文部省檢定濟

實業

幾何教科書

改版

株式會社
帝國書院

文部省檢定濟
昭和十年二月七日 實業學校數學科

實業

幾何敎科書

改版

帝國書院編輯部
編纂

株式會社
帝國書院

幾何模様

緒　　言

本書ハ曩ニ編纂シタ實業幾何教科書ヲ改版シタモノデ,特ニ次ノ諸點ニ意ヲ用ヒマシタ.

1. 用語ハスベテ平易ヲ旨トシ,理論ハ嚴密ニナシタコト.

2. 教材ノ排列ヲ少シク改メ,先ヅ第一篇緒論ニ於テ既知事項ト聯絡ヲトリツツ幾何圖形ノ概念ヲ說明シテ之ヲ正確ニ認識セシメ以テ第二篇以下ノ說述ニ對スル基礎ノ知識ヲ與ヘタコト.

3. 算術,代數學トノ聯絡ヲ圖リ益々數學的思考力ヲ涵養セシメ,數學ト日常生活トニ密接ナル交渉ガアルコトヲ知ラシメルヤウ努メタコト.

4. 函數概念ノ養成ニハ常ニ注意シタコト.

5. 問題ハスベテ基本的ナルモノヲ精選シテ甚ダシク難解ナルモノハ之ヲ避ケ,ソノ多クニハ圖ヲ附シテ直觀力ノ養成ニ資シタコト. 又排列ハ易ヨリ難ヘト順序ヲ追ツタコト.

6. 挿圖ヲ全部改メテ正確,明瞭ニシタコト.

併シ本書ハ,尙改善シナケレバナラヌ點ガ少クナイト思ヒマス. 教授當局諸賢ノ忌憚ナキ忠言ヲ切ニ希フ次第デアリマス.

昭和九年十二月

編者謹識

目　次

第一篇　緒　論

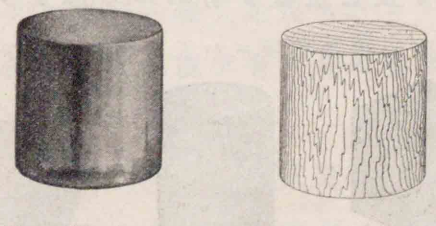
第一章　幾何圖形

1. 立　體

我々ノ周圍ニハ種々ノ物體ガアル．箇々ノ物體ハ何等カノ物質デ構成サレ,形,大キサ,位置ヲ有シ,尙色,重サ,硬サ等種々ノ性質ニヨツテ夫々特徴ヲ表ハシテキル．

物體ヲ唯ソノ形,大キサ及ビ位置ノミニツイテ考ヘタトキ,コレヲ立體トイフ．

例ヘバ國際きろぐらむ原器ハ,高サ及ビ底面ノ直徑ガ共ニ 39mm ナル直圓壔デアル．今原器ト等形,等大ノ直圓壔ヲ木材デ作リ,ソレラヲ机上ニ置イタモノトスル．



サテ原器ヲ除イテソノ跡ニ木材ノ圓壔ヲ置ケバ,

原器ガ占メテキタ空間ノ一部分ト,木材ノ圓壔ガ占メル空間ノ一部分トハ全ク相等シイ.

卽チ原器ト木材ノ圓壔トハ,立體トシテハ同一ノモノト考ヘルコトガ出來ル.

立體ハ形,大キサ及ビ位置ヲ有シ,從ツテ空間ノ一部分ヲ占メル.

2. 面

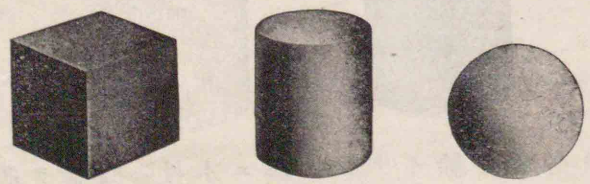
立體ガ空間ノ一部分ヲ占メテキルトイフコトハ,ソノ立體ト,立體ノ外部ノ空間トノ間ニ境界ガアルコトデアル. 卽チ或境界ガ立體ヲ包ンデヰルト考ヘルコトガ出來ル.

立體ノ境界ヲ**面**トイフ.

立體ニ基ヅイテ面ヲ考ヘタガ,例ヘバ薄イ紙ノ如キモノニヨツテ單獨ニ面ヲ想像スルコトガ出來ル.

面ハ形,廣サ及ビ位置ヲ有スルガ,厚サヲ有シナイ.

問. 立方體,直圓壔及ビ球ニハ夫々幾ツノ面ガアルカ.

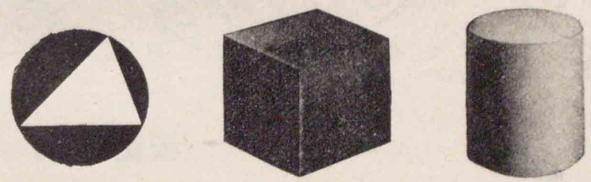


凹凸ノナイ平ラナ面ヲ**平面**トイヒ,平面デナイ面ヲ**曲面**トイフ.

例ヘバヨク磨カレタ鏡ノ表面,靜止シテキル水面ノ如キモノデ平面ガ想像出來ル. 又直圓壔ノ側面,球ノ表面等ハ何レモ曲面デアル.

3. 線

面ノ境界又ハ二ツノ面ノ交ハリヲ**線**トイフ.



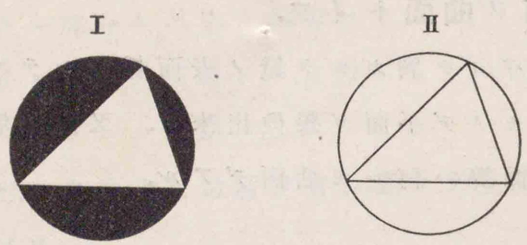
問. 上ノ左端ニ於ケル圖ノ線ヲ指摘セヨ. 又立方體,直圓壔ニハ夫々面ノ交ハリハ幾ツアルカ.

面ニ基ヅイテ線ヲ考ヘタガ,例ヘバ細イ絲ノ如キモノニヨツテ單獨ニ線ヲ想像スルコトガ出來ル.

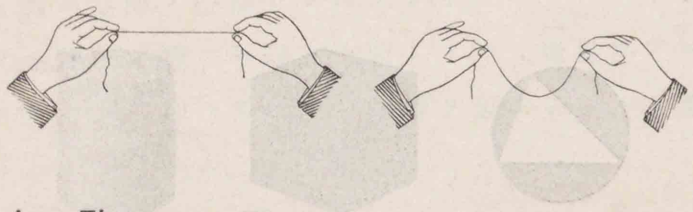
線ハ形,長サ及ビ位置ヲ有スルガ,幅及ビ厚サヲ有シナイ.

幅及ビ厚サノナイモノヲ實際ニ書キ表ハスコトハ不可能デアルカラ,例ヘバ次頁ノⅠ圖ニ於ケル黒

イ部分ノ境界ヲ,II圖ノヤウニ細ク書イテ表ハス.



曲折シナイ眞直ナ線ヲ**直線**トイヒ,直線デナイ線ヲ**曲線**トイフ.



4. 點

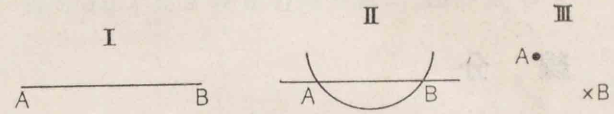
線ノ端又ハ二ツノ線ノ交ハリヲ**點**トイフ.

問. 立方體ニハ線ノ交ハリガ幾ツアルカ.

線ニ基ヅイテ點ヲ考ヘタガ,例ヘバ針ノ尖端デ紙ヲ突イタトキノ孔ヤ,細カイ砂粒ナドニヨツテ單獨ニ點ヲ想像スルコトガ出來ル.

點ハ位置ヲ有スルガ,形,長サ,幅及ビ厚サヲ有シナイ.

大キサノナイモノヲ實際ニ書キ表ハスコトハ不可能デアルカラ,例ヘバ次ノ圖ノヤウニ書ク.



I圖ハ線ノ兩端ガ夫々點A,點Bデアルコトヲ示シ,II圖ハ二ツノ線ノ交ハリガ夫々點A,點Bデアルコトヲ示シ,III圖ハ單獨ニ點ヲ考ヘタトキノ書キ方ヲ示ス.

點ヲ呼ブニハ,點A,點B又ハA點,B點ナドトイヒ,時ニハ單ニA,Bノ如クイフコトガアル.

5. 幾何圖形

立體,面,線,點又ハソレラノ集リヲ**幾何圖形**又ハ單ニ**圖形**トイフ.

一ツノ平面上ニアル圖形ヲ**平面圖形**トイヒ,一ツノ平面上ニナイ圖形ヲ**立體圖形**トイフ.

平面圖形ニツイテ研究スル幾何學ヲ**平面幾何學**トイヒ,立體圖形ニツイテ研究スル幾何學ヲ**立體幾何學**トイフ.

第二章 直線

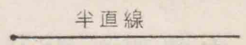
6. 線分

長サニ限リガナイ直線ヲ**無限直線**トイヒ,長サニ限リガアル直線ヲ**有限直線**又ハ**線分**トイフ.

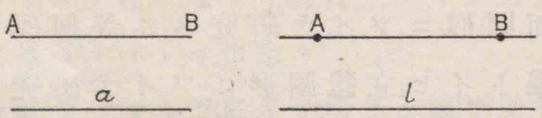
線分ハ必要ニ應ジテ,コレヲ有限ノ長サダケ又ハ限リナク引キ延バスコトガ出來ル.

線分ノ引キ延バサレタ部分ヲソノ**延長**トイヒ,延長ヲ作ルコトヲ線分ヲ**延長スル**トイフ.

線分ヲ一方ノ側ニ限リナク延長シタモノヲ**半直線**トイフ.



線分ハソノ兩端ノ點ニA,B等ノ文字ヲツケテ表ハシ,無限直線ハソノ上ニ二點ヲトツテ,ソレラニA,B等ノ文字ヲツケテ表ハス.



上ノ左圖ノ線分ヲ線分AB,右圖ノ直線ヲ直線AB

ノ如ク呼ブ. 時ニハ,一ツノ文字デ線分又ハ直線ヲ表ハシ,例ヘバ線分 a,直線 l ノ如ク呼ブコトガアル.

註. 線分ABノ長サ及ビ名稱ヲ單ニABデ表ハスコトガアル.

7. 直線ノ性質

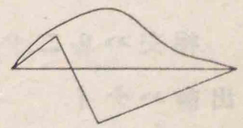
[1] **二ツノ點ヲ通ル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.**

從ツテ直線ノ位置ハ二ツノ點ニヨツテ定マル.

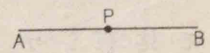
コノコトヲ**二ツノ點ハ一ツノ直線ヲ決定スル**トイフ.

故ニ**二ツノ直線ガ二點ヲ共有スレバ,ソノ二直線ハ全ク一致スル.**

[2] **二ツノ點ヲ兩端トスル線ノウチデ,長サハ線分ガ最短デアル.**



二ツノ點ヲ兩端トスル線分ヲ作ルコトヲソノ**二點ヲ結ブ**トイヒ,ソノ線分ノ長サヲ**二點間ノ距離**トイフ.



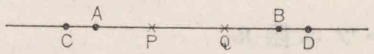
線分ノ上デ,ソノ兩端カラ等シイ距離ニアル點ヲソノ線分ノ**中點**又ハ**二等分點**トイヒ,中點ハ線分ヲ**二等分スル**トイフ.

8.　平行線

同一平面上ニアル二ツノ直線ノ位置ノ關係ハ,次ノ三通リノ場合ガアル.

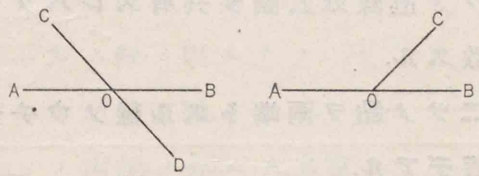
(1)　一致スル場合

二ツノ直線AB, CDガ二點P,Qヲ共有スレバ,コノ二直線ハ全ク一致スル.（第7節 [1]）



(2)　相交ハル場合

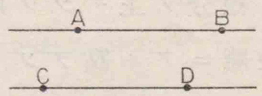
唯一ツノ點ヲ共有スル二ツノ直線ハ**相交ハル**トイヒ,ソノ交ハリノ點ヲ**交點**トイフ.



相交ハル二ツノ直線ハ,全ク一致シナイ限リ再ビ出會ハナイ.

(3)　平行ナル場合

二ツノ無限直線ガ一點モ共有シナイトキ,コノ二直線ヲ**平行線**トイヒ,二ツ

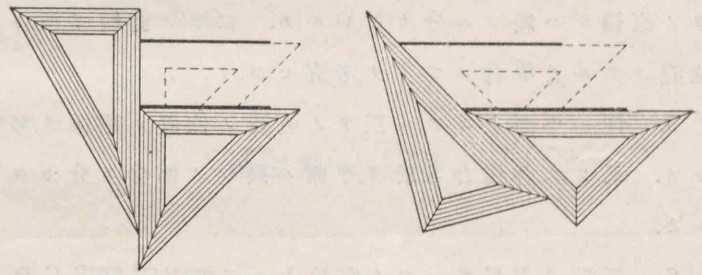


ノ直線ハ**互ニ平行デアル**トイフ.

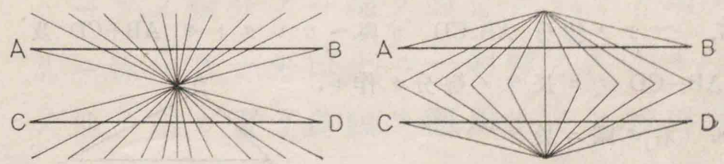
二ツノ直線ノウチ,一方又ハ双方ガ線分ノ場合ニハ,ソレラヲ限リナク延長シテ交ハラナケレバ互ニ平行デアル.

二ツノ直線ガ互ニ平行デアルコトヲ表ハスニハ,記號 ∥ ヲ用ヒテ,例ヘバ AB∥CD ノ如ク書ク.

平行線ヲ引クニハ,例ヘバ次ノ圖ノ如ク,一ツノ定規ヲ固定シ,ソノ線ニ他ノ定規ヲアテテソレヲ滑ラセレバヨイ.　ソノ理由ハ第28節ニ至ツテ判明スル.



問.　次ノ各圖ニ於テ,AB,CDハ何レモ直線デ且互ニ平行デアル.　定規ヲ用ヒテコレヲ確カメヨ.



問題 1

1. 一ツノ直線上ニ三點 A, B, C ヲトルトキ, ソレラノ順序ハ幾通リ出來ルカ.

2. 前題ニ於テ, 各順序ニ於ケル線分 BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トスルトキ, a, b, c ノ關係式ヲ作レ.

3. 一ツノ直線上ニ四點 A, B, C, D ガコノ順序ニアルトキ, 次ノ關係ガアルコトヲ示セ.

$$AC+BD=AD+BC$$

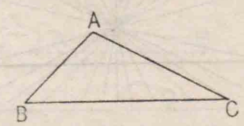
4. 一ツノ直線デ平面ハ二ツノ部分ニ分カタレル. 二ツノ直線デハ幾ツニ分カタレルカ. 二ツノ直線ガ種々ノ位置ニアル各場合ニツイテ考究セヨ.

5. 同一平面上ニアル三ツノ直線ノ位置ノ關係ヲ考究セヨ. 又ソノ各場合ニ於テ, 平面ハ幾ツノ部分ニ分カタレルカ.

6. 三點 A, B, C ガ一ツノ直線上ニアリ, 又三點 B, C, D ガ一ツノ直線上ニアレバ, 四點 A, B, C, D ハ同一ノ直線上ニアル. ソノ理由ヲ説明セヨ.

7. 二ツノ線分 AB, CD ガ與ヘラレタトキ, AB+CD 及ビ $AB \sim CD$ ナル長サノ線分ヲ作レ.

8. 右ノ圖ニ於テ



$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c$$

トスル. 長サガ次ノ各式デ表ハサレル線分ヲ作レ.

(1) $b+c$　　(2) $b-c$

(3) $a+b+c$　　(4) $a+2b-3c$

9. 前題ニ於テ, a, $b+c$, $b-c$ ノ長サヲ比較セヨ.

10. 一點 O カラ出ル二ツノ半直線ヲ引キ, ソレラノ上ニ二點ヅツ A, B; C, D ヲ同ジ順ニトツテ

$$OA=AB, \qquad OC=CD$$

ナラシメルトキ, 次ノコトヲ定規トこむぱすトヲ用ヒテ確カメヨ.

(1) A トC, B トD トヲ結ベバ, $AC \parallel BD$

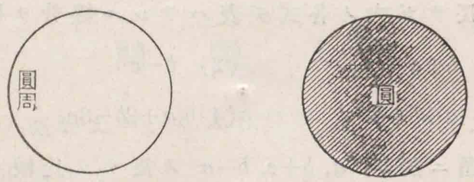
(2) $BD=2AC$

第三章　圓

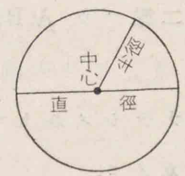
9. 圓周, 圓

問 1. こむぱすヲ用ヒテ半徑 2cm ノ圓周ヲ畫ケ.

一ツノ線分ノ一端ヲ固定シテ, ソノ端ノ周リニ線分ヲ一平面上ニ一廻轉スルトキ, 線分ノ他ノ端ガ畫ク曲線ヲ**圓周**トイヒ, 圓周デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**圓**トイフ.

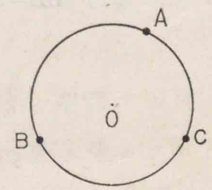


固定シタ點ヲ**中心**トイヒ,中心ト圓周上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ**半徑**トイフ.



中心ヲ通ツテ兩端ガ圓周上ニアル線分ヲ**直徑**トイフ.

問 2. 半徑ト直徑ノ長サノ關係ヲイヘ.



圓周ヲ表ハスニハ,周上ニ三點ヲトツテソレラニ A, B, C 等ノ文字ヲツケテ,例ヘバ圓周 ABC ノ如ク呼ブ.

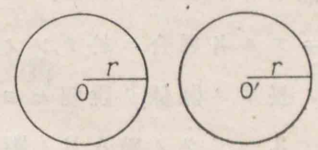
圓ヲ表ハスニハ,ソノ中心ニ文字ヲツケテ,例ヘバ圓 O ノ如ク呼ブ.

註. 混同スル恐レガナイトキハ,圓周ヲ單ニ圓トイフコトガアル.

10. 圓ノ性質

[1] **圓周上ノ各點ハ,中心カラ等シイ距離ニアル. 從ツテ一ツノ圓ノ半徑ハ皆相等シイ.**

半徑ガ相等シイ二ツノ圓ノ中心ヲ夫々 O, O′ トシ,



圓 O ヲ圓 O′ ノ上ニ置イテ,中心 O ヲ中心 O′ ニ重ネレバ,二ツノ圓ハ全ク相重ナリ,ソレラノ圓周モ亦全ク相重ナル.

即チ

[2] **半徑ガ相等シイ二ツノ圓又ハ圓周ハ全ク相重ネ合ハスコトガ出來ル.**

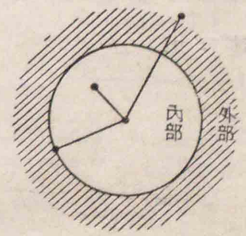
半徑ガ相等シイ圓ヲ**等圓**又ハ**相等シイ圓**トイフ.

問. 一ツノ圓ヲ畫キ,ソノ任意ノ直徑ヲ引イテコレヲ折目トシテ圓ヲ二ツニ折ツテ見ヨ.

[3] **直徑ハソノ圓及ビ圓周ヲ全ク相等シイ二ツノ部分ニ分ケル.**

圓及ビ圓周ガソノ直徑ニヨツテ分ケラレタ各部分ヲ,夫々**半圓**及ビ**半圓周**トイフ.

問題 2



1. 一ツノ圓周上ニ三點 A, B, C ヲトルトキ,ソレラノ順序ハ幾通リ出來ルカ.

2. 一ツノ圓周ニヨリ平面ハ二ツノ部分ニ分カタレル. ソノ中心ノアル部分ヲ圓ノ**内部**中心ノナイ部分ヲ圓ノ**外**

部トイフコトニスル．一ツノ點ガ圓ノ內部,外部及ビ周上ニアル各場合ニ於テ,ソノ點ト中心トノ距離ト,圓ノ半徑トノ長サノ關係ヲ說明セヨ．

3. 二ツノ點A,Bノ距離ハ3*cm* デアル．B ハ A ヲ中心トスル如何ナル半徑ノ圓ノ內部又ハ外部ニアルカ．ソレラノ圓ヲ一ツヅツ畫ケ．

註． 同ジ點ヲ中心トシテ,半徑ガ異ナル二ツ以上ノ圓ヲ**同心圓**トイフ．

4. 線分 AB ノ長サハ 5*cm* デアル．次ノ各場合ニ於ケル圓ヲ作レ．

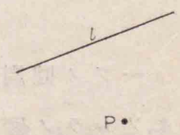
(1) A, B ヲ中心トシテ半徑ガ夫々 2*cm*, 1*cm* ナル圓

(2) A, B ヲ中心トシテ半徑ガ夫々 3*cm*, 2*cm* ナル圓

(3) A, B ヲ中心トシテ半徑ガ夫々 4*cm*, 3*cm* ナル圓

5. 前題ノ(2)及ビ(3)ニ於テ,二ツノ圓ノ周ガ共有スル點ハ幾ツアルカ．又ソノ點ハ A, B ニ對シテ如何ナル關係ニアルカ．

6. 右ノ圖ニ於テ,直線 l 上ニ P カラ 1.5*cm* ノ距離ニアル點ヲ求メル方法ヲ述ベヨ．

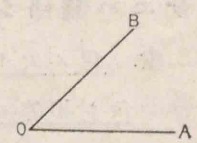


第四章 角

11. 角

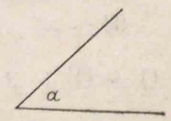
一點カラ出ル二ツノ半直線ノナス開キヲ**角**トイヒ,ソノ點ヲ角ノ**頂點**,二ツノ半直線ヲ角ノ**邊**トイフ．

例ヘバ右ノ圖ニ於テ,二ツノ半直線 OA, OB ハ角ヲナシ, O ハソノ頂點, OA, OB ハ夫々角ノ邊デアル．

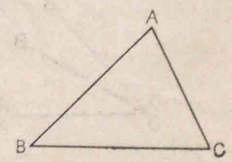


角ヲ呼ブニハ,角 AOB, 角 BOA 又ハ單ニ角 O ノ如クイヒ,コレヲ表ハスニハ記號 ∠ ヲ用ヒテ, ∠AOB, ∠BOA 又ハ單ニ ∠O ノ如ク書ク．

時ニハ角ノ內部ニ一ツノ文字例ヘバ α* ヲ置イテ, $\angle\alpha$ ノ如ク表ハスコトモアル．

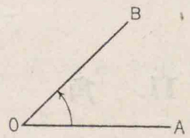


問． 右ノ圖ニアルスベテノ角ヲ讀ミ且書ケ．



*α ハぎりしゃ文字デあるふぁト讀ム．コノ他ぎりしゃ文字ノ β(べーたー), γ(がむまー), δ(でるたー)等ヲ用ヒルコトガアル．

12. 角ノ大キサ

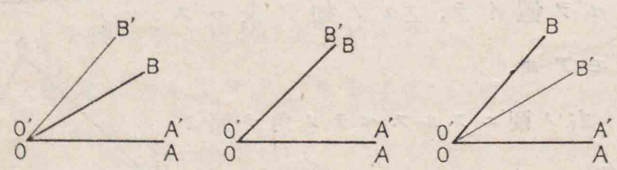


角AOBニ於テ,邊 OA ガ頂點O ヲ中心トシテソノ周リヲ廻轉シ,邊 OB ニ一致シタトスルトギ,邊 OA ハ角AOBダケ**廻轉**シタトイヒ,コノ廻轉ノ量ヲ**角ノ大キサ**トイフ. 従ツテ**角ノ大キサハソノ二邊ノ長サニハ關係シナイ.**

註. 角ノ大キサヲ單ニ角トイフコトガ多イ. 例ヘバ二ツノ角ガ相等シイトイフコトハ,ソレラノ角ノ大キサガ相等シイ意味デアル.

二ツノ角ヲ比較スルニハ,ソレラノ頂點ト各一邊トヲ重ネテ,他ノ邊ノ位置ノ關係ヲ見レバヨイ.

例ヘバ ∠AOB ト ∠A'O'B' トヲ比較スルニハ,頂點 O ト O' トヲ又邊 OA ト O'A' トヲ重ネテ

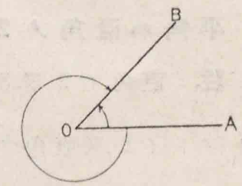


邊OBガ∠A'O'B'ノ内部ニアレバ, ∠AOB<∠A'O'B'

邊OBガ邊O'B' ト一致スレバ, ∠AOB=∠A'O'B'

邊OBガ∠A'O'B'ノ外部ニアレバ, ∠AOB>∠A'O'B' デアル.

13. 共軛角



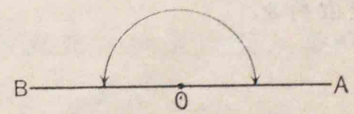
角AOBニ於テ,邊 OA ガ頂點 O ヲ中心トシテソノ周リヲ廻轉シ,邊 OB ニ一致スルニハ二通リノ向キガアル. 卽チソノ一ツハ時計ノ針ト反對ノ向キニ動ク場合デ,他ハ時計ノ針ト同ジ向キニ動ク場合デアル. 従ツテ二ツノ半直線ハ頂點及ビ二邊ヲ共有スル二ツノ角ヲ作ル.

頂點及ビ二邊ヲ共有スル二ツノ角ノウチ,一方ヲ他方ノ**共軛角**トイヒ,大ナル方ヲ**優角**,小ナル方ヲ**劣角**トイフ.

單ニ角トイフトキハ,通常劣角ヲ指スモノトスル.

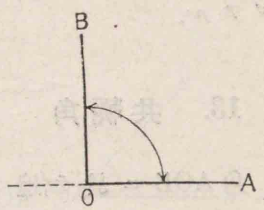
問. 二ツノ共軛角ガ等シクナル場合ハアルカ.

14. 平角,直角



角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアツテ,一邊ガ

他ノ邊ノ延長ト一致スルトキ,ソノ角ヲ平角トイフ.



平角ノ二分ノ一ヲ直角トイフ.

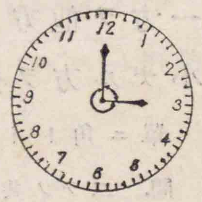
平角ハ直角ノ2倍ニ等シイ.

註. 直角ノ2倍,3倍,4倍等ヲ夫々2直角,3直角,4直角ナドトイヒ,又直角ノ$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$等ヲ夫々$\frac{1}{2}$直角, $\frac{1}{3}$直角, $\frac{1}{4}$直角ナドトイフ.

直角ヲ表ハスニハ,∠R又ハR∠ナル記號ヲ用ヒル. 例ヘバ∠AOBガ直角デアルコトヲ

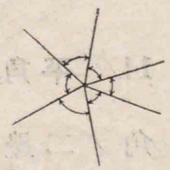
$$\angle AOB = \angle R$$

ノ如ク書ク.



問 1. 時計ノ兩針ハ1時間ニ夫々幾直角廻轉スルカ.

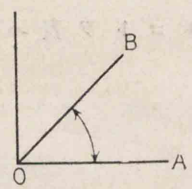
問 2. 3時ノ時刻ニ,時計ノ兩針ガナス劣角及ビ優角ハ夫々幾直角カ.

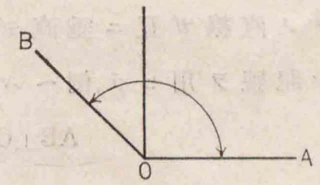


問 3. 一ツノ點カラ出ル幾ツカノ半直線ノ相隣レル二ツヅツガナス角ノ總和ハ幾直角カ.

15. 鋭角,鈍角

直角ヨリモ小サイ角ヲ**鋭角**トイヒ,直角ヨリモ大キク平角ヨリモ小サイ角ヲ**鈍角**トイフ.





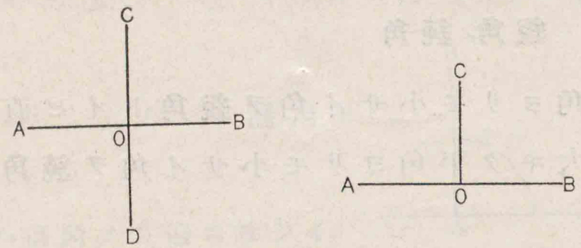
問 1. 平角,直角,鋭角,鈍角ノ大キサノ關係ヲ述ベヨ.

問 2. 時計ノ兩針ガ夫々鋭角,鈍角ヲナス時刻ヲ二ツヅツ擧ゲヨ.

16. 垂線,斜線

二ツノ直線ガ相交ハツテソノナス角ガ直角デアルトキ,コノ二ツノ直線ハ**互ニ直交スル**又ハ**互ニ垂直デアル**トイフ.

例ヘバ次頁ノ圖ニ於テ, ∠AOC=∠R ナルトキ, ABトCD (又ハCO) トハ互ニ直交スル又ハ互ニ垂直デアルトイフ.



二ツノ直線ガ互ニ垂直デアルコトヲ表ハスニハ,⊥ナル記號ヲ用ヒテ,例ヘバ

AB⊥CD

ノ如ク書ク.

二ツノ直線ガ互ニ直交スルトキ,一方ヲ他方ノ**垂線**トイヒ,ソノ交點ヲ**垂線ノ足**トイフ.

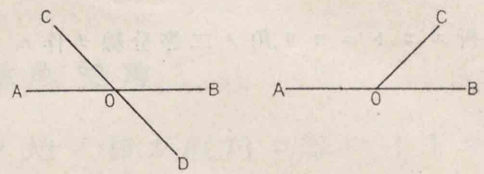
例ヘバ上ノ圖ニ於テ, CD ハ AB ノ垂線デアリ, AB ハ CD ノ垂線デアル. 而シテ O ハ垂線ノ足デアル.

一ツノ線分ノ中點ヲ通ツテソレニ垂直ナル直線ヲ線分ノ**垂直二等分線**トイヒ,ソノ直線ハ線分ヲ**垂直ニ二等分スル**トイフ.

例ヘバ上ノ圖ニ於テ, AO=BO ナルトキ, CD (又ハ CO) ハ AB ノ垂直二等分線デアル.

二ツノ直線ガ相交ハツテ互ニ垂直デナイトキ,コノ二ツノ直線ハ**斜交スル**トイヒ,一方

ヲ他方ノ**斜線**トイヒ,ソノ交點ヲ**斜線ノ足**トイフ.



例ヘバ上ノ圖ニ於テ, AB, CD (又ハ CO) ノ一方ハ他ノ斜線デ, O ハソノ足デアル.

問 1. 三角定規ニ於テ,ソノ稜ガ互ニ直交スルモノ及ビ斜交スルモノヲ指摘セヨ.

問 2. 紙ヲ折ルコトニヨリ,一ツノ線分ノ垂直二等分線ヲ作ルコトヲ考ヘヨ.

問 3. 紙ヲ折ルコトニヨリ,一ツノ直線 AB トソノ直線上又ハ直線外ニ一點 P ガ與ヘラレタトキ, P ヲ通ツテ AB ニ直交スル直線ヲ引クコトヲ考ヘヨ.

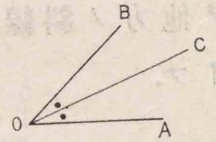
17. 角ノ二等分線

角ノ頂點ヲ通ツテソレヲ相等シイ二ツノ角ニ分ケル直線ヲ,ソノ角ノ**二等分線**トイフ.

例ヘバ次頁ノ圖ニ於テ

$\angle AOC = \angle BOC$

ナルトキ, OC ヲ角 AOB ノ二等分線トイフ.



問. 紙ヲ折ルコトニヨリ,角ノ二等分線ヲ作ルコトヲ考ヘヨ.

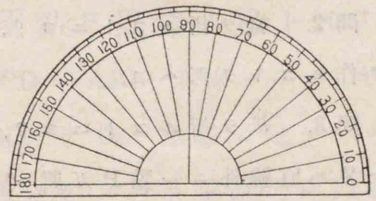
18. 角ノ單位

幾何學ニ於テハ,角ヲ測ルノニ直角ヲ單位トスルコトガ多イガ,實用上ハ直角ヲ基本單位トシ,補助單位トシテ**六十分法ノ度,分,秒**ヲオク.

1直角 = 90度

1 = 60分

1 = 60秒



角ノ大キサヲ測リ又ハ所要ノ角ヲ書クニハ上圖ノ如キ**分度器**ヲ用ヒル.

角ノ大キサヲ示スニハ,例ヘバ23度27分 8.26 秒ヲ $23°27'8''.26$ ノ如ク書ク.

問 1. 平角ハ幾度カ.

問 2. 時計ノ兩針ハ1時間ニ夫々幾度廻轉スルカ.

問 3. 分度器ノ用法ヲ考ヘヨ.

問 4. 分度器ヲ用ヒテ三角定規ノ各角ヲ測レ.

問 5. 分度器ヲ用ヒテ次ノ各角ヲ書ケ.

15°, 30°, 45°, 60°, 75°

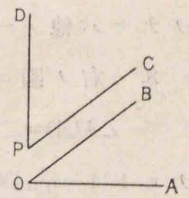
19. 餘角,補角

二ツノ角ノ和ガ直角ニ等シイトキ,ソノ一ツノ角ハ他ノ角ノ**餘角**デアルトイヒ,二ツノ角ハ**互ニ餘角ヲナス**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ

$\angle AOB + \angle CPD = \angle R$

ナルトキ, $\angle AOB$, $\angle CPD$ ハ互ニ餘角ヲナストイフ.



問 1. 次ノ各角ノ餘角ヲイヘ.

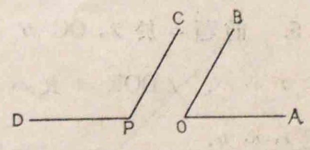
15°, 30°, 45°, $\frac{1}{3}\angle R$, $\frac{1}{4}\angle R$

二ツノ角ノ和ガ2直角ニ等シイトキ,ソノ一ツノ角ハ他ノ角ノ**補角**デアルトイヒ,二ツノ角ハ**互ニ補角ヲナス**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ

$\angle AOB + \angle CPD = 2\angle R$

ナルトキ, $\angle AOB$, $\angle CPD$ ハ



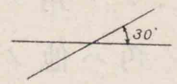
互ニ補角ヲナストイフ.

問 2. 次ノ各角ノ補角ヲイヘ.

30°, 60°, 75°, 120°, $\frac{1}{3}\angle R$, $\frac{2}{3}\angle R$

問題 3

1. 二ツノ直線ガ相交ッテ作ル四ツノ角ノウチ,ソノ一ツガ30°ナラバ他ノ三ツノ角ハ夫々幾度カ.

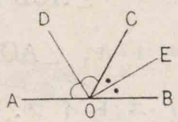


2. 三ツノ角ノ和ガ180°デ,ソノウチノ二ツガ互ニ餘角ヲナセバ他ノ一ツハ幾度カ.

3. 右ノ圖ニ於テ

$\angle AOD=\angle COD$, $\angle BOE=\angle COE$

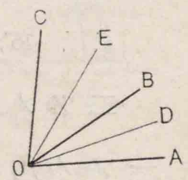
ナルトキハ,$\angle DOE=\angle R$ナルコトヲ說明セヨ.



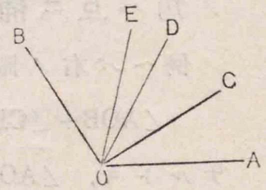
4. 右ノ圖ニ於テ,OD, OEハ夫々$\angle AOB$, $\angle BOC$ノ二等分線デアルトスレバ

$\angle DOE=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)$

ナルコトヲ說明セヨ.



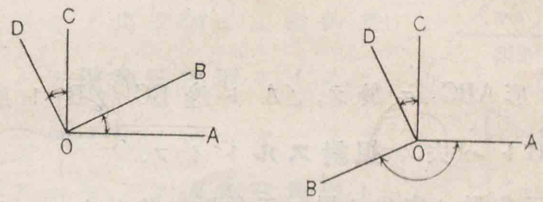
5. 前題ニ於テ,OCガ$\angle AOB$ノ間ニアレバ,$\angle DOE$ヲ表ハス式ハドウ變ハルカ.



6. $\angle AOB$, $\angle COD$ガ頂點Oヲ共有シテ且

$OA\perp OC$, $OB\perp OD$

ナルトキハ,$\angle AOB$, $\angle COD$ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナスコトヲ說明セヨ.

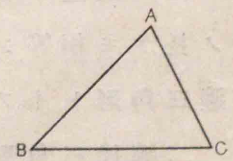


第五章 多角形

20. 三角形

三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**三角形**トイフ.

三角形ヲナス三ツノ線分ヲ三角形ノ**邊**トイヒ,邊ガ二ツヅツ相交ハル點ヲ三角形ノ**頂點**トイフ. 又相隣レル二ツノ邊ガ夾ム角ヲ三角形ノ**內角**トイフ.



例ヘバ右圖ノ三角形ニ於テ,線

分 BC, CA, AB ハソノ邊,點 A, B, C ハソノ頂點, ∠A, ∠B, ∠C ハソノ内角デアル.

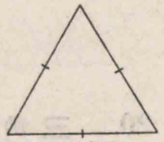
頂點ガ A,B,C ナル三角形ヲ,三角形 ABC ト呼ビ,コレヲ表ハスニハ △ナル記號ヲ用ヒテ, △ABC ノ如ク書ク.

三角形ABC ニ於テ, ∠A ト邊 BC, ∠B ト邊 CA, ∠C ト邊 AB トハ夫々**相對スル**トイフ.

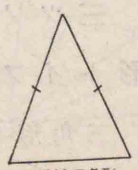
註. 三角形ノ内角ヲ單ニ三角形ノ角トイフコトガアル.

三角形ヲ邊ノ長サノ關係ニヨリ次ノ種類ニ分ケル.

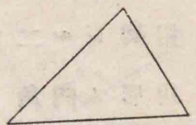
(1) 三邊ノ長サガ皆相等シイモノヲ**正三角形**(又ハ**等邊三角形**)トイフ.


正三角形

(2) 三邊ノウチ何レカ二ツノ邊ノ長サガ相等シイモノヲ**二等邊三角形**トイフ.


二等邊三角形

(3) 三邊ノウチ何レノ二ツノ邊ノ長サモ相等シクナイモノヲ**不等邊三角形**トイフ.

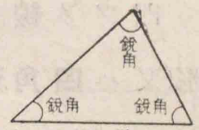

不等邊三角形

二等邊三角形ニ於テ,相等シクナ

イ邊ヲ**底邊**又ハ單ニ**底**トイヒ,底邊ノ兩端ニアル角ヲ共ニ**底角**,底邊ニ相對スル角ヲ**頂角**トイフ.

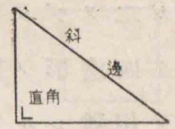
三角形ヲ角ノ大キサニヨリ次ノ種類ニ分ケル.

(1) 三ツノ角ガ何レモ鋭角デアルモノヲ**鋭角三角形**トイフ.



鋭角三角形

(2) 三ツノ角ノ何レカ一ツガ直角デアルモノヲ**直角三角形**トイフ.



直角三角形

(3) 三ツノ角ノ何レカ一ツガ鈍角デアルモノヲ**鈍角三角形**トイフ.

鈍角三角形

直角三角形ニ於テ,直角ニ相對スル邊ヲ**斜邊**トイフ.

問 1. 任意ニ一ツノ正三角形ヲ畫キ,ソノ三ツノ内角ノ大キサヲ測レ.

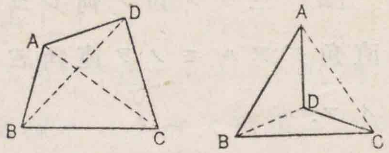
問 2. 任意ニ一ツノ二等邊三角形ヲ畫キ,兩底角ノ大キサヲ比較セヨ.

問 3. 任意ニ一ツノ三角形ヲ畫キ,三ツノ内角ノ和ヲ求メヨ.

21. 四邊形

四ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**四邊形**(又ハ**四角形**)トイフ.

四邊形ヲナス四ツノ線分ヲ四邊形ノ**邊**トイヒ,邊ガ二ツヅツ相交ハル點ヲ四邊形ノ**頂點**トイフ.



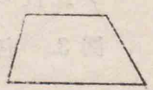
又相隣レル二ツノ邊ガ夾ム角ノウチ四邊形ノ內部ニアル方ヲ四邊形ノ**內角**トイフ.

四邊形ニ於テ,相隣ラザル二邊ヲ**對邊**,相隣ラザル二ツノ內角ヲ**對角**トイヒ,對角ノ頂點ヲ結ブ線分ヲ**對角線**トイフ.

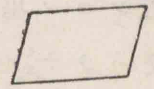
頂點ガ A, B, C, D ナル四邊形ヲ四邊形 ABCD ト呼ブ.

四邊形ニハ次ノ種類ガアル.

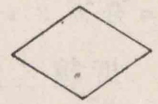
(1) 一組ノ對邊ガ平行デアルモノヲ**梯形**トイフ.



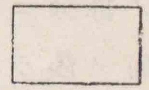
(2) 二組ノ對邊ガ平行デアルモノヲ**平行四邊形**トイフ.



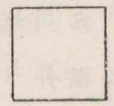
(3) 等邊*(四ツノ邊ガ皆相等シイコト)ナルモノヲ**菱形**トイフ.



(4) 等角**(四ツノ角ガ皆相等シイコト)ナルモノヲ**矩形**(又ハ**長方形**)トイフ.



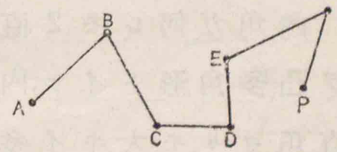
(5) 等邊デ且等角ナルモノヲ**正方形**トイフ.



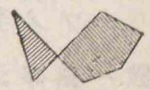
22. 多角形

二ツ以上ノ線分ガ二ツヅツ端ヲ共有シテヰルトキ,ソレラノ線分ヲ一括シテ**折線**トイフ.

右ノ圖ニ於テ,點A,Pヲ折線ノ端トイフ.

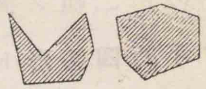


折線ノ兩端ガ一致スレバコレニヨッテ平面ハ幾ツカノ部分ニ分カタレルガ,



* 等邊デアレバ必ズ平行四邊形トナル.

** 等角デアレバ必ズ平行四邊形トナル. 故ニ菱形,矩形ハ夫々一種ノ平行四邊形デアル. コレラノ理由ハ何レモ後ニ判明スル.



若シコノ場合ニ折線ガ自分自身ニ交ハラナケレバ平面ハ二ツノ部分ニ分カタレル.

折線ノ兩端ガ一致シテ,コレガ平面ヲ二ツノ部分ニ分ケタトキ,折線ニヨリ圍マレタ平面ノ限ラレタ部分ヲ**多角形**トイフ.

多角形ヲ作ル折線ヲ多角形ノ**周**トイヒ,周ヲ作ル各線分ヲ多角形ノ**邊**,相隣レル邊ガ二ツヅツ相交ハル點ヲ多角形ノ**頂點**トイフ. 又相隣レル二ツノ邊ガ夾ム角ノウチ多角形ノ内部ニアル方ヲ多角形ノ**内角**トイヒ,相隣ラザル内角ノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多角形ノ**對角線**トイフ.

内角ガ何レモ2直角ヨリモ小サイ多角形ヲ**凸多角形**トイヒ,内角ノ少クトモ一ツガ2直角ヨリモ大キイ多角形ヲ**凹多角形**トイフ.

一ツノ多角形ニ於テ,邊ノ數,頂點ノ數及ビ内角ノ數ハ相等シイ.

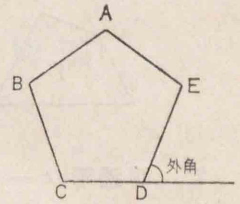
多角形ハソノ邊又ハ内角ノ數ニヨッテ

三角形,四角形,五角形,……,n角形

又ハ **三邊形,四邊形,五邊形,……,n邊形**

ナドトイフ.

多角形ヲ呼ブニハ,ソノ頂點ノ文字ヲ次々ニ讀ミ,例ヘバ五角形ABCDEノ如クイフ.

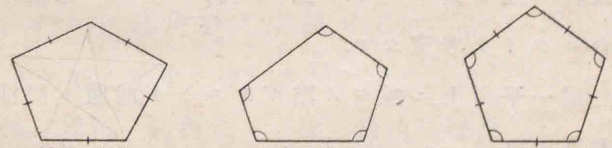


多角形ノ一邊トコレニ隣レル邊ノ延長トノナス角ヲ**外角**トイフ.

各邊ガ皆相等シイ多角形ヲ**等邊多角形**トイヒ,各内角ガ皆相等シイ多角形ヲ**等角多角形**トイフ.

等邊デ且等角ナル多角形ヲ**正多角形**トイフ.

正多角形ハソノ内角ノ數ニヨッテ**正三角形**,**正四角形**,**正五角形**ナドトイフ.



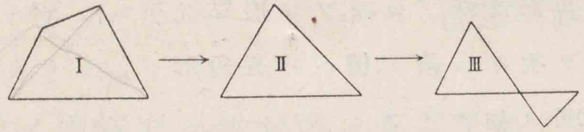
等邊五角形　等角五角形　正五角形

註. 正四角形ハ**正方形**トイハレル場合ガ多イ.

問題 4

1. 次頁ノ四邊形Iヲ變形シテ三角形IIヲ經テ,III圖ニ

ナルマデノ圖形ノ變化ヲ考ヘヨ.



2. 四邊形ノ一ツノ頂點カラハ一ツノ對角線ガ引ケル. 五邊形ノ一ツノ頂點カラハ幾ツノ對角線ガ引ケルカ. 又 n 邊形ノ場合ニハドウカ.

3. 四邊形ニハ對角線ガ2本アル. 五邊形ニハ5本アル. 一般ニ n 邊形ニハ $\frac{n(n-3)}{2}$ 本ノ對角線ガアルコトヲ示セ.

註. 各頂點カラ出ル對角線ノ總和ハ,求メル數ノ2倍デアルコトヲ考ヘヨ.

4. 同一平面上ニ三ツノ點ガアルトキ,二ツヅツノ點ヲ結ブ直線ハ幾ツ引ケルカ. 三ツノ點ガ種々ノ位置ニアル各場合ニツイテ考究セヨ.

5. 同一平面上ニ四ツノ點ガアルトキ,前題ト同樣ナコトヲ考究セヨ.

6. 多角形ノ內部ノ任意ノ二點ヲ結ブ線分ハ常ニ多角形ノ內部ニ含マレルカ.

第六章 幾何學ノ研究法

23. 定 義

我々ノ日常用ヒル言葉ガ,個々ノ人ニヨツテ異ナル意味ニ解釋サレルコトガアツテハ不便デアル. 特ニ數學ノヤウニ嚴密ヲ必要トスル學問デハ,ソノ用ヒル言葉ノ意義ヲ明瞭ニシナケレバナラナイ.

或用語ノ意義ヲ嚴密ニ定メルタメノ陳述ヲソノ語ノ**定義**トイフ.

例ヘバ「三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**三角形**トイフ」ハ三角形ノ定義デアル.

問. 次ノ語ノ定義ヲ述ベヨ.

(1) 鋭角, 鈍角　　(2) 餘角, 補角

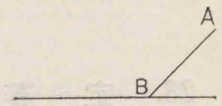
(3) 多角形　　(4) 多角形ノ外角

24. 定理, 證明

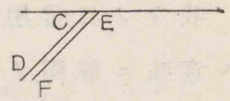
定義及ビ既ニ眞理デアルコトガ確定シテヰル事柄ヲ基礎トシテ,正シイ推理ニヨリ導

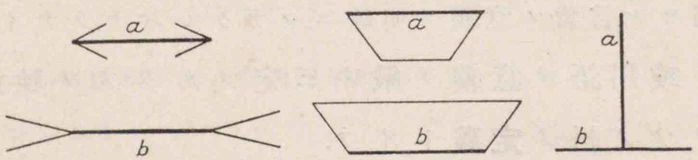
カレル事柄ヲ**定理**トイヒ,定理ガ眞理デアルコトヲ推論スル方法ヲ定理ノ**證明**トイフ.

問 1. 右ノ圖ニ於テ,線分 AB ノ延長ハ CD, EF ノ何レデアルカ. 定規ヲ用ヒテコレヲ見ヨ.

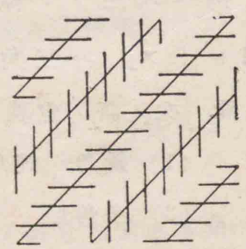


問 2. 次ノ各圖ニ於テ,線分 a, b ノ長サハ相等シイ. こむぱすヲ用ヒテコレヲ確カメヨ.





問 3. 右ノ圖ニ於テ,斜メノ各線分ハ互ニ平行デアル. 定規ヲ用ヒテコレヲ確カメヨ.



問 4. 長サ 10cm ノ線分ヲ引キ,目分量ニヨリコノ線分ノ二等分點ヲ記セ. 又尺度ヲ用ヒテソノ點ノ位置ガ正シイカドウカヲ確カメヨ.

我々ノ觀察ハ必ズシモ信頼スルコトハ出來ナイ. 又實驗,實測等モ方法ノ巧拙,器具ノ精粗ソノ他ノ理

由ニヨツテ多少ノ誤差ヲ生ズルモノデアル.

故ニ嚴正ナ斷定ヲスルタメニハ,既ニ眞ナルコトヲ認メタ事項カラ一歩々々推論ヲ進メテ,論理的ニ確定シナケレバナラナイ. 卽チココニ證明ノ必要ガアルノデアル.

定理ハ**假設**及ビ**終結**ノ二ツノ部分カラナル. 假設トハ豫メ與ヘラレタ條件デ,假設カラ推論シテ得ラレル結果ガ終結デアル.

25. 公理,系

我々ガ證明ヲ要セズシテ眞ナリト認メ得ラレル事柄デ,推理ノ基礎トナルモノヲ**公理**トイフ.

公理ニハ二種類アル. 幾何學ノミナラズ算術,代數學等一般ニ數量ニ關シテ用ヒラレルモノヲ**普通公理**トイヒ,特ニ幾何學ノミニ用ヒラレルモノヲ**幾何學公理**トイフ.

次ニ普通公理ヲ揭ゲル. 但シ A, B, C, D ハ何レモ數又ハ同ジ種類ノ量ヲ表ハシ,m ハ任意ノ正數トスル.

[1] $A=C,\ B=C$ ナラバ, $A=B$

[2] $A=B,\ C=D$ ナラバ, $A+C=B+D$

[3] $A=B$ ナラバ, $mA=mB$

[4] $A=B$ ナラバ, $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{m}$

[5] $A>B,\ B>C$ ナラバ, $A>C$

[6] $A>B,\ C=D$ ナラバ, $A\pm C>B\pm D$

[7] $A>B$ ナラバ, $mA>mB$

[8] $mA>mB$ ナラバ, $A>B$

[9] $A>B,\ C>D$ ナラバ, $A+C>B+D$

[10] $A>B,\ C>D$ ナラバ, $A-D>B-C$

次ニ平面幾何學ニ關スル公理ヲ揭ゲル.

公理 1. **二點ヲ通ル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.** (第 7 節)

公理 2. **一點ヲ通ツテ一ツノ直線ニ平行ナル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.**

公理 3. **圖形ハ形及ビ大キサヲ變ヘズニソノ位置ヲ變ヘルコトガ出來ル.**

公理 4. **全ク相重ネ合ハスコトガ出來ルニツノ圖形ノ形及ビ大キサハ相等シイ.**

形及ビ大キサガ相等シイ二ツノ圖形ハ合

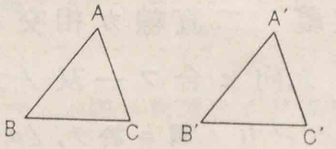
同デアル又ハ全等デアルトイフ.

例ヘバ二枚ノ紙ヲ重ネテ或圖形ヲ切リ拔ケバ,得ラレル二ツノ圖形ハ合同デアル.

二ツノ圖形ガ合同デアルコトヲ表ハスニハ,≡ナル記號ヲ用ヒテ,例ヘバ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ガ合同デアルコトヲ

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

ノ如ク書ク.



公理,定義又ハ定理ヨリ容易ニ導カレル事柄ヲソノ**系**トイフ.

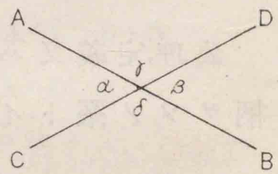
第二篇　直線圖形

第一章　對頂角

26.　對頂角

定義　二直線ガ相交ハツテ作ル四ツノ角ノウチ,向ヒ合フ一双ノ角ヲ對頂角トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ, $\angle\alpha$ ト $\angle\beta$, $\angle\gamma$ ト $\angle\delta$ ハ夫々對頂角デアル.



定理 1.　對頂角ハ相等シイ.

假設　二直線 AB, CD ガ相交ハツテ作ル二組ノ對頂角ヲ夫々 $\angle\alpha$ ト $\angle\beta$,　$\angle\gamma$ ト $\angle\delta$ トスレバ

終結　$\angle\alpha=\angle\beta$,　$\angle\gamma=\angle\delta$

證明　AB, CD ハ共ニ直線デアルカラ

$$\angle\alpha+\angle\gamma=2\angle R$$

$$\angle\gamma+\angle\beta=2\angle R$$

故ニ　$\angle\alpha+\angle\gamma=\angle\gamma+\angle\beta$

從ツテ　$\angle\alpha=\angle\beta$

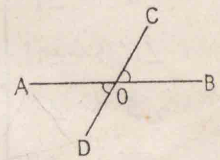
全ク同様ニシテ　$\angle\gamma=\angle\delta$

問　題　5

1.　直線 AB 上ノ一點 O カラコノ直線ノ兩側ニ直線 OC, OD ガアツテ

$$\angle AOD=\angle BOC$$

ナルトキハ, OC, OD ハ一直線ヲナスコトヲ證明セヨ.



2.　角ノ二等分線ノ延長ハ,ソノ角ノ對頂角ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ.

3.　對頂角ヲナス二ツノ角ノ二等分線ハ一直線ヲナスコトヲ證明セヨ.

註.　今後「證明セヨ」ノ句ヲ略スコトガアル.

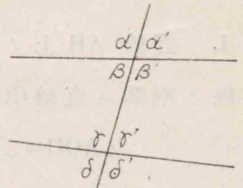
第二章　平行線

27.　錯角, 同位角, 同傍內角

定義　一ツノ直線ガ他ノ二直線トソノ交點以外デ交ハツテ作ル八ツノ角ヲ,次頁ノ圖ノ如ク名ヅケルトキ

$\left.\begin{array}{l} \angle\beta \text{ ト } \angle\gamma' \\ \angle\beta' \text{ ト } \angle\gamma \end{array}\right\}$ ヲ錯　角

$\left.\begin{array}{l} \angle\alpha \text{ ト } \angle\gamma \\ \angle\alpha' \text{ ト } \angle\gamma' \\ \angle\beta \text{ ト } \angle\delta \\ \angle\beta' \text{ ト } \angle\delta' \end{array}\right\}$ ヲ同位角



$\left.\begin{array}{l} \angle\beta \text{ ト } \angle\gamma \\ \angle\beta' \text{ ト } \angle\gamma' \end{array}\right\}$ ヲ同傍內角

トイフ.

問. 一ツノ直線ガ他ノ二直線ト相交ハツテ作ル一組ノ錯角ガ相等シイトキ,次ノコトヲ證明セヨ.

(1) 他ノ一組ノ錯角ハ相等シイ.

(2) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ.

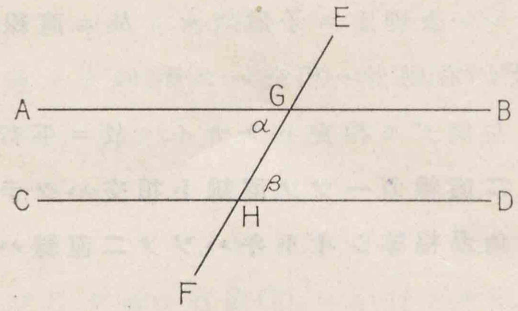
(3) 二組ノ同傍內角ハ夫々互ニ補角ヲナス.

28. 平行線ニ關スル定理

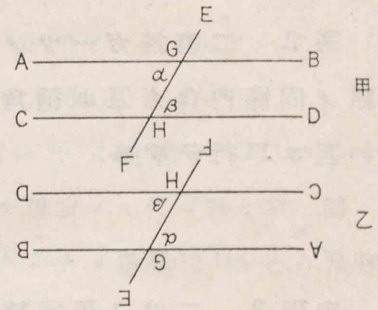
定理 2. 二直線ガ一ツノ直線ト相交ハツテ作ル一組ノ錯角ガ相等シイトキハ,ソノ二直線ハ互ニ平行デアル.

假設　次頁ノ圖ニ於テ, $\angle\alpha=\angle\beta$ ナルトキハ

終結　$AB \parallel CD$



證明　今上ノ圖ヲ甲トシ,コレヲ 180 度廻轉シタモノヲ乙トスル. 乙圖ヲ甲圖ニ重ネ,乙圖ノ H, G ヲ夫々甲圖ノ G, H ノ上ニ重ネタモノトスレバ,乙圖ノ直線 FHGE ハ甲圖ノ直線 EGHF ニ相重ナリ,乙圖ノ角 β, α ハ夫々甲圖ノ角 α, β ニ等シイカラ,乙圖ノ直線 HD, GA ハ夫々甲圖ノ直線 GA, HD ニ相重ナル. 從ツテ乙圖ノ直線 DC, BA ハ夫々甲圖ノ直線 AB, CD ニ相重ナル.



故ニ若シ甲圖ノ直線 AB, CD ガ直線 EF ノ右側ニ於テ相交ハルモノトスレバ,乙圖ニ於テ直線 DC, BA ハ直線 FE ノ左側ニ於テ相交ハル. 從ツテ結局直線 AB, CD ハ直線 EF ノ兩側ニ於テ相交ハルコトト

ナル．コレハ公理1ニ矛盾スル．故ニ直線AB, CDハ直線EFノ右側デハ相交ハラナイ．

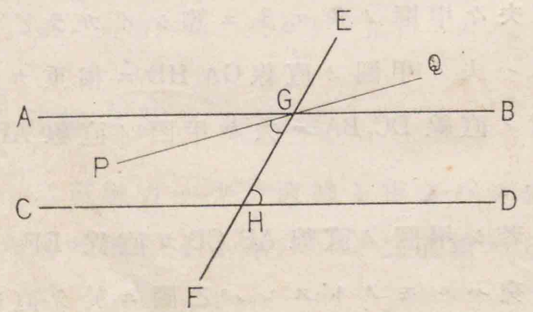
同樣ニ左側デモ相交ハラナイ．故ニ平行デアル．

系1.　二直線ガ一ツノ直線ト相交ハツテ作ル一組ノ同位角ガ相等シイトキハ,ソノ二直線ハ互ニ平行デアル.

系2.　二直線ガ一ツノ直線ト相交ハツテ作ル一組ノ同傍內角ガ互ニ補角ヲナストキハ,ソノ二直線ハ互ニ平行デアル.

問.　第9頁ニ於ケル定規ヲ用ヒテ平行線ヲ引イタノハ如何ナルコトヲ應用シタモノカ.

定理3.　二ツノ平行線ガ一ツノ直線ト相交ハルトキハ,錯角ハ相等シイ.



假設　上ノ圖ニ於テ,　AB∥CD　ナルトキハ

終結　　$\angle AGH = \angle DHG$

證明　角AGHト角DHGトガ相等シクナイトスレバ,Gヲ通ツテ角DHGニ等シク角PGHガ出來ルヤウニ直線PQヲ引クコトガ出來ル.

然トルキハ　　PQ∥CD　　(定理2)

然ルニ　　AB∥CD　　(假　設)

從ツテGヲ通リ直線CDニ平行ナル直線ガ二ツアルコトトナル.　コレハ公理2ニ矛盾スル.

故ニ　　$\angle AGH = \angle DHG$

系1.　二ツノ平行線ガ一ツノ直線ト相交ハルトキハ,同位角ハ相等シイ.

系2.　二ツノ平行線ガ一ツノ直線ト相交ハルトキハ,同傍內角ハ互ニ補角ヲナス.

註.　定理2ト定理3トハ假設ト終結トガ互ニ入レ換ツテヰル.　コノヤウニ一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタモノヲ,モトノ定理ノ逆トイフ.

或定理ガ眞デアツテモソノ逆ハ必ズシモ眞デハナイ.

例ヘバ定理1:對頂角ハ相等シイハ眞デアルガ,ソノ逆:相等シイ角ハ對頂角デアルハ必ズシモ眞デハナイ.　何トナレバ相等シイ角デ而モ對頂角デナイモノガアルカラデアル.

問題 6

1. 同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハ互ニ平行デアル.

2. 二ツノ平行線ノ一ツニ平行ナル直線ハ他ノ一ツニモ平行デアル.

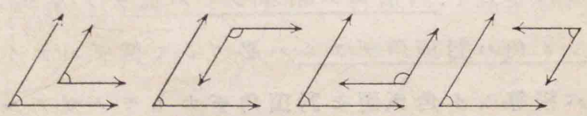
3. 同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行デアル.

4. 二ツノ平行線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ垂直デアル.

5. 相交ハル二ツノ直線ニ夫々平行ナル直線ハ相交ハル.

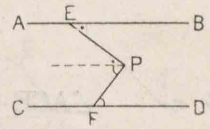
6. 相交ハル二ツノ直線ニ夫々垂直ナル二ツノ直線ハ相交ハル.

7. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ平行ナルトキハ,コノ二ツノ角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス.



8. 前題ニ於ケル各角ノ二等分線ハ互ニ平行デアルカ又ハ垂直デアル.

9. 右ノ圖ニ於テ, AB ∥ CD トスレバ

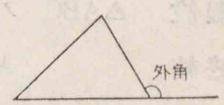


$\angle EPF = \angle BEP + \angle DFP$

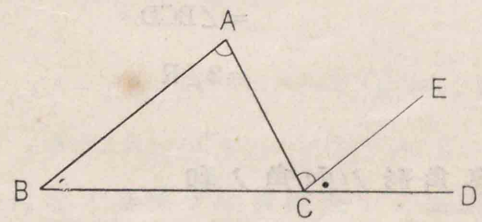
第三章 三角形

29. 三角形ノ内角ノ和

定義 三角形ノ一邊トコレニ隣レル邊トガナス角ヲ三角形ノ外角トイフ.



定理 4. 三角形ノ外角ハ,コレニ隣ラナイ二ツノ内角ノ和ニ等シイ.



假設 △ABCノCニ於ケル外角ヲ∠ACDトスレバ

終結 $\angle ACD = \angle A + \angle B$

證明 Cヲ通ツテABニ平行線CEヲ引ケバ

$\angle ACE = \angle A$ (錯 角)

$\angle ECD = \angle B$ (同位角)

故ニ $\angle ACE + \angle ECD = \angle A + \angle B$

從ツテ $\angle ACD = \angle A + \angle B$

系. 三角形ノ外角ハコレニ隣ラナイ何レノ內角ヨリモ大キイ.

定理 5. 三角形ノ三ツノ內角ノ和ハ2直角ニ等シイ.

假設 △ABC ノ內角ヲ $\angle A, \angle B, \angle C$ トスレバ

終結 $\angle A + \angle B + \angle C = 2\angle R$

證明 定理4ノ圖ニ於テ

$\angle A + \angle B = \angle ACD$ (定理 4)

故ニ $\angle A + \angle B + \angle C = \angle ACD + \angle C$

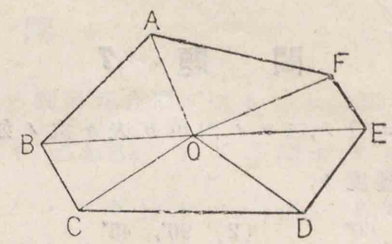
$= \angle BCD$

$= 2\angle R$

30. 多角形ノ內角ノ和

問. 多角形ノ內角及ビ外角ノ定義ヲ述ベヨ.

定理 6. n角形ノ內角ノ和ハ$(2n-4)$直角ニ等シイ.



假設 ABCD…… ヲn角形トスレバ(但シ上ノ圖ハ六角形)

終結 $\angle A + \angle B + \angle C + \cdots\cdots = (2n-4)\angle R$

證明 多角形ノ內部ニ任意ノ一點Oヲトリ,コレト多角形ノ各頂點トヲ結ベバ,多角形ハn箇ノ三角形ニ分カタレル. コレラノ三角形ノ內角ノ總和ハ$2\angle R \times n = 2n\angle R$デアル. コレハモトノ多角形ノ內角ノ和ニ,O點ノ周リノ角卽チ$4\angle R$ヲ加ヘタモノニ等シイ.

$(\angle A + \angle B + \angle C + \cdots\cdots) + 4\angle R = 2n\angle R$

從ツテ $\angle A + \angle B + \angle C + \cdots\cdots = (2n-4)\angle R$

系. n角形ノ各邊ヲ順次延長シテ出來ル外角ノ和ハ4直角ニ等シイ.

問題 7

1. 三角形ニ於テ,二ツノ内角ガ夫々次ノ如クデアレバ殘リノ内角ハ幾度カ.

　(1) $30°$, $60°$　　(2) $90°$, $45°$

　(3) $60°$, $60°$　　(4) $30°$, $75°$

2. 二ツノ三角形ニ於テ,二ツノ内角ガ夫々相等シイトキハ,殘リノ内角モ亦相等シイ.

3. 三角形ノ一ツノ内角ガ $90°$ ナルトキハ,他ノ二ツノ内角ハ互ニ餘角ヲナス.

4. 三角形ニ於テ,一ツノ内角ガ直角又ハ鈍角ナルトキハ,他ノ二ツノ内角ハ共ニ鋭角デアル.

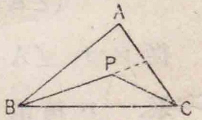
5. 四角形,五角形及ビ六角形ノ内角ノ和ヲ求メヨ.

6. 多角形ヲソノ一ツノ頂點カラ出ル對角線ニヨツテ三角形ニ分ケ,定理 6 ヲ證明セヨ.

7. 三角形ABCノ内部ニ一點PヲトレバEOF

$$\angle BPC = \angle BAC + \angle ABP + \angle ACP$$

デアル.



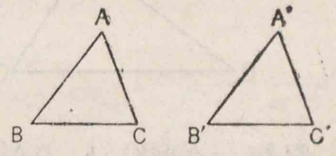
8. 三角形ABCニ於テ, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ガ等差級數ヲナストキ,各角ノ大キサヲ求メヨ.

31. 合同

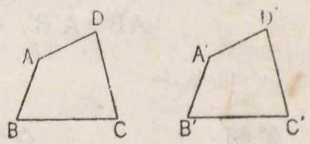
問 1. 二ツノ圖形ガ合同デアルコトノ定義ヲ述ベヨ.

今 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トガ合同デアルトスレバ,定義ニヨリ次ノコトガ分カル. 但シ A, B, C ガ夫々 A′, B′, C′ ニ重ナルモノトスル.

$$\begin{cases} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \\ \angle C = \angle C' \end{cases} \qquad \begin{cases} BC = B'C' \\ CA = C'A' \\ AB = A'B' \end{cases}$$



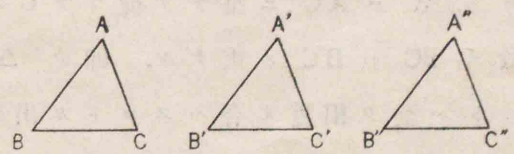
問 2. 四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ガ合同ナルトキ,如何ナルコトガ分カルカ. 但シ A, B, C, D ガ夫々 A′, B′, C′, D′ ニ重ナルモノトスル.



問 3. $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$ ナルトキハ

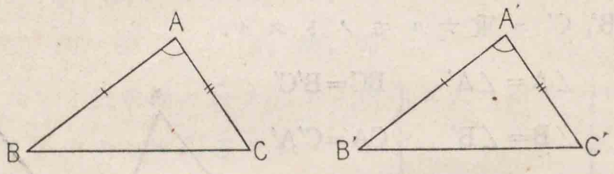
$$\triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''$$

ナルコトヲ證明セヨ.



32. 三角形ノ合同定理(ソノ一)

定理 7. 二邊トソノ夾角トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.



假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ \angle A=\angle A'$$

ナルトキハ

終結 $$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$

證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'B'C'$ ノ上ニ置キ, A ヲ A' ニ, B ヲ B' ニ重ネテ C ヲ $A'B'$ ニ關シテ C' ト同ジ側ニ置ク.

然ルトキハ AB ハ $A'B'$ ニ重ナリ且

$$\angle A=\angle A',\quad AC=A'C'$$

デアルカラ, AC ハ $A'C'$ ニ重ナリ從ッテ C ハ C' ニ重ナル. 故ニ BC ハ $B'C'$ ニ重ナル. 卽チ $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ全ク相重ネ合ハスコトガ出來ル.

故ニ $$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$

問題 8

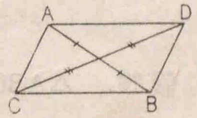
1. 直角ヲ夾ム二邊ガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル.

2. 線分 AB ノ垂直二等分線上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ, $AP=BP$ デアル.

3. 相交ハル二ツノ線分 AB, CD ガ互ニ他ヲ二等分スルトキハ

(1) $AC=BD$, $AD=BC$

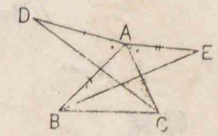
(2) $AC\parallel BD$, $AD\parallel BC$



4. 三角形 ABC ノ頂點 A ヲ通ッテ AB, AC ト $60°$ ノ角ヲナス直線 AD, AE ヲ, AD ハ AC ニ關シテ, AE ハ AB ニ關シテ夫々三角形 ABC ト同ジ側ニ引キ且

$$AD=AB,\quad AE=AC$$

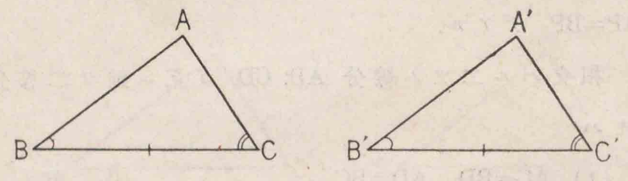
ナラシメレバ $$BE=CD$$



5. 前題ニ於テ, AD ハ AC ニ關シテ, AE ハ AB ニ關シテ夫々三角形 ABC ト反對ノ側ニ作レバドウカ.

33. 三角形ノ合同定理(ソノ二)

定理 8. **二角トソノ頂點間ノ邊トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.**



假設 △ABC ト △A'B'C' トニ於テ

$\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $BC=B'C'$

ナルトキハ

終結 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

證明 △ABC ヲ △A'B'C' ノ上ニ置キ, B ヲ B' ニ, C ヲ C' ニ重ネテ A ヲ B'C' ニ關シテ A' ト同ジ側ニ置ク. 然ルトキハ BC ハ B'C' ニ重ナリ且

$\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

デアルカラ, BA ハ B'A' ニ, CA ハ C'A' ニ重ナリ從ッテ A ハ A' ニ重ナル. 卽チ △ABC ト △A'B'C' トハ全ク相重ネ合ハスコトガ出來ル.

故ニ $\triangle ABC\equiv A'B'C'$

問題 9

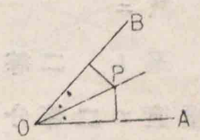
1. 二角トソノ一ツニ對スル邊トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

2. 直角ヲ夾ム一邊ト一ツノ銳角トガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル.

3. 斜邊ト一ツノ銳角トガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル.

4 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ガソノ角ノ對邊ニ垂直ナルトキハ,他ノ二邊ハ相等シイ.

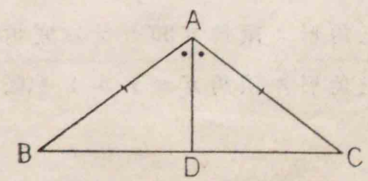
5. 一ツノ角ノ二等分線上ノ任意ノ點カラソノ角ノ二邊ニ引イタ二ツノ垂線ハ相等シイ.



34. 二等邊三角形ノ性質

問. 二等邊三角形及ビソノ頂角,底角,底邊ノ定義ヲ述ベヨ.

定理 9. **二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ.**



假設　$\triangle ABC$ ニ於テ, $AB=AC$ ナルトキハ

終結　$\angle B=\angle C$

證明　頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ト相交ハル點ヲ D トスル.

$\triangle ABD$ ト $\triangle ACD$ トニ於テ

$AB=AC$　（假　設）

AD ハ共通

$\angle BAD=\angle CAD$　（作　圖）

故ニ　$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$　（定理 7）

故ニ　$\angle B=\angle C$

系 1.　**二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル.**

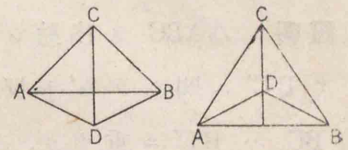
系 2.　**正三角形ノ三ツノ角ハ皆相等シイ.**

系 3.　**二ツノ角ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル.**（定理 9 ノ逆）

問　題　10

1. 正三角形ノ內角ハ幾度カ.
2. 二等邊三角形ノ頂角ガ $30°$ ナラバ底角ハ幾度カ.
3. 二等邊三角形ノ頂角ガ α ナルトキ,底角ヲ表ハス式ヲ作レ.

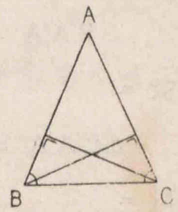
4. 底邊ト頂角トガ夫々相等シイ二ツノ二等邊三角形ハ合同デアル.
5. 二ツノ二等邊三角形 ABC, ABD ガ底邊 AB ヲ共有スルトキ,次ノコトヲ證明セヨ.



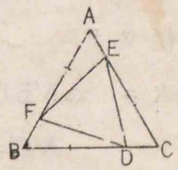
(1) $\angle ACD=\angle BCD$

(2) $\triangle ACD\equiv\triangle BCD$

(3) CD 叉ハソノ延長ハ AB ヲ垂直ニ二等分スル.

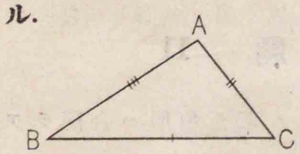


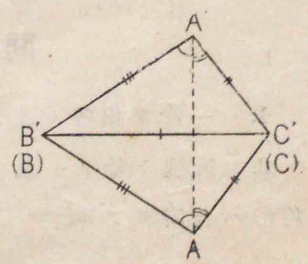
6. 二等邊三角形ノ兩底角ノ頂點カラ對邊ニ引イタ二ツノ垂線ハ相等シイ.
7. 正三角形 ABC ノ各邊上ニ夫々一點ヅツ D, E, F ヲトリ $BD=CE=AF$ トスレバ, $\triangle DEF$ ハ正三角形デアル.



35.　三角形ノ合同定理（ソノ三）

定理 10.　三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.





假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$BC=B'C',\quad CA=C'A',\quad AB=A'B'$

ナルトキハ

終結 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

證明 $\triangle ABC$ ヲ移動シテ B ヲ B' ニ, C ヲ C' ニ重ネ A ヲ $B'C'$ ニ關シテ A' ト反對ノ側ニ置ク. 然ルトキハ BC ハ $B'C'$ ニ重ナル. 而シテ A ト A' トヲ結ベバ

$\triangle B'A'A$ ニ於テ, $B'A'=B'A$

故ニ $\angle B'A'A=\angle B'AA'$ (定理 9)

又 $\triangle C'A'A$ ニ於テ, $C'A'=C'A$

故ニ $\angle C'A'A=\angle C'AA'$ (定理 9)

從ッテ $\angle B'A'C'=\angle B'AC'$

次ニ $\triangle A'B'C'$ ト $\triangle AB'C'$ トニ於テ

$A'B'=AB',\quad A'C'=AC',\quad \angle A'=\angle A$

故ニ $\triangle A'B'C'\equiv\triangle AB'C'$ (定理 7)

卽チ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

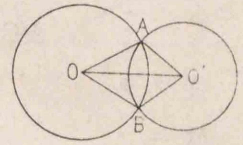
問題 11

1. 一邊ガ相等シイ二ツノ正三角形ハ合同デアル.

2. 底邊ト他ノ一邊トガ夫々相等シイ二ツノ二等邊三角形ハ合同デアル.

3. 二等邊三角形ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結ブ直線ハ頂角ヲ二等分シ且底邊ニ垂直デアル.

4. 二ツノ圓 O, O' ガ二點 A, B デ相交ハルトキ,次ノコトヲ證明セヨ.

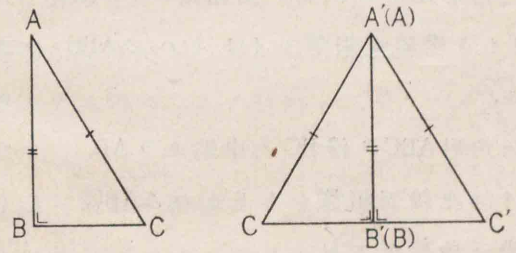


(1) $\triangle AOO'\equiv\triangle BOO'$

(2) OO' ハ $\angle AOB$ 及ビ $\angle AO'B$ ヲ二等分スル.

36. 直角三角形ノ合同定理

定理 11. 斜邊ト他ノ一邊トガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル.



假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$\angle B=\angle B'=\angle R,\quad AC=A'C',\quad AB=A'B'$

ナルトキハ

終結 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

證明 AB ヲ $A'B'$ ノ上ニ重ネテ C ヲ $A'B'$ ニ關シテ C' ト反對ノ側ニ置ク,

$\angle A'B'C=\angle A'B'C'=\angle R$ ナル故 CB', $B'C'$ ハ一直線ヲナス. 然ルトキハ $\triangle A'CC'$ ニ於テ

$A'C=A'C'$ 故ニ $\angle C=\angle C'$

從ツテ $\angle CA'B'=\angle C'A'B'$

故ニ $\triangle A'B'C\equiv\triangle A'B'C'$

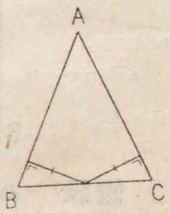
卽チ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

問題 12

1. $\angle AOB$ 内ノ一點 P カラ二邊ニ引イタ二ツノ垂線ノ長サガ相等シイトキハ, OP ハ $\angle AOB$ ヲ二等分スル.

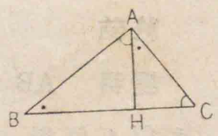
2. 三角形ABCノ二ツノ頂點B, Cカラ夫々ソノ對邊AC, ABニ引イタ垂線ガ相等シイトキハ, $\triangle ABC$ ハ二等邊三角形デアル.

3. 三角形ABCノ邊BCノ中點カラAB, ACニ引イタ垂線ガ相等シイトキハ, $\triangle ABC$ ハ二等邊三角形デアル.



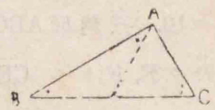
雜題 I

1. 角Aガ直角デアル直角三角形 ABC ノ頂點Aカラ斜邊 BC ニ垂線 AH ヲ引クトキハ



$\angle B=\angle CAH$, $\angle C=\angle BAH$

2. 直角三角形ノ一ツノ銳角ガ他ノ銳角ノ2倍デアルトキハ,斜邊ハ最小ナル角ニ對スル邊ノ2倍デアル.

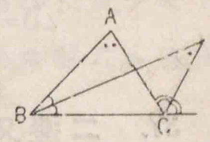


3. 二等邊三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行デアル.

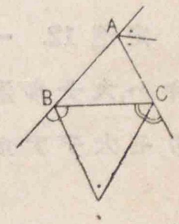
4. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ト底邊トガナス三角形ハ二等邊三角形デアル.

5. 前題ノ逆モ眞デアル.

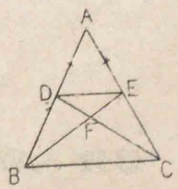
6. 三角形ABCニ於テ,$\angle B$ノ二等分線ト$\angle C$ノ外角ノ二等分線トノナス角ハ,$\angle A$ノ二分ノ一ニ等シイ.



7. 三角形ABCニ於テ, $\angle B$, $\angle C$ノ外角ノ二等分線ノナス角ハ,$\angle A$ノ外角ノ二分ノ一ニ等シイ.

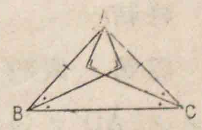


8. 二等邊三角形ノ相等シイ邊AB, ACノ上ニ夫々一點 D, E ヲトツテ $AD=AE$ トシ,BE, CD ノ交點ヲFトスルトキ,次ノコトヲ證明セヨ.



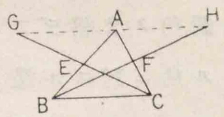
(1) $\angle ABE=\angle ACD$

(2) $\triangle FBC$, $\triangle FDE$ ハ何レモ二等邊三角形デアル.

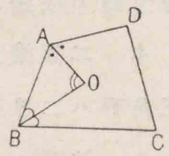


9. 二等邊三角形ノ頂點カラ兩底角ノ

二等分線ニ引イタ二ツノ垂線ハ相等シイ.



10. 三角形ABCノ邊AB, ACノ中點ヲ夫々E, FトシCEヲコレニ等シクGマデ延長シ, BFヲコレニ等シクHマデ延長スレバ, G, A, Hハ同一直線上ニアル.

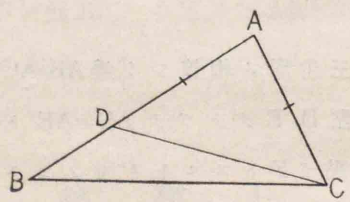


11. 四邊形ABCDニ於テ, ∠A, ∠Bノ二等分線ノ交點ヲOトスルトキハ

$$\angle O=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$$

37. 二邊又ハ二角ガ不等ナル三角形

定理 12. 一ツノ三角形ノ二邊ガ相等シクナイトキハ, 大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリモ大デアル.



假設　△ABCニ於テ, AB>ACナルトキハ

終結　∠C>∠B

證明　假設ニヨリAB>ACデアルカラ, ACニ等シクADヲ邊ABノ上ニトレバDハA, Bノ間ニアル. 故ニC, Dヲ結ベバ線分CDハ∠Cノ内部ニアル.

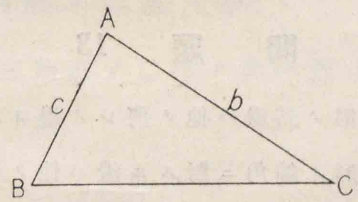
故ニ　∠C>∠ACD

∠ACD=∠ADC　（定理 9）

∠ADC>∠B　（定理 4, 系）

故ニ　∠C>∠B

定理 13 一ツノ三角形ノ二角ガ相等シクナイトキハ, 大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリモ大デアル.



假設　△ABCニ於テ, ∠B, ∠Cノ對邊ヲ夫々b, cトシ, ∠B>∠Cナルトキハ

終結　$b>c$

證明　b, cノ長サノ關係ハ次ノ三通リノ場合ガアル.

(1) $b>c$　(2) $b=c$　(3) $b<c$

今$b>c$デナイトスレバ

$b=c$ カ又ハ $b<c$ デアル.

若シ　$b=c$ ナラバ, ∠B=∠C　(定理 9)

又　$b<c$ ナラバ, ∠B<∠C　(定理 12)

故ニ何レモ假設ニ矛盾スル. 從ツテ

$$b>c$$

デナケレバナラナイ.

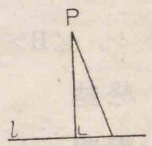
註. 上ノ證明法ノ如ク,終結ヲ否定シ,ソレガ假設ニ矛盾スルコトヲ示シテ終結ガ眞デアルコトヲ結論スル方法ヲ**歸謬法**(キビウ)トイフ.

問題 13

1. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ何レノ邊ヨリモ大デアル.

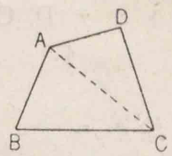
2. 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ他ノ何レノ邊ヨリモ大デアル.

3. 一ツノ直線外ノ一點トソノ直線上ノ點トヲ結ブ線分ノウチデ,垂線ハ最モ短カイ. 又斜線ハソノ足ガ垂線ノ足ヨリ遠ザカル程大デアル.



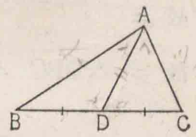
註. 一ツノ直線外ノ一點カラソノ直線ニ引イタ垂線ノ長サヲソノ**點ト直線トノ距離**トイフ.

4. 四邊形ABCDニ於テ, BCハ最大邊, ADハ最小邊ナルトキ, ∠C<∠A デアル.

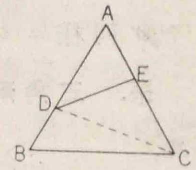


5. 三角形ABCニ於テ, AB>AC トシ, BCノ中點DトAトヲ結ブトキハ

∠BAD<∠CAD 及ビ ∠BDA>∠CDA

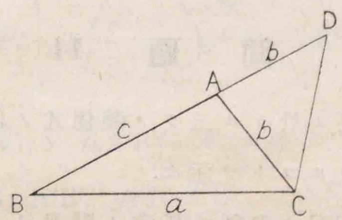


6. 正三角形ABCノ二邊AB, ACノ上ニ夫々一點D, Eヲ任意ニトレバ, DEハコノ三角形ノ一邊ヨリモ小デアル.



38. 三角形ノ二邊ノ和

定理 14. 三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリモ大デアル.



假設　△ABCニ於テ, ∠A, ∠B, ∠Cノ對邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ

終結　$b+c>a,\ c+a>b,\ a+b>c$

證明　BAヲAヨリDマデ延長シテ AD=AC ニ

トツテD, Cヲ結ブ. 然ルトキハ $\triangle ACD$ ニ於テ

$$AC=AD \quad 故ニ \quad \angle ACD=\angle ADC$$

然ルニ $$\angle BCD>\angle ACD$$

故ニ $$\angle BCD>\angle ADC$$

故ニ $\triangle DBC$ ニ於テ

$$BD>BC \quad 故ニ \quad b+c>a$$

全ク同樣ニシテ $c+a>b,\ a+b>c$

系. 三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリモ小デアル.

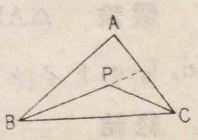
註. 三角形ノ三邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ,次ノ關係ガアル.

$$b+c>a>b\sim c, \quad c+a>b>c\sim a, \quad a+b>c>a\sim b$$

問題 14

1. 第38節註ニ於ケル三ツノ關係式ノ何レカ一ツヨリ他ノ二ツガ導ケルコトヲ示セ.

2. 三角形ABCノ內部ニ任意ノ點Pヲトレバ



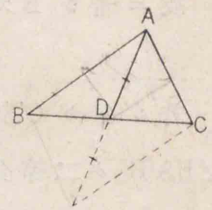
(1) $PB+PC<AB+AC$

(2) $PA+PB+PC<BC+CA+AB$

3. 前題ニ於テ,Pガ三角形ノ邊ノ上ニアル場合ニモ式

ハ成立スルカ. 若シ又何レカノ頂點ニ一致スレバドウカ.

4. 三角形ABCニ於テ,邊BCノ中點ヲDトスレバ

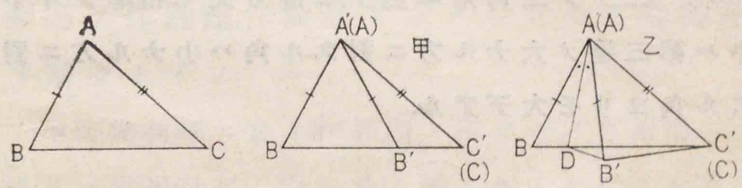


(1) $AD<\frac{1}{2}(BC+CA+AB)$

(2) $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$

39. 二邊ガ等シイ二ツノ三角形

定理15. 二ツノ三角形ニ於テ,二邊ガ夫々相等シイトキハ,ソノ夾角ノ大ナル方ニ對スル邊ハ小ナル方ニ對スル邊ヨリモ大デアル.



假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$$AB=A'B', \quad AC=A'C', \quad \angle A>\angle A'$$

ナルトキハ

終結 $$BC>B'C'$$

證明 $\triangle ABC$ ヲ移動シテ $\triangle A'B'C'$ ノ上ニ置キ, ACヲ $A'C'$ ニ重ネテ,Bヲ $A'C'$ ニ關シテ B' ト同ジ側ニオ

ケバ, $\angle A>\angle A'$ デアルカラ AB ハ $\angle A'$ ノ外部ニアル.

故ニ若シ B ガ $C'B'$ ノ延長上ニアレバ(甲圖)

$$BC=BC'>B'C'$$

若シ B ガ $C'B'$ ノ延長上ニナイトキハ(乙圖)

$\angle BA'B'$ ノ二等分線ト BC' トノ交點ヲ D トスレバ

$$\triangle A'BD\equiv\triangle A'B'D \quad (\text{定理 } 7)$$

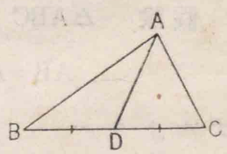
故ニ $BD=B'D$

故ニ
$$\begin{aligned} BC=BC'&=BD+DC' \\ &=B'D+DC' \\ &>B'C' \end{aligned}$$

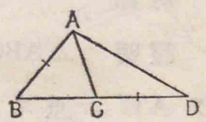
系. **二ツノ三角形ニ於テ,二邊ガ夫々相等シイトキハ,第三邊ノ大ナル方ニ對スル角ハ小ナル方ニ對スル角ヨリモ大デアル.**

問題 15

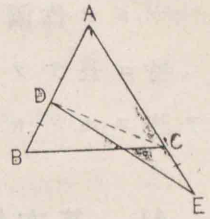
1. 三角形ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トシ, $\angle ADB$ ガ鈍角ナルトキハ, $AB>AC$ デアル.



2. 三角形ABC ノ邊 BC ヲ D マデ延長シテ $CD=AB$ ニトレバ, $AD>BC$ デアル.



3. BC ヲ底邊トスル二等邊三角形 ABC ノ邊 AB 上ニ一點 D ヲトリ, AC ヲ E マデ延長シテ $CE=BD$ ニトレバ $BC<DE$ デアル.



第四章 作圖題

40. 作圖題

與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ畫ク幾何學的ノ方法ヲ**作圖法**トイヒ,作圖法ヲ求メル問題ヲ**作圖題**,作圖法ヲ求メルコトヲ**作圖題ヲ解ク**トイフ.

平面幾何學ニ於テ,作圖題ヲ解クタメニ使用スル器具ハ定規及ビこむぱすニ限ルモノトシ,コレラノ用法ハ次ノ規定ニ從フモノトスル.

(1) 定規ヲ用ヒテ與ヘラレタ二點ヲ通ル直線ヲ引クコト,又ハ線分ヲ延長スルコト.

(2) こむぱすヲ用ヒテ與ヘラレタ點ヲ中心トシテ與ヘラレタ半徑ノ圓周(又ハ圓弧)ヲ畫クコト,又ハ長サヲ移スコト.

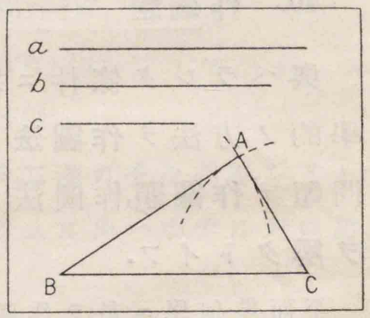
コレヲ作圖ノ規矩トイフ.

特ニ長サヲ指定シタ作圖題ニ於テハ,尺度ノ使用ヲ許スモノトスル.

41. 基本作圖題

作圖題 1. 三ツノ線分ガ與ヘラレタトキ,ソレラヲ三邊トスル三角形ヲ作レ.

題意 三ツノ線分 a, b, c ガ與ヘラレタトキ,コレラヲ三邊トスル三角形ヲ作ルコト.



作圖 a ニ等シク線分BCヲ引キ,B,C ヲ中心トシテ半徑ガ夫々 b, c ナル圓弧ヲ畫キ,ソノ交點ヲ A トスレバ,△ABC ハ求メル三角形デアル.

證明 作圖ニヨリ明ラカデアル.

註. 三ツノ線分 a, b, c ノ間ニ $b-c<a<b+c$ ナル關係ガナイトキハ,三角形ヲ作ルコトハ出來ナイ.

問題 16

1. 三邊ガ夫々 2cm, 3cm, 4cm ナル三角形ヲ作レ.

2. 次ノ長サノ線分ヲ三邊トスル三角形ヲ作ルコトハ出來ルカ.

(1) 2cm, 4cm, 8cm (2) 3cm, 6cm, 9cm

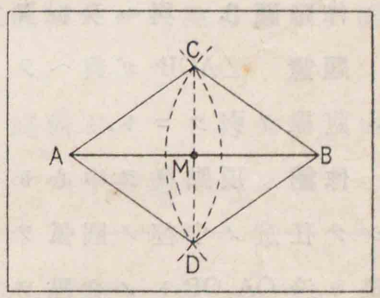
3. 一邊ガ 39mm ナル正三角形ヲ作レ.

4. 60°ノ角ヲ作レ.

5. 底邊ト他ノ一邊トガ與ヘラレタトキ,二等邊三角形ヲ作レ.

作圖題 2. 與ヘラレタ線分ヲ二等分セヨ.

題意 與ヘラレタ線分ヲ AB トシ, AB ノ二等分點ヲ求メルコト.



作圖 A, B ヲ中心トシテ AB ノ二分ノ一ヨリモ長イ半徑デ圓弧ヲ畫キ,ソノ交點ヲ夫々 C, D トスル. C, D ヲ結ブ直線ト ABトノ交點 M ハ求メル點デアル.

證明 AトC, BトC, AトD, BトD トヲ結ベバ

$$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$$

故ニ $\angle ACM = \angle BCM$

從ツテ △ACM ト △BCM トニ於テ,CM ハ共通

且　　AC＝BC

故ニ　　△ACM≡△BCM

從ツテ　　AM＝BM

註. CD ハ AB ノ垂直二等分線デアル.

問題 17

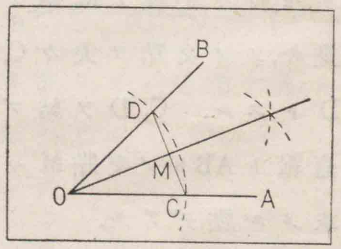
1. 與ヘラレタ線分ヲ直徑トスル圓ヲ畫ケ.

2. 三角形ノ各頂點ト夫々ノ對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ作レ.

3. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ヲ作レ.

作圖題 3. 與ヘラレタ角ヲ二等分セヨ.

題意 ∠AOB ガ與ヘラレタトキ,コレヲ二等分スル直線ヲ引クコト.



作圖 頂點 O ヲ中心トシテ任意ノ半徑ノ圓弧ヲ畫キ,邊 OA, OB トノ交點ヲ夫々 C, D トシ線分 CD ノ中點 M ヲ求メ(作圖題 2),コレト O トヲ結ベバ OM ハ求メル直線デアル.

證明　　△COM≡△DOM

故ニ　　∠COM＝∠DOM

註. C, D ヲ求メタ後コレラヲ中心トシテ同ジ半徑ノ圓弧ヲ畫キ,ソノ交點ト O トヲ結ベバヨイ.

問題 18

1. 直角ヲ作レ. (作圖題 3 ヲ ∠AOB ガ平角ナル場合ニ適用セヨ)

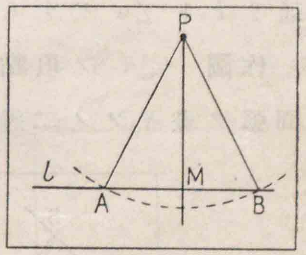
2. 30°, 15°, 45° 及ビ 22° 30′ ノ角ヲ作レ.

3. 三角形ノ各角ノ二等分線ヲ作レ.

4. 與ヘラレタ角ヲ四等分及ビ八等分スルニハドウスレバヨイカ.

作圖題 4. 與ヘラレタ直線外ノ一點カラソノ直線ニ垂線ヲ引ケ.

題意 l ヲ與ヘラレタ直線, P ヲコノ直線外ノ與ヘラレタ點トスル. P カラ l ニ垂線ヲ引クコト.



作圖 P ヲ中心トシテ l ニ交ハル任意ノ圓弧ヲ畫キ,ソノ交點ヲ夫々 A, B トスル. 線分 AB ノ中點 M ト P トヲ結ブ直線ハ求メルモノデアル.

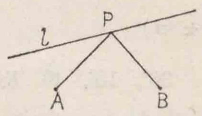
證明 P ト A, P ト B トヲ結ベバ △PAB ハ二等邊三角形デアル. 故ニソノ底邊ノ中點 M ト頂點 P ト

ヲ結ブ直線ハ底邊ニ垂直デアル. (問題11, 3)

問題 19

1. 三角形ノ各頂點カラ夫々ノ對邊ヘ垂線ヲ引ケ.

2. 一ツノ直線 l ト二點 A, B トガ與ヘラレタトキ, l 上ニ A, B カラ等距離ニアル點ヲ求メル方法ヲ述ベヨ.

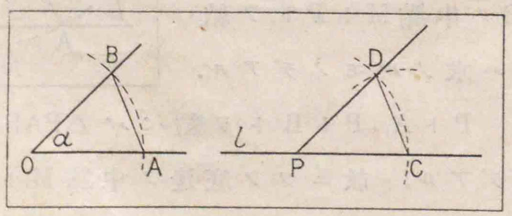


3. 同一直線上ニナイ三點カラ等距離ニアル點ヲ求メル方法ヲ述ベヨ.

作圖題 5. 與ヘラレタ直線上ノ一點ヲ通ツテコノ直線ト與ヘラレタ角ヲナス直線ヲ引ケ.

題意 $\angle\alpha$ ヲ與ヘラレタ角, l ヲ與ヘラレタ直線トシ, P ヲコノ直線上ノ與ヘラレタ點トスル. P ヲ通リ l ト $\angle\alpha$ ヲナス直線ヲ引クコト.

作圖 $\angle\alpha$ ノ頂點 O ヲ中心トシテ任意ノ半徑ノ圓弧ヲ書キ, ソノ二邊トノ交點ヲ夫々 A, B トスル.



P ヲ中心トシ前ト同ジ半徑ノ圓弧ヲ書キ, l トノ交點ノ一ツヲ C トスル. C ヲ中心トシテ線分 AB ニ等シイ半徑ノ圓弧ト, 點 C ヲ作ツタトキノ圓弧トノ交點ノ一ツヲ D トスル. P ト D トヲ結ブ直線ハ求メルモノデアル.

證明 $\triangle AOB \equiv \triangle CPD$

故ニ $\angle AOB = \angle CPD$

問題 20

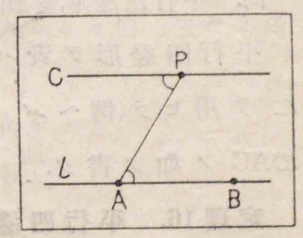
1. 二ツノ角ガ與ヘラレタトキ, ソノ和及ビ差ヲ作レ.

2. 二邊トソノ夾角トガ與ヘラレタトキ, 三角形ヲ作レ.

3. 二角トソノ頂點間ノ邊トガ與ヘラレタトキ, 三角形ヲ作レ.

作圖題 6. 與ヘラレタ直線外ノ一點ヲ通ツテコノ直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ.

題意 l ヲ與ヘラレタ直線トシ, P ヲコノ直線外ノ與ヘラレタ點トスル. P ヲ通リ l ニ平行ナル直線ヲ引クコト.



作圖 直線 l 上ニ任意ノ二點 A, B ヲトリ, A ト P トヲ結

ビ, ∠BAP ニ等シク錯角 ∠APC ガ出來ルヤウニ直線 PC ヲ引ケバ(作圖題 5), PC ハ求メル直線デアル.

證明 ∠CPA＝∠PAB

故ニ CP∥AB

問題 21

1. 三角形ノ各頂點ヲ通ツテ,夫々ノ對邊ニ平行ナル直線ヲ引ケ.

2. 作圖題 6 ヲ同位角ヲ用ヒテ解ケ.

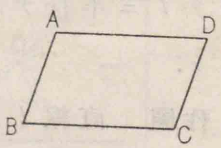
3. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通ツテ他ノ何レカノ邊ニ平行ナル直線ヲ引ケ.

第五章 平行四邊形

42. 平行四邊形ノ性質

問. 平行四邊形,菱形,矩形及ビ正方形ノ定義ヲ述ベヨ.

平行四邊形ヲ表ハスニハ,記號 ▱ ヲ用ヒテ,例ヘバ ▱ABCD 又ハ ▱AC ノ如ク書ク.



定理 16. 平行四邊形ニ於テ

[1] 對角線ハコレヲ合同ナ二ツノ三角形ニ分ケル.

[2] 相對スル邊ハ相等シイ.

[3] 相對スル角ハ相等シイ.

[4] 對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル.

證明 略ス.

系 1. **平行四邊形ノ相隣レル角ハ互ニ補角ヲナス.**

系 2. **平行四邊形ニ於テ**

[1] 一ツノ角ガ直角ナルトキハ矩形デアル.

[2] 一組ノ相隣レル邊ガ相等シイトキハ菱形デアル.

[3] 一ツノ角ガ直角デ一組ノ相隣レル邊ガ相等シイトキハ正方形デアル.

問題 22

1. 平行四邊形ノ一ツノ角ガ60°ナルトキ,他ノ三ツノ角ハ夫々幾度カ.

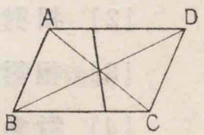
2. 矩形ノ四ツノ角ハ何レモ直角デアル.

3. 矩形ノ二ツノ對角線ハ相等シイ.

4. 菱形ノ對角線ハ互ニ直交スル.

5. 平行四邊形ノ二ツノ對角線ガ相等シイトキハ矩形デアル.

6. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ガ一組ノ對邊ニヨツテ截リ取ラレル部分ハソノ交點デ二等分サレル.



43. 平行四邊形トナル條件

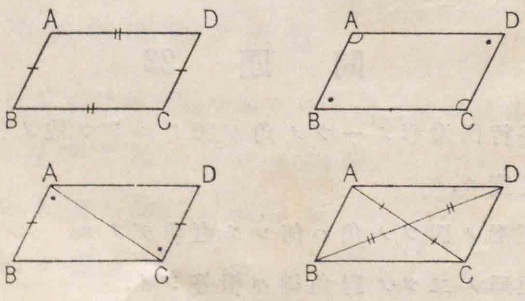
定理17. 四邊形ハ次ノ各場合ニ於テハ平行四邊形デアル.

[1] 二組ノ對邊ガ夫々相等シイトキ.

[2] 二組ノ對角ガ夫々相等シイトキ.

[3] 一組ノ對邊ガ相等シク且互ニ平行デアルトキ.

[4] 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキ.

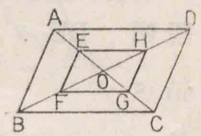


證明 略ス.

問 題 23

1. 矩形,菱形及ビ正方形ハ平行四邊形デアル.

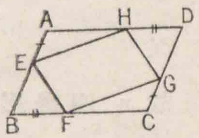
2. 平行四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, OA, OB, OC,O D ノ中點ヲ夫々 E,F,G,H トスレバ,四邊形 EFGH ハ平行四邊形デアル.



3. 平行四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ上ニ夫々點 E, F, G, H ヲトリ

$$AE=CG,\quad BF=DH$$

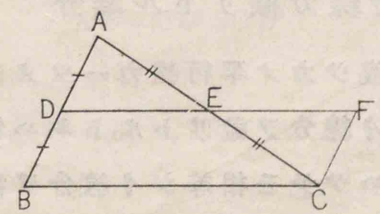
トスレバ,四邊形 EFGH ハ平行四邊形デアル.



4. 二ツノ平行線ノウチ,ソノ一ツノ上ノ任意ノ點ト他ノ直線トノ距離ヲ平行線間ノ距離トイフ. 平行線間ノ距離ハ一定デアルコトヲ證明セヨ.

44. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分

定理18. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ,第三邊ニ平行デ且ソノ二分ノ一ニ等シイ.



假設 $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トスレバ

終結 $DE \parallel BC,\quad DE=\frac{1}{2}BC$

證明 DE ヲ F マデ延長シテ EF=DE ニトリ, C, F ヲ結ベバ $\triangle ADE \equiv \triangle CFE$

故ニ $\angle ADE=\angle CFE$

ヨツテ $AD \parallel CF$ 從ッテ $BD \parallel CF$

又 $AD=CF$ 從ッテ $BD=CF$

故ニ四邊形 DBCF ハ平行四邊形デアル.（定理 17)

故ニ $DE \parallel BC$

又 $DF=BC$

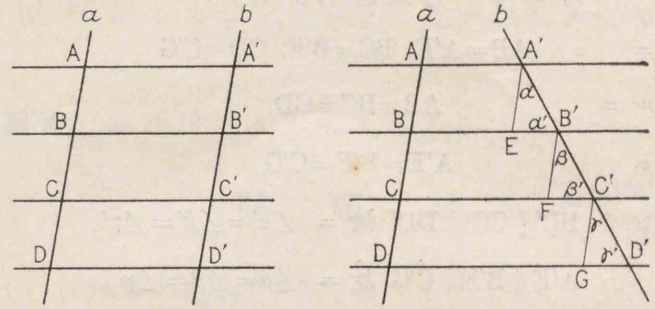
而シテ $DE=\frac{1}{2}DF$ （作 圖）

故ニ $DE=\frac{1}{2}BC$

系. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通ッテ他ノ一邊ニ平行ニ引イタ直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル.

45. 平行線ガ截リトル線分

定理 19. 幾ツカノ平行線ガ一ツノ直線ト相交ハッテ相等シイ線分ヲ截リトルトキハ,他ノ如何ナル直線ト相交ハッテモ相等シイ線分ヲ截リトル.



假設 平行線ガ一ツノ直線 a ト相交ハル點ヲ夫夫 A, B, C, D トシテ

$$AB=BC=CD$$

トスル. 平行線ガ他ノ直線 b ト相交ハル點ヲ夫々 A', B', C', D' トスレバ

終結 $A'B'=B'C'=C'D'$

證明 若シ $a \parallel b$ ナルトキハ,三ツノ四邊形 $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ ハ何レモ平行四邊形デアル.

故ニ $AB=A'B',\ BC=B'C',\ CD=C'D'$

然ルニ $AB=BC=CD$ （假 設）

從ッテ $A'B'=B'C'=C'D'$

若シ a, b ガ互ニ平行デナイトキハ, A', B', C' ヲ通ッテ a ニ平行線ヲ引キ, BB', CC', DD' トノ交點ヲ夫々 E, F, G トスル. 然ルトキハ四邊形 $ABEA'$, $BCFB'$, CDGC′ ハ何レモ平行四邊形デアル.

故ニ $AB=A'E,\ BC=B'F,\ CD=C'G$

然ルニ $AB=BC=CD$

故ニ $A'E=B'F=C'G$

而シテ $BB' \parallel CC' \parallel DD'$ 故ニ $\angle\alpha'=\angle\beta'=\angle\gamma'$

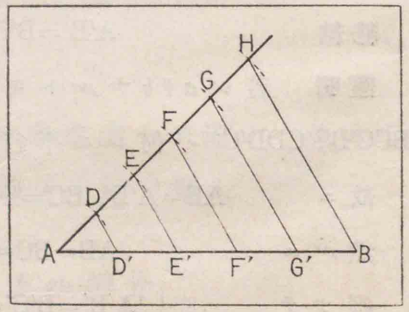
又 $A'E \parallel B'F \parallel C'G$ 故ニ $\angle\alpha=\angle\beta=\angle\gamma$

從ツテ $\triangle A'EB' \equiv \triangle B'FC' \equiv \triangle C'GD'$

故ニ $A'B'=B'C'=C'D'$

作圖題 7. 與ヘラレタ線分ヲ n 等分セヨ.

題意 AB ヲ與ヘラレタ線分トシ,コレヲ n 等分スルコト. (幾等分デモ同理デアルカラ五等分ノ場合ヲスル)



作圖 A ヲ通ツテ AB ト一致シナイ任意ノ直線ヲ引キ,ソノ上ニ五點 D, E, F, G, H ヲトツテ

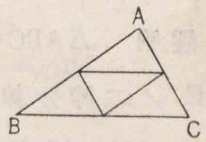
$$AD=DE=EF=FG=GH$$

トスル. H ト B トヲ結ビ, D, E, F, G ノ各點ヲ通ツテ HB ニ平行ナル直線ヲ作リ AB トノ交點ヲ夫々

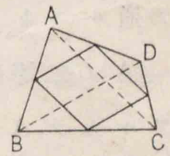
D′, E′, F′, G′ トスレバ,コレラノ點ハ AB ヲ五等分スル.

證明 定理19ニヨリ明カデアル.

問題 24

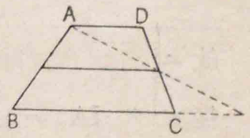


1. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ハモトノ三角形ヲ四ツノ合同ナ三角形ニ分ケル.



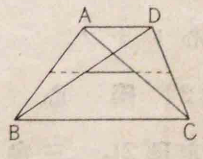
2. 任意ノ四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブ四ツノ線分ハ平行四邊形ヲ作リ,ソノ周ハモトノ四邊形ノ對角線ノ和ニ等シイ.

3. 前題ニ於ケル平行四邊形ガ菱形トナルタメニハ,モトノ四邊形ノ二ツノ對角線ハ相等シクナケレバナラナイ.



4. 梯形ノ互ニ平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ且上底,下底ノ和ノ半分ニ等シイ.

註. 梯形ノ平行ナル二邊ヲ共ニ**底**トイヒ,ソノ一ツヲ**上底**,他ヲ**下底**トイフ.



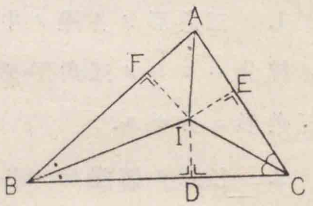
5. 梯形ノ二ツ對ノ角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ且上底,下底ノ差ノ半分ニ等シイ.

46. 三角形ノ心

[1] 内　心

定理20.　三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ同一ノ點デ相交ハル.

證明　△ABC ニ於テ, ∠B, ∠C ノ二等分線ノ交點ヲ I トスル.　∠A ノ二等分線ガ I ヲ通ルコトヲ證明スルニハ, ∠A ノ二等分線ハ唯一ツデアルカラ, A ト I トヲ結ブ直線ガ ∠A ヲ二等分スルコトヲ證明スレバヨイ.　今 I カラ △ABC ノ各邊ニ垂線 ID, IE, IF ヲ引ケバ



IF=ID, ID=IE　　(問題9, 5)

故ニ　　IF=IE

從ツテ IA ハ ∠A ヲ二等分スル.　(問題12, 1)

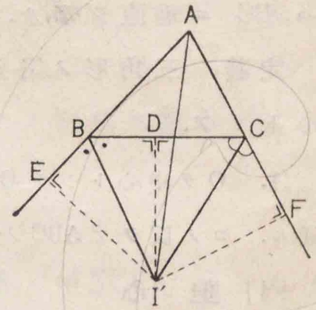
定義　三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ノ交點ヲ**内心**トイフ.

[2] 傍　心

定理21.　三角形ノ一ツノ内角ノ二等分線ト他ノ二角ノ外角ノ二等分線トハ同一ノ點デ相交ハル.

證明　定理20ノ證明ニ倣ツテ生徒自ラセヨ.

定義　三角形ノ一ツノ内角ノ二等分線ト他ノ二角ノ外角ノ二等分線トノ交點ヲ**傍心**トイフ.

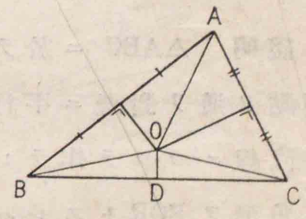


註.　三角形ニハ三ツノ傍心ガアル.

[3] 外　心

定理22.　三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點デ相交ハル.

證明　△ABC ニ於テ, AB 及ビ AC ノ垂直二等分線ノ交點ヲ O トスル.　O ト BC ノ中點 D トヲ結ブ直線ガ BC ニ垂直デアルコトヲ證明スレバヨイ.



サテ O ハ AB ノ垂直二等分線上ノ點デアルカラ

OA=OB

同様ニ　　OA=OC

故ニ　　OB=OC

従ツテ △OBC ハ二等邊三角形デアル. 故ニ OD ハ BC ニ垂直デアル.

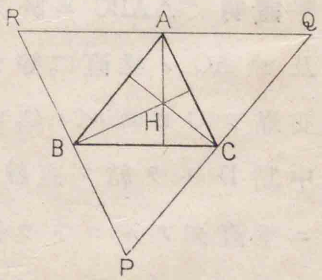
定義 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ノ交點ヲ**外心**トイフ.

註. Oヲ中心トシテ OA ヲ半徑トスル圓ハ B及ビ C ヲ通ル. コノ圓ヲ △ABC ノ外接圓トイフ.

[4] **垂　心**

定義 三角形ノ頂點カラ對邊ニ引イタ垂線ヲ三角形ノ**高サ**トイフ.

定理23. 三角形ノ三ツノ高サハ同一ノ點デ相交ハル.



證明 △ABC ニ於テ,各頂點ヲ通リ對邊ニ平行ナル直線ニヨツテ作ラレル三角形ヲ PQR トスレバ,四邊形 ABCQ, ACBR ハ何レモ平行四邊形デアル. 故ニ

$$AQ=BC,\quad AR=BC$$

従ツテ
$$AQ=AR$$

即チ A ハ QR ノ中點デアル. 同様ニ B, C ハ夫々

RP, PQ ノ中點デアル. △ABC ノ各高サハ夫々△PQR ノ各邊ノ垂直二等分線デアル. 故ニソレラハ定理22ニヨリ同一ノ點デ相交ハル.

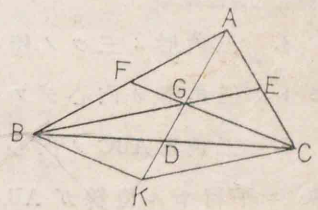
定義 三角形ノ三ツノ高サノ交點ヲ**垂心**トイフ.

註. 垂心ヲ通常Hデ表ハス.

[5] **重　心**

定義 三角形ノ頂點ト對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ三角形ノ**中線**トイフ.

定理24. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點デ相交ハル.



證明 △ABC ニ於テ,二ツノ中線ヲ BE, CF トシソノ交點ヲ G トスル. AG ト BC トノ交點 D ガ BC ノ中點デアルコトヲ證明スレバヨイ.

今 B ヲ通ツテ CF ニ平行ナル直線ト AG ノ延長トノ交點ヲ K トスル. △ABK ニ於テ, F ハ AB ノ中點デ FG∥BK, 故ニ G ハ AK ノ中點デアル. 次ニ K ト C トヲ結ベバ, △AKC ニ於テ, G, E ハ夫々 AK, AC ノ中點デアル. 故ニ GE∥KC 即チ BG∥KC, 故ニ四邊形 GBKC ハ平行四邊形デアル. 故ニソノ對角線ハ互ニ他ヲ

二等分スル. 從ツテDハ BC ノ中點デアル.

定義　三角形ノ三ツノ中線ノ交點ヲ**重心**トイフ.

系.　三角形ノ頂點ト重心トノ距離ハ,ソノ頂點カラ出ル中線ノ三分ノ二ニ等シイ.

問題 25

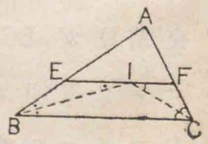
1. 二等邊三角形ノ内心,外心,垂心及ビ重心ハ何レモ頂角ノ二等分線上ニアル.

2. 正三角形ノ内心,外心,垂心及ビ重心ハ一致スル.

3. 二ツノ中線ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル.

4. 三角形ノ三ツノ傍心ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ハ,モトノ三角形ノ内心デアル.

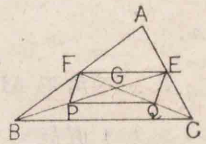
5. 三角形ABCノ内心Iヲ通ツテ邊BCニ平行ナル直線ガ AB, AC ト相交ハル點ヲ夫々E,Fトスレバ, $EF=BE+CF$ デアル.



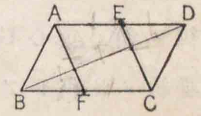
6. 鋭角三角形,直角三角形及ビ鈍角三角形ニ於テ,ソノ外心ノ位置ヲ比較セヨ. 又垂心ノ位置ヲ比較セヨ.

雜題 II

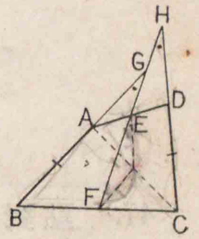
1. 三角形ABCノ二ツノ中線ヲ BE, CF トシ重心ヲGトスル. BG, CGノ中點ヲ夫々P,Qトスレバ,四邊形PQEFハ平行四邊形デアル.



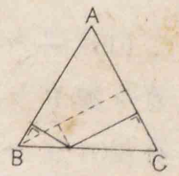
2. 平行四邊形ABCDノ對邊AD, BCノ中點ヲ夫々E,Fトスレバ, AF, CEハ對角線BDヲ三等分スル.



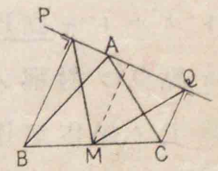
3. 四邊形ABCDニ於テ, $AB=CD$ ナルトキ, AD, BCノ中點ヲ夫々E, Fトシ, EFトAB, CDノ延長トノ交點ヲ夫々G, Hトスレバ $\angle G=\angle H$ デアル.



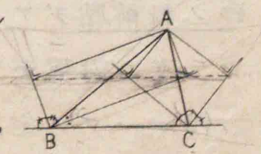
4. 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ點カラ他ノ二邊ニ引イタ二ツノ垂線ノ和ハ,底ノ一端カラ對邊ニ引イタ垂線ニ等シイ.



5. 三角形ABCノ頂點Aヲ通ル任意ノ直線ニB,Cカラ引イタ垂線ノ足ヲ夫々P,Qトシ, BCノ中點ヲMトスレバ $MP=MQ$ デアル.

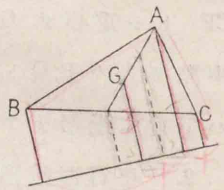


6. 三角形 ABC ノ頂點Aカラ ∠B,



∠C ノ二等分線及ビ ∠B, ∠C ノ各外角ノ二等分線ニ垂線ヲ引ケバ,ソレラノ四ツノ垂線ノ足ハ同一ノ直線上ニアル.

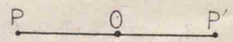
7. 三角形 ABC ノ何レノ邊ニモ相交ハラナイ直線ニ A, B, C カラ引イタ垂線ノ和ハ,重心 G カラソノ直線ニ引イタ垂線ノ 3 倍デアル.



第六章　對稱圖形

47. 點對稱

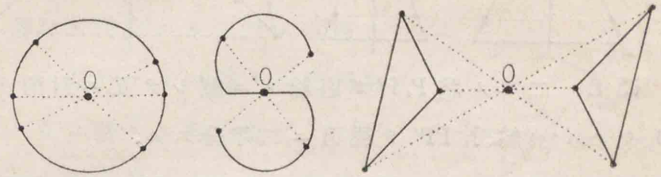
(1) 一ツノ定點 O ガアッテ,任意ノ點 P ヲトリ, P, O ヲ結ンデ線分 PO ヲソノ長サニ等シク延長シテソノ端點ヲ P' トスルトキ,點 P' ヲ點 O ニ關スル點 P ノ**對稱點**トイヒ,點 O ヲ**對稱ノ中心**トイフ.



上ノ操作ヲ逆ニ考ヘレバ,點 P ハ點 O ニ關スル點 P' ノ對稱點デアル. 從ッテ二點 P, P' ハ點 O ニ關シテ**互ニ對稱デアル**トイフコトガアル.

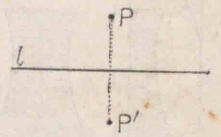
(2) 一ツノ定點 O ニ關スル一ツノ圖形上ノ各點

ノ對稱點ガスベテソノ圖形上ニアルトキ,ソノ圖形ハ點 O ニ關シテ**對稱デアル**トイヒ,點 O ヲ**對稱ノ中心**トイフ.

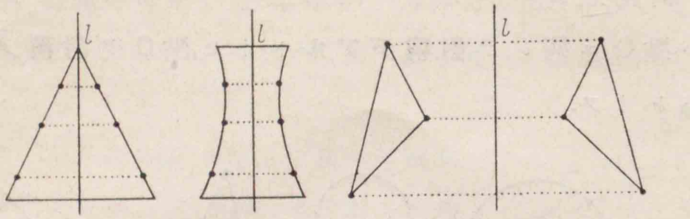


48. 線對稱

(1) 一ツノ定直線 l ガアッテ,任意ノ點 P ヲトリ, P カラ l ニ垂線ヲ引キコレヲ P ト l ノ距離ニ等シク延長シテソノ端點ヲ P' トスルトキ,點 P' ヲ直線 l ニ關スル點 P ノ**對稱點**トイヒ,直線 l ヲ**對稱軸**トイフ. 又二點 P, P' ハ直線 l ニ關シテ**互ニ對稱デアル**トイフ.

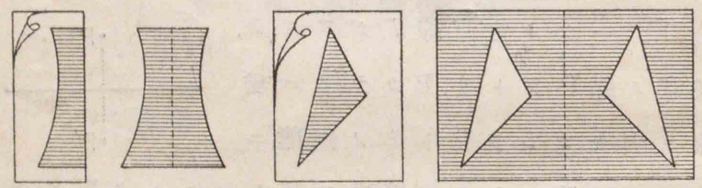


(2) 一ツノ定直線 l ニ關スル一ツノ圖形上ノ各點ノ對稱點ガスベテソノ圖形上ニアルトキ,ソノ圖形ハ直線 l ニ關シテ**對稱デアル**トイヒ,直線 l ヲ**對稱軸**トイフ.



問 1. 二ツノ點 P, P′ ガ直線 l ニ關シテ互ニ對稱デアルトキハ, l ハ線分 PP′ ヲ垂直ニ二等分スル.

問 2. 紙ヲ二ツニ折ツテソノ折目ヲ軸トスル對稱圖形ヲ截リ抜クコトガ出來ル. 對稱圖形ヲ二三截リ抜ケ.



問 題 26

1. 點對稱ノ圖形ヲ,ソノ對稱ノ中心ノ周リニ 180° 廻轉スレバモトノ位置ト全ク同ジ位置ヲ占メル. ソノ理由ヲ說明セヨ.

2. 線對稱ノ圖形ヲ,ソノ對稱軸ヲ折目トシテ折リ重ネレバ全ク相重ナル. ソノ理由ヲ說明セヨ.

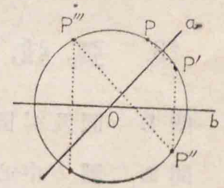
3. 點對稱ノ圖形ノ例ヲ二三擧ゲテソノ對稱ノ中心ヲ求メヨ.

4. 線對稱ノ圖形ノ例ヲ二三擧ゲテソノ對稱軸ヲ求メヨ.

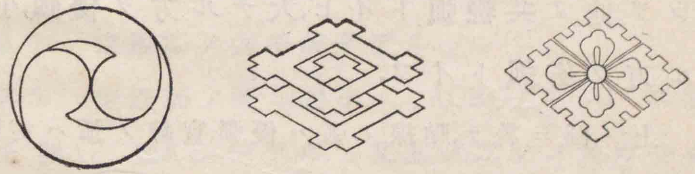
5. 對稱軸ヲ二ツ以上有スル圖形ノ例ヲ二三擧ゲヨ.

6. 點對稱デ且線對稱ナル圖形ノ例ヲ二三擧ゲヨ.

7. 點 O デ相交ハル二ツノ直線 a, b ガアル. 一點 P ノ a ニ關スル對稱點ヲ P′, P′ ノ b ニ關スル對稱點ヲ P″, P″ ノ a ニ關スル對稱點ヲ P‴, 以下順次コノヤウニ次々ニ對稱點ヲ求メルトキ, P, P′, P″, P‴,……ハ O ヲ中心トシテ OP ヲ半徑トスル圓周上ニアル. ソノ理由ヲ說明セヨ.



8. 次ノ紋章ハ何レモ幾何圖形ヲ應用シタ對稱ナルモノデアル. 幾何圖形ヲ應用シテ對稱ナル紋章ヲ考案セヨ.



第三篇　圓

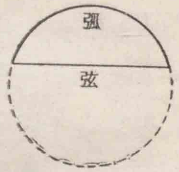
第一章　中心角, 圓周角

49.　弧, 弦, 中心角

問 1.　圓及ビ圓周ノ定義ヲ述ベヨ.

問 2.　圓ノ中心,半徑及ビ直徑ノ定義ヲ述ベヨ.

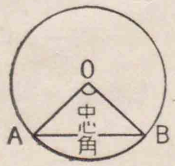
定義　圓周ノ一部分ヲ**弧**トイヒ,弧ノ兩端ヲ結ブ線分ヲ**弦**トイフ. 圓周上ノ二點ハ圓周ヲ二ツノ弧ニ分ケル. ソノ一ツヲ他ノ**共軛弧**トイヒ,大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**トイフ.



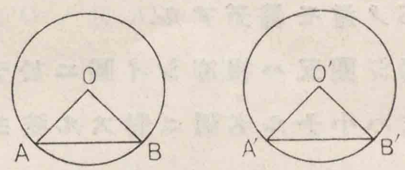
上ノ圖ニ於テ,點線ノ弧ハ優弧,實線ノ弧ハ劣弧デアル.

定義　二ツノ半徑ガナス角ヲ**中心角**トイフ.

中心角ハソノ二邊ガ夾ム弧又ハ弦ノ上ニ立ツトイフ.



定理 25.　同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ,相等シイ中心角ニ對スル弧及ビ弦ハ相等シイ.



假設　相等シイ圓 O, O′ ノ中心角ヲ夫々 ∠AOB, ∠A′O′B′ トシ, ∠AOB＝∠A′O′B′ ナルトキハ

終結　弧 AB＝弧 A′B′, 弦 AB＝弦 A′B′

證明　O ヲ O′ ニ重ネレバ二ツノ圓ハ全ク相重ナル. 故ニ OA ヲ O′A′ ニ重ネレバ ∠AOB＝∠A′O′B′ デアルカラ OB ハ O′B′ ニ重ナル.

故ニ　弧 AB＝弧 A′B′ 及ビ 弦 AB＝弦 A′B′

系 1.　定理 25 ノ逆モ眞デアル.

系 2.　定理 25 ノ圖ニ於テ, ∠AOB ⪋ ∠A′O′B′ ニ從ッテ 弧AB ⪋ 弧A′B′ デアル. 又上ノ二ツノ角ガ共ニ劣角ナルトキハ, ∠AOB ⪋ ∠A′O′B′ ニ從ッテ 弦AB ⪋ 弦A′B′ デアル.

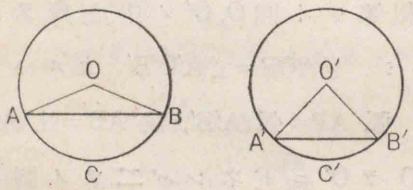
系 3.　系 2 ノ逆モ眞デアル.

定理 26.　同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ,相等シイ弧ニ對スル弦ハ相等シイ.

證明 定理25及ビソノ系ヲ用ヒテ生徒自ラ證明セヨ.

系. **定理26ノ逆モ眞デアル.**

定理27 **同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ,大ナル劣弧ニ對スル弦ハ小ナル劣弧ニ對スル弦ヨリモ大デアル.**



假設 相等シイ圓 O, O' ノ劣弧ヲ夫々弧 ACB, $A'C'B'$ トスルトキ弧 $ACB>$ 弧 $A'C'B'$ ナルトキハ

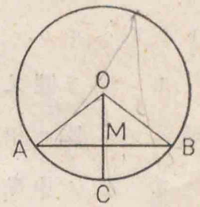
終結 弦 $AB>$ 弦 $A'B'$

證明 二ツノ弧ノ兩端ヲ夫々圓ノ中心ニ結ベバ, $\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ ノ大小ハ弧 AB ト弧 $A'B'$ ノ大小ニ從フ. 然ルニ $\triangle OAB$ ト $\triangle O'A'B'$ トハ二邊ガ夫々相等シイカラ第三邊 AB, $A'B'$ ノ大小ハソレラニ相對スル $\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トノ大小ニ從フ.

故ニ弦 AB, $A'B'$ ノ大小ハ弧 ACB, $A'C'B'$ ノ大小ニ從フコトニナル.

系. **定理27ノ逆モ眞デアル.**

定理28 **弦ニ垂直ナル半徑ハ,ソノ弦及ビソノ弦ニ對スル弧ヲ二等分スル.**



假設 圓 O ノ弦 AB ニ垂直ナル半徑ヲ OC トシ,コレト AB トノ交點ヲ M トスレバ

終結 $AM=BM$, 弧 $AC=$ 弧 BC

證明 O ト A, O ト B トヲ結ベバ

$\triangle OAM\equiv\triangle OBM$ (定理11)

故ニ $AM=BM$

又 $\angle AOC=\angle BOC$

故ニ 弧 $AC=$ 弧 BC (定理25)

系. **弦ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ通ル.**

問 題 27

1. 互ニ直交スル二ツノ直徑ハ圓及ビ圓周ヲ相等シイ四ツノ部分ニ分ケル.

註. 互ニ直交スル二ツノ直徑ニヨツテ四等分セラレタ圓ノ各部分ヲ**四分圓**トイフ.

2. 圓周ノ二分ノ一,三分ノ一,四分ノ一,五分ノ一,六分ノ一等ノ各弧ノ上ニ立ツ中心角ハ夫々幾度カ.

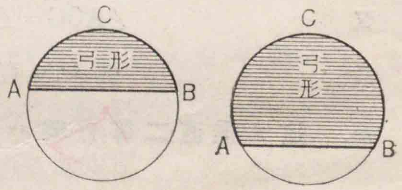
3. 中心角ガ2倍,3倍,4倍,…… トナレバ,コレニ對スル弧モ亦2倍,3倍,4倍,…… トナル. 弦ニツイテモ同樣ノコトガイヘルカ.

4. 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ,中心カラ相等シイ距離ニアル弦ハ相等シイ. コノ逆モ眞デアル.

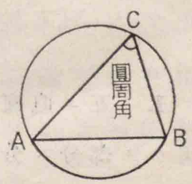
5. 弦ノ中點ト圓ノ中心トヲ結ブ直線ハソノ弦ニ垂直デアル.

50. 弓形, 圓周角

定義 一ツノ弧トソノ兩端ヲ結ブ弦トニヨツテ圍マレタ圓ノ一部分ヲ弓形トイフ.

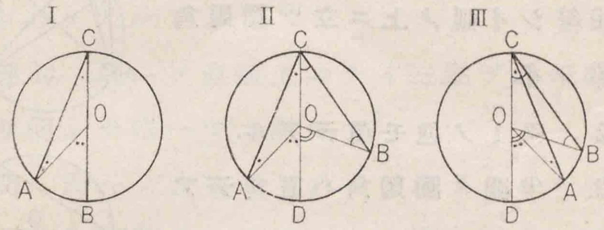


定義 圓周上ノ一點カラ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲ圓周角トイフ.



圓周角ハソノ二邊ガ夾ム弧又ハ弦ノ上ニ立ツトイヒ,圓周角ACBヲ弓形ACBノ角又ハ弓形ACBノ含ム角トイフ.

定理29 圓周角ハコレニ對スル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ二分ノ一ニ等シイ.



假設 圓Oニ於テ,弧ABノ上ニ立ツ圓周角ヲ $\angle ACB$ トスレバ

終結 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$

證明 (1) $\angle ACB$ ノ一邊例ヘバ BC ガ圓ノ中心ヲ通ル場合(I圖)

$OA=OC$ 故ニ $\angle CAO=\angle ACO$

然ルニ $\angle AOB=\angle CAO+\angle ACO=2\angle ACB$

故ニ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$

(2) $\angle ACB$ ノ何レノ邊モ圓ノ中心ヲ通ラナイ場合(II, III圖)

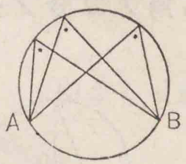
C ヲ通ル直徑 CD ヲ作レバ

$$\angle ACD=\frac{1}{2}\angle AOD,\ \angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD$$

故ニ $\angle ACD\pm\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle AOD\pm\angle BOD)$

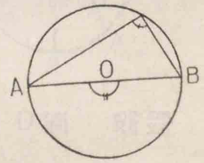
即チ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$

系 1. 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ,相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ.



系 2. 系 1 ノ逆モ眞デアル.

系 3. 半圓*ノ圓周角ハ直角デアル.



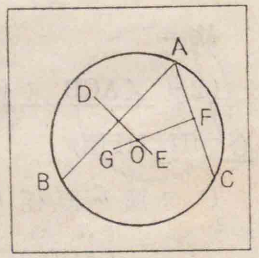
系 4. 系 3 ノ逆モ眞デアル.

51. 圓ノ決定

作圖題 8. 與ヘラレタ圓ノ中心ヲ求メヨ.

題意 與ヘラレタ圓ノ周ヲ ABC トシ,ソノ中心ヲ求メルコト.

作圖 任意ニ二ツノ弦 AB, AC ヲ引キ,ソレラノ垂直二等分線 DE, FG ヲ作レバソレラハ必ズ相交ハル. (問題6, 6) ソノ交點ヲ O トスレバ O ハ求メル中心デアル.



*第13頁參照

證明 DE, FG ハ夫々弦ノ垂直二等分線デアルカラ共ニ圓ノ中心ヲ通ル. (定理28,系) 故ニソノ交點 O ハ中心デアル.

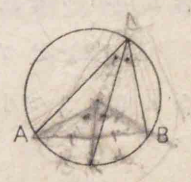
定理 30. 同一ノ直線上ニナイ三點ヲ通ル圓ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

證明 同一ノ直線上ニナイ三點 A, B, C ガ與ヘラレタトキ,作圖題 8 ノ方法ニヨリ點 O ガ求メラレル. 故ニ O ヲ中心トシ, OA ヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケバコレハ三點 A, B, C ヲ通ル. 而シテ O 點ハ二ツノ直線ノ交點デアルカラ唯一ツデアル. (證明終リ)

一ツノ圓(又ハ圓周)ハ同一ノ直線上ニナイ三點ニヨツテ定マル. コノコトヲ**三點ハ一ツノ圓(又ハ圓周)ヲ決定スル**トイフ.

問題 28

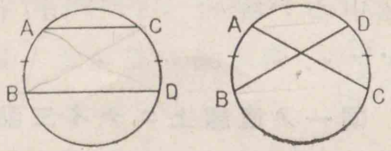
1. 圓周角ノ二等分線ハソノ圓周角ノ二邊ガ夾ム弧ヲ二等分スル.



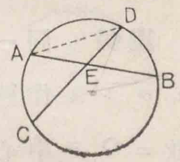
2. 四點 A, B, C, D ガ一ツノ圓周上ニアリ,又四點 B, C, D, E ガ一ツノ圓周上ニアルトキハ,五點 A, B, C, D, E ハ同一圓周上ニアル.

3. 一ツノ圓ニ於テ,二ツノ弧 AB, CD ガ相等シイトキ

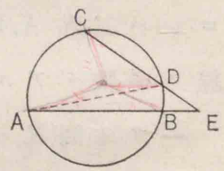
ハ,弦 AC, BD ハ平行デアルカ,或ハ相等シイ.



4. 一ツノ圓ニ於テ,二ツノ弦AB, CD ガ圓内ノ一點Eデ相交ハルトキハ,∠AEC ハ弧 AC及ビBDノ上ニ立ツ中心角ノ和ノ二分ノ一ニ等シイ.



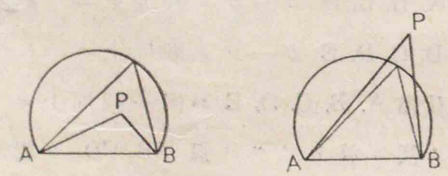
5. 一ツノ圓ニ於テ,二ツノ弦AB, CD ガ圓外ノ一點Eデ相交ハルトキハ,∠AEC ハ弧AC及ビBDノ上ニ立ツ中心角ノ差ノ二分ノ一ニ等シイ.



6. 弓形ノ弦 AB ニ關シテ弓形ト同ジ側ニ一點Pヲトルトキ

(1) Pガ弓形ノ内部ニアレバ,∠APB ハソノ弓形ノ含ム角ヨリモ大デアル.

(2) Pガ弓形ノ外部ニアレバ,∠APB ハソノ弓形ノ含ム角ヨリモ小デアル.



第二章 圓ト直線

52. 割線,切線

問. 直線lトコノ直線外ノ一點Oガ與ヘラレタトキ,Oヨリlニ垂線OCヲ引イテ,次ノ各場合ニ於ケル圓周ヲ作レ.

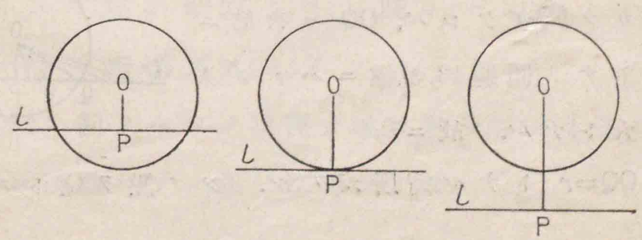
(1) Oヲ中心トシ,半徑ガ OC ヨリモ大ナル圓

(2) Oヲ中心トシ,半徑ガ OC ニ等シイ圓

(3) Oヲ中心トシ,半徑ガ OC ヨリモ小ナル圓

上ノ各場合ニ於テ,圓ノ半徑ト OC トノ大小ニ從ツテ圓周ト直線lトノ交點ノ數ヲイヘ.

定理31. 圓ノ半徑ガ,圓ノ中心ト一ツノ直線トノ距離ヨリモ [1]大ナルカ [2]コレニ等シイカ或ハ [3]コレヨリモ小ナルカニ從ツテ,圓周ハソノ直線ト [1]二點ヲ共有スルカ [2]一點ヲ共有スルカ或ハ [3]出會ハナイ.

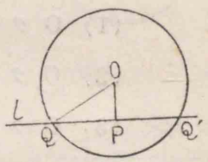


假設 半徑rナル圓Oノ中心カラ直線lニ引イタ垂線ヲOPトスルトキ, [1] $r>OP$ナルカ [2] $r=OP$ナルカ或ハ [3] $r<OP$ナルカニ從ツテ

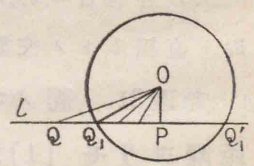
終結 圓Oト直線lトハ [1] 二點ヲ共有スルカ [2] 一點ヲ共有スルカ或ハ [3] 出會ハナイ.

證明 [1] $r>OP$ ナル場合 l上ニPト異ナル任意ノ一點Qヲトル.

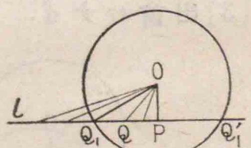
(1) $OQ=r$ ナラバQハ圓周ノ上ニアル. 而シテOPニ關スルQノ對稱點Q'モ圓周ノ上ニアル.



(2) $OQ>r$ナラバ, $r>OP$デアルカラQヲ次第ニPニ近ヅケレバOQハ次第ニ小トナリ(問題13,3), QガPニ一致スルマデニ$OQ=r$トナル箇所ガアル. ソノ點ヲQ_1トスレバQ_1及ビQ_1ノOPニ關スル對稱點Q_1'ハ圓周ノ上ニアル.



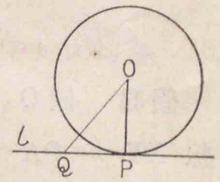
(3) $OQ<r$ ナラバQヲ次第ニPカラ遠ザケレバ, OQハ次第ニ大トナリ(問題13, 3), 遂ニハrヨリモ大トナル. 故ニ$OQ=r$トナル箇所ガアル. ソノ點ヲQ_1トスレバ,



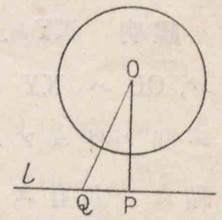
Q_1及ビQ_1ノOPニ關スル對稱點Q_1'ハ圓周ノ上ニアル.

即チ圓Oト直線lトハ二點ヲ共有スル.

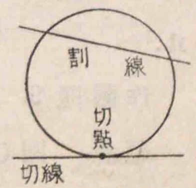
[2] $r=OP$ ナル場合 Pハ圓周上ニアル. l上ニPト異ナル任意ノ點Qヲトレバ常ニ$r=OP<OQ$故ニQハ圓Oノ外部ニアル. 即チ圓Oト直線lトハ唯一點ヲ共有スル.



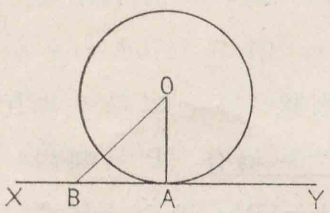
[3] $r<OP$ ナル場合 l上ニ任意ノ點Qヲトレバ常ニ $r<OP<OQ$ 故ニQハ圓Oノ外部ニアル. 即チ圓Oト直線lトハ出會ハナイ.



定義 圓周ト二點ヲ共有スル直線ヲソノ圓ノ**割線**トイヒ, 圓周ト唯一點ヲ共有スル直線ヲソノ圓ノ**切線**トイフ. 圓周ト切線トガ共有スル點ヲ**切點**トイヒ, 圓周ト切線トハ切點ニ於テ**相切スル**トイフ.



定理32. 圓ノ一ツノ半徑ノ端ニ於テ, コノ半徑ニ垂直ナル直線ハソノ圓ノ切線デアル.



假設 圓Oノ一ツノ半徑ヲOAトシ,Aニ於テ直線XYガOAニ垂直ナルトキハ

終結 XYハ圓Oノ切線デアル.

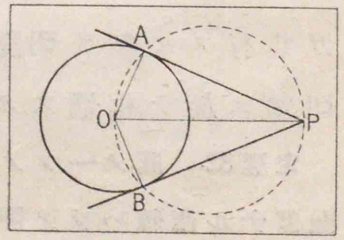
證明 XY上ニAト異ナル任意ノ一點Bヲトレバ,OBハXYノ斜線デアル. 故ニOB>OA 故ニBハ圓ノ外ニアル. 從ツテ圓Oト直線XYトハ唯一點Aヲ共有スル. 故ニXYハ圓Oノ切線デアル.

系. 圓ノ切線ハソノ切點ヲ通ル半徑ニ垂直デアル.

作圖題9. 圓外ノ一點カラコノ圓ニ切線ヲ引ケ.

題意 圓Oノ外部ニアル一點ヲPトシ,Pカラコノ圓ニ切線ヲ引クコト.

作圖 O,Pヲ結ビ,線分OPヲ直徑トスル圓ト圓OトガA共有スル點ヲA及ビBトスレバ,PA,PBハ求メル切線デアル.



證明 OトA,OトBトヲ結ベバ∠OAP,∠OBPハ共ニ直角デアル.(定理29,系3) 故ニPA,PBハ圓Oノ切線デアル.(定理32)

定義 圓外ノ一點カラソノ圓ニ引イタ切線ノ切點トソノ點トノ距離ヲ**切線ノ長サ**トイフ.

問題 29

1. 圓ノ切線ノ切點ニ於テソノ切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

2. 圓O外ノ一點Pカラ圓Oニ二ツノ切線ヲ引イテソノ切點ヲ夫々A,Bトスルトキ,次ノコトヲ證明セヨ.

(1) 直線OPハ弦ABヲ垂直ニ二等分スル.

(2) 直線OPハ∠AOB及ビ∠APBヲ二等分スル.

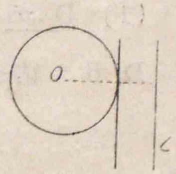
(3) 二ツノ切線ノ長サハ相等シイ.

(4) ∠PAB=∠PBA

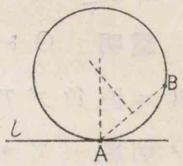
3. 二ツノ同心圓ノ小ナル圓ニ切スル大ナル圓ノ弦ハ皆相等シイ.

4. 一ツノ圓ニ於テ,相等シイ弦ハソノ圓ト同心ナル一ツノ圓ニ切スル.

5. 與ヘラレタ直線ニ平行デ且與ヘラレタ圓ニ切スル直線ヲ引ケ.

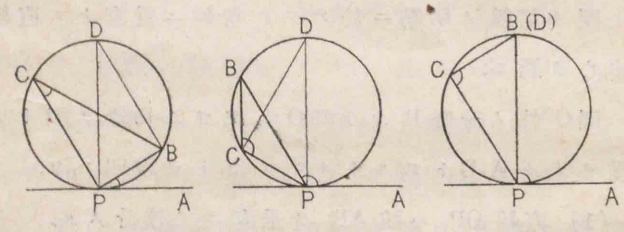


6. 與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點デコレニ切シ且コノ直線外ノ與ヘラレタ點ヲ通ル圓ヲ畫ケ.



53. 切線ト弦トノナス角

定理33. 圓ノ切線トソノ切點カラ引イタ弦トノナス角ハ,ソノ角ノ外部ニアル弓形ノ含ム角ニ等シイ.



假設 圓ノ切線ヲ AP トシ,ソノ切點Pカラ引イタ弦ヲ PB トシ, ∠APB ノ外部ノ弓形ノ弧上ノ任意ノ點ヲCトスレバ

終結 ∠APB=∠PCB

證明 P ヲ通ル直徑 PD ヲ引ク.

(1) <u>D ガ ∠APB ノ外部ニアル場合</u>

D, B ヲ結ベバ, ∠PBD=∠R デアルカラ

∠PDB+∠BPD=∠R

又　　∠APB+∠BPD=∠R

故ニ　　∠APB=∠PDB=∠PCB

(2) <u>D ガ ∠APB ノ內部ニアル場合</u>

D, C ヲ結ベバ, ∠APD=∠PCD(=∠R)

又　　∠DPB=∠DCB　(定理29, 系1)

故ニ二式ヲ邊々相加ヘテ

∠APB=∠PCB

(3) <u>D ガ B ニ一致スル場合</u>

明ラカニ　　∠APB=∠PCB(=∠R)

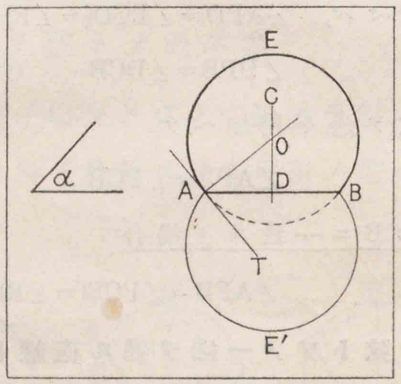
系. 圓ノ弦トソノ一端ヲ通ル直線トノナス角ガ,ソノ角ノ外部ニアル弓形ノ含ム角ニ等シイトキハ,ソノ直線ハ圓ノ切線デアル.

作圖題10. 與ヘラレタ線分ヲ弦トシ,與ヘラレタ角ヲ含ム弓形ヲ作レ.

題意 與ヘラレタ線分ヲ AB トシ,與ヘラレタ角ヲ $\angle\alpha$ トスル. AB ヲ弦トシ $\angle\alpha$ ヲ含ム弓形ヲ作ルコト.

作圖 AB ノ一端例ヘバAヲ通リ ABト $\angle\alpha$ ヲナス直線 AT ヲ引キ,Aヲ通ツテ AT ニ垂直ナル直線ト AB ノ垂直二等分線 CD トノ交點ヲOトスル.

Oヲ中心トシ, OA (又ハ OB) ヲ半徑トスル圓ヲ書キ, ∠TAB ノ外部ニアル弓形 AEB ヲトレバ, コレハ求メルモノデアル.

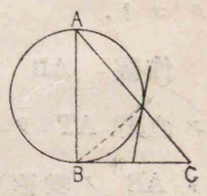


證明　AT ハ圓 O ノ切線デ ∠TAB=∠α デアルカラ定理33ニヨリ弓形 AEB ノ含ム角ハ ∠α ニ等シイ.

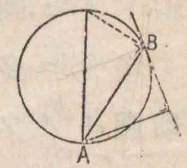
註. AB ニ關スル弓形 AEB ニ對稱ナル弓形 AE′B モ亦求メルモノデアル.

問　題　30

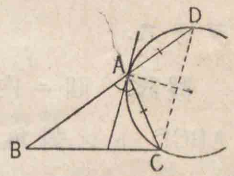
1. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ヲ直徑トスル圓ガ斜邊ト相交ハル點ニ於テコノ圓ニ引イタ切線ハ直角ノ他ノ邊ヲ二等分スル.



2. 圓ノ弦ハソノ一ツノ端ヲ通ル直徑トソノ端ヨリ他ノ端ニ於ケル切線ニ引イタ垂線トノ夾ム角ヲ二等分スル.



3. 三角形 ABC ノ邊 BA ヲ D マデ延長シテ AD=AC ニトルトキ, ∠BAC ヲ二等分スル直線ハ三點 C, A, D ヲ通ル圓ニ切スル.



4. 底邊頂角及ビ高サヲ知ッテ三角形ヲ作レ.

第三章　圓ト多角形

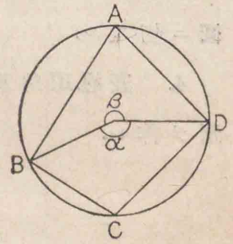
54. 内接, 外接, 内切, 外切

定義　一ツノ多角形ノ各頂點ガ一ツノ圓周上ニアルトキ, ソノ多角形ハソノ圓ニ**内接**スルトイヒ, 圓ハ多角形ニ**外接スル**トイフ. コノ場合ニ多角形及ビ圓ヲ夫々**内接多角形**, **外接圓**トイフ.

定義　一ツノ多角形ノ各邊ガ一ツノ圓周ニ切スルトキ, ソノ多角形ハソノ圓ニ**外切ス**

ルトイヒ,圓ハ多角形ニ**內切**スルトイフ. コノ場合ニ多角形及ビ圓ヲ夫々**外切多角形**,**內切圓**トイフ.

定理34. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角ハ互ニ補角ヲナス.



假設 圓ニ內接スル四邊形ヲABCDトシ,對角ヲ夫々 $\angle A$, $\angle C$ 及ビ $\angle B$, $\angle D$ トスレバ

終結 $\angle A+\angle C=2\angle R$

$\angle B+\angle D=2\angle R$

證明 弧 BCD, BAD ノ上ニ立ツ中心角ヲ夫々 $\angle\alpha$, $\angle\beta$ トスレバ

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle\alpha,\quad \angle C=\frac{1}{2}\angle\beta$$

故ニ
$$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)=\frac{1}{2}\times4\angle R=2\angle R$$

同樣ニシテ $\angle B+\angle D=2\angle R$

系1 圓ニ內接スル四邊形ノ外角ハ,ソレニ隣レル內角ノ對角ニ等シイ.

定義 圓ニ內接スル四邊形ノ外角ニ隣レル內角ノ對角ヲソノ外角ノ**內對角**トイフ.

系2 四邊形ノ一組ノ對角ガ互ニ補角ヲナセバ,コノ四邊形ハ圓ニ內接スル. (定理34ノ逆)

系3 四邊形ノ外角ガソノ內對角ニ等シイトキハ,ソノ四邊形ハ圓ニ內接スル. (系1ノ逆)

問 題 31

1. 三角形ノ內切圓ヲ作レ. (定理20參照)

2. 三角形ノ一邊及ビ他ノ二邊ノ延長ニ切スル圓ヲ畫ケ. (定理21參照)

註. 三角形ノ一邊及ビ他ノ二邊ノ延長ニ切スル圓ヲ三角形ノ**傍切圓**トイフ. 三角形ニハ三ツノ傍切圓ガアル.

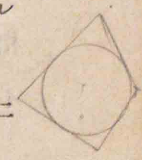
3. 三角形ノ外接圓ヲ畫ケ. (定理22及ビ定理30參照)

4. 圓ニ外切スル四邊形ノ相對スル邊ノ和ハ相等シイ.

5. 圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形デアル. 又ソノ對角線ハ圓ノ直徑デアル.

6. 圓ニ外切スル平行四邊形ハ菱形デアル.

7. 二等邊三角形ABCノ底邊BCニ平行ナル直線ガAB, AC又ハソレラノ延長ト相交ハル點ヲ夫々D, Eトスレバ,四邊形BCEDハ圓ニ內接スル.



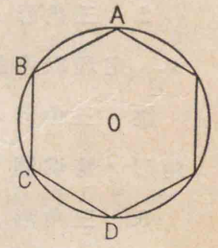
8. 多角形ニ圓ガ內切スルトキハ,多角形ノ各內角ノ二等分線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

9. 圓周上ノ點Aカラ引イタ二ツノ弦ヲAB, ACトシ,

A ニ於ケル切線ニ平行ナル直線ガ AB, AC 又ハソレラノ延長ト相交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ,四邊形 BCFE ハ圓ニ內接スル.

55. 正多角形

定理 35. 圓周ヲ幾ツカニ等分シテソノ分點ヲ順次ニ結ベバ,ソノ圓ニ內接スル正多角形ヲ得ル.



假設 中心 O ナル圓周ヲ n 等分シテ(圖ハ六等分),ソノ分點ヲ A, B, C, D,…… トスレバ

終結 多角形 ABCD……ハ圓 O ニ內接スル正多角形デアル.

證明 多角形ガ圓ニ內接スルコトハ明ラカデアル. コレガ正多角形デアコトヲ次ニ證明スル.

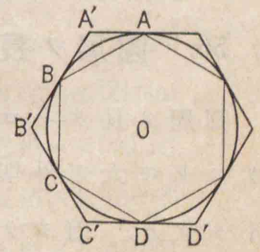
多角形ノ邊 AB, BC, CD,…… ハ等シイ弧ニ對スル弦デアルカラ皆相等シイ. (定理26) 又コノ多角形ノ各內角ハ,圓周ノ n 分ノ一ニ等シイ弧ノ$(n-2)$倍ニ相當スル弧ノ上ニ立ツ圓周角デアルカラ皆相等シイ.

故ニ多角形 ABCD…… ハ等邊デ且等角デアルカラ正多角形デアル.

定理 36. 正多角形ニハコレニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル.

證明 生徒自ラ試ミヨ. (定理28,系參照)

定理 37. 圓周ヲ幾ツカニ等分シテソノ各分點ニ於テ圓ノ切線ヲ作レバ,ソノ圓ニ外切スル正多角形ヲ得ル.



假設 中心 O ナル圓周ヲ n 等分シテ(圖ハ六等分),ソノ分點 A, B, C, D,…… ノ各點ニ於ケル圓ノ切線ヲ作リ,ソレラノ相隣レルモノノ交點ヲ A′, B′, C′, D′,…… トスレバ

終結 多角形 A′B′C′D′…… ハ圓 O ニ外切スル正多角形デアル.

證明 多角形ガ圓ニ外切スルコトハ明ラカデアル. コレガ正多角形デアルコトヲ次ニ證明スル.

$\triangle A'AB$, $\triangle B'BC$, $\triangle C'CD$,……ニ於テ

$$AB=BC=CD=\cdots \quad \text{(定理26)}$$

$$\angle A'AB=\angle A'BA=\angle B'BC=\angle B'CB=\angle C'CD=\angle C'DC=\cdots \quad \text{(定理33)}$$

故ニ　$\triangle A'AB \equiv \triangle B'BC \equiv \triangle C'CD \equiv \cdots\cdots$

從ツテ多角形 $A'B'C'D'\cdots\cdots$ ハ等邊デ且等角ニナル カラ正多角形デアル.

定理38. 正多角形ニハコレニ內切スル圓ヲ畫クコトガ出來ル.

證明　生徒自ラ試ミヨ. (問題31, 8 參照)

56. 圓周ノ長サ

圓周ノ長サハコレニ內接スル正多角形ノ周ノ長サヨリモ大デ,外切スル正多角形ノ周ノ長サヨリモ小デアル. 而シテ正多角形ノ邊數ヲ 4, 8, 16, 32,……ノ如ク次第ニ增セバ,內接正多角形ノ周ハ次第ニ大トナリ,外切正多角形ノ周ハ次第ニ小トナツテ,多角形ノ邊數ヲ限リナク增セバ何レモ圓周ニ限リナク近ヅク. 卽チ

圓ニ內接及ビ外切スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク增ストキ,ソレラノ多角形ノ周ノ極限ハ何レモ圓ノ周デアル.

サテ今任意ノ圓ニ內接及ビ外切スル正方形,正八角形,正十六角形等ノ周ヲ計算スレバ次ノ如クデアル.

邊數	內接正多角形ノ周	外切正多角形ノ周
4	直徑 × 2.8284271	直徑 × 4.0000000
8	直徑 × 3.0614675	直徑 × 3.3137085
16	直徑 × 3.1214452	直徑 × 3.1825979
32	直徑 × 3.1365485	直徑 × 3.1517249
64	直徑 × 3.1403312	直徑 × 3.1441184
128	直徑 × 3.1412773	直徑 × 3.1422236
256	直徑 × 3.1415138	直徑 × 3.1417504
512	直徑 × 3.1415729	直徑 × 3.1416321
1024	直徑 × 3.1415877	直徑 × 3.1416025
2048	直徑 × 3.1415914	直徑 × 3.1415951
4096	直徑 × 3.1415923	直徑 × 3.1415933
8192	直徑 × 3.1415926	直徑 × 3.1415928

故ニ任意ノ圓ノ直徑ヲ d, 周ヲ P トスレバ

$$P = d \times 3.141592\cdots\cdots$$

ナル關係ガアル.

上ノ式カラ分カルヤウニ, $P:d$ 卽チ圓ノ周トソノ直徑トノ比ガ 3.141592……デアル.

圓ノ周トソノ直徑トノ比ヲ**圓周率**トイヒ,コレヲ通常ぎりしや文字ノ π(ぱい)デ表ハス.

圓周率ノ値ハ

$$\pi=3.14159265358979323846264338327950288\cdots\cdots$$

デアツテ,ソノ小數點以下ガ循環シナイデ無限ニ續クモノデアルガ,ソノ近似値トシテ 3.14, 3.1416, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ ナドヲ用ヒル.

問. 半徑 r ナル圓ノ周ヲ P トスルトキ, P ヲ r デ表ハセ.

2γπ

問　題　32

1. 同ジ圓ニ內接(又ハ外切)スル同ジ邊數ノ二ツノ正多角形ハ合同デアル.　定35 — 內接　定37 — 外接

2. 與ヘラレタ圓ニ內接又ハ外切スル正三角形,正六角形,正十二角形ヲ作レ.

3. 與ヘラレタ圓ニ內接又ハ外切スル正方形,正八角形,正十六角形ヲ作レ.

4. 分度器ヲ用ヒテ與ヘラレタ圓ニ內接又ハ外切スル正五角形ヲ作レ.

5. 二ツノ圓周ノ比ハソノ半徑ノ比ニ等シイ.

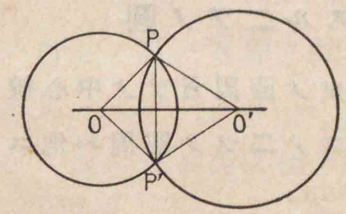
R:r

第四章　二ツノ圓

57. 相交ハル二ツノ圓

定義　二ツノ圓ノ中心ヲ通ル直線ヲソノ二圓ノ**中心線**トイフ.

定理 39. **二ツノ圓周ガソノ中心線上ニナイ一點ヲ共有スルトキハ,コノ二ツノ圓周ハ必ズ他ノ一點ヲ共有シ,而シテソレハ唯一點ニ限ル.**



假設　二ツノ圓 O, O′ ノ周ガ中心線 OO′ 上ニナイ一點 P ヲ共有スルトキハ

終結　コノ二ツノ圓ノ周ハ P ト異ナル他ノ一點ヲ共有スル.

證明　直線 OO′ ニ關スル P ノ對稱點ヲ P′ トスレバ, O, O′ ハ共ニ線分 PP′ ノ垂直二等分線上ニアル.

故ニ　　$OP=OP'$,　$O'P=O'P'$

從ツテ圓O, O′ノ周ハ共ニP′ヲ通ル.

即チ二ツノ圓O, O′ノ周ハPト異ナル他ノ一點P′ヲ共有スル. 而シテ定理30ニヨリP′ノ如キ點ハ唯一ツデアル.

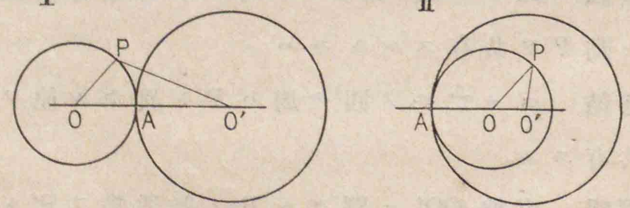
定義 二ツノ圓ノ周ガ二點ヲ共有スルトキ,コノ二圓ハ**相交ハル**トイヒ,ソノ交點ヲ結ブ直線ヲソノ二圓ノ**共通弦**トイフ.

問. 二ツノ圓ガ相交ハルトキ,ソノ中心線ハ共通弦ヲ垂直ニ二等分スル.

58. 相切スル二ツノ圓

定理40. 二ツノ圓周ガソノ中心線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,コノ二ツノ圓周ハ他ニ點ヲ共有シナイ.

I　　II



假設 二ツノ圓O, O′ノ周ガ中心線OO′上ノ一點Aヲ共有スルトキハ

終結 コノ二ツノ圓ノ周ニハA點ノ他ニ共有點ハナイ.

證明 (1) A點ガO, O′ノ間ニアル場合(I圖)

圓Oノ周上ニA點ト異ナル任意ノ一點Pヲトレバ

$$OP+O'P>OO'=OA+O'A$$

然ルニ　$OP=OA$　故ニ　$O'P>O'A$

故ニPハ圓O′ノ外部ニアル.

從ツテ圓Oノ周上ノ點ハA點ヲ除ク他ハスベテ圓O′ノ外部ニアル.

同様ニ圓O′ノ周上ノ點ハA點ヲ除ク他ハスベテ圓Oノ外部ニアル.

故ニ二圓O, O′ノ周ニハA點ノ他ニ共有點ハナイ.

(2) A點ガ線分OO′ノ延長上ニアル場合(II圖, 但シ圖ハOヲ通シテノ延長上ニアルトキヲ示ス.)

圓Oノ周上ニA點ト異ナル任意ノ一點Pヲトレバ

$$OP+OO'>O'P$$

然ルニ　$OP=OA$

故ニ　$OA+OO'>OP'$ 即チ $O'A>O'P$

從ツテ圓Oノ周上ノ點ハAヲ除ク他ハスベテ圓O′ノ內部ニアル.

同樣ニA點ガO′ヲ通シテノ延長上ニアル場合ニハ,圓O′ノ周上ノ點ハAヲ除ク他ハスベテ圓Oノ內部ニアル.

故ニ二圓O,O′ノ周ニハA點ノ他ニ共有點ハナイ.

定義 二ツノ圓ノ周ガ唯一點ヲ共有スルトキハ,コノ二圓ハ**相切スル**トイヒ,ソノ共有スル點ヲ**切點**トイフ.

定義 二ツノ圓ガ相切スルトキ,ソノ切點ヲ除ク各圓周上ノスベテノ點ガ他ノ圓ノ外部ニアルトキ二圓ハ**外切スル**トイヒ,一ツノ圓周上ノ切點以外ノスベテノ點ガ他ノ圓ノ內部ニアルトキ二圓ハ**內切スル**トイフ.

問 題 33

1. 二ツノ相異ナル圓ノ位置ノ關係ハ次ノ如ク五通リノ場合ガアル.

(1) 一ツガ他ノ全ク外部ニアル.

(2) 外切スル. (3) 相交ハル. (4) 內切スル.

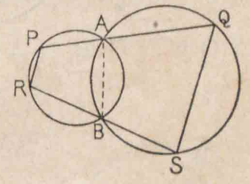
(5) 一ツガ他ノ全ク內部ニアル.

二圓ノ半徑ヲ夫々r, r'トシ,ソノ中心間ノ距離ヲdトスレバ,上ノ各場合ニ於ケルr, r', dノ關係ハ夫々次ノ如ク表ハサレルコトヲ證明セヨ.

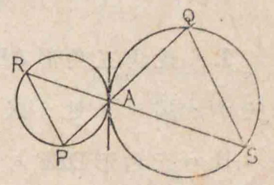
(1) $r+r'<d$ (2) $r+r'=d$ (3) $r\sim r'<d<r+r'$

(4) $r\sim r'=d$ (5) $r+r'>d$

2. 前題ニ於テ,二ツノ圓ガ相等シイトキヲ考究セヨ.

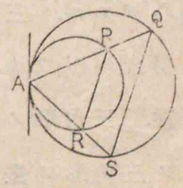


3. 二ツノ圓ノ交點A,Bヲ通ツテ兩圓ノ周ニ終ル割線PAQ, RBSヲ引ケバ, PR∥QS デアル.



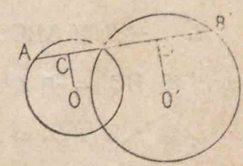
4. 前題ニ於テ,兩圓ノ中心ガ次第ニ遠ザカレバ(又ハ次第ニ近ヅケバ),外切(又ハ內切)スルトキガアル.

コノ場合ニモ PR∥QS デアル.



コノ場合前題ニ於ケル共通弦ABハ二圓ニ共通ナ切線トナル.

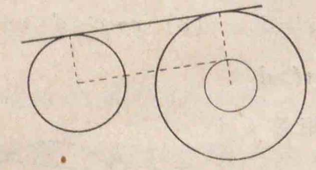
5. 二ツノ圓O,O′ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ガ兩圓ト再ビ交ハル點ヲ夫々A,Bトシ, O, O′カラABニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々C,DトスレバCD$=\frac{1}{2}$ABデアル.

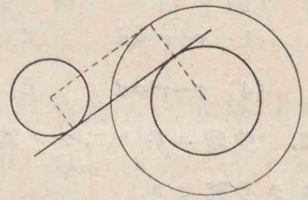


6. 二ツノ相異ナル圓ニ共通ナル切

線ハ幾ツ引ケルカ. 二圓ガ種々ノ位置ニアル各場合ニツイテ答ヘヨ.

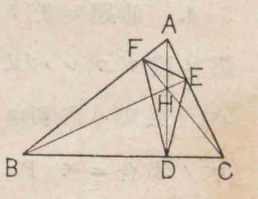
7. 二ツノ圓ニ共通ナル切線ヲ引ケ.





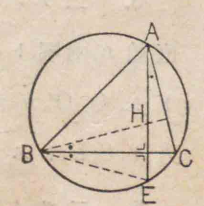
雜題 III

1. 銳角三角形ABCノ垂心ヲHトシ三ツノ高サノ足ヲ夫々D, E, F トスレバ,Hハ三角形DEFノ內心デ, A, B, Cハ傍心デアル. 三角形ABCガ鈍角三角形ノ場合ハドウカ.

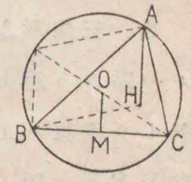


註. 三角形ノ三ツノ高サノ足ヲ頂點トスル三角形ヲモトノ三角形ノ**垂足三角形**トイフ.

2. 三角形ABCノ垂心ヲHトシ,頂點Aカラ邊BCニ引イタ垂線ガ外接圓ト相交ハル點ヲEトスレバ,EトHトハBCニ關シテ互ニ對稱デアル.

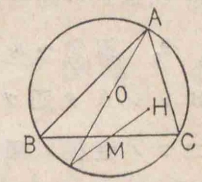


3. 圓Oニ內接スル三角形ABCノ垂心ヲH, BCノ中點ヲMトスルトキ,次ノコトヲ證明セヨ.



(1) AH=2OM

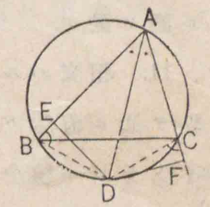
(2) AトO, HトMトヲ夫々結ブ直線ハ外接圓ノ周上デ相交ハル.



4. 三角形ノ外心,重心及ビ垂心ハ同一直線上ニアル. (前題ノ(2)ノ圖ニ於テ, AトH, OトM,OトHトヲ結ンデ考究セヨ.)

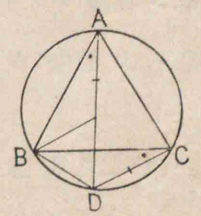
5. 三角形ABCノ ∠Aノ二等分線ガ外接圓ト相交ハル點ヲDトシ,DカラAB, AC又ハソノ延長ニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々E,Fトスレバ

$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC)$$

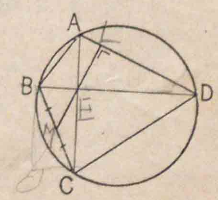


6. 正三角形 ABC ノ外接圓ヲ作リ,弧BACノ共軛弧上ノ任意ノ點ヲDトスレバ

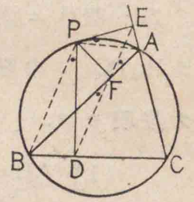
$$DA=DB+DC$$



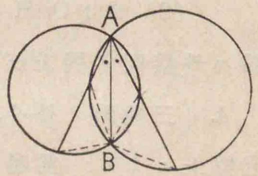
7. 圓ニ內接スル四邊形ABCDノ對角線ガ互ニ直交スルトキ,一邊ノ中點ト對角線ノ交點トヲ結ブ直線ハソノ對邊ニ垂直デアル. 又對角線ノ交點ヲ通ツテ一邊ニ垂直ナル直線ハソノ對邊ヲ二等分スル.



8. 三角形ABCノ外接圓ノ周上ノ任意ノ一點カラ邊BC, CA, AB又ハソノ延長ニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々D,E,Fトスレバ,三點D,E,Fハ同一直線上ニアル.

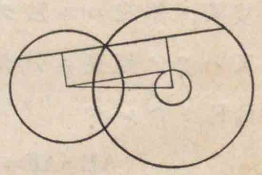


9. 相交ハル二ツノ圓ノ交點ヲA,Bトシ,Aヲ通ツテABト等角ヲナス二ツノ直線ノ兩圓ノ周ノ間ニアル線分ハ相等シイ.



10. 與ヘラレタ半徑ヲ有シ與ヘラレタ二ツノ圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

11. 相交ハル二ツノ圓ノ一ツノ交點ヲ通ル直線ガ兩圓ノ周ニヨツテ截リトラレル線分ノ長サヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ.



第四篇　面　積

59. 面　積

定義　線デ圍マレタ面ノ廣サヲ**面積**トイフ.

本篇ニ於テハ平面圖形ノ面積ニツイテ研究スル.

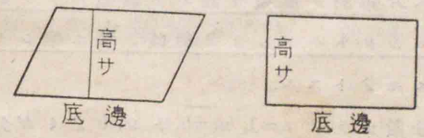
面積ヲ測ルニハ,單位ノ長サヲ一邊トスル正方形ノ面積ヲ單位トシ,長サノ單位名ノ前ニ**平方**トイフ語ヲ添ヘテ面積ノ單位名トスル.

例ヘバ平方糎,平方米ナドトイフ.

定義　二ツノ圖形ノ面積ガ相等シイコトヲ**等積デアル**トイフ.

合同ナル二ツノ圖形ハ等積デアルガ,等積ナル圖形ハ必ズシモ合同デハナイ.

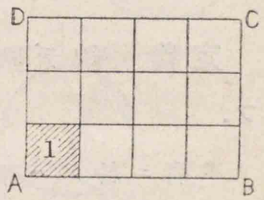
定義　平行四邊形ノ任意ノ一邊ヲ**底邊**又ハ單ニ**底**トイヒ,底邊ト對邊トノ距離ヲ**高サ**トイフ.



[1] 矩形ノ面積

定理41. 矩形ノ面積ハソノ底邊ト高サトノ積ニ等シイ.*

假設 矩形ABCDノ底邊AB, 高サADノ長サヲ夫々a, bトシ,矩形ノ面積ヲSトスレバ



終結 $S=ab$

證明 (1) a, b共ニ(正ノ)整數ナル場合

AB ヲ a等分シ, AD ヲ b等分シテ各分點カラ夫々AD, AB ニ平行ナル直線ヲ引ケバ,矩形ABCDハ $a\times b$ 箇ノ單位面積ノ正方形ニ分カタレル.

故ニ $$S=ab$$

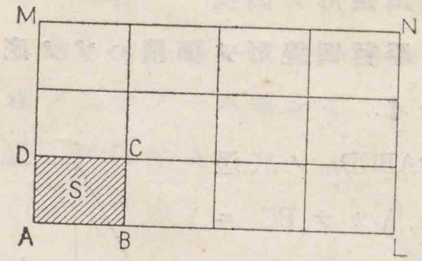
(2) a, bノ一方又ハ双方ガ(正ノ)分數デアル場合

$a=\frac{p}{q}$, $b=\frac{m}{n}$ 但シp, q, m, nハ(正ノ)整數トスル.** ABヲLマデ, ADヲMマデ延長シテ

$$AL=qa,\quad AM=nb$$

*嚴密ニイヘバ,矩形ノ面積ヲ表ハス數値ハ,ソノ底ト高サトヲ同ジ單位デ表ハシタトキ,ソレラノ數値ノ積ニ等シイ. 今後コノヤウニ解釋スルモノトスル.

** aノミガ分數ナラバ $n=1$, $m=b$ トシ, bノミガ分數ナラバ $q=1$, $p=a$ ト考ヘレバヨイ.



ナルヤウニ矩形ALNMヲ作レバ, AL, AMノ長サハ夫々p, mデアル. 而シテ矩形ALNMノ面積ハ,矩形ABCDノ面積ノqn倍デアル.

故ニ $$qn\cdot S=pm$$

故ニ $$S=\frac{pm}{qn}=\frac{p}{q}\times\frac{m}{n}$$

註. 底邊ガAB, 高サガADナル矩形ノ面積ヲAB×AD又ハAB·ADデ表ハス.

系. 正方形ノ面積ハソノ一邊ノ平方ニ等シイ.

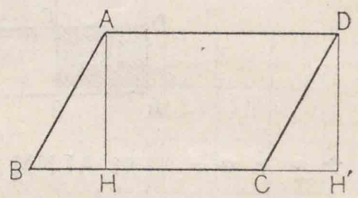
註. 一邊ガABナル正方形ヲABノ上ノ正方形トイヒ,ソノ面積ヲ$\overline{AB}^2$デ表ハス.

矩形ABCDヲ▭ABCD又ハ▭ACト書キ,正方形ABCDヲ□ABCD又ハ□ACト書ク. 又▭ABCD, □ABCD等ハ夫々矩形,正方形ノ面積ヲ表ハスコトモアル.

[2] 平行四邊形ノ面積

定理42. 平行四邊形ノ面積ハソノ底邊ト高サトノ積ニ等シイ.

假設 ▱ABCD ノ底邊ヲ BC トシ, A カラ BC ニ引イタ垂線ヲ AH トスレバ



終結 ▱ABCD＝BC·AH

證明 D カラ BC ノ延長ニ垂線ヲ引イテソノ足ヲ H′ トスレバ

△ABH≡△DCH′

故ニ ▱ABCD＝▱AHH′D

然ルニ ▱AHH′D＝HH′·AH

＝BC·AH

故ニ ▱ABCD＝BC·AH

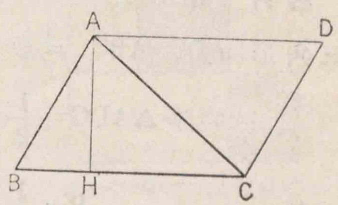
系. 底邊及ビ高サガ夫々相等シイ二ツノ平行四邊形ハ等積デアル.

註. 底邊ガ相等シイコトヲ等底トイヒ, 高サガ相等シイコトヲ等高トイフ.

[3] 三角形ノ面積

定理43. 三角形ノ面積ハソノ一邊トソレニ對スル高サトノ積ノ二分ノ一ニ等シイ.

假設 △ABC ノ頂點 A カラ BC ニ引イタ垂線ヲ AH トスレバ



終結 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}BC\cdot AH$

證明 AB, BC ヲ相隣レル二邊トスル平行四邊形 ABCD ヲ作レバ

▱ABCD＝BC·AH

然ルニ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}$ ▱ABCD

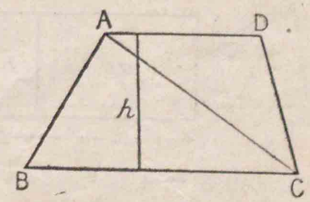
故ニ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}BC\cdot AH$

系. 等底,等高ナル二ツノ三角形ハ等積デアル.

[4] 梯形ノ面積

定理44. 梯形ノ面積ハソノ上底,下底ノ和ト高サトノ積ノ二分ノ一ニ等シイ.

假設 梯形 ABCD ノ上底 AD, 下底 BC ノ長サヲ夫々 a, b トシ, 兩底ノ距離ヲ h, 面



積ヲSトスレバ

終結 $$S=\frac{1}{2}(a+b)h$$

證明 梯形ヲ一ツノ對角線例ヘバ AC デ二ツノ三角形 ADC, ABC ニ分ケレバ

$$\triangle ADC=\frac{1}{2}ah,\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}bh$$

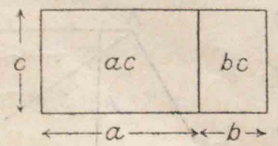
故ニ $$S=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$$

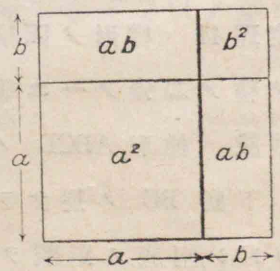
$$=\frac{1}{2}(a+b)h$$

問 題 34

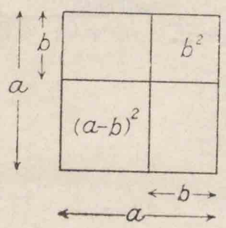
1. a, b, c ヲ三ツノ線分トスルトキ,次ノ各等式ヲ圖ニヨツテ證明セヨ.

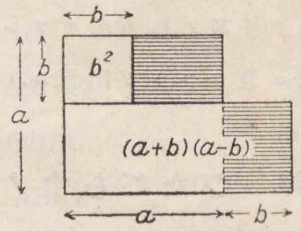
(1) $(a+b)c=ac+bc$ (2) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$



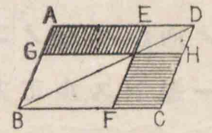


(3) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ (但シ $a>b$) (4) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (但シ $a>b$)

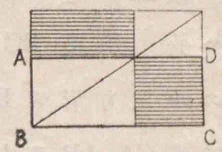




2. 平行四邊形ABCDノ對角線BD上ノ任意ノ一點ヲ通ツテ二邊AB, BCニ平行ナル直線EF, GHヲ引ケバ平行四邊形FH, EGハ等積デアル.

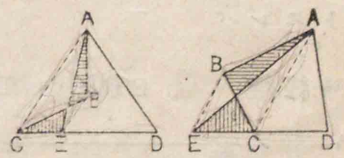


3. 與ヘラレタ矩形ABCDト等積デ一邊ガ與ヘラレタ矩形ヲ作レ. (前題ヲ利用セヨ)

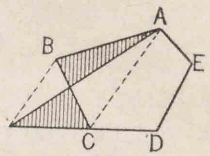


4. 三角形ABCノ頂點Aヲ通ル直線ヲ引イテコノ三角形ノ面積ヲ二等分セヨ. 又三等分セヨ.

5. 四邊形ABCDノ頂點Bヲ通ツテ對角線ACニ平行ナル直線ガ邊CD又ハソノ延長ト相交ハル點ヲEトスレバ,三角形AEDト四邊形ABCDトハ等積デアル.



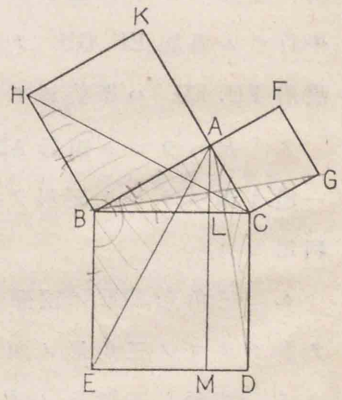
註. コノ方法ヲ用ヒレバ,任意ノ多角形ガ與ヘラレタトキ,ソレト等積デ且邊數ガ一ツ少ナイ多角形ヲ作ルコトガ出來ル.



從ツテ任意ノ多角形ヲソレト等積ナル三角形ニ直スコトガ出來ル.

60. ぴたごらすノ定理*

定理45. 直角三角形ノ斜邊ヲ一邊トスル正方形ノ面積ハ,他ノ二邊ヲ夫々一邊トスル正方形ノ面積ノ和ニ等シイ.



假設 直角三角形ABCニ於テ,斜邊BCヲ一邊トスル正方形ヲBCDE, 他ノ二邊CA, ABヲ夫々一邊トスル正方形ヲCAFG, ABHKトスレバ

終結 □BCDE＝□CAFG＋□ABHK

*本定理ハぎりしゃノ數學者ぴたごらすノ發見シタモノデ,ソノ發見者ノ名ニ因ンデぴたごらすノ定理トイフ.

證明 先ヅCA, AKハ一直線ヲナス. サテAトE, CトHトヲ結ビ,AカラEDニ垂線ヲ引キソノ足ヲM,BCトノ交點ヲLトスル.

然ルトキハ　△ABE≡△HBC

而シテ　▭BLME＝2△ABE

□ABHK＝2△HBC

故ニ　▭BLME＝□ABHK

同様ニシテ　▭CLMD＝□CAFG

故ニ　□BCDE＝□ABHK＋□CAFG

(證明終リ)

本定理ニ於ケル終結ノ式ハ

$$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$$

ト書クコトモ出來ル. 又斜邊ヲa,他ノ二邊ヲ夫々b, cトスレバ

$$a^2=b^2+c^2$$

ナル代數式ガ成立スル. コノ式ニヨッテ直角三角形ノ何レカ二邊ノ長サヲ知レバ殘リノ一邊ノ長サヲ知ルコトガ出來ル.

系. 三角形ABCノ三邊ノ間ニ $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$ ナル關係ガアルトキハ, ∠Aハ直角デアル. (定理45ノ逆)

問 題 35

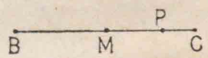
1. 矩形ノ二邊ノ長サガ夫々 3*cm*, 4*cm* ナルトキ,對角線ノ長サヲ求メヨ.

2. 直角三角形ノ斜邊及ビ他ノ一邊ノ長サガ夫々13*cm*, 12*cm*ナルトキ,殘リノ一邊ノ長サヲ求メヨ.

3. $(\sqrt{2})^2=1^2+1^2$, $(\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+1^2$, $(\sqrt{4})^2=(\sqrt{3})^2+1^2$,……ナル關係ヲ用ヒテ,逐次ニ $\sqrt{2}cm$, $\sqrt{3}cm$, $\sqrt{4}cm$,…… ヲ作圖ニヨツテ求メル方法ヲ考ヘヨ.

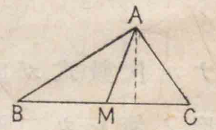
4. 一邊ノ長サガ 2*cm* ナル正三角形ノ高サ及ビ面積ヲ求メヨ.

5. 線分 BC ノ中點ヲMトシ,Mト異ナル BC 上ノ任意ノ點ヲPトスレバ



$$PB\cdot PC=\frac{\overline{BC}^2}{4}-\overline{PM}^2$$

6. 三角形 ABC ニ於テ,中線 AM ヲ作ルトキ

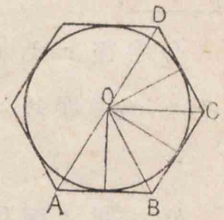


$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\frac{\overline{BC}^2}{2}+2\overline{AM}^2$$

61. 正多角形及ビ圓ノ面積

定理46. **正多角形ノ面積ハ,ソノ周ト內切圓ノ半徑トノ積ノ二分ノ一ニ等シイ.**

假設 正多角形 ABCD……ノ面積ヲS,周ヲpトシ,內切圓Oノ半徑ヲrトスレバ



終結 $S=\frac{1}{2}pr$

證明 OトA, B, C, D,……トヲ結ベバ,正多角形ハ合同ナル三角形 OAB, OBC, OCD,……ニ分カタレ,コレラノ底邊ヲ夫々 AB, BC, CD,…… ト考ヘレバソノ高サハ何レモrデアル.

故ニ
$$S=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}CD\cdot r+\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+\cdots\cdots)r$$
$$=\frac{1}{2}pr$$
(證明終リ)

サテ一ツノ圓ニ外切スル正多角形ヲ作リ,ソノ邊數ヲ限リナク增セバソノ周ハ內切圓ノ周ニ限リナク近ヅキ,(第56節)從ツテソノ面積ハ圓ノ面積ニ限リナク近ヅク. 即チ

一ツノ圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク增シタトキ,多角形ノ面積ノ極限ハモトノ圓ノ面積

デアル.

今半徑 r ナル圓ニ外切スル正多角形ノ周ヲ p トスレバ,定理46ニヨリ,

$$S=\frac{1}{2}pr$$

故ニ圓ノ面積ヲ S',周ヲ p' トスレバ,外切正多角形ノ邊數ヲ限リナク增シタ極限ニ於テハ上式ハ

$$S'=\frac{1}{2}p'r$$

トナル. 故ニ次ノ定理ヲ得ル.

定理47. 圓ノ面積ハソノ周ト半徑トノ積ノ二分ノ一ニ等シイ.

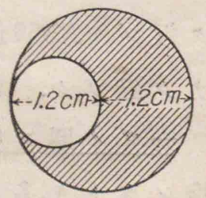
系. 圓ノ面積ハソノ半徑ノ平方ニ圓周率ヲ掛ケタ積ニ等シイ.

問題 36

1. 半徑 r ナル圓ニ內接スル正多角形ノ面積ヨリコノ圓ノ面積ヲ誘導セヨ.

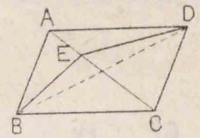
2. 直角三角形ノ斜邊ヲ直徑トスル圓ノ面積ハ,他ノ二邊ヲ夫々直徑トスル圓ノ面積ノ和ニ等シイ.

3. 右ノ圖ニ於ケル陰影ノ部分ノ面積ヲ求メヨ. 但シ $\pi=3.1416$ トシ,小數第三位未滿四捨五入.



雜題 IV

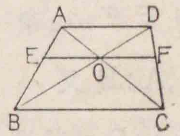
1. 平行四邊形ABCDノ對角線AC上ノ任意ノ一點Eヲトルトキ,次ノコトヲ證明セヨ.



(1) △ECB=△ECD

(2) △EAB+△ECD=△EAD+△EBC

2. 梯形ABCDノ對角線ノ交點Oヲ通ツテ底ニ平行ナル直線ガ二邊AB, CDニ相交ハル點ヲ夫々E, Fトスレバ, EO=FOデアル.



3. 直角三角形ノ斜邊ヲ一邊トスル正三角形ノ面積ハ他ノ二邊ヲ夫々一邊トスル正三角形ノ面積ノ和ニ等シイ.

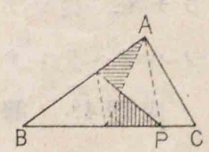
4. 平行四邊形ABCDニ於テ,對角線AC, BDヲ作レバ

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$

5. 三角形ABCノ重心ヲGトスレバ

$$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=3(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$$

6. 三角形ABCノ邊BC上ノ與ヘラレタ點Pヲ通ル直線ヲ引イテ三角形ノ面積ヲ二等分セヨ.



第五篇　比　例

第一章　比,比例

62.　比

二ツノ數又ハ量A,BガアツテAガBノ幾倍デアルカノ關係ヲ**AノBニ對スル比**トイヒ,A:B又ハ$\dfrac{A}{B}$ト書ク.

A:Bニ於テ,Aヲ比ノ**前項**,Bヲ比ノ**後項**トイヒ,前項ヲ後項デ割ツタ商ヲ**比ノ値**又ハ單ニ**比**トイフ.

註 1.　AノBニ對スル比,AトBトノ比,A對Bナドハ皆同ジ意味ニ用ヒル.

註 2.　比ノ値ハ割リ算ノ商ヲ表ハスモノデアルカラ,比ノ兩項ハ共ニ不名數カ又ハ同ジ種類ノ名數デナケレバナラナイ.　從ツテ例ヘバ線分ノ長サト面積トノ比ノ如キモノハ考ヘラレナイ.

定理48.　等底ナルニツノ矩形又ハ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,ソノ高サノ比ニ等シク,等高ナルニツノ矩形又ハ平行四邊形ノ面積ノ比ハソノ底邊ノ比ニ等シイ.

證明　略ス.

定理49.　等底ナルニツノ三角形ノ面積ノ比ハソノ高サノ比ニ等シク,等高ナルニツノ三角形ノ面積ノ比ハソノ底邊ノ比ニ等シイ.

證明　略ス.

問　題　37

1.　三角形ABCニ於テ,BC上ニ任意ノ一點Pヲトレバ

$$\triangle ABP : \triangle ACP = BP : CP$$

2.　二ツノ圓ノ面積ノ比ハソノ半徑ノ平方ノ比ニ等シイ.

註.　a, bヲ夫々線分トスルトキ,$\dfrac{a^2}{b^2}$ヲ$\dfrac{a}{b}$ノ**二乘比**トイフコトガアル.

πR^2　πr^2

3.　半徑rナル圓ノ面積トソレニ內接スル正方形ノ面積トノ比ヲ求メヨ.

4.　一ツノ圓ノ面積ガ他ノ圓ノ面積ノ2倍又ハ3倍ナルトキ,兩圓ノ半徑ニハ如何ナル關係ガアルカ.　r　$\sqrt{2}r$　$\sqrt{3}r$

5.　半徑rナル圓ガ與ヘラレタトキ,ソレノ2倍又ハ3倍ノ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ.

63. 比　例

二ツノ比A:BトC:Dトガ相等シイトキ, A, B, C, Dハ**比例ヲナス**トイヒ

$$A:B=C:D$$

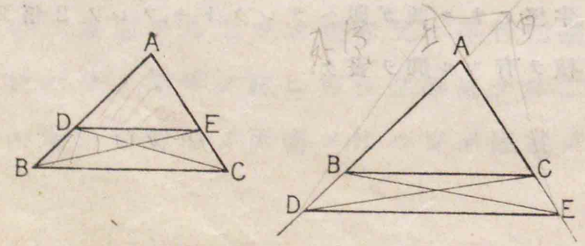
ト書イテ,コレヲ**比例式**トイフ. 又 A, B, C, D ヲ夫々比例式ノ**第一項,第二項,第三項,第四項**トイヒ,A, D ヲ**外項**, B, C ヲ**内項**トイフ.

特ニ　　　$A:B=B:C$

ナルトキ,Cヲ A, B ノ**第三比例項**トイヒ,B ヲ A, C ノ**比例中項**トイフ.

定義　線分 AB 上ニ一點P ヲトルトキ,點P ヲ線分 AB ノ**内分點**トイヒ, AB ノ延長上ニ一點Q ヲトルトキ,點Q ヲ線分 AB ノ**外分點**トイフ. 又内分點,外分點ハ夫々線分ヲ**内分スル,外分スル**トイフ.

定理50.　三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル.



假設　△ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ AB, AC 又ハソレラノ延長ト相交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ

終結　$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}$

證明　B ト E, C ト D トヲ夫々結ベバ

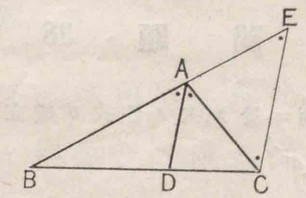
$$\frac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\frac{AD}{BD},\quad \frac{\triangle AED}{\triangle CED}=\frac{AE}{CE} \qquad \text{(定理49)}$$

然ルニ　　$\triangle BDE=\triangle CED$　　(定理43,系)

故ニ　$\dfrac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\dfrac{\triangle AED}{\triangle CED}$　從ッテ　$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}$

系.　定理50ノ逆モ眞デアル.

定理51.　三角形ノ一ツノ内角ノ二等分線ハ,ソノ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分スル.



假設　△ABC ニ於テ, ∠A ノ二等分線ガ邊 BC ト相交ハル點ヲ D トスレバ

終結 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$

證明 Cヲ通ツテDAニ平行ナル直線ヲ引キ,BAノ延長ト相交ハル點ヲEトスレバ

$$\angle ECA=\angle CAD=\angle DAB=\angle CEA$$

故ニ $AC=AE$ (1)

サテ定理50ニヨリ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AE}$$

(1)式ニヨリ $\qquad =\dfrac{AB}{AC}$

系. 三角形ノ一ツノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ外分スル.

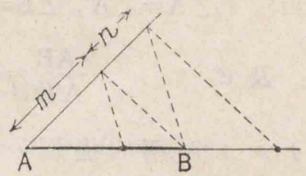
問 題 38

1. 定理50ノ圖ニ於テ,次ノ各式ガ成立スルコトヲ證明セヨ.

(1) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CE}$ (2) $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$

(3) $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CE}$ (4) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BD}{CE}$

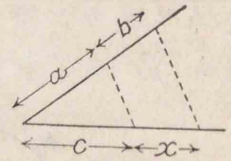
2. 與ヘラレタ線分ABヲ他ノ與ヘラレタ二ツノ線分ノ比$m:n$ニ內分又ハ外分スル點ヲ求メル方法ヲ述べヨ.



3. 三ツノ線分a, b, cガ與ヘラレタトキ

$$a:b=c:x$$

ナル比例式ガ成立スル如キ線分xヲ求メル方法ヲ述べヨ.



4. 二ツノ線分a, bガ與ヘラレタトキ,a, bノ第三比例項トナル線分ヲ求メヨ.

第二章 相似形

64. 相似形

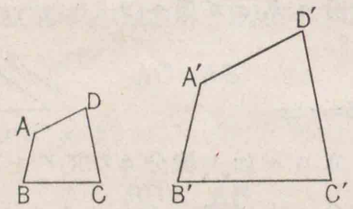
定義 二ツノ多角形ニ於テ,一方ノ角ガ他方ノ角ニ夫々相等シク,兩多角形ノ相等シイ角ノ頂點間ノ邊ガ順次ニ比例スルトキ,二ツノ多角形ハ**相似デアル**トイフ.

例ヘバ二ツノ四邊形ABCD, A'B'C'D'ニ於テ

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$

及ビ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

ナルトキ,兩四邊形ハ相似デアル.



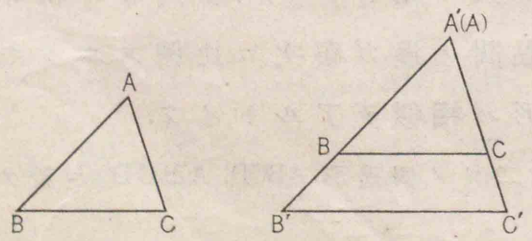
二ツノ多角形ガ相似デアルコトヲ表ハスニハ記號∽ヲ用ヒテ,例ヘバ

四邊形 ABCD∽四邊形 A′B′C′D′

ノ如ク書ク.

二ツノ多角形ガ相似デアルトキ,相等シイ角ヲ對應角トイヒ,對應角ノ頂點間ノ邊ヲ對應邊トイフ.

定理52. 二ツノ角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル.



假設 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ, $\angle A=\angle A'$ $\angle B=\angle B'$ ナルトキハ

終結 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

證明 $\angle C=\angle C'$ ナルコトハ明ラカデアル.

次ニ $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'B'C'$ ノ上ニ置イテ A ヲ A′ ニ重ネ AB, AC ヲ夫々 A′B′, A′C′ ニ重ネレバ BC ハ B′C′ ニ平行トナル.

故ニ $$\frac{A'B}{A'B'}=\frac{A'C}{A'C'}\ \text{即チ}\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$

同様ニシテ $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{BA}{B'A'}$ ナルコトヲ證明スルコトガ出來ル.

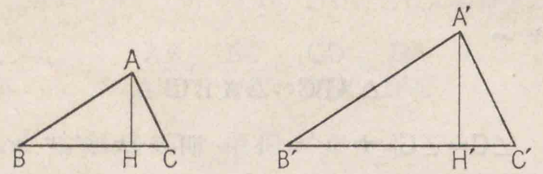
故ニ $$\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{AB}{A'B'}$$

從ツテ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

系 1. 二ツノ三角形ニ於テ,一ツノ角ガ相等シク,ソノ角ヲ夾ム二邊ノ比ガ相等シイトキハ,兩三角形ハ相似デアル.

系 2. 二ツノ三角形ニ於テ,三邊ガ夫々比例ヲナストキハ,兩三角形ハ相似デアル.

定理53. 二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハソノ對應邊ノ二乘比ニ等シイ.



假設　△ABC∽△A′B′C′ ナルトキ,邊 BC, B′C′ ヲ對應邊トスレバ

終結　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

證明　頂點 A, A′ カラ夫々ノ對邊ニ垂線 AH, A′H′ ヲ引ケバ

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AH$$

$$\triangle A'B'C'=\frac{1}{2}B'C'\cdot A'H'$$

故ニ　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC\cdot AH}{B'C'\cdot A'H'}=\frac{BC}{B'C'}\times\frac{AH}{A'H'}$$

然ルニ　$\triangle ABH\backsim\triangle A'B'H'$　(定理52)

故ニ　$$\frac{AH}{A'H'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

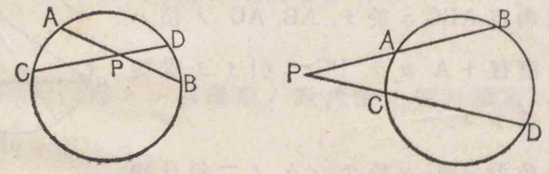
故ニ　$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC}{B'C'}\times\frac{BC}{B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

問　題　39

1.　直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜邊ニ垂線ヲ引クトキ,新ラシク出來ルニツノ三角形ハ何レモモトノ三角形ト相似デアル.

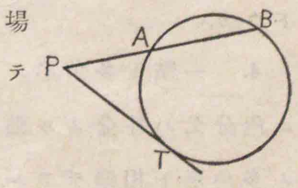
2.　二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ガ相似デ, ∠A, ∠B, ∠C ノ對應角ガ夫々 ∠A′, ∠B′, ∠C′ ナルトキ, AB·A′C′=AC·A′B′ デアル.

3.　圓ノ二ツノ弦 AB, CD 又ハソノ延長ノ交點ヲ P トスレバ, PA·PB=PC·PD デアル.



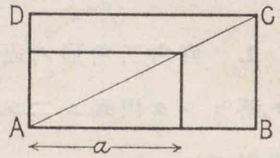
註.　一ツノ圓 O ト一點 P ガ與ヘラレタトキ, P ヲ通ルスベテノ弦又ハ割線ニ對シテ PA·PB ハ一定デアル.　コレヲ點 P ノ圓 O ニ關スル冪トイフコトガアル.

4.　前題ノ P ガ圓ノ外部ニアル場合ニ,割線 PCD ガ P ノ周リヲ廻轉シテ遂ニ圓ノ切線 PT トナルトキニハ PA·PB=$\overline{PT}^2$ デアル.



5. 相似多角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シイ.

6. 矩形 ABCD ガ與ヘラレタトキ,コレト相似ニシテ一邊 a ガ與ヘラレタ矩形ノ作圖法ヲ考ヘヨ.



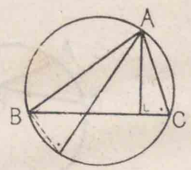
7. 邊數ガ相等シイ二ツノ正多角形ハ相似デアル.

15.12.18

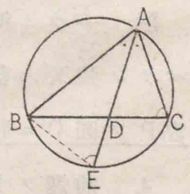
雜　題　V

1. 問題39ニ於ケル3及ビ4ノ逆ヲ述ベ且ソレラガ眞デアルコトヲ證明セヨ.

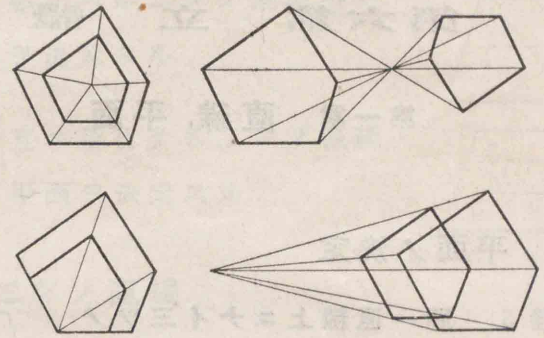
2. 三角形 ABC ニ於テ, AB, AC ノ積ハ外接圓ノ直徑トAカラ BC ニ引イタ垂線トノ積ニ等シイ.



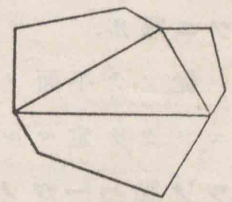
3. 三角形 ABC ニ於テ, ∠A ノ二等分線ガ邊 BC 及ビ外接圓ノ周ト相交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ AB・AC=AD・AE デアル. 又 ∠A ノ外角ノ二等分線ニツイテハドウカ.



4. 一點ト多角形ノ各頂點トヲ結ブ線分ヲ相等シイ比ニ內分又ハ外分スル點ヲ順次結ンデ出來ル多角形ハモトノ多角形ト相似デアル.



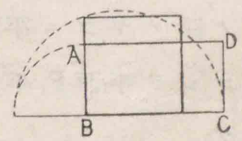
5. 直角三角形ノ各邊ヲ對應邊トスル相似多角形ヲ作レバ,斜邊ノ上ノ多角形ノ面積ハ他ノ二邊ノ上ノ多角形ノ面積ノ和ニ等シイ. (問題39, 5及ビぴたごらすノ定理ヲ用ヒヨ)



6. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ積ハ相對スル二邊ノ積ノ和ニ等シイ.

7. 前題ノ逆モ眞デアル.

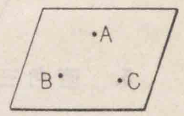
8. 與ヘラレタ矩形 ABCD ト等積ナル正方形ヲ作レ.



第六篇　立　體

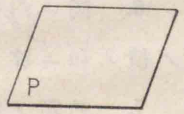
第一章　直線, 平面

65.　平面ノ決定

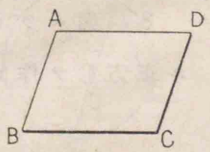


公理 5.　**同一直線上ニナイ三ツノ點ヲ通ル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.**

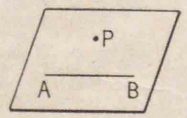
從ツテ平面ノ位置ハ同一直線上ニナイ三ツノ點ニヨツテ定マル. コノコトヲ**同一直線上ニナイ三ツノ點ハ一ツノ平面ヲ決定スル**トイフ.



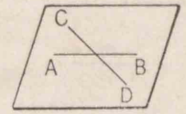
平面ハソノ廣サニ限リガナイノデアルガ,コレヲ書キ表ハスニハ右ノ圖ノヤウニ平行四邊形ヲ用ヒテ,コレヲ平面P, 平面 ABCD ノ如ク呼ブ.



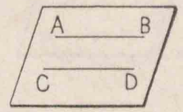
上ノ公理カラ次ノコトモイヘル.



[1]　**一ツノ直線トソノ上ニナイ一點トハ一ツノ平面ヲ決定スル.**



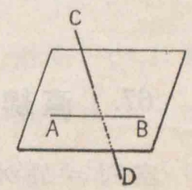
[2]　**相交ハル二ツノ直線ハ一ツノ平面ヲ決定スル.**



[3]　**互ニ平行ナル二ツノ直線ハ一ツノ平面ヲ決定スル.**

66.　二ツノ直線

空間ニ於ケル二ツノ直線ノ位置ノ關係ハ次ノ三通リノ場合ガアル.

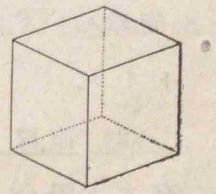


(1)　相交ハル場合

(2)　互ニ平行デアル場合

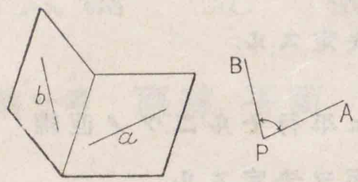
(3)　相交ハラズ且互ニ平行デナイ場合

(1),(2) ノ場合ニ於テハ二直線ハ同一平面上ニアルガ,(3) ノ場合ニハ同一平面上ニナイ.



問.　立方體ニ於テ,上ノ各場合ニ相當スル二ツノ稜ヲ指摘セヨ.

定義　空間ノ任意ノ一點ヲ通ツテ同一平面上ニナイ二ツノ直線ニ平行ニ引イタ二直線ノナス角ヲ,ソノ**同一平面上ニナイ二ツノ直線ノナス角**トイフ.

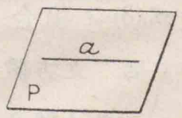


例ヘバ空間ノ一點Pヲ通ッテ同一平面上ニナイ二直線 a, b ニ平行ニ直線PA, PBヲ引クトキ, ∠APBヲ二直線 a, b ノナス角トイフ. モシ∠APBガ直角ナラバ, a, b ハ**互ニ垂直デアル**トイフ.

67. 直線ト平面

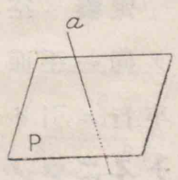
空間ニ於ケル一ツノ直線ト一ツノ平面トノ位置ノ關係ハ次ノ三通リノ場合ガアル.

(1) 直線ガ平面上ニアル場合



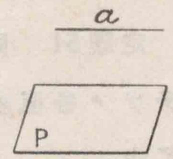
コノトキ直線ハ平面ニ**含マレル**トイフ.

(2) 直線ト平面トガ唯一點ヲ共有スル場合



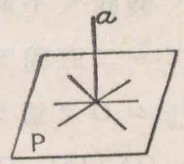
コノトキ直線ト平面トハ**相交ハル**トイフ.

(3) 直線ト平面トガ如何程延長シテモ相交ハラナイ場合



コノトキ直線ト平面トハ**互ニ平行デアル**トイフ.

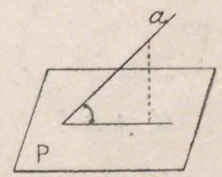
定義 一ツノ直線ガ一ツノ平面ト相交ハリ,ソノ交點ヲ通ル平面上ノスベテノ直線ニ垂直ナルトキ,直線ト平面トハ**互ニ垂直デアル**トイヒ,ソノ直線ヲ平面ノ**垂線**,ソノ交點ヲ**垂線ノ足**トイフ.



定義 一ツノ直線ガ一ツノ平面ト相交ハリ且垂直デナイトキ,直線ト平面トハ**互ニ斜交スル**トイヒ,ソノ直線ヲ平面ノ**斜線**,ソノ交點ヲ**斜線ノ足**トイフ.

定義 一ツノ直線ト一ツノ平面トガ斜交スルトキ,ソノ交點ト直線上ノ任意ノ點カラ平面ニ引イタ垂線ノ足トヲ通ル直線ヲモトノ直線ノソノ**平面上ニ投ズル正射影**トイフ.

定義 一ツノ直線ガ一ツノ平面ト斜交スルトキ,ソノ直線ノ平面上ニ投ズル正射影トソノ直線トノナス鋭角ヲモトノ**直線ト平面トノナス角**トイ



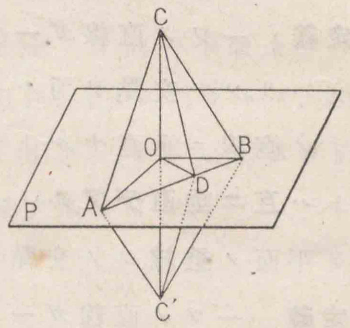
フ.

定理54. 同一平面上ニアル二直線ノ交點ヲ通ツテソノ各直線ニ垂直ナル直線ハソノ平面ニ垂直デアル.

假設 平面 P 上ニアル二直線ヲ OA, OB トシ, O ヲ通ツテ

$OA \perp OC$, $OB \perp OC$

ナル直線 OC ヲ作レバ



終結 $OC \perp P$

證明 OA, OB ト相交ハル直線ヲ引キソノ交點ヲ夫々 A, B トシ, 直線 AB 上ニ A, B ト異ナル任意ノ一點 D ヲトル. CO ヲ C' マデ延長シテ $OC'=OC$ ニトリ, C, C' ヲ夫々 A, B, D ニ結ブ. 然ルトキハ $\triangle CAB$ ト $\triangle C'AB$ トニ於テ

$CA=C'A$, $CB=C'B$

AB ハ共通

從ツテ $\triangle CAB \equiv \triangle C'AB$

故ニ $\angle CAB = \angle C'AB$

故ニ $\triangle CAD \equiv \triangle C'AD$

從ツテ $CD=C'D$

故ニ $\triangle COD \equiv \triangle C'OD$

故ニ $\angle COD = \angle C'OD = \angle R$

故ニ $OC \perp OD$

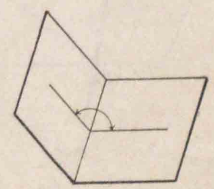
從ツテ OC ハ O ヲ通ツテ平面 P 上ニアルスベテノ直線ニ垂直デアル. 故ニ $OC \perp P$ デアル.

68. 二ツノ平面

公理 6. 二ツノ平面ガ一點ヲ共有スレバソノ點ヲ通ル唯一ツノ直線ヲ共有スル.

定義 二ツノ平面ガ一ツノ直線ヲ共有スルトキ, ソノ二平面ハ**相交ハル**トイヒ, 二平面ニ共通ナ直線ヲ**交線**トイフ. 又二ツノ平面ハソノ交線ニ沿ウテ**二面角ヲナス**トイフ.

二面角ノ大キサハソノ交線上ノ任意ノ點カラ各平面上ニ於テ交線ニ垂線ヲ引イテソノ二直線ノナス角デ測ル.



定義 二ツノ平面ノナス二面角ガ直角デアルトキ, ソノ二平面ハ**互ニ直交スル**又ハ**互ニ垂直デアル**

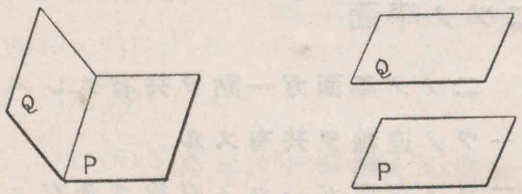
トイフ.

定義 二ツノ平面ガ如何程延長シテモ相交ハラナイトキ,ソノ二平面ハ**互ニ平行デアル**トイフ.

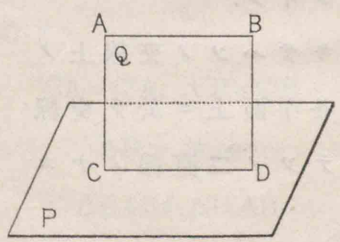
空間ニ於ケル二ツノ平面ノ位置ノ關係ハ次ノ二通リノ場合ガアル.

(1) <u>相交ハル場合</u>

(2) <u>互ニ平行デアル場合</u>



定理55. 一ツノ直線ヲ含ム平面トソノ直線ニ平行ナル平面トノ交線ハモトノ直線ニ平行デアル.



假設 $AB \parallel P$ トシ, AB ヲ含ム平面 Q ト P トノ交

線ヲ CD トスレバ

終結 $CD \parallel AB$

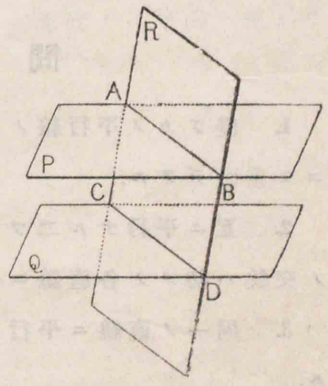
證明 若シ AB, CD ガ相交ハルモノトスレバ,ソノ交點ハ平面 P 上ノ點デアル. 從ッテ AB ト P トガ互ニ平行デアルコトニ矛盾スル.

故ニ $CD \parallel AB$

系. 二ツノ平行線ノ一ツヲ含ミ他ヲ含マナイ平面ハソノ含マナイ直線ニ平行デアル.

定理56. 一ツノ平面ガ互ニ平行ナル二ツノ平面ニ相交ハレバ,ソノ交線ハ互ニ平行デアル.

假設 平面 R ガ互ニ平行ナル平面 P, Q ト夫々 AB, CD ニ於テ相交ハレバ

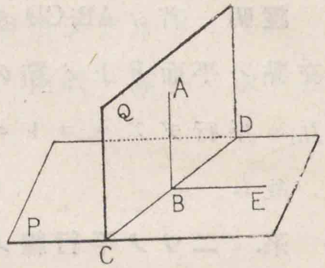


終結 $AB \parallel CD$

證明 若シ AB, CD ガ相交ハルモノトスレバ,ソノ交點ハ平面 P, Q ニ共通デアル. 從ッテ P, Q ガ互ニ平行デアルコトニ矛盾スル.

故ニ $AB \parallel CD$

定理57. 一ツノ平面ニ垂直ナル直線ヲ含ムスベテノ平面ハ初メノ平面ニ垂直デアル.



假設　直線 AB ガ平面 P ニ垂直デアルトシ, AB ヲ含ム任意ノ平面ヲ Q トスレバ

終結　Q⊥P

證明　平面 P, Q ノ交線 CD ハ垂線 AB ノ足 B ヲ通ル. 今 B ヲ通ツテ平面 P 上ニ於テ CD ニ垂線 BE ヲ作レバ ∠ABE=∠R ニシテ, ∠ABE ハ二平面 P, Q ノ二面角デアル. 故ニ P⊥Q デアル.

問　題　40

1. 幾ツカノ平行線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ直線ニモ垂直デアル.

2. 互ニ平行ナル二ツノ直線ヲ別々ニ含ム二ツノ平面ノ交線ハ初メノ各直線ニ平行デアル.

3. 同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハ互ニ平行デアル.

4. 同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ平面ノ交線ハ初メノ直線ニ平行デアル.

5. 平面外ノ一點カラソノ平面ニ垂線及ビ斜線ヲ引クトキ,(1)垂線ハ最短デアル. (2)斜線ノ足ガ垂線ノ足カラ等距離ニアル斜線ハ皆相等シイ. (3)斜線ノ足ガ垂線ノ足ヨリモ遠イ斜線ハ近イ斜線ヨリモ大デアル.

註. 平面外ノ一點カラソノ平面ニ引イタ垂線ノ長サヲソノ**點ト平面トノ距離**トイフ.

6. 空間ニアル四ツノ點カラ等距離ニアル點ハ一般ニハ唯一ツアル. 又如何ナル場合ニソノヤウナ點ハ存在シナイカ.

7. 互ニ平行ナル二ツノ平面ノ共通垂線ノ二平面ニ夾マレル線分ノ長サハ一定デアル.

註. コノ長サヲ**平行二平面間ノ距離**トイフ.

8. 幾ツカノ平行平面ノ一ツニ垂直ナル平面ハ他ノ平面ニモ垂直デアル.

第二章　立體ノ體積

69. 多面體

定義　幾ツカノ平面デ圍マレタ立體ヲ**多面體**トイフ.

多面體ヲ圍ム平面ノ數ハ四ツ以上デアル.

定義　多面體ヲ圍ム平面ノ一部分ハ何レモ多角形デソレヲ多面體ノ**面**トイヒ,面ト面トノ交線ヲ多面體ノ**稜**,稜ト稜トノ交點ヲ多面體ノ**頂點**トイフ.

又同一面上ニナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ.

多面體ハソレヲ圍ム平面ノ數ニヨツテ,**四面體**,**五面體**,**六面體**ナドトイフ.

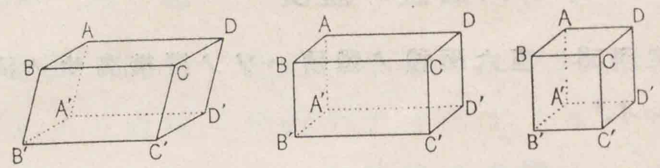
特ニ六面體ニハ次ノ種類ガアル,

(1) 相對スル面ガ夫々互ニ平行ナル六面體ヲ**平行六面體**トイフ.

(2) 平行六面體ノ各面ガ皆矩形デアルモノヲ**直六面體**(又ハ**直方體**)トイフ.

(3) 平行六面體ノ各面ガ皆相等シイ正方形デア

ルモノヲ**立方體**トイフ.



平行六面體ヲ表ハスニハ各頂點ノ文字ヲ並ベテ平行六面體 ABCD−A′B′C′D′ 又ハ平行六面體 A−C′ ノ如ク書ク.

又直六面體ニ於テハ一ツノ頂點ニ出會フ三ツノ稜ヲ夫々**縦**,**横**,**高サ**トイフコトガアル.

平行六面體ノ一ツノ面ヲ**底面**又ハ單ニ**底**トイヒ,ソノ面トソレニ相對スル面トノ距離ヲ**高サ**トイフ.

70. 體積

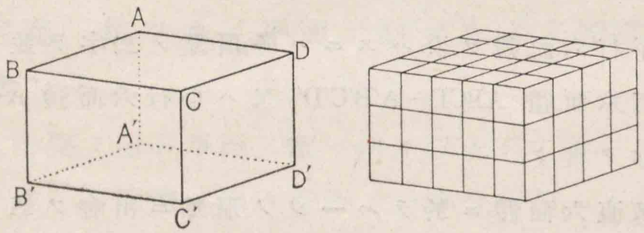
定義　立體ノ**體積**トハソノ面ニヨツテ圍マレタ空間ノ一部分ノ大キサヲイフ.

體積ヲ測ルニハ,單位ノ長サヲ一稜トスル立方體ノ體積ヲ單位トシ,長サノ單位名ノ前ニ**立方**トイフ語ヲ添ヘテ體積ノ單位名トスル.

例ヘバ立方糎,立方米ナドトイフ.

71. 平行六面體ノ體積

定理58. 直六面體ノ體積ハソノ縦,横,高サノ積ニ等シイ.*



假設 直六面體ノ縦,横,高サヲ夫々 a, b, c トシ,ソノ體積ヲVトスレバ

終結 $V=abc$

證明 定理41ノ證明ニ倣ツテ生徒自ラ試ミヨ.

系. 立方體ノ體積ハ一ツノ稜ノ立方ニ等シイ.

定理59. 平行六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.

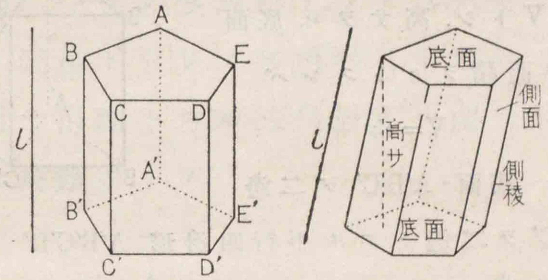
證明 本定理ノ證明ハ稍複雜デアルカラ略ス.

系. 等底,等高ナル二ツノ平行六面體ノ體積ハ相等シイ.

*嚴密ナル述ベ方ニ就テハ第126頁脚註參照

72. 角壔

定義 同一ノ直線ニ平行ナ三ツ以上ノ平面ト,ソノ直線ニ平行デナイ二ツノ互ニ平行ナ平面トデ圍マレタ多面體ヲ**角壔**トイフ.



角壔ノ互ニ平行ナル二ツノ面ヲ共ニ**底面**又ハ單ニ**底**トイヒ,同一ノ直線ニ平行ナル面ヲ**側面**トイフ. 又相隣レル二ツノ側面ノ交線ヲ**側稜**トイヒ,兩底面ノ距離ヲ**高サ**トイフ.

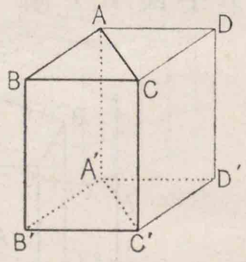
角壔ハソノ底面ノ邊數ニヨツテ**三角壔,四角壔,五角壔**ナドトイヒ,又側稜ガ底面ニ垂直デアルモノヲ**直角壔,**垂直デナイモノヲ**斜角壔**トイフ. 特ニ底面ガ正多角形デアル直角壔ヲ**正角壔**トイフ.

角壔ヲ表ハスニハ各頂點ノ文字ヲ並ベテ,例ヘバ

ABCDE−A′B′C′D′E′ ノ如ク書ク.

問. 斜角壔ノ側面ハ平行四邊形デアルコトヲ證明セヨ. 直角壔ノ側面ハドウカ. 又角壔ノ兩底面ハ合同デアル.

定理 60. 三角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.



假設 三角壔 ABC−A′B′C′ ノ體積ヲ V トシ, 高サヲ h, 底面 A′B′C′ ノ面積ヲ s トスレバ

終結 $V=sh$

證明 底面 A′B′C′ ノ二邊 A′B′, B′C′ ヲ二邊トスル平行四邊形 A′B′C′D′ ヲ作リ, コレヲ底面トシテ AA′ ヲ側稜トスル平行六面體 ABCD−A′B′C′D′ ヲ作レバ,三角壔 ABC−A′B′C′ ノ體積ハコノ平行六面體ノ體積ノ二分ノ一ニ等シイ. 故ニ

$$V=\frac{1}{2}\times\square A'B'D'C'\times h$$

$$=\frac{1}{2}\times 2s\times h$$

$$=sh$$

(證明終リ)

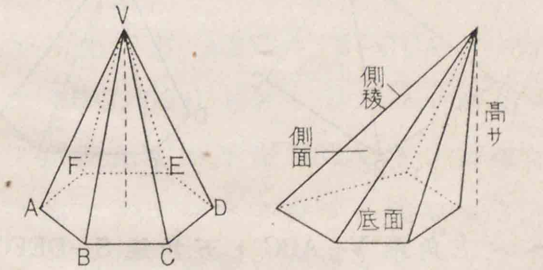
任意ノ角壔ハコレト等高ナル幾ツカノ三角壔ニ分ケルコトガ出來ル. コレヨリ次ノ定理ヲ得ル.

定理 61. 角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.

系. **等底,等高ナル二ツノ角壔ノ體積ハ相等シイ.**

73. 角 錐

定義 一ツノ多角形ト,ソノ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トシソノ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トデ圍マレタ多面體ヲ**角錐**トイフ.

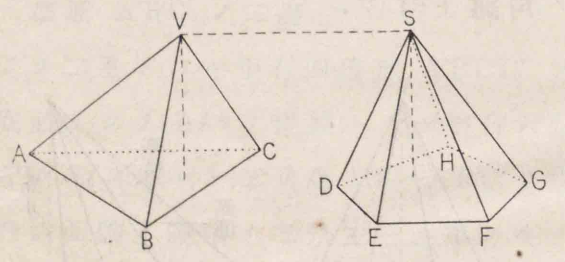


角錐ノ同一ノ頂點ヲ共有スル三角形ノ面ヲ**側面**トイヒ,殘リノ面ヲ**底面**又ハ單ニ**底**トイフ. 又側面ガ共有スル點ヲ角錐ノ**頂點**,相隣レル二ツノ側面ノ交線ヲ**側稜**トイヒ,頂點ト底面トノ距離ヲ**高サ**トイフ.

角錐ハソノ底面ノ邊數ニヨッテ**三角錐,四角錐,五角錐**ナドトイヒ,又底面ガ正多角形デソノ外接圓ノ中心ト頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ足トガ一致スルモノヲ**直角錐**又ハ**正角錐**トイフ.

角錐ヲ表ハスニハソノ頂點ト底面ノ頂點トノ文字ヲ並ベテ,例ヘバ V-ABCDE ノ如ク書ク.

定理62. 等底,等高ナル二ツノ角錐ノ體積ハ相等シイ.

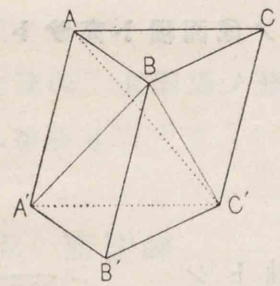


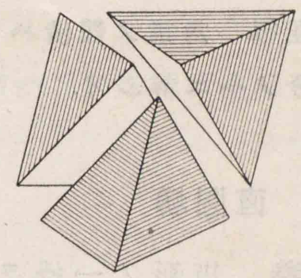
例ヘバ三角錐 V−ABC ト五角錐 S−DEFGH トニ於テ,底面 ABC ト DEFGH トノ面積ガ相等シク且高サガ相等シイトキ,コノ二ツノ角錐ノ體積ハ相等シイ.

證明ハ稍複雜デアルカラ略ス.

本定理ニヨレバ任意ノ三角壔ヲ體積ガ皆相等シイ三ツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル.

今三角壔 ABC−A′B′C′ ヲ夫々三點 B, A, C′ 及ビ B, A′, C′ ヲ通ル二ツノ平面デ截レバ,ココニ三ツノ三角錐 B−A′B′C′, B−C′CA, B−AA′C′ ヲ得ル. コレラノ體積ハ皆相等シイ.





何トナレバ先ヅ B−A′B′C′ ト B−C′CA トニ於テ,夫夫ノ底面ヲ BB′C′, BC′C ト考ヘレバソノ面積ハ相等シク,夫々ノ頂點 A, A′ ト平面 BB′C′C トノ距離ハ二ツノ三角錐ノ高サデ,ソレラノ長サハ相等シイ. 故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ.

次ニ B−C′CA ト B−AA′C′ トニ於テ,夫々ノ底面ヲ CAC′, AA′C′ ト考ヘレバソノ面積ハ相等シク,共通ナ頂點 B ト平面 AA′C′C トノ距離ハ二ツノ三角錐ニ共通ナ高サデアル. 故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ.

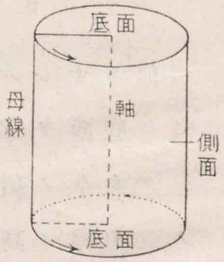
故ニ次ノ定理ヲ得ル.

定理63. 三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

任意ノ角錐ハコレト等高ナル幾ツカノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル. コレヨリ次ノ定理ヲ得ル.

定理64. 角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

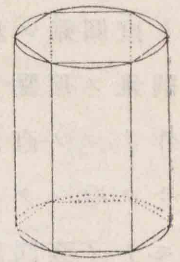
74. 直圓壔



定義 矩形ノ一邊ヲ軸トシテコレヲ空間ニ一廻轉スルトキ生ズル立體ヲ**直圓壔**トイフ.

廻轉ノ軸トシタ邊ヲ直圓壔ノ**軸**トイヒ,ソレニ對スル邊ヲ**母線**,母線ガ廻轉シテ生ズル面ヲ直圓壔ノ**側面**,軸ニ相隣レル二邊ガ廻轉シテ生ズル二ツノ面ヲ共ニ直圓壔ノ**底面**又ハ單ニ**底**トイフ. 又底ノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**トイヒ,軸ノ長サヲ直圓壔ノ**高サ**トイフ.

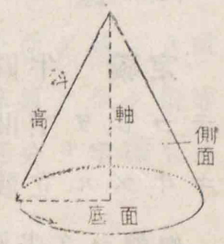
直圓壔ノ一ツノ底面ニ正多角形ヲ内接セシメ,ソノ各頂點カラソノ面ニ垂線ヲ引キ他ノ底面トノ交



點ノ相隣レルモノヲ順次ニ結ベバ直圓壔ニ内接スル直角壔ヲ得ル. コノ直角壔ノ側面ノ數ヲ限リナク増シタトキ,ソノ體積ノ極限ハモトノ直圓壔ノ體積デアル. 故ニ次ノ定理ヲ得ル.

定理65. 直圓壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.

75. 直圓錐

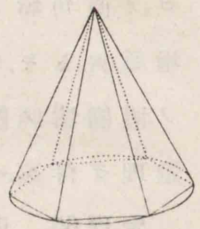


定義 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテコレヲ空間ニ一廻轉スルトキ生ズル立體ヲ**直圓錐**トイフ.

廻轉ノ軸トシタ邊ヲ直圓錐ノ**軸**トイヒ,斜邊ヲ**母線**,軸ト母線トノ交點ヲ直圓錐ノ**頂點**,母線ガ廻轉シテ生ズル面ヲ直圓錐ノ**側面**,直角ヲ夾ム他ノ邊ガ回轉シテ生ズル面ヲ直圓錐ノ**底面**又ハ單ニ**底**トイフ. 又底ノ半徑ヲ直圓錐ノ**半徑**トイヒ,軸ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**,母線ノ長サヲ**斜高**ト

イフ.

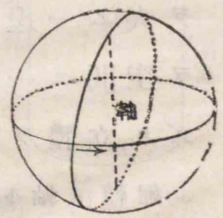
直圓錐ノ底面ニ内接スル正多角形ヲ底面トシ,直圓錐ノ頂點ヲ頂點トスル直角錐ヲ作リ,コノ直角錐ノ側面ノ數ヲ限リナク増シタトキ,ソノ體積ノ極限ハモトノ直圓錐ノ體積デアル. 故ニ次ノ定理ヲ得ル.



定理66. 直圓壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

76. 球

定義 半圓ノ直徑ヲ軸トシテコレヲ空間ニ一廻轉スルトキ生ズル立體ヲ**球**トイフ.

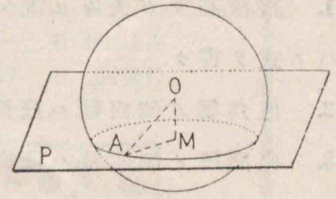


廻轉シタ半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**トイヒ,半徑ヲ球ノ**半徑**トイフ. 又半圓周ガ廻轉シテ生ズル面ヲ**球面**トイヒ,球ノ中心ヲ通ツテ球面上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ.

定理67. 球ヲ平面デ截レバソノ截リ口ハ圓デアル.

證明 中心Oナル球ヲ平面Pデ截ツタ截リ口ノ周上ノ任意ノ點ヲAトスル. Oカラ平面Pニ引イタ垂線ノ足ヲMトスレバ

$$\overline{MA}^2=\overline{OA}^2-\overline{OM}^2$$



故ニ $$MA=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}$$

然ルニ OA, OM ノ長サハ一定デアルカラ MA ノ長サモ一定トナル. 而シテMハ一定ノ點デアル. 故ニAハ平面P上ニ於テMヲ中心トシ,上ノ一定ノ長サヲ半徑トスル圓周上ニアル.

定義 球ヲソノ中心ヲ通ル平面デ截ツタ截リ口ノ周ヲ**大圓**トイヒ,中心ヲ通ラナイ平面デ截ツタ截リ口ノ周ヲ**小圓**トイフ. 又大圓ハ球面ヲ全ク相等シイ二ツノ部分ニ分ケル. ソノ各部分ヲ**半球**トイフ.

定理68. 球ノ體積ハソノ半徑ノ立方ニ圓周率ヲ掛ケタ積ノ三分ノ四ニ等シイ.

證明 略ス.

問　題　41

1.　縱,横,高サガ夫々 a, b, c デアル直六面體ノ表面積ヲ表ハス式ヲ書ケ.

2.　直角壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ.

3.　直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ.

4.　國際きろぐらむ原器ノ體積及ビ側面積ヲ求メヨ.

5.　直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シイ. 直圓錐ニ正角錐ヲ內接セシメ,ソノ側面積ノ極限トシテ求メヨ.

6.　えぢぷとノぎぜーニアル最大ノぴらみつどハ底面ガ一邊 236m ノ正方形デ高サガ 147m ノ正四角錐デアル. ソノ體積ヲ求メヨ.

7.　球ノ表面積ハ半徑ノ平方ニ圓周率ヲ掛ケタ積ノ4倍ニ等シイ. 今地球ヲ球ト考ヘテソノ表面積及ビ體積ヲ計算セヨ. 但シ子午線(大圓)ノ周ノ長サヲ四千萬米トスル.

8.　立方體ノ內部ニ丁度入ル球ノ半徑ト立方體ノ一稜トノ關係ヲイへ.

昭和九年十二月二十四日印刷
昭和九年十二月二十七日發行
昭和十年二月一日訂正印刷
昭和十年二月四日訂正發行

不許複製

改版 實業幾何教科書

定價金七拾五錢

著作者　帝國書院編輯部

東京市神田區西神田一丁目三番地
發行者　株式會社 帝國書院
代表者　増田啓策

東京市牛込區山吹町一九八番地
印刷者　山本禎男

東京市神田區西神田一丁目三番地
發賣所　株式會社 帝國書院
振替東京67014番

大阪市東區横堀四丁目三番地
關西販賣所　三宅書店
振替大阪69番

東京　宗文社印刷所

第一学年六組
中川盛雄

第一學年六組
中川盛雄