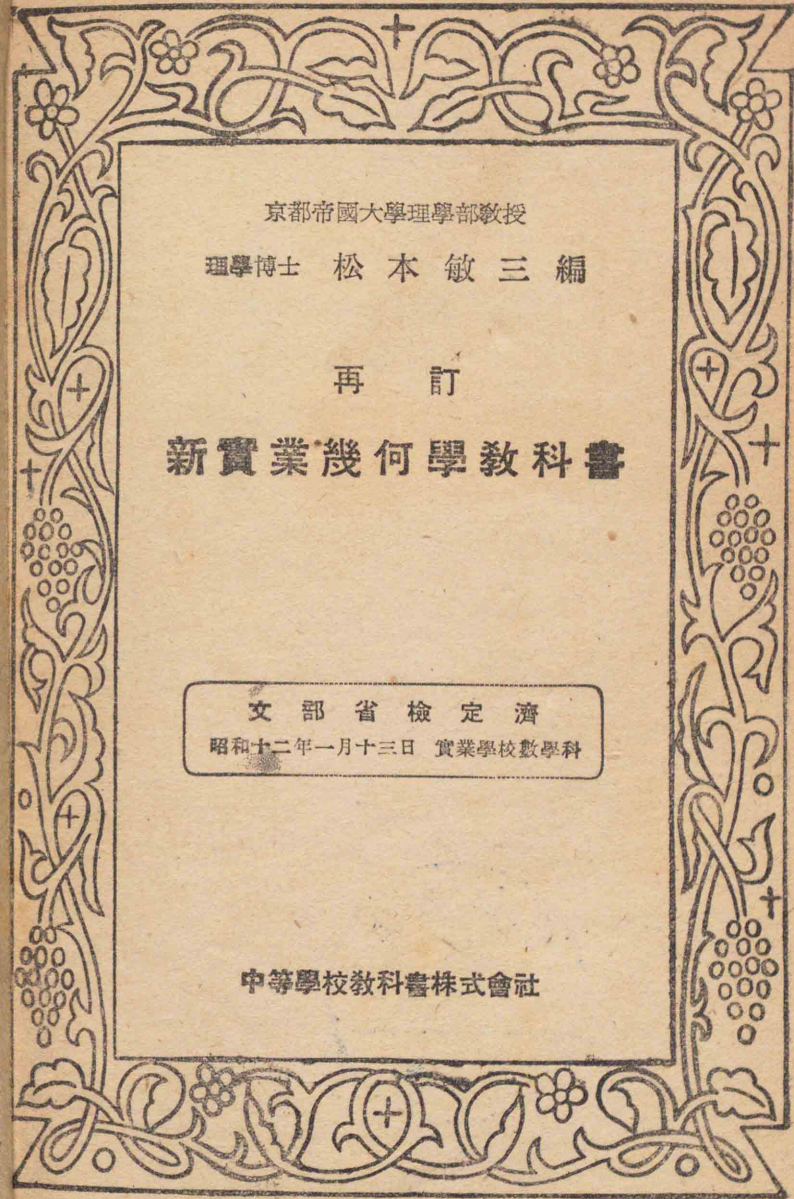
教科書文庫

4
413
44-1937
20000 27640



資料室

375.9  
Ma 20



京都帝國大學理學部教授

理學博士 松本敏三編

再訂

新實業幾何學教科書

文 部 省 檢 定 濟

昭和十二年一月十三日 實業學校數學科

中等學校教科書株式會社



再 訂 版 序

本書ガソノ初版發行以來ノ數年間ニ於テ、廣ク江湖ノ歡迎ニ浴シ、且ツ多數ノ學校ニ採用セラレタルハ、編者ノ大イニ欣幸トスルトコロデアル。

今回編者ハ本書ノ姉妹篇タル新實業算術教科書及ビ新實業代數學教科書ノ再訂版ヲ公ニシタ。從ツテ本書モ亦再訂ヲ必要トスル。今回ノ改訂ニ當ツテハ、印刷及ビ挿圖ノ整美ニ努メ、内容ニ關シテハ説述ノ改良、問題ノ取捨等尠クナイ。但シ本書ノ仕組ハ初版以來カハル所ハナイ。内容ノ取捨ニ就イテハ教授者ノ自由手腕ニ信頼スルモノデアル。

大方諸彦ノ高評ヲ希フ。

昭和十一年十月

編 者 識

## 初 版 緒 言

本書ハ諸種ノ實業學校程度ノ幾何學教科書トシテ編纂シタモノデアアル。

實業學校ニ於テ幾何學ヲ課スル理由ハ勿論ソノ應用ニアル。然シ一口ニ應用トイツテモ、ソレハ頭腦ニヨルコトデアアル。頭腦ガ綿密デナケレバ何事モ出來ルモノデナイ。緻密ニシテ嚴格ナル推理力ハ何レノ場合ニ於テモ最モ必要デアアル。コノ嚴密ナル推理ノ力ヲ養成スルニハ幾何學ヲ以テ第一トスル。コノ考ヨリシテ編者ハ最モ嚴密ニ各定理ヲ講述シタ。然シ嚴密ナルガ爲メニ理解ノ難澁ナルハ編者ノ最モ嫌フ所デアアル。編者ガ出來ル得ル限り平易ヲ旨トシタノハコノ理由ニヨルノデアアル。更ニ編者ハソノ結果ノ應用ニ留意シ、或ハ明晰ナル圖ヲ添ヘ又ハ名畫ヲ挿入シテ、如何ニ幾何學ガ重要ニシテ興味深キカラ示シタ。

細部ニ入ツテ語ルナラバ、本書ノ緒論ニ於テ線分及ビ角ニ關スル初等知識ヲ授ケ、旁ラ幾何學ノ歴史及ビ目的ヲ話シ、次デ定理、系、公理等ヲ説明シタ。初學ノ生徒ハ常識ト學問トヲ區別スルコト困難ナルタメ、幾何學ノ最初ハ難解デアアル。コノ第一章緒論ハ幾何學入門トモ稱ス可ク、ヤガテ嚴密ナル推論ヲナス基礎ヲ作ルモノトシテ役立ツコトヲ希望スル。又コノ緒論ニ於テハ線分及ビ

角ガ量ナルコトヲ充分了解スルヲ要スル。

平行線ハコレヲ幾何學ノ初メノ部分ニ教授シテモヨイガ、サウスト平行線ガ必然的ナ觀念ナルカノ如キ感ヲ與ヘ、他日非ゆうーくりど幾何學等ノ了解ヲ害フカラ虞レル。又作圖題モ後章ニ於テ纏メテ教授スルコトトシタ。作圖題ヲ一纏ニセズシテコレヲ隨所ニ掲ゲルコトハ作圖ニ對スル嚴正ナル理解ヲ與ヘ難キカラ虞レル。圖ヲ畫クコトガ作圖デハナイ。作圖題トハ一定ノ法ノ拘束ノ下ニアルノデアアル。未ダ充分幾何學的知識ヲ習得シナイ以前ニ於テ、ヨクコノ法ノ拘束ヲ感知スルコトガ出來ルヤ否ヤハ、甚ダ疑問トセザルヲ得ナイ。

本書ハ續編ニ於テ立體幾何學及ビ三角法初步ヲ授ケテアル。コノ續編ハ授業時間數ニ應ジテソノ一部又ハ全部ヲ削除シテモヨイ。又立體幾何學ヲ削除シテ三角法ヲ教ヘテモ勿論差支ナイ。

編者ハ中等數學教科書ヲ編纂シテ種々ナル研究ヲナシ、今茲ニ又實業教科書ノ編纂ニ及ンダノデアアル。然シ編者ノ實業教科書ハ決シテ中等教科書ノ頁數ヲ短縮シタモノデナイ。全ク新規ニ統制ヲ持ツタ著書デアアル。

筆ヲ擱クニ當リ編者ハ實地教授ノ任ニアル大方諸彦ノ高評ト忠言トヲ切望スルモノデアアル。

昭和五年十月

編 者 識

## 目 次

第一章	緒論	1
第二章	三角形	23
第三章	平行線	35
第四章	多角形	43
第五章	三角形ノ邊ト角ノ大小・重心	52
第六章	圓	60
第七章	作圖題	89
第八章	比・比例線	104
第九章	相似形	113
第十章	面積	126
第十一章	二線分ノ積	147
第十二章	圓ノ周面積	154
第十三章	軌跡	161

## 續 編

第十四章	平行・垂直	171
第十五章	多面體	185
第十六章	曲面體	202

第十七章	球	207
第十八章	銳角ノ三角函數	213
第十九章	鈍角ノ三角函數	230
第二十章	一般ノ三角形	232

---

附 錄	圖題ノ答	1-4
	三角函數ノ真數表	● 末



再 訂  
新實業幾何學教科書

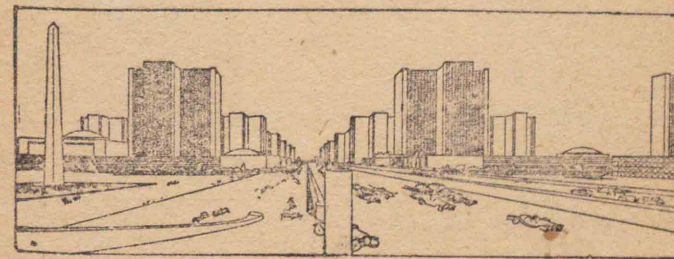
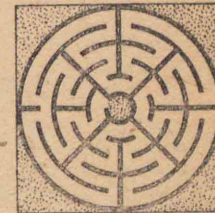
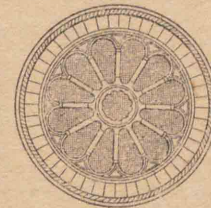
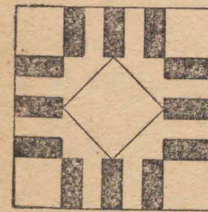
全

平面幾何學

第一章 緒 論

1. 幾何學

矩形  $\square$ , 圓  $\circ$ , 平行線  $\parallel$  等ハ幾何學的圖形デア  
ル。斯様ナ圖形ハ澤山アル。次ニ示スモノハ幾何  
學的圖形ヲ應用シタ圖デアアル。



幾何學ニ於テハ斯様ナ圖形ニツイテソノ構成法  
ヤ計算又ハソレ等ノ性質ヲ研究スル。

幾何學ノ發達 幾何學ハざりしやカラ吾々ニ傳  
ハツタモノデ、幾何學ノ原語 Geometry ハ二ツノざり  
しや語 ge-metron ヨリ來リ、「土地」ト「計ル」ノ意味デア  
ル。ソシテ幾何學ハざりしやへハえじぶとカラ傳ハツ  
テ來タモノデア  
ル。えじぶとノびらみどノ壁ニハ  
澤山ナ幾何學的圖案ガアル。えじぶとデハない  
る河ガ年々氾濫シタノデ、ソノ度毎ニ土地ヲ測量シ  
ナケレバナラナカ  
ツタ。コレニヨツテ幾何學ガえじ  
ぶとニ發達シタノ  
デア  
ルト傳ヘラレテ  
キル。

ざりしやノ七哲ノ一人デア  
ルたーれす (Thales, 640—546 B.C.)\* ハえじぶとヲ旅行シテ種々  
ノ修業ヲナシ、中ニモ幾何學ニ於ケルカハ  
彼ノ教師達ヲ驚カシ  
タトイフ。ざりしやニ歸  
ツテカラ彼ハ旅行中  
修得シタ幾何學ヲ友  
人達ニ教ヘタ。



たーれす

ざりしや人ハ漸次必要ト共ニ  
幾何學ソレ自身ニ興味ヲモツヤ

\* B.C. ハ西曆紀元前ノ意味デア  
ル。

ウニナリ、たーれすノ時代カラ三百年ヲ經タ頃ニハ  
幾何學ハざりしやニ於テ立派ナ學問トナツテキ  
タ

びたごらす (Pythagoras, 約580—約500 B.C.) ヤぶら  
とー (Plato, 429—348 B.C.) ハ偉大ナ學者デア  
ツタ。ぶらとーハ自分ノ



びたごらす



ぶらとー

「幾何學ヲ知ラザルモノハ入ルヲ許  
サズ」ト揭示シテ  
オイタ。彼ハ又

「神ハ永遠ニ幾何學スル」トイフ程信  
ジテキタ。コノ時代ニ種々  
ノ教科書ガ書カレタノ  
デア  
ルガ標準的ナモノヲ書  
イ  
タノハゆーくりど (Euclid, 約330 B.C. 生) デア  
ツタ。コ

ノゆーくりどノ書イ  
タ教科書ハ誠ニ立派  
ナモノ  
デ、ソノ後2200年ノ久  
シイ間教科書トシテ用  
ヒ  
ラレ種々ナ學者ニヨツ  
テ改良進歩ヲナシ遂  
ニ今日ニ到ツタ。



ゆーくりど

吾々ガ學ブ幾何學ハゆーくりど  
カラ傳ハツタモノデア  
ツテ、

名ゆーくりど幾何學トモイフ。

### 2. 立體・面・線・點

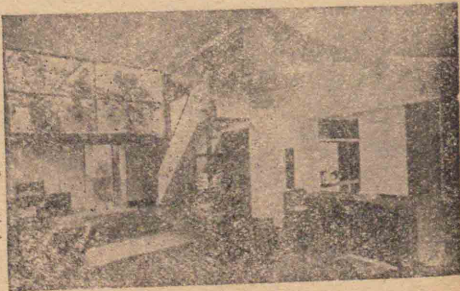
物體ヲソノ形、大イサ、位置ダケニツイテ考ヘルトキ、ソレヲ立體トイフ。立體ノ限界ヲ面トイフ。面ノ限界又ハ二面ガ出會フ所ヲ線トイフ。線ノ端又ハ二線ノ出會フ所ヲ點トイフ。

點ハ位置バカリ、線ハ位置ト長サバカリ、面ハ大イサト位置バカリヲモツ。

然シ點ヲ書キ表ハスニハ  $\bullet$ 、 $\times$ ヲ用ヒ、コレニ A、B 等ノ文字ヲツケ點 A、點 B 等ト呼ブ。

### 3. 直線・平面

細イ絹絲ヲ張ツタヤウナ<sup>マツ</sup>真直<sup>スツ</sup>ナ線ヲ直線トイフ。コレヲ嚴格ニイヘバ「直線トハ長サガアツテ大イサガナク、且ツソノ何レノ部分ヲ他ノ部分ニ如何様ニ重ネテモ全ク



合スルモノデアル。

直線ハ通常——ヲ以テ表ハシ、ソレヲ畫クニハ定規ヲ用ヒル。

直線デナイ線ヲスベテ曲線トイフ。

靜カナ水面ノヤウナ平ラナ面ヲ平面トイフ。コレヲ嚴格ニイヘバ「平面トハ廣サガアツテ厚サガナク、且ツソノ何レノ部分ヲ他ノ部分ニ如何様ニ(ソノマ、又ハ裏返シテ)重ネテモ全ク合スルモノ」デアル。

平面ニハ廣サガアルカラソノ上ニ點ヲトルコトガ出來、且ツ平ラデアルカラ直線ヲ畫クコトガ出來ル。又ソノ直線ヲ平面カラ離サズニ如何様ニデモ動カスコトガ出來ル。



一平面上ノ二直線ガ切り合フ所ハ點デアル。コレヲソノ二直線ノ

交點トイヒ、二直線ハソノ點デ交ルトイフ。

平面デナイ面ヲスベテ曲面トイフ。

問1. 一ツノ平面上ノ二點ヲ過ル直線ヲ引クトソノ直線ハソノ平面ニ密着スルカ。

問2. 大工ガ板ヲ削ルトキ、<sup>サシガネ</sup>指金ノ縁ヲアテ、透



シテ見ルノハ何故カ。

### 4. 圖形

立體、面、線、點又ハソレ等ノ集合ヲ圖形トイフ。一平面上ノ圖形ヲ平面圖形トイヒ、特ニソレガ直線バカリカラ出來テキルトキハ直線圖形トイフ。

圖形ハソノ位置ヲカヘテモカハラナイ。

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ重ネタトキニ、ソノ二ツノ圖形ガ全ク合スルナラバ、コレ等ハ合同又ハ全等デアルトイフ。

幾何學トハ圖形ノ性質ヲ論ズル學科デアル。特ニ平面幾何學ニ於テハ平面圖形ノ性質ヲ論ジ、立體幾何學ニ於テハ立體ガ干與スル圖形ノ性質ヲ論ズル。

### 5. 直線ノ種類

二點ヲ過ル直線ハ一ツハ必ズアル、ソシテ唯一ツニ限ル。

コレハ自明ノ理デアルガ、試ミニ紙面上ニ二點ヲ取り、定規ヲアテ、ソレ等ヲ過ル直線ヲ引イテ見ルニ、如何ニシテモ一本シカ引キ得ナイ。

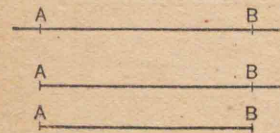
上ノコトヲ二點ハ一直線ヲ決定スルトイフ。コレヨリ次ノコトガワカル。

(i) 二點ヲ共有スル二直線ハ合シテ一直線トナル。

(ii) 二直線ハ一點ヨリ多クノ點デ交ラナイ。直線ハ双方ヘ限リナク長イモノデアル。因テ平面上ニ於テ一直線ノ兩側ニ各、一點ヲトルト、コレ等ヲ過ル直線ハ必ズ初メノ直線ト交ル。

直線ハ通常ソノ上ニ任意ニ二點 A, B ヲトリ直線 AB ト呼ブ。直線上ニ一點ヲトリソノ一方ダケヲ

考ヘルトキハ、コレヲ半直線



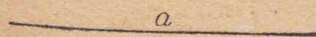
トイフ。半直線 AB ノ場合

ニハ通常 A ヲソノ一端ノ點

トスル。直線上ニ二點ヲト

リ、ソノ間ノ部分ダケヲ考ヘルトキハ、線分又ハ有限直線トイフ。コレヲ表ハスニハソノ兩端ノ點 A, B ヲ用ヒ AB 又ハ  $\overline{AB}$  ト書キ線分 AB ト呼ブ。

二點ヲ兩端トスル線分ヲ引クコトヲ、ソノ二點ヲ結ブトイフ。

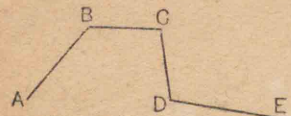


直線及ビ線分ハ時トシ

テハ唯一ツノ文字例ヘバ

a デ表ハシ、夫々直線 a、線分 a トイフコトガアル。

半直線又ハ線分ハ直線ノ一部分デアル。ソシテ



残リノ部分ヲソノ半直線又ハ線分ノ延長トイフ。

線分ガ幾ツカ連ナツテ出

來タモノヲ折線トイヒ、線分ノ各端ニツケタ文字ヲ連ネテ呼ブ。例ヘバ折線 ABCDE ノヤウデアル。

### 6. 距離・中點

二點間ノ距離トハ、ソノ二點ヲ結ブ線分ノ長サノコトデアル。

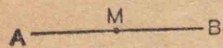


ニツノ線分 AB, CD ガ與ヘラレタトキ、AB ト CD トガ合同ナラバ、コレ等ノ線分ノ長サハ相等シク、又 A, B 間ノ距離ハ C, D 間ノ距離ニ等シイ。コレヲ  $AB=CD$  ト書ク。

モシ或一ツノ線分ノ長サヲ長サノ單位ニトルト、任意ノ線分ノ長サヲ計ルコトガ出來ル。

長サノ基本單位ハ 1 ぬーとるデアル。

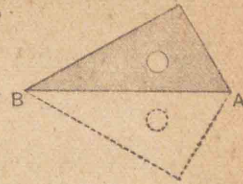
線分 AB 上ニ一點 M フトリ、 $AM=MB$  ナル



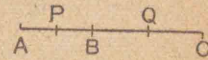
トキ、M ヲ線分 AB ノ中點又ハ二等分點トイフ。

線分ノ中點ハ唯一ツヨリナイ。

問1. 定規ノ正否ヲ驗スニハドウスレバヨイカ。



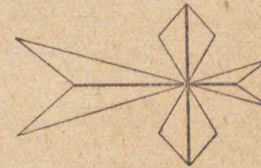
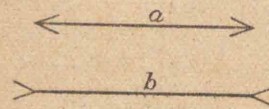
問2. 或直線ノ一部分ヲ他ノ直線上ニ重ネルト、コレ等ノ二直線ハ全ク合スルトイフ。何故カ。



問3. 一直線上ニ三點 A, B, C

ガ圖ノヤウナ順ニアツテ  $AB=a$ ,  $BC=b$  ナルトキ、AB ノ中點 P ト BC ノ中點 Q トノ距離如何。

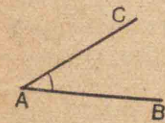
問4. 次ノ兩圖ニ於テ太イ線分ノ長サハ夫々相等シイカ。



### 7. 角

一點カラ引イタニツノ半直線ハ角ヲナス又ハ角ヲ夾ムトイフ。

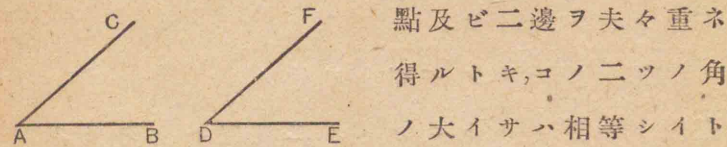
角ヲナス二直線ヲ角ノ邊、二邊ノ交點ヲ角ノ頂點トイフ。



圖ニ於テ A ハ角ノ頂點、AB, AC ハツノ邊デアル。コノ角ヲ表ハス

ニハ  $\angle BAC, \angle CAB$  又ハ  $\angle A$  ト書キ,  $\angle$  ヲ角ト讀ム。

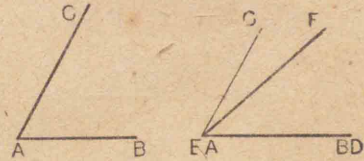
二ツノ角  $BAC, EDF$  ガ與ヘラレタトキ, ソレ等ノ頂



點及ビ二邊ヲ夫々重ネ得ルトキ, コノ二ツノ角ノ大イサハ相等シイトイヒ, コレヲ  $\angle BAC = \angle EDF$  ト書ク。

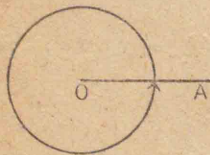
モシ  $\angle BAC$  ノ大イサヲ角ノ單位ニトルト, 任意ノ角ノ大イサヲ計ルコトガ出來ル。又  $\angle BAC, \angle EDF$  ガ與ヘラレタトキ, 次圖ノヤウニ A ヲ D ニ, 邊 AB ヲ邊 DE ニ重ネ, 二ツノ角ヲ DE ノ同ジ側ニ倒ストキ,

AC ガ細イ線ノ位置ヲ取ツタナラバ,  $\angle BAC$  ハ  $\angle EDF$  ヨリ大デアル。



角ノ基本單位ハ1度デアル。

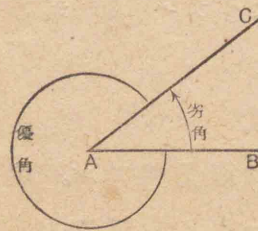
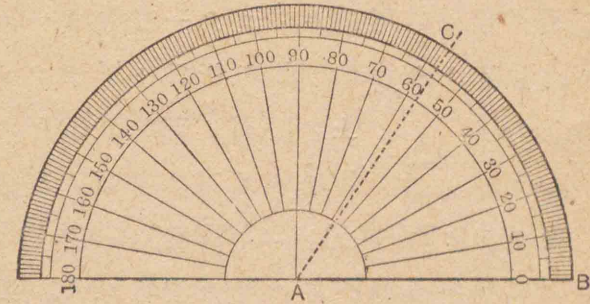
今半直線 OA ガ O ヲ固定シテ矢デ示スヤウニ一周シタトキ, コノ角ヲ一周角トイヒ, ソノ大イサヲ 360 度トスル。ソノ  $\frac{1}{360}$  ノ大



イサヲモツ角ハ1度デアル。1度ノ  $\frac{1}{60}$  ヲ1分, 1分ノ  $\frac{1}{60}$  ヲ1秒トイフ。度, 分, 秒ヲ書キ表ハスニハ夫々°, ', '' ヲ數字ノ右肩ニ小サク記ス。

例ヘバ 8 度 3 分 25 秒ヲ  $8^\circ 3' 25''$  ト書ク。

角ヲ計ルニハ分度器ヲ用ヒル。例ヘバ  $\angle BAC$  ヲ計ルニハ分度器ヲ圖ノヤウニ置キ, 邊 AC ニ當ル數ヲ讀メバヨイ。即チ圖ニ於テハ  $\angle BAC = 57^\circ$  デアル。



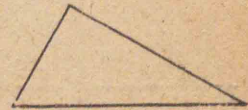
次ニ半直線 AB, AC ハ圖ノヤウニ二ツノ角ヲナスモノト見ルコトガ出來ル。斯様ナ二ツノ角ヲ共軛角トイヒ, 大ナル方ヲ優角, 小ナル方ヲ

劣角トイフ。共軛ナ二角ノ和ハ  $360^\circ$  デアル。

**注意** 單ニ角トイヘバ通常劣角ヲ指スモノトスル。

問1. 分度器ヲ用ヒテ  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 135^\circ$  ノ角ヲ作レ。

問2. 右圖ノ各角ハ何度デアルカ。又ソノ和ヲ求メヨ。

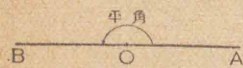


問3. 右ノ時計ノ兩針ハ何度ノ角ヲナスカ。



8. 平角・直角

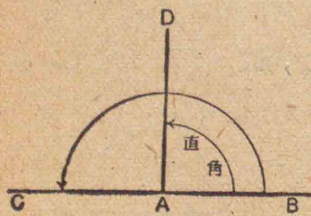
特別ナ場合トシテ圖ノヤウニ、角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアツテ一直線ヲナスコトガアル。コノトキ直線 AB ヲ折目トシテソレカラ上ノ平面ノ部分ヲ折返スト、BOA カラ下ノ平面ノ部分ニ重ナル。從ツテ∠BOA (上)ト∠AOB (下)トモ亦重ナル。故ニコノ二角ハ合同デアアル、即チ相等シイ。因テ∠BAC ハ一周角ノ半分デ、ソノ大イサハ 180° デアル。斯様ナ角ヲ平角トイフ。



平角ノ半分ヲ直角トイフ。

因テ平角ハ二直角、一周角ハ四直角デアアル。從ツテ直角ハソノ大イサガ 90°ナル一定ノ角デアアル。

圖ニ於テ A ハ頂點、AB、AC ハ一直線デ ∠BAD

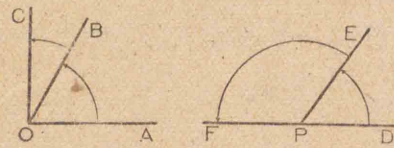


ガ∠DAC ニ等シイトスルト、∠BAC ハ平角、∠BADト∠DAC トハ直角デアアル。

幾何學デハ角ノ單位ニ直角ヲ用ヒル。直角ノ記

號ハ R∠ デアル。

二角ノ和ガ直角ナルトキソノ各角ヲ他ノ角ノ餘角トイヒ、又二角ノ和ガ平角ナルトキ、ソノ各角ヲ他ノ角ノ補角トイフ。



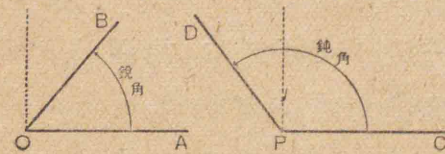
圖ニ於テ ∠AOC ヲ直角、∠DPE ヲ平角トスル。然ルトキハ

∠AOBノ餘角ハ∠BOC、∠BOCノ餘角ハ∠ACB デアル。又 ∠DPEノ補角ハ∠EPF、∠EPFノ補角ハ∠DPE デアル。

直線上ノ一點カラ半直線ヲ引クトキコノ半直線ハ初メノ直線ノ上ニ立ツトイフ。

前圖ニ於テ PE ハ DF ノ上ニ立ツテキル。

直角ヨリ小ナル角ヲ銳角、直角ヨリ大デ平角ヨリ小ナル角ヲ鈍角トイフ。



圖ニ於テ∠ACB ハ銳角、∠CPD ハ鈍角デアアル。

問1. 1/3 直角, 2/5 直角, 6/11 平角ヲ度、分、秒ニ直セ。

問2. 30°, 45°, 60° ヲ直角ヲ單位トシテ表ハセ。

問3.  $30^\circ, 45^\circ, \frac{2}{3}$  直角ノ夫々ノ餘角ヲイヘ。

問4.  $60^\circ, \text{直角}, \frac{2}{5}$  直角ノ夫々ノ補角ヲイヘ。

問5. ニツノ角ノ差ハ  $30^\circ$  デ、コノニツノ角ハ互ニ補角デアルトイフ。コノニツノ角ヲ求メヨ。

問6. 相等シイ角ノ餘角ハ相等シイ。又相等シイ角ノ補角ハ相等シイ。何故カ。

### 9. 定義

嚴密ナ推理デハソレニ用ヒル言葉ガ何ヲ指シ、何ヲ表ハシテキルカヲ一々明瞭ニ述ベテ置クコトガ必要デアアル。コノ

用語ノ意味ヲ述ベタモノヲ定義トイフ。

例ヘバ上ノ「用語ノ意味ヲ述ベタ……」ハ定義ノ定義デアアル。

問 直線、平面、圖形、直角、銳角、鈍角ノ定義ヲ述ベヨ。

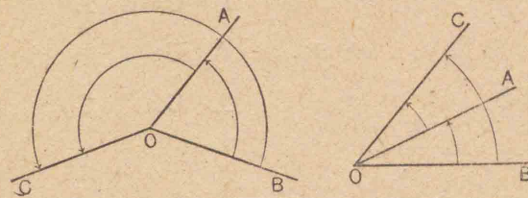
### 10. 隣接角・二等分線

定義 頂點ト一邊トヲ共有シ、共通邊ノ兩側ニアル二角ヲ隣接角(又ハ接角)トイフ。

共通デナイ二邊ニ夾マレタ角ヲソノニツノ隣接角ノ和トイフ。

次頁ノ圖ニ於テ  $\angle BOA$  ト  $\angle AOC$  ハ互ニ接角デ、

$\angle BOC$  ハソノ和デアアル。逆ニ  $\angle BOA$  ヲ  $\angle BOC$  ト  $\angle AOC$  トノ差、 $\angle AOC$  ヲ  $\angle BOC$  ト  $\angle BOA$  トノ差トイフ。



定義 一ツノ角ヲニツノ相等シイ接角ニ分ケル直線ヲ、初メノ角ノ二等分線トイフ。

前圖ニ於テ  $\angle BOA = \angle AOC$  ナラバ、 $OA$  ハ  $\angle BOC$  ノ二等分線デアアル。

角ノ二等分線ハ唯一ツヨリナイ。

### 11. 公理

嚴密ナ學科ノ推理ノ最モ根本ニハ必ズ説明ノ出來ナイトコロガアル。何人モコレヲ眞ナリト容認スルカラ、始メテソノ學科ガ出來上ルノデアアル。

定義 説明ハ出來ナイガ、眞ナリト容認スル推理ノ最モ根本トナルモノヲ公理トイフ。

公理ニハ普通公理ト幾何公理トノ二種ガアル。

普通公理ハ量ニ關スル公理デ、幾何公理ハ圖形ニ關スル公理デアアル。

普通公理ハ例ヘバ四ツノ量  $A, B, C, D$  ノ間ニ成立

ツトコロノ

- (i)  $A=B, B=C$  ナラバ  $A=C$
- (ii)  $A=B, C=D$  ナラバ  $A \pm C = B \pm D$
- (iii)  $A < B, B < C$  ナラバ  $A < C$
- (iv)  $A < B$  ナラバ  $A + C < B + C$

ノヤウナモノデアル。

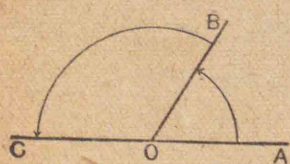
幾何公理ハ前ニ述ベタ「圖形ハツノ位置ヲカヘテモカハラナイ」、「二點ヲ過ル直線ハ一ツハ必ズアル、ソシテ唯一ツニ限ル」、「平面上ニ於テ一ツノ直線ノ兩側ニ各、一點ヲトルト、コレ等ヲ過ル直線ハ必ズ初メノ直線ト交ル」ノヤウナモノデアル。

### 12. 定理・系

**定義** 幾何學ニ於テハ論理的ニ間違ヒナイト知ツタ事柄ヲ定理トイフ。

定理(又ハ定義,公理)ヨリスグワカル事柄ヲツノ系トイフ。系モ亦定理ノ一種デアル。

#### 定理 1. 接角ヲナス二ツノ角ノ和ガ二直角ナ

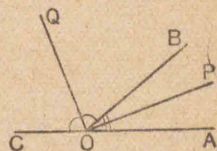


ルトキ,共通デナイ二ツノ邊ハ一直線ヲナス。

接角ヲナシテキル二ツノ角ヲ  $\angle AOB, \angle BOC$  トシ,

$\angle ACB + \angle BCC = 2R\angle$  トスル。然ルトキハ  $OA, OC$  ハ一直線ヲナス。

問 接角ヲナス二ツノ角ノ二等分線ガ直角ヲナストキ,初メノ接角ノ共通デナイ二邊ハ一直線ヲナス。



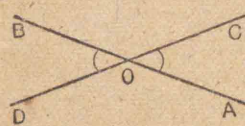
### 13. 對頂角

**定義** 二ツノ直線ガ相交ツテナス四ツノ角ノ中,接角デナイ二角ヲ對頂角トイフ。

下ノ圖ニ於テ二ツノ直線  $AB, CD$  ガ  $O$  デ交ル。ソノトキ  $\angle AOC$  ト  $\angle BOD$  ハ對頂角,又  $\angle COB$  ト  $\angle AOD$  モ對頂角デアル。

#### 定理 2. 對頂角ハ相等シイ。

二ツノ直線  $AB, CD$  ノ交點ヲ  $O$  トスル。



然ルトキハ  
 $\angle AOC = \angle BOD, \angle COB = \angle AOD$   
デアル。

何トナレバ,  $OC$  ハ  $AB$  ノ上ニ立ツテキルカラ

$$\angle AOC + \angle COB = 2R\angle$$

又  $OB$  ハ  $CD$  ノ上ニ立ツテキルカラ

$$\angle COB + \angle BOD = 2R\angle$$

∴ ∠AOC + ∠COB = ∠COB + ∠BOD

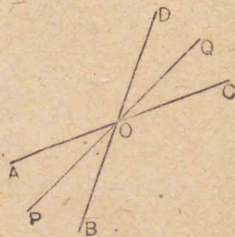
双方カラ ∠COB ヲ引クト

∠AOC = ∠BOD

同様ニ ∠COB = ∠AOD

問1. 一ツノ直線 AB 上ノ一點 O カラコノ直線ノ兩側ニ CC, OD ヲ引キ, ∠AOC = ∠BOD ナラシメルトキ, CC, OD ハ一直線ヲナス。

問2. 一ツノ角ノ二等分線ノ延長ハコノ角ノ對頂角ヲ二等分スル。

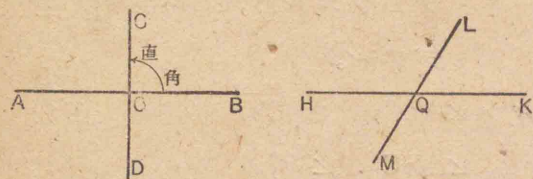


14. 垂線・斜線

定義 二ツノ直線ガ交ツテナス角ノ一ツガ直角ナルトキハ, コノ二ツノ直線ハ互ニ垂直デアルトイフ。或ハ二ツノ直線ハ直交スル又ハ直角ニ交ルトモイフ。ソシテ一方ノ直線ガ他方ノ直線ノ上ニ立ツト考ヘルトキ, 前ノ直線ヲ後ノ直線ノ垂線トイヒ, ソノ出會フ點ヲ垂線ノ足トイフ。

二ツノ直線ガ直角ニ交ラナイトキハ, 一方ノ直線ガ他方ノ直線ノ上ニ立ツト考ヘルト

キ, 前ノ直線ヲ後ノ直線ノ斜線トイヒ, ソノ出會フ點ヲ斜線ノ足トイフ。



圖ニ於テ ∠BOC ハ直角デ, ∠KQL ハ直角デナ

イトスル。然ルトキハ AB, CD ハ互ニ垂直デ, OC ハ AB ノ垂線, OA ハ CD ノ垂線, O ハ垂線ノ足デアアル。次ニ LQ ハ HK ノ斜線, QH ハ LM ノ斜線, Q ハ斜線ノ足デアアル。

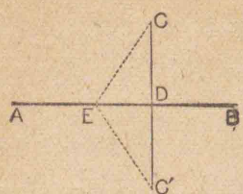
垂直ノ記號ニハ ⊥ ヲ用ヒル。上圖ニ於テ AB ⊥ CD 又ハ OC ⊥ AB, OA ⊥ CD ト書ク。

図 一直線上ノ一點ニ於テコレニ垂直ナ直線ハ唯一ツデアアル。

如何トナラバ, 垂線ハ平角ノ二等分線デアアルカラ唯一ツデアアル。

定理 3. 一直線外ノ一點カラコレニ垂線ヲ引クコトガ出來ル。ソシテコノ垂線ハ唯一ツヨリナイ。

AB ヲ直線, C ヲソノ上ニナイ點トスル。(i) 直線 AB ヲ折目トシテ, 點 C ガアル平面ノ部



分ヲ折返スト點 C ハ點 C' ニ來ル。C ト C' ヲ結ビ AB トノ交點ヲ D トスルト, CD ハ AB ノ垂線デアアル。

如何トナラバ  $\angle ADC = \angle ADC'$  (§4)

$\therefore \angle ADC = R\angle$  (§8)

即チ  $AB \perp CC'$  (定義)

(ii) 次ニ垂線 CD ノ外ニナホ垂線 CE ガアルトスル,但シ E ハソノ足デアアル。ソノトキ直線 AB ヲ折目トシテ點 C ガアル平面ノ部分ヲ折返スト EC ハ EC' ニ重ナル。

故ニ  $\angle AEC = \angle AEC'$  (§4)

モシ  $\angle AEC = R\angle$  トスルト上ノ結果ヨリ

$\angle AEC + \angle AEC' = 2\angle AEC = 2R\angle$

トナル。故ニ定理 1 ニヨリ CEC' ハ一直線デナケレバナラナイ。然ルニ CDC' モ一直線デアアルカラ, コレハ不都合デアアル。因テ點 C ヲ過ル AB へノ垂線ハ一ツヨリナイ。

定義 一直線外ノ一點カラコノ直線ニ垂直ニ下シタ線分ノ長サヲ,コノ點トコノ直線トノ垂直距離又ハ單ニ距離トイフ。

15. 定理ノ形式

定理ノ文章ハ總テ次ノヤウニ書キ直スコトガ出來ル。

「若シ…………トセヨ」,「然ラバ…………デアアル」

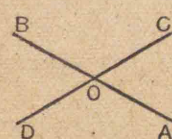
コノ初メノ部分ハ假リニ斯様デアルトキメタ事柄デアツテ,コレヲ假設トイフ。後ノ部分ハソノ假設カラ起ツテ來ル結果デアツテ,コレヲ終結トイフ。

假設カラ終結ヲ推論スル道行キヲ證明トイフ。

例ヘバ § 13 ノ定理 2「對頂角ハ相等シイ」ハ次ノヤウニ書キ直スコトガ出來ル。

「若シ對頂角アリトセヨ」,「然ラバソノ對頂角ハ相等シイ」

コノ初メノ部分ガ假設デ,後ノ部分ハ終結デアアル。



尙コレヲ圖ノ上デ表ハスト

「二ツノ直線 AB, CD ノ交點ヲ O ト

シ,  $\angle AOC, \angle BOD; \angle COB, \angle AOD$

ヲ夫々對頂角トスル」ガ假設デ,「 $\angle AOC = \angle BOD, \angle COB = \angle AOD$ 」ガ終結デアアル。



定理 2 の説明中「何トナレバ」カラ終リマデハ證明デアアル。

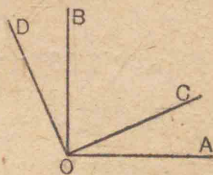
**注意** 簡單ナ定理特ニ系ノ證明ハ略スルコトガ多イ。然シソレ等ハ何レモ既有知識デ證明出來ル事柄デアアル。證明出來ナイ事柄ヲ定理トイフコトハ出來ナイ。

**練習** (1)

1. 一ツノ角ノ二等分線ノ延長ハソノ共軛角ヲ二等分スル。

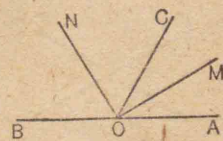
2. 一ツノ角ノ二等分線ト、ソノ對頂角ノ二等分線トハ一直線ヲナス。

3. 圖ニ於テ  $\angle AOB, \angle COD$  ハ何レモ直角デアルトスレバ、 $\angle AOC = \angle BOD$  デアアル。



4. 前題ニ於テ  $\angle BOC$  ガ  $65^\circ$  デアルトスレバ優角 AOD ハ何度デアアルカ。

5. 直線 AB 上ノ一點 O カラ半直線 OC ヲ引キ、 $\angle AOC, \angle COB$  ノ二等分線ヲ夫々 OM, ON トスレバ、 $OM \perp ON$  デアアル。



6. 前問ノ圖ニ於テ  $\angle AOC$  ノ二等分線ヲ OM, 又

$ON \perp OM$  トスレバ、ON ハ  $\angle BOC$  ヲ二等分スル。

第二章 三 角 形

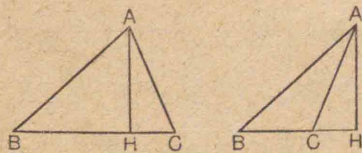
16. 三 角 形

**定義** 三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ三角形トイフ。

三角形ヲ圍ム各線分ヲ三角形ノ邊相隣ル二邊ガ夾ム形内ノ角ヲ三角形ノ角、ソノ角ノ頂點ヲ三角形ノ頂點ト名ツケル。

三角形ヲ表ハスニハ頂點ニツケタ文字ヲナラベ、三角形 ABC 或ハ  $\triangle ABC$  ト書ク。三角形ソ一ツノ角ト、ソノ角ヲ夾マナイ邊トハ相對スルトイヒ、ソノ邊ヲ角ノ對邊、角ヲ邊ノ對角トイフ。

三角形ソ一ツノ頂點ニ着目シタトキ、ソノ對邊ヲ底邊、頂點ニ於ケル角ヲ頂角、底邊ノ兩端ニ於ケル角ヲ底角トイフ。又頂點ト底邊トノ距離ヲ三角形ノ



高サトイフ。

圖ニ於テ角 A ノ對邊ハ BC, 邊 BC ノ對

角ハ∠A デアル。又 Aヲ頂點ト見ルト BCハ底邊、∠Aハ頂角、∠B、∠Cハ底角、AHハ高サデアル。

【注意】 三角形ニハ六ツノ原素ガアル、三ツノ邊ト三ツノ角ガ即チソレデアル。コレ等ノ六原素ノ間ニハ種々ノ關係ガアル。

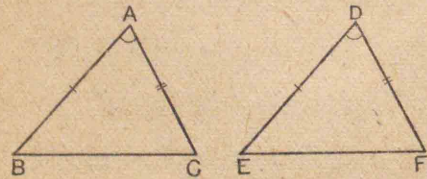
17. 三角形ノ合同(一)

【定理】 4. 二邊トソノ夾角ガ夫々相等シイニツノ三角形ハ合同デアル。

【假設】  $\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  ニ於テ  $AB=DE, AC=DF, \angle A=\angle D$  トスルト

【終結】  $\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  トハ合同デアル。

【證明】  $\triangle ABC$  ヲ  $\triangle DEF$  ノ上ニ置キ、點 A ヲ點 Dニ邊 AB ヲ邊 DE ノ上ニ重ネル。但シ點 C ト點 F トヲ DE ノ同ジ側ニアルヤウニ置ク。然ルトキハ邊



AB ト邊 DE トハ相等シイカラ點 Bハ點 Eニ重ナル。

又  $\angle A$  ハ  $\angle D$  ニ相等シク且ツ ACガDFニ相等シイカラ點 Cハ點 Fニ重ナル。即チ三邊 AB, AC, BCハ夫々三邊 DE, DF, EFニ重ナル。因テ  $\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  トハ合同デアル。

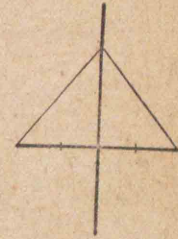
【注意】 1. 合同ノ記號  $\equiv$  ヲ用ヒル。例ヘバ三角形 ABC ト三角形 DEF ガ合同ナルトキハ次ノヤウニ書ク。

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

【注意】 2. 合同ナニツノ三角形ニ於テハ等シイ角ト等シイ邊トハ夫々相對スル。

定義 合同ナ圖形ニ於テハ相等シイ邊、相等シイ角及ビソノ頂點ヲ夫々對應邊、對應角及ビ對應頂點トイフ。

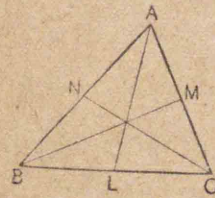
定義 一ツノ線分ノ中點ヲ過リ、ソノ線分ニ垂直ナ直線ヲ、ソノ線分ノ垂直二等分線トイフ。



【図】 一ツノ線分ノ垂直二等分線上ノ任意ノ一點ハ線分ノ兩端カラ等距離ニアル。

問 三角形 ABC ノ頂點 A カラ邊 BC ニ下シタ垂線ガ BC ノ中點ヲ過レバ、 $AB=AC$  デアル。

定義 三角形ノ一頂點トソノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ヲコノ三角形ノ中線トイフ。



【圖】ニ於テ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 L, M, N トスレバ線分 AL,

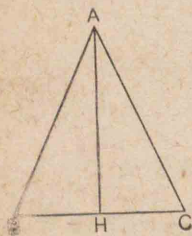
BM, CN ハ何レモ中線デアル。

### 18. 三角形ノ分類

**定義** 二邊ガ相等シイ三角形ヲ二等邊三角形又ハ等脚三角形トイフ。

三邊ガ相等シイ三角形ヲ正三角形又ハ等邊三角形トイフ。

二等邊三角形ニ於テハ通常等シイ二邊ノ交點ヲ頂點、頂點ニ對スル邊ヲ底邊トイフ。



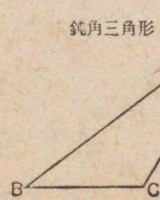
圖ニ於テ  $AB=AC$  ナルトキ、Aハ頂點、BCハ底邊デアル。從ツテ  $\angle A$ ハ頂角、 $\angle B$ 及ビ $\angle C$ ハ底角デアル。又  $AH \perp BC$  トスレバ、AHハ高サデアル。

**定義** 一角ガ直角ナル三角形ヲ直角三角形トイヒ、直角ニ對スル邊ヲ斜邊トイフ。

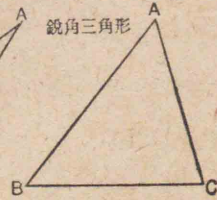
一角ガ鈍角ナル三角形ヲ鈍角三角形トイフ。



直角三角形



鈍角三角形

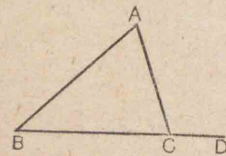


鋭角三角形

フ。

三ツノ角ガ何レモ鋭角ナル三角形ヲ鋭角三角形トイフ。

**定義** 三角形ノ一ツノ邊トソレニ隣ル邊ノ延長トガ夾ム角ヲ三角形ノ外角トイヒ、外角ニ對シテソノ隣接角ヲ内角トイフ。又外角ニ隣ラナイ二ツノ内角ノ各、ヲソノ外角ノ内對角トイフ。



圖ニ於テ CDヲ BCノ延長トスレバ  $\angle ACD$ ハ一ツノ外角デ、 $\angle A$ 、 $\angle B$ ハソノ内對角デアル。

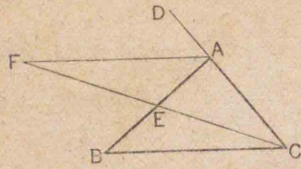
**注意** BCヲCノ方へ延長スルコトヲ BCヲ延長スルトイフ。

**定理 5.** 三角形ノ外角ハソノ内對角ヨリ大デアル。從ツテ三角形ノ二角ハ必ズ鋭角デアル。

**假設**  $\triangle ABC$ ガ與ヘラレ、CAヲDマデ延長シ、 $\angle BAD$ ヲ外角トスルト

**終結**  $\angle BAD$ ハ  $\angle B$ 、 $\angle C$ ヨリ大デアル。

**證明** 頂點Cカラ出ル中線 CEノ延長上ニ CEニ等シク EFヲトリ、AトFトヲ結ブ。然ルトキハ



$\triangle BCE$  と  $\triangle AFE$  とニ於テ

$BE=AE$

$CE=EF$

$\angle BEC = \angle AEF$  (對頂角)

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle AFE$  (定理4)  $\therefore \angle B = \angle EAF$

然ルニ AF ハ  $\angle BAD$  内ニアルカラ

$\angle EAF < \angle BAD$

$\therefore \angle B < \angle BAD$

同様ニ  $\angle C < \angle EAD$  ナルコトヲ證明スルコト  
ガ出來ル。

次ニ  $\angle A$  ヲ直角又ハ鈍角ト假定スルト、ソノ外角  
 $\angle BAD$  ハ直角又ハ鋭角デアアル。然ルニ上ノ證明ヨリ  
 $\angle B, \angle C$  ハ  $\angle BAD$  ヨリ小デアアルカラ、ソレ等ハ共ニ  
鋭角デアアル。即チ三角形ノ二角ハ鋭角デアアル。

**注意** コノ定理ヨリ三角形ヲ角ノ大イサニツイテ分類  
スルト、頁26ニ述ベタ三種ヨリナイコトガワカル。

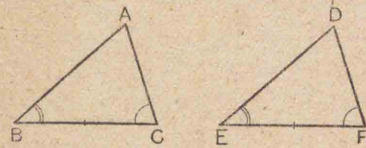
### 19. 三角形ノ合同(二)

**定理** 6. 二角トソノ間ノ邊ガ夫々相等シイニ  
ツノ三角形ハ合同デアアル。

**假設**  $\triangle ABC$  と  $\triangle DEF$  とニ於テ  $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F,$   
 $BC = EF$  トスルト

**終結**  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  デアアル。

**證明**  $\triangle ABC$  ヲ  $\triangle DEF$  ノ上ニ重ネルニ  $BC = EF$



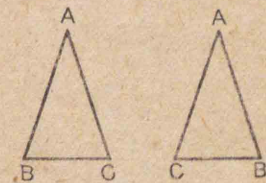
デアアルカラ點 B ヲ點  
E ニ點 C ヲ點 F ニ重  
ネルコトガ出來ル、ソ  
シテ點 A ト點 D ガ EF

ノ同ジ側ニアルヤウニ置ク。然ルトキハ  $\angle B = \angle E$   
デアアルカラ BA ハ ED ニ重ナリ、 $\angle C = \angle F$  デアアルカラ  
CA ハ FD ニ重ナル。從ツテ點 A ハ點 D ニ重ナル。

因テ  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

**図1.** 二角ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デ  
アアル。(  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle B = \angle C$  トシ、

コノ三角形ヲ裏返シテ三角形トモ  
トノ三角形トヲ比較セヨ)



**図2.** 三ツノ角ガ相等シイ

三角形ハ正三角形デアアル。

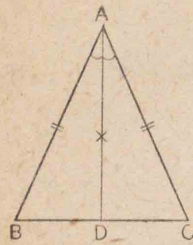
**問** 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC  
ニ垂直ナルトキ、コノ三角形ハ二等邊三角形デアアル。

### 20. 二等邊三角形・正三角形

**定理** 7. 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ。

**假設**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $AB = AC$  トスルト

【終結】  $\angle B = \angle C$  デアル。



【證明】 頂角 A ノ二等分線ヲ引キ、底邊 BC ト交ル點ヲ D トスル。  
 $\triangle ABD$  ト  $\triangle ACD$  トニ於テ  
 $AB = AC$ ,  $AD$  ハ共通,  
 $\angle BAD = \angle CAD$   
 $\therefore \triangle BAD = \triangle CAD$  (定理4)  
 $\therefore \angle B = \angle C$

【圖1】 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底ニ垂直デ且ツ底ヲ二等分スル。從ツテ二等邊三角形ノ高サ、頂角ノ二等分線、底邊ノ垂直二等分線及ビ頂點カラ出ル中線ハ皆合スル。

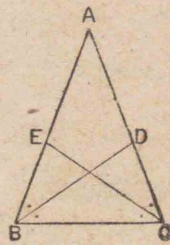
【圖2】 正三角形ノ三ツノ角ハ相等シイ。

【注意】 正三角形ノコトヲ等角三角形トモイフ。

定義 三角形ノ頂角ノ二等分線ノ頂點ト對邊トノ間ニアル線分ヲ、ソノ頂角ノ二等分線トイフ。(§10 参照)

問1. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ハ相等シイ。

問2. 正三角形ノ三邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル三角形ハ亦正



三角形デアル。

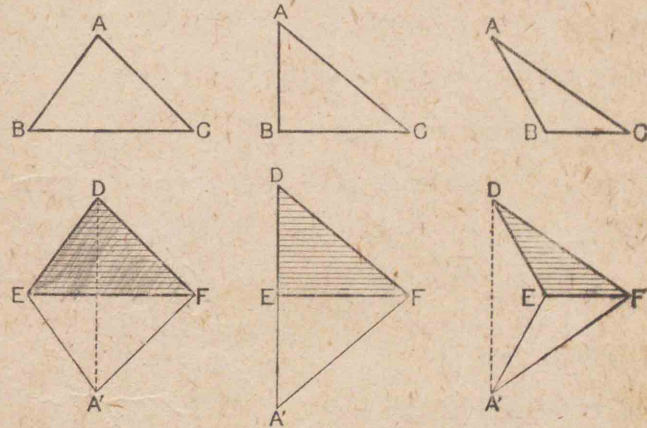
### 21. 三角形ノ合同(三)

【定理】 8. 三邊ガ夫々相等シイニツノ三角形ハ合同デアル。

【假設】  $\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  トニ於テ  $AB = DE$ ,  $AC = DF$ ,  $BC = EF$  トスルト

【終結】  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  デアル。

【證明】  $\triangle ABC$  ノ頂點 B ヲ頂點 E ニ、邊 BC ヲ邊 EF ニ重ネルト、 $BC = EF$  デアルカラ C ハ F ニ重ナル。次ニ  $\triangle ABC$  ヲ  $\triangle A'EF$  ノ位置ニ移シ、A' ト D ヲ結ブ。



(i)  $A'D$  ガ  $EF$  ニ交ル場合。

$\triangle FA'D$  ニ於テ  $FA' = FD$   
 $\therefore \angle FA'D = \angle FDA'$

同様 =  $\triangle EA'D =$  於テ  $\angle EA'D = \angle EDA'$   
 $\therefore \angle FA'D + \angle EA'D = \angle FDA' + \angle EDA'$   
 $\therefore \angle EA'F = \angle EDF \quad \therefore \angle BAC = \angle EDF$   
 $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$  (定理4)

(ii) A'D が点 E を過ル場合。

$\triangle FA'D$  ヨリ  $\angle A' = \angle D$   
 $\therefore \angle A = \angle D$   
 $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$  (定理4)

(iii) A'D が EF と交ラナイ場合。

$\angle FA'D \sim \angle EA'D = \angle FDA' \sim \angle EDA'$   
 $\therefore \angle EA'F = \angle EDF \quad \therefore \angle BAC = \angle EDF$   
 $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$  (定理4)

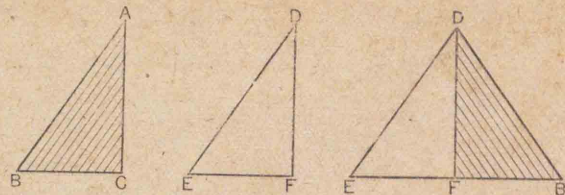
問 同ジ底邊 BC をモツ二ツノ二等邊三角形 ABC, DBC の頂點 A, D を結ブ直線ハ BC ノ垂直二等分線デアアル。

**定理 9.** 斜邊ト一邊ガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアアル。

**假設**  $\triangle ABC, \triangle DEF$  = 於テ  $\angle C = \angle F = R^\circ$ ,  
 $AB = DE, AC = DF$  トスルト

**終結**  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  デアアル。

**證明**  $\triangle ABC$  を裏返シテ後, 點 A を點 D = 邊 AC



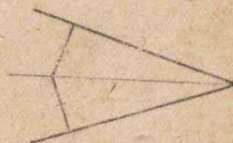
ヲ邊 DF ノ上ニ重ネルト,  $AC = DF$  デアアルカラ C ハ F ニ重ナル。ソシテ B ノトル位置ヲ B' トスルト  
 $\angle DFE + \angle DFB' = 2R^\circ$

ソレ故 EFB' ハ一直線ヲナス。

然ルニ  $DE = AB = DB'$  デアアルカラ  $\triangle DEB'$  ハ二等邊三角形デ, DF ハソノ高サデアアル。故ハ DF ハ頂角ヲ二等分スル。(定理7, 系1)

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$  (定理4)

**図** 一點カラ角ノ兩邊ニ下シタ垂線ノ長サガ相等シイトキ, ソノ點ハ角ノ二等分線上ニアル。



問 三角形ノ底邊ノ兩端カラソノ對邊ニ引イタ垂線ノ長サガ等シイトキ, ソノ三角形ハ二等邊三角形デアアル。

### 22. 定理ノ逆

**定義** 一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ取りカヘタモノヲ, モトノ定理ノ逆トイフ。

一ツノ定理ガ真デアツテモソノ逆ハ必ズシモ真デナイ。ソレガ真デアルカ否カハ別ニ證明ヲシテ見ナケレバナラナイ。

**練習 (2)**

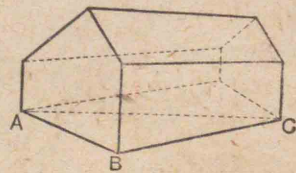
1. 角 XAY ノ一邊 AX 上ニ二點 B, C ヲ, 他ノ邊 AY 上ニ二點 D, E ヲトリ,  $AB=AD, AC=AE$  ナラシメルトキ, 線分 BE ト線分 CD トハ相等シイ。

2. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ双方ニ等シク延長シテ  $BD=CE$  ナル點 D, E ヲトルト, 三角形 ADE モ亦二等邊三角形デアル。

3. 正三角形ノ一頂點カラ出ル中線, 高サ, ソノ頂角ノ二等分線及ビ對邊ノ垂直二等分線ハ合スル。

4. 正三角形ノ三ツノ中線ハ相等シク, 從ツテ三ツノ高サ及ビ三ツノ頂角ノ二等分線ハ相等シイ。

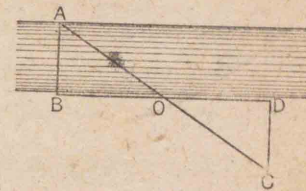
5. 平地ニ建テタ圖ノヤウナ家屋ガアル。コノ家ノ内ニ入ラズニ AC ノ距離ヲ知ルニハドウスレバヨイカ。



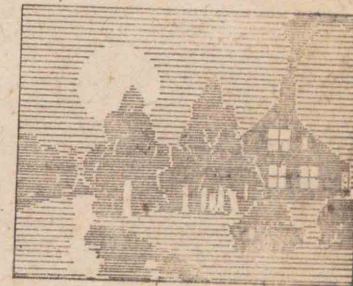
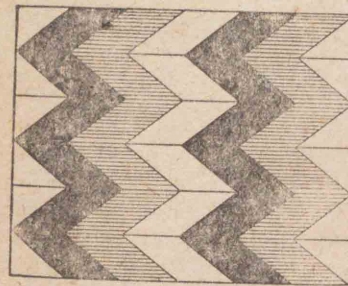
6. 三ツノ線分 AB, CD, EF ガ一點 O デ交ツテ O ガ各線分ノ中點ナルトキ,

二ツノ三角形 ACE, BDF ハ合同デアル。

7. 河幅 AB ヲ計ルニハ圖ノヤウニシテ CD ヲ計レバヨイ, 何故カ。但シ  $\angle B = \angle D = R\angle, BO = OD$ 。



第三章 平行線



23. 平行線

定義 同一ノ平面上ニアツテ相交ラナイ二直線ハ互ニ平行デアルトイヒ, ソレ等ヲ平行線トイフ。

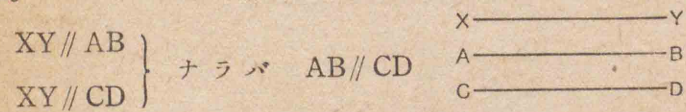
平行ノ記號ニハ // ヲ用ヒル。

上ノ定義ヨリ同一ノ平面上ノ二直線ハ相交ルカ, 互ニ平行ナルカノ何レカデアル。

【注意】 吾々ハ平面圖形ヲ論ジテキルノデアアルカラ、以下「同一ノ平面上」ナル語ヲ略スル。

**平行線ノ公理** 一直線外ノ一點ヲ過リ、コレニ平行ナ直線ハ唯一ツデアアル。

【図】 同一ノ直線ニ平行ナ二直線ハ互ニ平行デアアル。



デアアル。

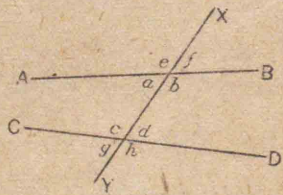
何トナレバ、モシ AB ト CD トガ交レバ、ソノ交點カラ XY ニ二ツノ平行線ガアルワケニナル。コレハ公理ニ背ク。

故ニ AB // CD デアアル。

問 互ニ平行ナ二直線ノ一方ニ交ル直線ハ他方ニモ交ル。

### 24. 内角・錯角

定義 圖ノヤウニ一直線 XY ガ二直線 AB、CD ト交ルトキ出來ル、八ツノ角ヲ  $a, b, c, d, e, f, g, h$  ト名ツケルトキ、 $a, b, c, d$  ヲ内角、 $e, f, g,$



$h$  ヲ外角、 $a$  ト  $d$ ;  $b$  ト  $c$  ヲ錯角、 $e$  ト  $c$ ;  $f$  ト  $d$ ;  $a$  ト  $g$ ;  $b$  ト  $h$  ヲ同位角トイフ。

問 一直線ガ二直線ト交ツテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイトキ

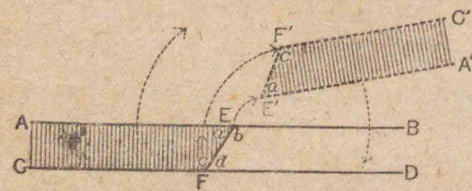
- (1) 他ノ一組ノ錯角ハ相等シイ。
- (2) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。
- (3) 二組ノ同側ニアル内角ハ夫々互ニ補角ヲナス。

### 25. 平行線ノ定理

【定理】 10. 一ツノ直線ガ他ノ二直線ト交ツテ出來ル一組ノ錯角ガ相等シイトキ後ノ二直線ハ互ニ平行デアアル。

【假設】 直線 AB, CD ニ直線 EF ガ交ツテ出來ル錯角ノ中  $\angle a = \angle d$  トスルト

【終結】 AB // CD デアアル。



【證明】 圖ノヤ

ウニ、圖形 AEFC ヲ切りハナシテ DFEB 上ニ重ネルニ、 $\angle a = \angle d$  ナル故、各ノ補角デアアル  $\angle b$  ト  $\angle c$  ハ相等シイ。即チ  $\angle b = \angle c$



故ニ  $EF'$  フ  $FE$  ニ重ネルト  $E'A'$  ハ  $FD$  ニ重ナリ、  
 $F'C'$  ハ  $EB$  ニ重ナル。因テ圖形  $A'E'F'C'$  ハ  $DFEB$  ニ  
 全ク重ナル。

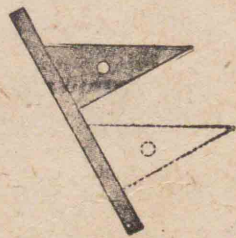
扱テ  $AB$  ガ  $CD$  ト  $EF$  ノ左側デ交ツタトスルト、  
 $E'A'$  ト  $F'C'$  トモ交リ、コレ等ト全ク重ナツタ  $FD$  ト  $EB$   
 モ亦交ルコトニナル。因テ  $AB, CD$  ハ二點デ交ル。  
 コレハ不都合デアアル。故ニ  $AB, CD$  ハ一點デ交ルコ  
 トハ出来ナイ。即チ平行デアアル。

**注意** コノ證明法ヲ歸謬法トイフ。歸謬法トハ證明シ  
 ヲウトスル終結ノ代リニソノ反對ヲ假定スルト不都合ヲ  
 生ズルコトヲ明ラカニシ、因テモトノ終結ガ正シイコトヲ  
 斷定スル證明法デアアル。

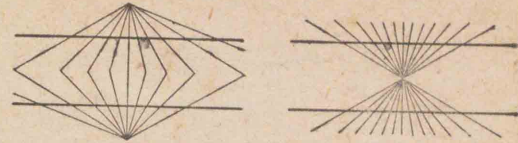
**図1.** 一直線ガ二直線ト交ツテ出来ル一組ノ同  
 位角ガ等シイカ、又ハ一組ノ同側ニアル内角ガ補角  
 ラナストキ、コノ二直線ハ互ニ平行デアアル。

**図2.** 一直線ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアアル。

問1. 三角定規ヲ二枚用ヒ  
 ルカ、又ハ直線定規ト三角定規  
 トヲ一枚ヅツ用ヒテ平行線ヲ  
 畫ケ。又平行線トナル理由ヲ  
 述ベヨ。



問2. 右圖  
 ノ太イ二直線  
 ハ夫々互ニ平  
 行デアアルカ。



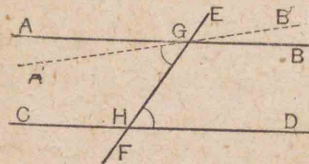
問3. ニツノ線分  $AB, CD$  ガ點  $O$  デ交リ、且ツ  $O$  ガ  
 各線分ノ中點ナルトキ、 $AC \parallel BD, AD \parallel BC$  デアル。

**定理 11.** 一直線ガニツノ平行線ト交ツテ出来  
 ル錯角ハ相等シイ。

**假設**  $AB \parallel CD$  トシ、 $EF$  ガ  $AB, CD$  ト夫々  $G, H$  デ交  
 ルトスルト

**終結**  $\angle AGH = \angle GHD, \angle BGH = \angle GHC$  デアル。

**證明** モシ錯角  $AGH, GHD$  ガ等シクナケレバ點



$G$  ヲ過ツテ直線  $A'B'$  ヲ  
 $\angle A'GH = \angle GHD$  ナルヤウ  
 ニ引クト  $A'B' \parallel CD$   
 然ルニ  $AB \parallel CD$

因テ  $AB, A'B'$  ハ一點  $G$  ヲ過ツテ  $CD$  ニ平行デア  
 ル。コレハ平行線ノ公理ニ背クカラ不都合デアアル。

$\therefore \angle AGH = \angle GHD$

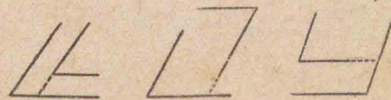
從ツテ  $\angle BGH = \angle GHC$

**図1.** 一ツノ直線ガニツノ平行線ト交ルトキ

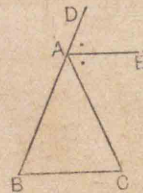
- (i) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。
- (ii) 二組ノ同側ニアル内角ハ夫々互ニ補角ヲナス。

図2. 互ニ平行ナ直線ノ一方ニ垂直ナ直線ハ他方ニモ亦垂直デアル。(共通垂線)

問1. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ト夫々互ニ平行ナルトキ、コノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。



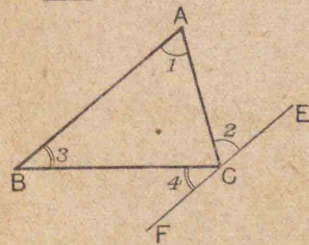
問2. 二等邊三角形ノ頂點ヲ過リ底邊ニ平行ナ直線ハ頂角ノ外角ヲ等分スル。



26. 三角形ノ角ノ和

12. 三角形ノ三ツノ角ノ和ハ二直角ニ等シイ。

【證明】 一ツノ頂點例へバ C ヲ過ツテ對邊 AB



ニ平行ニ EF ヲ引クト  
 $\angle 1 = \angle 2$  及ビ  $\angle 3 = \angle 4$   
 $\therefore \angle A + \angle B + \angle C$   
 $= \angle 1 + \angle 3 + \angle C$

$= \angle 2 + \angle 4 + \angle C = \angle LCF = 2R\angle$

図1. 三角形ノ外角ハソノ内對角ノ和ニ等シイ。從ツテ内對角ノ何レヨリモ大デアル。(定理5)

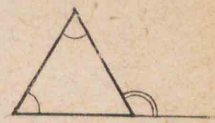


図2. 一ツノ三角形ノ二角ガ他ノ三角形ノ二角ニ夫々等シイトキ、殘リノ一角ハ相等シイ。

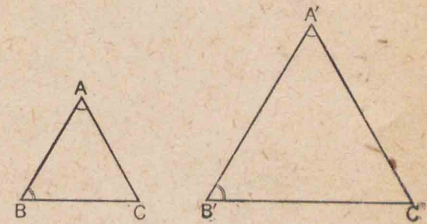


図3. 一邊トソノ對角及ビ他ノ一角ガ夫々相等シイニツノ三角形ハ合同デアル。(定理6)

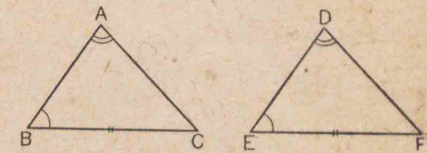


図4. 斜邊ト一銳角ガ夫々相等シイニツノ直角三角形ハ合同デアル。

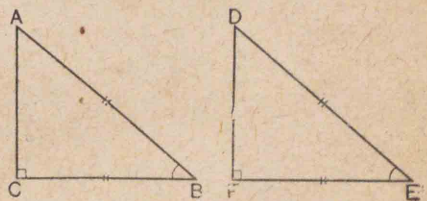


図5. 角ノ二等分線上ノ點ハソノ兩邊カラ等距離ニアル。

図6. 直角三角形ノニツノ銳角ハ互ニ餘角ヲナス。

問1. 正三角形ノ一角ハ何度デアアルカ。

問2. 頂角ガ 30° ナル二等邊三角形ノ底角ハ何度デアアルカ。

問3. ニツノ角ノ二邊ガ夫々垂直ナラバ、コノ二角ハ相等シイカ又ハ補角ヲナス。

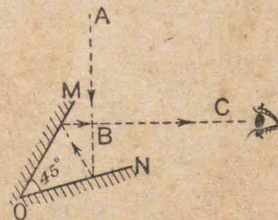
練習 (3)

1. 二等邊三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ハ底ニ平行デアアル。

2. 平行ナ二直線ニ一直線ガ交ルトキ、一組ノ同側ニアル内角ノ二等分線ハ直交スル。

3. 一角ガ 60° ナル二等邊三角形ハ正三角形デアアル。

4. 光線 AB ガ 45° ノ角ヲナスニツノ鏡デ圖ノヤウニ二回反射シテ BC ノ方向ニ進ンダ。∠ABC ヲ求メヨ。

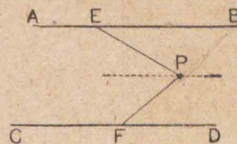


(入射光線ト反射光線ハ鏡ト常ニ等角ヲナス)

5. ∠C ヲ直角トスル三角形 ABC ノ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トシ、Dカラ邊 AB ニ下シテ垂線ヲ DE, ソノ足ヲ E トスレバ、DE=DC デアアル。

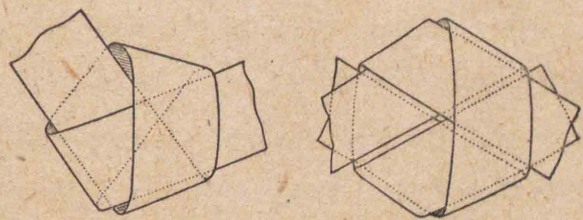
6. 三角形 ABC 内ノ一點ヲ O トスルト、角 BOC ハ角 A ヨリ大デアアル。

7. P ハ平行線 AB, CD 間ノ點デアアル。然ルトキハ次ノ關係ガ成立スル。



∠EPF = ∠PEB + ∠PFD

第四章 多角形

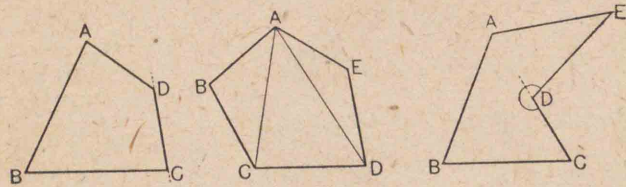


27. 多角形

定義 相續イタ幾ツカノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ多角形トイヒ、ソノ相隣ラナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ對角線トイフ。

多角形ノ邊、角、頂點ノ定義ハ三角形ノ場合ニ同ジ。次ニ各邊ヲ如何程延長シテモソノ多角形ヲキラナイトキハ、コノ多角形ヲ凸多角形トイヒ、サウデナイ

モノヲ凹多角形トイフ。



**注意** 普通ニ多角形トイハバ凸多角形ヲ指ス。

邊ガ皆等シイ多角形ヲ**等邊多角形**トイヒ、  
角ガ皆等シイ多角形ヲ**等角多角形**トイフ。  
等邊デ且ツ等角ナ多角形ヲ**正多角形**トイフ。

一ツノ多角形ガモツ邊ノ數、角(内角トモイフ)ノ數、  
頂點ノ數ハ皆同ジデアアル。

角ノ數ガ 3, 4, 5, 6, …… ,  $n$  ナルニ從ツテ、コノ多角  
形ヲ**三角形**、**四角形**、**五角形**、**六角形**、…… ,  $n$  **角形**トイフ。  
或ハ邊ノ數ニ從ツテ**三邊形**、**四邊形**、**五邊形**、**六邊形**、…  
… ,  $n$  **邊形**トモイフ。

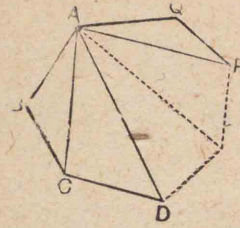
**定理** 13.  $n$  邊形ノ内角ノ總和ハ  $(2n-4)R^\circ$  デ  
アアル。

**假設**  $n$  邊形ヲ ABCD……PQ トスルト

**終結**  $\angle A + \angle B + \angle C + \dots + \angle P + \angle Q = (2n-4)R^\circ$

デアアル。

**證明** 一ツノ頂點 A カラ對角線 AC, AD, …… , AP



ヲ引クト、 $n$  邊形ハ  $(n-2)$  個ノ三  
角形ニ分タレル。ソシテコレ  
等ノ三角形ノ内角ノ總和ハ  $n$   
邊形ノ内角ノ總和デアアル。然  
ルニ一ツノ三角形ノ内角ノ和  
ハ  $2R^\circ$  デアルカラ、求ムル内角ノ總和ハ  $2R^\circ$  ノ  $(n-2)$   
倍、即チ  $(2n-4)R^\circ$  デアル。

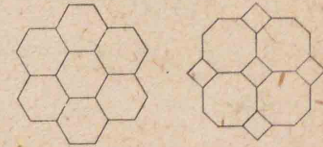
**図 1.** 正  $n$  邊形ノ一ツノ内角ハ  $\frac{2n-4}{n}R^\circ$  デア  
ル。

**図 2.** 多角形ノ外角ノ總和ハ  $4R^\circ$  デアル。

**問 1.** 四邊形ノ内角ノ總和ハ  $4R^\circ$  デアル。

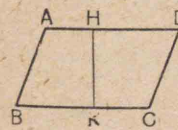
**問 2.** 右圖ノヤウニ正六角形又ハ正四角形ト正  
八角形トヲ用ヒテ全平面

ヲ填メルコトガ出來ル、何  
故カ。



### 28. 平行四邊形

**定義** 相對スル邊ガ夫々平行ナル四邊形  
ヲ**平行四邊形**トイフ。



コノトキ相對スル二邊ノ共通  
垂線ノ長サヲソノ**高サ**トイフ。

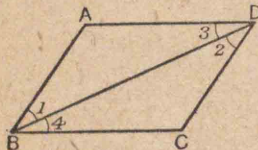
平行四邊形 ABCD ヲ  $\square ABCD$ ,

□AC 又ハ □BD ト書ク。

**定理** 14. 平行四邊形ハ、ソノ一對角線ニヨツテ合同ナニツノ三角形ニ分タレル。因テ平行四邊形ノ相對スル邊及ビ相對スル角ハ夫々相等シイ。

**假設** □ABCD ニ於テ一對角線ヲ BD トスルト  
**終結** △ABD=△CDB, AB=CD, AD=CB, ∠A=∠C, ∠B=∠D デアル。

**證明** AB//CD ナル故 ∠1=∠2

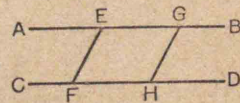


AD//BC ナル故 ∠3=∠4  
且ツ BD ハ △ABD, △CDB ニ共通デアル。

∴ △ABD=△CDB

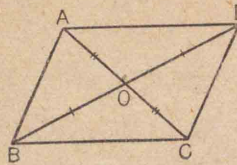
從ツテ AB=CD, AD=CB 及ビ ∠A=∠C  
同様ニ對角線 AC ヲ引キ ∠B=∠D ヲ證明スルコトガ出來ル。

**図 1.** 平行二直線間ニアル  
平行二線分ハ相等シイ。



**図 2.** 平行二直線間ノ共通垂線ノ長サハ一定デアル。(コノ長サヲ平行二直線ノ距離トイフ)

**定理** 15. 平行四邊形ノ對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。



**證明** 略スル。

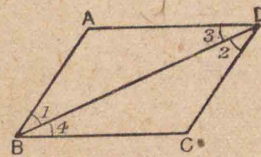
問 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點カラ二邊ニ平行線ヲ作ツテ出來ル平行四邊形ノ周ハモトノ三角形ノニツノ等邊ノ和ニ等シイ。

**定理** 16. 相對スル二邊ガ平行デ且ツ相等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル。

**假設** 四邊形 ABCD ニ於テ AB//CD, AB=CD トスルト

**終結** ABCD ハ平行四邊形デアル。

**證明** BD ヲ結ベバ △ABD, △CDB ニ於テ



AB=CD  
BD ハ 共通  
∠1=∠2

∴ △ABD=△CDB

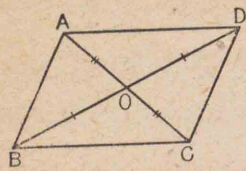
因テ ∠3=∠4

∴ AD//CB 且ツ AB//CD

故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

**定理** 17. 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スル四邊形ハ平行四邊形デアル。

**假設** 四邊形 ABCD ニ於テ OA=OC, OB=OD ト



スルト

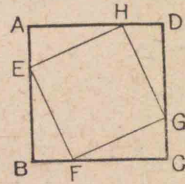
〔終結〕 ABCD ハ平行四邊形  
デアル。

〔證明〕 略スル。

### 29. 正方形

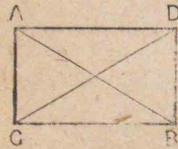
定義 總テノ邊總テノ角ガ相等シイ四邊形ヲ正方形トイフ。

問 正方形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA 上ニ夫々點 E, F, G, H ヲトリ, AE=BF=CG=DH トスレバ EFGH ハ正方形デアル。



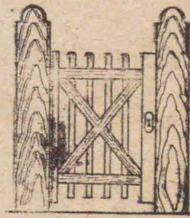
### 30. 矩形

定義 各角ガ皆直角ナル四邊形ヲ矩形トイフ。



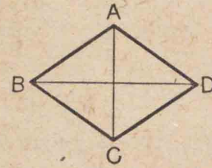
〔圖〕 矩形ハ平行四邊形デアル。

- 問1. 一角ガ直角ナ平行四邊形ハ矩形デアル。
- 問2. 矩形ノ對角線ハ相等シイ。
- 問3. 對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。



### 31. 菱形

定義 各邊ガ皆等シイ四邊形ヲ菱形トイフ。



〔圖〕 菱形ハ平行四邊形デアル。

- 問1. 二隣邊ガ相等シイ平行四邊形ハ菱形デアル。
- 問2. 菱形ノ對角線ハ直交スル。
- 問3. 對角線ガ互ニ他ヲ垂直ニ二等分スル四邊形ハ菱形デアル。

### 32. 梯形

定義 一組ノ對邊ガ平行デ他ノ一組ガ平行デナイ四邊形ヲ梯形トイフ。

コノトキ平行ナ二邊ヲ底トイヒ、ソノ距離ヲ高サトイフ。



平行デナイ二邊ガ相等シ

イ梯形ヲ等脚梯形トイフ。

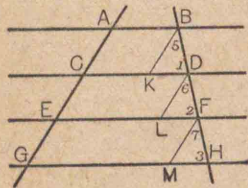
- 問1. 等脚梯形ノ兩底角(底ノ兩端ノ角)ハ相等シイ。
- 問2. 一組ノ底角ガ相等シイ梯形ハ等脚梯形デアル。
- 問3. 等脚梯形ノ對角線ハ相等シイ。

### 33. 多クノ平行線

**定理 18.** 多クノ平行線ガソレ等ト交ル一直線カラ等シイ線分ヲキリトルトキ、他ノ何レノ直線ト交ツテモ亦等シイ線分ヲキリトル。

**假設**  $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$  デアツテ  $AC = CE = EG$  トスルト

**終結**  $BD = DF = FH$  デアル。



**證明**  $AG \parallel BK, DL, FM$  ヲ引ク。然ルトキハ  $ACKB$  ハ平行四邊形デアル。  
 $\therefore AC = BK$

同様ニ  $CE = DL, EG = FM$

然ルニ假設ニヨリコレ等ノ等式ノ左邊ハ相等シイ。

故ニ  $BK = DL = FM$  (1)

次ニ  $AB, CD, EF, GH$  ハ平行ナル故

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$  (2)

又  $BK, DL, FM$  ハ同一ノ直線  $AG$  ニ平行ナル故亦

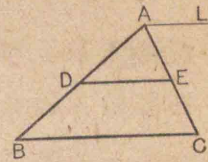
$\square$ ニ平行デアル。故ニ

$\angle 5 = \angle 6 = \angle 7$  (3)

(1), (2), (3) ヲリ  $\triangle BKD \cong \triangle DLF \cong \triangle FMH$

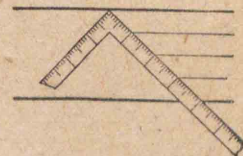
$\therefore BD = DF = FH$

**図 1.** 三角形ノ一邊ノ中點ヲ過リ底ニ平行ナ直線ハ第三邊ノ中點ヲ過ル。



**図 2.** 梯形ノ平行デナイ一邊ノ中點ヲ過リ底ニ平行ナ直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ過ル。

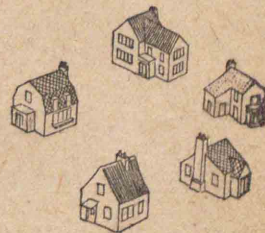
問 大工ガ板幅ヲ幾ツカニ等分スルトキ、物指ヲ圖ニ示スヤウニアデル。何故カ。



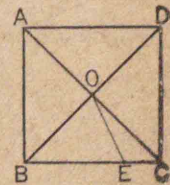
#### 練習 (4)

1. 内角ノ總和ガ  $16R$  ナル多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

2. 圖ノ様ニ住宅ガ5軒アル。二軒ヅツ他ノ家ニ道ヲリセズニ直線的ニ往來出來ルヤウニ道ヲツケルニハ道ガ何本イルカ。



3. 正方形  $ABCD$  ノ一頂點  $B$  カラ邊  $BC$  上ニ  $BO = BE$  ナルヤウニ點  $E$  ヲトルト、 $\angle BOE = 3\angle COE$  デアル。



4. 三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トシ, BE, CF  
ヲ B, C カラ AD ニ下シタ垂線トシ BF, CE ヲ結ベバ,  
BECF ハ平行四邊形デアル。

5. 一直線ガ平行二直線ト交ツテナス内角ノ二  
等分線ハ矩形ヲ作ル。

6. 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點カラ二邊ニ下  
シタ垂線ノ和ハ底ノ一端カラ對邊ニ下シタ高サニ  
等シイ。

7. 平行四邊形 ABCD ノ  $\angle A, \angle B$  ノ二等分線ガ  
夫々 BC, AD ト點 X, Y デ交ルトスルト, AX ト BY ト  
ハ互ニ他ヲ二等分スル。

第五章 三角形ノ邊ト角ノ大小・重心

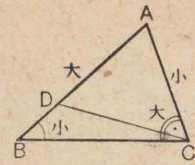
34. 一ツノ三角形ノ邊ト角

**定理** 19. 三角形ノ大ナル邊ノ對角ハ小ナル邊  
ノ對角ヨリ大デアル。逆ニ大ナル角ノ對邊ハ小ナ  
ル角ノ對邊ヨリ大デアル。

**假設**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $AB > AC$  トスルト

**終結**  $\angle C > \angle B$  デアル。

**證明** 大ナル邊 AB 上ニ小ナル邊 AC ニ等シク



AD ヲトルト D ハ必ズ A B 間ニ  
アル。

扱テ  $AD = AC$

$\therefore \angle ACD = \angle ADC > \angle B$

然ルニ  $\angle C > \angle ACD \therefore \angle C > \angle B$

逆ニ

**假設**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle C > \angle B$  トスルト

**終結**  $AB > AC$  デアル。

**證明** モシ  $AB < AC$  デナイトスルト,  $AB = AC$  カ  
又ハ  $AB < AC$  デナケレバナラナイ。

扱テモシ  $AB = AC$  トスルト  $\angle B = \angle C$  トナリ, 假設  
ニ反スル。

又モシ  $AB < AC$  トスルト  $\angle C < \angle B$  トナリ, コレモ  
假設ニ反スル。

ソレ故  $AB > AC$  デナケレバナラナイ。

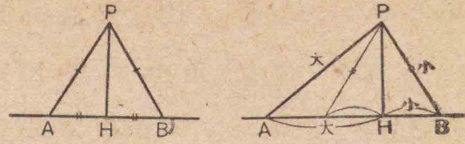
**図** 1. 直角三角形ニ於テ斜邊ハ三邊中最大デア  
ル。

**図** 2. 一點ト一直線トノ垂直距離ハソノ點トソ  
ノ直線上ノ任意ノ點トノ距離ノ中, 最小デアル。

**図** 3. 直線外ノ一點カラコノ直線ニ垂線ト斜線  
トヲ作ルトキ垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ斜線



ハ相等シク大ナル距離ニ足ラモツ斜線ハ



小ナル距離ニ足ラモツ斜線ヨリ大デアル。

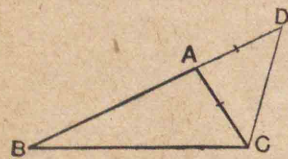
図4. 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大デアル。

定理 20. 三角形ノ任意ノ二邊ノ和ハ残りノ一邊ヨリ大デアル。

假設  $\triangle ABC$  ノ三邊ヲ  $AB, AC, BC$  トスルト

終結  $AB+AC > BC$  デアル。

證明  $BA$  ヲ延長シ,  $AC$  ニ等シク  $AD$  ヲトリ,  $DC$



ヲ結ブト  $\angle ACD = \angle ADC$

又  $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$

$\therefore \angle BCD > \angle ADC$

$\therefore BD > BC$

然ルニ  $BD = AB + AC$

$\therefore AB + AC > BC$

図1. 三角形ノ任意ノ二邊ノ差ハ残りノ一邊ヨリ小デアル。

図2. 與ヘラレタ二點ヲ兩端トスル任意ノ折線ハソノ二點ヲ結ブ線分ヨリ大デアル即チ二點間ノ

距離ハソノ二點間ノ最短通路デアル。

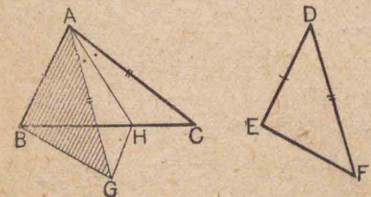
### 35. ニツノ三角形ノ邊ト角

定理 21. 二邊ガ夫々相等シイニツノ三角形ニ於テ、ソノ夾角ガ大ナル方ノ第三邊ハ夾角ガ小ナル方ノ第三邊ヨリ大デアル。逆ニ二邊ガ夫々相等シイニツノ三角形ニ於テ、第三邊ガ大ナル方ノ對角ハ第三邊ガ小ナル方ノ對角ヨリ大デアル。

假設  $\triangle ABC, \triangle DEF$  ニ於テ  $AB = DE, AC = DF, \angle A > \angle D$  トスルト

終結  $BC > EF$  デアル。

證明  $DE$  ヲ圖ノ如ク  $AB$  ニ重ネ,  $F$  ノトル位置ヲ  $G$  トスル。然ルトキハ  $\angle A > \angle D$  ナル故,  $AG$  ハ



$\angle BAC$  内ニ來ル。

次ニ  $\angle GAC$  ノ二等分線ヲ作り,  $BC$  トノ交點ヲ  $H$  トシ,  $HG$  ヲ結ブト

$\triangle AGH \cong \triangle ACH \therefore GH = HC$

扱テ  $\triangle BHG$  ニ於テ

$BH + HG > BG \therefore BH + HC > EF$

即チ  $BC > EF$

逆ニ

**〔假設〕**  $AB=DE, AC=DF, BC>EF$  トスルト

**〔終結〕**  $\angle A > \angle D$  デアル。

**〔證明〕**  $\angle A < \angle D$  トスレバ上ノ證明ヨリ  $EC < EF$ ,  
 $\angle A = \angle D$  トスレバ三角形ノ合同定理ヨリ  $BC = EF$   
 コレ等ハ共ニ假設ニ反スル。

故ニ  $\angle A > \angle D$  デナケレバナラナイ。

**〔注意〕** コノ逆ノ證明法ヲ轉換法トイフ。

吾々ハ既ニ  $AB=DE, AC=DF$  ナル  $\triangle ABC, \triangle DEF$  ニ於テ

$\angle A > \angle D$  ナルトキハ  $BC > EF$

$\angle A = \angle D$  ナルトキハ  $BC = EF$

$\angle A < \angle D$  ナルトキハ  $BC < EF$

ナルコトヲ知ツタ。コレデ  $\angle A$  ト  $\angle D$  トノ間ニ起ル總テ  
 ノ場合ヲ盡シ、且ツ終結ハ皆異ナツテキル。斯様ナ場合ニ  
 ハ逆ハ常ニ真デアル。ソノ證明ニハ轉換法ヲ用ヒルノガ  
 便利デアル。定理19ノ逆ニモコノ證明法ヲ用ヒテアル。

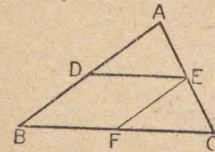
### 36. 二邊ノ中點ヲ結ブ線分

**〔定理〕** 22. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第  
 三邊ニ平行デ、且ツソノ半分ニ等シイ。

**〔假設〕**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $AD=DB, AE=EC$  トスルト

**〔終結〕**  $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$  デアル。

**〔證明〕**  $AB$  ノ中點  $D$  カラ  $BC$  ニ平行ニ引イタ直  
 線ハ  $AC$  ノ中點ヲ過ル。(定理18系1)



然ルニ  $AC$  ノ中點ハ  $E$  ノ外ニ  
 ナイ。因テコノ平行線ハ  $DE$   
 ニ合スル。

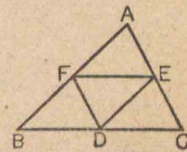
即チ  $DE \parallel BC$

次ニ  $BC$  ノ中點ヲ  $F$  トスルト、上ト同様ニ  
 $EF \parallel BD$

故ニ  $DBFE$  ハ平行四邊形デアル。

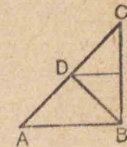
$\therefore DE = BF = \frac{1}{2}BC$

問1. 三角形ノ三邊ノ中點ヲ順  
 次ニ結ベバ四ツノ合同ナ三角形ヲ  
 得ル。



問2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ベバ平行  
 四邊形ヲ得ル。

問3. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ  
 三頂點カラ等距離ニアル。

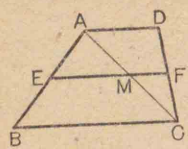


**〔定理〕** 23. 梯形ノ平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ  
 線分ハ底ニ平行デ、且ツソノ和ノ半分ニ等シイ。

**〔假設〕** 梯形  $ABCD$  ニ於テ  $AD \parallel BC$  トシ、 $E, F$  ヲ夫  
 夫  $AB, DC$  ノ中點トスルト

**〔終結〕**  $EF \parallel BC, EF = \frac{1}{2}(AD+BC)$  デアル。

**〔證明〕**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $AB$  ノ中點  $E$  カラ  $BC$  ( $AD$ ) ニ



平行ニ引イタ直線ハ AC ノ中點

Mヲ過ル。故ニコノ直線ハ亦

$\triangle ACD$  ニ於テ CD ノ中點ヲ過ル。

然ルニ CD ノ中點ハ F ノ他ニナイ。因テコノ平行線ハ EF ニ合スル。

即チ  $EF \parallel BC$

且ツ  $EM = \frac{1}{2}BC, MF = \frac{1}{2}AD$

$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$

### 37. 三角形ノ重心

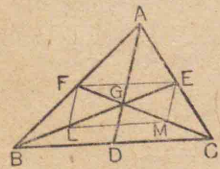
**定理** 24. 三角形ノ三中線ハ一點デ交ル。又ソノ交點ハ各中線上各頂點カラ夫々  $\frac{2}{3}$  ノ處デアル。

**假設**  $\triangle ABC$  ノ三中線ヲ AD, BE, CF トスルト。

**終結** AD, BE, CF ハ夫々頂點カラ  $\frac{2}{3}$  ノ一點デ交ル。

**證明** BE, CF ノ交點ヲ G トシ, BG, CG ノ中點ヲ夫

夫 L, M トスル。



$LM \parallel \frac{1}{2}BC$   
 $FE \parallel \frac{1}{2}BC$   
 $\therefore LM \parallel FE$

\* コノ記號ハ一ト // トヲ意味スル。

故ニ LMEF ハ平行四邊形デアル。

因テ  $BL = LG = GE, CM = MG = GF$

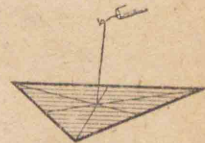
即チ G ハ BE, CF 上各頂點カラ  $\frac{2}{3}$  ノ處デアル。

同様ニ AD ト BE トノ交リハ BE 上  $\frac{2}{3}$  ノ點ナルコトガ證明出來ル。

因テ三中線ハ各頂點カラ各  $\frac{2}{3}$  ノ一點 G デ交ル。

**注意** コノ點ヲ三角形ノ重心トイフ。

厚紙デ三角形ヲ作り、絲デ吊シテ釣合フ點ハソノ重心デアルコトヲ確メヨ。

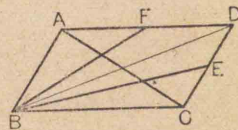


### 練習 (5)

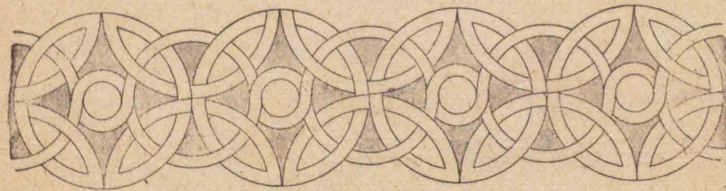
1. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點ヲ D トスレバ,  $DA < AC$  デアル。
2. 梯形ノ對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ且ツ兩底ノ差ノ半分ニ等シイ。
3. 平行四邊形 ABCD ノ各頂點カラコノ平行四邊形ヲキラナイ直線 XY へ垂線 AA', BB', CC', DD' ヲ下ストキ,  $AA' + CC' = BB' + DD'$  デアル。
4. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トシ, A, B, C, G カラコノ三角形ヲキラナイ一直線へ垂線 AA', BB', CC', GG' ヲ引クト,  $3GG' = AA' + BB' + CC'$  デアル。

5. 三角形ABCニ於テ $AB=AC$ トシ、BAヲDマデ延長シテ $AD=AB$ トスレバ、 $CD \perp BC$ デアル。

6. 平行四邊形ABCDノ邊CD, DAノ中點ヲ夫々E, Fトスレバ、BE, BFハACヲ三等分スル。

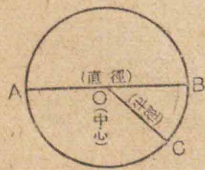


第六章 圓



38. 圓

定義 線分ノ一端ヲ固定シ、ソノ線分ヲ一周リ廻轉スルトキ、他端ノ畫ク曲線ヲ圓周固定シタ點ヲ圓ノ中心トイヒ、線分ガ畫イタ平面ノ部分ヲ圓トイフ。



ソシテ圓ノ中心カラ圓周マデ引イタ線分ヲ圓ノ半徑トイフ。圓ノ中心ヲ過ツテ

兩端ガ圓周上ニアル線分ヲ圓ノ直徑トイフ。

圓又ハ圓周ヲ表ハスニハ圓周上ノ三點例ヘバA, B, Cヲトリ、圓ABC又ハ圓周ABCトイフ。時トシテハ中心ヲ表ハス文字Oヲ用ヒテ圓Oトモイフ。

図1. 一ツノ圓ノ半徑ハ皆相等シイ。又直徑ハ半徑ノ2倍デアル。

図2. 一ツノ圓ノ直徑ハ皆相等シイ。

図3. 一ツノ點ト圓ノ中心トノ距離ガ圓ノ半徑ヨリ小ナルカ等シイカ又ハ大ナルカニ從ツテ、ソノ點ハ圓内、圓周上又ハ圓外ニアル。又コノ逆モ眞デアル。

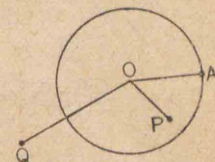
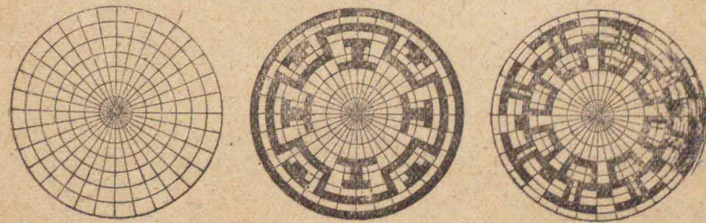


図4. 半徑ガ等シイニツノ圓ハ合同デアル。

問 直徑ガ等シイニツノ圓ハ合同デアル。

定義 二ツ以上ノ合同ナ圓ヲ等圓トイヒ、中心ヲ共有スル圓ヲ同心圓トイフ。



### 39. 對稱圖形

**定義** 一點ヲ過ツテ或圖形上ニ兩端ヲ過ツ總テノ線分ガ皆ソノ點デ二等分セラレルトキ、ソノ圖形ハソノ點ニ關シテ對稱デアアル又ハ點對稱ヲモツトイヒ、ソノ點ヲ對稱ノ中心トイフ。

一直線ヲ折目トシテ或圖形ヲ折返ストキ、ソノ二ツノ部分ガ全ク合スレバ、ソノ圖形ハソノ直線ニ關シテ對稱デアアル又ハ線對稱ヲモツトイヒ、ソノ直線ヲ對稱ノ軸トイフ。

**圖1.** 一ツノ圖形ノ對稱ノ軸ハソノ圖形ヲ合同ナ二ツノ部分ニ分ケル。

**圖2.** 一ツノ圖形ノ對稱ノ中心ヲ過ル任意ノ直線ハソノ圖形ヲ合同ナ二ツノ部分ニ分ケル。

(一方ヲ對稱ノ中心ノ周リニ二直角ダケ廻轉セヨ)

**問1.** 圓ハソノ中心ニ關シテ對稱デアアル。

**問2.** 平行四邊形ハソノ對角線ノ交點ニ關シテ對稱デアアル。

**問3.** 二等邊三角形ハ頂角ノ二等分線ニ關シテ對稱デアアル。

### 40. 圓周ノ對稱

**定理** 25. 圓周ハ直徑ニ關シテ對稱デアアル。

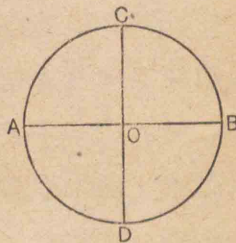
**證明** 略スル。

**圖1.** 直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分スル。

**圖2.** 互ニ垂直ナ二ツノ直徑

ハ圓及ビ圓周ヲ四等分スル。

**定義** 圓ガ一ツノ直徑デ分タレタ二ツノ部分ヲ各、半圓トイヒ、互ニ垂直ナ二ツノ直徑デ分タレタ四ツノ部分ヲ各、四分圓又ハ象限トイフ。

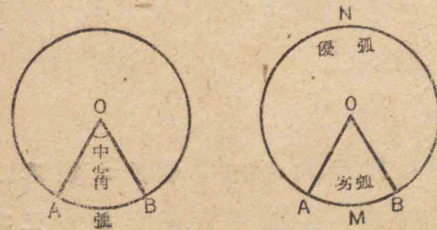


### 41. 弧ト中心角

**定義** 圓周ノ一部分ヲ弧トイフ。

弧ヲ表ハスニハソノ兩端ノ文字ヲ用ヒル。例ヘバ下圖ニ於テハ弧 AB 又ハ  $\widehat{AB}$  ト書ク。

**定義** 弧ノ兩端カラ引イタ二ツノ半徑ノナス角ヲ中心角トイフ。



コノトキ弧ト中心角トハ相對スルトイフ。

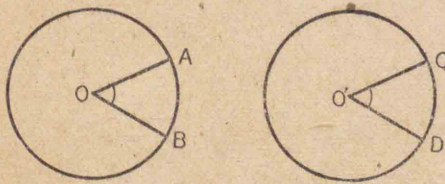
O 圓周上ニ二點 A, B ヲトルト,

全圓周ハ二ツノ弧ニ分タレル。ソレ等ノ中劣角 AOBニ對スル弧ヲ劣弧,優角AOBニ對スル弧ヲ優弧トイヒ,弧ノ上ニ夫々一點ヲトリ,弧AMB,弧ANB又ハAMB, ANBト書イテ區別スル。

**定理** 26. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ中心角ハ相等シイ弧ニ對スル。逆ニ相等シイ弧ニ對スル中心角ハ相等シイ。

**假設** 等圓 O, O'ニ於テ  $\angle AOB = \angle CO'D$ トスルト

**終結**  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ デアアル。



**證明** 圓 O'ヲ (ツノマ、又ハ裏返シテ) 圓 Oノ上ニオキ, O'ヲ Oニ,

O'CヲOAニ重ネルトCハAニ重ナル。

次ニ  $\angle AOB = \angle CO'D$ ナル故, O'DハOBニ重ナリ, DハBニ重ナル。然ルニ兩圓周ハ既ニ重ナツテキル。故ニ  $\widehat{CD}$ ハ  $\widehat{AB}$ ニ全ク重ナル。

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD}$

逆ノ證明ハ略スル。

**系** 同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大デアアル。又コ

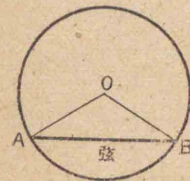
ノ逆モ眞デアアル。

問1. 同圓又ハ等圓ニ於テ中心角ガ2倍,3倍,...ニナレバ,ソレニ對スル弧モ亦2倍,3倍,...ニナル。

問2. 圓周上ノ一點カラ二ツノ半徑(又ハソノ延長)ニ下シタ垂線ガ等シケレバ,二ツノ半徑ノ夾ム弧ハソノ點デ二等分セラレル。

42. 弧ト弦

**定義** 弧ノ兩端ヲ結ブ線分ヲ弦トイフ。

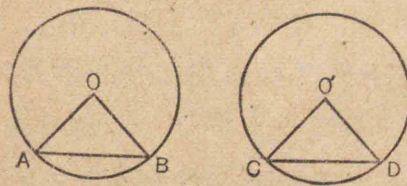


コノトキ弧ト弦トハ相對スルトイフ。一ツノ弦ニ對スル弧ハ二ツアルガ通常劣弧ヲトルモノトスル。

**定理** 27. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弧ニ對スル弦ハ相等シイ。逆ニ相等シイ弦ニ對スル弧ハ相等シイ。

**假設** 等圓 O, O'ニ於テ  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ トスルト

**終結**  $AB = CD$ デアアル。



**證明** O, O'ハ等圓デアツテ  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ナル故  $\angle AOB = \angle CO'D$

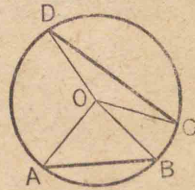
$$\therefore \triangle AOB = \triangle CO'D$$

$$\therefore AB = CD$$

逆ノ證明ハ略スル。

図 同圓又ハ等圓ニ於テ大ナル弧ニ對スル弦ハ小ナル弧ニ對スル弦ヨリ大デア。又コノ逆モ眞デア。

【證明】 O 圓周上デ  $\widehat{CD} > \widehat{AB}$  トスルト  $\triangle OAB, \triangle OCD$  ニ於テ  
 $\angle COD > \angle AOB$



且ツソレ等ヲ夾ム二邊ハ夫々相等シイ。

$$\text{故ニ} \quad CD > AB$$

逆ノ證明ハ略スル。

問1. 同圓又ハ等圓ニ於テ相等シイ中心角ニ對スル弦ハ相等シイ。

問2. 同圓又ハ等圓ニ於テ一ツノ弧 AB ガ他ノ弧 CD ノ2倍ナルトキ、弦 AB ハ弦 CD ノ2倍ヨリ小デア。 ( $\widehat{AB}$ ヲ二等分セヨ)

### 43. 弦ト中心

【定理】 28. 弦ニ垂直ナ直径ハ弦及ビソレニ對スル弧ヲ二等分スル。

【證明】 略スル。(圓周ハ直径ニ關シテ對稱ナルコトヨ

リ明ラカデア)

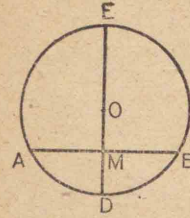


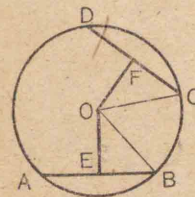
図1. 弦ノ垂直二等分線ハ中心ヲ過ル。

図2. 弦ノ中點ト中心トヲ結ブ直線ハ弦ニ垂直デア。

【定理】 29. 同圓又ハ等圓ニ於テ相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル。逆ニ中心カラ等距離ニアル弦ハ相等シイ。

【假設】 圓Oニ於テ  $AB = CD, OE \perp AB, OF \perp CD$  トスルト

【終結】  $OE = OF$  デアル。



【證明】  $OE \perp AB$  ナル故 E ハ AB ノ中點デア。

同様ニ F ハ CD ノ中點デア。

扱テ  $AB = CD$  ナル故  $EB = FC$

又  $OB = OC$  且ツ  $\angle E = \angle F = R\angle$

$$\therefore \triangle OBE = \triangle OCF$$

$$\therefore OE = OF$$

逆ノ證明ハ略スル。

【定理】 30. 同圓又ハ等圓ニ於テ大ナル弦ハ小ナル弦ヨリ中心ニ近イ。逆ニ中心ニ近イ弦ハ遠イ弦

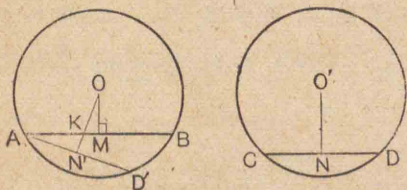
ヨリ大デアル。

〔假設〕 等圓  $O, O'$  に於て  $AB > CD, OM \perp AB, O'N \perp CD$

トスルト

〔終結〕  $OM < O'N$  デアル。

〔證明〕  $O$  圓周上デ  $\widehat{AD'}$  ヲ  $\widehat{CD}$  ニ等シクトレバ



$AD' = CD$

次ニ  $ON' \perp AD'$  トスレバ

$ON' = O'N$

扱テ  $\widehat{AD'} < \widehat{AB}$  デアルカラ  $ON'$  ト  $AB$  トハ交ル。

ソノ交點ヲ  $K$  トスレバ

$OM < OK < ON'$

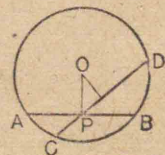
$\therefore OM < O'N$

逆ノ證明ハ略スル。(轉換法)

問1. 直徑上ノ一點ヲ過リコレト等角ヲナス二ツノ弦ハ相等シイ。

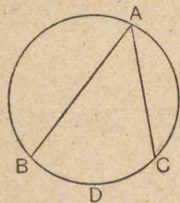
問2. 弦ノ最大ナルモノハ直徑デアル。

問3. 圓内ノ一點ヲ過ル弦ノ中, ソノ點デ二等分セラレルモノハ最小デアル。



44. 圓周角

定義 圓周上ノ一點カラ引イタ二ツノ弦



ノナス角ヲ圓周角トイフ。

コノトキ圓周角トツノ二邊ガ夾ム弧トハ相對スルトイフ。

〔定理〕 31. 圓周角ハ同ジ弧ニ

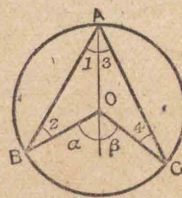
對スル中心角ノ半分デアル。

〔假設〕 圓  $O$  に於テ  $\widehat{BC}$  ニ對スル圓周角ヲ  $\angle BAC$ , 中心角ヲ  $\angle BOC$  トスルト

〔終結〕  $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$  デアル。

〔證明〕  $OA = OB \quad \therefore \angle 1 = \angle 2$

然ルニ  $\angle a = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$



$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle a$

同様ニ  $\angle \beta = 2\angle 3$

$\therefore \angle 3 = \frac{1}{2} \angle \beta$

$\therefore \angle BAC = \angle 1 + \angle 3 = \frac{1}{2}(\angle a + \angle \beta) = \frac{1}{2} \angle BOC$

〔注意〕 中心  $O$  ガ  $\angle BAC$  内ニナイ場合ニモ同様ニ證明スルコトガ出來ル。

図1. 同ジ弧ニ對スル圓周角ハ皆相等シイ。

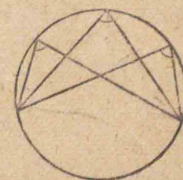




図2. 同圓又ハ等圓ニ於テ相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。又コノ逆モ眞デアル。

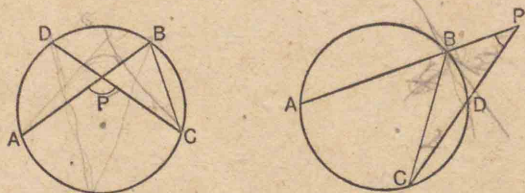
図3. 半圓周ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デアル。又コノ逆モ眞デアル。

定理 32. 圓ノニツノ弦 AB, CD 又ハソノ延長ノ交點ヲ P トスルトキ,  $\angle APC$  ハ

(i) P ガ圓内ニアルト, ソノ角及ビ對頂角ガ夾ム弧 AC, BD ニ對スル圓周角ノ和ニ等シイ。

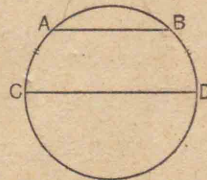
(ii) P ガ圓外ニアルト, ソノ角ガ夾ム弧 AC, BD ニ對スル圓周角ノ差ニ等シイ。

證明 略スル。



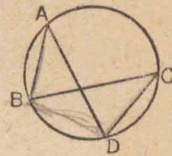
問1. 一圓周ガニツノ平行線デキリトラレル弧ハ相等シイ。

問2. 圓周角 APB ノ二等分線ハ P ガ圓周上ヲ動イテモ, 常ニ弧 AB ノ中點ヲ過ル。



問3. 次圖ニ於テ  $AB=CD$  ナラバ,  $BC=AD$  デア

ル。又コノ逆モ眞デアル。 (BトDヲ結ベ)



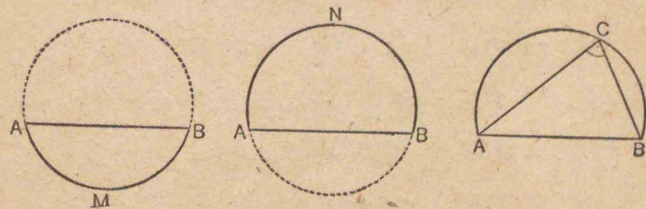
問4. 直徑ノ兩端ニ於テコレト等角ヲナスニツノ弦ハ相等シイ。

### 45. 弓形

定義 圓ノ弧トソレニ對スル弦トデ圍マレタ平面ノ部分ヲ弓形トイフ。

弓形ノ弧上ノ一點ヲソノ弧ノ兩端ニ結ンダニツノ弦ノナス角ヲ弓形ノ角或ハ弓形ノ含ム角トイフ。

弓形ヲ表ハスニハ弧ノ上ノ一點ヲ表ハス文字ヲ弧ノ兩端ヲ表ハス文字ノ間ニ置ク。例ヘバ圖ニ於



ケルニツノ弓形ハ弓形 AMB 及ビ弓形 ANB デアル。又  $\angle ACB$  ハ弓形 ACB ノ角デアル。

弓形ヲ圓ノ一部分トミルト弓形ノ角ハ圓周角デアル。因テ次ノ系ヲ得ル。

図1. 弓形ノ角ハソノ弧ガ

- (i) 半圓周ヨリ大ナルトキハ鋭角デアル。
  - (ii) 半圓周ニ等シイトキハ直角デアル。
  - (iii) 半圓周ヨリ小ナルトキハ鈍角デアル。
- 又コレ等ノ逆モ眞デアル。

図2. 一ツノ點ヲ弓形ノ弦ノ兩端ニ結ンデ出來ルニツノ線分ノナス角ハ



- (i) ソノ點ガ弓形ノ内ニアルトキハ弓形ノ角ヨリ大デアル。
  - (ii) ソノ點ガ弓形ノ外ニアツテ弦ニ關シテ弧ト同ジ側ニアルトキハ弓形ノ角ヨリ小デアル。
- 又コレ等ノ逆モ眞デアル。

問1. 一ツノ弓形ノ角ハ皆相等シイ。

問2. 同ジ底邊ト等シイ頂角ヲモツ多クノ三角形ハ頂點ガ共通ナ底邊ノ同ジ側ニアルトキ、ソレ等ノ三角形ノ頂點ハ皆ソノ底邊ヲ弦トスル一ツノ弓形ノ弧ノ上ニアル。

### 46. 圓ト直線

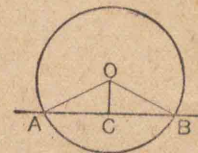
**定理** 33. 圓周ト直線トハ、圓ノ中心ト直線トノ距離ガ

- (i) 半徑ヨリ小ナルトキハ二點デ出會フ。

- (ii) 半徑ニ等シイトキハ一點デ出會フ。
  - (iii) 半徑ヨリ大ナルトキハ出會ハナイ。
- 又コレ等ノ逆モ眞デアル。

**假設** 圓ノ中心ヲO、直線ヲAB、OトABトノ距離ヲOCトシ

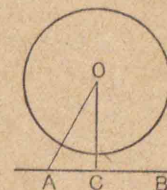
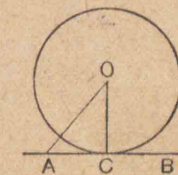
- (i) OCハ半徑ヨリ小
- (ii) OCハ半徑ニ等シイ
- (iii) OCハ半徑ヨリ大



トスルト

**終結** 圓周ト直線トハ

- (i) 二點デ出會フ。
- (ii) 一點デ出會フ。
- (iii) 出會ハナイ。



**證明** (i) OCハ半徑ヨリ小デアルカラCハ圓内ニアル。然ルニ直線ハ双方ヘ限リナク長イカラ、直線AB上ニハ圓Oノ外ノ點ガアル。故ニ直線ABハ少クモ一點デコノ圓周ト出會フ。ソノ點ヲAトシ、OCニ關シテOAニ對稱ナ線分OBヲ引クトOBトOAハ相等シイ。然ルニOAハ半徑デアルカラOBモ亦半徑ニ等シク、從ツテBハ圓周上ニアル。Oカラ直

線 AB 引イタ等シイ斜線ハ唯ニツデアアルカラ、圓周トコノ直線トハ唯ニツノ點 A, B デ出會フ。

(ii) 垂線 CC ガ半徑ニ等シイカラ、任意ノ斜線 OA ハ半徑ヨリ大デアアル。故ニ直線上 C 以外ノ點ハ圓外ニアアル。故ニ圓周トコノ直線トハ唯ニ點 C デ出會フ。

(iii) 垂線 CC ガ半徑ヨリ大デアアルカラ、任意ノ斜線 OA モ半徑ヨリ大デアアル。故ニ直線上ノ點ハ總テ圓外ニアアル。故ニ圓周トコノ直線ト出會ハナイ。逆ノ證明ハ略スル。

**定義** 一ツノ直線ガ圓周ト二點デ出會フトキ、コノ直線ハ圓ト交ルトイヒ、ソノ出會ツタ點ヲ交點、ソノ直線ヲ圓ノ割線トイフ。

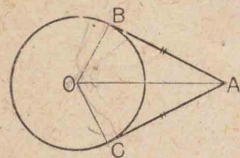
一ツノ直線ガ圓周ト唯ニ點デ出會フトキ、コノ直線ハ圓ニ切スルトイヒ、ソノ直線ヲ圓ノ切線トイフ。切線ガ圓周ト出會ツタ點ヲ切點トイフ。

**図 1.** 圓周上ノ任意ノ一點ニ於ケル切線ハソノ點ヘ引イタ半徑ニ垂直デアアル。

**図 2.** 切點ヲ過リ切線ニ垂直ナ直線ハ圓ノ中心

ヲ過ル。

**図 3.** 一點カラ圓ニニツノ切線ヲ引クトキ、ソノ點ト切點トノ距離ハ相等シイ。



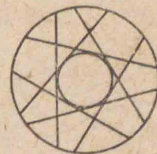
**定義** 圓外ノ一點カラ圓ニ切線ヲ引クトキ、切點ト初メノ點トノ距離ヲ切線ノ長サトイフ。

**問 1.** 直徑ノ兩端ニ於ケル切線ハ平行デアアル。

**問 2.** 圓ノ一ツノ切線ニ平行ナ弦ハ何レモソノ切點ヲ過ル直徑ノタメニ垂直ニ二等分セラレル。

**問 3.** 圓外ノ一點ト圓ノ中心トヲ結ブ直線ハソノ點カラ引イタ圓ノニツノ切線ガナス角ヲ二等分シ且ツニツノ切點ヲ結ブ弦ノ垂直二等分線デアアル。

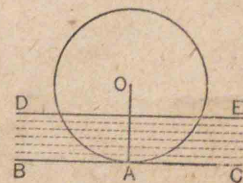
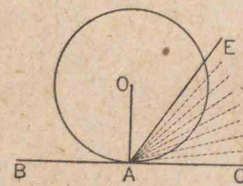
**問 4.** ニツノ同心圓ノ小圓ニ切スル大圓ノ弦ハ皆相等シイ。



**注意** 下ノ圖ガ示スヤウニ、圓ノ一ツノ

割線 AE ガ A ヲ中心トシテ廻轉シ、次第ニ AC = 近ヅキ遂ニ AC = 重ナルトキ、AE ハ點 A ニ於ケル切線トナル。又 OA = 垂直

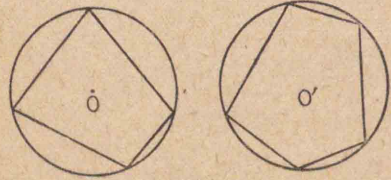
ナ割線 DE ガ初メノ位置 = 平行シ



ナガラ中心Oヲ遠ザカリ遠ニ BC = 合スルトキ, DE ハ點 A = 於ケル切線トナル。

### 47. 外接圓ト内接多角形

定義 多角形ノ總テノ頂點ヲ過ル圓ヲソノ多角形ノ外接圓,ソノ圓ノ中心ヲ外心トイフ。又コノ多角形ヲ圓ノ内接多角形トイフ。

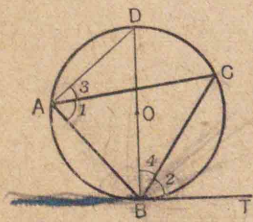


コノトキ圓ハ多角形ニ外接スルトイヒ, 多角形ハ圓ニ内接スルトイフ。

上圖ハ内接四邊形,内接五邊形デアアル。

**定理 34.** 内接三角形ノ頂角ハソノ對邊ノ端ニ於ケル切線ト對邊トノナス角ノ中對邊ニ關シテソレト反對ノ側ニアル角ニ等シイ。

**假設**  $\triangle ABC$  ハ圓 O ニ内接シ, B = 於ケル切線ヲ BT トスルト



**終結**  $\angle BAC = \angle TBC$  デアル。

**證明** 直徑 BD ヲ引キ, AD ヲ

結ブト

$$\angle BAD = R\angle = \angle TBD$$

然ルニ  $\angle 3 = \angle 4 \quad \therefore \quad \angle 1 = \angle 2$

150 120 / 0

即チ  $\angle BAC = \angle TBC$

**注意** 邊 IC ガ半圓 BAD 内ニアルトキモ同様ニ證明出來ル。

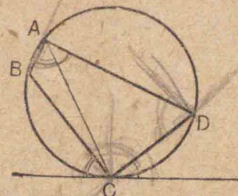
**圖** 内接三角形ノ一邊ノ端カラソノ邊ニ關シテ三角形ト反對ノ側ニ引イタ直線トソノ邊トノナス角ガソノ邊ニ對スル頂角ト等シケレバ,ソノ直線ハ外接圓ニ切スル。

問1. 圓周上ノ一點Aカラ弦 AB 及ビ切線 AT ヲ引キ,  $\angle BAT$  ノ二等分線ガ  $\widehat{AB}$  ト交ル點ヲ M トスルト, M ハ  $\widehat{AB}$  ノ中點デアアル。

問2. 圓周上ノ一點Aカラ弦 AB, AC 及ビ切線 AT ヲ引キ, Bカラ AT = 平行ニ引イタ直線ガ弦 AC (又ハソノ延長)ト交ル點ヲ D トスルト, AB ハ圓 BDC ノ切線デアアル。

**定理 35.** 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。又コノ逆モ眞デアアル。

**假設** 圓ニ内接スル四邊形ヲ ABCD トスルト



**終結**  $\angle BAD + \angle BCD = 2R\angle$

$\angle ABC + \angle ADC = 2R\angle$

**證明** 略スル。

**圖** 圓ニ内接スル四邊形ノ

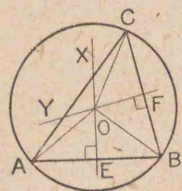
一外角ハソノ内對角(外角ニ隣ル内角ノ對角)ニ等シイ。  
又コノ逆モ眞デアル。

**定理 36.** 三角形ノ外接圓ハーツハ必ズアル、ソシテ唯一ツニ限ル。

**假設** 三角形ヲABCトスルト

**終結**  $\triangle ABC$ ノ外接圓ハーツハ必ズアル。ソシテ唯一ツヨリナイ。

**證明** AB, BCノ垂直二等分線EX, FYヲ引ク。



AB, BCハ交ツテキルカラ、EX, FYハ必ズ交ル。ソノ交點ヲOトシ、OA, OB, OCヲ結ブト  
 $OA=OB, OB=OC$  (定理4系)

ソレ故Oヲ中心トシOAヲ半徑トスル圓ハ三點A, B, Cヲ過ル。因テコノ圓ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓デア  
ル。即チ外接圓ハーツハ必ズアル。

次ニ二直線EX, FYノ交點ハ唯一ツヨリナイカラ、三點A, B, Cヲ過ル圓ノ中心モ唯一ツヨリナイ。從ツテ $\triangle ABC$ ノ外接圓ハ唯一ツヨリナイ。

**図 1.** 一直線上ニナイ三點ハーツノ圓ヲ決定スル。

**図 2.** 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點

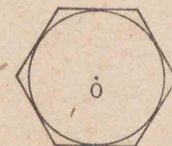
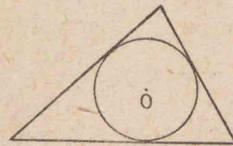
ヲ過ル。ソシテソノ點ハ三頂點カラ等距離ニアル。

**問** 一點カラ圓周上ノ三點ニ引イタ線分ガ相等シイトキ、ソノ點ハソノ圓ノ中心デア  
ル。

### 48. 内切圓ト外切多角形

**定義** 多角形ノ總テノ邊ニ切スル圓ヲソノ多角形ノ内切圓、ソノ中心ヲ内心トイフ。又ソノ多角形ヲ圓ノ外切多角形トイフ。

コノ場合ニ圓ハ多角形ニ内切スルトイヒ、多角形ハ圓ニ外切スルトイフ。



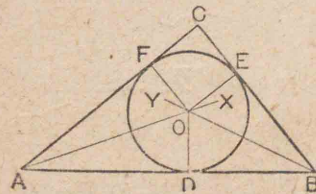
圖ニ於テ三角形及ビ六角形ハ共ニ圓O

ノ外切多角形デ、圓Oハソレ等ノ内切圓デア  
ル。

**定理 37.** 三角形ノ内切圓ハーツハ必ズアル、ソシテ唯一ツニ限ル。

**假設** 三角形ヲ $\triangle ABC$ トスルト

**終結**  $\triangle ABC$ ノ内切圓ハーツハ必ズアル。ソシテ唯一ツヨリナイ。



**證明**  $\angle A, \angle B$ ノ二等分線AX, BYヲ引クト、  
 $\angle XAB + \angle YBA$ ハ $2R\angle$

ヨリ小デアルカラ AX, BY ハ必ズ交ル。ソノ交點ヲ  
O トシ, O カラ三邊ニ夫々垂線 OD, OE, OF ヲ下スト

OE=OD, OF=OD (定理12系5)

ソレ故 O ハ三邊 AB, BC, CA カラ等距離ニアル。

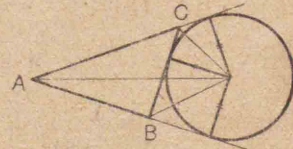
今コノ距離ヲ半徑トシ, O ヲ中心トスル圓ヲ畫ク  
ト, コノ圓ハ三角形ノ三邊ニ切スル。(定理33) 因テコ  
ノ圓ハ △ABC ノ内切圓デアアル。即チ内切圓ハ一ツ  
ハ必ズアル。

次ニ AX, BY ノ交點ハ唯一ツヨリナイカラ, 三邊  
AB, BC, CA ニ切スル圓ノ中心モ亦唯一ツヨリナイ。  
從ツテ △ABC ノ内切圓ハ唯一ツヨリナイ。

図1. 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ同一ノ點  
ヲ過リ, ソノ點ハ三邊カラ等距離ニアル。

図2. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線及ビ他ノ二  
角ノ外角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ過リ, ソノ點ハ三  
邊カラ等距離ニアル。因

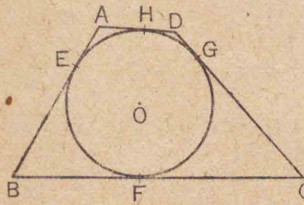
テコノ點ヲ中心トシテ, 三  
角形ノ二邊ノ延長ト残り  
ノ一邊トニ切スル圓ヲ作ルコトガ出來ル。



定義 三角形ノ二邊ノ延長ト第三邊トニ切スル  
圓ヲ三角形ノ傍切圓トイヒ, ソノ中心ヲ傍心トイフ。

定理 38. 圓ニ外切スル四邊形ノ相對スル邊ノ  
和ハ相等シイ。

假設 圓 O ニ外切スル四邊形ヲ ABCD トスルト



終結 AB+CD=BC+AD

デアアル。

證明 AB, BC, CD, DA

ガ圓 O ニ切スル點ヲ夫々  
E, F, G, H トスル。然ルトキハ

AE=AH, BE=BF }  
CG=CF, DG=DH } (定理33系3)

∴ AE+BE+CG+DG=AH+BF+CF+DH

即チ AB+CD=BC+AD

図 四邊形ノ相對スル邊ノ和ガ相等シイトキ, コ  
ノ四邊形ハ圓ニ外切スル。

問1. 圓ニ外切スル平行四邊形ハ菱形デアアル。

問2. 圓ニ外切スル矩形ハ正方形デアアル。

### 49. 外切正多角形・内接正多角形

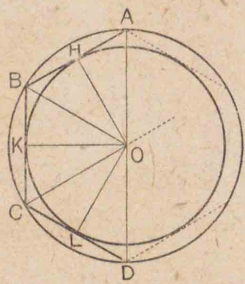
定理 39. 正多角形ハコレニ外接圓及ビ内切圓  
ヲ畫クコトガ出來ル。

假設 正多角形ヲ ABCD……トスルト

終結 ABCD……=(i) 外接圓, (ii) 内切圓ヲ畫クコ

トガ出来ル。

**証明** (i)  $\angle A, \angle B$  ノ二等分線ノ交點ヲ  $O$  トスル。



然ルトキハ  $\angle OAB = \angle OBA$

$\therefore OA = OB$

$OC$  ヲ結ブト

$\triangle OAB = \triangle OCB$  (定理4)

$\therefore OA = OC$

$\therefore OA = OB = OC$

扨テ  $\angle OCB = \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle BCD$

ソレ故  $OC$  ハ  $\angle BCD$  ノ二等分線デアル。

次ニ  $OD$  ヲ結ブト上ト同様ニ

$OB = OC = OD$

ヲ得ル。以下順ニ進ンデ

$OA = OB = OC = OD = \dots$

因テ  $O$  ヲ中心トシ  $OA$  ヲ半径トスル圓ハ各頂點  $A, B, C, D, \dots$  ヲ過ル。

即チコノ圓ハ正多角形  $ABCD, \dots$  ノ外接圓デアル。

(ii)  $O$  カラ  $AB, BC, CD, \dots$  ニ垂線  $OH, OK, OL, \dots$

ヲ下スト  $AB = BC = CD = \dots$  ナル故

$OH = OK = OL = \dots$  (定理29)

因テ  $O$  ヲ中心トシ  $OH$  ヲ半径トスル圓ハ各邊

$AB, BC, CD, \dots$  ニ切スル。

即チコノ圓ハ正多角形  $ABCD, \dots$  ノ内切圓デアル。

**注意** 正多角形ノ外接圓ノ中心ト内切圓ノ中心ハ同一ノ點デアル。コノ點ヲ正多角形ノ中心トイフコトガアル。

**定理 40.** 圓ノ中心ニ於ケル一周角ヲ幾ツカニ等分スル半径ノ端ノ點ヲ順次ニ結ブトキハ、内接正多角形ヲ得ル。又ソノ半径ノ端ノ點テ圓ニ切線ヲ引クトキハ、外切正多角形ヲ得ル。

**假設** 圓  $O$  ニ於テ中心ニ於ケル一周角ヲ幾ツカニ等分スル半径ヲ  $OA, OB, OC, OD, \dots$  トシ、

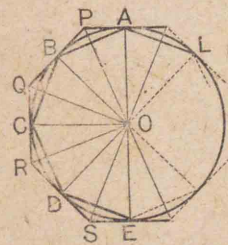
(i)  $A, B, C, D, \dots$  ヲ結ブ

(ii)  $A, B, C, D, \dots$  ニ於ケル圓  $O$  ノ切線ノ次々ノ交點ヲ  $P, Q, R, S, \dots$  トスルト

**終結** (i)  $ABCDE, \dots$  ハ圓  $O$  ノ内接正多角形

(ii)  $PQRS, \dots$  ハ圓  $O$  ノ外切正多角形デアル。

**証明** (i)  $OA = OB = OC = \dots$



$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \dots$

$\therefore \triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \dots$

$\therefore AB = BC = CD = \dots$

且ツ  $\angle LAB = \angle ABC = \dots$

故ニ  $ABCDE, \dots$  ハ正多角形、

即チ圓 O ノ内接正多角形デアアル。

(ii) 次ニ OP, OQ, ……ハ  $\angle AOB, \angle BOC, \dots$ ノ二等分線デ、明カニ  $\triangle OAP \equiv \triangle OBQ$ デアアル。

又  $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ デアアルカラ

$$\triangle OAP \equiv \triangle OBP \equiv \triangle OBQ$$

ヲ得ル。以下同様ニ進ンデ

$$\triangle OAP \equiv \triangle OBP \equiv \triangle OBQ \equiv \triangle OCQ \equiv \dots$$

從ツテ  $PQ = QR = RS = \dots$ ,

及ビ  $\angle P = \angle Q = \angle R = \dots$

即チ PQRS ……ハ外切正多角形デアアル。

問 1. 正方形ノ一邊ハツノ内切圓ノ直徑ニ等シイ。

問 2. 圓ニ内接スル等邊多角形ハ正多角形デアアル。

問 3. 圓ニ外切スル等角多角形ハ正多角形デアアル。

### 50. ニツノ圓

定義 ニツノ圓周ガ二點デ出會フトキソレ等ハ相交ルトイヒ、唯一點デ出會フトキソレ等ハ相切スルトイフ。二圓ノ中心ヲ過ル直線ヲ二圓ノ中心線トイフ。

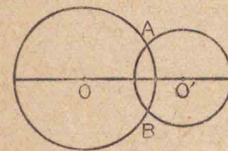
三意 三點ハ一ツノ圓ヲ決定スルカラニツノ圓周ハ三點以上デ出會ハナイ。

定理 41. ニツノ圓周ガ相交ルトキ、ソノ交點ハソノ中心線ニ關シテ對稱デアアル。

假設 O, O'ノ圓周ガ二點 A, Bデ交ルトスルト

終結 A, Bハ中心線 OO'ニ關シテ對稱デアアル。

證明 圓ハ直徑ニ關シテ對稱デアアルカラ、中心線



OO'ヲ折目トシテ、ソレカラ上ノ

平面ヲ下ヘ折返スト、上ノ半圓ハ

夫々下ノ半圓ニ合スル。故ニ上

ノ注意ヨリ Aハ Bニ合スル。因テ A, Bハ OO'ニ關シテ對稱デアアル。

圖 1. ニツノ圓周ガ相切スルトキ、ソノ切點ハソノ中心線上ニアル。

(モシ切點ガ中心線上ニナケレバ、

ソレニ關シ對稱ナ點デ再ビ出會フ。

因テニツノ圓周ハ相交ルコトナル)

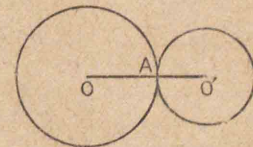
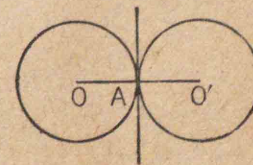
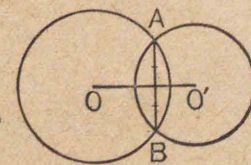


圖 2. ニ

ツノ圓周ガ

相交ルトキ、

ソノ中心線





ハ共通弦ヲ垂直ニ二等分スル。

図3. ニツノ圓周ガ相切スルトキ、ソノ切點ヲ過リ中心線ニ垂直ナ直線ハ二圓ニ共通ナ切線デアル。

問1. 相交ル二圓ノ交點ヲA, Bトシ、Aヲ過ッテ二圓ノ直徑AC, ADヲ引クトキ、三點C, B, Dハ一直線上ニアル。

問2. 一ツノ直線上ノ一點ニ於テコノ直線ニ切スルニツノ圓ハ相切スル。

問3. ニツノ圓ガ相切スルトキ、ソノ切點ヲ過ル任意ノ直線ハソノ二圓カラ等シイ角ヲ含ム弓形ヲキリトル。

### 51. 二圓ノ位置ノ關係

定義 相切スル二圓ガ互ニ他ノ外ニアルトキ、ソレ等ハ外切スルトイヒ、一方ガ他方ノ内ニアルトキ、ソレ等ハ内切スルトイフ。

定理 42. 二圓O, O'ノ半徑ヲ夫々r, r'トシ

(i) 一方ノ圓ガ他方ノ圓ノ全ク外ニアルトキ

$$OO' > r + r'$$

(ii) 二圓ガ外切スルトキ  $OO' = r + r'$

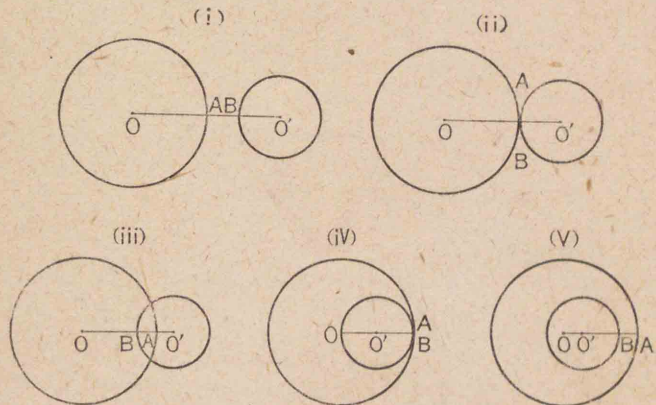
(iii) 二圓ガ相交ルトキ  $r - r' < OO' < r + r'$

(iv) 二圓ガ内切スルトキ  $OO' = r - r'$

(v) 一方ノ圓ガ他方ノ圓ノ全ク内ニアルトキ

$$OO' < r - r'$$

證明 略スル。



注意 二ツノ圓ノ位置ノ關係ハ上ノ五ツノ他ニハナイ。

### 練習 (6)

1. 矩形、菱形ハ夫々ニツノ對稱ノ軸ヲモチ、正方形ハ四ツノ對稱ノ軸ヲモツ。ソシテコレ等ノ軸ノ交點ハ對稱ノ中心デアル。一般ニ互ニ垂直ナニツノ對稱ノ軸ヲモツ圖形ハ軸ノ交點ニ關シテ對稱デアル。

2. 一ツノ直線ガニツノ同心圓ノ周ト交ルトキ、ソノ直線ノニツノ圓周ノ間ニ夾マレル部分ハ相等

シイ。

3. 一ツノ點カラ圓周上一ノ點マデ引イタ線分ノ中,中心ヲ過ルモノガ最大又ハ最小デアアル。

(定理20及ビ系1)

4. 三角形ABCノ各項點カラソノ對邊ヘ引イタ垂線ハ同一ノ點ヲ過ル。

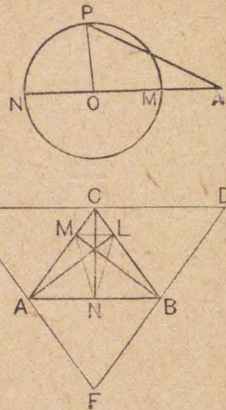
定義 三角形ノ各頂點カラソノ對邊ニ下シタ垂線ノ交點ヲ三角形ノ垂心トイフ。

5. 二圓ノ交點A,Bヲ過ツテ直線PAQ及ビRBSヲ引キ,圓周ト夫々P,Q及ビR,Sデ交ラシメルトキPR//QSデアアル。

6. 二圓ガ切スルトキ,ソノ切點ヲ過ル任意ノ二ツノ直線ガ二ツノ圓周カラキリトル弧ノ弦ハ平行デアアル。

7. 一ツノ圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ヲ畫クトキ,ソノ切點ヲ過ル大圓ノ弦ハ小圓ノ周ニヨツテ二等分セラレル。

8. 三角形ABCノ垂心ヲHトスルト,四點A,B,C,Hノ中,任意ノ一ツハ他ノ三ツヲ頂點トスル三角形



ノ垂心デアアル。

9. 三角形ノ外心,内心,垂心ノ中ニツツツガ同一ノ點ナルトキ,コノ三角形ハドンナ三角形カ。

10. 三角形ABCノ頂點Aニ於テ引イタ外接圓ノ切線ニ平行ナ直線ガ邊AB,ACト交ル點ヲ夫々P,Qトスルト,四邊形BPQCハ圓ニ内接スル。

11. 互ニ外ニアル二圓ノ周上ニ兩端ヲモツ線分ノ中,最大及ビ最小ナルモノハソノ中心線上ニアル。

12. 三角形ABCノ垂心ヲH,外心ヲO,Oカラ邊BCニ下シタ垂線ノ足ヲMトスルト, $AH=2OM$ デアアル。

13. 圓ニ内接スル多角形ノ角ガ皆等シイトキ,ソノ邊ハ一ツオキニ相等シイ。從ツテ邊數ガ奇數ナラバ,ソノ多角形ハ正多角形デアアル。

## 第七章 作圖題

### 52. 作圖題

定義 與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ畫ク幾何學的方法ヲ求メル問題ヲ作圖題トイヒ,圖形ヲ畫ク幾何學的方法ヲ作圖法或ハ單ニ作圖トイフ。

圖形ヲ畫クコトヲ作圖スルトイヒ、又作圖シテ得タ圖形ヲ作圖ノ解答トイフ。

### 53. 作圖ノ器具

作圖スルニ際シテ用ヒル器具ハ次ノ二ツニ限ラレテアル。

(i) 目盛ノナイ定規……………(直線ヲ畫クモノ)

(ii) こんばす……………(圓ヲ畫クモノ)

**注意** 線分ノ長サヲ計リ又ハ線分ヲ幾ツカニ等分スルタメニ目盛ノアル定規即チ物指ヲ用ヒタリ、角ヲ計ルタメニ分度器又ハ三角定規ノ角ヲ用ヒタリ等スル作圖ノ仕方ハ幾何學の作圖法トハイハナイ。

### 54. 作圖ノ公法

作圖スルニ際シ前節デ述ベタヤウナ定規及ビこんばすがケヲ用ヒルトイフコトハ、作圖ノ最初カラ次ノ二ツノコトガ出來ルモノト認メテアルノト同様デアル。

(i) 任意ノ二點ヲ過ル直線ヲ引クコト。

(ii) 任意ノ點ヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓ヲ畫クコト。

コレ等ヲ作圖ノ公法トイフ。從ツテ

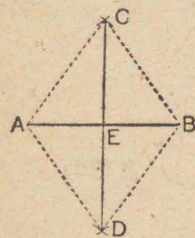
(i)ニヨツテ線分ヲ延長スルコトガ出來ル。

(ii)ニヨツテ線分ヲ他ニ移スコトガ出來ル。

### 55. 基本ノ作圖題

**作圖題** 1. 與ヘラレタ線分ヲ二等分セヨ。

**題意** 與ヘラレタ線分ヲ AB トシ、AB ヲ二等分スルコトヲ求メル。



**作圖** A 及ビ B ヲ中心トシテ、任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ畫キ、ソノ交點ヲ C, D トシ、C ト D ヲ結ビ、コレガ AB ト交ル點ヲ E トスル。然ルトキ E ハ AB

ヲ二等分スル。

**證明** AC, BC, AD, BD ヲ結ブト

$$\triangle ACD \equiv \triangle BCD \quad (\text{定理 8})$$

$$\therefore \triangle ACE \equiv \triangle BCE \quad (\text{定理 4})$$

$$\therefore AE = EB$$

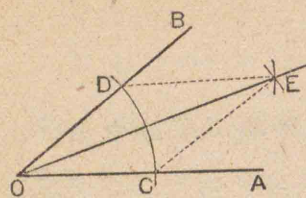
即チ AB ハ E デ二等分セラレル。

**注意** コノ作圖ハ常ニ可能デ、解答ハ唯一ツデアル。

**問** 與ヘラレタ線分ヲ直徑トスル圓ヲ畫ケ。

**作圖題** 2. 與ヘラレタ角ヲ二等分セヨ。

**題意** 與ヘラレタ角ヲ AOB トシ、コレヲ二等分スル直線ヲ引クコトヲ求メル。



**作圖** Oヲ中心トシテ  
任意ノ半徑デ圓ヲ畫キOA,  
OBト交ル點ヲ夫々C,D  
トスル。次ニC及ビDヲ

中心トシテ、任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ  
畫キ、ソノ交點ヲEトシ、OEヲ結ブトOEハ∠AOB  
ヲ二等分スル。

**證明** EC, EDヲ結ブト

$$\triangle OCE \equiv \triangle ODE \quad (\text{定理8})$$

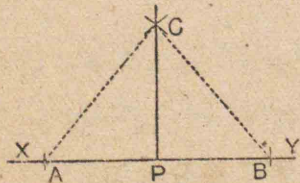
$$\therefore \angle EOC = \angle EOD$$

即チ OEハ∠AOBヲ二等分スル。

**注意** コノ作圖ハ常ニ可能デ解答ハ唯一ツデアル。

**作圖題** 3. 與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ヲ  
過リ、ソノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

**題意** 與ヘラレタ直線ヲ XYトシ、XY上ノ與ヘ  
ラレタ點ヲPトスル。P  
ヲ過ツテ XYニ垂線ヲ引  
クコトヲ求メル。



**作圖** 略スル。(作圖題

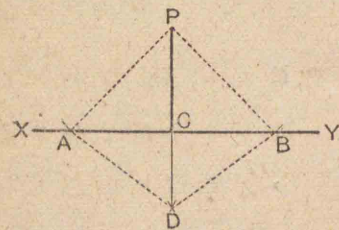
2ノ特別ナ場合デアル)

問1. 與ヘラレタ角ヲ四等分セヨ。

問2. 與ヘラレタ圓ノ周上ニ在ル與ヘラレタ點  
ニ於テ、ソノ圓ニ切線ヲ引ケ。

**作圖題** 4. 與ヘラレタ直線外ノ與ヘラレタ點カ  
ラ、コノ直線ヘ垂線ヲ引ケ。

**題意** 與ヘラレタ直線ヲ XYトシ、XY外ノ點ヲ  
Pトスル。PカラXYヘ垂線ヲ下スコトヲ求メル。



**作圖** Pヲ中心トシ  
テXYニ交ル任意ノ半  
徑ノ圓ヲ畫キ、XYトノ  
交點ヲA,Bトスル。

次ニA,Bヲ中心トシ

テ任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ畫キ、ソノ  
交點ヲDトスル。PトDヲ結ビXYトノ交點ヲC  
トスル。

PCハ求ムル垂線デアル。

**證明** 略スル。

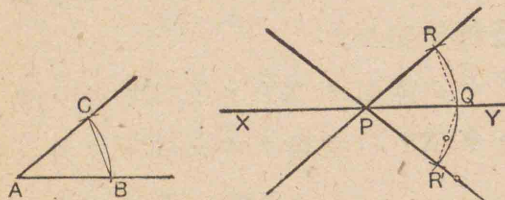
**注意** 作圖ハ常ニ可能デ解答ハ唯一ツデアル。

問 與ヘラレタ三角形ノ高サヲ作レ。

**作圖題** 5. 與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ニ  
於テ、ソノ直線ト與ヘラレタ角ヲナス直線ヲ引ケ。

**題意** 與ヘラレタ直線ヲ XYトシ、XY上ノ與ヘ

ラレタ點ヲPトシ、與ヘラレタ角ヲBACトスル。Pヲ過ツテXYト∠BACニ等シイ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求メル。



**作圖** Aヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓ヲ畫キ、角ノ二邊ト交ル點ヲ夫々B,Cトシ、BCヲ結ブ。

次ニPヲ中心トシテ、ABニ等シイ半徑デ圓ヲ畫キ、PYト交ル點ヲQトスル。ソノ點Qヲ中心トシテ、BCニ等シイ半徑デ圓ヲ畫キ、前ノ圓トノ交點ヲR,R'トスル。PトRトヲ結ベバPRハ求ムル直線デアル。

**證明** QRヲ結ブト

$$\triangle PQR \cong \triangle ABC \quad (\text{定理8})$$

$$\angle QPR = \angle BAC$$

ソレ故 PRハ求ムル直線デアル。

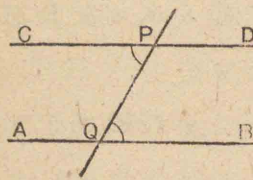
**注意** PR'ヲ結ブト、コレモ亦求ムル直線デアル。ソレ故解答ハ二ツアル。

問 與ヘラレタ二角ノ和ヲ作レ。

**作圖題** 6. 與ヘラレタ點ヲ過ツテ、與ヘラレタ直

線ニ平行線ヲ引ケ。

**題意** 與ヘラレタ點ヲP、直線ヲABトスル。Pヲ過ツテABニ平行線ヲ引クコトヲ求メル。



**作圖** AB上ニ任意ノ點Qヲトリ、PQヲ結ブ。次ニ

點Pニ於テ∠BQPニ等シイ錯角QPCヲナスヤウニ直線CDヲ引ク。(作圖題5)

CDハ求ムル直線デアル。

**證明** 略スル。(定理10)

**作圖題** 7. 與ヘラレタ線分ヲ等分セヨ。

**題意** 與ヘラレタ線分ヲABトシ、ABヲ例ヘバ五等分スルコトヲ求メル。

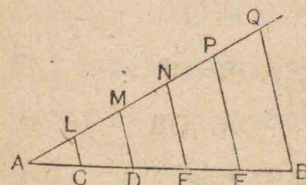
**作圖** Aカラ任意ノ半直線ヲ引キ、ソノ上ニ

$$AL = LM = MN = NP = PQ$$

ナルヤウニL, M, N, P, Qヲトリ、QBヲ結ブ。

次ニP, N, M, Lヲ過ツテQBニ平行線ヲ引キ、ABトノ交點ヲ夫々F, E, D, Cトスル。C, D, E, Fハ求ムル點デアル。

**證明** 略スル。(定理18)



**注意** 作圖ハ常ニ可能デアリ、即チ幾等分デモ出来ル。

問1. 二邊トソノ夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

問2. 與ヘラレタ三線分ヲ三邊トスル三角形ヲ作レ。

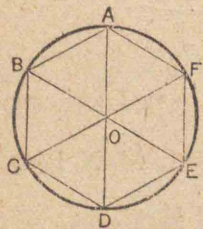
問3. 二邊トソノ夾角ヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作レ。

### 56. 作圖題ノ完全解

**作圖題** 8. 圓ニ内接スル正六角形ヲ作レ。

**題意** 與ヘラレタ圓ヲOトシ、コノ圓ニ内接スル正六角形ヲ作ルコトヲ求メル。

(i) 先ヅ作圖ガ出来タモノトシ、即チ圓Oニ正六角形ABCDEFヲ内接シタトスル。



A, B, C, D, E, Fヲ中心Oト結ブト、中心ニ於ケル一周角ハ六等分セラレテ

$$\angle AOB = 60^\circ$$

然ルニ  $OA = OB$

デアルカラ  $\triangle OAB$ ハ正三角形デアリ。

$$\therefore AB = OA$$

即チ正六角形ノ一邊ハ半徑ニ等シイ。故ニ次ノヤウニ作圖スレバヨイ。

(ii) O圓周上ニ一點Aヲ取り、半徑ノ長サニ等シクこゝろばすヲ開イテ順々ニ圓周ヲキツテ點B, C, D, E, Fヲ定メ、コレ等ヲ順々ニ結ベバ、出来タ六角形ABCDEFハ内接正六角形デアリ。

(iii)  $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODE, \triangle OEF$ ハ總テガ正三角形デアリ。

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = 60^\circ$$

然ルニOノ周リノ一周角ハ  $360^\circ$ デアルカラ

$$\angle FOA = 60^\circ$$

因テ中心ニ於ケル一周角ガ六等分セラレタカラABCDEFハ内接正六角形デアリ。(定理40)

(iv) 圓周ヲ半徑ノ長サニ等シク開イタこゝろばすデAカラ順ニキツテ行クコトハ必ず出来テ且ツ一通リデアルカラ、解答ハ常ニ可能デ且ツ二ツデアリ。

以上デコノ作圖題ハ完全ニ解カレタ。

扱テ作圖題ヲ解クニ當ツテ取ツタ道行キノ中、(i)ハ先ヅ求ムル圖形ガ作圖シ得タモノトシテ、ソノ圖形ニツイテソノ性質及ビ既知事項ト未知事項トノ關係等ヲシラベ、ソシテ如何ニスレバ作圖シ得ルカトイフコトヲ考ヘタノデアリ。コレヲ作圖題ノ解析トイフ。(ii)ハ解析ノ結果ニ基イテ所要ノ作圖ヲ

行ツタモノデアル。コレヲ作圖題ノ作圖又ハ總合トイフ。(iii)ハ作圖法ノ正シイコトヲ示シタモノ即チ證明デアル。ソシテ(iv)ハ作圖ガ可能ナル場合及ビ解答ノ數ヲ探シタモノデアツテ、コレヲ作圖題ノ吟味トイフ。

困難ナ作圖題ハ通常コノ解析、作圖、證明、吟味ノ四階段ヲ經テ完全ニ解決シ得ルモノデアル。然シ容易ナ作圖題ハ作圖、證明、吟味ノ三階段デヨイ。

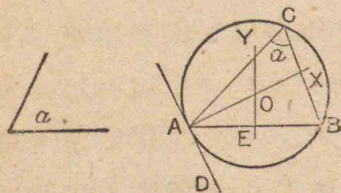
問1. 圓ニ外切スル正六角形ヲ作レ。

問2. 圓ニ内接及ビ外切スル正方形、正八角形ヲ作レ。

問3. 圓ニ内接及ビ外切スル正三角形、正十二角形ヲ作レ。

**作圖題** 9. 與ヘラレタ線分上ニ與ヘラレタ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ。

**題意** 與ヘラレタ線分ヲ AB トシ、與ヘラレタ角ヲ  $\alpha$  トスル。AB 上ニ  $\angle \alpha$  ヲ含ム弓形ヲ畫クコトヲ求メル。



**作圖** Aヲ過リ AB ト  $\angle \alpha$  ヲナス直線 AD ヲ引キ、Aニ於テコノAD

ニ垂線 AX ヲ立テル。

次ニ AB ノ垂直二等分線 EY ヲ引キ、コレト AX トノ交點ヲ O トスル。O ヲ中心トシテ半徑 OA ノ圓ヲ畫ケバ  $\angle BAD$  ニ夾マレナイ弧ト AB トノナス弓形ガ求メルモノデアル。

**證明**  $OA=OB$  デアルカラ圓 O ハ B ヲ過ル。

又  $\angle BAD = \angle \alpha$

$\angle BAD = \angle ACB$  (定理34)

$\therefore \angle ACB = \angle \alpha$

ソレ故弓形 ACB ハ  $\angle \alpha$  ヲ含ム。

**吟味** (イ) 直線 AB ニ關シテ弓形 ACB ト對稱ナ弓形モ亦條件ニ適スルカラ解答ハニツデアル。

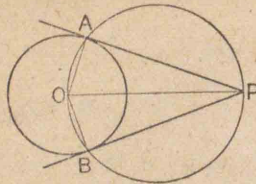
(ロ) 作圖ガ出來ルタメニハ  $\angle \alpha < 2R\angle$  デナケレバナラナイ。

問 與ヘラレタ圓カラ與ヘラレタ角ヲ含ム弓形ヲキリトレ。

### 57. 切線ノ作圖題

**作圖題** 10. 與ヘラレタ點カラ與ヘラレタ圓ヘ切線ヲ引ケ。

**題意** 與ヘラレタ圓ヲ O, 與ヘラレタ點ヲ P トスル。P カラ圓 O へ切線ヲ引クコトヲ求メル。



作圖 OPヲ結ビ、コレヲ直徑

トスル圓ヲ畫キ、圓Oトノ交點ヲA、Bトスル。PA、PBヲ結ブト、コレ等ハ求ムル切線デアアル。

證明 略スル。

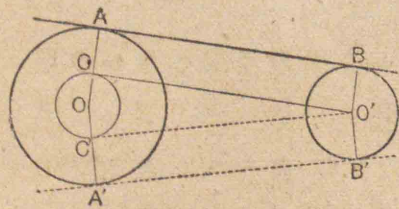
- 吟味 (イ) Pガ圓Oノ外ニアレバ解答ハ二ツ。
- (ロ) Pガ圓Oノ周上ニアレバ解答ハ一ツ。
- (ハ) Pガ圓Oノ内ニアレバ解答ハナイ。

作圖題 11. 與ヘラレタニツノ圓ニ共通ナ切線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ圓ヲO、O'トシ、ソレ等ニ共通ナ切線(共通切線)ヲ引クコトヲ求メル。

(i) 二圓ガ共通切線ノ同側ニアル場合。(共通外切線)

解析 ABヲ共通外切線ノ一ツト假定シ、ソノ切點ヲA、Bトスル。OA、O'Bヲ結ブ。扱テ次ニ小ナ



ル圓ノ中心O'カラ ABニ平行線ヲ引イテOAトノ交リヲCトスレバ、四邊形CABO'ハ矩形デア

$\angle OCO' = R\angle$ デアアル。

ソシテ  $OC = OA - AC = OA - O'B$

ソレ故 O'CハOヲ中心トシ、OCヲ半徑トスル圓ノ切線デアアル。

作圖 大ナル圓ノ中心Oヲ中心トシ、二圓ノ半徑ノ差ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ、O'カラコノ圓ニ切線O'Cヲ引キ、ソノ切點ヲCトスル。(作圖題10) Cヲ過ル圓Oノ半徑OAヲ畫キ、OAニ平行ニ圓O'ノ半徑O'Bヲ引ク。然ルトキハ直線ABハ求ムル共通外切線デアアル。

證明 四邊形CABO'ハ矩形デアアルカラ  $OA \perp AB$ ,  $O'B \perp AB$ 。即チABハ兩圓ニ切スル。

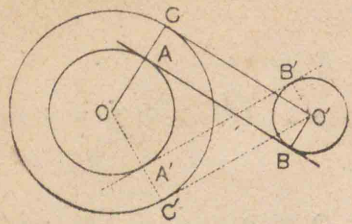
吟味 求ムル切線ノ數ハO'カラ二圓ノ半徑ノ差ヲ半徑トシタ第三ノ圓ニ引イタ切線ノ數ト同數デアアルカラ、點O'ガ

- (イ) 第三ノ圓ノ外ニアレバ解答ハ二ツ。
- (ロ) 第三ノ圓周上ニアレバ解答ハ一ツ。
- (ハ) 第三ノ圓ノ内ニアレバ解答ハナイ。
- (ii) 二圓ガ共通切線ノ兩側ニアル場合。(共通内切線)

作圖 大ナル圓ノ中心Oヲ中心トシ、二圓ノ半徑







ノ和ヲ半徑トシテ第三ノ圓ヲ畫キ、 $O'$ カラコノ圓ニ切線  $O'C$ ヲ引キ  $C$ ヲソノ切點トスル。  $OC$ ヲ結ビコ

レト  $O$ 圓周トノ交點ヲ  $A$ トシ、 $O'$ カラ  $OC$ ニ平行ニ圓  $O'$ ノ半徑  $O'B$ ヲ作レバ、 $AB$ ハ求ムル共通内切線デアル。

**證明**、**吟味** 略スル。

問 二圓ノ共通外切線及ビ共通内切線ノ交點ハ二圓ノ中心線上ニアル。

**練習** (7)

1. 二線分ノ和ト差ヲ與ヘテ各線分ヲ見出セ。
2. 圓周ガ與ヘラレタトキ、ソノ中心ヲ求メヨ。
3. 與ヘラレタ點ヲ中心トシテ、與ヘラレタ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。
4. 與ヘラレタ點  $A$ ヲ過ツテ、與ヘラレタ角  $XOY$ ノ二邊ト夫々  $B, C$ デ交ル直線ヲ引キ、 $\triangle OBC$ ガ  $O$ ヲ頂點トスル二等邊三角形ニナルヤウニセヨ。
5. 與ヘラレタ角  $BAC$ 内ノ與ヘラレタ點  $O$ ヲ過

ツテ角ノ二邊マデ線分  $POQ$ ヲ引キ、ソノ線分ガ  $O$ デ二等分セラレルヤウニセヨ。

6. 一邊ト一角ヲ知ツテ二等邊三角形ヲ作レ。
7. 頁96問2ヲ吟味セヨ。
8. 甲乙二人ガ  $500\text{m}$ ヲ隔テタ地點ニ於テ電光ヲ見タ後、甲ハ3秒、乙ハ4秒ヲ經テ雷鳴ヲ聞イタ。雷ノ位置ヲ作圖セヨ。(音ノ速サハ每秒  $333\text{m}$ )
9. 二角ト一邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。
10. 難破船ガ既知ノ燈臺  $A, B$ ノ信號ヲ南北ノ線ト夫々角  $\alpha, \beta$ ヲナスヤウニ見タ。難破船ノ位置ヲ作圖セヨ。

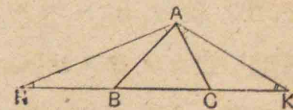
11. 與ヘラレタ底邊、頂角及ビ高サヲモツ三角形ヲ作レ。

12. 與ヘラレタ點ヲ過ツテ與ヘラレタ圓ノ割線ヲ引キ、圓内ノ部分ヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ。

13. 定直線  $XY$ ノ同ジ側ニ、與ヘラレタ二點  $A, B$ ガアル。  $XY$ 上ニ點  $P$ ヲ見出シ、 $\angle APX = \angle BPY$ トナルヤウニセヨ。

14. 直角ヲ三等分セヨ。

15. 二角ト周ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。



16. 角 XOY ノ一邊 OX 上ノ與ヘラレタ點 A = 於テコレニ切シ、且ツ OY ニ切スル圓ヲ畫ケ。

## 第八章 比・比例線

### 58. 量ノ比

**定義** 同種類ノ二ツノ量 A, B ニツイテ A ガ B ノ何倍デアルカトイフ關係ヲ A ノ B ニ對スル比トイヒ、コレヲ A : B 或ハ  $\frac{A}{B}$  ト書ク。ソシテ A, B ヲ比ノ項トイヒ、A ヲ比ノ前項、B ヲ比ノ後項トイフ。

A : B ヲ A ノ B ニ對スル比又ハ A 對 B ト讀ム。

**注意** 同種類ノ量デナケレバ比ハ考ヘラレナイコトハ明ラカデアル。

**定義** 或量 A ヲ他ノ量 B ヲ單位トシテ計ツタトキニ得タ數ヲ A ノ B ニ對スル比ノ値トイフ。

A : B ノ値ヲ  $n$  トスルト  $A = nB$  デアル。

**注意** 二ツノ量ノ比ハソノ値ニヨツテ定マルカラ、二ツノ比ガ等シイトハ、ソノ比ノ値ガ等シイコトデアル。

**定理** 43. 二ツノ量ノ比ハコレ等ヲ同ジ單位デ計ツテ得タ二數ノ比ニ等シイ。ソシテコノ比ハ計ル單位ノ大イサニ關シナイ。

**假設** 二ツノ量ヲ A, B トシ、コレヲ量 C デ計ツテ得タ數ヲ夫々  $a, b$  トスルト

**終結**  $A : B = a : b$ 、且ツ  $a : b$  ハ量 C ノ大イサニ關シナイ。

$$\begin{aligned} \text{證明} \quad & A = aC & B = bC \\ \therefore & C = \frac{A}{a} & \therefore A = \frac{a}{b}B \\ \therefore & & A : B = a : b \end{aligned}$$

次ニ A, B ヲ C 以外ノ單位例ヘバ D デ計ツテ得タ數ヲ夫々  $a', b'$  トスル。今  $D = nC$  トスルト

$$A = a'D = a'nC; \quad B = b'D = b'nC$$

$$\begin{aligned} \text{然ルニ} \quad & A = aC, \quad B = bC \\ \therefore & aC = a'nC, \quad bC = b'nC \\ \therefore & \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \end{aligned}$$

即チ比ハ計ル單位ノ大イサニ關シナイ。

**定義** 同種類ノ量 A, B ニツイテ B : A ヲ A : B ノ反比又ハ逆比トイフ。

$$\frac{A}{B} = n \quad \text{ナルトキハ} \quad \frac{B}{A} = \frac{1}{n}$$

從ツテ  $(A:B)(B:A)=1$  デアル。

**定義** ニツ以上ノ比ノ相乗積ヲソレ等ノ比ノ相乗比又ハ複比トイフ。相等シイニツノ比ノ複比ヲ二乗比、相等シイ三ツノ比ノ複比ヲ三乗比トイフ。

例ヘバ  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \times \frac{E}{F} \times \frac{G}{H}$  ナルトキ  $\frac{A}{B}$  ハ  $\frac{C}{D}$ 、 $\frac{E}{F}$ 、 $\frac{G}{H}$  ノ複比デアル。次ニ  $\frac{C}{D} = \frac{E}{F}$  デ且ツ  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \times \frac{E}{F}$  ナルトキ  $\frac{A}{B}$  ハ  $\frac{C}{D}$  又ハ  $\frac{E}{F}$  ノ二乗比デアル。コレヲ  $\frac{A}{B} = \left(\frac{C}{D}\right)^2$  又ハ  $\frac{A}{B} = \left(\frac{E}{F}\right)^2$  ト書ク。

**定理** 44. 同種類ノ三ツノ量  $A, B, C$  ニ於テ  $\frac{A}{B}$  ハ  $\frac{A}{B}$  ト  $\frac{B}{C}$  トノ複比デアル。

**證明**  $\frac{A}{B} = m$  及ビ  $\frac{B}{C} = n$  トスルト

$$A = mB \quad \text{及ビ} \quad B = nC \quad \therefore A = mnC$$

$$\text{即チ} \quad \frac{A}{C} = mn = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$$

**注意** 四ツ以上ノ量ニツイテモ同様デアル。

問 同種類ノ量  $A, B, C$  ニ於テ  $A:B$  ガ  $B:C$  ニ等シイトキ、 $\frac{A}{C} = \left(\frac{A}{B}\right)^2$  デアル。

**注意** 上ノ諸定理ヨリ代數學デ述ベク比ノ性質ハ同種類ノ量ニ適用セラレル。

例ヘバ  $m$  ノ實數トスルト  $A:B = mA:mB$  デアル。

### 59. 量ノ比例式

**定義** 四ツノ量  $A, B, C, D$  ノ中、 $A$  ト  $B, C$  ト  $D$  ハ夫々同種類デ、 $A:B$  ガ  $C:D$  ニ等シイトキ、コノ四量ハ比例ヲナストイフ。

量  $A, B, C, D$  ガ比例ヲナストキ、 $A:B=C:D$  又ハ  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  ト書キ、コレ等ヲ比例式トイフ。

ソシテ  $A, B, C, D$  ヲ夫々比例式ノ第一項、第二項、第三項、第四項トイヒ、 $A$  ト  $C, B$  ト  $D$  ハ相對應スルトイフ。又  $A, D$  ヲ比例式ノ外項、 $B, C$  ヲソノ内項、 $D$  ヲソノ第四比例項トイフ。

**定義** 同種類ノ三ツノ量  $A, B, C$  ニ於テ  $A:B$  ガ  $B:C$  ニ等シイトキ、コノ三量ハ比例ヲナストイヒ、 $B$  ヲ  $A, C$  ノ比例中項、 $C$  ヲ  $A, B$  ノ第三比例項トイフ。

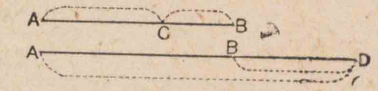
定理43ニヨリ代數學ノ比例ノ公式ハ量ニモ用ヒラレル。因テ四量  $A, B, C, D$  ニ於テ

- (i)  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  ナルトキ,  $A \leq B$  ナラバ  $C \leq D$
- (ii)  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  及ビ  $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$  ナルトキ,  $\frac{C}{D} = \frac{E}{F}$
- (iii)  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  ナルトキ,  $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$
- (iv)  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  ナルトキ,  $\frac{mA}{mB} = \frac{nC}{nD}$
- (v)  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  ナルトキ,  $\frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}$   
又  $A > B$ , 從ツテ  $C > D$  ナルトキ,  $\frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}$
- (vi)  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  ナルトキ,  $A, B, C, D$  が皆同種類ナラバ  
 $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$  及ビ  $\frac{D}{B} = \frac{C}{A}$
- (vii)  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \dots$  ナルトキ,  $A, B, C, D, E, F, \dots$   
...が皆同種類ナラバ  
 $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \dots = \frac{A+C+E+\dots}{B+D+F+\dots}$   
又  $A > C$ , 從ツテ  $B > D$  ナルトキ  
 $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A-C}{B-D}$
- (viii)  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  ナルトキ,  $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \left(\frac{C}{D}\right)^n$

### 60. 内分・外分

定義 一つノ線分上ノ點ハソノ線分ヲ内

分スルトイヒ, ソノ點ヲソノ線分ノ内分點トイフ。一つノ線分ノ延長上ノ點ハソノ線分ヲ外分スルトイヒ, ソノ點ヲソノ線分ノ外分點トイフ。ソシテ



分點カラソノ線分ノ兩端マデノ距離ヲソノ分トイフ。

**注意** 一つノ線ガ内分セラレタトキ全線分ハ二ツノ分ノ和デ, 外分セラレタトキ全線分ハ二ツノ分ノ差デアル。

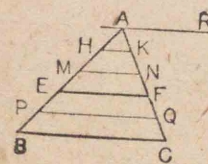
### 61. 平行線ニヨル分

**定理** 45. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ハ他ノ二邊ヲ同ジ比ニ内分又ハ外分スル。

**假設**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $BC$  ニ平行ナ直線ガ  $AB, AC$  (又ハソノ延長)ト交ル點ヲ夫々  $E, F$ トスルト

**終結**  $AE:EB=AF:FC$  デアル。

**證明**  $AH$  ヲ單位トシテ計ツタトキ, 例ヘバ



$AE=3 \cdot AH, EB=2 \cdot AH$  トナツタトスル。今各分點ヲ過ツテ  $BC$  ニ平行線ヲ引キ, 又  $A$  ヲ過ツテ  $BC$  ニ平行線ヲ引クト

$$AH=HM=ME=EP=PB$$

∴ AK=KN=NF=FQ=QC (定理18)

故 = AF=3·AK, FC=2·AK

因テ AF/FC = 3·AK/2·AK = 3/2 又 AE/EB = 3·AH/2·AH = 3/2

∴ AE/EB = AF/FC

図1. 前圖ニ於テ次ノ比例式ヲ得ル.

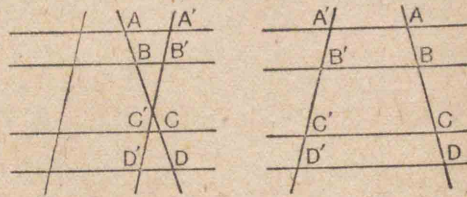
(i) AE·AB=AF·AC

(ii) AB:BE=AC:CF

(iii) AE:AB=EF:BC

図2. 多クノ平行線ガ二直線ト交ツテ,コレヲ幾

ツカノ部分ニキ  
ルトキ,ソノ對應  
スル部分ノ比ハ  
相等シイ.



問1. 一點カラ引イタ三ツノ直線ガ二ツノ平行  
線ト交ル點ヲ夫々 A, B, C; A', B', C' ト  
スルト AB:A'B'=BC:B'C' デアル.

問2. 右圖ニ於テ BD//CE, AD//BE  
ナルトキ,OA:OB=OB:OC デアル.



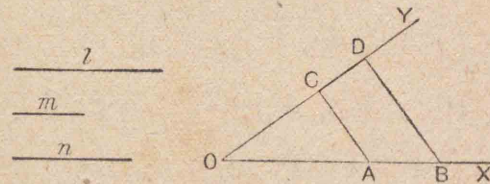
62. 線分ヲ比ニ分ツコト

作圖題 12. 與ヘラレタ三ツノ線分ノ第四比例項

ヲ求メヨ.

題意 與ヘラレタ三ツノ線分ヲ l, m, n トスルト  
キ, l:m=n:x ナル線分 x ヲ求メル.

作圖 任意ノ角 XOY ヲ作り,ソノ一邊 OX 上ニ l  
ニ等シク OA ヲトリ, m ニ等シク且ツ同ジ向キニ



AB ヲトル.  
次ニ OY 上  
ニ n ニ等シ  
ク OC ヲト

リ, AC ヲ結び, B カラ AC ニ平行線ヲ引キ, OY トノ  
交點ヲ D トスルトキ, CD ハ求ムル線分デアル.

證明 略スル.

問 與ヘラレタ二ツノ線分ノ第三比例項ヲ求メ  
ヨ.

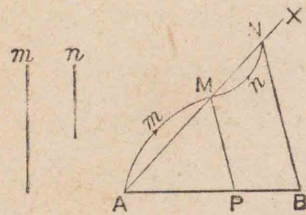
作圖題 13. 與ヘラレタ線分ヲ與ヘラレタ比ニ内  
分又ハ外分セヨ.

題意 與ヘラレタ線分ヲ AB, 與ヘラレタ比ヲ  
m:n トスル. AB ヲ m:n ノ比ニ (i) 内分, (ii) 外分ス  
ル點ヲ求メル.

(i) 内分ノ場合.

作圖 A ヲ過ツテ直線 AX ヲ引キ,ソノ上ニ m ニ

等シク AM ヲトリ,ソノ延長上ニ  $n$  = 等シク MN ヲ

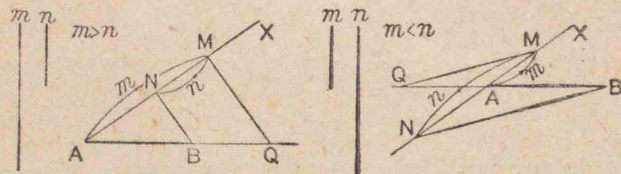


トリ, NB ヲ結び, M カラ NB = 平行ニ引イタ直線ト AB トノ交リヲ P トスルト, P ハ求ムル點デアル。

証明 略スル。

(ii) 外分ノ場合。

作圖 AX 上ニ  $m$  = 等シク AM ヲトリ, M カラ A ノ方ニ  $n$  = 等シク MN ヲトリ, NB ヲ結び, M カラ NB = 平行線ヲ引キ, AB ノ延長トノ交點ヲ Q トスルト, Q ハ求ムル點デアル。



証明 略スル。

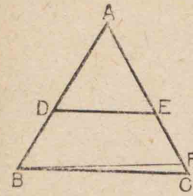
問 AB ヲ C デ内分シ,  $AB:AC=m:n$  ナルヤウニセヨ。但シ  $m, n$  ハ與ヘラレタ定線分デアル。

46. 三角形ノ二邊ヲ同ジ比ニ内分(又ハ外分)スル點ヲ結ブ直線ハ第三邊ニ平行デアル。

設  $\triangle ABC$  = 於テ  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$  トスルト

終結  $DE \parallel BC$  デアル。

証明  $BF \parallel DE$  トスレバ



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EF}$$

然ルニ  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AE}{EC} \quad \therefore EF = EC$$

故ニ F ハ C = 重ナル。  $\therefore BC \parallel DE$

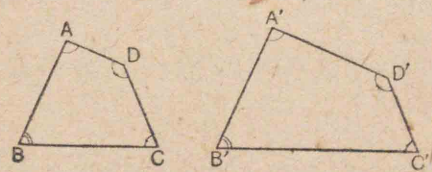
外分ノトキモ同様ニ證明出來ル。

與ヘラレタ線分ヲ與ヘラレタ比ニ内分(又ハ外分)スル點ハ唯一ツニ限ル。

### 第九章 相似形

#### 63. 相似多角形

定義 邊數ガ等シイニツノ多角形ニ於テ, 總テノ角ガ順ニ夫々相等シイトキ, ソノニツ

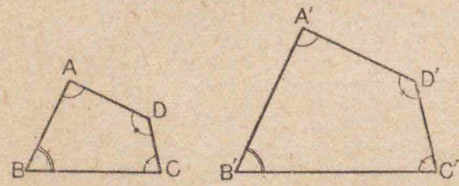


ノ多角形ハ互ニ等角デアルトイフ。ソノ相等シイ角ヲ

對應角トイヒ、對應角ノ間ニアル邊ヲ對應邊トイフ。

定義 二ツノ多角形ガ互ニ等角デ、且ツ對應邊ノ比ガ相等シイトキ、ソノ二ツノ多角形ハ互ニ相似デアルトイヒ、コノ圖形ヲ相似形トイフ。ソシテソノ對應邊ノ比ヲ相似比トイフ。

相似多角形ハツノ角又ハ邊ノ數ニ從ツテ相似三角形、相似四邊形、相似五邊形、……トイフ。



相似ノ記號ニハ∞ヲ用ヒル。圖ノ二ツノ四邊形ニ於テ

∠A=∠A', ∠B=∠B', ∠C=∠C', ∠D=∠D'

且ツ AB/A'B' = BC/B'C' = CD/C'D' = DA/D'A'

ナルトキ、四邊形ABCDの四邊形A'B'C'D'デアル。

ソシテ AB/A'B' ハ相似比デアル。

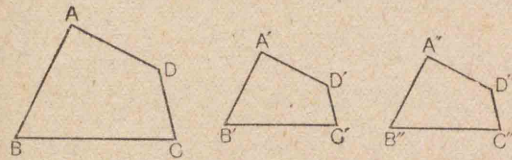
図 一ツノ多角形ニ相似ナ多角形ハ互ニ相似デアル。

證明 例へバ 四邊形ABCDの四邊形A'B'C'D'

且ツ 四邊形ABCDの四邊形A''B''C''D''トスルト

∠A=∠A', ∠A=∠A'' ∴ ∠A'=∠A''

同様ニ



∠B'=∠B'', ∠C'=∠C'', ∠D'=∠D''

次ニ AB/A'B' = BC/B'C' = CD/C'D' = DA/D'A' (1)

又 AB/A''B'' = BC/B''C'' = CD/C''D'' = DA/D''A'' (2)

(2)÷(1) A'B'/A''B'' = B'C'/B''C'' = C'D'/C''D'' = D'A'/D''A''

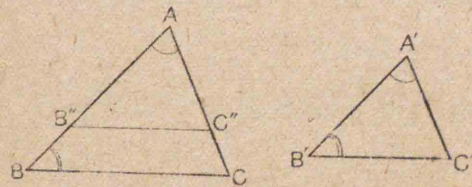
故ニ 四邊形A'B'C'D'の四邊形A''B''C''D''デアル。

64. 三角形ノ相似

定理 47. 二角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル。

假設 △ABC, △A'B'C'ニ於テ ∠A=∠A', ∠B=∠B'トスルト

終結 △ABCの△A'B'C'デアル。



證明 ∠A=∠A', ∠B=∠B'デアルカラ ∠C=∠C'

次ニ AB AC 上ニ夫々 A'B', A'C' ニ等シク AB'', AC'' ヲトリ, B''C'' ヲ結ブトキハ

$$\begin{aligned} &\triangle AB''C'' \sim \triangle A'B'C' \\ \therefore &\angle AB''C'' = \angle B' = \angle B \\ \therefore &B''C'' \parallel BC \\ \therefore &\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''} \quad (\text{定理 45 系 1}) \\ \therefore &\triangle ABC \sim \triangle AB''C'' \quad \text{即チ} \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \end{aligned}$$

図 1. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ト他ノ二邊(又ハソノ延長)トテ出來ル三角形ハ、モトノ三角形ニ相似デアアル。

図 2. ニツノ相似三角形ノ對應頂點カラノ高サノ比ハソノ相似比ニ等シイ。

問 1. 弦 AB, CD(又ハソノ延長)ノ交點ヲ E トスレバ,  $\triangle AEC$  ト  $\triangle DEB$  トハ相似デアアル。

問 2. 三角形 ABC ニ於テ AD, BE ヲ高サトシ, ソノ交點ヲ F トスレバ,  $\triangle AFE$  〃  $\triangle BFD$  デアル。

問 3. 頂角ガ相等シイニツノ二等邊三角形ハ相似デアアル。

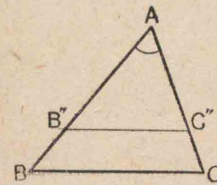
問 4. ニツノ相似三角形ノ内切圓又ハ外接圓ノ半徑ノ比ハ, ソノ相似比ニ等シイ。

**定理 48.** 一角ガ相等シク、且ツソノ角ヲ夾ムニ邊ガ比例ヲナスニツノ三角形ハ互ニ相似デアアル。

**假設**  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  ニ於テ  $\angle A = \angle A'$  及ビ  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$  トスルト

**終結**  $\triangle ABC$  〃  $\triangle A'B'C'$  デアル。

**證明** AB, AC 上ニ夫々 A'B'', A'C'' ニ等シク AB'', AC'' ヲトリ, B''C'' ヲ結ブトキハ  $\triangle A'B'C' \equiv \triangle AB''C''$



又假設ヨリ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

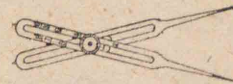
$$\therefore \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''}$$

$$\therefore B''C'' \parallel BC \quad (\text{定理 46})$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AB''C''$$

即チ  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

問 1. 圖ハ比例こんばすデアアル。コノ用ヒ方ヲ述ベヨ。



問 2. ニツノ相似三角形ノ對應スル頂點カラ引イタ中線ノ比ハソノ相似比ニ等シイ。

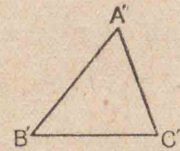
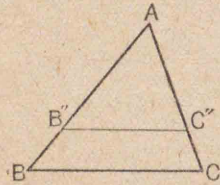
**定理 49.** 三邊ガ比例ヲナスニツノ三角形ハ互ニ相似デアアル。



**【假設】**  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  二於テ  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$  ト

スルト

**【終結】**  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  デアル。



**【證明】** AB, AC 上ニ夫々 A'B'', A'C'' ニ等シク AB'', AC'' ヲトルト

$AB : AB'' = AC : AC''$  デアルカラ

$\triangle ABC \sim \triangle AB''C''$  (定理48)

$\therefore \frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''}$

又假設ヨリ  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

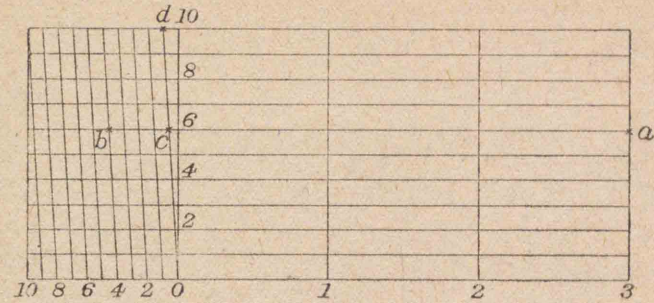
$\therefore \frac{BC}{B''C''} = \frac{BC}{B'C'} \quad \therefore B''C'' = B'C'$

$\therefore \triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C'$

即チ  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

問1. ニツノ三角形ノ相似ノ場合ト合同ノ場合トヲ比較セヨ。

問2. 對角線尺 次圖ニ於テ左ノ端デ1ノ長サヲ上ト下トデ夫々10ニ等分スル。次ニ縦ヲ10ニ等分シテソノ各分點ヲ過ツテ平行線ヲ引ク。今上ノ



10等分點ノ初メノ點即チ  $d$  ト下ノ  $0$  トヲ結ブ直線ト横ノ平行線トヲ交ラシメル。然ルトキハ例ヘバ  $6c$  間ノ長サハ

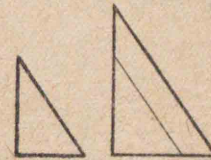
$$\frac{(6c \text{ 間ノ長サ})}{(10d \text{ 間ノ長サ})} = \frac{(06 \text{ 間ノ長サ})}{(010 \text{ 間ノ長サ})} = \frac{6}{10}$$

$\therefore (6c \text{ 間ノ長サ}) = \frac{6}{10} (10d \text{ 間ノ長サ})$

因テ  $6c$  間ノ長サハ  $1$  ノ  $\frac{1}{10} = 0.1$  ノ  $\frac{6}{10}$  倍、即チ  $0.06$  デアル。

(1)  $6b$  間ノ長サヲ求メヨ。

(2)  $ab$  間ノ長サヲ求メヨ。



問3. 斜邊ト他ノ一邊ガ比

例ヲナスニツノ直角三角形ハ相似デアル。

### 65. 多角形ノ相似

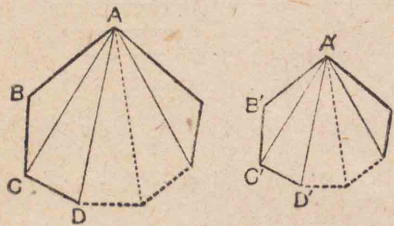
**【定理】** 50. ニツノ相似多角形ハコレヲ同數ノ相似三角形ニ分ツコトガ出來ル。

**【假設】** ニツノ相似多角形ヲ ABCD....., A'B'C'D'...

...トスルト

**【終結】**  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ,  $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ , .....

**【證明】** 多角形 ABCD..... 及 ビ A'B'C'D'..... ノ頂點



A, A' ト 殘リノ頂點

トヲ夫々結ブト兩

多角形ハ同數ノ三

角形ニ分タレル。

扱テ  $\angle B = \angle B'$

及 ビ 
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad (1)$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \therefore$$

又假設ヨリ 
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \quad \therefore \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} \quad (2)$$

(1)ヨリ  $\angle BCA = \angle B'C'A'$

假設ヨリ  $\angle BCD = \angle B'C'D'$

$\therefore \angle ACD = \angle A'C'D' \quad (3)$

(2)ト(3)ヨリ  $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$

同様ニシテ順々ニ證明スルコトガ出來ル。

**【例】** 一組ノ對應邊ガ相等シイニツノ相似多角形ハ合同デアル。

問 與ヘラレタ線分ノ上ニ與ヘラレタ五邊形ト相似ナ五邊形ヲ作レ。

**【定理】** 51. 多角形ノ各頂點ヲ一點ニ結ンダ線分ヲ同ジ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ夫々順ニ結ンデ出來ル多角形ハ、モトノ多角形ニ相似デアル。

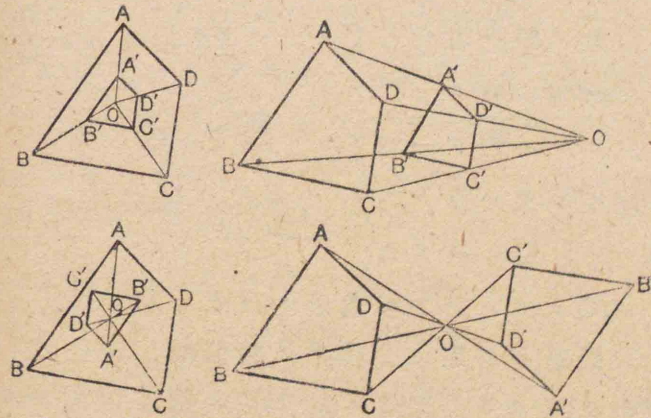
**【假設】** 多角形ヲ ABCD トシ、一點ヲ O トスル。

OA, OB, OC, OD ヲ夫々 A', B', C', D' デ,

$$\frac{A'O}{A'A} = \frac{B'O}{B'B} = \frac{C'O}{C'C} = \frac{D'O}{D'D}$$

ナルヤウニ内分又ハ外分スルト

**【終結】** 多角形 ABCD  $\sim$  多角形 A'B'C'D' デアル。



**証明**  $\frac{A'O}{A'A} = \frac{B'O}{B'B}$  ナル故、 $A'B' \parallel AB$  デアル。

同様ニシテ多角形  $A'B'C'D'$  ノ邊ハ皆夫々多角形  $ABCD$  ノ邊ニ平行デアル。従ツテ多角形  $A'B'C'D'$  ト多角形  $ABCD$  トハ互ニ等角デアル。

又  $\left. \begin{aligned} \frac{OB}{OB'} &= \frac{AB}{A'B'} \\ \frac{OB}{OB'} &= \frac{BC}{B'C'} \end{aligned} \right\} \therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

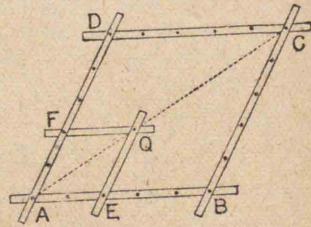
及ビ

同様ニシテ多角形  $ABCD$  ノ邊ハ皆夫々多角形  $A'B'C'D'$  ノ邊ト比例ヲナス。

故ニ 多角形  $ABCD$  の多角形  $A'B'C'D'$

**図** 多角形ノ各頂點ヲ一點ニ結フ線分上ニ頂點ヲ置キ各邊ガモトノ多角形ノ各邊ニ平行ナ多角形ハ、モトノ多角形ニ相似デアル。

問 右ノ圖ハぱんとぐらふ (Pantograph) ノ一種デアル。コレハ圖ヲ一定ノ比ニ縮小シ又ハ擴大スルニ用ヒル。圖ニ於テ A



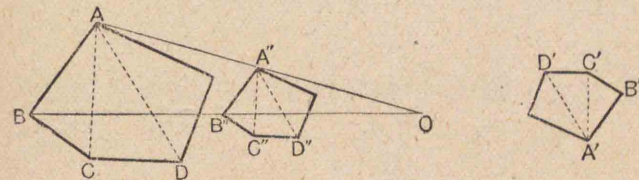
固定シ、Qニアル針ヲ多角形ノ周上ニ動かストキ、Cニアル鉛筆ハ各邊ガ2倍半ノ相似圖形ヲ畫ク。ソノ理由ヲ述ベヨ。又 Cニ針ヲ、Qニ鉛筆ヲツケタト

キハ如何。

**定理 52.** ニツノ相似多角形ハ各對應邊ガ平行ナルヤウニ置クコトガ出來ル。ソノトキ對應角ノ頂點ヲ結フ直線ハ一點デ交ル。

**假設** ニツノ多角形ヲ  $ABCD \dots$ ,  $A'B'C'D' \dots$  トシ、且ツコレ等ガ互ニ相似デアルトスルト

**終結**  $AB \parallel A'B'$ ,  $BC \parallel B'C'$ ,  $CD \parallel C'D'$ ,  $\dots$  トナルヤウニ置クコトガ出來ル。ソシテソノトキ、直線  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $\dots$  ハ一點デ交ル。



**証明** AヲC, D,  $\dots$  ノ各ニ、 $A'$ ヲC', D',  $\dots$  ノ各ニ結ブ。次ニ  $A''B''$ ヲ  $A'B'$ ニ等シク且ツ  $AB$ ニ平行トナルヤウニ引キ、又  $B''$ カラ  $B''C''$ ヲ  $B'C'$ ニ等シク且ツ  $BC$ ニ平行トナルヤウニ引クト

$$\angle A'B''C'' = \angle AEC$$

然ルトキハ  $\angle A'B''C'' = \angle ABC = \angle A'B'C'$

$$\therefore \triangle A'B''C'' = \triangle A'B'C' \quad (1)$$

$$\therefore A''C'' = A'C' \quad (2)$$

次ニ直線 AA'', BB'' ノ交點ヲ O トシ、直線 BB'', CC'' ノ交點ヲ O' トスルト

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{A''B''} &= \frac{OB}{OB''} \\ \frac{BC}{B''C''} &= \frac{OB}{OB''} \end{aligned} \right\} \therefore \frac{OB}{OB''} = \frac{OB}{OB''}$$

又假設及ビ(1)ヨリ

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{BC}{B''C''}$$

故ニ O ト O' トハ合スル。(定理46系)

即チ AA'', BB'', CC'' ハ一點 O デ交ル。

$$\left. \begin{aligned} \frac{OA}{OA''} &= \frac{OB}{OB''} \\ \frac{OC}{OC''} &= \frac{OB}{OB''} \end{aligned} \right\} \therefore \frac{OA}{OA''} = \frac{OC}{OC''}$$

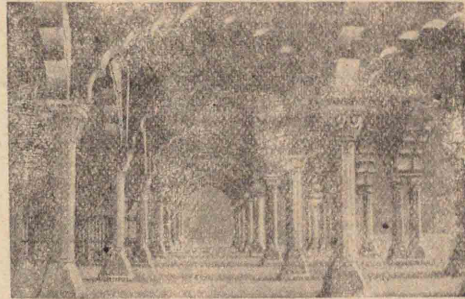
$$\therefore A''C'' \parallel AC \quad (3)$$

更ニ(2)ト(3)トヨリ A''C'' ヲ A''B'' ノヤウニ考ヘテ上ノ作圖ヲ繰返スト多角形 A''B''C''D'' ..... ハ多角形 A'B'C'D' ..... ニ合同デ、ソノ各邊ハ多角形 ABCD ..... ノ對應邊ニ平行トナル。且ツ對應角ノ頂點ヲ結ブ直線ハ一點 O デ交ル。

**注意** モシ與ヘラレタニツノ相似多角形ガ合同ナラバ對應角ノ頂點ヲ結ブ直線ハ互ニ平行ナルコトガアル。

**定義** ニツノ相似多角形ヲ各對應邊ガ平行ナル

ヤウニ置クトキ、對應角ノ頂點ヲ結ブ直線ノ交點ヲ、ソノニツノ相似多角形ノ相似ノ中心トイフ。



印度ノでひるノ廻廊

問 ニツノ相

似多角形ノ相似ノ中心 O ヲ過ツテ、ソノニツノ多角形ヲキル直線ガ一組ノ對應邊ノ間ニ夾マレル部分ハ、O デ相似比ニ分タレル。

**定理 53.** ニツノ相似多角形ノ周ノ比ハ相似比ニ等シイ。

**證明** 多角形 ABCDE ..... ∞ 多角形 A'B'C'D'E' .....

トスレバ

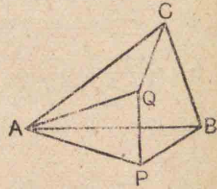
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots = \frac{AB + BC + CD + \dots}{A'B' + B'C' + C'D' + \dots}$$

**練習 (8)**

1. 一ツノ圓ガ他ノ圓ニ内切スルトキ、ソノ切點ヲ過ル大圓ノ弦ガ小圓ノ周デ分タレル分ノ比ハ一定デアアル。

2. 四邊形 ABCD ノ一邊 BC 上ノ任意ノ點 E カ  
ラ BA, BD ニ平行ニ引イタ直線ト CA, CD トノ交點ヲ  
夫々 F, G トスルト,  $FG \parallel AD$  デアル。

3. 圖ニ於テ,  $\triangle ABC$ ,  $\triangle APQ$  ハ  
相似形デ AB ト AP, AC ト AQ ハ  
對應邊デアル。然ルトキハ  
 $\triangle APB$  の  $\triangle AQC$  デアル。



4. 與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ三角形ニ相似ナ  
三角形ヲ内接セシメヨ。

5. 與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ三角形ニ相似ナ  
三角形ヲ外切セシメヨ。

6. 高サガ與ヘラレテ與ヘラレタ三角形ニ相似  
ナ三角形ヲ作レ。

7. 與ヘラレタ三角形ニ正方形ヲ内接セシメヨ。

## 第十章 面積

### 66. 面積

定義 線デ圍マレタ圖形ノ廣サヲソノ面  
積トイフ。

ニツノ圖形ノ面積ガ相等シイトキ, ソノ圖形ハ等

積デアルトイヒ, ソレヲ表ハスニ記號ニヲ用ヒル。

定義 與ヘラレタ線分ヲ一邊トスル正方  
形ヲ, ソノ線分上ノ正方形トイフ。

面積ノ基本單位ハ 1 平方米デアアル。

モシ正方形 ABCD ノ一邊 AB ガ  $a$  m デアルトソ  
ノ面積ハ  $a^2$  平方米デアアル。ソシテ  $a^2$  ヲ面積ヲ表ハ  
ス數トイフ。他ノ單位デ計ツテモ同ジ言葉ヲ用ヒ  
ル。

正方形 ABCD ノ面積ヲ表ハスニハソノ一邊, 例ヘ  
バ AB ヲトツテ  $AB^2$  (又ハ  $\overline{AB}^2$ ) ト書キ, AB ノ平方ト  
イフ。

正方形ノ面積ハソノ一邊ノ平方デアアル。

### 67. 矩形ノ面積

定義 與ヘラレタニツノ線分ヲ相隣ルニ  
邊トスル矩形ヲ, ソノ二線分ノ矩形(又ハ二線  
分ノ包ム矩形)トイフ。

矩形ノ一邊ヲ底邊(横), 隣邊ヲ高サ(縦)トイフ。

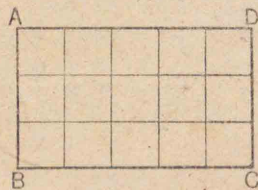
**定理** 54. 矩形ノ面積ヲ表ハス數ハ, ソノ二隣邊  
ヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

**假設** 矩形 ABCD ノ面積及ビ二隣邊ヲ表ハス數

ヲ夫々  $S, a, b$  トスル。但シ  $AB, BC$  ハ同ジ單位デ計リ、面積ハソノ長サノ單位デ組立テラレタ面積ノ單位デ計ツタモノトスルト

**終結**  $S=ab$  デアル。

**證明**  $AB$  ヲ  $a$  等分シ、 $BC$  ヲ  $b$  等分スルト、ソノ各部分ハ單位ノ長サデアアル。



今  $AB, BC$  ノ各分點ヲ過ツテ  $BC, AB$  ニ夫々平行線ヲ引クト、コノ矩形ハ  $ab$  個ノ正方形ニ分タレル。

ソシテソレ等ノ正方形ハ皆合同デ、ソノ面積ハ單位面積デアアル。因テ  $S=ab$

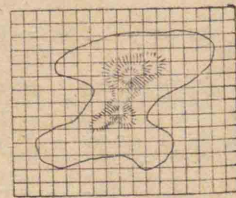
**注意** 矩形  $ABCD$  ノ面積ヲ表ハスニハソノ二隣邊例ヘバ  $AB, BC$  ヲトツテ  $AB \cdot BC$  ト書キ、 $AB, BC$  ノ積トイフ。

因テ上ノ定理ヲ次ノヤウニ述ベラレル。

矩形ノ面積ハソノ二隣邊ノ積デアアル。或ハ矩形ノ面積ハ底邊ト高サトノ積デアアル。

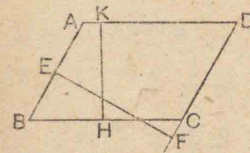
問1. 矩形ノ一邊ヲ2倍シ、ソノ隣邊ヲ3倍ニスルトキ、面積ハ何倍ニナルカ。

問2. 圖ノヤウニ方眼紙ニ孤島ノ地圖ガ畫イテアル。ソノ地積ハ約幾あるカ。但シ1眼ハ1平方料デアアル。



### 68. 平行四邊形ノ面積

**定義** 平行四邊形ノ四邊ノ中、何レカノ一邊ヲ底邊トイヒ、底邊トソノ對邊トノ距離ヲ平行四邊形ノ高サトイフ。

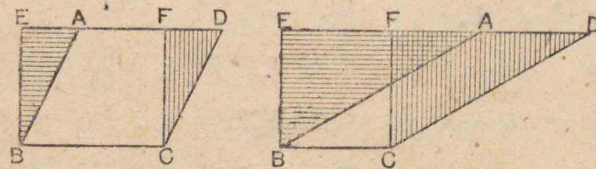


圖ノ平行四邊形  $ABCD$  ニ於テ  $BC$  ヲ底邊トミルトキ  $HK$  ハソノ高サデアアル。又  $AB$  ヲ底邊ト見ルトキ、 $EF$  ハソノ高サデアアル。

**定理 55.** 平行四邊形ハソレト底邊及ビ高サガ夫々等シイ矩形ト等積デアアル。

**假設** 平行四邊形ヲ  $ABCD$  トシ、コレト底邊及ビ高サガ夫々等シイ矩形ヲ  $EBCF$  トスルト

**終結**  $\square ABCD = \square EBCF$  デアル。



**證明**  $\square ABCD, \square EBCF$  ハ底邊及ビ高サガ夫々相等シイカラ、圖ノヤウニ重ネルコトガ出來ル。扱テ二ツノ直角三角形  $EBA, FCD$  ニ於テ

$$EB=FC, \quad BA=CD$$

∴  $\triangle EBA = \triangle FCD$   
 ∴ 四邊形 EBCD -  $\triangle EBA =$  四邊形 EBCD -  $\triangle FCD$   
 即チ  $\square ABCD = \square EBCF$

図 1. 平行四邊形 ABCD ノ面積底邊及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫々  $S, b, h$  トスルト,  $S = bh$

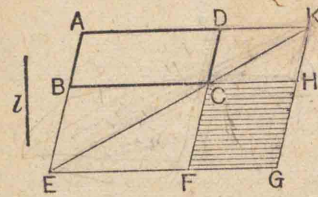
図 2. 底邊及ビ高サガ夫々相等シイニツノ平行四邊形ハ等積デアル。又コノ逆モ眞デアル。(逆ハニツアル)

問 與ヘラレタ平行四邊形ヲソノ面積ト一邊トカヘナイデ、一ツノ角ガ與ヘラレタ角ニ等シイ平行四邊形ニナホセ。

**作圖題** 14. 與ヘラレタ平行四邊形ノ角ヲカヘナイデ、一邊ガ與ヘラレタ長サニ等シイ等積ナ平行四邊形ニナホセ。

**題意** 與ヘラレタ平行四邊形ヲ ABCD, 與ヘラレタ線分ヲ  $l$  トスル。  $\square ABCD$  ノ角ヲカヘナイデ、一邊ガ  $l$  デ、且ツコレト等積ナ平行四邊形ニナホスコトヲ求メル。

**作圖**  $\square ABCD$  ノ邊 AD ヲ延長シ,  $l =$  等シイヤウニ DK ヲトル。 KC ヲ延長シ, AB ノ延長トノ交點ヲ E トスル。 E, K ヲ過ツテ AD, AB ニ夫々平行



線ヲ引キ, ソノ交點ヲ G トスル。次ニ BC, DC ノ延長ガ KH, EG ト交ル點ヲ夫夫 H, F トスレバ  $\square CFGH$

ハ求ムル平行四邊形デアル。

**證明** 四邊形 AEGK, BEFC, DCHK ハ何レモ平行四邊形デアツテ, EK ハソレ等ノ對角線デアル。

$$\begin{aligned} \therefore \left. \begin{aligned} \triangle AEK &= \triangle GKE \\ \triangle BEC &= \triangle FCE \\ \triangle DCK &= \triangle HKC \end{aligned} \right\} \therefore \square ABCD = \square CFGH \end{aligned}$$

ソシテ  $\square CFGH$  ノ一邊 CH ハ  $l =$  等シク, 四ツノ角ハ夫々  $\square ABCD$  ノ角ニ等シイ。故ニ  $\square CFGH$  ハ求ムルモノデアル。

**注意** 上ノ圖ニ於テ  $\square ABCD, \square CFGH$  ヲ  $\square AEGK$  ノ對角線ニ沿フ餘形トイフ。

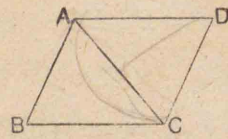
問 與ヘラレタ平行四邊形ノ面積ヲカヘズニ、一角ト一邊ガ與ヘラレタ平行四邊形ニナホセ。

### 69. 三角形ノ面積

**定理** 56. 三角形ハコレト底邊高サガ夫々相等シイ平行四邊形ノ半分ト等積デアル。

**假設** 三角形ヲ ABC トシ, コレト底邊及ビ高サガ

夫々等シイ平行四邊形ヲ ABCD トスルト



終結  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square ABCD$

デアル。

證明 略スル。

問 1. 三角形ノ面積底邊及ヒ高サヲ表ハス數ヲ夫々  $S, b, h$  トスルト,  $S = \frac{1}{2}bh$

問 2. 底邊及ヒ高サガ夫々相等シイニツノ三角形ハ等積デアル。又コノ逆モ眞デアル。

問 3. 二邊ガ夫々相等シク、且ツソノ夾角ガ互ニ補角ヲナスニツノ三角形ハ等積デアル。

問 1. 三角形ノ中線ハソノ三角形ヲ二等分スル。

問 2. 同ジ底邊ヲモツ等積ナニツノ三角形ノ頂點ヲ結ブ線分ハ底邊ニ平行デアルカ、又ハ底邊デニ等分セラレル。

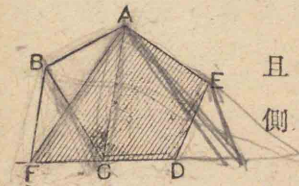
問 3. 正多角形ノ面積ハソノ周ト内切圓ノ半徑トノ積ノ半分ニ等シイ。

作圖題 15. 與ヘラレタ多角形(三角形ヲ除ク)ヲ、ソノ邊數ガ一ツ少イ多角形ニナホセ。

題意 與ヘラレタ多角形ヲ假ニ五角形トシ、コレヲ ABCDE トスル。コレヲ等積ナ四角形ニナホスコトヲ求メル。

解析 圖ノヤウニ五角形 ABCDE ヲコレト等積ナ四角形 AFDE ニナホシ得タトスルト

$\triangle ABC = \triangle AFC$



且ツコノ兩三角形ハ同ジ底ノ同側ニアルカラ

$AC \parallel BF$

作圖 AC ヲ結ビ、B'ヲ過ツテ AC ニ平行線ヲ引キ、DC ノ延長ト交ル點ヲ F トスル。AF ヲ結ブト四角形 AFDE ハ求ムルモノデアル。

證明 略スル。

吟味 作圖ハ常ニ可能デアル。

注意 コノ作圖ヲ續ケテ行フト、與ヘラレタ多角形ヲ、ソレト等積ナ三角形ニナホスコトガ出來ル。

問 與ヘラレタ三角形ノ底邊ヲカヘズニ、一底角ガ與ヘラレタ角ニ等シイ等積ナ三角形ニナホセ。

### 70. 梯形ノ面積

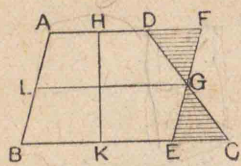
定理 57. 梯形ハソノ兩底ノ和ノ半分ヲ底トシ、ソノ高サヲ高サトスル平行四邊形ト等積デアル。

假設 梯形ヲ ABCD トシ、ソノ兩底ヲ AD, BC, 高サヲ HK トスルト

終結 梯形  $ABCD = \frac{1}{2}(AD+BC) \cdot HK$  デアル。







**証明** DC ノ中點 G ヲ過ツ

テ、AB = 平行線ヲ引キ、BC 及  
ビ AD ノ延長ト交ル點ヲ夫々  
E、F トスル。又 G カラ BC =

平行線 GL ヲ引キ、AB ト交ル點ヲ L トスルト

$$GL = \frac{1}{2}(AD + BC)$$

扱テ

$$\triangle GEC = \triangle GFD$$

∴ 梯形 ABCD = 矩形 ABEF

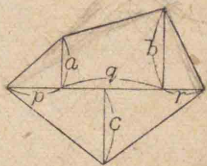
$$= BE \cdot HK = GL \cdot HK$$

$$= \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot HK$$

**図** 梯形ノ面積、兩底及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫々

$$S, a, b, h \text{ トスルト、} S = \frac{1}{2}h(a + b)$$

問1. 右ノ圖形ノ面積ヲ求メ



ヨ。

問2. 梯形 ABCD ノ平行デナイ二邊 AB、CD ノ延  
長ノ交點ヲ E トスルト、 $\triangle EAC = \triangle EBD$  デアル。

**練習** (9)

1. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ過ル直線ハ本  
影ヲ二等分スル。

2. 平行四邊形 ABCD 内ニ一點 P ヲトルト  
 $\triangle PAB$  ト  $\triangle PCD$  ノ和ハ  $\square ABCD$  ノ半分デア  
ル。
3. 與ヘラレタ三角形ト等積ナ矩形ヲ作レ。
4. 四邊形ハソノ兩對角線ヲ二隣邊トシ、ソノ夾  
角ヲ夾角トスル三角形ト等積デア  
ル。
5. 二邊ノ長サガ夫々一定ナル三角形ノ中、ソノ  
夾角ガ直角ナ三角形ノ面積ハ最大デア  
ル。
6. 與ヘラレタ圓ニ内接スル矩形ノ中、面積ノ最  
大ナモノハ何カ。
7. 三角形ノ重心ヲ各頂點ニ結ブト、ソノ三角  
形ハ三ツノ等積ナ三角形ニ分タレ  
ル。

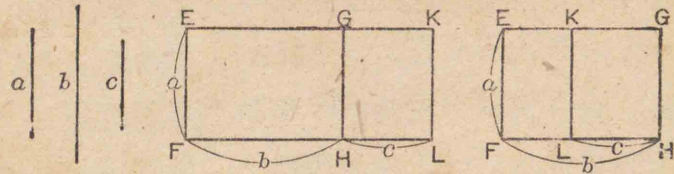
71. 矩形ノ公式

**定理** 58. 二線分ノ和又ハ差ト他ノ一線分トノ  
矩形ハ、初メノ二線分ノ各ト後ノ線分トノ矩形ノ和  
又ハ差ニ等シイ。

**假設** 二ツノ線分ヲ  $b, c$  ( $b > c$ ) トシ、他ノ線分ヲ  $a$   
トスルト

**終結**  $a(b \pm c) = ab \pm ac$  デアル。

**證明** 一直線上ニ  $b =$  等シク FH ヲ、 $c =$  等シク  
HL ヲトリ、F カラコレニ垂線 FE ヲ立テ、コレヲ  $a$



ニ等シクトル。次ニ EF, FL ノ矩形 EFLK 及ビ HL, LK ノ矩形 HLKG ヲ作ルトキハ

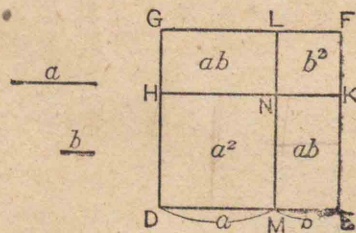
$$\square EFLK = a(b+c)$$

又  $\square EFLK = \square EFHG \pm \square GHLK$   
 $= ab \pm ac$

$$\therefore a(b+c) = ab \pm ac$$

因  $a(b+c-d) = ab+ac-ad$ , 但シ  $b+c > d$

**定理 59.** 二線分ノ和ノ上ノ正方形ハ、ソノ各線分上ノ正方形ノ和ニ、ソノ二線分ノ矩形ノ 2 倍ヲ加ヘタモノニ等シイ。

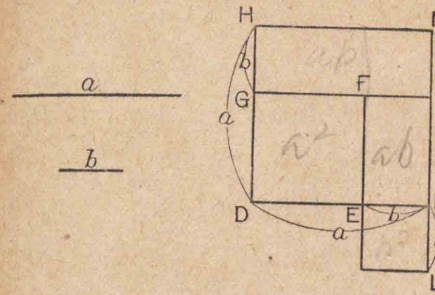


**假设** 二線分ヲ a, b トスルト

**終結**  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

**證明** 略スル。

**定理 60.** 二線分ノ差ノ上ノ正方形ハ、ソノ各線分上ノ正方形ノ和ヨリソノ二線分ノ矩形ノ 2 倍ヲ



引イタモノニ等シイ。

**假设** 二線分ヲ a, b (a > b) トスルト

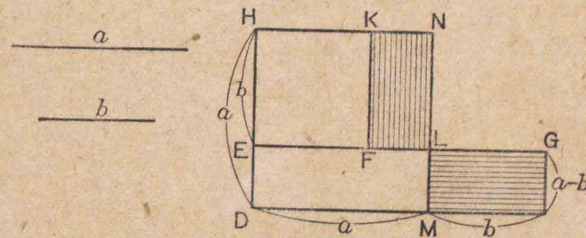
**終結**  $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

**證明** 略スル。

**定理 61.** 二線分ノ和ト差トノ矩形ハ、ソノ二線分ノ各ノ平方ノ差ニ等シイ。

**假设** 二線分ヲ a, b (a > b) トスルト

**終結**  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



**證明** 略スル。

一線分ヲ任意ノ點デ内分又ハ外分スルトキ、ソノ二ツノ分ノ矩形ハソノ線分ノ半分ノ上ノ正方形ト分點及ビ中點ノ間ノ部分ノ上ノ正方形トノ差ニ等シイ。

問1. 與へラレタ線分ヲ二ツニ内分シ、ソノ二ツノ分ノ矩形ヲ最大ニセヨ。

問2. 一直線上ニ四ツノ點 A, B, C, D ガコノ順ニアルトキハ  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

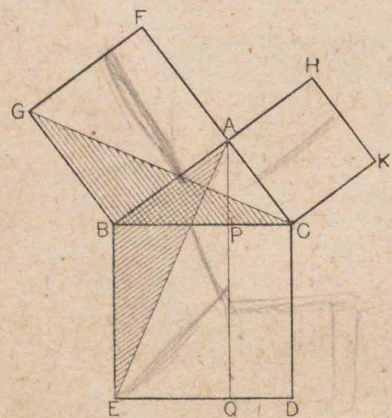
問3. 線分 AB ノ中點ヲ M トシ、又 AB ヲ任意ノ點 P デ内分又ハ外分スルトキハ

$$AP^2 + BP^2 = 2AM^2 + MP^2$$

72. ぴたごらすノ定理

**定理** 62. 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ平方ハ他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和ニ等シイ。\*

**假設**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle A$  ヲ直角トスルト



**終結**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

デアル。

**證明**

BC, AB AC ノ上ニ夫々正方形ヲ作り、夫々 BCDE, ABGF, ACKH トスル。A カラ BEニ

\* コレヲ Pythagoras ノ定理トイフ。然シ上ノ證明ハゆーくりッドノ著書ニ載セラレタモノデアル。

平行線ヲ引キ BC, ED トノ交點ヲ夫々 P, Q トシ、AE, CG ヲ結ブト

$$\begin{aligned} \triangle ABE &= \triangle GBC \\ \square BQ &= 2\triangle ABE \\ \square BF &= 2\triangle GBC \end{aligned} \quad \therefore \square BQ = \square BF \quad (1)$$

$$\text{同様ニ} \quad \square CQ = \square CH \quad (2)$$

(1),(2) ヲ邊々相加ヘルト

$$\square BD = \square BF + \square CH$$

即チ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

**問**  $\angle A$  ガ直角ナル三角形ノ頂點 A, B, C ノ對邊ヲ表ハス數ヲ夫々 a, b, c トスルト  $a^2 = b^2 + c^2$  從ツテ  $b^2 = a^2 - c^2$ ,  $c^2 = a^2 - b^2$  ヲ得ル。

問1. 直角三角形ノ斜邊及ビ他ノ一邊ノ長サガ夫々 29 種, 21 種ナルトキ、第三邊ノ長サハ何種カ。

問2. 與へラレタ二ツノ正方形ノ差ニ等シイ正方形ヲ作レ。

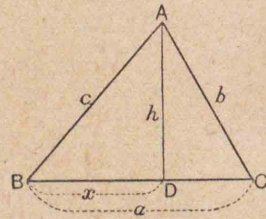
問3. 一邊 a ノ正方形ノ對角線ハ  $\sqrt{2}a$  デアル。又一邊 a ノ正三角形ノ高サハ  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$  デアル。

73. へろんノ公式

**定理** 63. 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ノ對邊及ビ面積ヲ表ハス數ヲ夫々 a, b, c, S トスルト

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{但シ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

**証明**  $\angle B, \angle C$  ヲ鋭角ト考ヘルコトガ出來ル。



今頂點 A カラ底邊へ垂線 AD ヲ下シ、AD ヲ表ハス數ヲ  $h$  トスル。又 BD ヲ表ハス數ヲ  $x$  トスルト

$$S = \frac{1}{2}ah$$

$$4S^2 = a^2h^2 \quad (1)$$

然ルニ  $\triangle ABD$  ヨリ  $h^2 = c^2 - x^2 \quad (2)$

$$4a^2h^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2 \\ = (2ac + 2ax)(2ac - 2ax)$$

(1) ヲ代入スルト  $16S^2 = (2ac + 2ax)(2ac - 2ax) \quad (3)$

又  $\triangle ADC$  ヨリ

$$b^2 = h^2 + DC^2 = h^2 + (a-x)^2 \\ = c^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ax \quad [(2) \text{ヲ代入シテ}] \\ = a^2 + c^2 - 2ax$$

$$\therefore 2ax = a^2 + c^2 - b^2$$

コレヲ (3) = 代入スルト

$$16S^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)$$

*Handwritten notes:*  
 $s = \frac{a+b+c}{2}$   
 $s-a = \frac{b+c-a}{2}$   
 $s-b = \frac{a+c-b}{2}$   
 $s-c = \frac{a+b-c}{2}$   
 $16S^2 = (2ac + 2ax)(2ac - 2ax)$   
 $16S^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)$

$$= \{(a+c)^2 - b^2\} \{b^2 - (a-c)^2\} \\ = (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c) \quad (1)$$

次ニ  $a+b+c=2s$  ヲ用ヒテ

$$a+b+c-2b=2s-2b$$

$$\begin{cases} \text{即チ} & a-b+c=2(s-b) \\ \text{同様ニ} & a+b-c=2(s-c) \\ & -a+b+c=2(s-a) \end{cases}$$

因テ (4) ハ  $16S^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$

$$\therefore S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}^*$$

問1. 底邊ガ 72 cm, 他ノ邊ガ 45 cm ナル二等邊三角形ノ面積ヲ求メヨ。(二様ニ計算セヨ)

問2. 三角形 ABC ノ内切圓ノ半徑ヲ求メヨ。

$$r = \frac{S}{s} = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \text{ デアル。}$$

### 74. 矩形ノ面積ノ比

**定理** 64. 高さ(又ハ底邊)ガ相等シイニツノ矩形ノ比ハ底邊(高さ)ノ比ニ等シイ。

**假設**  $\square ABCD, \square PQRS$  ニ於テ  $AB=PQ$  トスルト

**終結**  $\frac{\square ABCD}{\square PQRS} = \frac{BC}{QR}$  デアル。

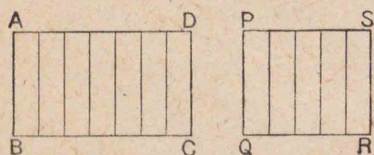
\* へろん(Heron, 西暦約 100 年)ガコノ公式ヲ作ツタ。然シあるきめでオ(Archimedes, 約 250 B.C.) ハソレヲ既ニ知ツテキタ。彼ハギリシヤ七賢人ノ最後ノ人デアアル。

【證明】 BC, QRヲ同ジ單位デ計ツテ得タ數ヲ夫々

$m, n$ トスルト

$$\frac{BC}{QR} = \frac{m}{n} \quad (\text{定理43}) \quad (1)$$

次ニ BC, QRヲ夫々  $m, n$  個ニ等分シ, ソノ各分點ヲ過ツテ, BC, QRニ



夫々垂線ヲ立テルト, 矩形 ABCD, PQRSハ夫々  $m, n$  個ノ合同ナ

矩形ニ分タレル。

$$\therefore \frac{\square AC}{\square PR} = \frac{m}{n} \quad (\text{定理43}) \quad (2)$$

$$(1), (2) \text{ ヨリ } \frac{\square AC}{\square PR} = \frac{BC}{QR}$$

【注意】 上ノ定理ハ次ノヤウニ述ベラレル。

高サ(又ハ底邊)ガ一定ナル矩形ハソノ底邊(高サ)ニ比例スル。

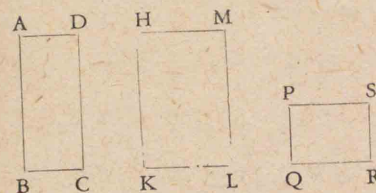
【図1】 高サ(又ハ底邊)ガ相等シイニツノ平行四邊形ノ比ハソノ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

【図2】 高サ(又ハ底邊)ガ相等シイニツノ三角形ノ比ハソノ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

【定理】 65. ニツノ矩形ノ比ハソノ底邊ノ比ト高サノ比ノ複比ニ等シイ。

【假設】 ニツノ矩形ヲ ABCD PQRSトスルト

【終結】  $\square AC : \square PR = (BC : QR)(AB : PQ)$  デアル。



【證明】 今底邊ガ QR, 高サガ ABニ等シイ矩形 HKLMヲ作ルト

$$\frac{\square AC}{\square HL} = \frac{BC}{KL} = \frac{BC}{QR} \quad (\text{定理64})$$

又  $\frac{\square HL}{\square PR} = \frac{HK}{PQ} = \frac{AB}{PQ} \quad (\text{定理64})$

$$\therefore \frac{\square AC}{\square HL} \times \frac{\square HL}{\square PR} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AB}{PQ}$$

$$\therefore \frac{\square AC}{\square PR} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AB}{PQ} \quad (\text{定理44})$$

【図】 A, B, C, Dヲ四ツノ線分トスルト

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

問1. ニツノ平行四邊形ノ比ハ底邊ノ比ト高サノ比ノ複比ニ等シイ。

問2. ニツノ三角形ノ比ハ底邊ノ比ト高サノ比ノ複比ニ等シイ。

問3. ニツノ正方形ノ比ハ邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

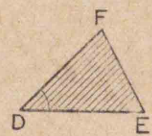
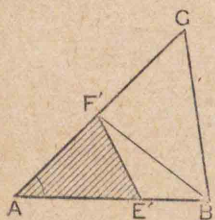
75. 三角形ノ面積ノ比

**定理** 66. 一角ガ相等シイニツノ三角形ノ比ハ、ソノ角ヲ夾ムニ邊ノ矩形ノ比ニ等シイ。

**假設**  $\triangle ABC, \triangle DEF$  = 於テ  $\angle A = \angle D$  トスルト

**終結**  $\triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot AC : DE \cdot DF$  デアル。

**證明**  $AB, AC$  (又ハツノ延長) 上ニ夫々  $DE, DF$  ニ等シク  $AE', AF'$  ヲトルト,  $\angle A = \angle D$  デアルカラ



$\triangle AE'F' = \triangle DEF$

次ニ  $F'B$  ヲ結ブト

$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABF'} = \frac{AC}{AF'}$

又  $\frac{\triangle ABF'}{\triangle AE'F'} = \frac{AB}{AE'}$

$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle AE'F'} = \frac{AC}{AF'} \times \frac{AB}{AE'} = \frac{AC \cdot AB}{AF' \cdot AE'}$

$\therefore \triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot AC : DE \cdot DF$

**圖** 一角ガ互ニ補角ヲナスニツノ三角形ノ比ハ、ソノ角ヲ夾ムニ邊ノ矩形ノ比ニ等シイ。

76. 相似多角形ノ面積ノ比

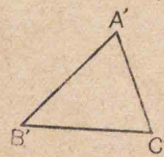
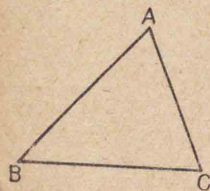
**定理** 67. ニツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ、ソノ對應邊ノ二乗比ニ等シイ。

**假設** ニツノ相似三角形  $ABC, A'B'C'$  = 於テ  $AB,$

$BC, CA$  ノ對應邊ヲ夫々  $A'B', B'C', C'A'$  トスルト

**終結**  $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$  デアル。

**證明**  $\angle B = \angle B'$  デアルカラ



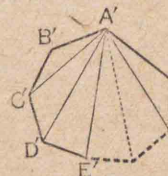
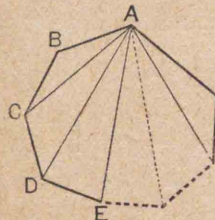
$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{BC}{B'C'}$

然ルニ

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

ソレ故  $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$

**定理** 68. ニツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ二乗比ニ等シイ。



**假設** ニツノ相

似多角形  $ABCD \dots$

$\dots, A'B'C'D' \dots$  ノ對

應邊ヲ  $AB$  ト  $A'B',$

$BC$  ト  $B'C', \dots$  ト

スルト

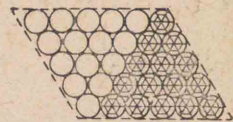
**終結**  $ABCD \dots : A'B'C'D' \dots = AB^2 : A'B'^2$  デアル。

**證明** 略スル。

**圖** 邊數ガ等シイニツノ正多角形ノ面積ノ比ハ、ソノ外接圓又ハ内切圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シイ。

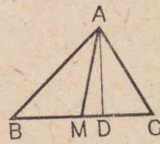
練習 (10)

1. 圖ノヤウニ積ンダ俵ノ  
數ヲ勘定スル方法ヲ工夫シ、更  
ニ一般ニ次ノ公式ヲ得ヨ。



$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.  $\triangle ABC$ ニ於テMヲBCノ中  
點トスルト次ノ關係ガアル。



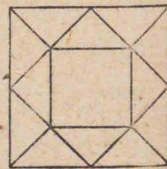
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

3. 平行四邊形 ABCDニ於テ  $AB=13\text{cm}$ ,  $BC=14\text{cm}$ ,  
 $AC=15\text{cm}$ ナルトキ、面積ハ幾平方糎デアアルカ。又A  
カラBCニ下シタ垂線ノ長サハ幾糎デアアルカ。

4. 直角ヲ夾ム二邊ガ40cm, 42cmナル直角三角  
形ノ内切圓ノ半径ハ幾糎デアアルカ。

5. 梯形ノ平行ナ二邊ガ7cm, 10cmデ、残りノ邊ガ  
5cm, 4cmナルトキ、ソノ面積ヲ求メヨ。

6. 右圖ノヤウニ一邊aナル正  
方形中ニ畫カレタ各線分ノ長サ及  
ビ各多角形ノ面積ヲ求メヨ。(ある  
きめです)



7. 三角形ABCノ二邊AB, AC上ニ夫々D, Eヲ  
トリ  $AD:BD=3:5$ ,  $AE:EC=1:2$ トナルヤウニシ、

DEヲ結ブトキ、 $\triangle ADE:\triangle ABC$ ハ如何。

8. 三角形ABCノ頂點Aカラ底邊BCマデ引イ  
タ線分AD上ノ任意ノ點ヲPトスルトキ、 $\triangle APB$ ノ  
 $\triangle APC$ ニ對スル面積ノ比ハ、 $BD:DC$ ニ等シイ。

9. 一角ガ相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ  
比ハ、相隣ル二邊ノ矩形ノ面積ノ比ニ等シイ。

10. 半径rノ圓ニ内接スル正三角形ト正六邊形  
トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

第十一章 二線分ノ積

77. 比例線分

**定理** 69. 四ツノ線分ガ比例ヲナストキ、ソノ外  
項ノ積ハ内項ノ積ニ等シイ。

**假設** 四ツノ線分ヲA, B, C, Dトシ、 $A:B=C:D$   
トスルト

**終結**  $A \cdot D = B \cdot C$ デアアル。

**證明** A, B, C, Dヲ同ジ單位デ計ツテ得タ數ヲ夫  
夫a, b, c, dトスルト

$$A:B=a:b \quad \text{及ビ} \quad C:D=c:d$$

ソシテ  $A:B=C:D$ デアアルカラ  $a:b=c:d$

ソレ故代數學ニヨツテ  $ad=bc$

然ルニ  $ad, bc$  ハ夫々  $A, D$  ノ矩形,  $BC$  ノ矩形ノ面積ヲ表ハス數デアルカラ

$$A \cdot D = BC$$

因 上ノ定理ノ逆ハ真デアル。

問 ニツノ矩形又ハ三角形ガ等積ナルトキ, ソノ高サノ比ハ底邊ノ比ノ反比ニ等シイ。

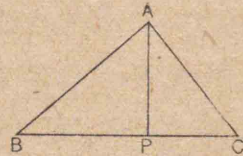
### 78. 直角三角形

**定理** 70. 直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜邊ヘ下シタ垂線ハモトノ直角三角形ヲソレト相似テ且ツ互ニ相似ナニツノ直角三角形ニ分ツ。

**證明** 略スル。

因  $\angle A$  ヲ直角トスル三角形  $ABC$  ノ頂點  $A$  カラ斜邊ニ下シタ垂線ノ足ヲ  $P$  トスルト

- (i)  $AB^2 = BP \cdot BC$
- (ii)  $AC^2 = PC \cdot CB$
- (iii)  $AP^2 = PB \cdot PC$



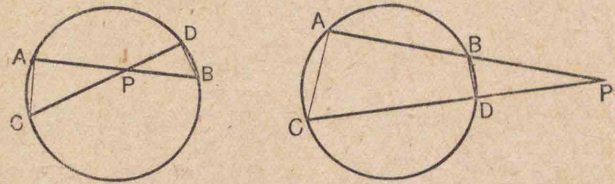
問 上ノ系ヲ用ヒテびたごらすノ定理ヲ證セヨ。

### 79. 弦・切線

**定理** 71. 圓ノニツノ弦又ハソノ延長ガ交ルトキ, ソノ交點ガ分ツ各弦ノニツノ分ノ積ハ相等シイ。

**假設** 圓ノニツノ弦  $AB, CD$  又ハソノ延長ノ交點ヲ  $P$  トスルト

**終結**  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$  デアル。



**證明**  $AC, BD$  ヲ結ブト

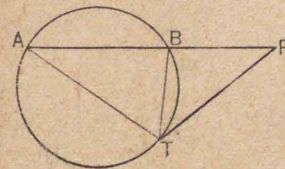
$$\left. \begin{aligned} \angle APC &= \angle DPB \\ \angle ACP &= \angle DBP \end{aligned} \right\} \therefore \triangle APC \sim \triangle DPB$$

$$\therefore PA : PD = PC : PB$$

即チ  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

因 二線分又ハソノ双方ノ延長ガ相交リ, ソノ交點デ分レタ各線分ノニツノ分ノ積ガ相等シイトキ, ソノ二線分ノ端ハ同一ノ圓周上ニアル。

**定理** 72. 圓外ノ一點カラ引イタ割線上ノ弦ガソノ點デ外分サレタ分ノ積ハ, ソノ點カラ圓ヘ引イタ切線ノ平方ニ等シイ。



**假設** 圓外ノ點  $P$  カラ引イタ割線ヲ  $PBA$  トシ, 切線ヲ  $PT$  トスルト



終結 PA·PB=PT<sup>2</sup> デアル。

證明 略スル。

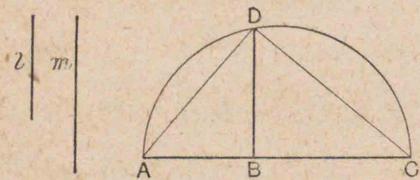
図1. 上ノ定理ノ逆ハ真デアアル。

図2. 圓外ノ一點カラ引イタ割線上ノ弦ガソノ點デ外分サレタ分ノ積ハ常ニ一定デアアル。

### 80. 二次方程式ノ解法

作圖題 16. 與ヘラレタニツノ線分ノ比例中項ヲ求メヨ。

題意 與ヘラレタニツノ線分ヲ  $l, m$  トシ,  $l, m$  ノ比例中項トナル線分ヲ求メヨ。



作圖 一ツノ直線上ニ  $l$  ニ等シク AB, 又同方向ニ  $m$  ニ等シク BC ヲト

リ, AC ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, B カラ AC ニ垂線ヲ立テ圓周トノ交點ヲ D トスルト, BD ハ求ムル線分デアアル。

證明 略スル。(定理70系)

吟味 作圖ハ常ニ可能デ, 解答ハ唯一ツデアアル。

注意 二線分トソノ比例中項ヲ表ハス數ヲ夫々  $l, m, x$  トスルト, 上ノ作圖題ハ方程式  $x^2=lm$  ヲ解クコトデアアル。

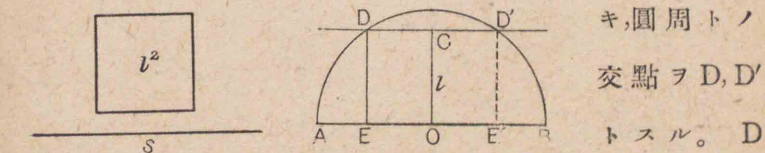
問1. 與ヘラレタ正方形ノ  $k$  倍ニ等シイ正方形ヲ作レ。又與ヘラレタ線分ノ  $\sqrt{3}$  倍,  $\sqrt{5}$  倍ニ等シイ線分ヲ作レ。

問2. 定理72ヲ用ヒテ二線分ノ比例中項ヲ求メヨ。

作圖題 17. ニツノ線分ノ和ト積ヲ與ヘテ各線分ヲ求メヨ。

題意 二線分ノ和  $s$  トソレ等ノ積即チソレニ等シイ正方形  $l^2$  ヲ與ヘテ各線分ヲ求メル。

作圖  $s$  ニ等シイ線分 AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, 圓ノ中心 O カラ AB ニ立テタ垂線ノ上ニ  $l$  ニ等シク OC ヲトル。C ヲ過ツテ AB ニ平行線ヲ引



キ, 圓周トノ交點ヲ D, D' トスル。D カラ AB ニ垂線 DE ヲ下シ, ソノ足ヲ E トスルト, AE, EB ハ求ムル二線分デアアル。

證明 AE+EB=s

又 AE·EB=ED<sup>2</sup>=l<sup>2</sup>

因テ AE, EB ハ求ムル二線分デアアル。

吟味 (イ)  $l < \frac{s}{2}$  ナラバ解答ハ一ツ(相等シイニツ)。

(ロ)  $l = \frac{s}{2}$  ナラバ解答ハ一ツ。

(ハ)  $l > \frac{s}{2}$  ナラバ問題ハ不能デアアル。

**注意** AE = x トスルト、EB = s - x トナル。因テ  $x(s-x) = l^2$  フ得ル。

今、s, x フ各線分ヲ表ハス數トミルトキ

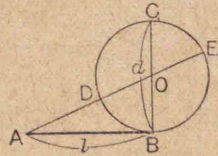
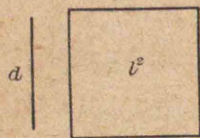
$$x^2 - sx + l^2 = 0 \quad (1)$$

因テ上ノ吟味ハ x = 就イテノ二次方程式(1)ノ根ノ吟味ト一致スル。

問 二次方程式  $x^2 - 10x + 16 = 0$  ノ根ヲ幾何學的ニ作圖セヨ。

**作圖題** 18. ニツノ線分ノ差(d)ト積(l)トヲ與ヘテ各線分ヲ求メヨ。

**作圖** l = 等シイ線分 AB フ引キ、Bカラ ABニ



垂線ヲ立テソノ上ニ d = 等シク BC フトリ、BC フ直徑トシテ圓

O フ畫ク。次ニ A, O フ過ル直線ガ圓周ト交ル點ヲ D, E トスルト、AD, AE ガ求ムル線分デアアル。

**證明** AE - AD = DE = BC = d

又 AE · AD = AB = l

因テ AD, AE ハ求ムル二線分デアアル。

**吟味** 作圖ハ常ニ可能デ、解答ハ唯一ツデアアル。

**注意** AD = x トスルト、AE = d + x デアアル。因テ  $x(d+x) = l^2$  フ得ル。

今、d, x フ各線分ヲ表ハス數トミルトキ

$$x^2 + dx - l^2 = 0 \quad (1)$$

因テ上ノ吟味ハ x = 就イテノ二次方程式(1)ノ根ノ吟味ト一致スル。ソシテコノ方程式ハ常ニ實根ヲモツ、即チ上ノ作圖ハ常ニ可能デアアル。

問  $x : a = b : (x - c)$  フ満足スル x フ幾何學的ニ作圖セヨ。

● **練習** (11)

1. 與ヘラレタ平行四邊形ト等積ナ正方形ヲ作レ。
2. 與ヘラレタ三角形ト等積ナ正方形ヲ作レ。
3. 與ヘラレタ底ヲ有シ、與ヘラレタ正方形ト等積ナ二等邊三角形ヲ作レ。
4. 與ヘラレタ斜邊ヲ有シ、定正方形ト等積ナ直角三角形ヲ作レ。
5. 相交ル二圓ノ共通弦ノ延長ハ、ソノ二圓ノ共通切線ノ切點間ノ線分ヲ二等分スル。

6. 與ヘラレタ二點ヲ過リ、且ツ與ヘラレタ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

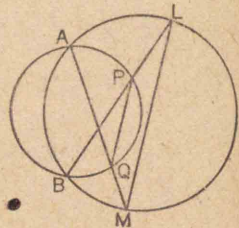
7. 三角形ABCノ三頂點カラ對邊ヘ下シタ垂線ヲ夫々AD, BE, CFトシ、ソノ垂心ヲHトスルト

AH·HD=BH·HE=CH·HF

8. 直角三角形ABCニ於テAカラ斜邊BCニ下シタ垂線ノ足ヲDトスルト

AB<sup>2</sup>:AC<sup>2</sup>=BD:CD

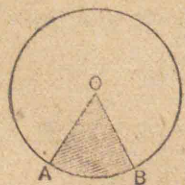
9. 右圖ニ於テ LM//PQ, AQMハ一直線デアアル。L, P, Bガ一直線ナルコトヲ證明セヨ。又コノ逆モ眞デアアル。



第十二章 圓ノ周面積

81. 扇形

定義 圓ノ二ツノ半徑トソレ等ニ夾マレタ弧トテ圍マレタ圓ノ部分ヲ扇形トイフ。

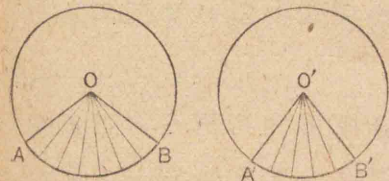


左圖ノ扇形ヲ表ハスニハ扇形AOBト書ク。

73. 同圓又ハ等圓ニ於テ、二ツノ中心角ノ比ハソレニ對スル弧ノ比ニ等シイ。

假設 等圓O及ビO'ニ於テ、中心角ヲ∠AOB及ビ∠A'O'B'トシ、ソレニ對スル弧ヲ夫々AB及ビA'B'トスルト

終結 ∠AOB:∠A'O'B'=AB:A'B'デアアル。



證明 ∠AOB及ビ∠A'O'B'ヲ同ジ單位デ計ツテ得タ數ヲ例ヘバ7,5トスルト

∠AOB:∠A'O'B'=7:5 (1)

次ニ∠AOB及ビ∠A'O'B'ヲ夫々七等分、五等分スル半徑ヲ畫イタトスルト、12個ノ小ナル扇形ヲ得ル。然ルニコレ等ノ扇形ノ弧ハ皆相等シイ。因テAB, A'B'ハ小ナル扇形ノ弧ノ夫々7倍、5倍デアアル。

∴ AB:A'B'=7:5 (2)

(1),(2)ヨリ ∠AOB:∠A'O'B'=AB:A'B'

一ツノ圓ニツイテモ同様デアアル。

同圓又ハ等圓ニ於テ、扇形ノ比ハソノ中心角ノ比又ハソノ弧ノ比ニ等シイ。

證明 本定理ノ圖ニ於テ等分シテ得タ小ナル扇

形ハ皆相等シイ。ソレ故

$$\text{扇形 } AOB : \text{扇形 } A'O'B' = 7:5 \quad (3)$$

(1),(2),(3)ヨリ

$$\begin{aligned} \text{扇形 } AOB : \text{扇形 } A'O'B' &= \angle AOB : \angle A'O'B' \\ &= \widehat{AB} : \widehat{A'B'} \end{aligned}$$

コノ系ハ次ノヤウニ述ベラレル。

扇形ノ面積ハソノ中心角又ハ弧ニ比例スル。

### 82. 圓ノ周,面積

圓ニ外切又ハ内接スル正多角形,例ヘバ正五邊形ヲ考ヘ,次ニソノ邊數ヲ2倍,4倍,8倍,……ト順次ニ増加スルトキハ,外切正多角形ノ周モ,内接正多角形ノ周モ共ニ限リナク圓周ニ近ヅキ,邊ノ數ヲ限リナク多クシタ極限ニ於テ外切正多角形及ビ内接正多角形ノ周ハ共ニ圓周トナル。

**定義** 圓ニ外切又ハ内接スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クシタトキ,ソノ周ノ極限ヲ圓周ノ長サ(又ハ單ニ圓周)トイフ。

扱テ圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ヲ上ニ述ベタヤウニ多クスルト,ソノ周ハ次第ニ減少スル。又圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ヲ多クスルトソノ周ハ次第ニ増大スル。故ニ

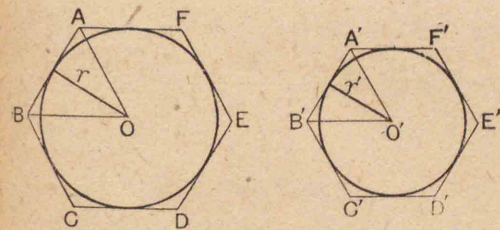
圓周ハ任意ノ外切正多角形ノ周ヨリ小デ,任意ノ内接正多角形ノ周ヨリ大デアル。

**定義** 圓ニ外切又ハ内接スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クシタトキ,ソノ面積ヲソノ圓ノ面積トイフ。

**定理** 74. 圓周トソノ直徑トノ比ハ一定デアル。

**假設** 二圓  $O, O'$  ノ半徑ヲ夫々  $r, r'$ , ソノ周ヲ夫々  $c, c'$  トスルト

**終結**  $c:2r=c':2r'$  デアル。



**證明** 各圓ニ外切スル同ジ邊數ノ正多角形ヲ畫キ,ソノ一邊ヲ夫々

$AB, A'B'$ , ソノ周ヲ夫々  $p, p'$  トスルト

$$p:p'=AB:A'B'$$

又  $\triangle OAB$  の  $\triangle O'A'B'$  デアルカラ

$$AB:A'B'=r:r'$$

$$\therefore p:p'=r:r'$$

$$\therefore p:2r=p':2r'$$

扱テコノ比例式ハ正多角形ノ邊數ヲ2倍,4倍,8

倍、……ト如何程増加シテモ成立スル。ソシテ邊數ヲ限リナク多クシタトキ、 $c, p$ ノ極限ハ夫々  $c, c'$ デアアルカラ

$$c : 2r = c' : 2r'$$

即チ圓周ト直徑トノ比ハ一定デアアル。

**定義** 一ツノ圓ニ於テソノ圓周ト直徑トノ比ヲ圓周率トイフ。

圓周率ハ上ノ定理ニヨリ一定ノ數デアアル。コレヲ通常  $\pi$  デ表ハス。

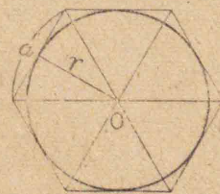
**問** 半徑  $r$  ノ圓ノ周ハ  $2\pi r$  ニ等シイ。

**問** 圓ノ半徑ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ  $\frac{180}{\pi}$  度デアアル。

**注意** コノ角ヲradianトイヒ、角ノ單位トシテ用ヒルコトガアル。

**定理 75.** 半徑  $r$  ノ圓ノ面積ハ  $\pi r^2$  ニ等シイ。

**證明** 半徑  $r$  ノ圓ノ面積ヲ  $S$  トシ、コノ圓ニ外切スル正  $n$  邊形ノ一邊ヲ  $a$ 、周ヲ  $p$  トスルトキ、コノ正  $n$  邊形ノ面積ハ  $n \times \frac{1}{2} ar = \frac{1}{2} pr$  デアル。



$$n \times \frac{1}{2} ar = \frac{1}{2} pr$$

ソシテコノ關係ハ正多角形ノ

邊數ヲ如何程多クシテモ常ニ成立スル。

今正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クスルトキ、正多角形ノ面積ノ極限ハ  $S$  トナリ、周  $p$  ノ極限ハ圓周即チ  $2\pi r$  トナル。

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

**問** 扇形ノ面積ハソノ弧ト半徑トノ積ノ半分デアアル。

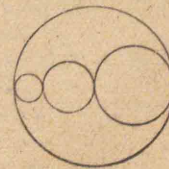
**問** 半徑 6 cm ノ圓ニ於テ、60度ノ中心角ニ對スル弧ト弦トノ間ニアル弓形ノ面積ヲ小數第二位マデ計算セヨ。但シ  $\pi$  ヲ 3.1416 トスル。モシ半徑ガ  $a$  ナラバ如何。

**注意**  $\pi$  ノ近似値トシテ 3.1416 又ハ  $\frac{22}{7}$  或ハ  $\frac{355}{113}$  ヲ用ヒル。

**練習 (12)**

1. 中心角  $45^\circ$ ニ對スル弧ノ長サガ 11 m ナルトキ、ソノ圓ノ半徑ノ長サハ約幾米カ。

2. 定圓ノ直徑ヲ幾ツカニ分チ、ソノ各部分ヲ直徑トシテ畫イタ圓ノ周ハ定圓ノ周ニ等シイ。

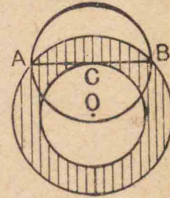


3. 與ヘラレタ二ツノ圓ノ和(又ハ差)ニ等シイ面積ヲモツ圓ヲ畫ケ。

4. 半徑  $r$  ノ圓ニ内接スル正八邊形ノ一邊及ビ面積ヲ求メヨ。

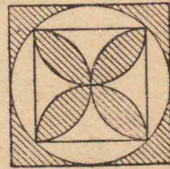
5. 半徑 15 cm ノ圓ノ面積ヲ二ツノ同心圓ヲ畫イテ三等分スルトキ、各圓ノ半徑ヲ求メヨ。

6. 半徑  $a, b$  ナル二ツノ同心圓ノ周ノ間ニアル部分ノ面積ハ小圓ニ切スル大圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シイ。



7. 半徑 10 cm ノ二ツノ等圓ノ周ガ互ニ他ノ中心ヲ過ルヤウニ交ルトキ、二圓ノ共通部分ノ面積ヲ求メヨ。但シ  $\pi=3.14$  トスル。

8. 半徑  $r$  ノ三ツノ等圓ガ互ニ外切スルトキ、ソレ等ノ圓ノ弧デ圍マレタ部分ノ面積ヲ求メヨ。

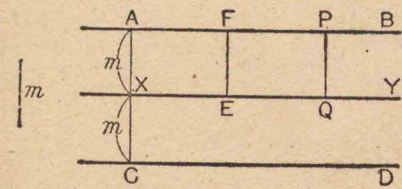


9. 圖ニ於テ陰影ノアル部分ノ面積ト、陰影ノナイ部分ノ面積トヲ比較セヨ。

第十三章 軌跡

83. 軌跡

直線 XY ノ兩側ニ於テ  $m$  ノ距離ニ二ツノ平行線



AB, CD ヲ引ク。

扱テ XY 上ノ任意ノ點 E カラソレ

ニ垂線 EF ヲ立テ

$m$  ニ等シク F ヲトルト、F ハ AB 又ハ CD ノ上ニアル。即チ XY トノ距離ガ  $m$  ニ等シイ點ハ悉ク AB 又ハ CD 上ニアル。

逆ニ AB 或ハ CD 上ノ任意ノ點 P カラ XY ニ垂線 PQ ヲ下スト、四邊形 FEQP ハ矩形デアルカラ、 $PQ=FE=m$  デアル。即チ AB 或ハ CD 上ノ點ハ悉ク XY カラ  $m$  ノ距離ニアル。

上ニ述ベタコトヨリ、直線 AB 及ビ CD ハ直線 XY トノ距離ガ  $m$  ニ等シイ點ヲ悉ク含ミ、且ツ XY トノ距離ガ  $m$  ニ等シクナイ點ハ一ツモ含ンデキナイコトガワカル。

定義 或圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スル點ヲ悉ク含ミ、且ツソノ條件ニ適シナイ點ヲ

一ツモ含マナイトキ、ソノ圖形ヲソノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。

上ノ例ハ次ノヤウニ述ベラレル。

一定直線カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ、ソノ直線ノ兩側ニ於テソノ距離ニアルニツノ平行線デアアル。

又圓周ハ明ラカニ次ノヤウニ述ベラレル。

一定點カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ圓周デアアル。

**注意** 上ノ定義ヨリ或圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スル點ノ軌跡ナルコトヲ斷定スルニハ、次ノ一組ノ定理ヲ證明スルノデアアル。

(1) 條件ニ適スル點ハ悉クソノ圖形上ニアアル。

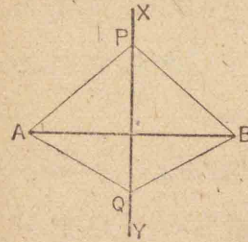
(2) ソノ圖形上ノ點ハ悉ク條件ニ適スル。

### 84. 重要ナ軌跡

**問題 1.** 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ、コノ二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアアル。

**假設** 二定點ヲ  $A, B$  トシ、 $AB$  ノ垂直二等分線ヲ  $XY$  トスルト

**終結**  $A$  及ビ  $B$  カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ  $XY$  デアアル。



**證明** (1)  $PA = PB$  トスレバ

$P$  ハ二等邊三角形  $PAB$  ノ頂點デアアルカラ  $XY$  上ニアアル。

即チ  $A, B$  カラ等距離ニアル點ハ悉ク  $XY$  上ニアアル。

(2)  $XY$  上ニ任意ノ點  $Q$  ヲトルト

$$QA = QB \quad (\text{定理 4 系})$$

即チ  $XY$  上ノ點ハ悉ク  $A, B$  カラ等距離ニアアル。

以上(1),(2)ニヨツテ二定點  $A, B$  カラ等距離ニアアル點ノ軌跡ハ線分  $AB$  ノ垂直二等分線  $XY$  デアアル。

問 1. 定直線ニ切スル定半径ノ圓ノ中心ノ軌跡ハソノ直線ニ平行ナニツノ直線デアアル。

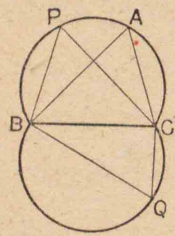
問 2. 定圓ノ定長ナ弦ノ中點ノ軌跡ハ定圓ト同心ナ圓周デアアル。

問 3. 二定點ヲ過ル圓ノ中心ノ軌跡ハコノ二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアアル。

**問題 2.** 一定ノ底邊ト一定ノ頂角ヲモツ三角形ノ頂點ノ軌跡ハ底邊ヲ弦トスルニツノ弧デアアル。

**假設** 位置及ビ長サガ一定ナル三角形ノ底邊ヲ  $BC$  トシ、 $BC$  ヲ弦トシテ定角  $\alpha$  ヲ含ム弓形ノ弧ヲ  $BC$  ノ兩側ニ作ツクトスルト

**終結**  $\angle BAC$  が定角  $\alpha$  ナル  $\triangle ABC$  ノ頂點  $A$  ノ軌跡ハ  $BC$  ヲ弦トシテ作ツタニツノ弓形ノ弧デアル。



**證明** (1)  $\angle BPC = \angle \alpha$  ナルヤウナ點  $P$  ハ  $BC$  ヲ弦トスル弓形ノ弧上ニアル。(定理31系2)

即チ條件ニ適スル點ハ悉ク  $\widehat{BC}$  上ニアル。

(2)  $\widehat{BC}$  上ノ任意ノ點  $Q$  ヲトルト

$$\angle BQC = \angle \alpha \quad (\text{定理31系2})$$

即チニツノ弓形ノ弧ノ上ノ點ハ悉ク條件ニ適スル。

以上(1),(2)ニヨツテ求ムル軌跡ハ  $BC$  ヲ弦トシ、ソノ上ニ  $\angle \alpha$  ヲ含ムニツノ弓形ノ弧デアル。

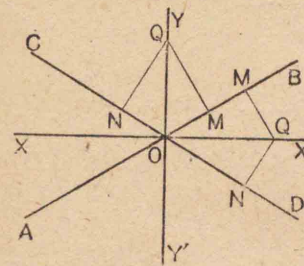
**函** 位置ト長サトガ一定ナ線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ハ、ソノ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

**問** 定圓上ノ定點ヲ過ル弦ノ中點ノ軌跡ハ、ソノ點トソノ圓ノ中心トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

**軌跡題** 3. 相交ル二定直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**題意** 相交ル二定直線ヲ  $AB, CD$  トシ、ソノ交點ヲ  $O$  トスル。 $AB, CD$  カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メル。

**解** (1)  $AB, CD$  カラ等距離ニアル一ツノ點  $Q$  ヲ  $\angle BOD$  或ハ  $\angle AOC$  内ニトルト、 $Q$  ハ  $\angle BOD$  ノ二等分線  $XOX'$  上ニアル。(定理9系) 又點  $Q$  ヲ  $\angle BOC$  或



ハ  $\angle AOD$  内ニトルト、 $Q$  ハ  $\angle BOC$  ノ二等分線  $YOY'$  上ニアル。

即チ  $AB, CD$  カラ等距離ニアル點ハ悉ク  $XX'$  及ビ  $YY'$  ノ上ニアル。

(2)  $XX'$  及ビ  $YY'$  上ニ任意ノ點  $Q$  ヲトリ、 $Q$  カラ  $AB, CD$  ニ夫々垂線  $QM, QN$  ヲ下スト、 $QM = QN$  デアル。(定理12系5)

即チ  $XX'$  及ビ  $YY'$  上ノ點ハ悉ク  $AB, CD$  カラ等距離ニアル。

以上(1),(2)ニヨツテ相交ル二直線  $AB, CD$  カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ、ソノナス角ノ二等分線  $XX'$  及ビ  $YY'$  デアル。

**問** 相交ル二定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ



求メヨ。

4. 定點カラ定多角形ノ周マデ引イタ線分ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ハ定點ヲ相似ノ中心トスルモトノ多角形ニ相似ナ多角形ノ周デアアル。

○ヲ定點, ABCD …… ヲ定多角形トスル。A'B'CD' …… ハ○ヲ相似ノ中心トシ, 定比  $m:n$  ヲ相似比トスル定多角形 ABCD …… ニ相似ナ多角形トスルト

○カラ多角形 ABCD …… ノ周マデ引イタ線分ヲ  $m:n$  ノ比ニ分ツ點ノ軌跡ハ多角形 A'B'CD' …… ノ周デアアル。

(1) ABCD …… ノ周上ノ一點 P ト, O トヲ結ブ線分 OP ヲ  $m:n$  ノ比ニ分ツ點ヲ P' トスルト

$$\left. \begin{aligned} \frac{OP'}{OP} &= \frac{m}{n}, \\ \frac{OA}{OA'} &= \frac{m}{n} \end{aligned} \right\} \therefore \frac{OP}{OP'} = \frac{OA}{OA'}$$

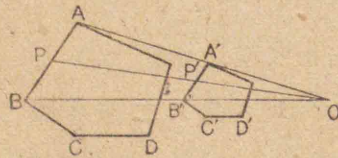
然ルニ

$$\therefore AP \parallel A'P'$$

$$\text{然ルニ } AB \parallel A'B'$$

故ニ A'P' ハ A'B' ト重ナリ, P' ハ A'B' 上ニ來ル。

即チ條件ニ適スル點ハ悉ク A'B'CD' …… ノ周上ニ



アル。

(2) A'B'CD' …… ノ周上ニ一點 P' ヲトリ OP' ヲ結び, コレヲ延長シテ AB トノ交リヲ P トスルト AB // A'B' デアルカラ

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{m}{n}$$

即チ A'B'CD' …… ノ周上ノ點ハ悉ク條件ニ適スル。

以上(1)(2)ニヨリ求ムル軌跡ハ多角形 A'B'CD' …… ノ周デアアル。

問 一定點カラ一定圓周マデ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

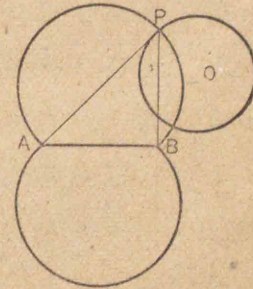
### 85. 軌跡ノ應用

一ツノ點カラ定線分 AB ヲミル角ガ定角  $\alpha$  ナルヤウナ點ヲ定圓 O ノ周上ニ求メヨ。

求ムル點 P ヲ得タトスレバ

$$\angle APB = \angle \alpha$$

因テ P ハ AB ヲ定角  $\alpha$  ニ見ル點ノ軌跡上ニアル。ソレ故次ノヤウナ作圖ガ出來ル。



AB ヲ弦トシ定角  $\alpha$  ヲ含ム弓形ノ弧ヲ

AB ノ兩側ニ作り、コノ弧ト圓 O ノ周トノ交點ヲ P トスルト、P ハ求ムル點デアル。

**證明** P ハ O 圓ノ周上ニアル。次ニ P ハ AB 上ニアル點ナル故

$$\angle ARB = \angle \alpha$$

**吟味** AB ノ兩側ニアル弓形ノ弧 AB ト O 圓周トノ交點ノ數ハ、解答ノ數ト同ジデアル。

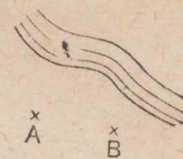
問 1. 相交ル二定直線カラ夫々與ヘラレタ距離ニアル點ヲ求メヨ。

問 2. 相交ル二定直線カラ等距離デ、且ツ二定點カラモ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

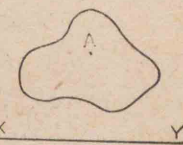
**練習 (13)**

- 互ニ垂直ナ二定直線上ニ端ヲモツ定線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
- 定長ノ線分ガソノ一端ヲ定圓周上ニ置キ、且ツ定直線ニ平行ニ動クトキ、他端ノ軌跡ヲ求メヨ。
- 定三角形 ABC 外ノ定點 O カラコノ三角形ノ周マデ引イタ線分ヲ與ヘラレタ比ニ内分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。
- 川ノ同ジ側ニアル二村カラ等距離ニアルヤ

ウニ橋ヲ架ケルニハ何處ヘ架ケタラヨイカ。



5. 一ツノ閉ヂタ曲線内ノ一點カラ、ソノ曲線ニ交ラナイ一直線ニ至ル線分ガソノ曲線デ二等分セラレルヤウニセヨ。

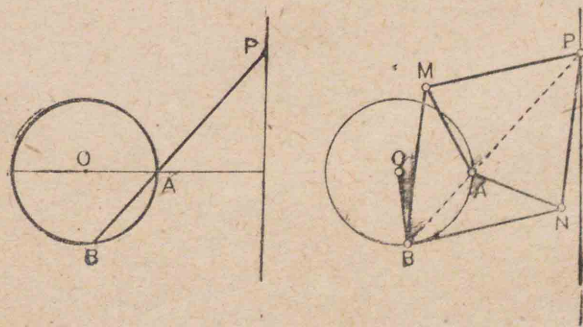


6. 底邊、頂角及ビ頂點カラ出ル中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

7. 與ヘラレタ點ヲ過リ、與ヘラレタ圓ニ切スル與ヘラレタ半徑ノ圓ヲ畫ケ。

8. 定圓外ノ定點 A カラ割線 ABC ヲ引キ、ソノ圓内ノ部分 BC ヲ AB ニ等シクセヨ。

9. 定圓 O ノ周上ノ定點 A ヲ過ル弦 BA ノ延長上ニ一點 P ヲトリ、AB · AP ガ一定ナルヤウナ點 P ノ軌跡ハ一直線デアル。



〔注意〕 前ノ右圖ハ直線ヲ引ク器械デアル。四邊形  
BMPN ハ菱形デ、圖中ノ太イ直線ハ定長デアルガ皆各端デ  
廻轉出來ル。Aヲ固定シ、BヲO圓周上デ廻スト、Pニアル  
鉛筆ハ直線ヲ畫ク。コノ理由ヲ述ベヨ。

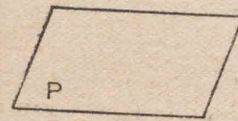
續 編

立體幾何學

第十四章 平行・垂直

86. 點・直線・平面

平面上ニハ無數ノ點、直線ガアルヤウニ、空間ニハ  
亦無數ノ點、直線、平面ガアル。空間ノ點、直線ヲ表ス  
ニハ今マデト同ジ記號ヲ用ヒルガ、平面ヲ表スニハ



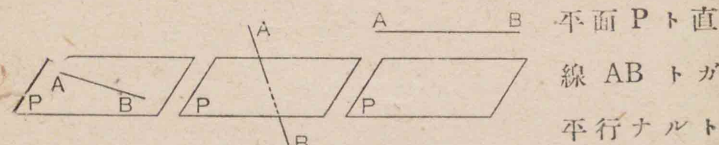
平行四邊形ヲ用ヒ、ソノ一隅ニ  
例ヘバPト書キ、平面Pトイフ。  
然シ平面ハ通常イクラデモ廣

ガツテキルモノト考ヘル。

空間ノ一直線ト一平面トヲ考ヘルトキ、直線ハ眞  
直ナ線デアリ、平面ハ平ラナ面デアルカラ、モシ直線  
ガ平面ト二點デ出會フナラバソノ直線ハソノ平面  
ニ全ク含マレル。因テ或平面上ニナイ直線ヲ考ヘ  
ルト、ソノ直線ハソノ平面ト唯一點デ出會フカ又ハ  
出會ハナイカノ何レカデアル。

**定義** 直線ト平面トガ唯一點ヲ共有スルトキソレ等ハ相交ルトイヒ、ソノ共通點ヲ交點(又ハ交リ)トイフ。

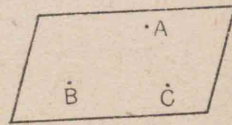
モシ直線ト平面トガ一點ヲモ共有シナイトキ、ソレ等ハ互ニ平行デアルトイフ。



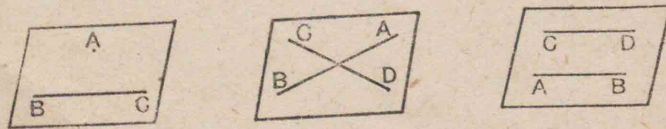
キ、 $AB \parallel P$  又ハ  $P \parallel AB$  ト書ク。

**公理** 一直線上ニナイ三點ヲ過ル平面ハ一ツハ必ズアル、ソシテ唯一ツニ限ル。

コレヲ「一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ決定スル」トイフ。



**公理 76.** (i) 一直線トソノ上ニナイ一點、(ii) 相交ル二直線、(iii) 互ニ平行ナ二直線 ハ夫々一平面ヲ決定スル。



**證明** (i) 直線 BC 上ノ二點 B, C ト直線外ノ一點 A トハ一平面ヲ決定スル。(公理) コノ平面ニ直線

BC ガ全ク含まレル。因テ BC トソノ上ニナイ一點トハ一平面ヲ決定スル。

(ii) 證明略スル。

(iii) 平行二直線ヲ AB, CD トスルト、平行線ノ定義ヨリソレ等ハ同一平面上ニアル。コノ平面ハ AB ト CD 上ノ一點 C トデ決定セラレル。

因テ平行二直線 AB, CD ハ一平面ヲ決定スル。

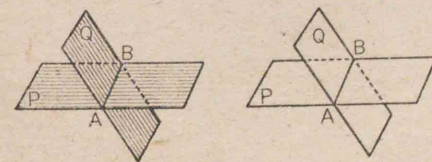
問1. 二ツノ平行線トソノ各ニ交ル一一直線ト同一ノ平面上ニアル。

問2. 一點ヲ過リ定直線ニ平行線ヲ引ケ。

### 87. 平面ノ交線

**公理** 二平面ガ出會フ處ハ一直線デアアル。

**定義** 一直線ヲ共有スル二平面ハ相交ルトイヒ、ソノ直線ヲ二平面ノ交線(又ハ交リ)トイフ。



相交ラナイ二平面ハ互ニ

平行デアルトイフ。

二平面 P, Q ガ平行ナルトキ、 $P \parallel Q$  ト書ク。

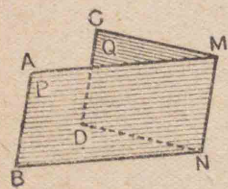
問1. 二平面ノ位置ノ關係ハドレダケアルカ。

問2. 平行ナ二平面ノ各、ノ上ニ一ツツアル二直線ハ互ニ平行デアアルカ。

〔注意〕 立體幾何學デ二直線ガ平行デアルトイフコトヲ證明スルニハ、ソレ等ガ交ラナイトイフコトダケデハ不十分デアアル。尚ソノ上ニソレ等ガ同一平面上ニアルトイフコトヲ證明セネバナラナイ。

〔定理〕 77. 平行二直線ノ一ツツヲ含ム二平面ノ交線ハ、モトノ平行線ニ平行デアアル。

〔假設〕 AB ト CD トハ平行デ、平面 P ハ AB ヲ含ミ、平面 Q ハ CD ヲ含ム。 MN ヲ P, Q ノ交線トスルト



トスルト

〔終結〕 MN // AB, MN // CD デアアル。

〔證明〕 モシ MN ト AB ガ平行デナイトスルト、ソレ等ハ同一ノ平面 P 上ニアルカラ交ル。因テ AB ト Q トハソノ交點ヲ共有スル。然ルニ AB // CD ナル故 AB ハ Q ニ含マレル。コレハ假設ニ反スル。ソレ故 MN ト AB トハ同一ノ平面上ニアツテ交ラナイ。

即チ MN // AB 同様ニ MN // CD

〔圖〕 1. ニツノ平行線ノ一ツニ平行ナ直線ハ他ニ

モ平行デアアル。

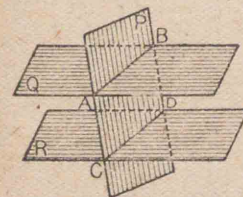
〔圖〕 2. 一直線ニ平行ナ二平面ノ交線ハ、モトノ直線ニ平行デアアル。

問1. 空間ニアル二直線ノ位置ノ關係ハドレダケデアアルカ。

問2. 平行二直線ノ一方ダケヲ含ム平面ハ他方ニ平行デアアル。

〔定理〕 78. 一平面ガ平行ナ二平面ト交ルトキ、ニツノ交線ハ互ニ平行デアアル。

〔假設〕 平行二平面ヲ Q, R トシ、他ノ一平面ヲ P トスル。又 P, Q ノ交線ヲ AB トシ、P, R ノ交線ヲ CD



トスルト

〔終結〕 AB // CD デアアル。

〔證明〕 Q // R ナル故 AB, CD

ハ交ラナイ。又コノ二直線ハ

同一ノ平面 P 上ニアル。ソレ故 AB // CD デアアル。

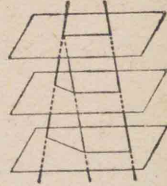
〔圖〕 1. ニツノ平行平面ノ一ツニ交ル直線ハ他ニモ交ル。

〔圖〕 2. 平面外ノ一點ヲ過リソレニ平行ナ平面ハ唯一ツデアアル。

問1. 二直線ガ平行ナ三平面デキリ取ラレル線

分ハ比例ヲナス。

問2. 平行ナ二平面ガ他ノ平行ナ二平面ト交ツテ出來ル四ツノ交線ハ互ニ平行デアアル。

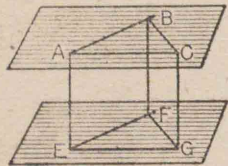


### 88. 二直線ノナス角

**定理** 79. 相交ル二直線ガ夫々他ノ相交ル二直線ニ平行ナルトキ前者ノ夾ム角ハ後者ノ夾ム角ニ等シイ。

**假設** 圖ノヤウニ AB ト AC, EF ト EG トハ相交リ, AB // EF, AC // EG トスルト

**終結**  $\angle BAC = \angle FEG$  デアアル。



**證明** AB=EF, AC=EG ナルヤウニトル。然ルトキハ四邊形 AEFB, AEGC ハ共ニ平行四邊形デアアル。

ソレ故  $BF \parallel AE$  及ビ  $CG \parallel AE$

$\therefore BF \parallel CG$

ソレ故四邊形 BFGC ハ平行四邊形デアアル。

$\therefore CB = GF \quad \therefore \triangle BAC = \triangle FEG$

$\therefore \angle BAC = \angle FEG$

**図** 1. 任意ノ一點カラ一平面上ニナイ二直線ニ

夫々平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ皆相等シイ。

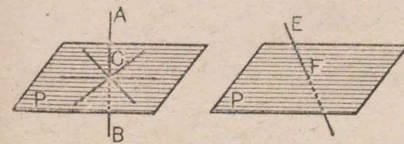
**定義** 任意ノ一點カラ一平面上ニナイ二直線ニ夫々平行ニ引イタ二直線ノナス角ヲ、一平面上ニナイ二直線ノナス角トイフ。モシコノ角ガ直角ナラバコレ等ノ二直線ハ互ニ垂直デアアルトイフ。

**図** 2. 平行ナ二直線ノ一方ニ垂直ナ直線ハ他方ニモ亦垂直デアアル。

### 89. 平面ト直線ノ垂直

**定義** 一平面ニ交ル一直線ガソノ交點ヲ過ツテソノ平面上ニ引イタ總テノ直線ニ垂直ナルトキ、ソノ直線ト平面トハ互ニ垂直デアアル(又ハ直交スル)トイヒ、ソノ直線ヲソノ平面ノ垂線トイフ。

平面ニ垂直デナイ直線ヲソノ平面ノ斜線トイフ。



平面ノ垂線或ハ斜線ガコノ平面ト

交ル點ヲソノ垂線或ハ斜線ノ足トイフ。圖ノ AB ハ平面 P ノ垂線デソノ足ハ C, EF ハ斜線デソノ足ハ F デアアル。 AB ガ平面 P ノ垂線デアアルコトヲ

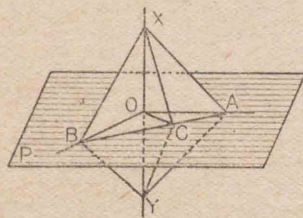
AB ⊥ P ト書ク。

**定理 80.** 相交ル二直線ノ交點ヲ過リソレ等ニ垂直ナ直線ハ、モトノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デアアル。

**假設** O デ交ル二直線 OA, OB ハ一平面 P ヲ決定スル。O ヲ過ル直線 XY ガ OA, OB ニ垂直ナルトキ

**終結** XY ⊥ P デアル。

**證明** 平面 P 上デ任意ノ直線 OC ヲ引イタトキ、



XY ⊥ OC ナルコトヲ證明スレバヨイ。

今 OA, OB, OC ト夫々 A, B, C デ交ル直線ヲ引キ、又 XY 上ニ P ノ兩側ニ

OX = OY ナルヤウニ二點 X, Y ラトリ、コレ等ヲ A, B, C ノ各ニ結ブト

OA ⊥ XY (假設) ∴ XA = YA

又 OB ⊥ XY (假設) ∴ XB = YB

∴ ΔXAB = ΔYAB 從ツテ ΔXAC = ΔYAC

∴ XC = YC

∴ ΔXOC = ΔYOC

從ツテ ∠XOC = ∠YOC

∴ XY ⊥ OC

**註** 上ノ定理ノ圖ノ二點 X, Y ハ平面 P ニ關シテ對稱デアアル。

**圖 1.** 相交ル二直線ニ垂直ナ直線ハ、ソノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デアアル。

**圖 2.** 一直線ガ一平面ニ垂直ナルトキ、ソノ直線ハコノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直デアアル。

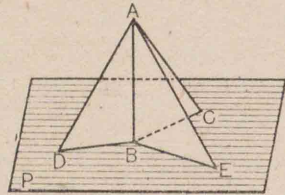
**圖 3.** 一點ヲ過リ一直線ニ垂直ナ平面ハ唯一ツデアアル。又一點ヲ過リ一平面ニ垂直ナ直線ハ唯一ツデアアル。

問 二平面 P, Q ノ交線ヲ XY トシ、又 AB ⊥ P, AC ⊥ Q トスル。次ニ二直線 AB, AC ノ決定スル平面ヲ R トスルト、R ⊥ XY デアル。

90. 點ト平面ノ距離

**定理 81.** 平面外ノ一點カラコノ平面ヘ垂線及ビ斜線ヲ引クトキ

- (i) 垂線ハ最小デアアル。
- (ii) 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ斜線ハ相等シイ。
- (iii) 垂線ノ足カラ大ナル距離ニ足ヲモツ斜線ハ、小ナル距離ニ足ヲモツ斜線ヨリ大デアアル。



**【假設】** 點Aヲ平面P外ノ點トシ、ABヲ垂線、AC、AD、AEヲ斜線トシ、ソノ足ヲ夫夫B、C、D、Eトスル。  
又  $BC=BD < BE$  トスルト

**【終結】** (i) ABハ最小 (ii)  $AC=AD$  (iii)  $AC < AE$  デアル。

**【證明】** 略スル。(三ツノ直角三角形ABC、ABD、ABEヲ比べヨ)

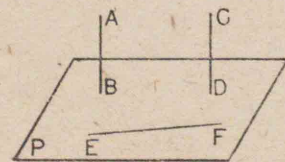
**【題】** コノ定理ノ逆ハ眞デアル。

**問** 一點カラ一平面ニ下シタ垂線トノナス角が大ナル斜線ハ、小ナル角ヲナス斜線ヨリ大デアル。

**定義** 平面外ノ一點カラソレニ下シタ垂線ノ長サヲソノ點ト平面ノ距離トイフ。

**91. 二平面ノ距離**

**【定理】** 82. 平行ナ二直線ノ一方ニ垂直ナ平面ハ他方ニモ亦垂直デアル。



**【假設】**  $AB \parallel CD$ ,  $AB \perp P$  トスルト  
**【終結】**  $CD \perp P$  デアル。  
**【證明】**  $AB \perp P$  ナル故  $AB$

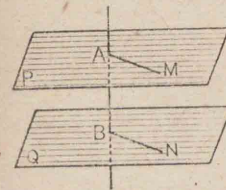
ハP上ノ直線EFニ垂直デアル。(定理80系2)

然ルニ  $AB \parallel CD \therefore EF \perp CD$  (定理79系2)

CD  $\perp$  P

**【題】** 一平面ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアル。

**【定理】** 83. 平行ナ二平面ノ一方ニ垂直ナ直線ハ他方ニモ亦垂直デアル。



**【假設】**  $P \parallel Q$ ,  $AB \perp P$  ナラバ

**【終結】**  $AB \perp Q$  デアル。

**【證明】**  $AB \perp P$  ナル故、 $AB$ ハPト交ル、ソノ點ヲAトスル。

又  $AB$ ハPト交ルカラQトモ交ル、ソノ點ヲBトスル。今Bヲ過ルQ上ノ任意ノ直線BMト  $AB$ トノ決定スル平面ガPト交ル直線ヲANトスルト

$BM \parallel AN$  (定理78)

然ルニ  $\angle NAB = R\angle \therefore \angle MBA = R\angle$

$\therefore AB \perp Q$

**【題】** 1. 一直線ニ垂直ナ二平面ハ平行デアル。

**【題】** 2. 平行ナ二平面ノ双方ニ垂直ナ直線ノ二平面間ニ夾マレル部分ノ長サハ相等シイ。

**定義** 平行ナ二平面ノ双方ニ垂直ナ直線ガソノ二平面ノ間ニ夾マレル線分ノ長サヲ

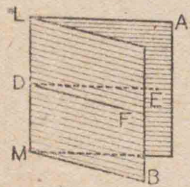


ソレ等二平面ノ距離トイフ。

問 平行ナ二平面ノ一方カラ他方マデ引イタ線分ノ中、二平面ノ距離ハ最小デアル。

### 92. 二面角

定義 相交ル二平面ハ二面角ヲナストイヒ、ソノ交線ヲ二面角ノ稜、二平面ノ各、ヲ二面角ノ面トイフ。



二面角ノ稜ヲ軸トシテ一方ノ面ヲ動カスト遂ニ他方ノ面ト合スル。コノトキノ廻轉ノ大小ガ二面角ノ大小デアル。

定義 二面角ノ稜上ノ任意ノ點ヲ過リ、各面上デソノ稜ニ垂直ニ引イタ二直線ノナス二面角内ノ角ヲ二面角ノ平面角トイフ。

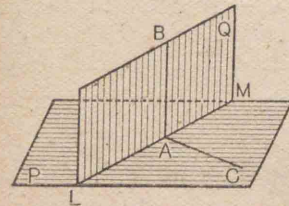
上圖ハ二面角デ、 $\angle EDF$  ハソノ平面角デアル。又定理79ヨリ二面角ノ平面角ノ大イサハソノ頂點ノ位置ニ關セズ一定デアル。然ルニ二面角ノ面ガ合スルトソノ平面角ノ邊モ合シ、一ツノ面ガ廻轉スルト平面角ノ一邊モ廻轉シ、廻轉ノ大小ハ全ク相等シイ。因テ

定義 二面角ノ平面角ノ大イサヲ二面角ノ大イサトイフ。モシコノ平面角ガ直角ナラバ二面角ノ面ハ互ニ垂直デアルトイフ。

定理 84. 一平面ニ垂直ナ直線ヲ含ム平面ハモトノ平面ニ垂直デアル。

假設 ABハPノ垂線デ、QハABヲ含ムトスルト

終結  $P \perp Q$  デアル。



證明 P, Qノ交線ヲ

LMトシ、P上ニ於テAヲ過リ、LMニ垂直ニACヲ引クト  $AB \perp LM, AC \perp LM$

ツレ故  $\angle BAC$  ハP, Qノナス二面角ノ平面角デアル。

然ルニ  $AB \perp P \therefore \angle BAC = R \angle$   
 $\therefore P \perp Q$

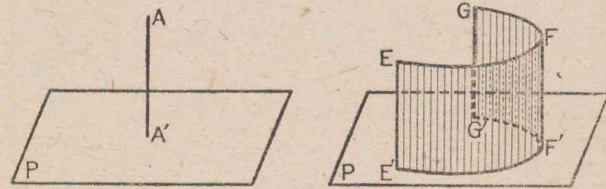
図 一平面ニ垂直ナ二平面ノ交線ハモトノ平面ニ垂直デアル。

問 一點デ交ルニツツ互ニ垂直ナ三直線ノ各、ハ他ノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デアル。

### 93. 正射影

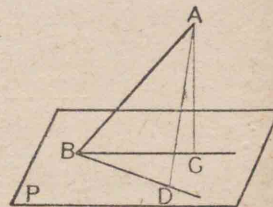
定義 一點カラ一平面ニ引イタ垂線ノ足ヲソノ平面上ニ投ズルソノ點ノ正射影トイ

フ。或線上ノ點ノ一平面上ニ投ズル正射影ノ軌跡ヲソノ平面上ニ投ズルソノ線ノ正射影トイフ。



問1. 一平面ニ垂直デナイ一直線ノソノ平面上ニ投ズル正射影ハ、ソノ直線上ノ二點ノ正射影ヲ過ル直線デアアル。

問2. 一平面ノ斜線ガソノ足ヲ過リ、ソノ平面上ニ引イタ總テノ直線トナス角ノ中、ソノ正射影トナス銳角ハ最小デアアル。



定義 一平面ノ斜線ト、ソノ平面上ニ投ズル正射影トガナス銳角ヲソノ斜線ト平面ノナス角トイフ。

**練習 (14)**

1. 一平面上ニナイ四ツノ點ガアルトキ、コレ等ノ點デ決定セラレル平面ノ數ハ幾ツアルカ。

2. 四ツノ頂點ガ一平面上ニナイ四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ブト、一ツノ平行四邊形ヲ得ル。

定義 四ツノ頂點ガ一平面上ニナイ四邊形ヲ撮四邊形又ハ歪四邊形トイフ。

3. 一平面外ノ定點ヲ過リ、ソノ平面ニ平行ナ直線ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 與ヘラレタ點ヲ過リ、與ヘラレタ平面ニ平行デ且ツ與ヘラレタ直線ニ交ル直線ヲ引ケ。

5. 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

6. 與ヘラレタ一直線ヲ含ミ、與ヘラレタ二點カラ等距離ニアル平面ヲ作レ。

7. 三角形ABCノ垂心カラソノ平面ニ引イタ垂線上ノ任意ノ點ヲMトスルト、 $MA \perp BC$ デアアル。

8. 相交ル二平面ノ一方ノ上ニアル平行四邊形ガ他方ノ上ニ投ズル正射影ハ、亦平行四邊形デアアル。

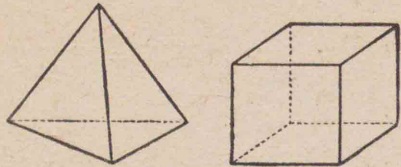
第十五章 多面體

94. 多面體

定義 幾ツカノ平面デ圍マレタ立體ヲ多面體トイフ。多面體ノ限界ハ皆多角形デア

ツテコレ等ヲ多面體ノ面、面ノ交線ヲ稜、稜ト稜トノ交點ヲ頂點トイフ。

多面體ハ面ノ數ニ從ツテ四面體、五面體、……トイフ。



圖ハ四面體ト六面體デアアル。

問 二面體、三面

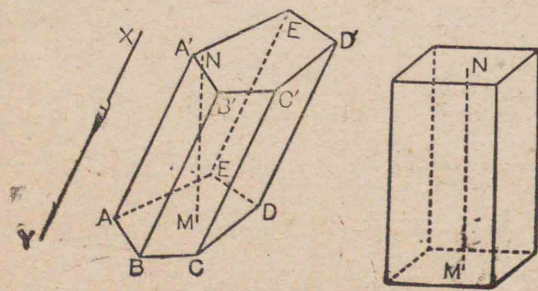
體等トイフ多面體ハ出來ルカ。

**注意** 多面體ノ何レノ面ヲ擴張シテモソノ多面體ヲキヲナイトキ、コレヲ凸多面體トイフ。

通常多面體トイヘバ凸多面體ノコトデアアル。

### 95. 角 壩

**定義** 一直線ニ平行ナ三ツ以上ノ平面ト、ソノ直線ニ交ルニツノ平行ナ平面トデ圍マレタ多面體ヲ角壩トイフ。



一直線ニ平行ナ各ノ平面ヲ角壩ノ側面、側面ノ交線ヲ側稜、側面ノ面

積ノ和ヲ側面積トイフ。又平行ナ二平面ヲ底面、ソノ面積ヲ底面積、兩底面ノ距離ヲ角壩ノ高、サトイフ。

角壩ハ底面ノ邊數ニ從ツテ三角壩、四角壩、……トイフ。

問1.  $n$ 邊多角形ヲ底面トスル角壩ハ  $(n-2)$ 個ノ三角壩ニ分ツコトガ出來ル。

問2. 角壩ノ側面ハ皆平行四邊形デアアル。

**定義** 側面ガ底面ニ垂直ナ角壩ヲ直角壩トイヒ、垂直デナイ角壩ヲ斜角壩トイフ。又底面ガ正多角形ナル直角壩ヲ正角壩トイフ。

角壩ヲソノ側稜(或ハソノ延長)ニ垂直ナ平面デキツタ切口ヲ直截面トイフ。

**定理** 85. 斜角壩ノ側面積ハ直截面ノ周ト一側稜トノ積ニ等シイ。

**證明** 例ヘバ四角壩<sup>\*</sup>  $ABCD-A'B'C'D'$ ノ直截面ヲ  $HKLM$ トスルト

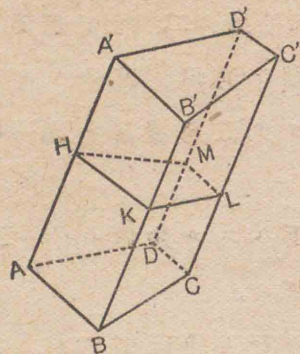
$$\square AA'B'B = HK \cdot AA'$$

$$\square BB'C'C = KL \cdot BB'$$

$$\square CC'D'D = LM \cdot CC'$$

$$\square DD'A'A = MH \cdot DD'$$

<sup>\*</sup>角壩ノ記號ニハ上ノヤウニ兩底面ノ記號ヲ並ベテ記ス。



又  $AA' = BB' = CC' = DD'$

故 = 側面積ハ

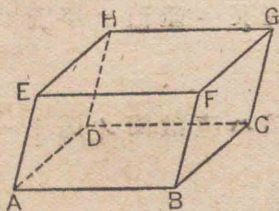
$(HK + KL + LM + MH) \cdot AA'$

= 等シイ。

⊠ 直角塙ノ側面積ハ  
底面ノ周ト高サトノ積ニ  
等シイ。

問1. 或斜角塙ノ直截面ハ一邊 3cmノ正六角形  
デ、側稜ハ 6cmデアルトイフ。側面積ヲ求メヨ。

問2. 底面ノ一邊ガ 2cm、高サガ 12cmアル正三角  
塙ノ全表面積ヲ求メヨ。



塙ノ全表面積ヲ求メヨ。

定義 底面ガ平行四  
邊形デアル角塙ヲ平行  
六面體トイフ。

問1. 平行六面體ノ六ツノ面ハニツツ互ニ平  
行デアアル。又平行ナニツノ面ハ合同デアアル。

問2. 平行六面體ニハ幾ツノ稜ガアルカ。

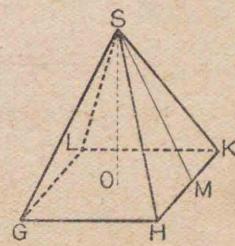
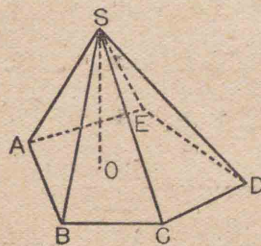
定義 各ノ面ガ矩形デアアル平行六面體ヲ  
直六面體又ハ直方體トイヒ、各ノ面ガ正方形  
デアアル直六面體ヲ立方體トイフ。

問 一稜ガ  $a$ ナル立方體ノ全表面積ヲ求メヨ。

### 96. 角錐・角錐臺

定義 一ツノ多角形ノ各邊ヲ底邊トシ、ソ  
ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形  
ト、モトノ多角形トデ圍マレタ多面體ヲ角錐  
トイフ。

コノトキモトノ多角形ヲ角錐ノ底面、ソノ面積ヲ  
底面積トイヒ、後ノ各三角形ヲ側面、ソノ面積ノ總和  
ヲ側面積トイフ。又相隣ル側面ノ交線ヲ側稜、總テ  
ノ側稜ノ交點ヲ頂點トイヒ、頂點ト底面トノ距離ヲ  
高サトイフ。



角錐ハ底面ノ邊數ニ從ツテ三角錐、四角錐、……  
トイフ。

⊠ 三角錐ハ四面體デアツテ、ドノ面ヲ底面ト考ヘ  
テモヨイ。

定義 角錐ノ底面ガ正多角形デ、ソノ頂點

カラ底面ニ下シタ垂線ノ足ガ底面ノ中心デアル角錐ヲ正角錐トイフ。

正角錐ノ頂點カラ底面ノ一邊ニ下シタ垂線(前頁ノ圖ノSM)ヲ斜高トイフ。

問1.  $n$ 邊多角形ヲ底面トスル角錐ハ $(n-2)$ 個ノ三角錐ニ分ツコトガ出來ル。

問2. 正角錐ノ側面ハ皆合同ナ二等邊三角形デアル。

**定理** 86. 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デキルトキ

(i) 側稜及ビ高サハ同ジ比ニ分タレル。

(ii) 截面(切口)ハ底面ニ相似ナ多角形デアル。

**假設** 角錐ヲ假ニ五角錐 $S-ABCDE$ トシ底面 $ABCDE$ ニ平行ナ平面ヲ $A'B'C'D'E'$ トスル。又コノ截面ト高サ $SH$ トノ交點ヲ $H'$ トスルト

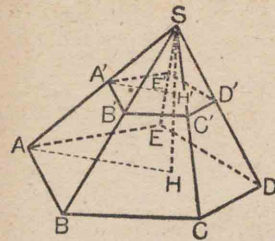
**終結** (i)  $\frac{SA'}{A'A} = \frac{SB'}{B'B} = \dots = \frac{SH'}{H'H}$

(ii) 多角形 $A'B'C'D'E'$ ノ多角形 $ABCDE$ デアル。

**證明** (i)  $A'B' \parallel AB$  デアルカラ

$$\frac{SA'}{A'A} = \frac{SB'}{B'B}$$

\* 角錐ノ記號ニハ上ノヤウニ頂點ト底面ノ記號トヲ並ベテ記ス。



同様ニ

$$\frac{SB'}{B'B} = \frac{SC'}{C'C} = \dots$$

又  $A'H' \parallel AH$  デアルカラ

$$\frac{SA'}{A'A} = \frac{SH'}{H'H}$$

(ii) 底面及ビ截面ハツノ

各邊ガ平行デ且ツ同ジ向キデアアルカラ

$$\angle A'B'C' = \angle ABC, \angle B'C'D' = \angle BCD, \dots \quad (1)$$

又  $\frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB}, \frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC}$

$$\therefore \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

同様ニ  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \dots \quad (2)$

(1),(2)ヨリ 多角形 $A'B'C'D'E'$ ノ多角形 $ABCDE$

**図1.** 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デキルトキ底面ト截面トノ面積ノ比ハ頂點カラ各面ニ至ル距離ノ比ノ二乗比ニ等シイ。

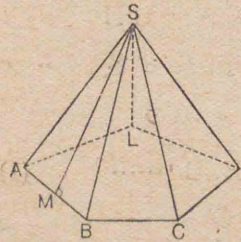
**図2.** 底面積ト高サガ夫々相等シイニツノ角錐ノ各底面ニ平行デ且ツ各頂點カラ等距離ニアル截面ハ等積デアル。

問 角錐ノ高サノ中點ヲ過ツテ底面ニ平行ナ截面ノ面積ト底面積トノ比ヲ求メヨ。

**定理 87.** 正角錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ。

**證明** 正角錐 S-ABC.....Lニ於テ

$$\triangle SAB = \triangle SBC = \dots$$



今底面ノ邊數ヲnトスルト、ソノ側面積ハ

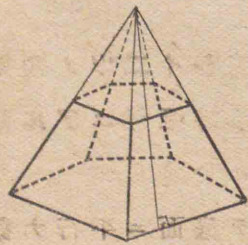
$$\triangle SAB \times n = \frac{1}{2} AB \cdot SM \times n$$

$$= \frac{1}{2} (\text{底面ノ周}) \times \text{斜高}$$

**定義** 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デキルトキ、截面ト底面ノ間ノ立體ヲ角錐臺トイフ。

角錐臺ノ平行ナ二面ヲ底面、ソノ一方ヲ上底、他方ヲ下底、兩底間ノ距離ヲ高サトイフ。又底面以外ノ各面ヲ側面、側面ノ交線ヲ側稜トイフ。

**定義** 正角錐カラ出來ル角錐臺ヲ正角錐臺トイフ。



コノトキモトノ正角錐ノ斜高ガ兩底面デ截取ラレル部分ヲソノ斜高トイフ。角錐臺ノ側面ハ皆梯形デ、正角錐臺ノ側面ハ皆合同ナ等脚梯形デナル。

問 正角錐臺ノ側面積ハ兩底ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ。

### 97. 體積・體積ノ單位

**定義** 立體ノ面デ圍マレタ空間ノ部分ヲソノ立體ノ體積トイフ。

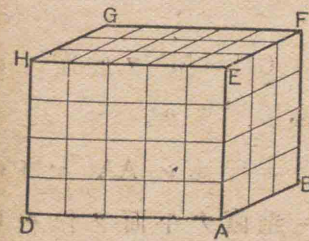
底面ガ合同デ、且ツ高サガ相等シイニツノ直角牆ハ相對應スル面ガ重ナルヤウニ置クコトガ出來ル。

斯様ナニツノ立體ハ合同デアルトイフ。

合同ナ立體ノ體積ハ相等シイ、即チ等積デアル。

稜ノ長サガ單位ノ長サニ等シイ立方體ノ體積ヲ體積ノ單位トシ、長サノ單位ニ立方ナル語ヲ前置スル。例ヘバ一稜ガ1mデアル立方體ノ體積ハ1立方米デアル。

**定理 88.** 直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ、一ツノ頂點デ出會フニツノ稜ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。



**證明** 例ヘバ稜 ABガ單位ノ3倍、稜 AEガ4倍、稜 ADガ5倍トスルト、コノ直六面體ハ3x4x5個ノ立方體ニ分タレル。ソシ

テ各立方體ノ體積ハ單位ノ體積デアルカラ、直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ  $3 \times 4 \times 5$  デアル。

ソコデ直六面體ノ體積及ビ一頂點Aデ出會フ三ツノ稜ノ長サヲ表ハス數ヲ夫々  $V, a, b, c$  トスルト  $V = abc$  デアル。即チ

直六面體ノ體積ハ一頂點デ出會フ三ツノ稜ノ積ニ等シイ。

図 直六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

問1. 立方體ノ體積ハ一稜ノ立方ニ等シイ。

問2. 二稜ガ夫々を相等シイニツノ直六面體ノ體積ノ比ハ、第三稜ノ比ニ等シイ。

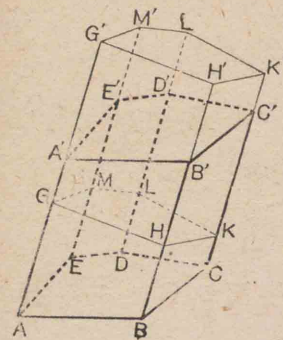
### 98. 角嚮ノ體積

定理 89. 斜角嚮ハソノ直截面ヲ底面トシ、側稜ヲ高サトスル直角嚮ト等積デアル。

假設 斜角嚮ヲ  $ABCDE-A'B'C'D'E'$  トシ、ソノ直截面ヲ  $GHKLM$  トスルト

終結  $ABCDE-A'B'C'D'E'$  ハ  $GHKLM$  ヲ底面トシ、 $AA'$  ヲ高サトスル直角嚮ト等積デアル。

證明 各側稜ヲ  $AA'$  ノ方向ニ延長シ、 $AA'$  ニ等シク  $GG'$  ヲトリ、 $G'$  ヲ過リ  $AG'$  ニ垂直ナ平面ヲ作ルト、

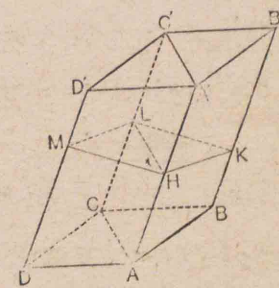


直角嚮  $GHKLM-G'H'K'L'M'$  ヲ得ル。

擬テ多面體  $ABCDE-GHKLM$  ト多面體  $A'B'C'D'E'-G'H'K'L'M'$  トハ合同デアル。ソノ双方ヘ多面體  $GHKLM-A'B'C'D'E'$  ヲ加ヘルト

斜角嚮  $ABCDE-A'B'C'D'E' =$  直角嚮  $GHKLM-G'H'K'L'M'$

図 平行六面體ヲ同一ノ面上ニナイ平行ナ二稜ヲ含ム平面デキルト、等積ナニツノ三角嚮ニ分タレル。

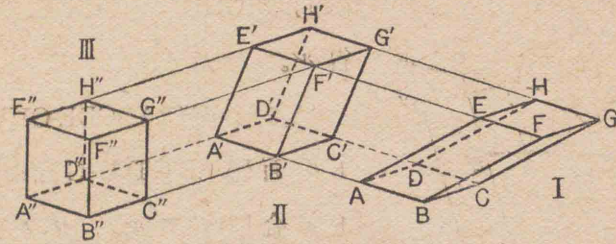


定理 90. 平行六面體ノ體積ハ、ソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

假設 平行六面體  $ABCD-EFGH$  ノ底面ヲ  $\square ABCD$  トスルト

終結 ソノ體積ハ  $\square ABCD \times$  (高サ) デアル。

證明 底面  $ABCD, EFGH$  ガアル平面ヲ夫々  $P, Q$  トスル。與ヘラレタ平行六面體  $I$  ノ  $AB$  ニ平行ナ稜ヲ延長シ、ソノ上ニ  $AB$  ニ等シク  $A'B'$  ヲトリ  $A'$



B'ヲ過ツテ稜 A'B'ニ垂直ナ二平面ヲ作ルト平行六面體 IIヲ得ル。

ソシテ  $I=II$  (定理 89)

且ツ  $\square ABCD = \square A'B'C'D'$

次ニ IIノ B'C'ニ平行ナ稜ヲ延長シ、B'C'ニ等シク B''C''ヲトリ B'', C''ヲ過ツテ稜 B'C'ニ垂直ナ二平面ヲ作ルト直六面體 IIIヲ得ル。

ソシテ  $II=III \therefore I=III$

且ツ  $\square ABCD = \square A'B'C'D' = \square A''B''C''D''$

又 I, II, IIIノ高サハ平行二平面 P, Qノ距離デアカラ相等シイ。

然ルニ  $III = \square A''B''C''D'' \times (\text{高サ})$  (定理 88系)

$\therefore I = \square ABCD \times (\text{高サ})$

図 1. 三角嚮ノ體積ハ、ソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

図 2. 直角嚮ノ體積ハ、ソノ底面積ト高サトノ積

ニ等シイ。

図 3. 斜角嚮ノ體積ハ、ソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

〔注意〕 角嚮ノ體積、底面積、高サヲ表ハス數ヲ夫々  $V, S, h$ トスルト  $V = Sh$

問 1. 或斜角嚮ノ底面ハ三邊ガ 2cm, 3cm, 4cmノ三角形デ、高サハ 5cmデアルトイフ。體積ヲ求メヨ。

問 2. 底面ガ等積ナ二ツノ角嚮ノ體積ノ比ハ、高サノ比ニ等シイ。

### 99. 角錐ノ體積

〔定理〕 91. 底面及ビ高サガ夫々相等シイニツノ三角錐ハ等積デアアル。

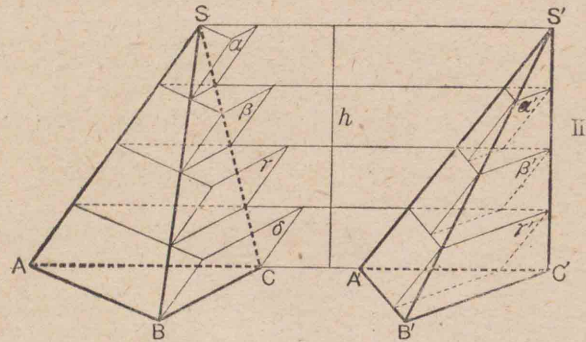
〔假設〕 ニツノ三角錐 S-ABC, S'-A'B'C'ニ於テ底面 ABC, A'B'C'ガ等積デ、高サヲ共ニ  $h$ トスルト

〔終結〕 三角錐 S-ABC = 三角錐 S'-A'B'C'デアアル。

〔證明〕 今三角錐 S-ABCヲ I, S'-A'B'C'ヲ IIトスル。ニツノ三角錐ヲ同一平面上ニ立テ、高サ  $h$ ヲ  $n$ 等分(例ヘバ四等分)シ、各分點ヲ過ツテ底面ニ平行ナ平面ヲ作ルト、對應スル截面ハ等積デアアル。(定理 86系 2)

次ニ底面及ビ各截面ヲ底面トシ、Iニ於テハ上方ニ IIニ於テハ下方ニ圖ノヤウナ角嚮ヲ作ルト





$a=a', \beta=\beta', \gamma=\gamma'$  (定理90系3)

ソシテ  $I < a+\beta+\gamma+\delta, II > a'+\beta'+\gamma'$

$\therefore I - II < \delta$

然ルニ  $\delta$  ノ高サハ  $\frac{h}{n}$  デアルカラ,  $n$  ヲ限リナク増スト  $\delta$  ハ  $0$  ニナル。

$\therefore I \leq II$

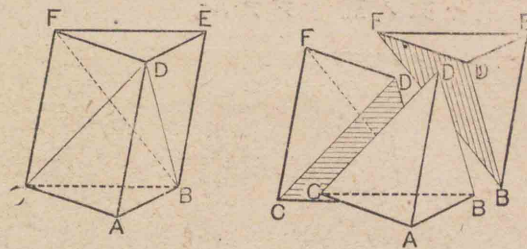
モシ  $I, II$  ヲトリカヘテ論ズルト

$II \leq I$

$\therefore H=I$  即チ等積デアアル。

**定理 92.** 三角錐ハコレヲ等積ナ三ツノ三角錐ニ分ツコトガ出來ル。

**證明** 三角錐  $ABC-DEF$  ヲ  $B, C, D$  ノ決定スル平面ト,  $B, D, F$  ノ決定スル平面トデキルト, 三ツノ三角錐  $D-ABC, D-BFC, D-BEF$  ニ分タレル。



扱テ  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$   
高サハ共通 }  $\therefore D-ABC = B-DEF$  (定理91)

即チ  $D-ABC = D-BEF$

又  $\triangle FBC \equiv \triangle BFE$   
高サハ共通 }  $\therefore D-BFC = D-BEF$

ソレ故三ツノ三角錐ハ互ニ等積デアアル。

図1. 三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積

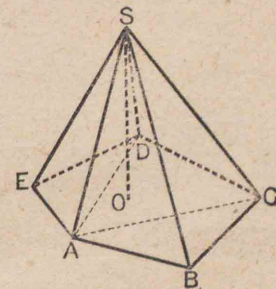
ノ  $\frac{1}{3}$  ニ等シイ。

図2. 角錐ノ體積(V)ハソ

ノ底面積(S)ト高サ(h)トノ積

ノ  $\frac{1}{3}$  ニ等シイ。

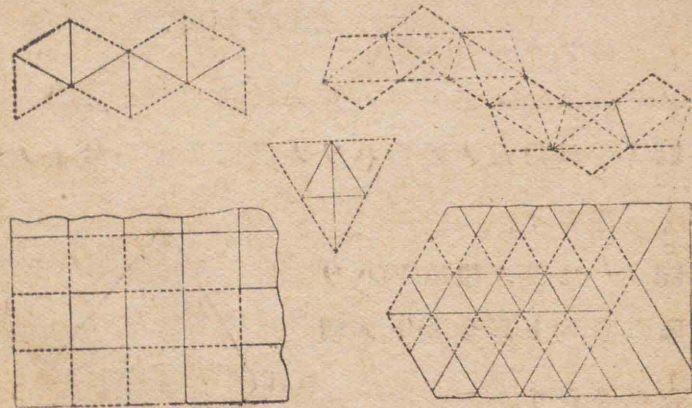
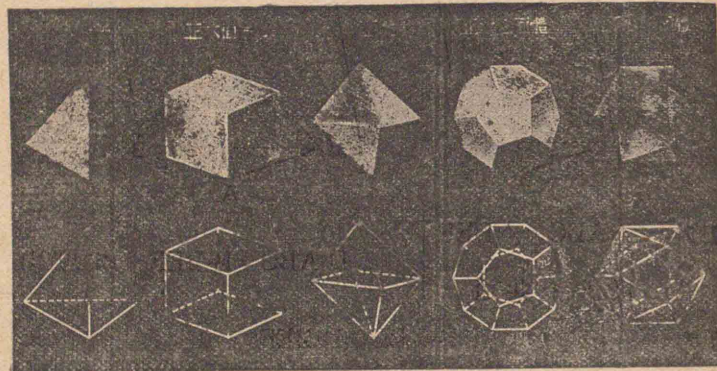
**注意**  $V = \frac{1}{3}Sh$



100. 正多面體

**定義** 面ガ皆合同ナ正多角形デ各頂點ノ面ノ數ガ相等シイ多面體ヲ正多面體トイフ。

## 正多面體ハ次ノ五種デアル。



- (i) 正四面體 (正三角形ノ角ガ一頂點 = 3 ッ集マル)  
 (ii) 正六面體 (正四角形ノ角ガ一頂點 = 3 ッ集マル)  
 (iii) 正八面體 (正三角形ノ角ガ一頂點 = 4 ッ集マル)  
 (iv) 正十二面體 (正五角形ノ角ガ一頂點 = 3 ッ集マル)

(v) 正二十面體 (正三角形ノ角ガ一頂點 = 5 ッ集マル)

コレ等ノ模型ヲ作ルニ、ハ前圖ノ點線ニ沿ウテ厚紙ヲキリ、實線ニ沿ウテ折り、ソレヲ糊デ貼レバヨイ。

## 練習 (15)

1. 角錐ノ側面積ハ底面積ヨリ大デアル。
2. 四面體ノ各頂點トソノ對面ノ重心トヲ結ブ四ツノ線分ハ同一ノ點デ交リ、ソノ交點ハソレ等ノ各線分ヲ 3:1 ニ内分スル。

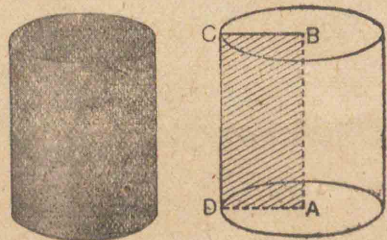
**注意** コノ交點ヲ四面體ノ重心トイフ。

3. 一稜ガ  $a$  ナル正四面體ノ高サヲ求メヨ。
4. 體積  $a$  立方米ノ立方體ノ對角線ハ幾米カ。
5. 平行六面體ノ底面ハ矩形デアツテ、ソノ二邊ハ  $7\text{cm}$ 、 $10\text{cm}$  デアル。又底面ニ交ル稜ハ  $12\text{cm}$  デ、底面ト  $60^\circ$  ノ角ヲナストイフ。ソノ體積ヲ求メヨ。
6. 正三角錐ノ底面ノ一邊ノ長サガ  $8\text{cm}$  デ、側稜ガ底面トナス角ハ  $45^\circ$  デアル。體積ヲ求メヨ。
7. 底面積ガ  $a$  平方糎、高サガ  $h\text{cm}$  アル角錐ヲ底面ニ平行デ頂點カラ  $h'\text{cm}$  ノ距離ニアル平面デキルトキ、二ツノ部分ノ體積ハ各、何程カ。

第十六章 曲面體

101. 直圓壩

定義 矩形ガソノ一邊ヲ軸トシテ一周リ廻轉シテ出來ル立體ヲ直圓壩トイフ。



コノトキ廻轉ノ軸トシタ邊(AB)ヲ直圓壩ノ軸、軸ニ垂直ナ二邊(AD, BC)デ出來ル等圓ヲ底面、

軸ニ平行ナ邊(CD)デ出來ル曲面ヲ側面トイフ。又側面ヲ畫ク直線(CD)ヲ總テノ位置デ直圓壩ノ母線、底面ノ半徑(AD)ヲソノ半徑、兩底間ノ距離(AB)ヲ直圓壩ノ高サトイフ。

問1. 直圓壩ノ底面ニ平行ナ截面ハ底面ニ等シイ圓デアアル。

問2. 直圓壩ノ側面上ノ點ハ皆軸カラ等距離ニアアル。

問3. 直圓壩ノ軸ヲ含ム平面デソレヲキッタ截面ハドンナ多角形カ。

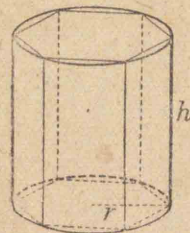
定義 直圓壩ノ兩底面ニ内接(又ハ外切)スル底面

ヲモツ直角壩ハ直圓壩ニ内接(外切)スルトイフ。

93. 直圓壩ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シク、ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

假設 直圓壩ノ半徑、高サ、側面積及ビ體積ヲ表ハス數ヲ夫々  $r, h, S, V$  トスルト

終結  $S=2\pi rh, V=\pi r^2 h$  デアル。



證明 直圓壩ニ内接スル側面ガ  $n$  個ノ正角壩ヲ作ル。今コノ正角壩ノ側面積ヲ  $S'$ 、底面ノ周ヲ  $p$  トスルト

$$S' = ph \quad (1)$$

次ニコノ正角壩ノ邊數ヲ順次ニ2倍、4倍、……ト増スニ從ツテ、 $S'$ 、 $p$ ハ夫々  $S, 2\pi r$  (圓ノ周)ニ近ヅキ、 $n$ ヲ限リナク増シタ極限ニ於テ夫々  $S, 2\pi r$  トナル。

因テ(1)ヨリ  $S = 2\pi rh$   
同様にシテ  $V = \pi r^2 h$

因 直圓壩ノ全表面積ハ  $2\pi r(h+r)$  デアル。

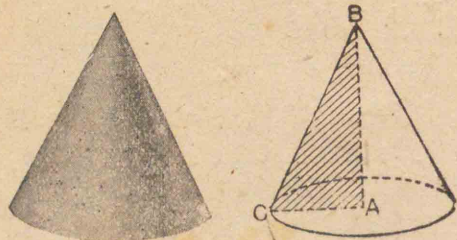
問1. 半徑ガ5cm、高サガ13cmアル直圓壩ノ全表面積ヲ求メヨ。但シ  $\pi = \frac{22}{7}$  トスル。

問2. 側面積ガ94.248平方糎、高サガ5cmナル直

圓錐ノ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。

### 102. 直圓錐

**定義** 直角三角形ノ一銳角ノ對邊ヲ軸トシテ、一周リ廻轉シテ出來ル立體ヲ直圓錐トイフ。



コノトキ廻轉ノ軸トシタ邊(AB)ヲ直圓錐ノ軸、軸ニ垂直ナ邊(AC)デ出來ル圓

ヲ底面、斜邊(BC)デ出來ル曲面ヲ側面トイフ。又側面ヲ畫ク直線(BC)ヲ總テノ位置デ直圓錐ノ母線、底面ノ半徑(AC)ヲソノ半徑、軸ノ長サ(AB)ヲ直圓錐ノ高サ、軸ト母線トノ交點(B)ヲ頂點トイフ。

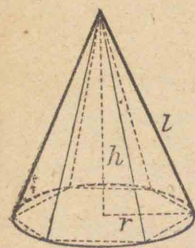
問1. 直圓錐ノ底面ニ平行ナ截面ハ圓デアアル。

問2. 直圓錐ノ軸ヲ含ム截面ハ二等邊三角形デアアル。

**定義** 直圓錐ト頂點ヲ共有シ底面ニ内接(又ハ外切)スル底面ヲモツ直角錐ハ直圓錐ニ内接(外切)スルトイフ。

**定理** 94. 直圓錐ノ側面積ハ、ソノ底面ノ周ト母

線トノ積ノ半分デアアル。又ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{2}$ デアアル。



**假設** 直圓錐ノ底面ノ半徑、母線、高サ、側面積及ビ體積ヲ表ス數ヲ夫夫 $r, l, h, S, V$ トスルト。

**終結**  $S = \pi r l, V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ デアアル。

**證明** 略スル。

図1. 直圓錐ノ全表面積ハ $\pi r(l+r)$ デアアル。

図2. 直圓錐ヲ底面ニ平行ナ平面デキルトキ

- (i) 底面ト截面ノ半徑ノ比ハ高サノ比ニ等シイ。
- (ii) 底面ト截面ノ面積ノ比ハ高サノ比ノ二乗比ニ等シイ。

問1. 半徑ガ3cm、高サガ4cmアル直圓錐ノ側面積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.14$ トスル。

問2. 漏斗ノ直圓錐狀ノ部分ノ直徑ガ10cmデ、深サガ12cmアルトキ、コノ部分ニハ水幾立ヲ入レ得ルカ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。

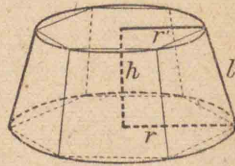
### 103. 直圓錐臺

**定義** 直圓錐ノ底面トコレニ平行ナ截面トノ間ニアル部分ヲ直圓錐臺トイフ。

直圓錐ノ底面及ビ截面ヲ共ニ直圓錐臺ノ底面ト

イヒ、ソノ一方ヲ上底、他方ヲ下底トイフ。又兩底ノ間ニアルモトノ直圓錐ノ母線及ビ高サノ部分ヲ夫夫ソノ母線及ビ高サトイフ。

問 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ夫々 $r, r'$ 、母線ヲ $l$ 、高サヲ $h$ トスルト側面積ハ $\pi(r+r')l$ 、體積ハ $\frac{\pi}{3}(r^2+rr'+r'^2)h$ デアアル。



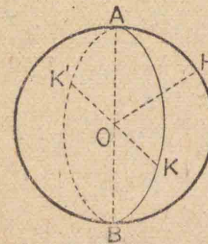
練習 (16)

1. 直圓錐ノ高サガ7cmデ、ソノ全表面積ガ半徑14cmノ圓ノ面積ニ等シイトキ、ソノ體積ヲ求メヨ。
2. 等積ナニツノ矩形ガアル。今ソレ等ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉シテ出來タニツノ直圓錐ノ側面積ノ比及ビ體積ノ比ヲ求メヨ。
3. 直角三角形ノ三邊ノ比ガ3:4:5デアアル。コノ各邊ヲ軸トシテ廻轉シテ出來ル三ツノ曲面體ノ體積ノ連比ヲ求メヨ。
4. 直圓錐ヲソノ軸ノ中點ヲ過リ底ニ平行ナ平面デキルトキ、新タニ出來タ直圓錐ト初メノ直圓錐トノ體積ノ比ヲ求メヨ。

第十七章 球

104. 球

定義 半圓ヲソノ直徑ヲ軸トシテ一周リ廻轉シテ出來ル立體ヲ球トイヒ、ソノ曲面ヲ球面(又ハ單ニ球)トイフ。



コノトキ軸トシタ半圓ノ中心(O)ヲ球ノ中心、中心ト球面上ノ點トノ距離(OK, OH等)ヲソノ半徑、中心ヲ過リ兩端ガ球面上ニアル線分(AB, KK'等)ヲソノ直徑トイフ。

球ヲ表ハスニハ中心ノ文字ヲ用ヒ、例ヘバ球Oト書ク。

球ノ半徑ハ皆相等シク、球面ハ中心ニ關シテ對稱ナルコトハ明ラカデアアル。

一點ガ球ノ内外又ハ球面上ニアルニ從ツテ、ソノ點ト球ノ中心トノ距離ハ半徑ヨリ小、大又ハ相等シイ。

又コレ等ノ逆モ真デアアル。

問1. 一定點カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

問 2. 二定點ヲ直角ニ見ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

105. 切點・交リ

定義 球面ト唯一點ヲ共有スル平面又ハ直線ハソノ球ニ切スルトイヒ、ソノ共有點ヲ切點トイフ。コノトキソノ平面ヲ切平面、ソノ直線ヲ切線トイフ。

定理 95. 球ノ半徑ノ一端ニ於テ、ソレニ垂直ナ平面又ハ直線ハソノ球ニ切スル。

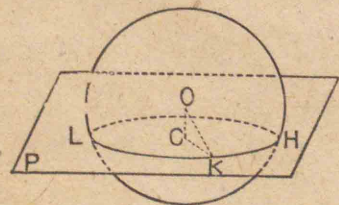
證明 平面又ハ直線上ノ切點以外ノ點ハ皆球ノ外ニアル。

問 球面上ノ一定點ニ於ケル切線ノ軌跡ハソノ點ニ於ケル切平面デアアル。

定理 96. 球ヲ平面デキツタ截面ハ圓デアアル。

假設 球Oヲキル平面ヲPトシ、ソノ截面ト球面トノ出會フ線ヲHKLトスルト

終結. HKLハ圓周デアアル。



證明 O\カラPニ下シタ垂線ノ足ヲCトスルト、Cハ定點デアアル。次ニHKL上ニ任意ノ一點Kヲトルト、OKハ球

ノ半徑デアアルカラ定長デアアル。

從ツテ CKモ亦定長デアアル。(びたごらすノ定理)

次ニC及ビ曲線 HKLハ平面P上ニアル。

故ニ截面ハCヲ中心トスル圓デアアル。

図 1. 球ノ中心トソレヲ過ラナイ截面ノ中心トヲ結ブ直線ハソノ截面ニ垂直デアアル。

図 2. 球ヲ二平面デキルトキ

- (i) 中心カラ等距離ニアル截面ハ相等シイ。
- (ii) 中心カラ遠イ截面ハ近イ截面ヨリ小デアアル。

図 3. 球面ト直線トハニツヨリ多クノ點デ出會ハナイ。

問 1. 半徑 5cmノ球ノ中心カラ 3cmノ距離ニアル平面デキツタ球ノ截面ノ半徑ヲ求メヨ。

問 2. 球ノ截面ノ中、最モ大ナルモノヲ求メヨ。

問 3. 球面上ノ三點ヲ過ル圓ヲ畫ケ。

定義 平面ト球トガーツノ圓ヲ共有スルトキ、ソノ平面ト球トハ相交ルトイフ。

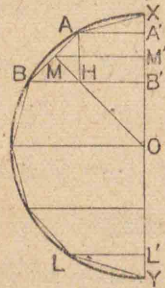
定義 球ノ中心ヲ過ル截面ヲソノ球ノ大圓トイヒ、ソノ他ノ截面ヲソノ小圓トイフ。

問 大圓ハ球及ビ球面ヲ二等分スル。

106. 球ノ表面積

**定理** 97. 半徑  $r$  ノ球ノ表面積ハ  $4\pi r^2$  デアル。

**證明** 半徑  $r$  ノ半圓ノ周ヲ  $n$  等分(例へバ六等分)



シ、各分點ヲ順次ニ結ブト  $n$  個ノ弦ヲ得ルガ、コレ等ハ直徑  $XY$  ノ周リニ廻轉スルト直圓錐臺又ハ直圓錐(或ハ直圓壩)ノ側面ヲ畫ク。今弦  $AB$  (ソノ中點  $M$ ) ヲトリ、 $A, B, M$  カラ  $XY$  へ下シタ垂線ノ足ヲ夫々  $A', B', M'$  トシ、 $MO$  ヲ結ビ、 $A$  カラ  $BB'$  へ垂線  $AH$  ヲ下スト、

側面積ハ  $\pi(AA'+BB') \cdot AB$  デアル。(§10) 同)

然ルニ  $AA'+BB'=2MM'$   
 又  $\triangle ABH$  の  $\triangle MOM'$   
 $\therefore AB:AH=MO:MM'$   
 $\therefore AB:A'B'=MO:MM'$   
 $\therefore MM' \cdot AB=MO \cdot A'B'$

ソレ故側面積ハ  $2\pi MO \cdot A'B'$  デアル。

次ニ  $n$  個ノ弦ハ皆  $O$  カラ等距離ニアル故、ソノ距離  $MO$  ヲ  $h$  デ表ハシ、 $n$  個ノ弦ノ畫ク側面積ヲ  $S'$  トスルト

$$S' = 2\pi h(XA' + A'B' + \dots + L'Y) = 4\pi rh$$

扱テ  $n$  ヲ順次ニ増スト各弦ハ順次ニ短クナリ、同時ニ  $h$  ハ  $r$  ニ近ヅキ、 $S'$  ハ球ノ表面積  $S$  ニ近ヅクカラ極限ニ於テハ

$$S = 4\pi r \cdot r = 4\pi r^2$$

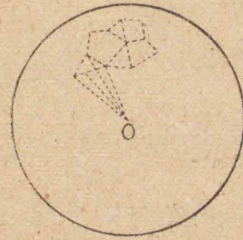
**題** 球ノ表面積ハ大圓ノ面積ノ4倍デアル。

- 問 1. 球面ト等シイ面積ノ圓ノ半徑ヲ求メヨ。  
 問 2. 地球ヲ球ト見做スト、子午線(大圓ノ周)ノ長さハ約4000萬米デアル。表面積ヲ求メヨ。

107. 球ノ體積

**定理** 98. 半徑  $r$  ノ球ノ體積ハ  $\frac{4}{3}\pi r^3$  デアル。

**證明** 球面上ニ總テノ頂點ヲモツ多面體ヲ考ヘ、



ソノ各頂點ヲ球ノ中心  $O$  ニ結ブト、多クノ角錐ヲ得ル、ソノ體積ノ總和ヲ  $V'$  トスル。又角錐ノ底面ヲ  $S, S', S'', \dots$  トシ、コレ等ノ  $O$  カラノ距離ヲ夫々  $h, h', h'', \dots$  トスルト

$h', \dots$  トスルト

$$V' = \frac{1}{3}(Sh + S'h' + S''h'' + \dots) \quad (\text{定理 92 系 2})$$

扱テ順次ニ多面體ノ面ノ數ヲ増シ、從ツテ各面ヲ小ニスルト  $h, h', h'', \dots$  ハ皆  $r$  ニ近ヅキ、 $S, S', S'', \dots$

……ノ和ハ球面ニ近ヅキ、 $V'$ ハ球ノ體積 $V$ ニ近ヅク  
カラ、極限ニ於テハ

$$V = \frac{1}{3}r(4\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

問 半徑3cmノ球ノ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi = \frac{22}{7}$   
トスル。

**練習 (17)**

1. 球ノ小圓ノ切線ハソノ球ノ切線デアル。
2. 球外ノ定點カラ引イタ切線ハ皆相等シク、ソ  
ノ切點ハ一ツノ小圓ノ周ノ上ニアル。
3. 球帶ノ側面積ハモトノ球ノ大圓ノ周ト、球帶  
ノ高サトノ積ニ等シイ。

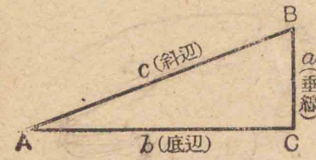
**注意** 平行二平面間ニ夾マレタ球面ノ部分ヲ球帶トイ  
ヒ、二平面間ノ距離ヲソノ高サトイフ。

4. 二ツノ球ノ半徑ヲ夫々 $a$ cm、 $b$ cmトスルトキ、  
ソノ二ツノ球ノ表面積ノ和ニ等シイ表面積ヲモツ  
球ノ半徑ヲ求メヨ。

# 平面三角法

## 第十八章 銳角ノ三角函數

### 108. 銳角ノ三角函數



$\angle C$ ヲ直角トスル三角  
形ABCニ於テ $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$   
ノ對邊ノ長サヲ夫々 $a$ 、 $b$ 、  
 $c$ トスル。ソシテ

$\frac{a}{c}$ ヲ $\angle A$ ノ正弦(sine) トイヒ、 $\sin A$ ト記ス。

$\frac{b}{c}$ ヲ $\angle A$ ノ餘弦(cosine) "  $\cos A$  "

$\frac{a}{b}$ ヲ $\angle A$ ノ正切(tangent) "  $\tan A$  "

$\frac{b}{a}$ ヲ $\angle A$ ノ餘切(cotangent) "  $\cot A$  "

$\frac{c}{b}$ ヲ $\angle A$ ノ正割(secant) "  $\sec A$  "

$\frac{c}{a}$ ヲ $\angle A$ ノ餘割(cosecant) "  $\operatorname{cosec} A$  "

即チ次ノヤウニナル。

$$\sin A = \frac{a \text{ (垂線)}}{c \text{ (斜邊)}}, \quad \cos A = \frac{b \text{ (底邊)}}{c \text{ (斜邊)}}, \quad \tan A = \frac{a \text{ (垂線)}}{b \text{ (底邊)}}$$



$$\cot A = \frac{b(\text{底邊})}{a(\text{垂線})}, \sec A = \frac{c(\text{斜邊})}{b(\text{底邊})}, \operatorname{cosec} A = \frac{c(\text{斜邊})}{a(\text{垂線})}$$

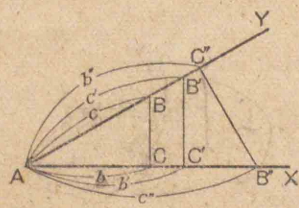
コレ等ノ比ヲ  $\angle A$  ノ三角函數トイフ。三角函數ハ勿論不名數デアアル。又上ノ定義ヨリ  $\operatorname{cosec} A, \sec A, \cot A$  ハ夫々  $\sin A, \cos A, \tan A$  ノ逆數ナルコトガワカル。因テ次ノ公式ヲ得ル。

$$\sin A \operatorname{cosec} A = 1$$

$$\cos A \sec A = 1$$

$$\tan A \cot A = 1$$

從ツテ今後  $\sec A, \operatorname{cosec} A$  等ニツイテハ略シテ述ベナイコトガアル。



鋭角  $XAY$  ノ邊上ニ點  $B, B', B''$  ヲトリ、コレ等カラ他ノ邊ヘ下シタ垂線ノ足ヲ夫々  $C, C', C''$  トスルト

$$\triangle ABC \sim \triangle AB'C' \sim \triangle AB''C''$$

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''}$$

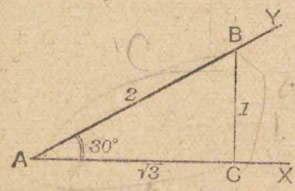
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}$$

故ニ  $\angle A$  ( $\angle XAY$ ) ノ三角函數ノ値ハ角ガ一定ナラバ皆一定デアアル。



### 109. $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ ノ三角函數

$\angle XAY$  ヲ  $30^\circ$  トシ、邊  $AY$  上ニ  $AB=2$  ナル點  $B$  ヲト



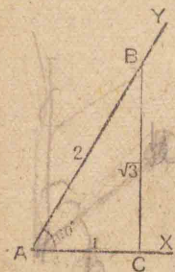
リ、 $B$  カラ邊  $AX$  ニ下シタ垂線ノ足ヲ  $C$  トスルト

$$BC=1, AC=\sqrt{3}$$

デアアル。

$$\therefore \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

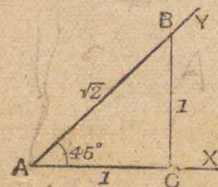


同様ニシテ

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

次ニ  $\angle XAY$  ヲ  $45^\circ$  トシ、邊  $AX$  上ニ  $AC=1$  ナル點  $C$  ヲトリ、 $C$  ニ於ケル  $AX$  ノ垂線ガ  $AY$  ト交ル點ヲ  $B$  トスルト、 $BC=1, AB=\sqrt{2}$  デアル。



$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ = 1 = \cot 45^\circ$$

問1.  $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  ノ正割、餘割ノ値ヲイヘ。

問2.  $\sin 30^\circ \cos 45^\circ - \cos 30^\circ \sin 45^\circ$ ヲ求メヨ。

問3.  $\tan 60^\circ \sec 30^\circ - \cot 30^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ$ ヲ求メヨ。

問4.  $\sin A = \frac{3}{5}$  及  $\tan A = \frac{1}{2}$  ナルトキ、角Aヲ作

ル。

### 110. 三角函數ノ相互ノ關係

$$\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} \quad \text{ナル故、定義ヨリ}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

次ニピタゴラスノ定理ヨリ  $a^2 + b^2 = c^2$  ナル故

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

即チ  $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

又  $a^2 + b^2 = c^2$  ノ兩邊ヲ  $b^2$  又ハ  $a^2$  デ割ルト夫々

$$1 + (\tan A)^2 = (\sec A)^2$$

$$1 + (\cot A)^2 = (\operatorname{cosec} A)^2$$

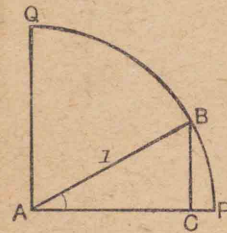
問1.  $\sin^4 A = 1 - 2 \cos^2 A + \cos^4 A$ ヲ證セヨ。

問2.  $\tan^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \cot^2 A + \sec^2 A$ ヲ證セヨ。

**注意**  $(\sin A)^1$ ヲ  $\sin^1 A$ ト書ク。一般ニ  $m$ ガ正整数ナルトキ  $(\sin A)^m$ ヲ  $\sin^m A$ ト書ク。他ノ函數ニツイテモ同様デア

### 111. 三角函數ノ値ノ變化

角ノ大イサガ定マルト、ソノ三角函數ノ値ハ皆定マル。然レ角ノ大イサガカハルトキハドウカ。コレヲ知ルタメニ半徑ノ長サガ



1ナル圓ノ一象限PAQヲトリ、Bガ弧PQノ上ヲPカラ出發シテQマデ動クモノト考ヘルト、 $\angle PAB$ ハ  $0^\circ$ カラ  $90^\circ$ マデ漸

次ニ増大スル。今BカラAPニ下シタ垂線ノ足ヲCトスルト

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = BC, \quad \cos A = \frac{AC}{AB} = AC$$

デアルカラ、 $\angle A$ ノ大イサガ  $0^\circ$ カラ  $90^\circ$ マデ順次ニ増スニ從ツテ、ソノ正弦ノ値ハ次第ニ増シ、反對ニ餘弦ノ値ハ次第ニ減ル。且ツ  $BC < 1$ ,  $AC < 1$ デアルカラ銳角Aノ正弦モ餘弦モソノ値ハ1ヨリ小デア

ル。次ニ  $\tan A = \frac{BC}{AC}$ ハ  $\angle A$ ガ増スニ從ツテBCガ増シ、ACガ減ルカラ、ヤハリ  $\tan A$ ハAト共ニソノ値ヲ増ス。ソシテ  $\tan 45^\circ = 1$ デアルカラ正切ノ値ハ1ヨリ小ナルコトモ、1ニ等シイコトモ、1ヨリ大ナルコトモアル。且ツ  $\angle A$ ガ  $90^\circ$ ニ近ヅクニ從ヒ、ソ

ノ値ハイクラデモ大トナル。

問  $\angle A$  ノ大イサガ  $0^\circ$  カラ  $90^\circ$  マデ順次ニ増ストキ  $\cot A$  ノ値ハドンナ變化ヲスルカ。

次ニ前頁ノ圖ニ於テ  $B$  ガ  $P$  ニキタト考ヘルト

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \tan 0^\circ = 0$$

デアリ、 $B$  ガ充分  $Q$  ニ近ヅイタトキヲ考ヘルト

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$$

又  $\tan A$  ハイクラデモ増シテ限リナイカラ、コレヲ  $\tan 90^\circ = \infty$  ト書キ、 $\infty$  ヲ無限大ト讀ム。

**注意** 無限大ハ決シテ數デハナイ。

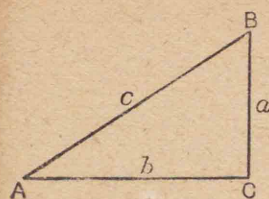
問  $\cot 90^\circ$ ,  $\cot 0^\circ$  ハ如何。

### 112. 三角函数ノ眞數表

前節ノヤウニ考ヘルト、任意ノ銳角ノ三角函数ハ幾何學的ニハ容易ニ求メラレルガ、ソノ數值ハ一般ニ容易ニ計算スルコトガ出來ナイ。ノミナラズソノ數值ハ一般ニ小數點以下ガ有限デナイ。因テコレ等ノ値ヲ10分毎ニ小數點以下四位マデ求メ、コレヲ表ニシテアル。コノ表ヲ三角函数ノ眞數表トイフ。

### 113. 餘角ノ三角函数

$\angle C$  ヲ直角トスル  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle B = 90^\circ - \angle A$



デアルカラ、 $\angle A$  ノ三角函数ト同様ニ  $\angle B$  ノ三角函数ヲ定義スルコトガ出來ル。ソレハ單ニ  $a$  ト  $b$  ヲ入レカヘサヘスレバヨイ。即チ

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\tan B = \frac{b}{a}, \quad \cot B = \frac{a}{b}$$

コレ等ヲ  $\angle A$  ノ三角函数ト比べ  $\angle B = 90^\circ - \angle A$  ニ注意スルトキハ次ノ關係ヲ得ル。

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A$$

$$\cot(90^\circ - A) = \tan A$$

コレ等ヲ餘角ノ公式トイフ。

問  $30^\circ$  ノ三角函数ヨリ  $60^\circ$  ノ三角函数ヲ求メコ。

### 114. 三角函数ノ眞數表ノ用法

三角函数ノ眞數表ハ卷末ニ掲ゲタヤウニ  $0^\circ$  カラ  $90^\circ$  マデノ10分オキノ角ノ三角函数ノ値ヲ載セタ表デアルガ、餘角ノ公式ヲ用ヒ、單ニ  $0^\circ$  カラ  $45^\circ$  マデノ角ノ三角函数ノ値ヲ載セテ、ソレヲ  $45^\circ$  カラ  $90^\circ$  マデノ角ノ場合ニモ使用スルコトガ出來ルヤウニシ

テアル。

**例1** 三角函數ノ眞數表ヨリ  $\sin 3^\circ 20'$  フ求メル  
ト 0.0581 デアル。

コレハ勿論近似値デアアルガ、次ノヤウニ書ク。

$$\sin 3^\circ 20' = 0.0581$$

問 三角函數ノ眞數表ヨリ次ノ値ヲ求メヨ。

$$(1) \cos 20^\circ 40' \quad (2) \tan 16^\circ 50'$$

$$(3) \cot 63^\circ 10' \quad (4) \sin 74^\circ 30'$$

**例2** 三角函數ノ眞數表ヨリ  $\sin x = 0.3145$  ナル  
銳角  $x$  フ求メルト  $x = 18^\circ 20'$  デアル。

コレヲ次ノヤウニ演算スル。

$$\sin x = 0.3145$$

$$\frac{0.3145 = \sin 18^\circ 20'}{x = 18^\circ 20'}$$

問 次ノ各等式ヲ満足スル銳角  $x$  フ求メヨ。

$$(1) \sin x = 0.4669 \quad (2) \cos x = 0.9063$$

$$(3) \tan x = 0.5696 \quad (4) \cot x = 0.7002$$

更ニ三角函數ノ眞數表ハ對數表ノヤウニ、表ニナ  
イ角ノ三角函數ノ値ヲ求メ、又ハツノ逆ノ目的ニ用  
ヒルコトガ出來ル。

**例3**  $\sin 26^\circ 34'$  フ求メヨ。

**解** 表カラ  $\sin 26^\circ 30' = 0.4462$

$$\sin 26^\circ 40' = 0.4488$$

即チ角ガ10'増スト正弦ノ値ハ 0.0026 増ス。今角ノ  
微小ナ變化ニツレテ正弦ノ値ガ比例シテ増スモノ  
トシ、4'ニ對シテ  $x$  ダケ増ストスレバ

$$10' : 4' = 0.0026 : x$$

$$\therefore x = 0.0026 \times \frac{4}{10} = 0.0010$$

コレヲ 0.4462ニ加ヘテ得ル 0.4472ハ答デアアル。

コノトキ 0.0026ヲ單ニ 26ト記シ、表差トイヒ、次ノ  
ヤウニ演算スル

$$\sin 26^\circ 34'$$

$$\sin 26^\circ 30' = 0.4462 \quad (26)$$

$$\frac{4(+)\quad 10(+)}{\sin 26^\circ 34' = 0.4472}$$

**注意** 正弦ト正切トハ角ガ増ストツノ値ヲ増スガ、餘弦  
ト餘切トハ却ツテツノ値ガ減ル。

問 次ノ各、ヲ計算セヨ。

$$(1) \sin 73^\circ 52' \quad (2) \tan 38^\circ 15'$$

**例4**  $\cos 38^\circ 23'$  フ求メヨ。

$$\cos 38^\circ 23'$$

$$\cos 38^\circ 30' = 0.7826 \quad (18)$$

$$\frac{7(-)\quad 13(+)}{\cos 38^\circ 23' = 0.7839}$$

問 次ノ各ヲ求メヨ。

(1)  $\cos 18^\circ 47'$                       (2)  $\cot 66^\circ 6'$

**例5**  $\sin x = 0.3535$  ヨリ鋭角  $x$  ヲ求メヨ。

**解**  $\sin x = 0.3535$   
 $0.3529 = \sin 20^\circ 40'$                       (29)  
 $\frac{6(+)}{0.3335} = \frac{2(+)}{\sin 20^\circ 42'}$   
 $\therefore x = 20^\circ 42'$

**例6**  $\cos x = 0.9762$  ヨリ鋭角  $x$  ヲ求メヨ。

**解**  $\cos x = 0.9762$   
 $0.9757 = \cos 12^\circ 40'$                       (6)  
 $\frac{5(+)}{0.3535} = \frac{8(-)}{\cos 12^\circ 32'}$   
 $\therefore x = 12^\circ 32'$

問 次ノ各ヨリ鋭角  $x$  ヲ求メヨ。

(1)  $\sin x = 0.7304$                       (2)  $\cos x = 0.9493$   
(3)  $\tan x = 3.779$                       (4)  $\cot x = 0.7065$

### 115. 三角形ノ解法

三角形 ABC ノ六原素即チ角 A, B, C ト邊  $a, b, c$  ノ中, 三原素ヲ知ツテ残りノ三原素ヲ見出スコトヲコノ三角形ヲ解クトイフ。

直角三角形ニ於テハ直角ヲ除イタ残りノ五原素

ノ中二原素ヲ知ツテ他ノ三原素ヲ求メルコトガ出來ル。

**注意** 三原素 A, B, C ヲ知ツテモ残りノ三原素  $a, b, c$  ヲ求メルコトハ出來ナイ。コノトキハ無數ノ相似三角形ヲ得ルカラデアル。ツマリ  $A+B+C=180^\circ$  デアルカラ A, B, C ノ三ツヲ與ヘルコトハ何レカ二ツヲ與ヘルコトニ歸着スル。ソレデコノ場合ヲ除カネバナラナイ。

### 116. 直角三角形ノ邊ト角ノ關係

$\angle C$  ヲ直角トスル三角形

ABC ニ於テ § 108 ヨリ次ノ

關係ヲ得ル。

$$a = c \sin A = b \tan A$$

又ハ  $a = c \cos B = b \cot B$

$$b = c \cos A = a \cot A$$

又ハ  $b = c \sin B = a \tan B$

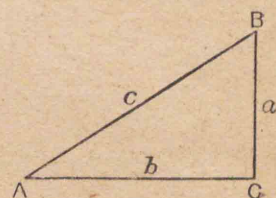
$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos A} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

又ハ  $c = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B}$

コレ等ニヨツテ直角三角形ヲ解クコトガ出來ル。

### 117. 直角三角形ノ解法

$\angle C$  ヲ直角トスル三角形 ABC ヲ解ク場合ハ次ノ



四ツニ歸着スル。

- (i) 斜邊ト直角ヲ夾ム一邊ヲ知ルトキ。
- (ii) 斜邊ト一銳角ヲ知ルトキ。
- (iii) 一銳角ト直角ヲ夾ム一邊ヲ知ルトキ。
- (iv) 直角ヲ夾ム二邊ヲ知ルトキ。

コレ等ノ場合ノ解法ハ夫々次ノヤウデアル。

- (i)  $c, a$ ヲ知ツテ  $A, B, b$ ヲ求メルニハ公式

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad B = 90^\circ - A, \quad b = c \cos A$$

ヲ用ヒル、即チ先ヅ  $A$ ヲ求メ、次ニ  $B, b$ ヲ求メル。

- (ii)  $c, A$ ヲ知ツテ  $B, a, b$ ヲ求メルニハ公式

$$B = 90^\circ - A, \quad a = c \sin A, \quad b = c \cos A$$

ヲ用ヒル。

- (iii)  $A, a$ ヲ知ツテ  $B, b, c$ ヲ求メルニハ公式

$$B = 90^\circ - A, \quad b = a \cot A, \quad c = \frac{a}{\sin A}$$

ヲ用ヒル。

- (iv)  $a, b$ ヲ知ツテ  $A, B, c$ ヲ求メルニハ公式

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad B = 90^\circ - A, \quad c = \frac{a}{\sin A}$$

ヲ用ヒル。

**例1**  $c=25^m, a=10^m$ ナル直角三角形ABCヲ解ケ。

**解** (i)ノ場合デアルカラ

$$\sin A = \frac{10}{25} = 0.4000$$

$$0.3987 = \sin 23^\circ 30' \quad (27)$$

$$\frac{13(+)}{0.4000} = \sin 23^\circ 35' \quad \frac{5(+)}{}$$

$$\therefore A = 23^\circ 35' \quad \therefore B = 66^\circ 25'$$

$$\text{又} \quad b = 25 \cos 23^\circ 35' = 25 \times 0.9165 = 22.91^{(m)}$$

**例2**  $a=74^m, b=25^m$ ヲ知ツテ直角三角形ABC

ヲ解ケ。

**解** (iv)ノ場合デアルカラ

$$\tan A = \frac{74}{25} = 2.960$$

$$\therefore A = 71^\circ 20' \quad \therefore B = 18^\circ 40'$$

$$\text{又} \quad c = \frac{74}{\sin 71^\circ 20'} = \frac{74}{0.9474} = 78.11^{(m)}$$

**問** 次ノ各ノ場合ニ直角三角形( $\angle C=90^\circ$ )ヲ解ケ。

$$(1) \quad A=25^\circ 20', \quad a=85.58^m$$

$$(2) \quad c=240^m, \quad A=17^\circ$$

$$(3) \quad c=1000^m, \quad a=510^m$$

$$(4) \quad a=250^m, \quad b=101^m$$

### 118. 測量問題

直角三角形ノ解法ヲ應用スルト簡單ナ測量問題ヲ解クコトガ出來ル。測量問題トハ高さ、距離、面積等ヲ測定スル問題ノコトデアルガ、次ノ術語ヲ了解

シナケレバナラナイ。

(i) 観測者ノ眼(點ト考ヘル)ヲ観測スベキ物體(點ト考ヘル)ニ連ネタ直線ヲ視線トイフ。

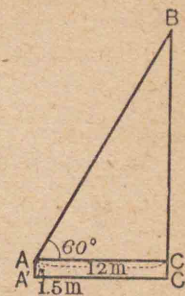
(ii) 測量スル際ニ基準トシテ選ブ直線ヲ基線トイヒ、豫メソノ長サヲ測ツテオク。コノ長サヲ測ルニハ**鏈尺**又ハ**卷尺**ヲ用ヒル。

(iii) <sup>オモリ</sup>錘ヲ吊シタ糸ノ垂レル向キヲ鉛直線トイヒ、コレヲ含ム平面ヲ鉛直面(又ハ直立面)トイフ。鉛直線ニ垂直ナ平面ヲ**水平面**トイヒ、コノ上ニアル直線ヲ**水平線**トイフ。水平線ヲ決定スルニハ**水準器**ヲ用ヒル。

(iv) 一水平面上ニアルニツノ水平線間ノ角ヲ**水平角**トイフ。又一鉛直面上ニ於テ観測者ノ眼ヲ過ル水平線ガ視線トナス角ノ中デ、視線ガ水平線ノ上方ニアルカ、下方ニアルカニ從ツテ夫々**仰角**(或ハ**高度**)、**俯角**(或ハ**深度**)トイフ。水平角、仰角、俯角ヲ測ルニハ**經緯儀**ヲ用ヒル。

(v) 観測者ノ眼カラ出タニツノ視線間ノ角ヲ**観測スベキ二點ノ距角**トイフ。モシコレ等ノニツノ視線ノ定メル平面ガ水平面デモナク、鉛直面デモナイトキ、ソノ距角ヲ測定スルニハ**六分儀**ヲ用ヒル。

**例1** 直立シタ樹木カラ12mノ地點デソノ頂上ノ仰角ヲ測ツテ $60^\circ$ ヲ得タ。コノ木ノ高サヲ求メヨ。但シ観測者ノ眼ノ高サハ地上1.5mデ、観測者ノ足下ト樹木ノ根元トハ同一水面上ニアルトスル。



**解** BC'ヲ直立シタ樹木、A'ヲ観測地點、Aヲ観測者ノ眼トシ、AC、A'C'ヲ同一鉛直面上ニアルニツノ水平線トスルト

$$CC' = AA' = 1.5\text{m}, \quad AC = 12\text{m}, \quad \angle BAC = 60^\circ$$

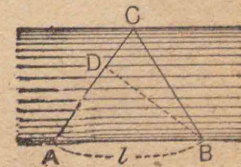
今 BC ヲ  $x$  m トスルト直角三角形 ABC ヨリ

$$x = AC \tan 60^\circ = 12\sqrt{3}$$

故ニ樹木ノ高サハ  $(12\sqrt{3} + 1.5) = 22.28 \dots\dots$

答 約 22.3 m

**例2** 河岸ノ一點 A ト對岸ノ點 C トノ距離ヲ測ル方法ヲ述ベヨ。



**解** Aト同ジ側ニ基線 AB ヲトリ、ソノ長サヲ  $l$  トスル。次ニ A、Bカラ C ヲ望ミ  $\angle A$ 、 $\angle B$  ヲ測ル。次ニ簡單ノタメ Bカラ  $\triangle ABC$  ノ邊 AC ニ下シタ垂線 BD ノ足 D ガ A、C 間ニアルトスルト

$$BD = AB \sin A = l \sin A$$

$$AD = l \cos A, \quad \angle ABD = 90^\circ - A$$

$$\therefore \angle CBD = B - (90^\circ - A) = A + B - 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{故} = \triangle BCD \text{ ヨリ } CD &= BD \tan \angle CBD \\ &= l \sin A \tan (A + B - 90^\circ) \end{aligned}$$

$$\text{ソレ故 } AC = l [\cos A + \sin A \tan (A + B - 90^\circ)]$$

$$\text{例へバ } \angle A = 75^\circ, \quad \angle B = 60^\circ, \quad l = 800\text{m} \text{ トスルト}$$

$$AC = 800 [\cos 75^\circ + \sin 75^\circ \tan (135^\circ - 90^\circ)]$$

$$= 800 [\cos 75^\circ + \sin 75^\circ \tan 45^\circ]$$

$$= 800 [0.2588 + 0.9659 \times 1] = 979.76\text{(m)}$$

### 119. 方位

観測者ノ眼カラ観測物體ニ至ル視線ノ方向ヲ方位トイフ。

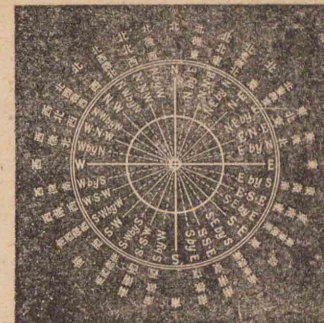
方位ヲ定メルニハ次ノ二法ノ何レカニヨル。

(i) 北(N)及ビ南(S)ノ方位ヲ基準トシ、ソレカラ東(E)及ビ西(W)へ傾ク  $90^\circ$  マデノ角ヲ用ヒル方法。

例へバ  $N30^\circ W$  トイへバ、北カラ西へ  $30^\circ$  傾イタ方向ノコトデアル。

(ii) 東西南北ノ方位ヲ定メ、ソレ等ノ間ノ角ヲ各、八等分シテ32個ノ方位ヲ定メ、コレ等ニ次圖ノヤウナ名稱ヲツケル方法。

航海ニ用ヒラレル羅針盤ハコノ方法ニヨル。



例 北ニ進ム人ガ北北

西ニ見タ人家ヲ 300 m 進ンダトキ西ニ見タトイフ。

人家ト道路トノ距離ヲ求メヨ。

解 A, Bヲ二回ノ観測點, Cヲ人家トスルト、三角形 ABC ハ Bヲ直角トシ、 $\angle A = 22^\circ 30'$ ,  $AB = 300\text{m}$  デアル。又 CBハ人家ト道路トノ距離デアル。

$$\text{ソシテ } CB = AB \tan A = 300 \tan 22^\circ 30'$$

$$= 300 \times 0.4142 = 124.26 \quad \text{答 } 124.26 \text{ m}$$



問1. 平地ニ直立スル高サ 6 m ノ旗竿ノ長サガ 3.564 m ノ影ヲ地上ニ投ズルトキ、太陽ノ高度ヲ求メヨ。

問2. 高サ 18 m ノ屋上デ丘ノ頂ノ仰角  $45^\circ$  ヲ得、屋下デ仰角  $60^\circ$  ヲ得タ。丘ノ高サヲ求メヨ。



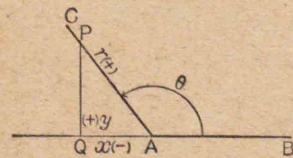
問3. 或人ガA地デ山頂Bヲ望ミ仰角  $30^\circ$  ヲ得タ。A地ガ海面上 2130 m ノ地點ナラバBハ海面上幾米ノ地點デアるか。但シ五萬分ノ一ノ地圖デハA,B兩地間ノ水平距離ハ丁度 0.8 cm アル。(五萬分ノ一ノ地圖上デ 1 cm ノ距離ノ實長ハ 500 m デアル)

問4. 湖岸ニアル高サ  $h$  m ノ塔上カラ静止セル雲ノ一點ヲ眺メテ仰角  $\alpha$  ヲ得、同時ニ湖水ニ映ルソノ影ヲ望ンデ俯角  $\beta$  ヲ得タ。雲ノ水面カラノ高サヲ求メル公式ヲ出セ。

問5. 或原野ニ於テ前方ニ見エル山頂ノ仰角ヲ測ツテ  $19^\circ 20'$  ヲ得、次ニ山ニ向ツテ 350 m 進ミ再ビソノ仰角ヲ測ツタニ  $21^\circ 50'$  デアツタ。山ノ高サ及ビ第二觀測點カラ山マデノ距離ヲ求メヨ。

## 第十九章 鈍角ノ三角函數

### 120 鈍角ノ三角函數



鈍角  $BAC$  ヲ  $\theta$  トスル。  
邊  $AC$  上ニ任意ニ一點  $P$  ヲトリ、 $P$  カラ邊  $BA$  ノ延長ニ垂線ヲ下シ、ソノ足ヲ

トスル。コノ直角三角形  $PAQ$  ノ三邊  $r, x, y$  ヲ用ヒテ鈍角  $\theta$  ノ三角函數ヲ次ノヤウニ定義スル。

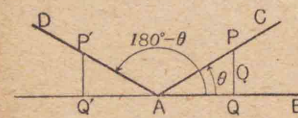
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{r}{y}$$

ソシテ三邊ニ符號ヲツケテ  $r$  ト  $y$  トヲ共ニ正トシ、 $x$  ヲ負トスル。從ツテ  $\theta$  ガ鈍角ナルトキ  $\sin \theta, \operatorname{cosec} \theta$  ハ正デアるか、 $\cos \theta, \tan \theta, \cot \theta, \sec \theta$  ハ負デアる。

### 121. 補角ノ公式

$\angle BAC$  ヲ銳角  $\theta$  トシ、 $\angle BAD$  ヲ  $\angle BAC$  ノ補角トスルト、 $\angle BAD$  ハ  $180^\circ - \theta$  トナリ鈍角デアる。邊  $AC, AD$



ノ上ニ夫々  $P, P'$  ヲトリ、 $P, P'$  カラ  $BA$  及ビソノ延長ニ垂線ヲ立テ、ソノ足ヲ夫々  $Q, Q'$

トシ、 $AP = AP'$  トスルト、 $\angle P'AQ' = \angle BAC$  デアルカラ、

$$\triangle AP'Q' \cong \triangle APQ$$

$$\therefore P'Q' = PQ, \quad AQ' = -AQ \quad \text{但シ} \quad AP' = AP$$

因テ次ノ公式ヲ得ル。

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta, \quad \cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$$

問1. 次ノ各角ノ三角函數ヲ求メヨ。

(1)  $135^\circ$       (2)  $120^\circ$       (3)  $150^\circ$

問2.  $180^\circ$  ノ三角函數ヲ求メヨ。

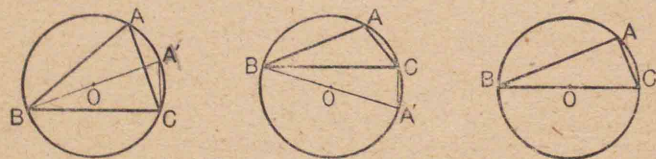
## 第二十章 一般ノ三角形

本章ニ於テ單ニ三角形トイヘバ三角形ABCノコトデ、ソノ六原素ハ邊  $a, b, c$  ト角  $A, B, C$  トデアル。但シ  $A+B+C=180^\circ$  デアル。

### 122. 正弦法則

三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ  $R$  トスルト

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



〔證明〕 外心  $O$  ヲ過ル直徑  $BA'$  ヲ引キ、 $A'C$  ヲ結ブ。

$A$  ガ直角デナケレバ  $A'$  ハ  $C$  ニ重ナラナイカラ  $\angle BCA'$  ハ直角デアル。

$$\therefore a = 2R \sin A'$$

モシ  $A$  ガ鋭角ナラバ  $A' = A$

モシ  $A$  ガ鈍角ナラバ  $A' = 180^\circ - A$

$$\therefore \sin A' = \sin A$$

$$\therefore a = 2R \sin A$$

又  $A$  ガ直角ナラバ  $A'$  ト  $C$  トガ重ナルカラ

$$a = 2R = 2R \sin 90^\circ = 2R \sin A$$

要スルニ  $A$  ノ大イサノ如何ニ拘ハラズ

$$a = 2R \sin A \quad \therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$\text{同様ニ} \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

問 次ノ各ヲ證セヨ。

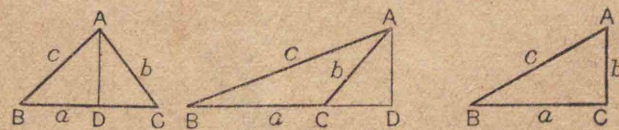
(1)  $\sin A + \sin B > \sin C$       (2)  $\sin A \sim \sin B < \sin C$

### 123. 餘弦法則(一)

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$



〔證明〕  $A$  カラ  $BC$  或ハソノ延長ニ垂線ヲ下シ、ソノ足ヲ  $D$  トスル。

D が BC 上ニアルトキ

$$a = BC = BD + DC$$

ソシテ  $BD = AB \cos B = c \cos B$

$$DC = AC \cos C = b \cos C$$

$$\therefore a = b \cos C + c \cos B$$

D が CB ノ延長上ニアルトキ

$$a = BC = BD - CD$$

ソシテ  $BD = c \cos B,$

$$CD = AC \cos ACD = b \cos (180^\circ - C) = -b \cos C$$

$$\therefore a = c \cos B - (-b \cos C)$$

$$= c \cos B + b \cos C$$

又 D が C へ來タトキハ  $\angle C = 90^\circ, \cos C = \cos 90^\circ = 0$

$$\therefore a = BC = AB \cos B = c \cos B$$

$$= c \cos B + b \cos C$$

要スルニドシテナ三角形デモ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

同様ニ  $b = c \cos A + a \cos C$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

問 次ノ等式ノ正シイコトヲ證セヨ。

$$\frac{a - c \cos B}{b - c \cos A} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

## 124. 餘弦法則(二)

前節ノ餘弦法則ノ各等式ノ兩邊ニ夫々  $a, -b, -c$  ヲ掛ケテ加ヘルト

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A$$

即チ  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

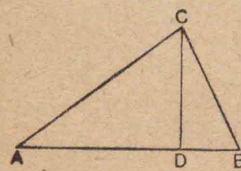
同様ニ  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

問 次ノ等式ヲ證セヨ。

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

## 125. 三角形ノ面積



三角形ノ三ツノ角ノ中、少ク  
トモ二ツハ鋭角デアル。因テ  
ツノ鋭角ヲ A, B トシ、頂點 C カ  
ラ對邊 AB ニ下シタ垂線ノ足

ヲ D トスルト、D ハ邊 AB 上ニアル。

故ニ  $CD = b \sin A$

今三角形ノ面積ヲ S トスルト

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} bc \sin A$$

因テ正弦法則ヲ用ヒテ次ノ公式ヲ得ル。

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

問1. 二邊ガ與ヘラレタ三角形ノ中、面積ノ最大ナモノハ、二邊ノ夾ム角ガ直角ナ三角形デアルコトヲ證セヨ。

問2. 四邊形ノ面積ハ兩對角線トツノ夾角ノ正弦トノ積ノ半分ニ等シイコトヲ證セヨ。

### 126. 測量問題

例1 東ニ進ム船ガ或點デ海岸ノ燈臺ヲ東北東ニ眺メテカラ  $a$  km 進ンダトキ北北東ニ眺メタトイフ。初メノ點ト燈臺トノ距離ヲ求メヨ。

解 Aヲ燈臺、Bヲ初メノ點、Cヲ第二ノ點トスル。

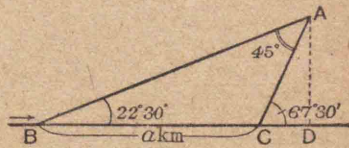
三角形 ABCニ於テ

$$\frac{AB}{\sin 67^\circ 30'} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore AB = \frac{\sin 67^\circ 30'}{\sin 45^\circ} a$$

$$= 1.307a \text{ km}$$

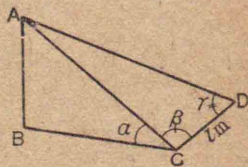
答 1.307a km弱



問2 平地上ニ基線 CD ( $l$  m) ヲトリ、Cニ於テ山頂 Aノ仰角  $\alpha$  ヲ求メ、別ニ角 ACD ( $\beta$ ), CDA ( $\gamma$ ) ヲ測ツテ山ノ高ヲ求メヨ。

解 ABヲ平地上ノ山ノ高サトスル。

$\triangle ACB$ ニ於テ  $AB = AC \sin \alpha$ ,



又  $\triangle ACD$ ニ於テ

$$AC = \frac{CD \sin \gamma}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{l \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

$$\therefore AB = \frac{l \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

問 平地上ノ基線 CD ( $l$  m) ト山頂 Aトガ同一鉛直面内ニアルトキ、C、Dニ於ケル Aノ仰角  $\alpha$ ,  $\beta$  ヲ測ツテ山ノ高ヲ求メヨ。

## 問題ノ答



§ 6. 3.  $\frac{1}{2}(a+b)$  cm

§ 7. 2.  $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ; 180^\circ$  3.  $130^\circ$

§ 8. 1.  $30^\circ, 36^\circ, 98^\circ 10' 54 \frac{6}{11}''$  2.  $\frac{1}{3}$  直角,  $\frac{1}{2}$  直角,

$\frac{2}{3}$  直角 3.  $60^\circ, 45^\circ, \frac{1}{3}$  直角 4.  $120^\circ$ , 直角,

$1\frac{3}{5}$  直角 5.  $105^\circ, 75^\circ$

頁 22. 練習 (1)

4.  $210^\circ$

§ 26. 1.  $60^\circ$  2.  $75^\circ$

頁 42. 練習 (3)

4.  $90^\circ$

頁 51. 練習 (4)

1. 十邊形 2. 10 本

頁 119. 2. (1) 0.46 (2) 3.46

§ 67. 1. 6 倍 2. 770000 あ-る

§ 70. 1.  $\frac{1}{2}[p(a+c)+q(a+b+c)+r(b+c)]$

§ 72. 1. 20 cm

§ 73. 1. 972 平方糎

頁 146.

## 練習 (10)

3. 168 平方糎, 12 cm    4. 12 cm    5. 34 平方糎

6. 小正方形ノ一邊ハ  $\frac{1}{2}a$ , 面積ハ  $\frac{1}{4}a^2$ ; 小直角三角形ノ直角ノ二邊ハ何レモ  $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ , 面積ハ  $\frac{1}{16}a^2$ 7.  $\frac{1}{8}$     10. 1:2頁 159. 3.26 平方糎,  $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})a^2$  即チ 約 0.09 $a^2$ 

頁 159.

## 練習 (12)

1. 14 m

4.  $\sqrt{2-\sqrt{2}}r$ ,  $2\sqrt{2}r^2$     5.  $5\sqrt{6}$  cm,  $5\sqrt{3}$  cm7. 122.8 平方糎    8.  $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}r^2$  即チ 約 0.16 $r^2$ 

9. 相等シイ

頁 184.

## 練習 (14)

1. 四ツ

頁 188. 1. 108 平方糎    2.  $(72+2\sqrt{3})$  平方糎

2. 12 本

頁 189.  $6a^2$ 

頁 191. 1:4

§ 98. 1.  $\frac{15\sqrt{15}}{4}$  立方糎

頁 201.

## 練習 (15)

3.  $\sqrt{\frac{2}{3}}a$     4.  $\sqrt{3}\sqrt[3]{a}$  m    5.  $420\sqrt{3}$  立方糎6.  $42\frac{2}{3}$  立方糎    7.  $\frac{ah^3}{3h^2}$  立方糎,  $\frac{a(h^3-h'^3)}{3h^2}$  立方糎頁 203. 1.  $565\frac{5}{7}$  平方糎    2. 141.372 立方糎

頁 205. 1. 47.1 平方糎    2. 0.31416 立

頁 206.

## 練習 (16)

1. 1077.5688 立方糎    2. 1, 底ノ半徑ノ比

3. 20:15:12    4. 1:8

頁 209.

1. 4 cm

§ 106. 1. 球ノ半徑ノ 2 倍ノ半徑    2. 509090909 平方糎

§ 107.  $113\frac{1}{7}$  立方糎

頁 212.

## 練習 (17)

4.  $\sqrt{a^2+b^2}$ § 109. 1.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ , 2,  $\sqrt{2}$ ; 2,  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $\sqrt{2}$     2.  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 

3. 0

頁 218.  $\cot 90^\circ=0$ ,  $\cot 0^\circ=\infty$ 

頁 220. (1) 0.9356    (2) 0.3026    (3) 0.5059    (4) 0.9636

(1)  $27^\circ 50'$     (2)  $25^\circ$     (3)  $29^\circ 40'$     (4)  $55^\circ$ 

頁 221. (1) 0.9607    (2) 0.7884

頁 222. (1) 0.9468    (2) 0.4431

(1)  $46^\circ 55'$     (2)  $18^\circ 19'$     (3)  $75^\circ 10.7'$     (4)  $54^\circ 46'$ § 117. (1)  $B=64^\circ 40'$ ,  $b=180.77$  m,  $c=200$  m

(2)  $B=73^\circ$ ,  $a=70.176$  m,  $b=229.512$  m

(3)  $A=30^\circ 40'$ ,  $B=59^\circ 20'$ ,  $b=860.1$  m

(4)  $A=68^\circ$ ,  $B=22^\circ$ ,  $c=269.63$  m

§ 119. 1.  $59^\circ 17'$       2.  $27+9\sqrt{3}$  m      3. 2360.96 m

4.  $\frac{h(\cot \alpha + \cot \beta)}{\cot \alpha - \cot \beta}$  m      5. 987 m 强, 2465 m 强

§ 121. 1. (1)  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\tan 135^\circ = -1$ ,

$\cot 135^\circ = -1$ ,  $\sec 135^\circ = -\sqrt{2}$ ,  $\operatorname{cosec} 135^\circ = \sqrt{2}$

(2)  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ ,

$\cot 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sec 120^\circ = -2$ ,  $\operatorname{cosec} 120^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3)  $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$\cot 150^\circ = -\sqrt{3}$ ,  $\sec 150^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\operatorname{cosec} 150^\circ = 2$

1.  $\sin 180^\circ = 0$ ,  $\cos 180^\circ = -1$ ,  $\tan 180^\circ = 0$ ,  $\cot 180^\circ = \infty$ ,

$\sec 180^\circ = -1$ ,  $\operatorname{cosec} 180^\circ = \infty$

§ 126.  $x = \frac{l}{\cot \alpha - \cot \beta}$  m

三 角 函 數  
真 數 表

°	'	sin	tan	cot	cos
0	0	0.0000	0.0000	∞	1.0000 0 90
10		0.0029	0.0029	343.7737	1.0000 50
20		0.0058	0.0058	171.8854	1.0000 40
30		0.0087	0.0087	114.5887	0.0000 30
40		0.0116	0.0116	85.9398	0.9999 20
50		0.0145	0.0145	68.7501	0.9999 10
1	0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998 0 89

°	'	sin	tan	cot	cos	°	'	sin	tan	cot	cos		
1	0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89	7	0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83
10		0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50	10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50	
20		0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40	20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40	
30		0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30	30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30	
40		0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20	40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20	
50		0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10	50	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10	
2	0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0 88	8	0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0 22
10		0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50	10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50	
20		0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40	20	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40	
30		0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30	30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30	
40		0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20	40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20	
50		0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10	50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10	
3	0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0 87	9	0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0 81
10		0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50	10	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50	
20		0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40	20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40	
30		0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30	30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30	
40		0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20	40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20	
50		0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10	50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10	
4	0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0 86	10	0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0 80
10		0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50	10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50	
20		0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40	20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40	
30		0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30	30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30	
40		0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20	40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20	
50		0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10	50	0.1880	0.1914	5.2267	0.9822	10	
5	0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0 85	11	0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0 79
10		0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50	10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50	
20		0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40	20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40	
30		0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30	30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30	
40		0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20	40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20	
50		0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10	50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10	
6	0	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	0 84	12	0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0 78
10		0.1074	0.1080	9.2653	0.9942	50	10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50	
20		0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40	20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40	
30		0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30	30	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30	
40		0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20	40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20	
50		0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10	50	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10	
7	0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83	13	0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77
		cos	cot	tan	sin	°		cos	cot	tan	sin	°	

°	'	sin	tan	cot	cos	°	'	sin	tan	cot	cos		
18	0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77	21	0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69
10		0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50	10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50	
20		0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40	20	0.3638	0.3906	2.5505	0.9315	40	
30		0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30	30	0.3665	0.3939	2.5385	0.9304	30	
40		0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20	40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20	
50		0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10	50	0.3719	0.4006	2.4980	0.9283	10	
14	0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0 76	22	0	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	0 68
10		0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50	10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50	
20		0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40	20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40	
30		0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30	30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30	
40		0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20	40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20	
50		0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10	50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10	
15	0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0 75	23	0	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0 67
10		0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50	10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50	
20		0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40	20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40	
30		0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30	30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30	
40		0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20	40	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20	
50		0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10	50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10	
16	0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0 74	24	0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0 66
10		0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50	10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50	
20		0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40	20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40	
30		0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30	30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30	
40		0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20	40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20	
50		0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10	50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10	
17	0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0 73	25	0	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0 65
10		0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50	10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50	
20		0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40	20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40	
30		0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30	30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30	
40		0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20	40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20	
50		0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10	50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10	
18	0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0 72	26	0	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0 64
10		0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50	10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50	
20		0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40	20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40	
30		0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30	30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30	
40		0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20	40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20	
50		0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10	50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10	
19	0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0 71	27	0	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0 63
10		0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50	10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50	
20		0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40	20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40	
30		0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30	30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30	
40		0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20	40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20	
50		0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10	50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10	
20	0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0 70	28	0	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0 62
10		0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50	10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50	
20		0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40	20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40	
30		0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30	30	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30	
40		0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20	40	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20	
50		0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10	50	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10	
21	0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69	29	0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61
		cos	cot	tan	sin	°		cos	cot	tan	sin	°	



°	'	sin	tan	cot	cos	°	'	sin	tan	cot	cos	°	'	sin	tan	cot	cos
29	0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61	37	0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 53				
	10	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50		10	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50				
	20	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40			20	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40			
	30	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30			30	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30			
	40	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20			40	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20			
	50	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10			50	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10			
30	0	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	0 60	38	0	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	0 52				
	10	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50		10	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50				
	20	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40			20	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	40			
	30	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30			30	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	30			
	40	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20			40	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	20			
	50	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10			50	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	10			
31	0	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	0 59	39	0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0 51				
	10	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50		10	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	50				
	20	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40			20	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	40			
	30	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30			30	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	30			
	40	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20			40	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	20			
	50	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10			50	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	10			
32	0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	0 58	40	0	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	0 50				
	10	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50		10	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642	50				
	20	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40			20	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	40			
	30	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30			30	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	30			
	40	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20			40	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	20			
	50	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10			50	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	10			
33	0	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	0 57	41	0	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	0 49				
	10	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50		10	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	50				
	20	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40			20	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	40			
	30	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30			30	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	30			
	40	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20			40	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	20			
	50	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10			50	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	10			
34	0	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	0 56	42	0	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	0 48				
	10	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50		10	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412	50				
	20	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40			20	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	40			
	30	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30			30	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	30			
	40	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20			40	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	20			
	50	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10			50	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	10			
35	0	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	0 55	43	0	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	0 47				
	10	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50		10	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	50				
	20	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40			20	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	40			
	30	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30			30	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	30			
	40	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20			40	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	20			
	50	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10			50	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	10			
36	0	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	0 54	44	0	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	0 46				
	10	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50		10	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	50				
	20	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40			20	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	40			
	30	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30			30	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	30			
	40	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20			40	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	20			
	50	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10			50	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092	10			
37	0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 53	45	0	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	0 45				
		cos	cot	tan	sin	' °			cos	cot	tan	sin	' °				

昭和5年12月2日 初版印刷 昭和5年12月5日 初版發行  
 昭和7年11月28日 訂正再版發行 昭和8年8月18日 訂正三版發行  
 昭和11年10月23日 訂正四版印刷 昭和11年10月26日 訂正四版發行

昭和11年12月23日 訂正五版印刷  
 昭和11年12月25日 訂正五版發行

再訂  
 新實業幾何學教科書



定價 金1圓04錢

著者 松本敏三

東京市麴町區飯田町2丁目20番地  
 發行者 中等學校教科書株式會社  
 代表者 山本慶治

東京市赤坂區青山南町2丁目16番地  
 印刷者 (東京18) 愛光堂印刷社  
 代表者 岩本米次郎

東京市麴町區飯田町2丁目20番地  
 發行所 中等學校教科書株式會社  
 日本出版文化協會會員番號 117522

配給元 日本出版配給株式會社  
 東京市神田區淡路町2/9

(略名) 富山松本實幾何

## 定 理 索 引

定 理	頁	定 理	頁	作 圖 題	
1.....	16	33.....	72	1.....	91
2.....	17	34.....	76	2.....	91
3.....	19	35.....	77	3.....	92
4.....	24	36.....	78	4.....	93
5.....	27	37.....	79	5.....	93
6.....	28	38.....	81	6.....	94
7.....	29	39.....	81	7.....	95
8.....	31	40.....	83	8.....	96
9.....	32	41.....	85	9.....	98
10.....	37	42.....	86	10.....	99
11.....	39	43.....	105	11.....	100
12.....	40	44.....	106	12.....	110
13.....	44	45.....	109	13.....	111
14.....	46	46.....	112	14.....	130
15.....	46	47.....	115	15.....	132
16.....	47	48.....	117	16.....	150
17.....	47	49.....	117	17.....	151
18.....	50	50.....	119	18.....	152
19.....	52	51.....	121		
20.....	54	52.....	123	軌 跡	
21.....	55	53.....	125	1.....	162
22.....	56	54.....	127	2.....	163
23.....	57	55.....	129	3.....	164
24.....	58	56.....	131	4.....	166
25.....	63	57.....	133		
26.....	64	58.....	135		
27.....	65	59.....	136		
28.....	66	60.....	136		
29.....	67	61.....	137		
30.....	67	62.....	138		
31.....	69	63.....	139		
32.....	70	64.....	141		
		65.....	142		
		66.....	144		
		67.....	144		
		68.....	145		
		69.....	147		
		70.....	148		
		71.....	148		
		72.....	149		
		73.....	155		
		74.....	157		
		75.....	158		
		76.....	172		
		77.....	174		
		78.....	175		
		79.....	176		
		80.....	178		
		81.....	179		
		82.....	180		
		83.....	181		
		84.....	183		
		85.....	187		
		86.....	190		
		87.....	192		
		88.....	193		
		89.....	194		
		90.....	195		
		91.....	197		
		92.....	198		
		93.....	203		
		94.....	204		
		95.....	208		
		96.....	208		
		97.....	210		
		98.....	211		

