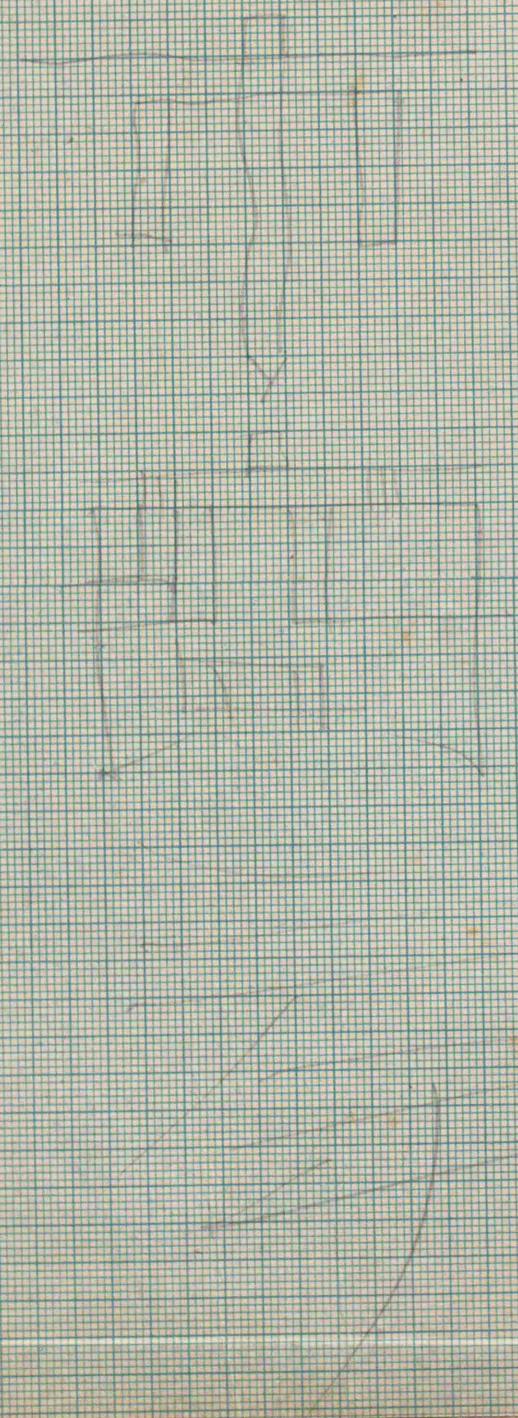
實業學校

新幾何學敎科書

市商二年
遠藤昌

理學博士
渡邊孫一郎
著



昭和十四年十二月十四日
文部省檢定濟
實業學校數學科用

實業學校

新幾何學教科書

理學博士
渡邊孫一郎著

東京 山海堂出版部 神田

緒　言

本書幷ニ其姉妹編ナル實業學校新算術教科書,同代數學教科書ハ曩ニ書肆瞭文堂ヨリ發行セル

中等教育新撰算術代數　同新撰幾何
實業學校算術教科書　同代數學教科書
同幾何學教科書

ヲ改版修正セルモノニシテ前記諸書ノ精神ヲ踏襲シ一層實地教授ニ適切ナランコトヲ期シタリ。

下ニ本書特色中ノ主ナルモノ二三ヲ記ス。

1. 從來通常幾何圖形ト稱シテ課セラレタル事項ハ近時大部分小學校ニ於ケル國定算術書中ニ採錄セラルルニ至リ,教授時數ニ至大ノ制限ヲ受クル實業學校ニ於テハ考慮ノ要アルモノト認メ本書ニ於テハ幾何圖形ノ編ヲ特設セザルコトトセリ。サレバトテ劈頭ヨリ困難ナル論證ヲ試ムルノ不當ナルハ勿論ニシテ極メテ徐々ニ幾何學的圖形ノ性質ト論理トニ慣レシメルコトニ努メタリ。

2. 練習問題ハ中等教育ニ於ケル數學教科書ノ生命ナリ。數學教授ノ目的ヲ達シ得ラルルヤ否ヤハ其種類,程度,排列ノ如何ニヨリテ左右セラルルコト尠ナカラズ。本書ニ於テハ平易ニシテ既授事項ノ理解,復習,應用或ハ補習ニ遺憾ナキモノヲ採錄スルト共ニ,後日教授スベキ

事項ノ準備工作タリ得ルモノヲ選定スルコトニ努メタリ。

3. 實業學校ニ於ケル數學教授ノ實情ニ徵シ,過少ノ教授時間內ニ初等幾何學ノ大要ヲ一通リ教授シ終ハランコトヲ期シテ教材ヲ精選セリ。サレド尙モシ負擔過重ノ虞アル場合ニハ各編末等ニ輯錄セル雜題ヲ省略スルモ教授上支障ヲ來サザル樣ニ留意セリ。

雜題ニ於テハ或程度ノ補習ヲ試ミ本文ノ不備ヲ幾分ニテモ補充センコトヲ期シタリ。

4. 軌跡,作圖題ノ吟味,立體幾何大要等ハ附錄ニ讓リ適宜省略セラルルモ可ナルコトトセリ。カクテ本文ハ僅々131頁ニ止マルニ拘ハラズ重要定理ヲ網羅シ相當程度ノ練習ヲモナシ得ル如ク教材ヲ精選セリ。

昭和十四年九月

編者識

目次

第一編 緒論

第二編 直線圖形

第三編 圓

第四編 面積及比例

附錄第一 補遺

附錄第二 立體幾何大意

附錄第三　補充問題

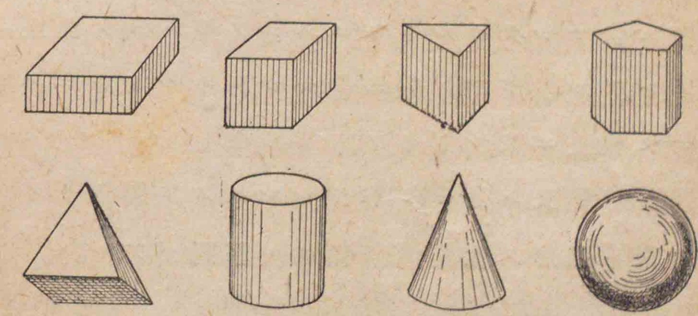
第一編

緒論

1. 圖形

物體ハ之ヲ組成セル物質,形,大サ,色,目方等種々ノ方面カラ觀察スルコトガ出來ルガ特ニ形,大サ,位置ダケヲ考ヘル場合ニ之ヲ**立體**トイフ。護謨毬(ゴムマリ)モ彈丸モ共ニ球デアリ,マツチ箱モ角砂糖モ共ニ直方體デアルトイフノハ形ダケヲ考ヘタモノデ,球,直方體ナドハ形ノ名デアル。

問 次ニ圖示セル立體ノ名ヲ言ヒナサイ。

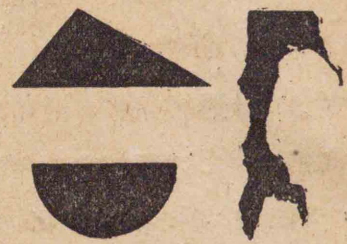


第1圖

立體ノ境界又ハ其一部分ヲ**面**トイフ。面ニハ厚サハナイ。紙ノ表トカ裏トカイフノハ面デスガ紙全體ヲ考ヘルト面デハナイ。

直方體ハ平ラナ面卽**平面**デ圍マレテヰルガ球ノ表面ハドンナニ小部分ヲ考ヘテモ平面デハナイ。コノ樣ナ面ヲ**曲面**トイフ。

面ノ境界又ハ其一部分ヲ**線**トイフ。面ト面トノ出會フ所モ線デアル。線ニハ幅ハナイ。右圖ノ黑イ部分ト白イ部分トノ境ハ線デアリ,直方體ノ一ツノ面ト隣ノ面トノ出會フ所モ線デアル。



第 2 圖

線ノ端(ハシ)ヲ**點**トイフ。線ト線トノ出會フ所モ點デアル。點ハ形モ大サモナク唯位置ガアルダケデス。

面ハ無數ノ線ヲ含ミ,線ハ無數ノ點ヲ含ム。アル線ガアル面ニ含マレテヰルトキニハコノ線ハコノ面上ニアルトイヒ,アル點ガアル線ニ含マレテヰルトキニハコノ點ハコノ線上ニアルトイフ。

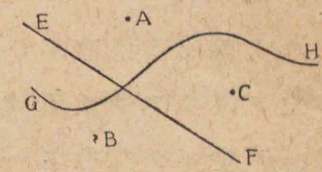
立體,面,線,點又ハ是等デ作ラレルモノヲ**圖形**トイフ。

幾何學ハ圖形ノ性質ヲ研究スル學問デアル。

2. 直線

點ハ形モ,大サモナク之ヲ紙面ニ畫クノハ困難デアルカラ・×ナドヲ畫キ其傍ニA,Bナドト記シテ之ヲ點A,點Bナドトイフ。

又次圖ノEF, GHノ樣ニ畫イテ線ヲ表ハシ之ヲ直線EF, 曲線GHナドト呼ブ。**直線**トハ眞直(マツスグ)ナ線デアリ,ドンナニ小部分デモ直線デナイ線ガ**曲線**デアル。



第 3 圖

直線ハ如何程デモ引延バスコトガ出來ル。ソノ引延バシタ部分ヲ初ノ部分ノ**延長**トイフ。

直線ヲ双方ニ限リナク延長シタト考ヘルト,ソノ全體ヲ**無限直線**トイツテ今マデ考ヘテヰタ樣ニ兩端ノアルノヲ**有限直線**又ハ**線分**トイフ。

線分ヲ其一方ニダケ無限ニ延長シタト考ヘルト,ソノ全體ヲ**半直線**トイフ。無限直線上ニ一點ヲトツテ,コノ點ノ一方ノ側ダケヲ考ヘテモ半直線デアル。

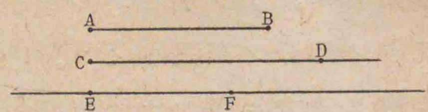
單ニ直線トイフノハ無限直線,半直線及線分ノ總稱デアル。

直線	線分又ハ有限直線…	兩端共ニアル。
	半直線……………………	一端ダケアル。
	無限直線…………………	兩端共ニナイ。

兩端ガAトBトデアル線分ヲ線分AB又ハ單ニABト呼ビ其長サヲ通常小文字a, b等デ表ハス。又半直線ヲ呼ブニハ其一端ノ名ノ次ニ其上ニアル一點ノ名ヲ續ケテ半直線CDナドト呼ブ。半直線CDハ一端ガCデD

ノ方ニ無限ニ延ビテキル半直線デアル。故ニ半直線CDト半直線DCトハ異ナル。又無限直線ハ其上ニアル二點ノ名ヲ使ツテ無限直線EFナドトイフ。

半直線ヤ無限直線ハ其長サヲ考ヘルコトガ出來ナイ。又之ヲ限リアル紙面ニ畫クコトモ出來ナイカラ適宜ノ線分ヲ畫イテ想像スルニ止メル。



第 4 圖

二點A,Bヲ兩端トスル線分ヲ作ルコトヲA,Bヲ**結ブ**又ハ**結ビ付ケル**トイツテ線分ABノ長サヲ二點A,Bノ**距離**トイフ。

線分ABノ眞中ノ點卽ABヲ二等分スル點ヲ線分ABノ**中點**トイフ。

二枚ノ紙ノ各ニ一直線ヲ引キコノ二枚ノ紙ヲ重ネテ一方ノ直線上ノ二點ヲ他ノ直線上ニ置イテ光ニカザシテ見ルト直線全體ガ重ナツテ見エル。又糸ヲ強ク引張ルト眞直ニナリ,ユルメルト曲ル。是等ノ事實ハ直線ニ次ノ基本性質ガアルコトヲ示シテキル。

二點ヲ通リ唯一ツノ直線ヲ引クコトヲ得。

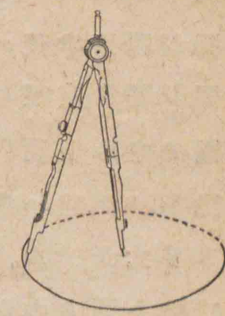
直線ハ二點間ノ最短通路デアル。

從テ二點A,Bノ距離トイフノハAカラBニ至ル最短通路ノ長サノコトデアル。

二ツノ直線ガ出會フトキハ,コノ二直線ハ**交ハル**トイヒ,其出會フ點ヲ**交點**トイフ。二點ヲ通ル直線ハ唯一ツデアルカラ二直線ハ二ツ以上ノ點デハ交ハラナイ。

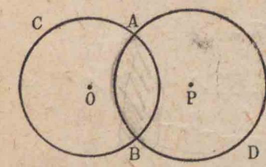
3. 圓

眞圓(マンマル)イ曲線ヲ**圓周**トイヒ,圓周デ圍マレテキル部分(平面ノ)ヲ**圓**トイフ。


第 5 圖

圓周ヲ畫クニハ兩脚器(コンパス)ヲ用ヒル。兩脚器ハ圓周ヲ畫クダケデナク長サヲ移スニモ用ヒラレル。

兩脚器デ圓周ヲ畫クトキニ固定シテアル一端ニ當ル點ヲ圓ノ**中心**トイヒ,中心ト圓周上ノ點トヲ結ブ線分ヲ**半徑**トイフ。



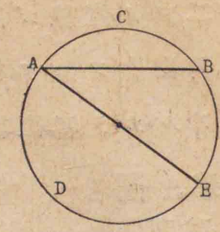
第 6 圖

圓又ハ圓周ヲ呼ブニハ中心ノ名ヲ使フカ又ハ圓周上ノ三點ノ名ヲ使フ。例ヘバ圖ノ左ノ圓ヲ圓O又ハ圓ABCト呼ビ右ノヲ圓P又ハ圓ABDト呼ブ。

圓周ノ一部分ヲ**弧**トイヒ,圓周上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ**弦**トイフ。次圖ニ於テAB, AEハ弦デアル。

兩端ガA,Bデアル弧ヲ弧ABト呼ビ $\overset{\frown}{AB}$ ト書ク。$\overset{\frown}{AB}$ ハ二ツアツテ,通常ハ小サイ方ヲ $\overset{\frown}{AB}$ デ表ハスノデスガ

混雜ノ恐レアルトキニハ $\overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{ADB}$ ナドト書イテ區別スル。



第 7 圖

中心ヲ通ル弦ヲ**直徑**トイフ。直徑ノ長サハ半徑ノ二倍デアル。

圓周ノ畫キ方カラ考ヘテ圓ニハ次ノ基本性質ガアルコトガワカル。

同ジ圓ノ半徑ハ皆等シイ。

同ジ圓ノ直徑ハ皆等シイ。

圓ノ中心ト圓内ノ點トノ距離ハ半徑ヨリ小,圓周上ノ點トノ距離ハ半徑ニ等シク,圓外ノ點トノ距離ハ半徑ヨリ大デアル。

或點ト圓ノ中心トノ距離ガ半徑ヨリ小ナラバコノ點ハ圓內ニ,半徑ニ等シケレバ圓周上ニ,半徑ヨリ大ナラバ圓外ニアル。

紙面ニ圓周ト其一ツノ直徑トヲ畫キソノ直徑ヲ折目ニシテ折返シ光ニカザシテ見ルト直徑ノ一方ノ側ニアル弧ハ他側ノニ重ナル。故ニ

直徑ハ圓及圓周ヲ二等分スル。

コノ二等分セラレタ各ヲ**半圓,半圓周**トイフ。

直線ト圓周,又ハ圓周ト圓周トガ出會フトキハ,是等ノ線ハ**交ハル**トイヒ.其出會フ點ヲ**交點**トイフ。但特殊ノ場合ニハタトヒ出會ツテモ交ハルト言ハナイコトモアルガ是等ノコトハ改メテ後ニ說明スル(第71, 74頁)。

問　　題

1. 點ガ運動スルト其痕跡(アト)ハ何カ。線ガ運動スルト何ガ出來ルカ。面ガ運動スレバ如何。

2. 定木ノ緣ガ正シイ直線デアルカドウカヲ調ベル方法ヲ考ヘナサイ。

3. 定木ト兩脚器トヲ使ツテ次ノ二線分 a, b ノ和及差ヲ畫キナサイ。

第 8 圖

4. 線分 AB ノ中點ヲ M トシ AB 上ノ一點ヲ C トスル。 AC$=a$ 粍, CB$=b$ 粍トシテ MC ノ長サヲ計算シテ AC, CB ノ差トドンナ關係ガアルカヲ考ヘナサイ。モシ又 C ガ AB ノ延長上ニアラバ如何。

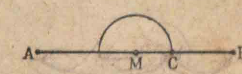


圖 9 圖

5. 弦 AB ト $\overset{\frown}{AB}$ トハドチラガ長イカ。何故カ。

6. 半徑 2 cm ノ圓周上ニ與ヘラレタ點*A ガアル。A ヲ一端ニシテ長サ 3 cm ノ弦ヲ畫キナサイ。幾ツ畫ケルカ。弦ノ長サガ 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm ナラバ如何。

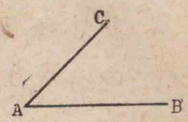
---

* 與ヘラレタ點,與ヘラレタ長サ等トイフノハ旣知ノ點,旣知ノ長サ等トイフコトデアル。「與ヘラレタ」ノ代リニ「定マレル」トイフコトモアル。

4. 角

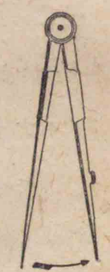
一點カラ出ル二ツノ半直線又ハ線分(線分ハコノ點ヲ一端トスル半直線ニ含マレルモノト考ヘル)ノ開キヲコノ二直線ノナス**角**トイツテ其點ヲ角ノ**頂點**,二ツノ半直線ヲ角ノ**邊**トイフ。

圖ニ於テハ A ハ頂點, AB, AC ハ邊デアル。



第 10 圖

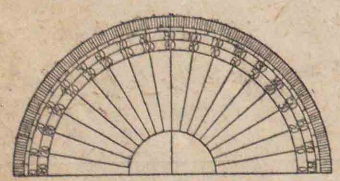
圖ノ角ヲ角A 又ハ A角トイヒ, 之ヲ $\angle A$ ト書ク。混雜ノ恐レアルトキニハ $\angle BAC$ 又ハ $\angle CAB$ ト書ク。$\angle a$, $\angle b$ ノ樣ニ小文字ヲ使ツテ書キ表ハスコトモアルガ,之ハ主トシテ角ノ大サヲ表ハストキニ使ハレル。


第 11 圖

角ノ大サハ其二邊ノ開キ方ニヨルノデアル。兩脚器ノ兩脚ヲ次第ニ開クト兩脚ヲ邊トスル角ガ次第ニ大キクナル。

角ノ大サハ度,分,秒ヲ單位トシテ表ハス。

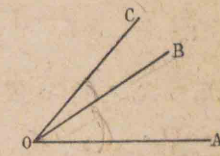
畫カレテアル角ノ大サヲ測リ又ハ既知ノ大サノ角ヲ畫クニハ分度器ヲ用ヒル。


第 12 圖

問 1. 1度ハ何分カ, 1分ハ何秒カ。

問 2. $34^\circ 25' 30''$ ハ幾秒デスカ[*]。

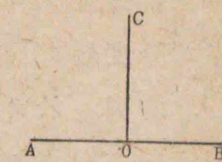
圖ニ於テ $\angle AOB$ ト $\angle BOC$ トハ頂點 O ト一邊 OB トヲ共有シ且共有邊 OB ノ反對ノ側ニアル。コノ樣ナ二角ヲ**接角**トイフ。



第 13 圖

$\angle AOC$ ハ二ツノ接角 $\angle AOB$ ト $\angle BOC$ トノ和デアル。又モシ接角 $\angle AOB$ ト $\angle BOC$ トガ等シイナラバ OB ハ $\angle AOC$ ノ二等分線デアル。

直線 AB 上ノ點 O カラ半直線 OC ガ出テキルト,二ツノ接角 $\angle AOC$ ト $\angle COB$ トガ出來ル。モシコノ二ツノ接角ガ等シイナラバ其各ヲ**直角**トイツテ之ヲ R∠ デ表ハス。



第 14 圖

前圖ニ於テ $\angle AOC$ ガ R∠ デアルナラバ當然 $\angle COB$ モ亦 R∠ デアル。

前ニ示シタ度,分,秒ノ外ニ R∠ ヲモ角ノ單位ニ使フコトガアル。例ヘバ 2R∠ ハ直角ノ 2 倍, $\frac{2}{3}$R∠ ハ直角ノ $\frac{2}{3}$ ヲ表ハス。實ハ角ノ大サノ標準ハ直角デアツテ1度ハ直角ノ $\frac{1}{90}$ トシテ定メタモノデアル。

R∠ ヨリ小ナル角ヲ**鋭角**トイヒ, R∠ ヨリ大ニシテ

* $34^\circ 25' 30''$ ハ34度25分30秒ヲ表ハス記號デアル。

2R∠ ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ。

問 題

1. 次ノ角ハ幾度デアルカ。又是等ノ角ハ鋭角デスカ,鈍角デスカ。

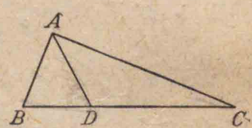
$1\frac{1}{2}$R∠, $\frac{2}{3}$R∠, $\frac{3}{8}$R∠, $\frac{5}{4}$R∠

2. R∠ ヲ單位ニシテ次ノ角ヲ書キ表ハシナサイ。

30°, 150°, 80°, 22°30′

3. 目分量デ 30°, 45°, 60°, 120°, 150° ノ角ヲ書キ,次ニ是等ヲ分度器デ測ッテ何程ノ誤差ガアルカヲ調ベヨ。

4. 右圖ニ於テ ∠ADB, ∠ABD, ∠DAC ハドノ角ヲ指スカ。又右圖ニ目分量デ ∠B, ∠C ノ二等分線ヲ書キ加ヘヨ。 90°



第 15 圖

6°

5. 時計ノ長針ハ15分間ニ何程廻轉スルカ。1分間, 5分間ニハ各幾度廻轉スルカ。又30分間, 1時間, 1.5時間, 2時間ニハ各如何。

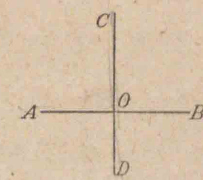
30° 180° 360° 540°

【注意】 コノ様ニ考ヘルト半直線ガ其一端ヲ固定シテ廻轉スルトキ一廻轉シテ初ノ位置ニ歸レバ4R∠,二廻轉シテ初ノ位置ニ歸レバ 8R∠ 廻轉スルコトニナルガ,圖ニ書カレテアル角ハ 2R∠ 以下ト考ヘルノガ通常デアル。

6. 2時40分ノトキニ時計ノ長針ト短針トノナス角ヲ求メヨ。

5. 垂線,斜線

相交ハル二直線ノナス一ツノ角ガ直角デアルナラバコノ二直線ハ互ニ**垂直デアル**トイフ。或ハ一方ハ他ノ**垂線**デアルトイツテ其交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。*



第 16 圖

圖ニ於テ ∠AOC＝R∠ ナルトキニハ AB ト CD トハ垂直ナル二直線デアリ, OC ハ AB ノ垂線, O ハ其足デアル。同様ニ OA ハ CD ノ垂線デ其足ハヤハリ O デアル。OC ガ AB ノ垂線デアルコトヲ OC⊥AB ト書キ表ハス。

相交ハル二直線ノナス角ガ直角デナイトキニハコノ二直線ノ一方ハ他ノ**斜線**デアルトイヒ,其交點ヲ**斜線ノ足**トイフ。

直線 AB 上ノ點 O カラ AB ノ垂線 OC ト斜線 OD トガ AB ノ同ジ側ニ出テキルトキニハ

* 甲ガ乙ニ垂直デアルトイフノト,甲ハ乙ノ垂線デアルトイフノトハ同一事實ヲ指スノデスガ特ニ後者ハ甲ハ其足ヲ一端トスル半直線又ハ線分デアル場合ニ使ハレルコトガ多イ。

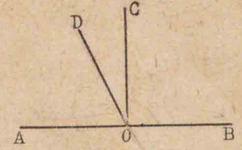
$\angle AOD + \angle DOB = \angle AOB$

$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$

而シテ　$\angle AOC = \angle COB = R\angle$

デアルカラ　$\angle AOB = 2R\angle$

$\therefore\ \angle AOD + \angle DOB = 2R\angle$



第 17 圖

ヨツテ**直線上ノ一點カラ任意ノ直線ヲ引イテ出來ル二ツノ接角ノ和ハ 2R∠ デアリ,又二ツノ接角ノ和ガ 2R∠ デアレバ其共有デナイ二邊ハ一直線ヲナス。**

角ノ二邊ガ同一直線上,頂點ノ兩側ニアルトキハコノ角ヲ**平角**トイフ。

平角ノ大サハ 2R∠ 卽 180° デアル。平角ノ二邊ハ同一直線上ニアルガ單ナル直線ハ平角デハナイ。平角ニハ頂點モ邊モアルガ直線ニハ頂點モ邊モナイ。

二角ノ和ガ 2R∠ デアルトキコノ二角ハ互ニ**補角**ヲナストイヒ,二角ノ一方ヲ他ノ**補角**トイフ。又二角ノ和ガ R∠ デアルトキコノ二角ハ互ニ**餘角**ヲナストイヒ,二角ノ一方ヲ他ノ**餘角**トイフ。

例ヘバ 60° ノ補角ハ 120°, 餘角ハ 30° デアリ,又 $\frac{3}{5}R\angle$ ノ補角ハ $\frac{7}{5}R\angle$, 餘角ハ $\frac{2}{5}R\angle$ デアル。

補角ト餘角トハ紛レ易イカラ誤ラヌ樣ニ注意シナケレバナラヌ。

問　題

1. 次ノ角ガ鋭角ナラバ其餘角ト補角トヲ求メヨ。モシ又鈍角ナラバ其補角ヲ求メナサイ。

$45°,\quad 150°,\quad \frac{4}{3}R\angle,\quad \frac{5}{6}R\angle$

2. 互ニ餘角ヲナス二ツノ角ガアル。其一方ノ 3 倍ガ他ノ 2 倍ニ等シイナラバ各ノ大サ如何。

3. $\angle AOB = 60°$ デアツテ OC ハ O ニ於ケル OA ノ垂線デアル。$\angle BOC$ ハ幾度カ。OB ト OC トガ OA ノ同ジ側ニアルトキ,反對ノ側ニアルトキノ二樣ニ答ヘヨ。

4. 二直線ガ交ハリテナス一ツノ角ガ 120° ナラバ其接角ハ何度カ。60 モシ又一ツノ角ガ $a°$ ナラバ如何。 180°−a°

5. $\angle AOC$ ト $\angle COB$ トハ接角デアツテ $\angle AOC = 68°$ $\angle COB = 112°$ デアル。$\angle AOB$ ハ幾度カ。AO, OB ハ一直線カ否カ。モシ又 $\angle AOC = \frac{5}{7}\angle R$, $\angle COB = \frac{8}{7}\angle R$ ナラバ如何。 A B

6. ◎* 直線 AB 上ノ點 O カラ二ツノ斜線 OC, OD ガ AB ノ兩側ニ出テキテ $\angle AOC = \angle BOD$ デアル。$\angle COB + \angle BOD$ ト平角 AOB トヲ比較シテ OC, OD ハ一直線デアルコトヲ確メヨ。

* ◎印ノツイテアル問題ハ重要デアル。記憶ヲ要スル。

6. 對頂角

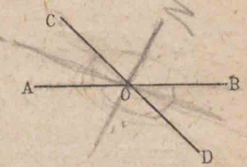
圓周トカ角トカイフ樣ナ術語ノ意味ヲ其語ノ**定義**トイフ。吾人ハ既ニ澤山ノ定義ヲ學ンダ。

問 次ノ語ノ定義ヲ述ベヨ。

接角, 補角, 平角, 弧, 弦

定義 二直線ガ交ハリテナス四ツノ角ノ中デ向キ合ヒノ二角ヲ**對頂角**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ $\angle AOC$ ト $\angle BOD$ トハ對頂角デアリ, $\angle AOD$ ノ對頂角ハ $\angle COB$ デアル。



第 18 圖

圖ニ於テ $\angle AOC$ ガ 40° ナラバ $\angle COB$ ハ 140°, $\angle BOD$ ハ 40° デアルカラ $\angle AOC$ ト其對頂角 BOD トハ等シイ。

コノコトハ $\angle AOC$ ノ大サニハ拘ハラナイノデ,或角ト其對頂角トハ常ニ等シイノデアル。何トナレバ

$\angle AOB$ ハ平角 $\therefore$ $\angle AOC = \angle COB$ ノ補角

$\angle COD$ ハ平角 $\therefore$ $\angle BOD = \angle COB$ ノ補角

$\therefore$ $\angle AOC = \angle BOD$

デアルカラデアル。

問 題

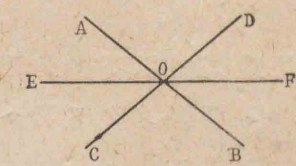
1. 上ト同樣ニシテ前圖ニ於テ一組ノ對頂角 $\angle AOD$

ト $\angle COB$ トガ等シイコトヲ確メヨ。

2. 上圖ニ於テ $\angle AOC$ ノ二等分線ノ延長ハ $\angle BOD$ ヲ二等分スル。何故カ其理由ヲ述ベヨ。

3. 上圖ニ於テ $\angle AOC$, $\angle COB$ ノ二等分線ヲ夫々* OM, ON トスル。$\angle MON$ ノ大サ如何。

4. 一組ノ對頂角ノ各ノ二等分線ハ一直線ヲナスコトヲ確メナサイ。

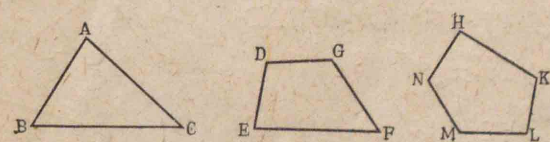


第 19 圖

手引 一組ノ對頂角 $\angle AOC$, $\angle BOD$ ノ二等分線ヲ夫々 OE, OF トスル。$\angle AOE$ ト $\angle FOB$ トヲ比較シ, 次ニ $\angle EOA + \angle AOF$ ヲ平角 AOB ニ比較シナサイ。

7. 多角形

定義 三角形,四角形ノヤウニ平面ノ一部分ガ連續シタ幾ツカノ線分デ圍マレテヰルナラバ之ヲ**多角形**トイツテ其線分ヲ**多角形ノ邊**,相隣レル二邊ノナス角ヲ**多角形ノ角**,其頂點ヲ**多角形ノ頂點**トイフ。



第 20 圖

* 「甲,乙,丙ヲ夫々 a, b, c トスル」トイフノハ「甲ヲ a, 乙ヲ b, 丙ヲ c トスル」トイフコトデアル。順序ニ注意セヨ。

多角形ノ邊ノ數,頂點ノ數及角ノ數ハ等シイ。

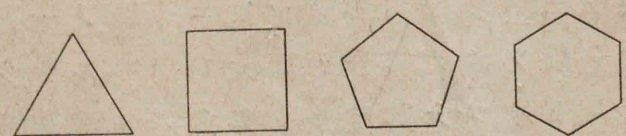
多角形ハ其頂點ノ名ヲ順ニツヅケテ呼ブ。例ヘバ前圖ノ多角形ヲ三角形 ABC, 四角形 DEFG, 五角形 HKLMN トイフ。特ニ三角形 ABC ヲ △ABC ト書ク。

【注意 1】 四角形,五角形等ヲ四邊形,五邊形等イフコトガアル。

【注意 2】 以下多角形ノ角ハドノ角モ 2R∠ ヨリ小サイ場合ダケヲ考ヘル。コノ樣ナ多角形ヲ**凸多角形**トイフ。

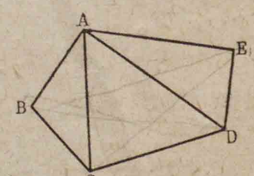
定義　總テノ邊ガ等シク,總テノ角ガ等シイ多角形ヲ**正多角形**トイフ。

正三角形,正四角形等ハ其例デアル。正四角形ノコトヲ特ニ**正方形**トイフ。



第 21 圖

多角形ノ隣リ合ツテヰナイ頂點ヲ結ブ線分例ヘバ圖ノ AC, AD 等ヲ**對角線**トイフ。



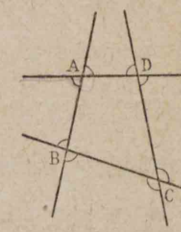
第 22 圖

問　右圖ノ五角形ニハ AC, AD ノ外ニ幾ツ對角線ガアルカ。

定義　多角形ノ一邊ノ延長ト其隣ノ邊トノナ

ス角ヲ**外角**トイフ。

多角形ノ外角ハ各頂點ニ於テ二ツヅツアル。



第 23 圖

外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ特ニ**內角**トイフコトガアル。

△ABC ニ於テハ一外角ノ接角デナイ內角ヲコノ外角ノ**內對角**トイフ。例ヘバ A ニ於ケル外角ノ內對角ハ ∠B* ト ∠C* トデアル。

問　題

1. 一邊ガ a 糎ノ正三角形ガアル。其周圍ハ幾糎カ。正 n 邊形ナラバ如何。

2. 六角形ヲ畫キ其總テノ對角線ヲ記入シ其數ヲ數ヘナサイ。

3. △ABC ニ於テ $\angle A=75°$, $\angle B=45°$, $\angle C=60°$ ナラバ A, B, C ニ於ケル外角ハ夫々幾度ナルカ。又各外角ト其內對角ノ和トヲ比較シナサイ。

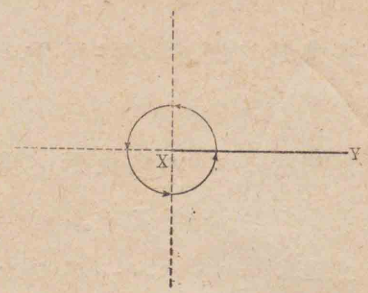
4. 正多角形ノ外角ハ皆等シイ。其理由如何。

8. 三角形ノ角

直線 XY ガ其一端 X ヲ固定シ,矢ノ方向ニ廻轉シテ最

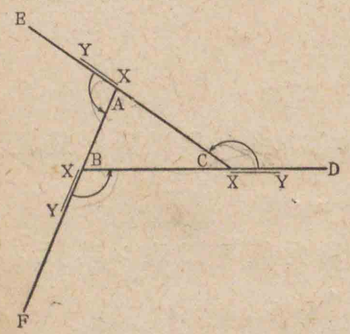
* 多角形 ABC…… デ單ニ ∠A, ∠B,…… トイフノハ其內角ヲ指スノデアル。

初ノ位置ニ戻ツテ來ルト XY ハ 4R∠ 廻轉シタコトガ明カデアル。



第 24 圖

△ABC ノ三邊ヲ下圖ノ樣ニ延長シ AE ニ重ナレル直線 XY(X ガ A ニ重ナツテキル)ガ X ヲ固定シ



第 25 圖

矢ノ方向ニ ∠EAB ダケ廻轉スレバ AB ニ重ナル。次ニ AB 上ヲ滑ツテ X ガ B ニ來タトキ再 X ヲ固定シテ ∠FBC ダケ廻轉スルト BC ニ重ナル。更ニ BC 上ヲ滑ツテ X ガ C ニ來タトキ又 X ヲ固定シテ ∠DCA ダケ廻轉スルト CA ニ重ナル。最後ニ CA 上ヲ滑ツテ X ガ A ニ來ルト最初ノ位置ニモドル。

上ノ運動中 XY ハ A, B, C デ廻轉シテ最初ノ位置ニ戻ルノデアルカラ A, B, C デ廻轉シタ三ツノ角ノ和ハ 4R∠ デアル。ソレ故ニ

三角形ノ各頂點ニ於ケル外角一ツヅツノ和ハ 4R∠ ニ等シイ。

コノ事實ヲ基礎ニシテ次ノ樣ニ考ヘルト

三角形ノ内角ノ和ハ 2R∠ ニ等シイ

コトガワカル。

前圖デ　∠EAB＋∠A＝2R∠

∠FBC＋∠B＝2R∠

∠DCA＋∠C＝2R∠

∴ (∠EAB＋∠FBC＋∠DCA)＋(∠A＋∠B＋∠C)＝6R∠

トコロガ初ノ括弧ノ中ハ 4R∠ デアルカラ

4R∠＋(∠A＋∠B＋∠C)＝6R∠

∴　∠A＋∠B＋∠C ＝2R∠

即如何ナル三角形デモ其三ツノ角ノ和ハ 2R∠ ニ等シイコトガワカツタ。

更ニコノ事實ヲ基礎ニシテ考ヘルト

三角形ノ一外角ハ其内對角ノ和ニ等シイ。從テ三角形ノ一外角ハ其内對角ノ何レヨリモ大キイ。

コトガワカル。

問　　題

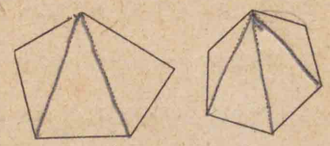
1. △ABC ニ於テ ∠B＝50°, ∠C＝65° ナラバ ∠A ハ幾度デスカ。

2. 正三角形ノ一角ハ幾度デスカ。外角ハ如何。

3. 四角形ノ四ツノ角ノ和ハ幾直角デスカ。

手引 一對角線ヲ引キ原形ヲ二ツノ三角形ニ分ケテ考ヘナサイ。

4. 五角形六角形ノ内角ノ和ハ各幾R∠デスカ。



第 26 圖

5. △ABC ニ於テ ∠B, ∠C ノ二等分線ノ交點ヲOトスル。∠B＝68° ∠C＝56° ナラバ ∠BOC ハ幾度デスカ。モシ又 ∠B＝b°, ∠C＝c° ナラバ如何。

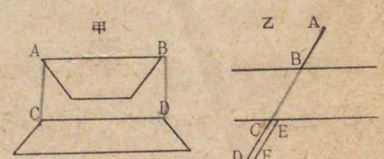
遠藤昌

◎6. 一ツノ三角形ノ二角ガ他ノ三角形ノ二角ニ夫々等シイナラバ殘ノ角モ等シイコトヲ確メヨ。

9. 證明ノ必要

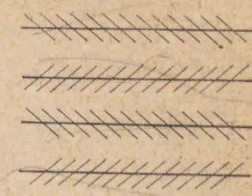
以上學ビ來レル圖形ノ性質ハ更メテ學ブマデモナク直觀的ニ明カナモノモアツタコトト思ハレルガ何故ニ一見明カナ事實ニ論議ヲ盡スノデアルカ。直觀,實驗等ハ粗漏ナコトガアリ是等ヲ主トスルトキニハ誤ツタ結論ニ達スルコトガアルカラデアル。

例ヘバ右ノ甲圖ニ於ケルAB, CD ノ長サヲ先ヅ目測シ次ニ兩脚器又ハ尺度デ測ツテ比較セヨ。又乙圖デ CD, EF ノ中ノ何レガ AB ノ延長デアルカヲ先ヅ目測シ次ニ定規ヲ當テテ確メヨ。



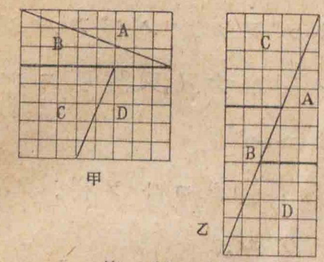
第 27 圖 (I)

更ニ右圖デハ横ニ並ンデヰル四本ノ線ハ殆ンド何レノ部分モ等間隔デアルニ拘ハラズ左方ト右方トデハ間隔ガ異ナル樣ニ見エル。



第 27 圖 (II)

方眼紙ヨリ一邊ノ長サ8ナル正方形ヲ切拔キ之ヲ下圖ノ甲ノ樣ニ四ツノ部分 A,B,C,D ニ切斷シテ乙ノ樣ニ並ベ換ヘテ見ル。甲ノ面積ハ64方眼デアリ,乙ノハ65方眼デアル。同ジ紙片ヲ切斷シテ並ベ換ヘテモ面積ノ増減スル筈ハナイカラ,コノ實驗ハドコカニ誤ヲ含ンデヰル。



第 28 圖

以上ノ諸例ハ直觀又ハ實驗ハ信頼スルニ足ラナイコトヲ示スモノデアル。又假リニ信頼スルコトガ出來ルトシテモ實驗デ得タ結果ハ實驗シタ範圍内ニ止マルモノデ實驗外ニハ及バナイ。故ニ常ニ正シイコトヲ斷言スルニハ直觀,實驗又ハ測定等ニヨルコトナク推理ニヨツテ考ヘネバナラヌ。

推理ニヨツテ或事實ノ正シイコトヲ説明スルノヲコノ事實ヲ**證明スル**トイフ。證明シタ上デ初メテ或事實ガ正確デアルコトヲ信用スルコトガ出來ルノデアツテ,

證明ナシニ盲信スルコトハ幾何學デハ絶對ニ避ケネバナラヌコトデアル。

10. 定理,公理

證明スルコトガ出來ル眞理ヲ**定理**トイフ。私共ハ既ニ澤山ノ定理ヲ學ンダ。例ヘバ

對頂角ハ相等シ。

三角形ノ內角ノ和ハ2R∠デアル。

等ハ皆定理デアル。

定理ハ證明ニヨツテ正シイコトガワカルノデアルガ,餘リニ簡單スギテ證明スルコトノ出來ナイ,又證明スルマデモナイ自明ノ眞理ガアル。例ヘバ

a. 二點ヲ通リテ唯一ツノ直線ヲ引クコトヲ得。

b. 直線ハ二點間ノ最短通路デアル。

等ハ之デアル。コノ樣ナ自明ノ眞理ヲ**公理**トイフ。

幾何學ニ於テハ既知ノ定義,公理,定理ヲ基礎ニシテ他ノ定理ヲ證明シ更ニコノ定理ヲモ基礎ニシテ他ノ定理ヲ證明スル等次第ニ斯ノ如クニシテ研究スルノデアル。

參考ノ爲ニ既ニ學ビタル主ナル定理ヲ列記スル。

a. 直線上ノ一點カラコノ直線ノ一方ノ側ニ垂線又ハ斜線ヲ引イテ生ズル二ツノ接角ノ和ハ2R∠ニ等シイ。

b. 二ツノ接角ノ和ガ2R∠ナラバ,ソノ共有ナラザル

二邊ハ一直線上[illegible]

c. 對頂角ハ等シイ。

d. 三角形ノ各頂點ニ於ケル外角一ツヅツノ和ハ4R∠ニ等シイ。

e. 三角形ノ內角ノ和ハ2R∠デアル。

f. 三角形ノ一外角ハ其內對角ノ和ニ等シイ,從テ一外角ハ內對角ノ何レヨリモ大デアル。

雜題第一

1. △ABC ノ ∠B ノ二等分線ト C ニ於ケル外角ノ二等分線トノ交點ヲ O トスレバ ∠BOC ハ $\frac{\angle A}{2}$ ニ等シイコトヲ證明セヨ。

2. n 邊形ノ內角ノ和ハ $(2n-4)$R∠ ナルコトヲ證明セヨ。

手引　一頂點カラ出ル總テノ對角線ヲ引ク ト三角形ガ幾ツ出來ルカ。是等ノ三角形ノ內角ノ和ハ何程デアルカヲ考ヘヨ。　又ハ n 邊形ノ各頂點ニ於ケル外角一ツヅツノ和ハ4R∠ナルコトヲ利用セヨ。

3. 內角ノ和ガ1440° デアル多角形ハ幾角形デスカ。

4. アル正多角形ノ一角ハ144° デアル。コノ多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

5. n 邊形ノ對角線ノ數ハ幾ツデスカ。

第　　編

直線圖形

11. 三角形ノ合同(其一)

二ツノ圖形ガ同形,等大ナラバコノ二ツノ圖形ハ**合同**又ハ**全等**デアトルイツテ,兩圖形ノ名ノ間ニ記號≡ヲ置イテ表ハス。例ヘバ△ABCト△PQRトガ合同デアルノヲ　△ABC≡△PQR　ト書ク。

紙面ニ多角形ヲ畫キ之ヲ他ノ紙ニ重ネタママデ切抜クト合同ナル二ツノ多角形ガ出來ル。同形,等大トイフノト重ネ合ハシ得ルトイフノハ同ジ意味デスカラ合同ノ定義ヲ次ノ様ニ定メルコトガ出來ル。

定義　全ク重ネ合ハシ得ル二ツノ圖形ハ**合同**ナリ或ハ**全等**ナリトイフ。

問 1. 與ヘラレタル三角形ニ合同ナル三角形ヲ畫クニハドウスレバヨイカ。種々ノ方法ヲ工夫セヨ。

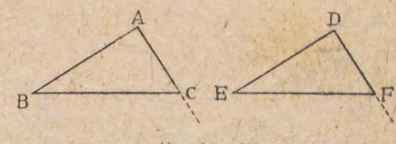
三角形ニハ三ツノ邊ト三ツノ角トガアル。是等ノ六ツヲ**三角形ノ元素**トイフ。二ツノ三角形ガ合同ナラバ六對ノ元素ハ夫々等シイコト勿論デアルガ,其中ノ適當ナル幾對カガ夫々等シイコトガワカレバ二ツノ三角形ハ合同ナルコトヲ證明シ得ルノデアル。

定理一　**一ツノ三角形ノ二邊及其夾角ガ他ノ三角形ノ二邊及其夾角ニ夫々等シケレバコノ二ツノ三角形ハ合同デアル。**

題意*　△ABC ト △DEF トニ於テ

AB＝DE, AC＝DE, ∠A＝∠D ナラバ △ABC≡△DEF

證明　DE ヲ之ニ等シイ AB ノ上ニ重ネ,兩三角形ヲ重ナレル邊ノ同ジ側ニ置クト, ∠A＝∠D デアルカラ半直線 DF ハ半直線 AC ニ重ナリ且 AC＝DF ナルガ故ニ F ハ C ニ重ナル。

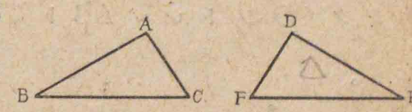


第 29 圖

コノ様ニ兩三角形ノ三ツノ頂點ガ夫々重ナツタカラ兩三角形ハ全ク重ナリ合ツタノデアル。

∴ △ABC≡△DEF

【注意 1】DE ヲ AB ニ重ネルトイフノハ D ヲ A ニ, E ヲ B ニ重ネルコトデアル。前圖ノ様ナトキニ △DEF ヲ動カシテ DE ヲ AB ニ重ネルト兩三角形ハ重ナレル邊ノ同ジ側ニ來ルガ上圖ノ様ナトキニハ兩三角形ハ重ナツタ邊ノ反對ノ側ニ來ル。コノ様ナトキニハ △DEF ヲ裏返シテカラ DE ヲ AB ニ重ネルトヨロシイノデ



第 30 圖

* 定理ノ意味ヲ圖ニツイテ説明スルノデアル。

アル。定理二,五,六ノ證明ニハ略シテアルガ實ハ之ト同ジ様ナ注意ヲ要スルノデアル。

〔注意 2〕 △ABC≡△DEF ガワカツタナラバ BC＝EF, ∠B＝∠E, ∠C＝∠F, モワカツタノデアル。不對

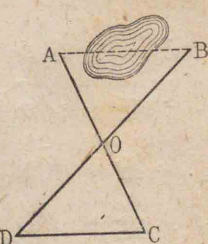
問2. ABCD ハ AB＝DC, ∠A＝∠D ナル四邊形デアル。今 AD ノ中點ヲ E トスレバ △ABE ハ △DCE ニ合同ナルコトヲ證明シナサイ。

手引 △ABE ノ二邊夾角ガ △DCE ノ二邊夾角ニ夫々等シイコトガワカレバ重ネ合ハスマデモナク前定理ニヨツテ △ABE≡△DCE ナリト斷定スルコトガ出來ル。

問3. 前問ニ於ケル四邊形ノ對角線ハ等シイコトヲ證明セヨ。

手引 △ABD ト △DCA トヲ比較セヨ。

問4. △AOB ノ邊 AO ノ延長上ニ AO ニ等シク OC ヲ, BO ノ延長上ニ BO ニ等シク OD ヲトレバ AB ト CD トハ等シイ。*



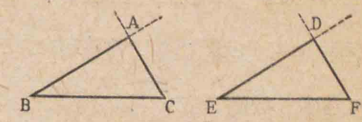
第 31 圖

定理二 一ツノ三角形ノ一邊ト其兩端ノ角トガ他ノ三角形ノ一邊ト其兩端ノ角トニ夫々等シイトキハ,コノ兩三角形ハ合同デアル。

*「之ヲ證明セヨ」ヲ略シテアル。今後多ク之ニ倣フ。

題意 △ABC ト △DEF トニ於テ BC＝EF, ∠B＝∠E, ∠C＝∠F ナラバ

△ABC≡△DEF



第 32 圖

證明 EF ヲ之ニ等シイ BC ニ重ネテ兩三角形ヲ重ナレル邊 BC ノ同ジ側ニ置ケバ ∠B＝∠E デアルカラ半直線 ED ハ半直線 BA ニ重ナリ, ∠C＝∠F デアルカラ半直線 FD ハ半直線 CA ニ重ナル。

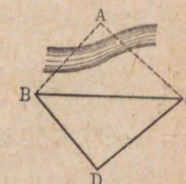
故ニ半直線 ED, FD ノ交點 D ハ半直線 BA, CA ノ交點 A ニ重ナル。

兩三角形ノ三ツノ頂點ガ重ナツタカラ

△ABC≡△DEF

問5. 四邊形 ABDC ニ於テ ∠B, ∠C ガ共ニ BC デ二等分セラレルナラバ

AB＝DB, AC＝DC



第 33 圖

問6. △ABC ニ於テ A カラ BC ニ下シタ垂線ガ ∠A ヲ二等分スルナラバ AB＝AC

12. 二等邊三角形

定義 二邊ノ等シイ三角形ヲ**二等邊三角形**トイフ。

三角形デハドノ邊デモ**底邊**トイヒ,底邊ニ對スル角ヲ**頂角**,底邊ノ兩端ノ角ヲ**底角**トイフコトガ出來ルノデス

ガ特ニ二等邊三角形デハ等邊ノ夾ム角ヲ**頂角**,其對邊ヲ**底邊**トイヒ,頂角ノ頂點ヲ二等邊三角形ノ**頂點**,底邊ノ兩端ノ角ヲ**底角**トイフ。

頂點ヨリ底邊ニ至ル垂線ノ長サ(頂點ト垂線ノ足トノ距離)ヲ**高サ**トイフ。

定理三　二等邊三角形ノ底角ハ相等シイ。

題意　△ABC ニ於テ AB＝AC ナラバ ∠B＝∠C

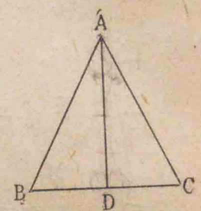
AB＝AC　∠B＝∠C なることを証明せよ

證明　∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トスル。

△ABD ト △ACD トニ於テ AD ハ共通

AB＝AC　∠BAD＝∠CAD

ヨッテ △ABD ノ二邊夾角ハ △ACD ノ二邊夾角ニ夫々等シイ。



第 34 圖

∴ △ABD≡△ACD　從テ ∠B＝∠C

コレデ本定理ノ證明ハ出來タガ △ABD≡△ACD ニ注意スルト BD＝CD 及 ∠ADB＝∠ADC ノ證明モ出來タコトニナル。コノ樣ニ或定理又ハ其證明カラ直ニ推定出來ル簡單ナ定理ヲ初ノ定理ノ**系**トイフ。ソコデ上ノ事實ヲ定理三ノ系トシテ再記スレバ

系　二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ニ垂直デ且底邊ヲ二等分スル。

アル直線ガアル線分ニ垂直デアッテ且之ヲ二等分スルトキハコノ直線ヲコノ線分ノ**垂直二等分線**トイフ。

又線分ノ兩端ノ點ハ其垂直二等分線ニツイテ**對稱**ナリトイヒ,兩端ノ點ノ一方ヲ他ノ**對稱點**トイフ。

例ヘバ前圖ニ於テ B, C ハ AD ニツイテ對稱デアリ, AD ニツイテ B ノ對稱點ハ C, C ノ對稱點ハ B デアル。

問1. XY ニツイテ A ノ對稱點ヲ B トスル。XY 上ノ任意ノ點ヲ C トスレバ AC＝BC

本問ニヨッテ線分ノ垂直二等分線上ノ點ハ初ノ線分ノ兩端ヨリ等距離ニアルトイフコトガ出來ル。

問2. 二等邊三角形ノ一角ガ 45° ナラバ他ノ角ハ幾度ナルカ(二ツノ場合アリ)。

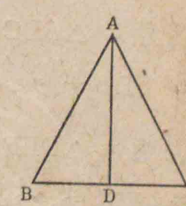
問3. 三邊ガ皆等シイ三角形ハ正三角形デアル。

定理四　三角形ノ二角ガ等シイナラバ,之ニ對スル二邊ハ等シイ。

題意　△ABC ニ於テ ∠B＝∠C ナラバ AC＝AB

證明　∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トスル。△ABD ト △ACD トニ於テ

∠BAD＝∠CAD　及　∠B＝∠C



第 35 圖

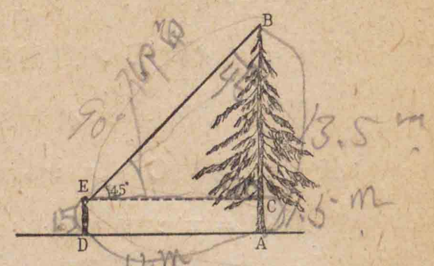
デアルカラ　∠ADB＝∠ADC…………(20頁問題6)

ヨッテ兩三角形ハ一邊 AD ヲ共有シ其兩端ノ角ガ夫々等シイ。

∴ △ABD≡△ACD　　ヨリテ　AB＝AC

問4. 三ツノ角ガ皆等シイ三角形ハ正三角形ナリ。

問5. 平地ニ直立シテヰル樹木 AB ガアル。根元 A カラ $12m$ ノ距離ニアル點 D ニ立ツテヰル人ガ頂上ヲ視ル線ト水平線トノナス角(之ヲ木ノ頂上ノ**仰角**トイフ)ガ $45°$ デアルト,コノ樹ノ高サ何程デスカ。但コノ人ノ眼ノ高サハ地上 $1.5m$ デアル。



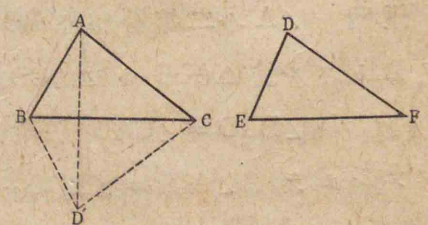
第 36 圖

13. 三角形ノ合同(其二)

定理五 一ツノ三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ニ夫々等シイナラバ,コノ兩三角形ハ合同デアル。

題意 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $AB=DE$, $BC=EF$, $CA=FD$ ナラバ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明 $\triangle DEF$ ヲ裏返シテ EF ヲ之ニ等シイ BC ニ重ネタトキニ D ハ D′ ニ來ルモノトスル。A, D′ ヲ結ブ



第 37 圖

$\triangle ABD'$ ハ二等邊デアルカラ $\angle BAD' = \angle BD'A$

$\triangle ACD'$ ハ二等邊デアルカラ $\angle CAD' = \angle CD'A$

$\therefore\ \angle BAD' + \angle CAD' = \angle BD'A + \angle CD'A$

即　$\angle BAC = \angle BD'C = \angle EDF$

ヨリテ $\triangle ABC$ ノ二邊及其夾角ハ $\triangle DEF$ ノ二邊及其夾角ニ夫々等シイ。

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

【注意】上圖デハ AD′ ハ B ト C ノ間デ BC ニ交ハルモノトシテ證明シタガ AD′ ガ B 又ハ C ヲ通ルカモ知レナイ,又ハ BC ノ延長上デ交ハルカモ知レナイ。コノ樣ナ場合ニモ本定理ガ成立ツコトヲ證明シナケレバナラヌガ之ハ生徒諸子ニ任シテ置ク。

問1. 四邊形 ABCD ニ於テ $AB=AD$, $CB=CD$ ナラバ對角線 AC ハ $\angle A$ 及 $\angle C$ ヲ二等分スル。

定義 三角形ノ頂點ヲ對邊ノ中點ニ結ブ線分ヲコノ三角形ノ**中線**トイフ。

如何ナル三角形ニモ中線ハ三ツアル。

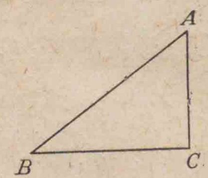
問2. 二等邊三角形ノ頂點カラ出ル中線ハ頂角ヲ二等分シ且底邊ニ垂直デアル。

14. 直角三角形

三角形ノ三ツノ角ノ和ハ $2R\angle$ デアルカラ其中ノ一ツガ直角又ハ鈍角デアレバ殘ノ二ツハ鋭角デアル。ヨツテ如何ナル三角形デモ三ツノ角ノ中ノ少クモ二ツハ鋭角デアル。

定義 一ツノ角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイヒ,一ツノ角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**トイフ。又三ツノ角ガ皆鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**トイフ。

直角三角形ニ於テハ直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**トイフ。圖ニ於テ $\angle C = R\angle$ ナラバ $\triangle ABC$ ハ直角三角形デ AB ハ其斜邊デアル。



第 38 圖

問 1. 直角三角形ノ二ツノ鋭角ハ互ニ餘角ヲナス。

問 ◎2. 斜邊ト一鋭角トガ夫々等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。

定理六 斜邊ト直角ヲ夾ム一邊トガ夫々等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。

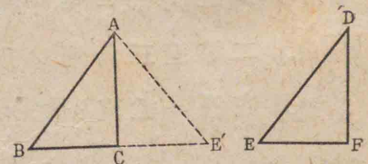
題意 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$\angle C = \angle F = R\angle$

$AB = DE,\ AC = DF$

ナラバ

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$



第 39 圖

證明 $\triangle DEF$ ヲ裏返シテ DF ヲ之ニ等シイ AC ノ上ニ重ネタトキニ E ハ E′ ニ來ルモノトスル。

$\angle C = \angle F = R\angle$ デアルカラ $\angle BCE'$ ハ平角從ツテ BCE′ ハ一直線デアル。ヨツテ ABCE′ 全體デ一ツノ三角形ニナリ且 $AB = AE'$ デアルカラコノ三角形ハ二等邊デアル。

$\therefore\quad \angle B = \angle E' = \angle E$

ヨツテ $\angle A = \angle D$ ………………(20頁問題6)

$\therefore\quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

定義 點ト直線トノ距離トハ,コノ點ヨリコノ直線ニ下シタル垂線ノ足ト初ノ點トノ距離ノコトデアル。

コノ定義ニヨツテ三角形ノ高サハツマリ頂點ト底邊トノ距離ノコトデアル。

問 ◎3. $\angle AOB$ ノ二邊 OA, OB カラ等距離ニアル點ハコノ角ノ二等分線上ニアル。

問　　題

1. ドレダケノコトヲ知レバ二ツノ三角形ハ合同ナリト斷定スルコトガ出來ルカ。定理 1256

2. 三ツノ角ガ夫々等シイ二ツノ三角形ハ合同ナリヤ否ヤ。

3. 三角形ノ中線ハ三角形ノ角ヲ二等分スルカ。

◎4. 角ノ二等分線上ノ點ハ其二邊カラ等距離ニアル。

◎5. 線分ノ兩端カラ等距離ニアル點ハ此線分ノ垂直二等分線上ニアル。

◎6. 一角ガ 60° デアル二等邊三角形ハ正三角形デアルコトヲ證明セヨ。

7. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端カラ出ル中線ハ相等シイ。

8. 底邊ヲ共有スル二ツノ二等邊三角形ノ二ツノ頂點ヲ通ル直線ハ共通底邊ヲ垂直ニ二等分スル。

9. 正三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 D, E, F ガアル。モシ AF＝BD＝CE ナラバ △DEF ハ正三角形デアル。

10. OA＝OB, OC＝OD ナル樣ニ ∠XOY ノ邊 OX 上ニ A, C ヲ, OY 上ニ B, D ヲトル。AD ト BC トノ交點ヲ P トスレバ OP ハ ∠XOY ヲ二等分スル。

15. 作圖題

指定セラレタ條件ニ適スル圖形ヲ作ルベキコトヲ要求スル問題ヲ**作圖題**トイフ。

幾何學デハ作圖ヲスルニ直線定木ト兩脚器トダケヲ用ヒ,次ニ示ス 1°, 2° ハ如何ナル場合ニモ作圖シ得ルコトニシテアル。

1° **任意ノ二點ヲ通ル直線ヲ引クコト。**

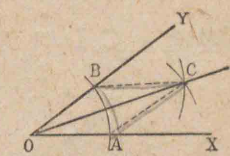
2° **任意ノ點ヲ中心ニシテ任意ノ長サヲ半徑トスル圓周ヲ畫クコト。**

1°, 2° ヲ**作圖ノ公法**トイヒ,其他ノ作圖ハ如何ニ複雜ナモノデモ公法ヲ幾回カ繰返シテ作圖スルノデアル。

作圖題一 與ヘラレタル角ヲ二等分セヨ。

題意 ∠XOY ヲ與ヘラレタル角トスル。∠XOY ノ二等分線ヲ作ルコト。

作圖 O ヲ中心ニシテ任意ノ半徑デ圓周ヲ畫キ OX, OY トノ交點ヲ夫々 A, B トスル。A, B ノ各ヲ中心ニシテ前ト等シイ半徑デ二ツノ圓周ヲ畫キソノ交點 (O ト異ナル) ヲ C トスル。半直線 OC ヲ作ルト OC ハ ∠XOY ノ二等分線デアル。



第 40 圖

證明 C ヲ A 及 B ニ結ブ △OAC ト △OBC トハ三邊夫々等シイ。

∴ △OAC≡△OBC…………(定理五)

∴ ∠AOC＝∠BOC

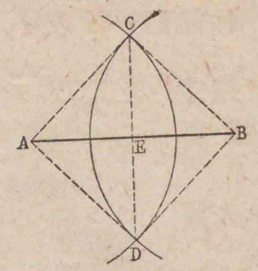
ヨリテ OC ハ求ムル二等分線デアル。

【注意 1】 作圖題ヲ解クニハ題意ト作圖ノ方法トヲ述ベ次ニ出來タ圖形ガ題意ニ適スルコトヲ證明スルノデアル。

問 1. 與ヘラレタル三角形ノ各ノ角ノ二等分線ヲ作リナサイ。

作圖題二 與ヘラレタル線分ヲ二等分セヨ。

題意 與ヘラレタル線分 AB ヲ二等分スルコト。



第 41 圖

作圖 A,Bノ各ヲ中心ニシテ相交ハル等半徑ノ二圓周ヲ畫キ其交點ヲC,Dトスル。C,Dヲ結ブ線分トABトノ交點ヲEトスレバEハABヲ二等分スル點デアル。

證明 C,Dヲ何レモA,Bニ結ブ

CA＝CB＝DA＝DB

デアルカラ△CABト△DABトハ底邊ABヲ共有スル二等邊三角形デアル。

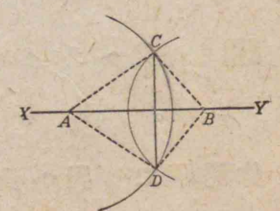
故ニCDハABヲ二等分スル(34頁問題8)。ヨリテEハ求ムル點デアル。

【注意2】 CDハABヲ二等分スルダケデナクABニ垂直デアル。故ニ上ノ作圖法ハABノ垂直二等分線ノ作圖法ト見ルコトガ出來ル。

問2. 與ヘラレタル△ABCノ各邊ノ垂直二等分線ヲ作リナサイ。又三ツノ中線ヲ畫キナサイ。

作圖題三　定直線外ノ定點ヲ通リコノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

題意 定直線XYノ外ニアル定點Cヲ通リXYニ垂線ヲ作ルコト。



第 42 圖

作圖 XY上ノ任意ノ點A,Bヲ中心トシCヲ通ル二ツノ圓周

ヲ畫キ其交點ヲD(Cト異ナル)トスル。CDハ題意ニ適スル直線デアル。

證明 A,Bヲ何レモC,Dニ結ブ

AC＝AD,　　BC＝BD

デアルカラ△ACD, △BCDハ底邊CDヲ共有スル二等邊三角形デアル。

故ニABハCDニ垂直デアル(34頁問題8)。

ヨリテ　CD⊥AB

【注意3】 上ノ作圖法ハXYニツイテCノ對稱點ヲ作圖スル方法トモ見ルコトガ出來ル。

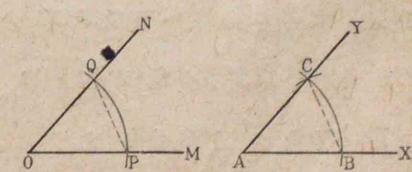
問3. 與ヘラレタル三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ垂線ヲ作レ。

【注意4】 問1, 2, 3デ作圖シタ各ノ三直線ハ何レモ一點ニ會スルコトガ後ニワカル。

作圖題四　與ヘラレタル角ニ等シイ角ヲ畫ケ。

題意 與ヘラレタ角MONニ等シイ角ヲ畫クコト。

作圖 任意ノ位置ニ直線AXヲ引キO,Aノ各ヲ中心ニシテ等半徑ノ二圓周ヲ畫キ, OM, ONトノ交點ヲ夫々P,Qトシ, AXトノ交點ヲBトスル。



第 43 圖

Bヲ中心ニシテPQヲ半徑トスル圓周ト圓周Aトノ交

點ヲCトスル。A,Cヲ通ル半直線AYヲ引ク。∠XAYハ求メル角デアル。

證明　△BAC ト △POQ トハ三邊夫々等シイ。

∴　△BAC≡△POQ…………(定理五)

∴　∠BAC＝∠POQ

即　∠XAY＝∠MON

問　題

1. 一角ガ定角 a ニ等シク,コノ角ヲ夾ム二邊ガ夫々定線分 b, c ニ等シイ三角形ヲ作レ。

2. 一邊ガ定線分 a ニ等シク其兩端ノ角ガ夫々定角 b, c ニ等シイ三角形ヲ畫ケ。

3. 三邊ノ長サヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。

【注意】 三邊ノ長サガ與ヘラレタ三線分ニ夫々等シイ三角形ヲ畫ケトイフ意味デアル。

4. 一邊ガ 3 cm ナル正三角形ヲ畫ケ。

5. 定直線AB上ノ定點Oヲ通リABニ垂線ヲ作レ。

手引　求ムル垂線ハ平角AOBノ二等分線デアル。

6. 45°, 135° ノ角ヲ作圖シナサイ。

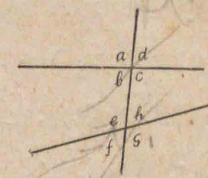
7. 直角ヲ三等分シナサイ。

手引　直角ノ一邊上ニ一邊ヲ有スル正三角形（直角ノ頂點ヲ一頂點トスル）ヲ畫イテ考ヘヨ。

8. △ABC ノ邊 BC 上ニテ AB, AC ヨリ等距離ニアル點ヲ求ム。

16. 平行線

定義　一ツノ直線ガ他ノ二直線ニ交ハツテ出來ル八ツノ角ヲ圖ノ樣ニ命名スル。



第 44 圖

$\angle a$ ト $\angle e$; $\angle b$ ト $\angle f$; $\angle c$ ト $\angle g$; $\angle d$ ト $\angle h$ ノ各組ヲ**同位角**トイヒ $\angle b$ ト $\angle h$; $\angle c$ ト $\angle e$ ノ各組ヲ**錯角**トイフ。

問 1. 前圖ニ於テ $\angle a=\angle e=120°$ ナラバ他ノ六ツノ角ノ大サハ各何程カ。

問 2. 一直線ガ他ノ二直線ニ交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイナラバ同位角ハ等シイ。

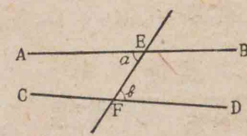
定義　同一平面上ニアツテ交ハラナイ二直線(線分,半直線ナラバ何程延長シテモ)ヲ**平行直線**又ハ**平行線**トイフ。

AB ト CD トガ平行デアルコトヲ AB∥CD ト書イテ表ハス。

定理七　二直線ガ他ノ直線ニ交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイナラバ初ノ二直線ハ平行デアル。

題意　二直線 AB, CD ニ他ノ直線 EF ガ交ハツテ出來ル一組ノ錯角ヲ圖ノ様ニ $\angle a, \angle b$ トスル。モシ $\angle a=\angle b$ ナラバ

AB ∥ CD



第 45 圖

證明　モシ AB, CD ガ平行デナケレバ其交點ヲ O トスル。O ガ EF ノ右ノ方ニアレバ $\angle a$ ハ △OEF ノ外角, $\angle b$ ハ其内對角デアル。

$\therefore\ \angle a>\angle b$ ……………………………… (23 頁定理 f)

コレハ不合理デアル(題意ニ矛盾スルカラ)。

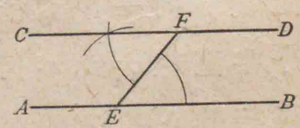
故ニ O ハ EF ノ右ノ方ニハナイ。卽 AB ト CD トハ EF ノ右デハ交ハラナイ。

同様ニ EF ノ左デモ交ハラナイ。

$\therefore$ AB ∥ CD

作圖題五　定直線 AB 外ノ定點 F ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ヲ作レ。

作圖　F ヲ AB 上ノ任意ノ點 E ニ結ブ。$\angle$FEB ト等シイ錯角ヲナス直線 CFD ヲ畫ク(作圖題四)。CFD ハ求メル直線デアル。



第 46 圖

證明　CD, AB ニ FE ガ交ハリテナス錯角ガ等シイカラ前定理ニヨツテ

CD ∥ AB

上ノ作圖ニヨツテ AB 外ノ點 F ヲ通ツテ AB ニ平行ナル直線ハ必ズ存在スル。シカシ F ヲ通ツテ AB ニ平行ナル直線ハ CD ダケデ其外ニハナイコトヲ證明スルノハ困難デアル。

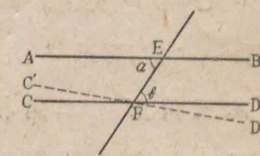
公理 c　直線外ノ點ヲ通リ, コノ直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

定理八　平行線ニ他ノ直線ガ交ハツテ出來ル錯角ハ等シイ。

題意　平行線 AB, CD ニ EF ガ交ハツテ出來ル錯角ヲ $\angle a, \angle b$ トスレバ　$\angle a=\angle b$

證明　モシ $\angle a=\angle b$ デナケレバ F ヲ通ツテ $\angle a$ ト等シイ錯角ヲナス直線 C′FD′ ヲ引ク。サウスレバ前定理ニヨツテ

AB ∥ C′D′



第 47 圖

又題意ニヨツテ　AB ∥ CD

故ニ F ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ガ二ツアルコトニナル。之ハ公理 c ニ矛盾スルカラ不合理デアル。

$\therefore\quad \angle a=\angle b$

系　平行二直線ニ他ノ直線ガ交ハツテナス同位角ハ等シイ。

問3. 平行二直線ノ一方ニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直デアル。

試→

17. 定理ノ假設,終結,逆

定理三ハ三角形ノ二邊ガ等シイナラバ,其二角ハ等シイコトヲ述ベテアルノデ「二邊ガ等シイ」コトヲ基礎ニシテ「二角ガ等シイ」コトヲ證明シタノデアル。又定理七ニ於テハ「二直線ニ他ノ直線ガ交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイ」コトヲ基礎ニシテ「初ノ二直線ガ平行」ナルコトヲ證明シタノデアル。

總テノ定理ハ或條件ト之ヨリ誘導セラレル事項トデ出來テヰル。コノ條件ヲ其定理ノ**假設**トイヒ,假設カラ誘導セラレル事項(其定理ニ記セル)ヲ其定理ノ**終結**トイフ。

例ヘバ定理三ノ假設ハ「三角形ノ二邊相等シ」デ終結ハ「其三角形ノ二角相等シ」デアル。又定理七ノ假設ハ「二直線ニ他ノ直線ガ交ハリテナス一組ノ錯角相等シ」デ終結ハ「二直線ハ平行ナリ」デアル。

問1. 定理四,定理八ノ假設,終結ヲ言ヘ。

問2. 次ノ各定理ノ假設,終結ヲ述ベヨ。

(1) 或整數ノ一ノ位ノ數ガ0ナルトキハ,コノ數ハ10倍數ナリ。(2) $\angle a$ト$\angle b$トガ對頂角ナルトキハ,$\angle a$ハ$\angle b$ニ等シ。

定理ノ假設ト終結トヲ入替ヘタルモノヲ其定理ノ**逆**トイフ。

例ヘバ定理三ハ定理四ノ逆デ,定理四ハ定理三ノ逆デアル。又定理七ト八トモ互ニ逆デアル。

或定理ガ正シクトモ其逆ハ正シイトハ限ラナイ。逆ノ眞僞ハ元ノ定理ニハ關係ナク別ニ確メネバナラヌ。

問3. 前問ニ於ケル各定理ノ逆ヲ述ベテ其眞僞ヲ考ヘヨ。

【注意】 定理七,八ニ於テハ終結ヲ否定スレバ既知ノ事實又ハ其定理ノ假設ニ矛盾スルコトヲ證明シテ結局終結ガ正シイコトヲ證明シタノデアル。コノ樣ナ證明法ヲ**歸謬法**トイフ。

問4. 歸謬法ニヨツテ次ノ定理ヲ證明セヨ。

一點ヲ通リ一ツノ直線ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得(點ガ直線上ニアル場合ト然ラザル場合トガアル)。

問題

宿 1番だけ

1. 同ジ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

2. 三角形ノ頂點ヲ通リ對邊ニ平行ナル直線ヲ引イテ23頁定理e, f (三角形ノ一外角ハ其內對角ノ和ニ等シイ,從テ三角形ノ內角ノ和ハ2R∠ナリ)ヲ再證明セヨ。

3. 平行線ニ他ノ直線ガ交ハリテナス一組ノ同位角ノ二等分線ハ互ニ平行デアル。

4. 二等邊三角形ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行デアル。

5. 前問ノ逆ヲ證明セヨ。

6. △ABC ニ於テ ∠B, ∠C ノ二等分線ノ交點 O ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト AB, AC トノ交點ヲ D, E トスレバ

$$DE = DB + EC$$

【注意】 ∠B, ∠C ノ二等分線ノ代ハリニ B, C ニ於ケル外角ノ二等分線或ハ ∠B ノ二等分線ト C ニ於ケル外角ノ二等分線トイフ樣ニ種々ノ場合ヲ自ラ考究スルノハ極メテ有益デアル。

18. 平行四邊形

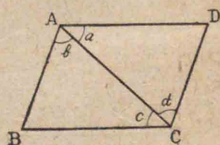
定義 二組ノ對邊ガ夫々平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**トイフ。

定理九 **平行四邊形ノ對邊ハ等シク,對角ハ等シイ。**

假設 ABCD ハ平行四邊形。

終結 AB＝DC, AD＝BC

∠A＝∠C, ∠B＝∠D



第 48 圖

證明 對角線 AC ガ邊トナス角ヲ圖ノ樣ニ ∠a, ∠b, ∠c, ∠d トスル。

△ABC ト △CDA トニ於テ

AB ∥ DC ナル故 ∠b＝∠d……………(定理八)

AD ∥ BC 〃 ∠a＝∠c

且ツ AC ハ兩三角形ニ共通デアル。

∴ △ABC≡△CDA……………………(定理二)

ヨリテ AB＝DC, BC＝AD, ∠B＝∠D

又 ∠a＋∠b＝∠c＋∠d ∴ ∠A＝∠C

系 平行四邊形ノ一對角線ハ原形ヲ合同ナル二ツノ三角形ニ分ケル。

問 1. 平行二直線ノ多クノ共通垂線ガ初ノ平行二直線ニ夾マレル部分ノ長サハ皆等シイ。

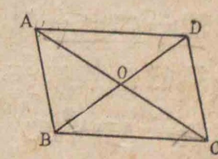
定義 平行二直線ノ共通垂線ガ二直線ニ夾マレル部分ノ長サヲコノ**平行二直線ノ距離**トイフ。

定理一〇 平行四邊形ノ對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。

假設 O ハ ▱ABCD* ノ對角線ノ交點

終結 AO＝OC, DO＝OB

證明 △AOD ト △COB トハ一邊ト其兩端ノ角夫々相等シ(何故カ)。



第 49 圖

∴ △AOD≡△COB

ヨリテ AO＝OC, DO＝OB

問 2. ▱ABCD ノ對角線ノ交點 O ヲトスル。O ヲ通ル直線ガ一組ノ對邊又ハ其延長ニ交ハル點ヲ E, F トスレバ EO＝OF

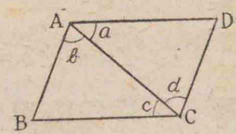
* ▱ABCD ハ平行四邊形 ABCD ヲ表ハス。

定理一一 二組ノ對邊ガ夫々等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル。

假設 AB＝DC, AD＝BC

終結 ABCD ハ平行四邊形

證明 對角線 AC ガ邊トナス角ヲ圖ノ樣ニ $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d$ トスル。



第 50 圖

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (何故カ)

デアルカラ $\angle b = \angle d, \quad \angle c = \angle a$

トコロガ $\angle a, \angle c$ ハ二直線 AD, BC ニ AC ガ交ハッテ出來ル錯角デアル。ソノ錯角ガ等シイカラ

AD∥BC………………(定理七)

同樣ニ AB∥DC

故ニ定義ニヨッテ ABCD ハ平行四邊形デアル。

定理一二 一組ノ對邊ガ等シクシテ且平行ナル四邊形ハ平行四邊形デアル。

假設 AD $\overset{*}{\underline{\parallel}}$ BC

終結 ABCD ハ平行四邊形。

證明 前定理ト同樣ニシテ證明スルコトヲ得。

定理一三 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スル四邊形ハ平行四邊形デアル。

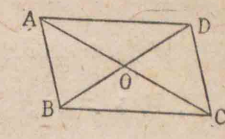
假設 O ハ四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ニシテ

* $\underline{\parallel}$ ハ等シクシテ且平行ナルコトヲ示ス。

AO＝OC, DO＝OB

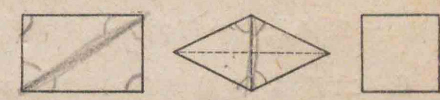
終結 ABCD ハ平行四邊形

證明 △AOD ト △COB トノ合同ヲ證明シ,前定理ヲ利用シテ證明スルコトヲ得。



第 51 圖

定義 四ツ角ガ皆等シイ四邊形ヲ**矩形**トイヒ,四ツノ邊ガ皆等シイ四邊形ヲ**菱形**トイフ。正方形ハ矩形ニシテ且菱形デアル。


第 52 圖

問3. 菱形ハ平行四邊形デアルコトヲ證明セヨ。矩形モ亦平行四邊形ナルコトヲ證明シナサイ。

問題

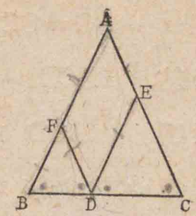
1. 平行四邊形ノ邊,角又ハ對角線ニツイテ知ッテキルコトヲ述ベナサイ。

2. 四邊形ノ邊,角又ハ對角線ニツイテドレダケノコトヲ知レバ,コノ四邊形ハ平行四邊形ナリト斷言スルコトガ出來ルカ。

◎3. 菱形ノ對角線ハ直交シ且菱形ノ角ヲ二等分スル。

◎4. 矩形ノ對角線ハ等シイ。

5. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ點 D カラ BA, CA ニ平行ニ引イタ直線ガ夫々 AC, AB ニ交ハル點ヲ夫々 E, F トスル。DE+DF ハ D ノ位置ニ拘ハラズ一定ナリ。



第 53 圖

手引 問題ニ誤ガナケレバ D ハ BC 上何處ニアッテモ DE+DF ハ或一定ノ長サニ等シイ。D ガ B ニ重ナルトキヲ考ヘテ一定ノ長サハ何デアルカヲ考ヘヨ。

6. 二邊ト一對角線トヲ知ッテ平行四邊形ヲ作レ。

7. 二ツノ對角線ガ夫々定線分 a, b ニ等シク,ソノナス角ガ定角 c ニ等シイ平行四邊形ヲ作リナサイ。

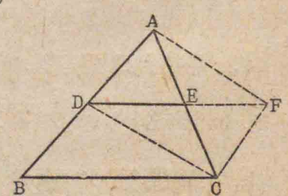
験

19. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分

定理一四　三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行ニシテ,且ツ其半分ニ等シイ。

假設 D, E ハ夫々 AB, AC ノ中點

終結 $DE ⫫ \frac{1}{2}BC$



第 54 圖

證明 DE ノ延長上ニ DE ニ等シク EF ヲ取ル。四邊形 ADCF ハ,ソノ對角線 AC, DF ガ互ニ他ヲ二等分スルカラ平行四邊形デアル(定理一三)。

∴ FC ⫫ AD………………(定理九)

從テ　FC ⫫ DB

故ニ DBCF ハ平行四邊形デアル(定理一二)。

ヨリテ　DF ⫫ BC

トコロガ DE ハ DF ノ半分デアルカラ DE ハ BC ニ平行デアッテ且其半分ニ等シイ。

系　三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ他ノ邊ニ平行ナル直線ハ殘リノ邊ノ中點ヲ通ル。

手引 歸謬法ヲ用ヒヨ。

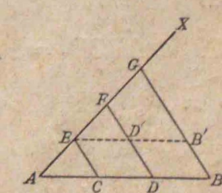
問 1. △ABC ノ各邊ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスル。D ト E, E ト F, F ト D トヲ結付ケルト原三角形ハ四ツノ合同ナル三角形ニ分ケラレル。

定義 一組ノ對邊ガ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,平行ナル一組ノ對邊ヲ何レモ**底邊**トイフ。

問 2. ABCD ハ AD ト BC トガ底邊ナル梯形デアル。AB ノ中點 E ヲ通リ AD ニ平行ナル直線ト DC トノ交點ヲ F トスレバ F ハ DC ノ中點ニシテ EF ハ兩底ノ和ノ半分ニ等シ。

作圖題六　定線分ヲ三等分セヨ。

題意 定線分 AB ヲ三等分スルコト。



第 55 圖

作圖 A ニ於テ AB ニ交ハル直線 AX ヲ引キ, AX 上ニ於テ AE, EF, FG ヲ等シクトリ G, B ヲ結ブ。E, F ヲ通リ GB ニ平行ナル直線ヲ畫キ AB ト交ハル點ヲ夫々 C, D トスル。

C, D ハ AB ノ三等分點デアル。

證明　$\triangle AFD$ ニ於テ EC ハ AF ノ中點ヲ通リ FD ニ平行ナ直線デアルカラ C ハ AD ノ中點デアル。

即　$AC = CD$

次ニ E ヲ通リ CB ニ平行ナ直線ト FD トノ交點ヲ D' トシ, GB トノ交點ヲ B' トスレバ前ト同様ニシテ

$$ED' = D'B'$$

トコロガ $ECDD'$ 及 $D'DBB'$ ハ何レモ平行四邊形デアルカラ　$ED' = CD,\quad D'B' = DB$

$\therefore\ CD = DB$

ヨリテ C, D ハ AB ヲ三等分スル點デアル。

問 3.　定線分ヲ五等分セヨ。

問　　題

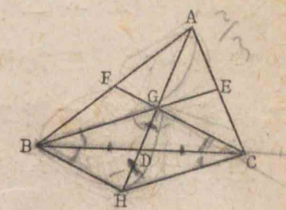
1. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付ケテ出來ル四邊形ハ平行四邊形デアル。

手引　一對角線ヲ引イテ考ヘヨ。

2. $\square ABCD$ ニ於テ AB ノ中點ヲ E トシ, CD ノ中點ヲ F トスル。ED, BF ハ AC ヲ三等分スル。

3. 線分 AB ノ中點 C カラ他ノ直線 XY ニ下シタ垂線ノ長サハ A, B カラ XY ニ下シタ垂線ノ長サノ和又ハ差ノ半分ニ等シイ。

4. $\triangle ABC$ ノ中線 BE, CF ノ交點ヲ G トスル。B ヲ通リ, FC ニ平行ナ直線ト AG ノ延長トノ交點ヲ H トスレバ $AG = GH$ ニシテ且 GBHC ハ平行四邊形デアル。



第 56 圖

5. 前問ヲ利用シテ三角形ノ三中線ハ一點ニ會スルコト及コノ點ト各頂點トノ距離ハ其頂點カラ出ル中線ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイコトヲ證明シナサイ。

【注意】　コノ點ヲ初ノ三角形ノ**重心**トイフ。

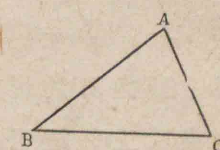
20. 三角形ノ邊ト角トノ關係

定理一五　三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大ナリ。

題意　$\triangle ABC$ ニ於テハ

$$AB + AC > BC > AB - AC$$

但 $AB \geqq AC$* トスル。



第 57 圖

證明　線分 BC ハ二點 B, C 間ノ最短通路デアルカラ

$$AB + AC > BC \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同様ニ　$AC + BC > AB \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(2)ノ兩邊カラ AC ヲ減ズレバ

$$BC > AB - AC \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

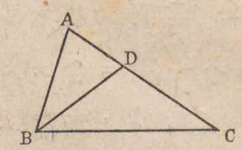
* AB ガ AC ヨリ大キイカ又ハ AB ガ AC ニ等シイコトヲ表ハス。

(1)ト(3)トヨリ　$AB+AC>BC>AB-AC$

問 任意ノ點 O ヲ △ABC ノ三頂點ニ結ブ線分ノ和 $OA+OB+OC$ ハ △ABC ノ周圍ノ半分ヨリ大キイ。

定理一六　三角形ノ二角ガ等シクナケレバ大角ニ對スル邊ハ小角ニ對スル邊ヨリ大キイ。

題意 △ABC ニ於テ $\angle B>\angle C$ ナラバ $AC>AB$



第 58 圖

證明 大角 ABC ノ內ニ小角 C ニ等シク ∠CBD ヲトレバ BD ハ BC ト BA トノ間ニアルカラ BD ト AC トノ交點 D ハ A ト C トノ間ニアル。

$\therefore \quad AC=AD+DC$

ソウシテ　$DB=DC$ ……………………(定理四)

$\therefore \quad AC=AD+DC=AD+DB>AB$

系　直角三角形デハ斜邊ハ最大邊デアル。

【注意】 上ノ證明中デ $AC=AD+DC$ ハ圖ヲ一見スレバ明ラカナ樣デアルガ其ハ D ガ A ト C トノ間ニアルコトヲ直觀的ニ承認スルカラデアル。モシ D ガ CA ノ延長上ニアレバ $AC=AD\sim DC$* ニナル。

定理一七　三角形ノ二邊ガ等シクナケレバ大邊ニ對スル角ハ小邊ニ對スル角ヨリ大キイ。

* $AD\sim DC$ ハ AD ト DC トノ差ヲ表ハス。卽 $AD\geqq DC$ ナラバ $AD-DC$ ヲ, $AD<DC$ ナラバ $DC-AD$ ヲ表ハスノデアル。

假設 △ABC ニ於テ $AB<AC$

終結 $\angle C<\angle B$

證明 モシ $\angle C>\angle B$ ナリトスレバ前定理ニヨリ $AB>AC$ ニナル。之ハ假設ニ矛盾スル。故ニ ∠C ハ ∠B ヨリ大キクナイ。

モシ又 $\angle C=\angle B$ ナリトスレバ定理四ニヨツテ $AB=AC$ トナリ之モ亦假設ニ矛盾スル。

故ニ ∠C ハ ∠B ニ等シクナイ。

∠C ハ ∠B ヨリ小サクモナク,等シクモナイカラ

$\angle C<\angle B$

問　題

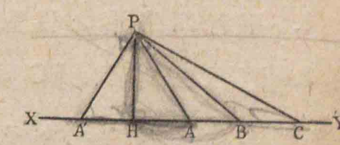
1. 直線 XY ノ外ニアル點 P カラ XY ニ垂線 PH, 斜線 PA′, PA, PB, PC ヲ引ク。

$HA'=HA<HB<HC$

デアルナラバ

$PA'=PA<PB<PC$

ナルコトヲ證明セヨ。



第 59 圖

2. 二等邊三角形ノ底邊上ノ點ト頂點トヲ結ブ線分ハ等邊ヨリ大ナラズ。

3. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トスル。モシ $AB>AC$ ナラバ ∠ADB ハ鈍角デアル。

4. $\triangle ABC$ ニ於テ BC ノ中點ヲ D トスル。

$AB+AC>2AD$ ヲ證明セヨ。

手引 AD ヲ二倍ニ延長スルカ又ハ AC ノ中點トDトヲ結付ケテ考ヘヨ。

5. 前問ニ於テ $AB>AC$ ナラバ $\angle DAB$ ハ $\angle DAC$ ヨリ小サイ。

6. 三角形ノ三中線ノ和ハ周圍ヨリ小ニシテ,周圍ノ $\frac{3}{4}$ ヨリ大キイ。

手引 一半ハ前々問ヲ用ヒ,他ノ一半ニハ51頁問題5ヲ利用シナサイ。

7. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ對角線ノ和ノ半分ヨリ小サイ。

雜題第二

1. 平行四邊形ノ相隣レル二角ハ互ニ補角ヲナス。

2. 直角三角形 ABC ニ於テ直角ノ頂點 A ヨリ BC ニ下セル垂線ノ足ヲ D トスレバ $\angle BAD=\angle C$, $\angle DAC=\angle B$

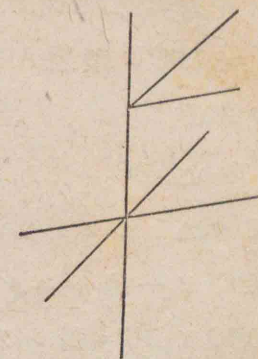
3. AD, BC ガ兩底邊デアル梯形 ABCD ニ於テ

$\angle B=\angle C$ ナラバ $AB=DC$

【注意】コノ様ナ梯形ヲ**等脚梯形**トイフ。

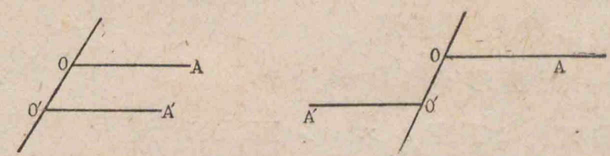
4. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ點 D カラ AB, AC ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 E, F トスル。D ノ位置ニ拘ハラズ $DE+DF$ ハ一定デアル。

5. 二邊ガ夫々平行ナル二ツノ角ハ相等シイカ又ハ補角デアル。



第 60 圖

【注意】二ツノ平行ナル半直線ガ各ノ一端ヲ通ル直線ノ同ジ側ニアレバ同方向,異ナル側ニアレバ反對方向トイフコトニスレバ一角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々同方向ナルカ又ハ反對方向ナルトキハコノ二角ハ等シク,一組ハ同方向,他ノ一組ガ反對方向ナラバコノ二角ハ互ニ補角ヲナスノデアル。



第 61 圖

6. 次ノ性質ヲ有スル點ハ無數ニアルガ是等ノ無數ノ點ハ亂雜ニ散バツテヰルノデハナク各一ツノ直線上ニアル。ドンナ直線上ニアルカ。

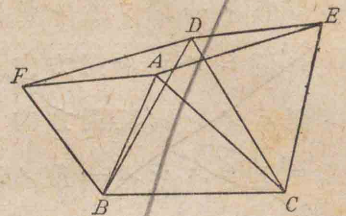
(1) 二定點 A,B カラ等距離ニアル點。

(2) $\angle XOY$ ノ二邊カラ等距離ニアツテ且 $\angle XOY$ ノ內ニアル點。

(3) 平行二直線カラ等距離ニアル點。

(4) △ABC ノ頂點 A ヲ對邊 BC 上ノ任意ノ點ニ結ブ線分ノ中點。

7. △ABC ニ於テ, AB, AC ヲ一邊トスル正三角形 FAB, EAC ヲ △ABC ノ外方ニ畫キ, 又 BC ヲ一邊トスル正三角形 DBC ヲ BC ニ對シテ △ABC ト同ジ側ニ畫クトキハ



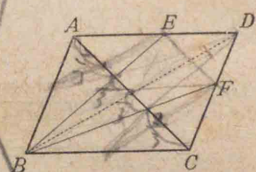
第 62 圖

(1) BE = CF

(2) △FBD ≡ △ABC ≡ △EDC

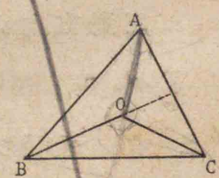
(3) DFAE ハ平行四邊形

8. 平行四邊形 ABCD ニ於テ DA, DC ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ BE, BF ハ對角線 AC ヲ三等分スル。



第 63 圖

9. O ヲ △ABC ノ內ニアル任意ノ點トスレバ



第 64 圖

$$AB + AC > OB + OC$$

$$\angle BOC > \angle BAC$$

$$BC + CA + AB > OA + OB + OC$$

10. A, B ハ直線 XY ノ同ジ側ニアル點デアル。XY ニツイテノ A ノ對稱點ヲ A′ トシ A′B ト XY トノ交點ヲ P トスル。XY 上ニテ P ト異ナル任意ノ點ヲ Q トスレバ

$$AP + PB < AQ + QB$$

11. △ABC ニ於テ A ニ於ケル外角ノ二等分線上ノ點ヲ D トスレバ

$$AB + AC < DB + DC$$

12. 二邊ト第三邊ニ至ル中線トヲ知リテ三角形ヲ畫キナサイ。

13. 定三角形 ABC ニ於テ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AB, AC トノ交點ヲ夫々 D, E トス。DB + EC = DE ナラシメントス。DE ノ作圖法如何。

手引 第44頁問題6參照。

14. 四邊ガ夫々定線分 a, b, c, d ニ等シイ梯形ヲ作レ。

手引 求ムル梯形 ABCD (AD ト BC トガ底邊) ヲ作リ得タトシ, D ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ BC トノ交點ヲ E トスル。先ヅ △DEC ノ作圖法ヲ考ヘヨ。

15. △ABC ノ邊 BC 上ニ一點 D ヲ求メ, D ヲ通リ AB, AC ニ平行ナル直線ガ AC, AB ニ交ハル點ヲ夫々 E, F トスル。DE+DF ガ與ヘラレタル線分 a ニ等シクナル樣ニスルニハ D ノ位置ヲ如何ニシテ定ムベキカ。

手引 第48頁問題5參照。

第三編

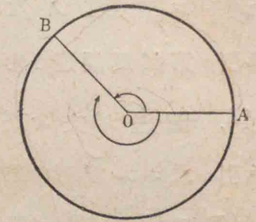
圓

21. 弧,弦及中心角ノ關係

圓及圓周ニ關スル性質ヲ學ブ爲ニ先ヅ第5—6頁第3節ヲ復習シナサイ。

【注意】圓周ヲ略シテ圓トイフコトガアル。

圓周上ノ二點ヲA, Bトスル。コノ圓ノ弧ノ中デ兩端ガA, BデアルノガニツアルL。コノ様ナ二ツノ**弧ハ互ニ共軛デアル**トイフ。二ツノ共軛弧ガ等シケレバ各ハ半圓周デアル。



第 65 圖

定義 圓ノ二ツノ半徑ノナス角ヲ**中心角**トイヒ,中心角ハ其二邊ノ間ニ夾マレル弧ノ上ニ立ツトイフ。

$\overset{\frown}{AB}$ノ上ニ立ツ中心角ト$\overset{\frown}{AB}$ノ共軛弧ノ上ニ立ツ**中心角トハ互ニ共軛デアル**トイフ。二ツノ共軛角ガ等シケレバ各ハ平角デアル。

定義 半圓周ヨリ小サイ弧ヲ**劣弧**,大キイ弧ヲ**優弧**トイヒ,平角ヨリ小サイ角ヲ**劣角**,平角ヨリ大

キク$4\angle R$ヨリ小サイ角ヲ**優角**トイフ。

劣弧ノ上ニ立ツ中心角ハ劣角,優弧ノ上ニ立ツ中心角ハ優角デアル。

單ニ弧,角ト稱ネルトキニハ通常劣弧,劣角ヲ指スノデアル。

厚紙二枚ヲ重ネ其上ノ一枚ニ圓周ヲ畫キ重ネタママデ切拔キ中心ニ針ヲ通シテ二圓ノ中心ハ常ニ重ナル様ニスル。カクシテ一枚ヲ廻轉スルト如何ホド廻轉シテモ二ツノ圓周ハ常ニ全ク重ナリ合フ。

モシ二圓ノ各ニ相等シイ弧ヲ考ヘ,其兩端ヲ重ネルト是等ノ弧ニ對スル弦モ,中心角モ夫々重ナル。二圓ノ各ニ等シイ弦ヲ考ヘテモ,中心角ヲ考ヘテモ同様デアル。

コノコトハ次ノ定理ガ成立ツコトヲ示スモノデアリ,上ニ述ベタコトハ其證明デアルト考ヘルコトガ出來ル。

定理一 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ

1°. **相等シイ弧ニ對スル弦,中心角ハ夫々等シイ。**

2°. **相等シイ弦ニ對スル弧,中心角ハ夫々等シイ。**

3°. **相等シイ中心角ニ對スル弧,弦ハ夫々等シイ。**

上ノ定理ニヨツテ例ヘバ相等シイ圓又ハ同ジ圓ニ於テ二ツノ弦ガ等シイコトヲ證明スルニハ是等ノ弦ニ對スル弧又ハ中心角ガ等シイコトヲ證明スレバヨロシイノデアル。

22. 弦ニ關スル定理

定理二 **圓ノ中心(O)ヲ通ツテ弦(AB)ニ垂直ナル直線(OC)ハコノ弦及之ニ對スル弧(ADB, AEB)ヲ二等分スル。***

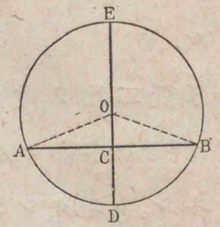
證明 $OC \perp AB$ デアルカラ $\triangle AOC$, $\triangle BOC$ ハ共ニ直角三角形デアツテ

$OA = OB$, OC ハ共通

$\therefore \ \triangle AOC \equiv \triangle BOC$

從テ $AC = CB$. $\angle AOC = \angle BOC$

$\therefore \ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$…………(定理一)



第 66 圖

又 $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{BE}$ ハ夫々半圓周 DAE, DBE カラ等シイ弧 AD, BD ヲ減ジタ殘デアルカラ等シイ。

系 **弦ノ垂直二等分線ハ中心ヲ通ル。**

問1. 圓ノ中心トコノ圓ノ弦ノ中點トヲ結ブ線分ハコノ弦ニ垂直デアル。

問2. 與ヘラレタル弧ヲ二等分セヨ。

定義 弧ノ二等分點ヲコノ弧ノ**中點**トイフ。

定理三 **同圓又ハ等圓ニ於テ中心(O, O′)ヨリ等距離ニアル弦(AB, A′B′)ハ相等シ。**

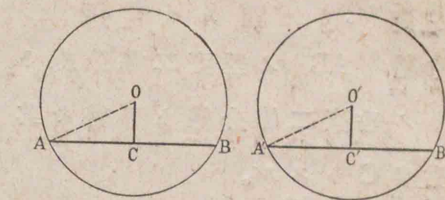
證明 O ヨリ AB ニ下セル垂線ノ足ヲ C, O′ ヨリ A′B′ ニ下セル垂線ノ足ヲ C′ トス。

* 定理又ハ作圖題ノ本文中ニ圖形ノ要部ノ名稱ヲ記入シテ題意,假設,終結等ヲ特記スルコトヲ略ス。

$\triangle OAC$ ト $\triangle O'A'C'$ トニ於テ

$OA = O'A'$

$\angle C = \angle C' = R\angle$



第 67 圖

又 AB, A′B′ ハ中心ヨリ等距離ニアルガ故ニ $OC = O'C'$

$\therefore \ \triangle OAC \equiv \triangle O'A'C'$　　$\therefore \ AC = A'C'$

然ルニ前定理ニヨリ　$AC = \dfrac{AB}{2}$　$A'C' = \dfrac{A'B'}{2}$.

$\therefore \ AB = A'B'$

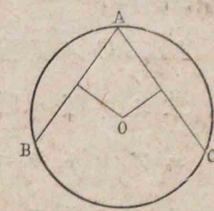
系 **同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ等弦ハ中心ヨリ等距離ニアル。**

問3. 二等圓ガ其中心線*ニ平行ナル直線カラ切取ル弦ハ等シイ。

作圖題一 **三定點(A, B, C)ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。**

解析** A, B, C ヲ通ル圓周ヲ畫キ得タトシテ其中心ヲ O トスル。AB, AC ハ圓 O ノ弦デアルカラ各ノ垂直二等分線ハ中心 O ヲ通ル。(定理二系)

ソコデ次ノ作圖法ヲ推定スルコト



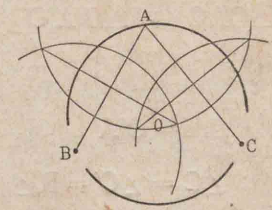
第 68 圖

* 二圓ノ中心ヲ通ル直線ヲコノ二圓ノ**中心線**トイフ。

** 求メル圖ヲ作リ得タトシテ,之ト既知ノモノトノ關係ヲ調査スルコトデアル。

ガ出來ル。

作圖 AB ノ垂直二等分線ト AC ノ垂直二等分線トヲ畫キ其交點ヲ O トスル。



第 69 圖

O ヲ中心トシ, OA ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫ケバ,コノ圓周ガ求メルモノデアル。

證明 O ハ AB ノ垂直二等分線上ニアルカラ OA＝OB (29頁問1)即點 B ト中心トノ距離ハ半徑 OA ニ等シイ。

故ニ B ハ圓周上ニアル。

同樣ニ C モ亦圓周上ニアル。

故ニ圓周 O ハ A, B, C ヲ通ル。

【注意 1】 解析ニヨツテ A, B, C ヲ通ル圓周ノ中心ハ AB, AC ノ各ノ垂直二等分線上ニナケレバナラヌ。故ニ求メル圓ノ中心ハ是等ノ垂直二等分線ノ共有點ノ外ニハナイ。A, B, C ガ同一直線上ニナケレバ AB, AC ノ垂直二等分線ハ交ハルカラコノ場合ニハ求メル圓ハ唯一ツアル。又 A, B, C ガ同一直線上ニアルトキニハ AB, AC ノ垂直二等分線ハ平行ニナルカラコノ場合ニハ題意ニ適スル圓周ハナイ。

【注意 2】 上ノ注意ニヨツテ直線ト圓周トハ三點以上デハ出會ハナイコトガワカル。又三點ヲ通ル圓周モ唯一ツデアルカラ二ツノ圓周モ三點以上デハ出

會ハナイ。

問4. 運動場ニ大キナ圓ガ畫カレテアル。コノ中心ノ位置ヲ求メルニハドウスベキカ。

定義 多角形ノ總テノ頂點ガ同一圓周上ニアルトキハ,コノ圓ヲコノ多角形ノ**外接圓**ト稱シ,多角形ハコノ圓ニ**內接ス**トイフ。

定義 三角形ノ外接圓ノ中心ヲ其三角形ノ**外心**トイフ。

作圖題一ハ △ABC ノ外接圓ノ作圖法ヲ示スモノデアリ, O ハ △ABC ノ外心デアル。

問題

1. 圓 O ニ於テ $\widehat{AB}$ ノ中點ヲ C トスル。OC ハ弦 AB ヲ垂直ニ二等分スル。

2. 二ツノ同心圓ガ一直線カラ切取ル弦ヲ夫々 AB, CD トスレバ AC＝DB

3. 圓 O ニ於テ定直線 XY ニ平行ナル多クノ弦ノ中點ハ皆 XY ニ垂直ナル直徑上ニアル。

4. 圓 O ニ於テ相等シイ多クノ弦ノ中點ハ皆同一圓周上ニアル。

5. 圓 O ニ於テ相等シイ二ツノ弦 AB, CD 又ハ其延長ノ交點ヲ P トスレバ PO ハ AB, CD ノナス角ノ一ツヲ二

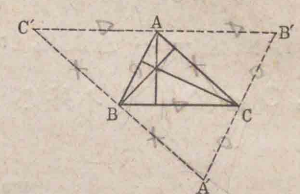
等分スル。

6. 圓內ノ定點ヲ通ル弦ノ中デコノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナルモノガ最小デアル。

7. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ一點ニ會スルコトヲ證明セヨ。

8. 四邊形 ABCD ノ三邊 AB,BC,CD ノ垂直二等分線ガ一點ニ會スルナラバコノ四邊形ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

9. 三角形ノ各頂點カラ對邊ニ下セル垂線ハ一點ニ會スル。



第 70 圖

手引　△ABC ノ各頂點ヲ通リ對邊ニ平行ナル直線デ出來ル三角形ヲ A′B′C′ トスル。△ABC ノ各頂點ヨリ對邊ニ至ル垂線ハ △A′B′C′ ノ何ニ當ルカヲ考ヘヨ。

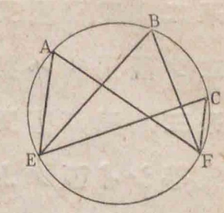
【注意】三角形ノ各頂點カラ對邊ニ下セル三垂線ノ會スル點ヲコノ三角形ノ**垂心**トイフ。

10. 垂心ト外心トガ一致スル三角形ハ正三角形デアル。

23. 圓周角

定義　圓周上ノ一點ヲ通ル二ツノ弦ノナス角ヲ**圓周角**トイフ。

圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マレル**弧ノ上ニ立ツ**トイフ。例ヘバ圖ニ於テ ∠EAF, ∠EBF, ∠ECF ハ皆 $\overset{\frown}{EF}$ ノ上ニ立ツ圓周角デアル。



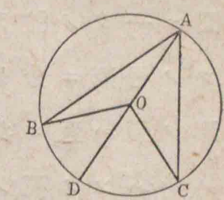
第 71 圖

定理四　中心角 (∠BOC) ト圓周角 (∠BAC) トガ同ジ弧 ($\overset{\frown}{BC}$) ノ上ニ立ツナラバ中心角ハ圓周角ノ二倍デアル。

證明　圖ノ樣ニ中心 O ガ圓周角 BAC ノ內ニアル場合ヲ考ヘル。

A ヲ通ル直徑ヲ AD トスル。

△OAB ハ二等邊三角形デアルカラ ∠BAO ヲ a トスレバ ∠ABO モ亦 a デアル。



第 72 圖

∠BOD ハ △OAB ノ外角デアルカラ。

$$\angle BOD = \angle BAO + \angle ABO = a + a = 2a$$

同樣ニ ∠OAC ヲ b トスレバ

$$\angle DOC = \angle OAC + \angle OCA = b + b = 2b$$

$$\therefore\ \angle BOC = \angle BOD + \angle DOC = 2a + 2b = 2(a+b)$$

$$= 2(\angle BAO + \angle OAC) = 2\angle BAC$$

問 1.　中心 O ガ ∠BAC ノ邊上ニアルトキ, ∠BAC ノ外ニアルトキノ證明法如何。

系一　同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ等シイ。

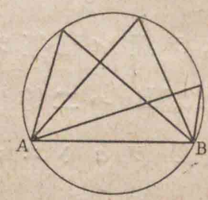
系二 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。

系三 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ相等シイ圓周角ハ相等シイ弧ノ上ニ立ツ。

系四 半圓周ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デアル。

定義 弧ト其兩端ヲ結ブ弦トデ圍マレル平面形ヲ**弓形**トイヒ,弓形ノ弧上ノ點ヲ弦ノ兩端ニ結ブ二直線ノナス角ヲ**弓形ノ角**トイフ。

圓ニ一ツノ弦ヲ引ケバ,ソノ圓ハ二ツノ弓形ニ分ケラレル。是等ノ弓形ノ弧ハ互ニ共軛デアルカラ弓形ノ角ハソノ弧ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角デアル。



第 73 圖

半圓ハ弓形ノ特別ノ場合デアル。

問2. 同ジ弓形ノ角ハ皆等シイ。

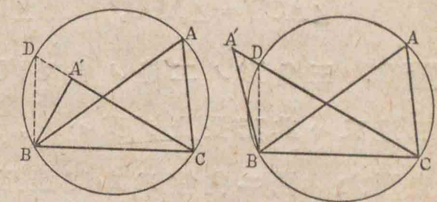
問3. 半圓ノ角ハ直角デアル。

問4. △ABC ノ外接圓ノ $\overset{\frown}{BAC}$ ノ共軛弧ノ中點ヲ D トスレバ, AD ハ ∠A ヲ二等分スル。

問5. D ハ △ABC ノ外接圓周上ニアル點デアル。モシ DA ガ ∠BDC ヲ二等分スルナラバ △ABC ハ二等邊三角形ナルコトヲ證明セヨ。

定理五 頂角ノ等シイ二ツノ三角形(△ABC, △A′BC)ガ共通底邊(BC)ノ同ジ側ニ立ツナラバ二ツノ頂點ト底邊ノ兩端(A,A′,B,C)トハ同一圓周上ニアル。

證明 △ABC ノ外接圓ヲ畫ク。



第 74 圖

モシ A′ ガ弓形 BAC ノ内ニアルモノトスレバ CA′ ノ延長ト $\overset{\frown}{BAC}$ トノ交點ヲ D トスル。∠BA′C ハ △DA′B ノ外角デ, ∠BDC ハ其内對角デアルカラ

$$\angle BA'C > \angle BDC = \angle BAC$$

之ハ頂角ガ等シイトイフ假設ニ反スル。

故ニ A′ ハ弓形 BAC ノ内ニハナイ。

又 A′ ガ弓形 BAC ノ外ニアリトスレバ CA′ ト $\overset{\frown}{BAC}$ トノ交點ヲ D トスレバ前ト同様ニシテ

$$\angle BA'C < \angle BDC = \angle BAC$$

之モ假設ニ反スルカラ A′ ハ弓形 BAC ノ外ニハナイ。

A′ ハ弓形 BAC ノ内ニモナク,外ニモナイカラ $\overset{\frown}{BAC}$ 上ニアル。

ヨツテ A,A,′B,C ハ同一圓周上ニアル。

系 直角三角形ノ斜邊ヲ直徑トスル圓周ハ直角ノ頂點ヲ通ル。

問6. 定理五ノ證明デ A′ ガ弓形ノ外ニアル場合ニ CA′

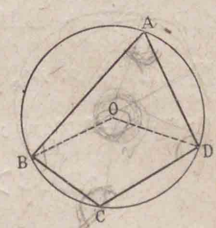
ガ $\overparen{BAC}$ ト交ハラヌトキニハドウスレバヨイカ。

問7. 四邊形 ABCD ニ於テ $\angle BAC = \angle BDC$ ナラバ

$\angle ACB = \angle ADB, \qquad \angle DAC = \angle DBC$

問8. 三角形ノ二邊ノ各ヲ直徑トスル二ツノ圓周ハ第三邊又ハ其延長上デ交ハル。

定理六 圓ニ内接スル四邊形(ABCD)ノ相對スル角ハ互ニ補角デアル。



第 75 圖

證明 圓ノ中心ヲOトスル。

$\angle A = \frac{1}{2}\angle BOD$ ………(定理四)

$\angle C = \frac{1}{2}$($\angle BOD$ ノ共軛角)

$\therefore$ $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}$($\angle BOD +$ $\angle BOD$ ノ共軛角)

$= \frac{1}{2}(4R\angle) = 2R\angle$

又 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4R\angle \qquad \angle A + \angle C = 2R\angle$

$\therefore$ $\angle B + \angle D = 2R\angle$

系一 圓ニ内接スル四邊形ノ一外角ハ其内對角*ニ等シイ。

系二 四邊形ノ一組ノ對角ガ補角デアルナラバ,コノ四邊形ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。一外角ガ内對角ニ等シイトキモ亦同樣デアル。

* 外角ノ接角デアル内角ノ對角ヲコノ外角ノ内對角トイフ。

手引 四邊形 ABCD ニ於テ $\angle A + \angle C = 2R\angle$ トスル。△BCD ノ外接圓ヲ畫キ $\overparen{BCD}$ ノ共軛弧ノ上ニ點 A′ ヲトリ A,A′,B,D ガ同一圓周上ニアルコトヲ證明セヨ。

問9. 矩形ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

問10. 圓ニ内接シ得ル平行四邊形ハ矩形デアル。

問 題

1. 正方形 ABCD ノ外接圓ノ弧 AD 上ノ點ヲ E トスレバ $\angle AEB = \angle DEC$

2. 定圓ニ於テ定點ヲ通ル弦ノ中點ハ皆同一圓周上ニアル。

3. 圓 O ノ直徑 AB ノ一端 A ヲ通ル弦ヲ AC トスル。BC ハ中心 O ト AC トノ距離ノ二倍ニ等シイ。

4. 二圓ノ交點ヲ A, B トスル。B ヲ通ル二直線 PBQ, RBS ト二圓周トノ交點ヲ P, Q, R, S トスレバ

$\angle PAQ = \angle RAS$

5. 圓 O ト圓 O′ トノ交點ヲ A, B トスル。A ヲ通ル直線 CAD ト B ヲ通ル直線 EBF トガ圓 O ニ交ハル點ヲ C,E 圓 O′ ニ交ハル點ヲ D, F トスレバ CE ∥ DF。

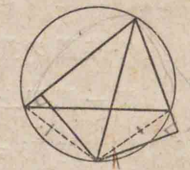
6. 與ヘラレタ三角形ト底邊ヲ共有シ,且之ト等シイ頂角ヲモツ二等邊三角形ヲ作レ。

7. △ABC ノ外接圓周ト ∠A ノ二等分線トノ交點ヲ D トシ, D ヨリ AB, AC ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 E,F トス

レバ

$$AE = AF = \frac{1}{2}(AB + AC),$$

$$EB = CF = \frac{1}{2}(AB \sim AC)$$



手引 先ヅ△DBE≡△DCF ヲ證明セヨ。

第 76 圖

8. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スルトキ,對角線ノ交點ヲ通リ一邊ニ垂直ナル直線ハ,コノ邊ニ對スル邊ノ中點ヲ通ル。

9. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ點ヲ P トスレバ PA＝PB＋PC

10. △ABC ノ垂心ヲ H トシ, A, B, C ヨリ對邊ヘノ垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トスレバ

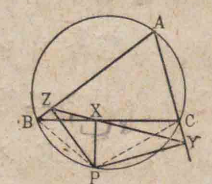
$$\angle ABH = \angle FDA = \angle ADE = \angle ACH$$

手引 例ヘバ ∠ABH＝∠FDA ナル爲ニハ F, B, D, H ガ同一圓周上ニナケレバナラヌ。

11. 前問ニ於テ AD 又ハ其延長ト △ABC ノ外接圓周トノ交點ヲ K トスレバ HD＝DK

12. △ABC ノ外接圓周上ノ點ヲ P トシ, P ヨリ三邊ニ下セル垂線ノ足ヲ夫々 X, Y, Z トスレバ X, Y, Z ハ同一直線上ニアル。

手引 圓ニ於テ ZX, XY ヲ結ビ ∠ZXB＝∠ZPB＝∠YPC＝∠YXC ヲ證明シナサイ。



第 77 圖

【注意】 コノ定理ヲ**しむそん定理**トイヒ,直線 XYZ ヲ P 點ニ關スル △ABC ノ**しむそん線**トイフ。

13. 前問ニ於テ PX 又ハ其延長ト △ABC ノ外接圓周トノ交點ヲ D トスレバ AD ハ P ニ關スル △ABC ノしむそん線ニ平行ナリ。

24. 直線ト圓トノ關係

圓周ト直線トハ (1) 全ク出會ハナイカ, (2) 唯一點デ出會フカ, (3) 二點デ出會フカデアツテ三ツ以上ノ點デハ出會ハナイ。(62頁注意2)

定義 圓周ト直線トガ唯一點デ出會フトキハ圓周ト直線トハ**切スル**トイヒ,出會フ點ヲ**切點**トイフ。又圓周ト直線トガ二點デ出會フトキハ**交ハル**トイヒ,出會フ點ヲ**交點**トイフ。

圓ニ切スル直線ヲ**切線**,交ハル直線ヲ**割線**トイフ。

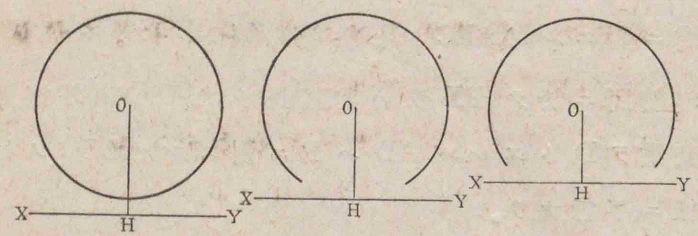
定理七 圓ノ中心(O)ト直線(XY)トノ距離(OH)ヲ h, 半徑ヲ r トスル。

1° **$h>r$ ナラバ直線ト圓トハ全ク出會ハナイ。**

2° **$h=r$ ナラバ直線ハ圓ニ切スル。**

3° **$h<r$ ナラバ直線ハ圓ニ交ハル。**

證明



第 78 圖

1° 點Oカラ XY ニ下シタ垂線ノ長サガrヨリ大キイカラ XY 上ノ總テノ點トOトノ距離ハ皆rヨリ大キイ。(53頁問題1)

故ニ XY 上ノ總テノ點ハ圓外ニアル。從ツテ XY ハ全ク圓周ニ出會ハナイ。

2° コノ場合ニハHハ圓周上ニアルガ前ト同ジ理由デ XY 上ニテHト異ナル點ハ皆圓外ニアル。

故ニ XY ハHデ圓ニ出會ツテキルダケデ其他ノ點デハ圓ニ出會ハナイ。ヨツテ XY ハAニ於テ圓Oニ切スル。

3° コノ場合ニハHハ圓內ニアル。XY 上ニテHノ兩側ニ HA, HB ヲ何レモ半徑ニ等シクトレバ

$$OA=OB>HA=r$$

ヨツテ A, B ハ共ニ圓ノ外ニアル。AH ハ圓外ノ點ト圓內ノ點トヲ結ブ線分デアルカラ圓周ニ出會フ。同様ニ BH モ亦圓周ニ出會フ。

故ニ XY ハ二ツノ點デ圓周ニ出會フ。卽 XY ハ圓ニ

交ハル。

系一　圓周上ノ點ヲ通リコノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ハコノ圓ノ切線デアル。

系二　切線ハ切點ヲ通ル半徑ニ垂直デアル。

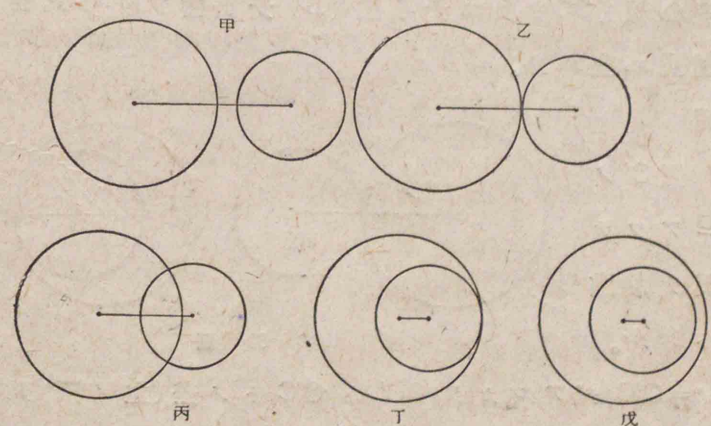
手引　モシ垂直デナケレバ上ノ3°ニ反スル。

問　與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テコノ圓ニ切スル直線ヲ引ケ。

25. 圓ト圓トノ關係

相異ナル二ツノ圓周ハ(1)全ク出會ハナイカ,(2)唯一點デ出會フカ又ハ(3)二點デ出會フノデアツテ三ツ以上ノ點デ出會フコトハナイ。(62頁注意2)

シカシ全ク出會ハナイトシテモ一方ガ全ク他ノ內ニ



第 79 圖

アツテ出會ハナイ場合ト,ドチラモ他ノ外ニアツテ出會

ハナイ場合トガアル。唯一點デ出會フトキモ同樣デアルカラ結局前頁ニ圖示セル五ツノ場合ガアル。

定義　二ツノ圓周ガ唯一點デ出會フトキハコノ二圓ハ**切スル**トイヒ,其出會フ點ヲ**切點**トイフ。又二ツノ圓周ガ二點デ出會フトキハコノ二圓ハ**交ハル**トイヒ其出會フ點ヲ**交點**トイフ。

二圓ガ何レモ他ノ外ニアツテ切スルトキ(前頁乙圖)ニハ,コノ二圓ハ**外切スル**トイヒ,一方ガ全ク他ノ内ニアツテ切スルトキ(前頁丁圖)ニハ,コノ二圓ハ**内切スル**トイフ。

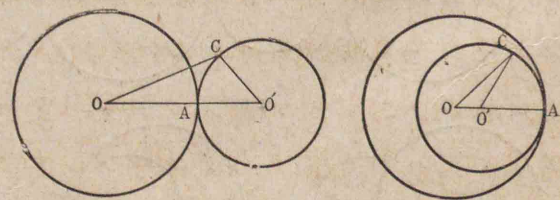
定理八　相異ナル二ツノ圓周(O,O′)ガ

1°　中心線(OO′)上ノ點(A)デ出會フナラバ,コノ二圓周ハ切シ

2°　中心線(OO′)上ニナイ點(B)デ出會フナラバコノ二圓周ハ交ハル。

證明

1°　圓O′ノ周上ニアツテAト異ナル點ヲCトスル。



第80圖

O′A＝O′C デアルカラ OO′ ト O′C トノ差(左ノ圖)又ハ和(右ノ圖)ハ OA ニ等シイ。

トコロガ △COO′ ニ於テ

$OO' \sim O'C < OC < OO' + O'C$　　∴ $OC \neq OA$

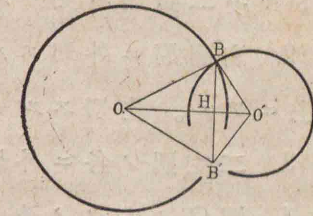
ヨツテCハ圓Oノ周上ニハナイ。

故ニ二圓周ハAデ出會フダケデ其他ノ點デハ出會ハナイ。故ニ二圓周ハ切スル。

2°　OO′ ニツイテBノ對稱點ヲB′トシ BB ト OO′ トノ交點ヲHトスル。

O ハ BB′ ノ垂直二等分線上ニアル。　∴ OB＝OB′

ヨリテB′ハ圓Oノ周上ニアル。



第81圖

同樣ニB′ハ圓O′ノ周上ニモアル。

故ニ二圓周ハB′デ出會フ。二圓 O,O′ ノ周ガ二點 B,B′ デ出會フカラコノ二圓周ハ交ハル。

系　二圓周ガ切スルナラバ切點ハ二圓ノ中心線上ニアル。又二圓周ガ交ハレバ交點ヲ結ブ線分ハ中心線ニヨツテ垂直ニ二等分セラレル。

上ニヨツテ二圓周ガ切スルナラバ其中心間ノ距離ハ半徑ノ和又ハ差ニ等シク,又交ハレバ半徑ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大デアル。更ニ二圓周ガ全ク出會ハナイナラバ半徑ノ和ヨリ大デアルカ差ヨリ小デアルコトガ明カデアル。

問　二圓周ガ切スルナラバ切點ニ於テ切線ヲ共有ス

ルコトヲ證明セヨ。

問題

1. 二圓ノ中心間ノ距離ガ半徑ノ和又ハ差ニ等シイトキハ二圓周ハ切シ,半徑ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大ナルトキハ二圓周ハ交ハル。

2. 定圓周ニ外切スル定半徑ノ圓ノ中心ハ皆同一圓周上ニアル。内切スルトキハ如何。

3. 二定圓ノ各ニ外切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ。

4. 圓Oノ多クノ弦 AB, CD, EF, GH 等ガ皆等シイナラバ是等ノ弦ハ同一ノ圓ニ切スルコトヲ證明セヨ。

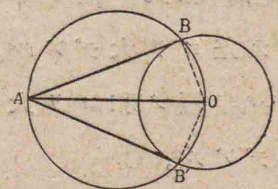
5. 相切スル二圓周ノ切點ヲ通ル直線ガ二圓周ノ各ト交ハル點ヲ,ソノ圓ノ中心ニ結ブ二直線ハ平行デアル。

6. 定直線ニ平行ナル樣ニ定圓ノ切線ヲ引ケ。

26. 切線ニ關スル定理及作圖

作圖題二　定圓 (O) 外ノ定點 (A) ヲ通リコノ圓ニ切線ヲ引ケ。

解析　求メル切線ヲ引キ得タトシテ其切點ヲBトスレバ定理七系二ニヨッテ $\angle ABO = R\angle$ デアル。故ニBハ AO ヲ直徑トスル圓周上ニアル。(定理五系)



第 82 圖

作圖　AO ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ,圓周Oトノ交點ヲ B, B′ トスル。直線 AB, AB′ ハ共ニ求メル切線デアル。

證明　$\angle ABO$ ハ半圓ノ角デアルカラ $R\angle$ デアル。故ニ定理七系一ニヨッテ AB ハ圓Oノ切線デアル。

同様ニ AB′ モ亦題意ニ適スル直線デアル。

【注意】圓外ノ點Aヲ通ル切線ハ上ノ樣ニ二ツアルガ,モシAガ圓周上ニアレバ唯一ツデアリ,Aガ圓内ニアレバAヲ通ル切線ハナイ。

前圖ニ於テ線分 AB ノ長サヲAカラ圓Oニ引イタ**切線ノ長サ**トイフ。

問 1. 圓外ノ點カラコノ圓ニ引イタ二ツノ切線ハ等シイ。又コノ點ト圓ノ中心トヲ結ブ線分ハ二切線ノナス角ヲ二等分スル。

定理九　圓 (O) ノ切線 (AB) ト其切點 (A) ヲ通ル弦 (AC) トノナス角ハ其角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角 ($\angle APC$) ニ等シイ。

證明　$\angle BAC < R\angle$ ナル場合

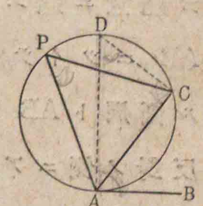
Aヲ通ル直徑ヲ AD トスル。

$\angle DAB = R\angle$

$\therefore\ \angle BAC = \angle DAC$ ノ餘角……(1)

又　$\angle ACD = R\angle$

$\therefore\ \angle ADC = \angle DAC$ ノ餘角……(2)



第 83 圖

(1),(2)ニヨリテ ∠BAC＝∠ADC＝∠APC

∠BAC＝R∠ ナル場合, ∠BAC＞R∠ ナル場合

コノ場合ハ諸子自ラ證明セヨ。

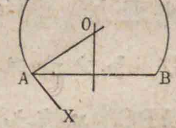
問2. △ABC ノ外接圓ノ A ニ於ケル切線ガ BC ニ平行ナラバ AB＝AC

作圖題三 定線分(AB)ヲ弦トシ定角(α)ヲ容ルル弓形ヲ作レ。

解析 求ムル弓形ハ AB ノ兩側ニ一ツヅツアルコトハ明カデアル。其一ツ ACB ヲ作リ得タリトシ,A ニ於ケル切線 AX ヲ引ケバ ∠BAX＝∠ACB＝∠α

ヨリテ次ノ作圖法ヲ推定スルコトガ出來ル。

作圖 ∠α ニ等シク ∠BAX ヲ作リ,A ニ於ケル AX ノ垂線ト, AB ノ垂直二等分線トノ交點ヲ O トスル。O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周ト AB トデ圍マレル弓形ノ中デ AB ニ對シテ AX ト反對ノ側ニアルノガ題意ニ適スル弓形デアル。



第 84 圖

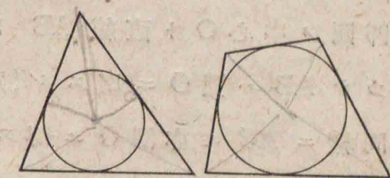
AB ニツイテ O ノ對稱點 O′ ヲ中心トシ O′A ヲ半徑トスル圓周ト AB トデ圍マレル弓形ノ中, AB ニ對シテ ACB ト反對ノ側ニアルノモ亦題意ニ適スル。

證明 略

【注意】 AB 自身ヲ弦トスルコトヲ要セズ, AB ニ等シイ長サヲ弦トシ ∠α ヲ容ルル弓形ヲ作ルノデアルナラバ次ノ作圖法ニヨル方簡單デアル。 ∠α ノ頂點ヲ X, 二邊ヲ XY, XZ トスル。XY 上デ AB ヨリ小サク XA′ ヲトリ, A′ ヲ中心トシ AB ヲ半徑トスル圓周ト XZ トノ交點ヲ B′ トスル。△XA′B′ ノ外接圓ヲ畫ケバ弓形 A′XB′ ハ條件ニ適スル。

27. 多角形ノ內切圓

定義 多角形ノ總テノ邊ガ皆同ジ圓ノ切線(切點ハ邊上ニアッテ邊ノ延長上ニハナイトキ)デアルナラバ多角形ハ圓ニ外切,圓ハ多角形ニ內切ストイヒ,コノ圓ヲ多角形ノ內切圓トイフ。


第 85 圖

三角形ノ內切圓ノ中心ヲコノ三角形ノ**內心**トイフ。

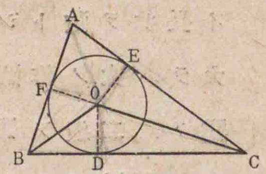
問1. 圓ニ外切スル多角形ノ各角ノ二等分線ハ一點ニ會スル。

問2. 圓ニ外切スル四邊形ノ一組ノ對邊ノ和ハ,他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シイ。

作圖題四 與ヘラレタル三角形ノ內切圓ヲ畫ケ。

解析 △ABC ノ內切圓ヲ畫キ得タトシテ其中心ヲ O トスレバ BO, CO ハ夫々 ∠B, ∠C ヲ二等分スル(77頁問1)。

ヨツテ次ノ作圖法ヲ推定スルコトガ出來ル。



第 86 圖

作圖 ∠B, ∠C ノ二等分線ヲ引キ其交點ヲ O トスル。O カラ BC ニ垂線ヲ下シ其足ヲ D トスレバ O ヲ中心トシ OD ヲ半徑トスル圓ガ所要ノ圓デアル。

證明 先ヅ BC ハ圓 O ノ切線ナルコト明カデアル。

次ニ O ヨリ AC ニ垂線ヲ下シ其足ヲ E トスレバ O ハ ∠B ノ二等分線上ニアルカラ OD＝OF

卽圓ノ中心 O ト直線 AB トノ距離ガ半徑 OD ニ等シイカラ AB ハ圓 O ニ切スル(定理七)

同樣ニ AC モ亦圓 O ニ切スル。

ヨツテ圓 O ハ △ABC ノ內切圓デアル。

〔注意〕 上ノ作圖ニヨツテ如何ナル三角形デモ其內切圓ヲ畫クコトガ出來ルガ四角形,五角形等ニ內切スル圓ヲ畫キ得ルトハ限ラナイ。

問3. 四邊形 ABCD ニ於テ ∠A, ∠B, ∠C ノ二等分線ガ一點ニ會スルナラバ,コノ四邊形ニ內切スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

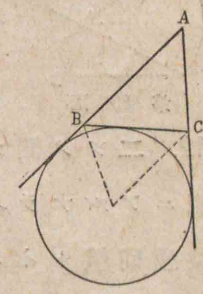
問　題

1. 圓 O ノ周上ノ點 B,C ニ於ケル切線ノ交點ヲ A トスレバ AO ハ BC ヲ垂直ニ二等分スル。

2. 定圓 O ニ於テ定點 A ヲ通ル弦ヲ引キ其長サガ定線分 a ニ等シクナル樣ニシナサイ。

3. 平行二直線ト之ニ交ハル一直線トニ切スル圓ヲ畫キナサイ。

4. 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ畫ケ。



第 87 圖

〔注意〕 コノ圓ヲコノ三角形ノ**傍切圓**トイヒ,其中心ヲ初ノ三角形ノ**傍心**トイフ。如何ナル三角形ニモ三ツノ傍切圓從テ三ツノ傍心ガアル。

5. $\overset{\frown}{AB}$ ノ中點ト A トヲ結ブ線分ハ AB ト A ニ於ケル切線トノナス角ノ一ツヲ二等分スル。

6. 二圓ノ切點 A ヲ通ル二直線ガ一方ノ圓周ト交ハル點ヲ P, R, 他ノ圓周ト交ハル點ヲ Q, S トスレバ

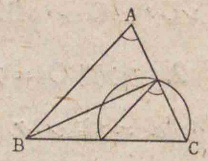
PR ∥ QS

7. 點 A デ內切スル二ツノ圓周ガアル。外圓ノ弦 BC ガ點 M デ內圓ニ切スルナラバ AM ハ ∠BAC ヲ二等分スル。

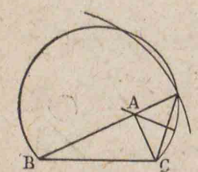
8. 底邊,頂角及底邊ノ中點ヲ通ル中線ノ長サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

9. 底邊,頂角及高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

10. 定線分 BC ヲ底邊トシ,頂角ガ定角 α ニ等シク,B ヨリ出ル中線ガ定線分 l ニ等シイ三角形ヲ作レ。



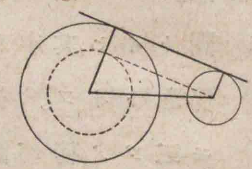
第 88 圖



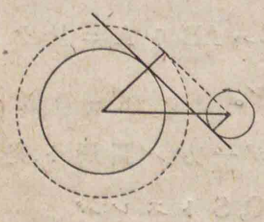
第 89 圖

11. 定線分 BC ヲ底邊トシ,頂角ガ定角 α ニ等シク,他ノ二邊ノ和ガ定線分 l ニ等シイ三角形ヲ作リナサイ。

12. 二ツノ圓ガ其共通切線ノ同ジ側ニアルナラバ,コノ共通切線ヲ**外共通切線**トイフ。與ヘラレタル二圓ノ外共通切線ヲ作レ。



第 90 圖



第 91 圖

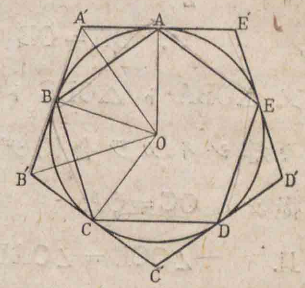
13. 二ツノ圓ガ其共通切線ノ反對ノ側ニアルナラバ,コノ共通切線ヲ**內共通切線**トイフ。

與ヘラレタル二圓ノ內共通切線ヲ作リナサイ。

28. 正多角形

定理一〇　圓周ヲ三ツ以上ニ等分シ其分點ヲ順次ニ結付ケテ出來ル多角形ハ正多角形デアル。又分點ニ於ケル切線デ出來ル多角形モ亦正多角形デアル。

題意　圓周 O ヲ n 等分例ヘバ五等分シテ其分點ヲ A, B, C, D, E トスレバ ABCDE ハ正五角形デアル。又 A, B, C, D, E ニ於ケル切線デ出來ル多角形 A′B′C′D′E′ モ亦正五角形デアル。



第 92 圖

證明　ABCDE ノ邊ハ相等シイ弧ヲ張ル弦デアルカラ皆等シイ。又ソノ角ハ何レモ圓周ノ $\frac{3}{5}$ ノ上ニ立ツ圓周角デアルカラ皆等シイ。

故ニ ABCDE ハ正五角形デアル。

次ニ △AOA′ ト △BOA′ トハ三邊夫々相等シイカラ合同デアル。

$$\therefore\ \angle AOA' = \angle BOA' = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{4R\angle}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}R\angle$$

同樣ニ　$\angle BOB' = \frac{2}{5}R\angle$

故ニ △BOA′ ト △BOB′ トハ一邊及其兩端ノ角夫々相等シイカラ合同デアル。

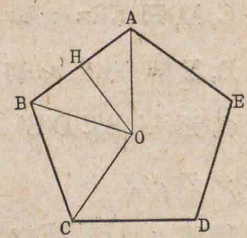
卽 △AOA′, △BOA′, △BOB′ 等ハ皆合同デアル故ニ A′B′C′D′E′ ハ其總テノ邊ガ等シク,總テノ角ガ等シイカラ正五角形デアル。

定理一一　正多角形ニ外接圓及內切圓ヲ畫クコトガ出來ル。

證明　正多角形例ヘバ正五角形ヲ ABCDE トシ其一角ヲ α トスル。

∠A, ∠B ノ二等分線ノ交點ヲ O トスレバ ∠OAB, ∠OBA

ハ何レモ$\dfrac{\alpha}{2}$ニ等シイカラ互ニ等シイ。　　$\therefore\ OA=OB$



第 93 圖

又$\triangle OBA$ト$\triangle OBC$トハ二邊夾角夫々等シイカラ合同デアル。

從テ　$OC=OA$

且　$\angle OCB=\angle OAB=\dfrac{\alpha}{2}$

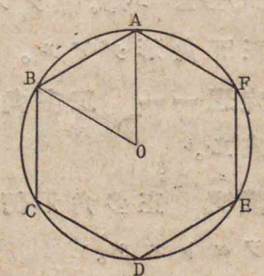
卽點 O ハ三點 A, B, C ヨリ等距離ニアツテ且 OC ハ $\angle C$ ノ二等分線デアル。

同樣ニ O ハ三點 B, C, D ヨリ等距離ニアツテ且 OD ハ $\angle D$ ヲ二等分スルコト及 O ハ三點 C, D, E ヨリ等距離ニアツテ且 OE ハ $\angle E$ ヲ二等分スルコトヲ證明スルコトガ出來ル。

故ニ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓ハ ABCDE ニ外接シ, O ヲ中心トシ O ヨリ AB ニ下セル垂線 OH ヲ半徑トスル圓ハ ABCDE ニ內切スル。

系　正多角形ノ外接圓ト內切圓トハ同心圓ナリ。

作圖題五　定圓ニ內接スル正六角形ヲ作レ。



第 94 圖

作圖　定圓 O ノ周上ノ任意ノ點ヲ A トス。圓 O ノ半徑ニ等シイ弦 AB, BC, CD, DE, EF ヲ作リ F, A ヲ結ブ。

ABCDEF ハ所要ノ正六角形ナリ。

證明　$\triangle AOB$ハ三邊等シイカラ正三角形デアル。

$\therefore\ \angle AOB=60^\circ=\dfrac{360^\circ}{6}$　從テ $\overset{\frown}{AB}=$全圓周ノ$\dfrac{1}{6}$

同樣ニ　$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=$全圓周ノ$\dfrac{1}{6}$

$\overset{\frown}{FA}$ハ全圓周カラコノ圓周ノ$\dfrac{5}{6}$ヲ減ジタ殘デアルカラ全圓周ノ$\dfrac{1}{6}$デアル。

卽 A, B, C, D, E, F デ圓周ガ六等分セラレタ。故ニ定理一〇ニヨツテ ABCDEF ハ正六角形デアル。

問 1.　正六角形ノ一邊ハ其外接圓ノ半徑ニ等シイ。

問 2.　與ヘラレタル圓ニ內接スル正三角形及正十二角形ヲ作レ。

【注意】 正三角形,正六角形ヲ作圖シ得ルカラ正十二角形,正二十四角形一般ニ正 (3×2^n) 邊形ヲ作圖スルコトガ出來ル(nハ正ノ整數)。又正方形ハ容易ニ作圖シ得ルカラ正 (4×2^n) 邊形ヲ作圖スルコトガ出來ル。コノ外尙若干ノ正多角形ハ作圖スルコトガ出來ルガ,任意ノ邊數ヲ有スル正多角形ハ作圖シ得ルモノデハナイ。例ヘバ正七角形,正九角形等ハ作圖スルコトガ出來ナイノデアル*。

* 通常用器畫デ作圖スル方法ハ近似的ニ眞ナル方法デアル。

問　題

1. 正多角形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付ケテ出來ル多角形ハ正多角形デアル。

2. 正五角形ノ對角線ガ二ツヅツ交ハツテ出來ル五角形ハ正五角形デアル。

3. 圓ニ內接スル正十五角形ノ一邊ニ對スル弧ハ同ジ圓ニ內接スル正六角形ノ一邊ニ對スル弧ト正十角形ノ一邊ニ對スル弧トノ差ニ等シイ。

4. 圓ニ內接スル等邊多角形ハ正多角形デアル。

5. 圓ニ外切スル等角多角形ハ正多角形デアル。

雜題第三

1. 菱形ノ各邊ノ中點ハ同一圓周上ニアル。

2. 圓ニ外切スル平行四邊形ハ菱形デアル。

3. 弦ヲ三等分スル半徑ハ,コノ弦ノ張ル弧ヲ三等分スルカ。

4. 如何ナル條件ガ滿足セラレルトーツノ四邊形ガ圓ニ內接シ得ルト斷定出來ルカ。

5. 次ノ點ハ無數ニアル。是等ノ無數ノ點ハ如何ナル圖形上ニアルカ。

(1) 定圓ニ於テ定直線ニ平行ナル弦ノ中點。

(2) 定圓ニ於テ定點ヲ通ル弦ノ中點。

(3) 定線分ヲ底邊トシ頂角ガ定角 α ニ等シイ三角形ノ頂點。

(4) 定直線ニ切シ半徑ガ定線分 a ニ等シイ圓ノ中心。

(5) 定圓ノ定弦ヲ AB トスル。A ヲ通ル弦 AC ノ延長上ニテ CB ニ等シク CD ヲトル。斯ノ如キ點 D。

6. 圓 O ノ直徑ヲ AB トシ任意ノ切線ヲ CD トスル。A, B ニ於ケル切線ト CD トノ交點ヲ C, D トスレバ $\angle$COD ハ直角デアル。

7. 圓 O ノ周上ノ點 A ヲ通ル弦 AB ト半直線 AX トガアル。モシ $\angle$XAB ガコノ角內ニアル弧 AB ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイナラバ AX ハ圓 O ノ切線デアル。

8. $\triangle$ABC ノ三邊ト內切圓トノ切點ヲ D, E, F トシ $\angle$A ノ內ニアル傍切圓トノ切點ヲ D′, E′, F′ トスル。

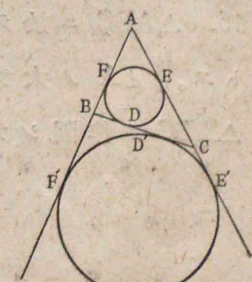
$BC=a,\ CA=b,\ AB=c,\ 2s=a+b+c$

トオケバ

$$AE=AF=s-a$$

$$AE'=AF'=s$$

$$BD=D'C=s-b$$

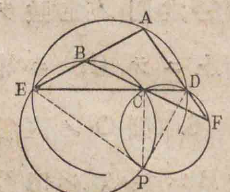


第 95 圖

9. 直角三角形ノ內切圓ノ半徑ハ直角ヲ夾ム二邊ノ和ヨリ斜邊ヲ減ジタル差ノ半分ニ等シ。

10. 二圓ノ交點ノ一ツAヲ通ル二直線 CAD, EAF ガ一方ノ圓ト交ハル點ヲC, E他ノ圓ト交ハル點ヲ D, Fトスレバ CE, DF 又ハ其延長ノナス角ハ一定デアル。

11. 四邊形 ABCD ニ於テ一組ノ對邊 AB, DC ノ延長ノ交點ヲE, 他ノ一組ノ對邊 BC, AD ノ延長ノ交點ヲ F トスレバ四ツノ三角形 BCE, DCF, AED, ABF ノ外接圓ハ一點ニ會ス。



第 96 圖

12. 定圓ニ於テ定線分ニ平行ニ且等シイ弦ヲ作リナサイ。

13. △ABC ノ内ニ一點 O ヲ求メ ∠BOC, ∠COA, ∠AOB ガ等シクナル樣ニセヨ。

14. 相交ハル二圓ノ交點Aヲ通ル直線ト二圓周トノ交點ヲ B, C トスル。BC ガ與ヘラレタル線分 l ニ等シクナル樣ニ直線 BC ヲ引ケ。

15. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トス。∠A ノ大サ, AD ノ長サ及 △ABC ノ周圍ヲ知リテ △ABC ヲ作圖シナサイ。

第四編

面積及比例

29. 矩形ノ面積

面ノ一部分ガ幾ツカノ直線又ハ曲線デ圍マレルトキ, コノ部分ノ廣サヲ其**面積**トイフ。

諸子ノ知レル種々ノ圖形ノ面積計算法ハ次ノ定理一ヲ基礎ニシタモノデアル。トコロガコノ基礎定理ハ各邊ノ長サガ,長サノ單位ノ整數倍ナルトキヲ考ヘタダケデ直チニ其結果ヲ總テノ場合ニ應用シテ來タ嫌ガアルカラ次ニハ然ラザル場合ヲモ考ヘルコトニスル。

定理一　矩形ノ面積ヲ表ハス數ハ相隣レル二邊ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

題意　AB ノ長サヲ表ハス數ヲ a, AD ノ長サヲ表ハス數ヲ b トシ矩形 ABCD ノ面積ヲ表ハス數ヲ S トスレバ

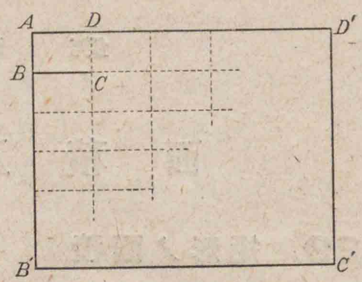
$$S = a \times b$$

證明　(1) a, b ガ共ニ整數ナル場合。

コノ場合ハ小學校時代ヨリ屢々繰返サレテアルカラ略スル。

(2) $a = \dfrac{n}{m}$, $b = \dfrac{q}{p}$ (但 m, n, p, q ハ正ノ整數)ナル場合。

半直線 AB 上ニ AB ノ m 倍ニ等シク AB′ ヲ,半直線 AD 上ニ AD ノ p 倍ニ等シク AD′ ヲトリ, AB′, AD′ ヲ二邊トスル矩形ヲ作リ之ヲ AB′C′D′ トスル。


第 97 圖

$$AB' = AB \times m \qquad AD' = AD \times p$$

デアルカラ AB′ ヲ m 等分シ, AD′ ヲ p 等分シテ各分點ヲ通リ其邊ニ垂直ナル直線ヲ引クト AB′C′D′ ハ ABCD ニ合同ナル mp 個ノ矩形ニ分ケラレル。

$$\therefore\ AB'C'D' = ABCD \times mp$$

而シテ AB′ ヲ表ハス數 $= a \times m = \dfrac{n}{m} \times m = n$

AD′ ヲ表ハス數 $= b \times p = \dfrac{q}{p} \times p = q$

n, q ハ整數デアルカラ(1)ノ場合ニヨリテ AB′C′D′ ノ面積ヲ表ハス數ハ nq デアル。

$$\therefore\ nq = S \times mp$$

$$\therefore\ S = \frac{nq}{mp} = \frac{n}{m} \times \frac{q}{p} = a \times b$$

(3) a, b ガ無理數デアル場合。

コノ場合ニハ a, b ニ如何ホドデモ接近スル分數ヲ考ヘルコトガ出來ルカラ,コノ場合モ (2) ノ場合ト同樣ニ考ヘルコトガ出來ル。ヨリテヤハリ

$$S = a \times b$$

デアル。

上ノ證明ニヨツテ矩形ノ相隣レル二邊ノ長サヲ表ハス數ガ整數デアルト,分數デアルト,無理數デアルトヲ問ハズ總テノ場合ニ於テ矩形ノ面積ヲ表ハス數ハ其相隣レル二邊ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

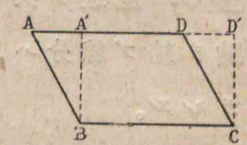
既ニ一旦證明ガ出來タ以上ハ其結果ヲ利用スルコトガ出來ル。

30. 多角形ノ面積

定義 梯形ノ兩底邊ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

平行四邊形ハ一組ノ對邊ヲ兩底邊トスル梯形ナルガ故ニ何レノ邊ヲモ底邊ト考フルコトヲ得ベク,從テ底邊ト其對邊トノ距離ガ高サデアル。

問 1. ▱ABCD ニ於テ一邊 BC ノ兩端カラ對邊 AD ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 A′, D′ トスル。△ABA′≡△DCD′ ヲ證明シ之ヲ利用シテ ▱ABCD ノ面積ハ矩形 A′BCD′ ノ面積ニ等シイコトヲ證明セヨ。


第 98 圖

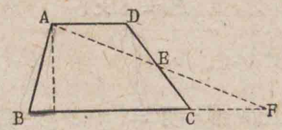
問 2. 三角形ノ面積ハ之ト等底,等高ナル平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シ。

問 3. 兩底邊ガ夫々 a 糎, b 糎デ高サガ h 糎デアル梯

形ノ面積ヲS平方糎トスレバ

$$S=\frac{(a+b)h}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。



第 99 圖

平行四邊形,三角形ノ面積計算法ヨリ次ノ定理ノ成立ツコトガ明カデアル。

定理二　等底,等高ナル二ツノ矩形,平行四邊形又ハ二ツノ三角形ハ等積デアル。

系一　等積ニシテ等高ナル二ツノ矩形,平行四邊形又ハ二ツノ三角形ハ等底ナリ。

系二　等積ニシテ等底ナル二ツノ矩形,平行四邊形又ハ二ツノ三角形ハ等高ナリ。

問4. △ABC ノ中線 AD 上ノ一點ヲ E トスレバ

△ABE＝△ACE*

問5. 底邊ヲ共有スル二ツノ三角形ガ等積ナラバ其頂點ヲ結ブ線分ハ底邊ニ平行ナルカ又ハ底邊デ二等分セラレル。

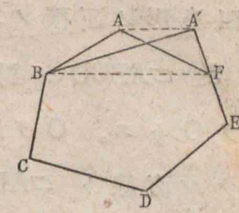
作圖題一　與ヘラレタル多角形(邊數ガ4以上ノ)ト等積ニシテ邊數ガ一ツ少ナイ多角形ヲ作ルコト。

題意　與ヘラレタ多角形ヲ例ヘバ六角形デアルトシ

* △ABE ノ面積＝△ACE ノ面積ヲ略記シタノデアル。以下皆之ニ倣フ。

テ之ヲ ABCDEF トスル。之ト等積ナル五角形ヲ作ルコト。

作圖　B, F ヲ結ビ, A ヲ通リ, BF ニ平行ナル直線ヲ引キ EF ノ延長トノ交點ヲ A′ トスル。A′,B ヲ結ベ。A′BCDE ハ求メル五角形デアル。



第 100 圖

證明　BF ヲ △ABF ト △A′BF トノ共通底邊ト考ヘルト,コノ兩三角形ハ等底,等高デアル。

∴ △ABF＝△A′BF

コノ双方ニ五角形 BCDEF ヲ加ヘルト

六角形 ABCDEF＝五角形 A′BCDE

【注意】　六角形 ABCDEF ニ等積ナル五角形ハ無數ニアツテ A′BCDE ハソノ中ノ一ツデアル。作圖問題デハ題意ニ適スル圖形ハ殘ラズ作圖スベキデアルガ,本問ノ樣ニ無數ニアル場合ニハ其旨ヲ斷ツテ任意ノ一ツヲ畫ケバヨロシイ。

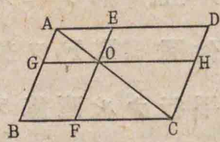
問　題

1. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ハ夫々 24*cm*, 32*cm* デアツテ互ニ垂直デアルナラバ ABCD ノ面積ハ幾平方糎ナルカ。

2. 四邊形ノ各頂點ヲ通リ,コノ頂點ヲ通ラナイ對角線ニ平行ナル四ツノ直線デ出來ル平行四邊形ノ面積ハ

原四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シイ。

3. ▱ABCD ノ對角線 AC 上ノ一點ヲ O トス。O ヲ通リ AB, AD ニ平行ナル直線ト ▱ABCD ノ邊トノ交點ヲ圖ノ如ク E, F, G, H トスレバ



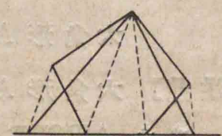
第 101 圖

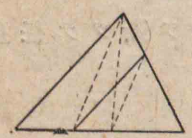
▱GBFO = ▱EOHD

4. 底邊ガ AD, BC ナル梯形ノ對角線ノ交點ヲ O トスレバ　△AOB = △COD

5. ▱ABCD ニ於テ A ヲ通ル直線ガ BC ト交ハル點ヲ E, DC ノ延長ト交ハル點ヲ F トスレバ　△BEF = △DEC

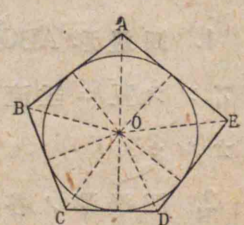
6. 與ヘラレタ五角形ト等積ナル三角形ヲ作レ(本問モ解答ハ無數ニアル其中ノ一ツヲ畫キナサイ)。


第 102 圖


第 103 圖

7. 與ヘラレタル三角形ノ邊上ニアル定點ヲ通ツテコノ三角形ヲ二等分スル直線ヲ引ケ。

8. 正多角形ノ面積ヲ表ハス數ハ其周圍ヲ表ハス數ト內切圓ノ半徑ヲ表ハス數トノ積ノ半分ニ等シ。



第 104 圖

9. 正多角形內ノ一點ヨリ各邊ニ至ル垂線ノ和ハ一定ナリ。

手引　コノ點ヲ各頂點ニ結ビ付ケルト正多角形ハ其邊數ト同數ノ三角形ニ分ケラレル。是等ノ三角形ノ面積ノ和ヲ考ヘヨ。

10. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ガ原四邊形ノ面積ヲ二等分スルナラバコノ四邊形ハ梯形デアル。

31. 公式ノ圖表示

AB, BC ヲ二邊トスル矩形ヲ **AB, BC ノ包ム矩形** トイヒ,其面積ヲ AB·BC デ表ハス。又線分 AB ヲ一邊トスル正方形ヲ **AB ノ上ノ正方形** 又ハ **AB ノ平方** トイヒ,其面積ヲ $\overline{AB}^2$ デ表ハス。

AB ノ長サヲ $\overset{*}{a}$, BC ノ長サヲ $\overset{*}{b}$ トスレバ AB·BC ハ $\overset{*}{ab}$ デアリ, $\overline{AB}^2$ ハ a^2 デアル。

代數デ屢々使用スル公式ヲ右ニ圖示スル。

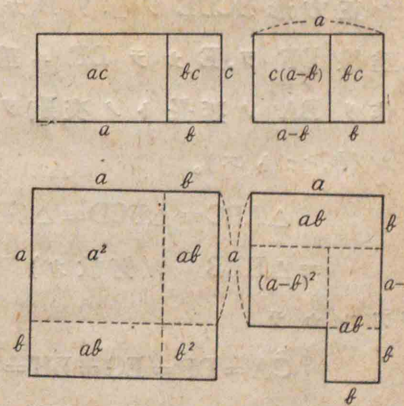
1°　$c(a+b)=ac+bc$

2°　$c(a-b)=ac-bc$

　　但　$a \geqq b$

3°　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

4°　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$



第 105 圖 (I)

* 長サト面積トハ對應セル單位ヲ用フルモノトシテ單位ノ記載ヲ略シタノデアル。以下多ク之ニ倣フ。

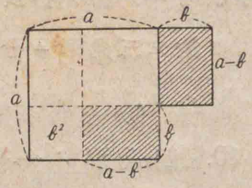
但 $a \geqq b$

5°　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

但 $a \geqq b$

問　$(x+a)(x+b)$

$=x^2+ax+bx+ab$ 及



第105圖 (II)

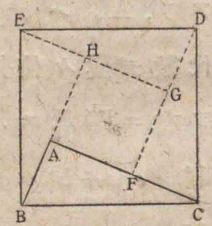
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ ヲ圖示セヨ。

32. ぴたごらすノ定理及其應用

定理三　直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。

題意　ABC ニ於テ $\angle A=R\angle$ デアルトシ, $BC=a$, $AC=b$ $AB=c$ トスレバ　$a^2=b^2+c^2$

證明　BC ニ對シテ △ABC ト同ジ側ニ BC ヲ一邊トスル正方形 BCDE ヲ作リ D カラ CA ニ垂線 DF ヲ, E カラ DF ニ垂線 EG ヲ作リ BA ノ延長トノ交點ヲ H トスル ($b \geqq c$ トス)。



第106圖

$\triangle ABC \equiv \triangle FCD \equiv \triangle GDE$
$\equiv \triangle HEB$　(何故カ)

デアルカラ

$CA=DF=EG=BH=b$

又　$BA=CF=DG=EH=c$

∴　$AF=FG=GH=HA=b-c$

且　$\angle HAF=\angle AFG=\angle FGH=\angle GHA=R\angle$

デアルカラ AFGH ハ一邊ガ $b-c$ ナル正方形デアル。

又　$\angle A=R\angle$ デアルカラ　$\triangle ABC=\frac{bc}{2}$

∴　$a^2=\overline{BC}^2=$ 正方形 AFGH $+4\triangle ABC$

$=(b-c)^2+\frac{bc}{2}\times 4=b^2-2bc+c^2+2bc=b^2+c^2$

上ノ定理ヲぴたごらす (Pythagoras) ノ定理トイフ。ぴたごらすハ希臘ノ數學者デ西暦紀元前500年頃生存シタ人デアル。


第107圖

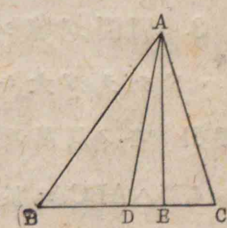
問1.　直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ夫々 $6m$, $8m$ デアルト斜邊ハ幾 m デスカ。

問2.　半徑 $13cm$ ノ圓ニ於テ中心カラ $5cm$ ノ距離ニアル弦ノ長サヲ求メヨ。

問3.　P ハ圓 O ノ外ニアル點デアル。圓 O ノ半徑ガ $2cm$ デ, P ヨリ圓 O ニ引イタ切線ノ長サガ $4cm$ ナラバ PO ハ幾 cm デスカ。

定理四　三角形 (ABC) ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和 ($\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$) ハ第三邊ノ半分ノ上ノ正方形ト第三邊ニ至ル中線ノ上ノ正方形トノ和ノ2倍ニ等シ。

證明　BC ノ中點ヲ D トシ, A ヨリ BC ニ下セル垂線ノ足ヲ E トス。



第108圖

EガDトCトノ間ニアルモノトスレバ

$$\overline{AB}^2=\overline{BE}^2+\overline{AE}^2=(BD+DE)^2+\overline{AE}^2$$
$$=\overline{BD}^2+2BD\cdot DE+\overline{DE}^2+\overline{AD}^2-\overline{DE}^2$$
$$=\overline{BD}^2+2BD\cdot DE+\overline{AD}^2\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$\overline{AC}^2=\overline{EC}^2+\overline{AE}^2=(BD-DE)^2+\overline{AE}^2$$
$$=\overline{BD}^2-2BD\cdot DE+\overline{DE}^2+\overline{AD}^2-\overline{DE}^2$$
$$=\overline{BD}^2-2BD\cdot DE+\overline{AD}^2\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1),(2) ヲ邊々相加ヘルト

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BD}^2+2\overline{AD}^2=2(\overline{BD}^2+\overline{AD}^2)$$

以上ハEガDトCトノ間ニアルモノトシテ證明シタノデアルガ然ラザル場合ニモ同様ニシテ證明スルコトガ出來ル。

問　題

1. 對角線ガ 10 cm ナル正方形ノ一邊ノ長サ何程。

2. 一邊ガ a 米デアル正三角形ノ高サ及面積ヲ求メナサイ。

3. 周圍ガ等シイ正三角形ト正方形トガアル。其面積ハドチラガ大キイカ。

手引 各ノ周圍ヲ 12a デ表ハシナサイ。

4. △ABC ニ於テ $\angle B=60°$, $\angle C=45°$, AB＝10 cm ナラバ其面積何程カ。

手引 A カラ BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ D トスルト △ABD ハ正三角形ノ半分デアル。

5. 半徑 $r\,cm$ ノ圓ニ内接スル正六角形ノ面積ヲ計算シナサイ。

6. 半徑 $r\,cm$ ノ圓ニ内接スル正三角形ノ一邊ノ長サハ何程カ。

7. △ABC ニ於テ A カラ BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ H トスレバ　$AB^2\sim AC^2=BH^2\sim CH^2$

8. 四邊形 ABCD ノ對角線ガ直交スレバ

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2$$

9. 平行四邊形ノ各邊ノ上ノ正方形ノ和ハ對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

10. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ和(又ハ差)ニ等シイ正方形ヲ作リナサイ。

11. 與ヘラレタル線分ノ長サノ $\sqrt{2}$ 倍, $\sqrt{3}$ 倍ニ等シイ線分ヲ作リナサイ。

12. 定直線上ニ於テ二定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ最小ナル點ヲ求メナサイ。

33. 比例式

問 1. 算術又ハ代數デ學ビタル比,比ノ値,比例式ノ定義ヲ述ベナサイ。

定義 或量Aガ之ト同種類ノ量Bノ幾倍(分數倍,無理數倍ヲ含ム)デアルカトイフ意味デノAトBトノ關係ヲ**AノBニ對スル比**トイツテ之ヲ**A:B**デ表ハス。

AガBノm倍ノトキ即 $A=mB$ デアルトキmヲ **A:B ノ値**トイツテ之ヲ$\frac{A}{B}$デ表ハス。例ヘバAガBノ$\frac{2}{3}$ナラバ$\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$デアル。又正方形ノ對角線ハ其一邊ノ$\sqrt{2}$倍デアルカラ正方形ノ對角線ト一邊トノ比ノ値ハ$\sqrt{2}$デアル。

二ツノ比ガ等シイトイフノハ其値ガ等シイコトデアル。

定義 二ツノ量A,Bノ比ガ二ツノ量C,Dノ比ニ等シイトキ即

$$A:B=C:D \cdots\cdots(1)$$

ナラバ四ツノ量A,B,C,Dハ**比例ヲナス**トイフ。

(1)ノ樣ニ二ツノ比ガ等シイコトヲ示ス等式ヲ**比例**トイヒ,DヲA,B,Cノ**第四比例項**トイフ。

比例式ノ內項(第二項,第三項)ガ等シイトキ即

$$A:B=B:C \cdots\cdots(2)$$

ナルトキCヲA,Bノ**第三比例項**トイヒ,BヲA,Cノ**比例中項**トイフ。

【注意】 (1)ニ於テハAトBトハ同種類,CトDトハ同種類デナケレバナラヌガA,B,C,D全體ハ同種類デナクトモヨイ。(2)ニ於テハAトBトハ同種類,BトCトモ同種類デアルカラA,B,Cハ皆同種類デナケレバナラヌ。

問2. 15 *cm*, 25 *cm*, 2平方米ノ第四比例項ヲ求メヨ。

問3. a糎トb糎トノ第三比例項及比例中項ヲ求メナサイ。

二ツノ量ノ比ハ是等ヲ同ジ單位デ測ツテ得ル數値ノ比ニ等シイカラ數ノ比,比例ニ關スル性質ハ量ノ比,比例ノ意義ニ反シナイ限リ其儘適用スルコトガ出來ル。次ニ其主ナルモノヲ列擧スル。

定理五 **比ノ前項,後項ニ同ジ數(正ノ數)ヲ乘除シテモ比ノ値ハ變ハラヌ。**

定理六 **四ツノ量A, B, C, Dガ比例スルナラバ即 A:B=C:D ナラバ次ノ比例式ガ成立ツ。但1°, 2°ニ於テハA, B, C, Dハ皆同種類ノ量ナルコトヲ要スル。**

1° $A:C=B:D$　　2° $D:B=C:A$

3° $A+B:B=C+D:D$　　4° $A\sim B:B=C\sim D:D$

5° $A+B:A\sim B=C+D:C\sim D$

定理七 **A, B, C, D, E, F……ハ同種類ノ量ニシテ且**

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\cdots\cdots$ **ナラバ** $\frac{A+C+E+\cdots\cdots}{B+D+F+\cdots\cdots}=\frac{A}{B}$

34. 矩形ノ面積ノ比

問 1. 相隣レル二邊ガ a 糎, b 糎ノ矩形ト a 糎, c 糎ノ矩形トノ面積ノ比ヲ求メナサイ。

問 1 ニヨツテ次ノ定理ガ成立ツコトガ明カデアル。

定理八　等高ナル二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ底邊ノ比ニ等シク,等底ナル二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ高サノ比ニ等シイ。

系　等高(等底)ナル二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比又ハ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

四ツノ數 a, b, c, d ガアル。モシ $a:b=c:d$ ナラバ $ad=bc$ デアリ,又 $ad=bc$ デアルナラバ $a:b=c:d$ デアルコトハ算術又ハ代數デ學ビマシタ。a,b,c,d ガ線分ノ長サヲ表ハス數ト考ヘルト,コノ事實ハ次ノ定理デ言ヒ表ハサレル。

定理九　四ツノ線分ガ比例ヲナストキハ其内項ヲ二邊トスル矩形ノ面積ハ外項ヲ二邊トスル矩形ノ面積ニ等シイ。又二ツノ矩形ノ面積ガ等シイナラバ一方ノ矩形ノ二隣邊ヲ内項トシ,他ノ矩形ノ二隣邊ヲ外項トスル比例式ガ成立ツ。

問 2. △ABC ノ一邊 BC 上ノ點ヲ D トスレバ

$$\triangle ABD : \triangle ADC = BD : DC$$

問 3. △ABC ノ内心ヲ O トスレバ

$$\triangle OAB : \triangle OAC = AB : AC$$

35. 内分及外分

線分 AB 上ノ點 C ハ AB ヲ二ツノ部分 AC, CB ニ分ケル。今分ケルトイフ語ノ意味ヲ擴張シテ線分 AB ノ延長上ノ點 D ハ AB ヲ二ツノ部分 AD, DB ニ分ケルトイフ。シカシ之デハ混雜スル恐ガアルカラ初ノヲ**内分**,後ノヲ**外分**トイツテ區別スル。何レニシテモ分點ト初ノ線分ノ兩端トノ距離ヲ二ツノ**部分**略シテ**分**トイフ。

第 109 圖

例ヘバ上圖ニ於テ C ハ AB ノ内分點,D ハ外分點デアル。又 B ハ CD ノ内分點,A ハ外分點デアル。

線分 AB ヲ C デ内分スルトキ其二ツノ分ノ比ハ AC : CB デアリ BA ヲ内分スルトキノ二ツノ分ノ比ハ BC : CA デアル。又 AB ヲ D デ外分スルトキノ二ツノ分ノ比ハ AD : DB デアリ, BA ヲ D デ外分スルトキノ二ツノ分ノ比ハ BD : DA デアル。何レガ前項ニナルカニ注意シナサイ。

問　線分 AB ヲ次ノ比ニ内分,外分スル點ヲ目分量デ求メナサイ。

(1) 2 : 1　(2) 3 : 2　(3) 4 : 1　(4) 1 : 1

(5) 1 : 2　(6) 2 : 3　(7) 1 : 4

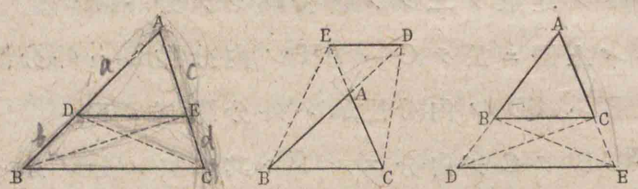
【注意】 線分ヲ値ガ 1 ニ等シクナイ比ニ内分,外分スル

點ハ各唯一ツヅツアル。又 1:1 ニ内分スル點ハ初ノ線分ノ中點デアリ,外分スル點ハナイ。

36. 三角形ニ關スル比例線

定理一〇　三角形 (ABC) ノ一邊 (BC) ニ平行ナル直線 (DE) ハ他ノ二邊 (AB, AC) ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル。

證明　E ヲ △ADE, △DBE ノ共通頂點ト考ヘルト,コノ兩三角形ノ高サハ等シイカラ



第 110 圖

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

△ADE : △DBE = AD : DB …………(1)

同様ニ　△ADE : △EDC = AE : EC …………(2)

トコロガ　△DBE = △EDC

デアルカラ (1),(2) ノ左邊ハ等シイ。故ニ右邊モ等シイ。

ヨツテ　AD : DB = AE : EC

系一　本定理ノ圖ニ於テ

AB : AD = AC : AE　　AB : DB = AC : EC

系二　三角形ノ二邊ヲ相等シイ比ニ内分スル點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行デアル。相等シイ比ニ外分スル點ヲ結ブ線分モ亦第三邊ニ平行デアル。

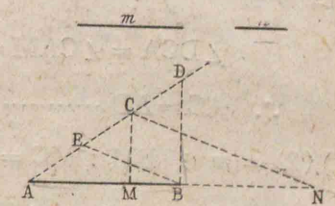
手引　△ABC ノ二邊 AB, AC ヲ相等シイ比ニ共ニ内分スル點又ハ共ニ外分スル點ヲ D, E トスル。D ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト AC トノ交點 E′ ガ E ニ一致スルコトヲ證明シナサイ。

問 1.　AD, BC ガ兩底デアル梯形ノ邊 AB 上ノ點 E ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト DC トノ交點ヲ F トスレバ

AE : EB = DF : FC

問 2　前問ノ梯形ニ於テ AB, DC ヲ相等シキ比ニ内分スル點ヲ結付ケル線分ハ BC ニ平行デアル。

作圖題二　與ヘラレタル線分 (AB) ヲ二定線分 (m, n) ノ比ニ内分及外分セヨ。



第 111 圖

作圖　A デ AB ニ交ハル任意ノ直線上ニテ AC ヲ m ニ等シクトリ, AC 又ハ其延長上ニテ C ノ兩側ニ CE, CD ヲ何レモ n ニ等シクトル。

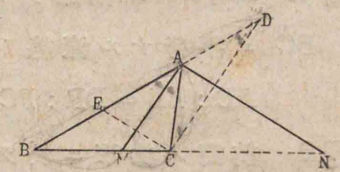
C ヲ通リ DB, EB ニ平行ナル直線ヲ引キ AB トノ交點ヲ夫々 M, N トスレバ M, N ハ求メル分點デアル。

證明　定理一〇ニヨリテ明カデアル。

問 3.　上ノ作圖題ニ於テ $m>n$, $m=n$, $m<n$ ナル種々ノ場合ニ實際ニ作圖シテ M, N ノ位置ヲ觀察シナサイ。

定理一一　三角形(ABC)ノ一角(∠A)ノ二等分線ハ對邊(BC)ヲ他ノ二邊ノ比(AB:AC)ニ内分シ,一外角(∠DAC)ノ二等分線ハ對邊(BC)ヲ他ノ二邊ノ比(AB:AC)ニ外分スル。

證明　∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ M トシ C ヲ通リ MA ニ平行ナル直線ト BA ノ延長トノ交點ヲ D トスレバ定理一〇ニヨリテ



第 112 圖

$$BM : MC = BA : AD \cdots\cdots(1)$$

トコロガ

$$\angle DCA = \angle CAM = \angle MAB = \angle CDA$$

$$\therefore\ AC = AD \cdots\cdots(2)$$

(1),(2) ニヨリ BM : MC = AB : AC

A ニ於ケル外角ノ二等分線ト BC ノ延長トノ交點ヲ N トシ,C ヲ通リ NA ニ平行ナル直線ト AB トノ交點ヲ E トスレバ前ト同樣ニシテ

$$BN : NC = BA : AE = AB : AC$$

系　三角形ノ一邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ對角ノ頂點ニ結ブ線分ハコノ角又ハ其接角ナル外角ヲ二等分ス。

問4.　△ABC ノ三邊ガ 12 *cm*, 9 *cm*, 8 *cm* ナルトキ最大角ノ二等分線ガ對邊ヲ分ツ二部分ノ長サヲ計算セヨ。

問　　題

1. 一ツノ直線ガ三ツノ平行線 X, Y, Z ニ交ハッテ $m:n$ ニ分タレルナラバ X, Y, Z ニ交ハル如何ナル直線モ $m:n$ ニ分タレル。

2. 二ツノ圓ガ内切スルトキ切點ヲ通ル大圓ノ弦ハ小圓ノ周デ定比ニ内分セラレル。外切スルトキハ如何。

3. 點 A カラ圓 O ニ引イタ二ツノ切線ノ切點ヲ E, F トシ,二點 A, O ヲ通ル直線ガ EF ト交ハル點ヲ B,圓周ト交ハル點ヲ C, D トスレバ　AC : CB = AD : DB

手引　EC, ED ハ ∠AEB 及其接角ナル補角ヲ二等分スル。

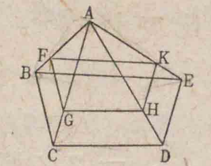
4.© 與ヘラレタル三ツノ線分ノ第四比例項ヲ作圖シナサイ。

5. 定點 P ヲ通リ定角 O ノ二邊ト夫々 A, B デ交ハル直線ヲ引キ PA : PB ガ定比 $m:n$ ニ等シクナル樣ニセヨ。

6. △ABC ノ内心ヲ O トスル。 AB = AC = 5 *cm*, BC = 6 *cm* ナリトスレバ AO ノ長サ何程ナルカ。

7. △ABC ニ於テ邊 BC ノ中點ヲ D トシ, ∠ADB ノ二等分線ト AB トノ交點ヲ E トス。E ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト AC トノ交點ヲ F トスレバ FD ハ ∠ADC ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。

8. 五角形 ABCDE ノ邊 AB 上ノ點 F ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト AC トノ交點ヲ G トシ, G ヲ通リ CD ニ平行ナル直線ト AD トノ交點ヲ H トス。更ニ H ヲ通リ DE ニ平行ナル直線ト AE トノ交點ヲ K トスレバ FK ハ BE ニ平行ナルコトヲ證明セヨ。



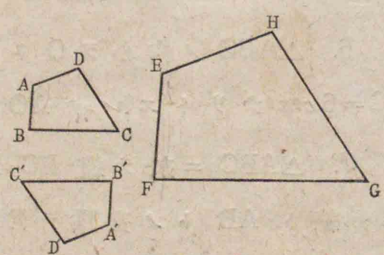
第 113 圖

37. 相似形

定義　一ツノ多角形ノ總テノ角ガ,之ト同邊數ノ多角形ノ總テノ角ニ順次夫々等シイトキハコノ二ツノ多角形ハ**等角**デアルトイツテ,一組ノ相等シイ角ヲ**對應角**トイヒ,對應角ノ頂點ヲ**對應頂點**,二ツノ相隣レル對應頂點間ノ邊ヲ**對應邊**トイフ。

例ヘバ上ノ第 8 問ニ於ケル四邊形 FGHK, BCDE ハ等角デアツテ ∠F ト ∠B, ∠G ト ∠C 等ハ對應角, FG ト BC トハ對應邊デアル。

又 ABCD ト EFGH ガ等角デアルナラバ其一方 ABCD ヲ裏返シタ A′B′C′D′ ト EFGH トモ等角デアル。



第 114 圖

定義　二ツノ多角形ガ等角デアツテ對應邊ノ比ガ皆等シイナラバコノ二ツノ多角形ハ**相似**デアルトイヒ,對邊應ノ比ヲ**相似ノ比**トイフ。

ABCD ト A′B′C′D′ トガ相似デアルコトヲ

AECD ∽ A′B′C′D′ デ表ハス。

【注意 1】ABCD ト A′B′C′D′ トハ A ト A′; B ト B′ 等ガ對應頂點デアル相似形ナルコトヲ證明スルニハ定義ニヨツテ

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C',\quad \angle D=\angle D',$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

ヲ證明セネバナラヌ。

【注意 2】通俗ニ言フト同形,等大ノ二ツノ多角形ハ合同デアリ,同形ナル二ツノ多角形ハ相似デアル。地圖ハ實際ノ土地ニ相似デアル。$\frac{1}{10000}$ ノ地圖トイフノハ圖ト實地トノ相似ノ比ガ 1:10000 デアル地圖ノコトデアル。

問 1. 邊數ガ等シイ二ツノ正多角形ハ相似デアル。

問 2. 相似ノ比ガ 1 デアル二ツノ相似多角形ハ合同デアル。

38. 相似三角形

定理一二　三角形 (ABC) ノ一邊 (BC) ニ平行ナル直線 (B′C′) ト他ノ二邊 (ヲ含ム直線) トデ圍マレル三角形ハ原

三角形ニ相似デアル。

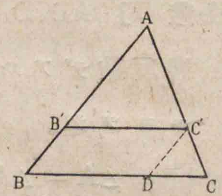
證明 先ヅ $\triangle ABC$ ト $\triangle AB'C'$ トハ等角ナルコト明カデアル。

次ニ $B'C' \parallel BC$ デアルカラ定理一〇系ニヨツテ

$$AB : AB' = AC : AC'$$

C' ヲ通ツテ AB ニ平行ナ直線ト BC トノ交點ヲ D トスレバ

$$AC : AC' = BC : BD$$



第 115 圖

トコロガ

$$BD = B'C' \quad \therefore\ AC : AC' = BC : B'C'$$

ヨツテ $\triangle ABC$ ト $\triangle AB'C'$ トハ等角ニシテ且對應邊ノ比ガ皆等シイ。

$$\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$$

定理一三 次ノ場合ニハ二ツノ三角形ハ相似デアル。

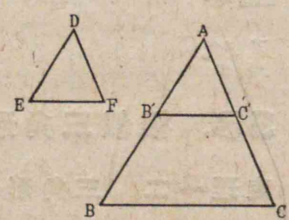
1.° **二邊ガ比例シ夾角ガ等シイトキ。**

2.° **二角ガ夫々等シイトキ。**

3.° **三邊ガ比例スルトキ。**

題意 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

1.° $\angle A = \angle D,\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ ナラバ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$



第 117 圖

2.° $\angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$ ナラバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

3.° $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB}{DE}$ ナラバ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

證明 AB 又ハ其ノ延長上ニ DE ニ等シク AB' ヲトリ B' ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC トノ交點ヲ C' トスル。

前定理ニヨリ $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$ ....(1)

デアルカラ $\triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$ ヲ證明スレバヨロシイ。

1.° (1) ニヨリ $AB : AB' = AC : AC'$

トコロガ $AB : DE = AC : DF$ 及 $AB' = DE$

デアルカラ $AC' = DF$

ヨリテ $\triangle AB'C'$ ト $\triangle DEF$ トハ二邊夾角夫々等シイ。

$$\therefore\ \triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$$

從テ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

2.° $\angle B', \angle E$ ハ共ニ $\angle B$ ニ等シ。 $\therefore\ \angle B' = \angle E$

同樣ニ $\angle C' = \angle F$ 從テ $\angle A = \angle D$

故ニ $\triangle AB'C'$ ト $\triangle DEF$ トハ一邊ト其兩端ノ角夫々相等シ。

$\therefore\ \triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$ 從テ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

3.° (1) ニヨリ $BC : B'C' = CA : C'A = AB : AB'$

トコロガ $BC : EF = CA : FD = AB : DE$

及 $AB' = DE$ $\therefore\ B'C' = EF \quad C'A = FD$

ヨリテ $\triangle AB'C'$ ト $\triangle DEF$ トハ三邊夫々相等シ。

∴ $\triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$　從テ　$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

系　一鋭角ガ等シイ二ツノ直角三角形ハ相似ナリ。

問　題

1. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ ナルトキ對應邊 BC, B'C' ノ中點ヲ夫々 D, D' トスレバ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$ ナルコトヲ證明セヨ。

2. 相似三角形ノ外接圓ノ半徑ノ比,內切圓ノ半徑ノ比ハ何レモ相似ノ比ニ等シイ。

3. 一點ヲ通ル三ツノ直線ガ平行二直線ト A, A'; B, B'; C, C' デ交ハレバ $AB : BC = A'B' : B'C'$

4. 平行二直線ノ一方ノ上ニ三點 A, B, C 他ノ上ニ三點 A', B', C' ガアッテ $AB : BC = A'B' : B'C'$ デアルナラバ AA', BB', CC' ハ平行ナルカ又ハ一點ニ會スル。

5. △ABC ノ邊 AB 上ニ D ヲ, AC 上ニ E ヲトリ $AD : DB = AE : EC = 1 : 2$ ナラシムレバ DC, EB ハ其交點ニヨッテ 1:3 ニ內分セラレル。

6. 直角三角形 ABC ニ於テ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ D トスレバ

$\overline{AD}^2 = BD.DC$　　$\overline{AB}^2 = BD.BC$

$\overline{AC}^2 = DC.BC$　　$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC$

7. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ通ル直線ガ底邊 BC ト交ハル點ヲ C トシ,外接圓周ト再ビ交ハル點ヲ E

トスレバ AB ハ AE, AD ノ比例中項ナリ。

8. △ABC ニ於テ二邊 AB, AC ノ包ム矩形ハ A カラ BC ニ下シタ垂線ト外接圓ノ直徑トノ包ム矩形ニ等シ。

39. 圓ニ關スル比例線

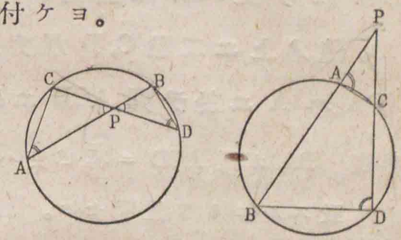
定理一四　同ジ圓ノ二ツノ弦(AB, CD)ガ其交點(P)又ハ延長ノ交點(P)ニヨッテ分タレルトキ各ノ弦ノ二ツノ分ノ包ム矩形(AP.BP, CP.PD)ハ相等シイ。

證明　A, C 及 B, D ヲ結付ケヨ。

△APC ト △DPB トハ二角夫々相等シ。

∴ $\triangle APC \backsim \triangle DPB$

ヨリテ



第 117 圖

$AP : PD = CP : PB$　　∴ $AP.PB = CP.PD$

系　二線分ガ其交點又ハ双方ノ延長ノ交點デ分タレル二ツノ分ノ包ム矩形ガ等シイナラバ二線分ノ兩端ナル四ツノ點ハ同一圓周上ニアル。

手引　二線分ヲ AB, CD トスル。三點 A, B, C ヲ通ル圓周ト CD 又ハ其延長トノ交點 D' ガ D ニ一致スルコトヲ證明セヨ。

問 1. 相交ハル二圓ノ共通弦上ノ點 C ヲ通ル直線ガ一方ノ圓周ト交ハル點ヲ A, B トシ他ノ圓周ト交ハル點ヲ D, E トスレバ $AC.CB = DC.CE$

定理一五　圓外ノ點(P)カラコノ圓ニ引イタ切線ノ上

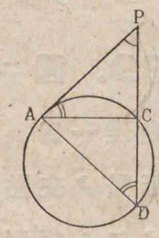
ノ正方形($\overline{PA}^2$)ハコノ點ヲ通ル割線 PCD ノ弦 DC ガコノ點デ外分セラレタ二ツノ分ノ包ム矩形(PC.PD)ニ等シイ。

證明 A ト C, A ト D トヲ結付ケヨ。

△PAC ト △PDA トハ二角夫々等シイカラ相似デアル。

$\therefore \quad PC : PA = PA : PD$

ヨリテ $\overline{PA}^2 = PC.PD$



第 118 圖

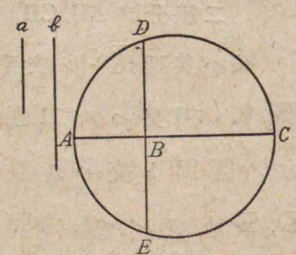
系 P デ交ハル二直線ノ一方ノ上ニ點 A, 他ノ上ニ二點 C, D ガアル。モシ $\overline{PA}^2 = PC.PD$ ナラバ PA ハ A ニ於テ圓 ACD ニ切スル。

手引 PA ガ圓 ACD ニ再ビ交ハル點ヲ A′ トシ A ト A′ トガ一致スルコトヲ證明セヨ。

問2. 相交ハル二圓ノ共通弦ノ延長上ノ點ヨリコノ二圓ニ引イタ切線ハ等シイ。

作圖題三 與ヘラレタル二線分(a,b)ノ比例中項ヲ求メヨ。

作圖 a ニ等シク AB ヲトリ,其延長上ニ b ニ等シク BC ヲトル。AC ヲ直徑トスル圓周ト B ニ於ケル AB ノ垂線トノ交點ノ一ツヲ D トスレバ DB ハ求ムル比例中項ナリ。



第 119 圖

證明 DB ノ延長ガ再ビ圓周ト交ハル點ヲ E トスレバ

$DB = BE \quad$ 且 $\quad AB.BC = DB.BE$

$\therefore \quad AB.BC = \overline{DB}^2$

ヨリテ $AB : DB = DB : BC$

即 $a : DB = DB : b$

故ニ DB ハ a ト b トノ比例中項ナリ。

【注意】 上ノ作圖ハ a, b ヲ二邊トスル矩形ニ等積ナル正方形ノ一邊ヲ求ムル作圖法トモ考ヘルコトガ出來ル。

問題

1. 相交ハル二圓ノ共通弦ノ延長上ノ點 P ヨリ二圓ノ各ニ割線 PAB, PCD ヲ引ケバ A, B, C, D ハ同一圓周上ニアル。

2. △ABC ノ垂心ヲ H トシ, A, B, C ヨリ其對邊ニ下セル垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トスレバ

$$AH.HD = BH.HE = CH.HF$$

3. 圓 O ノ弦 AB ノ中點ヲ通ル弦ヲ CD トシ, A, B ニ於ケル切線ノ交點ヲ P トスレバ四邊形 PCOD ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得。

4. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ノ中點 D ヲ通リ BC ニ垂直ナル直線ガ AB, AC 又ハ其延長トノ交點ヲ E, F

ドスレバ　$\overline{AD}^2 = DE.DF$

5. 二邊ノ和ガ定線分 a ニ等シク面積ガ定正方形 K^2 ニ等シイ矩形ヲ作リナサイ。

6. 二邊ノ差ガ定線分 a ニ等シク,面積ガ定正方形 K^2 ニ等シイ矩形ヲ作レ。

7. 二定點ヲ通リ且定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

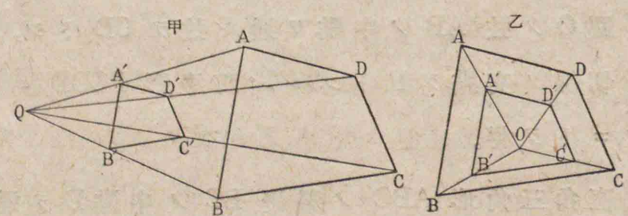
40. 相似多角形

問 1. 二ツノ相似多角形(例ヘバ五角形)ヲ對應頂點カラ出ル對角線デ同數ノ三角形ニ分ケルト是等ノ三角形ハ夫々相似デアル。

問 2. 與ヘラレタル線分 AB ヲ一邊トシ與ヘラレタル五角形 $A'B'C'D'E'$ ニ相似ナル五角形ヲ畫キナサイ。但 AB ハ $A'B'$ ノ對應邊ニナルモノトスル。

定理一六　多角形ノ總テノ頂點ヲ一點ニ結ブ線分ヲ相等シキ比ニ内分スル點ヲ順次ニ結付ケテ生ズル多角形ハ原多角形ニ相似デアル。

題意　多角形例ヘバ四角形 ABCD ノ總テノ頂點ヲ一點 O ニ結ブ線分 OA, OB, OC, OD ヲ $m:n$ ニ内分スル點ヲ夫々 A', B', C', D' トスレバ　$A'B'C'D' \backsim ABCD$



第 120 圖

證明　A', B' ハ $\triangle OAB$ ノ二邊ヲ相等シキ比ニ内分スル點デアルカラ　$A'B' \parallel AB$

同様ニ　$B'C' \parallel BC$　$C'D' \parallel CD$　$D'A' \parallel DA$

ヨリテ $A'B'C'D'$ ト ABCD トハ等角デアル。

次ニ $A'B' \parallel AB$ デアルカラ $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$ ヨリテ

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} \qquad \text{同様ニ} \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB}$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

同様ニシテ等角多角形 $A'B'C'D'$, ABCD ノ對應邊ノ比ハ皆等シイコトヲ證明スルコトガ出來ル。

$\therefore$ $A'B'C'D' \backsim ABCD$

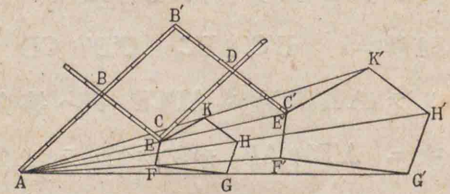
系　多角形ノ總テノ頂點ヲ一點 (O) ニ結ブ線分ヲ定比ニ外分スル點ヲ順次結付ケテ生ズル多角形ハ原多角形ニ相似デアル。

【注意 1】 前頁ノ圖ニ於テ O ヲ相似多角形 ABCD, $A'B'C'D'$ ノ**相似ノ中心**トイフ。

【注意 2】 前頁ノ圖ニ於テ多角形 $A'B'C'D'$ ト多角形 ABCD トノ一方ハ他ヲ縮小,又ハ擴大シタモノデ,モシ $A'B'C'D'$ ト ABCD トノ相似ノ比ガ $1:2$ ナラバ $A'B'C'D'$ ハ ABCD ヲ $\frac{1}{2}$ ニ縮小シタモノデアリ, ABCD ハ

A′B′C′D′ヲ２倍ニ擴大シタモノデアル。

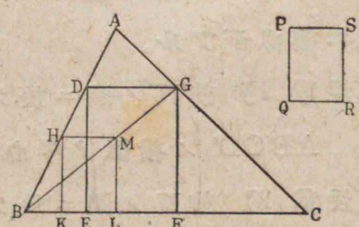
不規則ナ曲線圖形ハ之ニ近似ナル直線圖形ヲ考ヘテ近似的ニ擴大,縮小スルコトガ出來ル。實際ニ或圖形ノ縮小圖,擴大圖ヲ畫クニハ原圖ノ上ニ透明ナル方眼紙ヲ固定シ他ノ方眼紙上ニ原圖ノ對應點ヲ畫キ之ヲ基礎ニシテ仕上ゲルカ或ハ上ニ圖示スルぱんとぐらふ (Pantograph) ヲ用フルノデアル。



第 121 圖

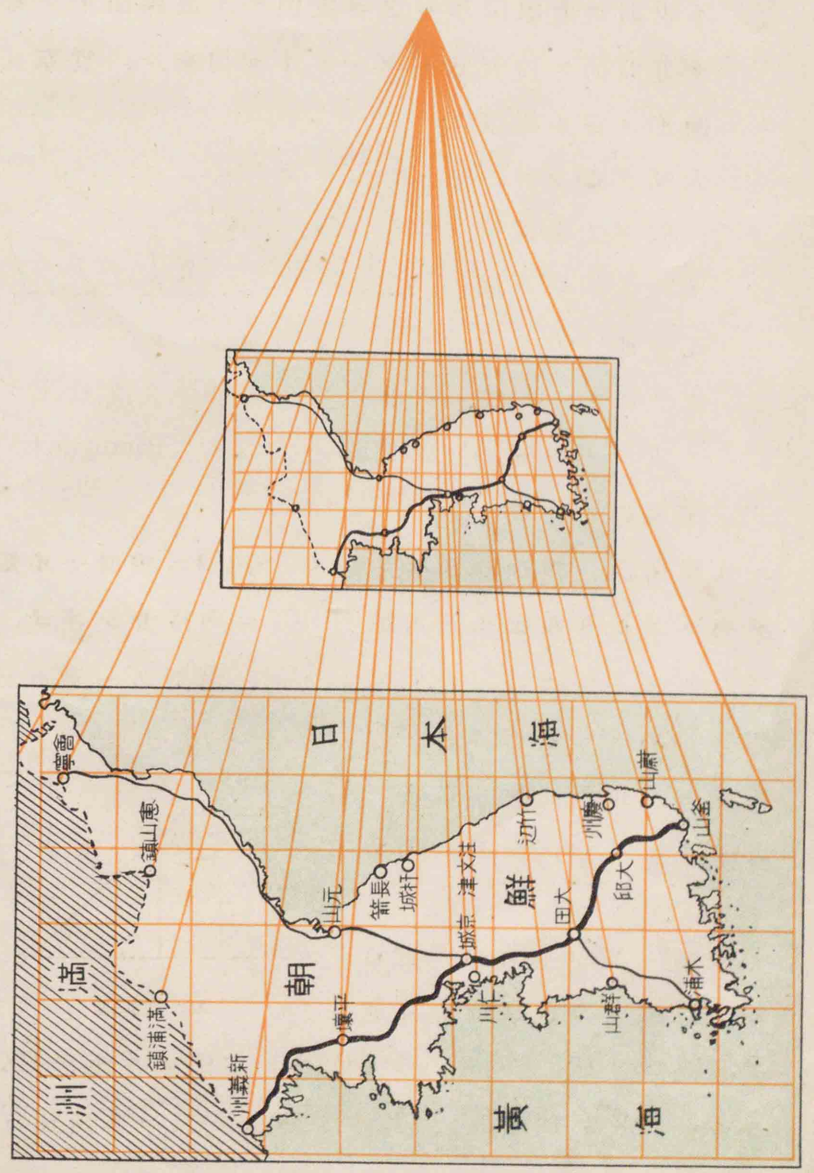
作圖題四　與ヘラレタル矩形(PQRS)ニ相似ナル矩形ヲ與ヘラレタル鋭角三角形(ABC)ニ内接セシメヨ。

三角形ニ内接スル矩形トイフノハ矩形ノ一邊ハ三角形ノ一邊上ニ矩形ノ他ノ二頂點ハ三角形ノ他ノ二邊ノ各ノ上ニ一ツヅツアル矩形ノコトデアル。



第 122 圖

作圖　AB上ノ任意ノ點HヨリBCニ垂線ヲ下シ其足ヲKトス。HKヲ一邊トシPQRSニ相似ナル矩形HKLMヲ作リ(BKノ延長上ニKLヲトル)BM又ハ其延長トAC



トノ交點ヲGトス。Gヨリ BC ニ垂線ヲ下シ其足ヲ F トシ, G ヲ通リ CB ニ平行ナル直線ヲ引キ AB トノ交點ヲ D トスル。D ヨリ BC ニ垂線ヲ下シ其足ヲ E トスレバ DEFG ハ所要ノ矩形ナリ。

證明　D, E, F, G ハ矩形 HKLM ノ頂點ヲ一點 B ニ結ブ線分ヲ相等シキ比ニ内分又ハ外分スル點デアル。

故ニ定理一六ニヨリテ　　DEFG ∽ HKLM

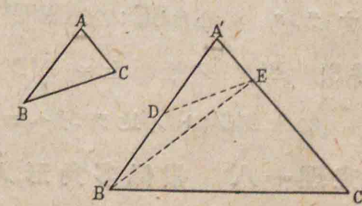
ソウシテ　HKLM ∽ PQRS　∴ DEFG ∽ PQRS

【注意】 HK ヲ PQ ノ對應邊トスルカ又ハ QR ノ對應邊トスルカ或ハ矩形ノ一邊ガ AB 上ニアル場合 AC 上ニアル場合等ニヨツテ六ツノ場合ガアル。上ニハ其中ノ一ツヲ畫イタノデアル。

問3.　與ヘラレタル三角形ニ正方形ヲ内接セシメナサイ。

41. 相似多角形ノ面積ノ比

定理一七　三角形 (ABC) ノ一角 (∠A) ガ他ノ三角形 (A′B′C′) ノ一角 (∠A′) ニ等シイナラバ兩三角形ノ面積ノ比ハコノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シイ。



第 123 圖

證明　A′B′ 又ハ其延長上ニ AB ニ等シク A′D ヲ, A′C′ 又ハ其延長上ニ AC ニ等シ

ク A'E ヲトル。

$$\frac{\triangle A'DE}{\triangle A'B'E}=\frac{A'D}{A'B'}\qquad \frac{\triangle A'B'E}{\triangle A'B'C'}=\frac{A'E}{A'C'}$$

邊々掛ケ合ハスト

$$\frac{\triangle A'DE}{\triangle A'B'E}\times\frac{\triangle A'B'E}{\triangle A'B'C'}=\frac{A'D}{A'B'}\times\frac{A'E}{A'C'}$$

即 $$\frac{\triangle A'DE}{\triangle A'B'C'}=\frac{A'D.A'E}{A'B'.A'C'}$$

トコロガ $\triangle A'DE\equiv\triangle ABC$ $A'D=AB$ $A'E=AC$ デアルカラ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$$

系 相似三角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

問 1. $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC 上ニ夫々 D, E ヲトル。$AD:DB=CE:EA=1:2$ ナルトキ $\triangle ADE:\triangle ABC$ ノ値ヲ求メナサイ。

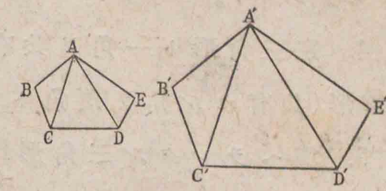
問 2. $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ $\angle A$ ト $\angle A'$ トガ補角ナラバ $\triangle ABC:\triangle A'B'C'=AB.AC:A'B'.A'C'$

手引 $B'A'$ ノ延長上ニ $A'D'$ ヲ $B'A'$ ニ等シクトリ $\triangle ABC$ ト $\triangle A'D'C'$ トノ比ヲ考ヘヨ。

定理一八 相似多角形ノ面積ノ比ハ其對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

證明 多角形例ヘバ五角形 A'B'C'D'E' ガ五角形

ABCDE ニ相似デアルトスル。



第 124 圖

對應頂點 A, A' カラ出ル對角線デ各ヲ三ツノ三角形ニ分ケルト116頁問1ニヨツテ

$$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC,\quad \triangle A'C'D'\backsim\triangle ACD,$$
$$\triangle A'D'E'\backsim\triangle ADE$$

$$\therefore\ \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{\overline{A'B'}^2}{AB^2}\qquad \frac{\triangle A'C'D'}{\triangle ACD}=\frac{\overline{C'D'}^2}{CD^2}=\frac{\overline{A'B'}^2}{AB^2}\,;$$

$$\frac{\triangle A'D'E'}{\triangle ADE}=\frac{\overline{D'E'}^2}{DE^2}=\frac{\overline{A'B'}^2}{AB^2}$$

定理七ニヨツテ

$$\frac{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\triangle A'D'E'}{\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE}=\frac{\overline{A'B'}^2}{AB^2}$$

即 $A'B'C'D'E':ABCDE=\overline{A'B'}^2:AB^2$

問 題

1. 相似多角形ノ周圍ノ比ハ其相似ノ比ニ等シイ。

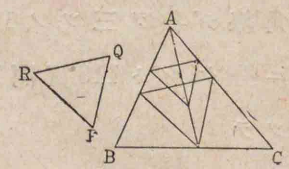
2. 二ツノ相似三角形ノ對應邊ガ平行ナル樣ニ置ケバ對應頂點ヲ結ブ三直線(延長ヲ含ム)ハ平行ナルカ又ハ一點ニ會ス。

3. $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々 D, E, F ヲトル。$BD:DC=CE:EA=AF:FB=2:3$ ナルトキ $\triangle DEF:\triangle ABC$

ヲ求メナサイ。

4. 定三角形ト一角ヲ共有シ,且之ト等積ナル二等邊三角形(共有セル角ヲ頂角トスル)ヲ作レ。

5. 與ヘラレタル三角形PQRト相似ナル三角形ヲ他ノ與ヘラレタル三角形ABCニ內接セヨ。但QRノ對應邊ハQRニ平行ナラシメルモノトスル。

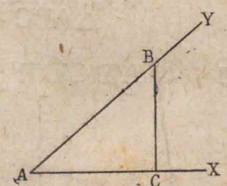


第 125 圖

6. 定角XOYノ內ニアル定點Pヲ通リ,コノ角ノ二邊ニ切スル圓ヲ畫ケ。

42. 正弦,餘弦

銳角XAYノ一邊上ノ點Bカラ他ノ邊ニ下シタ垂線ノ足ヲCトスレバ△ABCハ直角三角形デABハ其斜邊デアル。今BCヲ垂線,ACヲ底邊トイフコトニシテ垂線ノ斜邊ニ對スル比ノ値卽 $\frac{BC}{AB}$ ヲ∠Aノ**正弦**トイツテ之ヲ $\sin A$ デ表ハシ,底邊ノ斜邊ニ對スル比ノ値卽 $\frac{AC}{AB}$ ヲ∠Aノ**餘弦**トイツテ之ヲ $\cos A$ デ表ハス。卽



第 126 圖

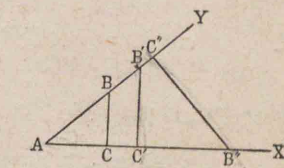
$$\sin A=\frac{BC}{AB},\qquad \cos A=\frac{AC}{AB}$$

例ヘバ垂線BCガ3 cm,底邊ACガ4 cmナラバぴたご

らすノ定理ニヨツテ斜邊ABハ $\sqrt{3^2+4^2}\,cm$ 卽5 cmデアルカラ

$$\sin A=\frac{3}{5},\qquad \cos A=\frac{4}{5}$$

正弦餘弦ノ値ハ角ノ大サニヨツテ定マルモノデ前圖B又ハCノ位置ニ關係ガナイコトハ次ノ樣ニシテワカル。



第 127 圖

∠XAYノ一邊上ニB, B′, B″等ヲトリ是等ノ點カラ他ノ邊ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々C, C′, C″等トスレバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \backsim \triangle AB''C''\cdots\cdots$$

デアルカラ

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots,$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}=\cdots\cdots$$

問 1. △ABCニ於テ∠C=90°, AB=13 cm, BC=12 cm ナラバ $\sin A$, $\cos A$ ハ各何程カ。

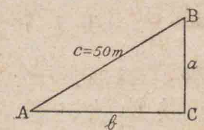
問 2. $\sin A$ ガ $\frac{1}{2}$ デアル角Aヲ作圖セヨ。

【注意】 以下△ABCニ於テハ∠A, ∠B, ∠Cノ對邊ノ長サヲ a, b, c デ表ハシ,△ABCガ直角三角形ナラバ∠Cガ直角ナルモノトスル。

例 1. 斜邊ガ50 mデ,一角ガ38°デアル直角三角形ノ他ノ二邊ノ長サ各何程カ。

解　直角三角形 ABC ニ於テ　$\angle A = 38^\circ$　$c = 50\,(m)$　トスル。

$$\sin A = \sin 38^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$



第 128 圖

$$\therefore\ a = c \sin 38^\circ$$

又　$$\cos A = \cos 38^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \qquad \therefore\ b = c \cos 38^\circ$$

卷末ノ表ヨリ　$\sin 38^\circ = 0.6157,\quad \cos 38^\circ = 0.7880$

$$\therefore\ a = 50 \times 0.6157 = 30.785$$

$$b = 50 \times 0.7880 = 39{,}40$$

答　$30.8\,m,\ \ 39.4\,m$

前例ニヨリ一般ニ直角三角形 ABC ニ於テハ

$BC = AB \sin A$　卽　$\boldsymbol{a = c \sin A}$

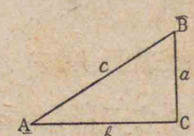
$AC = AB \cos A$　卽　$\boldsymbol{b = c \cos A}$

デアルコトガワカル。故ニ直角三角形ノ斜邊ト一鋭角ノ正弦,餘弦トヲ知レバ他ノ邊ノ長サヲ算出スルコトガ出來ル。

例 2.　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$* ヲ證明セヨ。

解　直角三角形 ABC ニ於テ

$$\sin A = \frac{a}{c},\qquad \cos A = \frac{b}{c}$$



第 129 圖

$$\therefore\ \sin^2 A + \cos^2 A = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

トコロガぴたごらすノ定理ニヨツテ

* $\sin^2 A$ ハ,$(\sin A)^2$ ヲ,$\cos^2 A$ ハ $(\cos A)^2$ ヲ略記シタノデアル。

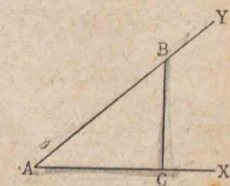
$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \therefore\ \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

問 3.　上ノ結果ヲ利用シテ $\sin A = \dfrac{3}{5}$ ノトキニ $\cos A$ ノ値ヲ算出シナサイ。又 $\cos A = \dfrac{5}{13}$ ナラバ $\sin A$ ハ何程デスカ。

43. 正切,餘切

前ノ樣ニ $\angle XAY$ ノ一邊上ノ點 B カラ他ノ邊ニ下シタ垂線ノ足ヲ C トスル。

垂線ノ底邊ニ對スル比ノ値卽 $\dfrac{BC}{AC}$ ヲ $\angle A$ ノ正切トイヒ之ヲ $\tan A$ デ表ハシ,底邊ノ垂線ニ對スル比ノ値卽 $\dfrac{AC}{BC}$ ヲ $\angle A$ ノ**餘切**トイツテ之ヲ $\cot A$ デ表ハス。

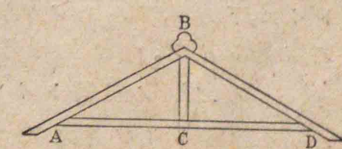


第 132 圖

卽　$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b},\qquad \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

正切,餘切ノ値モ亦角ノ大サニヨツテ定マルノデアツテ B 又ハ C ノ位置ニ關係ガナイコトハ前節ニ於ケルト同樣ニシテ證明スルコトガ出來ル。

例　屋根ノ勾配ハ通常屋根ノ面ト水平面トノナス角ノ正切デ表ハサレル。圖ニ於テ　$\angle BAC = 22^\circ$,$AD = 10\,m$ ナラバ BC ハ幾 m デスカ。



第 133 圖

解　$$\tan A = \tan 22^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore\ BC = AC \tan 22^\circ$$

トコロガ $AC=\frac{10}{2}=5$　又表ヨリ　$\tan 22°=0.4040$

$\therefore\ BC=5\times 0.4040=2.02$　　答　$2.02\,m$

一般ニ直角三角形 ABC ニ於テハ

$BC=AC\tan A$　即　$a=b\tan A$

$AC=BC\cot A$　即　$b=a\cot A$

又定義ニヨツテ或角ノ正切ト餘切トハ互ニ逆數ヲナスコトモ明カデアル。之ヲ等式デ示スト

$$\tan A.\cot A=1,\quad \tan A=\frac{1}{\cot A},\quad \cot A=\frac{1}{\tan A}$$

問 1. 平地ニ直立シテキル塔ノ基底カラ 60 m 離レタ地點デ塔ノ仰角*ヲ測ツタトコロガ 16° デアツタ。塔ノ高サ幾 m デスカ。

問 2. $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ 及 $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$ ヲ證明セヨ。

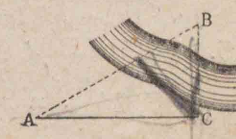
既ニ述ベタ様ニ或角ノ正弦,餘弦,正切,餘切ハ角ノ大サニヨツテ定マルモノデ,角ノ大サガ變ハレバ之ニツレテ變化スル。故ニ正弦,餘弦,正切,餘切ハ何レモ角ノ函數デアル。コノ四ツノ函數ヲ總稱シテ**三角函數****トイフ。

* 上方ニアルモノヲ望ムトキ視線ト水平面トノナス角ヲ**仰角**トイヒ,下方ニアルモノヲ望ムトキ視線ト水平面トノナス角ヲ**俯角**トイフ。

** $\frac{1}{\cos A}$ ヲ ∠A ノ**正割**トイツテ之ヲ $\sec A$ デ表ハシ, $\frac{1}{\sin A}$ ヲ ∠A ノ**餘割**トイツテ之ヲ $\operatorname{cosec} A$ デ表ハス。通常三角函數トイフノハ正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割ノ六ツノ總稱デアルガ正割,餘割ヲ使用スルコトハ稀デアル。

問　　題

1. 河岸ノ C ト其對岸ニアル B トノ距離ヲ測ル爲ニ C カラ CB ニ垂直ノ方向ニ 240 m 歩イテ A ニ達シタ。∠A = 35°30′ ナラバ BC ハ何程カ。



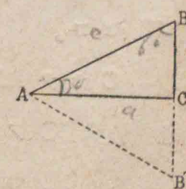
第 132 圖

手引　$\tan 35°30'$ ハ $\tan 35°$ ト $\tan 36°$ トノ平均ト見做スコトガ出來ル。

2. 直線狀ノ海岸 AB カラ沖ノ離レ島ニアル燈臺 C ヲ望ミタルニ ∠CAB = 32°, ∠CBA = 42°30′ デアツタ。AB ガ 800 m ナラバ燈臺ト海岸トノ距離ハ何程カ。

手引　C カラ AB ニ至ル垂線ノ足ヲ D トシ, CD ヲ未知數トスル方程式ヲ作リナサイ。

3. 表ニヨラナイデ 30°, 45°, 60° ノ三角函數ノ値ヲ求メナサイ。



第 133 圖

手引　30° ノ三角函數ノ値ヲ求メルニハ ∠A ガ 30° ナル直角三角形 ABC ニ於テ BC ノ延長上ニ BC ニ等シク CB′ ヲトリ △ABB′ ハ正三角形ナルコトヲ利用セヨ。又 60° ノ三角函數ノ値ヲ求メルニハ ∠B = 60° ナルコトヲ利用セヨ。∠B ヲ考ヘルトキニハ前ニ垂線デアツタ BC ハ底邊ニナリ,前ニ底邊デアツタ AC ハ垂線ニナル。

4. 直角三角形 ABC ニ於テ ∠A ト ∠B トガ互ニ餘角ナルコトニ注意シテ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\sin A=\cos(90^\circ-A),\quad \cos A=\sin(90^\circ-A)$$

$$\tan A=\cot(90^\circ-A),\quad \cot A=\tan(90^\circ-A)$$

5. 線分 AB ノ兩端カラ直線 XY ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 A′, B′ トスル。AB 又ハ其延長ト XY トノナス鋭角ヲ a° トスレバ $A'B'=AB\cos a^\circ$ ナルコトヲ證明セヨ。

【注意】 A′B′ ヲ XY ニ投ズル AB ノ**正射影**トイフ。

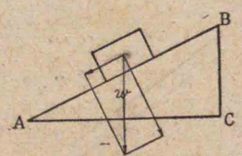
6. 半徑 r ナル圓ニ内接スル正五角形ノ一邊ノ長サハ $2r\sin 36^\circ$ ニシテ正 n 邊形ノ一邊ノ長サハ $2r\sin\frac{180^\circ}{n}$ ナルコトヲ證明セヨ。

7. △ABC ノ面積ハ ∠A ガ鋭角ナラバ $\frac{1}{2}bc\sin A$ ニ, ∠A ガ鈍角ナラバ $\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)$ ニ, ∠A ガ直角ナラバ $\frac{1}{2}bc$ ニ等シイコトヲ證明シ,之ヲ利用シテ定理一七ヲ再ビ證明セヨ。

手引 C カラ AB ニ垂線ヲ下シテ考ヘヨ。

8. △ABC ノ外接圓ノ直徑ハ ∠A ガ鋭角ナラバ $\frac{a}{\sin A}$ ニ等シイコトヲ證明セヨ。∠A ガ直角又ハ鈍角ナルトキハ如何。

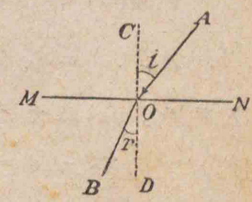
9. 水平面ト ∠A ヲナス斜面 AB 上ニ重サ w 瓩ノ物體ヲ押上グルニハ $w\sin A$ 瓩以上ノ力ヲ要スルコトヲ證明セヨ。



第 134 圖

手引 下方ニ向フ w ヲ對角線トシ,斜面ニ平行ナル邊ト,斜面ニ垂直ナル邊トヲ有スル矩形ヲ作ルト斜面ニ平行ナル邊ハ物體ガ斜面ニ沿フテ下ル力ヲ表ハス。

10. 光線ガ甲物質中ヨリ乙物質中ニ入ルトキノ屈折率トイフノハ投射光線 AO, 屈折光線 OB ガ投射點ニ於テ兩物質ノ境界面 MN ニ立テタル垂線 COD トナス角ノ正弦ノ比ノコトデアル。ヨツテ屈折率ヲ n トシ, $\angle AOC=i$ $\angle BOD=r$ トスレバ $n=\frac{\sin i}{\sin r}$ デアル。空氣中ヨリ水中ニ入ルトキノ屈折率ヲ $\frac{4}{3}$ トスレバ $i=30^\circ$ ナルトキ r ハ幾度デスカ。



第 175 圖

11. $y=2x$ ノぐらふヲ畫キ,コノぐらふノ x 軸ノ上方ニアル部分ト x 軸ノ正ノ方向トナス角ノ正切ハ 2 デアルコトヲ驗シナサイ。$y=2x+3$ ナラバ如何。

12. $y=x\tan 60^\circ$ ノぐらふデアル直線ト x 軸トノナス角ハ幾度デスカ。

雜題第四

1. △ABC ニ於テ $AB^2+AC^2=BC^2$ ナラバ ∠A＝R∠ ナルコトヲ證明セヨ。

2. 圓ニ内接スル四角形 ABCD ノ對角線ガ直交スレバ一組ノ對邊ノ平方ノ和ハ直徑ノ平方ニ等シイ。

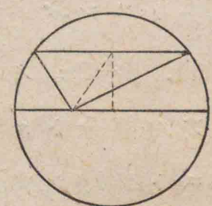
3. AD ∥ BC ナル四邊形 ABCD ニ於テ CD ノ中點ヲ E トスレバ $\triangle EAB = \frac{1}{2}ABCD$

4. 三角形ノ面積ハ其内切圓ノ半徑ト周圍トノ包ム矩形ノ面積ノ半分ニ等シイ。

5. △ABC ニ於テ BC = 9 *cm*, AB = 7 *cm*, AC = 5 *cm* ナリトスル。(1) A カラ出ル中線ノ長サ, (2) ∠A ノ二等分線ガ BC ヲ内分スル二ツノ分ノ長サ (3) A ニ於ケル外角ノ二等分線ガ BC ヲ外分スル二ツノ分ノ長サヲ計算セヨ。

6. 三角形ノ三中線ノ平方ノ和ハ四倍ハ三邊ノ平方ノ和ノ三倍ニ等シ。

7. 圓 O ニ於テ定直徑 AB ニ平行ナル任意ノ弦ヲ CD トシ, AB 上ノ定點ヲ P トスレバ $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ ハ CD ノ位置ニ拘ハラズ一定ナルコトヲ證明シナサイ。



第 135 圖

8. △ABC ニ於テ BC ニ平行ナル直線ガ AB, AC ニ交ハル點ヲ夫々 F, E トスル。FE ハ中線 AD ニヨリテ二等分セラレルコトヲ證明セヨ。

9. △ABC ニ於テ ∠B, ∠C ノ二等分線ガ AC, AB ニ交ハル點ヲ夫々 D, E トスル。モシ ED ∥ BC ナラバ

$$AB = AC$$

10. ∠XOY ノ頂點 O ヲ通ル定直線上ノ任意ノ點 P ヨリ OX, OY ニ至ル距離ノ比ハ一定デアル。

11. 圓ノ弧 AB 上ノ點 P ヨリ弦 AB ニ下セル垂線ノ足ヲ C トシ A, B ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ足ヲ D, E トスレバ $\overline{PC}^2 = PD.PE$

12. 相交ハル二圓ノ共通弦ノ延長ハ, コノ二圓ノ共通切線ノ切點間ノ部分ヲ二等分ス。

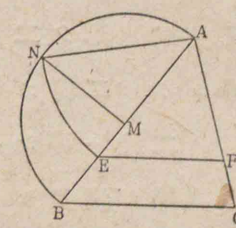
13. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線ガ BC ト交ハル點ヲ D, 外接圓周ト交ハル點ヲ E トスレバ

$$AB.AC = AD.AE = \overline{AD}^2 + BD.DC$$

14. 與ヘラレタル三角形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

15. 正三角形ト之ニ内接スル正方形トノ面積トノ比ヲ求メヨ。

16. △ABC ニ於テ AB ノ中點 M ヲ通ル AB ノ垂線ト AB ヲ直徑トスル圓周トノ交點ノ一ツヲ N トス。AB 上ニ AN ニ等シク AE ヲトリ, E ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト AC トノ交點ヲ F トスレバ



第 137 圖

$$\triangle AEF = \frac{1}{2}\triangle ABC$$

17. 與ヘラレタル △ABC ヲ BC ニ平行ナル直線ニテ定比 $m:n$ ニ分ケヨ。

18. 定線分 AB ヲ C ニテ内分シ AC : CB ヲ二ツノ與ヘラレタル正方形ノ比 $h^2 : k^2$ ニ等シカラシメヨ。

附錄第一

補遺

1. 必要ト十分

二等邊三角形ノ二ツノ角ハ等シイ。故ニ或三角形ノ二邊ガ等シイ爲ニハ是非トモ其二角ガ等シクナケレバナラヌノデアル。コノ樣ニ或事柄ガ成立ツ爲ニ是非トモ滿足セラレネバナラヌ條件ヲ,コノ事柄ガ成立ツ爲ニ**必要ナル條件**トイフ。

例ヘバ前例デハ「二角ガ等シイ」トイフ條件ハコノ三角形ノ二邊ガ等シイ爲ニ必要ナル條件デアル。

又或三角形ノ二角ガ等シイナラバ,コノ三角形ノ二邊ガ等シイ。二角ガ等シクサヘアレバ,ソレダケデコノ三角形ノ二邊ハ等シイト斷言スルコトガ出來ル。コノ樣ニ或條件ガ滿足セラレサヘスレバ他ニ何等ノ條件ヲ具ヘナクトモ或事柄ガ成立ツナラバ,初ノ條件ハコノ事柄ガ成立ツ爲ニ**十分ナル條件**トイフ。

前例デハ「二角ガ等シイ」トイフ條件ハコノ三角形ノ二邊ガ等シイ爲ニ十分ナル條件デアル。

菱形ノ對角線ハ直交スルカラ,或四邊形ガ菱形ナル爲ニ對角線ノ直交スルコトガ必要ナル條件デアル。

サレド對角線ガ直交スルダケデハコノ四邊形ハ菱形ナリト斷定スル譯ニハユカヌ。故ニ「對角線ガ直交スル」コトハコノ四邊形ガ菱形ナル爲ニ必要ナル條件デハアルガ十分ナル條件デハナイ。

正方形ハ菱形デアルカラ或四邊形ガ菱形デアル爲ニコノ四邊形ハ正方形デアルコトハ十分ナル條件デアル。サレド菱形ハ正方形ニハ限ラナイ。故ニ「正方形デアル」トイフ條件ハコノ四邊形ガ菱形デアル爲ニ十分ナ條件デハアルガ必要ナ條件デハナイ。

次ニ二ツノ數 a ト b トノ積卽 ab ガ 0 ニナル爲ニ $a=0$ ナルコトハ十分デアルガ必要デハナイ。$b=0$ ナルコトモ同樣デアル。a, b ノ中少クモ一ツガ 0 ナルコトハ必要ニシテ且十分ナル條件デアル。

問 1. 次ノ條件ハ必要デアルカ十分デアルカヲ判定セヨ。

(1) 四邊形ノ對角線ガ等シイコトハ,コノ四邊形ガ矩形ナル爲ニ。

(2) 三角形ガ二等邊デアル爲ニ,一角ノ二等分線ガ對邊ニ垂直ナルコト。

(3) 四邊形ガ圓ニ內接スル爲ニ,一組ノ對角ガ補角デアルコト。

(4) 二ツノ實數(未ダ虛數ヲ學バナケレバ唯ノ數ト思ッテヨロシイ)a, b ノ積ガ負ナル爲ニ a ト b トガ異符號

ノ數デアルコト。

(5) 整數ノ一ノ位ノ數ガ0デアルコトハ,其數ガ5ノ倍數デアル爲ニ。

或條件ガ或事柄ノ成立ツ爲ニ必要ナル條件デアルコトヲ證明スルニハ,ソノ事柄ガ成立ツナラバ當然其條件ヲ具ヘルコトヲ證明スレバヨロシイ。又十分ナル條件デアルコトヲ證明スルニハ其條件ガ滿足セラレルナラバ其事柄ガ成立ツコトヲ證明スレバヨロシイノデアル。

例ヘバ或四邊形ガ平行四邊形デアル爲ニ二組ノ對角ガ夫々等シイコトガ必要ニシテ且十分デアルコトヲ證明スルニハ

1° 平行四邊形ノ二組ノ對角ハ夫々等シイ(必要)

2° 二組ノ對角ガ夫々等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル(十分)

コトヲ證明スレバヨロシイノデアル。

問2. 或四邊形ガ平行四邊形デアル爲ニ對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルコトガ必要ニシテ且十分ナルコトヲ證明セヨ。

問3. 次ノ事柄ガ成立ツ爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ヲ求メヨ。

(1) 圓周ト直線トガ交ハル。

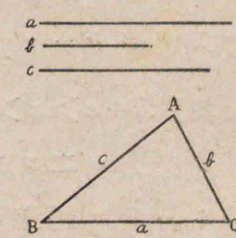
(2) 圓周ト圓周トガ交ハル。

(3) a, b ガ二ツノ實數ナルトキ $a^2+b^2=0$

2. 作圖題ノ吟味

作圖題ヲ解クニハ先ヅ題意ヲ明カニ理解シナケレバナラヌコトハ勿論デアル。次ニ解析ニヨツテ作圖ノ方法ヲ推定シ,作圖法ヲ述ベ,其方法ガ正シイコト(出來タ圖形ガ題意ニ適スルコト)ヲ證明スルノデアルガ,以上デ作圖題ノ解答ガ完結シタノデハナイ。最後ニ如何ナル場合ニ作圖ガ可能デアルカ不能デアルカ,可能ナル場合ニハ題意ニ適スル圖形ガ幾ツアルカ等ヲ調ベネバナラヌ。コノ最後ノ部分ヲ作圖題ノ**吟味**トイフ。

例 1. 三邊ガ夫々a, b, cニ等シイ三角形ヲ作ルコト。



第 138 圖

解析 三邊ガ夫々a, b, cニ等シイ三角形ガ出來タモノトシテ之ヲ△ABCトスル。BCヲ定メタ以上ハ AB$=c$, AC$=b$ デアルカラAハBヲ中心トシcヲ半徑トスル圓周ト,Cヲ中心トシbヲ半徑トスル圓周トノ兩方ノ上ニナケレバナラヌ。ソコデ次ノ作圖法ガ推定セラレル。

作圖 任意ノ位置ニaニ等シイ線分BCヲ引キ,Bヲ中心トシcヲ半徑トスル圓周ト,Cヲ中心トシbヲ半徑トスル圓周トヲ畫キ其交點ノ一ツヲAトスル。

△ABC ハ求メル三角形デアル。

證明 作圖ニヨツテ △ABC ノ三邊ハ夫々 a, b, c ニ等シイコトハ明カデアル。

吟味 BC ヲ引クコトハ常ニ可能デアル。作圖ヲ完成シ得ル爲ニハ點 A ノ位置ヲ定メルコトガ出來テ且 A ガ BC 外ニナケレバナラヌ。故ニ圓周 B ト圓周 C トガ交ハルコトガ必要デアル。逆ニ二圓周ガ交ハレバ明カニ作圖ハ可能デアル。

トコロガ二圓周ガ交ハル爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ハ其中心間ノ距離ガ半徑ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大ナルコトデアルカラ $b+c>a>b\sim c$ ナルトキニ限ツテ作圖ハ可能デアリ且コノ場合ニハ解答ハ唯一ツデアル。

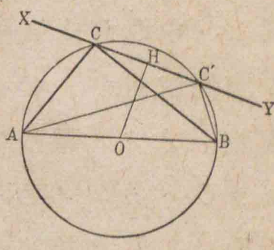
【注意】 $b+c>a>b\sim c$ ガ滿足セラレタトキニ二圓周ノ交點ハ二ツアル。之ヲ A, A′ トセバ △ABC ト △A′BC トハ共ニ題意ニ適スルカラ解答ハ二ツアル様ニ見エル。併シ △ABC ≡ △A′BC デアルカラ二ツノ異ナル三角形ガ出來タトハ考ヘナイノデアル。モシ圖形ノ一部分デモ位置ヲ指定セラレテアル場合ニハタトヒ合同圖形デアツテモ位置ノ異ナル以上ハ別ノ圖形ト考ヘル。故ニ例1ト殆ド同一デアル「與ヘラレタル線分 BC ヲ一邊トシ他ノ二邊ガ夫々與ヘラレタル線分 b, c ニ等シイ三角形ヲ作レ」ニハ前

ト同ジ方法デ作圖シテ得ル △ABC ト △A′BC トノ二ツノ解答ガアル。

例 2. 定直線 (XY) 上ニ一點ヲ求メ, コノ點ヲ二定點 (A, B) ニ結ブ二直線ノナス角*ガ直角ニ等シクナル様ニセヨ。

解析 所要ノ點ヲ求メ得タモノトシテ之ヲ C トスル。∠ACB = ∠R デアルカラ C ハ AB ヲ直徑トスル圓周上ニアル。

作圖 AB ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ XY トノ交點ヲ C, C′ トスル。C, C′ ハ共ニ題意ニ適スル點デアル。



第 139 圖

證明 點 C ハ XY 上ニアツテ且コノ點ヲ A, B ニ結ブ二直線ノナス角 ACB ハ半圓ノ角デアルカラ直角デアル。故ニ C ハ題意ニ適スル點デアル。

同様ニ C′ モ亦題意ニ適スル點デアル。

吟味 AB ヲ直徑トスル圓周ト直線 XY トガ出會フコトガ所要ノ點ヲ求メ得ル爲ニ必要ニシテ且十分ナル條件デアル。サウシテ圓周ト直線トノ出會フ點ノ數ガ解答ノ數ニ一致スルコトガ明カデアル。

AB ノ中點 O カラ XY ニ下シタ垂線ノ足ヲ H トスレバ

* コノ角ヲコノ點ニ於テ線分 AB ヲ見ル角トイフコトガアル。

1°　OH $<\dfrac{AB}{2}$ ナルトキ圓周ト YY トハ交ハリ解答ハ二ツ。

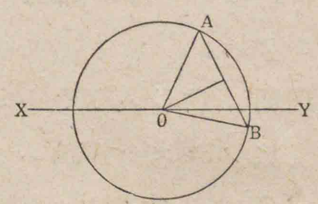
2°　OH $=\dfrac{AB}{2}$ ナルトキ圓周ト XY トハ切シ解答ハ唯一ツ。

3°　OH $>\dfrac{AB}{2}$ ナルトキ圓周ト XY トハ出會ハズ。コノ場合ニハ作圖不能。

例 3. 中心ガ定直線(XY)上ニアツテ,二定點(A,B)ヲ通ル圓周ヲ畫キナサイ。

解析　求メル圓周ノ中心ヲOトスレバ OA＝OB デアルカラOハ AB ノ垂直二等分線上ニアル。

作圖　A,B ヲ結ビ, AB ノ垂直二等分線ヲ作リ, XY トノ交點ヲ O トスル。O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周ハ所要ノ圓周デアル。



第 140 圖

證明　コノ圓周ハ二點 A,B ヲ通リ,且其中心ハ XY 上ニアルコト明カデアル。

吟味　中心ヲ定メルコトガ出來レバ作圖ハ可能デアル。ソコデ AB ノ垂直二等分線ガ XY ニ出會フカ否カガ問題ニナル。

1°　AB ガ XY ニ垂直デナイ場合。

コノ場合ニハ AB ノ垂直二等分線ハ XY ニ交ハリ解答ハ唯一ツアル。

2°　AB ガ XY ニ垂直ナル場合。

モシ AB ノ中點ガ XY 上ニナケレバ AB ノ垂直二等分線ト XY トハ平行ニナツテ中心ヲ求メ得ラレナイ。故ニ解答ハナイ卽作圖不能。

モシ AB ノ中點ガ XY 上ニアレバ AB ノ垂直二等分線ハ XY ニ重ナリ, XY 上ノ任意ノ點ヲ中心トシ A ヲ通ル圓周ハ皆題意ニ適スル。卽コノ場合ニハ解答ハ無數ニアル。コノ樣ナ場合ニハ**不定**トイフ。

【注意】「AB ノ垂直二等分線上ニ中心ヲ有シ, A,B ヲ通ル圓周ヲ畫ケ」トイフ作圖問題ハ不定デアル。

問　　題

1. 相交ハル二圓ノ共通弦ガ定直線ニ平行ナル爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ヲ求メナサイ。

2. 定圓周上ニ三定點 A,B,C ガアル。A ヲ一端トシテ定長 a ニ等シイ弦ヲ引キコノ弦ガ ∠BAC 內ニアル爲ニ必要ニシテ十分ナル條件ヲ求メヨ。

3. 定圓周上ニテ二定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メナサイ。

4. 定點ヲ通リ定平行二直線ノ間ニ夾マレル部分ガ定線分ニ等シイ直線ヲ引キナサイ。

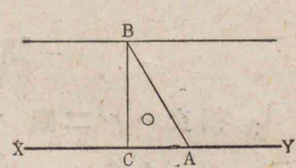
5. 底邊高サ及外接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ畫キナサイ。

6. 二定點ヲ通ル圓周ヲ畫キ,コノ圓ト定圓トノ共通弦ガ定直線ニ平行ナル様ニセヨ。

3. 軌跡

兩脚器ノ兩脚端ノ距離ヲ定線分rニ等シクシテ,一脚端ヲ定點Oニ固定シ他ノ脚端Pヲ廻轉スレバPハ一ツノ圓周ヲ畫ク。此圓周ハOカラノ距離ガrニ等シイ點ノミヲ含ミ且Oカラrニ等シイ距離ニアル點ヲ殘ラズ含ム。

又∠Cガ直角デ一邊BCノ長サガlナル三角定規ABCノ一邊ACヲ定直線XYニ沿ヒテ動カストキハ他ノ一邊BCノ端點Bハ,XYニ平行ナル直線ヲ畫ク。コノ直線ハXYノ一方ノ側ニ於テXYヨリノ距離ガlニ等シイ點全部ヲ含ミ,且ツコノ様ナ點ノミヲ含ム圖形デアル。



第141圖

定義 或條件ニ適スル點ヲ殘ラズ含ミ,且ツコノ様ナ點ノミヲ含ム圖形ヲ,**コノ條件ニ適スル點ノ軌跡**トイフ。

コノ定義ニヨリ上記ノ例ヲ次ノ如クニ述ベルコトガ出來ル。

定理一 定點ヨリノ距離ガ定線分ニ等シイ點ノ軌跡ハコノ定點ヲ中心トシ,定線分ニ等シイ半徑ヲ有スル圓周デアル。

定理二 定直線ノ一方ノ側ニ於テコノ直線ヨリノ距離ガ定線分ニ等シイ點ノ軌跡ハ,初メノ直線ニ平行ナル直線デアル。

系 定直線ニ至ル距離ガ一定ナル點ノ軌跡ハコノ直線ノ兩側ニ於テ,コノ直線ニ平行ナル二ツノ直線デアル。

問 1. 第55頁雜題第6問及第86頁雜題第5問ヲ復習セヨ。

【注意】 xニツイテノ代數式ノぐらふ又ハx, yニツイテノ方程式ノぐらふヲ考ヘテ見ル。例ヘバx座標ガaデアル點ハ無數ニアルガ是等ノ點ハ皆$x=a$デ表ハサレル直線上ニアリ,逆ニ$x=a$デ表ハサレル直線上ノ點ノ横座標ハaデアル。故ニ定義ニヨッテ横座標ガaデアル點ノ軌跡ハ方程式$x=a$デ表ハサレル直線デアル。同様ニ$3x+2$ノぐらふハ縦座標ガ横座標ノ3倍ヨリ2單位大キイ點ノ軌跡デアル。又方程式$ax+by=c$ノぐらふハx座標ノa倍トy座標ノb倍トノ和ガc單位ニ等シイ點ノ軌跡デアル。

或圖形ガ或條件ニ適スル點ノ軌跡デアルコトヲ斷定

スルニハ定義ヨリ明カデアル樣ニ

1° 其圖形上ノ總テノ點ハ其條件ニ適スルコト。

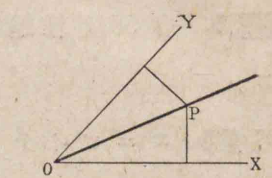
2° 其條件ニ適スル點ハ其圖形上ニアルコト。

ノ二ツヲ證明シナケレバナラヌ。2°ヲ證明スル代リニ次ノ3°ヲ證明シテモヨロシイ。

3° 其圖形外ノ點ハ其條件ニ適セザルコト。

定理三 角(XOY)ノ內ニアツテ其二邊(OX, OY)ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハコノ角ノ二等分線デアル。

證明 條件ニ適スル點ヲPトスル(即PハOX, OYヨリ等距離ニアル點)。



第142圖

33頁問3ニヨリテPハ∠XOYノ二等分線上ニアル(2°ノ證)。

次ニ∠XOYノ二等分線上ニアル點ヲP′トスレバ, P′ハ33頁問題4ニヨリテOX, OYヨリ等距離ニアル(1°ノ證)。

故ニ∠XOYノ內ニアツテOX,OYヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ∠XOYノ二等分線デアル。

系 相交二直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハコノ二直線ノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線デアル。

問2. 相交二直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メナサイ。

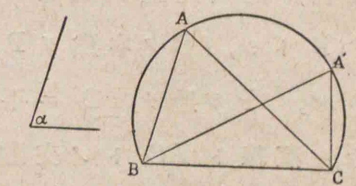
問3. 二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二定

點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。

問4. 定線分ヲ底邊トスル二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メナサイ。

定理四 定線分(BC)ヲ底邊トシ,其一方ノ側ニ立ツ三角形ノ頂角ガ定角(α)ニ等シイナラバコノ三角形ノ頂點ノ軌跡ハ,初ノ定線分ヲ弦トシ,コノ定角ヲ容レル弓形ノ弧デアル。

證明 BCヲ弦トシ∠αヲ容レル弓形ヲBCノ指定ノ側ニ畫ケバ(78頁作圖題三)ソノ弧ノ上ニアル任意ノ點Aハ條件ニ適スル(1°ノ證)。



第143圖

次ニ條件ニ適スル任意ノ點ヲA′トスレバ即△ABCト△A′BCトハBCノ同ジ側ニアツテ且∠A′=∠αナリトスレバ第三編定理五ニヨツテA′ハ$\overset{\frown}{BAC}$上ニアル(2°ノ證)。

故ニ定理ノ言フ所ハ眞デアル。

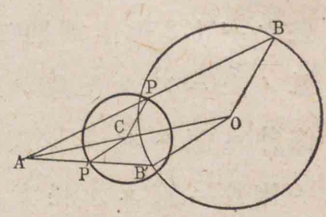
【注意】 第三編定理五ノ證明ヲ回顧スレバ2°ヲ證明スルノト3°ヲ證明スルノトハ結局同一デアルコトガワカル。

系一 底邊ノ位置ト大サ,頂角ノ大サガ一定デアル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ底邊ヲ弦トシ一定ノ頂角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル。

系二　斜邊ノ位置ト大サトガ一定ナル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ハ斜邊ヲ直徑トスル圓周デアル。

問5. 定圓ニ於テ定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メナサイ。

定理五　定點(A)ト定圓周(中心O,半徑r)上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ハ定點ト定圓ノ中心トヲ結ブ線分ノ中點ヲ中心トシ定圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周デアル。



第 144 圖

證明　定圓周上ノ任意ノ點ヲBトシ, ABノ中點ヲPトスル。 Pヲ通リBOニ平行ナル直線トAOトノ交點ヲCトスレバ, CハAOノ中點デ且 $CP=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{r}{2}$(第二編定理一四系)。

故ニPハAOノ中點Cヲ中心トシ$\dfrac{r}{2}$ヲ半徑トスル圓周上ニアル(2°ノ證)。

次ニコノ圓周上ノ任意ノ點ヲP′トシ, Oヲ通リCP′ニ平行ナル直線トAP′ノ延長トノ交點ヲB′トスレバP′ハAB′ノ中點デアツテ且

$CP'=\dfrac{1}{2}OB'$　　然ルニ　$CP'=\dfrac{r}{2}$

$\therefore\ OB'=r$

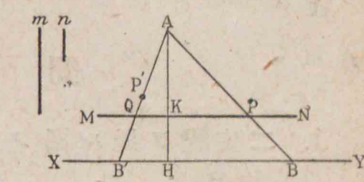
故ニB′ハ圓Oノ周上ニアル。

ヨツテP′ハAト圓Oノ周上ノ點B′トヲ結ブ線分ノ中點デアル(1°ノ證)。

故ニ定理ノ言フ所ハ眞デアル。

問6. 定點Aト定圓周上ノ點Bトヲ結ブ線分ABノ延長上ニABニ等シクBCヲトル。點Cノ軌跡ヲ求メヨ。

定理六　定點(A)ト定直線(XY)上ノ點トヲ結ブ線分ヲ定比($m:n$)ニ内分スル點ノ軌跡ハ,コノ點カラコノ直線ニ下シタ垂線(AH)ヲ定比($m:n$)ニ内分スル點(K)ヲ通リ定直線(XY)ニ平行ナル直線デアル。



第 145 圖

證明　Kヲ通リXYニ平行ナル直線ヲMNトシMN上ノ任意ノ點ヲPトスル。APノ延長ガXYニ交ル點ヲBトスレバ,

$AP:PB=AK:KH=m:n$……第四編定理一〇

卽Pハ條件ニ適スル點デアル(1°ノ證)。

次ニMN上ニナイ任意ノ點ヲP′トシAP′又ハ其延長ガMNニ交ハル點ヲQ, XYト交ハル點ヲB′トスレバ前證明ニヨツテ

$AQ:QB'=m:n$

サウシテAB′ヲ$m:n$ニ内分スル點ハ唯一ツ(103頁注意)デアルカラP′ハAB′ヲ$m:n$ニ内分シナイ。

即 MN 上ニナイ點ハ條件ニ適シナイ(3° ノ證)

上ノ證明ニヨツテAトXY上ノ點トヲ結ブ線分ヲ $m:n$ ニ内分スル點ノ軌跡ハAヨリXYニ下シタ垂線ヲ $m:n$ ニ内分スル點ヲ通リXYニ平行ナル直線デアル。

系　定點ト定直線上ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ハ,コノ點カラ定直線ニ下シタ垂線ノ中點ヲ通リコノ直線ニ平行ナル直線デアル。

問7. 定點ト定直線上ノ點トヲ結ブ線分ヲ定比 $m:n$ ニ外分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

問　題

1. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メナサイ。

2. 平行二直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡。

3. 定圓周上ノ任意ノ點Aニ於ケル切線上ニ點BヲトリABヲ定長 l ニ等シクトル。Bノ軌跡。

4. 定圓ノ定直徑ヲBCトシ,コノ圓周上ノ任意ノ點ヲAトスル。BAノ延長上ニBAニ等シクCDヲトルトキDノ軌跡ヲ求メナサイ。

5. $\overset{\frown}{BC}$ 上ノ任意ノ點ヲAトシ,BAノ延長上ニADヲACニ等シクトル。Dノ軌跡ハBCヲ弦トスル或弓形ノ弧ノ一部分デアル。

手引　Dト $\overset{\frown}{BC}$ トハBニ於ケル切線ノ同ジ側ニアル。

6. 定線分ヲ底邊トシ頂角ガ定角 a ニ等シイ三角形

ニ於テ

(1) 内心ノ軌跡　　(2) 重心ノ軌跡

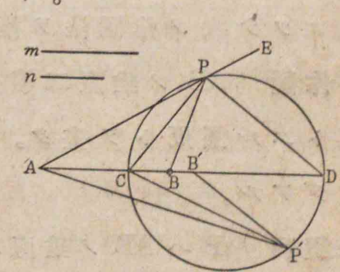
7. 定點Aト,半徑 r ナル定圓周上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ定比 $m:n$ ニ内分スル點ノ軌跡ハAト定圓ノ中心トヲ結ブ線分ヲ $m:n$ ニ内分スル點ヲ中心トシ $\frac{m}{m+n}r$ ヲ半徑トスル圓周デアル。

8. 二定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ定正方形 k^2 ニ等シイ點ノ軌跡。

9. Aハ定圓周上ノ定點デBハ同ジ圓周上ノ任意ノ點デアル。AB又ハ其延長上ニ點CヲAB.ACガ定量 k^2 ニ等シクナル様ニトル。Cノ軌跡ヲ求メヨ。

手引　Aヲ通ル直徑ニCヨリ垂線ヲ引キ其足ガ定點ナルコトヲ證明セヨ。

10. 二定點ニ至ル距離ノ比ガ定比 $m:n$ ニ等シイ點ノ軌跡ハ,二定點ヲ結ブ線分ヲ $m:n$ ニ内分,外分スル二點ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。



第 146 圖

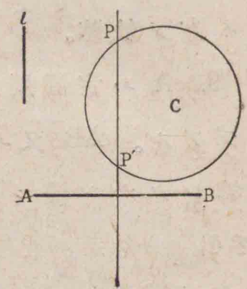
手引　二定點ヲA, BトシABヲ $m:n$ ニ内分,外分スル點ヲ夫々C, Dトスル。條件ニ適スル點ヲPトシ, APノ延長ヲPEトスレバPC, PDハ夫々∠APB, ∠BPEノ二等分線ナルコト從ツテPハCDヲ直徑トスル圓周上ニアルコトヲ

證明セヨ。次ニP′ヲコノ圓周上ノ點トシP′Cガ∠APB′ノ二等分線ニナル樣ニPB′ヲ引キACBDトノ交點ヲB′トスレバBトB′トガ同ジ點ナルコトヲ證明セヨ。

4. 軌跡ヲ利用セル作圖題解法

例 1.　二定點(A,B)ヨリ等距離ニアツテ他ノ定點(C)ヨリノ距離ガ定長lニ等シイ點ヲ求メヨ。

解析　所要ノ點ヲ求メ得タトシテ之ヲPトスル。



第 147 圖

PハA,Bカラ等距離ニアルカラABノ垂直二等分線(A,Bヨリ等距離ニアル點ノ軌跡)上ニナケレバナラヌ。

又PトCトノ距離ハlニ等シイカラPハCヲ中心トシ,lヲ半徑トスル圓周(Cヨリノ距離ガlニ等シイ點ノ軌跡)上ニナケレバナラヌ。

ヨツテ次ノ作圖法ヲ推定スルコトガ出來ル。

作圖　ABノ垂直二等分線XYトCヲ中心トシlヲ半徑トスル圓周トヲ畫ク。ソノ交點P,P′ハ何レモ所要ノ點デアル。

證明　PハABノ垂直二等分線上ニアルカラA,Bカラ等距離ニアル。

又PハCヲ中心トシlヲ半徑トスル圓周上ニアルカ

ラPトCトノ距離ハlニ等シイ。

故ニPハ題意ニ適スル點デアル。

同樣ニP′モ亦題意ニ適スル點デアル。

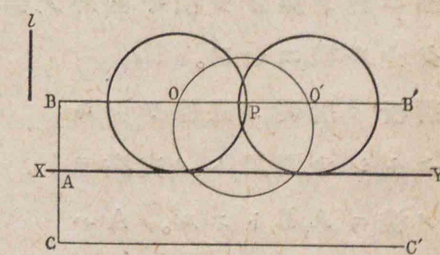
吟味　點CトABノ垂直二等分線トノ距離ヲmトスル。(1)$m<l$ナラバ圓周CトXYトハ交ハリ求メル點ハ二ツアル。(2)$m=l$ナラバ圓周CトXYトハ切シ求メル點ハ唯一ツ。(3)$m>l$ナラバ圓周CトXYトハ出會ハナイカラ求メル點ハナイ,卽作圖不能。

例 2.　定直線(XY)ニ切シコノ直線上ニナイ定點(P)ヲ通ル定半徑(r)ノ圓周ヲ畫ケ。

解析　所要ノ圓ヲ畫キ得タトシテ其中心ヲOトス。

圓周Oハ點Pヲ通ルカラ　OP$=r$

故ニOハPヨリノ距離ガrニ等シキ點ノ軌跡(卽Pヲ中心トシ半徑ガrニ等シイ圓周)上ニアル。



第 148 圖

又圓OハXYニ切スルカラOハXYニ至ル距離ガrニ等シイ點ノ軌跡(卽XYニ平行ナル二直線)ノ上ニアル。ソコデ次ノ作圖法ガ推定セラレル。

作圖　Pヲ中心トシ,rヲ半徑トスル圓ヲ畫ク。次ニXY上ノ任意ノ點Aニ於テXYニ垂線ヲ作リ,コノ垂線上

Aノ兩側ニ夫々B,Cヲ定メ $AB=AC=r$ ナラシメル。B,Cヲ通リXYニ平行ナル直線BB′,CC′ト前ノ圓周トノ交點ヲO,O′トスル。

O,O′ヲ中心トシ,rヲ半徑トスル圓ガ所要ノ圓ナリ。

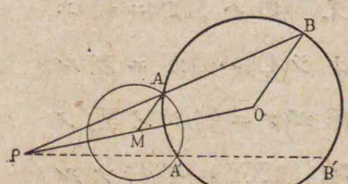
證明　略。

吟味　BB′トPトガXYノ同ジ側ニアルモノトスル。PトXYトノ距離ヲdトスレバPトCC′トノ距離ハ$d+r$デアル。故ニ圓周PハCC′ニハ出會ハナイ。

PトBB′トノ距離ガrヨリ小ナルトキ卽$d<2r$ノトキニハ圓周PハBB′ニ交ハリ求メル圓ガ二ツアル。又$d=2r$ノトキハ求メル圓ハ一ツ,$d>2r$ナルトキハ題意ニ適スル圓ガナイ。

例 3.　定圓(中心O,半徑r)外ノ定點(P)ヲ初ノ圓周上ノ點ニ結ブ線分ヲ引キ圓外ノ部分ト圓內ノ部分トガ等シクナル樣ニセヨ。

解析　所要ノ直線ヲ引キ得タトシテ圓周トノ交點ヲ圖ノ樣ニA,Bトスル。AハPBノ中點デアルカラ定點Pト圓周上ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡(卽POノ中點ヲ中心トシ,$\frac{r}{2}$ヲ半徑トスル圓周)上ニアル。ソコデ次ノ作圖法ガ推定セラレル。



第 149 圖

作圖　P,Oヲ結ビ,POノ中點ヲ求メテ之ヲMトスル。Mヲ中心トシ$\frac{r}{2}$ヲ半徑トスル圓周ヲ畫キ圓周Oトノ交點ヲA,A′トスル。直線PA,PA′ト圓周Oトノ他ノ交點ヲB,B′トスレバ線分PAB,PA′B′ハ求メルモノナリ。

證明　諸子自ラ證明セヨ。

吟味　$PO=a$ トスレバ $MO=\frac{a}{2}$

圓周Oト圓周Mトハ $r+\frac{r}{2}>\frac{a}{2}>r\sim\frac{r}{2}$ 卽 $3r>a>r$ ナルトキニ交ハリ,$a=3r$ 又ハ $a=r$ ノトキニ切シ,其他ノ場合ニハ出會ハナイ。

トコロガPハ圓外ニアルカラ $a>r$

故ニ $3r>a$ ノトキニ求メル線分ヲ二ツ引クコトガ出來,$3r=a$ ノトキニハ一ツ引クコトガ出來ルガ $a>3r$ ノトキニハ題意ニ適スル線分ハナイ。

問　　題

1. 相交二直線ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ。

2. 定圓ニ於テ定直線ニ平行シ,且既知ノ長サヲ有スル弦ヲ作レ。

手引　弦ノ中點ノ位置ヲ考ヘヨ。

3. 與ヘラレタ相交二直線カラ等距離ニアツテ一定點カラ與ヘラレタ距離ニアル點ヲ求メナサイ。

4. 底邊,高サ及底邊ノ一端カラ對邊ニ至ル垂線ノ長

サヲ知ツテ三角形ヲ作リナサイ。

5. 一頂點ヨリ對邊ニ至ル垂線,中線及外接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

手引 先ヅ垂線,中線ガ二邊デアル直角三角形ヲ作レ。

6. 底邊,頂角及內切圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

手引 146—147頁問題6 (1)參照。

7. 底邊,高サ及他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

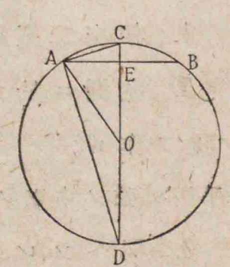
手引 147頁問題10參照。

8. X, Yハ定平行二直線ニシテAハX上ノ定點ナリ。X, Yノ外ニアル定點Bヲ通ル直線ヲ引キX, Yト交ル點ヲ夫々C, Dトス。AC＝ADナラシメンニハ直線BCDノ作圖法如何。

手引 CDノ中點ノ位置ヲ決定セヨ。

5. 圓周ノ長サ

定理七　半徑ガrデアル圓(中心O)ニ內接スル正n邊形ノ一邊(AB)ノ長サヲa,同ジ圓ニ內接スル正$2n$邊形ノ一邊ノ長サヲa'トスレバ　$a'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a^2})}$



第150圖

證明　$\overset{\frown}{AB}$ノ中點ヲCトスレバACハ圓Oニ內接スル正$2n$邊形ノ一邊デアル。

Cヲ通ル直徑CDトABトノ交點ヲEトスル。

$AO=r,\ AE=\dfrac{a}{2}$ デアルカラ △AOE ヨリ

$$OE=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$\therefore\ CE=r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

又　$\angle CAD=\angle R$　$\therefore\ \overline{AC}^2=CE.CD$……112頁問題6.

即　$a'^2=\left(r-\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}\right)2r=r\left(2r-\sqrt{4r^2-a^2}\right)$

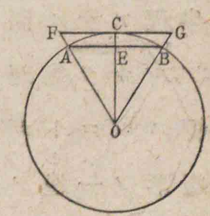
$$\therefore\ a'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a^2})}$$

問 1. 半徑1mノ圓ニ內接スル正六邊形ノ一邊ハ1mデアル。同ジ圓ニ內接スル正十二邊形ノ一邊ノ長サハ何程カ。

定理八　半徑ガrデアル圓(中心O)ニ內接スル正n邊形ノ一邊(AB)ノ長サヲa,同ジ圓ニ外切スル正n邊形ノ一邊ノ長サヲbトスレバ

$$b=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}$$

證明　$\overset{\frown}{AB}$ノ中點ヲCトシ,COトABトノ交點ヲEトスル。Cニ於ケル切線ガOA, OBノ延長ト交ハル點ヲ夫々F, GトスレバFGハ圓Oニ外切スル正n邊形ノ一邊デアル。



第151圖

$$FG \parallel AB$$

$$\therefore\ FG:AB=OF:OA=OC:OE$$

卽 $b:a=r:\mathrm{OE}$

トコロガ $\mathrm{OE}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$

$$\therefore \quad b:a=r:\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$\therefore \quad b=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}$$

問2. 半徑 $1m$ ノ圓ニ外切スル正十二邊形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ。

手引 前問ノ結果ヲ用ヒヨ。

偖テ圓周ハ之ニ內接スル正多角形ノ周圍ヨリ大キク,外切スル正多角形ノ周圍ヨリ小サイ。サウシテ圓ニ內接又ハ外切スル,正多角形ノ邊數ヲ次第ニ多クスレバ其周圍ハ次第ニ圓周ニ接近シ,邊數ガ非常ニ多クナレバ殆ンド圓周ニ等シクナル。

故ニ與ヘラレタ圓ニ內接若シクハ外切スル邊數ノ非常ニ多イ正多角形ノ周圍ヲ計算スルコトガ出來レバ,コノ圓ノ周圍ノ近似値ヲ求メルコトガ出來ル。

半徑 r ナル圓ニ內接スル正六邊形ノ一邊ノ長サハ r デアルカラ,定理七ニヨリテ正十二邊形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル。再ビ定理七ヲ適用シテ正二十四邊形ノ一邊ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル。次第ニコノ樣ニシテ幾回モ定理七ヲ適用シテ,圓ニ內接スル邊數ノ非常ニ多イ正多角形ノ一邊ノ長サ a 從テ其周圍ヲ計算スルコトヲ得。ツマリ圓周ノ長サノ近似値ヲ求メ得ラレル。サウシテコノ近似値ハ眞ノ値ヨリハ小サイ。

更ニ前ノ樣ニシテ計算シタ a ノ値ト定理八トヲ利用シテ同ジ圓ニ外切スル正多角形ノ周圍ヲ計算スレバ眞ノ値ヨリ大キイ近似値ヲ求メ得ルカラ前ニ求メタ近似値ハドノ程度マデ正確デアルカヲ知ルコトガ出來ル。

上ノ方法デ半徑 r 卽直徑 $2r$ ノ圓ニ內接,外切スル正多角形ノ周圍ヲ計算スレバ

邊數	內接正多角形ノ周	外切正多角形ノ周
6	$2r\times 3$	$2r\times 3.46410$
12	〃 3.10583	〃 3.21539
24	〃 3.13263	〃 3.15966
48	〃 3.13935	〃 3.14609
96	〃 3.14103	〃 3.14271

ヨッテ半徑 r 卽直徑 $2r$ ナル圓ノ周圍ヲ c トスレバ

$$2r\times 3.14103<c<2r\times 3.14271$$

故ニ圓ノ周圍ハ直徑ノ約 3.14 倍ニ等シイ。圓周ト其直徑トノ比ノ値ヲ**圓周率**トイヒ,之ヲ通常 π デ表ハス上ニ算出シタ 3.14 ハ π ノ近似値デアル。

上記ノ所論ニヨッテ次ノ定理ガ得ラレル。

定理九 半徑 r ナル圓ノ周圍ハ $2\pi r$ デアル。

6. 圓ノ面積

前節ト同樣ニシテ圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ヲ十分多クスレバ其面積ハ殆ンド圓ノ面積ニ等シク,邊數ヲ尙一層多クスレバ多角形ノ面積ト圓ノ面積トノ差ヲ如何程デモ小サクスルコトガ出來ル。

サウシテ圓ニ外切スル正多角形ノ面積ハ其周圍ト半徑トノ積ノ半分ニ等シク,(第94頁問題8)邊數ガ非常ニ多イナラバ多角形ノ周圍ハ圓周ニ等シト見做シ得ルカラ圓ノ面積ヲ表ス數ハ其周圍ヲ表ス數ト半徑ヲ表ス數トノ積ノ半分ニ等シイ。之ニヨツテ次ノ定理ガ得ラレル。

定理一〇 半徑 r ナル圓ノ面積ハ πr^2 デアル。

何トナレバコノ圓ノ面積ヲ S, 周圍ヲ c トスレバ

$$S = c \times r \times \frac{1}{2} = 2\pi r \times r \times \frac{1}{2} = \pi r^2$$

問 題

1. 半徑 $8\,cm$ ノ圓ノ周及面積ヲ計算セヨ。

2. 半徑 $1\,cm$ ノ圓ニ內接スル正八角形及外切スル正八角形ノ周圍ヲ計算セヨ。

3. 前問ニ於ケル多角形ノ面積ノ比ヲ求メヨ。

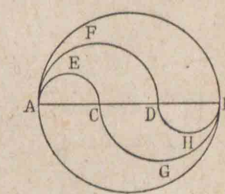
4. 二圓周ノ和ハ其半徑ノ和ヲ半徑トスル圓周ニ等

シイ。

5. 二ツノ與ヘラレタル圓ノ面積ノ和ニ等シイ面積ヲ有スル圓ヲ畫キナサイ。

6. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ各ヲ直徑トシテ三角形ノ外側ニ畫イテアル二ツノ半圓カラコノ三角形ノ外接圓ガ切取ル部分ヲ除イタ二ツノ新月形ノ部分ノ和ハ原三角形ト等積デアル。

7. 圓ノ直徑 AB ヲ C, D デ三等分シ,圖ノ樣ニ AC, AD, CB. DB ヲ直徑トスル半圓周ヲ畫ケバ初ノ圓ハ二ツノ波狀線 AFDHB, AECGB ニヨツテ三等分セラレル。



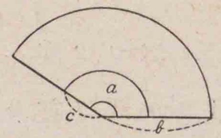
第 152 圖

8. 圓ノ弧ト其兩端ヲ通ル二ツノ半徑トデ圍マレル平面ノ一部分ヲ**扇形**トイフ。扇形ノ角(中心角)ガ 4R∠ ノ $\frac{1}{n}$ デアルナラバ其弧ハ圓周ノ $\frac{1}{n}$ ニ等シク,面積ハ圓ノ面積ノ $\frac{1}{n}$ ニ等シイコトヲ利用シテ半徑 r 糎,中心角 a° ノ扇形ノ弧ノ長サハ $\frac{\pi a r}{180}$ 糎デアリ面積ハ $\frac{\pi a r^2}{360}$ 平方糎デアルコトヲ證明セヨ。

9, 扇形ノ面積ハ其弧ニ等シイ底邊,半徑ニ等シイ高サヲ持ツ三角形ノ面積ニ等シイコトヲ證明セヨ。

10. 半徑 b 糎, c 糎ノ二ツノ同心圓ノ弧ト,中心角 a° ヲ

ナス二ツノ半徑トデ圍マレル扇ノ地紙形ノ部分ノ面積ヲ計算シナサイ。次ニコノ面積ハ二ツノ弧ニ等シイ兩底ト半徑ノ差ニ等シイ高サノ梯形ノ面積ニ等シイコトヲ證明シナサイ。



第 153 圖

附 錄 第 二

立體幾何大意

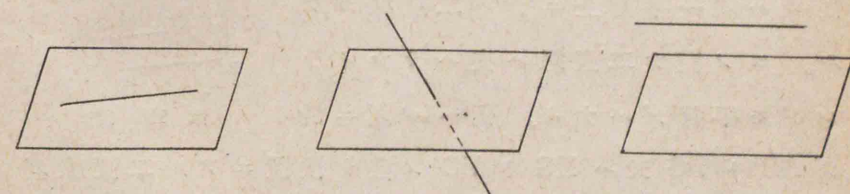
1. 平面ト直線

平面ノ意味ハ既ニ學ビマシタガ更メテ次ノ様ニ定義スル。

定義 **平面**トハ其上ニアル任意ノ二點ヲ通ル無限直線ガ全ク其面ニ含マレル面ノコトデアル。

平面ハ無限直線ヲ含ムカラ無限ニ擴ガツテキルノデスガ其ノ一部分ヲモ平面トイヒマス。無限平面ハ限リアル紙面ニ圖示スルコトハ出來ナイカラ其面上ノ圖形ヲ畫イテ想像スルニ止メル。

平面ノ定義ニヨツテ平面ト其上ニナイ直線トハ唯一點ダケデ出會フカ又ハ全ク出會ハナイ。


第 154 圖

平面ト直線トガ唯一點デ出會フトキニハ**交ハル**トイツテ,其出會フ點ヲ交點トイヒ,全ク出會ハナイトキニハ**平行スル**トイフ。

平面ニツイテ次ノ公理ガアル。

公理一　一直線ト其上ニナイ一點トヲ含ム平面ハ唯一ツダケアル。

之ヲ略シテ「一直線ト其上ニナイ一點トハ一平面ヲ決定スル」トイフコトガアル。

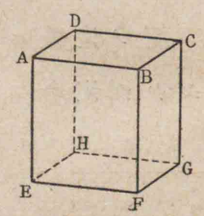
系一　同一直線上ニアラザル三點ハ一平面ヲ決定スル。

系二　相交ハル二直線ハ一平面ヲ決定スル。

系三　平行二直線ハ一平面ヲ決定スル。

【注意】 平行線ノ定義ニヨツテ平行二直線ハ同一平面上ニアルコトハ明カデアル。平行二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツニ限ルトイフノガ系三ノ主張デアル。

系二,系三ニヨツテ相交ハル二直線,平行二直線ハ同一平面上ニアルガ,空間ニハ同一平面上ニナイ二直線ガアル。コノ様ナ二直線ハ交ハラナイケレドモ平行デハナイ。例ヘバ圖ニ於テ AB ト FG 又ハ HG ト BC ノ様ナ位置ニアル二直線ガソレデアル。

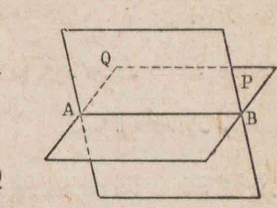


第 155 圖

公理二　二ツノ平面ガ出會フトキハ少クモ二點ヲ共有スル。

定理一　二平面ガ出會フトキハ一直線ヲ共有シ其他ノ點ヲ共有シナイ。

證明　二平面 P, Q ガ出會ツテ共有スル二點ヲ A, B トスル。平面ノ定義ニヨツテ直線ABハ二平面 P, Q ノ兩方ノ上ニアル。即 P, Q ハ直線 AB ヲ共有スル。



第 156 圖

ソウシテ P, Q ハ AB 外ニアル點ヲ共有シナイ。何トナレバモシ共有スルモノトスレバ公理一ニ反スルカラデアル。

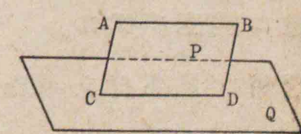
上ノ定理ニヨツテ二平面ハ唯一直線デ出會フカ又ハ全ク出會ハナイカデアル。唯一直線デ出會フトキハ**交ハル**トイツテ其出會フ直線ヲ**交ハリノ線**又ハ單ニ**交ハリ**トイヒ,出會ハナイトキハ**平行スル**トイフ。

直線ト平面又ハ平面ト平面トガ平行スルコトヲ次ノ様ニ書イテ表ハス。

直線AB∥平面P,　平面P∥平面Q

2. 平行,垂直ニ關スル定理

定理二　一直線(AB)ヲ含ム平面(P)ト,コノ直線ニ平行ナル平面(Q)トノ交線(CD)ハ初ノ直線ニ平行デアル。



第 157 圖

證明　AB∥Q デアルカラ AB ハ平面Qニ出會ハナイ。從テ平面Q上ノ直線CDニモ出

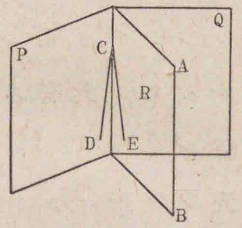
會ハナイ。

サウシテ AB ト CD トハ共ニ P 平面上ニアル。

$\therefore$ AB $\parallel$ CD

定理三　同一直線 (AB) ニ平行ナル二平面 (P, Q) ノ交ハリノ線ハ初ノ直線 (AB) ニ平行デアル。

證明　P, Q ノ交線上ノ點 C ト AB トヲ含ム平面ヲ R トスル。P ト R トノ交線ヲ CD トスレバ前定理ニヨッテ　　AB $\parallel$ CD



第 158 圖

同様ニ Q ト R トノ交線ヲ CE トスレバ　　AB $\parallel$ CE

CD ト CE トハ同ジ點 C ヲ通ッテ共ニ AB ニ平行デアルカラ同一直線デアル。而シテコノ同一直線ハ P, Q 二平面ノ上ニアル。故ニコノ直線ハ P, Q ノ交線ニ外ナラヌ。

故ニ P, Q ノ交線ハ AB ニ平行デアル。

定理四　相交ハル二直線 (OA, OB) ノ交點ヲ通リ,コノ二直線ノ各ニ垂直ナル直線 (OM) ハ,初メノ二直線ノ定メル平面 (P) 上ニ於テコノ二直線ノ交點 (O) ヲ通ル總テノ直線ニ垂直デアル。

證明　P 平面上ニ於テ O ヲ通ル直線ヲ OC トス。

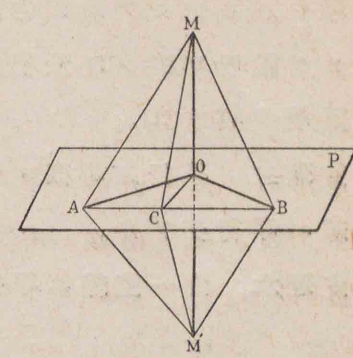
OA, OC, OB ニ交ハル直線 ACB ヲ引キ, MO ノ延長上ニ MO ニ等シク OM′ ヲ取リ M. M′ ヲ A, B, C ニ結ブ。

OA ハ MM′ ノ垂直二等分線デアルカラ

$$AM = AM'$$

同様ニ　　$BM = BM'$

故ニ △MAB ト △M′AB トハ三邊夫々等シイカラ合同デアル。



第 159 圖

ヨリテ　　$\angle MAC = \angle M'AC$

故ニ △MAC ト △M′AC トハ二邊夾角夫々等シイカラ合同デアル。

從テ　　$MC = M'C$

故ニ C ハ MM′ ノ垂直二等分線上ニアル。

$\therefore$　OM $\perp$ OC

定義　平面ニ交ハル直線ガ,コノ平面上ニ於テ其交點ヲ通ル總テノ直線ニ垂直デアルナラバ初ノ直線ヲコノ平面ノ**垂線**又ハ垂直ナル直線トイヒ,ソノ交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。

OM ガ平面 P ノ垂線デアルコトヲ

直線 OM $\perp$ 平面 P　　デ表ハス。

平面ニ交ハリ之ニ垂直ナラザル直線ヲ,コノ平面ノ**斜線**トイッテ其交點ヲ**斜線ノ足**トイフ。

次ニ列擧スル定理五乃至一〇ノ中ニハ其證明ガ案外

困難ナルモノモアルガ常識的ニ極メテ明瞭ナ事柄デアルカラ證明ヲ略シテ承認スルコトニスル(次ノ問題中ニ其證明ヲ要求スルモノモアル)。

定理五　平行二平面ニ他ノ平面ガ交ハレバ其交ハリノ線ハ平行デアル。

定理六　同一直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

定理七　一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々平行デアツテ且同方向デアルナラバコノ二角ハ等シイ。

定理八　同一平面ノ垂線ハ平行デアル。

定理九　平行二直線ノ一方ガ或平面ニ垂直ナラバ他モ亦コノ平面ニ垂直デアル。

定理一〇　平行二平面ノ一方ニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直デアル。

定義　一點ト一平面トノ距離トハ,コノ點トコノ點ヨリコノ平面ニ下セル垂線ノ足トノ距離ノコトニシテ,**平行二平面ノ距離**トハ是等ノ平面ノ共通垂線ガ是等ノ平面ノ間ニ夾マレル部分ノ長サノコトデアル。

問　題

1. 平行二平面ニ他ノ平面ガ交ハレバ其ノ交ハリノ

線ハ平行ナルコトヲ證明セヨ。(定理五ノ證明)

2. 同ジ直線ニ垂直ナル二平面ハ互ニ平行デアル。

手引　モシ交ハルモノトスレバ不合理ヲ生ズルコトヲ證明シナサイ。

3. 平行線ノ一方ガ一平面ニ垂直ナラバ他モ亦コノ平面ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ。(定理九ノ證明)

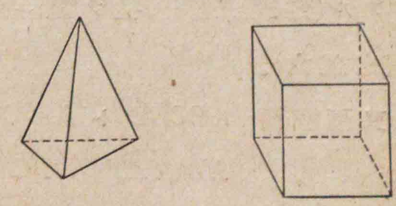
4. 平面 P 外ノ點 O カラコノ平面ニ垂線 OH ト多クノ斜線 OA, OB, OC,…… ヲ引キ,其足ヲ夫々 H, A, B, C,…… トスル。モシ $HA=HB$ ナラバ $OA=OB$ ニシテ, $HA<HC$ ナラバ $OA<OC$ ナルコトヲ證明セヨ。

3. 角壔

定義　幾ツカノ平面デ圍マレテヰル立體ヲ**多面體**トイフ。

平面ト平面トノ交ハリハ直線デアルカラ多面體ノ境界ハ幾ツカノ直線デ圍マレテヰル平面形即多角形デアル。コノ多角形ヲ多面體ノ**面**トイヒ,其邊ヲ多面體ノ**稜**,頂點ヲ多面體ノ**頂點**トイフ。

同一面上ニアラザル頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ。



第 160 圖

多面體ハ其面ノ數ニヨツテ**四面體**,**五面體**等ニ分

ケラレル。

問 1. 前頁ノ圖ノ多面體ノ面,稜,頂點及對角線ノ數ハ各幾ツデスカ。

問 2. 五面體ヲ圖示シナサイ。

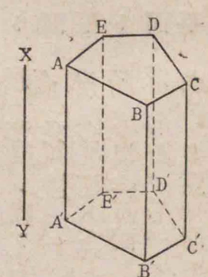
定義 一直線ニ平行ナル三ツ以上ノ平面ト是等ニ交ハル二ツノ平行平面トデ圍マレル立體ヲ**角壔**トイフ。同一直線ニ平行ナル三ツ以上ノ平面ヲ**側面**,側面ト側面トノ交線ヲ**側稜**トイヒ,一組ノ平行平面ヲ**底面**,兩底面ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

角壔ハ底面ノ多角形ニヨツテ**三角壔**,**四角壔**等ニ分ケラレル。

定理一一 角壔ノ側面ハ平行四邊形ニシテ兩底面ハ合同ナル多角形デアル。

證明 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ ヲ側面ガ直線 XY ニ平行ナル角壔トスル。

側面ハ皆 XY ニ平行ナルガ故ニ其交ハリノ線ナル側稜ハ皆 XY ニ平行デアル(定理三)。 從テ互ニ平行デアル(定理六)。



第 161 圖

又兩底面 $ABCDE$ ト $A'B'C'D'E'$ トハ平行デアルカラ

$$AB \parallel A'B' \quad BC \parallel B'C' \cdots\cdots (\text{定理五})。$$

ヨツテ側面ハ平行四邊形デアル。

次ニ AB ト $A'B'$; BC ト $B'C'$ 等ハ平行四邊形ノ對邊デアルカラ相等シク $\angle A$ ト $\angle A'$; $\angle B$ ト $\angle B'$ 等ハ二邊夫々平行デアツテ且同方向デアルカラ等シイ(定理七)。

底面 $ABCDE$ ト $A'B'C'D'E'$ トハ各邊夫々相等シク其夾角夫々相等シイカラ。

$$ABCDE \equiv A'B'C'D'E'$$

系 角壔ノ側稜ハ相等シク且平行デアル。

定義 側稜ガ底面ニ垂直デアル角壔ヲ**直角壔**トイフ。

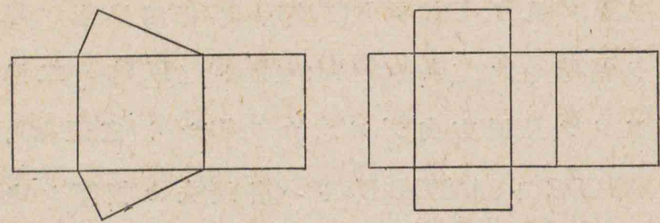
直方體ハ底面ガ矩形ナル直四角壔デアリ,**立方體**ハ總テノ面ガ正方形ナル直四角壔デアル。

問 3. 直角壔ノ側面ハ矩形デアツテ,側稜ハ高サニ等シイ。

4. 展開圖ト模型

多面體ヲ其幾ツカノ稜ニ沿ヒテ切リ開キ總テノ面ヲ同一平面上ニ置イテ得ル圖形ヲ其多面體ノ**展開圖**トイヒマス。

展開圖ヲ厚紙ニ書キ稜ニ沿ヒテ折リ曲ゲテ糊附ヲスルト元ノ多面體ノ模型ガ出來ル。特ニ直角壔ノ側面ノ模型ハ極メテ簡單ニ作ルコトガ出來ル。



第 162 圖

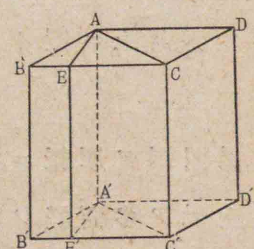
問 **1.** 底面ガ平行四邊形デアル直四角壔ノ展開圖ヲ畫キナサイ。

多面體ノ總テノ面ノ面積ノ和ヲコノ多面體ノ**表面積**トイヒ,角壔ノ總テノ側面ノ面積ノ和ヲコノ角壔ノ**側面積**トイフ。多面體ノ展開圖ノ面積ハコノ多面體ノ表面積ニ等シイ。

問 **2.** 底面ハ $3\,cm$, $4\,cm$ ヲ二邊トスル矩形デアリ,側稜ガ $5\,cm$ デアル直方體ノ側面積ヲ計算シナサイ。

直角壔ノ側面積ヲ表ハス數ハ底面ノ周圍ヲ表ハス數ト側稜ノ長サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ。

問 **3.** ▱ABCD ニ於テ A カラ BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ E トスル。△ABE, △AEC 及 △ACD ヲ底面トシ高サガ等シイ三ツノ直三角壔ノ側面ノ模型ヲ作リ,是等ヲ組合ハシテ底面ガ ▱ABCD デアル直角壔ノ體積ハ AD, AE ヲ二邊トスル矩形ヲ底面トスル直角壔ノ體積ニ等シイコト及 △ADC ヲ底面トスル直角壔ノ體積



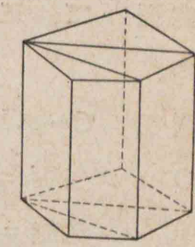
第 163 圖

ノ二倍ニ等シイコトヲ驗シナサイ。

底面ガ矩形デアル直角壔卽直方體ノ體積ヲ表ハス數ハ底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シク問 3 ニヨツテ直三角壔ノ體積ハ之ト等高デ底面積ガ二倍デアル直方體ノ體積ノ半分デアルカラ結局直三角壔ノ體積ヲ表ハス數ハ其底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ。

次ニ直角壔ハ幾ツカノ直三角壔ニ分ケラレルカラ一般ニ

直角壔ノ體積ヲ表ハス數ハ其底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイコトヲ知ルコトガ出來ル。



第 164 圖

問 **4.** 水ヲ滿タシテアル容器ニ底面積ガ 0.75 平方糎ノ直六角壔ナル水晶ヲ沈メタトコロガ水 $3\,cc$ 溢レ出シタ。コノ水晶ノ長サ何程デスカ。

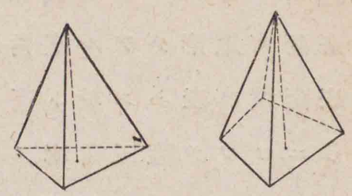
5. 角錐

定義　一ツノ多角形ト,其各邊ヲ夫々底邊トシ,コノ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通頂點トスル三角形トデ圍マレル多面體ヲ**角錐**トイフ。

初メノ多角形ヲ**底面**其他ノ面ヲ**側面**,相隣レル側面ノ交ハリヲ**側稜**トイヒ,側面ナル三角形ノ共通頂點ヲ角錐ノ**頂點**,頂點ト底面トノ距離ヲ**高サ**トイフ。

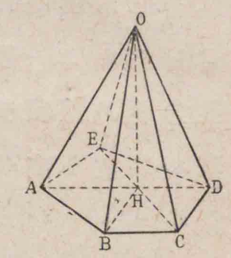
角錐ハ底面デアル多角形ノ邊數ニヨツテ**三角錐**,**四角錐**等ニ分ケル。

定義　底面ガ正多角形デ其中心*ニ於ケル垂線上ニ頂點ノアル角錐ヲ**正角錐**トイヒマス。



第 165 圖

定理一二　**正角錐ノ側面ハ合同ナル二等邊三角形デアル。**



第 166 圖

證明　O－ABCDE ヲ正角錐トシ,頂點Oカラ底面ニ下シタ垂線ノ足ヲHトスレバ定義ニヨツテHハABCDEノ中心デアル。

$\therefore\ AH=BH=CH=DH=EH$

從テ　$\triangle OAH\equiv\triangle OBH\equiv\triangle OCH\equiv\triangle ODH\equiv\triangle OEH$

$\therefore\ OA=OB=OC=OD=OE$

ヨツテ側面デアル三角形ハ皆二等邊三角形デアツテ是等ノ三角形ノ三邊ハ夫々相等シイ。

故ニ側面ハ合同ナル二等邊三角形デアル。

コレデ本定理ハ證明セラレタ。

正角錐ノ展開圖ハ底面デアル正多角形ト,其各邊ヲ底邊トスル幾ツカノ合同ナル二等邊三角形デ出來テヰル。

* 正多角形ノ中心トハ其外接圓ノ中心ノコトデアル。

問 1.　底面ハ對角線ガ $6\,cm$ ノ正方形デアツテ,側稜ガ $5\,cm$ デアル正四角錐ノ展開圖ヲ作リ,次ニコノ四角錐ノ表面積ヲ計算シナサイ。

定義　正角錐ノ頂點カラ底面ノ一邊ニ下シタ垂線ノ長サヲ**側高**トイフ。

問 2.◎　正角錐ノ側面積(側面ノ面積ノ和)ヲ表ハス數ハ底面ノ周圍ヲ表ハス數ト側高ヲ表ハス數トノ積ノ半分ニ等シイ。

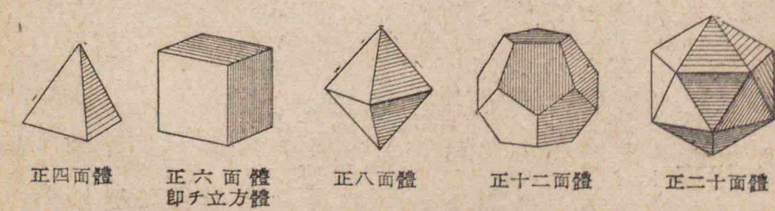
角錐ノ體積ヲ表ハス數ハ底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ(證明略)ノデアル。

問 3.　上ノ問1ニ於ケル正四角錐ノ體積ヲ計算シナサイ。

6. 正多面體

定義　總テノ面ガ合同ナル正多角形デアル多面體ヲ**正多面體**トイフ。

正多面體ハ次ニ圖示スル五種類ダケデアル。(證明略)



第 167 圖

問 1.　稜ノ長サガ $2\,cm$ デアル正四面體及正六面體ノ

展開圖ヲ厚紙ニ畫キ折曲ゲテ糊附ヲナシ正四面體及正六面體ノ模型ヲ作リナサイ。

問2. 正四面體ノ一ツノ頂點カラ對面ニ下シタ垂線ノ足ハ對面デアル三角形ノ外心デアルコトヲ證明シナサイ。

問3. 稜ノ長サガ a 糎デアル立方體ノ對角線ノ長サハ何程カ。

問　題

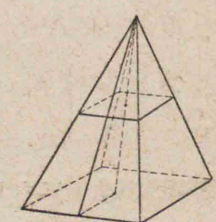
1. 直方體ノ四ツノ對角線ハ皆等シク,且一點ニ出會フコトヲ證明セヨ。

2. 角錐ヲ頂點ト底面トノ間ニ於テ底面ニ平行ナル平面デ截レバ

(1) 側稜及頂點ヨリ底面ニ下セル垂線ハ相等シキ比ニ內分セラレル。

(2) 截面ト底面トハ相似形デアル。

3. 正角錐ヲ頂點ト底面トノ間ニ於テ底面ニ平行ナル平面デ截ツタトキニ,截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**正角錐臺**トイヒマス。正四角錐臺ノ展開圖ヲ畫キナサイ。



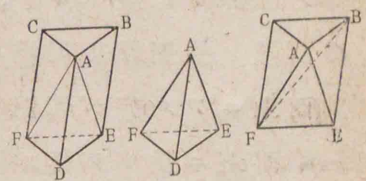
第 168 圖

4. 稜ガ $2\,cm$ デアル正八面體ノ對角線ノ長サヲ計算

セヨ。

5. 卷末ニ示セル正八面體,正十二面體,正二十面體ノ展開圖ヲ切拔キ折曲ゲテ糊附ヲナシ模型ヲ作リナサイ。

6. 三角壔 ABC－DEF ヲ三點 A, E, F ヲ通ル平面デ截ルト三角錐 A－DEF ト四角錐 A－BCFE トニ分レル。更ニコノ四角錐ヲ三點 A, B, F ヲ通ル平面デ截ルト二ツノ三角錐 A－BCF ト A－BFE トニ分レル。卷末ニ示セル是等ノ三ツノ三角錐ノ展開圖ヲ切拔イテ模型ヲ作リ,是等ヲ組合セルト初ノ三角壔ニナルコトヲ驗シナサイ。



第 169 圖

7. 直圓壔

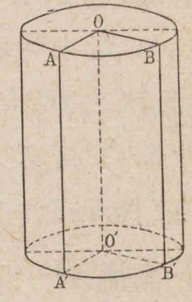
定義 矩形ガ其一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ他ノ三邊デ出來ル面ニテ圍マレル立體ヲ**直圓壔**又ハ**圓壔**トイフ。

矩形 OAA′O′ ガ OO′ ヲ軸トシテ廻轉スルモノト考ヘルト邊 OA, O′A′ ノ畫ク面ハ相等シキ圓デアツテ之ヲ底面トイヒ,邊 AA′ ノ畫ク面ヲ側面トイフ。

圓壔ノ兩底面間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

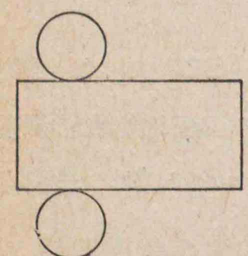
廻轉ノ途中ニ於ケル矩形ノ位置ヲ OAA′O′, OBB′O′ 等トスレバ OA, OB 等ハ一底面上ニ, O′A′, O′B′ 等ハ他ノ底

面上ニアッテ AA′, BB′ 等ハ側面上ニアル。故ニ軸ハ兩底面ニ垂直デアッテ,側面ハ軸ニ平行ナル無數ノ直線ヲ含ム。是等ノ直線ヲ**母線**トイフ。



第 170 圖

多面體ノ展開圖ト同樣ニ一般ニ立體ヲ其面上ニアル線デ切開キ總テノ面ヲ同一平面上ニ展ゲテ得ル圖形ヲ其**立體ノ展開圖**トイフ。左圖ハ直圓壔ノ展開圖ノ一ツデアル。


第 171 圖

直圓壔ノ側面ヲ一ツノ母線ニ沿ヒテ切開クトキ其展開圖ハ矩形デアッテ一邊ハ底ノ周圍ニ等シク他ノ一邊ハ初ノ直圓壔ノ高サニ等シイカラ。

直圓壔ノ側面積ヲ表ハス數ハ底面ノ周圍ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ。

直圓壔ノ體積ヲ表ハス數ハ底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ(證明略)。

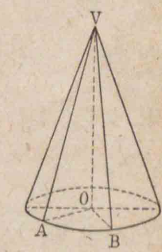
問 底面ノ半徑 r 糎,高サ h 糎ノ直圓壔ノ表面積及體積ヲ求メヨ。

8. 直圓錐

定義 直角三角形ガ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシ

テ一廻轉スルトキ他ノ二邊ニヨリテ生ズル面デ圍マレル立體ヲ**直圓錐**又ハ**圓錐**トイフ。

直角三角形 VOA ($\angle O=\angle R$) ガ邊 VO ヲ軸トシテ廻轉スルモノト考ヘルト邊 OA ノ畫ク面ハ圓デアッテ之ヲ**底面**トイヒ,斜邊 VA ノ畫ク面ヲ**側面**,V ヲ**頂點**トイフ。



第 172 圖

廻轉ノ途中ニ於ケル三角形ノ位置ヲ VOA, VOB 等トスレバ OA, OB 等ハ底面上ニ, VA, VB 等ハ側面上ニアル。故ニ軸 VO ハ底面ニ垂直デアッテ側面ハ頂點ヲ通ル無數ノ直線ヲ含ム。是等ノ直線ヲ**母線**トイフ。

軸ノ長サ卽頂點ト底面トノ距離ヲ**高サ**トイヒ,母線ノ長サヲ**側高**トイフ。

直圓錐ノ母線ハ皆等シイカラ側面ヲ一ツノ母線ニ沿フテ切開キ展開スルト扇形(第157頁問題8)ガ出來ル。コノ扇形ノ弧ノ長サハ底面ノ周圍ニ等シク,半徑ハ側高ニ等シイ。

157頁問題9ニヨリ**直圓錐ノ側面積ヲ表ハス數ハ底面ノ周圍ヲ表ハス數ト側高ヲ表ハス數トノ積ノ半分ニ等シイ。**

又直圓錐ノ體積ヲ表ハス數ハ底面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ノ $\frac{1}{3}$ **ニ等シイ**(證明略)。

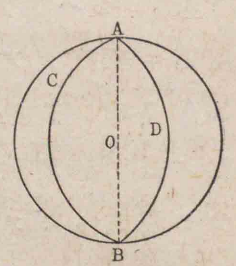
問 1. 底面ノ直徑 10 cm, 高サ 12 cm ノ直圓錐ノ側高ハ幾 cm デスカ。

問 2. 前問ノ直圓錐ノ表面積及體積ヲ計算セヨ。

9. 球

定義 半圓ガ其直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル面ヲ**球面**トイヒ,球面デ圍マレル立體ヲ**球**トイフ。

元ノ半圓ノ中心ヲ**球ノ中心**トイヒ,中心ト球面上ノ一點トヲ結ビ付ケル線分ヲ**半徑**,中心ヲ通リ兩端ガ球面上ニアル線分ヲ**直徑**トイフ。



第 173 圖

球ノ半徑ハ皆相等シク,直徑モ亦皆相等シイ。

球面ヲ如何ニ切開イテモ全表面ヲ同一平面上ニ展ゲルコトガ出來ナイ。即球面ノ展開圖ヲ作ルコトガ出來ナイ。

球ノ直徑ヲ d 糎,半徑ヲ r 糎,表面積ヲ S 平方糎,體積ヲ V 立方糎トスレバ

$$\mathbf{S}=\pi d^2=4\pi r^2 \qquad \mathbf{V}=\frac{1}{6}\pi d^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

デアル(證明略)。

問 直徑 d 糎ノ球ト直徑,高サ各 d 糎ノ直圓壔トガアル。球ノ表面積ト圓壔ノ側面積トノ差及球ノ體積ト圓壔ノ體積トノ比ヲ求メヨ。

問　　題

1. 底面ノ半徑 r 糎デアル直圓錐ノ頂點ヲ O トスル。底面ノ周上ノ點 A ヲ通ル母線 OA ヲ $m:n$ ニ内分スル點ヲ通リ底面ニ平行ナル平面デ截レバ截面ハ半徑 $\frac{mr}{m+n}$ 糎ノ圓デアルコトヲ證明シナサイ。

2. 直圓錐ヲ頂點ト底面トノ間デ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ,截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**直圓錐臺**トイフ。前問ニ於テ出來ル直圓錐臺ノ體積ト初ノ圓錐ノ體積トノ比ヲ求メナサイ。

3. 半徑 r 糎ノ球ヲ其ノ中心カラ h 糎ノ距離ニアル平面デ截レバ,其截面ハ半徑 $\sqrt{r^2-h^2}$ 糎ノ圓デアル。

4. 球面上ノ點ヲ通リコノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル平面ハ再ビ球面ト出會ハナイコトヲ證明シナサイ。

【注意】 コノ樣ナ平面ヲコノ球ノ**切平面**トイフ。

附 錄 第 三

補 充 問 題

第二編マデノ問題

1. △ABC ニ於テ A ヲ通リ ∠A ノ二等分線ニ垂直ナル直線ハ A ニ於ケル外角ヲ二等分スル。

2. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線トAヨリ BC ニ下セル垂線トノナス角ハ ∠B ト ∠C トノ差ノ半分ニ等シ。

3. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線ニ垂直ナル直線ガ AB トナス角ノ一ツハ ∠B, ∠C ノ和ノ半分ニ等シク BC トナス角ノ一ツハ ∠B, ∠C ノ差ノ半分ニ等シイ。

4. 平行線 AB, CD ニ他ノ直線 EF ガ交ハルトキ EF ノ同ジ側ニアル内角(之ヲ同傍内角トイフ)ハ互ニ補角ヲナス。

5. 平行線ニ他ノ直線ガ交ハリテナス一組ノ同傍内角ノ二等分線ハ互ニ垂直デアル。

6. 一角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々垂直ナルトキハコノ二角ハ相等シイカ或ハ互ニ補角ヲナス。

7. 四邊形 ABCD ノ各角ノ二等分線ニテ生ズル四邊形ヲ EFGH トスル。

(1) EFGH ノ相對スル角ハ補角ヲナス。

(2) ABCD ガ平行四邊形ナラバ EFGH ハ矩形デアル。

(3) ABCD ガ矩形ナラバ EFGH ハ正方形デアル。

8. 一ツノ三角形ノ一邊ト二角トガ他ノ三角形ノ一邊ト二角トニ夫々等シイナラバ,コノ二ツノ三角形ハ合同デスカ。種々ノ場合ヲ考ヘナサイ。

9. △ABC ニ於テ BC ノ中點Mカラ他ノ二邊ニ至ル距離ガ等シケレバコノ三角形ハ二等邊デアル。

10. △ABC ノ外側ニ各邊ヲ一邊トスル正方形 ABDE, BCFG 及 ACHK ヲ畫ク。

(1) △DBC ≡ △ABG,　　△CBH ≡ △ACF

(2) A, D, H カラ BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 A′, D′, H′ トスレバ　　D′B = AA′ = CH′

11. △ABC ニ於テ AB > AC ナリトス。中線 AM 又ハ其延長上ニ一點 P ヲトリ BP = AC ナラシムレバ ∠BPM ハ ∠CAM ニ等シイカ又ハ補角デアル。

12. 等脚梯形ノ對角線ハ相等シク相對スル角ハ補角ヲナス (54頁雜題第二3參照)。

13. 對角線ノ等シイ梯形ハ等脚梯形デアル。

14. 四邊形 ABCD ノ邊 AD ノ中點ヲMトスル。AB, AM ヲ二邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂點ヲPトシ, DC, DM ヲ二邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂點ヲQトスレバ, PQ ハ BC ノ中點Nヲ通ル。

15. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ點 D ヲ通リ BC ニ垂直ナル直線ト AB, AC 又ハ其延長トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ DE+DF ハ一定ナリ。

16. 線分 AB 上ノ一點ヲ C トシ且 $AC=\frac{1}{3}AB$ ナリトス。A, C, B ヲ通ル三ツノ平行線ガ線分 AB ニ出會ハザル直線 XY ニ交ハル點ヲ夫々 A′, C′, B′ トス。$AA'=a$, $BB'=b$ ナラバ CC′ ハ何程ナルカ。

17. 三角形ノ三ツノ頂點カラコノ三角形ニ出會ハナイ直線ニ下シタ三ツノ垂線ノ和ハ重心カラ同ジ直線ニ下シタ垂線ノ 3 倍ニ等シイ。

18. △ABC ニ於テ $\angle B=2\angle C$ ナルトキ, A ヨリ BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ D トシ, BC ノ中點ヲ E, AB ノ中點ヲ F トスレバ　DE＝DF

19. 四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ト對角線ノ中點ヲ結ブ線分トハ一點ニ會ス。

20. 四邊形 ABCD ニ於テ AD ハ最小邊, BC ガ最大邊ナリトスレバ　$\angle A>\angle C$　$\angle B<\angle D$

21. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線 AD 上ノ任意ノ一點ヲ P トス。PB ト PC トノ差ハ AB ト AC トノ差ヨリ大ナラズ。

22. 次ノモノヲ知リテ三角形ヲ作レ。

(1) 一角,其二等分線,コノ角ノ頂點ヨリノ高サ。

(2) 二ツノ角及ビ周圍。

(3) 三ツノ中線。

23. 一邊ト高サトノ和ヲ知ツテ正三角形ヲ畫ケ。

24. △ABC ノ邊 BC 上ニ於テ他ノ二邊ニ至ル距離ノ和ガ定線分 l ニ等シイ點ヲ求メヨ。

手引　54頁雜題第二 4 參照。

第三編マデノ雜題

1. 一ツノ圓ノ二ツノ等弦又ハ其延長ノ交點カラ兩端ニ至ル距離ハ夫々等シイ。

2. $\overset{\frown}{AB}$ ト $\overset{\frown}{CD}$ トハ同ジ圓ノ弧デアツテ且相等シイナラバ AC, BD ハ相等シイカ又ハ平行デアル。

3. 圓 O ノ弦 AB ノ延長上ニ半徑ニ等シク BC ヲ取リ CO ノ延長ガ圓周ト交ル點ヲ D トスル。∠BCO ハ ∠AOD ノ $\frac{1}{3}$ ナルコトヲ證明セヨ。

4. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ AB, DC ノ延長ノ交點ヲ P トシ, AD, BC ノ延長ノ交點ヲ Q トスル。$\angle APD=30^\circ$, $\angle CQD=40^\circ$ ナラバ,コノ四邊形ノ四ツノ角ハ各何程カ。但 B ハ A ト P トノ間ニ, D ハ A ト Q トノ間ニアルモノトスル。

5. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ヲ一邊トスル正三角形 DBC, ECA, FAB ヲ △ABC ノ外方ニ畫ケバ

(1)　$AD=BE=CF$

(2)　三ツノ正三角形ノ外接圓周ハ一點ニ會ス。

(3)　AD, BE, CF ハ一點ニ會ス。

6. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ガ二圓周ト再ビ交ハル點ヲ夫々 B, C トスル。BC ハ二圓ノ中心線ニ平行ナルトキ最大ナルコトヲ證明セヨ。

7. 直角三角形ノ直角ノ一邊ヲ直徑トスル圓ト斜邊トノ交點ニ於ケル切線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル。

8. 圓周上ノ點 A ヲ通ル二ツノ弦ヲ AB, AC トシ, A ニ於ケル切線ニ平行ナル割線ガ AB, AC ト交ハル點ヲ D, E トスレバ四點 D, B, C, E ハ同一圓周上ニアリ。

9. △ABC ノ外接圓ノ A ニ於ケル切線ト BC ノ延長トノ交點ヲ D トシ, 半直線 DB 上ニ DE ヲ DA ニ等シクトル。AE ハ ∠A ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。

10. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ヲ斜邊トスル二等邊直角三角形 BCD ヲ BC ニ對シテ △ABC ト反對ノ側ニ作ルトキハ AD ハ ∠A ヲ二等分スル。

11. 一圓周上ニ三點 A, B, C ガアル。B, C ニ於ケル切線ノ交點 P ヨリ AB ニ平行ニ引ケル直線 PQR (Q, R ハ圓周トノ交點) ガ弦 AC ト M ニ於テ交ハルトキ M ハ QR ノ中點デアル。

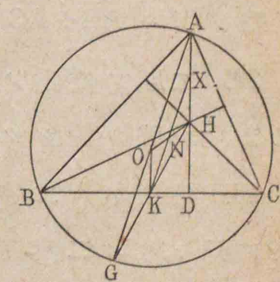
12. △ABC ノ內心ヲ O, 外接圓ノ弧 BC (A ヲ含マナイ) ノ中點ヲ M トスレバ, $MB=MO=MC$

13. ▱ABCD ニ於テ B ヲ中心, BC ヲ半徑トスル圓周ガ DC 又ハ其延長ト再ビ交ハル點ヲ E トスル。∠EAC ハ ∠ABD ト ∠ACD トノ差ニ等シイコトヲ證明セヨ。

14. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ和ガ他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シキトキハ, コノ四邊形ニ內切スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

15. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線ガ BC ト R デ, 外接圓周ト P デ交ハリ, A ニ於ケル外角ノ二等分線ガ BC ノ延長ト S デ, 外接圓周ト Q デ交ハレバ S ハ △PQR ノ垂心デアル。

16. △ABC ノ垂心ヲ H トシ A ヲ通ル外接圓ノ直徑ヲ AG トスレバ



第 174 圖

(1)　HBGC ハ平行四邊形デアル。

從テ HG ハ BC ノ中點 K ヲ通リ且 BC ニヨツテ二等分セラレル。

(2)　AH ハ外接圓ノ中心 O ヨリ BC ニ至ル距離ノ二倍ニ等シイ。

(3)　AH ノ中點 X, OH ノ中點 N, BC ノ中點 K ハ同一直線上ニアル。

(4)　N ヲ中心トシ, 圓 O ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周ハ X, K 及ビ A ヨリ BC ヘノ垂線ノ足 D ヲ通ル。

(5)　△ABC ノ三邊ノ中點, 各頂點ヨリ對邊ヘノ垂線ノ足,

各頂點ト垂心トヲ結ブ線分ノ中點ハ同一圓周上ニアル*。

17. 一ツノ線分ノ兩端ヲ夫々中心トシ互ニ外切スル任意ノ二圓ノ共通外切線ハ定圓ニ切スルコトヲ證明セヨ。

18. 二ツノ對角線及ビ一角ヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

19. 底邊ノ位置ト大サ,底邊ト內切圓トノ切點ノ位置及ビ內切圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

20. 底邊ノ位置ト大サ,頂角及ビ頂角ノ二等分線ガ底邊ト交ハル點ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

21. 定圓外ノ點 A ヲ通リ,圓周ト二點 B, C ニテ交ハル直線ヲ引キ AB＋AC ガ定長ナル樣ニセヨ。

22. 二圓ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ヲ引キ,二圓ヨリ切取ラレル弦ガ等シクナル樣ニセヨ。

23. 外切スル二等圓ガアル。其中心線ニ平行ナル直線ヲ引キ,コノ二圓周ニテ三等分セラレル樣ニセヨ。

24. 與ヘラレタ直線 XY ト與ヘラレタル圓 O トガアル。XY ト A デ圓周ト B, C デ交ハル直線ヲ引キ AB, AC ガ夫々與ヘラレタ長サ b, c ニ等シクナル樣ニセヨ。

* コノ圓ヲ△ABC ノ**九點圓**トイフ。(4)ニヨリテ九點圓ノ中心ハ外心ト垂心トヲ結ブ線分ノ中點デアリ其半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半分ニ等シイ。

第四編マデノ問題

1. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點ヲ D トスレバ　$\overline{AB}^2 \sim \overline{BD}^2 = BD \cdot CD$

2. O ハ平行四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點デ P ハ任意ノ點デアル

$$2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+8\overline{PO}^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. 直角二等邊三角形 ABC ノ斜邊 BC 上ノ任意ノ點ヲ E トスレバ　$\overline{BE}^2+\overline{EC}^2=2\overline{AE}^2$

4. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ヲ引イテ出來ル二ツノ三角形 ABC, CDA ノ重心ヲ夫々 G, H トスレバ GH ハ BD ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シ。

5. 二圓ノ共通切線ハ中心ヲ結付クル線分ヲ半徑ノ比ニ內分又ハ外分スル*。

6. 二圓ノ相似ノ中心*ノ一ツヲ通ル割線ガ各ノ圓ニ切取ラレル弦ハ半徑ニ比例スル。

7. 相交二圓 O, O′ ノ交點ヲ A, B トスル。B ヲ通ル二直線 CBD, C′BD′ ガ圓 O ト交ル點ヲ C, C′ 圓 O′ ト交ル點ヲ D, D′ トスレバ

* 二圓ノ中心ヲ結ブ線分ヲ半徑ノ比ニ內分スル點ヲコノ二圓ノ**相似ノ內心**, 外分スル點ヲ**相似ノ外心**トイヒ, 總稱シテ**相似ノ中心**トイフ。

(1) $\triangle ACD \backsim \triangle AC'D'$　　(2) $\triangle ACC' \backsim \triangle ADD'$

8. 線分 AB ガ C, D デ相等シイ比ニ內分,外分セラレルナラバ A, C, B, D ハ**調和列點**ヲナストイフ。A, C, B, D ヲ調和列點トシ直線 ACBD 外ノ一點ヲ O トスル。C ヲ通リ OD ニ平行ナ直線ガ OA, OB ニ交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ C ハ EF ノ中點デアル。

9. A, C, B, D ガ調和列點ナラバ $\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}=\dfrac{2}{AB}$ ナルコトヲ證明セヨ。

【注意】 本問ニヨリ AC, AB, AD ノ長サヲ表ハス數ノ逆數ガ等差級數ヲナスガ故ニ AC, AB, AD ハ調和級數ヲナス。

10. AB ハ圓 O ノ直徑ニシテ,CD ハ之ニ垂直ナル弦デアル。CD 上ノ點ヲ A, B ニ結ブ直線ト圓周トノ交點ヲ夫々 G, F トスレバ　CG : GD = CF : FD

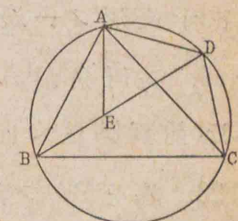
11. 圓周上ノ點ヨリコノ圓ニ內接スル四邊形ノ一組ノ對邊ニ下セル垂線ノ包ム矩形ノ面積ハ他ノ一組ノ對邊ニ下セル垂線ノ包ム矩形ノ面積ニ等シイ。

12. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 A ヲ通ル直線ガ對角線 BD, 邊 BC, CD 又ハ是等ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P, Q, R トスル。$\overline{PA}^2$ ハ PQ.PR ニ等シイコトヲ證明セヨ。

13. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ ∠A ノ二等分線ガ CD 又ハ其延長ト交ハル點ヲ P トシ,C ニ於ケル外角

ノ二等分線ニ交ハル點ヲ Q トスレバ　AP.PQ = DP.CP

14. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ ∠BAE ガ ∠CAD ニ等シクナル樣ニ AE ヲ ∠BAD ノ內ニ引キ BD トノ交點ヲ E トス。　AB.CD = AC.BE 及　BC.AD = AC.ED　ヲ證明シ,之ヲ利用シテ圓ニ內接スル四邊形ノ二組ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ對角線ノ包ム矩形ニ等シキコトヲ證明セヨ。*



第 175 圖

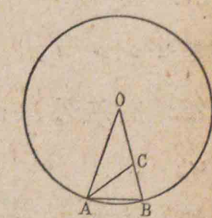
15. 等高ナル二ツノ三角形 ABC, A'BC ガ共通底邊 BC ノ同ジ側ニ立ツトキハ, BC ニ平行ナル直線ガ是等ノ三角形ノ二邊ノ間ニ夾マレル部分ハ等シイ。

16. 一邊 a ナル正六角形ガソノ一頂點カラ出ル對角線デ分ケラレル四ツノ三角形ノ面積ノ比ヲ求メヨ。

17. 四邊形ノ各對角線ノ中點ヲ通リ夫々他ノ對角線ニ平行ナル直線ノ交點ヲ各邊ノ中點ニ結付ケルト原形ハ四等分セラレル。

18. 圓 O ニ內接スル正十邊形ノ一邊ヲ AB トシ, ∠OAB ノ二等分線ガ OB ニ交ル點ヲ C トスレバ

$$\overline{AB}^2=\overline{OC}^2=OB.CB\ ^{**}$$



第 176 圖

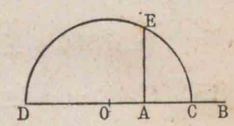
* 之ヲとれみー(Ptolemy)ノ定理トイフ。

** 線分ヲ一點ニテ內分又ハ外分シ其一ツノ分ガ他ノ分ト初ノ線分トノ比例中項ナルトキハ,コノ線分ハコノ點ニテ**中外比**ニ分タレルトイフ。

ナルコトヲ證明シ,之ヲ利用シテ半徑 r ナル圓ニ内接スル正十邊形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ。

19. 正五角形ABCDEノ對角線AC, BDハ互ニ他ヲ中外比(前頁脚註參照)ニ内分スル。

20. 線分BAノ延長上ニ $\frac{1}{2}$ ABニ等シクAOヲトリ,次ニAニ於ケルABノ垂線上ニABニ等シクAEヲトル。Oヲ中心トシOEヲ半徑トスル圓ガAB及其延長ト交ハル點ヲ夫々C,Dトスル。C, DハABヲ中外比ニ内分外分スル點ナルコトヲ證明セヨ。



第177圖

手引　先 $AC.AD=AB^2$, $AD=AC+AB$ ヲ證明シ,コノ二式ヨリAC又ハADヲ消去シテ變形セヨ。

【注意】第18問及第20問ニヨツテ圓ニ内接スル正十邊形ノ作圖法ヲ知ルコトガ出來ル。

21. 與ヘラレタル三角形ニ相似ナル三角形ヲ定圓ニ内接セシメヨ。

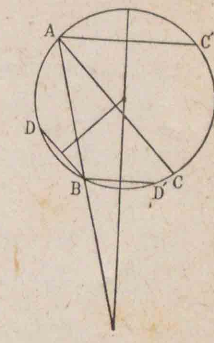
22. 底邊,外接圓ノ半徑及二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

23. 定點Pヲ通ル直線ヲ引キ定角XOYノ二邊OX, OYヲ夫々A, Bデ截リ $PA.PB=k^2$ (k ハ定長)ナラシメヨ。

手引　Pヲ通リOYニ垂直ナル直線トBヲ通リPABニ垂直ナル直線トノ交點Kノ位置ヲ定メルコトガ出來ル。

24. 定圓周上ノ二定點A,Bヲ通リテ平行ナル二ツノ弦AC, BDヲ引キ其長サヲ定比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ。

手引　中心ヲ通リ弦ニ垂直ナル直線トABトノ交點ハ如何ナル點デアルカヲ考ヘヨ。



第178圖

25. 與ヘラレタル三角形ノ一邊ニ垂直ナル直線ニテ,コノ三角形ヲ二等分セヨ。

函 數 表

角	sin.	cos.	tan.	cot.	角
23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67°
24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66°
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65°
26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64°
27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63°
28°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62°
29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61°
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60°
31°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59°
32°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58°
33°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57°
34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56°
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55°
36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54°
37°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53°
38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52°
39°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51°
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50°
41°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49°
42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48°
43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47°
44°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46°
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45°
角	cos.	sin.	cot.	tan.	角

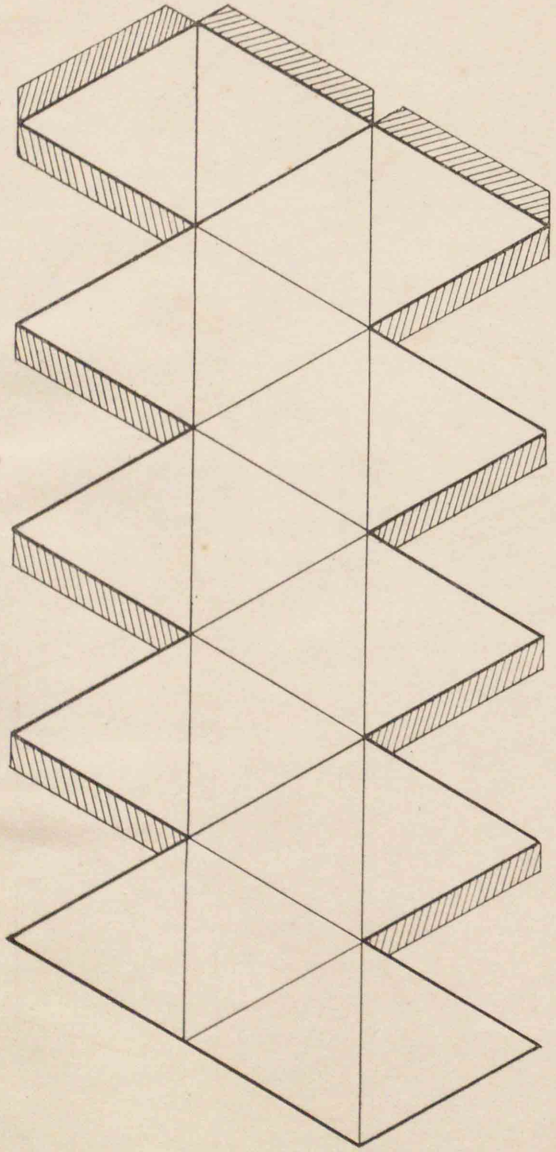
三　角　函　數　表

角	sin.	cos.	tan.	cot.	角
0°	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90°
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	89°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	88°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	87°
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	86°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	85°
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84°
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83°
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82°
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81°
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80°
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79°
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78°
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77°
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76°
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75°
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	74°
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	73°
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	72°
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	71°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70°
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	69°
22°	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	68°
角	cos.	sin.	cot.	tan.	角

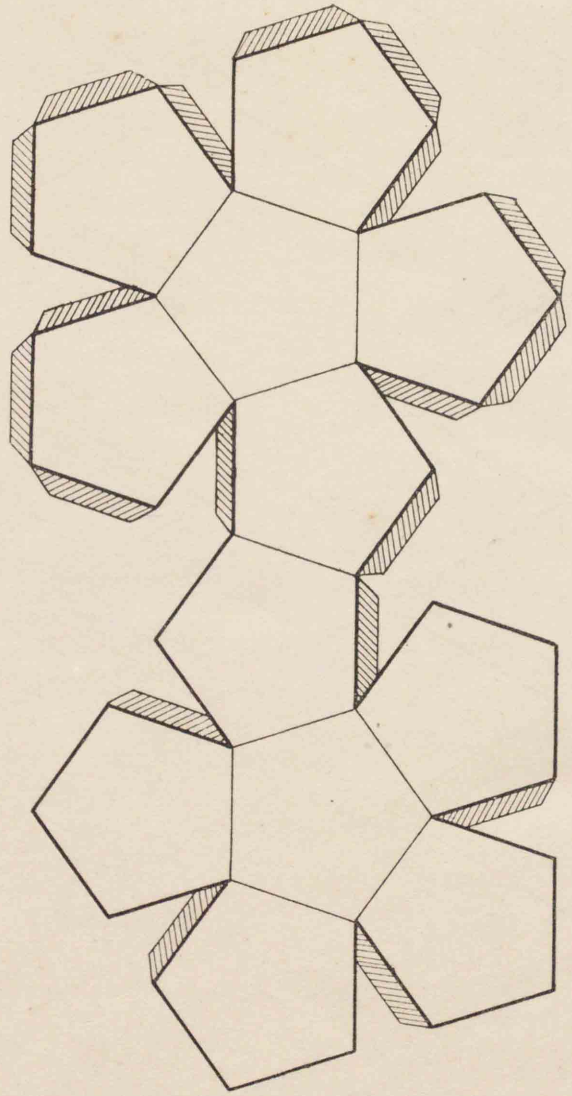
角	sin.	cos.	tan.
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000
角	cos.	sin.	cot.

三 角 函 數 表

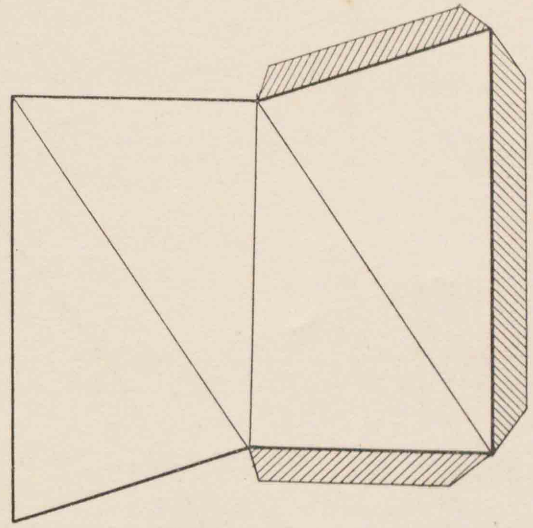
角	sin.	cos.	tan.	cot.	角	角	sin.	cos.	tan.	cot.	角
0°	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90°	23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67°
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	89°	24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	88°	25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	87°	26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64°
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	86°	27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	85°	28°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62°
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84°	29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61°
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83°	30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60°
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82°	31°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59°
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81°	32°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58°
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80°	33°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57°
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79°	34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56°
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78°	35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55°
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77°	36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54°
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76°	37°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53°
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75°	38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52°
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	74°	39°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51°
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	73°	40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50°
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	72°	41°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49°
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	71°	42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70°	43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47°
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	69°	44°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46°
22°	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	68°	45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45°
角	cos.	sin.	cot.	tan.	角	角	cos.	sin.	cot.	tan.	角



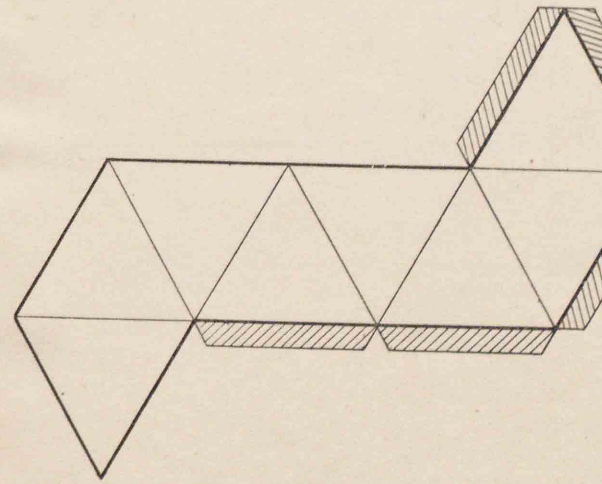
正二十面体展開圖



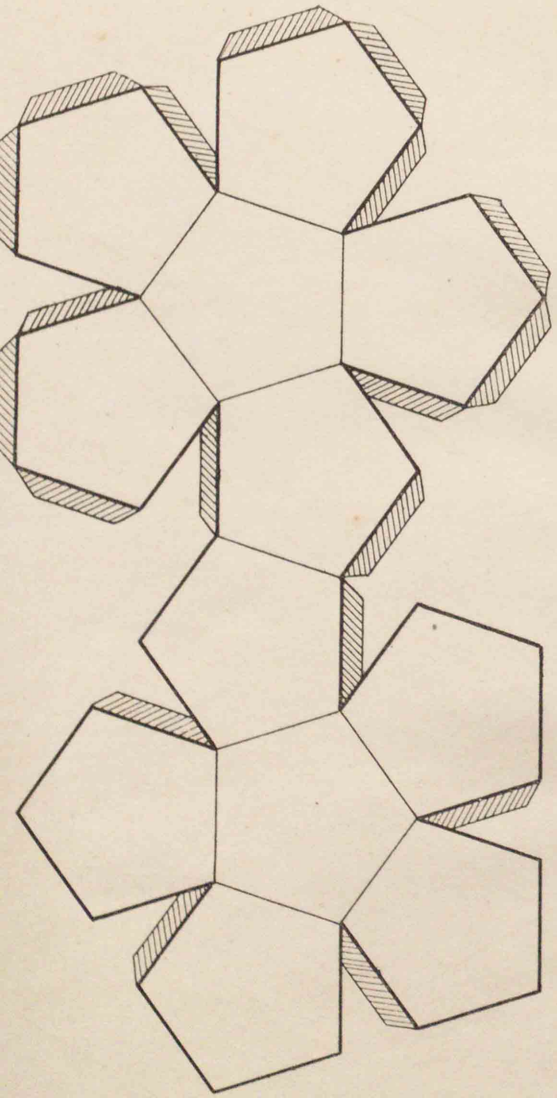
正十二面体展開圖



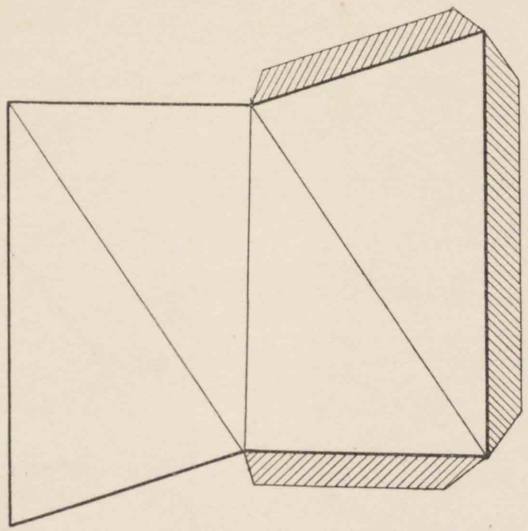
三角壔を三つの三角錐に
分けた中の一つの展開圖



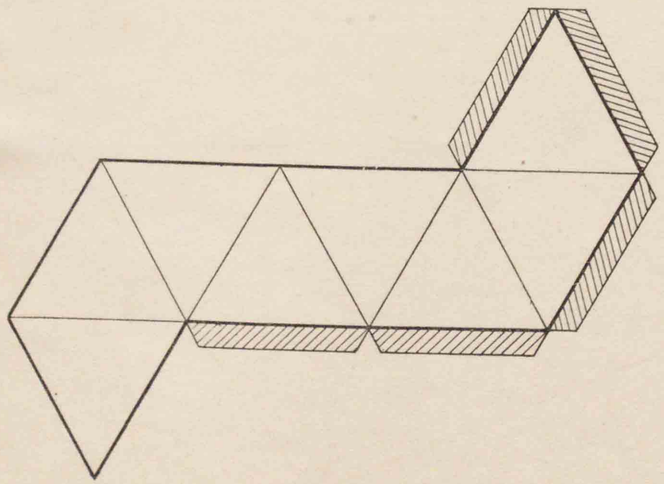
正八面体展開圖



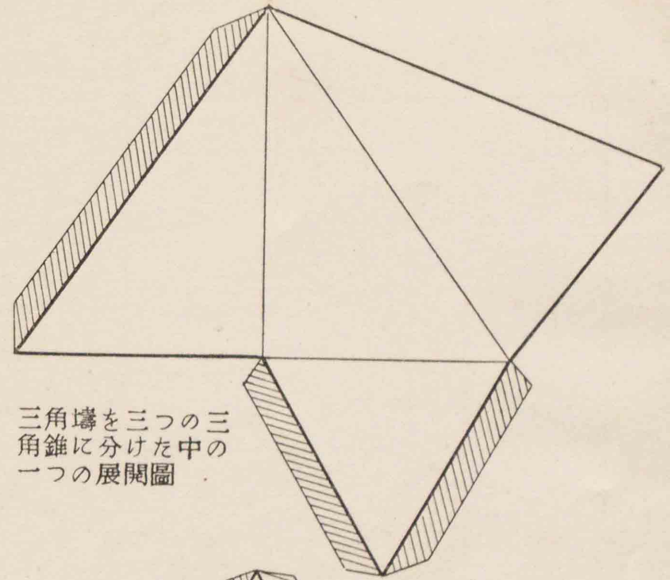
正十二面体展開圖



三角壔を三つの三角錐に
分けた中の一つの展開圖

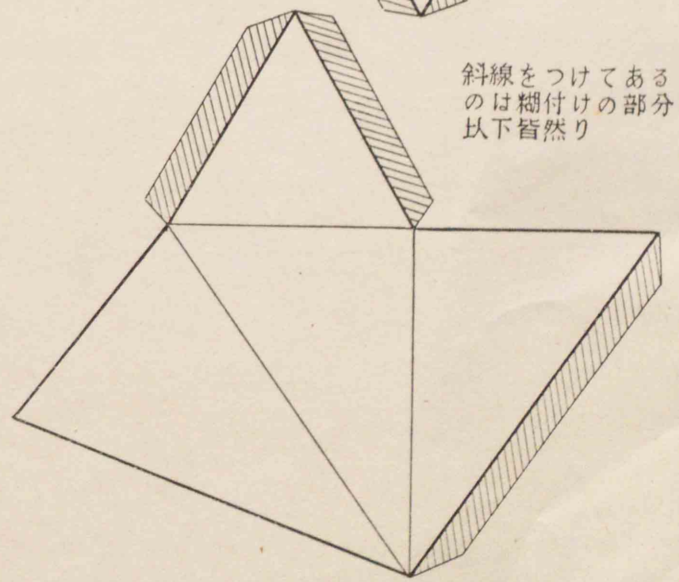


正八面体展開圖



三角壔を三つの三
角錐に分けた中の
一つの展開圖

斜線をつけてある
のは糊付けの部分
以下皆然り



三角壔を三つの三角錐に
分けた中の一つの展開圖

昭和十四年十二月十四日
文部省檢定濟
實業學校數學科用

昭和14年10月15日印刷
昭和14年10月18日發行
昭和14年12月8日訂正再版發行
昭和14年12月11日訂正再版發行

實業學校
新幾何學教科書

【定價金八拾八錢】

著作者　渡邊孫一郎

發行者　來島捨六
東京市神田區神保町二丁目十番地

印刷者　小笠原秀雄
東京市神田區錦町三丁目廿六番地

發行所　山海堂出版部
東京市神田區神保町二丁目十番地
電話九段1310番＊振替東京21691番

◁秀好堂印行　西村製本▷

三東
遠藤昌

広島市商 三年 東組 遠藤昌
広島市商 三年 遠藤昌
廣島市商 三年 遠藤昌
廣

西洋史

第二學年

第三學年

遠藤[illegible]