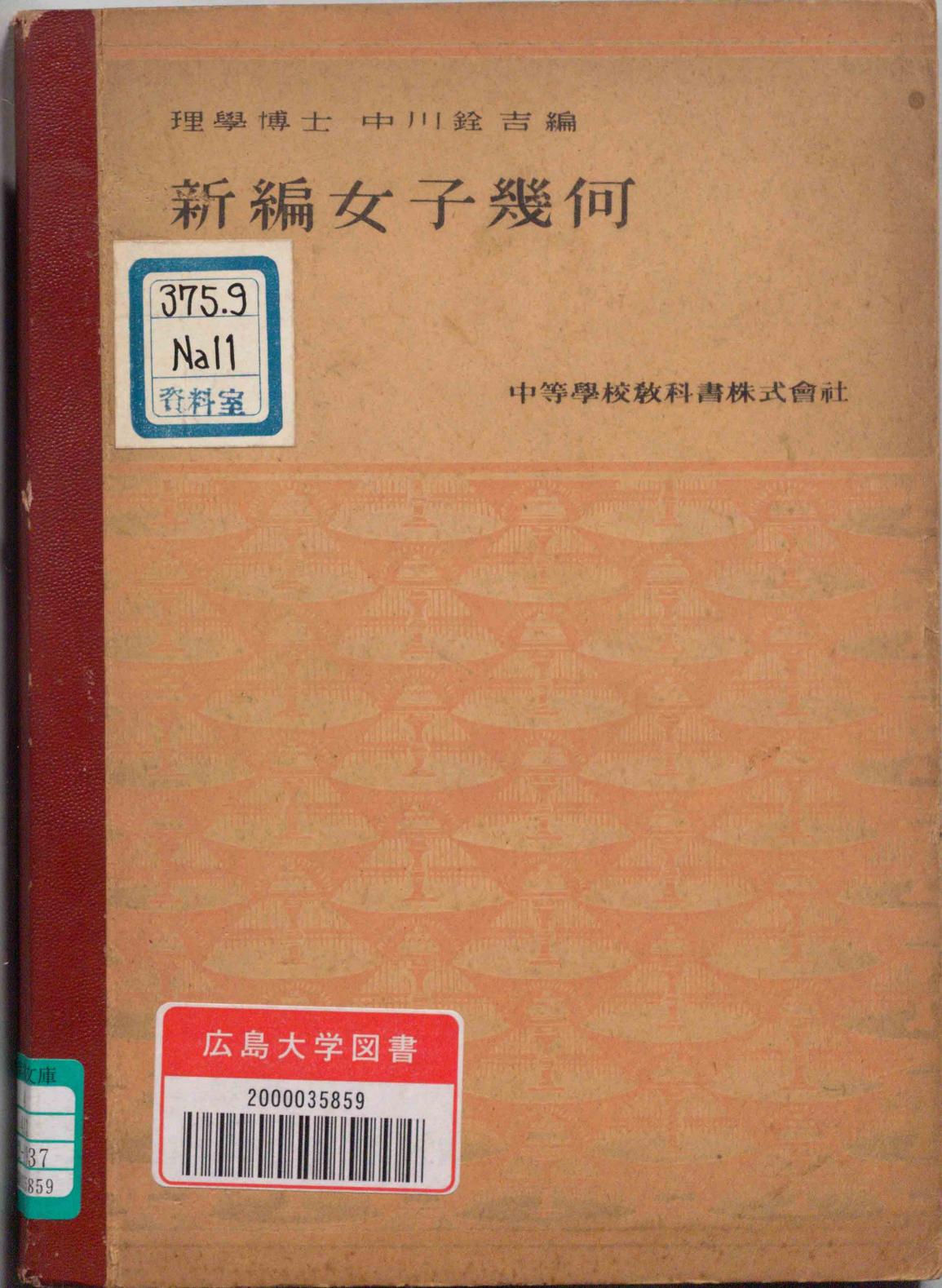
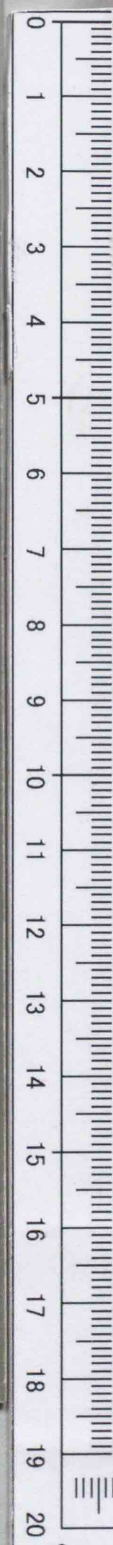
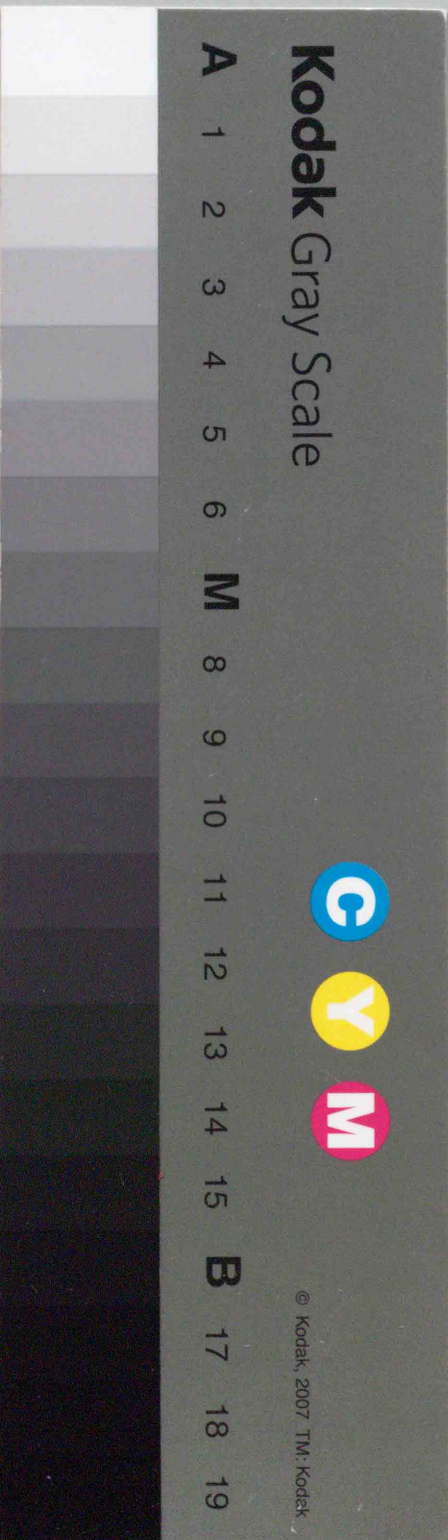
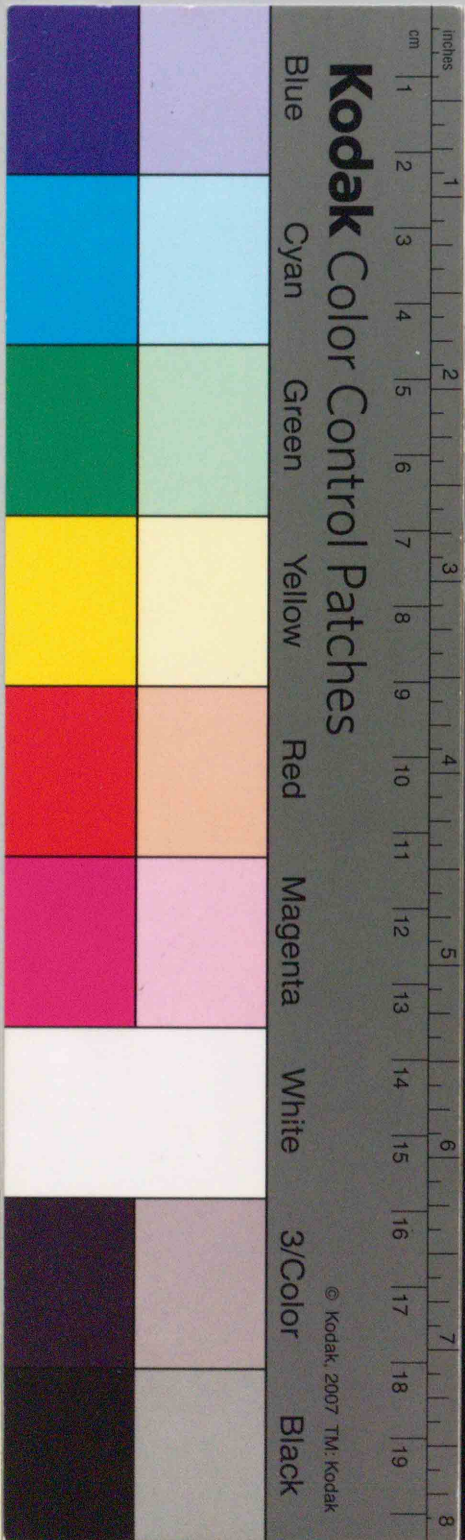


40207

教科書文庫

4
413
42-1937
20000
35859



資料室

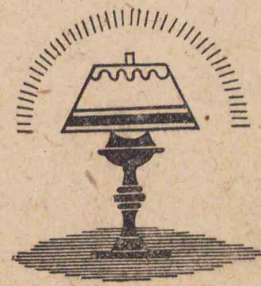
375.9  
No.11

教科書文庫  
4  
413  
42-1937  
2000035859

# 新編女子幾何

理學博士 中川銓吉編

文部省檢定済  
昭和十二年二月二日 高等女學校 數學科  
實業學校

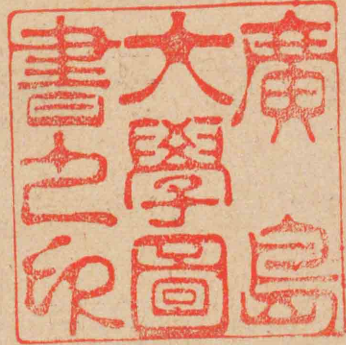


中等學校教科書株式會社

広島大学図書

2000035859





## 序

本書ハ同時ニ公刊シタ新編女子算術及ビ新編女子代數ノ姉妹篇デアツテ、三者ノ間ニ互ニ連絡、統制ヲ保チツツ教材ヲ取捨選擇シ、重複ヲ避ケ、以テ數學教授上ノ能率ヲ擧ゲ得ルヤウニ工夫シタモノデアアル。然シナガラコノ三者ハ各、獨立ノ教科書トシテ使用セラレルモ何等ノ不便ガ無イバカリデナク、最近改善セラレツツアル數學教授ニ對シテ絶好ノ指針タルノ内容ヲ持ツモノト信ズル。本書ニ於テモ

1. 教材ノ排列ハ徒ニ數學的體系ニ泥ムコトナク、專ラ數學的常識ノ涵養ニ重點ヲ置イタ。
2. 從ツテ教材ノ選擇方針モ亦生徒ノ日常見聞スル事實ニ重キヲ置キ、努メテ抽象的取扱ニ終ラヌヤウニシタ。
3. 上級學校へ進ム者ノ爲ニ、女子專門學校ナドノ入學試験問題ヲ參酌シタ補充問題ヲ卷末ニツケタ。

昭和十一年十一月

編者識

## 目次

第一篇	緒論及ビ概論	[1-14]
第二篇	直線形	[15-77]
第一章	角	15
第二章	平行線	32
第三章	三角形	40
第四章	多角形	61
第五章	平行四邊形	65
第三篇	圓	[78-124]
第一章	圓ノ基本性質	78
第二章	弧、弦及ビ中心角	81
第三章	圓周角・弓形	90
第四章	二ツノ圓	101
第五章	作圖題	106
第六章	圓ノ切線	109
第七章	軌跡	118

第四篇	面積	[125-134]
第五篇	比例	[135-156]
第一章	比及ビ比例	135
第二章	相似形	143
第三章	圓ノ周及ビ面積	153
第六篇	立體圖形	[157-191]
第一章	空間ニ於ケル點線及ビ平面	157
第二章	多面體	172
第三章	旋轉體	186
第七篇	簡易測量	[192-200]
第一章	幾何學ノ應用	192
第二章	三角函數ノ應用	195
附錄	補充問題	[1-14]

青島大學圖書印

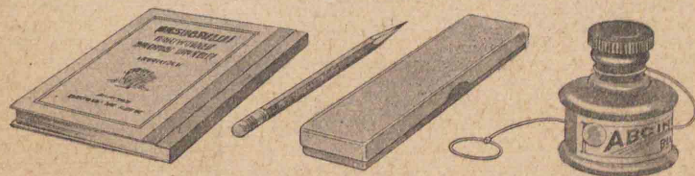
# 新編女子幾何

## 第一篇

### 緒論及ビ概説

#### 1. 物體ノ觀察

書物、鉛筆、黑板ナドヲ見ルト、ソノ形、重サ、色彩ナド種々ノ事柄ガ心ニ浮ブデアラウ。又筆入、いんき壺ナドニツイテハ、以上ノ外ニ容積ニツイテモ考ヘルコトガ出來ル。シカシ今コレ等ノモノノ剛柔、色彩、




價格、物質ナドハ考ヘズニ、唯ソノ形、大イサ、位置ノミニツイテ考ヘテ見ヨ。黑板ノ形ハ如何、面積ハ如何、位置ハ如何。更ニ種々ノ物體ヲ觀察セヨ。

形ニハ規則正シイモノモアリ、不規則ナモノモアル。面積ヤ容積ニハ大小ガアリ、位置ニツイテモノノ相違ガ考ヘラレル。本書デハコレ等ニ關スル知


識ヲ明確ニシ,更ニ研究ヲ進メルノデアアルガ,先ヅ  
ノ基本トナル點,線,面ナドカラ研究ヲ始メル。

### 2. 點・線


點ニハ位置ダケガアツテ,長サモ幅モ厚  
サモナイ。……………[I]

大イサノナイモノヲ圖示ス  
ルコトハ出來ナイカラ,便宜上 

・又ハ×デ點ヲ表ハシ點A,點Bナドトイフ。  
點ハソノ位置ヲ變ヘルコトガ出來ル。

點ノ動イタ跡ガ線デア  
ル。即チ 

線ニハ位置ト長サトガアツテ,幅モ厚サ  
モナイ。……………[II]


線ニハ紙ノ折目ノヤウナ眞直ナ  
線ト,弛ンダ糸ノヤウニ曲ツタ線ト   
ガアル。

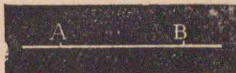
眞直ナ線ヲ直線トイヒ,曲ツタ線ヲ曲線  
トイフ。……………[III]

#### 直線ノ呼ビ方

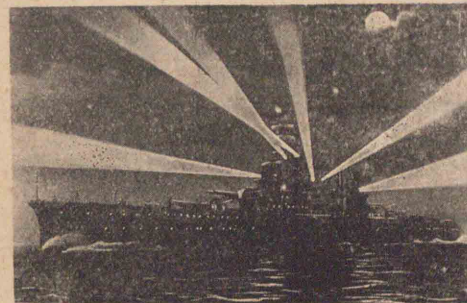
直線ハ雙方ヘ限リナク延ビテキルモノト考ヘテ

コレヲ無限直線トイフ。

直線上ノ一點Aカラ他ノ點Bニ至ル間ノ部分ヲ  
言ヒ表ハスニハ,線分AB又ハ有   
限直線ABトイフ。

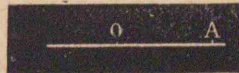
無限直線ハ全體ヲ畫クコトハ出來ナイカラ,便宜  
上線分ヲ畫イテコレヲ代表サセ,コノ線分上ニ二點  
A, Bヲトツテ無限直線AB又ハ   
略シテ直線ABトイフ。

無限直線上ニ一點Oヲトレバ,コノ直線ハ二ツノ



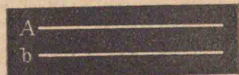
部分ニ分タレル。  
ソノ各,ヲ半直線  
トイヒ,Oヲ半直  
線ノ基點又ハ原  
點トイフ。半直  
線ヲ表ハスニハ,

基點ノ外ニ任意ノ點Aヲトリ,  
半直線OAトイフ。



無限直線ABヨリ線分ABヲ取去ツタ殘ヲ,コノ  
線分ABノ延長トイフ。故ニコノ延長ハA及ビB  
ヲ夫々基點トシテ反對ノ方向ニアル二ツノ半直線  
ヨリ成立ツノデアアル。

**注意** 直線ヤ線分ハ又唯一ツノ文字デ表ハスコトガアル。例ヘバ直線 A, 線分 b ナドトイフ。



**直線ノ基本性質**

右圖ハ直線ヲ示スモノデア  
ル。ソノ一部分例ヘバ BC' ヲ  
トツテソノ兩端 B, Cガ他ノ部分 AB, DE ナドノ上ニ  
落チルヤウニ置ケバ, 全ク重ナルモノデア  
ル。 AB, CD ナドノ部分ヲ他ニ重ネテモ同様デア  
ル。



[1] 直線ハソノドノ部分ヲトツテモ, ソノ兩端ガ他  
ノ部分ノ上ニ落チルヤウニ任意ニ置ケバ, 全ク重  
ナルモノデア  
ル。

圖 1. 曲線ニハ上述ノ性質ガア  
ルカ。圖ニツイテ考ヘテ見ヨ。

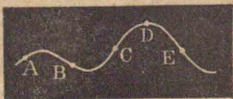


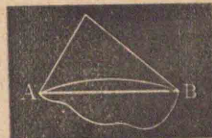
圖 2. 紙上ニ二點 A, Bヲトツテ  
コレヲ通ル直線ヲ定規ヲ用ヒテ引ケ。何本引ケルカ。  
吾々ノ經驗デ認メラレルヤウニ,

[2] 二點ヲ通ル直線ハ常ニ唯一ツアル。

ヨツテ二點ハ直線ヲ定メル又ハ決定スルトイフ。  
二點ヲ通ル直線ヲ引クコトヲ二點ヲ結ブトイフ。

[3] 二點 A, B間ニ引イタ種々ノ線ノウチ, 最モ短イ

モノハ, コノ二點ヲ兩端トスル  
線分デア  
ル。

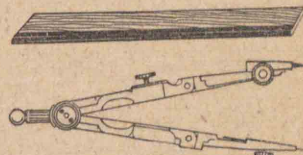


コノ線分 AB ヲ二點 A, B 間ノ  
距離トイフ。

二點 A, B ヲ結ブ線分上ニアツテ A, B カ  
ラ等シイ距離ニアル點 M  
ヲ二點 A, B ノ中點又ハ線  
分 AB ノ中點或ハ二等分點トイフ。…[IV]  
線分ノ中點ハ常ニ唯一ツアル。



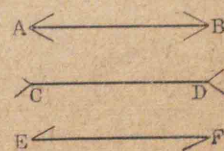
定規・こんばす 正確ナ  
圖ヲ畫クニハ, 定規トこん  
ばすが必要デア  
ル。定規  
ハ直線ヲ引クニ用ヒル器



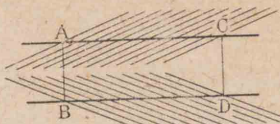
具デ, こんばすハ線分ノ長サヲ測リ又ハコレヲ移動  
シ, 或ハ圓ヲ畫クニ用ヒル器具デア  
ル。

**問題**

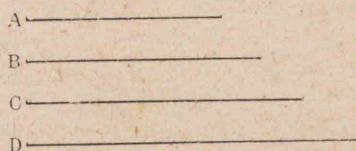
- 任意ノ線分 AB ヲ畫キ, コレヲ AB ノ方向ニ延  
長セヨ。又 BA ノ方向ニ延長セヨ。
- 右圖ノ三ツノ線分 AB, CD  
EF ノウチ, 何レガ長ク見エ  
ルカ。次ニこんばすデ驗セ。



3. 右圖デ、 $AB$  ト  $CD$  トハ  
何レガ長ク見エルカ。次  
ニこんばすデ験セ。



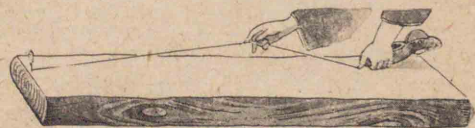
4. 目測デ右ノ線分ノ  
長サト中點トヲ求メ、  
次ニ物指デ測ツテソ  
ノ正否ヲ確メヨ。



5. 目測デ紙面上ニ二點  $A, B$  ヲトリ、ソノ距離ヲ  
① 1cm ② 2.5cm ③ 3cm ④ 5cm  
ナラシメ、次ニ物指デ測ツテソノ正否ヲ確メヨ。

6. 右ノ五ツノ點  $A, B, C, D, E$  ニヨツ  
テ幾ツノ直線ガ決定サレルカ。

7. 大工ガ材木ノ面ニ直線ヲ引クト  
キ、右圖ノヤウ  
ニスル理由ヲ  
説明セヨ。

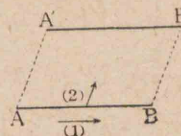


8. 射撃ノトキ如何ニシテ狙ヲ定メルカ。



### 3. 面

點ガ動イテ線ガ出来タガ、ソノ線  
ガ更ニ方向ヲ變ヘテ動クトキハ、ソ  
ノ跡ハ面デアル。即チ



面ニハ位置ト廣サ(即チ幅ト長サ)ダケガア  
ツテ、厚サハナイ。……………[V]

凸凹ノナイ平ラナ面ヲ平面トイヒ、平デ  
ナイ面ヲ曲面トイフ。……………[VI]

平面ハ四方ニ限リナク擴ガツテキルモノト考ヘ  
ル。静水ノ表面ハホボ平面ノ一部ト看做シ得ル。

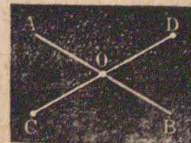
#### 平面ノ基本性質

[1] 一直線上ニナイ任意ノ三點ヲ通ル平面ハ常ニ  
唯一ツアル。

[2] ニツノ平面ハ一方ヲ他ノ上ニ勝手ニ置ケバ全  
ク重ナリ合フ。

[3] 平面上ノ任意ノ二點  $A, B$  ヲ結ブ直線  $AB$  ハ、全  
クソノ平面ノ上ニアルモノデアル。

[4] 平面上ニアル一無限直線例ヘ  
バ  $AB$  ハコノ平面ヲニツニ分ツ  
モノデ、ソノ各、ヲ半平面トイフ。





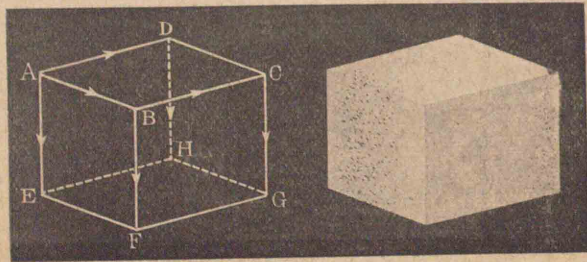
ソシテ一方ノ側ニアル點 C ト他ノ側ニアル點 D  
トヲ結ブ線分 CD ハ必ズ直線 AB ト唯一点デ出  
會フ。

コノトキ二直線 AB, CD ハ相交ルトイヒ, ソノ出會  
ツタ點 O ヲ交點トイフ。

### 4. 立體

線ガ動イテ面ガ出來タガ, 面ガ更ニ異ナツタ方向  
ニ動クトキハ, ソノ跡ガ立體デアル。

例ヘバ下圖(左)デ, A ニアツタ點ガ矢ノ方向ニ動イ  
テ B ノ位置マデ來レバ, 線 AB ガ出來, 線 AB ガ矢ノ  
方向ニ動イテ DC ノ位置マデ來レバ, 面 ABCD ガ出



來ル。更ニコノ面ガ矢ノ方向ニ動イテ EFGH ノ位  
置マデ來レバ, 圖(右)ノヤウナ立體ガ出來ル。

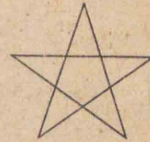
立體ハソノ形ダケニツイテ考ヘタモノデ, ソノ物  
質ヤ性質ナドニハ何等ノ關係モナイ。即チ

立體トハ物體ノ位置, 形及ビ大イサノミ  
ニツイテ考ヘタモノデアル。……………[VII]

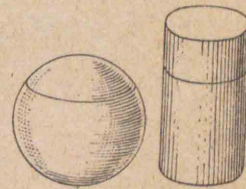
前圖デ面 ABCD ト面 AEFB トノ交リハ線 AB デ,  
又面 AEFB ト面 BFGC トノ交リハ線 BF デアル。  
ソシテ線 AB ト線 BF トノ交リハ點 B デアル。

### 問題 異面

1. 右圖ヲ星形トイフ。コレニハ線ト  
線トノ交點ガ幾ツアルカ。



2. 茶壺ヲドウ截ツタラソノ截口ヲ示  
ス線ガ直線トナルカ。



3. 茶壺ノ代リニテにすぼーる  
ヲ截レバ如何。

4. 平面ト平面トノ交リハ何カ。

### 5. 圖形

點, 線, 面又ハコレ等ノ幾ツカガ集ツタモ  
ノヲ圖形トイフ。……………[VIII]

圖形ハソノ形, 大イサヲ變ヘズニ, ソノ位置ヲ變ヘ  
ルコトガ出來ル。

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ, ソノスベテノ部分  
ガ合スルヤウニ重ネルコトガ出來レバ, コノ二ツノ

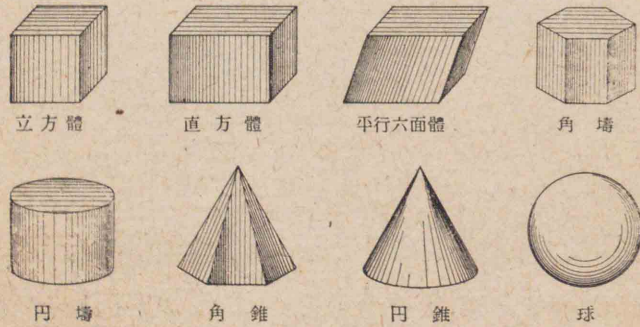
圖形ハ全ク相等シイ又ハ合同デアルトイフ。

スベテノ部分ガ同一平面上ニアル圖形ヲ平面圖形トイヒ、スベテノ部分ガ同一平面上ニナイ圖形ヲ立體圖形トイフ。

平面圖形ノ性質ヲ研究スル學科ヲ平面幾何學トイヒ、立體圖形ノ性質ヲ研究スル學科ヲ立體幾何學トイフ。

既ニ小學校デ學ンダ平面圖形ノ主ナルモノハ  
角、 三角形、 正方形、 矩形、 平行四邊形、  
梯形、 四邊形、 五邊形、 圓

ナドデアツテ、立體圖形トシテハ次ノモノガヨク知  
ラレテキル。



6. 作圖題

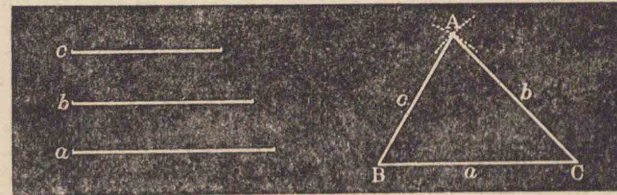
こんばすト目盛ノナイ定規トデ或條件ニ適スル

圖形ヲ畫ク問題ヲ作圖題トイフ。

作圖題ニツイテハ後章ニ詳説スルガ、基礎的圖形ニツイテハ、必要ニ應ジテソノ作圖法ヲ説明スル。

作圖題 1. 三邊(a, b, c)ガ與ヘラレタトキ三角形ヲ畫クコト。

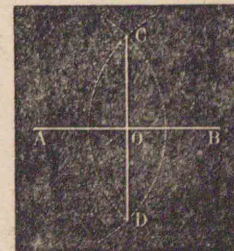
作圖 任意ニ一ツノ直線 BCヲ引キ、ソノ上ニこんばすデ aニ等シクトリ、ソレヲ BCトスル。次ニ



bニ等シイ開キデCヲ中心トシテ弧ヲ畫キ、又cニ等シイ開キデBヲ中心トシテ弧ヲ畫ク。ソノ交リヲAトスレバ、三角形ABCハ求メルモノトナル。

作圖題 2. 與ヘラレタ線分(AB)ヲ2等分スルコト。

作圖 線分ABノ兩端A,Bヲ中心トシテABノ半分ヨリ大キイ任意ノ相等シイ半徑デ弧ヲ畫キ、ソノ二ツノ弧ノ交點ヲ夫々C,Dトスル。C,Dヲ結ブ直線ガABト交ル點ヲOトスレバ、OハABノ中點トナル。



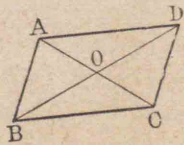
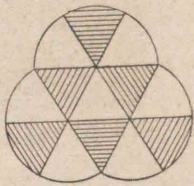
CDヲ折目トシテOBヲOA

ノ上ニ重ネレバ全ク重ナル。(理由ハ後ニワカル)

**注意** 本書ニアル作圖ノ問題中特ニ寸法ヲ指示シテアルモノハ、物差ヲ用ヒルコトトスル。

問題

1. 邊ノ長サガ夫々 5cm, 4cm, 3cm デアル三角形ヲ畫ケ。
2. 三邊トモ長サガ 3cm デアル三角形ヲ畫ケ。
3. 2cm, 3cm, 7cm ノ三ツノ線分ヲ邊トスル三角形ガ畫ケルカ。
4. 右ノ圖形ト同様ノモノヲ各線分ノ長サヲ 2 倍ニシテ畫ケ。
5. 紙上ニ任意ノ長サノ線分ヲ畫キ、コレヲ 4 等分, 8 等分シ、次ニ各分點デ切り離シテ重ネ合セテ見ヨ。
6. 長サ 4cm ノ線分 AB ヲ作圖題 2 ノ方法デ 2 等分シ、ソノ各、ヲ物指デ測ツテ見ヨ。
7. 線分 AC ノ一方ノ側ニ任意ノ點 B ヲトリ、B, A; B, C ヲ結び、次ニ  $DC=AB$ ,  $AD=BC$  ナルヤウニ D ヲ定メヨ(作圖題 1 利用)。ソシテ B ヲ任意ニトツテモ常ニ AB ハ DC ニ平行ニ、又 BC ハ AD ニ平



行ニナルコトヲ 2 個ノ三角定規ニヨツテ確メルニハドウスレバヨイカ。

又 BD ト AC トノ交點 O ハ線分 AC ノ中點デアリ、線分 BD ノ中點デモアルコトヲ確メヨ。

### 7. 定義・公理

幾何學デハ言葉遣ヲ明瞭ニ、シカモ嚴格ニシテ何人モ必ズ同一ニ解釋スルヤウナ言ヒ表ハシ方ヲスル。サテ

用語ノ意味ヲ明瞭ニ嚴格ニ定メタモノガ、ソノ語ノ**定義**デアル。

例ヘバ前述ノ [I], [II], [III], ……,[VIII] ハ定義デアル。

幾何學デハ吾々ノ經驗カラ誰デモ承認スルコトノ出事ル若干ノモノヲ幾ツカ選ビ出シテ、コレヲ基礎トシテ圖形ノ性質ヲ研究スル。カヤウニ

何人モ正シイト承認スルコトノ出來ルモノデ、推理ノ基礎トナル幾ツカノ各、ヲ**公理**トイフ。

4 頁ノ [1], [2], 7 頁ノ [1]-[4] ナドハ何レモ公理デアル。

次ニ掲ゲルモノハ量ニ關スル基本的性質デアル。

A, B, C, Dハ同種類ノ量デ,  $m$ ガ任意ノ正數ナラバ,  
次ノ關係ガアル。

[1]  $A=B, A=C$ ナラバ,  $B=C$

[2]  $A=B$ ナラバ,  $A+C=B+C, A-C=B-C$

$$mA=mB, \quad \frac{A}{m}=\frac{B}{m}$$

[3]  $A>B, B>C$ ナラバ,  $A>C$

[4]  $A>B$ ナラバ,  $A+C>B+C, A-C>B-C$

$$mA>mB, \quad \frac{A}{m}>\frac{B}{m}$$

[5]  $A>B, C>D$ ナラバ,  $A+C>B+D$

[6]  $\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=A, \quad \frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}=B$

**注意** 以下第五篇マデハ平面幾何學デアル。

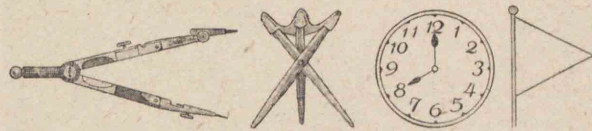
## 第二篇

### 直線形

#### 第一章 角

#### 8. 角

**圖** 次ノ圖デ角ヲナシテキルトコロヲ指摘セヨ。

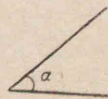
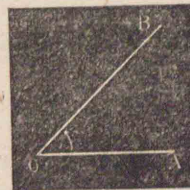


一點  $O$ カラ引イタニツノ半直線  $OA, OB$   
ノ作ル開キヲ角トイヒ,  $OA, OB$ ハ角ヲ夾  
ム又ハ角ヲナストイフ。

點  $O$ ヲコノ角ノ頂點トイヒ, 半直  
線  $OA, OB$ ヲコノ角ノ邊トイフ。

コノ角ヲ角  $AOB$ 又ハ角  $BOA$ トイ  
ヒ,  $\angle AOB, \angle BOA$ ト書ク。但シ紛レル虞レノナイ  
トキニハ, 單ニ頂點ノ名ヲ用ヒ角  $O$ ト呼  
ビ,  $\angle O$ ト書クコトガアル。

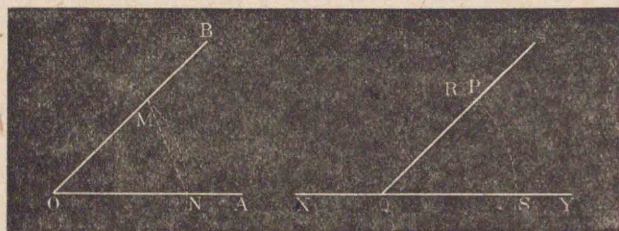
**注意** 角ハマタツノ二邊ノ間ニ文字ヲ書



イテ  $\angle a$  ナドト表ハスコトモアル。

**作圖題 3.** 與ヘラレタ角(AOB)ニ等シイ角ヲ與ヘラレタ直線(XY)ヲ一邊トシテ作ルコト。

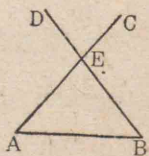
**作圖** 先ヅOヲ中心トシテ、任意ノ半徑デ弧ヲ畫キ、角ノ二邊 OB, OA ト夫々M, Nデ交ラシメル。次ニ XY 上ノ一點Qヲ中心トシ、前ト等シイ半徑デ弧RSヲ畫キ、XYトSデ交ラシメル。次ニ線分MN



ト同ジ長サノ半徑デSヲ中心トシテ弧ヲ畫キ、前ノ弧RSト交ル點ヲPトスル。P, Qヲ結ブ直線ヲ引ケバ、 $\angle SQP$ ノ大イサハ $\angle AOB$ ノ大イサニ等シクナル。

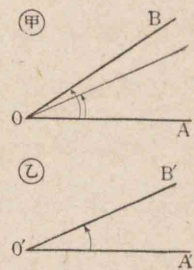
尺規 作圖

線分 AB ヲ引キ、ソノ一端 Aニ於テ任意ノ角 BAC ヲ作り、次ニ Bニ於テコレト等シイ角 ABD ヲ圖ノヤウニ引イテ、AC, BDノ交點ヲ Eトセヨ。ソシテ EAト EBトノ長サヲ比較セヨ。



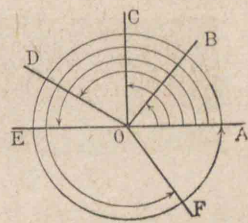
9. 角ノ大小ニヨル名稱

二角甲,乙ノ大イサヲ比較スルニハ、圖ノヤウニ甲,乙二角ノ頂點ト一邊トヲ一致セシメ、且ツ兩角ガ共通部分ヲ有スルヤウニ重ネ、他ノ邊ノ位置ヲ見テ大小ヲ定メル。



角ノ大イサハ邊ノ長サニハ關係シナイ。

廻轉ニヨツテ生ズル角 OAヲ一邊トスル角ノ他ノ一邊ガ、Oヲ固定シテOAノ位置カラ矢ノ方向ニ廻ツテOB, OC, OD, ……ノ位置ヲ占メルモノトスレバ、ソノ廻轉ノ大小ニヨツテ角ノ大イサヲ測ルコトガ出來ル



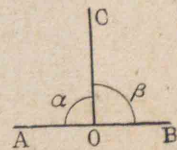
直角 直線上ノ一點カラ

一ツノ半直線ヲ引クトキ出來ル二ツノ角ガ相等シイトキ、ソノ各ノ角ヲ直角トイフ。

圖デ直線 AB 上ノ一點Oカラ半直線 OCヲ引イテ出來ル二ツノ角ガ等シケレバ、即チ

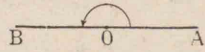
$$\angle \alpha = \angle \beta$$

ナルトキハ、ソノ各ハ直角デアル。



直角ノ記號トシテ  $\angle R$ ヲ用ヒル。

平角 一ツノ角ノ一邊ガ他ノ邊ノ延長デアル角ヲ平角トイフ。

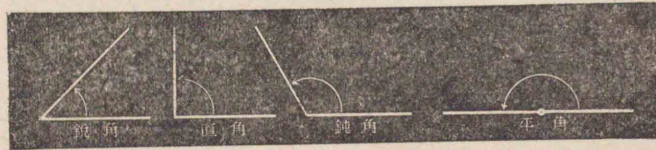


平角ハ2直角ニ等シイ。

二ツノ直線ハ全ク重ネ合ハスコトガ出来ルカラ平角ハスベテ相等シイ。従ツテ直角ノ大イサモ一定デアル。

鋭角 直角ヨリ小サイ角ヲ鋭角トイフ。

鈍角 直角ヨリ大キク、平角ヨリ小サイ角ヲ鈍角トイフ。



劣角 2直角ヨリ小サイ角ヲ劣角トイフ。

優角 2直角ヨリ大キイ角ヲ優角トイフ。

注意 單ニ角トイヘバ劣角ノコトデアル。

問題

1. 一點ヲ通ル三直線ハ平面ヲ幾ツノ部分ニ分ツカ。
2. 日常使用スル器具ニツイテ、指針ノ廻轉ニヨル角ノ大小ニヨツテ量ヲ測ルヤウニ工夫セラレタ

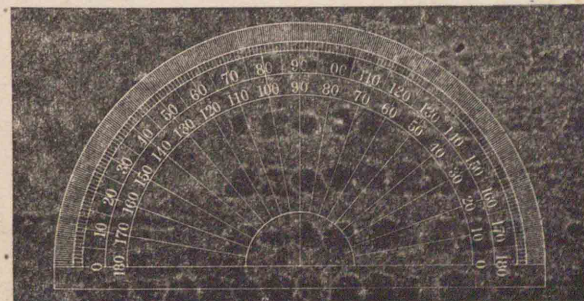
モノノ例ヲ舉ゲヨ。

3. 體操ノ號令デ「半バ右向ケ右」「右向ケ右」「廻レ右」ノトキ、身體ヲ幾直角廻轉スルカ。
4. 教室内デ鋭角、直角、鈍角ヲナシテキル場所ヲ夫夫指摘セヨ。又日常使用スル器具ニツイテソレ等ノ角ヲナシテキルモノヲ言ヘ。
5. 時計ノ兩針ハ幾區劃離レタ場合ニ直角ヲナスカ。午前9時1分カラ午前10時マデニ、又正午カラ午後6時マデニ、兩針ハ夫々何回直角ヲナスカ。

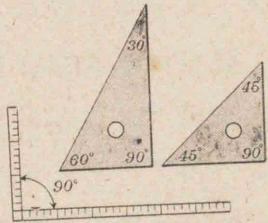
10. 角ノ單位

幾何學デハ角ノ單位ニ直角ヲ用ヒルガ、實用上ニハツノ $\frac{1}{90}$ ヲ基本單位ニトリ、コレヲ度(°)トイフ。補助單位ニハ分('), 秒(")ガアル。

1直角=90°, 1°=60', 1'=60"



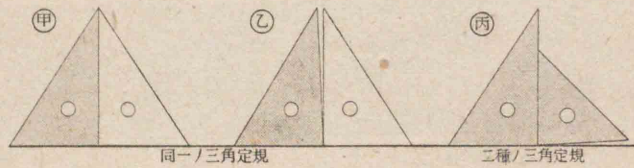
角ヲ測ルニハ分度器ヲ用ヒル。前圖ハソノ一種デアル。三角定規ニハ普通二種アルガ、コレ等ノ一角ハ何レモ直角デ、他ノ二角ハ二ツトモ45°ノモノト、30°、60°ノモノトデアル。



大工ハ直角ヲ畫クニ曲尺ヲ用ヒル。

尺 曲 尺

1. 三角定規ヲ次圖ノヤウニ一直線上ニ置イテ見



ヨ。甲圖ノヤウニナルカ。乙、丙圖ノヤウニハナラナイカ。乙、丙ノヤウニナル定規ハ正シクナイ定規デアル。何故カ。

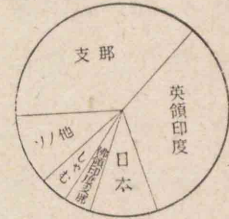
2. 三角定規ヲ用ヒテ與ヘラレ

タ直線 AB 上ノ一點 C ニ於テコレト 30° 及ビ直角ヲナス直線ヲ引ケ。又直線 AB 外ノ一點 P ヲ通ツテ AB ト直角ヲナス直線ヲ引ケ。



3. 各邊ノ長サガ5cmナル三角形ヲ畫イテ、各角ノ大イサヲ分度器デ測ツテ見ヨ。世界米産額(昭和8年)

4. 右ノぐらふハ角ノ大イサニヨツテ産額ノ多少ヲ示シテキル。コノ角ヲ測ツテ産額ノ比ヲ求メヨ。(大體デヨイ)

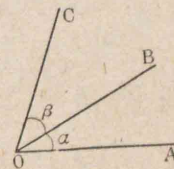


5. 時計ガ8時ヲ示ストキ、長針ト短針トハ何度ノ角ヲナスカ。又時計ガ1時ヲ示ストキハ如何。

11. 二角ノ關係

接角 頂點及ビ一邊ヲ共有シ、コノ共有邊ノ兩側ニアル二角ノ各、ヲ互ニ他ノ角ノ接角トイフ。

右圖デ  $\angle \alpha$  ト  $\angle \beta$  トハ接角デア



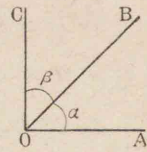
ル。コノ圖デ  $\angle AOC$  ハ  $\angle AOB$  ト  $\angle EOC$

トノ和ニ等シク、 $\angle AOB$  ハ  $\angle AOC$  ト  $\angle BOC$  トノ差ニ等シイ。コレヲ夫々次ノヤウニ表ハス。

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC, \quad \angle AOB = \angle AOC - \angle BOC$$

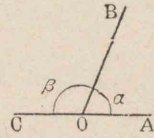
餘角 二角ノ和ガ直角デアルトキ、コノ二角ノ各、ヲ互ニ他ノ角ノ餘角トイフ。

右圖デ、 $\angle\alpha + \angle\beta = \angle R$  ナラバ、 $\angle\alpha$ ノ餘角ハ $\angle\beta$ デ、又 $\angle\beta$ ノ餘角ハ $\angle\alpha$ デアアル。

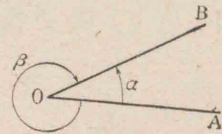


**補角** 二角ノ和ガ2直角デアルトキ、コノ二角ノ各、互ニ他ノ角ノ補角トイフ。

右圖デ、 $\angle\alpha + \angle\beta = 2\angle R$  ナラバ、 $\angle\alpha$ ノ補角ハ $\angle\beta$ デ、又 $\angle\beta$ ノ補角ハ $\angle\alpha$ デアアル。

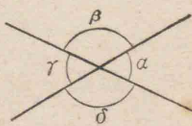


**共軛角** 頂點及ビ二邊ヲ共有シ、ソノ外ニ共有部分ノナイ二角ヲ共軛角(又ハ互ニ共軛デアアル)トイフ。



上圖デ  $\angle\alpha$  ト  $\angle\beta$  トハ共軛角デアアル。

**對頂角** 二直線ガ交ツテ出來ル四ツノ角ノウチ、接角デナイ二角ヲ對頂角トイフ。



上圖デ  $\angle\alpha$  ト  $\angle\gamma$ 、 $\angle\beta$  ト  $\angle\delta$  トハ夫々對頂角デアアル。

問題

1. 次ノ各角ノ餘角ヲ言へ。

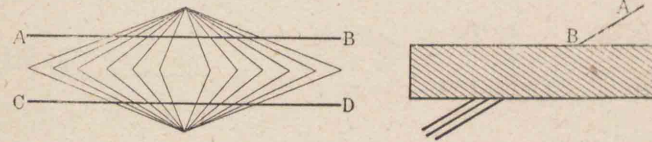
- 15°, 18°, 37°, 45°35', 68°24'18"

2. 次ノ各角ノ補角ヲ言へ。

- 30°, 75°, 105°, 110°12', 150°24'37"

12. 定理・系

次ノ左圖デ AB ト CD トノ間隔ハ中央ノ處デ狭クナツテキルヤウニ見エルガ、ソノ實、幅ハ何處モ同一デアアル。又右圖デ AB ヲ延長シタトキ、下ノ三線ノウチ何レニナルカヲ目測シ、次ニ定規ヲ當テテ驗シテ見ヨ。



コレ等ノ例デ明ラカナヤウニ、圖形ノ性質ハ唯目デ見テ判斷スルトキハ往々ソノ判斷ニ誤ガアルコトガアル。ソレ故ニ幾何學デ「斯ク斯クデアアル」トイフコトヲ言ヒ切ルニハ、ソレ相當ノ理由ヲ述ベナケレバナラナイ。サテ

圖形ノ性質ヲ述ベタモノヲ**定理**トイフ。

スベテ定理ハ既知ノ事柄(公理、定義ナド)カラソノ眞デアアルコトヲ説キ明シ得ル事柄デアアル。ソシテカク説キ明スコトヲ證明スルトイフ。

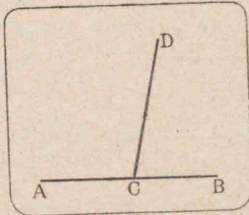


一定理(又ハ公理)カラ直チニ推定シ得ル  
定理ヲ系トイフ。

### 13. 接角・對頂角

**定理 1.** 直線上ノ一點カラ一ツノ半直線ヲ引ク  
トキ出來ルニツノ接角ノ和ハ2直角ニ等シイ。

例ヘバ、直線 AB 上ノ一點 C カラ半直線 CD ヲ引  
ケバ  $\angle BCD + \angle DCA = 2\angle R$   
デアアル。



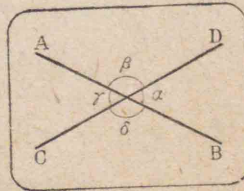
**証明**  $\angle BCD$  ト  $\angle DCA$  ト  
ノ和ハ  $\angle ACB$  デアツテ、平角デ  
アル。ソシテ平角ハ2直角ニ等シイ。

$$\therefore \angle BCD + \angle DCA = 2\angle R$$

**系** ニツノ接角ノ和ガ2直角ニ等シケレバ、ソノ共  
通デナイ二邊ハ一直線ヲナス。(一方ノ邊ヲ延長スレ  
バ他方ノ邊ニ重ナル)

**定理 2.** 對頂角ハ相等シイ。

二直線ガ交ツテ出來ル對頂角  
ヲ夫々  $\alpha, \gamma, \beta, \delta$  トスレバ、證明ス  
ベキコトハ、



$$\angle \alpha = \angle \gamma, \quad \angle \beta = \angle \delta$$

**証明**  $\angle \alpha + \angle \beta = 2\angle R$  (定理1)

$\angle \gamma + \angle \delta = 2\angle R$  (定理1)

$\therefore \angle \alpha + \angle \beta = \angle \gamma + \angle \delta$  (14頁,1)

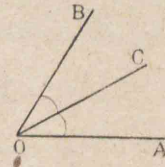
$\therefore \angle \alpha = \angle \gamma$  同様ニ  $\angle \beta = \angle \delta$  (14頁,2)

**系** 二直線ガ交ツテ出來ル四ツノ角ノウチ、一ツガ  
直角デアレバ、他ノ三ツモ亦直角デアアル。

### 14. 角ノ二等分線・垂線・斜線

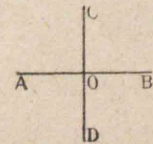
一ツノ角ヲ相等シイニツノ接角ニ分ツ  
直線ヲソノ角ノ二等分線トイフ。

右圖デ  $\angle AOC = \angle COB$  トスレバ、OC  
ハ  $\angle AOB$  ノ二等分線デアアル。



角ノ二等分線ハ常ニ唯一ツアル。

前定理系ニヨリ、二直線 AB, CD ガ一  
點 O デ交ツテ出來ル四ツノ角ノウチ、  
一ツガ直角デアレバ、他ノ三ツノ角モ  
亦直角デアアル。

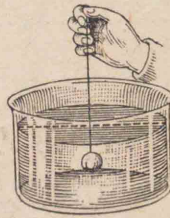


二直線ガ互ニ直角ヲナシテ交ルトキ、コ  
ノ二直線ハ互ニ垂直デアアル又ハ直交スル  
或ハ直角ニ交ルトイフ。ソシテソノ一ツ

ニ注目スルトキハ、他ヲ前者ノ垂線トイヒ、  
交點ヲ垂線ノ足トイフ。

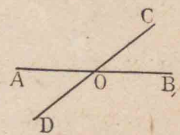
前圖デ AB, CD ハ互ニ垂直デ、CD ハ AB ノ垂線、AB  
ハ CD ノ垂線デアル。又 O ハ垂線ノ足デアル。AB  
ト CD トガ互ニ垂直デアルコトヲ示スニ **AB ⊥ CD**  
ト書ク。

**注意** 錘ヲツケタ糸ヲ静カニ水面ニ  
下ゲタ場合ニ、コノ糸ノ方向ハ常ニ一定  
デ、静止セル水面ト交ル點ヲ通リコノ水  
面上ニアル直線ニ垂直トナル。コノ糸  
ノ方向ヲ鉛直線トイフ。又水面上ノ直線ヲスベテ水平  
線トイフ。



線分ノ中點ヲ通リコレニ垂直デアル直線ヲコノ  
線分ノ垂直二等分線トイフ

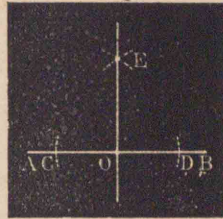
相交ル二直線 (AB, CD) ガ互ニ  
垂直デナイトキハ、ソノ一ツヲ  
他ノ斜線トイヒ、ソノ交點 (O) ヲ  
斜線ノ足トイフ



**作圖題 4.** 與ヘラレタ直線 (AB) 上ノ一點 (O) ニ於テ  
コレニ垂線ヲ引クコト

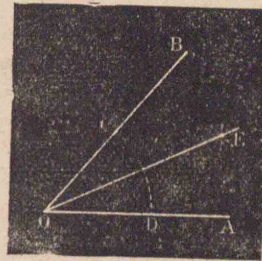
**作圖** O ヲ中心トシテ任意ノ半徑デ弧ヲ畫キ、

AB ト C, D デ交ラシメル。次ニ  
C, D ヲ夫々中心トシテ前ヨリモ  
長イ任意ノ相等シイ半徑デ弧ヲ  
畫キ、二ツノ弧ノ交點ヲ E トスル。  
O, E ヲ結ブ直線ハ AB ニ O デ垂  
直トナル。(OE ヲ折目トシテ二ツノ角ヲ重ネテ見ヨ)



**作圖題 5.** 與ヘラレタ角 (∠AOB) ヲ 2 等分スルコト。

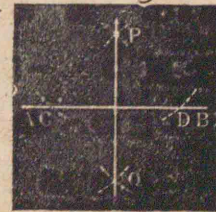
**作圖** ∠AOB ノ頂點 O ヲ中  
心トシ、任意ノ半徑デ弧ヲ畫キ  
角ノ二邊ト夫々 C, D デ交ラシ  
メル。次ニ C, D ヲ夫々中心ト  
シテ相等シイ半徑デ弧ヲ畫イ



テ交ラシメ、ソノ交點ヲ E トスル。O, E ヲ結ブ直線  
ハ ∠AOB ノ二等分線トナル。

**作圖題 6.** 與ヘラレタ直線 (AB) 外ノ一點 (P) カラコ  
ノ直線ニ垂線ヲ引クコト。

**作圖** P ヲ中心トシテ任意ノ半徑デ弧ヲ畫キ、AB  
ト C, D デ交ラシメル。次ニ C, D ヲ  
夫々中心トシテ前ト同ジ半徑デ弧  
ヲ畫キ、P ノ外ニ Q デ交ラシメル。  
P, Q ヲ結ブ直線ハ AB ニ垂直トナ



ル。(PQヲ折目トシテニツノ角ヲ重ネテ見ヨ)

15. 垂線

1. 長さ3cmノ線分ノ兩端ニ夫々垂線ヲ引ケ。
2. 作圖題2ト4トノ作圖ヲ比較シ線分ABノ垂直二等分線ヲ畫ク方法ヲ述ベヨ。
3. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ヲ引キ、ソノ三ツノ垂線ガ同一ノ點ヲ通ルコトヲ見ヨ。
4. 三角形ノ各角ノ二等分線ヲ引キ、ソノ三ツノ二等分線ガ同一ノ點ヲ通ルコトヲ見ヨ。
5. 角ノ二等分線ノ延長ハソノ共軛角ヲ2等分スル。
6. 一點カラ四ツノ半直線ヲ引クトキ出來ル四ツノ角ノウチ、相隣ラナイ角ガ二ツヅツ相等シケレバ、コレ等ノ四ツノ半直線ハ二直線トナル。
7. 一直線上ノ一點カラ半直線ヲ引イテ出來ル接角ノ各、ノ二等分線ハ互ニ直角ヲナス。

15. 垂線

**定理 3.** 一直線上ノ一定點ヲ通り、コレニ垂直ナル直線ハ常ニ唯一ツアル。

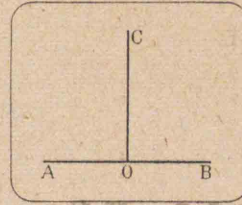
一直線 AB 上ノ定點 O ヲ通ツテ、ABニ垂直デア

ル直線ハ一ツハ必ズアツテ、唯一ツシカナイ。

**証明** 平角 AOB ノ二等分線 OC ヲ作レバ

$$\angle AOC = \angle COB = \angle R$$

故ニ OC ハ O ヲ通ル AB ノ垂直線デアル。



然ルニ角ノ二等分線ハ唯一ツシカナイカラ、O ヲ通ル他ノ直線ハ平角ノ二等分線デナイ。即チ垂直線デナイ。

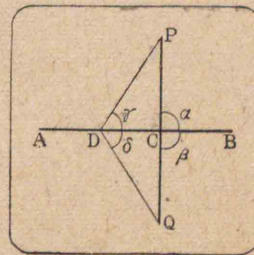
故ニ O ヲ通り ABニ垂直デアル直線ハ常ニ唯一ツアル。

**定理 4.** 一直線外ノ一定點ヲ通り、コノ直線ニ垂直ナル直線ハ常ニ唯一ツアル。

定直線 AB 外ニアル定點 P ヲ通り、ABニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアツテ、唯一ツシカナイ。

**証明** AB ヲ折目トシテ P

ノアル側ヲ他ノ側ニ重ネ、コノトキ P ノ落タル點ヲ Q トセヨ。P, Q ヲ結ベバ線分 PQ ハ AB ト必ズ交ル(7頁公理)。ソノ點



ヲ C トスル。サテ AB ヲ折目トシテ P ガ Q ニ來ルヤウニ折返ストキ、CP ガ CQ ノ上ニ重ナルカラ、

圖ニ於テ  $\angle a = \angle \beta$ , 且ツ PCQ ハ一直線デアルカラ  $\angle PCQ$  ハ平角デアル。

$\therefore \angle a = \angle R \quad \therefore PC \perp AB$

今モシ PC ノ外ニ PD モ垂線デアルトスルト D ト Q トヲ結ベバ, 前ノヤウニ折返ストキ, 圖ニ於テ  $\angle \gamma = \angle \delta = \angle R$  トナリ, PDQ ハ一直線トナラナケレバナラス。然ルニ二點 P, Q ヲ通ツテ異ナツタ二直線ヲ引クコトハ出來ナイカラ(4頁公理), PD ハ垂線デナイ。

故ニ P ヲ通ツテ AB ニ垂直デアル直線ハ常ニ唯一ツアル。

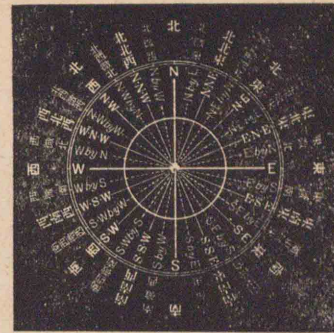
直線外ノ一點カラコノ直線ヘ引イタ垂線(又ハ斜線)ノ長サトハ, ソノ點トソノ垂線(斜線)ノ足トノ間ノ距離ノコトデアル。

直線外ノ一點カラコノ直線ヘ引イタ垂線ノ長サヲソノ點ト直線トノ距離トイフ。

雑題 是問

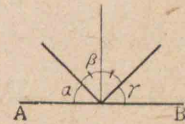
1. 與ヘラレタ直線上ノ一點ヲ通り, コノ直線ト一方ノ側デ  $45^\circ$  ノ角ヲナス直線及ビソレト反對ノ側デ  $60^\circ$  ノ角ヲナス直線ヲ分度器ヲ用ヒテ畫ケ。

2. 正東カラ  $45^\circ$  南ニソレタ方向ヲ何トイフカ。正東ノ方向ト南西ノ方向トガナス角ハ幾度カ。北北東ハ北方ト幾度ノ角ヲナスカ。風ガ西北カラ西南ニ變ツタトイフ。ソノ方向ノ變化ハ何度カ。

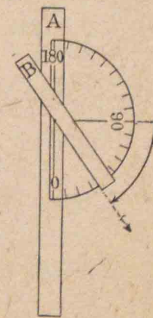


3. 一直線上ノ一點カラソノ一方ノ側ニ二ツノ半直線ヲ引イテ出來ル角ノ大イサヲ順次 1, 2, 3 ノ割合ニナルヤウニセヨ。

4. 右圖デ  $\angle a = \angle \gamma$  デアレバ,  $\angle \beta$  ノ二等分線ハ AB ニ垂直デアル。



5. 直線 AB 上ノ一點 O カラ半直線 OC ヲ引ケバ,  $\angle BOC$  ハ  $\angle AOC$  トソノ共軛角トノ差ノ半分デアル。(COヲ延長シテ考ヘヨ)



6. 分度器ト二個ノ定規トヲ右圖ノヤウニ組合セテ, 自分ノ眼ト建物ノ二點トヲ夫々結ブ二直線ガ作ル角ヲ測ル方法ヲ述ベヨ。

## 第二章 平行線

## 16. 平行線・内角・外角・錯角・同位角

一平面上ニアル異ナル二直線ノ相互ノ位置ニツイテハ次ノ二ツノ場合ガアル。

(1) 相交ル。

(2) 如何ホド延長シテモ相交ラナイ。

コノ(1),(2)ハ同時ニ成立ツコトナク、何レカーツハ必ズ成立ツノデアアル。

同ジ平面上ニアツテ如何ホド延長シテモ相交ラナイ二直線ハ互ニ平行デアルトイヒ、コノ二直線ヲ平行線トイフ。

二直線  $AB, CD$  ガ互ニ平行デアアルコトヲ  $AB \parallel CD$  ト書ク。



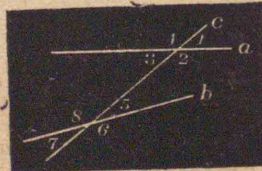
一直線  $c$  ガ二ツノ直線  $a, b$  ト交ルトキ出來ルハツノ角ニ次ノ名稱ヲツケル。

(1)  $\angle 2, \angle 5, \angle 3, \angle 8$  ノ各、

ヲ内角トイヒ、

(2)  $\angle 1, \angle 4, \angle 6, \angle 7$  ノ各、

ヲ外角トイヒ、



(3)  $\angle 2$  ト  $\angle 8$  及ビ  $\angle 3$  ト  $\angle 5$  ノ各組ヲ錯角トイヒ、

(4)  $\angle 1$  ト  $\angle 5, \angle 2$  ト  $\angle 6, \angle 4$  ト  $\angle 8$  及ビ  $\angle 3$  ト  $\angle 7$  ノ各組ヲ同位角トイフ。

コレヨリ直チニ次ノコトガワカル。

一直線ガ他ノ二直線ト交ルトキ、

[1] 一組ノ同位角ガ相等シケレバ、他ノ三組ノ同位角モ夫々相等シク、錯角ハ夫々相等シク、同ジ側ノ内角ハ互ニ補角デアアル。

[2] 一組ノ錯角ガ相等シケレバ、他ノ一組ノ錯角モ亦相等シク、四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。

[3] 一組ノ同ジ側ノ内角ガ互ニ補角ヲナセバ、他ノ一組ノ内角モ亦補角ヲナシ、四組ノ同位角ハ夫々相等シク、二組ノ錯角ハ相等シイ。

コノ [1], [2], [3] ハ皆定理デアツテ何レモ定理 1, 2 ヲ用ヒテ證明スルコトガ出來ル。

## 定理ノ形式

スベテ定理ハ二ツノ部分カラナル。上述ノ [1], [2],

[3] ヲ見ルニ、何レモ初メノ部分ハ起リ得ル假定ノ事柄デアツテ、コレヲ假設トイヒ、後ノ部分ハコノ假設カラ當然起ツテ來ル事柄デ、コレヲ終結トイフ。

假設カラ主張通りニ終結ノ眞ナルコトヲ述ベル  
ノガ證明デアル。(23頁参照)

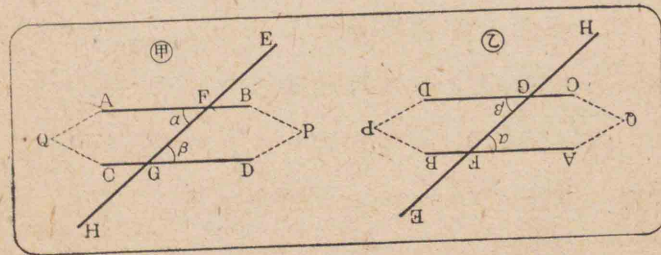
### 17. 平行線

**定理 5.** 一直線ガ二直線ト交ツテ出來ル一組ノ  
錯角ガ相等シケレバ、コノ二直線ハ互ニ平行デアル。

**假設** 一直線 EH ガ二直線 AB, CD ト夫々 F, G  
デ交ツテ出來ル一組ノ錯角、例ヘバ  $\alpha, \beta$  ガ相等シイ  
トスル。

**終結**  $AB \parallel CD$

**証明** 甲圖ヲ乙圖ノヤウニ廻轉シテ、乙ノ線分 FG  
ヲコレニ等シイ甲ノ線分 GF ノ上ニ重ネルニ、乙ノ



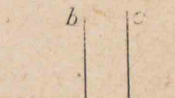
Fハ甲ノGノ上ニ、又乙ノGハ甲ノFノ上ニ落ナル  
ヤウニスル。然ルトキハ假設ニヨツテ乙ノ  $\angle \alpha$  ハ  
甲ノ  $\angle \beta$  ニ等シイカラ、乙ノ直線 BA ハ甲ノ直線 CD  
ノ上ニ重ナル。同様ニ乙ノ直線 DC ハ甲ノ直線 AB  
ノ上ニ重ナル。

故ニ假ニ甲ノ AB, CD ガ EH ノ一方ノ側ノ一點 P  
デ交ルモノトスレバ、乙ヲ甲ノ上ニ重ネタトキ、Pハ  
Qノ位置ニ來テ甲ノ AB, CD ハ更ニ點 Q デ交ルコト  
トナル。即チ二點 P, Q ヲ通ル二ツノ直線 AB, CD ガ  
存在スルコトトナツテ不合理デアル(4頁,公理)。

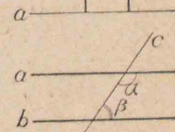
故ニ AB ト CD トハ交ルコトガ出來ナイ。即チ互  
ニ平行デアル。

**注意** コノ證明デハ、終結ガ成立タナイモノトスレバ、  
不合理トナルカラ、終結ハ成立ツトイフ論法デアル。コ  
レハ證明ニ屢、用ヒル方法デアツテ、歸謬法トイフ。

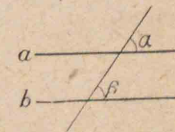
**図 1.** 同ジ直線ニ垂直デアル二直線  
ハ互ニ平行デアル。(錯角ヲ考ヘヨ)



**図 2.** 一直線ガ他ノ二直線ト交ルト  
キ、初メノ直線ニ對シテ同ジ側ニアル  
一組ノ内角ガ互ニ補角ヲナセバ、コノ  
二直線ハ互ニ平行デアル。(錯角ヲ考  
ヘヨ)



**図 3.** 一直線ガ他ノ二直線ト交ルト  
キ、一組ノ同位角ガ相等シケレバ、コノ二直線ハ互ニ  
平行デアル。(錯角ヲ考ヘヨ)



**公理** 一直線外ノ一點ヲ通り、コノ直線ニ平行デ

アル直線ハ常ニ唯一ツアル。

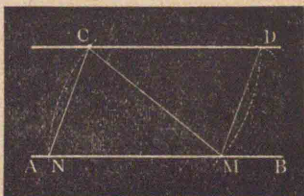
系 1. 二ツノ平行線ノ一ツニ交ル直線ハ他ニモ交ル。 (歸謬法ヲ用ヒヨ)

系 2. 直線 c ガ直線 a ト交リ、且ツ直線 b ニ平行デアルトキハ a ト b トハ平行デナイ、即チ相交ル。

( $b \parallel c$ , ソシテ系 1 ヲ用ヒヨ)

作圖題 7. 與ヘラレタ點(C)ヲ通ツテ、與ヘラレタ直線(AB)ニ平行線ヲ引クコト。

作圖 AB 上ノ任意ノ點 M ヲ中心トシ、こんばすヲ C マデ開イテ弧ヲ畫キ、AB ト交ル點ヲ N トスル。次ニ C



ヲ中心トシ、前ト同ジ半徑デ弧ヲ畫ク。次ニ CN ノ長サヲ半徑トシテ M ヲ中心トスル弧ヲ畫キ、前ノ弧ト AB ニ對シテ C ノアル側デノ交點ヲ D トスル。

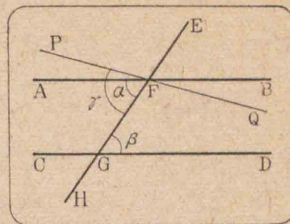
C, D ヲ通ル直線ハ AB ニ平行デアル。(コノ作圖ノ正シイコトハ後ニワカル)

定理 6. 一直線ガ平行二直線ト相交ルトキ、錯角ハ相等シイ。

假設 一直線 EH ガ平行二直線 AB, CD ト F, G デ交ツテ出來ル錯角ヲ  $\alpha, \beta$  トスル。

終結  $\angle \alpha = \angle \beta$

証明 假ニ  $\angle \alpha \neq \angle \beta$  トシ、F ヲ通ル他ノ直線 PQ ヲ引イテ、錯角  $\gamma$  ト  $\beta$  トヲ等シクスル。然ルトキハ、CD ト PQ



トハ平行デアル(前定理)。又假設ニヨツテ  $AB \parallel CD$  デアル。故ニ  $\angle \alpha \neq \angle \beta$  トスレバ、F ヲ通り CD ニ平行デアル二直線 AB, PQ ガアルコトトナツテ不合理デアル(35頁、公理)。

故ニ  $\angle \alpha = \angle \beta$  デナケレバナラス。

系 1. 一直線ガ平行二直線ト相交ルトキ、

[1] 各組ノ同位角ハ相等シイ。

[2] 同ジ側ニアル内角ハ互ニ補角ヲナス。

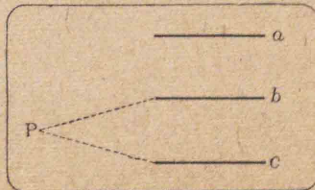
系 2. 平行二直線ノ一ツニ垂直デアル直線ハ他ニモ垂直ニ交ル。 (コノ直線ヲ二直線ノ共通垂線トイフ)

定理 7. 同ジ直線ニ平行デアル二ツノ直線ハ互ニ平行デアル。

假設  $a \parallel b, a \parallel c$  トスル。

終結  $b \parallel c$

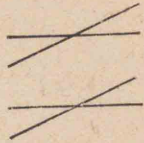
証明 假ニ  $b$  ト  $c$  トハ一點 P デ交ルトセヨ。然



ルトキハ、Pヲ通り  $a$ ニ平行デアアル二直線  $b, c$ ガアルコトトナツテ不合理デアアル(35頁公理)。

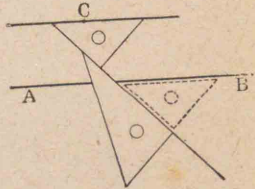
ヨツテ  $b, c$ ハ交ラナイ。即チ平行デアアル。

⊗ 相交ル二直線ノ各、ニ夫々平行デアアル二直線ハ必ズ相交ル。(歸謬法ヲ用ヒヨ)

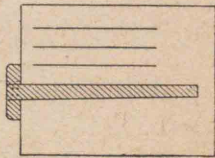


問題 四

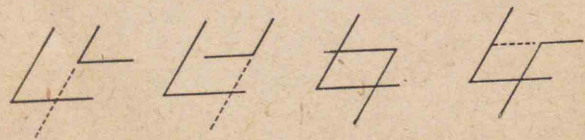
1. 作圖題7ハ二個ノ三角定規ヲ用ヒレバ、容易ニ作圖スルコトガ出來ル。右圖ニヨツテソノ方法ヲ述ベヨ。



2. 右圖ニ示シタ丁字形定規デ平行線ヲ畫クノハ、ドノ定理又ハ系ニヨルカ。



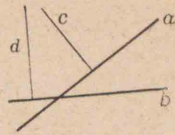
3.\* 一ツノ角ノ二邊ガ、他ノ角ノ二邊ニ夫々平行デアルトキ、コノ二ツノ角ハ相等シイカ、又ハ互ニ補角デアアル。



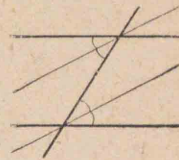
4.\* 相交ル二直線  $(a, b)$ ニ夫々垂直デアアル二直線  $(c,$

\* 印ノ問題ハ屢々應用サレル問題デアアル。

$d$ )ハ相交ル。(若シ  $c, d$ ガ平行デアルトスレバ37頁系2ニヨリ  $a \perp d$ , ソシテ  $a, b$ ハドウナルカ)



5.\* 一直線ガ平行二直線ト交ツテ出來ル一組ノ錯角(又ハ同位角)ノ二等分線ハ互ニ平行デアアル。



6. 一直線ガ平行二直線ト交ツテ

出來ル一組ノ同側内角ノ各、ノ二等分線ハ相交ル。

7.\* 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々垂直ナラバ、コノ二ツノ角ハ相等シイカ、又ハ互ニ補角デアアル。



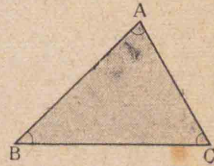
## 第三章 三角形

## 18. 三角形

圖 三角形トハドンナ圖形カ、小學校デ學シダコトヲ言ヘ。

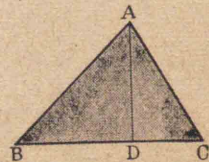
三ツノ線分ニヨツテ圍マレタ平面ノ部分ヲ三角形又ハ三邊形トイフ。

右ノ三角形デ、線分 BC, CA, AB  
ヲソノ邊ニ邊ノ交點 A, B, C ヲソノ頂點トイヒ、 $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  ヲ三角形ノ内角又ハ單ニ角トイフ。



上ノ三角形ヲ三角形 ABC トイヒ、 $\triangle ABC$  ト書ク。  
三角形ノ一角トソノ角ノ内部ニアル邊トハ相對スルトイヒ、角ヲコノ邊ノ對角、邊ヲコノ角ノ對邊トイフ。又頂點カラ對邊ニ下シタ垂線ヲ三角形ノ垂線、ソノ長サヲ三角形ノコノ邊ニ立ツ高サトイフ。

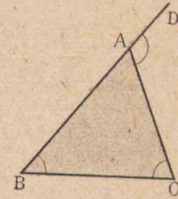
右圖デ  $\angle A$  ノ對邊ハ邊 BC, 邊 BC ノ對角ハ  $\angle A$  デアル。又線分 AD ハ BC ニ立ツ高サデアル。



三角形ノ一邊ヲ底邊トイフコトガアル。コノ場合ニ底邊ノ兩端ニアル角ヲ底角

トイヒ、底邊ニ對スル角ヲ頂角トイフ。

三角形ノ一邊トソノ隣邊ノ延長トガ夾ム角ヲ外角トイヒ、外角ニ接シテキナイ内角ノ各、ソソノ外角ノ内對角トイフ。



上圖デ  $\angle CAD$  ハ  $\triangle ABC$  ノ一ツノ外角デ、 $\angle ABC$  及ビ  $\angle ACB$  ハソソノ内對角デアル。

## 問題

1. 三邊ガ夫々 5 cm, 6 cm, 7 cm デアル三角形ヲ畫キ、ソノ各角ノ大イサヲ分度器デ測ツテ、ソノ邊ニ對スル角ガ最モ大キイカラ見ヨ。
2. 三邊ガ 3 cm, 4 cm, 5 cm デアル三角形ヲ畫キ、5 cm ノ邊ノ對角ト接角ヲナス外角ノ大イサヲ分度器デ測レ。
3. 三角形ノ邊ノ大小トコレニ對應スル高サノ大小トニドンナ關係ガアルカラ圖ヲ畫イテ調ベヨ。

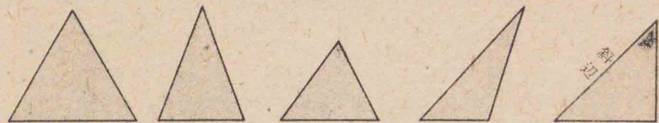
## 三角形ノ種類

正三角形 三ツノ邊ガ皆等シイ三角形ヲ正三角形トイフ。

二等邊三角形 二邊ガ相等シイ三角形ヲ

二等邊三角形トイフ。

鋭角三角形 三ツノ角ガ皆鋭角デアル三角形ヲ鋭角三角形トイフ。



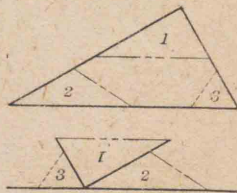
鈍角三角形 一角ガ鈍角デアル三角形ヲ鈍角三角形トイフ。

直角三角形 一角ガ直角デアル三角形ヲ直角三角形トイフ。

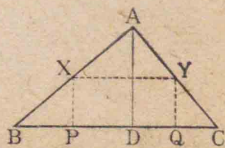
直角三角形ノ直角ノ對邊ヲ斜邊トイフ。

19. 三角形ノ内角ト外角トノ關係

觀察 1. 任意ノ三角形ヲ紙ニ畫キ、コレヲ切り離シテ圖ノヤウニ三ツノ角ヲ並ベテ見ヨ。ドンナコトガワカルカ。



觀察 2. 圖デ  $AD \perp BC$ ,  $XY \parallel AD$  ノ垂直二等分線、又  $XP \perp BC$ ,  $YQ \perp BC$  デアル。コノヤウナ三角形ヲ紙ニ畫キ、點線ニ沿ウテ折り疊ミ、點A、B



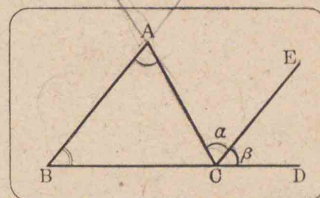
Cヲ點Dノ上ニ重ネテ見ヨ。

定理 8. 三角形デハ、

- [1] 一ツノ外角ハソノ二ツノ内對角ノ和ニ等シイ。
- [2] 三ツノ内角ノ和ハ2直角デアル。

証明 省略スル。

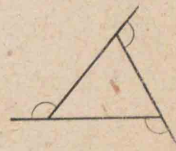
( $\triangle ABC$ ノ任意ノ一邊例ヘバ BCヲ延長シテ外角  $\angle ACD$ ヲ作り、Cヲ通り  $AB \parallel CE$ ニ



直線CEヲ引キ、コノ外角ヲ二ツノ角  $\alpha, \beta$ ニ分ケ、定理6及ビソノ系1ヲ用ヒレバ  $\angle A = \angle \alpha, \angle B = \angle \beta$ トナル)

図 1. 三角形ノ一ツノ角ガ直角デアレバ、他ノ二角ハ共ニ鋭角デ、且ツ互ニ餘角デアル。

図 2. 三角形ノ各頂點ニ於ケル外角ヲ一ツツツツタ和ハ4直角デアル。

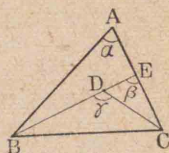


問題 19

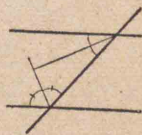
- 1. 三角形ノ三ツノ角ガ夫々  $2x + 5^\circ, 4x - 13^\circ, 5x + 1^\circ$  デアルトイフ。  $x$ ヲ求メヨ。
- 2. 次ノ方程式中ノ  $x$ ハ三角形ノ一ツノ内角ヲ示ス度数デアル。コノ三角形ハ如何ナル三角形カ。  
 $2(3x + 5) = 5x + 100$
- 3. 三角形  $ABC$ ノ  $\angle A$  及ビ  $\angle B$ ノ二等分線ノ交點

ヲDトスレバ、 $\angle ADB$ ハ直角ヨリ $\frac{\angle C}{2}$ ダケ大デアル。

4. 三角形ABC内ノ一點Dカラ一  
邊BCノ兩端ニ引イタ二線分ノナ  
ス角BDCハツノ邊ニ對スル角A  
ヨリ大キイ。(右圖デ $\angle \gamma > \angle \beta > \angle \alpha$ )



5. 一直線ガ平行二直線ト交ツテ出  
來ル同ジ側ノ二ツノ内角ノ二等分  
線ハ互ニ垂直デアル。



### 20. 三角形ノ合同

圖 圖形ノ合同ノ定義ヲ述ベヨ。

注意  $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トガ合同デアルコトヲ表ハスニ  
 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ト書ク。

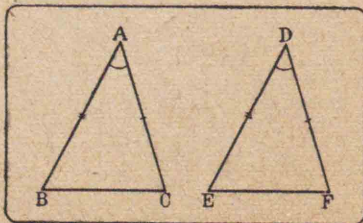
定理 9. 二邊トソノ夾角ガ夫々相等シイニツノ  
三角形ハ合同デアル。

假設  $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle DEF$ ニ於テ、 $AB=DE$ 、 $AC=DF$ 、  
 $\angle A=\angle D$ トスル。

終結  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

証明 相等シイ角A

トDトヲ重ネ、 $\angle D$ ノ邊  
DE、DFガ夫々 $\angle A$ ノ邊



AB、ACノ上ニ落チルヤウニ置ケバ、 $AB=DE$ 、 $AC=DF$   
デアルカラ、EハBノ上ニ、FハCノ上ニ來テ、邊EFハ  
邊BCト重ナル。

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

注意 1. 合同デアルニツノ三角形デハ、

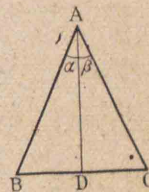
(1) 等シイ角ニ對スル邊ハ相等シイ。

(2) 等シイ邊ニ對スル角ハ相等シイ。

注意 2. コノ定理ノ證明ノヤウニ、兩圖形ヲ重ネ合セ  
テ證明スル方法ヲ重置法トイフ。

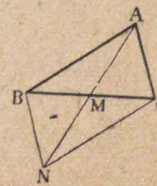
系 1. 二點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線上  
ニアル點ハ、コノ二點カラ等距離ニアル。

系 2. 二等邊三角形ノ相等シイ邊ニ  
對スル角ハ相等シイ。即チ $AB=AC$   
ナラバ $\angle B=\angle C$ デアル。( $\angle A$ ノ二等分  
線ヲ引イテ本定理ヲ用ヒルカ或ハ裏返シ  
シテモトノモノノ上ニ重ネヨ)



#### 問題

1. 三角形ABCノ邊BCノ中點ヲM  
トシ、MトAトヲ結ビ、コレヲ延長シ  
テ $AM=MN$ トシ、B、N；C、Nヲ結ベバ、  
 $\triangle ABM \equiv \triangle NCM$ 、 $\triangle ACM \equiv \triangle NBM$



**注意** コノ AM ノヤウナ線分ヲ  $\triangle ABC$  ノ中線トイフ。

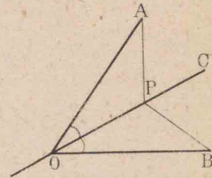
2. 一點 O カラ引イタ相等シイ二

ツノ線分 OA, OB ノ各ノ他ノ端 A,

D ハツノ線分ガ夾ム角ノ二等分

線 OC 上ノ任意ノ點 P カラ等距

離ニアル。

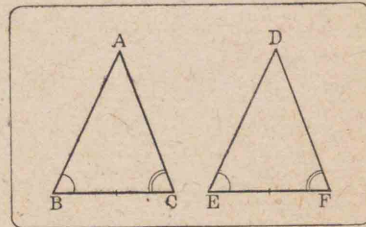


**定理 10.** 二角トソノ頂點ノ間ノ邊トガ夫々相等シイニツノ三角形ハ合同デアル。

**假设**  $\triangle ABC$  及ビ  $\triangle DEF$  ニ於テ,  $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F,$   
 $BC = EF$  トスル。

**終結**  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

**証明**  $\triangle DEF$  ヲトツテ  $\triangle ABC$  ノ上ニ, E ガ B  
 ニ, 邊 EF ガ邊 BC ノ上ニ,



且ツ D ト A トガ邊 BC ノ同ジ側ニ來ルヤウニ重ネ  
 レバ, F ハ C ニ, 邊 ED ハ邊 BA ノ上ニ, 邊 FD ハ邊 CA  
 ノ上ニ重ナルカラ D ハ A ト一致スル。

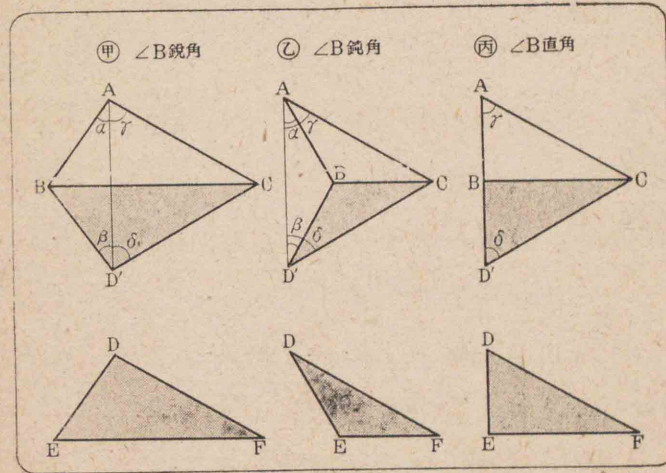
$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

**定理 11.** 三邊ガ夫々相等シイニツノ三角形ハ合同デアル。

**假设**  $\triangle ABC$  及ビ  $\triangle DEF$  ニ於テ,  $AB = DE, AC = DF,$   
 $BC = EF$  トスル。

**終結**  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

**証明**  $\triangle DEF$  ヲトツテ, E ガ B ニ邊 EF ガ邊 BC ニ  
 合シ且ツ直線 BC ニ對シテ  $\triangle ABC$  ト反對ノ側ニアル  
 ヤウニ裏返ニシテ置ク。コノトキ D ガ D' ノ位置ニ  
 來タトシ, A ト D' トヲ結ベバ,  $\angle B$  ノ大イサニヨツテ  
 次圖ノ如ク三ツノ場合甲, 乙, 丙ガ出來ル。



何レノ場合デモ  $\angle a = \angle \beta, \angle \gamma = \angle \delta$  (定理9系2)

從ツテ  $\angle BAC = \angle BD'C$  ナルコトガワカル。

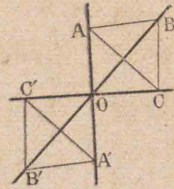
然ルニ  $\angle BD'C = \angle EDF$

$\therefore \angle BAC = \angle EDF$

從ツテ  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  (定理9)

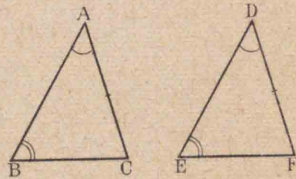
問題

- 1. 三線分  $AA', BB', CC'$  が同一点  $O$  で交り、 $O$  が各線分の中点であれば、 $\triangle ABC$  と  $\triangle A'B'C'$  は合同である。又もし三點  $A, B, C$  が一直線上にあれば、 $A', B', C'$  も亦一直線上にある。

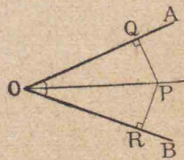


- 2.  $\triangle ABC, \triangle ABD$  が邊  $AB$  の同側ニアツテ且つ  $AC=BD, AD=BC$  ナルトキ、 $AD$  と  $BC$  との交点ヲ  $O$  トスレバ、 $\triangle OAC \equiv \triangle OBD$

- 3.\* 二角ガ夫々相等シク、且ツソノ一組ノ相等シイ角ニ對スル邊ガ相等シイニツノ三角形ハ合同デア

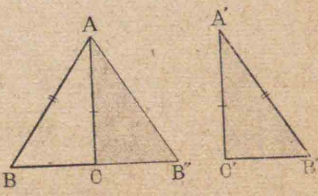


- 4.\* 角ノ二等分線上ノ任意ノ點ハソノ二邊カラ等距離ニアル。



- 5.\* 一邊ト斜邊トガ夫々相等シイニツノ直角三角形ハ合同デア

ル。(△ABC, △A'B'C'ニ於テ  $\angle C = \angle C' = \angle R$  トスル。△A'B'C'ヲ圖ノヤウニ



△ACB'ノ位置ニ移セバ、BCB'ハ一直線トナルコトヨリ

$\triangle ABB''$  ハ二等邊三角形トナルカラ  $\angle B = \angle B'' = \angle B'$ 。

ヨツテ  $\angle A = \angle A' \therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

- 6.\* 角ノ二邊カラ等距離ニアル點ハコノ角ノ二等分線上ニアル。

21. 二等邊三角形ノ性質

二等邊三角形デハ等邊デナイ第三邊ヲ特ニ底邊又ハ底トイヒ、底邊ノ兩端ノ角ヲ底角、底邊ノ對角ヲ頂角、ソノ角頂ヲ頂點トイフ。又二等邊三角形ノ高サトイヘバ、頂點カラ底邊ニ至ル垂線ノ長サノコトデア



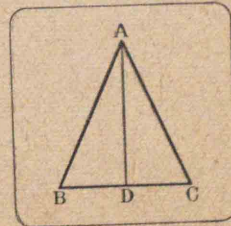
定理9系2ヲ言ヒカヘレバ

**定理 12.** 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ。

**例** 正三角形ノ各角ハスベテ相等シク  $60^\circ$  デアル。

**定理 13.** 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ2等分スル。

**假设**  $\triangle ABC$  ニ於テ、 $AB=AC$  トシ、 $\angle A$  ノ二等分線ガ  $BC$  ト交ル點ヲ  $D$  トスル。



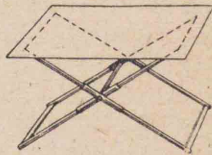
**終結**  $AD \perp BC$  且ツ  $BD=DC$

証明 省略スル。(定理9ヲ用ヒテ證セヨ)

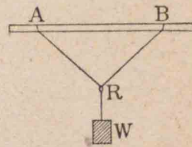
二等邊三角形デハ、頂角ノ二等分線、頂點ト底邊ノ中點トヲ結ブ直線、頂點カラ底邊ヘ引イタ垂線、底邊ノ垂直二等分線ハ何レモ同一直線デアアル。

問題

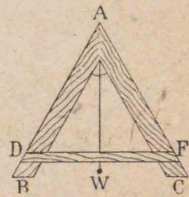
1. 右圖ノヤウナ腰掛ハ高サヲ如何様ニ調節シテモ、ソノ面ハ常ニ床面ニ平行デアアル。ソノ構造ノ大略ヲ述ベヨ。



2. 右圖ハ輪Rヲ通シタ糸ノ兩端ヲ眞直ナ棒ノ二點A,Bニ結ンダモノデ、輪Rハ自由ニ動キ得ル。今輪Rニ錘Wヲ下ゲ、ABヲ水平ニスレバ、Rハ如何ナル位置ヲトルカ。



3. 右圖ハ大工ガ用ヒル水平器デアアル。コノ構造ヲ推測シ、且ツ使用法ヲ説明セヨ。(Wハ糸デ下ゲタ錘)



4. 二點A,Bカラ等距離ニアル點ハ線分ABノ垂直二等分線上ニアアル。

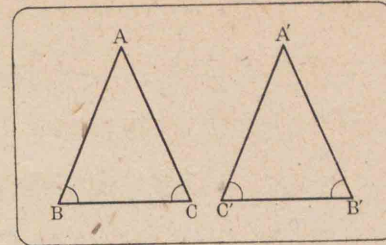
定理 14. 二角ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形

デアアル。

假設  $\triangle ABC$ ニ於テ、 $\angle B = \angle C$ トスル。

終結  $AB = AC$

証明 省略スル。

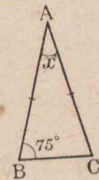


( $\triangle ABC$ ヲ裏返シテ $\triangle A'B'C'$ ヲ作り、 $\angle B$ ト $\angle C'$ 、 $\angle C$ ト $\angle B'$ トガ重ナルヤウニ置イテ證セヨ)

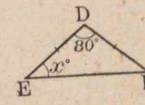
三ツノ角ガ等シイ三角形ハ正三角形デアアル。

問題

1. 右圖ハ何レモ二等邊三角形デアアル。 $\alpha$ ヲ求メヨ。



2. 二等邊三角形ABCノ底邊BCニ平行ナ直線ト邊AB, ACトノ交點ヲ夫々P, Qトスレバ、 $\triangle APQ$ ハ二等邊三角形デアアル。



3. 二等邊三角形ノ頂角ニ隣ル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行デアアル。

22. 定理ノ逆

「甲デアレバ、乙デアアル」トイフコトト、「乙デアレバ、甲デアアル」トイフコトトハ、互ニ一方ノ假設ガ他ノ終結

トナツテキル。

斯様ナ場合ニ一ツハ他ノ逆デアルトイフ。

例へバ、定理12ト定理14ハ互ニ逆デアル。即チ

$\triangle ABC$  デ  $AB=AC$  ナラバ、 $\angle B=\angle C$  (定理12)

$\triangle ABC$  デ  $\angle B=\angle C$  ナラバ、 $AB=AC$  (定理14)

例へバ、 $\angle \alpha$  ト  $\angle \beta$  ノ各、ガ直角ナラバ、 $\angle \alpha$  ト  $\angle \beta$  トハ相等シイハ真デアルガ、ソノ逆「 $\angle \alpha$  ト  $\angle \beta$  トガ相等シケレバ、 $\angle \alpha$  ト  $\angle \beta$  ノ各、ハ直角デアル」ハ真デナイ。等シクテモ直角デナイコトガ多イ。故ニ逆ガ真デアルコトヲ主張スルニハ、更ニコレヲ證明シナケレバナラナイ。

### 23. 一ツノ三角形ノ角ト邊ノ關係

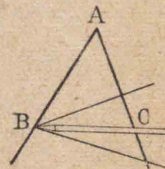
**觀察** 一ツノ角Aヲ作り、 $AB=AC$ ト

ナルヤウニ鉛筆BCヲ置キ、Bヲ中心ト

シテ $\angle ABC$ ガ減小又ハ増大スルヤウニ

廻轉セヨ。コノトキACノ長サノ變化

ト $\angle ABC$ ノ大イサノ變化トノ關係ヲ調べヨ。



**定理 15.** 三角形ノ二邊ガ不等デアレバ、大キイ邊

ニ對スル角ハ小サイ邊ニ對スル角ヨリ大キイ。

**假設**  $\triangle ABC$ ニ於テ、 $AC > AB$ トスル。

**終結**  $\angle B > \angle C$

**証明**  $AC$  上ニ  $AD=AB$ ニ等

シク  $AD$ ヲトツテ、 $B, D$ ヲ

結ブト  $AC > AB$ デアルカ

ラ、 $BD$ ハ $\angle B$ ヲ二ツノ部

分 $\alpha, \beta$ ニ分ツ。サテ  $AB=AD$ デアルカラ圖ニ於テ

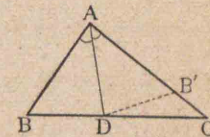
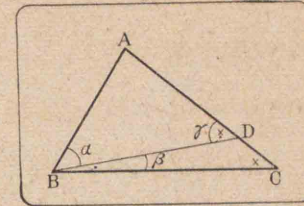
$\angle \alpha = \angle \gamma$  (定理12) 然ルニ  $\angle \gamma > \angle C$  (定理8)

又  $\angle B > \angle \alpha \therefore \angle B > \angle C$

**圖** 本定理ヲ $\angle A$ ノ二等分線  $AD$

ヲ折目トシテ  $AB$ ヲ $AC$ 上ニ折り重

ネテ證明シテ見ヨ。



**定理 16.** 三角形ノ二角ガ不等デアレバ、大キイ角

ニ對スル邊ハ小サイ角ニ對スル邊ヨリ大キイ。

**假設**  $\triangle ABC$ ニ於テ、 $\angle B > \angle C$ トスル。

**終結**  $AC > AB$

**証明**  $AB, AC$ ノ大イサヲ

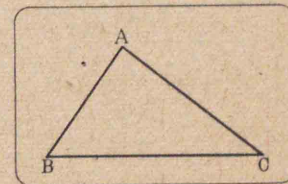
比較スルニ次ノ三ツノ場合

ノウチ、唯一ツガ成立スル。

(1)  $AB=AC$  (2)  $AB > AC$  (3)  $AB < AC$

サテ今假ニ  $AB=AC$ トスレバ定理9系2ニヨツ

テ  $\angle B = \angle C$ デナケレバナラス。コレハ假設即チ



$\angle B > \angle C$  反スルカラ採用出来ナイ。

又假ニ  $AB > AC$  トスレバ、定理15ニヨツテ  $\angle B < \angle C$  デナケレバナラス。コレモ亦假设ニ反スルカラ採用出来ナイ。

故ニ  $AC > AB$  デナケレバナラス。

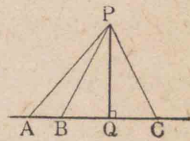
**注意** コノ定理ノ證明ハ歸謬法ヲ繰リ返シタノデア  
ルガ、コノヤウナ證明法ヲ特ニ轉換法トイフ。

**系** 直線外ノ一點カラ直線ニ引イタ線分ノウチ、

[1] 垂線ハ最モ短イ。

[2] 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモ  
ツニツノ斜線ノ長サハ相等シイ。

[3] 長サガ相等シイニツノ斜線ノ足ハ垂線ノ足カ  
ラ等距離ニアル。

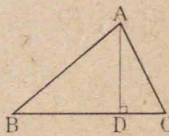
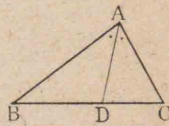


**問題**

1. 三角形ABCノ  $\angle A$  及ビ  $\angle B$  ガ夫々  $50^\circ$  及ビ  $60^\circ$  デアル。邊ヲ大イサノ順ニ云ヘ。

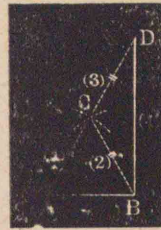
\* 三角形ABCノ  $\angle A$  ノ二等分線  
ガ邊BCト交ル點ヲDトスレバ、  
 $AB > BD$ ,  $AC > CD$

3. 三角形ABCノ頂點Aカラ對邊  
BCヘ下シタ垂直ノ足ヲDトス



ル。モシ  $\angle DAB > \angle DAC$  ナラバ、 $AB > AC$

\* 4. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三ツ  
ノ頂點カラ等距離ニアル。



5. 前問ヲ利用シテ線分ABノ一端  
Bニ於テコレニ垂線ヲ引ク方法ヲ  
工夫セヨ。

24. 三角形ノ二邊ノ和

**觀察** 三角形ノ底邊ハ12cmデ、他ノ二邊ノ長サガ夫々  
次ノ如ク與ヘラレタトキ、11頁作圖題1ヲ用ヒテ三角形  
ガ畫ケルカドウカナ驗シテ見ヨ。

- ① 4cm, 6cm    ② 6cm, 6cm    ③ 7cm, 8cm

**定理** 17. 三角形ノ二邊ノ和ハ第三邊ヨリ大キイ。

$\triangle ABC$ ニ於テ、例ヘバ  $AB + AC > BC$ ヲ證明スル。

**証明** 邊BAヲAカラDマデ延長シ、ADヲACニ  
等シクトリ、D、Cヲ結ブ。  $\triangle ACD$ ニ於テ

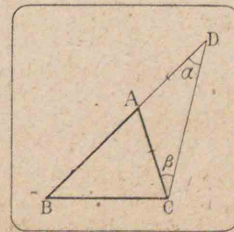
$AD = AC \therefore \angle \alpha = \angle \beta$

サテ  $\angle BCD > \angle \beta$

$\therefore \angle BCD > \angle \alpha$

$\therefore BD > BC$  (定理16)

即チ  $AB + AC > BC$





⊠ 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ差ヨリ大キイ。

( $AB > AC$ ナラバ,  $BC + AC > AB$  ヨリ  $BC > AB - AC$ )

【例】 見直

1. 次ノ條件デ三角形ABCヲ畫ケ。不能ノ場合ガアルカ。但シ  $a, b, c$  ハ夫々  $\angle A, \angle B, \angle C$  ノ對邊ノ長サヲ表ハス。

①  $b=4\text{ cm}, c=3.5\text{ cm}, \angle B=90^\circ$

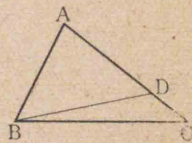
②  $a=1\text{ cm}, b=4\text{ cm}, c=5\text{ cm}$

2. 54頁問題2ニヨツテ定理17ヲ證セヨ。

3. 三角形ABCニ於テ  $\angle B > \angle C$  ト

シ,  $\angle CBD$  ガ  $\frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$ ニ等シク

ナルヤウニ作ツテ定理16ヲ證セ



ヨ。 [ $\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$  ナルコトニ注意セヨ]

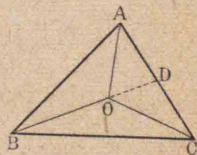
4. 三角形ABC内ニ一點Oヲトレバ,

$AB + AC > OB + OC$  (BOノ延長ガ

ACト交ル點ヲDトスレバ,

$AB + AD > BO + OD, OD + DC > OC,$

コノ二式ヲ邊々加ヘヨ)



5.\* 前問ニ於テ

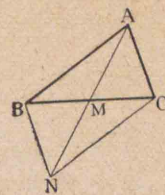
①  $AB + BC + CA > OA + OB + OC$

②  $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(BC + CA + AB)$

6.\* 三角形ABCノ中線AMヲMヲ

越エテ延長シ,  $MN = AM$ トスレバ,

$2AM = AN < AB + AC$



7. 三角形ノ三中線ノ和ハ三邊ノ

和ヨリ小サイ。(各中線ニ前問ヲ應用シ, ソノ和ヲ作レ)

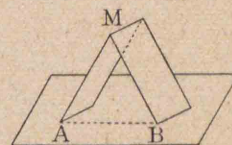
### 25. ニツノ三角形ノ邊ト角ノ關係

【觀察】 厚紙ヲ切り, コレヲ折り曲

ゲテ圖ノヤウニ立テ,  $\angle AMB$ ヲ増大

又ハ減少セシメレバ, A, B間ノ距離

モ増大又ハ減少スルコトヲ見ヨ。



【定理】 18. ニツノ三角形デ, 二邊ガ夫々相等シクソ

ノ夾角ガ不等デアレバ, 夾角ノ大キイ方ガソノ對邊

モ大キイ。

【假設】  $\triangle ABC$  及ビ  $\triangle A'B'C'$ ニ於テ  $AB = A'B',$

$AC = A'C', \angle A > \angle A'$ トスル。

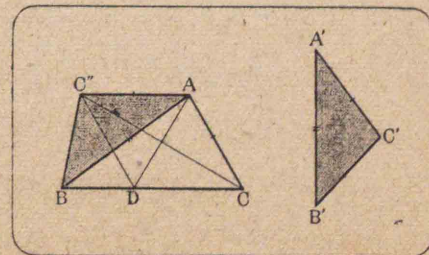
【終結】  $BC > B'C'$

【証明】  $AB = A'B'$

デアルカラ  $\triangle A'B'C'$

ヲツツテ,  $A'$ ハAニ,

$B'$ ハBニ落チルヤ



ウニ重ネ、C'ハ ABニ對シテCト反對ノ側ニアルヤ  
 ウニ置イタトキノ位置ヲC''トスレバ

$$\angle C''AB < \angle BAC \quad (\text{假設})$$

故ニ  $\angle C''AC$ ヲ2等分スル直線ハ  $\angle BAC$ ノ内部  
 ヲ通ツテ、BCト一點Dデ交ル。今C'',Dヲ結ベバ、  
 $\triangle C''AD, \triangle CAD$ ニ於テ

$AC'' = AC$ (假設)、ADハ共通、 $\angle C''AD = \angle CAD$ (作圖)

$$\therefore \triangle C''AD = \triangle CAD \quad (\text{定理9})$$

$$\therefore C''D = CD \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{又} \quad BC'' < C''D + DB \quad (\text{定理17})$$

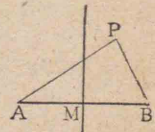
$$\therefore BC'' < CD + DB \quad [(1) = \text{ヨル}]$$

$$\text{即チ} \quad B'C' < BC$$

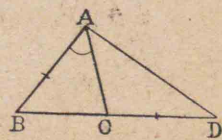
**問題**

1. 定理18ニ於テ  $\angle A$ ノ大小ハツノ對邊BCノ大  
 小ニ比例スルカ否カラヲ圖ヲ畫イテ調べヨ。

2. 線分ABノ垂直二等分線外ノ任  
 意ノ點PカラA,Bニ至ル距離ハ等  
 シクナイ。



3. 三角形ABCノ邊BCヲCノ  
 方ヘDマデ延長シ、CDヲAB  
 ニ等シクトリ、AトDトヲ結ベ



バ、 $AD > BC$

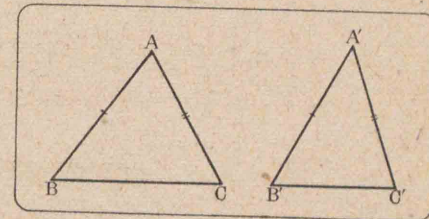
**定理19.** ニツノ三角形デ二邊ガ夫々相等シク第  
 三邊ガ不等デアレバ、邊ノ大キイ方ガ對角モ大キイ。

**假設**  $\triangle ABC$  及ビ  $\triangle A'B'C'$ ニ於テ  $AB = A'B'$ ,  
 $AC = A'C'$ ,  $BC > B'C'$ トスル。

**終結**  $\angle A > \angle A'$

**証明**  $\angle A$ ト $\angle A'$

ヲ比較スルニ、次ノ  
 三ツノ場合ノウチ、  
 唯一ツガ成立スル。



(1)  $\angle A = \angle A'$  (2)  $\angle A < \angle A'$  (3)  $\angle A > \angle A'$

サテ今假ニ  $\angle A = \angle A'$ デアルトスレバ

$$BC = B'C' \quad (\text{定理9})$$

コレハ假設ニ反スルカラ採用出來ナイ。

又假ニ  $\angle A < \angle A'$ デアルトスレバ

$$BC < B'C' \quad (\text{定理18})$$

コレモ亦假設ニ反スルカラ採用出來ナイ

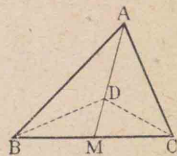
故ニ  $\angle A > \angle A'$ デナケレバナラナイ。

**注意** 本定理ハ兩圖形ヲ定理18ノ證明ノトキノヤウ  
 ニ置ケバ轉換法ニヨラズ、直接ニ證明スルコトガ出來ル。

問題

1.\* ニツノ二等邊三角形ノ底邊ガ不等デ等邊ガ相等シイトキハ、大キイ底邊ニ對スル頂角ハ小サイ底邊ニ對スル頂角ヨリ大キイ。

2.\* 三角形ABCノ邊BCノ中點ヲMトスル。AB>ACナラバ、 $\angle AMB$ ハ鈍角、 $\angle AMC$ ハ銳角デアル。

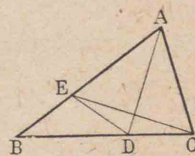


3.\* 前問デ線分AM上ニ一點Dヲトレバ、 $DB > DC$

例題

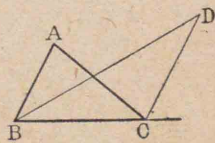
1. 二點P,Qハ直線ABニ對シテ反對ノ側ニアツテ、且ツABヨリノ距離ガ相等シイトキ、線分PQハABニヨツテ2等分サレル。

2. 三角形ABCニ於テ $AB > AC$ トシ、 $\angle A$ ノ二等分線ガBCト交ル點ヲDトスル。CカラADニ下シタ垂線ガABト交ル點ヲEトスレバ、



$$\triangle ADC \equiv \triangle ADE$$

3. 三角形ABCノ $\angle B$ ノ二等分線ト頂點Cニ於ケル外角ノ二等分線トノ交點ヲDトスレバ、



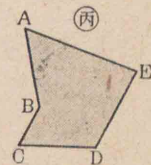
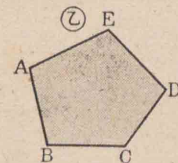
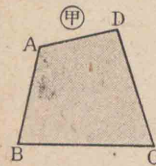
$$\angle BDC = \frac{1}{2} \angle A$$

第四章 多角形

26. 多角形

若干ノ線分ガソノ各、ノ端ニ於テ互ニ接續シテ圍ンダ平面ノ部分ヲ多角形トイフ。

多角形ヲ圍ム各線分ヲソノ邊、スベテノ邊ノ和ヲソノ周、二隣邊ノ交點ヲソノ頂點トイヒ、二隣邊ガ作ル形内ノ角ヲ多角形ノ内角又ハ單ニ角トイフ。



多角形ノ角ト邊ノ數トハ相等シイ。コノ數ニヨツテ三角形、四角形、五角形又ハ三邊形、四邊形、五邊形ナドトイフ。

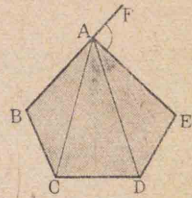
多角形ヲ呼ブニハ相隣ル頂點ノ名ヲ順次ニ唱へ、四邊形ABCD、五邊形ABCDEナドトイフ。

多角形ノ内角ガスベテ2直角ヨリ小デアルモノヲ凸多角形(上圖甲、乙)トイヒ、一ツデモ2直角ヨリ大ナルモノガアレバ凹多角形(上圖丙)トイフ。

**注意** 今後單ニ多角形トイヘバ、凸多角形ヲ指スモノトスル。

多角形ニ於テ相隣ラナイ二頂點ヲ結ブ線分ヲソノ對角線トイフ。

右圖デ AC, AD ハ頂點 A カラ引イタ對角線デアル。



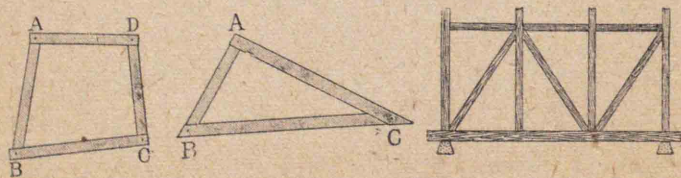
多角形ノ一邊トソノ隣邊ノ延長トノナス角ヲ多角形ノ外角トイフ。

上圖デ  $\angle EAF$  ハ五邊形 ABCDE ノ一外角デアル。

正多角形 内角ノ大イサガスベテ相等シク、且ツ邊ノ長サガスベテ相等シイ多角形ヲ正多角形トイフ。

問題 1

1. 細長ク切ツタ厚紙ヲびんデ繼ギ合セテ三角形、四角形ヲ作レ。次ニ四角形ノ何レカノ隅ヲ引キ又ハ押スコトニヨツテ形ガ變ルカ否カラ見ヨ。三角形デハドウカ。家ヲ建テルトキ柱ト柱トノ間ニ筋違ヲ入レル理由ヲ考ヘヨ。



2. 五角形デハ、一ツノ頂點カラソノ頂點トソレニ

隣ル二頂點トヲ除イタ數、即チ  $5-3$  本ノ對角線ガ引ケル。ソシテ各頂點カラ同様ニ對角線ヲ引ケバ、全體デ  $(5-3) \times 5$  本ノ對角線ガ引ケル。併シソノウチ、二本ヅツハ重ナルカラ、ソノ總數ハ  $\frac{(5-3) \times 5}{2}$  即チ 5 本トナル。コレカラ推理シテ多角形ノ邊數ガ  $n$  ノトキノ對角線ノ數ヲ表ハス公式ヲ書ケ。

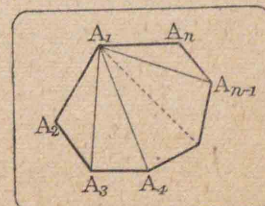
27. 多角形ノ内角ノ和

觀察 多角形ハ一頂點カラ引キ得ル對角線ニヨツテ、幾ツノ三角形ニ分レルカヲ考ヘテ次ノ表ヲ完結セヨ。

多角形ノ邊ノ數	一頂點カラノ對角線ニヨツテ出來ル三角形ノ數	多角形ノ内角ノ和
4	2 即チ $4-2$	$(4-2) \times 180^\circ = 4\angle R$
5	3 " $5-2$	$(5-2) \times 180^\circ = 6\angle R$
6		
⋮		
$n$		

定理 20.  $n$  角形ノ内角ノ總和ハ直角ノ  $2(n-2)$  倍ニ等シイ。

証明 省略スル。(上ノ觀察ニヨリ  $n$  角形ハ一頂點カラノ對角線ニヨツテ  $(n-2)$  個ノ三角形ニ分レルコトト、定理 8[2]ヲ用ヒヨ)

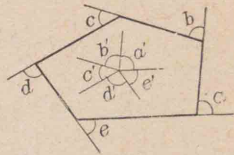


系 1. 四邊形ノ内角ノ和ハ4直角デア

系 2. 多角形ノ各頂點ニ於ケル外角ヲ一ツツト

ツタ和ハ4直角ニ等シイ。

(多角形内ノ一點カラ圖ノヤウニ引イテ出來ル角ト外角トヲ比較セヨ)

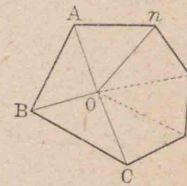


注意 多角形ノ外角ノ和ハ邊ノ數ニ關係シナイ。

問題 20

1. 多角形内ノ一點Oト各頂點ト

ヲ結ンデ定理20ヲ證セヨ。



2. 正五角形,正六角形ノ一ツノ内

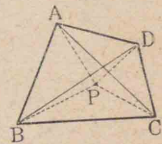
角ハ夫々何度カ。

3. 一外角ノ大イサガ 24° ナル正多角形ハ何角形

カ。

4. 四邊形ノ四ツノ頂點カラノ距離

ノ和ガ最小ナル點ヲ求メヨ。



5. 四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ和ハ

邊AD,BCノ和ヨリ大キイ。又邊AB,CDノ和ヨリ大キイ。

6. 四邊形ノ周ハ一ツノ對角線ノ2倍ヨリ大キイ。

又兩對角線ノ和ヨリ大キイ。

第五章 平行四邊形

28. 四邊形ノ種類

四邊形ノ相隣ラナイ二邊ヲ相對スル邊又ハ對邊, 相隣ラナイ二角ヲ相對スル角又ハ對角トイフ。

平行四邊形 二組ノ對邊ガ夫々平行デア  
ル四邊形ヲ平行四邊形トイフ。

平行四邊形

ABCD ト記ス

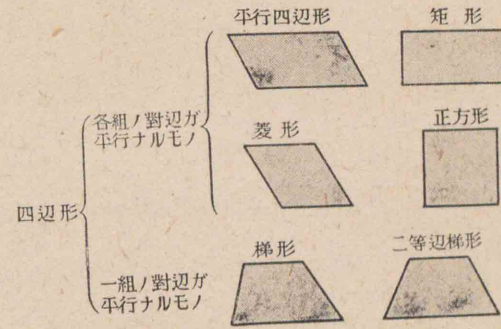
代リニ

□ABCD 又ハ

□AC, □BD ナ

ドデ表ハスコ

トモアル。



矩形 角ガスベテ相等シイ四邊形ヲ矩形トイフ。

定理20系1ニヨツテ矩形ノ各角ハ直角デア

矩形 ABCD ト記ス代リニ □ABCD 又ハ □AC, □BD ナドデ表ハスコトモアル。

菱形 邊ガスベテ相等シイ四邊形ヲ菱形トイフ。

正方形 邊ガスベテ相等シイ矩形ヲ正方形トイフ。

正方形 ABCD ト記ス代リニ □ABCD 又ハ □AC, □BD ナドデ表ハスコトモアル。

梯形 一組ノ對邊ガ平行デ、他ノ一組ノ對邊ガ平行デナイ四邊形ヲ梯形トイフ。

梯形ノ平行デアル二邊ヲ底邊又ハ底トイフ  
二等邊梯形 平行デナイ二邊ガ相等シイ梯形ヲ二等邊梯形又ハ等脚梯形トイフ。

## 29. 平行四邊形ノ性質

〔定理〕 21. 平行四邊形デハ、

- [1] 相隣レル角ハ互ニ補角ヲナス。
- [2] 相對スル角ハ相等シイ。
- [3] 相對スル邊ハ相等シイ。
- [4] 對角線ノ各、ハコノ平行四邊形ヲ合同デアルニツノ三角形ニ分ツ。
- [5] 對角線ハ互ニ他ヲ2等分スル。

〔証明〕 平行四邊形ヲ ABCD トスル。

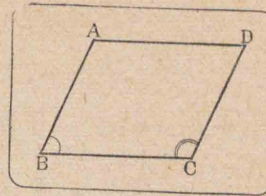
- [1]  $AB \parallel DC$  (假設)  
 $\therefore \angle B + \angle C = 2\angle R$  (定理6系1[2])

同様ニ  $\angle A + \angle D = 2\angle R$

又  $AD \parallel BC$  (假設)

$\therefore \angle A + \angle B = 2\angle R$

同様ニ  $\angle D + \angle C = 2\angle R$



[2]  $\angle A + \angle B = \angle A + \angle D = 2\angle R$  ([1]ニヨル)

$\therefore \angle B = \angle D$  同様ニ  $\angle A = \angle C$

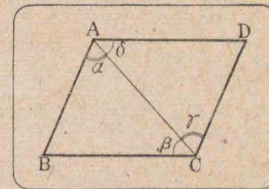
[3] 對角線 AC ヲ引ケバ、 $\triangle ABC, \triangle CDA$ ニ於テ

$$\left. \begin{array}{l} \angle \alpha = \angle \gamma \\ \angle \beta = \angle \delta \end{array} \right\} \text{(定理6)}$$

ACハ共通

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$  (定理10)

$\therefore AB = CD, BC = AD$



[4] 上ノ證明中ニ含マレル。

[5] 對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスレバ、 $\triangle AOB,$

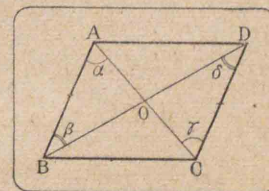
$\triangle COD$ ニ於テ

$$\left. \begin{array}{l} \angle \alpha = \angle \gamma \\ \angle \beta = \angle \delta \end{array} \right\} \text{(定理6)}$$

$AB = CD$  ([3]ニヨル)

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$  (定理10)

$\therefore AO = OC, BO = OD$



〔案〕 平行二直線ノ一ツノ上ニアル任意ノ點カラ他

ノ直線ニ至ル距離ハ一定デアル。

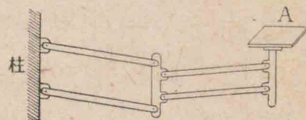
【注意】 コノ長サヲ平行二直線間ノ距離トイフ。

平行四邊形ノ一邊ヲ底邊ト考ヘルトキ、コレニ平行デアル邊ト底邊トノ間ノ距離ヲ高サトイフ。梯形デハ兩底間ノ距離ヲ高サトイフ。

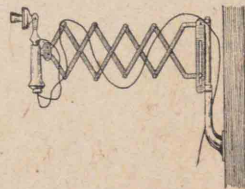
問題

- 1. 平行四邊形ノ一角ガ直角デアレバ、矩形デアル。
- 2. 平行四邊形ノ相隣ル二邊ガ等シケレバ、菱形デアル。
- 3. 兩對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。

4. 右ノ上圖ハ水平臺ト稱シ、臺Aヲ水平ニ保チナガラ前後左右ニ動カシ得ルモノデアル。如何ナル理由ニヨルカ。又下圖ハ電話器ヲ水平ニ前後ニ動カス装置デアル。コノ構造ヲ述ベヨ。



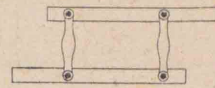
モノデアル。如何ナル理由ニヨルカ。又下圖ハ電話器ヲ水平ニ前後ニ動カス装置デアル。



- 5. 平行四邊形ノ對角ノ大イサガ夫々  $5(y+6)$  度、 $(21y-34)$  度デアル。  $y$  ヲ求メヨ。
- 6. 平行四邊形ノ對角ノ大イサガ、夫々  $(3x+5)$  度、 $(6y+2)$  度デ、殘リノ角ノ一ツガ  $(143+9y-2x)$  度デア

ル。  $x, y$  ヲ求メテ各角ノ大イサヲ言ヘ。

7. 菱形ノ兩對角線ハ各、ソノ内角ヲ2等分シ、且ツ合同ナ四ツノ直角三角形ニ分ツ。



8. 左圖ハ平行定規デアル。ソノ構造及ビ使用法ヲ考察セヨ。

【定理】 22. 四邊形ハ次ノ各ノ場合ニ於テ平行四邊形デアル。

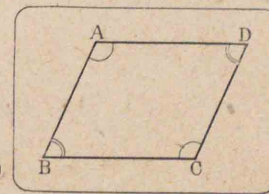
- [1] 一ツノ角ガコレニ隣ル角ノ各ト互ニ補角ヲナストキ、
- [2] 二組ノ相對スル角ガ夫々相等シイトキ、
- [3] 二組ノ相對スル邊ガ夫々相等シイトキ、
- [4] 一組ノ相對スル邊ガ相等シク、且ツ平行デアルトキ、
- [5] 對角線ガ互ニ他ヲ2等分スルトキ。

【証明】 四邊形ヲ ABCD トスル。

- [1]  $\angle B + \angle A = 2\angle R$   
 $\angle B + \angle C = 2\angle R$

トスレバ

$BC \parallel AD, AB \parallel DC$  (定理5系2)



故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

[2]  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4\angle R$  (定理20系1)

然ルニ  $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$  (假設)

$\therefore \angle A + \angle B = 2\angle R, \angle B + \angle C = 2\angle R$

故ニ [1]ニヨリ ABCDハ平行四邊形デアル。

[3]  $AB = CD, BC = AD$

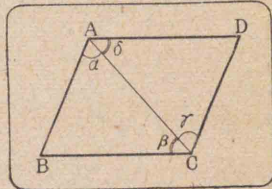
トシ、對角線 ACヲ引ケバ

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$  (定理11)

$\therefore \angle a = \angle \gamma, \angle \beta = \angle \delta$

$\therefore AB \parallel DC, BC \parallel AD$  (定理5)

故ニ ABCDハ平行四邊形デアル。



[4]  $AD = BC, AD \parallel BC$  トシ、對角線 ACヲ引ケバ

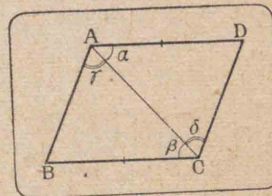
$\angle a = \angle \beta$  (定理6)

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle CDA$  (定理9)

$\therefore \angle \gamma = \angle \delta$

$\therefore AB \parallel DC$  (定理5)

故ニ ABCDハ平行四邊形デアル。



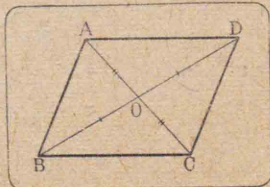
[5] 兩對角線ノ交點ヲOトシ、 $OA = OC, OB = OD$ ト

スル。

$\angle AOB = \angle COD$  (定理2)

$\therefore \triangle OAB \equiv \triangle OCD$  (定理9)

$\therefore AB = DC$



同様ニ  $AD = BC$

故ニ [3]ニヨツテ ABCDハ平行四邊形デアル。

系1. 菱形ハ平行四邊形デアル。

系2. 菱形ノ對角線ハ互ニ他ヲ垂直ニ2等分スル。

逆ニ四邊形ノ兩對角線ガ互ニ他ヲ垂直ニ2等分スレバ、ソノ四邊形ハ菱形デアル。

系3. 矩形ハ平行四邊形デアツテ、ソノ兩對角線ハ相等シイ。

問題

1. 次ノ條件ニヨツテ平行四邊形ヲ畫キ、各邊ノ長さヲ測ツテ見ヨ。

① 對角線ノ長さガ4cm, 6cm, ソノ夾角ガ60°

② 底邊6cm, 他ノ邊ガ4cm, ソノ夾角ガ60°。

2. 紙片ヲ右圖ノヤウニ、ABヲ折

目トシテ折り、次ニOA, OBガ重ナ

ルヤウニ折ツテ、直線PQニ沿ウ

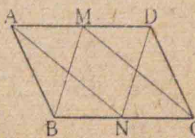
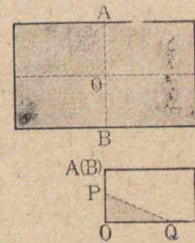
テ剪ミ截レバ、一般ニ菱形ガ得ラ

レル。コノ方法ニヨツテ正方形

ヲ作ルニハドウスレバヨイカ。

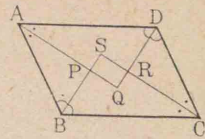
3. 平行四邊形ノ一組ノ對邊ノ

中點ヲ夫々ソノ對邊ノ兩端ニ





結ンデ出來ル四邊形ハ平行四邊形デア  
形デアアル。



4. 平行四邊形ノ各角ヲ2等分スル四ツノ直線ハ一ツノ矩形ヲ作ル。

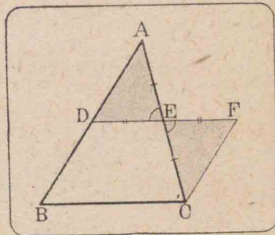
30. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分

**定理 23.** 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ、第三邊ニ平行デ、且ツソノ半分ニ等シイ。

**假設**  $\triangle ABC$ ニ於テ、邊  $AB, AC$ ノ中點ヲ夫々  $D, E$ トスル。

**結論**  $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$

**証明**  $DE$ ヲ  $F$ マデ延長シ、 $EF = DE$ ナラシメ、 $F, C$ ヲ結ベバ



$\triangle AED \cong \triangle CEF$  (定理9)

$\therefore FC = AD = BD$  ( $D$ ハ  $AB$ ノ中點)

且ツ  $\angle ADE = \angle EFC \therefore DB \parallel FC$

故ニ  $DBCF$ ハ平行四邊形デアアル。 [定理22(4)]

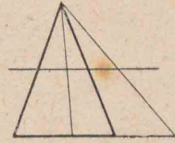
從ツテ  $DE \parallel BC$  又  $DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$

**附** 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通り、他ノ一邊ニ平行デアアル直線ハ、第三邊ノ中點ヲ通ル。

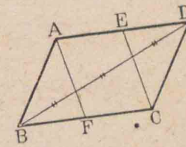
問題

1. 正三角形ノ三邊ノ中點ヲ結ンデ出來ル三角形ハ又正三角形デアアル。

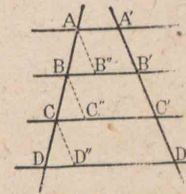
- 2.\* 三角形ノ一頂點カラ對邊(又ハソノ延長)ヘ引イタ線分ハ、他ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線ニヨツテ2等分サレル。



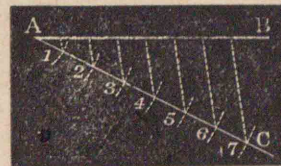
3. 平行四邊形  $ABCD$ ノ相對スル邊  $AD, BC$ ノ中點ヲ夫々  $E, F$ トスレバ、 $AF = CE$ デ、且ツ  $AF, CE$ ハ對角線  $BD$ ヲ3等分スル。



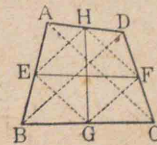
4. 數多ノ平行線ガ一直線ト交ツテ、コレカラ等シイ線分ヲ截リトルトキハ、他ノ何レノ直線ト交ツテモ、ソレカラ等シイ線分ヲ截リトル。



5. 與ヘラレタ線分ヲ7等分セヨ。



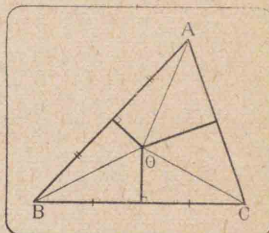
6. 四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ブ二ツノ直線ハ互ニ他ヲ2等分スル。



31. 三角形ノ内心・外心・重心・垂心

**定理 24.** 三角形ノ各角ヲ2等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

**証明**  $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A$ 及ビ $\angle B$ ノ二等分線ハ三角形内デ相交ル。ソノ交點ヲ $O$ トシ、 $O$ カラ三邊 $BC, CA, AB$ ニ夫々垂線 $OD, OE, OF$ ヲ引ケバ



$OE=OF, OF=OD$  (48頁, 問題4)

$\therefore OE=OD$

即チ $O$ ハ $\angle C$ ノ二等分線上ニアル。(49頁, 問題6)

故ニ三角形ノ各角ヲ2等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

**注意** コノ點 $O$ ヲ三角形ノ内心トイフ。

**系** 三角形ノ内心カラ各邊マデノ距離ハ相等シイ。

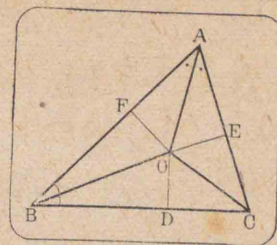
**定理 25.** 三角形ノ各邊ヲ垂直ニ2等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

**証明**  $\triangle ABC$ ニ於テ、二邊 $AB, BC$ ハ相交ルカラソノ各、ヲ垂直ニ2等分スル二直線ハ相交ル(38頁, 問題4)。ソノ交點ヲ $O$ トシ、コレヲ各頂點ニ結ベバ、

$OA=OB, OB=OC$  (定理9系1)

$\therefore OA=OC$

即チ點 $O$ ハ又邊 $AC$ ヲ垂直ニ2等分スル直線上ニアル(定理13系)。



故ニ三角形ノ各邊ヲ垂直ニ2等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

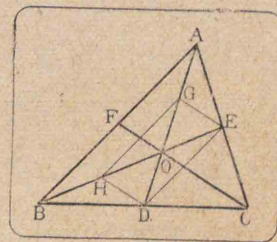
**注意** コノ點 $O$ ヲ三角形ノ外心トイフ。

**系** 三角形ノ外心カラ各頂點マデノ距離ハ相等シイ。

**定理 26.** 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點デ交リ、ソノ交點ハ各中線ノ頂點カラ $\frac{2}{3}$ ノトコロデアル。

**証明** 次ノヤウニ考ヘテ證明セヨ。

邊 $BC, CA, AB$ ノ中點ヲ夫々 $D, E, F$ トスル。



(1)  $AD, BE$ ハ相交ル。ソノ交點ヲ $O$ トシ、 $AO$ ノ中點 $G$ ト $BO$ ノ中點 $H$ トヲ結ビ、又 $G,$

$E; E, D; D, H$ ヲ結ベバ、 $DEGH$ ハ平行四邊形トナル。

(2) 對角線 $HE, DG$ ハドンナ點デ交ルカ。

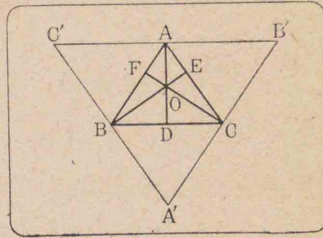
(3)  $AO = \frac{2}{3} AD, BO = \frac{2}{3} BE$

(4)  $AD$ ト $CF$ トハドコロデアルカ。

【注意】 コノ點Oヲ三角形ノ重心トイフ。

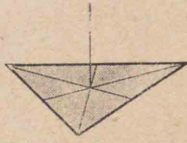
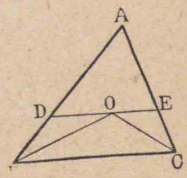
【定理】 27. 三角形ノ各頂點カラソノ對邊ヘ引イタ  
三ツノ垂線ハ、同一ノ點ヲ通ル。

【証明】 省略スル。圖ノ  
ヤウニ各頂點ヲ通ツテソノ  
對邊ニ平行線ヲ引イテ出來  
ル△A'B'C'ニ定理25ヲ用ヒテ  
證セヨ)



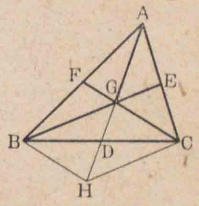
【注意】 コノ交點Oヲ三角形ノ垂心トイフ。

問題 是問

1. 厚紙ニ三角形ヲ畫キ、ソノ重心ノ位置ヲ求メ、次  
ニコノ三角形ヲ切り離シテ重心  
ノ位置ニ糸ヲ通シテ吊シテ見ヨ。
2. 三角形ノ内心、外心、垂心ノ三點  
ガ一致スル三角形ハ、ドシナ三角形カ。
3. 三角形ノ内心及ビ外心ハ、常ニ三角形ノ内部ニ  
アルカ否カラ言ヘ。直角三角形  
ノ外心ハ、ドコニアルカ。
4. 三角形ABCノ内心Oヲ通り BC  
ニ平行ニ引イタ直線ガ AB, ACト  
交ル點ヲ夫々 D, Eトスレバ、  $DE = BD + CE$

5. 三角形ノ二邊ノウチ、小サイ邊ヘノ中線ハ大キ  
イ邊ヘノ中線ヨリ大キイ。(60頁、問題3利用)

雑題 是問

1. 梯形ノ底デナイ一邊ノ中點ヲ通ツテ底ニ平行  
デアル直線ハ對邊ノ中點ヲ通ル。又コノ兩中點  
間ノ距離ハ兩底ノ和ノ半分ニ等シイ。
2. 三角形ノ三中線ガ一點デ交ルコトヲ圖ノヤウ  
ニシテ證明セヨ。圖ハ中線 BE,  
CFノ交點ヲ G トシ、A, Gヲ結ビ、コ  
レヲ延長シテ邊 BCト Dデ交ラシ  
メ、更ニ延長シテ GHヲ AGニ等シ  
クトリ B, H; H, Cヲ結ンダノデアル。
3. 前問ノ圖ニ於テ △BGHノ各邊ハ夫々 △ABCノ  
三中線ノ  $\frac{2}{3}$ ニ等シイ。
4. 二等邊三角形ノ底邊(又ハソノ延長)上ノ一點カ  
ラ他ノ二邊ニ下シタ垂線ノ和(又ハ差)ハ、底ノ一端  
カラ對邊ニ下シタ垂線ニ等シイ。
5. 正三角形内ノ一點カラ各邊ニ引イタ三ツノ垂  
線ハコノ三角形ノ一ツノ垂線ニ等シイ。(ソノ點  
ヲ通り一邊ニ平行ナ直線ヲ引イテ前問ニ歸セヨ)

# 第三篇 圓

## 第一章 圓ノ基本性質

### 32. 圓

圓ト看做シ得ルモノノ實例ヲ舉ゲヨ。

線分 OA ノ一端 O ヲ固定シ、コレヲ平面上  
 デ一廻轉サセタトキ、他ノ端 A ガ畫ク曲線  
 ヲ圓周トイヒ、線分 OA ガ通ル平面ノ部分ヲ  
 圓トイフ。

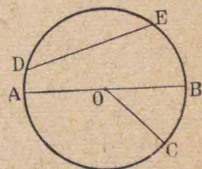
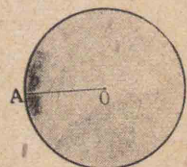
コノトキ O ヲ中心トイヒ、圓周上  
 ノ一點ト中心トヲ結ブ線分ヲ半径、  
 圓周上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ弦、中心  
 ヲ通ル弦ヲ直径トイフ。

右圖デ OA, OB, OC ハ半径、DE ハ  
 弦 AB ハ直径デアル。

中心 O ナル圓ヲ表ハスニ圓 O ト書ク。

圓ノ定義カラ直チニ次ノコトガワカル。

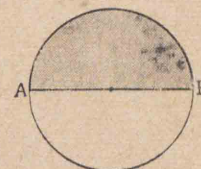
[1] 同ジ圓ノ半径ハ皆相等シイ。從ツテ直径モ亦



相等シイ。

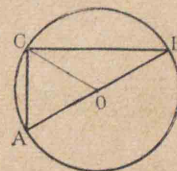
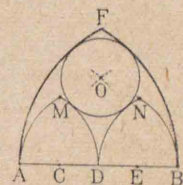
- [2] 半径ガ相等シイニツノ圓ハ合同デアル。
- [3] 合同デアルニツノ圓ノ半径ハ相等シイ。
- [4] 直径ハ圓及ビ圓周ヲ2等分スル。

直径デ分タレタ圓及ビ圓  
 周ノ各部ヲ夫々半圓及ビ半  
 圓周トイフ。



問題 1

1. 右ノ圖ヲ畫イテ見ヨ。
2. 矩形ノ四ツノ頂點ハ對角線  
 ノ交點ヲ中心トスルーツノ圓  
 周上ニアル。
3. 圓ノ一ツノ弦ノ兩端ヲ中心ニ結ベバ、二等邊三  
 角形トナル。
4. 直径ノ兩端ヲ圓周上ノ一點ニ  
 結ベバ直角三角形トナル。(圓周  
 上ノ點ト中心トヲ結ビ、前問ヲ利用  
 セヨ)



### 33. 圓ト直線トノ位置ノ關係

**定理 28.** 圓ノ中心カラ直線マデノ距離ガ、

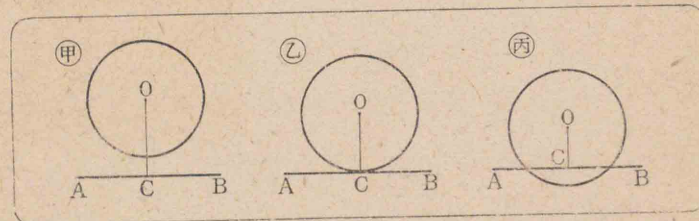
- [1] 半径ヨリ大デアレバ、圓ト直線トハ共有點ヲモ

タナイ。(甲圖)

[2] 半徑ニ等シケレバ圓周ト直線トハ唯一點ヲ共有スル。(乙圖)

[3] 半徑ヨリ小デアレバ圓周ト直線トハ二點ヲ共有スル。

**証明** 省略スル。(定理16系ヲ用ヒヨ)



圓ト直線トガ唯一點ヲ共有スルトキハ、コノ圓ト直線トハ相切スルトイヒ、コノ直線ヲ圓ノ切線、ソノ共有點ヲ切點トイフ。

乙圖デABハ圓Oノ切線デ、Cハソノ切點デアル。

圓ト直線トガ二點ヲ共有スルトキハ、コノ圓ト直線トハ相交ルトイヒ、コノ直線ヲ圓ノ割線トイフ

丙圖デABハ圓Oノ割線デアル

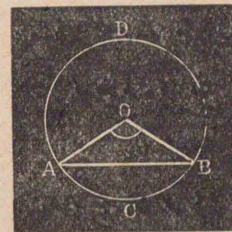
圓ノ切線又ハ割線ト看做シ得ルモノノ實例ヲ舉ゲヨ。

## 第二章 弧、弦及ビ中心角

### 34. 弧・中心角

圓周ノ一部分ヲ弧トイフ。

弧ヲ表ハスニハソノ兩端ノ文字ヲ用ヒ、弧AB又ハ $\widehat{AB}$ ト書キ、或ハ更ニ弧ノ上ニ一點Cヲトリ、弧ACB又ハ $\widehat{ACB}$ ナドト書ク。



圓ノ一ツノ弧トソノ残りノ弧トハ互ニ共軛デアルトイフ。ソノウチ大キイ方ヲ優弧、小サイ方ヲ劣弧トイフ。

上圖デ $\widehat{ACB}$ ハ劣弧デ、 $\widehat{ADB}$ ハ優弧デアル。

弧ノ兩端ヲ中心ニ結ブ二ツノ半徑ガナス角ヲ、コノ弧ノ上ニ立ツ中心角トイフ。

前圖デ劣角AOBハ劣弧ACBノ上ニ立ツ中心角デ、優角AOBハ優弧ADBノ上ニ立ツ中心角デアル。

**注意** 單ニ弧ABトイヘバ劣弧ABノコトデ、中心角AOBトイヘバ、劣弧ABニ對スル中心角ノコトデアル。

弧ノ兩端ヲ結ブ弦ヲコノ弧ヲ張ル弦トイフ。

前圖デ弦ABハ共軛弧ACB、ADBノ各、ヲ張ル弦

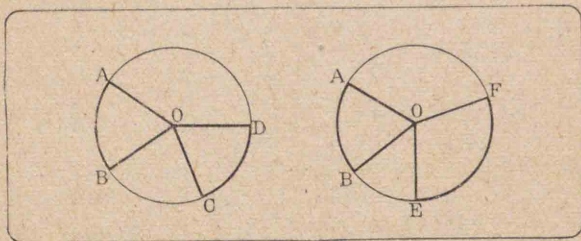
デアル。

一ツノ弧トコレヲ張ル弦及ビコノ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ夫々互ニ相對スルトイフ。

### 35. 弧ト中心角及ビ弦トノ關係

**定理 29.** 同ジ圓(又ハ等圓)ニ於テ,相等シイ弧ニ對スル中心角ハ相等シク,大キイ弧ニ對スル中心角ハ小サイ弧ニ對スル中心角ヨリ大キイ。

コノ逆モ亦眞デアル。

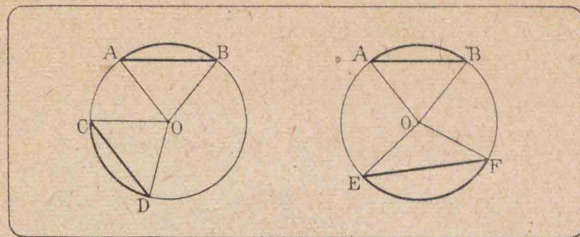


**証明** 省略スル。(重置法ニヨツテ證明セヨ)

**定理 30.** 同ジ圓(又ハ等圓)ニ於テ,弧ガ等シケレバコレヲ張ル弦ハ相等シク,大キイ劣弧ヲ張ル弦ハ小サイ劣弧ヲ張ル弦ヨリ大キイ。

コノ逆モ亦眞デアル。

**証明** 省略スル (弧ノ兩端ヲ夫々中心ニ結ンデ出來ルニツノ三角形ニ定理29及ビ定理9, 18ヲ用ヒテ本定



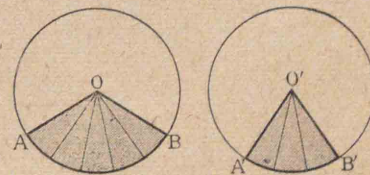
理ヲ證明シ,逆定理ノ證明ニハ定理11,19及ビ定理29ヲ用ヒヨ)

#### 問題 異質

1. 任意ノ圓ヲ畫キ,中心角ヲ  $20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ ニ作り,ソノ各ノ中心角ニ對スル弧ノ長サヲ測リ(ドウスレバヨイカ), 中心角ノ大イサト弧ノ長サトガ比例スルカ否カラ確メヨ。

**注意** 同ジ圓又ハ等圓ニ於テニツノ中心角ノ比ハソレニ對スル弧ノ比ニ等シイ。即チ弧ト中心角トハ比例スル。

今右圖デ  $O, O'$ ヲ等圓トスレバ  $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}$ デアル



**証明**  $\angle AOB, \angle A'O'B'$ ノ大イサヲ度ヲ單位トシテ表ハシタトキ,ソノ數ノ間ニ公約數  $m$ ガアルトスル

今,  $m$ デ各角ヲ割ツテ得タ數ヲ夫々  $r, s$ トスレバ,

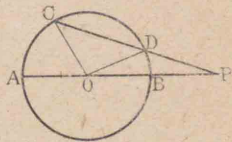
$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} = \frac{r}{s}$$

ヨツテ  $\angle AOB$   $\angle A'O'B'$  ナ夫々  $r$  等分,  $s$  等分スル半徑ヲ引ケバ,  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{A'B'}$  モ亦  $r$  等分,  $s$  等分セラレ, 且ツソレ等ノ弧ハ皆相等シイ。

故ニ  $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = \frac{r}{s} \therefore \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}$

$\angle AOB$ ,  $\angle A'O'B'$  ナ表ハス度数ノ間ニ公約數ガナイトキノ證明ハ複雑デアルカラ省略スル。

2. 任意ノ圓ヲ畫キ,  $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  ノ中心角ヲ作り, 夫々コレニ對スル弦ヲ引イテソノ長サヲ測リ, 中心角ノ大イサトソレニ對スル弦ノ長サトガ正例スルカ否カラ確メヨ。



3. 直徑ハ最大ノ弦デアル。

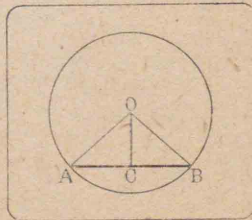
4. 右圖デPヲ圓Oノ直徑AB

ト弦CDトノ交點トスレバ,  $AP > CP, PB < PD$

### 36. 弦ノ垂直二等分線

**定理 31.** 圓ノ中心カラ弦ヘ引イタ垂線ハソノ弦ヲ2等分スル。

**証明** 省略スル。(定理13系ヲ用ヒテ證セヨ)



**系 1.** 弦ヲ垂直ニ2等分スル直

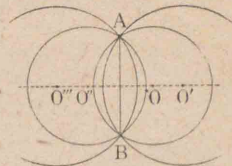
線ハ圓ノ中心ヲ通り, 且ツ弦ガ張ルニツノ共軌弧ノ各ヲ2等分スル。

**系 2.** 圓ノ中心ト弦(直徑ヲ除ク)ノ中點トヲ結ブ直線ハ, ソノ弦ヲ垂直ニ2等分スル。

**証明**

1. 圓ノ平行ナニツノ弦ノ中點ヲ結ブ直線ハソノ圓ノ中心ヲ通ル。

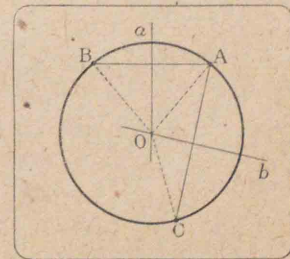
- 2.\* 二定點ヲ通ルスペテノ圓ノ中心ハ, コノ二定點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ2等分スル直線上ニアル。



3. 圓ノニツノ弦(直徑ヲ除ク)ハ互ニ他ヲ2等分スルコトハ出來ナイ。(定理31系2ヲ用ヒヨ)

**定理 32.** 同一直線上ニナイ三點ヲ通ル圓ハ常ニ唯一ツアル。

**証明** A, B, Cヲ同一直線上ニナイ三點トスル。線分ABヲ垂直ニ2等分スル直線  $a$  ト, 線分ACヲ垂直ニ2等分スル直線  $b$  トハ相交ル



(38頁,問題4).  $\Gamma$ ノ交點ヲ $O$ トスル。 $O$ ハ直線 $a$ 上ニアルカラ二點 $A, B$ カラ等距離ニアル(定理9系1). 又 $O$ ハ直線 $b$ 上ニアルカラ二點 $A, C$ カラ等距離ニアル。故ニ $O$ ハ三點 $A, B, C$ カラ等距離ニアル。

ヨツテ $O$ ヲ中心トシ, $OA$ ヲ半徑トスル圓ハ必ズ三點 $A, B, C$ ヲ通ル。故ニ $A, B, C$ ヲ通ル圓周ハ必ズアル。

次ニ三點 $A, B, C$ ヲ通ル圓ノ中心ハ弦 $AB$ ノ垂直二等分線 $a$ 上ニアルト同時ニ弦 $AC$ ノ垂直二等分線 $b$ 上ニモナケレバナラヌ(定理31系1). 然ルニ二直線 $a, b$ ハ唯一点 $O$ ヲ共有スルダケデアラカラ,三點 $A, B, C$ ヲ通ル圓ノ中心ハ $O$ ヨリ外ニナイ。ソシテ半徑ハ $OA$ ニ等シクナケレバナラナイ。

故ニ $A, B, C$ ヲ通ル圓ハ,常ニ唯一ツアル。

**注意** 三點ヲ通ル圓ハ唯一ツデアラカラ圓ヲ呼ブニハ, $\Gamma$ ノ周上ノ三點,例ヘバ $A, B, C$ ヲトツテ圓 $ABC$ トイフコトガアル。

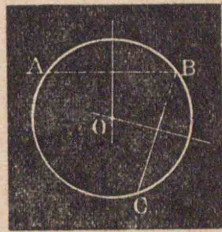
三角形ノ三ツノ頂點ヲ通ル圓ヲ $\Gamma$ ノ三角形ノ外接圓トイフ。

三角形ノ外心ハ $\Gamma$ ノ三角形ノ外接圓ノ中心デアアル。(74頁,定理25)

**問題** 二ツノ圓周ガ三點ヲ共有スレバ, $\Gamma$ ノ兩圓周ハ全ク重リ合ツテキル。

**作圖題** 8. 與ヘラレタ圓ノ中心ヲ求メルコト。

**作圖** 圓 $ABC$ ガ與ヘラレタトスル。先ツ任意ノ弦 $AB, BC$ ヲ引キ,コノ二弦ノ垂直二等分線ヲ作り, $\Gamma$ ノ交點ヲ $O$ トスル。 $O$ ハ求メル中心デアアル。



**問題**

1. 與ヘラレタ點ヲ通り,與ヘラレタ半徑デ與ヘラレタ直線上ニ中心ヲ持ツ圓ヲ畫ケ。
2. 點 $A$ カラ圓周上ノ三點 $P, Q, R$ ニ至ル距離 $AP, AQ, AR$ ガ皆相等シケレバ, $A$ ハ $\Gamma$ ノ圓ノ中心デアアル。

### 37. 弦ト中心トノ距離

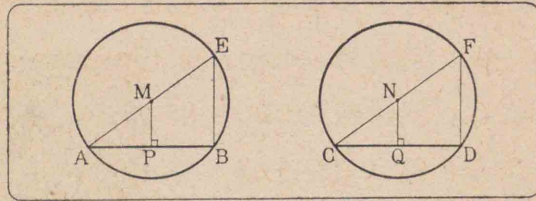
**定理** 33. 同ジ圓(又ハ等圓)ニ於テ,相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル。ソシテ大キイ弦ハ小サイ弦ヨリ中心ニ近イ。

圓 $M$ 及ビ $N$ ハ相等シイ圓デ, $AB, CD$ ハ $\Gamma$ ノ弦又 $MP, NQ$ ハ中心カラコレニ下シタ垂線トスル。



[1]  $AB=CD$  ナラバ,  $MP=NQ$

[2]  $AB>CD$  ナラバ,  $MP<NQ$



**証明** 直徑 AE, CF ヲ作り弦 BE, DF ヲ引ク  
 $\triangle ABE$  ニ於テ, P ハ AB ノ中點(定理31), M ハ AE ノ中點デアル。

$$\begin{array}{l} \text{ヨツテ} \\ \text{同様ニ} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} MP = \frac{1}{2}BE \\ NQ = \frac{1}{2}DF \end{array} \right\} \dots\dots\dots(1) \text{ (定理23)}$$

[1]  $AB=CD$  ナラバ, 劣弧  $AB=$  劣弧  $CD$  (定理30)

又半圓周  $ABE, CDF$  ハ相等シイカラ, コレカラ劣弧  $AB, CD$  ヲ夫々取り去レバ

劣弧  $BE=$  劣弧  $DF$  弦  $BE=$  弦  $DF$  (定理30)

$\therefore MP=NQ$  [1]ニヨル]

[2]  $AB>CD$  ナラバ, 劣弧  $AB>$  劣弧  $CD$  (定理30)

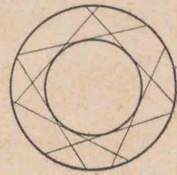
$\therefore$  劣弧  $BE<$  劣弧  $DF$   $\therefore$  弦  $BE<$  弦  $DF$  (定理30)

$\therefore MP<NQ$

**系 1.** 同ジ圓(又ハ等圓)デ, 中心カラ等距離ニアル弦

ハ相等シイ。ソシテ中心ニ近イ距離ニアル弦ハ中心ニ遠イ距離ニアル弦ヨリ大キイ。

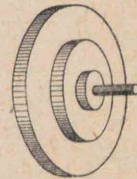
**系 2.** 圓ノ數多ノ弦ノ長サガ皆相等シイトキ, コレ等ノ弦ハコノ圓ノ中心ヲ中心トスルーツノ圓ニ切スル。



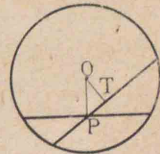
ニツ以上ノ圓ガ同一ノ中心ヲモツトキ, コレ等ノ圓ヲ同心圓トイフ。

**問題**

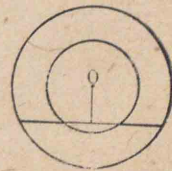
1. 次ノ圖ハ調革ヲ掛ケル車ノ一方ヲ示シタモノデアル。コレニハ幾組ノ同心圓ガアルカ。



2. 圓O内ノ點Pヲ通ル弦ノ中デ最大及ビ最小デアルモノハ何カ。(OPヲ結ビ, Pヲ通ル任意ノ弦ニ中心Oカラ垂線ヲ下シテ見ヨ)



3. 一直線ガニツノ同心圓ノ各ト交ルトキ, コノ二圓周ノ間ニ夾マレルニツノ線分ハ相等シイ。



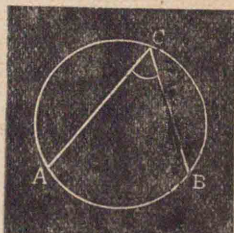
### 第三章 圓周角・弓形

#### 38. 圓周角・弓形

圓周上ノ一點カラ引イタニツノ弦ノ夾ム角ヲ圓周角トイフ。

圓周角ハソノ内部ニアル弧ノ上ニ立ツトイヒ、コノ弧ト圓周角トハ互ニ相對スルトイフ。

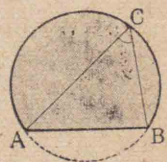
右圖デ  $\angle ACB$  ハ弧  $AB$  ノ上ニ立ツ圓周角デアル。



圓ノ弦ハ圓ヲニツノ部分ニ分ツ。ソノ各ヲ弓形トイヒ、弦ヲ弓形ノ弦トイフ。

右圖デ影ヲツケタ部分ハ弓形デアル。

弓形ノ弧ノ上ノ一點ヲソノ弦ノ兩端ニ結ビツケタニツノ弦ノナス角ヲ弓形ノ角又ハ弓形ガ含ム角トイフ。

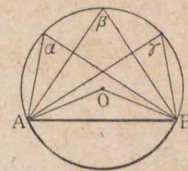


圖デ  $\angle ACB$  ハ弓形  $ACB$  ノ角デアル。

**注意** 弓形ノ角ハソノ弓形ノ弧ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角デアル。

#### 39. 中心角ト圓周角トノ關係

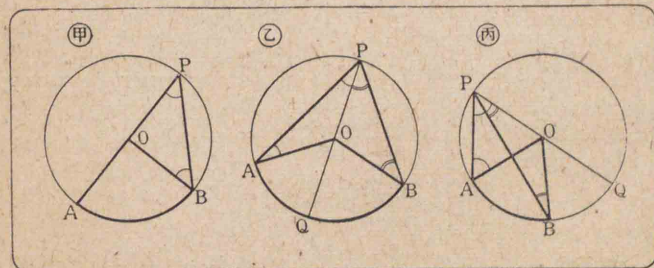
**觀察** 弧  $AB$  ノ上ニ立ツ圓周角  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ヲ畫キ、各ヲ分度器デ測ツテ見ヨ。皆相等シイカ。次ニ中心角  $AOB$  ヲ測ツテ見ヨ。圓周角ノ何倍カ。



**定理 34.** 圓周角ハコレニ對スル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シイ

**假設** 圓  $O$  ニ於テ、弧  $AB$  ノ上ニ立ツ圓周角ヲ  $APB$ 、中心角ヲ  $AOB$  トスル。

**終結**  $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$



**証明 [1]** 中心  $O$  ガ圓周角ノ一邊、例ヘバ  $PA$  上ニアル場合。 (甲圖)

$\angle AOB$  ハ二等邊三角形  $OBP$  ノ外角デアル。

$\therefore \angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$

[2] 中心  $O$  ガ圓周角ノ内部ニアル場合。 (乙圖)

Pヲ通ル直徑PCQヲ作レバ

$$\angle APQ = \frac{1}{2} \angle AOQ, \quad \angle BPQ = \frac{1}{2} \angle BOQ$$

$$\therefore \angle APQ + \angle BPQ = \frac{1}{2} (\angle AOQ + \angle BOQ) \text{ ([1]ノ場合)}$$

即チ  $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$

[3] Oガ圓周角ノ外部ニアル場合。(丙圖)

[2]ノ證明ニ倣ツテ  $\angle APQ \sim \angle BPQ$ ヲ作ツテ見ヨ

図1. 同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ皆相等シイ。從ツテ同ジ弓形ガ含ムスベテノ角ハ相等シイ。

図2. 同ジ圓(又ハ等圓)デ相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ皆相等シイ。コノ逆モ亦眞デアル。

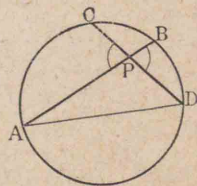
図3. 直徑ノ上ニ立ツ圓周角(即チ半圓ガ含ム角)ハ直角デアル。コノ逆モ亦眞デアル。

問題 見直

1. 圓周ノ  $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ノ大イサハ各幾度カ。

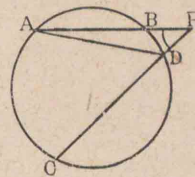
2.\* 圓ノ二弦 AB, CD ガPデ交レバ,  $\triangle APC, \triangle DPB$ ハ等角デアル。

3.\* 圓ノ二弦 AB, CD ガ圓内ノ點 Pデ交ツテナス角 APCハ, コノ



角トツノ對頂角ノ内部ニアル弧ノ各ノ上ニ立ツ圓周角ノ和ニ等シイ

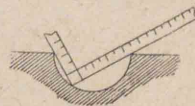
4.\* 前題デ二弦 AB, CD ガ圓外ノ點 Pデ交ルトキハ, 角 APCハコノ角ノ内部ニアル二ツノ弧ノ各ノ上ニ立ツ圓周角ノ差ニ等シイ。



5. AB, CDハ一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル直徑デアル。劣弧 BC 上ニ一點 Pヲトルトキハ,  $\angle APB = 2\angle APC$

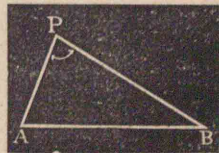
6.\* 三角形 ABCノ邊 BCハ固定シ, 頂點 Aガツノ外接圓ノ弧 BACノ上ヲ動クトキ, 角 Aノ二等分線ハ圓周上ノ一定點ヲ通ル。

7. 大工ハ半圓ガ正シイカ否カラ調ベルノニ曲尺ヲ圖ノヤウニ當テテ見ル。ソノ理由ヲ説明セヨ。



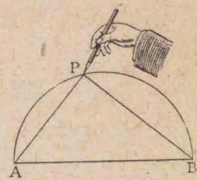
40. 弦ヲ見込ム角ノ大小

一點ト線分ノ兩端トヲ, 結ブ二線分ガ夾ム角ヲ, コノ點デソノ線分ヲ見込ム角トイフ。



前圖デ  $\angle P$  ハ點 P デ線分 AB ヲ見込ム角デアル。

**觀察** 圖ノヤウニ線分 AB ヲ弦トスル弓形ヲ畫キ、A、B ノ間ニこむ絲ヲ張り、鉛筆ノ先デこむ絲ヲカケテ弧ニ沿ウテ動かストキ  $\angle APB$  ノ大イサハ變化スルカ。又鉛筆ヲ弓形外ニ出シタトキト、弓形内ニ入レタトキハ如何ニ變ルカヲ見ヨ。



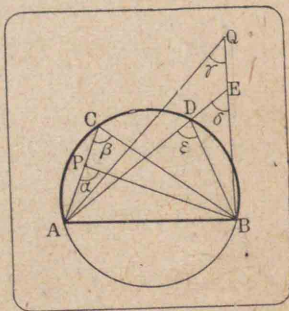
**定理 35.** 弓形内ノ一點デ、ソノ弦ヲ見込ム角ハ、弓形ノ角ヨリ大キイ。又弓形外ニアツテ弦ニ對シテ弓形ト同ジ側ニアル點デ、ソノ弦ヲ見込ム角ハ弓形ノ角ヨリ小サイ。

**証明** AB ヲ弓形ノ弦、P ヲソノ弓形内ノ點トシ、Q ヲソノ弓形外ニアツテ直線 AB ニ對シテ弓形ト同ジ側ニアルモノトスル。

$\angle APB$  ノ一邊 AP ヲ AP ノ方向ヘ延長シ、弓形ノ弧ト C デ交ラシメ、C、B ヲ結ベバ、圖ニ於テ  $\angle a > \angle \beta$  (定理 8)

故ニ  $\angle a$  ハ弓形 ACB ノ角ヨリ大キイ。

次ニ  $\angle AQB$  ノ二邊ノ間ニ夾マレル弓形ノ弧ノ上



ニ、ソノ弧ノ兩端デナイ任意ノ點 D ヲトリ、A、D ヲ結ビ、コレヲ延長シテ BQ ト E デ交ラシメ、又 B、D ヲ結ベバ、圖ニ於テ

$\angle \gamma < \angle \delta$ ,  $\angle \delta < \angle \epsilon$  (定理 8)

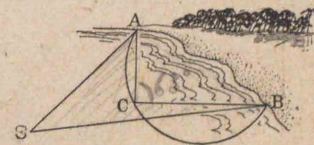
$\therefore \angle \gamma < \angle \epsilon$  又  $\angle \epsilon = \angle \beta$  (定理 34 系 1)

故ニ  $\angle \gamma$  ハ弓形 ACB ノ角ヨリ小サイ。

**系** 同一ノ底邊上ニ、ソノ同ジ側ニ相等シイ頂角ヲモツ若干ノ三角形ヲ作ルトキハ、ソノ一ツノ三角形ノ外接圓ノ周ハ、又ソノ他ノスベテノ三角形ノ頂點ヲ通ル。

**問題**

右圖デ、圓内ハ海岸 AB 附近ヲ通過スル船ガ避クベキ暗礁地帯ヲ示シ、圓外ハ安全デアルトスル。船 S ハ AB ヲ見込ム角ガ  $\angle ACB$  ヨリ小サイ間ハ安全ナルコトヲ説明セヨ。



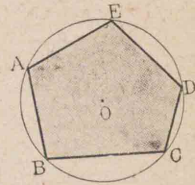
**41. 内接四邊形**

多角形ノ頂點ガ悉ク同一圓周上ニアルトキハ、コノ多角形ヲ圓ノ内接多角形、圓ヲ

多角形ノ外接圓トイフ。

コノトキ多角形ハ圓ニ内接スルトイヒ、圓ハ多角形ニ外接スルトイフ。

右圖デ、ABCDE ハ圓Oノ内接五角形デ、圓Oハソノ外接圓デアアル。



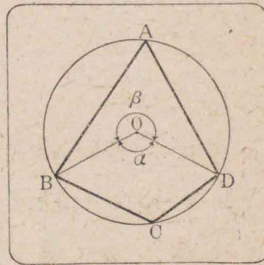
三ツヨリ多クノ點ガ皆同一圓周上ニアルトキ、コレ等ノ點ヲ共圓點トイフ。

**定理 36.** 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。

**假設** ABCDヲ圓Oニ内接スル四邊形トスル。

**終結**  $\angle A + \angle C = 2\angle R$ ,  
 $\angle B + \angle D = 2\angle R$

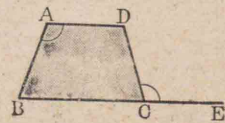
**証明** 省略スル。



(圖デ  $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle \alpha$ ,  $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle \beta$  ナルコトニ注意セヨ)

四邊形ノ一ツノ外角ニ隣ル内角ニ對スル角ヲ、ソノ外角ノ内對角トイフ。

右圖デ  $\angle A$ ハ外角 DCEノ内對角デアアル。

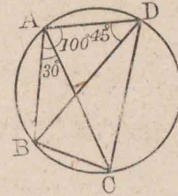


**函** 圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハソノ内對角ニ等シイ。

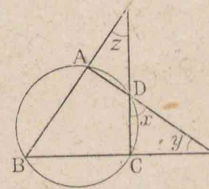
問題

1. ABCDハ圓ニ内接スル四邊形デ  $\angle A$ ハ  $80^\circ$ デアアル。 $\angle C$ ト  $\angle B + \angle D$ トヲ求メヨ。

2. 右圖デ  $\angle BAD = 100^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $\angle ADB = 45^\circ$ トスレバ、四邊形 AECDノ他ノ三ツノ角ノ大イサハ夫々何度カ。



3. 右圖デ  $y = 45^\circ$ ,  $z = 35^\circ$ トスレバ  $x$ ハ何度カ。又  $y + z = 90^\circ$ ナラバ  $x = 45^\circ$ ナルコトヲ證セヨ。



4. 圓ニ内接スル平行四邊形ハ矩形デアアル。又圓ニ内接スル梯形ハ二等邊梯形デアアル。

**定理 37.** 四邊形ノ對角ガ互ニ補角ヲナセバ、コノ四邊形ハ圓ニ内接スル。

**証明** 四邊形 ABCDニ於テ、 $\angle A + \angle C = 2\angle R$ トスル。B, Dヲ結ンデ  $\triangle BCD$ ノ外接圓ヲ畫キ、弧 BCDノ共軌弧上ニ任意ノ點Eヲトルト、四邊形 EBCDハ圓ニ内接スルカラ

$\angle E + \angle C = 2\angle R$  (定理 36)

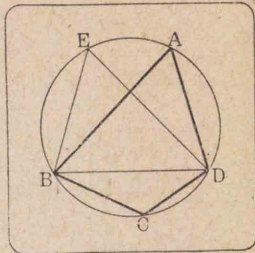
然ルニ  $\angle A + \angle C = 2\angle R$  (假設)

∠A = ∠E

且ツ點AハBDニ對シテEト同ジ側ニアル。

故ニ△ECDノ外接圓ハ點Aヲ通ル(定理35系)。

即チABCDハ圓Oニ内接スル。



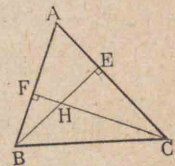
四邊形ノ外角ガソノ内對角ニ等シケレバ、コノ四邊形ハ圓ニ内接スル。

問題

1. 三角形ABCノ二頂點B, Cカラ夫々ソノ對邊ヘ垂線BE, CFヲ引キ、ソノ二ツノ垂線(又ハソノ延長)ノ交點ヲHトスレバ、

(1) A, F, H, Eハ共圓點デアアル。

(2) B, C, E, Fハ共圓點デアアル。



2. 前問デ線分EFノ垂直二等分線ハBCノ中點ヲ通ル。

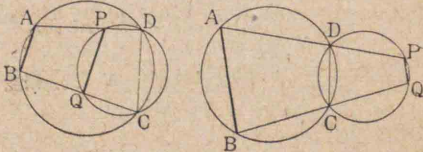
3. 四邊形ABCD

ガ圓ニ内接スル

トキ、AD, BC(又ハ

ソノ延長)ガD, Cヲ通ル圓ト夫々P, Qデ交ルトキ

ハ、PQハABニ平行デアアル。



42. 對稱圖形

直線XYガ二點A, A'ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スルトキ、二點A, A'ハ直線XYニ關シテ對稱デアルトイヒ、XYヲ對稱ノ軸トイフ。

二ツノ圖形P, P'ガアツテ、

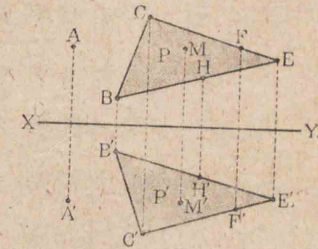
直線XYニ關シテP上ノス

ベテノ點ノ對稱點ガP'上ニ

アリ、且ツP'上ノスベテノ點

ノ對稱點ガP上ニアルトキ、

圖形P, P'ハ軸XYニ關シテ對稱デアルトイフ。

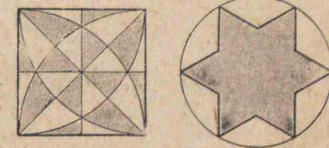


問題

1. 次ノ各圖形ノ對稱ノ軸ヲ書キ入レヨ。

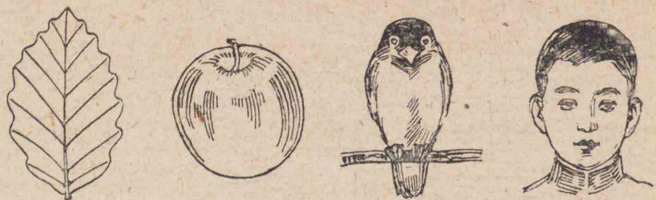


2. 右ノ二ツノ圖形ノ對稱軸ハ夫々何本アルカ。

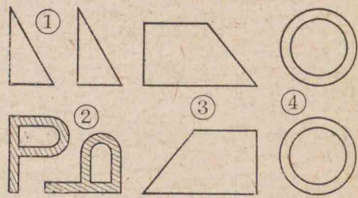


3. 自然界デハ一平面ニ

關シテ對稱トナツテキルモノヲ左右相稱トイフ。次圖ノ外ニ左右相稱ヲナスモノノ例ヲ舉ゲヨ。



4. 右圖ハドウ移動シ  
タラ對稱圖形ニナル  
カ、各一方ノ圖形ヲ  
移動シテ對稱圖形ト  
ナシ、ソノ對稱ノ軸ヲ記入セヨ。



5. 圓ハ直徑ニ關シテ對稱ナルコトヲ説明セヨ。  
6. 三角形AECノ∠Aニ隣ル外角ノ二等分線g上ニアル任意ノ點PヲB,Cニ結ンデ出來ル三角形ノ周ハ△ABCノ周ヨリ大キイ。(gニ關シCノ對稱點ヲ用ヒヨ)  
7. 直線XYノ同ジ側ニ二點A,Bガアル。XY上ニ一點Pヲ求メ、AP+BPヲ最小ニセヨ。  
8. 底邊ト高サトガ與ヘラレタ三角形ノウチ二等邊三角形ハ周ガ最小デアアル。

第四章 ニツノ圓

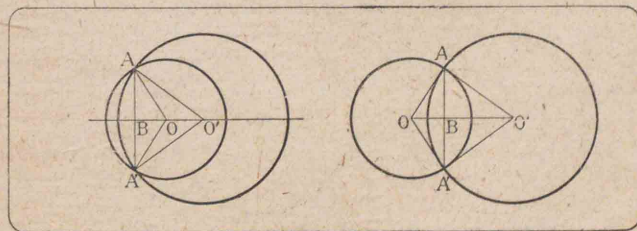
43. ニツノ圓ノ位置ノ關係

二圓ノ中心ヲ結ブ直線ヲ二圓ノ中心線トイヒ、兩中心間ノ距離ヲ中心線ノ長サトイフ。

**定理 38.** ニツノ圓周ガソノ中心線上ニナイ一點ヲ共有スルトキハ、コノニツノ圓周ハ又他ノ一點ヲ共有スル。ソシテソノ二點ヲ結ブ線分ハ、中心線ニヨツテ垂直ニ2等分セラレル。

**証明** ニツノ圓ノ中心ヲ夫々O,O'トシ、Aヲ中心線上ニナイ二圓周ノ共有點トスル。今中心線OO'ニ關スル點Aノ對稱點ヲA'トスレバ

$$OA=OA', \quad O'A=O'A' \quad (\text{定理9系1})$$



ソシテOA, O'Aハ夫々圓O,O'ノ半徑デアアルカラ、OA', O'A'モ亦夫々圓O,O'ノ半徑デアアル。故ニA'ハ

又二圓 $O, O'$ ノ周ノ共有點デアアル。

次ニ中心線 $OO'$ ハ二點 $A, A'$ ノ對稱ノ軸デアアルカラ明ラカニ $AA'$ ヲ垂直ニ二等分スル。

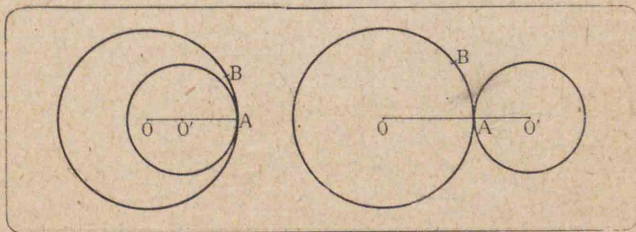
**系** 二ツノ圓周ガ二點 $A, B$ ヲ共有スルトキハ、 $AB$ ノ垂直二等分線ハ兩圓ノ中心線デアアル。

二ツノ圓周ガ二點ヲ共有スルトキハ、コノ二ツノ圓周(又ハ圓)ハ相交ルトイフ。

**定理 39.** 相合シテキナイ二ツノ圓周ガ、ソノ中心線上ノ一點ヲ共有スルトキハ、コノ二ツノ圓周ハソノ他ノ點ヲ共有シナイ。

**証明** 二ツノ圓 $O, O'$ ノ周ガソノ中心線上ノ一點 $A$ ヲ共有スルトスル。

今假ニ $A$ ノ外ニ共有點ガアルトシ、モシソレガ中心線 $OO'$ 上ノ點デアレバ、二ツノ圓ハ同ジ直徑ヲ有スル圓デ相合スル。コレハ假設ニ反スル。



又モシソレガ中心線 $OO'$ 上ニナイ點 $B$ デアルトスレバ、 $AB$ ノ垂直二等分線モ亦中心線トナル(前定

理系)。コレハ不合理デアアル。

故ニコノ二圓周ハ $A$ 以外ノ點ヲ共有スルコトハナイ。

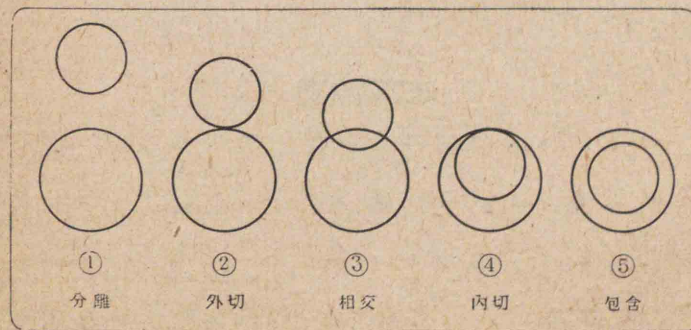
二ツノ圓周ガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキ、コノ二圓周(又ハ圓)ハ相切スルトイヒ、ソノ共有點ヲ切點トイフ。

コノ場合ニ前頁左圖ノヤウナノヲ内切スルトイヒ、右圖ノヤウナノヲ外切スルトイフ。

**系** 二ツノ圓ガ相切スルトキハ、ソノ切點ハコレ等ノ圓ノ中心線上ニアル。 (歸謬法ニヨレ)

**定理 40.** 二圓ノ半徑ヲ夫々 $r, r'$ ( $r > r'$ )トシ、ソノ中心間ノ距離ヲ $d$ トスルトキ、

- [1] 各ノ圓ガ全ク他ノ外ニアレバ、 $d > r + r'$
- [2] 外切スレバ、 $d = r + r'$
- [3] 相交レバ、 $r + r' > d > r - r'$





[4] 内切スレバ  $d = r - r'$

[5] 一圓ガ全ク他ノ圓ノ内ニアレバ  $d < r - r'$

**証明** 省略スル

二ツノ圓ノ位置ノ關係ハ上ノ五ツノ場合デ盡キル。ソシテ常ニソノウチノ唯一ツノミガ成立スル。

**系** 上ノ定理ノ逆モ亦真デアアル。(轉換法ニヨレ)

**問題**

1. 三ツノ圓ガ二ツツツ互ニ外切シ、ソノ中心線ガ正三角形ヲナシ、ソノ邊ノ長サハ 6cm デアアル。各ノ圓ノ半徑ヲ求メヨ。
2. 線分 AB 上ニ點 C ヲトツテ、AC、BC ヲ直徑トスル圓ヲ作レバ、コノ二圓ハ外切スル。
3. 相交ル二ツノ圓ノ交點ノ一ツヲ通ツテ各圓ノ直徑ヲ引ケバ、コレ等ノ直徑ノ他ノ端ヲ結ブ直線ハ他ノ交點ヲ通ル

**雑題**

1. 圓ノ二ツノ弦ガ交ツテ作ル角ハ、ソレ等ノ弦ノ中點ト圓ノ中心トヲ結ブ二ツノ直線ノナス角又ハソノ補角ニ等シイ。
2. AB ハ圓ノ定マツタ弦デ、CD ハコノ圓ノ任意ノ

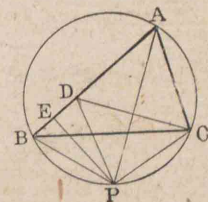
直徑デ、CX 及ビ DY ハ AB ニ垂直デアルトキ、

① AB、CD ガ圓内デ交レバ、CX、DY ノ差ハ一定。

② 圓内デ交ラナケレバ、CX、DY ノ和ハ一定。

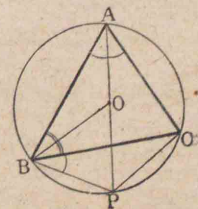
3. 二ツノ等圓ガ A、B デ交ルトキ、B ヲ通ル直線ガ兩圓ト更ニ交ル點ヲ P、Q トスレバ、三角形 APQ ハ二等邊三角形デアアル。
4. 圓ノ互ニ平行ナ二ツノ弦ノ間ニ夾マレル二ツノ弧ハ相等シイ。
5. 圓ノ相等シイ二ツノ弧ヲ AB、CD トスレバ弦 AC、BD ハ互ニ平行デアアルカ、又ハ長サガ相等シイ。

- \* 6. 三角形 ABC ノ  $\angle A$  ノ二等分線ガ更ニ外接圓ト交ル點ヲ P トシ、P カラ AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ E トスレバ、 $AB + AC = 2AE$



- \* 7. 三角形 AEC ノ  $\angle A$  ニ隣ル外角ノ二等分線ガ外接圓ト交ル點ヲ Q トシ、Q カラ AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ F トスレバ、 $AB \sim AC = 2AF$

8. 三角形 ABC ノ  $\angle A$  ノ二等分線ガ更ニ外接圓ト交ル點ヲ P トシ、三角形ノ内心ヲ O トスレバ、



$PO = PB = PC$

## 第五章 作圖題

## 44. 作圖題

既ニ第6節(10頁)デ述べタヤウニ。

與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ幾何學的ニ求メル問題ヲ作圖題トイヒ、ソレヲ畫クコトヲ作圖トイフ。

幾何學デハ次ノ二ツヲ可能ナモノトシテ、コレヲ幾度カ反覆應用シテ作圖ノ方法ヲ考究スル。

[1] 二定點ヲ通ル直線ヲ作ルコト、從ツテ線分ヲ延長スルコト。

[2] 一定點ヲ中心トシテ、與ヘラレタ長サノ半徑ヲモツ圓ヲ畫クコト。

直線ヲ畫クニハ定規ヲ用ヒ、圓ヲ畫クニハコンパスヲ用ヒル。ソシテ定規ニハ目盛ガナイモノトノ定メデアル。

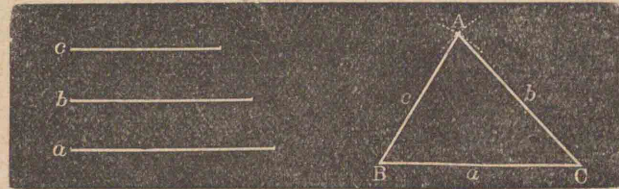
作圖題ヲ解クニハ作圖ノ方法ヲ示スト共ニ、ソノ作圖ノ正シイコトヲ證明シナケレバナラヌ。

作圖題1(11頁)及ビ作圖題7(36頁)ヲ幾何學的ニ取扱ヘバ次ノ通りデアル。

**作圖題1.** 三邊( $a, b, c$ )ガ與ヘラレタトキ、三角形ヲ畫

クコト。

**作圖** 線分  $BC$  ヲ  $a$  ニ等シクトリ、 $C$  ヲ中心トシテ半徑  $b$  ナル圓及ビ  $B$  ヲ中心トシテ半徑  $c$  ナル圓ヲ畫キ、二ツノ圓ノ交點ノ一ツヲ  $A$  トスル。  $\triangle ABC$  ハ求メルモノデアル。



**証明**  $BC=a, CA=b, AB=c$  デアルカラ  $\triangle ABC$  ハ條件ニ適スルモノノ一ツデアル。

**注意** 時トシテ與ヘラレタ條件ノ間ニ適當ナ關係ガナケレバ作圖ガ出來ナイコトガアル。

サテ本題デ  $B$  及ビ  $C$  ヲ中心トシタ圓ガ交ラナイカ、又ハ直線  $BC$  上ノ一點デ切スレバ、作圖ハ出來ナイ。故ニ作圖ガ可能ナルタメニハ、 $B, C$  ヲ中心トシタ二ツノ圓ガ交ラナケレバナラナイ。コノ條件ヲ式デ表ハセバ、

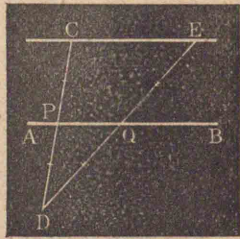
$$b+c > a > b-c \quad (\text{定理40})$$

次ニ作圖ガ可能ナルトキ、 $B, C$  ヲ中心トシタ二ツノ圓ハ  $BC$  ニ關シテ  $A$  ノ對稱點デモ交ルカラ、ソノ點ト  $B, C$  トヲ結ンデモ亦條件ニ適スル三角形ガ出來ルガ、コレハ前ノ三角形ト合同デアル(定理11)。

作圖題 7. 與へラレタ點(C)ヲ通ツテ與へラレタ直線 AB ニ平行線ヲ引クコト。

36頁ニ述ベタモノトハ異ナル方法ヲ掲ゲル。

作圖 Cヲ通り ABト交ル任意ノ直線 CDヲ引キ, ABトノ交點ヲ Pトシ, CPニ等シク PDヲトル。次ニDヲ通り ABト點Qデ交ル直線ヲ引キ, DQニ等シク

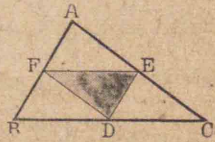


QEヲトル。C, Eヲ通ル直線ヲ作レバ, コレガ求メル直線トナル。

証明 作圖ニヨリ P, Qハ  $\triangle DCE$  ノ二邊 DC, DE ノ中點デアルカラ  $CE \parallel AB$  (定理23)

問題 解答

- 前ニ述ベタ作圖題 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8ノ作圖ガ正シイコトヲ證明セヨ。
- 二邊ト夾角ガ與へラレタトキ, 三角形ヲ作レ。
- 二邊  $(a, b)$  トツノ一邊  $(a)$ ニ對スル角  $(A)$ ガ與へラレタトキ, 三角形ヲ作レ。幾ツ出來ルカ, 又三角形ガ出來ナイコトガアルカ。
- 三角形ノ三邊ノ中點ノ位置ガ與へラレタトキ, 三角形ヲ作レ。

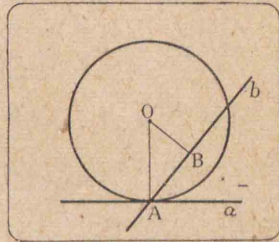


第六章 圓ノ切線

45. 切線

定理 41. 圓ノ半徑ノ端ヲ通り, コノ半徑ニ垂直デアル直線ハコノ圓ノ切線デ, コノ半徑ニ垂直テナイ直線ハコノ圓ノ割線デアル。

証明 省略スル。(定理16系, 定理28 [2], [3]ニヨツテ證セヨ)



系 1. 圓周上ノ一點デノ切線ハ唯一ツデアル。

系 2. 圓ノ切線トツノ切點ヲ通ル直徑トハ互ニ垂直デアル。

系 3. 圓ノ切線ノ切點ヲ通り, コレニ垂直デアル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル。

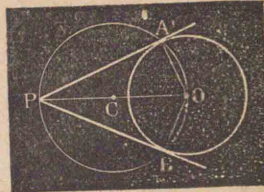
系 4. 二ツノ圓ガ相切スルトキハ, コレ等ノ圓ハツノ切點デーツノ切線ヲ共有スル。

系 5. 同一直線上ノ同一ノ點デ, コノ直線ニ切スル二ツノ圓ハ相切スル。

作圖題 9. 定圓(O)外ノ一定點(P)ヲ通り, コノ圓ニ切線ヲ引クコト。

作圖 O, Pヲ結ビ, コレヲ直徑トスル圓Cヲ畫キ,

コノ圓ト圓Oトノ交點ヲA及  
 ビBトスル。二直線PA, PBハ  
 求メル切線トナル。



**証明** A, Bノ各ヲ中心Oニ  
 結ベバ  $\angle OAP = \angle R, \angle OBP = \angle R$  (半圓ノ含ム角)  
 故ニ PA, PBハ何レモ圓Oノ切線デアル (定理41)

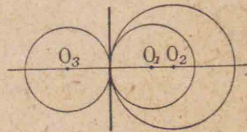
**定理 42.** 圓外ノ一點カラコノ圓ニ唯二ツノ切線  
 ヲ引クコトガ出來ル。ソシテコノ點カラ兩切點ニ  
 至ル距離ハ相等シイ。

**証明** 省略スル。

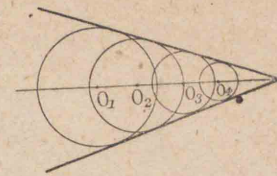
**注意** コノ點カラ切點マデノ距離ヲソノ點ヨリノ切  
 線ノ長サトイフ。

**問題**

1. 三角形ABCノ二邊AB, ACト夫々B, Cニ於テ切  
 スル圓ヲ畫クコトガ出來レバ, 三角形ABCハ二等  
 邊三角形デアル。
2. 圓ノ直徑ノ兩端ニ於テ引イタ切線ハ互ニ平行  
 デアル。
- 3.\* 直線上ノ一定點デコレニ  
 切スル圓ノ中心ハ, スベテ一  
 直線上ニアル。



4.\* 定角ノ二邊ニ切スル任  
 意ノ圓ノ中心ハ, コノ角ノ  
 二等分線上ニアル。



5.\* 圓Oノ周上ノ二點A, B  
 ニ於テコノ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ交點ヲPト  
 スレバ, POハ弦ABヲ垂直ニ二等分スル。

6. 與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ直線ニ平行スル切  
 線ヲ引ケ。

46. 切線ト弦トノナス角

**定理 43.** 圓ノ弦トソノ一端ヲ通ル切線トノナス  
 角ハ, ソノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ。

**假設** ABヲ圓Oノ弦, ACヲAヲ通ル切線トシ,  
 $\angle ADB$ ヲ $\widehat{AB}$ 上ニ立ツ圓周角トスル。

**終結**  $\angle BAC = \angle ADB$

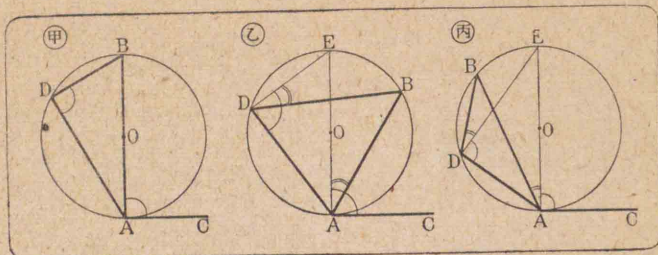
[1]  $\angle BAC$ ガ直角デア場合。(甲圖)

コノ場合弦ABハ直徑デア(定理41系3)。ソシテ  
 直徑ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デア(定理34系3)。

$\therefore \angle BAC = \angle ADB$

[2]  $\angle BAC$ ガ鋭角デア場合。(乙圖)

Aヲ通ル直徑AEヲ引キ, D, Eヲ結ブ。



$$\angle EAC = \angle EDA = \angle R$$

又  $\angle EAB = \angle EDB$  (定理34系1)

$$\therefore \angle EAC - \angle EAB = \angle EDA - \angle EDB$$

即チ  $\angle BAC = \angle ADB$

[3]  $\angle BAC$  が鈍角デアル場合。(丙圖)

([2]ノ證明ニ倣ツテ  $\angle EAC + \angle EAB$ ヲ作ツテ見ヨ)

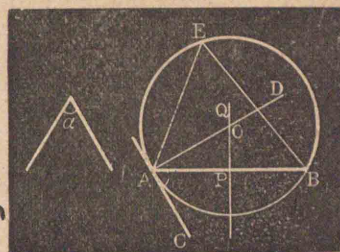
系1. 圓ノ弦トソノ一端ヲ通ル直線トノナス角ガソノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シケレバ、ソノ直線ハコノ圓ノ切線デアル。

系2. 圓ノ弦ノ兩端ニ於テ、夫々ソノ圓ニ切線ヲ作ルトキハ、弦ノ同ジ側ニアル角ハ相等シイ。

作圖題10. 與ヘラレタ線分(AB)ヲ弦トシ、與ヘラレタ角( $\alpha$ )ヲ含ム弓形ヲ作ルコト。

作圖 ABノ一端Aヲ通り、ABト $\angle \alpha$ ニ等シイ角ヲナス直線ACヲ引キ、Aヲ通りACニ垂直ナ直線ADト、ABヲ垂直ニ2等分スル直線PQトノ交

點ヲOトスル。Oヲ中心トシ、OAヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ、 $\angle BAC$ 内ニ含マレナイ弓形AEBハ求メル、弓形トナル。



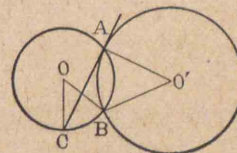
証明 省略スル。

注意 直線ABニ關シテ弓形AEBト對稱ナ弓形ヲ作レバ、コレモ亦條件ニ適スル弓形トナル。

問題

1. 二圓O, O'ガA, Bデ交ルトキ、

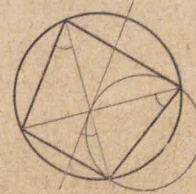
Aニ於テ圓O'ニ引イタ切線ガ圓Oト交ル點ヲCトスレバ、



$$\angle COB = \angle BO'A \quad (A, B \text{ヲ結ベ})$$

2. 三角形ABCノ邊BAヲAヲ越エテ延長シテ、ACニ等シクADヲトルトキ、 $\angle BAC$ ノ二等分線ハA, C, Dノ三點ヲ通ル圓ノ切線トナル。

3. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ノ交點デ、コノ交點ト四邊形ノ相隣ル二頂點トヲ通ル圓ニ切スル直線ハ、四邊形ノ一邊ニ平行デア

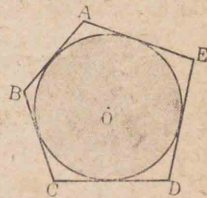


### 47. 外切多角形

多角形ノスベテノ邊(延長デナイ)ガ同一ノ圓ニ切スルトキハ、コノ多角形ヲ圓ノ外切多角形、圓ヲ多角形ノ内切圓トイフ。

コノトキ多角形ハ圓ニ外切スルトイヒ、圓ハ多角形ニ内切スルトイフ。

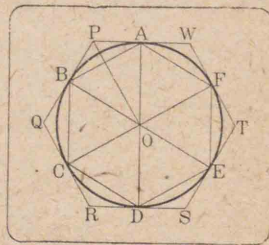
右圖デ、ABCDEハ圓Oノ外切五角形デ、圓Oハコノ五角形ノ内切圓デアアル。



三角形ノ内心(74頁)ハ、ソノ内切圓ノ中心デアアル。

**定理 44.** 圓周ヲ若干等分シ、ソノ各分點ヲ順次ニ

結ベバ、内接正多角形ガ出來ル。又ソノ各分點ニ於テ切線ヲ引ケバ、邊數ノ同ジ外切正多角形ガ出來ル。



**証明** 省略スル。

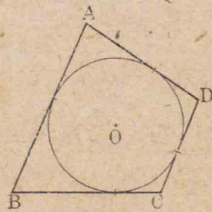
問題

1. 圓ニ外切スル四邊形 ABCD

ニ於テハ、

$$AB + CD = AD + EC$$

(定理 42 ヲ利用セヨ)



2. 前問ノ逆ヲ述べ、且ツコレヲ證明セヨ。

4. 一ツノ正多角形ニ外接圓ト内切圓トヲ畫クコトガ出來ル。ソシテ兩圓ノ中心ハ同ジ點デアアル。

**注意** コノ共通ノ中心ヲ正多角形ノ中心トイフ。

### 48. 共通切線

一直線ガ二ツノ圓ノ切線ナルトキ、ソノ直線ヲ二圓ノ共通切線トイフ。

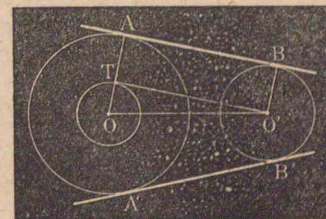
コノトキ二圓ガ共通切線ノ同ジ側ニアルトキハ共通外切線トイヒ、互ニ反對ノ側ニアルトキハ共通内切線トイフ。

**作圖題 11.** 二定圓ニ共通切線ヲ引クコト。

二定圓ヲ O, O' トシ、ソノ半徑ヲ r, r' (r > r') トスル

[1] 共通外切線ノ場合。

**作圖** Oヲ中心トシ、r-r'ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ、コノ圓ニO'カラ切線ヲ引イテ、ソノ切點ヲTトス



ル。次ニTヲ通ル定圓Oノ半徑ヲ引キソノ端ヲAトスル。次ニOAニ平行ニ圖ノ如ク定圓O'ノ半徑ヲ引イテソノ端ヲBトスレバ、直線ABハ求メル共

通外切線ノ一ツデアル。

**証明**  $TA=OA-OT=r-(r-r')=r'$ ,  $O'B=r'$

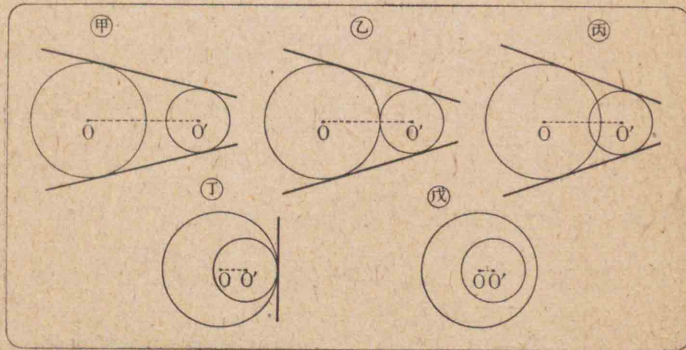
且ツ  $TA \parallel O'B$  (作圖) 又  $\angle ATO' = \angle R$  (定理41系2)

故ニ  $ATO'B$  ハ矩形トナル。

$\therefore OA \perp AB, O'B \perp AB$

ヨツテ  $AB$  ハ二圓  $O, O'$  ノ共通外切線デアル。

**注意** 二定圓ノ位置ノ關係ニヨツテ外切線ガニツノ場合、一ツノ場合、切線ガ作レナイ場合ガアル。(次圖参照)



[2] 共通内切線ノ場合。

**作圖**  $O$  ノ中心トシ、 $r+r'$  ノ半徑トスル圓ヲ畫キ、

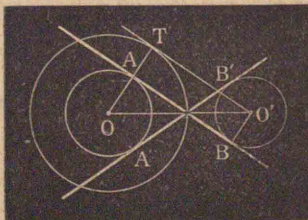
コノ圓ニ  $O'$  カラ切線ヲ引

イテソノ切點ヲ  $T$  トスル。

次ニ  $O, T$  ヲ結ビ、 $OT$  ガ圓

$O$  ト交ル點ヲ  $A$  トスル。

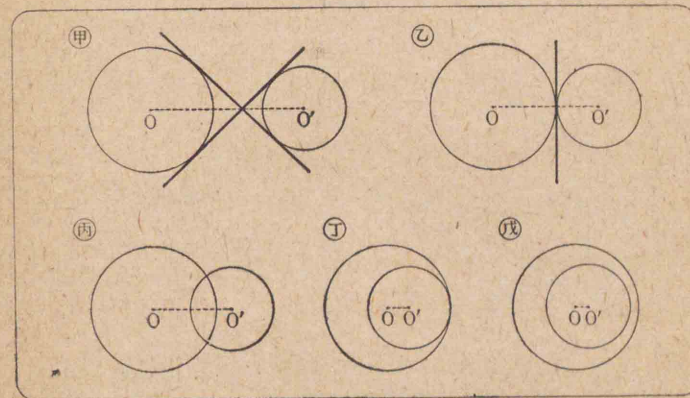
次ニ  $OT \parallel AB$  圖ノ如



ク定圓  $O'$  ノ半徑ヲ引イテソノ端ヲ  $B$  トスレバ、直線  $AB$  ハ求メル共通内切線ノ一ツデアル。

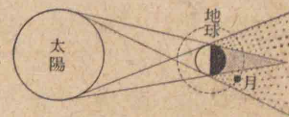
**証明** 省略スル。(TABO' ガ矩形トナル)

**注意** 二定圓ノ位置ノ關係ニヨツテ内切線ガニツノ場合、一ツノ場合、切線ガ作レナイ場合ガアル。(次圖参照)



問題

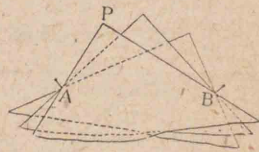
- 右圖ハ太陽ト地球ト月トノ位置ノ關係カラ出來ル影ノ部分ヲ示シタモノデ、月食、日食ハコノ關係カラ出來ル。ソノ理由ヲ考ヘヨ。
- 二圓ノ共通外切線及ビ共通内切線ノ交點ハ中心線上ニアル



第七章 軌 跡

49. 軌 跡

**觀察 1.** 右圖ノヤウニ二點 A, B  
ニ留針ヲ刺シテ,ソノ間ニ名刺ノ  
一隅ヲ夾ミ,名刺ノ縁ヲ針ニ觸レ  
サセナガラ動カストキ,ソノ隅 P  
ノ動く跡ハ如何ナル線トナルカヲ見ヨ。



**觀察 2.** 石ヲ斜上方ニ投ゲ上  
ゲテ,ソノ各時刻ニ於ケル位置  
ヲ連絡スレバ,右圖ノヤウナ線  
トナル。(コレハ拋物線トイフ曲線デアル)



**觀察 3.** 圓ハ一定點(中心)カラ一定ノ距離(半径)ノ長サヲ  
保チナガラ動イタ點ノ跡デアルトモ考ヘラレル。

與ヘラレタ條件ニ適スルスベテノ點ヲ  
含ム圖形デアツテ,逆ニコノ圖形上ノ點ハ  
悉クソノ條件ニ適スルトキ,コノ圖形ヲソ  
ノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。

或圖形ガ求メル軌跡デアルコトヲ斷定スルニハ,  
次ノ二組ノ事柄ヲ證明シナケレバナラナイ。  
(A) 或圖形上ニアル點ハ悉ク條件ニ適スル。

(B) 條件ニ適スル點ハ悉クコノ圖形上ニアル。

(B)ノ代リニ次ノコトヲ證明シテモヨイ。

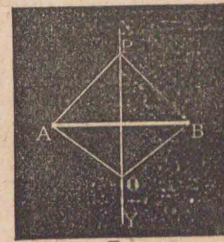
(B) コノ圖形上ニナイ點ハ悉ク條件ニ適シナイ。

**軌跡題 1.** 二定點(A,B)カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,  
コノ二定點(A,B)ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ2等分スル直  
線(XY)デアル。

**証明** (A) PヲXY上ノ任意ノ  
點トスレバ

$$PA=PB \quad (\text{定理9系1})$$

即チXY上ノ任意ノ點ハA,B  
カラ等距離ニアル。



(B) QヲA,Bカラ等距離ニアル點トスレバ,Qハ直  
線XY上ニアル(50頁問題4)。

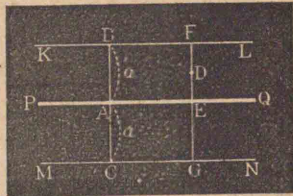
故ニ直線XYハ二點A,Bカラ等距離ニアル點ノ  
軌跡デアル。

**軌跡題 2.** 定直線(PQ)カラノ距離ガ定長(a)ニ等シイ  
點ノ軌跡ヲ求メルコト。

**解** PQ上ノ任意ノ點Aカラコレニ垂線ヲ引キ,ソ  
ノ上ニAノ兩側ニaニ等シイ線分AB,ACヲ取り,  
B,CカラPQニ平行ニKL, MNヲ引ケバ,コノ二直  
線ハ求メル軌跡トナル



(A) KL 又ハ MN 上ノ任意ノ點カラ PQ ニ下シタ垂線ノ長サハ AB 又ハ AC ノ長サ即チ  $a$  ニ等シイ。



(B) KL 又ハ MN 上ニナイ任意ノ點ヲ D トシ、コレカラ PQ ニ垂線 DE ヲ引キ、DE 或ハソノ延長ガ KL, MN ト交ル點ヲ夫々 F, G トスレバ

DEキFE 同様ニ DEキEG

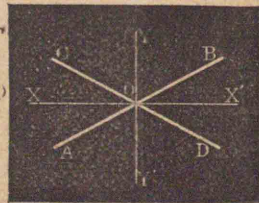
∴ DEキ $a$

故ニ二直線 KL, MN ハ求メル軌跡デアル。

**軌跡題 3.** 相交ル二直線 (AB, CD) カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メルコト。

**解** (B) P ヲ條件ニ適スル一點トスレバ、P ハ直線 AB, CD ガ作ル四ツノ角ヲ 2 等分スル二ツノ直線 XX', YY' ノ何レカノ上ニアル(49頁,問題6)。

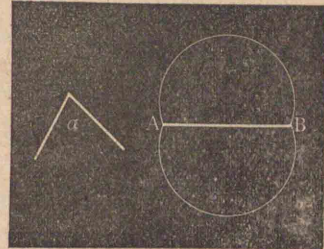
(A) コノ直線 XX' 又ハ YY' 上ニアル任意ノ點ハ 48頁,問題4ニヨツテ悉ク AB, CD カラ等距離ニアル。



故ニ求メル軌跡ハ兩直線ノナス四ツノ角ヲ 2 等分スル二ツノ直線デアル。

**軌跡題 4.** 一定線分(AB)ヲ定角( $\alpha$ )ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求メルコト。

**解** AB ヲ弦トシ、ソノ兩側ニ  $\angle \alpha$  ヲ含ム弓形ヲ作レバ(作圖題10),ソノ弧ガ求メル軌跡トナル。



(A) コノ弓形ノ弧上ニ

アル點ハ、定理34系1ニヨツテ悉ク條件ニ適合スル。

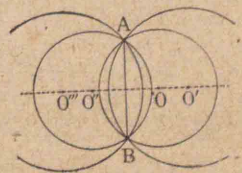
(B) コノ二ツノ弓形ノ何レノ弧ノ上ニモナイ點ハ、定理35ニヨツテ悉ク條件ヲ満足サセナイ。

故ニコノ二ツノ弓形ノ弧ガ求メル軌跡デアル。

**注意**  $\angle \alpha$  ガ直角ナルトキハ、二ツノ弓形ハ一ツノ圓トナル。

**問題 異題**

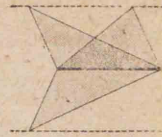
- 軌跡トイフ言葉ヲ用ヒテ圓ノ定義ヲ述ベヨ。
- 半径3cmノ圓ノ外側ニ沿ウテ半径2cmノ圓ガ轉ガルトキ、コノ圓ノ中心ノ軌跡ハ何か。
- 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。
- 一點トコレヲ含マナイ一定直線上ノ任意ノ點トヲ結ブ線



分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ

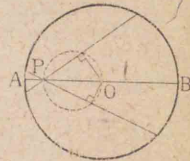
5. 同底等高デアアル三角形ノ頂點

ノ軌跡ヲ求メヨ。



6. 圓内ノ定點Pヲ通ル弦ノ中點

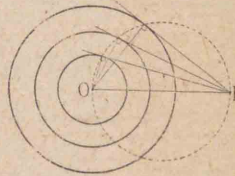
ノ軌跡ヲ求メヨ。



7. 與ヘラレター點カラ同心圓ノ

各ニ切線ヲ作ルトキ、ソノ切點

ノ軌跡ヲ求メヨ。



8. 圓ノ定長デアアル弦ノ中點ノ

軌跡ヲ求メヨ。(定理33系2参照)

### 50. 軌跡ノ交リ

定理ノ證明ヤ作圖題ノ解法ニ於テ軌跡ノ交リヲ利用スルコトガ多イ。

例ヘバ定理32ニ於テA,Bカラ等距離ニアル點ノ軌跡aト、A,Cカラ等距離ニアル點ノ軌跡bトノ交點Oハ三點A,B,Cカラ等距離ニアルコトヲ利用シタ。又作圖題1デ頂點Aノ位置ヲ定メタノモ軌跡ノ交リヲ利用シタノデアアル。

作圖題 12. 底邊(BC), 頂角( $\alpha$ )及ビ頂點(A)ヨリノ高サ( $h$ )ヲ與ヘテ三角形(ABC)ヲ作ルコト。

作圖 所要ノ三角形ハ高

サガ $h$ デアアルカラソノ頂點

ハ底邊BCカラ $h$ ノ距離ニ

アツテBCニ平行ナル直線

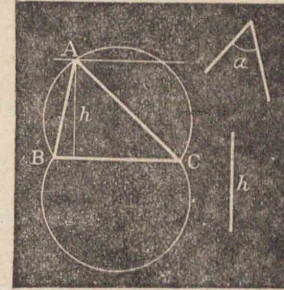
上ニアル。又頂角ガ定マツ

テキルカラ、頂點ハ底邊BC

ヲ $\angle\alpha$ ニ等シイ角デ見込ム點ノ軌跡即チBCヲ弦

トシ $\angle\alpha$ ヲ含ム弓形ノ弧上ニナケレバナラナイ。

故ニコノ二ツノ軌跡ヲ畫イテ、ソノ交點ノ一ツヲAトスレバ、 $\triangle ABC$ ハ求メル三角形ノ一ツデアアル。



証明 省略スル。

注意 BCカラ $h$ ノ距離ニアル直線ト、BCヲ弦トシテ $\angle\alpha$ ヲ含ム弓形ハCBノ兩側ニ各、一ツツツアルカラ、ソノ交點ハ四ツアルコトモアリ、二ツノコトモアリ、無イコトモアル。

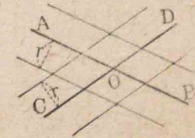
### 問題

1. 二定點ヲ通り一定直線上ニ中心ヲモツ圓ヲ畫ケ。

2. 二定直線ニ切シ、且ツ定長ノ半

徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

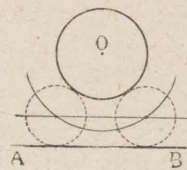
3. 一定點ヲ通り二ツノ平行線ニ切スル圓ヲ畫ケ。



(作圖ノ出來ル條件ハ何カ)

4. 一定直線ト一定圓ニ切シ、且ツ定長ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

(内切スル場合ト外切スル場合ヲ別別ニ考ヘヨ。右圖ハ外切スルモノ)

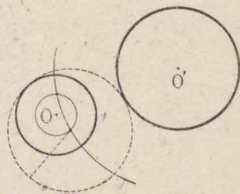


5. 二定圓ニ切シ、且ツ定長ノ

半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。(種

種ノ場合ヲ考ヘヨ。右圖ハ圓

Oト内切、圓O'ト外切スルモノ)



6. 與ヘラレタ圓ヘノ切線ノ長サガ一定デアアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

7. 與ヘラレタ直線上ノ一點Pカラ、與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ長サノ切線ヲ引クニハ、Pヲドウ定メタラヨイカ。(前問ヲ利用セヨ)

8. 二定圓ニ割線ヲ引キ、ソノ各、ニヨツテ截リ取ラレル部分ヲ夫々定長ナラシメヨ。(同心圓ノ性質ヲ應用セヨ)

### 第四篇

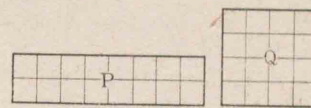
### 面積

#### 51. 面積

線デ圍マレタ圖形ノ廣サヲソノ面積トイフ。

相等シイ面積ヲモツ二

ツノ圖形ハ等積デアアル又



ハ單ニ相等シイトイフ。

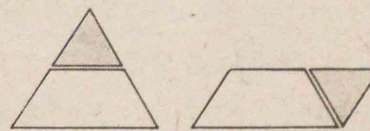
多角形PトQトガ等積デアアルコトヲ  $P=Q$  ト書ク。例ヘバ、 $\triangle ABC = \square PQRS$  ハ三角形ABCト平行四邊形PQRSトガ等積デアアルコトヲ示ス。

**注意** / 合同デアアルニツノ圖形ハ常ニ等積デアアルガ、等積デアアルニツノ圖形ハ必ズシモ合同デハナイ。

紙片デ三角形ヲ作り、

二邊ノ中點ヲ結ブ直線

ニ沿ウテ截リ、圖ノヤウ



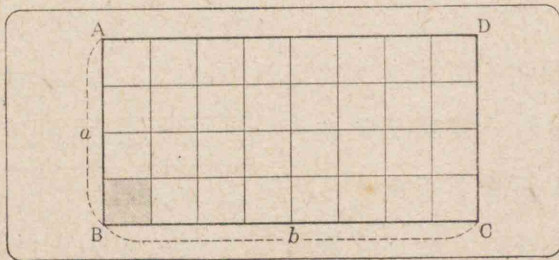
ニ置キ方ヲ變ヘテ平行四邊形ヲ作ツテ見ヨ。コノ三角形ト平行四邊形トハ等積デアアルガ合同デハナイ。

## 52. 矩形ノ面積

**定理** 45. 矩形ノ面積ヲ表ハス數ハ、ソノ二隣邊ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

即チ矩形ノ二隣邊及ビ面積ヲ表ハス數ヲ夫々  $a$ ,  $b$ ,  $S$  トスレバ,  $S=ab$

**証明**  $a, b$  ガ整数ノトキ, 矩形 ABCD ノ二邊 AB, BCヲ夫々  $a$  等分,  $b$  等分スレバ, ソノ一ツハ單位ノ長サトナルカラ, 各分點ヲ通り BC, ABニ夫々平行線ヲ



引ケバ, 矩形 ABCDハ  $ab$  個ノ正方形ニ分タレル。ソシテ各ノ各ノ正方形ノ面積ハ單位面積デアアル。

$$\therefore S=ab$$

**注意**  $a, b$  ガ整数デナイトキデモ, 上ノ定理ハ成立ツノデアアルガ, ソノ證明ハ省略スル。

定理45ハ略シテ次ノヤウニ言フ。

矩形ノ面積ハソノ二隣邊ノ積ニ等シイ。

**注意** 今後面積又ハ邊ヲ表ハス數トイフベキヲ略シテ上ノ如ク述ベル。

二隣邊ガ AB, BCデアアル矩形ノコトヲ AB, BCノ包ム矩形トイフ。

コレヲ  $AB \cdot BC$  ト書キ, AB, BCノ積トモイフ。

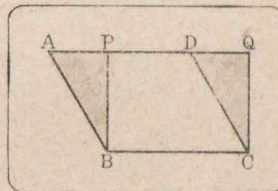
一邊ガ ABデアアル正方形ノコトヲ線分 ABノ上ニ立ツ正方形トイフ。

コレヲ  $AB^2$  ト書キ, ABノ平方トモイフ。

## 53. 平行四邊形及ビ三角形ノ面積

**定理** 46. 平行四邊形ノ面積ハ, コレト等底, 等高ナル矩形ノ面積ニ等シイ。

**証明** 平行四邊形ヲ ABCDトシ, コレト等底, 等高ナル矩形ヲ PBCQトスレバ



$$\triangle ABP \cong \triangle DCQ$$

$$\therefore \text{四邊形 } ABCQ - \triangle DCQ = \text{四邊形 } ABCQ - \triangle ABP$$

$$\therefore \square ABCD = \square PBCQ$$

**図1.** 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等シイ。

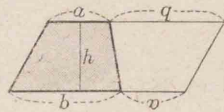
即チ底ヲ  $a$ , 高サヲ  $h$ , 面積ヲ  $S$  トスレバ,  $S=ah$

**図2.** 等底等高デアアル二ツノ平行四邊形ハ, 等積デアアル。

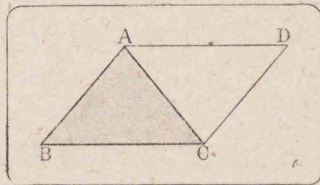
図3. 梯形ノ面積ハ、兩底ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ。

即チ兩底ヲ  $a, b$ , 高サヲ  $h$ ,  
面積ヲ  $S$  トスレバ,

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$



【定理】47. 三角形ノ面積ハコレト等底、等高デア  
ル平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シイ。



【証明】省略スル。

図1. 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ。

即チ底ヲ  $a$ , 高サヲ  $h$ , ソノ面積ヲ  
 $S$  トスレバ,

$$S = \frac{1}{2}ah$$

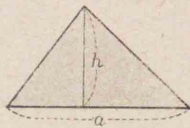


図2. 等底、等高デア  
ルニツノ三角形ハ等積デア  
ル。

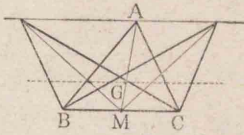
問題

1. 三角形ノ一ツノ頂點ヲ通ル直線デ、ソノ面積ヲ2等分セヨ。又3等分セヨ。
2. 三角形ノ三ツノ中線ハ、ソノ三角形ヲ六ツノ相等シイ三角形ニ分ツ。
3. 與ヘラレタ二邊ヲモツ平行四邊形ノウチデ、矩

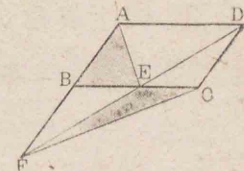
形ノ面積ハ最大デア  
ル。

4. 三角形ノ底邊ノ大イサ、ソノ位置及ビ面積ガ與ヘラレタトキ、頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 三角形ABCノ邊BCノ位置ト大イサ及ビ面積ガ與ヘラレタトキ、重心Gノ軌跡ヲ求メヨ。  
(Aノ位置ハBCノ兩側ニアル)

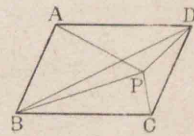


6. 平行四邊形ABCDノ邊BC上ニ一  
點Eヲトリ、DEガ直線ABト交  
ル點ヲFトスレバ、



①  $\triangle AED = \frac{1}{2} \square AC$       ②  $\triangle ABE = \triangle CEF$

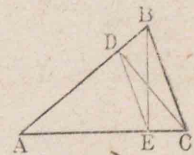
7. 平行四邊形ABCD内ノ一  
點Pトスレバ、



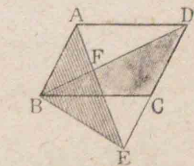
$$\triangle PAB \sim \triangle PBC = \triangle PBD$$

8. 右圖デDE || BCトスレバ、

$$\triangle BEC = \triangle BDC, \quad \triangle ABE = \triangle ADC$$



9. 平行四邊形ABCDノ邊DCノ  
延長上ニ一  
點Eヲトリ、二直線AEトBDトノ交  
點ヲFトスレバ、



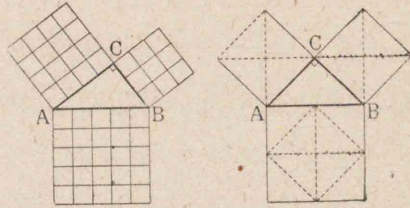
①  $\triangle ABE = \triangle BCD$

②  $\triangle DEF = \triangle BCE + \triangle ABF$

### 54. ぴたごらす (Pythagoras) ノ定理

【観察】 右ノ圖ニヨ

リ直角三角形ノ各邊  
ノ上ノ正方形ノ間ニ  
ハドンナ關係ガアル  
カヲ觀察セヨ。

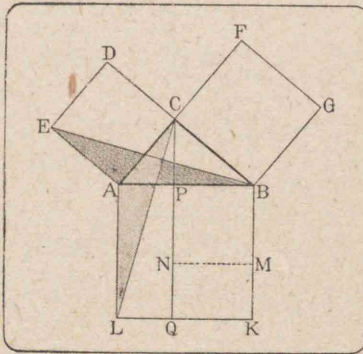


【定理】48. 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ、他ノ二邊ノ  
各ノ平方ノ和ニ等シイ。

【假設】 三角形 ABC ニ於テ  $\angle C$  ヲ直角トスル。

【終結】  $AB^2 = BC^2 + AC^2$

【証明】 各邊 AC, BC,  
AB ノ上ニ、ソノ外側ニ  
夫々正方形 ACDE, BCFG,  
ABKL ヲ作り、C カラ AB  
ニ垂線 CP ヲ下シ、更ニ  
延長シテ KL ト Q デ交



ラシメル。次ニ B, E 及ビ C, L ヲ結ブ。

サテ  $\triangle EAB, \triangle CAL$  ニ於テ

$$AE = AC, AB = AL, \angle EAB = \angle CAL$$

$$\therefore \triangle EAB \cong \triangle CAL \text{ (定理 9) } \dots\dots(1)$$

又 B, C, D ハ一直線上ニアツテ且ツ  $DB \parallel EA$

$$\therefore 2\triangle EAB = \square ACDE \text{ (定理 47) } \dots\dots(2)$$

又  $AL \parallel CQ$  デアルカラ

$$2\triangle CAL = \square APQL \dots\dots(3)$$

$$(1), (2), (3) = \text{ヨリ } \square APQL = \square ACDE \dots\dots(4)$$

$$\text{同様ニ } \square BPQK = \square BCFG \dots\dots(5)$$

$$(4), (5) \text{ヲ加ヘテ } \square ABKL = \square ACDE + \square BCFG$$

$$\text{即チ } AB^2 = AC^2 + BC^2$$

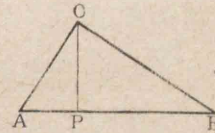
【注意】 コノ定理ニ於テ BC, CA, AB ノ長サヲ夫々  $a, b, c$  ト  
スレバ

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ 從ツテ } c^2 - a^2 = b^2, \quad c^2 - b^2 = a^2$$

【系】 直角三角形 ABC ノ直角頂 C カラ斜邊ニ下シタ  
垂線ノ足ヲ P トスレバ、

$$[1] \quad AC^2 = AP \cdot AB \quad [2] \quad BC^2 = BP \cdot AB$$

$$[3] \quad CP^2 = AP \cdot BP \quad [CP^2 = AC^2 - AP^2 \\ = AP \cdot AB - AP^2 = AP \cdot (AB - AP) = AP \cdot BP]$$

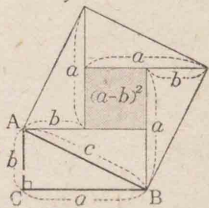
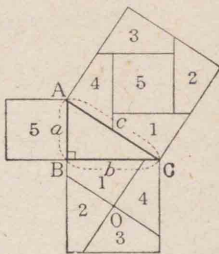


問題

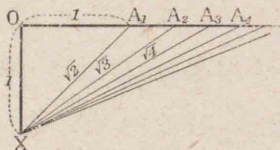
1. 三角形 ABC ニ於テ  $AB^2 = BC^2 + CA^2$  ナラバ、 $\angle C$  ハ  
直角デアル。(先ヅ  $A'C' = AC, B'C' = BC, \angle A'C'B' = \angle C$  ナ  
ル三角形  $A'B'C'$  ヲ作り、定理 48 ヲ用ヒテ  $AB = A'B'$ 、從ツ  
テ  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  ヲ證セヨ)
2. 直角三角形ノ二邊ノ長サガ 5 cm, 12 cm デアル

トキ、斜邊ノ長サハ幾ラカ。

3. 右圖ニヨツテびたごらすノ定理ヲ證明セヨ。(BC上ノ正方形デハ、Oハソノ中心、Oヲ通ルニ直線ノウチ一ツハACニ平行、他ハコレニ垂直。又AC上ノ正方形デハ各邊ノ中點ヲ通ツテAB又ハBCニ平行ニ引イタノデアル)



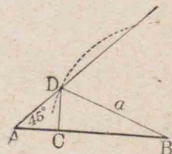
4. 右圖ニヨツテびたごらすノ定理ヲ證明セヨ。[ $c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$ ]
5. 一邊ノ長サガ  $a$  デアル正三角形ノ高サ及ビ面積ヲ求メヨ。



6. 右圖デ  $OX = OA_1 = 1$  (單位ノ長サ)トシ、 $OA_2 = XA_1$ 、 $OA_3 = XA_2$ 、 $OA_4 = XA_3$ 、……トスレバ、 $XA_1 = \sqrt{2}$ 、 $XA_2 = \sqrt{3}$ 、 $XA_3 = \sqrt{4}$ 、……ナルコトヲ證セヨ。

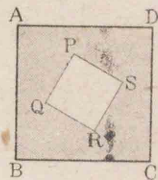
7. 與ヘラレタ二ツノ正方形ノ和ニ等シイ正方形ヲ作レ。

8. 與ヘラレタ線分AB又ハソノ延長上ニ一點Cヲトリ、 $AC^2 + BC^2$ ヲ定正方形( $a^2$ )ニ等シクセヨ。



9. 三角形ABCノ頂點Aカラ對邊又ハソノ延長ニ下シタ垂線ノ足ヲPトスレバ、 $AB^2 \sim AC^2 = BP^2 \sim PC^2$

10. 右圖デ、ABCD, PQRSハ何レモ正方形デアル。影ヲツケタ部分ト等積ナ正方形ヲ作レ。



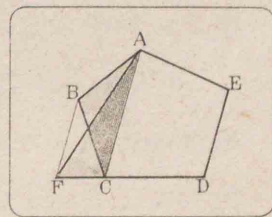
55. 等積變形

作圖題 13. 與ヘラレタ多角形ト等積デ、且ツ邊數ガ一ツ少イ多角形ヲ作ルコト。

假ニ多角形ヲ五角形ABCDEトスル。

作圖 對角線ACヲ引キ、次ニBカラコレニ平行ニBFヲ引キ、邊DCノ延長トノ交點ヲFトスレバ、四角形AFDEハ五角形ABCDEト等積デアル。

証明  $\triangle AFC$ 、 $\triangle ABC$ ハ同一ノ底ACヲモチ、且ツ高サガ等シイ。故ニ等積デアル(定理47系2)。ソノ各、ニ四角形ACDEヲ加ヘテ

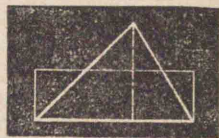


四角形 AFDE = 五角形 ABCDE

問題 13

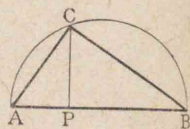
1. 與ヘラレタ五邊形ト等積デアル三角形ヲ作レ。

2. 與ヘラレタ三角形ト等積デア  
ル矩形ヲ作レ。



3. 三角形ABCト一邊BCヲ共  
有シ、且ツ等積デア  
ル平行四邊形ヲ作レ。

線分ABヲ直徑トシテ半圓ヲ畫  
キ、AB上ノ一點Pニ於テコレニ垂  
線ヲ立テ、半圓トノ交點ヲCトスレ



バ、 $\angle ACB = \angle R$   $\therefore AP \cdot PB = PC^2$  (定理48系[3])

故ニ次ノ二ツノ作圖題ハ容易ニ解ケル。

**作圖題** 14. 與ヘラレタ矩形ト等積デア  
ル正方形ノ  
一邊ヲ作ルコト。

**作圖題** 15. 與ヘラレタ線分ヲ二ツノ部分ニ分チ、  
ノ兩部分ノ積ヲ定正方形ニ等シクスルコト。

**問題**

1. 線分ABヲBヲ越エテPマデ延長シ、AB、BP  
ノ積ヲ定正方形( $a^2$ )ニ等シクセヨ。
2. 線分AB上又ハソノ延長上ニPヲトリ、ABト  
APトノ積ヲ定正方形( $a^2$ )ニ等シクセヨ。
3. 線分ABヲ二ツノ部分ニ分チ、ソノ部分ノ包ム  
矩形ノ面積ヲ最大ニセヨ。

## 第五篇 比例

### 第一章 比及ビ比例

#### 56. 量ノ比比例

**圖** 比及ビ比例ニ關スル定義ヲ述ベヨ。

幾何學デ取扱フ比及ビ比例ハ量ニ關スルモノデア  
アツテ、量ノ比ト數ノ比トノ間ニハ次ノ關係ガアル

**定理** 49. 同種類ノ二量ノ比ハ、コレヲ同ジ單位デ  
測ツタトキノ數值ノ比ニ等シイ。

**証明** 省略スル。(新編女子代數, 143頁參照)

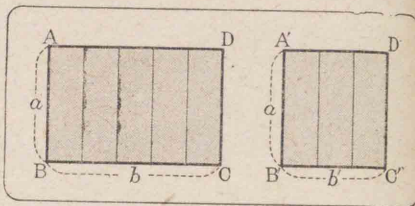
コノ定理ニヨツテ、量ノ比ハ數ノ比ニ直シテ考ヘ  
ルコトガ出來ルカラ、算術ヤ代數デ學ンダ比及ビ比  
例ノ性質ハ量ノ意義ニ反シナイ限リ幾何學ニモ適  
用スルコトガ出來ル。

#### 57. 面積ノ比

**定理** 50. 高サ(又ハ底邊)ガ相等シイ二ツノ矩形ノ  
面積ノ比ハ、底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。



**証明** ニツノ矩形 ABCD, A'B'C'D'ニ於テ、ソノ高サヲ共ニ  $a$ , 底邊ヲ夫々  $b$ ,



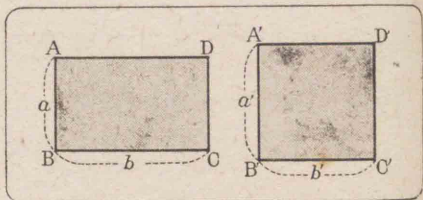
$b'$  トスレバ,  $\square ABCD = ab$ ,  $\square A'B'C'D' = ab'$

$$\therefore \square ABCD : \square A'B'C'D' = ab : ab' = b : b'$$

底邊ガ等シイ場合モ同様ニ證明出來ル。

**系** 高サ(又ハ底邊)ガ相等シイニツノ三角形ノ面積ノ比ハ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

**定理 51.** ニツノ矩形ノ面積ノ比ハ、ソノ底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。



**証明** 省略スル。

**系 1.** ニツノ正方形ノ面積ノ比ハ、一邊ノ比ノ二乗比ニ等シイ。

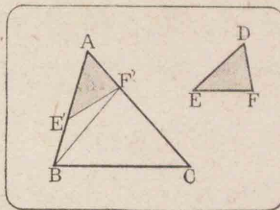
**系 2.** ニツノ三角形ノ面積ノ比ハ、ソノ底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。

**定理 52.** 一角ガ相等シイニツノ三角形ノ面積ノ比ハ、ソノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シイ。

**假設**  $\triangle ABC, \triangle DEF$ ニ於テ  $\angle A = \angle D$ トスル。

**終結**  $\triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot AC : DE \cdot DF$

**証明** AB, AC 又ハソノ延長上ニ夫々 DE, DFニ等シク AE', AF'ヲトレバ



$$\triangle DEF \equiv \triangle AE'F'$$

次ニ B, F'ヲ結ベバ

$$\frac{\triangle AE'F'}{\triangle ABF'} = \frac{AE'}{AB}, \quad \frac{\triangle ABF'}{\triangle ABC} = \frac{AF'}{AC} \quad (\text{定理 50 系})$$

$$\therefore \frac{\triangle AE'F'}{\triangle ABF'} \times \frac{\triangle ABF'}{\triangle ABC} = \frac{AE'}{AB} \times \frac{AF'}{AC}$$

即チ 
$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{DE \cdot DF}{AB \cdot AC}$$

**問題**

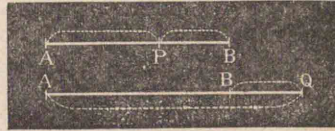
1. 三角形 ABCノ内心ヲ O トスレバ,  
 $\triangle OBC : \triangle OCA : \triangle OAB = BC : CA : AB$
2. 同一ノ圓ニ外切スルニツノ多角形ノ面積ノ比ハ兩多角形ノ周ノ比ニ等シイ。
3. 三角形 ABCノ邊 AB, ACノ中點ヲ夫々 D, Eトスレバ,  $\triangle ABC$ ト  $\triangle ADE$ トノ面積ノ比如何。

**58. 内分・外分**

線分 ABノ上ニ一點 Pヲトルトキ, Pハ線

分 AB ヲニツノ部分 AP, BP ニ内分スルトイヒ, ABノ延長上ニ一點 Q ヲトルトキ, Qハ線分 ABヲニツノ部分 AQ, BQニ外分スルトイフ。

線分 AB ガ P デ内分, Q デ外分セラレタトスレバ



$$AB = AP + BP, \quad AB = AQ - BQ$$

**定理 53.** 線分 AB ヲ一點 P デ内分スルトキ, AP:PB ニ等シイ内分點ハ他ニハナイ。又線分 AB ヲ一點 Q デ外分スルトキ, AQ:QB ニ等シイ外分點ハ他ニハナイ。

**証明** 點 P ノ外ニ點 X ガアツテ

$$AP:PB = AX:XB$$

デアルトスレバ



$$AP + PB:PB = AX + XB:XB$$

即チ  $AB:PB = AB:XB$

$$\therefore PB = XB$$

サテ P, X ハ共ニ線分 AB 上ノ點デアルカラ P ト X トハ一致スル。

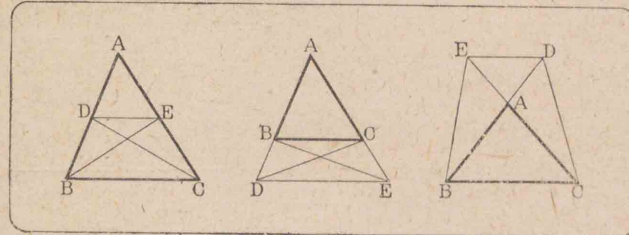
外分ノ場合ニモ同様ニ證明出來ル。

**定理 54.** 三角形ノ一邊ニ平行デアル直線ハ他ノ

二邊ヲソノ共通ノ頂點カラ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル。

**假設** 三角形 ABC ノ一邊 BC ニ平行デアル直線ガ二邊 AB, AC 又ハソノ延長ト交ル點ヲ D, E トスル。

**終結**  $AD:DB = AE:EC$



**証明** D, C; B, E ヲ結ベバ,  $BC \parallel DE$  デアルカラ

$$\triangle DEB = \triangle DEC \quad (\text{定理 47 系 2}) \quad \therefore \frac{\triangle ADE}{\triangle DEB} = \frac{\triangle ADE}{\triangle DEC}$$

サテコノ式ノ左邊ノ三角形ハ E カラノ高サガ等シク, 右邊ノモノハ D カラノ高サガ等シイ。

$$\therefore AD:DB = AE:EC \quad (\text{定理 50 系})$$

**系 1.** 本定理カラ次ノ比例式ヲ得ル。

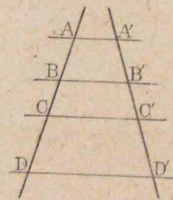
[1]  $AB:AD = AC:AE$     [2]  $AB:BD = AC:CE$

**系 2.** ニツノ直線ガ數多ノ平行線

(AA', BB', CC', ...) デ截ラレルトキ, ソノ

對應スル部分ノ比 ( $AB:A'B', BC:B'C',$

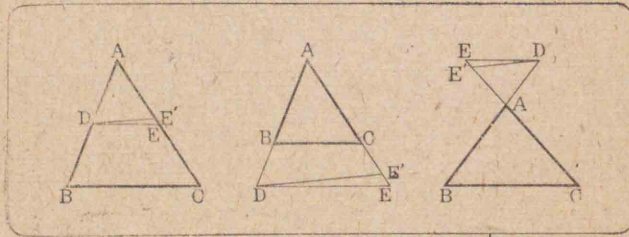
.....) ハ一定デアル。



**定理 55** 一直線ガ三角形ノ二邊又ハソノ延長ト交ツテ、コノ二邊ヲ兩邊ノ共通ナル頂點カラ相等シイ比ニ同時ニ内分又ハ同時ニ外分スルトキハ、コノ直線ハ第三邊ニ平行デアアル。

**假設** 一直線ガ△ABCノ二邊AB, AC又ハソノ延長ト夫々D, Eデ交ツテ兩邊ヲ同時ニ内分又ハ同時ニ外分シテ  $AD:DB=AE:EC$  デアルトスル。

**終結**  $DE \parallel BC$

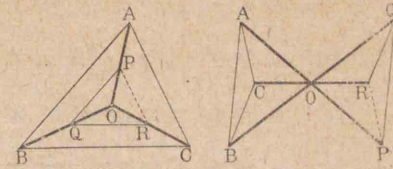


**証明** 省略スル。(Dヲ通ツテBCニ平行ナ直線ヲ引キAC又ハソノ延長トノ交點ヲE'トシ、前定理及ビ定理53ヲ用ヒテEトE'ガ一致スルコトヲ證セヨ)

**問題 55**

1. 定點Oカラ引イタ任意ノ直線ガ、平行二直線トP, Qデ交ルトキハ、 $OP:OQ$ ハ一定デアアル。
2. ニツノ圓ガ内切スルトキ、切點ヲ通ル大キイ圓ノ弦ハ皆小サイ圓ノ周デ同ジ比ニ分タレル。
3. 一點Oヲ通ル三線分OA, OB, OC又ハソノ延長

上ニ夫々P, Q, Rヲト  
リ、 $AB \parallel PQ$ ,  $BC \parallel QR$   
ナラシメレバ、  
 $AC \parallel PR$



**59. 比例スル線分**

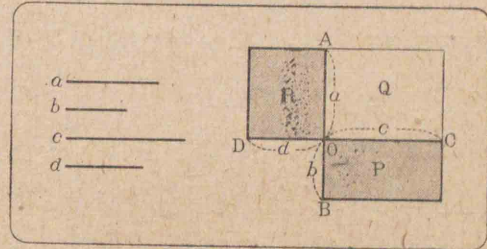
**定理 56.** 四ツノ線分ガ比例ヲナストキ、ソノ内項ノ包ム矩形ト外項ノ包ム矩形トハ等積デアアル。

**假設** 四線分  $a, b, c, d$  ニ於テ  $a:b=c:d$  トスル。

**終結**  $a \cdot d = b \cdot c$

**証明** 圖ノヤ

ウニOデ直交スル二直線AB, CDヲ引キ、 $OA=a$ ,



$OB=b$ ,  $OC=c$ ,  $OD=d$  トシテ矩形P, Q, Rヲ作ル。

$$\frac{\square Q}{\square P} = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\square Q}{\square R} = \frac{OC}{OD} = \frac{c}{d} \quad (\text{定理 50})$$

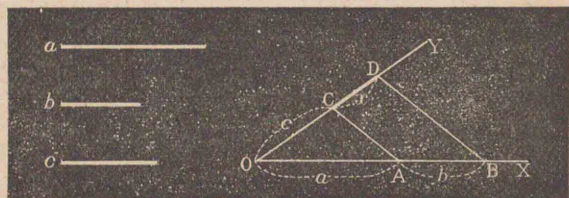
$$\text{然ルニ} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (\text{假設}) \quad \therefore \frac{\square Q}{\square P} = \frac{\square Q}{\square R}$$

$$\therefore \square P = \square R \quad \text{即チ} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

**作圖題 16.** 與ヘラレタ三線分  $(a, b, c)$  ノ第四比例項  $(x)$  ヲ求メルコト。

$a:b=c:x$ ニ適スル線分  $x$ ヲ求メルノデアル。

**作圖** 任意ノ角ヲナス二ツノ半直線  $OX, OY$  上ニ  $OA=a, AB=b, OC=c$ ヲ圖ノヤウニトリ,  $A, C$ ヲ結ブ。次ニ  $B$ ヲ通ツテ  $AC$ ニ平行ナ直線ヲ引キ,  $OY$ トノ交點ヲ  $D$ トスレバ,  $CD$ ハ求メル線分  $x$ デアル。



**証明** 省略スル。(定理54ヲ用ヒテ證セヨ)

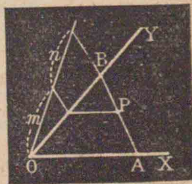
**作圖題 17.** 與ヘラレタ二線分  $(a, b)$ ノ比例中項  $(x)$ ヲ求メルコト。

**作圖** 省略スル。 [ $a:x=x:b$ ガ成立ツヤウナ線分  $x$ ヲ求メルノデアルカラ,  $a, b$ ガ包ム矩形ト等積デアル正方形ノ一邊ヲ求メルコトニ歸スル(作圖題14)]

**例題**

1. 與ヘラレタ線分  $AB$ ヲ他ノ二定線分ノ比  $m:n$ ニ内分及ビ外分セヨ。

2.  $\angle XOY$ ノ内部ニアル一定點  $P$ ヲ通ル直線ヲ引イテ兩邊ト  $A, B$ デ交ラシメ  $AP:PB$ ヲ二定線分



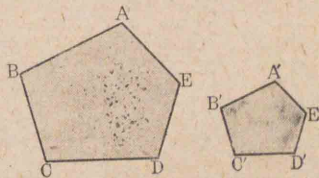
$m, n$ ノ比ニ等シクセヨ。(Pカラ  $OX$ ニ平行線ヲ引ケ)

第二章 相似形

60. 相似多角形

邊數ガ相等シイ二ツノ多角形  $(ABCD \dots; A'B'C'D' \dots)$ ニ於テ, ソノ一方ノ多角形ノ角ガ順次ニ他方ノ多角形ノ角ニ等シイ ( $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \dots$ )トキ, コノ二ツノ多角形ハ等角デアルトイフ。

コノトキ相等シイ二ツノ角ノ頂點  $(A, A'; B, B'; C, C'; \dots)$ ヲ對應スル頂點又ハ對應頂點トイヒ, 一方ノ



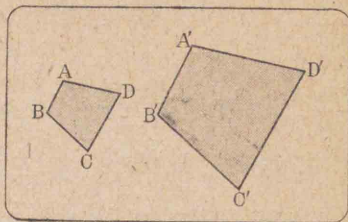
相隣ル二頂點ガ定メル邊ト, コレニ對應スル他方ノ二頂點ガ定メル邊(例ヘバ  $AB$ ト  $A'B'$ )トヲ對應スル邊又ハ對應邊トイフ。

等角デ且ツ各對應邊ノ比ガ相等シイ二ツノ多角形ハ互ニ相似デアルトイヒ, 相似多角形ノ對應邊ノ比ヲソノ相似比トイフ。

上圖デ五角形  $ABCDE, A'B'C'D'E'$ ハ互ニ相似デアル。コレヲ五角形  $ABCDE$ ト五角形  $A'B'C'D'E'$ ト書ク。

**定理 57.** 相似多角形ノ周ノ比ハ、ソノ對應邊ノ比ニ等シイ。

**証明** 假リニ二ツノ四邊形  $ABCD, A'B'C'D'$ ガ相似デアルトスレバ



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \quad (\text{定義})$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB+BC+CD+DA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}$$

即チ周ノ比ハソノ對應邊ノ比ニ等シイ

### 61. 三角形ノ相似

**定理 58.** ニツノ三角形ハ次ノ各ノ場合ニ互ニ相似デアル。

- [1] 互ニ等角デアルトキ,
- [2] 一角トコレヲ夾ムニ邊ノ比ガ夫々相等シイトキ,
- [3] 三邊ガ比例スルトキ.

**証明** [1]  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ ニ於テ  $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$ トスル。

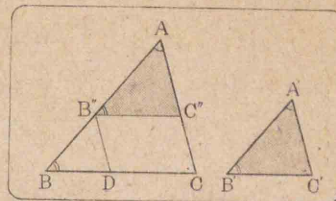
$\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ $\angle A'$ ノ邊 $A'B', A'C'$ ガ $\angle A$ ノ邊 $AB, AC$ 上ニ夫々落チルヤウニ重ネタトキ, $B'C'$ ガトル位置ヲ $B''C''$ トスル。

$$\angle AB''C'' = \angle B' = \angle B$$

$$\therefore B''C'' \parallel BC$$

$$\therefore \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''}$$

(定理 54 系 1)



從ツテ  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

次ニ $B''$ ヨリ  $AC$ ニ平行線ヲ引キ, $BC$ トノ交點ヲ

$D$ トスレバ

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{CB}{CD} \quad (\text{定理 54 系 1}) \quad \text{然ルニ } CD = C'B''$$

$$\therefore \frac{AB}{AB''} = \frac{CB}{C'B''} \quad \text{從ツテ } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'}$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}$$

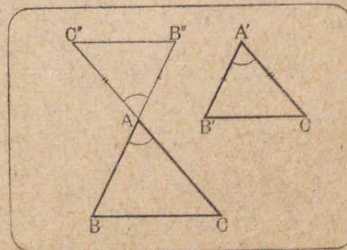
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

[2]  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ ニ於テ  $\angle A = \angle A', \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

トスル。

**証明**  $\angle A$ ノ兩邊 $AB, AC$ ヲ延長シテ、ソノ上ニ圖ノヤウニ  $AB'' = A'B', AC'' = A'C'$ ナル點 $B'', C''$ ヲ

トツテコレヲ結ブト



$$\triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C' \quad (\text{定理9})$$

然ルニ  $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad (\text{假设})$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AB''}{AC''} \quad \text{從ツテ} \quad \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''}$$

$$\therefore BC \parallel B''C'' \quad (\text{定理55})$$

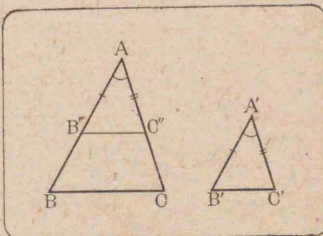
故ニ  $\triangle ABC$  ト  $\triangle AB''C''$  トハ等角デアアル。

即チ  $\triangle ABC \sim \triangle AB''C'' \quad ([1] \text{ノ場合})$

[3]  $\triangle ABC, \triangle A'B'C' =$  於テ  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$

トスル。

**証明** AB 又ハツノ延長上ニ  $A'B'$  ニ等シク  $AB''$  フトリ、BC ニ平行ニ  $B''C''$  フ引イテ AC 又ハツノ延長ト  $C''$  デ交ラシメレバ



$$\triangle AB''C'' \sim \triangle ABC \quad ([1] \text{ノ場合}) (1)$$

$$\therefore \frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC}$$

ソシテ  $AB'' = A'B' \quad (\text{作圖})$

$$\therefore \frac{A'B'}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC}$$

又  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \quad (\text{假设})$

$$\therefore A'C' = AC'', \quad B'C' = B''C''$$

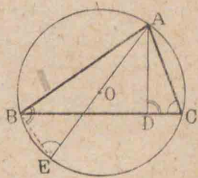
$$\therefore \triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C' \quad (\text{定理11})$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad [(1) = \text{ヨル}]$$

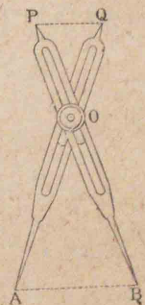
**問題**

1. 邊數ガ相等シイニツノ正多角形ハ相似デアアル。
2. 三角形 ABC ノ中線 AD 上ノ一點 Q フ通り、BC ニ平行ナ直線ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 P, R トスレバ、PQ ト QR トノ間ニドンナ關係ガアルカ。
3. OA, OB, OC ハ一定直線デアアル。OA 上ノ任意ノ一點 P カラ OB, OC へ垂線 PX, PY フ下ストキハ、PX · PY ハ一定ノ値ヲモツ

4. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ノ包ム矩形ハ、A カラ引イタ垂線 AD ト外接圓ノ直徑トガ包ム矩形ニ等シイ。(A フ通ル直徑ヲ引キ、ソノ端 E フ B 又ハ C ニ結ンデ見ヨ)



5. 右圖ハ比例こんはすトイフ器具デ圖面ヲ縮メ、又ハ擴大スルトキニ用ヒル。コノ構造ヲ言へ。



又、 $OA = 2OQ, OB = 2OP$  ナラバ、 $AB = 2PQ$  ナルコトヲ證セヨ。

### 62. 相似形ノ面積

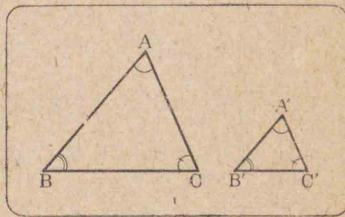
**定理 59.** ニツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ、ソノ對應邊ノ二乗比ニ等シイ。

**假設**  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

トスル。

**終結**  $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$

**証明**  $\angle A = \angle A'$



$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AC}{A'C'} \quad (\text{定理 52})$$

然ルニ  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (\text{假設})$

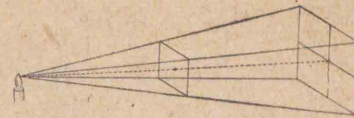
$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

**系** ニツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ、ソノ對應邊ノ二乗比ニ等シイ。 (對應スル對角線ヲ引イテ、兩相似多角形ヲ三角形ニ分ケレバ、ソノ對應スル三角形ハ又夫々相似形トナル)

問題 25

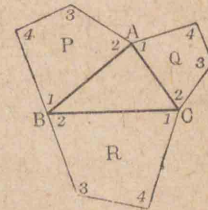
1. ニツノ相似三角形ガアツテ、ソノ相對應スル一組ノ邊ノ長サハ夫々 15 cm, 12 cm デ、第一ノ三角形ノ面積ハ 100 平方糎デアル。第二ノ三角形ノ面積ヲ求メヨ。

2. 光ハ光源カラノ距離ノ二乗ニ比例シテ擴ガル。コレヲ圖ニ



ヨツテ幾何學的ニ説明セヨ。

3. 直角三角形ノ三邊ノ上ニ、ソノ三邊ガ相對應スルヤウニ相似多角形ヲ夫々畫ケバ、斜邊ノ上ノモノノ面積ハ、他ノ二邊ノ上ノモノノ和ニ等シイ。

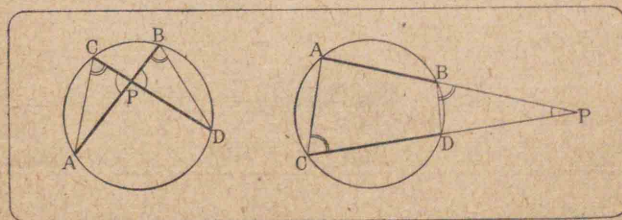


### 63. 弦ノ部分ノ包ム矩形

**定理 60.** 圓ノニツノ弦又ハソノ延長ガ相交ルトキ、ソノ交點デ内分又ハ外分サレタ各弦ノ部分ノ積ハ相等シイ。

**假設** 圓ノニツノ弦 AB, CD 又ハソノ延長ノ交點ヲ P トスル。

**終結**  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



証明 A, C; B, Dヲ結ブ。  $\triangle ACP, \triangle DBP$ ニ於テ

$$\angle ACP = \angle DBP, \angle APC = \angle DPB$$

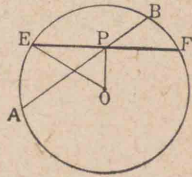
$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle DBP \quad [\text{定理 } 58, 1]$$

從ツテ  $AP : CP = DP : BP$

即チ  $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

図1. 圓内ノ一點(P)ヲ通ル弦(AB)ガソノ點(P)デ分

タレタ二ツノ部分ノ積(PA·PB)ハ、  
ソノ點ヲ中點トスル弦(EF)ノ半  
分ノ二乗ニ等シク一定デアル。

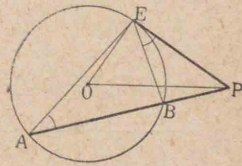


(圓ノ中心ヲOトシ, O, P及ビO, Eヲ結  
べバ,  $EF \perp OP, PA \cdot PB = PE \cdot PF = PE^2 = OE^2 - OP^2 = \text{一定}$ )

図2. 圓外ノ一點(P)カラ引イタ割線(PBA)上ノ弦

(AB)ガソノ點(P)デ外分セラレタ二ツノ部分ノ積  
(PA·PB)ハ、ソノ點カラ圓ニ引イタ切線(PE)ノ平方ニ  
等シイ。(A, E; E, Bヲ結べバ,

$$\triangle AEP \sim \triangle EBP \therefore PA : PE = PE : PB)$$



注意 圓ノ中心ヲOトスレバ、コ  
ノ場合ニハ、 $PE^2 = OP^2 - OE^2 = \text{一定}$ 。

図3. 二ツノ線分AB, CD又ハソノ各ノ延長ガ一點

Pデ交リ,  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$  ナラバ、四ツノ端A, B, C, D  
ハ同一圓周上ニアル。

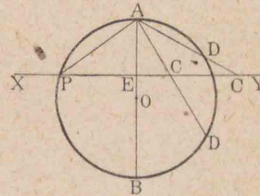
問題

1. 線分 AB ノ延長ガ他ノ線分 PE ノ一端 P ヲ通  
ルトキ  $PA \cdot PB = PE^2$  ナラバ、三角形 ABE ノ外接圓ハ  
E ニ於テ PE ニ切スル。

2. 三角形ノ各頂點カラソノ對邊ヘ引イタ垂線ガ、  
垂心デ内分又ハ外分サレル二ツノ部分ノ積ハ皆  
相等シイ。

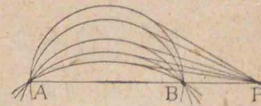
3. 圓周上ノ一點 A カラ任意

ノ直線ヲ引キ, A ヲ通ル直徑  
AB ニ垂直ナ一定直線 XY ト  
C デ、圓周ト D デ交ラシメレ



バ,  $AC \cdot AD = \text{一定}$ 。又 XY ト圓周トガ交ルトキ、交  
點ノ一ツヲ P トスレバ,  $AC \cdot AD = AP^2$  デアル。

4. 二定點ヲ結ブ線分ノ延長  
上ノ一點カラ、コノ二點ヲ通  
ル數多ノ圓ヘ引イタ切線ノ  
長サハ相等シイ



雑題

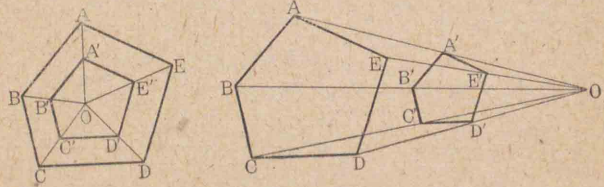
1. 與ヘラレタ矩形ト等積デ且ツ與ヘラレタ線分  
ニ等シイ一邊ヲモツ矩形ヲ作レ。



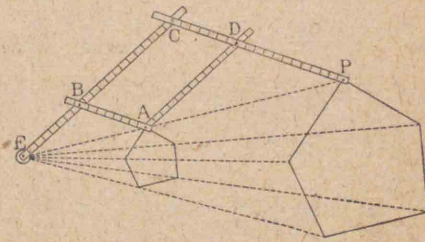
2. ABヲ直径トスル半圓ノ弧ノ上ノ一點ヲCトシ、弧ACノ中點ヲDトスレバ、

$$\triangle ADB : \triangle DBC = AB : BC$$

3. 多角形ノ總テノ頂點ヲ一點ニ結ブ各線分ヲ同ク比ニ全部内分(又ハ全部外分)スル點ヲ順ニ結ビツケテ得ル多角形ハモトノ多角形ニ相似デアル。

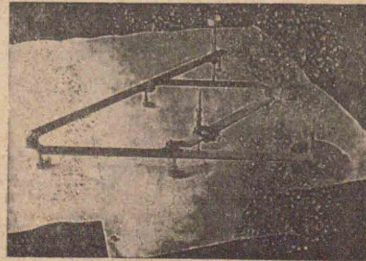


4. 前問ヲ利用シテ與ヘラレタ多角形ト相似デアル多角形ヲ畫ケ。



5. 右圖ハ伸縮模寫器(Pantograph)デアアル。

EB : BA = EC : CPナル如ク調節スレバ、點E, A, Pハ常ニ

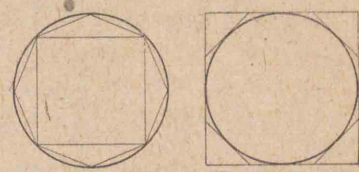


一直線上ニアツテA, Pノ畫ク直線形ハ互ニ相似デアルコトヲ説明セヨ。(一般圖形デモ同様デアル)

### 第三章 圓ノ周及ビ面積

#### 64. 圓ノ周・圓周率

**觀察** 圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ガ2倍, 3倍, ……トナルニ從ツテ, ソノ周(又ハ面積)ハ次第ニ増シ

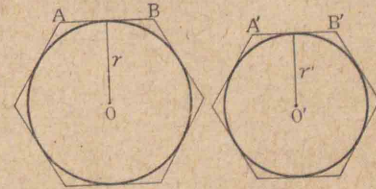


テ圓ノ周(面積)ニ近ヅクコトヲ觀察セヨ。又圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ガ2倍, 3倍, ……トナルニ從ツテ, ソノ周ハ次第ニ減ツテ圓ノ周(面積)ニ近ヅクコトヲ觀察セヨ。

圓ノ周ハ, ソノ内接正多角形又ハ外切正多角形ノ邊ノ數ヲ限リナク増シタトキノ, コノ正多角形ノ周ノ極限デアル。

サテ邊數nデアルニツノ正多角形ノ一邊ヲ夫々

AB, A'B'トシ, ソノ周ヲm, m', 又各ノ内切圓O, O'ノ半徑ヲ夫々r, r'トスレバ, 次ノ關係ガアル。



$$\frac{m}{m'} = \frac{nAB}{nA'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{r}{r'} \quad (\text{理由ヲ考ヘヨ})$$

即チ二圓ニ夫々外切スル同ジ邊數ノ二ツノ正多  
形ノ周ノ比( $m:m'$ )ハ、邊數ニ關係ナク常ニ二圓ノ半  
徑ノ比( $r:r'$ )ニ等シイ。ヨツテコノ正多角形ノ邊數  
ヲ限リナク多クシタトキノ極限、即チ圓 $O, O'$ ノ周 $l,$   
 $l'$ ニツイテモ同様ニ

$$\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'} \quad \text{即チ} \quad \frac{l}{2r} = \frac{l'}{2r'}$$

故ニ圓ノ周ノソノ直徑ニ對スル比ハ、スベテノ圓  
ニツイテ同一デアル。

ユノ比ヲ圓周率ト名ツケ、通例 $\pi$ デ表ハス。

$$\text{即チ} \quad \frac{l}{2r} = \pi \quad \text{又} \quad l = 2\pi r = \pi d \quad (d \text{ハ直徑})$$

**注意** 圓周率 $\pi$ ハ無理數デアツテ、ソノ値ヲ小數第十  
位マデ示セバ、 $\pi = 3.1415926535 \dots$ デアル。

實用上デハ $\pi$ ノ近似値トシテ $3.1416$ 又ハ $\frac{355}{113}$ ヲ用ヒ、  
大略ノ計算ニハ $3.14$ 又ハ $\frac{22}{7}$ ヲ用ヒル。

上ニ述ベタコトヨリ次ノ定理ヲ得ル。

**定理 61.** 圓ノ周ハ、ソノ直徑ニ圓周率ヲ掛ケタ  
モノニ等シイ。

## 65. 圓及ビ扇形ノ面積

前節デ述ベタト同様ニ、

圓ノ面積ハ、ソノ内接正多角形又ハ外切  
正多角形ノ邊ノ數ヲ限リナク増シタトキ  
ノ、コノ正多角形ノ面積ノ極限デアル。

**定理 62.** 圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ圓周率ヲ掛ケ  
タモノニ等シイ。

**証明**  $AB$ ヲ半徑 $r$ ナル圓 $O$ ノ外切正 $n$ 角形ノ  
一邊、 $OC$ ヲ中心カラ $AB$ ヘノ垂線、 $m$ ヲコノ多角形  
ノ周トスレバ

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} AB \cdot r$$

兩邊ニ $n$ ヲ掛ケテ

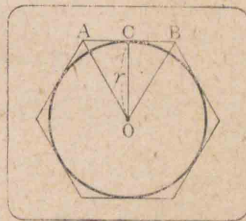
$$n \times \triangle AOB = \frac{1}{2} AB \cdot n \cdot r$$

$$\therefore \text{外切正 } n \text{ 角形ノ面積} = \frac{1}{2} m \cdot r$$

サテ $n$ ヲ限リナク大キクスレバ、外切正 $n$ 角形ノ  
面積ハ圓ノ面積トナリ、ソノ周 $m$ ハ圓周即チ $2\pi r$ ト  
ナル

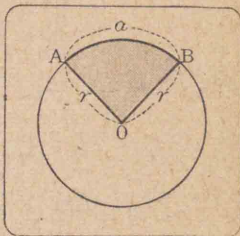
$$\therefore \text{圓ノ面積} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

圓ノ弧トソノ兩端ヲ通ル半徑トデ圍マ  
レタ圓ノ一部分ヲ扇形トイヒ、ソノ弧ニ對  
スル、中心角ヲ扇形ノ角トイフ。



**定理 63.** 半徑ガ  $r$  デアル圓ノ扇形ノ弧ノ長サヲ  $a$  トスレバ、ソノ面積ハ  $\frac{1}{2}ar$  ニ等シイ。

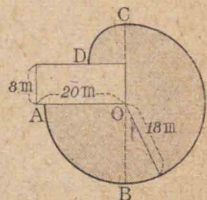
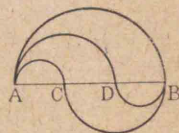
**証明** 扇形ノ面積ト圓ノ面積トノ比ハ、扇形ノ弧ノ長サ  $a$  ト圓周  $2\pi r$  トノ比ニ等シクナケレバナラヌ。



$$\therefore \text{扇形ノ面積} = \frac{\pi r^2 a}{2\pi r} = \frac{1}{2}ar$$

**問題**

- 半徑 4.5 cm 及 ビ 10.6 cm デアル圓ノ周ヲ計算セヨ。  
(1 mm 以下四捨五入)
- 右圖デ C, D ハ線分 AB ノ三等分點デアル。A カラ B 至ル徑路ハ、ドノ曲線ヲ經ルモ同一ナルコトヲ證セヨ。
- 牛ガ縦 8 m, 横 20 m ノ矩形ノ畜舎ノ外ノ一隅ニ長サ 18 m ノ綱デ繋ガレテキル。コノ牛ノ動キ得ル範圍ノ面積ヲ平方米マデ求メヨ。
- 二ツノ同心圓ガ作ル圓環ノ面積ガ 22 平方糎デ兩圓ノ半徑ノ差ガ 1 cm デアルトキ、 $\pi = \frac{22}{7}$  トシテ兩圓ノ半徑ヲ求メヨ。



## 第六篇

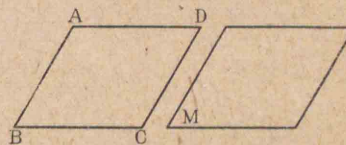
### 立體圖形

#### 第一章 空間ニ於ケル點、線及ビ平面

#### 66. 空間ニ於ケル點、直線、平面ノ位置

本篇ニ於テハ空間ニアル圖形ニツイテ考ヘル。以後斷リナクトモ圖形ハ空間ニアルモノトスル。

單ニ平面トイヘバ、四方ニ限リナク擴ガツテキル



モノデアルガ、便宜上四邊

形デ表ハシ、平面 ABCD 又ハ平面 M ナドトイフ。

#### [I] 點ト平面

空間ニアル點ト平面トノ位置ノ關係ニハ、次ノ二ツノ場合ガアル。

[1] 點 A ガ平面 M ノ上ニアル場合。



コノトキ、平面 M ハ點 A ヲ通ル又ハ含ムトイフ。

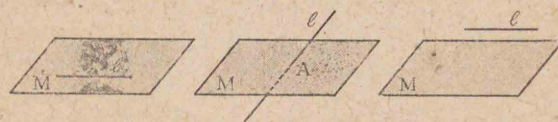
[2] 點 A ガ平面 M 外ニアル場合。

[II] 直線ト平面

空間ニアル直線ト平面トノ位置ノ關係ニハ次ノ三ツノ場合ガアル。

[1] 直線  $l$  ガ平面  $M$  上ニアル場合。

コノトキ平面  $M$  ハ直線  $l$  ヲ含ム又ハ通ルトイフ。



[2] 直線  $l$  ト平面  $M$  トガ唯一點デ出會フ場合。

コノトキ直線  $l$  ト平面  $M$  トハ相交ルトイヒ、ソノ交ル點  $A$  ヲソノ交點トイフ。

[3] 直線  $l$  ト平面  $M$  トガ一點ヲモ共有シナイ場合。

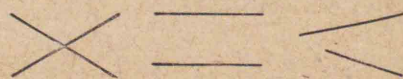
コノトキ直線  $l$  ト平面  $M$  トハ互ニ平行デアルトイフ。コレヲ  $l \parallel M$  ト書ク。

[III] 二直線ノ位置

**觀察** 二本ノ鉛筆ヲ左右ノ手ニ持チ、ソノ位置ノ關係ニツイテ種々ノ場合ヲ考察セヨ。

空間ニアル異ナル二直線ノ位置ノ關係ニハ次ノ三ツノ場合ガアル。

[1] 相交ル場合。



[2] 平行ナ場合。

[3] 相交ラズ、且ツ平行デナイ場合。

コノトキ二直線ハ<sup>初</sup>撰レノ位置ニアルトイフ。

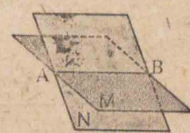
[IV] 二平面ノ位置

空間ニアル異ナル二平面ノ位置ノ關係ニハ、次ノ二ツノ場合ガアル。

[1] 二平面ガ出會フ場合。

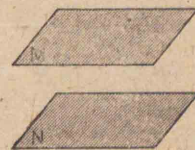
**公理** 二平面ガ出會フトコロハ唯一ツノ直線デアアル。又二平面ガ一點ヲ共有スレバ、ソノ點ヲ通ル一直線ヲ共有スル。

二平面ガ出會フコトヲ交ルトイヒ、ソノ出會ツタ直線ヲ二平面ノ交線(右圖  $AB$ )トイフ。



[2] 二平面ヲ如何程擴張シテモ出會ハナイ場合。

コノトキ二平面ハ互ニ平行デアルトイフ。二平面  $M, N$  ガ互ニ平行デアアルコトヲ  $M \parallel N$  ト書ク。



67. 平面ノ決定

幾ツカノ與ヘラレタ直線點ヲ通ル平面ガ唯一ツ

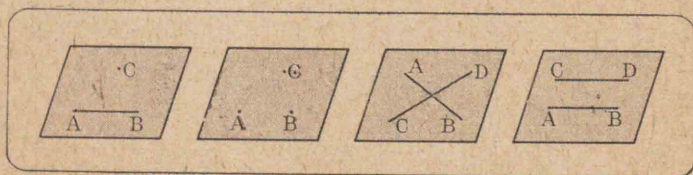
デアルトキ、コレ等ノ直線、點ハ一平面ヲ決定スルトイフ。

**公理** 一平面上ニアル一定直線ヲ軸トシテコノ平面ヲ適當ニ廻轉スレバ、ソノ平面ヲシテ空間ニアルコノ定直線外ノ任意ノ與ヘラレタ點ヲ通ラセルコトガ出來ル。ソシテソノ位置ハ唯一ツデアル。

コノ公理ニヨツテ次ノ定理ヲ證明スルコトガ出來ル。

**定理 64.** 次ノ各、ハ一平面ヲ決定スル。

- [1] 一直線トソノ上ニナイ一點。
- [2] 同一直線上ニナイ三點。
- [3] 相交ル二直線。
- [4] 平行デアアル二直線。



**注意** 平面ヲ表ハスニ、ソノ決定スル條件ニ從ツテ次ノヤウニ書クコトガアル。

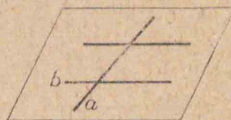
平面(BC, A)トハ直線 BC ト點 A トガ決定シタ平面。

平面(A, B, C)トハ三點 A, B, C ガ決定シタ平面。

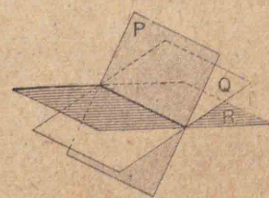
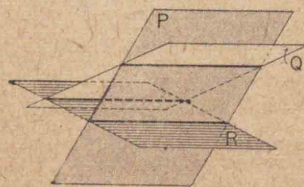
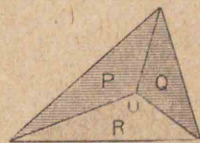
平面(AB, CD)トハ二直線 AB, CD ガ決定シタ平面。

問題

- 1. 一ツノ平面ハ空間ヲ二ツノ部分ニ分ケル。相交ル二平面ハ空間ヲ幾ツノ部分ニ分ケルカ。又三平面ガ一點ヲ共有スレバドウカ。
- 2. 同一ノ平面上ニナイ四點ハ幾ツノ平面ヲ決定スルカ。
- 3. 二直線ガ相交ラズ、且ツ平行デナイトキ、コノ二直線ハ同一平面上ニアルカ。
- 4. 相交ル二直線  $a, b$  ノ一ツ  $a$  ト交リ、 $b$  ニ平行デアアル任意ノ直線ハ平面  $(a, b)$  上ニアル。
- 5. 平行二直線  $a, b$  ノ一ツ  $a$  ニ交ル平面  $M$  ハ又  $b$  ニモ交ル。[ $M$  ト平面  $(a, b)$  トノ交線ヲ考ヘヨ]
- 6. 三ツノ平面ガ相交ルトキ、ソノ交線ハ



- ① 同一ノ點ヲ通ルカ、
- ② 互ニ平行デアアルカ、
- ③ 又ハ相一致スル

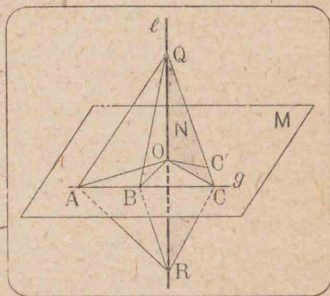


68. 平面ノ垂線及ビ斜線

〔定理〕 65. 一直線上ノ定點ヲ通り、コノ直線ニ垂直デアルスベテノ直線ハ同一平面上ニアル。

〔假設〕 一直線ヲ  $l$ ,  $O$  ヲ  
ソノ直線上ノ定點トシ、  
 $OA \perp l$ ,  $OB \perp l$ ,  $OC \perp l$ , ……ト  
スル。

〔終結〕  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , ……  
ハ同一平面上ニアル。



〔証明〕  $l$  ニ垂直ナ二直線  $OA$ ,  $OB$  ガ決定スル平面ヲ  $M$  トスル。  $O$  ヲ通り  $l$  ニ垂直デアル他ノ任意ノ一直線  $OC'$  ト直線  $l$  トハ  $O$  ヲ共有スルカラ一平面ヲ決定スル。コレヲ  $N$  トスレバ、 $M$ ,  $N$  ハ相異ナル平面デ、且ツ一點  $O$  ヲ共有スルカラ相交ル(公理)。ソノ交線ヲ  $OC$  トスル。

サテ  $M$  上デ  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  ト交ル直線  $g$  ヲ引キ、ソノ交點ヲ夫々  $A$ ,  $B$ ,  $C$  トシ、直線  $l$  上ニ  $O$  カラ等距離ニ點  $Q$ ,  $R$  ヲトリ、 $QA$ ,  $QB$ ,  $QC$ ,  $RA$ ,  $RB$ ,  $RC$  ヲ作ル。三角形  $QAR$  ニ於テ  $AO$  ハ邊  $QR$  ノ中點ヲ通り、且ツコレニ垂直デアルカラ

同様に  $AQ=AR$   
 $BQ=BR$

$\therefore \triangle QAB \cong \triangle RAB$  (定理 11)

$\therefore \angle QAC = \angle RAC$  且ツ  $QA = RA$

從ツテ  $\triangle QAC \cong \triangle RAC$  (定理 9)

故ニ  $\triangle QCR$  ハ二等邊三角形デ、 $O$  ハ底邊  $QR$  ノ中點トナル。

$\therefore OC \perp l$

サテ  $OC$ ,  $OC'$  ハ  $l$  ト共ニ同一ノ平面  $N$  上ニアツテ、且ツ共ニ  $l$  ニ垂直デアルカラ、直線  $OC'$  ト  $OC$  トハ相合スル。即チ  $O$  ヲ通り  $l$  ニ垂直デアル直線ハ皆一定ノ平面  $M$  ノ上ニアル。

一直線ガ一平面ト交リ、ソノ交點ヲ通ルコノ平面上ノスベテノ直線ニ垂直デアルトキ、直線ト平面トハ互ニ垂直デアル又ハ直交スルトイヒ、コノ直線ヲ平面ノ垂線又ハ法線トイヒ、交點ヲソノ足トイフ。

直線  $l$  ト平面  $M$  トガ互ニ垂直デアルコトヲ  $l \perp M$  ト書ク。

平面ニ垂直デナイ直線ヲソノ平面ノ斜線トイヒ、交點ヲソノ足トイフ。

〔圖〕 1. 直交スル二直線ノ一方ヲ軸トシテ廻轉スル

トキ、他ノ直線ハ一ツノ平面ヲ畫ク。

系2. 相交ル二直線ニコノ交點ニ於テ垂直デア  
ル直線ハ、モトノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デア  
ル。

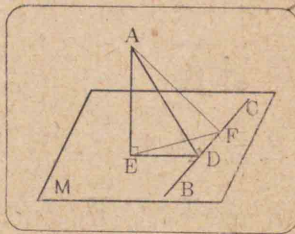
系3. 一直線上ノ定點ニ於テコレニ垂直デア  
ル平面ハ、常ニ唯一ツアル。

定理66. 平面M外ノ一點AカラM上ノ直線BC  
ニ垂線ADヲ下シ、ソノ足Dニ於テ更ニBCニ垂  
直デア  
ル直線DEヲM上ニ引キ、AカラDEニ垂線ヲ  
下シ、ソノ足ヲEトスレバ、AEハMニ垂直デア  
ル。

假設 右圖デ AD⊥BC,  
DE⊥BC, AE⊥DE トスル。

終結 AE⊥M

証明 BC上ニ任意ノ點  
Fヲトリ、EF、AFヲ作ル。



直角三角形 ADF, ADE, EDF ヨリ

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 = AE^2 + ED^2 + DF^2 = AE^2 + EF^2$$

$$\therefore AE \perp EF \quad (131 \text{頁問題 } 1)$$

$$\text{又} \quad AE \perp ED \quad (\text{作圖})$$

$$\therefore AE \perp M \quad (\text{定理 } 65 \text{系 } 2)$$

系1. 平面M外ノ一點ヲ通りMニ垂直デア  
ル直線ハ、常ニ唯一ツアル。

系2. 平面M外ノ一點AカラMニ垂線ヲ下シ、ソノ  
足EカラM上ノ直線ECニ垂線ヲ下シ、ソノ足ヲD  
トスレバ、ADハBCニ垂直デア  
ル。(本定理ノ圖ニ  
於テ  $AF^2 = AE^2 + EF^2 = AE^2 + ED^2 + DF^2 = AD^2 + DF^2$  ナルコトニ  
注意)

定理67. 一平面ニ垂直デア  
ル二ツノ直線ハ互ニ  
平行デア  
ル。

假設 右圖デ AB⊥M, CD⊥M  
トスル。

終結 AB∥CD

証明 AB, CDガ平面Mト交  
ル點B, Dヲ結ビ、Dヲ通ツテM上ニEFヲBDニ垂  
直ニ引キ、AB上ノ一點AトDトヲ結ベバ、

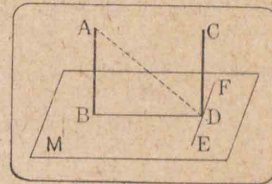
$$AD \perp EF \quad (\text{定理 } 66 \text{系 } 2)$$

AD, BD, CDハ同一ノ點Dニ於テ交リ、同一ノ直線  
EFニ垂直デア  
ルカラ同一平面上ニアル(定理65)。

故ニAB, CDハ同一平面上ニアツテ、且ツ共ニBD  
ニ垂直デア  
ル(假設)。

$$\therefore AB \parallel CD$$

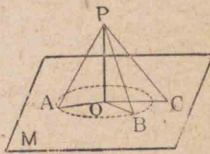
系1. 平行二直線a, bノ一ツaニ垂直デア  
ル平面M  
ハbニモ垂直ニ交  
ル。(b上ノ一點カラMニ垂線ヲ引ケ)



系2. 平面上ノ定點ヲ通ツテコノ平面ニ垂直デア  
ル直線ハ、常ニ唯一ツアル。

問題

1. 柱ヲ鉛直ニ立テルトキ、さげふ  
リデ驗ス理由ヲ言へ。
2. 一點デ交ル三直線ガ二ツツ  
互ニ垂直ナルトキハ、ソノ一ツハ  
他ノ二直線ガ決定スル平面ニ垂  
直デアアル。



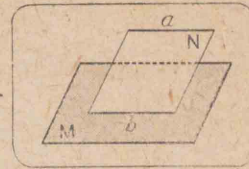
3. 平面外ノ一點カラコノ平面  
ヘ引イタ線分ノウチ、

- ① 垂線ハ最モ短イ。(コノ長サヲ點ト平面トノ距  
離トイフ)
- ② 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ斜線ハ相等  
シイ。
- ③ 垂線ノ足カラ大ナル距離ニ足ヲモツ斜線ハ  
小ナル距離ニ足ヲモツ斜線ヨリ大デアアル。

69. 平行ナ直線

定理 68. 平行二直線ノ一方ヲ含ム平面ハ他ノ直  
線ヲ含ムカ又ハコレニ平行デアアル。

証明 平行二直線ヲ  $a, b$  ト  
シ、平面  $M$  ハ  $b$  ヲ含ムモノトス  
ル。

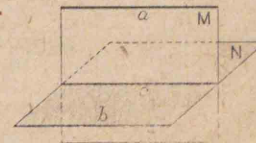
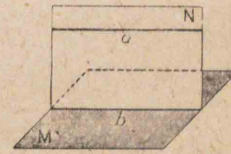


$a, b$  ノ決定スル平面ヲ  $N$  ト  
スレバ、平面  $N$  ト  $M$  トハ直線  $b$  ヲ共有スルカラ、モシ  
一致スレバ、 $M$  ハ  $a$  ヲ含ム。

又モシ一致シナケレバ、 $M$  ト  $N$  トノ交線ハ  $b$  デア  
ルカラ、 $a$  ガ  $M$  ニ交ルトスレバ、ソノ交點ハ  $b$  上ニナ  
ケレバナラス。コレハ假設即チ  $a \parallel b$  ニ反スル。故  
ニコノ場合ニハ  $a \parallel M$  デアル。

問題

- 1.\* 平面  $M$  ト直線  $a$  トガ平行ナ  
ラバ、 $M$  ト  $a$  ヲ含ム平面  $N$  トノ  
交線  $b$  ハ  $a$  ニ平行デアアル
2. 平行二直線  $a, b$  ノ一ツ  $a$   
ノミヲ含ム平面  $M$  ト、 $b$  ノミ  
ヲ含ム平面  $N$  トノ交線  $c$  ハ  
 $a, b$  ノ各、ニ平行デアアル。



- 3.\* 同一直線ニ平行ナ二直線ハ互ニ平行デアアル。
- 4.\* 一直線  $a$  ニ平行ナ二平面ノ交リハ  $a$  ニ平行デ  
アル。



### 70. 平行ナ平面

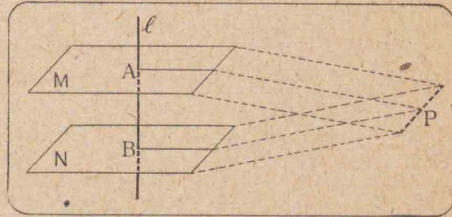
**定理 69.** 一ツノ直線ニ垂直デアル二平面ハ互ニ平行デアル。

**假設** 直線  $l$  上ノ二點  $A, B$  ニ於テ夫々  $l$  ニ垂直デアル平面ヲ  $M, N$  トスル。

**終結**  $M \parallel N$

**証明**  $A, B$  ヲ

通ツテ夫々平面  $M, N$  上ニアル直



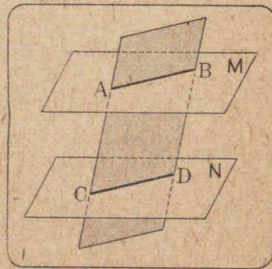
線ハスベテ  $l$  ニ垂直デアル(定理65)。ソレ故モシ二平面  $M, N$  ガ交ルトスレバ、ソノ交線上ノ一點  $P$  ト  $A$  及ビ  $B$  トヲ結ブニツノ直線ハ共ニ  $l$  ニ垂直デナケレバナラナイ。コレデハ直線外ノ一點カラ一直線  $l$  ニ二ツノ垂線ガ引ケルコトトナリ不合理デアル。

ヨツテ  $M, N$  ハ交ラナイ。即チ  $M \parallel N$

**定理 70.** 一平面ガ平行二平面ト交ルトキハ、ソノ交線ハ互ニ平行デアル。

**証明** 省略スル。

**図 1.** 平行二平面  $M, N$  ノ一ツ  $M$  ニ垂直デアル直線  $g$  ハ  $N$  ニ



モ垂直ニ交ル。(N上ノ一點ト  $g$  トヲ含ム平面ヲ作レ)

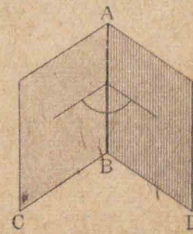
**図 2.** 平行二平面ニ垂直デアル數多ノ直線ガ、コノ二平面ニヨツテ截リ取ラレル線分ハ、スベテ長サガ相等シイ。(コノ長サヲ平行二平面間ノ距離トイフ)

**問題**

1. 教室内デ平行二平面ト看做シ得ル場所ヲ言へ。
2. 相交ル二直線ノ何レニモ平行デアル平面ハ、ソノ二直線ガ決定スル平面ニ平行デアル。
- 3.\* 平面外ノ一點ヲ通ツテ、コノ平面ニ平行デアル平面ハ唯一ツデアル。
- 4.\* 同一平面ニ平行ナ二平面ハ互ニ平行デアル。
- 5.\* 角  $ABC$  ト角  $DEF$  ニ於テ  $AB \parallel DE, BC \parallel EF$  トスレバ、兩角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。

### 71. 垂直ナ平面

一直線ヲ界トスルニツノ半平面ノ開キヲ二面角トイヒ、コノ直線ヲ二面角ノ稜各半平面ヲ二面角ノ面トイフ。



右圖デ  $AB$  ハ稜、半平面  $ABC, ABD$  ハ二面角ノ面デアル。コレヲ二面角  $ABCD$  又ハ二

面角  $AB$  ト書ク。

二面角ノ稜上ノ一點カラソノ稜ニ垂直ニ各面上ニ引イタ二直線ノナス角ノ大イサハ、ソノ點ノ位置ニ關セズ一定デアアル(前問題5)。コレヲ二面角ノ平面角トイフ。

平面角ガ直角デアアル二面角ノ二面ヲ夫夫含ム二平面ハ互ニ垂直デアアルトイフ。

平面  $M, N$  ガ互ニ垂直デアアルコトヲ  $M \perp N$  ト書ク。

**定理 71.** 一平面ニ垂直デアアル直線ヲ含ム任意ノ平面ハモトノ平面ニ垂直デアアル。

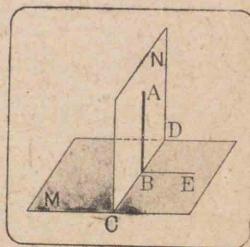
**假設** 平面  $M$  ノ垂線ヲ  $AB$  トシ、 $AB$  ヲ含ム平面ヲ  $N$  トスル。

**終結**  $M \perp N$

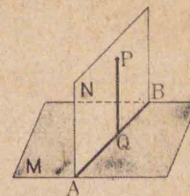
**証明**  $AB$  ト  $M$  トノ交點ヲ  $B$  トシ、 $M, N$  ノ交線ヲ  $CD$  トスレバ、 $B$  ハ  $CD$  上ニアル。今  $B$  ヲ通り  $M$  上ニアツテ  $CD$  ニ垂直デアアル直線  $BE$  ヲ引ケバ、

$AB \perp M$  デアルカラ  $AB \perp CD$  且ツ  $AB \perp BE$   
 $\angle ABE$  ハ  $M, N$  ノ作ル二面角ノ平面角デアツテ、ソレガ直角デアアルカラ、 $M \perp N$  デアル。

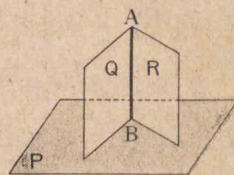
**図 1.** 互ニ垂直デアアル二平面  $M, N$  ノ一ツ  $N$  ノ上ノ



任意ノ一點  $P$  ヲ通り、 $M$  ニ垂直デアアル直線ハ  $N$  上ニアツテ、且ツ兩平面ノ交線  $AB$  ニ垂直デアアル。(點  $P$  カラ  $M, N$  ノ交線ニ垂線ヲ作レ)

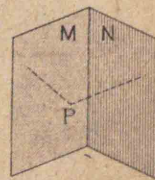


**系 2.** 一平面  $P$  ニ垂直デアアル二平面  $Q, R$  ガ交ルトキ、ソノ交線  $AB$  ハ  $P$  ニ垂直デアアル。(  $AB$  上ノ任意ノ一點ヲ通り、 $P$  ニ垂直ナ直線ヲ作ツテ系 1 ヲ利用セヨ )



問題

1. 教室内デ二面角ガ直角デアアル場所ヲ言へ。
2. 互ニ垂直デアアル二平面  $M, N$  ノ交線  $AB$  上ノ一點  $P$  ヲ通り、 $AB$  ニ垂直デアアル直線  $PC$  ヲ  $M$  上ニ引クトキハ、 $PC \perp N$  デアル。
3. 二面角ノ稜ニ垂直デアアル平面ハ、コノ二面角ノ各ノ面ニ垂直デアアル。
4. 相交ル二平面  $M, N$  ノ各、へ任意ノ一點  $P$  カラ引イタ二ツノ垂線ノナス角ハ、コノ二平面ガ作ル二面角ノ平面角或ハソノ補角ニ等シイ

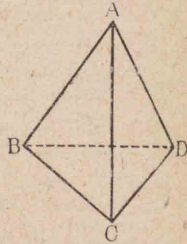


### 第二章 多面體

#### 72. 多面體ノ種類

幾ツカノ多角形ヲ圍マレテキル立體ヲ多面體トイフ。

多面體ヲ圍ンデキル各ノ多角形ヲ多面體ノ面、相隣ル二面ノ交線ヲ稜トイヒ、稜ト稜トノ交點ヲ頂點トイフ。



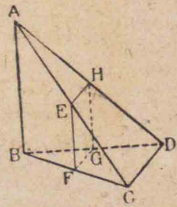
多面體ハソノ面ノ數ニ從ツテ四面體、五面體、……トヒ、コレヲ表ハスニハ頂點ヲ列記スル。例へバ上圖ノ多面體ヲ表ハスニハ多面體ABCDト書ク、

#### 問題

1. 多面體ヲ作ルニハ、少クモ幾ツノ面ガ必要カ。
2. 四面體ノ面、頂點、稜ノ數ヲイヘ。
3. 多面體ノ同一面上ニナイ二頂點ヲ結ブ線分ヲソノ對角線トイフ。四面體ニハ對角線ガアルカ。

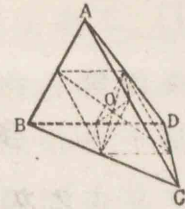
立方體ニハ對角線ガ幾ツアルカ。

4. 四面體ノ相交ラナイ二稜ヲ對稜トイフ。四面體ノ二組ノ對稜ノ中點ハ一ツノ平行四邊形ノ頂

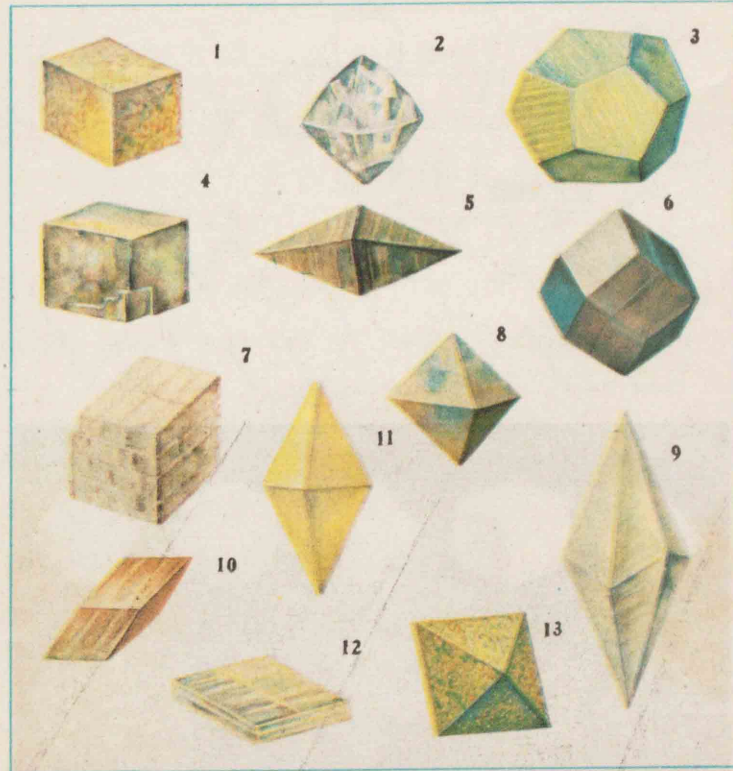


點トナル。

5. 四面體ノ各組ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三線分ハ同一ノ點ヲ通り、且ツ互ニ他ヲ2等分スル。



#### 自然界ニ存在スル多面體

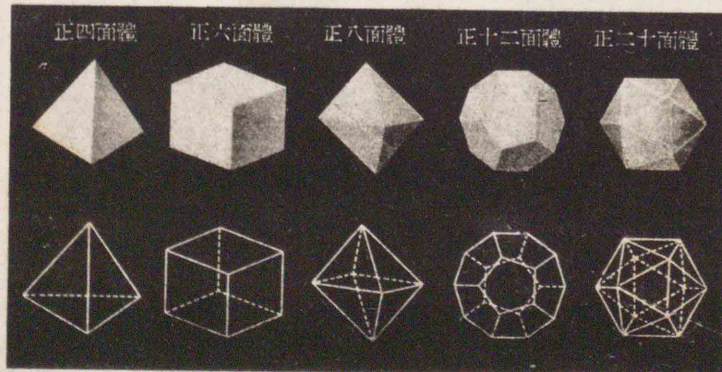
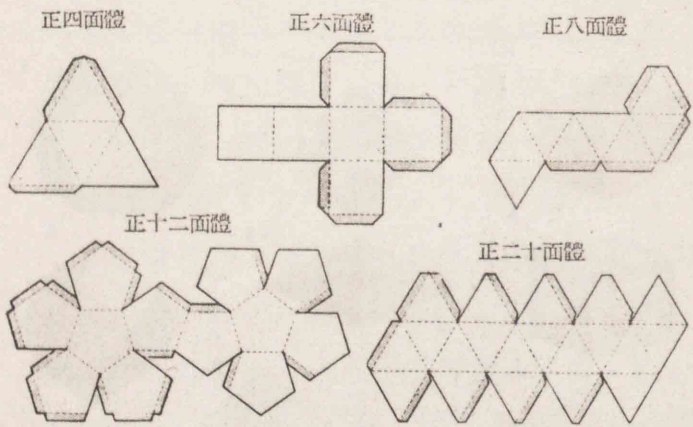


1. 銅 2. 金剛石 3. 黄鐵礦 4. 螢石 5. 硫砒鐵礦 6. 柘榴石 7. はろげん鹽 8. 磁鐵礦 9. 犬牙石 10. 菱亞鉛礦 11. 硫黃 12. 重晶石 13. 黄銅鐵

[I] 正多面體

多面體ノ各面ガスベテ合同デアル正多角形デ。各頂點ニ集ル面ノ數ガ皆等シイモノヲ正多面體トイフ。

正多面體ニハ次ノ五種ガアツテ、コノ他ニハナイ。

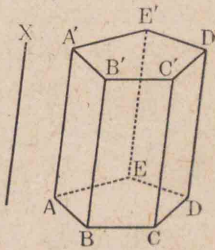


立體ヲ幾ツカノ線ニ沿ウテ切開イテ、ソノスベテ

ノ面ヲ一平面上ニ展ゲタ圖形ヲソノ立體ノ展開圖トイフ。前圖ハ正多面體ノ展開圖デアル。(影ヲツケタ處ハ模型ヲ作ルトキ糊付スルトコロ)

[II] 角 壩

一ツノ直線ニ平行デアル三ツ以上ノ平面ト、コノ直線ニ交ルニツノ平行デアル平面トデ圍マレタ多面體ヲ角壩トイフ。



角壩ノ平行デアル二面ヲ各底面又ハ底トイヒ、兩底面間ノ距離ヲ高サトイフ。又底デナイ面ヲ側面トイヒ、二側面ノ交線ヲ側稜トイフ。

角壩ハソノ底面ガ三角形、四角形、……ナルカニヨツテ三角壩、四角壩、……トイフ。

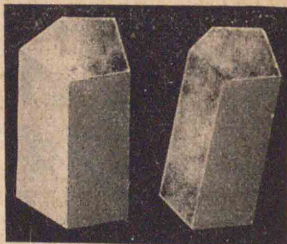
上ノ五角壩ヲ表ハスニ  $ABCDE-A'B'C'D'E'$  ト書ク。

167 頁問題 4, 定理 70 及ビ 169 頁問題 5 ニヨリ直チニ次ノ定理ガ證明サレル。

**[定理] 72.** 角壩ノ側稜ハ互ニ平行シ、側面ハスベテ平行四邊形デアル。

又角壩ノ兩底面ハ合同ナ多角形デアル。

側稜ガ兩底面ノ各ニ垂直デアル角嚮ヲ直角嚮トイヒ、サウデナイモノヲ斜角嚮トイフ。

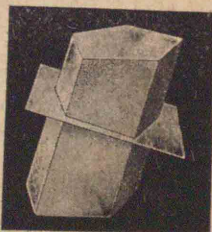


又底面ガ正多角形デアル直角嚮ヲ特ニ正角嚮トイフ。

四角嚮ノウチ、底面ガ平行四邊形デアルモノヲ平行六面體トイヒ、底面ガ矩形デアル直角嚮ヲ直六面體又ハ直方體トイフ。又各面ガ正方形デアル直六面體ヲ立方體トイフ。(10頁ノ圖參照)

**注意** 平行六面體、直六面體、立方體デハ何レノ面ヲモ底面ト看做スコトガ出來ル。

多面體ヲ一平面デ截ツテ得タ多角形ヲ截口トイフ。角嚮ノ一側稜ニ垂直デアル平面ハスベテノ側稜ニ垂直デアル(定理67系1)。カヤウナ截口ヲ角嚮ノ直截面トイフ。



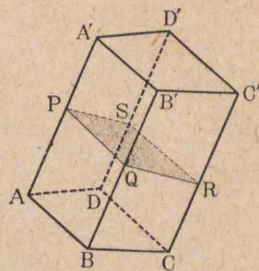
**問題**

1. 平行六面體、立方體ノ各ノ場合ニ於テ相對スル

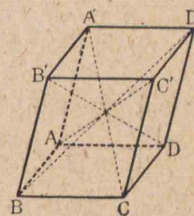
面ノ間ニハ如何ナル關係ガアルカ。

2. 側稜ガ3cmデ、底ノ一邊ガ2cmノ正三角形デアル直角嚮ノ側面積及ビ全表面積(スベテツ面ノ面積ノ和)ヲ求メヨ。

3. 角嚮ノ側面積ハ、ソノ直截面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ。(圖デ PQRS ヲコノ角嚮ノ直截面トスレバ、PQ, QR, ……ハ夫々  $\square A'B$ ,  $\square B'C$ , ……ノ高サトナル)



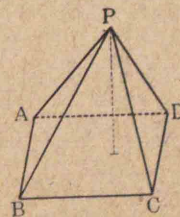
4. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ通り、且ツ互ニ他ヲ2等分スル。



**[III] 角錐**

多角形ノ各頂點ヲソノ平面外ノ一點ニ結ビツケテ出來ル三角形ト、モトノ多角形トデ圍マレタ立體ヲ角錐トイフ。

コノトキ多角形ノ平面外ニトツタ點ヲ角錐ノ頂點トイヒ、コノ多角形ヲ角錐ノ底面又ハ底トイフ。又底面ノ各邊ヲ底トシ、頂點ヲ共通ノ



頂點トスル各三角形ヲ角錐ノ側面、頂點ニ集マル稜ヲ側稜トイフ。角錐ノ高サトハ頂點カラ底面ニ下シタ垂線ノ長サデアアル。

角錐ハ底面多角形ノ邊數ニ從ツテ三角錐、四角錐、……トイフ。

前圖ノ四角錐ヲ表ハスニ P-ABCD ト書ク。

側稜ノスベテガ相等シク、且ツ底面ガ正多角形デアアル角錐ヲ正角錐トイフ。

問題 見直

1. 正角錐ノ頂點カラ底面ニ下シタ垂線ハ底デアアル正多角形ノ中心ヲ通ル。
- 2.\* 正角錐ノ側面積ハ底ノ周ト頂點カラ底面多角形ノ一邊ニ下シタ垂線ノ長サコレヲ正角錐ノ斜高トイフ)トノ積ノ半分ニ等シイ。
3. 正四面體ノ一稜ノ長サガ  $a$  cm デアルトキ、斜高及ビ高サハ各、幾種デアアルカ。

73. 多面體ノ體積

立體ガ占メル空間ノ有限ナル部分ノ大イサヲソノ體積トイフ。

一ツノ立體 A ガ占メル空間ノ部分ノスベテガ、ソ

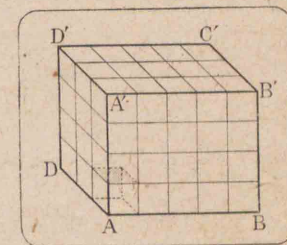
ノ形ヲ變ヘナイデ、又他ノ立體 B ニヨツテモ占メ得ルトキ、コノ兩立體ハ合同デアルトイフ。

合同デアアル立體ノ體積ハ相等シイ。

[I] 直角壩ノ體積

**定理 73.** 直方體ノ體積ヲ表ハス數ハ、ソノ一頂點ニ集マル三稜ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

即チ右圖デ A ニ集マル三稜 AD, AB, AA' ノ長サヲ表ハス數ヲ夫々  $a, b, c$  トシ、體積ヲ V トスレバ、  $V = abc$



**証明** 省略スル。

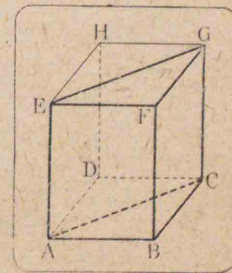
本定理ヲ略シテ次ノヤウニイフ。

直方體ノ體積ハソノ縦、横、高サノ積ニ等シイ。

系 直方體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

**定理 74.** 底面ガ直角三角形デアアル直角壩ノ體積

ハ底面積ト高サ(又ハ一側稜)トノ積ニ等シイ。



**証明** 直角壩 ABC-EFG ノ底面 ABC ノ角 B ガ直角デアルトスル。今 BA, BC ヲ二隣邊トスル

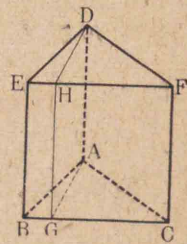
矩形 ABCD を作り、コレヲ底面トシ、側稜ハ BF ニ等シイ直方體 ABCD-EFGH ヲ考ヘレバ、コノ直角壙ハ平面 ACGE ニヨツテニツノ合同デアル三角壙 ABC-EFG, CDA-GHE ニ分タレル。

$$\therefore \text{ABC-EFG の體積} = \frac{1}{2} \text{AB} \cdot \text{BC} \cdot \text{BF} = (\triangle \text{ABC}) \times \text{BF}$$

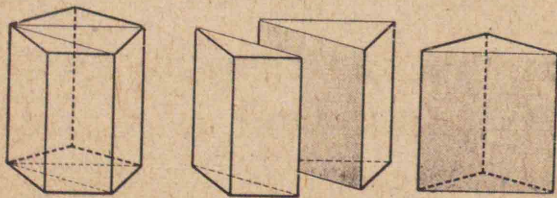
系 1. 底面ガ三角形デアル直角壙ノ體積ハ底面積

ト高サ(又ハ一側稜)トノ積ニ等シイ。

(圖ニ於テ  $\triangle \text{ABC}$  ノ最大角ヲ A トシ、頂點 A カラ對邊 BC ニ垂線 AG ヲ下セバ、G ハ BC 上ニアル。ソコデ AG ヲ含ミ、底面 ABC ニ垂直ナ平面 ADHG デ截レバ、三角壙ハ底面ガ直角三角形デアルニツノ直角壙ニ分タレル)



系 2. 直角壙ノ體積ハ、底面積ト高サ(又ハ一側稜)トノ積ニ等シイ。(系 1 ニ歸セヨ)

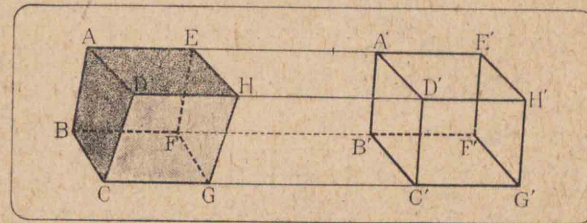


[II] 斜角壙ノ體積

定理 75. 斜角壙ノ體積ハソノ直截面ヲ底面トシ、

側稜ノ一ツニ等シイ高サヲ有スル直角壙ノ體積ニ等シイ。

証明 假ニ四角壙ヲ取り、ソノ底面ヲ ABCD 及ビ EFGH トスル。各側稜 AE, BF, CG, DH ヲ夫々コノ方向ニ延長シ、コレ等ヲ夫々 A', B', C', D' デ截ル一ツノ直截面 A'B'C'D' ヲ作り、又 AA' ノ方向ニ A' カラ AE ニ等シク A'E' ヲ取り、E' ヲ通ル直截面 E'F'G'H' ヲ作り、直線 BB', CC', DD' トノ交點ヲ夫々 F', G', H' トスル。



A'B'C'D'-E'F'G'H' ハモトノ角壙ノ直截面ヲ底面トシ、高サハモトノ角壙ノ側稜ノ一ツニ等シイ直角壙デアル。

$$\therefore \text{A'E'} = \text{B'F'} = \text{G'C'} = \text{D'H'} = \text{AE} = \text{BF} = \text{CG} = \text{DH}$$

$$\text{ヨツテ } \text{AA'} = \text{EE'}, \text{BB'} = \text{FF'}, \text{CC'} = \text{GG'}, \text{DD'} = \text{HH'}$$

$$\text{又 } \text{四邊形 ABCD} = \text{四邊形 EFGH}$$

$$\text{四邊形 A'B'C'D'} = \text{四邊形 E'F'G'H'}$$

故ニニツノ立體 ABCD-A'B'C'D', EFGH-E'F'G'H'

(一般ニハ角壙ニナラヌ)ハ、E, E' ガ夫々 A, A' ニ、E'F', E'H'

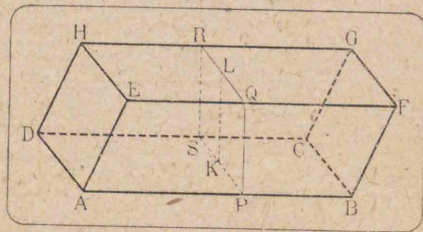
ガ夫々  $A'B', A'D'$  ノ上ニ來ルヤウニ重ネ合スコトガ出來ル。即チ合同デアル。ヨツテ體積ハ相等シイ。ソノ各カラ立體  $EFGH-A'B'C'D'$  ノ體積ヲ取り去ツタ殘リハ相等シイ。即チ角嚮  $ABCD-EFGH$  ノ體積ハ直角嚮  $A'B'C'D'-E'F'G'H'$  ノ體積ニ等シイ。

⊠ 角嚮ノ體積ハ直截面ノ面積ト一側稜トノ積ニ等シイ。

〔定理〕 76. 平行六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

〔証明〕  $ABCD-EFGH$  ヲ平行六面體トシ、ソノ底面

ノ一ツヲ  $APCD$  トスル。コノ六面體ハ  $AEHD, BFGC$  ヲ底トスル角嚮デアルトモ考ヘラレル。



今ソノ直截面  $PQRS$  ヲ作レバ、前定理系ニヨリ

$$\text{平行六面體ノ體積} = \text{PQRSノ面積} \times \text{AB}$$

又平行二直線  $PS, QR$  ノ距離ヲ  $KL$  トスレバ

$$\text{PQRSノ面積} = \text{PS} \times \text{KL}$$

サテ  $PQRS$  ハ直截面ナル故  $PQ \perp AB, PS \perp AB$

∴ 平面  $PQRS \perp$  平面  $ABCD$  (定理 71)

∴  $KL \perp$  平面  $ABCD, KL \perp$  平面  $EFGH$

(171 頁問題 2, 定理 70 系 1)

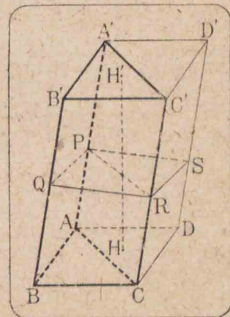
$$\begin{aligned} \therefore \text{平行六面體ノ體積} &= \text{PS} \cdot \text{KL} \cdot \text{AB} \\ &= (\text{PS} \cdot \text{AB}) \cdot \text{KL} \end{aligned}$$

即チ 平行六面體ノ體積 = 底面積  $\times$  高サ

〔定理〕 77. 斜三角嚮ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

〔証明〕  $ABC-A'B'C'$  ヲ三角嚮

トスル。底面  $ABC$  ノ二邊例ヘバ  $BA, BC$  ヲ二隣邊トスル平行四邊形  $AECD$  ヲ作り、コレヲ底面トシ、 $AA'$  ヲ側稜ニ有スル平行六面體  $ABCD-A'B'C'D'$  ヲ作ル。次ニ側稜ト交ル直截面  $PQRS$



ヲ作り、コノ面ト平面  $ACC'A'$  トノ交リヲ  $PR$  トスル。 $PR$  ハ平行四邊形  $PQRS$  ノ面積ヲ 2 等分スル。故ニ定理 75 ニヨリ

三角嚮  $ABC-A'B'C'$  ノ體積

$$= \text{三角嚮 } ACD-A'C'D' \text{ ノ體積}$$

$$= \frac{1}{2} (\text{平行六面體 } ABCD-A'B'C'D' \text{ ノ體積})$$

$$= \frac{1}{2} (\text{底面 } ABCD \text{ ノ面積}) \times (\text{高サ } HH')$$



$$=(\triangle ABC \text{ノ面積}) \times (\text{三角錐ノ高サ } HH')$$

⊠ 斜角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

[III] 角錐ノ體積

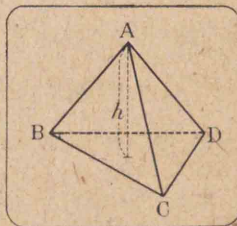
三角錐ノ體積ニ關シテ次ノ定理ガアル。

⊠ 定理 78. 三角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ  $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。

即チ三角錐 A-BCDノ底面ヲ  $\triangle BCD$ , 高サヲ  $h$ , 體積ヲ  $V$ トスレバ,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \times h$$

コノ定理ノ證明ハ容易デナイカラ省略スル。



⊠ 角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ  $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。

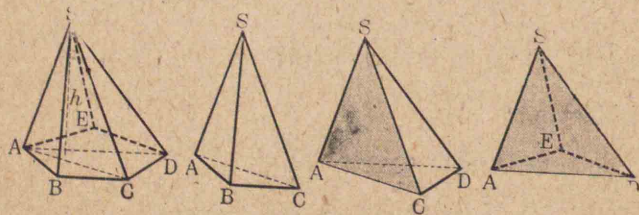


図 78

1. 三角錐ノ側稜ノ長サ 3 m デ; 直截面ノ三邊ノ長サガ夫々 30 cm, 40 cm, 50 cm デアルモノノ體積ハ

幾立方糶カ。

2. 正六角錐ノ底面ノ一邊ガ 4 cm デ; 側稜ノ長ツガ 10 cm デアルトキ, ソノ體積ヲ求メヨ。
3. 體積ガ 1728 立方糶アル立方體ノ全表面積ハ幾平方糶カ。 ( $\sqrt[3]{1728} = 12$ )
4. 高サ 22 cm デ; 底面三角形ノ底邊ガ 10 cm, 高サガ 15 cm アル三角錐ノ體積ヲ求メヨ。
5. えちふトニアル最大ナびらみッドハ四角錐デ; 高サガ 145 m, 底ハ一邊ガ 233 m アル正方形デアルトイフ。コノ體積ハ幾立方糶カ。

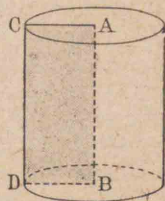
## 第三章 旋轉體

## 74. 直圓壙

平面圖形ガソノ圖形ヲ含ム平面上ノ一直線ヲ軸トシテ一廻轉シタトキ生ズル立體ヲ旋轉體トイフ。

矩形 ABDC ガソノ一邊 AB ヲ軸トシテ一廻轉シタトキ生ズル立體ヲ直圓壙トイフ。

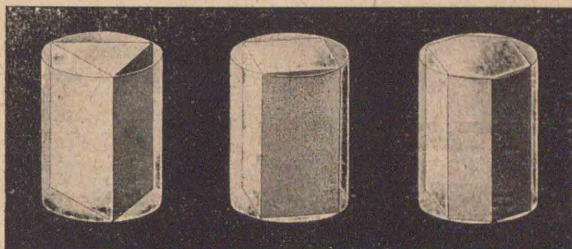
コノトキ矩形ノ二邊 AC, BD ガ畫ク圓ヲ底面又ハ底トイヒ、底面ノ半徑 (AC) ヲ直圓壙ノ半徑、兩底間ノ距離 (AB) ヲ直圓壙ノ高サトイフ。又軸ノ對邊 CD ヲ直圓壙ノ母線トイヒ、母線ガ畫ク曲面ヲ側面トイフ。



直圓壙ノ一ツノ底面ニ内接又ハ外切スル多角形ヲ底トシ、高サガ直圓壙ノ高サニ等シイ直角壙ノ他ノ底面ハ又直圓壙ノ他ノ底面ニ内接又ハ外切スルコノヤウナ直角壙ハ直圓壙ニ内接又ハ外切スルトイフ。

直圓壙ニ内接スル正角壙ノ側面積及ビ體積ハソ

ノ底デアアル正多角形ノ邊數ガ増大スルニ從ツテ漸次直圓壙ノ側面積及ビ體積ニ近ツクモノデアアル。



即チ直圓壙ハ底面ガ圓トナツタ特別ノ正角壙デアルト看做シテ側面積及ビ體積ヲ計算シテヨイ。ヨツテ次ノ定理ガ得ラレル。

**定理 79.** 直圓壙ノ側面積ハ一ツノ底ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

又體積ハ一ツノ底ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ。

**系** 直圓壙ノ半徑ヲ  $r$ 、高サヲ  $h$  トスレバ、

- [1] 側面積  $= 2\pi rh$
- [2] 全表面積  $= 2\pi r(r+h)$
- [3] 體積  $= \pi r^2 h$

29 29

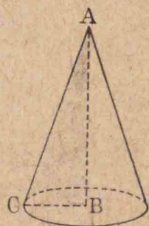
1. 矩形ノ相隣ル二邊ノ長サガ夫々  $a, b$  デアルトキ、ソノ各、ヲ軸トシテ廻轉シテ得タ二ツノ直圓壙ノ側面積及ビ體積ノ比各、如何。

2. 半径が1cmアル硝子製ノ圓筒ノ側面ニ1立方  
糲ヅツノ容積ヲ表ハス目盛ヲ附ケルニハ、目盛ノ  
間隔ヲ如何程ニスレバヨイカ。

### 75. 直圓錐

直角三角形 ABC ノ直角ヲ夾ム邊 AB ヲ  
軸トシテ一廻轉シタトキ生ズル立體ヲ直  
圓錐トイフ。

コノトキ直角ノ他ノ邊 BC ガ畫ク  
圓ヲ直圓錐ノ底面又ハ底トイヒ、A ヲ  
頂點、軸トシタ邊ノ長サ AB ヲ直圓錐  
ノ高サトイフ。又斜邊 AC ヲ母線ト  
イヒ、母線ガ畫ク曲面ヲ側面、母線ノ長サヲ斜高トイ  
フ。



正多角錐ガ直圓錐ト同一ノ頂點ヲ有シ、底ガ直圓  
錐ノ底ニ内接又ハ外切スルトキ、コノ正多角錐ハ直  
圓錐ニ内接又ハ外切スルトイフ。

直圓壩ニ内接スル正角壩ノ場合ト同様ニ、直圓錐  
ニ内接スル正多角錐ノ底ノ邊數ガ漸次増大スルニ  
從ツテ、ソノ側面積ト體積ハ漸次直圓錐ノ側面積ト  
體積ニ夫々近ヅク。

即チ直圓錐ハ正角錐ノ底面ガ圓トナツタ特別ノ  
場合デアル。ヨツテ次ノ定理ガ得ラレル。

**定理 80.** 直圓錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ積  
ノ  $\frac{1}{2}$  ニ等シイ。

又體積ハ底ト高サトノ積ノ  $\frac{1}{3}$  ニ等シイ。

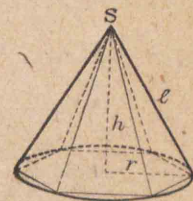
**系** 直圓錐ノ高サヲ  $h$ 、斜高ヲ  $l$ 、底ノ半径ヲ  $r$  トス  
レバ、

[1] 側面積  $= \pi r l$

[2] 全表面積  $= \pi r(r+l)$

[3]  $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

[4] 體積  $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$



#### 問題

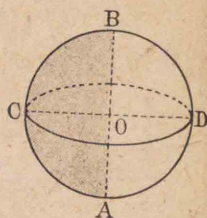
- 漏斗ノ直圓錐形ノ部分ノ底ノ直徑ハ10cm、高サ  
ハ10cm デアル。コノ部分ノ容積ハ約幾りとなる  
デアルカ。但シ  $\pi = 3.1416$  トシテ計算セヨ。
- 半径10cm、中心角  $120^\circ$  ノ扇形デ作ツタ直圓錐  
ノ體積ヲ求メヨ。又底面積ト側面積トノ比ハ如  
何。但シ  $\pi = 3.1416$  トシテ計算セヨ。

### 76. 球

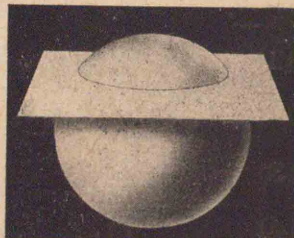
半圓ガ、ソノ直徑 (AB) ヲ軸トシテ一廻轉

シタトキ生ズル立體ヲ球トイフ。

コノトキ半圓周ガ畫ク曲面ヲ球面トイヒ、半圓ノ中心Oヲ球ノ中心又ハ球心トイフ。又球心カラ球面マデノ距離(即チ半圓ノ半徑)ヲ球ノ半徑トイヒ、球心ヲ通リソノ兩端ガ球面デ終ル線分ヲソノ直徑(例ヘバ圖ノAB)トイフ。



球ヲ平面デ截ルトキ、ソノ截口ハ必ズ圓トナルモノデアル。球心ヲ通ル平面デ截



ツタ截口ヲ球ノ大圓トイヒ、球心ヲ通ラナイ平面デ截ツタ截口ヲ球ノ小圓トイフ。

次ノコトハ球ノ定義カラ明ラカデアル。

- [1] 半徑ガ相等シイ球ハ合同デアル。
- [2] 一ツノ球デハ半徑及ビ直徑ノ長サハ一定デアル。
- [3] 球面ハ中心カラ半徑ニ等シイ距離ニアル點ノ軌跡デアル。

球ニ關シテ次ノ定理ガアル。

**定理 81.** 球ノ表面積ハ大圓ノ面積ノ4倍ニ等シ

イ。又體積ハ表面積ト半徑トノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。

コノ證明ハ容易デナイカラ省略スル。

**乘** 球ノ半徑ヲ $r$ トスレバ、

[1]  $\text{表面積} = 4\pi r^2$

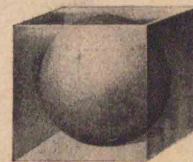
[2]  $\text{體積} = \frac{4}{3}\pi r^3$

**例題**

1. 地球ヲ球ト看做セバ、

- ① 赤道ハソノ球ノ何ニ當ルカ。
- ② 緯度、經度ハソノ球ノ何ニ當ルカ。

2. 丁度球ヲ入レルニ足ル立方體ノ體積ト球ノ體積トノ比ハ $6:\pi$ デアル。



3. 地球ノ大圓ノ周ハ約40000 km

デアル。地球ノ表面積及ビ體積ハ約何程カ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。

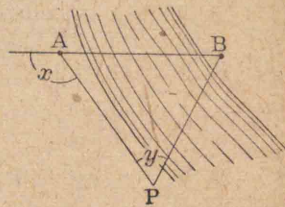
4. 斜邊ノ位置ト長サガ一定デアルトキ、直角三角形ノ直角頂ノ軌跡ハ何カ。

## 第七篇 簡易測量

### 第一章 幾何學ノ應用

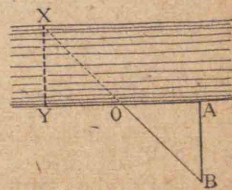
#### 76. 二等邊三角形ノ應用

例 川ヲ隔テタ二點A, Bノ距離ヲ測ルトキ, 圖ノヤウニ直線 ABト角  $x$ ヲナス直線 AP 上ノ一點PカラBヲ見テ, APトPBトノナス角  $y$ ガ  $\frac{1}{2}x$ トナルヤウニ點Pノ位置ヲ定メ, APノ長サヲ實測スレバ, コレハ ABノ長サトナル。(理由ヲイヘ)



#### 77. 合同三角形ノ應用

例 川幅 XYヲ測ルトキ, 圖ノヤウニ XYト直角ヲナス方向ニ YAヲ實測シテソノ中點Oヲ定メテ棒ヲ立テル。次ニAニ於テYAト直角ヲナス直線上デ, XOノ延長ニ當ル點B



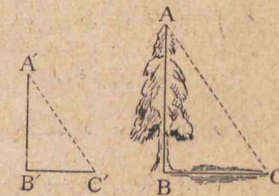
ヲ定メ, ABヲ實測スレバ, コレガ XYノ長サトナル。(理由ヲイヘ)

#### 78. 相似三角形ノ應用

例1 樹木ノ高サ ABヲ測ルトキ, ソノ影ノ長サ BCヲ測リ, 次ニ長サ既知ナル棒 A'B'ヲ地上ニ直立セシメ, ソノ影ノ長サ B'C'ヲ測レバ, ニツノ三角形 ABC, A'B'C'ハ相似トナル。

故ニ  $AB : A'B' = BC : B'C'$

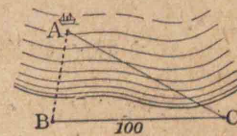
$$\therefore AB = \frac{BC \times A'B'}{B'C'}$$



例2 右圖デAヲ海上ニ

アル船ノ位置トシ, Bヲ海邊ノ一點トスル。A, B間ノ距離ハ次ノ如クシテモ求メルコトガ出來ル。

先ヅ海邊ニ線分 BCヲトリ, ソノ長サヲ實測シ, 又B及ビCニ於テ  $\angle ABC, \angle ACB$ ヲ測ル。次ニ紙上ニコレト相似ナ三角形ヲ畫キ,



BC, ABニ對應スル邊ノ長サヲ測レバ, 計算ニヨツテ ABノ長サヲ求メルコトガ出來ル。

例題

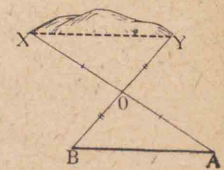
1. 川幅ヲ測ルタメニ或人ガ次圖ノヤウニ, 河岸ノ

一點Cニ立ツテ對岸  
 ノ一點Bトコノ人ノ  
 目ト手先トガ一直線

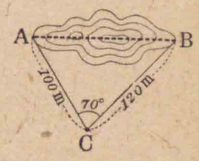


上ニアルヤウニシ、ソノマ、廻レ右ヲナシ、目ト手  
 先トヲ結ブ直線ガ地面ト交ル點B'ヲ定メタ。川  
 幅BCハ如何ニシテ求メラレルカ。

2. 右圖ニヨツテ岡ノ兩端XY  
 ノ距離ヲ測ル方法ヲ案出セヨ



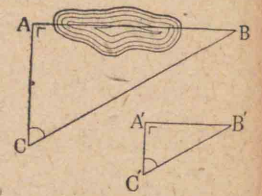
3. 或池ノ對岸ノ二點A,Bノ距  
 離ヲ測ルタメニ、池外ノ一點C



ヲ定メ、AC, BC及ビ∠ACBヲ測ツ  
 タトコロガ、右圖ノヤウデアツタ。  
 ABヲ求メヨ。(方眼紙ト分度器

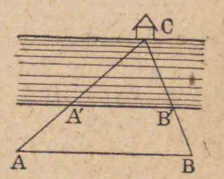
トヲ用ヒヨ)

4. A, B間ノ距離ヲ測ラウトシ  
 テ右圖ノヤウナ方法ヲトツタ。



∠A=∠A'=∠R, A'B'=12cm,  
 A'C'=9cm, AC=30mトシテAB  
 ヲ求メヨ。

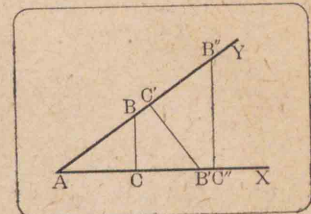
5. 右圖デ AB∥A'B', AB=24m,  
 A'B'=18m, AA'=9mトシテACヲ求メヨ。



### 第二章 三角函數ノ應用

#### 79. 銳角ノ三角函數

銳角 XAY ノ邊 AY 又ハ  
 AX 上ノ任意ノ點 B, B', B''  
 カラ他ノ邊 AX 又ハ AY へ  
 垂線 BC, B'C', B''C'' ヲ下セバ



$$\triangle ABC \sim \triangle AB'C' \sim \triangle AB''C''$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} \dots\dots(1)$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC''}{AB''} = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} \dots\dots(2)$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''} = \frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} \dots\dots(3)$$

ソシテコレ等(1),(2),(3)ノ値ハ角ガ一定ナラバ、夫々  
 一定デアツテ、邊ノ大小ニハ無關係デアル。

コレ等ノ比ヲ∠Aノ三角函數トイフ。

三角函數ノ値ヲ種々ノ角ニツイテ表ニシタモノ  
 ガアル。コレヲ三角函數ノ眞數表トイフ。(次頁)。

- (1)ヲ∠Aノ正弦トイヒ、sinAト書キ、
- (2)ヲ∠Aノ餘弦トイヒ、cosAト書キ、
- (3)ヲ∠Aノ正切トイヒ、tanAト書ク、

三角函数ノ真数表

角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	∞

第78節ニ於テ樹木ノ高ヲ求メルトキ、長サ既知ノ棒ヲ地上ニ立テテ相似形ノ定理ヲ利用シタガ、三角函数ヲ用ヒレバ、一層簡單ニ求メルコトガ出來ル。

即チCニ於テ∠BCAノ大イサヲ測レ

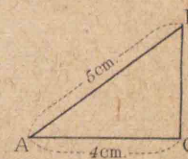
バ  $\frac{AB}{BC}$  ノ値ガワカルカラ

$$AB = BC \times \frac{AB}{BC} = BC \tan C$$



問題

1. ∠Cガ直角デアル三角形ABCニ於テAB, ACガ夫々5cm, 4cmデアル。角Aノ正弦餘弦正切ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ。



2.  $\cos A = \frac{1}{2}$ ナル角Aヲ作レ。又

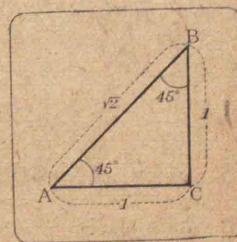
$$\tan A = \frac{2}{3}$$
ナル角Aヲ作レ。

80. 45°, 30°, 60°ノ三角函数

[1] 45°ノ三角函数

直角三角形ABCニ於テ∠C=90°, ∠A=∠B=45°トスル。AC=BCデアアルカラコレヲ1トスレバ

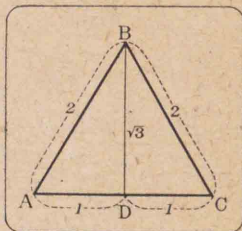
$$AB = \sqrt{2}$$



$$\therefore \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1$$

[2] 30°, 60° ノ三角函數

正三角形 ABC ノ頂點 B カラ對邊 AC ニ垂線ヲ下シ、ソノ足ヲ D トスレバ、D ハ AC ノ中點デ  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle ABD = 30^\circ$  デアル。ソコデ  $AD = 1$  トスレバ



$$AB = 2, \quad BD = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

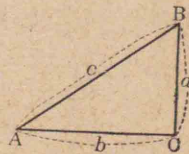
$$\therefore \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

81. 直角三角形ノ原素間ノ關係

三角形ノ三邊及ビソノ三ツノ角ヲ三角形ノ原素又ハ要素トイフ。

直角三角形 ABC デ  $\angle C$  ヲ直角トシ、各頂點デノ角ヲソノ頂點ヲ表ハス文字デ表ハシ、角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c デ表ハセバ、ソノ原素ノ間ニハ次ノ關係ガアル。



[1]  $\angle A + \angle B = 90^\circ$

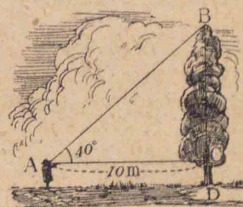
[2]  $a^2 + b^2 = c^2$  (ピタゴラスノ定理)

$$[3] \begin{cases} a = c \sin A = c \cos B = b \tan A \\ b = c \sin B = c \cos A = a \tan B \\ c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} \end{cases}$$

コレ等ノ關係ヲ用ヒレバ、直角三角形ノ一邊ト他ノ一原素(直角ヲ除ク)トヲ知レバ、残りノ原素ヲ求メルコトガ出來ルノデアアル。

82. 三角函數ノ應用

例 或人ガ平地ニ直立スル樹木 BD ノ高サヲ測ラウトシテ、樹木カラ 10m 離レタ點 A デ、頂上ノ點 B ノ仰角ヲ測ツテ  $40^\circ$  ヲ得タ。樹木ノ高サヲ求メヨ。但シ眼ノ高サヲ 1.5m トスル。



解 眼ヲ通ル水平線デ樹木ト交ルモノノ交點ヲ C トスレバ、 $\triangle ABC$  ニ於テ

$$\angle C = \angle R, \quad \angle A = 40^\circ, \quad AC = 10 \text{ m}$$

$$\therefore BC = AC \tan A = 10 \tan 40^\circ = 10 \times 0.8391 = 8.391$$

\* 觀測者ノ眼ト觀測點トヲ連ネル直線ヲ視線トイヒ、視線ヲ含ム鉛直面内テ視線ト眼ヲ通ル水平線トノナス角ガ水平線ノ上ニアルトキハ仰角トイヒ、下ニアルトキハ俯角トイフ。



$$BD=BC+CD=8.391+1.5=9.891$$

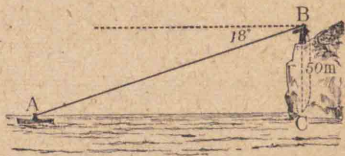
答 約 9.9 m

問題 見直

1. 海岸ニ立ツ高サ 50 m

ノ斷崖ノ端 Bニ於テ海上ニ浮ブ舟 Aヲ望ンデ

俯角  $18^\circ$ ヲ得タ。舟カラ斷崖マデノ距離ヲ求メヨ。  
又觀測者ノ眼カラ舟マデノ距離ヲ求メヨ。



2. 地面ニ錘直ニ立テタ旗竿

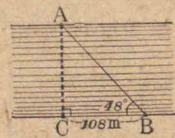
BCノ控綱ガ地面トナス角ハ  $58^\circ$ デ、綱ト旗竿トノ地面上デノ距離ハ 15 mデアル。旗竿 BCノ高サヲ求メヨ。



3. 川ノ兩岸ガ平行デアル場所デ、

ソノ一方ノ岸ノ點 Cカラソノ岸ニ沿ウテ 108 m 距ツタ地點 Bデ

Cノ眞向ニアル對岸ノ點 Aヲ望ンデ  $\angle ABC=48^\circ$ ヲ得タ。川幅 ACヲ求メヨ。



4. 水平面ト  $28^\circ$ ノ角ヲナス坂道ガアル。今 20 mノ高サダケ昇ルニハ、コノ坂道ヲ約幾米歩マネバナラナイカ。

## 附録 補充問題

### 第二篇 直線形

- 直角三角形ノニツノ鋭角ノ差ハ、直角ノ頂點カラ引イタ中線ト斜邊ヘノ垂線トノナス角ニ等シイ。
- 三角形 ABCノ頂點 B 及ビ C カラ夫々ソノ對邊ヘ下シタ垂線ノ足ヲ D, E トシ、且ツ底邊 BC ノ中點ヲ M、線分 DE ノ中點ヲ N トスレバ、 $MN \perp DE$ 。但シ  $\angle A$  ハ直角デナイモノトスル。
- 二等邊三角形 ABCノ底邊 BC 上ノ任意ノ點ヲ D トシ、AC ノ延長上ニ點 E ヲトリ、 $CE=CD$  ナラシメ、ED ノ延長ト AB トノ交點ヲ F トスレバ、 $\angle AFE=3\angle AEF$
- 正三角形 ABCノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 P, Q, R ヲトツテ  $BP=CQ=AR$  ナラシメレバ、 $PQ=QR=RP$
- 三角形 ABCニ於テ  $\angle ABC, \angle BCA$ ノ二等分線ニ頂點 A ヨリ垂線ヲ引キ、ソノ足ヲ夫々 D, E トスレバ、 $DE \parallel BC$
- 二等邊三角形 ABCノ等邊ノ一ツ AB 上ニ點 D ヲトリ、AC ヲ C ヲ越エテ E マデ延長シ、 $CE=BD$  ナラシメ、DE, BCノ交點ヲ P トスレバ、  
①  $DP=PE$                       ②  $BP > CP$
- 三角形 ABCノ邊 AB, AC 上ニ夫々點 D, E ヲトリ、

- $BD=CE$  ナラシメレバ,  $DE < BC$
8. 三角形  $ABC$  ノ  $\angle A$  ハ  $\angle B, \angle C$  ノ何レヨリモ大ナルトキ, 邊  $AB, AC$  上ニ夫々點  $D, E$  ナトリ,  $BE, DE$  ナ作レバ,  
 $DE < BE < BC$
9. 四邊形ノ邊  $AB, BC, CD, DA$  ガコノ順ニ順次ニ小サイモノトスレバ,  $\angle CDA > \angle CBA$  ( $BD$  ナ引ケ)
10. 三角形  $ABC$  ノ邊  $BC, CA, AB$  ノ中點ヲ夫々  $D, E, F$  トスルトキ, 三角形  $ABC$  ノ重心ト三角形  $DEF$  ノ重心トハ一致スルコトヲ證セヨ。次ニ三角形  $DEF$  ノ各邊ノ中點ヲ結ンデ三角形ヲ作り, 更ニコノ三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ンデ三角形ヲ作り, 次第ニコノ手續ヲ繰リ返ストキ, コレ等ノ三角形ハ如何ナル點ニ向ツテ收縮スルカ。且ツツノ理由ヲ述ベヨ。
11. 四邊形  $ABCD$  ニ於テ  $AB=CD, \angle B=\angle C$  ナルトキハ,  $AD$  ハ  $BC$  ニ平行デアアル。
12. 或正多角形ノ邊數ヲ9ダケ増シタ正多角形ヲ作ルトキ, 一角ノ大イサハ丁度直角ダケ増ストイフ。初メノ正多角形ノ邊數ヲ求メヨ。
13. 正八角形ノ一内角及ビ一外角ノ大イサヲ計算セヨ。
14. 四邊形  $ABCD$  ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ンデ出來ル四邊形ハ平行四邊形デ, 特ニモトノ四邊形ノ對角線ガ相等シイトキハ, 新シイ四邊形ハ菱形トナルコトヲ證セヨ。又新シイ四邊形ガ矩形又ハ正方形ナルタメニ, 四

- 邊形  $ABCD$  ノ對角線ノ間ニアルベキ關係ヲ求メヨ。
15. 對角線ガ相等シイ四邊形  $ABCD$  ノ邊  $AB, BC, CD, DA$  ノ中點ヲ夫々  $E, F, G, H$  トスレバ,  $EG \perp FH$
16. 四邊形  $ABCD$  ノ各邊  $AB, BC, CD, DA$  及ビ對角線  $AC, DB$  ノ中點ヲ夫々  $A', B', C', D', E, F$  トスレバ,  
 ① 四邊形  $A'B'C'D', A'EC'F, D'EB'F$  ハ何レモ平行四邊形デアアル。  
 ②  $A'C', B'D', EF$  ハ同一ノ點ヲ通り, 且ツ互ニ他ヲ2等分スル。  
 ③  $A'B'C'D'$  ノ周ハ  $AC, BD$  ノ和ニ等シイ。  
 ④  $A'EC'F$  ノ周ハ  $AD, BC$  ノ和ニ等シク,  $D'EB'F$  ノ周ハ  $AB, CD$  ノ和ニ等シイ。
17. 平行四邊形  $ABCD$  ノ對角線  $AC$  上ニ二點  $E, F$  ナトリ,  $AE=FC$  ナラシメレバ,  $BFDE$  ハ平行四邊形デアアル。
18. 三角形  $ABC$  ノ二邊  $AB, BC$  ノ中點ヲ夫々  $D, E$  トシ, 第三邊  $CA$  上ニ二點  $F, G$  ナトリ,  $CF=FG=GA$  ナラシメ,  $DG, EF$  ノ延長ノ交點ヲ  $H$  トスレバ,  $HGBF$  ハ平行四邊形デアアル。
19. 正六角形  $ABCDEF$  ニ於テ,  $AE$  ト  $BC$  トノ交點ヲ  $P$  トスレバ,  $PA=AE$
20. 梯形  $ABCD$  ニ於テ二角  $A, B$  ノ二等分線ノ交點ヲ  $E$  トシ, 二角  $C, D$  ノ二等分線ノ交點ヲ  $F$  トスレバ,  $EF$  ハ兩底  $AD, BC$  ニ平行デアアル。

## 第三篇 圖

21. 圓ノ直徑上ノ一點ヲ通リコノ直徑ト等角ヲナスニツノ弦ノ長サハ相等シイ。
22. 圓周ヲ四ツニ分チ、ソノ弧ヲ順次ニ  $AB, BC, CD, DA$  トシ、コレ等ノ弧ノ中點ヲ夫々  $E, F, G, H$  トスレバ、弦  $EG$  ハ  $FH$  ト直交スル。
23.  $A, B, C, D$  ハ同一圓周上ニ順次ニ配列サレタ四點デ、弦  $AD$ 、弦  $BC$  ハ相等シク、 $E, F$  ヲ夫々ソノ中點トスル。  
 $EF$  ハ弦  $AB$ 、弦  $DC$  ニ平行デ、且ツ  $AB, DC$  ノ和ノ半分ニ等シイ。
24. 圓ノ弦  $AB$  ノ延長上ニ半徑ニ等シク  $BC$  ヲトリ、點  $C$  ト圓ノ中心ヲ通ル直線  $CDE$  ガ圓周ト交ル點ヲ  $D, E$  トスレバ、弧  $AE$  ハ弧  $BD$  ノ3倍ニ等シイ。コノトキ弦  $AB$  モ亦半徑ニ等シケレバ、弧  $BD$  ハ圓周ノ幾分ノ幾ツトナルカ。
25.  $AB, CD$  ハ中心  $O$  ナル圓ノ平行ナ二弦デ  $AD$  ト  $BC$  トハ圓内ノ點  $P$  デ交ルモノトスレバ、 $OP$  ハ  $\angle CPD$  ヲ2等分スル。
26. 直角三角形  $ABC$  ノ直角  $C$  ノ二等分線ハ  $AB$  ヲ一邊トシテ外側ニ畫イタ正方形ノ兩對角線ノ交點ヲ通ル。
27. 三角形  $ABC$  ノ外接圓ニ於テ、 $\angle B, \angle C$  ニ對スル弧ノ中點ヲ夫々  $P, Q$  トスルトキ、直線  $PQ$  ガ  $\angle A$  ノ二邊ト交

- ツテ作ル三角形ハ二等邊三角形デアアル。モシコノ三角形ガ正三角形ナラバ、 $ABC$  ハ如何ナル三角形カ。
28. 圓ニ内接スル二等邊三角形  $ABC$  ノ底角  $B$  内ニ弦  $BP$  ヲ引キ、頂點  $A$  カラ  $BP$  ニ平行ニ引イタ直線ガ圓周ト交ル點ヲ  $Q$  トスレバ、 $AP \parallel CQ$
29. 角  $A$  ガ  $60^\circ$  ナル三角形  $ABC$  ノ内心ヲ中心トシテ、二邊  $AB, AC$  又ハソノ延長ト交ル圓ヲ畫キ、ソノ  $A$  ニ近イ交點ヲ夫々  $D, E$  トスレバ、三角形  $ADE$  ハ正三角形デアアル。
30. 圓  $O$  ニ外切スル梯形  $ABCD$  ノ兩底  $AD, BC$  ニ中心  $O$  ヲ通ツテ平行線ヲ引キ、二邊  $AB, CD$  ト交ル點ヲ夫々  $E, F$  トスレバ、 $EF$  ハコノ梯形ノ周ノ  $\frac{1}{4}$  ニ等シイ。
31. 平行四邊形  $ABCD$  ノ頂點  $B$  ヲ中心トシ、一邊  $BC$  ヲ半徑トシテ畫イタ圓ガ  $CD$  又ハソノ延長ト再ビ交ル點ヲ  $E$  トスレバ、 $\angle EAC$  ハ  $\angle ABD$  ト  $\angle ACD$  トノ差ニ等シイ。
32. 圓  $O$  ニ圓外ノ一點  $P$  カラ引イタ二ツノ切線ノ切點ヲ  $A, B$  トスレバ、 $\angle APB = 2\angle OAB$
33. 圓周上ノ一點  $C$  ニ於ケル切線ヘ任意ノ直徑  $AB$  ノ一端  $A$  カラ垂線  $AD$  ヲ下セバ、 $AC$  ハ  $\angle BAD$  ヲ2等分スル。
34. 銳角三角形  $ABC$  ノ頂點  $B, C$  ヨリソノ對邊ヘ下シタ垂線ノ延長ガ、コノ三角形ノ外接圓ト交ル點ヲ夫々  $D, E$  トスレバ、直線  $DE$  ハ、 $A$  ニ於ケルコノ圓ノ切線ニ平行デアアル。

35. ニツノ角ト周トガ與ヘラレタトキ, 三角形ヲ作レ。
36. 底邊トニツノ中線ガ與ヘラレタトキ, 三角形ヲ作レ。
37. 與ヘラレタ三角形ABCノ各頂點ヲ中心トシテ圓ヲ畫キ, ソレ等ノ圓ノ何レノニツモ切スルヤウニセヨ。
38. 六角形 ABCDEF ガ圓ニ内接スルトキハ,  

$$\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$$
39. 三角形 ABC ノ垂線 AD, BE, CF ノ足ヲ夫々 D, E, F, 垂心ヲ H トスレバ,  
 ①  $\triangle AEF, \triangle BDF, \triangle CDE$  ノ各, ノ三ツノ角ハ夫々  $\triangle ABC$  ノ三ツノ角ニ等シイ。  
 ② AD, BE, CF ハ  $\triangle DEF$  ノ各角又ハ外角ノ二等分線デアアル。  
 ③ D カラ邊 AC, AB ニ垂線 DP, DQ' ヲ下セバ,  

$$\angle APQ = \angle B, \quad \angle AQP = \angle C$$
40. H ヲ鋭角三角形 ABC ノ垂心トシ, 直線 AH, BH, CH ガ, ソノ外接圓ト交ル點ヲ夫々 A', B', C' トスレバ, H ハ三角形 A'B'C' ノ内心デアアル。
41. 三角形 ABC ノ外接圓上ノ任意ノ點 P カラ三邊ヘ下シタ垂線 PL, PM, PN ノ足 L, M, N ハ一直線上ニアル。  
 [コノ直線ヲシむさん (Simson) 線トイフ]  
 [証明] PC, PB ヲ直径トシテ夫々圓ヲ畫キ, 又 LM ヲ結ビ, ソノ延長ガ後ノ圓ト交ル點ヲ K トシ, KB, KP ヲ作レバ,  

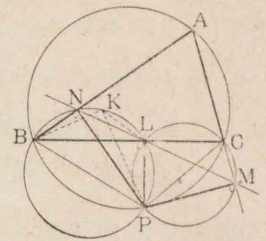
$$\angle BKP = \angle R \dots \dots \dots (1)$$

$\triangle BPC, \triangle KPM$  = 於テ  

$$\angle CBP = \angle MKP$$
  

$$\angle BCP = \angle KMP$$
  

$$\therefore \angle BPC = \angle KPM \dots \dots \dots (2)$$
  
 サテ  $\angle BPC$  ハ  $\angle A$  ノ補角デ



$\angle B + \angle C$  = 等シク, 又  $\angle KPM$  ハ  $\angle LPK$  ト  $\angle LPM$  トノ和デ,  $\angle LPM$  ハ  $\angle C$  = 等シイカラ  
 (2) ヨリ  $\angle LPK = \angle B \therefore \angle KBL = \angle B \dots \dots \dots (3)$   
 ヨツテ BK ト BA トハ一致スル。即チ (3) = ヨリ K ハ N ト一致スルカラ, L, M, N ハ一直線上ニアルコトナル。

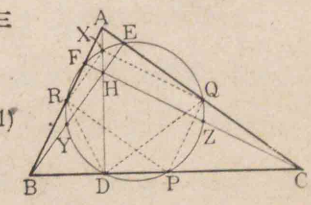
42. 三角形デハ次ノ九ツノ點ハ同一圓周上ニアル。  
 [1] 各邊ノ中點,  
 [2] 各頂點カラ對邊ヘノ垂線ノ足,  
 [3] 垂心ト各頂點トヲ結ビ付ケル線分ノ中點。  
 [コノ圓ヲ三角形ノ九點圓トイフ]

[証明]  $\triangle ABC$  ノ頂點 A, B, C ヨリノ垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F; 邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 P, Q, R トシ, 垂心ヲ H; AH, BH, CH ノ中點ヲ夫々 X, Y, Z トスル。

$\triangle ARD, \triangle AQD$  ハ二等邊三角形デアアルカラ  

$$\angle A = \angle RDQ \dots \dots \dots (1)$$
  
 又  $RP \parallel AC, QP \parallel AB$   

$$\therefore \angle RPQ = \angle A \dots \dots \dots (2)$$



(1)ト(2)カラDハ三點P, Q, Rヲ通ル圓ノ周上ニアル,  
同様ニE, Fモコノ圓ノ周上ニアル。

又  $RX \parallel BH, QX \parallel CH \therefore \angle RXQ = \angle BHC = \angle A$ ノ補角  
 $\therefore$  (2)ニヨリ  $\angle RPQ + \angle RXQ = 2\angle R$

故ニXモ前ト同一ノ圓周上ニアル。同様ニY, Zモ亦  
コノ圓周上ニアル。

43. 圓ノ弧ABノ中點Cカラニツノ弦CD, CEヲ引キ, 弦  
ABト夫々F, Gデ交ラシメレバ, 四點D, F, G, Eハ同一  
圓周上ニアル。

44. 一平面上ニ何レノ三點モ一直線上ニナイ五點ガア  
ル。ソシテソノ何レノ三點ヲ通ル圓ヲ畫クモ更ニ殘  
ノ點ノウチ, 少クトモ一ツハソノ圓周上ニアルトイフ。  
然ルトキハコノ五點ハスベテ同一圓周上ニアルコト  
ヲ證セヨ。又六點ナル場合ハ如何。

45. 定圓ノ直徑ABノ端Aヲ通ツテ任意ノ二弦AC, AD  
ヲ引キ, ソノ延長トBニ於ケルコノ圓ノ切線トノ交點  
ヲ夫々E, Fトスレバ, 四點C, D, E, Fハ共圓點デアル。

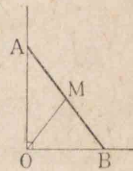
46. 直角三角形ABCノ直角ノ頂點Aカラ斜邊BCニ下  
シタ垂線ノ足ヲDトシ,  $\angle B$ ノ二等分線ガAC, ADト交  
ル點ヲ夫々E, Fトスレバ, 三點A, D, Eヲ通ル圓ハ線分  
BFヲ2等分スル。

47. A, Bハ定圓Oノ周上ニアル二定點デ, Pハコノ圓周  
上ニアル他ノ任意ノ一點トスル。直線PA, PBガA及

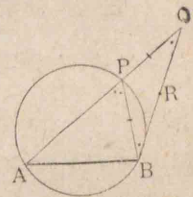
ビBヲ通ル他ノ任意ノ圓周ト再ビ交ル點ヲ夫々C, D  
トスルトキ, 直線CDハ直線POニ垂直デアル。

48. 内切スル二圓ガアル。小圓ノ中心ヲC, 大圓ノ中心  
ヲO, 切點ヲPトスル。圓Oノ弦PQガ圓Cト交ル點  
Rニ於テ圓Cニ切スル直線ガ圓Oト交ル點ヲ夫々A,  
Bトスレバ, Qハ弧ABノ中點トナル。

49. 定長ノ線分ABノ兩端ガ夫々直角ニ  
交ル二定直線ノ各, ノ上ヲ動クトキ, ソノ  
中點Mノ軌跡ヲ求メヨ。



50. ABハ圓ノ定弦デ, Pハ圓周上ノ  
任意ノ一點デアル。APヲQマデ  
延長シテPQ=PBナラシメルトキ,  
BQノ中點Rノ軌跡ヲ求メヨ。(先  
ヅQノ軌跡ヲ求メヨ)



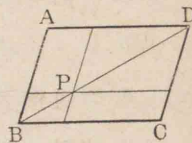
#### 第四篇 面積

51. 一點Pガ平行四邊形ABCDノ外部ニアルトキハ,  
 $\triangle PAB \sim \triangle PAD = \triangle PAC$  又ハ  $\triangle PAB + \triangle PAD = \triangle PAC$   
(B, C, Dカラ直線PAニ垂線ヲ作レ)

52. 與ヘラレタ平行四邊形ト等積デアル二等邊三角形  
ヲ作レ。

定義 平行四邊形ノ一對角線上ノ一點ヲ通ツテ各邊  
ニ平行デアル直線ヲ引ケバ, 原形ヲ四ツノ平行四邊形

ニ分ケル。ソノウチ對角線ガ又對角線トナルニツノ平行四邊形ヲ對角線ニ沿フ平行四邊形トイヒ、残りノニツヲソノ餘形トイフ。



- 53. 圖デ餘形  $\square PA, \square PC$  ハ等積デアルコトヲ證セヨ。
- 54. 與ヘラレタ平行四邊形ト等積デ、且ツ與ヘラレタ一邊ト一角ヲモツ平行四邊形ヲ作レ。(餘形ヲ利用セヨ)
- 55. 平行四邊形 ABCD 内ノ一點ヲ P トスレバ、 $\triangle PAB$  ト  $\triangle PCD$  ノ面積ノ和ハ一定デアル。
- 56.  $a, b$  ガ線分ノ長サヲ表ハシ、且ツ  $a$  ハ  $b$  ヨリ大ルトキ、次ノ等式ヲ幾何學的ニ證セヨ。

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- 57. 半徑 9 cm アル圓ノ中心ヨリ 15 cm ノ距離ニ一點 P ガアル。P カラコノ圓ニ引イタ切線ヲ PA, PB トスルトキ、切線ノ長サ及ビ弦 AB ノ長サヲ求メヨ。
- 58. 内切圓ノ半徑 23 m, 外接圓ノ半徑 30 m ナル直角三角形ガアル。コレト等積デアル正方形ノ一邊ノ長サヲ種ノ位マデ計算セヨ。
- 59. 半徑 1 m ノ圓ニ内接スル正三角形ト正方形トノ面積ノ差ヲ平方種ノ位マデ正シク計算セヨ。
- 60. 半徑 5 cm ノ圓ニ内接スル矩形ノ面積ガ 48 平方種アルトキ、二邊ノ長サ各、何程カ。
- 61. 一邊ノ長サガ  $a$  デアル正方形ガアル。ソノ各邊ヲ

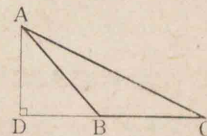
直徑トシテ四ツノ半圓ヲ正方形ノ内部ニ畫クトキ、コレ等ノ圓ノニツツニ共通デアル部分ノ面積ノ和ヲ求メヨ。

- 62. 圓ニ内接スル正三角形ノ面積ハ同ジ圓ニ内接スル正六角形ノ面積ノ半分ニ等シイ。
- 63. 三角形 ABC ニ於テ  $\angle B$  ヲ鈍角トシ、頂點 A カラ對邊 BC ノ延長ニ下シタ垂線ノ足ヲ

D トスレバ、

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 BD \cdot BC$$

**証明**  $DB + BC = DC$



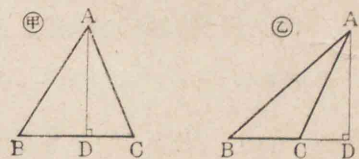
サテ  $AC^2 = AD^2 + (DB + BC)^2 = (AD^2 + DB^2) + BC^2 + 2 BD \cdot BC = AB^2 + BC^2 + 2 BD \cdot BC$

- 64. 三角形 ABC ニ於テ  $\angle B$  ヲ銳角トシ、頂點 A カラ對邊 BC 又ハソノ延長ニ下シタ垂線ノ足ヲ D トスレバ、

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 BD \cdot BC$$

**証明** 垂線 AD ノ足 D

ハ C ト一致スルカ、B, C ノ間ニアルカ或ハ C ヲ越エテノ延長上ニアル。



今 D ガ C ト一致スレバ、ピタゴラスノ定理ソノ儘デアル。他ノニツノ場合ニハ

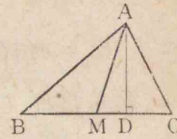
$$CD = BC - BD \quad (\text{甲圖}) \quad CD = BD - BC \quad (\text{乙圖})$$

サテ  $AC^2 = AD^2 + CD^2 = AD^2 + (BD - BC)^2$  (甲モ、乙モ)

$$= (AD^2 + BD^2) + BC^2 - 2BD \cdot BC$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$$

65. 三角形 ABC の邊 BC の中點ヲ M  
トスレバ,  $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$   
(A カラ BC = 垂線 AD ヲ下シ,  $\triangle ABM$ ,  
 $\triangle ACM$  = 問題 63, 64 ヲ用ヒヨ)



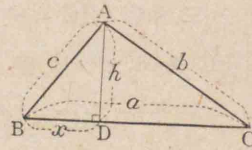
66. 線分 BC 又ハソノ延長上ノ任意ノ點ヲ A トシ, BC  
ノ中點ヲ M トスレバ,  $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

67. 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C = 對スル邊ノ長サヲ夫々  
 $a, b, c$  トシ,  $2s = a + b + c$  ト置クトキハ, 三角形ノ面積ヲ表  
ハス數 S ハ  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

[コレヲヘロン (Heron) ノ公式トイフ]

**証明** 三角形ノ二角ハ銳角

デアルカラ,  $\angle B, \angle C$  ナ銳角ト  
スル。A ヨリノ垂線 AD ヲ引  
ケバ, D ハ B ト C ノ間ニアル。



サテ垂線 AD ノ長サヲ  $h$ , BD ノ長サヲ  $x$  トスレバ,  
 $a, b, c, h, x$  ノ間ニハ次ノ關係ガアル。

$$h^2 = c^2 - x^2, \quad b^2 - (a-x)^2 = h^2$$

$$\text{故} = b^2 - a^2 + 2ax = c^2 \quad \therefore x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

コノ値ヲ  $h^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x)$  = 代入シテ

$$h^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(c+a-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}$$

サテ  $2s = a + b + c$  デアルカラ

$$2(s-a) = b+c-a, \quad 2(s-b) = c+a-b, \quad 2(s-c) = a+b-c$$

$$\therefore h^2 = \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4a^2}$$

又三角形ノ面積ノ數値 S ハ  $\frac{ha}{2}$  デアル。

$$\therefore S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

68. 前問ニ於テ内切圓ノ半径ヲ  $r$  トスレバ,

$$S = r \cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

69. 直角三角形ノ斜邊及ビソノ他ノ二邊ノ長サヲ夫々  
 $a, b, c$  トスルトキハ, 次ノ等式ガ成立コトヲ證セヨ。

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 4b^2c^2$$

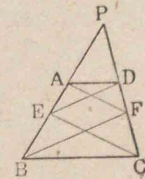
70. 梯形ガアツテ, ソノ底邊ノ長サハ夫々 11cm, 25cm デ, 他  
ノ二邊ノ長サハ夫々 13cm, 15cm ナルトキ, ソノ面積如何。

第五篇 比例

71. 三角形ノ一邊ニ平行デアル直線デ, ソノ面積ヲ 2 等  
分セヨ。又 3 等分セヨ。

72. 三角形ノ一邊ニ垂直デアル直線デ, ソノ面積ヲ 2 等  
分セヨ。

73. 梯形 ABCD ノ底デナイ邊 AB 上ニ  
一點 E ヲトリ, 直線 EC = 平行 = AF  
ヲ引キ, CD トノ交點ヲ F トスレバ, 直



線 ED, BF ハ互ニ平行スル。(AB, CD ナ延長シテ P デ交  
ラシメヨ)

74. 二定點 A, B ナ通ル任意ノ圓ガ一定圓 O ト交ル二點  
ナ P, Q トスレバ, 直線 PQ ハ直線 AB 上ノ一定點ヲ通ル。

75. 二定點ヲ通り, 且ツ一定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。(前  
間及ビ定理 60 系 2 ナ利用セヨ)

76. 二定點ヲ通り, 且ツ一定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。(問題  
74 ノ定點ヲ利用セヨ)

77. ニツノ同心圓ガアル。内ノ圓ノ周ガ外ノ圓ノ面積  
ヲ 2 等分スルトキ, ツノ半径ノ比如何。

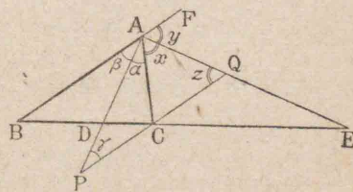
78. 三角形 ABC ノ邊 BC 上ノ一點 D ナ通り, AB, AC =  
平デアル直線ガ AC, AB ト交ル點ヲ E, F トスレバ,  
 $\triangle BFD : \triangle AEF = \triangle AEF : \triangle DEC$  (AD, EF ナ引ケ)

79. 三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ點 P ナトリ,  $BP \cdot PC = AP^2$  ナ  
ラシメヨ。(外接圓ヲ畫イテ見ヨ)

80. 三角形 ABC ノ頂角 A 及ビツノ外角ノ 2 等分線ガ底  
邊 BC 及ビツノ延長ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE}$$

(C ナ通ツテ AB ニ平  
行デアル直線ヲ引キ,  
直線 AD, AE トノ交點



ヲ夫々 P, Q トスレバ,  $PC = AC = QC$ ,  $\triangle ABD \sim \triangle PCD$ ,  
 $\triangle ABE \sim \triangle QCE$  トナルコトニ注意)

昭和 11 年 11 月 11 日 初版印刷 昭和 11 年 11 月 14 日 初版發行

昭和 12 年 1 月 23 日 訂正再版印刷

昭和 12 年 1 月 26 日 訂正再版發行

### 新編女子幾何

定價金 75 錢



著作者 中 川 銓 吉

東京市麹町區飯田町 2 丁目 20 番地

發行者 中等學校教科書株式會社

代表者 山本慶治

東京市王子區神谷町 1 丁目 482 番地

印刷者 (東京 4438) 東京證券印刷株式會社

代表者 吉田了太

東京市麹町區飯田町 2 丁目 20 番地

發行所 中等學校教科書株式會社

日本出版文化協會會員番號 117522

配給元 日本出版配給株式會社

東京市神田區淡路町 2 ノ 9



定理	頁	定理	頁	定理	頁
1.....	24	37.....	97	73.....	179
2.....	24	38.....	101	74.....	179
3.....	28	39.....	102	75.....	180
4.....	29	40.....	103	76.....	182
5.....	34	41.....	109	77.....	183
6.....	36	42.....	110	78.....	184
7.....	37	43.....	111	79.....	187
8.....	43	44.....	114	80.....	189
9.....	44	45.....	126	81.....	190
10.....	46	46.....	127		
11.....	46	47.....	128	作圖題	頁
12.....	49	48.....	130	1.....	11,106
13.....	49	49.....	135	2.....	11
14.....	50	50.....	135	3.....	16
15.....	52	51.....	136	4.....	26
16.....	53	52.....	136	5.....	27
17.....	55	53.....	138	6.....	27
18.....	57	54.....	138	7.....	36,108
19.....	59	55.....	140	8.....	87
20.....	63	56.....	141	9.....	109
21.....	66	57.....	144	10.....	112
22.....	69	58.....	144	11.....	115
23.....	72	59.....	148	12.....	122
24.....	74	60.....	149	13.....	133
25.....	74	61.....	154	14.....	134
26.....	75	62.....	155	15.....	134
27.....	76	63.....	156	16.....	141
28.....	79	64.....	160	17.....	142
29.....	82	65.....	162		
30.....	82	66.....	164	軌跡題	頁
31.....	84	67.....	165	1.....	119
32.....	85	68.....	166	2.....	119
33.....	87	69.....	168	3.....	120
34.....	91	70.....	168	4.....	121
35.....	94	71.....	170		
36.....	96	72.....	175		

