改訂

新修代數

理學博士
竹內端三著

三省堂

4a
412
DB10

昭和十年九月九日
文部省檢定濟
中學校・實業學校數學科用

理學博士
竹內端三著

改訂

新修代數

東京・三省堂・大阪

緒　言

本書ハ中等教育ニ於ケル代數學ノ教科用ニ供センガタメニ曩ニ編述シタ新修代數ヲ改訂シタモノデアル。同一ノ目的ニ對シテ著者ハ中等綜合數學教科書及ビ中等算術代數學教科書ヲ公ニシ,普ク採用セラレテヰルケレドモ,本書ハコレト大ニ趣ヲ異ニシテヰルノデ,著者ハ前二者ト相並ベテ刊行セシメタノデアル。

本書ノ特色ノ一ツハ,前記二書ガ代數學ヲ或ハ數學全科ト綜合的ニ或ハ算術ト融合セシメテ教授セントスルニ反シテ,代數學ヲ全ク獨立シタル一分科トシテ教授セントスルニアル。

又第二ノ特色ハ教授要目ニ抵觸セザル範圍内ニ於テ記載事項ヲ出來得ル限リ簡約シ,學生ノ負擔ヲ輕減スルト共ニ教授者ヲシテ自由ニ手腕ヲ振フ餘地ヲ多カラシ

メ,且學生ノ實力ニ應ジテ適宜ニ程度ヲ高低スルノ便ヲ計ツタ點ニアル。

全國幾百ノ中等學校中ニハコノ種ノ教科書ヲ必要トスル向ガ尠クナイト信ジタノデアツタガ,果シテ初版以來多數ノ中學校並ニ各種實業學校ニ使用セラレソノ要望ヲ充シテヰルノハ,著者ノ窃ニ欣幸トスル所デアル。

著者ハ今回改訂ヲ加ヘルニ當ツテ一層教授ノ實際ニ適當ナラシメンコトヲ計ルト共ニ各種學校ノ入學試驗問題等ヲ參酌シテ問題ノ大半ヲ更新シ清新ナル氣分ヲ與ヘルコトニ努メタ。

ナホ舊版以來特ニ意ヲ用ヰテ來タ若干ノ要點ヲ摘記スレバ次ノ如クデアル。

1. 算術トノ連絡ニ注意シ,倦怠又ハ難解ノ念ヲ生ゼシメズ興味ヲ以テ學生ノ理解力並ニ應用力ヲ發達セシメルコトヲ計ツタ。
2. 分數式ノ數値ニ關スル舊來ノ規約ヲ廢止シ,原式ノマヽデ分母ガ零トナル場合ニハ斷然數値ナキモノトスルコトトシタ。從ツテ分數方程式ノ根ノ驗シヲ行フニモ常ニ原形ニツイテコレヲ行フコトトシタ。

3. 實用價値ノ殆ンドナイ開立ヲ省略シ,卷末ニ平方根,立方根ノ表ヲ掲ゲテ表ノ使用法ニ習熟セシメルコトヲ計ツタ。
4. 二次方程式ノ理論ニ於テ,虛數ニ關スル記述ヲ成ル可ク簡約シタ。
5. 歩合算ニ必要ナ七桁ノ對數表ヲ卷末ニ添附シタ。
6. 方程式ノ解法ニ續イテ數式ノ圖形表示卽チ「ぐらふ」ヲ授ケ,函數及ビ極大極小ノ概念ヲ得サセルコトヲ計ツタ。
7. 各節又ハ數節毎ニ,ソノ節ニ於テ授ケタ事項ヲ練習セシメルタメノ例題ヲ掲ゲ,更ニ各篇末ニ雜題ヲ掲ゲタ。後者ハコレニヨツテ既習ノ知識ヲ復習セシメルト同時ニ又總括セシメルコトヲ計ツタノデアル。又教授時數ニ餘裕ノアル場合又ハ餘力ノアル生徒ノ所

置等ヲ考慮シテ卷末ニ內容ニ從ツテ分類シタ補充問題ヲ揭ゲタ。

終リニ臨ミ著者ハ杜撰ナル舊著ニ關シテ有益ナル忠言ヲ寄セラレタ諸賢ニ對シテ厚ク感謝ノ意ヲ表シ,併セテ猶ホ本書ニ對シテモ實地教授ノ任ニ當ラレル諸賢ノ高批ヲ切望スル次第デアル。

昭和十年七月

著　者　識

目　次

改 訂
新 修 代 數

第 一 篇
緒 論
第一章 代 數 式

1. 代數學ノ意義及ビ特色

代數學ハ算術ノ如ク數ニ關スル問題ヲ講究スル學科デアル。代數學ガ算術ト異ナル點ハ,數ヲ表ハスニ數字ノ他ニ $a, b, c, \ldots\ldots, x, y, z$ 等ノ文字ヲ用ヰテソノ研究ノ筋道ヲ簡易明瞭ニシ,且ソノ記述ヲシテ種々ノ場合ヲ含ム一般的ノモノタラシメルニアル。

例ヘバ「二數ノ和ノ半分ハソノ各數ノ半分ノ和ニ等シイ」トイフ事實ヲ式デ示サウトスルニ,

$$\frac{30+40}{2}=\frac{30}{2}+\frac{40}{2}$$

ノ如ク,二ツノ數ヲ30及ビ40トイフ特別ナル數デ示セバソノ他ノ數ノ場合ガ分明デナイ。然ルニ若シ一般ニ二ツノ數ヲ a 及ビ b デ表ハスコトトスレバ,上ノ事實ハ

$$\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

ナル一ツノ式デ頗ル簡單ニ且明瞭ニ表ハサレ,而シテコノ結果ハ如何ナル二數ノ場合ヲモ包含スルカラ最モ一般デアル。數ヲ表ハスニ文字ヲ用ヰル一ツノ利益ハ斯クノ如ク記述ヲ簡明ニシテ且一般的ナラシメルニアル。

2. 記號

代數學ニ於テモ $+, -, \times, \div, =, (\ ), \{\ \}, [\ ]$ 等ノ記號ヲ用ヰルコトハ算術ト同ジデアル。但シ乘法ノ記號×ハ文字ト文字トノ間,又ハ數字ト文字トノ間ニハコレヲ略シ,數字ハ必ズ文字ノ前ニ書ク。數字ト數字トノ間ニハ×ヲ略スコトハ出來ナイ,ケレドモ小數點ト混同スル恐レガナイトキニハ

×ノ代リニ點「·」ヲ用ヰルコトガアル。又除法ノ記號÷ハ用ヰラレルコトハ稀デ,商ヲ示スニハ分數ノ形ヲ以テスルノガ常デアル。

例　$a+b,\quad a-b$

$a\times b=a.b=ab$

$x\times 2=2x$

$\frac{3}{5}\times a\times b=\frac{3}{5}ab=\frac{3ab}{5}$

$2\times b\times 3\times a=2\times 3ab$*

$2\times 3\times 4\times 5=2.3.4.5$

$a\div b=\frac{a}{b}$

$2xy\div 3ab=\frac{2xy}{3ab}$

注意　乘號ガ略サレタ場合ノ積ハ括弧デ包マレタト同樣ニ取扱フ。例ヘバ $a\div bc$ ハ $a\div(bc)$ ノ意味デアル,$(a\div b)\times c$ デハナイ。

3. 羃

幾ツカノ數ヲ掛ケ合セテ積ヲ作ルトキハ元ノ各數ヲソノ積ノ因數トイフ。

---

* $ab=ba$ デアルガ特別ノ必要ナキ限リハ ab ノ如ク積ノ文字ハ $a, b, c,\ldots\ldots$ ノ順ニ書クヲ通例トスル。和ノ場合モ亦コレニ倣フ。

例ヘバ　2, 3, 5 ハ何レモ 30 ノ因數,

a, b, c ハ何レモ abc ノ因數

デアル。

特ニ同ジ因數ヲ幾ツカ掛ケ合セタ積ヲソノ數ノ**乘羃**(ベキ)又ハ單ニ**羃**トイフ。

例ヘバ　$5\times5=5^2$ ハ 5 ノ二乘羃(**平方**),

$5\times5\times5=5^3$ ハ 5 ノ三乘羃(**立方**),

$aa=a^2$ ハ a ノ二乘羃,

$aaa=a^3$ ハ a ノ三乘羃

デアル。

上ノ 5 又ハ a ノ肩ニ添ヘタ 2, 3 等ハ因數ノ箇數ヲ示スモノデコレヲ**羃指數**或ハ單ニ**指數**トイフ。

注意 1. 5^2 ヲ「5ノ二乘(又ハ平方)」, 5^3 ヲ「5ノ三乘(又ハ立方)」, 5^4 ヲ「5ノ四乘」ト讀ム。

注意 2. $a^1=a$ トスル。一般ニ羃デナイ數ノ指數ハ常ニ1デアルト考ヘル。

注意 3. $(ax)^2$ ト ax^2 トヲ混同シテハナラヌ。

$$(ax)^2=(ax)\times(ax)=aaxx, \qquad ax^2=axx.$$

4. 代數式, 公式

數字, 文字又ハコレラヲ諸記號デ連結シ

數ノ比較又ハ計算ニ關スルコトヲ書キ表ハシタモノヲ**代數式**或ハ單ニ**式**トイフ。

特ニ如何ナル數ニツイテモ成立スル事實,又ハ或ル數ヲ求メルタメニ行フベキ計算ノ法則ヲ書キ表ハシタ式ヲ**公式**トイフ。

例ヘバ「二數ノ和ハコレヲ加ヘル順序ニ關ラズ」トイフ事實ヲ公式トシテ示セバ

$$a+b=b+a.$$

又元高ヲ A, 歩合ヲ r, 合計高ヲ S トスレバ次ノ公式ヲ得ル。

$$S=A(1+r).$$

例　題

1. x ト y トノ和ト差トノ積ヲ式デ示セ。
2. a ト b ノ 2 倍トノ和カラ c ノ 3 倍ヲ引イタモノヲ式デ示セ。
3. a 圓ト b 圓トノ和カラ c 圓ヲ引イタ殘リノ m 倍ヲ式デ示セ。

注意　文字ガ表ハス數ハスベテ不名數デアル。名數ヲ表ハストキニハ,例ヘバ x 人, a 圓ノ如ク單位ノ名ヲ添記セネバナラヌ。

4. 間口 am, 奥行 bm ナル宅地ノ面積如何。又ソノ周圍ノ長サ如何。

5. 長サ $a\,cm$, 幅 $b\,cm$, 厚サ $c\,cm$ ナル鐵板ノ體積如何。又ソノ表面ノ面積如何。

6. 一稜ノ長サ am ナル立方體ノ體積如何。又ソノ表面ノ面積如何。

5. 數 値

代數學ニ於テ用キル $a, b, c, \ldots\ldots, x, y, z$ 等ノ文字ハ特ニ斷リナキ限リ如何ナル數ヲモ表ハシ得ルモノデアルガ,相連續スル計算中ニ於テハ同ジ文字ハ常ニ同ジ數ヲ代表スルモノト考ヘル。

或ル文字ガ一定ノ數ヲ表ハストキハソノ數ヲソノ**文字ノ數値**(スウチ)又ハ單ニ**値**(アタヒ)トイフ。

例ヘバ今特ニ a ガ2ナル數ヲ表ハスモノト定メレバ,2ヲ a ノ數値又ハ單ニ値トイフ。

代數式中ノ各文字ニ夫々ソノ數値ヲ入レ換ヘテ計算ヲ實行シタ結果トシテ得ル數ヲソノ**代數式ノ數値**又ハ單ニ**値**トイフ。

例 $a=2,\ b=5,\ c=3,\ x=4$ ナルトキ, ax^2-bx+c ノ數値如何。

解 $ax^2-bx+c=2\times4^2-5\times4+3=32-20+3=15.$

例 題

1. $a=5,\ b=3$ トシテ次ノ各式ノ數値ヲ求メヨ。

(1) $2a+3b$　(2) $8a-2b$　(3) $6(a-b)$

2. $a=10,\ b=6,\ x=5,\ y=2$ トシテ次ノ各式ノ數値ヲ求メヨ。

(1) $ab(x-y)$　(2) $(a+b)^2$

(3) $(x-y)^2$　(4) $\dfrac{a^2+b^2}{x^2-y^2}$

第二章 零及ビ負數

6. 零及ビ負數

代數式ノ數値ヲ計算スルニ當リ,引算ヲナス場合ニハ常ニ被減數ガ減數ヨリ大ナルヲ要スル,然ラザレバ算術ニヨツテ引算ヲナスコトガ出來ヌ。コノコトハ代數式ノ取扱ヒニ對スル極メテ不便ナ制限デアル。コノ不便ヲ除クタメニ,代數學ニ於テハ算術デ知レル整數,分數等ノ他ニ更ニ新タ

ナル一種ノ數ヲ用キルコトトスル。

今整數ヲ次ノ如ク順ニナラベテ見ル。

1 2 3 4 5 6 7 8

コノ中ノ任意ノ一數,例ヘバ5カラ1ヲ引ケバソノ左隣ノ4ヲ得ル,4カラ1ヲ引ケバマタソノ左隣ノ3ヲ得ル,斯クノ如ク次第ニ1ヲ引ク毎ニ殘リハ常ニ元ノ數ノ左隣ニアル。然ラバモシ1カラ1ヲ引ケバ如何トイフニ,コノトキニハ殘リガナイ。即チ

$$1-1=0$$

トナル。依ツテ代數學ニ於テハ0(零)ヲモ一ツノ數トシテ取扱フコトトスル。

0カラナホ續イテ1ヲ引カウトスルニ,從來知ツテキル所デハコレニ答フベキ數ガナイカラ,ココニ新タニ數ヲ作ルコトトシ,先ヅ

0カラ1ヲ引イタ殘リヲ−1(**まいなす一**),
−1カラ1ヲ引イタ殘リヲ−2(**まいなす二**),
−2カラ1ヲ引イタ殘リヲ−3(**まいなす三**),
等ト名ヅケル。

−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

コレニヨツテ減數ガ被減數ヨリ小デナイ場合ノ引算モ出來ルコトトナル。例ヘバ3カラ5ヲ引クニハ,上ノ數列ニ於テ3カラ左ノ方ニ五ツダケ移レバヨイ,ソノ結果−2ヲ得ル。即チ

$$3-5=-2$$

トナル。同樣ニ3カラ3ヲ引ケバ

$$3-3=0$$

ヲ得ル。一般ニ

bガaヨリ大ナルトキニハ,$a-b$ハ$-(b-a)$ニ等シイ。

即チ $$a-b=-(b-a).$$

コレ即チ被減數ヨリ大ナル減數ヲ引ク場合ノ公式デアル。又一般ニ

或ル數カラソレト同ジ數ヲ引イタ殘リハ常ニ零デアル。

即チ $$a-a=0.$$

ナホ零及ビまいなすノ數トイフ考ヘヲ更ニ擴メ,

上記ノ事項ハ分數ニ對シテモ整數ノ場合ト同樣ニ適用セラレルモノトスル。

例ヘバ $0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, $0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$,

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6},$$

$$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0.$$

「まいなす」ノ數ヲ總稱シテ**負數**又ハ**負ノ數**トイヒ,コレニ對シテ從來知レル數ヲ**正數**又ハ**正ノ數**トイフ。

零ハ正數ニモ負數ニモ屬シナイ。

正數,負數及ビ零ヲ稱總シテ**代數的ノ數**トイフ。

今後單ニ**數**トイヘバ常ニ代數的ノ數ヲ指スモノトシ,又文字ハコノ廣イ意味ニ於ケル任意ノ數ヲ表ハシ得ルモノトスル。

注意 或ル數ガ正數ナルコトヲ明示スル必要アル場合ニハ,記號+(ぷらす)ヲソノ前ニ附ケル,例ヘバ +1, +2, $+\frac{1}{2}$ ノ如クニスル。ケレドモ特ニ必要ガナイトキニハコレヲ省略スルヲ常トスル。コレニ反シテ負數ノ前ニアル記號−ハ決シテ省略シテハナラヌ。

サテ $3+5=+8$

$3-5=-2$

ナル式ニ於テ,3ト5トノ間ニアル+及ビ−ハ夫夫寄算及ビ引算ノ記號デ,8及ビ2ノ前ニアル+及ビ−ハ,ソノ數ガ正數ナルカ負數ナルカヲ示ス記號デアル。從ッテ今後ハ+及ビ−ヲ,各二樣ノ意味ニ用ヰルコトトナル。依ッテ正數ナルカ負數ナルカヲ示スタメニ用ヰラレタトキニハコレヲ**性質ノ符號**トイヒ,+ヲ**正號**,−ヲ**負號**トイフ。

單ニ或ル數ノ**符號**トイヘバ,ソレノ有スル性質ノ符號ノコトデアル。例ヘバ −2 ノ符號ハ負デ,3(即チ +3)ノ符號ハ正デアル。

注意 同一ノ符號+及ビ−ヲ加號減號,或ハ正號負號トシテ用ヰテモ毫モ不都合ガナイバカリデナク,却ッテ便利ナルコトハ後ニ至ッテ明カニナル。

或ル數ノ**符號ヲ變ズル**トイフハ,ソノ數ノ符號ガ正ナラバコレヲ負ニ,負ナラバコレヲ正ニ變ズルコトデアル。

或ル數ガ零又ハ正數ナラバソレ自身ヲ,負數ナラバソノ符號ヲ變ジテ得ル正數ヲ,元ノ數ノ**絕對**

値トイフ。例ヘバ 3 ノ絕對値ハ 3, -4 ノ絕對値ハ 4 デアル。又 0 ノ絕對値ハ矢張リ 0 デアル。

例　題

1. 次ノ引算ヲナセ。

$5-5,\ \ 5-6,\ \ 5-7,\ \ 5-8,\ \ 5-9,\ \ 5-10,$

$7-12,\ \ 28-100,\ \ 125-260$

2. 次ノ計算ノ結果ヲ求メヨ。

$2-3.5,\ \ 8+7-40,\ \ 12.3-24.8,$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{4}{5},\quad \frac{1}{2}+\frac{4}{7}-2$

3. 次ノ式中ニアル各記號ノ意味ヲ說明セヨ。

$(+3)-(+10)=-7.$

7. 數ノ大小

數ノ大小ヲ式デ表ハスニハ**不等號** > 又ハ < ヲ用キル。例ヘバ a ガ b ヨリ大ナルコトヲ表ハスニハ $a>b$ 又ハ $b<a$ ト書ク。

注意　不等號ヲ用キテ二ツノ式ノ大小ヲ示シタモノヲ**不等式**トイフ。

代數學ニ於ケル數ノ大小ノ意味ハ次ノ如クデアル。

(1)　正數ハ 0 ヨリ大デアル。

例ヘバ　$3>0.$

(2)　負數ハ 0 ヨリ小デアル。

例ヘバ　$-3<0.$

(3)　從ツテ正數ハ負數ヨリ大デアル。

例ヘバ　$3>-3.$

(4)　正數ノ大小ハ絕對値ノ大小ニ從フ。

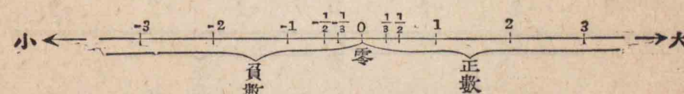
(算術ニ於ケルト同樣)

例ヘバ　$5>2.$

(5)　負數ノ大小ハ絕對値ノ大小ト相反スル。

例ヘバ　$-5<-2.$

注意　種々ナル數ヲ大小ノ順ニ列ベレバ次ノ如クデアル。



任意ノ二數ノ大小ヲ比較スルニハ常ニコノ圖ニ於テ右方ニ位スル方ヲ大ナリト考ヘレバヨイ。

例　題

1. 絕對値ガ 3 ヨリ小ナラズ,又 10 ヨリ大ナラザルスベテノ負ノ整數ヲ小ナルモノカラ順ニ

擧ゲヨ。

2. 次ノ各組ノ數ヲ大サノ順ニ列ベ換ヘヨ。

(1) 0, $\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$

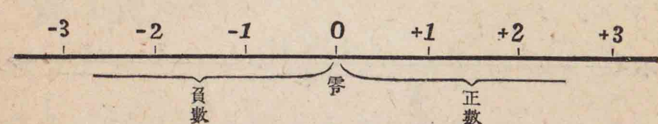
(2) 0.3, $\frac{1}{4}$, -2, -0.1, $-\frac{1}{3}$

3. 3ハ-3ヨリ何程大ナルカ,又$-\frac{1}{2}$ハ2ヨリ何程小ナルカ。

4. 「aハ正數デアル」トイフコトヲ式デ書キ表ハスニハ如何ニスベキカ。負數ノ場合ハ如何。

8. 負數ノ應用

正數ト負數トハ次ノ圖ノ如ク零ヲ中ニ挾ンデ互ニ反對ノ側ニ相對立スルモノデアルカラ,實際



上ノ事物ニ於テモコレト同樣ニ互ニ相反對スル方向又ハ性質ヲ有スル量ノ大サヲイヒ表ハストキニハ正數及ビ負數ヲ以テコレヲ區別スルノガ便利デアル。

例ヘバ100圓ノ利益ト100圓ノ損失トハソノ

金高ハ共ニ100圓デアルガ,性質ニ於テハ相反スル。故ニ利益100圓ヲ$+100$圓デ表ハストスレバ,損失100圓ハ-100圓デ表ハスコトガ出來ル。若シ又損失100圓ヲ$+100$圓デ表ハストスレバ,利益100圓ハ-100圓デ表ハサレル。

又$+10$年ヲ以テ今カラ10年後ヲ示ストスレバ,-10年ハ今カラ10年前ヲ示ス。

寒暖計ニ於テ$+20$度トイヘバ氷點以上20度ヲ示スヲ常トシ,-20度トイヘバ氷點以下20度ヲ示スモノトスル。

例 題

1. 次ノ文句ノ意味ヲ説明セヨ。

-1000圓ノ利益, -200圓ノ負債,

$-10\,km$ ノ前進, 紀元-660年,

東ヘ $-3\,km$, 攝氏-10度

2. 甲乙二人同一ノ點カラ出發シ,甲ハ北ニ向ツテ$20\,m$,乙ハ南ニ向ツテ$-15\,m$ ヲ進ンダ,兩人相距ルコト幾何ナルカ。

第三章 四則算法

9. 加 法

（1） 同符號ノ二數ヲ加ヘルニハソノ絕對値ノ和ニソノ同ジ符號ヲ附ケレバ宜イ。

（2） 異符號ノ二數ヲ加ヘルニハソノ絕對値ノ差ニソノ絕對値ノ大ナル數ノ符號ヲ附ケレバ宜イ,但シ絕對値ガ相等シイ場合ニハ何等符號ヲ附ケルニ及バヌ。

例 $(+10)+(+6)=+(10+6)=+16,$

$(-10)+(-6)=-(10+6)=-16,$

$(+10)+(-6)=+(10-6)=+4,$

$(-10)+(+6)=-(10-6)=-4,$

$(+6)+(-6)=6-6=0.$

例 題

次ノ各式ヲ計算セヨ。

（1） $(+15)+(+12)$ （2） $(-35)+(-25)$

（3） $(+70)+(-62)$ （4） $(-58)+(+45)$

（5） $48+(-16)+(-12)$ （6） $\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)$

（7） $(+5.6)+(-5.6)$

（8） $\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)+5$

10. 減 法

引算ヲナスニハ,ソノ減數ノ符號ヲ變ジテコレヲ被減數ニ加ヘレバ宜イ。

例 $(+6)-(+10)=+6-10=-4,$

$(+6)-(-10)=+6+10=+16,$

$(-6)-(-10)=-6+10=+4,$

$(-6)-(+10)=-6-10=-16.$

注意 被減數,減數ノ正負如何ニ拘ラズ,大ナル數カラ小ナル數ヲ引クトキハ正,小ナル數カラ大ナル數ヲ引クトキハ負トナル。(學生自ラ二三ノ數ニツイテコノコトヲ確メヨ。)

例 題

次ノ計算ヲナセ。

（1） $(+7)-(+3)$ （2） $(+32)-(+65)$

（3） $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{6}\right)$ （4） $(+14)-(-18)$

(5) $\left(+\frac{1}{3}\right)-\left(-1\frac{1}{2}\right)$　(6) $(-7)-(+53)$

(7) $(-5.7)-(-9.6)$　(8) $\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)$

11. 代數和

一般ニ多クノ數ノ加法及ビ減法ヲ引續イテ行ツタ結果ハ常ニコレヲ正數及ビ負數ノ和ト見做スコトガ出來ル。

例ヘバ　$12-5+8-7=(+12)+(-5)+(+8)+(-7)$.

卽チ代數學ニ於テハ和トイフ語ガ算術ニ於ケルヨリモ廣イ意味ヲモツモノデ,算術ニ於ケル差ヲモ亦ソノ中ニ含ムコトトナル。依ツテ特ニコレヲ**代數和**トイフコトガアル。

代數學ニ於テ單ニ**和**トイヘバ常ニ代數和ノ意味デアル。

注意　代數和ハソノ計算ノ順序ヲ如何樣ニ變ズルモ常ニ一定デアル。

例　題

1. 次ノ代數和ヲ求メヨ。

(1) $375-400-130+45$

(2) $-4.08-0.85+5.76-1.00$

2. 或ル商人第1年ニ3500圓ヲ利シ第2年目ニ1200圓ヲ損シ,第3年ニ2800圓ヲ利シタ,コノ損益ヲ代數和ニ表ハシテ計算セヨ。

12. 乘　法

(1) 同符號ノ二數ノ積ハソノ絕對値ノ積ニ正號ヲ附ケタモノデアル。

(2) 異符號ノ二數ノ積ハソノ絕對値ノ積ニ負號ヲ附ケタモノデアル。

(3) 或ル數ト零トノ積ハ常ニ零デアル。

例　$(+7)\times(+8)=+56$,　$(-7)\times(-8)=+56$,

$(+7)\times(-8)=-56$,　$(-7)\times(+8)=-56$,

$0\times(+2)=0$,　$0\times(-2)=0$,

$2\times0=0$,　$0\times0=0$.

例　題

次ノ計算ヲナセ。

(1) $(+3)\times(+5)$　(2) $(-9)\times(-8)$

(3) $(+12)\times(-3)$　(4) $(-6)\times(+7)$

(5) $(-4)\times0$　(6) $\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{8}\right)$

(7) $(-4)\times(-3)\times(+0.5)$ (8) $(-3)^4$

13. 除 法

(1) 同符號ノ二數ノ商ハソノ絕對値ノ商ニ正號ヲ附ケタモノデアル。

(2) 異符號ノ二數ノ商ハソノ絕對値ノ商ニ負號ヲ附ケタモノデアル。

例 $(+56)\div(+7)=+8$, $(+56)\div(-7)=-8$,

$(-56)\div(+7)=-8$, $(-56)\div(-7)=+8$.

注意 1. 零ヲ零ナラザル數デ除シタ商ハ零デアル。例ヘバ $0\div(+7)=0$, $0\div(-7)=0$.

注意 2. 零ナラザル數ヲ零デ除スルコトハ出來ヌ。何トナレバ如何ナル數ニ零ヲ乘ズルモソノ積ハ常ニ零トナルカラデアル。

注意 3. 零ヲ零デ除スルモ商ヲ定ムルコトハ出來ヌ。何トナレバ零ト相乘ジテ積ガ零トナルタメニハ如何ナル數デモ差支ナイカラデアル。

例 題

次ノ計算ヲナセ。

(1) $(+18)\div(+3)$ (2) $(-36)\div(-9)$

(3) $(-56)\div(+4)$ (4) $(+63)\div(-7)$

(5) $\left(-\frac{5}{2}\right)\div\frac{1}{4}$ (6) $(-3)^3\div(-2)^2$

(7) $(-5)\times(-2)^2\div(-6)$

雜 題 I.

1. 1カラ任意ノ正ノ整數 n マデノスベテノ整數ノ和ハ次ノ公式デ求メラレル,

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

コレニヨッテ1カラ100マデノ整數ノ和ヲ求メヨ。

2. 1カラ任意ノ正ノ整數 n マデノスベテノ整數ノ平方ノ和及ビ立方ノ和ヲ求メル公式ハ夫々次ノ(1)及ビ(2)デアル,

(1) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

コレニヨッテ1カラ100マデノ整數ノ平方ノ和及ビ立方ノ和ヲ求メヨ。

3. 長サ l 吋,幅 b 吋,厚サ t 吋ノ或ル種ノ角材ガソノ中央デ支ヘ得ル重サノ噸數ヲ表ハス公式ハ

$$\frac{2bt^2}{l}$$

デアル,コレニヨツテ次ノ各場合ノ重サヲ求メヨ。

(1) 幅 7吋, 厚サ 10吋, 長サ 120吋

(2) 幅 5吋, 厚サ 8吋, 長サ 144吋

4. 白米ノ價去年ハ $a\,kg$ ニツキ m 圓デアツタガ,今年ハ $b\,kg$ ニツキ n 圓トナツタ, $1\,kg$ ニツイテノ騰貴額ヲ表ハス公式如何。

又 $a=3,\quad b=4,\quad m=1.29,\quad n=1.64$

ト置キ,ソノ結果ヲ求メヨ。

5. 酒精ハ攝氏 $-112°$ デ凍リ,攝氏 $+78°$ デ沸騰スル,凍リツヽアル酒精ハ沸騰スルマデニ何程溫度ヲ高メラレネバナラヌカ。

6. 或ル冬ノ日ニ攝氏 $-20°$ ノ戸外カラ攝氏 $+18°$ ノ屋内ニ入ツタ人ハ何度溫カク感ズル筈カ。

7. にゆーよーくハ西經 $74°$ ニ,ろーまハ東經 $13°$ ニアル,コノ兩地ノ經度ノ差ヲ求メヨ。

8. x ガ夫々 $1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ ナルトキ次ノ各式ノ數値ヲ求メヨ。

(1) $2x^3$ (2) $(2x)^3$ (3) $\frac{6}{x^4}$

(4) x^2-4x-1 (5) $\frac{x^2-3}{x+3}$

9. x^2-4x+3 ノ數値ハ次ノ各場合ニ 0 トナルカ。

(1) $x=1$ (2) $x=2$ (3) $x=3$

10. 次表ノ空欄ヲ充セ。

x ノ値	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\frac{6x-x^2}{2}$ ノ値									

第二篇

整式四則

第一章 整式

14. 整式

文字デ表ハサレタ數ヲ除數トスル割算ヲ含マナイ代數式ヲ**整式**トイヒ,然ラザル式ヲ**分數式**トイフ。

例ヘバ

$$2a,\quad a+b-c,\quad ax^2-by^2,\quad \frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}x+5 \qquad (1)$$

ノ如キハ何レモ整式デアル。コレニ反シテ

$$\frac{a}{b},\quad \frac{1}{a}x^2-bxy+y^2,\quad \frac{x+y}{m+n} \qquad (2)$$

等ハ何レモ分數式デアル。

注意 或ル場合ニハ,與ヘラレタ代數式ガ整式ナルヤ否ヤヲ區別スルニ當リ,或ル特別ナル文字ニノミ注目シテコレヲ別ツコトガアル。例ヘバ(2)ノ第二式及ビ第三式ハ x 及ビ y ニノミ注目スレバ整式デアル。

15. 項

$$3ab-5m+\frac{c}{2}$$

ナル式ヲ書キ直シテ

$$(+3ab)+(-5m)+\left(+\frac{c}{2}\right)$$

トスル如ク,一ツノ整式ヲ若干ノ數ノ代數和ト考ヘルトキ,ソノ各數ヲコノ整式ノ**項**トイフ。

項ハ性質ノ符號ヲ有スルモノデ,正號ヲ有スル項ヲ**正項**,負號ヲ有スル項ヲ**負項**トイフ。上ノ例デハ $+3ab$ 及ビ $+\frac{c}{2}$ ハ正項デ,$-5m$ ハ負項デアル。

注意 正項,負項等ノ名ハ式ノ形ニツイテノミイフモノデアル,故ニ例ヘバ m ガ負ノ數値ヲ有スルトキハ $-5m$ ノ値ハ正數デアルガ,矢張リ $-5m$ ノコトヲ負項トイフ。

唯一ツノ項ヨリナル整式ヲ**單項式**トイヒ,一ツヨリ多クノ項ヨリナル整式ヲ**多項式**トイフ。多項式ハ更ニソノ項數ニ從ツテコレヲ**二項式,三項式**等ニ分類スル。上ニ擧ゲタ例ハ三項式デアル。

16. 次數

單項式中ニ含マレル文字因數ノ箇數ヲソノ**單項式ノ次數**トイフ。

例ヘバ $8abx$ ハ三次,$-2x^2y^3$ ハ五次デアル。即

チ單項式ノ次數トハソノ中ニ含マレル各文字ノ指數ノ和デアルトイフコトガ出來ル。

次數ノ大ナルコトヲ次數ガ**高イ**或ハ**高次**デアルトイヒ,小ナルコトヲ**低イ**或ハ**低次**デアルトイフ。卽チ $8abx$ ハ $-2x^2y^3$ ヨリモ次數ガ低イ或ハ低次デアルトイヒ,又 $2x^2y^3$ ハ $8abx$ ヨリモ次數ガ高イ或ハ高次デアルトイフ。

多項式ノ次數トハソノ中ニ含マレル最高次ノ項ノ次數ヲイフ。

例ヘバ　$3x^2-7x+2$　ハ二次式,

$ax^2+by^3-cxy^2-dy^4$　ハ五次式デアル。

スベテノ項ガ同ジ次數ヲ有スル多項式ヲ**同次式**(**齊**(セイ)**次式**)トイフ。例ヘバ

$a+2b+3c$　ハ一次ノ同次式,

$x^2+y^2+z^2$　ハ二次ノ同次式デアル。

注意 時トシテハ特ニ或ル文字ニノミ注目シテ次數ヲイフコトガアル。例ヘバ x トイフ文字ニノミ注目スレバ

$8abx$　ハ一次式,

$-2x^2y^3$　ハ二次式,

$ax^3-by^4-cz^5$　ハ三次式,

又　$x^2+y^2+z^2$　ハ同次式デハナイ。

17. 係數

單項式又ハ多項式ノ一ツノ項ニ於テ,文字因數以外ノスベテノ因數ノ積ヲ,ソノ文字因數ノ積ノ**係數**トイフ。

例ヘバ $8abx$ ニ於テ 8 ハ abx ノ係數, $-3x^2y^3$ ニ於テ -3 ハ x^2y^3 ノ係數デアル。

注意 1. 時トシテハ特ニ或ル文字ニノミ注目シテ,ソノ他ノスベテノ因數ノ積ヲソノ注目シタ文字因數ノ係數トイフコトガアル。* 例ヘバ $8abx$ ニ於ケル x ノ係數ハ $8ab$, $-3x^2y^3$ ニ於ケル x^2 ノ係數ハ $-3y^3$ デアル。

注意 2. $a=1\times a$ ト見做シテ a ノ係數ハ 1 トスル。

18. 同類項

二ツ以上ノ項ニ於テ,ソノ係數以外ノ文字因數ガ悉ク同一ナルトキハ,コレラノ項ヲ**同類項**トイフ。

例ヘバ $8abx$ ト $-3abx$ トハ同類項デアル。又 x

---

* コレト區別スルタメニ文字因數以外ノ數ノミヲ係數ト見做ストキ,コレヲ特ニ**數係數**トイフコトガアル。例ヘバ $8abx$ ノ數係數ハ 8, 又 $-3x^2y^3$ ノ數係數ハ -3 デアル。

ニノミ注目スレバ $2abx$ ト $3cx$ トモ同類項デアル。

一ツノ多項式中ニ幾ツカノ同類項ガアルトキハコレヲマトメテ唯一ツノ項トスルコトガ出來ル。卽チ,ソノ共通ナル文字因數ニ,各項ノ係數ノ代數和ヲ係數トシテ附ケター項ヲ作レバ宜イ。斯クスルコトヲ稱シテ同類項ヲ**簡約スル**又ハ單ニ**約ス**トイフ。例ヘバ

$$5ax-3ax+by+2ax$$

ヲ簡約スレバ　$4ax+by$　トナル。

例　題

1. 次ノ諸式ノ中ヨリ整式ダケヲ取リ出シ,ソノ次數ヲイヘ。

（1）$am-bn+c^3$　（2）$x^5-ax^4+6a^2x^3$

（3）$\frac{1}{2}px-2qy$　（4）$x^2-\frac{1}{n}x+\frac{1}{n^2}$

2. $3x^4-5x^2y^2+\frac{xy^2}{2}+2ax^3y-7aby^4$

ナル式ニ於テ各項ノ係數如何。又各項ニ於ケル x ノ冪ノ係數如何。

3. 次ノ各式ヲ整頓セヨ。(同類項ヲ約シ,各因數及ビ各項ノ順序ヲ形ヨク直スコトヲ稱シテ式ヲ**整頓**スルトイフ。)

（1）$1-x+3+4x$

（2）$a^2-2ab+b^2+4ba$

（3）$x^2+y^2-6x-3y^2+2x^2$

第二章　加法及ビ減法

19. 整式ノ加法

數多ノ整式ノ和ヲ求メルニハ,各式ノ諸項ヲソノ元來有スル符號ノマヽ列記スレバヨイ。但シ同類項ガアレバコレヲ簡約スルモノトスル。

例 1.　$2a,\ -3b,\ 5c,\ -d$　ノ和ヲ求ム。

求メル和ハ　$2a-3b+5c-d$　デアル。

例 2.　$3ax-2by+cz,\ 6ax+by,\ 4by-5cz$　ノ和ヲ求ム。

求メル和ハ

$$\begin{aligned}&3ax-2by+cz+6ax+by+4by-5cz\\&=(3+6)ax+(-2+1+4)by+(1-5)cz\\&=9ax+3by-4cz.\end{aligned}$$

或ハ次ノ如ク同類項ヲ縦ニ揃ヘテ計算スル。

$$\begin{array}{r} 3ax-2by+cz \\ 6ax+\ by \\ 4by-5cz \\ \hline 9ax+3by-4cz \end{array}$$

例　題

次ノ諸式ノ和ヲ求メヨ。

(1) $2a,\ -5a,\ 8a$　(2) $2x^2yz,\ -50x^2yz$

(3) $3xy^2,\ 2x^2y$

(4) $a+2b,\ 3a,\ -4a+3b,\ -5b$

(5) $ab+2bc+3ca,\ -bc+2ca-3ab$

(6) $\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{3}xy-7y^2,\ \frac{2}{3}xy+\frac{18}{5}y^2,\ -\frac{5}{8}x^2+4y^2$

(7) $\frac{1}{2}a^3-2a^2b-\frac{3}{2}b^3,\ \frac{3}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2+2b^3,$
$-\frac{3}{2}a^3+ab^2+\frac{1}{2}b^3$

20. 整式ノ減法

加法ノ法則ニヨレバ

$$A+(-B)=A-B.$$

故ニAカラBヲ引クニハAニ(−B)ヲ加ヘレバ宜イ。

一般ニ一ツノ整式カラ他ノ整式ヲ引クニハ後者ノ各項ノ符號ヲ變ジテコレヲ前者ニ列記スレバ宜イ。但シ同類項ガアレバコレヲ簡約スルモノトスル。

例 1. $3a-(-2a)=3a+2a=5a.$

例 2. $3a-(+2a)=3a-2a=a.$

例 3. $3ax+xy-2by-(2xy-4ax+3by-5yz)$
$=3ax+xy-2by-2xy+4ax-3by+5yz$
$=(3+4)ax+(1-2)xy+(-2-3)by+5yz$
$=7ax-xy-5by+5yz.$

或ハ次ノ如ク同類項ヲ縦ニ揃ヘテ計算スル。

$$\begin{array}{r} 3ax+\ xy-2by \\ -4ax+2xy+3by-5yz \\ \hline 7ax-\ xy-5by+5yz \end{array}$$

例　題

次ノ各問ニ於テ,第一式カラ第二式ヲ引ケ。

(1) $3xyz,\ -10xyz$　(2) $5ab^2,\ 7ab^2$

(3) $-3a^2b,\ -2a^2b$　(4) $x^2y,\ xy^2$

(5) $4a+5b-6c,\ 3b-5a+4c$

(6) $\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{3}xy^2-y^2,\quad \frac{1}{2}x^2y-\frac{5}{6}y^2-\frac{1}{3}xy^2$

(7) $\frac{1}{8}a^3-2ax^2-\frac{1}{3}a^2x,\quad \frac{1}{3}a^2x+\frac{1}{4}a^3-\frac{3}{2}ax^2$

21. 括弧ノ用法

加法及ビ減法ノ法則ニヨレバ

$$A+(B-C+D)=A+B-C+D,$$
$$A-(B-C+D)=A-B+C-D.$$

依ッテ括弧ノ用法ニ關シテ次ノ法則ヲ得ル。

加號ノ次ニアル括弧ハソノマヽ取リ去ルモ式ノ意味ヲ變ジナイ。

減號ノ次ニアル括弧ヲ取リ去ルトキニハソノ括弧内ニアル式ノ各項ノ符號ヲ變ズレバ宜イ。

又コレラヲ逆ニ用ヰレバ式中ノ任意ノ部分ヲ括弧デ括ルコトモ出來ル。卽チ

括弧ノ前ニ加號ヲ置クトキニハ元ノ式ヲソノマヽ括弧デ括ルコトガ出來ル。モシ括弧ノ前ニ減號ヲ置クトキニハ括弧内ニ入レルベキ各項ノ符號ヲ變ジナケレバナラヌ。

例ヘバ $A-B+C-D=A-B+(C-D)$
$$=A-B-(-C+D)$$
$$=A+(-B+C)-D \text{ 等。}$$

一ツノ式中ニアル種々ノ括弧ヲ取リ去ル場合，或ハ一ツノ式ヲ種々ノ括弧デ括ル場合ニモ,ソレラノ一ツ一ツノ括弧ニツイテ上ノ如クニ考ヘレバ宜イ。

例 $a-[b+\{c-(d-e)\}]$ ノ括弧ヲ去レ。

解 先ヅ内部ノ括弧カラ順次ニ取リ去レバ,

$$a-[b+\{c-(d-e)\}]=a-[b+\{c-d+e\}]$$
$$=a-[b+c-d+e]$$
$$=a-b-c+d-e.$$

注意 モシ又外部カラ取リ去レバ,

$$a-[b+\{c-(d-e)\}]=a-b-\{c-(d-e)\}$$
$$=a-b-c+(d-e)$$
$$=a-b-c+d-e$$

例題

1. 次ノ各式ノ括弧ヲ去ッテ整頓セヨ。

(1) $5a-(3b+4a)+(2b-5c)$

(2) $3a^2-(2a^2-b+c)$

(3) $(a+b+c)-[3b-\{3c+(a-b-c)\}]$

(4) $7a+4b-[3c+\{5a-2b-(c-\overline{4a-b}+5b)\}]$

注意 $\overline{4a-b}$ ノ如ク括弧デ括ル代リニソノ上ニ横線ヲ引クコトガアル,コレヲ**括線**トイフ。

2. 次ノ各式ノ第三項以下ヲ括弧内ニ入レ,括弧内ノ最初ノ項ヲ正項ナラシメヨ。

(1) $a-2b+3c-4d$

(2) $ax+by-3a-4b-ab$

第三章 乘法

22. 羃ノ乘法

例ヘバ

$$a^4\times a^3=aaaa\times aaa=a^{4+3}=a^7.$$

一般ニ a ヲ任意ノ數トシ,m 及ビ n ヲ任意ノ正ノ整數トスレバ,

$$\boldsymbol{a^m a^n=a^{m+n}}.$$

同文字ノ羃ヲ三ツ以上相乘ズル場合モ亦同様デアル。

$$\boldsymbol{a^m a^n a^p=a^{m+n+p}}.$$

又コノ特別ノ場合トシテ

$$(a^m)^3=a^m a^m a^m=a^{m+m+m}=a^{3m}.$$

故ニ一般ニ $\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$.

又 $\boldsymbol{(ab)^m=a^m b^m}$.

例題

1. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

$a^5\times a^3$, $x\times x^2\times x^3$, $(a^2)^3$, $\{(a^3)^2\}^4$

2. $-(-a)^2$, $-(-2a)^3$, $(-3a)^2\times(-a)^3$ ヲ夫々簡單ニセヨ。

3. $(a^m)^n$ ト $(a^n)^m$ トハ相等シイカ。

23. 單項式ノ乘法

數多ノ單項式ノ積ヲ作ルニハ,先ヅ最初ニソレラノ係數ノ積ヲ作リ,次ニ文字因數ノ積ヲ附記スレバ宜イ。

例 1. $2a^2\times(-3a^3)=2\times(-3)\times a^{2+3}=-6a^5.$

例 2. $-x\times 2ay\times(-5a^2xy^2)$
$=(-1)\times 2\times(-5)\times a^{1+2}x^{1+1}y^{1+2}$
$=10a^3x^2y^3.$

例　題

次ノ乗法ヲ行ヘ。

(1)　$4ax\times(-3a^2)$　　(2)　$-\frac{1}{2}b\times\left(-\frac{2}{3}abx\right)$

(3)　$6a^2x\times(-3ax^2)\times\left(-\frac{5}{9}ax\right)$

(4)　$(-a^2b)\times(-bc^2)\times(-abc)$

(5)　$(7abc)^2$　　(6)　$\left(-\frac{5}{6}ab^2c^3\right)^3$

24. 多項式ト單項式トノ乗法

多項式ト單項式トノ積ヲ作ルニハ,ソノ多項式ノ各項ニソノ單項式ヲ乗ズレバ宜イ。

例ヘバ　　$(a+b)d=ad+bd,$

$$(a-b+c)d=ad-bd+cd.$$

例 1.　$(2a+3b-4c)\times4abx=8a^2bx+12ab^2x-16abcx.$

例 2.　$(a-b-c)\times(-2d)=-2ad+2bd+2cd.$

例　題

次ノ乗法ヲ行ヘ。

(1)　$(x+y)\times x^2y^2$　　(2)　$(2a+3b-4c)\times(-2a^2bc)$

(3)　$\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{3}{4}a^2b^2-\frac{5}{6}b^3\right)\times(-12ab)$

(4)　$a(b-2c)+15b\left(c-\frac{2}{5}a\right)+6c\left(a-\frac{2}{3}b\right)$

(5)　$12\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{6}\right)-36\left(\frac{8x}{9}-\frac{13y}{18}\right)$

25. 多項式ト多項式トノ乗法

前節ニヨリ　　$(a+b)K=aK+bK.$

今上式ニ於テ　$K=c+d$　トスレバ

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd.$$

故ニ二ツノ多項式ノ積ヲ求メルニハ,一方ノ式ノ各項ニ他ノ式ノ各項ヲ夫々乗ジタスベテノ積ノ和ヲ作レバ宜イ。

例 1.　$(a+b-c)(x-y)=ax+bx-cx-ay-by+cy.$

例 2.　$(3m-4n)(ax-2by)$

$$=3amx-4anx-6bmy+8bny.$$

例 3.　$(x^2+2x-3)(4x+5)=4x^3+8x^2-12x$

$$+5x^2+10x-15$$
$$=4x^3+13x^2-2x-15.$$

コノ掛算ハ通常次ノ如クニ書イテ計算スル。

$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2+ & 2x- & 3 \\
 & 4x+ & 5 & \\
\hline
4x^3+ & 8x^2- & 12x & \\
 & 5x^2+ & 10x- & 15 \\
\hline
4x^3+ & 13x^2- & 2x- & 15
\end{array}$$
…………(答)

注意 計算中 x ノ冪ガ順序ヨク並ブヤウニスルニハ與ヘラレタ二式ヲ共ニ斯クノ如ク x ノ冪ノ高イ項カラ低イ項ニ向ツテ順次ニ排列シ置クカ,又ハ反對ニ二式共ニ低イ冪カラ高イ冪ニ向ツテ排列シテ置ケバ宜イ。前者ノ場合ニハソノ式ハ x ニ關シテ降羃ノ順ニ,後者ノ場合ニハ昇羃ノ順ニ排列セラレタトイフ。

例 4. x^3+a^2+ax ト $x-2a$ トノ積ヲ求メヨ。

第一式ノ第二項ト第三項トヲ入レ換ヘレバ,與ヘラレタ二式ハ共ニ x ニ關シテ降冪(同時ニ a ニ關シテ昇冪)ノ順ニナル。依ツテ次ノ如クニ計算スル。

注意 第一式ニ於テ x^2 ヲ含ム項ガ缺ケテ居ルタメ, x^3 ノ項ト x ノ項ノ間ヲ空ケテ置クコトニ注意セヨ。

計算

$$
\begin{array}{rrrr}
x^3 & & +ax + & a^2 \\
x-2a & & & \\
\hline
x^4 & & +ax^2+ & a^2x \\
 & -2ax^3 & & -2a^2x-2a^3 \\
\hline
x^4 & -2ax^3 & +ax^2- & a^2x-2a^3
\end{array}
\text{…………(答)}
$$

例　題

次ノ乘法ヲ行ヘ。

(1) $(x+1)(x-2)$　　(2) $(x+3)(x+5)$

(3) $(a-2)(a-3)$　　(4) $(2a+1)(a+3)$

(5) $(3b-2a)(a+5b)$　　(6) $(5m-7n)(4n-3m)$

(7) $(a+b)^2$　　(8) $(x+y-z)^2$

(9) $(a^2-ab+b^2)(a+b)$

(10) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(11) $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)$

(12) $\left(\frac{2}{3}ax+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}a^2\right)\left(\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}ax\right)$

第四章　除　法

26. 羃ノ除法

$$\frac{a^7}{a^4}=\frac{aaaaaaa}{aaaa}=aaa=a^{7-4}=a^3,$$

$$\frac{a^7}{a^7}=1,$$

$$\frac{a^4}{a^7}=\frac{aaaa}{aaaaaaa}=\frac{1}{aaa}=\frac{1}{a^{7-4}}=\frac{1}{a^3}.$$

一般ニ a ヲ零デナイ任意ノ數トシ, m 及ビ n ヲ任意ノ正ノ整數トスルトキ,

$\boldsymbol{m>n}$ ナラバ $\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}}$,

$\boldsymbol{m=n}$ ナラバ $\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n}=1}$,

$$m<n \text{ ナラバ } \frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}.$$

27. 單項式ノ除法

或ル單項式ヲ他ノ單項式デ割ルニハ,先ヅ數係數ノ除法ヲ行ヒ,次ニ除式ノ中ニアル文字因數ダケヲ被除式ノ文字因數カラ取リ去レバ宜イ。モシ除式ノ中ニアル文字因數ノ方ガ被除式ノ中ニアルヨリモ多ク,悉ク取リ去ルコトガ出來ヌトキハ,ソノ過剩ノ分ダケヲ分母トシタ分數ノ形ヲ以テ商ヲ表ハスモノトスル。

以上ハ前節ニ述ベタ冪ノ除法ノ法則カラ直チニ得ラレル結果デアル。

例 1. $12axy\div4x=3ay.$

例 2. $-7a^2b^3c\div(-3ab^2c^3)=\dfrac{7ab}{3c^2}.$

例　題

次ノ割算ヲナセ。

(1) $(-21x)\div(-3)$　(2) $(-x^3)\div x^2$

(3) $6ax^2y\div2xy$　(4) $-3mx^2y^3\div\left(-\dfrac{3}{4}nx^3y^2\right)$

(5) $(5mnx)^2\div\left(-\dfrac{1}{3}m^2xy\right)$　(6) $\dfrac{-21x^3yz^2}{+7x^2y^5}$

(7) $10x^4y^3\div(6a^2bx^3\div3abx^2)$

(8) $\dfrac{3(-a)^5(-b)^3}{12(-a)^2(-b)}$

28. 多項式ヲ單項式デ割ルコト

多項式ヲ單項式デ割ルニハ,ソノ多項式ノ各項ヲソノ單項式デ割レバ宜イ。

例 1. $(2ax-3bx+4cx)\div x=2a-3b+4c.$

例 2. $(a^3+2b^2x-4cx^2)\div2ax^2=\dfrac{a^2}{2x^2}+\dfrac{b^2}{ax}-\dfrac{2c}{a}.$

例　題

次ノ計算ヲナセ。

(1) $(3a-9b)\div(-3)$　(2) $(5x^3-2x^2+x)\div x$

(3) $(33x^4y^2-18x^3y^3)\div(-3x^3y^2)$

(4) $\dfrac{12a^2-18ab}{6a}+\dfrac{21ab+14b^2}{7b}$

(5) $\left(\dfrac{1}{2}a^2x^3-\dfrac{1}{3}bx^4\right)\div\left(-\dfrac{1}{24}x^2\right)$

29. 多項式ノ除法

一般ニ或ル整式ヲ他ノ整式デ割ツタ商ガ整式デ殘リガナイトキハ,コノ被除式ハ除式デ**割リ切レル**或ハ**整除サレル**トイフ。

一般ニ或ル整式ヲ他ノ整式デ割ルトキハ必ズシモ割リ切レルモノデハナイ,從ツテ被除式ヲ分子トシ,除式ヲ分母トスル分數ノ形ヲ以テソノ商ヲ示ス場合ガ多イ。

例ヘバ $ax+by$ ヲ $a+b$ デ割ツタ商ハ $\dfrac{ax+by}{a+b}$, 又第27節例2ノ如キモコノ例デアル。

ケレドモ或ル特別ノ場合ニハ都合ヨク整式ノ商ヲ得テ割リ切レルコトガアル,或ハ割リ切レナクモナホ整式ノ商(卽チ**整商**)ト整式ノ殘リ(卽チ**剩餘**)トヲ見出シ得ルコトモアル。コレラノ場合ノ算法ヲ次ニ揭ゲル。

例 1. $2x^2+x-3$ ヲ $x-1$ デ割レ。

計算

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+3 \\
\hline
x-1 & 2x^2+x-3 \\
 & 2x^2-2x \\
\cline{2-2}
 & \quad\;\; 3x-3 \\
 & \quad\;\; 3x-3 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

答 $2x+3$

說明 先ヅ $2x^2+x-3$ ヲ $x-1$ デ割ラウトスルニ,兩式ニ於ケル x ノ最高冪ノ項ヲ見較ベレバ,商ニ於ケル x ノ最高冪ノ項ハ $2x$ ナルコトヲ知ル。依ツテ試ミニ $(x-1)\times 2x$ ヲ作ツテ見レバ $2x^2-2x$ デ,

コレト與ヘラレタ被除式トノ差ハ

$$(2x^2+x-3)-(2x^2-2x)=3x-3$$

デアル。コノ差ヲ更ニ $x-1$ デ割レバ商3ヲ得テ割リ切レル。故ニ結局元ノ被除式ハ $x-1$ ノ $2x$ 倍ト3倍トノ和卽チ $(2x+3)$ 倍ニ等シイコトヲ知ル。

例 2. $10x^3-7x^2-24x+18$ ヲ $2x-3$ デ割レ。

計算

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2+4x-6 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{答}) \\
\hline
2x-3 & 10x^3-7x^2-24x+18 \\
 & 10x^3-15x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 8x^2-24x \\
 & \qquad 8x^2-12x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -12x+18 \\
 & \qquad\qquad -12x+18 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

例 3. $x^4+a^2x^2+a^4$ ヲ x^2-ax+a^2 デ割レ。

計算

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+ax+a^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{答}) \\
\hline
x^2-ax+a^2 & x^4 \qquad +a^2x^2 \qquad +a^4 \\
 & x^4-ax^3+a^2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad ax^3 \\
 & \qquad ax^3-a^2x^2+a^3x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad a^2x^2-a^3x+a^4 \\
 & \qquad\qquad a^2x^2-a^3x+a^4 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

注意 被除式ニ於テ x^3 及ビ x ノ項ノ位置ヲアケテ置クコトニ注意セヨ。

例 4. $4x^4-12x^2+7x-5$ ヲ $4x^2-2x+1$ デ割レ。

計算

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2+\frac{1}{2}x-3 \\ \cline{2-2}
4x^2-2x+1) & 4x^4 \qquad -12x^2+7x-5 \\
 & 4x^4-2x^3+x^2 \\ \cline{2-2}
 & 2x^3-13x^2+7x \\
 & 2x^3-x^2+\frac{1}{2}x \\ \cline{2-2}
 & -12x^2+\frac{13}{2}x-5 \\
 & -12x^2+6x-3 \\ \cline{2-2}
 & \frac{1}{2}x-2
\end{array}
$$

答 整商 $x^2+\frac{1}{2}x-3$, 剰餘 $\frac{1}{2}x-2$

例 題

次ノ割算ヲナセ。

(1) $(3x^2+x-10)\div(x+2)$ (2) $(a^3+b^3)\div(a+b)$

(3) $(a^3-b^3)\div(a-b)$

(4) $(x^3-x^2+9x-12)\div(x^2-3x+3)$

(5) $(9-12a+4a^2-a^4)\div(3-2a-a^2)$

(6) $\dfrac{1+5x^6-6x^5}{1-2x+x^2}$

(7) $\dfrac{2a^6+2}{a^3+2a^2+2a+1}$

雜 題 II.

1. 次ノ各式ヲ計算セヨ。

(1) $(a+b)^2+(a-b)^2$

(2) $(x-2y)(x+2y)+(y-2x)(y+2x)$

(3) $(x+2y)(y+2x)-(x-2y)(2x+y)$

(4) $\left[x^2(x-1)+\left\{4x-\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}x\right)\right\}\right]\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

(5) $\dfrac{16[1-x\{1-2x(1-x)\}+x^4]-\{8x(x-1)+15\}}{(1-2x)^2}$

(6) $\dfrac{x^2(x^2-2x)-\{(x-1)(x^2+x+1)-2x(3x-1)\}}{(x-4)(x+1)+2}$

2. $(x+y-2z)^2$ ヲ得ルタメニ $(x-2y+z)^2$ ニ加ヘルベキ式ヲ求メヨ。

3. x^6-a^6 ヲ得ルタメニ $x^3-2ax^2+2a^2x-a^3$ ニ乘ズベキ式ヲ求メヨ。

4. 次ノ積ニ於ケル x^6 ナル項ノ係數ヲ求メヨ。

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)(2+4x+6x^2+8x^3)$

5. 次ノ積ニ於ケル x ノ最高次ナル項ノ係數及ビ x ヲ含マナイ項ヲ求メヨ。

$(x-2x^2+1)(x^2-2x^3+4x-2)$

6. $a=x^3+3x^2+3x+1,\quad b=x^2+2x+1,\quad c=x+1$ ナラ

バ, $x=-\frac{1}{3}$ ナルトキノ $a-3b+3c-1$ ノ數値如何。

7. 三ツノ連續シテキル整數ノ和ハ常ニ 3 デ整除サレルコトヲ證明セヨ。

8. ソノ差ガ 1 ナル二ツノ數ノ和ハソノ平方ノ差ニ等シイコトヲ證明セヨ。

第三篇

一次方程式

第一章　等式

30. 等式ノ種類

等號＝ヲ以テ二ツノ代數式ヲ連結シタモノヲ等式トイフ。

ソノ二ツノ代數式ノ各ヲソノ等式ノ邊トイヒ, 等號ノ左ニアル邊ヲ左邊,右ニアル邊ヲ右邊トイフ。

例ヘバ　$(x+2)(x-3)=x^2-x-6,$　(1)

$x+2=5$　(2)

ノ如キハ何レモ等式デ,

$(x+2)(x-3)$,　$x+2$　ハ左邊,

x^2-x-6,　5　ハ右邊デアル。

上ノ例(1)ニ於テハ x ニイカナル値ヲ與ヘテモ兩邊ノ數値ハ常ニ相等シイ。コレニ反シテ(2)ハ $x=3$ ナルトキニ限ツテ成立スル等式デアル。コレニヨツテ等式ニハ次ノ二種アルコトヲ知ル。

式中ノ文字ニ如何ナル値ヲ與ヘテモ,恒ニ成立スル等式ヲ**恒等式**トイフ。

式中ノ或ル文字ニ特別ナル數値ヲ與ヘナケレバ成立シナイ等式ヲ**方程式**トイフ。

ソノ或ル文字ニ與ヘルベキ特別ナル數値ハ一般ニハ最初カラ知レテ居ルモノデハナイ,依ツテソノ文字ヲソノ方程式ノ**未知數**トイフ。例ヘバ(2)ハ方程式デ,xハ卽チコノ方程式ノ未知數デアル。未知數ニ對シテ2及ビ5等ヲ**既知數**トイフ。未知數ヲ含ム項ヲ**未知項**トイヒ,既知數ノミヨリナル項ヲ**既知項**又ハ**常數項**トイフ。

方程式ヲ成立セシメルタメニ,未知數ニ與ヘルベキ値ノコトヲ**根**トイヒ,根ヲ求メルコトヲ,ソノ**方程式ヲ解ク**トイフ。

例ヘバ上ノ例(2)ニ於ケル根ハ3デアル。

サテ試ミニ$x=3$トシテ(2)ノ左邊ノ値ヲ求メレバ丁度5トナツテ右邊ト相等シクナル。斯クノ如キ場合ニコノ3ハ方程式(2)ヲ**滿足セシメル**或ハ(2)ニ**適合スル**トイフ。

31. 等式ノ性質

I. 一般ニ任意ノ等式ニ於テ,

1. 兩邊ニ任意ノ同ジ數ヲ加ヘテモ,
2. 兩邊ヨリ任意ノ同ジ數ヲ減ジテモ,
3. 兩邊ニ(零デナイ)同ジ數ヲ乘ジテモ,
4. 兩邊ヲ(零デナイ)同ジ數デ除シテモ,

ソノ結果ハ矢張リ一ツノ等式デアル。

注意 (3)ニ於テ,「零デナイ」トイフ條件ヲ除イテモ,ソノ結果ハ矢張リ等式ニハナルケレドモ,始メ方程式デアツタモノモ後ニ恒等式トナル。例ヘバ$x+2=5$ハ方程式デアルケレドモ,$(x+2)\times0=5\times0$ハ恒等式デアル。

(4)ニ於テハ「零デナイ」トイフ條件ヲ除クコトハ出來ヌ。(第13節注意2, 3參照)

II. 等式中ノ任意ノ項ハソノ符號ヲ變ジテコレヲ他邊ニ移スコトガ出來ル。

例ヘバ
$$2x+3=4x-5 \tag{1}$$
ナル等式ニ於テ,兩邊ニ5ヲ加ヘレバ,
$$2x+3+5=4x \tag{2}$$
トナル。卽チ(1)ノ右邊ニアツタ-5ガ,(2)デハ$+5$

トナツテ左邊ニ移サレタモノト考ヘルコトガ出來ル。斯クノ如ク

或ル項ノ符號ヲ變ジテコレヲ他ノ邊ニ移スコトヲ**移項スル**トイフ。

例題

1. 次ノ各等式ニ於テ總テノ項ヲ左邊ニ移シ,ソノ結果ヲ簡約セヨ。

$$3x-2=x+5, \qquad 3x^3-2x=4x-7,$$

$$2(3x-2)=x, \qquad 1=x^2-2(x-1)$$

2. 前問ノ各等式ニ於テ適宜ニ移項シ,未知項ヲ一邊ニ集メ,既知項ヲ他ノ一邊ニ集メ,各邊ヲ簡約セヨ。

32. 方程式ノ種類

方程式ガ唯一種ノ未知數ヲ有スルトキハコレヲ**一元方程式**トイヒ,二種,三種等ノ未知數ヲ有スルトキハコレヲ夫々**二元,三元**等ノ方程式トイフ。

例ヘバ　$x+2=5x$　ハ一元方程式,

$$x+2y=3$$

ハ二元方程式デアル。**元**トハ未知數ノコトデアル。

注意　習慣上,未知數ヲ表ハスニハ羅馬字順ノ終リノ方ニアル x, y, z 等ノ文字ヲ用ヰ,コレニ對シテ既知數ヲ文字デ表ハストキニハ羅馬字順ノ終リノ方ニナイ文字ヲ用ヰルコトガ多イ。

方程式ノスベテノ項ヲ一邊ニ移シ,コレヲ簡約シタトキ,ソノ式ガスベテノ未知數ニツイテ整式ナルトキハ,ソノ未知數ニツイテノソノ邊ノ次數ヲソノ**方程式ノ次數**トイフ。

例ヘバ

$$3x+\frac{2}{5}=10$$ ハ一元一次方程式デ,

$$x^3+2x^2+3x=4+x^3$$

ハ移項シテ簡約スレバ

$$2x^2+3x-4=0$$

トナルカラ一元二次方程式デアル。又

$$x^3+xy-y^2=x+y$$

ハ二元三次方程式デアル。

第二章　一元一次方程式

33. 一元一次方程式ノ解法

例 1.　方程式　$4x+3=15$　ヲ解ケ。

解　左邊ノ 3 ヲ右邊ニ移セバ,

$$4x=15-3,$$

即チ　$4x=12.$

コヽニ於テ兩邊ヲ 4 デ除スレバ

$$x=3$$

ヲ得ル。故ニ求メル根ハ 3 デアル。

驗　$x=3$ ナル値ヲ始メノ方程式ノ左邊ニ代入スレバ　$4\times3+3=12+3=15$

トナツテ,丁度適合スル。

例 2.　$5x-7=3(2-x)-25$　ヲ解ケ。

解　括弧ヲ去ツテ簡約スレバ

$$5x-7=-3x-19.$$

コヽニ於テ未知項ヲ左邊ニ,既知項ヲ右邊ニ集メレバ　$5x+3x=-19+7,$

即チ　$8x=-12.$

故ニ　$x=-\frac{3}{2}.$

驗　コノ x ノ値ヲ元ノ方程式ノ各邊ニ代入スレバ

$$5x-7=5\left(-\frac{3}{2}\right)-7=-\frac{15}{2}-7=-\frac{29}{2},$$

$$3(2-x)-25=3\left(2+\frac{3}{2}\right)-25=\frac{21}{2}-25=-\frac{29}{2}$$

トナツテ兩邊相等シクナル。

以上ノ例ニヨツテ次ノ如キ一般ノ解法ヲ得ル

一元一次方程式ヲ解クニハ,先ヅ括弧ガアレバコレヲ去リ,未知項ヲ一邊ニ,既知項ヲ他ノ邊ニ集メ,各邊ヲ簡約シテ夫々一項トナシ,然ル後未知數ノ係數デ兩邊ヲ除スレバ宜イ。

以下本書ニ擧ゲル例題デ驗シヲ省略シテアルモノハ,學生自ラコレヲ試ミヨ。

例 3.　$\frac{5}{6}(x-2)+\frac{1}{2}(1-3x)+\frac{13}{18}=0$　ヲ解ケ。

解　先ヅ括弧ヲ去レバ

$$\frac{5}{6}x-\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{13}{18}=0.$$

移項スレバ

$$\frac{5}{6}x-\frac{3}{2}x=\frac{5}{3}-\frac{1}{2}-\frac{13}{18},$$

コレヲ簡約スレバ

$$-\frac{2}{3}x=\frac{4}{9}.\quad 故ニ\quad x=-\frac{2}{3}.$$

或ハ次ノ如クニ解クコトモ出來ル。

先ヅ與ヘラレタ方程式中ニアル諸分數ノ分母ノ最小公倍數18ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$15(x-2)+9(1-3x)+13=0.$$

コヽニ於テ括弧ヲ去リ移項スレバ

$$15x-27x=30-9-13,$$

卽チ $\quad -12x=8. \quad$ 故ニ $\quad x=-\frac{2}{3}.$

注意 斯クノ如ク分數ヲ含ム方程式ノ兩邊ニ或ル數ヲ乘ジテ,分數ヲ含マナイ式トナスコトヲ稱シテ**分母ヲ拂フ**トイフ。

例題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $x+7=-13$ (2) $2-5x=-18$

(3) $x-1=2x-11$ (4) $x-4(2-x)=5(2x+1)$

(5) $x-2\{x-(1-x)\}=3x$

(6) $(x-1)(x-2)=x^2-13$

(7) $\frac{3x}{4}+5=\frac{5x}{6}+2$ (8) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}=x-2$

(9) $\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)=4\frac{5}{6}$

(10) $\frac{x-1.4}{2}-\frac{0.7-x}{3}=0$

34. 應用問題

例 1. 甲ハ金若干圓,乙ハ金32圓ヲ有スル,而シテ兩人ノ所持金ヲ合セレバ甲ノ所持金ノ3倍ヨリ6圓少イトイフ,甲ノ所持金如何。

解 甲ノ所持金ヲx圓トスレバ,兩人ノ所持金ノ和ハ$(x+32)$圓デ,又甲ノ所持金ノ3倍ヨリ6圓少イ金高ハ$(3x-6)$圓デアル。然ルニ題意ニヨレバコノ二ツノ金高ハ相等シクナケレバナラヌ。依ツテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$x+32=3x-6.$$

コレヲ解イテ $\quad x=19$

ヲ得ル。故ニ甲ノ所持金ハ19圓デアル。

驗 甲乙兩人ノ所持金ノ和ハ

19圓+32圓=51圓,

甲ノ所持金ノ3倍カラ6圓ヲ引ケバ

19圓×3−6圓=51圓.

卽チ兩者相等シイ。

例 2. 每時3500mヲ步ム甲ガ或ル地點ヲ出立シテカラ3時間ヲ經テ後,乙ハ每時8500mヲ走ル自轉車デ同地點カラ甲ヲ追ツテ出立シタ,乙ガ甲ニ追ヒ付クマデニ幾時間ヲ要スルカ。

解　乙ガ出立シテカラ x 時間デ甲ニ追ヒ付クモノトスレバ,コノ間ニ乙ノ走ル距離,卽チ出發點カラ追及點マデノ距離ハ $8500x\,m$ デアル。然ルニ又一方ヨリ考ヘレバ,甲ハ乙ヨリ 3 時間先キニ出立シタカラ,追ヒ付カレルマデニ $(x+3)$ 時間ダケ歩ンダ筈デアル,故ニ出發點カラ追及點マデノ距離ハ $3500(x+3)m$ トモ考ヘラレル。依ツテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$8500x=3500(x+3).$$

コレヲ解ケバ　$x=2\frac{1}{10}$

ヲ得ル。故ニ答ハ乙出發後 $2\frac{1}{10}$ 時間デアル。

例 3.　二位ノ整數ガアル,一ノ位ノ數ハ十ノ位ノ數ノ 2 倍デ,コノ整數ニ 9 ヲ加ヘレバ數字ノ順序ガ轉倒スルトイフ,コノ數ヲ求ム。

解　十ノ位ノ數ヲ x デ表ハセバ,一ノ位ノ數ハ題意ニヨリ $2x$ デ,今求メル數ハ $10x+2x$ デ表ハサレル。又コノ整數ノ數字ノ順序ヲ轉倒シタモノハ $10(2x)+x$ デアル。依ツテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$10x+2x+9=10(2x)+x.$$

コレヲ解ケバ

$$x=1.$$

故ニ求メル數ハ $10\times1+2\times1$ 卽チ 12 デアル。

例 4.　モシ前題ニ於テ「9 ヲ加ヘレバ」ノ代リニ「8 ヲ加ヘレバ」トスレバ如何。

解　コノ場合ニハ方程式ハ

$$10x+2x+8=10(2x)+x$$

トナリ,コレヲ解ケバ

$$x=\frac{8}{9}$$

ヲ得ル。然ルニ元來 x ハ二位ノ整數ニ於ケル十ノ位ノ數字ヲ表ハスモノデアルカラ必ズ 1 ヨリ 9 マデノ間ノ正ノ整數ナルコトヲ要スル。故ニ $\frac{8}{9}$ トイフ根ハ上ノ方程式ニハ適合スルケレドモ,本題ノ答トシテハ採ルコトガ出來ヌ。卽チコノ問題ニイフ如キ數ハ存在シナイノデアル。

注意　x ガ 1 ヨリ 9 マデノ間ノ正ノ整數デナケレバナラヌトイフ制限ハ方程式ノ中ニハ含マレテヰナイ。今求メル x ナルモノハコノ方程式ニ適合シタ上ニ更ニ斯クノ如キ制限ニ從フコトヲ要スル,故ニ $\frac{8}{9}$ ハ採用セラレナイノデアル。斯クノ如キ例ハ往々アル,例ヘバ人數ヲ求メル問題ニ分數ノ根ヲ得ル如キ場合

モ亦コノ類デアル。故ニ一般ニ應用問題ヲ解クニ當ツテハ,方程式ノ根ガ眞ニ問題ノ答ニナリ得ルヤ否ヤヲ能ク調ベルコトガ必要デアル。

例 5. 今年父ハ50歳,子ハ30歳デアル,父ノ年齡ガ子ノ年齡ノ2倍トナルノハ幾年後カ。

解 求メル年數ヲxトスレバ,題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得ル

$$50+x=2(30+x).$$

コレヲ解ケバ

$$x=-10$$

ヲ得ル。サテ「-10年後」トイフハ「10年前」ノ意デアルト解釋スレバヨイ。試ミニ10年前ノ年齡ヲ考ヘレバ,父ハ40歳,子ハ20歳デ,前者ハ後者ノ2倍トナル。故ニ本題ノ如ク「幾年後カ」トイフ問ニ對シテハ答ガ無イケレドモ,モシコレヲ改メテ「2倍トナツタノハ幾年前カ」トスレバ「10年前」トイフ答ヲ得ル。

本例ノ如ク與ヘラレタ問題ヲ適當ニ變更シテ負ナル根ノ意味ヲ解釋スルコトヲ**負根ノ解釋**トイフ。

例　題

1. 甲ハ乙ヨリ8歳少ク又丙ヨリハ24歳多イ,而シテ甲ノ年齡ノ$\frac{1}{6}$ト乙ノ$\frac{1}{2}$ト丙ノ$\frac{1}{3}$トノ和ハ38歳トナル,各年齡ヲ求メヨ。

2. 今年父ハ39歳,長子ハ12歳,次子ハ5歳デアル,幾年ノ後兩子ノ年齡ノ和ガ父ノ年齡ト等シクナルカ。

3. 同時ニ同所ヲ出發シテ或ル距離ヲ行クニ,甲ハ毎時5kmノ速サデ歩ミ乙ハ毎時8kmノ速サノ自轉車デ走ツタ,而シテ乙ハ途中デ半時間休シデ尙ホ甲ヨリ1時間早ク目的地ニ着イタ,ソノ距離ヲ求メヨ。

4. 甲ガ或ル地ヲ出發シタ後4日ヲ經テ乙ハ同地ヲ出發シコレヲ追跡シタ,甲ハ毎日28km,乙ハ36kmヲ行クトスレバ,乙ハ出發後幾日デ甲ニ追ヒツクカ。

5. 鶴ト龜ト合セテ15頭キテ,ソノ足數ハ合セテ46本デアルトスレバ各幾頭ヅツヰルカ。

6. 下男ヲ傭ツテ30箇ノ瓶ヲ一ツヅツ運バシメ

ルニ,無事ニ運ンダ瓶1箇ニ對シテハ運賃トシテ5錢ヲ與ヘ,破損シタトキハ罰金トシテ3錢ヲ取ルコトトシタ,斯クシテ下男ハ結局54錢ヲ得タトイフ,破損シタ瓶ノ數如何。

7. 若干人デ反物ヲ分配スルニ,3反ヅツ取レバ6反殘リ,5反ヅツ取ラウトスレバ2反不足スルトイフ,人數及ビ絹ノ反數ヲ求メヨ。

8. 若干人デ果物ヲ分配スルニ,3箇ヅツ取レバ6箇餘リ,4箇ヅツ取ルコトニスレバ2箇不足スル,ソノ人數及ビ果物ノ數ヲ求メヨ。

9. 二位ノ整數ガアル,十ノ位ノ數ハ一ノ位ノ數ノ2倍デ,ソノ整數カラ18ヲ減ズレバ數字ノ順序ガ轉倒スル,ソノ數ヲ求メヨ。

10. 二位ノ整數ガアル,十ノ位ノ數ハ一ノ位ノ數ノ3倍デ,ソノ整數カラ18ヲ減ズレバ數字ノ順序ガ轉倒スル,ソノ數ヲ求メヨ。

11. 相連續スル二ツノ正ノ整數デ,ソノ平方ノ差ガ19ナルモノヲ求ム。

12. 相連續スル二ツノ整數デ,ソノ積ガソノ小ナルモノノ平方ヨリ7大ナルモノヲ求メヨ。

13. 3時ト4時トノ間デ時計ノ兩針ガ相重ナル時刻ヲ求メヨ。

14. 12時ノ後始メテ時計ノ兩針ガ相重ナル時刻ヲ求メヨ。

15. 充實シタ二ツノ方陣ガアル,各列ノ人數ハ大ナル方ガ小ナル方ヨリ1人多ク,總人員ハ大ナル方ガ小ナル方ヨリ100人多イ,各方陣ノ人員ヲ求メヨ。

第三章 聯立一次方程式

35. 聯立方程式

方程式 $x+y=7$ (1)

ノ如ク,一ツノ方程式中ニ二種ノ未知數ガアルトキハ,コノ方程式ヲ滿足セシメル未知數ノ値ハ一般ニ幾組モアル。何トナレバ,未知數ノ一方例ヘバ $x=0, 1, 2, \ldots\ldots$ 等ノ値ヲ與ヘテコレニ對スル y ノ値ヲ求メレバ

$$\begin{cases}x=0\\y=7\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=6\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}\quad\begin{matrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{matrix}$$

等ノ如ク限リナク多クノ根ノ組ヲ得ルカラデアル。故ニ方程式(1)ハxトyトノ和ガ7デアルトイフ關係ヲ示スニ止マリ,ソノ各ノ値ヲ決定スルモノデハナイ。

ケレドモ,若シ

$$\begin{cases} x+y=7 & (1) \\ 2x-y=8 & (2) \end{cases}$$

ノ如ク,x及ビyヲ含ム方程式ガ二ツアルトキハ,コノ二式ヲ共ニ滿足セシメル未知數ノ値ハ一般ニ唯一組確定サレル,卽チ次ノ如クデアル。

求メルx及ビyノ値ハ$x+y$ヲ7ナラシメ,$2x-y$ヲ8ナラシメルモノデアルカラ,ソノ和

$$(x+y)+(2x-y)$$

ヲシテ7+8ナラシメルモノデナケレバナラヌ。卽チ(1)及ビ(2)ノ各邊ヲ夫々相加ヘタ方程式

$$(x+y)+(2x-y)=7+8 \qquad (3)$$

ガ成立セネバナラヌ。

(3)ヲ簡約スレバ　　$3x=15$

トナリ,コレヲ解ケバ　　$x=5$

ヲ得ル。コノxノ値ヲ(1)又ハ(2)ニ代入シテyノ

値ヲ求メレバ,　　$y=2$

ヲ得ル。コノ例ノ如ク

方程式ガ未知數ノ種類ト同數ダケアルトキハ一般ニソレラノ方程式ヲ同時ニ滿足セシメル未知數ノ値ヲ確定スルコトガ出來ル。斯クノ如ク同ジ根ノ組ニヨツテ同時ニ滿足セシメラレル一組ノ方程式ヲ**聯立方程式**トイフ。

聯立方程式ノ**次數**トハソノ中ノ最高次ノ方程式ノ次數ヲイフ。

例ヘバ前ノ例ハ聯立二元一次方程式デ,又

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$$

ノ如キハ聯立二元二次方程式デアル。

36. 加減法

二元聯立方程式ノ兩方又ハ一方ノ兩邊ニ適當ナル數ヲ乘ジテ後,相加ヘ又ハ相減ジテ一ツノ未知數ヲ消去シ聯立方程式ヲ解ク方法ヲ**加減法**又ハ**消去法**トイフ。

例　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases}3x+4y=76 & (1)\\ 5x-2y=14 & (2)\end{cases}$$

解　先ヅ(2)ノ兩邊ニ2ヲ乘ズレバ

$$10x-4y=28.$$

コレト(1)トヲ邊々相加ヘレバ

$$13x=104.$$

コレヨリ　$x=8$

ヲ得ル。コノxノ値ヲ(2)ニ代入スレバ

$$40-2y=14.$$

コレヲ解ケバ　$y=13$

ヲ得ル。故ニ求メル根ハ

$$\begin{cases}x=8\\ y=13\end{cases}$$

デアル。

注意　上ノ解法ニ於ケル,(2)ノ兩邊ニ2ヲ乘ジテ得ル方程式ト(1)トヲ邊々相加ヘルコトヲ記號デ、

(2)×2+(1)　　又ハ　(1)+(2)×2

ノ如クニ略記スルコトガアル。今後コノ類ノ略記ヲ用ヰル。

例　題

加減法ニヨッテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases}4x+y=10\\ 5x+7y=47\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4x+5y=4\\ 5x-3y=79\end{cases}$

37. 代入法

例　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases}3x+4y=76 & (1)\\ 5x-2y=14 & (2)\end{cases}$$

解　先ヅ(1)カラyヲ出セバ

$$y=\frac{76-3x}{4}. \qquad (3)$$

コノ右邊ニアル式ヲ(2)ノ中ノyニ代入スレバ

$$5x-2\times\frac{76-3x}{4}=14.$$

コレヲ解イテ　$x=8$

ヲ得ル。コレヲ(3)ニ代入スレバ

$$y=13$$

ヲ得ル。故ニ求メル根ハ $x=8$, $y=13$ デアル。

斯クノ如ク,與ヘラレタ聯立方程式ノ一方カラ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ト既知數トデ表ハシ

タ式ヲ作リ,コレヲ殘リノ方程式中ニ代入シ,結局唯一ツノ未知數ヲ含ム方程式トシテコレヲ解ク方法ヲ**代入法**又ハ**置換法**トイフ.

注意　代入法ヲ行フニハ,最初何レノ方程式カラ何レノ未知數ヲ出シテモ差支ナイカラ,ナルベク計算ノ簡單ナルヤウニコレヲ選定スルガ宜イ。

例　題

代入法ニヨッテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $\begin{cases} x-\dfrac{2y}{3}=0 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{3x}{10}+y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$

38. 等置法

例　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+2y=1 & (1) \\ 6x+26y=5 & (2) \end{cases}$$

解　先ヅ(1)カラxヲ出セバ

$$x=\frac{3}{2}(1-2y). \qquad (3)$$

又(2)カラxヲ出セバ

$$x=\frac{1}{6}(5-26y). \qquad (4)$$

(3)ト(4)トノ右邊ヲ相等シイト置ケバ

$$\frac{3}{2}(1-2y)=\frac{1}{6}(5-26y).$$

コノ方程式ヲ解ケバ

$$y=-\frac{1}{2}$$

ヲ得ル。コレヲ(3)又ハ(4)ニ代入シテxヲ求メレバ

$$x=3$$

ヲ得ル。故ニ求メル根ハ

$$x=3,\qquad y=-\frac{1}{2}$$

デアル。

斯クノ如ク,二元聯立方程式ノ各カラ同ジ未知數ヲ表ハス式ヲ出シテコレヲ相等シイト置キ,一元一次方程式ヲ作ッテコレヲ解ク方法ヲ**等置法**又ハ**比較法**トイフ。

例　題

1. 等置法ニヨッテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} 8x+3y=24 \\ 2x-y=6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x-3y=-5 \\ 5x-4y=1 \end{cases}$

2. 任意ノ方法ニヨッテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} 3(x+y-5)=2(y-x) \\ 3(x-y-7)+2(x+y-2)=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}-2=\dfrac{3x-2y-5}{4} \\ 2(x-y+1)+4x=3y+4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{5}+\dfrac{3y-4x}{7}+\dfrac{6}{7}=0 \\ \dfrac{y-x+3}{6}=\dfrac{y-2x}{5} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} (x-1)(y+2)=3-(2-x)(y+5) \\ 5(x-1)=7(y+5) \end{cases}$

39. 聯立多元一次方程式ノ解法

二種ヨリ多クノ未知數ヲ有スル聯立一次方程式ヲ解ク一般ノ方針ハ,常ニ加減法或ハソノ他ノ方法ニヨッテ順次ニソノ未知數ノ數ヲ減少シテ行クニアル。次ニ三元一次ノ場合ニツイテ一例ヲ掲ゲル。

例 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 5x-y+2z=5 & (1) \\ 3x+2y-z=13 & (2) \\ 7x+4y-6z=32 & (3) \end{cases}$$

解 先ヅ(1)ト(2)トカラ z ヲ消去スレバ

$(1)+(2)\times 2 \qquad 11x+3y=31. \qquad (4)$

又(1)ト(3)トカラ z ヲ消去スレバ

$(1)\times 3+(3) \qquad 22x+y=47. \qquad (5)$

次ニ(4)ト(5)トカラ y ヲ消去スレバ

$(5)\times 3-(4) \qquad 55x=110.$

コレカラ $x=2$ ヲ得ル。コレヲ(4)又ハ(5)ニ代入シテ y ヲ求メレバ $y=3$ ヲ得ル。更ニコレラノ x 及ビ y ノ値ヲ(1),(2)又ハ(3)ニ代入シテ z ヲ求メレバ $z=-1$ ヲ得ル。

依ッテ根ハ $x=2,\ y=3,\ z=-1$ デアル。

例題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} 4x+3y-z=9 \\ 9x-y+5z=16 \\ x+4y-3z=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3y-6z-5x=4 \\ 2z-3x-y=8 \\ x-2y+2z+2=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=5-\dfrac{z}{6} \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{3}=3-\dfrac{z}{6} \\ 2y+7=\dfrac{1}{4}(z-x) \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=7 \\ z+x=14 \end{cases}$

$$(5)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=3\\[2mm]\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{z}=-2\\[2mm]\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=0\end{cases}$$

40. 應用問題

例 **1.** 鉛筆5本ト毛筆6本トノ價合セテ45錢デ,鉛筆3本ノ價ハ毛筆1本ノ價ヨリ4錢高イトイフ。各1本ノ價如何。

解 鉛筆1本ノ價ヲx錢,毛筆1本ノ價ヲy錢トスレバ,題意ニヨリ次ノ聯立方程式ヲ得ル。

$$\begin{cases}5x+6y=45\\3x-y=4\end{cases}$$

コレヲ解ケバ

$$x=3,\qquad y=5$$

ヲ得ル。故ニ

答　鉛筆3錢,　毛筆5錢

驗　$3^{\text{錢}}\times5+5^{\text{錢}}\times6=45^{\text{錢}}$

$3^{\text{錢}}\times3-5^{\text{錢}}=4^{\text{錢}}$

例 **2.** 或ル仕事ヲ成就スルニ男1人,女1人,子供1人ガ同時ニ從事スレバ5日ヲ要シ,男1人ト

女1人ナラバ6日ヲ要シ,女1人ト子供1人ナラバ10日ヲ要スルトイフ,各1人デ全業ヲ成就スルニハ幾日ヲ要スルカ。

解 男,女,子供ガ各1人デ全業ヲ成就スルニ要スル日數ヲ夫々x, y, zトスレバ,1日ニ各1人ハ全業ノ$\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ダケヲ成就スル。故ニ題意ニヨリ次ノ聯立方程式ヲ得ル。

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{5} & (1)\\[2mm]\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} & (2)\\[2mm]\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10} & (3)\end{cases}$$

コノ聯立方程式ヲ解クニハ$\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ヲソノマヽ,各一ツノ未知數ト見做スガヨイ。卽チ

$$(1)-(2)\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30},\qquad 故ニ\quad z=30.$$

$$(1)-(3)\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10},\qquad 故ニ\quad x=10.$$

コノxノ値ヲ(2)ニ代入シテyヲ求メレバ$y=15$ヲ得ル。

答　男10日,女15日,子供30日

例題

1. 二ツノ數ノ和ノ$\frac{1}{6}$ハ14デ,差ノ$\frac{1}{2}$ハ13デアル,ソノ二數ヲ求メヨ。

2. 二位ノ整數ガアル,ソレカラ36ヲ減ズレバ數字ノ順序ガ轉倒スル,又ソノ整數ハ各位ノ數ノ和ノ7倍ニ等シイ,ソノ整數ヲ求メヨ。

3. 甲ガ8時間ニ行ク距離ハ乙ガ6時間ニ行ク距離ヨリ3km多イ,又乙ガ7時間ニ行ク距離ハ甲ガ6時間ニ行ク距離ヨリ9km多イ,甲乙各1時間ニ行ク距離ヲ求メヨ。

4. 或ル列車ガ長サ176mノ鐵橋ヲ全ク通過シ終ルニ20秒ヲ要シ,又長サ506mノ隧道ヲ全ク通過シ終ルニ50秒ヲ要シタ,コノ列車ノ長サ及ビ1時間ニ走ル米數如何。

5. 矩形ノ地所ガアル,モシ間口ヲ20m增シ奥行ヲ2m增セバ面積ハ760平方米增シ,モシマタ間口ヲ30m減ジ,奥行ヲ6m增セバ面積ハ180平方米減ズルトイフ,元ノ間口及ビ奥行ヲ求メヨ。

6. 充實セル矩形狀ニ整列シタ1隊ノ兵士ガアル,モシ1列ノ人數ヲ2人增シ列數ヲ3列ダケ減ズレバ15人餘ル,又1列ノ人數ヲ3人減ジ列數ヲ2列ダケ增セバ50人餘ル,コノ兵士ノ數ヲ求メヨ。

7. 或ル仕事ヲ成就スルニ,甲乙兩人デハ18日,乙丙兩人デハ30日,甲丙兩人デハ22.5日ヲ要スルトイフ,各1人ナラバ幾日ヲ要スルカ。

8. 或ル仕事ヲ成就スルニ,甲20日ト乙18日又ハ甲15日ト乙27日ヲ使用スレバ宜イ,各1人ヲ使用スレバ何日カヽルカ。

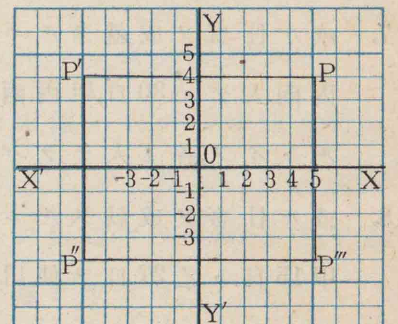
9. 1kgノ價甲茶ハ2.00圓,乙茶ハ1.50圓デアル,今兩種ヲ混ジテ1kgノ價1.80圓ノモノ60kgヲ作ラウトスル,各幾瓩ヲ取ルベキカ。

10. 金ト銀トノ合金ガ二種アル,ソノ金銀ノ割合,第一種デハ5ト4トノ如ク,第二種デハ8ト7トノ如クデアル,今コノ二種ヲ混和シテ金14gト銀12gトカラ成ル合金ヲ作ラウトスル,各種幾許ヲ要スルカ。

第四章　ぐらふ

41. 點ノ座標

平面上ノ一點ノ位置ハソノ平面上ニ畫カレタ互ニ垂直ナ二定直線カラノ距離ニヨツテ決定サレル。例ヘバ互ニ直交スル二定直線ヲ XOX′, YOY′ トシ,ソノ平面上ノ一點 P ガ XX′ ノ上方 4 單位, YY′ ノ右方 5 單位ノ距離ニアルコトヲ知ツタトスレバ,ソノ位置ハ圖ノ如クニ確定サレル。



直交スル二直線 XOX′ 及ビ YOY′ ヲ夫々 **x 軸**(又ハ**横軸**)及ビ **y 軸**(又ハ**縱軸**)ト名ヅケ,ソノ交點 O ヲ**原點**トイフ。而シテ一點ノ y 軸カラノ距離ヲソノ點ノ**横座標**, x 軸カラノ距離ヲ**縱座標**トイヒ,兩方ヲ總稱シテソノ**座標**トイフ。横座標ハ x, 縱座標ハ y ヲ以テ表ハス。

$x=5$, $y=4$ ナル點 P ヲ表ハスニ P(5, 4) ト書ク。

ケレドモ YOY′ カラ 5, XOX′ カラ 4 ナル點ハ圖ノ P, P′, P″, P‴ ノ如ク四ツアルカラ,ソノ何レナルカヲ區別スルタメニ次ノ如クニ約束スル。

P ガ y 軸ニ關シテ OX ト同ジ側ニアルトキハ横座標 x ヲ正, OX′ ト同ジ側ニアルトキハ負トシ,又 x 軸ニ關シテ OY ト同ジ側ニアルトキハ縱座標 y ヲ正, OY′ ト同ジ側ニアルトキハ負トスル。

ヨツテ P, P′, P″, P‴ ノ四點ハ次ノ如クニ區別シテ書キ表ハサレル。

$$P(5, 4),\quad P'(-5, 4),\quad P''(-5, -4),\quad P'''(5, -4).$$

例題

1. 次ノ座標ヲ有スル諸點ヲ圖ニ示セ。

$(-3, 2)$, $(-6, -2)$, $(2, -4)$, $(0, 5)$

2. 次ノ三點ヲ結ンデ三角形ヲ作レ。

A(3, 2),　B(−2, −3),　C(5, −3)

又コノ三角形ヲ方眼紙ニ畫キソノ目ノ數ニヨツテ面積ヲ概算セヨ。

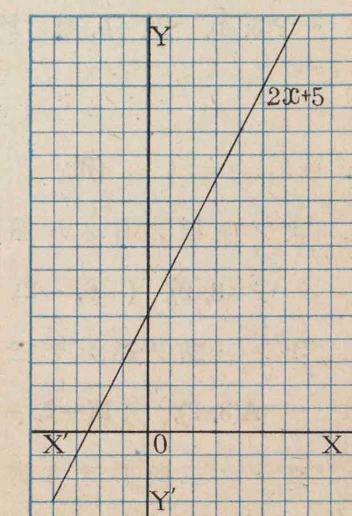
42. 函數

$y=2x+5$ ナル式ニ於テ, x ニ種々ノ値ヲ代入スルトキハソレニ伴ツテ y ノ値ガ確定サレル。例ヘバ次ノ如クデアル。

x	......, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...
y	......, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

一般ニ x ト y トノ間ニ何等カノ關係ガアツテ, x ガ種々ノ値ヲトルトキコレニ對シテ y ノ値ガ夫々確定スルトキハ, x ヲ**變數**トイヒ, y ヲ x ノ**函數**トイフ。

注意 y ガ x ノ函數デアルトイフタメニハ必ズシモ y ガ x ヲ含ム簡單ナル式デ表ハサレルコトヲ要シナイ。例ヘバ一地點ニ於ケル溫度ハ各時刻ニ對シテ夫々定マルモノデアルカラ,溫度ハ時刻ノ函數デアルトイフコトガ出來ル。



前ノ例 $y=2x+5$ ニ於テ x ノ種々ノ値トコレニ對應スル y ノ値トヲ夫夫橫座標及ビ縱座標トスル點ヲ畫キ,コレラヲ順次ニ結ベバ圖ノ如キ直線ヲ得ル。コレヲコノ**函數 y ノぐらふ**(又ハ $2x+5$ ナル式ノぐらふ)トイフ。

注意 任意ノ函數ノぐらふハ必ズシモ直線デハナイ,一般ニハ曲線デアル。シカシ一次式ノぐらふハ恆ニ直線トナルカラ,コレヲ畫クニハソノ上ノ二ツノ點ヲ定メコレヲ過ギル直線ヲ引ケバ宜イ。

例題

1. 次ノ各函數ノぐらふヲ作レ。

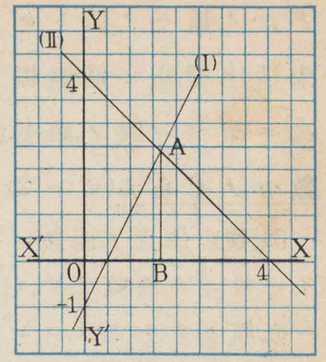
(1) $y=3x+1$ (2) $y=\dfrac{8-3x}{5}$

2. $y=3x-8$ ノぐらふヲ作リ, $y=8$ ナラシメル x ノ値ヲ見出セ。

3. 華氏度數ト攝氏度數トノ關係ヲ表ハスぐらふヲ畫ケ。而シテコレニ依ツテ華氏デモ,攝氏デモ同一ノ度數デ表ハサレル溫度ヲ求メヨ。

43. 一元一次方程式ノ圖解法

例ヘバ方程式 $2x-1=-x+4$ ヲ解クトイフ問題ハ,ツマリ兩邊ノ式 $2x-1$ 及ビ $-x+4$ ノ値ヲ相等



シカラシメルxノ値ヲ求メルコトデアル。故ニ先ヅコノ二式ノぐらふ(I)及ビ(II)ヲ畫キソノ交點Aノ横座標ヲ計ツテ

$$OB=1.7 \text{ (約)}$$

ヲ得ル。コレガ求メルxノ値デアル。

何トナレバ,$x=OB$ナルトキ原方程式ノ兩邊ノ値ガ共ニABデ表ハサレ,相等シイカラデアル。

カクノ如キ解法ヲ**圖解法**トイフ。

例題

次ノ各方程式ヲ圖解法デ解ケ。

(1) $7-2x=x-9$　(2) $3x+1=6$

(3) $7x+5=0$　(4) $x=3-x$

44. 聯立二元一次方程式ノ圖解法

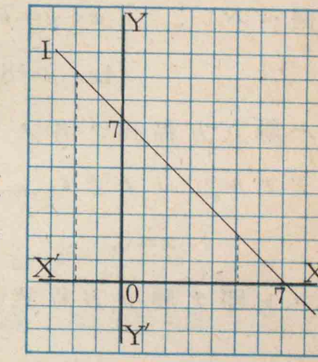
先ヅ一ツノ二元一次方程式,例ヘバ

$$x+y=7 \quad (1)$$

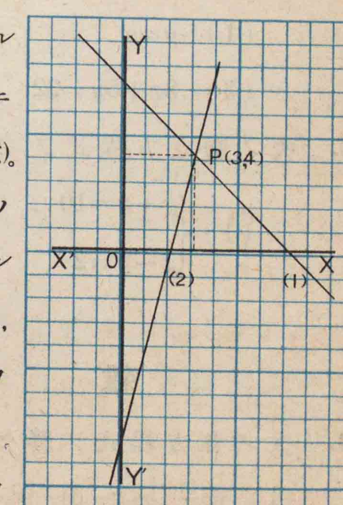
ヲ書キ直セバ

$$y=7-x \quad (2)$$

トナリ,(1)ト(2)トハソノ内容ニ於テハ全ク同一デアル。



サテ今(2)ナル式ニヨツテ表ハサレル函數yノぐらふヲ作レバ圖ノ如キ直線デ,ソノ上ノスベテノ點ノ座標x及ビyハ何レモ(2)ヲ満足セシメ,從ツテマタ(1)ヲ満足セシメル。依ツテコレヲ稱シテ(1)ナル**方程式ノぐらふ**トイフ。



方程式ガ二元一次ナルトキハ,ソノぐらふハ常ニ直線デアル(第42節ノ注意)。

故ニコレヲ畫クニハ,ソノ方程式ヲ満足セシメルx, yノ値ヲ二組ダケ求メ,コレヲ座標トスル二點ヲ過ギル直線ヲ引ケバ宜イ。

聯立二元一次方程式ノ

根ヲぐらふニヨッテ求メルニハ兩方程式ノぐらふノ交點ノ座標ヲ求メレバ宜イ。

例ヘバ

$$\begin{cases} x+y=7 & (1) \\ 4x-y=8 & (2) \end{cases}$$

ナル聯立方程式ノ各ノぐらふハ前頁ノ下圖ノ如クデアル。コノぐらふノ交點Pノ座標ハ

$$x=3, \qquad y=4$$

デ,コレ即チ聯立方程式(1),(2)ノ根デアル。

例　題

1. 次ノ方程式ノぐらふヲ畫ケ。

(1) $y=x$　(2) $x-2y=8$

(3) $3x+5y=22$

2. 次ノ聯立方程式ヲぐらふニヨッテ解ケ。

(1) $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 4x=3y \\ 2x-3y=-6 \end{cases}$

雜　題 III.

1. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $(x+15)(x-3)-(x-3)^2=30-15(x-1)$

(2) $21-x(2x+1)+2(x-4)(x+2)=0$

(3) $\dfrac{6x-2}{9}+\dfrac{3x+5}{18}=\dfrac{1}{3}$

(4) $\dfrac{x-6}{4}-\dfrac{x-4}{6}=1-\dfrac{x}{10}$

(5) $\dfrac{11-6x}{5}-\dfrac{9-7x}{2}=\dfrac{5}{6}(x-1)$

2. 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\dfrac{3}{5}x-2y=20,\quad \dfrac{1}{2}(y+8)=2$

(2) $3(x-y)+2(x+y)=15,\quad 3(x+y)+2(x-y)=25$

(3) $\dfrac{10}{x}-\dfrac{3}{y}=8,\quad \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=-3\dfrac{2}{5}$

(4) $\begin{cases} 2x-\dfrac{1}{5}(z-2y)=2 \\ \dfrac{1}{3}(x+y)=\dfrac{1}{7}(3-z) \\ x=4y+3z \end{cases}$　(5) $\begin{cases} 27x+6y=89.1 \\ 6x+15y+z=70.9 \\ y+54z=106.2 \end{cases}$

3. 甲乙丙3人ノ所有金合セテ72圓デ,丙ハ乙ノ2倍,又乙ハ甲ヨリ4圓ダケ少ク所有スル,各所有金ヲ求メヨ。

4. 甲乙兩種職工ノ日給甲種17人分ト乙種15人分トノ合計モ,又甲種13人分ト乙種20人分トノ合計モ共ニ145圓デアル,各種職工1人分ノ日給ヲ求メヨ。

5. 二位ノ正ノ整數ガアル,ソノ數ハソノ各位ノ數ノ和ノ4倍ニ等シク,モシコノ數ニ27ヲ加ヘレバソノ數字ノ順序ガ轉倒スルトイフ,原數ヲ求メヨ。

6. 東西兩市ノ間ノ距離 21*km* デアル,甲ハ東市カラ西市ヘ乙ハ西市カラ東市ヘ向ツテ共ニ午前6時ニ出發シ,甲ハ西市デ3時間乙ハ東市デ2時間休ンデ各モトノ市ニ歸ル,又速サハ毎時甲 4*km*,乙 3*km* デアル,第2回目ニ甲乙兩人出會フ時刻ヲ求メヨ。

7. 速サ毎秒 48*m* ノ甲飛行機ガ東京ヲ發シ風速未知ノ上空ヲ一直線ニ3時間5分デ大阪ニ達シタ,同時ニ大阪ヲ出發シタ速サ毎秒 42*m* ノ乙飛行機ハ丁度反對ノ航路ヲ取リ2時間35分デ東京ニ達シタ,ソノ間風ハ東京大阪ヲ連ネル直線ノ方向ニ一樣ノ速サデ吹イタモノトシテソノ風速ヲ求メヨ。

8. 8時ト9時トノ間ニ於テ時計ノ兩針ガ互ニ60度ノ角度ヲナス時刻ヲ求メヨ。

9. 金若干圓ヲ甲乙丙ノ3人ニ分與シタガ,丙ノ所得ノ3倍ト全金額トノ差ハ155圓,甲ノ所得ノ2倍ト全金額トノ差ハ376圓,マタ甲乙兩人ノ所得ノ和ハ乙丙兩人ノ所得ノ和ヨリ123圓少カツタ,各人ノ所得如何。

10. 1邊ノ長サ 4*m* ナル正方形 ABCD ガアル,動點 P ガ B ヲ發シコノ正方形ノ邊上ヲ頂點 C 及ビ D ヲ經テ A ニ向フモノトスル, △ABP ノ面積ヲ點 P ノ經過シタ長サノ函數トシテ,コレヲ表ハスぐらふヲ畫ケ。

第　四　篇

整式及ビ整數

第一章　乘法公式

45. 二項式ノ平方

整式ノ乘法ノ中デ同ジ形式ノモノガ度々繰リ返サレルモノハ,ソノ都度掛算ヲ實行スル勞ヲ省クタメニ,ソノ結果ヲ公式トシテ記憶シテオルト便利デアル。本章ニ於テハソノ著名ナルモノニツイテ述ベル。

公式 I.　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$

注意　上ノ第一式ニ於テbノ代リニ$-b$ヲ入レヽバ第二式ヲ得ル。

例 1.　$(3x-5y)^2=(3x)^2-2(3x)(5y)+(5y)^2$

$=9x^2-30xy+25y^2.$

又ハ　$(3x-5y)^2=\{(3x)+(-5y)\}^2$

$=(3x)^2+2(3x)(-5y)+(-5y)^2$

$=9x^2-30xy+25y^2.$

例 2.　$-(a+b)^2=-(a^2+2ab+b^2)$

$=-a^2-2ab-b^2.$

例 3.　$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=(a^2+2ab+b^2)+(2ac+2bc)+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab.$

例 4.　$65^2=(60+5)^2=60^2+2\times60\times5+5^2$

$=3600+600+25=4225.$

例　題

1. 次ノ各式ノ平方ヲ求メヨ。

$1+x,$　　$x-a,$　　$2x-\frac{1}{2},$

$\frac{x}{3}-\frac{y}{5},$　　$2a^2+b^2,$　　$a-b+c$

2. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

（1）$(a+b)^2+(a-b)^2$　（2）$(a+b)^2-(a-b)^2$

（3）$3(2x-1)^2+2(3x+4)^2$

3. 次ノ各數ノ平方ヲ求メヨ。

102,　　99,　　9.98

46. 二數ノ和ト差トノ積

公式 II.　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

例 1. $(ax+by)(ax-by)=(ax)^2-(by)^2=a^2x^2-b^2y^2.$

例 2. $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

$$=\{(a+c)+(b+d)\}\{(a+c)-(b+d)\}$$
$$=(a+c)^2-(b+d)^2$$
$$=a^2+2ac+c^2-b^2-2bd-d^2.$$

例 3. $72\times 68=(70+2)(70-2)$

$$=70^2-2^2=4900-4=4896.$$

例　　題

次ノ積ヲ求メヨ。

(1) $(3x+1)(3x-1)$　　(2) $2(x-4)(x+4)$

(3) $(x+5)(5-x)$　　(4) $(-a+b)(-a-b)$

(5) $\left(\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}\right)\left(\frac{a^2}{9}-\frac{b^2}{4}\right)$　　(6) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

(7) $(x^2-2x+3)(x^2+2x-3)$

(8) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(9) $(m-n-p+q)(p-q+m-n)$

(10) 81×79

47. 二項式ノ積

公式 III. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

例 1. $(x+2)(x-3)=x^2+(2-3)x+2(-3)$

$$=x^2-x-6.$$

例 2. $(2x+5y)(3y-2x)=-(2x+5y)(2x-3y)$

$$=-\{(2x)^2+(5y-3y)2x+5y(-3y)\}$$
$$=-4x^2-4xy+15y^2.$$

例　　題

次ノ積ヲ求メヨ。

(1) $(x+5)(x+7)$　　(2) $(x+9)(x-1)$

(3) $(m-2)(m+7)$　　(4) $(a-13b)(a-7b)$

(5) $(a-b)(b-c)$　　(6) $(1-3x)(4+3x)$

(7) $(a+b+3c)(a+b-5c)$

(8) $(a+b+c)(a-b-2c)$

48. 二項式ノ立方

公式 IV. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

注意　第45節ノ公式I及ビ本節ノ公式IVノ如キ二式ヲマトメテ次ノ如ク一ツノ式ニ書クコトガアル。

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

コノ記號±ヲ**複號**トイヒ,上ノ公式ニ於テハ兩邊共ニ+,又ハ共ニ－ヲ採用スベキモノトスル。

例題

1. 次ノ各式ノ立方ヲ求メヨ。

$1+x,\qquad 2x-3y,\qquad ax+by$

2. $998\ (=1000-2)$ ノ立方ヲ求メヨ。

第二章 因數分解

49. 簡單ナル因數分解

一ツノ整式ヲソノ因數ノ積ノ形ニ直スコトヲ稱シテソノ式ヲ**因數ニ分解スル**トイフ。

例ヘバ $ab+ac$ ヲ因數ニ分解スレバ $a(b+c)$ トナル。

次ニ因數分解ノ例ヲ示ス。

1. 各項ニ共通ナル因數アルトキ,コレヲ括リ出スコト。

例 1. $4ax-6a^2=2a(2x-3a).$

斯クノ如クスルコトヲ稱シテ $2a$ ヲ**括リ出ス**又ハ單ニ**括ル**トイフ。

例 2. $ax-by+ay-bx=ax+ay-bx-by$

$$=a(x+y)-b(x+y)$$
$$=(x+y)(a-b).$$

2. 前章ノ公式 I ヲ用キルコト。

例 1. $x^2+6x+9=x^2+2x\times3+3^2$

$$=(x+3)^2.$$

例 2. $a^2-10a+25=a^2-2a\times5+5^2$

$$=(a-5)^2.$$

3. 公式 II ヲ用キルコト。

例 1. $1-x^2=1^2-x^2=(1-x)(1+x).$

例 2. $(a+b)^2-(a-c)^2$

$$=\{(a+b)-(a-c)\}\{(a+b)+(a-c)\}$$
$$=(b+c)(2a+b-c).$$

例 3. $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$$=(x-y)(x+y)(x^2+y^2).$$

注意 コノ例ノ如ク,或ル式ヲ一度因數ニ分解シタトキ,ソノ因數ガ更ニマタ因數ニ分解サレルコトガアル。一般ニ因數ニ分解スルトイヘバ出來ルダケ分解スルコトノ意味デアル。

例　題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

（1）$ma+mb$　　（2）$3x-3y-3z$

（3）$-3xy+y^2$　　（4）$1+x+x^2+x^3$

（5）$2ax+3bx+2ay+3by$

（6）$9a^2+30a+25$　　（7）$a^2-3ab+\frac{9}{4}b^2$

（8）a^4-12a^2+36　　（9）$3a(3a-10b)+25b^2$

(10) $(x-y)^2-2z(x-y)+z^2$

(11) $(x+y)^2-2xz-2yz+z^2$

(12) $4x^2-9$　　(13) $3axy^2-27ax$

(14) $\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{3}b^2$　　(15) $1-x^4$

(16) $18a^4-50a^2$　　(17) $x^2y^2-x^2-y^2+1$

(18) $n^2-(2m-y)^2$　　(19) $x^2-y^2-z^2+2yz$

(20) $x^2(y-z)+y^2(z-x)$

50. 二次式ノ因數分解

前章ノ公式 III ニヨリ

$$\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$$

デアルカラ,今 x ニ關スル二次式

$$x^2+px+q$$

ヲ因數ニ分解スルニハ

$$a+b=p,\qquad ab=q$$

ナル如キ二數 a, b ヲ視察ニヨッテ見出シ

$$x^2+px+q=(x+a)(x+b)$$

トスレバヨイ。但シ任意ノ二次式ハ必ズシモ常ニ斯クノ如ク因數ニ分解シ得ルトハ限ラナイカラ,上記ノ如キ a, b ハ存在シナイコトモアル。

例 1.　x^2+5x+6 ヲ因數ニ分解セヨ。

解　$$a+b=5,\qquad ab=6$$

ナル a, b ヲ求メレバ 2 ト 3 デアル。

故ニ　$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

例 2.　$$x^2-x-6=(x+2)(x-3).$$

何トナレバ

$$2+(-3)=-1,\qquad 2(-3)=-6.$$

例 3.　$$x^2-4xy-12y^2=(x+2y)(x-6y).$$

何トナレバ

$$2y+(-6y)=-4y.\qquad 2y(-6y)=-12y^2.$$

注意　x ニ關スル二次式デ x^2 ノ係數ガ1デナイモノヲ因數ニ分解スルコトハ一般ニ困難デアルガ,係數ガアマリニ大キクナイ整數ノ場合ニハ

$$\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd}$$

ナル公式ト比較シテ因數ニ分解シ得ルコトガアル。

例 4. $2x^2+7x+3$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解 コノ式ヲ上ノ公式ノ右邊ト比較スレバ

$$ac=2,\quad bd=3,\quad ad+bc=7$$

トナル。今コノ中ノ最初ノ二式ニヨリ,試ミニ

$$a=1,\quad c=2,\quad b=1,\quad d=3$$

トスレバ, $ad+bc=5$ トナツテ上ノ第三式ト一致シナイ。依ツテ次ニ

$$a=1,\quad c=2,\quad b=3,\quad d=1$$

トスレバ,丁度 $ad+bc=7$ トナル。故ニ

$$2x^2+7x+3=(x+3)(2x+1).$$

例　題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) $x^2+9x+20$　　(2) $x^2-25x-116$

(3) $x^2-2x-35$　　(4) $a^2-8ab+12b^2$

(5) $x^2-14xy+40y^2$　　(6) $a^2b^2+9ab-22$

(7) $12m^2-(m+1)$　　(8) $(a-b)x-(x^2-ab)$

(9) $(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20$

(10) $x^2(x+4)^2-2x(x+4)-15$

51. 立方ノ和又ハ差

次ノ公式ハ右邊ノ掛算ヲ實行スレバ容易ニ證明セラレルモノデ因數分解ニ屢用キラレル。

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

例 1. $x^3+8y^3=x^3+(2y)^3$

$$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2).$$

例 2. $a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

例　題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) $1+x^3$　　(2) $27a^3-b^3$

(3) $-x^3-64$　　(4) $ax^3+x-a-1$

(5) $(x-y)^3-x^3+y^3$　　(6) $(a+b)^3+c^3$

52. 特別ナル工夫ニヨル因數分解

例 1. $x^4+x^2y^2+y^4$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解 $\boldsymbol{x^4+x^2y^2+y^4}=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=\boldsymbol{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}.$$

例 **2.**　$a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解　先ヅ與ヘラレタ式ニ $3a^2b+3ab^2$ ヲ加ヘ,後コレヲ減ズレバ

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}\\
&=a^3+\boldsymbol{3a^2b}+\boldsymbol{3ab^2}+b^3+c^3-\boldsymbol{3a^2b}-\boldsymbol{3ab^2}-3abc\\
&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)\\
&=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}\\
&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)\\
&=\boldsymbol{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}.
\end{aligned}$$

注意　上ノ例1及ビ例2ノ結果ハ何レモ公式トシテ用キラレル。

例 **3.**　$x^3-6x^2+11x-6$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解　與ヘラレタ式ニ於テ $x=1$ ト置ケバソノ數値ハ0トナル,依ツテ與ヘラレタ式ハ $x-1$ デ割リ切レナケレバナラヌ。何トナレバ,與ヘラレタ式ヲ $x-1$ デ割ツタトキノ整式ナル商ヲQ(x ニツイテノ二次式)トシ,モシ殘リガアレバ,ソレヲR(x ヲ含マナイ唯ノ數)トスレバ

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)\mathrm{Q}+\mathrm{R}$$

デアル。故ニ $x=1$ ト置ケバ與ヘラレタ式ノ數値ハRニ等シクナル,依ツテRハ0ナルコトヲ知ル。故ニ與ヘラレタ式ハ $x-1$ ナル因數ヲ有スル。依ツテ與ヘラレタ式ヲ $x-1$ デ割ツテ他ノ因數ヲ求メ,更ニコレヲ因數ニ分解スレバ次ノ結果ヲ得ル。

$$\begin{aligned}
x^2-6x^2+11x-6&=(x-1)(x^2-5x+6)\\
&=(x-1)(x-2)(x-3).
\end{aligned}$$

注意　上ノ理論ニヨツテ次ノコトヲ知ル。

x ヲ含ム多項式ニ於テ $x=a$ ト置イタトキソノ式ノ値ガ0トナルナラバ,ソノ式ハ $x-a$ デ割リ切レル。

一般ニ $x=a$ ト置イタトキノソノ式ノ値ヲAトスレバ,コノAハ卽チソノ式ヲ $x-a$ デ割ツタトキノ剩餘デアル。(コレヲ**剩餘定理**トイフ。)

例　題

1.　次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1)　x^3-x^2-5x+6　　(2)　$x^3+y^3+3xy-1$

(3)　$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(4)　$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

(5)　x^3-7x+6　　(6)　$2x^3-7x^2+7x-2$

2.　$3x^5+x^3-3x-1$ ハ $x-1$ ナル因數ヲ有スルカ。

3. $(a-b)^3+c^3$ ハ $a-b+c$ デ割リ切レルカ。

4. $x^2-ax+12$ ハ $x-3$ デ割リ切レルトイフ, a ノ値ヲ求メヨ。

5. $4x^2-7x+1-m$ ガ $2x-3$ デ整除サレルタメニハ m ノ數値ヲ如何ニスベキカ。

雜例題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) $3x^2+3x-36$　(2) $6x^2+5x-4$

(3) $3x(2x-7)+5(2x-7)$

(4) $4x^2-\dfrac{4x}{3}+\dfrac{1}{9}$　(5) $(4a+3b)^2-16(a-c)^2$

(6) a^3-729b^3　(7) $125a^6+512b^3$

(8) $a^3+8c^3+1-6ac$　(9) x^8+x^4+1

(10) $x^3+2x^2-9x-18$

第三章　約數及ビ倍數

53. 約數及ビ倍數

整式Aガ整式Bデ割リ切レルトキハ, BヲAノ**約數**トイヒ, AヲBノ**倍數**トイフ。

例ヘバ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ デアルカラ, a^2-b^2 ハ $a+b$ 及ビ $a-b$ ノ倍數デ, $a+b$ 及ビ $a-b$ ハ何レモ a^2-b^2 ノ約數デアル。

二ツ以上ノ整式ガアルトキ, ソノ何レニモ共通ナル約數ヲソレラノ式ノ**公約數**トイヒ, 公約數ノ中デ次數ノ最モ高イモノヲ**最大公約數**トイフ。

例ヘバ a^3bc, a^2b^2d ノ公約數ハ, 文字因數ノミニ注目スレバ

$$a,\quad a^2,\quad b,\quad ab,\quad a^2b$$

ノ五ツデアル, コノ中デ a^2b ハ最モ次數ガ高イカラコレ即チ a^3bc ト a^2b^2d トノ最大公約數デアル。

二ツ以上ノ整式ガアルトキ, ソノ何レノ式ノ倍數ニモナツテヰル整式ヲソレラノ式ノ**公倍數**トイヒ, 公倍數ノ中デ次數ノ最モ低イモノヲ**最小公倍數**トイフ。*

例ヘバ a^2-b^2 ハ $a-b$ 及ビ $a+b$ ノ何レデモ割

* 最大公約數 (Greatest common measure) ヲ G.C.M. ト略記シ, 最小公倍數 (Least common multiple) ヲ L.C.M. ト略記スルコトガアル。

リ切レルカラ a^2-b^2 ハ $a-b$ 及ビ $a+b$ ノ公倍數デアル。同様ニ a^4-b^4, a^6-b^6 等モ亦何レモ $a-b$ 及ビ $a+b$ ノ公倍數デアル。而シテコレラノ公倍數ノ中デ a^2-b^2 ハ最モ次數ガ低イカラ,コレ即チ $a-b$ 及ビ $a+b$ ノ最小公倍數デアル。

與ヘラレタ整式ガ悉ク單項式ナルカ又ハ容易ニ因數分解ヲナシ得ルモノナルトキハ,ソレラノ式ノ最大公約數又ハ最小公倍數ヲ求メルコトハ次ノ例ニ示ス如ク容易デアル。

注意 整式ノ約數及ビ倍數ハ單ニソノ文字因數ノミガ定マルモノデソノ係數ハ不定デアル。ケレドモ便宜上本書ニ於テハ係數ガ悉ク整數ナル若干ノ式ノ最大公約數ヲ求メルトキニハ,ソレラノスベテノ係數ノ絶對値ノ最大公約數ヲ採リコレヲ係數トシテ附ケルコトトスル。又最小公倍數ノ場合モコレニ準ズル。

例 1. $5x^3y^2$, $-15xy^2z$ ノ最大公約數ヲ求メヨ。

解 最高次ノ共通文字因數ハ xy^2 デ,係數ノ最大公約數ハ 5 デアル。故ニ求メル最大公約數ハ $5xy^2$ デアル。

例 2. x^3-1, x^4+x^2+1 ノ最大公約數ヲ求メヨ。

解 コノ二式ヲ夫々因數ニ分解スレバ

$$(x-1)(x^2+x+1), \qquad (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

トナル。コヽニ x^2-x+1 ハ $x-1$ デ割リ切レナイ,故ニ最大公約數ハ x^2+x+1 デアル。

例 3. $7a^2$, $-3ab^2$, $-abc$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

解 文字因數ノ最小公倍數ハ a^2b^2c デ,係數ノ最小公倍數ハ 21 デアル。故ニ求メル答ハ $21a^2b^2c$ デアル。

例題

1. 次ノ各組ノ最大公約數ヲ求メヨ。

(1) $3a^3$, $2a^2b$, $-a^3b^3$

(2) $4ab(a+b)$, $12a^2(a+b)^2(a-b)^2$, $-8ab^3(a-b)$

(3) $(x-1)^2$, x^2-5x+4

(4) $(a-b)^3$, a^2-b^2, b^3-a^3

2. 次ノ各組ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

(1) ax, $-bx^2$, $-cx^3$

(2) $(a-b)(a-c)$, $(b-a)(b-c)$, $(c-a)(c-b)$

(3) x^2-5x+6, x^3-3x-2, $-5x+10$

54. 約數及ビ倍數ノ性質

約數及ビ倍數ニ關シテ次ノ性質ガアル,但シA, B, C等ハ整數又ハ整式ヲ表ハスモノトスル。

1. BガAノ約數ナルトキハ,BハマタAノ倍數ノ約數デアル。

2. CガA及ビBノ公約數ナルトキハ, CハA±Bノ約數デアル。

コノ1及ビ2ノ結果ヲ綜合シテ次ノ3ヲ得ル。

3. CガA及ビBノ公約數ナルトキハ,任意ノ整數又ハ整式a及ビbニ對シ,Cハ常ニaA+bBノ約數デアル。

55. 最大公約數

二ツノ整數又ハ整式ノ最大公約數ヲ求メル一般ナル方法ヲ述ベル。

與ヘラレタ二ツノ整數又ハ整式ヲA,Bトシ,整數ナラバソノ小ナラザル方ヲ,整式ナラバソノ次數ノ低カラザル方ヲAトスル。

先ヅ試ミニAヲBデ割ル。モシ割リ切レヽバB自身ガ卽チAトBトノ最大公約數ナルコト明

カデアル。

モシ割リ切レナイトキハソノ整商ヲQ,餘リヲRトスレバ

$$A=QB+R \qquad (1)$$

卽チ

$$A-QB=R \qquad (2)$$

デアル。故ニ前節ノ3ニヨリ,AトBトノ公約數ハ必ズRノ約數デアル。故ニ結局AトBトノ公約數ハスベテBトRトノ公約數ノ中ニ含マレル。又逆ニBトRトノ公約數ハ,(1)ニヨリ,スベテAノ約數デアル。故ニ結局BトRトノ公約數ハ,スベテAトBトノ公約數ノ中ニ含マレル。依ツテAトBトノ公約數ト,BトRトノ公約數トハ全部同一ノモノデアル。故ニAトBトノ最大公約數ヲ求メル代リニBトRトノ最大公約數ヲ求メレバヨイ。而シテコヽニRハBヲ除數トシタ割算ノ餘リデアルカラ必ズBヨリ小(整數ノ場合)又ハBヨリ低次(整式ノ場合)デアル。

依ツテ次ニハBヲRデ割ツテ見ル。モシ割リ切レヽバRハBトRトノ最大公約數デ,從ツテAトBトノ最大公約數デアル。モシ割リ切レナイ

デ餘リSヲ得レバ,前ト同理ニヨリBトRトノ最大公約數ヲ求メル代リニRトSトノ最大公約數ヲ求メレバヨイコトトナル。

以下次第ニ斯クノ如ク割算ヲ續ケ,常ニソノ餘リヲ以テソノトキノ除數デアルモノヲ割ルコトトスレバ,最後ニ割リ切レタトキノ除數ガ卽チAトBトノ最大公約數デアル。

注意 二ツノ整數ノ最大公約數ガ1ナルトキ,及ビ二ツノ整式ノ最大公約數ガ文字ヲ含マナイ唯ノ數ナルトキハ,コノ二ツノ整數又ハ整式ハ最大公約數ヲモタヌトイフコトガアル。

例 1.　$2x^3-x^2-26x+33$ ト x^2+x-12 トノ最大公約數ヲ求メヨ。

計算

$$\begin{array}{rl}
 & 2x-3 \\ \cline{2-2}
x^2+x-12) & 2x^3-x^2-26x+33 \\
 & 2x^3+2x^2-24x \\ \cline{2-2}
 & -3x^2-2x+33 \\
 & -3x^2-3x+36 \\ \cline{2-2}
 & x-3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & x+4 \\ \cline{2-2}
) & x^2+x-12 \\
 & x^2-3x \\ \cline{2-2}
 & 4x-12 \\
 & 4x-12 \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

答　$x-3$

斯クノ如クニ計算ヲ續ケルトキハ斜ニ紙面ヲ

費シテ不便デアルカラ,下ノ如クニ書クコトガアル。

$$\begin{array}{r|l|l|l}
x & x^2+x-12 & 2x^3-x^2-26x+33 & 2x \\
 & x^2-3x & 2x^3+2x^2-24x & \\ \cline{2-3}
4 & 4x-12 & -3x^2-2x+33 & -3 \\
 & 4x-12 & -3x^2-3x+36 & \\ \cline{2-3}
 & & x-3 &
\end{array}$$

例 2.　次ノ二式ノ最大公約數ヲ求ム。

$$\begin{cases} 3x^2-5x-12 & (1) \\ x^3+3x^2-25x+21 & (2) \end{cases}$$

計算

$$\begin{array}{r|l|l|l}
3x & 3x^2-5x-12 & x^3+3x^2-25x+21 & \\
 & 3x^2-9x & 3x^3+9x^2-75x+63 & x \\ \cline{2-2}
4 & 4x-12 & 3x^3-5x^2-12x & \\ \cline{3-3}
 & 4x-12 & 14x^2-63x+63 & \\ \cline{2-2}
 & & 42x^2-189x+189 & 14 \\
 & & 42x^2-70x-168 & \\ \cline{3-3}
 & & -119)\ -119x+357 & \\ \cline{3-3}
 & & x-3 &
\end{array}$$

答　$x-3$

說明 先ヅ(1)デ(2)ヲ割ラウトスルニ,コノマヽデハ商ニ分數ノ係數ヲ用キネバナラヌ。ソノ不便ヲ避ケルタメニ(整式ノ約數ヲ考ヘルトキニハ文字以外ノ零ナラザル數ヲ式全體ニ乘ジ又ハソレデ除シテモ差支ナイカラ)先ヅ(2)ニ3ヲ乘ジテ

後(1)デ割ルコトトスル。同理ニヨリ,コノ計算ノ第二段ニ於テハ更ニ3ヲ乘ジ,マタ第三段ニ於テハ −119 デ除シタノデアル。

例 3. 7973 ト 2380 トノ最大公約數ヲ求ム。

計算

2	2380	7973	3
	1666	7140	
6	714	833	1
	714	714	
		119	

答 119

注意 整數ノ最大公約數ヲ求メル計算ニ於テハ途中デ決シテ前例2ノ如ク或ル數ヲ以テ乘除シテハナラヌ。

例 題

次ノ各組ノ最大公約數ヲ求メヨ。

(1) $x^2-4x+3,\quad 4x^3-9x^2-15x+18$

(2) $3x^5-5x^3+2,\quad 2x^5-5x^2+3$

(3) $3x^3-4x^2-5x+2,\quad 6x^3-17x^2+11x-2,$

$3x^3-x^2-12x+4$

(4) 2772, 1716, 3564

56. 最小公倍數

二ツノ整數又ハ整式 A, B ノ最大公約數ヲ G トシ, A 及ビ B ヲ G デ割ツタ商ヲ夫々 a 及ビ b トスレバ

$$A=aG,\qquad B=bG$$

デ,コヽニ a ト b トハ公約數ヲ有シナイ。

故ニ A ト B トノ最小公倍數ヲ L トスレバ

$$L=abG=aB=bA$$
$$=\frac{AB}{G}$$

デアル。故ニ

二ツノ整數又ハ整式ノ最小公倍數ヲ求メルニハ,ソノ二數又ハ二式ノ最大公約數ヲ以テソノ一方ノ數又ハ式ヲ割リ,ソノ商ヲ他ノ一方ニ乘ズレバ宜イ。

或ハ,與ヘラレタ二數又ハ二式ノ積ヲソノ最大公約數デ割レバ宜イ。

例 1. $2x^3-x^2-26x+33$ ト x^2+x-12 トノ最小公倍數ヲ求ム。

解 コノ二式ノ最大公約數ハ $x-3$ (前節ノ例 1) デ,

$$(x^2+x-12)\div(x-3)=x+4.$$

故ニ求メル最大公倍數ハ

$$(2x^3-x^2-26x+33)(x+4)=2x^4+7x^3-30x^2-71x+132.$$

例 2. 7973 ト 2380 トノ最小公倍數ヲ求ム。

解 コノ二數ノ最大公約數ハ 119 (前節ノ例 3) デ,

$$2380\div119=20$$

デアル。故ニ求メル最小公倍數ハ

$$7973\times20=159460.$$

例 題

次ノ各組ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

(1) 6877, 11687

(2) $4x^3-4x^2-13x-5$, $12x^2-4x-65$

(3) $2x^4-2x^3+x^2+3x-6$, $4x^4-2x^3+3x-9$

(4) $36x^3-7xy^2-y^3$, $6x^2+5xy+y^2$, $9x^2+6xy+y^2$

雜 題 IV.

1. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) $(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3$

(2) $a^2-3b^2-c^2-2ab+4bc$

(3) $x^2-y^2-3z^2-2xz-4yz$

(4) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$

(5) $x^4-13x^2y^2+36y^4$

2. $3x^3-mx^2+nx-6$ ガ $x-1$ 及ビ $x-2$ デ整除サレルヤウニ m, n ノ値ヲ定メヨ。

3. $3x^3+2mx^2+nx-18$ ガ $(x+3)(x-2)$ デ整除セラレルヤウニ m 及ビ n ノ値ヲ定メヨ。

4. x ニ關スル四次以上ノ整式ガアル,今 $x-1$ デ除スレバ剩餘 -1 ヲ得,又 $x-2$ デ除スルモ $x-3$ デ除スルモ剩餘 -7 ヲ得, $x-4$ デ除スレバ剩餘 5 ヲ得ル,コノ式ヲ

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

デ除シタトキノ剩餘ヲ求メヨ。

5. 次ノ二式ノ最大公約數ヲ求メ,且各式ヲ因數ニ分解セヨ。

$$x^4-5x^3-6x^2+35x-7,\quad 3x^3-23x^2+43x-8$$

6. 次ノ二式ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

$$1-x^2-x^4+x^5,\quad 1+2x+x^2-x^4-x^5$$

7. 三ツノ整數 45560, 53516, 75746 ノ何レヲ割ルモ同一ノ剩餘ヲ得ル除數ノ中デ最大ナル

モノヲ求メヨ。

8. $2x^2+ax+3$ 及ビ $3x^2+4x+b$ ノ最大公約數ガ $x+c$ デ最小公倍數ガ $6x^3+17x^2+14x+3$ ナルトキ a, b, c ノ値ヲ求メヨ。

9. x^3+ax^2+bx+1 ト x^3+bx^2+ax+1 トノ間ニ公約數アラバ a, b 間ニ如何ナル關係アルカ。

10. 次式ハ三ツノ一次式ノ積ニ等シイコトヲ示セ。

$$3a(2a^2+b^2)+9a^2b+b(a+b)(2a+b)$$

第五篇

分數式

第一章 分數式ノ性質及ビ四則

57. 分數式

整式Aヲ整式Bデ割ツタ商ヲ $\frac{A}{B}$ ノ如キ形ニ書イタトキハコレヲ**分數式**トイヒ, Aヲソノ**分子**, Bヲ**分母**トイフ。

分數式 $\frac{A}{B}$ ハAヲBデ割ツタ商ヲ示スモノデアルカラ,コレニBヲ掛ケレバAヲ得ルノデアル。

故ニ今 $\frac{A}{B}=Q$ (1)

ト置ケバ $QB=A$ (2)

ナル關係ガアル。

(2)ノ兩邊ニ任意ノ整式Mヲ乘ズレバ

$$QBM=AM \quad (3)$$

トナル,從ツテ $Q=\frac{AM}{BM}$ (4)

ヲ得ル。故ニコレヲ(1)ト比較スレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{AM}{BM}$$

ナル關係ヲ得ル。但シコヽニMナル式ノ數値ハ零ニ等シクナイコトヲ假定セネバナラヌ。然ラザレバ(3)ヨリ(4)ヲ得ルコトガ出來ヌ。故ニ

分數式ノ分母及ビ分子ニ零ナラザル任意ノ同ジ整式ヲ乘ズルモ,分數式ノ値ハ變ラヌ。

分數式ノ分母及ビ分子ガ共通ノ因數ヲ有スルトキハ,コレデ分母及ビ分子ヲ除スルモ,分數式ノ値ハ變ラヌ。

58. 約　分

分數式ノ分母及ビ分子ガ共通ノ因數ヲ有スルトキハ,前節ニ述ベタ如ク分母及ビ分子カラソノ因數ヲ除キ去ツテモ元ノ分數式ノ値ハ變ラヌ。斯クノ如クスルコトヲ稱シテソノ**分數式ヲ約ス**或ハ單ニ**約分スル**トイフ。

例 1. $\frac{12a^2x^2y}{9abxy^2}=\frac{4ax}{3by}.$

例 2. $\frac{(a-b)(b-c)(a-c)(m-n)^2}{(n-m)(c-a)(c-b)(b-a)}$

$$=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(m-n)^2}{-(a-b)(b-c)(c-a)(m-n)}=m-n.$$

例 3. $\frac{x^2+9x+14}{x^2+12x+35}=\frac{(x+2)(x+7)}{(x+5)(x+7)}=\frac{x+2}{x+5}.$

分數式ノ分母及ビ分子ガ共通ノ因數ヲ有シナイトキハコレヲ**既約分數**トイフ。

任意ノ分數式ヲ既約分數トナスニハ,ソノ分母及ビ分子ヲ兩者ノ最大公約數デ割レバ宜イ。

例 4. $\frac{6x^3+x^2-3x-1}{6x^3+7x^2-5x-3}$ ヲ約セ。

分母ト分子トノ最大公約數ヲ求メレバ

$$3x^2-x-1$$

ヲ得ル。依ツテ

$$\frac{6x^3+x^2-3x-1}{6x^3+7x^2-5x-3}=\frac{(3x^2-x-1)(2x+1)}{(3x^2-x-1)(2x+3)}$$

$$=\frac{2x+1}{2x+3}.$$

例　題

次ノ各分數式ヲ既約分數ニ直セ。

(1) $\frac{8ax}{12bx}$　　(2) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$

(3) $\frac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}$　　(4) $\frac{250+2x^3}{x^2-25}$

(5) $\dfrac{1-x^3}{x^2+6x-7}$　　　(6) $\dfrac{1-x^2+6x^3}{2-x+9x^3}$

59. 通 分

二ツ以上ノ分數式ガアルトキ,ソレラノ數値ヲ變ゼズニ皆同一ノ分母ヲ有スルヤウニ直スコトガ出來ル。ソノ共通ナル分母トスル式ハ元ノ各分母ノ公倍數デ,殊ニ最モ簡單ナルモノハソノ最小公倍數デアル。斯クノ如ク

二ツ以上ノ分數式ガアルトキ,ソレラノ値ヲ變ゼズニコレヲ同一ノ分母ヲ有スルモノトスルコトヲ通分スルトイヒ,ソノ共通ナル分母ヲ公分母トイフ。

特ニ元ノ各分母ノ最小公倍數ヲ分母トスルトキハ,コレヲ**最小公分母**トイフ。

例 1. $\dfrac{5}{4ax^2}$, $\dfrac{7}{3bxy}$ ヲ通分セヨ。

解 $4ax^2$ ト $3bxy$ トノ最小公倍數 $12abx^2y$ ヲ公分母トスルコトトシ,第一ノ分數式ノ分母及ビ分子ニ乘ズベキ式ヲ求メレバ

$$12abx^2y \div 4ax^2 = 3by.$$

又第二ノ分數式ニツイテハ

$$12abx^2y \div 3bxy = 4ax.$$

故ニ

$$\frac{5}{4ax^2} = \frac{5 \times 3by}{4ax^2 \times 3by} = \frac{15by}{12abx^2y},$$

$$\frac{7}{3bxy} = \frac{7 \times 4ax}{3bxy \times 4ax} = \frac{28ax}{12abx^2y}.$$

例 2. $\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$, $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$ ヲ最小公分母ニ通分セヨ。

解 各分母ヲ因數ニ分解スレバ

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3),$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

故ニソノ最小公倍數ハ

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

デアル。依ツテ次ノ如クニ通分スル。

$$\frac{x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-2)} = \frac{x^2-4}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-3)(x-1)} = \frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

例　題

次ノ各組ノ分數式ヲ通分セヨ。

(1) $\dfrac{a}{x^2},\ \dfrac{b}{x^3}$　　(2) $\dfrac{x}{8a},\ \dfrac{y}{4a}$

(3) $\dfrac{x}{yz},\ \dfrac{y}{zx},\ \dfrac{z}{xy}$　　(4) $\dfrac{x}{a-b},\ \dfrac{y}{b-a}$

(5) $\dfrac{2a}{x+y},\ \dfrac{3a}{x^2-y^2}$

(6) $\dfrac{2}{x^2-5x+4},\ \dfrac{3}{x^2-6x+8}$

(7) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2},\ \dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2},\ \dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

60. 加法及ビ減法

分數式ノ和又ハ差ヲ求メルニハ,先ヅ各分數式ヲ通分シ,然ル後ソノ公分母ヲ分母トシ,分子ノ和又ハ差ヲ分子トスル分數式ヲ作レバ宜イ。

卽チ
$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}=\frac{A+B}{D},$$
$$\frac{A}{D}-\frac{B}{D}=\frac{A-B}{D}.$$

何トナレバ,コレラノ式ノ兩邊ニDヲ乘ズレバ何レモ兩邊相等シクナルカラデアル。

例
$$\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{2a(a-b)}{a^2-b^2}+\frac{2b(a+b)}{a^2-b^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{2a(a-b)+2b(a+b)-(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{2a^2-2ab+2ab+2b^2-a^2-b^2}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

例　題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{3a}{b}+\dfrac{2a}{b}$　　(2) $\dfrac{5x}{y}-\dfrac{2x}{y}$

(3) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x-4}$　　(4) $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

(5) $\dfrac{5x-1}{4x-1}-\dfrac{3x-1}{6x-1}-\dfrac{3}{4}$

(6) $\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$

(7) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}$

(8) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{2}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

61. 乘 法

今 $\dfrac{A}{B}=p,\quad \dfrac{C}{D}=q$

トスレバ $pB=A,\quad qD=C$

デアル。故ニ $pB\times qD=AC,$

卽チ $pq\times BD=AC.$

從ツテ $pq=\dfrac{AC}{BD}$

卽チ $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

ナル結果ヲ得ル。故ニ

分數式ノ積ヲ求メルニハ元ノ各分數式ノ分母ノ積ヲ分母トシ,分子ノ積ヲ分子トスル分數式ヲ作レバ宜イ。

例 1. $\dfrac{3ax}{b^3}\times\dfrac{2a^3}{9bxy}=\dfrac{6a^4x}{9b^4xy}=\dfrac{2a^4}{3b^4y}.$

但シ實際ニハ分母及ビ分子ノ掛算ヲ行フ前ニ約分スル方ガ便利デアル。

例 2. $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+6}$

$$=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)}\times\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-6)}=\frac{(x-4)(x-3)}{(x-1)(x-6)}$$

$$=\frac{x^2-7x+12}{x^2-7x+6}.$$

例 題

次ノ各積ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{b}{3a}\times\dfrac{c}{2b}$　　(2) $\dfrac{-2a}{3x}\times\dfrac{b}{5y}$

(3) $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\dfrac{a-b}{a^2+ab}$

(4) $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2\times\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$

(5) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right)$

(6) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}\times\dfrac{x^3-3x+2}{4x^2-1}$

62. 除 法

或ル式ヲ分數式デ除シタ商ヲ求メルニハ,ソノ分數式ノ分母ト分子トヲ交換シタ分數式ヲ作リ,コレヲ被除式ニ乘ズレバ宜イ。

卽チ或ル式ヲ $\dfrac{A}{B}$(モシソノ式ガ整式ナラバ $B=1$ ト考ヘル)トシ,コレヲ分數式 $\dfrac{C}{D}$ デ割ルニハ

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

トスレバ宜イ。何トナレバコノ結果ニ $\dfrac{C}{D}$ ヲ乘ズレバ

$$\frac{AD}{BC}\times\frac{C}{D}=\frac{A}{B}$$

トナツテ,丁度モトノ式ヲ得ルカラデアル。

例　$\dfrac{x-y}{x+y}\div\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}=\dfrac{x-y}{x+y}\times\dfrac{x^2+xy}{x^2-y^2}$

$$=\frac{x-y}{x+y}\times\frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x}{x+y}.$$

一般ニ或ル式ヲ以テ 1 ヲ除シタ商ヲソノ式ノ**逆數**トイフ。

從ツテ或ル分數式ノ逆數トハソノ分母ト分子トヲ交換シタ分數式ノコトデアル。

逆數トイフ語ヲ用キレバ分數式ノ割算ノ法則ヲ次ノ如クニ述ベルコトガ出來ル。

或ル式ヲ分數式デ除スルニハソノ分數式ノ逆數ヲ乘ズレバヨイ。

例　題

次ノ各商ヲ簡單ニセヨ。

(1)　$\dfrac{1}{3xyz}\div\dfrac{abc}{2xyz}$　　(2)　$\dfrac{a^3-1}{a^3}\div\dfrac{a-1}{a}$

(3)　$\dfrac{a^2-b^2}{-xz+yz}\div\dfrac{b-a}{z}$　　(4)　$\dfrac{b^3-a^3}{zx-zy}\div\dfrac{a-b}{y^2-x^2}$

(5)　$\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\div\left\{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right\}$

(6)　$\dfrac{x^4-16}{x^4+4x^2+16}\times\dfrac{x^3-8}{x^2+4}\div\dfrac{(x-2)^2(x+2)}{x^2-2x+4}$

(7)　$\dfrac{a+\dfrac{b-a}{1+ab}}{1-a\dfrac{b-a}{1+ab}}$

注意　分數式 $\dfrac{A}{B}$ ニ於テ A 及ビ B ノ一方又ハ兩方ガ分數式ナルカ,又ハ分數式ヲ含ム更ニ複雜ナル式ナルトキハ,コノ $\dfrac{A}{B}$ ヲ**繁分數式**トイフ。

(8)　$\dfrac{a^2}{a+\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}$

63. 分數式ノ數値

分數式 $\dfrac{A}{B}$ 中ニ含マレテヰル文字ニ或ル値ヲ與ヘテコノ式ノ數値ヲ求メルトキハ,種々ノ場合ヲ生ズル。次ニコレヲ說明スル。

1.　$A\neq0$,　$B\neq0$　ナルトキ.

コノ場合ニハ實際 A ノ數値ヲ B ノ數値デ割レバソノ分數式ノ數値ヲ得ル。

例ヘバ $x=4$ ナルトキハ

$$\frac{x+8}{x^2-3x+2}=\frac{4+8}{16-12+2}=\frac{12}{6}=2.$$

2. A=0, B≠0 ナルトキ.

コノ場合ニハ0ヲ0ナラザル數デ割ルコトトナルカラ,分數式ノ數値ハ0デアル。

例ヘバ $x=2$ ナルトキハ,

$$\frac{3x-6}{x^2+x+1}=\frac{6-6}{4+2+1}=\frac{0}{7}=0.$$

3. A≠0, B=0 ナルトキ.

コノ場合ニハ0ナラザル數ヲ0デ割ルコトトナルカラ,商ヲ得ルコトハ出來ヌ(第13節注意參照)。從ッテ分數式ノ數値ハナイ。

例ヘバ $x=2$ ナルトキハ,

$$\frac{5x-2}{x^2-3x+2}=\frac{10-2}{4-6+2}=\frac{8}{0}$$

トナッテコノ分數式ノ値ヲ求メルコトガ出來ヌ

4. A=0, B=0 ナルトキ.

コノ場合ニハ0ヲ0デ割ルコトトナルカラ,商ハ不定デアル(第13節注意參照)。從ッテ分數式ノ數値モ亦不定デアル。

例ヘバ $x=2$ ナルトキハ,

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{4-6+2}{4-10+6}=\frac{0}{0}$$

トナッテコノ値ハ不定デアル。

例 題

1. $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ トシテ,コレニ對スル分數式 $\dfrac{x^2+3x-9}{x^2+5x-14}$ ノ數値ヲ求メヨ。

2. $x=2$ ナルトキ, $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$ ノ數値如何。又コレヲ既約分數ニ直シタモノノ數値如何。

3. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$ ナルトキ次式ノ數値ヲ求メヨ。

$$\frac{y^2}{x^2-y^2}-\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y-x}$$

第 二 章

分數方程式及ビ文字方程式

64. 分數方程式

分數式ヲ含ム方程式デ,ソノ分數式ノ分母ニ未知數ヲ含ムモノヲ**分數方程式**トイフ。

例ヘバ　$\frac{2}{x}=5,\qquad \frac{1-x}{2x+1}+3=\frac{3x-1}{x^2}$

ノ如キハ分數方程式デアル。

注意　分數方程式ニ對シテ,分數式ヲ含マナイカ又ハ含ンデキテモソノ分母ニ未知數ヲ含マナイ方程式ヲ**整方程式**トイフコトガアル。

例ヘバ　$\frac{x}{100}+3x=\frac{1}{3}+5x^2$

ノ如キハ整方程式デアル。

例 1.　$\frac{3x-4}{x-1}+\frac{4x+5}{2x+1}=5$　ヲ解ケ.

解　先ヅ分母ノ最小公倍數 $(x-1)(2x+1)$ ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$(3x-4)(2x+1)+(4x+5)(x-1)=5(x-1)(2x+1)$$

ナル方程式ヲ得ル。次ニ兩邊ノ括弧ヲトケバ

$$6x^2-5x-4+4x^2+x-5=10x^2-5x-5.$$

コレカラ　$x-4=0,$

卽チ　$x=4$

ヲ得ル。而シテコノ値ハ元ノ方程式中ノ分母ヲ零トシナイ。故ニ求メル根ハ 4 デアル。

注意　分數方程式ニ於テハ常ニ本例ノ如ク,分母ヲ拂ツテ得タ方程式ノ根ガ,原方程式ノ含ム分母ヲ零トスルカ否カヲ調ベルコトガ必要デアル。

例 2.　$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{(x-3)(x-1)}$

ヲ解ケ。

解　分母ノ最小公倍數

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$(x-3)+2(x-1)=2(x-2).$$

コレカラ　$x=1$

ヲ得ル。ケレドモコノ値ハ元ノ方程式中ノ分母ヲ零トスルカラ,根トシテ採用スルコトガ出來ヌ。依ツテコノ方程式ニハ根ガナイ。

例 3.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases}\frac{x-3}{x+3}+\frac{y+3}{y-3}=2\\ \frac{x-3}{2x+3}+\frac{y-3}{2y+3}=1\end{cases}$$

解　各式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$\begin{cases}(x-3)(y-3)+(y+3)(x+3)=2(x+3)(y-3)\\ (x-3)(2y+3)+(y-3)(2x+3)=(2x+3)(2y+3)\end{cases}$$

コレヲ簡約スレバ

$$\begin{cases}x-y+6=0\\ x+y+3=0\end{cases}$$

トナル。コレヲ解イテ

$$x=-\frac{9}{2},\qquad y=\frac{3}{2}$$

ヲ得ル,コノ値ハ何レモ元ノ方程式ノ分母ヲ零トシナイ,故ニ求メル根デアル。

例　題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $\dfrac{x+12}{x+4}=\dfrac{x+3}{x+1}$　(2) $\dfrac{x+5}{x-10}+\dfrac{x+10}{x-5}=2$

(3) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{8}{x}$

(4) $\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+5}=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+5}{x+7}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{2x+5}{3y-7}=\dfrac{3}{2}\\[2ex] \dfrac{x-5}{x+10}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

65. 文字方程式

文字デ表ハサレタ既知數ヲ含ム方程式ヲ**文字方程式**トイフ。

例 1.　$ax+b^2=a^2-bx$　ヲ解ケ。

解　未知項ヲ左邊ニ,既知項ヲ右邊ニ集メレバ,

$$ax+bx=a^2-b^2.$$

兩邊ヲ夫々因數ニ分解スレバ,

$$(a+b)x=(a+b)(a-b).$$

故ニモシ $a+b\neq 0$ ナラバ,

$$x=a-b.$$

モシ又 $a+b=0$ ナラバ,

$$0\times x=0$$

トナリ,x ノ値ノ如何ニカヽハラズ兩邊ノ値ガ 0 トナツテ相等シイ。從ツテ x ノ値ヲ定メルコトガ出來ヌ,斯クノ如キトキハ方程式ハ**不定**デアルトイフ。

例 2.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases}a(x-a)=b(y+b) & (1)\\ a(x+a)=b(b-y) & (2)\end{cases}$$

解　原方程式ノ各邊ノ括弧ヲ拂ヒ,未知項ヲ左邊ニ,既知項ヲ右邊ニ集メレバ

$$\begin{cases}ax-by=a^2+b^2 & (3)\\ ax+by=-a^2+b^2 & (4)\end{cases}$$

次ニ(3)+(4)及ビ(4)−(3)ヲ作レバ,

$$\begin{cases} 2ax=2b^2 & (5) \\ 2by=-2a^2 & (6) \end{cases}$$

故ニ $a\neq 0$, $b\neq 0$ ナラバ,

$$x=\frac{b^2}{a}, \qquad y=-\frac{a^2}{b}.$$

又 $a=0$, $b=0$ ナラバ,コノ方程式ハ不定デアル。

又 $a\neq 0$, $b=0$ ナラバ(5)カラ

$$x=\frac{b^2}{a}=0$$

ヲ得ルガ,(6)ハ

$$0\times y=-2a^2 \qquad (7)$$

トナッテ,斯クノ如キ y ノ値ハ存在シナイ

同様ニ $a=0$, $b\neq 0$ トスレバ,(6)カラ

$$y=0$$

ヲ得ルガ,(5)ハ

$$0\times x=2b^2 \qquad (8)$$

トナッテ,斯クノ如キ x ノ値ハ存在シナイ。

上ノ(7)又ハ(8)ノ如キ場合ニハコノ方程式ハ不能デアルトイフ。

例　題

次ノ各文字方程式ヲ解ケ。

(1) $ax+b^2=bx+a^2$

(2) $a^2(x-a)+b^2(x-b)=2abx$

(3) $\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}+\dfrac{x-a-b}{c}=3$

(4) $\begin{cases} x+ay+a^2=0 \\ x+by+b^2=0 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

66. 應用問題

例 **1.** 分數ガアル,分子ニ 2 ヲ加ヘ分母カラ 1 ヲ減ズレバ $\dfrac{5}{6}$ ニ等シクナリ,分子カラ 1 ヲ減ジ分母ニ 2 ヲ加ヘレバ $\dfrac{9}{13}$ ニ等シクナルトイフ,ソノ分數ヲ求メヨ。

解　分子ヲ x, 分母ヲ y トスレバ

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{y-1}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{9}{13} \end{cases}$$

コレヲ解イテ　$x=28$, $y=37$.　　答 $\dfrac{28}{37}$

例 2. 甲ハ a 圓,乙ハ b 圓ヲモツテヰル,今甲ノ所持金ヲ乙ノ所持金ノ n 倍ナラシメルニハ,兩人ノ間ニ如何ニ金ヲ受渡スレバヨイカ。

解 今乙カラ甲ニ x 圓ヲ與ヘテ題意ノ如クナルトスレバ,ソノトキ甲ノ所持金ハ $(a+x)$ 圓,乙ノ所持金ハ $(b-x)$ 圓トナルカラ次ノ方程式ヲ得ル.

$$a+x=n(b-x).$$

コレヲ解ケバ

$$x=\frac{nb-a}{n+1}.$$

故ニ,乙カラ甲ニ $\frac{nb-a}{n+1}$ 圓ヲ與ヘレバヨイ。

コヽニ $\frac{nb-a}{n+1}$ ガ正ナラバ實際乙カラ甲ニ金ヲ與へ,モシ負ナラバ實ハ甲カラ乙ニ與ヘルコトトナル。

試ミニ學生自ラ次ノ數値ニヨツテ上ノ答ヲタメシ見ヨ。

(1) $a=10$, $b=8$, $n=2$

(2) $a=10$, $b=5$, $n=2$

(3) $a=10$, $b=2$, $n=2$

(4) $a=20$, $b=25$, $n=\frac{1}{2}$

例 題

1. 雞卵ノ價ガ1箇ニツキ 0.5 錢ヅツ騰貴シタノデ,コレマデ1圓デ買ヒ得タト同ジ箇數ヲ買フニハ 1.20 圓ヲ要スル,騰貴前ノ1箇ノ價ヲ求メヨ。

2. 今年甲ハ a 歲,乙ハ b 歲デアル,甲ノ年齡ガ乙ノ年齡ノ n 倍トナルノハ何時カ。
又次ノ諸數ニツイテソノ結果ヲ驗セ。
(1) $a=48$, $b=16$, $n=2$
(2) $a=25$, $b=4$, $n=3$
(3) $a=20$, $b=8$, $n=3$
(4) 一般ニ $n=1$ ナルトキハ如何。

3. 鶴龜合セテ a 頭ヰテ,ソノ足數ハ b 本デアルトイフ,鶴龜各幾頭ヰルカ。又コノ問題ガ成立スルタメニハ a ト b トハ如何ナル關係ヲ有セネバナラヌカ。

4. n 時ノ後時計ノ兩針ガハジメテ相重ナル時刻ヲ求メヨ。但シ n ハ12ヨリ大ナラザル正ノ整數デアル。

雜 題 V.

1. 次ノ各式ヲ計算セヨ。

（1） $\dfrac{1+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1+b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1+c}{(c-a)(c-b)}$

（2） $\dfrac{x^2-x+1}{x^3-1}+\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+x-1}$

（3） $\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\dfrac{2}{x^2-7x+12}-\dfrac{3}{x^2-5x+4}$

（4） $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\div\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1}\times\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$

（5） $\left(\dfrac{a^3}{b}-\dfrac{b^3}{a}\right)\left(\dfrac{3a+b}{a+b}-\dfrac{3a-b}{a-b}\right)$

（6） $\dfrac{\dfrac{x^2+a^2}{x}-a}{a^3+x^3}+\dfrac{\dfrac{1}{x}}{x+a}$

（7） $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}-\dfrac{1}{\dfrac{x}{x+1}-1}$

2. $x+\dfrac{1}{x}=1$ ナルトキ $x^6+\dfrac{1}{x^6}$ ノ値ヲ求メヨ。

3. $x=1.3$ ナルトキ次式ノ數値ヲ求メヨ。

$$\frac{x+\dfrac{1}{x^2}}{x-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}$$

4. 次ノ各分數方程式ヲ解ケ。

（1） $\dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2x-1}{3x+2}=\dfrac{5x-1}{10}-1\dfrac{2}{5}$

（2） $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x-7}{x-8}$

（3） $\dfrac{x+3}{y-2}=\dfrac{3}{4},\quad \dfrac{y+4}{2x+5}=\dfrac{14}{11}$

（4） $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{y}{y+2}=2,\quad \dfrac{x}{x-3}=\dfrac{y-8}{y-2}$

5. 次ノ各文字方程式ヲ解ケ。

（1） $(ax+b)(bx-a)=c(bx^2-a)$

（2） $\dfrac{x+a}{a}+\dfrac{x}{x-a}=\dfrac{x-a}{a}$

（3） $\dfrac{2x-b}{a}=\dfrac{2y+a}{b}=\dfrac{3x+y}{a+2b}$

（4） $\dfrac{ax+by}{bx+ay}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2-b^2}{bx+ay}$

6. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases}2x+(5-a)y=a+3\\(5-a)x+2y=9-a\end{cases}$$

又次ノ各場合ニ於ケルぐらふヲ畫ケ。

（1） $a=4$ ナルトキ

（2） $a=3$ ナルトキ

（3） $a=7$ ナルトキ

7. 分數ガアル,ソノ分子ニ1ヲ加ヘ分母カラ1ヲ減ズレバ$\frac{2}{3}$ニ等シクナリ,又ソノ分母ト分子ノ差及ビ和ヲ夫々分子及ビ分母トスル分數ハ$\frac{2}{5}$ニ等シイ,モトノ分數ヲ求メヨ。

8. 或ル川ノ上流ニアル甲港カラ下流ニアル乙港マデ40*km*アル,或ル水夫ガコノ間ヲ往復スルニ10時間カヽル,又3*km*漕ギ下ル時間ト2*km*漕ギ上ル時間ト相等シイ,コノ水夫ガ甲港カラ乙港マデ漕ギ下ルニカヽル時間及ビコノ川ノ流レノ速サヲ求メヨ。

9. 甲ハ乙ヨリ毎時a*km*多ク歩ミ,乙ノ速サハ毎時n*km*デアル,今乙ガc*km*ダケ行ツタ後ヲ甲ガ追フトキハ追ヒツクマデニ何程行クカ。

10. 甲乙丙ノ速サ夫々毎時a*km*, $(a+b)$*km*, $(a+2b)$*km*デアル,甲ノ出發後n時間ヲ經テ乙ガ同所ヲ出發シテ甲ヲ追フモノトスル,モシ丙モ同所ヲ出發シテ甲ヲ追フモノトシ乙ト同時ニ甲ニ追ヒツクタメニハ丙ハ乙ノ出發後何時間ニシテ出發スベキカ。又出發點ト追ヒツク地點トノ間ノ距離ヲ求メヨ。

第　六　篇

開　法

第一章　羃根及ビ開法

67. 羃　根

A及ビBヲ各一ツノ數又ハ式,nヲ正ノ整數トシ,

$$A^n=B$$

ナルトキハ,AヲBノ**n乘根**又ハ**n羃根**トイフ。

特ニ二乘根ノコトヲ**平方根**トイヒ,三乘根ノコトヲ**立方根**トイフコトガアル。

例ヘバ$2^5=32$デアルカラ,2ハ32ノ五乘根デアル。又$2^2=4$, $(-2)^2=4$デアルカラ,2及ビ-2ハ共ニ4ノ平方根デアル。

又多項式$a^2+2ab+b^2$ノ平方根ハ$a+b$及ビ$-(a+b)$デアル。

nガ偶數ナルトキハ,任意ノ正數ノn乘根ハ常ニ二ツアル,ソノ二ツハ絕對値ガ相等シク,符號ガ相反スル,又負數ノn乘根ナルモノハ存在シナイ。

n ガ奇數ナルトキハ,任意ノ數ノ正負ニカヽハラズソノ n 乘根ハ常ニ一ツアル,ソノ符號ハモトノ數ノ符號ト同ジデアル。

零ノ n 乘根ハ n ノ奇數ナルト偶數ナルトニカカハラズ常ニ零デアル。

或ル數又ハ或ル式 A ノ n 乘根ヲ示スニハ $\sqrt[n]{A}$ ノ如クニ書ク。コノ n ヲ**根指數**トイヒ,記號 $\sqrt{\ }$ ヲ**根號**トイフ。

n ガ偶數デ,A ガ正數ナルトキハ,A ノ n 乘根ハ正負二ツアルコト前述ノ如クデアル。ソノ場合ニハソノ中ノ正ナル方ヲ $\sqrt[n]{A}$ デ表ハスコトト規約スル。又特ニ平方根ノ場合ニハ根指數 2 ヲ省クノガ常デアル。

例ヘバ　$\sqrt[3]{8}=2,\quad \sqrt{25}=5,\quad -\sqrt{4}=-2.$

注意　$\sqrt{a^2}$ ハ上ノ規約ニヨリ a^2 ノ負ナラザル平方根ヲ表ハスカラ,

a ガ正數ナルトキハ　$\sqrt{a^2}=a$,

a ガ負數ナルトキハ　$\sqrt{a^2}=-a$

トナル筈デアル。ケレドモ數値ノ知レナイ文字ノ場合ニ一々カクノ如クスルノハ頗ル煩雜デアルカラ,以下本篇ノ問題ニ於テ根號ヲ含ム場合ニハ特ニ斷リナ

キ限リ文字ハ正數ヲ表ハスモノトシ,從ツテ上ノ場合ニ於テハ單ニ $\sqrt{a^2}=a$ トスル。

例　題

次ノ各冪根ヲ求メヨ。

(1) $\sqrt[3]{27}$　　(2) $\sqrt[6]{64}$

(3) $\sqrt[3]{-8}$　　(4) $\sqrt[4]{4^8}$

(5) $\sqrt{1.44}$

68. 開　法

或ル數又ハ或ル式ノ n 乘根ヲ求メルコトヲ **n 乘ニ開ク**トイヒ,ソノ算法ヲ**開法**トイフ。特ニ平方根ヲ求メル開法ヲ**開平方**又ハ**開平**トイヒ,立方根ヲ求メル開法ヲ**開立方**又ハ**開立**トイフ。

與ヘラレタ數又ハ式ガ丁度或ル整數又ハ整式ノ n 乘ニ等シイトキハ,ソノ與ヘラレタ數又ハ式ヲ夫々**完全 n 乘數**又ハ**完全 n 乘式**トイフ。

例ヘバ 64 ハ完全六乘數,27 ハ完全立方數デ,又 $a^2+2ab+b^2$ ハ完全平方式デアル。

與ヘラレタ數又ハ式ガ完全n乘數又ハ完全n乘式ナル場合ニハソノn乘根ヲ容易ニ求メ得ルコトモアルガ,一般ニn乘ニ開クコトハ必ズシモ容易デナイ。次ノ章ニ於テ開平ノ方法ヲ考ヘルコトトスル。

第二章 開 平

69. 開平ノ原理

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

ナル式ノ右邊ヲ知ツテソノ平方根$a+b$ヲ求メル方法ヲ考ヘル。

先ヅ右邊ノ式ノ第一項a^2ノ平方根ノ一ツハaデ,コレ即チ求メル平方根ノ第一項デアル。

次ニ與ヘラレタ式カラa^2ヲ減ズレバ殘リハ$2ab+b^2$デ,ソノ第一項$2ab$ヲ今得タaノ2倍卽チ$2a$デ割レバ商bヲ得ル,コレ卽チ求メル平方根ノ第二項デアル。コヽニ於テ$2a$ニbヲ加ヘタ和ニ更ニbヲ乘ジタ積,卽チ$(2a+b)b$ヲ前ノ殘リカラ減ズレバ最早剩餘ガナイ,コレデ開法ヲ終ル。以

上ノ計算ヲ通常次ノ如クニ記ス。

$$\begin{array}{r|l}
 & a+\ b \\
\hline
 & a^2+2ab+b^2 \\
 & a^2 \\
\cline{2-2}
2a+b & \quad 2ab+b^2 \\
b & \quad 2ab+b^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(*) \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

說明 平方根ハ一項ヅツ得ルニ從ツテ上欄ニ記入スルモノトスル。又左方ニアル$2a+b$ハ先ヅ最初ニaノ2倍トシテ$2a$ヲ書キ,コレヲ以テ$2ab$ヲ割ツタ商bヲ附加シテ$2a+b$トシタモノデアル。次ニソノ下ニbヲ書キ$2a+b$ニbヲ乘ジタ積ヲ*印ノ所ニ記ス。

次ニ,同樣ニシテ

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$$

ノ右邊ノ式ヲ知ツテソノ平方根$a+b+c$ヲ求メル算法ヲ記セバ次ノ如クデアル。

$$\begin{array}{r|l}
 & a+\ b+\ c \\
\hline
 & a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\
 & a^2 \\
\cline{2-2}
2a+\ b & \quad 2ab+2ac+b^2 \\
b & \quad 2ab \qquad\ \ +b^2 \\
\cline{1-2}
2a+2b+c & \qquad\quad 2ac \qquad +2bc+c^2 \\
c & \qquad\quad 2ac \qquad +2bc+c^2 \ \ldots\ldots(*) \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

說明 先ヅ與ヘラレタ式ヲaニ關シテ降冪ノ

順ニナラベ,ソノ平方根ノ始メノ二項 $a+b$ ヲ求メルマデノ計算ハ前ノ場合ト同様デアル。

次ニ平方根ノ第三項 c ヲ求メルニハ,二度目ノ引算ノ殘リ $2ac+2bc+c^2$ ノ始メノ二項ヲ $a+b$ ノ2倍卽チ $2a+2b$ デ割レバヨイ。コノ $2a+2b$ ハ丁度前ニ左方ニ記シテアル $2a+b$ ト b トヲ加ヘテコレヲ作ル。而シテ後,新タニ得タ商 c ヲ附加シテ $2a+2b+c$ トシ,ソノ下ニ c ヲ書キコレヲ乘ジタ積ヲ * 印ノ所ニ記ス.

70. 數ノ平方根ノ位取リ

$1^2=1$	$1^2=1$
$10^2=100$	$0.1^2=0.01$
$100^2=10000$	$0.01^2=0.0001$
$1000^2=1000000$	$0.001^2=0.000001$
…………	…………
…………	…………

卽チ一位ノ整數ノ平方ハ一位又ハ二位ノ整數,マタ二位ノ整數ノ平方ハ三位又ハ四位ノ整數デアル。以下コレニ準ズル。

又小數第一位カラ始マル數ノ平方ハ小數第一位又ハ第二位カラ始マル小數,マタ小數第二位カラ始マル數ノ平方ハ小數第三位又ハ第四位カラ始マル小數デアル。以下コレニ準ズル。

コノ理ヲ逆ニ用キレバ或ル數ノ平方根ノ位數ヲ知ルコトガ出來ル。

例ヘバ7304ノ平方根ハ整數二位ヲ有スル。

73 | 04

又0.00034ノ平方根ハ小數第二位カラ始マル小數デアル。　0.00 | 03 | 4

而シテ平方根ガ一位ノ數ナル場合ニハ乘法ノ九々ニヨリ直チニ次ノ如ク求メラレル。

$$\sqrt{1}=1,\quad \sqrt{4}=2,\quad \sqrt{9}=3,$$
$$\sqrt{16}=4,\quad \sqrt{25}=5,\quad \sqrt{36}=6,$$
$$\sqrt{49}=7,\quad \sqrt{64}=8,\quad \sqrt{81}=9.$$

コレニヨツテ或ル數ノ平方根ヲ求メルトキソノ首位ニ來ルベキ數ヲ知ルコトガ出來ル。例ヘバ7304ニ於ケル平方根ノ首位ノ數ハ $64<73<81$ ナルガ故ニ 8 デアル,又0.00034ニ於テハ首位ノ數ハ $1<3<4$ ナルガ故ニ 1 デアル。

71. 正數及ビ整式ノ開平

正數ノ開平ヲスルニハ,先ヅ前節ニ於ケルガ如クニソノ平方根ノ位數及ビ最高位ノ數字ヲ定メ,ソノ最高位ノ數ヲ第69節ノ a ト見做シ,スベテ第69節ニ述ベタ如クニ順次ニ下位ノ數字ヲ決定シテユクノデアル。

整式ノ開平ヲスルニハ,先ヅコレヲ或ル文字ニ關シテ昇羃又ハ降羃ノ順ニナラベ,上ト同様ノ方法ニヨッテ計算スル。

例 1. 1849 ノ正ナル平方根ヲ求ム。

```
        4  3
     ┌──────────
     │ 18 │ 49
     │ 16
     ├──────────
 83  │  2   49
  3  │  2   49
     ├──────────
     │
```

驗 $43^2=1849.$ 故ニ $\sqrt{1849}=43$

注意 1. 第一回ノ引算ノ殘リ249ノ中ノ24ヲ8(4ノ2倍)デ割リ商3ヲ得,コレヲ求メル平方根ノ一ノ位ノ數トスル。8トイフハ實ハ80ノコトデアルカラ,$2a+b$ ヲ作レバ83トナル,8+3デハナイ。

注意 2. モシ單ニ1849ノ平方根ヲ求ムトイヘバ,ソ

ノ答ハ43及ビ−43デアル。以下ノ諸例ニツイテモ同様デアル。

例 2. $\sqrt{109}$ ヲ小數第二位マデ計算セヨ。

```
          1  0. 4  4
        ┌────────────
        │ 1│09.00│00
        │ 1
        ├────────────
  204   │    9 00
    4   │    8 16
  ────  ├────────────
  2084  │      84 00
    4   │      83 36
        │    ────────
        │         64
```

答 $\begin{cases} 10.44, \\ \text{餘リ} \quad 0.0064 \end{cases}$

驗 $10.44^2+0.0064=108.9936+0.0064=109.$

例 3. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ヲ小數第三位マデ求メヨ。

先ヅ與ヘラレタ分數ヲ小數ニ直シ,コレヲ平方ニ開ケバヨイ。

```
          0. 8  1  6
        ┌──────────────
        │ 0.66│66│66
        │   64
        ├──────────────
  161   │     2 66
    1   │     1 61
  ────  ├──────────────
  1626  │     1 05 66
    6   │       97 56
        │     ────────
        │        8 10
```

答 $\begin{cases} 0.816, \\ \text{餘リ} \quad 0.000810\text{強} \end{cases}$

例 4. $9x^4-12x^3+10x^2-4x+1$ ノ平方根ヲ求ム。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2-\ 2x+\ 1 \\
\hline
 & 9x^4-12x^3+10x^2-4x+1 \\
 & 9x^4 \\
\cline{2-2}
6x^2-2x & \quad -12x^3+10x^2 \\
-2x & \quad -12x^3+\ 4x^2 \\
\cline{1-1}\cline{2-2}
6x^2-4x+1 & \qquad\qquad 6x^2-4x+1 \\
+1 & \qquad\qquad 6x^2-4x+1 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

答 $\pm(3x^2-2x+1)$

例 題

1. 次ノ諸數ヲ平方ニ開ケ,モシ開キ切レナイトキハ平方根ノ整數部及ビソノ開平ノ餘リヲ求メヨ。

 729, 608400, 792100, 67009245

2. 次ノ各數ノ平方根ヲ小數第三位マデ求メヨ。

 3.141592, $\dfrac{3}{11}$, 13.5

3. 次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ。

 (1) $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

 (2) $1-6a+15a^2-20a^3+15a^4-6a^5+a^6$

4. 直角三角形ニ於テ直角ヲ挾ム二邊ガ夫々 $82\,cm$, $126\,cm$ ナルトキ,斜邊ノ長サヲ求メヨ。

第三章 根數及ビ根式

72. 不盡根數

根號ヲ用ヰテ表ハサレタ數ヲ一般ニ**根數**トイフ。例ヘバ

$$\sqrt{2},\qquad \sqrt{4},\qquad \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

ノ如キハ何レモ根數デアル。コノ中デ後ノ二ツハ夫々

$$\sqrt{4}=2,\qquad \sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}=0.5$$

ノ如ク整數,分數又ハ小數ヲ以テ精確ニソノ値ヲ示スコトガ出來ルガ, $\sqrt{2}$ ノ如キハ

$$\sqrt{2}=1.414213\ldots\ldots\ldots$$

デアッテ何程開平ヲ續ケテモ開キ切レナイノデアル。斯樣ナ根數ヲ**不盡根數**トイフ。

シカシ實際ノ應用ニ於テハ小數若干位マデヲ知レバ十分デアルカラ,例ヘバ

$$\sqrt{2}=1.41421,\qquad \sqrt{2}=1.4142$$

等ト考ヘテ差支ノナイコトガ多イ。斯クノ如ク大約眞ノ値ニ近イ數ヲ**近似値**トイヒ,コレガ眞ノ

値ヨリ小ナルトキハ**不足ナル近似値**,大ナルトキハ**過剩ナル近似値**トイフ。

注意　整數及ビ分數(有限位ノ小數及ビ循環小數ヲ含ム)ヲ總稱シテ**有理數**トイヒ,有理數デナイ數ヲスベテ**無理數**トイフ。故ニ不盡根數ハ無理數ニ屬スル。

無理數ハ不盡根數ノミニ限ツタモノデハナイ。例ヘバ圓周率 3.141592...... ノ如キハ不盡根數デナイ無理數デアル。

例題

$\sqrt{2}$ 及ビ $\sqrt{3}$ ノ小數第四位マデ正シイ(不足ナル)近似値ハ夫々 1.4142 及ビ 1.7320 デアル,然ラバ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 及ビ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ノ値各如何。

73. 根數ノ性質

根數ニハ次ノ諸性質ガアル。

(但シコヽニ a, b ハ任意ノ正數トシ, m, n, p ハ任意ノ正ノ整數トスル。)

1. $a=b$ ナルトキハ, $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.

又逆ニ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ ナルトキハ, $a=b$.

2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.　　3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

4. $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$.　　5. $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$.

6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

數ノ冪根ヲ求メルニ當リコレラノ性質ヲ利用スルコトガ出來ル。

例 1.　$\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times2}=2\sqrt{2}$,

$$\sqrt{0.02}=\sqrt{\frac{2}{10^2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

故ニ $\sqrt{2}$ ノ値ヲ知レバ,コレニヨツテ $\sqrt{8}$, $\sqrt{0.02}$ 等ノ値ガ得ラレル。

斯クノ如ク同一ノ不盡根數ニ有理數ヲ乘ジテ得ル諸數ヲ**同類根數**トイフ。

注意　$\sqrt{8}$, $\sqrt{0.02}$ 等ヲ直接ニ開平シナイデ上ノ如クニ $\sqrt{2}$ ノ 2 倍, $\frac{1}{10}$ 倍等トシテ計算スルトキハ, $\sqrt{2}$ ノ値トシテ用キタ近似値ニ於ケル誤差ガ夫々 2 倍, $\frac{1}{10}$ 倍等トナツテアラハレルコトニ注意セヨ。

例 2.　$\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{2\times3}{3^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times3^2}{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}.$$

故ニ分數ノ冪根ヲ求メルニハ或ル整數ノ冪根ヲ求メテコレヲモトノ分母デ割レバヨイ。

例 3. $\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt{1.4142......}=1.18......$

故ニ開平ヲ繰リ返シテ行ヘバ或ル數ノ四乘根,八乘根等一般ニ2^a(aハ任意ノ正ノ整數)乘根ヲ求メルコトガ出來ル。

例　題

1. $\sqrt{7}$ ト $\sqrt[3]{18}$ トハ何レガ大ナルカ,ソノ各ノ開法ヲ行ハズシテ判定セヨ。
2. 次ノ各式ニ於テ,出來ルダケ多クノ因數ヲ根號ノ外ニ出セ。

$$\sqrt{150},\quad \sqrt[3]{-216x^4y^5},\quad \sqrt[4]{80ab^3x^5y^6}.$$

74. 根　式

根號ヲ含ム式ヲ**根式**トイフ。例ヘバ

$$\sqrt{a},\quad \sqrt{x^2+a^2},\quad a+\sqrt{1+x^2}$$

等ハ皆根式デアル。但シ $\sqrt{2a}+x$ ノ如キモノハ,モシ x ナル文字ニノミ關シテイフトキハ,根式デハナイ。

整式及ビ分數式ヲ總稱シテ**有理式**トイヒ,コレニ對シテ根式ノコトヲ**無理式**トイフコトガアル。

1. 同類根式ヲ簡約スルコト。

同類根式トハ例ヘバ $b\sqrt{a}$ ト $c\sqrt{a}$ トノ如ク根號內ニ同一ノ式ヲ有スル二ツノ根式ヲイフ。

一ツノ式中ニ同類根式ガ幾ツカアルトキハコレヲ簡約シテ同類ナル一ツノ根式トスルコトガ出來ル。

例 1. $b\sqrt{a}+c\sqrt{a}=(b+c)\sqrt{a}.$

例 2. $7\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$

$$=7\sqrt{2}+2\sqrt{2}-5\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

2. 分母ヲ有理化スルコト。

例ヘバ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ノ値ヲ計算シヨウトスルニ,先ヅ2ヲ平方ニ開キ,コレヲ以テ1ヲ割ルトスレバ計算ノ勞ガ多イ,依ツテ通常ハ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

トナシ,$\sqrt{2}$ ヲ2デ割ツテ所要ノ結果ヲ得ル。

一般ニ分數ノ分母ニ根數ヲ有スルトキハ,ソノ分數ヲ變形シテ分母ヲ有理數トスルガ便利デアル。斯クスルコトヲ分母ヲ**有理化スル**ト稱ヘル。

例 1. $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

例 2. $$\frac{a+b\sqrt{n}}{c+d\sqrt{n}}=\frac{(a+b\sqrt{n})(c-d\sqrt{n})}{(c+d\sqrt{n})(c-d\sqrt{n})}$$

$$=\frac{ac-bdn+(bc-ad)\sqrt{n}}{c^2-d^2n}.$$

例 題

1. 次ノ各式ヲ簡約セヨ。

(1) $\sqrt{3}(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+5\sqrt{6})-5\sqrt{18}$

(2) $(2\sqrt{17}+5\sqrt{3})(\sqrt{17}-4\sqrt{3})$

(3) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})$

2. 次ノ各分數ノ分母ヲ有理化セヨ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$　　(2) $\dfrac{a}{1+\sqrt{m}-\sqrt{n}}$

3. 次ノ各分數ノ値ヲ小數第三位マデ計算セヨ。

(1) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

(2) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$　　(3) $\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$

4. $3x=1$ ナルトキ, $\dfrac{1+2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ ノ値ヲ求メヨ。

雜　題 VI.

1. 次ノ各式又ハ數ノ平方根ヲ求メヨ。

(1) $8x^3+1+4x^4-4x$

(2) $9a^8-2a^4+4a^2-12a^6+1$

(3) $\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{4ax}{3}+\dfrac{x^4}{4}+4x^2+\dfrac{ax^2}{3}-2x^3$

(4) 28164249　　(5) 3868.84

2. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $(7+2\sqrt{6})(9-5\sqrt{6})$

(2) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$　　(3) $\left(\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}\right)^2$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{3x+8}}$

(5) $\dfrac{1}{a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}}$

3. 矩形ノ縱ヲ am 橫ヲ bm トスレバソノ對角線ノ長サハ何米カ。

4. $a^2=b^2+c^2-2bc(2Q^2-1)$ ナラバ

$$Q=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{bc}}.$$

5. 完全平方デ同時ニ完全立方ナル三位ノ整數ヲ求メヨ。

第　七　篇

二　次　方　程　式

第一章　一元二次方程式

75. 一元二次方程式

唯一種ノ未知數ヲモツ二次方程式ヲ**一元二次方程式**トイフ。

例ヘバ
$$4x^2=25, \quad (1)$$
$$8x^2-3x-63=0, \quad (2)$$
$$(x-1)(x+2)=3x+5 \quad (3)$$
ノ如キハ何レモ一元二次方程式デアル。

一元二次方程式デ特ニ(1)ノ如ク x ノ項ノ缺ケテヰルモノヲ**純二次方程式**トイフ。

76. 純二次方程式ノ解法

例 1. $x^2=25$ ヲ解ケ。

解 求メル x ハコレヲ平方スレバ25トナルモノデアル。故ニ
$$x=\sqrt{25} \quad 又ハ \quad x=-\sqrt{25},$$
卽チ
$$x=5 \quad 又ハ \quad x=-5$$
デアル。コレヲ併セテ $x=\pm5$ ト書ク。

例 2. $3x^2-2=0$ ヲ解ケ。

解 移項シテ兩邊ヲ3デ割レバ,
$$x^2=\frac{2}{3}.$$
故ニ前例ト同様ニシテ $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ ヲ得ル。

x ニ關スル純二次方程式ヲ解クニハ,先ヅ x^2 ヲ求メ,コレヲ平方ニ開イテ x ノ値ヲ求メレバ宜イ。

純二次方程式デナクトモ,コレニ倣ツテ解キ得ルモノガアル,次ニ一例ヲ擧ゲル。

例 3. $(3x-5)^2=16$ ヲ解ケ。

解 $3x-5$ ヲ一ツノ未知數ト考ヘテ純二次方程式ノ解法ニヨレバ
$$3x-5=\pm\sqrt{16}=\pm4$$
ヲ得ル。依ツテ
$$3x-5=4 \quad トスレバ \quad x=3,$$
$$3x-5=-4 \quad トスレバ \quad x=\frac{1}{3}.$$
故ニ求メル根ハ3及ビ $\frac{1}{3}$ デアル。

注意 コノ計算ヲ一ツニマトメテ次ノ如クニ書ク コトガ出來ル。

$$3x-5=\pm 4,$$

故ニ　$x=\dfrac{5\pm 4}{3}=3$ 又ハ $\dfrac{1}{3}$.

例　題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $4x^2-49=0$　　(2) $3x^2-8=17-x^2$

(3) $(x+1)^2=64$　　(4) $4(x-1)^2+1=10$

(5) $(2x+1)^2-36=0$

77. 一般ナル二次方程式ノ解法

例 1. $x^2+6x-7=0$ ヲ解ケ。

解 先ヅ既知項ヲ移項スレバ

$$x^2+6x=7.$$

コノ左邊ヲ完全平方式トスルタメニ,兩邊ニ 9 ヲ加ヘレバ

$$x^2+6x+9=16,$$

即チ　$(x+3)^2=16.$

故ニ　$x+3=\pm 4.$

コレカラ $x=1$ 又ハ $x=-7$ ヲ得ル。

注意 1. コノ例ニ於ケル x^2+6x ノ如クソノマヽデハ完全平方デナイ式ニ適當ナル一數ヲ加ヘテコレヲ完全平方トナスコトヲ稱シテ**平方ヲ完成スル**トイフ。

一般ニ $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ デアルカラ,

平方ヲ完成スルタメニ x^2+2ax ニ加フベキ一數ハ x ノ係數ノ半分ノ平方 a^2 ニ等シイ。

依ツテ平方ヲ完成スルタメニ x^2+6x ニ加フベキ數ハ 6 ノ半分ナル 3 ノ平方,即チ 9 ナルコトヲ知ル。

注意 2. 上ノ例デハ,與ヘラレタ方程式ノ左邊ハ觀察ニヨツテ直チニ次ノ如ク因數ニ分解サレル。

$$(x-1)(x+7)=0.$$

然ルニ二ツノ因數ノ積ガ 0 ナルタメニハ少クモソノ一ツノ因數ガ 0 トナラネバナラヌ。又逆ニ,少クモ一ツノ因數ガ 0 ナラバソノ積ハタシカニ 0 デアル。

故ニ　$x-1=0$ 又ハ $x+7=0.$

コレカラ　$x=1$ 又ハ $x=-7$ ヲ得ル。

例 2. $3x^2-7x+2=0$ ヲ解ケ。

解 既知項ヲ移項シテ兩邊ヲ 3 デ割レバ

$$x^2-\frac{7}{3}x=-\frac{2}{3}.$$

左邊ニ於テ平方ヲ完成スルタメニ,兩邊ニ $\left(-\dfrac{7}{6}\right)^2$ 即チ $\dfrac{49}{36}$ ヲ加ヘレバ

$$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2=-\frac{2}{3}+\frac{49}{36}=\frac{25}{36}.$$

故ニ　$x-\frac{7}{6}=\pm\frac{5}{6}$,　$x=\frac{7}{6}\pm\frac{5}{6}$.

コレカラ　$x=2$ 又ハ $x=\frac{1}{3}$ ヲ得ル。

例 3.　$2x^2+(a-2)x=a^2-a$ ヲ解ケ。

解　兩邊ヲ 2 デ割レバ

$$x^2+\frac{a-2}{2}x=\frac{a^2-a}{2}$$

左邊ニ於テ平方ヲ完成スルタメニ兩邊ニ

$\left(\frac{a-2}{4}\right)^2$ 即チ $\frac{(a-2)^2}{16}$ ヲ加ヘレバ

$$\left(x+\frac{a-2}{4}\right)^2=\frac{a^2-a}{2}+\frac{(a-2)^2}{16}=\frac{(3a-2)^2}{16}.$$

故ニ　$x+\frac{a-2}{4}=\pm\frac{3a-2}{4}$.

コレカラ　$x=\frac{a}{2}$ 又ハ $x=-a+1$ ヲ得ル。

例　題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $x^2-x=20$　(2) $(x-1)(x-2)=42$

(3) $2x(x+1)=15+x$　(4) $x^2-2ax=1-a^2$

(5) $x^2+3a^2-4ax=0$　(6) $x^2-2ax+2ab=b^2$

78. 根ノ公式

一元二次方程式ノ一般ナル形ヲ

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

トスル。既知項ヲ移項シテ,兩邊ヲ a デ割レバ

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

左邊ニ於テ平方ヲ完成スルタメニ,兩邊ニ

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 即チ $\frac{b^2}{4a^2}$ ヲ加ヘレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

即チ　$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

故ニ　$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

コレカラ　$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$　(1)

ヲ得ル。コレ即チ根ヲ表ハス公式デアル。

注意　モシ x ノ係數ガ 2 ナル因數ヲ有スルトキハコレヲ $2b'$ トスレバ,方程式ハ

$$ax^2+2b'x+c=0$$

デ,ソノ根ハ

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a},$$

卽チ　$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\qquad(2)$$

トナル。xノ係數ガ2デ割リ切レルトキハコノ公式ヲ用ヰル方ガ便利デアル,但シコヽニb'ハxノ係數ノ半分ナルコトヲ忘レテハナラヌ。

例 1.　$2x^2+13x+15=0$ ヲ解ケ。

解　コレヲ一般ノ形ト較ベレバ

$$a=2,\quad b=13,\quad c=15$$

デアル。故ニ

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\times2\times15}}{2\times2}=\frac{-13\pm7}{4}.$$

卽チ　$$x=\frac{-13+7}{4}=-\frac{3}{2},$$

又ハ　$$x=\frac{-13-7}{4}=-5.$$

例 2.　$x(3x-5)=7$ ヲ解ケ。

解　コレヲ整頓スレバ

$$3x^2-5x-7=0.$$

卽チ　$a=3,\ b=-5,\ c=-7$　デアル。

故ニ　$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times(-7)}}{2\times3}=\frac{5\pm\sqrt{109}}{6}.$$

例 3.　$\dfrac{5x+3}{1-x}=\dfrac{1}{x}$　ヲ解ケ。

解　分母ヲ拂ヒ,整頓スレバ

$$5x^2+4x-1=0.$$

コヽニxノ係數ハ2デ割リ切レル。故ニ公式(2)ニヨリ

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-5\times(-1)}}{5}=\frac{-2\pm3}{5}$$

$$=\frac{1}{5}\quad 又ハ\quad -1.$$

コノ二數ハイヅレモ原ノ方程式ノ分母ヲ0トシナイカラ共ニ根トシテ採用サレル。

注意　例ヘバ$x^2+2x+5=0$ノ如キ方程式ヲ解ケバ

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\times5}}{1}=\frac{-1\pm\sqrt{-4}}{1}$$

トナル。然ルニ負數ノ平方根ナルモノハ存在シナイカラコノ結果ハ無意味デアル。シカシ高等數學ニ於テハ$\sqrt{-4}$ノ如キモノヲモ一種ノ數ト考ヘコレヲ**虛數**ト名ヅケ,上記ノ方程式ハ**虛根**ヲ有スルト稱ヘル。虛數ニ對シテ今マデ取扱ツタ數(正數,負數及ビ零)ヲ**實數**トイヒ,方程式ノ實數ナル根ヲ**實根**トイフ。

虛數ハ日常普通ノ計算ニ使用サレルコトナク,本書ニ於テモ以後特ニ斷リナキ限リコレヲ考ヘルコトガナイカラ,今後既知數ヲ表ハス文字ハ常ニ實數ノミヲ表ハスモノト定メル。

虛數$\sqrt{-1}$ヲ虛數單位トイヒiヲ以テ表ハシ,例ヘ

バ
$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i,$$
$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}=i\sqrt{3}$$
ノ如クニ書ク。

例　題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $x^2-7x+12=0$　　(2) $x^2+x-6=0$

(3) $3x^2-4x=39$　　(4) $a(x^2+1)=x(a^2+1)$

(5) $(x-a)(b-x)=(x-c)(x-a)$

(6) $\dfrac{x^2}{x+1}-1=1-\dfrac{1}{1+x}$

(7) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{x}{b}=\dfrac{b}{x}-\dfrac{a}{x}$

(8) $\dfrac{1}{x+a-b}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$

79. 應用問題

1. 矩形ノ地面ガアル,ソノ周圍ハ $54\,m$ デ,面積ハ 180 平方米デアルトイフ,各邊ノ長サ如何。

解 題意ニヨリ相隣ル二邊ノ和ハ
$$54\,m\div2=27\,m$$
デアルカラ,一邊ヲ $x\,m$ トスレバソノ隣邊ハ $(27-x)\,m$ デアル。依ツテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$x(27-x)=180,$$
即チ
$$x^2-27x+180=0.$$
コレヲ解ケバ $x=12$ 又ハ $x=15$.

モシ $x=12$ トスレバ $27-x=15$,

モシ $x=15$ トスレバ $27-x=12$.

故ニ何レニシテモ求メル矩形ハ同一デ相隣ル二邊ハ $12\,m$ 及ビ $15\,m$ デアル。

驗 $(12+15)\times2=54,\quad 12\times15=180.$

注意 モシ問題ニ於テ間口ト奥行トヲ區別シテアルモノトシ,例ヘバ間口ヲ $x\,m$ トスレバ,

$x=12$ ナル根ニ對シテハ間口 $12\,m$, 奥行 $15\,m$,

$x=15$ ナル根ニ對シテハ間口 $15\,m$, 奥行 $12\,m$

ト二通リニ答ヘネバナラヌ。

例 **2.** 周圍 $84\,m$, 斜邊 $37\,m$ ナル直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊各如何。

解 直角ヲ夾ム二邊ノ和ハ $84\,m-37\,m=47\,m$ デアルカラ,ソノ一邊ヲ $x\,m$ トスレバ,他ノ一邊ハ $(47-x)\,m$ デアル。依ツテ幾何學ニ於ケルぴたごらすノ定理ニヨリ,次ノ方程式ヲ得ル。
$$x^2+(47-x)^2=37^2.$$
コレヲ簡約スレバ

$$x^2-47x+420=0.$$

コレヲ解ケバ $x=12$ 又ハ $x=35$.

故ニ直角ヲ夾ム二邊ハ 12m 及ビ 35m デアル。

例 3. 甲乙ノ推進機ガアル,各每分1000回以上回轉スル,甲ハ每分乙ヨリ 150 回多ク回轉シ,甲ガ 1000 回轉スル時間ハ乙ガ 650 回轉スル時間ヨリモ $\frac{5}{44}$ 分長イトイフ,每分ノ回轉數各如何。

解 乙機ノ每分ノ回轉數ヲ x トスレバ,甲機ノ每分ノ回轉數ハ $x+150$ デ,從ツテ次ノ方程式ヲ得ル.

$$\frac{1000}{x+150}=\frac{650}{x}+\frac{5}{44}.$$

分母ヲ拂ヒ,コレヲ簡約スレバ

$$x^2-2930x+858000=0.$$

コレヲ解ケバ $x=2600$ 又ハ $x=330$.

コノ二數ハ何レモ原ノ方程式ノ分母ヲ零トシナイカラ根トシテ採用サレル。ケレドモ題意ニヨリ x ハ1000以上デナケレバナラヌカラ,本題ノ答トシテハ $x=2600$ ノ方ノミヲ採用スル。

從ツテ $x+150=2750$.

故ニ每分甲ハ 2750 回,乙ハ 2600 回デアル。

例題

1. 三ツノ相隣ル整數デソノ平方ノ和ガ 400 トナルモノヲ求メヨ。又ソノ平方ノ和ガ 434 トナルモノヲ求メヨ。

2. 或ル數トソノ逆數トノ和ガ 20.05 デアルトイフ,ソノ數ヲ求メヨ。

3. 父子ノ年齡ノ和ハ 100 デ,ソノ積ノ $\frac{1}{10}$ ハ父ノ年齡ヨリ 180 多イトイフ,父子各幾歲ナルカ。

4. 長サガ幅ヨリ 2cm 長イ矩形ノ紙ガアル,ソノ周邊ニ幅 1cm ノ黑枠ヲツケレバ殘リノ面積ハ黑枠ノ面積ノ 8 倍トナル,ソノ紙ノ長サ及ビ幅ヲ求メヨ。

5. 或ル作業ヲナスニ,甲乙 2 人ノ職工ガ共ニ働クトキハ20日デコレヲ成就スル,若シ甲 1 人デコレヲナセバ乙 1 人デナスヨリモ 9 日多クカヽルトイフ,甲乙各 1 人デコレヲナストキハ幾日ヲ要スルカ。

6. 或ル商人若干箇ノ品物ヲ賣ツテ18圓ヲ得ル豫定デアツタガ,ソノ中2箇ダケ破損シテヰタタメ,殘リノ品物ヲ1箇ニツキ更ニ30錢ヅツ高ク賣ラネバ豫定ノ金ヲ得ルコトガ出來ヌトイフ,破損シナカツタ前ノ箇數如何。

7. 米ヲ2圓ダケ買ツタガ袋漏レノタメ $2kg$ ヲ失ヒ,結局 $3kg$ ニツキ10錢方高價ニ買ツタコトトナツタ, $1kg$ ノ相場何程カ。

8. 周圍 $360m$ ノ「トラック」ヲ走ルニ甲ハ速サニ於テ乙ヨリ毎秒 $1m$ ダケ速ク,一周スル時間ニ於テ5秒速イ,各人ノ速サヲ求メヨ。

9. 直角三角形ノ三邊カラ一樣ニ定マツタ或ル長サヲ引キ去ツタ殘リガ夫々 $15cm$, $16cm$, $24cm$ デアルトイフ,モトノ三邊ヲ求メヨ。

10. A, B 兩船ガアル, A ハ或ル港ヲ出帆シテ正南ニ向ヒ16節ノ速サデ進ミ, B ハソノ後2時間ヲ經テ同港ヲ出帆シ正東ニ向ヒ13節ノ速サデ進ムトスレバ,兩船間ノ距離ガ89海里トナルノハ, B ガ出帆シテカラ幾時間後ナルカ。

80. 根ノ判別

一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

ノ根ハ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ナルコトヲ知ツタ。コノ結果ヲ吟味スルニ次ノ三ツノ場合ガアル。

(1) $b^2-4ac>0$ ナルトキハ二根共ニ實數デアル,而シテソノ二根ハ必ズ相異ル,何トナレバソノ差ヲ求メレバ

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\neq 0$$

トナルカラデアル。

(2) $b^2-4ac=0$ ナルトキハ二根ハ實數デ相等シク,何レモ $\dfrac{-b}{2a}$ トナル。ケレドモコノ場合ニモ,與ヘラレタ方程式ハ唯一ツノ根ヲモツトイハナイデ,二ツノ相等シイ根卽チ**等根**ヲモツト稱ヘル。

(3) $b^2-4ac<0$ ナルトキハ二根共ニ虚數デアル,

而シテソノ二根ガ相等シクナイモノト考ヘルコトハ(i)ノ場合ト同様デアル。

以上ノ結果ヲ綜合スレバ,一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

ノ根ハ常ニ二ツアツテ次ノ如クデアル。

$b^2-4ac>0$ ナルトキハ相異ル實根,

$b^2-4ac=0$ ナルトキハ相等シイ實根(等根),

$b^2-4ac<0$ ナルトキハ相異ル虚根.

斯クノ如ク b^2-4ac ナル式ハ根ガ實數ナルカ,虚數ナルカヲ判別スル式デアルカラ,コレヲ原ノ方程式ノ**判別式**トイフ。

例題

1. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ判別式如何。

2. 次ノ各方程式ノ根ヲ判別セヨ。

$$11x^2+5x-7=0, \qquad 2x^2+\frac{7}{12}=x,$$
$$2x^2-7x=-13, \qquad 16x^2=5(8x-5)$$

3. 方程式 $4x^2-5x+c=0$ ガ等根ヲモツヤウニ c ノ値ヲ定メヨ。

4. 方程式 $(x-a)(x-b)=n^2$ ハ常ニ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

5. 次ノ方程式ハ虚根ヲ有シナイコトヲ證セヨ。

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$$

81. 根ト係數トノ關係

一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

ノ判別式卽チ b^2-4ac ヲ D, 二根ヲ α 及ビ β トスレバ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

デアル。故ニ二根ノ和及ビ積ハ

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta=\frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

卽チ

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=-\frac{b}{a}\\ \alpha\beta&=\frac{c}{a}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

コレ卽チ二根ノ和及ビ積ヲ求メル公式デアル。

注意 特ニ原ノ方程式ニ於テ, x^2 ノ係數ガ1デ

$$x^2+px+q=0$$

ナル形ヲモツトキハ

$$p=-(\alpha+\beta),\qquad q=\alpha\beta \tag{2}$$

ナル結果ヲ得ル。

例 1. 方程式 $3x^2+5x-30=0$ ノ二根ノ和及ビ積ヲ求メヨ。

解 二根ヲ α 及ビ β トスレバ,公式(1)ニヨリ

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{3},$$

$$\alpha\beta=\frac{-30}{3}=-10.$$

例 2. 方程式 $4x^2-5x-2=0$ ノ二根ノ平方ノ和ヲ求メヨ。

解 二根ヲ α 及ビ β トスレバ,

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=\left(-\frac{-5}{4}\right)^2-2\times\frac{-2}{4}=\frac{25}{16}+1=\frac{41}{16}.$$

例 3. 3 及ビ $\frac{2}{5}$ ヲ二根トスル一元二次方程式ヲ作レ。

解 求メル方程式ヲ

$$x^2+px+q=0$$

トスレバ,公式(2)ニヨリ

$$p=-\left(3+\frac{2}{5}\right)=-\frac{17}{5},\quad q=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}.$$

故ニ求メル方程式ハ

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0,$$

卽チ $5x^2-17x+6=0$ デアル。

例 4. 方程式 $x^2-ax=b^2-ab$ ヲ解ケ。

解 視察ニヨツテ直チニ $x=b$ ガコノ方程式ヲ滿足セシメルコトヲ知ル。然ルニ二根ノ和ハ a デアルカラ,他ノ一根ハ

$$x=a-b$$

デアル。故ニ二根ハ b 及ビ $a-b$ デアル。

例 題

1. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二根ノ平方ノ和ヲ求メヨ。
2. 方程式 $3x^2-10x+15=0$ ノ二根ノ立方ノ和ヲ求メヨ。
3. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α 及ビ β トス

ルトキ,次ノ各式ヲ a, b, c デ表ハセ。

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2},\quad (2\alpha-\beta)(2\beta-\alpha),\quad \frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}$$

4. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ α, β トスルトキ, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 及ビ $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ヲ二根トスル方程式ヲ作レ。

5. 方程式 $x^2-x=a^2-a$ ヲ解ケ。

6. $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ一根ガ他ノ根ノ m 倍ナルトキ, a, b, c ノ關係如何。

7. $x^2-ax+10=0$ ノ二根ノ差ガ 3 ナルトキ, a ノ値如何。

8. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ガ共ニ正ノ實數ナルタメノ條件ヲ求メヨ。

82. 二次式ノ因數分解

方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスレバ

$$\frac{b}{a}=-(\alpha+\beta),\qquad \frac{c}{a}=\alpha\beta$$

デアルカラ,

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\&=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

トナル。コレニヨツテ次ノ如キ二次式ノ因數分解法ヲ得ル。

二次式 ax^2+bx+c ヲ因數ニ分解スルニハ,先ヅコノ式ヲ 0 ニ等シイト置イテ得ル二次方程式ヲ解キ,ソノ二根ヲ α 及ビ β トスレバ

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).}$$

注意 コノ方法ニヨレバ第50節ニ述ベタ如キ觀察ニヨルモノト異リ確實ニ分解サレル。但シ通常單ニ因數分解トイヘバソノ各因數中ニアル係數ハスベテ實數デ且有理數ナルコトヲ要スルカラ,ソノ意味ニ於テ因數分解ノ出來得ルタメニハ判別式 b^2-4ac ガ一ツノ有理實數ノ平方ニ等シクナケレバナラヌ。

例 1. $x^2-2x-35$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解 方程式 $x^2-2x-35=0$ ヲ解ケバ,

$$x=7\quad 又ハ\quad x=-5$$

ヲ得ル。故ニ

$$\begin{aligned}x^2-2x-35&=(x-7)\{x-(-5)\}\\&=(x-7)(x+5).\end{aligned}$$

例 2. $6x^2+x-15$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解 方程式 $6x^2+x-15=0$ ヲ解ケバ,

$$x=\frac{3}{2}\quad 又ハ\quad x=-\frac{5}{3}$$

ヲ得ル。故ニ

$$6x^2+x-15=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left\{x-\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}$$
$$=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)$$
$$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)3\left(x+\frac{5}{3}\right)$$
$$=(2x-3)(3x+5).$$

例　題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

（1）$3x^2+5x+2$　　（2）$12x^2-37x-144$

（3）$2a^2-7ab-9b^2$　　（4）$48x^2-38xy+5y^2$

第二章　一元高次方程式

83. 置換ニヨツテ解キ得ル方程式

二次ヨリ高イ次數ノ方程式ヲ**高次方程式**トイヒ,ソノ解法ヲ一般ニ論ズルコトハ高等數學ニ屬スル。本章ニ於テハ特別ナル工夫ニヨツテ解キ

得ル高次方程式ノ二三ノ例ヲ示ス。

例 1.　$4x^4-37x^2+9=0$ ヲ解ケ。

解　與ヘラレタ式ニ於テ $x^2=y$ ト置ケバ

$$4y^2-37y+9=0$$

トナル。コレヲ解イテ

$$y=9\quad 又ハ\quad y=\frac{1}{4}$$

ヲ得ル。故ニ

$$x^2=9\quad 卽チ\quad x=\pm 3,$$

又ハ　$x^2=\frac{1}{4}$　卽チ　$x=\pm\frac{1}{2}$

デアル。依ツテ與ヘラレタ方程式ハ

$$3,\ -3,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$$

ナル四ツノ根ヲモツ。

例 2.　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$ ヲ解ケ。

解　左邊ニ於ケル因數ノ二ツヅツノ積ヲ作レバ

$$(x+1)(x+4)=x^2+5x+4,$$
$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6.$$

故ニ　$x^2+5x=y$

ト置ケバ,與ヘラレタ方程式ハ

$$(y+4)(y+6)=120$$

卽チ $$y^2+10y-96=0$$

トナル。コレヲ解ケバ $y=6$ 又ハ $y=-16$ ヲ得ル。

$y=6$ トスレバ

$$x^2+5x=6,$$

コレヲ解イテ $x=1$ 又ハ $x=-6$.

$y=-16$ トスレバ

$$x^2+5x=-16,$$

コレヲ解イテ $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{39}i}{2}$.

故ニ根ハ次ノ四ツデアル。

$$1,\ -6,\ \frac{-5\pm\sqrt{39}\,i}{2}$$

例 3. $6x^4-7x^3-12x^2-7x+6=0$ ヲ解ケ。

解 求メル根ガ 0 デナイコトハ視察ニヨツテ明カデアル。依ツテ與ヘラレタ方程式ノ兩邊ヲ x^2 デ割レバ

$$6x^2-7x-12-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}=0,$$

卽チ $$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0.$$

コヽニ於テ $x+\dfrac{1}{x}=y$ ト置ケバ,

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2},$$

故ニ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$ デアル。

依ツテ與ヘラレタ方程式ハ

$$6(y^2-2)-7y-12=0,$$

卽チ $6y^2-7y-24=0$ トナル。

コレヲ解ケバ $y=\dfrac{8}{3}$ 又ハ $y=-\dfrac{3}{2}$.

從ツテ $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{3}$ 又ハ $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2}$,

卽チ $3x^2-8x+3=0$ 又ハ $2x^2+3x+2=0$.

コレヲ解ケバ夫々

$$x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}\quad 又ハ\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}$$

ヲ得ル,コレ卽チ與ヘラレタ方程式ノ四根デアル。

例　題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $x^4-10x^2+9=0$　(2) $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=2$

(3) $(x^2-x)(x^2-x+1)=6$

(4) $(2-x+x^2)^2+x^2-x=4$

（5）　$6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$

84. 因數分解ニヨツテ解キ得ル方程式

例 1.　$(x^2-5)(x^2-4)=4x(x^2-4)$ ヲ解ケ。

解　スベテノ項ヲ左邊ニ移シテ,因數ニ分解スレバ

$$(x^2-4)(x^2-4x-5)=0$$

即チ　$$(x-2)(x+2)(x+1)(x-5)=0.$$

故ニ根ハ 2, −2, −1, 5 ノ四ツデアル。

例 2.　$x^3-6x^2+11x-6=0$ ヲ解ケ。

解　視察ニヨツテ $x=1$ ナル一根ノアルコトヲ知ル。故ニ與ヘラレタ方程式ノ左邊ハ $x-1$ デ割リ切レネバナラヌ。依ツテ實際ニ割算スレバ

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0,$$

即チ　$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

トナル。故ニ根ハ次ノ三ツデアル。

$$x=1,\quad 2,\quad 3$$

例　　題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

（1）　$x^3-5x+4=0$　　（2）　$x(x-1)(x-2)=7.8.9$

（3）　$x^4+7x^3-7x-1=0$

（4）　$x^6+7a^3x^3-8a^6=0$

（5）　$(x-a)^3+(x-b)^3=(2x-a-b)^3$

第三章　聯立二次方程式

85. 聯立二元二次方程式

二種ノ未知數ヲモツ聯立方程式デ,ソノ次數ガ共ニ二次ナルカ,又ハ二次ト一次ナルモノヲ**聯立二元二次方程式**トイフ。

一般ニ斯クノ如キ方程式ヲ解クコトハ本書ノ程度ヲ越エルモノデアルガ,次ノ如キ特別ナル場合ニハ一元二次方程式ノ解法ヲ用ヰテ解クコトガ出來ル。

（1）　聯立方程式ノ中一ツガ一次ナル場合

例 1.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 3x-2y=6 & (1) \\ x^2-3xy+5y=y^2-3x-2 & (2) \end{cases}$$

解　先ヅ(1)ニヨリ, x ヲ用ヰテ y ヲ表ハセバ

$$y=\frac{3}{2}(x-2).\qquad (3)$$

コレヲ(2)ニ代入スレバ

$$x^2-\frac{9}{2}x(x-2)+\frac{15}{2}(x-2)=\frac{9}{4}(x-2)^2-3x-2,$$

即チ　$23x^2-114x+88=0.$

コレヲ解ケバ

$$x=4 \quad 又ハ \quad x=\frac{22}{23}.$$

コレラノ値ヲ(3)ニ代入スレバ夫々

$$y=3 \quad 又ハ \quad y=-\frac{36}{23}$$

ヲ得ル。故ニ求メル根ハ次ノ二組デアル。

$$\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{22}{23}\\y=-\dfrac{36}{23}\end{cases}$$

例 **2.** 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases}2x^2-3y=11 & (1)\\x^2+4x-7y=19 & (2)\end{cases}$$

解　與ヘラレタ二式カラ x^2 ヲ消去スレバ

$$(2)\times2-(1)\qquad 8x-11y=27\qquad (3)$$

トナル,依ッテ例1ニ倣ッテ(1)ト(3)トヲ組合セテ

解ケバ次ノ二組ノ根ヲ得ル

$$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\dfrac{10}{11}\\y=-\dfrac{377}{121}\end{cases}$$

(2) 未知項ガスベテ二次ナル場合

例　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases}2x^2+xy-20y^2=16 & (1)\\3x^2+3xy-24y^2=36 & (2)\end{cases}$$

解　先ヅ兩式カラ既知項ヲ消去スレバ

$$(1)\times9-(2)\times4\qquad 6x^2-3xy-84y^2=0.$$

兩邊ヲ3デ割リ,左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-4y)(2x+7y)=0.$$

從ッテ

$$x=4y \quad 又ハ \quad x=-\frac{7}{2}y$$

ナル關係ヲ得ル。

$x=4y$ ヲ(1)ニ代入スレバ

$$32y^2+4y^2-20y^2=16 \quad 即チ \quad y^2=1,$$

コレカラ $y=\pm1$ ヲ得ル,從ッテ $x=\pm4$ トナル。

$x=-\dfrac{7}{2}y$ ヲ(1)ニ代入スレバ

$$\frac{49}{2}y^2-\frac{7}{2}y^2-20y^2=16 \quad \text{即チ} \quad y^2=16,$$

コレカラ $y=\pm4$ ヲ得ル,從ツテ $x=\mp14$ トナル。

故ニ根ハ次ノ四組デアル。

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-14 \\ y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=14 \\ y=-4 \end{cases}$$

例　題

1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 3x^2-2y^2=25 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2+xy=14 \\ y^2-xy=15 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+2y^2=22 \\ 3y^2-xy-x^2=17 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x^2-xy=8x+3 \\ xy-y^2=8y-6 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=2y \\ 2x^2+4xy=5y \end{cases}$　(6) $\begin{cases} xy+x=25 \\ 2xy-3y=28 \end{cases}$

(7) $x^2+y^2=(x+y+1)^2=(x-y+2)^2$

(8) $x^2+y^2=xy+5, \quad x^3+y^3=10.$

(9) $xy-\frac{x}{y}=2, \quad xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$

(10) $\begin{cases} x-y=4 \\ x^3-y^3=208 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} (x+y)(x+z)=30 \\ (y+z)(y+x)=15 \\ (z+x)(z+y)=18 \end{cases}$　(12) $\begin{cases} xy+x+y=29 \\ yz+y+z=23 \\ zx+z+x=19 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x(x+y+z)=8 \\ y(x+y+z)=16 \\ z(x+y+z)=40 \end{cases}$　(14) $\begin{cases} 2x+y-z=19 \\ x+4y+z=26 \\ x^2+2y^2-z^2=102 \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x+y+2z=11 \\ xy+z^2=15 \\ x^2+y^2+5z^2=58 \end{cases}$

2. 方程式 $(x^2+1)(y^2+4)=8xy$ ヲ滿足スル x 及ビ y ノ實數値ヲ求メヨ。

86. $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ ヲ簡約スルコト

種々ノ問題ニ於テ $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ ナル形ノ數ガ出テ來ルコトガアル。一般ニハコレヲ更ニ簡單ナ形ニ直スコトハ出來ナイケレドモ,特別ナル場合ニハ次ノ如クニ簡約スルコトガ出來ル。

例ヘバ $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ヲ簡約スルタメニ試ミニ

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

ト置キ,コノ兩邊ヲ平方スレバ

$$5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

故ニ x 及ビ y ヲ次ノ如クニ定メレバヨイ。

$$x+y=5,\qquad xy=6.$$

コノ聯立方程式ヲ解ケバ

$$x=2,\ y=3\quad \text{又ハ}\quad x=3,\ y=2$$

ヲ得ル。故ニ

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

次ノ例モ同樣ノ計算デ出來ル(學生自ラ試ミヨ)。

例 1.　$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$

例 2.　$\sqrt{16+\sqrt{252}}=\sqrt{9}+\sqrt{7}=3+\sqrt{7}.$

例　題

1. 次ノ各式ヲ簡單ナル形ニ直セ。

(1)　$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$

(3)　$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

2. 次式ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ。(第三位未滿四捨五入)

$$\frac{\sqrt{45}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$$

3. 次ノ方程式ヲ解キ,根ヲ小數第四位マデ求メヨ。

(1)　$\sqrt{3}x^2+(3\sqrt{3}-1)x+2(\sqrt{3}-1)=0$

(2)　$x^2-2x+6=2\sqrt{2}(2x-3)$

第四章　二次式ノぐらふ

87. 二次函數ノぐらふ

y ガ x ノ函數デ特ニ x ノ一次式ニ等シイトキハコレヲ x ノ**一次函數**トイヒ,x ノ二次式ニ等シイトキハコレヲ x ノ**二次函數**トイフ。

第42節ニ擧ゲタ $y=2x+5$ ノ如キハ一次函數デ,又 $y=x^2-2x-3$ ノ如キハ二次函數デアル。

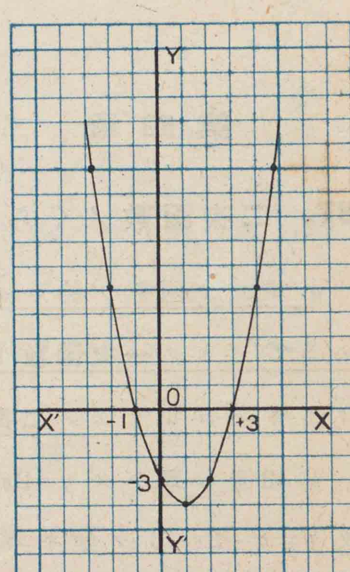
本節ニ於テハ二次函數ノぐらふヲ作リ,コレニツイテ二三ノ考察ヲ試ミル。

例　$y=x^2-2x-3$ ノぐらふヲ作レ。

先ヅ x ニ種々ノ値ヲ與ヘ,コレニ對スル y ノ値ヲ求メレバ次ノ如クデアル。

x	......, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...
y	......, 12, 5, 0, -3, -4, -3, 0, 5, ...

コノ x, y ノ各組ノ値ヲ座標トスル諸點ヲ結ベバ圖ノ如キ一種ノ曲線ヲ得ル。(コノ曲線ヲ**抛物線**トイフ。)



x ノ値ガ正デモ負デモソノ絕對値ガ十分大トナレバ,コレニ對スル y ノ値モ亦從ツテ大トナリ,曲線ハ無限ニ上方ニ延長スル。ケレドモ下方ニハ限リガアル, x ノ値ガ負數ヨリ0ヲ經テ1ニ至ルマデハ y ノ値ハ次第ニ減少シ,ツヒニ $x=1$ ナルトキ $y=-4$ トナルガ,コレガ減少ノ極點デ, x ノ値ガ1ヨリ更ニ增ストキハ y ノ値ハコレニ伴ツテ增加シハジメル。一般ニ斯クノ如ク函數ノ値ガ次第ニ減少

シテ極點ニ達シ,ソレヨリ後ハ却ツテ增加シ始メルトキハ,ソノ極點ニ於ケル函數ノ値ヲソノ**極小値**トイヒ,函數ハコヽデ**極小トナル**トイフ。

前ノ例デハ y ハ $x=1$ ナルトキニ極小トナリ,ソノ極小値ハ -4 デアル。

コレニ反シテ函數ノ値ガ增加ノ極點ニ達シソレヨリ後ハ却ツテ減少シ始メルトキハ,ソノトキ函數ハ**極大トナル**トイヒ,ソノ値ヲ**極大値**トイフ。

又前ノ例デハ曲線ハ横軸ト二點ニ於テ相交ハリ,ソノ交點ハ夫々3及ビ -1 ナル横座標ヲモツ。コレ卽チ $x=3$ 及ビ $x=-1$ ナルトキニ $y=0$ ナルコトヲ示スモノデ,換言スレバ方程式

$$x^2-2x-3=0$$

ノ二根ガ3及ビ -1 ナルコトヲ示ス。

一般ニ二次方程式ノ根ヲ求メルニハ,先ヅスベテノ項ヲ一邊ニ集メテ得ル二次式ノぐらふヲ畫キ,コレト横軸トノ交點ノ横座標ヲ求メレバヨイ。

注意 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ求メルニハコレヲ $ax^2=-bx-c$ ノ如クニ書キ直シ, ax^2 ト $-bx-c$ トノぐらふヲ作リ,ソノ交點ノ横座標ヲ求メテモヨイ。

例題

1. 次ノ二次函數ノぐらふヲ作レ。

(1) $y=4-x^2$ (2) $y=2x^2+4x-6$

2. $y=2x^2-15x+4$ ヲ圖ニ表ハシ,コレニヨツテ y ノ極大値又ハ極小値ヲ求メヨ。又 $y=0$ ナラシメル x ノ値ヲ求メヨ。

第五章 無理方程式

88. 無理方程式

未知數ニ關スル無理式ヲ含ム方程式ヲ**無理方程式**トイフ。

例ヘバ無理方程式

$$x-2\sqrt{x}=3$$

ニ於テ,コレヲ移項シテ

$$x-3=2\sqrt{x} \qquad (1)$$

トシ,兩邊ヲ平方スレバ

$$(x-3)^2=4x, \qquad (2)$$

卽チ $x^2-10x+9=0$

トナリ,コレヲ解ケバ

$$x=1 \quad 又ハ \quad x=9$$

ヲ得ル。

サテコノ値ヲモトノ方程式ニ代入シテ見ルト, $x=9$ ハ適合スルケレドモ $x=1$ ハ適合シナイ。依ツテ求メル根ハ $x=9$ 唯一ツデアル。

根式ヲ含ム方程式ヲ解クニハ斯クノ如ク兩邊ノ冪ヲ作ツテ根號ヲ除去スル。サテ一般ニ方程式

$$A=B \qquad (3)$$

ト,ソノ兩邊ヲ平方シテ得ル方程式

$$A^2=B^2 \qquad (4)$$

トヲ比較スルニ,(3)及ビ(4)ハコレヲ書キ直セバ夫夫

$$A-B=0 \quad 及ビ \quad (A+B)(A-B)=0$$

トナルカラ,(4)ハ(3)ノスベテノ根ノ他ニナホ

$$A+B=0$$

卽チ $A=-B$

ナル方程式ノ根ヲモ併セテモツテ居ル。

例ヘバ上ノ例ニ於テ(1)ノ兩邊ヲ平方シタ(2)ハ(1)ノ根ノ他ニ(1)ノ一邊ノ符號ヲ變ジテ得ル方程

式

$$x-3=-2\sqrt{x}$$

ノ根ヲモ有スル, $x=1$ ハ卽チソノ根デアル。

故ニ一般ニ

方程式ヲ解ク途中デ兩邊ノ羃ヲ作ツタトキハ, ソノ結果ヲ必ズモトノ方程式ニ代入シテ驗ヲ行フコトヲ忘レテハナラヌ。

注意 本節ノ例ニ於ケル $x=1$ ノ如ク,モトノ方程式ニ適合シナイ x ノ値ヲ**無緣根**トイフコトガアル,但シ無緣「根」トハ呼ンデモ實ハモトノ方程式ノ根デハナイコトヲ忘レテハナラヌ。

例 題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $\sqrt{5(x+2)}=8-x$

(2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=1$

(3) $3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0$

(4) $\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2+x}$

(5) $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=6,\quad xy+12=0$

雜 題 VII.

1. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$

(2) $\dfrac{a^2}{a+x}+\dfrac{b^2}{b+x}=a+b$

(3) $\dfrac{x+4}{2x+3}+\dfrac{3x+10}{2x}=\dfrac{2x+3}{x-1}$

(4) $\dfrac{x+3a}{x+a}+\dfrac{x-3a}{x-a}=\dfrac{a(x+2a)}{x^2-a^2}-1$

(5) $\dfrac{3x+2}{3x-2}+\dfrac{3x-2}{3x+2}=\dfrac{1+a}{1-a}+\dfrac{1-a}{1+a}$

(6) $\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{10}{3}$

(7) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

(8) $x^4+3x^3-4x^2-3x+3=0$

(9) $1000x^6-6119x^3+9261=0$

(10) $1+\sqrt{x^2-3x+3}=2x$

(11) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=1$

(12) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{4x-1}{2}$

2. 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

（1）$\begin{cases} x^2+xy=8x+3 \\ y^2+xy=8y+6 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 2x^2-3xy-5y^2=0 \\ x^2-y^2=21 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x^2+xy+2y^2=4 \\ 2x^2-xy+y^2=11 \end{cases}$　（4）$\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{10} \end{cases}$

（5）$\begin{cases} 4x-3y=14 \\ 3x^2-xy-y^2=61 \end{cases}$　（6）$\begin{cases} x^2-2xy=21 \\ xy+y^2=18 \end{cases}$

（7）$\begin{cases} (x+y)(x+y+1)=30 \\ (x-y)(x-y-7)=78 \end{cases}$

（8）$\begin{cases} x+y=8+\sqrt{x}+\sqrt{y} \\ (x-\sqrt{x})(y-\sqrt{y})=12 \end{cases}$

（9）$x+y=xy,\ 2x+2z=xz,\ 3y+3z=yz$

(10) $x+2y-z=11,\ x^2-4y^2+z^2=37,\ xz=24$

3. 方程式 $x^3-8x^2-(a+1)x+4a=28$ ノ一ツノ根ガ -2 デアル,他ノ根ヲ求メヨ。

4. 次ノ二次方程式ノ二根ノ差ヲ小數第二位マデ求メヨ。

$$2(x^2+x-3)=\sqrt{3}\,x(x+2)$$

5. 二次方程式 $2x^2+3x+4=0$ ノ兩根ヲ α, β トスルトキ,次ノ數値ヲ求メヨ。

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\frac{\alpha+\beta}{\beta}$$

6. 方程式 $x^2-4x+2=0$ ノ兩根ヲ $\alpha, \beta\ (\alpha>\beta)$ トスレバ $2x^4-20x^2+1=0$ ノ根ハ

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{2\beta}\right),\quad \pm\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{2\alpha}\right)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

7. 二次方程式 $(x-a)(x-b)+h^2=0$ ノ根ヲ α, β トスルトキ, $\alpha+2\beta,\ \beta+2\alpha$ ヲ二ツノ根トスル二次方程式ハ

$$(x-a-2b)(x-b-2a)+h^2=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

8. 二ツノ二次方程式

$$x^2-3x+a=0,\quad x^2+5x+2a=0$$

ガ共通ナル根ヲ有スルトキハ,次ノ二ツノ二次方程式モ亦共通ナル根ヲモツコトヲ示セ。

$$x^2-x+a-2=0,\quad x^2+7x+2a+6=0$$

9. $y=(x+1)(x-2)$ 及ビ $y=(1-x)(2+x)$ ノぐらふヲ畫イテ次ノ方程式ガ符號ヲ異ニスル二ツノ實根ヲ有スルコトヲ示セ。

$$(x+1)(x-2)=(1-x)(2+x)$$

10. 次ノ式ガ二ツノ一次式ノ因數ニ分解サレルヤウニkノ値ヲ定メヨ,但シコノ式ハxトyトノ相等シイ正ノ整數値ニ對シテハ常ニ負トナラナイモノトスル。

$$x^2-y^2+x+ky-6$$

11. 一ノ位ト小數第一位トカラナル正ノ帶小數ガアル,ソノ各位ノ數ノ平方ノ和ガ89デ又コノ帶小數ハソノ數字ノ位置ヲ交換シテ得ル帶小數ヨリ 2.7 ダケ大デアル,コノ帶小數ヲ求メヨ。

12. 三桁ノ整數ガアル,ソノ各位ノ數及ビソノ平方ノ和ハ夫々14及ビ70デアル,又數字ノ順ヲ逆ニ書ケバモトノ數ヨリ 198 ダケ小ナル數ヲ得ル,モトノ數ヲ求メヨ。

13. x ニツイテノ二次式ガアル, $x=2$ ニ對スル數値ハ 4 デアル,又ソレヲ 3 ニ等シイト置イテ得ル方程式ハ等根$\frac{5}{2}$ヲモツ,ソノ二次式ヲ求メヨ。

14. 甲列車ガ東驛ヲ發シ西驛ニ向フト同時ニ乙列車ガ西驛ヲ發シ東驛ニ向ヒ發車後24分デ出會ツタ,又甲列車ハ乙列車ヨリ毎時 16 km 速ク走リ目的ノ驛ニ14分早ク着イタ,東西兩驛間ノ距離ヲ求メヨ。

15. 或ル人甲驛カラ汽車デ 60 km 距ツタ乙驛ニ行キ,コヽデ下車シテ更ニ汽車ノ發車ト共ニ馬車デ乙驛カラ丙村ニ行ツタ,而シテコノ人ガ丙村ニ着イタ時刻ニハ汽車ハ乙驛ヲ距ル 35 km ノ地點ニアツタ,馬車ガ 5 km 進ム間ニ汽車ハ甲驛カラ乙驛ヲ經テ丙村ニ到ル距離ノ$\frac{1}{4}$ニ等シイ距離ヲ進ムトイフ,乙驛カラ丙村マデノ距離ヲ求メヨ。

第八篇

比及ビ比例

第一章　比

89. 量ノ比

A及ビBガ同ジ種類ノ二ツノ量ナルトキ,コレヲ較ベテAガBノ幾倍ナルカヲ考ヘルコトヲ稱シテ**AノBニ對スル比**ヲ考ヘルトイフ。

コレヲ記號デA:Bト書ク。AノBニ對スル比ノコトヲ單ニ**A對Bノ比**又ハ單ニ**AトBトノ比**トモイフ。

A及ビBヲ比ノ**項**トイヒ,Aヲ**前項**,Bヲ**後項**トイフ。

サテA:Bナル比ヲ考ヘルトキハ,コレニ對スル答ハ,例ヘバ「2倍」,「$\frac{3}{5}$倍」等ノ如ク常ニ或ル一ツノ數ヲ以テスルコトガ出來ル。斯クノ如ク前項

ガ後項ノ幾倍ナルカヲ示ス數ヲソノ**比ノ値**トイフ。比ノ値ノコトヲ略シテ單ニ**比**トイフコトガ多イ。例ヘバ「1 m ノ1尺ニ對スル比ハ3.3デアル」トイフノハ比ノ値ノコトデアル。

注意　比ヲ考ヘル二量ハ必ズ同ジ種類ノ量デナケレバナラヌ。而シテソノ比ノ値ハ必ズ不名數デアル。

90. 數ノ比

a及ビbヲ二ツノ數トスレバ,コレヲ前節ノA及ビBト同樣ニシテ,$a:b$ナル比及ビソノ比ノ値ヲ考ヘルコトガ出來ル。

數ノ比$a:b$ノ値ハ直チニ分數$\frac{a}{b}$ヲ以テ表ハスコトガ出來ル。故ニマタ比$a:b$ノコトヲモ分數ノ形デ$\frac{a}{b}$ト書クコトガアル。

同ジ種類ノ二ツノ量A, Bヲ同一ノ單位Uデ計ツタトキ,ソノ數値ヲ夫々a, bトスレバ

$$A=aU,\qquad B=bU.$$

後者ヨリ$U=\frac{1}{b}B$ヲ得,コレヲ前者ニ代入スレバ

$$A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B.$$

故ニ比A:Bノ値ハ$\frac{a}{b}$トナル。卽チ量ノ比A:B

ハ,數ノ比 $a:b$ ト同ジ値ヲ有スル。依ツテ次ノ定理ヲ得ル。

二量ノ比ハソノ各ヲ同ジ單位デ計ツテ得ル數値ノ比ニ等シイ。

コレニヨツテスベテ量ノ比ハコレヲ數ノ比ニ直シテ考ヘルコトガ出來ル。故ニ以下本章ニ於テハ主トシテ數ノ比ノミヲ論ズル。

例　題

1. A, B, C ナル三ツノ量ガアル, A ノ 7 倍ハ B ノ 5 倍ニ等シク, B ノ 3 倍ト C ノ 4 倍トノ和ハ A ノ 10 倍ニ等シイトイフ, B ヲ單位トスルトキ A 及ビ C ノ數値如何。

2. $x+y+z=\frac{14}{3}x=\frac{7}{2}y$ ナルトキ次ノ比ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{x-y+z}{x}$$

91. 比ノ性質

比ノ兩項ニ零デナイ同ジ數ヲ乘ジ,又ハ兩項ヲ零デナイ同ジ數デ除スルモ,ソノ比ノ値ハ變ラヌ。

何トナレバ比 $a:b$ ノ値ハ $\frac{a}{b}$ デ,兩項ニ零デナイ同ジ數例ヘバ m ヲ乘ジタ比 $ma:mb$ ノ値ハ $\frac{ma}{mb}$ 卽チ $\frac{a}{b}$ デアル。故ニ兩者相等シイ。

兩項ヲ m デ除スル場合ハ,ツマリ $\frac{1}{m}$ ヲ乘ズルト同ジデアル,故ニ矢張リ比ノ値ハ變ラヌ。

比ノ前項ト後項トヲ交換シテ得ル比ヲモトノ比ノ反比トイフ。

反比ノ値ハモトノ比ノ値ノ逆數ニ等シイ。

例　題

1. $3abc^2:27abc^3$ ヲ簡單ニセヨ。

2. 値ヲ變ジナイデ比 $a:b$ ノ前項ヲ c トセヨ。

3. 或ル比トソノ反比トガ相等シトイフ,コノ比ノ値如何。

4. 比ノ兩項ガ共ニ正ナルトキ,ソノ兩方ニ同一ノ正數ヲ加ヘレバ比ノ値ハ 1 ニ近ヅクコトヲ證明セヨ。

92. 複　比

二ツ以上ノ比ノ前項ノ積ヲ前項トシ,後

項ノ積ヲ後項トスル比ヲソレラノ比ノ**複比**トイフ。

例ヘバ$a:b$ト$c:d$ノ複比ハ$ac:bd$デ,コレヲ記號デ$\left.\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right\}$又ハ$\left\{\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right.$ト書ク。ソノ値ハ$\frac{ac}{bd}$即チ$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$デアル。

複比ノ値ハモトノ各ノ比ノ値ノ積ニ等シイ。

複比ニ對シテ複比デナイ比ヲ**單比**トイフコトガアル。

相等シイ二ツノ比ノ複比ヲソノ各ノ**二乘比**トイヒ,相等シイ三ツノ比ノ複比ヲソノ各ノ比ノ**三乘比**トイフ。

例題

1. 二ツノ比ガ相等シケレバ,ソノ二乘比モ亦相等シイコトヲ證明セヨ。コノ逆ハ眞ナルヤ否ヤ。

2. 三ツノ量 A, B, C ガアル, A ト B トノ比ガ$m:n$, B ト C トノ比ガ$p:q$ナルトキハ, A ト C トノ比ハ複比$\left.\begin{matrix}m:n\\p:q\end{matrix}\right\}$ナルコトヲ示セ。

第二章 比 例

93. 比例式

二ツノ比ノ相等シイコトヲ表ハシタ式ヲ**比例式**トイフ。

例ヘバ $a:b=c:d,$ (1)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad (2)$$

ノ如キハ比例式デアル。コノ場合ニハ四ツノ數a, b, c, dハ**比例ヲナス**トイフ。而シテa, b, c, dノ各ヲコノ比例式ノ**項**トイヒ,特ニaトdトヲ**外項**,bトcトヲ**內項**トイヒ,又dヲ三ツノ數a, b, cノ**第四比例項**トイフ。

四數a, b, c, dガ比例ヲナストキハ二ツノ分數$\frac{a}{b}$ト$\frac{c}{d}$トハ相等シイ。

二ツノ分數$\frac{a}{b}$ト$\frac{c}{d}$トガ相等シケレバa, b, c, dハ比例ヲナス。

注意 (2)ニヨツテ見レバ,$\frac{a}{b}$ガ1ヨリ大ナルカ,1ニ等シイカ,或ハ1ヨリ小ナルカニ從ツテ,$\frac{c}{d}$モ亦1

ヨリ大ナルカ, 1ニ等シイカ,或ハ1ヨリ小デアル。故ニ a, b, c, d ガ正ナルトキ,

$a>b$ ナラバ $c>d$,

$a=b$ ナラバ $c=d$,

$a<b$ ナラバ $c<d$

デアル。

94. 比例ニ關スル定理

（1） 四ツノ數ガ比例ヲナストキハ,ソノ外項ノ積ト內項ノ積トハ相等シイ。

何トナレバ

$$a:b=c:d$$

ナルトキハ,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

デアル。故ニ兩邊ニ bd ヲ乘ズレバ

$$ad=bc$$

ヲ得ル。コノ定理ニヨリ

比例式ノ中イヅレカ三項ヲ知レバ殘リノ一項ヲ求メルコトガ出來ル。

例ヘバ $a:b=x:d$

ナル比例式ヨリ x ヲ求メレバ

$$x=\frac{ad}{b}$$

ヲ得ル。一般ニ斯クスルコトヲ稱シテ**比例式ヲ解ク**トイフ。

（2） 二數ノ積ガ他ノ二數ノ積ニ等シイトキハ,コレラノ四數ハ比例ヲナシ,一方ノ二數ハソノ外項トナリ,他方ノ二數ハソノ內項トナル。

何トナレバ

$$ad=bc$$

トシ,コノ兩邊ヲ bd デ除スレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ヲ得ル 卽チ $a:b=c:d$

ナル比例式ガ成立スル。

ナホ次ノ八ツノ比例式ガ何レモ同一ノ關係 $ad=bc$ カラ生ズルモノナルコトハ容易ニ證明サレル。

$a:b=c:d$	(1)	$c:d=a:b$	(5)
$d:c=b:a$	(2)	$b:a=d:c$	(6)
$a:c=b:d$	(3)	$b:d=a:c$	(7)
$d:b=c:a$	(4)	$c:a=d:b$	(8)

依ツテ次ノ定理ヲ得ル。

（3）四數ガ比例ヲナストキハ,ソノ内項(又ハ外項)ニアル二數ガ共ニ内項ニアルカ又ハ共ニ外項ニアルヤウニサヘスレバ,コノ四數ヲイカナル順序ニナラベテモ常ニ比例ハ成立スル。

次ニ比例式

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ノ兩邊ニ1又ハ-1ヲ加ヘレバ夫々

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad 又ハ \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

トナル。從ツテマタ

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

ヲ得ル。故ニ

（4）$\boldsymbol{a:b=c:d}$ ナルトキハ

$$\boldsymbol{\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}} \quad 及ビ \quad \boldsymbol{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}.$$

例　題

1. 次ノ比例式カラ x ヲ求メヨ。

（1）$3+x:3x-4=7:5$

（2）$x+a:x-b=x+c:x-d$

2. $a:b=c:d$ ナルトキ,次ノ式ヲ證明セヨ。

（1）$a\pm mb:b=c\pm md:d$

（2）$a+b+c+d:a+b-c-d$

$$=a-b+c-d:a-b-c+d$$

（3）$a+c:b+d=a^2d:b^2c$

（4）$a-c:b-d=\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}$

95. 比例中項

三ツノ數 a, b, c ガ

$$a:b=b:c$$

ナル關係ヲ有スルトキハ,b ヲ a ト c トノ**比例中項**トイヒ,c ヲ a ト b トノ**第三比例項**トイフ。

今二數 a, c ガ與ヘラレタトシ,ソノ比例中項 b ヲ求メヨウトスレバ,前節ノ定理(1)ニヨツテ

$$b^2=ac.$$

故ニ

$$b=\pm\sqrt{ac}$$

ヲ得ル。卽チ

二數ノ比例中項ハ二ツアリ,ソノ絕對値ハ相等シク符號ハ相反スル。

例題

1. 次ノ二數ノ比例中項ヲ求ム。

(1) $\sqrt{10}+1$, $\sqrt{10}-1$

(2) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $9\sqrt{3}+7\sqrt{5}$

2. a, b, c ハ相等シクナイ正數デ, b ガ a ト c トノ比例中項ナルトキハ,

$$a>b>c \quad 又ハ \quad a<b<c$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. 二數 a, b ノ比例中項ヲ m, 第三比例項ヲ n トスレバ,

$$a^3:b^3=m^2:n^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

96. 連比

一群ノ數 A, B, C, ... ニ對シテ他ノ一群ノ數 a, b, c, ... ガアッテ,ソノ間ニ

$$\left.\begin{array}{l} A:B=a:b \\ B:C=b:c \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

等ノ關係ガアルトキハ, A, B, C, ... ハ a, b, c, ... ニ**比例スル**トイヒ,(1)ノ如ク一々比例式ヲ書ク代リニ

$$A:B:C:\ldots\ldots=a:b:c:\ldots\ldots \qquad (2)$$

ト書ク。

比 A:B:C:...... ノ如ク二ツヨリ多クノ數ノ間ノ相互ノ比ヲ一ツニ續ケテ書キ表ハシタモノヲソレラノ數ノ**連比**トイフ。

(1)ノ諸式ヲ書キ直セバ

$$\left.\begin{array}{l} A:a=B:b \\ B:b=C:c \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

トナル。故ニ(2)ノ代リニ次ノ如クニモ書クコトガ出來ル。

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\ldots\ldots \qquad (3)$$

今コレラノ各分數ヲ k ニ等シイト置ケバ

$$A=ak, \quad B=bk, \quad C=ck, \quad \ldots\ldots$$

故ニ $$(A+B+C+\ldots\ldots)=(a+b+c+\ldots\ldots)k.$$

依ツテ　$k=\dfrac{A+B+C+\ldots\ldots}{a+b+c+\ldots\ldots}$

ヲ得ル,故ニ

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\ldots\ldots=\frac{A+B+C+\ldots\ldots}{a+b+c+\ldots\ldots}.$$

例　題

1. $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{c}=k$　ナルトキ,次ノ式ヲ證明セヨ。

（1）$k=\dfrac{A^2+B^2+C^2}{aA+bB+cC}$

（2）$(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+c^2)=(aA+bB+cC)^2$

2. $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}=k$　トスレバ

（1）$k^3=\dfrac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

（2）$k^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. $\dfrac{a-b}{ay+bx}=\dfrac{b-c}{bz+cy}=\dfrac{c-a}{cx+az}=\dfrac{a+b+c}{ax+by+cz}$

ナルトキハ,コノ各ノ比ハ $\dfrac{1}{x+y+z}$ ニ等シイコトヲ證セヨ。

第三章　比例ノ應用

97. 互ニ比例スル量

例ヘバ毎時 40 km ノ速サデ走ル汽車ハ 2 時間ニハ 80 km, 3 時間ニハ 120 km, 一般ニ n 時間ニハ $40n$ km ヲ走ル。卽チソノ走ル粁數ト時間數トノ比ハ一般ニ $40n:n$ デ,ソノ値ハ常ニ一定數 40 ニ等シイ。斯クノ如ク

相互ニ關聯シテ變動スル二ツノ量ガアツテ,ソノ相對應スル數値ヲ夫々 a 及ビ b トスルトキ,二數 a, b ノ比ガ各量ノ變動ニ關セズ常ニ一定ノ値ヲ有スルトキハコノ二ツノ量ハ**互ニ比例スル**トイフ。

比 $a:b$ ノ一定ナル値ヲ**比例ノ常數**トイフ,コレヲ k トスレバ

$$\frac{a}{b}=k \quad 卽チ \quad a=kb$$

ナル關係ガアル。上ニ擧ゲタ例デハ a ハ粁數, b ハ時間數デ, k ハ常數 40(不名數)デアル。

甲乙二量ガ互ニ比例スルトキハ,甲ノ任意ノ二

ツノ數値 a, a' ト乙ノ夫々コレニ對應スル數値 b, b' トハ比例ヲナス。

何トナレバ甲乙二量ハ互ニ比例スルカラ

$$a=kb, \qquad a'=kb'$$

ナル關係ガアル,コヽニ k ハ一定數デアル。コレカラ

$$a:a'=b:b'$$

ナル比例式ヲ得ル。

例 1. 一定ノ速サヲ以テ進行スル船ガ 7 時間ニ 119 浬ヲ行ツタトスレバ,10時間ニハ幾浬ヲ行クカ。

解 一般ニ行程浬數ヲ x, 時間數ヲ y トスレバ,コノ二數ハ互ニ比例スルカラ

$$x=ky \qquad (k\text{ ハ常數})$$

ナル關係ガアル。然ルニ今 $y=7$ ナルトキ $x=119$ デアルカラ,

$$119=7k \quad 卽チ \quad k=17$$

デアル。故ニ $y=10$ ナルトキノ x ヲ求メレバ

$$x=10k=10\times17=170.$$

卽チ求メル答ハ 170 浬デアル。

例 2. 圓ノ面積ハソノ直徑ノ平方ニ比例スル,

然ラバ直徑 5 cm 及ビ 12 cm ナル二ツノ圓ノ面積ノ和ニ等シイ面積ヲモツ一ツノ圓ノ直徑ハ幾糎ナルカ。

解 圓ノ面積ヲ S, 直徑ヲ l トスレバ

$$S=kl^2 \qquad (k\text{ ハ常數})$$

ナル關係ガアル,故ニ直徑 5 cm 及ビ 12 cm ナル二ツノ圓ノ面積ノ和ハ $k(5^2+12^2)$ デ表ハサレル。故ニ求メル直徑ヲ $x\,cm$ トスレバ

$$k(5^2+12^2)=kx^2.$$

コレヲ解ケバ $\quad x=\pm13$

ヲ得ル。負根ハ題意ニ適シナイカラコレヲ捨テ,答 13 cm トスル。

注意 a ト b トガ互ニ比例スルトキ,コレヲイヒ表ハスニ「**b ガ a ニ比例スル**」又ハ「**a ガ b ニ比例スル**」トイヒ,コレヲ記號デ夫々

$$b \propto a \qquad 又ハ \qquad a \propto b$$

ト書クコトガアル。

例　題

1. A ト B トハ互ニ比例スル量デ, A ノ數値ガ 1.25 ナルトキ B ノ數値ハ 0.96 デアルトイフ,

Bノ數値ガ1ナルトキAノ數値如何。

2. xトyトガ互ニ比例スルトキハ, $x+y$ト$x-y$トモ亦互ニ比例スルコトヲ證明セヨ。コノ逆ハ如何。

3. 毎時 3.5 km ヲ歩ム人ガアル,42分間ニハ幾粁ヲ歩ムカ。

4. 一地點カラ望見シ得ル地平線ノ距離ハソノ地點ノ海面上ノ高サノ平方根ニ比例スル,今海面上 6 m ナル高サカラ望見シ得ル距離ガ 16 km ナラバ,海拔 216 m ノ山頂カラ望見シ得ル距離ハ何程カ。

98. 互ニ反比例スル量

相關聯シテ變化スル二ツノ量ガアツテ,ソノ相對應スル一方ノ數値 a ト,他方ノ數値 b ノ逆數トノ比ガ常ニ一定ナルトキハ,コレラノ二量ハ**互ニ反比例スル**トイフ。

コノ場合ニ比 $a:\frac{1}{b}$ ノ値ナル常數ヲ k トスレバ,

$$\frac{a}{\frac{1}{b}}=ab=k.$$

故ニマタ $ab=k$ ヲ以テ a ト b トガ互ニ反比例スルコトノ定義トスルコトガ出來ル。

例ヘバ一定ノ距離ヲ行クニ要スル時間ト速サ,一定ノ面積ヲモツ矩形ノ底邊ト高サ等ハ互ニ反比例スル量ノ例デアル。

反比例ニ對シテ通常ノ比例ヲ**正比例**トイフコトガアル。

例 物體ガ受ケル光ノ强サハ光源カラノ距離ノ平方ニ反比例スル,今相等シイ光度ノ二燈 A, B ノ間ノ距離ガ 3 m ナルトキ,コノ二燈ヲ結ブ直線上デ A カラ受ケル光ト B カラ受ケル光トノ强サノ比ガ 9:1 ナル如キ點ヲ求ム。

解 求メル點ハ A カラ B ノ方ニ向ツテ x m ノ距離ニアルトスレバ,次ノ關係ヲ得ル。

$$9\times x^2=k,\qquad 1\times(3-x)^2=k,$$

但シコヽニ k ハ常數デアル。故ニ

$$9x^2=(3-x)^2.$$

コレヲ解ケバ

$$x=0.75 \quad \text{又ハ} \quad x=-1.5$$

故ニ求メル點ハ A カラ B ノ方ニ向ツテ 0.75 m ノ

所及ビ A カラ B ト反對ノ方ニ向ツテ 1.5m ノ所ニアル。

例 題

1. 次ノ各場合ニ於テ, A ト C トノ關係如何。
   (1) A ガ B ニ比例シ, B ガ C ニ反比例スルトキ。
   (2) A ガ B ニ反比例シ, B ガ C ニ反比例スルトキ。
2. 二ツノ變數ガアル,一ツハ x ニ正比例シ,他ノ一ツハ x ニ反比例スル,又 y ハコノ二ツノ變數ノ和ニ正比例スルモノトスル,今 $x=2$ ナルトキ $y=3$ デ, $x=3$ ナルトキ $y=5$ ナラバ, x ト y トノ關係ヲ表ハス式如何。
3. 毎時 $4\frac{4}{9}km$ ノ速サデ行ケバ10時間ヲ要スル道程ヲ 2.5 時間ニ行クニハ毎時ノ行程ヲ何程増スベキカ。
4. 長サ 12cm, 幅 7cm, 厚サ 1cm ノ鐵板ガアル, コレヲ鑄直シテ長サ 14cm, 厚サ 1cm ノ板ニスルトキハ,幅ハ幾糎トナルカ。

99. 複比例式

複比ト複比又ハ複比ト單比トノ相等シイコトヲ書キ表ハシタ式ヲ**複比例式**トイフ。

複比例式ニ對シテ通常ノ比例式ヲ**單比例式**トイフコトガアル。

複比例式ヲ解クニハコレヲ分數式又ハ單比例式ニ直シテ取扱ヘバ宜イ。

例 $\left.\begin{matrix} a:b \\ c:d \end{matrix}\right\}=p:x$ ヲ x ニ關シテ解ケ。

解 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{p}{x}$. 故ニ $x=\frac{bdp}{ac}$.

例 題

次ノ複比例式ヲ解ケ。

$$\left.\begin{matrix} \frac{5}{2}a:\frac{4}{3}b \\ \frac{1}{6}b^2:\frac{1}{5}a^2 \end{matrix}\right\}=\frac{5}{4}:x$$

100. 複比例

コヽニ二ツノ量甲乙及ビソノ各ニ關聯シテ變

動スル第三ノ量丙ガアル。モシ甲ガ一定デ乙ノミ變動スルトキハ,丙ハ乙ニ比例シ,モシ乙ガ一定デ甲ノミ變動スルトキハ,丙ハ甲ニ比例スルトスレバ,甲乙共ニ變動スルトキハ丙ハ如何ナル變動ヲナスカヲ次ニ考ヘル。

先ヅ甲及ビ乙ノ數値ガ夫々 a 及ビ b ナルトキ丙ノ數値ヲ c トシ,今甲ノ數値 a ガ a' ニ變ジ,乙ノ數値 b ガ b' ニ變ジタトキ,コレニ伴ツテ丙ノ數値 c ハ如何ナル値ニ變ズルカヲ考ヘルニ,便宜上ソノ變動ヲ次ノ二段ニ分ケテ見ル。

(1) b ハソノマヽニシテ,a ノミガ a' ニ變ジタトシ,コレニ伴ツテ c ガ c_1 ニ變ジタトスル。然ルトキハ假定ニヨリ,c ハ a ニ比例シテ變動スルカラ

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c_1}. \qquad (1)$$

(2) 次ニ a' ハソノマヽニシテ,b ガ b' ニ變ジタトシ,コレニ伴ツテ c_1 ガ c' ニ變ジタトスル,ココニ c' ハ即チ甲乙ノ數値 a', b' ニ對應スル丙ノ數値デアル。然ルニ假定ニヨリ c_1 ハ b ニ比例シ

テ變動スルカラ

$$\frac{b}{b'}=\frac{c_1}{c'}. \qquad (2)$$

コヽニ於テ(1)ト(2)トヲ邊々相乘ズレバ

$$\frac{ab}{a'b'}=\frac{c}{c'} \quad 即チ \quad \left.\begin{matrix} a:a' \\ b:b' \end{matrix}\right\}=c:c'$$

デアル。ツマリ

丙ノ數値ハ甲乙二量ノ數値ノ積ニ比例シテ變動スル。

コレヲ稱シテ丙ハ甲及ビ乙ニ**複比例スル**トイフ。

c ガ a 及ビ b ニ複比例スルコトヲ式デ

$$c=kab \qquad (k ハ常數)$$

ト書ク。依ツテ今得タ結果ヲ式ヲ用キテ述ベレバ次ノ如クニナル。

a ガ一定ナルトキ $c=k_1b$
b ガ一定ナルトキ $c=k_2a$ ナラバ,
a, b 共ニ變ズルトキハ $c=k_3ab$ デアル。

但シコヽニ k_1, k_2, k_3 ハ何レモ常數デアル。

コノ定理ト同樣ノ考ヘ方ニヨツテ次ノ定理ヲ

得ル。

a ガ一定ナルトキ　$c=k_1b$
b ガ一定ナルトキ　$c=k_2\dfrac{1}{a}$　ナラバ,

a, b 共ニ變ズルトキハ　$c=k_3\dfrac{b}{a}$　デアル。

三ツヨリ多クノ量ガ相伴ツテ變動スル場合ニモコレト同樣ナル定理ヲ得ル。

例 1. 三角形ノ面積ハ底邊ガ一定ナルトキハ高サニ比例シ,高サガ一定ナルトキハ底邊ニ比例スル,故ニ面積ハ底邊ト高サトニ複比例スル,即チ底邊ヲ b, 高サヲ h トスレバ,面積 S ハ

$$S=kbh \quad (k\text{ ハ常數})$$

ナル式デ表ハサレル。

例 2. 間口 $24m$, 奥行 $10m$ ナル矩形ノ地所ノ價 300 圓ナルトキ,間口 $14m$, 奥行 $16m$ ナル地所ノ價如何。

解　地所ノ價ハ間口及ビ奥行ニ複比例スル。故ニ今間口ヲ am, 奥行ヲ bm トシ,價ヲ c 圓トスレバ

$$c=kab \quad (k\text{ ハ常數})$$

ナル關係ガアル。然ルニ

$$a=24,\quad b=10$$

ナルトキ　$c=300$

デアルカラ

$$300=k\times24\times10 \quad 即チ \quad k=\frac{5}{4}$$

ヲ得ル。故ニ

$$a=14,\quad b=16$$

ナルトキノ c ヲ求メレバ

$$c=\frac{5}{4}\times14\times16=280.$$

故ニ求メル答ハ 280 圓デアル。

例　題

1. 甲ガ a 歩行ク間ニ乙ハ b 歩行キ,甲ガ m 歩デ行ク距離ヲ乙ハ n 歩デ行クトスレバ,甲乙歩行ノ速サノ比如何。

2. 一定質量ノ氣體ノ體積ハ,溫度ガ一定ナルトキハ壓力ニ反比例シ,壓力ガ一定ナルトキハ絕對溫度ニ比例スル,體積,壓力及ビ攝氏度數ノ間ノ關係式ヲ作レ,但シ絕對溫度ハ攝氏度

數ニ 273 ヲ加ヘタ度數デ表ハサレル。

3. 二ツノ物體間ニ於ケル萬有引力ノ强サハ兩者ノ質量ノ積ニ比例シ,ソノ間ノ距離ノ平方ニ反比例スル,一直線上ニアル二ツノ物體A, Bノ質量ヲ夫々 m_1, m_2 トシ,ソノ間ノ距離ヲ d トスルトキ,コノ直線上ニ於テ兩物體カラ受ケル引力ノ强サノ相等シイ點ヲ求ム。

4. 一平面ニ垂直ニ風ガ當ルトキ,ソノ平面ノ受ケル全壓力ハ風速ノ平方ト面ノ廣サニ複比例スルトイフ,風速ガ毎秒 $2m$ ナルトキ 1 平方米ノ平面ガ受ケル壓力ノ 3 倍ヲ P トスレバ,風速ガ毎秒 $35m$ ナルトキ 24 平方米ノ平面ガ受ケル全壓力如何。

101. 比例配分

與ヘラレタ數ヲ二ツ以上ノ部分ニ分チ,ソノ各部分ノ比又ハ連比ヲ丁度與ヘラレタ比又ハ連比ニ等シイヤウニスルコトヲ<u>比例配分</u>トイフ。

例　A ヲ三ツノ部分ニ分チ,ソノ各部分ノ連比

ヲ $l:m:n$ ニ等シクセヨ。

解　求メル三ツノ部分ヲ x, y, z トスレバ

$$x+y+z=\mathrm{A} \qquad (1)$$

デ且

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n} \qquad (2)$$

デアル。然ルニ第96節ニヨリ,(2)ノ各分數ハ何レモ

$$\frac{x+y+z}{l+m+n} \quad \text{即チ} \quad \frac{\mathrm{A}}{l+m+n}$$

ニ等シイ。故ニ

$$x=\frac{l\mathrm{A}}{l+m+n},\quad y=\frac{m\mathrm{A}}{l+m+n},\quad z=\frac{n\mathrm{A}}{l+m+n}.$$

例　題

1. 金 324 圓ヲ甲乙丙ニ分ケタ,甲ハ乙ノ 2 倍,丙ト乙トノ比ハ 3:2 デアッタトイフ,各人ノ取高ヲ求メヨ。

2. A ヲ三ツノ部分ニ分チ,第一部ト第二部ノ比ヲ $l:m$, 第一部ト第三部ノ比ヲ $m:n$ ナラシメヨ。

3. 甲ガ1500圓ノ資本ヲ以テ商業ヲ始メテカラ5箇月後ニ乙ハ3000圓ヲ出シテコレト共同シテ營業スルコトトナツタ,斯クテ始メカラ滿1年後ニ利益金1560圓ヲ得タ,コレヲ兩人デ分配スルニ,各ノ取高ガ出資金高ニモ,又出資シタ月數ニモ比例スルヤウニスレバ兩人ノ利益配當各如何。

102. 混合法

價格ヲ相異ニスル數種ノ品ヲ一定ノ比ニ混合スルトキ,ソノ混合ノ比ト混合物ノ價格トノ關係ヲ考ヘルコト,又ハコレニ類似スル問題ヲ總稱シテ混合法ノ問題トイフ。

例 **1.** 上中下三種ノ茶ガアル, $1\,kg$ ノ價上ハ a 錢,中ハ b 錢,下ハ c 錢デアル,コレヲ $p:q:r$ ノ比ニ混合スレバ1瓩幾錢ノ茶ヲ得ルカ。

解　上中下ノ混合サレル量ノ瓩數ヲ夫々 pm, qm, rm トスル,コヽニ m ハ任意ノ常數デアル。然ルトキハ混合茶ノ全量ハ

$$(p+q+r)m\,kg$$

デ,ソノ價ハ

$$(ap+bq+cr)m \text{ 錢}$$

デアル。故ニ $1\,kg$ ノ値ハ

$$\frac{ap+bq+cr}{p+q+r} \text{ 錢}$$

デアル。

例 **2.** 前例ニ於テ,上下二種ノ茶ヲ混合シテ中茶ト同價ノモノヲ作ルニハ,ソノ混合ノ割合ヲ如何ニスレバ宜イカ。

解　上 $x\,kg$,下 $y\,kg$ ヲ混合スルトスレバ,前例ト同樣ノ考ニヨリ混合茶ノ價ニ關シテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$ax+cy=b(x+y).$$

コレヲ變形スレバ

$$\frac{x}{y}=\frac{b-c}{a-b}$$

トナル,コレ卽チ求メル比デアル。

例ヘバ

$$a=240,\quad b=170,\quad c=110$$

トスレバ

$$\frac{x}{y}=\frac{170-110}{240-170}=\frac{60}{70}=\frac{6}{7}$$

トナル。コノ計算ヲ通常次ノ如クニ排列シテ書ク。

混合價	原價	差額	混合比	
170	240	−70	60	6
	110	60	70	7

例 3. 更ニ前例ノ如ク

$$a=240,\quad b=170,\quad c=110$$

トシテ,上中下三種トモニ混合シソノ混合茶ノ價ヲ 1 kg 1.80 圓ナラシメルニハ,ソノ混合ノ割合如何。

解 上 $x\,kg$,中 $y\,kg$,下 $z\,kg$ ヲ混合スルトスレバ,次ノ方程式ヲ得ル。

$$240x+170y+110z=180(x+y+z).$$

コレヲ變形スレバ

$$60x=10y+70z,$$

即チ
$$x=\frac{1}{6}y+\frac{7}{6}z. \qquad (1)$$

故ニ y 及ビ z ニ任意ノ値ヲ與ヘ,コレニ對シテ x ヲ(1)ニヨツテ求メレバ所要ノ比ヲ得ル,從ツテ答

ハ無數ニ多クアル。故ニコノ問題ハ**不定**デアル。

モシ(1)ニ於テ

$$y=6u,\quad z=6v$$

ト置ケバ,(1)ノ代リニ

$$\left.\begin{aligned} x&=u+7v\\ y&=6u\\ z&=6v \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ト書クコトガ出來ル,コヽニ u 及ビ v ハ任意ノ數デ,カクスレバ分數ノ係數ヲ避ケルコトガ出來ル。

上ノ計算ヲ次ノ如クニ排列シテ書ク。

混合價	原價	差額	混		合		比
180	240	−60	10	1	70	7	$u+7v$
	170	10	60	6			$6u$
	110	70			60	6	$6v$

例　題

1. 1 l 1.44 圓ノ酒ト 1.60 圓ノ酒トヲ混ジテ 1 l 1.56 圓ノ酒ヲ作ラウトスル,混合ノ割合ヲ求メヨ。

2. 1 kg 1.88 圓ノ茶ト 1.70 圓ノ茶ト 1.20 圓ノ茶

トヲ 3:5:4 ノ比ニ混合シ,コレヲ 1kg 1.60 圓ニ賣リ全體デ 5.20 圓ノ利益ヲ得タトイフ,各種ノ茶幾瓩ヅツヲ混合シタカ。

3. 純金 84g ニ二十一金 112g ト銅若干瓦トヲ鎔合シテ十八金ヲ作ラウトスル,混ズベキ銅ノ量ヲ求メヨ。

4. 目方 100 分中 2 ノ鹽分ヲ含ム海水カラ水幾許ヲ蒸發セシメレバ目方 100 分中18ノ鹽分ヲ含ムモノトナルカ。

5. 上中下三種ノ酒ヲ混ジタ三箇ノ樽ガアル,甲樽ハ各酒ノ割合 5:2:1, 乙樽ハ 2:5:1, 丙樽ハ 3:1:4 デアル,今コレヲ混ジテ各酒ヲ等分ニ含ム混合酒 9l ヲ作ラウトスル,各樽カラ幾立ヅツヲ取ルベキカ。

雜 題 VIII.

1. $x+3y+5z=0,\ \ 2x+4y+7z=0$ ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+7z^2}$$

2. $y+z-x:z+x-y:x+y-z=a:b:c$ ナルトキ次ノ連比ヲ a, b, c デ表ハセ。

$$y+z-2x\ :\ z+x-2y\ :\ x+y-2z.$$

3. $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ ノ根ガ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ平方ニ等シイトキ, b ハ a ト c トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ。

4. 三ツノ變數 x, y, z ガアル, y ハ x ノ三乘ニ正比例シ, z ハ x ノ平方根ニ逆比例スル,而シテ $x=1$ ナルトキ $y+z=5$ デ, $x=2$ ナルトキ $y+z^2=26$ デアル, $\sqrt{y}\times z=2$ ナル x ノ値ヲ求メヨ。

5. 圓壔ノ體積ハソノ高サト底面ノ半徑ノ平方トニ複比例スル,今甲乙ノ圓壔ヲ作リソノ高サノ比ヲ 3:2 又體積ノ比ヲ 2:1 ナラシメルニハソノ底面ノ半徑ノ比如何。

6. 暴風ガ平板ニ垂直ニ吹キツケルトキコレニ及ボス風壓ハ風速ノ二乘ト平板ノ面積トニ複比例スル,今風速毎秒 20m ノ風ガ面積 1 平方米ノ平板ニ對シ 30kg ノ重サニ等シイ風壓ヲ及ボストスレバ速サ毎秒 45m ノ風ガ面積

4平方米ノ平板ニ及ボス風壓如何。

7. 煙突ノ斷面積ハ單位時間ニ燃燒セシメル燃料ニ正比例シソノ煙突ノ高サノ平方根ニ反比例スル,今每時 7000 kg ノ石炭ヲ燃燒スル高サ 40 m ノ煙突ノ斷面積ガ3平方米ナラバ每時 560 kg ノ石炭ヲ燃燒スル高サ 10 m ノ煙突ノ斷面積ハ何程ニスベキカ。

8. 甲乙兩槽ガアル,甲槽ニハ酒精 15 l, 水 5 l ノ混合液,乙槽ニハ酒精 5 l, 水 15 l ノ混合液ガアル,今甲乙兩槽カラ等量ノ液ヲ汲ミ出シコレヲ混和シテ等分シ甲乙兩槽ニ戻シタラバ兩槽ニ於ケル酒精ノ比ハ 13:7 トナツタ,各槽カラ汲ミ出シタ液ノ量ヲ求メヨ。

9. 1 kg ニツキ 1.94 圓, 1.75 圓, 1.20 圓ノ三種ノ茶ヲソノ順ニ 3:5:4 ノ割合ニ混合シ,コレヲ 1 kg ニツキ 1.65 圓ニ賣ツタラバ全體デ 9.03 圓ノ利益ヲ得タ,各種ノ茶幾何ヅツ混合シタカ。

10. 甲乙丙ノ三組ガ1人1發ヅツ射擊シタ,甲組ハ5人ニツキ3人,乙組ハ7人ニツキ3人,丙組ハ2人ニツキ1人ノ割合デ命中シ,命中彈ガ合計 228 發デアツタ,又命中者數ノ割合ハ甲組ト乙組トモ乙組ト丙組トモ共ニ 2:3 デアル,コノ射擊ニ參加シタ人數ヲ求メヨ。

第九篇

級數

第一章 等差級數

103. 等差級數

一列ノ數ニ於テソノ中ノ任意ノ一數ニ或ル一定ノ數ヲ加ヘタモノガ常ニソノ次ニアル數ニ等シイトキハ,コレラノ一列ノ數ヲ**等差級數**(A.P.ト略記スル)*トイヒ,ソノ各數ヲ**項**トイフ。最初ノ項ヲ**初項**トイヒ,項數ニ限リガアルトキハ最後ノ項ヲ**末項**トイフ。

例ヘバ　$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$　(1)

ニ於テハ,各數ニ1ヲ加ヘレバソノ次ニアル數ヲ得ル,又

$$9, 6, 3, 0, -3, -6, \ldots\ldots \qquad (2)$$

* Arithmetical Progression ノ略。

ニ於テハ各數ニ -3 ヲ加ヘレバソノ次ニアル數ヲ得ル。故ニ(1),(2)ハ何レモ等差級數デアル。

等差級數ニ於テハ或ル項カラソノ直グ前ノ項ヲ減ジタ差ハ常ニ相等シイ,コレ即チ等差級數ノ名アル所以デ,コノ一定ノ差ヲ**公差**トイフ。

上ノ例(1)ノ公差ハ1,(2)ノ公差ハ -3 デアル。

等差級數ノ初項ヲ a トシ,公差ヲ d トスレバ,ソノ級數ハ

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots\ldots$$

デ,最初カラカゾヘテ第 n 項ニ當ルモノハ

$$a+(n-1)d$$

デアル。コノ式ニ於テ n ノ値ヲ順次ニ $1, 2, 3, \ldots\ldots$ ト置ケバ,級數ノスベテノ項ヲ得ル,故ニコレヲ**一般項**トイフ。

例　等差級數 $1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$ ノ公差,一般項及ビ第100項ヲ求ム。

解　公差ヲ d トスレバ

$$d=3-1=5-3=\cdots\cdots=2.$$

故ニ一般項ハ

$$1+2(n-1)=2n-1$$

デ,第 100 項ハ

$$1+2(100-1)=199.$$

例 題

1. 等差級數

$$2,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ \ldots\ldots$$

ノ第 150 項ヲ求メヨ。

2. 前題ノ級數ニ於テ末項ガ -100 ナラバ,全體ノ項數如何。

3. 第 k 項ガ $4k-3$ ナル級數ハ等差級數ナルコトヲ示セ。

4. 第 3 項ガ10, 第10項ガ 3 ナル等差級數ノ初項及ビ公差如何。

104. 等差中項

三數ガ等差級數ヲナストキハ,ソノ中間ノ一數ヲ兩端ノ二數ノ**等差中項**トイフ。

今 a, b, c ガ等差級數ヲナストスレバ, b ハ a ト c トノ等差中項デ,コヽニ

$$b-a=c-b$$

卽チ $$b=\frac{a+c}{2}$$

デアル。

一般ニ三ツヨリ多クノ數ガ等差級數ヲナストキニモ,ソノ兩端ヲ除イタ中間ノ諸數ヲ兩端ノ二數ノ**等差中項**トイフ。

今二數 a, b ノ間ニ m 箇ノ等差中項ガアルトスレバ, a ヲ初項トスルトキ b ハ第 $(m+2)$ 項ニ當ル,故ニコノ級數ノ公差ヲ d トスレバ

$$b=a+(m+1)d$$

卽チ $$d=\frac{b-a}{m+1}$$

デアル。

例 題

1. 5 ト 33 トノ間ニ 6 箇ノ等差中項ヲ挿入セヨ。

2. a ト b トノ間ニ m 箇ノ等差中項ヲ挿入シ, a カラカゾヘテ第 k 番目ニアルモノヲ求メヨ。

3. 前題ノ場合ニ於テ a カラカゾヘテ第 k 番目ノモノト, b カラ逆ニカゾヘテ第 k 番目ノモノトノ和ハ $a+b$ ニ等シイコトヲ示セ。

105. 等差級數ノ和

項數 n ナル等差級數ノ初項ヲ a, 公差ヲ d トスレバ,末項ハ $a+(n-1)d$ デアル。故ニコノ級數ノ總和ヲ S トスレバ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+\{a+(n-1)d\}. \qquad (1)$$

今コノ末項ヲ l デ表ハシ,項ノ順序ヲ轉倒シテ書ケバ

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots\ldots+\{l-(n-1)d\}. \qquad (2)$$

依ッテ(1),(2)ノ兩式ヲ邊々相加ヘレバ,

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots+(a+l)=n(a+l).$$

故ニ
$$S=\frac{n(a+l)}{2} \qquad (3)$$

ナル式ヲ得ル,コレ卽チ等差級數ノ總和ヲ求メルーツノ公式デアル。

(3)ニ於テ

$$l=a+(n-1)d$$

ヲ代入スレバ,更ニ次ノ公式ヲ得ル。

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}. \qquad (4)$$

例 1. 自然數 1, 2, 3, ... ノ 100 マデノ和ヲ求ム。

解 公式(3)ニ於テ

$$a=1, \quad l=100, \quad n=100$$

トスレバ,

$$S=\frac{100(100+1)}{2}=5050.$$

例 2. 等差級數 36, 32, 28, ... ノ幾項ノ和ガ 156 トナルカ。

解 公式(4)ニ於テ

$$S=156, \quad a=36, \quad d=-4$$

トシテ, n ヲ求メレバヨイ。卽チ

$$156=\frac{n}{2}\{72-4(n-1)\}.$$

コレヲ解ケバ

$$n=6 \quad 又ハ \quad n=13.$$

故ニ求メル項數ハ 6 又ハ 13 デアル。

例 題

1. 1 カラ始メテ 3, 5, 7 等順次ニ奇數ヲ加ヘ行クトキハソノ和ハ常ニ完全平方數ナルコトヲ示セ。

2. 初項12,公差 -3 ナル等差級數ノ35項ノ和ヲ求メヨ。

3. 三桁ノ整數デコレヲ17デ除スルトキ剩餘 3 ヲ得ルモノノ總和如何。

4. 1 カラ 500 マデノ整數ノ中, 2 ノ倍數デモ又 5 ノ倍數デモナイ數ノ總和ヲ求ム。

5. 21, 18, 15, ……ノ幾項ノ和ガ84トナルカ。

6. 一直線上ニ $3m$ ヅツ隔テヽ10箇ノ石ヲ置イテアル,今ソノ一端ノ石ノ所ニヰル人ガスベテノ石ヲソノ所ニ運ビ集メルニハ,全體デ幾米ノ距離ヲ歩ムベキカ,但シ一度ニ 1 箇ヅツ運ブモノトスル。

7. 甲乙兩人同時ニ同地ヲ發シ同方向ニ進ムニ,甲ハ初日ニ12里,以後毎日$\frac{1}{3}$里宛ヲ減ジテ歩ミ,乙ハ毎日 8 里ヲ歩ムトスレバ出發後幾日目ニ兩人相會スルカ。

8. 凸多角形ガアル,ソノ內角ハ等差級數ヲナシソノ最小角ハ 120^0, 公差ハ 5^0 デアル,ソノ邊數如何。

第二章 等比級數

106. 等比級數,等比中項

一列ノ數ニ於テソノ中ノ任意ノ一數ニ或ル一定ノ數ヲ乘ジタモノガ常ニソノ次ニアル數ニ等シイトキハ,コレラノ一列ノ數ヲ**等比級數**(G.P. ト略記スル)[*]トイフ。

例ヘバ

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8, \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$12,\quad -4,\quad \frac{4}{3},\quad -\frac{4}{9}, \ldots\ldots \qquad (2)$$

ノ如キハ何レモ等比級數デアル。

項,**初項**,**末項**等ノ語ヲ用ヰルコトハ等差級數ニ於ケルト同ジデアル。

等比級數ニ於テハ或ル項ノソノ直グ前ノ項ニ對スル比ハ常ニ相等シイ,コレ卽チ等比級數ノ名アル所以デ,コノ一定ノ比ヲ**公比**トイフ。

上ノ例(1)ノ公比ハ 2, (2)ノ公比ハ $-\frac{1}{3}$ デアル。

---

* Geometrical Progression ノ略。

一般ニ等比級數ノ初項ヲa,公比ヲrトスレバ,ソノ級數ハ

$$a,\quad ar,\quad ar^2,\quad ar^3,\ \ldots\ldots$$

デ,第 n 項ハ

$$ar^{n-1}$$

トナル,コレ卽チ**一般項**ノ式デアル。

三數ガ等比級數ヲナストキハ,ソノ中間ノ一數ヲ兩端ノ二數ノ**等比中項**トイフ。

今 a, b, c ガ等比級數ヲナストスレバ,b ハ a ト c トノ等比中項デ,コヽニ

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\quad 卽チ\quad b^2=ac,$$

從ツテ $$b=\pm\sqrt{ac}$$

ナル關係ガアル。

三ツヨリ多クノ數ガ等比級數ヲナストキニモ,ソノ兩端ノ二數ヲ除イタ中間ノ諸數ヲ兩端ノ二數ノ**等比中項**トイフ。

今 a, b 二數ノ間ニ m 箇ノ等比中項ガアルトスレバ,b ハ a カラ數ヘテ第 $(m+2)$ 項ニ當ル。故ニコノ級數ノ公比ヲ r トスレバ

$$b=ar^{m+1}\qquad 從ツテ\qquad r^{m+1}=\frac{b}{a}.$$

故ニ r ハ $\dfrac{b}{a}$ ノ $(m+1)$ 乘根デアル。

例　題

1. 初項10,公比$\frac{1}{2}$ナル等比級數ヲ第 5 項マデ書ケ。
2. 第 3 項ガ48デ,第 6 項ガ3072ナル等比級數ノ第 4 項ヲ求メヨ。
3. 7 ト 112 トノ間ニ 3 箇ノ等比中項ヲ挿入セヨ。
4. a, b ノ間ニ m 箇ノ等比中項ヲ挿入シタトキ,b カラ數ヘテ第 k 番目ニアルモノハ何カ。

107. 等比級數ノ和

項數 n ナル等比級數ノ初項ヲ a,公比ヲ r トスレバ,末項ハ ar^{n-1} デアル。故ニコノ級數ノ總和ヲ S トスレバ

$$S=a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-1}.\qquad(1)$$

コノ兩邊ニ r ヲ乘ズレバ

$$Sr=ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^n.\qquad(2)$$

(1), (2) ヲ邊々相減ズレバ

$$S(1-r)=a-ar^n.$$

故ニ
$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (3)$$

或ハ
$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad (4)$$

ヲ得ル。コレ卽チ等比級數ノ總和ヲ求メル公式デ,

$$-1\leqq r<1$$

ナルトキハ (3) ヲ,

$$r>1 \quad 又ハ \quad r<-1$$

ナルトキハ(4)ヲ用ヰルガ便利デアル。

注意　モシ $r=1$ ナルトキハ公式 (3) 及ビ (4) ハ成立シナイ。ケレドモコノ場合ニハ

$$S=a+a+a+\cdots\cdots+a=na$$

デアルカラ,別ニ公式ノ必要ガナイ。

例　題

1. $1+2+4+8+\cdots\cdots$ ノ10項ノ和ヲ求メヨ。

2. 次ノ等比級數ノ和ヲ求メヨ。

(1) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots\cdots+\frac{64}{729}$

(2) $4+0.8+0.16+\cdots\cdots+0.00001024$

3. 初項 a, 末項 l, 公比 $r\ (r\neq1)$ ナル等比級數ノ總和ヲ S トスレバ,

$$S=\frac{a-lr}{1-r}=\frac{lr-a}{r-1}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

4. 或ル等比級數ノ第 3 項ハ 2 デ,第 6 項ハ $-\frac{1}{4}$ デアル,コノ級數ノ初項カラ第10項マデノ和ヲ求メヨ。

5. 或ル等比級數ノ第10項マデノ和ハ第 5 項マデノ和ノ 244 倍ニ等シイトイフ,コノ級數ノ公比ヲ求ム。

6. 等比級數 $2,\ -2\sqrt{3},\ \cdots\cdots$ ノ幾項ノ和ガ $26-8\sqrt{3}$ トナルカ。

108. 無限等比級數

前節ニ得タ公式(3)及ビ(4)ハ次ノ如クニ書キ直サレル。

$$S=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

コヽニ公比 r ノ絕對値ガ 1 ヨリ大ナルトキハ項數 n ヲ增スニ從ツテ總和 S ノ絕對値モ亦次第

ニ增大スルコト明カデアル。

ケレドモ r ノ絶對値ガ1ヨリ小ナルトキハコレト異ル。絶對値ガ1ヨリ小ナル數ハコレヲ高イ冪ニスレバ何程デモ零ニ近クナルニヨリ,項數 n ヲ增スニ從ツテ $\frac{ar^n}{1-r}$ ノ絶對値ハ限リナク小サクナル。故ニ結局 n ヲ十分大ナラシメレバ, S ハ何程デモ $\frac{a}{1-r}$ ニ近クスルコトガ出來ル。コノ事實ヲ次ノ如クニイヒ表ハス。

初項ガ a デ,公比 r ノ絶對値ガ1ヨリ小ナル等比級數ノ和ハ,項數ガ限リナク大ナルトキ $\frac{a}{1-r}$ ナル**極限値**(又ハ單ニ**極限**)ヲ有スル。

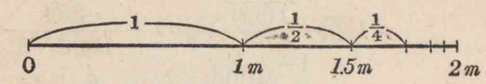
或ハコレヲ略言シテ,斯クノ如キ無限等比級數ノ和ハ $\frac{a}{1-r}$ デアルトモイフ。コノコトヲ式デ次ノ如クニ書ク。

$$a+ar+ar^2+\dots\dots=\frac{a}{1-r},\quad -1<r<1.$$

例　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\dots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

〔圖解〕例ヘバ1ヲ 1m ノ長サトスレバ, $\frac{1}{2}$ ハ $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{4}$ ハ $\frac{1}{4}m$ 等デ,コノ級數ヲ無限ニ續ケレバ

ソノ和ガ 2m ニ限リナク接近スルコトハ次ノ圖ヲ見テ知ラレル。



例　題

1. 次ノ無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。

(1) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\dots\dots$

(2) $9-6+4-\dots\dots$

2. 初項ガ2デ,初項カラ無限ニ至ル和ト第4項マデノ和トガ 256:175 ナル比ヲモツ等比級數ノ無限ニ至ル和ヲ求メヨ。

109. 循環小數

無限等比級數ノ和ヲ求メルコトヲ應用シテ,循環小數ヲ分數ニ直スコトガ出來ル。

例 1.　$0.\dot{4}=\frac{4}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{4}{10^2}+\dots\dots$

$$=\frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{10-1}=\frac{4}{9}.$$

例 2. $1.\dot{2}5\dot{4}=1+\frac{254}{1000}+\frac{254}{1000^2}+\frac{254}{1000^3}+\cdots\cdots$

$$=1+\frac{\frac{254}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=1+\frac{254}{1000-1}=1\frac{254}{999}.$$

小數第一位カラ直チニ循環部ガ始マル循環小數ヲ分數ニ直スニハ,循環部ヲ一通リ連記シタ數ヲ分子トシ,循環部ノ位數ダケ9ヲ列記シタ數ヲ分母トスレバ宜イ。

例 3. $3.1\dot{4}1\dot{6}=3+1.\dot{4}1\dot{6}\div10$

$$=3+1\frac{416}{999}\div10=3+\frac{1\times999+416}{9990}$$

$$=3+\frac{1(1000-1)+416}{9990}$$

$$=3+\frac{1000+416-1}{9990}$$

$$=3+\frac{1416-1}{9990}=3\frac{1415}{9990}\left(=3\frac{283}{1998}\right).$$

循環シナイ小數位ヲ含ム循環小數ヲ分數ニ直スニハ,循環シナイ部分ニ循環部ヲ一通リ連記シタ數カラ循環シナイ部分ヲ一通リ連記シタ數ヲ引イタ差ヲ分子トシ,循環部ノ位數ダケ9ヲ列記シコレニ循環シナイ部分ノ小數位ダケ0ヲ添ヘタ數ヲ分母トスレバ宜イ。

例　題

次ノ循環小數ヲ分數ニ直セ。

(1) $0.\dot{2}0\dot{3}$, $1.4\dot{7}\dot{8}$, $20.0\dot{0}57\dot{2}$

(2) $2.3\dot{1}\times0.45\dot{6}\dot{2}$, $0.2\dot{4}\dot{0}\div7.5\dot{1}$

雜　題 IX.

1. 二數ノ等差中項及ビ調和中項*ハ夫々 6 及ビ $5\frac{1}{3}$ デアル,ソノ二數ヲ求メヨ。

2. 二ツノ等差級數ノ第 n 項ノ比ハ,初項カラ第 $(2n-1)$ 項マデノ和ノ比ニ等シイコトヲ示セ。

3. 第 n 項ガ $3n-5$ ナル級數ノ第 n 項マデノ和ヲ求メヨ。

4. 100 ト 2000 トノ間ニアル 17 ノ倍數ノ和ヲ求メヨ。

---

* 一列ニナランデヰル若干箇ノ數ノ逆數ガ等差級數ヲナストキハ,モトノ一列ノ數ハ**調和級數**ヲナストイヒ,ソノ兩端ノ二數ヲ除イタ殘リノ諸數ヲソノ兩端ノ二數ノ**調和中項**トイフ. 又調和級數ヲ H.P. ト略記スル, Harmonical Progression ノ略記デアル

5. 150 項カラ成ル等差級數ガアル,ソノ公差ガ 7 デアル,コノ級數ノ偶數番目ノ項ノ和ト奇數番目ノ項ノ和トノ差ヲ求メヨ。

6. 等差級數 2, 5, 8, ……, 200 及ビ 2, 7, 12, ……, 202 ニ於テ相一致スル項ハ幾箇アルカ。又ソノ相一致スル項ノ總和如何。

7. 若干箇ノ連續スル奇數及ビ連續スル偶數ガアル,ソレラノ總和ハ 630 デ箇數ノ和ハ 22 デアル,又奇數ノ中ノ最小ナルモノハ 9 デ偶數ノ中ノ最大ナルモノハ 48 デアル,ソノ奇數及ビ偶數ノ各箇數ヲ求メヨ。

8. 某會社デ若干圓ヲ以テ賞與ヲ與ヘルニ,最高 500 圓トシ,ソレカラ 5 圓ヅツノ等差ヲツケテ分配スレバ 1040 圓殘ル,又 4 圓ヅツノ等差ニ變更スレバ 88 圓ノ不足ヲ生ズル,社員數及ビソノ總金額ヲ求メヨ。

9. 等比級數ヲナス三ツノ數ガアル,ソノ和ハ 28 デ逆數ノ和ハ $\dfrac{7}{16}$ デアル,コノ三ツノ數ヲ求メヨ。

10. 項數ノ相等シイ二ツノ等比級數甲乙ガアル,

初項ハ何レモ 1, 項ハスベテ正數デ末項ハ夫夫 a 及ビ $\dfrac{1}{a}$ デアル,然ルトキハ甲ノ和ト乙ノ和トノ比ハ a ナルコトヲ示セ。

11. 各項ガ正ノ數ナル等比級數ガアル,ソノ和ハ $\dfrac{6560}{2187}$ デアル,而シテ前半ノ項ノ中ノ最大ナルモノハ 2 デソノ和ハ $\dfrac{80}{27}$ デアル,コノ級數ノ項數ヲ求メヨ。

12. 或ル數ニ $1.\dot{2}\dot{5}$ ヲ乘ズベキヲ誤ッテ 1.25 ヲ乘ジタタメ積ニ於テ 1 ノ差ヲ生ジタ,或ル數ヲ求メヨ。

13. 無限等比級數ガアル,ソノ各項ヲ二乘及ビ三乘シタ級數ノ總和ハ夫々原級數ノ總和ノ 2 倍及ビ 3 倍デアル,原級數ノ公比ヲ求メヨ。

14. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} \dfrac{7}{8}x+\dfrac{2}{5}y=\dfrac{1}{4} \\ 0.0\dot{5}x-0.\dot{1}\dot{2}y=0.0\dot{5}\dot{2} \end{cases}$$

15. 或ル人 A カラ B ニ向ッテ出發シ第 1 日ニハ A カラ AB ノ中點ナル C ニ達シ,第 2 日ニハ C カラ CA ノ中點ナル D マデ戻リ,第 3 日ニ

ハDカラDCノ中點ナルEマテ進ンダ,以後斯クノ如ク一進一退シテ止マザルトキハコノ人ハ結局如何ナル點ニ限リナク近ヅクカ。

第十篇

對 數

第一章 一般ノ指數

110. 分數ノ指數

一般ニ或ル數ノ羃ノ n 乘根ヲ求メルニハ,モシソノ指數ガ n デ割リ切レルトキハ,ソノ指數ヲ n デ割レバヨイ。例ヘバ

$$\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a,$$

$$\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2,$$

$$\sqrt[n]{a^{kn}}=a^{\frac{kn}{n}}=a^k.$$

故ニ m ガ n デ割リ切レルトキハ次ノ公式ガ成立スル。

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

モシ m ガ n デ割リ切レナイトキハ,コノ公式ノ右邊ニ分數ノ指數ガ出來ルカラ,今マデ知レル範圍デハ意味ガナイモノトナル。ケレドモコヽデ新タニ

m ガ n デ割リ切レナイ場合ニモナホ $a^{\frac{m}{n}}$ ハ $\sqrt[n]{a^m}$ ノコトヲ表ハス

ト定義スレバ, m ガ n デ割リ切レルトキモ,割リ切レナイトキモ,常ニ

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

デアルトイフコトガ出來ル。今後常ニコノ意味ニ於テ分數ノ指數ヲ用ヰルコトトスル。例ヘバ

$$a^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}$$

ノ如クデアル。

例　題

1. 次ノ各冪ノ値ヲ求メヨ。

$$25^{\frac{1}{2}}, \qquad 8^{\frac{2}{3}}, \qquad 256^{\frac{3}{4}}, \qquad (-64)^{\frac{4}{3}}$$

2. a ノ平方ノ五乘根, b^2 ノ四乘根ノ七乘ヲ各冪ノ形ニ書ケ。

111. 零又ハ負ノ指數

m 及ビ n ガ正ノ整數デ, $m>n$ ナルトキハ

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \tag{1}$$

デアル。

モシ $m=n$ ナルトキニモ(1)ヲ成立セシメヨウトスレバ

$$\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}$$

即チ　　$1=a^0$

トナル。依ツテ一般ニ

或ル數ノ 0 乘冪ハ常ニ 1 デアル

ト定メル,即チ

$$a^0=1. \tag{2}$$

モシ $m<n$ ナルトキニモナホ(1)ヲ成立セシメヨウトスレバ,例ヘバ $n=m+p$ ト考ヘ

$$\frac{a^m}{a^{m+p}}=a^{m-(m+p)}$$

即チ　　$\dfrac{1}{a^p}=a^{-p}$

トナル。依ツテ一般ニ

或ル數ノ $-p$ 乘冪トハソノ數ノ p 乘冪ノ逆數デアル

ト考ヘルコトト定メル,即チ

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}. \tag{3}$$

又コノ定義ハ p ガ分數ノトキニモ適用サレルモ

ノトスル。例ヘバ

$$a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$$

ノ如クデアル。

$\boxed{\text{注意}}$ 公式(1)ハ元來 $a\neq0$ ト考ヘネバ成立シナイモノデアルカラ,本節ノ定義 (2), (3) 等ニ於テモ矢張リ $a\neq0$ トスベキコト勿論デアル。故ニ a^0 ガ 1 デアルトイフノハ a ガ 0 デナイトキニ限ル, 0^0 ハ定マツタ意味ヲモタナイ。

例　　題

次ノ各羃ノ値ヲ求メヨ。

$$27^{-\frac{2}{3}},\qquad (8^{-2})^{\frac{1}{3}},\qquad 32^{-\frac{3}{5}}$$

112. 一般ノ指數ノ法則

指數ガ正ノ整數ナル場合ニ證明サレタ指數ノ法則

$$a^ma^n=a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n}={}^{m-n}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

$$(ab)^n=a^nb^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

等ハ,指數ガ前二節ノ規約ニヨツテ擴張サレタ後ニモナホ成立スルモノデアル。例ヘバ

$$a^ma^n=a^{m+n}$$

ニ於テ, m 又ハ n ガ負ノ整數デモ成立スルコトヲ證明スルニ,試ミニ $m=-m'$ $(m'>0)$, $n>0$ トスレバ,前節ニ述ベタコトニヨリ,

$$a^ma^n=a^{-m'}a^n=\frac{1}{a^{m'}}a^n=\frac{a^n}{a^{m'}}$$

$$=a^{n-m'}=a^{n+m}=a^{m+n}.$$

ソノ他ノ場合ノ證明モコレニ準ジテ出來ル。

$\boxed{\text{例}}$ $\sqrt[3]{x^{-\frac{3}{4}}}(\sqrt[4]{x})^3\div x^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}x^{-2}$

$$=x^{-\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}\div x^{\frac{1}{4}}x^{-2}$$

$$=x^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+2}$$

$$=x^{\frac{9}{4}}.$$

例　　題

1. $10^{0.4}$, $10^{0.5}$, 3 ヲ大小ノ順ニナラベヨ。
2. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $(-32x^{10})^{\frac{3}{5}}$　　(2) $(a^{\frac{2}{3}}b^{4})^{\frac{1}{2}}a^{\frac{4}{3}}b$

(3) $ab^{-2}\div a^{-3}b$　　(4) $\left[a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{bc^{5}}\right]^{\frac{2}{3}}$

(5) $(x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}+2)(x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}-2)$

第二章 對 數

113. 對數ノ定義

$a^x=n$ ナルトキ,コノ x ノコトヲ「a ヲ底トスル n ノ**對數**」トイフ。即チ「a ヲ底トスル n ノ對數」トハ, a ヲ幾乘スレバ n ニ等シクナルカヲ示ス指數ノコトデアル。

a ヲ底トスル n ノ對數ノコトヲ記號デ

$$\log_a n$$

ト書ク。即チ $a^x=n$ 及ビ $x=\log_a n$ ハツマリ同ジ關係ヲイヒ表ハシタモノデアル。

例ヘバ

$2^3=8$　　故ニ $\log_2 8=3$,

$16^{\frac{1}{4}}=2$　　故ニ $\log_{16}2=\frac{1}{4}$,

$5^{-2}=\frac{1}{25}=0.04$　　故ニ $\log_5 0.04=-2$.

或ル數ノ對數ニ對シテモトノ數自身ヲソノ**眞數**トイフ。

通常對數ノ底 a トシテハ正數ヲ用キルコトトシ,且 $a\neq 1$ トスル,何トナレバ 1 ハ何乘シテモ常ニ 1 デコレヲ任意ノ一數 n ニ等シカラシメルコトガ出來ヌカラデアル。

サテ $a>0,\ a\neq 1$ トスレバ,對數ニハ次ノ性質ガアルコトハ容易ニ證明サレル。

(1) 零及ビ負數ハ對數ヲ有シナイ。

(2) 1 ノ對數ハ 0 デアル。

(3) 底ニ等シイ數ノ對數ハ 1 デアル。

(4) 二ツノ數ガ相等シケレバソノ對數モ亦相等シイ。逆ニ又二ツノ數ノ對數ガ相等シケレバソノ眞數モ相等シイ。

例 題

1. 5 ヲ底トスルトキ,次ノ各數ノ對數如何。

$25,\quad \sqrt{5},\quad 0.008,\quad \frac{1}{625}$

2. 次ノ各式カラ x ヲ求メヨ。

（1） $\log_x 128=14$　　（2） $\log_{2\sqrt{3}} 1728=x$

（3） $\log_{10} 0.001=x$　　（4） $\log_2 x=5.5$

114. 積及ビ商ノ對數

（1） 積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シイ。

何トナレバ

$$\log_a m=x,\qquad \log_a n=y$$

トスレバ，　$a^x=m,\qquad a^y=n.$

從ッテ　$mn=a^x a^y=a^{x+y}.$

故ニ　$\log_a(mn)=x+y$

$$=\log_a m+\log_a n.$$

因數ガ三ツアルトキハ

$$\log_a(mnp)=\log_a\{(mn)p\}$$

$$=\log_a(mn)+\log_a p$$

$$=\log_a m+\log_a n+\log_a p.$$

一般ニ因數ガ幾ツアルトキモ同樣ノ結果ヲ得ル。

（2） 商ノ對數ハ被除數ノ對數カラ除數ノ對數ヲ減ジタ差ニ等シイ。

何トナレバ

$$\log_a m=x,\qquad \log_a n=y$$

トスレバ，

$$a^x=m,\qquad a^y=n.$$

從ッテ　$\dfrac{m}{n}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}.$

故ニ　$\log_a\dfrac{m}{n}=x-y$

$$=\log_a m-\log_a n.$$

モシ特別ノ場合トシテ　$m=1$　トスレバ

$$\log_a\frac{1}{n}=\log_a 1-\log_a n=-\log_a n.$$

故ニ

（3） 或ル數ノ逆數ノ對數ハモトノ數ノ對數ノ符號ヲ變ジタモノニ等シイ。

注意　或ル數ノ逆數ノ對數ヲモトノ數ノ**餘對數**トイヒ，コレヲ colog ナル記號デ表ハスコトガアル.卽チ

$$\operatorname{colog}_a n=\log_a\frac{1}{n}=-\log_a n.$$

例　　題

1. $\log_{10}2=0.3010$ 及ビ $\log_{10}3=0.4771$ ヲ知ッテ，10 ヲ底トスル次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

$$6, \quad 5, \quad 0.5, \quad \frac{2}{3}$$

2. $\log_2 3=1.5850$ ノミヲ知ツテ,次ノ各數ノ2ヲ底トスル對數ヲ求メヨ。

$$6, \quad 4, \quad \frac{3}{2}, \quad 1.\dot{3}$$

115. 羃及ビ羃根ノ對數

或ル數ノ羃ノ對數ハモトノ數ノ對數ニソノ羃ノ指數ヲ乘ジタ積ニ等シイ。

何トナレバ

$$\log_a n=x$$

トスレバ,

$$a^x=n.$$

從ッテ $\quad n^r=(a^x)^r=a^{rx}.$

故ニ
$$\log_a(n^r)=rx$$
$$=r\log_a n.$$

コノ證明ニ於テ r ハ必ズシモ整數ナルヲ要シナイカラ,一般ニ

$$r=\frac{p}{q}$$

トスレバ,

$$\log_a\sqrt[q]{n^p}=\frac{p}{q}\log_a n.$$

例題

1. $\log_a x=m,\ \log_a y=n,\ \log_a z=p$ ナルトキ,次ノ各式ヲ m, n, p デ表ハセ。

(1) $\log_a\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{y^2z^4}$

(2) $\log_a\left(x^2y^3z^{-1}\times\dfrac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}\,y^{\frac{1}{2}}}\right)$

2. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\log_b n=\frac{\log_a n}{\log_a b}$$

3. 次ノ方程式カラ x ヲ求メヨ。

$$\log_a(x-2)+\log_a(x-3)=0$$

4. 次ノ聯立方程式カラ x 及ビ y ヲ求メヨ。

$$x^2+y^2=29, \qquad \log_{10}x+\log_{10}y=1$$

第三章　常用對數

116. 常用對數

對數ノ底ヲ10トスルトキハ計算上ニ種々便利

ナコトガアル。依ツテ實用上ニハ常ニ10ヲ底トスル對數ノミガ用ヰラレル,コレヲ**常用對數**トイフ。

注意 以下本書ニ於テ單ニ對數トイヘバ必ズ常用對數ノコトトシ,常用對數ヲ記號デ書クトキハ底ヲ省略スルコトトスル。例ヘバ單ニ $\log 2$ トイヘバ $\log_{10}2$ ノ意味デ, $10^x=2$ ナル如キ x ノコトデアル。

117. 指標及ビ假數

例ヘバ $\log 5.83=0.7657$

ナルコトヲ知ツテ, $\log 583$ ヲ求メレバ次ノ如クデアル。

$$\begin{aligned}\log 583&=\log(5.83\times10^2)\\&=\log 5.83+\log 10^2\\&=\log 5.83+2\log 10\\&=0.7657+2\\&=2.7657.\end{aligned}$$

コノ例ニヨツテ直チニ推知サレル如ク,一般ニ或ル數ヲ $10, 10^2, 10^3, \ldots\ldots$ 倍スルトキハ,ソノ對數ハ夫々 $1, 2, 3, \ldots\ldots$ ダケ増スモノデアル。即チ

或ル數ノ數字ノ排列ヲソノマヽニシテ小數點ノ位置ヲ一位右ニ移ス毎ニソノ對數ハ1ヅツ増ス。

小數點ノ位置ヲ一位左ニ移ス毎ニ對數ハ1ヅツ減ズル。

例ヘバ

$$\log 5830=0.7657+3=3.7657,$$

$$\log 0.583=0.7657-1=-0.2343.$$

サテ斯クノ如キ場合ニ,對數ニ整數 $1, 2, 3, \ldots\ldots$ 等ヲ加ヘルコトハ容易デアルガ,對數カラコレラノ整數ヲ減ズルトキニハ一般ニ小數點以下ノ數字ヲ悉ク變ゼネバナラヌ。依ツテソノ不便ヲ避ケルタメニ,常用對數ニ於テハソノ小數部分ハ常ニ正ナルヤウニシテ,例ヘバ

$$\log 0.583=0.7657-1=\bar{1}.7657,$$

$$\log 0.0583=0.7657-2=\bar{2}.7657$$

ノ如クニ書クコトトスル。コヽニ $\bar{1}, \bar{2}$ 等ハソノ負號ノ下ニアル數ノミガ負ナルコトヲ示スモノデ,小數位ニアル7657ハ正デアル。

コノ記數法ニ於ケル對數ノ整數部ヲ**指標**トイヒ,小數部ヲ**假數**トイフ。

整數部分ガ一位ナル正數ハ1ト10トノ間ニアル,故ニソノ對數ハ0ト1トノ間ニアル。例ヘバ

$$1<5.83<10$$

即チ $$10^0<5.83<10^1.$$

故ニ $$0<\log 5.83<1$$

デアル。一般ニ整數部分ガ一位ナル正數ノ對數ノ指標ハ0デアル。

而シテ既ニ知ル如ク,或ル數ノ數字ノ排列ヲソノマヽニシテ小數點ノ位置ヲ一位ヅツ右又ハ左ニ移スニ從ツテ,ソノ對數ノ指標ハ夫々1ヅツ增シ又ハ減ズルカラ,一般ニ次ノ法則ヲ得ル。

整數部分ガ0デナクシテn位ナル正數ノ對數ノ指標ハ$n-1$デアル。

整數部分ガ0デ小數第n位ニ始メテ0デナイ數字ヲモツ正數ノ對數ノ指標ハ$\bar{n}$デアル。

例

$$\log 58300=4.7657$$
$$\log 583=2.7657$$
$$\log 0.583=\bar{1}.7657$$
$$\log 0.00583=\bar{3}.7657$$

例　題

本節ノ例題ヲ解クニハ次ノ諸對數ハ既知トスル。

$\log 2=0.3010$	$\log 11=1.0414$
$\log 3=0.4771$	$\log 13=1.1139$
$\log 7=0.8451$	$\log 17=1.2304$

1. 次ノ各數ノ對數ノ指標ヲ求メヨ。

$1245,\quad 0.34,\quad 24\times10^5,\quad 946\div10^7$

2. 次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

$24,\quad 0.7,\quad 500,\quad 0.00012.$

$30^{10},\quad \sqrt{51}$

3. 次ノ各數ヲ對數トスル眞數ヲ求メヨ。

$\bar{2}.8451,\quad 3.1139,\quad 0.3010+\bar{3}.0414,$

$4.1139-0.3010,\quad 0.3010\times3,\quad \bar{4}.8451$

4. 2^{100}ハ幾位ノ數ナルカ。

5. $\dfrac{1}{3^{50}}$ハ小數點以下幾位ニ於テ始メテ有效數字ヲ有スルカ。

6. 次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{1}{2}\log 20449-\log\frac{7}{4}-\log\frac{13}{35}+\log\frac{5}{11}$$

7. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $\log(x-2)-\log(x^2-6x+8)+1=0$

(2) $\begin{cases}\log x+\log y=2+3\log 2\\ 2x+y=80\end{cases}$

118. 對數表

或ル數ノ對數ヲ算出スルコトハ一般ニ容易デナイ,又種々ノ數ノ對數ヲ一々記憶スルコトモ到底不可能デアルカラ,實際上ノ計算ニ於テハ數(卽チ眞數)トソノ對數トヲ相對照シテ列記シタ表ヲ用ヰル。ソノ表ヲ**對數表**トイフ。

ケレドモ對數ノ指標ハ前節ニ述ベタ法則ニヨッテ直チニ知ルコトガ出來ルカラ對數表ニハコレヲ揭載シナイ。又一般ニ對數ノ假數ハ必ズシモ有限小數デナイカラ表ニハコレヲ小數若干位マデニ四捨五入シタ値ヲ揭載スル。本書ノ卷末ニ添附シタモノハ小數第四位マデニ四捨五入シタモノデコレヲ**四桁ノ對數表**トイフ。

注意　精密ヲ要スル計算ヲスル場合ニハ,ソノ目的ニ應ジテ或ハ五桁或ハ七桁等ノ對數表ヲ使用スル。

以下本書中ノ問題デハ特ニ斷リナキ限リ卷末ノ四桁ノ對數表ヲ使用スルモノトスル。次ニソ

ノ見方ヲ例示スル。

例 1.　$\log 260$ ヲ求ム。

コノ對數ノ指標ガ2ナルコトハ直チニ觀察ニヨッテ知ル。次ニ假數ヲ求メルニハ,表ノ左端ノ欄デ26トアル所ヲ求メ,又表ノ上端ノ欄デ0トアル所ヲ求メ,26ノ右,0ノ下ニ當ル交叉點ニ4150トアル,コレ卽チ求メル假數デアル。故ニ

$$\log 260=2.4150.$$

例 2.　$\log 2.73$ ヲ求ム。

前例ノ如クニシテ假數ヲ求メレバ362ヲ得ル。ケレドモコレハ小數第一位ニ附スベキ4ヲ略シタモノデアルカラ

$$\log 2.73=0.4362$$

デアル。スベテ假數ノ小數第一位ハ同一ナルモノガ多數ニアルカラ,ソノ先頭ニアル一ツノ假數ノ他ハ表ニハコレヲ省略シテアル。

例 3.　$\log 0.798$ ヲ求ム。

コノ場合ニハ,左端ノ欄ノ79ノ右,上端ノ欄ノ8ノ下ニアル交叉點ニハ020ナル數ガアッテ,ソノ左上ニ * ナル記號ガツイテヰル。コノ記號ガア

ルトキハ,假數ノ小數第一位トシテ上方ニアル8ヲ取ラナイデ却ツテ下方ニアル9ヲ取ルコトトスル。故ニ

$$\log 0.798 = \bar{1}.9020.$$

例 4. log 3 ヲ求ム。

log 3 ノ假數ハ log 300 ノ假數ト同一デアル。故ニ

$$\log 3 = 0.4771.$$

例 5. $\log x = 2.6571$ カラ x ヲ求メヨ。

假數 6571 ニ對スル左端ノ欄ヨリ 45,上端ノ欄ヨリ 4 ヲ得テ 454 トシ,更ニ指標 2 ニ依リ $x=454$ ヲ得ル。

答 $x=454$

例 6. 對數 $\bar{3}.8028$ ノ眞數如何。

前題ノ如クニシテ假數 8028 ニ對スル 635 ヲ得,次ニ指數 $\bar{3}$ ニ依ツテ $x=0.00635$ ヲ得ル。

答 0.00635

例 題

1. 次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

647, 951000, 0.00509

2. 次ノ各對數ノ眞數ヲ求メヨ。

0.9243, $\bar{2}.9872$, 5.2014

119. 比例部分ノ理

與ヘラレタ數ガ三桁ヨリ多クノ有效數字ヲモツトキハ,ソノ對數ハ卷末ノ表ニ記載サレテヰナイ。コノ場合ニソノ對數ヲ求メヨウトスルトキハ

「二ツノ眞數ノ差ガ小ナルトキニハ,ソレニ伴フ對數ノ差ハホヾ眞數ノ差ニ比例スル」

ト見做シテコレヲ計算スル。コレヲ**比例部分ノ理**ト稱ヘル。

例 1. log 4452 ヲ求ム。

表ニヨリ $\log 4450 = 3.6484,$

$\log 4460 = 3.6493.$

故ニ $\log 4460 - \log 4450 = 0.0009.$

依ツテ $\log 4452 - \log 4450 = x$

トスレバ,比例部分ノ理ニヨリ

$$(4460-4450):(4452-4450) = 0.0009 : x,$$

卽チ $10:2 = 0.0009 : x.$

故ニ $x=0.0009\times\frac{2}{10}=0.00018.$

依ツテ
$$\begin{aligned}\log 4452&=\log 4450+0.00018\\&=3.6484+0.00018\\&=3.64858.\end{aligned}$$

コノ結果ヲ四捨五入シテ

$$\log 4452=3.6486.$$

コノ計算ニ於ケル 0.0009 (又ハ小數第四位ヲ單位トシテ單ニ 9)ノ如キ數ヲ**表差**トイヒ,又 0.00018 (又ハ單ニ 1.8) ノ如キ數ヲ**比例部分**トイフ。

實際ニハ上ノ如キ計算ノ勞ヲ省クタメニ,種々ノ表差ニ對シテソノ

$$\frac{1}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{3}{10},\ \cdots\cdots,\ \frac{9}{10}$$

等ヲ表ニ作ツタモノヲ對數表ノ傍ニ添ヘテアルノガ普通デアル,コレヲ**比例部分ノ表**ト稱ヘル。本書ノ卷末ニ附シタ比例部分ノ表ニ於ケル上欄ノ見出シハ表差デ,左端ノ見出シ 1, 2, ... ハ夫々 $\frac{1}{10},\ \frac{2}{10},\cdots\cdots$ ノ意味デアル。

上ニ擧ゲタ例ハ實際ノ計算デハ比例部分ノ表ヲ用キテ次ノ如クニ記セバヨイ。

$$\begin{array}{lr}\log 4450=3.6484 & \text{表差 } 9\\ \quad 2\ \cdots\cdots\cdots 1.8 & \\ \hline \log 4452=3.6485\,8 & \end{array}$$

コレヲ四捨五入シテ

$$\log 4452=3.6486.$$

例 **2.** $\log 1.8765$ ヲ求ム。

$$\begin{array}{lr}\log 1.87\ \ =0.2718 & \text{表差 } 24\\ \quad 6\cdots\cdots\cdots\cdots 14.4 & \\ \quad 5\cdots\cdots\cdots\ 12.0 & \\ \hline \log 1.8765=0.27336 & \end{array}$$

コレヲ四捨五入シテ

$$\log 1.8765=0.2734.$$

例 **3.** $\log x=1.8435$ カラ x ヲ求ム。

$$\begin{array}{lr}\log x\ \ =1.8435 & \text{表差 } 7\\ \log 69.7\ \ =1.8432 & \\ \hline \qquad\qquad 3 & \\ \quad 4\cdots\cdots\cdots\cdots 2.8 & \\ \hline \log 69.74=1.84348 & \end{array}$$

故ニ $x=69.74$ トスル。

例 題

1\. 次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

1324, 0.08451, 7.3008

2\. 次ノ各對數ノ眞數ヲ求メヨ。

0.9093, $\bar{1}.8030$, 2.6872

120. 對數ノ應用

例 1. $x=64.27\times3.1416$ ヲ計算セヨ。

$$\log 64.27=1.8080$$
$$\log 3.1416=0.4971$$
$$\log x=2.3051$$
$$x=201.9$$

例 2. $x=\dfrac{1.234}{780.9}$ ヲ計算セヨ。

$$\log 1.234=0.0913$$
$$\log 780.9=2.8926$$
$$\log x=\bar{3}.1987$$
$$x=0.00158$$

例 3. $x=\sqrt[5]{(0.3427)^3}$ ヲ計算セヨ。

$$\log 0.3427=\bar{1}.5349$$

$$\begin{aligned}\log(0.3427)^3&=3\times\bar{1}.5349\\&=3(-1+0.5349)\\&=-3+1.6047\ \ldots\ldots\ldots(1)\\&=\bar{2}.6047\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log x&=\frac{1}{5}\times\bar{2}.6047\\&=\frac{1}{5}(-2+0.6047)\\&=\frac{1}{5}(-5+3.6047)\\&=-1+0.7209\ \ldots\ldots\ldots(2)\\&=\bar{1}.7209\end{aligned}$$

故ニ $x=0.5259.$

指標ガ負ナル對數ニ正ノ整數ヲ乘ズルニハ,(1)ノ如ク指標ト假數トニ別々ニソノ整數ヲ乘ジテ後,ソレラノ積ノ代數和ヲ作レバヨイ。又指標ガ負ナル對數ヲ正ノ整數デ割ルニハ,(2)ノ如ク先ヅ指標ヲソノ整數ノ倍數ニ直シテ後,コレヲ割レバ宜イ。

例 4. $\dfrac{(27.4)^3\times\sqrt{1.58}}{\sqrt[3]{76.42\times0.9963}}$ ヲ計算セヨ。

先ヅコノ分數ヲ x トシ,ソノ分子ヲ a, 分母ヲ $\sqrt[3]{b}$ トスレバ,

$$x=\frac{a}{\sqrt[3]{b}}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log 27.4=1.4378 & \log 76.42\ =1.8832 \\
\log 1.58=0.1987 & \log 0.9963=\bar{1}.9984 \\
\hline
3\log 27.4=4.3134 & \log b=1.8816 \\
\frac{1}{2}\log 1.58=0.0994 & \frac{1}{3}\log b=0.6272 \\
\hline
\log a=4.4128 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log a=4.4128 \\
\frac{1}{3}\log b=0.6272 \\
\hline
\log x=3.7856
\end{array}$$

故ニ $$x=6104.$$

例　　題

1. 對數ヲ應用シテ次ノ各式ヲ計算セヨ。

（1） $\sqrt{\frac{5}{7}}$　　（2） $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(7.62)^2$

（3） $1\div 2.7183$　　（4） $\frac{83.5\times\sqrt[3]{4.57}}{\sqrt{0.351\times 187.3}}$

2. 球ノ半徑ヲ r トスレバ,ソノ表面積ハ $4\pi r^2$ デ,體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル,今地球ノ周圍(子午線)ノ長サヲ約 40000 km トスレバ,地球ノ表面積及ビ體積各如何。

3. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

（1） $3^x=2$　　（2） $2^{2x}-7\times 2^x+12=0$

（3） $x^2+y^2=a^2,\quad \log x+\log y=b$

4. 對數表ヲ用ヰテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$2^{2x-13y}=3,\qquad 3^{5x-7y}=9^{2x}$$

雜　　題 X.

1. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

（1） $\dfrac{\log\sqrt{8}+\log 27-\log\sqrt{1000}}{\log 1.8}$

（2） $\log\dfrac{4}{\sqrt{125}}+\log\dfrac{125}{3\sqrt{8}}-\log\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

（3） $\log\dfrac{28}{15}-2\log\dfrac{3}{14}+3\log\dfrac{6}{7}$

2. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

（1） $2^{(1-x)}-33\times 2^{\left(-\frac{x}{2}-2\right)}+1=0$

（2） $1+\log(x-1)-\log(x^2-5x+4)=0$

（3） $x^{\log x}=\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}$

（4） $\begin{cases}\log(x-y)+\log(7x-8y)=2\\ \log(x^3+y^3)-\log(x^2-xy+y^2)=1\end{cases}$

3. $2\log\left\{\frac{1}{2}(a-b)\right\}=\log a+\log b$ ナルトキ比 $a:b$ ノ値如何。

4. 或ル數 x ノ常用對數ノ 2 倍ハ $\left(x+\frac{11}{10}\right)$ ノ常用對數ヨリモ 1 ダケ大デアル,ソノ數 x ヲ求メヨ。

5. $(1.08)^{30}$ ハ 10 ヨリ大ナルカ又ハ小ナルカ。

6. $2^n>100000>2^{n-1}$ ナル關係ノ成立スル n ノ整數値ヲ求メヨ。

7. 次ノ各式ヲ計算セヨ。

(1) $\dfrac{\sqrt[5]{0.00345\times30000}}{9753}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{21.55\times1.068}}{(25.6)^3\times\sqrt{1.77}}$

8. 次式ヲ次ノ與ヘラレタ表ニヨツテ計算セヨ。

$$5.3417\times\sqrt[4]{27.39\times\sqrt[3]{0.14395}}$$

眞數	1.039	1.040	1.439	1.440	2.739	5.341	5.342
對數	0.01662	0.01703	0.15806	0.15836	0.43759	0.72762	0.72770

第十一篇

歩合算

121. 歩合

歩合ノ意味及ビコレニ關スル簡單ナル事項ハ既ニ算術デ學ンダケレドモ,コヽニ再ビソノ大要ヲ述ベル。

或ル數 R ノ他ノ數 A ニ對スル比ノ値ヲ小數デ表ハシタモノヲ**歩合**トイヒ,A ヲ**元高**,R ヲ**歩合高**トイフ。

例ヘバ 500 圓ノ 2000 圓ニ對スル歩合ハ 0.25 デ,コヽニ 500 圓ハ歩合高, 2000 圓ハ元高デアル。

一般ニ歩合ヲ r トスレバ

$$r=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}},$$

依ツテ $\qquad \mathrm{R}=\mathrm{A}r, \qquad \mathrm{A}=\frac{\mathrm{R}}{r}$

ナル關係ガアル。

元高ト歩合高トノ合計ヲ**合計高**トイヒ,元高カラ歩合高ヲ引イタ殘リヲ**殘高**トイフ。

合計高ヲ S, 殘高ヲ D トスレバ

$$S=A+R=A(1+r),$$

$$D=A-R=A(1-r).$$

依ッテ $$A=\frac{S}{1+r}=\frac{D}{1-r}.$$

例 定價 1.50 圓ノ品物ヲ定價ノ 2 割引デ買ヘバ幾ラ拂フベキカ。

解 元高 1.50 圓,歩合 0.2 ニ對スル殘高ヲ求メレバヨイ。卽チ

150(1−0.2)=120. 答 1.20 圓

例 題

1. 2 割 4 分引イテ 190 圓トナル品ガアル,モシ割引シナケレバ幾圓カ。
2. 品物ヲ買フトキ價ヲ 1 割引クノト,價ヲ引カナイデ品物ヲ 1 割多クトルノトハ何レガ利益カ。
3. 或ル人或ル買物ノ周旋ヲナシ,手數料トシテ買値ノ 1 割 2 分 5 厘ニ當ル 185 圓ヲ得タ,買値ハ何程カ。

4. 23% ノ利益ヲ見積ッテ定價ヲ附ケタ商品ヲ,定價ノ 15% 引デ賣レバ利益ノ歩合何程カ。

122. 單利法

金錢ノ貸借ニ於テ借主ガ,ソノ借用金高(元高)ノ他ニ一定ノ歩合(利率)ヲ定メ期間ニ應ジテ貸主ニ支拂フ金高ヲ**利子**又ハ**利息**トイフ。ナホコレニ關スル用語ノ意味ハ次ノ如クデアル。

元金..............元高..............A

利率..............歩合..............r

利子..............歩合高...........R

元利合計........合計高...........S

上ニ利率ト稱ヘタモノハ單位期間ノ利子ノ元金ニ對スル歩合デ,ソノ單位ガ 1 箇年又ハ 1 箇月ナルニ從ッテ夫々**年利率**又ハ**月利率**トイフ。1 日ヲ單位トスルトキハ利率ガアマリ小サクナルカラ,特ニ元金 100 圓ニ對スル利子ノ金高ヲ以テ利率ヲ示シ,コレヲ**日歩**トイフ。例ヘバ日歩 1 錢 8 厘トイヘバ 100 圓ニツキ 1 日ニ 1 錢 8 厘ノ割合ナルコトヲ示ス。

利子ガ元金ニモ期間ニモ比例スルモノトシテ計算スル法ヲ**單利法**トイフ。

期間ヲ t トスレバ,單利法ニ關スル主ナル公式ハ下ノ如クデアル。

$$R=Art,$$

$$S=A+R=A(1+rt).$$

例 題

1. 元金 540 圓,年利率 4 分 8 厘, 2 年 4 箇月ノ元利合計ヲ求メヨ。
2. 元金 350 圓ヲ年利 8 分 5 厘デ貸シ,元利合計 454.125 圓ヲ得タトイフ,期間ヲ求メヨ。

123. 手形ノ割引

手形トハコレト引替ヘニ或ル金額(**額面高**)ヲ或ル期日ニ支拂フコトヲ記シタ證券デアル。手形ノ受取人ガソノ支拂期日ヨリモ前ニ金ヲ受取ラウトスルトキハ,ソノ手形ヲ銀行ニ賣渡シ,ソノ日カラ期日マデノ間ニ相當スル利子(**割引高**)ヲ額面高カラ引去ツタ殘高(**手取金**)ヲ受取ルノデアル。

斯クスルコトヲ**手形ノ割引**トイフ。

額面高…………元高……………A
割引歩合 ……歩合……………r
割引高…………歩合高 ………R
手取金…………殘高……………D
期間(賣渡日カラ支拂期日マデノ間) ………………t

トスレバ

$$R=Art,$$

$$D=A-R=A(1-rt).$$

コノ計算法ニヨル割引ヲ**銀行割引**トイフ。

ケレドモ理論上カライヘバコノ計算法ハ不合理デアル。手取金ヲ算出スルニハ,コレニ期間 t ダケノ利子ノ附イタモノガ丁度額面高 A トナルヤウニスベキ筈デアル。斯クノ如キ手取金ヲ x トスレバ,

$$x(1+rt)=A,$$

故ニ

$$x=\frac{A}{1+rt}$$

トナル。コノ方法ニヨル割引ヲ**眞割引**トイヒ,コノ x ヲ**現價**トイフ。

注意　實際ニハ眞割引ハ計算ガ面倒ナルタメニ用キラレナイデ,銀行割引ノミガ行ハレル。從ツテ現價トイフ語ハ銀行割引ノ手取金ノコトニモ用キラレル。

銀行割引ニヨル方ガ眞割引ニヨルヨリモ割引高ガ多イ。

例　題

1. 割引歩合日歩2錢5厘,日數50日ノ銀行割引ハ日歩何程ノ眞割引ニ相當スルカ。

2. 額面3000圓,支拂期日5月10日ナル爲替手形ヲ或ル日ニ銀行ニ持チ行キ,日歩2錢6厘デ割引シテ賣渡シ手取金2985.18圓ヲ得タ,ソノ日ハ何日デアツタカ,但シ賣渡シノ當日ト支拂期日トハ兩方トモ期間ニ算入スルモノトスル。

124. 支拂期日ノ平均

例ヘバ今日ヨリ夫々 l 日, m 日, n 日後ニ支拂フベキ額面A圓,B圓,C圓ノ三枚ノ手形ガアル,コレヲ額面 (A+B+C) 圓ナル一枚ノ手形ニ書キ換ヘルトスレバ,ソノ支拂期日ヲ今ヨリ幾日後トナ

スベキカヲ考ヘル。

求メル期日ヲ今ヨリ x 日後トシ,1日ヲ單位トスル利率ヲ r トシテ銀行割引ノ法ニヨレバ,額面A圓,B圓,C圓ノ手形ノ今日ニ於ケル現價ハ夫々 $A(1-lr)$ 圓, $B(1-mr)$ 圓, $C(1-nr)$ 圓デアル。又額面 $(A+B+C)$ 圓デ支拂期日ガ今ヨリ x 日後ナル手形ノ現價ハ $(A+B+C)(1-xr)$ 圓デアル。故ニ求メル日數 x ハ次ノ方程式ヨリ定メラレル。

$$A(1-lr)+B(1-mr)+C(1-nr)$$
$$=(A+B+C)(1-xr).$$

故ニ
$$x=\frac{Al+Bm+Cn}{A+B+C}.$$

コノ種ノ問題ヲ**支拂期日ノ平均**トイフ。

例　題

1. 今ヨリ夫々5箇月,7箇月,10箇月後ニ支拂フベキ負債ノ150圓,350圓,500圓ヲ整理シテ一時ニ1000圓ヲ支拂ツテ皆濟スルニハ,支拂期日ヲ如何ニスベキカ,但シコノ計算ニ於テ1箇月未滿ノ端數ヲ得タトキハ1箇月ヲ

30日トシテ日數ニ直シ,1日未滿ハ四捨五入スルモノトスル。

2. 今ヨリ1箇年後ニ2500圓ヲ拂フベキ義務アル人ガ,若シ8箇月後ニ1500圓ヲ拂フコトトスレバ,殘金1000圓ハ何時拂ヘバヨイカ。

125. 複利法

複利法トハ每期ノ終リニ於テソノ期間ニ生ジタ利子ヲ元金ニ加ヘ,ソノ和ヲ次ノ期間ノ元金トシテマタソノ利子ヲ生ゼシメ,次第ニ斯クノ如クシテ元金ヲ增加シツヽ利子ヲ生ゼシメテユク法デアル。郵便貯金,銀行預金等ハ何レモ1箇年又ハ半箇年ヲ1期トシテ複利法ニヨツテ利子ヲ計算スル。

元金ヲA圓,利率ヲrトスレバ,第1期ノ終リニ於ケル元利合計ハ$A(1+r)$圓トナル。而シテコレガ第2期ノ元金デアルカラ,第2期ノ終リニ於ケル元利合計ハ$A(1+r)^2$圓トナル。次第ニ斯クノ如クシテ一般ニ第n期ノ終リニ於ケル元利合計ヲS圓トスレバ

$$S=A(1+r)^n$$

トナル。

今A圓ダケノ金ヲ他カラ受取ル代リニ,コレヲソノマヽn期間貸シ付ケテ置ケバ,n期ノ終リニハ元利合計S圓トナツテ返ツテ來ル筈デアル,ツマリ今日ノA圓トn期後ノS圓トハ同等ノ價値ヲモツト考ヘテヨイ。依ツテA圓ノコトヲn期後ニ受取ルベキ金額S圓ノ**現價**トイフコトガアル。現價ヲ求メル公式ハ次ノ如クデアル。

$$A=\frac{S}{(1+r)^n}$$

例 1. 元金350圓,年利4分8厘,1年每ノ複利トスレバ,15年後ノ元利合計幾許ナルカ。

解 $S=350(1+0.048)^{15}.$

$$\begin{aligned} \log 350 &= 2.5441 \\ 15\log 1.048 &= 0.3054 \qquad \log 1.048=0.0203613 \\ \hline \log S &= 2.8495 \\ S &= 707.2 \end{aligned}$$

答 707.2圓

注意 $\log(1+r)$ノ値ハ精密ヲ要スルニヨリ特ニ卷末ニアル七桁ノ表ニヨツテコレヲ求メルコトトシタ。

例 2. 前題ニ於テ,期間ヲソノ$\frac{1}{4}$トスレバ元利

合計ハ何程ナルカ。

解　15年ノ$\frac{1}{4}$ハ3年9箇月デアル。依ツテ先ヅ3年間ノ元利合計ヲS_1圓トスレバ

$$S_1=350(1+0.048)^3.$$

次ニS_1圓ヲ元金トシテ9箇月間ノ元利合計S圓ヲ求メレバ,

$$S=S_1\left(1+0.048\times\frac{9}{12}\right)=S_1\times1.036.$$

故ニ結局　$S=350\times1.048^3\times1.036.$

$$\begin{array}{rl} \log 350=2.5441 & \\ 3\log 1.048=0.0611 & \qquad \log 1.048=0.0203613 \\ \log 1.036=0.0153 & \\ \hline \log S=2.6205 & \\ S=417.4 & \qquad 答\ 417.4\ 圓 \end{array}$$

注意　公式$S=A(1+r)^n$ニ於ケルnハ必ズ正ノ整數ナルベキモノデアル。故ニ期間ガ單位未滿ノ端數ヲ有スルトキハ,ソノ部分ダケハコノ例ノ如クニ計算スルノデアル。

例 3.　元金2500圓,年利4分,1年毎ノ複利デ元利合計3500圓ヲ得ルニハ幾年幾箇月間貸スベキカ,但シ1箇月未滿ハ1箇月ニ切上ゲルモノトスル。

解　上ノ注意ニ述ベタ如ク,公式ニ於ケルnハ必ズ正ノ整數ナルヲ要スルケレドモ,假リニnガ1期未滿ノ端數ヲ有スルモノトシテSヲ求メテモ大體眞ニ近イ値ガ得ラレル。依ツテ今試ミニ

$$3500=2500(1+0.04)^n$$

ト置イテ見レバ

$$7=5\times1.04^n,$$

即チ　$1.4=1.04^n.$

故ニ　$$n=\frac{\log 1.4}{\log 1.04}=\frac{0.1461}{0.0170}=\frac{1461}{170}.$$

$$\begin{array}{r} \log 1461=3.1647 \\ -\ \log 170=2.2304 \\ \hline \log n=0.9343 \\ n=8.596 \end{array}$$

故ニ求メル期間ハ約8箇年半ナルコトヲ知ル。

コヽニ於テ更ニソノ1年未滿ノ端數ヲx箇月トスレバ

$$3500=2500(1+0.04)^8\left(1+0.04\times\frac{x}{12}\right).$$

コレヨリ次ノ如クニシテxヲ求メル。

$$1+\frac{x}{300}=\frac{1.4}{1.04^8}.$$

$$\log 1.4=0.1461$$
$$8\log 1.04=0.1363 \qquad \log 1.04=0.0170333$$
$$\log\left(1+\frac{x}{300}\right)=0.0098$$
$$1+\frac{x}{300}=1.023 \qquad x=6.9$$

答 8年7箇月

注意 以上ノ諸例ニ於テハ元金ノ全部ニ利子ヲ附ケルコトトシタケレドモ,實際ニ行ハレル所デハ必ズシモサウデナイ。例ヘバ銀行デハ元金ノ10圓未滿ニハ利子ヲ附ケナイ。郵便貯金デハ10錢未滿ニハ利子ヲ附ケナイ,而シテ每期ノ利子ノ計算ニ於テソノ厘以下ハ切捨テル。從ツテ實際ニ於テハ元利合計ヲ求メルニ上ノ如ク對數ヲ用キテ一度ニ計算スルコトハ出來ナイ,矢張リ算術デシタヤウニ各期每ニ一々利子ヲ計算シテ元金ニ加ヘテ行カネバナラヌ。

例 題

1. 元金7500圓,年利4分6厘,半年每ノ複利トスレバ10年間ニ元利合計何程トナルカ。

2. 元金9000圓,年利5分,1年每ノ複利デ元利合計16000圓ヲ得ルニハ期間ヲ幾年幾箇月トスベキカ。

3. 年利5分トシテ,今カラ25年後ニ受取ルベキ金10000圓ノ現價ヲ求メヨ,但シ1年每ノ複利トスル。

126. 年賦積立

今 a 圓ヲ貯金シ,ナホ今後滿1年每ニ a 圓ヅツ逐次ニ積立テルコトトシ,年利率 r, 1年每ノ複利デ利子ヲ加ヘテ行ケバ,第 n 回目ノ a 圓ヲ貯金シタトキ(卽チ今ヨリ滿 $n-1$ 年後)ノ元利合計何程トナルカヲ考ヘル(コレヲ**年賦積立**トイフ)。

先ヅ最初カラ順次ニ貯金シテ行ツタ a 圓ハ最後ノ時マデニ夫々次ノ如キ元利合計トナツテ居ル。

	貯金後經過年數	元利合計
最　初ノ a 圓	$n-1$	$a(1+r)^{n-1}$ 圓
第2回ノ a 圓	$n-2$	$a(1+r)^{n-2}$ 圓
第3回ノ a 圓	$n-3$	$a(1+r)^{n-3}$ 圓
…………		
…………		
第 $(n-1)$ 回ノ a 圓	1	$a(1+r)$ 圓
最後ノ a 圓	0	a 圓

依ツテ求メル總計ヲ S 圓トスレバ

$$S=a\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+(1+r)+1\}$$

$$=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}.$$

故ニ
$$S=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}.$$

例 1. 毎年末ニ金 100 圓ヅツ預ケユクトキハ滿25年ノ終リニハ元利合計何程トナルカ,但シ年利率 4 分 8 厘デ 1 年毎ノ複利トスル。

解
$$S=\frac{100}{0.048}\{1.048^{25}-1\}.$$

先ヅ　$1.048^{25}=x$　ト置ケバ

$$\log 1.048=0.0203613$$

$$\log x=25\log 1.048=0.5090$$

$$x=3.228$$

故ニ
$$S=\frac{222.8}{0.048}=4641.66\ldots\ldots$$

答　約 4642 圓

例 2. 毎年ノ始メニ若干圓ヅツヲ貯金シテ行キ滿30年ノ終リニ元利合計 10000 圓ヲ得ルニハ何程ヅツ貯金スベキカ,但シ年利率 5 分, 1 年毎ノ

複利トスル。

解 滿30年ノ終リニハ第30回ノ貯金ヲ終ツテヨリ更ニ 1 年間ノ利子ガ附イテ居ル筈デアル。

故ニ
$$10000=\frac{a}{0.05}(1.05^{30}-1)\times 1.05$$

先ヅ　$1.05^{30}=x$　ト置ケバ

$$\log 1.05=0.0211893$$

$$\log x=30\log 1.05=0.6357$$

$$x=4.322$$

故ニ
$$a=\frac{10000}{21\times 3.322}$$

$$\begin{array}{r} \log 21=1.3222 \\ \log 3.322=0.5214 \\ \hline 1.8436 \\ \log a=2.1564 \\ a=143.4 \end{array}$$

答　143.4 圓

127. 年賦返濟

今 A 圓ヲ借リタトシ,年利率 r, 1 年毎ノ複利デ利子ヲ計算スルモノトスル。サテコレヲ返濟スルニ今ヨリ後滿 1 年毎ニ若干圓ヅツ等額ノ金ヲ返シテ行キ,丁度 n 年後ニナツテ皆濟トナルヤウニスルニハ,毎回何程ヅツ返濟スベキカヲ考ヘル

(コレヲ**年賦返濟**トイフ)。

先ヅ毎回返濟スベキ金高ヲ a 圓トスル。今借リタA圓ハ1年後ニハ元利合計 $A(1+r)$ 圓トナル, コノトキ a 圓ダケ返濟スルカラ殘ツタ借金ハ

$$A(1+r)-a\,(\text{圓})$$

デアル。故ニ第2年目ノ終リニハソノ元利合計ハ

$$\{A(1+r)-a\}(1+r) \quad \text{即チ} \quad A(1+r)^2-a(1+r)\,(\text{圓})$$

トナル。コノトキマタ a 圓ダケ返濟スルカラ殘ツタ借金ハ

$$A(1+r)^2-a(1+r)-a\,(\text{圓})$$

デアル。

次第ニ斯クノ如クニシテ進ミ,第 n 年目ノ終リニ殘ツタ借金ガ0トナルヤウニスレバヨイ。依ツテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$A(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots-a(1+r)-a=0.$$

即チ
$$A(1+r)^n=a\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(1+r)+1\}$$
$$=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}.$$

コレカラ a ヲ求メレバ

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=\frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}.$$

例　金7000圓ノ借金ヲ,年利6分,1年毎ノ複利デ,12箇年ノ年賦償却ヲスルニハ,年賦金如何。

解
$$a=\frac{7000\times0.06}{1-1.06^{-12}}$$

先ヅ $1.06^{-12}=x$ ト置ケバ

$$\log 1.06=0.0253059$$
$$\log x=-12\log 1.06=\bar{1}.6963$$
$$x=0.4969$$

故ニ
$$a=\frac{420}{0.5031}$$

$$\log 420=2.6232$$
$$\log 0.5031=\bar{1}.7017$$
$$\log a=2.9215$$
$$a=834.6$$

答　834.6 圓

128. 年　金

年々一定ノ額ダケ支拂ハレル金ヲ**年金**トイフ。或ル定マツタ期間内ダケ支拂ハレル年金ヲ**定期年金**トイヒ,無限ニ繼續スル年金ヲ**永續年金**トイフ。

今ヨリ満1年毎ニa圓ヅツn年間支拂ハレル定期年金ガアルトシ,年利率r, 1年毎ノ複利デ,ソノ年金ノ毎回ノ支拂高ノ今日ニ於ケル現價ヲ求メレバ次ノ如クデアル。

満1年後ニ受取ルベキa圓ノ現價……$\frac{a}{1+r}$圓

満2年後 〃 〃 〃 ……$\frac{a}{(1+r)^2}$圓

………………………………

………………………………

満n年後 〃 〃 〃 ……$\frac{a}{(1+r)^n}$圓

コレラノ原價ノ總和ヲA圓トスレバ

$$A=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{a}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{a}{1+r}\,\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{a}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}. \quad (1)$$

コレヲ定期年金ノ<u>現價</u>トイフ。

モシコノ年金ガ永續年金ナラバ,ソノ現價ハ

$$A=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots\cdots$$

デ,コノ右邊ハ無限等比級數トナル。而シテコノ

公比$\frac{1}{1+r}$ハ明カニ1ヨリ小デアルカラ,ソノ和ガ求メラレル。即チ

$$A=\frac{\frac{a}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{a}{r} \quad (2)$$

トナル。

[例] 今カラ満5年後ヨリ始メテ10年間繼續スル100圓ヅツノ年金ガアル,年利率5分, 1年毎ノ複利デ,コノ年金ノ今日ニ於ケル現價ヲ求メヨ。

[解] 今ヨリ満4年後ニ於ケルコノ年金ノ現價ハ公式ニヨリ

$$\frac{100}{0.05}(1-1.05^{-10})\text{圓}$$

デアル。故ニ今日ニ於ケル現價ヲA圓トスレバ次ノ式ヲ得ル。

$$A=\frac{100}{0.05}(1-1.05^{-10})\times\frac{1}{1.05^4}.$$

コレヲ計算スルニ,先ヅ $1.05^{-10}=x$ ト置ケバ

$\log 1.05=0.0211893$

$\log x=-10\log 1.05=\bar{1}.7881$

$x=0.6139,\qquad 1-x=0.3861.$

$$\begin{array}{rr} \log 100 = 2.0000 & \log 0.05 = \bar{2}.6990 \\ \log 0.3861 = \bar{1}.5867 & 4\log 1.05 = 0.0848 \\ \hline 1.5867 & \bar{2}.7838 \\ \bar{2}.7838 & \\ \hline \log A = 2.8029 & \\ A = 635.1 & \end{array}$$

答 635.1 圓

例 題

1. 年利率 5 分 5 厘デ,毎年ノ初メニ金100圓ヅツ貯金スルトキハ,25年ノ終リニハ元利合計何程トナルカ。

2. 毎年末金50圓ヅツ積ムトキハ,幾年ノ後ニ初メテ元利合計ガ1000圓ヲ超エルカ,但シ年利率ヲ 4 分 8 厘トスル。

3. 毎年末金 100 圓ヅツヲ支拂ツテ金2400圓ノ負債ヲ償却スルニ,年利率ヲ 4 分トスレバ幾年デ償却シ終ルカ,但シ最後ノ年ニハ 100 圓未滿ヲ支拂フモノトスル。

4. 年利率 5 分トスルトキハ永續年金 250 圓ノ現價如何。

5. 今カラ向フ10箇年間ハ毎年末ニ 100 圓ヲ受ケ,ソノ後ハ毎年末ニ50圓ヅツヲ永久ニ受ケル年金ガアル,年利率 4 分 8 厘トシテソノ現價ヲ計算セヨ。

雜 題 XI.

1. 甲壜中ニ 2 *kg*, 乙壜中ニ 1 *kg* ノ食鹽水ガアル,今甲カラ乙ニ 400 *g* ヲ移シヨク混ジタ後乙カラ甲ニ800 *g* ヲ移シタラバ,甲乙兩壜ノ液ハ夫々 2% 及ビ 3% ノ食鹽水トナツタ,元ノ液ハ各何ぱーせんとノモノカ。

2. 或ル水田ノ今年ノ米收穫量ハ平年ニ比シテ 2 割 5 分ノ減收デ,昨年ニ比スレバ 4 割ノ減收デアル,而シテ昨年ハ平年ヨリ 1 反歩ニツキ 5 斗 5 升ノ增收デアツタトイフ,今年コノ水田 1 反歩當リノ收穫量何程カ。

3. 甲ハ若干圓ヲ資本金トシ乙ハ甲ヨリ 900 圓少イ資本金デ夫々獨立シテ商業ヲ營ミ何レモ 540 圓ノ利益ヲ得タ,而シテコノ利益ノ歩

合ノ差ハ 2% デアル,甲乙兩人ノ利益ノ歩合及ビ資本金ヲ求メヨ。

4. 500 圓ヲ 1 箇年貸シテ得タ元利合計ニ更ニ80圓ヲ加ヘテ再ビ同ジ利率デ 1 箇年貸シテ元利合計 624 圓ヲ得タ,ソノ年利率ヲ求メヨ。

5. 金 2400 圓ヲ或ル利率デ 1 箇年預ケ置クニ單利ト半年毎ノ複利トデ元利合計ニ 96 錢ノ差ヲ生ズル,ソノ年利率ヲ求メヨ。

6. 本年ノ 3 月 21 日ニ 1000 圓, 4 月 15 日ニ 800 圓, 5 月 10 日ニ 700 圓ヲ支拂フベキ三ツノ手形ヲ一時ニ合セテ支拂フトスレバ支拂期日ハ何月何日カ。

7. 或ル年ノ 1 月カラ 12 月マデ毎月末ニ 100 圓ヅツ積立テタ,コノ年末ニ於ケル元利合計何程カ,但シ月利率 3 厘ノ單利トスル。

8. 毎年ノ始メニ 300 圓ヅツ積立テレバソノ元利合計ガ 10000 圓ヲ越スノハ幾年目カ,但シ年.4 分デ半年毎ノ複利法ニヨルモノトシ,次ノ對數ヲ用キヨ。

$$\log 7.1612=0.85498,\quad \log 1.02=0.00860,$$

$$\log 3=0.47712$$

9. 或ル國ニ於ケル毎年ノ出生者及ビ死亡者ノ數ガ夫々ソノ年ノ初メニ於ケル人口ノ $a\%$ 及ビ $b\%$ $(a>b)$ デアル,ソノ國ノ人口ガ 2 倍トナル年數ヲ a, b デ表ハセ。

10. 或ル學校デ毎週ノ出席百分率 y ヲ算出スルニ,1 組ノ生徒數ヲ z, ソノ組 1 週間ノ缺席延日數ヲ x, 1 週間ノ出席スベキ日數ヲ 6 トスレバ次式デ求メラレルコトヲ示セ。

$$y=100\left(1-\frac{x}{6z}\right)$$

又ぐらふニヨツテ生徒數ガ夫々 30 人及ビ 40 人ナル組ノ 1 週間ノ缺席延日數ガ 5 日, 7 日, 9 日及ビ 11 日ナルトキノ各百分率ヲ求メヨ。

11. 毎年ノ始メニ 100 圓ヅツ 10 年間年利率 3.5% ノ 1 年毎ノ複利デ積ミ立テレバソノ 10 年ノ末ニ何程トナルカ。

12. 3000 圓ノ借金ヲ 35 箇年ノ年賦デ返濟スルトシ年利 3 分ノ 1 年毎ノ複利デ計算スレバ年賦金何程カ,但シ圓未滿切上ゲトスル。

補 充 問 題

第一 代數式及ビ代數的數

1. $a \neq 0$ ナルトキ $-a^2$ ト $(-a)^2$ トハ相等シイカ。又 $-a^3$ ト $(-a)^3$ トハ相等シイカ。

2. 次ノ式ヲ計算セヨ。

(1) $\left(\frac{3a}{8}\right)\left(\frac{2b}{9}\right)\left(\frac{-6c}{7}\right)$

(2) $1+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}\div\left(-\frac{1}{5}\right)$

3. $x=-9$ ナルトキ,次ノ二式ノ數値ノ大小ヲ比較セヨ。

$$\frac{1}{6}(x-8)-x-1.5, \qquad \frac{1}{2}(6-x)+\frac{x}{3}$$

4. x ニ絶對値ガ 3 ヲ超エナイ種々ノ整數ノ値ヲ與ヘ,整式 x^2-4x+3 ノ取ル數値ヲ求メヨ。

5. 兄ハ毎月 x 圓,弟ハ y 圓ヅツ貯金スルトキハ n 年後ニ於ケル二人ノ貯金合セテ何程カ。

(1) $x=15,\ y=8,\ n=3$ トシテソノ答ヲ求メヨ。

(2) $x=15,\ y=-8,\ n=3$ ノトキ如何。

(3) $x=15,\ y=-8,\ n=-3$ ノトキ如何。

6. 若干箇ノ碁石ヲ 1 行ニ p 箇ヅツ q 行並ベタノニナホ r 箇殘ツタトイフ,コノ總數ヲ式デ書キ表ハセ。

7. 鶴龜合セテ a 頭キル,ソノ中鶴ハ b 頭キルトスレバ,全體デ足數ハ幾本カ。

8. 今年兄ハ a 歳弟ハ b 歳デアルトスレバ,弟ノ生レタトキ兄ハ幾歳デアツタカ。

9. 直徑 D 吋ノしりんだー N 箇ヲモツ發動機ノ馬力ヲ求メル公式ハ $0.4D^2N$ デアル,コレニヨツテ直徑 4 吋ノしりんだー 4 箇ヲモツ發動機ノ馬力ヲ求メヨ。

第二　整式四則

1. x ナル文字ニ着目シテ次ノ式ニ於ケル同類項ヲ簡約セヨ。

$$ax^2+bx+mx^2-nx-cx-dx^2-p+qx^3+r.$$

2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

（1） $(x+y+z)\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}$

（2） $2a-\{3b+(2b-c)-4c+[2b-(3b-2b)]\}$

（3） $(2m+1-2m^2)+\{(m^2+3-5m)-(3m^2-4+3m)\}$

3. 次ノ掛算ヲナセ。

（1） $(2x-3)^2$　　（2） $(a+2b)(a-2b)$

（3） $(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x-y)$

4. 次ノ各組ノ第一式ヲ第二式デ割リ,整商及ビ剩餘ヲ求メ,且ソノ驗シヲ行ヘ。

（1） $2x^4+x^3+4x^2+x+1,\quad x^2-x+1$

（2） $9x^4-x^2+2x+20,\quad 3x^2-5x+4$

5. $6x^3+6x-11x^2-1$ ヲ得ルタメニ $1-3x+2x^2$ ニ乘ズベキ式ヲ求メヨ。

6. $a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ $a+b+c$ デ割レ。(a ニ關シテ降冪

ノ順ニ排列シテ計算セヨ)

7. $3a-2(b-\overline{a-b})$ カラ $4a-5(a+2b-\overline{b-3a})$ ヲ減ジ,ソノ差ヲ簡約セヨ。

8. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$(2x^2-5x-3)\div(x^2+x-12)\times(x^3+8x^2+16x)$$
$$-(9x^2+4x-16)$$

第三　一次方程式

1. x ニ關スル二次式ガアル, $x=-2$, $x=0$, $x=1$ トスレバソノ式ノ値ハ夫々 -15, 5, 9 トナルトイフ,如何ナル二次式カ。

2. x^2+px+q ト $2x^2-3x+4$ トノ積ガ x ノ偶數冪ノ項ノミヲ有スルヤウニ p 及ビ q ノ値ヲ定メヨ。

3. $x^4+6x^3+6x^2+px+q$, x^3+3x^2+6x+3 ノ各ヲ x^2+2x+3 デ除シタトキ同一ノ剩餘ヲ得ルタメニハ, p, q ノ値ヲ如何ニ定ムベキカ。

4. 或ル山路ヲ上下スルニ往復 5 時間 20 分ヲ費シタ,上リ下リノ速サヲ毎時夫々 $2\,km$, $6\,km$ トスレバコノ山路ノ道程何程ナルカ。

5. 今年父ハ 54 歳,母ハ 40 歳デ, 5 人ノ子ノ年齡ハ夫々 15 歳, 13 歳, 11 歳, 9 歳, 7 歳デアル,父母ノ年齡ノ和ガ子ノ年齡ノ和ニ等シクナルノハ幾年後カ。

6. 或ル六位ノ整數ノ左端ノ數字ハ 1 デ,コレヲ右端ニ移ストキハ,元ノ數ノ 3 倍ナル數ニナルトイフ,元ノ數ヲ求メヨ。

7. 今建築費 800 圓ヲ要スル家屋ヲ10年前ニ建築シタトスレバ,材料ハ15割,工費ハ8割ノ騰貴ヲシテヰタタメニ 1790 圓ヲ要スルトイフ, 10年前ノ建築材料費及ビ工費各幾圓ナルカ。

8. 或ル中學校ノ現在生徒數ハ 385 名デ,今年ハ昨年ニ比シ 3.75% 減ジタ,而シテソノ中通學生ハ5% 増シ寄宿生ハ 30% 減ジタトイフ,現在通學生及ビ寄宿生ノ各數如何。

9. 或ル人電車線路ニ沿ヒ毎時4 km ノ速サデ歩行シタトコロガ 8 分24秒毎ニ電車ニ追越サレ,又 6 分毎ニ電車ニ行逢ツタ,電車ノ速サハ毎時何粁ナルカ,但シ電車ハ總テ等シイ速サデ等シイ時間ヲ隔テ、雙方ノ起點ヨリ發車シ途中停留シナイモノトスル。

10. 50 錢,20 錢,10 錢ノ各貨幣取リ混ゼ30箇アリ,ソノ金高ハ 6 圓デアル,今50錢貨ヲ5錢貨ニ又10錢貨ヲ1錢貨ニ兩替スレバ貨幣ノ總數ハ 210 箇トナル,モトノ各貨幣ノ箇數ヲ求メヨ。

11. 甲ハ 750 m 距ツタ的ニ向ツテ射撃シ發射後 $3\frac{3}{8}$秒ヲ經テ銃丸ノ的ニ中ツタ音ヲ聞キ,又甲ヨリ 600 m, 的ヨリ 420 m 距ツタ所ニヰタ乙ハ銃聲ヲ聞イタ後 $\frac{7}{8}$秒ヲ經テ銃丸ノ的ニ中ツタ音ヲ聞イタトイフ,音及ビ銃丸ハ各等速デ進ムト假定シ兩者ノ速サヲ求メヨ。

第四 整式及ビ整數

1. 公式ヲ利用シテ次ノ各整式ヲ展開セヨ。(整式ヲ**展開スル**トハソノ式ノ示ス計算ヲ實行シタ結果ヲ一ツノ多項式ノ形ニ表ハスコトデアル。)

(1) $(a-2b-3c+4d)(a+2b-3c-4d)$

(2) $(a-2)(a+2)(a^2+4)(a^4+16)$

(3) $(y+z-x)^2+(z+x-y)^2+(x+y-z)^2-(x+y+z)^2$

(4) $(a-b-3)(a+b-2)$

2. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) $112x^4-7$ (2) $16x^4-17x^2y^2+y^4$

(3) $(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$ (4) $x^4-23x^2y^2+y^4$

(5) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

(6) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$

(7) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

(8) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

(9) $x^4(1-x)^2-2x^2(1+x^2)+(1+x)^2$

(10) $x^3-2a^2x+a^3$

3. $x-\frac{1}{x}=1$ ナラバ $x^2+\frac{1}{x^2}=3$, $x^3-\frac{1}{x^3}=4$ ナルコトヲ證セヨ。

4. $x+y=5$, $xy=1$ ナルトキ, x^3+y^3 ノ値ヲ求メヨ。

5. 二ツノ奇數ノ平方ノ差ハ8ノ倍數ナルコトヲ證明セヨ。

6. 桁數ガ偶數ナル任意ノ整數ニソノ數字ノ順ヲ取リ換ヘタ數ヲ加ヘレバソノ和ハ常ニ11ノ倍數ナ

ルコトヲ證セヨ。

7. $A+B+C=0$ ナルトキハ, $A^3+B^3+C^3=3ABC$ ナルコトヲ證明セヨ。

8. 前題ノ結果ヲ利用シテ次ノ式ヲ證明セヨ。

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

9. $3x=a+b+c$ ナルトキ

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

10. 二數ノ最大公約數ハ 6 デ,最小公倍數ハ 36 デアルトイフ,二數各如何。

11. 二ツノ正數ノ積ガ 384 デ,ソノ最大公約數ガ 8 ナルトキ,二數各如何。

12. 次ノ二式ノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ求メヨ。

$$3x^3-x^2-2x-16, \qquad 2x^3-2x^2-3x-2$$

13. $2x^4+x^3-6x^2-mx+n$, $2x^4-nx^3+mx-3$ ハ $x+1$ ナル公約數ヲ有スルトイフ, m 及ビ n ノ値如何。

14. x^2+mx+n ト x^2+nx+m トガ x ニ關スル一次ノ最大公約數ヲ有スルトキハ,ソノ最小公倍數ハ

$$x^3+(mn-1)x-mn$$

ナルコトヲ證明セヨ。

第五 分數式

1. 次ノ各分數式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{2a}{x^2+a^2}-\dfrac{4a^3}{x^4+a^4}$

(2) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(3) $\dfrac{(a-b)^2-\left(\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2}{b-a+\dfrac{a^2}{a+b}}$

2. $x=a(y+z)$, $y=b(z+x)$, $z=c(x+y)$ ナルトキハ,

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$$

ナルコトヲ證明セヨ。

注意 與ヘラレタ三式ニハ x, y, z ヲ含ムケレドモ,結果ノ式ニハコレヲ含マヌ。斯クノ如ク或ル文字ヲ含マナイ式ヲ誘導スルコトヲ稱シテソノ文字ヲ**消去スル**又ハ**逐ヒ出ス**トイフ。

3. 次ノ二式ヨリ x 及ビ y ヲ消去セヨ。

$$ax+by=0, \qquad cx^2+dxy+ey^2=0$$

4. 次ノ三ツノ式ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{z}=a, \quad \frac{z}{y}+\frac{y}{x}=b, \quad \frac{x}{z}+\frac{z}{y}=c$$

5. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$ ナルトキハ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ナルコトヲ證明セヨ。

6. $x+\dfrac{1}{y}=a$, $y+\dfrac{1}{x}=b$, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=c$ ナルトキハ, $a^2+b^2=abc$ ナルコトヲ證明セヨ。

7. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}$ ナルトキハ,

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

8. $a+b+c=0$ ナルトキハ,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

9. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $(x+a)^4-(x-a)^4-8ax^3+8a^4=0$

(2) $\begin{cases} y+z-x=2a \\ z+x-y=2b \\ x+y-z=2c \end{cases}$

(3) $\dfrac{y+z-x}{b+c}=\dfrac{z+x-y}{c+a}=\dfrac{x+y-z}{a+b}=1$

10. 次ノ二組ノ聯立方程式ガ同ジ根ヲ有スルモノトシテ, a, b, c ノ値ヲ決定セヨ。

$$\begin{cases} ax-by+cz=1 \\ ax+by-cz=1 \\ ax+by+cz=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{z}=9 \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=0 \end{cases}$$

11. 分母ガ分子ヨリ14ダケ大ナル分數ガアル,コレヲ約分スレバ$\frac{3}{5}$トナルトイフ,ソノ分數ヲ求メヨ。

12. 分數ガアル,ソノ分母ト分子トノ和ハ57デ,モシ分母ト分子トヨリ各6ヲ引イテ後,コレヲ約スレバ$\frac{2}{3}$トナルトイフ,コノ分數ヲ求メヨ。

13. 或ル河ノ120 km ノ間ヲ24時間ニ往復シタ船ガアル,12 km ヲ溯ル時間ハ20 km ヲ下ル時間ニ等シイトイフ,往復ノ速サ各如何。

14. 甲乙イヅレモ東市ヲ出發シ西市ニ往キ,直チニ引キ返シテ東市ニ歸ツタ,但シ甲ハ乙ノ出發後1時間ニ東市ヲ發シ,西市ヨリ8 km 手前デ乙ヲ追ヒ越シ,ソノ後32分ニ歸路ニ於テマタ乙ト出會ヒ,ツイニ東市ニ歸着シタトキ乙ハナホ後方16 km ノ所ニキタトイフ,東西兩市間ノ距離ヲ求メヨ。

第六　開　法

1. $4\sqrt{2}$, $3\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt{5}$ ヲ大小ノ順ニナラベヨ。

2. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$

(2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

3. 次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ。

(1) $16x^4+25y^4-24x^3y-30xy^3+49x^2y^2$

(2) $9x^2y^4-12x^3y^3+34x^4y^2-20x^5y+25x^6$

(3) $x^4-2x^3+7x^2+\dfrac{4}{x^2}-10x-\dfrac{12}{x}+13$

4. 次式ガ完全平方式トナルヤウニ係數 a ヲ定メヨ。

$$9x^6-6x^5+25x^4-50x^3+30x^2+ax+49$$

5. 次ノ各式ヲ小數第二位マデ計算セヨ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{11}-6}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$

第七　二次及ビ高次方程式

1. 方程式 $x^2+2(p+1)x+6p+5=0$ ガ等根ヲ有スルタメニ p ノ取ルベキ値如何。

2. 二次方程式 $x^2-(2k-1)x+k=0$ ニ於テ k ノ如何ナル値ニ對シテ二根ノ和ガ5トナルカ。

3. 二次方程式 $x^2+ax+b=0$ ト $x^2+px+q=0$ トガ一ツノ共通根ヲ有スルトキ,ソノ共通ナラザル二根ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ。

4. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ虚根ヲ有スルトキハ,二次式 ax^2+bx+c ハ x ノ實數値ニ對シテ恆ニ a ト同一ノ符號ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

5. 方程式 $2x^2+4x-1=0$ ノ二根ヲ α 及ビ β トスルトキ次ノ各式ノ値ヲ求メヨ。

(1) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$　　(2) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

6. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

(1) $x^4-15x^2+10x+24=0$

(2) $\dfrac{x+3}{3-x}+\dfrac{x+6}{6-x}+\dfrac{x+9}{9-x}=3$

(3) $\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-7}=0$

(4) $x^2-5x+6\sqrt{x^2-5x-3}=10$

(5) $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$

7. 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases}4x-3y=1\\12xy+13y^2=25\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^3-y^3=26\\x^2y-xy^2=6\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=189\\x-\sqrt{xy}+y=9\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13\\3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9\end{cases}$

(5) $\begin{cases}xz=y^2\\x+y+z=19\\x^2+y^2+z^2=133\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}x^2+2yz=12\\y^2+2zx=12\\z^2+2xy=12\end{cases}$

(7) $\dfrac{xy}{x+y}=1,\quad \dfrac{yz}{y+z}=2,\quad \dfrac{zx}{z+x}=3$

8. $(x^2+xy-12)^2+(xy-2y^2-1)^2=0$ ニ適スル實數 x, y ヲ求メヨ。

9. 甲乙二人ガ同一ノ一元二次方程式ヲ解クニ當リ,甲ハ x ノ係數ヲ書キ誤ツタタメ -2, -5 ナル根ヲ得,乙ハ既知項ヲ書キ誤ツタタメ 1, 6 ナル根ヲ得タトイフ,正シイ根ヲ求メヨ。

10. 底邊 4 cm, 他ノ二邊ノ和 5 cm, 高サ 1.2 cm ナル三角形ノ底デナイ二邊ノ長サ各如何。

11. 菱形ノ地面ガアル,各邊ノ長サハ 15 m デ兩對角線ノ差ハ 6 m デアルトイフ,ソノ面積ヲ求メヨ。

12. 一驛ヨリ他ノ驛ニ向ツタ汽車ガアル,出發後 30 km ヲ走ツタトキ機關ニ故障起リ速サノ $\dfrac{1}{3}$ ヲ減ジタタメ50分延着シタ,若シ故障ガ出發後2時間デ起ツタナラバ前ノ場合ヨリモ 22.5 分ダケ早ク着クコトガ出來タ筈デアルトイフ,二驛間ノ距離幾粁ナルカ。

第八　比及ビ比例

1. $\frac{a-3b}{5}+\frac{b-4a}{13}=\frac{3a-b}{2}$ ナルトキ次ノ比ノ値ヲ求メヨ。

$$a^2+b^2 : b^2-a^2-4ab$$

2. $\frac{y+z-x}{b-c}=\frac{z+x-y}{c-a}=\frac{x+y-z}{a-b}$ ヨリ $x:y:z$ ヲ求メヨ,依ツテ又次ノ二式ヲ證明セヨ。

$$x+y+z=0,\qquad ax+by+cz=0$$

3. $a(y-z)=b(z-x)=c(x-y)$ ナルトキハ,

$$\frac{y-z}{a(b+c)}=\frac{z-x}{b(c+a)}=\frac{x-y}{c(a+b)}$$

ナルコトヲ證セヨ。

4. 二次方程式

$$24x^2-2(7m+6)x+3m^2-26=0$$

ノ二根ノ比ガ 2:3 ナルトキ, m ノ値如何。

5. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ ガ $x-y$ ニ反比例スルナラバ, $(x+y)^2$ ハ x^2+y^2 ニ正比例スルコトヲ證セヨ。

6. y ハ x ニ比例スル數トコレニ反比例スル數トノ和デ, $x=a$ ナルトキ $y=na+b$ デ,又 $x=b$ ナルトキ $y=nb+a$ デアル,然ラバ x ノ如何ナル値ニ對シテ $y=nab+1$ トナルカ。

7. 甲乙二人ノ年收入ノ比ハ 5:3, ソノ支出ノ比ハ 9:5 デ 1 年間ニ共ニ 120 圓ヲ殘シタ,年收入各幾何ナルカ。

8. 遊星ガソノ軌道ヲ一周スルニ要スル時間ノ平方ハソノ遊星ノ太陽カラノ距離ノ立方ニ比例スル,今地球ト水星トノ太陽カラノ距離ノ比ハ 91:35 デ,地球ガ軌道ヲ一周スル時間ヲ 365.25 日トスレバ,水星ガ軌道ヲ一周スルニハ幾日ヲ要スルカ。

9. 甲ハ東地ヨリ西地ニ向ヒ乙ハ西地ヨリ東地ニ向ツテ同時ニ出發シ,各均等ナル速サデ同ジ路ヲ進行シタ,甲ハ m 時間デ西地ニ着キ,乙ハ n 時間デ東地ニ着イタ,但シ兩人出會ツタ後ニ要シタ時間ハ甲ハ a 時間乙ハ b 時間デアルトイフ,然ルトキハ a, b, m, n ノ間ニ次ノ關係アルコトヲ證セヨ。

$$a : b=m^2 : n^2,$$

10. 酒精 60l 入ノ樽カラ若干ノ酒精ヲ汲ミ出シソレト同量ノ水ヲ入レ,更ニソノ混合液カラ最初ニ汲ミ出シタヨリモ 14l ダケ多ク汲ミ出シテ再ビ同量ノ水ヲ入レタラバ酒精ト水トハ丁度半々ニナツタ,最初ニ汲ミ出シタ酒精ノ量ヲ求メヨ。

第九　級　數

1. 等差級數ノ第 $n-3$ 項,第 $n-2$ 項ヲ夫々 p, q トシ,第 n 項ヲ p, q デ表ハセ。

2. 次ノ調和級數ヲ第 6 項マデ書ケ。

(1) $\frac{1}{2},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{8},\quad \ldots\ldots$

(2) $6,\quad 3,\quad 2,\quad \ldots\ldots$

3. x, y, z ガ調和級數ヲナストキ,次ノ式ノ値如何。

$$\frac{y}{y-x}+\frac{y}{y-z}$$

4. 二數 a, b ノ等差,等比及ビ調和中項ヲ夫々 A, G 及ビ H トスレバ, $AH=G^2$ ナルコトヲ證明セヨ。又 a, b ヲ共ニ正ニシテ相等シクナイモノトシ, G ヲ正ナル等比中項トスレバ,

$$A>G>H$$

ナルコトヲ證明セヨ。

5. a, b, c ガ等差級數ヲナシ, x ヲ a ト b トノ等比中項, y ヲ b ト c トノ等比中項トスレバ, x^2, b^2, y^2 ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ。

6. 次ノ二次方程式ガ等根ヲ有スルトキハ a, b, c ガ等差級數ヲナスコトヲ證明シ,且ソノ等根ヲ求メヨ。

$$(a-b+c)x^2+2(a+c)x+4b=0.$$

7. 四數ガアル,初メノ三數ハ等比級數ヲナシソノ和ハ 19 デ,後ノ三數ハ等差級數ヲナシソノ和ハ 12 デアル,コノ四數ヲ求メヨ。

8. 次ノ無限級數ノ和ヲ求メヨ。*

(1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$

* 等差,等比,調和デナクトモ,一定ノ規則ニ從ツテ列ベラレタ一列ノ數ヲ**級數**トイフ。(2) ニツイテハ

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ナルコトニ注意セヨ。

(2) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\cdots$

9. 次ノ式ノ第 n 番目ノ括弧内ノ和ヲ求メヨ。

$$(1)+(2+3)+(4+5+6)+\cdots\cdots$$

10. 次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$a+2a^2+3a^3+\cdots\cdots$$

11. 級數ガアル,奇數番目ノ項ハ等差級數ヲナシ,偶數番目ノ項ハ等比級數ヲナストイフ,ソノ初メノ四項ヲ 1, 2, 3, 4 トスルトキ,ソノ初メノ n 項ノ和ヲ求メヨ,但シ n ハ奇數トスル。

12. 初項ガ夫々 a, b デ,公比ガ相等シイ二ツノ等比級數ガアル,第一ノ級數ノ無限項ノ和ノ平方ハ第二ノ級數ノ無限項ノ和ニ等シイトイフ,公比ヲ求メヨ。

13. 甲乙兩人同所ヲ同時ニ出發シ同方向ニ行ク,ニ毎日ノ行程甲ハ終始 28 km デアルガ,乙ハ初日 40 km, 次ノ日 38 km 等次第ニ斯クノ如ク毎日 2 km ヅツ減少スルトイフ,甲ガ乙ニ追ヒ付クノハ何日目ナルカ。

14. 一邊ノ長サ a ナル正三角形ノ三邊ノ中點ヲ頂點トスル三角形ヲ作リ,次ニコノ三角形ニツイテ更ニ同樣ノ作圖ヲナシ,コノ作圖ヲ限リナク續ケテ得ル所ノ無數ノ三角形ノ面積ノ和ヲ求メヨ,但シモトノ正三角形ハ算入シナイコトトスル。

第十 對數及ビ一般指數

1. 次ノ各式ヲ計算セヨ。

（1） $\left(\frac{ay}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{bx}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{y^2}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

（2） $(a^2-a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}})\div(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})$

（3） $(a^3-2\sqrt[4]{a^2b^3}-a^2\sqrt[6]{a^3b^2}+2b\sqrt[12]{b})\div(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})$

（4） $(5a^2-41ab+42b^2)\sqrt[12]{a}\div(a^{\frac{1}{3}}-7ba^{-\frac{2}{3}})$

2. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

（1） $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-(9\times2^{-5})^{\frac{1}{3}}$

（2） $\dfrac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$

3. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

（1） $9(9^{x-1}+3)=28\times3^x$

（2） $27^x=9^y,\quad \frac{81^y}{3^x}=243$

（3） $2^x+3^y=17,\quad 2^{x+2}-3^{y+1}=5$

4. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

（1） $\log\frac{75}{16}-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}$

（2） $\log\frac{a^2}{bc}+\log\frac{b^2}{ca}+\log\frac{c^2}{ab}$

5. $\left(\frac{50}{49}\right)^{100}$ハ10ヨリ大ナルカ小ナルカ,但シ $\log2=0.301$, $\log7=0.845$ トスル。

6. 連乘積 $3^1\times3^2\times3^3\times3^4\times\ldots\ldots$ ガ始メテ一千萬ヲ超エルマデニハ幾ツノ因數ヲ取ラネバナラヌカ,但シ $\log3=0.47712$ トスル。

7. $y=10^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$ ナルトキハ, $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

8. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

（1） $\log(x-1)-\log(x^2+2x-3)+1=0$

（2） $2^x=3^y,\qquad x-y=1$

9. $r=0.36,\ h=19.75,\ \pi=3.142$ ナルトキ次式ヨリAノ値ヲ求メヨ。

$$A=2\pi r^2+2\pi rh$$

10. $V=1,\ \pi=3.142$ ナルトキ次式ヨリ r ヲ求メヨ。

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

11. $a=25.7,\quad b=33.5,\quad c=30.4$ 且

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

ナルトキ次式ノ値ヲ(最初ノ有效數字二ツマデ)求メヨ。

$$\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

12. $l=12.3,\ T=850000,\ r=0.14$ ナルトキ次式ヨリ n ヲ求メヨ。

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{4r^2}}$$

第十一 歩 合 算

1. 或ル家庭ニ於テ歳入ノ6割ヲ經常費ニ,經常費ノ

3 割ニ當ル金高ヲ貯蓄ニ,貯蓄ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイ金高ヲ豫備費ニ當テ,ソノ餘リヲ剩餘金トシタ,コレヲ前年度ノ各費目ニ比較スルニ,經常費ハ 2 割ヲ增シ,貯蓄ハ 8 割ヲ增シ,豫備費ハ增減ナク,剩餘金ハ 40 圓ヲ減ジタ,而シテ前年ノ歲入 2500 圓デアル,今年ノ歲入ヲ求メヨ。

2. 4% ノ鹽分ヲ含ム水若干瓦カラ水分ヲ蒸發セシメテ 10% ノ鹽分ヲ含ムモノトシタ後コレニ 4% ノ鹽分ヲ含ム水 300 g ヲ混ジタラバ 6.4% ノ鹽分ヲ含ムモノトナツタ,モトノ液ハ幾瓦カ。

3. 某市ノ或ル期間ニ於ケル人口增加ノ割合ハ 20% デ,コノ期間ニ男子 1000 人ニ對スル女子ノ人數ハ 1020 人カラ 1100 人ニ增加シタ,コノ期間ニ於ケル女子ノ增加ノ割合ハ約何ぱーせんとカ。

4. 五分利附公債ヲ額面 100 圓ニツキ 92 圓デ買フノト,配當率 1 割 1 分ノ 50 圓拂込ミノ株式ヲ 1 株ニツキ 107.50 圓デ買フノト何レガ何程利廻リ宜イカ,但シ答數ハ毛位未滿四捨五入トスル。

5. 銀行割引高ト眞割引高トノ差ハ,眞割引高ヲ元金トシテ割引期間ニ生ズル利子ニ等シイコトヲ證明セヨ。

6. 年利率ヲ 7 分トスルトキハ,今ヨリ 100 年後ニ受取ルベキ金 10000 圓ノ現價如何。

7. P 圓ノ社債ヲ募集シ, m 年間据置イテ後每年同額宛償却シ n 年間ニ償却シ終ルニハ,每年ノ償却金額何程トスベキカ,但シ年利率 r, 1 年每ノ複利トスル。

8. 或ル事業ニ於テ甲ハ若干圓ヲ資本トシテ金 480 圓ノ利益ヲ得,乙ハ甲ヨリモ金 1200 圓ダケ少ナイ資本デ同額ノ利益ヲ得タ,而シテソノ利益ノ步合ノ差ハ 2 分デアルトイフ,甲乙兩人ノ資本及ビ利益ノ步合ヲ求ム。

9. 5 箇月後ニ支拂ハレル 300 圓ノ手形ヲ今 295 圓デ買ヘバ損益如何,但シ年利 7 分トシテ計算セヨ。

10. 今生レタ子ノ學資金トスルタメニ今後滿 1 年每ニ同額ノ金ヲ貯金シテ行キ,子ガ滿 10 歲ニ達シタ後ハソノマヽ据置キ,滿 15 歲トナルトキ,元利合計 3000 圓ヲ得ヨウトスル,年利 4 分 8 厘トスレバ每年ノ貯金額ヲ何程トスベキカ。

答

雜　　題 I.

1. 5050　　**2.** (1) 338350　(2) 25502500

3. (1) $11\frac{2}{3}$ 噸　　(2) $4\frac{4}{9}$ 噸

4. $\left(\frac{n}{b}-\frac{m}{a}\right)$圓, 2 錢ノ下落　　**5.** 攝氏 190°　　**6.** 攝氏 38°

7. 84°　　**8.** (4) -4, 4, -5, 11, $-2\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$

(5) $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{5}$, 1, $-\frac{11}{14}$, $-\frac{11}{10}$

9. (1) 0　(2) 零ナラズ　(3) 0

10.

$\frac{6x-x^2}{2}$ ノ値	-3.5	-1.625	0	1.375	2.5	3.375	4	4.375	4.5

雜　　題 II.

1. (1) $2a^2+2b^2$　(2) $-3x^2-3y^2$　(3) $8xy+4y^2$

(4) $x^2-\frac{1}{2}x+4$　(5) $1-4x+4x^2$

(6) x^2+8, 餘リ $22x+17$

2. $6xy-6xz-3y^2+3z^2$

3. $x^3+2ax^2+2a^2x+a^3$

4. 62

5. 最高次ノ係數 4, x ヲ含マナイ項 -2

6. $-\frac{1}{27}$

雑　　題 III.

1. (1) $x=3$　(2) $x=1$　(3) $x=\frac{1}{3}$　(4) $x=10$
   (5) $x=1$
2. (1) $x=20,\ y=-4$　(2) $x=4,\ y=5$　(3) $x=5,\ y=-\frac{1}{2}$
   (4) $x=0,\ y=3,\ z=-4$　(5) $x=2.5,\ y=3.6,\ z=1.9$
3. 甲21圓, 乙17圓, 丙34圓　4. 甲5圓, 乙4圓
5. 36　6. 午後5時$34\frac{2}{7}$分　7. 毎秒7 m
8. 8時32分$43\frac{7}{11}$秒　又ハ8時54分$32\frac{8}{11}$秒
9. 甲162圓, 乙253圓, 丙285圓

雑　　題 IV.

1. (1) $-3(a-x)(b-x)(a+b-2x)$　(2) $(a+b-c)(a-3b+c)$
   (3) $(x-y-3z)(x+y+z)$　(4) $(a+b)(b+c)(c+a)$
   (5) $(x+3y)(x-2y)(x-3y)(x+2y)$
2. $m=12,\ n=15$　3. $m=3,\ n=-15$
4. x^3-3x^2-4x+5
5. G.C.M. x^2-5x+1; $(x^2-5x+1)(x^2-7)$, $(x^2-5x+1)(3x-8)$
6. $(1+x)(1-x)(1+x-x^4)$　7. 234
8. $a=5,\ b=1,\ c=1$
9. $a=b$ 又ハ $a\neq b$ デ $a+b=-2$
10. $(a+b)(2a+b)(3a+b)$

雑　　題 V.

1. (1) 0　(2) $\frac{2x^2-1}{x^3-1}$　(3) $\frac{3}{(x-1)(x-3)x-4)}$

(4) 1　(5) $-4(a^2+b^2)$　(6) $\frac{2}{x(x+a)}$　(7) 2

2. 2　3. $1\frac{10}{13}$
4. (1) $x=-3$　(2) $x=5$　(3) $x=3,\ y=10$
   (4) $x=9,\ y=-10$
5. (1) $x=\frac{a}{a+b}$　(2) $x=\frac{2a}{3}$
   (3) $x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{b-a}{z}$　(4) $x=a-2b,\ y=2a-b$
6. $a\neq 3,\ a\neq 7$ トスレバ $x=\frac{a-13}{a-7},\ y=\frac{1-a}{a-7}$
7. $\frac{3}{7}$　8. 4時間, 毎時 $1\frac{2}{3}km$
9. $\frac{c(n+a)}{a}km$　10. $\frac{na}{a+2b}$時間, $\frac{na(a+b)}{b}km$

雑　　題 VI.

1. (1) $\pm(2x^2+2x-1)$　(2) $\pm(3x^4-2x^2+1)$
   (3) $\pm\left(\frac{a}{3}-2x+\frac{x^2}{2}\right)$　(4) ±5307
   (5) ±62.2
2. (1) $3-17\sqrt{6}$　(2) $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$
   (3) $241-44\sqrt{30}$　(4) $-\frac{1}{10}(\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x+8})$
   (5) $\frac{a\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{1+a^2}}{a^2-b^2}$
3. $\sqrt{a^2+b^2}\ m$　5. $3^6=243$

雑　　題 VII.

1. (1) $x=1,\ \frac{a-b}{b-c}$　(2) $x=0,\ -\frac{2ab}{a+b}$

(3) $x=6,\ -1$　　(4) $\frac{(1\pm\sqrt{109})a}{6}$

(5) $x=\pm\frac{2}{3a}$　　(6) $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{37}}{6}$

(7) $x=1,\ -6,\ \frac{-5\pm\sqrt{39}i}{2}$

(8) $x=\pm1,\ \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

(9) $x=1.5,\ 1.5\times\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\ 1.4,\ 1.4\times\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

(10) $x=1$　　(11) $x=5$　　(12) $x=\frac{5}{4}$

(1) $x=3,\ y=6$; $x=-\frac{1}{3},\ y=-\frac{2}{3}$

(2) $x=\pm5,\ y=\pm2$　但シ複號ハ同時ニ同號。

(3) $x=\pm2,\ y=\mp1$; $x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$　但シ複號ハ同時ニ異符號。

(4) $x=-5,\ y=2$; $x=2,\ y=-5$; $x=\frac{3\pm i\sqrt{31}}{2},\ y=\frac{3\mp i\sqrt{31}}{2}$
但シ複號ハ同時ニ異符號。

(5) $x=5,\ y=2$; $x=149,\ y=194$

(6) $x=\pm7,\ y=\pm2$　複號ハ同時ニ同號 ; $x=\pm\sqrt{3},\ y=\mp3\sqrt{3}$
複號ハ同時ニ異符號。

(7) $x=\frac{7}{2},\ y=-\frac{19}{2}$; $x=-6,\ y=0$; $x=9,\ y=-4$;
$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{11}{2}$

(8) $x=4,\ y=9$; $x=9,\ y=4$

(9) $x=y=z=0$; $x=\frac{12}{7},\ y=\frac{12}{5},\ z=-12$

(10) $x=8,\ y=3,\ z=3$; $x=-3,\ y=3,\ z=-8$

3. $x=5\pm\sqrt{17}$　　4. 10.92　　5. $\frac{9}{8}$　　10. $k=5$

11. 8.5　　12. 563　　13. $4x^2-20x+28$

14. 44.8 km　　15. 10 km

雑　題 VIII.

1. 一般ニ $\frac{8}{11}$　　2. $2a-b-c:2b-c-a:2c-a-b$

4. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$　　5. $2:\sqrt{3}$　　6. 607.5 瓩重

7. 0.24 平方米　　8. $8l$　　9. 63 kg, 105 kg, 84 kg

10. 464 人

雑　題 IX.

1. 4, 8 又ハ 8, 4　　3. $\frac{n}{2}(3n-7)$　　4. 117095

5. 偶數番目ノ項ノ和ノ方ガ 525 大。　　6. 14 項, 1393

7. 奇數 12 箇, 偶數 10 箇　　8. 48 人, 19400 圓

9. 4, 8, 16 又ハ $2(9+\sqrt{65}),\ -8,\ 2(9-\sqrt{65})$

11. 8　　12. 396　　13. $\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$

14. $x=\frac{2}{5},\ y=-\frac{1}{4}$　　15. A ヨリ B ニ向ツテ $\frac{1}{3}$AB ノ點

雑　題 X.

1. (1) $\frac{3}{2}$　　(2) $\frac{1}{2}\log 5$　　(3) $8\log 2-1$

2. (1) $x=-4,\ 6$　　(2) $x=14$

(3) $x=100,\ \sqrt{10}$　　(4) $x=7,\ y=3$; $x=\frac{10}{3},\ y=\frac{20}{3}$

3. $3+2\sqrt{2}$　　4. $x=11$　　5. 10 ヨリ大。　　6. $n=17$

7. (1) 0.99 (2) 0.0001275

8. 10.398

雜　　題 XI.

1. 甲 1.5%, 乙 3.6%　　2. 1.65 石

3. 甲 10%, 5400 圓; 乙 12%, 4500 圓

4. 4 分　　5. 4 分　　6. 4 月 12 日

7. 1220 圓　　8. 21 年目

9. $\dfrac{\log 2}{\log\left(1+\dfrac{a-b}{100}\right)}$　　11. 1212 圓(約)　　12. 140 圓

補　充　問　題

第一　代數式及ビ代數的數

1. $-a^2 \neq (-a)^2$, $-a^3 = (-a)^3$

2. (1) $-\dfrac{abc}{14}$　(2) $-\dfrac{1}{4}$　　3. 第一式ガ大

4.

x ノ數値	3,	2,	1,	0,	−1,	−2,	−3
x^2-4x+3 ノ數値	0,	−1,	0,	3,	8,	15,	24

5. $12n(x+y)$ 圓　(1) 828 圓　(2) 252 圓　(3) −252 圓

6. $pq+r$　　7. $(4a-2b)$ 本

8. $(a-b+1)$ 歲　　9. 25,6

第二　整　式　四　則

1. $qx^3+(a-d+m)x^2+(b-c-n)x-p+r$

2. (1) 0　(2) $-4b+5c$　(3) $-4m^2-6m+8$

3. (1) $4x^2-12x+9$　(2) a^2-4b^2　(3) x^5-y^5

4.

	(1)	(2)
整　商	$2x^2+3x+5$	$3x^2+5x+4$
剩　餘	$3x-4$	$2x+4$

5. $3x-1$　　6. $a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2$

7. $21a+b$　　8. $2x^3+16$

第三　一次方程式

1. $-2x^2+6x+5$　　2. $p=\dfrac{3}{2}$, $q=2$

3. $p=3$, $q=-15$　　4. 8 km

5. 13 年後　　6. 142857

7. 材料 1250 圓, 工費 540 圓　　9. 24 km

10. 50 錢貨 5 箇, 20 錢貨 10 箇, 10 錢貨 15 箇

11. 毎秒音 372 m, 彈丸 551 m (弱)

第四　整式及ビ整數

1. (1) $a^2-6ac+9c^2-4b^2+16bd-16d^2$
   (2) a^8-256
   (3) $2x^2+2y^2+2z^2-4xy-4yz-4zx$
   (4) $a^2-b^2-5a-b+6$

2. (1) $7(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$
   (2) $(x-y)(x+y)(4x-y)(4x+y)$

(3) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

(4) $(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$

(5) $(x^2+3x+1)^2$ (6) $(x+2)^2(x^2+6x+4)$

(7) $(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$

(8) $x(x+5)(x^2+5x+10)$ (9) $(x+1)(x-1)(x^2-2x-1)$

(10) $(x-a)(x^2+ax-a^2)$

4. 110 10. 12, 18 又ハ 6, 36

11. 8, 48 又ハ 16, 24

12. G. C. M. $x-2$; L. C. M. $6x^5+4x^4-3x^3-37x^2-34x-15$

13. $m=2$, $n=3$

第五 分數式

1. (1) $\dfrac{8a^7}{x^8-a^8}$ (2) 1 (3) $-\dfrac{4a^2}{a+b}$

3. $b^2c-abd+a^2e=0$ 4. $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=8$

9. (1) $a=0$ ナラバ不定, $a\neq 0$ ナラバ $x=-a$

(2) $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$

(3) $x=\frac{1}{2}(2a+b+c)$ 等

10. $a=1$, $b=2$, $c=3$

11. $\dfrac{21}{35}$ 12. $\dfrac{24}{33}$

13. 毎時上リ 8 km, 下リ $13\frac{1}{3}$ km

14. 120 km

第六 開法

1. $4\sqrt{2} > 2\sqrt{5} > 3\sqrt[3]{3}$

2. (1) $\sqrt[3]{x^2}+2$ (2) 0

3. (1) $\pm(4x^2-3xy+5y^2)$ (2) $\pm(5x^3-2x^2y+3xy^2)$

(3) $\pm\left(x^2-x+3-\dfrac{2}{x}\right)$

4. $a=-56$ 5. (1) 0.91 (2) 3.19

第七 二次及ビ高次方程式

1. $p=2(1\pm\sqrt{2})$ 2. $k=3$

3. $(b-q)^2x^2+(b^2-q^2)(a-p)x+bq(a-p)^2=0$

5. (1) $\dfrac{11}{2}$ (2) 22

6. (1) -1, 2, 3, -4 (2) 0, $6\pm\sqrt{3}$

(3) 0, ± 5 (4) $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{41})$ (5) 2, 3

7. (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{53}{88} \\ y=-\dfrac{25}{22} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{3(1-\sqrt{3}i)}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{3(1+\sqrt{3}i)}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{3(-1+\sqrt{3}i)}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{-3(1+\sqrt{3}i)}{2} \\ y=\dfrac{-(1+\sqrt{3}i)}{2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=12 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=12 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{-5+\sqrt{7}i}{2} \\ y=\dfrac{-5-\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{-5-\sqrt{7}i}{2} \\ y=\dfrac{-5+\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x=9 \\ y=6 \\ z=4 \end{cases}$

(6) $x=y=z=\pm 2$

(7) $x=\frac{12}{5}$, $y=\frac{12}{7}$, $z=-12$

8. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{4\sqrt{6}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{4\sqrt{6}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$

9. $x=2$ 又ハ $x=5$

10. 3.7 cm, 1.3 cm

11. 216 平方米

12. 70 km

第八 比及ビ比例

1. $\frac{4369}{4618}$

4. $m=7$ 又ハ $-\frac{49}{13}$

6. $x=ab$ 又ハ $\frac{1}{n}$

7. 甲 1200 圓, 乙 720 圓

8. 87.12 日

10. 10 l

第九 級數

1. $3q-2p$

2. (1) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{17}$

(2) 6, 3, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$, 1

3. 2

6. -2

7. 9, 6, 4, 2 又ハ 25, -10, 4, 18

8. (1) $\frac{5}{3}$ (2) 1

9. 第 n 項 $\frac{n}{2}(n^2+1)$

10. $\frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\frac{na^{n+1}}{1-a}$

11. $\frac{(n+1)^2}{2}+2^{\frac{n+1}{2}}-2$

12. $\frac{b-a^2}{b}$

13. 13 日目

14. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$

第十 對數及ビ一般指數

1. (1) $\frac{y^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{6}}}=\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[6]{bx}}$

(2) $a^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}=\sqrt{a^3}-2\sqrt[4]{x}$

(3) $a^{\frac{5}{2}}-2b^{\frac{3}{4}}$

(4) $(5a-6b)a^{\frac{3}{4}}$

2. (1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

(2) $\frac{7}{13}$

3. (1) $x=0, 3$

(2) $x=1$, $y=\frac{3}{2}$

(3) $x=3$, $y=2$

4. (1) $\log 2$

(2) 0

5. $\left(\frac{50}{49}\right)^{100}<10$

6. 5 項

8. (1) $x=7$

(2) $x=\frac{4771}{1761}$, $y=\frac{3010}{1761}$

9. 45.48

10. 0.6203

11. 0.91

12. 133.8

第十一 步合算

1. 3000 圓

2. 500 g

3. 24% (强)

4. 公債ノ方 3 厘 1 毛(弱)利廻リ宜シ

6. 11.52 圓

7. $\frac{Pr(1+r)^{m+n}}{(1+r)^n-1}$ 圓

8. 資本金甲 6000 圓, 乙 4800 圓, 利益ノ步合甲 8 分, 乙 1 割

9. 3.75 圓ノ損

10. 190.5 圓

$ax+$

$ax+$

ax^2+

$+6abc$

二 根

レ バ,

偶數)

等 差

奇數)

初

デ

$a+b-c)$

等 比

初

デ

-1

恆　等　式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3ab^2+3bc^2+3ca^2+3a^2b+3b^2c+3c^2a+6abc$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+ab^{n-2}-b^{n-1})$ (n 偶數)

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1})$ (n 奇數)

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$

$(b+c)(c+a)(a+b)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$\qquad=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$

$(a-b)(a-c)(b-c)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$\qquad=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$3(b+c)(c+a)(a+b)=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

$3(b-c)(c-a)(a-b)=(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

一 次 方 程 式

$ax+b=0$ ノ根　$x=-\dfrac{b}{a}$

$$\begin{cases} a\neq 0 \text{ ナルトキハ有限確定} \\ a=0,\ b\neq 0 \text{ ナルトキハ不能} \\ a=0,\ b=0 \text{ ナルトキハ不定} \end{cases}$$

$ax+by=c,\ \ a'x+b'y=c'$ ノ根

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

二 次 方 程 式

$ax^2+bx+c=0$ ノ根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

二根ヲ $\alpha,\ \beta$ トシ,判別式 b^2-4ac ヲ D トスレバ,　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

D>0 ナラバ實根ニシテ $\alpha\neq\beta$

D$=0$ ナラバ實根ニシテ $\alpha=\beta$

D<0 ナラバ虛根ニシテ $\alpha\neq\beta$

級　　數

等差級數

初項 a, 公差 d, 項數 n, 第 n 項 l, 第 n 項マデノ和 S トスレバ

$$l=a+(n-1)d,\qquad d=\frac{l-a}{n-1},$$

$$S=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

等比級數

初項 a, 公比 r, 項數 n, 第 n 項 l, 第 n 項マデノ和 S トスレバ

$$l=ar^{n-1},\qquad r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},$$

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$-1<r<1$ ナルトキノ無限項ノ和ハ

$$\frac{a}{1-r}$$

$a^m\times a^n=$

$a^m\div a^n=$

$(a^m)^n=$

$(ab)^n=$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=$

元金A,

バ,單利

毎年 a

負債A

毎年 a

$A=\dfrac{a}{r}\{$

恒　等　式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3ab^2+3bc^2+3ca^2+3a^2b+3b^2c+3c^2a+6abc$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+ab^{n-2}-b^{n-1})$ (n 偶數)

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots-ab^{n-2}+b^{n-1})$ (n 奇數)

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$

$$\begin{aligned}(b+c)(c+a)(a+b)&=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\\&=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a-c)(b-c)&=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\end{aligned}$$

$3(b+c)(c+a)(a+b)=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

$3(b-c)(c-a)(a-b)=(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

一　次　方　程　式

$ax+b=0$ ノ根　$x=-\dfrac{b}{a}$

$$\begin{cases}a\neq 0 & \text{ナルトキハ有限確定}\\ a=0,\ b\neq 0 & \text{ナルトキハ不能}\\ a=0,\ b=0 & \text{ナルトキハ不定}\end{cases}$$

$ax+by=c,\quad a'x+b'y=c'$ ノ根

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

二　次　方　程　式

$ax^2+bx+c=0$ ノ根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

二根ヲ α, β トシ,判別式 b^2-4ac ヲ D トスレバ,　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

D>0　ナラバ實根ニシテ　$\alpha\neq\beta$

D=0　ナラバ實根ニシテ　$\alpha=\beta$

D<0　ナラバ虛根ニシテ　$\alpha\neq\beta$

級　　數

等差級數

初項 a, 公差 d, 項數 n, 第 n 項 l, 第 n 項マデノ和 S トスレバ

$$l=a+(n-1)d,\qquad d=\frac{l-a}{n-1},$$

$$S=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

等比級數

初項 a, 公比 r, 項數 n, 第 n 項 l, 第 n 項マデノ和 S トスレバ

$$l=ar^{n-1},\qquad r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},$$

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$-1<r<1$ ナルトキノ無限項ノ和ハ

$$\frac{a}{1-r}$$

冪及ビ冪根

$a^m\times a^n=a^{m+n}$　　$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$　　$a^0=1$

$a^m\div a^n=a^{m-n}$　　$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$　　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

$(a^m)^n=a^{mn}$　　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

$(ab)^n=a^nb^n$　　$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$　　$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

對　　數

$a^x=n$ ナルトキ　$x=\log_a n$

$\log_a 1=0\qquad \log_a a=1$

$\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$

$\log_a\dfrac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$

$\log_a(m^r)=r\log_a m$

$\log_b n=\dfrac{\log_a n}{\log_a b}$

歩　合　算

元金 A, 年利率 r, 年數 n, 元利合計 S トスレバ,單利法 $S=A(1+nr)$,複利法 $S=A(1+r)^n$

每年 a ヅツノ年賦積立ノ元利合計ハ

$$S=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}$$

負債 A ヲ返濟スベキ年賦額ハ

$$a=\frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}$$

每年 a ヅツノ年金ノ現價ハ,定期年金ナラバ $A=\dfrac{a}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}$, 永續年金ナラバ $A=\dfrac{a}{r}$

冪及ビ冪根表

數	平方	立方	平方根	立方根	逆數
1	1	1	1.0000000	1.0000000	1.000000000
2	4	8	1.4142136	1.2599210	0.500000000
3	9	27	1.7320508	1.4422496	0.333333333
4	16	64	2.0000000	1.5874011	0.250000000
5	25	125	2.2360680	1.7099759	0.200000000
6	36	216	2.4494897	1.8171206	0.166666667
7	49	343	2.6457513	1.9129312	0.142857143
8	64	512	2.8284271	2.0000000	0.125000000
9	81	729	3.0000000	2.0800837	0.111111111
10	100	1000	3.1622777	2.1544347	0.100000000
11	121	1331	3.3166248	2.2239801	0.090909091
12	144	1728	3.4641016	2.2894286	0.083333333
13	169	2197	3.6055513	2.3513347	0.076923077
14	196	2744	3.7416574	2.4101422	0.071428571
15	225	3375	3.8729833	2.4662121	0.066666667
16	256	4096	4.0000000	2.5198421	0.062500000
17	289	4913	4.1231056	2.5712816	0.058823529
18	324	5832	4.2426407	2.6207414	0.055555556
19	361	6859	4.3588989	2.6684016	0.052631579
20	400	8000	4.4721360	2.7144177	0.050000000
21	441	9261	4.5825757	2.7589243	0.047619048
22	484	10648	4.6904158	2.8020393	0.045454545
23	529	12167	4.7958315	2.8438670	0.043478261
24	576	13824	4.8989795	2.8844991	0.041666667
25	625	15625	5.0000000	2.9240177	0.040000000
26	676	17576	5.0990195	2.9624960	0.038461538
27	729	19683	5.1961524	3.0000000	0.037037037
28	784	21952	5.2915026	3.0365889	0.035714286
29	841	24389	5.3851648	3.0723168	0.034482759
30	900	27000	5.4772256	3.1072325	0.033333333
31	961	29791	5.5677644	3.1413806	0.032258065
32	1024	32768	5.6568542	3.1748021	0.031250000
33	1089	35937	5.7445626	3.2075343	0.030303030
34	1156	39304	5.8309519	3.2396118	0.029411765
35	1225	42875	5.9160798	3.2710663	0.028571429
36	1296	46656	6.0000000	3.3019272	0.027777778
37	1369	50653	6.0827625	3.3322218	0.027027027
38	1444	54872	6.1644140	3.3619754	0.026315789
39	1521	59319	6.2449980	3.3912114	0.025641026
40	1600	64000	6.3245553	3.4199519	0.025000000
41	1681	68921	6.4031242	3.4482172	0.024390244
42	1764	74088	6.4807407	3.4760266	0.023809524
43	1849	79507	6.5574385	3.5033981	0.023255814
44	1936	85184	6.6332496	3.5303483	0.022727273
45	2025	91125	6.7082039	3.5568933	0.022222222
46	2116	97336	6.7823300	3.5830479	0.021739130
47	2209	103823	6.8556546	3.6088261	0.021276596
48	2304	110592	6.9282032	3.6342411	0.020833333
49	2401	117649	7.0000000	3.6593057	0.020408163
50	2500	125000	7.0710678	3.6840314	0.020000000

9
38912
81742
*24154
66155
*07755
48960
89777
*30214
70279
*09977
49315
88301
*26939
65237
*03200
40834
78145
*15138
51819
88192
*24263
60037
95519
*30713
65624
*00257
34616
68705
*02529
36092
69396

比例部分表

	0	1
10	0000	043
11	414	453
12	792	828
13	1139	173
14	461	492
15	761	790
16	2041	068
17	304	330
18	553	577
19	788	810
20	3010	032
21	222	243
22	424	444
23	617	636
24	802	820
25	979	997
26	4150	166
27	314	330
28	472	487
29	624	639
30	771	786
31	914	928
32	5051	065
33	185	198
34	315	328
35	441	453
36	563	575
37	682	694
38	798	809
39	911	922
40	6021	031
41	128	138
42	232	243
43	335	345
44	435	444
45	532	542
46	628	637
47	721	730
48	812	821
49	902	911
50	990	998
51	7076	084
52	160	168
53	243	251
54	324	332

5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9
2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0	4.4	4.8	5.2
2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5
3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0	6.6	7.2	7.8
3.5	4.2	4.9	5.6	6.3	7.0	7.7	8.4	9.1
4.0	4.8	5.6	6.4	7.2	8.0	8.8	9.6	10.4
4.5	5.4	6.3	7.2	8.1	9.0	9.9	10.8	11.7

15	16	17	18	19	20	21	22	23
1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6
4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3	6.6	6.9
6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.0	8.4	8.8	9.2
7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5
9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.0	12.6	13.2	13.8
10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.0	14.7	15.4	16.1
12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.0	16.8	17.6	18.4
13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.0	18.9	19.8	20.7

25	26	27	28	29	30	31	32	33
2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3
5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6
7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.0	9.3	9.6	9.9
10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.0	12.4	12.8	13.2
12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5
15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.0	18.6	19.2	19.8
17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.0	21.7	22.4	23.1
20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.0	24.8	25.6	26.4
22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.0	27.9	28.8	29.7

35	36	37	38	39	40	41	42	43
3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3
7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.2	8.4	8.6
10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0	12.3	12.6	12.9
14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.0	16.4	16.8	17.2
17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0	20.5	21.0	21.5
21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.0	24.6	25.2	25.8
24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.0	28.7	29.4	30.1
28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.0	32.8	33.6	34.4
31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.0	36.9	37.8	38.7

七 桁 ノ 對 數 表 (1000—1309)

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00	00000	04341	08677	13009	17337	21661	25980	30295	34605	38912
101		43214	47512	51805	56094	60380	64660	68937	73210	77478	81742
102		86002	90257	94509	98756	*03000	*07239	*11474	*15704	*19931	*24154
103	01	28372	32587	36797	41003	45205	49403	53598	57788	61974	66155
104		70333	74507	78677	82843	87005	91163	95317	99467	*03613	*07755
105	02	11893	16027	20157	24284	28406	32525	36639	40750	44857	48960
106		53059	57154	61245	65333	69416	73496	77572	81644	85713	89777
107		93838	97895	*01948	*05997	*10043	*14085	*18123	*22157	*26188	*30214
108	03	34238	38257	42273	46285	50293	54297	58298	62295	66289	70279
109		74265	78248	82226	86202	90173	94141	98106	*02066	*06023	*09977
110	04	13927	17873	21816	25755	29691	33623	37551	41476	45398	49315
111		53230	57141	61048	64952	68852	72749	76642	80532	84418	88301
112		92180	96056	99929	*03798	*07663	*11525	*15384	*19239	*23091	*26939
113	05	30784	34626	38464	42299	46131	49959	53783	57605	61423	65237
114		69049	72856	76661	80462	84260	88055	91846	95634	99419	*03200
115	06	06978	10753	14525	18293	22058	25820	29578	33334	37086	40834
116		44580	48322	52061	55797	59530	63259	66986	70709	74428	78145
117		81859	85569	89276	92980	96681	*00379	*04073	*07765	*11453	*15138
118	07	18820	22499	26175	29847	33517	37184	40847	44507	48164	51819
119		55470	59118	62763	66404	70043	73679	77312	80942	84568	88192
120		91812	95430	99045	*02656	*06265	*09870	*13473	*17073	*20669	*24263
121	08	27854	31441	35026	38608	42187	45763	49336	52906	56473	60037
122		63598	67157	70712	74265	77814	81361	84905	88446	91984	95519
123		99051	*02581	*06107	*09631	*13152	*16670	*20185	*23697	*27206	*30713
124	09	34217	37718	41216	44711	48204	51964	55180	58665	62146	65624
125		69100	72573	76043	79511	82975	86437	89896	93353	96806	*00257
126	10	03705	07151	10594	14034	17471	20905	24337	27766	31193	34616
127		38037	41456	44871	48284	51694	55102	58507	61909	65309	68705
128		72100	75491	78880	82267	85650	89031	92410	95785	99159	*02529
129	11	05897	09262	12625	15985	19343	22698	26050	29400	32747	36092
130		39434	42773	46110	49444	52776	56105	59432	62756	66077	69396

四 桁 ノ 對

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	979	997	*014	*031	*048*	*065	*082	*099	*116	*133
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981
50	990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396

七桁ノ對數表 (1000—1309)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00000	04341	08677	13009	17337	21661	25980	30295	34605	38912
43214	47512	51805	56094	60380	64660	68937	73210	77478	81742
86002	90257	94509	98756	*03000	*07239	*11474	*15704	*19931	*24154
28372	32587	36797	41003	45205	49403	53598	57788	61974	66155
70333	74507	78677	82843	87005	91163	95317	99467	*03613	*07755
11893	16027	20157	24284	28406	32525	36639	40750	44857	48960
53059	57154	61245	65333	69416	73496	77572	81644	85713	89777
93838	97895	*01948	*05997	*10043	*14085	*18123	*22157	*26188	*30214
34238	38257	42273	46285	50293	54297	58298	62295	66289	70279
74265	78248	82226	86202	90173	94141	98106	*02066	*06023	*09977
13927	17873	21816	25755	29691	33623	37551	41476	45398	49315
53230	57141	61048	64952	68852	72749	76642	80532	84418	88301
92180	96056	99929	*03798	*07663	*11525	*15384	*19239	*23091	*26939
30784	34626	38464	42299	46131	49959	53783	57605	61423	65237
69049	72856	76661	80462	84260	88055	91846	95634	99419	*03200
06978	10753	14525	18293	22058	25820	29578	33334	37086	40834
44580	48322	52061	55797	59530	63259	66986	70709	74428	78145
81859	85569	89276	92980	96681	*00379	*04073	*07765	*11453	*15138
18820	22499	26175	29847	33517	37184	40847	44507	48164	51819
55470	59118	62763	66404	70043	73679	77312	80942	84568	88192
91812	95430	99045	*02656	*06265	*09870	*13473	*17073	*20669	*24263
27854	31441	35026	38608	42187	45763	49336	52906	56473	60037
63598	67157	70712	74265	77814	81361	84905	88446	91984	95519
99051	*02581	*06107	*09631	*13152	*16670	*20185	*23697	*27206	*30713
34217	37718	41216	44711	48204	51964	55180	58665	62146	65624
69100	72573	76043	79511	82975	86437	89896	93353	96806	*00257
03705	07151	10594	14034	17471	20905	24337	27766	31193	34616
38037	41456	44871	48284	51694	55102	58507	61909	65309	68705
72100	75491	78880	82267	85650	89031	92410	95785	99159	*02529
05897	09262	12625	15985	19343	22698	26050	29400	32747	36092
39434	42773	46110	49444	52776	56105	59432	62756	66077	69396

四桁ノ對數表 (100—999)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	004	*009	*015	*020	*025
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	86	245	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

比例部分表

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
2	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
3	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9
4	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0	4.4	4.8	5.2
5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5
6	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0	6.6	7.2	7.8
7	2.8	3.5	4.2	4.9	5.6	6.3	7.0	7.7	8.4	9.1
8	3.2	4.0	4.8	5.6	6.4	7.2	8.0	8.8	9.6	10.4
9	3.6	4.5	5.4	6.3	7.2	8.1	9.0	9.9	10.8	11.7

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
2	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6
3	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3	6.6	6.9
4	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.0	8.4	8.8	9.2
5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5
6	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.0	12.6	13.2	13.8
7	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.0	14.7	15.4	16.1
8	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.0	16.8	17.6	18.4
9	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.0	18.9	19.8	20.7

	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3
2	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6
3	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.0	9.3	9.6	9.9
4	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.0	12.4	12.8	13.2
5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5
6	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.0	18.6	19.2	19.8
7	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.0	21.7	22.4	23.1
8	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.0	24.8	25.6	26.4
9	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.0	27.9	28.8	29.7

	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
1	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3
2	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.2	8.4	8.6
3	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0	12.3	12.6	12.9
4	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.0	16.4	16.8	17.2
5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0	20.5	21.0	21.5
6	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.0	24.6	25.2	25.8
7	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.0	28.7	29.4	30.1
8	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.0	32.8	33.6	34.4
9	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.0	36.9	37.8	38.7

昭和七年六月二十五日印刷
昭和七年六月三十日發行
昭和七年八月二十七日修正再版印刷
昭和七年九月一日修正再版發行
昭和十年八月五日修正三版印刷
昭和十年八月九日修正三版發行
昭和十年九月四日修正四版印刷
昭和十年九月八日修正四版發行

不許	改訂 新修代數	複製
	定價金一圓三十八錢	

著作者 竹內端三

東京市神田區神保町一丁目一番地
發行者 株式會社 三省堂
代表者 龜井豐治

東京市蒲田區仲六鄉一丁目五番地
印刷者 株式會社 三省堂蒲田工場
代表者 喜多見昇

發行所
東京市神田區神保町一丁目一番地
株式會社 三省堂
（振替口座東京三一五五五）
大阪市西區阿波座下通二丁目六番地
株式會社 三省堂大阪支店
（振替口座大阪八一三〇〇）

改訂新修代數

SSD