現代
女子敎育
# 幾何學

寶文館發行

昭和十四年一月二十五日
文部省檢定濟
高等女學校數學科用

# 現代
# 女子教育
# 幾何學

東京文理科大學教授理學博士
國枝元治
東京女子高等師範學校教授
中澤伊與吉
共編



東京
株式會社寶文館

# 序

本書ハ高等女學校ニ於ケル幾何學教科書トシテ編纂セルモノデアツテ特ニ留意セル點ノ主要ナルモノハ次ノ通リデアル。

(1) 先ヅ卷頭ニ圖形ニ關スル編ヲ設ケ,幾何學學習ノ初期ニ於ケル困難ヲ緩和シ幾何學研究ニ對スル興味ヲ喚起センコトヲ期シタルコト。

(2) 空間ニ關スル知識ノ充實ト論理的推論ノ練習トニ注意シ,中等教育ニ於ケル斯學教授ノ目的ノ達成ヲ期シタルコト。

(3) 立體ニ關スル概念ノ涵養ニ注意シ,其ノ方面ニ關スル教材ノ挿入ニ意ヲ用ヒタルコト。

(4) 算術及ビ代數トノ連絡ニ十分ノ注意ヲ拂ヒ,隨處ニ計算問題ヲ挿入シ,又既習ノ知識ノ活用ニ注意シ,一面ニハ教授進行ノ平易ヲ圖リ,他面ニハ教授時數ノ膨大ヲ避ケタルコト。

(5) 練習問題ハ空間知識ノ重要ナルモノ及ビ定理ノ活用ニ重キヲ置キ成ルベク平易ナルモノヲ選ビ,徒ニ難解ナルモノハ之ヲ避ケタルコト。

要スルニ本書ハ編者等多年ノ經驗ヲ基トシ,又我國女子教育ノ實情ニ鑑ミ,高等女學校ニ於ケル教科書トシテ最モ適切ナランコトヲ期シテ發行セルモノデアル。而シテ版ヲ重ヌルニ從ツテ完璧タランコトヲ期スルノデアル故實地教授者ノ忠言ハ編者等ノ切望シテ止マザルトコロデアル。

昭和十三年十一月

編者識

# 目次

現代
女子教育
# 幾何學

## 第一編
## 圖形

### 第一章 圖形

**1. 立體**

スベテ物體ハ其ノ形,大サ等ヲ考ヘズシテ唯單ニ其ヲ組成スル物質ノミヲ考ヘルコトガ出來ル。或ハ又其ノ物質ヲ全ク考ヘズシテ唯單ニ其ノ形,大サ,位置ノミヲ考ヘルコトモ出來ル。

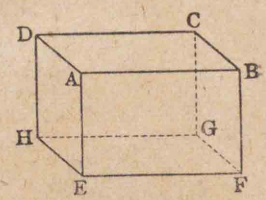
物體ヲ其ノ形,大サ及ビ位置ノミニツイテ考ヘルトキハ之ヲ**立體**トイフ。

算術ニ於テ屢取扱ツタ**直方體**,**立方體**,**球**,**圓壔**等ハ何レモ立體デアル。

直方體ニハ**長サ**,**幅**及ビ**厚サ**ノ三ツノ相異ナル方向ノ廣ガリガアルヤウニ一般ニ

立體ハ長サ,幅及ビ厚サヲ有スル。

## 2. 面,線,點




右ノ圖ニ示スヤウニ直方體ハ前後,左右,上下ニ於テ六ツノ境界ニヨツテ空間ノ他ノ部分ト區別サレル。

立體ノ境界ヲ**面**又ハ**表面**トイフ。

面ニハ色色アリ,直方體ノ六ツノ面ノヤウナ平ラナ面ヲ**平面**トイヒ,球ノ表面ヤ圓柱ノ側面ノヤウナ曲ツタ面ヲ**曲面**トイフ。

面ハ立體ノ境界デアルカラ厚サヲ考ヘルコトハ出來ナイ。一般ニ

面ハ長サ及ビ幅ヲ有スルガ厚サヲ有シナイ。

前圖ノ直方體ノ面 ABCD ハ AB, BC, CD, DA ノ處デ他ノ面トノ境界ヲ有スル。

面ノ境界ヲ**線**トイフ。

線ニハ色色アリ,直方體ノ稜 AB, AD 等ノヤウナ眞直ナ線ヲ**直線**トイヒ,圓壔ノ底面ノ周ノヤウナ彎曲シテ居ル線ヲ**曲線**トイフ。

線ハ面ノ境界デアルカラ幅及ビ厚サヲ考ヘルコトハ出來ナイ。

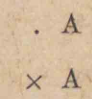


線ハ長サヲ有スルガ幅及ビ厚サヲ有シナイ。

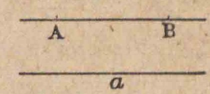
前圖ノ直方體ノ一ツノ稜 AB ハ兩端 A, B ノ處デ他ノ線トノ境界ヲ有スル。

線ノ境界ヲ**點**トイフ。

點ハ形及ビ大サヲ有セズ,單ニ位置ノミヲ有スル。




點ヲ圖示スルニハ通常・又ハ×ヲ用ヒ,A, B 等ノ文字ヲ付ケテ其ノ名トシ,點 A 又ハ A 點等トイフ。




線ハ細イ線ヲ描イテ之ヲ圖示シ,通常其ノ上ノ二點或ハ其ノ兩端ニ A, B 等ノ文字ヲ付ケルカ又ハ唯一ツノ文字ヲ付ケテ其ノ名トシ,線 AB 又ハ線 $a$ 等トイフ。

## 3. 直線,曲線

直線トハ眞直ナ線デアル。

直線ハ通常二ツノ向ニ限ガナイモノトスル。其ノ長サニ限ノアルモノ卽チ兩端ノアルモノヲ**線分**

又ハ**有限直線**トイフ。サレド線分ノコトヲ單ニ直線トイフコトモアル。

線分ノ方向ヲ變ヘズニ引キ延スコトヲ其ノ線分ヲ延長スルトイヒ,延長シタ部分ヲ其ノ**延長**トイフ。

直線ニハ次ノ重要ナル性質ガアル。

二點ヲ通過スル直線ハ唯一ツニ限ル。

從テ

(1) 二點ヲ共有スル二ツノ直線ハ全ク重ナル。

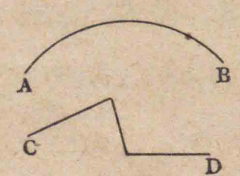
(2) 重ナラナイ二ツノ直線ハ一ツヨリモ多クノ點ヲ共有スルコトハナイ。

(問) 上ノ性質ヲ利用シテ直線定木ガ正シイカ否カヲ檢査スルコトガ出來ル。ドウスレバヨイカ。

二點ヲ兩端トスル線分ノ長サヲ其等ノ**二點間ノ距離**トイフ。

二點ヲ兩端トスル線分ヲ引クコトヲ其等ノ二點ヲ**結ブ**或ハ**連結**スルトイフ。

何レノ部分モ直線デナイ線ヲ**曲線**トイフ。




右ノ圖ノ線ABハ曲線デアルガ線CDハ曲線デハナイ。



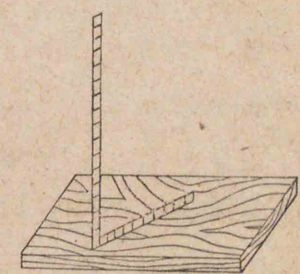
## 4. 平面

平面トハ眞平(マツタヒラ)ナ面デアル。

平面ニハ次ノ性質ガアル。

平面上ノ任意ノ二點ヲ通過スル直線ハ恒ニ全ク其ノ面ニ密着スル。

此ノ性質ヲ利用シテ或面ガ平面カ否カヲ檢査スルコトガ出來ル。即チ檢査シヤウトスル面ニ正確ナ定木ノ緣ヲ如何樣ニ宛ガツテ見テモ恒ニ間隙ナク全ク密着スルトキニハ先ヅ其ノ面ハ平面ト認メルコトガ出來ル。



## 5. 圓

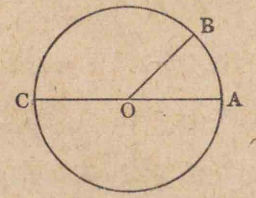
**中心**ト稱スル一定ノ點カラ線上ノ何レノ點モ皆相等シイ距離ニアル線ニヨツテ圍マレタ平面ノ部分ヲ**圓**トイヒ,其ノ線ヲ**圓周**トイフ。

**注意**　圓周ハ線デ,圓ハ圓周デ圍マレタ平面ノ部

分デアルガ,圓周ノコトヲ圓トイフコトモアル。

圓ノ中心カラ圓周マデ引イタ線分ヲ**半徑**トイヒ,中心ヲ通過シテ圓周上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ**直徑**トイフ。

右ノ圓ニ於テ O ハ中心デ,線分 OA, OB, OC ハ其ノ半徑,線分 AC ハ其ノ直徑デアル。




圓周ノ一部分ヲ**圓弧**トイフ

例ヘバ上圖ノ AB, BC 等ハ圓弧デアル。

圓ヲ畫クニハ**兩脚規(こんぱす)**ヲ用ヒル。

圓又ハ圓周ニ命名スルニハ通常其ノ中心又ハ圓周上ノ三點ノ名ヲ以テスル。例ヘバ圓 O 又ハ圓 ABC トイフ。

圓ニハ次ノ性質ガアル。

(1) 一ツノ圓ノ半徑ハ皆相等シイ。

(2) 一ツノ圓ノ直徑ハ皆相等シク其ノ長サハ半徑ノ二倍ニ等シイ。

(3) 圓內ノ點ハ中心カラ半徑ヨリモ小ナル距離ニアリ,圓外ノ點ハ中心カラ半徑ヨリモ大ナル距離ニアル。



## 6. 圖形

立體,面,線,點或ハ此等ノモノノ集ツタモノヲ**圖形**トイフ。

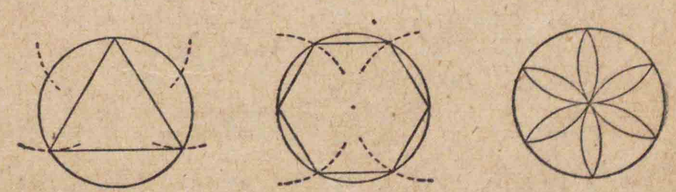
圖形ノ中デ同一平面上ニアルモノヲ**平面圖形**トイヒ,然ラザルモノヲ**立體圖形**トイフ。

例ヘバ圓ハ平面圖形デ,直方體ハ立體圖形デアル。

圖形ノ性質ヲ攻究スル學問ヲ**幾何學**トイフ。

### 例題

1. 直線及ビ平面ノ性質ヲイヘ。
2. 直線ト線分トノ差異ヲイヘ。
3. 次ノ圖ヲ畫ケ。(點線ハ補助線デアル。)

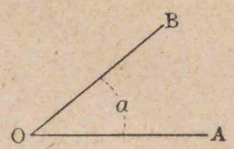


## 第二章　角

### 7. 角

一點カラ引イタ二ツノ直線ハ**角ヲナス**或ハ**角ヲ夾ム**トイヒ,其ノ點ヲ**角ノ頂點**,其等ノ二ツノ直線ヲ**角ノ邊**トイフ。

圖ニ於テOハ角ノ頂點デ,OA, OBハ角ノ邊デアル。




角ニ命名スルノニ次ノ三通リノ仕方ガアル。

(1) 例ヘバ角AOBトイフヤウニ兩邊ノ各ノ上ノ點ヲ示ス文字ノ間ニ頂點ヲ示ス文字ヲ置イテ之ヲ表ハス。

(2) 他ノ角ト紛ラウ虞ノナイ場合ニハ例ヘバ角Oトイフヤウニ頂點ノ名ヲ以テ表ハス。

(3) 例ヘバ角$a$トイフヤウニ角内ニ於テ頂點ノ近クニ書イタ文字デ之ヲ表ハス。

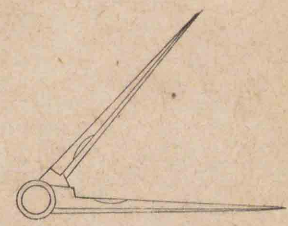
角ヲ表ハス符號ニハ∠ヲ用ヒル。例ヘバ上圖ノ角ヲ∠AOB, ∠O, ∠$a$ト記ス。

二ツノ角ノ大小ヲ比較スルニハ,一ツノ角ヲ他ノ角ノ上ニ頂點ト一邊トガ一致スルヤウニ重ネ,第二邊モ亦一致スルトキニハ,此等ノ二角ハ**相等シイ**ト



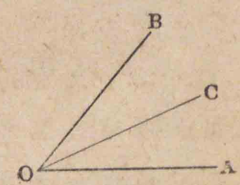
イヒ,第二邊ガ一致シナイトキニハ,第二邊ガ内ニ落チル方ノ角ヲ他ノ角ヨリモ**小サイ**トイフ。

例ヘバ兩脚規ノ一ツノ脚ヲ固定シ,他ノ脚ヲ廻轉スルトキニハ二ツノ脚ノナス角ハ其ノ廻轉ノ度合ニヨツテ變化スル。從テ角ノ大サハ二邊ノ開キノ度合デ邊ノ長サニハ關係シナイ。



角ノ頂點カラ引イタ直線ガ其ノ角ヲ相等シイ二ツノ角ニ分ケルトキニハ,此ノ直線ヲ其ノ**角ノ二等分線**トイフ。

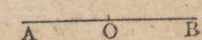
圖ニ於テ∠AOC=∠BOCナルトキハOCハ∠AOBノ二等分線デアル。




### 8. 平角,直角,鋭角,鈍角

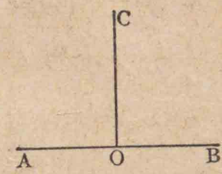
角ノ一邊ガ他ノ邊ノ延長ニナツテ居ルトキニハ,其ノ角ヲ**平角**トイフ。

圖ニ於テOBハAOノ延長デアルカラ∠AOBハ平角デアル。



平角ノ半分ヲ**直角**トイフ。

平角 AOB ノ二等分線ヲ OC トスレバ ∠AOC, ∠BOC ハ何レモ直角デアル。

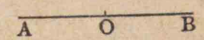



直角ヨリモ小サイ角ヲ**鋭角**トイヒ,直角ヨリモ大キクテ二直角ヨリモ小サイ角ヲ**鈍角**トイフ。

直線ハ重ネ合スコトガ出來ルカラ平角ニハ次ノ性質ガアルコトハ明カデアル。

總テノ平角ハ相等シイ。

從テ直角ニモ次ノ性質ガアル。




總テノ直角ハ相等シイ。

(問) 直角ヲ畫クノニ三角定木ヲ用ヒルコトガアル。三角定木ノ直角ガ正シイカ否カハ如何ニシテ檢査スレバヨイカ。

### 9. 角ノ單位

幾何學デハ通常直角ヲ以テ角ノ單位トスル。例ヘバ直角ノ三倍ノ大サナラバ3直角,直角ノ半分ノ角ナラバ$\frac{1}{2}$直角トイフノデアル。從テ



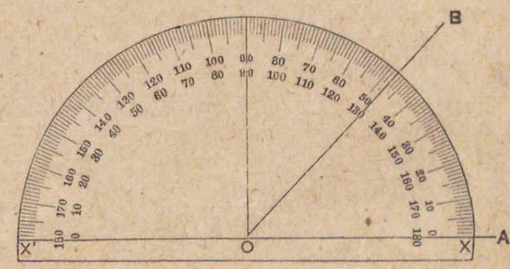
平角ハ二直角デアル。

直角ヲ表ハスノニ ∠R ナル記號ヲ用ヒルコトガアル。

角ノ實用單位トシテハ**度,分,秒**ヲ用ヒル。度ハ直角ノ$\frac{1}{90}$,分ハ度ノ$\frac{1}{60}$,秒ハ分ノ$\frac{1}{60}$デアル。

度,分,秒ヲ表ハスノニ夫夫(°),(′),(″)ナル記號ヲ用ヒ,例ヘバ45度28分36秒ヲ 45° 28′ 36″ ト書キ表ハス。

角ヲ測ルニハ屢**分度器**ヲ用ヒル。分度器ハ圖ニ示スヤウニ半圓周ヲ百八十ニ等分シテ目盛ヲシタモノデアル。




(問) 上ノ圖ノ ∠AOB ハ何度カ。

### 例題

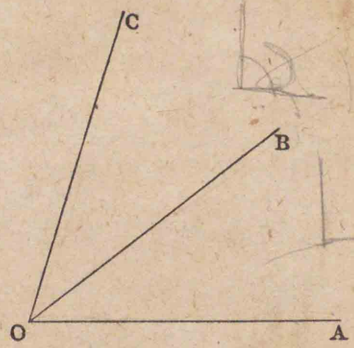
1. 次ノ角ヲ度分秒ノ單位デ表ハセ。

$2\angle R$　$3\angle R$　$\frac{1}{3}\angle R$　$\frac{2}{5}\angle R$　$\frac{3}{8}\angle R$　$\frac{4}{27}\angle R$

2. 次ノ角ヲ直角ヲ單位トシテ表ハセ。

270°　360°　150°　120°　45°　67°30′

3. 分度器ヲ用ヒ右ノ圖ノ∠AOB, ∠AOC ヲ測レ。




4. 分度器ヲ用ヒ56°,75°,120° ノ角ヲ作レ。

5. 一ツノ角ヲ畫キ,其ノ角ノ二等分線ヲ引ケ。

6. 四時,七時,一時三十分ノ各時刻ニ於ケル時計ノ兩針ノナス角ハ何度カ。

---

### 10. 餘角,補角

二角ノ和ガ直角ニ等シイトキニハ其ノ各ヲ他ノ**餘角**トイヒ,二角ノ和ガ二直角ニ等シイトキニハ其ノ各ヲ他ノ**補角**トイフ。

例ヘバ35°ノ角ト55°ノ角トハ互ニ餘角デ,70°ノ角ノ補角ハ110°ノ角デアル。

餘角及ビ補角ニハ明カニ次ノ性質ガアル。

(1) 相等シイ角ノ餘角ハ相等シイ。

(2) 相等シイ角ノ補角ハ相等シイ。

(問1) 次ノ角ノ餘角及ビ補角ヲ求メヨ。

32°　45°25′　72°28′　$\frac{2}{3}\angle R$,　$\frac{1}{4}\angle R$

(2) $2x+3x=90$
$5x=90$
$x=18$

(3) $3x+5x=180$
$8x=180$
$2x=45$
$x=22°5'$



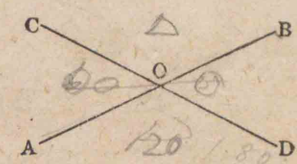
(問2) 或角ノ二倍ノ角ガ其ノ或角ノ三倍ノ角ノ餘角デアル。或角ハ何度カ。

(問3) 或角ノ三倍ノ角ガ其ノ或角ノ五倍ノ角ト補角ヲナストキハ或角ハ何度カ。

### 11. 對頂角

相交ル二直線ノナス四ツノ角ノ中相隣ツテ居ナイ二角ヲ**對頂角**トイフ。

圖ノヤウニ直線ABトCDトガ點Oデ相交ルトキニハ∠AOCト∠BODトハ對頂角デ,又∠AODト∠BOCトハ對頂角デアル。




(問) 上ノ圖デ∠AODガ120°ナルトキハ∠AOCハ何度カ。又∠BODハ何度カ。

對頂角ニハ次ノ重要ナル性質ガアル。

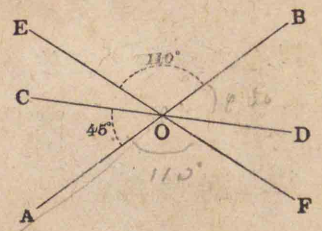
**對頂角ハ相等シイ。**

#### 例題

1. 二直線ガ交ツテナス四ツノ角ノ中,其ノ一ツガ35°ナルトキハ他ノ三ツノ角ノ大サハ何程カ。

又一ツノ角ガ直角ナルトキハ他ノ角ノ大サ如何。

2. 三直線 AB, CD, EF ガ一點 O ニ於テ交リ ∠AOC ガ 45°, ∠EOB ガ 110° ナルトキハ ∠COF, ∠FOD, ∠DOE ハ各何度カ。

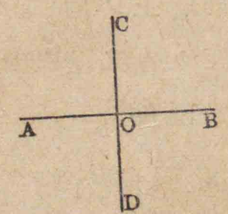



---

## 12. 垂線, 斜線

相交ル二直線ノナス角ノ一ツガ直角ナルトキニハ,此等ノ二直線ハ互ニ垂直デアル(又ハ互ニ直交スル)トイヒ,其ノ各ヲ他ノ**垂線**,其等ノ二直線ノ交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。

圖ニ於テ ∠AOC ガ直角ナルトキニハ二直線 AB, CD ハ互ニ垂直デ, CD ハ AB ノ垂線, AB ハ CD ノ垂線デアル。又 O 點ハ垂線ノ足デアル。




二直線 AB, CD ガ互ニ垂直ナルコトヲ AB⊥CD デ書キ表ハス。

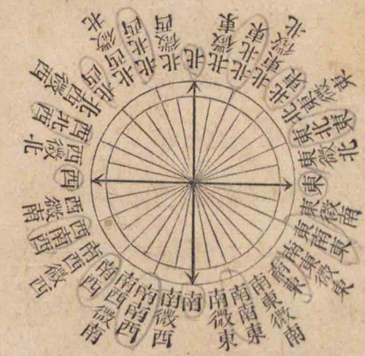
互ニ垂直デナイ相交ル二直線ノ各ヲ他ノ



**斜線**トイヒ,此等ノ二直線ノ交點ヲ**斜線ノ足**トイフ。

## 13. 方位

方位ヲ知ルニハ通常羅針盤ヲ用ヒル。羅針盤デハ方位ヲ三十二ニ分ケ之ニ圖デ示スヤウニ命名スル。



從テ相隣ル二ツノ方位ノナス角ハ 11° 15′ デアル。

例題

1. 三角定木ヲ用ヒ,(1)直線上ノ一點ニ於テソレニ直交スル直線ヲ引ケ。(2)直線外ノ一點カラ其ノ直線ニ垂直ナル直線ヲ引ケ。

2. 次ノ二方位ノナス角ヲ求メヨ。

北ト北北東　北西ト西微南　東北東ト南東微南

3. 南ヨリ西ノ方ヘ $\frac{7}{4}$ 直角廻轉スレバ如何ナル方位ヲ指スカ。

---

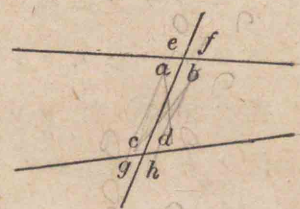
## 第三章　平行直線

直線
半〃〃
線分

### 14. 錯角, 同位角

一直線ガ他ノ二直線ト相交ツテナス八ツノ角ニ其ノ位置ノ關係ニヨツテ次ノヤウニ命名スル。

圖ノヤウニ此等ノ八ツノ角ヲ $a, b, c, d, e, f, g, h$ トスレバ $a$ ト $d$, $b$ ト $c$ トヲ**錯角**トイヒ, $a$ ト $g$, $b$ ト $h$, $c$ ト $e$, $d$ ト $f$ トヲ**同位角**トイフ。




### 15. 平行直線

同一ノ平面上ニアツテ相交ラナイ二直線ハ互ニ平行デアルトイフ。

互ニ平行ナル直線ヲ單ニ**平行直線**トモイフ。

同一ノ平面上ニアル二線分ヲ双方ヘ如何程延長シテモ交ラナイトキニハ,其等ノ二線分モ亦互ニ平行デアルトイフ。

二直線ガ互ニ平行ナルコトヲ表ハスノニ ‖ ナル記號ヲ用ヒル。例ヘバ直線ABトCDトガ平行ナル



コトヲ AB‖CD デ書キ表ハス。

例ヘバ南北ノ方向ニ二ツノ相異ナル直線ヲ引クト此等ノ二直線ハ相交ルコトハナイ。一般ニ同方向ニ引イタ二直線ハ互ニ平行デアル。

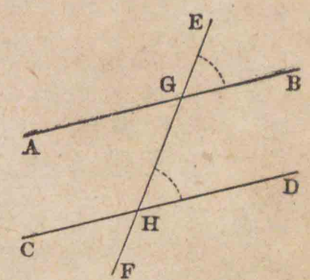
偖一點カラ例ヘバ南北ノ方向ニ一ツヨリ多クノ直線ヲ引クコトハ出來ナイ。斯ノヤウニ

一點ヲ通過シテ一ツノ直線ニ平行ナル直線ハ一ツヨリ多クハナイ。

### 16. 平行直線ノ判定

これをまとめて

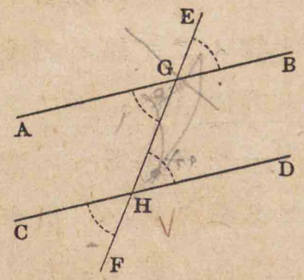
二ツノ直線ABトCDトガ平行カ否カヲ見分ケルニハ圖ニ示スヤウニ ABトCDトニ交ル他ノ直線EF ヲ引キ,一組ノ同位角EGB ト GHD トヲ比較シテ見ル。若シ ∠EGB ト ∠GHD トガ相等シイナラバ, AB モ CD モ共ニ EF ノ方向ト等シイ傾キヲナスカラ同ジ方向ノ二直線デアル。從テ AB ト CD トハ平行デアル。此ノ事ヲ次ノヤウニイフコトガ出來ル。




(1)　一直線ガ他ノ二直線ト交ツテナス同

位角ガ相等シイトキニハ,此等ノ二直線ハ互ニ平行デアル。

又二直線ABトCDトガ平行カ否カヲ見分ケルニハ一組ノ錯角AGHトGHDトヲ比較シテモヨイ。若∠AGHト∠GHDトガ相等シイナラバ,∠AGHト∠EGBトハ對頂角デアルカラ相等シイ。從テ∠EGBト∠GHDトハ相等シイ。卽チ一組ノ同位角ガ相等シイコトニナルカラABトCDトハ平行デアルコトガ分ル。此ノ事ヲ次ノヤウニイフコトガ出來ル。




(2) 一直線ガ他ノ二直線ト交ツテナス錯角ガ相等シイトキニハ,此等ノ二直線ハ互ニ平行デアル。

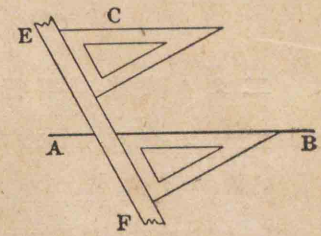
又次ノ事柄モ成立ツ。其ノ理由ハ(1)ノ事柄ヲ基トシテ諸子自ラ考ヘテ見ヨ。

(3) 同一ノ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

三角定木ヲ利用シテ一ツノ直線ABニ平行ナル



直線ヲ引クニハ,先ヅ三角定木ノ一邊ヲ直線ABニ合セ他ノ邊ニ他ノ定木EFヲ合セ,定木EFヲ動カサズニ,三角定木ヲ之ニ沿ツテ動カシ,ABニ合セタ邊ニ沿ツテ任意ノ點Cカラ直線ヲ引クノデアル。




## 17. 平行直線ノ性質

(問) 二ツノ平行直線ヲ引キ其等ニ交ル他ノ直線ヲ引イテ分度器デ其ノ同位角ヲ測リ比較シテ見ヨ。又二ツノ平行ナラザル直線ヲ引キ其等ニ交ル他ノ直線ヲ引イテ其ノ同位角ヲ測リ比較シテ見ヨ。

平行直線ニハ次ノ重要ナル性質ガアル。

(1) 一直線ガ平行ナル二直線ト交ツテナス同位角ハ相等シイ。

(2) 一直線ガ平行ナル二直線ト交ツテナス錯角ハ相等シイ。

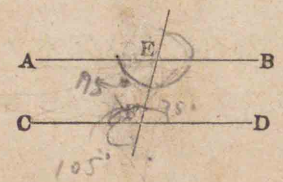
(3) 平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ニモ亦垂直デアル。

## 例　題

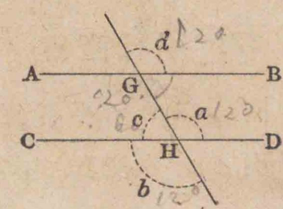
**1.** 二ツノ直線ガ平行ナリトハ如何ナルコトカ。

**2.** 二ツノ直線ガ平行カ否カハ如何ニシテ見分ケルカ。

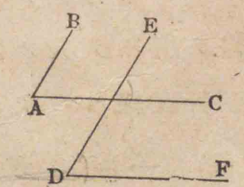
**3.** 圖ニ於テ ∠AEF ハ 75°, ∠CFE ハ 105° ナルトキハ AB ト CD トハ平行カ。



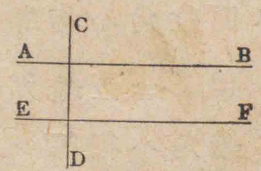

**4.** 圖ニ於テ直線 AB ト CD トガ平行ニシテ ∠AGH ガ 120° ナルトキハ ∠$a$, ∠$b$, ∠$c$, ∠$d$ ハ各何度カ。




**5.** 圖ニ於テ AB‖DE, AC‖DF ナルトキハ ∠BAC ト ∠EDF トノ大小關係如何。




**6.** AB⊥CD ナルトキ, AB ニ平行ニ EF ヲ引ケバ EF ハ CD ノ垂線カ斜線カ。




---



# 第四章　多角形

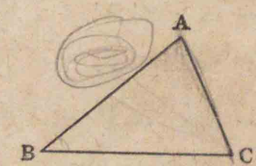
## 18. 多角形

相接續スル多クノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**多角形**トイヒ,線分ノ各ヲ**多角形ノ邊**,相隣ル二邊ノナス多角形內ノ角ヲ**多角形ノ角**トイフ。

多角形ノ角ノ頂點ヲ多角形ノ**頂點**トイヒ,多角形ノ總テノ邊ノ和ヲ其ノ**周**トイフ。

多角形ニ於テハ其ノ邊ノ數ト角ノ數トガ相等シイカラ邊ノ數ガ三,四,五,...... 等ナル多角形ヲ**三邊形,四邊形,五邊形**,......等,或ハ**三角形,四角形,五角形**,......等トイフ。

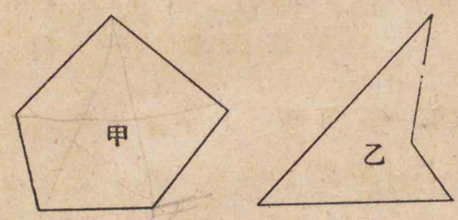
右ノ圖ニ示セルハ三角形デ,線分 AB, BC, CA ハ其ノ邊,角 BAC, ABC, ACB ハ其ノ角,點 A, B, C ハ其ノ頂點デアル。




多角形ノ何レノ邊ノ延長モ其ノ形內ニ入ラナイモノヲ**凸多角形**トイヒ,然ラザルモノヲ**凹多角形**トイフ。サレド單ニ多角形トイヘバ多クハ凸多角形

ノコトデアル。

右ノ圖ノ甲ハ凸五角形デ,乙ハ凹四角形デアル。




凸多角形ニ於テ一邊トソレニ隣ル邊ノ延長トノナス角ヲ多角形ノ**外角**トイフ。

多角形ノ相隣ラナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ其ノ**對角線**トイフ。

(問) 五邊形ヲ畫キ其ノ對角線ヲ引ケ。五邊形ニハ對角線ハ幾本引ケルカ。六邊形デハ如何。

### 19. 三角形

三角形ノ一邊ヲ**底邊**ト呼ブコトガアル。此ノ場合ニ底邊ニ對スル角ヲ**頂角**,他ノ二角ヲ**底角**トイフ。又頂角ノ頂點カラ底邊ニ下シタ垂線ノ長サヲ**三角形ノ高サ**トイフ。

三角形ヲ邊ノ長サノ關係カラ次ノヤウニ分ケル。

何レノ二邊モ相等シクナイ三角形ヲ**不等邊三角形**,二邊ノ相等シイ三角形ヲ**二等邊三角形**,三邊ノ相等シイ三角形ヲ**等邊三角形**トイフ。



二等邊三角形ニ於テハ相等シイ二邊ノナス角ヲ特ニ其ノ**頂角**トイヒ,頂角ニ對スル邊ヲ其ノ**底邊**トイフ。

又三角形ヲ角ノ大サノ關係カラ次ノヤウニ分ケル。

一ツノ角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**,一ツノ角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**,三ツノ角ガ皆鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**トイフ。

直角三角形ノ直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**トイフ。

### 20. 定義

前節ニ於テ不等邊三角形,直角三角形等ノ言葉ノ意義ヲ定メタヤウニ

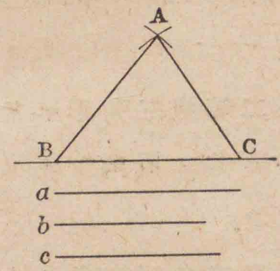
用語ノ意義ヲ定メル陳述ヲ**定義**トイフ。

(問) 平角,直角,對角線,多角形等ノ定義ヲ述ベヨ。

### 21. 作圖題

(1) 三邊ガ夫夫 $a, b, c$ ナル三ツノ線分ニ等シイ三角形ヲ作ルコト。

直線ヲ引キ其ノ上ニ $a$ ニ等シク BC ヲ截リ取リ,次ニ B ヲ中心トシ $c$ ニ等シイ半徑ノ圓弧トCヲ中心トシ $b$ ニ等シイ半徑ノ圓弧トヲ畫キ,其ノ交點ヲ A トシ,線分 AB, AC ヲ引クトキハ, ABC ハ求メル三角形デアル。



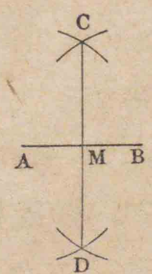

(問1) 三邊ガ夫夫 3 cm, 3.5 cm, 4 cm ナル不等邊三角形ヲ畫ケ。

(問2) 底邊ガ 2.5 糎,他ノ二邊ガ共ニ 3 糎ナル二等邊三角形ヲ畫ケ。

**定義** 線分ヲ二等分スル點ヲ其ノ線分ノ**中點**トイフ。

(2) 線分 AB ノ中點ヲ求メルコト。

線分 AB ノ兩端 A 及ビ B ヲ中心トシ共ニ AB ヲ半徑トスル二ツノ圓弧ヲ畫キ,其ノ交點ヲ C 及ビ D トシ,直線 CD ヲ引キ,ソレガ AB ト交ル點ヲ M トスレバ M ハ AB ノ中點デアル。

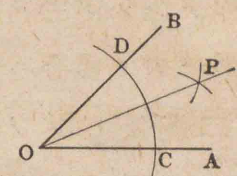



上ノ結果ノ正否ヲ兩脚規又ハ物差ヲ用ヒテ驗セ。



(3) ∠AOB ノ二等分線ヲ引クコト。

O ヲ中心トシテ任意ノ半徑ノ圓弧ヲ畫キ,之ガ二邊 OA, OB ト交ル點ヲ C 及ビ D トシ,次ニ C 及ビ D ヲ中心トシテ同ジ半徑ノ二ツノ圓弧ヲ角內ニ畫キ,其ノ交點ヲ P トシ直線 OP ヲ引クトキハ, OP ハ ∠AOB ノ二等分線デアル。



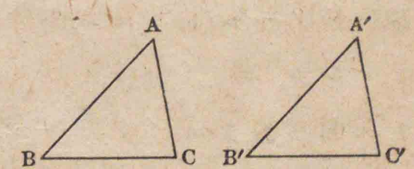

上ノ結果ノ正否ヲ分度器ヲ用ヒテ驗セ。

## 22. 三角形ノ全等(其ノ一)

**定義** 全ク重ネ合スコトノ出來ル圖形ヲ**全等**(**或ハ合同**)デアルトイフ。

(問1) 三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ AB=A′B′, BC=B′C′, ∠ABC=∠A′B′C′ ナルトキニハ,此等ノ二ツノ三角形ハ全等デアルカ。

上ノ問ニ於テ △A′B′C′* ヲ △ABC ノ上ニ持チ來リ,點 B′ ヲ點 B ノ上ニ,邊 A′B′ ヲ邊 AB ノ上ニ重ネ,且邊 BC ト邊 B′C′ トヲ AB ノ同ジ側ニアルヤウニ置クトキ




*△ハ三角形ヲ表ハス記號デアル。

ハ$\triangle A'B'C'$ハ$\triangle ABC$ト全ク重ナルコトガ容易ニ分ル。

即チ此ノ兩三角形ハ全等デアル。因テ二ツノ三角形ハ次ノ場合ニ全等デアルコトヲ知ル。

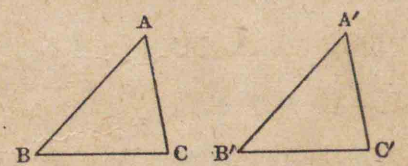
二邊及ビ其ノ夾ム角ガ夫夫相等シイ二ツノ三角形ハ全等デアル。

**注意** 全等ナル二ツノ三角形ニ於テハ相等シイ邊ニ對スル角ハ相等シク,又相等シイ角ニ對スル邊ハ相等シイ。

(問2) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $AB=DE$, $BC=EF$, $\angle B=\angle E$ ナルトキハ $\angle A$, $\angle C$ ハ夫夫 $\triangle DEF$ ノ何レノ角ニ等シイカ。

## 23. 三角形ノ全等(其ノ二)

(問1) 三角形ABC, A'B'C' ニ於テ $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, 邊 $BC=B'C'$ ナルトキニハ,此等ノ二ツノ三角形ハ全等デアルカ。




上ノ問ニ於テモ$\triangle A'B'C'$ヲ$\triangle ABC$ノ上ニ持チ來リ,點B'ヲ點Bノ上ニ,邊B'C'ヲ邊BCノ上ニ重ネ,且點A, A'ヲBCト同ジ側ニアル様ニ置クトキハ此ノ兩三角

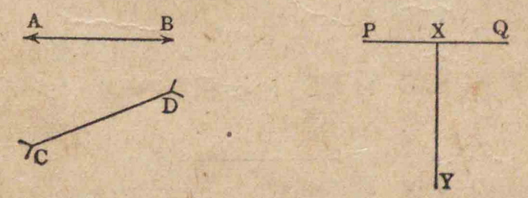


形ハ全ク重ナリ合フコトハ容易ニ知ルコトガ出來ル。即チ$\triangle ABC$ト$\triangle A'B'C'$トハ全等デアル。因テ二ツノ三角形ハ次ノ場合ニモ全等デアルコトヲ知ル。

一邊及ビ其ノ兩端ヲ頂點トスル二角ガ夫夫相等シイ二ツノ三角形ハ全等デアル。

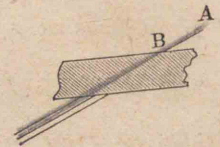
### 例題

1. 邊ノ長サガ 30 cm ナル等邊三邊形ヲ作レ。
2. 三角定木ノ直角ヲ利用シテ直角三角形ヲ作リ其ノ直角ナラザル二角ヲ測リ其ノ和ヲ求メヨ。
3. 任意ノ三角形ヲ畫キ,三ツノ角ヲ測リ其ノ和ヲ求メヨ。
4. 任意ノ三角形ヲ畫キ,各ノ角ノ二等分線ヲ引キ三ツノ二等分線ガ交ル點ヲ調ベテ見ヨ。
5. 任意ノ三角形ヲ畫キ,各頂點ト對邊ノ中點トヲ結ブ三ツノ直線ヲ引キ其ノ交ル處ヲ觀察セヨ。
6. 次ノ圖ニ於テ線分ABトCD, PQトXYトノ長サ

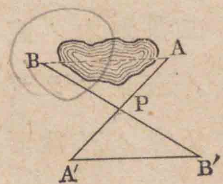


ヲ目測ニヨツテ比較シテ見ヨ。次ニ目測ノ結果ノ正否ヲ物差又ハ兩脚規デ確メテ見ヨ。

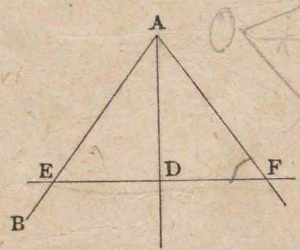
**7.** 次ノ圖ニ於テ線分 AB ノ延長ハ下方ノ三線分ノ何レニ一致スルカヲ目測ニヨツテ判斷シ,次ニ定木ヲ用ヒテ驗シ見ヨ。




**8.** 池ノ對岸ニアル二點 A, B ノ距離ヲ測ルニハ,圖ノヤウニ點 P ヲ選定シ PA′=PA, PB′=PB ナル A′, B′ ノ二點ヲ見出シ, A′B′ ノ長サヲ測レバ求メラレル。何故カ。




**9.** ∠BAC及ビ其ノ二等分線ヲ引キ,二等分線上ノ點 D ニ於テ之ニ垂直ナル直線ヲ引キソレガ邊 AB, AC ト交ル點ヲ E 及ビ F トシ, AE, AF, DE, DF ノ長サヲ比較シ見ヨ。AE ト AF トハ相等シク, DE ト DF トハ相等シイノハ何故




---



## 第五章 結論

### 24. 證明ノ必要

前章ノ例題ニ於ケル問題 6,7 ハ觀察モ或度ヲ超エレバ信頼スルニ足ラナイコトヲ示シ,問題 2, 3, 4, 5 等ハ實驗,實測モ器具ノ精粗,方法ノ良否等種種ノ原因ニヨツテ或誤差ガ伴フコトヲ示シテ居ル。又第23節ニ掲ゲタ作圖題ノ解法ノ正否ハ諸種ノ器具ヲ用ヒテ之ヲ檢シタケレドモソレダケデハ物足ラナイ,諸子ハ多分何故ニ其ノ解法デヨイカ其ノ理由ヲ要求サレルデアラウ。要スルニ圖形ノ性質ノ或モノハ觀察,實驗,實測等ニヨツテ其ノ眞ナルコトヲ知リ得レドモ多クノ場合ニ於テハ夫ダケデハ滿足スルコトガ出來ナイ,何等カノ方法デ其等ノ性質ノ眞ナルコトヲ證明スルコトノ必要ヲ感ズル。

幾何學ニ於テハ觀察,實驗,實測等ニヨラズニ或事項ヲ基礎トシテ圖形ノ諸性質ヲ論理的ニ證明スルノデアル。コレ幾何學ノ特色デアル。

### 25. 公理

**定義** 證明ヲ用ヒズシテ眞ナルコトヲ承

認シ,推理ノ基礎トスル事項ヲ**公理**トイフ。

公理ノ中デ數學一般ニ關スルモノヲ**普通公理**トイヒ,特ニ幾何學ニ關スルモノヲ**幾何學公理**トイフ。

**普通公理**

普通公理ノ主ナルモノハ次ノ通リデアル。

I. 同シ量ニ等シイ量ハ相等シイ。

II. 相等シイ量ト相等シイ量トノ和又ハ差ハ相等シイ。

III. 相等シカラザル量ニ相等シイ量ヲ加ヘ又ハ減ジタル結果ハ大ナル方ニ加ヘタ和又ハ大ナル方ヨリ減ジタル差ハ夫夫小ナル方ニ加ヘタ和又ハ減ジタル差ヨリモ大キイ。

IV. 相等シイ量ノ同倍量又ハ同分量ハ相等シイ。

V. 全量ハ其ノ部分ノ和ニ等シイ。

**幾何學公理**

幾何學公理ノ主ナモノハ次ノ通リデアル。

**公理 I.** 二定點ヲ通過シテ一ツノ直線ヲ引クコトヲ得ル,而シテ唯一ツニ限ル。

**公理 II.** 線分ハ其ノ二ツノ向ニ限ナク延長スルコトヲ得ル。



**公理 III.** 二點ヲ兩端トスル線分ハ其等ノ二點間ノ最短通路デアル。

**公理 IV.** 圖形ハ其ノ形及ビ大サヲ變ヘズシテ位置ヲ變ヘルコトヲ得ル。

**公理 V.** 全ク重ネ合スコトヲ得ル圖形ノ大サハ相等シイ。

**公理 VI.** 一點ヲ通過シテ一直線ニ平行ナル直線ハ一ツヨリ多クハナイ。

**注意** 今後本書ニ於テハ上記ノ公理ノ他ニ既ニ3, 5, 7, 8, 11, 16, 17, 22, 23等ノ諸節ニ掲ゲタ直線,圓,角,平行直線ニ關スル性質,平行直線ノ判定及ビ三角形ノ全等ニ關スル事項等ヲ以テ推理ノ基礎トスルコトニスル。

# 第二編

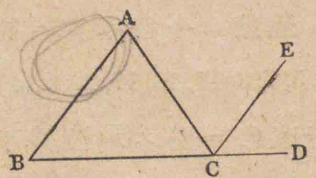
# 直線圖形

## 第一章 三角形

### 26. 定理

三角形ノ三ツノ角ノ和ガ略二直角ニナルコトハ既ニ實測シタトコロデアルガ,次ニ確ニ二直角ニナルコトヲ實測ニヨラズニ證明シテ見ヨウ。

三角形ABCヲ書キ,頂點Cカラ邊ABニ平行ナル直線CEヲ頂點Cニ於ケル外角ACDノ内ニ引ク。




然ルトキハ∠ACEト∠BACトハ錯角デ,∠ECDト∠ABCトハ同位角デ,且ABトCEトハ平行デアルカラ

$$\angle ACE=\angle BAC,\quad \angle ECD=\angle ABC$$

而シテ $\angle ACE+\angle ECD+\angle ACB=2\angle R$

故ニ $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=2\angle R$

即チ平行直線ノ性質ヲ基礎トシテ證明シ得タ。

**定義** 公理又ハ既ニ眞ナルコトヲ知レル事項ニヨリ證明シ得ル事項ヲ**定理**トイフ。



### 27. 三角形ノ性質(其ノ一)

前節ニ於テ證明シタ定理ハ次ノ通リデアル。

**定理一** 三角形ノ三ツノ角ノ和ハ二直角ニ等シイ。

(問) 三角形ABCニ於テ∠Aガ直角ナルトキ∠Bト∠Cトノ和ハ何程カ。

**定義** 公理又ハ定理カラ容易ニ推定シ得ル事項ヲ其ノ**系**トイフ。

定理一カラ容易ニ次ノ事項ガ推定サレル。

**系 I.** 直角三角形ノ直角デナイ二ツノ角ハ互ニ餘角ヲナス。

**系 II.** 三角形ノ外角ハ之ニ隣ラナイ二ツノ內角*ノ和ニ等シイ,從テ其ノ何レヨリモ大キイ。

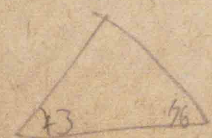
**系 III.** 一直線外ノ一點ヲ通過シテ之ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ,ソシテ唯一ツニ限ル。

#### 例題

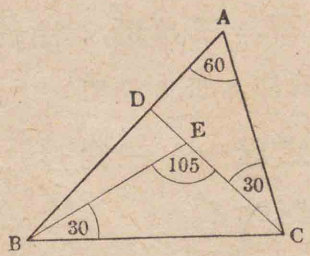
**1.** 三角形ノ二ツノ角ハ43°ト76°デアルトキ,殘リノ一角ハ何度カ。

*外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ其ノ內角トモイフ。

43
76
119



2.　次ノ圖ニ於テ $\angle BDC$, $\angle ECB$, $\angle DEB$, $\angle DBE$ ハ夫夫何度カ。但圖ノ數字ハ度數ヲ表ハス。



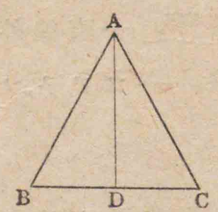

3.* 四邊形ノ四ツノ角ノ和ハ四直角ニ等シイコトヲ證明セヨ。又五邊形ノ內角ノ和ハ六直角ニ等シイコトヲ證明セヨ。

**注意**　一般ニ邊數 $n$ 箇ノ多角形ノ內角ノ和ハ $2(n-2)$ 直角ニ等シイ。

4.　三角形ニハ鈍角ハ一ツヨリ多クハナイ。何故カ。

## 28. 三角形ノ性質(其ノ二)

**定理二**　三角形ノ二邊ガ相等シイトキニハ,相等シイ邊ニ對スル角モ亦相等シイ。




邊 AB ト AC トガ相等シイ三角形 ABC ニ於テハ $\angle B$ ト $\angle C$ トガ相等シイコトヲ證明スル。

**證明**　$\angle BAC$ ノ二等分線ヲ引キソレガ邊 BC ト交ル點ヲ D トスル。然ルトキハ $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ニ於テ

*符號ノ付イテ居ル問題ハ重要デアル。以下之ニ倣フ。

二学期



AD ハ共通, AB=AC, 且 $\angle BAD=\angle CAD$

故ニ　　$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$*　(三角形ノ全等其ノ一)

從テ　　$\angle B=\angle C$

上ノ定理ハ又次ノヤウニ述ベルコトガ出來ル。

二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ。

系 I.　二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル。

系 II.　等邊三角形ノ三ツノ角ハ相等シイ。

**定義**　一線分ト直角ニ交リ其ノ交點ニ於テ之ヲ二等分スル直線ヲ其ノ線分ノ**垂直二等分線**トイフ。

系 III.　一線分ノ垂直二等線上ノ點ハ其ノ線分ノ兩端カラ等距離ニアル。

**定義**　三角形ノ頂點ト其ノ對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ三角形ノ**中線**トイフ。

### 例　題

1.　二等邊三角形ノ頂點ニ於ケル外角ハ一ツノ底角ノ二倍ニ等シイコトヲ證明セヨ。

*≡ハ圖形ノ全等ヲ表ハス記號デアル。

2. 二等邊三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行ナルコトヲ證明セヨ。

3. 二等邊三角形ノ二ツノ底角ノ頂點カラ其ノ對邊ニ引ケル中線ハ相等シイコトヲ證明セヨ。

---

## 29. 定理ノ形

定理ハ二ツノ部分カラ成ル。其ノ前ノ部分ハ豫メ圖形ニツイテ定メラレタ事項デ之ヲ定理ノ**假設**トイヒ,後ノ部分ハ假設ニ基キ證明セラルベキ定理ノ目的デ之ヲ定理ノ**終結**トイフ。

幾何學ノ證明問題モ亦假設ト終結トカラナル。

定理ヤ證明問題ノ證明ヲスルトキニハ,先ヅ假設ト終結トヲ圖形ニツイテ明記シ然ル後證明ニ移ルノデアル。

## 30. 三角形ノ性質(其ノ三)

**定理三** 三角形ノ二角ガ相等シイトキニハ,相等シイ角ニ對スル邊モ亦相等シイ。

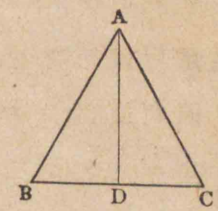
**假設** △ABC ニ於テ ∠B=∠C トスル。

**終結** 然ルトキハ AB=AC デアル。

**證明** ∠BAC ノ二等分線ヲ引キ,之ガ邊 BC ト交ル



點ヲ D トスル。然ルトキハ △ABD, △ACD ニ於テ



∠B+∠BAD+∠ADB=2∠R

∠C+∠CAD+∠ADC=2∠R

而シテ ∠B=∠C, ∠BAD=∠CAD

∴* ∠ADB=∠ADC

倩 △ABD, △ACD ニ於テ

∠BAD=∠CAD, ∠ADB=∠ADC, 且 AD ハ共通

∴ △ABD≡△ACD (三角形ノ全等其ノ二)

∴ AB=AC

**系 I.** 三ツノ角ノ相等シイ三角形ハ等邊三角形デアル。

**定義** 總テノ邊ガ相等シク且總テノ角ガ相等シイ三角形ヲ**正三角形**トイフ。

**系 II.** 二角ト其ノ一ツニ對スル邊トガ夫夫相等シイ二ツノ三角形ハ全等デアル。

**系 III.** 斜邊ト一鋭角トガ夫夫相等シイ二ツノ直角三角形ハ全等デアル。

### 例題

1. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線

---

*∴ ハ「故ニ」ノ記號デアル。

ガ邊 AB, AC 又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ夫夫 E, F トスレバ AE ト AF トハ相等シイ。之ヲ證明セヨ。

注意　以下「之ヲ證明セヨ」ノ語ヲ省略スル。

2. 頂角ガ直角ノ三分ノ二ニ等シイ二等邊三角形ヲ畫ケバ其ノ三角形ハ正三角形デアル。

3. 三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ガ底邊ニ平行ナルトキニハ,此ノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

4. 二等邊三角形ノ頂角ノ頂點カラ底邊ニ引イタ垂線ハ底邊ヲ二等分スル。

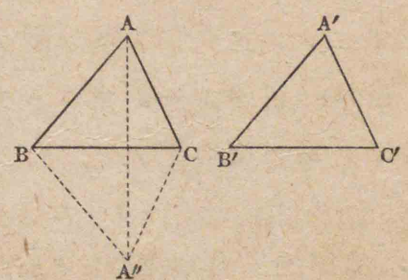
---

### 31. 三角形ノ全等(其ノ三)

**定理四**　三邊ガ夫夫相等シイ二ツノ三角形ハ全等デアル。

**假設**　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$ トスル。

**終結**　然ルトキハ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ハ全等デアル。




**證明**　$\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ傍ニ持チ來リ,點 $B'$ ヲ點 B ニ,邊 $B'C'$ ヲ邊 BC ニ重ネ,且點 A, $A'$ ヲ



BC ノ反對ノ側ニアル樣ニ置キ,點 $A'$ ノ落チル點ヲ $A''$ トスル。然ルトキハ $BC=B'C'$ デアルカラ點 $C'$ ハ點 C ト重ナル。又 A, $A''$ ヲ結ベバ $\triangle ABA''$, $\triangle ACA''$ ハ何レモ二等邊三角形デアルカラ

$$\angle BAA''=\angle BA''A,\quad \angle CAA''=\angle CA''A \qquad (\text{定理二})$$

$$\therefore\ \angle BAC=\angle BA''C$$

因テ $\triangle ABC$ ト $\triangle A''BC$ トハ二邊ト其ノ夾ム角トガ夫夫相等シイカラ全等デアル。而シテ $\triangle A''BC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ全等デアル。

故ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ全等デアル。

例　題

1. 第21節デ述ベタ角ノ二等分線ヲ引ク方法ノ正シイコトヲ證明セヨ。

2. 一線分ノ兩端カラ等距離ニアル點ト其ノ線分ノ中點トヲ結ブ直線ハ其ノ線分ニ垂直デアル。

3. 二等邊三角形ノ頂點カラ底邊ニ引イタ中線ハ頂角ヲ二等分スル。

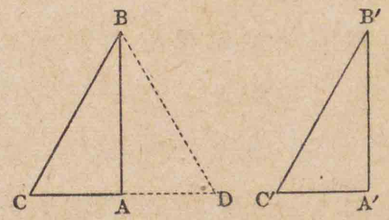
---

### 32. 三角形ノ全等(其ノ四)

**定理五**　斜邊ト他ノ一邊トガ夫夫相等シ

イ二ツノ直角三角形ハ全等デアル。

**假設**　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $\angle BAC=\angle B'A'C'=\angle R$, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$ トスル。



**終結**　然ルトキハ $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ全等デアル。

**證明**　$\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ傍ニ持チ來リ,點 $A'$ ヲ點 $A$ ニ,邊 $A'B'$ ヲ邊 $AB$ ニ重ネ,且點 $C$, $C'$ ヲ $AB$ ノ反對ノ側ニアルヤウニ置キ, $C'$ ノ落チル點ヲ $D$ トスル。

然ルトキハ $AB=A'B'$ デアルカラ $B'$ ハ $B$ ト合シ,又 $\angle BAC=\angle B'A'C'=\angle R$ デアルカラ

$$\angle BAC+\angle BAD=2\angle R$$

因テ $AC$ ト $AD$ トハ一直線ニナル,而シテ $BC=BD$ デアルカラ圖形 $BCD$ ハ二等邊三角形デアル。

$$\therefore\ \angle C=\angle D,\ 從テ\ \angle C=\angle C'$$

$$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$ (定理三,系 III)

例　　題

1. 二ツノ三角形ハ如何ナル場合ニ全等ニナルカ。
2. $\angle AOB$ ノ邊 $OA$, $OB$ ノ長サヲ等シクシ,二點 $A$ 及ビ $B$ ニ於テ夫夫其ノ邊ニ垂線ヲ引キ,其ノ交點ヲ $C$ トシ $O$, $C$ ヲ結ベバ $OC$ ハ $\angle AOB$ ヲ二等分スル。



3. 三角形ノ一邊ノ中點カラ他ノ二邊ニ下シタ垂線ノ長サガ相等シイトキニハ,此ノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

---

## 33. 三角形ノ性質(其ノ四)

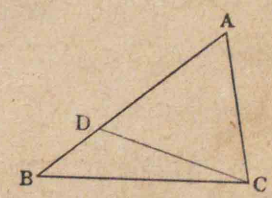
**定理六**　三角形ノ二邊ガ相等シクナイトキニハ,大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリモ大キイ。

**假設**　$\triangle ABC$ ニテ $AB>AC$* トスル。

**終結**　然ルトキハ $\angle ACB>\angle ABC$ デアル。

**證明**　邊 $AB$ 上ニ邊 $AC$ ニ等シク $AD$ ヲ取リ $D$, $C$ ヲ結ブ。然ルトキハ $\triangle ADC$ ハ二等邊三角形デアル。

故ニ $\angle ADC$ ハ $\angle ACD$ ニ等シイ。而シテ $\angle ADC$ ハ $\triangle DBC$ ノ外角デアルカラ



$$\angle ADC>\angle ABC$$

然ルニ　$\angle ACB>\angle ACD$

$$\therefore\ \angle ACB>\angle ABC$$

---

* $>$, $<$ ハ夫夫其ノ左邊ハ右邊ヨリモ大或ハ小ナルコトヲ表ハス記號デアル。

(問) 四邊形 $ABCD$ ニ於テ $AB>BC$, $AD>CD$ ナルトキハ $\angle A<\angle C$ デアル。

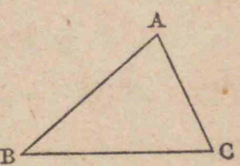
### 34. 三角形ノ性質(其ノ五)

**定理七** 三角形ノ二角ガ相等シクナイトキニハ,大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリモ大キイ。

**假設** $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle ACB>\angle ABC$ トスル。

**終結** 然ルトキハ $AB>AC$ デアル。

**證明** 若 $AB>AC$ デナイトスレバ $AB=AC$ カ,或ハ $AB<AC$ カデアル。




然ルニ $AB=AC$ デハナイ。
何トナレバ若 $AB=AC$ トスレバ $\angle ABC=\angle ACB$ トナッテ(定理**二**)假設ニ反スルカラデアル。

又 $AB<AC$ デハナイ。何トナレバ若 $AB<AC$ トスレバ $\angle ACB<\angle ABC$ トナッテ(定理**六**)是亦假設ニ反スルカラデアル。

故ニ $AB>AC$ デアル。

**注意** 上ノヤウナ證明法ヲ**歸謬法**トイフ。

**系 I.** 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ邊ヨリモ大キイ。



**系 II.** 直線外ノ一點カラ此ノ直線ニ引イタ總テノ直線ノ中垂線ハ最モ短カイ。

**定義** 一點カラ一直線ニ引イタ垂線ノ長サヲ其ノ**點ト直線トノ距離**トイフ。

(問1) 二等邊三角形 $ABC$ ノ底邊 $BC$ 上ノ任意ノ一點 $D$ ヲ頂點 $A$ ニ結ブトキハ $AD<AB$ デアル。若シ $D$ ヲ $BC$ ノ延長上ノ點トスレバ如何。

(問2) 直角三角形 $ABC$ ノ直角ヲ夾ム邊 $AB$, $AC$ 上ニ夫夫點 $X$, $Y$ ヲ取リ, $X$, $Y$ ヲ結ヘバ $BC>XY$ デアル。

### 35. 定理ノ逆 定理七

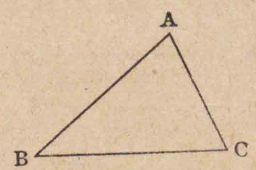
甲定理ノ假設ガ乙定理ノ終結トナリ,甲定理ノ終結ガ乙定理ノ假設トナッテ居ルトキニハ,乙定理ヲ甲定理ノ**逆**トイフ。例ヘバ定理**七**ハ定理**六**ノ逆デ,又定理**六**ハ定理**七**ノ逆デアル。

併一ツノ定理ガ存在シテモ其ノ逆ハ必ズシモ眞デハナイ。例ヘバ"二角ガ共ニ直角ナラバ此ノ二角ハ相等シイ"ト云フコトハ眞デアルガ,"二角ガ相等シケレバ此ノ二角ハ共ニ直角デアル"ト云フコトハ眞デハナイ。從テ或定理ガ存在シテモ直チニ其ノ逆モ亦眞ナリト斷定スルコトハ出來ナイ。

## 36. 三角形ノ性質(其ノ六)

**定理八**　三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ邊ヨリモ大キイ。

**假設**　ABC ヲ任意ノ三角形トスル。



**終結**　然ルトキハ $AB+AC>BC$ デアル。

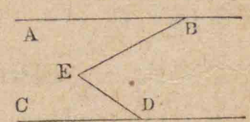
**證明**　公理III ニヨツテ明カデアル。

**系**　三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリモ小サイ。

(問)　三角形 ABC ノ邊 AB 上ノ一點ヲ P トシ, P ト C トヲ結メバ $AB+AC>PB+PC$ デアル。

### 問題第一

1. 圖ニ於テ直線 AB, CD ガ平行ナラバ ∠BED ハ ∠ABE ト ∠CDE トノ和ニ等シイ。



2.* 同一ノ直線ニ平行ナル直線ハ互ニ平行デアル。

3.* 角ノ二等分線上ノ點ハ二邊カラ等距離ニアル。

4. 角ノ二邊カラ等距離ニアル點ト其ノ角ノ頂點トヲ結ブ直線ハ其ノ角ヲ二等分スル。

5. 三角形 ABC ノ邊 BC ガ A カラ BC へ引イタ中線ノ二倍ニ等シイトキニハ ∠BAC ハ直角デアル。



6. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 B ニ於テ之ニ垂直ナル直線ガ邊 CA ノ延長ト交ル點ヲ D トスレバ AD ト AB トハ相等シイ。

7. 直線外ノ一點カラ其ノ直線へ引イタ總テノ線分ノ中デ垂線ノ足カラノ距離ガ相等シイ點ニ於テ其ノ直線ト交ル斜線ハ相等シク, 其ノ距離ガ大ナル點ニ於テ交ル斜線ハ小ナル點ニ於テ交ル斜線ヨリモ大キイ。

8. 三角形 ABC ノ頂點 A カラ邊 BC ニ引イタ中線ヲ AM トスレバ $AB+AC>2AM$ デアル。

9. 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ニ於テ相交リ, 且此ノ點ハ三頂點カラ等距離ニアル。
カセフ
終ケフ　終ケフ

10. 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ同一ノ點ニ於テ相交リ, 且此ノ點ハ三邊カラ等距離ニアル。

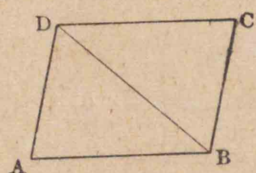
**注意**　三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ノ交點ヲ三角形ノ**外心**トイヒ, 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ノ交點ヲ三角形ノ**內心**トイフ。

## 第二章　平行四邊形

### 37. 平行四邊形ノ性質(其ノ一)

**定義**　二双ノ相對スル邊ガ夫夫互ニ平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**トイフ。

**定理九**　平行四邊形ハ對角線ニヨツテ全等ナル二ツノ三角形ニ分タレル。




**假設**　ABCD ヲ平行四邊形トシ, BD ヲ其ノ對角線トスル。

**終結**　然ルトキハ △DAB ト △BCD トハ全等デアル。

**證明**　△DAB, △BCD ニ於テ BD ハ共通

且　∠ADB＝∠CBD,　∠ABD＝∠CDB　(平行線ノ錯角)

∴　△DAB≡△BCD　(三角形ノ全等其ノ二)

**系 I.**　平行四邊形ノ相對スル邊及ビ相對スル角ハ夫夫相等シイ。

**系 II.**　二ツノ平行直線ノ各ノ上ノ任意ノ點カラ他ニ下シタ垂線ノ長サハ皆相等シイ。

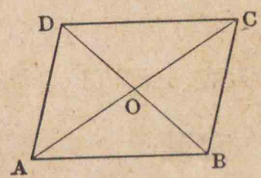
**定義**　二ツノ平行直線ノ各ノ上ノ點カラ他ニ下シタ垂線ノ長サヲ此等二ツノ**平行直線ノ距離**トイフ。



平行四邊形ノ一邊ヲ其ノ**底邊**トイフコトガアル。底邊ト對邊トノ距離ヲ**平行四邊形ノ高サ**トイフ。

### 38. 平行四邊形ノ性質(其ノ二)

**定理十**　平行四邊形ノ對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。




**假設**　ABCD ヲ平行四邊形トシ,其ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスル。

**終結**　然ルトキハ AO＝OC, BO＝OD デアル。

**證明**　△AOB, △COD ニ於テ

AB＝CD　(定理**九**,系 I)

∠OAB＝∠OCD,　∠OBA＝∠ODC　(平行線ノ錯角)

∴　△AOB≡△COD　(三角形ノ全等其ノ二)

∴　AO＝OC,　BO＝OD

#### 例　　題

1. 平行四邊形ノ一ツノ角ガ $\frac{2}{3}\angle R$ ナルトキハ殘リノ三ツノ角ノ大サハ各何程カ。

2.* 平行四邊形ノ相隣ル角ハ互ニ補角ヲナス。

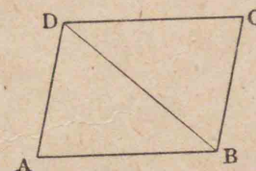
3. 平行四邊形ABCDノ邊AD, BC上ニ夫夫點E, Fヲ取リDEトBFヲ等シクスレバAFトCEトハ相等シイ。

4. 平行四邊形ABCDノ對角線ノ交點Oヲ通ル任意ノ直線ガ一双ノ對邊又ハ其ノ延長ト交ル點ヲE及ビFトスレバOEトOFトハ相等シイ。

---

### 39. 平行四邊形ノ判定(其ノ一)

**定理十一** 二双ノ對邊ガ夫夫相等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル。




**假設** 四邊形ABCDニ於テ$AB=CD$, $AD=BC$トスル。

**終結** 然ルトキハ四邊形ABCDハ平行四邊形デアル。

**證明** 對角線BDヲ引クトキハ$\triangle DAB$, $\triangle BCD$ニ於テ　$AB=CD$, $AD=BC$　且　BDハ共通

$\therefore\ \triangle DAB \equiv \triangle BCD$　(定理四)

$\therefore\ \angle ABD=\angle CDB$, $\angle ADB=\angle CBD$

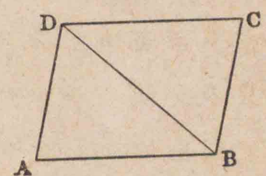
$\therefore\ AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$　(平行直線ノ判定)

故ニABCDハ平行四邊形デアル。



### 40. 平行四邊形ノ判定(其ノ二)

**定理十二** 一双ノ對邊ガ平行ニシテ且相等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル。




**假設** 四邊形ABCDニ於テ$AB \parallel CD$, 且 $AB=CD$トスル。

**終結** 然ルトキハ四邊形ABCDハ平行四邊形デアル。

**證明** 對角線BDヲ引クトキハ$\triangle DAB$, $\triangle BCD$ニ於テ　BDハ共通,　$AB=CD$

且　$\angle ABD=\angle CDB$　(平行直線ノ錯角)

$\therefore\ \triangle DAB \equiv \triangle BCD$　(三角形ノ全等其ノ一)

$\therefore\ \angle ADB=\angle CBD$

$\therefore\ AD \parallel BC$　(平行直線ノ判定)

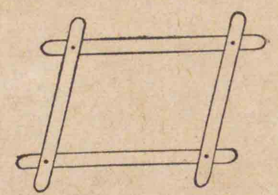
且假設ニヨリ$AB \parallel CD$デアルカラABCDハ平行四邊形デアル。

**系** 四邊形ノ對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキニハ,此ノ四邊形ハ平行四邊形デアル。

例　題

1. 平行四邊形ABCDノ對邊AB, CDノ中點ヲ夫夫E, FトスレバAFトCEトハ平行デアル。

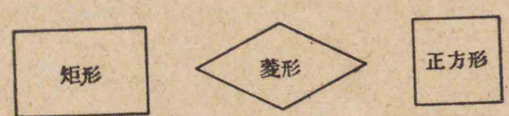
2. 圖ノヤウニ四本ノ棒デ作ツタ平行四邊形ハ形ガ變リ易ク,對角線ヲ一本入レレバ形ガ變リ難クナル。何故カ。



3. 平行四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ガ一双ノ對邊 AD, BC 又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ夫夫 E, F トスレバ直線 BE ト DF トハ相等シイ。

## 41. 矩形,菱形,正方形

**定義** 總テノ角ガ直角ナル四邊形ヲ**矩形**,總テノ邊ガ相等シイ四邊形ヲ**菱形**總テノ角ガ直角デ且總テノ邊ガ相等シイ四邊形ヲ**正方形**トイフ。




從テ正方形ハ矩形デ且菱形デアル。

例 題

1.* 矩形,菱形,正方形ハ皆平行四邊形デアル。

2. 相隣ル二邊ノ等シイ平行四邊形ハ菱形デアル。



3. 一角ガ直角デアル平行四邊形ハ矩形デアル。

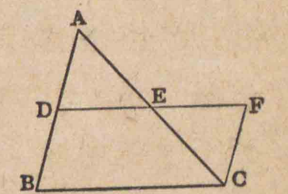
4.* 矩形ノ對角線ハ相等シイ。

5* 菱形ノ對角線ハ互ニ他ヲ垂直ニ二等分スル。

## 42. 三角形ノ性質(其ノ七)

**定理十三** 三角形ノ二邊ノ中點ヲ連結スル線分ハ第三邊ニ平行ニシテ且其ノ半分ニ等シイ。

**假設** △ABC ノ二邊 AB AC ノ中點ヲ夫夫 D, E トシ, D ト E トヲ結ブ。




**終結** 然ルトキハ

$DE \parallel BC$ 且 $DE=\frac{1}{2}BC$ デアル。

**證明** DE ノ延長上ニ DE ニ等シク EF ヲ取リ,C ト F トヲ結ブ。然ルトキハ △AED, △CEF ニ於テ

$AE=CE$ (假設), $DE=EF$ (作圖)

且 $\angle AED=\angle CEF$ (對頂角)

$\therefore$ $\triangle AED\equiv\triangle CEF$ (三角形ノ全等其ノ一)

從テ $CF=AD$, $\therefore$ $CF=BD$

又 $\angle CFE=\angle ADE$ (錯角), $\therefore$ $CF \parallel BD$

故ニ BCFD ハ平行四邊形デアル (定理十二)

因テ　　$BC=DF=2DE$

$\therefore\ DE \parallel BC$　　且　　$DE=\frac{1}{2}BC$

系　三角形ノ一邊ノ中點ヲ通過シテ他ノ一邊ニ平行ナル直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル。

**例　題**

1. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ之ヲ全等ナル四ツノ三角形ニ分ケル。
2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブ線分ハ平行四邊形ヲナス。(一ツノ對角線ヲ引イテ考ヘヨ)
3. 平行四邊形 ABCD ノ一双ノ對邊 AB, CD ノ中點ヲ夫夫 E, F トスレバ AF, CE ハ對角線 BD ヲ三等分スル。(AF ∥ CE ナルコトニ留意セヨ。)

---

## 45. 對稱

**定義**　一直線ヲ折目トシテ圖形ノ一部分ヲ他ノ部分ノ上ニ折重ネルト全ク重ナリ合フトキニハ此ノ圖形ハ其ノ**直線ニ關シテ對稱**デアルトイヒ其ノ直線ヲ**對稱ノ軸**トイフ。

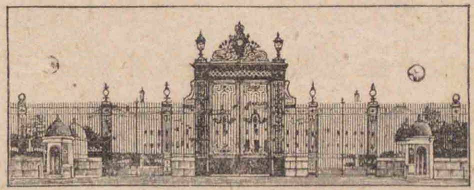
例ヘバ二等邊三角形ハ頂角ノ二等分線ニ關シテ對稱デアル。

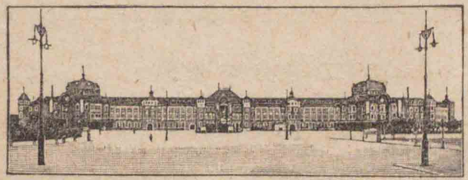


(問 1)　菱形,正方形,矩形ハ對角線ニ關シテ對稱カ。

(問 2)　矩形,菱形ハ對邊ノ中點ヲ結ブ直線ニ關シテ對稱カ。

對稱ハ形ノ上ニ於ケル美ノ一ツノ要素デ建築,圖案等ニ多ク利用サレル。





### 問題第二

1. 平行四邊形ノ相隣ル角ノ二等分線ハ互ニ垂直ニ交ル。
2. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ一點カラ二邊 AB, AC ニ夫夫平行ナル直線ヲ引キ平行四邊形ヲ作レバ其ノ周ハ AB, AC ノ和ニ等シイ。
3. 對角線ガ互ニ垂直ニ他ヲ二等分スル四邊形ハ菱形デアル。

4. 二等邊三角形ABCノ頂角Aノ外角ノ二等分線上ニ底邊BCニ等シクADヲ取レバ四邊形ABCDハ平行四邊形デアル。

5. 四邊形ABCDノ邊AB, BC, CD, DAノ中點ヲ夫夫E, F, G, Hトスレバ線分EGトFHトハ互ニ他ヲ二等分スル。

6. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三ツノ頂點カラ等距離ニアル。

7. 三角形ABCノ邊ACノ中點ヲEトシ,邊BC上ニ一點Dヲ取リCD=2BDナラシメ,AトD,BトEトヲ結ベバADハBEヲ二等分スル。

8. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ニ於テ相交リ,且此ノ交點カラ各頂點ニ至ル距離ハ夫夫各中線ノ三分ノ二ニ等シイ。

**注意** 三角形ノ三ツノ中線ノ交點ヲ其ノ三角形ノ**重心**トイフ。

9. △ABCノ邊ABノ延長上ニ點DヲBD=ABナルヤウニ取リ,Dト邊ACノ中點Eトヲ結ブ直線ガBCト交ル點ヲFトスレバCFハBFノ何倍カ。

---



## 第三章 作圖題

### 44. 作圖題

**定義** 與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ畫クコトヲ**作圖**トイヒ,作圖ヲ要求スル問題ヲ**作圖題**トイフ。

是マデ作圖スルニハ物差,三角定木,分度器等ヲ用ヒタガ通常幾何學デハ作圖ニ用ヒル器具ハ**定木**ト**兩脚規**トノ二種ニ限ルノデアル。

定木ハ一點若クハ二點ヲ通過スル直線ヲ引キ,又ハ線分ヲ延長スルノニ使用シ,兩脚規ハ二點間ノ距離ヲ他ニ移シ,又ハ圓ヲ畫クノニ使用スル。

故ニ次ノ事項ハ最初カラ作圖シ得ルモノトスル。

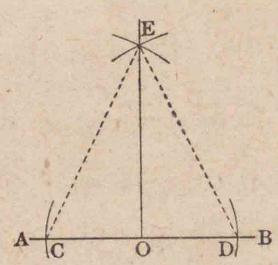
I. 二點ヲ通過スル直線ヲ引クコト。

II. 線分ヲ延長スルコト。

III. 一點ヲ中心トシテ任意ノ半徑ノ圓ヲ畫クコト。

**45. 作圖題一** 定直線AB上ノ定點Oヲ通過シテ之ニ垂線ヲ引クコト。

**作圖** Oヲ中心トシ任意ノ半徑デ圓弧ヲ畫キ,ABトノ交點ヲC及ビDトシ,次ニCトDトヲ中心トシ前ヨリモ大キイ同ジ半徑ノ二ツノ圓弧ヲ畫キ,其ノ交點ヲEトシ,OトEトヲ結ブ。




然ルトキハOEハABニ垂直デアル。

**證明** EヲC, Dニ結ベバ△COE, △DOEニ於テ

$CO=DO$, OEハ共通, $CE=DE$ (作圖)

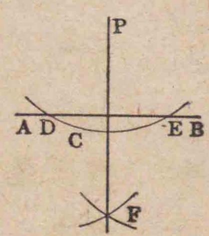
$\therefore\ \triangle COE\equiv\triangle DOE$ (定理四)

$\therefore\ \angle COE=\angle DOE$

故ニOEハOヲ通過シ且ABニ垂直デアル。

**46. 作圖題二** 定直線AB外ノ定點Pヲ通過シテ之ニ垂線ヲ引クコト。

**作圖** ABニ對シPト反對ノ側ニ一點Cヲ取リ,點Pヲ中心トシ線分PCヲ半徑トシテ圓弧ヲ畫キ,ABトノ交點D, Eヲ求メ,次ニD, Eヲ中心トシ前ト同ジ半徑デ二ツノ圓弧ヲ畫キ其ノ交點FトPトヲ結ブ。






然ルトキハ直線PFハPヲ通過スルABノ垂線デアル。

**證明** P, Fヲ夫夫D, Eト結ブ。然ルトキハ

$PD=DF=FE=EP$ (作圖)

故ニPDFEハ菱形デアル。因テ對角線PFトDEトハ互ニ垂直ニ他ヲ二等分スル。 (51頁例題5)

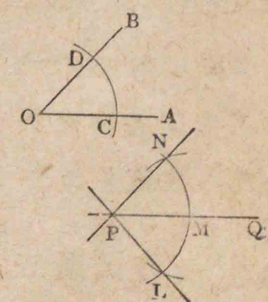
從テ直線PFハ直線DE卽チABニ垂直デアル。

(問1) 與ヘラレタ線分ノ中點ヲ求メヨ。

(問2) 與ヘラレタ角ノ二等分線ヲ引ケ。

**47. 作圖題三** 定直線PQ上ノ定點Pヲ通過シテ直線ヲ引キ,之ガ直線PQトナス角ヲ定角AOBニ等シクスルコト。

**作圖** ∠AOBノ頂點Oヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓弧ヲ畫キ,二邊ト交ル點ヲ夫夫C, Dトシ,次ニPヲ中心トシ前ト同ジ半徑ヲ以テ圓弧ヲ畫キ,PQトノ交點ヲMトスル。Mヲ中心トシ線分CDニ等シイ半徑デ圓弧ヲ畫キ前ニ畫イタ圓弧トノ交點ヲL, Nト



シ直線 PL 及ビ PN ヲ引ク。

然ルトキハ PL ト PN トハ求メル直線デアル。

**證明** D ト C, L ト M ヲ結ブ。然ルトキハ △OCD, △PLM ハ三邊ガ夫夫相等シイカラ全等デアル。

故ニ $\angle COD=\angle LPM$, 卽チ $\angle AOB=\angle LPQ$

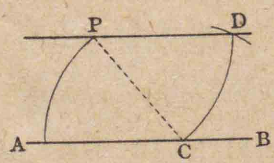
同様ニ $\angle AOB=\angle NPQ$ デアル。

從テ PL 及ビ PN ハ求メル直線デアル。

(問) 二邊ト其ノ夾ム角トヲ知ツテ三角形ヲ畫ケ。

### 48. 作圖題四 定點 P ヲ通過シテ定直線 AB ニ平行ナル直線ヲ引クコト。

**作圖** P カラ直線 AB ヘ任意ノ直線 PC ヲ引キ,次ニ直線 PD ヲ引イテ PC トナス ∠CPD ヲ其ノ錯角 PCA ト等シクスル。然ルトキハ PD ハ P ヲ通過シテ AB ニ平行デアル。



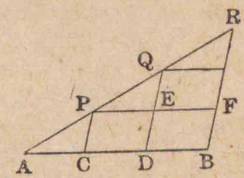

**證明** 各自之ヲナセ。

(問) 定直線カラ定距離ニアル平行直線ヲ引ケ。

### 49. 作圖題五 定線分 AB ヲ若干等分スルコト。



**作圖** 例ヘバ三等分スルニハ AB ノ一端 A カラ之ト重ナラナイ任意ノ直線ヲ引キ其ノ上ニ任意ノ相等シイ三ツノ線分 AP, PQ, QR ヲ取リ,最後ノ端 R ヲ B ニ結ビ付ケ,次ニ P, Q ノ各ヲ通過シテ BR ニ平行ナル直線ヲ引キ,其ノ各ガ AB ト交ル點ヲ夫夫 C, D トスル。




然ルトキハ C, D ハ AB ヲ三等分スル。

一般ニ $n$ 箇ニ等分スル方法モ亦同様デアル。

**證明** P 點ヲ通過シテ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ,其ガ QD, RB ト交ル點ヲ夫夫 E, F トスレバ

△AQD ニ於テ P ハ AQ ノ中點,且 $PC \parallel QD$ デアル。

$\therefore\ AC=CD$ (定理十三系)

又同様ニシテ △PRF ニ於テ $PE=EF$

而シテ四邊形 CDEP ハ二双ノ對邊ガ平行デアルカラ平行四邊形デアル。從テ $PE=CD$

同様ニシテ $EF=DB$

而シテ $PE=EF$, $\therefore\ CD=DB$

$\therefore\ AC=CD=DB$

(問) 周ガ與ヘラレタ線分ニ等シイ正三角形ヲ作レ。

## 問題第三

1. 次ノモノヲ知ツテ直角三角形ヲ畫ケ。

(一) 斜邊ト一邊　　(二) 斜邊ト一鋭角

2. 次ノモノガ與ヘラレテ三角形ヲ作レ。

(一) 二邊ト一ノ中線　(二) 三邊ノ中點ノ位置

3. 次ノモノガ與ヘラレテ平行四邊形ヲ作レ。

(一) 二隣邊ト一角　　(二) 二對角線ト一邊

4. 周圍ガ與ヘラレテ正方形ヲ作レ。

5. 定點ヲ通過シテ定直線ト與ヘラレタ角ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引ケ。

6. 一直線上ニナイ三ツノ點カラ相等シイ距離ニアル直線ヲ引ケ。

7. 河ノ同ジ側ニ甲乙二軒ノ農家ガアル,今兩家カラ等距離ノ河岸ニ洗場ヲ作ラウトスル。其ノ位置ヲ求メヨ。

8. P, Q ヲ直線 AB ノ同ジ側ニアル二定點トシ,直線 AB 上ニ一點 C ヲ求メ PC+QC ヲシテ最小ナラシメヨ。

# 第三編

# 圓

## 第一章　弦及ビ內接角

### 50. 中心角ト弧トノ關係

(問1) 圓,弧,半徑及ビ直徑ノ定義ヲ問フ。

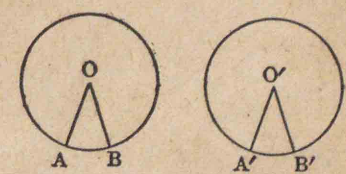
(問2) 圓ノ性質ヲ問フ。

**定義** 圓ノ二ツノ半徑ノナス角ヲ**中心角**トイヒ,中心角ハ其ノ對スル**弧ノ上ニ立ツ**トイフ。

**定理十四** 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テ相等シイ中心角ニ對スル弧ハ相等シイ。

**假設** 圓 O ト圓 O′ ト相等シク,且 $\angle AOB=\angle A'O'B'$ トスル。

**終結** 然ルトキハ弧 AB＝弧 A′B′ デアル。



**證明** 圓 O′ ヲ圓 O ノ上ニ持來シ,中心 O′ ヲ中心 O ニ,半徑 O′A′ ヲ半徑 OA ニ重ネ, O′B′ ガ OB ト同シ側ニアル樣ニ置クトキハ,假設ニヨリ $\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トハ全ク重ナリ,點 A′ ハ

點 $A$ ニ,點 $B'$ ハ點 $B$ ニ重ナル。

故ニ　　弧 $AB$ = 弧 $A'B'$

同ジ圓ノトキニハ一ツノ中心角ヲ廻ハシテ他ノ上ニ重ネテ同樣ニ證明スルコトガ出來ル。

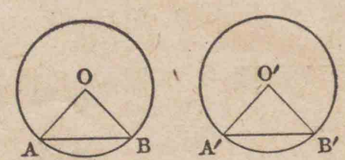
**系**　同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テハ相等シイ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シイ。

### 51. 弧ト弦トノ關係

**定義**　圓周上ノ二點ヲ連結スル線分ヲ**弦**トイフ。

**定理十五**　同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テハ相等シイ弧ニ對スル弦ハ相等シイ。

**假設**　圓 $O$ ト圓 $O'$ トヲ相等シイ圓トシ,且弧 $AB$ ト弧 $A'B'$ トハ相等シイ弧トスル。




**終結**　然ルトキハ弦 $AB$ ト弦 $A'B'$ トハ相等シイ。

**證明**　弦ノ兩端ヲ夫夫圓ノ中心ニ結ブ。然ルトキハ兩圓ハ相等シク,且弧 $AB$ = 弧 $A'B'$ デアルカラ

$$OA = O'A',\quad OB = O'B' \quad 且 \quad \angle AOB = \angle A'O'B'$$

$$\therefore \triangle AOB \equiv \triangle A'O'B'$$



$\therefore$ 弦 $AB$ = 弦 $A'B'$

同ジ圓ノトキノ證明モ同樣デアル。

**定義**　圓周ヲ二ツノ弧ニ分ツトキ大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**トイフ。

**系**　同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テハ相等シイ弦ニ對スル劣弧(及ビ優弧)ハ相等シイ。

(問)　圓ノ直徑ニヨツテ分タレタ二ツノ弧ハ相等シイ。(此ノ弧ヲ**半圓周**トイフ)

例　題

1. 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テハ相等シイ中心角ニ對スル弦ハ相等シイ。此ノ逆モ亦眞デアル。
2. 一ツノ圓ニ於テ中心角ヲ二倍ニスレバソレニ對スル弧モ亦二倍ニナル。
3. 一ツノ圓ニ於テ中心角ヲ二倍ニスルモソレニ對スル弦ハ二倍ニハナラナイ。

---

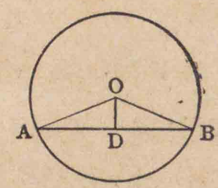
### 52. 弦ノ性質(其ノ一)

**定理十六**　圓ノ中心カラ弦ニ下シタ垂線ハ此ノ弦ノ中點ヲ通過スル。

**假設**　圓 $O$ ノ中心カラ弦 $AB$ ニ下シタ垂線 $OD$ ノ

足ヲDトスル。

**終結** 然ルトキハDハABノ中點デアル。




**證明** 半徑OA, OBヲ引ク。然ルトキハ△AOD, △BODハ共ニ直角三角形デ, ODハ共通,且 AO=BO デアルカラ兩三角形ハ全等デアル。

因テ AD=BD, 卽チDハABノ中點デアル。

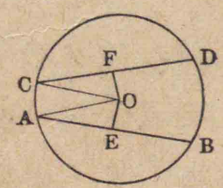
**系 I.** 圓ノ中心ト弦ノ中點トヲ連結スル直線ハ此ノ弦ニ垂直デアル。

**系 II.** 弦ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ通過シ,且此ノ弦ニ對スル弧ヲ二等分スル。

## 53. 弦ノ性質(其ノ二)

**定理十七** 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テハ相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル。

**假設** 圓Oニ於テAB, CDヲ相等シイ弦トシ, OE, OFヲ中心Oカラ夫夫此等ノ弦ニ下シタ垂線トスル。




**終結** 然ルトキハOEトOFトハ相等シイ。

**證明** OE, OFハ中心カラ夫夫弦AB, CDニ下シタ垂線デアルカラE, Fハ夫夫弦AB, CDノ中點デアル。



而シテABトCDトハ相等シイカラAEトCFトハ相等シク, AO, COハ共ニO圓ノ半徑デアルカラ相等シイ。因テ直角三角形OAEトOCFトハ全等デアル。

$\therefore$ OE=OF

相等シイ圓ノ場合モ亦同様デアル。

**系** 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テハ中心カラ相等シイ距離ニアル弦ハ相等シイ。

### 例題

1. 圓周上ノ一點Aカラ相等シイ弦AB, AC及ビ直徑ADヲ引クトキハADハ∠BACヲ二等分スル。
2. 一ツノ直線ガ二ツノ同心圓ノ周ト交ル點ヲ順ニA, B, C, DトスレバABトCDトハ相等シイ。
3. 與ヘラレタ弧ノ中點ヲ求メヨ。

---

## 54. 內接角ト中心角トノ關係

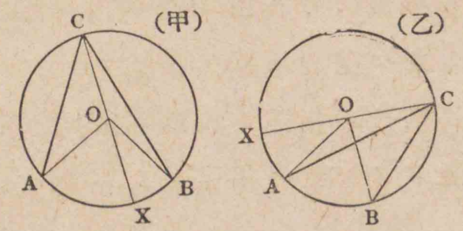
**定義** 圓周上ノ一點カラ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲ**內接角**或ハ**圓周角**トイヒ,內接角ハ其ノ對スル**弧ノ上ニ立ツ**トイフ。

**定理十八** 內接角ハ其ト同ジ弧ノ上ニ立

ツ中心角ノ半分ニ等シイ。

**假設** $\angle ACB$ ヲ内接角, $\angle AOB$ ヲ其ト同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角トスル。

**終結** 然ルトキハ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$ デアル。




**證明** 直徑 CX ヲ引ク。然ルトキハ $\triangle AOC$ ハ二等邊三角トナルカラ $\angle OAC=\angle OCA$

且 $\angle AOX=\angle OAC+\angle OCA=2\angle OCA$ (定理一,系II)

$\therefore\ \angle OCA=\frac{1}{2}\angle AOX$

同様ニ $\angle OCB=\frac{1}{2}\angle BOX$

故ニ

| (甲) | (乙) |
|---|---|
| $\angle ACB=\angle OCA+\angle OCB$ | $\angle ACB=\angle OCB-\angle OCA$ |
| $=\frac{1}{2}(\angle AOX+\angle BOX)$ | $=\frac{1}{2}(\angle BOX-\angle AOX)$ |
| $=\frac{1}{2}\angle AOB$ | $=\frac{1}{2}\angle AOB$ |

(問) 角ノ一邊ガ圓ノ中心ヲ通ルトキノ證明如何。

系 I. 同ジ弧ノ上ニ立ツ内接角ハ相等シイ。



系 II. 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テハ相等シイ弧ノ上ニ立ツ内接角ハ相等シイ。

系 III. 同ジ圓又ハ相等シイ圓ニ於テハ相等シイ内接角ニ對スル弧ハ相等シイ。

系 IV. 半圓周ノ上ニ立ツ内接角ハ直角デアル

例　題

1. 相交ル二弦 AB, CD ノ交點ヲ E トスレバ $\angle AED$ ハ弧 BC, 弧 AD ノ上ニ立ツ内接角ノ和ニ等シイ。
2. 平行ナル二弦ニ夾マレル二ツノ弧ハ相等シイ。
3. O 圓ノ半徑 OA ヲ直徑トスル圓ノ周ハ O 圓ノ弦 AB ノ中點ヲ通ル。

---

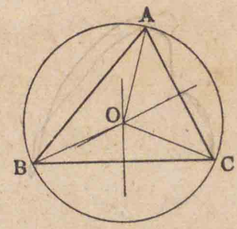
## 第二章　内接形及ビ外接圓

### 55. 三角形ノ外接圓

**定義** 一ツノ多角形ノ頂點ガ皆同一圓周上ニアルトキハ,其ノ多角形ハ圓ニ**内接スル**トイヒ,此ノ圓ハ其ノ多角形ニ**外接スル**トイフ。又此ノ圓ヲ其ノ多角形ノ**外接圓**トイフ。

**作圖題六** 與ヘラレタ三角形ニ外接スル圓ヲ畫クコト。

**作圖** 與ヘラレタ $\triangle ABC$ ノ二邊 BC, AC ノ垂直二等分線ヲ引キ,其ノ交點 O ヲ中心トシ,線分 OA ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ之ガ求メル圓デアル。




**證明** O ハ BC ノ垂直二等分線上ノ點デアルカラ

$$OB=OC \quad \text{(定理二,系III)}$$

同様ニ

$$OC=OA$$

$$\therefore\ OB=OC=OA$$

因テ三點 A, B, C ハ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周上ニアル。從テ此ノ圓ハ $\triangle ABC$ ニ外接スル。

**注意** 邊 BC, AC ノ垂直二等分線ハ夫夫唯一ツニ限リ,且二ツノ直線ノ交點モ亦一ツニ限ルカラ三角形 ABC ノ三頂點カラ等距離ニアル點ハ唯一ツニ限ル。從テ次ノ定理ガ得ラレル。

**定理十九** 三角形ノ外接圓ハ一ツアリ,ソシテ唯一ツニ限ル。

**系** 二ツノ圓周ハ全ク一致スルニアラザレバ二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フコトハナイ。

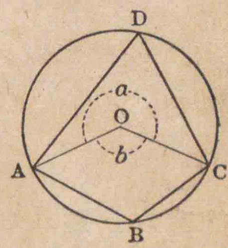


### 56. 圓ニ内接スル四邊形ノ性質

**定理二十** 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。

**假設** ABCD ヲ圓 O ニ内接スル四邊形トスル。

**終結** 然ルトキハ $\angle ABC$ ト $\angle ADC$, $\angle BAD$ ト $\angle BCD$ トハ互ニ補角ヲナス。




**證明** 圓ノ中心ヲ O トシ,半徑 OA, OC ヲ引キ, OA, OC ノ夾ム角ヲ $a$ 及ビ $b$ トスルトキハ

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle a, \quad \angle ADC=\frac{1}{2}\angle b$$

$$\therefore\ \angle ABC+\angle ADC=\frac{1}{2}(\angle a+\angle b)$$

而シテ

$$\angle a+\angle b=4\angle R$$

$$\therefore\ \angle ABC+\angle ADC=2\angle R$$

故ニ $\angle ABC$ ト $\angle ADC$ トハ互ニ補角ヲナス。

從テ $\angle BAD$ ト $\angle BCD$ トモ亦互ニ補角ヲナス。

**系** 圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハ其ノ内對角*ニ等シイ。

### 57. 圓ニ内接シ得ル四邊形

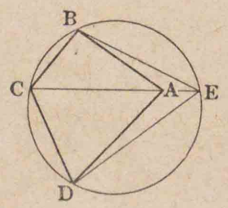
**定理二十一** 相對スル角ガ互ニ補角ヲナ

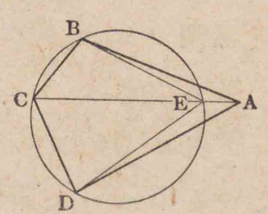
*外角ニ隣ル内角ニ對スル角ヲ内對角トイフ。

ス四邊形ハ圓ニ內接スルコトヲ得ル。

**假設** 四邊形ABCDノ相對スル角BADトBCDトガ互ニ補角ヲナスモノトスル。

**終結** 然ルトキハ此ノ四邊形ABCDハ圓ニ內接スルコトガ出來ル。




**證明** 三點B, C, Dヲ通過スル圓周ヲ作ル。若AガソノBノ圓周上ニナイトスレバAハ其ノ圓ノ內ニアルカ外ニアルカ何レカデアル。

Aガ圓內ニアリトスレバ, A, Cヲ通過スル直線ト圓周トノ交點ヲEトスルトキ△ABE, △ADEニ於テ

$\angle BAC > \angle BEC, \quad \angle DAC > \angle DEC$

$\therefore \angle BAC + \angle DAC > \angle BEC + \angle DEC$

$\therefore \angle BAD > \angle BED$ ..................(1)

而シテ $\angle BAD + \angle BCD = 2\angle R$ (假設)

又 $\angle BED + \angle BCD = 2\angle R$ (定理二十)

$\therefore \angle BAD = \angle BED$

故ニ(1)ハ不合理デアル。從テAハ圓內ニアリ得



ナイ。

同樣ニシテ點Aハ圓外ニアリ得ナイコトヲ證明スルコトガ出來ル。

因テ點AハBCDノ圓周上ニアル。

(問) 矩形ハ圓ニ內接スル。何故カ。

## 問題第四

1. 二等邊三角形ABCノ邊ACヲ直徑トスル圓ガ底邊BCト交ル點ヲDトスレバ, DハBCノ中點デアル。

2. A, B, C, Dハ同一圓周上ニ此ノ順ニアル四點デ, 且弦ADガ弦BCニ等シイトキニハ, 弦ABト弦CDトハ平行デ, 弦ACト弦BDトハ相等シイ。

3. 同ジ弧ノ上ニ立ツ內接角ヲ二等分スル直線ハ皆同一ノ點ニ於テ相交ル。

4. 圓ニ內接スル四邊形ABCDノ邊ABニ平行ナル直線ガ邊AD, BC又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ夫夫E, FトスレバN四邊形CDEFハ圓ニ內接スル。

5.* 線分BCヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點ハ皆BCヲ直徑トスル圓周上ニアル。

6. △ABCノ頂點A, Bカラ夫夫對邊BC, CAニ垂線

AD, BE ヲ下シ,其ノ交點ヲHトシ, H ト C, D ト E トヲ結ベバ $\angle$HCE ト $\angle$HDE トハ相等シイ。

7. △ABC ノ頂點A, B カラ夫夫對邊 BC, CA ニ垂線 AD, BE ヲ下シ,其ノ交點ヲ H トシ, AD ノ延長ガ △ABC ノ外接圓ノ周ト交ル點ヲ F トスレバ HD ト FD トハ相等シイ。(BトFトヲ結ビ, $\angle$FBD ト$\angle$HBD トヲ比較スルカ,又ハ$\angle$BFH ト$\angle$BHF トヲ比較セヨ)

8. 三角形ノ各頂點カラ對邊ニ下シタ三ツノ垂線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル。

**注意** 此ノ點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。

---

## 第三章　切　線

### 58. 切線

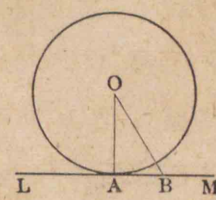
**定理二十二** 圓周上ノ一點ニ於テ此ノ點ヘノ半徑ニ垂直ナル直線ハ圓周ト唯一點ヲ共有スル。

**假設** LM ヲ圓周上ノ一點 A ニ於テ此ノ點ヘノ半徑 OA ニ垂直ニ交ル直線トスル。

**終結** 然ルトキハ LM ハ圓周ト A 以外ノ點ヲ共有スルコトハナイ。



**證明** LM ノ上ノ A 以外ノ任意ノ一點ヲ B トシ,之ヲ中心 O ニ結ブトキハ, OA ハ LM ノ垂線デアルカラ　OA<OB




因テ B ハ圓外ノ點デアル。故ニ LM 上ノ A 以外ノ點ハ總テ圓周Oノ上ニアルコトハナイ。卽チ LM ハ圓周ト A 以外ノ點ヲ共有シナイ。

**定義** 圓周ト唯一ツノ點ニ於テ出會フ直線ヲ其ノ圓ノ**切線**トイヒ,其ノ點ヲ**切點**トイフ。又此ノ直線ハ其ノ**圓ニ切スル**トイフ。

因テ上ノ定理ヲ次ノヤウニイフコトガ出來ル。

圓周上ノ一點ニ於テ此ノ點ヘノ半徑ニ垂直ナル直線ハ其ノ圓ノ切線デアル。

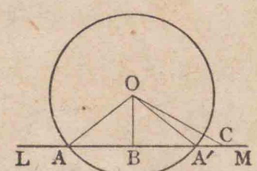
**系** 圓ノ中心カラ半徑ニ等シイ距離ニアル直線ハ其ノ圓ニ切スル。

### 59. 割線

**定理二十三** 圓周上ノ一點ヲ通過シテ此ノ點ヘノ半徑ニ垂直ナラザル直線ハ圓周ト唯二點ヲ共有スル。

**假設** LMヲ圓周上ノ一點Aヲ通過シテ此ノ點ヘノ半徑OAノ斜線トスル。

**終結** 然ルトキハLMハ圓周ト唯二點ヲ共有スル。




**證明** 中心OカラLMニ垂線OBヲ下シ,其ノ足Bニ關シAト反對ノ側ニLM上ニABニ等シクBA′ヲ取ル。然ルトキハ明カニOA′ハOAニ等シイ。因テA′ハ圓周Oノ上ニアル。

次ニLM上ノA, A′以外ノ任意ノ一點ヲCトシ,CトOトヲ結ブトキハ,BAトBCトハ相等シクナイカラOCトOAトハ相等シクナイ。(45頁問題7番參照)

因テCハ圓周Oノ上ニナイ。

故ニLMハ圓周Oト唯A, A′ノ二點ヲ共有スル。

**定義** 圓周ト二點ニ於テ出合フ直線ヲ其ノ圓ノ**割線**トイフ。

**系** 切線ハ切點ヘ引ケル半徑ニ垂直デアル。

**定義** 多角形ノ各邊ガ皆同一ノ圓ニ切スルトキニハ,其ノ多角形ハ**圓ニ外接スル**トイヒ,此ノ圓ハ其ノ**多角形ニ内接スル**トイフ。又此ノ圓ヲ其ノ**多角形ノ内接圓**トイフ。



### 例題

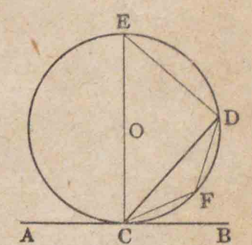
1. 二ツノ同心圓ノ小ナル圓ニ切スル大ナル圓ノ弦ハ相等シイ。
2. 與ヘラレタ三角形ニ内接スル圓ヲ畫ケ。
3. 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ畫ケ。(斯ノヤウナ圓ハ三ツアル。此等ヲ三角形ノ**傍接圓**トイヒ,傍接圓ノ中心ヲ**傍心**トイフ)

---

## 60. 切線ト弦トノナス角

**定理二十四** 切線ト其ノ切點ヲ通過スル弦トノナス角ハ此ノ角内ニ夾マレル弧ノ上ニ立ツ内接角ニ等シイ。

**假設** ABヲ切線, CDヲABノ切點Cカラ引ケル弦トスル。




**終結** 然ルトキハ鋭角*BCDハ此ノ角内ニ夾マレル弧CFDノ上ニ立ツ内接角ニ等シク,又鈍角ACDハ此ノ角内ニ夾マレル弧CEDノ上ニ立ツ内接角ニ等シイ。

---

*∠BCDガ直角ナル場合ハ諸子自ラ攻究セヨ。

**證明** 直徑 CE 及ビ弦 DE ヲ引クトキハ

$$\angle BCD+\angle DCE=\angle R$$

又三角形CDE ニ於テ $\angle CDE$ ハ直角デアルカラ

$$\angle CED+\angle DCE=\angle R$$

$$\therefore\ \angle BCD=\angle CED$$

故ニ $\angle BCD$ ハ弧 CFD ノ上ニ立ツ内接角ニ等シイ。

次ニ弧 CFD 上ノ任意ノ點 F ヲ C, D ニ連結スルトキハ四邊形 CEDF ニ於テ

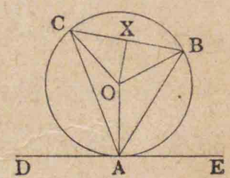
$$\angle CFD+CED=2\angle R \qquad \text{(定理二十)}$$

又 $\angle ACD+\angle BCD=2\angle R$, 且 $\angle BCD=\angle CED$

$$\therefore\ \angle ACD=\angle CFD$$

故ニ $\angle ACD$ ハ弧 CED ノ上ニ立ツ内接角ニ等シイ。

(問) 次ノ圖ニ於テ O ハ圓ノ中心, ABC ハ内接三角形, DE ハ A ニ於ケル切線, OX ハ BC ノ垂線, $\angle COX=50°$, $\angle AOC=120°$ デアル。




$\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle CAD$, $\angle AOB$, $\angle BAE$ ハ各何程カ。

### 例　題

**1.** 圓ノ弦 AB ノ一端Aカラ直徑 AC, 他端Bカラ切線 BT ヲ引キ, A カラ BT ニ垂線 AD ヲ下ストキハ AB ハ $\angle CAD$ ヲ二等分スル。

**2.** 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ニ於テ其ノ外接圓ニ切スル直線ハ底邊 BC ニ平行デアル。



---

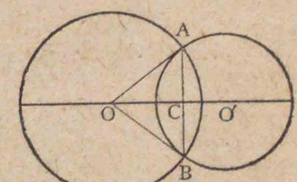
## 第四章 二ツノ圓

### 61. 二圓ノ交リ

**定義** 二ツノ圓ノ中心ヲ通過スル直線ヲ二ツノ圓ノ**中心線**トイフ。

**定理二十五** 二ツノ圓周ガ中心線上ニアラザル一點ヲ共有スルトキニハ,此等ノ圓周ハ又他ノ一點ヲ共有スル。

**假設** 圓周 O, O′ ガ中心線 OO′ 上ニアラザル一點 A ヲ共有スルモノトスル。




**終結** 然ルトキハ圓周 O, O′ ハ A 點ノ他ニ一點ヲ共有スル。

**證明** 點 A カラ中心線 OO′ ニ下セル垂線ノ足ヲ C トシ, AC ノ延長上ニ AC ニ等シク CB ヲ取ル。然ルトキハ OO′ ハ線分 AB ノ垂直二等分線トナル。

故ニ OA=OB デアル。從テ B ハ圓周 O ノ上ニアル。

同樣ニ B ハ圓周 O′ 上ニアル。

故ニ B ハ二ツノ圓周 O, O′ ノ共有點デアル。因テ二ツノ圓周 O, O′ ハ A 點ノ他ニ B 點ヲ共有スル。

**定義** 二圓ノ周ガ二點ヲ共有スルトキニハ,**二圓ハ相交ル**トイヒ,其ノ交點ヲ結ブ線分ヲ其ノ二圓ノ**共通弦**トイフ。

系 I. 相交ル二圓ノ共通弦ハ中心線ニヨツテ垂直ニ二等分サレル。

系 II. 相交ル二圓ノ中心間ノ距離ハ二圓ノ半徑ノ和ヨリモ小ニシテ且其ノ差ヨリモ大デアル。

### 62. 二圓ノ外切,內切

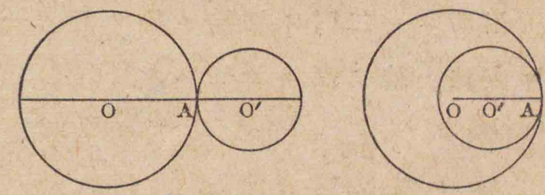
**定理二十六** 二ツノ圓周ガ中心線上ノ一點ヲ共有スルトキニハ,此等ノ圓周ニハ此ノ他ニ共有點ハナイ。

**假設** 二ツノ圓周 O, O′ ガ中心線上ノ一點 A ヲ共有スルモノトスル。

**終結** 然ルトキハ圓周 O, O′ ニハ A 點以外ニ共有點ハナイ。



**證明** 圓周 O, O′ ハ中心線上ニ於テ A 點以外ニ尙ホ一點ヲ共有スルコトハナイ。何トナレバ若斯ノヤウナ共有點ガアルトスレバ圓周 O, O′ ハ直徑ヲ共有スルコトニナリ唯一ツノ圓周トナルカラデアル。




又圓周 O, O′ ハ中心線上ニアラサル點ヲ共有スルコトハナイ。何トナレバ若斯ノヤウナ共有點ガアリトスレバ圓周 O, O′ ハ中心線上ニアラザル第二ノ點ヲモ共有スル。(定理二十五) 因テ圓周 O, O′ ハ三點ヲ共有スルコトトナリ唯一ツノ圓周トナルカラデアル。(定理十九,系)

故ニ圓周 O, O′ ニハ A 點ノ他ニ共有點ハナイ。

**定義** 二圓ノ周ガ唯一ツノ點ニ於テ出會フトキニハ,**二圓ハ相切スル**トイヒ,其ノ點ヲ**切點**トイフ。此ノ場合ニ二圓ガ互ニ他ノ外ニアルトキハ二圓ハ**外切スル**トイヒ,一方ガ他ノ內ニアルトキハ二圓ハ**內切スル**トイフ。

系 I. 二圓ガ相切スルトキニハ,其ノ切點ハ二圓

ノ中心線上ニアル。

**系 II.** 二圓ガ外切スルトキニハ,中心間ノ距離ハ半徑ノ和ニ等シク,內切スルトキニハ,其ノ距離ハ半徑ノ差ニ等シイ。

**系 III.** 相切スル二圓ノ切點ニ於テ其ノ一方ノ圓ニ切スル直線ハ他ノ圓ニモ切スル。

### 例題

**1.** 二圓ノ中心距離ヲ $d$, 半徑ヲ $r, r'$ トシ, 且 $r>r'$ トスレバ次ノ場合ニ於ケル二圓ノ位置如何。

(一) $d>r+r'$　(二) $d=r+r'$　(三) $r+r'>d>r-r'$

(四) $d=r-r'$　(五) $d<r-r'$

**2.** 相切スル二圓ノ切點ヲ通過スル二直線ガ其ノ間ニ於テ兩圓ヨリ切リ取ル弧ニ對スル弦ハ互ニ平行デアル。(切點ニ於テ兩圓ノ共通切線ヲ引キテ考ヘヨ)

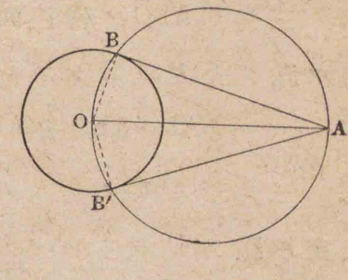
**3.** 相交ル二圓ノ交點A, Bヲ通ツテ直線PAQ, RBSヲ引キ,一ツノ圓周トノ交點ヲP, R,他ノ圓周トノ交點ヲQ, Sトスレバ,弦PRトQSトハ平行デアル。

---

**63. 作圖題七** 定圓外ノ一點カラ此ノ圓ニ切線ヲ引クコト。



**作圖** 定圓ノ中心ヲO,其ノ圓外ノ一點ヲAトシ,線分AOヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,之ガ圓周Oト交ル點ヲB, B'トシ,直線AB, AB'ヲ引ク。然ルトキハAB, AB'ハ求メル切線デアル。




**證明** OB, OB'ヲ引クトキハ,AOハ圓ABB'ノ直徑デアルカラ　$\angle ABO=\angle AB'O=\angle R$　(定理**十八**系IV)

故ニAB, AB'ハAヲ通過シ,且夫夫B, B'ニ於テ圓Oニ切スル。

**系** 定圓外ノ一點カラ此ノ圓ニ引ケル二ツノ切線ノ此ノ點ト切點トノ間ノ距離(**切線ノ長サ**トイフ)ハ相等シイ。

### 問題第五

**1.*** 圓外ノ一點ト圓ノ中心トヲ結ブ直線ハ其ノ點カラ此ノ圓ニ引ケル二ツノ切線ノナス角ヲ二等分スル。

**2.** 圓周上ノ一點Aカラ弦ABト切線AEトヲ引キ$\angle BAE$內ノ弧ABノ中點ヲPトスレバ,APハ$\angle BAE$ヲ二等分スル。

3. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形デアル。

4. 三角形ABCノ傍接圓ガ邊AB, ACノ延長ト切スル點ヲ夫夫D, Eトスレバ次ノ關係ガアル。

$$AD=AE=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

5. 三角形ABCノ角Aノ二等分線ガ外接圓ノ周ト交ル點ヲDトスレバ,Dカラ頂點B, C及ビ內心Iニ至ル距離ハ相等シイ。

6. 定直線上ノ定點ニ於テ其ノ直線ニ切シ,且他ノ定點ヲ通過スル圓ヲ畫ケ。

7. 定圓周上ノ定點ニ於テ其ノ圓ニ切シ,且此ノ圓外ノ定點ヲ通過スル圓ヲ畫ケ。

8. 二ツ宛互ニ外切スル三ツノ相等シイ圓ヲ畫キ,更ニ其等ノ三ツノ圓ノ各ト切スル圓ヲ畫ケ。

9. 次ノモノガ與ヘラレテ三角形ヲ畫ケ。

(一) 底邊,高サ及ビ外接圓ノ半徑

(二) 底邊,一底角及ビ內接圓ノ半徑

# 第四編

# 面　積

## 64. 面積

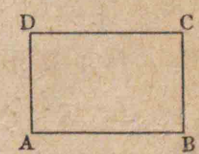
**定義** 直線又ハ他ノ線ニヨツテ圍マレタ平面ノ部分ノ廣サヲ其等ノ線ノナス圖形ノ面積トイフ。

(問1) 面積ノ單位ヲイヘ。

(問2) 相隣ル二邊ガ8糎,12糎ナル矩形ノ面積ハ何程カ。又一邊ガ10糎ナル正方形ノ面積ハ何程カ。

面積ノ單位,矩形及ビ正方形ノ面積ヲ表ハス數ニツイテハ既ニ算術ニ於テ學ンダトコロデアルカラココニ記載スルコトヲ省略スル。

**定義** 二線分ヲ相隣ル二邊トスル矩形ヲ其等ノ**二線分ノ包ム矩形**トイフ。




例ヘバ圖ノ矩形ABCDハ線分AB, AD (又ハBC) ノ包ム矩形デアル。而シテ之ヲ表ハスニ AB·AD (又ハAB·BC) ト記スコトガアル。

**定義** 一線分ヲ一邊トスル正方形ヲ其ノ

**線分ノ上ノ正方形**トイフ。

線分 AB ノ上ノ正方形ヲ表ハスノニ $\overline{AB}^2$ ト記スコトガアル。

(問3) $AB \cdot AD=\overline{EF}^2$ ハ如何ナルコトヲ表ハスカ。

**注意** 圖形ガ全等ナルト否トニ關ラズ二ツノ圖形ノ面積ガ相等シイトキニハ,其ノ二ツノ圖形ガ相等シイトモイフ。

---

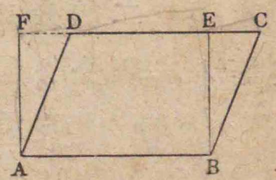
## 65. 平行四邊形ノ面積

**定理二十七** 平行四邊形ノ面積ハ其ノ底邊ト高サトノ包ム矩形ノ面積ニ等シイ。

**假設** ABCD ヲ平行四邊形トシ, AB, BE ヲ其ノ底邊及ビ高サトスル。

**終結** 然ルトキハ ▱ABCD*$=AB \cdot BE$ デアル。

**證明** 點 A, B カラ邊 CD (又ハ延長)ニ垂線 AF, BE ヲ下セバ,四邊形 ABEF ハ AB, BE ノ包ム矩形デアル。




又 △ADF, △BCE ハ共ニ直角三角形デ $AD=BC$, $AF=BE$ デアルカラ全等デアル。

*▱ハ平行四邊形ヲ表ハス記號デアル.



然ルニ ▱ABCD＝ABCF－△ADF

□ABEF*＝ABCF－△BCE

∴ ▱ABCD＝□ABEF, ∴ ▱ABCD＝AB·BE

**系 I.** 平行四邊形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ底邊ト高サトノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

**系 II.** 底邊ト高サトガ夫夫相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ハ相等シイ。

(問1) 底邊ガ 26 cm, 高サガ 19 cm ナル平行四邊形ノ面積ヲ求メヨ。

(問2) 相隣ル二邊ガ 25 米ト 15 米デ其ノ面積ガ 300 平方米アル平行四邊形ノ二双ノ對邊ノ距離ハ夫夫何程カ。

(問3) 平行四邊形 ABCD ノ四邊ノ長サヲ變ヘズニ ∠DAB ヲ變化スレバ面積ハ如何ニ變化スルカ。

## 66. 三角形ノ面積

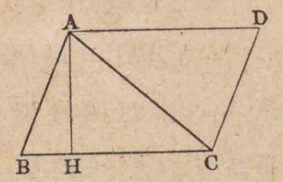
**定理二十八** 三角形ノ面積ハ其ノ底邊ト高サトノ包ム矩形ノ面積ノ半分ニ等シイ。

**假設** BC, AH ヲ夫夫 △ABC ノ底邊及ビ高サトスル。

*□ハ矩形ヲ表ハス記號デアル.

**終結**　然ルトキハ $\triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AH$ デアル。

**證明**　頂點 A, C カラ夫夫 BC, AB ニ平行ニ引イタ直線ノ交點ヲ D トスレバ ABCD ハ平行四邊形トナル。




$$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle CDA,\qquad \therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\,\text{▱}ABCD$$

然ルニ $\text{▱}ABCD=BC\cdot AH,\qquad \therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AH$

**系 I.**　三角形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ底邊ト高サトノ長サヲ表ハス數ノ積ノ半分ニ等シイ。

**系 II.**　底邊ト高サトガ夫夫互ニ相等シイ三角形ノ面積ハ相等シイ。

(問)　三角形 ABC ノ邊 AB, BC ノ長サハ夫夫 15 cm, 18 cm デ,邊 AB ヲ底邊トスル高サハ 16 cm デアル。邊 BC ヲ底邊トスル高サハ何糎カ。

## 67. 梯形ノ面積

**定義**　一双ノ對邊ガ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,其ノ平行ナル邊ヲ**底邊**又ハ**底**トイフ。

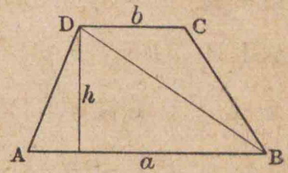
梯形ノ兩底ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。

四邊形 ABCD ニ於テ邊 AB ト CD トガ平行ナラバ



ABCD ハ梯形デ, AB ト CD トハ其ノ底邊デアル。

今兩底ノ長サヲ表ハス數ヲ $a, b$, 高サヲ表ハス數ヲ $h$ トシ,對角線 BD ヲ引ケバ △ABD, △BCD ノ高サハ何レモ $h$ デ表ハサレル。從テ其等ノ三角形ノ面積ハ




$$\triangle ABD=\frac{1}{2}ah,\qquad \triangle BCD=\frac{1}{2}bh$$

因テ梯形ノ面積ヲ表ハス數ハ

$$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(a+b)h$$

トナル。因テ次ノ定理ヲ得ル。

**定理二十九**　梯形ノ面積ヲ表ハス數ハ兩底ノ長サヲ表ハス數ノ和ト高サヲ表ハス數トノ積ノ半分ニ等シイ。

(問)　底邊ガ 9 糎及ビ 13 糎デ高サガ 6 糎ノ梯形ノ面積ハ何程カ。

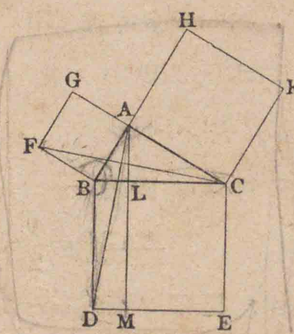
## 68. ぴたごらすノ定理

**定理三十**　直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。

**假設**　△ABC ヲ直角三角形トシ, BC ヲ其ノ斜邊トスル。

**終結**　然ルトキハ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ デアル。

**證明**　△ABC ノ外方ニ其ノ三邊 BC, CA, AB ヲ夫夫一邊トスル正方形BCED, ACKH, ABFG ヲ畫キ,又 A カラ BC ニ垂線 AL ヲ下シ,之ヲ延長シテ DE ト M ニ於テ交ラシメ, A ト D, C ト F トヲ結ブ。然ルトキハ




$\angle BAC=\angle BAG=\angle R$

デアルカラ AC ト AG トハ一直線ニナル。

而シテ　　$AM \parallel BD$,　　$CG \parallel BF$

$\therefore$ $\triangle ABD=\frac{1}{2}\square BDML$,　　$\triangle FBC=\frac{1}{2}\square ABFG$*

然ルニ　　$AB=FB$,　$BD=BC$,　$\angle ABD=\angle FBC$

$\therefore$ $\triangle ABD\equiv\triangle FBC$,　$\because$ $\square BDML=\square ABFG$

同樣ニシテ　　$\square LMEC=\square ACKH$

然ルニ　　$\square BDEC=\square BDML+\square LMEC$

$\therefore$ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

**系**　直角三角形ノ斜邊及ビ他ノ二邊ノ長サヲ表ハス數ヲ夫夫 $a$ 及ビ $b$, $c$ トスレバ次ノ關係ガアル。

$$a^2=b^2+c^2$$

*□ハ正方形ヲ表ハス記號デアル.

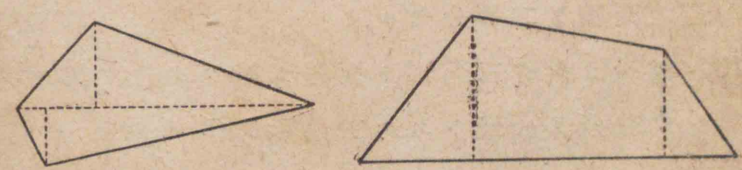


(問1)　角 A ガ直角ナル直角三角形 ABC ニ於テ AB ガ 36 cm, AC ガ 77 cm ナルトキハ BC ハ何程カ。又 AB ガ18間, BC ガ30間ナルトキハ AC ハ何程カ。

(問2)　直徑 30 cm ノ圓ニ內接スル正方形ノ一邊ノ長サハ何程カ。

## 問題第六

1. 次ノ圖ハ畑地ヲ一米ヲ一粍ノ割合ニ畫イタモノデアル。此等ノ畑地ノ面積ヲ算出セヨ。



2. 面積ガ 1500 平方粍,一邊ガ 25 粍アル矩形ノ對角線ノ長サヲ求メヨ。

3. 斜邊ガ 35 米,一邊ガ 28 米ナル直角三角形ノ面積ハ何程カ。

4. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ガ BD ノ中點ヲ通ルトキニハ,此ノ四邊形ノ面積ハ AC ニヨツテ二等分サレル。

5. 平行四邊形 ABCD ノ邊 AB 上ノ任意ノ一點ヲ

Eトスレバ△ECDハABCDノ半分ニ等シイ。

**6.** △ABCノ重心ヲGトスレバ△ABG, △BCG, △CAGノ面積ハ相等シイ。

**7.** AB, BCヲ二ツノ線分トスレバ次ノ關係ガアル。

$$(AB\pm BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\pm 2AB\cdot BC$$

**8.** 直角三角形ABCノ直角ノ頂點AカラA斜邊BCニ垂線ヲ下シ其ノ足ヲDトスレバ次ノ關係ガアル。　$\overline{AB}^2=BD\cdot BC$

**9.** 與ヘラレタ三角形ノ頂點カラ直線ヲ引キ三角形ノ面積ヲ二等分セヨ。

**10.** 與ヘラレタ三角形ト面積ガ等シク,且ツ與ヘラレタ線分ヲ一邊トスル三角形ヲ作レ。

**11.** 與ヘラレタ四邊形ト面積ノ等シイ三角形ヲ作レ。

**12.** 與ヘラレタ正方形ノ二倍ノ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ。

---

# 第五編

# 相似形

## 第一章　比及ビ比例

### 69. 比及ビ比例

（問1）　21米：35米ハ如何ナル意味ヲ表ハスカ。又此ノ比ヲ之ト比ノ値ノ等シイ不名數ノ比ニ直セ。

（問2）　四ツノ數量 $a, b, c, d$ ガ如何ナルトキニ比例ヲナストイフカ。

數量ノ比及ビ比例ニ關シテハ既ニ算術及ビ代數學ニ於テ學ンダトコロデアル。次ニ代數學ニ於テ學ンダ比及ビ比例ノ重要ナル性質ヲ揭ゲテ置ク。

**比及ビ比例ニ關スル重要ナル性質**

〔I〕　$a:b=c:d$ ナルトキハ

（イ）　$ma:mb=nc:nd$　　（ロ）　$ad=bc$

（ハ）　$a:c=b:d$　　（ニ）　$d:b=c:a$

（ホ）　$b:a=d:c$　　（ヘ）　$(a+b):b=(c+d):d$

（ト）　$(a-b):b=(c-d):d$

〔II〕　$a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots$ ナルトキハ

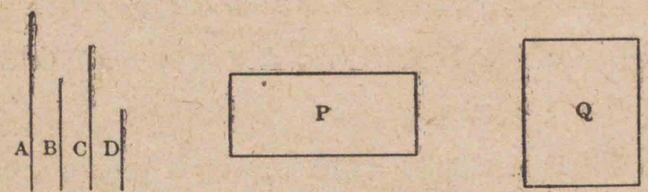
$$(a+c+e+\cdots\cdots):(b+d+f+\cdots\cdots)=a:b$$

## 70. 比例ヲナス四ツノ線分

**定理三十一** 四ツノ線分ガ比例ヲナストキニハ,外項ノ包ム矩形ハ內項ノ包ム矩形ニ等シイ。

**假設** A, B, C, D ヲ四ツノ線分トシ,且 A : B = C : D トスル。

**終結** 然ルトキハ A·D = B·C デアル。




**證明** 線分 A, D ヲ相隣ル二邊トスル矩形ヲ P, 線分 B, C ヲ相隣ル二邊トスル矩形ヲ Q トシ, A, B, C, D ノ長サヲ表ハス數ヲ夫夫 $a, b, c, d$ トスル。然ルトキハ

$$P = A\cdot D = ad, \qquad Q = B\cdot C = bc$$

然ルニ

$$A : B = C : D$$

$$\therefore\ a : b = c : d, \qquad \therefore\ ad = bc$$

$$\therefore\ A\cdot D = B\cdot C$$

## 71. 一邊ガ相等シイ二ツノ矩形

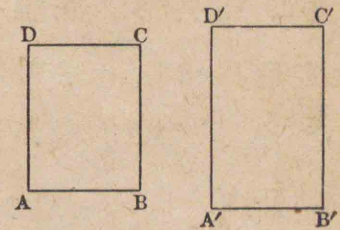
**定理三十二** 底邊(高サ)ガ相等シイ二ツノ



矩形ノ面積ノ比ハ其ノ高サ(底邊)ノ比ニ等シイ。

**假設** 矩形 ABCD, A′B′C′D′ ニ於テ AB = A′B′ トスル。

**終結** 然ルトキハ $\square ABCD : \square A'B'C'D' = AD : A'D'$ デアル。




**證明** 矩形 ABCD ノ二邊 AB, AD ノ長サヲ表ハス數ヲ $a, h$ トシ,矩形 A′B′C′D′ ノ二邊 A′B′, A′D′ ノ長サヲ表ハス數ヲ $a', h'$ トスル。然ルトキハ

$$\square ABCD = ah, \qquad \square A'B'C'D' = a'h'$$

$$\therefore\ \square ABCD : \square A'B'C'D' = ah : a'h'$$

然ルニ $\quad AB = A'B', \quad \therefore\ a = a'$

$$\therefore\ ah : a'h' = h : h'$$

因テ $\quad \square ABCD : \square A'B'C'D' = h : h'$

$$\therefore\ \square ABCD : \square A'B'C'D' = AD : A'D'$$

**系 I.** 底邊(高サ)ガ相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ其ノ高サ(底邊)ノ比ニ等シイ。

**系 II.** 底邊(高サ)ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ其ノ高サ(底邊)ノ比ニ等シイ。

(問1)　$AD, BC$ ヲ底トスル梯形 $ABCD$ ノ對角線 $AC$ ヲ引ケバ $\triangle ABC:\triangle ADC=BC:AD$ デアル。

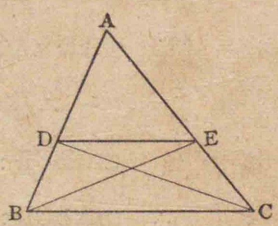
(問2)　$\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ガ邊 $BC$ ト交ル點ヲ $D$ トスレバ $\triangle ABD:\triangle ACD=AB:AC$ デアル。

## 72. 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線

**定理三十三**　三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シイ比ヲ有スル二ツノ部分ニ分ツ。

**假設**　$DE$ ヲ $\triangle ABC$ ノ底邊 $BC$ ニ平行ナル直線トシ,其ガ二邊 $AB, AC$ ト交ル點ヲ夫夫 $D, E$ トスル.

**終結**　然ルトキハ $AD:DB=AE:EC$ デアル。




**證明**　$B$ ト $E$, $C$ ト $D$ トヲ結ブ。然ルトキハ $\triangle ADE$, $\triangle DBE$ ニ於テ $AD, DB$ ヲ夫夫底邊ト考ヘレバ其ノ高サハ相等シイ。

因テ　　$\triangle ADE:\triangle DBE=AD:DB$

同様ニ　　$\triangle AED:\triangle ECD=AE:EC$

然ルニ $\triangle DBE, \triangle ECD$ ハ於テ $DE$ ハ共通,且其ニ對スル頂點 $B$ ト $C$ トハ $DE$ ニ平行ナル直線 $BC$ ノ上ニアル。故ニ $B$ ト $C$ トハ $DE$ ヨリ等距離ニアル。

$$\therefore\quad \triangle DBE=\triangle ECD$$

因テ　　$\triangle ADE:\triangle DBE=\triangle AED:\triangle ECD$

$$\therefore\quad AD:DB=AE:BC$$

**系**　三角形 $ABC$ ノ底邊 $BC$ ニ平行ナル直線ガ邊 $AB, AC$ ト交ル點ヲ夫夫 $D, E$ トスレバ次ノ比例式ガ成立ツ。

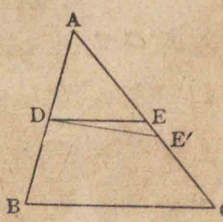
(1)　$AD:AB=AE:AC$　　(2)　$DB:AB=EC:AC$

(3)　$AB:AC=AD:AE=DB:EC$

## 73. 三角形ノ二邊ヲ相等シイ比ヲ有スル部分ニ分ツ直線

**定理三十四**　三角形ノ二邊ヲ相等シイ比ヲ有スル部分ニ分ツ直線ハ底邊ニ平行デアル。

**假設**　直線 $DE$ ガ $\triangle ABC$ ノ二邊 $AB, AC$ ト交ル點ヲ $D, E$ トシ, $AD:DB=AE:EC$ トスル。




**終結**　然ルトキハ $DE \parallel BC$ デアル。

**證明**　$D$ ヲ通過シテ $BC$ ニ平行ナル直線ヲ引キ

AC ト交ル點ヲ $E'$ トスル。然ルトキハ

$$AD:AB=AE':AC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

又假設ニヨリ　$AD:DB=AE:EC$

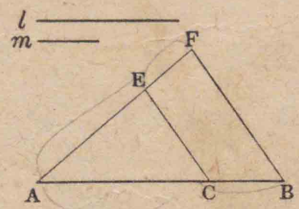
$$\therefore\ AD:AB=AE:AC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) ニヨリ　$AE':AC=AE:AC$

$$\therefore\ AE'=AE$$

故ニ $E'$ ハ E ト一致シ $DE'$ ハ DE ニ重ナル。故ニ DE ハ BC ニ平行デアル。

**74. 作圖題八**　定線分ヲ他ノ二ツノ定線分ノ比ニ分ケルコト。




**作圖**　AB ヲ定線分, $l$, $m$ ヲ他ノ二ツノ定線分トスル。先ヅ點 A ヲ通過シテ AB ト或角度ヲナス任意ノ直線ヲ引キ,其ノ上ニ AE, EF ヲ夫夫 $l$, $m$ ニ等シク取リ,F ト B トヲ結ビ,E ヨリ FB ニ平行ナル直線ヲ引キ,ソレガ AB ト交ル點ヲ C トスル。然ルトキハ $AC:CB=l:m$ デアル。

**證明**　各自之ヲナセ。

(問)　$l$, $m$, $n$ ヲ三ツノ與ヘラレタ線分トシ,次ノ比例式ガ成立ツヤウニ $x$ ナル線分ヲ作圖セヨ。

(一)　$l:m=n:x$　　(二)　$l:x=n:m$



## 問題第七

1. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點 D カラ邊 AB, AC ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫夫 E, F トスレバ $BD:CD=DE:DF$ デアル。

2.* △ABC ノ ∠A ノ二等分線ガ邊 BC ト交ル點ヲ D トスレバ $BD:DC=AB:AC$ デアル。

3. △ABC ノ邊 AB, BC, CA ガ夫夫 6 糎, 5 糎, 4 糎ナルトキ, ∠A ノ二等分線ガ邊 BC ト交ル點ヲ D トスレバ BD, CD ハ各何程カ。

4. △ABC ノ邊 BC ヘ引ケル中線ヲ AD トシ, ∠ADB, ∠ADC ノ二等分線ガ夫夫邊 AB, AC ト交ル點ヲ E, F トスレバ, E, F ヲ連結スル直線ハ邊 BC ニ平行デアル。

5. 與ヘラレタ矩形ト等シイ面積ヲ有シ,且與ヘラレタ線分ヲ一邊トスル矩形ヲ作レ。

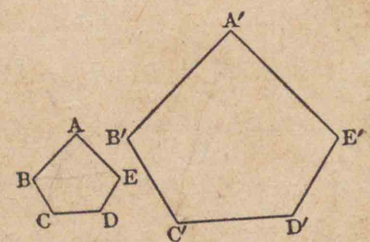
6. 與ヘラレタ正方形ト等シイ面積ヲ有シ,且與ヘラレタ線分ヲ一邊トスル矩形ヲ作レ。

## 第二章　相似多角形

### 75. 相似多角形

邊數ノ相等シイ二ツノ多角形ノ總テノ角ガ順ニ夫夫互ニ相等シイトキニハ,此等ノ二ツノ多角形ハ等角デアルトイフ。

例ヘバ下ノ圖ノ多角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ニ於テ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$ ナルトキハ多角形 ABCDE ト A′B′C′D′E′ トハ等角デアル。




等角ナル多角形ニ於テハ相等シイ角ヲ**對應角**トイヒ,對應角ノ間ニ夾マレル邊ヲ**對應邊**トイフ。

上圖ニ於テハ $\angle A$ ト $\angle A'$, $\angle B$ ト $\angle B'$, ...... ハ對應角デアリ,邊 AB ト A′B′, BC ト B′C′, ...... ハ對應邊デアル。

**定義**　互ニ等角デ且對應邊ガ比例ヲナス二ツノ多角形ヲ**相似多角形**トイヒ,且兩形ハ互ニ**相似**デアルトイフ。

上圖ニ於テ　$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, ......



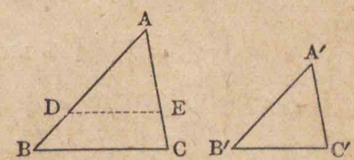
且　$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=\cdots\cdots$

ナルトキハ多角形 ABCDE ト A′B′C′D′E′ トハ相似形デアリ且兩形ハ互ニ相似デアル。

### 76. 三角形ノ相似(其ノ一)

**定理三十五**　等角ナル二ツノ三角形ハ相似デアル。

**假設**　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ　$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ トスル。




**終結**　然ルトキハ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ハ相似デアル。

**證明**　$\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ持チ來リ角 A′ ヲ角 A ニ,邊 A′B′ ヲ AB ニ重ネ,邊 A′C′ ヲ AB ニ對シ AC ト同ジ側ニアル樣ニ置クトキハ $\angle A'=\angle A$ デアルカラ邊 A′C′ ハ邊 AC ニ重ナル。而シテ點 B′, C′ ガ AB, AC 又ハ其ノ延長上ニ落チル點ヲ夫夫 D, E トスレバ $\angle ADE=\angle ABC$ デアルカラ DE ト BC トハ平行デアル。

$\therefore\ AB:AD=AC:AE$　(定理三十三系)

即チ　$AB:A'B'=AC:A'C'$

同樣ニシテ　$AB:A'B'=BC:B'C'$

$\therefore\ AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A'$

因テ $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ互ニ相似デアル。

**系 I.** 二角ガ夫夫互ニ相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル。

**系 II.** 一ツノ鋭角ガ互ニ相等シイ二ツノ直角三角形ハ相似デアル。

### 例題

1. 二ツノ四邊形又ハ五邊形等ニ於テハ等角ナルトキニハ常ニ相似トナルカ.

2. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ邊 AB, AC (又ハ其ノ延長)ト交ル點ヲ夫夫 D, E トスレバ $\triangle ADE$ ハ $\triangle ABC$ ニ相似デアル。

3. 一ツノ圓ノ二弦 AB, CD(又ハ其ノ延長)ノ交點ヲ E トスレバ $\triangle AEC$ ト $\triangle BED$ トハ相似デアル。

---

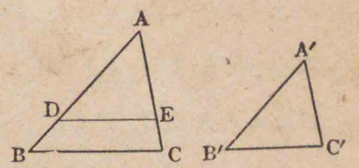
## 77. 三角形ノ相似(其ノ二)

**定理三十六** 一角ガ相等シク,其ノ角ヲ夾ム二邊ガ比例ヲナス二ツノ三角形ハ相似デアル。

**假設** $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $\angle A=\angle A'$, 且 $AB:A'B'=AC:A'C'$ トスル。



**終結** 然ルトキハ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ハ相似デアル。




**證明** $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC ノ上又ハ其等ノ延長上ニ夫夫點 D, E ヲ取リ $AD=A'B'$, $AE=A'C'$ ナラシメル。然ルトキハ

$AB:A'B'=AC:A'C'$ デアルカラ $AB:AD=AC:AE$

$\therefore\ DB:AD=EC:AE$

$\therefore\ BC \parallel DE$ (定理三十四)

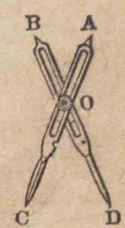
$\therefore\ \angle ABC=\angle ADE,\ \angle ACB=\angle AED$

$\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle ADE$* (定理三十五系 I)

然ルニ $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$, $\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

### 例題

1. 右ニ掲ゲルハ比例こむぱすノ圖デアル。AC ト BD トヲ正シク重ネ O ニ於ケル螺子ヲ動カシテ AO ト OC トノ比ヲ適宜ニ調整シテ螺子ヲ止メル。然ルトキハ兩脚ノ開キヲ如何樣ニスルモ尖端ノ距離 AB ト CD トノ比ハ常ニ OA ト OC




---

*$\backsim$ハ相似ノ記號デアル.

トノ比ニ等シイ。其ノ理由ヲ問フ。

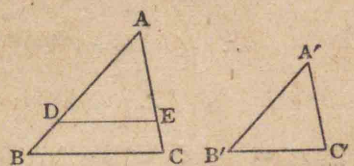
2. 四邊形ABCD ト A′B′C′D′ トガ相似ナルトキハ

△ABC∽△A′B′C′, △CAD∽△C′A′D′ デアル。

---

## 78. 三角形ノ相似(其ノ三)

**定理三十七**　二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ AB : A′B′＝BC : B′C′＝CA : C′A′ ナルトキニハ此等ノ二ツノ三角形ハ相似デアル。



**證**　△ABC ニ於テ邊 AB 又ハ其ノ延長上ニ A′B′ ニ等シク AD ヲ取リ, D ヲ通リ邊 BC ニ平行ナル直線 DE ヲ引キ邊AC又ハ其ノ延長トノ交點ヲ E トスル。然ルトキハ　△ADE∽△ABC

∴　AB : AD＝BC : DE＝CA : EA

作圖ニヨリ　　AD＝A′B′

假設ニヨリ　　AB : A′B′＝BC : B′C′＝CA : C′A′

∴　DE＝B′C′,　EA＝C′A′,　∴　△ADE≡△A′B′C′

∴　△ABC∽△A′B′C′

(問) 三邊ガ48米,40米,56米ノ三角形ノ地面ト相似デ,且最長ノ邊ガ7糎ナル三角形ヲ畫ケ。



## 79. 直角三角形ノ性質

**定義**　同種類ノ三量 A, B, C ニ於テ A : B＝B : C ナルトキニハ, B ヲ A ト C トノ**比例中項**トイフ。

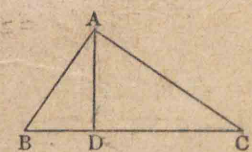
**定理三十八**　直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜邊ニ下セル垂線ハ此ノ垂線デ分タレル斜邊ノ二ツノ部分ノ比例中項デアル。

**假設**　△ABC ハ BC ヲ斜邊トスル直角三角形デ直角ノ頂點 A カラ BC ニ下シタ垂線ヲ AD トスル。

**終結**　然ルトキハ

BD : AD＝AD : DC

デアル。



**證明**　△ABD, △CAD ニ於テ

∠BAD＝∠ACD∵兩角共＝∠CADノ餘角

∠BDA＝∠ADC　　　(共ニ直角)

∠ADB＝∠CDA＝∠R

∠ABD＝∠DAC　　　(共ニ∠BAD ノ餘角)

△ABD∽△CAD

∴　△ABD∽△CAD　　　(定理三十五系II)

BD : AD＝AD : CD

∴　BD : AD＝AD : CD

**系**　直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜邊ニ下セル垂線ノ上ノ正方形ハ垂線デ分タレル斜邊ノ二ツノ部分ノ包ム矩形ニ等シイ。

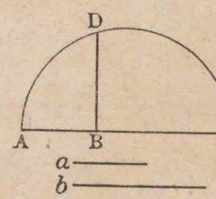
△ABCニ於テ∠BAC＝∠R
AD⊥BCトスルト
$\overline{AD}^2=\overline{BD}\cdot\overline{CD}$

假設ニヨリBD : AD＝AD : CDトナルコトハ明瞭デアル　ハ, $\overline{AD}^2=\overline{BD}\cdot\overline{CD}$
即チADノ上ノ正方形ハ直角頂点カラ斜邊ニ下セタ垂線ノ上ノ正方形ハソノ足ニ依ッテ別タレタ斜線分ノ包ム矩形ニ等シイ

**80. 作圖題九** 二ツノ定線分ノ比例中項ヲ作ルコト。

**作圖** $a$, $b$ ヲ二ツノ定線分トスル。

一直線上ニ線分 AB ヲ $a$ ニ等シク取リ,其ノ延長上ニ BC ヲ $b$ ニ等シク取リ, AC ヲ直徑トスル半圓ヲ畫キ, B ニ於テ AC ニ垂線ヲ立テ,之ガ圓周ト交ル點ヲ D トスル。然ルトキハ線分 BD ハ求メル比例中項デアル。




**證明** 各自之ヲナセ。

### 例題

1. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ニ垂線 AD ヲ下セバ, AB ハ BC ト BD トノ比例中項デ, AC ハ BC ト CD トノ比例中項デアル。
2. 與ヘラレタ矩形ト等シイ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ。

---

## 81. 多角形ノ相似

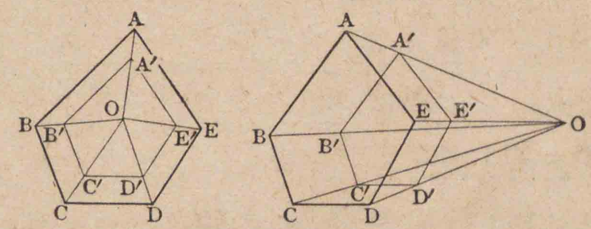
**定理三十九** 一ツノ點カラ一ツノ多角形ノ各頂點ニ引ケル線分ヲ相等シイ比ニ分ツ



點ヲ順次ニ連結シテ得ル多角形ハ原ノ多角形ニ相似デアル。

**假設** 一ツノ點 O カラ多角形 ABCD...... ノ頂點 A, B, C, D, ...... ニ引ケル線分ヲ相等シイ比ニ分ツ點ヲ夫夫 A′, B′, C′, D′, ...... トシ,線分 A′B′, B′C′, C′D′, ...... ヲ引ク。

**終結** 然ルトキハ多角形 A′B′C′D′...... ハ ABCD...... ニ相似デアル。




**證明** 假設ニヨリ

$$OA' : A'A = OB' : B'B = OC' : C'C = OD' : D'D = \cdots\cdots$$

$\therefore$ $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, ......(定理**三十四**)

$\therefore$ $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, ......

即チ多角形 ABCD...... ト A′B′C′D′...... トハ等角デアル

且 $AB : A'B' = OA : OA'$, $BC : B'C' = OB : OB'$

$CD : C'D' = OC : OC'$, ......

然ルニ假設ニヨレバ

$$OA : OA' = OB : OB' = OC : OC' = \cdots\cdots$$

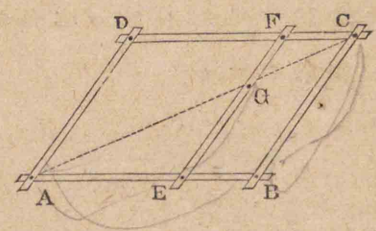
$\therefore$ $AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=\cdots\cdots$

卽チ多角形 ABCD……, A′B′C′D′…… ノ對應邊ハ比例ヲナス。

故ニ多角形 ABCD……, A′B′C′D′……ハ相似デアル。

**例　題**

右ニ揭グルハ**寫圖器**ノ簡單ナモノデアル。




枠 ABCD ハ平行四邊形デ梁 EF ハ AD, BC ニ平行ニ架セラル。此ノ器ニテ或圖ヲ縮圖セントスルニハ,先ヅ C 點ニ針ヲ刺シ,梁 EF 上ノ $AB:BC=AE:EG$ ナル G 點ニ鉛筆ニ取リ付ケ(擴大スル場合ニハ針ト鉛筆トヲ反對ニスル)A 點ヲ固定シ,針ヲ與ヘラレタ圖形ニ添フテ動カス。斯クスルトキハ鉛筆ハ原圖ト相似ナル圖ヲ畫クノデアル。

寫圖器ニツキ次ノ事項ヲ證明セヨ。

(1) △ABC ト △AEG トハ常ニ相似デアル。

(2) A, G, C ハ常ニ一直線上ニアツテ

$$AG:AC=AE:AB$$

デアル。



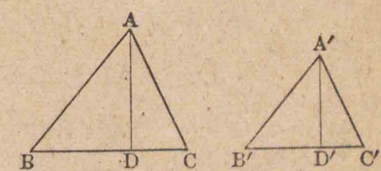
(3) 寫圖器ニテ畫ケル圖形ト原圖トノ對應邊ノ比ハ $AE:AB$ ニ等シイ。

---

## 82. 相似形ノ面積ノ比

**定理四十**　二ツノ相似三角形ノ比ハ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シイ。

**假設**　△ABC, △A′B′C′ ヲ邊 AB, BC, CA ガ夫夫邊 A′B′, B′C′, C′A′ ト對應スル相似三角形ナリトスル。




**終結**　然ルトキハ

$$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2=\overline{BC}^2:\overline{B'C'}^2$$
$$=\overline{CA}^2:\overline{C'A'}^2$$

デアル。

**證明**　對應スル頂點 A, A′ カラ對應邊 BC, B′C′ ニ垂線 AD, A′D′ ヲ下ストキハ, △ABD, △A′B′D′ ニ於テ

$$\angle B=\angle B',\quad \angle D=\angle D',\qquad \therefore\ \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$$

$$\therefore\ AB:A'B'=AD:A'D'$$

今邊 BC, CA, AB, AD ノ長サヲ表ハス數ヲ夫夫 $a$, $b$, $c$, $h$ トシ,邊 B′C′, C′A′, A′B′, A′D′ ノ長サヲ表ハス數ヲ夫夫 $a'$, $b'$, $c'$, $h'$ トスレバ

$$BC : B'C' = CA : C'A' = AB : A'B' = AD : A'D'$$

$$\therefore \quad a : a' = b : b' = c : c' = h : h'$$

$\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トノ面積ヲ比較スルニ

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \frac{1}{2}ah : \frac{1}{2}a'h'$$

$$= ah : a'h'$$

然ルニ $$\frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'} \times \frac{h}{h'} = \frac{a}{a'} \times \frac{a}{a'} = \frac{a^2}{a'^2}$$

$$\therefore \quad ah : a'h' = a^2 : a'^2$$

$$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle A'B'C' = a^2 : a'^2$$

然ルニ $$\overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2 = a^2 : a'^2$$

$$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$$

同様ニシテ $$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$$

$$= \overline{CA}^2 : \overline{C'A'}^2$$

**系** 二ツノ相似多角形ノ比ハ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シイ。

(問) $\triangle ABC$ ノ二ツノ中線 BD, CE ノ交點ヲ G トスレバ $\triangle BCG$ ト $\triangle DEG$ トノ面積ノ比如何。

**83. 作圖題十** 與ヘラレタ多角形ニ相似ナル多角形ヲ作ルコト。

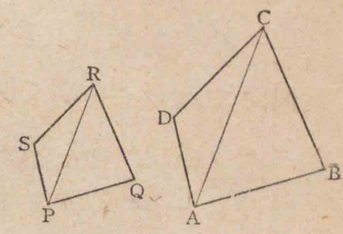
**作圖** PQRS ヲ與ヘラレタ四邊形トスル。

先ヅ PQRS ヲ對角線ニヨツテ二ツノ三角形PQR,



PRS ニ分ツ。

次ニ PQ ノ $m$ 倍 $\left(又ハ \frac{1}{m}\right)$ ノ線分 AB ヲ引キ, AB ト PQ トガ對應スルヤウニ PQR ト相似ナル三角形ABC ヲ畫ク。次ニ AC ト PR トガ對應スルヤウニ PRS ト相似ナル三角形ACD ヲ畫ク。斯クシテ得ル四邊形ABCD ハ PQRS ニ相似デアル。




**證明** $\triangle PQR \backsim \triangle ABC$ デアルカラ

$$\angle CAB = \angle RPQ, \quad \angle B = \angle Q, \quad \angle BCA = \angle QRP$$

$$AB : PQ = BC : QR = CA : RP$$

又 $\triangle PRS \backsim \triangle ACD$ デアルカラ

$$\angle DAC = \angle SPR, \quad \angle D = \angle S, \quad \angle ACD = \angle PRS$$

$$CA : RP = CD : RS = DA : SP$$

此等ノ結果ニヨレバ

$$\angle A = \angle DAC + \angle CAB = \angle SPR + \angle RPQ = \angle P$$

$$\angle C = \angle BCA + \angle ACD = \angle QRP + \angle PRS = \angle R$$

且 $AB : PQ = BC : QR = CD : RS = DA : SP$

因テ四邊形 ABCD ト PQRS トハ等角デ且對應邊ガ比例ヲナスカラ互ニ相似デアル。

五邊形以上ノ場合ニモ同様ニスレバヨイ。

## 問題第八

1. 圓ノ二ツノ弦AB, CD(又ハ其ノ延長)ノ交點ヲPトスルトキハ $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ デアル。

2. 圓外ノ一點Pカラ切線PT, 割線PABヲ引キ, 切點ヲT, 割線ガ圓周ト交ル點ヲA, Bトスルトキハ, PTハPAトPBトノ比例中項デアル。

3. 相交ル二ツノ圓ノ共通弦上ノ一點Pヲ通リ各圓ニ夫夫弦AB, CDヲ引クトキハ, $\triangle APC$ ト $\triangle BPD$ トハ互ニ相似デアル。

4. 三角形ABCノ頂點A, Bカラ對邊ニ下セル垂線AD, BEノ交點ヲHトスルトキハ

$$AH \cdot HD = BH \cdot HE$$

5. $\triangle ABC$ ノ邊AB, ACノ包ム矩形ハAカラBCニ下セル垂線ト外接圓ノ直徑トノ包ム矩形ニ等シイ。

6. 底邊AD, BCハ夫夫6糎, 8糎ナル梯形ABCDノ對角線ノ交點ヲEトスレバ $\triangle AED$ ト $\triangle BEC$ トノ面積ノ比如何

7. 五萬分ノ一ノ地圖上デ7糎ノ長サハ實際ハ幾粁ニ當ルカ。又8平方糎ハ幾平方粁ニ當ルカ。

---

岸保 15.7.4 15.8.9 岸保 15.12. 12.12 岸保 鈴藤 岸保

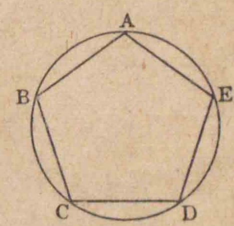


# 第三章 圓ノ周及ビ其ノ面積

## 84. 內接正多角形

**定理四十一** 圓周ヲ $n$ 箇ノ相等シイ弧ニ分ツトキ,其ノ各ノ弧ニ對スル弦ニヨツテ圍マレル內接形ハ正 $n$ 角形デアル。

**假設** AB, BC, CD, DE, EAヲ圓周ヲ五等分シタ弧ニ對スル弦トスル。




**終結** 然ルトキハ多角形ABCDEハ正五角形デアル。

**證明** $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA}$

$\therefore \quad AB = BC = CD = DE = EA$

又 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ ハ何レモ圓周ノ五分ノ二ヲ除イタ弧ノ上ニ立ツ內接角デアル。

$$\therefore \quad \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$$

故ニABCDEハ正五角形デアル。

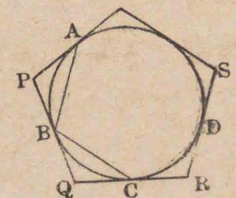
圓周ヲ $n$ 等分スルトキモ亦同樣デアル。

**系** 二ツノ同ジ邊數ヲ有スル正多角形ノ周ノ比ハ外接圓ノ半徑ノ比ニ等シイ。

## 85. 外接正多角形

**定理四十二** 圓周ヲ $n$ 箇ノ相等シイ弧ニ分ツトキ,各分點ニ於ケル切線ニヨツテ圍マレル外接形ハ正 $n$ 角形デアル。

**假設** 圓周ヲ $n$ 箇ニ等分スル點ヲ A, B, C, ……トシ, B, C, D, ……ニ於ケル切線ヲ夫夫 PQ, QR, RS, …… トスル。




**終結** 然ルトキハ外接形 PQRS……ハ正 $n$ 角形デアル。

**證明** 弦 AB, BC ヲ引ク。然ルトキハ $\widehat{AB}=\widehat{BC}$ デアルカラ　AB=BC

又 PA, PQ, QC ハ圓ニ切スルカラ此等ノ直線ト弦 AB, BC トナス角 PAB, PBA, QBC, QCB ハ何レモ圓周ノ $\frac{1}{n}$ ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ内接角ニ等シイ。從テ此等ノ角ハ皆相等シイ。

$$\therefore\ \triangle PAB \equiv \triangle QBC$$

$$\therefore\ \angle P=\angle Q,\quad 且\ PA=QB,\quad 又\ PA=PB$$

$$\therefore\ PQ=PB+BQ=2PA$$

同様ニ　$\angle Q=\angle R=\angle S=\cdots\cdots\cdots$

$QR=RS=\cdots\cdots=2PA$

故ニ外接形 PQRS……ハ正 $n$ 角形デアル。



**系** 正多角形ノ面積ハ其ノ周ト内接圓ノ半徑トノ包ム矩形ノ半分ニ等シイ。

（問） 半徑一糎ノ圓ニ内接スル正方形ノ周ノ長サ及ビ正八邊形ノ周ノ長サヲ計算セヨ。

## 86. 圓ノ周

單位半徑ノ圓ニ内接及ビ外接スル正多角形ノ周ノ半分ヲ計算シタ結果ヲ示セバ次ノ通リデアル。

| 邊數 | 内接形ノ半周 | 外接形ノ半周 |
|---|---|---|
| 4 | 2.828427 | 4.000000 |
| 8 | 3.061467 | 3.313708 |
| 16 | 3.121445 | 3.182597 |
| 32 | 3.136548 | 3.151724 |
| 64 | 3.140331 | 3.144118 |
| 128 | 3.141277 | 3.142223 |
| 256 | 3.141513 | 3.141750 |
| 512 | 3.141572 | 3.141632 |
| 1024 | 3.141587 | 3.141602 |
| 2048 | 3.141591 | 3.141595 |
| 4096 | 3.141592 | 3.141593 |

一ツノ圓ニ内接スル正多角形ノ周ハ其ノ邊數ガ

円周と直径の比が円周律といふ

增加スルニ伴ヒ漸次增大シ,外接スル正多角形ノ周ハ其ノ邊數ガ增加スルニ伴ヒ漸次減少シ,兩者ハ漸次接近スルコト前表ニ於テ見ル通リデアル。

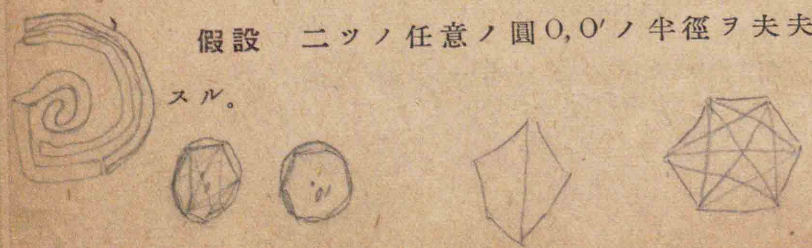
之ニヨツテ見レバ一ツノ圓ニ內接スル正多角形及ビ外接スル正多角形ノ邊數ヲ限ナク增加スレバ其等ノ正多角形ノ周ハ限ナク接近シテ其ノ差ハ殆ド認メ難クナル。而シテ圓ノ周ハ恒ニ此等ノ內接及ビ外接正多角形ノ周ノ間ニアルカラ內接正多角形,外接正多角形ノ邊數ヲ限ナク增加スルトキニハ其等ノ周ハ共ニ圓ノ周ニ限ナク接近シテ其ノ差ハ殆ド認メラレナクナル。此ノ意味ニ於テ圓周ヲ次ノヤウニ考ヘルコトガ出來ル。

圓周ハ其ノ圓ニ內接又ハ外接スル正多角形ニ於テ邊數ヲ限ナク增加セルトキノ周ノ極限デアル。

## 87. 圓周率

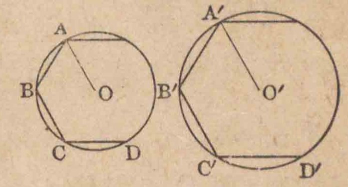
**定理四十三** 圓周ト其ノ直徑トノ比ハ一定デアル。

**假設** 二ツノ任意ノ圓O, O′ノ半徑ヲ夫夫R, R′トスル。





**終結** 然ルトキハ O 圓ノ周:2R=圓 O′ ノ周:2R′デアル。




**證明** 圓O, O′ノ兩方ニ邊數ノ相等シイ正多角形ABCD……, A′B′C′D′……ヲ內接セシメ,兩多角形ノ周ヲ夫夫L, L′トスル。

然ルトキハ　　L:L′=R:R′　　(定理四十一,系)

而シテ兩內接正多角形ノ邊數ヲ限ナク增加スルトキハ,L, L′ノ極限ハ夫夫圓O, O′ノ周ニ等シイ。

∴ 圓Oノ周:圓 O′ ノ周=R:R′

=2R:2R′

∴ 圓Oノ周:2R=圓O′ノ周:2R′

**定義** 圓周ト其ノ直徑トノ比ノ值ヲ**圓周率**トイフ。

通常圓周率ヲ表ハスニハ文字$\pi$(ぱいト讀ム)ヲ用ヒル。$\pi$ノ值ハ前節ノ表ヲ見レバ直チニ知ラレル通リ3.141591ヨリモ大キク,3.141595ヨリモ小サイ。故ニ小數第五位マデ正シイ$\pi$ノ值ハ3.14159デアル。

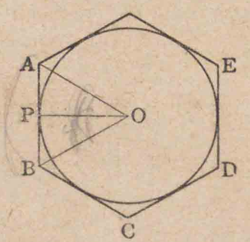
**系** 圓周及ビ其ノ半徑ノ長サヲ表ハス數ヲ夫夫$c$, $r$トスレバ $c=2\pi r$ デアル。

(問) 半徑3糎,直徑15米ノ圓周ノ長サ各何程カ。

## 88. 圓ノ面積

**定理四十四** 圓ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ半徑ヲ表ハス數ノ自乘ニ圓周率ヲ乘ジタ積ニ等シイ。

**假設** 圓Oノ半徑ノ長サヲ表ハス數ヲ$r$,其ノ面積ヲ表ハス數ヲSトスル。




**終結** 然ルトキハ $S=\pi r^2$ デアル。

**證明** 圓ニ外接スル正多角形ABCDE......ヲ作リ,其ノ周ヲ表ハス數ヲ$l$, 面積ヲ表ハス數ヲS′トスレバ

$$S'=\frac{1}{2}lr \qquad \text{(定理四十二,系)}$$

然ルニ圓ノ面積ハ邊數ヲ限ナク增加セル外接正多角形ノ面積ノ極限ニ等シイ。而シテ極限ニ於テハ此ノ正多角形ノ周ハ圓周トナル。

$$\therefore\ S=\frac{2\pi r\cdot r}{2}=\pi r^2$$

(問) 直徑7糎ナル圓ノ面積ヲ求メヨ。

**定義** 一ツノ圓弧ト其ノ兩端ニ引ケル半徑トデ圍マレタ圓ノ一部ヲ**扇形**トイフ。

**系 I.** 扇形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ弧ノ長サヲ

$3,14\times9^2-3,14\times5^2=$



表ハス數ト半徑ノ長サヲ表ハス數トノ積ノ半分ニ等シイ。

**系 II.** 半徑ノ等シイ扇形ノ面積ノ比ハ弧ノ長サノ比ニ等シイ。

### 問題第九

1. 半徑ガ5糎ト9糎トノ二ツノ同心圓ノ間ニ生ズル環狀ノ面積ヲ求メヨ。
2. 半徑15糎,中心角72度ナル扇形ノ弧ノ長サ及ビ面積ヲ求メヨ。 $3.14\times15^2\times\frac{1}{5}=$
3. 半徑5糎ノ外切スル二ツノ圓ヲ細イ絲デ卷クトキハ一卷ノ長サハ何糎カ。又半徑4糎ノ互ニ外切スル三ツノ圓ヲ一卷スルニ何程ヲ要スルカ。
4. 二ツノ同心圓ガアル。外圓ノ半徑ハ內圓ノ半徑ヨリモ2糎長イ。外圓ノ周ハ內圓ノ周ヨリモ何程長イカ。
5. 與ヘラレタ二ツノ圓ノ面積ノ和(又ハ差)ト等シイ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ。
6. 正十二邊形ヲ畫ケ。

# 第六編

# 立體

## 89. 平面ノ性質

（問） 平面トハ如何ナル面カ,又平面ノ性質如何。

**定義** 一ツノ面ニ於テ其ノ上ニアル任意ノ二點ヲ通過スル直線ガ恒ニ全ク其ノ上ニアルトキニハ,其ノ面ヲ**平面**トイフ。平面上ノ直線ハ其ノ平面ニ**含マレル**トイフ。

平面ハ何レノ方向ニモ限ナク廣ガリヲ有スルモノトスル。而シテ通常平面ヲ書キ表ハスニハ便宜上其ノ上ニ畫イタ平行四邊形ヲ以テスル。

平面ニハ次ノ重要ナル性質ガアル。

〔I〕 同一直線上ニアラザル三點ヲ含ム平面ハ一ツアリ,ソシテ唯一ツニ限ル。

此ノ性質カラ次ノ事柄ヲ推定スルコトガ出來ル。

(1) 一ツノ直線ト其ノ直線外ノ一ツノ點トハ平面ヲ決定スル。

(2) 相交ル二ツノ直線ハ平面ヲ決定スル。

〔II〕 二ツノ平面ガ出會フトキニハ唯一ツ



ノ直線ヲ共有スル。

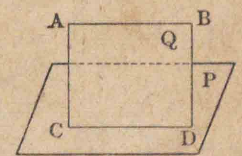
**定義** 同一ノ直線ヲ共有スル平面ハ**相交ル**トイヒ,其ノ直線ヲ其等ノ平面ノ**交リ**トイフ。

## 90. 平面ト直線トノ平行

**定義** 直線ト平面トガ共通點ヲ有シナイトキニハ,其ノ直線ト平面トハ**互ニ平行**デアルトイフ。

**定理四十五** 二ツノ平行直線ノ中其ノ一方ノミヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行デアル。

**假設** 平行ナル二直線 AB, CD ノ中其ノ一方 CD ノミヲ含ム平面ヲ P トスル。




**終結** 然ルトキハ AB ハ P ニ平行デアル。

**證明** AB, CD ハ平行デアルカラ同一平面上ニアル。此ノ AB, CD ノ定メル平面ヲ Q トスレバ CD ハ平面 P ト平面 Q トノ交リデアル。因テ若 AB ト P トガ共通點ヲ有スルナラバ其ノ點ハ P, Q ノ交リデアル CD ノ上ニアル。然ルニ

AB ト CD トハ平行デアルカラ斯樣ナコトハ無イ。

故ニ AB ハ P ト共通點ヲ有シ得ナイ。卽チ P ハ AB ニ平行デアル。

**系 I.** 平行ナル二ツノ直線ノ各ヲ別別ニ含ム二ツノ平面ノ交リハ其ノ直線ノ各ニ平行デアル。

**系 II.** 同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハ互ニ平行デアル。

**系 III.** 同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ平面ガ相交ルトキニハ,其ノ交リハ其ノ直線ニ平行デアル。

### 例　題

1. 二直線ノ位置ノ關係ヲ列擧セヨ。
2. 上ノ系 I ノ適用ヲ教室內ニ於テ見出セ。
3. 平面 P ハ二平面 Q, R ノ交リニ平行デ且 Q, R ノ各ト交ルトキニハ,其ノ交リハ互ニ平行デアル。
4. 平面 P ト之ニ平行ナル直線 AB ヲ含ム平面トノ交リハ AB ニ平行デアル。

---

## 91. 平面ノ平行

**定義** 二ツノ平面ガ共通點ヲ有シナイトキニハ,其ノ二平面ハ**互ニ平行**デアルトイフ。

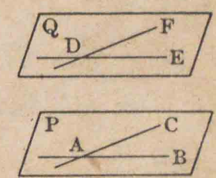


**定理四十六** 一ツノ平面上ノ相交ル二ツノ直線ガ他ノ平面上ノ相交ル二ツノ直線ニ夫夫平行ナルトキニハ,此等ノ二ツノ平面ハ互ニ平行デアル。

**假設** AB, AC ヲ平面 P 上ノ相交ル二直線, DE, DF ヲ他ノ平面 Q 上ノ相交ル二直線トシ,且 AB ∥ DE, AC ∥ DF トスル。

**終結** 然ルトキハ P ト Q トハ互ニ平行デアル。

**證明** 平行直線 AB, DE ハ夫夫平面 P, Q ニ含マレルカラ若 P, Q ガ相交ルナラバ其ノ交リハ AB, DE ノ各ニ平行デアル。(定理**四十五,系 I**)




同理ニヨリ此ノ交リハ又 AC, DF ノ各ニモ平行デアル。

從テ同一ノ直線ガ相交ル直線 AB, AC (又ハ DE, DF) ノ各ニ平行トナル。之ハ不合理デアル。

故ニ P, Q ハ相交ラナイ。從テ共通點ヲ有シナイ。卽チ P ト Q トハ互ニ平行デアル。

**系** 平行ナル平面ト他ノ一ツノ平面トノ交リハ互ニ平行デアル。

(問) 定理ノ適用ヲ實物ニツイテ見出セ。

## 92. 平面ノ垂線ト斜線

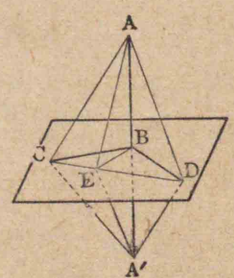
**定義** 直線ガ平面ト交リ其ノ交點ヲ通過スル其ノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直ナルトキニハ,其ノ直線ハ其ノ**平面ニ垂直**デアルトイヒ,其ノ直線ヲ其ノ**平面ノ垂線**トイフ。

平面ト交リ之ニ垂直デナイ直線ヲ其ノ平面ノ斜線トイフ。

垂線又ハ斜線ガ平面ト交ル點ヲ其ノ足トイフ。

**定理四十七** 相交ル二直線ノ交點ヲ通過シテ其ノ各ニ垂直ナル直線ハ其ノ二直線ノ定メル平面ニ垂直デアル。

**假設** 直線 AB ヲ相交ル直線 BC, BD ノ交點 B ヲ通過シテ此等ノ二直線ノ各ニ垂直デアルトスル。




**終結** 然ルトキハ AB ハ BC, BD ノ定メル平面 P ニ垂直デアル。

**證明** 平面 P 上ニ於テ點 B ヲ通過スル任意ノ直線 BE ヲ引キ,又三直線 BC, BD,



BE ト交ル一ツノ直線ヲ引キ,其ノ交點ヲ夫夫 C, D, E トシ,次ニ AB ヲ延長シテ BA′ ヲ AB ニ等シク取リ, A, A′ ヲ C, D, E ニ結ブ。然ルトキハ

$$BC\perp AA',\quad BD\perp AA',\quad 且\ AB=A'B$$

$$\therefore\ AC=A'C,\quad AD=A'D$$

因テ △ACD, △A′CD ノ三邊ハ夫夫相等シイ。

$$\therefore\ \triangle ACD\equiv\triangle A'CD,\qquad \therefore\ \angle ACE=\angle A'CE$$

從テ △ACE, △A′CE ノ二邊ト其ノ夾ム角ハ夫夫相等シイ。

$$\therefore\ \triangle ACE\equiv\triangle A'CE,\qquad \therefore\ AE=A'E$$

因テ △AEA′ ハ二等邊三角形デ, B ハ其ノ底邊 AA′ ノ中點デアル。

$$\therefore\ BE\perp AA'$$

即チ AB ハ平面 P 上ニ於テ B ヲ通ル任意ノ直線ニ垂直デアル。從テ AB ハ平面 P ニ垂直デアル。

**系 I.** 平面ノ垂線ニ平行ナル直線ハ其ノ平面ニ垂直デアル。

**系 II.** 同一平面ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行デアル。

(問 1) 定理及ビ系ノ適用ヲ實物ニツイテ見出セ。

**定義** 平面外ノ點カラ其ノ平面ニ下セル

垂線ノ長サヲ其ノ**點ト平面トノ距離**トイフ。

(問2) 平面外ノ一點カラ其ノ平面上ノ點ニ引イタ總テノ線分ノ中,垂線ハ最小デアル。

**定義** 一ツノ平面ノ斜線ノ足ト斜線上ノ任意ノ一點カラ其ノ平面ニ下セル垂線ノ足トヲ結ブ直線ガ斜線トナス角ヲ**斜線ガ其ノ平面トナス角**トイフ。

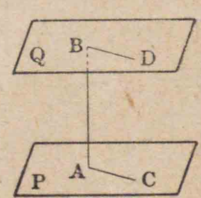
### 93. 平行平面ノ距離

**定理四十八** 平行ナル平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ニモ亦垂直デアル。

**假設** P, Q ヲ平行ナル二平面トシ, AB ヲ P ニ垂直ナル直線トスル。

**終結** 然ルトキハ AB ハ Q ニモ垂直デアル。

**證明** 直線 AB ガ平面 Q ト交ル點ヲ B トシ, B ヲ通ル Q 上ノ任意ノ直線 BD ト BA トヲ含ム平面ヲ R トシ, R ト P トノ交リヲ AC トスル。




然ルトキハ　$AC \parallel BD$

而シテ　$AB \perp AC$

$\therefore$ $AB \perp BD$



即チ AB ハ點 B ヲ通ル Q 上ノ任意ノ直線 BD ニ垂直デアル。故ニ AB ハ Q ニ垂直デアル。

**系** 平行ナル二平面ノ各ノ上ノ點カラ他ニ下セル垂線ノ長サハ皆相等シイ。

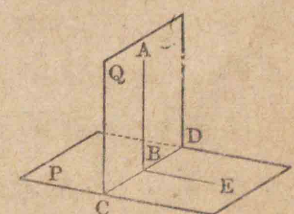
**定義** 二ツノ平行ナル平面ノ共通垂線ガ其ノ二平面間ニ夾マレル部分ノ長サヲ此ノ**二ツノ平行ナル平面ノ距離**トイフ。

### 94. 平面ノ垂直

**定義** 二ツノ平面ノ交リノ上ノ一點ニ於テ之ニ垂直ニ各平面上ニ引イタ二ツノ直線ノナス角ガ直角ナルトキニハ,此等ノ二平面ハ**互ニ垂直**デアル(又ハ**直角ニ交ル**)トイフ。

**定理四十九** 平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ其ノ平面ニ垂直デアル。

**假設** 直線 AB ヲ平面 P ノ垂線トシ, AB ヲ含ム一ツノ平面ヲ Q トスル。




**終結** 然ルトキハ Q ハ P ニ垂直デアル。

**證明** CD ヲ平面 P, Q ノ交リトシ,直線 AB ガ CD

ト交ル點BカラCD=垂直=平面P上=直線BEヲ引ク。然ルトキハABハP=垂直デアルカラ

$$AB \perp CD,\quad AB \perp BE$$

即チABハB=於テCD=垂直デ且Q上=アリ，∠ABEハ直角デアル。因テQハP=垂直デアル。

### 例　　　題

1. 平面P, Qガ互=垂直=交ルトキハ，P上ノ一點Cカラ其ノ交リAB=下セル垂線CDハ平面Q=垂直デアル。
2. 線分ABノ中點ヲ通過シテAB=垂直ナル平面上ノ點ハ二點A, Bカラ等距離=アル。
3. 圓ノ中心=於テ圓ノ平面=垂直ナル直線上ノ點ハ圓周上ノ各點カラ等距離=アル。

---

## 95. 多面體

**定義**　四ツ以上ノ平面ニヨツテ圍マレタ空間ノ部分ヲ**多面體**トイヒ，之ヲ圍ム平面ノ交リヲ其ノ**稜**，稜ノ交リヲ其ノ**頂點**トイフ。

多面體ヲ其ノ面ガ四，五，六等ナル=從テ**四面體**，**五面體**，**六面體**等トイフ。



**直方體**

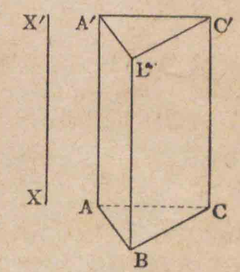
各ノ面ガ皆矩形ナル六面體ヲ**直方體**(又ハ**直六面體**)トイフ。

**立方體**

各ノ面ガ皆正方形ナル六面體ヲ**立方體**トイフ。

**角壔**

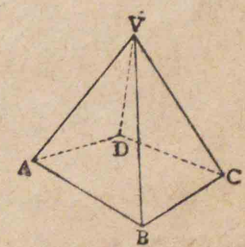
同一ノ直線=平行ナル三ツ以上ノ平面ト其ノ直線=交ル二ツノ平行ナル平面トデ圍マレタ多面體ヲ**角壔**トイフ。其ノ同一ノ直線=平行ナル面ヲ角壔ノ側面，其ノ直線ト交ル二ツノ平行ナル面ヲ角壔ノ**底面**，兩底面間ノ距離ヲ角壔ノ**高サ**トイフ。




角壔ノ底面ガ三角形，四角形，五角形等ナル=從テ**三角壔**，**四角壔**，**五角壔**等トイフ。

**角錐**

一ツノ面ハ任意ノ邊數ノ多角形デ，他ノ面ハ此ノ多角形ノ各邊ヲ底邊トシ，此ノ多角形ノ面外ノ一點ヲ共通ノ頂角トスル三角形ナル多面體ヲ**角錐**ト



イフ。其ノ任意ノ邊數ノ多角形ヲ角錐ノ**底面**,三角形ナル面ヲ角錐ノ**側面**,側面ノ共通頂點ヲ角錐ノ**頂點**トイヒ,頂點ト底面トノ距離ヲ角錐ノ**高サ**トイフ。

角錐ノ底面ガ三角形,四角形,五角形等ナルニ從テ**三角錐,四角錐,五角錐**等トイフ。

## 96. 體積

**定義**　平面又ハ他ノ面ニヨツテ圍マレタ空間ノ廣サヲ其等ノ面ノ圍ム立體ノ**體積**トイフ。

(問)　縱,横,高サガ8糎,6糎,10糎ナル直方體ノ體積ハ何程カ。又一稜ガ6糎ノ立方體ノ體積ハ何程カ。

**直方體及ビ立方體ノ體積**

直方體及ビ立方體ノ體積ノ求メ方ハ諸子ガ既ニ熟知スルトコロデアル。

**角壔ノ體積**

角壔ノ體積,底面ノ面積及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫夫$V, S$及ビ$h$トスレバ次ノ公式ガ成立ツ。

$$V=Sh$$

此ノ公式及ビ今後掲グル公式ノ證明ハ簡單デナイカラ省略スルコトニスル。



**角錐ノ體積**

角錐ノ體積,底面ノ面積及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫夫$V, S$及ビ$h$トスレバ次ノ公式ガ成立ツ。

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

例　題

1. 直方體及ビ立方體ノ稜ハ之ト交ル面ニ垂直デアル。

2. 縱,横,高サガ夫夫12糎,16糎,15糎ナル直方體ノ對角線*ノ長サヲ求メヨ。

3. 底面ガ一邊8糎ノ正方形デ,高サガ12糎ナル四角壔ノ體積ヲ求メヨ。

4. 埃及ノ大ぴらみっどノ底面ハ一邊ガ200米ノ正方形デ,側面ハ何レモ正三角形ナル四角錐デアル。此ノぴらみっどノ高サト體積トヲ求メヨ。

---

## 97. 曲面體

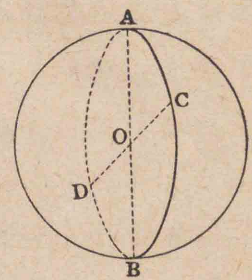
**定義**　多面體デナイ立體ヲ**曲面體**トイフ。

---

*多面體ノ同一面上ニナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ對角線トイフ。

**球**

半圓ヲ其ノ直徑ヲ軸トシテ一回轉セシムルトキニ生ズル立體ヲ**球**トイフ。卽チ球ハ半圓周ノ回轉ニヨツテ生ズル曲面ニヨツテ圍マレル。此ノ曲面ヲ**球面**(又ハ球)トイヒ,其ノ半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**,中心カラ球面ニ引イタ線分ヲ球ノ**半徑**,球ノ中心ヲ通リ球面上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ。



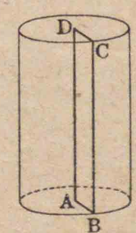

球ノ半徑,表面積及ビ體積ヲ表ハス數ヲ夫夫 $r$, S 及ビ V トスレバ次ノ公式ガ成立ツ。

$$S=4\pi r^2, \qquad V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

(問 1) 半徑 5 cm ノ球ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

**直圓壔**

矩形ヲ其ノ一邊ヲ軸トシテ一回轉セシムルトキニ生ズル立體ヲ**直圓壔**トイフ。從テ直圓壔ハ回轉軸ニ對スル矩形ノ一邊ノ回轉ニヨツテ生ズル曲面ト他ノ二邊ノ回轉ニヨツテ生ズル平行ニシテ全等ナル二ツノ圓トニヨツテ圍マレル。此ノ曲面ヲ直圓壔ノ**側面**,二ツノ圓ヲ其ノ**底面**,底面ノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**,兩底面間ノ距離卽チ回轉軸ノ長サヲ其ノ**高サ**トイフ。





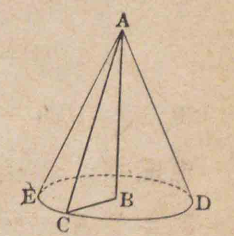

直圓壔ノ體積ヲ表ハス數ハ底面ノ面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ニ等シイ。從テ其ノ體積,半徑及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫夫 V, $r$ 及ビ $h$ トスレバ次ノ公式ガ成立ツ。

$$V=\pi r^2 h$$

(問 2) 底面ノ半徑ガ 4 糎,高サガ 15 糎ナル內法ヲ有スル直圓壔形ノ容器ノ容量ハ何程カ。

**直圓錐**

直角三角形ヲ其ノ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一回轉セシムルトキニ生ズル立體ヲ**直圓錐**トイフ。從テ直圓錐ハ直角三角形ノ斜邊ノ回轉ニヨツテ生ズル曲面ト回轉軸ニ垂直ナル邊ノ回轉ニヨツテ生ズル圓トニヨツテ圍マレル。此ノ曲面ヲ直圓錐ノ**側面**,此ノ圓ヲ直圓錐ノ**底面**,底面上ニアラザル回轉軸ノ一端ニ當ル點ヲ直圓錐ノ**頂點**,頂點ト底面トノ距離,卽チ回轉軸ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**トイフ。



直圓錐ノ體積ヲ表ハス數ハ其ノ底面ノ面積ヲ表ハス數ト高サヲ表ハス數トノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。從テ體積,底面ノ半徑及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫夫 $V, r$ 及ビ $h$ トスレバ次ノ公式ガ成立ツ。

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

（問 3） 底面ノ半徑ガ 6 糎,高サガ 15 糎ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。

### 例　題

1. 球ヲ平面ニヨツテ截リタル截口ハ圓ニシテ,其ノ中心ヲ通ル平面ニヨツテ截リタル截口ノ圓ハ最大デアル。
2. 直徑 5 糎ノ鐵丸ノ重サハ何程カ。但シ鐵ノ比重ヲ 7.9 トスル。
3. 直徑 2 糎,長サ 1 米ノ鐵ノ丸棒ノ重サヲ求メヨ。
4. 一邊 4 糎ノ正三角形ノ一邊ヲ軸トシテ一回轉スルトキニ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。
5. 內法半徑ガ 0.8 糎,深サガ 15 糎アル試驗管ノ容量ハ幾立方糎カ。但底ハ半球形ナリトスル。

---

# 補充問題

### 第一編ニ屬スルモノ

1. 次ノ時刻ニ於ケル時計ノ兩針ノナス角度如何。
   五時十五分,　七時二十分,　三時四十五分
2. $39°25'$, $162°45'56''$, $92°7'3''$ ノ補角ヲ求メヨ。
3. $15°32'11''$, $43°40'56''$, $65°59'1''$ ノ餘角ヲ求メヨ。
4. 如何ナル角ノ 3 倍ハ其ノ角ノ餘角ヨリモ $10°$ 大キイカ。又如何ナル角ノ補角ハ其ノ角ノ餘角ノ 4 倍カ。
5. 次ノ二方位ノ間ノ角ヲ求メヨ。

| | |
|---|---|
| 北北東ト東微南 | 南西微西ト北微西 |
| 南南東ト南西 | 北西ト北微東 |

### 第二編ニ屬スルモノ

6. 三角形 ABC ニ於テ $\angle A$ ハ $\angle B$ ノ $\frac{2}{3}$ デ, $\angle B$ ハ $\angle C$ ノ $\frac{3}{4}$ ナルトキハ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ハ各何度カ。
7. 三角形 ABC ノ $\angle B$ ト $\angle C$ トノ二等分線ノ交點ヲ D トスルトキ $\angle BDC$ ガ $120°$ ナラバ $\angle A$ ハ何度カ。
8. 三角形 ABC ニ於テ邊 AB=AC ナルトキ, $\angle B$ ノ二等分線ガ邊 AC ニ垂直ナラバ此ノ三角形ハ等邊

三角形デアル。

9. 頂角ガ一ツノ底角ノ三倍ナル二等邊三角形ノ頂角及ビ一ツノ底角ハ各何度カ。

10. 二等邊三角形ABCノ底角B及ビCノ二等分線ノ交點ヲDトスレバ BDト CDトハ相等シイ。

11. 三角形ABCニ於テ $AB>AC$ ナルトキ,AカラBCニ垂線ADヲ下セバ $\angle BAD>\angle CAD$ デアル。

12. 三角形ABCニ於テ $AB>AC$ ナルトキ,邊BCノ中點ヲMトスレバ $\angle BAM<\angle CAM$ デアル。

13. 正三角形ABCノ邊AB, AC上ニ夫夫點D, EヲトレバDE<BCデアル。

14. 二等邊三角形ABCノ頂角Aノ外角ノ二等分線上ノ點DヲB, Cニ結ベバ $AB+AC<DB+DC$ デアル。

15. 正三角形ABC內ノ任意ノ一點ヲPトシ,PヲA, B及ビCニ結ベバ次ノ關係ガアル。

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<AP+BP+CP<AB+BC+CA$$

16. 三角形ABCノ外方ニ邊AB, ACヲ夫夫一邊トスル正三角形ABE, ACDヲ作レバ $BD=CE$ デアル。

17. $\angle ABC$, $\angle DEF$ ニ於テ $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ ナルトキハ, $\angle ABC$, $\angle DEF$ ノ二等分線ハ互ニ平行デアルカ又ハ互ニ垂直デアル。



18. 一ツノ角ノ二邊ガ夫夫他ノ一ツノ角ノ二邊ニ垂直ナルトキハ,此等ノ二角ノ二等分線ハ互ニ平行デアルカ又ハ互ニ垂直デアル。

19. $\angle C$ ガ直角ナル直角三角形ABCニ於テ $\angle B$ ガ $\angle A$ ノ二倍ナルトキハ $AB=2BC$ デアル。

20. $\triangle ABC$ ノ $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ノ交點ヲ通リBCニ平行ニ引イタ直線ガ邊AB, ACト交ル點ヲ夫夫D, Eトスレバ,線分DEハBD, CEノ和ニ等シイ。

21. 平行四邊形ABCDノ頂點A, Cカラ對角線BDニ垂線AE, CFヲ下セバ $AE=CF$ デアル。

22. 平行四邊形ABCDノ對角線BD上ニ二點E, Fヲ $BE=DF$ ナルヤウニ取レバAECFハ平行四邊形デアル。

23. 平行四邊形ABCDノ各頂點カラ對角線ニ下セル垂線ノ足ヲE, F, G, HトスレバE, F, G, Hハ平行四邊形ノ頂點デアル。

24. 四邊形ABCDノ邊AB, BC, CD, DAノ中點ヲ夫夫E, F, G, Hトスルトキ,線分EGトFHトガ相等シイ場合ニハ四邊形EFGHハ矩形デアル。

25. 次ノモノガ與ヘラレテ三角形ヲ作レ。

(一) 底邊及ビ二ツノ中線

(二) 底邊,底邊ヘノ中線及ビ高サ

(三) 底邊,一ツノ底角及ビ他ノ二邊ノ差

**26.** 三角形ABCノ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ, AB, AC 又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ夫夫X, Yトシ,

(一) $XY=BX$ (二) $XY=BX+CY$

(三) $XY=BX-CY$

ナル樣ニセヨ。

## 第三編ニ屬スルモノ

**27.** 一ツノ圓ノ互ニ垂直ニ交ル二弦AB, CDヲ引クトキハ $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$ デアル。

**28.** 圓ニ內接スル三角形 ABC ノ $\angle A$ ノ外角ノ二等分線ガ圓周ト交ル點ヲ D トスレバ, $\triangle DBC$ ハ二等邊三角形デアル。

**29.** 圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形デアル。

**30.** 正三角形ABCノ外接圓ノ弧 BC ノ上ノ一點ヲ P トスレバ $AP=BP+CP$ デアル。

**31.** 一ツノ圓ノ弧 BC ノ中點Aカラ弦 AD, AE ヲ引キ AD, AE ガ弦 BC ト交ル點ヲ F, G トスレバ,四點 D, E, F, G ハ同一圓周上ニアル。

**32.** 圓ノ弦 AB ノ一端Aカラ直徑 AC, 他端 B カラ



切線 BT ヲ引キ, A カラ BT ニ垂線 AD ヲ下セバ AB ハ $\angle CAD$ ヲ二等分スル。

**33.** 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點 D カラ邊 AC ニ引ケル垂線ハ邊 AB ヲ直徑トスル圓ノ切線デアル。

**34.** 圓 O 外ノ一點 P カラ此ノ圓ニ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ A 及ビ B トスルトキハ, $\angle APB$ ハ $\angle OAB$ ノ二倍デアル。

**35.** 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ E トシ, A, B, E ノ三點ヲ通ル圓ニ E カラ切線 EF ヲ引クトキハ, EF ハ CD ニ平行デアル。

**36.** 二等邊三角形ノ頂點ノ外角ノ二等分線ハ其ノ三角形ノ外接圓ニ切スル。

**37.** 相切スル二圓ノ切點 P ヲ通ル二直線 AB, CD ガ一ツノ圓ト交ル點ヲ A, C トシ,他ノ圓ト交ル點ヲ B, D トスレバ $AC \parallel BD$ デアル。

**38.** 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル直線 AB ガ二圓ト交ル點ヲ A, B トシ, A, B カラ各圓ノ直徑 AC, BD ヲ引ケバ $AC \parallel BD$ デアル。

**39.** 一ツノ角ノ一邊上ノ與ヘラレタ點ニ於テ其ノ邊ニ切シ,且他ノ邊ニモ切スル圓ヲ畫ケ。

40. 定圓ニ切シ且定直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ。
又定圓ニ切シ且定直線ニ垂直ナル直線ヲ引ケ。

### 第四編ニ屬スルモノ

41. 平行四邊形ABCDノ邊AB上ノ任意ノ一點ヲPトシ線分PC, PDヲ引クトキハ次ノ等式ガ成立ツ。

$$\triangle PAD + \triangle PBC = \triangle PCD$$

42. 平行四邊形ABCDノ形內ノ一點ヲPトシ, Pト各頂點トヲ結ベバ次ノ等式ガ成立ツ。

$$\triangle ABP + \triangle CDP = \triangle BCP + \triangle DAP = \frac{1}{2} \square ABCD$$

43. 平行四邊形ABCDノ對角線AC上ノ一點PカラAB, BCニ夫夫平行ナル直線ヲ引キ邊DA, BC, AB, CDトノ交點ヲ夫夫E, F, G, Hトスレバ,平行四邊形PGBFトPHDEトハ相等シイ。

44. $\angle B$ガ鋭角ナル$\triangle ABC$ノ頂點Aカラ邊BCニ垂線ヲ下シ其ノ足ヲDトスレバ

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BD \cdot BC$$

45. 上ノ問題ニ於テ$\angle B$ガ鈍角ナルトキハ

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BD \cdot BC$$

46. 水平ナル地面ニ垂直ニ立テタ長サ若干米ノ旗竿ガ地面カラ2.6米ノ所デ折レ其ノ尖端ガ竿ノ元カラ3.3米距タツタ所デ地面ニ觸レテ居タ。此ノ旗竿ノ長サヲ求メヨ。



47. 平行ナル二邊ガ4糎ト10糎デ,平行ナラザル二邊ガ共ニ5糎デアル梯形ノ面積ヲ求メヨ。

48. 周圍ガ20糎アル矩形ノ中面積ノ最大ノモノノ面積ヲ求メヨ。

### 第五編ニ屬スルモノ

49. 平行四邊形ABCDノ頂點Bカラ對角線ACニ,頂點Cカラ邊ADニ夫夫垂線ヲ下シ,其ノ足ヲ夫夫E, FトスレバAC : AD = CF : BEデアル。

50. 平行四邊形ABCDノ頂點Aヲ通ツテ任意ノ直線ヲ引キ對角線BD, 二邊BC, CD又ハ其ノ延長トノ交點ヲ夫夫P, Q, Rトスレバ,次ノ關係ガアル。

$$AP : PQ = PR : AP$$

51. 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正三角形ハ他ノ二邊ノ上ノ正三角形ノ和ニ等シイ。

52. $\triangle ABC$內ノ任意ノ點Oヲ頂點A, B, Cニ連結シ,且AOノ延長ガ邊BCト交ル點ヲDトスレバ

$$\triangle AOB : \triangle AOC = BD : CD$$

53. 半徑12糎,中心角ガ120°ノ扇形ノ面積ヲ求メヨ。

54. 半徑4寸ノ圓ニ內接スル正六邊形ノ面積ハ幾平方寸カ。

### 第六編ニ屬スルモノ

55. 物體ノ平面鏡ニ映ズル像ハ鏡面ニ對シテ物體ノ對稱ノ位置ニアルコトヲ證明セヨ。

56. 床カラ天井マデノ高サガ八尺五寸ノ八疊敷ノ座敷ノ對角線ノ長サヲ求メヨ。

57. 底面ハ一邊ノ長サガ6糎ナル正三角形デ,高サガ10糎ナル三角壔ノ體積ヲ求メヨ。

58. 底面ハ一邊ノ長サガ12糎ナル正方形デ,高サガ20糎ナル四角錐ノ體積ヲ求メヨ。

59. 底面ノ半徑ガ21糎デ,高サガ28糎ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。

60. 底面ノ半徑ガ15糎デ,高サガ18糎ナル直圓壔ノ體積ヲ求メヨ。

61. 地球ノ半徑ハ月ノ半徑ノ約3.7倍デアル。地球ノ體積ハ月ノ體積ノ約何倍カ。但地球モ月モ球トシテ計算セヨ。

---

# 答

**例題** (15頁)

2. 22°30′, 56°15′, 78°45′　3. 北北西

**例題** (33頁—34頁)

2. $\angle BDC=90°$, $\angle ECB=45°$, $\angle DEB=75°$, $\angle DBE=15°$

**問題第二** (53頁—54頁)

9. 2倍

**問題第六** (89頁—90頁)

1. 約390平方米, 約662平方米　2. 65糎
3. 294平方米

**問題第七** (97頁)

3. BD=3糎, CD=2糎

**問題第八** (110頁)

6. $6^2:8^2=9:16$　7. 3.5粁, 2平方粁

**問題第九** (117頁)

1. 175.93平方糎弱　2. 18.85糎弱, 141.37平方糎强
3. 51.42糎弱, 49.13糎弱　4. 12.57糎弱

例題 (129頁)

2. 25粍 3. 768立方粍 4. 141米强,約188.6萬立方米

例題 (132頁)

2. 4.136瓩强　3. 2.482瓩弱　4. 50.3立方粍弱

5. 29.6立方粍强

補充問題 (1頁—8頁)

1. 67°30′, 100°, 157°30′

2. 140°35′, 17°14′4″, 87°52′57″

3. 74°27′49″, 46°19′4″, 24°59″　4. 25°, 60°

5. 78°45′, 112°30′, 67°30′, 56°15′

6. ∠A=40°, ∠B=60°, ∠C=80°　7. ∠A=60°

9. 108°, 36°　46. 6.8米　47. 28平方粍

48. 25平方粍　53. 150.8平方粍弱

54. 41.57平方寸弱　56. 19尺弱

57. 155.88立方粍强　58. 960立方粍

59. 12930.8立方粍强　60. 12723.5立方粍弱

61. 約50倍

---

昭和十三年十二月十五日印刷
昭和十三年十二月十八日發行
昭和十四年二月十六日訂正再版印刷
昭和十四年二月二十日訂正再版發行



定價金六十六錢



著作者　國枝元治
著作者　中澤伊與吉

發行者　東京市日本橋區室町四丁目五番地八
株式會社 寶文館
代表者 大葉久治

印刷者　東京市牛込區榎町七番地
早坂善太郎

發行所　東京市日本橋區室町四丁目五番地八
株式會社 寶文館
振替東京二八〇番

關西專賣　大阪市西區阿波堀通四丁目二十番地
株式會社 大阪寶文館
振替大阪四三番

大日本印刷株式會社榎町工場印刷

三B 岸保千里

四ノ四 岸保千里