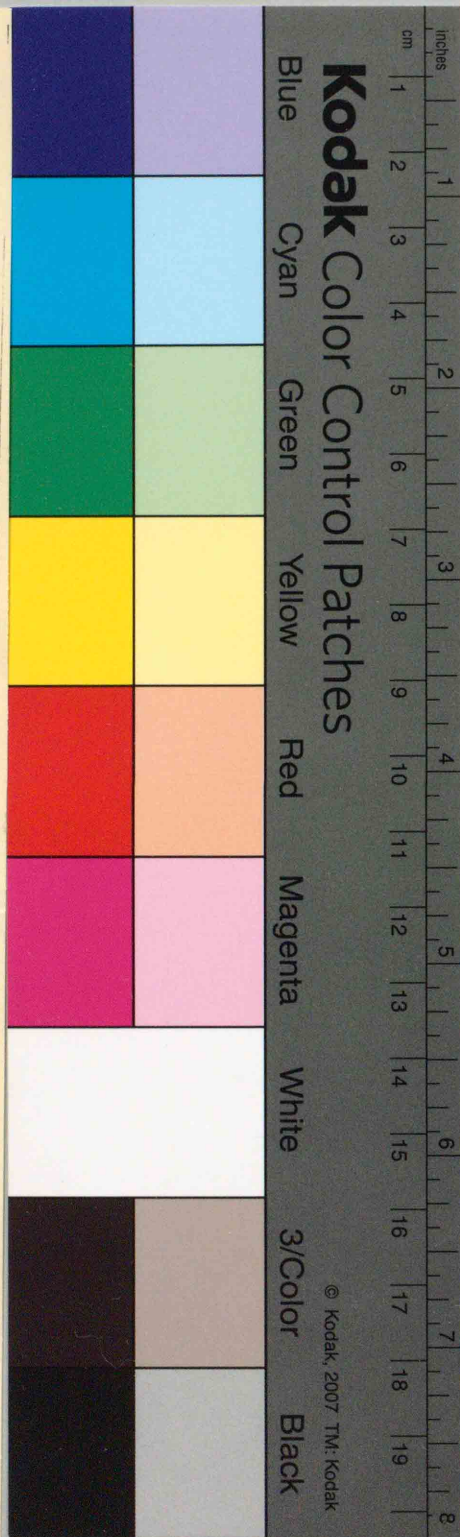


40205

教科書文庫

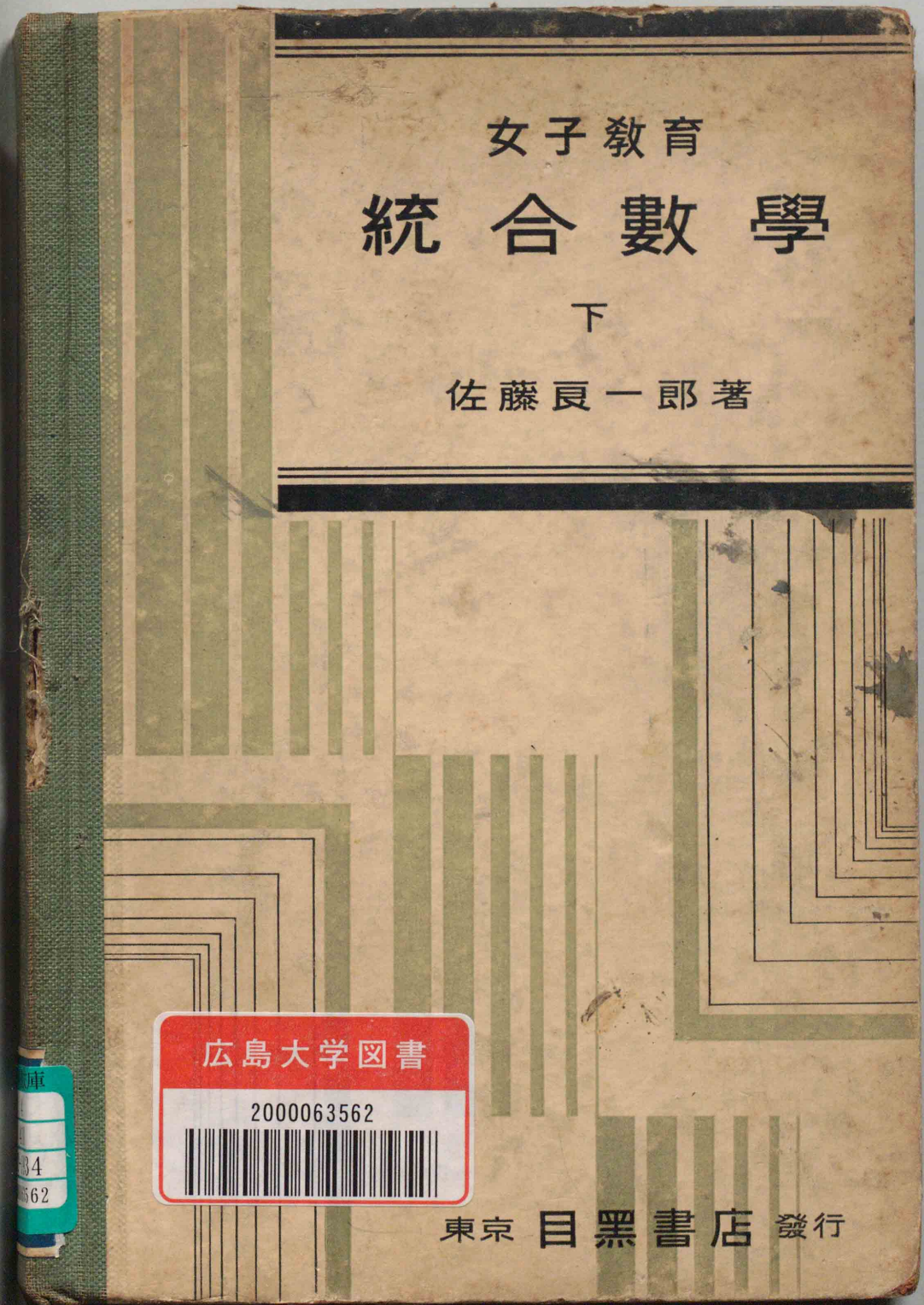
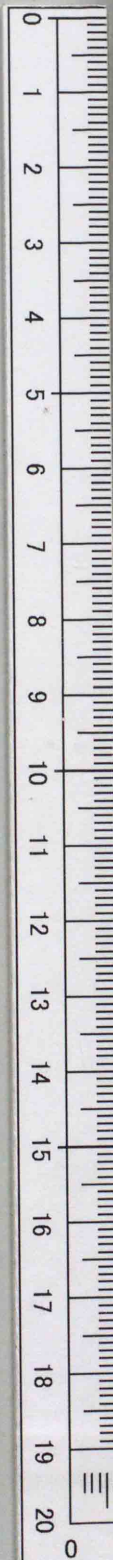
4
410
42-1934
2000.0 63562



Kodak Gray Scale

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

© Kodak, 2007 TM: Kodak



375.9

Sa20

教科書文庫

4

410

42-1934

2000063562

資料室

女子教育
統合數學
下

佐藤良一郎著

昭和九年十二月二十一日
高等女學校數學科
文部省檢定済

広島大学図書

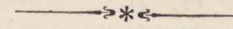
2000063562



東京 目黒書店 發行



目次



[第三部]

第一篇 分數方程式

第一章 分數式

1. 分數式分數方程式.....1
2. 分數式取扱上ノ原理.....2
3. 約分.....3
4. 分數式ノ符號.....5
5. 分數式ノ乘法.....7
6. 分數式ノ除法.....8
7. 分數式ノ加法及ビ減法.....9
8. 繁分數式.....12

第二章 分數方程式

9. 分數方程式.....14
10. 公式ノ轉換.....17

第二篇 比例及ビ相似

第一章 比例

11. 比例式.....19
12. 比例式ノ性質.....19
13. 比ノ性質.....22
14. 量ノ比.....23

第二章 相似形

15. 相似形.....25
16. 三角形ノ截線.....26
17. 三角形ノ相似ノ定理.....28

18. 線分ヲ定比ニ分ツコト	33
19. 相似多角形	34
20. 相似形ノ周ノ比	37
21. 相似形ノ面積ノ比	38
第三章 三角函數	
22. 正切	41
23. 正弦及ビ餘弦	45
第四章 線分ノ平方關係	
24. 直角三角形ニ於ケル比例線	49
25. ぴたごらすノ定理	51
26. 定點デ分タレタ弦ノ分ノ積	53
第三篇 二次方程式	
第一章 平方根	
27. 平方根	55
28. 開平方	56
第二章 無理數	
29. 無理數	65
30. 根數ノ計算(1)	66
31. 根數ノ計算(2)	67
32. 根數ノ計算(3)	68
第三章 二次方程式	
33. 一元二次方程式ノ一般的解法	69
34. 一元二次方程式ノ根ノ公式	74
35. 一元二次方程式ノ圖解	76
36. 分數方程式	78
37. 二元二次聯立方程式	79
38. 無理方程式	81
39. 變數及ビ函數	86
40. 函數ト圖表	88

41. 二次函數ノ極大値及ビ極小値	92
42. 積ニ比例スルトイフコト	95
43. 公式ノ轉換	97
44. 圓周ト内接形並ニ外接形ノ周	99
45. 圓ノ周及ビ圓ノ面積ノ比	108
第四篇 級數	
第一章 級數	
46. 級數	104
47. 等差級數	105
48. 等差級數ノ和	105
49. 等比級數	107
50. 等比級數ノ和	108
51. 複利法	109
52. 年賦積立	111
53. 年賦償還	113
54. 年金	115
第五篇 空間ニ於ケル圖形ノ性質	
第一章 基本ノ關係	
55. 面,平面,曲面	117
56. 直線,平面ノ平行	120
57. 二直線ノ位置關係	123
58. 邊ガ平行ナル二ツノ角	126
59. 平面ノ垂線	129
60. 垂直平面	133
61. 平行關係ト垂直關係	135
62. 平面ト斜線ノナス角	138
63. 多面角	140
64. 正多面體	140
第六篇 表面積及ビ體積	

第一章 立體ノ表面積

65. 多面體ノ表面積.....146

66. 曲面體ノ表面積.....147

第二章 體積

67. 體積.....152

68. かゞりえりノ原理.....155

69. 角嚮及ビ圓嚮ノ體積.....156

70. 角錐及ビ圓錐ノ體積.....158

71. 球ノ體積.....163

附録 對數

第一章 冪及ビ根

72. 冪及ビ冪根.....165

73. 冪指數ノ法則.....168

74. 冪根ノ計算.....169

第二章 指數及ビ對數

75. 冪指數ノ擴張.....172

76. 冪指數ノ法則.....175

77. 對數.....176

78. 對數ノ性質.....178

79. 對數表.....179

80. 對數ヲ求メルコト.....182

81. 眞數ヲ求メルコト.....184

82. 對數ニ依ル計算(ソノ一).....186

83. 對數ニ依ル計算(ソノ二).....188

[第三部]

第一篇

分數方程式

第一章

分數式

1. 分數式, 分數方程式

既ニ知ツテキル通り, 例ヘバ $(2x+3) \div (5x-7)$

ノ如キ割リ算ヲ示スノニ, 通例

$$\frac{2x+3}{5x-7}$$

ヲ以テシ, コノ形ノ代數式ヲ分數式トイフ。即チ

一ツノ整式 A ヲ他ノ整式 B デ割ルコトヲ, $\frac{A}{B}$ ナル形デ書キ表ハシタモノヲ, 分數式トイフ。

又 $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1}, \frac{5}{x+1} = \frac{10-7x}{x-1} + 7$

ノ如キ方程式ヲ, 分數方程式ト稱スル。即チ

未知數ニ關シテ分數式ヲ含ム方程式ヲ, 分數方程式トイフ。

第四卷 算術

【注意】(1) $\frac{A}{B}$ ナル分數式ヲ考ヘルトキハ、 $B=0$ デナイト
イフ制限ガイツモツキマツテキルノデアアルガ、便宜
上一々斷リ書キハシナイデオク。

(2) 分數式 $\frac{A}{B}$ ハ、 A, B ヲ整式トスルトキ、 $\frac{A}{B} \times B = A$ ナ
ル如キ代數式デアルトモイヘル。

2. 分數式取扱上ノ原理

例ヘバ

$$i) \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ ナル如ク } \frac{A \cdot C}{A \cdot B} = \frac{C}{B} *$$

$$ii) \frac{2}{3}, \frac{5}{7} \text{ ヲ通分シテ } \frac{14}{21}, \frac{15}{21} \text{ トナル如ク}$$

$$\frac{B}{A}, \frac{D}{C} \text{ ヲ通分シテ } \frac{B \cdot C}{A \cdot C}, \frac{A \cdot D}{A \cdot C}$$

$$iii) \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} \text{ ナル如ク } \frac{B}{A} + \frac{C}{A} = \frac{B+C}{A}$$

$$iv) \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} \text{ ナル如ク } \frac{B}{A} - \frac{C}{A} = \frac{B-C}{A}$$

$$v) \frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} \text{ ナル如ク } \frac{B}{A} \times \frac{D}{C} = \frac{B \times D}{A \times C}$$

$$vi) \frac{2}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} \text{ ナル如ク } \frac{B}{A} \div \frac{D}{C} = \frac{B}{A} \times \frac{C}{D}$$

デアアル。即チ

分數式ヲ取扱フニハ、分數ヲ取扱フトキ
ニ用ヒタト同ジ規則ニ従フ。

* 例ヘバ $A \times C$ ヲ $A \cdot C$ ト書クコトモアル。

3. 約分

分數式ノ分母、分子ニ共通ノ因數(公約數)トモイフ。
ガアルトキニハ、コノ共通因數デ分母、分子ヲ割ツテ、
分數式ヲ簡單ニスルコトガ出來ル。

$$\text{例 1. } \frac{3x^2}{6x^5} = \frac{1}{2x^3}$$

$$\left[\frac{3x^2}{6x^5} = \frac{3 \cdot x \cdot x}{6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} \text{ ナルコトヲ念頭ニオケ} \right]$$

$$\text{例 2. } \frac{8ab}{24ab^2} = \frac{8ab}{8ab \cdot 3b} = \frac{1}{3b}$$

[分母子ニ共通因數 $8ab$ ノアルコトハスグワカ
ルカラ、コレデ分母子ヲ割ツタノデアアル]

$$\text{例 3. } \frac{6x^3(x-2)}{3x^2(x+1)(x-2)} = \frac{2x}{x+1}$$

$$\text{例 4. } \frac{4x^2-25x}{2x^2-9x+10} = \frac{x(2x+5) \cdot \frac{1}{(2x-5)}}{\frac{1}{(2x-5)} \cdot (x-2)} = \frac{x(2x+5)}{x-2}$$

$$\text{例 5. } \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \frac{(x-3) \cdot \frac{1}{(x+1)}}{\frac{1}{(x+1)}} = \frac{x-3}{1} = x-3$$

分數式ノ分母、分子ヲソノ公約數デ割ツ
テ簡單ニスルコトヲ、ソノ分數式ヲ約分
スルトイフ。

【注意】 $\frac{x+2}{x+5}$ ハ約分サレテ $\frac{2}{5}$ トナルトイツタヤウナ誤ハ、極力避ケネバナラナイ。

$\frac{x+2}{x+5}$ ガ $\frac{2}{5}$ = 等シクナイコトハ、例ヘバ $x=1$ トスレバ、

$\frac{x+2}{x+5} = \frac{1+2}{1+5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ トナルコト = 依ツテ知ラレル。

分數式ノ分母、分子ガ(1ヨリ外ニ)公約數ヲ持タナイトキニハ、ソノ分數式ヲ既約分數トイフ。通常與ヘラレタ分數式ヲ約分セヨトハ、既約分數ニ直スコトデアル。

【注意】 $\frac{A}{B}$ ガ、約分ノ結果、整式ニナルコトガアル。コノトキニハ、AハBデ割リ切レルトイヒ、又AハBノ倍數、BハAノ約數デアルトイフ。例ヘバ

$$\frac{x^2-2x-3}{x+1} = \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = x-3$$

デアルカラ、 x^2-2x-3 ハ、 $(x+1)$ 及ビ $(x-3)$ ノ倍數、 $(x+1)$ 及ビ $(x-3)$ ハ、 x^2-2x-3 ノ約數デアル。

練習題

次ノ各分數式ヲ約分セヨ。

- | | | |
|--------------------------|------------------------------|-------------------------|
| 1. $\frac{18x^2}{12x^3}$ | 2. $\frac{5a^2b}{15ab^2}$ | 3. $\frac{18x^3}{x^2}$ |
| 4. $\frac{12a^2}{6x^5}$ | 5. $\frac{-5x^3}{10x}$ | 6. $\frac{-9x^2}{-x^3}$ |
| 7. $\frac{-2a^3b}{12ab}$ | 8. $\frac{25x^2y^2}{40xy^2}$ | 9. $\frac{-7a^2}{14a}$ |

10. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$

11. $\frac{2x+2y}{3x+3y}$

12. $\frac{pa+pb}{qa+qb}$

13. $\frac{x^2y+xy^2}{axy}$

14. $\frac{b+b^2}{a+ab}$

15. $\frac{ax+x^2}{ab^2+b^2x}$

16. $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$

17. $\frac{x^2-y^2}{x+y}$

18. $\frac{x^2-2x-3}{x-3}$

19. $\frac{y^2-y^2-12y}{ay-4a}$

20. $\frac{x^2-10x+21}{x^2-13x+42}$

21. $\frac{2x^2+x-6}{x^2-x-6}$

上ノ計算ヲ行フ間ニ知ラレル通り、例ヘバ

$$\frac{a^5}{a^3} = a^2, \quad \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$$

即チ一般ニ、 m, n ヲ任意ノ正ノ整數トスルトキハ

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad n > m$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}} \quad n < m$$

$$\frac{a^n}{a^m} = 1 \quad n = m$$

4. 分數式ノ符號

例ヘバ

$$-\frac{x-5}{3x+2}, \quad -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \quad -\frac{3x+4y}{3x-2y}$$

ナル分數式ノ符號ハ負デアルトイヒ、

$$\frac{x-5}{3x+2}, \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \frac{3x+4y}{3x-2y}$$

ノ符號ハ正デアルトイフ。(別ニソレ等ノ分數式ノ
値ガ負デアルトイフ意味デハナイ)

正數、負數ノ割リ算ノ規則カラ知ラレル通リ

$$(-a) \div b = -\frac{a}{b}, \quad (-a) \div (-b) = +\frac{a}{b}, \quad a \div (-b) = -\frac{a}{b}$$

デアルカラ

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

コレカラ次ノ規則ガ得ラレル。

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

練習題

1. 次ノ各分數式ヲ他ノ三ツノ異ナル形ニ書ケ。

$$\textcircled{1} -\frac{a}{b} \quad \textcircled{2} -\frac{-a}{b} \quad \textcircled{3} \frac{a-b}{c-d}$$

$$\textcircled{4} -\frac{a-b}{a^2+b^2} \quad \textcircled{5} -\frac{x-y}{xy} \quad \textcircled{6} \frac{3x+1}{3x-1}$$

2. 次ノ各分數及ビ分數式ヲ、正ノ分母子ヲ持ツ分
數、或ハ分數式ニ書キ改メヨ。

$$\textcircled{1} \frac{-3}{8} \quad \textcircled{2} \frac{10}{-12} \quad \textcircled{3} \frac{-6}{-7} \quad \textcircled{4} \frac{-3x}{-5y}$$

$$\textcircled{5} \frac{-2x^2}{10b^3} \quad \textcircled{6} \frac{7n}{-9t^2} \quad \textcircled{7} \frac{d}{-M^2} \quad \textcircled{8} \frac{-100}{P^2}$$

3. 次ノ分數式ヲ $a-b$ ヲ分母トスル分數式ニ直セ。

$$\textcircled{1} \frac{1}{b-a} \quad \textcircled{2} \frac{-x}{b-a} \quad \textcircled{3} \frac{m-n}{b-a}$$

4. 次ノ各式ニ於ケル分數式ヲ同ジ分母ノ分數式
ニ直セ。

$$\textcircled{1} \frac{6}{x-y} + \frac{2}{y-x} \quad \textcircled{2} \frac{2x+1}{x^2-1} - \frac{3x}{1-x^2}$$

$$\textcircled{3} \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} - \frac{a+b}{b-a} \quad \textcircled{4} \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-1}$$

5. 次ノ各分數式ヲ約分セヨ。

$$\textcircled{1} \frac{x-y}{3y-3x} \quad \textcircled{2} \frac{4a-8b}{2b-a} \quad \textcircled{3} \frac{(x-y)^3}{y-x}$$

$$\textcircled{4} \frac{5x-5y}{(x-y)^2} \quad \textcircled{5} \frac{(3x-3y)^2}{3y^2-3x^2} \quad \textcircled{6} \frac{2-x}{x^2-x-2}$$

5. 分數式ノ乘法

例 1. $\frac{3x}{4y}$ ト $\frac{x}{7y}$ トノ積ヲ求メヨ。

$$\text{[解]} \quad \frac{3x}{4y} \times \frac{x}{7y} = \frac{3x^2}{28y^2}$$

例 2. $5xy$ ト $\frac{y}{3x}$ トノ積ヲ求メヨ。

$$\text{[解]} \quad 5xy \times \frac{y}{3x} = \frac{5xy \cdot y}{3x} = \frac{5y^2}{3}$$

例 3. $\frac{a^2-a-6}{a^2-5a+4}$ ト $\frac{a-1}{2a-6}$ トノ積ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \frac{a^2-a-6}{a^2-5a+4} \cdot \frac{a-1}{2a-6} &= \frac{(a+2)(a-3)}{(a-1)(a-4)} \cdot \frac{a-1}{2(a-3)} \\ &= \frac{a+2}{2(a-4)} \end{aligned}$$

【注意】結果ハ、出來ルナラ既約分數ニ直シテオク。

練習題

次ノ各積ヲ求メヨ。

1. $\frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$
2. $\frac{x^2}{y} \times \frac{5}{6}$
3. $\frac{10}{ab} \times \frac{c}{5}$
4. $-\frac{5}{3x} \times \frac{2}{7y}$
5. $\frac{14x}{3y} \times \frac{2x}{5y}$
6. $\frac{x^3}{12} \times \frac{8}{x^5}$
7. $\frac{21x^2}{12y} \times \frac{3y}{7x}$
8. $7x \times \frac{2a}{3x}$
9. $\frac{8a}{15c^2} \times 5c$
10. $-8x^2 \times \frac{5}{12x^3}$
11. $-\frac{21mn}{28n^2} \times 14mn$
12. $\frac{m^2}{n^2} \times \frac{2n}{5m} \times \frac{3}{7}$
13. $\frac{2x}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{8}$
14. $\frac{x^2-1}{3} \times \frac{6x}{x+1}$
15. $\frac{15x-30}{2x} \times \frac{3x^2}{5x-10}$
16. $\frac{m^2-5mn+6n^2}{m^2-n^2} \times \frac{5}{m-3n}$
17. $\frac{2x}{x^2-5x+4} \times (x^2-1)$

6. 分數式ノ除法

例 1. $\frac{3x^2}{2y}$ ヲ $\frac{7y^2}{5x}$ デ割レ。

[解] $\frac{3x^2}{2y} \div \frac{7y^2}{5x} = \frac{3x^2}{2y} \cdot \frac{5x}{7y^2} = \frac{15x^3}{14y^3}$

例 2. $\frac{x-2}{x^2-4x}$ ヲ $\frac{1}{x-4}$ デ割レ。

[解] $\frac{x-2}{x^2-4x} \div \frac{1}{x-4} = \frac{x-2}{x(x-4)} \cdot \frac{x-4}{1} = \frac{x-2}{x}$

例 3. $\frac{m^2-n^2}{m}$ ヲ $m-n$ デ割レ。

[解] $\frac{m^2-n^2}{m} \div (m-n) = \frac{(m-n)(m+n)}{m(m-n)} = \frac{m+n}{m}$

練習題

次ノ各商ヲ求メヨ。

1. $\frac{a}{2x} \div \frac{b}{3y}$
2. $\frac{3x}{2x-1} \div \frac{2x}{x-2}$
3. $\frac{4a}{4a-2} \div \frac{2a}{a-1}$
4. $\frac{4a+2}{3a} \div \frac{2a+1}{5a}$
5. $\frac{(x+y)^2}{x-y} \div \frac{y+x}{(y-x)^2}$
6. $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} \div \frac{b-a}{c-d}$
7. $\frac{a^2-x^2}{4ax} \div \frac{x-a}{3x}$
8. $\frac{8-2a^4}{3ab} \div (2+a^2)$
9. $\frac{m+n}{m-n} \div (m+n)$
10. $(a+b) \div \frac{3}{a+b}$

7. 分數式ノ加法及ビ減法

例 1. $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x}$ 及ビ $\frac{1}{2a} - \frac{1}{5a}$ ヲ簡單ニセヨ。

$$\text{[解]} \quad \frac{1}{3x} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{6x} + \frac{3}{6x} = \frac{2+3}{6x} = \frac{5}{6x}$$

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{5a} = \frac{5}{10a} - \frac{2}{10a} = \frac{5-2}{10a} = \frac{3}{10a}$$

$$\text{例 2.} \quad x + \frac{3}{x} \text{ 及 } 2a - \frac{5}{3a} \text{ ヲ簡單ニセヨ。}$$

$$\text{[解]} \quad x + \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{x^2+3}{x}$$

$$2a - \frac{5}{3a} = \frac{6a^2}{3a} - \frac{5}{3a} = \frac{6a^2-5}{3a}$$

$$\text{例 3.} \quad \frac{1}{x-y} + \frac{x}{y^2-x^2} \text{ ヲ簡單ニセヨ。}$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \frac{1}{x-y} + \frac{x}{y^2-x^2} &= \frac{1}{x-y} - \frac{x}{x^2-y^2} \\ &= \frac{1}{x-y} - \frac{x}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} - \frac{x}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x+y-x}{(x-y)(x+y)} = \frac{y}{(x-y)(x+y)} \end{aligned}$$

【注意】(1) $\frac{3}{a} + \frac{2}{b}$ ヲ $\frac{5}{a+b}$ トシテハナラヌ。 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5}{a+b}$

デナイコトハ、例ヘバ $a=3, b=2$ トオケバ、 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{3} + \frac{2}{2}$
 $= 1+1=2$ トナリ、 $\frac{5}{a+b} = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$ トナルコトニ依ツ
 テ知ラレル。

(2) 分母ノ相異ナルニツ以上ノ分數式ヲ同ジ分母ノ

分數式ニ直スコトヲ、ソレ等ノ分數式ヲ通分スルトイ
 フ。コノ際、共通ノ分母即チ公分母ニハ、元ノ各分母デ
 割リ切レル整式ノ中デ次數ノ最モ低イモノ(コレヲ元
 ノ分母ノ最小公倍數トイフ)ヲ選ブ。

練習題

次ノ分數及ビ分數式ヲ簡單ニセヨ。

$$1. \quad \text{i)} \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \quad \text{ii)} \quad \frac{2}{a} + \frac{3}{a} \quad \text{iii)} \quad \frac{3}{4a} + \frac{1}{4a}$$

$$2. \quad \text{i)} \quad \frac{1}{7} + \frac{1}{14} \quad \text{ii)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \quad \text{iii)} \quad \frac{y}{x} + \frac{3y}{5x}$$

$$3. \quad \text{i)} \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \quad \text{ii)} \quad \frac{2}{a} + \frac{1}{2a} \quad \text{iii)} \quad \frac{3b}{2a} + \frac{b}{a}$$

$$4. \quad \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} \quad 5. \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad 6. \quad 1 + \frac{2}{3}$$

$$7. \quad 1 + \frac{a}{b} \quad 8. \quad \frac{1}{x} + 3 \quad 9. \quad \frac{1}{ab} + \frac{2}{a}$$

$$10. \quad \text{i)} \quad \frac{5}{7} - \frac{2}{7} \quad \text{ii)} \quad \frac{5}{a} - \frac{2}{a} \quad \text{iii)} \quad \frac{x}{2a} - \frac{y}{2a}$$

$$11. \quad \text{i)} \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{21} \quad \text{ii)} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3x} \quad \text{iii)} \quad \frac{y}{x} - \frac{2y}{3x}$$

$$12. \quad \text{i)} \quad \frac{2}{5} - \frac{1}{10} \quad \text{ii)} \quad \frac{2}{a} - \frac{1}{2a} \quad \text{iii)} \quad \frac{bc}{a} - \frac{b}{3a}$$

$$13. \quad \text{i)} \quad 1 - \frac{2}{7} \quad \text{ii)} \quad 1 - \frac{a}{b} \quad \text{iii)} \quad 1 - \frac{1}{xy}$$

$$14. \quad \text{i)} \quad \frac{1}{3} - \frac{3}{11} \quad \text{ii)} \quad \frac{1}{x} - \frac{x}{11} \quad \text{iii)} \quad \frac{1}{4a} - \frac{4a}{3}$$

15. i) $7 - \frac{2}{5}$ ii) $7 - \frac{2}{x}$ iii) $ab - \frac{c}{d}$
16. $\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}$ 17. $1 + \frac{x}{y}$ 18. $\frac{3}{2x} - \frac{1}{2x}$
19. $\frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 20. $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ 21. $\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}$
22. $a + \frac{b^2}{a}$ 23. $\frac{1}{xy} - \frac{1}{x}$ 24. $\frac{a}{a^2} + \frac{2}{a}$
25. $\frac{pq}{q^2} + \frac{r^2}{qr}$ 26. $\frac{a}{x} - \frac{a-10}{x}$ 27. $x - \frac{x}{100}$
28. $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{1-x}$ 29. $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x}$
30. $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{1-x^2}$ 31. $1 + \frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a}$
32. $\frac{a}{ab-b^2} - \frac{b}{ab-a^2}$ 33. $\frac{1}{ab+a^2} + \frac{1}{ab+b^2}$
34. $\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$ 35. $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{1-x} - 3$

8. 繁分數式

例へば、 $\frac{x}{y} \div (x-y)$, $\frac{x+y}{y} \div y$, $(\frac{x}{y} + 1) \div (\frac{x}{y} - \frac{y}{x})$ ヲ

ソレゾレ

$$\frac{\frac{x}{y}}{x-y}, \quad \frac{\frac{x+y}{y}}{y}, \quad \frac{\frac{x}{y} + 1}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$$

ト書クコトガアル。カヤウナ式ヲ繁分數式トイフ。

例 1. $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ ヲ簡單ニセヨ。

【解】 $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x} \times \frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$

例 2. $\frac{\frac{n}{m} + \frac{q}{p}}{\frac{n}{m} - \frac{q}{p}}$ ヲ簡單ニセヨ。

【解】 $\frac{\frac{n}{m} + \frac{q}{p}}{\frac{n}{m} - \frac{q}{p}} = \frac{mp(\frac{n}{m} + \frac{q}{p})}{mp(\frac{n}{m} - \frac{q}{p})} = \frac{np + mq}{np - mq}$

【注意】上ノヤウニ分母、分子ニ適當ノ式ヲ掛ケテ簡單ニシテモヨイ。

練習題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1. $\frac{1 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}}$ 2. $\frac{\frac{x}{y} + x}{\frac{x}{y} - x}$ 3. $\frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$
4. $\frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}$ 5. $\frac{\frac{a}{b} - \frac{a}{a+b}}{\frac{b}{b} - \frac{b}{a+b}}$ 6. $\frac{\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} + 1}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1}$

第二章 分數方程式

9. 分數方程式

分數方程式ヲ解クニハ、原則トシテ先ヅ分母ヲ拂フ。コノ目的ノタメニハ、式中ニアル分數式ノ分母ノ最小公倍數ヲ、兩邊ニ掛ケルノガ便利デアル。

例 1. $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ ヲ解ケ。

【解】 $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$
 $x^2 = 1$
 $\therefore x^2 - 1 = 0$ 即チ $(x-1)(x+1) = 0$
 $\therefore x = 1$ 或ハ -1
 $x = 1$ トスレバ、原方程式ノ分母ハ零トナル。
 故ニ $x = 1$ ハ根デハナイ。
 $x = -1$ トスレバ、
 左邊 = $\frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$, 右邊 = $\frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$
 故ニ $x = -1$ ハ求メル根デアル。

【注意】 上ニ示スヤウニ、分數方程式ノ分母ヲ拂ツテ得タ方程式ノ根ノ中ニ、原方程式中ニアル分數式ノ分母ヲ零ナラシメルモノガ出テ來ルコトガアル。コノトキ

ニハ、コレヲ所要ノ根トスルワケニハイカナイ。ソノ値ハ分數式ヲ無意味ニスルカラデアル。カヤウナワケデ、分數方程式ノ場合ニハ、驗ハ解法上必須缺クベカラザル階段ヲナスノデアル。

例 2. $\frac{x-3}{x+2} - \frac{x-5}{x} = \frac{1}{8}$ ヲ解ケ。

【解】 $\frac{x-3}{x+2} - \frac{x-5}{x} = \frac{1}{8}$
 兩邊ニ $8x(x+2)$ ヲ掛ケルト
 $8x(x-3) - 8(x+2)(x-5) = x(x+2)$
 $\therefore (8x^2 - 24x) - 8(x^2 - 3x - 10) = x^2 + 2x$
 $\therefore 8x^2 - 24x - 8x^2 + 24x + 80 = x^2 + 2x$
 $\therefore x^2 + 2x - 80 = 0$ 即チ $(x+10)(x-8) = 0$
 $\therefore x = -10$ 或ハ 8
 $x = -10$ トスレバ
 左邊 = $\frac{-10-3}{-10+2} - \frac{-10-5}{-10} = \frac{-13}{-8} - \frac{-15}{-10}$
 $= \frac{13}{8} - \frac{15}{10} = 1\frac{5}{8} - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{8} =$ 右邊
 $x = 8$ トスレバ
 左邊 = $\frac{8-3}{8+2} - \frac{8-5}{8} = \frac{5}{10} - \frac{3}{8}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} =$ 右邊
 答 $-10, 8$

練習題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $x+2 = \frac{9}{x+2}$

2. $\frac{x+2}{x-1} = \frac{3x+1}{3x-2}$

3. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+2}$

4. $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2-x} = \frac{3}{x-3}$

5. $\frac{5}{x-5} - \frac{3}{x+5} = \frac{2}{x}$

6. $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x+1}{3-x} = 2$

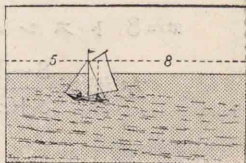
7. $\frac{x-5}{4} - \frac{4}{5-x} = \frac{3x-1}{4}$

8. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2-x} = \frac{2}{x}$

9. 紙トカ本ノ表紙ナドノヤウナ矩形ノモノハ、二邊ノ比ガ5:8 或ハ2:3 或ハ3:5ニ近イトキ形トシテ見好イ。大幅ノ木綿ヲ見好イ矩形ニ裁ツ裁チ方ヲ求メヨ。

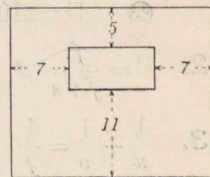
10. 寫眞、繪畫ナドデ、ソレノ中心トナルベキ物象ハ、兩脇カラノ距離ノ比ガ、矢張り(9)ニ示シタ比ニ近イトキニ美的ニ見エル。

(圖參照) 幅80cmノ絹ニ櫻ノ樹ヲ中心トスル繪ヲ刺繡スルニハ、何レノ位置ニ櫻ノ幹ヲ畫クベキカ。



11. 矩形ノ壁面ニ矩形ノ例ヘバ額ヲ掛ケルニ

ハ、天ト横ト地トノ比(圖參照)ガ5:7:11ニ近イヤウニスルト見好イ。幅3間、高サ2間ノ壁面ニ、横ト縦トノ比ガ5:3ノ額ヲ掛ケルニハ、如何ナル寸法ノモノガヨイカ。



10. 公式ノ轉換

例 $S = \frac{W_1}{W_1 - W_2}$ ヲ W_2 ニ關シテ解ケ。

[解] $S = \frac{W_1}{W_1 - W_2}$

兩邊ニ $W_1 - W_2$ ヲ掛ケルト

$S(W_1 - W_2) = W_1$

$\therefore SW_1 - SW_2 = W_1$

$\therefore SW_1 - W_1 = SW_2$

$\therefore W_1(S - 1) = SW_2$

$\therefore W_2 = \frac{W_1(S - 1)}{S}$

練習題

1. $G = M(1 + rk)$ ヲ r ニ關シテ解ケ。

次ノ各場合ニ於ケル r ノ値ヲ求メヨ。

① $G = 620, M = 500, k = 2$

② $G = 316.8, M = 300, k = 8$

$G = M(1 + rk)$
 $G = M + M \cdot r \cdot k$
 $M \cdot r \cdot k = G - M$
 $r = \frac{G - M}{M \cdot k}$

③ $G=2100, M=1500, k=5$

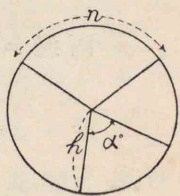
2. $H = \frac{fs}{f+s}$ ヲ s ニ關シテ解ケ。

3. $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ ヲ f ニ關シテ解ケ。又 u ニ關シテ解ケ。

4. $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{r}$ ヲ v ニ關シテ解ケ。又 r ニ關シテ解ケ。

5. 公式 $F = \frac{9}{5}(C+32)$ ニ於テ, (i) $F=18$, (ii) $F=-5$, (iii) $F=37$, (iv) $F=100$ ナルトキハ, C ノ値如何。

6. 半徑 h , 中心角 α° ナル扇形ノ面積 (M) ヲ求メル公式ヲ作レ。又長サ n ナル圓弧ニ對スル中心角ヲ求メル公式ヲ作レ。



セルニマス
キアールニアイト

第二篇 比例及ビ相似

第一章 比例

11. 比例式

$a:b$ ノ値ト $c:d$ ノ値トガ相等シイトキ, 即チ

$$a:b=c:d$$

ナルトキハ, 四ツノ數 a, b, c, d ハ比例ヲナストイヒ, 上ノ等式ヲ比例式又ハ單ニ比例トイフ。ソシテ各ヲ比例ノ項トイヒ, 第一, 第四ヲ比例ノ外項, 第二, 第三ヲ内項トイフ。

【注意】 (1) 上ノ比例式ハ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ト書イテモヨイ。

(2) $a:b=c:d$ ナルトキ d ノコトヲ a, b, c ノ第四比例項トイフコトモアル。

(3) 「四ツノ數ガ比例ヲナス」トイフコトト「二ツノ量ガ比例スル」トイフコトハ別ノコトデアル。

12. 比例式ノ性質

[I] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナルトキハ $ad=bc$ デアル。

【證明】

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

兩邊 = bd ヲ掛ケルト

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd$$

$$ad = cb$$

即チ

$$ad = bc$$

【注意】 上ノ事實ヲ次ノヤウニイフ。

比例ノ外項ノ積ハ内項ノ積ニ等シイ。

[II] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナルトキハ

$$\textcircled{1} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

【證明】

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

又 $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

[III] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナルトキハ

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

【證明】

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

又

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

[IV] $ad = bc$ ナルトキハ

$$\textcircled{1} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

【證明】

$$ad = bc \quad (1)$$

コノ兩邊ヲ bd デ割レバ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

又 (1) ノ兩邊ヲ cd デ割レバ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

又(1)ノ兩邊ヲ ac デ割レバ

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a} \quad \text{即チ} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

又(1)ノ兩邊ヲ ab デ割レバ

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{即チ} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

【注意】 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナルトキハ, $ad=bc$ デ, $ad=bc$ ナルトキハ
上ノ關係ガアルカラ,次ノヤウニイヘル。

比例ノ内項同士,或ハ外項同士入換ヘテ
モ,矢張り比例ハ成立ツ。

13. 比ノ性質

二ツ以上ノ比ガ相等シイトキニハ,次ノ性質ガアル。

例ヘバ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ナルトキハ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} \quad (b+d+f \neq 0)$$

【證明】 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ トオケバ

$$a=bk, \quad c=dk, \quad e=fk \quad (1)$$

$$\therefore a+c+e=bk+dk+fk=k(b+d+f)$$

$b+d+f \neq 0$ デアルカラ

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = k$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

14. 量ノ比

二線分 AB, CD ヲ同ジ單位デ測ツテ得タ數値ヲ,ソ
レゾレ a, b トスルトキハ, a ノ b ニ對スル比ヲ, AB
ノ CD ニ對スル比トイヒ,コレヲ AB:CD 又ハ $\frac{AB}{CD}$ ト
記ス。

上述ノ如クデアアルカラ,實際ニ二ツノ線分ノ比ヲ
求メルニハ,コレ等ヲ適宜ノ單位デ測ツテ,ソノ數値
ノ比ヲ求メレバヨイ。

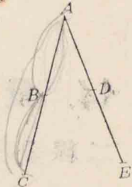
コノコトハ單ニ線分ノミニ限ラナイ。一般ニ

【定義】 一ツノ量 A ノコレト同ジ種類ノ量 B
ニ對スル比トハ,コレ等ヲ同ジ單位デ測ツタ
トキニ得ル A ノ數値ノ B ノ數値ニ對スル比
デアアル。

A ノ B ニ對スル比ハ A:B 又ハ $\frac{A}{B}$ ト記ス。即チ
A, B ガ數デアアル場合ト形ニ於テ何等異ナルトコロ
ハナイ。

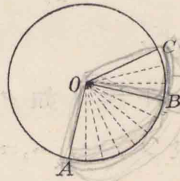
練習題

1. 圖ニ於テ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$ ナルトキハ、
 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ デアルトイヘル。何故カ。



2. (1)ノ圖ニ於テ $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ ナラバ、
 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$ デアルトイヘル。何故カ。

3. 圖ニ於テ
 $\frac{\angle AOB}{\angle BOC} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$
 デアル。コレカラ次ノ比例式ヲ
 導ケ。

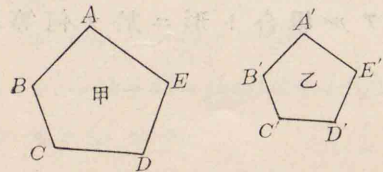


$$\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}}, \quad \frac{\angle BOC}{\angle AOC} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AC}}$$

4. (3)ノ圖ニ於テ $\frac{\text{扇形AOB}}{\text{扇形BOC}} = \frac{7}{3}$ デアル。圖ニ依ラ
 ナイデ次ノ各比ヲ求メヨ。

$$\frac{\text{扇形AOB}}{\text{扇形AOC}}, \quad \frac{\text{扇形BOC}}{\text{扇形AOC}}$$

5. 圖ニ於テ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$



ナルトキハ、甲ノ周リ(M)ト乙ノ周リ(M')トノ比
 即チ $\frac{M}{M'}$ ハ、上ノ各ノ比ニ等シイ。何故カ。

6. $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$ ナルトキハ、 $\frac{x}{y}$ ノ分子、分母ニソレゾレ $3a$ 、
 $7a$ ヲ足シテモ(或ハ引イテモ)、分數ノ値ハ變ラナ
 イ。コレヲ證明セヨ。

7. 底邊(高サ)ガ相等シイニツノ三角形ノ面積ノ比
 ハ、ソノ高サ(底邊)ノ比ニ等シイコトヲ示セ。

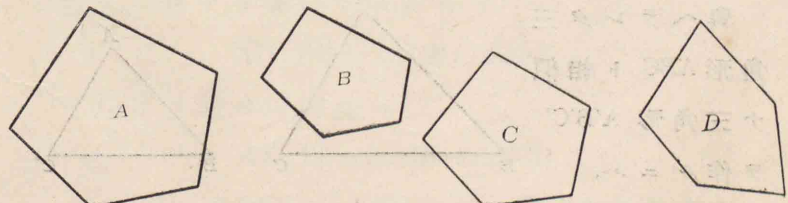
8. 底邊(高サ)ガ相等シイニツノ平行四邊形ノ面積
 ノ比ハ、高サ(底邊)ノ比ニ等シイコトヲ示セ。

第二章

相似形

15. 相似形

既ニ知ツテキルヤウニ、相似ナニツノ多角形ヲ觀
 察比較シテミルト、相對應スル邊ノ比ガ一定デ且相
 對應スル角ガ相等シイガ、相似デナイ多角形ニツイ



$$\frac{x}{y} = \frac{x+3a}{y+7a} = \frac{3a}{7a} = \frac{3}{7}$$

テハ、サウハイヘナイ。

ソコデ今後ノ研究ノ基礎トシテ次ノ定義ヲトル。

[定義] 同邊數ノ二ツノ多角形ニ於テ、相對應スル邊ノ比ガ一定デ、相對應スル角ガ相等シイトキニハ、コノ二ツノ多角形ハ相似デアルトイフ。

邊數相等シイ正多角形ノ相似ナルコト及ビ合同ナ二ツノ多角形ノ相似ナルコトハイフマデモナイ。

二ツノ圖形 P, Q ノ相似ナルコトヲ記號デ

P ∽ Q

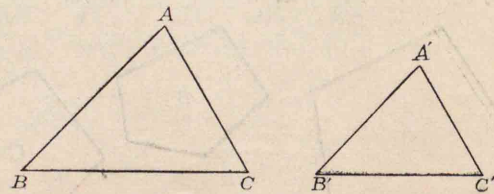
ト書ク。

P, Q, R 三ツノ圖形ガアツテ P ∽ Q, Q ∽ R ナラバ P ∽ R ナルコトハ明デアル。

相似形ノ研究ニハ、合同ナ圖形ノ場合ニ於ケルト同ジク、三角形ノ相似ニ關スル研究ガ基礎トナル。

16. 三角形ノ相似

與ヘラレタ三
角形 ABC ト相似
ナ三角形 A'B'C'
ヲ作ルニハ、



i] 一角例ヘバ ∠B' ヲ ∠B ニ等シクトリ、且

AB : A'B' = BC : B'C' ナラシメルカ、

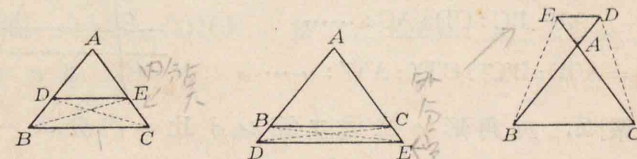
ii] BC : B'C' ヲ任意ニ定メ、∠B = ∠B', ∠C = ∠C' ナルヤウニスルカ、

iii] AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A' ナラシメルカスレバヨイトイフコトハ、既ニ認メテ來タコトデアルガ、次ニコレ等ノ證明ヲシヨウ。シカシ、コレニハ先ヅ次ノ定理ヲ證明スル必要ガアル。

定理 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ハ、他ノ二邊ヲ同ジ比ニ内分又ハ外分スル。

△ABC ノ一邊 BC ニ平行ナ直線ガ、邊 AB, AC 又ハソノ延長ト交ル點ヲ、ソレゾレ D, E トスレバ

AD : DB = AE : EC



[證明] B, E ヲ結ベバ、△ADE ト △DBE トハ頂點 E ニ對スル高サヲ等シクスルカラ

AD : DB = △ADE : △DBE

又 C, D ヲ結ベバ、同様ニ

AE : EC = △AED : △ECD

トコロガ、△DBE ト △ECD トハ、邊 DE ヲ共有シ

Handwritten notes on the right margin: 三角形に於て... 底邊に平行な直線は... 相似な三角形を形成する...

ノ邊ニ對スル高サヲ等シクスルカラ、

$$\triangle DBE = \triangle ECD$$

故ニ $\triangle ADE : \triangle DBE = \triangle AED : \triangle ECD$

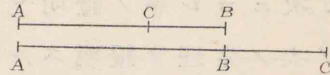
依ツテ $AD : DB = AE : EC$

【注意】 點Cガ線分ABノ上ニアルトキハ、CハABヲ内

分スルトイヒ、延長上ニ

アルトキハ外分スルト

イフ。



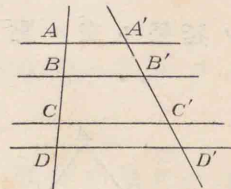
【系1】 三ツ以上ノ平行線ガ一ツノ截線カラ截取
ル線分ノ比ハ、他ノ截線カラ截取ル線分ノ比ニ等シ
イ。

例ヘバ圖ニ於テ、AA', BB', CC',

DD'ヲ一組ノ平行線トスレバ、

$$AB : BC : CD : AC : \dots$$

$$= A'B' : B'C' : C'D' : A'C' : \dots$$



【系2】 三角形ノ二邊ヲ等シイ比ニ内分(又ハ外分)
スル點ヲ結ブ直線ハ、第三邊ニ平行デアアル。

【注意】 系2ニ於テ二邊ヲ等シイ比ニ内分(又ハ外分)スル

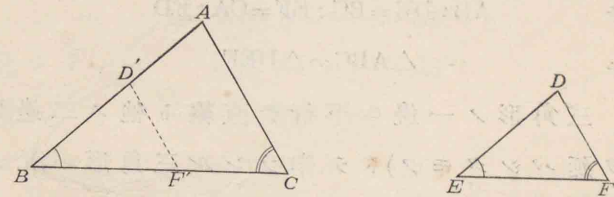
點トハ、ソノ二邊ノ交點カラ第三邊ニ向ツタトキ分點

ガ共ニソノ向キニアルカ、又ハ共ニソノ反對ノ向キニ

アルコトヲ意味スルモノトスル。(前頁ノ圖參照)

17. 三角形ノ相似ノ定理

定理 二ツノ三角形ニ於テ二ツノ角ガ
ソレゾレ相等シイトキハ、コノ二ツノ三
角形ハ相似デアアル。



$\triangle ABC, \triangle DEF$ ニ於テ、

$$\angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$$

ナラバ

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

【證明】 $\triangle ABC, \triangle DEF$ ニ於テ、 $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

デアアルカラ

$$\angle A = \angle D$$

即チ三ツノ角ハソレゾレ相等シイ。

次ニ、BA, BCノ上ニソレゾレD', F'ヲ、 $BD' = ED,$

$BF' = EF$ ナルヤウニトリ、D', F'ヲ結ベバ、明ニ

$$\triangle D'BF' \cong \triangle DEF$$

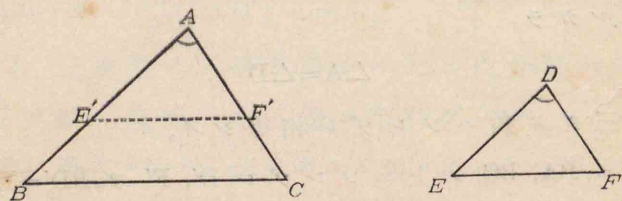
從ツテ $\angle BF'D' = \angle EFD = \angle BCA$

依ツテ $D'F' \parallel AC$

故ニ $BD' : D'A = BF' : F'C$
 從ツテ $BD' : BA = BF' : BC$
 故ニ $DE : AB = EF : BC$
 同様ニ $EF : BC = FD : CA$
 故ニ $DE : AB = EF : BC = FD : CA$
 即チ $AB : DE = BC : EF = CA : FD$
 故ニ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

[系] 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ト他ノ二邊(又ハソレヲ延バシタモノ)トデ作ラレル三角形ハ、元ノ三角形ト相似デアル。

定理 ニツノ三角形ニ於テ、一角ガ相等シク、ソノ角ヲ夾ム二邊ノ比ガ相等シイトキハ、コノニツノ三角形ハ相似デアル。



$\triangle ABC, \triangle DEF$ ニ於テ
 $\angle A = \angle D, AB : DE = AC : DF$

ナラバ

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

三ツノ角ガ等シ
 ニツノ邊ノ比ガ等シ
 三ツノ角ガ等シ
 第二章 相似形

[證明] AB, AC ノ上ニ、ソレゾレ點 E', F' ヲ
 $AE' = DE, AF' = DF$

ナルヤウニトルト、明ニ

$\triangle AE'F' \equiv \triangle DEF$

サテ $AB : DE = AC : DF$ デアルカラ

$AB : AE' = AC : AF'$

從ツテ $E'B : AE' = F'C : AF'$

故ニ $E'F' \parallel BC$

依ツテ $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$

故ニ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

定理 ニツノ三角形ニ於テ、三ツノ邊ノ比ガ相等シイトキニハ、コノニツノ三角形ハ相似デアル。

$\triangle ABC, \triangle DEF$

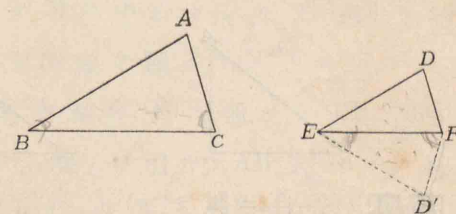
ニ於テ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

ナルトキハ

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

[證明] EF ヲ一邊トシテ $\triangle D'E'F'$ ヲ $\angle D'E'F' = \angle ABC$
 $\angle D'F'E' = \angle ACB$ ナルヤウニ作ル。サウスルト



$$\triangle ABC \sim \triangle D'EF$$

故ニ $\frac{AB}{D'E} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD'}$

然ルニ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

故ニ $D'E=DE, FD'=FD$

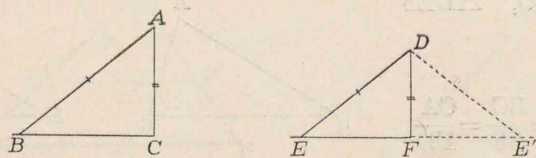
$\triangle D'EF, \triangle DEF$ ハ三邊ヲ相等シクスルカラ

$$\triangle D'EF \equiv \triangle DEF$$

依ツテ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

合同ノ定理ヲ證明スル場合ニ倣ヘバ、次ノ定理モ亦容易ニ證明出來ル。

定理 ニツノ直角三角形ニ於テ、斜邊ノ比ト他ノ一邊ノ比トガ相等シイトキハ、コノニツノ直角三角形ハ相似デアル。



[證明] (各自ニ試ミヨ)

練習題

1. 相似三角形ノ對應スル頂點ヲ通ル高サノ比ハ

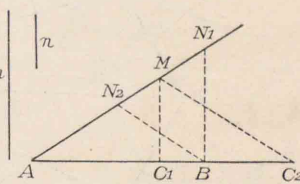
對應邊ノ比ニ等シイ。

2. 相似三角形ノ中線、角ノ二等分線ニツイテモ、(1)ニ於ケルト同様ノ定理ガ成立ツ。

18. 線分ヲ定比ニ分ツコト

作圖題 與ヘラレタ線分ヲ與ヘラレタ二線分ノ比 (略シテ單ニ與ヘラレタ比又ハ定比トモイフ) ニ内分及ビ外分スルコト。

AB, m, n ヲ與ヘラレタ線分トシ、ABヲ $m:n$ ニ内分及ビ外分シヨウ。



[作圖] Aヲ通り ABトハ

合シナイ任意ノ直線ヲ引キ、ソノ上ニ M ヲトツテ $AM=m$ ナラシメ、次ニ M ヲ中心トシ n ヲ半径トシテ圓ヲ畫キ直線 AM ト出會フ點ヲ N_1, N_2 トスル。

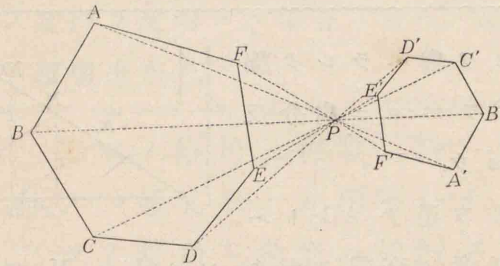
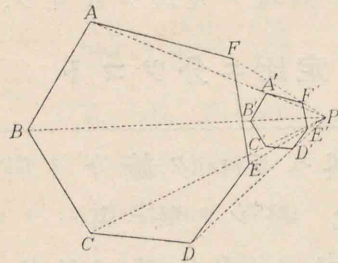
ソシテ B ト N_1, N_2 ヲ結ビ、M ヲ通ツテ BN_1, BN_2 ニソレゾレ平行ニ MC_1, MC_2 ヲ引キ、AB 又ハソノ延長ト交ル點ヲ、ソレゾレ C_1, C_2 トスレバ、 C_1, C_2 ハ求メル分點デアル。

[證明] (各自ニ試ミヨ)

[注意] 内分點ハ常ニ唯一ツアリ、外分點ハ、 $m=n$ ナルト

キノ外ハ常ニ唯一ツアル

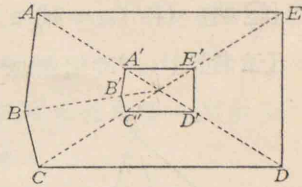
19. 相似多角形



定理 多角形ノ各頂點ト一定點トヲ結
 ブ直線上ニ一點ヲトリ、コノ點ト頂點ト
 デ限ラレタ線分ガ、ソノ一定點デ一定ノ
 比ニ外分(又ハ内分)サレルヤウニスルト、
 コレ等ノ點ハ、元ノ多角形ト相似ナ多角
 形ノ頂點ヲナス。

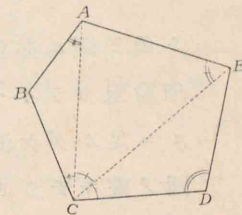
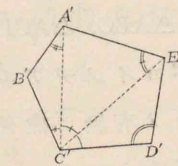
[證明] (各自ニ行へ)

【注意】 田畑ヤ敷地ノ圖面ヲ描
 クノニ、或地點ヲ定メテ、ソノ
 點カラ要所要所ニ至ル距離
 ヲ測リ、方向ヲ見定メテ、コレ
 ヲ一定ノ縮尺デ描クコトガアル。(圖参照)



作圖題 與ヘラレタ線分ヲ一邊トシテ、
 與ヘラレタ多角形ト相似ナ多角形ヲ作
 ルコト。

ABCDE ヲ與ヘ
 ラレタ多角形、
 C'D' ヲ與ヘラレ
 タ線分トシ、且
 C'D' ハ CD ニ對應



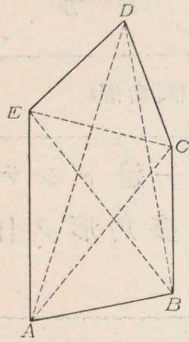
スルモノトシテ ABCDE ト相似ナモノヲ作ラウ。

【作圖】 $\angle D'C'E' = \angle DCE$, $\angle E'D'C' = \angle EDC$ ナルヤウ
 ニシテ三角形 ECD ト相似ナ三角形 E'C'D' ヲ作り、同
 ジヤウニシテ C'E' ノ上 $\triangle E'C'D'$ ト反對ノ側ニ $\triangle A'C'E'$
 ヲ $\triangle ACE$ ト相似ニ作り、又 A'C' ノ上 $\triangle A'C'E'$ ト反對
 ノ側ニ $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ト相似ニ作ル。

サウスレバ多角形 A'B'C'D'E' ハ、所要ノ多角形デ
 アル。

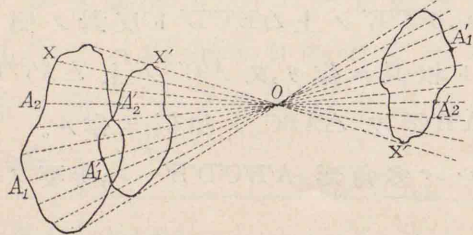
【證明】(各自ニ試ミヨ)

【注意】(1) 田畑敷地ナドノ面積ヲ測ルノニ、先ツソレノ縮圖ヲ作ツテ圖上デ求メルコトガアル。ソノ時ヨク用ヒラレル方法ハ、先ツソノ地面ノ形ヲ決定スルニ足ル主要點間ノ距離ダケヲ測リ、ソレ等ノ長サヲ一定ノ割合ニ縮メテ、例ヘバ圖ノ如キ形ノ地面ナラバ、先ツ $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ ト相似ナモノヲ作ル方法デアアル。カウスルト角ヲ測ル必要ガナクテ便利ナノデアアル。

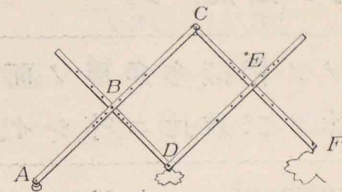


理論上カライヘバ、 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ ヲ決定スルニ足ルダケ測レバヨイノデアアルガ、測リチガヒトカ、圖ノ畫キチガヒトカノ有無ヲ検査スルタメニ餘分ノモノヲモ測ルノデアアル。

(2) 一般ニ一ツノ圖形 X ガアツテ、一定點 O カラ X 上ノ任意ノ點 A へ引イタ直線 OA 上、O へ關シテ A ト同ジ側(又ハ反對ノ側)ニ點 A' ヲトリ、比 $OA : OA'$ ヲ一



定ノ比 $m:n$ ニ等シカラシメルトキ點 A' ノ畫ク曲線ヲ X' トスレバ、X ト X' トハ相似ニナル。ばんとぐらふ(Pantograph) 即チ、圖形伸縮器(次圖参照)ハ、コノ原理ニ基イテ作ラレテキル。

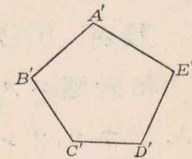
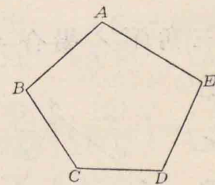


20. 相似形ノ周ノ比

定理 二ツノ相似多角形ノ周ノ比ハ、對應邊ノ比ニ等シイ。

$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$

トハ相似ナ多角形デ、A, B, C, D, E ガ、ソレゾレ A', B', C', D', E' ニ對應スルナラバ、



$$\frac{ABCDE \text{ノ周}}{A'B'C'D'E' \text{ノ周}} = \frac{AB}{A'B'}$$

【證明】 假設ニヨリ $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ デアルカラ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

$$\text{故} = \frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\text{即チ} \quad \frac{\text{ABCDEノ周}}{\text{A'B'C'D'E'ノ周}} = \frac{AB}{A'B'}$$

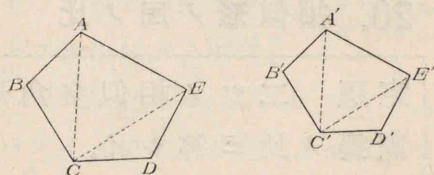
21. 相似形ノ面積ノ比

定理 ニツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ、
 對應邊ノ比ノ二乗比ニ等シイ。

ABCDE ト A'B'C'D'E' トハ相似ナ多角形デ、A, B, C, D, E ハソレゾレ A',

B', C', D', E' = 對應ス
 ルモノトスルト、

$$\frac{\text{ABCDE}}{\text{A'B'C'D'E'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$



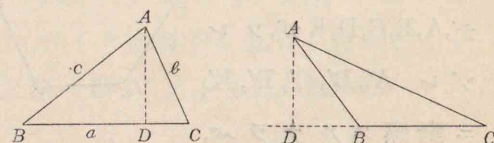
[證明] i) 先ヅ三角形ノ場合ニツイテ證明スル。

相對應スル頂點

A, A' カラ、ソレゾレ

ノ對邊 BC, B'C' = 垂

線 AD, A'D' ヲ引ク。



サウスルト、 $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ ナルコトハ明デアル。

$$\text{故} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\text{サテ} \quad \triangle ABC \text{ノ面積} = \frac{1}{2} BC \cdot AD$$

$$\triangle A'B'C' \text{ノ面積} = \frac{1}{2} B'C' \cdot A'D'$$

$$\text{故} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{BC \cdot AD}{B'C' \cdot A'D'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right) \left(\frac{AD}{A'D'}\right)$$

$$\text{依ツテ} \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

ii) 次ニ一般ノ多角形ニ移ラウ。(便宜上五角形ニツイテ證明スルガ、如何ナル多角形ニモ推及ボスコトガ出來ル)

C ト A, E ヲ結ビ、C' ト A', E' ヲ結ブト

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \quad \triangle ACE \sim \triangle A'C'E', \quad \triangle ECD \sim \triangle E'C'D'$$

デアル。(何故カ)

$$\text{故} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

$$\frac{\triangle ACE}{\triangle A'C'E'} = \left(\frac{AE}{A'E'}\right)^2 = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

$$\frac{\triangle ECD}{\triangle E'C'D'} = \left(\frac{ED}{E'D'}\right)^2 = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

$$\text{依ツテ} \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\triangle ACE}{\triangle A'C'E'} = \frac{\triangle ECD}{\triangle E'C'D'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

$$\text{從ツテ} \quad \frac{\triangle ABC + \triangle ACE + \triangle ECD}{\triangle A'B'C' + \triangle A'C'E' + \triangle E'C'D'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

$$\text{即チ} \quad \frac{\text{ABCDE}}{\text{A'B'C'D'E'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

[注意] (1) ニツノ量 A, B ノ數値ヲ a, b トスルトキ、 $a^2 : b^2$

ヲ $A:B$ ノ二乗比トイヒ、 $(A:B)^2$ 又ハ $\left(\frac{A}{B}\right)^2$ ト書ク。

(2) $ABCDE$ ノ面積ト $A'B'C'D'E'$ ノ面積トノ比ヲ略記シテ $ABCDE:A'B'C'D'E'$ 又ハ $\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}$ ト書ク。

(3) 曲線形ノ周及ビ面積ハ、ソレニ内接スル多角形ヲ適當ニトリサヘスレバ、如何ホドデモ精密ニ求メルコトガ出來ル。故ニ相似ナ曲線形ノ周ノ比及ビ面積ノ比ハ、ソレゾレ相似ナ多角形ノ周ノ比及ビ面積ノ比ヲ以テ代表サセルコトガ出來、從ツテ對應スル線分ノ比及ビソノ二乗比ニ等シトイヘル。

練習題

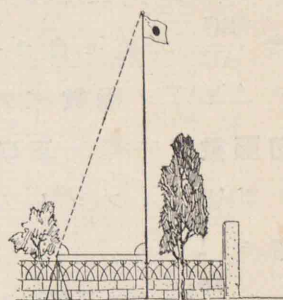
1. 三邊ガソレゾレ平行(又ハ垂直)ナ二ツノ三角形ハ相似デアル。
2. 三角形ノ底邊ニ平行デ、他ノ二邊ノ間ニアル線分ハ底邊ノ中點ヲ通ル中線デ二等分サレル。
3. 與ヘラレタ半圓ノ直徑上ニ一邊ヲ有シ、二頂點ガ半圓ノ周上ニアル正方形ヲ作レ。(コノ場合正方形ハ半圓ニ内接スルトイフ)
4. 與ヘラレタ矩形ト相似ナ矩形ヲ、與ヘラレタ三角形ニ内接サセヨ。(矩形ノ二頂點ハ三角形ノ一邊ノ上ニ他ノ二頂點ハ三角形ノ他ノ二邊ノ上ニアルヤウニスルコト)
5. 與ヘラレタ矩形ト相似ナ矩形ヲ、與ヘラレタ弓

形ニ内接サセヨ。

第三章 三角函數

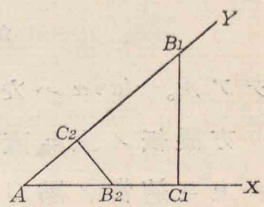
22. 正切

例ヘバ、旗竿ノ高サヲ測ラウトシテ、旗竿マデノ距離 $7.6m$ 、眼ノ高サ $1.2m$ 、竿頭ノ仰角 78° ヲ得



タトスルナラバ、適當ノ縮圖ヲ畫クコトニ依リ、圖上デ旗竿ノ高サガ知ラレル。シカシコレハ又、圖ヲ畫カナクト

モ計算ニ依ツテ求メルコトガ出來ル。今任意ノ銳角 XAY ノ邊 AX 、或ハ AY ノ上ニ點 B ヲトリ、コレカラ他ノ邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ C トスルト、 $\frac{BC}{AC}$ ハ角 XAY ガ變レバソ



レニ伴ツテ變ルガ、角 XAY ノ一定ナル限リハ、 B ノ位置如何ニカカハラズ一定デアル。即チ AX 及ビ C ヲ固定シ、 AY ヲ動かセバ AC ガ一定ナルニモカカハラズ BC ノ大サハ變ルカラ $\frac{BC}{AC}$ ハ變ル。シカシ AX 、 AY ヲ固定シテ B ヲ動かシタトキ、 BC ノ占メル任

意ノ二ツノ位置ヲ B_1C_1, B_2C_2 トスルナラバ,

$$\triangle B_1C_1A \sim \triangle B_2C_2A$$

從ツテ $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$ 即チ $\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2}$

デアルカラ, $\angle XAY$ ノ大サガ定マレバ, ソレニ伴ツテ比 $\frac{BC}{AC}$ ノ値モ自ラ一定スル。コノコトヲ, 比 $\frac{BC}{AC}$ ハ $\angle XAY$ ノ函数デアルトイフ。而カモ $\angle XAY$ ノ正切函数又ハ單ニ正切 (*tangent*) トイフ。ツシテ $\angle XAY$ ノ正切トイフコトヲ $\tan XAY$ 又ハ $\tan A$ ト書ク。

即チ

$$\frac{BC}{AC} = \tan XAY \text{ 又ハ } \tan A$$

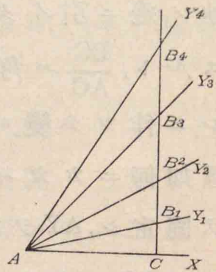
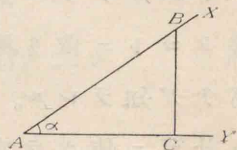
或ハ角 XAY ノ大サヲ α ト記スト

キハ

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC}$$

デアル。 $\tan \alpha$ ハたんぜんとあるふあト讀ム。

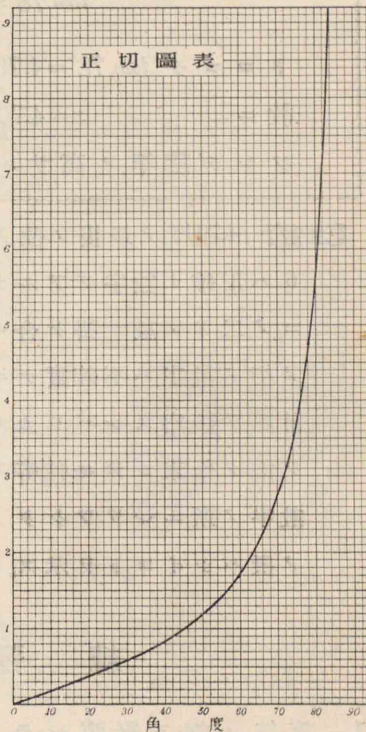
方眼紙ノ上ニ直線 AX ヲ引キ, ソノ上ニ適當ノ點 C ヲトリ, C ニ於テ垂線 CB_1 ヲ引イテ, AX ト例ヘバ $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, \dots$ ノ角ヲナス直線 $AY_1, AY_2, AY_3, AY_4, \dots$ ト CB_1 トノ交リヲソレゾレ $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ トスルナラバ, ソレニ依ツテ $\tan 5^\circ, \tan 10^\circ, \tan 15^\circ, \tan 20^\circ, \dots$ ノ値



ガ得ラレル(各自ニ求メヨ) シカシ, ソノ精密ナ値ノ計算ハ, 特殊ナモノヲ除ケバ, スベテ高等數學ノ方法

ニ依ラナケレバ出來ナイ。ソレデ實用ニハ表ヲ用ヒル。卷末ニ掲ゲタ表 V ニハ, 角ノ大サガ 1° カラ 1° ズツ増ス毎ニ正切ノトル値ヲ示シテアル。コレヲ圖表ニ表ハセバ右ニ示スヤウナモノトナル。

表ニ依ツテ, 例ヘバ $\tan 42^\circ$ ヲ知ラウト思ヘバ, 左端ノ欄デ 42 トイフ數ヲ見出シ, ソノ右正切ノ欄内ニアル數字ヲ見レバヨイ。即チ



$$\tan 42^\circ = 0.9004$$

デアル。($A=0^\circ$ ノトキハ $\tan A=0$ トスル。)

本節ノ最初ニ掲ゲタ問題ヲ計算ニ依ツテ解クニハ, 次ノヤウニスル。

旗竿ノ眼カラ上ノ長サヲ xm トスレバ,

$$\tan 78^\circ = \frac{x}{7.6}$$

トコロデ $\tan 78^\circ = 4.7046$

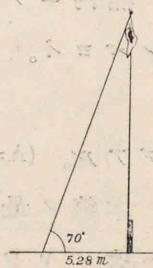
故ニ $x = 4.7046 \times 7.6 = 35.75496$

ソレデ旗竿ノ高サハ $35.8m + 1.2m = 37.0m$

【注意】 4.7046 ノ最後ノ位ノ數字 6 及ビ 7.6 ノ最後ノ數字 6 ハ正確ナ數字デアルカドウカラナイ。從ツテ
 コノ二ツノ數ヲ掛ケ合セテ得タ結果ニ於ケル右ノ方
 ノ桁ノ數字ハ不確實ナモノデアル。ソノコトハ次ノ
 計算ヲ觀察スレバワカル。ソレデ上 $\begin{array}{r} 47046 \\ \times 7.6 \\ \hline 282276 \\ 329322 \\ \hline 3575496 \end{array}$
 ノ如ク仕末シテモ何等不都合ハナイ。
 數字ノ頭ニハツケタノハソノ數字
 ノ疑ハシイコトヲ示ス。

練習題

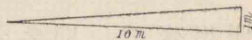
- 旗竿ノ綱ヲ緊張シテソノ端ヲ竿ノ根元カラ $5.28m$ 距タル地面ニツケ
 タトキ綱ノ地面トナス角ガ 70° デア
 ツタトイフ。旗竿ノ高サ幾何カ。



- 長サ $7m$ ノ柱ヲ平地ニ直立サシタ
 トキ、ソノ柱ノ地上ニ投ジタ影ノ長サガ $5.8m$ ア

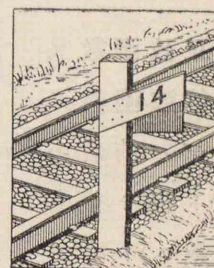
ツタトイフ。太陽ノ高サヲ求メヨ。[太陽ノ高
 サトハ、太陽ヲ點ト考へ、コノ點ト眼トヲ結ブ直
 線ノ水平面トナス角ヲイフ。上ノ場合ニハ地
 面ヲ水平面ト考ヘル]

- 水平ニ $10m$ 進ム毎ニ $1m$ 上ル坂路ガアル。コ
 ノ坂路ノ傾斜角ヲ求メヨ。

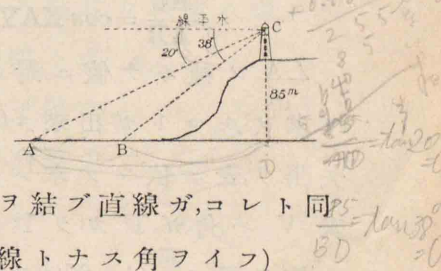


[坂路ト水平面トノナス角ヲソノ坂路ノ傾斜角
 トイフ]

【注意】 鐵道線路ノ傍ニ立ツテキル圖
 ノ如キ白塗ノ示標ハ線路ノ勾配ヲ
 示スモノデ、數字ハ線路 $1km$ ニツキ
 幾米高クナツテキルカ又ハ低クナ
 ツテキルカラ示ス。



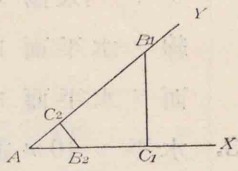
- 海拔 $85m$ ノ燈臺ニ立ツテ、ソノ南ニアル二艘ノ
 船 A, B ヲ眺メタトキ、A
 船ノ俯角ハ 20° 、B 船ノ俯
 角ハ 38° デアツタ。A, B ノ
 距離ヲ求メヨ。(一點ノ
 俯角トハ、ソノ點ト眼トヲ結ブ直線ガ、コレト同
 一鉛直面内ニアル水平線トナス角ヲイフ)



23. 正弦及ビ餘弦

銳角 XAY ノ邊 AX 又ハ AY ノ上ノ任意ノ點 B カラ

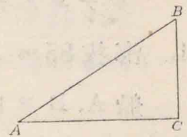
他ノ邊ニ垂線ヲ引イタトキ、比 $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ ヲトツテ考
 ヘルト、コレモ亦角 XAY ノ變ルニ
 伴ツテ變ルガ、角 XAY ガ定マリサ
 ヘスレバ B ノ位置ニカカハラズ
 一定デアルトイフコトハ容易ニ



證明出來ル。即チ $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ モ亦角 XAY ノ函數デア
 ル。コレ等ノ函數ヲ區別スルタメニ、 $\frac{BC}{AB}$ ヲ $\angle XAY$
 ノ正弦函數又ハ單ニ正弦 (*sine*) トイヒ、 $\frac{AC}{AB}$ ヲ $\angle XAY$
 ノ餘弦函數又ハ單ニ餘弦 (*cosine*) トイフ。ソシテ記
 號デハ、前者ハ $\sin XAY$ 又ハ $\sin A$ (さいん えーと讀
 ム)ト書キ、後者ハ $\cos XAY$ 又ハ $\cos A$ (こさいん えー
 と讀ム)ト書ク。即チ

$$\frac{BC}{AB} = \sin XAY \text{ 又ハ } \sin A$$

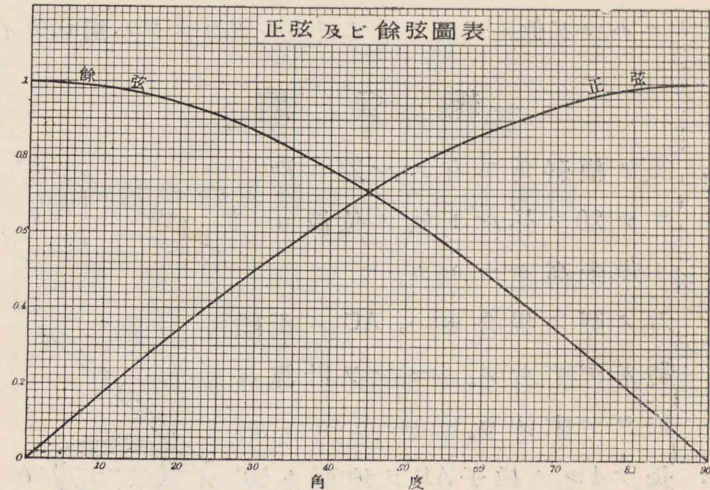
$$\frac{AC}{AB} = \cos XAY \text{ 又ハ } \cos A$$



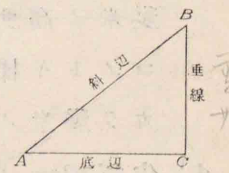
$\angle A$ ノ種々ナ値ニ對スル $\sin A$, $\cos A$ ノ値ハ、圖上デ
 モ求メルコトガ出來ル(各自ニ求メヨ)ガ精密ナ値ハ、
 矢張り、表ニ依ツテ求メネバナラス。卷末ニ掲ゲタ
 表 V ハ、角ガ 1° カラ 1° ズツ増ス毎ニ正弦、餘弦ノト
 ル値ヲ示ス。($A=90^\circ$ ノトキハ $\sin A=1$, $\cos A=0$, $A=0^\circ$
 ノトキハ $\cos A=1$, $\sin A=0$ トスル)。

正切ノ場合ト同ジク、コノ表ヲ圖表ニシテ示スト

次ニ掲ゲルヤウナモノトナル。[コノ圖表ハ、表ニ依
 ラズトモ種々ノ大サノ角ヲ作り、ソレノ正弦、餘弦ヲ
 圖上デ求メテ作ルコトガ出來ル]



一ツノ角 A ノ正弦、餘弦、正切ヲハツキリト區別シ
 テ憶エルニハ、ソノ一邊ノ上ノ點 B カラ他ノ邊ニ引
 イタ垂線 BC ヲソノママ垂線ト名
 ズケ、ソノ足 C ト角ノ頂點 A デ限ラ
 レタ線分 AC ヲ底邊、 AB ヲ斜邊ト
 呼ブコトトシ、



$$\sin A = \frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} \text{ 或ハ略シテ } \frac{\text{垂}}{\text{斜}}$$

$$\cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} \text{ 或ハ略シテ } \frac{\text{底}}{\text{斜}}$$

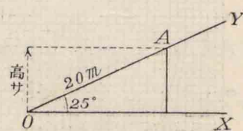
$$\tan A = \frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} \text{ 或ハ略シテ } \frac{\text{垂}}{\text{底}}$$

トイフ風ニスレバ憶エ易イ。

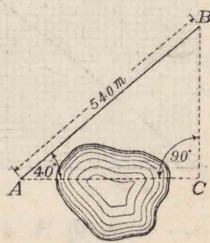
【注意】 正弦、餘弦、正切ヲ三角函數ト呼ブ。實ハ三角函數ニハ、マダ他ニ三ツアルノデアアルガ、ココデハ觸レナイ。

練習題

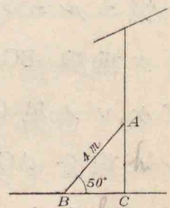
1. 25°ノ傾斜角ヲ有スル道ニ沿
ウテ 20m 昇ルト、始ノ位置ヨ
リ幾米高クナルカ。



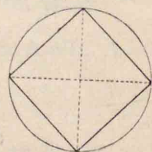
2. 右ノ圖ノ場合ニハ、ACノ距離
幾米デアアルカ。コレヲ計算ニ
依ツテ求メヨ。



3. 長さ 4mノ梯子 ABヲ地面ト 50°
ノ角ヲナスヤウニシテ壁ニモ
タセカケルト、上端(A)ハ地面カラ
幾米ノ高サノトコロニ達スルカ。
コノトキ梯子ノ下端(B)ハ、壁(AC)
カラ幾米ノトコロニアアルカ。



4. 半径 12cmノ圓ニ内接スル正方形ノ
一邊ノ長ヲ求メヨ。



5. 半径 10cmナル圓ニ於テ、50°ノ中心角
ニ對スル弦ノ長ヲ求メヨ。又中

心カラコノ弦ニ至ル距離ヲ求メヨ。

6. 100mニツキ 5mノ勾配ヲ有スル坂路ノ傾斜角
ヲ求メヨ。

第四章

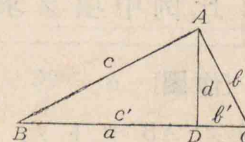
線分ノ平方關係

24. 直角三角形ニ於ケル比例線

定理 直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜
邊ニ垂線ヲ引クト、

- i] 垂線ハ、ソレニ依ツテ分タレタ斜
邊ノ分ノ比例中項デアリ、
- ii] 直角ヲ夾ム邊ハ、ソレゾレコレニ
隣ル斜邊ノ分ト斜邊トノ比例中
項デアル。

ABCハ $\angle A = \angle R$ ナル三角形、
ADハAカラ斜邊BCニ引イタ垂
線トスル。



BC, CA, AB, AD, BD, CDノ長サ

ヲ、ソレゾレ a, b, c, d, c', b'トスレバ、

$$i] \frac{b'}{d} = \frac{d}{c'} \quad ii] \frac{c'}{c} = \frac{c}{a}, \frac{b'}{b} = \frac{b}{a}$$

[證明] i] $\frac{d}{c'} = \tan B, \quad \frac{b'}{d} = \tan CAD = \tan B$

$\therefore \frac{b'}{d} = \frac{d}{c'}$

ii] $\frac{c'}{c} = \cos B, \quad \frac{c}{a} = \cos B$

$\therefore \frac{c'}{c} = \frac{c}{a}$

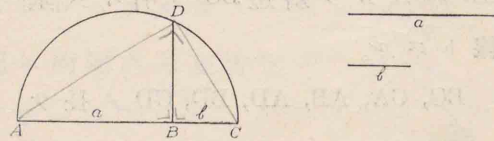
同様 = $\frac{b'}{b} = \frac{b}{a}$

[系] 半圓ノ弧ノ上ノ一點カラ直径ニ引イタ垂線ハ、ソレニ依ツテ分タレタ直径ノ分ノ比例中項デア
ル。

[注意] 三ツノ量(又ハ數) A, B, C ノ間ニ、 $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ ナル關係ガアルトキ、BヲAトCトノ比例中項トイフ。數bガ數a, cノ比例中項ナラバ、 $b^2 = ac$ ナルコトハ明デア
ル。

作圖題 與ヘラレタ二ツノ線分 a, b ノ比例中項ヲ求メヨ。

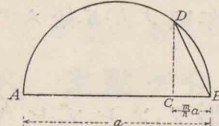
[作圖] a = 等シク AB ヲトリ、ソノ延長上ニ b 二等シク BC ヲトル。ソシテ AC ヲ直径トスル半圓周ヲ畫キ、Bニ於テ ACニ垂線ヲ引イテソノ圓周ト交



ル點ヲDトスル。サウスルト BD ガ求メル線分デア
ル。(證明ハ各自ニ行ヘ)

練習題

1. 與ヘラレタ矩形ト等積ナ正方形ヲ作レ。

2.  半圓 ADB ノ直径 AB ノ長サヲ a トシ、AB 上ニ C ヲ BC = $\frac{m}{n}a$ ナルヤウニトリ、Cニ於テ ABニ垂線ヲ引イテ、ソノ圓周ト出會フ點ヲDトスレバ、BDノ上ノ正方形ハ、ABノ上ノ正方形ノ $\frac{m}{n}$ 倍トナル。CD²ハAB²ノ幾倍トナルカ。

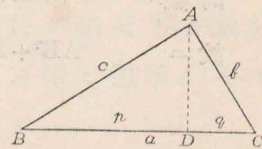
3. 與ヘラレタ正方形ノ3倍、又ハ4倍、又ハ $\frac{2}{3}$ 倍ノ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ。

25. ぴたごらすノ定理

定理 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ、他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シイ。

$\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A = \angle R$ ナルトキ、BC, CA, ABノ長サヲ、ソレゾレ a, b, c トスレバ

$a^2 = b^2 + c^2$



[證明] AカラBCニ引イタ垂線ノ足ヲDトシ、BD,

CDノ長ヲソレゾレ p, q トスルト

$$c^2 = ap, \quad b^2 = aq$$

故ニ $b^2 + c^2 = ap + aq = a(p+q) = a^2$

即チ $a^2 = b^2 + c^2$

【注意】 コノ定理ヲピタゴラスノ定理トイフ。ぎりしや
人ピタゴラス(西暦紀元前 500 年頃ノ人)ガ始メテ證明
シタトイハレテキル。

【別證】 AB, BC, CAノ上ノ正方形ヲ、ソレゾレ ABDE,
BCFG, CAHK トシ、直角ノ頂點 A カラ BCニ垂線 AM
ヲ引キ、ソノ延長ト GFトノ交點ヲ N トスル。

C, Dヲ結び、A, Gヲ結ブト、

$\triangle GAB, \triangle CDB$ ニ於テ

$$BG = BC, \quad BA = BD, \quad \angle GBA = \angle CBD$$

故ニ $\triangle GAB \cong \triangle CDB$

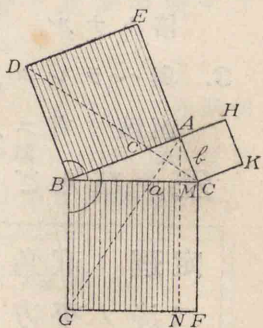
然ルニ $AB^2 = 2\triangle CDB$

$$BG \cdot BM = 2\triangle GAB$$

故ニ $AB^2 = BG \cdot BM$

同様ニ $AC^2 = CF \cdot CM$

故ニ $AB^2 + AC^2 = BG \cdot BM + CF \cdot CM$
 $= BG(BM + CM) = BC^2$



練習題

1. ぴたごらすノ定理ヲ利用シテ、面積ガ與ヘラレ
タ正方形ノ2倍, 3倍, 又ハ4倍アル正方形ヲ作レ
2. 與ヘラレタニツノ正方形ノ和ニ等シイ正方形
及ビ差ニ等シイ正方形ヲ作レ。

26. 定點デ分タレタ弦ノ分ノ積

定理 一定圓ノ弦ガ、定點デ内分又ハ外
分サレテキルトキハ、コノ弦ノ分ノ積ハ
常ニ一定デアアル。

AB, CDハ、定點

Pデ内分又ハ外
分サレテキルト

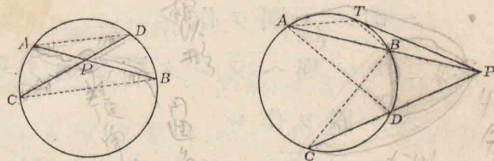
コノ任意ノ二

ツノ弦デアルトスルト、 $AP \cdot BP = CP \cdot DP$

【證明】 (AD, BCヲ結ンデ各自ニ證明ヲ試ミヨ)

【系】 二線分又ハソノ双方ノ延長ガ相交リ、各線分
ノソノ交點デ分タレタニツノ分ノ積ガ相等シイト
キハ、二線分ノ端ハ同一圓周上ニアル。

定理 圓外ノ一點カラコレニ引イタ切



線ノ平方ハ、コノ點ヲ通ル弦ノコノ點デ
外分サレタ分ノ積ニ等シイ。

[證明] (前圖ニ於テ $PT^2=PA \cdot PB$ ナルコトヲ示セ)

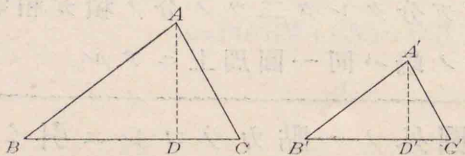
[系] 圓外ノ一點カラソノ圓周マデ引イタ線分ノ
平方ガ、ソノ點ヲ通ル弦ノコノ點デ分タレタ二ツノ
分ノ積ニ等シイトキハ、ソノ線分ハ圓ニ切スル。

練習題

1. 相交ル二圓ノ交點ヲ結ブ直線上ノ任意ノ點カラ、コノ二圓ニ引イタ切線ノ長サハ相等シイ。
2. 與ヘラレタ二ツノ點ヲ通り且與ヘラレタ直線ニ切スル圓ヲ作レ。
3. 二ツノ與ヘラレタ點ヲ通り與ヘラレタ圓ニ切スル圓ヲ作レ。
4. 三角形 ABC ニ於テ邊 BC, CA, AB ノ長サヲ、ソレゾレ a, b, c スルナラバ

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad (B < 90^\circ)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 + 2ca \cos (180^\circ - B) \quad (B > 90^\circ)$$

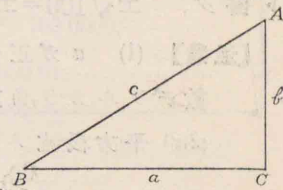


第三篇
二次方程式

第一章
平方根

27. 平方根

直角三角形 ABC ノ斜邊ヲ c ,
他ノ二邊ヲ a, b トスルトキ,
例ヘバ, $a=376\text{cm}$, $b=282\text{cm}$ ナル
コトガワカツテキルナラバ,



$$c^2 = 376^2 + 282^2$$

即チ $c^2 = 141376$

ナル方程式ガ得ラレルガ、コレヲ解クニハ 141376 ノ
平方根ヲ求メルコトガ出来ネバナラス。ソコデ次
ニハ、與ヘラレタ數ノ平方根ヲ求メル方法ニツイテ
考究シヨウ。

「平方根」トイフコトヲ示スニ記號 $\sqrt{\quad}$ ヲ用ヒル。
コノ記號ヲ平方根號トイフ。

例ヘバ、100 ハ 10 又ハ -10 ノ平方デアルカラ、100 ノ
平方根ハ、10 及ビ -10 デアル。ソレデ

100 ノ平方根ノ正ノ方ハ $\sqrt{100}$

負ノ方ハ $-\sqrt{100}$

ヲ以テ表ハス。即チ

$$\sqrt{100}=10, -\sqrt{100}=-10$$

トスル。

$\sqrt{100}$ ハ「平方根100」, $-\sqrt{100}$ ハ「まゐなす平方根100」

ト讀ム。

100ノ平方根ノ兩方ヲ表ハシタイトキハ、 $\pm\sqrt{100}$

ト書ク。 $\pm\sqrt{100}=\pm 10$ デアル。土ヲ複號トイフ。

【注意】 (1) a ガ正負ノ如何ナル數デアラウトモ、 a^2 ハ正數デアルカラ、負數ノ平方根ハ存在シナイ。

(2) 平方根號ノ用方カラワカルヤウニ、

$$a > 0 \text{ ナラバ } \sqrt{a^2} = a$$

デアルガ

$$a < 0 \text{ ナラバ } \sqrt{a^2} = -a$$

デアル。

(3) 一ツノ數或ハ式ガ、三ツノ相等シイ因數ニ分タレルトキハ、コノ因數ヲソノ立方根又ハ三乗根トイヒ、

$\sqrt[3]{\quad}$ ヲ用ヒテ表ハス。 $\sqrt[3]{\quad}$ ヲ立方根號トイフ。

例 $8=2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \therefore \sqrt[3]{8}=2$

$$-8=(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \quad \therefore \sqrt[3]{-8}=-2$$

28. 開平方

或數ノ平方根ヲ求メルコトヲソノ數ヲ平方ニ開クトイヒ、ソノ算法ヲ開平方或ハ開平トイフ。平方

根二ツノ中、正ノ方ヲ求メレバ、負ノ方ハ唯ダ前者ノ符號ヲ變ヘルダケデ得ラレルカラ、本節デハ正ノ方ヲ求メルコトヲ目的トシテ考究ヲ進メル。

例 1296ノ平方根ヲ求メヨ。

第一ニ、求メヨウトスル平方根ノ首位、即チ最モ上ノ位ガ何デアルカヲ定メル。

コレニハ次ノ觀察ヲ行フ。

$$1^2=1, 10^2=100, 100^2=10000, 1000^2=1000000, \dots$$
$$0.1^2=0.01, 0.01^2=0.0001, 0.001^2=0.000001, \dots$$

1) 一ノ位カラ始マル數、例ヘバ 7, 2.56, 8.325ノ

如キ數ノ平方ノ首位ハ何ノ位カ。

2) 十ノ位カラ始マル數、例ヘバ 12, 14.56, 72.856ノ

如キ數ノ平方ノ首位ハ何ノ位カ。

3) 百ノ位カラ始マル數、例ヘバ 125, 562.5, 892.574ノ

如キ數ノ平方ノ首位ハ何ノ位カ。

4) 有効數字ノ首位ガ小數第一位ニアル數、例ヘ

バ 0.235, 0.927ノ如キ數ノ平方ノ有効數字ノ

首位ハ何ノ位カ。

5) 有効數字ノ首位ガ小數第二位ニアル數、例ヘ

バ 0.057, 0.0926ノ如キ數ノ平方ノ首位ハ何ノ

* 0ナラザル數字ノコトヲ有効數字トイフ。

位カ。
以上ノ観察ノ結果カラ、逆ニ次ノコトガイヘル。

整数部分ガ

- 一桁又ハ二桁ノ數ノ
平方根ノ首位ハ一ノ位
- 三桁又ハ四桁ノ數ノ
平方根ノ首位ハ十ノ位
- 五桁又ハ六桁ノ數ノ
平方根ノ首位ハ百ノ位
-

小數ノ有効數字ノ首位ガ

- 小數第一位又ハ第二位ニアル數ノ
平方根ノ首位ハ小數第一位
- 小數第三位又ハ第四位ニアル數ノ
平方根ノ首位ハ小數第二位
- 小數第五位又ハ第六位ニアル數ノ
平方根ノ首位ハ小數第三位
-

ソレデ、或數ノ平方根ノ整数部分ノ桁數ハ、ソノ數
ノ一ノ位カラ左ニ二桁ヅツ區切ルコトニ依ツテ知
ラレ、小數ノ平方根ノ有効數字ノ首位ハ、小數點カラ
右ニ二桁ヅツ區切ルコトニ依ツテ知ラレル。

最初ノ例ニツイテイヘバ、 $12|96$ ト二ツニ區切ラ
レルカラ、コレノ平方根ノ整数部分ハ二桁デアル。
同様ニ、例ヘバ 1521 , 12544 , 13786.52 , 0.005634 , 0.0000324
ニツイテイヘバ

- $15|21$ (整数部分二桁) $1|25|44$ (整数部分三桁)
- $1|37|86.52$ (整数部分三桁)
- $0.00|56|34$ (有効數字ノ首位小數第二位)
- $0.00|00|32|4$ (有効數字ノ首位小數第三位)

第二ニ、各位ノ數字ヲ定メネバナラナイ。先ヅ首
位ノ數字ヲ定メルコトカラ始メル。 1296 ノ平方根
ノ整数部分ハ二桁デ

$$30^2=900, \quad 40^2=1600$$

$$900 < 1296 < 1600$$

$$\text{即チ} \quad 30 < \sqrt{1296} < 40$$

デアルカラ、平方根ノ十ノ位ノ數字ハ3デアル。コ
ノ3ハ、 $12|96$ ト區切ツタ下キノ12ヨリハ小サナ平方
數ノ中デ最モ大キナ整数即チ9ノ平方根デアル。

次ニ一ノ位ノ數字ヲ定メヨウ。ソレニハ

$$1296 \equiv (30+x)^2$$

ヲ満足サセルヤウナ x ノ値ノ中デ、最モ大キナ整数
ヲトレバヨイ。即チ

$$1296 - 30^2 \equiv 2 \times 30x + x^2$$

$$\frac{1296-30^2}{2 \times 30} \cong x + \frac{x^2}{2 \times 30}$$

ヲ満足サセル x ノ値ノ中デ最大ノモノヲトレバヨイ。

トコロデ
$$\frac{1296-30^2}{2 \times 30} = \frac{396}{2 \times 30} = 6 \frac{36}{60}$$

デアルカラ、一ノ位ノ數字ハ 6 若シクハ 5 デアル。假ニ 6 トスレバ、 $(2 \times 30 + 6) \times 6 = 396$ トナリ、丁度 $1296 - 30^2 = 396$ ニ等シイ。故ニ 1296 ノ平方根(正ノ方)ハ 36 デアルトイフコトニナル。

求メル平方根ノ桁數ガ幾ツデアラウトモ、上ト同様ノ仕方ヲ續ケルノデアル。

平方根ヲ求メル原理ハ上ノ如クデアルガ、實際ノ運算ハ次ノ如クニスル。

$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 1296 \\ 9 \\ \hline 2 \times 30 + 6 \dots\dots 66 \quad 396 \dots\dots 1296 - 30^2 \\ 6 \quad 396 \dots\dots (2 \times 30 + 6) \times 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

(上ノ例ニ於ケル協書ハ説明ノタメノモノデアル。以下ノ例ニ於テモ同様デアル)。

尙ホ二三ノ例ヲ示シテ理解ヲ深メヨウ。

例 1. 28561 ノ平方根ヲ求メヨ。

	169	[驗]	169
	2 85 61		169
	1		1521
$2 \times 10 + 6 \dots\dots 26$	185	$\dots\dots 285 - 10^2$	1014
6	156	$\dots\dots (2 \times 10 + 6) \times 6$	169
$2 \times 160 + 9 \dots\dots 329$	2961	$\dots\dots 28561 - 160^2$	28561
9	2961	$\dots\dots (2 \times 160 + 9) \times 9$	
	0		

例 2. 0.8464 ノ平方根ヲ求メヨ。

	0.92	[驗]	0.92
	0.8464		0.92
	81		184
182	364		828
2	364		0.8464
	0		

例 3. 152.5225 ノ平方根ヲ求メヨ。

	12.35	[驗]	12.35
	1 52.52 25		12.35
	1		6175
22	52		3705
2	44		2470
243	852		1235
3	729		152.5225
2465	12325		
5	12325		
	0		

例 4. 3 ノ平方根ヲ求メヨ。

	1.73205	[驗]	1.73205
	3.00 00,00 00 00		1.73205
	1		866025
27	200		346410
7	189		519615
343	1100		1212435
3	1029		173205
3462	7100		2.9999972025
2	6924		27975
346405	1760000		3.0000000000
5	1732025		
	27975		

- 【注意】 (1) 例4ノヤウナ場合ニハ近似値デ満足セネバナラヌ。何レノ位マデ求メルカハ、ソノトキノ必要ニ依ル。
 (2) 例1, 2, 3ノ如キ場合ニハ開キ切レルトイヒ、例4ノ如キ場合ニハ開キ切レナイトイフ。

練習題

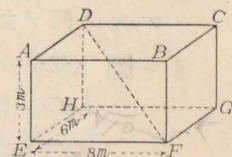
- 次ノ數ノ平方根ヲ求メヨ。(開キ切レナイノハ小數第三位マデ求メヨ)

① 1089	② 7396	③ 92.16
④ 0.4489	⑤ 3364	⑥ 62.41
⑦ 0.8464	⑧ 9801	⑨ 54756
⑩ 5	⑪ 125	⑫ 0.3
⑬ 8.643	⑭ 2	⑮ 18.7364
- 直角ヲ夾ム二邊ガ、ソレゾレ7cm, 12cmナル直角

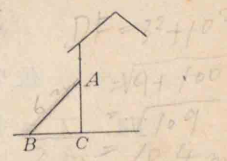
三角形ノ斜邊ノ長サヲ求メヨ。

- 一邊ノ長サガ5cmナル正方形ノ對角線ノ長サヲ求メヨ。

- 右ノ圖ニ示スヤウナ直方體ニ於テ、對角線DFノ長サヲ求メヨ。



- 長サ6mノ梯子(AB)ヲ下端(B)ヲ建物ノ壁カラ2mノトコロニオイテ壁ニモタセルナラバ、上端(A)ハ地面カラ幾米ノ高サノトコロニ達スルカ。



- 一邊ノ長サ6mノ正三角形ノ高サヲ計算セヨ。
- 一邊ノ長サ6cmノ正六角形ノ面積ヲ計算セヨ。
- 半径10cmノ圓ニ於テ、中心カラ5cmノ距離ニアル弦ノ長サヲ計算セヨ。
- 高サ700mノトコロカラ物體ヲ落スト、幾秒ノ後ニ地上ニ達スルカ。(s=4.9t²ニ依レ)
- 工學者、物理學者、測量家ソノ他實際家ハ、多ク表ヲ用ヒル。本書卷末ニ附ケテアル表IIIヲ用ヒテ、次ノ各ノ値ヲ求メヨ。

- | | | | |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① $\sqrt{17}$ | ② $\sqrt{22}$ | ③ $\sqrt{35}$ | ④ $\sqrt{78}$ |
| ⑤ $\sqrt{8.5}$ | ⑥ $\sqrt{12.6}$ | ⑦ $\sqrt{38.2}$ | ⑧ $\sqrt{65.7}$ |

【注意】 1カラ100マデノ間ノ數デ表中ニ掲ゲラレテキナ

イ數ノ平方根ヲ求メルニハ、ソノ數ノスグ次ニ來ル整數トコレニスグ先立ツ整數トノ間ニ於テハ數ニ於ケル差ト平方根ニ於ケル差トハ互ニ比例スルモノトミテ、次ノ例ノ如クニ計算スル。

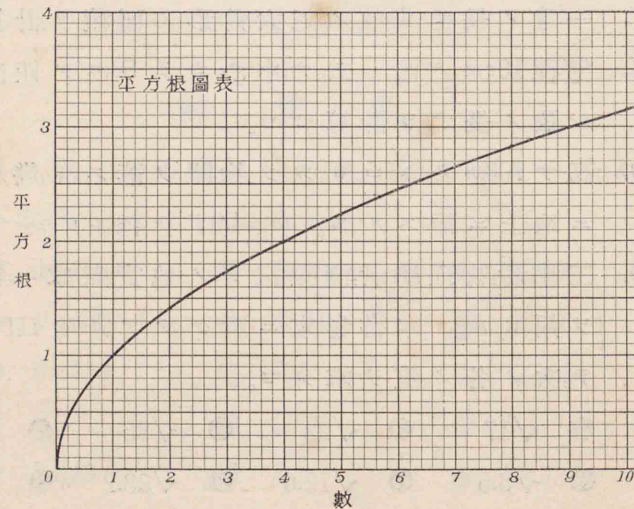
例 $\sqrt{7.6}$ ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} = 2.828 \\ \sqrt{7} = 2.646 \\ \hline 0.182 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{7.6} - \sqrt{7} = x \text{ トスレバ} \\ (8-7):(7.6-7) = 0.182:x \\ \text{即チ } 1:0.6 = 0.182:x \end{array}$$

依ツテ $\sqrt{7.6} = 2.646 + 0.182 \times 0.6 = 2.7552$

11. 下ニ掲ゲタ圖表ヲ用ヒテ、次ノ各ノ値ヲ求メヨ。

- ① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{3.5}$ ③ $\sqrt{9.6}$ ④ $\sqrt{6.4}$
 ⑤ $\sqrt{7.2}$ ⑥ $\sqrt{1.8}$ ⑦ $\sqrt{2}$ ⑧ $\sqrt{5}$



第二章

無理數

29. 無理數

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ノ如キハ、如何ホドデモコレニ近い値ヲ求メルコトハ出來ルガ、 $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ ナドノ如クキツカリトソノ値ヲ求メルコトハ出來ナイノデアアル。カヤウニ

整數デモナク又分數デモナイガ、小數ヲ用ヒテ如何ホドデモソレニ近い値ヲ求メルコトノ出來ル數ヲ無理數トイフ。

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ノ如ク開法^{*}ノ結果トシテ得ラレル無理數ヲ、特ニ不盡根數又ハ單ニ根數トイフコトガアル。圓周率 3.14159…… ヤ、三角函數ノ値ノ大部分ハ不盡根數デナイ無理數デアアル。無理數ニ對シテ、整數・分數・小數ヲ總稱シテ有理數トイフ。

無理數ヲ含ム計算ハ、ソノ無理數ノ代リニ近似値ヲ置イテ行フコトトスル。

* $a = x^n$ (nハ正整數ヲ満足サセルxノ値ヲaノn乗根トイヒ、一數ノn乗根ヲ求メル算法ヲ開法トイフ。

從ツテ無理數ヲ含ム諸計算ハ、有理數ノ場合ノ規則ニ從ツテスレバヨイ。

例ヘバ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ノ近似値トシテハ多ク

$$\sqrt{2}=1.414 \quad \sqrt{3}=1.732 \quad \sqrt{5}=2.236$$

ガ用ヒラレ、圓周率ノ近似値トシテハ3.14、或ハ3.1416、或ハ $\frac{22}{7}$ 或ハ $\frac{355}{113}$ 等ガ用ヒラレル。

30. 根數ノ計算(1)

例ヘバ $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$ ヤ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ノ如キモノヲ計算スルノニ、各ノ平方根ヲ求メテオイトカラ掛ケ算ヲ行ツタノデハ、非常ニ煩ハシイ。カヤウナ場合ニハ次ノ法則ヲ利用スル。

$a > 0, b > 0$ トスレバ

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

コレ等ノ法則ノ真ナルコトハ、次ノヤウニシテ知ラレル。

$a > 0, b > 0$ ナルトキハ

$$ab = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2$$

$$\text{故ニ} \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

又

$$\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$$

$$\text{故ニ} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\text{例 1.} \quad \sqrt{3}\sqrt{7} = \sqrt{21} = 4.58\cdots\cdots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0.666\cdots} = \cdots\cdots$$

$$\text{例 2.} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2.44\cdots}{3} = \cdots\cdots$$

後ノ仕方ハ、與ヘラレタ式ヲソノ値ヲ變ヘナイデ、分母ガ有理數トナルヤウニ變形スルノデアル。コノヤウニスルコトヲ分母ヲ有理化スルトイフ。

練習題

次ノ各ノ値ヲ計算セヨ。但シ近似値ハ小數第三位マデ求メヨ。

$$1. \sqrt{3}\sqrt{5} \quad 2. 3\sqrt{2} \quad 3. \sqrt{8}\sqrt{12}$$

$$4. \sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{6}} \quad 5. \sqrt{3}\sqrt{11} \quad 6. \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$7. \sqrt{\frac{3}{4}} \quad 8. \frac{1}{\sqrt{7}} \quad 9. \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

31. 根數ノ計算(2)

例ヘバ $2\sqrt{18} + 5\sqrt{8} - 2\sqrt{32}$ ノ如キモノヲ計算スルニハ、 $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = \sqrt{2}\sqrt{9} = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = \sqrt{2} \sqrt{16} = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$$

ナルコトニ着目シテ、先ヅ次ノヤウニ變形スル。

$$\begin{aligned} 2\sqrt{18} + 5\sqrt{8} - 2\sqrt{32} &= 2 \times 3\sqrt{2} + 5 \times 2\sqrt{2} - 2 \times 4\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= (6+10-8)\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

【注意】上ノヤウニスルコトヲ、與ヘラレタ式ヲ簡單ニスルトイフ。コノ際、例ヘバ $3\sqrt{2}$ ヲ $3+\sqrt{2}$ ト誤解シテハナラス。

練習題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$
2. $2\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$
3. $3\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$
4. $\sqrt{125} - 2\sqrt{20}$
5. $5 + \sqrt{8} + 2\sqrt{18}$
6. $2\sqrt{27} + 3\sqrt{48} - 3\sqrt{45}$

32. 根數ノ計算(3)

例 1. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
 $= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$

例 2. $(2\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
 $= 2\sqrt{3}\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}$
 $= 6 - \sqrt{3} + 2\sqrt{6} - \sqrt{2}$
 $= 6 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

例 3. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$
 $= \frac{3 + 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}$

練習題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。……

1. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
2. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$
3. $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$
4. $(\sqrt{5} + 1)^2$
5. $(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} - 2)$
6. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
7. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$
8. $(3 + 2\sqrt{6})(2 - 4\sqrt{6})$
9. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$
10. $\frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2} + 2}{9 - 2}$
11. $\frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$
12. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$

第三章

二次方程式

33. 一元二次方程式ノ一般的解法

例へバ

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \quad (A)$$

ヲ、本書中卷デ述ベタヤウナ方法デ解カウトシテモ

出来ナイ。以下コノヤウナ場合ノ解キ方ニツイテ
研究シヨウ。

既ニ知ル通り,例ヘバ

$$x^2=4$$

ヲ解ケバ

$$x=\pm 2,$$

又

$$x^2=5$$

ヲ解ケバ

$$x=\pm\sqrt{5}$$

デアアル。

コノコトニ着目スルト,例ヘバ

$$(x+2)^2=5 \quad (B)$$

ヲ解ケバ

$$x+2=\pm\sqrt{5}$$

従ツテ

$$x=-2\pm\sqrt{5}$$

デアルトイフコトニ氣付ク。

ソコデ,方程式(A)ヲ方程式(B)ノ形ニ直スコトガ出
來サヘスレバ,(A)ヲ解クコトハ最早ヤ困難デナイ。

トコロデ(A)ハ

$$x^2+4x=-2$$

トナリ,兩邊ニ $4x$ ノ係數 4 ノ半分ノ平方即チ $2^2=4$ ヲ

足セバ

$$x^2+4x+4=-2+4$$

即チ

$$(x+2)^2=2$$

トナツテ,(B)ノ形トナル。

上述ノ方法ニヨレバ,一元二次方程式ハ容易ニ解
ケル。

例 1. $x^2-8=2x$ ヲ解ケ。

[解]

$$x^2-8=2x$$

$$x^2-2x=8$$

$$x^2-2x+1=8+1$$

$$(x-1)^2=9$$

$$x-1=\pm 3$$

$$\therefore x=1\pm 3=4 \text{ 或ハ } -2$$

[驗] $x=4$ トスレバ

$$\text{左邊}=4^2-8=16-8=8$$

$$\text{右邊}=2\times 4=8$$

$x=-2$ トスレバ

$$\text{左邊}=(-2)^2-8=4-8=-4$$

$$\text{右邊}=2\times(-2)=-4$$

【注意】 解法ノ要點ハ,先ヅ與ヘラレタ方程式ヲ $x^2+bx=c$
ノ形ニ直シテ,次ニ兩邊ニ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ヲ加ヘルコトデアアル。

例 2. $5x^2+4x-1=0$ ヲ解ケ。

【解】 $5x^2 + 4x - 1 = 0$

$$\therefore x^2 + \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}$$

$$x^2 + \frac{4}{5}x + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{25}$$

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\therefore x + \frac{2}{5} = \pm \frac{3}{5}$$

$$\therefore x = -\frac{2}{5} \pm \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \text{ 或 } -1$$

【驗】 $x = \frac{1}{5}$ トスレバ

$$\text{左邊} = 5\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} - 1 = 0$$

$x = -1$ トスレバ

$$\text{左邊} = 5(-1)^2 + 4(-1) - 1 = 5 - 4 - 1 = 0$$

例 3. $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ヲ解ケ。

【解】 $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$$\therefore x^2 - 3x = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$= 2.366 \text{ 或 } 0.634$$

【驗】 $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ トスレバ

$$\text{左邊} = 2\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right) + 3$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{2} - 3(3 + \sqrt{3}) + 3$$

$$= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{2} - (9 + 3\sqrt{3}) + 3$$

$$= 6 + 3\sqrt{3} - 9 - 3\sqrt{3} + 3 = 0$$

$x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ トスレバ

$$\text{左邊} = 2\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right) + 3$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{2} - 3(3 - \sqrt{3}) + 3$$

$$= \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{2} - (9 - 3\sqrt{3}) + 3$$

$$= 6 - 3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} + 3 = 0$$

【注意】 根ガ無理數デアル場合ニハ、近似値ヲ表ハシテオ

イタ方ガ實用上便利デアル。近似値ヲ以テ驗算ヲ行フト、方程式ノ兩邊ガ丁度相等シクナラナイコトモアル。コノ場合ニハ、相等シイト見做シテ差支ナイ程度ニ兩邊ガ接近シテキルカドウカラミテ、ソレニ依ツテ正否ヲ決定スル。

練習題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2+2x=5$ | 2. $x^2+4x=2$ |
| 3. $x^2-2x=1$ | 4. $x^2-6x=-4$ |
| 5. $x^2+2x-6=0$ | 6. $x(x-2)=4$ |
| 7. $x(x+4)=-1$ | 8. $2x^2+4x-1=0$ |
| 9. $4x^2-16x+15=0$ | 10. $2x^2-2x-3=0$ |
| 11. $3x^2+2x-4=0$ | 12. $\frac{x^2}{2}+x-2=0$ |
| 13. $\frac{x^2}{3}-2x-5=0$ | 14. $3x^2+2x+4=0$ |

【注意】 例ヘバ $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$ ノ如キハ、今マデ考ヘテ來タ數ノ範圍内デハ無意味ノモノデアル。ソレデ、若シ上ノヤウナ記號ヲ用ヒネバ根ガ表ハセナイトイフ場合ニハ、方程式ハ根ヲ持タナイトスベキデアル。

34. 一元二次方程式ノ根ノ公式

例ヘバ

$$3x^2+5x-1=0$$

ヲ解ク際ニ履ム階段ヲ省ミルト次ノ如クデアル。

第一段 $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} = 0$

第二段 $x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}$

第三段 $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$

第四段 $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{25}{36} = \frac{37}{36}$

第五段 $x + \frac{5}{6} = \pm \sqrt{\frac{37}{36}} = \pm \frac{\sqrt{37}}{6}$

第六段 $x = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{37}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}$

コレヲ一般的ノ形デ示セバ、次ノ如クニナル。

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

第一段 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

第二段 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

第三段 $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

第四段 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

第五段 $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

第六段 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

最後ノ方程式ヲ、一元二次方程式ノ根ノ公式トイフ。公式ヲ用ヒテ解クニハ、次ノ如クスル。

例 $3x^2+2x=5$ ヲ解ケ。

[解]

$$\begin{aligned} 3x^2+2x &= 5 \\ 3x^2+2x-5 &= 0 \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times (-5)}}{2 \times 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{6} \\ &= \frac{-2 \pm 8}{6} = 1 \text{ 或ハ } -1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

[驗] (各自ニ行ヘ)

【注意】 b^2-4ac ガ負數デアレバ、 $\sqrt{b^2-4ac}$ ハ無意味デアル。從ツテコノ場合ニハ、與ヘラレタ方程式ハ根ヲ持タナイ。

35. 一元二次方程式ノ圖解

一元二次方程式、例ヘバ

$$2x^2+x-6=0 \quad (1)$$

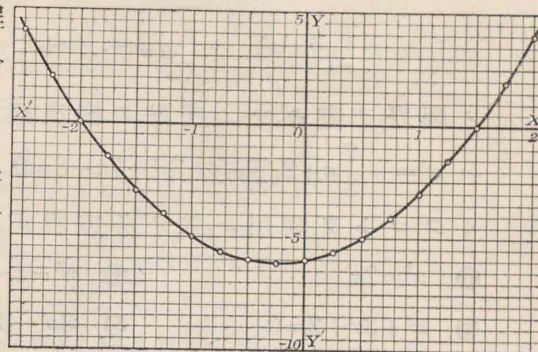
ヲ解クトイフコトハ、二ツノ變數 x, y ガアツテ

$$y=2x^2+x-6 \quad (2)$$

ナルトキ、 y ハ x ガ如何ナル値ヲトルトキ 0 トナルカヲ求メルコトダト考ヘルコトガ出來ル。

コノ見地カラスルト、方程式(2)ノ圖表ヲ畫イテ、ソノ圖表ノ上デ方程式(1)ノ根ヲ求メルコトガ出來ル。

右ノ圖ハ、方程式(2)ノ圖表デアル。コレニ依ツテ(1)ノ根ヲ求メヨ。(何處ヲ見レバヨイカ)



【注意】 唯一ツノ一元二次方程式ヲ解クダケノタメニ圖表ヲワザワザ畫イテスルトイフコトハ、時間ト精力ノ浪費デアル。シカシ、既ニ或二變數ノ間ノ關係ガ圖表デ與ヘラレテキルトキ、上ニ述ベタヤウナ觀察ヲスルコトガ出來ルトイフコトハ肝要ナコトデアル。又上ノ圖解ノ原理ハ、代數的ニハ容易ニ解ケナイヤウナ方程式ヲ解カウトスルトキニ役立つ。試ニ $y=3x^2-x+1$ ノ圖表ヲ畫イテコノ原理ヲ適用セヨ。

練習題

1. 第74頁ノ練習題ヲ公式ヲ用ヒテ解ケ。
2. $y=x^2-5x+6$ ノ圖表ヲ $x=0$ カラ $x=5$ マデノ範圍ニツイテ畫キ $x^2-5x+6=0$ ノ根ヲ求メヨ。
3. (2)ノ圖表ヲ利用シテ $x^2-5x+7=0$ ヲ解ケ。
4. 例ヘバ $3x^2+7x-6=0$ ハ、 $x^2=-\frac{7}{3}x+2$ ト書ケルトイフコト及ビ同一座標軸ヲ用ヒテ

$$y=x^2, \quad y=-\frac{7}{3}x+2$$

ノ圖表ヲ畫キ,ソノ交點ノ横座標ヲ見レバ,コレ
ハ $x^2=-\frac{7}{3}x+2$, 即チ $3x^2+7x-6=0$ ノ根ヲ得ルト
イフコトヲ利用シ,次ノ各方程式ヲ圖解セヨ。

- ① $x^2=3x$ ② $x^2-x-6=0$
③ $x^2+3x+2=0$ ④ $3x^2-2x-6=0$

39. 分數方程式

例 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3}$ ヲ解ケ。

[解] $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3}$

$$\therefore (x+2)(x+3) - (x+1)(x+3) = (x+1)(x+2)$$

$$\text{即チ } x^2+5x+6 - (x^2+4x+3) = x^2+3x+2$$

$$\therefore x^2+2x-1=0$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$= 0.414 \text{ 或ハ } -2.414$$

$x = -1 + \sqrt{2}$ トスレバ,

$$\begin{aligned} \text{左邊} &= \frac{1}{-1+\sqrt{2}+1} - \frac{1}{-1+\sqrt{2}+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = \frac{1}{-1+\sqrt{2}+3} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$x = -1 - \sqrt{2}$ トスレバ

$$\begin{aligned} \text{左邊} &= \frac{1}{-1-\sqrt{2}+1} - \frac{1}{-1-\sqrt{2}+2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \sqrt{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = \frac{1}{-1-\sqrt{2}+3} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

故ニ求メル根ハ 0.414 及ビ -2.414 デアル。

練習題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{3}{x+7}$ 2. $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2-x} = \frac{6}{x}$
3. $\frac{2}{x+4} - \frac{4}{(x+6)(x+4)} = 7$ 4. $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{6}$
5. $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{2} = 0$ 6. $\frac{7}{x+1} + \frac{8}{x+2} = \frac{18}{x+3}$

37. 二元二次聯立方程式

例 聯立方程式

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 2x^2-2xy-3y^2=1 \end{cases}$$

ヲ解ケ。

$$[\text{解}] \quad 2x - 3y = 1 \quad (1)$$

$$2x^2 - 2xy - 3y^2 = 1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ カラ} \quad 2x = 1 + 3y$$

$$\therefore x = \frac{1 + 3y}{2} \quad (3)$$

コレヲ(2)ニ代入スレバ

$$2\left(\frac{1+3y}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+3y}{2}\right)y - 3y^2 = 1$$

$$\therefore 2\left(\frac{1+6y+9y^2}{4}\right) - 2\left(\frac{y+3y^2}{2}\right) - 3y^2 = 1$$

$$\therefore 1 + 6y + 9y^2 - 2(y + 3y^2) - 6y^2 = 2$$

$$\therefore -3y^2 + 4y - 1 = 0$$

$$\therefore y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-6} = \frac{-4 \pm 2}{-6} = \frac{1}{3} \text{ 或ハ } 1$$

$$y = \frac{1}{3} \text{ トスレバ, (3) カラ}$$

$$x = \frac{1 + 3 \times \frac{1}{3}}{2} = 1$$

$$y = 1 \text{ トスレバ, (3) カラ}$$

$$x = \frac{1 + 3 \times 1}{2} = 2$$

[驗] (各自ニ行ヘ)

$$\text{答} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

練習題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \quad 2. \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ x + y = 10 \end{cases} \quad 4. \quad \begin{cases} 3x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} xy = 12 \\ (x-1)(y+2) = 15 \end{cases} \quad 6. \quad \begin{cases} xy = 12 \\ (x+1)(y+2) = 15 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad 8. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 + 5y^2 = 20 \end{cases}$$

38. 無理方程式

[問題] 周リガ 20 cm デ、斜邊ガ直角ヲ夾ム一邊ヨリモ 3 cm 長イ直角三角形ノ各邊ノ長サヲ求メヨ。コノ問題ヲ解ク際、斜邊ヲ x cm トスレバ、他ノ一邊ガ $(x-3)$ cm、残りノ一邊ガ $\sqrt{x^2 - (x-3)^2}$ cm デアルトイフコトヲ用ヒルト、次ノ方程式ヲ得ル。

$$x + (x-3) + \sqrt{x^2 - (x-3)^2} = 20$$

ココニ含マレテキル $\sqrt{x^2 - (x-3)^2}$ ノ如キ形ノ式ヲ無理式トイヒ、未知數ニ關スル無理式ヲ含ム方程式ヲ無理方程式トイフ。

無理式ニ對シテ整式及ビ分數式ヲ有理式トイヒ、

未知數ニ關スル有理式ダケヲ含ム方程式ヲ有理方程式トイフ。コレマテ取扱ツテ來タ方程式ハ、皆有理方程式デアル。

【注意】 \sqrt{ab} , $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt[3]{2x}$, $\sqrt[3]{x^2+7x+5}$ ノ如キハ、皆無理式デアルガ、 $\sqrt{a^2b^2}$, $\sqrt{x^2+2ax+a^2}$, $\sqrt[3]{8x^3}$, $\sqrt[3]{x^3(x+2)^3}$ ノ如キハ、形ハ無理式デアルガ、ソレゾレ ab , $x+a$, (但シ $ab > 0$, $x+a > 0$ トスル) $2x$, $x(x+2)$ トナルカラ無理式デハナイ。

無理方程式ヲ解クニハ、適當ノ方法ヲ講ジテコレヲ有理方程式ノ解法ニ歸着サセネバナラナイ。

例 1. $\sqrt{x+3}=4$ ヲ解ケ。

【解】 $\sqrt{x+3}=4$
 兩邊ヲ平方スレバ
 $x+3=16$
 $\therefore x=13$
 $x=13$ トスレバ
 左邊 $=\sqrt{13+3}=\sqrt{16}=4=$ 右邊
 答 13

例 2. $x+3+\sqrt{x^2+9}=15$ ヲ解ケ。

【解】 $x+3+\sqrt{x^2+9}=15$
 $\sqrt{x^2+9}=12-x$
 $\therefore x^2+9=(12-x)^2$

$$=144-24x+x^2$$

$$\therefore 24x=135$$

$$\therefore x=\frac{135}{24}=5\frac{5}{8}$$

$$x=5\frac{5}{8} \text{ トスレバ}$$

$$\begin{aligned} \text{左邊} &= 5\frac{5}{8}+3+\sqrt{\left(5\frac{5}{8}\right)^2+9}=8\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{2025}{64}+9} \\ &= 8\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{2601}{64}}=8\frac{5}{8}+6\frac{3}{8}=15= \text{右邊} \end{aligned}$$

答 $5\frac{5}{8}$

例 3. $x-\sqrt{2x-1}=2$ ヲ解ケ。

【解】 $x-\sqrt{2x-1}=2$
 $\therefore -\sqrt{2x-1}=2-x$
 $\therefore 2x-1=(2-x)^2$
 即チ $2x-1=4-4x+x^2$
 $\therefore x^2-6x+5=0$
 $\therefore (x-1)(x-5)=0$
 $\therefore x=1$ 或ハ 5
 $x=1$ トスレバ

左邊 $=1-\sqrt{2 \times 1-1}=1-1=0 \neq$ 右邊

故ニ $x=1$ ハ根デナイ。

$x=5$ トスレバ

左邊 $=5-\sqrt{2\times 5-1}=5-\sqrt{9}=5-3=2=$ 右邊
 故に $x=5$ が求メル根デアアル。

例3ノ場合, $x=1$ ガ與ヘラレタ方程式ヲ満足サセナイノハ, 計算ニ誤リガアツタカラデハナイ。方程式ノ兩邊ヲ平方シタガタメニ餘分ニ持チ込マレタノデアアル。コノヤウナ根ヲ無縁根トイフ。何故カヤウナコトガ起ルカトイフコトハ, 例ヘバ $x=1$ ノ兩邊ヲ平方シテ $x^2=1$ トシ, コノ方程式ヲ解イタトスルト $x=\pm 1$ トナリ, $x=-1$ ナル餘分ノ根ガハイツテ來ルトイフコトヲ思ヘバ明トナラウ。

ソレデ上ニ示スヤウナ風ニシテ無理方程式ヲ解イタトキニハ, 必ズ得タ未知數ノ値ヲ原方程式ニ代入シテソレヲ満足サセルカドウカヲミテ, 然ル後ニ根ヲ決定シナケレバナラス。

練習題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $\sqrt{2x-3}=5$
2. $x+\sqrt{x}=42$
3. $x+\sqrt{2x+7}=4$
4. $3x+\sqrt{3x+4}=8$
5. $3x-\sqrt{3x+4}=8$
6. $\sqrt{x^2-3x-1}+7=2x$

練習題

1. 縦ガ横ヨリモ 5cm 長クテ, 面積 100cm^2 ノ矩形ヲ

作ルニハ, 縦横ヲソレゾレ幾種トスベキカ。

2. 或仕事ヲ甲乙兩人ガ協力シテ2日間デ仕上ゲタ。コノ仕事ヲ仕上ゲルノニ, 各ガ單獨ニ働ケバ, 甲ハ乙ヨリモ3日多クカカルモノトスルト乙一人デナセバ幾日カカルカ。
3. 或列車毎時10軒ダケ速ク走レバ, 300軒ヲ元ノ速サデ走ルトキヨリモ1時間ダケ少イ時間デ走り得ルトイフ。元ノ速サ平均毎時幾軒カ。
4. 直角三角形ノ斜邊ガ, 他ノ一邊ヨリ 2cm 長ク, 残りノ邊ハ 6cm デアルトスルト, 未知ノ邊ノ長サ各幾種カ。
5. 自動車デ 125 哩ノ長サノ道ヲ往復スルノニ, 歸リニハ行キヨリモ平均毎時 3 哩ダケ遅ク走ツテ, 全體デ11時間ヲ要シタ。行キ及ビ歸リニ走ツタ平均ノ速サソレゾレ幾何カ。
6. 水槽ニ水ヲ滿タスノニ, ぼんぶ二臺デ45分カカル。コノ水槽ノ水ヲ滿スノニ, 若シ一方ノぼんぶガ他方ノぼんぶヨリモ10分多クカカルモノト假定スルナラバ, 各一臺デハ幾分ヲ要スルカ。
7. 一邊ノ長サ 10cm ナル正六角形ノ外接圓ノ中心カラ, ソノ邊ニ引イタ垂線ノ長サヲ求メヨ。
8. 半徑 5cm ノ圓ニ外接スル正三角形ノ邊ノ長サ

ヲ求メヨ。

9. 10cmノ長サノ線分ヲ二ツノ部分ニ分ケテ、ソノ一部分ノ上ノ正方形ガ、他ノ部分ト全體トノ包ム矩形ニ等シカラシメヨ。
10. 長サ a ナル線分ヲ(9)ニ於ケル如クニ分ケヨ。
[線分ヲカヤウニ分ツ分テ方ヲ黄金分割トモイフ]
11. 正方形ノぶりき板ノ四隅カラ同ジ大サノ正方形ヲ切去ツテ、縁ヲ曲ゲテ深サ12cm、容量2000ccノ箱ヲ作りタイ。如何ホドノ大サノぶりき板ガアレバヨイカ。
12. 弓形ガアル。弦ノ垂直二等分線ノ弓形内ニアル部分ノ長サガ8cm、弦ノ長サガ12cmアルトキハ、コノ弓形ノ弧ヲ一部トスル圓周ノ半徑幾種カ。

39. 變數及ビ函數

コレマデ屢相伴ツテ變化スル二ツノ變數ニツイテ取扱ツテ來タ。

二ツノ變數 x, y ガアツテ、 x ノ値ガ定マレバソレニ伴ツテ y ノ値モ亦定マルトイフ關係ニアルトキハ、 y ハ x ノ函數デ

アルトイフ。

例ヘバ

$$M = 3.14h^2 \quad (1)$$

$$G = 100(1 + 0.06h) \quad (2)$$

$$s = 300t + 4.9t^2 \quad (3)$$

ニ於テ、ソノ中ニ含マレテキル文字ヲ變數ト考ヘルト、(1)ニ於ケル M ハ h ノ函數、(2)ニ於ケル G ハ h ノ、(3)ニ於ケル s ハ t ノ函數デアアル。方程式(1)、(2)、(3)ハ、即チ、ソレゾレツノ函數關係ヲ規定スルモノデアアル。尤モ變數 y ガ他ノ變數 x ノ函數デアツテモ、ソノ間ノ關係ガ方程式デ表ハセナイ場合ガアル。例ヘバ、一定ノ場所ニ於ケル氣温ハ時ノ函數デアアルガ、正確ニ方程式デ表ハスコトハ出來ナイ。

y ガ x ノ函數デアルトキ、 y ガ x ノ一次式デ表ハサレレバ一次函數、二次式デ表ハサレレバ二次函數トイフヤウニ呼ブ。例ヘバ、圓ノ周ハ半徑ノ一次函數、圓ノ面積ハ半徑ノ二次函數デアアル。球ノ表面積ハ半徑ノ二次函數、體積ハ半徑ノ三次函數デアアル。

$$S = 2\pi r \quad (\text{圓ノ周}) \quad H = 4\pi r^2 \quad (\text{球ノ表面積})$$

$$M = \pi r^2 \quad (\text{圓ノ面積}) \quad T = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (\text{球ノ體積})$$

一ツノ變數 x ノ一次函數、二次函數ハ、コレヲ一般

的ニ表ハセバ、ソレゾレ次ノ形ヲ持ツテキル。

$$y = ax + b$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

但シ a, b, c ハ常數デアル。

40. 函數ト圖表

y ガ x ノ函數デアルトキ、 x ノ値ガ變ルニ伴ツテ y ノ値ガ如何様ニ變ルカノ有様ヲ、最モワカリ易ク示スノハ圖表デアル。

y ガ x ノ函數デ、ソノ關係ガ

$$y = 5x + 2, \quad y = 3x - 5$$

ノ如キ方程式デ與ヘラレテキルトキ、コレノ圖表ヲ畫クコト並ニコノ圖表ハ直線デアルトイフコト、及ビ

$$y = x^2 - 5, \quad y = 5x^2, \quad y = 2x^2 - 5x + 1$$

ノ如キ方程式デ與ヘラレテキルトキ、コレノ圖表ヲ畫クコト並ニコノ圖表ハ直線デナクテ曲線(拋物線ト稱セラレル)デアルトイフコトハ、既ニ知ツテキル。

シカシ今少シ詳シクソレ等ノ函數及ビ圖表ニツイテ考究シ、併セテ他ノモノニツイテモ考究シヨウ。

[i] 一次函數ノ圖表

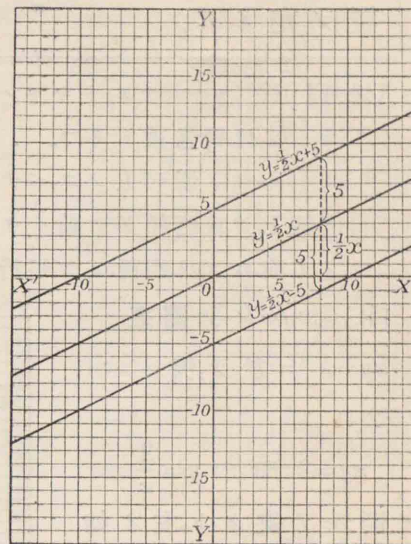
例ヘバ

$$(1) \quad y = \frac{1}{2}x$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{2}x + 5$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{2}x - 5$$

ノ圖表ヲ、同一座標軸ヲ用ヒテ畫ケバ、(2)、(3)ノ圖表ハ、(1)ノ圖表ヲ +5、又ハ -5 ダケ平行ニ移動サシタモノデアルトイフコトガ認めラレル。實際 x ノ



ズ、(2)ト(1)トノ差ハ5、(3)ト(1)トノ差ハ-5デアル。

ソレカラ(1)ノ圖表ハ原點ヲ通り、ソノ x 軸トノナス角ノ正切 $\frac{y}{x}$ (コレヲ直線ノ勾配トイフ)ハ $\frac{1}{2}$ デアル。

(2)、(3)ニ於テ $x=0$ トオケバ、ソレゾレ $y=5$ 、 $y=-5$ トナルカラ、+5、-5ハ、ソレゾレ(2)、(3)ノ圖表ガ y 軸ヲ截ル點ノ位置ヲ示ス。一般ニ

一次函數

$$y = ax + b$$

ノ圖表ハ直線デアツテ、 a ハソノ直線ノ勾配ヲ定メ、 b ハソノ y 軸ヲ截ル點ノ位

置ヲ定メル。

【注意】 (1) $y=ax$ ナルトキ、 y ハ x ニ比例スルトイヒ、 a ノコトヲ比例常數トイフ。

(2) 一ツノ圖形上ノスベテノ點ガ、一定直線ニ平行ナ直線上ヲ或距離ダケ動イタトキ、ソノ圖形ハソノ直線ノ方向ニコノ距離ダケ平行移動シタトイフ。

【ii】 $xy=k$ ノ圖表

$xy=k$ ニ於テ、例ヘバ

$k=2$ トシ

$xy=2$ 即チ $y=\frac{2}{x}$

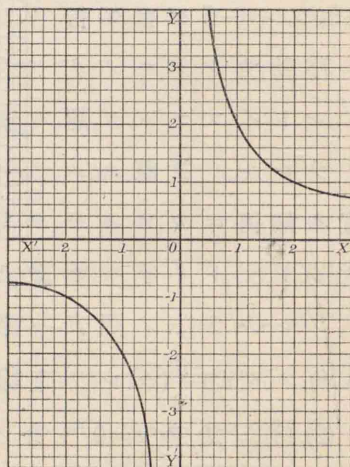
ノ圖表ヲ畫クト、右ノ如クニナル。

又 $k=-2$ トシ

$xy=-2$ 即チ $y=-\frac{2}{x}$

ノ圖表ヲ畫クト、次頁ノ圖ノ如クニナル。

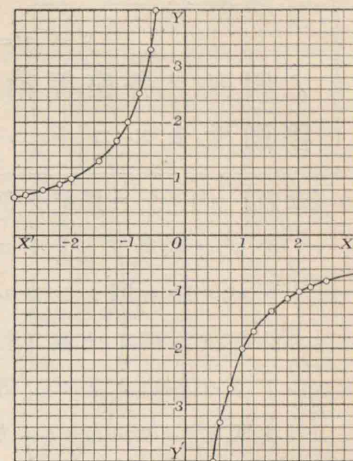
即チ $xy=k$ 或ハ $y=\frac{k}{x}$ ノ圖表ハ、二ツニ分レテキル。ソシテ方程式カラ知ラレルヤウニ、 x ノ絶對値ガ限リナク大キクナレバ、 y ノ絶對値ハ限リナク小サクナリ、 x ノ絶對値ガ限リナク小トナレバ、ソレニ伴ツテ y ノ絶對値ハ限リナク大キクナルカラ、圖表ノ左右兩端ハ、コレヲ延バセバ延バスホド x 軸ニ限リナ



ク近ヅキ、上下ノ兩端ハ、コレヲ延バセバ延バスホド y 軸ニ限リナク近ヅク。

コノ曲線ヲ双曲線トイフ。

【注意】 x, y ノ間ニ $xy=k$ ナル關係アルトキハ、 x ト y トハ互ニ反比例スルトイフ。



【iii】 二次函數ノ圖表

同一座標軸ヲ用ヒテ、例ヘバ

(1) $y=2x^2$

(2) $y=2x^2+10$

(3) $y=2x^2-4x+2 [=2(x-1)^2]$

(4) $y=2x^2-4x-5 [=2(x-1)^2-7]$

ノ圖表ヲ畫クト、次頁ニ示ス圖ノヤウニナル。

(2)ノ圖表ハ(1)ノ圖表ヲ10ダケ上ヘズラシ、(3)ノ圖表ハ(1)ノ圖表ヲ右ヘ1ダケズラシ、(4)ノ圖表ハ(1)ノ圖表ヲ1ダケ右ヘズラシテ、ソレカラ7ダケ下ヘズラシタモノデアル。即チコレ等ノ圖表ハ、唯位置ヲ異ニスルダケデアル。一般ニ

二次函數

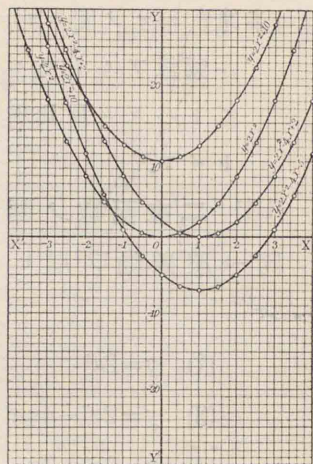
$y=ax^2+bx+c$

ノ圖表ハ

$$y = ax^2$$

ノ圖表ヲ、各座標軸ノ方向ニ適當ニ平行移動サセルコトニ依ツテ得ラレル。

【注意】 (1) 上ニ掲ゲタ例ニ於テ、 x^2 ノ係數ヲ -2 トスルナラバ、 x 軸ニ關シテソレ等ノ曲線ト對稱ナ曲線ヲ得ルデアラウ(各自ニ畫ケ)。即チ二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ニ於テ $a > 0$ ナルトキハ、曲線ハ上ニ向ツテ開キ、 $a < 0$ ナルトキハ下ニ向ツテ開ク。



(2) x ト y トノ間ニ $y = ax^2$

ナル關係アルトキハ、 y ハ x ノ平方ニ比例スルトイフ。

41. 二次函數ノ極大値及ビ極小値

例ヘバ

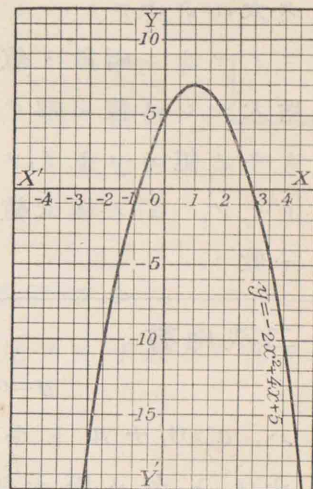
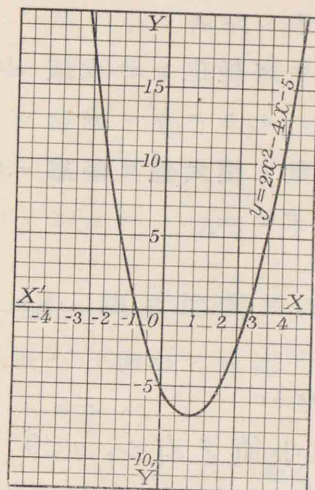
(1) $y = 2x^2 - 4x - 5$

及ビ

(2) $y = -2x^2 + 4x + 5$

ノ圖表ヲ畫イテミルト、次ノヤウニナル。

即チ(1)ノ場合ニハ、 x ノ値ガ1ヨリ小サナ範圍ニ於テハ、 x ノ値ガ増大スルニ伴ツテ y ハ減少シ、終ニ



$x=1$ トナルトキニハ最モ小サナ値ヲトリ、ソレカラハ x ガ増大スルニ伴ツテ矢張り増大シ、 x ガ限リナク大キクナレバ、 y モ亦限リナク大キクナル。

コノヤウニ、函數ノ値ガ斷エズ變化シテ或値マデ減少シ、ソノ後ハ却テ増大スルトキ、コノ減リツメタトキノ値ノコトヲ、ソノ函數ノ極小値又ハ單ニ極小トイフ。(1)ノ極小値ハ -7 デアル。

又(2)ノ場合ニハ、 x ノ値ガ1ヨリ小サナ範圍ニ於テハ、 x ノ値ガ増大スルニ伴ツテ y ハ増大シ、終ニ $x=1$ トナルトキニハ最モ大キナ値ヲトリ、ソレカラハ x ガ増大スルニ伴ツテ却テ減少シ、 x ガ限リナク大キクナレバ、 y ハ負ノ値ヲトリツツ絶對値ガ限リ

ナク大キクナル。

コノヤウニ、函數ノ値ガ斷エズ變化シテ或値マデハ増大シ、ソノ後ハ却テ減少スルトキ、ソノ増シツメタトキノ値ノコトヲ、ソノ函數ノ極大値又ハ單ニ極大トイフ。(2)ノ極大値ハ7デアアル。

一般ニ

二次函數

$$y = ax^2 + bx + c$$

ハ、 $a > 0$ ナルトキハ極小値ヲ有シ、 $a < 0$ ナルトキハ極大値ヲ有スル。

【注意】 極大値及ビ極小値ヲ、ソレゾレ最大値及ビ最小値ト呼ンデモ上ノ場合ニハ何等差支ハナイノデアアルガ、數學上デハ兩者ノ間ニ、重要ナ意味ノ相異ガアルノデアアル。シカシソノ説明ハ省ク。

練習題

1. $y = x^2 - 2x - 15$ ノ圖表ヲ畫キ、 y ノ極大値或ハ極小値ヲ求メヨ。
2. $y = -2x^2 + 6x - 1$ ノ圖表ヲ畫キ、 y ノ極大値或ハ極小値ヲ求メヨ。
3. 長サ $80m$ ノ針金ヲ以テ取卷クコトノ出來ル矩

形ノ中デ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

4. 幅 $40cm$ ノ鉄力板ヲ右ノ圖ノヤウニ折曲ゲテ樋ヲ作ルトキ、コノ樋ノ截面ノ面積ヲ最モ大キクスルニハ、鉄力板ノ兩耳ヲドレダケノ寸法ダケ曲ゲレバヨイカ。

42. 積ニ比例スルトイフコト

例ヘバ、梯形ノ面積(M)ハ、上底ヲ u 、下底ヲ s 、高サヲ t トスレバ、

$$M = \frac{t}{2}(u+s)$$

デアアル。ソレデ M ノ値ハ t 、 u 、 s ノ値ガ定マレバ、ソレニ伴ツテ自ラ定マル。コノコトヲ、 M ハ t 、 u 、 s ノ函數デアルトイヒ、カヤウナ函數ノコトヲ多元函數トイフ。多元函數ノ中デ、最モ簡單ナノハ、

$$M = 2\pi ht \quad (\text{直圓壻ノ側面積}) \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{3}\pi h^2 t \quad (\text{直圓錐ノ體積}) \quad (2)$$

等ノ如キ方程式デ規定サレタ函數デアアル。

(1)ノ場合ニハ、「 M ハ h 及ビ t ニ比例スル、或ハ積 ht ニ比例スル」トイヒ、

(2)ノ場合ニハ「 T ハ h ノ平方及ビ t ニ比例スル、或ハ積 $h^2 t$ ニ比例スル」トイフ。

今例へバ

$$T = \frac{1}{3} \pi h^2 t$$

ニ於テ、 h, t ガソレゾレ h', t' ナル値ヲトルトキノ T ノ値ヲ T' トシ、次ニ h ノ値ヲソノ p 倍、 t ノ値ヲ q 倍シタトキノ T ノ値ヲ T'' トスレバ

$$\begin{aligned} T'' &= \frac{1}{3} \pi (ph')^2 \times qt' \\ &= \frac{1}{3} \pi p^2 h'^2 qt' \\ &= p^2 q \left(\frac{1}{3} \pi h'^2 t' \right) \\ &= p^2 q T' \end{aligned}$$

トナル。即チ h 及ビ t ノ値ヲ、ソレゾレ元ノ p 倍及ビ q 倍スルト、 T ノ値ハ元ノ $p^2 q$ 倍トナル。 T ガ h ノ平方ト t ニ比例スルトイフノハ、コノトコロカラ來ルノデアアル。他モ推シテ知ラレヨウ。

例 平面ニ垂直ニ當ル風ノ壓力ハ、ソノ平面ノ面積ト風速ノ二乗トニ比例スル。コレヲ方程式デ表ハセ。

〔解〕 風ノ壓力ヲ A 、平面ノ面積ヲ M 、風速ヲ h トスレバ、

$$A = k \cdot M h^2 \quad (k \text{ ハ 常數})$$

練習題

1. 汽船ノ消費スル石炭量(S)、航程(K)ニ比例シ、速サ(H)ノ平方ニ比例スル。コレヲ方程式デ表ハセ。
2. 長サ一定ノ圓棒ニ端カラ端マデ詰メテ針金ヲ卷ク場合、コレニ要スル針金ノ長サ(N)ハ、ソノ圓棒ノ直徑(C₁)ニ比例シ、針金ノ直徑(C₂)ノ平方ニ反比例スル。コレヲ方程式デ表ハセ。若シ直徑 1 cm ノ圓棒ニ直徑 0.1 cm ノ針金ヲ 54 m 卷クコトガ出來タトスルナラバ、同シ長サノ直徑 12 cm ノ圓棒ニ直徑 0.2 cm ノ針金幾米ヲ卷クコトガ出來ルカ。

43. 公式ノ轉換

例 1. $T = \frac{1}{3} \pi h^2 t$ ヲ h ニ關シテ解ケ。

〔解〕

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} \pi h^2 t \\ \therefore h^2 &= \frac{3T}{\pi t} \\ \therefore h &= \pm \sqrt{\frac{3T}{\pi t}} \end{aligned}$$

〔注意〕 $h > 0$ ナルコトガ公式ノ性質上明デアアル場合ニハ、勿論 $h = \sqrt{\frac{3T}{\pi t}}$ トセネバナラス。

例2. $s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ ヲ t ニ關シテ解ケ。

[解]

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t - s = 0$$

$$\therefore g t^2 + 2v_0 t - 2s = 0$$

$$\therefore t = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 + 8gs}}{2g}$$

$$= \frac{-2v_0 \pm 2\sqrt{v_0^2 + 2gs}}{2g}$$

$$= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gs}}{g}$$

練習題

次ノ各公式ヲ括弧内ニ示ス文字ニ關シテ解ケ。

1. $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ (r) 2. $S = \frac{n(n+1)}{2}$ (n)

3. $M = \pi h(2t+h)$ (h) 4. $N = \frac{1}{2} n(n-3)$ (n)

5. $M = (H+h)(H-h)$ (H), (h) 6. $k = \sqrt{h^2 - g^2}$ (h)

7. $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l), (g) 8. $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ (s), (g)

9. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ長サヲ a, b トシ、直角ノ頂點カラ斜邊ニ引イタ垂線ノ長サヲ p トスルト、

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

デアル。コレヲ b ニ關シテ解ケ。又 $a=5$, $p=3$ ナルトキ b ノ値ヲ求メヨ。

10. 金 p 圓ヲ三分シテソノ比ヲ $a:b:c$ ナラシメルト、各部分ノ金額ハ幾圓カ。

11. 周ガ Sm , 面積ガ Mm^2 ナル矩形ノ縦、横ノ長サヲ求メヨ。

12. 半徑ガソレゾレ h, h' ナル二ツノ圓ノ共通外切線ノ長サヲ a ナラシメルニハ、コノ二圓ノ中心距離ヲ幾何トスベキカ。

44. 圓周ト内接形並ニ外接形ノ周

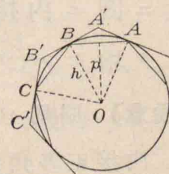
定理 圓ニ内接(又ハ外接)スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク増ストキハ、ソノ周ハ限リナク圓周ニ近ヅク。

[證明] $ABC\dots\dots, A'B'C'\dots\dots$

ヲ、圓 O ニ内接及ビ外接スル正 n 邊形トシ、ソノ周ヲソレゾレ s, s' , 圓 O ノ周ヲ S トスルト、

$$s < S < s'$$

ナルコトハ明デアル。



圓 O ノ半徑ヲ h , O カラ AB ニ至ル距離ヲ p トスレバ,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{h}{p}$$

ナルコトハ容易ニ知ラレ、且

$$\frac{s'}{s} = \frac{A'B'}{AB}$$

デアルカラ、

$$\frac{s'}{s} = \frac{h}{p}$$

從ツテ

$$\frac{s'-s}{s'} = \frac{h-p}{h}$$

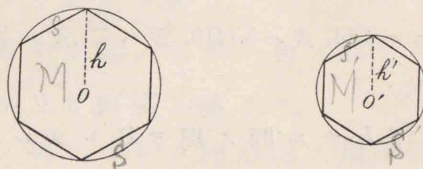
トコロデ、 n ヲ限リナク大キクスレバ、 AB ハ限リナリ小サクナリ、從ツテ p ハ限リナク h ニ近ヅク。故ニ $h-p$ ハ限リナク零ニ近ヅク。從ツテ $s'-s$ ハ限リナク零ニ近ヅク。依ツテ $S-s$ 及ビ $s'-S$ モ亦限リナク零ニ近ヅク。

故ニ圓ニ内接(又ハ外接)スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク増セバ、ソノ周ハ限リナク圓周ニ近ヅク。

【注意】圓周ハ常ニソノ外接正多角形ノ周ヨリハ小サク、内接正多角形ノ周ヨリハ大キイトイフコトハ公理トスル。

45. 圓ノ周及ビ圓ノ面積ノ比

定理 二ツノ圓ノ周ノ比ハ、ソノ半徑(又ハ直徑)ノ比ニ等シク、面積ノ比ハ半徑(又ハ直徑)ノ比ノ二乗比ニ等シイ。



二圓 O, O' ノ半徑、周及ビ面積ヲ、ソレゾレ h, h', S, S' 及ビ M, M' トスレバ

$$S : S' = h : h', \quad M : M' = h^2 : h'^2$$

【證明】各圓ニ内接スル正 n 邊形ノ周ヲ s, s' 、面積ヲ m, m' トスレバ

$$s : s' = h : h', \quad m : m' = h^2 : h'^2$$

デテル。ソシテコノ關係ハ、邊數 n ノ如何ナル値ニ對シテモ常ニ成立ツ。

トコロデ、 n ヲ限リナク大キクスレバ、 s, s' ハソレゾレ S, S' ニ、 m, m' ハソレゾレ M, M' ニ限リナク近ヅク。故ニ

$$\begin{aligned} S : S' &= h : h' & M : M' &= h^2 : h'^2 = 4h^2 : 4h'^2 \\ &= 2h : 2h', & &= (2h)^2 : (2h')^2 \end{aligned}$$

[系] 1. 圓周ト直徑トノ比ハ一定デアアル。

【注意】圓周ト直徑トノ比ヲ圓周率トイヒ、ギリシヤ文字 π デ表ハス。 π ハ無理數デ、直徑ガ1ナル圓周ノ値ニ等シイ。ソノ値ハ、現今700桁餘リ計算サレテキルガ、ソノ小數第三十位マデヲ示セバ次ノ通りデアアル。

3.141 592 653 589 793 238 402 643 383 279

實用ニハ3.14、或ハ3.1416、或ハ $\frac{22}{7}$ 、或ハ $\frac{355}{113}$ 等ヲ以テ代用スル。

$$S = 2\pi r$$

[系] 2. 半徑 h ナル圓ノ周ヲ S トスレバ、 $S = 2\pi h$ デアアル。

定理 半徑 h ナル圓ノ面積ヲ M トスレバ、 $M = \pi h^2$ デアアル。

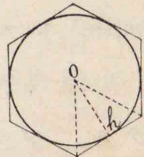
【證明】圓 O ニ外接スル正 n 邊形ノ

周ヲ s' 、面積ヲ m' トスレバ

$$m' = \frac{1}{2} s' h$$

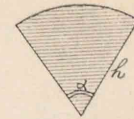
デアアル。ソシテコノ關係ハ、邊數 n ノ如何ナル値ニ對シテモ成立ツ。サテ n ヲ限リナク大キクスレバ、 s' ハ限リナク圓周ニ近ヅキ、從ツテソノ値ハ限リナク $2\pi h$ ニ近ヅキ、 m' ハ M ニ限リナク近ヅク。故ニ

$$M = \pi h^2.$$



練習題

1. 半徑 h ナル圓ノ扇形ノ角ガ α ナルトキハ、コノ面積ヲ求メヨ。

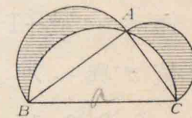


2. ニツノ與ヘラレタ圓周ノ和又ハ差ニ等シイ圓周ヲ作レ。

3. 半徑 h ナル圓ノ弓形ノ角ガ 45° ナルトキ、ソノ弧ノ長サ及ビ面積ヲ求メヨ。

4. ニツノ與ヘラレタ同心圓ノ周デ圍マレタ平面形ニ等シイ圓ヲ作レ。

5. $\triangle ABC$ ヲ $\angle A$ ガ直角ナル三角



形トシ、ソノ各邊ヲ直徑トシテ圖ニ示ス如ク半圓ヲ畫クト、 $\triangle ABC$ ハ、陰影ヲ施シタ三日月形ノ平面形ノ和ト等積デアアル。

第 四 篇
級 數
第 一 章
級 數

46. 級數

例へば x^2-1 の $x =$ 順次 $1, 2, 3, 4, \dots, k, \dots, n$ ナル値ヲ與ヘルト,

$$0, 3, 8, 15, \dots, k^2-1, \dots, n^2-1$$

ナル數ノ列ヲ得ル。カヤウナ數ノ列ヲ級數トイヒ、各數ヲ左カラ順ニ、第1項(又ハ初項)、第2項、第3項、…、第 n 項(又ハ末項)ト呼ビ、 k^2-1 ヲ上ノ級數ノ一般項トイフ。一般ニ

順序ヲ附ケテ並ベタ數ノ列ヲ級數トイヒ、各ノ數ヲ級數ノ項トイフ。

上ニ見ルヤウニ任意ニ x ノ函數ヲ考ヘ、ソノ $x =$ 順ニ $1, 2, 3, \dots$ ナル正ノ整數値ヲ與ヘレバ(函數値ガ直ニ見出サレサヘスレバ)ソレニ應ジテ一ツノ級

數ガ得ラレル。

練 習 題

1. 次ノ各函數($x =$ 關スル)ニ於ケル $x = 1, 2, 3, \dots, n$ ナル値ヲ與ヘテ級數ヲ作レ。

① $3x+1$ ② $5x-3$ ③ $2x^2-1$ ④ $\frac{2x-1}{2x+1}$

【注意】上ノ函數ハ、ゾレゾレノ級數ノ從フ規則ヲ示スモノト見テヨイ。

2. 次ノ各級數ハ如何ナル規則ニ從ツテキルカ。

① $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, \dots$ ② $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$

47. 等差級數

[定義] 一ツノ級數ニ於テ、各項ニ一定ノ數ヲ加ヘタトキ、ソノ次ノ項ガ得ラレルナラバ、ソノ級數ノコトヲ等差級數(或ハ算術級數)トイヒ、ソノ一定數ノコトヲ、ソノ級數ノ公差トイフ。

例へば

$$1, 2, 3, 4, \dots, \\ 1, 4, 7, 10, \dots$$

ノ如キハ等差級數デ、公差ハ、ソレゾレ $1, 3$ デアル。一般ニ等差級數ハ、次ノヤウナ形ヲナシテキル。

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d$$

即チ第 k 項ヲ a_k デ表ハスナラバ

末項 $a_k = a_1 + (k-1)d$

コレガ、即チ第 1 項(又ハ初項)ガ a_1 、公差ガ d ナル等差級數ノ一般項デアアル。

48. 等差級數ノ和

等差級數ノ初項ガ a_1 、公差ガ d 、末項ガ a_n ナルトキ、コレ等 n 項ノ和ヲ S トスレバ、

$$S = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

又コレ等ノ項ヲ逆順ニ書ケバ、

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

故ニ $2S = n(a_1 + a_n)$

依ツテ $S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 等差級數ノ和ノ公式

初項 a_1 、公差 d 、項數 n ガワカツテキルナラバ、

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

デアアルカラ、コレヲ(1)ニ代入スルト

$$S = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

練習題

1. 次ノ等差級數ニツイテ i) 第 50 項, ii) 第 50 項マデノ和, iii) 第 n 項, iv) 第 n 項マデノ和ヲ求メヨ。

- ① 1, 3, 5, ② 1, 4, 7,

- ③ 3, 0, -3, ④ $1, \frac{1}{2}, 0, \dots$

2. 次ノヤウナ等差級數ノ公差ヲ求メヨ。

- ① 第 7 項 = 10, 第 10 項 = 7
 ② 第 10 項 = 3, 第 20 項 = 2
 ③ 第 15 項 = $-2\frac{3}{5}$, 第 15 項マデノ和 = 3

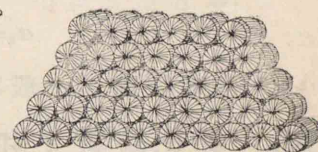
3. 次ノ圖ノ如ク積ンダ米俵ガアル。

① 最上層 = n 俵, 最下層 = m 俵アツタトスルト、總ベテデ幾俵アルカ。

② 最下層 = m 俵アツ

テ層數 p ナルトキニハ

總ベテデ幾俵アルカ。



③ 最上層 = n 俵アツテ層數 p ナルトキハ、總ベテデ幾俵アルカ。

4. 1000 俵ノ米ヲ最下層 = 100 俵, 次ノ層 = 99 俵, ソノ上 = 98 俵ト積ンデ行クト、何層ニナルカ。

但シ最上層ガ半端ニナルナラバ、ソレヲモ一層トシテ數ヘヨ。ソシテソノ半端ノ數ヲ求メヨ。

49. 等比級數

[定義] 一ツノ級數ニ於テ、各項ニ一定數ヲ掛ケタトキ、スグ次ノ項ガ得ラレルナラバ、ソノ級數ノコトヲ等比級數(或ハ幾何級數)トイヒ、ソノ一定數ノコトヲコノ級數ノ公比トイフ。

例へば

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \dots$$

ノ如キハ、等比級數デ、公比ハソレゾレ $2, \frac{1}{5}$ デアル。
 一般ニ等比級數ハ次ノ形ヲナシテキル。

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$$

即チ第 k 項ヲ a_k デ表ハセバ

$$a_k = a_1 r^{k-1}$$

コレヲ等比級數ノ一般項トイフ。

50. 等比級數ノ和

初項ガ a_1 , 公比ガ r ナル等比級數ノ第 n 項マデノ
 和ヲ S トスレバ

$$S = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}$$

兩邊ニ r ヲ掛ケルト

$$Sr = a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

コノ二ツヲ邊々相減ズルト

$$S(1-r) = a_1 - a_1 r^n = a_1(1-r^n)$$

故ニ
$$S = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

練習題

1. 次ノ各等比級數ノ i) 第 20 項, ii) 第 20 項マデノ

和, iii) 第 n 項, iv) 第 n 項マデノ和ヲ求メヨ。

- ① $1, x, x^2, \dots$ ② $a, -ax, ax^2, \dots$
 ③ $3\frac{1}{8}, 1\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ ④ $3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{3}, 1\frac{5}{9}, \dots$

2. 次ノ各等比級數ニ於テ指定サレタ項ヲ求メヨ。

- ① $x^2, x, 1, \dots$, (第 7 項及ビ第 n 項)
 ② $1, -x, x^2, \dots$, (第 n 項)
 ③ $5\frac{5}{8}, -3\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, \dots$, (第 5 項及ビ第 8 項)

3. 次ノ各和ヲ求メヨ。

- ① $3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 1\frac{5}{9} + \dots$ (第 10 項マデ)
 ② $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{8}{25} - \dots$ (第 10 項マデ)
 ③ $1 + 2 + 4 + \dots$ (第 10 項マデ)
 ④ $0.11 + 0.121 + 0.1331 + \dots$ (第 10 項マデ)

51. 複利法

金 M 圓ヲ年利率 r デ借リルト、一年後ニ元利合計
 $M(1+r)$ 圓トナリ、コノ元利合計ヲ第二年目ノ元金
 トシ引續キ同シ利率デ借リルト、コノ年ノ終ニハ元
 利合計ハ $M(1+r)^2$ 圓トナル。逐ツテカクノ如ク進ム
 ト第 n 年ノ末ニハ、元利合計ハ $M(1+r)^n$ 圓トナル。

カヤウニ、一定ノ期間毎ニ利息ヲ計算シテ元金ニ
 加ヘ、ソノ元利合計ヲ次ノ期間ノ元金トスル利息計

算ノ仕方ヲ複利法トイフコトハ、既ニ知ツテギル。

一年毎ニ利息ヲ元金ニ繰入レル複利法、即チ一年毎ノ複利法デハ、元金ヲ M 圓、年利率ヲ r 、期間ヲ n 年、第 n 年末ノ元利合計ヲ G 圓トスレバ、

$$G = M(1+r)^n.$$

【注意】 (1) 公式 $G = M(1+r)^n$ = 於テ、 n ヲ單位期間(例ヘバー年トカ半年トイツタヤウナ)ノ數トスレバ、 r ハ單位期間ニ對スル利率トシナケレバナラヌ。

(2) G, n, r ガ既知ノトキ、 M ノコトヲ G ノ現在價格又ハ現價トイフコトガアル。

實際ニ複利ノ計算ヲスルニハ、複利表ヲ利用スルノガ便利デアアル。本書卷末ノ複利表ハ、 $r = 0.02, 0.025, 0.03, \dots, 0.055, 0.06, 0.07$ ナル各場合ニツイテ、 $n = 1$ カラ $n = 50$ マデノ各整數値ニ對スル $(1+r)^n$ ノ値ヲ表示シタモノデアアル。コノ使用法ハ、次ノ如クデアアル。

例 元金 1000 圓ヲ年利率 3 分 5 厘、一年毎ノ複利デ 20 年間預ケルト、満期日ニ元利合計幾圓トナルカ。

【解】 $G = 1000(1 + 0.035)^{20}$

表ニ依ルト

$$1.035^{20} = 1.98978886$$

故ニ $G = 1989.78886$

答 1989.79 圓

【注意】 1.035^{20} ノ値ヲ複利表デ求メルニハ、3 分 5 厘ト頭上ニ書イテアル欄内ニ於テ最左端ニ 20ト記シテアル行内ノ數ヲ見ルノデアアル。ココニハ 1.98978886トアル。

練習題

1. 年利率 7 分、半年毎ノ複利デ 20 年間借リルト、満期日ニ元利合計ハ元金ノ幾倍トナルカ。
2. 年利率 5 分、半年毎ノ複利デ 25 年後ニ元利合計 10000 圓トナル元金ヲ求メヨ。
3. 年利率 5 分、半年毎ノ複利デ、15 年後ニ受取ル約束ノ金 5000 圓ノ現價ハイクラカ。
4. 年利率 7 分、半年毎ノ複利デ計算スルトキ、元利合計ガ元金ノ 5 倍ヨリ多クナルノハ幾年後カ。
5. 金 1000 圓ヲ年 6 分、半年毎ノ複利デ貸スノト、年 7 分、一年毎ノ複利デ貸スノトデハ、20 年間ニ幾ラノ差ヲ生ズルカ。

52. 年賦積立

【問題】 年利率 r 、一年毎ノ複利デ、毎年ノ初メニ a 圓ヅツ積ミ立テルトキ、第 n 年末ニ於ケル元利合計ヲ求メヨ。

[解] 第 n 年末ニ於テ

初年ノ積立金ノ元利合計 $= a(1+r)^n$ 圓

第二年ノ積立金ノ元利合計 $= a(1+r)^{n-1}$ 圓

第三年ノ積立金ノ元利合計 $= a(1+r)^{n-2}$ 圓

.....

第 n 年ノ積立金ノ元利合計 $= a(1+r)$ 圓

故ニ所要ノ元利合計ヲ G 圓トスレバ

$$G = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

即チ $G = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$

【注意】上ニ求メタ公式ヲ年賦積立ノ公式トイフ。コノ公式ハ單位期間ガ年デナイ場合ニモ適用出來ル。例ヘバ半年毎ニ積立テル問題ナラバ、半年ヲ單位ニトツテ利率及ビ期數ヲ表ハセバヨイ。

例 年利率 5 分、一年毎ノ複利デ毎年ノ初メニ 100 圓ヅツ積立テ立テルト、第 20 年末ニハ元利合計幾ラトナルカ。圓ノ位マデ求メヨ。

[解] $G = \frac{100(1+0.05)\{(1+0.05)^{20} - 1\}}{0.05}$
 $= 2100(1.05^{20} - 1)$
 $= 2100 \times 1.65329771$

$= 3472$

答 3472 圓

練習題

1. 上ニ求メタ公式ニ於テ $r=0.04$, $a=100$, $n=25$ ナルトキノ G ノ値ヲ求メヨ。
2. (1)ニ於テ $r=0.035$ トスルト、 G ノ値ハ幾ラニナルカ。

53. 年賦償還

【問題】 M 圓ヲ年利率 r 、一年毎ノ複利ノ約束デ借リ入レ、ソレカラ一年毎ニ一定金額ヅツ返済シテ、借入後 n 年間ニコノ負債ヲ全部償還シヨウトスルト、毎年幾圓ヅツ返済スベキカ。

[解] 所要ノ年賦金ヲ s 圓トスル。

第一年末ノ元利合計ハ

$$M(1+r)$$

デ、コノトキ s 圓ヲ返済スルカラ、第二年ノ元金ハ

$$M(1+r) - s$$

トナル。依ツテ第二年末ノ元利合計ハ

$$M(1+r)^2 - s(1+r)$$

コノトキ又 s 圓ヲ返濟スルカラ、第三年ノ元金ハ

$$M(1+r)^2 - s(1+r) - s$$

トナル。從ツテ第三年末ノ元利合計ハ

$$M(1+r)^3 - s(1+r)^2 - s(1+r)$$

逐ツテカクノ如クシテ第 n 年末ノ元利合計ハ

$$M(1+r)^n - s(1+r)^{n-1} - s(1+r)^{n-2} - \dots - s(1+r)$$

コノトキ s 圓ヲ返濟シテ全クコノ負債ガナクナルベキ筈デアルカラ

$$M(1+r)^n - s(1+r)^{n-1} - s(1+r)^{n-2} - \dots - s(1+r) - s = 0$$

故ニ

$$M(1+r)^n = s + s(1+r) + s(1+r)^2 + \dots + s(1+r)^{n-1}$$

$$= \frac{s\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1}$$

$$\text{即チ } M(1+r)^n = \frac{s\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

$$\text{故ニ } s = \frac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

【注意】上ノ如キ償還ノ仕方ヲ年賦償還トイフ。

練習題

1. 上ニ求メタ公式ニ於テ、 $M=10000$, $r=0.07$, $n=10$ ナルトキノ s ノ値ヲ求メヨ。
2. 上ニ求メタ公式ニ於テ、 $M=10000$, $r=0.06$, $n=25$ ナルトキノ s ノ値ヲ求メヨ。

54. 年金

【問題】 M 圓ヲ年利率 r , 一年毎ノ複利テ預ケ、ソレカラ一年ヲ經過スル毎ニ一定金額ツツヲ受取り n 年間ニ悉クコレヲ受取り盡スヤウニスルニハ、毎年幾圓ツツ受取レバヨイカ。

【解】 所要ノ金額ヲ a 圓トスレバ、 a 圓ハコレヲ拂フ方カライヘバ年賦償還金デアル。

故ニ

$$a = \frac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

デアル。

【注意】コノ場合毎年受取ル金額 a 圓ノコトヲ年金トイフ。上ノ公式ハ即チ年金ノ公式デアル。郵便年金ハ如何ナル仕組ニナツテキルカ各自ニ調ベヨ。

練習題

1. 上ニ求メタ公式ニ於テ, $M=50000$, $r=0.06$, $n=10$ ナルトキニハ, a ノ値幾ラカ。
2. 今カラ20年間, 毎年末ニ500圓ヅツ受取ル年金ガアル。年利率5分, 一年毎ノ複利トシテ現在コレヲ譲リ受ケヨウトスルニハ, 幾圓イルカ。
【注意】 上ノ問題ニ於テ, 求メル金額ノコトヲ問題ノ年金ノ現價トイフ。
3. 年利率 r , 一年毎ノ複利トシテ, 毎年 a 圓ヅツ n 年間受取ル年金ノ現價 M ヲ求メル公式ヲ作レ。
4. 毎月初ニ5圓ヅツ10年間積立テルト元利合計幾ラニナルカ。利率ハ年6分トシ, 各年ニ於ケル毎月ノ積立金ニ對スルソノ年内ノ利息ハ, 單利デ計算シ, ソノ後ノ年ニ對スル利息ハ, 一年毎ノ複利トシテ計算セヨ。

箱笥
 立
 解

第五篇

空間ニ於ケル圖形ノ性質

第一章

基本ノ關係

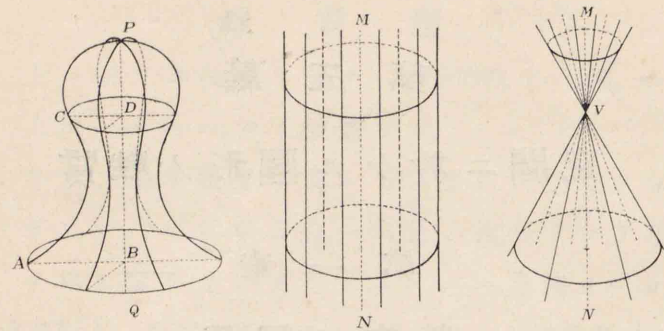
55. 面, 平面, 曲面

熟知ノ通り, 面ニハ平面ト曲面ガアル。

【定義】 面上ノ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ, 常ニソノ上ニアル面ヲ平面トイヒ, サウデナイ面ヲ曲面トイフ。

【定義】 曲面ノ中デ, 一ツノ曲線(直線ヲモ含メテ) C ヲ一定直線ヲ軸トシテ一廻轉サセタトキニ生ズル面ヲ廻轉面又ハ旋轉面トイフ。ソシテソノ一定直線ヲ廻轉面ノ軸, C ヲ廻轉面ノ母線又ハ經線トイフ。

【定義】 廻轉面ノ中デ, 軸ニ平行ナ直線ヲ母線トスルモノヲ直圓壙面トイヒ, 軸ニ交ル直線ヲ母線トスルモノヲ直圓錐面, 軸ノ上ニ直徑ヲ持ツ半圓ヲ母線トスルモノヲ球面トイフ。



以下主トシテ、平面、直圓擡面、直圓錐面、球面及ピコ
レ等ノ面デ圍マレタ立體ニツイテ考察スル。

本章デハ、基本的ノ事項ノ考究ヲ主トシテ進ミ、時
ニ臨ンデソノ應用ヲ説クコトトスル。

先ヅ、平面ニ關シテ次ノコトハ明デアル。

公理 同一直線上ニナイ三ツノ點ヲ通
ル平面ハ唯一ツデアル。

コノコトヲ又次ノウウニモイフ。

一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ定メル、

或ハ

一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ決定スル。

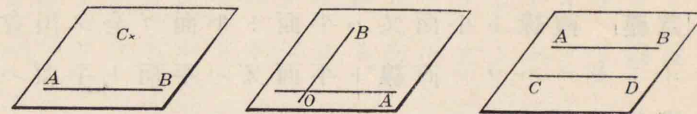
上ノ公理カラ、直ニ次ノコトガ知ラル。

次ノ各ハ何レモ一平面ヲ定メル。

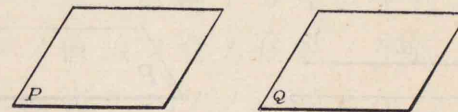
[i] 一直線トソノ上ニナイ一點

[ii] 相交ル二直線

[iii] 平行ナ二直線



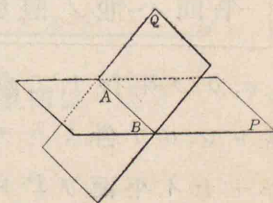
【注意】 平面ニハ限リガナイノデアアルガ、圖ニ表ハストキ
ニハ平行四邊形ヲ以テシ、コレニ P, Q 等ノ文字ヲ記入
シテ「平面 P」「平面 Q」等ト呼ブ。



平面ニ關シテ次ノコトモ亦明デアル。

相異なる二ツノ平面ノ交リハ、一ツノ直
線デアル。

【注意】 (1) 二ツノ平面ハ、唯一ツノ
點ダケデ出會フコトハ出來ナ
イトイフコトサヘ認メレバ上
掲ノ事實ハ證明出來ルノデア
アルガ、本書デハコレヲ證明ナシ
ニ認メルコトトスル。



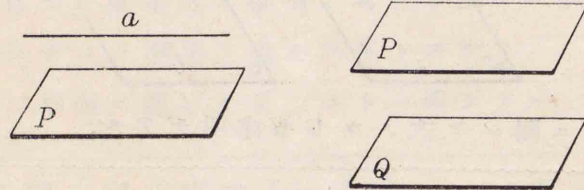
(2) 一點又ハ一直線ガ一平面上ニアルトキ、ソノ平面ハ
ソノ點又ハソノ直線ヲ含ム、或ハ通ルトモイフ。

(3) 曲面ト曲面,又ハ平面ト曲面トノ交リハ一般ニ曲線デアアル。

56. 直線,平面ノ平行

[定義] 直線ト平面又ハ平面ト平面ガ全ク出會ハナイトキニハ,ソノ直線ト平面又ハ平面ト平面ハ互ニ平行デアルトイフ。

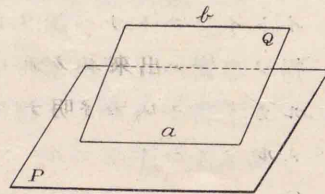
ソシテ例ヘバ直線 a ト平面 P , 平面 P ト平面 Q ガ互ニ平行デアルトイフコトヲ,ソレヅレ $a \parallel P, P \parallel Q$ ト略記スル。



定理 ニツノ平行線ノ一方ダケヲ含ム平面ハ,他ノ直線ニ平行デアアル。

a, b ヲ平行ナ二直線トシ, a ヲ含ミ b ヲ含マナイ平面ヲ P トスルト,

$$b \parallel P.$$



[證明] 平行線 a, b ノ定メル平面ヲ Q トスレバ, a ハ P ト Q トノ交リデアアル。サテ Q 上ノ直線 b ト P トニ共有點ガアルトスルナラバ,ソノ點ハ P ト Q トノ交リ,從ツテ a ノ上ニナケレバナラヌトイフコトニナル。サウスルト, b ガ a ト交ルコトトナリ假設ニ反スル。

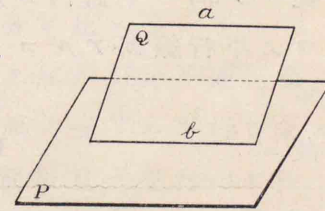
故ニ b ト P トハ全ク出會ハナイ。即チ

$$b \parallel P.$$

定理 平面ト直線トガ互ニ平行ナトキニハ,コノ直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交リハ,ソノ直線ニ平行デアアル

平面 P ト直線 a トガ互ニ平行デアルトキニハ, a ヲ含ム任意ノ平面 Q ト P トノ交リ b ハ, a ニ平行デアアル。

[證明] (各自ニ試ミヨ)

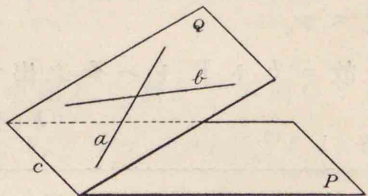


[注意] 直線ト平面トノ相互ノ位置關係ハ次ノ三ツノ場合ニ大別出來ル。即チ

- (1) 相交ル場合
- (2) 直線ガ平面ニ含マレル場合
- (3) 互ニ平行ナ場合

定理 相交ル二直線ノ各ガ、一平面ニ平行デアルトキハ、ソノ二直線ノ定メル平面ハ、前ノ平面ニ平行デアル。

a, b ハ相交リ且ツソレゾレ平面 P ニ平行デアルトスルト、 a, b ノ定メル平面 Q ハ P ニ平行デア



ル。
[證明] P ト Q トガ相交ルモノト假定シ、ソノ交リヲ c トスレバ

$$c \parallel a$$

$$c \parallel b$$

從ツテ、同一平面内ニ於テ、一點ヲ通り同一直線ニ二ツノ平行線ガアルコトニナル。コレハ不合理デア

ル。
 故ニ $P \parallel Q$ 。

定理 一ツノ平面ガ平行ナ二平面ト交ルトキハ、ソノ交リハ互ニ平行デア

ル。平面 R ガ平行ナ二平面 P, Q トソレゾレ a, b ニ於テ相交ルモノトスルト

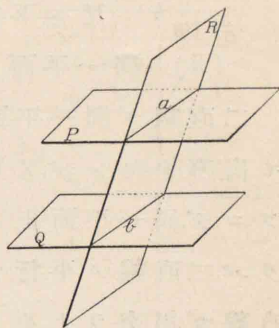
$$a \parallel b$$

[證明] (各自ニ試ミヨ)

[系] 平行ナ二平面ノ一ツト相交ル平面ハ、他ニモ亦交ル。

[注意] 二平面ノ相互ノ位置關係ハ、次ノ三ツノ場合ニ大別出來ル。即チ

- (1) 相交ル場合
- (2) 互ニ平行ナ場合
- (3) 相一致スル場合



練習題

1. 一組ノ平行平面ガ二ツノ直線ト交ルトキ、ソレ等ノ平面ガ一ツノ直線カラ截取ル線分ノ比ハ、他ノ直線カラ截取ル線分ノ比ニ等シイ。
2. 相交ル二平面ヲソノ交リニ平行ナ平面デ截ルト、ソノ交リハ初ノ二平面ノ交リニ平行デア
3. 同一平面ニ平行ナ二平面ハ互ニ平行デア

57. 二直線ノ位置關係

空間ニ於ケル相異ナル二直線ノ相互ノ位置關係ハ、次ノヤウニ區別スルコトガ出來ル。

- (i) 同一平面上ニアル場合
 - a) 相交ル場合

b) 互ニ平行ナ場合

(ii) 同一平面上ニナイ場合

二直線ガ同一平面上ニナイトキニハ、相交ルコトモ出来ナケレバ、又互ニ平行デアアルコトモ出来ナイ。ソコデ、同一平面上ニアル圖形ダケヲ取扱フ場合ナラバ、二直線ノ平行ナルコトヲ證明スルニハ、ソノ二直線ガ相交ラナイトイフコトダケイヘバソレデヨイデアアルガ、空間ニ於ケル二直線ニツイテ、ソレガ互ニ平行デアアルトイフコトヲイハウトスルニハ、ソノ二直線ガ同一平面上ニアルトイフコトト、相交ラナイトイフ二ツノコトヲ證明シナケレバナラス。

定理 同一直線ニ平行ナ二直線ハ、互ニ平行デアアル。

直線 a, b ガ何レモ直線 c ニ平行デアアルナラバ、 $a \parallel b$ デアル。

[證明] i] a, b, c ガ同一平面上ニアル場合ハ既ニ證明サレテアル。ソレデ

ii] a, b, c ガ同一平面上ニナイ場合ニツイテ證明スル。

直線 b ト a 上ノ任意ノ一點 A トノ定メル平面ヲ P トシ、 a ト c トノ定メル平面ヲ Q トスルト、 P ト Q

トノ交リハ、 A ヲ通り且 c ニ平行デアアル。

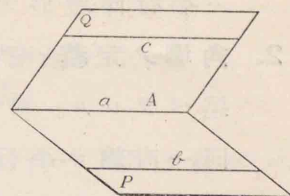
トコロガ、 Q 上ニ於テ、 A ヲ通り且 c ニ平行ナ直線ハ唯一ツシカナイ。故ニ P ト Q トノ交リハ、 a ト一致スル。

サテ $b \parallel c$ ナルガ故ニ

$$b \parallel Q$$

依ツテ

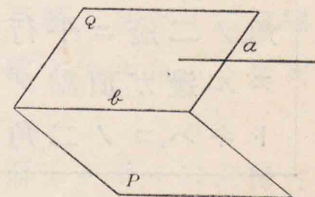
$$a \parallel b.$$



定理 同一直線ニ平行ナ二平面ノ交リハ、ソノ直線ニ平行デアアル。

平面 P, Q ガソレゾレ一直線 a ニ平行ナルトキハ、 P, Q ノ交リ b ハ a ニ平行デアアル。

[證明] (各自ニ試ミヨ)



練習題

1. 同一平面上ニナイ四點 A, B, C, D ヲ順ニ結ンデ得ラレル四邊形 $ABCD$ ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲソレゾレ K, L, M, N トスレバ、四邊形 $KLMN$

ハ平行四邊形デアル。

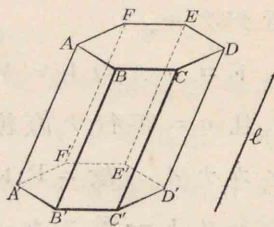
2. 角嚮ノ定義 ハ次ノヤウニ述ベラレル。

同一直線ニ平行ナ三ツ以上ノ平面ト、コレニ交ルニツノ互ニ平行ナ平面トデ

圍マレタ多面體ヲ角嚮トイフ。コノ定義ニ基イテ、次ノコトヲ證明セヨ。

[i] 角嚮ノ側面ハ、皆平行四邊形デアル。

[ii] 角嚮ノ側稜ハ、互ニ平行デ且相等シイ。



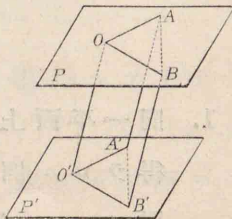
58. 邊ガ平行ナニツノ角

定理 一ツノ角ノ二邊ガソレゾレ他ノ角ノ二邊ニ平行デアツテ、且ソノ相對應スル邊ガ頂點ヲ結ブ直線ノ同側ニアルトキハ、コノ二角ハ相等シイ。

$\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ ニ於テ

$OA \parallel O'A', OB \parallel O'B'$

デアツテ、且 OA ト $O'A'$ 、 OB ト $O'B'$ ガ OO' ノ同ジ側ニアルモノトスル



$\angle AOB = \angle A'O'B'$

[證明] $\angle AOB, \angle A'O'B'$ ノ各對應邊ノ上ニ

$OA = O'A', OB = O'B'$

ナルヤウニ點 A, A', B, B' ヲトリ、 AA', BB' ヲ結ベバ、 $AOO'A', BOO'B'$ ハ、何レモ平行四邊形デアル。故ニ

$OO' \parallel AA', OO' = AA'$

$OO' \parallel BB', OO' = BB'$

從ツテ $AA' \parallel BB'$ 且 $AA' = BB'$

故ニ $AB, A'B'$ ヲ結ベバ、 $ABB'A'$ モ亦平行四邊形デアル。故ニ

$AB = A'B'$

從ツテ $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$

故ニ $\angle AOB = \angle A'O'B'$

[系] 任意ノ點ヲ通ツテ、同一平面上ニナイ二直線ニソレゾレ平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ、一定デアル。

[定義] 一點ヲ通ツテ、同一平面上ニナイ二直線ニソレゾレ平行ニ引イタ二直線ノナス角ヲ、初メノ二直線ノナス角トイフ。

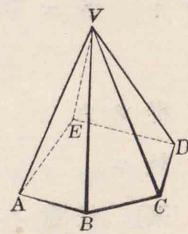
若シコノ角ガ直角デアレバ、初メノ二直線ハ互ニ垂直デアルトイフ。コノ故ニ空間ニ於ケル二直線ガ、互ニ垂直デアルトイッテモ必ズシモ相交ツテキ

ルトハ限ラナイ。

練習題

- 角嚮ノ兩底面及ビソノ各ニ平行ナ平面デ截ツタ截面(截面トモイフ)ハ合同ナ多角形デアアル。
- $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ ニ於テ、對應邊ガ平行デアアルトキニハ、對應頂點ヲ結ブ直線 AA' , BB' , CC' ハ同一ノ點ヲ通ルカ又ハ互ニ平行デアアル。
- 角錐ノ定義** ハ次ノヤウニ述ベラレル。

一ツノ多角形ト、ソノ各邊ヲ底邊トシソノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トニ依ツテ圍マレタ多面體ヲ**角錐**トイフ。コノ定義ニ基イテ、次ノコトヲ證明セヨ。



角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截レバ、

- 側稜及ビ頂點カラ底面ニ引イタ線分ハ同ジ比ニ分タレル。
 - 截面ハ底面ニ相似デアアル。
 - 截面ノ面積ノ比ハ、頂點カラソレ等ノ截面ニ至ル距離ノ比ノ二乗比ニ等シイ。
- 底面ガ平行四邊形ナル角嚮ヲ**平行六面體**トイ

フ。コノ定義ニ基イテ、次ノコトヲ證明セヨ。

- 平行六面體ノ三双ノ相對スル面ハ、ソレゾレ互ニ平行デ且合同デアアル。
- 平行六面體ノ稜ハ、四ツヅツ平行デアアルテ、且相等シイ。
- 平行六面體ノ四ツノ對角線(同ジ平面上ニナイ二頂點ヲ結ブ線分)ハ、皆ソノ中點ニ於テ相交ル。

59. 平面ノ垂線

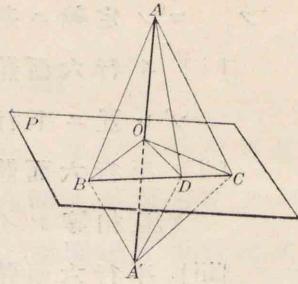
[定義] 一直線ガ一平面ト交リ、ソノ交點ヲ通ツテソノ平面上ニ引カレタスベテノ直線ニ垂直デアアルトキニハ、ソノ直線ト平面トハ互ニ垂直デアアルトイヒ、ソノ直線ヲ平面ノ**垂線**、ソノ交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。又平面ニ交リコレニ垂直デナイ直線ヲ、ソノ平面ノ**斜線**トイヒ、交點ヲ**斜線ノ足**トイフ。

定理 相交ル二直線ノ交點ヲ通りソノ各ニ垂直ナ直線ハ、ソノ二直線ノ定メル平面ニ垂直デアアル。

相交ル二直線 OB , OC ノ交點 O ヲ通り、ソノ各ニ垂直ナ直線ヲ AA' トスルト、 AA' ハ OB , OC ノ定メル

平面 P ニ垂直デアアル。

〔證明〕 O ヲ通り平面 P 上ニ任意ノ直線 OD ヲ引キ, OB, OC, OD ト交ル任意ノ直線ヲ引イテ, ソノ交點ヲソレゾレ B, C, D トスル。



次ニ AA' ノ上ニ $OA=OA'$ ナルヤウニ二點 A, A' ヲ取リ, A, A' ヲソレゾレ B, C, D ト結ブト

$$AB=A'B, AC=A'C$$

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$

依ツテ $\angle ABD = \angle A'BD$

從ツテ $\triangle ABD \equiv \triangle A'BD$

故ニ $AD=A'D$

依ツテ $OD \perp AA'$

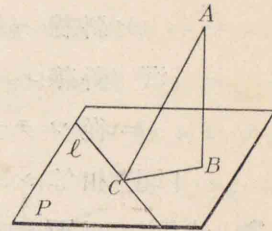
即チ AA' ハ, P 上ニアツテ O ヲ通ル任意ノ直線ニ垂直デアアル。故ニ $AA' \perp P$ デアアル。

〔系〕 一ツノ平面ノ垂線ハ, ソノ平面上ノスベテノ直線ニ垂直デアアル。

定理 平面 P 外ノ一點 A カラ, P 上ノ直線 l ニ垂線ヲ引キ, ソノ足ヲ通ツテ l ニ垂直ナ直線ヲ P 内ニ於テ引イテ, A カラ

コソ直線ニ垂線 AB ヲ引クト, AB ハ P ニ垂直デアアル。

〔證明〕 A カラ l ニ引イタ垂線ノ足ヲ C トスルト, $AC \perp l$, 又 $CB \perp l$ デアアルカラ, l ハ AC, BC ノ定メル平面ニ垂直デアアル。故ニ $AB \perp l$ デアアル。從ツテ AB ハ P ヲ通ツテ l ニ平行ナ直線ニ垂直デアアル。



又假設ニ依リ $AB \perp BC$ デアアルカラ, AB ハ平面 P ニ垂直デアアル。

〔系〕 平面 P 外ノ一點 A カラ P 及ビ P 上ノ任意ノ直線 l ニ垂線ヲ引クト, ソノ足ヲ結ブ直線ハ l ニ垂直デアアル。(三垂線ノ定理)

定理 一定點ヲ通り一ツノ平面ニ垂直ナ直線ハ, 唯一ツデアアル。

〔證明〕 (各自ニ試ミヨ)

練習題

1. 平面外ノ一點カラコノ平面ヘ垂線及ビ斜線ヲ引クト,

[i] 垂線ハ最モ短イ。[コノ長サヲ、**點ト平面トノ距離**トイフ]

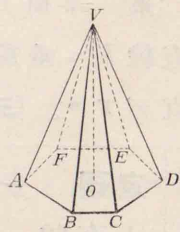
[ii] 垂線ノ足カラ等距離ニアル點ヲ足トスル斜線ハ相等シイ。

[iii] 斜線ハソノ足ガ垂線ノ足カラ遠ザカルニ從ツテ大キクナル。

[iv] 相等シイ斜線ノ足ハ、皆一圓周上ニアル。

2. 球面ヲ平面デ截ルトソノ截面ハ圓デアアル。ソシテ中心カラ等距離ニアル平面デ截ツタ截面ハ相等シク、中心ヲ通ル平面デ截ツタ截面ハ最モ大キイ。[後ノ圓ヲ球ノ**大圓**トイフ]

3. 底面ガ正多角形デ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ガ底面ノ中心ヲ通ル角錐ヲ**直角錐**又ハ**正角錐**トイフ。次ノコトヲ證明セヨ。



[i] 直角錐ノ側面ハ、合同ナニ等邊三角形デアアル。

[ii] 直角錐ノ側面積ハ、底面ノ周ト側面ヲナス二等邊三角形ノ高サ[コレヲ**直角錐ノ斜高**トイフ]トノ積ノ半分ニ等シイ。

4. **直圓錐**ハ、直圓錐面トソノ軸ニ垂直ナニツノ平面トデ境サレタ立體デアルト定義サレル。矩

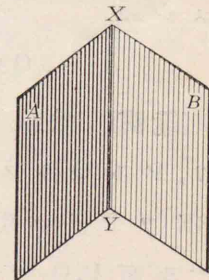
形ヲ、ソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキハ、直圓錐ヲ生ズルコトヲ證明セヨ。[直圓錐ヲ境スル曲面ヲソノ**側面**、平面ヲソノ**底面**トイフ]

5. **直圓錐**ハ、直圓錐面トソノ軸ニ垂直ナニツノ平面トデ境サレタ立體デアルト定義サレル。直角三角形ヲ、ソノ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ廻轉スレバ直圓錐ヲ生ズルコトヲ證明セヨ。[直圓錐ヲ境スル曲面ヲソノ**側面**、平面ヲソノ**底面**トイフ]

60. 垂直平面

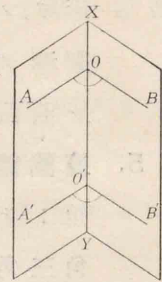
[定義] 同一直線ニ終ルニツノ平面ハ**二面角**ヲナストイヒ、ソノ直線ヲ二面角ノ**稜**、ソノ平面ヲ二面角ノ**面**トイフ。

二面角ヲ呼ブニハ、各面上ノ一點ヲ表ハス二文字ノ間ニ、稜上ノ二點ヲ表ハス文字ヲ夾ンデ、例ヘバ圖ノヤウナ二面角ナラバ、「二面角AXYB」トイフヤウニスル。混同ノ恐レガナケレバ單ニ「二面角XY」トモ呼ブ。



二面角ノ稜上ノ任意ノ一點ニ於テソノ稜ニ垂直ナ直線ヲ各面内ニ引イタトキ、ソノ二直線ノナス角ノ一定デアルトイフコトハ容易ニ證明出來ル。

[定義] 二面角ノ稜上ノ一點ニ於テ、ソノ稜ニ垂直ニ各面内ニ於テ引イタ二直線ノナス角ヲ、ソノ二面角ノ平面角トイフ。



二面角ノ平面角ヲ以テ、二面角ノ大サヲ測ル。

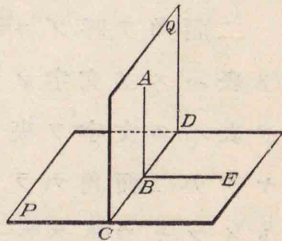
[定義] 相交ル二ツノ平面ノナス四ツノ二面角ノ中、一ツガ直角ナルトキハ、ソノ二平面ハ互ニ垂直デアルトイフ。

定理 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ初メノ平面ニ垂直デアアル。

AB ヲ平面 P ノ垂線トシ、AB ヲ含ム平面ヲ Q トスレバ

$$Q \perp P$$

[證明] 垂線 AB ノ足 B ヲ通り、P ト Q トノ交リ CD ニ垂線 BE ヲ P 上ニ引ケバ、 $\angle ABE$ ハ

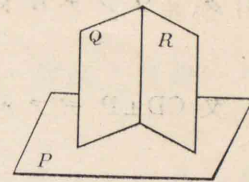


二平面 P, Q ノナス二面角ノ平面角デアアル。然ルニ $AB \perp P$ デアルカラ

$$AB \perp BE \text{ 従ツテ } \angle ABE = \angle BCD$$

故ニ $Q \perp P$.

[系] 同一ノ平面ニ垂直ナ二平面ノ交リハ、前ノ平面ニ垂直デアアル。



練習題

1. 一ツノ直線ヲ含ミーツノ平面ニ垂直ナ平面ハ一般ニハ唯一ツデアアル。特殊ナ場合ハ如何ナル場合カ。
2. 直線 AB, AC ガ、ソレゾレ相交ル二平面 P, Q ニ垂直デアレバ、コノ二直線ノ定メル平面ハ PQ ノ交リニ垂直デアアル。

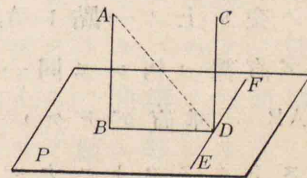
65. 平行關係ト垂直關係

定理 同一平面ニ垂直ナ二ツノ直線ハ互ニ平行デアアル。

AB, CD ガ、何レモ平面 P ニ垂直ナラバ、

$$AB \parallel CD$$

[證明] B, D ヲソレゾレ AB, CD ノ足トスル。AB 上ノ任意ノ點 A ト D ヲ結ビ、且 P 上ニ於テ、D ヲ通り AD ニ垂線 EF ヲ



引ク。ソシテ B ト D トヲ結ブ。サウスルト

$$BD \perp EF$$

又 $CD \perp P$ デアルカラ,

$$CD \perp EF$$

即チ AD, BD, CD ハ, D ニ於テ EF ニ垂直デアルカラ, コレ等ノ直線ハ, D ニ於テ EF ニ垂直ナ平面上ニアル。依ツテ AB, CD ハ, D ニ於テ EF ニ垂直ナ同一平面上ニアル。ソシテ AB, CD ハ BD ニ垂直デアル。

故ニ $AB \parallel CD$.

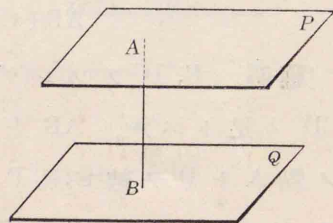
[系] 二ツノ平行線ノ一ツニ垂直ナ平面ハ, 他ノ直線ニモ亦垂直デアル。

定理 同一直線ニ垂直ナ二ツノ平面ハ互ニ平行デアル。

P, Q ヲ直線 AB ニ垂直ナ二ツノ平面トスルト

$$P \parallel Q$$

[證明] AB ガ P, Q ト交ル點ヲ A, B トスル。今 P, Q ガ相交ルト假定スレバ, ソノ交リ上ノ一點ト A, B ヲ結ブ直線ハ何レモ同一ノ直線 AB ニ垂直デナケレバナラヌトイフコトニナル。コレ



ハ不合理デアル。

故ニ $P \parallel Q$

[系] 1. 二ツノ平行平面ノ一ツニ垂直ナ直線ハ, 他ノ平面ニモ垂直デアル。

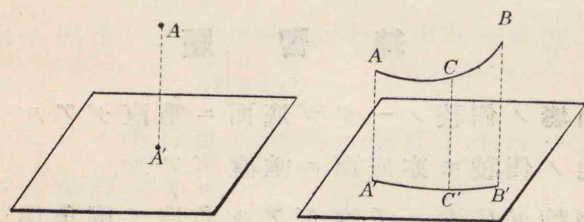
[系] 2. 互ニ平行ナ二平面ノ間ニ夾マレル共通垂線ノ部分ノ長サハ, 一定デアル。[コノ長サヲ, ソノ二平面間ノ距離トイフ]

練習題

1. 角嚙ノ側稜ノ一ツガ底面ニ垂直デアルトキハ, 他ノ側稜モ亦底面ニ垂直デアル。
[側稜ガ底面ニ垂直デアル角嚙ヲ**直角嚙**トイヒ, サウデナイ角嚙ヲ**斜角嚙**トイフ。]
2. 直角嚙ノ側面ハ皆矩形デアル。又ソノ側面積ハ, 底面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ。
3. 底面ガ矩形ナル直角嚙ヲ**直方體**トイフ。直方體ノ一頂點ニ集ル三ツノ稜ノ平方ノ和ハ, 對角線ノ平方ニ等シイ。
4. 角嚙ノスベテノ側稜ト交リ且コレニ垂直ナ平面ニ依ツテソノ角嚙ヲ截ツタトキニハ, ソノ截口ヲ**直截口**又ハ**直截面**トイフ。角嚙ノ側面積ハ, ソノ直截面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ。

62. 平面ト斜線ノナス角

[定義] 一ツノ點カラ一ツノ平面ニ引イタ垂線ノ足ヲ、ソノ點ノコノ平面上ニ投ズル正射影トイヒ、一ツノ線上ノ點ノコノ平面上ニ投ズル正射影ノ集リヲ、ソノ線ノコノ平面上ニ投ズル正射影トイフ。[正射影トイフベキトコロヲ單ニ射影トイフコトモアル]



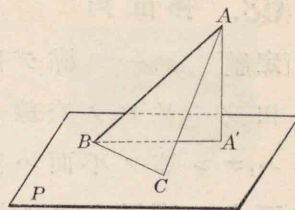
一ツノ平面ニ垂直デナイ直線ノコノ平面上ニ投ズル正射影ガ、一ツノ直線デアルトイフコトハ明デアル。

定理 一ツノ平面ノ斜線ガ、コノ足ヲ通りソノ平面内ニアル直線トナス角ノ中デ、正射影トナス銳角ガ最モ小サイ。

AB ヲ平面 P ノ斜線、B ヲソノ足トシ、A'B' ヲ AB ノ P 上ニ投ズル正射影、BC ヲ P 上ニ引イタ任意ノ直線トスレバ

$$\angle ABA' < \angle ABC$$

[證明] A ノ P 上ニ投ズル正射影ヲ A' トシ、BC 上ニ一點 C ヲ BC=BA' ナルヤウニトリ、AC ヲ結ベバ、 $\triangle ABA'$ ト $\triangle ABC$ トニ於テ



$$AB=AB, BA'=BC, AA'<AC$$

故ニ $\angle ABA' < \angle ABC$.

[定義] 平面ノ斜線トコノ斜線ノソノ平面上ニ投ズル正射影トノナス銳角ヲ、ソノ斜線ト平面トノナス角トイフ。

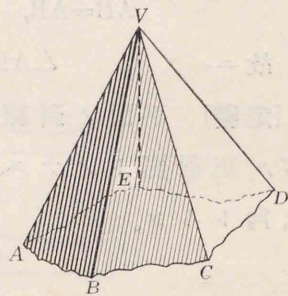
練習題

1. 各面ガ正三角形ナル四面體ヲ正四面體トイフ。正四面體ノ稜ガ、ソレヲ含マナイ面トナス角ヲ作レ。
2. 一ツノ線分ガ、ソノ一平面上ニ投ズル正射影トナス角ノ中、 90° ヨリ大デナイ方ノ角ヲソノ線分ノコノ平面トナス角トイフ。長サ l ナル線分ガ一平面トナス角ヲ α トスルト、ソノ線分ノコノ平面上ニ投ズル正射影ノ長サハ $l \cos \alpha$ デアル。

63. 多面角

[定義] 同一ノ點デ出會フ三ツ以上ノ平面ガ次々ニ相交リ、且ソノ交線ト交點トデ限ラレテキルトキニハ、コレ等ノ平面ハ**多面角**ヲナストイヒ、ソノ點ヲ多面角ノ**頂點**、各ノ平面ヲ多面角ノ**面**、相隣ル二面ノ交リヲ多面角ノ**稜**、相隣ル二稜ノナス角ヲ多面角ノ**面角**トイフ。面ノ數ニ依リ三面角、四面角、五面角等ト呼ブ。

例ヘバ右ノ圖ニ示スヤウナ多面角ヲ呼ブトキニハ、五面角V-ABCDEトイフ。



[定義] 全ク重ネ合スコトノ出來ル多面角ハ**合同**デアルトイフ。

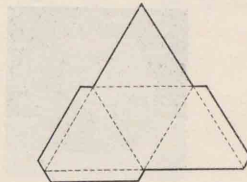
64. 正多面體

[定義] スベテノ面ガ合同ナ正多角形デ、各頂點ニ於ケル多面角ガ互ニ合同デアル多面體ヲ**正多面體**トイフ。

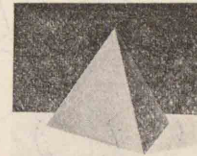
次ノ證明ハ省キ、事實ヲ指摘スルニ止メテオク。

正多面體ハ五種シカナイ。

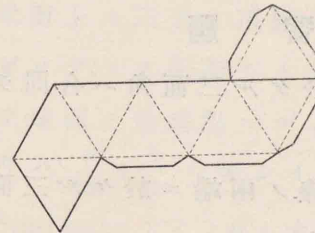
[注意] 五種ノ正多面體ノ模型ハ、次ノ左ノ圖ニ示スヤウニ紙ヲ切り、點線ニ沿ツテ折り曲ゲルト出來ル。



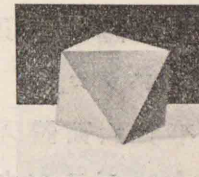
正四面體ノ展開圖



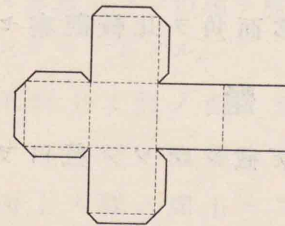
正四面體



正八面體ノ展開圖



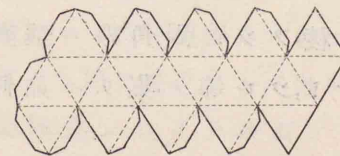
正八面體



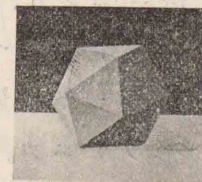
正六面體ノ展開圖



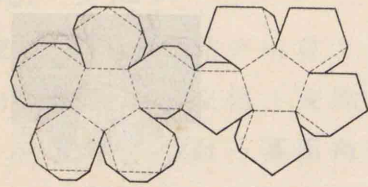
正六面體(立方體)



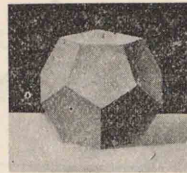
正二十面體ノ展開圖



正二十面體



正十二面體ノ展開圖



正十二面體

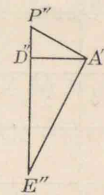
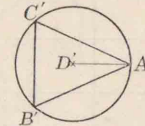
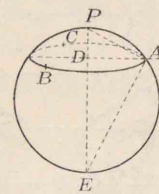
練習題

1. 直方體ノ各頂點ニ於ケル三面角ハ合同デアルカドウカ。
2. 平行六面體ノ對角線ノ兩端ニ於ケル三面角ハ合同デアルカドウカ。
3. 多面體狀ニ磨キ上ゲタ寶石類ノ一ツニツイテ、ソノ各頂點ニ於ケル多面角ヲ比較觀察セヨ。

雜題

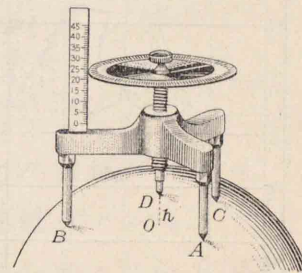
1. 立方體ヲ一ツノ平面デ截ツテソノ截面ヲ正六角形ナラシメヨ。
2. 正四面體ノ高サノ平方ノ3倍ハ、稜ノ平方ノ2倍ニ等シイ。
3. 立方體ノスベテノ稜ヲソノ對角線ニ垂直ナ平面上ニ正射影スルト、ソレ等ノ集リハ如何ナル形ヲナスカ。
4. 兩脚器デ球狀ノ物體ノ直径ヲ求メル工夫ヲセ

ヨ。(次ノ圖參照)

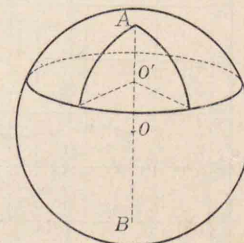


5. 球面上ニ三ツノ頂點ヲ有スル正三角形ノ一邊ガ a デ、ソノ平面ガ水平デアルトキ、コノ平面カラ球面ノ最高點マデノ距離ガ h ナラバ、球ノ半径ハ $\frac{a^2}{6h} + \frac{h}{2}$ ニ等シイ。

[Spherometer トイフレんテナドノ半径ヲ測ルニ用ヒル器械ハ、コノ原理ヲ應用シタモノデアル。]



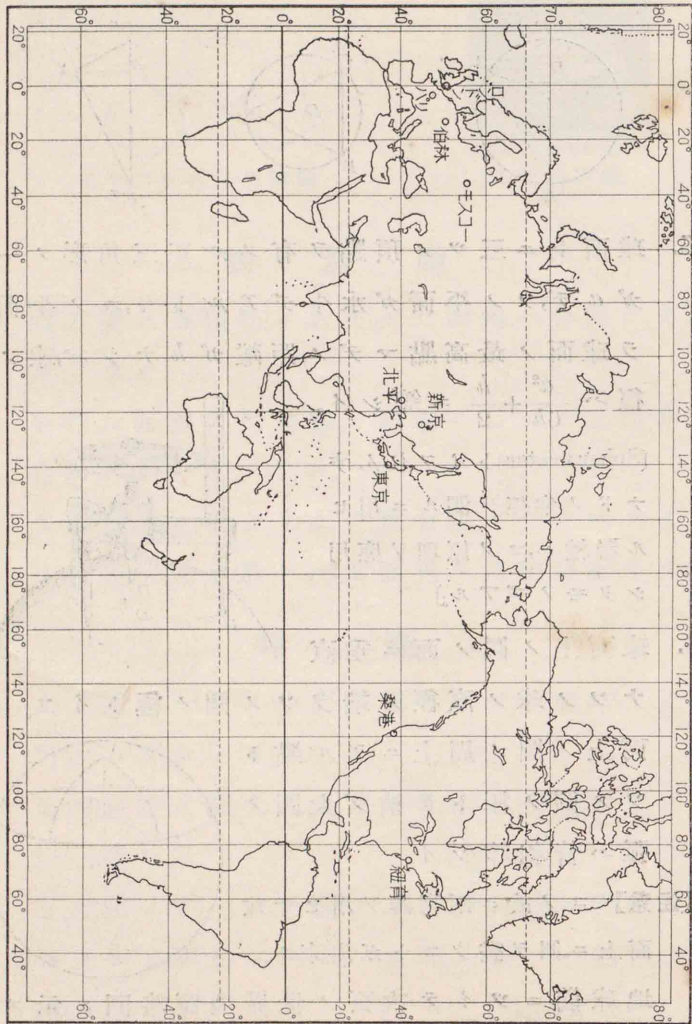
6. 球面上ノ圓ノ面ニ垂直ナツノ球ノ直径ノ端ヲソノ圓ノ極トイフ。球面上ノ圓ノ周上ニアル點トソノ圓ノ極トヲ結ブ大圓ノ弧ハ皆相等シイ。



【注意】コノ故ニ兩脚器ヲ用ヒテ球面上ニ圓ヲ畫クコトガ出來ル。

地球儀ニツイテ次頁ノ世界地圖略圖ニ示ス都市間ノ最短路ヲ求メ、コノ地圖上ニ記入セヨ。

世界地圖略圖

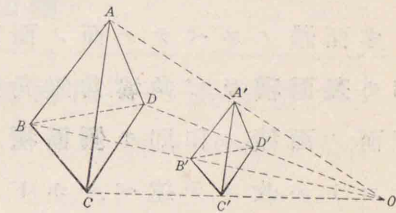


[球面上ニ於テハ、二點間ノ最短線ハ、ソノ二點ヲ通ル大圓ノ劣弧デアルトイヘルガ、コノ證明ハ略シ、事實ヲ指摘スルニ止メテオク]

8. 多面體 $ABC \dots$ ノ各頂點ト點 O トヲ結ビ、 OA, OB, OC, \dots ノ上ニ O ニ關シテ A, B, C, \dots ト同ジ側ニ點 A', B', C', \dots ヲトリ、
 $OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC = \dots$

ナラシメルトキ、
 A', B', C', \dots ヲ頂

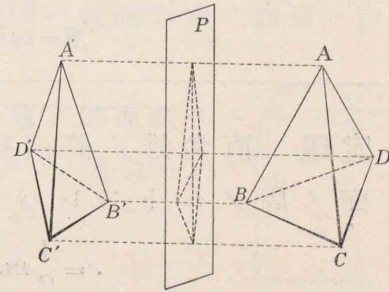
點トスル多面體
 $A'B'C' \dots$ ノ稜面、
 三面角、多面角ハ元



ノ多面體ノソレト如何ナル關係ニアルカ。[カヤウナ二ツノ多面體ハ相似デアルトイフ]

9. 圖ニ於テ $A', B', C' \dots$ ヲ一ツノ平面 P ニ關シテ A, B, C, \dots ト對稱ナルヤウニ(即チ AA', BB', CC', \dots ガ P ニ依ツ

テ垂直ニ二等分サレルヤウニ)トルト、
 ドウナルカ。[カヤウナ二ツノ多面體ハ平面 P ニ關シテ



對稱デアルトイフ]

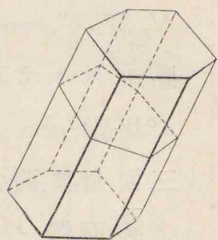
第六篇 表面積及び體積

第一章

立體ノ表面積

65. 多面體ノ表面積

多面體ノスベテノ面ノ面積ノ和即チ表面積及び角嚮,角錐,角錐臺ノ側面ノ面積ノ和即チ側面積ヲ求メルコトハ,改メテ述ベルホドノコトハナイ。唯ダ念ノタメニ,次ノ諸定理ヲ掲ゲルニ止メテ置ク。



定理 角嚮ノ側面積ヲ S , 側稜ヲ s , 直截面ノ周ヲ m トスレバ,

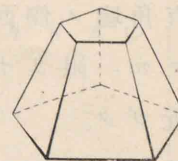
$$S = ms$$

定理 直角錐ノ側面積ヲ S , 斜高ヲ s , 底面ノ周ヲ m トスレバ

$$s = \frac{1}{2}ms$$

[系] 直角錐臺ノ兩底面ノ周ヲ m, m' トシ, 斜高ヲ s , 側面積ヲ S トスレバ

$$S = \frac{1}{2}s(m+m')$$



「直角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デ截ツタトキ, 底面ト截面トノ間ニ夾マレタ角錐ノ部分ヲ直角錐臺トイヒ, 各側面ノ高サヲソノ斜高トイフ」

66. 曲面體ノ表面積

定理 直圓嚮ノ側面積及び表面積ヲ, ソレゾレ S 及び H トシ, 底面ノ半径ヲ h , 高サヲ t トスレバ

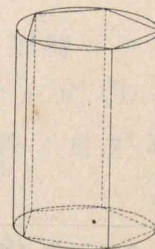
$$S = 2\pi ht, \quad H = 2\pi h(h+t)$$

[證明] 直圓嚮ノ一ツノ底面ニ内接スル正 n 邊形ヲ底面トシ, 直圓嚮ノ高サヲ高サトスル直角嚮ヲ考ヘルト, コノ直角嚮ノ側稜ハ皆直圓嚮ノ側面ニ含マレルコトハ明デアル。

サテ上ニ考ヘル直角嚮ノ側面積ヲ S' , 底面ノ周ヲ m トスルト, 邊數 n ノ如何ナル値ニ對シテモ常ニ

$$S' = mt$$

然ルニ, n ヲ限リナク大キクスルト,



直角臺ノ側面積ハ、直圓臺ノ側面積ニ限リナク近ヅキ、 m ハ限リナク $2\pi h$ ニ、從ツテ mt ハ $2\pi ht$ ニ限リナク近ヅク。

故ニ $S=2\pi ht$

從ツテ又

$$H=2\pi h^2+2\pi ht=2\pi h(h+t).$$

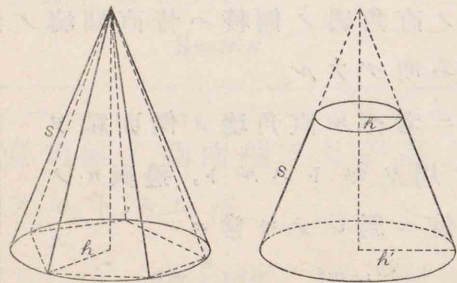
定理 直圓錐ノ側面積及ビ表面積ヲ、ソレゾレ S 及ビ H トシ、底面ノ半徑ヲ h 、斜高ヲ s トスレバ

$$S=\pi hs, \quad H=\pi h(s+h)$$

[證明] (前ニ倣ツテ各自ニ試ミヨ)

[系] 直圓錐臺ノ側面積及ビ表面積ヲソレゾレ S 及ビ H トシ、兩底面ノ半徑ヲ h, h' 、斜高ヲ s トスレバ

$$S=\pi s(h+h'), \quad H=\pi\{h^2+(h+h')s+h'^2\}$$

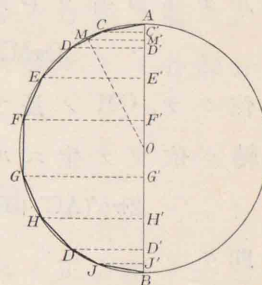


*直圓錐ノ母線ノ長サヲソノ斜高トイフ。

定理 球ノ表面積ヲ H 、半徑ヲ h トスレバ、

$$H=4\pi h^2$$

[證明] 球 O ノ直徑 AB ヲ直徑トスル半圓周ヲ n 等分シ、各各點ヲ順ニ結ンデコノ半圓ニ内接スル多角形 $ACD\dots JB$ ヲ作り、各分點カラ AB ニ垂線ヲ引イテ、ソノ足ヲソレゾレ C', D', E', \dots, J' トスル。



AB ヲ軸トシテコノ多角形ヲ廻轉スレバ、球ニ内接スル一ツノ立體ガ得ラレ、而カモコノ立體ハ、 n 箇ノ直圓錐臺(但シ兩端ノ二ツハ直圓錐)ヲ接ギ合セタモノデアルトイフコト、及ビ n ヲ限リナク大キクスレバ、ソノ表面積ハ限リナク球ノ表面積ニ近ヅクトイフコトハ明デアル。

サテ、例ヘバ線分 CD ガ AB ノ周リニ廻轉シテ生ズル曲面ノ側面積ハ、 $\pi(CC'+DD')CD$ デアルガ、 CD ノ中點ヲ M トシ、 M カラ AB ニ引イタ垂線ノ足ヲ M' トスルト、 $CC'+DD'=2MM'$ デアルカラ、

(CD ノ廻轉ニ依ツテ生ズル曲面ノ面積)

$$=2\pi MM' \cdot CD$$

トコロデ、OMヲ結ビ、 $\angle OMM' = \alpha$ トスルト、 $CD \perp OM$ 、 $AB \perp MM'$ ナルコトカラ、

$$MM' = OM \cos \alpha \quad C'D' = CD \cos \alpha$$

ナルコトガ知ラレル故

$$2\pi MM' \cdot CD = 2\pi OM \cdot C'D'$$

依ツテ、OMノ長サヲ h' トスレバ、ACD.....JBノ廻轉ニ依ツテ生ズル立體ノ表面積ハ

$$2\pi h'(AC' + C'D' + D'E' + \dots + J'B)$$

即チ $2\pi h' \times 2h$ ニ等シイ。

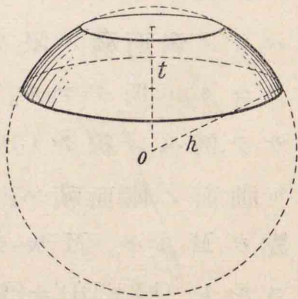
サテ n ヲ限リナク大キクスルト、 h' ハ h ニ限リナク近ヅクカラ、上ニ考ヘル面積ハ

$$2\pi h \times 2h = 4\pi h^2$$

ニ限リナク近ヅク。故ニ

$$H = 4\pi h^2.$$

[定義] 互ニ平行ナ二ツノ截面ノ間ニ夾マレタ球面ノ部分ヲ球帶トイフ。ソシテ截面間ノ距離ヲ球帶ノ高サトイフ。



[系] 球帶ノ面積ヲ M 、高サヲ t トシ、球ノ半徑ヲ h

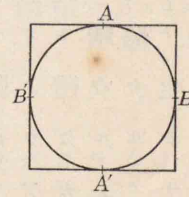
トスレバ、

$$M = 2\pi ht.$$

1. 底面ノ半徑ヲ等シクシ且高サヲ等シクスル直圓壙ト直圓錐ノ側面積ノ比ヲ求メヨ。
2. 球ノ直徑ヲ n 等分シ、コレ等ノ分點ヲ通ツテ互ニ平行ナ平面ヲ作り球面ヲ分ケルト、各部分ノ表面積ハ相等シイ。

練習題

1. 正方形ニ圓ヲ内接セシメ、ソノ正方形ノ一邊ニ垂直ナコノ圓ノ直徑ヲ軸トシテ、全圖形ヲ廻轉スレバ、正方形ハ直圓壙ヲ、圓ハ球ヲ生ゼシメ且球面ハソノ直圓壙ノ各底面ト唯一點ヲ共有シ、直圓壙ノ側面トハ一ツノ圓周ヲ共有スルトイフコトハ明デアル。コノ際球ハ直圓壙ニ内接シ、直圓壙ハ球ニ外接スルトイフ。次ノコトヲ證明セヨ。



- ① 球ガ直圓壙ニ内接スルトキ、直圓壙ノ底面ニ平行ナ二ツノ平面デコノ二ツノ立體ヲ截ルト、ソノ二平面ノ間ニ夾マレタ直圓壙ノ側面ノ部分ト球面ノ部分トハ面積ヲ等シクスル。

② 球ノ表面積ハ、ソノ外接直圓壙ノ側面積ニ等シイ。

2. 地球ヲ半徑 6370km ノ球ト見做シテ、熱帶、溫帶、寒帶ノ面積ヲ概算セヨ。〔溫帶ハ北緯(南緯) $23^{\circ}30'$ カラ北緯(南緯) $66^{\circ}30'$ マデノ間デアアル〕

第二章

體積

67. 體積

〔定義〕 立體ノ占メル空間ノ部分ノ大サヲ、ソノ立體ノ體積トイフ。

主ナ立體ノ體積ヲ求メル規則ニツイテハ既ニ知ツテキルガ、ソレ等ノ規則ノ證明ハマダ與ヘラレテキナイノガアリ、又與ヘラレテキテモ不十分デアアルノデ、以下ソレ等ノ規則ニ對シテ證明ヲ與ヘヨウ。

定理 直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ、ソノ一頂點ニ於テ出會フ三稜ノ長サヲ表ス數ノ積ニ等シイ。

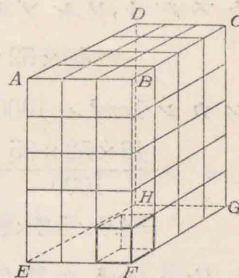
直六面體 $ABCD-EFGH$ ノ一頂點 A ニ於テ出會フ三稜 AB, AD, AE ノ長サヲ表ハス數ヲ、ソレゾレ a, b, c トシ、コノ直六面體ノ體積ヲ表ハス數ヲ T トスル

ト

$$T = abc$$

〔證明〕 (i) a, b, c ガ整數ナル場合。

例ヘバ、 AB, AD, AE ノ長サガソレゾレ $3\text{cm}, 4\text{cm}, 5\text{cm}$ デアルトスレバ、 AB ヲ 3 等分シ、 AD ヲ 4 等分シ、 AE ヲ 5 等分シテ、各分點ニ於テソレゾレ各稜ニ垂直ナ平面ヲ作レバ、コノ直六面體ハ $3 \times 4 \times 5$ 個ノ相等シイ立方體ニ分タレルコトハ明デアアル。ソシテ各立方體ノ稜ノ長サハ 1cm デアルカラ、コノ直六面體ノ體積ハ $3 \times 4 \times 5$ 立方體デアアル。即チ



$$T = 3 \times 4 \times 5$$

同様ニシテ a, b, c ガ如何ナル整數デアラウトモ

$$T = abc$$

ナルコトガ知ラレル。

(ii) a, b, c ノ中ニ整數デナイ數ガアル場合。

例ヘバ、 cm ヲ單位トシテ $a = 4.68 \dots$, $b = 5.27 \dots$, $c = 8.53 \dots$ デアルトスレバ、コノ直六面體ノ體積ハ、三稜ガソレゾレ $4.6\text{cm}, 5.2\text{cm}, 8.5\text{cm}$ ナル直六面體ヨリハ大キク、 $4.7\text{cm}, 5.3\text{cm}, 8.6\text{cm}$ ナル直六面體ヨリハ小サイ。トコロデ、コレ等二ツノ直六面體ノ體積ハ、 mm ヲ單位

トスルト,ソレゾレ

$$46 \times 52 \times 85(mm^3), \quad 47 \times 53 \times 86(mm^3)$$

シカシ $1cm^3$ ハ $1000mm^3$ デアルカラ,コレ等ハソレゾレ

$$\begin{aligned} \frac{46 \times 52 \times 85}{1000} cm^3 & \quad \frac{47 \times 53 \times 86}{1000} cm^3 \\ = 4.6 \times 5.2 \times 8.5 cm^3 & \quad = 4.7 \times 5.3 \times 8.6 cm^3 \end{aligned}$$

故ニ cm^3 ヲ單位トスレバ

$$4.6 \times 5.2 \times 8.5 < T < 4.7 \times 5.3 \times 8.6$$

同様ニシテ

$$4.68 \times 5.27 \times 8.53 < T < 4.69 \times 5.28 \times 8.54$$

ヲ得,逐ツテカクノ如クシテ稜ノ精確ナ數値ニ達スルマデ續ケテ行ケルカラ,結局

$$T = 4.68 \dots \times 5.27 \dots \times 8.53 \dots$$

即チ何レノ場合ニモ

$$T = abc$$

デアル。

【注意】 上ノ定理ヲ略シテ次ノヤウニ述ベル。

直六面體ノ體積ハ,ソノ一頂點ニ於テ出會フ三稜ノ積ニ等シイ。

〔系〕 1. 直方體ノ體積ハ,底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

〔系〕 2. 立方體ノ體積ハ,ソノ一稜ノ立方ニ等シイ。

練習題

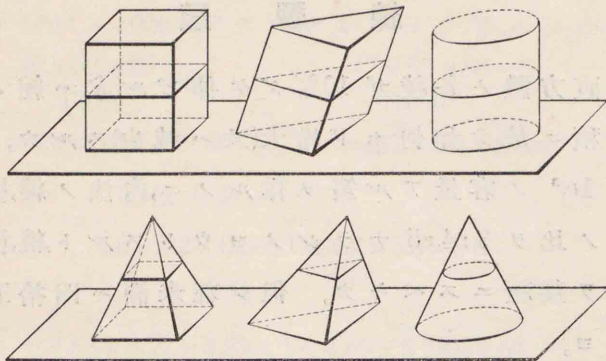
1. 直方體ノ各稜ガ 10% ダケ伸ビル(或ハ縮ム)ト,體積ニ於テ如何ホド増大(又ハ減少)スルカ。
2. $1m^3$ ノ容量アル箱ヲ作ルノニ,内法ノ縦,横,深サノ比ヲ 3:4:5 ナラシメヨウトスルト,縦,横,深サヲ幾種ニスベキカ。但シ耗未滿ハ四拾五入セヨ。
3. 直方體ノ一頂點ニ於テ出會フ三稜ノ長サヲ測ルトキ, 1% ノ誤差ガアツタトスレバ,ソレヲ基トシテ體積ヲ計算スルト,幾パーセントノ誤差ガアルカ。

68. かぐありえりノ原理

體積ニ關スル諸定理ヲ證明スルタメニ,次ノ事實ヲ承認シヨウ。

平行ナ二平面ノ間ニ夾マレタ二ツノ立體ガ,ソレ等ノ平面ニ平行ナ任意ノ平面デ截ラレタトキ,常ニ相等シイ截口ヲ生ズルナラバ,コレ等ノ立體ノ體積ハ相等

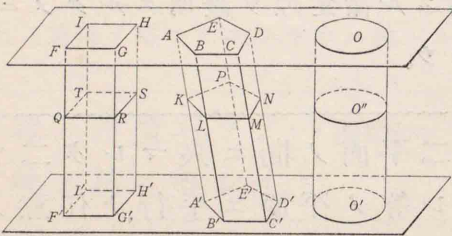
シイ。(かづありえりノ原理)



69. 角壘及ビ圓壘ノ體積

定理 角壘又ハ圓壘ノ體積ヲ T , 底面積ヲ S , 高サヲ t トスレバ,

$$T = St$$



[證明] 角壘 $ABC\cdots\cdots - A'B'C'\cdots\cdots$ ト底面ヲ等シクシ,
且高サヲ等シクスル直方體ヲ $FGHI-F'G'H'I'$ トシ, コ

ノ二ツヲ同一平面ノ同ジ側ニ置キ, 底面 $A'B'C'\cdots\cdots$,
 $F'G'H'I'$ ラソノ平面上ニアルヤウニスル。

サウスルト, 他ノ底面 $ABC\cdots\cdots$, $FGHI$, モ亦底面ニ
平行ナ同一平面上ニアルコトハ明デアル。

サテ兩平面ニ平行ナ任意ノ平面デコレ等ノ立體
ヲ截ツタトキノ截口ヲ, ソレゾレ $KLM\cdots\cdots$, $QRST$ トス
ルト,

$$KLM\cdots\cdots = ABC\cdots\cdots, \quad QRST = FGHI$$

然ルニ $ABC\cdots\cdots = FGHI$ デアルカラ

$$KLM\cdots\cdots = QRST$$

即チコノ二ツノ立體ハ, 平行ナ二平面ノ間ニ夾マ
レテキテ而モコノ二平面ニ平行ナ任意ノ平面デ截
ラレタ截口ノ面積ハ相等シイ。故ニかづありえり
ノ原理ニ依リ, ソノ體積ハ相等シイ。

然ルニ直方體 $FGHI-F'G'H'I'$ ノ體積ハ St デアルカ
ラ, 角壘 $ABC\cdots\cdots - A'B'C'\cdots\cdots$ ノ體積モ亦 St デアル。

即チ

$$T = St$$

圓壘ニツイテモ同様ニシテ證明出來ル。

[系] 直圓壘ノ底面ノ半徑ヲ h , 高サヲ t トスレバ

$$T = \pi h^2 t$$

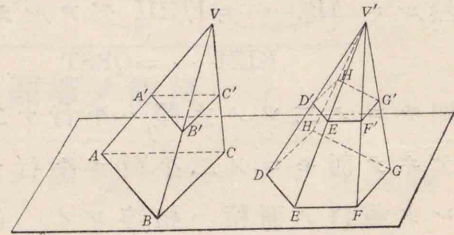
70. 角錐及ビ圓錐ノ體積

[角錐ノ體積ヲ求メル規則ヲ證明スルタメニ、先ヅ次ノコトヲ證明シテ置カウ]

定理 底面積及ビ高サガソレゾレ相等シイニツノ角錐又ハ圓錐ノ體積ハ相等シイ。

(證明) 角錐

$V-ABC$ 及ビ
 $V'-DEFGH$ ノ底
面積ヲ M , 高サ
ヲ t トスル。



兩角錐ヲソレ
ゾレ底面ニ平行ナ平面デ截リ、ソノ截口ヲ $A'B'C'$,
 $D'E'F'G'H'$ トシ、ソレゾレノ面積ヲ M', M'' , 頂點カラノ
距離ヲ t' トスルト、 $ABC \sim A'B'C'$, $DEFGH \sim D'E'F'G'H'$
ナルコトカラ

$$\frac{M'}{M} = \frac{t'^2}{t^2}, \quad \frac{M''}{M} = \frac{t'^2}{t^2}$$

ヲ得ル。故ニ

$$\frac{M'}{M} = \frac{M''}{M}$$

依ツテ

$$M' = M''$$

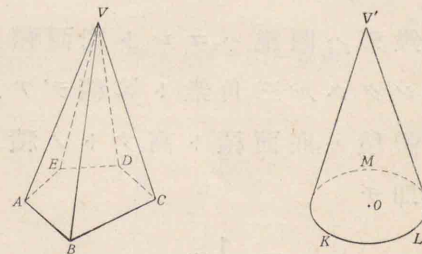
故ニかうありえりノ原理ニ依リ、

$$V-ABC = V'-DEFGH$$

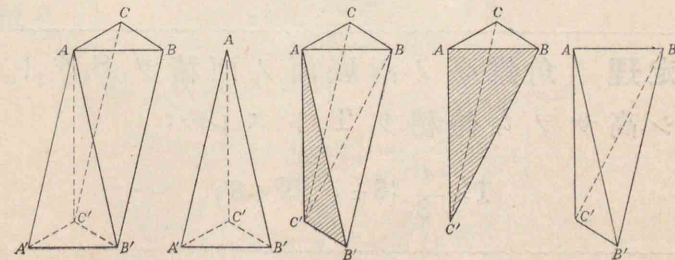
同様ノコトハ、圓錐ト圓錐、角錐ト圓錐ノ間ニ於テ
モイヘル。

定理 角錐又ハ圓錐ノ體積ヲ T , 底面積
ヲ S 高サヲ t トスレバ

$$T = \frac{1}{3}St$$



(證明) 三角錐 $ABC-A'B'C'$ ヲ次ニ示スヤウナ手順
ニ從ツテニツノ三角錐 $A-A'B'C'$, $A-BCC'$, $A-BB'C'$ ニ
分ケタトスルト、 $A-A'B'C'$ ト $A-BCC'$ 即チ $C'-ABC$ ト



ハ、底面積ヲ等シクシ、高サヲ等シクスルカラ等積デアリ、又 A-BCC' ト A-BB'C' トモ底面積ヲ等シクシ、高サヲ等シクスルカラ等積デアル。故ニ

$$A-A'B'C' = \frac{1}{3} ABC-A'B'C'$$

サテ、A-A'B'C' ト ABC-A'B'C' トハ底面積及ビ高サヲ等シクシ、角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積デアルカラ、三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

然ルニ、角錐又ハ圓錐ハ、コレト底面積及ビ高サヲソレゾレ等シクスル三角錐ト等積デアルカラ、角錐又ハ圓錐ノ體積ハ、底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。即チ

$$T = \frac{1}{3} St.$$

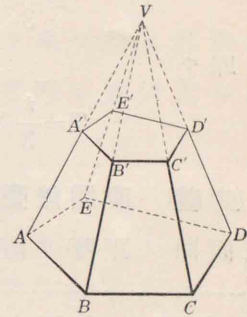
(系) 圓錐ノ底面ノ半径ヲ h 、高サヲ t トスレバ

$$T = \frac{1}{3} \pi h^2 t.$$

定理 角錐臺ノ兩底面ノ面積ヲ S, S' トシ、高サヲ t 、體積ヲ T トスレバ

$$T = \frac{t}{3} (S + \sqrt{SS'} + S')$$

〔證明〕 角錐臺ノ側面ヲ延シテ出來ル角錐ノ頂點ヲ V トシ、 V ニ近イ方ノ底面 $A'B'C'$ ……ノ面積ヲ S' 、他ノ底面 ABC ……ノ面積ヲ S トシ、 $A'B'C'$ ……ヲ底面ニ持チ V ヲ頂點トスル角錐ノ高サヲ x トスル。サウスルト



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} \{S(x+t) - S'x\} \\ &= \frac{1}{3} \{St + (S-S')x\} \end{aligned} \quad (1)$$

然ルニ

$$\frac{S'}{S} = \frac{x^2}{(x+t)^2}$$

故ニ

$$\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}} = \frac{x}{x+t}$$

從ツテ

$$\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} = \frac{x}{t}$$

故ニ

$$x = \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} t$$

コレヲ(1)ニ代入スレバ

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} \left\{ St + (S-S') \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} t \right\} \\ &= \frac{t}{3} \left\{ S + (\sqrt{S} + \sqrt{S'}) \sqrt{S'} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')$$

即チ

$$T = \frac{t}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')$$

(定義) 直圓錐臺ノ平ナ二面ヲソノ底面トイヒ二底面間ノ距離ヲ直圓錐臺ノ高サトイフ。

定理 直圓錐臺ノ兩底面ノ面積ヲ S, S' , 高サヲ t , 體積ヲ T トスレバ

$$T = \frac{t}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')$$

(證明) (各自ニ試ミヨ)

(系) 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ h, h' , 高サヲ t トスレバ,

$$T = \frac{\pi t}{3}(h^2 + hh' + h'^2)$$

練習題

1. 底面ノ半徑 10cm , 高サ 15cm ノ直圓錐ガアル。底面ニ平行ナ平面ト底面トノ間ニ夾マレタ直圓錐臺ノ體積ヲ, ソノ平面ト底面トノ距離ノ函數トシテ表ハセ。
2. 半徑 8cm , 容量 1l ノ圓錐狀ノ容器ヲ作ルニハ, 深

サヲ幾種ニスレバヨイカ。

3. 直圓錐臺狀ノばけつヲ持ツテ來テ, ソノ容量ヲ先ヅ計算ニ依ツテ求メ, 次ニ實際ニ水ヲ入レテ驗セヨ。

71. 球ノ體積

定理 球ノ體積ヲ T , 半徑ヲ h トスレバ

$$T = \frac{4}{3}\pi h^3$$

(證明) 球面上ニ頂點ヲ有シ, 各面ガ皆三角形ナル多面體ヲ考ヘルト, コノ多面體ノ面ノ數ガ限リナク大キクナリ, 同時ニ各面ガ限リナク小サクナルト, コノ多面體ノ各面ヲ底面トシ球ノ中心ヲ頂點トスル角錐ノ高サハ, 球ノ半徑ニ限リナク近ヅキ, 考ヘル多面體ノ表面積ハ球ノ表面積ニ限リナク近ヅクコトハ明デアル。トコロデ, 多面體ノ體積ハ, カクノ如キ角錐ノ體積ノ和デアルカラ, 球ノ體積ハ, ソノ表面積ト半徑トノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイトイヘル。

然ルニ表面積ハ $4\pi h^2$ デアルカラ

$$T = \frac{4}{3}\pi h^3.$$

練習題

1. 底面ノ半徑ガ h デ高サ t ガナル直圓壘ト半徑 h ナル半球トヲ接合シテ出來タ立體ノ體積ヲ求メヨ。
2. 兩底面ノ半徑ガソレゾレ h, h' デ高サガ t ナル直圓錐臺ト、底面ノ半徑ガ h デ高サガ t' ナル直圓壘トヲ接合シテ出來タ立體ノ體積ヲ求メヨ。

附 録

對 數

第 一 章

冪 及 ビ 根

72. 冪及ビ冪根

例ヘバ $\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n \text{ 個}}$ ヲ a ノ n 乗又ハ第 n 冪トイヒ、 a^n ト記ス。ソシテ a^n ニ於テ a ヲ底、右肩ノ n ヲ冪指數、或ハ略シテ指數トイフ。又 a ヲ n 個掛合セルコトヲ a ヲ n 乗スルトイヒ、コノトキノ算法ヲ冪法トイフ。

又 n ヲ任意ノ正整數トスルトキ、二ツノ實數 a, b ノ間ニ

$$a^n = b$$

ナル關係アルトキ、 a ヲ b ノ n 乗根、又ハ第 n 冪根トイヒ、 a ガ b ノ n 乗根ナルコトヲ次ノ記號デ表ハス。

$$a = \sqrt[n]{b}$$

例ヘバ $2^3 = 8$ ナル故、 2 ハ 8 ノ 3 乗根、又ハ第 3 冪根、從ツテ $2 = \sqrt[3]{8}$ デアル。

a の n 乗根ヲ求メルコトヲ a ヲ n 乗ニ開クトイヒ、コノトキノ算法ヲ開法トイフ。

$\sqrt[n]{b}$ ニ於テ b ヲ開カレル數、 n ヲ根指數トイフ。

上述ノ定義カラ、次ノコトハ明デアル。

$$(\sqrt[n]{b})^n = b, \quad \sqrt[n]{b^n} = b$$

【注意】(1) 冪ノ定義ニ依レバ冪指數ハ本來1ヨリモ大キナ整数デアアル筈デアアルガ、便利ノタメニ、一ツノ數ノ一乗トハ、ソノ數自身ノコトデアアル。即チ

$$3^1 = 3 \quad \text{一般} = \quad a^1 = a$$

デアルトスル。

(2) 又二乗根即チ平方根ハ $\sqrt{\quad}$ ナル記號ヲ以テ示スベキ筈デアアルケレドモ、最モ頻繁ニ使用スル關係カラ根指數2ハ略スルノヲ慣例トスル。

次ノ例カラ知ラレルヤウニ正數ノ冪ハ皆正數デ、負數ノ冪ハ、冪指數ガ奇數ナルカ又ハ偶數ナルカニ從ツテ、負又ハ正デアアル。

例 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$$(-3)(-3)(-3) = -27$$

$$(-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

從ツテ、一ツノ數 a ノ n 乗根ハ n ガ奇數ナルトキハ、唯一ツデアアルガ、 n ガ偶數ナルトキハ、 $a < 0$ ナラバ存在セズ、 $a > 0$ ナラバ二ツ存在スル。例ヘバ8及

ビ-8ノ三乗根(又ハ立方根)ハ、ソレゾレ2及ビ-2デアアルガ、-16ノ四乗根ハ存在セズ、16ノ四乗根ハ±2デアアル。ソレデ、特ニ

n ガ偶數デ $a > 0$ ナルトキハ、 $\sqrt[n]{a}$ ヲ以テ a ノ n 乗根ノ中正ナルモノヲ表ハスコトトシ、從ツテ $a > 0$ ナルトキハ、

$$a \text{ ノ } 2n \text{ 乗根ハ } \pm \sqrt[2n]{a} \text{ デアル}$$

トスル。

練 習 題

1. 次ノ各ノ値ヲ求メヨ。

① $(-2)^5$ ② 5^4 ③ $(-3)^4$

④ $(-5)^3$ ⑤ $(-2)^6$ ⑥ $(-1)^{13}$

2. 次ノ冪根ヲ求メヨ。

① $\sqrt[3]{-1000}$ ② $\sqrt[4]{(-2)^4}$ ③ $\sqrt[4]{81}$

④ $\sqrt[7]{-1}$ ⑤ $\sqrt[5]{32}$ ⑥ $\sqrt[3]{(-5)^3}$

【注意】例ヘバ $\sqrt[4]{81} = 3$ 、 $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ ノ如ク、一ツノ有理數 a

ノ n 乗根ガ、又一ツノ有理數ナルトキハ、 a ハ n 乗ニ開キ切レルトイヒ、サウデナイトキハ a ハ n 乗ニ開キ切れナイトイフ。ソシテコノ場合ノ冪根ヲ無理數又ハ不盡根數トイフ。 $\sqrt[3]{81}$ 、 $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ ノ如キハ無理數デアアル。

コレ等ノ近似値ハ如何ホドデモ精密ニ求メラレルガ、
實地ノ計算ニ必要ナ程度ノ近似値ハ、コレカラ説カウ
トスルトコロノ對數計算ニ依ツテ容易ニ得ラレル。

73. 冪指數ノ法則

(1) 例ヘバ、 $a^3 \cdot a^5 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$

一般ニ、 m, n ヲ正整數トスレバ

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (\text{A})$$

(2) 例ヘバ、 $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$

一般ニ m, n ヲ正整數トシ且 $m > n$ トスレバ

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (\text{B})$$

(3) 例ヘバ、 $3^5 \cdot 4^5 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)$
 $= (3 \cdot 4)(3 \cdot 4)(3 \cdot 4)(3 \cdot 4)(3 \cdot 4) = (3 \cdot 4)^5$

一般ニ n ヲ正整數トスレバ

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (\text{C})$$

(4) 例ヘバ $\frac{2^5}{3^5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$
 $= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

一般ニ n ヲ正整數トシ、 b ヲ零ナラズトスレバ

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (\text{D})$$

(5) 例ヘバ、 $(4^2)^3 = (4 \cdot 4)^3 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6$

一般ニ m, n ヲ正整數トスレバ

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (\text{E})$$

(A), (B), (C), (D), (E) ヲ冪指數ノ法則トイフ。

練 習 題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1. $x^2 \cdot x^3$ 2. $2^3 \cdot 2^4$ 3. $c^3 \cdot c^5$

4. $(a+1)^3(a+1)^2$ 5. $(a+b)^4(a-b)^4$

6. $\frac{a^4}{a^2}$ 7. $\frac{x^5}{x^4}$ 8. $\frac{p^3}{p^5}$

9. $(-5x^2y)^2$ 10. $\left(\frac{1}{5a^2}\right)^2$ 11. $(-5x^3)^2$

74. 冪根ノ計算

冪根ニ對シテハ、次ノ諸規則ガ成立ツ。

[1] 例ヘバ

$$\left\{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5}\right\}^3 = \left\{\sqrt[3]{2}\right\}^3 \left\{\sqrt[3]{5}\right\}^3 = 2 \times 5$$

故ニ

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 5}$$

即チ $a > 0, b > 0$ トシ、 n ヲ正整數トスレバ、

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (\text{A})$$

[2] 例ヘバ

$$\left\{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\right\}^3 = \frac{\{\sqrt[3]{2}\}^3}{\{\sqrt[3]{5}\}^3} = \frac{2}{5}$$

故 =

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

即チ $a > 0, b > 0$ トシ, n ヲ正整數トスレバ,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (\text{B})$$

[3] 例へバ

$$(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^5}$$

即チ $a > 0$, トシ m, n ヲ任意ノ正整數トスレバ,

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (\text{C})$$

[4] 例へバ

$$\left\{\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}\right)^4\right\}^3 = \left\{\sqrt[3]{7}\right\}^3 = 7$$

又

$$\left\{\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}\right)^4\right\}^3 = \left\{\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}\right\}^{12}$$

故 =

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[12]{7}$$

 $a > 0$ トシ, m, n ヲ任意ノ正整數トスレバ,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (\text{D})$$

[5] 例へバ $a > 0$ トスレバ

$$\left\{\sqrt[4]{a^3}\right\}^8 = \left\{\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^4\right\}^2 = \left\{a^3\right\}^2 = a^6$$

故 =

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[8]{a^6}$$

 $a > 0$ トシ, m, n, p ヲ任意ノ正整數トスレバ,

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mn]{a^{pn}} \quad (\text{E})$$

[6] 例へバ

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^6} &= \sqrt[3]{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \sqrt[3]{(a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a)} \\ &= \sqrt[3]{(a \cdot a)^3} = a \cdot a = a^2 \end{aligned}$$

即チ

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}}$$

 $a > 0$ トシ, m, n ヲ任意ノ正整數デ且 m ハ n ノ倍數デアルトスレバ, 一般ニ

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \quad (\text{F})$$

(A), (B), (C), (D), (E), (F) ヲ根指數ノ法則トイフ。

練 習 題

1. 次ノ各式ヲ簡單ナ形ノ根式ニ直セ。根號ノ中ノ式ハ何レモ正ノ値ヲ有スルトスル。

$$\textcircled{1} \sqrt{a} \sqrt{\frac{x}{a}} \quad \textcircled{2} 3\sqrt{\frac{5}{9}} \quad \textcircled{3} \frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$$

$$\textcircled{4} \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\sqrt{p+q}} \quad \textcircled{5} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a-b}} \quad \textcircled{6} (\sqrt[5]{3})^4$$

2. 次ノ各根數又ハ根式ノ前ニアル數又ハ式ヲ根號内ニ入レヨ。

$$\textcircled{1} 2\sqrt{7} \quad \textcircled{2} ab\sqrt{a} \quad \textcircled{3} 3a\sqrt{\frac{1}{a}}$$

④ $2p\sqrt[3]{q}$ ⑤ $b\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$ ⑥ $2\sqrt[4]{\frac{m}{32}}$

3. 次ノ各式ノ根號内ノ式又ハ數ノ開キ切レル因數ヲ根號外ニ出セ。

例 $\sqrt[3]{8ab^3} = 2b\sqrt[3]{a}$

① $\sqrt[3]{125}$ ② $\sqrt{80}$ ③ $\sqrt[3]{3a^3b}$

4. 次ノ各式ヲ唯一ツノ根號ヲ用ヒテ表ハセ。

① $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ ② $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ ③ $\sqrt[3]{\sqrt{a^8}}$

第 二 章

指 數 及 ビ 對 數

75. 冪指數ノ擴張

例ヘバ $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{2}{3}}$ ノ如キ記號ハ、今マデノトコロ無意味デアルガ、コノ指數 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ ヲシテ指數法則

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (A)$$

ニ從ハシメルト

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$$

$$a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = a^2$$

トナル。ソレデ

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

ト定メル。一般ニ

m, n ヲ任意ノ正整數トスルトキ、 a^m ヲ以テ $\sqrt[m]{a^m}$ ヲ表ハスモノトスル。

又 $a^0, a^{-1}, a^{-2}, \dots, a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{1}{3}}, \dots$ ノ如キ記號モ、今マデノトコロ無意味デアルガ、コレ等ノ指數ヲシテ前掲ノ指數法則(A)ニ從ハシメルナラバ、例ヘバ

$$a^3 \times a^0 = a^{3+0} = a^3$$

トナルカラ、

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

ト定メ、

$$a^{-1} \times a^1 = a^{-1+1} = a^0$$

$$a^{-2} \times a^2 = a^{-2+2} = a^0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^0$$

$$a^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a^0$$

$$\dots\dots\dots$$

トナルカラ、

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad \dots\dots$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}, \quad a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}, \quad \dots\dots$$

ト定メル。即チ一般ニ

$$a^0 = 1$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

ト定メル。但シ $a \neq 0$ デ p ハ任意ノ正數デア
ル。

練 習 題

1. 次ノ各式ノ意味ヲイヘ。

① $3^{\frac{1}{2}}$ ② $10^{\frac{2}{3}}$ ③ $8^{-\frac{1}{5}}$ ④ $9^{-\frac{2}{3}}$
 ⑤ 10^0 ⑥ 7^{-5} ⑦ $a^{0.5}$ ⑧ $10^{0.2}$
 ⑨ $8^{-1.5}$ ⑩ 0.5^0 ⑪ $x^{\frac{1}{3}}$ ⑫ $t^{0.25}$

2. 次ノ各ノ値ヲ求メヨ。

① $9^{\frac{1}{2}}$ ② $8^{\frac{1}{3}}$ ③ $16^{-\frac{1}{4}}$ ④ $27^{-\frac{2}{3}}$
 ⑤ $16^{0.5}$ ⑥ $32^{-0.2}$ ⑦ $25^{-1.5}$ ⑧ 7^0

3. 次ノ各ヲ冪ノ形ニ書キ表ハセ。式中ノ文字ハ
正數ヲ表ハスモノトスル。

① \sqrt{x} ② $\sqrt[3]{2^2}$ ③ $(\sqrt[3]{x})^5$ ④ $\sqrt[m]{x}$
 ⑤ $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ ⑥ $\frac{1}{\sqrt[3]{y^3}}$ ⑦ $\frac{1}{(\sqrt[3]{p})^2}$ ⑧ $\frac{1}{\sqrt[n]{t}}$

76. 冪指數ノ法則

指數ガ分數、負數、零ナル場合ノ冪ノ意味ヲ、ソレゾ
レ前節ノ如クニ定メルト、 $a < 0$, $b > 0$ ナル限リ

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n a^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ハ、指數ガ正負ノ分數又ハ零ナル場合ニ於テモ常ニ
成立ツ。例ヘバ

$$a^m \div a^n = a^{\frac{2}{3}} \div a^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$$

$$= a^{\frac{2}{3} - (-\frac{1}{2})} = a^{m-n}$$

ノ如クデアル。

ソコデ次ノヤウニイヘル。

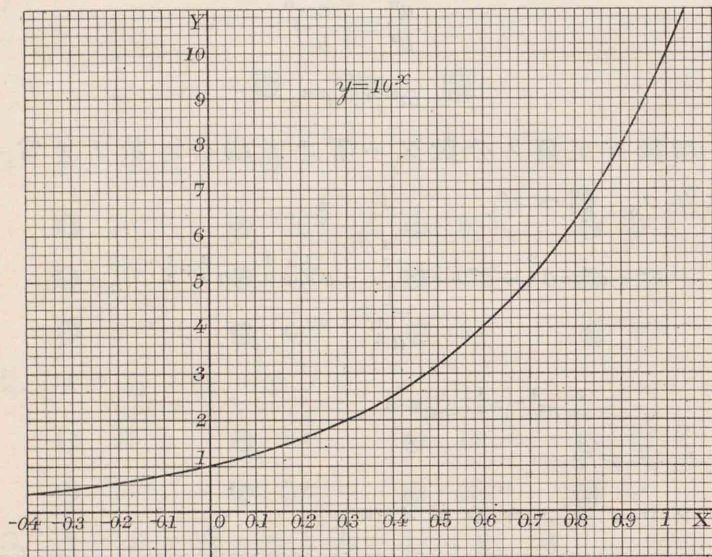
擴張サレタ意味ニ於ケル冪ノ計算ハ、指
數ガ如何ナル有理數デアラウトモ、冪指
數ノ法則ニ從ツテ行ヘバヨイ。

77. 對數

方程式

$$y=10^x$$

ニ於テ、 x ニ種々ノ値ヲ與ヘテ、ソレニ對應スル y ノ値ヲ計算シ、 $y=10^x$ ノ値ノ變化ヲ示ス圖表ヲ畫クト次ノヤウニナル。(圖ハ一部分ヲ示ス)



$y=10^x$ ノ圖表ヲ用ヒルト、 x ノ任意ノ値ニ對應スル y ノ値ガ求メラレルコトハ勿論デアルガ、反對ニ y ガ正數デサヘアレバ、如何ナル數デアラウトモソ

レニ對應スル x ノ値ガ見出セル。例ヘバ $y=3$ ニ對應スル x ノ値、即チ $3=10^x$ ヲ満足サセル x ノ値ハ、圖表カラ略ボ0.47デアルトイフコトガワカル。コノ0.47ノコトヲ10ヲ底トスル3ノ對數トイフ。

一般ニ

N ヲ或正數トスルトキ、

$$10^n = N$$

ヲ満足サセル數 n ノコトヲ、10ヲ底トスル N ノ對數、或ハ單ニ N ノ對數トイヒ、記號デ次ノ如ク表ハス。

$$\log N = n$$

【注意】 N ガ10ノ n 乗デアルトイフノモ、 n ハ10ヲ底トスル N ノ對數デアルトイフノモ畢竟同ジ意味デアル。 n ヲ N ノ對數トイフノニ對シテ、 N ヲ n ノ眞數ト呼ブコトガアル。

種々ノ正數ニ對スル對數ガ知レテキルト、乗法、除法、冪法、開法ハ極メテ簡便ニ行ヘル。對數表(卷末參照)ハ即チコノ目的ノタメニ作ツタモノデアル。

次ニ對數表ノ使用法ヲ説明シヨウ。シカシコレガタメニハ、對數ノ性質及ビ表ノ出來方ニツイテ若

干ノ知識ヲ必要トスル。

78. 對數ノ性質

對數ヲ計算ニ利用スルニハ、次ノ諸性質ヲ明確ニ記憶シテオクコトガ肝要デアル。

$a > 0, b > 0$ トスルト

[i] $\log ab = \log a + \log b$

[ii] $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

[iii] $\log a^p = p \log a$

[i] ノ證明

$a = 10^x, b = 10^y$ トオケバ、

$\log a = x, \log b = y, ab = 10^{x+y}$

故ニ $\log ab = x + y = \log a + \log b$

[ii] ノ證明

$$\frac{a}{b} = \frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$$

故ニ

$$\log \frac{a}{b} = x - y = \log a - \log b$$

[iii] ノ證明

$$a^p = (10^x)^p = 10^{px}$$

故ニ $\log a^p = px = p \log a.$

79. 對數表

10ノ整數(0ヲ含ム)幂ノ對數ヲ表ニスルト、次ノヤウニナル。

k	幂	$\log k$
.....
.....
100000	10^5	5
10000	10^4	4
1000	10^3	3
100	10^2	2
10	10^1	1
1	10^0	0
0.1	10^{-1}	-1 或ハ $\bar{1}$
0.01	10^{-2}	-2 $\bar{2}$
0.001	10^{-3}	-3 $\bar{3}$
0.0001	10^{-4}	-4 $\bar{4}$
0.00001	10^{-5}	-5 $\bar{5}$
.....
.....

[對數ノ -1, -2, -3, ヲソレゾレ $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots$ ト書クノヲ通例トスル。カウスル方ガ記述ニ又印刷ニ便利ダカラデアル。]

上表カラ容易ニ推知サレルヤウニ、1 ト 10 トノ中間ニアル數ノ對數ハ $0 + \alpha$ (但シ α ハ正ノ小數)デアリ、

10 ト 100 トノ中間ニアル數ノ對數ハ $1+\alpha$, 100 ト 1000
 トノ中間ニアル數ノ對數ハ $2+\alpha$, デアル。
 又 0.1 ト 1 トノ中間ニアル數ノ對數ハ $-1+\alpha$, 0.01
 ト 0.1 トノ中間ニアル數ノ對數ハ $-2+\alpha$, デ
 アル。

對數ヲ, 正又ハ負ノ整數或ハ零ト, 正ノ小數トノ和
 トシテ表ハシタトキ, ソノ整數(零ヲモ含メテ)部分ヲ,
 對數ノ**指標**ト呼ビ, 小數部分ヲ**假數**トイフ。例ヘバ
 $\log 326 = 2.5132$ デアルカラ, 2.5132 ノ首位ノ 2 ハ $\log 326$
 ノ指標, 小數部 0.5132 ハ $\log 326$ ノ假數デアアル。

對數表ハ, 指標ヲ省イテ假數ダケヲ示シテアル。
 ソレハ次ノ理由ニ依ル。即チ例ヘバ
 $\log 326 = 2.5132$ トスレバ

$$\log 32.6 = \log \frac{326}{10} = \log 326 - \log 10 = 2.5132 - 1 = 1.5132$$

$$\log 3.26 = \log \frac{326}{100} = \log 326 - \log 100 = 2.5132 - 2 = 0.5132$$

$$\log 0.326 = \log \frac{326}{1000} = \log 326 - \log 1000 = 2.5132 - 3$$

$$= -1 + 0.5132$$

.....

又 $\log 3260 = \log(326 \times 10) = \log 326 + \log 10$
 $= 2.5132 + 1 = 3.5132$

$$\log 32600 = \log(326 \times 100) = \log 326 + \log 100$$

$$= 2.5132 + 2 = 4.5132$$

ナル如ク,

數字ノ排列ガ同ジデ小數點ノ位置ダケ
 ガ異ナル數ノ對數ノ假數ハ, 皆同一デア
 アル。

トイフコト及ビ

整數部ガ n 桁カラ成ル數ノ對數ノ指標
 ハ $n-1$, 首位ノ有効數字ガ小數第 n 位ニ
 アル數ノ對數ノ指標ハ, $-n$ デアル。

トイフコトニ依リ, 假數サヘワカレバ, 與ヘラレタ正
 數ノ對數ハ容易ニ求メルコトガ出來ルカラデアアル。

ソレデ卷末ニ示ス表ノ如ク, 1 カラ 9.96 マデノ對
 數表ガアレバ, 三桁ノ整數及ビソレニ 10 ノ整數器ヲ
 乘ジタモノノ對數ハ, 表カラ直ニ見出スコトガ出來
 ル。又後ニ説クトコロノ方法ニ依レバ, 四桁以上ノ
 整數及ビソレニ 10 ノ整數器ヲ乘ジタモノノ對數モ
 同ジ表ニ依ツテ求メルコトガ出來ル。固ヨリ表ノ

上ニ載セラレテアル對數ハ、殆ンド皆近似値デア
カラ、ソレヲ用ヒテ算出シタ値モ亦近似値デア
ル。シカシコノタメニ對數表ノ價值ガ下落スルヤウナ
コトハナイ。

假數ヲ小數第三位マデ計算シテ示シタ對數表ヲ
三桁ノ對數表、小數第四位マデ計算シテ示シタ表ヲ
四桁ノ對數表トイフヤウニ呼ブ。卷末ニ掲ゲタノ
ハ四桁ノ對數表デア
ル。

練 習 題

1. 次ノ各ノ對數ノ指標ヲイヘ。

- ① $\log 250$ ② $\log 31265$ ③ $\log 3.14$
 ④ $\log 0.003$ ⑤ $\log 0.875$ ⑥ $\log 200000$
 ⑦ $\log 2700000$ ⑧ $\log 0.000037$ ⑨ $\log 32.54$

2. 次ノ各ヲ指標トスル眞數ノ首位ハ何カ。

- ① 2 ② 7 ③ 4 ④ $\bar{3}$
 ⑤ 10 ⑥ $\bar{7}$ ⑦ $\bar{1}$ ⑧ 0

80. 對數ヲ求メルコト

例 1. $\log 458$ ヲ求メヨ。

指標ガ2デア
ルコトハ、視察ニ依ツテ知ラ
レル。

假數ヲ求メルニハ、表ノ左端ノ欄ニ於テ4.5ト記シ

タトコロヲ右ニ進ンデ、頭上ノ欄ニ8ト記シタトコ
ロマデ行ツテ止マレバヨイ。ココニハ、6609トアル
カラ、求メル假數ハ0.6609デア
ルトイフコトガ知ラ
レルノデア
ル。依ツテ

$$\log 458 = 2.6609$$

例 2. $\log 3248$ ヲ求メヨ。

指數ハ3デア
ル。

前述ノ方法ニ依レバ

$$\log 3240 = 3.5105$$

次ニ3240ヨリモ8ダケ増シタトキ、對數ガドレホ
ド増スカヲ見ルニハ、表ニ於テ5105トアルトコロカ
ラ更ニ右ニ進ンデ、右端ノ欄内ニ至リ上欄ニ8ト記
シテアルトコロマデ進ンデ、ソコニ記サレテアル數
ヲ見ル。ソコニハ11トアルガ、コレハ5105ノ末位ヲ
單位トスルトキノ數デア
ルカラ、求メル假數ハ
 $0.5105 + 0.0011 = 0.5116$ デア
ル。依ツテ

$$\log 3248 = 3.5116$$

コノ場合ノ實際計算ハ、次ノヤウニスル。

$$\log 3240 = 3.5105$$

$$8 \cdots \cdots 11$$

$$\log 3248 = 3.5116$$

例 3. $\log 0.007038$ を求む。

$$\begin{array}{r} \text{[解]} \quad \log 0.00703 = \bar{3}.8470 \\ 8 \dots \dots 5 \\ \hline \log 0.007038 = \bar{3}.8475 \end{array}$$

【注意】 對數ガ例ヘバ $-3+0.8470$ ナルトキニハコレヲ $\bar{3}.8470$ トイフヤウニ記ス。

練 習 題

1. 次ノ各ノ對數ヲ求む。
 - ① 275
 - ② 3.82
 - ③ 5600
 - ④ 8250
 - ⑤ 3.142
 - ⑥ 0.7854
 - ⑦ 0.03246
 - ⑧ 0.002745
 - ⑨ 0.000032
2. 上ノ結果ヲ利用シテ、次ノ各ノ對數ヲ求む。
 - ① 2.75
 - ② 382
 - ③ 0.056
 - ④ 82.50
 - ⑤ 314.2
 - ⑥ 7854
 - ⑦ 32.46
 - ⑧ 3200

81. 眞數ヲ求メルコト

例 1. $\log x = 2.5237$ ナル如キ x を求む。

表ニ依ルト $\log 3.34 = 0.5237$
 $\log x$ ノ指標ハ 2 デアルカラ、 x ノ整數部ハ 3 桁
 デアル。

故ニ $x = 3.34 \times 100 = 334$

例 2. $\log x = 2.5234$ ナル如キ x を求む。

假數 0.5234 ヨリモ小サクテコレニ最モ近イモノ
 ヲ表中ニ求メルト、眞數 3.33 ニ對スル假數 0.5224 デ
 アル。故ニ 0.5234 ヲ假數トスル數ハ 3.33……ナル數
 デアル。コノ小數第三位ノ數字ヲ求メルニハ、3.33
 ノ假數 0.5224 ノアル行ヲ右ニ進ンデ右方ノ欄内ニ
 10 又ハソレニ近イ數ノアルトコロヲ見テ、ソノ數ノ
 アル欄ノ頭上ニ記サレテアル數字ヲ見ル。表ニヨ
 ルト丁度 10 ト書イタトコロガアツテ、ソノ欄ノ頭上
 ニ 8 トアルカラ、コノ 8 ガ求メル數字デアル。

故ニ $x = 3.338 \times 100 = 333.8$

實際計算ハ次ノヤウニスル。

$$\begin{array}{r} \log x = 2.5234 \\ \log 333 = 2.5224 \\ \hline 8 \dots \dots 10 \\ \hline \log 333.8 = 2.5234 \\ x = 333.8 \end{array}$$

例 3. $\log x = \bar{2}.4582$ ナル如キ x を求む。

$$\log x = \bar{2}.4582$$

$$\log 0.0287 = \bar{2}.4579$$

$$\begin{array}{r} 2 \dots \dots \dots 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\log 0.02872 = \bar{2}.4582$$

$$x = 0.02872$$

練 習 題

次ノ各ヲ満足サセル x ノ値ヲ求メヨ。

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $\log x = 0.3096$ | 2. $\log x = 0.9550$ |
| 3. $\log x = 0.7824$ | 4. $\log x = 0.6430$ |
| 5. $\log x = \bar{1}.0334$ | 6. $\log x = 2.9782$ |
| 7. $\log x = 1.9036$ | 8. $\log x = \bar{3}.5990$ |
| 9. $\log x = 3.5328$ | 10. $\log x = 5.1553$ |

82. 對數ニ依ル計算(ソノ一)

例 1. $5.475 \times 7.382 = x$ ヲ計算セヨ。

[解] $5.475 \times 7.382 = x$ トスレバ

$$\log 5.475 = 0.7384$$

$$\log 7.382 = 0.8682$$

$$\log x = 1.6066$$

$$\log 40.4 = 1.6064$$

$$\begin{array}{r} 2 \dots \dots \dots 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\log 40.42 = 1.6066$$

$$x = 40.42$$

【注意】 實際掛ケ算ヲ行ツテミルト、 $x = 40.416450$ トナル。

故ニ對數ヲ用ヒテ計算シタ結果ハ、首位ノ有効數字カラ三桁目マデ正シク出テキルコトニナル。カクノ如ク四桁ノ對數表ヲ用ヒテ計算シタトキニハ、精々首位ノ有効數字カラ四桁目位マデシカ眞ノ値ト合致シナイノデアル。ソレデ計算ノ結果ハ精々首位ノ有効數字カラ四桁マデトツテ、他ハ捨テテヨイ。

例 2. $5287 \div 3726$ ヲ計算セヨ。

[解] $5287 \div 3726 = x$ トスル。

$$\log 5287 = 3.7232$$

$$\log 3726 = 3.5712$$

$$\log x = 0.1520$$

$$\log 1.41 = 0.1492$$

$$\begin{array}{r} 9 \dots \dots \dots 28 \\ \hline \end{array}$$

$$\log 1.419 = 0.1520$$

$$x = 1.419$$

例 3. $0.3852 \div 0.07258$ ヲ計算セヨ。

[解] $0.3852 \div 0.07258 = x$ トスル。

$$\log 0.3852 = \bar{1}.5857$$

$$\log 0.07258 = \bar{2}.8608$$

$$\log x = 0.7249$$

$$\log 5.30 = 0.7243$$

$$\begin{array}{r} 7 \dots \dots \dots 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\log 5.307 = 0.7249$$

$$x = 5.307$$

【注意】 (1) $\sqrt{1.5857} - \sqrt{2.8608}$ ヲ計算スルトキニハ、

$$\sqrt{1.5857} = -1 + 0.5857, \quad \sqrt{2.8608} = -2 + 0.8608$$

ナルコトニ注意セヨ。コノ際、次ノヤウニ考ヘテ計算スルガヨイ。

$$\begin{aligned} \sqrt{1.5857} - \sqrt{2.8608} &= -2 + 1.5857 - (-2) - 0.8608 \\ &= -2 + 2 + (1.5857 - 0.8608) \end{aligned}$$

練 習 題

次ノ各ノ計算ヲ行ヘ。

- | | |
|---|--|
| 1. 4.723×1.246 | 2. 40.16×5.073 |
| 3. 26.7×81.31 | 4. 8.138×41900 |
| 5. $412.6 \div 37.19$ | 6. $46.59 \div 5.123$ |
| 7. $91923 \div 718.6$ | 8. $10 \div 4.965$ |
| 9. $4.16 \times 11.3 \times 7.28$ | 10. $8.132 \times 37.16 \times 4.186$ |
| 11. $\frac{435 \times 0.2763}{4.82 \times 1.072}$ | 12. $\frac{639 \times 41.3}{83.2 \times 55.4}$ |

83. 對數ニ依ル計算(ソノ二)

例 3. $t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ニ於テ $\pi = \frac{22}{7}$, $l = 78$, $g = 980$ ナルトキ、 t ノ値ヲ求メヨ。

$$\text{[解]} \quad \log t = \log 2 + \log \pi + \frac{1}{2} \log l - \frac{1}{2} \log g$$

$$\log 2 = 0.3010 \quad \log 7 = 0.8451$$

$$\log 22 = 1.3424 \quad \frac{1}{2} \log 980 = 1.4956$$

$$\frac{1}{2} \log 78 = 0.9460 \quad 2.3407$$

$$2.5894$$

$$-2.3407$$

$$\log t = 0.2487$$

$$\log 1.77 = 0.2480$$

$$3 \dots \dots 7$$

$$\log 1.773 = 0.2487$$

$$t = 1.773$$

例 4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ ヲ計算セヨ。

$$\text{[解]} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{100} = x \quad \text{トスルト}$$

$$\log x = 100 \log \frac{1}{3} = -100 \log 3$$

$$= -100 \times 0.4771 = -47.71$$

$$= -48 + (48 - 47.71)$$

$$= \overline{48}.29$$

$$\log 1.95 = 0.29$$

$$x = 1.95 \times 10^{-48}$$

【注意】對數表デハ假數ハ常ニ正デアルヤウニ表ハシテアルカラ、コノ例4ニ見ルヤウニ對數ノ値トシテ負數ガ得ラレタトキニハ、適當ノ數ヲ加ヘテ假數ガ正數ニナルヤウニ變形セネバナラナイ。

練 習 題

1. 半徑 15.7 cm ノ圓ノ面積ヲ求メヨ。(但シ $\pi = \frac{22}{7}$ トセヨ。以下同ジ。)
2. 直徑 42.5 cm ノ球ノ體積ヲ求メヨ。
3. 面積 100 m^2 ノ圓ノ直徑ヲ求メヨ。
4. 體積 1 m^3 ノ球ノ直徑ヲ求メヨ。
5. 物體ガ t 秒間ニ s 糎落下スルモノトスレバ、 s ト t トノ間ニハ

$$s = 490t^2$$

ナル關係ガアル。次ノ各ノ場合ニ於ケル t , 或ハ s ノ値ヲ求メヨ。

- | | |
|--------------|----------------|
| ① $t = 1.05$ | ② $t = 3.25$ |
| ③ $s = 1500$ | ④ $s = 2.0000$ |
6. 糸ノ長サ l 糎ナル單振子ガ一振動スルニ要スル時間(コレヲ週期トイフ)ヲ t 秒トスルト、 l ト t トノ間ニハ次ノ關係ガアル。

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{980}}$$

次ノ各ノ場合ニ於ケル t 或ハ l ノ値ヲ求メヨ。

- | | |
|------------|-------------|
| ① $l = 98$ | ② $l = 120$ |
| ③ $t = 1$ | ④ $t = 1.5$ |

7. 底面ノ半徑 7.8 cm , 高サ 15.2 cm ノ直圓壘ノ體積ヲ求メヨ。又コノ表面積ヲ求メヨ。
8. 底面ノ半徑 7.8 cm , 高サ 12.7 cm ノ直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。又コノ表面積ヲ求メヨ。
9. 直徑 10 cm ノ圓筒デ、 1 l ノ液ヲ滿タスコトノ出來ルモノヲ作ルニハ、深サヲ幾糎トスベキカ。
10. 年利率 5 分 8 厘、半年毎ノ複利デ 20 年間借リルト、滿期日ニ元利合計ハ、元金ノ幾倍トナルカ。
11. 年利率 8 分、半年毎ノ複利デ計算スルトキ、元利合計ガ元金ノ 10 倍ヨリ多クナルノハ幾年後カ。

問題ノ答

[4頁] 1. $\frac{3}{2x}$ 2. $\frac{a}{3b}$ 3. $18x$ 4. $\frac{2}{x^3}$ 5. $-\frac{x}{2}$

6. $\frac{9}{x}$ 7. $-\frac{a^2}{6}$ 8. $\frac{5}{8}x^2$ 9. $-\frac{a}{2}$ 10. $\frac{x-1}{2x(x+1)}$

11. $\frac{2}{3}$ 12. $\frac{p}{q}$ 13. $\frac{x+y}{a}$ 14. $\frac{b}{a}$ 15. $\frac{x}{b^2}$

16. $\frac{x-y}{x+y}$ 17. $x-y$ 18. $x+1$ 19. $\frac{y(y+3)}{a}$ 20. $\frac{x-3}{x-6}$

21. $\frac{2x-3}{x-3}$

[6頁] 1. ① $-\frac{a}{b}, \frac{a}{-b}, -\frac{-a}{-b}$ ② $\frac{a}{b}, -\frac{a}{-b}, \frac{-a}{-b}$ ③ $\frac{b-a}{d-c}$

$-\frac{a-b}{d-c}, \frac{b-a}{c-d}$ ④ $\frac{b-a}{a^2+b^2}, \frac{a-b}{-a^2-b^2}, -\frac{b-a}{-a^2-b^2}$ ⑤ $-\frac{y-x}{-xy}, \frac{x-y}{-xy}$

$\frac{y-x}{xy}$ ⑥ $-\frac{3x-1}{-3x+1}, -\frac{-3x-1}{3x-1}, -\frac{3x+1}{-3x+1}$ 2. ① $-\frac{3}{8}$

② $-\frac{5}{6}$ ③ $\frac{6}{7}$ ④ $\frac{3x}{5y}$ ⑤ $-\frac{a^2}{5b^3}$ ⑥ $-\frac{7n}{9f^2}$ ⑦ $-\frac{d}{M^2}$

⑧ $-\frac{100}{p^2}$ 3. ① $-\frac{1}{a-b}$ ② $\frac{x}{a-b}$ ③ $-\frac{m-n}{a-b}$

4. ① $\frac{6}{x-y} - \frac{2}{x-y}$ ② $\frac{2x+1}{x^2-1} + \frac{3x}{x^2-1}$ ③ $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} + \frac{a+b}{a-b}$

④ $\frac{1+r}{1-r} + \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r}$ 5. ① $-\frac{1}{3}$ ② -4 ③ $-(x-y)^2$

④ $\frac{5}{x-y}$ ⑤ $-\frac{3(x-y)}{x+y}$ ⑥ $-\frac{1}{x+1}$

[8頁] 1. $\frac{ab}{cd}$ 2. $\frac{5x^2}{6y}$ 3. $\frac{2c}{ab}$ 4. $-\frac{10}{21xy}$ 5. $\frac{28x^2}{15y^2}$

6. $\frac{2}{3x^2}$ 7. $\frac{3}{4}x$ 8. $\frac{14a}{3}$ 9. $\frac{8a}{3c}$ 10. $-\frac{10}{3x}$

11. $-\frac{21m^2}{2}$ 12. $\frac{6m}{35n}$ 13. $\frac{x(x+y)}{4}$ 14. $2x(x-1)$

15. $\frac{9}{2}x$ 16. $\frac{5(m-2n)}{m^2-n^2}$ 17. $\frac{2x(x+1)}{x-4}$

[9頁] 1. $\frac{3ay}{2bx}$ 2. $\frac{3(x-2)}{2(2x-1)}$ 3. $\frac{a-1}{2a-1}$ 4. $3\frac{1}{3}$

5. $(x+y)(x-y)$ 6. $-\frac{a+b}{c+d}$ 7. $-\frac{3(a+x)}{4a}$ $\frac{x^2+a^2}{x}$

8. $\frac{2(2-a^2)}{3ab}$ 9. $\frac{1}{m-n}$ 10. $\frac{(a+b)^2}{3}$

[11頁] 1. (i) $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{5}{a}$ (iii) $\frac{1}{a}$ 2. (i) $\frac{3}{14}$ (ii) $\frac{3}{2x}$

(iii) $\frac{8y}{5x}$ 3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{5}{2a}$ (iii) $\frac{5b}{2a}$ 4. $\frac{5}{6x}$ 5. $\frac{x^2+y^2}{xy}$

6. $\frac{5}{3}$ 7. $\frac{a+b}{b}$ 8. $\frac{3x+1}{x}$ 9. $\frac{2b+1}{ab}$ 10. (i) $\frac{3}{7}$

(ii) $\frac{3}{a}$ (iii) $\frac{x-y}{2a}$ 11. (i) $\frac{2}{21}$ (ii) $\frac{2}{3x}$ (iii) $\frac{y}{3x}$ 12. (i) $\frac{3}{10}$

(ii) $\frac{3}{2a}$ (iii) $\frac{3bc-b}{3a}$ 13. (i) $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{b-a}{b}$ (iii) $\frac{xy-1}{xy}$

14. (i) $\frac{2}{33}$ (ii) $\frac{11-x^2}{11x}$ (iii) $\frac{3-16a^2}{12a}$ 15. (i) $\frac{33}{5}$ (ii) $\frac{7x-2}{x}$

(iii) $\frac{abd-c}{d}$ 16. $\frac{a^2}{6}$ 17. $\frac{x+y}{y}$ 18. $\frac{1}{x}$ 19. $\frac{2-x^2}{2x}$

20. $\frac{a(b+c)}{bc}$ 21. $\frac{x^2+xy+y^2}{xy}$ 22. $\frac{a^2+b^2}{a}$ 23. $\frac{1-y}{xy}$

24. $\frac{3}{a}$ 25. $\frac{p+r}{q}$ 26. $\frac{10}{x}$ 27. $\frac{99}{100}$ 28. $\frac{1}{x-1}$

29. 1 30. 0 31. $\frac{2a}{a-b}$ 32. $\frac{a^2+b^2}{ab(a-b)}$ 33. $\frac{1}{ab}$

34. $-\frac{1}{x}$ 35. $\frac{3}{x-1}$

[13頁] 1. $\frac{a+1}{a-1}$ 2. $\frac{1+y}{1-y}$ 3. $\frac{bx+ay}{bx-ay}$ 4. a^2+b^2

5. $\frac{a^2}{b^2}$ 6. $\frac{x+3}{x+1}$

[16頁] 1. -5, 1 2. $\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{5}$ 4. $\frac{6}{7}$ 5. $-1\frac{1}{4}$

6. 2 7. 6, -3 8. $1\frac{1}{3}$

9. 鯨 $3\frac{1}{5}$ 尺, $1\frac{1}{4}$ 尺; 3 尺, $1\frac{1}{3}$ 尺; $3\frac{1}{3}$ 尺, $1\frac{1}{5}$ 尺,

10. 一端ヨリ $30\frac{10}{13}$ cm, 32cm, 30cm, 11. 4 尺, 2 尺 4 寸,

[17頁] 1. $r = \frac{G-M}{Mk}$ ① 0.12 ② 0.07 ③ 0.08

2. $s = \frac{Hf}{f-H}$ 3. $f = \frac{uv}{u+v}$, $u = \frac{vf}{v-f}$ 4. $v = \frac{ur}{2-ur}$, $r = \frac{2uv}{u+v}$

5. (i) -22° (ii) $-34\frac{7}{9}$ (iii) $-11\frac{4}{9}$ (iv) $23\frac{5}{9}$

6. $M = \frac{\alpha\pi h^2}{360}$, α (中心角), $\alpha = \frac{180n}{\pi h}$

[44頁] 1. 14.51m 2. 約 50° 3. 約 6° 4. 約 125m

[48頁] 1. 8.452m 2. 347.1m 3. AC 3m, BC 2.6m

4. 17cm 5. 8.45cm, 9.06cm

[51頁] 3. $\frac{m(n-m)}{n^2}$ 倍

[63頁] 3. 1. ① 33 ② 86 ③ 9.6 ④ 0.67 ⑤ 58 ⑥ 7.9

⑦ 0.92 ⑧ 99 ⑨ 234 ⑩ 2.236 ⑪ 11.180 ⑫ 0.547

⑬ 2.939 ⑭ 1.414 ⑮ 4.328 2. 13.89cm 3. 7.07cm

4. 10.4m 5. 5.657m 6. 5.196cm 7. 93.528cm²
 8. 17.32cm 9. 11.95秒 10. ① 4.123 ② 4.690 ③ 5.916
 ④ 8.832 ⑤ 2.915 ⑥ 3.549 ⑦ 6.180 ⑧ 8.105

- [68頁] 1. 3.873 2. 4.243 3. 9.798 4. 1 5. 5.745
 6. 0.816 7. 0.866 8. 0.378 9. 0.577

- [69頁] 1. $7\sqrt{2}$ 2. $2\sqrt{3}$ 3. $7\sqrt{2}$ 4. $\sqrt{5}$
 5. $5+8\sqrt{2}$ 6. $18\sqrt{3}-9\sqrt{5}$

- [70頁] 1. 2 2. $5-2\sqrt{6}$ 3. $11-2\sqrt{30}$ 4. $6+2\sqrt{5}$

5. $2\sqrt{3}-5$ 6. $a+b+2\sqrt{ab}$ ($a>0, b>0$ トス。以下同様)

7. $a+c-2\sqrt{ab}$ 8. $-42-8\sqrt{6}$ 9. $3+2\sqrt{2}$

10. $\frac{3\sqrt{2}-2}{7}$ 11. $\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3}$ 12. $3-2\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1$

- [75頁] ① $\sqrt{6}-1$ 或ハ $-\sqrt{6}-1$ ② $-2+\sqrt{6}$ 或ハ $-2-\sqrt{6}$

- ③ $1+\sqrt{2}$ 或ハ $1-\sqrt{2}$ ④ $3+\sqrt{5}$ 或ハ $3-\sqrt{5}$ ⑤ $-1+\sqrt{7}$

- 或ハ $-1-\sqrt{7}$ ⑥ $1+5\sqrt{5}$ 或ハ $1-\sqrt{5}$ ⑦ $-2+\sqrt{3}$ 或ハ

- $-2-\sqrt{3}$ ⑧ $\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$ 或ハ $\frac{-2-\sqrt{6}}{2}$ ⑨ $2\frac{1}{2}$ 或ハ $1\frac{1}{2}$

- ⑩ $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ 或ハ $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ ⑪ $\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$ 或ハ $\frac{-1-\sqrt{5}}{3}$

- ⑫ $-1+\sqrt{5}$ 或ハ $-1-\sqrt{5}$ ⑬ $3+2\sqrt{6}$ 或ハ $3-2\sqrt{6}$

- ⑭ 根ナシ

- [80頁] 1. 11 或ハ -3 2. $1\frac{1}{3}$ 或ハ 3 3. $-5\frac{5}{7}$

4. $\frac{3}{2}$ 或ハ $\frac{2}{3}$ 5. 0 或ハ $1\frac{2}{3}$ 6. 6 或ハ $-1\frac{2}{3}$

- [82頁] 1. $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=3 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-8 \end{cases}$ 6. 根ナシ

7. $\begin{cases} x=\frac{4}{\sqrt{17}} \\ y=\frac{8}{\sqrt{17}} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{4}{\sqrt{17}} \\ y=-\frac{8}{\sqrt{17}} \end{cases}$ 8. 根ナシ

- [85頁] 1. 14 2. 36 3. 1 4. $1\frac{9}{3}$ 5. 4 6. 5

- [85頁] 1. 7.8cm, 12.8cm 2. 甲6日, 乙3日 3. 50km

4. 8cm, 10cm 5. 行き24.3哩, 歸り21.3哩 6. 85.3分, 95.3分

7. 8.66cm 8. 17.32cm 9. 6.18cm, 3.82cm

10. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$ cm, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$ cm 11. 36.91 糶平方ノ板

12. 6.25cm

- [95頁] 3. 一邊20mノ正方形 4. 10cm

- [97頁] 1. $S=cKH^2$ (c ハ常數) 2. $N=c\frac{e_1}{e_2^2}, 18m$

- [98頁] 1. $r=\pm\sqrt{\frac{m_1m_2}{F}}$ 2. $n=\frac{-1\pm\sqrt{1+8S}}{2}$

3. $h=-t\pm\sqrt{t^2+\frac{M}{\pi}}$ 4. $n=\frac{3\pm\sqrt{9+8N}}{2}$

5. $H=\pm\sqrt{h^2+M}, h=\pm\sqrt{H^2-M}$ 6. $h=\pm\sqrt{k^2+g^2}$

$$7. l = \frac{gt^2}{4\pi^2}, g = \frac{4\pi^2 l}{t^2} \quad 8. s = \frac{gt^2}{2}, g = \frac{2s}{t^2} \quad 9. b = \frac{ap}{\sqrt{a^2 - p^2}}, 3\frac{3}{4}$$

$$10. \frac{ap}{a+b+c}, \frac{bp}{a+b+c}, \frac{cp}{a+b+c} \quad 11. \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 16M}}{4}$$

$$12. \sqrt{a^2 + (h' - h)^2}$$

$$[103 \text{ 頁}] \quad 1. M = \frac{\pi h^2 \alpha}{360} \quad 3. \frac{2}{3} \pi h, \frac{h^2}{4} (3\pi + 2);$$

$$[104 \text{ 頁}] \quad 1. \textcircled{1} 4, 7, 10, 13, \dots \quad \textcircled{2} 2, 7, 12, 17, \dots$$

$$\textcircled{3} 1, 7, 17, 31, \dots \quad \textcircled{4} \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$$

$$2. \textcircled{1} x^3 \text{ノ } x = 1, 2, 3, \dots \text{ヲ代入シタモノ}$$

$$\textcircled{2} -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1} \text{ノ } x = 1, 2, 3, \dots \text{ヲ代入シタモノ}$$

$$[106 \text{ 頁}] \quad 1. \textcircled{1} 99, 2550, 1+2(n-1), n^2 \quad \textcircled{2} 148, 3525, \\ 1+3(n-1), \frac{n(3n-1)}{2} \quad \textcircled{3} -144, -3575, -3(n-2), \frac{3n(n-3)}{2}$$

$$[108 \text{ 頁}] \quad 1. \textcircled{1} x^{19}, \frac{1-x^{20}}{1-x}, (-1)^{n-1} x^{n-1}, \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x}$$

$$\textcircled{2} -ax^{19}, \frac{a(1-x^{20})}{1+x}, (-1)^{n-1} ax^{n-1}, \frac{a\{1-(-1)^n x^n\}}{1+x} \quad \textcircled{3} \frac{2^{16}}{5^{17}}, 5.208,$$

$$\frac{2^{n-4}}{5^{n-6}}, \frac{125\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)\right\}}{24} \quad \textcircled{4} -\frac{7 \times 2^{18}}{3^{19}}, 2.100, (-1)^{n-1} \frac{7 \times 2^{n-2}}{3^{n-1}}$$

$$\frac{21\left\{1-(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)\right\}}{10} \quad 2. \textcircled{1} \frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^{n-3}} \quad \textcircled{2} (-1)^{n-1} x^{n-1}$$

$$\textcircled{3} \frac{10}{9}, -\frac{80}{243} \quad 3. \textcircled{1} 10.32 \quad \textcircled{2} 0.23 \quad \textcircled{3} 1023 \quad \textcircled{4} 1.75$$

$$[111 \text{ 頁}] \quad 1. 3.96 \text{ 倍} \quad 2. 2910 \text{ 圓} \quad 3. 2393 \text{ 圓} \quad 4. 23.5 \text{ 年後}$$

$$5. \text{一年毎ノ複利ノ方ガ} 622 \text{ 圓多イ}$$

$$[113 \text{ 頁}] \quad 1. 4331 \quad 2. 4051$$

$$[115 \text{ 頁}] \quad 1. \text{約} 1424 \quad 2. \text{約} 782$$

$$[116 \text{ 頁}] \quad 1. 6793 \text{ 圓} \quad 2. 6231 \text{ 圓} \quad 3. M = \frac{a}{r} \{1 - (1+r)^{-n}\}$$

$$4. -826 \text{ 圓} 50 \text{ 銭}$$

$$[152 \text{ 頁}] \quad 2. 203142857 \text{ km}^2 (\text{熱帯}), 264079365 \text{ km}^2 (\text{温帯}), 42222222 \text{ km}^2 (\text{寒帯})$$

$$[155 \text{ 頁}] \quad 1. 33.1\% \text{ 増}, 27.1\% \text{ 減} \quad 2. 76.6 \text{ cm}, 102.2 \text{ cm}, 127.7 \text{ cm}$$

$$3. \text{最大誤差} 3.03\%$$

$$[162 \text{ 頁}] \quad 1. \text{高サヲ } t \text{ トスレバ}, \frac{100}{3} \left(2 - \frac{t}{5} + \frac{t^2}{225}\right) \pi t \text{ cm}^3$$

$$15 \geq t > 0 \quad 2. 11.3 \text{ m 強}$$

$$[164 \text{ 頁}] \quad 1. T = \pi h^2 \left(t + \frac{2}{3} h\right) \quad 2. \pi \left\{h^2 t' + \frac{t}{3} (h^2 + hh' + h'^2)\right\}$$

$$[167 \text{ 頁}] \quad 1. \textcircled{1} -32 \quad \textcircled{2} 3125 \quad \textcircled{3} 81 \quad \textcircled{4} -125 \quad \textcircled{5} 64$$

$$\textcircled{6} -1 \quad 4. \textcircled{1} -10 \quad \textcircled{2} +2 \quad \textcircled{3} 3 \quad \textcircled{4} -1 \quad \textcircled{5} 2 \quad \textcircled{6} -5$$

$$[169 \text{ 頁}] \quad 1. x^5 \quad 2. 128 \quad 3. e^8 \quad 4. (a+1)^5 \quad 5. (a^2 - b^2)^4$$

$$6. a^2 \quad 7. x \quad 8. \frac{1}{p^2} \quad 9. 25x^4 y^2 \quad 10. \frac{1}{25a^4} \quad 11. 25x^6$$

$$[171 \text{ 頁}] \quad 1. \textcircled{1} \sqrt{x} \quad \textcircled{2} \sqrt{5} \quad \textcircled{3} \sqrt{a+b} \quad \textcircled{4} (p+q)\sqrt{p-q}$$

$$\textcircled{5} \sqrt{a+b} \quad \textcircled{6} \sqrt[5]{81} \quad 2. \textcircled{1} \sqrt{28} \quad \textcircled{2} \sqrt{a^3 b^2} \quad \textcircled{3} \sqrt{9a}$$

$$\textcircled{4} \sqrt[3]{8p^3 q} \quad \textcircled{5} \sqrt[3]{ab} \quad \textcircled{6} \sqrt[4]{\frac{m}{2}} \quad 3. \textcircled{1} 5 \quad \textcircled{2} 5\sqrt{4}$$

$$\textcircled{3} a\sqrt[3]{3b} \quad 4. \textcircled{1} 2 \quad \textcircled{2} 2 \quad \textcircled{3} \sqrt{a}$$

$$[174 \text{ 頁}] \quad 2. \textcircled{1} 3 \quad \textcircled{2} 4 \quad \textcircled{3} \frac{1}{2} \quad \textcircled{4} \frac{1}{9} \quad \textcircled{5} 4 \quad \textcircled{6} \frac{1}{2} \quad \textcircled{7} \frac{1}{125}$$

$$\textcircled{8} 1 \quad 3. \textcircled{1} x^{\frac{1}{2}} \quad \textcircled{2} x^{\frac{2}{3}} \quad \textcircled{3} x^{\frac{5}{3}} \quad \textcircled{4} x^{\frac{1}{m}} \quad \textcircled{5} a^{-\frac{1}{3}} \quad \textcircled{6} y^{-\frac{2}{3}}$$

⑦ $p^{-\frac{2}{3}}$ ⑧ $t^{-\frac{1}{m}}$

[182頁] 1. ① 2 ② 4 ③ 0 ④ -3 ⑤ -1 ⑥ 5 ⑦ 7

⑧ -5 ⑨ 1 2. ① 百ノ位 ② 千萬ノ位 ③ 萬ノ位
④ 小數第三位 ⑤ 百億ノ位 ⑥ 小數第七位 ⑦ 小數第一位
⑧ 一ノ位

[184頁] 1. ① 2.4393 ② 0.5321 ③ 3.7482 ④ 3.9165

⑤ 0.4972 ⑥ 1.8951 ⑦ 2.5113 ⑧ 3.4381 ⑨ 5.5051

2. ① 0.4393 ② 2.5321 ③ 2.7482 ④ 1.9165 ⑤ 2.4972

⑥ 3.8951 ⑦ 1.5113 ⑧ 3.5051

[186頁] 1. 2.040 2. 9.061 3. 6.059 4. 4.395

5. 0.108 6. 0.0951 7. 80.1 8. 0.003972 9. 3410

10. 143000

[188頁] 1. 5.884 2. 203.7 3. 2171 4. 340900

5. 11.09 6. 9.092 7. 127.9 8. 2.014 9. 342.2

10. 1265 11. 23.26 12. 5.726

[190頁] 1. 774.66cm^2 2. 40118.09cm^3 3. 11.28m

4. 12.406m 5. ① 540cm ② 5176cm ③ 1.7秒 ④ 6.4秒

6. ① 2.0秒 ② 2.2秒 ③ 24.84cm ④ 47.76cm

7. 2906cm^3 , 1149.83cm^2 8. 984cm^3 , 646.7cm^2 9. 12.74cm

10. 2.4倍強 11. 29.5年後

諸 表

I. 度量衡換算表	[2]
II. 複利表	[3]
III. 平方平方根立方立方根ノ表	[5]
IV. 數ノ對數表	[6]
V. 正弦餘弦正切ノ表	[8]

I 度量衡換算表

長	1 cm	3.3分	0.393701吋
	1 m	3.3尺	1.0936133碼(3.2808399呎)
	1 km	9町10間(0.2546296里)	0.62137哩(3280.8呎)
	1 尺	0.30303m	0.33140碼(0.99419呎)
	1 間	1.81818m	1.98839碼
	1 町	109.0909m	5.42288鎖
	1 里	3.927273km	2.44029哩(4294.9碼)
	1 吋	0.0254m	0.83820寸(鯨0.671寸)
	1 呎	0.3048m	1.00584尺(鯨0.805尺)
	1 碼	0.9144m	3.01752尺(鯨2.414尺)
サ	1 鎖	20.1168m	11間0.385尺
	1 哩	1.609344km	14町45間0.335尺(C.4097867里)
	1 漚	1852m	16町59間1.5尺(0.4718756里)
	1 a	30.25坪	
地積ノ單位	1 坪	0.0330579 a	
	1 畝	0.991736 a	
	1 町	99.1736 a	
	1 l	0.5543524升	0.26417ガロン
樽目ノ單位	1 升	1.80391 l	0.47654ガロン
	1 ガロン	3.78543 l	2.09846升
	1 g	0.2667匁	0.00220ポンド(封度)
目方ノ單位	1 kg	0.26667貫(1.66667斤)	2.20459ポンド
	1 t	266.667貫	0.98419噸
	1 匁	3.75g	0.13228オンス(匁)
	1 貫	3.75 kg	8.26720ポンド
	1 斤	600 g	1.32275ポンド
	1 匁	28.3495 g	7.56匁
	1 封度	0.45359 kg	120.96匁(0.756斤)
	1 噸	1.01606 t	270.950貫(1693.44斤)

II 複利表

率 期	2分	2分5厘	3分	3分5厘	4分
1	1.02000000	1.02500000	1.03000000	1.03500000	1.04000000
2	1.04040000	1.05062500	1.06090000	1.07122500	1.08160000
3	1.06120800	1.07689063	1.09272700	1.10871788	1.12485400
4	1.08243216	1.10381289	1.12550881	1.14752300	1.16985856
5	1.10408080	1.13140821	1.15927407	1.18768631	1.21665290
6	1.12616242	1.15969342	1.19405230	1.22925533	1.26531902
7	1.14868567	1.18868575	1.22987387	1.27227926	1.31593178
8	1.17165938	1.21840290	1.26677008	1.31680904	1.36856905
9	1.19509257	1.24886297	1.30477318	1.36289735	1.42331181
10	1.21899442	1.28008454	1.34391638	1.41059876	1.48024428
11	1.24337431	1.31208666	1.38423387	1.45996972	1.53945406
12	1.26824179	1.34488882	1.42576089	1.51106866	1.60103222
13	1.29360663	1.37851104	1.46853371	1.56395606	1.66507351
14	1.31947876	1.41297382	1.51258972	1.61869452	1.73167645
15	1.34586834	1.44829817	1.55796742	1.67534883	1.80094351
16	1.37278571	1.48450562	1.60470644	1.73398604	1.87298125
17	1.40024142	1.52161826	1.65284763	1.79467555	1.94790050
18	1.42824625	1.55965872	1.70243306	1.85748920	2.02581652
19	1.45681117	1.59865019	1.75350605	1.92250132	2.10684918
20	1.48594740	1.63861644	1.80611123	1.98978886	2.19112314
21	1.51566634	1.67958185	1.86029457	2.05943147	2.27876807
22	1.54597967	1.72157140	1.91610341	2.13151158	2.36991879
23	1.57689926	1.76461068	1.97358651	2.20611448	2.46471554
24	1.60843725	1.80872595	2.03279411	2.28332849	2.56330416
25	1.64060599	1.85394410	2.09377793	2.36324498	2.66583633
26	1.67341811	1.90029270	2.15659127	2.44595856	2.77246978
27	1.70688648	1.94780002	2.22128901	2.53156711	2.88336858
28	1.74102421	1.99649502	2.28792768	2.62017196	2.99870332
29	1.77584469	2.04640739	2.35656551	2.71187798	3.11865145
30	1.81136158	2.09756758	2.42726247	2.80679370	3.24339751
31	1.84758882	2.15000677	2.50008035	2.90503148	3.37313341
32	1.88454059	2.20375694	2.57508276	3.00670759	3.50805875
33	1.92223140	2.25885086	2.65233524	3.11194235	3.64838110
34	1.96067603	2.31532213	2.73190530	3.22086033	3.79431634
35	1.99988955	2.37320519	2.81386245	3.33359045	3.94608899
36	2.03988734	2.43253532	2.89827833	3.45026611	4.10393255
37	2.08068509	2.49334870	2.98522668	3.57102543	4.26808986
38	2.12229879	2.55568242	3.07478348	3.69601132	4.43881345
39	2.16474477	2.61957448	3.16702698	3.82537171	4.61636599
40	2.20803966	2.68506384	3.26203779	3.95925972	4.80102063
41	2.25220046	2.75219043	3.35989893	4.09783381	4.99306145
42	2.29724447	2.82099520	3.46069589	4.24125799	5.19278391
43	2.34318936	2.89152008	3.56451677	4.38970202	5.40049527
44	2.39005314	2.96380808	3.67145227	4.54334160	5.61651508
45	2.43785421	3.03790328	3.78159584	4.70235855	5.84117568
46	2.48661129	3.11385086	3.89504372	4.86694110	6.07482271
47	2.53634351	3.19169713	4.01189503	5.03728404	6.31781562
48	2.58707039	3.27148956	4.13225188	5.21358898	6.57052824
49	2.63881179	3.35327680	4.25621944	5.39606459	6.83334937
50	2.69158803	3.43710872	4.38390602	5.58492686	7.10668335

率 期	4 分 5 厘	5 分	5 分 5 厘	6 分	7 分
1	1.04500000	1.05000000	1.05500000	1.06000000	1.07000000
2	1.09202500	1.10250000	1.11302500	1.12360000	1.14490000
3	1.14116613	1.15762500	1.17424138	1.19101600	1.22504300
4	1.19251860	1.21550625	1.23882465	1.26247696	1.31079601
5	1.24618194	1.27628156	1.30696001	1.33822558	1.40255173
6	1.30226012	1.34009564	1.37884281	1.41851911	1.50073035
7	1.36086183	1.40710042	1.45467916	1.50363026	1.60578148
8	1.42210061	1.47745544	1.53468651	1.59384807	1.71818618
9	1.48609514	1.55132822	1.61909427	1.68947896	1.83845921
10	1.55296942	1.62889463	1.70814446	1.79084770	1.96715136
11	1.62285305	1.71033936	1.80209240	1.89829856	2.10485195
12	1.69588143	1.79585633	1.90120749	2.01219647	2.25219159
13	1.77219610	1.88564914	2.00577390	2.13292826	2.40984500
14	1.85194492	1.97993160	2.11609146	2.26090396	2.57853415
15	1.93528244	2.07892818	2.23247649	2.39655819	2.75903154
16	2.02237015	2.18287459	2.35526270	2.54035168	2.95216375
17	2.11337681	2.29201832	2.48480215	2.69277279	3.15881521
18	2.20847877	2.40661923	2.62146627	2.85433915	3.37993228
19	2.30786031	2.52695020	2.76564691	3.02559950	3.61652754
20	2.41171402	2.65329771	2.91775749	3.20713547	3.86968446
21	2.52024116	2.78596259	3.07823415	3.39956360	4.14056237
22	2.63365201	2.92526072	3.24753703	3.60353742	4.43040174
23	2.75216635	3.07152376	3.42615157	3.81974966	4.74052986
24	2.87601383	3.22509994	3.61458990	4.04893464	5.07236695
25	3.00543446	3.38635494	3.81339235	4.29187072	5.42743264
26	3.14067901	3.55567269	4.02312893	4.54938296	5.80735292
27	3.28200956	3.73345632	4.24440102	4.82234594	6.21386763
28	3.42969999	3.92012914	4.47784307	5.11168670	6.64883836
29	3.58403649	4.11613560	4.72412444	5.41838790	7.11425705
30	3.74531813	4.32194238	4.98395129	5.74349117	7.61225504
31	3.91385745	4.53803949	5.25806861	6.08810064	8.14511290
32	4.08998104	4.76494147	5.54726238	6.45338668	8.71527080
33	4.27403018	5.00318854	5.85236181	6.84058988	9.32533975
34	4.46636154	5.25334797	6.17424171	7.25102523	9.97811554
35	4.66734781	5.51601537	6.51382501	7.68608679	10.67658148
36	4.87737846	5.79181614	6.87208538	8.14725200	11.42394219
37	5.09686049	6.08140694	7.25005008	8.63608712	12.22361814
38	5.32621921	6.38547729	7.64850283	9.15425235	13.07927141
39	5.56589908	6.70475115	8.06948699	9.70350749	13.99482041
40	5.81636454	7.03998871	8.51330877	10.28571794	14.97445784
41	6.07810094	7.39198815	8.98154076	10.90286101	16.02266989
42	6.35161548	7.76158756	9.47552550	11.55703267	17.14425678
43	6.63743818	8.14966693	9.99667940	12.25045436	18.34435475
44	6.93612290	8.55715028	10.54649677	12.98548191	19.62845959
45	7.24824843	8.98500779	11.12655409	13.76461083	21.00245176
46	7.57441961	9.43425818	11.73851456	14.59048748	22.47262338
47	7.91526849	9.90597109	12.38413287	15.46591673	24.04570702
48	8.27145557	10.40126965	13.06526017	16.39387173	25.72899651
49	8.64367107	10.92133313	13.78384948	17.37750403	27.52992997
50	9.03263027	11.46739979	14.54196120	18.42015427	29.45702506

數	平方	立方	平方根	立方根	數	平方	立方	平方根	立方根
1	1	1	1.000	1.000	51	2 601	132 651	7.141	3.708
2	4	8	1.414	1.260	52	2 704	140 608	7.211	3.733
3	9	27	1.732	1.442	53	2 809	148 877	7.280	3.756
4	16	64	2.000	1.587	54	2 916	157 464	7.348	3.780
5	25	125	2.236	1.710	55	3 025	166 375	7.416	3.803
6	36	216	2.449	1.817	56	3 136	175 616	7.483	3.826
7	49	343	2.646	1.913	57	3 249	185 193	7.550	3.849
8	64	512	2.828	2.000	58	3 364	195 112	7.616	3.871
9	81	729	3.000	2.080	59	3 481	205 379	7.681	3.893
10	100	1 000	3.162	2.154	60	3 600	216 000	7.746	3.915
11	121	1 331	3.317	2.224	61	3 721	226 981	7.810	3.936
12	144	1 728	3.464	2.289	62	3 844	238 328	7.874	3.958
13	169	2 197	3.606	2.351	63	3 969	250 047	7.937	3.979
14	196	2 744	3.742	2.410	64	4 096	262 144	8.000	4.000
15	225	3 375	3.873	2.466	65	4 225	274 625	8.062	4.021
16	256	4 096	4.000	2.520	66	4 356	287 496	8.124	4.041
17	289	4 913	4.123	2.571	67	4 489	300 763	8.185	4.062
18	324	5 832	4.243	2.621	68	4 624	314 432	8.246	4.082
19	361	6 859	4.359	2.668	69	4 761	328 509	8.307	4.102
20	400	8 000	4.472	2.714	70	4 900	343 000	8.367	4.121
21	441	9 261	4.583	2.759	71	5 041	357 911	8.426	4.141
22	484	10 648	4.690	2.802	72	5 184	373 248	8.485	4.160
23	529	12 167	4.796	2.844	73	5 329	389 017	8.544	4.179
24	576	13 824	4.899	2.884	74	5 476	405 224	8.602	4.198
25	625	15 625	5.000	2.924	75	5 625	421 875	8.660	4.217
26	676	17 576	5.099	2.962	76	5 776	438 976	8.718	4.236
27	729	19 683	5.196	3.000	77	5 929	456 533	8.775	4.254
28	784	21 952	5.292	3.037	78	6 084	474 552	8.832	4.273
29	841	24 389	5.385	3.072	79	6 241	493 039	8.888	4.291
30	900	27 000	5.477	3.107	80	6 400	512 000	8.944	4.309
31	961	29 791	5.568	3.141	81	6 561	531 441	9.000	4.327
32	1 024	32 768	5.657	3.175	82	6 724	551 368	9.055	4.344
33	1 089	35 937	5.745	3.208	83	6 889	571 787	9.110	4.362
34	1 156	39 304	5.831	3.240	84	7 056	592 704	9.165	4.380
35	1 225	42 875	5.916	3.271	85	7 225	614 125	9.220	4.397
36	1 296	46 656	6.000	3.302	86	7 396	636 056	9.274	4.414
37	1 369	50 653	6.083	3.332	87	7 569	658 503	9.327	4.431
38	1 444	54 872	6.164	3.362	88	7 744	681 472	9.381	4.448
39	1 521	59 319	6.245	3.391	89	7 921	704 969	9.434	4.465
40	1 600	64 000	6.325	3.420	90	8 100	729 000	9.487	4.481
41	1 681	68 921	6.403	3.448	91	8 281	753 571	9.539	4.498
42	1 764	74 088	6.481	3.476	92	8 464	778 688	9.592	4.514
43	1 849	79 507	6.557	3.503	93	8 649	804 357	9.644	4.531
44	1 936	85 184	6.633	3.530	94	8 836	830 584	9.695	4.547
45	2 025	91 125	6.708	3.557	95	9 025	857 375	9.747	4.563
46	2 116	97 336	6.782	3.583	96	9 216	884 736	9.798	4.579
47	2 209	103 823	6.856	3.609	97	9 409	912 673	9.849	4.595
48	2 304	110 592	6.928	3.634	98	9 604	941 192	9.899	4.610
49	2 401	117 649	7.000	3.659	99	9 801	970 299	9.950	4.626
50	2 500	125 000	7.071	3.684	100	10 000	1 000 000	10.000	4.642

IV 數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4 8 12	17 21 25	29 33 37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4 8 11	15 19 23	26 30 34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3 7 10	14 17 21	24 28 31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3 6 10	13 16 19	23 26 29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3 6 9	12 15 18	21 24 27
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3 6 8	11 14 17	20 22 25
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3 5 8	11 13 16	18 21 24
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2 5 7	10 12 15	17 20 22
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2 5 7	9 12 14	16 19 21
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2 4 7	9 11 13	16 18 20
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3765	.3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
2.7	.4313	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.2	.6232	.6242	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8
5.0	.6990	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	.7076	1 2 3	3 4 5	6 7 8
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1 2 3	3 4 3	6 7 8
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7

V 數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627	1 2 2	3 4 5	5 6 7
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917	1 1 2	3 4 4	5 6 6
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987	1 1 2	3 3 4	5 6 6
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319	1 1 2	3 3 4	5 5 6
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382	1 1 2	3 3 4	4 5 6
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445	1 1 2	2 3 4	4 5 6
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506	1 1 2	2 3 4	4 5 6
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859	1 1 2	2 3 3	4 5 5
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390	1 1 2	2 3 3	4 4 5
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440	0 1 1	2 2 3	3 4 4
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9665	.9671	.9675	.9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952			

正弦 餘弦 正切ノ表

角	正弦	餘弦	正切	角	正弦	餘弦	正切
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2	.0349	.9994	.0349	47	.7314	.6820	1.0724
3	.0523	.9986	.0524	48	.7431	.6691	1.1106
4	.0698	.9976	.0699	49	.7547	.6561	1.1504
5	.0872	.9962	.0875	50	.7660	.6428	1.1918
6	.1045	.9945	.1051	51	.7771	.6293	1.2349
7	.1219	.9925	.1228	52	.7880	.6157	1.2799
8	.1392	.9903	.1405	53	.7986	.6018	1.3270
9	.1564	.9877	.1584	54	.8090	.5878	1.3764
10	.1736	.9848	.1763	55	.8192	.5736	1.4281
11	.1908	.9816	.1944	56	.8290	.5592	1.4826
12	.2079	.9781	.2126	57	.8387	.5446	1.5399
13	.2250	.9744	.2309	58	.8480	.5299	1.6003
14	.2419	.9703	.2493	59	.8572	.5150	1.6643
15	.2588	.9659	.2679	60	.8660	.5000	1.7321
16	.2756	.9613	.2867	61	.8746	.4848	1.8040
17	.2924	.9563	.3057	62	.8829	.4695	1.8807
18	.3090	.9511	.3249	63	.8910	.4540	1.9626
19	.3256	.9455	.3443	64	.8988	.4384	2.0503
20	.3420	.9397	.3640	65	.9063	.4226	2.1445
21	.3584	.9336	.3839	66	.9135	.4067	2.2460
22	.3746	.9272	.4040	67	.9205	.3907	2.3559
23	.3907	.9205	.4245	68	.9272	.3746	2.4751
24	.4067	.9135	.4452	69	.9336	.3584	2.6051
25	.4226	.9063	.4663	70	.9397	.3420	2.7475
26	.4384	.8988	.4877	71	.9455	.3256	2.9042
27	.4540	.8910	.5095	72	.9511	.3090	3.0777
28	.4695	.8829	.5317	73	.9563	.2924	3.2709
29	.4848	.8746	.5543	74	.9613	.2756	3.4874
30	.5000	.8660	.5774	75	.9659	.2588	3.7321
31	.5150	.8572	.6009	76	.9703	.2419	4.0108
32	.5299	.8480	.6249	77	.9744	.2250	4.3315
33	.5446	.8387	.6494	78	.9781	.2079	4.7046
34	.5592	.8290	.6745	79	.9816	.1908	5.1446
35	.5736	.8192	.7002	80	.9848	.1736	5.6713
36	.5878	.8090	.7265	81	.9877	.1564	6.3138
37	.6018	.7986	.7536	82	.9903	.1392	7.1154
38	.6157	.7880	.7813	83	.9925	.1219	8.1443
39	.6293	.7771	.8098	84	.9945	.1045	9.5144
40	.6428	.7660	.8391	85	.9962	.0872	11.4301
41	.6561	.7547	.8693	86	.9976	.0698	14.3006
42	.6691	.7431	.9004	87	.9986	.0523	19.0811
43	.6820	.7314	.9325	88	.9994	.0349	28.6363
44	.6947	.7193	.9657	89	.9998	.0175	57.2900
45	.7071	.7071	1.0000	90	1.0000	.0000	

昭和九年 九月五日 印刷
 昭和九年 九月八日 發行
 昭和九年十二月五日 訂正再版印刷
 昭和九年十二月十日 訂正再版發行

著作權所有

女子教育
 統合數學

定價

上卷 金 八十五錢
 中卷 金 七十五錢
 下卷 金 七十五錢



著 作 者 佐 藤 良 一 郎
 東京市神田區駿河臺三丁目一番地
 發 行 者 目 黒 甚 七
 東京市京橋區銀座西二丁目三番地
 印 刷 者 高 橋 郁
 東京市京橋區銀座西二丁目三番地
 印 刷 所 三 協 印 刷 株 式 會 社

發行所

東京市神田區駿河臺三丁目一番地 振替口座東京二八〇九番
 新潟縣長岡市表町四丁目(本店) 振替口座東京三六一九番
 新潟市古町通七番町(支店) 振替口座長野四〇九〇番

目 黒 書 店

目 次

(一) 緒 言

(二) 概 論

(三) 實 驗

(四) 結 果

(五) 討 論

(六) 結 語

(七) 附 錄

(八) 參 考 文 獻

(九) 圖 表

(十) 圖 說

(十一) 圖 表

(十二) 圖 說

(十三) 圖 表

(十四) 圖 說

(十五) 圖 表

(十六) 圖 說

(十七) 圖 表

(十八) 圖 說

(十九) 圖 表

(二十) 圖 說

(二十一) 圖 表

(二十二) 圖 說

(二十三) 圖 表

(二十四) 圖 說

(二十五) 圖 表

(二十六) 圖 說

(二十七) 圖 表

(二十八) 圖 說

(二十九) 圖 表

(三十) 圖 說

(三十一) 圖 表

(三十二) 圖 說

(三十三) 圖 表

(三十四) 圖 說

(三十五) 圖 表

(三十六) 圖 說

(三十七) 圖 表

(三十八) 圖 說

(三十九) 圖 表

(四十) 圖 說

(四十一) 圖 表

(四十二) 圖 說

(四十三) 圖 表

(四十四) 圖 說

(四十五) 圖 表

(四十六) 圖 說

(四十七) 圖 表

(四十八) 圖 說

(四十九) 圖 表

(五十) 圖 說

(五十一) 圖 表

(五十二) 圖 說

(五十三) 圖 表

(五十四) 圖 說

(五十五) 圖 表

(五十六) 圖 說

(五十七) 圖 表

(五十八) 圖 說

(五十九) 圖 表

(六十) 圖 說

(六十一) 圖 表

(六十二) 圖 說

(六十三) 圖 表

(六十四) 圖 說

(六十五) 圖 表

(六十六) 圖 說

(六十七) 圖 表

(六十八) 圖 說

(六十九) 圖 表

(七十) 圖 說

(七十一) 圖 表

(七十二) 圖 說

(七十三) 圖 表

(七十四) 圖 說

(七十五) 圖 表

(七十六) 圖 說

(七十七) 圖 表

(七十八) 圖 說

(七十九) 圖 表

(八十) 圖 說

(八十一) 圖 表

(八十二) 圖 說

(八十三) 圖 表

(八十四) 圖 說

(八十五) 圖 表

(八十六) 圖 說

(八十七) 圖 表

(八十八) 圖 說

(八十九) 圖 表

(九十) 圖 說

(九十一) 圖 表

(九十二) 圖 說

(九十三) 圖 表

(九十四) 圖 說

(九十五) 圖 表

(九十六) 圖 說

(九十七) 圖 表

(九十八) 圖 說

(九十九) 圖 表

(一百) 圖 說

(一百零一) 圖 表

(一百零二) 圖 說

(一百零三) 圖 表

(一百零四) 圖 說

(一百零五) 圖 表

(一百零六) 圖 說

(一百零七) 圖 表

(一百零八) 圖 說

(一百零九) 圖 表

(一百一十) 圖 說

(一百一十一) 圖 表

(一百一十二) 圖 說

(一百一十三) 圖 表

(一百一十四) 圖 說

(一百一十五) 圖 表

(一百一十六) 圖 說

(一百一十七) 圖 表

(一百一十八) 圖 說

(一百一十九) 圖 表

(一百二十) 圖 說

(一百二十一) 圖 表

(一百二十二) 圖 說

(一百二十三) 圖 表

(一百二十四) 圖 說

(一百二十五) 圖 表

(一百二十六) 圖 說

(一百二十七) 圖 表

(一百二十八) 圖 說

(一百二十九) 圖 表

(一百三十) 圖 說

(一百三十一) 圖 表

(一百三十二) 圖 說

(一百三十三) 圖 表

(一百三十四) 圖 說

(一百三十五) 圖 表

(一百三十六) 圖 說

(一百三十七) 圖 表

(一百三十八) 圖 說

(一百三十九) 圖 表

(一百四十) 圖 說

(一百四十一) 圖 表

(一百四十二) 圖 說

(一百四十三) 圖 表

(一百四十四) 圖 說

(一百四十五) 圖 表

(一百四十六) 圖 說

(一百四十七) 圖 表

(一百四十八) 圖 說

(一百四十九) 圖 表

(一百五十) 圖 說

(一百五十一) 圖 表

(一百五十二) 圖 說

(一百五十三) 圖 表

(一百五十四) 圖 說

(一百五十五) 圖 表

(一百五十六) 圖 說

(一百五十七) 圖 表

(一百五十八) 圖 說

(一百五十九) 圖 表

(一百六十) 圖 說

(一百六十一) 圖 表

(一百六十二) 圖 說

(一百六十三) 圖 表

(一百六十四) 圖 說

(一百六十五) 圖 表

(一百六十六) 圖 說

(一百六十七) 圖 表

(一百六十八) 圖 說

(一百六十九) 圖 表

(一百七十) 圖 說

(一百七十一) 圖 表

(一百七十二) 圖 說

(一百七十三) 圖 表

(一百七十四) 圖 說

(一百七十五) 圖 表

(一百七十六) 圖 說

(一百七十七) 圖 表

(一百七十八) 圖 說

(一百七十九) 圖 表

(一百八十) 圖 說

(一百八十一) 圖 表

(一百八十二) 圖 說

(一百八十三) 圖 表

(一百八十四) 圖 說

(一百八十五) 圖 表

(一百八十六) 圖 說

(一百八十七) 圖 表

(一百八十八) 圖 說

(一百八十九) 圖 表

(一百九十) 圖 說

(一百九十一) 圖 表

(一百九十二) 圖 說

(一百九十三) 圖 表

(一百九十四) 圖 說

(一百九十五) 圖 表

(一百九十六) 圖 說

(一百九十七) 圖 表

(一百九十八) 圖 說

(一百九十九) 圖 表

(二百) 圖 說



