文部省検定濟

女子
數學教科書
幾何學

株式會社
帝國書院

三年竹組
小松フミエ

文部省檢定濟
昭和八年三月二十九日 高等女學校數學科

女子
數學教科書
幾何學

北海道帝國大學教授
理學博士
河口商次 著

株式會社
帝國書院

緒　言

本書ハ,文部省所定ノ教授要目ニ準據シテ高等女學校數學科幾何學教科書トシテ編纂シタモノデアル.

本書編纂ニ際シ,能フ限リ新進ノ思想ヲ取リ入レタコトハ隨所ニ發見シ得ラレルデアラウ. 特ニ圖形ノ説明或ハ問題ノ證明ニ折紙ノ實驗ヲ加ヘ以テ生徒ニ直觀的ノ概念ヲ與ヘルニ意ヲ注イダコトナドハソノ例ノ尤ナルモノデアル.

尙ホ本書編纂ニ際シテ意ヲ用ヒタ諸點ヲ擧グレバ,

1. 記載事項ハ可及的簡約ヲ旨トシ,以テ生徒ノ負擔ヲ輕減スルト同事ニ,一面ニハ教授者ヲシテ生徒ノ實力ニ應ジテ適宜ニ程度ヲ高低シ得ル樣ニシタ.
2. 在來ノ數學教科書特有ノ難解ナル直譯的字句ヲ避ケ,行文ノ平易明瞭ヲ旨トシテ記述シタ.
3. 教材及ビ問題ハ,能フ限リ多方面ニ亘リ且ツ實生活ニ適切ナルモノヨリ選擇シ,又色刷挿圖ヲ多ク加ヘテ實用的趣味的ニ説述シタ.

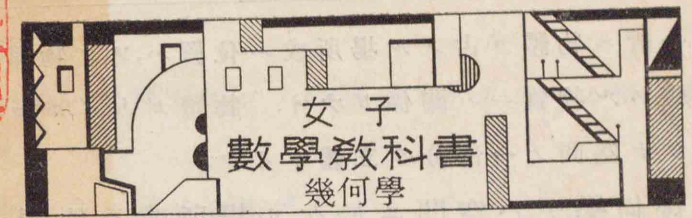
等デアル.

終ニ臨ミ,著者ハ實地教授者諸賢ノ本書ニ對スル忌憚ナキ御高批ヲ切望シ,之ニヨリテ本書ヲシテ漸次完璧ノモノタラシメンコトヲ期スル次第デアル.

昭和七年十二月

著　者　識

目　次

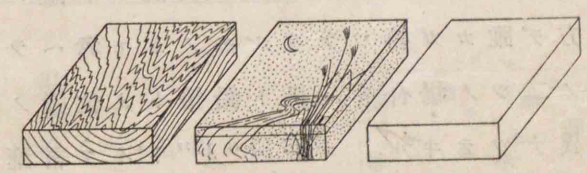


第 一 編

緒 論

1. 幾何學

我等ノ周圍ニハ本,机,鉛筆等イロイロノ形ノ物體ガアル. 然シドノ物體モ必ズアル瞬間ニハ位置ガアリ,アル場所ヲ占メル. ソノ場所ハ物體ノ形及ビ大キサニ關係スル. 例ヘバ鉛筆ハ細長イ場所ヲ占メ,毬ハ丸イ場所ヲ占メル.



上圖ノヤウナ形ノ全ク等シイ箱ト木片トヲ考ヘテ,箱ノアツタ同ジ場所ニ木片ヲ置イタモノトスル. ソノトキ木片ガ占メル場所ト,以前ニ箱ガ占メタ場所トハ全ク同ジデアル.

一般ニ物體ガ占メル場所或ハ位置ハ,ソノ物體ヲ組織スル物質ニハ關係ガナイ. 物體ガ占メルコノヤウナ空間ノ一部分ヲ**立體**トイフ.

幾何學デハ空間ニ於ケル場所或ハ位置ノ關係ヲ研究スル.

複雜ナ形ノ場所或ハ面倒ナ位置ノ關係ハ,我等ノ學ブ程度デハナイカラ,點,直線,圓,平面,球等最モ簡單ナモノニ就イテ考ヘルコトトスル.

2. 定義,嚴正ナ論法

場所或ハ位置ノ關係ヲイヒ表スノニ,正確ニ且嚴密ニイハヌト,イロイロノ誤ヲ起スモノデアル. 例ヘバ,"鉛筆ハ机ノ上ニアル"トイヘバ,鉛筆ガ机ノ上ニ乘ツテヰルモノトモ考ヘラレ,又机カラ離レテ机ノ上ノ方デ誰カガ持ツテヰルモノトモ考ヘラレル. 然モコノ二ツノ場合デハ,机ト鉛筆トノ位置ノ關係ハ全ク異ナツテヰル. コレハ"上"トイフ言葉ノ意味ガ不正確ナノデアル.

故ニ用語ハ何人モ必ズ同一ニ解釋スルヤウニ,ソノ意味ヲ判然ト定メテ置カナケレバナラナイ.

コノ用語ノ意味ヲ定メルコトヲ,ソノ語ノ**定義**ト

イフ.

"絹地ハ光澤ガアツテ綺麗デアルカラ,ソノ價ガ高イ."

コレト全ク同ジ論法デ,

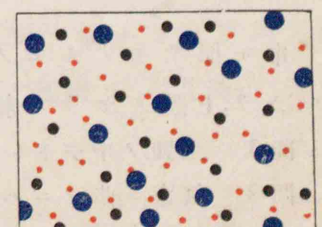
"レーヨンモ光澤ガアツテ綺麗デアルカラ,從ツテソノ價モ高イ."

ト結論スルナラバ大間違デアル. コレハ最初ノ論法ガイケナイ. 絹地ノ價ガ高イ理由ハ,光澤ガアツテ綺麗ナバカリデハナイ.

故ニ正確ニ物事(モノゴト)ヲ研究スルニハ,先ヅ用語ノ意味ヲ明ラカニシ,然ル後正確嚴密ナ論法ヲ用ヒナケレバナラナイ.

幾何學ヲ學ブ目的ノ一ツハ,コノ嚴密ナ推理ノ方法ヲ習熟スルコトニアル.

3. 點



問 右圖ノ水玉模樣デ何色ノ水玉ガ最モ點ニ近イカ.

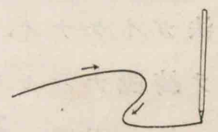
點ハ位置ノミヲ有スル.

從ツテ點ハ大キサハ持タナイ. 机ノ角,針ノ先端等ハ何レモ點ノ例デアル.

位置ノミガアツテ大キサヲ持タナイモノヲ書キ表スコトハ困難デアルカラ,小サイ丸"●"又ハ"×"ヲ書イテ點ニ代用スル. 例ヘバ右ノ圖ノヤウニ點 A 或ハ點 P ト表ス.

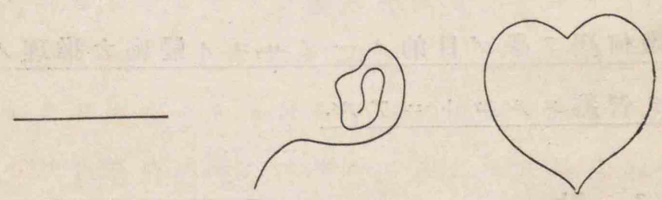
4. 線

定義　點ガ運動シタトキ,ソノ動イタ跡ハ點ノ一ツノ集リト考ヘラレル. コノヤウナ點ノ集リヲ**線**トイフ.



從ツテ巾モ厚サモナク,位置ノミヲ持ツ細イ糸ノヤウナモノト考ヘテヨイ.

机ノ稜,小刀ノ刄等ハ線ノ例デアル.



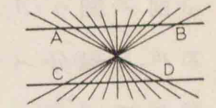
巾モ厚サモナイモノヲ書キ表スコトハ困難デアルカラ,上圖ノヤウニ細ク書イテ示ス.

問 1　上圖ノ中デドレガ直線デアルカ.

問 2　眞直ニ歩クニハドウスレバヨイカ.

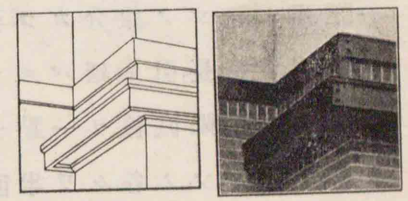
直線トハ眞直(マッスグ)ナ線ノコトデアル. コレヲ嚴格ニイヒ表セバ

定義　點ガ常ニ同ジ方向ニ運動シタトキ出來ル線ヲ**直線**トイフ.



問 3　直線狀ヲナスモノノ例ヲ擧ゲヨ.

問 4　右圖デ AB, CD ハ直線デアルカドウカヲ檢セ.

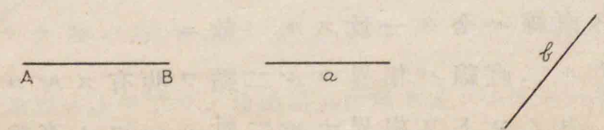


定義　線ト線トガ一點ヲ共有スルトキ,コノ二ツノ線ハコノ點ニ於イテ**相交ル**トイヒ,コノ點ヲ**交點**トイフ.

5. 直線ノ性質

直線ハ双方ヘ限リナク延ビテヰル.

從ツテコレヲ**無限直線**トイフ. 直線ヲ表スニハ,ソノ直線上ノ二點ニ,例ヘバ A, B 等ノ名ヲ附ケテ,"直線 AB"トイフヤウニ呼ブ. 或ハソノ直線ノ傍ニ a, b 等ノ文字ヲ附記シテ,"直線 a","直線 b"等ト呼ブコトモアル.

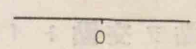


定義 直線上ノ二點デ限ラレタソノ直線ノ部分ヲ**線分**トイフ.

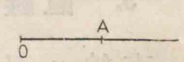
前ノ圖デAカラBニ至ル間ノ部分ハ線分ABデアル. 線分ハソノ兩端ヲ超ヘテ双方ヘイクラデモ引キ延スコトガ出來ル.

定義 一ツノ線分カラ引キ延バサレタ部分ヲソノ線分ノ**延長**,引キ延バスコトヲ**延長スル**トイフ.

定義 無限直線ヲ一點デ二ツニ分ケルトキ,ソノ各々ヲ**半直線**トイヒ,ソノ點ヲ半直線ノ**基點**トイフ.



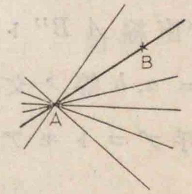
Oヲ基點トスル半直線ヲ表スニハ,ソノ上ニ任意ノ一點Aヲトッテ,"半直線OA"トイフヤウニ呼ブ.



問1 線分ヲ延長スル方法ヲ考案セヨ.

問2 一點Aヲ通ッテ澤山ノ直線ガ引ケルカ.

相異ナル二點ヲ通ル直線ハイツモ唯一ツアル.



從ッテ相異ナル二點ヲ共有スル二ツノ直線ハ全ク一致スル. 故ニ相異ナル二直線ハ相異ナル二點ヲ共有スルコトハナイ. コノコトヲ相異ナル二點ハ一ツノ直線ヲ決

定スルトイフ.

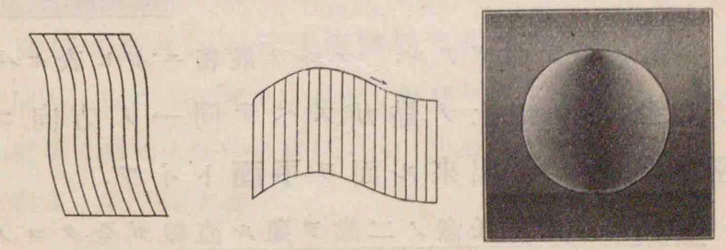
問3 長サ4 cmノ線分ヲ引ケ.

問4 机ノ縱横ノ長サヲ測レ. 又ソノ方法ヲ説明セヨ.

定義 一ツノ線分ニ物指ヲ當テタトキ,物指ノa cmノ部分トソノ線分ガ一致スレバ,**コノ線分ノ長サ**ハa cmデアルトイフ. 二點ヲ兩端トスル線分ヲ引クコトヲ**二點ヲ結ブ**トイヒ,ソノ線分ノ長サヲ**二點間ノ距離**トイフ.*

6. 面

定義 線ガ運動シタトキ,ソノ動イタ跡ハ線ノ集リト考ヘラレル. 然シコノトキ線ガ形ヲ變ヘナガラ動イテモヨイガ,自己ニ沿フテハ動カナイモノトスル. コノヤウナ線ノ集リヲ**面**トイフ.

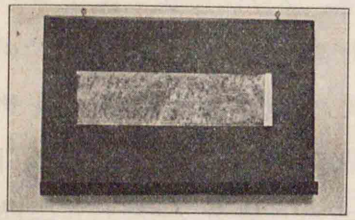


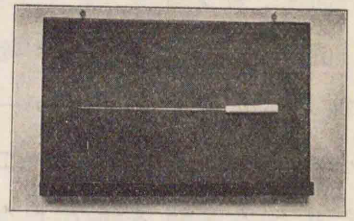
從ッテ面ハ厚サガナクテ,切(キレ)地ノヤウニ廣ガッタ

* 地圖ノ上デ二ツノ地點間ノ距離ヲイフトキニハ,普通ソノ二ツノ地點ヲ通ル道路ヤ鐵道線路ニ沿フタ長サヲイフ.

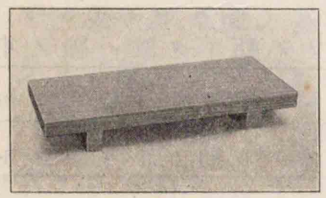
モノト考ヘテヨイ. 物體ノ境界ハ一般ニ面デアル.

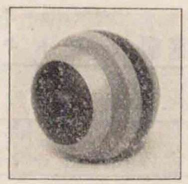
問 1 白墨ヲソノ長サノ方向ニ動カスト面ガ出來ルカ.

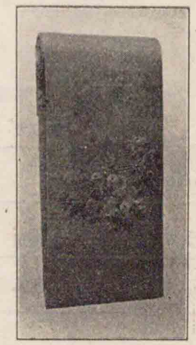




問 2 下圖ノ中デドレガ平面デアルカ.







平面ハ平ナ面デアル. コレヲ嚴密ニイヒ表セバ,

定義 直線上ノ點ガスベテ同一ノ方向ニ運動スルトキ出來ル面ヲ**平面**トイフ.

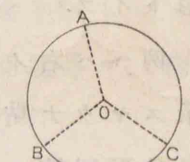
一ツノ面上ノ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全クコノ面ニ含マレルトキ,ソノ面ハ平面デアル.

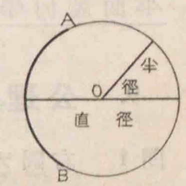
問 3 定規ヲ用ヒテ机ノ面ガ平面デアルカドウカヲ調ベヨ.

問 4 平面ニ近イ面ノ例ヲ擧ゲヨ.

7. 圓, 圓周

定義 平面ノ一部分ヲ圍ム線上ノ點ガスベテ一定點カラ等シイ距離ニアルトキ,ソノ線ヲ**圓周**,圓周內ノ平面ノ部分ヲ**圓**トイフ. コノ一定點ヲコノ圓ノ**中心**,中心カラ圓周ニ至ル線分ヲコノ圓ノ**半徑**,圓ノ中心ヲ通ツテ圓周上ニ兩端ヲ有スル線分ヲコノ圓ノ**直徑**ト呼ブ. 又圓周ノ一部分ヲ**弧**トイフ.





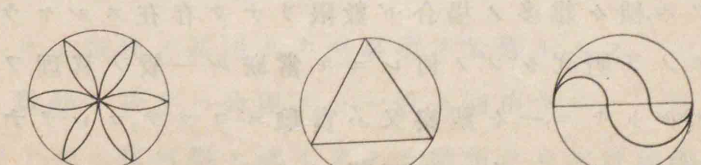
圓ヲ表スニハ,通常圓周上ニ任意ノ三點 A, B, C ヲトツテ,圓 ABC ト呼ブカ,又ハ中心ヲ O トスレバ,コノ圓ヲ圓 O ト呼ブ.

圓周ヲ畫クニハ通常兩脚器ヲ用ヒル.

問 1 直徑ト半徑トノ長サノ關係ヲ調ベヨ.

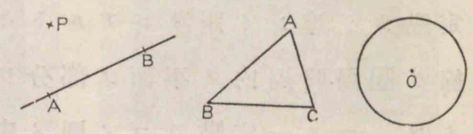
問 2 圓狀ノ紙片ヲ折ツテソノ中心ヲ求メヨ.

問 3 次ノ圖ヲ畫ケ.



8. 圖形

定義 點,線,面,立體ノ一ツ又ハコレ等ノ集リヲ圖形トイフ. 特ニ一ツノ平面上ニアル圖形ヲ**平面圖形**トイフ.

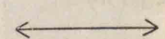


例ヘバ右ノ圖ニ示スヤウナ點ト線,三角形,圓等ハ何レモ平面圖形デアル.

平面幾何學デハ平面圖形ヲ研究スル.

9. 公理,定理

問 1 右圖ヲ觀察シテ何レノ線分ガ長イカヲ答ヘヨ.



問 2 一邊ノ長サガ 5 cm ノ正方形ノ對角線ハ何糎アルカ測レ.

如何ナル研究ニ於イテモ,觀察又ハ實驗ノミニヨッテ,物事ヲ精確ニ判斷スルコトハ困難デアル. 特ニ複雜シタ事項或ハ圖形ノヤウニ,種々雜多ノ場合ガ數限リナク存在スルヤウナモノヲ研究シ,ソノ何レニモ當嵌ル一般ノ眞理ヲ求メルトキニ,一々觀察又ハ實驗ニヨッテ,コレヲナシ遂ゲルコトハ全ク不可能デアル.

コノヤウナトキニハ嚴密ナ推理ニヨッテノミ,一般ノ眞理ヲ判明セシメルコトガ出來ル. 茲ニ推理ノ必要ガアル. 然ラバ推理ノミデ物事ガ完全ニ判明スルカトイフニソウモユカナイ.

一般ニ一ツノ事柄ニ就イテ順次ニ之ヲ問ヒツメテユケバ,遂ニハ説明ノ出來ナイ所ニ到達スル. 例ヲ擧ゲレバ

問 物體ハドウシテ落チルカ.

答 地球ガ物體ヲ引クカラ.

問 地球ハドウシテ物體ヲ引クカ.

答 地球ニハ引力ガアルカラ.

問 地球ニハドウシテ引力ガアルカ.

答 ……………………

コノ例ノヤウニ,一般ニ如何ニシテモコレ以上ニソノ理由ガ説明出來ナイ事柄デ,何人モ理由ナシニ眞デアルト承認スルモノヲ基礎トシ,コレカラ他ノスベテノ複雜ナ事柄ヲ,嚴密ナ推理ニヨッテ,導キ出スヨリ仕方ガナイ.

コノ推理ノ基礎トナル事項ヲ**公理**トイフ.

數學ニ於ケル公理ニハ,一般ニ適用サレル一般公理ト,特ニ幾何學ニ就イテノミ適用サレル幾何學公

理トガアル. 例ヘバ

I. 同ジ量ニ相等シイニツノ量ハ又互ニ相等シイ.

II. 相等シイ量ニ相等シイ量ヲ加ヘタ(又ハ減ジタ)モノハ,又互ニ相等シイ.

III. 甲量ニ乙量ヲ加ヘタ(又ハ乘ジタ)モノハ,乙量ニ甲量ヲ加ヘタ(又ハ乘ジタ)モノニ等シイ.

等ハ一般公理デアッテ,

I. 圖形ハ動カスコトニヨッテ,ソノ位置ヲ變ヘルコトガ出來ル.

II. 一點ヲ通ッテ常ニ直線ガ引ケル.

III. 平面ハソノ上ニアル一ツノ直線ニヨッテ,ニツノ部分ニ分タレル.

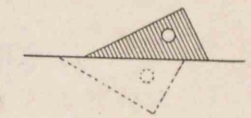
等ハ何レモ幾何學公理デアル.

公理カラ推理ニヨッテ,ソノ眞デアルコトガ判定サレル事項ヲ**定理**トイヒ,ソノ推理ヲ明ラカニ示スコトヲ,ソノ定理ノ**證明**トイフ.

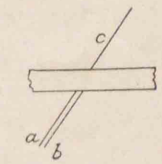
既ニ定理トシテ得ラレタ事項ハ,公理ト共ニ推理ノ基礎トシテ,他ノ定理ヲ導クタメニ用ヒルコトガ出來ル. 公理又ハ定理カラ直ニソノ眞デアルコトガ判定サレル事項ヲ**系**トイフ.

例題

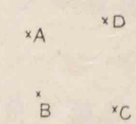
1. 定規ノ椽ニ沿フテ紙上ニ一ツノ直線ヲ引キ,ソノ椽ガ眞直デアルカヲ確メヨ.



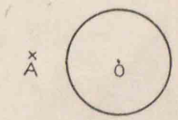
2. 右圖ノ a, b ノウチ何レガ他ノ直線 c ノ延長カ.



3. 圖ノ點 A, B, C, D ニヨッテ幾ツノ直線ガ決定サレルカ.



4. 右圖デ點 A カラ 1cm ノ距離ニアル點ヲ圓周上ニ求メヨ.



5. 5cm ノ距離ニアル二點 A, B ヲトッテ, A カラ 3cm, B カラ 4cm ノ距離ニアル點 P ヲ求メヨ.

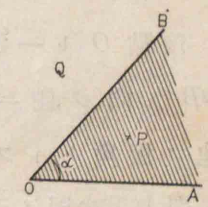
第二編

直線形

第一章 角

10. 角

定義 共通ノ一端 O ヲ有スル二ツノ半直線 OA, OB ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ケル. ソノ一ツヲ**角**トイヒ,二ツノ半直線 OA, OB ヲコノ角ノ**邊**,點 O ヲコノ**角ノ頂點**トイフ.



例ヘバ圖デ OA, OB ハ二ツノ角ヲ作ル. 陰影ヲ施シタ部分ハソノ一ツヲ表ス. 角ヲ表スニハ $\angle AOB$, 或ハ $\angle O$ ト書キ,又角全體ヲ一ツノ文字 α* デ表ス.

角ノ部分ヲ**角ノ内部**,他ノ部分ヲ**角ノ外部**トイフ.

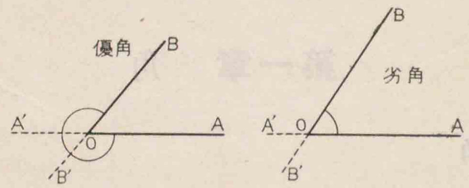
例ヘバ,圖デ點 P ノアル平面ノ部分ハコノ角ノ内部デ,點 Q ノアル部分ハ外部デアル.

半直線 OA, OB ハ二ツノ角ヲ作リ,ソノ二角ハ頂點 O 及ビ二邊 OA, OB ヲ共有スル. コノヤウナ二

* α ハギリシヤ文字デあるふぁト讀ム.

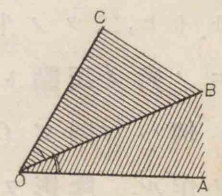
角ノ各々ヲ他ノ**共軛角**トイフ.

二邊 OA, OB ノ延長 OA', OB' ガ角ノ内部ニアルトキ,ソノ角ヲ**優角**,外部ニアルトキ**劣角**トイフ.

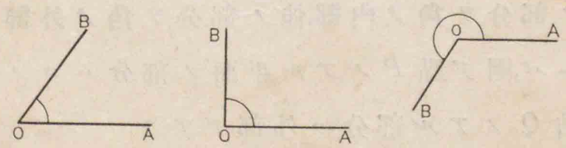


[注意] 單ニ角 AOB トイフトキハ劣角ヲ指スモノトスル. 特ニ優角ヲ必要トスルトキハ,優角 AOB トイフ.

頂點 O ト一邊 OB トヲ共有シ, OB ノ同ジ側ニナイ二角ヲ互ニ他ノ**接角**トイフ.



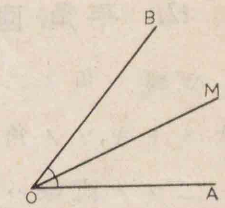
問 1 次圖ノ三ツノ角ノ中デ,何レガ優角カ劣角カヲイヘ.



問 2 紙ノ上ニ一ツノ角 AOB ヲ畫イテ,ソノ紙ヲ折リ返シ,コレヲ相等シイ二ツノ接角ニ分ケヨ.

定義 一ツノ角ヲ相等シイ二ツノ接角ニ分ツ直

線ヲ,ソノ角ノ**二等分線**トイフ.

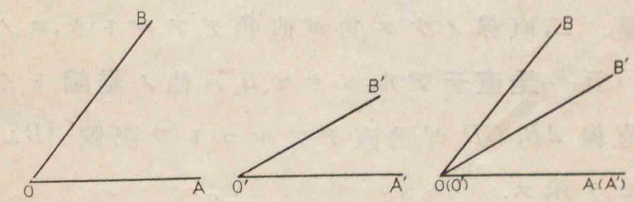


右ノ圖デ $\angle AOM = \angle BOM$ デアレバ, OM ハ $\angle AOB$ ノ二等分線デアル.

一ツノ角ノ二等分線ハ唯一ツデアル.

11. 角ノ大小

二ツノ角 AOB, $A'O'B'$ ノ大小ヲ比較スルニハ,一ツノ角,例ヘバ $\angle A'O'B'$ ヲトツテ,ソノ頂點 O' ヲ O ニ, $O'A'$ ヲ OA ニ一致サセ, B ノアル側ニ B' ガアルヤウ



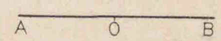
ニ,重ネ合ストキ,若シ $O'B'$ ガ $\angle AOB$ ノ内部ニアレバ, $\angle AOB$ ハ $\angle A'O'B'$ ヨリ大キイトイヒ, $O'B'$ ガ $\angle AOB$ ノ外部ニアレバ, $\angle AOB$ ハ $\angle A'O'B'$ ヨリ小サイトイフ.

特ニ $O'B'$ ガ OB ノ上ニ重ナル場合ニハ, $\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トハ相等シイトイフ.

問 第10節問1ニ於ケル三ツノ角ノ大小ヲ調ベヨ.

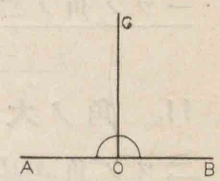
12. 平角, 直角, 鋭角, 鈍角

定義 角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアッテ,一直線ヲナストキ,ソノ角ヲ**平角**トイフ.



二ツノ直線ハ全ク重ネ合スコトガ出來ルカラ,

平角ハスベテ相等シイ.



定義 平角ノ半分ヲ**直角**トイフ.

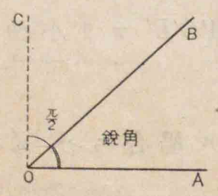
直角ハスベテ相等シイ.

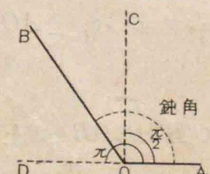
[註] 平角ヲ表スノニ記號 π* ヲ用ヒル. 從ツテ直角ハ $\frac{\pi}{2}$ デ表サレル.

定義 二直線ノナス角ガ直角デアルトキ,コノ二直線ハ互ニ**垂直デアル**トイヒ,互ニ他ノ**垂線**トイフ.

二直線 AB, CD ガ垂直デアルコトヲ記號 $AB\perp CD$ ヲ用ヒテ示ス.

定義 直角ヨリ小サイ角ヲ**鋭角**,直角ヨリ大キク,平角ヨリ小サイ角ヲ**鈍角**トイフ.





* π ハギリシヤ文字デぱいト讀ム.

問 1 こんぱすノ兩脚ニヨツテ鋭角,直角,鈍角ヲ作レ.

問 2 折紙ニヨツテ同ジコトヲナセ.

13. 角ノ單位

直角ハ大キサガ一定デアルカラ,幾何學デハ通常コレヲ角ノ單位トシテ用ヒル. 實用上デハ直角ノ九十分ノ一ヲ基本單位ニトリ,コレヲ**度**トイフ.

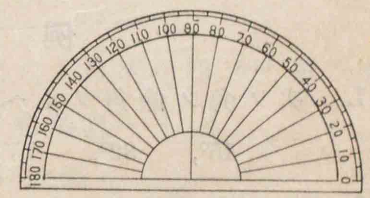
補助單位トシテ**分,秒**ガアリ,ソレ等ノ間ノ關係ハ

$$1\text{直角}=90\text{度}\left(=\frac{\pi}{2}\right)$$

度 分 秒

$1^\circ=60'$

$1'=60''$

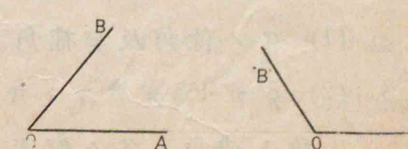


例ヘバ

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=90^\circ\times\frac{1}{2}=45^\circ.$$

角ヲ測リ又アル大キサノ角ヲ畫クニハ分度器ヲ用ヒル.

問 1 右圖ノ角ハ各々何度カ.

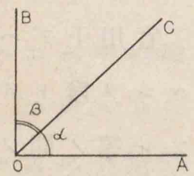


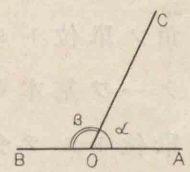
問 2 次ノ大キサノ角ヲ作レ.

(1) 35°. (2) 87°. (3) 135°.

14. 餘角, 補角

定義　二ツノ角 α, β* ノ和ガ直角ニ等シイトキ, 各々ヲ他ノ**餘角**トイヒ,平角ニ等シイトキハ,各々ヲ他ノ**補角**トイフ.





例　題

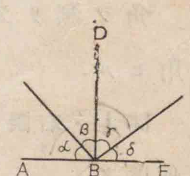
1. 次ノ角ノ餘角ヲイヘ.

   $15°$,　$32°$,　$75°30'$,　$83°15'42''$.

2. 次ノ角ノ補角ヲイヘ.

   $50°$,　$135°$,　$150°\ 20'\ 35''$,　$\frac{8}{9}\pi$.

3. 右圖デ BD ガ直線 ABF ニ垂直デアルトキ,

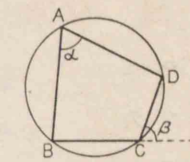


   (1) α ノ餘角及ビ補角ヲ求ム.

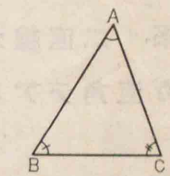
   (2) δ* ガ $45°$ デアルトキ δ ノ餘角ト補角ハ各々何度カ.

* β, γ, δ ハスベテギリシヤ文字デ夫々べーたー, がんま, でるたト讀ム.

4. 右ノ圖デ二ツノ角 α ト β トヲ測ツテソノ大キサヲ比較セヨ.



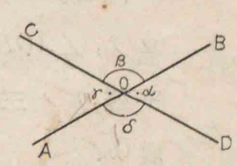
5. 三角形ノ三ツノ角 A, B, C ノ大キサヲ測ツテソノ和ヲ求メヨ.



15. 對頂角

定義　二ツノ直線ガ交ツテ出來ル四ツノ角ノ中デ相隣ラナイ二ツノ角ヲ**對頂角**トイフ.

右ノ圖デ,二直線 AB, CD ガ點 O デ交ツテ作ル四ツノ角ノ中デ, α ト γ, β ト δ トガ各々對頂角デアル.



定理 1.　對頂角ハ相等シイ.

[假設]　二直線 AB, CD ガ點 O デ交ツテ作ル四ツノ角ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トシ, α ト γ, β ト δ トヲ各々對頂角トスル.

[終結]　　$\alpha=\gamma$,　　$\beta=\delta$.

[證明]　AOB, COD ハ何レモ直線デアルカラ

$$\alpha+\beta=\pi, \qquad \beta+\gamma=\pi.$$

故ニ $\alpha+\beta=\beta+\gamma.$

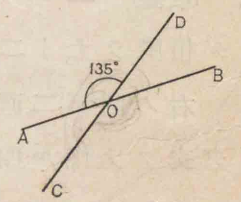
從ツテ $\alpha=\gamma.$

同様ニ $\beta=\delta.$

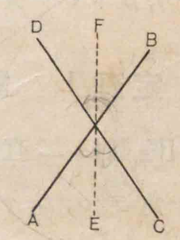
系. **二直線ガ交ツテ作ル四ツノ角ノ中デ,ソノ一ツガ直角デアレバ,殘リノ三ツノ角モ亦直角デアル.**

例題

1. 次ノ用語ノ定義ヲ述ベヨ.
平角, 對頂角, 鋭角, 鈍角, 垂線, 補角, 餘角, 二等分線.



2. 二直線 AB, CD ガ點 O デ交ツテ, $\angle AOD$ ガ $135°$ デアルトキ殘リノ三ツノ角ハ各々何度カ.

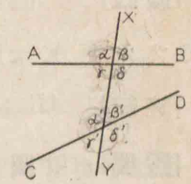


3. 對頂角デアル二角ノ二等分線ハ一直線ヲナスコトヲ證セヨ.

第二章 平行線

16. 錯角,同位角

定義 一直線 XY ガ二直線 AB, CD ト交ルトキ,右圖ノヤウニ八ツノ角ガ出來ル. コレ等ノ角ヲソノ位置ノ關係ニヨツテ,次ノヤウニ呼ブ.



右圖デ

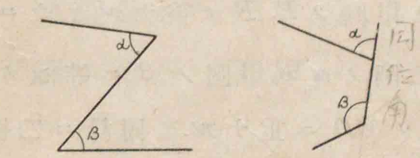
(1) $\alpha, \beta, \gamma', \delta'$ ノ各々ヲ**外角**,

(2) $\gamma, \delta, \alpha', \beta'$ ノ各々ヲ**内角**,

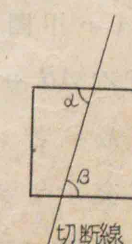
(3) γ ト β', δ ト α' ノ各組ヲ**錯角**,

(4) α ト α', β ト β', γ ト γ', δ ト δ' ノ各組ヲ**同位角**.

問 1 次ノ各組ノ角ニ名ヲツケヨ.



問 2 折紙ヲ圖ノヤウニ截ツタトキ出來ル二ツノ角 α, β ヲ重ネテソノ大キサヲ比較セヨ.



17. 平行線

ノ直線ガ他ノ二直線ト交ツテ作ル一組ノ
同位角ガ相等シケレバ コノ二直線ハ平行ナリ

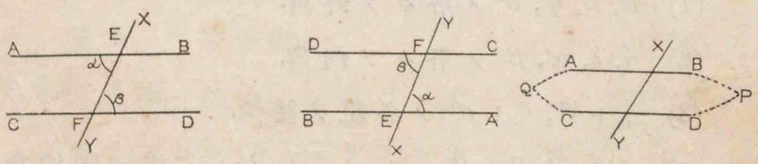
定理 2.　一直線ガ二ツノ直線ト交ツテ作ル一組ノ錯角ガ相等シイトキハ,コノ二ツノ直線ハ相交ラナイ.

[假設]　一直線 XY ガ二直線 AB, CD ト夫々 E, F デ交ツテ作ル一組ノ錯角 α, β ガ相等シイトスル.

[終結]　AB ト CD トハ交ラナイ.

[證明]　甲圖ヲ回轉シテ乙圖ノヤウニスル.

甲圖　　乙圖　　丙圖



乙圖ノ線分 FE ヲ甲圖ノ線分 EF ニ重ネ,乙圖ノ F, E ガ夫々甲圖ノ E, F ニ重ナルヤウニスレバ,假設ニヨツテ,乙圖ノ α ハ甲圖ノ β ニ等シイカラ,乙圖ノ BA ハ甲圖ノ CD ニ重ナル.　同樣ニ乙圖ノ DC ハ甲圖ノ AB ニ重ナル.

故ニ若シ甲圖ノ AB, CD ガ XY ノ一方ノ側ノ點 P デ交ルナラバ,乙圖ヲ甲圖ノ上ニ重ネタトキニ點 P ハ丙圖デ示サレタヤウナ點 Q トナル.　從ツテ二點

新しい定義
同ジ方向ニ引ケル二直線ハ平行デアル.

P, Q ヲ通ル二ツノ直線 AB, CD ガ存在スル.　コレハ不合理デアルカラ(直線ノ性質),AB ト CD トハ交ラナイ.

定義　同一ノ平面上ニアツテ,相交ラナイ二直線ハ互ニ**平行デアル**トイヒ,平行デアル直線ヲ**平行線***トイフ.

[註]　コノ定義ヲ用フレバ定理 2 ハ次ノヤウニモ述ベラレル.

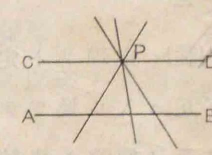
二直線ガ一直線ト交ツテ作ル一組ノ錯角ガ相等シイトキハ,ソノ二直線ハ平行デアル.

系 1.　一直線ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアル.

系 2.　一直線ガ他ノ二直線ト交ツテ作ル一組ノ同位角ガ相等シケレバ,コノ二直線ハ平行デアル.

平行線ニ對シテハ次ノ公理ガアル.

[公理]　一直線外ノ一點ヲ通ツテコノ直線ニ平行ナ直線ハイツモ唯一ツ存在スル.



系.　二ツノ平行ナ直線ノ一ツニ交ル直線ハ他ノ直線ニモ交ル.

---

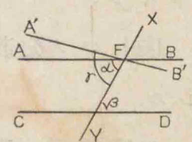
* 二直線 AB, CD ガ平行デアルコトヲ示スノニ記號 $AB /\!/ CD$ ヲ用ヒル.

18. 平行線（續キ）

定理 3.　平行ナ二直線ニ一直線ガ交ルトキ作ル一組ノ錯角ハ相等シイ.

[假設] 平行ナ二直線ヲ AB, CD, コレ等ト夫々 E, F デ交ル直線ヲ XY トシ,一組ノ錯角ヲ α, β トスル.

[終結]　$\alpha=\beta$.



[證明] 假ニ $\alpha \neq \beta$ トシテ,點 F ヲ通ツテ錯角 γ ト β トガ相等シイ直線 $A'B'$ ヲ作レバ,前定理ニヨツテ

$$A'B' \parallel CD.$$

又假設ニヨツテ　$AB \parallel CD$.

故ニ CD 外ノ一點 F ヲ通ツテ,コレニ平行ナ二ツノ直線 AB, $A'B'$ ガ存在スル.　コレハ公理ニ反スル.

故ニ　$\alpha=\beta$.

[註] 定理2ト定理3トヲ比較スレバ,ソノ假設ト終結トガ互ニ入レ換ツテヰルコトガワカル.　コノヤウニ二ツノ定理ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタモノヲ互ニ**逆定理**デアルトイフ.

[注意] 或定理ガ眞デアツテモ,必ズシモソノ逆ガ眞デアルトハカギラナイ.

系.　一直線ガ平行ナ二直線ニ交ルトキハ,

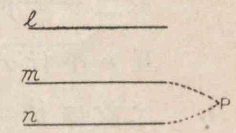
(1)　同位角ハ相等シイ.

(2)　同ジ側ニアル内角ハ互ニ補角デアル.

定理 4.　同一ノ直線ニ平行ナ二直線ハ互ニ平行デアル.

[假設]　$l \parallel m$,　$l \parallel n$.

[終結]　$m \parallel n$.



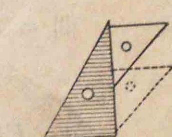
[證明] 假ニ m ト n トガ平行デナイトスレバ,m ト n トハ一點 P デ交ル.　然ルニ假設ニヨレバ,m ト n トハ共ニ l ニ平行デアルカラ,一點 P ヲ通ツテ一直線 l ニ平行デアル二ツノ直線 m, n ガ存在スルコトニナツテ公理ニ反スル.　故ニ m, n ハ平行デアル.

[註] コノ證明ノヤウニ,終結ガ眞デナイト假定スレバ,ソノ結果ガ既知ノ公理,定理,又ハ假設ニ反シ不合理デアルカラ,終結ハ眞デアルト斷定スル論法ヲ**歸謬法**トイフ.

問　今マデニ歸謬法ヲ用ヒテ證明シタ定理ヲ指摘セヨ.

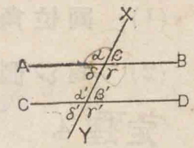
演習問題 I.

1.　二枚ノ三角定規ヲ用ヒテ,平行線ヲ引ケ.



2.　次頁ノ圖デ,$AB \parallel CD$,$\alpha=135°$ デ

キ他ノ七ツノ角ノ大キサハ幾ラカ.



3. 一直線ガ他ノ二直線ト交ツテ作ル内角ノ中デ,初メノ直線ニ對シテ同ジ側ニアル二ツノ角ガ互ニ補角デアレバ,後ノ二直線ハ互ニ平行デアル.

4. 二直線ガ一直線ニ交ルトキ,

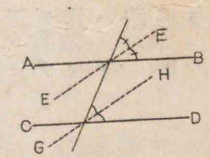
(1) 一組ノ同位角ガ相等シケレバ,他ノ三組ノ同位角モ亦相等シク,又同ジ側ノ内角ハ互ニ補角デアル.

(2) 一組ノ錯角ガ相等シケレバ,他ノ一組ノ錯角モ相等シク,又四組ノ同位角モ夫々相等シイ.

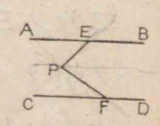
5. 同一直線ノ垂線ト斜線トハ相交ハル.

[註] 垂線デナイ直線ヲ斜線トイフ.

6. 一直線ガ二ツノ平行線ト交ツテ作ル一組ノ錯角又ハ同位角ノ二等分線ハ,互ニ平行デアル.

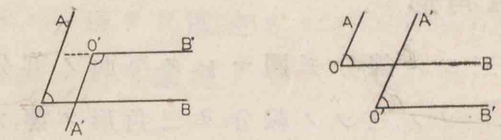


7. 圖デ $AB \parallel CD$, 點 P ヲ AB, CD ノ間ニアル任意ノ一點トスレバ



$$\angle EPF = \angle AEP + \angle CFP.$$

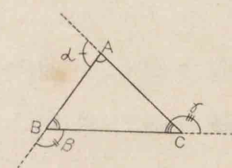
8. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ平行デアレバ,二ツノ角ハ相等シイカ,又ハ互ニ補角デアル.



第三章　三角形

19. 三角形

定義　三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**三角形**トイフ. ソノ三ツノ線分ヲ三角形ノ**邊**,ソノ線分ノ端ノ點ヲ三角形ノ**頂點**,二邊ノ夾ム角ヲ**內角**,又ハ單ニ三角形ノ**角**,一邊ト他ノ邊ノ延長トガ夾ム角ヲ**外角**トイフ.



例ヘバ圖デ三ツノ線分 AB, BC, CA ハ一ツノ三角形ヲ作リ, AB, BC, CA ハソノ邊,點 A, B, C ハソノ頂點デアル. 角 A, 角 B, 角 C ハ夫々內角デ, α, β, γ ハ外角デアル.

頂點ガ A, B, C デアル三角形ノコトヲ,記號 $\triangle ABC$ デ表ス.

角ノ內部ニアル邊ヲコノ角ノ**對邊**,又ハコノ**角ニ對スル邊**トイヒ,角ヲコノ邊ノ**對角**,又ハ**邊ニ對スル角**トイフ.

例ヘバ上圖デ, $\angle A$ ト邊 BC トハ相對スル角ト邊デアル.

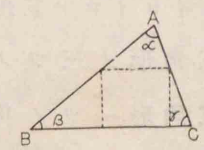
一邊ニ對シテキナイ二ツノ內角ヲ,コノ邊ニ**隣レル角**トイフ.

例ヘバ邊 BC ニ隣ル角ハ $\angle B$ 及ビ $\angle C$ デアル.

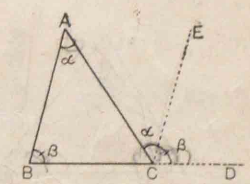
三角形ノ一邊ヲ又**底邊**トイフコトモアリ,コノトキコレニ隣ル角ヲ**底角**トイフ.

20. 三角形ノ內角ノ和

問　折紙デ圖ノヤウナ三角形ヲ作リ,點線ヲ折目トシテ折リ返シテ,三ツノ內角 α, β, γ ノ和ノ大キサヲ見ヨ.



定理 5.　三角形ノ三ツノ內角ノ和ハ二直角ニ等シイ.



[證明]　BC ヲ延長シテ外角 ACD ヲ作リ, C ヲ通ツテ BA ニ平行ニ直線 CE ヲ引ケバ,

$$\angle A=\angle ACE \quad (錯角).$$

$$\angle B=\angle ECD \quad (同位角).$$

故ニ
$$\angle A+\angle B+\angle C=\angle C+\angle ACE+\angle ECD$$
$$=\pi.$$

故ニ三ツノ內角ノ和ハ二直角ニ等シイ.

系 1. 三角形ノ外角ハソノ二ツノ內對角ノ和ニ等シイ.

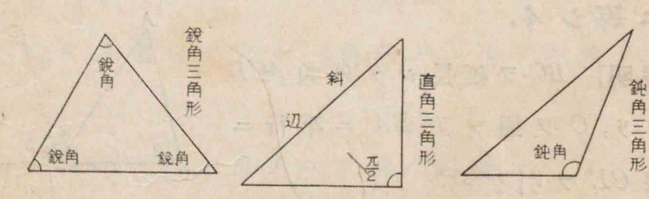
〔註〕 三角形ノ外角ニ隣ラナイ內角ヲ,コノ外角ノ**內對角**トイフ.

系 2. 三角形ノ一ツノ角ガ直角デアレバ,他ノ二角ハ共ニ銳角デ,互ニ餘角デアル.

21. 三角形ノ種類

問 內角ノ異ナルイロイロノ三角形ヲ畫ケ.

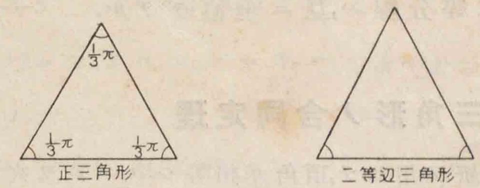
〔定義〕 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ,何レモ銳角デアルモノヲ**銳角三角形**,一ツノ角ガ直角デアルモノヲ**直角三角形**,一ツノ角ガ鈍角デアルモノヲ**鈍角三角形**トイフ.



〔註〕 直角三角形デハ特ニ直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**トイフ.

問 三角形ノ三ツノ內角ノ大キサガ相等シイコトガアルカ. 若シアレバソノ大キサハ幾ラカ.

三ツノ角ガ相等シイ三角形ヲ**正三角形**トイヒ,二ツノ角ガ相等シイモノヲ**二等邊三角形**トイフ.



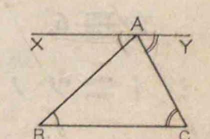
例題

1. $\triangle ABC$ デ, $\angle C$ ハ $45°$, 外角 B ガ $100°$ デアルトキ, $\angle A$, $\angle B$ ノ大キサヲ求メヨ.

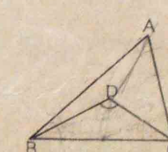
2. 等シクナイ角ガ $30°$ デアル二等邊三角形ノ相等シイ角ハ何度カ.

3. 二ツノ三角形デ,二角ガ夫々相等シイトキハ,殘リノ角モ亦相等シイ.

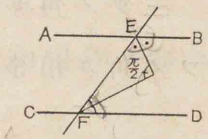
4. 圖ノヤウナ A ヲ通リ BC ニ平行ナ直線 XY ヲ用ヒテ,三角形ノ內角ノ和ガ二直角ニ等シイコトヲ證明セヨ.



5. 三角形 ABC 內ノ一點 D ト B, C トヲ結ブトキハ $\angle BDC$ ハ, $\angle A$ ヨリモ大キイ.



6. 一直線ガ二ツノ平行線ト交ツテ出來ル同ジ側ノ二ツノ内角ノ二等分線ハ,互ニ垂直デアル.



二学期

22. 三角形ノ合同定理

問 折紙ヲ用ヒテ,頂角ガ相等シク,ソレヲ夾ム二邊モ亦夫々相等シイ二ツノ三角形ヲ作リ,コノ二ツノ三角形ガ全ク重ナリ合フカ否カヲ見ヨ.

〔定義〕 全ク重ネ合ハスコトノ出來ル二ツノ圖形ヲ,互ニ**合同デアル**トイフ.

コレヲ表スノニ記號≡ヲ用ヒル. 例ヘバ三角形 ABC ト三角形 $A'B'C'$ トガ合同デアルコトヲ

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

デ示ス.

定理 6. 二邊トソノ夾ム角トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

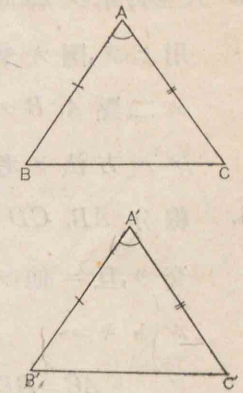
〔假設〕 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ デ

$AB = A'B'$,

$AC = A'C'$,

$\angle A = \angle A'$.

〔終結〕 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



〔證明〕 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'B'C'$ ノ上ニ置キ, $\angle A$ ガ $\angle A'$ ニ,邊 AB ガ邊 $A'B'$ ニ重ナルヤウニスルトキハ,假設ニヨッテ

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$

デアルカラ, B ハ B' ニ, C ハ C' ニ重ナル. 從ッテ邊 BC ハ邊 $B'C'$ ニ全ク重ナル.

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

〔注意〕 **合同デアル二ツノ三角形デハ,**

(1) 等シイ角ニ對スル邊ハ相等シク,

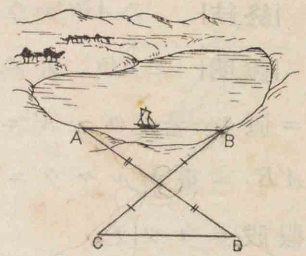
(2) 等シイ邊ニ對スル角ハ相等シイ.

例題

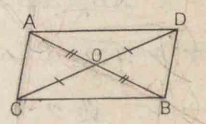
1. 線分 AB ヲ垂直ニ二等分スル直線上ニ任意ノ一點 P ヲトルトキハ, $PA = PB$ デアル.

2. $\triangle PQR$ デ, $PR = 4cm$, $QR = 3cm$ トスル. 今 PR ノ延長上ニ點 P' ヲ, QR ノ延長上ニ點 Q' ヲトッテ, $RP' = PR$, $RQ' = QR$ デアルヤウニスルトキ, $P'Q' = 5cm$ デアレバ, PQ ノ長サハ何糎デアルカ.

3. 三角形ノ合同ノ定理ヲ用ヒテ,圖ノヤウナ湖畔ノ二點 A, B ノ距離ヲ求メル方法ヲ考案セヨ.



4. 線分 AB, CD ガ點 O デ交リ,互ニ他ヲ二等分スルトキハ



$$AC=BD,\quad AD=BC.$$

且 $AC \parallel BD,\quad AD \parallel BC.$

又モシ $AB \perp CD$ ナラバ, $DB=AD$.

5. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ノ中點ヲ M トシ, AM ヲ結ビコレヲ延長シテ $AM=MN$ デアル N ヲトレバ,

$$\triangle ABM \equiv \triangle NCM,\quad \triangle ACM \equiv \triangle NBM.$$

[註] AM ヲ三角形 ABC ノ**中線**トイフ. 線分 BC ヲ一點 M デ二ツノ部分ニ分ツトキ, $BM=MC$ デアレバ, M ヲ線分 BC ノ**中點**トイフ.

23. 三角形ノ合同定理(續キ)

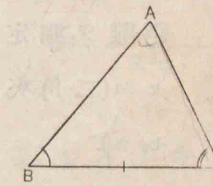
問 折紙ヲ用ヒテ,一邊及ビソノ兩端ノ二角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ヲ作リコノ二ツノ三角形ガ合同デアルカ否カヲ見ヨ.

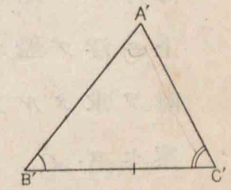
定理 7. 一邊トソノ兩端ノ二角トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

[假設] $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ デ

$\angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ BC=B'C'.$

[終結] $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$





[證明] $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'B'C'$ ニ重ネ, BC ガ $B'C'$ ニ重ナリ,頂點 A ト A' トガ同ジ側ニアルヤウニスレバ,假設ニヨッテ

$$\angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C'$$

デアルカラ, BA ハ $B'A'$ ニ, CA ハ $C'A'$ ニ重ナル. 從ッテ頂點 A ハ頂點 A' ニ重ナル.

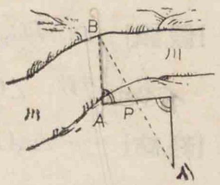
故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$

系 1. 二角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形デ,相等シイ角ニ對スル邊ガ等シイトキハ,コノ二ツノ三角形ハ合同デアル.

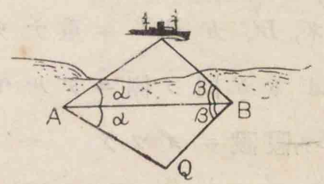
系 2. 二ツノ直角三角形デ,斜邊ト一鋭角トガ夫々相等シイトキハ,コノ二ツノ三角形ハ合同デアル.

例題

1. 川ノ兩岸ニアル二點 A, B ノ距離ヲ測定スル方法ヲ考案セヨ(二角夾邊ノ定理ヲ應用セヨ).



2. 海岸ノ一點 A カラ海上ニ浮ブ船マデノ距離ヲ求メル方法ヲ考案セヨ.



3. 一ツノ角ノ二等分線上ノ任意ノ點カラソノ角ノ二邊ニ引イタ二ツノ垂線ノ長サハ相等シイ.

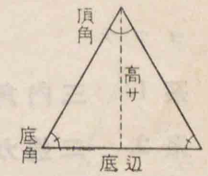
4. 二等邊三角形ノ相等シイ二角ノ各々ノ二等分線ノ各對邊マデノ長サハ相等シイ.

5. 二等邊三角形ノ相等シイ二角ニ夾マレル邊ノ兩端カラ對邊ニ至ル距離ハ相等シイ.

24. 二等邊三角形,正三角形

[定義] 二等邊三角形ノ相等シイ角ヲソノ**底角**,底角ニ夾マレル邊ヲ**底邊**,底邊ニ對スル角ヲ**頂角**,頂角ノ頂點カラ底邊ニ至ル垂線ノ長サヲ**高サ**トイフ.

[注意] 普通ノ三角形デハ任意ノ邊ヲ底邊ニトルコトガ出來ルガ,二等邊三角形ノ底邊ハ定マツテヰル.



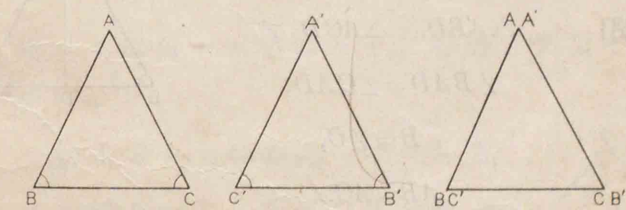
問 折紙デ二等邊三角形ヲ作リ頂角ヲ夾ム二邊ノ長サヲ比較セヨ.

定理 8. 三角形ノ兩底角ガ等シイトキハ,コレニ對スル二邊ハ相等シイ.

[假設] $\triangle ABC$ デ $\angle B=\angle C$.

[終結] $AB=AC$.

[證明] $\triangle ABC$ ヲ裏返ヘシタモノヲ $\triangle A'B'C'$ トスル.



$\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネ B' ガ C ニ $C'B'$ ガ BC ニ重ナリ, A' ガ A ト同ジ側ニアルヤウスルトキハ,

$$\angle C'=\angle B, \quad \angle B'=\angle C.$$

デアルカラ, $A'C'$ ハ AB ニ重ナリ, $A'B'$ ハ AC ニ重ナル. 從ツテ A ハ A' ニ重ナル.

故ニ $A'C'=AB.$

然ルニ $A'C'=AC$.

ヨツテ $AB=AC$.

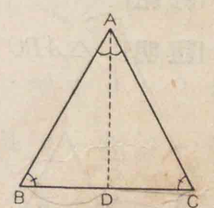
系 1. **三内角ノ等シイ三角形ハ三邊ガ相等シイ.**

系 2. **二邊ガ等シイ三角形ノ等シイ邊ニ對スル角ハ相等シイ.**

定理 9. **二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル.**

[假設] $\triangle ABC$ デ $\angle B=\angle C$, $\angle A$ ノ二等分線ヲ AD トスル.

[終結] $BD=CD$, $AD\perp BC$.



[證明] $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ デ

$\angle BAD=\angle CAD$,

$\angle B=\angle C$,

$AB=AC$.

故ニ $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$.

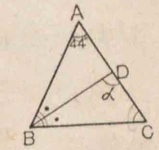
ヨツテ $BD=CD$, $\angle ADB=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$, $AD\perp BC$.

系 1. **二等邊三角形ノ底邊ノ中點ト頂點トヲ結ブ直線ハ底邊ニ垂直デ,且ツ頂角ヲ二等分スル.**

系 2. **二等邊三角形ノ頂點カラ底邊ニ下シタ垂線ハ頂角及ビ底邊ヲ二等分スル.**

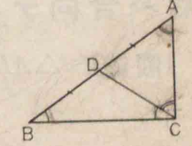
例題

1. 二等邊三角形 ABC デ頂角 A ガ $44°$ デアルトキ, $\angle B$ ノ二等分線 BD ガ AC トナス角 α ハ何度カ.



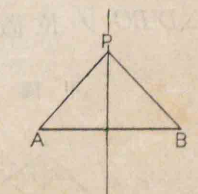
2. 二等邊三角形ノ二邊ノ中點カラ底邊ノ中點ニ引イタ線分ハ相等シイ.

3. 直角三角形ノ一鋭角ガ他ノ鋭角ノ 2 倍デアレバ,斜邊ハ他ノ二邊ノ中ノ一ツノ 2 倍トナルコトヲ證セヨ.

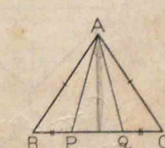


4. 底邊ト頂角トガ相等シイ二等邊三角形ハ合同デアル.

5. 二點 A, B カラ等距離ニアル一點 P ハ,線分 AB ノ垂直二等分線上ニアル.

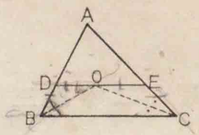


6. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ニ二點 P,Q ヲトリ, $BP=CQ$ トスレバ, $\angle PAQ$ ノ二等分線ハ線分 PQ ヲ垂直ニ二等分スル.



7. $\triangle ABC$ ノ $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ノ交點 O ヲ通ッ

テ, BC ニ平行ナ直線ヲ引キ, AB, AC ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ,



$$DE=BD+CE.$$

25.　三角形ノ合同定理（續キ）

定理 10.　**三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.**

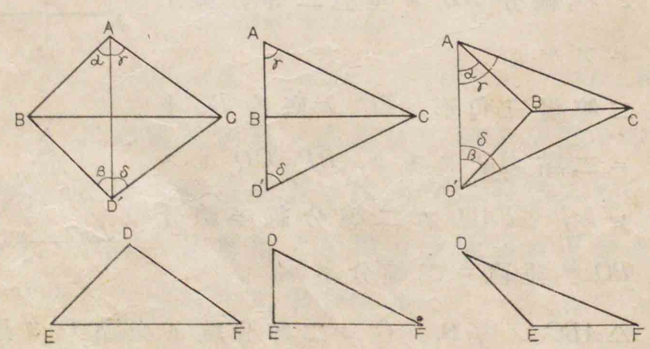
[假設]　$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トデ

$$AB=DE,\quad AC=DF,\quad BC=EF.$$

[終結]　　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF.$

[證明]　$\triangle DEF$ ヲ裏返シテ EF ヲ BC ニ重ネ,下圖ノ $\triangle D'BC$ ノ位置ニ置キ A ト D' トヲ結ベバ,假設ニ

甲圖　　乙圖　　丙圖



ヨツテ $\triangle BAD'$（甲圖及ビ丙圖）デ

$$BA=BD'.$$

故ニ　　$\alpha=\beta$　（定理 8 系 2).　(1)

又 $\triangle CAD'$（甲, 乙, 丙圖）デ

$$CA=CD'.$$

故ニ　　$\gamma=\delta$　（定理 8 系 2).　(2)

(1) ト (2) トカラ, 甲,乙,丙圖何レノ場合デモ

$$\angle BAC=\angle BD'C$$

故ニ　　$\triangle ABC\equiv\triangle D'BC$　（定理 6).

然ルニ $\triangle D'BC\equiv\triangle DEF$ デアルカラ,

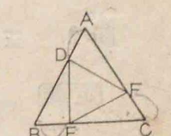
$$\triangle ABC\equiv\triangle DEF.$$

例　　題

1.　一邊ガ相等シイ二ツノ正三角形ハ合同デアル.

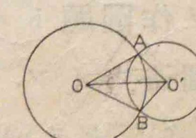
2.　底邊ト他ノ一邊トガ相等シイ二ツノ二等邊三角形ハ合同デアル.

3.　正三角形 ABC ノ各邊上ニ夫々點 D, E, F ヲトリ $AD=BE=CF$ トスレバ, 三角形 DEF ハ又正三角形デアル.

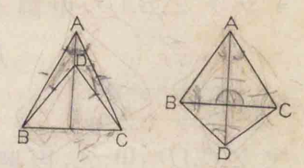


4.　二ツノ圓 O 及ビ O' ガ二點 A, B デ交ルトキハ

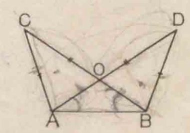
$$\angle AOO'=\angle BOO'.$$



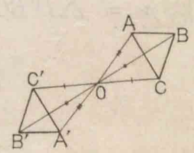
5. 二ツノ二等邊三角形 ABC, DBC ガ同ジ底邊 BC ヲモツトキ,直線 AD ハ BC ニ垂直デアル.



6. $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ ガ邊 AB ノ同ジ側ニアリ, $AC=BD$, $AD=BC$, 且ツ AD ト BC トノ交點ヲ O トスレバ, $\triangle OAC \equiv \triangle OBD$.



7. 三ツノ線分 AA', BB', CC' ガ同一點 O デ交リ, O ガ各線分ノ中點デアレバ, $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ合同デアル.



26. 作圖題

問 1 半徑 5 cm ノ圓ヲ書ケ.

問 2 三邊ガ夫々 3 cm, 4 cm, 5 cm デアル三角形ヲ作レ.

定義 "こんぱす"ト目盛ノナイ"定規"トデ,與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ作ル問題ヲ**作圖題**トイヒ,コレヲ實際ニ書ク方法ヲ**作圖法**トイフ.

實際上デハ作圖ノタメニ使用スル器具ハ任意デアル. 例ヘバ三角定規ヲ用ヒテ直角ヲ作リ,分度器ヲ用ヒテ角ヲ測リ又ハ作ル等デアル. コレハ上ニ述ベタ幾何學デイフ嚴格ノ意味ノ作圖デハナイ.

定規ハ直線ヲ引クタメニ用ヒラレ,こんぱすハ二點間ノ距離ヲ移シ又ハ圓ヲ書クタメニ用ヒル.

幾何學ノ作圖題デ初メカラ可能ノモノトシテ承認スル事柄ハ

(1) 與ヘラレタ二點ヲ通ル直線ヲ引クコト,又ハ延長スルコト.

(2) 與ヘラレタ二點間ノ距離ヲ測リ,コレヲ他ニ移スコト.

(3) 與ヘラレタ點ヲ中心トシテ,與ヘラレタ半徑デ圓ヲ書クコト.

作圖題 1. 與ヘラレタ角ヲ移スコト.

α ヲ與ヘラレタ角トシ,他ノ直線 AX 上ノ一點 A カラ一直線 AC ヲ引キ $\angle XAC=\alpha$ デアルヤウニスルコト.

[作圖] α ノ頂點 P ヲ中心トシ,任意ノ半徑デ圓ヲ

畫キ, αノ二邊トQ, Rデ交ラセル. 次ニAヲ中心トシ,前ト同ジ半徑デ圓ヲ畫キAXトBデ交ラセ,更ニBヲ中心トシQRヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,圓Aトノ交點CヲAニ結ベバ$\angle BAC$ハ求メル角デアル.

[證明] $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ (定理10).

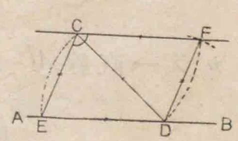
故ニ $\angle BAC = \angle QPR = \alpha$.

例題

1. 二邊ト夾角トヲ知ツテ三角形ヲ作レ.
2. 二角トソノ間ノ邊トヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

作圖題2. 與ヘラレタ點Cヲ通リ,與ヘラレタ直線ABニ平行ナ直線ヲ引クコト.

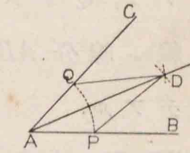
[作圖] AB上ノ一點Dヲ中心トシ,CDヲ半徑トスル圓弧ヲ畫キABトノ交點ヲEトスル. 次ニCヲ中心トシCDヲ半徑トスル圓ト,Dヲ中心トシCEヲ半徑トスル圓トヲ畫キ,コノ二圓ノ交點ノ中デ,ABニ對シテCト同ジ側ニアル點FヲCニ結ベバ,コレガ求メルABニ平行ナ直線デアル.



[注意] 二枚ノ三角定規ヲ用フレバ平行線ハ容易ニ作圖スルコトガ出來ル. (演習問題Iノ問題1ヲ見ヨ.)

作圖題3. 與ヘラレタ角ヲ二等分スルコト.

[作圖] 與ヘラレタ角ヲ$\angle BAC$トスル. Aヲ中心トシ任意ノ半徑デ圓ヲ畫キ, AB, ACト交ル點ヲ夫々P, Qトスル. 次ニP及ビQヲ中心トシ任意ノ半徑ノ圓ヲ畫キ,ソレラノ交點DトAトヲ結ベバ, ADハ$\angle BAC$ノ二等分線デアル.



[證明] P, D; Q, Dヲ結ベバ, $\triangle PAD$ト$\triangle QAD$トデ,

$AP = AQ$, $PD = QD$,

ADハ共通.

故ニ $\triangle PAD \equiv \triangle QAD$ (定理10).

從ツテ $\angle QAD = \angle PAD$.

故ニ ADハ$\angle BAC$ヲ二等分スル.

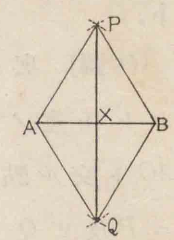
例題

1. 與ヘラレタ角ヲ四等分及ビ八等分セヨ.
2. 與ヘラレタ平角ヲ二等分セヨ.

27. 作圖題(續キ)

作圖題4. 與ヘラレタ線分ヲ二等分スルコト.

[作圖] 與ヘラレタ線分ヲ AB トシ, A 及ビ B ヲ中心トシテ,線分 AB ノ半分ヨリ長イ半徑デ圓弧ヲ書キ,ソレラノ二ツノ交點ヲ P, Q トスル. 二點 P, Q ヲ結ブ直線ト線分 AB トノ交點 X ガ求メル點デアル.



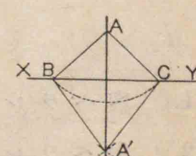
[證明] A, P; B, P; A, Q; B, Q ヲ結ベバ

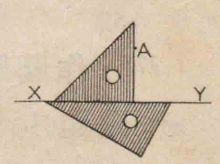
$AP=BP$ (圓ノ半徑), $AQ=BQ$ (圓ノ半徑).

故ニ三角形 PAB 及ビ QAB ハ共ニ二等邊三角形デアル. 從ッテ44頁問題5ニヨッテ PQ ハ線分 AB ヲ垂直ニ二等分スル.

作圖題5. 與ヘラレタ直線 XY 外ノ一點 A カラソノ直線ニ垂線ヲ作ルコト.

[作圖] 點 A ヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓弧ヲ書キ,直線 XY ト B, C デ交ラセル. 次ニ B, C ヲ中心トシテ同ジ半徑デ圓弧ヲ書キ,ソノ交點 A' ヲ求メル. コノトキ AA' ガ求メル直線デアル.

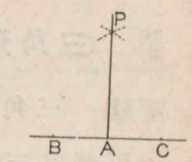




作圖題4ノ證明ニナラッテ證明セヨ.

[注意] 實用上デハ三角定規ヲ用ヒテ作圖スル.

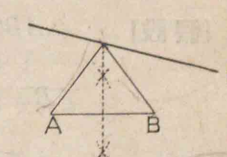
作圖題6. 與ヘラレタ直線上ノ一點デ,コノ直線ニ垂線ヲ作レ.



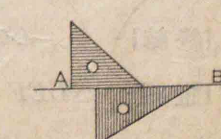
(圖ヲ見テ作圖法ヲ考ヘヨ).

例題

1. 長サ 6cm ノ線分ヲ作圖題4ノ方法デ二等分シ,ソノ各々ヲ物差(モノサシ)デ測ッテ見ヨ.
2. 與ヘラレタ線分ヲ底トシ,ソノ線分ノ二倍ヲ邊トスル二等邊三角形ヲ作レ.
3. 與ヘラレタ線分ヲ直徑トスル圓ヲ作レ.
4. 二等邊三角形ノ頂點カラ底邊ヘ垂線ヲ引ケ.
5. $\triangle ABC$ ノ各頂點カラソノ對邊ヘ垂線ヲ引ケ.
6. 圓ノ中心カラ與ヘラレタ弦ヘ垂線ヲ引ケ.



7. 二點 A, B ト一直線 l トガアルトキ, l 上ノ點デ, A, B カラ相等シイ距離ニアル點ヲ求メヨ.

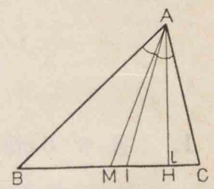


8. 線分 AB ノ兩端デ垂線ヲ作レ.

[注意] 實用上デハ三角定規ヲ用ヒテ作圖スル.

28. 三角形ノ合同(續キ)

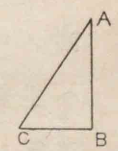
定義 三角形ノ一ツノ頂點トソノ對邊ノ中點トノ距離ヲ三角形ノ**中線ノ長サ**トイフ. 頂點カラ對邊ニ下シタ垂線ヲ三角形ノ**垂線**トイヒ,頂點ト垂線ノ足トノ距離ヲ**垂線ノ長サ**トイフ.



三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ノ三角形内ニアル部分ノ長サヲ**角ノ二等分線ノ長サ**トイフ.

圖デ AM ハ中線, AI ハ二等分線, AH ハ垂線デアル.

定理 11. 一邊ト斜邊トガ相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル.

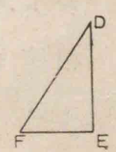


[假設] $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ デ

$\angle B=\angle E=\frac{\pi}{2}$,

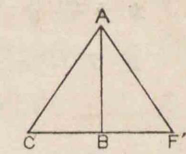
$AC=DF$, $AB=DE$.

[終結] $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.



[證明] $\triangle DEF$ ヲ裏返シテ DE ヲ AB ノ上ニ, F ガ AB ニ對シテ C ト

反對ノ側ニアルヤウニ置クトキ, F ノ位置ヲ F' トスレバ,



$$\angle CBA=\angle ABF'=\frac{\pi}{2}.$$

從ッテ $\angle CBA+\angle ABF'=\pi$.

故ニ C, B, F' ハ一直線上ニアル.

又 $AC=AF'$ デアルカラ, $\triangle ACF'$ ハ二等邊三角形デアル.

ヨッテ $\angle CAB=\angle F'AB$ (定理 9 系 2).

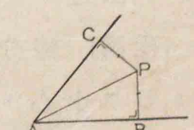
故ニ $\triangle ABC\equiv\triangle ABF'$ (定理 6).

即チ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.

系. 角ノ二邊カラ等距離ニアル點ハ,コノ角ノ二等分線上ニアル.

例題

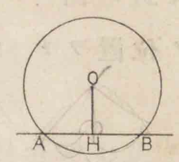
1. 三角形ノ合同ノ定理ヲ四ツ述ベヨ.
2. 一ツノ角 BAC 内ノ點 P カラ角ノ二邊 AB, AC ヘ引イタ垂線ノ長サ PB, PC ガ相等シイトキハ, PA ハ $\angle BAC$ ヲ二等分スル.



3. A, B ヲ圓周上ノ任意ノ二點トシ,ソノ圓ノ中心

カラ線分 AB ニ垂線ヲ引キ,ソノ足ヲ H トスレバ

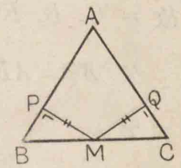
$$AH=BH.$$



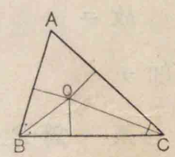
4. $\triangle ABC$ ノ一邊 BC ノ中點 M カラ,他ノ二邊 AB, AC ニ夫々垂線 MP, MQ ヲ引クトキ,

$$MP=MQ$$

ナラバ, $\triangle ABC$ ハ二等邊三角形デアル.



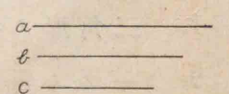
5. $\triangle ABC$ ノ $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ノ交點ヲ O トスレバ, O カラコノ三角形ノ三邊ヘ引イタ垂線ノ長サハ相等シイ.



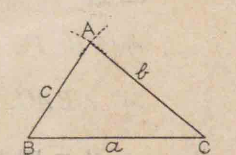
29. 作圖題(續キ)

作圖題 7. 三邊ヲ與ヘ三角形ヲ作ルコト.

三ツノ線分 a, b, c ヲ與ヘテ,コレラヲ三邊トスル三角形ヲ作ルコト.



[作圖] 線分 BC ヲ a ニ等シクトリ, C ヲ中心トシテ b ヲ半徑トスル圓及ビ B ヲ中心トシテ c ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,兩圓ノ交點ノ一ツヲ

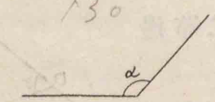


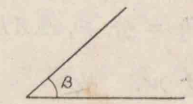
A トスレバ, $\triangle ABC$ ハ求メル三角形デアル.

[證明] 作圖ニヨリ, BC, CA, AB ハ夫々 a, b, c ニ等シイカラ $\triangle ABC$ ハ求メル三角形デアル.

例題

1. 次ノ二角ノ和及ビ差ヲ作レ.





2. 60°, 30°, 15°, 7°30′ 及ビ 90°, 45°, 22°30′ ニ等シイ角ヲ作レ.
3. 周ガ與ヘラレタ線分ニ等シイ正方形ヲ作レ.
4. 斜邊ト他ノ一邊トガ與ヘラレタトキ直角三角形ヲ作レ.
5. 底邊ト高サトガ與ヘラレタトキ二等邊三角形ヲ作レ.
6. 底邊ト頂角又ハ底角トガ與ヘラレタトキ二等邊三角形ヲ作レ.

30. 三角形ノ角ト邊トノ大小關係

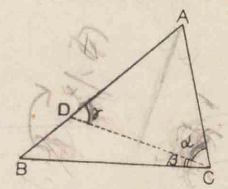
定理 12. 三角形ノ二邊ガ等シクナイトキ

ハ,大キイ邊ニ對スル角ハ小サイ邊ニ對スル角ヨリ大キイ.

[假設] $\triangle ABC$ デ　$AB>AC.$

[終結]　$\angle B<\angle C.$

[證明] AB 上ニ一點 D ヲトリ $AC=AD$ トシ C ト D トヲ結ブトキハ CD ハ $\angle C$ ヲ α, β ノ二ツノ角ニ分チ, $\triangle ADC$ ハ二等邊三角形トナル. 故ニ



$$\gamma=\alpha.$$

然ルニ　$\alpha<\angle C,$

$\angle B<\gamma.$

故ニ　$\angle B<\gamma=\alpha<\angle C,$

即チ　$\angle B<\angle C.$

31. 三角形ノ邊ト角トノ大小關係

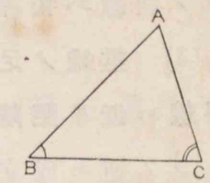
定理 13. 三角形ノ二ツノ角ガ等シクナイトキハ,大キイ角ニ對スル邊ハ小サイ角ニ對スル邊ヨリ大キイ.

[假設] $\triangle ABC$ デ　$\angle C>\angle B.$

[終結]　$AB>AC.$

[證明] 二ツノ邊 AB, AC ノ大キサヲ比較スレバ

次ノ三通リニナル. 即チ



(1)　$AB<AC,$

(2)　$AB=AC,$

(3)　$AB>AC.$

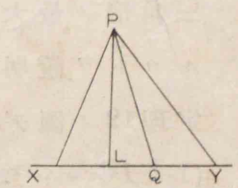
コノ三通リノ場合ノ中デ唯一ツガ必ズ成立ツ.

今假ニ $AB<AC$ トスレバ定理 12 ニヨッテ $\angle C<\angle B$ デナケレバナラナイ. コレハ假設 $\angle C>\angle B$ ニ反スル. 又 $AB=AC$ トスレバ定理 8 系 2 ニヨッテ $\angle C=\angle B$ デアル. コレモ亦假設ニ反スル. ヨッテ (1)及ビ(2)ノ場合ハ成立シナイカラ,(3)ノ場合即チ

$$AB>AC$$

ガ成立スル.

定義　直線 XY 上ニナイ一點 P ト,直線 XY 上ノ一點 Q トヲ通ル直線ガ XY ニ垂直デナイトキハ, PQ ハ P カラ XY ニ引イタ斜線デ, Q ヲコノ斜線ノ足トイフ.



系. 直線外ノ一點カラコノ直線ニ引イタ線分ノ中デ,

(1) 垂線ハ最モ短イ,

(2) 垂線ノ足カラ等距離ニアル點ヲ足トスルニ

ツノ斜線ハ相等シイ,

(3) **垂線ノ足カラ遠イ距離ニアル點ヲ足トスル斜線ハ近イ距離ニアル點ヲ足トスル斜線ヨリ長イ.**

コノ逆モ成立スル.

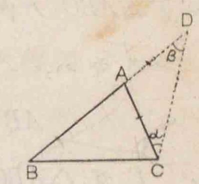
定義 直線外ノ一點カラコノ直線ニ引イタ垂線ノ長サヲソノ點ト直線トノ**距離**トイフ.

例 題

1. $\triangle ABC$ デ $AB=5cm$, $BC=7cm$, $CA=9cm$ デアルトキ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ノ大小ヲ定メヨ.
2. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ヨリモ大キイ.
3. 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大キイ.
4. 三角形ノ最大邊ノ兩端ノ角ハ何レモ鋭角デアルコトヲ證明セヨ.
5. 定理12ノ圖デ
   (1) DC ハ $\angle A$ ノ二等分線ニ垂直デアル.
   (2) $$\alpha=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C).$$
   (3) $$\beta=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B).$$

32. 三角形ノ三邊ノ大小關係

定理 14. 三角形ノ二邊ノ和ハ第三邊ヨリ大キイ.



[證明] BA ヲ延長シテ AC ニ等シク AD ヲ取リ D ト C トヲ結ベバ,

$\triangle ACD$ デ
$$AC=AD.$$
故ニ $$\alpha=\beta.$$
ヨッテ $$\angle BCD>\beta.$$
定理13ニヨッテ $$BD>BC.$$
即チ $$AB+AC>BC.$$

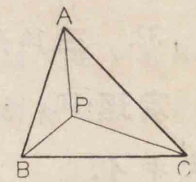
系. 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ差ヨリ大キイ.

例 題

1. 三邊ノ長サガ次ノヤウナ三角形ヲ作ルコトガ出來ルカ.
   (1) $4cm$, $5cm$, $10cm$; 不可
   (2) $8cm$, $19cm$, $12cm$; 可
   (3) $4cm$, $12cm$, $8cm$. 不可

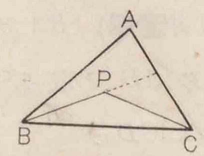
2. $\triangle ABC$ ノ内部ニ一點 P ヲトルトキハ,

$$2(AP+BP+CP)>BC+CA+AB.$$



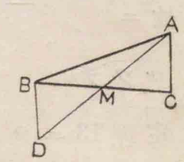
3. $\triangle ABC$ ノ内部ニ一點 P ヲトルトキハ,

$$AB+AC>BP+CP.$$



4. P ガ $\triangle ABC$ ノ内部ノ點デアルトキ,

$$AP+BP+CP<BC+CA+AB.$$



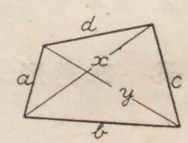
5. AM ヲ $\triangle ABC$ ノ中線トスレバ,

$$2AM<AB+AC.$$

6. 圖デ

$$x+y<a+b+c+d$$

デアルコトヲ證明セヨ.



33. 二ツノ三角形ノ角ト邊トノ大小關係

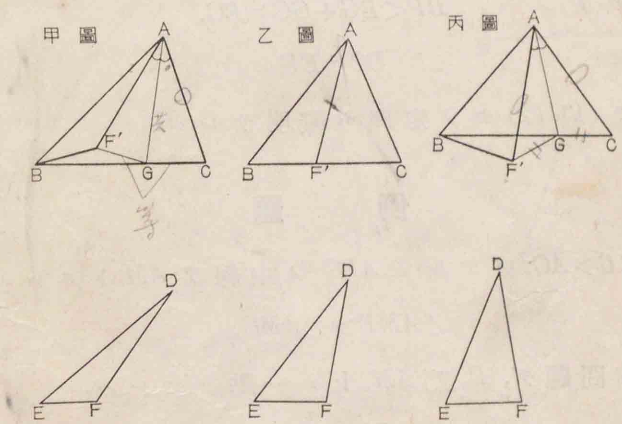
定理 15. 二ツノ三角形デ二邊ガ夫々相等シク,ソノ夾角ガ等シクナイトキハ,大キイ夾角ノ對邊ハ小サイ夾角ノ對邊ヨリモ大キイ.

[假設] $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ デ

$$AB=DE, \quad AC=DF, \quad \angle A>\angle D.$$

[終結] $BC>EF.$

[證明] $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ, DE ガ AB ニ重ナリ, F ガ AB ニ對シテ C ト同ジ側ニ來ルヤウニ重ネル. ソノトキノ F ノ位置ヲ F' トスレバ,假設ニヨツテ $\angle A>\angle D$ デアルカラ, F' ハ $\angle A$ 内ニアル.



(1) F' ガ BC 上ニアルトキ (乙圖)

$$BC=BF'+F'C.$$

故ニ $$BC>BF'=EF.$$

(2) F' ガ BC 上ニナイトキ (甲,丙圖)

$\angle F'AC$ ノ二等分線ト BC トノ交點 G ト F' トヲ結ブトキハ, $\triangle AF'G$ ト $\triangle ACG$ トデ

$AF'=AC$, AG ハ共通,

$$\angle F'AG=\angle CAG.$$

ヨッテ $\triangle AF'G\equiv\triangle ACG$ (定理 6).

従ッテ $GF'=CG$.

然ルニ $\triangle F'BG$ デ

$$BF'<BG+GF'.$$

ヨッテ $BF<BG+GC=BC$.

故ニ $BC>EF$.

即チ (1), (2) カラ定理ハ證明サレタ.

例題

1. $AB>AC$ デアル $\triangle ABC$ ノ中線ヲ AM トスレバ,
$$\angle AMB>\angle AMC.$$
2. 前問題デ, P ヲ AM 上ノ一點トスレバ,
$$PC<PB.$$
3. 線分 AB ノ垂直二等分線上ニナイ任意ノ點ヲ P トスルトキ, PA ト PB トノ大小ヲ考ヘヨ.

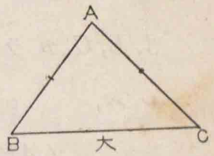
定理 16. 二ツノ三角形デ二邊ガ夫々相等シク,第三邊ガ等シクナイトキ,大キイ邊ニ對スル角ハ小サイ邊ニ對スル角ヨリモ大キイ.

[假設] $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ デ,

$$AB=DE,\quad AC=DF,\quad BC>EF.$$

[終結] $\angle A>\angle D$.

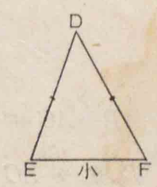
[證明] 二ツノ角 $\angle A$, $\angle D$ ノ大キサヲ比較スレバ, 次ノ三通リノ場合ガアル. コノ中ノ唯一ツガ必ズ成立スル. 即チ



(1) $\angle A<\angle D$,

(2) $\angle A=\angle D$,

(3) $\angle A>\angle D$.



假ニ $\angle A<\angle D$ トスレバ,定理15ニヨッテ $BC<EF$.

コレハ假設 $BC>EF$ ニ反スル.

次ニ $\angle A=\angle D$ トスレバ,定理 6 ニヨッテ

$$BC=EF.$$

コレモ亦假設ニ反スル.

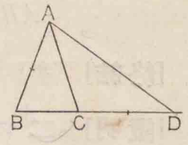
從ッテ(1),(2)ノ場合ハ成立シナイカラ,(3)ノ場合ガ成立スル.

例題

1. AM ヲ $\triangle ABC$ ノ中線トスルトキ, $\angle AMB>\angle AMC$ ナラバ, $AB>AC$.

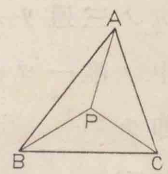
2. 定理16ヲ直接法ニヨツテ證明セヨ.

3. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ D マデ延長シテ $CD=AB$ トスレバ,



$$AD>BC.$$

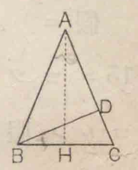
4. $\triangle ABC$ デ $AB>BC>CA$ トシ, P ハ A, B, C カラ等距離ニアル點トスレバ,



$$\angle APB>\angle BPC>\angle CPA.$$

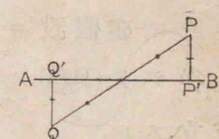
演習問題 II.

1. $AB=AC$ デアル二等邊三角形 ABC デ B カラ AC ニ下シタ垂線ヲ BD トスレバ,



$$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A.$$

2. 直線 AB ニ對シテ反對ノ側ニアル二點 P, Q ト AB トノ距離ガ相等シイトキ,線分 PQ ハ AB ニヨツテ二等分サレル.

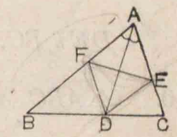


3. 三角形ノ底邊ト兩底角ノ二等分線ノ作ル三角形ハ鈍角三角形デアル.

4. $\triangle ABC$ ノ二ツノ外角 B 及ビ C ノ二等分線ノ交

點ヲ O トスレバ, AO ハ $\angle A$ ヲ二等分スル.

5. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ガ BC ト交ル點 D カラ AB, AC ヘ夫々平行線 DE, DF ヲ引キ, AC, AB トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ, EF ト AD トハ互ニ他ヲ垂直ニ二等分スル.

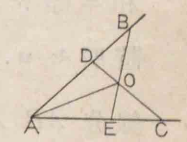


6. B, D 及ビ C, E ヲ $\angle A$ ノ二邊上ニ $AB=AC$, $AD=AE$ デアルヤウニトリ, BE, DC ノ交點ヲ O トスレバ,

(1)　$\triangle ABE\equiv\triangle ACD$,

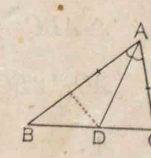
(2)　$\triangle OBD\equiv\triangle OCE$,

(3)　$\angle BAO=\angle CAO$.



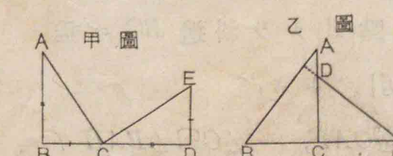
7. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ガ對邊ト交ル點ヲ D トスルトキ, $AB>AC$ ナラバ,

$$BD>DC.$$



8. 下圖デ二組ノ直角三角形 ABC, CDE ガ合同デアレバ,

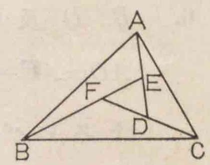
(1)　$AC\perp CE$ (甲圖),　(2)　$AB\perp DE$ (乙圖).



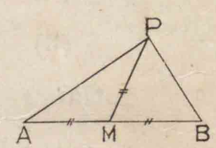
9. 二等邊三角形 ABC ノ相等シイ邊 AB, AC 上ニ夫々 D, E ヲ $BD=CE$ デアルヤウニトレバ, $DE \parallel BC$. 逆モ亦眞デアル.

10. $\triangle ABC$ デ $\angle A=3\angle C$, $\angle B=3\angle C$ デアルトキ,各角ノ大キサヲ求メヨ.

11. 圖デ,何レノ角ガドノ三角形ノ外角トナツテヰルカ. 又$\triangle ABC$ノ内角ノ和ハ$\triangle DEF$ノ内角ノ和ニ等シイコトヲ圖ニヨツテ證明セヨ.



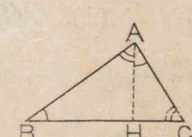
12. 線分 AB ノ中點 M カラ他ノ線分 MP ヲ作リ $MP=MA$ トスレバ, $\triangle APB$ ハ直角三角形デアル.



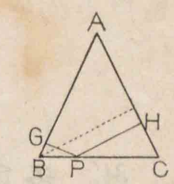
13. $\triangle ABC$ デ $\angle A$ ガ最大デアレバ,三邊ガ夫々 AB, AC, $2BC$ ニ等シイ三角形ハ作ルコトガ出來ナイ.

14. $\angle A$ ガ直角デアル直角三角形 ABC ノ頂點 A カラ斜邊 BC ニ垂線 AH ヲ引クトキ,

$$\angle B=\angle CAH, \qquad \angle C=\angle BAH$$



15. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點 P カラ AB, AC ニ夫々垂線 PG, PH ヲ引ケバ, $PG+PH$ ハ一定デアル.



第四章　多角形

34. 多角形ニ關スル定義

續イタ幾ツカノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**多角形**トイフ. 多角形ヲ圍ム線分ヲ多角形ノ**邊**,スベテノ邊ノ和ヲソノ**周**,相隣ル二邊ノナス多角形内ノ角ヲソノ**内角**又ハ單ニ**角**トイヒ,ソノ角ノ頂點ヲ多角形ノ**頂點**トイフ.

多角形ノ邊ノ數ト頂點ノ數トハ相等シイ.

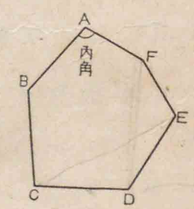
多角形ヲソノ邊ノ數ニヨツテ三邊形*,四邊形,五邊形(又ハ四角形,五角形)等トイフ.

多角形ヲ示スニハ相隣ル頂點ヲナラベテ,四邊形 *ABCD*, 五邊形 *ABCDE* 等デ表ス.

例ヘバ,六邊形 *ABCDEF* デ

AB, BC, CD 等ハ邊,

A, B, C, D, E, F ハ頂點デアル.

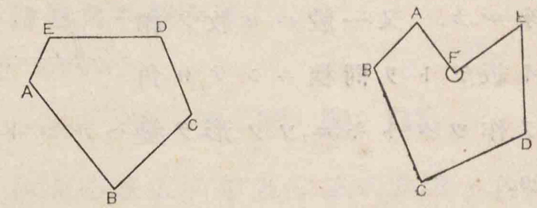


又四邊形 *ABCD* ヲ □*ABCD* デ表スコトモアル.

多角形ノ内角ノ何レモガ二直角ヨリ小サイモノ

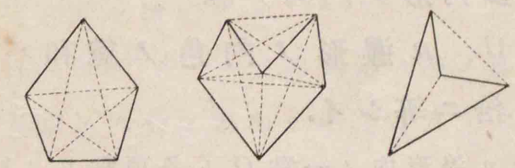
* 通常ハ三邊形トハイハズニ三角形トイフ.

ヲ**凸多角形**トイヒ,一ツデモ二直角ヨリ大キイ内角ガアレバ,コレヲ**凹多角形**トイフ.



多角形ノ相隣ラナイ二ツノ頂點ヲ結ビツケル線分ヲソノ多角形ノ**對角線**トイフ.

問　多角形ノ對角線ハ常ニソノ多角形内ニアルカ.

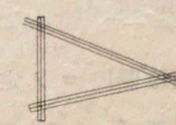


多角形ノ内角ガ皆相等シク,ソノ邊モ亦皆相等シイモノヲ**正多角形**トイフ.

〔注意〕 單ニ多角形トイヘバ,凸多角形ヲ指スモノトスル.

例題

1. 三枚ノ細長イ板ニ右ノヤウニ針ヲ挿込ンダマヽデ,コノ形ヲ變ヘルコトガ出來ルカ

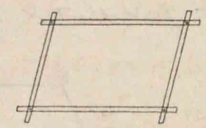


三辺の等しい
三角形は存ら
から合同形

2. 四枚ノ細長イ板ニ圖ノヤウニ針ヲ挿シ込ンダマヽデ,コノ形ヲ變ヘルコトガ出來ルカ. 又一般ニ n 枚ノ細長イ板ヲトリ同樣ニシテ n 角形ヲ作ツタトキニ,ソノ形ヲ變ヘルコトガ出來ルカ.

変る、

三角形ダケ変ラナイ



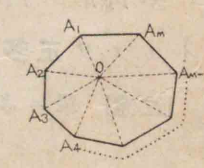
3. 五邊形ノ對角線ノ總數ヲ求メヨ.

4. n 邊形ノ對角線ノ總數ハ $\dfrac{n(n-3)}{2}$ デアル.

35. 多角形ノ内角ノ和

定理 17. n 邊形ノ内角ノ總和ハ直角ノ $2(n-2)$ 倍ニ等シイ.

[證明] n 邊形内ノ一點 O ト各頂點トヲ結ビツケ,コレヲ n 個ノ三角形ニ分ケル.



コノ n 個ノ三角形ノ内角ノ總和ハ $n\pi$ デアル. 多角形ノ内角ノ和ハ各三角形ノ O ニ於ケル角ノ和 2π ヲコレカラ減ズレバヨイ. 即チ

$$n\pi-2\pi=(n-2)\pi=2(n-2)\text{直角}.$$

[注意] コノ定理ハ凹多角形ノトキニモ成立スル.

系 1. 四邊形ノ内角ノ總和ハ四直角ニ等シイ.

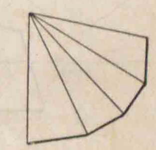
系 2. 正 n 角形ノ一角ハ $\dfrac{2n-4}{n}$ 直角デアル.

系 3. 多角形ノ各頂點デ一ツヅツ作ツタ外角ノ總和ハ四直角ニ等シイ.

演習問題 III.

1. 正四角形,正五角形及ビ正八角形ノ内角及ビ外角ハ各々幾直角カ. 又何度カ.

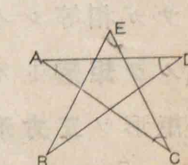
2. n 邊形ノ一頂點カラ對角線ヲ引キ,コレヲ $n-2$ 個ノ三角形ニ分ケテ,定理 17 ヲ證明セヨ.



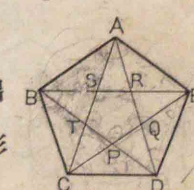
3. 一外角ガ $30°$ デアル正多角形ノ邊ノ數ハ幾ツカ.

4. 多角形ノ内角ノ總和ガ 16 直角ナラバ,ソノ多角形ハ何邊形デアルカ.

5. 圖ノヤウナ星形五邊形 $ABCDE$ ノ頂角 A, B, C, D, E ノ和ハ二直角デアル.



6. 正五角形 $ABCDE$ ノ對角線カラ出來ル五角形 $PQRST$ ハ又正五角形デアル.

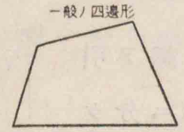


第五章 平行四邊形

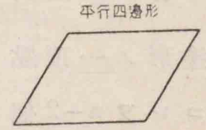
36. 四邊形ノ種類

四邊形ノ相隣ラナイ二邊ヲ**相對スル邊**,相隣ラナイ二角ヲ**相對スル角**,コノ角ノ頂點ヲ**相對スル頂點**トイフ.

一般ノ四邊形

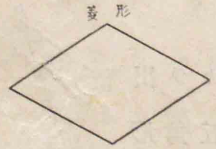


平行四邊形

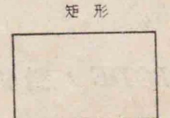


定義 四邊形ノ二双ノ相對スル邊ガ夫々平行ナモノヲ**平行四邊形**トイフ. 特ニ相隣ル二邊ノ大キサガ相等シイモノヲ**菱形**,一ツノ角ガ直角デアルモノヲ**矩形**トイフ. 相隣ル二邊ノ大キサガ相等シイ矩形ヲ**正方形**トイフ.

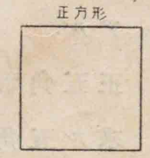
菱形



矩形



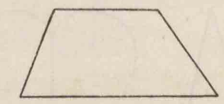
正方形



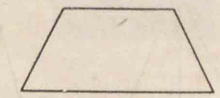
一双ノ相對スル邊ガ平行デアル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,平行デアル邊ノ各々ヲ**底邊**又ハ**底**トイフ. 底

邊デナイ二邊ガ相等シイ梯形ヲ**二等邊梯形**又ハ**等脚梯形**トイフ.

梯形

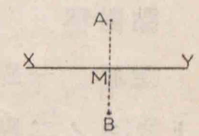


二等邊梯形

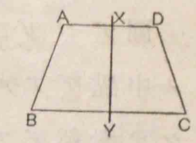


37. 對稱

問1 折紙上ニ線分 AB ヲ畫キ,ソノ線分ノ兩端ヲ重ネテコレヲ折ルトキ,ソノ折目ハ何カ.



問2 二等邊梯形ノ兩底ノ中點ヲ結ブ直線ヲ折目トシテ重ネ合シテ見ヨ.



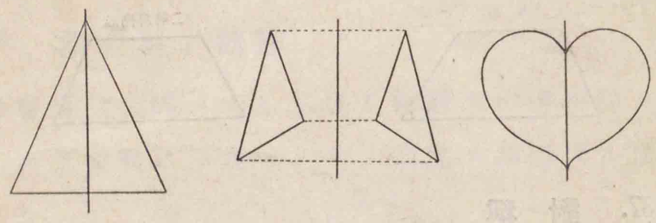
線對稱

定義 二ツノ點ハコレヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ニ關シテ**對稱デアル**トイヒ,ソレラノ點ヲコノ直線ニ關シテ**對稱點**,コノ直線ヲ**對稱ノ軸**トイフ.

定義 一直線ニ關シテ或圖形上ノ任意ノ點ノ對稱點ガ同ジ圖形上ニアルトキ,ソノ圖形ハコノ直線ニ關シテ**對稱デアル**トイフ.

一直線ニ關シテ對稱ナ圖形ハソノ對稱ノ軸ヲ折目トシテ折リ返セバ,對稱ノ位置ニアル一對ヅツノ

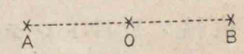
點ハ皆相重ナル. 從ツテ又コノヤウナ圖形ハ軸ニヨツテ全ク相等シイ二ツノ部分ニ分タレル.



點對稱

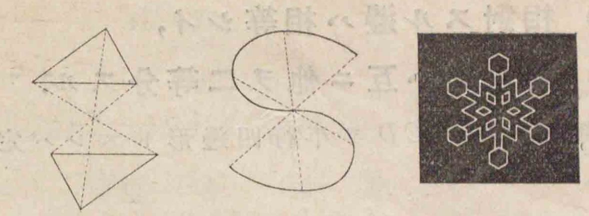
〔定義〕 一點ガ二ツノ點ヲ結ブ線分ノ中點デアルトキ,コノ二點ハソノ點ニ關シテ**對稱デアル**トイフ.

圖デ O ガ二點 A,B ヲ結ブ線分ノ中點デアルトキ,A,B ハ O ニ關シテ對稱デアル.



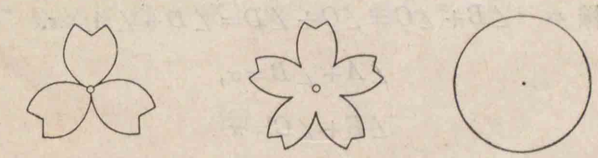
〔定義〕 圖形上ノ任意ノ點ノ一點ニ關スル對稱點ガ同ジ圖形上ニアルトキハ,ソノ圖形ハコノ點ニ關シテ**對稱デアル**トイヒ,コノ點ヲ**對稱ノ中心**トイフ.

一點ニ關シテ對稱ナ圖形ハコレヲソノ對稱ノ中心ノ周リニ2直角ダケ回轉スレバ,對稱ノ位置ニアル一對ヅツノ點ハ皆互ニ相重ナル. 從ツテコノヤウナ圖形ハソノ中心ヲ通ル任意ノ直線ニヨツテ全ク相等シイ二ツノ部分ニ分タレル.

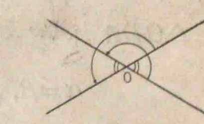


例題

1. 次ノ圖形ノ對稱ノ軸ハ各々幾本アルカ.



2. 角ハソノ二等分線ヲ軸トシテ對稱デアル.
3. 平行四邊形ハ對角線ノ交點ニ關シテ點對稱デアルコトヲ證明セヨ.
4. 對頂角ノ相等シイコトヲ點對稱ノ性質ヲ用ヒテ證明セヨ.



38. 平行四邊形ノ性質

定理 18. 平行四邊形デ

(1) 相隣ル角ハ補角デアル,

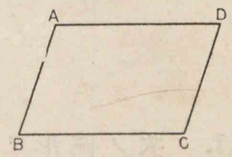
(2) 相對スル角ハ相等シイ,

(3) 相對スル邊ハ相等シイ,

(4) 對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル.

[證明] (1) $ABCD$ ヲ平行四邊形トスレバ定義ニヨツテ

$$AD \parallel BC.$$



故ニ定理3系ニヨツテ

$$\angle A+\angle B=\pi.$$

同様ニ $\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle D+\angle A=\pi.$

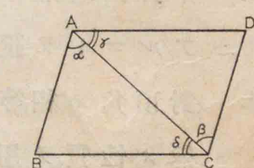
(2) $$\angle A+\angle B=\pi,$$

$$\angle B+\angle C=\pi$$

デアルカラ $\angle A=\angle C.$

同様ニ $\angle B=\angle D.$

(3) 對角線 AC ヲ作レバ,$\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トデ



$$\alpha=\beta, \quad \delta=\gamma,$$

AC ハ共通デアルカラ

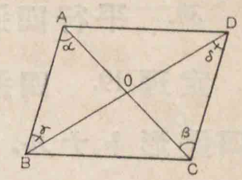
$\triangle ABC\equiv\triangle CDA$ (定理 7).

ヨツテ $AB=CD,\quad BC=AD.$

(4) 對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスレバ,$\triangle ABO$, $\triangle CDO$ デ,

$$\alpha=\beta, \quad \gamma=\delta,$$

$$AB=CD.$$



ヨツテ

$\triangle ABO\equiv\triangle CDO$ (定理 7).

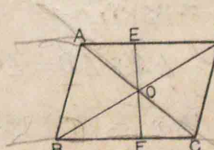
故ニ $OA=OC, \quad OB=OD.$

系. 平行ナ二直線ノ一方ノ上ニアル任意ノ一點ト他ノ直線トノ距離ハ常ニ一定デアル.

[定義] コノ長サヲ**平行二直線間ノ距離**トイヒ,梯形ニ於イテ平行ナ底ノ距離ヲ特ニ**高サ**トイフ.

例題

1. 平行四邊形ノ一角ガ 45° デアルトキ,他ノ三ツノ角ノ大キサヲ求メヨ.
2. 矩形ノ四ツノ角ハ何レモ直角デアル.
3. 菱形ノ四ツノ邊ハ相等シク,對角線ハ直交スル.
4. 相隣ル二邊トソノ夾角トガ相等シイ二ツノ平行四邊形ハ合同デアル.
5. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ノ對邊ノ間ニアル部分ハソノ交點ニヨツテ二等分サレル.



39. 平行四邊形ノ性質（續キ）

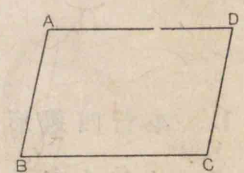
定理 19. **四邊形ハ次ノ各々ノ場合ニ平行四邊形トナル.**

(1) 相隣ル角ガ補角デアルトキ,

(2) 相對スル角ガ相等シイトキ,

(3) 相對スル邊ガ相等シイトキ,

(4) 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキ.



[證明] (1) 四邊形 $ABCD$ デ

$$\angle A+\angle B=\pi.$$

故ニ　$AD \parallel BC$.

同樣ニ　$AB \parallel CD$.

ヨツテ $ABCD$ ハ平行四邊形デアル.

(2) 四邊形 $ABCD$ デ

$$\angle A=\angle C,\quad \angle B=\angle D$$

トスレバ,

$$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D).$$

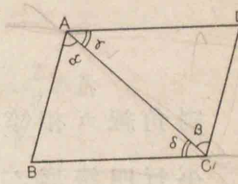
然ルニ四邊形ノ內角ノ和ハ四直角ニ等シイカラ

$$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D=\pi.$$

同樣ニ　$\angle A+\angle D=\angle C+\angle B=\pi.$

ヨツテ(1)ニヨリ $ABCD$ ハ平行四邊形デアル.

(3) 四邊形 $ABCD$ デ



$$AB=CD,\quad BC=AD.$$

故ニ對角線 AC ヲ作レバ, 定理10ニヨツテ

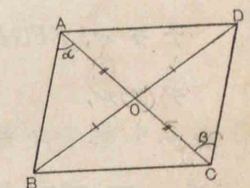
$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA.$$

ヨツテ　$\alpha=\beta,\quad \gamma=\delta$

故ニ　$AB \parallel CD,\quad BC \parallel AD.$

從ツテ $ABCD$ ハ平行四邊形デアル.

(4) 四邊形 $ABCD$ ノ對角線ノ交點ヲ O トシ



$$AO=CO,\quad BO=DO$$

トスレバ, $\angle AOB=\angle COD$ デアルカラ

$$\triangle AOB \equiv \triangle COD.$$

ヨツテ　$\alpha=\beta.$

從ツテ　$AB \parallel CD.$

同樣ニ　$BC \parallel AD.$

故ニ $ABCD$ ハ平行四邊形デアル.

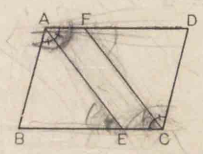
系 1. **一双ノ對邊ガ相等シク且ツ平行ナ四邊形ハ平行四邊形デアル.**

系 2. **對角線ガ互ニ他ヲ直角ニ二等分スル四邊形ハ菱形デアル.**

例 題

1. 對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル.

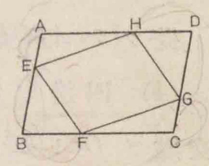
2. 平行四邊形ノ對角ノ二等分線ハ互ニ平行デアル. 從ツテ圖デ $AECF$ ハ平行四邊形デアル.



3. 平行四邊形 $ABCD$ デ,

$$AE=CG, \qquad BF=DH$$

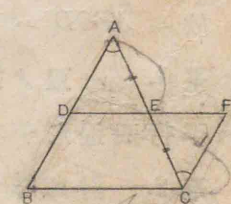
ナラバ, $EFGH$ ハ又平行四邊形デアル.



40. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線

定理 20. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行デ,ソノ半分ニ等シイ.

[證明] $\triangle ABC$ ノ AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トシ, C ヲ通ツテ AB ニ平行線ヲ引キ, DE ノ延長トノ交點ヲ F トスレバ, $\triangle ADE$ ト $\triangle CFE$ トデ



$$AE=CE,$$

$$\angle BAC=\angle ACF, \qquad \angle AED=\angle CEF.$$

故ニ $\qquad \triangle ADE \equiv \triangle CFE.$

ヨツテ $\qquad DE=EF=\frac{1}{2}(DE+EF)=\frac{1}{2}DF.$

又 $\qquad AD=CF.$

D ハ AB ノ中點デアルカラ,

$$BD=AD=CF.$$

ヨツテ $DBCF$ ハ平行四邊形デアル.

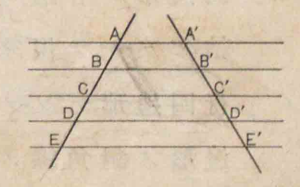
故ニ $\qquad DE \parallel BC.$

又 $\qquad BC=DF=2DE.$

即チ $\qquad DE=\frac{1}{2}BC.$

系 1. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通ツテ他ノ一邊ニ平行デアル直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル.

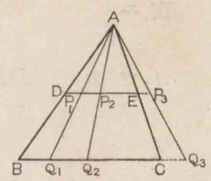
系 2. 多クノ平行線ガコレト交ルーツノ直線カラ截リトル線分ガ相等シイトキハ,コレラノ平行線ニ交ル他ノ直線カラ截リトル線分モ亦相等シイ.



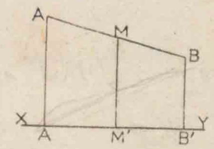
例 題

1. 三角形ノ三ツノ邊ノ中點ヲ結ビツケル直線ハコノ三角形ヲ四ツノ合同ナ三角形ニ分ツ.

2. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ,ソノ二邊ニ共通ナ頂點カラ第三邊(又ハソノ延長)ヘ引イタ總テノ線分ヲ二等分スル.



3. 直線 XY ノ一方ノ側ニアル二點 A, B ト XY トノ距離ノ和ハ, AB ノ中點 M ト XY トノ距離ノ2倍ニ等シイ.

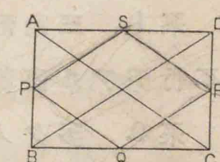


四辺形ノ一組ノ対辺ガ平行ナルモノ

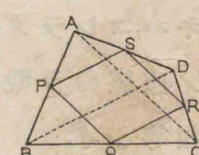
対角線ハ
相等シ
底角等シ

4. 梯形ノ平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ,兩底ノ和ノ半分ニ等シイ.

5. 矩形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビツケテ出來ル四邊形ハ菱形デアル.



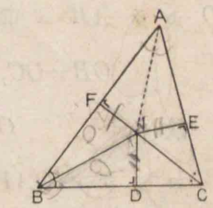
6. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビツケテ出來ル四邊形ハ平行四邊形デ,ソノ周ハモトノ四邊形ノ對角線ノ和ニ等シイ.



41. 三角形ノ五心(內心,外心,重心,垂心,傍心)

定理 21. 三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.

[證明] $\triangle ABC$ デ $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ノ交點 I カラ三邊 BC, CA, AB ヘ夫々垂線 ID, IE, IF ヲ引ケバ, $\triangle IBD$ 及ビ $\triangle IBF$ ハ共ニ直角三角形デ,



$$\angle IBD = \angle IBF,$$

IB ハ共通デアルカラ,定理7系2ニヨリ

$$\triangle IBD \equiv \triangle IBF.$$

ヨツテ　$ID = IF$.

同樣ニ　$ID = IE$.

故ニ　$IE = IF$.

從ツテ $\triangle IAE$ ト $\triangle IAF$ トハ斜邊ト一邊トガ相等シイ直角三角形デアルカラ,定理11ニヨツテ

$$\triangle IAE \equiv \triangle IAF.$$

故ニ　$\angle IAE = \angle IAF$.

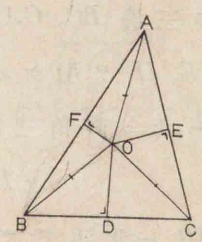
角ノ二等分線ハ唯一ツデアルカラ,從ツテ $\angle A$ ノ二等分線ハ I ヲ通ル. 即チ三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.

定義　コノ點 I ヲ三角形ノ**內心**トイフ.

系　三角形ノ內心ト三邊トノ距離ハ相等シイ.

定理 22. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點デ交ル.

[證明] $\triangle ABC$ デ邊 BC, CA ノ垂直二等分線ノ交點 O カラ AB ニ垂線 OF ヲ作レバ



$$OB=OC, \quad OC=OA$$

故ニ $$OB=OA.$$

ヨッテ $\triangle OAF, \triangle OBF$ ハ斜邊ガ等シク OF ガ共通ナ直角三角形デアルカラ

$$\triangle OAF \equiv \triangle OBF.$$

從ッテ $$FA=FB.$$

ヨッテ AB ノ垂直二等分線ハ O ヲ通ル. 卽チ三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點デ交ル.

[定義] コノ點 O ヲ三角形ノ**外心**トイフ.

例題

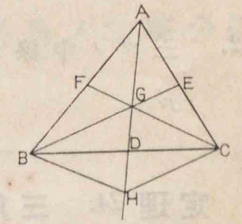
1. 正三角形デハ外心ト内心トガ一致スルコトヲ證明セヨ.
2. 直角三角形ノ外心ハ何處ニアルカ.

定理 23. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點デ交リ, コノ交點ハ頂點カラ各中線ノ $\frac{2}{3}$ ノ所ニアル.

[證明] $\triangle ABC$ ノ中線 BE, CF ノ交點ヲ G トシ, AG ノ延長上ニ點 H ヲトッテ, $GH=AG$ トナルヤウニスルトキハ,

$$AF=FB, \quad AG=GH$$

デアルカラ, 定理20ニヨッテ



$$FG \parallel BH, \text{ 卽チ } GC \parallel BH.$$

同樣ニ $$GB \parallel CH.$$

ヨッテ $GBHC$ ハ平行四邊形デアルカラ, GH ト BC トノ交點 D ハ BC ノ中點. 從ッテ AD ハモトノ三角形ノ中線デアル. 卽チ三中線 AD, BE, CF ハ一點 G デ交ル.

又 $$GD=DH$$

デアルカラ $$AG=GH=2GD.$$

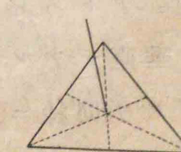
兩邊ニ $2AG$ ヲ加ヘテ

$$3AG=2(AG+GD)=2AD.$$

卽チ $$AG=\frac{2}{3}AD.$$

同樣ニ $$BG=\frac{2}{3}BE, \quad CG=\frac{2}{3}CF.$$

[定義] コノ點 G ヲ $\triangle ABC$ ノ**重心**トイフ.



問 重サガ一樣ナ紙デ三角形ヲ作リソノ重心ヲ求メテ絲デ吊セ.

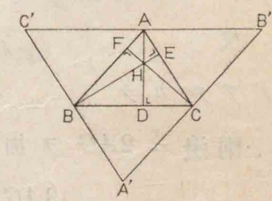
例　題

1. 二ツノ中線ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル.

2. 三ツノ中線ガ相等シイ三角形ハ正三角形デアル.

定理 24.　三角形ノ各頂點カラソノ對邊ヘ引イタ三ツノ垂線ハ同一ノ點デ交ル.

[證明]　$\triangle ABC$ ノ各頂點ヲ通ツテソノ對邊ニ平行線ヲ引ケバ,圖ノヤウニ $\triangle A'B'C'$ ガ出來ル.　ソノトキ四邊形 $ABCB'$, $AC'BC$ ハ共ニ平行四邊形デアルカラ,定理18ニヨツテ



$$AB'=BC,\qquad AC'=BC.$$

故ニ　$$AB'=AC'.$$

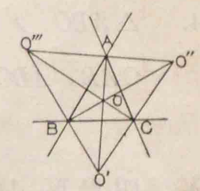
各頂點カラソノ對邊ヘ引イタ垂線ヲ夫々 AD, BE, CF トスレバ, AD ハ BC ニ垂直デアルカラ又 $B'C'$ ニ垂直デアル.　從ツテ AD ハ $B'C'$ ノ垂直二等分線デアリ,同様ニ BE, CF ハ夫々 $C'A'$, $A'B'$ ノ垂直二等分線デアル.　ヨツテ定理22ニヨリ AD, BE, CF ハ

$\triangle A'B'C'$ ノ外心 H デ交ル.

定義　コノ點 H ヲ三角形ノ垂心トイフ.

定理 25.　三角形ノ一ツノ内角ノ二等分線ト他ノ二ツノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線トハ同一ノ點ヲ通ル.

定義　コノヤウナ點ハ皆デ三ツアル.　コノ各々ヲ三角形ノ傍心トイフ.



系　傍心カラソノ三角形ノ一邊ト二邊ノ延長トニ引イタ垂線ハ相等シイ.

例　題

1. 正三角形ノ内心,外心,重心,垂心ハ皆一致スル.

2. 鋭角三角形,直角三角形,鈍角三角形ノ各々ノ垂心ノ位置ヲ調ベヨ.

演習問題 IV.

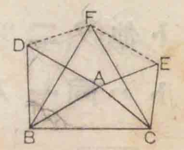
1. 二等邊三角形ノ底邊ニ垂直ナ直線ト他ノ二邊又ハソノ延長トノ作ル三角形ハ二等邊三角形デアル.

2. 四邊形ノ外角ヲ二等分スル直線ノ作ル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角デアル.

3. $\triangle ABC$ ノ外側ニ正三角形 ABD, ACE ヲ,内側ニ正三角形 BCF ヲ作レバ,

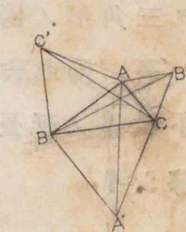
(1) $\triangle ABC \equiv \triangle DBF \equiv \triangle EFC$.

(2) $AEFD$ ハ平行四邊形デアル.



4. $\triangle ABC$ ノ外側ニ正三角形 BCA', CAB', ABC' ヲ作ルトキハ,

$$AA'=BB'=CC'.$$



5. 四邊形 $ABCD$ ノ $\angle A$ 及ビ $\angle D$ ノ二等分線ノ交點ヲ I トスレバ,

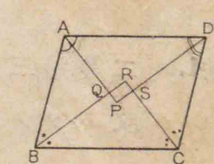
$$\angle AID=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C).$$

6. 二等邊梯形ノ對角線ハ相等シイ.

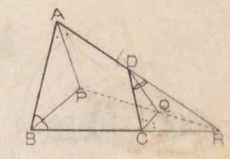
7. 對角線ノ總數ガ20デアル多角形ハ何邊形カ.

8. 平行四邊形 $ABCD$ ノ BC, AD ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ,對角線 BD ハ AE, CF ニヨッテ三等分サレル.

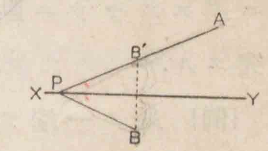
9. 平行四邊形ノ四ツノ角ノ二等分線ハ矩形ヲ作ル.



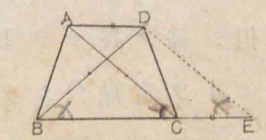
10. 四邊形 $ABCD$ デ $\angle A$ 及ビ $\angle B$ ノ二等分線ノ交點, $\angle C$ ト $\angle D$ トノ外角ノ二等分線ノ交點, AD, BC ノ交點ハ一直線上ニアル.



11. 一直線 XY ノ反對ノ側ニアル二點 A, B ヲコノ直線上ノ一點 P ニ結ビ $\angle APY=\angle BPY$ デアルヤウニセヨ.



12. 梯形ノ對角線ガ相等シイトキハ,コノ梯形ハ二等邊梯形デアル.

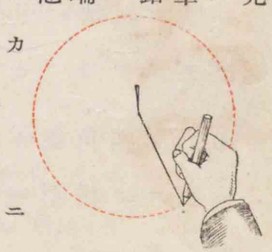


第六章　軌　跡

42. 軌跡

點ガ運動スレバソノ跡ハ線デアル．今アル條件ニ適スルヤウニ點ガ運動スルトキニ出來ル線ヲ研究スル．

［例］ 絲ノ一端ヲ點 O ニ固定シ他端ニ鉛筆ノ先ヲ結ビツケテ絲ヲ張リナガラ動カストキハ，ドンナ線ガ出來ルカ．但シ絲ノ長サヲ 10cm トスル．



A ヲ定點 O カラ 10cm ノ距離ニアル任意ノ點トスレバ，A ハ O ヲ中心トシテ 10cm ヲ半徑トスル圓周上ニアル．逆ニ O カラ 10cm ノ距離ニアル點ハ皆コノ線上ニアル．

定義 或圖形上ノスベテノ點ガ與ヘラレタ條件ヲ滿足シ，逆ニ與ヘラレタ條件ヲ滿足スルスベテノ點ガコノ圖形上ニアルトキ，コノ圖形ヲ條件ニ適スル點ノ**軌跡**トイフ．

即チ點ノ軌跡ハ與ヘラレタ條件ヲ滿足スルスベテノ點ノ位置ヲ明ラカニ示ス圖形デアル．

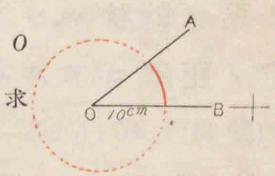
例　題

次ノ軌跡ハドンナ圖形カ(證明ハ要シナイ)．

1. 定直線 XY カラ 2.5cm ノ距離ニアル點ノ軌跡．
2. 二定點 A, B カラ等シイ距離ニアル點ノ軌跡．
3. 二ツノ平行線カラ等シイ距離ニアル點ノ軌跡．
4. 相交ル二直線カラ等シイ距離ニアル點ノ軌跡．

43. 軌跡ノ證明法

問　與ヘラレタ角 AOB 內ノ頂點 O カラ 10cm ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ．



或圖形ガ與ヘラレタ條件ヲ滿足スル點ノ軌跡デアルコトヲ證明スルニハ，必ズ次ノ二ツノ事項ヲ證明シナケレバナラナイ．

I.　ソノ圖形上ノ點ハ皆與ヘラレタ條件ヲ滿足スル．

II.　與ヘラレタ條件ヲ滿足スル點ハ皆ソノ圖形上ニアル．

但シ II ノ代リニ，

II′.　ソノ圖形外ノ點ハスベテソノ條件ヲ滿足シ

ナイ.

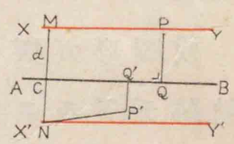
トイフコトヲ證明シテモヨイ.

44. 重要ナ軌跡

軌跡題 1.　一定點カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハソノ定點ヲ中心トシ,一定ノ距離ヲ半徑トスル圓周デアル.

軌跡題 2.　一定直線カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ直線ノ兩側デソレカラ一定ノ距離ニアル一組ノ平行線デアル.

[證明]　AB上ノ一點CデABニ垂線MNヲ作リ, $CM=CN=d$ヲ滿足スルM, NヲABノ反對側ニトル. M及ビNヲ通ツテ夫々ABニ平行ナ直線XY, $X'Y'$ヲ作レバ,コレガ求メル軌跡デアルコトヲ證明スル.



I.　XY, $X'Y'$ノ中ノ何レカ一方,例ヘバXY上ニ任意ノ一點Pヲトツテ, $PQ\perp AB$トスレバ$MCQP$ハ明ラカニ矩形デアル. 從ツテ

$$PQ=MC=d.$$

ヨツテXY上ノ點ハABカラdノ距離ニアル.

同樣ニ$X'Y'$上ノ點ハABカラdノ距離ニアル.

II.　逆ニABカラdノ距離ニアル點ヲP'トシ, P'ハABニ關シテ$X'Y'$ノ側ニアルモノトスル. P'カラABニ垂線ヲ引キ,ソノ足ヲQ'トスレバ

$$CN \parallel P'Q', \quad CN=P'Q'.$$

故ニ四邊形$CNP'Q'$ハ平行四邊形デアル.

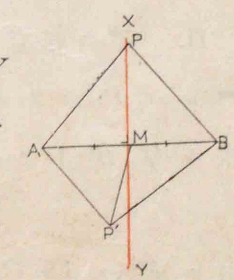
故ニ　　$CQ' \parallel NP'$

然ルニ$X'Y'$ハNヲ通ツテABニ平行ナ直線デアルカラ,公理ニヨツテ$X'Y'$トNP'トハ一致シナケレバナラナイ. 故ニP'ハ$X'Y'$上ニアル.

P'ガABニ關シテXYノ側ニアルトキモ,同樣ニシテP'ハXY上ニアルコトガ證明サレル.

軌跡題 3.　二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハコレラヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル.

[證明]　二定點ヲA, B,線分ABノ垂直二等分線ヲXYトスレバ, XYガ求メル軌跡デアルコトヲ證明スル.



I.　XY上ニ任意ノ一點Pヲトレバ　$AP=BP$.

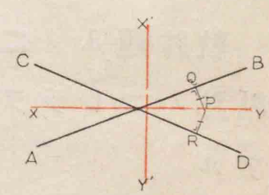
即チ XY 上ノ點ハスベテ A, B カラ等距離ニアル.

II. A, B カラ等距離ニアル任意ノ點ヲ P' トシ, P' ト A, M, B トヲ結ベバ, $\triangle P'AB$ ハ二等邊三角形トナルカラ, 中線 $P'M$ ハ AB ニ垂直デアル. 故ニ P' ハ XY 上ニナケレバナラナイ.

軌跡題 4. 相交ル二直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハソノ二直線ノナス角ヲ二等分スル二ツノ互ニ垂直ナ直線デアル.

[證明] 相交ル二直線ヲ AB, CD トシ, コレラノ二直線ノナス角ノ二等分線ヲ $XY, X'Y'$ トスレバ, コレラガ求メル軌跡デアルコトヲ證明スル.

I. XY 又ハ $X'Y'$ 上ノ任意ノ一點 P カラ AB, CD ニ夫々垂線 PQ, PR ヲ引ケバ



$$PQ=PR.$$

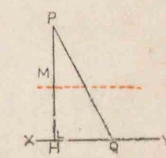
II. 逆ニ任意ノ一點 P' ガ角ノ二邊カラ等距離ニアレバ, P' カラ AB, CD ヘ垂線ヲ引キ, ソレラノ足ヲ夫々 Q', R' トスル. ソノトキハ

$$\triangle P'Q'O \equiv \triangle P'R'O.$$

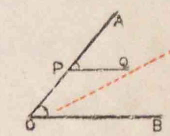
故ニ P' ハ AB, CD ノナス角ノ二等分線上ニアル.

演習問題 V.

1. 一定點ヲ通ル定半徑ノ圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.
2. 二點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.
3. 一定直線 XY ノ上ニナイ點 P カラ XY ニ引イタ線分 PQ ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.



4. 與ヘラレタ角 AOB ノ一邊 OA 上ノ任意ノ點 P カラコノ角ノ内部ニ OB ニ平行デ, OP ニ等シイ線分 PQ ヲ引クトキ, 點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ.



第三編

面積

第一章 三角形及ビ平行四邊形ノ面積

45. 矩形ノ面積

定義 線デ圍マレタ平面ノ有限ノ部分ノ大キサヲ,ソノ平面圖形ノ**面積**トイフ.

公理. 一ツノ圖形ヲ,ソノ形ヲ變ヘズニ他ノ圖形ニ全ク重ネ合ハスコトガ出來ルトキ,ソノ兩圖形ノ面積ハ相等シイ.

[注意] 合同デアル圖形,即チ全ク重ネ合ハスコトノ出來ル二ツノ圖形ハ必ズ面積ガ等シイガ,面積ノ等シイ圖形ハ必ズシモ合同デハナイ.

矩形ノ面積ヲ表ス數ハ,相隣ル二邊ヲ表ス數ノ積ニ等シイ.

[註 1] 立體ノ體積ノ部分ヲ參照セヨ.

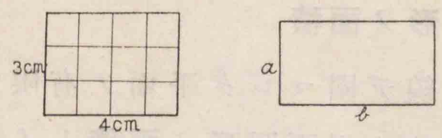
[註 2] 圖形ノ面積ヲ表ス數,一邊ヲ表ス數等トイフ代リニ,簡單ニ面積及ビ一邊トイフ.

正方形ノ面積ハ一邊ノ平方ニ等シイ.

[定義] 面積ノ等シイ圖形ハ等積デアルトイフ.

二ツノ圖形A, Bガ等積デアルトキハ, $A=B$ デ表ス. 例ヘバ$\triangle ABC$ト$\triangle DEF$トガ等積デアルトキハ, $\triangle ABC=\triangle DEF$ ト書ク.

問 次ノ矩形ノ面積ハ幾ラカ.



46. 平行四邊形ノ面積

[定義] 平行四邊形ノ任意ノ一邊ヲ**底邊**トイヒ,コレトソノ對邊トノ距離ヲ**高サ**トイフ.

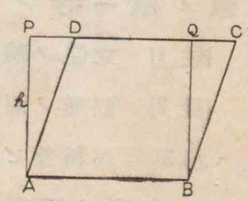
定理 26. 平行四邊形ノ面積ハ,コレト底邊及ビ高サガ相等シイ矩形ノ面積ニ等シイ.

[證明] 平行四邊形$ABCD$デA及ビBカラ對邊ニ垂線AP, BQヲ引ケバ,

$$\triangle BCQ=\triangle ADP.$$

コノ式ノ兩邊ニ四邊形$ABQD$ヲ加ヘレバ

$$▱ABCD=\text{矩形 } ABQP.$$



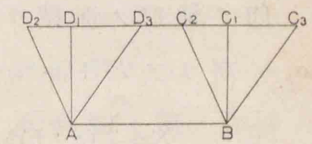
系 1. 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等シイ.

従ツテ面積ヲS,底邊及ビ高サヲ夫々a, hトスレバ,

$$S=ah.$$

系 2. 底及ビ高サガ相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ハ相等シイ.

問 底邊15cm, 面積30cm²デアル平行四邊形ノ高サヲ求メヨ.



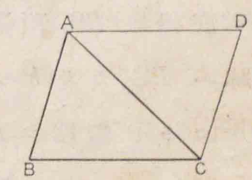
47. 三角形ノ面積

定理 27. 三角形ノ面積ハ,コレト底及ビ高サガ相等シイ平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シイ.

[證明] $\triangle ABC$ノ二邊BC, BAヲ二邊トスル平行四邊形$ABCD$ヲ作レバ, ACハ對角線トナルカラ

$$\triangle ABC\equiv\triangle CDA.$$

故ニ $$\triangle ABC=\frac{1}{2}▱ABCD.$$



系 1. 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ半分デアル.

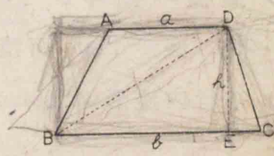
従ツテ面積ヲS, 底及ビ高サヲ夫々a, hトスレバ,

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

系 2. **底邊及ビ高サガ夫々相等シイ三角形ノ面積ハ相等シイ.**

系 3. **梯形ノ面積ハ底ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ.**

即チ梯形ノ面積ヲ S, 兩底ヲ a, b, 高サヲ h トスレバ,



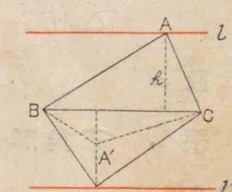
$$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

問　對角線 BD ヲ引イテ,系 3 ヲ證明セヨ.

軌跡題 5. **三角形ノ底邊ノ位置ト大キサ及ビ高サガ一定デアルトキ,頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.**

底邊ヲ BC, 頂點ヲ A, 高サヲ h トスレバ,求メル軌跡ハ BC カラ h ノ距離ニアル二ツノ直線 l, l' デアルコトヲ證明スル.

(1) コレラノ直線上ノ任意ノ一點 A ヲトレバ, $\triangle ABC$ ハ明ラカニ BC ヲ底邊トシ, h ヲ高サトスル三角形デアル.



故ニ l, l' 上ノスベテノ點ハ條件ニ適スル.

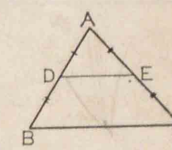
(2) l 及ビ l' ノ上ニナイ一點 A' ヲトレバ, A' カラ BC ヘノ距離ハ h ニ等シクナイ. 故ニ A' ハ條件ニ適シナイ.

演習問題 VI.

1. 三角形ノ一ツノ中線ハ,コレヲ面積ノ等シイ二ツノ三角形ニ分ケルコトヲ證明セヨ.

2. 菱形ノ面積ハソノ二ツノ對角線ノ積ノ半分ニ等シイ.

3. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トスレバ,

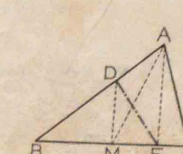


$$\triangle ADE=\frac{1}{4}\triangle ABC.$$

4. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル任意ノ直線ハ,コレヲ等積ナ二ツノ部分ニ分ケル.

5. 三角形ノ一ツノ頂點ヲ通ル二ツノ直線ヲ引イテ,コノ三角形ノ面積ヲ三等分セヨ.

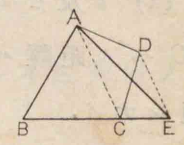
6. $\triangle ABC$ ノ邊 AB 上ノ一點 D ヲ通ル一ツノ直線ヲ引キ,コノ三角形ノ面積ヲ二等分セヨ.



7. 與ヘラレタ四邊形ト等積デア

ル三角形ヲ作レ.

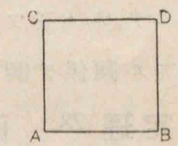
8. 位置ト大キサトガ與ヘラレテキル線分 BC ヲ底トスル與ヘラレタ高サノ $\triangle ABC$ ノ重心 G ノ軌跡ヲ求メヨ.



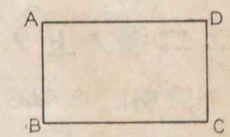
第二章 線分ノ上ノ正方形

48. 線分ノ上ノ正方形

線分 AB ヲ一邊トスル正方形 $ABCD$ ヲ **AB ノ上ノ正方形**トイヒ, ソノ面積ヲ $\overline{AB}^2$ デ表ス.



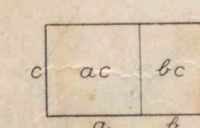
矩形 $ABCD$ ノ面積ノコトヲ **AB ト BC トガ包ム矩形,又ハ二ツノ線分ノ包ム矩形ノ面積**トイヒ,コレヲ $AB\cdot BC$ デ表ス.



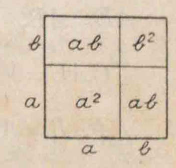
例 題

次ノ式ヲ圖ニヨツテ證明セヨ (1—4).

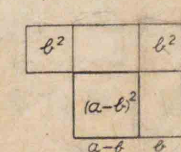
1. $(a+b)c=ac+bc.$



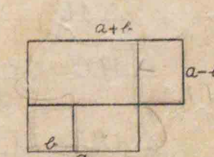
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$



3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

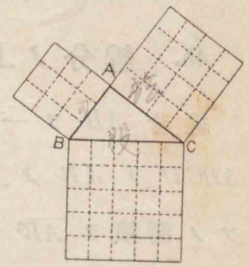


4. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$



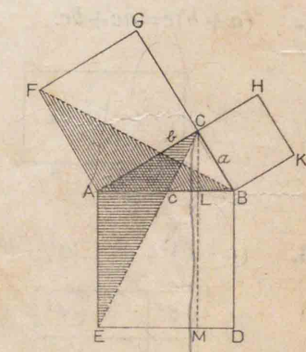
49. ぴたごらすノ定理 (勾股弦ノ定理)

問 三邊ガ 3cm, 4cm, 5cm ノ直角三角形ノ各邊ヲ一邊トスル正方形ヲ作ツテ,ソノ三ツノ正方形ノ面積ノ間ニアル關係ヲ調ベヨ.



定理 28. 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ直角ヲ夾ム二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ.

[證明] $\triangle ABC$ デ $\angle C$ ヲ直角トスル. AB, BC, CA ヲ一邊トスル正方形ヲ夫々 $ABDE$, $BCHK$, $CAFG$ トシ, C カラ AB ニ垂直ナ直線ヲ作リ AB, DE トノ交點ヲ夫々 L, M トスル.



$\triangle AEC$, $\triangle ABF$ デ

$$AE=AB,\quad AC=AF.$$
$$\angle CAE=90^\circ+\angle CAB,$$
$$\angle FAB=90^\circ+\angle CAB.$$

從ツテ $\angle CAE=\angle FAB$.

故ニ $\triangle AEC\equiv\triangle ABF$.

又 $\triangle AEC=\frac{1}{2}\square AEML$,

$\triangle ABF=\frac{1}{2}\square CAFG$.

故ニ $\square AEML=\square CAFG$.

同様ニ $\square DBLM=\square BCHK$.

コノ兩式ヲ邊々相加ヘ

$$\square ABDE=\square BCHK+\square CAFG.$$

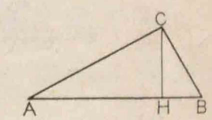
故ニ $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$.

$\triangle ABC$ ノ三邊ノ大キサヲ圖ノヤウニ a, b, c トスレバ

$$a^2+b^2=c^2.$$

[註] コノ定理ヲぴたごらすノ定理トイフ.

系. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C カラ斜邊ニ垂線ヲ引キソノ足ヲ H トスレバ,



$$\overline{AC}^2=AB\cdot AH,\qquad \overline{BC}^2=BA\cdot BH.$$

例題

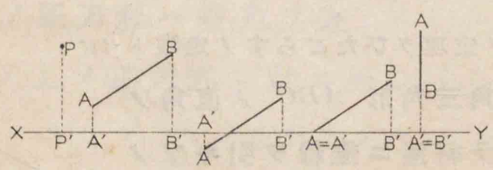
1. 直角ヲ夾ム二邊ガ夫々 3cm, 4cm デアルトキ,斜邊ノ長サハ幾ラカ.
2. 二邊ガ夫々 a cm, b cm デアル矩形ノ對角線ヲ求メヨ.
3. 一邊ガ a cm デアル正三角形ノ高サヲ求メヨ.

50. 多角形ノ面積

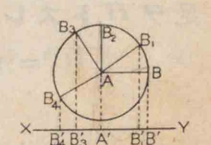
[定義] 一點カラ一直線ヘ引イタ垂線ノ足ヲ,ソノ

直線上ニ投ズルソノ點ノ**正射影**トイフ．或線分ノ兩端カラ他ノ一直線ニ引イタ垂線ノ足ノ間ノ線分ヲ，ソノ直線上ニ投ズルソノ線分ノ**正射影**トイフ．

例ヘバ點P'ハ點Pノ直線XY上ニ投ズル正射影，線分$A'B'$ハ線分ABノXY上ニ投ズル正射影デアル．



問 1 線分ABノXY上ニ投ズル正射影$A'B'$ハドンナ場合ニ最モ長イカ．又最モ短イカ．

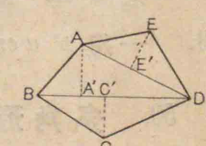


問 2 長サ10cmノ線分ガXYト次ノ角ヲナストキ，ソノ正射影ノ長サハ幾糎デアルカ．

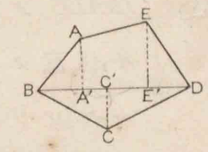
30°, 45°, 60°.

多角形ノ面積ヲ求メルニハ次ノ二方法ガアル．

I 與ヘラレタ多角形ヲ幾ツカノ三角形ニ分ケテ，各三角形ノ面積ノ和ヲ求メル．



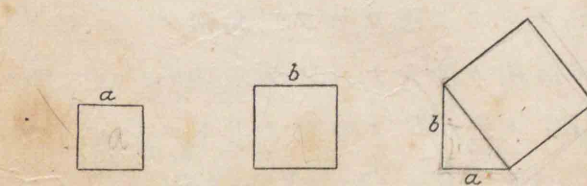
II 一ツノ對角線上ニ投ズル各頂點ノ正射影ニヨツテコレヲ幾ツカノ三角形ト梯形トニ分ケテ，ソノ各々ノ面積ノ和ヲ求メル．



問 上ノ圖形ノ面積ヲ求メヨ．但シ $BA'=3m$, $DE'=3m$, $BD=10m$, $AA'=3.5m$, $EE'=4m$, $CC'=3m$ トスル．

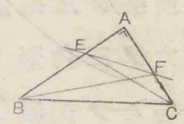
演習問題 VII.

1. 直角三角形ノ斜邊及ビ他ノ二邊ノ和ガ夫々25cm, 31cmデアルトキ，ソノ二邊ヲ求メヨ．
2. 與ヘラレタ二ツノ正方形ノ和ニ等シイ正方形ヲ作レ．



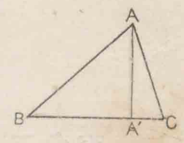
3. 周ガ60cmノ正三角形ノ面積ト正方形ノ面積トハ何レガ大キイカ．
4. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ夫々m^2-n^2, $2mn$デアルトキ，斜邊ノ長サヲ求メヨ．
5. 四邊形ノ對角線ガ直交スルトキハ，相對スル邊ノ平方ノ和ハ相等シイ．

6. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ガ直角デアルトキ,任意ノ直線 EF ト AB, AC 又ハソレラノ延長トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ,



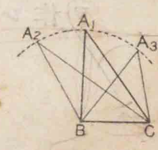
$$\overline{BF}^2+\overline{CE}^2=\overline{BC}^2+\overline{EF}^2.$$

7. 三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ差ハコレラノ二邊ノ第三邊上ニ投ズル正射影ノ上ノ正方形ノ差ニ等シイ.



8. 長サ1ノ線分ヲ與ヘテ$\sqrt{2}$ノ長サノ線分ヲ作レ.

9. 與ヘラレタ二邊ヲモツ三角形ノ中デ面積ノ最大ナモノヲ求メヨ.



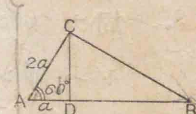
10. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點ヲ M トスレバ,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{MB}^2+\overline{AM}^2).$$

11. $\triangle ABC$ デ $\angle A=60^\circ$ デアレバ,

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-AB\cdot AC.$$

($AC=2AD$ ニ注意セヨ.)



第四編

圓

第一章　圓ノ基本性質

51. 圓ニ關スル點ノ位置

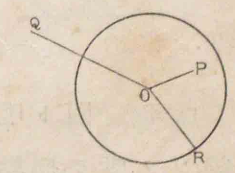
定義　圓周デ圍マレタ平面ノ部分ニアル點ヲ圓内ノ點,圓周上ニアル點ヲ圓周上ノ點トイヒ,圓内ノ點デモ,圓周上ノ點デモナイ點ヲ圓外ノ點トイフ.

定理 29. **一點カラ圓ノ中心マデノ距離ハソノ點ガ**

(1)　圓内ノ點カ,

(2)　圓周上ノ點カ,

(3)　圓外ノ點カ



ニヨツテ

(1)　半徑ヨリ小デアルカ,

(2)　半徑ニ等シイカ,

(3)　半徑ヨリ大デアル.

證明ハ略ス.

52. 圓ニ關スル直線ノ位置

定理 30. **圓ノ中心カラノ距離ガ**

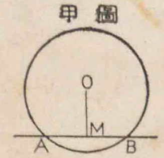
(1) 半徑ヨリ小サイ直線ハ圓ト二點ヲ共有スル.

(2) 半徑ニ等シイ直線ハ圓ト唯一點ヲ共有スル.

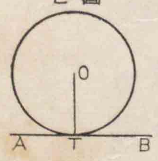
(3) 半徑ヨリ大キイ直線ハ圓ト一點モ共有シナイ.

證明ハ略ス.

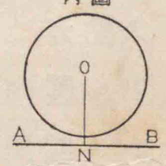
甲圖



乙圖



丙圖



定義　圓ト唯一點ヲ共有スル直線ヲコノ圓ノ**切線**,ソノ點ヲ**切點**トイヒ,コノ圓ト直線トハ**相切スル**トイフ. 圓ト二點ヲ共有スル直線ヲコノ圓ノ**割線**トイヒ,コノ圓ト直線トハ**相交ル**トイフ.

例ヘバ甲圖デ AB ハ割線,乙圖デ AB ハ切線,Tハソノ切點デアル.

例題

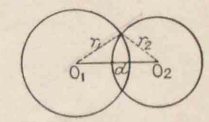
1. 半徑ノ相等シイ二圓ハ合同デアル. 又一ツノ圓ヲ直徑デ分ケタ兩半圓ハ合同デアル.

2. 半徑ガ夫々 r_1, r_2 ノ二圓ガ二點ヲ共有スルトキ, 中心ヲ O_1, O_2, ソノ距離ヲ d トスレバ

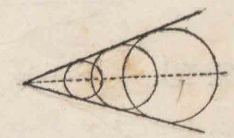
$$r_1+r_2>d,$$

$$r_1-r_2<d.$$

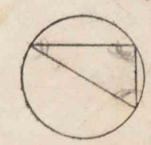
但シ $r_1>r_2$.



3. 角ノ二等分線上ノ點ヲ中心トシテソノ二邊ニ切スル圓ヲ畫ケ.

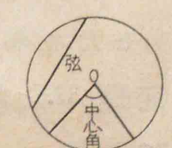


4. 直徑ト,ソノ兩端ヲ圓周上ノ一點ニ結ブ二線分トノ作ル三角形ハ直角三角形デアル.

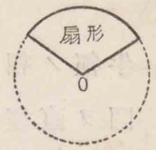


53. 弦及ビ中心角

定義　同一圓周上ニアル二點ヲ結ブ線分ヲ**弦**トイフ. 二ツノ半徑ノナス角ヲ**中心角**トイヒ,二ツノ半徑ト弧トデ圍マレタ部分ヲ**扇形**トイフ. 中心角トコノ角內ニアル弧及ビコノ弧ノ兩端ヲ結ブ

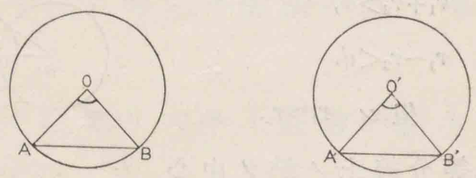


弦トハ互ニ**相對スル**トイフ.



問　一ツノ圓,又ハ二ツノ等圓デ弧ト中心角ト弦トノ間ノ關係ヲ調ベヨ.

定理 31.　相等シイ圓(又ハ同ジ圓)デ相等シイ中心角ニ對スル弧及ビ弦ハ夫々相等シイ.



[證明] 中心ガ一致スルヤウニ,圓 O ヲ圓 O' ノ上ニ重ネ,且ツ二ツノ中心角ヲ一致サセレバ,二ツノ圓ハ相等シイカラ全ク一致シ,從ツテ A ハ A' ニ, B ハ B' ニ一致スル.

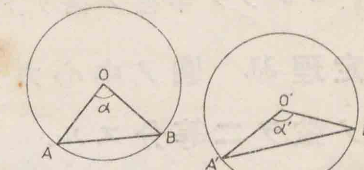
故ニ　$\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$,　弦 $AB=$ 弦 $A'B'$.

系 1.　コノ定理ノ逆ハ眞デアル.

系 2.　相等シイ圓(又ハ同ジ圓)デ,大キイ中心角ニ對スル弧(又ハ弦)ハ,小サイ中心角ニ對スル弧(又ハ弦)ヨリモ大キイ.　コノ逆モ亦眞デアル.

定理 32.　相等シイ圓(又ハ同ジ圓)デ,相等シイ弧ニ對スル弦ハ等シク,大キイ劣弧ニ對スル弦ハ小サイ劣弧ニ對スル弦ヨリモ大キイ.

[證明]　$\widehat{AB}$ 及ビ $\widehat{A'B'}$ ニ對スル中心角 α, α' ハ前定理ノ系1及ビ系2ニヨツテ,



$\widehat{AB}\gtreqless\widehat{A'B'}$ ナラバ

$\alpha\gtreqless\alpha'$.

然ルニ前定理及ビソノ系2ニヨツテ $\alpha\gtreqless\alpha'$ ナラバ

弦 $AB\gtreqless$ 弦 $A'B'$.

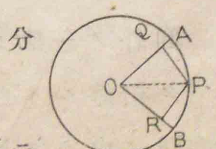
故ニ $\widehat{AB}\gtreqless\widehat{A'B'}$ ナラバ

弦 $AB\gtreqless$ 弦 $A'B'$.

系.　コノ逆モ眞デアル.

例　　題

1. 直徑ハ最大ノ弦デアル.
2. AB ト CD トガ同一ノ圓ノ直徑デアルトキ,
   弧 $AC=$ 弧 BD.
3. 中心角ガ2倍,3倍等トナレバ,コレニ對スル弧モ夫々2倍,3倍等トナル.　逆モ亦眞デアル.
4. 中心角ヲ等分スレバ,弧モ亦等分セラレル.

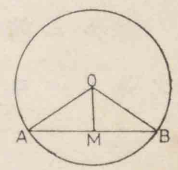


5. 圓周上ノ一點カラ二ツノ半徑ニ

6

下シタ垂線ノ長サガ相等シイトキハ,ソノ點ハコレラノ半徑ノ截リトル弧ノ中點デアル.

定理 33.　圓ノ中心カラ弦ニ引イタ垂線ハソノ弦ヲ二等分スル.



[證明]　圓ノ中心 O カラ弦 AB ニ引イタ垂線ノ足ヲ M トスレバ, $OA=OB$, OM ハ共通デアルカラ, 定理11ニヨッテ

$$\triangle OAM \equiv \triangle OBM$$

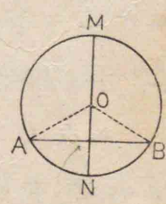
故ニ　$AM=BM$.

系.　圓ノ中心ト直徑デナイ弦ノ中點トヲ通ル直線ハ弦ニ垂直デアル.

例　題

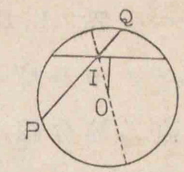
1.　弦ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

2.　中心カラ弦ニ引イタ垂線ノ延長ハ,コノ弦ニヨッテ分タレル共軛弧ノ各々ヲ二等分スル.

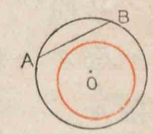


3.　圓外ノ一點カラ圓周上ニ引イタ相等シイ二線分ノナス角ノ二等分線ハソノ圓ノ中心ヲ通ル.

4.　圓内ノ一定點ヲ通ル弦ノ中デ最小デアルモノハ,ソノ點ヲ通ル直徑ニ垂直デアル.



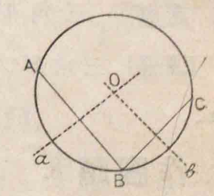
5.　長サガ等シイ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.



54.　三點ヲ通ル圓

問　一點ヲ通ル圓ハ幾ツアルカ.　又二點デハドウカ.

定理 34.　同一直線上ニナイ三點ヲ通ル圓周ハイツモ唯一ツアル.



[證明]　三點 A, B, C ハ一直線上ニナイカラ,線分 AB ノ垂直二等分線 a ト線分 BC ノ垂直二等分線 b トハ一點 O デ交ル.　從ッテ點 O ハ A 及ビ B, B 及ビ C カラ等距離ニアル.　即チ

$$OA=OB=OC.$$

故ニ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周ハ三點 A, B, C ヲ通ル.　ヨッテ少クトモ一ツアルコトダケハ證明サレタ.

次ニ唯一ツニ限ルコトヲ證明スル.　今圓 O 以

外ニ三點 A, B, C ヲ通ル圓周 O' ガアルモノトスレバ,ソノ中心 O' ハ AB ノ垂直二等分線 a 及ビ BC ノ垂直二等分線 b 上ニナケレバナラナイ. 從ツテ O' ハ a ト b トノ交點デアル. ヨッテ O' ハ O ト一致スル. 且圓 O' ノ半徑ハ OA ニ等シイカラ,圓 O ト圓 O' トハ全ク一致スル. 故ニ三點ヲ通ル圓周ハ唯一ツニ限ル.

系 1. 二ツノ圓周ガ三點ヲ共有スレバ,ソノ兩圓周ハ全ク一致スル.

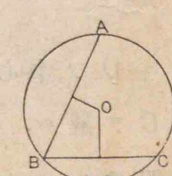
系 2. 相異ナル二ツノ圓周ハ二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトハナイ.

[定義] 三角形ノ三頂點ヲ通ル圓ヲ**外接圓**トイフ.

[注意] 三角形ノ外心ハソノ三角形ノ外接圓ノ中心デアル.

作圖題 8. 與ヘラレタ圓ノ中心ヲ求メルコト.

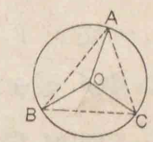
[作圖] 圓周上ニ任意ニ三點 A, B, C ヲトッテ, B ヲ A 及ビ C ニ結ビ,線分 AB, BC ノ垂直二等分線ノ交點ヲ O トスレバ, O ハ與ヘラレタ圓ノ中心デアル.



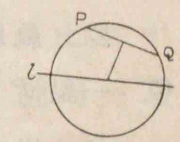
證明ハ略ス.

例　題

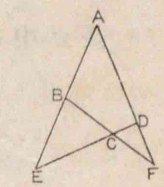
1. 點 O ト三點 A, B, C トノ距離ガ相等シイトキハ O ハ $\triangle ABC$ ノ外心デアル.



2. 一ツノ直線 l ト二點 P, Q トヲ與ヘテ, l 上ニ中心ヲモチ, P 及ビ Q ヲ通ル圓ヲ作レ.



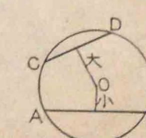
3. 四邊形ノ四ツノ頂點及ビ相對スル二邊ノ延長ノ交點ノ六點ノ中デ,三ツヅツノ定メル圓ハ幾ツアルカ.



演習問題 VIII.

1. 同ジ圓又ハ相等シイ圓デ,相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル.

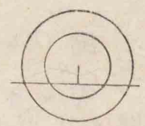
2. 同ジ圓又ハ相等シイ圓デ,大キイ弦ハ小サイ弦ヨリモ中心トノ距離ハ短イ. 逆モ亦眞デアル.



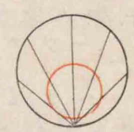
3. 同ジ圓又ハ相等シイ圓デ,中心カラ等距離ニアル弦ハ相等シイ.

[註] 二ツ以上ノ圓ガ同一ノ中心ヲモツトキコレヲ**同心圓**トイフ.

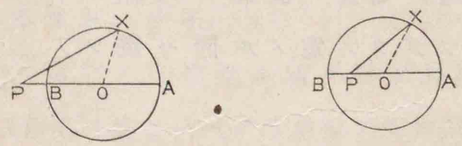
4. 一直線ガ二ツノ同心圓ノ各々ト交ルトキ,コレラノ圓周ノ間ニアル二ツノ線分ハ相等シイ.



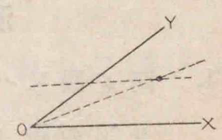
5. 圓周上ノ一點カラ引イタ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.



6. 一點 P カラ圓 O ノ周ヘ引イタ線分ノ中デ,中心ヲ通ルモノガ最大デアル. 又延長ガ中心ヲ通ルモノガ最小デアル.



7. 角 XOY ノ二邊ニ切シ與ヘラレタ長サノ半徑ヲモツ圓ノ中心ヲ求メヨ.



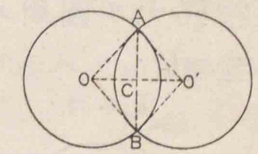
第二章 二圓ノ位置ノ關係

55. 相交ル二圓

[定義] 二ツノ圓ノ中心ヲ通ル直線ヲ二圓ノ**中心線**トイヒ,兩中心間ノ距離ヲ**中心線ノ長サ**トイフ.

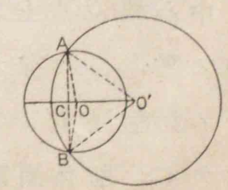
定理 35. 二ツノ圓周ガソノ中心線上ニナイ一點ヲ共有スルトキハ,コレラノ圓周ハ又他ノ一點ヲ共有スル.

[證明] 二ツノ圓 O, O' ガ中心線 OO' 上ニナイ一點 A ヲ共有スルトキ,A カラ OO' ニ垂線 AC ヲ引キコレヲ延長シテ AC ニ等シク CB ヲトレバ,



$$OA=OB,\quad O'A=O'B$$

然ルニ OA ハ圓 O ノ半徑デアルカラ,OB モ亦圓 O ノ半徑デアル. ヨツテ點 B ハ圓 O 上ニアル. 同様ニ B ハ圓 O' 上ニアル. 即チ B ハ二ツノ圓 O, O' ノ A トハ異ナル共通ナ點デアル.



[定義] 二ツノ圓周ガ二點ヲ共有スルトキハ,コノ

二ツノ圓周ハ**相交ル**トイヒ,ソノ二ツノ共有點ヲ結ブ線分ヲコノ兩圓ノ**共通弦**トイフ.

系 1. **二ツノ圓ノ中心線ハソノ共通弦ヲ垂直ニ二等分スル.**

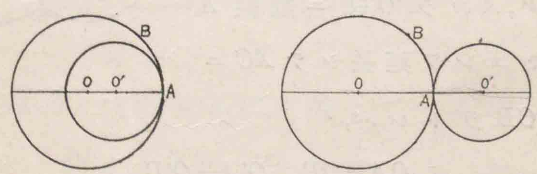
系 2. **二ツノ圓ノ共通弦ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ兩圓ノ中心線デアル.**

56. 相切スル二圓

定理 36. **中心線上ノ一點ヲ共有スル二ツノ相異ナル圓周ハ他ノ點ヲ共有シナイ.**

[證明]

甲圖　　乙圖



中心線 OO' 上ノ一點 A ヲ共有スル二ツノ圓周ガ他ノ點 B ヲ共有スレバ,前定理ニヨリ OO' ニ關スル B ノ對稱點 B' モ亦圓 O, O' ノ共有點デナケレバナラナイ. 卽チ兩圓ハ三點 A, B, B' ヲ共有スルカラ,定理34系1ニヨツテ圓 O, O' ハ全ク一致スル. コレハ假設ニ反スル.

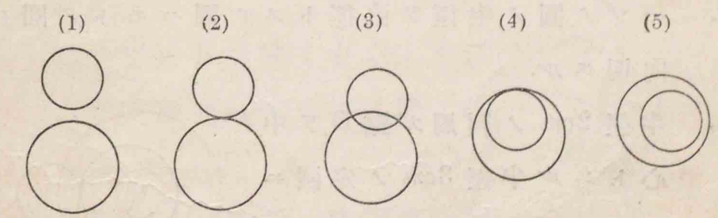
故ニ兩圓ハ A ト異ナル他ノ點ヲ共有シナイ.

定義　二ツノ圓周ガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキハ,コノ兩圓ハ**相切スル**トイヒ,ソノ共有點ヲ**切點**トイフ. 二ツノ圓ガ相切スルトキ,ソノ切點ヲ除キ一方ガ他方ノ內部ニアレバ**內切スル**(上圖甲)トイヒ,ソウデナケレバ**外切スル**(上圖乙)トイフ.

系 1. **二ツノ圓ガ相切スルトキハ,ソノ切點ハ兩圓ノ中心線上ニアル.**

[註] 切點ガ中心線上ニナイモノト假定シテ,ソノ結果ガ矛盾スルコトヲ證明セヨ.

系 2. **二ツノ相異ナル圓ノ位置ハ次ノ五ツノ場合ニ限ル.**



(1) **各々他ノ外部ニアル**　(共有點ハナイ).
(2) **外切スル**　(共有點ハ一ツ).
(3) **相交ル**　(共有點ハ二ツ).
(4) **內切スル**　(共有點ハ一ツ).

7

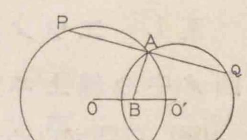
(5)　**一方ガ他方ノ內部ニアル**(共有點ハナイ).

例　題

1.　半徑ガ各々 $7cm, 5cm$ デアル圓ノ中心線ガ夫々 $15cm,\ 12cm,\ 10cm,\ 2cm,\ 1cm$ デアルトキ,二圓ノ位置ノ關係ハドウカ.

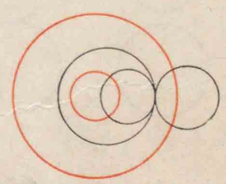
2.　相交ル二ツノ圓ノ中心ヲ O, O', 交點ノ一ツヲ A, OO' ノ中點ヲ B トシ, A ヲ通リ BA ニ垂直ナ割線ト二圓トノ交點ヲ P, Q トスレバ

$$AP=AQ.$$



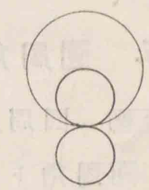
3.　一ツノ圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ハモトノ圓ニ內切スル.

4.　半徑 $2cm$ ノ圓周ガ點 O ヲ中心トスル半徑 $3cm$ ノ定圓ニ切シナガラ動クトキ,ソノ動圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.



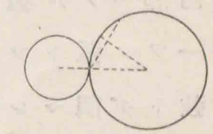
演習問題 IX.

1.　定點ヲ中心トシテ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.



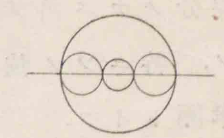
2.　定圓周上ノ定點デコノ圓ニ切スル定半徑ノ圓ヲ作レ.

3.　定圓周上ノ定點デコレニ切シ他ノ一定點ヲ通ル圓ヲ作レ.

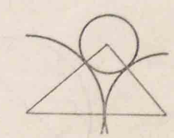


[註]　定點ガ定圓ノ內外ニアル二ツノ場合ヲ考ヘヨ.

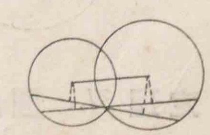
4.　二ツノ圓ノ中心線上ニ中心ヲモチコレラノ圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.



5.　三角形ノ各頂點ヲ中心トシ,二ツヅツ相切スル三ツノ圓ヲ作レ.



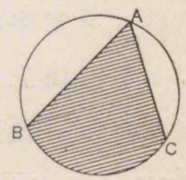
6.　相交ル二ツノ圓ノ交點ヲ通ル割線ノコレラノ圓ノ間ニ夾マレタ部分ガ最大ナモノハ何カ.



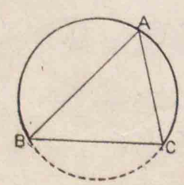
第三章 圓周角

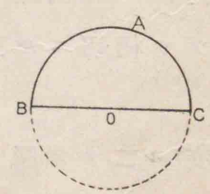
57. 圓周角

[定義] 圓周上ノ一點カラ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲ**圓周角**トイヒ,圓周角ハソノ角ノ内部ニアル**弧ノ上ニ立ツ**トイフ.



一ツノ弧トソノ弧ノ兩端ヲ結ンダ弦トデ圍マレタ部分ヲ**弓形**トイヒ,ソノ弧ノ上ノ一點ト弦ノ兩端トヲ結ンダ二ツノ線分ノナス角ヲ**弓形内ノ角**,又ハ**弓形ノ含ム角**トイフ. 特ニソノ弦ガ直徑デアル場合ニハソノ弓形ヲ**半圓**トイフ.

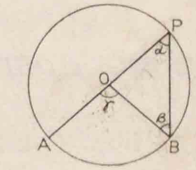




定理 37. 圓周角ハソレガ立ツ弧ニ對スル中心角ノ半分ニ等シイ.

[證明] 圓ノ中心 O ト弧 AB ノ上ニ立ツ一ツノ圓周角 APB トノ位置ノ關係ニヨツテ,次ノ三ツノ場合ガ起ル.

(1) O ガ $\angle APB$ ノ一ツノ邊上ニアル場合



右圖デ $\triangle OBP$ ハ二等邊三角形デアルカラ

$$\alpha=\beta.$$

γ ハ $\triangle OBP$ ノ外角デアル. 從ツテ

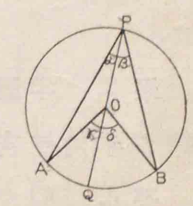
$$\alpha+\beta=\gamma.$$

故ニ

$$2\alpha=\gamma,$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\gamma.$$

(2) O ガ $\angle APB$ ノ内部ニアル場合



直徑 PQ ヲ引ケバ, (1) デ證明シタコトニヨリ,右圖デ $\triangle OAP$ ニ就イテハ,

$$\alpha=\frac{1}{2}\gamma.$$

同樣ニ $\triangle OBP$ ニ就イテハ

$$\beta=\frac{1}{2}\delta.$$

故ニ

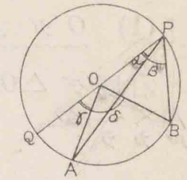
$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}(\gamma+\delta).$$

卽チ

$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB.$$

(3) Oガ$\angle APB$ノ外部ニアル場合.

前ト同様ニ右圖デ$\triangle OAP$ニ就イテ,



$$\alpha=\frac{1}{2}\gamma.$$

同様ニ$\triangle OBP$ニ就イテハ

$$\beta=\frac{1}{2}\delta.$$

故ニ $$\beta-\alpha=\frac{1}{2}(\delta-\gamma).$$

即チ $$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB.$$

系 1. 同ジ圓(又ハ相等シイ圓)ノ同ジ弧又ハ相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ. 逆モ眞デアル.

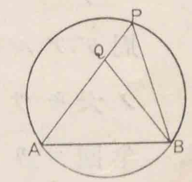
系 2. 半圓ノ含ム角ハ直角デアル. 逆ニ直角ニ等シイ角ヲ含ム弓形ハ半圓デアル.

系 3. 同ジ圓(又ハ相等シイ圓)デ,大キイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ小サイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ヨリモ大キイ.

定理 38. 弓形ノ弦ニ關シテ,ソノ弓形ト同ジ側ニアル一點トソノ弦ノ兩端トヲ結ブ線分ノナス角ハ,ソノ點ガ弓形内ニアルカ,弓形

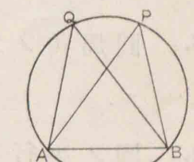
ノ弧上ニアルカ,弓形外ニアルカニ從ツテ,ソノ弓形ノ含ム角ヨリ大キイカ,等シイカ,或ハ小サイ.

[證明] Qヲ弓形APB内ノ一點トシ,AQノ延長ト弓形ノ弧トノ交點ヲPトスレバ,$\triangle BPQ$デ



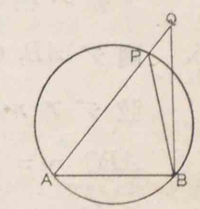
$$\angle AQB=\angle QPB+\angle PBQ.$$

故ニ $$\angle AQB>\angle APB.$$



次ニ,Qヲ弓形APB上ノ一點トスレバ,定理37系1ニヨツテ

$$\angle AQB=\angle APB.$$



次ニ,Qガ外部ニアルトキハ

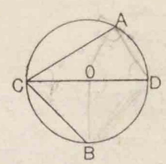
$$\angle APB=\angle PQB+\angle QBP.$$

故ニ $$\angle APB>\angle AQB.$$

系. 逆ニ弓形ノ弦ニ關シテ,ソノ弓形ト同ジ側ニアル點トソノ弦ノ兩端トヲ結ブ線分ノナス角ガ(1)弓形ノ含ム角ヨリモ大キイカ,(2)等シイカ,(3)小サイカニ從ツテ,(1)弓形ノ内部ニアルカ,(2)弓形ノ弧上ニアルカ,(3)外部ニアル.

例　題

1. 圖デ弧 $AC=\frac{1}{3}$ 圓周，弧 $BC=\frac{1}{4}$ 圓周デアルトキ，$\angle ACB$ 及ビ $\angle ACD$ ノ大キサヲ求メヨ．

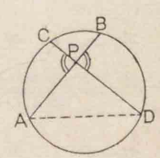


2. 半圓ヨリ大キイ(又ハ小サイ)弓形内ノ角ハドンナ角カ．

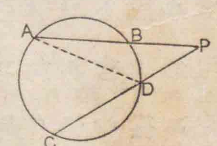
3. 圓周角ノ二等分線ハソレガ立ツ弧ノ中點ヲ通ル．

4. 圓ノ平行デアル二ツノ弦ノ間ニ夾マレタ二ツノ弧ハ相等シイ．コノ逆ヲ考ヘヨ．

5. 圖デ AB, CD ハ P デ交ル二ツノ弦デアル．コノ二弦ノナス角 APC ハコノ角トソノ對頂角トノ內部ニアル二ツノ弧ノ各々ノ上ニ立ツ圓周角ノ和ニ等シイ．



6. 圓ノ二ツノ弦ガ圓外デ交ルトキ，ソノナス角ハコノ角ノ內部ニアル二ツノ弧ノ各々ノ上ニ立ツ圓周角ノ差ニ等シイ．

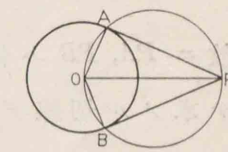


58. 切線

定理 39. 圓外ノ一點カラソノ圓ニイツモ唯二ツノ切線ガ引ケル．

[證明] 圓 O ノ外部ノ點 P カラ切線ガ引ケタモノトシソノ切點ヲ A トスレバ，

$OA \perp AP.$



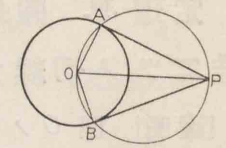
故ニ定理37系2ニヨツテ切點 A ハ OP ヲ直徑トスル圓周上ニナケレバナラナイ．然ルニ圓 O ト OP ヲ直徑トスル圓トハ唯二ツノ點デ交ル．故ニ求メル切線ハ多クトモ二ツシカナイ．

次ニ二ツノ圓ノ交點ヲ A, B トスレバ，AP モ BP モ圓 O ノ切線トナルコトヲ證明スル．今 AP ヲ考ヘレバ $\angle OAP$ ハ半圓ニ含マレルカラ直角デアル．故ニ定理30ニヨツテ AP ハ圓 O ニ切スル．同樣ニ BP モ亦圓 O ニ切スル．

作圖題 9. 圓外ノ一點カラ切線ヲ引クコト．

[作圖] 與ヘラレタ圓ヲ圓 O，圓外ノ點ヲ P トスル

トキ, OP ヲ直徑トスル圓ト圓 O トノ交點 A 及ビ B ヲ P ニ結ビツケレバヨイ.



[證明] O ト A 及ビ B トヲ結ベバ, PO ガ直徑デアルカラ

$$\angle PAO = \angle PBO = \frac{\pi}{2}.$$

故ニ PA, PB ハ何レモ A, B デ夫々圓 O ニ切スル. 卽チ求メル切線デアル.

定義 圓外ノ一點カラソノ圓ヘ引イタ**切線ノ長サ**トハソノ點ト切點トノ距離デアル.

定理 40. 圓外ノ一點カラソノ圓ニ引イタ切線ノ長サハ相等シイ.

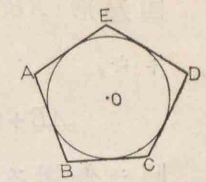
[證明] 圓 O 外ノ一點 P カラ圓 O ニ引イタ二ツノ切線ヲ夫々 AP, BP トスレバ $\triangle AOP$ ト $\triangle BOP$ トハ $\angle A$ 及ビ $\angle B$ ガ直角デアル直角三角形デ, OP ハ共通, OA ハ OB ニ等シイ. 故ニ

$$\triangle AOP \equiv \triangle BOP.$$

従ツテ $AP = BP$.

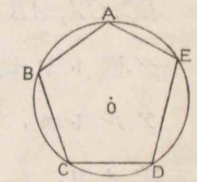
定義 多角形ノ各邊ガ同一ノ圓ニ切スルトキハ, コノ多角形ハコノ圓ニ**外切スル**トイヒ, コノ圓ハコノ多角形ニ**內切スル**トイフ.

例ヘバ圖デ五邊形 $ABCDE$ ハ圓 O ニ外切スル.



定義 多角形ノ各頂點ガ同一ノ圓周上ニアルトキ, コノ多角形ハコノ圓ニ**內接スル**トイヒ, コノ圓ヲ**外接圓**トイフ.

例ヘバ圖デ五邊形 $ABCDE$ ハ圓 O ニ內接スル.



三角形ノ內心ト三邊トノ距離ハ相等シイ. 故ニ內心ヲ中心トシ, コノ點ト一邊トノ距離ヲ半徑トスル圓ハ三邊ニ切スル. ソノトキコノ圓ヲ三角形ノ**內切圓**トイフ. 同樣ニシテ傍心ノ各々ヲ中心トシテ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ畫クコトガ出來ル. コノ圓ヲ三角形ノ**傍切圓**トイフ.

一ツノ三角形ニハ三ツノ傍心ガアルカラ, 三ツノ傍切圓ガアル.

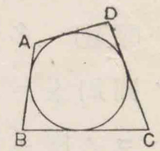
例題

1. 弦ハソノ兩端ニ於ケル切線ト相等シイ角ヲナス.

2. 圓ニ外切スル直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ

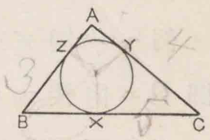
和ハ,斜邊トソノ圓ノ直徑トノ和ニ等シイ.

3. 四邊形 $ABCD$ ガ圓ニ外切スルトキ,



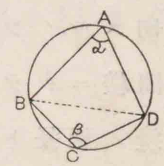
$$AB+CD=BC+AD.$$

4. 圓ニ外切スル三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ガ夫々 $5cm, 4cm, 3cm$ デ,圓トノ切點ガ夫々 X, Y, Z デアルトキ, BX, CY, AZ ノ長サヲ求メヨ.



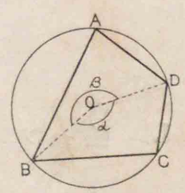
59. 圓ニ内接スル四邊形

問 紙上ニ右圖ヲ畫キ四邊形 $ABCD$ ヲ截リトリ,更ニソレヲ點線ニ沿フテ截リ, α, β ノ和ガドウナルカヲ調べヨ.



定理 41. 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ノ和ハ二直角デアル.

[證明] $ABCD$ ヲ圓ニ内接スル四邊形トシ, B, D ト中心 O トヲ結ビ,弧 BCD 上ニ立ツ中心角 α ヲ考ヘレバ



$$\angle A=\frac{1}{2}\alpha \quad (\text{定理 } 37).$$

同様ニ弧 BAD ノ上ニ立ツ中心角ヲ β トスレバ,

$$\angle C=\frac{1}{2}\beta$$

デアルカラ　$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$$=\frac{1}{2}2\pi=\pi.$$

故ニ　$\angle A+\angle C=\pi.$

同様ニ　$\angle B+\angle D=\pi.$

定義 四邊形ノ一ツノ外角ノ内對角トハ,コノ外角ニ隣ル内角ノ對角ノコトデアル.

系. 圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハソノ内對角ニ等シイ.

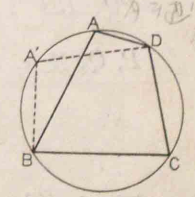
定理 42. 四邊形ノ一組ノ對角ガ互ニ補角デアレバ,コノ四邊形ハ圓ニ内接スル.

(Aヲ通ラナイデ A'ヲ通ルモノト假定スル)

[證明] 四邊形 $ABCD$ デ

$$\angle A+\angle C=\pi \qquad (1)$$

トスル. 今 B, C, D ノ三點ヲ通ル圓ヲ畫キ,弧 BCD ノ共軛弧ノ上ノ一點 A' ヲトレバ,四邊形 $A'BCD$ ハ圓ニ内接スルカラ　$\angle A'+\angle C=\pi$　(2).



(1) ト (2) カラ　$\angle A=\angle A'.$

然ルニ A ハ弓形 $BA'D$ ノ弦 BD ニ關シテ A' ト同

ジ側ニアル點デアルカラ,定理37系1ニヨツテ,Aハ又コノ弧ノ上ニナケレバナラナイ. 即チ$ABCD$ハ圓ニ內接スル.

[注意] コノ定理デ"一組ノ對角ガ互ニ補角デアレバ"トアルガ,四邊形ノ內角ノ和ハ2πデアルカラ,一組ノ對角ガ互ニ補角デアレバ,殘リノ對角モ亦互ニ補角デアル.

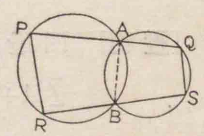
例題

1. 圓ニ內接スル四邊形ガ平行四邊形ナラバソレハ矩形デアル.

2. 圓ニ內接スル四邊形ガ菱形ナラバ,ソレハ正方形デアル.

3. 四邊形ノ外角ガソノ內對角ニ相等シケレバ,ソノ四邊形ハ一ツノ圓ニ內接スル.

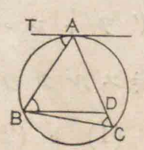
4. 二圓ノ交點A, Bヲ通ル二直線PQ, RSト圓周トノ交點ヲ夫々P, Q, 及ビR, Sトスレバ$PR//QS$.



演習問題 X.

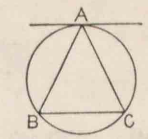
1. 圖デATハAニ於ケル圓ノ切線トシ,$BD//AT$ナラバ

$$\angle ABD = \angle ACB.$$

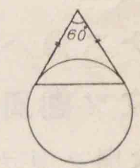


2. 一邊ガ與ヘラレタ長サノ正六角形ヲ作レ.

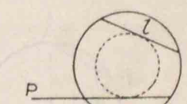
3. 圓ニ內接スル$\triangle ABC$ノ頂點Aデ引イタ切線ガBCニ平行ナラバ,$\triangle ABC$ハ二等邊三角形デアル.



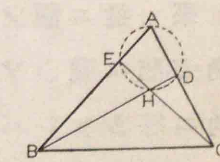
4. 一點カラ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ夾ム角ガ60°デアレバ,切線ノ長サハ切點ヲ結ブ弦ノ長サニ等シイ.



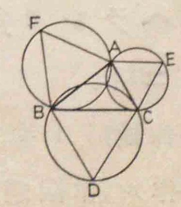
5. 一圓,ソノ圓外ノ一點P及ビソノ圓ノ直徑ヨリ小サイ線分lガ與ヘラレタトキ,Pヲ通ツテ與ヘラレタ圓ニ割線ヲ引イテ,ソノ弦ノ長サヲlニ等シクセヨ.



6. $\triangle ABC$ノB, Cカラ對邊ヘ夫々垂線BD, CEヲ引キ,垂心ヲHトスレバA, E, H, Dハ同一圓周上ニアル.



7. $\triangle ABC$ノ外方ニ各々正三角形BCD, CAE, ABFヲ作ルトキ,三ツノ圓BCD, CAE, ABFハ同一ノ點ヲ通ル.

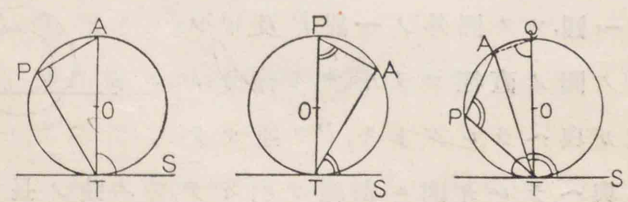


第四章 正多角形

60. 切線ト弦トノナス角

定理 43. 圓ノ切線トソノ切點ヲ通ル弦トノナス角ハ,ソノ角ノ内部ニ含マレル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ.

次圖ヲ見ナガラ三ツノ場合ニ分ケテ證明セヨ.

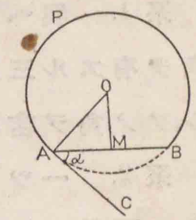


系 逆ニ圓ノ弦トソノ一端ヲ通ル直線トノナス角ガ,弦ニ關シソノ角ト反對ノ側ニアル弓形ノ含ム角ニ等シケレバ,ソノ直線ハコノ圓ノ切線デアル.

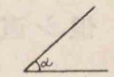
作圖題 10. 與ヘラレタ線分 AB ヲ弦トシ,與ヘラレタ角 α ニ等シイ角ヲ含ム弓形ヲ作ルコト.

[作圖] A デ AB ト α ニ等シイ角ヲナス直線 AC ヲ作ル(作圖題 1). AB ノ垂直二等分線ト, A デ AC

ニ垂直ナ直線トノ交點 O ヲ中心トシテ, OA ヲ半徑トスル圓弧ノ中デ, $\angle CAB$ 内ニ含マレナイ弓形 APB ヲトレバ,コレガ求メル弓形デアル.



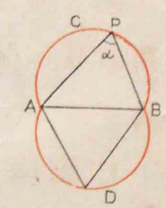
[證明] 作圖ニヨッテ O ハ AB ノ垂直二等分線 OM 上ニアルカラ, OA ヲ半徑トスル圓ハ又 B 點ヲ通ル.



$OA \perp AC$ デアルカラ, AC ハ圓 O ニ A デ切スル.

故ニ定理 43 ニヨッテ弓形 APB ハ α ニ等シイ角ヲ含ム弓形デアル.

軌跡題 6. 定線分ノ兩端ト結ンダ角ガ定角ニ等シイ點ノ軌跡ハ,ソノ線分ヲ弦トシ,ソノ定角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル.



[證明] 定線分 AB ノ兩端ト結ンダ角ガ定角 α ニ等シイ任意ノ點ヲ P トスレバ, P ハ AB ヲ弦トシ α ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧 ACB, ADB 上ニアル. 又逆ニコノ二ツノ弧ノ上ニ任意ノ一點 P' ヲ取レバ, $\angle AP'B$ ハ α ニ等シイ.

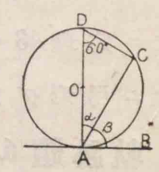
故ニ AB ノ兩端ト結ンダ角ガ α ニ等シイ點ノ軌跡ハ二ツノ弧 ACB, ADB デアル.

系 1. 與ヘラレタ底邊ノ上ニ立チ,與ヘラレタ頂角ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ,ソノ底邊ヲ弦トシ,ソノ角ヲ含ムニツノ弓形ノ弧デアル.

系 2. 一ツノ線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ハソノ線分ヲ直徑トスル圓周デアル. 但シ直徑ノ兩端ノ點ハ除ク.

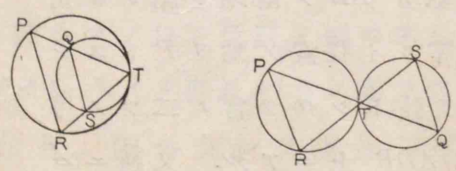
例題

1. 圖デ $\angle ADC=60°$ デアルトキ α, β ノ大キサヲイヘ.



2. 相切スル二圓ノ切點 T ヲ通ル二直線ヲ引キ,圓周トノ交點ヲ夫々 P, Q 及ビ R, S トスレバ

$$PR // QS.$$



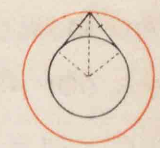
3. 二等邊三角形ノ一邊ヲ直徑トシテ畫イタ圓ハ底ヲ二等分スル.

4. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ヲ直徑トシテ圓ヲ畫ケバ,コノ兩圓ハ第三邊 BC 上デ交ル.

5. 圓ノ中心ヲ用ヒズニ,圓周上ノ與ヘラレタ點デコレニ切線ヲ引ケ.

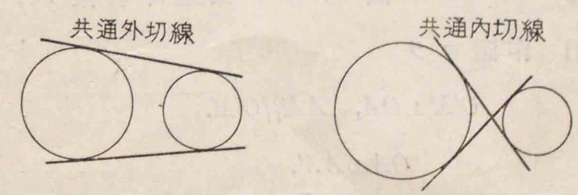
6. 一ツノ圓デ一定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

7. 與ヘラレタ圓ヘ引イタ切線ノ長サガ一定デアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.



61. 共通切線

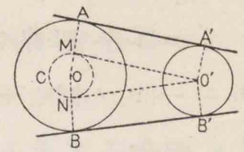
定義 二ツノ圓ガ同一ノ直線ニ切シテ,ソノ同ジ側ニアルトキハ,ソノ直線ヲ**共通外切線**トイヒ,反對ノ側ニアルトキハ,ソノ切線ヲ**共通内切線**トイフ.



作圖題 11. 二圓ニ共通ノ切線ヲ引クコト.

I 共通外切線

[方針] r, r' ヲ夫々二圓 O, O' ノ半徑トシ, $r>r'$ トスル. ($r=r'$ ノトキハ140頁ノ例題3ヲ見ヨ). 共通切線 AA' ガ引ケタモノト假定シ, A, A' ヲソノ切



點トスル. 又 O' カラ AA' ニ平行線ヲ引イテ,ソレト OA トノ交點ヲ M トスレバ $O'A'AM$ ハ矩形デアルカラ

$$OM=OA-O'A'=r-r'.$$

故ニ $O'M$ ハ M デ, O ヲ中心トシ, $r-r'$ ヲ半徑トスル圓 C ニ切スル. 從ツテ次ノ作圖法ガ得ラレル.

[作圖] O ヲ中心トシ, $r-r'$ ニ等シイ半徑ノ圓 C ヲ作リ, O' カラ圓 C ニ切線 $O'M$, $O'N$ ヲ引キ, M, N ヲソノ切點トスル. OM, ON ノ延長ト圓 O トノ交點 A, B カラ夫々 MO', NO' ニ平行ナ直線 AA', BB' ヲ引ケバ, AA', BB' ハ圓 O, O' ノ共通外切線デアル.

[證明] 作圖カラ

$$O'M\perp OA,\quad AA'/\!/O'M.$$

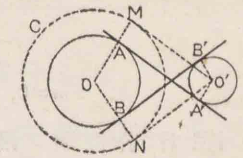
故ニ $$OA\perp AA'.$$

又 $$OA=r,\quad OM=r-r'$$

從ツテ O' カラ AA' ニ引イタ垂線 $O'A'$ ハ r' ニ等シイ. 故ニ AA' ハ一ツノ共通外切線デアル.

II 共通内切線

[方針] I ト同様ニ次ノ作圖法ガ得ラレル.

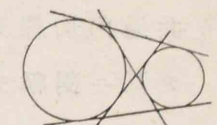


[作圖] O ヲ中心トシテ, $r+r'$ ニ等シイ半徑ノ圓 C ヲ畫キ, O' カラコノ圓 C ニ切線 $O'M$, $O'N$ ヲ引ク. 線分 OM, ON ト圓周 O トノ交點 A, B カラ夫々 MO', NO' ニ平行ナ直線 AA', BB' ヲ引ケバ, AA', BB' ハ共通内切線デアル.

[證明] I ト同様ニシテ證明セヨ.

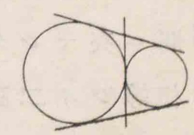
[注意] 共通内切線及ビ共通外切線ノ數 m, n ハ O ヲ中心トシ, $r+r'$ 及ビ $r-r'$ ヲ半徑トスル圓 C ニ O' カラ引カレル切線ノ數ニ等シイ. 從ツテ中心線ノ長サ OO' ヲ d トスレバ次ノヤウニナル.

(1) 二圓ガ互ニ外ニアルトキ



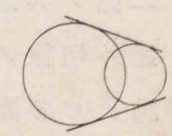
$$d>r+r',$$
$$m=2,\qquad n=2.$$

(2) 二圓ガ外切スルトキ



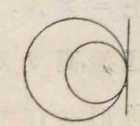
$$d=r+r',$$
$$m=1,\qquad n=2.$$

(3) 二圓ガ交ルトキ



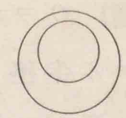
$$r-r'<d<r+r',$$
$$m=0,\qquad n=2.$$

(4) 二圓ガ内切スルトキ



$$r-r'=d,$$
$$m=0,\qquad n=1$$

(5) 一圓ガ他ノ内ニアルトキ



$$r-r'>d,$$

$$m=0, \qquad n=0.$$

[註 1] 作圖題ノ解法ガ容易ニ見出サレナイトキハ[方針]デシタヤウニ,作圖ガ出來タモノトシテ,ソレニ補助線,點等ノ未知ノモノト既知ノモノトノ關係及ビ圖形ノ性質ヲ研究シ,作圖法ヲ見出スノデアル. コノ方法ヲ**解析**トイフ.

[註 2] 上ニ述ベタヤウニ作圖ガ可能デアルカドウカ,又ハ求メル圖形ノ個數ニ就イテ究メルコトヲ**吟味**トイフ.

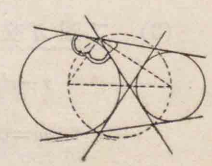
例題

1. 共通内切線又ハ共通外切線ハ中心線ヲ軸トシテ互ニ對稱デアル.

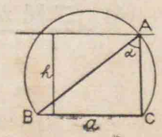
2. 二ツノ圓ノ共通外切線(又ハ共通内切線)ノ切點間ニ夾マレタ部分ノ長サハ相等シイ.

3. 相等シイ二圓ニ共通切線ヲ引ケ.

4. 二圓ノ共通内切線ノ各々ガ共通外切線ノ各々ト交ル四ツノ點及ビ各圓ノ中心ハ同一圓周上ニアル.



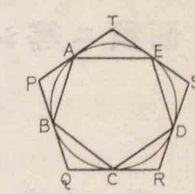
5. 底邊,高サ及ビ頂角ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.



62. 圓ト正多角形

定理 44. 圓周ヲ幾ツカニ等分シテ,ソノ各分點ヲ順次ニ結ベバ,コノ圓ノ内接正多角形ガ出來ル. 又ソノ各分點デ切線ヲ引ケバ順次ニ相隣ルモノガ交ツテ,コノ圓ノ外切正多角形ヲ作ル.

[證明] 簡單ノタメニ五等分ノトキヲ考ヘル. 圓 O ノ周ヲ五等分シテ,ソノ分點 A, B, C, D, E ヲ順次ニ結ベバ,内接五邊形 $ABCDE$ ガ出來ル. コノ五邊形ノ各邊ハ相等シイ弧ニ對スルカラ定理 32 ニヨツテ,何レモ相等シイ.



又コノ五邊形ノ各角ハ全圓周ノ $\frac{3}{5}$ ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角デアルカラ,何レモ相等シイ. 從ツテ, $ABCDE$ ハ内接正五邊形デアル.

次ニ $\angle PAB$, $\angle PBA$, $\angle QBC$ 等ハ何レモ圓周ノ $\frac{1}{5}$ ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイカラ,コレラノ角ハスベテ相等シイ. 從ツテ $\triangle PAB$, $\triangle QBC$ 等ハ何レモ合同デアル.

故ニ $\qquad \angle P=\angle Q=\angle R$ 等.

且ツ　　$PA=PB=QB=QC$　等.

コノ五邊形ノ各邊ハコレラノ三角形ノ等シイ邊ヲ二ツヅツ加ヘタモノデアルカラ相等シイ．故ニ $PQRST$ ハ外切正五邊形デアル.

作圖題 12.　與ヘラレタ矩形ト等積デアル正方形ノ一邊ヲ作ルコト.

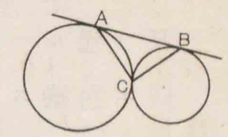
作圖題 13.　與ヘラレタ線分ヲ二ツノ部分ニ分チ,ソノ兩線分ノ積ヲ與ヘラレタ正方形ノ面積ニ等シクセヨ.

例　題

1. 圓ニ内接スル各邊ガ等シイ多角形ハ正多角形デアル.
2. 正六邊形ノ一邊ハソノ外接圓ノ半徑ニ等シイ.
3. 圓ニ外切スル各々ノ角ガ等シイ多角形ハ正多角形デアル.
4. 圓ニ内接(又ハ外切)スル各角(又ハ邊)ガ相等シイ多角形ハ邊數ガ偶數デアルトキハ必ズシモ正多角形デハナイ．又奇數ノトキヲ調ベヨ.

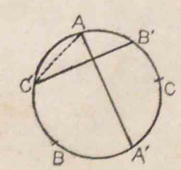
演習問題 XI.

1. 二圓ガ A, B デ交リ, AC, AD ヲ二圓ノ直徑トスルトキ, C, D, B ハ同一直線上ニアル.
2. 二圓ガ C デ互ニ外切スルトキ,ソノ共通外切線ノ切點ヲ A, B トスレバ



$$\angle ACB=\frac{\pi}{2}.$$

3. 圓 B ノ直徑 AG ト,ソノ一ツノ弦 CE トノ延長ノ交點ヲ D トスル．DE ガ半徑ニ等シイトキハ $\angle ABC=3\angle D.$
4. 圓周上ノ一點 A デコノ圓ニ切線 AB ヲ引キ,コノ圓ノ任意ノ直徑 CD ノ端 C カラ AB ニ垂線 CE ヲ作ルトキハ, CA ハ $\angle DCE$ ノ二等分線デアル.
5. 相等シイ二圓ノ交點ヲ A, B トシ, B ヲ通ル任意ノ直線ガ二圓ト交ル點ヲ C, D トスレバ,三角形 ACD ハ二等邊三角形デアル.



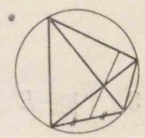
6. 圓周上ノ任意ノ三點ヲ A, B, C トシ, 弧 BC, 弧 CA, 弧 AB ノ中點ヲ夫々 A', B', C' トスレバ

$AA' \perp B'C'$,　$BB' \perp A'C'$,

$CC' \perp A'B'$.

7. 三角形 ABC ノ各頂點カラ對邊ニ引イタ垂線ヲ夫々 AD, BE, CF トスレバ, A, E, F; B, D, F; C, E, D ノ各三點ヲ通ル圓ハ三角形 ABC ノ垂心 H ヲ通ル.

8. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直デアルトキハ,ソノ交點カラ一ツノ邊ヘ引イタ垂線ノ延長ハソノ對邊ノ中點ヲ通ル.



9. 二定圓ニ切シ定長ノ半徑ヲモツ圓ヲ書ケ.

第　五　編

比　例

第一章　比及ビ比例

63. 比及ビ比例

定義　長サ,面積等ノヤウニ或單位ニヨツテソノ大キサガ量ラレルモノヲスベテ**量**トイフ.

同種類ノ二ツノ量 A, B ガアルトキ A ノ B ニ對スル**比**トハ, A ガ B ノ幾倍デアルカトイフ大キサノ關係ヲ指シ,コレヲ簡單ニ**二量 A, B ノ比**トイフ. 二量 A, B ノ比ヲ $A:B$ 又ハ $\dfrac{A}{B}$ デ表シ, A ヲ比ノ**前項**, B ヲ比ノ**後項**トイフ.

〔注意〕 量ノ比ハ必ズ同ジ種類ノ量ニツイテノミ考ヘラレル.

二ツノ量 A, B ノ**比ノ値**トハ, B ヲ單位トシテ量ツタトキノ A ノ數値ヲイフ. 例ヘバ B ヲ單位トシテ A ヲ量リ, A ガ B ノ三倍デアルトキハ, $A:B$ ノ値ハ 3 デアツテ,コレヲ $A:B=3$ 又ハ $\dfrac{A}{B}=3$ ト書ク.

比ノ値トイフコトヲ簡單ニ**比**トイフ.

二量A, Bノ比ガ二量C, Dノ比ニ等シイトキ,A, B, C, Dハ**比例スル**トイヒ,

$$A:B=C:D \quad \text{又ハ} \quad \frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

デ表ス. コノ式ヲ**比例式**又ハ**比例**トイフ.

コノトキニ,A及ビDヲ比例ノ**外項**,B及ビCヲ比例ノ**内項**トイヒ,DヲA, B, Cノ**第四比例項**トイフ.

内項ガ相等シイ比例式 $A:B=B:C$ デハ,CヲA, Bノ**第三比例項**,BヲA, Cノ**比例中項**トイフ.

[注意] A, BトC, Dトハ必ズシモ同種ノ量デアルコトヲ要シナイ. ナホ數ニ關スル比及ビ比例ノ定義ハ量ノ比及ビ比例ニ關シテモ亦ソノマヽ適用スルコトガ出來ル.

二量A, Bノ比ハコレラ二量ヲ同一ノ單位Cデ量ツタトキノ數値a, bノ比ニ等シイ.

[注意] 故ニ二量ノ比ハスベテ二數ノ比トシテ考ヘラレルカラ,數ニ關スル比及ビ比例ノ性質ハ又一般ニ量ニ關スル比及ビ比例ニモ當テハマル.

64. 矩形ノ面積

公理ニヨッテ,二ツノ矩形ノ面積ヲ夫々S, S'トシ,ソノ底及ビ高サヲ同ジ長サノ單位デ測ッタ數値ヲ夫々a, a'; b, b'トスレバ

$$S=ab, \qquad S'=a'b'$$

デアルカラ $$\frac{S}{S'}=\frac{ab}{a'b'}.$$

ヨッテ次ノ定理ガ得ラレル.

定理 45. 二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,ソレラノ底ト高サトノ積ノ比ニ等シイ.

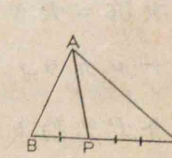
系 1. 二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,ソレラノ底ト高サトノ積ノ比ニ等シイ.

系 2. 底(又ハ高サ)ガ相等シイ二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ高サ(又ハ底)ノ比ニ等シイ.

系 3. 底(又ハ高サ)ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ高サ(又ハ底)ノ比ニ等シイ.

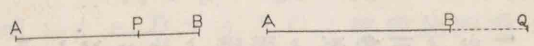
例　題

1. 二邊ガ夫々 6cm, 8cm ト 3cm, 5cm トノ矩形ノ面積ノ比ヲ求メヨ.
2. 直角三角形ノ二邊ガ夫々 8cm, 15cm デアルトキ,斜邊及ビ斜邊ニ對スル高サヲ求メヨ.
3. 頂點ヲ通ル直線デ與ヘラレタ三角形ヲ二ツノ部分ニ分ケテ,ソノ面積ノ比ヲ 2:3 トセヨ.



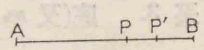
65. 線分ノ比例分割

定義 線分AB上ノ點Pハソノ線分ヲ二ツノ部分AP, BPニ**内分スル**トイヒ，線分ABノ延長上ノ點Qハソノ線分ヲ二ツノ部分AQ, BQニ**外分スル**トイフ.



定理 46. 一ツノ線分ヲ與ヘラレタ比ニ内分スル點ハイツモ唯一ツアル.

[證明]



(1) 内分スル點ノ存在

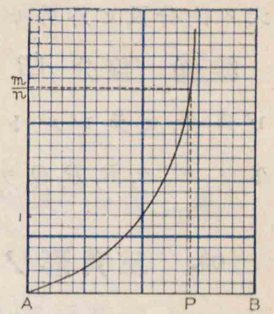
線分AB上ニ點Pヲトッテ比 $\dfrac{AP}{BP}$ ヲ考ヘル.

Pガコノ線分上デ,點Aニ近ヅケバ線分APハイクラデモ小サクナリ,コレニ反シテBPハ次第ニ大キクナルカラ, $\dfrac{AP}{BP}$ ハ幾ラデモ小サクナル.

又Pガコノ線分上カラ點Bニ近ヅケバ,線分APハ次第ニ大キクナルニ反シテ,BPハ幾ラデモ小サクナルカラ, $\dfrac{AP}{BP}$ ハ幾ラデモ大キクナル.

今Pヲ動カストキノ $\dfrac{AP}{BP}$ ノ變化ヲぐらふニ表セ

バ,右圖ノヤウナ曲線ガ得ラレル.



從ッテ $\dfrac{AP}{BP}$ ガ與ヘラレタ比 $\dfrac{m}{n}$ ニ等シクナル點Pノ位置ハ必ズ存在スル.

(2) 内分點ハ唯一ツデアルコト.

線分ABヲ與ヘラレタ比 $\dfrac{m}{n}$ ニ分ツ點ガPノ外ニアッタトシ,ソレヲP'トスレバ

$$\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n},\qquad \frac{AP'}{BP'}=\frac{m}{n}.$$

ヨッテ $$\frac{AP}{BP}=\frac{AP'}{BP'}.$$

故ニ $$\frac{AP+BP}{BP}=\frac{AP'+BP'}{BP'}.$$

然ルニ $$AP+BP=AB,\qquad AP'+BP'=AB$$

デアルカラ $$\frac{AB}{BP}=\frac{AB}{BP'}.$$

故ニ $$BP=BP'.$$

從ッテPトP'トハ一致セネバナラナイ.

系. 一ツノ線分ヲ與ヘラレタ比ニ外分スル點ハイツモ唯一ツアル.

問 線分ABガP及ビQニヨッテ同一ノ比ニ内分及ビ外分セラレルトキ線分PQハ又B及ビAニヨッテ同一ノ比ニ

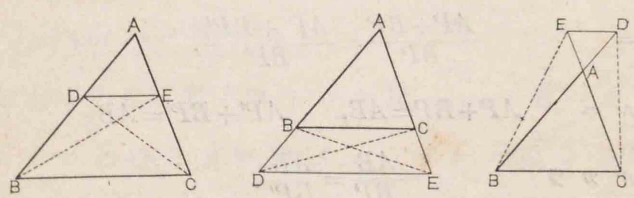
夫々內分及ビ外分セラレルカ.

定義 線分 AB ガ P, Q ニヨツテ同ジ比ニ內分及ビ外分セラレルトキ, P 及ビ Q ハ AB ヲ**調和ニ分ツ**トイヒ, A, B, P, Q ヲ**調和列點**トイフ.

66. 三角形ノ邊ノ比例分割

定理 47. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ハ他ノ二邊ヲ相等シイ比ニ內分又ハ外分スル.

[證明] 三角形 ABC ノ一邊 BC ニ平行ナ直線ガ他ノ二邊 AB, AC 又ハソノ延長ト交ル點ヲ夫々 D, E トスル. DC, BE ヲ引ケバ $DE \parallel BC$ デアルカラ,



$\triangle DEB=\triangle DEC$ (定理 27 系 2).

故ニ $$\frac{\triangle ADE}{\triangle DEB}=\frac{\triangle ADE}{\triangle DEC}.$$

然ルニ $\triangle ADE, \triangle DEB$ デ夫々 AD, BD ヲ底邊ト見レバ,高サハ相等シイカラ定理45系3ニヨツテ

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle DEB}=\frac{AD}{BD}.$$

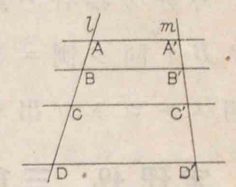
同様ニ $$\frac{\triangle ADE}{\triangle DEC}=\frac{AE}{CE}.$$

故ニ $$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}.$$

系 1. 上ノ圖デ $AD:AB$ ハ $AE:AC$ ニ等シイ.

系 2. 三邊形ノ二ツノ邊ヲ同ジ比ニ內分(又ハ外分)スル二點ヲ結ブ直線ハ第三邊ニ平行デアル.

系 3. 二ツノ直線 l, m ガ互ニ平行ナ多クノ直線 $AA', BB', CC', \ldots\ldots$ 等ニヨツテ截ラレルトキハ,ソノ平行線間ニアル二直線ノ部分ノ比ハ一定デアル.



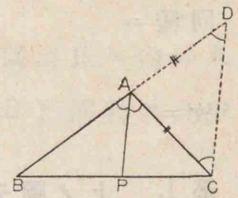
卽チ右圖デ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'} \text{ 等.}$$

定理 48. 三角形ノ一ツノ頂角及ビソノ外角ノ二等分線ガ對邊ト交ル點ハ,ソノ邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分スル.

[證明] 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ヲ AP トシ, BA ヲ A ノ方向ニ延長シテ AC ニ等シク AD ヲトリ, CD ヲ結ベバ, $\triangle ADC$ ハ二等邊三角形デアルカラ,

$$\angle ADC = \angle ACD.$$



然ルニ　$\angle ADC + \angle ACD = \angle BAC.$

故ニ　$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BAP.$

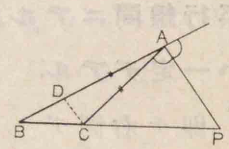
従ツテ　$AP \parallel DC.$

ヨツテ　$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AD}$　（定理 47）.

故ニ　$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}.$

即チ P ハ BC ヲ $AB:AC$ ノ比ニ分ケル.

外分ノ場合ハ點 D ヲ A ニ關シテ B ト同ジ側ニトレバ,同様ニ證明スルコトガ出來ル.



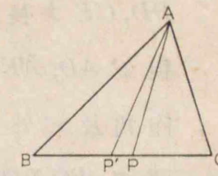
定理 49. 三角形 ABC ノ一ツノ邊 BC ヲ $\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}$ デアルヤウニ一點 P デ内分(又ハ外分)スレバ, AP ハ頂角 A (又ハ A ノ外角)ノ二等分線デアル.

〔證明〕 頂角 A ノ二等分線 AP' ヲ引ケバ前定理ニヨツテ

$$\frac{BP'}{CP'} = \frac{AB}{AC}.$$

然ルニ假定カラ

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}.$$

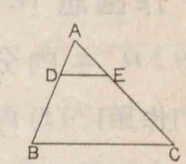


故ニ定理46ニヨツテ,線分 BC ヲ與ヘラレタ比 $\frac{AB}{AC}$ ニ内分スル點ハ唯一ツデアルカラ, P ト P' トハ一致シナケレバナラナイ.

外分ノ場合モ同様ニ證明サレル.

例　題

1. 右圖デ $DE \parallel BC$ トスル.



(1) $AD = 3\,cm,\ DB = 6\,cm,\ AE = 4\,cm$ デアルトキ, EC ノ長サヲ求メヨ.

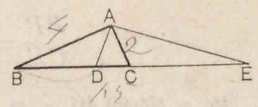
(2) $AD = a\,cm,\ DB = b\,cm,\ EC = c\,cm$ デアルトキ, AE ノ長サヲ求メヨ.

(3) $AB = 12\,cm,\ AD = 8\,cm,\ AC = 9\,cm$ デアルトキ, AE ノ長サヲ求メヨ.

2. 三角形 ABC ノ邊 AB 上ニ一點 D ガ A カラ $2\,cm$ ノ距離ニ與ヘラレタトキ, E ヲ AC 上ノドンナ點ニトツタナラバ, $DE \parallel BC$ トナルカ. 但シ $AB = 5\,cm,\ AC = 4.5\,cm$ トスル.

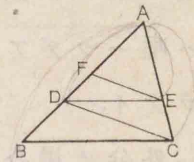
3. 圖デ $AB = 4\,cm,\ AC = 2\,cm,\ CD = 1.5\,cm$ デアルトキ,

BD, CE ノ長サヲ求メヨ.



但シ AD, AE ハ夫々角 A ノ内角及ビ外角ノ二等分線デアルモノトスル.

4. 圖デ $BC \parallel DE$, $CD \parallel EF$ デアルトキ,

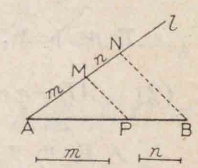


$$AF:AD=AD:AB.$$

67. 作圖題

作圖題 14. 線分 AB ヲ,他ノ二線分ノ比 $m:n$ ニ内分及ビ外分スルコト.

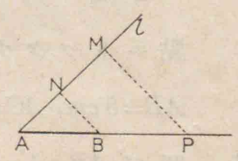
[作圖] (1) 内分ノ場合



A ヲ通ッテ AB ト一致シナイ任意ノ直線 l ヲ作リ,コノ直線上ニ m ニ等シク AM ヲトリ,ソノ延長上ニ n ニ等シク MN ヲトッテ NB ヲ引キ, M カラコレニ平行ナ直線 MP ヲ作リ AB トノ交點ヲ P トスレバ, P ハ求メル内分點デアル.

(2) 外分ノ場合

(i) $m \neq n$ ナラバ (1) ノ場合ニ於テ N ヲ M ニ關シテ A ト同ジ側ニトレバヨイ.



(ii) $m=n$ ナラバ外分點ハ存在シナイ.

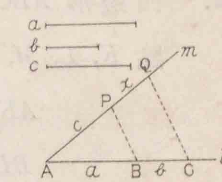
[證明] $MP \parallel NB$ デアルカラ定理47ニヨッテ

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AM}{MN}=\frac{m}{n}.$$

問　與ヘラレタ線分ヲ任意ノ數ニ等分スル方法ヲ問フ.

作圖題 15. 三ツノ與ヘラレタ線分 a, b, c ノ第四比例項ヲ求メヨ.

[作圖] 一ツノ直線 l 上ニ a, b ニ等シク AB, BC ヲトリ, A ヲ通ッテ l ト一致シナイ直線 m ヲ引ク. m 上ニ c ニ等シク AP ヲトリ, BP ニ平行ニ CQ ヲ作レバ,線分 PQ ハ求メル第四比例項デアル.



[證明] 定理47ニヨッテ $BP \parallel CQ$ デアルカラ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AP}{PQ}.$$

故ニ PQ ヲ x トスレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}.$$

例　題

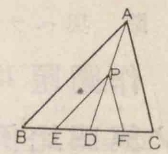
1. 與ヘラレタ線分ヲ 3 ト 4 ノ比ニ内分セヨ.
2. 與ヘラレタ線分ヲ 2 ト 5 ノ比ニ外分セヨ.
3. a, b, c ガ與ヘラレタ線分デアルトキ,

$$a:b=x:c$$

デアル線分 x ヲ作圖セヨ.

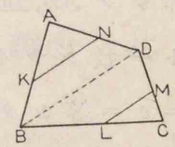
演習問題 XII.

1. 三角形 ABC ノ中線 AD 上ノ一點 P カラ AB, AC ニ平行ニ引イタ直線ガ BC ト交ル點ヲ夫々 E, F トスレバ,



$$BE=CF.$$

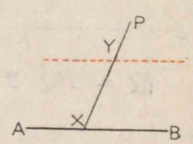
2. 四邊形 $ABCD$ ノ邊 AB, BC, CD, DA 上ニ夫々四點 K, L, M, N ヲトリ,



$$AK:KB=AN:ND,$$
$$BL:LC=DM:MC$$

トスレバ $KN \parallel LM$.

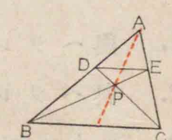
3. 直線 AB ト直線外ノ一點 P トガ與ヘラレタトキ, AB 上ノ任意ノ點 X ト P トヲ結ブ線分上ニ一點 Y ヲ



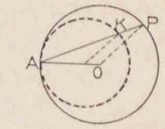
$$PX:PY=3:1$$

デアルヤウニトルトキノ Y ノ軌跡ヲ求メヨ.

4. 三角形 ABC ノ邊 BC ニ平行ナ直線ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 D, E トスルトキ, BE, CD ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.



5. 定圓 O ノ周上ノ定點 A トコノ圓周上ノ任意ノ點 P トヲ結ブ線分 AP ヲ



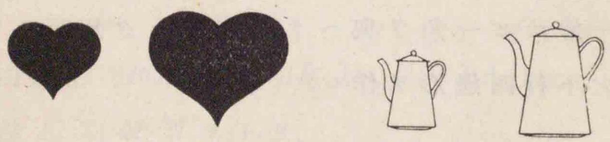
$$AK:KP=3:1$$

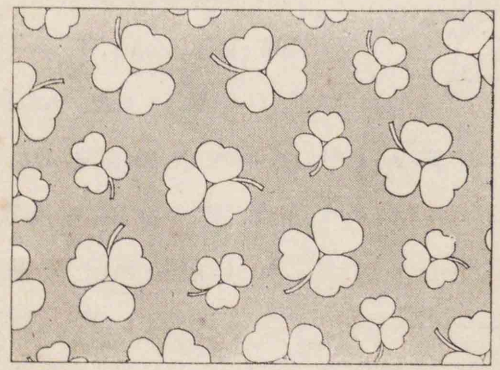
ニ内分スル點 K ノ軌跡ヲ求メヨ.

6. 一邊及ビ一角ヲ與ヘテ,與ヘラレタ矩形ト等積ナ平行四邊形ヲ作レ.

第二章 相似形

68. 相似形

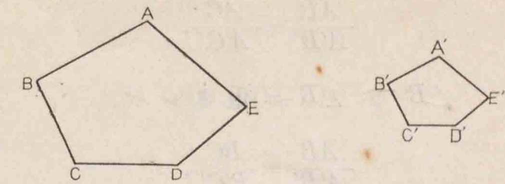




〔定義〕 邊ノ數ガ相等シイ二ツノ多角形ヲ$ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$トスルトキ,

(1) 角$A, B, C,\ldots$ガ夫々角$A', B', C',\ldots$ニ等シク,

(2) 邊$AB, BC,\ldots$ガ夫々邊$A'B', B'C',\ldots$ニ比例スルトキ,コノ二ツノ多角形ハ**相似デアル**トイヒ,



A, A'; B, B' 等ヲ**對應スル頂點**, AB, $A'B'$; BC, $B'C'$ 等ヲ**對應スル邊**トイフ.

二ツノ多角形 P, Q ガ相似デアルコトヲ $P\backsim Q$ デ表ス.

系. 邊數ノ等シイ二ツノ正多角形ハ相似デアル.

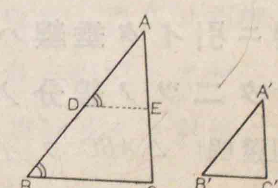
69. 相似三角形

定理 50. 三ツノ角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル.

〔證明〕 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トデ

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

デアルモノトスル.



$\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネ,

圖ノ三角形 ADE ノ位置ニ置クトキハ, $\angle D=\angle B$ デアルカラ

$$DE \parallel BC.$$

故ニ
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

ヨツテ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

同様ニ $\angle B'$ ヲ $\angle B$ ニ重ネレバ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

故ニ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$.

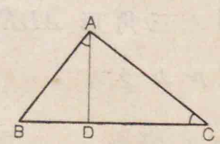
即チ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

系 1. ニツノ三角形ノ二ツノ角ガ夫々相等シイトキ,ニツノ三角形ハ相似デアル.

系 2. 一鋭角ガ相等シイニツノ直角三角形ハ相似デアル.

定理 51. 直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜邊ニ引イタ垂線ハ,コレニヨツテ斜邊ガ分タレタニツノ線分ノ比例中項デアル.

[證明] $\triangle ABC$ ヲ $\angle A$ ガ直角デアル直角三角形トシ, A カラ BC ニ引イタ垂線ヲ AD トスレバ, $\triangle ABD$ ト $\triangle CAD$ トデ



$$\angle ADB=\angle CDA,$$
$$\angle BAD=\angle ACD.$$

故ニ $\triangle ABD \backsim \triangle CAD$.

故ニ $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{AD}{CD}$,

即チ $BD\cdot CD=\overline{AD}^2$.

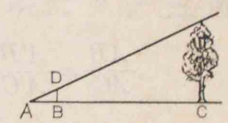
例題

1. 三邊ガ夫々 $3\,cm$, $4\,cm$, $6\,cm$ デアル三角形ノ $3\,cm$ ノ邊ニ對應スル邊ガ $6\,cm$ デアルヤウナコレト相似ナ三角形ノ他ノ二邊ノ長サハ何糎デアルカ.

2. 圖ノヤウニシテ立木ノ高サヲ測ルトキ,

$$AB=3m,\quad AC=20m,$$
$$BD=1.5m$$

ナラバ,木ノ高サハ幾ラカ.



3. 二ツノ二等邊三角形ノ底角又ハ頂角ガ相等シイトキハ,コノ二ツノ三角形ハ相似デアル.

4. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ H トスレバ,

$$\triangle ABC \backsim \triangle HBA.$$

5. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ BC ト D,外接圓ノ周ト E デ交レバ,

$$\triangle ABD \backsim \triangle AEC.$$

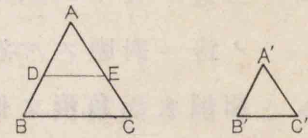
70. 相似三角形(續キ)

定理 52. 一ツノ角ガ相等シク,コレラヲ夾ム二邊ノ比ガ又相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル.

[證明] $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ デ

$$\angle A=\angle A',$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$$



トスル. $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネ,圖ノ $\triangle ADE$ ノ位置ニ置クトキハ,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'},\quad \text{卽チ}\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

故ニ $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

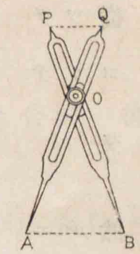
ヨツテ $DE \parallel BC$.

故ニ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

從ツテ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

例題

1. 圖ハ比例こんぱすトイフ器具デ, $AB:PQ$ ヲ定



比ニ等シクシテ圖形ヲ縮メ又ハ擴大スルトキニ用ヒル. ソノ理由ヲ考ヘヨ.

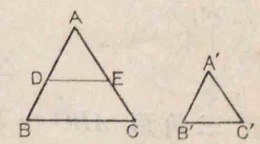
2. 二ツノ相似三角形ノ對應スル頂點カラ引イタ中線ノ比ハ兩三角形ノ對應スル邊ノ比ニ等シイ.

3. 頂角,コレヲ夾ム二邊ノ比及ビ頂角ノ二等分線ノ長サヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

71. 相似三角形(續キ)

定理 53. 三邊ガ夫々比例スル二ツノ三角形ハ相似デアル.

[證明] 二ツノ三角形ヲ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ トシ



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$$

トスル. AB 又ハソノ延長上ニ $A'B'$ ニ等シク AD ヲ, AC 又ハソノ延長上ニ $A'C'$ ニ等シク AE ヲトリ, D,E ヲ結ベバ,假設ニヨツテ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$

デアルカラ $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

従ッテ $DE \parallel BC$.

ヨッテ $\angle B=\angle ADE,\quad \angle C=\angle AED$.

又 $$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{A'B'}.$$

然ルニ $$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}$$

デアルカラ $DE=B'C'$.

ヨッテ $\triangle ADE\equiv\triangle A'B'C'$.

然ルニ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

故ニ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

例　題

1. 三角形 ABC ノ三邊ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスレバ,

$$\triangle ABC\backsim\triangle DEF.$$

2. 三角形 ABC ノ各頂點ヲ任意ノ一點 O ニ結ビ, OA, OB, OC ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ A', B', C' トスレバ,

$$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC.$$

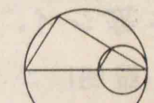
3. 一ツノ三角形ノ二邊トコレラノ一邊ニ引イタ中線トガ,他ノ三角形ノコレラニ對應スルモノニ比例スレバ,二ツノ三角形ハ相似デアル.

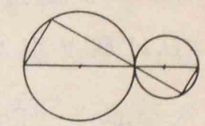
演習問題 XIII.

1. 二ツノ三角形ノ相似ニ關スル定理ト合同ニ關スル定理トヲ比較セヨ.

2. 三邊ガ夫々垂直デアル二ツノ三角形ハ相似デアル.

3. 二圓ガ切スルトキ切點ヲ通ル直線ヲ引キ各圓周ト再ビ交ラセテ出來ル二ツノ弦ノ比ハ兩圓ノ直徑ノ比ニ等シイ.

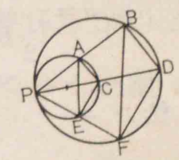




4. 梯形ノ二ツノ對角線ハ互ニ他ヲ平行デアル二邊ノ比ニ分ケル.

5. 圖デ P ガ二圓ノ切點ナラバ

$$\triangle ACE\backsim\triangle BDF.$$



6. 定線分 AB ヲ $3:4$ ニ内分又ハ外分スル點ヲ通ル任意ノ直線ヘ A, B カラ引イタ垂線ノ比ハ $3:4$ デアル.

7. 二ツノ相似三角形ノ對應邊ヲ平行ニ置ケバ,對應スル頂點ヲ結ブ三ツノ直線ハ一點デ交ル.

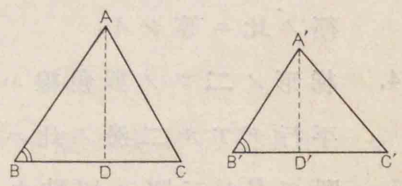
8. 前問デ相似多角形デハドウカ. 又合同圖形ナラバドウカ.

第三章 面積ノ比

72. 三角形ノ面積ノ比

定理 54. 一ツノ角ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,ソノ角ヲ夾ム二邊ノ積ノ比ニ等シイ.

〔證明〕 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ デ $\angle B=\angle B'$ トスル. 頂點 A, A' カラ對邊ニ垂線 $AD, A'D'$ ヲ引ケバ



$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}BC\ AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}.$$

然ルニ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$ (定理 50 系 2).

故ニ $$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

ヨツテ $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}.$$

定理 55. 二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハソノ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ.

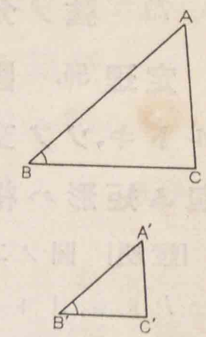
〔證明〕 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ トスレバ

$$\angle B=\angle B'.$$

故ニ $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}.$$

然ルニ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

デアルカラ $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$



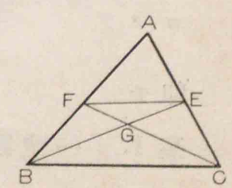
系. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ,ソノ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ.

例 題

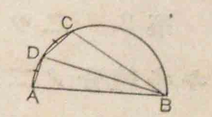
1. $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ デ, $\angle A=\angle A'$, $AB=5\,cm$, $AC=7\,cm$, $A'B'=4\,cm$, $A'C'=10\,cm$ デアツテ, $\triangle ABC$ ノ面積ガ $21\,cm^2$ ナラバ, $\triangle A'B'C'$ ノ面積ハ何程カ.

2. 二ツノ正三角形ノ面積ノ比ハコレラノ一邊ノ平方ノ比ニ等シイ.

3. $\triangle ABC$ ノ二ツノ中線 BE, CF ノ交點ヲ G トスルトキ, $\triangle GEF$ ト $\triangle GBC$ トノ面積ノ比ヲ求メヨ.



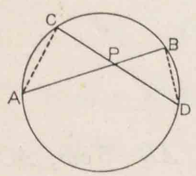
4. C, D ハ共ニ直徑 AB ノ圓周上ニアリ, D ガ弧 AC ノ中點ナラバ $$\frac{\triangle ADB}{\triangle DBC}=\frac{AB}{BC}.$$

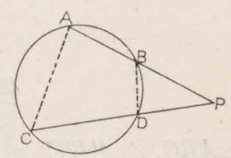


73. 弦ノ分ノ包ム矩形

定理 56. 圓ノ二ツノ弦又ハソノ延長ガ交ルトキ,ソノ交點デ内分又ハ外分サレタ弦ノ包ム矩形ハ相等シイ.

[證明] 圓ノ二ツノ弦 AB, CD 又ハソノ延長ノ交點ヲ P トシ, A ト C, B ト D トヲ結ブ.





$\triangle PAC$, $\triangle PDB$ デ

$$\angle PCA = \angle PBD, \quad \angle PAC = \angle PDB.$$

故ニ $$\triangle PAC \backsim \triangle PDB.$$

ヨツテ $$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}.$$

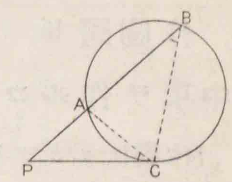
即チ $$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

系 1. 一定點ヲ通ル弦ガソノ點ニヨツテ分ケラレル二ツノ分ノ包ム矩形ハ一定デアル.

系 2. 二ツノ線分又ハソノ双方ノ延長ガ交ルトキ,各線分ノ二ツノ分ノ包ム矩形ガ相等シケレバ,二ツノ線分ノ端ノ四點ハ同一圓周上ニアル.

定理 57. 圓外ノ一點カラ引イタ弦ガソノ點デ分ケラレル二ツノ分ノ包ム矩形ハ,ソノ點カラ引イタ切線ノ上ノ正方形ニ等シイ.

[證明] 圓外ノ一點 P カラ引イタ弦ヲ AB, 切線ヲ PC トシ, A, B ヲ C ニ結ベバ, $\triangle PCA$, $\triangle PBC$ デ



$$\angle PCA = \angle PBC,$$

$\angle P$ ハ共通デアルカラ

$$\triangle PCA \backsim \triangle PBC.$$

故ニ $$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB},$$

即チ $$PA \cdot PB = PC^2.$$

系. 圓外ノ一點カラソノ圓周ニ引イタ線分ノ上ノ正方形ガ,ソノ點カラ引イタ割線ノ二ツノ分ノ包ム矩形ニ等シイトキハ,ソノ線分ハ圓ニ切スル.

例 題

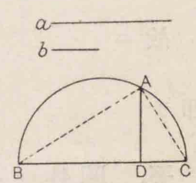
1. 二直線 PAB, PCD ガ圓ト交ル點ヲ夫々 A, B; C, D トスル. $PA = 3\,cm$, $PC = 5\,cm$, $CD = 4\,cm$ デアルトキ, AB ノ長サハ何程カ.
2. 相交ル二ツノ圓ノ共通弦ノ延長上ノ點カラコレラノ圓ニ引イタ切線ノ長サハ相等シイ.

3. 相交ル二ツノ圓ノ共通弦ノ延長上ノ任意ノ點カラ各圓ヘ夫々割線 PAB, PCD ヲ引ケバ, A, B, C, D ハ同一ノ圓周上ニアル.

74. 作圖題

作圖題 16. 二ツノ與ヘラレタ線分ノ比例中項ヲ作ルコト.

[作圖] a, b ヲ與ヘラレタ線分トスル. a ニ等シイ線分 BD ヲ延長シ,ソノ上ニ點 C ヲトリ DC ヲ b ニ等シクスル. BC ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ, D デ BC ニ垂線 AD ヲ引キ圓トノ交點ヲ A トスレバ, AD ハ a, b ノ比例中項デアル.



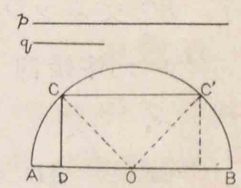
證明ハ略ス.

例 題

1. 與ヘラレタ矩形ト等積デアル正方形ヲ作レ.
2. 與ヘラレタ四邊形ト等積デアル正方形ヲ作レ.
3. 線分 AB ヲ二ツノ部分ニ分ケテ,ソノ部分ノ包ム矩形ノ面積ヲ最大ニセヨ.

作圖題 17. 二ツノ線分ノ和ト積トヲ知ツテ各線分ヲ求メルコト.

[作圖] 二ツノ線分ノ和ニ等シイ線分ヲ p, 與ヘラレタ積ニ等シイ面積ヲモツ正方形ノ一邊ヲ q トスル.



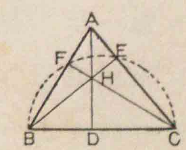
線分 AB ヲ p ニ等シクトリ,コレヲ直徑トスル半圓ヲ畫キ, AB ニ對シテコノ半圓ト同ジ側ニ AB カラ q ノ距離ニ平行線ヲ引キ半圓周トノ交點ノ一ツヲ C トスル. C カラ AB ヘ垂線 CD ヲ引キ足ヲ D トスレバ, AD, BD ガ求メル二ツノ線分デアル.

[證明]
$$AD+BD=AB=p,$$
$$AD\cdot BD=\overline{DC}^2=q^2.$$

[吟味] $q>\frac{1}{2}p$ デアルトキハ,二ツノ線分ハ求メラレナイ.

演 習 問 題 XIV.

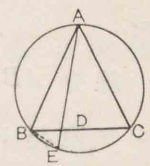
1. 三角形 ABC ノ三頂點カラ對邊ヘ垂線 AD, BE, CF ヲ引キ,ソレラノ交點ヲ H トスレバ,



$$AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF.$$

2. 圓ノ一ツノ弦 AB ノ中點ヲ M トスレバ, AM ハ M ヲ通ル任意ノ弦ノ二ツノ分ノ比例中項デアル.

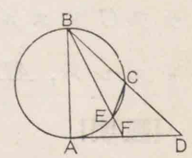
3. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ通ル直線ガ底邊 BC 又ハソノ延長ト交ル點ヲ D トシ,外接圓ト交ル點ヲ E トスレバ,



$$AD\cdot AE=\overline{AB}^2.$$

4. 圖デ, AB ハ直徑, AD ハ切線, BEF ト BCD トハ割線デアルトキ,

$$BE\cdot BF=BC\cdot BD.$$

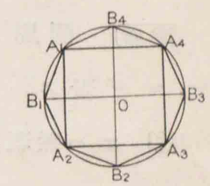


5. 二ツノ線分ノ差ト積トヲ與ヘテ各線分ヲ作レ.

第四章 圓ノ周及ビ面積

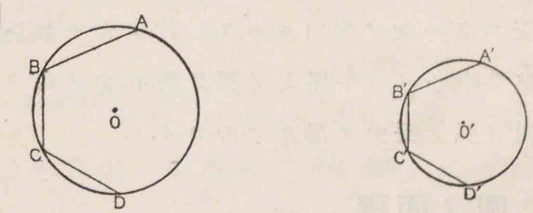
75. 圓周率

問 圓 O ニ內接スル正方形 $A_1A_2A_3A_4$ ノ四ツノ弧ノ中點ヲ夫々 B_1, B_2, B_3, B_4 トシテ內接正八邊形ヲ作リ,次ニ各弧ノ中點ヲトツテ正十六邊形ヲ作ル. コノ樣ニシテ邊數ヲ增ストキ,ソノ周ハドウ變化スルカ.



定理 58. 二ツノ圓ノ周ノ比ハソレラノ半徑ノ比ニ等シイ.

[證明]



二ツノ圓 O, O' ニ內接(又ハ外切)スル邊數ノ相等シイ正多角形ハ相似デアルカラ,ソノ周ノ比ハ邊ノ比,從ツテ圓ノ半徑ノ比デアル. 今コノ正多角形ノ邊ノ數ヲ限リナク增セバ,コレラノ周ハ圓ノ周ニ近ヅク. 卽チ圓周トナル. ヨツテコレラノ圓ノ周ノ

比モ又半徑ノ比ニ等シイ.

二圓 O, O' ノ周ヲ夫々 l, l', 半徑ヲ夫々 r, r' トスレバ,

$$\frac{l}{l'}=\frac{r}{r'}.$$

ヨツテ又 $$\frac{l}{2r}=\frac{l'}{2r'}=一定.$$

定義 圓周ノソノ直徑ニ對スル比ヲ**圓周率**トイヒ, π デ表ス.

[註] π ハ無理數デ

$$\pi=3.1415926535\ldots\ldots$$

デアル. 實用上ニハ 3.1416 又ハ $\frac{22}{7}$ 等ヲ用ヒル.

系. 半徑 r ノ圓ノ周ハ $2\pi r$ デアル.

[註] 故ニ半徑1ノ半圓ノ周ハ π デアル. 平角ヲ π, 直角ヲ $\frac{\pi}{2}$ デ表スノハ次ノ理由ニヨル. 角ノ大キサヲ表スノニ, ソノ頂點ヲ中心トシ半徑1ノ圓ヲ畫キ, ソノ角ノ內部ニアルソノ圓ノ弧ノ長サヲ用ヒテモヨイ.

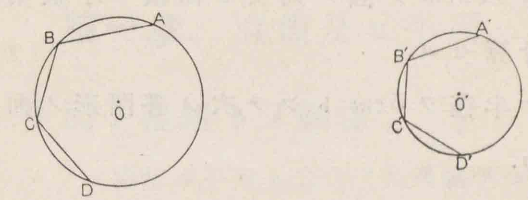
76. 圓ノ面積

問 前節ノ問デ多角形ノ面積ハドウ變化スルカ.

定理 59. 二ツノ圓ノ面積ノ比ハ各圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シイ.

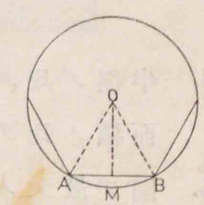
[證明] 二ツノ圓 O, O' ニ內接(又ハ外切)スル正多角形ノ面積ノ比ハ各邊ノ平方ノ比,從ツテ各圓ノ半

徑ノ平方ノ比ニ等シイ. 前節ノ定理58ノ證明ト同樣ニシテ,邊ノ數ヲ限リナク增セバ,多角形ノ面積ハ圓ノ面積トナル. 故ニ圓ノ面積ノ比モ亦各圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シイ.



定理 60. 半徑 r ノ圓ノ面積ハ πr^2 デアル.

[證明] 圓ニ內接スル正多角形ノ一邊ヲ AB トシ, 中心 O カラ AB ニ引イタ垂線ヲ OM トスレバ,



$$\triangle OAB=\frac{1}{2}OM\cdot AB.$$

從ツテ正多角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}OM\cdot nAB$ デアル. 正多角形ノ邊ノ數ヲ限リナク增セバ, OM ハ圓ノ半徑 r, nAB ハ圓ノ周, 卽チ $2\pi r$ ニ近ヅクカラ,

$$圓ノ面積=\frac{1}{2}r\cdot 2\pi r=\pi r^2.$$

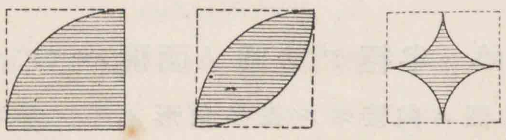
系. 半徑ガ r, 弧ノ長サガ a ノ扇形ノ面積ハ $\frac{1}{2}ar$ デアル.

演習問題 XV.

1. 半徑 5 cm ノ圓ニ内接スル正方形ノ面積ト圓ノ面積トノ差ヲ求メヨ.

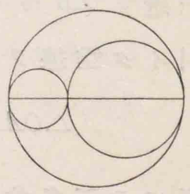
2. 半徑 4.32 cm ノ圓ノ周及ビ面積ヲ小數第二位マデ計算セヨ.

3. 圓ノ半徑ヲ 5 cm トシテ,次ノ各圖形ノ面積ヲ求メヨ.



4. 半徑ノ比ガ 1:2 デアル二圓ノ面積ノ比ヲ求メヨ.

5. 圖デ最大ノ圓ノ周ハ他ノ二ツノ圓ノ周ノ和ニ等シイ.



第六編

立體

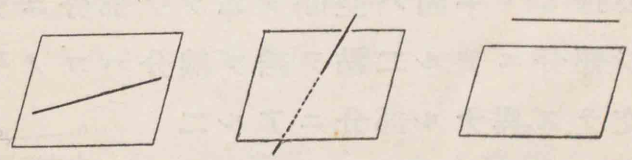
第一章 直線及ビ平面

77. 平面ト直線トノ關係

問 1 一ツノ直線ガ平面ト二ツノ共通點ヲモツトキハ,コノ直線ハソノ平面ニ含マレルコトヲ證明セヨ(8頁參照).

問 2 平面トソノ平面ニ含マレナイ直線トノ共通點ハ幾ツアルカ.

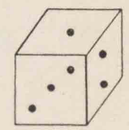
問 3 平面ト直線トガ共通點ヲ一ツモモタナイヤウナコトガアルカ.



定義 直線ガ一ツノ平面ニ含マレルトキ,コノ直**線ハソノ平面上ニアル**トイフ. 平面ト直線トガ一ツノ共通點ヲモツトキ,コノ平面ト直線トハ**交ル**トイヒ,ソノ點ヲ**交點**トイフ. コレニ反シテ共通點ガ一ツモナイトキ,コノ平面ト直線トハ**平行デアル**ト

イフ.

〔定義〕 空間ノ二直線ガ一ツノ平面上ニアッテ,ソノ平面上デ平行デアレバ,コノ**二直線ハ空間デ平行デアル**トイフ.



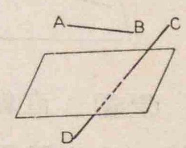
問 4 空間ノ二直線デ平行デナクテ,シカモ共通點ヲ一ツモモタナイコトガアルカ.

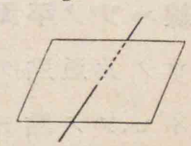
78. 平面ノ性質

平面ハソノ上ノ何レノ方向ニモ限リナク廣ガツテヰル.

限リナク廣ガツテヰルモノヲカキ表スコトハ出來ナイカラ,平面ヲ表スノニハ通常下圖ノヤウニ平行四邊形ヲ用ヒル.

公理 1. **平面ハ空間ヲ二ツノ部分ニ分ケ,同ジ部分ニアル二點ヲ結ブ線分ハコノ平面ト交ラズ,異ナル部分ニアル二點ヲ結ブ線分ハコノ平面ニイツモ交ル.**



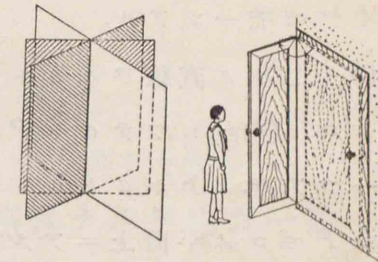


公理 2. **平面ト直線トガ唯一點ヲ共有スルトキ,コノ點デ分ケラレタ直線ノ兩部分ハ,夫**

々コノ平面ニヨツテ分ケラレタ空間ノ兩部分ニ含マレル.

79. 平面ノ決定

問 1 一直線ヲ含ム平面ハ澤山アルカ.



問 2 扉ヲ開キ任意ノ位置カラ見タトキ,ソノ扉ガ直線狀ニ見エルヤウニ出來ルカ.

公理 3. **一ツノ直線ヲ含ム平面ノ中デ空間ノ任意ノ一點ヲ通ルモノハイツモ唯一ツアル.**

〔定義〕 幾ツカノ直線及ビ點ヲ通ル平面ガ唯一ツアルトキ,コレラノ直線及ビ點ハ**一平面ヲ決定スル**トイフ.

定理 1. **(1) 一直線上ニナイ三點,**

(2) 一直線トソノ上ニナイ一點,

(3) 相交ル二直線,

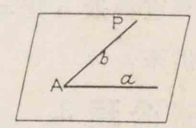
(4) 平行ナ二直線

ノ何レモ一平面ヲ決定スル.

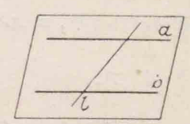
［證明］(1) 二點ヲ通ル直線ハイツモ唯一ツアルカラ,コレハ(2)ノ場合トナル.

(2) 與ヘラレタ直線ヲ含ム平面ヲ考ヘ,ソノ中デ與ヘラレタ點ヲ通ルモノヲ求メルト,公理 3 ニヨツテイツモ唯一ツアル.

(3) 二ツノ直線ヲ a, b トシ, b 上ニ任意ニ一點 P ヲトル. (2)ニヨツテ a ト P トヲ含ム平面ハイツモ唯一ツアル. ナホ a ト b トノ交點 A モ P モコノ平面上ニアルカラ, b ガ又コノ平面上ニアル. 故ニ求メル平面ハイツモ唯一ツアル.



(4) 平行ナ二直線ハ定義ニヨツテ一ツノ平面上ニアル. 卽チコノ二直線ヲ含ム平面ハ少クトモ一ツハアル. 二直線 a, b ニ交ル任意ノ直線 l ハ又コノ平面ニ含マレ,(3)ニヨツテ a ト l トヲ含ム平面ハ唯一ツニ限ルカラ,コノ平行ナ二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツニ限ル.



例題

1. 一直線外ノ一點ヲ通リ,コノ直線ニ平行ナ直線ハイツモ唯一ツアル.

2. 相交ル二直線ノ一ツニ交リ他ニ平行ナ直線ハ,スベテコノ二直線ノ決定スル平面上ニアル.

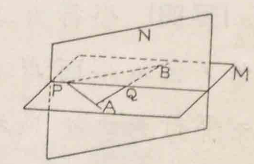
3. 一平面上ニナイ四點ハ幾ツノ平面ヲ決定スルカ.

80. ニツノ平面

問 紙ヲ正シク折ツタトキノ折目ハ何カ.

定理 2. ニツノ相異ナル平面ガ一點ヲ共有スレバ,又ソノ點ヲ通ル唯一ツノ直線ヲ共有スル.

［證明］公理 2 ニヨツテ,二ツノ平面 M, N ノ共有點 P ヲ通ツテ M ニ含マレル二ツノ直線 PA, PB ヲ引キ,點 A ト B トガ互ニ N ニヨツテ分ケラレル空間ノ異ナル部分ニアルヤウニスルコトガ出來ル. 故ニ A, B ヲ結ブ線分ハ公理 1 ニヨツテ N ニ交ル. ソノ交點ヲ Q トスレバ, Q ハ又 M, N ノ共有點デアル. 從ツテ二點 P, Q ヲ通ル直線ハ又 M, N ニ共有サレル.



若シコノ直線外ニ M, N ノ共有點 R ガアルモノ

トスレバ,三點 P, Q, R ニヨツテ平面ガ決定サレルカラ,M, N ハ一致セネバナラナイ. コレハ矛盾デアル. 故ニコノ直線外ニ共有點ハナイ.

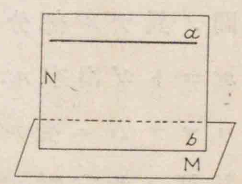
系 1. 平行ナ二直線ノ一ツニ交ル平面ハ他ニモ交ル.

[定義] 唯一ツノ直線ヲ共有スル**二平面ハ相交ル**トイヒ,コノ直線ヲ二平面ノ**交線**トイフ. 相交ラナイ二平面ハ**互ニ平行デアル**トイフ.

系 2. 平行ナ二平面ノ各々ト一平面トガ交レバ,ソノ二ツノ交線ハ平行デアル.

定理 3. 平行ナ二直線ノ一ツダケヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行デアル.

[證明] 平行ナ二直線 a, b ヲ含ム一平面 N ト,b ダケヲ含ム平面 M トノ交線ハ b デアル. 若シ a ガ M ニ平行デナイトスレバ,ソノ交點ハ M, N ノ交線 b 上ニアル. コレハ a, b ガ交ルコトトナツテ,假設ニ反スル. 故ニ M ハ a ニ平行デアル.



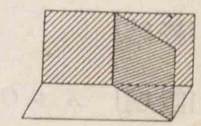
系 1. 一直線ヲ含ム平面トソノ直線ニ平行ナ平面トノ交線ハソノ直線ニ平行デアル.

系 2. 平行ナ二直線ノ各々ヲ含ム二ツノ平面ノ交線ハ,ソノ平行ナ二直線ニ平行デアル.

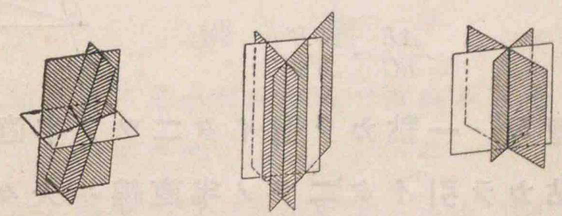
系 3. 同一ノ直線ニ平行ナ二直線ハ互ニ平行デアル.

例題

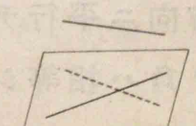
1. 三枚ノ厚紙デ,唯一點デ交ル三ツノ平面ノ模型ヲ作レ. 又一點デ交ル三ツノ平面ニヨツテ,空間ハ幾ツノ部ニ分ケラレルカ.



2. 三ツノ平面ガ二ツヅツ相交ルトキ,三ツノ交線ハ
(1) 同一ノ點ヲ通ルカ,
(2) 互ニ平行デアルカ,
(3) 又ハ一致スル.



3. 一平面上ニナイ二直線ノ一ツヲ含ミ,他ニ平行ナ平面ハ唯一ツアル.

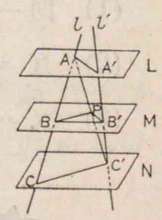


定理 4. 互ニ平行ナ三ツノ平面ニ交ルニツノ直線ガ,コレラノ平面ニヨツテ截リ取ラレル線分ノ比ハ相等シイ.

[假設] 平行ナ二直線 l, l' ガ平行ナ平面 L, M, N ニヨツテ夫々點 A, A'; B, B'; C, C' デ截ラレルモノトスル.

[終結] $$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

[證明] A ト C' トヲ通ル直線ハ,必ズ平面 M ニ一點 P デ交ル. 三點 A, C', A' ガ決定スル平面ト L, M トノ交線 AA', PB' ハ平行デアル.



故ニ $$\frac{AP}{PC'}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

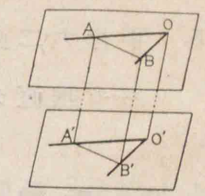
同様ニ $$\frac{AP}{PC'}=\frac{AB}{BC}.$$

故ニ $$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

定理 5. 一點カラ引イタニツノ半直線ガ,他ノ點カラ引イタニツノ半直線ニ夫々同ジ方向ニ平行デアルトキハ,コレラノ作ルニツノ角ハ相等シイ.

[證明] 一點 O カラ引イタ二ツノ半直線及ビ他ノ

點 O' カラ引イタ二ツノ半直線上ニ夫々 A, B; A', B' ヲ



$$OA \parallel O'A',\quad OB \parallel O'B',$$
$$OA=O'A',\quad OB=O'B'$$

デアルヤウニトル. ソノトキハ四邊形 $OO'A'A$ ハ平行四邊形デアルカラ,

$$AA'=OO',\quad AA' \parallel OO'.$$

同様ニ $$BB'=OO',\quad BB' \parallel OO'.$$

故ニ $$AA'=BB',\quad AA' \parallel BB'.$$

從ツテ四邊形 $AA'B'B$ ハ平行四邊形デアルカラ

$$AB=A'B'.$$

故ニ $$\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'.$$

ヨツテ $$\angle AOB=\angle A'O'B'.$$

例題

1. 定點ヲ通リ定平面ニ平行ナ直線ハ,スベテ同一ノ平面上ニアル.

2. 任意ノ點カラ,同一ノ平面上ニナイ二ツノ定直線ニ夫々同ジ方向ニ平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ一定デアル.

[註] コノ一定ノ角ヲ最初ノ**二直線ノナス角**トイフ. コ

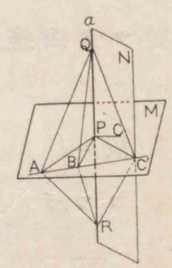
ノ角ガ直角デアルトキハコノ兩直線ハ**垂直デアル**トイフ.

3. 平行ナ二直線ノ一ツニ垂直ナ直線ハ他ノ直線ニモ垂直デアル.

81. 垂線

定理 6. 一直線上ノ一點ヲ通リ,コノ直線ニ垂直ナ直線ハスベテ同一ノ平面上ニアル.

[證明] 直線 a 上ノ一點 P ヲ通リ a ニ垂直ナ直線ヲ $PA, PB, PC, \ldots\ldots$ トシ, PA 及ビ PB ガ決定スル平面ヲ M トスル. a ト PC トガ決定スル平面 N ヲ考ヘレバ, M, N ハ異ナル平面デ,點 P ヲ共有スルカラ, コノ二面ハ交ツテ交線 PC ガ出來ル.



今平面 M 上ニ PA, PB, PC' ト交ルヤウナ直線ヲ引キ,ソノ交點ヲ夫々 A, B, C' トシ, a 上ニ P カラ等距離ニアル點 Q, R ヲトル.

AP ハ線分 QR ノ垂直二等分線デアルカラ

$$AQ=AR.$$

同様ニ　$$BQ=BR.$$

故ニ　$$\triangle ABQ \equiv \triangle ABR.$$

從ッテ　$$\angle QAB=\angle RAB.$$

故ニ二邊トソノ夾角トガ相等シイカラ

$$\triangle AQC' \equiv \triangle ARC'.$$

ヨッテ　$$QC'=RC'.$$

故ニ二等邊三角形 $QC'R$ ノ頂點ト底邊ノ中點 P トヲ結ンダ PC' ハ底邊ニ垂直デアル.

PC, PC' ハ共ニ平面 N 上ニアッテ a ニ垂直デアルカラ一致スル. 即チ P ヲ通リ a ニ垂直ナ直線ハスベテ平面 M 上ニアル.

[定義] 一平面ニ交ル直線ガ,ソノ交點ヲ通ルコノ平面上ノスベテノ直線ニ垂直デアルトキ,直線ト平面トハ互ニ**垂直デアル**,又ハ**直交スル**トイヒ,コノ直線ヲ平面ノ**垂線**,ソノ交點ヲ**垂線ノ足**トイフ. 又平面ニ交ル直線デ,平面ノ垂線デナイモノヲ**斜線**トイヒ,ソノ交點ヲ**斜線ノ足**トイフ.

系 1. 一直線上ノ一點ヲ通リ,コレニ垂直デアル平面ハイツモ唯一ツアル.

系 2. 相交ル二直線ノ交點ヲ通リ,コノ二直線ノ各々ニ夫々垂直デアル二ツノ平面ノ交線ハ二直線ニ垂直デアル.

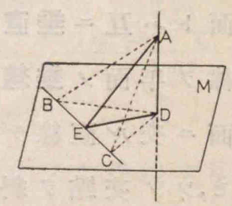
系 3. 相交ル二直線ノ交點ヲ通リ,コノ二直線ノ

各々ニ垂直デアル直線ハ,二直線ノ決定スル平面ニ垂直デアル.

[定義]　平面外ノ一點カラコノ平面ニ垂線ヲ引イタトキ,コノ點カラ垂線ノ足マデノ距離ヲ**垂線ノ長サ**,或ハ**點ト平面トノ距離**トイフ.平行ナ**二ツノ平面ノ間ノ距離**トハ,兩平面ニ垂直デソノ兩端ガコノ兩平面上ニアル線分ノ長サヲイフ.

定理 7.　平面 M ノ垂線 AD ノ足 D カラ M 上ノ任意ノ直線 BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ E トスレバ,直線 AE ハ BC ニ垂直デアル.

[證明]　直線 BC 上ニ E カラ等シイ距離ニアル點 B, C ヲトレバ,DE ハ線分 BC ノ垂直二等分線デアルカラ



$$BD=CD.$$

AD ハ M ニ垂直デアルカラ

$$\angle ADB=\angle ADC=\frac{\pi}{2}.$$

故ニ　　　$\triangle ABD\equiv\triangle ACD.$

從ッテ　　　$AB=AC.$

AE ハ二等邊三角形 ABC ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ

結ブ直線デアルカラ

$$AE\perp BC.$$

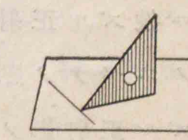
[註]　コノ定理ヲ**三垂線ノ定理**トイフ.

系 1.　平面 M 外ノ一點 A カラ M 上ノ任意ノ直線 BC ニ引イタ垂線ノ足 E ヲ通リ,BC ニ垂直ナ直線 DE ヲ M 上ニ引ケバ,A ヨリ DE ニ引イタ垂線ハ M ニ垂直デアル.

系 2.　平面 M 外ノ一點 A カラ M ニ引イタ垂線ノ足 D ヲ通リ,M 上ニ直線 DE ヲ引キ,更ニ E ヲ通リ DE ニ垂直ナ直線 BC ヲ M 上ニ引ケバ,AE ハ BC ニ垂直デアル.

例　題

1. 定規ヲ用ヒテ三垂線ノ定理ヲ說明セヨ.



2. 平面外ノ一點カラコノ平面ニ垂直ナ直線ヲ作レ.
3. 柱ガ地面ニ垂直デアルカドウカヲ確メル方法ヲイヘ.
4. 平面外ノ一點カラコノ平面ニ引イタ線分ノ中デ,

(1) 垂線ハ最モ短イ.

(2) 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ斜線ハスベテ相等シイ.

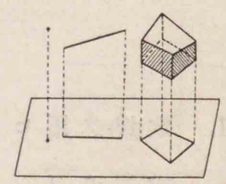
5. 一平面ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアル.

6. 平面外ノ一點カラ等距離ニアルコノ平面上ノ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

7. 二點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ何カ.

82. 正射影

[定義] 點ガ一平面上ニ投ズル**正射影**トハ,ソノ點カラ平面ニ引イタ垂線ノ足デアル. 一般ニ任意ノ圖形ガ一平面上ニ投ズル正射影トハ,ソノ圖形上ノスベテノ點ガコノ平面上ニ投ズル正射影ノ作ル圖形デアル.



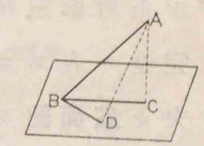
問 一直線ノ一平面ニ投ズル正射影ハ一ツノ直線デアルコトヲ證明セヨ.

[定義] 一直線トソレガ一平面ニ投ズル正射影トノナス鋭角(又ハ直角)ヲ**直線ト平面トノナス角**トイフ.

定理 8. 一平面ノ斜線ガコノ平面上ノスベテノ直線トナス角ノ中デ,ソノ正射影トナス角ガ最モ小サイ.

[證明] 斜線 AB 上ノ任意ノ一點 A ノ正射影ヲ C, AB ノ足 B ヲ通ルコノ平面上ノ任意ノ直線ヲ BD トシ, BD ガ BC ニ等シイヤウニ點 D ヲ直線 BD 上ニトル. AC ハ平面ニ垂直デアルカラ

$$AC<AD.$$



又 $BC=BD$, AB ハ共通.

故ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle ABD$ トデ

$$\angle ABC<\angle ABD.$$

例題

1. 長サ 15 cm ノ鉛筆ヲ机ニ對シ 45° ノ角ヲナスヤウニ傾ケルトキ,ソノ鉛筆ノ机上ニ投ズル正射影ノ長サヲ計算セヨ.

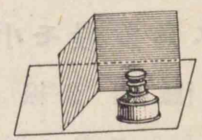
2. 前問デ鉛筆ヲ漸次立テルトキ,正射影ノ長サハドウ變化スルカ.

3. 平行四邊形ノ對邊ガ一平面ニ投ズル正射影ハ相等シイ.

4. 斜線ハ平面上ノドンナ直線ト最モ大キイ角ヲナスカ.

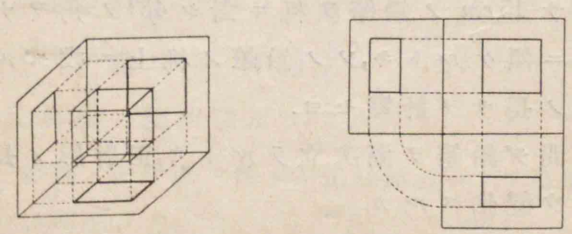
83. 立體ノ射影

問　インク壺ヲ机上ニ置キ,ソノ机上ニ二枚ノ厚紙ヲ互ニ垂直デアルヤウニ直立サセ,コノ二ツノ紙上ニ投ズル正射影ヲ畫ケ.



互ニ垂直ニ一點デ交ル三直線ノ二ツヅツヲ含ム三ツノ平面ヲトリ,一ツノ立體ノコレラノ平面ニ投ズル正射影三種ヲ作レバ,ソノ立體ノ全形ヲ平面上ニ完全ニ表スコトガ出來ル. コノ三枚ノ平面圖形ヲ夫々**底面圖**(又ハ**平面圖**),**正面圖**,**側面圖**トイフ.

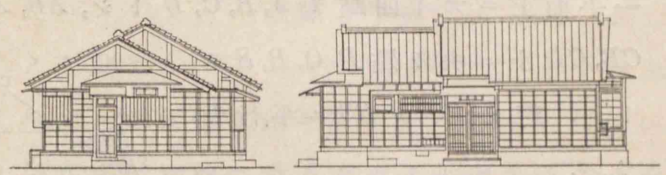
コノ三枚ノ互ニ垂直ナ平面圖ヲ三枚ノ紙ニ書クコトハ面倒デアルカラ,次圖ノヤウニ一枚ノ紙ノ上ニ擴ゲテ表スノガ普通デアル.

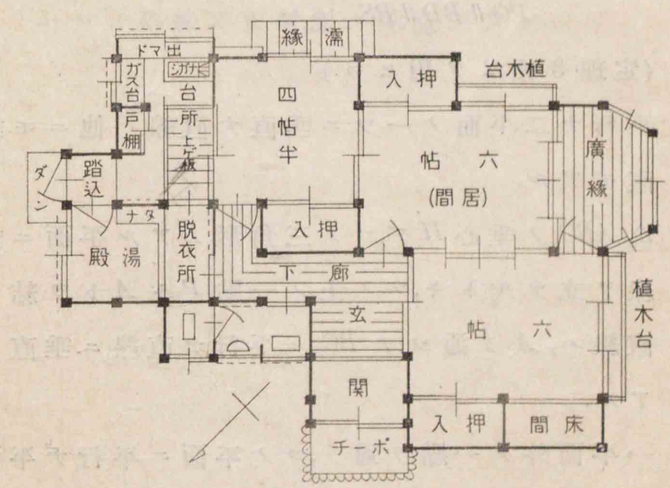


立體ヲ正確ニ平面上ニ寫スコトハ甚ダ重要ナコトデ,又必要ナ場合ガ實際上多イ. コノトキニハ上ノヤウナ三ツノ圖形ヲ作レバヨイ. コノ方法ハ廣

ク應用サレルモノデ,コレニヨツテソノ部分,部分ノ形,大キサ,位置ノ關係ガワカル.

次ノ圖ハコノ應用ノ一例デ,家屋ノ設計圖デアル.





演習問題 XVI.

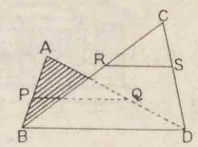
1. 一直線外ノ一點ヲ通リ,コノ直線ニ平行ナ直線ハイツモ唯一ツアル.

2. 一平面上ニアル直線ニ平行ナ直線ハ,コノ平面

上ニアルカ,又ハコノ平面ニ平行デアル.

3. 一點ヲ通ル二ツノ直線ノ各々ヲ夫々含ム二平面ノ交線ハコノ點ヲ通ル.

4. 一平面上ニナイ四點ヲ A, B, C, D トシ, AB, AD, CB, CD 上ニ夫々點 P, Q, R, S ヲトル. 若シ PQ ガ RS ニ平行ナラバ,



$$PQ \parallel BD \parallel RS.$$

(定理 3 系 2 ヲ用ヒヨ.)

5. 平行ナ二平面ノ一ツニ垂直ナ直線ハ他ニモ垂直デアル.

6. $\triangle ABC$ ノ垂心 H デ,コノ三角形ノアル平面ニ垂線ヲ立テルトキ,ソノ上ノ一點 P ト A トヲ結ブ直線ハ, A ヲ通ッテ BC ニ平行ナ直線ニ垂直デアル.

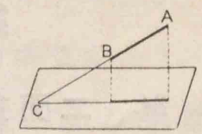
7. 一平面外ノ一點ヲ通リ,コノ平面ニ平行ナ平面ハイツモ唯一ツアル.

8. 交ラナイ二直線上ニ兩端ヲモツ線分ノ中點ノ軌跡ハ一ツノ平面デアル.

9. 一平面上ニナイ二直線ノ各々ニ垂直ナ直線ハ唯一ツアル.

10. 一點ヲ通リ一平面上ニナイ二直線ニ交ル直線ヲ作レ.

11. 二點 A, B ト一平面トノ距離ノ比ハ, A, B ヲ含ム直線ト平面トノ交點ヲ C トスレバ, AC, BC ノコノ平面上ニ投ズル正射影ノ比ニ等シイ.

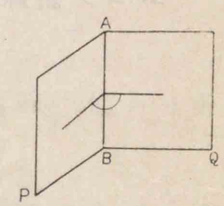


12. 一平面ノ斜線ニ垂直デ,コノ平面上ニアル直線ハコノ斜線ノ正射影ニ垂直デアル.

第二章　多面角

84. 二面角

[定義] 一直線デ分ケラレタ平面ノ各部分ヲ**半平面**トイヒ,ソノ直線ヲ半平面ノ**稜**トイフ. 同一ノ稜ヲモツ二ツノ半平面ハ空間ヲ二ツノ部分ニ分ケル. コノ各部分ヲ**二面角**トイヒ,ソノ部分ヲコノ二面角ノ**内部**,他ノ部分ヲ二面角ノ**外部**,半平面ノ各々ヲ二面角ノ**面**,又ソノ半平面ノ稜ヲ二面角ノ**稜**トイフ.



圖デ AB ハ稜, ABP, ABQ ハ二面角ノ面デアル. コノ二面角ヲ表スニハ,二面角 $PABQ$ 又ハ單ニ二面角 AB ト記ス.

二直線ガナス角ト同ジク,二面角ニ對シテモ**共軛二面角**,**接二面角**ナドガアル.

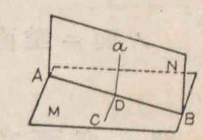
二面角ノ稜ノ上ノ任意ノ一點ヲ通リ,夫々二面角ノ面上ニアツテ,稜ニ垂直ナ二直線ノナス角ハ,定理5ニヨツテ,ソノ大キサガ一定デアル. コノ角ヲ二面角ノ**平面角**,又ハソノ**二平面ノナス角**トイフ.

問 紙ヲ折ツテ二面角ヲ作リ,ソノ大キサヲ測レ.

[定義] 二平面ノナス角ガ直角デアルトキ,コノ二平面ハ**互ニ垂直デアル**,又ハ**互ニ直角ニ交ル**トイフ.

定理 9. 一平面ニ垂直ナ直線ヲ含ム平面ハソノ平面ニ垂直デアル.

[證明] 一平面 M ニ垂直ナ直線 a ヲ含ム平面ヲ N トシ, M, N ノ交線ヲ AB トスレバ, a ハ AB ニ垂直デソノ足 D ハ AB 上ニアル. D ヲ通リ AB ニ垂直ナ M 上ノ直線 DC ヲ引ケバ, DC ハ M 上ニアルカラ, a ニ垂直デアル. 即チ二面角ノ大キサガ直角デアルカラ, N ハ M ニ垂直デアル.



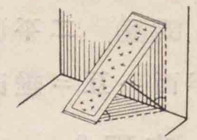
系 1. 互ニ垂直ナ二平面 M, N ノ一ツ M 上ニアル一點カラ他ノ平面 N ニ引イタ垂線ハ M 上ニアル.

系 2. 互ニ垂直ナ二平面 M, N ノ一ツ M 上ニアル一點カラ M, N ノ交線ニ引イタ垂線ハ N ニ垂直デアル.

例　題

1. 教室ノ床ノ面ト壁ノ面トノナス二面角ノ大キサヲイヘ.

2. 張板ニ張ツタ布地ヲ最モ早ク乾カスニハ,太陽カラノ光線ガ張板ノ面ニ垂直ニ當ルヤウニスレバヨイ. 今光線ガ地面ト60° ノ角ヲナストキハ板張ヲドノヤウニ側壁ニ立テ掛ケレバヨイカ.

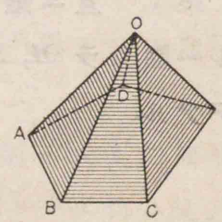


3. 一點デ互ニ垂直ニ交ル三ツノ直線ノ二ツヅツガ決定スル三ツノ平面ハ互ニ垂直デアル.

4. 二面角ノ稜ニ垂直ナ平面ハコノ二面角ノ各々ノ面ニ垂直デアル.

85. 多面角

定義 一點 O カラ出ル數多ノ半直線 $OA, OB, \ldots\ldots, OD$ ノ順次ニ二ツヅツガナス角 $AOB, BOC, \ldots\ldots, DOA$ ニヨツテ空間ハ二ツノ部分ニ分ケラレル. コノ各々ノ部分ヲ**多面角**トイヒ, O ヲ多面角ノ**頂點**, $OA, OB, \ldots\ldots, OD$ ノ各々ヲ**稜**,角 $AOB, BOC, \ldots\ldots, DOA$ ノ内部ヲ**面**トイフ.



三ツノ面ヲモツ多面角ヲ**三面角**トイヒ,一般ニ n

個ノ面ヲモツ多面角ヲ n **面角**トイフ.

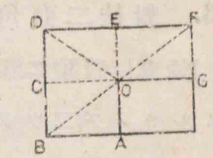
頂點ガ O, 稜ガ $OA, OB, \ldots\ldots, OD$ デアル多面角ヲ表スニハ $O\text{-}ABC\ldots\ldots D$ ト記ス.

問 傘ヲ開イタトキ,ソレガ作ル多面角ハ何面角カ. 但シ,ソノ傘ノ骨ノ數ハ54本デアルモノトスル.

定理 10. 多面角ノ面ノ數ト稜ノ數トハ相等シイ.

問 1 傘ヲソノ面ガ平面ニナルヤウニ擴ゲルコトガ出來ルカ.

問 2 折紙ヲ右圖ノヤウニ切リ,點線ニ沿フテ折目ヲツケ, OA, OG ヲ貼リツケテ六面角ヲ作レ



問 3 前問デ作ツタ六面角ノ各面ノ角ノ和ハ幾ラカ.

定理 11. 多面角ノ各面ノ角ノ和ハ四直角ヨリ小サイ.

證明ハ略ス.

例題

1. 教室ノ隅ガ作ル三面角ノ各面ノ角ノ和ハ幾ラカ.

2. 三面角ノ二ツノ面ノ角ガ相等シイトキ,コレラ

ニ對スル二面角ハ又相等シイ.

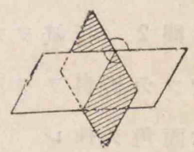
3. 三ツノ平面ガ三面角ヲ作ラナイ場合ヲ列擧セヨ.

演習問題 XVII.

1. 一平面ニ垂直ナ二平面ノ交線ハモトノ平面ニ垂直デアル.

2. 平行ナ二平面ノ一ツニ垂直ナ平面ハ他ノ平面ニモ垂直デアル.

3. 對稜二面角ハ相等シイ.



[注意] **對稜二面角**トハ對頂角ニ相當スルモノデ,二ツノ平面ガ交ツテ作ル四ツノ二面角ノ中デ接二面角デナイ一組ヲ指ス.

4. 相交ル二平面ノ各々カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

5. 三面角ノ各面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

6. 二ツノ平面ガ交ツテ作ル四ツノ二面角ノ中デ,一ツガ直角ナラバ他ノ三ツモ亦直角デアル.

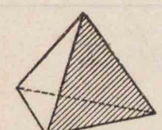
7. 三面角ノ何レノ面ノ角モ他ノ二ツノ面ノ角ノ和ヨリ小サイ.

第三章　多　面　體

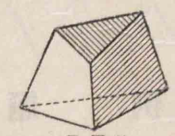
86. 正多面體

[定義] 平面多角形ノミデ圍マレタ立體ヲ**多面體**トイヒ,ソノ立體ニ含マレル空間ノ部分ヲソノ多面體ノ**內部**,各多角形ヲソノ**面**,面ト面トノ交線ヲ**稜**,稜ト稜トノ交點ヲ**頂點**トイフ. 多面體ノ同ジ面上ニナイ二頂點ヲ結ブ線分ヲ**對角線**トイフ.

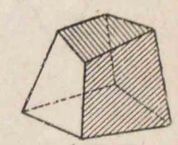
多面體ハソノ面ノ數ニ從ツテ四面體,五面體,六面體ナドト呼ブ. 例ヘバ骰子ハ六面體デアル.



四面体



五面体



六面体

多面體ノ面,稜,頂點ノ數ヲ夫々 f, e, v トスレバ

$$f+v=e+2.$$

[註] コレヲ**おいれるノ定理**トイフ.

[定義] **正多面體**トハ各面ガ合同ナ正多角形デ各多面角ガスベテ合同デアルヤウナ多面體デアル.

正多面體ノ種類ハ次ノ五ツニ限ル.

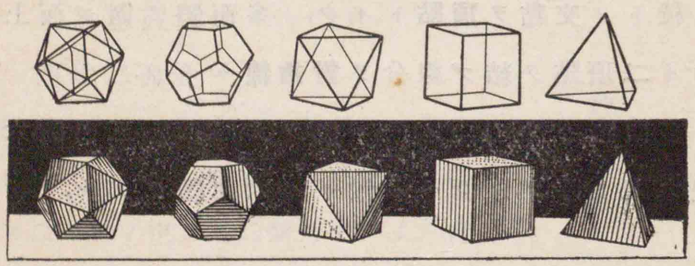
(1) **正四面體** 各面ハ正三角形デアル.

(2) **正六面體** 各面ハ正方形デアル.

(3) **正八面體** 各面ハ正三角形デアル.

(4) **正十二面體** 各面ハ正五邊形デアル.

(5) **正二十面體** 各面ハ正三角形デアル.

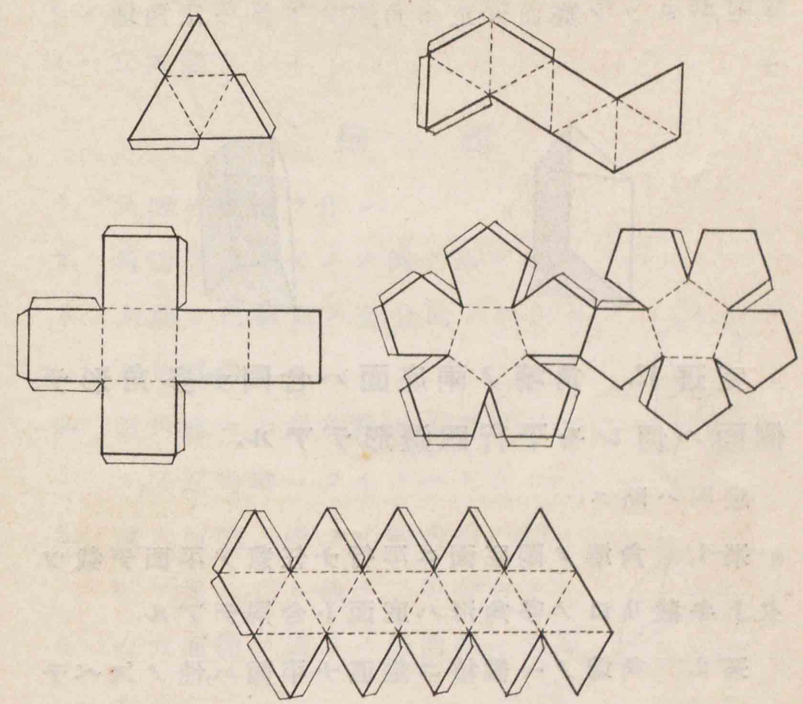


例題

1. 五種類ノ正多面體ニツイテ,おいれるノ定理ガ正シイカドウカヲ調ベヨ.

2. 五種類ノ正多面體ノ各々ノ多面角ニツイテ,ソノ面ノ角ノ和ハ何度カ.

3. 紙ニ次ノ圖ヲ書キ,ソレヲ切リ拔キ正多面體ヲ作レ.

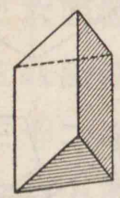


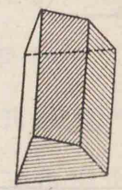
87. 角壔

$\boxed{\text{定義}}$ 二ツノ面ガ平行デ,他ノスベテノ面ガ一直線ニ平行デアルヤウナ多面體ヲ**角壔**トイヒ,ソノ平行ナ二面ヲ**底面**,他ノ面ヲ**側面**,二ツノ側面ニ共通ナ稜ヲ**側稜**,兩底面間ノ距離ヲ角壔ノ**高サ**トイフ.

角壔ハソノ底面ノ邊ノ數ニ從ツテ三角壔,四角壔ナドトイフ. 側稜ガ底面ニ垂直ナモノヲ**直角壔**ト

イヒ,特ニソノ底面ガ正多角形ノトキハ**正角壔**トイフ.





定理 12.　角壔ノ兩底面ハ合同ナ多角形デ側面ハ何レモ平行四邊形デアル.

證明ハ略ス.

系 1.　**角壔ノ兩底面ニ平行ナ任意ノ平面デ截ツタトキ截リ口ノ多角形ハ底面ト合同デアル.**

系 2.　**角壔ノ一側稜ニ垂直ナ平面ハ,他ノスベテノ側稜ニ垂直デアル.**

定義　角壔ノ側稜ニ垂直ナ平面デコノ角壔ヲ截ツタトキ,截リ口ノ多角形ヲコノ角壔ノ**直截面**トイフ.

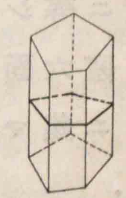
系 3.　**角壔ノ側面ノ面積ノ和ハ,ソノ角壔ノ直截面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ.**

定義　底面ガ平行四邊形デアル角壔ヲ**平行六面體**トイヒ,底面ガ矩形デアル直角壔ヲ**直六面體**トイ

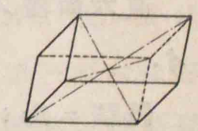
フ. 特ニ各面ガ正方形デアル直六面體ヲ**正六面體**又ハ**立方體**トイフ.

例題

1. 角壔ノ模型ヲ作レ.
2. 角壔ヲナスモノノ例ヲ擧ゲヨ.
3. 角壔ノ直截面ハ皆合同デアルコトヲ證明セヨ.



4. 四角壔ニハ對角線ガイクツアルカ,又五角壔ニツイテハドウカ.
5. 直六面體ノ四ツノ對角線ハ同一點ヲ通リ,互ニ他ヲ二等分スル.



6. 直六面體ノ四ツノ對角線ハ相等シイ.

88.　角壔ノ體積

定義　立體ガ占メル空間ノ有限ノ部分ノ大キサヲソノ立體ノ**體積**トイフ.

問 1.　立體ヲ形ヲ變ヘナイヤウニ動カシタトキ,ソノ體積ハ變化スルカ.

問 2.　二立入ノ容器ニ,最初一立ノ水ヲ入レ次ニ又一立ノ水ヲ入レタトキ都合何立ノ水ガ入ツタカ.

公理4. 一ツノ立體ヲソノ形ヲ變ヘズニ,他ノ立體ニ全ク重ネ合スコトガ出來ルトキ,ソノ兩立體ノ體積ハ相等シイ.

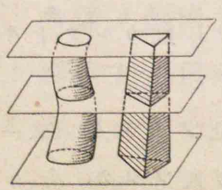
公理5. 一ツノ立體ヲ二ツノ部分ニ分ケタトキ,兩部分ノ體積ノ和ハモトノ立體ノ體積ニ等シイ.

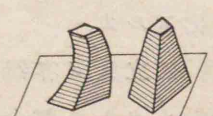
直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ,ソノ頂點ノ一ツニ集マル三ツノ稜ヲ表ス數ノ積ニ等シイ.

直六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.

體積ニ對シテハ次ノコトガイヘル.

平行ナ二平面ニ夾マレル二ツノ立體ヲ,ソレラノ平面ニ平行ナドンナ平面デ截ツテモ,ソノ截リ口ノ面積ガ相等シイトキハ,コノ二ツノ立體ノ體積ハ相等シイ.





コレヲ**かばりえりノ原理**トイフ.

問 紙ヲ澤山重ネテかばりえりノ原理ガ正シイコトヲ見ヨ.

定理13. 角壔ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.

[證明] 角壔ヲ底面ニ平行ナ任意ノ平面デ截レバ,定理12系1ニヨッテ,底面ニ合同ナ多角形ガ出來ルカラ,ソノ截リ口ハスベテ面積ガ相等シイ. 今底面積ト高サトガ角壔ノ底面積ト高サトニ等シイヤウナ直六面體ヲ考ヘレバ,前ト同ジヤウニ底面ニ平行ナ平面デ截レバ合同ナ矩形ガ得ラレル. 故ニかばりえりノ原理ニヨッテ,コノ角壔ノ體積ハ直六面體ノ體積ニ等シイ. 然ルニ直六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイカラ,角壔ノ體積モ亦ソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.

例 題

1. 三角壔ノ體積ハソノ直截面ノ面積ト側稜ノ長サトノ積ニ等シイ.

2. 多角壔ノ場合ニ前問題ト同ジコトガ成立スルカ.

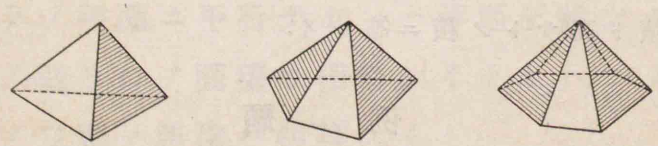
3. 側稜ノ長サガ 50 cm デ,直截面ノ三邊ガ夫々 3 cm, 4 cm, 5 cm デアル三角壔ノ體積ヲ求メヨ.

89. 角錐

定義 一平面上ノ多角形ト,ソノ各頂點トソノ平面外ノ一點トヲ結ンデ出來ル多クノ三角形トニヨッテ圍マレタ多面體ヲ**角錐**トイヒ,ソノ多角形ヲ**底面**,各三角形ヲ**側面**,ソノ共通ノ頂點ヲ角錐ノ**頂點**トイフ. 二ツノ側面ノ交リヲ**側稜**トイヒ,頂點ト底面トノ距離ヲ角錐ノ**高サ**トイフ.

角錐ハ底面ノ邊ノ數ニ從ッテ三角錐,四角錐ナドトイフ.

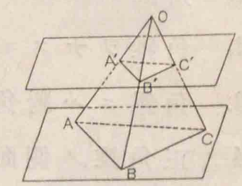
角錐ヲ表スニハ,ソノ頂點ガ O, 底面ガ $ABC\dots D$ デアレバ, $O\text{-}ABC\dots D$ ト記ス.



側稜ガスベテ相等シク,且ツ底面ガ正多角形デアル角錐ヲ**正角錐**トイフ.

定理 14. 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截レバ,截リ口ト底面トハ互ニ相似デアル.

[證明] 簡單ノタメニ三角錐 $O\text{-}ABC$ ニツイテ證明スル. 多角錐ノ場合モ同ジ方法デ證明サレル.



底面ニ平行ナ平面ニヨル截リ口ヲ $A'B'C'$ トスレバ定理 2 系 2 ニヨッテ

$$AB \parallel A'B'.$$

故ニ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}.$$

同樣ニ $$\frac{BC}{B'C'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'},$$

$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{OA}{OA'}.$$

故ニ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{OA}{OA'}.$$

即チ $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ邊ガ比例スル. 故ニ相似デアル.

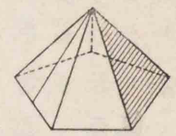
系 1. 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截レバ,側稜及ビ高サハ同ジ比ニ分ケラレル.

系 2. 截リ口ノ面積ハ頂點カラソノ平面マデノ距離ノ平方ニ比例スル.

定義 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ッタトキ,底面トコノ平面トノ間ニアル角錐ノ部分ヲ**角錐臺**,又ハ**截頭角錐**トイフ.

例 題

1. 角錐ノ模型ヲ作レ.
2. 角錐ヲナスモノノ例ヲ擧ゲヨ.
3. 角錐ニハ對角線ガアルカ.
4. 正角錐ノ側面ノ面積ハ,底面ノ周ト頂點カラ底面ノ一邊ニ引イタ垂線トノ積ノ$\frac{1}{2}$ニ等シイ.



5. 正四面體ノ各頂點カラソレニ對スル面ニ引イタ垂線ハ,スベテ一點デ交リ且ツ相等シイ.
6. 正四面體ノ一稜ノ長サヲ $a\,cm$ トスレバ,高サハ何糎カ.

90. 角錐ノ體積

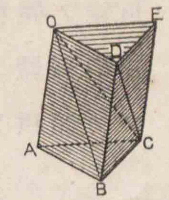
定理 15. 底面積及ビ高サガ相等シイ角錐ノ體積ハ相等シイ.

定理14系2ヲ用ヒ,かばりえりノ原理ニヨツテ證明出來ル.

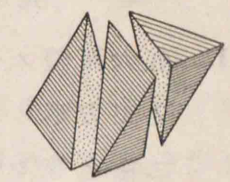
定理 16. 三角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

[證明] 三角錐 $O\text{-}ABC$ ノ二頂點 B, C カラ OA ニ平

行線 BD, CE ヲ引イテ三角壔 $ABCODE$ ヲ作レバ,コノ三角壔ハ次ノ三ツノ三角錐ニ分ケラレル.



$O\text{-}ABC,\quad O\text{-}BCD,\quad O\text{-}CDE.$



$O\text{-}ABC$, $O\text{-}CDE$ デ $\triangle ABC$, $\triangle ODE$ ヲ夫々底面ト見レバ,底面積及ビ高サガ相等シイカラ,コノ兩三角錐ノ體積ハ等シイ. 同様ニ $O\text{-}ABC$, $O\text{-}BCD$ デ $\triangle ABO$, $\triangle DOB$ ヲ底面ト見レバ.コノ兩三角錐ノ體積ハ相等シイ. 從ツテ三角壔ノ體積ハ $O\text{-}ABC$ ノ體積ノ三倍ニ等シイ. 故ニ $O\text{-}ABC$ ノ體積ハ三角形 ABC ノ面積トソノ高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

系. 角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

例 題

1. 高サガ $12\,cm$, 底面ノ三角形ノ底邊ガ $5\,cm$, 高サガ $6\,cm$ デアル三角錐ノ體積ヲ求メヨ.
2. 角錐ノスベテノ側稜ノ中點ヲ通ル平面デ,コノ角錐ヲ截ツタトキ出來ル角錐ノ體積ハモトノ

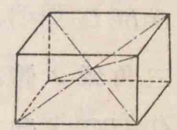
角錐ノ體積ノ何分ノ一カ.

3. 正四面體ノ一ツノ稜ノ長サガ acm デアルトキ, ソノ體積ヲ求メヨ.

演習問題 XVIII.

1. 直六面體ノ一頂點ヲ共有スル三稜ノ各々ノ上ノ正方形ノ和ハ,一ツノ對角線ノ上ノ正方形ノ二乘ニ等シイ.

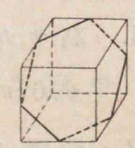
2. 平行六面體ノ對角線ハスベテ一點 O ヲ通ル. 又 O ヲ通ツテソノ端點ガコノ直六面體ノ面上ニアル線分ハ, O ニヨツテ二等分サレル.



3. 各面ガ四邊形デアル六面體ノ四ツノ對角線ガ同一點ヲ通リ,且ツスベテコノ點デ二等分サレルナラバ,コノ六面體ハ平行六面體デアル.

4. 多面體ノ稜ノ數ハ6ヨリ小サイコトハナイ. (おいれるノ定理ヲ用ヒヨ.)

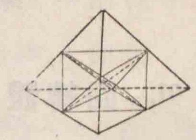
5. 正六面體ヲ一ツノ平面デ截リ,ソノ截リ口ガ正六邊形デアルヤウニセヨ.



6. 正四面體ノ相對スル二ツノ稜ハ垂直デアル.

7. 四面體ノ二組ノ相對スル稜ノ中點ハ,一ツノ平行四邊形ノ頂點トナル.

8. 四面體ノ三組ノ相對スル稜ノ中點ヲ夫々結ブ三ツノ直線ハ一點ヲ通リ,ソノ點デ二等分サレル.

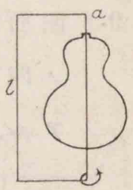


9. 四面體ノ一組ノ相對スル稜ニ平行ナ平面デコノ四面體ヲ截レバ,ソノ截リ口ハ平行四邊形デアル.

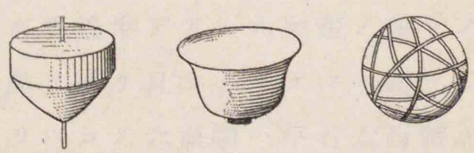
第四章 回轉體

91. 回轉體

定義 一ツノ平面ガソノ上ニアル直線 a ヲ軸トシテ一回轉シ,再ビモトノ位置ニ來ルトキ,コノ平面上ノ一ツノ曲線 l ハ面ヲ畫ク. コノ面ヲ**回轉面**トイヒ,直線 a ヲソノ**軸**,回轉面デ圍マレタ立體ヲ**回轉體**トイフ.



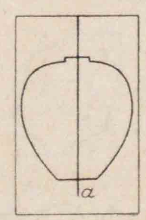
問 1. 茶椀ハ回轉體カ. こま及ビ毬ハドウカ.



問 2. 回轉體ト見ナサレルモノノ例ヲ擧ゲヨ.

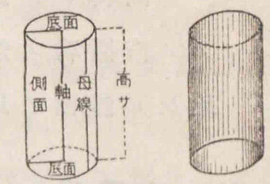
問 3. 回轉體ヲソノ軸ヲ含ム平面デ截ツタトキ,ソノ截リ口ノ圖形ハドンナモノカ.

問 4. 平面ヲソノ上ニアル直線 a ヲ軸トシテ半回轉シタトキ,a ヲ對稱ノ軸トスル對稱ナ曲線ニヨツテ畫カレル面ハドンナモノカ.



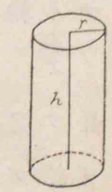
92. 直圓壔

定義 矩形ノ一邊ヲ軸トシテコレヲ一回轉サセタトキ出來ル回轉體ヲ**直圓壔**トイヒ,ソノ回轉ノ軸ヲ直圓壔ノ**軸**トイフ. 軸ニ平行ナ邊ノ畫ク面ヲ**側面**,軸ニ隣ル二邊ガ畫ク圓ヲ各々**底面**,兩底面ノ距離ヲ**高サ**トイフ. 直圓壔ノ軸ヲ含ム平面トソノ側面トノ交線ヲ直圓壔ノ母線トイヒ,側面ノ面積ヲ**側面積**トイフ.



定理 17. 直圓壔ノ側面積ハ一ツノ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シク,ソノ體積ハ一ツノ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ.

直圓壔ノ高サヲ h, 底面ノ半徑ヲ r トスレバ,



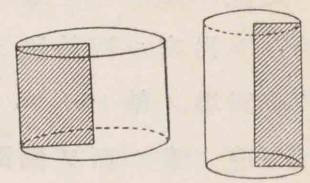
$$\text{側面積}=2\pi rh,$$
$$\text{全表面積}=2\pi r(r+h),$$
$$\text{體積}=\pi r^2h.$$

例題

1. 直圓壔ノ形ヲナスモノノ例ヲ擧ゲヨ.
2. 直圓壔ノ軸ニ平行ナ平面デ截ツタトキノ截口

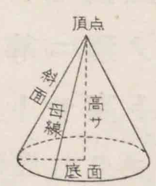
ハ矩形デアル.

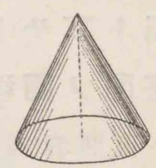
3. 面積ノ等シイ二ツノ矩形ノ各々一邊ヲ軸トシテ一回轉シテ出來ル二ツノ直圓壔ノ側面積ノ比及ビ體積ノ比ヲ求メヨ.



93. 直圓錐

定義 直角三角形ヲソノ直角ヲ夾ム邊ノ一ツヲ軸トシテ一回轉シタトキニ出來ル回轉體ヲ**直圓錐**トイヒ,斜邊ノ畫ク面ヲコノ直圓錐ノ**側面**,他ノ邊ノ畫ク圓ヲソノ**底面**,底面上ニナイ軸ノ端ヲソノ**頂點**トイフ. 又軸トシタ邊ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**,斜邊ノ長サヲソノ**斜高**トイヒ,頂點ト底面ノ周上ノ一點トヲ結ブ線分ヲソノ**母線**トイフ. 又底面ノ面積ヲ**底面積**,側面ノ面積ヲ**側面積**ト呼ブ.





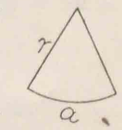
定理 18. 直圓錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

直圓錐ノ高サヲ h, 底面ノ半徑ヲ r トスレバ,

$$體積=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

問 1. 圖ノヤウナ扇形ノ紙片ノ面積ヲ求メヨ. 但シソノ弧ノ長サヲ a, 半徑ヲ r トスル.

問 2. コノ紙片ヲ用ヒテ直圓錐ノ模型ヲ作レ.



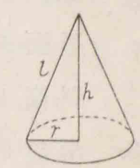
定理 19. 直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シイ.

直圓錐ノ高サヲ h, 底面ノ半徑ヲ r, 斜高ヲ l トスレバ,

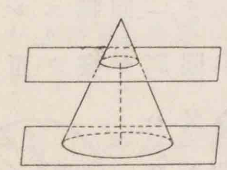
$$側面積=\pi rl,$$

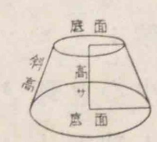
$$全表面積=\pi r(r+l),$$

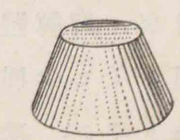
$$l=\sqrt{r^2+h^2}.$$



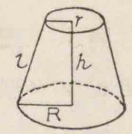
定義 直圓錐ヲソノ母線上ノ一點ヲ通リ底面ニ平行ナ平面デ截ッタトキ,ソノ平面ト底面トノ間ニ夾マレル直圓錐ノ部分ヲ**直圓錐臺**トイフ. 直圓錐臺ノ圓デアル兩面ヲソノ**底面**,他ノ面ヲ**側面**トイヒ,兩底面間ニ夾マレル直圓錐ノ母線ノ部分ノ長サヲソノ**斜高**,兩底面ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ.







直圓錐臺ノ斜高ヲl,高サヲh,兩底ノ半徑ヲ夫々R,rトスレバ,



側面積$=\pi(R+r)l$,

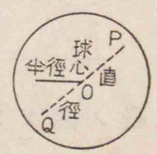
體　積$=\frac{1}{3}\pi(R^2+r^2+Rr)h$.

例　題

1. 直圓錐ノ形ヲナスモノノ例ヲ擧ゲヨ.
2. 直圓錐ノ一ツノ母線ノ中點ヲ通リ底ニ平行ナ平面デ直圓錐ヲ截ツタトキ,ソノ截リ口ノ周ト斜高トノ積ハ側面積ニ等シイ.
3. 半徑$6cm$,中心角ガ$120°$ノ扇形ノ紙片デ作ツタ直圓錐狀ノ漏斗ノ容積ハ幾ラカ.

94. 球

[定義] 半圓ヲソノ直徑ヲ軸トシテ,一回轉スルトキ出來ル回轉體ヲ**球**トイヒ,ソノ半圓周ガ畫ク面ヲ**球面**トイヒ,半圓ノ中心ヲ**球ノ中心**又ハ**球心**トイフ. 球心ト球面上ノ一點トヲ結ブ線分ヲ球ノ**半徑**トイヒ,球心ヲ通リ球面上ニ兩端ガアル線分ヲ**直徑**トイフ.



球ニハ次ノ性質ガアル.

I. 半徑ハスベテ相等シイ.

II. 半徑ノ相等シイ球ハ合同デアル.

III. 半徑rノ球ノ中心ト一點Pトノ距離ヲdトスレバ,

(1) $r>d$ナラバ,Pハ球ノ内部ニアル.

(2) $r=d$ナラバ,Pハ球面上ニアル.

(3) $r<d$ナラバ,Pハ球ノ外部ニアル.

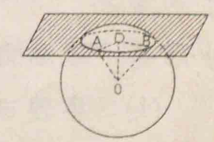
問 球ノ形ヲナスモノノ例ヲ擧ゲヨ.

定理 20. 球面上ノ一點ヲ通リソノ點ヲ通ル半徑ニ垂直デナイ平面デ球ヲ截ツタトキソノ截リ口ハ圓デアル.

[證明] (1) 平面ガ球心ヲ通ルトキ.

球ノ性質Iカラ直ニ證明サレル.

(2) 平面ガ球心ヲ通ラナイトキ.



球心カラ平面ニ下シタ垂線ノ足ヲDトシ,截リ口ノ上ニ任意ノ二點A, Bヲトル. ソノトキ$\triangle OAD$ト$\triangle OBD$トハ共ニ直角三角形デ

ODハ共通, $OA=OB$.

故ニ　　$\triangle OAD\equiv\triangle OBD$.

從ツテ　　$AD=BD$.

故ニ截リ口ハ D ヲ中心トスル圓デアル.

定義 平面ガ球ノ中心ヲ通ルトキ,コノ平面ニヨル球ノ截リ口ヲ**大圓**,通ラナイトキ**小圓**トイフ. 大圓又ハ小圓ニ垂直ナ直徑ヲソノ圓ノ**軸**,軸ノ兩端ヲソノ圓ノ**極**トイフ.

系 1. 球心ト小圓ノ中心トヲ通ル直線ハ小圓ノ平面ニ垂直デアル.

系 2. 球面ト唯一點ヲ共有スル平面ハ,コノ點ヲ通ル球ノ半徑ニ垂直デアル.

定義 球面ト唯一點ヲ共有スル平面ヲ球ノ**切平面**,ソノ點ヲ**切點**トイヒ,球ト平面トハ互ニ**切スル**トイフ. 球ト一ツノ圓ヲ共有スル平面ハ球ト**相交ル**トイヒ,球ト共有點ヲモタナイ平面ハ球ト**相交ラナイ**トイフ.

系 3. 球心カラノ距離ガ

(1) 半徑ヨリ小サイ平面ハ球ト交リ,

(2) 半徑ニ等シイ平面ハ切シ,

(3) 半徑ヨリ大キイ平面ハ交ラナイ.

コノ逆モ亦眞デアル.

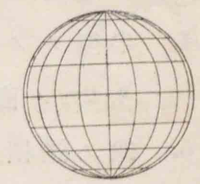
定義 球面上ノ一點ヲ通リ,コノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナ直線ヲ**切線**,ソノ點ヲ**切點**トイフ.

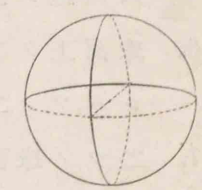
定理 21. 球ノ表面積 S,體積 V ハソノ球ノ半徑ヲ r トスレバ,次ノ式デ表サレル.

$$S=4\pi r^2,\qquad V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

證明ハ略ス.

例 題



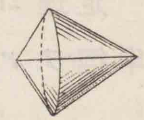


1. 地球ヲ球ト見タトキ,赤道,緯線,經線ハ大圓カ,小圓カ.
2. 一ツノ球ノ二ツノ大圓ノ周ハ一ツノ直徑ノ兩端デ交ル.
3. 二ツノ大圓ハ球面ヲ幾ツノ部分ニ分ケルカ. 三ツノ大圓ハドウカ.
4. 地球ヲ球ト見タトキ,ソノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ. 但シ地球ノ大圓ノ周ヲ四千萬米トスル.

演習問題 XIX.

1. 直圓錐ノ頂點ヲ通ル平面デ直圓錐ヲ截ツタトキノ截リ口ハ二等邊三角形デアル.
2. 直角三角形ヲソノ斜邊ヲ軸トシテ一回轉シタ

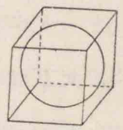
トキ出來ル回轉體ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ. 但シ直角ヲ夾ム兩邊ノ長サヲ夫々 a cm, b cm トスル.



3. 正三角形 ABC ノ頂點 A ヲ通リ BC ニ平行ナ直線ヲ軸トシテ,コノ正三角形ヲ一回轉シタトキ出來ル立體ノ體積ヲ求メヨ. 但シ正三角形ノ一邊ヲ a cm トスル.

4. 半徑 r ノ球ノ表面積ト等シイ側面積ヲモツ高サ $2r$ ノ直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ求メヨ.

5. 球ノ體積ハコノ球ヲ丁度容レル正六面體ノ體積ノ $\frac{\pi}{6}$ デアル.



6. 球面上ノ二點ガ直徑ノ兩端デナケレバ,ソノ二點ヲ通ル大圓ハ唯一ツアル.

7. 二ツノ球面ノ交リハ圓デアル. (相交ル二圓ヲ,ソノ中心線ヲ軸トシテ回轉セヨ.)

8. 球ノ半徑ヲ r,小圓ノ半徑ヲ r',小圓ノ中心ト球心トノ距離ヲ h トスレバ,

$$r'^2=r^2-h^2.$$

9. 球面上ノ一點ヲ通ル切線ノ軌跡ハ,ソノ點ヲ切點トスル切平面デアル.

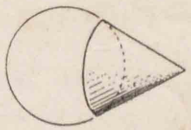
10. 直線ト球面トハ一般ニ二點デ交ル.

11. 二定點ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡ハ一ツノ平面デアル.

12. 一直線上ニナイ三定點ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡ハ一ツノ直線デアル.

13. 一平面上ニナイ四定點ヲ通ル球ハ唯一ツアル.

14. 球外ノ一點カラコノ球ニ引イタ切線ノ軌跡ヲ求メヨ.



答

例題 (33頁) 1. $\angle A=55°$, $\angle B=80°$. 2. $75°$.

例題 (35頁) 2. $5\,cm$.

例題 (41頁) 1. $78°$.

例題 (56頁) 1. $\angle B>\angle A>\angle C$.

例題 (57頁) 1. (1) 出來ナイ. (2) 出來ル. (3) 出來ナイ

演習問題 II (64頁) 10. $30°, 60°, 90°$.

例題 (68頁) 3. 5本.

演習問題 III (69頁) 3. 12邊形. 4. 10邊形.

例題 (73頁) 1. 3本, 5本, 無數ニアル.

演習問題 IV (86頁) 7. 8邊形.

例題 (89頁) 1. XY ノ兩側ニアツテ, XY カラ $2.5\,cm$ ノ距離ニアル平行線.

2. 二定點 A, B ヲ結ブ直線ノ垂直二等分線.

3. 二ツノ平行ナ直線ノ眞中ニアル平行線.

4. 二直線ノ角ヲ二等分スル二定直線.

演習問題 V (93頁) 1. 定點ヲ中心トスル定半徑ノ圓.

2. 二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線. 3. P カラ XY ニ引イタ垂線ノ中點 M ヲ通ツテ XY ニ平行ナ直線.

4. $\angle AOB$ 内ニアルコノ角ノ二等分線.

演習問題 VI (100頁) 8. BC ノ中點デ垂線ヲ引キ,中點カ

ラ與ヘラレタ高サノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ點ヲ通ツテ BC ニ平行ナ直線ヲ作レバ,コレガ求メル軌跡デアル. 從ツテ BC ノ兩側ニ二ツノ直線ガ出來ル.

例題 (103 頁) 1. $5\,cm$. 2. $\sqrt{a^2+b^2}\,cm$. 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}a\,cm$.

演習問題 VII (105 頁) 1. $7\,cm$, $24\,cm$. 3. 正方形ノ方ガ大キイ. 4. m^2+n^2.

例題 (113 頁) 5. 中心カラ定長ノ弦ヘ引イタ垂線ノ長サヲ半徑トスル同心圓.

例題 (115 頁) 3. 16.

演習問題 VIII (116 頁) 5. 圓周上ノ與ヘラレタ點デソノ圓ニ內切スルモトノ半徑ノ半分ノ圓.

演習問題 IX (121 頁) 6. 中心線ニ平行ナモノ.

例題 (126 頁) 1. $75°$, $30°$. 2. 銳角, 鈍角.

例題 (130 頁) 4. $BX=2\,cm$, $CY=3\,cm$, $AZ=1\,cm$.

例題 (136 頁) 1. $\alpha=30°$, $\beta=60°$.

例題 (147 頁) 1. $16:5$. 2. $17\,cm$, $\frac{120}{17}\,cm$.

例題 (153 頁) 1. (1) $8\,cm$, (2) $\frac{ac}{b}\,cm$, (3) $6\,cm$. 2. $1.8\,cm$ 3. $3\,cm$, $4.5\,cm$.

例題 (161 頁) 1. $8\,cm$, $12\,cm$. 2. $10\,m$.

例題 (167 頁) 1. $24\,cm^2$. 3. $1:4$.

例題 (169 頁) 1. $12\,cm$.

演習問題 XV (176 頁) 1. $25(\pi-2)\,cm^2$. 2. $27.14\,cm$.

$58.63\,cm^2$. 3. $\frac{25}{4}\pi\,cm^2$, $25\left(\frac{\pi}{2}-1\right)cm^2$, $25\left(1-\frac{\pi}{4}\right)cm^2$.
4. $1:4$.

例題 (191 頁) 1. $\frac{15}{2}\sqrt{2}\,cm$.

例題 (208 頁) 3. $300\,cm^2$.

例題 (210 頁) 6. $\sqrt{\frac{2}{3}}\,a\,cm$.

例題 (211 頁) 1. $60\,cm^3$. 2. $\frac{1}{8}$. 3. $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\,cm^3$.

例題 (218 頁) 3. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi\,cm^3$.

例題 (221 頁) 4. $\frac{16\times10^{14}}{\pi}m^2$. $\frac{32\times10^{21}}{3\pi^2}m^3$.

演習問題 XIX (221 頁) 2. $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}cm^2$, $\frac{1}{3}\pi\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}cm^3$.
3. $\frac{1}{2}\pi a^3\,cm^3$. 4. r.

昭和七年十二月廿三日印　刷
昭和七年十二月廿六日發　行
昭和八年　三　月廿一日訂正印刷
昭和八年　三　月廿四日訂正發行

不許


數學教科書
幾何學

定價金七拾五錢

著作者	河口商次
	東京市神田區仲猿樂町三〇
發行者	株式會社 帝國書院
	代表者 增田啓策
	東京市牛込區市谷加賀町一丁目
印刷者	根本力三
	東京市神田區仲猿樂町三〇
發行所	株式會社 帝國書院
	(振替東京六七〇一四)
	大阪市東區横堀四丁目三
關西發賣所	三宅莊藏書店
	(振替大阪六九)