文部省檢定濟

昭和十一年十一月七日　中學校數學科用

新式

幾何三角法敎科書

東京帝國大學名譽敎授　理學博士

高木貞治

著

〔四・五學年用〕

東京開成館

緒　言

本書ハ中學校數學科基本課程用トシテ先ニ公ニシタ「新式幾何教科書」一學年用及ビ二·三學年用ノ後ヲ承ケ,增課課程用ノ幾何三角法教科書ニ充テル爲ニ編纂シタモノデアル。

本書ノ編纂ニ當ツテ著者ハ前著ト同様改正數學教授要目ノ精神ト數學教育ノ理想トニヨリ,教育ノ實際ヲ參酌シテ,特ニ次ノ方針ニヨツタ。

1. 記述ヲ出來ルダケ平易ニシ,生徒ノ理解シ易イヤウニシタ。
2. 從來ノ數學的系統ニ拘ハレズ"易ヨリ難ヘ"ノ鐵則ニ從ツテ教材ヲ配列シタ。
3. 生徒ヲシテ證明ノ必要ヲ感ゼシメナイヤウナ事項ハ成ルベク公理的ニ取扱フコトニシタ。

以上ノ方針ニヨリ第一篇ニ平面幾何ノ補充ヲナシ,第二篇·第三篇ニ立體幾何及ビ三角法ノ大要ヲ述ベタ。

平面幾何ノ補充ハ,教ヘル人モ學ブ人モ最モ力ヲ入レル所デアルカラ,特ニ注意シテ第一二三學年ノ教材ヨリ省イタ稍〻程度ノ高イ平面圖形ニ關スル諸

問題ハ出來ルダケ集錄スルヤウニシタ。尙定理ノ關係ヲ述ベテコレ迄ニ學ンダ諸定理ヲ論理的ニ整理シ,次ニ一學年ヨリ學ビ來タレル軌跡ニ嚴密ナ定義ヲ與ヘ,ソノ觀念ヲ正確ナラシメ,且ツ正シキ證明法ヲ授ケルヤウニシタ。同時ニ之ヲ利用シテ解クコトノ出來ル種々ノ作圖題ヲ授ケ,更ニ稍々困難ナル作圖題ヲ多方面ニ亙ツテ集錄シ,發見工夫ノ　神ヲ養フコトニ努メタ。

立體幾何及ビ三角法ハ理論ノ系統ヲ失ハザル程度ニ之ヲ壓縮シテ,教授ノ實際的立場ヨリ隨意敷衍シテ授ケルニ便ナルヤウニシタ。

尙卷末ニハ平面幾何ニ關スル多數ノ問題ヲ系統的ニ分類集錄シ,平面幾何ノ全事項ニ亙ル復習ニ供スルヤウニシタ。コレ等ノ中ニハ稍々困難ナル問題及ビ上級學校入學試驗問題ヲモ加ヘテ生徒ノ實力鍊磨ノ便ヲ圖ツタ。

以上著者ハ本書ガ實際教授者諸賢ノ同意ヲ得ルモノト信ズルガ,更ニ使用上ノ忠言ニヨリ版ヲ重ネテ完璧タラシメタイト思フ。

昭和十一年九月

著 者 識 ス

目 次

第4章 軌 跡

第5章 作 圖 題

第2篇 立 體 幾 何

第1章 平面及ビ直線

第2章 多 面 體

第3章 曲 面 體

第3篇 平面三角法

第1章 三角函數

第2章 加法定理・減法定理

第3章 三角形ニ關スル公式

第4章 三角形ノ解法

第5章 測量ノ問題

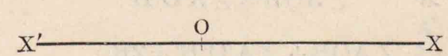
附 錄　弧度法ト三角方程式ノ解法

第 1 篇　平面幾何ノ補充

第 1 章　平面圖形

1. 半直線ノ方向

單ニ直線トイフトキハ双方ヘ限リナク延ビタモノ,即チ無限直線ヲ指ス。モシ直線上ニ一點ヲトリ,之ヨリ一方ノ側ニアル直線ノ部分ダケヲ考ヘルトキニハ,之ヲ**半直線**トイヒ,ソノ點ヲ半直線ノ**原點**トイフ。



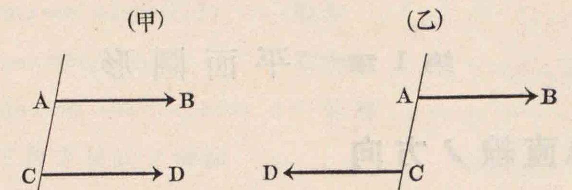
例ヘバ直線 XX′ ノ一點ヲ O トスレバ OX, OX′ ハ共ニ半直線デ, O ハソノ各々ノ原點デアル。

半直線ハソノ上ノ任意ノ一點ノ名ヲ原點ノ名ニ續ケテ呼ブ。例ヘバ半直線 OX ノヤウデアル。

定義 二ツノ半直線ガ平行ナルトキ,ソノ原點ヲ通ル直線ノ同側ニアレバコノ二直線ハ**同ジ方向**ヲ有スルトイヒ,反對ノ側ニアレバ**反對ノ方向**ヲ有ス

ルトイフ。

次ノ甲圖デハ二ツノ半直線 AB ト CD トハ同方向,乙圖デハ反對ノ方向ヲ有スル。



定理 1. 二ツノ角ノ二邊ガ夫々平行ナルトキハ,コレ等ノ角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。

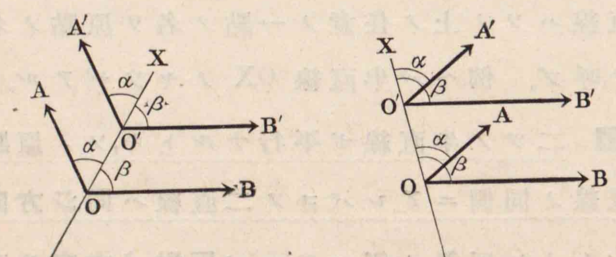
題意　$\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ ニ於テ

$$OA \parallel O'A', \quad OB \parallel O'B'$$

トスレバ　$\angle AOB = \angle A'O'B'$

又ハ　$\angle AOB + \angle A'O'B' = 2\angle R$

證明　(1)　OA ト O'A', OB ト O'B' ガ共ニ同方向ヲ有スル場合



頂點 O, O' ヲ結ブ線分 OO' ノ延長上ニ一點 X ヲトレバ, $\angle AOX$ ト $\angle A'O'X$ ト及ビ $\angle BOX$ ト $\angle B'O'X$ トハ平行線ノ同位角トナルカラ夫々相等シイ。依ツテ

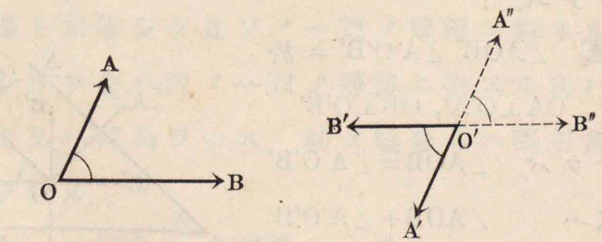
$$\angle AOX = \angle A'O'X = \alpha$$

$$\angle BOX = \angle B'O'X = \beta$$

ト置ケバ, $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ ハ共ニ α, β ノ和又ハ共ニ α, β ノ差ニ等シイカラ

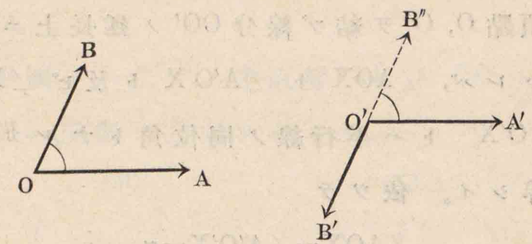
$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

(2)　OA ト O'A', OB ト O'B' ガ共ニ反對ノ方向ヲ有スル場合



[A'O', B'O' ノ延長 O'A'', O'B'' ガ夫々 OA, OB ト同方向ニナルコトニ着目シテ證明セヨ]。

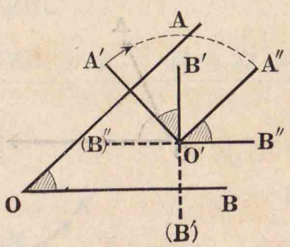
(3)　OA ト O'A' トガ同方向, OB ト O'B' トガ反對方向ヲ有スル場合



[B'O' ノ延長 O'B'' ハ OB ト同方向デアルコトニ着目シテ證明セヨ]。

系 **ニツノ角ノ二邊ガ夫々同一ノ方向ヲ有スルカ,又ハ夫々反對ノ方向ヲ有スルトキハ,コレ等ノ角ハ相等シイ。**

定理 2. **一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ垂直ナルトキハ,コレ等ノ角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。**



題意 $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ ニ於テ, $OA \perp O'A'$, $OB \perp O'B'$

ナラバ　$\angle AOB=\angle A'O'B'$

又ハ　$\angle AOB+\angle A'O'B'=2\text{R}\llcorner$

證明 $\angle A'O'B'$ ナル圖形ヲ點 O' ヲ中心トシテ,$90°$ダケ廻轉シテ得ル圖形ヲ $\angle A''O'B''$ トスレバ

$$\angle A''O'B''=\angle A'O'B'$$

又　$OA \parallel O'A''$,　$OB \parallel O'B''$

トナルカラ,前定理ニヨッテ

$$\begin{cases} \angle AOB=\angle A''O'B'' \\ \text{又ハ}\quad \angle AOB+\angle A''O'B''=2\text{R}\llcorner \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \angle AOB=\angle A'O'B' \\ \text{又ハ}\quad \angle AOB+\angle A'O'B'=2\text{R}\llcorner \end{cases}$$

問 一ツノ角ノ二邊ガ,夫々他ノ角ノ二邊ニ平行ナルトキハ,ソレ等ノ角ノ二等分線ハ互ニ平行ナルカ,又ハ垂直デアル。

2. 二邊ト一對角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形

定理 3. **一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ト相等シク,且ソノ一双ノ等邊ニ對スル角ガ相等シイトキハ,他ノ一双ノ等邊ニ對スル角ハ相等シイカ又ハ補角ヲナス。前ノ場合ニハ兩三角形ハ合同デアル。**

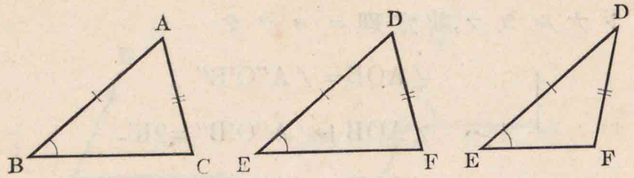
題意 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$AB=DE$,　$AC=DF$,　$\angle B=\angle E$

ナルトキハ

$\angle C=\angle F$　　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

或ハ　$\angle C+\angle F=2\text{R}\llcorner$



證明 BC ト EF トハ相等シイカ又ハ不等デアル。

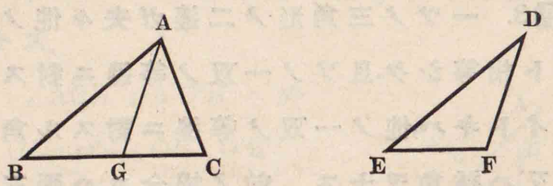
(1) $BC=EF$ トスレバ

$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トハ三邊ガ夫々相等シイ。

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

從ツテ $\angle C=\angle F$

(2) $BC \neq EF$ ノトキ, $BC>EF$ トスレバ BC 上ニ EF ニ等シク BG ヲトレバ



$\triangle ABG$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} AB=DE \\ BG=EF \\ \angle B=\angle E \end{array}\right\} \quad \therefore \ \triangle ABG \equiv \triangle DEF$$

從ツテ $AG=DF$, $\angle AGB=\angle F$

然ルニ $AC=DF$

$$\therefore \quad AG=AC$$

$$\therefore \quad \angle AGC=\angle C$$

然ルニ BGC ガ一直線ナル故

$$\angle AGC+\angle AGB=2R\llcorner$$

$$\therefore \quad \angle C+\angle F=2R\llcorner$$

系 二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ニ於テ,二組ノ等邊ノ中ノ大ナル等邊ニ對スル角ガ相等シイトキハ二ツノ三角形ハ合同デアル。

證明 本定理ニ於テ若シ $AC>AB$, 從ツテ $DF>DE$ ナラバ

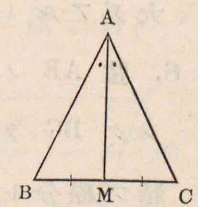
$$\angle C<\angle B, \quad \angle F<\angle E$$

故ニ $\angle C$ 及ビ $\angle F$ ハ鋭角デアルカラ互ニ補角ニナラナイ。

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

從ツテ $\angle C=\angle F$

問1. 三角形ノ一角ノ二等分線ガ之ニ對スル邊ノ中點ヲ過ルトキハソノ三角形ハ二等邊デアル。



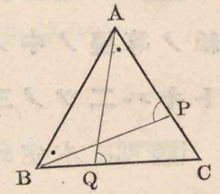
問2. 二ツノ鈍角三角形ニ於テ,鈍角及ビ之ニ對スル邊及ビ他ノ一邊ガ夫々相等シイトキハ,兩三角形ハ合同デアル。

問　題　(1)

1. 等角ナル六角形ノ相對スル邊ハ平行デアル。

2. 凸多角形ノ內角ガ三ツヨリ多ク鋭角デアルコトガアルカ。

3. 正三角形 ABC ノ邊 AC, BC ノ上ニ任意ノ相等シイ線分 AP, CQ ヲ作レバ AQ ト BP トノ交角ハ一定デアル。

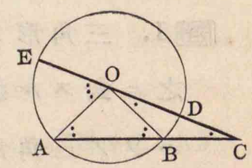


4. △ABC ノ角 A ノ二等分線 AD 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ

$$AB \sim AC > PB \sim PC$$

5. 三角形ノ內部ノ一點カラ三ツノ頂點ニ至ル距離ノ和ハ,三角形ノ周ヨリハ小デ,ソノ半分ヨリハ大デアル。

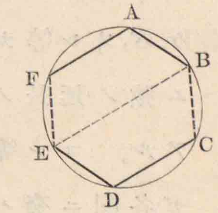
6. 弦 AB ノ延長上ニ半徑ニ等シク BC ヲトリ,C ト中心トヲ結ブ線分トソノ延長トガ圓周ニ交ハル點ヲ D, E トスレバ,弧 AE ハ弧 BD ノ 3 倍ニ等シイ。



7. 弧 AB ノ中點 C カラ引イタ二ツノ弦 CE, CF ガ

弦 AB ト夫々 G, H ニ於テ交ハレバ E, F, G, H ハ同一圓周上ノ四點デアル。

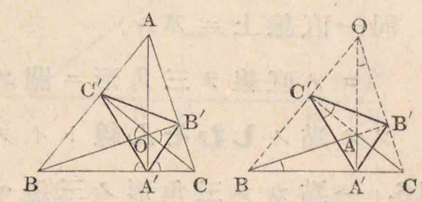
8. 圓ニ內接スル六角形ノ三組ノ相對スル邊ノ中,二組ガ互ニ平行ナラバ他ノ一組モ互ニ平行デアル。



9. △ABC ノ各邊ヲ底トシテソノ外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ作レバ, AD, BE, CF ハ同一ノ點ヲ通リ且等長デアル。

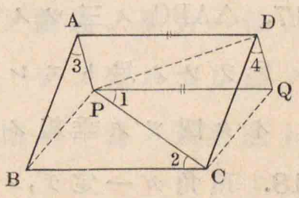
定義 三角形ノ各頂點カラ之ニ對スル邊ヘノ垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形ヲ**垂足三角形**トイフ。

10. 三角形ノ各邊ハ垂足三角形ノ內角又ハ外角ヲ二等分スル。

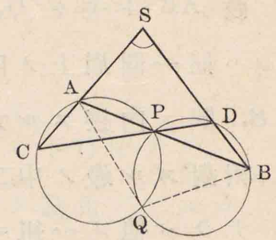


11. 垂足三角形ノ頂點ノ位置ヲ知ッテ原三角形ヲ作レ。(解ハ四ツアル)

12. P ハ平行四邊形 ABCD ノ內部ノ一點デ ∠PAB ト ∠PCB トガ相等シケレバ ∠PDC ト ∠PBC トハ相等シイ。



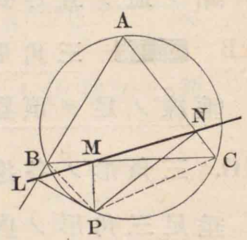
13. 二ツノ圓ノ交點ノ一ツヲ通リ任意ノ二ツノ割線ヲ引ケバ,ソレ等ガ各圓ニ於テ夾ム弦ノ延長ノ交角ハ一定デアル。コレ等ノ割線ノ一ツガ各圓ニ交ハル點ニ於ケル切線ノ交角ハドウカ。



14. 弦 AB ノ中點ヲ通ル他ノ弦ノ兩端ニ於ケル切線ガ AB ノ延長ニ交ハル點ヲ C, D トスレバ, AC=BD デアル。

15. 三角形ノ外接圓ノ周ノ上ノ一點カラ三邊ヘノ垂線ノ足ハ同一直線上ニアル。

(コノ直線ヲ三角形ニ關スルソノ點ノ**しむそん線**トイフ)。



16. 一點カラ三角形ノ三邊ヘノ垂線ノ足ガ同一直線上ニアレバ,ソノ點ハ外接圓ノ上ニアル。

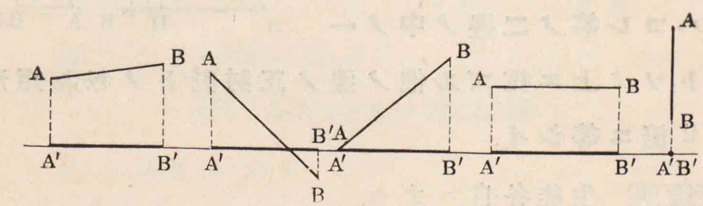
17. △ABC ノ三ツノ垂線ヲ AD, BE, CF トシ, D, E, F ヲソノ足トスレバ, D ヨリ AB, BE, CF, AC ニ引イタ四ツノ垂線ノ足ハ一直線上ニアル。

18. 頂角ガ一定デ,ソレヲ夾ム二邊ノ和ガ一定ナル三角形ノ中デ面積ノ最モ大キイノハ二等邊三角形デアル。

19. 定角 ∠A ノ内部ノ定點 C ヲ通ツテ直線 PCQ ヲ引イテ ∠A ノ二邊ト P, Q デ交ハラシメテ △APQ ノ面積ヲ最小ナラシメヨ。

3. 三角形ノ邊ノ平方關係

定義 一點カラ一直線ヘ下シタ垂線ノ足ヲ,ソノ直線上ニ於ケルソノ**點ノ正射影**トイヒ,線分 AB ノ兩端ノ正射影ノ間ニ夾マレル線分 A′B′ ヲソノ線分 **AB ノ正射影**トイフ。



問 1. 如何ナル場合ニ線分ノ正射影ガ一點トナルカ。

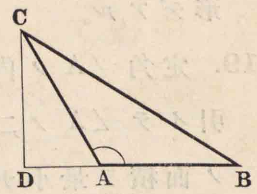
定理 4. **鈍角三角形ノ鈍角ノ對邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ大デアル。ソノ差ハコレ等ノ二邊ノ中ノ一ツト,ソノ上ヘノ他ノ一邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ2倍ニ等シイ。**

題意 △ABC ニ於テ

$\angle A > R\llcorner$ トシ $CD \perp AB$

トスルトキハ

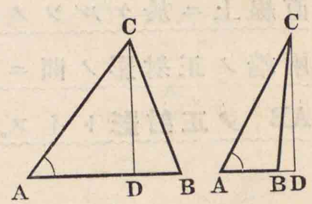
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AD$$



證明 $BD = AB + AD$

$$\therefore \quad BC^2 = CD^2 + BD^2 = CD^2 + (AB+AD)^2$$
$$= CD^2 + AD^2 + AB^2 + 2AB \cdot AD$$
$$= AC^2 + AB^2 + 2AB \cdot AD$$

定理 5. 三角形ノ鋭角ノ對邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ小デアル。ソノ差ハコレ等ノ二邊ノ中ノ一ツト,ソノ上ニ投ズル他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ2倍ニ等シイ。

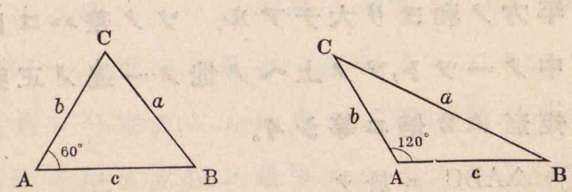


證明 生徒各自ニナセ。

問 2. 三角形ノ三邊ノ長サヲ a, b, c トスレバ

$\angle A = 60^\circ$ ノトキハ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

$\angle A = 120^\circ$ ノトキハ $a^2 = b^2 + c^2 + bc$



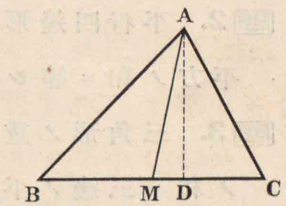
4. 中線ノ上ノ平方

定理 6. 三角形ノ二ツノ邊ノ平方ノ和ハ,他ノ一邊ノ半分ノ平方ト,之ニ對スル中線ノ平方トノ和ノ2倍ニ等シイ。

題意 $\triangle ABC$ ニ於テ $BM = CM$ トスレバ

$$AB^2 + AC^2 = 2(BM^2 + AM^2)$$

證明 A カラ BC ヘ垂線 AD ヲ下シ, $\angle AMB$ ハ鈍角, $\angle AMC$ ハ鋭角デアルトセヨ。



然ラバ $\triangle ABM$ ニ於テ

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 + 2BM \cdot MD$$

又 $\triangle ACM$ ニ於テ

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2CM \cdot MD$$

然ルニ $BM = CM$

故ニ $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

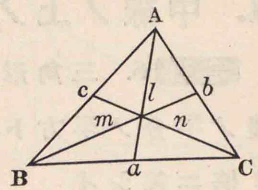
AM ガ BC ニ垂直デアルトキハ證明ハ容易デアル。(生徒各自ニナセ)

$\triangle ABC$ ノ頂點 A, B, C ニ對スル邊ノ長サヲ a, b, c; ソレニ對スル中線ノ長サヲ l, m, n トスレバ

$$l^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$m^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$

$$n^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$



問 1. 上ノ圖ニ於テ

$$4(l^2+m^2+n^2)=3(a^2+b^2+c^2)$$

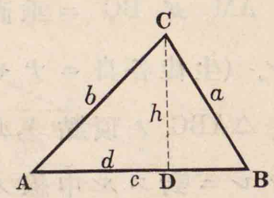
問 2. 平行四邊形ノ四邊ノ平方ノ和ハ對角線ノ平方ノ和ニ等シイ。

問 3. 三角形ノ重心カラ各頂點ヘノ距離ノ平方ノ和ハ三邊ノ平方ノ和ノ $\frac{1}{3}$ デアル。

問 4. 定直線 XY ノ外ニ定點 A, B ガアル。XY 上ニ於テ點 P ヲ求メテ AP^2+BP^2 ヲ最小ナラシメヨ。

5. 三角形ノ面積

△ABC ニ於テ一ツノ鋭角ヲ A トシ,三邊ノ長サヲ a, b, c; 面積ヲ S トシ,又 $2s=a+b+c$ ト置ケ(即チ s ハ周ノ半分デアル)。又高サ CD ヲ h, AD ヲ d トセヨ。



然ラバ　$a^2=b^2+c^2-2cd$

故ニ　$2cd=b^2+c^2-a^2$

$$\therefore\quad d=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

之ヲ $h^2=b^2-d^2=(b+d)(b-d)$ ニ代入スレバ,

$$h^2=\frac{1}{4c^2}(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$$

$$=\frac{1}{4c^2}(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$=\frac{4}{c^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$$

故ニ　$h=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

然ルニ　$S=\frac{1}{2}ch$

$$\therefore\quad \mathbf{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

之ハ三角形ノ三邊ヲ知ツテソノ面積ヲ求メル公式デアル。之ヲ**へろん**(Heron)**ノ公式**トイフ。

問 1. 三邊ガ 13 cm, 14 cm, 15 cm ナル三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

問 2. △ABC ノ内接圓ノ半徑ヲ r, 又邊 a, b, c ニ接スル傍接圓ノ半徑ヲ r', r'', r''' トスレバ

$$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

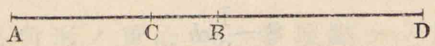
$$r'=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\qquad 等$$

又　$S=\sqrt{rr'r''r'''}$

問3. 問1. ノ三角形ノ内接圓ト傍接圓トノ半徑ヲ計算セヨ。

6. 調和列點

定義 線分 AB ガ二ツノ點 C 及ビ D ニ於テ相等シイ比ニ内分及ビ外分セラレルトキハ,二點 C, D ハ線分 AB ヲ**調和ニ分ツ**トイヒ,四點 A, C, B, D ヲ**調和列點**トイフ。



定理 7. AB ガ C, D ニヨツテ調和ニ分タレルトキハ, CD ハ A, B ニヨツテ調和ニ分タレル。

證明 AB ガ C, D ニヨツテ調和ニ分タレルカラ

$$AC:BC=AD:BD$$

内項ヲ交換スレバ

$$AC:AD=BC:BD$$

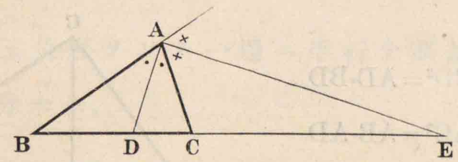
故ニ CD ハ A, B ニヨツテ調和ニ分タレル。

上ノ定理ニヨツテ A ト B, C ト D トヲ各一對ノ**調和共軛點**トイフ。

依ツテ上ノ圖ノ四點ヲ調和列點 A, B; C, D ト記スコトモアル。

系 調和列點 A, B; C, D ノ中,三ツノ點ガ定マレバ,第四ノ點モ亦定マル。但シ C ガ AB ノ中點ナルカ又ハ B ガ CD ノ中點ナルトキハ,ソノ共軛點ハ存在シナイ。

定理 8. 三角形ノ頂角及ビソノ外角ノ二等分線ハ底邊ヲ調和ニ分ケル。



證明 △ABC ノ角 A 及ビソノ外角ノ二等分線ガ直線 BC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ

$$BD:CD=AB:AC$$

$$BE:CE=AB:AC$$

$$\therefore\ BD:CD=BE:CE$$

依ツテ D, E ハ BC ヲ調和ニ分ケル。

問 四點 A, C, B, D ガ一直線上ニコノ順ニアツテ調和列點ヲナストキハ次ノ關係ガアル。

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$$

7. 直角三角形ニ於ケル比例線

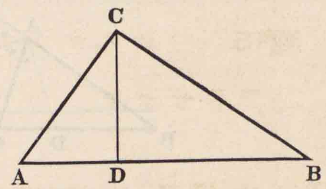
定理 9. 直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜邊ヘノ垂線ハ,ソノ足ニ於テ分タレル斜邊ノ二ツノ部分ノ比例中項デアル。又直角ノ各邊ハ斜邊ト斜邊上ニ於ケルソノ正射影トノ比例中項デアル。

題意 △ABC ニ於テ ∠C ハ直角, CD⊥AB トスレバ

$CD^2 = AD \cdot BD$

$AC^2 = AB \cdot AD$

$BC^2 = AB \cdot BD$



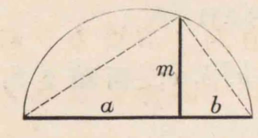
證明 (△ADC∽△CDB∽△ACB ニヨッテ生徒自ラセヨ)。

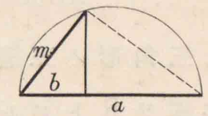
問 1. 圓周上ノ一點カラ一ツノ直徑ヘノ垂線ノ平方ハ,ソノ足デ分タレタ直徑ノ二ツノ部分ノ包ム矩形ト等シイ。

問 2. 三角形ノ頂點カラ底ヘノ垂線ガ底ヲ内分シ且ツソノ二ツノ部分ノ比例中項ニ等シイトキハ,ソノ三角形ハ直角三角形デアル。

作圖題 1. 與ヘラレタ二ツノ線分 (a, b) ノ比例中項 (m) ヲ作ルコト。

作圖 次ノ圖ノヤウニシテ生徒各自ニナセ。





問 3. 與ヘラレタ矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

問 4. 與ヘラレタ多角形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

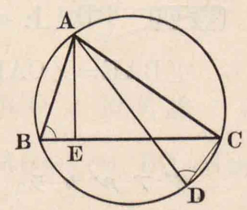
問 5. 三角形ヲソノ一邊ニ平行ナ直線ヲ引イテ二等分セヨ。

8. 内接形ノ比例線

定理 10. 三角形ノ二邊ノ積ハ第三邊ニ對スル高サト外接圓ノ直徑トノ積ニ等シイ。

題意 △ABC ニ於テ AD ヲ外接圓ノ直徑, AE⊥BC トスレバ

$AB \cdot AC = AE \cdot AD$



證明 △ABE ト △ADC トニ於テ

$\angle B = \angle D$

$\angle AEB = \angle ACD = R\llcorner$

∴ $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$

$$\therefore \quad AE : AB = AC : AD$$

$$\therefore \quad AB \cdot AC = AE \cdot AD$$

問 **1.** 三角形ノ三邊ヲ a, b, c; 面積ヲ S, 外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ

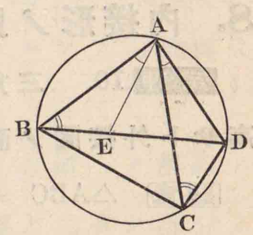
$$S = \frac{abc}{4R}$$

問 **2.** 三邊ガ 50 cm, 41 cm, 21 cm ナル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

定理 11. 圓ニ內接スル四邊形ノ對邊ノ積ノ和ハ對角線ノ積ニ等シイ。

題意 ABCD ヲ圓ニ內接スル四邊形トスレバ

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



證明 BD 上ニ一點 E ヲ取リ,

$\angle BAE = \angle CAD$ ナラシメレバ,

$$\angle ACD = \angle ABD$$

デアルカラ

$$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$$

$$\therefore \quad AB : AC = BE : CD$$

$$\therefore \quad AB \cdot CD = AC \cdot BE \qquad (1)$$

又 $\triangle ABC$ ト $\triangle AED$ トニ於テ

$$\angle BAC = \angle EAD$$

$$AB : AC = AE : AD$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle AED$$

$$\therefore \quad BC : ED = AC : AD$$

$$\therefore \quad AD \cdot BC = AC \cdot ED \qquad (2)$$

(1) ト (2) トヨリ

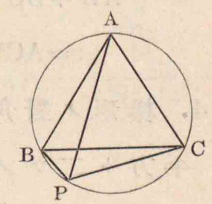
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

$$= AC(BE + ED)$$

$$= AC \cdot BD$$

注意 上ノ定理ヲ**とれみー** (Ptolemy) ノ**定理**トイフ。

問 **3.** 二等邊三角形 ABC ノ外接圓ノ頂角 A ニ對スル弧上ノ一點ヲ P トスレバ PA : (PB + PC) ハ一定デアル。



問 **4.** 圓ニ內接スル四角形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスル。今 AB = 4 cm, AO = 2 cm, BO = 3 cm, CO = 6 cm ナルトキ, BC, CD, DA ヲ求メヨ。

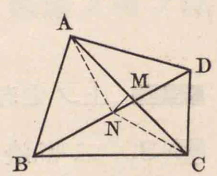
問題 (2)

1. 三角形ノ二邊ノ上ノ平方ノ差ハ,底ト之ニ對スル中線ガソノ上ニ投ズル正射影トノ包ム矩形ノ2倍ニ等シイ。

2. 二等邊三角形 ABC ノ底 BC (又ハソノ延長)ノ上ノ一點ヲ D トスレバ

$$AB^2 \sim AD^2 = BD \cdot CD$$

3. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ中點ヲ M, N トスレバ,



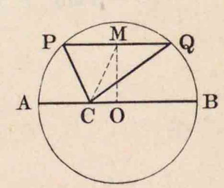
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$
$$= AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

4. 梯形ノ對角線ノ平方ノ和ハ,平行シナイ二邊ノ平方ト二ツノ底ノ積ノ2倍トノ和ニ等シイ。

5. ABCD ハ正方形, P ハ對角線 AC ノ上ノ任意ノ點トスレバ

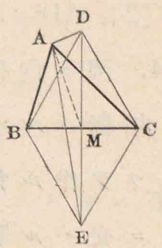
$$2BP^2 = AP^2 + CP^2$$

6. 圓ノ直徑 AB ノ上ノ定點ヲ C トシ, AB ニ平行ナル任意ノ弦ヲ PQ トスレバ,



$$CP^2 + CQ^2 = CA^2 + CB^2$$

7. 三角形 ABC ノ邊 BC ノ兩側ニ正三角形 BCD, BCE ヲ作レバ



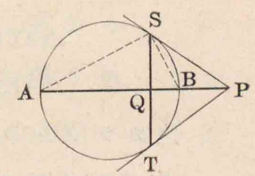
$$AD^2 + AE^2 = BC^2 + AC^2 + AB^2$$

8. 平行四邊形ノ二邊ガ 10 cm ト 11 cm トデ,一ツノ對角線ハ 19 cm デアルトキ,他ノ對角線ノ長サヲ計算セヨ。

9. 梯形ノ底ガ 12 cm ト 28 cm トデ,他ノ二邊ハドレモ 17 cm デアル。高サト對角線トヲ求メヨ。

10. 半徑ガ 26 mm ト 30 mm ナル二ツノ圓ノ中心ノ距離ガ 8 mm デアルトキハ,共通弦ノ長サハ幾ラカ。

11. 圓ノ直徑 AB ノ延長ノ上ノ任意ノ點 P カラノ二ツノ切線ノ切點ヲ結ビ付ケル弦ガ AB ニ交ハル點ヲ Q トスレバ, AB ハ P 及ビ Q ニ於テ調和ニ分タレル。



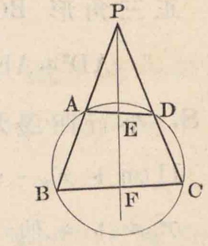
12. 圓ノ直徑 AB ガ C, D ニ於テ調和ニ分タレルナラバ,圓周上ノ任意ノ點カラ C, D ヘノ距離ノ比ハ一定デアル。

13. △ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底 BC ニ交ハル點ヲ D, 外接圓ニ交ハル點ヲ M トスレバ

[1] $AB \cdot AC = AD \cdot AM$

[2] $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$

14. 圓ニ內接スル四角形 ABCD ノ相對スル邊 AB, CD ノ延長ガ出會ツテ作ル角ノ二等分線ガ AD, BC ニ交ハル點ヲ E, F トスレバ



$$AE:DE=CF:BF$$

15. 四邊形ノ對邊ノ積ノ和ハ對角線ノ積ヨリハ小デナイ。

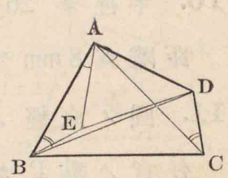
注意 任意ノ四邊形 ABCD ニ於テ

$\angle BAE=\angle CAD,\quad \angle ABE=\angle ACD$

トスレバ

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD,$

$\triangle AED \backsim \triangle ABC$



之カラ $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(BE+ED)$ ヲ得ル。

(內接四角形ノ場合ニ限リ, E ハ BD ノ上ニ來リ,とれみーノ定理ハ成立スルノデアル。)

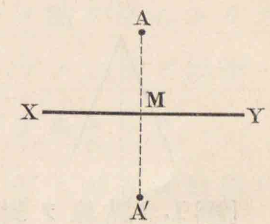
16. 一直線ガ △ABC ノ邊 BC, CA, AB 或ハソノ延長ヲ夫々 X, Y, Z ニ於テ截ルトキハ

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

第 2 章 對稱圖形

9. 對稱軸

一ツノ圖形ヲ XY ヲ軸トシテ折リ返ストキニ,重ナリ合フ一對ノ點 A, A′ ヲ結ブ線分 AA′ ガ軸 XY ニ交ハル點ヲ M トスレバ,圖形ガ折リ返サレタトキ,線分 AM ハ A′M ニ重ナリ, ∠AMX ハ ∠A′MX ニ重ナル。故ニ AM ト A′M トハ等長デ ∠AMX, ∠A′MX ハ直角デアル。卽チ AA′ ハ軸 XY ニ垂直ニ二等分セラレル。



定義 一直線ガソノ兩側ニアル二點ヲ結ビ付ケル線分ヲ垂直ニ二等分スルトキ,コノ二點ハソノ直線ヲ軸トシテ互ニ**對稱**デアルトイフ。

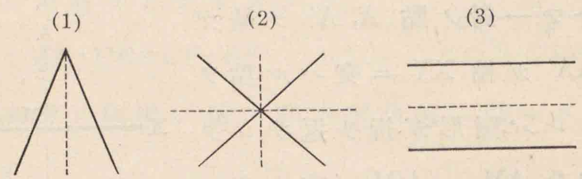
一ツノ圖形ノ各點ガ同一ノ直線ヲ軸トシテ,他ノ圖形ノ各點ト對稱デアルトキニハ,コレ等ノ圖形ヲ互ニ對稱デアルトイヒ,ソノ直線ヲ**對稱軸**(又ハ單ニ**軸**)トイフ。

例ヘバ

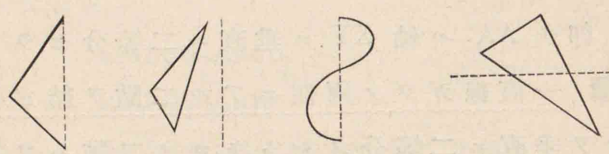
(1) 角ノ二邊ハソノ角ノ二等分線ヲ軸トシテ互ニ對稱デアル。

(2) 相交ハル二直線ハソノ交角ノ二等分線ヲ軸トシテ互ニ對稱デアル。

(3) 二ツノ平行線ハソレカラ相等シイ距離ニアル平行線ヲ軸トシテ互ニ對稱デアル。

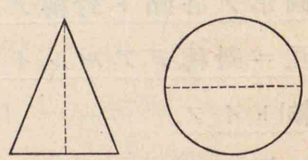


問1. 點線ヲ對稱軸トシ,次ノ圖形ト對稱ナル圖形ヲ描ケ。



互ニ對稱ナル二ツノ圖形ガ合シテ一ツノ圖形ヲナストキニハ,對稱軸ヲソノ圖形ノ對稱軸トイフ。

例ヘバ (1) 二等邊三角形デハ頂角ノ二等分線ガ對稱軸デ, (2) 圓デハ直徑ガ對稱軸デアル。



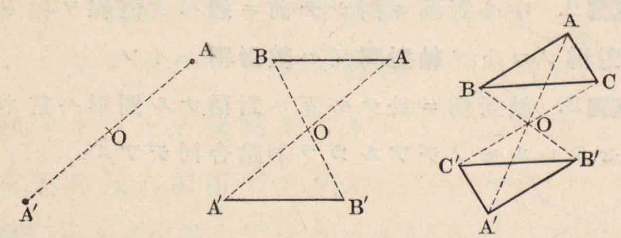
問2. 正三角形ニハ幾ツノ對稱軸ガアルカ。

10. 對稱ノ中心

定義 一ツノ點 (O) ヲ通ル直線上ニ於テ,ソノ點ノ兩側ニ相等シイ距離ニアル二點 (A, A′) ハ,原ノ**點 (O) ヲ中心トシテ互ニ對稱デアル**トイフ。

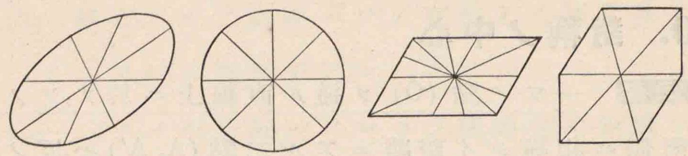
二ツノ圖形ニ屬スル點ガ同一ノ點ヲ中心トシテ二ツヅツ互ニ對稱デアルトキハ,ソノ二ツノ圖形ハ**ソノ點ヲ中心トシテ互ニ對稱デアル**トイフ。

問1. 點Oヲ中心トシテAトA′トガ互ニ對稱デ,又BトB′トモ互ニ對稱デアルナラバ,線分AB, A′B′モ互ニ對稱デアル。コレ等ノ線分ハ互ニ平行デ且等長デアル。



定義 一ツノ圖形ニ屬スル點ガ同一ノ點ヲ中心トシテ二ツヅツ互ニ對稱デアルトキハ,コノ點ヲ圖形ノ**對稱ノ中心**(又ハ單ニ**中心**)トイフ。

例ヘバ圓ノ中心ハ對稱ノ中心デアリ,又平行四邊形ノ對角線ノ交點ハ,ソノ對稱ノ中心デアル。



問 2. A, B, ……Z ノ文字ノ中デ對稱ノ中心ヲ有スルモノハドレカ。

問 3. 對稱ノ中心ヲ有スル多角形デハ相對スル邊ガ平行デ且等長デアル。

上ニ述ベタ對稱ヲ**中心對稱**(又ハ**點對稱**)トイフ。

注意 1. 中心對稱ニ於テハ互ニ對稱ナル圖形ハ合同デアル。ソレハ中心ノ周リニ一ツノ圖形ヲ2直角ダケ廻轉スレバ全ク他ノ圖形ニ重ナルカラデアル。

注意 2. 中心對稱ニ對シテ前ニ述ベタ直線ヲ軸トスル對稱ノコトヲ**軸對稱**(又ハ**線對稱**)トイフ。

注意 3. 軸對稱ニ於テモ互ニ對稱ナル圖形ハ重ネ合ハセラレルモノデアルカラ勿論合同デアル。

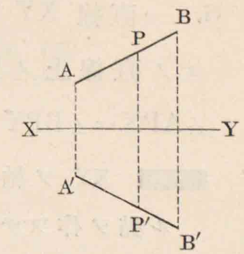
問題 (3)

1. 二點 A, A′ ハ直線 XY ヲ軸トシテ互ニ對稱デ, P ハ XY ノ上ノ任意ノ點ナラバ PA=PA′, ∠APX=∠A′PX デアル。

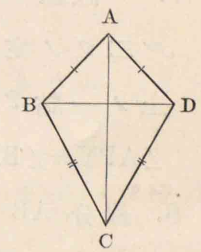
2. 直線 XY ヲ軸トシテ A ト A′ ト及ビ B ト B′ トガ

互ニ對稱ナラバ,線分 AB ト A′B′ トハ互ニ對稱デアル。

若シ AB ト A′B′ トガ相交ハルナラバ,ソノ交點ハ XY ノ上ニアル。



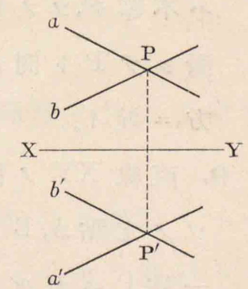
3. 四邊形ノ相對スル二ツノ頂點ニ於テ相接スル二邊ガ夫々相等シイトキハ,ソレ等ノ頂點ヲ結ビ付ケル對角線ハ四邊形ノ對稱軸デアル。



注意 カヤウナ四邊形ヲ**紙鳶形**トイフ。

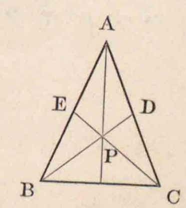
若シ四邊ガ皆相等シケレバ**菱形**デアル。

4. 同一ノ直線ヲ軸トシテ直線 a ト a' ト又 b ト b' トガ互ニ對稱ナラバ, a ト b トノ交點ト a' ト b' トノ交點ハ互ニ對稱デアル。



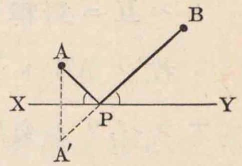
注意 a, b ノ交點ヲ P トスレバ, P ト對稱ナル點 P′ ハ a' 上ニモ又 b' ノ上ニモアラネバナラヌ。

5. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端カラ頂角ノ二等分線上ノ一點ヲ通ツテ對邊ニ至ル二線分ハ等長デアル。



6. 一直線 XY ノ同ジ側ニアル二ツノ定點A, B ヲコノ直線上ノ點Pニ結ビ,

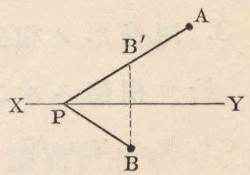
$\angle APX=\angle BPY$　ナラシメヨ。



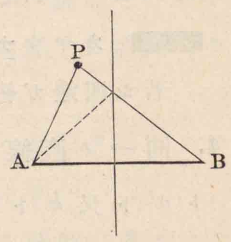
注意 XY ヲ軸トシテAト對稱ナル點ヲ作ツテ見ヨ。

7. 一直線 XY ノ反對ノ側ニアル二ツノ定點A, B ヲコノ直線上ノ一點Pニ結ビ,

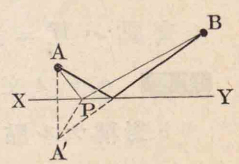
$\angle APY=\angle BPY$　ナラシメヨ。



8. 線分 AB ノ垂直二等分線上ニナイ點PカラA, Bヘノ距離ハ不等デ,ソノ垂直二等分線ニ對シテPト同ジ側ニアル點ノ方ニ近イ。



9. 直線 XY ノ同ジ側ニアル二ツノ定點A, Bカラノ直線上ノ一點Pニ至ル距離ノ和ガ最小ニナルヤウニPヲ定メヨ。



第3章　定理ノ關係

11. 命題

例ヘバ

"東京ハ日本ノ首府デアル"

"對頂角ハ相等シイ"

ナドノヤウニ一ツノ判斷ヲ言ヒ表ハシタモノヲスベテ**命題**トイフ。

幾何學ニ於ケル定義,公理,定理等ハイヅレモ一種ノ命題デアル。

"勉强スレバ必ズ成功スル"

"雨ガ降レバ遠足ハ止メル"

ナドノヤウナ或事柄ノ主張ニ或條件ノ伴ナフ命題ヲ**假言命題**トイフ。

假言命題ノ條件ニツイテイフ部分ヲ**假設**トイヒ,コノ條件ニ制約サレル部分(事柄ノ主張)ヲ**終結**トイフノデアル。幾何ノ定理ハ皆假言命題デアツテ,一般ニ

"AガBナラバCハDデアル"

トイフ形式デ言ヒ表ハセル。例ヘバ

$\underbrace{\text{二ツノ圓}}_{A}$ガ$\underbrace{\text{相切}}_{B}$スルトキハ,$\underbrace{\text{切點}}_{C}$ハ$\underbrace{\text{中心線上}}_{D}$ニアル。

注意 定理ニハ「AハBナリ」トイフ形デ表ハサレタルモノモアル。例ヘバ

　　　“對頂角ハ相等シイ”

ノ如キデアル。然シ之ハ

“二角ガ對頂角ヲナスナラバ,ソノ二角ハ相等シイ”

トイフノヲ略言シタモノト考ヘラレル。

12. 命題ノ關係

[1] **逆**　或命題ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘテ得ル命題ヲ原ノ**命題ノ逆**トイフ。例ヘバ

　AガBナラバ,CハDデアル　　(1)

　CガDナラバ,AハBデアル　　(2)

ナル二命題ハ互ニ他ノ逆デアル。

或命題ガ眞デアツテモ,ソノ逆ハ眞デアルトハ限ラナイ。例ヘバ

“日曜日ハ休日デアル”

トシテモ

“休日ハ日曜日デアル”

トハイヘナイ。故ニ定理ノ逆ハ別ニ證明セネバ眞僞ヲ知ルコトハ出來ナイ。

[2] **對偶**　或命題ノ終結ノ否定ヲ假設トシ,假設ノ否定ヲ終結トスル命題ヲ原ノ**命題ノ對偶**トイフ。例ヘバ

　AガBナラバ,CハDデアル　　(1)

　CガDデナイナラバ,AハBデナイ　　(3)

ナル二命題ハ互ニ他ノ對偶デアル。今,

“日曜日ハ休日デアル”

トスルト,

“或日ガ休日デナイナラバ,ソノ日ハ日曜デナイ”

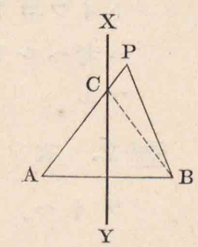
トイフコトガ出來ル。カヤウニ

一ツノ命題ガ眞ナラバ,ソノ對偶ハ當然眞デアル。

ソレ故一定理ヲ證明スル代リニ,ソノ對偶ヲトツテ證明シテモヨイ。之ヲ**間接法**トイフ。

問 **1.** 次ノ定理ノ對偶ヲ述ベテ且之ヲ證明セヨ。

“二點 AB カラ等距離ニアル點ハ線分 AB ノ垂直二等分線上ニアル。”



[3] **裏**　或命題ノ假設ノ否定ヲ假設トシ,終結ノ否定ヲ終結トスル命題ヲ原ノ**命題ノ**

裏トイフ。例ヘバ

AガBナラバ,CハDデアル (1)

AガBデナイナラバ,CハDデナイ (4)

ナル二命題ハ互ニ他ノ裏デアル。

“日曜日ハ休日デアル”

トシテモ

“或日ガ日曜日デナイナラバ,ソノ日ハ休日デナイ”

トハ限ラナイ。祝祭日ナドモ休日デアル。故ニ

或定理ガ眞デアツテモ,ソノ裏ハ眞トハ限ラナイコトハ,逆ハ必ズシモ眞デナイト同様デアル。

注意 日常ノ談話デ

“天氣ガ良ケレバ行キマス”

ナドトイフ場合ニハ,ソノ裏即チ

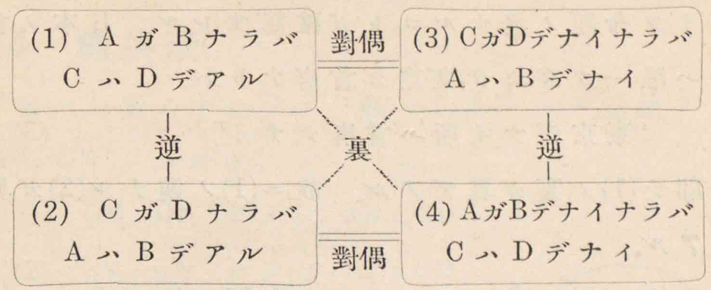
“天氣ガ良クナイト行カヌ”

トイフコトヲ言外ニ含メテイフコトガ多イガ,論理的ニ考ヘルト,天氣ガ良クナクテモ行クカモ知レヌノデアル。

問**2.** 次ノ定理ノ裏ヲ述ベ,且ソレガ眞カドウカヲイヘ。

“矩形ノ對角線ハ相等シイ。”

上ニ述ベタ互ニ關聯シタ四ツノ命題ノ關係ヲ圖解スルト次ノヤウニナル。



横ニ並ンダ二ツハ互ニ對偶デアルカラ,一ツガ眞ナラバ他ノ一ツモ當然眞デアル。縦ニ並ンダ二ツハ互ニ逆デアリ,又對角線的ニ相對スル二ツハ互ニ裏デアルカラ,ソノ一ツガ眞デアツテモ他ノ一ツハ保證ノ出來ヌモノデアル。但シ逆ト裏トハ互ニ對偶ノ關係デアルカラ,同時ニ眞ナルカ又ハ同時ニ僞デアル。

問**3.** 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ補角ヲナス。コノ定理ノ對偶・逆及ビ裏ヲ述ベヨ。ソレ等ハ眞デアルカ。

13. 同一法

例ヘバ

“東京市ハ日本ノ首府デアル” (1)

トイフ命題ノ眞ナルコトカラ直ニソノ逆ナル

“日本ノ首府ハ東京市デアル” (2)

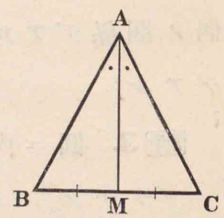
トイフ命題ノ眞ナルコトガ確認サレル。日本ノ首府ハ唯一ツダカラ,東京ガ首府ナラバ

"東京デナイ所ハ首府デナイ"　(3)

卽チ(1)ノ裏ガ眞デアル。故ニ(1)ノ逆ナル(2)ガ眞デアル。

一般ニ,「AハBデアル」トイフ命題ガ眞デ,BナルモノガB唯一ツニ限ルトキニハ,直ニ逆ノ命題「BハAデアル」ノ眞ナルコトガワカル。コノヤウナ證明法ヲ**同一法**トイフ。同一法ハ幾何學デシバシバ用ヒラレル。

例ヘバ"二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ唯一ツアリ,又底邊ノ垂直二等分線ハ唯一ツデアル"カラ



"二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル"

トイフ定理ガ證明サレレバ直チニソノ逆,卽チ

"二等邊三角形ノ底邊ノ垂直二等分線ハ頂角ヲ二等分スル"

トイフ定理ノ成立ツコトガワカル。

問　三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ底邊ニ平行ナ直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ルコトヲ證明セヨ。

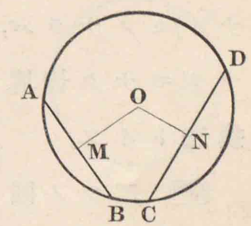
14. 轉換法

例ヘバ圓ノ中心OカラB弦AB, CDヘノ垂線ヲOM, ONトスルト

(1)　OM>ON　ナラバ　AB<CD

(2)　OM=ON　ナラバ　AB=CD

(3)　OM<ON　ナラバ　AB>CD



トイフ三ツノ定理ノ眞ナルコトカラ,コレ等ノ各ノ定理ノ逆,卽チ

(4)　AB<CD　ナラバ　OM>ON

(5)　AB=CD　ナラバ　OM=ON

(6)　AB>CD　ナラバ　OM<ON

トイフ三定理ノ眞デアルコトハ別ニ證明スルマデモナク確認スルコトガ出來ル。何トナレバ(1)以外ノ(2)ト(3)トヲ綜合スルト

$OM \ngtr ON$　ナラバ　$AB \nless CD$

トナリ,之ハ(4)ノ對偶デアルカラ(2),(3)ノ眞ナルコトカラ(4)ノ眞ナルコトガワカルノデアル。(5),(6)ニツイテモ同様デアル。一般ニ

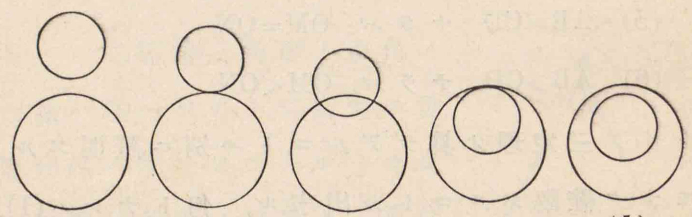
A_1ガB_1ナラバC_1ハD_1デアル

A_2ガB_2ナラバC_2ハD_2デアル

A_3 ガ B_3 ナラバ C_3 ハ D_3 デアル
………………………………

トイフヤウナ一群ノ定理ガアツテ,ソノ假設ハ或事項ニツイテ起リ得ル總テノ場合ヲ盡シ,ソノ終結ハ互ニ相容レナイ(二ツ以上同時ニ眞ナルコトノ出來ナイ)モノナラバ,コレ等ノ定理ノ逆ハ別ニ證明スルマデモナク皆眞ナルコトガワカル。コノ論法ヲ**轉換法**トイフ。

問 二ツノ圓ノ中心距離ヲ d トシ,二圓ノ半徑ヲ夫々 r, r' $(r>r')$ トスレバ



(1) (2) (3) (4) (5)

(1) 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ外ニアレバ $d>r+r'$

(2) 二圓ガ外切スレバ $d=r+r'$

(3) 二圓ガ相交ハレバ $r-r'<d<r+r'$

(4) 二圓ガ內切スレバ $d=r-r'$

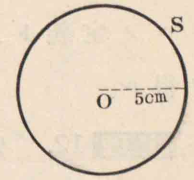
(5) 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ內ニアレバ $d<r-r'$

ナルコトカラ,コノ定理ノ逆ノ成立ツ理由ヲ述ベヨ。

第4章 軌 跡

15. 軌跡ノ定義

例ヘバ定點Oヲ中心トスル半徑5cmノ圓周Sニツイテ考ヘルト

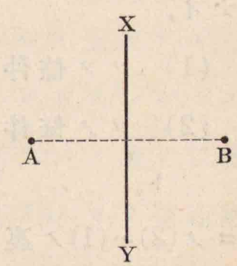


(i) 點Oカラ5cmノ距離ニアル點ハ全部Sナル曲線上ニアル。

(ii) 曲線S上ノ點ハ何レモ皆Oカラ5cmノ距離ニアル。

卽チSナル圓周ハ定點Oカラ5cmノ距離ニアルトイフ條件ニ適スル點ヲ悉ク網羅シ,且ソノ條件ニ適シナイ點ハ一ツモ含マナイ線デアル。

次ニ線分ABノ垂直二等分線XYニツイテ考ヘルト



(i) 二點A,Bカラ等距離ニアル點ハ何レモXY上ニアル。

(ii) XY上ノ點ハ何レモA,Bカラ等距離ニアル。

卽チ直線XYハ二點A,Bカラ等距離ニアルトイフ條件ニ適スル點ハ全部之ヲ包含シ,然ラザル餘分ノ點ハ一ツモ含マナイ線デアル。

上ノ二ツノ例ノヤウニ

或條件ニ適スル點ハ悉ク之ヲ包含シ,サウデナイ餘分ノ點ヲ一ツモ含マナイ線ヲソノ條件ニ適スル點ノ**軌跡**トイフ。

コノ定義ト上ニ述ベタ二ツノ例カラ次ノ二定理ヲ得ル。

定理 12. **定點カラ定距離ニアル點ノ軌跡ハソノ點ヲ中心トシ,ソノ距離ヲ半徑トスル圓周デアル。**

定理 13. **二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハソノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。**

或線ガ或條件ニ適スル點ノ軌跡デアルコトヲ確認スルニハ恒ニ次ノ二ツノ事柄ヲ證明セネバナラナイ。

(1) ソノ條件ニ適スル點ハソノ線上ニアルコト。

(2) ソノ條件ニ適シナイ點ハソノ線上ニナイコト。

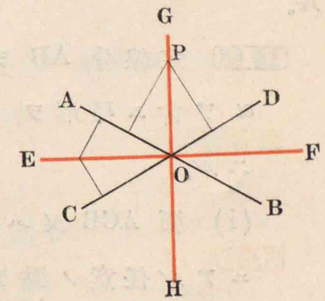
コノ(2)ハ(1)ノ裏ダカラ(2)ノ代リニ(1)ノ逆即チ

(2′) ソノ線上ニアル點ハ條件ニ適スルコトヲ證明シテモヨイ

注意 一般ニハ(2)ヨリモ(2′)ノ證明ガ容易デアル。

16. 基本的ノ軌跡(一)

定理 14. **相交ハル二定直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ二直線ノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線デアル。**



證明 二直線 AB, CD ガ O ニ於テ交ハリ,對頂角∠AOC, ∠BOD ノ二等分線ヲ EOF;對頂角∠AOD, ∠BOC ノ二等分線ヲ GOH トスル。

(i) AB, CD ヨリ等距離ニアル任意ノ點ヲ P トスレバ,P ハ AB, CD ノナム四ツノ角ノ何レノ角內ニアツテモ,ソノ角ノ二等分線上ニアル。故ニ點 P ハ EOF, GOH ノ何レカノ上ニアル。

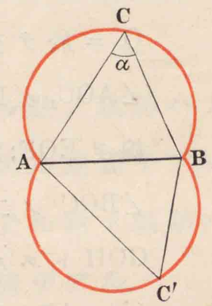
(ii) EOF 又ハ GOH 上ノ點ヲ P トスレバ,P ハ四ツノ角ノ何レカノ內ニアツテ,ソノ角ノ二邊カラ等距離ニアル。即チ AB, CD ヨリ等距離ニアル。

故ニ AB, CD ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ二ツノ直線 EF, GH デアル。

問　平行ナ二直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ何カ。

定理 15.　定線分ヲ定角ニ見込ム點ノ軌跡ハ,ソノ線分ヲ弦トシ,ソノ角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル。

證明　定線分 AB ヲ弦トシ,定角 α ヲ含ム弓形ヲ ACB, AC′B トスル。



(i)　弧 ACB 又ハ弧 AC′B ノ上ニアル任意ノ點ヲ P トスレバ

$$\angle APB=\angle\alpha$$

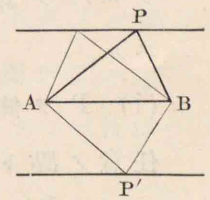
(ii)　又二ツノ弓形ノ弧上ニナイ任意ノ點ヲ Q トスレバ $\angle AQB\neq\angle\alpha$ トナルカラ $\angle APB=\angle\alpha$ トナルヤウナ點 P ハ二ツノ弓形ノ何レカノ弧上ニアル。

故ニ弧 ACB ト弧 AC′B トハ合セテ AB ヲ定角 α ニ見込ム點ノ軌跡デアル。

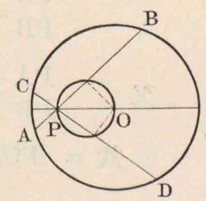
系　定線分ヲ直角ニ見込ム點ノ軌跡ハソノ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

問題　(4)

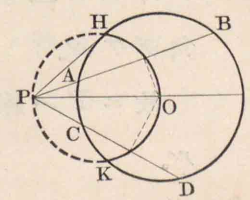
1. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ハ何カ。
2. 定點ニ於テ定直線(又ハ定圓)ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ何カ。
3. 二定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ何カ。
4. 定點ヨリ定直線ニ至ル線分ノ中點ノ軌跡ハ何カ。



5. 同ジ底邊ノ上ニ立チテ等積ナル三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。
6. 定圓內ノ一定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。



7. 定圓外ノ一定點ヲ通ル割線ニヨツテ生ズル弦ノ中點ノ軌跡ハ何カ。



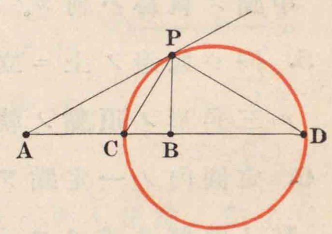
注意　コノ軌跡ハ圓周ノ一部分デアル。一般ニ軌跡ノ限界ニ注意スルコトガ肝要デアル。

17. 基本的ノ軌跡(二)

定理 16. 二定點カラノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ハ,ソノ二點ヲ結ブ線ヲソノ比ニ内分及ビ外分スル二點間ノ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

(Apollonius ノ定理)

證明 A, B ヲ二定點トシ, $m:n$ ヲ定比トシ, AB ヲ $m:n$ ノ比ニ内分及ビ外分スル點ヲ C, D トスル。



(i) P ヲ條件ニ適スル任意ノ點トスレバ

$$\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}=\frac{AC}{CB}$$

又 $$\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}=\frac{AD}{DB}$$

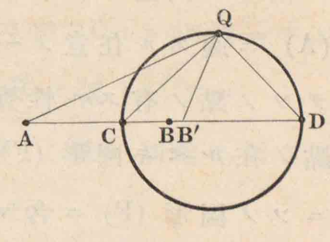
故ニ PC, PD ハ夫々 △PAB ノ頂角 P 及ビソノ外角ノ二等分線デアル。從ツテ ∠CPD ハ直角デアル。

故ニ P ハ線分 CD ヲ直徑トスル圓周上ニアル。

(ii) 次ニコノ圓周上ニ任意ノ點 Q ヲトル。CD 上ニ點 B′ ヲ ∠AQC=∠CQB′ ナルヤウニトレバ, ∠CQD ハ直角デアルカラ QD ハ △AQB′ ノ角 Q ノ外角ヲ二等分スル。

故ニ A, C, B′, D ハ調和列點トナル。

然ルニ A, C, B, D モ亦調和列點デアルカラ B′ ハ B ト一致スル。



故ニ $$\frac{QA}{QB}=\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$$

故ニ A, B ヨリノ距離ノ比ガ $m:n$ デアル點ノ軌跡ハ線分 CD ヲ直徑トスル圓周デアル。

注意 ココデハ $m\neq n$ トシタガ $m=n$ ナラバ軌跡ハ AB ノ垂直二等分線デアル。

問題 (5)

1. 同一直線上ノ線分 AB, BC ヲ相等シイ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求メヨ。
2. 二ツノ定圓ヲ等角ニ見ル點ノ軌跡ハ何カ。
3. 二定點 A, B ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。
4. 二定直線ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

18. 軌跡ノ求メ方

軌跡ノ問題ヲ解クニハ,先ヅ與ヘラレタル條件(A)ニ適スル任意ノ一點ヲ取ツテ,ソノ條件ニヨツテソノ點ノ有スル性質ヲ攻究シ,ソノ性質カラソノ點ノ在ルベキ圖形(F)ヲ發見セネバナラナイ。次ニソノ圖形(F)ニ含マレル任意ノ點ガ條件ニ適スルカドウカヲ確カメネバナラナイ。

圖形(F)ノ上ニアル任意ノ點ガ條件(A)ヲ滿足スレバ圖形(F)ガ求メル軌跡デアル。若シ圖形(F)ノ一部分(G)ノ上ニアル點ガソノ條件(A)ヲ滿足シナイトキハ,圖形(F)カラソノ一部分(G)ヲトリ除イタ殘部(H)ダケガ求メル軌跡デアル。

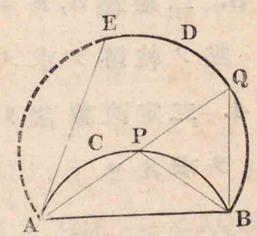
例1. 定弓形ACBノ弦ABノ一端Aト弧上ノ任意ノ點Pトヲ結ビ,APノ延長上ニPBニ等シクPQヲトルトキ,點Qノ軌跡ヲ求メヨ。

解 (i) 條件ニ適スル點QトBトヲ結ベバ

$$PB=PQ \quad \therefore \quad \angle Q=\angle PBQ$$

然ルニ $\angle APB=\angle Q+\angle PBQ$

$$=2\angle Q$$



依ツテ弓形ACBノ角ヲαトスレバ

$$2\angle Q=\angle\alpha \quad \therefore \quad \angle Q=\frac{1}{2}\angle\alpha$$

故ニQハABヲ弦トシ弓形ACBト同側ニアツテ,$\frac{1}{2}\angle\alpha$ヲ含ム弓形ADBノ弧上ニアル。

(ii) Aニ於テ弓形ACBノ弧ノ切線ヲ引キ,弧ADBトノ交點ヲEトスル。

今弓形ADBノ弧上ノ一點Q'ヲトリ, AQ'ヲ結ブト, Q'ガ$\widehat{AE}$上ニアレバAQ'ハ弓形ACBノ弧ト交ハラナイカラQ'ハ條件ニ適シナイ點デアル。又Q'ガ$\widehat{EB}$上ニアレバAQ'ハ$\widehat{ACB}$ト交ハル。コノ點ヲP'トシ, P', B; Q', Bヲ結ブト

$$\angle P'BQ'=\angle AP'B-\angle Q'$$

然ルニ $\angle AP'B=\angle\alpha, \quad \angle Q'=\frac{1}{2}\angle\alpha$

$$\therefore \quad \angle P'BQ'=\frac{1}{2}\angle\alpha=\angle Q'$$

$$\therefore \quad P'Q'=PB'$$

卽チQ'ガ$\widehat{EB}$上ニアレバ條件ニ適スル。

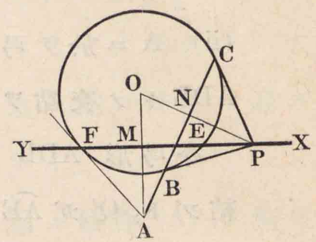
故ニ求メル軌跡ハ$\widehat{EB}$デアル。

例2. 定圓O外ノ一定點Aヲ通ル任意ノ割線ニヨツテ生ズル弦BCノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 (i) B, C ニ於ケル切線ノ交點ヲ P トスル。P ヲ通リ OA ニ垂直ナル直線 XY ヲ引キ, OA トノ交點ヲ M, OP ト BC トノ交點ヲ N トスレバ

$$\angle AMP = \text{直角},\quad \angle ANP = \text{直角}$$

故ニ A, M, N, P ハ同圓一周上ニアル。



$$\therefore\quad OM\cdot OA = ON\cdot OP$$

又 $\angle OCP=$直角, $CN\perp OP$

$$\therefore\quad ON\cdot OP = OC^2$$

$$\therefore\quad OM\cdot OA = OC^2$$

$OA=a$ トシ, 又圓 O ノ半徑ヲ r トスレバ

$$OM\cdot OA = r^2 \qquad \therefore\quad OM=\frac{r^2}{a}$$

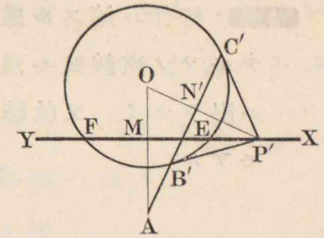
故ニ M ハ定點デアル。

故ニ M ヲ通リ定直線 OA ニ垂直ナル直線 XY モ亦定直線デアル。而シテ A ガ圓外ニアルカラ

$$a>r \qquad \therefore\quad OM<r$$

故ニ XY ハ圓 O ト二點 E, F デ交ハル。ソノ直線ノ, 圓 O ノ外部ニアル二ツノ半直線ヲ EX, FY トスルト, P ハ常ニ圓外ニアルカラ, P ハ二ツノ半直線 EX, FY ノ何レカノ上ニアル。

(ii) 次ニ二ツノ半直線 EX, FY ノ何レカノ上ニ一點 P′ ヲトリ, OP′ ヲ結ビ, A カラ OP′ ヘノ垂線ヲ AN′ トスレバ, A, M, N′, P′ ハ同一圓周上ニアル。



$$\therefore\quad ON'\cdot OP' = OM\cdot OA = r^2$$

サテ　$OP'>r \qquad \therefore\quad ON'<r$

故ニ直線 AN′ ハ圓周 O ト交ハル。ソノ交點ヲ B′, C′ トスレバ

$$OB'^2 = ON'\cdot OP'$$

故ニ OB′ ハ圓 P′N′B′ ニ切スル。

$\angle B'N'P'$ ハ直角ナル故 B′P′ ハ圓 P′N′B′ ノ直徑デアル。

$$\therefore\quad P'B'\perp OB'$$

故ニ P′B′ ハ圓 O ノ切線デアル。

同様ニ P′C′ モ亦圓 O ノ切線デアル。

故ニ P′ ハ B′, C′ ニ於ケル二切線ノ交點トナリ, 條件ニ適スル。

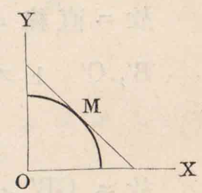
故ニ求メル軌跡ハ二ツノ半直線 EX, FY デアル。

注意　條件ニ適スル點ガ或ル直線又ハ圓周ノ上ニアッテモ,ソノ直線又ハ圓周ノ全部ガ求メル軌跡デアルトハ限ラナイ。又軌跡ハ二ツ以上ノ線カラ成立ツコトモアル。

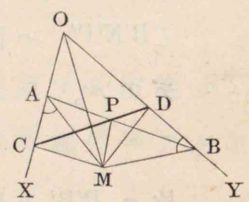
問題 (6)

1. 定長ノ線分ヲ一邊トスル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 定長ノ線分ノ兩端ガ,直交スル二定直線上ニ一ツヅツアッテ動クトキ,ソノ中點ノ軌跡ハ何カ。

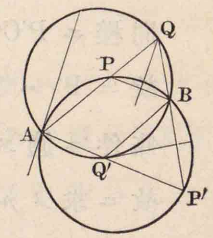


3. 定角 XOY ノ各邊上ニ夫々點 A, B ヲトリ, OA+OB ヲ一定ナラシメルトキ, AB ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。



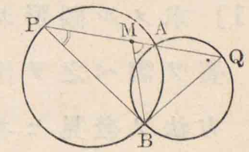
又 △OAB ノ外心ノ軌跡ハ何カ。

4. 定圓周上ニ二定點 A, B ト動點 P ガアル。弦 BP ノ垂直二等分線ト弦 AP トノ交點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。



5. 相交ハル二圓ノ交點 A ヲ過ギル定直線ガ二圓周ト交ハル點ヲ B, C トシ, A ヲ過ギル任意ノ直線ガ二圓周ト交ハル點ヲ P, Q トスルトキ, BP, CQ 或ハソノ延長ノ交點 R ノ軌跡ハ何カ。

6. 相交ハル二圓ノ交點 A ヲ過ギル任意ノ直線ガ二圓周ト交ハル點ヲ P, Q トスルトキ,線分 PQ ノ中點ノ軌跡ハ何カ。



7. 相交ハル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

8. 定角 A ノ邊上ニ夫々定點 B, C ガアル。コノ角内ニ點 P ヲ取リ △PAB=△PAC ナラシメルトキ,點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

9. 與ヘラレタ二線分 AB, CD ノ各ヲ底邊トシ,同一ノ點 P ヲ頂點トスル三角形 PAB, PCD ノ面積ノ和ガ一定ナルトキ,點 P ノ軌跡如何。

10. AB ヲ定圓ノ定弦, P ヲ圓周上ノ任意ノ點トシ, AP ノ延長上ニ PQ=2PB ナル點 Q ヲトルトキ,點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。

第5章　作圖題

19. 作圖題ノ解法

作圖題ヲ解クニハ,次ノ順ニヨル。

[1] 求メル圖形ガ出來タモノトシテ,ソノ圖形ノ性質ヲ調ベ,之ヲ作ルニハ如何ニスレバヨイカ,ソノ方法ヲ發見セネバナラヌ。之ヲ**解析**トイフ。

[2] ソノ作圖ノ方法ヲ述ベル。之ヲ**作圖**トイフ。

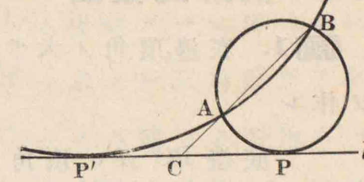
[3] ソノ作圖ノ結果ガ求メルトコロノ圖形デアルトイフ理由ヲ述ベル。之ヲ**證明**トイフ。

[4] 與ヘラレタ部分ノ相互ノ關係ニヨリ作圖ノ可能ナリヤ否ヤ,又可能ナ場合ニハ幾通リノ圖形ヲ得ルカ等ノコトヲ調ベネバナラヌ。之ヲ**吟味**トイフ。

スベテ作圖題ハ以上四ツノ階段ヲ踏ンデ完全ニ解決セラレル。

注意 作圖題ノ解析ハ單ニ作圖ノ方法ヲ發見スルタメノミナラズ,求メル圖形ガ他ニ存在シナイコトヲ確カメルタメニモ必要ナモノデアル。

例 定直線 l ニ切シ,且 l ノ同ジ側ニアル二定點 A, B ヲ通ル圓ヲ畫ケ。



解析 求メル圓ヲ ABP トシ, P ヲソノ切點トスル。直線 AB ガ l ニ交ハル點ヲ C トスレバ, C ハ定點デ

$$CA\cdot CB=CP^2$$

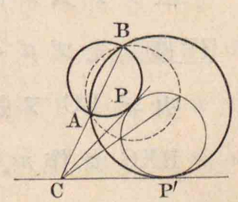
故ニ CP ハ定長デアル。

依ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 直線 AB ヲ引イテ, C ニ於テ l ト交ハラシメ, CA, CB ノ比例中項ニ等シク CP, CP′ ヲ l 上ニ取ル。然ラバ圓 ABP 又ハ圓 ABP′ ガ求メル圓デアル。

證明 作圖ニヨッテ $CA\cdot CB=CP^2$ 故ニ圓 ABP ハ P ニ於テ l ニ切スル。同樣ニ圓 ABP′ ハ P′ ニ於テ l ニ切スル。

吟味 上記デハ AB ガ l ニ交ハルトシタガ,特ニ AB ガ l ニ平行デアル場合ニハ別ノ作圖法ヲ要スル。(生徒自ラナセ)



問 二ツノ定點ヲ通リ一ツノ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。

20. 軌跡交截法

例 1. 底邊,頂角ノ大サ及ビ高サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

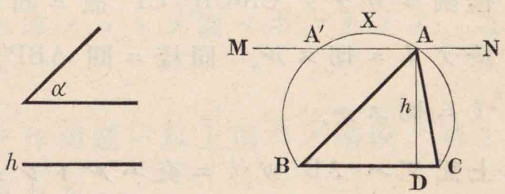
底邊 BC ガ a, 頂角 BAC ガ α, 高サ AD ガ h ニ等シイ △ABC ヲ BC ノ一側ニ作ルコトニスル。

解析 △ABC ノ底邊 BC ノ位置ガ定マツタトスルト ∠BAC=∠α ナル條件カラ,

A ハ BC ノ一側ニ於テ,ソレニ對スル角ガ α ニ等シイ點ノ軌跡上ニアル。

又高サ AD=h ナル條件カラ

A ハ BC ノ同ジ側ニ於テソレカラ h ニ等シイ距離ニアル點ノ軌跡上ニアル。



依ツテ次ノ作圖ヲ得ル。

作圖 先ヅ a ニ等シイ線分 BC ヲ引ク。

次ニ BC ヲ弦トシ,α ニ等シイ角ヲ含ム弓形 BXC ヲ作ル。　(第一ノ軌跡)

又 BC ニ平行デ,h ノ距離ニアル直線 MN ヲ弓形ト同ジ側ニ引ク。　(第二ノ軌跡)

弧 BXC ト直線 MN トノ交點ノ一ツヲ A トシ, AB, AC ヲ引ケバ, △ABC ハ求メル三角形デアル。

證明 △ABC ノ底邊 BC ハ a ニ等シク,頂角 A ハ α ニ等シク,又高サ AD ハ MN ト BC トノ距離 h ニ等シイ。

故ニ △ABC ハ與ヘラレタ條件ヲ滿足スル。

吟味 弧 BXC ト直線 MN トガ二點デ交ハルトキハ二ツノ三角形 ABC, A′BC ヲ得ルガ

$$\overset{\frown}{A'B}=\overset{\frown}{AC}\quad 從ツテ\quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'C}$$

$$\therefore\quad AC=A'B\qquad AB=A'C$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\equiv\triangle A'BC$$

故ニ解ハ一ツデアル。

弧 BXC ト直線 MN トガ切スルトキハ求メル三角形ハ一ツノ二等邊三角形デアル。

又弧 BXC ト MN トガ出合ハナイトキハ作圖ハ不可能デアル。

平面幾何學ノ作圖題ハ,上ノ例ノヤウニ,結局二ツノ條件ニヨツテ一ツノ點ヲ求メルコトニ歸着スルモノガ多イ。カヤウナ場合ニハ甲ノ條件ニ適スル點ノ軌跡ヲ x トシ,乙ノ條件ニ適スル點ノ軌跡ヲ y

トスレバ,xトyトノ交點ガ求メル點デ,コノ外ニ兩條件ニ適スル點ハナイ。

何トナレバ,與ヘラレタ條件卽チ甲ト乙トニ適スル點ハxトyトノ上ニアル。卽チソノ交點デアツテ,逆ニソノ交點ハxトyトノ上ニアルカラ甲ト乙トノ條件卽チ與ヘラレタ條件ニ適スル。

コノヤウナ作圖法ヲ**軌跡交截法**トイフ。

若シxトyトガ交ハラナイトキハ,甲乙ノ二條件ニ適スル點卽チ求メル點ハ存在シナイカラ,作圖ハ不能デアル。又若シxトyトガ一致スルナラバ,ソノ線上ノ點ハ盡ク與ヘラレタ條件ニ適スルカラ,作圖ハ不定デアル。

問 **1.** 底邊,高サ及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

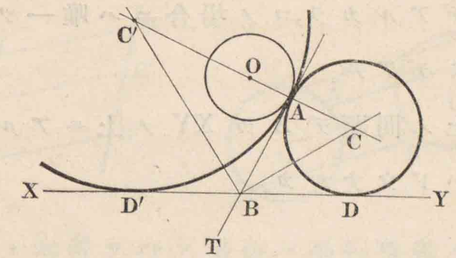
例 2. 定圓Oノ周上ノ一定點Aニ於テコノ圓ニ切シ,且Aヲ通ラナイ定直線XYニ切スル圓ヲ作レ。

解析 求メル圓ヲCトスルト,中心CハAニ於テ定圓Oニ切スル圓ノ中心ノ軌跡卽チ直線OAノ上ニアル。

又Aニ於テ圓Oニ切線ATヲ引ケバ,ATハ又圓Cニ切スルカラ,中心Cハ二直線XY, AT

カラ等距離ニアル點ノ軌跡上ニアル。

依ツテ次ノ作圖ヲ得ル。



作圖 直線AOヲ引ク。

次ニAニ於テ圓Oニ切線ATヲ引ク。

若シATガXYトBデ交ハレバ∠ABY及ビソノ接角ノ二等分線ヲ作リ,ソレ等トOAトノ交點ヲ夫々C, C'トスル。

C, C'ヲ中心トシテAヲ通ル圓ヲ畫ケバ,コノ二圓ガ求メル圓デアル。

證明 (生徒自ラセヨ)。

吟味 ATガXYニ交ハルトキハ ∠ABX, ∠ABYノ二等分線ガATトナス角ハ何レモ直角デナイカラ,ATノ垂線OAト交ハル。故ニコノ場合ニハ二ツノ解ガアル。

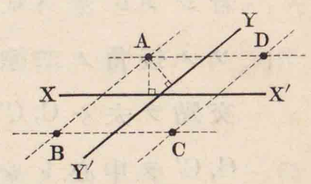
之ハ一般ノ場合デアルガ,ナホ特別ノ場合トシテATガXYニ平行ナル場合ガアル。

コノトキニハ AT ト XY トカラ等距離ニアル點ノ軌跡ハコレ等ノ直線ニ平行ナル唯一ツノ直線デアルカラ,コノ場合ニハ唯一ツノ解ガアルノミデアル。

問 2. 上ノ問題デ A ガ XY ノ上ニアルトスレバ,作圖ハドウナルカ。

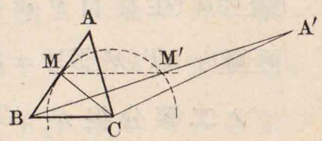
問題 (7)

1. 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且他ノ定直線ニ切スル圓ヲ作レ。



2. 二ツノ定直線カラ,夫々一定ノ距離ニアル點ヲ求メヨ。

3. 一ツノ定點ヲ通リ,定直線(又ハ定圓)ニ切スル定半徑ノ圓ヲ作ルコト。

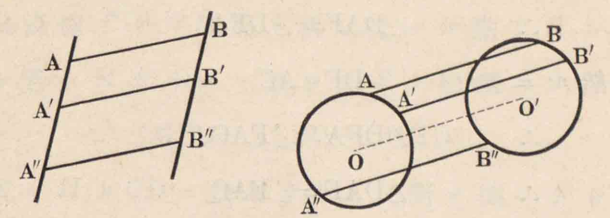


4. 底邊,高サ及ビ底邊ノ一端ヨリ引イタ中線ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

21. 平行移動法

定義 一ツノ圖形ノ各點ヲ一定ノ方向ニ一定ノ距離ダケ動カスコトヲ**平行移動**トイフ。

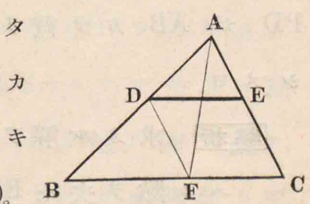
一ツノ圖形カラ平行移動ニヨツテ生ズル圖形ハ原ノ圖形ト合同デアル。



作圖題ノ解析ヲ行フ場合ニ,平行移動ニヨツテ既知ノ線分ヲ集合セシメルト,ソノ間ニ新ラシイ關係ガ生ズルカラ,ソレヲ利用シテ解析ノ目的ヲ達シ得ルコトガ多イ。

例 1. 三角形 ABC ノ一邊 BC ニ平行ナ直線ヲ引キ,二邊 AB, AC ト夫々 D, E デ交ハラシメ, AD=CE ナラシメヨ。

解析 先ヅ DE ガ引カレタトシテ,E ガ D ニ合スルマデ EC ヲ平行移動シタ線分ヲ DF トスル(卽チ D カラ EC ニ平行ナ直線ヲ引キ BC ト F デ交ハラシメル)。



サウスルト

$$DF=EC,\quad EC=AD$$

$$\therefore\quad DF=AD$$

依ツテ AF ヲ結ブト △DAF ハ二等邊三角形デアル。

$$\therefore \quad \angle DAF = \angle DFA$$

然ルニ $DF \parallel AC$

$$\therefore \quad \angle DFA = \angle FAC$$

$$\therefore \quad \angle DAF = \angle FAC$$

故ニ AF ハ ∠A ヲ二等分スル。

依ツテ次ノ作圖ヲ得ル。

作圖 ∠A ノ二等分線ヲ引キ, BC トノ交點ヲ F トシ, F ヨリ AC ニ平行ナ直線ヲ引キ, AB ト D デ交ハラシメ, D カラ BC ニ平行ナ直線ヲ引ク。

證明 (生徒自ラセヨ)。

例 2. 定圓ノ定弦 AB ノ一側ニアル弧上ニ二定點 C, D ガアル。他ノ側ノ弧上ニ一點 P ヲ求メ, PC, PD ガ AB カラ截リ取ル線分ノ長サヲ定長 a ナラシメヨ。

解析 求メル解ヲ得タトシ, PC, PD ガ AB ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ $EF=a$

今,線分 EC ヲ E ガ F ニ合スルヤウニ平行ニ移動シタトキ C ノ位置ヲ G トスレバ

$$CG \mathrel{\underline{\parallel}} EF$$

即チ $CG \parallel AB, \quad CG=a$

故ニ G ハ定點デアル。

又直線 CG ガ圓周ト再ビ交ハル點ヲ H トスルト,若シ H ガ GD ニ對シテ F ト同側ニアレバ

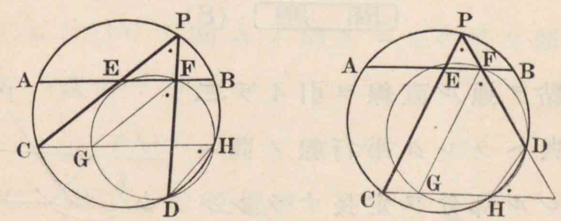
$$\angle GFD = \angle CPD = \angle GHD$$

若シ H ガ GD ニ對シテ F ト反對ノ側ニアレバ,

$$\angle GFD = \angle CPD = \angle GHD \text{ ノ補角}$$

トナリ,何レニシテモ G, D, H, F ハ同一圓周上ニアル。

依ツテ次ノ作圖ヲ得ル。



作圖 C カラ AB ニ平行ナル弦 CH ヲ引キ,ソノ上又ハソノ延長上ニ於テ $CG=a$ ナルヤウニ點 G ヲ取ル。次ニ三點 D, G, H ヲ通ル圓ヲ畫キ, AB トノ交點ヲ F トシ,直線 DF ガ定圓周ト交ハル點ヲ P トスレバヨイ。

證明 PC ヲ引キ AB ト交ハル點ヲ E トスルト,

作圖カラ $\angle GFD = \angle CPD$

$\therefore$　　PC ∥ FG

故ニ CEFG ハ平行四邊形デアル。

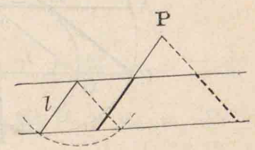
$\therefore$　　$EF=CG=a$

[吟味] 圓 DGH ガ線分 AB ト交ハレバ二ツノ解ガアリ, AB ニ切スレバ一ツノ解ガアリ, AB ニ出會ハナイトキハ解ガナイ。

H ガ D ニ合スルトキハ G ヲ通リ D ニ於テ定圓ニ切スル圓周ト AB トノ交點ヲ F トスレバヨイ。

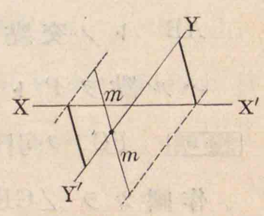
[問　題] (8)

1. 定點ヲ通ル直線ヲ引イテ,二ツノ與ヘラレタ平行線ノ間ニ夾マレル部分ヲ定長ナラシメヨ。



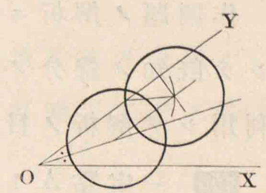
2. 定點ヲ中心トスル圓ヲ畫キ,與ヘラレタ二平行線ノ間ニ夾マレルソノ弦ヲ定長ナラシメヨ。

3. 二ツノ直線(又ハ一ツノ直線ト一ツノ圓周,或ハ二ツノ圓周)ノ間ヘ定長,定方向ノ線分ヲ入レヨ。



4. 頂點ガ二ツヅツ二ツノ定圓周ノ各〻ノ上ニアル矩形ヲ畫イテ,二ツノ圓周ノ間ニ夾マレル邊ヲ定長ナラシメヨ。

5. 定半徑ノ圓ヲ畫イテ二ツノ定直線カラ相等シイ定長ノ弦ヲ截リ取レ。



6. 二ツノ定點カラ平行線ヲ引イテ一ツノ圓ヲ截リ,ソノ上ノ弦ヲ等長ナラシメヨ。

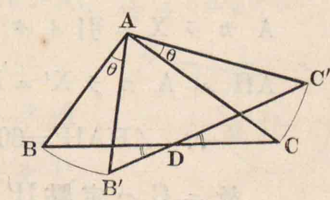
22. 迴轉移動法

例ヘバ △ABC ガ點 A ノ周リニ $\angle\theta$ ダケ迴轉シテ △AB′C′ ノ位置ヲトレバ

$$\angle BAB'=\angle\theta,\qquad \angle CAC'=\angle\theta$$

又 BC ト B′C′ トノ交點ヲ D トスレバ,

$$\angle ABD=\angle AB'D$$



故ニ A, B, B′, D ハ同一圓周上ニアルカラ

$$\angle BDB'=\angle BAB'=\angle\theta$$

故ニ BC ト B′C′ トノナス角モ亦 θ ニ等シイ。

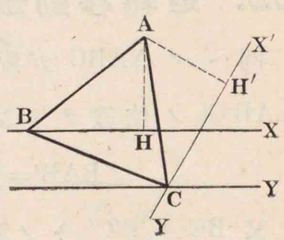
カヤウニ多角形ガソノ形モ大サモ變ヘナイデ,一

定點ノ周リニ或角ダケ廻轉スルトキハ,各邊モ亦ソノ角ダケ廻轉スル。

作圖題ノ解析ニ於テ圖形ノ一部又ハ全部ヲ廻轉シテ既知ノ線分ノ間ニ新シイ關係ヲ生ゼシメ,之ヲ利用シテ解析ノ目的ヲ達シ得ルコトガアル。

例 一定點Aト二ツノ平行ナ定直線X, Yガアル。X上ニ點B, Y上ニ點Cヲ求メテ正三角形ABCヲ作レ。

解析 求メル $\triangle ABC$ ガ作ラレタトシテ,點Aノ周リニ直線XヲABカラACノ方ヘ60°廻轉シタトキノ位置ヲX'トスル。



サウスルトBハCニ合シ,AカラXニ引イタ垂線AHハAカラX'ニ引イタ垂線AH'ニ合スル。

$\therefore\ \angle HAH'=60^\circ,\quad AH'=AH$

故ニCハ定點H'ヲ通リ,AH'ニ垂直ナ直線X'トYトノ交點トシテ定メ得ル。

作圖 AカラXニ垂線AHヲ下シ,AHノ上ニ正三角形AHH'ヲ作リ,H'ヲ通リAH'ニ垂直ナ直線X'ヲ引キYトノ交點ヲCトスル。ACノ上

ニH'ト反對ノ側ニ正三角形ABCヲ作レバ,ソレガ求メル正三角形デアル。

證明 (生徒自ラナセ)。

吟味 AHトAニ於テ60°ノ角ヲナス直線ハ二ツ引キ得ルカラ,作圖ハ常ニ可能デ,二ツノ解ガアル。

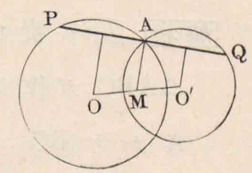
問題 (9)

1. 定圓ニ定長ノ弦ヲ引イテ,ソノ弦又ハソノ延長ヲシテ

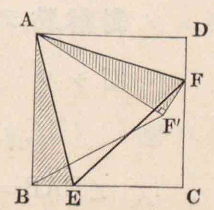
[1] 定直線ニ垂直ナラシメルコト。

[2] 定點ヲ通ラシメルコト。

2. 二定平行線X, Yノ外ニ定點Aガアル。X, Y上ニ夫々點P, Qヲ求メテ $AP=AQ$ 且 $\angle PAQ=\mathrm{R}\llcorner$ ナラシメヨ。

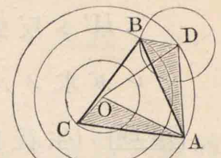


3. 相交ハル二圓ノ交點Aヲ通ル直線ヲ引キ,二圓周ト夫々P, Qニ於テ交ハラシメ $PA=AQ$ トナルヤウニセヨ。



4. 正方形ABCDニAヲ一ツノ頂點トスル正三角形ヲ内接セヨ。

5. 與ヘラレタ三ツノ同心圓周上ニ一ツヅツ頂點ヲ有スル正三角形ヲ作レ。



23. 對稱法

作圖題ノ解析ヲ行フ場合ニ與ヘラレタ圖形ノ定點ヲ中心トスルカ,又ハ定直線ヲ軸トスル對稱圖形ヲ考ヘルコトニヨリ,解析ノ目的ヲ達シ得ルコトガアル。之ヲ**對稱法**トイフ。

定點ヲ中心トスル對稱法ハソノ點ノ周リニ 180° ダケ廻轉スル一種ノ廻轉法デアルカラ,コヽデハ直線ヲ軸トスル對稱法ノ例ヲ示ス。

例1. △ABC ノ二邊 AB, AC ノ長サ c, b ト, ∠B, ∠C トノ差 θ ヲ知ッテ,コノ三角形ヲ作レ。

解析 $b>c$ 從ッテ ∠B>∠C ト假定シ,求メル △ABC ガ作ラレタトスル。

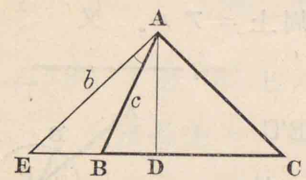
A カラ BC ニ垂線 AD ヲ引キ, AD ニ關シテ C ノ對稱點ヲ E トスルト, E ハ直線 BC 上ニアル。

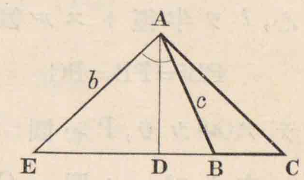
而シテ　AE=AC=b

∠AEC=∠C

∴ ∠EAB=∠ABC−∠AEC=∠B−∠C=∠θ

故ニ △AEB ノ二邊トソノ夾角ハ既知デアルカラ,之ヲ作ルコトガ出來ル。





作圖 二邊 AE, AB ノ長サガ夫々 b, c ニ等シク,ソノ夾角ガ θ ニ等シイ三角形AEB ヲ作ル。

次ニ A ヲ中心, AE ヲ半徑トスル圓周ト EB ノ延長トノ交點ヲ C トスレバ △ABC ハ求メル三角形デアル。

證明 (生徒自ラナセ)。

吟味 $b \neq c$ ナル場合ニハ $\theta<2\mathrm{R}\llcorner$ ナラバ常ニ一ツノ解ガアル。

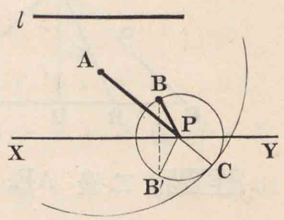
$b=c$ ナル場合ニハ $\theta=0$ ナラバ不定, $\theta \neq 0$ ナラバ不可能デアル。

例2. 直線 XY ノ同側ニアル二定點ヲ A, B トスル。XY 上ニ一點 P ヲ求メ AP+BP ヲ定長 l ニ等シカラシメヨ。

解析 求メル點 P ガ得ラレタトシ, XY ニ關スル B ノ對稱點ヲ B′ トスル。

次ニ AP ヲ C マデ延長シテ $PC=PB$ ナラシメルト $AC=AP+BP=l$ デアルカラ C ハ A ヲ中心, l ヲ半徑トスル圓周上ニアル。又

$$PB'=PB=PC$$



デアルカラ, P ハ圓 BB′C ノ中心デ, コノ圓ハ C ニ於テ圓 A ニ內切スル。

作圖 A ヲ中心, l ヲ半徑トスル圓ヲ畫ク。

B 及ビ B ノ XY ニ關スル對稱點 B′ ヲ通リ, 圓 A ニ內切スル圓ヲ畫キ, ソノ切點ヲ C トスル。AC ト XY トノ交點 P ハ求メル點デアル。

證明 (生徒自ラナセ)。

吟味 作圖ガ可能ナルタメニハ $AB<l$ ナルコト從ツテ B ガ圓 A 內ニアルコトガ必要デアル。

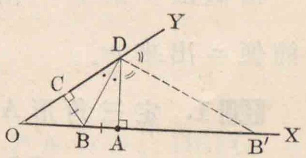
然ルトキ B′ ガ圓 A 內ニアレバ二點 B, B′ ヲ通リ圓 A ニ切スル圓ハ二ツアルカラ二ツノ解ガアル。若シ B′ ガ圓 A ノ周上ニアレバ, カヤウナ圓ハ唯一ツデ P ハ AB′ ト XY トノ交點デアル。コノ場合ニハ解ハ唯一ツアル。B′ ガ圓 A ノ外ニアレバ B, B′ ヲ通リ圓 A ニ切スル圓ハ

ナイカラ解ガナイ。

問題 (10)

1. △ABC ノ邊 BC 上ノ一定點ヲ D トスル。AD 又ハソノ延長上ニ一點 O ヲ求メテ $\angle BOD=\angle COD$ ナラシメヨ。

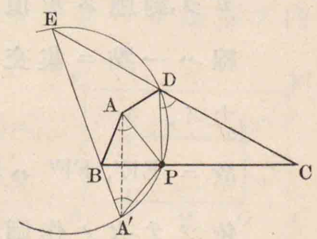
2. 定角 XOY ノ邊 OX 上ノ定點ヲ A トスル。OX 上ニ一點 B ヲ求メ, B ト OY トノ距離ヲ AB ニ等シクナルヤウニセヨ。



3. 定直線 XY ノ同側ニ二定點 A, B ガアル。XY 上ニ點 P ヲ求メテ $\angle APX=2\angle BPY$ ナラシメヨ。

4. △ABC ノ底邊 BC ノ長サ a ト高サ h ト, 他ノ二邊ノ差 l トヲ知ツテコノ三角形ヲ作レ。

5. 四邊形 ABCD ノ邊 BC 上ニ一點 P ヲ求メテ, $\angle BAP=\angle CDP$ ナラシメヨ。



6. 定直線 l ト定點 A トカラ等距離ニアル點ヲ他ノ定直線 XX′ ノ上ニ於テ求メヨ。

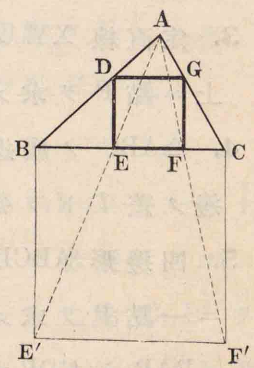
24. 相似法

與ヘラレタ條件ノ一ツヲ無視シテ求メル圖形ト相似ナル圖形ヲ作リ,次ニ之ヲ適當ノ割合ニ伸縮シテ所要ノ圖形ヲ作リ得ルコトガアル。之ヲ**相似法**トイフ。

相似法ニ於テハ相似ノ中心ヲ利用スルト作圖ガ簡便ニ出來ル。

例 1. 定三角形ABCニ正方形ヲ内接セヨ。但シ正方形ノ一邊ハBC上ニアルモノトスル。

解析 DEFGヲ求メル正方形トシ,△ABCノ外側ニ正方形BE′F′Cヲ作レバ,二ツノ正方形ノ各邊ハ夫々平行デアルカラ,對應スル頂點ヲ結ブ直線ハ一點ニ集交セネバナラナイ。



故ニEE′, FF′ハ點Aヲ通ラネバナラナイ。

依ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 △ABCノ外側ニ, BCヲ一邊トスル正方形BE′F′Cヲ作ル。

AE′, AF′ヲ結ビBCトノ交點ヲ夫々E, Fトスル。E, FカラBCニ垂線ED, FGヲ引キ, AB, ACトノ交點ヲD, GトスレバDEFGハ求メル正方形デアル。

證明 作圖ニヨツテ

$$\frac{DE}{BE'}=\frac{AE}{AE'}=\frac{EF}{E'F'}=\frac{AF}{AF'}=\frac{GF}{CF'}$$

然ルニ $BE'=E'F'=CF'$

$$\therefore \quad DE=EF=GF$$

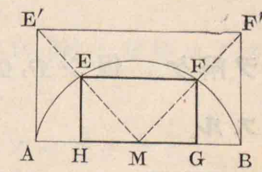
又∠DEF, ∠GFEハ直角デアルカラ, DEFGハ正方形デアル。

注意 ∠B又ハ∠CガF鈍角ナラバE又ハFハBCノ延長ノ上ニアルガ, DEFGハヤハリ正方形デアル。

問題 (11)

1. 定三角形ニ二邊ノ比ノ定マツテヰル矩形ヲ内接セヨ。

2. 與ヘラレタ弓形(又ハ扇形)ニ正方形又ハ二邊ノ比ノ定マツテヰル矩形ヲ内接セヨ。



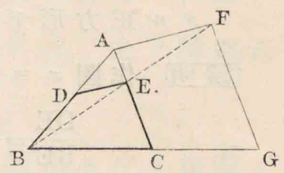
3. 一邊ト對角線トノ和又ハ差ヲ知ツテ正方形ヲ作レ。

4. △ABC ノ底邊 BC ニ平行ナ直線ヲ引キ, AB, AC トノ交點ヲ夫々 D, E トシテ DE＝DB＋EC ナラシメヨ。

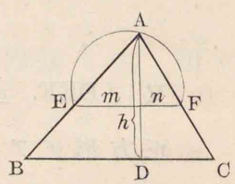
5. △ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫々點 D, E ヲトリ

$$BD:DE:EC=l:m:n$$

ナラシメヨ。



6. △ABC ノ頂角 A ガ α ニ等シク, A カラ BC ニ下セル垂線 AD ノ長サガ h ニ等シク且 BD : DC ガ與ヘラレタ比 $m:n$ ニ等シイコトヲ知ツテコノ三角形ヲ作レ。



25. 二次方程式ノ問題

作圖題 2. 作圖ニヨツテ二次方程式

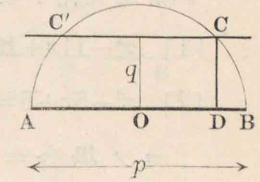
$$x^2-px+q^2=0$$

ヲ解ケ。但シ p, q, x ハ線分ノ長サヲ表ハスモノトスル。

解析　コノ方程式ノ根ノ和ハ p デ,積ハ q^2 デアルカラ,問題ハ二ツノ線分ノ和 p ト比例中項 q トヲ知ツテコレ等ノ線分ヲ求メルコトニ歸スル。

作圖法ハ次ノ通リデアル。

作圖　AB＝p トシ, AB ヲ直徑トシテ圓ヲ作リ,ソノ直徑ニ q ニ等シイ垂線ヲ立テ,ソノ端カラ AB ニ平行ナル直線ヲ引イテ,圓周ト交ハル點ヲ C トシ, C カラ AB ヘ垂線 CD ヲ下セ。然ラバ AD, BD ガ求メル線分デアル。



證明　$AD+BD=AB=p,\ AD\cdot BD=CD^2=q^2$

注意 1.　根ノ値ハ $\dfrac{p\pm\sqrt{p^2-4q^2}}{2}$ デアル。

實際　$OD^2=OC^2-CD^2=\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q^2=\dfrac{p^2-4q^2}{4}$

故ニ　$OD=\dfrac{\sqrt{p^2-4q^2}}{2}$

$$AD=OA+OD=\frac{p+\sqrt{p^2-4q^2}}{2}$$

$$BD=OB-OD=\frac{p-\sqrt{p^2-4q^2}}{2}$$

$q=\dfrac{p}{2}$ ノトキニハ D ハ O ニ合シ, AD, BD ハ相等シクナル。之ハ等根ノ場合デアル。

$q>\dfrac{p}{2}$ ノトキハ根ハ虚數デ,作圖ハ不可能デアル。

注意 2.　p ガ正數ナラバ方程式 $x^2+px+q^2=0$ ハ正根ヲ有セヌガ,上ノヤウナ作圖法ニヨツテ,根ノ絶對値ヲ求メルコトガ出來ル。

問 **1.** 作圖ニヨッテ次ノ二次方程式ノ根ヲ求メヨ。(粍罫ノ方眼紙ヲ用ヒ,粍ヲ單位トシテ作圖ヲナシ,結果ヲ粍小數第一位マデ目測デ出セ)。

[1] $x^2-11x+16=0$

[2] $x^2-5x+5=0$

コノ場合ニハ $q=\sqrt{5}$ デアルカラ先ヅ $\sqrt{5}$ ヲ作圖セネバナラヌ。

問 **2.** 周圍ガ 16m デ面積ガ10平方米ノ矩形ヲ百分ノ一ニ縮メテ作圖セヨ。

作圖題 3. 作圖ニヨッテ二次方程式

$$x^2-px-q^2=0$$

ヲ解ケ。但シ p, q, x ハ線分ノ長サヲ表ハスモノデアル。

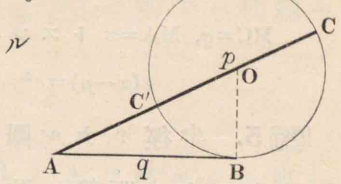
解析　コノ方程式ハ正根ト負根トヲ有スル。ソノ正根ヲ x_1,負根ヲ $-x_2$ トスレバ,

$$x_1-x_2=p, \qquad x_1x_2=q^2$$

デアル。故ニ問題ハ二ツノ線分ノ差 p ト比例中項 q トヲ知ッテコレ等ノ線分ヲ求メルコトニ歸スル。作圖法ハ次ノ通リデアル。

作圖　直徑 p ナル圓周上ノ任意ノ點 B ニ於ケル切線ノ上ニ AB$=q$ ヲ取リ,ソノ端 A カラ中心 O

ヲ通ル割線 AC′C ヲ引ケ。然ラバ, AC, AC′ ガ求メル線分デアル。



證明　AC$-$AC′$=p$

AC·AC′$=$AB$^2=q^2$

注意 **3.** 上ノ作圖ニヨッテ,

$$\mathrm{AO}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{AB}^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2=\frac{p^2+4q^2}{4}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AO}=\frac{\sqrt{p^2+4q^2}}{2}$$

$$x_1=\mathrm{AC}=\mathrm{AO}+\mathrm{OC}=\frac{\sqrt{p^2+4q^2}+p}{2}$$

$$x_2=\mathrm{AC'}=\mathrm{AO}-\mathrm{OC'}=\frac{\sqrt{p^2+4q^2}-p}{2}$$

デ x_1, x_2 ハ實際上ノ二次方程式ノ根ノ絶對値ニナル。

注意 **4.** 方程式 $x^2+px-q^2=0$ モ上ト同樣ノ作圖ニヨッテ解クコトガ出來ル。コノ場合ニハ二ツノ線分ノ中,大ナル方ノ長サガ負根ノ絶對値デ,小ナル方ノ長サガ正根デアル。

問 **3.** 作圖ニヨッテ次ノ二次方程式ヲ解ケ。

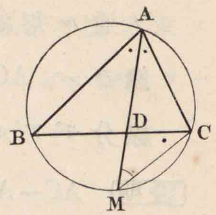
$$x^2=x+1$$

問 **4.** 底邊,頂角及ビ頂角ノ二等分線ヲ知ッテ三角形ヲ作ルコト。

解析　底邊 BC ト頂角 BAC トカラ外接圓ガ定マル。

頂角ノ二等分線 AD ヲ p, 又
$MC=q,\ MA=x$ トスレバ

$$x(x-p)=q^2$$

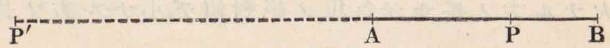


問 5. 半徑 r ナル圓ノ中心 O カラ a ナル距離ニ弦 MN ガ與ヘラレタトキ,コノ MN (延長ハトラナイ)ト P デ交ハル直徑 AB ヲ $AP^2+BP^2=l^2$ ナルヤウニ作レ。ココニ l ハ與ヘラレタ線分デアル。

26. 中末比

作圖題 4. 與ヘラレタ線分(AB)ヲ内分又ハ外分シテ,ソノ一部ヲ他ノ一部ト全部トノ比例中項ナラシメヨ。

$$AP^2=AB\cdot PB,\qquad AP'^2=AB\cdot P'B$$



解析 (1) 内分ノ場合

$AB=a,\ AP=x$ トセヨ。$(x<a)$

然ラバ　　$PB=a-x$

故ニ　　$x^2=a(a-x)$

即チ　　$x^2+ax-a^2=0$

コノ方程式ノ正根 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$ ハ明カニ問題ニ適合スル。

(2) 外分ノ場合

$AP'=x$ トセヨ。P' ハ AB ノ A ヲ超エテノ延長ノ上ニアルコトハ明白デアル。

依ツテ　　$P'B=a+x$

故ニ　　$x^2=a(a+x)$

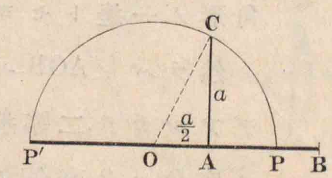
即チ　　$x^2-ax-a^2=0$

コノ方程式ノ正根 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$ ハ明カニ問題ニ適合スル。

故ニ求メル比例中項ハ,内分ノ場合ニハ AB ノ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍デ,外分ノ場合ニハ AB ノ $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 倍デアル。

依ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 BA ノ延長ノ上ニ $AO=\dfrac{1}{2}AB$ ヲ取レ。A カラ AB ニ垂直ニ AC=AB ヲ作レ。O ヲ中心, OC ヲ半徑トシテ圓ヲ作リ, AB ト P 及ビ P' ニ於テ交ハラシメヨ。



然ラバ AP, AP′ ガ求メル比例中項デアル。

證明 $OC=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$

$$AP=OP-OA=OC-OA=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$AP'=OP'+OA=OC+OA=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

注意 1. コノ問題ハ作圖題3.ノヤウニシテモ出來ル。上ノ作圖ハ與ヘラレタ線分 AB ノ上ニ中項ガ出テ來ルヤウニ仕組ンダノデアル。

注意 2. カヤウニ線分ヲ分ツノヲ**中末比**(又ハ**中外比**)ニ**分ツ**トイフ。(往時ハ美術上之ヲ**黃金分割**ト稱シタ)

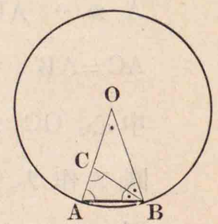
問 前頁ノ圖デ PB ハ A ニ於テ中外比ニ外分セラレ,又 P′B ハ A ニ於テ中外比ニ內分セラレル

27. 正五角形·正十角形ノ作圖

作圖題 5. 與ヘラレタ圓ニ內接スル正五角形·正十角形ヲ作ルコト。

解析 OA ヲ與ヘラレタ圓ノ半徑, AB ヲ內接正十角形ノ一邊トセヨ。

然ラバ ∠AOB ハ 2直角ノ $\frac{1}{5}$ デアルカラ,二等邊三角形 OAB ノ底角ハ 2直角ノ $\frac{2}{5}$ 卽チ頂角 ∠AOB ノ 2倍デアル。



故ニ ∠OBA ノ二等分線 BC ヲ引ケバ

∠OBC=∠AOB, 從ツテ OC=BC

故ニ ∠BCA=2∠AOB

∠BCA=∠A, 從ツテ BC=AB

故ニ OC=AB

然ルニ BC ハ ∠OBA ノ二等分線デアルカラ,

$$\frac{OC}{CA}=\frac{OB}{AB}=\frac{OA}{OC}$$

故ニ $OC^2=OA\cdot CA$

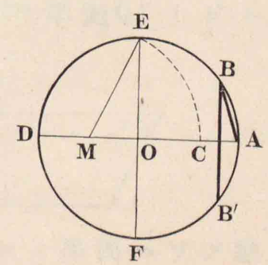
卽チ內接正十角形ノ一邊ハ半徑ヲ中末比ニ內分スルトキノ中項デアル。

故ニ半徑 r ノ圓ニ內接スル正十角形ノ一邊ハ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}r$ デアル。

依ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 與ヘラレタ圓ニ互ニ垂直ナル直徑 AD, EF ヲ引ケ。

OD ノ中點 M カラ MA ノ上ニ MC ヲ ME ニ等シク取レ(C ハ卽チ OA ヲ中末比ニ內分スル點デアル)。又圓周ノ上ニ AB=AB′=OC ナル點 B, B′ ヲ取レ。



然ラバ AB ハ内接正十角形ノ一邊,從ッテ BB′ ハ内接正五角形ノ一邊デアル。

[證明] (生徒自ラナセ)。

[問題] (12)

1. 正五角形ノ邊ヲ a トスレバ對角線ハ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ デアル。
2. 一邊ヲ知ッテ正五角形ヲ作レ。
3. $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ ナルコトヲ利用シテ定圓ニ内接スル正十五角形ヲ作レ。
4. 直角ヲ5等分セヨ。
5. 次ノ邊數ヲ有スル正多角形ハ之ヲ作圖スルコトガ出來ル。

$$2^n,\quad 3\times2^n,\quad 5\times2^n,\quad 15\times2^n$$

第2篇　立體幾何

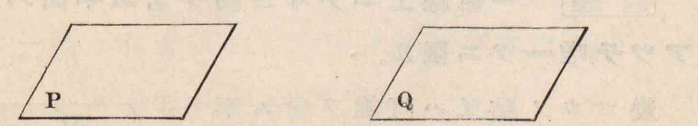
第1章　平面及ビ直線

28. 直線ト平面

面ノ中デソノ上ニアル任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全クソノ上ニアルモノヲ**平面**トイヒ,ドノ部分モ平面デナイ面ヲ**曲面**トイフ。

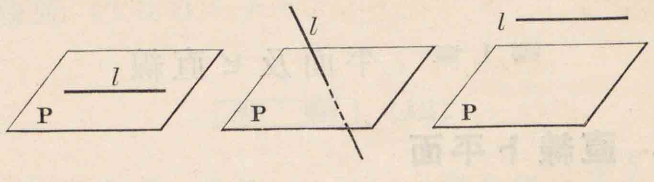
故ニ直線上ノ二點ガ一ツノ平面上ニアルトキハソノ直線ハ全クソノ平面上ニアル。

平面ハソノ上ノ何レノ方向ニモ限リナク擴ッテヰルモノトスル。シカシ之ヲ表ハスニハソノ上ニアル適當ナ圖形ヲ用ヒル。若シ適當ナ圖形ガナイトキハ,ソノ上ニ畫カレタ平行四邊形ヲ用ヒ,之ニ P, Q ナドノ文字ヲ附記シテ"**平面P**""**平面Q**"ナドト呼ブ。



一點ガ一平面上ニアルトキハコノ**平面ハソノ點ヲ含ム又ハ通ル**トイフ。

空間ニアル一直線ト一平面トノ位置ノ關係ニハ三ツノ場合ガアル。



(1) 直線ガ全クソノ平面上ニアルトキ。コノ場合ニハ**平面ハ直線ヲ含ム**又ハ**通ル**トイフ。

(2) 直線ト平面トガ唯一點ヲ共有スルトキ。コノ場合ニハ兩者ガ**相交ハル**トイヒ,ソノ點ヲ**交點**トイフ。

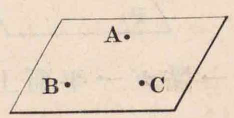
(3) 直線ト平面トガ一點ヲモ共有シナイトキ。コノ場合ニハ兩者ハ**平行デアル**トイフ。

直線 l ト平面 P トガ平行デアルコトヲ $l \parallel P$ デ表ハス。

29. 平面ノ決定

公理　**一直線上ニナイ三點ヲ含ム平面ハ一ツアッテ,唯一ツニ限ル。**

幾ツカノ點又ハ直線ヲ含ム平面ガ唯一ツシカナイトキハ,コレ等ノ點又ハ直線ハ一平面ヲ決定



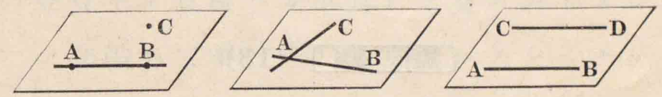
スルトイフ。ソレデ上ノコトヲ一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ決定スルトモイフ。

定理 17. **次ノ各〻ハ何レモ一平面ヲ決定スル。**

[1] **一直線トソノ上ニナイ一點**

[2] **相交ハル二直線**

[3] **平行ナ二直線**



證明　[1]ト[2]トハ上ノ公理カラ證明シ得ル。

[3] 平行二直線 AB, CD ハ平行線ノ定義ニヨリ同一ノ平面上ニアル。ソシテソノ平面ハ AB 上ノ二點 A, B ト CD 上ノ一點 C トヲ含ムカラデアル。

系　**二ツノ平面ガ相交ハレバ,ソノ交ハリハ一直線デアル。**

(二ツノ平面ハ唯一點ノミヲ共有スルコトヲ得ナイ。二點ヲ共有スレバソレヲ通ル直線ヲ共有シ,ソノ他ノ點ヲ共有シナイ)。

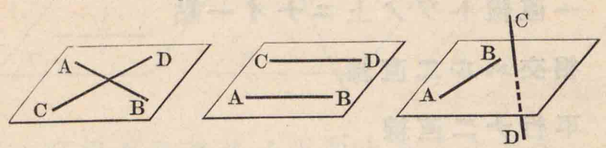
注意　空間ニアル二直線ノ位置ノ關係ハ次ノ三ツノ場合ニ限ル。

(1) 相交ハル

(2) 互ニ平行デアル

} 從ツテ同一平面上ニアル。

(3) 相交ハラナイ，且互ニ平行デナイ。從ツテ同一平面上ニナイ。



問題 (13)

1. 一定點Aヲ通リ一定直線 l ト交ハル任意ノ直線ハ一定ノ平面上ニアル。

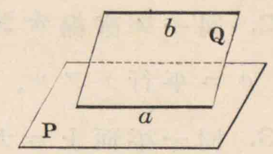
2. 相交ハル二直線 a, b ノ一ツニ交ハリ他ノ一ツニ平行ナ直線ハ總テ同一ノ平面上ニアル。

3. 二ツノ平行線 a, b ト交ハリナガラ動ク直線ハ常ニ同一ノ平面上ニアル。

4. 同一平面上ニナイ三直線ヲ a, b, c トスル。若シ a ト b, b ト c, c ト a トガ夫々相交ハルトキハ a, b, c ハ同一ノ點デ相交ハル。

30. 直線ト平面トノ平行

定理 18. 平行ナ二直線ノ一方ノミヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行デアル。



題意 $a \parallel b$ トシ，a ヲ含ミ b ヲ含マナイ一ツノ平面ヲPトスレバ $P \parallel b$ デアル。

證明 a, b ハ平行デアルカラ一ツノ平面ヲ定メル。之ヲQトスレバ，a ハ二平面PトQトノ交ハリデアル。

今Q上ノ直線 b ガ平面Pニ交ハルトスレバ，ソノ交點ハ二平面P,Qノ交線 a ノ上ニナケレバナラヌ。

然ルニ $a \parallel b$ デアルカラ b ハ a ニ交ハラナイ。

故ニ b トPトハ交ハラナイ。即チ $P \parallel b$ デアル。

系 1. 定平面ニ平行ナ直線ヲ含ム平面ト定平面トノ交ハリハ原ノ直線ニ平行デアル。

系 2. 平行ナ二直線ヲ一ツヅツ含ム二平面ノ交ハリハ原ノ二直線ニ平行デアル。

系 3. 定平面ニ平行ナ定直線ヲ含ム任意ノ二平面ト定平面トノ交ハリハ互ニ平行デアル。

問題 (14)

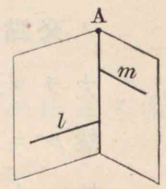
1. 同一ノ直線 a ニ平行ナ二直線 b, c ハ互ニ平行デアル。

2. 同一ノ直線 a ニ平行ナ二平面 P, Q ノ交線 l ハ a ニ平行デアル。

3. 同一平面上ニナイ二直線 a, b ノ一ツ a ヲ含ンデ b ニ平行ナ平面ヲ作レ。

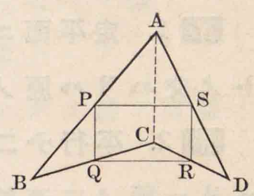
注意 立體幾何ノ作圖ニ於テハ一ツノ平面ガ決定サレルトキ,ソノ平面ヲ作ルコトガ出來ルモノト考ヘ,又ソノ平面上ニ於テ平面幾何ノ作圖ヲナスモノトスル。

4. 同一ノ平面上ニナイ二直線 l, m 外ノ一定點 A ヲ通リ l 及ビ m ニ交ハル直線ヲ引ケ。



定義 四邊ガ同一平面上ニナイ四邊形ヲ**振四邊形**(ネヂレ)トイフ。

5. 振四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブ線分ハ一ツノ平行四邊形ヲ作ル。



31. 二平面ノ平行

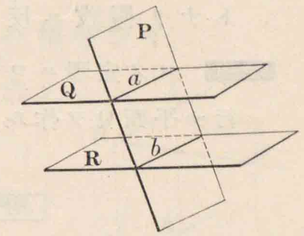
定義 二ツノ平面ヲ如何程擴張シテモ相交ハラナイトキハ**兩平面ハ平行デアル**トイフ。

二平面 P, Q ガ互ニ平行ナルコトヲ P∥Q デ表ハス。

定理 19. 一ツノ平面ガ平行ナ二平面ト交ハルトキ,二ツノ交線ハ平行デアル。

題意 平面 P ガ互ニ平行ナ二平面 Q, R ト夫々 a, b デ交ハルトスレバ

$$a \parallel b$$

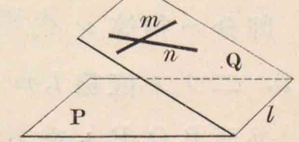


證明 Q∥R デアルカラ a ト b トハ交ハラナイ。然シテ a ト b トハ同一ノ平面 P ノ上ニアル。

故ニ $a \parallel b$

定理 20. 相交ハル二直線ノ各々ガ一平面ニ平行ナルトキハ,ソノ二直線ノ決定スル平面ハ前ノ平面ニ平行デアル。

題意 m ト n トハ相交ハリ,且 $m \parallel$ P, $n \parallel$ P トスレバ m, n ノ決定スル平面 Q ハ P ニ平行デアル。



證明 若シ二平面 P, Q ガ相交ハルモノト假定シ,ソノ交線ヲ l トスレバ,一平面ニ平行ナル一直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交ハリハソノ直線ニ平行デアルカラ(定理18系1)

$$l \parallel m, \quad l \parallel n$$

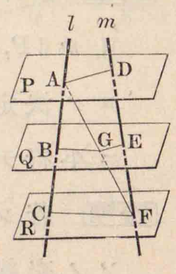
$$\therefore \quad m \parallel n$$

トナリ假設ニ反スル。故ニ $P \parallel Q$

注意 コノ定理ニヨツテ,平面 P 外ノ一點ヲ通リ, P ニ平行ナ平面 Q ヲ作ルコトガ出來ル。

問題 (15)

1. 平面 P 外ノ一定點 O ヲ通過シテ P ニ平行ナ平面ハ唯一ツニ限ル。
2. 同一ノ平面 P ニ平行ナ二平面 Q, R ハ平行デアル。
3. 二ツノ平行ナ平面ノ一ツニ交ハル直線ハ他ノ一ツノ平面ニモ交ハル。
4. 平行ナ二平面ノ間ニ夾マレタ平行ナル直線ノ部分ハ相等シイ。
5. 二ツノ直線 l, m ガ三ツノ平行ナ平面 P, Q, R ト交ハル點ヲ夫々 A, B, C 及ビ D, E, F トスレバ



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

6. 同一ノ平面上ニナイ二直線 l, m ヲ一ツヅツ含ミ且平行ナ二平面ヲ作レ。

32. 二直線ノナス角

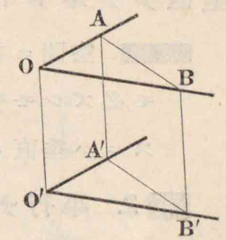
定理 21. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫夫同方向ナルトキハ,ソノ二角ハ相等シイ。

題意 $\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トニ於テ

$$OA \parallel O'A', \quad OB \parallel O'B'$$

デ,且 OA ト $O'A'$ 又 OB ト $O'B'$ トガ OO' ノ同側ニアレバ

$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$



證明 對應邊ノ上ニ

$$OA = O'A', \quad OB = O'B'$$

ナルヤウニ點 A, B; A′, B′ ヲ取レバ, $OAA'O'$, $OBB'O'$ ハ共ニ平行四邊形デアルカラ, AA', BB' ハ平行デ且等長デアル。

故ニ $ABB'A'$ ハ平行四邊形デ

$$AB = A'B'$$

$$\therefore \quad \triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$$

$$\therefore \quad \angle AOB = \angle A'O'B'$$

系 1. 任意ノ點カラ同一平面上ニナイ二定直線ニ夫々平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ一定デアル。

定義 同一平面上ニナイ二直線ノナス角トハ任

意ノ一點カラ夫々之ニ平行ニ引イタ二直線ノナス角ノコトデアル。

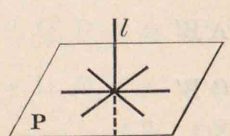
若シコノ角ガ直角ナルトキハ,ソノ**二直線ハ互ニ垂直デアル**トイフ。

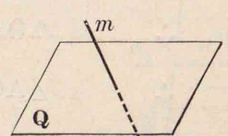
注意 空間ニ於ケル二直線ガ互ニ垂直デアルトイツテモ,必ズシモ交ハツテハヰナイ。特ニ交ハルコトヲ示スニハ垂直ニ交ハル又ハ直交スルトイハネバナラヌ。

系 2. 平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ直線ニモ垂直デアル。

33. 平面ノ垂線・斜線

定義 一直線ガ一平面ト交ハリ,ソノ交點ヲ通ルコノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直ナルトキハ“直線ト平面トハ互ニ**垂直**デアル”トイヒ,ソノ直線ヲ“**平面ノ垂線**”トイフ。平面ト交ハツテ垂直デナイ直線ヲソノ“**平面ノ斜線**”トイフ。





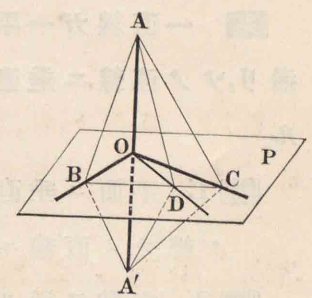
垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲソノ垂線又ハ斜線ノ**足**トイフ。

直線 l ト平面 P トガ垂直ナルコトヲ表ハスニハ $l \perp \mathrm{P}$ ト書ク。

定理 22. 相交ハル二直線ノ交點ニ於テ,ソノ各ニ垂直ナ直線ハソノ二直線ヲ含ム平面ニ垂直デアル。

題意 相交ハル二直線 OB, OC ノ交點 O ニ於テコノ二直線ニ垂直ナ直線ヲ OA トシ, OB, OC ヲ含ム平面ヲ P トスレバ

$$\mathrm{OA} \perp \mathrm{P}$$



證明 平面 P 上デ O ヲ通ル任意ノ直線ヲ OD トシ, OB, OC, OD ト夫々 B, C, D デ交ハル直線ヲ引ク。

AO ヲ延長シテ A′ ヲトリ, OA′=OA ナラシメ, A, A′ ヲ各 B, C, D ト結ブト OB, OC ハ何レモ AA′ ノ垂直二等分線デアルカラ

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B}, \quad \mathrm{AC} = \mathrm{A'C}$$

$$\therefore \quad \triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'BC}$$

$$\therefore \quad \angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{A'BD}$$

$$\therefore \quad \triangle \mathrm{ABD} \equiv \triangle \mathrm{A'BD}$$

$\therefore \quad AD=A'D$

$\therefore \quad OD\perp AA'$

依ツテ OA ハ O ヲ通ル平面 P 上ノ總テノ直線ニ垂直デアル。

$\therefore \quad OA\perp P$

系 **一直線ガ一平面ニ垂直ナルトキハ,ソノ足ヲ通リ,ソノ直線ニ垂直ナ直線ハ總テソノ平面上ニアル。**

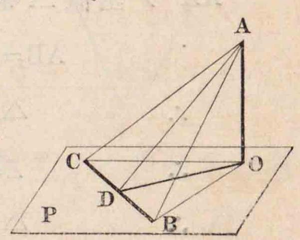
問 1. 平面ニ垂直ナル直線ハソノ平面ニ平行ナル總テノ直線ニ垂直デアル。

問 2. 定點ヲ通リ定平面ニ垂直ナ直線,又ハ定點ヲ通リ定直線ニ垂直ナ平面ハ各々唯一ツアル。

34. 三垂線ノ定理

定理 23. **一點カラ一平面及ビソノ平面上ニアル一直線ニ夫々垂線ヲ引クトキハ,ソノ兩垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ前ノ直線ニ垂直デアル。**

題意 一點 A カラ平面 P ニ引イタ垂線ノ足ヲ O トシ,又 A カラ P 上ノ一直線 BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ D ト



スレバ

$$OD\perp BC$$

證明 BC 上ニ於テ DB, DC ヲ相等シクトリ, A 及ビ O ヲ夫々 B, C ニ結ブト

$$AD\perp BC,\quad BD=CD$$

$\therefore \quad AB=AC$

且ツ $\angle AOB=\angle AOC=\mathrm{R}\llcorner$

$\therefore \quad \triangle AOB\equiv\triangle AOC$

$\therefore \quad OB=OC$

且ツ $BD=CD$

$\therefore \quad OD\perp BC$

注意 1. コノ定理ヲ**三垂線ノ定理**トイフ。

系 1. **一ツノ平面ノ垂線上ノ一點ト,ソノ垂線ノ足カラソノ平面上ノ直線ニ引イタ垂線ノ足トヲ結ブ直線ハ平面上ノソノ直線ニ垂直デアル。**

系 2. **平面外ノ一點カラ平面上ノ直線ニ垂線ヲ引キ,ソノ足ヲ通リソノ平面上デソノ直線ニ垂線ヲ引クトキ,初メノ點カラ之ニ引イタ垂線ハソノ平面ニ垂直デアル。**

注意 2. 之ニヨツテ平面外ノ一點カラソノ平面ニ垂線ヲ引クコトガ出來ル。

問題 (16)

1. 平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル平面ハ他ノ一ツニモ垂直デアル。

2. 同一ノ平面ニ垂直ナ二ツノ直線ハ互ニ平行デアル。

3. 二ツノ平行ナ平面ノ一ツニ垂直ナ直線ハ他ノ平面ニモ垂直デアル。

4. 同一ノ直線ニ垂直ナ二ツノ平面ハ互ニ平行デアル。

定義 平行ナ二平面ノ間ニアル共通垂線ノ長サヲソノ二平面ノ間ノ**距離**トイフ。

5. 一平面外ノ一點ヨリコノ平面ヘ垂線及ビ斜線ヲ引クトキハ

[1] 垂線ハ總テノ斜線ヨリモ小デアル。

[2] 垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル斜線ハ相等シイ。

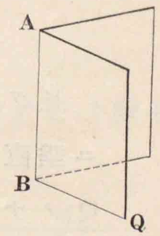
[3] 垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ之ヨリ小ナル距離ニ足ヲ有スルモノヨリモ大デアル。

定義 一點ヨリ一平面マデ引イタ垂線ノ長サヲソノ點ト平面トノ**距離**トイフ。

35. 二面角

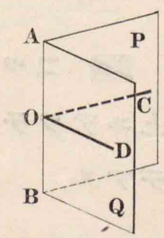
定義 同一ノ直線デ終ル二ツノ平面ハ**二面角**ヲナストイヒ,ソノ直線ヲ二面角ノ**稜**,ソノ各平面ヲ二面角ノ**面**トイフ。

二面角ヲ表ハスニハソノ二面ノ上ニ夫々一點ヅツトリ,ソノ記號ノ間ニ稜上ノ二點ノ記號ヲ夾ンデ,例ヘバ二面角 PABQ トイフヤウニ記ス。



然シ紛レル恐レノナイトキニハ二面角 AB ト記スコトモアル。

二平面 P, Q ノナス二面角ノ稜 AB 上ノ一點 O カラ各平面上ニ夫々 AB ニ垂線 OC, OD ヲ引ケバ,∠COD ノ大サハ點 O ノ位置ニ關セズ一定デアル(定理 21)。



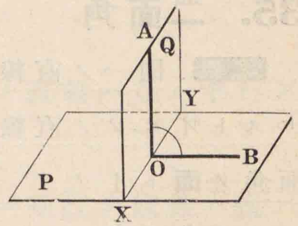
定義 二面角ノ稜上ノ一點カラ各面上ニ於テ,ソノ稜ニ引イタ二ツノ垂線ノナス角ノ大サヲ以テソノ二面角ノ大サトスル。

二ツノ平面ノナス二面角ガ直角ナルトキハ,ソノ

二平面ハ互ニ垂直デアルトイフ。

定理 24. 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ前ノ平面ニ垂直デアル。

題意　平面Pヘノ垂線 AO ヲ含ム任意ノ平面ヲQトスレバ,



$$Q \perp P$$

證明　PトQトノ交線ヲ XY トスレバ

$$AO \perp XY$$

且ツ AO ハQ上ニアル。故ニOヲ通リ XY ニ垂直ナ直線 OB ヲP上ニ引ケバ, $\angle AOB$ ハ P, Q ノナス二面角ヲ測ル角デアル。然ルニ

$$AO \perp P \quad \therefore \angle AOB = \text{直角}$$

$$\therefore Q \perp P$$

系　二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキ,ソノ一ツノ上ニアツテ交線ニ垂直ナル直線ハ他ノ平面ニ垂直デアル。

問題 (17)

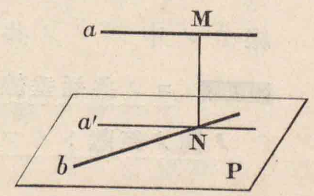
1. 二ツノ平面P,Qガ互ニ垂直ナルトキ,Q上ノ一點AヨリPヘ下シタ垂線ハQニ含マレル。

2. 一ツノ平面Pニ垂直ナル二平面Q,Rガ交ハルトキハ,ソノ交線ハ平面Pニ垂直デアル。
3. 一點ヲ通ル三直線ガ二ツヅツ互ニ垂直ナルトキハ,コノ三直線ヲ二ツヅツ含ム三平面ハ又二ツヅツ互ニ垂直デアル。
4. 與ヘラレタ直線ヲ含ンデ與ヘラレタ平面ニ垂直ナル平面ヲ作レ。

36. 二直線ノ共通垂線

作圖題 6. 同ジ平面上ニナイ二直線ノ各〻ト垂直ニ交ハル直線ヲ引ケ。

作圖　a, b ヲ同一平面上ニナイ二直線トスル。



b ヲ含ンデ a ニ平行ナ平面Pヲ作ル。

次ニ a ヲ含ンデPニ垂直ナル平面Qヲ作リ, QトPトノ交線ヲ a' トスル。

然ルトキハ a' ハ a ニ平行デアルカラ必ズ b ト交ハル。ソノ交點ヲNトシ,Q上ニ於テ平行線 a, a' ノ共通垂線 MN ヲ引ケバ, MN ハ求メル

直線デアル。

證明 作圖ニヨリ平面Qハ平面Pニ垂直デアル。

故ニQ上ニアツテ交線a'ニ垂直ナル直線MNハ平面Pニ垂直デアル。

故ニ　$MN \perp b$

又作圖ニヨリ　$MN \perp a$

即チMNハ二直線a, bト垂直ニ交ハル。

問題 (18)

1. 同一ノ平面上ニナイ二直線ト直交スル直線ハ唯一ツニ限ル。

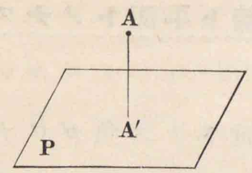
2. 同一ノ平面上ニナイ二直線上ニ兩端ヲ有スル線分ノ中デソノ共通垂線ガ最小デアル。

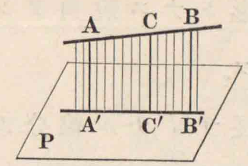
注意 コノ共通垂線ノ長サヲ同一平面上ニナイ**二直線ノ間ノ距離**トイフ。

37. 正射影

定義 一點ヨリ一平面ニ引イタ垂線ノ足ヲソノ平面上ニ投ズルソノ**點ノ正射影**トイヒ,ソノ平面ヲ**射影面**トイフ。

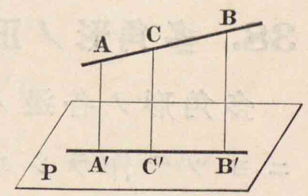
一ツノ線上ノ點ノ一平面上ニ投ズル正射影ノ軌跡ヲソノ平面上ニ投ズルソノ**線ノ正射影**トイフ。





定理25. **一平面ニ垂直デナイ直線ノソノ平面上ニ投ズル正射影ハ,ソノ直線上ノ二點ノ正射影ヲ通ル直線デアル。**

題意 一平面Pニ垂直デナイ一直線ヲABトシ,AB上ノ任意ノ二點A, BノP上ニ投ズル正射影ヲ夫々A', B'トスレバ,ABノP上ニ投ズル正射影ハ直線$A'B'$デアル。



證明 (ABヲ含ンデPニ垂直ナル平面トPトノ交ハリガ$A'B'$デアルコトヲ用ヒテ生徒自ラナセ。97頁問題4參照)

問題 (19)

1. 平面ノ斜線ガ,ソノ足ヲ通ル平面上ノ直線トナス角ノ中デ,ソノ正射影トナス鋭角ガ最小デアル。

定義 平面ヘノ斜線ガ,ソノ平面上ニ投ズル正射影トナス鋭角ヲソノ**斜線ト平面トノナス角**トイフ。

2. 長サ l ナル線分ガ一平面トナス角ガ α ナラバ,ソノ平面上ニ投ズル正射影ノ長サハ $l\cos\alpha$ デアル。

3. 二ツノ平面ガ交ハツテ作ル二面角ハソレ等ノ平面ニ垂直ナル直線ガナス角ニ等シイ。

38. 多角形ノ正射影

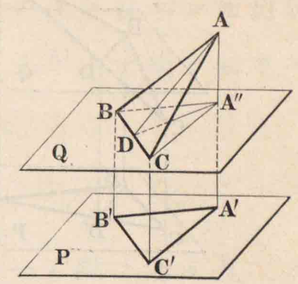
多角形ノ各邊ノ一平面上ニ投ズル正射影ニヨツテ作ラレル多角形ヲ原多角形ノソノ平面上ニ投ズル**正射影**トイフ。

定理 26. 三角形ノ一平面上ニ投ズル正射影ノ面積ハ,原三角形ノ面積ニ三角形ノ平面ト射影面トノ間ノ鋭角ノ餘弦ヲ乘ジタモノニ等シイ。

題意 $\triangle ABC$ ガ平面 P 上ニ投ズル正射影ヲ $\triangle A'B'C'$ トシ,$\triangle ABC$ ノ平面ト平面 P トノナス二面角ノ大サヲ α トスレバ,

$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC\cdot\cos\alpha$$

證明 (1) $\triangle ABC$ ノ一邊ガ平面 P ニ平行ナルトキ。



例ヘバ BC ガ P ニ平行ナルトキハ,BC ヲ含ミ P ニ平行ナル平面ヲ Q トシ,Q ト AA' トノ交點ヲ A'' トスレバ

$$\triangle A''BC = \triangle A'B'C'$$

今 $\triangle ABC$ ニ於テ頂點 A ヨリ對邊 BC ヘ垂線 AD ヲ引キ A''D ヲ結ブト

$$A''D \perp BC$$

$$\therefore \quad \triangle A''BC = \frac{1}{2}BC\cdot A''D$$

而シテ $\angle ADA''$ ハ $\triangle ABC$ ノ平面ト Q トノナス二面角ノ大サヲ示シ,Q ト P トハ平行デアルカラ

$$\angle ADA'' = \angle\alpha$$

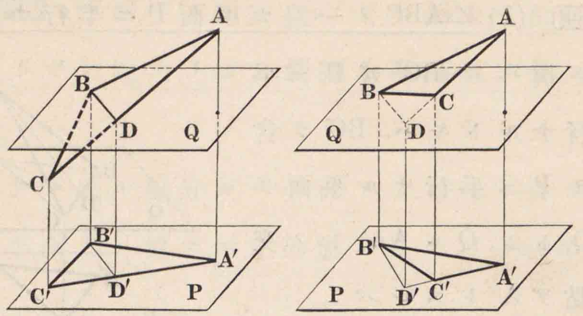
$$\therefore \quad A''D = AD\cos ADA'' = AD\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \triangle A''BC = \frac{1}{2}BC\cdot AD\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \triangle A'B'C' = \triangle ABC\cos\alpha$$

(2) $\triangle ABC$ ノ何レノ邊モ P ニ平行デナイトキ。

B ヲ通リ P ニ平行ナ平面 Q ヲ作リ,之ガ邊 AC



又ハソノ延長ト交ハル點ヲDトシ,DノP上ニ投ズル正射影ヲD′トスレバ(1)ノ證明ニヨツテ

$$\triangle A'B'D' = \triangle ABD \cos\alpha$$

$$\triangle B'C'D' = \triangle BCD \cos\alpha$$

コノ二式ヲ相加ヘ,或ハ相減ジテ

$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC \cos\alpha$$

系 **一平面上ニ投ズル多角形ノ正射影ノ面積ハ原多角形ノ面積ニ,多角形ノ平面トソノ平面トノナス二面角(鋭角)ノ餘弦ヲ乘ジタモノニ等シイ。**

問題 (20)

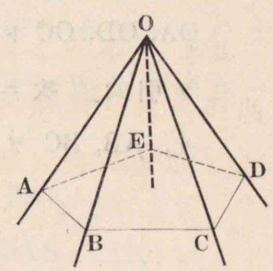
1. 一邊ガ 20cm ナル正三角形ガアル。コノ正三角形ガソノ平面ト 30° ノ角ヲナス一平面上ニ投ズル正射影ノ面積ヲ求メヨ。

2. 二ツノ平面P,Qノナス角ガ 60° デアルトキ,Q上ニアル一ツノ正方形ノMノP上ニ投ズル正射影M′ノ面積ガ 72cm² デアルトキ,Mノ一邊ノ長サハドウカ。

39. 多面角

定義 三ツ以上ノ平面ガ同一ノ點ヲ通リ,且二ツヅツ順次ニ相交ハルトキハ,ソレ等ノ平面ハ**多面角**ヲナストイヒ,ソノ同一ノ點ヲ多面角ノ**頂點**,ソノ平面ノ順次ニ相交ハル交線ヲ多面角ノ**稜**,相隣レル二稜ノナス角ヲソノ多面角ニ於ケル**平面角**(又ハ**面角**)トイフ。

多面角ヲ作ル平面ハ二稜デ終ルモノトスル。



右ノ圖ニ於テ五平面 AOB, BOC, COD 等ガ一點Oヲ頂點トシテ一ツノ多面角ヲ作ル。之ヲ表ハスニハ O-ABCDE ト記ス。

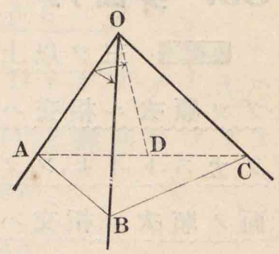
多面角ハ之ヲ作ル平面ノ數ニ從ツテ**三面角**,**四面角**,**五面角**等ト稱ヘル。

定義 多面角ノ總テノ稜ヲ截ル面ヲ作ルトキハ,

コノ平面トソノ多面角ノ各面トノ交線デ一ツノ多角形ガ出來ル。之ヲ多面角ノ**截面**(セツ)トイフ。

截面ガ凸多角形ナル多面角ヲ**凸多面角**トイフ

定理 27.　三面角ノ二ツノ面角ノ和ハ他ノ一ツノ面角ヨリ大デアル。



題意　三面角　O-ABC　ニ於テ

∠AOB＋∠BOC＞∠AOC

證明　∠AOC ガ ∠AOB, ∠BOC ノ一方又ハ兩方ヨリ大デナイ場合ハ特ニ證明ヲ要シナイカラ,ココデハ ∠AOC ヲ最大ナル面角トスル。

∠AOC 内ニ ∠AOB ニ等シク ∠AOD ヲトリ, OA, OD, OC ト夫々 A, D, C デ交ハル一直線 ADC ヲ引ク。次ニ OB 上ニ OD ニ等シク OB ヲトリ, AB, BC ヲ結ブト

△AOB≡△AOD

∴　AB＝AD

然ルニ　AB＋BC＞AD＋DC

∴　BC＞DC

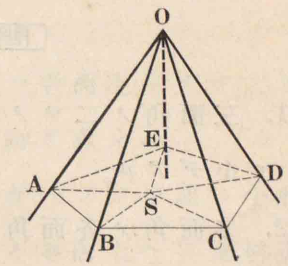
依ツテ △BOC, △DOC ニ於テ

∠BOC＞∠DOC

∴　∠AOB＋∠BOC＞∠AOD＋∠DOC

即チ　∠AOB＋∠BOC＞∠AOC

定理 28.　凸多面角ノ總テノ面角ノ和ハ四直角ヨリモ小デアル。



題意　O-ABCDE　ヲ一ツノ多面角トスレバ　∠AOB, ∠BOC 等ノ總テノ和ハ 4 直角ヨリモ小デアル。

證明　任意ノ截面 ABC……ヲ作リ,ソノ内部ニアル任意ノ一點 S ヲ截面ノ各頂點ヘ結ベバ,多面角ノ面ト同數ノ三角形ガ生ズル。

故ニ S ヲ頂點トスル三角形 SAB 等ト,又 O ヲ頂點トスル三角形 OAB 等トノ内角ノ總和ハ相等シイ。

然ルニ　∠OAB＋∠OAE＞∠BAE

即チ　∠OAB＋∠OAE＞∠SAB＋SAE

B, C, D, E 等ノ點ニ於テモ夫々同様ノ關係ガアル。故ニ O ヲ頂點トスル總テノ三角形ノ底角ノ和ハ,S ヲ頂點トスル總テノ三角形ノ底角ノ和ヨリモ大デアル。

故ニOヲ頂點トスル三角形ノ頂角ノ和,卽チ多面角ノ面角ノ和ハSヲ頂點トスル三角形ノ頂角ノ和卽チ4直角ヨリモ小デアル。

問題 (21)

1. 三面角ノ二ツノ面角ノ差ハ殘リノ一面角ヨリモ小デアル。

2. 多面角ノ各面角ハ殘リノ面角ノ和ヨリモ小デアル。

3. 三面角 O-ABC ノ內部ニ直線 OS ヲ引ケバ,
$\angle AOS+\angle BOS+\angle COS>\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC+\angle COA)$

4. 二面角ノ二面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハソノ二面角ヲ二等分スル平面デアル。

5. 三面角ノ三ツノ二面角ヲ二等分スル三ツノ平面ハ同一ノ直線ニ於テ交ハル。

6. 三面角ノ一ツノ稜ニ於ケル二面角ガ直角ナルトキハ,コノ三面角ヲソノ何レノ稜ニ垂直ナル平面デ截ツテモ,ソノ截リ口ハ直角三角形デアル。

7. 振四邊形ノ四ツノ角ノ和ハ4直角ヨリモ小デアル。

雜題 (1)

1. 空間ニ與ヘラレタ二直線ガアル。各ノ上ニ點A, Bヲ求メ, AB ヲ他ノ與ヘラレタ直線ニ平行ナラシメヨ。

2. 定直線 AB ヲ含ミ,之ト同一平面上ニナイ二定點P, Qヨリ等距離ニアル平面ヲ求メヨ。

3. 直角三角形ノ直角ノ一邊ガ一ツノ平面ニ平行ナルトキハ,コノ三角形ノコノ平面上ヘノ正射影モ亦直角三角形デアル。

4. 矩形ノ紙 ABCD ガアツテ, AB ハ 40 cm, BC ハ 30 cm デアル。コノ矩形ヲ對角線 AC ニ沿ウテ折リ,平面 ABC ト平面 CDA トヲ互ニ垂直ナラシメルトキ, B, D ノ距離ヲ求メヨ。但シ cm 未滿ヲ四捨五入セヨ。

5. 正三角形ABC ノ垂心 O ヲ通ツテソノ三角形ノ平面ニ垂直ナ直線 OP ヲ引キ PA=AB ナラシメルトキ,面 ABC ガ面 ABP トナス角ノ餘弦ノ値ヲ求メヨ。

6. 二平面 P, Q ノナス角ガ 45° デアルトキ,平面 P, Q ノ交線上ニ長サ 4 cm ノ線分 AB ヲ取ツテ平

面P上ニ正三角形ABCヲ作リ次ニCヲ通ツテ平面Pニ垂線ヲ立テ,平面Qトノ交點ヲDトシ△ABDノ面積ヲ求メヨ。

7. 一點Oニ於テ互ニ直角ニ相交ハル三直線 OX, OY, OZ 上ニ夫々點 A, B, C ヲ取レバ

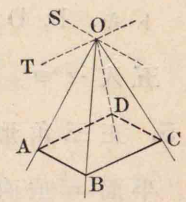
[1] △ABC ガ鋭角三角形ナルコトヲ證セヨ。

[2] △ABC ヲ與ヘラレタ鋭角三角形ト合同ナラシメヨ。

8. 平面P及ビソノ同側ニ二點A, Bガアル。平面P上ニ一點Cヲ求メテ AC ト BC トノ和ヲ最小ナラシメヨ。

9. 相交ハル二平面P, Qノ上ニ各定點A, Bガアル。二平面ノ交線 l 上ニ一點Cヲ求メ, AC+BC ヲ最小ナラシメヨ。

10. 四面角ヲ一ツノ平面デ截ツテ,ソノ截リ口ガ平行四邊形ニナルヤウニセヨ。

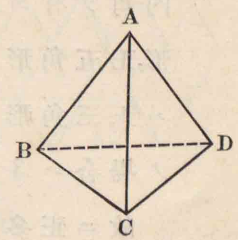


第2章 多面體

40. 多面體

定義 平面デ圍マレタ立體ヲ**多面體**トイフ。

多面體ヲ作ル平面ノ數ハ四ツ以上デアル。ソノ數ニ從ツテ,多面體ヲ**四面體**,**五面體**,**六面體**等トイフ。



多面體ヲ界スル平面ノ部分ハ多角形デアル。之ヲ多面體ノ**面**トイヒ,ソノ邊及ビ頂點ヲ夫々多面體ノ**稜**及ビ**頂點**トイフ。卽チ稜ハ二面ノ交線デ,頂點ハ三ツ以上ノ面ノ交點デアル。

定義 同一ノ面上ニナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ。

多面體ノ何レノ面ヲ擴ゲテモ,ソノ體內ニ入ラナイモノヲ**凸多面體**トイフ。本書デハ凸多面體ノミヲ論ズル。

多面體ノ總テノ面ガ合同ナ正多角形デ且總テノ多面角ガ同數ノ面デ出來テキルモノヲ**正多面體**トイフ。

定理 29. **正多面體ニハ次ノ五種シカナイ。正**

四面體,正六面體,正八面體,正十二面體,正二十面體。

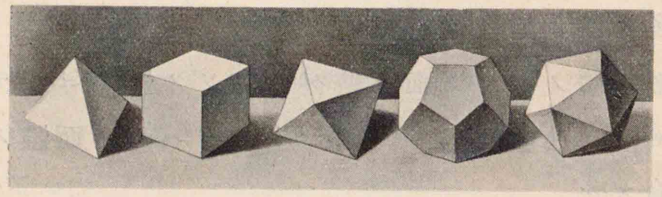
[證明] 一ツノ多面角ハ三ツ以上ノ面ヲ有シ,且ソノ面角ノ和ハ4直角ヨリ小デアル。故ニ正多面體ノ面トナル正多角形ハ$\frac{4}{3}$直角ヨリ小ナル内角ヲ有スルモノニ限ル。卽チ正三角形,正方形,正五角形ニ限ル。又各頂點ニ於ケル面ノ數ハ正三角形ノ場合ハ5以內デ正方形·正五角形ノ場合ハ3ニ限ル。

故ニ正多面體ノ一ツノ多面角ヲナス面ハ次ノ五種シカナイ。

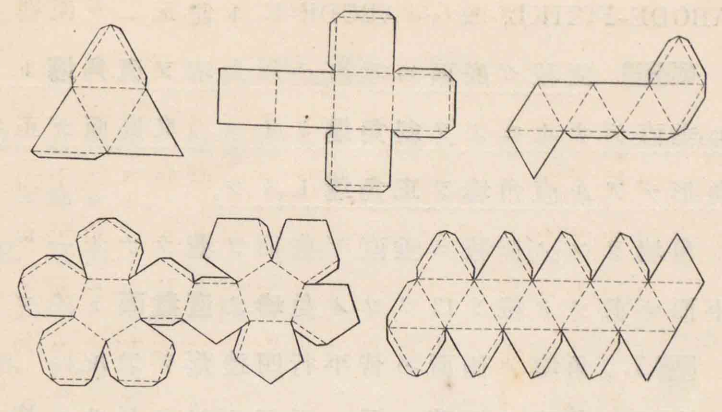
(1) 三ツノ正三角形 (2) 三ツノ正方形

(3) 四ツノ正三角形 (4) 三ツノ正五角形

(5) 五ツノ正三角形



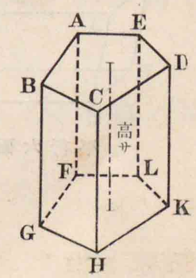
之ニヨツテ上ノヤウナ唯五種ノ正多面體ヲ得ル。コレ等ノ正多面體ノ模型ヲ作ルニハ,厚紙ノ上ニ次ノ圖ノヤウナソノ面ノ展開圖ヲ畫キ,之ヲ切拔キ點線ニ沿ウテ折リ合ハセ,各稜ヲ糊着スレバヨイ。



41. 角壔

定義 一直線ニ平行ナ三ツ以上ノ平面ト,ソノ直線ニ交ハル二ツノ平行ナ平面トニヨツテ圍マレタ多面體ヲ**角壔**トイフ。

ソノ一直線ニ交ハル平行ナ二面ヲ角壔ノ**底面**トイヒ,ソノ一直線ニ平行ナ面ヲ**側面**トイフ。側面ノ交ハリヲ**側稜**トイヒ,兩底面ノ間ノ距離ヲソノ角壔ノ**高サ**トイフ。



角壔ノ底面ガ三角形,四角形,五角形等ナルニ從ツテ,之ヲ**三角壔,四角壔,五角壔**等トイフ。

右ノ圖ハ五角壔デ,之ヲ表ハスニ

ABCDE-FGHKL, 又ハ ABCDE-F ト記ス。

定義 側稜ガ底面ニ垂直ナル角壔ヲ**直角壔**トイヒ,垂直デナイモノヲ**斜角壔**トイフ。又底面ガ正多角形デアル直角壔ヲ**正角壔**トイフ。

角壔ヲソノ側稜ニ垂直デ,底面ヲ截ラナイ一ツノ平面デ截ツタ截リ口ヲソノ角壔ノ**直截面**トイフ。

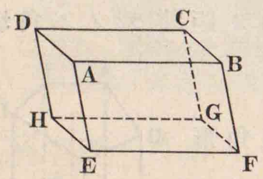
問1. 角壔ノ側面ハ皆平行四邊形デアル。

問2. 角壔ノ側稜ハ互ニ平行デ,ソノ長サハ皆相等シイ。

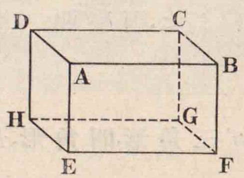
問3. 直角壔ノ側面ハ矩形デアル。

問4. 角壔ノ兩底面ハ合同ナル多角形デアル。

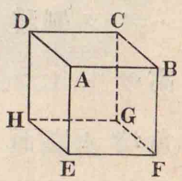
底面ガ平行四邊形ナル四角壔ヲ**平行六面體**トイヒ,各面ガ矩形ナル平行六面體ヲ**直六面體**,各面ガ正方形デアル直六面體ヲ**立方體**トイフ。



平行六面體



直六面體

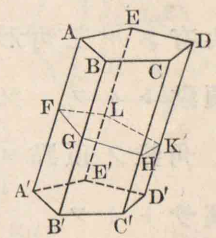


立方體

問題 (22)

1. 直角壔ノ側面積ハ,ソノ高サト底面ノ周トノ積ニ等シイ。

2. 底面ノ一邊ガ 10cm デ高サガ 16cm ナル正三角壔ノ全表面積ヲ求メヨ。



3. 斜角壔ノ側面積ハソノ側稜ノ長サト直截面ノ周トノ積ニ等シイ。

4. 側稜ノ長サガ 6cm デ直截面ノ周圍ガ 15cm デアル斜角壔ノ側面積ヲ求メヨ。

5. 直六面體ノ一頂點デ出會フ三稜ノ上ノ正方形ノ和ハ對角線ノ上ノ正方形ニ等シイ。

6. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ同一ノ點デ相交ハリ,互ニ他ヲ二等分スル。

7. 平行六面體ノ12ノ稜ノ上ノ正方形ノ和ハ四ツノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。

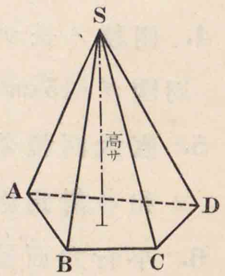
8. 全表面積ガ 1350 cm^2 ナル立方體ノ對角線ノ長サヲ求メヨ。

42. 角錐

定義　一ツノ多角形ト,ソノ各邊ヲ底邊トシ,ソノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トニヨツテ圍マレタ多面體ヲ**角錐**トイフ。

始メノ多角形ヲソノ角錐ノ**底面**トイヒ,同一點ヲ共有スル三角形ヲ**側面**,ソノ共有スル同一點ヲソノ**頂點**トイフ。又相隣レル側面ノ交線ヲ**側稜**トイフ。

角錐ノ頂點ヨリ底面ニ下セル垂線ノ長サヲソノ**高サ**トイフ。



角錐ハソノ底面ガ三角形,四角形等ナルニ從ツテ之ヲ**三角錐,四角錐**等トイフ。

右ノ圖ハ四角錐デ之ヲ表ハスニハ S–ABCD ト記ス。

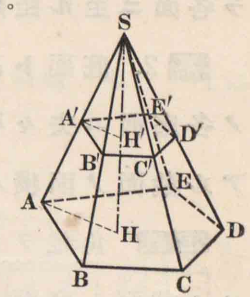
底面ガ正多角形デアツテ頂點ヨリ底面ニ下シタ垂線ノ足ガ底面ノ中心ト一致スル角錐ヲ**正角錐**又ハ**直角錐**トイフ。

正角錐ノ側面ハ合同ナ二等邊三角形デアル。コノ二等邊三角形ノ高サヲ正角錐ノ**斜高**トイフ。

定理 30.　**角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デ截レバ**

[1]　**側稜及ビ高サハ同ジ比ニ分タレル。**

[2]　**截面ト底面トハ相似デ,且相似比ハ頂點カラ各面ニ至ル距離ノ比ニ等シイ。**



題意　角錐 S-ABCDE ニ於テ,底面ニ平行ナ截面ヲ A'B'C'D'E' トシ,コノ截面ト高サ SH トノ交點ヲ H' トスレバ,

(1)　$\dfrac{SA'}{A'A}=\dfrac{SB'}{B'B}=\cdots\cdots=\dfrac{SE'}{E'E}=\dfrac{SH'}{H'H}$

(2)　$A'B'C'D'E' \backsim ABCDE,\quad \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\cdots\cdots=\dfrac{SH'}{SH}$

證明　(1)　A'H', AH ハ平行二平面ト平面 SAH トノ交線デアル。

$\therefore\ A'H' \parallel AH \quad \therefore\ \dfrac{SA'}{A'A}=\dfrac{SH'}{H'H}$.

同樣ニ $\dfrac{SB'}{B'B}$, $\dfrac{SC'}{C'C}$ 等モ皆 $\dfrac{SH'}{H'H}$ ニ等シイ。

(2)　截面及ビ底面ハソノ各邊ガ夫々平行デ且同方向デアルカラ等角デアツテ且

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SH'}{SH}$$

同樣ニ　$\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}=\cdots\cdots=\dfrac{SH'}{SH}$

∴ $A'B'C'D'E' \backsim \triangle ABCDE$

系 1. 角錐ノ底面ト截面トノ面積ノ比ハ頂點カラ各面ニ至ル距離ノ二乘比ニ等シイ。

系 2. 底面ト高サトガ夫々相等シイ二ツノ角錐ノ各底面ニ夫々平行デ且各頂點カラ夫々等距離ニアル截面ノ面積ハ相等シイ。

定義 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ，ソノ截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**角錐臺**トイフ。

問題 (23)

1. 正角錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シイ。

2. 角錐ノ底面積ハ側面積ヨリモ小デアル。

3. 一邊ガ 12cm ナル正六角形ヲ底面トスル正角錐ノ高サガ 26cm ナルトキ,コノ角錐ノ側面積ヲ求メヨ。

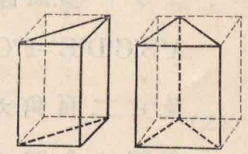
4. 高サ 12cm, 底面積 40cm² デアル角錐ヲ底面ニ平行デ且頂點カラ 4cm ノ距離ニアル平面デ截ルトキニ生ズル截面ノ面積ヲ求メヨ。

43. 直角壔ノ體積

定理 31. 直角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

注意 底ガ矩形ナル直角壔卽チ直六面體ノ場合ハ既知デアル。

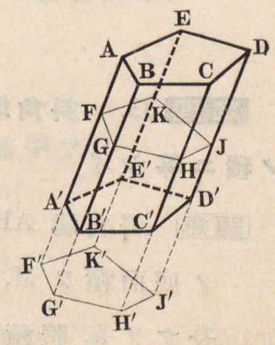
ソノ他ノ場合ハ次ノ順序ニヨツテ生徒自ラナセ。



底ガ直角三角形ナルトキ,
底ガ任意ノ三角形ナルトキ,
底ガ任意ノ多角形ナルトキ。

44. 斜角壔ノ體積

定理 32. 斜角壔ノ體積ハソノ直截面ト側稜トノ積ニ等シイ。



題意 斜角壔 ABCDE-A'…… ノ直截面ヲ FGHJK トシ, ソノ面積ヲ N, 側稜 AA' ノ長サヲ l, 角壔ノ體積ヲ V トスレバ,

$$V=Nl$$

證明 稜 AA' ヲ延長シ,ソノ上ニ FF'=AA' ナル

ヤウニ點F'ヲトリ, F'ヲ通ツテ FGHJK ニ平行ナ平面ヲ作リ,各側稜ノ延長トノ交點ヲ夫々 G', H', J', K' トスル。

然ルトキハ $FGHJK\text{–}F'G'H'J'K'$ ハ直角壔デ,ソノ側稜ノ長サハ l, 底面積ハ N デアルカラ體積ハ Nl デアル。

サテ多面體 ABCDE–FGHJK ト多面體 $A'B'C'D'E'\text{–}F'G'H'J'K'$ トハ總テノ相對應スル稜及ビ二面角ガ夫々相等シイカラ,コノ二ツノ多面體ハ合同デアル。

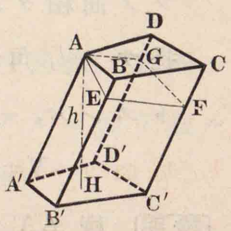
故ニコノ二ツノ多面體ヲ夫々同ジ多面體 $ABCDE\text{–}F'G'H'J'K'$ カラ引イタ殘リハ相等シイ。即チ

$$ABCDE\text{–}A'B'C'D'E'=FGHJK\text{–}F'G'H'J'K'$$

$$\therefore \quad V=Nl$$

定理 33. 斜角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

題意 斜角壔 $ABCD\text{–}A'B'C'D'$ ノ底面積ヲ M, 高サ AH ノ長サヲ h, 體積ヲ V トスレバ,



$$V=Mh$$

デアル。

證明 頂點Aヲ通ル直截面 AEFG ヲ作リ,コノ直截面ノ面積ヲ N,側稜 AA' ノ長サヲ l トスレバ

$$V=Nl \qquad (1)$$

然ルニ直截面 AEFG ハコノ平面上ニ投ズル底面 $A'B'C'D'$ ノ正射影デアル。依ツテコノ二平面ノ交角ヲ α トスレバ

$$N=M\cos\alpha \qquad (2)$$

又 AH, AA' ハ夫々底面ト直截面ニ引イタ垂線デアルカラ $\angle A'AH$ ハ角αニ等シク且 $\angle AHA'$ ハ直角デアル。故ニ

$$\cos\alpha=\frac{h}{l} \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ

$$V=Mh$$

系 等底等高ナル角壔ハ等積デアル。

問題 (24)

1. 底面ガ一邊 10cm ノ正六角形デ高サガ 20cm デアル直角壔ノ體積ヲ求メヨ。

2. 側稜ト底面トノナス角ガ 60° ナル斜角壔ガアツテ,ソノ側稜ノ長サガ 10cm デ底面積ガ $36\,\mathrm{cm}^2$ ナルトキ,コノ角壔ノ體積ヲ求メヨ。

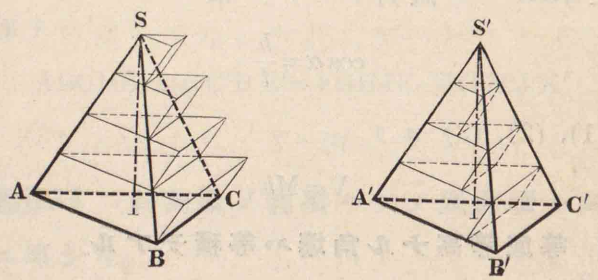
45. 角錐ノ體積

定理 34. 底面及ビ高サガ夫々相等シイ二ツノ三角錐ハ等積デアル。

題意　二ツノ三角錐 S–ABC, S′–A′B′C′ ニ於テ底面 ABC ト A′B′C′ トハ面積ガ相等シク,且高サガ共ニ h ナルトキ,ソノ體積ヲ夫々 V, V′ トスレバ,

$$V=V'$$

デアル。



證明　兩角錐ノ側稜 SA, S′A′ ヲ各 n 等分シ,ソノ各分點ヲ通リ底面ニ平行ナ平面デ各角錐ヲ截ルト,相對應スル截面ハ等積デアル。

今各底面及ビ截面ヲ夫々下底トシ, SA, S′A′ ノ各部分ヲ一側稜トスル n 箇ノ三角壔ヲ双方共ニ作レバ,コレ等ノ三角壔ハ双方ニ於テ一ツ宛等積デアリ,從ツテ各角錐ニ作ツタ n 箇ノ角壔ノ和ハ相等シイ。

依ツテ之ヲ X トスレバ

$$X>V, \quad X>V'$$

次ニ $(n-1)$ 箇ノ截面ダケヲ上底トシ, SA, S′A′ ノ各部分ヲ一側稜トスル $(n-1)$ 箇ノ三角壔ヲ作リ,コレ等ノ三角壔ノ和ヲ Y トスレバ

$$Y<V, \quad Y<V'$$

$$\therefore \quad Y<V<X, \quad Y<V'<X$$

$$\therefore \quad V\sim V'<X-Y$$

然ルニ X−Y ハ角錐ノ底面ヲ底面トシ側稜ノ $\frac{1}{n}$ ヲ側稜トシテ作ツタ角壔ニ等シイカラ, SA ヲ等分スル數 n ヲ十分大キクスレバ X−Y ノ値ハ如何程デモ小サクスルコトガ出來ル。故ニ X−Y ヨリ小ナル V∼V′ ハ零デナケレバナラヌ。

即チ　$V\sim V'=0$

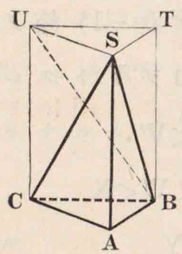
$$\therefore \quad V=V'$$

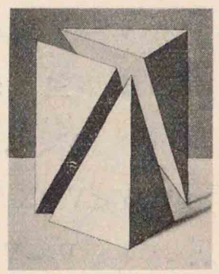
系　等底等高ナル二ツノ角錐ハ等積デアル。

定理35. 三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

題意 三角錐S-ABCニ於テ底面ABCノ面積ヲM, 頂點Sカラ底面ニ下シタ垂線SHノ長サヲhトシ,角錐ノ體積ヲVトスレバ

$$V=\frac{1}{3}Mh$$





證明 角錐ノ底面ABCヲ底面トシ, SAヲ一ツノ側稜トシテ三角壔ABC-STUヲ作リ,コノ角壔ノ體積ヲV′トスレバ

$$V'=Mh$$

ソコデコノ三角壔ヲ二ツノ平面 SBC, SBUデ截レバ原ノ三角錐S-ABCノ外ニ更ニ二ツノ三角錐 S-BTU, S-BCUヲ得ル。而シテコノ二ツノ三角錐ノ底面 BTUトBCUトハ等積デ高サハ何レモSカラ平面BCUTニ至ル距離デアルカラコノ二ツノ角錐ハ等積デアル。

又S-BTUハB-STUデ, S-ABCトB-STUトハ,底面ABCトSTUトハ等積デ,高サハ角壔ノ兩底面ノ距離デアルカラ,コノ二ツノ角錐モ亦等積デアル。故ニS-BTU, S-BCUノ體積モ亦Vニ等シイ。

$$\therefore \quad 3V=Mh$$

$$\therefore \quad V=\frac{1}{3}Mh$$

系 任意ノ角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

問題 (25)

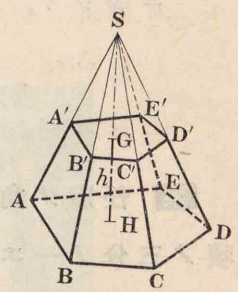
1. 底面ガ一邊6cmノ正六角形デ,側稜ガ15cmデアル正六角錐ノ體積ヲ求メヨ。
2. 底面積ガ120cm^{2}デ體積ガ600cm^{3}デアル角錐ノ高サヲ求メヨ。

46. 角錐臺ノ體積

定理36. 角錐臺ノ兩底面ノ面積ヲM, N, 高サヲh, 體積ヲVトスレバ,

$$\mathbf{V}=\frac{h}{3}(\mathbf{M}+\mathbf{N}+\sqrt{\mathbf{MN}})$$

証明　角錐 S-ABCDE ヲ底面ニ平行ナ平面デ截ツテ生ズル角錐臺ノ體積ヲ V トスル。今頂點 S ヨリ底面ニ下シタ垂線 SH ガ截面ニ交ハル點ヲ G トシ, $GH=h$, $SG=x$ トシ,又底面 ABCDE, A'B'C'D'E' ノ面積ヲ夫々 M, N トスレバ



$$\begin{aligned}V&=\text{角錐}\ (\text{S-ABCDE})\\&\quad-\text{角錐}\ (\text{S-A'B'C'D'E'})\\&=\frac{1}{3}M(x+h)-\frac{1}{3}Nx\\&=\frac{1}{3}Mh+\frac{1}{3}(M-N)x\end{aligned}\tag{1}$$

然ルニ　$\dfrac{N}{M}=\dfrac{x^2}{(x+h)^2}$

$\therefore$　$\dfrac{x}{x+h}=\dfrac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}}$

$\therefore$　$\dfrac{x}{h}=\dfrac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}-\sqrt{N}}$

$\therefore$　$x=\dfrac{\sqrt{N}h}{\sqrt{M}-\sqrt{N}}$

之ヲ(1)ニ代入シテ

$$V=\frac{1}{3}Mh+\frac{1}{3}(M-N)\times\frac{\sqrt{N}h}{\sqrt{M}-\sqrt{N}}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{3}Mh+\frac{1}{3}(\sqrt{M}+\sqrt{N})\sqrt{N}h\\&=\frac{h}{3}(M+N+\sqrt{MN})\end{aligned}$$

問題　(26)

1. 兩底面ノ面積ガ $18\,\text{cm}^2$ ト $8\,\text{cm}^2$ デ高サガ 15 cm デアル角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

2. 底面積ガ $100\,\text{cm}^2$,高サガ 18 cm ナル角錐ヲ頂點カラ 9 cm ノ距離ニアツテ底面ニ平行ナ平面デ截ツテ生ズル角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

3. 底面ガ正方形デアル角錐臺ガアル。ソノ高サガ 15 cm, 一ツノ底面ノ一邊ガ 8 cm デ,ソノ體積ガ $740\,\text{cm}^3$ ナルトキ,他ノ底面ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。

雜題　(2)

1. 四面體 ABCD ノ稜 AB, BC, CD, DA ノ各中點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ,コノ四點ハ同一平面上ニアル。

2. 四面體ノ各頂點ヲ之ニ對スル面ノ重心ニ結ブ四ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

3. 四面體 ABCD ノ相對スル稜 AB, CD ノ中點 E, F ヲ過ギル直線ト,他ノ相對スル稜 BC, AD ノ中點 G, H ヲ過ギル直線トガ互ニ垂直ナルトキハ稜 AC ト稜 BD トハ相等シイ。

4. 稜ノ長サガ a ナル正四面體ノ體積ヲ計算セヨ。

5. 底面ガ正方形デ側面ガ正三角形ナル角錐(正八面體ノ半分)ノ體積ヲ計算セヨ(底面ノ一邊ノ長サヲ長サノ單位トセヨ)。

6. 底面積 S, 高サ h ナル角錐ヲ底面ニ平行ナル平面デ二等分スレバ,頂點カラ截面ヘノ距離ト截面ノ面積トハ各何程カ。

7. えじぷとノ金字塔ハ正四角錐狀デアル。或金字塔ハ底面ノ一邊ガ 232 m デ,現狀ハ高サ 148 m ノ角錐臺デアルガ,壞レタ尖端ヲ修復スルナラバ,高サハ 156 m ニナルトイフ。現在ノ斜高ト修復ニ要スル石材ノ體積トヲ計算セヨ。

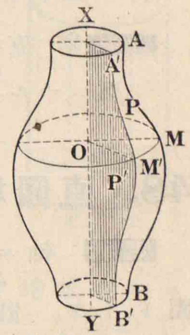
8. 三角錐 O-ABC ノ三ツノ斜面 OBC, OCA, OAB ト相等シイ角ヲナス直線 OK ガ底面 ABC ニ交ハル點ヲ K トスレバ,

$$\frac{\triangle KBC}{\triangle OBC}=\frac{\triangle KCA}{\triangle OCA}=\frac{\triangle KAB}{\triangle OAB}$$

第3章 曲面體

47. 旋轉面

定義 直線 XY デ終ル平面 P ガコノ直線ヲ軸トシテ廻轉シテ再ビ原ノ位置ニ復ルトキニ,コノ平面上ニアル一ツノ線 AMB ガ通過スル跡ハ一ツノ面デアル。コノ面ヲ**旋轉面**トイヒ, XY ヲソノ軸トイフ。



注意 1. 日用ノ器具(陶器,挽物細工等)ニ旋轉面ヲナスモノガ多クアル。ソノ製作ニハ實際,旋轉盤ノ廻轉ヲ利用スル。

サテ P' ヲ軸 XY デ終ル任意ノ平面トスレバ,平面 P ハ XY ヲ軸トシテ廻轉スル間ニ一度 P' ノ上ニ重ナル。コノ際,線 AMB ハ P' ノ上ノ A'M'B' ノ位置ニ來ルトセヨ。然ラバ A'M'B' ハ卽チ旋轉面ト平面 P' トノ交ハリデアル。

故ニ旋轉面トソノ軸デ終ル任意ノ平面トノ交ハリハ恒ニ全等ナル線デアル。カヤウナ線ヲ旋轉面ノ**母線**トイフ。

又母線 AMB ノ上ノ任意ノ點 M カラ XY ヘノ垂

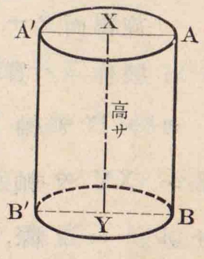
線ノ足ヲOトスレバ,平面PガXYヲ軸トシテ廻轉スルトキニ,MハOニ於テXYニ垂直ナル平面上デOヲ中心トスル一ツノ圓周ヲ畫ク。コノ圓周ハ卽チ旋轉面ノ直截面(軸ニ垂直ナル截リ口)ノ周デアル。

故ニ旋轉面ノ直截面ハ一般ニハ一ツノ圓デアル。

注意 2. 直截面ガ二ツ以上ノ同心圓ニナリ,又ハ一ツノ點ニナル場合モアル。

48. 直圓壔

定義 軸ニ平行ナ直線カラ生ズル旋轉面ヲ**圓壔面**トイフ。圓壔面トソノ二ツノ直截面トデ圍マレタ立體ヲ**直圓壔**トイヒ,ソノ截面ヲ直圓壔ノ**底面**,底面ノ間ニ夾マレタ圓壔面ヲ**側面**トイフ。

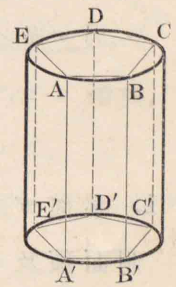


直圓壔ノ兩底面ハ平行デ合同ナ圓デアル。ソノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**トイヒ,兩底面ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ。

注意 1. 矩形ガソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉ヲナセバ,直圓壔ヲ生ズル。

定理 37. **直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シク,ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。**

題意 直圓壔ノ底面ノ周ヲp,底面積ヲM,高サヲhトシ,側面積ヲS,體積ヲVトスレバ



$$S=ph,\qquad V=Mh$$

證明 直圓壔ニ於テソノ底面ニ內接スル正n角形ヲ作リ,之ヲ底面トシ,ソノ直圓壔ノ高サニ等シイ高サヲ有スル正角壔ヲ作レバ,nヲ增加スルニ從ヒ,コノ正角壔ノ側面ハ直圓壔ノ側面ニ次第ニ接近スル。コノ正角壔ノ底面ノ周ヲp',ソノ面積ヲM'トシ,側面積ヲS',體積ヲV'トスレバ,

$$S'=p'h,\qquad V'=M'h$$

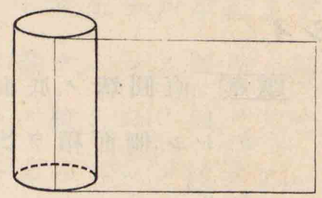
デアル。然ルニnヲ限リナク增加スレバS',V'ハ夫々S,Vニ限リナク接近シ,p',M'ハ夫々p,Mニ限リナク接近スル。故ニ

$$S=ph,\qquad V=Mh$$

系 **直圓壔ノ半徑ヲr,高サヲhトシ,ソノ側面積ヲS,體積ヲVデ表ハセバ**

$$S=2\pi rh,\qquad V=\pi r^2h$$

注意 2. 直圓壔ノ側面ヲ平面上ニ展開スルコトガ出來ル。ソノトキニ側面ハ矩形ニナツテソノ高サハ母線ニ等シク,底邊ハ底面ノ周ニ等シクナル。

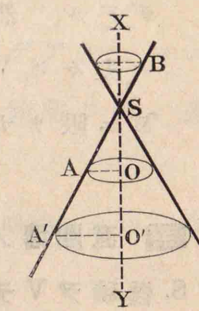


問題 (27)

1. 半徑ガ 15cm デ高サガ 32cm デアル直圓壔ノ側面積及ビ體積ヲ求メヨ。
2. 長サ 1m ノ鐵管ガアツテ,ソノ外徑ガ 12cm デ内徑ガ 9cm デアル。ソノ體積及ビ重サヲ求メヨ。但シ鐵ノ比重ハ7.8トスル。

49. 直圓錐

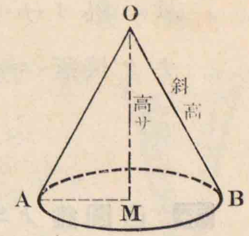
定義 軸ト交ハル直線カラ生ズル旋轉面ヲ**圓錐面**トイヒ,ソノ直線ト軸トノ交點ヲ圓錐面ノ**頂點**トイフ。



圓錐面トソノ一ツノ直截面トデ圍マレタ立體ヲ**直圓錐**トイヒ,ソノ直截面ヲ**底面**,頂點ト底面トノ距離ヲ**高サ**トイフ。

直圓錐ニ於テハ母線ノ長サヲ**斜高**トイフ。又底

面ノ半徑ヲ直圓錐ノ**半徑**トイフ。

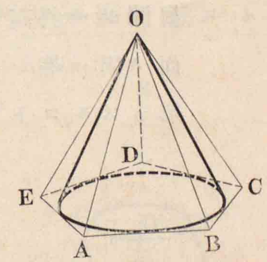


注意 1. 直角三角形ガ直角ノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉ヲナセバ直圓錐ヲ生ズル。

定理 38. **直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シク,ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。**

題意 直圓錐ノ底面ノ周ヲ p,底面積ヲ M,斜高ヲ l,高サヲ h トシ,側面積ヲ S,體積ヲ V デ表ハセバ

$$S=\frac{1}{2}pl,\qquad V=\frac{1}{3}Mh$$



證明 直圓錐ノ底面ニ外接スル正 n 角形ヲ作リ,之ヲ底面トシ,ソノ直圓錐ノ頂點ヲ頂點トスル直角錐ヲ作レバ,n ヲ增加スルニ從ヒ,コノ直角錐ノ側面ハソノ直圓錐ノ側面ニ次第ニ接近スル。サテコノ直角錐ノ底面ノ周ヲ p',底面積ヲ M′ トシ,ソノ側面積ヲ S′,體積ヲ V′ デ表ハセバ

$$S'=\frac{1}{2}p'l,\qquad V'=\frac{1}{3}M'h$$

然ルニ n ヲ限リナク增加スレバ p', M′ ハ夫

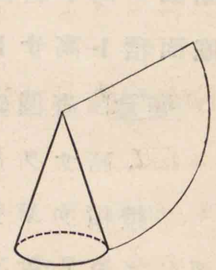
M ニ限リナク接近シ, S', V' ハ夫々 S, V ニ限リナク接近スル。故ニ

$$S=\frac{1}{2}pl,\qquad V=\frac{1}{3}Mh$$

系 **直圓錐ノ半徑ヲ r, 高サヲ h トシ,側面積ヲ S, 體積ヲ V デ表ハセバ**

$$S=\pi r\sqrt{r^2+h^2},\qquad V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

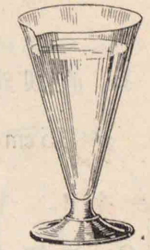
注意 2. 直圓錐ノ側面ヲ平面上ニ展開シテ斜高ニ等シイ半徑ト底面ノ周ニ等シイ弧トヲ有スル扇形ニスルコトガ出來ル。



問題 (28)

1. 半徑 6 cm, 高サ 15 cm ノ直圓錐ガアル。ソノ側面積及ビ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。
2. 漏斗ノ直圓錐狀ノ部分ノ直徑ガ 12 cm デ,深サガ 10 cm ナルトキ,コノ部分ノ容積ハ約幾立デアルカ。但シ $\pi=3.14$ トシテ數字三桁ヲ出セ。
3. 直角三角形ノ二邊ガ 6 cm 及ビ 8 cm ナルトキ,斜邊ヲ軸トシテ之ヲ一廻轉シテ生ズル立體ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

4. 一邊ガ 10 cm ノ正三角形ヲ,ソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。

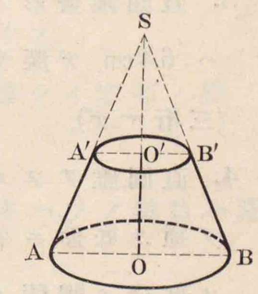


5. 直圓錐形ノこつぷニ深サノ $\frac{8}{10}$ ダケ水ヲ入レルト 0.5 立ニナル。ソレヲ一杯ニスレバ幾立ニナルカ。

50. 直圓錐臺

定義 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ,ソノ截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**直圓錐臺**トイフ。

ソノ截面ト底面トヲ共ニ直圓錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面ノ距離ヲ**高サ**トイヒ,又兩底面ノ間ニアル母線ノ部分ノ長サヲ**斜高**トイフ。



定理 39. **直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ a, b; 斜高ヲ l, 高サヲ h, 側面積ヲ S, 體積ヲ V デ表ハセバ**

$$S=\pi l(a+b)$$

$$V=\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

證明 (生徒自ラセヨ)。

問題 (29)

1. 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ガ 5 cm, 12 cm デ高サガ 15 cm デアルトキ,ソノ全表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

2. 口徑 32 cm, 底徑 20 cm, 高サ 24 cm ノばけつノ容積ヲ求メヨ。又コノばけつヲ作ルニハ約幾 cm² ノぶりきヲ要スルカ。

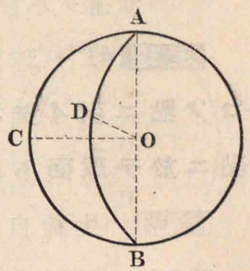
3. 直圓錐臺形ノこっぷノ直徑ガ口デハ 7.5 cm, 底デハ 6.4 cm デ深サハ 12 cm デアル。容積ハ幾立カ(三桁マデ)。

4. 直圓錐ヲソノ頂點ヨリ底ヘ下シタ垂線ノ中點ヲ通リ,底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ生ズル二ツノ部分ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

5. 直圓錐臺ノ側面積ハ之ト等シイ高サ及ビ直圓錐臺ノ一ツノ母線ヲ底邊トシ,軸ノ上ニ頂點ヲ有スル二等邊三角形ノ高サニ等シイ半徑ヲ有スル直圓壔ノ側面積ニ等シイ。

51. 球

定義 半圓ガソノ直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル立體ヲ**球**トイフ。



球ハ半圓周ノ弧カラ生ズル旋轉面デ圍マレル。コノ曲面ヲ**球面**トイフ。又ソノ半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**,中心カラ球面上ノ一點ニ至ル線分ヲ球ノ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ球面上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ。

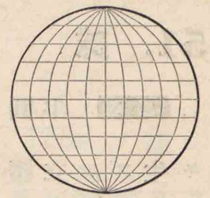
球面ハ中心カラ距離ガ半徑ニ等シイ空間ノ點ノ軌跡デアル。

定理 40. 球ヲ平面デ截ルトキハ,ソノ截口ハ圓デアル。

證明 球面ヲ截面ニ垂直ナル直徑ヲ軸トスル旋轉面ト考ヘルコトガ出來ルカラデアル。

定義 球ノ中心ヲ通ル平面デ截ツタ截口ヲ球ノ**大圓**トイヒ,中心ヲ通ラナイ平面デ截ツタ截口ヲ球ノ**小圓**トイフ。

注意 地球ヲ球ト見レバ,地軸(兩極ヲ結ブ直徑)デ終ル縱



断面ハ大圓ノ半圓デ,ソノ弧ハ卽チ子午線デアル。

又地軸ニ垂直ナル截面ノ大圓周ハ赤道デ,小圓周ハ緯度線デアル。

定理 41. 球面上ノ一點ヲ通リコノ點ニ引イタ半徑ニ垂直ナ平面ハ,コノ點以外ノ點ニ於テ球面ト出會ハナイ。

證明 (生徒自ラセヨ)。

球面ト平面トガ唯一點ノミヲ共有スルトキハ互ニ**相切スル**トイヒ,ソノ平面ヲソノ球面ノ**切平面**,ソノ點ヲ**切點**トイフ。

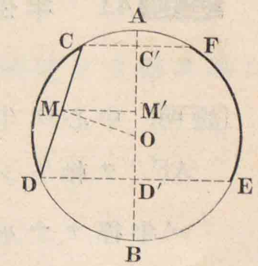
問題 (30)

1. 球ノ直徑ノ兩端デアル二點ヲ球面上ノ**對點**トイフ。球面上ノ對點デナイ二點ヲ通ル大圓周ハ一ツダケアル。
2. 球ノ半徑ヲR,球ノ中心ト截面トノ距離ヲdトスレバ,截面ノ面積ハ$\pi(R^2-d^2)$デアル。

52. 球ノ表面積

定理 42. 半圓ガソノ直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ,半圓ノ一ツノ弦ニヨツテ生ズル曲面ノ面積ハ中心ヨリソノ弦ニ至ル距離ヲ半徑トスル圓周ト,ソノ弦ノ軸上ニ投ズル正射影トノ積ニ等シイ。

題意 半圓ACBガ直徑ABヲ軸トシテ一廻轉スルトキ,半圓ノ一ツノ弦CDニヨツテ生ズル曲面ノ面積ヲSトシ,中心OヨリCDニ下セル垂線ノ足ヲM,CDノAB上ニ投ズル正射影ヲC′D′トスレバ



$$S=2\pi OM\cdot C'D'$$

證明 CDガABヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル曲面ハCDヲ斜高トシ,CC′,DD′ヲ兩底面ノ半徑トスル直圓錐臺ノ側面デアル。ソノ斜高CDノ中點MノAB上ニ投ズル正射影ヲM′トスレバ

$$S=\pi CD(CC'+DD')=2\pi CD\cdot MM'$$

然ルニ $OM\perp CD,\ MM'\perp AB$

故ニ $\angle OMM'=\angle\alpha$ トスレバ CDトABトノナス角ハαニ等シイ。

$$\therefore\quad CD\cos\alpha=C'D'$$

又 $MM'=OM\cos\alpha$

コノ二式ヲ邊々相乘ズレバ

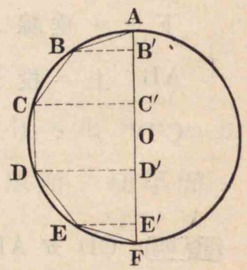
$$CD \cdot MM' = OM \cdot C'D'$$

$$\therefore \quad S = 2\pi OM \cdot C'D'$$

定理 43. **半徑 r ナル球ノ表面積ヲ S トスレバ**

$$S = 4\pi r^2$$

證明 中心O, 半徑 r ナル半圓 ABC……F ガ直徑 AF ヲ軸トシテ一廻轉スレバ半徑 r ナル球ヲ生ズル。



コノ半圓周ヲ n 等分シ,ソノ分點ヲ順次ニ結ベバ n 箇ノ等弦ヲ得ル。コレ等ノ等弦ハ中心カラ等距離ニアル。ソノ距離ヲ r' トスル。

次ニ各分點 B, C, D, … ノ AF 上ニ投ズル正射影ヲ夫々 B′, C′, D′ … トシ,コノ半圓ガ一廻轉スルトキ n 箇ノ等弦ニヨツテ生ズル曲面ノ面積ノ和ヲ S′ トスレバ

$$S' = 2\pi r'AB' + 2\pi r'B'C' + \cdots\cdots$$

$$= 2\pi r'(AB' + B'C' + \cdots\cdots)$$

$$= 2\pi r'AF$$

$$= 4\pi r'r$$

ココニ於テ n ヲ限リナク增加スレバ, r' ハ球ノ半徑 r ニ, S′ ハ球ノ表面積 S ニ限リナク接近スル。

$$\therefore \quad S = 4\pi r^2$$

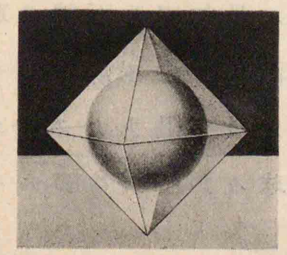
系 **球ノ表面積ハソノ大圓ノ面積ノ 4 倍ニ等シイ。**

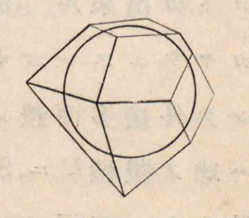
問題 (31)

1. 球ノ表面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ側面積ニ等シイ。
2. 地球ノ赤道ノ長サハ約 40000 km デアル。地球ノ表面積ハ約幾 km^2 カ。

53. 球ノ體積

定理 44. **半徑 r ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル。**





[證明] 球ノ切平面ヲ以テソノ球ヲ圍メバコレ等ノ切平面ニヨツテ一ツノ多面體ガ出來ル。ソノ各面ヲ底面トシ,球ノ中心ヲ共通ノ頂點トスル角錐ニ分ケルト,ソノ多面體ノ體積ハコレ等ノ角錐ノ體積ノ和ニ等シク,又コレ等ノ角錐ノ高サハ皆球ノ半徑ニ等シイ。依ツテ球ノ半徑ヲr,コノ多面體ノ各面ノ面積ヲ$m_1, m_2, \cdots$トシ,多面體ノ表面積及ビ體積ヲ夫々S'及ビV'トスレバ,

$$S'=m_1+m_2+\cdots\cdots$$

$$V'=\frac{1}{3}rm_1+\frac{1}{3}rm_2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{3}rS'$$

サテコノ多面體ヲソノ各頂點ト球ノ中心トヲ結ブ線分ニ交ハル切平面デ截ルコトニヨツテ,ソノ面ノ數ヲ增シ,各面ノ面積ヲ小サクスルコトガ出來ル。(例ヘバ最初正六面體ヲ取ツテカヤウニスレバ十四面體ヲ生ズル)。カヤウニシテ外接多面體ノ面ノ數ヲ限リナク增ストV'ハ球ノ體積Vニ,S'ハ球ノ表面積S卽チ$4\pi r^2$ニ限リナク接近スル。

故ニ　$V=\frac{1}{3}rS=\frac{1}{3}r\times 4\pi r^2$

卽チ　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

[問題] (32)

1. 球ノ表面積ガ100π cm^{2}デアルトキ,ソノ體積ハ幾cm^{3}ナルカ。
2. 重サガ11.7kgノ鐵球ガアル。ソノ半徑ハ幾cmカ。但シ鐵ノ比重ヲ7.8トスル。
3. 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シイ。
4. 直徑50cmノ鉛球ヲ打チ延バシテ厚サ1cmノ圓板ヲ作ルトキハ直徑ハ幾cmニナルカ。
5. 半徑Rナル球ニ內接スル直圓錐ノ側面積ヲ底面積ノ二倍ニ等シクシヨウトスル。ソノ高サヲ求メヨ。
6. 一ツノ水滴ガ1000等分セラレルトキニハ,ソノ表面積ノ總和ハ幾倍ニナルカ。
7. 體積Vノ石鹼液ヲ玉ニ吹クトキ,膜ノ厚サガhナラバ半徑ハ何程カ。體積ガ30mm^3,厚サガ1みくろんノトキ,ソノ半徑ヲ計算セヨ(概算二桁)。

雜 題 (3)

1. 三邊ノ長サガ 13 cm, 14 cm, 15 cm ナル三角形ガアル。之ヲ 15 cm ナル邊ノ廻リニ一廻轉セシメテ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トシテ計算セヨ。

2. 一邊ノ長サ a ナル正三角形 ABC ヲソノ頂點 A ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。

3. 頂角 α ナル直圓錐トソノ外接球トノ體積ノ比ヲ求メヨ。

4. 一邊 a ノ正三角形ヲ底トシ,高サガ h ナル正三角錐ニ外接スル球ノ半徑ハ幾ラカ。

5. 直徑 4 cm ノ球ヲ一邊ノ長サ 6 cm ノ正三角形ノ三邊デ支ヘルトキ,ソノ正三角形ヲ含ム平面ヨリ球ノ最高點ニ至ル距離ヲ求メヨ。

6. 定義 互ニ平行ナル二ツノ截面ノ間ニ夾マレタ球面ノ部分ヲ**球帶**トイヒ,截面間ノ距離ヲ球帶ノ**高サ**トイフ。

球帶ノ面積ハソノ高サト大圓周トノ積ニ等シイコトヲ證明セヨ。

7. 半徑 12 cm ナル球帶ノ面積ガ 600 cm² ナルトキ,コノ球帶ノ高サハ何程カ。

8. 定義 互ニ平行ナル二ツノ截面ノ間ニ夾マレタ球ノ一部分ヲ**球分**トイヒ,二ツノ截面ヲ球分ノ**底**,ソノ間ノ距離ヲ球分ノ**高サ**トイフ。

一ツノ球分ニ於テ,ソノ底面ノ半徑ヲ夫々 a, b; 高サヲ h トシ,體積ヲ V トスレバ

$$V=\frac{\pi}{2}h(a^2+b^2)+\frac{\pi h^3}{6}$$

9. 定義 扇形ガソノ一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキニ生ズル立體ヲ**球扇**トイヒ,球扇ノ弧カラ生ズル曲面ヲソノ**底面**トイフ。

球扇ノ體積ハ底面積ト半徑トノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイコトヲ證明セヨ。

10. 半徑 r, 中心角ガ α ナル扇形カラ生ズル球扇ノ體積ヲ求メヨ。

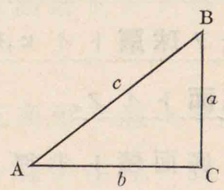
第3篇　平面三角法

第1章　三角函數

54. 銳角ノ三角函數

銳角ノ三角函數ニツイテハ既ニ學ンダノデアル。次ニソノ基礎事項ヲ回顧シ,一般ノ角ノ三角函數ヲ學ブコトニシヨウ。

問1. 次ノ圖ニヨツテ $\angle A$ ノ三角函數ヲ書ケ。



$\sin A =$　　　　$\operatorname{cosec} A =$

$\cos A =$　　　　$\sec A =$

$\tan A =$　　　　$\cot A =$

問2. $\angle A$ ガ $45°, 30°, 60°$ ノトキ圖ヲ畫イテ三角函數ノ値ヲ述ベヨ。

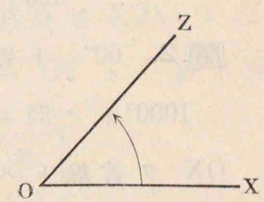
問3. $$\left.\begin{aligned} \sin A \operatorname{cosec} A &= 1 \\ \cos A \sec A &= 1 \\ \tan A \cot A &= 1 \end{aligned}\right\}$$ ヲ證明セヨ。

問4. $$\left.\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned}\right\}$$ ヲ證明セヨ。

問5. $\tan A = t$ ナルトキ他ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

55. 一般ノ角

角 XOZ ハソノ頂點 O ヲ一端トスル半直線ガソノ角ノ平面上ニ於テ OX ノ位置カラ OZ ノ位置マデ廻轉シテ生ジタモノト考ヘルトキ, OX ヲコノ角ノ**首線**, OZ ヲ**廻轉線**又ハ**動徑**トイフ。



廻轉線ガ廻轉スルノニ二ツノ向キガアル。コノ相反スル二ツノ向キヲ區別スルタメニ角ニ正負ノ符號ヲ附ケテ,時計ノ針ノ廻リ方ト反對ノ向キニ廻轉シテ生ズル角ヲ**正角**トシ,ソノ反對ノ向キニ廻轉シテ生ズル角ヲ**負角**トスル。

又廻轉線ガ角ノ首線 OX ノ位置カラ出發シテ幾回モ OX ノ位置ヲ通過シテ最後ノ位置ニ來タモノトモ考ヘラレルカラ, $360°$ ヨリ大ナル角モ, $-360°$ ヨリ小ナル角モ考ヘルコトガ出來ル。之ニヨツテ

角ノ大サハ正負及ビ零ノアラユル値ヲ取ルモノトスル。之ヲ**一般ノ角**トイフ。

一般ノ角ニ於テハ廻轉線ノ一ツノ位置ニヨツテ表ハサレル角ハ無數ニアル。ソノ一ツノ度數ヲ α トスレバソノ總テノ角ハ一ツノ式

$$\alpha+n\cdot 360^\circ$$

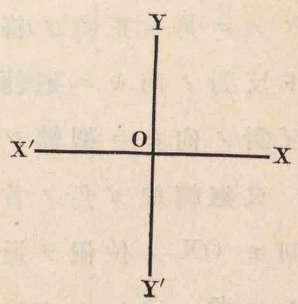
デ表ハサレル。但シ n ハ零又ハ正負ノ整數トスル。

問 1. 次ノ角ノ廻轉線ノ位置ヲ示セ(圖ヲ畫ケ)。

$420^\circ,\quad 600^\circ,\quad -120^\circ,\quad -300^\circ$

問 2. 60° ト廻轉線ヲ共有スル角ノ中デ 500° ト 1000° トノ間ニアル角ヲ求メヨ。

OX ヲ首線トスル角 XOZ ガ 90° ニ等シイトキノ廻轉線ノ位置ヲ OY トシ, OX, OY ノ延長ヲ夫々 OX′, OY′ トスレバ二直線 XOX′, YOY′ ハ直交シテ角ノ平面ヲ四ツニ分ケル。コノ各部分ヲ**象限**トイヒ, XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX ヲ順次ニ**第一象限,第二象限,第三象限,第四象限**トイフ。



角ノ廻轉線ガ第一象限内ニアルトキハ之ヲ第一象限ノ角トイヒ,第二象限内ニアルトキハ之ヲ第二象限ノ角トイフ。ソノ他モ之ニ準ズル。

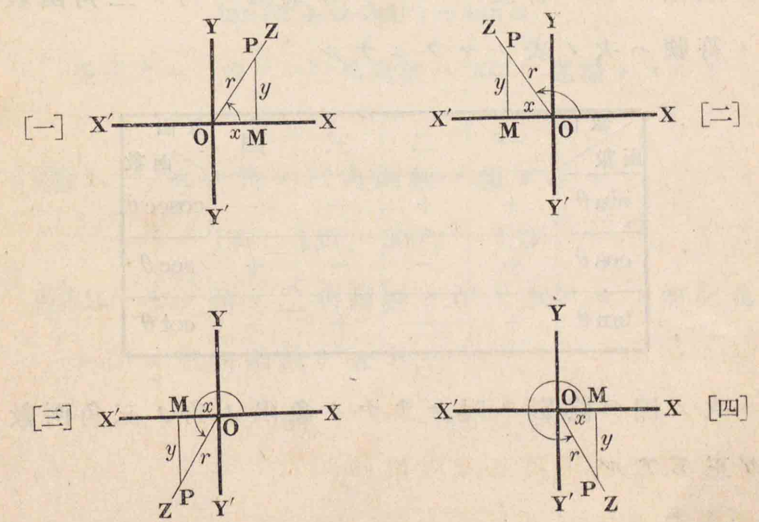
例ヘバ 225° ハ第三象限ノ角デ -300° ハ第一象限ノ角デアル。

問 3. 次ノ角ハ各何象限ノ角カ。

$480^\circ,\quad -480^\circ,\quad -317^\circ$

56. 一般角ノ三角函數

角 XOZ ノ頂點 O ヲ原點トスル直交軸 XOX′, YOY′ ヲ作リ, ∠XOZ ガ 90° ノトキ OZ ハ OY ト一致スル



モノトスル。今, OZ 上ニ任意ノ一點 P ヲトリ, OP ノ長サヲ r トシ,直交軸ニ關スル點 P ノ坐標ヲ x, y トスルトキ,廻轉線 OZ ニヨッテ表ハサレル一般角ヲ θ トスレバ, r, x, y ノ比ヲ角 θ ノ**三角函數**トイヒ,鋭角ノ場合ト同ジク次ノヤウニ定義スル。

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\qquad\qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{r}{y}$$

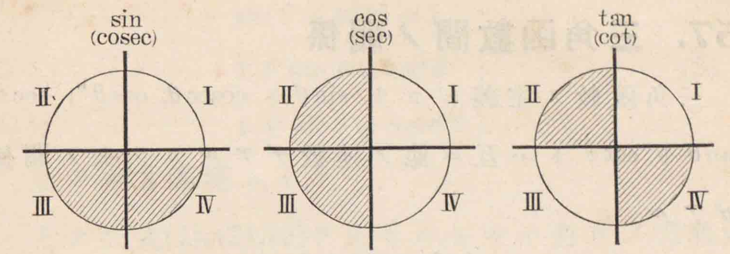
$$\cos\theta=\frac{x}{r}\qquad\qquad \sec\theta=\frac{r}{x}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\qquad\qquad \cot\theta=\frac{x}{y}$$

坐標 x, y ノ符號ニヨッテ各象限ノ角ノ三角函數ノ符號ハ次ノ表ノヤウニナル。

象限 / 函數	一	二	三	四	象限 / 函數
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$	$\sec\theta$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\cot\theta$

次ノ圖デ陰影ヲ附ケテナイ象限ノ角ノ三角函數ガ正デアル。



注意　上ニ述ベタ定義ニヨレバ,三角函數ハ角ノ首線ト廻轉線トノ位置ダケデ全ク定マルノデアルカラ,角ノ値ガ 360° ノ倍數ダケ增減シテモソノ三角函數ノ値ハ變ハラナイ。

即チ
$$\sin(\alpha+n\cdot 360^\circ)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+n\cdot 360^\circ)=\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha+n\cdot 360^\circ)=\tan\alpha$$

等デアル。依ッテ三角函數ハ 360° ヲ**週期**トスルトイフ。

問 **1.**　次ノ角ノ三角函數ノ値ヲ示セ。

120°,　135°,　300°,　−150°

問 **2.**　次ノ角ノ三角函數ヲ 0° ト 360° トノ間ノ角ノ同ジ三角函數デ表ハセ。

760°,　　−500°

57. 三角函數間ノ關係

三角函數ノ定義ニヨリ $\sin\theta$ ト $\operatorname{cosec}\theta$; $\cos\theta$ ト $\sec\theta$; $\tan\theta$ ト $\cot\theta$ トハ互ニ他ノ逆數デアルカラ次ノ關係ガアル。

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta\operatorname{cosec}\theta&=1\\ \cos\theta\sec\theta&=1\\ \tan\theta\cot\theta&=1\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

之ヲ**逆數關係**トイフ。又

$$\left.\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{y}{x}=\frac{\left(\frac{y}{r}\right)}{\left(\frac{x}{r}\right)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ \cot\theta&=\frac{x}{y}=\frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{y}{r}\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

之ヲ**相除關係**トイフ。

次ニ角 θ ガ何象限ノ角デアッテモ廻轉線上ノ任意ノ點 P ノ坐標 x, y ト $OP=r$ トノ間ニ

$$x^2+y^2=r^2$$

ナル關係ガアル。コノ式ノ兩邊ヲ順次ニ r^2, x^2, y^2 デ除スルト次ノ三式ガ得ラレル。

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\theta+\cos^2\theta&=1\\ 1+\tan^2\theta&=\sec^2\theta\\ 1+\cot^2\theta&=\operatorname{cosec}^2\theta\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

之ヲ**平方關係**トイフ。

上ノ公式(1),(2),(3)ヲ用ヒルトキハ角 θ ノ三角函數六ツノ中,一ツヲ知ツテソノ他ヲ誘導スルコトガ出來ル。但シ(3)ヲ用ヒテ根號ヲ有スル式ヲ得タ場合ニハ θ ガ何象限ノ角ナルカヲ知ツテソノ符號ヲ適當ニ定メネバナラナイ。

例 θ ガ第四象限ノ角デ $\cot\theta=-\dfrac{3}{2}$ ナルトキ他ノ三角函數ヲ求メヨ。

解 θ ガ第四象限ノ角デアルカラ cos ト sec トノ外ハ皆負デアル。

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=\frac{1}{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=-\sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$$=-\sqrt{1+\frac{9}{4}}=-\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{13}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

問 **1.**　θ ハ第二象限ノ角デ $\sin\theta=\frac{4}{5}$ ナルトキ $\cos\theta$ 及ビ $\tan\theta$ ヲ求メヨ。

問 **2.**　θ ハ第三象限ノ角デ $\cos\theta=-\frac{4}{7}$ ナルトキ他ノ三角函數ヲ求メヨ。

問 **3.**　$\cot\theta=-\frac{12}{5}$ 及ビ $\cos\theta>0$ ナルトキ $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

問 **4.**　$180^\circ<\theta<360^\circ$ デ $\cos\theta=-\frac{5}{13}$ ナルトキ $\sin\theta, \tan\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

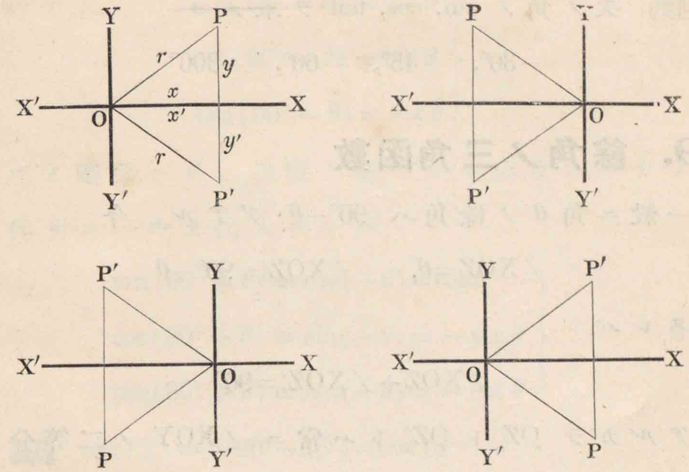
58. 負角ノ三角函數

$\angle XOZ=\theta$, $\angle XOZ'=-\theta$ トスレバ OZ ト OZ' トハ直線 XX' ニ關シテ對稱ノ位置ニアル。

今 OZ, OZ' ノ上ニ夫々點 $P(x, y)$, $P'(x'y')$ ヲトリ $OP=OP'=r$ トスレバ

$$x'=x \qquad y'=-y$$

$$\therefore\quad \sin(-\theta)=\frac{y'}{r}=\frac{-y}{r}=-\sin\theta$$



$$\cos(-\theta)=\frac{x'}{r}=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\theta$$

即チ

$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)&=\cos\theta\\ \tan(-\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

例　$\sin(-60^\circ)=-\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos(-30^\circ)$$

$$=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-315^\circ)=\tan(-360^\circ+45^\circ)=\tan45^\circ=1$$

問　次ノ角ノ sin, cos, tan ヲ求メヨ

$$-30^\circ,\quad -45^\circ,\quad -60^\circ,\quad -300^\circ$$

59. 餘角ノ三角函數

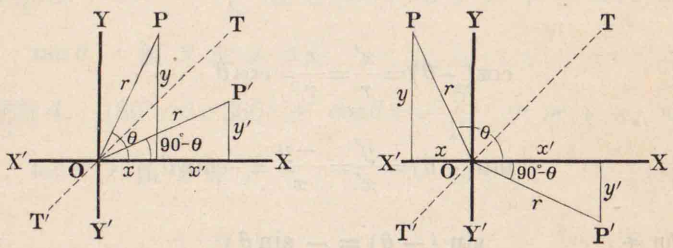
一般ニ角 θ ノ餘角ハ $90^\circ-\theta$ デアル。今

$$\angle XOZ=\theta,\qquad \angle XOZ'=90^\circ-\theta$$

トスレバ

$$\angle XOZ+\angle XOZ'=90^\circ$$

デアルカラ OZ ト OZ′ トハ常ニ ∠XOY ノ二等分線



TT′ ニ關シテ對稱デアル。故ニ OZ, OZ′ ノ上ニ夫夫 $P(x,y)$, $P'(x',y')$ ヲトリ, $OP=OP'=r$ トスレバ

$$x'=y\qquad y'=x$$

$$\therefore\quad \sin(90^\circ-\theta)=\frac{y'}{r}=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\frac{x'}{r}=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

即チ

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^\circ-\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90^\circ-\theta)&=\sin\theta\\ \tan(90^\circ-\theta)&=\cot\theta\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

コノ關係ハ θ ノ符號ヲ變ヘテモ成立スルカラ θ ノ代リニ $-\theta$ ヲ代入スレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^\circ+\theta)&=\cos(-\theta)=\cos\theta\\ \cos(90^\circ+\theta)&=\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \tan(90^\circ+\theta)&=\cot(-\theta)=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

例　$\sin 75^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\cos 15^\circ$

$\cos 100^\circ=\cos(90^\circ+10^\circ)=-\sin 10^\circ$

問 **1.**　次ノ三角函數ヲ 45° 未滿ノ正角ノ三角函數デ表ハセ。

$$\sin 72^\circ,\qquad \cos 125^\circ,\qquad \tan(-58^\circ)$$

問 **2.**　次ノ三角函數ノ値ヲ三角函數ノ眞數表カラ求メヨ。

$$\sin 123^\circ,\qquad \cos 155^\circ,\qquad \tan 117^\circ$$

問 **3.**　上ノ公式デ θ ニ $90^\circ+\theta$, 及ビ $90^\circ-\theta$ ヲ代入シテ,次ノ公式ヲ導ケ。

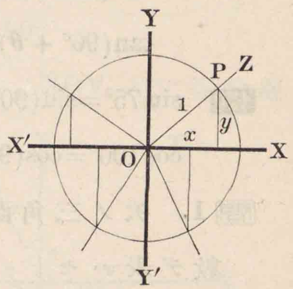
$$\left.\begin{aligned}\sin(180^\circ+\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(180^\circ+\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ+\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\sin(180^\circ-\theta)&=\sin\theta\\ \cos(180^\circ-\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ-\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}$$

60. 三角函數ノ値ノ變化

OX ヲ首線, OZ ヲ廻轉線トスル角 XOZ ヲ θ デ表ハシ, θ ガ 0° ヨリ 360° マデ次第ニ増ストキ,之ニ從ツテソノ三角函數ノ値ガ變化スル有様ヲ考究シヨウ。

[1] 正弦及ビ餘弦ノ變化

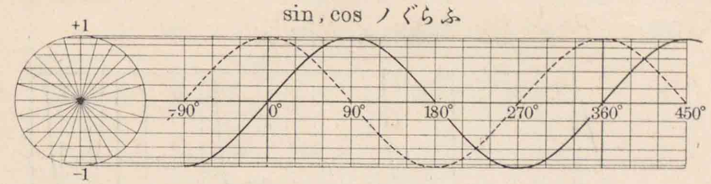
O ヲ原點トスル直交軸 XOX′, YOY′ ヲトリ, θ ガ 90° トナルトキノ OZ ノ位置ヲ OY トスル。 OZ 上ニ長サノ單位ニ等シク OP ヲトリ, P ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ



$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y,\qquad \cos\theta=\frac{x}{1}=x$$

故ニ P ガ O ヲ中心トシ,半徑1ナル圓周上ヲ移動スルニ從ツテ y 及ビ x ノ變化スル狀態ニヨリ $\sin\theta$ 及ビ $\cos\theta$ ノ變化ノ狀態ヲ知ルコトガ出來ル。 ソノ變化ノ狀態ヲぐらふデ示セバ次頁ノ圖ノヤウニナル。 實線デ示シタ波狀ノ曲線ハ $\sin\theta$ ノぐらふデ之ヲ**正弦曲線**トイフ。 又破線ノ曲線ハ $\cos\theta$ ノぐらふデアル。 之ハ $\sin\theta$ ノぐらふヲ左ヘ 90° ダケズラセタモノデアル。 ソレハ公式 $\cos\theta=\sin(90^\circ+\theta)$ ニヨツテ明カデアル。

sin, cos ノぐらふ

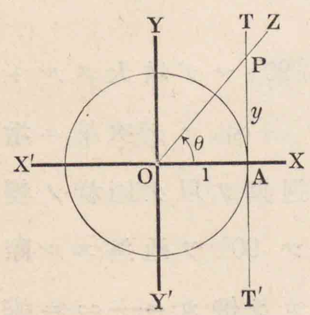


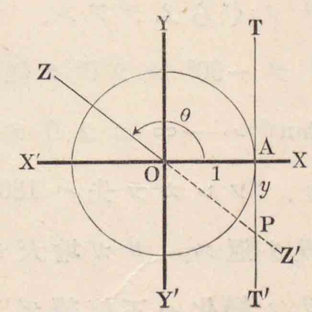
注意 $\sin\theta$ ト $\cos\theta$ ハ共ニ $+1$ ト -1 トノ間ニアツテ週期的ニ増減スル。

[2] 正切及ビ餘切ノ變化

OX 上ニ長サノ單位ニ等シク OA ヲトリ, A ニ於テ OX ニ垂直ナル直線 TT′ ヲ引キ, OZ 又ハソノ延長 OZ′ トノ交點ヲ $P(x, y)$ トスレバ $x=1$ デアルカラ

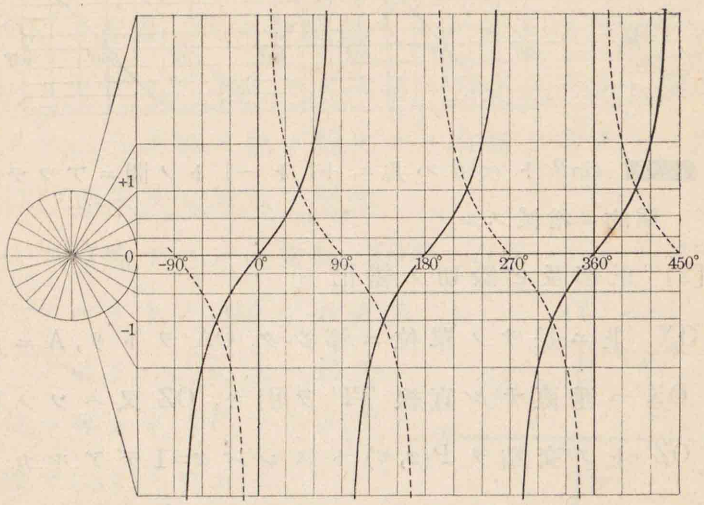
$$\tan\theta=\frac{y}{1}=y \quad \text{從ツテ} \quad \cot\theta=\frac{1}{y}$$





故ニ $\tan\theta$ ノ變化ハ直線 TT′ 上ノ點 P ノ縦坐標 y ノ變化ニ同ジク, $\cot\theta$ ノ變化ハソノ逆數ノ變化ト同ジデアル。 ぐらふデソノ變化ノ狀態ヲ示スト次ノ

tan.cot ノぐらふ



圖ノヤウニナル。實線ハ $\tan\theta$ ノぐらふデ破線ハ $\cot\theta$ ノぐらふデアル。

θ ガ $-90°$ カラ $0°$ ヲ經テ $+90°$ マデ增大スルトキニ $\tan\theta$ ハ $-\infty$ カラ 0 ヲ經テ $+\infty$ マデ次第ニ增大スル。ソレカラ先ハ $180°$ ノ週期ヲ以テ同樣ノ變化ヲ繰リ返ス。θ ガ增大シツツ $90°$ ヲ通過スル際ニ $\tan\theta$ ノ變化ハ不連續デ, $+\infty$ カラ俄カニ $-\infty$ ニ飛ブノデアル。

象限ノ分界ニ當ル角ノ三角函數ノ値ハ次ノ通リデアル。

	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tan	0	+∞ −∞	0	+∞ −∞	0
cot	−∞ +∞	0	−∞ +∞	0	−∞ +∞
sec	1	+∞ −∞	−1	−∞ +∞	1
cosec	−∞ +∞	1	+∞ −∞	−1	−∞ +∞

問 **1.** $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ノぐらふヲ畫ケ。

問 **2.** 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\cos 0° + \sin 90° + \cos 180°}{\tan 0° + \sin 180° + \operatorname{cosec} 90°}$$

問題 (33)

1. 次ノ角ノ sin, cos, tan ヲ求メヨ。

$225°$, $300°$, $330°$

2. x ガ $480°$ 又ハ $-480°$ ナルトキ $\sin x + \cos x$ ト $\tan x - \cot x$ トノ値ヲ求メヨ。

3. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\sin A + \sin(A + 90°) + \sin(A + 180°) + \sin(A + 270°)$$

$$\cos A + \cos(A - 90°) + \cos(A - 180°) + \cos(A - 270°)$$

4. $\cos A=\dfrac{2p}{p^2+1}$ ナルトキ $\tan A$ ヲ求メヨ。

5. $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$ デ $180°<\theta<360°$ ナルトキ $\sin\theta,\ \tan\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

6. $\cot\theta=-\dfrac{2}{3}$ デ $0<\theta<180°$ ナルトキ $\sin\theta,\ \cos\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

7. $2\sin^2x=\cos x+1$ ナルトキ $\sin x,\ \cos x$ ヲ求メヨ。

8. $0°$ ト $360°$ トノ間デ $\cos 2x=0$ ナル角 x ヲ求メヨ。

9. $0°<x<180°,\ \sin^2x+2\cot^2x=1$ ヲ滿足スル角 x ヲ求メヨ。

10. $0°<x<180°,\ \ 0°<y<180°$ デ

$$\sin(x-y)=-\frac{1}{2},\quad \cos(x+y)=\frac{1}{2}$$

ヲ滿足スル角 x 及ビ y ヲ求メヨ。

11. $\cos(\alpha+\beta)=1$ ナルトキハ $\cos\alpha=\cos\beta$ ナルコトヲ示セ。

12. θ ヲ如何ナル角トスルモ $x+\dfrac{1}{x}=\sin\theta$ ヲ滿足セシメル實數 x ハ存在シナイコトヲ示セ。

第2章　加法定理・減法定理

61. 正弦・餘弦ノ加法定理

二角 α,β ノ正弦及ビ餘弦ヲ知ッテ $\alpha+\beta$ ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メルニハ次ノ公式ヲ用ヒル。

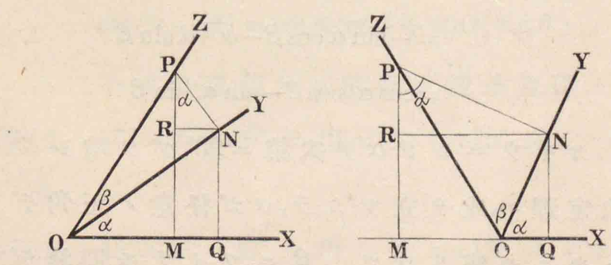
$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

之ヲ**正弦及ビ餘弦ノ加法定理**トイフ。

証明　α 及ビ β ヲ共ニ正ノ鋭角トスレバ $\alpha+\beta$ ハ $180°$ ヨリモ小デアル。

サテ $\angle XOY=\alpha,\ \angle YOZ=\beta$ トスル。OZ 上ノ一點 P カラ OX, OY ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引キ, N カラ OX, PM ニ夫々垂線 NQ, NR ヲ引ケバ

$$\angle RPN=\angle QON=\alpha$$



OP ヲ長サノ單位ニトレバ

$$\sin(\alpha+\beta)=MP=MR+RP=QN+RP$$

然ルニ　$QN=ON\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha$

$RP=PN\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha$

$\therefore$　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

又　$\cos(\alpha+\beta)=OM=OQ-MQ=OQ-RN$

然ルニ　$OQ=ON\cos\alpha=\cos\beta\cos\alpha$

$RN=PN\sin\alpha=\sin\beta\sin\alpha$

$\therefore$　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

尙コノ定理ハα, βノ大サ及ビ符號ノ如何ニ拘ハラズ適用スルコトガ出來ル。

今α, βヲ正ノ鋭角トシ, $\alpha'=\alpha+90°$ トスレバ

$$\sin(\alpha'+\beta)=\sin(\alpha+\beta+90°)=\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\sin\alpha'\cos\beta+\cos\alpha'\sin\beta$$
$$\cos(\alpha'+\beta)=\cos(\alpha+\beta+90°)=-\sin(\alpha+\beta)$$
$$=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\cos\alpha'\cos\beta-\sin\alpha'\sin\beta$$

カヤウニシテαヲ次第ニ$90°$ヅツ增シテモ加法定理ハ成リ立ツカラ, αガ任意ノ正角デアルトキニモ成リ立ツ。βニツイテモ同樣デアル。

又任意ノ負角ハ正ノ角カラ$360°$ノ或ル倍數ヲ引イタモノト考ヘルコトガ出來ル。然ルニ正ノ角カラ$360°$ノ倍數ヲ引イテモソノ三角函數ハ變ラヌカラ加法定理ハα又ハβガ負角デアルトキニモ成リ立ツノデアル。

62. 正弦・餘弦ノ減法定理

前節ニ示シタ加法定理ハα, βガ正又ハ負ノ任意ノ角デアルトキニ成リ立ツカラ

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{\alpha+(-\beta)\}$$
$$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\{\alpha+(-\beta)\}$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

卽チ
$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

コノ二公式ヲ**正弦**及ビ**餘弦ノ減法定理**トイフ。

問1. $75°=45°+30°$ヲ用ヒテ $\sin 75°$ 及ビ $\cos 75°$ ヲ求メヨ。

問2. $15°=45°-30°$ヲ用ヒテ $\sin 15°$ 及ビ $\cos 15°$ ヲ求メヨ。

問3. A, B ハ鋭角デ $\sin A=\dfrac{12}{13}$, $\sin B=\dfrac{4}{5}$ ナルトキ $\sin(A+B)$, $\sin(A-B)$ ヲ求メヨ。A 又ハ B ガ鈍角ナラバドウカ。

問4. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

[1] $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$

[2] $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A+\cos^2B-1$

[3] $\sin A+\cos A=\sqrt{2}\,\sin(A+45^\circ)$

[4] $\cos A-\sin A=\sqrt{2}\,\cos(A+45^\circ)$

63. 正切ノ加法定理・減法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad(9)$$

コノ公式ヲ**正切ノ加法定理**トイフ。

證明 正弦・餘弦ノ加法定理ニヨリ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

終リノ式ノ分母子ヲ $\cos\alpha\cos\beta$ デ割レバ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

又 β ヲ $-\beta$ ニ代ヘテ次ノ公式(**正切ノ減法定理**)ヲ得ル。

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

問1. $\tan 15^\circ$ 及ビ $\tan 75^\circ$ ヲ求メヨ。

問2. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\tan(45^\circ+\theta)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

問3. $x^2-px+q=0$ ノ根ヲ $\tan A$, $\tan B$ トスレバ

$$\tan(A+B)=\frac{p}{1-q}$$

ナルコトヲ證セヨ。

問4. 次ノ公式ヲ導ケ。

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta},\quad \cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

64. 二倍角ノ三角函數

$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ 及ビ $\tan(\alpha+\beta)$ ニ對スル公式ニ於テ $\beta=\alpha$ トスレバ次ノ公式ガ得ラレル。

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &=1-2\sin^2\alpha\\ &=2\cos^2\alpha-1\\ \tan 2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

次ノ公式モ重要デアル(證明ハ生徒自ラセヨ)。

[1] $1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

[2] $1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

[3] $\tan\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

[4] $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

[5] $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

65. 半角ノ三角函數

公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ ニ於テ $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ ト置ケバ次ノ公式ヲ得ル。(前節[1], [2]參照)

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\\ \cos\frac{\theta}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

上ノ公式ハ $\cos\theta$ ヲ知ツテ $\dfrac{\theta}{2}$ ノ三角函數ヲ求メル場合ニ有用デアル。但シ根號ノ前ノ符號ハ θ ノ大サニヨリ $\dfrac{\theta}{2}$ ガ第何象限ノ角ニナルカヲ知ツテ適當ニ定メナケレバナラナイ。

$\tan\dfrac{\theta}{2}$ ハ根號ナシニ次ノ公式ニヨツテ求メラレル。(前節[3]參照)

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

例 1. $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $270^\circ<A<360^\circ$ ナルトキ $\sin\dfrac{A}{2}$, $\cos\dfrac{A}{2}$ ヲ求メヨ。

解 $270^\circ<A<360^\circ$ $\therefore$ $135^\circ<\dfrac{A}{2}<180^\circ$

故ニ $\dfrac{A}{2}$ ハ第二象限ノ角デアルカラ $\sin\dfrac{A}{2}$ ハ正デ $\cos\dfrac{A}{2}$ ハ負デアル。依ツテ

$$\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

例 2. $22^\circ30'$ ノ三角函數ヲ求メヨ。

解 $22^\circ30'$ ハ第一象限ノ角デアルカラ

$$\sin 22^\circ30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^\circ30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22^\circ30'=\frac{1-\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1$$

$$\cot 22°30' = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

問 1.　$90° < \theta < 180°$ デ $\sin\theta = \dfrac{24}{25}$ ナルトキ $\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 及ビ $\tan\dfrac{\theta}{2}$ ノ値ヲ求メヨ。

問 2.　一邊 a ナル正八角形ノ面積及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

66. 三倍角ノ三角函數

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) \\ &= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

同樣ニ

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} \\ &\boldsymbol{\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

問 1.　次ノ式ヲ證明セヨ。

［1］　$\sin^3\alpha = \dfrac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$

［2］　$\cos^3\alpha = \dfrac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$

問 2.　$A = 18°$ ナルトキハ $\sin 2A = \cos 3A$ デアル。之カラ次ノ式ヲ導ケ。

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

67. 正弦又ハ餘弦ノ代數和

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

之カラ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta} \\ &\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta} \\ &\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta} \\ &\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

ココデ　$\alpha+\beta = \mathrm{P}, \quad \alpha-\beta = \mathrm{Q}$

ト置ケバ

$$\alpha = \frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}{2}, \quad \beta = \frac{\mathrm{P}-\mathrm{Q}}{2}$$

トナルカラ(13)ハ次ノヤウニナル。

$$\left.\begin{aligned}
\sin P + \sin Q &= 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}\\
\sin P - \sin Q &= 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}\\
\cos P + \cos Q &= 2\cos\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}\\
\cos P - \cos Q &= -2\sin\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

(13)及ビ(14)ハ二角ノ正弦又ハ餘弦ノ代數和ヲ積ノ形ニ變ジ,若クハ積ヲ代數和ノ形ニ變ズル場合ニ用ヒル。

例 1. $\sin 4x-\sin 2x$ ヲ積ニ直セ。

解 $\sin 4x-\sin 2x=2\cos\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2}$

$=2\cos 3x\sin x$

例 2. $\sin 4x\sin 2x$ ヲ代數和ニ直セ。

解 $-2\sin 4x\sin 2x=\cos(4x+2x)-\cos(4x-2x)$

$=\cos 6x-\cos 2x$

$\therefore\ \sin 4x\sin 2x=-\frac{1}{2}(\cos 6x-\cos 2x)$

問 1. 次ノ各式ヲ積ニ直セ。

[1] $\sin 4\theta+\sin 2\theta$　[2] $\sin 5\theta-\sin\theta$

[3] $\cos 2\theta+\cos 4\theta$　[4] $\cos 3\theta-\cos 5\theta$

[5] $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$　[6] $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$

問 2. 次ノ積ヲ代數和ニ直セ。

[1] $\sin 4x\cos 2x$　[2] $\cos 6x\sin 2x$

[3] $\cos\theta\cos 5\theta$　[4] $\sin\alpha\sin 3\alpha$

問題 (34)

1. $90^\circ<x<180^\circ,\ 180^\circ<y<270^\circ$ デ $\cos x=-\frac{4}{5},\ \tan y=\frac{3}{4}$ ナルトキ $\sin(x+y)$ 及ビ $\cos(x-y)$ ノ値ヲ求メヨ。

2. $90^\circ<\alpha<180^\circ,\ 180^\circ<\beta<270^\circ$ デ $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\beta=-\frac{8}{17}$ ナルトキ $\tan(\alpha+\beta)$ 及ビ $\tan(\beta-\alpha)$ ノ値ヲ求メヨ。

3. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

[1] $(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}$

[2] $\frac{1+\sin A}{1-\sin A}=\tan^2\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)$

[3] $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

[4] $4\cos A\cos(A+120^\circ)\cos(A+240^\circ)=\cos 3A$

[5] $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\frac{1}{8}$

4. $A+B+C=180^\circ$ ナラバ

[1] $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

[2] $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

5. A, B, C ガ等差級數ヲナストキハ

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\tan B$$

6. $\dfrac{\tan(A-B)}{\tan A}+\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$ ナラバ

$$\tan A\tan B=\tan^2 C$$

7. $\sin(A+B+C)$ ト $\cos(A+B+C)$ トヲ A, B, C ノ sin ト cos トデ表ハセ。

8. $\tan(A+B+C)$ ヲ A, B, C ノ tan デ表ハセ。

9. A, B ハ正角デ $A+B<90°$ ナラバ

[1] $\sin(A+B)<\sin A+\sin B$

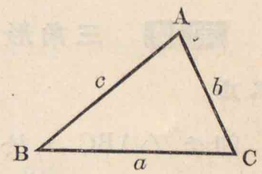
[2] $\tan(A+B)>\tan A+\tan B$

10. θ ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ増ストキニ $\cos\theta+\sin\theta$ ガ正デアル範圍ヲ示セ。又コノ式ノ最大ノ値ヲ求メヨ。

第 3 章　三角形ニ關スル公式

68. 三角形ノ原素

三角形ノ三ツノ邊ト三ツノ角トヲ三角形ノ原素トイフ。



三角形 ABC ニ於テ角 A, B, C ニ對スル邊ノ長サヲソレゾレ a, b, c デ表ハスコトニ定メル。

A, B, C ハ $0°$ ト $180°$ トノ間ノ正角デ

$$A+B+C=180°$$

從ッテ

$$B+C=180°-A,\qquad \frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$$

依ッテ

$$\sin(B+C)=\sin A,\qquad \cos(B+C)=-\cos A$$

$$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2},\quad \cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2},\quad \tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$$

ナドノ關係ガアル。

注意 三角形ノ角ハ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアルカラ,ソノ cos 又ハ tan ノ値ヲ知レバ角ノ値ハ確定スルガ, sin ノ値ダケヲ知ッテ角ノ値ヲ確定スルコトハ出來ナイ。

問　三角形 ABC ニ於テ

$$\sin A=\frac{1}{2},\quad \cos(B-C)=\frac{1}{2}$$

ナルトキ A, B, C ヲ求メヨ。

69. 正弦法則

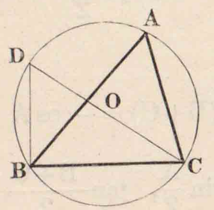
定理　**三角形ノ三邊ハソノ對角ノ正弦ニ比例スル。**

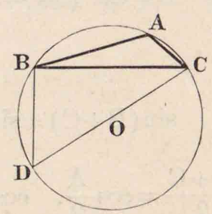
卽チ △ABC ニ於テ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \tag{15}$$

之ヲ**正弦法則**トイフ。

證明　△ABC ノ外接圓ニ於テ C ヨリ直徑 CD ヲ引キ, BD ヲ結ベバ ∠CBD ハ直角デアルカラ





$$BC=CD\sin D$$

然ルニ　$A<90^\circ$ ナルトキハ　$\angle D=\angle A$

$A>90^\circ$ ナルトキハ　$\angle D=180^\circ-\angle A$

何レノ場合デモ　$\sin D=\sin A$

$$\therefore\quad BC=CD\sin A$$

依ツテ外接圓ノ半徑ヲ R デ表ハセバ

$$a=2R\sin A$$

卽チ

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

A ガ直角ナルトキハ $\sin A=1,\ a=2R$ デアルカラ上式ハ矢張リ成立スル。

同様ニ　$\dfrac{b}{\sin B}=2R,\quad \dfrac{c}{\sin C}=2R$

故ニ　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

問 1.　△ABC ノ頂點 C ヨリ對邊 AB ニ下セル垂線ノ長サヲ h トスレバ

$$h=a\sin B=b\sin A$$

之カラ正弦法則ヲ導ケ。

問 2.　△ABC ニ於テ次ノ各式ヲ證明セヨ。

[1]　$\sin A+\sin B>\sin C$

[2]　$a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$

[3]　$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=0$ ナラバ $C=90^\circ$ デアル。

問 3.　$a\cos A=b\cos B$ ナラバ △ABC ハ二等邊三角形ナルカ若シクハ直角三角形デアル。

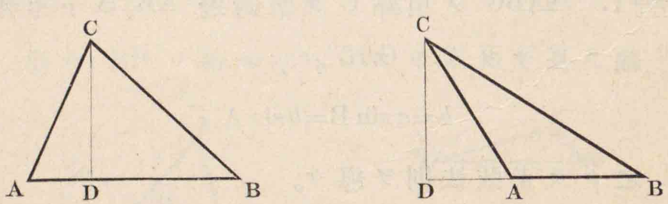
70. 餘弦法則

定理 **三角形ノ各邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリコノ二邊トソノ夾角ノ餘弦トノ連乘積ノ2倍ヲ引イタモノニ等シイ。**

即チ
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

之ヲ**餘弦法則**トイフ。

證明 CヨリABヌハソノ延長ニ下セル垂線ヲCDトスレバ,幾何ノ定理ニヨリ,Aガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \mp 2AB\cdot AD$$

デアル。然ルニAガ鋭角ナルカ又ハ鈍角ナルカニ從ツテ

$$AD = AC\cos A$$

又ハ $$AD = AC\cos(180^\circ - A) = -AC\cos A$$

デアルカラ,何レニシテモ

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB\cdot AC\cos A$$

即チ $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

次ニAガ直角ナルトキハ $a^2 = b^2 + c^2$ デ且 $\cos A = 0$ デアルカラ上ノ式ハ成立スル。即チ上ノ式ハAノ如何ニ拘ラズ常ニ成立ツ。他ノ二式モ同樣デアル。

問1. △ABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ。

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

問2. 前問ノ等式カラ cos A, cos B, cos C ヲ求メテ餘弦法則ヲ導ケ。

問3. △ABC ニ於テ次ノ式ヲ證明セヨ。

[1] $a + b + c = (b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$

[2] $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

[3] $c(a\cos B - b\cos A) = a^2 - b^2$

71. 正切法則

定理 **三角形ノ二邊ノ差ト和トノ比ハソノ二邊ノ對角ノ差半ノ正切ト,和半ノ正切トノ比ニ等シイ。**

例ヘバ

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$$

証明 正弦法則ニヨリ

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\mathrm{A}}{\sin\mathrm{B}}$$

$$\therefore\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\mathrm{A}-\sin\mathrm{B}}{\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{2\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}=\frac{\tan\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}$$

之カラ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}&\tan\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\mathrm{C}}{2}\\ \text{同様ニ}\quad&\tan\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{\mathrm{A}}{2}\\ &\tan\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{\mathrm{B}}{2}\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

注意 コレ等ヲ Napier ノ公式トイフ。

問 **1.** △ABC ニ於テ $b=10$ cm, $c=5$ cm, $\mathrm{A}=60°$ ナルトキ他ノ二角ヲ求メヨ。

問 **2.** △ABC ニ於テ次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$[1]\quad \sin\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$[2]\quad \cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}$$

72. 半角ノ正弦·餘弦·正切

半角ノ公式及ビ餘弦法則ニヨリ

$$2\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}=1-\cos\mathrm{A}$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

今 $a+b+c=2s$ ト置ケバ

$$a-b+c=2(s-b),\qquad a+b-c=2(s-c)$$

デアルカラ上ノ式カラ

$$2\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{4(s-b)(s-c)}{2bc}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &\sin\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \text{同様ニシテ}\quad&\sin\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ &\sin\frac{\mathrm{C}}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

又 $2\cos^2\dfrac{A}{2}=1+\cos A$ ニヨツテ同様ノ計算ヲナセバ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

從ツテ(18)ト(19)ニヨリ

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

コレ等ノ公式ハ三角形ノ三邊ノ長サヲ知ル場合ニ,對數計算ニヨリ角ヲ計算スルノニ用ヒラレル。

問 **1.** △ABC ニ於テ次ノ各等式ヲ證明セヨ。

［1］ $a\cos^2\dfrac{B}{2}+b\cos^2\dfrac{A}{2}=s$

［2］ $(s-a)\tan\dfrac{A}{2}=(s-b)\tan\dfrac{B}{2}=(s-c)\tan\dfrac{C}{2}$

［3］ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$

問 **2.** △ABC ニ於テ三邊 $a,\ b,\ c$ ガ等差級數ヲナストキ次ノ式ヲ證明セヨ。

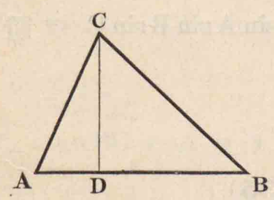
$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3$$

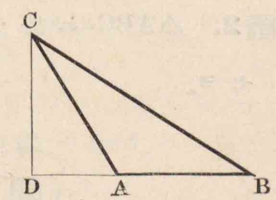
73. 三角形ノ面積

定理 **三角形ノ面積ハ二邊トソノ夾角ノ正弦トノ積ノ半分ニ等シイ。**

卽チ △ABC ノ面積ヲ S デ表セバ

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\qquad(21)$$





證明 頂點 C ヨリ對邊 AB ニ垂線 CD ヲ引ケバ

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$

然ルニ $\qquad CD=b\sin A$

$$\therefore\qquad S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

ソノ他モ同様デアル。

系　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

之ニ

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

ヲ代入スレバ

$$\mathbf{S}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (22)$$

トナル。之ハ既ニ學ンダ Heron ノ公式デアル。

問 1.　二邊ガ 20 cm, 25 cm デソノ夾角ガ 72° デアル三角形ノ面積ヲ計算セヨ(平方糎ノ位マデ)。

問 2.　△ABC ニ於テ $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$ ヲ證明セヨ。

問題 (35)

1.　△ABC ニ於テ $a=12$ cm, $B=30°$, $C=45°$ ナラバ b, c ハ幾cmカ。

2.　三邊ノ長サガ 7 cm, 9 cm, 13 cm ナル三角形ノ最大角ヲ求メヨ。

3.　$a:b:c=2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$ ナルトキ △ABC ノ最小角ヲ求メヨ。

4.　△ABC ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

[1]　$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

[2]　$\frac{b^2-c^2}{a^2}=\frac{\sin(B-C)}{\sin A}$

[3]　$\frac{b-c}{a}=\frac{\cos C-\cos B}{1+\cos A}$

[4]　$\tan A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}$

[5]　$\frac{b^2+c^2-a^2}{\cot A}=\frac{c^2+a^2-b^2}{\cot B}=\frac{a^2+b^2-c^2}{\cot C}$

5.　$\sin A=2\sin C\cos B$ ナラバ △ABC ハ二等邊三角形デアル。

6.　$\cos A+\cos B=\sin C$ ナラバ △ABC ハ直角三角形デアル。

7.　△ABC ノ A ヨリ引イタ中線ノ長サハ

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$$

デアル。

8.　△ABC ノ角 A ノ二等分線ノ長サハ

$$\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

デアル。

第4章 三角形ノ解法

74. 三角函數ノ對數

三角形ニ關スル計算ニ於テモ對數ガ利用サレル。コノ場合ニ三角函數ノ値ソレ自身ヨリハソノ對數ノ値ヲ直接ニ知ルコトヲ得レバ便利デアルカラ,之ヲ表ニシタモノガアル。之ヲ**三角函數ノ對數表**ト稱スル。

三角函數ノ對數表ノ組織ハ大略眞數表及ビ數ノ對數表ト同ジデアルガ,タヾ三角函數ノ値ハ1ヨリ小ナルモノガ多イカラソノ對數ノ指標ハ負數ガ多イ。

注意 1. 表中ニ負號ヲ一々附ケルコトハ印刷上不便デアルカラ對數ノ眞ノ値ニ10ヲ加ヘテ正數トシタモノヲ表ニシタモノガアル。カヤウナ場合ニハ之ヲ**表對數**トイヒ, Lsin, Lcos 等ト書ク。

故ニ $\log\sin A = \mathrm{L}\sin A - 10$ デアル。

本書ノ卷末ニ載セテアルモノハ10′飛ビノ四桁ノ對數表デアル。次ニソノ用例ヲ示ス。

例ヘバ $\log\sin 32°46'$ ヲ求メルニ,

表ニヨリ $\log\sin 32°40' = \bar{1}.7322$

$$\log\sin 32°50' = \bar{1}.7342$$

角ノ變化ガ微小ナルトキハ之ニ伴フ三角函數ノ變化ハホヾ角ノ變化ニ正比例スルモノト見做シテ概算スル。之ヲ**比例部分ノ理**ト稱スル。

ソコデ 32°40′ ヨリ角ガ10′増加シテ 32°50′ トナル間ニソノ正弦對數ハ 0.0020 ダケ増加スル故 32°40′ ヨリ6′増加シテ 32°46′ トナル間ニソノ正弦ノ對數ガ増加スル値ヲ x トスレバ

$$10 : 6 = 0.0020 : x$$

$$\therefore \quad x = 0.0012$$

依ツテ $\log\sin 32°46' = \bar{1}.7322 + 0.0012$

$$= \bar{1}.7334$$

コノ計算ニ於ケル 0.0020 ハ小數ノ末位ヲ單位トスレバ20ニナル。カヤウナ數ヲ**表差**トイヒ,表中 log sin ノ行ノ右ニ記シテアル。log cos ニ對スル表差モ同様デアル。

log tan 及ビ log cot ノ表差ハ共通デアルカラ表ノ中央ニ**通差**トイフ欄ヲ設ケテ載セテアル。

注意 2. 又計算ノ手數ヲ省クタメニ各ノ表差ニ對シテソノ $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots\ldots, \frac{9}{10}$ ヲ表トシタモノヲ對數表ノ下ニ添ヘタモノモアル。之ヲ**比例部分ノ表**トイフ。

ソレデコレ等ノ表ヲ利用シテ實際ノ計算ハ次ノヤウニ簡便ニ行フコトガ出來ル。

$$\begin{array}{lll} \log\sin 32°46' & & \\ \quad 32°40' \cdots\cdots \bar{1}.7322 & & \text{表差 } 20 \\ \quad\quad 6' \cdots\cdots\cdots 12 & & \\ \hline \log\sin 32°46' = \bar{1}.7334 & & \end{array}$$

例 1. $\log\tan\theta=0.6120$ ナルトキ鋭角 θ ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{lll} \log\tan\theta=0.6120 & & \\ \log\tan 76°10'=0.6086 & & \text{表差 } 55 \\ \hline \quad 34 & & \\ 6' \cdots\cdots 33 & & \\ \hline \quad 1 & & \\ 0.2' \quad 1.1 & & \\ \hline 76°16.'2 & & \end{array}$$

$\therefore$ $\theta=76°16.'2$ (答)

例 2. $\log\cos 60°37'$ ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{lll} \log\cos 60°30'=\bar{1}.6923 & & \text{表差 } 22 \\ \quad 7' \cdots\cdots -15.4 & & \\ \hline \log\cos 60°37'=\bar{1}.6908 & & \text{(答)} \end{array}$$

注意 3. 餘弦ハ角ノ增大スルニ從ツテ對數ハ減ズル餘切ニツイテモ同様デアル。

例 3. $\log\cot x=\bar{1}.6747$ ニ適スル鋭角 x ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{lll} \log\cot x=\bar{1}.6747 & & \\ \log\cot 64°40'=\bar{1}.6752 & & \\ \hline \quad -5 & & \text{表差 } 32 \\ 1' \cdots\cdots -3.2 & & \\ \hline \quad -1.8 & & \\ 0.6' \quad -1.92 & & \\ \hline x=64°41.'6 & & \text{(答)} \end{array}$$

問 1. 次ノ値ヲ求メヨ。

$\log\sin 39°53'$　　$\log\cos 51°34'$

$\log\tan 62°17'$　　$\log\cot 26°42'$

問 2. 次ノ式ニ適スル正ノ鋭角 x ヲ求メヨ。

[1] $\log\sin x=\bar{1}.4779$　　[2] $\log\tan x=0.3471$

75. 三角形ノ解法

三角形ノ六ツノ原素ノ中,一邊ト殘リノ原素ノ中ノ二ツトヲ知ルトキハ,他ノ三ツヲ算出スルコトガ出來ル。既知ノ原素カラ未知ノ原素ヲ算出スルコトヲ稱シテ**三角形ヲ解ク**トイフ。

三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合ガアル。

[1] 一邊ト二角トヲ知ル場合。

[2] 二邊トソノ夾角トヲ知ル場合。

[3] 二邊トソノ一對角ヲ知ル場合

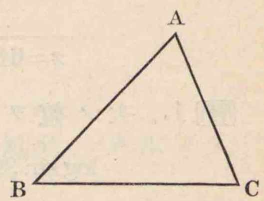
[4] 三邊ヲ知ル場合。

76. 一邊ト二角トヲ知ル場合

與ヘラレタ一邊ヲ a トスル。與ヘラレタ二角ハ A, B, C ノ中ノ何レトスルモ殘リノ一ツハ

$$A+B+C=180°$$

カラ求メラレル。



次ニ正弦法則ニヨリ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

例 $a=34.9$*, $B=98°43'$, $C=31°19'$ ナル三角形ヲ解ケ。

解 $A=180°-(B+C)=49°58'$

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

$$\log\sin A=\bar{1}.8841$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log a= & 1.5428 & \log a= & 1.5428\\
\log\sin B= & \bar{1}.9949 & \log\sin C= & \bar{1}.7158\\
-\log\sin A= & 0.1159 & -\log\sin A= & 0.1159\\
\hline
\log b= & 1.6536 & \log c= & 1.3745\\
b= & 45.04 & c= & 23.69
\end{array}$$

(答)　**$A=49°58'$, $b=45.0$, $c=23.7$**

注意 上ノ對數計算ニヨツテ得タ結果ハ勿論近似値デアル。

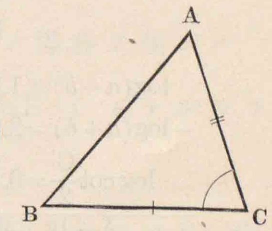
* 長サノ單位ヲ略スル。以下同様

問 次ノ原素ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$A=73°8',\quad C=55°29',\quad b=484$$

77. 二邊トソノ夾角トヲ知ル場合

a, b 及ビ C ヲ與ヘラレタ二邊トソノ夾角トシ,且 $a>b$ トスル。



先ヅ $A+B=180-C$ ヨリ

$$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}\qquad(1)$$

又　$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\qquad(2)$$

(1) ヨリ $\frac{A+B}{2}$, (2) ヨリ $\frac{A-B}{2}$ ヲ得ルカラ,之ヲ加減シテ A, B ヲ得ル。次ニ

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

ニヨツテ c ヲ得ル。(179頁問 2 [2])

注意 A, B ヲ得タ上ハ正弦法則ニヨツテ c ヲ求メルコトガ出來ルガ,上ノ公式ニヨレバ $\log a$ 又ハ $\log b$ ヲ求メル必要ガナイカラ便利デアル。

例 $a=48.78$, $b=31.01$, $C=68°34'$ ナル三角形ヲ解ケ。

解 $$\frac{C}{2}=34°17'$$

$$\frac{A+B}{2}=90^\circ-34^\circ17'=55^\circ43'$$

$$a-b=17.77,\qquad a+b=79.79$$

$$\log\tan\frac{A-B}{2}=\log(a-b)-\log(a+b)+\log\cot\frac{C}{2}$$

$$\log c=\log(a+b)+\log\sin\frac{C}{2}-\log\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\log(a+b)=1.9020$$

$$\begin{aligned}
\log(a-b)&=1.2497\\
-\log(a+b)&=\bar{2}.0980\\
\log\cot\frac{C}{2}&=0.1664\\
\hline
\log\tan\frac{A-B}{2}&=\bar{1}.5141\\
\frac{A-B}{2}&=18^\circ5'\\
\therefore\quad A&=73^\circ48'\\
B&=37^\circ38'
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\log\cos\frac{A-B}{2}&=\bar{1}.9780\\
\hline
\log(a+b)&=1.9020\\
\log\sin\frac{C}{2}&=\bar{1}.7507\\
-\log\cos\frac{A-B}{2}&=0.0220\\
\hline
\log c&=1.6747\\
\therefore\quad c&=47.28
\end{aligned}$$

(答)　**A = 73°48′, B = 37°38′, c = 47.28**

問　次ノ原素ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$a=276,\qquad b=200,\qquad C=57^\circ35'$$

78. 二邊トソノ一對角トヲ知ル場合

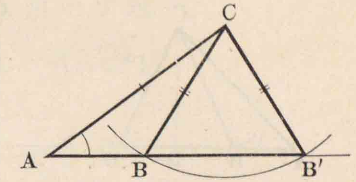
a, b, A ヲ與ヘラレタモノトスレバ先ヅ正弦法則ニヨリ

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

之ヨリ B ヲ求メ,從ツテ

$$C=180^\circ-(A+B)$$

ヲ得ル。次ニ再ビ正弦法則ヲ用ヒテ



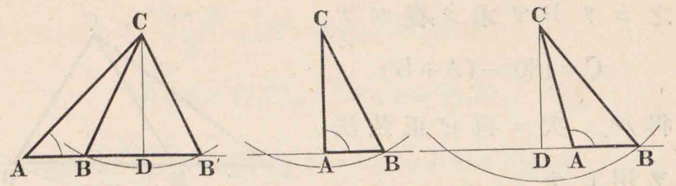
$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

吟味　a, b, A ノ値ニヨリ種々ノ場合ヲ生ズル。

[1]　$\dfrac{b\sin A}{a}>1$ ナルトキハ $\sin B>1$ トナルカラ解ガナイ。

[2]　$\dfrac{b\sin A}{a}=1$ ナルトキハ $\sin B=1$, 從ツテ $B=90^\circ$。故ニコノ場合ニハ $A\geqq 90^\circ$ ナルトキハ $C\leqq 0^\circ$ ニナルカラ不可能デ $A<90^\circ$ ナラバ唯一ツノ解ガアル。

[3]　$\dfrac{b\sin A}{a}<1$ ナルトキハ $\sin B<1$ トナリ B ノ値ハ二ツアル。一ツハ鋭角,一ツハ鈍角デアル。然シ $a\geqq b$ ナラバ $A\geqq B$ デアルカラ B ハ鋭角デナケレバナラヌ。卽チ解ハ唯一ツデアル。若シ $a<b$ ナラバ B ヲ鋭角トシテモ,鈍角トシテモ,之ニ應ジテ C ノ二ツノ値ヲ得ル。卽チコノ場合ニハ二ツノ解ガアル。(之ヲ**兩意ノ場合**トイフ)。



注意　$b \sin A$ ハCカラABヘノ垂線CDノ長サデアル。

例　$a=286.9,\ b=402.8,\ A=38°20'$ ナル三角形ヲ解ケ。

解　$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

$$\log a=2.4578$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log b= & 2.6051 & & \\
\log\sin A= & \overline{1}.7926 & & \\
-\log a= & \overline{3}.5422 & & \\
\hline
\log\sin B= & \overline{1}.9399 & & \\
\therefore\quad B= & 60°33' & B'= & 119°27' \\
A+B= & 98°53' & A+B'= & 157°47' \\
C= & 81°\ 7' & C'= & 22°13' \\
\log a= & 2.4578 & \log a= & 2.4578 \\
\log\sin C= & \overline{1}.9947 & \log\sin C'= & \overline{1}.5776 \\
-\log\sin A= & 0.2074 & -\log\sin A= & 0.2074 \\
\hline
\log c= & 2.6599 & \log c'= & 2.2428 \\
\therefore\quad c= & 457.0 & c'= & 174.9
\end{array}$$

(答)　**$B=60°33'$, $C=81°7'$, $c=457$** 又ハ
$B'=119°27'$, $C'=22°13'$, $c=174.9$

問　次ノ原素ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$a=395,\quad b=449,\quad A=42°17'$$

79. 三邊ヲ知ル場合

コノ場合ニハ半角ノ正切ヲ與ヘル公式

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ニヨツテ三ツノ角ヲ求メルコトガ出來ル。

實際ノ計算デハ先ヅ

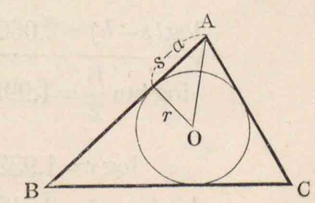
$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

ヲ計算シテ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$$



トスルノガ便利デアル。　r ハ内接圓ノ半徑デアル。

例　$a=279.5,\ b=411.9,\ c=306.6$ ナル三角形ヲ解ケ。

解 $\log r=\dfrac{1}{2}\left\{\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)-\log s\right\}$

$$\log\tan\frac{A}{2}=\log r-\log(s-a)$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\log r-\log(s-b)$$

$$\log\tan\frac{C}{2}=\log r-\log(s-c)$$

$s=499$	$\log s=2.6981$
$s-a=219.5$	$\log(s-a)=2.3414$
$s-b=87.1$	$\log(s-b)=1.9400$
$s-c=192.4$	$\log(s-c)=2.2842$
	$-\log s=\bar{3}.3019$
	$2\log r=3.8675$

$\therefore\ \log r=1.9338$
$-\log(s-a)=\bar{3}.6586$
$\log\tan\dfrac{A}{2}=\bar{1}.5924 \qquad \therefore\ \dfrac{A}{2}=21°22'$

$\log r=1.9338$
$-\log(s-b)=\bar{2}.0600$
$\log\tan\dfrac{B}{2}=\bar{1}.9938 \qquad \therefore\ \dfrac{B}{2}=44°36'$

$\log r=1.9338$
$-\log(s-c)=\bar{3}.7158$
$\log\tan\dfrac{C}{2}=\bar{1}.6496 \qquad \therefore\ \dfrac{C}{2}=24°\ 3'$

(答) **A = 42°44′, B = 89°12′, C = 48°6′**

注意 コノ例ノヤウニA, B, Cヲ別々ニ求メタ場合ニハソノ和ガ180°ニ等シイカ否カヲ驗セ。但シソノ和ニ1分内外ノ誤差ヲ生ズルコトガアルガ,之ハ四桁ノ對數表ヲ用ヒル場合已ムヲ得ナイノデアル。

問 次ノ原素ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

$$a=983.8,\quad b=700.4,\quad c=881.6$$

問 題 (36)

次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。(1—5)

1.	A=38°45′	B=105°19′	b=111.2
2.	a=270	c=500	B=102°18′
3.	b=920	c=128	B=29°34′
4.	a=858	b=972	A=54°42′
5.	a=624	b=489	c=878

第5章　測量ノ問題

80. 測量ノ術語

距離ヤ高サ等ヲ測量スルニハ先ヅ適當ナ場所ニ適當ナ線分ヲ定メテ,ソノ長サヲ直接ニ精密ニ測リ置キ,之ヲ一邊トスル或三角形ヲ解クノデアル。

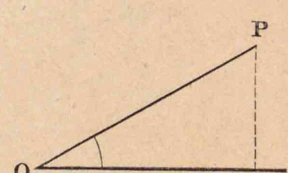
カヤウニ直接ニ測ツテ置ク線分ハ測量ノ基礎トナルカラ之ヲ**基線**ト稱ヘル。

地面上ノ二點間ノ距離ヲ直接ニ測ルニハ測鎖又ハ巻尺ヲ用ヒル。

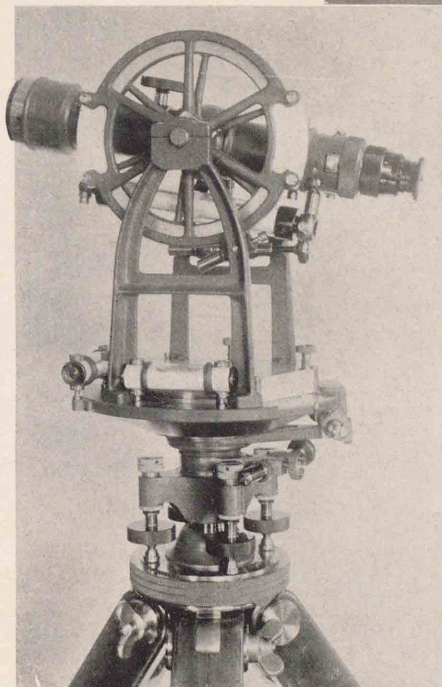
重錘ヲ絲デ吊ストキ絲ノトル方向ヲ**鉛直線**トイヒ,鉛直線ヲ含ム平面ヲ**鉛直面**トイフ。

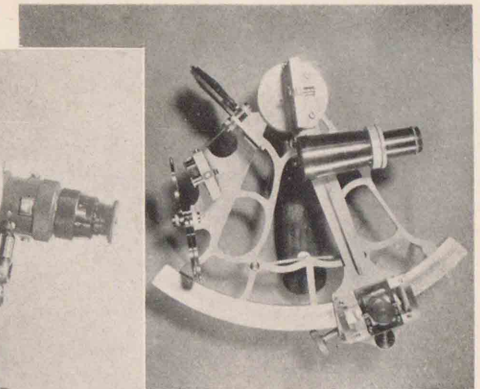
鉛直線ニ垂直ナ平面ヲ**水平面**トイヒ,水平面上ノ直線ヲ**水平線**トイフ。又二ツノ水平線ノナス角ヲ**水平角**トイフ。

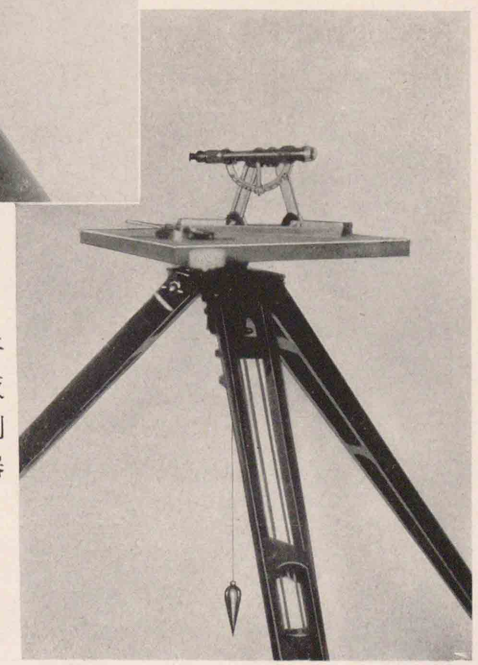
水平線ヲ決定スルニハ水準器ヲ用ヒル。



觀測點OカラN他ノ一點Pヲ見ルトキ,半直線 OP ガOヲ通ル水平面トナス角ヲ,Pガ水平面ノ上方ニアルトキハ**仰角**又ハ**高度**トイヒ,Pガ水平面ノ下方ニアルト

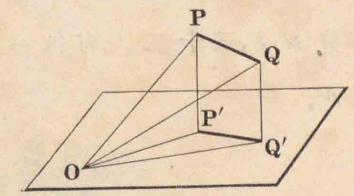

經緯儀


六分儀


平板測器

キハ**俯角**又ハ**深度**トイフ。

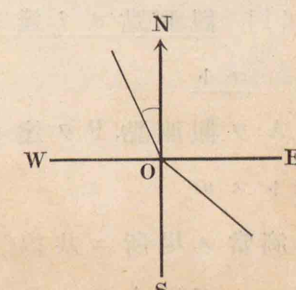
仰角・俯角又ハ水平角ヲ測ルニハ**經緯儀**(とらんしっと)ヲ用ヒル。



觀測點Oト他ノ二點P, Qトヲ連結スル二直線ノナス角ヲ二點P, Qノ**視角**トイフ。Oヲ通ル水平面上ニ於ケルP, Qノ正射影ヲP′, Q′トスルトキP′Q′ヲP, Qノ**水平距離**トイヒ, ∠P′OQ′ヲP, Qノ**水平角**トイフコトガアル。

觀測點Oヨリ一ツノ物體Mヲ視ルトキ丁度Mヲ夾ムヤウニOカラ引イタ二直線ノナス角ヲMノ視角トイフ。

水平面ヤ鉛直面ノ上ニナイ視角ヲ測ルニハ**六分儀**(せくすたんと)ヲ用ヒル。

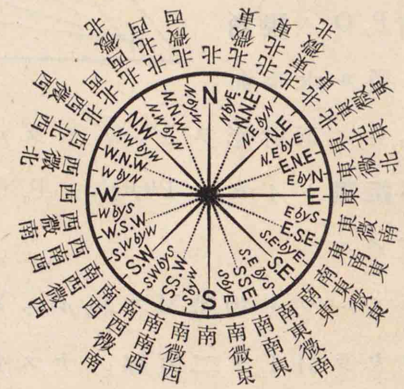


水平面内ニ於テ一點カラ視ル他ノ點ノ方向ヲ**方位**トイフ。

通例,陸地測量ニ於テ方位ヲ言ヒ表ハスニハ,北又ハ南ヲ基準トシ,ソレヨリ東又ハ西ニ偏スル角度ヲ以テスル。例ヘバ北 25°30′ 西 (N 25°30′ W)

トイヘバ北カラ 25°30′ ダケ西ニ偏スル方向ノコトデアル。

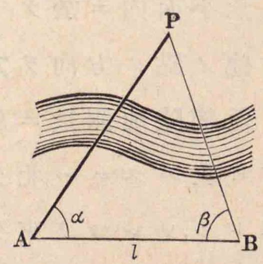
航海用羅針盤デハ北東南西ノ四方位間ヲ更ニ八等分シテ,三十二ノ方位ニ次ノ圖ノヤウナ名稱ヲツケル。



81. 距離ノ測定

[1] 觀測點ヨリ達シ得ナイ點マデノ距離ヲ測ルコト

Aヲ觀測點,Pヲ達シ得ナイ點トスル。



適當ノ場所ニ基線 AB ヲ定メ,ソノ兩端A及ビBヨリPヲ望ミ得ルヤウニスル。

$$AB=l,\quad \angle BAP=\alpha \quad 及ビ \quad \angle ABP=\beta$$

ヲ測ルトキハ $\triangle PAB$ ニ於テ二角トソノ頂點間ノ邊トガ分ツテキルカラ,之ヲ解イテ AP ノ長サ x ヲ求メルコトガ出來ル。卽チ

$$\angle P=180^\circ-(\alpha+\beta)$$

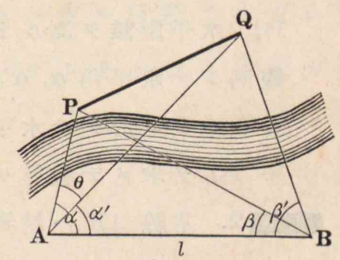
$$\frac{x}{\sin\beta}=\frac{l}{\sin P}=\frac{l}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad x=\frac{l\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

[2] 達シ得ナイ二點間ノ距離ヲ測ルコト。

P, Q ヲ達シ得ナイ二點トスル。P, Q ヲ望ミ得ル適當ノ場所ニ基線 AB ヲ定メ,

$$AB=l$$
$$\angle PAQ=\theta$$
$$\angle BAP=\alpha$$
$$\angle BAQ=\alpha'$$
$$\angle ABP=\beta$$
$$\angle ABQ=\beta'$$



ヲ測ルトキハ

$\triangle ABP$ ヨリ　$AP=\dfrac{l\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\triangle ABQ$ ヨリ　$AQ=\dfrac{l\sin\beta'}{\sin(\alpha'+\beta')}$

ヲ得ル。依ツテ $\triangle$PAQ ニ於テ二邊 AP, AQ 及ビソノ夾角 θ ガ既知デアルカラ PQ ノ長サヲ求メ得ル。

即チ $\quad AQ=a, \quad AP=b, \quad PQ=x$

ト置ケバ

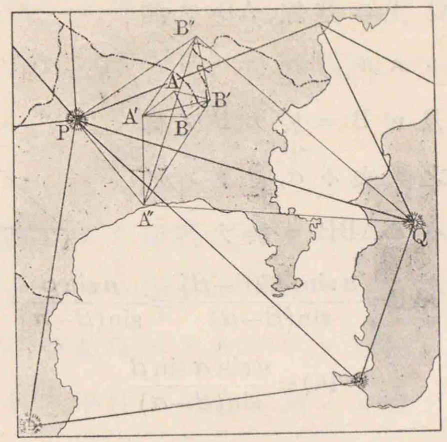
$$\tan\frac{\angle APQ-\angle AQP}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\theta}{2}$$

$$x=\frac{(a+b)\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\angle APQ-\angle AQP}{2}}$$

注意 1. 上記ノ方法ハ A, B, P, Q ガ同一平面上ニナイトキニモ適用シ得ルノデアルガ, A, B, P, Q ガ同一平面上ニアルトキハ $\theta=\alpha-\alpha'$ デアル。實際測量ニ於テ PQ ノ水平距離ヲ測ルトキニハ, A カラ B, P, Q ノ方位ヲ觀測シテ水平角 α, α', θ ヲ求メルノデアル。コノ場合ニハ B ニ於テモ水平角 PBQ ヲ求メテ $\triangle$PBQ カラモ PQ ヲ求メテ驗算ヲスルガヨイ。

注意 2. 基線 AB ハ精密ニ測リ易イ場所ニ選ブコトヲ要スル。若シ A, B カラ P 又ハ Q ガ望ミ得ナイトキニハ,次ノ圖ニ示スヤウニ,先ヅ AB ヲ基線トシテ A′B′ ヲ求メ,次ニ A′B′ ヲ基線トシテ A″B″ ヲ求メテ遂ニ PQ ヲ求メルノデアル。

陸地測量(三角測量)ハコノ理ニ基ヅクモノデ,各地方ニ適當ナ基線ヲ設ケテ非常ニ精密ナ方法ニヨツテソ



ノ長サヲ測リ,上記ノ方法ニヨツテ次第ニ多數ノ三角形ヲ測定シテ,カヤウナ三角網デソノ地方ノ全部ヲ被ウテ各地ノ位置ヲ決定スルノデアル。

問 南北ニ通ズル道路カラ或ル目標ヲ北東ニ望ンデカラ北へ 2km 進ンダトキニ,ソノ目標ガ東南東ニ見エタトイフ。ソノ目標カラ道路マデノ距離ヲ求メヨ。

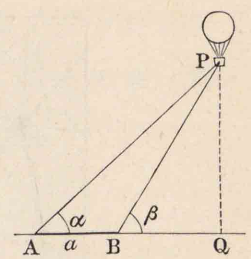
82. 高サノ測定

例ヘバ山ノ高サノヤウニ,直立體 PQ ノ基點 Q ニ達シ得ナイトキ, P カラ觀測點 A ヲ通ル水平面ニ至ル鉛直線 PQ ノ長サヲ求メルコト。

[1] 直線 AQ 上ニ基線ヲトリ得ル場合。

先ヅ AQ 上ニ基線 AB ヲ測リ,之ヲ a トスル。

次ニ A 及ビ B ニ於テ P ノ仰角ヲ測リ,之ヲ夫々 α, β トスル。



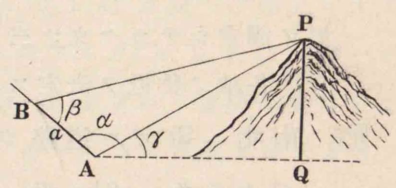
然ルトキハ △ABP ニ於テ

$$AP=\frac{a\sin(180°-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

従ツテ　$$PQ=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

[2]　直線 AQ 上ニ基線ヲトリ得ナイ場合。

先ヅ適當ナ基線 AB ヲ測リ,之ヲ a トシ,次ニ



$$\angle PAB=\alpha$$

$$\angle PBA=\beta,\qquad \angle PAQ=\gamma$$

ヲ測ル。然ルトキハ △PAB カラ

$$AP=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\quad 従ツテ\quad PQ=\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$$

注意 實際ニ於テハ A ハ觀測者ノ眼ノ位置デアルカラ,上ノ圖ニ於テ PQ ニ眼ノ高サヲ加ヘタモノガ眞ノ高サデアル。然シ本書デハ特ニ斷ラナイ限リ眼ノ高サハ計算ニ入レナイモノトスル。

問 五重ノ塔ガアル。ソノ基底カラ水平ニ

156.8 m 距ツタ地點デ塔頂ヲ望ミ,仰角 12°32′ ヲ得タトスレバ,塔ノ高サハ何程カ。

問題 (37)

1. 平地ニ直立シタ甲乙二ツノ柱ガアツテ,ソノ高サハ甲ハ a m, 乙ハ $3a$ m デアル。コノ平地上兩柱ノ基底カラ等距離ニアル一ツノ地點ニ於テ乙柱ヲ見込ム角ハ甲柱ヲ見込ム角ノ 2 倍デアルトイフ。コノ地點ノ各柱ヨリノ距離ヲ求メヨ。

2. 隣家ノ庭ニアル松ノ上端ヲ,地上 1 m ノ點カラ測ツテ仰角 52°30′ ヲ得タ。次ニコノ點ト同一鉛直線上ニアル地上 5 m ノ階上カラ測ツテ仰角 7°30′ ヲ得タ。松ノ高サヲ求メヨ。

3. 水平面ト 20° ノ傾斜ヲシテヰル長サ 60 m ノ坂路ガアル。今傾斜ヲ減ジテ 15°30′ トスレバ坂路ノ長サハ何程ニナルカ。

4. 兩岸ガ平行ナ川ガアル。ソノ一方ノ岸ニアル二點 A, B 間ノ距離ガ 213 m デ,コノ二地點カラ對岸ノ點 C ニアル樹ヲ觀測シテ $\angle ABC=71°24'$, $\angle BAC=48°36'$ ナルコトガ分ツタ。川ノ幅ハ幾 m カ。

5. 高サ 20 m ノ塔ノ頂上カラ,塔ノ基礎ト同一水平面上ニアッテ,ソノ正北ニ當ル二箇ノ目標 A, B ノ俯角ヲ測ッテ夫々 30°, 21°40′ ヲ得タ。 A, B 間ノ距離ハ何程カ。

6. 海上ノ一點ニ於テ絶壁ノ頂上ニ直立スル長サ 10 m ノ旗竿ノ上端及ビ下端ノ仰角ヲ測ッテ夫々 42°10′ 及ビ 37°50′ ヲ得タ。 海面上絶壁ノ高サヲ求メヨ。

7. 正南ニ向ッテ進航スル船カラ南西ノ方向ニ重ナッテ見エタ二ツノ燈臺ガ25海里進ンダ後ニハ一ツハ正西ニ,一ツハ西北西ニ見エタトイフ。 燈臺ノ間ノ距離ヲ求メヨ。

8. 海濱ニ聳エル山ノ高サ CD ヲ測ルタメニ 365 m 相隔タル二船 A, B カラ

$\angle BAC=67°16'$, $\angle ABC=54°20'$, 仰角 $CAD=35°30'$

ヲ測ッタ。 之ヨリ山ノ高サヲ求メヨ。

9. 北西カラ南東ニ向ッテ長サ 100 m ノ塀ガアッテ,ソノ高サガ 2 m デアル。 太陽ノ方向ガ南 15° 西デ高度ガ 60° ナルトキ,コノ塀ノ影ノ面積ハ何程カ。

10. A, B, C ハ同一水平面上ノ三地點デ, B ハ A ノ正西, C ハ A ノ正南ニアル。 A カラ北東ノ或ル目標ノ仰角ガ 60° デ, B, C カラハソレゾレ 45°, 30° デアル。 AB ノ距離ガ 100 m ナラバ AC ノ距離ハ何程カ。

11. 1000 m 距ッタ二地點 A, B カラ氣球 C ヲ觀測スルト $\angle BAC=90°$, $\angle ABC=75°$, 又 AC ガ A ヲ通ル鉛直線トナス角ハ 60° デアル。 氣球ノ地面ヨリノ高サ幾 m カ。

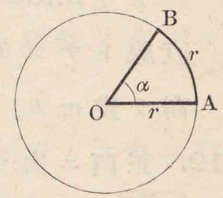
12. 正西ニ向ッテ v のっとノ速サデ進行スル敵艦ヲ西南 a 海里ノ距離ニ於テ發見シタ我ガ艦ガ nv のっとノ速サデ一直線ニ追ヒツクニハ針路ヲドウ取ッタラヨイカ。 又追ヒツクマデノ時間ハ何程カ。 但シ $a=10$, $v=15$, $n=\sqrt{2}$ トシテ計算セヨ。

附　録

弧度法ト三角方程式ノ解法

1. 弧度法

半徑 r ナル圓 O ニ於テ半徑ト等長ナル弧 AB ニ對スル中心角ヲ α トスル。



然ルトキハ全圓周ニ對スル中心角ハ 360° デ,中心角ハソノ弧ニ比例スルカラ

$$\alpha:360^\circ=r:2\pi r$$

$$\therefore\quad \alpha=360^\circ\times\frac{r}{2\pi r}=\frac{180^\circ}{\pi}$$

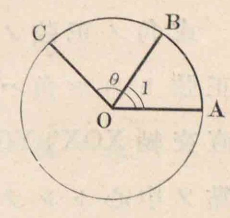
$$=57^\circ.2957\cdots\cdots=57^\circ17'44''$$

デ,コノ角ノ大サハ半徑 r ノ如何ニ拘ハラズ一定デアル。

コノ一定ノ角ヲ radian ト名ヅケ,之ヲ單位トシテ角ヲ測ルコトガアル。コノ場合ノ角ノ値ヲ**弧度**トイヒ,コノ方法ヲ**弧度法**トイフ。

定理　**角ノ弧度ハソノ角ノ頂點ヲ中心トスル任意ノ圓ニ於テ,ソノ角ニ對スル弧ト半徑トノ長サノ比ニ等シイ。**

證明　$\angle$AOC ノ弧度ヲ θ トスル。今頂點 O ヲ中心トシ任意ノ半徑 r ヲ以テ圓ヲ畫キ,角ノ兩邊ト A 及ビ C ニ於テ交ハラシメ,弧 AC ノ長サヲ l トシ,$\widehat{\mathrm{AB}}$ ヲ r ニ等シクトレバ



$$\theta=\frac{\angle\mathrm{AOC}}{\angle\mathrm{AOB}}=\frac{弧\mathrm{AC}}{弧\mathrm{AB}}=\frac{l}{r}$$

故ニ $\angle$AOC ノ弧度ハ l ト半徑トノ比ニ等シイ。

注意　radian ヲ表ハス一定ノ記號ハナイ。又弧度法デハ單位ノ名稱 radian ヲ略スル。

主ナル角ノ度數ト弧度トヲ對照スレバ

度數	360°	180°	90°	60°	45°	30°	1°	0°
弧度	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{180}$	0

問 **1.**　次ノ角ヲ弧度法デ表ハセ。

15°,　48°,　22°30′,　270°

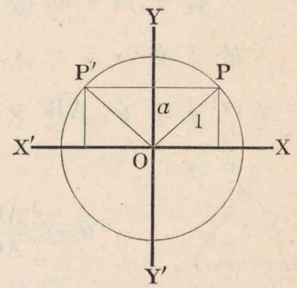
問 **2.**　次ノ弧度ヲ有スル角ヲ六十分法デ表ハセ。

$\frac{\pi}{10}$,　$\frac{4\pi}{5}$,　0.75π

問 **3.**　經度ノ差ガ 1° ナル赤道上ノ二點間ノ距離ヲ 111 km トスレバ地球ノ半徑ハ約幾 km カ。

2. $\sin x = a$ $(-1 \leqq a \leqq 1)$ ノ一般解

或角ノ正弦ノ値ハ唯一ツデアルガ,逆ニ同ジ値ヲ正弦トスル角ハ無數ニアル。



直交軸 XOX′, YOY′ ヲトリ,原點ヲ中心トシテ,半徑1ナル圓ヲ畫キ,y 軸上ノ點 $(0, a)$ ヲ通リ,x 軸ニ平行ナ直線ヲ引キ,圓周トノ交點ヲ P, P′ トスル。

然ルトキ OX ヲ角ノ首線トスレバ,a ヲ正弦トスル角ノ廻轉線ノ位置ハ OP 及ビ OP′ ノ二ツデ,ソノ他ニハナイ。

今 OP ヲ廻轉線トスル一ツノ角ヲ α トスレバ,$\pi-\alpha$ ハ OP′ ヲ廻轉線トスル一ツノ角デアル。

故ニ $\sin x = a$

ニ適スル總テノ角ハ α 及ビ $\pi-\alpha$ ニ夫々 360° 卽チ 2π ノ整數倍ヲ加ヘタモノデアル。卽チ

$$\left.\begin{array}{l} x = 2n\pi+\alpha \\ \text{及ビ}\quad x=(2n+1)\pi-\alpha \end{array}\right\}$$

但シ n ハ 0 又ハ任意ノ整數 $(\pm1, \pm2, \cdots)$ ヲ表ハス。

注意 $2n$ ハ偶數, $2n+1$ ハ奇數ヲ表ハスカラ前ノ解ヲ一ツニ纏メテ

$$x = n\pi + (-1)^n\alpha$$

ト書キ表ハスコトガ出來ル。

問 次ノ各式ニ適スル x ノ一般ノ値ヲ求メヨ。

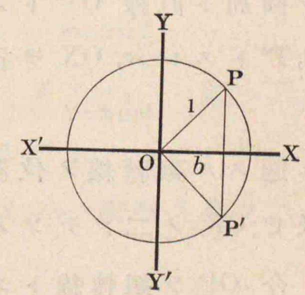
[1] $\sin x = 1$ [2] $\sin x = \dfrac{1}{2}$

[3] $\sin x = 0$

3. $\cos x = b$ $(-1 \leqq b \leqq 1)$ ノ一般解

前節ト同様ニ直交軸 XOX′, YOY′ ヲトリ, OX ヲ角ノ首線トシ,中心ガ O,半徑ガ1ナル圓周ヲ畫ク。

次ニ x 軸上ノ點 $(b, 0)$ ヲ通リ y 軸ニ平行ナ直線ヲ引キ,圓周トノ交點ヲ P, P′ トスレバ



$$\cos x = b$$

ニ適スル角ノ廻轉線ノ位置ハ OP 及ビ OP′ ノ二ツデソノ他ニハナイ。

而シテ OP ヲ廻轉線トスル一ツノ角ヲ α トスレバ $-\alpha$ ハ OP′ ヲ廻轉線トスル一ツノ角デアル。

故ニ $\cos x = b$ ニ適スル總テノ角ハ $\pm\alpha$ ニ 2π ノ任

意ノ整數倍ヲ加ヘタモノデアル。即チ

$$x=2n\pi\pm\alpha$$

但シ n ハ 0 又ハ任意ノ整數デアル。

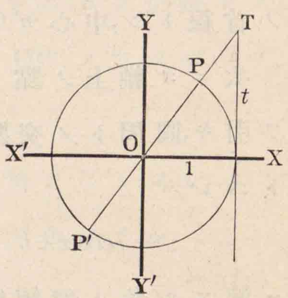
問 次ノ各式ニ適スル x ノ一般ノ値ヲ求メヨ。

[1] $\cos 3x=0$　　[2] $\cos^2 x=1$

[3] $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　[4] $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

4. $\tan x=t$ $(-\infty<t<+\infty)$ ノ一般解

直交軸 XOX′, YOY′ ニ關シ坐標ガ $(1, t)$ ナル點ヲ T トスル。



原點 O ヲ中心トシ,半徑 1 ナル圓周ト直線 OT トノ交點ヲ P, P′ トスレバ, OX ヲ首線トシ,

$$\tan x=t$$

ニ適スル廻轉線ノ位置ハ OP 及ビ OP′ ノ二ツデソノ他ニハナイ。

今 OP ヲ廻轉線トスル一ツノ角ヲ α トスレバ, $\pi+\alpha$ ハ OP′ ヲ廻轉線トスル一ツノ角デアルカラ $\tan x=t$ ノ一般ノ解ハ

$$x=2n\pi+\alpha$$

及ビ　$x=(2n+1)\pi+\alpha$

デアル。之ヲ一ツニ纏メルト

$$x=n\pi+\alpha$$

但シ n ハ 0 又ハ任意ノ整數デアル。

問 次ノ各式ニ適スル x ノ一般ノ値ヲ求メヨ。

[1] $\tan x=1$　　[2] $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[3] $\tan x=-\sqrt{3}$

5. 三角方程式ノ解法

未知角ノ三角函數ヲ含ム方程式ヲ**三角方程式**トイフ。

前數節デ取扱ツタ

$$\sin x=a,\qquad \cos x=b,\qquad \tan x=t$$

ハ三角方程式ノ基本的ノモノデアル。一般ニ三角方程式ヲ解クニハ適當ノ方法デ上ノ三ツノ何レカノ形ノ方程式ヲ導キ出シテソノ一般解ヲ求メルノデアル。

例 1. $6\cos^2x-5\sin x=2$ ヲ解ケ。

解 $\cos^2x$ ニ $1-\sin^2x$ ヲ代入シテ整頓スレバ

$$6\sin^2x+5\sin x-4=0$$

故ニ　$\sin x=\dfrac{-5\pm\sqrt{121}}{12}$

卽チ　$\sin x=\dfrac{1}{2}$　(1)

又ハ　$\sin x=-\dfrac{4}{3}$　(2)

(1)ノ一ツノ解ハ $x=\dfrac{\pi}{6}$ デアルカラ

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{6}\quad 又ハ\quad (2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}$$

卽チ　$\boldsymbol{x=\dfrac{(12n+1)\pi}{6}}$　又ハ　$\boldsymbol{\dfrac{(12n+5)\pi}{6}}$　(答)

(2)ハ不可能デアル。

例 2. $\cos\theta+\cos 3\theta=\sqrt{2}\cos 2\theta$ ヲ解ケ。

解　左邊ヲ積ノ形ニ變化スレバ

$$2\cos 2\theta\cos\theta=\sqrt{2}\cos 2\theta$$

故ニ　$\cos 2\theta=0$　(1)

又ハ　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2)

(1) カラ　$2\theta=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

從ツテ　$\theta=(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$

(2) カラ　$\theta=2n'\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$

卽チ　$\theta=(8n'\pm1)\dfrac{\pi}{4}$

然ルニ $8n'\pm1$ ハ奇數デ $2n+1$ ノ中ニ含マレテキルカラ,解ハ

$$\boldsymbol{\theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}}\qquad(答)$$

デアル。

注意 (1)ヲ解クニハ 2θ ヲ未知角ト見做シテ $\cos x=b$ ノ一般解ヲ適用セネバナラヌ。若シ(1)ノ一ツノ解ガ $\dfrac{\pi}{4}$ デアルコトカラ $\theta=n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$ トスレバ一般解ガ得ラレヌ。

例 3. $\tan 3x=\cot x$ ヲ解ケ。

解　コノ方程式ヲ次ノヤウニ書クコトガ出來ル。

$$\tan 3x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\therefore\quad 3x=n\pi+\frac{\pi}{2}-x$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=(2n+1)\frac{\pi}{8}.}\qquad(答)$$

例 4. 次ノ方程式カラ $0°<x<180°$ ナル角 x ヲ求メヨ。

$$\sin x+\sin 2x=\sin 3x$$

解　兩邊ヲ變形シテ

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

故ニ　$\sin\dfrac{3x}{2}=0$　(1)

又ハ $\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{3x}{2}$

卽チ $\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0$

卽チ $2\sin x\sin\frac{x}{2}=0$

故ニ $\sin x=0$ (2)

又ハ $\sin\frac{x}{2}=0$ (3)

サテ $0^\circ<x<180^\circ$, 從ツテ $0^\circ<\frac{3x}{2}<270^\circ$

故ニ(1)カラ $\frac{3x}{2}=180^\circ$

卽チ $x=120^\circ$

又 $0<x<180^\circ$, 從ツテ $0<\frac{x}{2}<90^\circ$

故ニ(2)(3)ニハ解ガナイ。

(答) $x=120^\circ$

問　題

1. $n\pi+(-1)^n\alpha$ ニ於テ $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ナル場合ト $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ ナル場合トデ,式ノ表ハス内容ハ全ク同ジモノデアルコトヲ示セ。

2. $(4n\pm1)\frac{\pi}{4}$ ト $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ トハ同一ノ内容ヲモツコトヲ示セ。

次ノ方程式ヲ解ケ。(3—10)

3. $\sin 2x=\cos 3x$ (但シ $0\leqq x\leqq 2\pi$)

4. $\sin 3x=0$

5. $\cos 3\theta=\cos\theta$

6. $\cos x+\cos 5x=\cos 3x$

7. $2\sin^2 x=1$

8. $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$

9. $\tan x-\cot x=\operatorname{cosec} x-\sec x$

10. $\cot^2 x-\tan^2 x=2\sec x\operatorname{cosec} x$

次ノ方程式カラ $0^\circ<x<360^\circ$ ナル角ヲ求メヨ。(11—14)

11. $\sin 4x=\cos 2x$

12. $\cos 2x+\cos x=0$

13. $\tan 2x=\cot 3x$

14. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。(15—16)

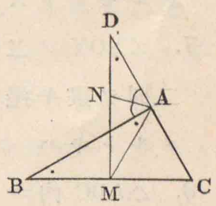
15. $x-y=\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}$

16. $\sin(x+y)=\cos(x-y)=\frac{1}{2}$ (但シ x, y ハ共ニ 180° 以下ノ正角)

補充問題

[1] 線分ノ比較

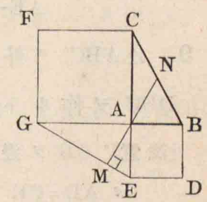
1. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle C=2\angle B$ デ且ツ A ヨリ BC ニ下シタ垂線ノ足 D ガ B ト C トノ間ニアルトキハ　$AC=BD-CD$



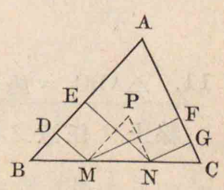
2. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ノ中點 M ヨリ BC ニ引イタ垂線ト $\angle A$ ノ外角ノ二等分線トノ交點ヲ N トスレバ

$$AM=MN$$

3. 直角三角形 ABC ノ直角ヲ夾ム二邊 AB 及ビ AC ノ上ニ右圖ノヤウニ正方形 ABDE 及ビ ACFG ヲ三角形ノ外側ニ作リ GE ヲ結ブ。今 A ヲ通リ GE ニ垂直ナ直線ヲ引ケバソノ直線ハ BC ノ中點ヲ通ル。



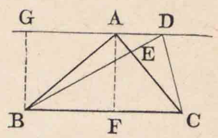
4. 正方形 ABCD ノ對角線 BD 上ニ BE ヲ BC ニ等シク取リ, E ヨリ BD ニ垂線ヲ引キ CD トノ交點ヲ F トスレバ　$DE=EF=FC$



5. $\triangle ABC$ ノ邊 BC 上ノ二點 M, N ヨリ AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 D, E トシ, AC ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 F, G

トスルトキ,若シ $MD+MF=NE+NG$ ナラバ $AB=AC$

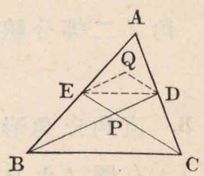
6. 直角二等邊三角形ABCノ頂點Aヨリ底邊ニ平行ナル直線ヲ引キ,ソノ上ニ $BD=BC$ ナルヤウニ一點Dヲトリ, BD, AC ノ交點ヲEトスレバ $CD=CE$ デアル。但シDハ直線 AC ニ關シテBト反對ノ側ニアルモノトスル。



7. $\angle XOY$ ノ二等分線上ニ一點Aヲトリ, OA ヲ弦トスル二圓ヲ畫キ,邊 OX トP, P′; 邊 OY トQ, Q′ ニ於テ交ハラシメルトキハ $PP'=QQ'$

8. △ABC 內ニアル一點ヲPトシ, BP, CP ノ延長ガ AC, AB ト夫々交ハル點ヲD及ビEトスレバ

$$AE+AD>PE+PD$$



9. △ABC ノ外側ニソノ一邊 BC ヲ邊トスル正三角形 DBC ヲ作ルトキハ $AD \leqq AB+AC$

[注意] AB ヲ邊トシテ △ABC ノ外側ニ正三角形 ABE ヲ作レバ $AD=CE$ 又ハ Ptolemy ノ定理ニヨル。

10. △ABC ニ於テ $AC>BC$ トシ, A, B ヨリ對邊ニ垂線 AD, BE ヲ下セバ

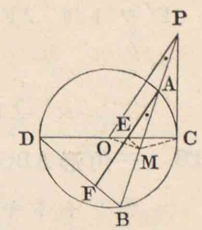
$$AC+BE>BC+AD$$

11. △ABC ニ於テ $AB>AC$ ナルトキ, PヲAカラ引イタ中線上ノ任意ノ點トスレバ

$$AB-AC>PB-PC$$

12. 圓O外ノ一點Pカラ切線 PC, 割線 PAB ヲ引キ,切點Cヲ通ル直徑ノ他端ヲDトスル。

Aヲ通リ PO ニ平行ナ直線ヲ引キ DC, DB 又ハソノ延長ト夫々E, Fデ交ハラシムレバ $AE=EF$ デアル。



13. △ABC ノ底 BC 上ニ二點P, Qガアル。Pヨリ二邊 AB, AC ニ至ル距離ノ包ム矩形トQヨリ AB, AC ニ至ル距離ノ包ム矩形ト等積ナルトキハ $BP=CQ$

[注意] 兩矩形ノ等積關係ヲ邊 BC 上ノ線分デ表ハスヤウニセヨ。

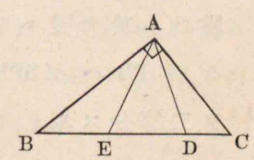
[2] 角ノ比較

14. 鋭角三角形 ABC ニ於テ $\angle A>\angle B>\angle C$ ナルトキハ $\angle A>60^\circ$, $\angle B>45^\circ$, $\angle C<60^\circ$

15. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ヲ引キ ∠ACB, ∠ADB ノ二等分線ノ交點ヲOトスレバ

$$\angle COD=\frac{1}{2}(\angle CAD+\angle CBD)$$

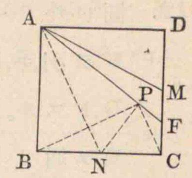
16. 直角三角形ABCノ斜邊 BC ノ上ニ點D, Eヲ $BD=AB$, $CE=AC$ ナルヤウニトルトキハ ∠CAD, ∠BAE ハ夫々 ∠ABC, ∠ACB ノ半分ニ等シイ。



17. 正方形 ABCD ニ於テ CD ノ中點ヲM, 又 CD 上ニ一點

F ヲトリ AF=BC+CF ナラシメルトキハ

$\angle BAF=2\angle MAD$



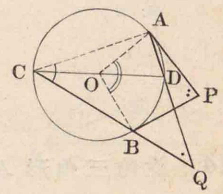
18. 三角形 ABC ニ於テ $\angle B$ ガ $\angle C$ ノ n 倍ニ等シイトキハ AC ハ AB ノ n 倍ヨリ小デアル。但シ n ハ 2 ヨリ大ナル正整數トスル。

[注意] 外接圓ヲ利用セヨ。

19. 圓ノ直徑ヲ AB トスル。二ツノ弦 AP, AQ ノ延長ガ B ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ夫々 M, N トスレバ

$\angle MPN=\angle MQN$

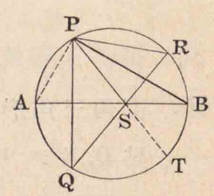
20. 圓 O ノ直徑 CD ノ兩側ニアル圓周上ノ二點 A, B ニ於ケル切線ノ交點ヲ P トシ, AD, BC ノ交點ヲ Q トスレバ $\angle APB=2\angle CQD$



21. 平行四邊形 ABCD 內ニ一點 P ヲトリ $\angle BAP=\angle BCP$ ナルヤウニスレバ $\angle ABP=\angle ADP$

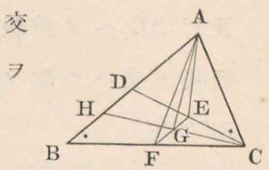
[注意] 平行四邊形 PADQ ヲ作レバ $\angle CDQ=\angle CPQ$ トナル。

22. 圓周上ノ一點 P カラソノ直徑 AB ニ垂直ナ弦 PQ ヲ引キ, Q ヨリ AB ト點 S ニ於テ交ハル任意ノ弦 QR ヲ引ケバ PB ハ $\angle SPR$ 或ハ補角ナル接角ヲ二等分スル。



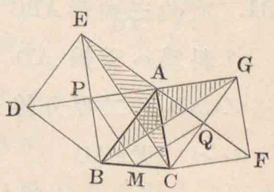
23. △ABC ノ邊 AB 上ニ點 D ヲトリ, AC ガ AD, AB ノ比例中項トナルヤウニスル。又 CD, CB ノ中點ヲ夫々 E,

F トシ, $\angle BCD$ ノ二等分線ガ EF ト交ハル點ヲ G トスレバ AG ハ $\angle EAF$ ヲ二等分スル。



[3] 垂直・平行

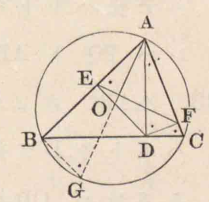
24. △ABC ノ邊 AB, AC 上ニソノ外側ニ畫イタ正方形ノ中心 P, Q ヲ BC ノ中點 M ニ結ブ線分 MP, MQ ハ相等シク且垂直デアル。



25. 四邊形ノ各邊上ニソノ形外ニ正方形ヲ畫クトキハ,相對スルモノノ中心ヲ結ブ二線分ハ等シク且垂直デアル。

26. △ABC ノ頂點 A ヨリ對邊ヘ引イタ垂線ノ足 D ヨリ AB, AC ヘ引イタ垂線ヲ DE, DF トシ,外心ヲ O トスレバ

$AO\perp EF$

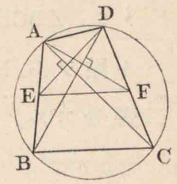


27. 圓ニ內接スル四邊形ガ又一ツノ圓ニ外接スルトキハ,相對スル邊ノ切點ヲ結ブ直線ハ直交スル。

28. △ABC ノ角 A ノ二等分線ガ對邊ト D デ交ハルトキ, A ニ於テ外接圓ニ切スル直線ト C ヲ通リ AD ニ平行ニ引イタ直線トノ交點ヲ E トスレバ $ED\parallel AB$

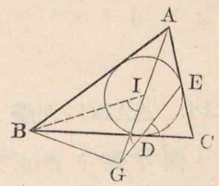
[注意] $\angle EAD=\angle CDA$ トナル。

29. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ頂點 A 及ビ D ヨリ BD



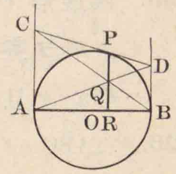
及ビ AC ヘノ垂線ガ DC, AB 又ハソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 F, E トスレバ EF ∥ BC

30. △ABC ノ內心ヲ I, 內接圓ガ BC, AC ト切スル點ヲ D, E トシ, ED ガ AI ト交ハル點ヲ G トスレバ AG⊥BG



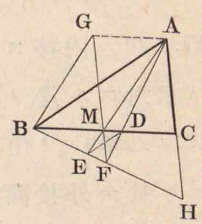
31. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊ヘ垂線 AD ヲ下シ ∠B 及ビ ∠CAD ノ二等分線ガ AD, DC ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ EF ∥ AC

32. 圓ノ直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ガ圓周上任意ノ點 P ニ於ケル切線ト C, D ニテ交ハルトキ AD, BC ノ交點ヲ Q トスレバ PQ ト AB トハ直交スル。



33. △ABC ノ ∠A ノ二等分線ガ外接圓ノ弧 BC ト D デ交ハルトキ, D ヲ通リ A ニ於テ AB ニ切スル圓ノ中心ヲ O トスレバ OD⊥AC

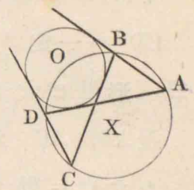
34. △ABC ノ中線ヲ AM, ∠A ノ二等分線ヲ AD トスル。B カラ AD ニ下シタ垂線ガ AM ト交ハル點ヲ E トスレバ DE ∥ AB



[注意] BE ト AD トノ交點ヲ F トスレバ MF ∥ AC, 故ニ MF ハ AB ノ中點ヲ通ル。▱AMBG ヲ作レ。

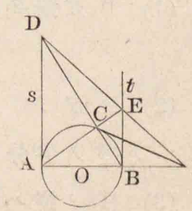
[4] 相切

35. 圓 O 外ノ一點 A ト中心 O トヲ通ル任意ノ圓 X ヲ作ル。A ヨリ圓 O ニ切線 AB ヲ引キ圓 X トノ交點ヲ B トスル。B ヨリ圓 O ニ AB デナイ切線ヲ引キ圓 X トノ交點ヲ C トスル。次ニ C ヨリ圓 O ニ BC デナイ切線ヲ引キ圓 X トノ交點ヲ D トスル。然ラバ直線 AD ハ圓 O ニ切スル。

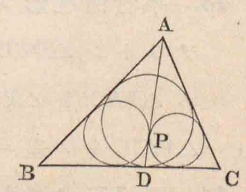


36. 圓 O ノ定直徑 AB ノ延長上ノ一點 P カラ引イタ二切線ノ切點ヲ C, D トシ, 弦 CD ト AB トノ交點ヲ Q トスル。P, Q ヲ通ル任意ノ圓ガ圓 O ト E, F デ交ハレバ OE, OF ハ第二ノ圓ニ切スル。

37. AB ハ定圓 O ノ定直徑; s, t ハソノ兩端 A, B ニ於ケルコノ圓ノ切線デアル。コノ圓周上ノ一點ヲ C トシ, 直線 AC ガ t ト交ハル點ヲ E トシ, 又直線 BC ガ s ト交ハル點ヲ D トスル。直線 DE, AB ノ交點ヲ F トスレバ直線 CF ハコノ圓ノ切線デアル。



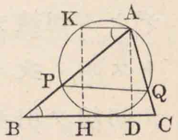
38. △ABC ノ內接圓ガ BC ト D ニ於テ切スルトキ △ABD, △ACD ノ內接圓ハ AD 上ノ一點ニ於テ互ニ外切スル。



39. 圓ニ外接スル四邊形ガソノ一ツノ對角線ニヨツテ分タレル二ツノ三角形ノ内接圓ハ互ニ外切スル。

40. A, B ヲ兩端トスル定弧上ノ任意ノ點ヲ P トシ,線分 AP, BP ヲ共ニ P ノ方ニ延長シテソノ上ニ夫々點 C, D ヲトリ, PC, PD ヲ共ニ定線分 L ニ等シイヤウニスレバ直線 CD ハ一定ノ圓ニ切スル。

41. 形及ビ大サノ定マツタ三角形ノ二邊 AB, AC ガ夫々二定點 P, Q ヲ過グルヤウニ動クトキハ第三邊 BC ハ定圓ニ切スル。



[5] 面積

42. 平行四邊形 ABCD 内ノ一點 P ヲ通リ二隣邊ニ平行ナ直線デ之ヲ四ツノ平行四邊形ニ分ケルトキ

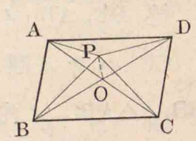
(1) P ガ對角線 AC 上ニアルトキハ

$$▱PB=▱PD$$

(2) P ガ AC 上ニナイトキハ △APC ハ ▱PB ト ▱PD トノ差ノ半分ニ等シイ。

(3) (1)ノ逆ハ眞デアル。

43. 平行四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ,△OAD 内ノ一點ヲ P トスレバ △PAC ト △PBD トノ和ハ △PBC ト △PAD トノ差ニ等シイ。



44. 四邊形ノ各對角線ノ中點ヲ通リ,夫々他ノ對角線ニ平行ナル直線ヲ引キ,ソノ交點ヲ各邊ノ中點ニ結ベバ本形ハ四等分セラレル。

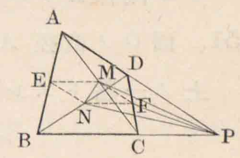
45. 四邊形ノ兩對角線ノ中點ト一組ノ對邊ノ延長ノ交點トヲ結ビテ得ル三角形ハ原形ノ四分ノ一ニ等シイ。

[注意] $\triangle FMN=\frac{1}{2}▱EMFN$

$$=\frac{1}{4}(\triangle ABC-\triangle DBC)$$

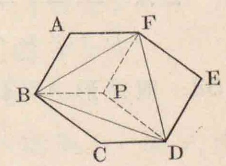
$$\triangle PFM=\frac{1}{4}\triangle ADC$$

$\triangle PFN=\frac{1}{4}\triangle DBC$　コレ等ヲ加ヘヨ。



46. 鋭角三角形 ABC ノ外接圓ノ A, B 及ビ C ヲ通ル三ツノ直徑ノ端ヲ夫々 D, E 及ビ F トスレバ,六角形 AFBDCE ノ面積ハ △ABC ノ面積ノ二倍ニ等シイ。

47. 凸六角形ニ於テ各邊ガソノ對邊ニ等シク且ツ平行ナルトキ,ソノ一ツ置キノ頂點ヲ結ビ付ケテ生ズル三角形ノ面積ハ原形ノ面積ノ半分ニ等シイ。



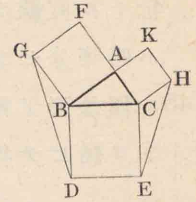
48. △ABC ニ於テ ∠B=45° ナルトキ AB ノ中點ヲ M トシ, C ヨリ AB ニ下セル垂線ノ足ヲ D トスレバ

$$AC^2=2(AM^2+DM^2)$$

49. △ABC ノ邊 BC 上ニ一點 P ヲトリ, CP=2BP ナルヤウニスレバ

$$2AB^2+AC^2=3(2BP^2+AP^2)$$

50. 直角三角形ABC=於テ∠Aヲ直角トシ各邊ノ上=圖ノヤウ=正方形ヲ作ルトキハ



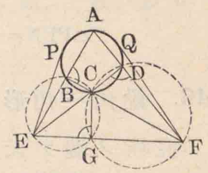
$$GD^2+EH^2=5BC^2$$

ナル關係ガアル。

51. 圓Oノ直徑AB=平行ナル弦ヲCDトシ, PヲABノ上ノ一點トスレバ

$$PC^2+PD^2=2(OC^2+OP^2)$$

52. 圓=內接スル四邊形ABCDノ相對スル邊AB, CD及ビBC, ADノ延長ノ交點ヲ夫々E, Fトシ, E, Fヨリコノ圓=切線EP, FQヲ引ケバ



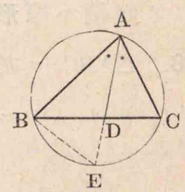
$$EP^2+FQ^2=EF^2$$

[注意] △BEC, △CDFノ外接圓ハEF上デ交ハル。ソノ交點ヲGトスレバ $EF^2=EF\cdot EG+EF\cdot FG$

53. 四邊形ABCDノ各邊ノ中點ヲ夫々E, F, G, Hトスレバ

$$AC^2+BD^2=2(GE^2+HF^2)$$

54. △ABCノ角A又ハソノ外角ノ二等分線ガ邊BC又ハソレノ延長ト交ハル點ヲDトスレバ



$$AB\cdot AC=BD\cdot DC\pm AD^2$$

[注意] ADガ$\overparen{BC}$ト交ハル點ヲEトスレバ △ABE∽△ADC

55. 一ツノ正方形ノ內接圓=內接スル正六角形ハ同ジ正方形ノ外接圓=內接スル正三角形ト面積ガ相等シイ。

[6] 比例

56. 梯形ABCD=於テAC, BDノ交點ヲEトシ, BA, CDノ延長ノ交點ヲFトスル。EF及ビソノ延長ガAD, BCト點L, M=於テ交ハルトキハ

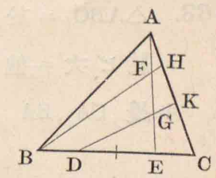
$$EL:EM=FL:FM$$

[注意] L, MハAD, BCノ中點=ナル。

57. △ABC=於テAB>AC, BCノ中點ヲOトシ, AヨリBC=下セル垂線ノ足ヲHトスレバ

$$AB+AC:2BC=OH:AB-AC$$

58. △ABCノ邊BC上=D, Eヲトリ



$$BD=EC=\frac{1}{4}BC$$

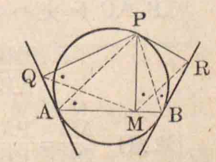
ナラシメ, 線分AE上=F, Gヲ

$AF=GE=\frac{1}{3}AE$ ナルヤウ=トリ, BF, DGノ延長ガACト交ハル點ヲH, KトスレバAH:HK=21:23デアル。

[注意] △AEC=ツイテ截線BFH, DGKヲ考ヘルトヨイ。

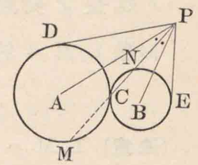
59. 正方形ABCDノ邊ADヲ直徑トスル圓周上ノ點ヲPトシ, 直線PA, PDガ邊BC又ハソノ延長ト交ハル點ヲ夫々E, Fトスレバ, 邊BCハ線分BE, CFノ比例中項デアル。

60. 圓周上ノ一點PヨリABヘ下シタ垂線ノ足ヲMトシ, 點Pヨリ點A, B=於ケル切線ヘ下シタ垂線ノ足ヲ夫Q, Rトスレバ $PM^2=PQ\cdot PR$



61. 二等邊三角形ノ底邊 BC ノ中點 O ヲ中心トシテ等邊ニ切スル圓ノ切線ガ等邊或ハソノ延長ト P, Q デ交ハレバ $BP\cdot CQ=OB^2$

62. C ニ於テ外切スル二圓 A, B ヘ點 P カラ切線 PD, PE ヲ引クトキ, ∠APC=∠BPC ナラバ



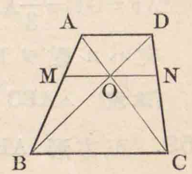
$$PC^2=PD\cdot PE$$

[注意] 直線 PC ガ圓 A, 圓 B ト再ビ交ハル點ヲ夫々 M, N トスレバ $PD^2=PC\cdot PM$, $PE^2=PC\cdot PN$

63. △ABC ニ於テ頂點 A ヲソノ對邊 BC 上ノ任意ノ點 M ニ結ビ,次ニ他ノ頂點 B, C ヲ通リ MA ニ平行ナ直線ヲ引キ邊 CA, BA ノ延長ト夫々 N, P デ交ハラシメルトキハ

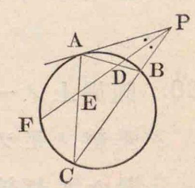
$$\frac{1}{AM}=\frac{1}{BN}+\frac{1}{CP}$$

64. 梯形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ通リ底邊 AD, BC ニ平行ナル直線ヲ引キ他ノ二邊ト交ハル點ヲ M, N トスレバ



$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{MN}$$

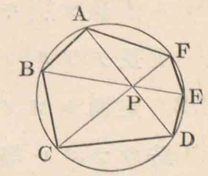
65. 圓外ノ一點 P ヨリ切線 PA, 割線 PBC ヲ引キ, ∠APB ノ二等分線ガ弦 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ



$$\frac{DB}{AB}+\frac{EC}{AC}=1$$

[注意] $\frac{AD}{DB}=\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}=\frac{CE}{AE}$

66. 圓ニ內接スル六邊形 ABCDEF ノ對角線 AD, BE, CF ガ一點ニ會スルトキハ



$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

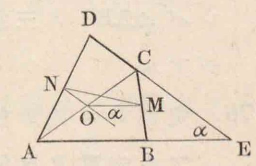
67. △ABC ノ各頂點ヨリ對邊ニ至ル三ツノ線分 AD, BE, CF ガ一點 O ニ會スルトキハ

$$\frac{DO}{AD}+\frac{EO}{BE}+\frac{FO}{CF}=1$$

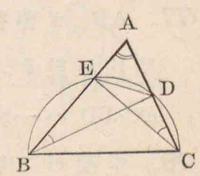
68. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ E トスレバ AB·AD:CB·CD=AE:EC

[7] 定 量

69. 四邊形 ABCD ニ於テ一組ノ對邊 AB, CD ノ長サトコノ二邊ノ延長ノナス角トガ一定ナルトキハ,邊 BC ノ中點 M ト邊 DA ノ中點 N トノ距離 MN モ亦一定デアル。



70. △ABC ニ於テ BC ハ長サ一定デ ∠A ハ大サ一定ノ鋭角ナルトキ B ト C ヨリ夫々對邊ニ垂線 BD, CE ヲ下セバ DE ノ長サハ一定デアル。

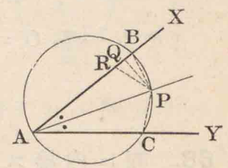


71. 定圓外ノ定點 P ヨリ引イタ二切線ノ切點ヲ A, B トスル。圓周上ノ任意ノ點 M ニ於ケル切線ニ平行ニ P ヲ通

ル直線ヲ引キ MA, MB トノ交點ヲ N, L トスレバ NL ハ定長デアル。

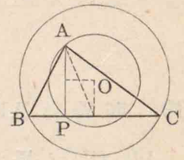
72. 定圓トソノ二定直徑トガアル。コノ圓周上ノ任意ノ點カラコレ等ノ直徑ニ垂線ヲ下シ,ソノ足ヲ A, B トスレバ線分 AB ハ定長デアル。

73. 定角 XAY ノ二等分線上ノ定點ヲ P トスル。A, P ヲ過ギル任意ノ圓ガ AX, AY ト交ハル點ヲ夫々 B, C トスレバ AB+AC ハ一定デアル。



74. 圓ノ定弦ニ垂直ナル弦ガコノ定弦ニヨリテ分タレタ二部分ノ差ハ一定デアル。

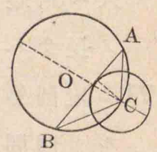
75. 二ツノ同心圓ニ於テ小圓ノ任意ノ弦 PA ニ垂直ナル大圓ノ弦 BPC ヲ作レバ △ABC ノ三邊ノ平方ノ和ハ一定デアル。



76. 定圓 O ニ於テ任意ノ一半徑ヲ OA トシ,コノ圓ノ内部ニアル定點 P ヲ通リ OA ニ垂直ナル弦 BC ヲ引ケバ AB^2-AP^2 ハ一定デアル。

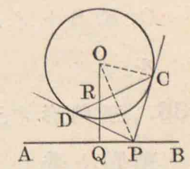
77. AB ヲ直徑トスル圓周上ノ任意ノ點ニ於ケル切線ガ A, B ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ夫々 C, D トスレバ AC·BD ハ一定デアル。

78. 定圓 O ノ周上ノ一點 C ヲ中心トスル他ノ定圓ノ任意ノ切線ガ圓 O ト A, B ニ於テ交ハレバ CA·CB ハ一定デアル。



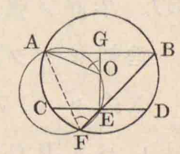
79. A, B ハ定圓周上ノ定點デ C ハ弧 AB ノ中點デアル。弧 ACB ノ共軛弧ノ上ニ動點 P ヲトレバ (PA+PB):PC ハ一定デアル。

80. 定圓 O 外ノ定直線 AB 上ノ任意ノ一點 P ヨリコノ圓ニ二ツノ切線 PC, PD ヲ引キソノ切點ヲ C, D トスルトキ,弦 CD ト中心 O ヨリ AB ニ下セル垂線 OQ トノ交點ハ定點デアル。



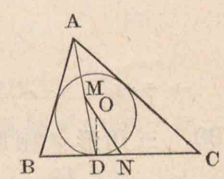
[8] 共線點

81. 中心 O ナル圓ニ於テ AB, CD ヲ平行ナル二弦,E ヲ CD ノ中點トスル。A, O, E ヲ通ル圓ガ圓 O ト再ビ交ハル點ヲ F トスレバ F, E, B ハ一直線上ニアル。



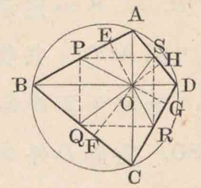
82. △ABC ノ垂心 H, 重心 G, 外心 O ノ三點ハ一直線上ニアル。

83. △ABC ノ内接圓 O ガ BC ニ切スル點ヲ D, AD ノ中點ヲ M, BC ノ中點ヲ N トスレバ M, O, N ハ一直線上ニアル。

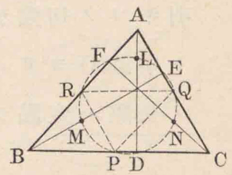


84. △ABC ノ頂點 A ヨリ對邊 BC ヘ垂線 AD ヲ引キ,ソノ足 D ヨリ AB, AC ヘ夫々垂線 DE, DF ヲ引ケバ四邊形 BCFE ハ圓ニ内接スル。

85. 四邊形 ABCD ノ兩對角線ガ直交スルトキソノ交點 O ヨリ四邊ニ下シタ垂線ノ足 E, F, G, H ト各邊ノ中點 P, Q, R, S トノ八點ハ同一ノ圓周上ニアル。

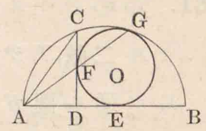


86. 三角形ノ三邊ノ中點,三垂線ノ足,各頂點ト垂心トノ距離ノ中點デアル九ツノ點ハ同一ノ圓周上ニアル。



[注意] 三邊ノ中點ヲ通ル圓又ハ三垂線ノ足ヲ通ル圓ノ上ニ他ノ六點ガアルコトヲ證明スルガヨイ。

87. 半圓ノ弧上ノ點 C カラ直徑 AB ヘ垂線 CD ヲ引キ DB, CD 及ビ弧 BC ト夫々 E, F, G ニ於テ切スル圓ヲ作レバ A, F, G ハ一直線上ニアル。



88. △ABC ノ邊 AB, AC 上ニ夫々點 R, Q ヲトリ,又 BC ノ延長上ニ點 P ヲトリ

$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=1$$

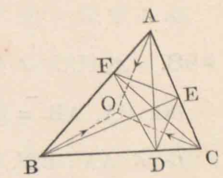
ナラシムレバ P, Q, R ハ一直線上ニアル。

89. 三角形ノ兩底角及ビ頂角ノ外角ノ二等分線ガ對邊ト交ハル三ツノ點ハ同一直線上ニアル。

90. 三圓 A, B, C ガアル。圓 A ト圓 B, 圓 B ト圓 C, 圓 C ト圓 A ノ共通外切線ノ交點ヲ夫々 P, Q, R トスレバ P, Q, R ハ同一直線上ニアル。

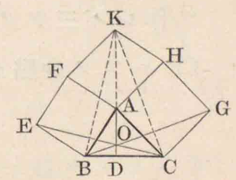
[9] 共點線

91. △ABC ノ各頂點ヨリ對邊ヘノ垂線ヲ AD, BE, CF トスルトキ, A, B, C ヨリ夫々 EF, FD, DE ニ垂直ニ引イタ三直線ハ一點ニ會スル。



92. △ABC 内ノ任意ノ一點ヲ O トシ, AO, BO, CO ノ中點ヲ夫々 L, M, N トシ, BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスレバ三直線 DL, EM, FN ハ一點ニ會スル。

93. △ABC ノ外側ニ正方形 ABEF, ACGH ヲ作リ, A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ下セバ三直線 AD, CE, BG ハ一點ニ會スル。



[注意] 平行四邊形 FAHK ヲ作レバ D, A, K ハ一直線ヲナシ且ツ AK=BC

94. △ABC ノ三邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 D, E, F ヲトリ

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

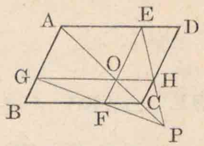
トスレバ AD, BE, CF ハ一點ニ會スル。

95. 三角形ノ三ツノ傍接圓ガ各邊(ソノ延長デナイ)ニ切スル點ニ於テ各邊ニ引イタ三ツノ垂線ハ一點ニ會スル。

96. △ABC ノ内接圓ガ邊 BC, CA, AB ト切スル點ヲ夫々 D, E, F トスレバ AD, BE, CF ハ一點ニ會スル。

97. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ノ一點 O ヲ通リ

AB, BC ニ平行ニ平行線 EOF, GOH ヲ引ケバ三直線 AC, EH, GF ハ一點ニ會スル。



98. △ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ, BC, CA, AB ニ關スル點 O ノ對稱點ヲ夫々 A′, B′, C′ トスレバ AA′, BB′, CC′ ハ一點ニ會スル。

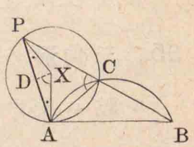
99. △ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々 D, E, F ヲ任意ニ定ムレバ △BDF, △CDE, △AEF ノ外接圓ハ一點ニ會スル。

100. △ABC ノ各邊ノ外側ニ夫々正三角形 BCD, ACE, ABF ヲ作レバ三ツノ正三角形ノ外接圓ハ一點ニ會シ, AD, BE, CF ハソノ會點デ交ハル。

[10] 軌跡

101. 定直線 XY 上ノ定點 A ニ於テ之ニ切スル任意ノ圓ヲ畫キ, ソノ中心ヲ O トスル。直線 AO ノ延長上(直線 XY ニ對シ圓 O ト同ジ側)ニ中心ヲ有シ, 且點 O ヲ通ツテ, 半徑ガ圓 O ノ直徑ニ等シイ第二ノ圓ヲ作ルトキ, コノ圓ト圓 O トノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

102. 半圓ヨリ小ナル定弓形ノ弦 AB ノ一端 A ニ於テ AB ニ切スル任意ノ圓 X ヲ畫キ, 之ガ弓形ノ弧ト交ハル點ヲ C トスル。B, C ヲ結ブ直線ガ更ニ圓 X ト交ハル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

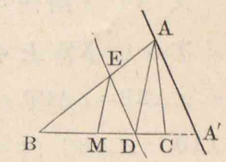


103. 定直線上ノ二定點 A, B ニ於テ夫々コノ直線ニ切スル二圓ガ點 P ニ於テ互ニ外切スルトキ切點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

104. 圓ノ定弦 AB ノ中點ヲ M トシ, A ヲ通ル任意ノ弦 AD ヲ引キ, ソノ延長上ニ AD ニ等シク DE ヲトルトキ BD, EM ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

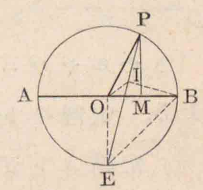
105. 定圓 O 內ノ定點 P ヲヨギル任意ノ弦 AB ノ兩端 A ト B トニ於ケル二切線ノ交點ヲ Q トスレバ Q ノ軌跡ハ何カ。

106. 定線分 BC 上ノ定點 D ニ於テ之ニ交ハル定直線 DE ガアル。コノ直線 DE ニヨツテ面積ガ二等分サレルヤウナ △ABC ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

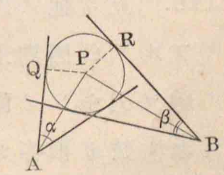


107. 四邊形 ABCD ノ三邊 AB, BC, CD ノ長サガ l ニ等シイトキ, コノ四邊形ノ各邊ニ下セル垂線ノ和ガ定線分 k ニ等シイヤウナ點ノ軌跡ヲ形內ニ求メヨ。

108. 圓 O ノ定直徑ヲ AB トスル。圓周上ノ任意ノ點 P カラ AB ニ下セル垂線ノ足ヲ M トスルトキ, △OPM ノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ。



109. 定點 A ヨリ引イタ二切線ノナス角ガ定角 α ニ等シク, 他ノ定點 B ヨリ引イタ二切線ノナス角ガ他ノ定角 β ニ等シイヤウナ圓ノ中心 P ノ軌跡ヲ求メヨ。



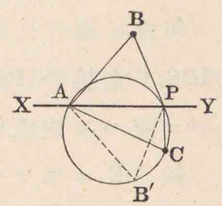
110. 二定圓 O, O′ ガアル。一點 P カ

ラ圓Oヘ引ケル二切線ノナス角ト圓O′ヘ引ケル二切線ノナス角トガ相等シイトキP點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[11] 作圖題

111. 直線XYノ同側ニ二定點A,Bガアル。XY上ニ一點Pヲ求メテ $\angle APX=2\angle BPY$ トナルヤウニセヨ。

112. 定直線XY上ニ定點Aガアル。又XYノ兩側ニ一ツヅツ定點B,Cガアル。XY上ニ點Pヲ求メテ $\angle ABP=\angle ACP$ ナルヤウニセヨ。

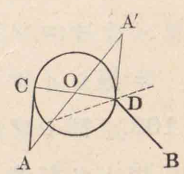


113. △ABC内ニ一點Oヲ求メテ $\angle OBC$, $\angle OCA$, $\angle OAB$ ヲ等シカラシメヨ。

114. 圓Oト二點A,Bトガアル。直徑DOCヲ引イテ

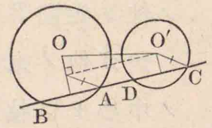
$$AC=BD$$

トナルヤウニセヨ。

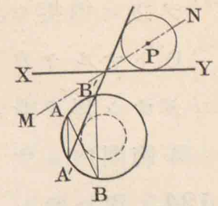


115. 定圓Oト之ニ交ハラナイ定直線XYト,コノ直線上ニ定點Aトガアル。XYノ上ニ點Pヲトリ,線分OPト圓Oトノ交點ヲBトスルトキ $PA=PB$ ナルヤウニセヨ。

116. 互ニ他ノ外ニアル二定圓O,O′ガアル。O圓周上ノ定點Aヲ通ツテ直線ヲ引キ,ソノ直線カラ兩圓周ガ截リ取ル弦ガ相等シクナルヤウニセヨ。



117. 定直線XY,定點P及ビ定圓周上ニ二定點A,Bガアル。コノ圓周ト二點A′,B′デ交ハル一直線ヲ作ルノニAA′トBB′トガ平行トナリ,且ツ點Pヲ通ル或ル直線ヲ折リ目トシテ平面ヲ折返ストキ弦A′B′ガ直線XYノ上ニ重ナルヤウニシヨウトスル。直線A′B′ノ位置ヲ求メヨ。



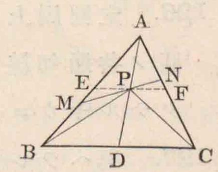
118. 與ヘラレタ線分ヲ與ヘラレタ二ツノ矩形ノ面積ノ比ニ内分セヨ。

119. △ABC ニ於テ内心ヲO, ∠A内ニアル傍心ヲO′トスルトキ,三線分AO, AO′, BCノ長サヲ知ツテコノ三角形ヲ作レ。

120. △ABCノ邊AB, AC上ニ夫々點M,Nヲトリ

$$\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=\frac{3}{2}$$

ナラシメ,線分MN上ニ一點Pヲ求メテ $\triangle PBC=2\triangle AMN$ ナラシメヨ。



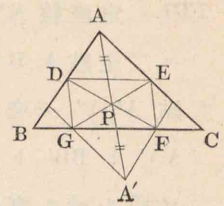
[注意] $\triangle AMN=\frac{6}{25}\triangle ABC$ $\therefore$ $\triangle PBC=\frac{12}{25}\triangle ABC$

121. 四邊形ノ一双ノ對邊,兩對角線及ビソノ夾角ヲ知ツテ本形ヲ作レ。

122. 四邊形ノ四邊及ビ一双ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ヲ知ツテ本形ヲ作レ。

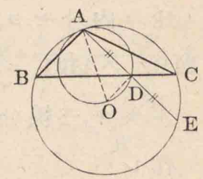
123. 定三角形ABCノ邊 BC 上ニ一邊ヲ置ク平行四邊形

ヲ之ニ內接シ,且對角線ノ交點ガ定點Pトナルヤウニセヨ。又カヽル作圖ガナシ得ラレルタメニハPハ如何ナル範圍內ニナクテハナラナイカ。



124. 與ヘラレタ正方形 ABCD ノ各邊上ニ一ツヅツ頂點ヲ有シ ABCD ノ $\frac{1}{3}$ ノ面積ヲ有スル矩形ヲ作レ。

[注意] AB 上ニ於ケル矩形ノ頂點ヲ P トシ, $AP=x$, $AB=a$ トスレバ $x(a-x)=\frac{1}{6}a^2$

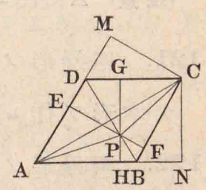


125. ∠A ガ鈍角ナル三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ點 D ヲ求メ,線分 AD ヲ BD 及ビ DC ノ比例中項ナラシメヨ。

126. 定圓周上ノ一定點ヲ,中心トシテ一ツノ圓ヲ畫キ,兩圓ノ共通切線ノ切點間ノ長サヲ與ヘラレタ長サニ等シクナルヤウニセヨ。

127. 與ヘラレタ正三角形ノ面積ヲソノ一邊ニ垂直ナル二直線ニヨツテ三等分セヨ。

128. 菱形 ABCD ノ內部ニ點 P ヲ求メ,面積ノ比 △ABP:△BCP:△CDP:△DAP ヲ與ヘラレタ比 $a:b:c:d$ ニ等シイヤウニセヨ。尙作圖ガ可能ナルタメニハ與ヘラレタ正ノ數 a, b, c, d ノ間ニ存在スベキ條件ヲ求メヨ。



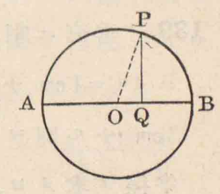
[12] 最大最小

129. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC 上ノ一點 P ヨリ AB, AC ニ垂線 PM, PN ヲ下シ,垂線ノ足 M, N ヲ結ブトキ線分 MN ノ最小値ヲ求メヨ。但シ AB, AC ノ長サヲ夫々 a, b トスル。

130. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ長サ及ビ頂角 A ノ大サ一定ナルトキ,ソノ三角形ノ周ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

131. 三邊ノ和ガ一定ナル直角三角形ノ中,面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

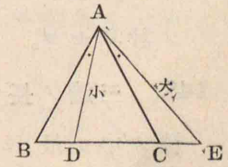
132. 定圓 O ノ定直徑ヲ AB トスル。コノ圓周上ニ一點 P ヲ取リ,P カラ AB ニ垂線ヲ引キソノ足ヲ Q トスルトキ PQ+AQ ガ最大ナルヤウニセヨ。



133. △ABC ノ底邊 BC ガ定長 a ニ等シク, AB:AC ガ定比 $m:n$ ニ等シイ三角形ノ中デ最大面積ヲ有スルモノノ面積ヲ求メヨ。

134. 半徑 5cm ナル圓ノ中心ヨリ 3cm ノ距離ニ一點 P ガアル。P ニ於テ直交スル二弦ヲ對角線トスル四邊形ノ中ニテ面積ノ最大ナモノヲ求メヨ。

135. 頂角ト高サトガ一定ナル三角形ノ中,二等邊三角形ガ面積最小デアル。

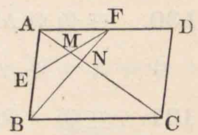


136. △ABC ノ內部ニ一點 P ヲ求メテ PA+PB+PC ヲ最小ナラシメヨ。

[13] 計算問題

137. △ABC ニ於テ $\angle B=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$ デ CA ノ長サガ a ナルトキ頂點Bヨリ對邊 CA ニ下セル垂線 BD ノ長サヲ計算セヨ。

138. ▱ABCD ノ邊 AB, AD ノ中點ヲ夫々E, Fトスル。EF, BF ガ AC トM, N ニ於テ交ハルトキ MN ノ長サヲ求メヨ。但シ AB=2cm, AD=3cm, DB=4cm トスル。



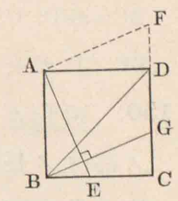
139. 垂直ニ相交ハル二直線ノ交點Oヨリ,ソノ一ツノ上ニ OC=1cm ナルヤウニ點Cヲトリ,Cヲ中心トシテ半徑 3cm ナル圓ヲ畫クトキ,二直線及ビコノ圓ニ切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ。

140. 互ニ外切スル半徑 3cm 及ビ 4cm ノ圓ガアル。コノ二圓及ビコノ二圓ノ共通外切線ニ切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ。

141. 半徑 100cm ナル圓ヲ長サ 192cm ナル弦ト,之ニ垂直ナル直徑トデ四分スルトキ,ソノ各ニ內接スル圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

142. 三邊ノ長サ 4cm, 5cm, 6cm ナル三角形ノ角ノ二等分線ノ中デ最小ナモノノ長サヲ求メヨ。

143. 正方形 ABCD ニ於テ ∠CBD ノ二等分線ヘAカラ引イタ垂線ガ BC ト交ハル點ヲEトスルトキ BE:EC ヲ求メヨ。

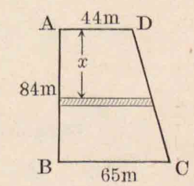


144. △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ二邊 AB, AC ト夫々 P, Q デ交ハリ, $2AP+CQ=2AQ+BP$ ナルトキ PQ:BC ヲ求メヨ。

145. 正六角形ノ各邊ヲ延長スルトキ生ズル六ツノ交點ヲ頂點トスル正六角形ノ面積ト,初メノ正六角形トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

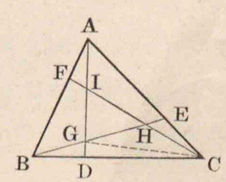
146. 三邊ノ長サ a, b, c ナル三角形ノ地面ノ周圍ニ沿ヒ內側ニ一定ノ幅ノ道路ヲ敷設シ,ソノ道路ノ面積ヲシテ全面積ノ $\frac{1}{k}$ ニショウトスル。道路ノ幅ハイクラカ。

147. 梯形ノ地面ガアル。ソノ一邊ハ南北ニ走リ長サ 84m デ,之ニ隣ツタ二邊ハ東西ニ走リ長サ 44m 及ビ 65m デアル。今東西ニ走ル幅 4m ノ道路ヲ設ケテコノ地面ヲ等積ナル二ツノ敷地ニ分タウトスル。道路ノ位置ヲ求メヨ。



148. 半徑 a ナル圓ニ三ツノ相等シイ圓ガ內切シ且ソレ等三ツノ等圓ハ P, Q, R ニ於テ二ツヅツ外切スル。コノトキ三圓ノ劣弧 QR, RP, PQ デ圍マレタ部分ノ面積ヲ求メヨ。

149. 面積 $100\,cm^2$ ナル三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 D, E, F ヲ取リ,



BC=3BD, CA=3CE, AB=3AF トスルトキ三ツノ直線 AD, BE, CF ガ交ハツテ作ル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

150. 頂角ガ 45° ナル鋭角三角形ノ高サガ底ヲ分ツ二ツノ部分ノ長サヲ夫々 2 cm, 3 cm トスレバコノ三角形ノ面積ハ幾 cm^2 カ。

答

答ハ参考ノタメニ掲ゲタノデアルカラ, ソノ數字ニ信頼セズ, 驗算ヲシテ, 十分ニ結果ヲ確メルコトガ肝要デアル。

頁 23.　**問題(2)**　**8.** 9 cm　**9.** 高サ 15 cm, 對角線 25 cm

10. 48 mm

頁 102.　**問題(20)**　**1.** 150 cm^2　**2.** 12 cm

頁 107.　**雜題[1]**　**4.** 36 cm 强　**5.** $\frac{1}{3}$　**6.** 9.79 cm^2

頁 113.　**問題(22)**　**2.** 566.6 cm^2　**4.** 90 cm^2　**8.** 26 cm 弱

頁 116.　**問題(23)**　**3.** 1008 cm^2　**4.** 4.4 cm^2 强

頁 119.　**問題(24)**　**1.** 5196 cm^3　**2.** 311.76 cm^3

頁 123.　**問題(25)**　**1.** 438.7 cm^3　**2.** 15 cm

頁 125.　**問題(26)**　**1.** 190 cm^3　**2.** 525 cm^3　**3.** 6 cm

頁 126.　**雜題[2]**　**4.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$　**5.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$

6. 頂點カラ截面マデノ距離 $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}h$, 截面ノ面積 $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}S$

7. 現在ノ斜高 184.4 m 强, 修復ニ要スル石材ノ體積 377.45 cm^3 强

頁 130.　**問題(27)**　**1.** 側面積 3015.9 cm^2, 體積 22619.5 cm^3

2. 體積 4948.0 cm^3, 重サ 38594.4 g

頁 132.　**問題(28)**　**1.** 304.5 cm^2, 565.49 cm^3　**2.** 約 0.38 立

3. 表面積 211.12 cm^2, 體積 241.28 cm^3

4. 785.4 cm^3　**5.** 0.98 立 弱

頁 134.　**問題(29)**　**1.** 全表面積 881.22 cm^2, 體積 3597.1 cm^3

2. 容積 12968.5 cm^3, 作ルニ要スルぶりきノ面積約 2331.7 cm^2

3. 0.456 立　**4.** 1:7

頁 139. **問 題 (31)** **2.** 約 5 億 9 百 萬 km^2

頁 141. **問 題 (32)** **1.** $\frac{500}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$ **2.** 5.35 cm

4. 288.675 cm **5.** $\frac{3}{2}\mathrm{R}$ **6.** 10 倍

7. $\frac{3h+\sqrt{\frac{9\mathrm{V}}{\pi h}-3h^2}}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{V}}{\pi h}}$, 49 mm

頁 142. **雜 題 [3]** **1.** 1971.2 cm^3 **2.** $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi a^3$

3. $\sin^2\alpha(1+\cos\alpha):4$ **4.** $\frac{h}{2}+\frac{a^2}{6h}$ **5.** 7.605 cm

7. 7.95 cm **10.** $\frac{2}{3}\pi(1-\cos\alpha)r^3$

頁 159. **問 題 (33)** **1.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$; $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. x ガ 480° ナルトキ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$; x ガ $-480°$ ナルトキ $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. 0, 0 **4.** $\pm\frac{p^2-1}{2p}$, +, − ハ A ガ第一,第三象眼ニアルトキ,第二,第四象眼ニアルトキニ從ツテ tan A ノ値ガ +, − ニナルヤウニ定メル。

5. $-\frac{12}{13}$, $-\frac{12}{5}$ **6.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\frac{-2\sqrt{13}}{13}$

7. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$; 0, −1 **8.** 45°, 135°, 225°, 315° **9.** 90°

10. $x=15°$, $y=45°$; $x=135°$, $y=165°$

頁 171. **問 題 (34)** **1.** 0, $\frac{7}{25}$ **2.** $\frac{36}{77}$, $\frac{84}{13}$

7. $\sin A\cos B\cos C-\sin A\sin B\sin C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C$, $\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\sin B\cos C+\sin A\cos B\sin C$

8. $\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$

10. $135°>\theta>0°$, $360°>\theta>315°$, 最大ノ値 $\sqrt{2}$

頁 182. **問 題 (35)** **1.** $b=6.212$ cm, $c=8.785$ cm **2.** 108° 2′

3. 最小角 A=45°

頁 195. **問 題 (36)** **1.** C=35°56′, $a=72.17$, $c=67.66$

2. C=52°23′, A=25°19′, $b=616.9$

3. C=3°56′, A=146°30′, $a=1029$

4. B=67°38′, C=57°40′ $c=888.2$; B′=112°22′, C′=12°56′, $c'=235.3$

5. A=43°42′, B=32°48′, C=103°30′

頁 203. **問 題 (37)** **1.** $\sqrt{3}a$ m **2.** 5.45 m 弱 **3.** 76.80 m

4. 174.9 m **5.** 15.70 m **6.** 60.2 m 强

7. 10.35 海里强 **8.** 202.2 m 弱 **9.** 100 m^2

10. 253 m **11.** 1866 m **12.** 南 75° 西, 約 1 時間 20 分

頁 215. **問 題** **3.** 90°, 270°, 18°, 162°, 233°59′, 306°1′

4. $\frac{n\pi}{3}$ **5.** $\frac{n\pi}{2}$

6. $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ **7.** $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ **8.** $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$

9. $n\pi+\frac{\pi}{4}$ **10.** $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

11. 45°, 135°, 225°, 315°, 75°, 255°, 345° **12.** 60°, 300°, 180°

13. 18°, 54°, 90°, 126°, 162°, 198°, 234°, 270°, 306° **14.** 60°

15. $x=2n\pi+\frac{5}{12}\pi$, $y=2n\pi+\frac{\pi}{4}$; $x=2n\pi-\frac{\pi}{4}$, $y=2n\pi-\frac{5}{12}\pi$

16. $x=105°$, $y=45°$; $x=45°$, $y=105°$

補充問題

頁 23. **[12] 最大最小** **129.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **130.** BC ノ長サヲ a, ∠A ノ大サヲ α トスレバ $a+\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

131. 三邊ノ和ヲ l トスレバ $\frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2$

132. p ヲ弧 AB ノ中點ニ取ル。 **133.** $\frac{a^2mn}{2(n^2-m^2)}$

134. 41 cm^2

頁 24. [13] **計算問題** **137.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a$ **138.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$ cm **139.** $(2\sqrt{6}-4)$ cm, $(2\sqrt{3}-2)$ cm, $(2\sqrt{6}+4)$ cm, $(2\sqrt{3}+2)$ cm **140.** $12(7-4\sqrt{3})$ cm

141. 32 cm, 48 cm **142.** $3\frac{1}{3}$ cm **143.** $1:\sqrt{2}$

頁 25. **144.** 1:3 **145.** 3:1

146. $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\left(1-\frac{\sqrt{k(k-1)}}{k}\right)$ $\left[\text{但シ } s=\frac{a+b+c}{2}\right]$

147. 44 m ノ邊カラ道路ノ北ノ側マデ 44 m

148. $\frac{42\sqrt{3}-72+(12\sqrt{3}-21)\pi}{2}\times a^2$ **149.** $\frac{100}{7}$ cm^2

頁 26. **150.** 15 cm^2

三角函數ノ眞數表

	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0°	0.0000	0.0000	1.0000	∞	∞	1.0000	90°
1°	0.0175	0.0175	1.0002	57.2987	57.2900	0.9998	89°
2°	0.0349	0.0349	1.0006	28.6537	28.6363	0.9994	88°
3°	0.0523	0.0524	1.0014	19.1073	19.0811	0.9986	87°
4°	0.0698	0.0699	1.0024	14.3356	14.3007	0.9976	86°
5°	0.0872	0.0875	1.0038	11.4737	11.4301	0.9962	85°
6°	0.1045	0.1051	1.0055	9.5668	9.5144	0.9945	84°
7°	0.1219	0.1228	1.0075	8.2055	8.1443	0.9925	83°
8°	0.1392	0.1405	1.0098	7.1853	7.1154	0.9903	82°
9°	0.1564	0.1584	1.0125	6.3925	6.3138	0.9877	81°
10°	0.1736	0.1763	1.0154	5.7588	5.6713	0.9848	80°
11°	0.1908	0.1944	1.0187	5.2408	5.1446	0.9816	79°
12°	0.2079	0.2126	1.0223	4.8097	4.7046	0.9781	78°
13°	0.2250	0.2309	1.0263	4.4454	4.3315	0.9744	77°
14°	0.2419	0.2493	1.0306	4.1336	4.0108	0.9703	76°
15°	0.2588	0.2679	1.0353	3.8637	3.7321	0.9659	75°
16°	0.2756	0.2867	1.0403	3.6280	3.4874	0.9613	74°
17°	0.2924	0.3057	1.0457	3.4203	3.2709	0.9563	73°
18°	0.3090	0.3249	1.0515	3.2361	3.0777	0.9511	72°
19°	0.3256	0.3443	1,0576	3.0716	2.9042	0.9455	71°
20°	0.3420	0.3640	1.0642	2.9238	2.7475	0.9397	70°
21°	0.3584	0.3839	1.0711	2.7904	2.6051	0.9336	69°
22°	0.3746	0.4040	1.0785	2.6695	2.4751	0.9272	68°
23°	0.3907	0.4245	1.0864	2.5593	2.3559	0.9205	67°
24°	0.4067	0.4452	1.0946	2.4586	2.2460	0.9135	66°
25°	0.4226	0.4663	1.1034	2.3662	2.1445	0.9063	65°
26°	0.4384	0.4877	1.1126	2.2812	2.0503	0.8988	64°
27°	0.4540	0.5095	1.1223	2.2027	1.9626	0.8910	63°
28°	0.4695	0.5317	1.1326	2.1301	1.8807	0.8829	62°
29°	0.4848	0.5543	1.1434	2.0627	1.8040	0.8746	61°
30°	0.5000	0.5774	1.1547	2.0000	1.7321	0.8660	60°
31°	0.5150	0.6009	1.1666	1.9416	1.6643	0.8572	59°
32°	0.5299	0.6249	1.1792	1.8871	1.6003	0.8480	58°
33°	0.5446	0.6494	1.1924	1.8361	1.5399	0.8387	57°
34°	0.5592	0.6745	1.2062	1.7883	1.4826	0.8290	56°
35°	0.5736	0.7002	1.2208	1.7434	1.4281	0.8192	55°
36°	0.5878	0.7265	1.2361	1.7013	1.3764	0.8090	54°
37°	0.6018	0.7536	1.2521	1.6616	1.3270	0.7986	53°
38°	0.6157	0.7813	1.2690	1.6243	1.2799	0.7880	52°
39°	0.6293	0.8098	1.2868	1.5890	1.2349	0.7771	51°
40°	0.6428	0.8391	1.3054	1.5557	1.1918	0.7660	50°
41°	0.6561	0.8693	1.3250	1.5243	1.1504	0.7547	49°
42°	0.6691	0.9004	1.3456	1.4945	1.1106	0.7431	48°
43°	0.6820	0.9325	1.3673	1.4663	1.0724	0.7314	47°
44°	0.6947	0.9657	1.3902	1.4396	1.0355	0.7193	46°
45°	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	0.7071	45°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	

log sin

角		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′		
0°	0′	—	$\bar{4}.4637$	7648	9408	*0658	*1627	*2419	*3088	*3668	*4180	50′	
	10′	$\bar{3}.4637$	5051	5429	5777	6099	6398	6678	6942	7190	7425	40′	
	20′	7648	7859	8061	8255	8439	8617	8787	8951	9109	9261	30′	
	30′	9408	9551	9689	9822	9952	*0078	*0200	*0319	*0435	*0548	20′	
	40′	$\bar{2}.0658$	0765	0870	0972	1072	1169	1265	1358	1450	1539	10′	
	50′	1627	1713	1797	1880	1961	2041	2119	2196	2271	2346	0′	89°
1°	0′	2419	2490	2561	2630	2699	2766	2832	2898	2962	3025	50′	
	10′	3088	3150	3210	3270	3329	3388	3445	3502	3558	3613	40′	
	20′	3668	3722	3775	3828	3880	3931	3982	4032	4082	4131	30′	
	30′	4179	4227	4275	4322	4368	4414	4459	4504	4549	4593	20′	
	40′	4637	4680	4723	4765	4807	4848	4890	4930	4971	5011	10′	
	50′	5050	5090	5129	5167	5206	5243	5281	5318	5355	5592	0′	88°
2°	0′	5428	5464	5500	5535	5571	5605	5640	5674	5708	5742	50′	
	10′	5776	5809	5842	5875	5907	5939	5972	6003	6035	6066	40′	
	20′	6097	6128	6159	6189	6220	6250	6279	6309	6339	6368	30′	
	30′	6397	6426	6454	6483	6511	6539	6567	6595	6622	6650	20′	
	40′	6677	6704	6731	6758	6784	6810	6837	6863	6889	6914	10′	
	50′	6940	6965	6991	7016	7041	7066	7090	7115	7140	7164	0′	87°
3°	0′	7188	7212	7236	7260	7283	7307	7330	7354	7377	7400	50′	
	10′	7423	7445	7468	7491	7513	7535	7557	7580	7602	7623	40′	
	20′	7645	7667	7688	7710	7731	7752	7773	7794	7815	7836	30′	
	30′	7857	7877	7898	7918	7939	7959	7979	7999	8019	8039	20′	
	40′	8059	8078	8098	8117	8137	8156	8175	8194	8213	8232	10′	
	50′	8251	8270	8289	8307	8326	8345	8363	8381	8400	8418	0′	86°
4°	0′	8436	8454	8472	8490	8508	8525	8543	8560	8578	8595	50′	
	10′	8613	8630	8647	8665	8682	8699	8716	8733	8749	8766	40′	
	20′	8783	8799	8816	8833	8849	8865	8882	8898	8914	8930	30′	
	30′	8946	8962	8978	8994	9010	9026	9042	9057	9073	9089	20′	
	40′	9104	9119	9135	9150	9166	9181	9196	9211	9226	9241	10′	
	50′	9256	9271	9286	9301	9315	9330	9345	9359	9374	9388	0′	85°
5°	0′	9403	9417	9432	9446	9460	9475	9489	9503	9517	9531	50′	
	10′	9545	9559	9573	9587	9601	9614	9628	9642	9655	9669	40′	
	20′	9682	9696	9709	9723	9736	9750	9763	9776	9789	9803	30′	
	30′	9816	9829	9842	9855	9868	9881	9894	9907	9919	9932	20′	
	40′	9945	9958	9970	9983	9996	*0008	*0021	*0033	*0046	*0058	10′	
	50′	$\bar{1}.0070$	0083	0095	0107	0120	0132	0144	0156	0168	0180	0′	84°
6°	0′	0192	0204	0216	0228	0240	0252	0264	0276	0287	0299	50′	
	10′	0311	0323	0334	0346	0357	0369	0380	0392	0403	0415	40′	
	20′	0426	0438	0449	0460	0472	0483	0494	0505	0516	0527	30′	
	30′	0539	0550	0561	0572	0583	0594	0605	0616	0626	0637	20′	
	40′	0648	0659	0670	0680	0691	0702	0712	0723	0734	0744	10′	
	50′	0755	0765	0776	0786	0797	0807	0818	0828	0838	0849	0′	83°
7°	0′	0859	0869	0879	0890	0900	0910	0920	0930	0940	0951	50′	
	10′	0961	0971	0981	0991	1001	1011	1020	1030	1040	1050	40′	
	20′	1060	1070	1080	1089	1099	1109	1118	1128	1138	1147	30′	
	30′	1157	1167	1176	1186	1195	1205	1214	1224	1233	1242	20′	
	40′	1252	1261	1271	1280	1289	1299	1308	1317	1326	1336	10′	
	50′	1345	1354	1363	1372	1381	1390	1399	1409	1418	1427	0′	82°
8°	0′	1436	1445	1453	1462	1471	1480	1489	1498	1507	1516	50′	81°
		10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	角	

log cos

[注意] 0° カラ 8° マデノ角ノ log sin ト 82° カラ 90° マデノ角ノ log cos ハ上ノ表カラ，又コレ等ノ角ノ log tan, log cot ハ次頁ノ表カラ求メルガヨイ。依ツテ (4) デコレ等ノ角ニ該當スル部分ニハ表差ガ載セテナイ。

log tan

角		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′		
0°	0′	—	$\bar{4}.4637$	7648	9408	*0658	*1627	*2419	*3088	*3668	*4180	50′	
	10′	$\bar{3}.4637$	5051	5429	5777	6099	6398	6678	6942	7190	7425	40′	
	20′	7648	7860	8062	8255	8439	8617	8787	8951	9109	9261	30′	
	30′	9409	9551	9689	9823	9952	*0078	*0200	*0319	*0435	*0548	20′	
	40′	$\bar{2}.0658$	0765	0870	0972	1072	1170	1265	1359	1450	1540	10′	
	50′	1627	1713	1798	1880	1962	2641	2120	2196	2272	2346	0′	89°
1°	0′	2419	2491	2562	2631	2700	2767	2833	2899	2963	3026	50′	
	10′	3089	3150	3211	3271	3330	3389	3446	3503	3559	3614	40′	
	20′	3669	3723	3776	3829	3881	3932	3983	4033	4083	4132	30′	
	30′	4181	4229	4276	4323	4370	4416	4461	4506	4551	4595	20′	
	40′	4638	4682	4725	4767	4809	4851	4892	4933	4973	5013	10′	
	50′	5053	5092	5131	5170	5208	5246	5283	5321	5358	5394	0′	88°
2°	0′	5431	5467	5503	5538	5573	5608	5643	5677	5711	5745	50′	
	10′	5779	5812	5845	5878	5911	5943	5975	6007	6038	6070	40′	
	20′	6101	6132	6163	6193	6223	6254	6283	6313	6343	6372	30′	
	30′	6401	6430	6459	6487	6515	6544	6571	6599	6627	6654	20′	
	40′	6682	6709	6736	6762	6789	6815	6842	6868	6894	6920	10′	
	50′	6945	6971	6996	7021	7046	7071	7096	7121	7145	7170	0′	87°
3°	0′	7194	7218	7242	7266	7290	7313	7337	7360	7383	7406	50′	
	10′	7429	7452	7475	7497	7520	7542	7565	7587	7609	7631	40′	
	20′	7652	7674	7696	7717	7739	7760	7781	7802	7823	7844	30′	
	30′	7865	7886	7906	7927	7947	7967	7988	8008	8028	8048	20′	
	40′	8067	8087	8107	8126	8146	8165	8185	8204	8223	8242	10′	
	50′	8261	8280	8299	8317	8336	8355	8373	8392	8410	8428	0′	86°
4°	0′	8446	8465	8483	8501	8518	8536	8554	8572	8589	8607	50′	
	10′	8624	8642	8659	8676	8694	8711	8728	8745	8762	8778	40′	
	20′	8795	8812	8829	8845	8862	8878	8895	8911	8927	8944	30′	
	30′	8960	8976	8992	9008	9024	9040	9056	9071	9087	9103	20′	
	40′	9118	9134	9150	9165	9180	9196	9211	9226	9241	9256	10′	
	50′	9272	9287	9302	9316	9331	9346	9361	9376	9390	9405	0′	85°
5°	0′	9420	9434	9449	9463	9477	9492	9506	9520	9534	9549	50′	
	10′	9563	9577	9591	9605	9619	9633	9646	9660	9674	9688	40′	
	20′	9701	9715	9729	9742	9756	9769	9782	9796	9809	9823	30′	
	30′	9836	9849	9862	9875	9888	9901	9915	9928	9940	9953	20′	
	40′	9966	9979	9992	*0005	*0017	*0030	*0043	*0055	*0068	*0080	10′	
	50′	$\bar{1}.0093$	0105	0118	0130	0143	0155	0167	0180	0192	0204	0′	84°
6°	0′	0216	0228	0240	0253	0265	0277	0289	0300	0312	0324	50′	
	10′	0336	0348	0360	0371	0383	0395	0407	0418	0430	0441	40′	
	20′	0453	0464	0476	0487	0499	0510	0521	0533	0544	0555	30′	
	30′	0567	0578	0589	0600	0611	0622	0633	0645	0656	0667	20′	
	40′	0678	0688	0699	0710	0721	0732	0743	0754	0764	0775	10′	
	50′	0786	0796	0807	0818	0828	0839	0849	0860	0871	0881	0′	83°
7°	0′	0891	0902	0912	0923	0933	0943	0954	0964	0974	0984	50′	
	10′	0995	1005	1015	1025	1035	1045	1056	1066	1076	1086	40′	
	20′	1096	1106	1116	1125	1135	1145	1155	1165	1175	1185	30′	
	30′	1194	1204	1214	1223	1233	1243	1252	1262	1272	1281	20′	
	40′	1291	1300	1310	1319	1329	1338	1348	1357	1367	1376	10′	
	50′	1385	1395	1404	1413	1423	1432	1441	1450	1460	1469	0′	82°
8°	0′	1478	1487	1496	1505	1515	1524	1533	1542	1551	1560	50′	81°
		10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	角	

log cot

三角函數ノ對數表（一）

角		log sin	log tan	log cot	log cos		
0°	0′	$-\infty$	$-\infty$	∞	0.0000	0′	90°
	10′	$\bar{3}.4637$	$\bar{3}.4637$	2.5363	0.0000	50′	
	20′	$\bar{3}.7648$	$\bar{3}.7648$	2.2352	0.0000	40′	
	30′	$\bar{3}.9408$	$\bar{3}.9409$	2.0591	0.0000	30′	
	40′	$\bar{2}.0658$	$\bar{2}.0658$	1.9342	0.0000	20′	
	50′	$\bar{2}.1627$	$\bar{2}.1627$	1.8373	0.0000	10′	
1°	0′	$\bar{2}.2419$	$\bar{2}.2419$	1.7581	$\bar{1}.9999$	0′	89°
	10′	$\bar{2}.3088$	$\bar{2}.3089$	1.6911	$\bar{1}.9999$	50′	
	20′	$\bar{2}.3668$	$\bar{2}.3669$	1.6331	$\bar{1}.9999$	40′	
	30′	$\bar{2}.4179$	$\bar{2}.4181$	1.5819	$\bar{1}.9999$	30′	
	40′	$\bar{2}.4637$	$\bar{2}.4638$	1.5362	$\bar{1}.9998$	20′	
	50′	$\bar{2}.5050$	$\bar{2}.5053$	1.4947	$\bar{1}.9998$	10′	
2°	0′	$\bar{2}.5428$	$\bar{2}.5431$	1.4569	$\bar{1}.9997$	0′	88°
	10′	$\bar{2}.5776$	$\bar{2}.5779$	1.4221	$\bar{1}.9997$	50′	
	20′	$\bar{2}.6097$	$\bar{2}.6101$	1.3899	$\bar{1}.9996$	40′	
	30′	$\bar{2}.6397$	$\bar{2}.6401$	1.3599	$\bar{1}.9996$	30′	
	40′	$\bar{2}.6677$	$\bar{2}.6682$	1.3318	$\bar{1}.9995$	20′	
	50′	$\bar{2}.6940$	$\bar{2}.6945$	1.3055	$\bar{1}.9995$	10′	
3°	0′	$\bar{2}.7188$	$\bar{2}.7194$	1.2806	$\bar{1}.9994$	0′	87°
	10′	$\bar{2}.7423$	$\bar{2}.7429$	1.2571	$\bar{1}.9993$	50′	
	20′	$\bar{2}.7645$	$\bar{2}.7652$	1.2348	$\bar{1}.9993$	40′	
	30′	$\bar{2}.7857$	$\bar{2}.7865$	1.2135	$\bar{1}.9992$	30′	
	40′	$\bar{2}.8059$	$\bar{2}.8067$	1.1933	$\bar{1}.9991$	20′	
	50′	$\bar{2}.8251$	$\bar{2}.8261$	1.1739	$\bar{1}.9990$	10′	
4°	0′	$\bar{2}.8436$	$\bar{2}.8446$	1.1554	$\bar{1}.9989$	0′	86°
	10′	$\bar{2}.8613$	$\bar{2}.8624$	1.1376	$\bar{1}.9989$	50′	
	20′	$\bar{2}.8783$	$\bar{2}.8795$	1·1205	$\bar{1}.9988$	40′	
	30′	$\bar{2}.8946$	$\bar{2}.8960$	1.1040	$\bar{1}.9987$	30′	
	40′	$\bar{2}.9104$	$\bar{2}.9118$	1.0882	$\bar{1}.9986$	20′	
	50′	$\bar{2}.9256$	$\bar{2}.9272$	1.0728	$\bar{1}.9985$	10′	
5°	0′	$\bar{2}.9403$	$\bar{2}.9420$	1.0580	$\bar{1}.9983$	0′	85°
	10′	$\bar{2}.9545$	$\bar{2}.9563$	1.0437	$\bar{1}.9982$	50′	
	20′	$\bar{2}.9682$	$\bar{2}.9701$	1.0299	$\bar{1}.9981$	40′	
	30′	$\bar{2}.9816$	$\bar{2}.9836$	1.0164	$\bar{1}.9980$	30′	
	40′	$\bar{2}.9945$	$\bar{2}.9966$	1.0034	$\bar{1}.9979$	20′	
	50′	$\bar{1}.0070$	$\bar{1}.0093$	0.9907	$\bar{1}.9977$	10′	
6°	0′	$\bar{1}.0192$	$\bar{1}.0216$	0.9784	$\bar{1}.9976$	0′	84°
	10′	$\bar{1}.0311$	$\bar{1}.0336$	0.9664	$\bar{1}.9975$	50′	
	20′	$\bar{1}.0426$	$\bar{1}.0453$	0.9547	$\bar{1}.9973$	40′	
	30′	$\bar{1}.0539$	$\bar{1}.0567$	0.9433	$\bar{1}.9972$	30′	
	40′	$\bar{1}.0648$	$\bar{1}.0678$	0.9322	$\bar{1}.9971$	20′	
	50′	$\bar{1}.0755$	$\bar{1}.0786$	0.9214	$\bar{1}.9969$	10′	
7°	0′	$\bar{1}.0859$	$\bar{1}.0891$	0.9109	$\bar{1}.9968$	0′	83°
	10′	$\bar{1}.0961$	$\bar{1}.0995$	0.9005	$\bar{1}.9966$	50′	
	20′	$\bar{1}.1060$	$\bar{1}.1096$	0.8904	$\bar{1}.9964$	40′	
	30′	$\bar{1}.1157$	$\bar{1}.1194$	0.8806	$\bar{1}.9963$	30′	
	40′	$\bar{1}.1252$	$\bar{1}.1291$	0.8709	$\bar{1}.9961$	20′	
	50′	$\bar{1}.1345$	$\bar{1}.1385$	0.8615	$\bar{1}.9959$	10′	
8°	0′	$\bar{1}.1436$	$\bar{1}.1478$	0.8522	$\bar{1}.9958$	0′	82°
		log cos	log cot	log tan	log sin	角	

三角函數ノ對數表（二）

角		log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差		
8°	0′	$\bar{1}.1436$		$\bar{1}.1478$		0.8522	$\bar{1}.9958$		0′	82
			89		91			2		
	10′	1525		1569		8431	9956		50′	
			87		89			2		
	20′	1612		1658		8342	9954		40′	
			85		87			2		
	30′	1697		1745		8255	9952		30′	
			84		86			2		
	40′	1781		1831		8169	9950		20′	
			82		84			2		
	50′	1863		1915		8085	9948		10′	
			80		82			2		
9°	0′	$\bar{1}.1943$		$\bar{1}.1997$		0.8003	$\bar{1}.9946$		0′	81°
			79		81			2		
	10′	2022		2078		7922	9944		50′	
			78		80			2		
	20′	2100		2158		7842	9942		40′	
			76		78			2		
	30′	2176		2236		7764	9940		30′	
			75		77			2		
	40′	2251		2313		7687	9938		20′	
			73		76			2		
	50′	2324		2389		7611	9936		10′	
			73		74			2		
10°	0′	$\bar{1}.2397$		$\bar{1}.2463$		0.7537	$\bar{1}.9934$		0′	80°
			71		73			3		
	10′	2468		2536		7464	9931		50′	
			70		73			2		
	20′	2538		2609		7391	9929		40′	
			68		71			2		
	30′	2606		2680		7320	9927		30′	
			68		70			3		
	40′	2674		2750		7250	9924		20′	
			66		69			2		
	50′	2740		2819		7181	9922		10′	
			66		68			3		
11°	0′	$\bar{1}.2806$		$\bar{1}.2887$		0.7113	$\bar{1}.9919$		0′	79°
			64		66			2		
	10′	2870		2953		7047	9917		50′	
			64		67			3		
	20′	2934		3020		6980	9914		40′	
			63		65			2		
	30′	2997		3085		6915	9912		30′	
			61		64			3		
	40′	3058		3149		6851	9909		20′	
			61		63			2		
	50′	3119		3212		6788	9907		10′	
			60		63			3		
12°	0′	$\bar{1}.3179$		$\bar{1}.3275$		0.6725	$\bar{1}.9904$		0′	78°
			59		61			3		
	10′	3238		3336		6664	9901		50′	
			58		61			2		
	20′	3296		3397		6603	9899		40′	
			57		61			3		
	30′	3353		3458		6542	9896		30′	
			57		59			3		
	40′	3410		3517		6483	9893		20′	
			56		59			3		
	50′	3466		3576		6424	9890		10′	
			55		58			3		
13°	0′	$\bar{1}.3521$		$\bar{1}.3634$		0.6366	$\bar{1}.9887$		0′	77°
			54		57			3		
	10′	3575		3691		6309	9884		50′	
			54		57			3		
	20′	3629		3748		6252	9881		40′	
			53		56			3		
	30′	3682		3804		6196	9878		30′	
			52		55			3		
	40′	3734		3859		6141	9875		20′	
			52		55			3		
	50′	3786		3914		6086	9872		10′	
			51		54			3		
14°	0′	$\bar{1}.3837$		$\bar{1}.3968$		0.6032	$\bar{1}.9869$		0′	76°
			50		53			3		
	10′	3887		4021		5979	9866		50′	
			50		53			3		
	20′	3937		4074		5926	9863		40′	
			49		53			4		
	30′	3986		4127		5873	9859		30′	
			49		51			3		
	40′	4035		4178		5822	9856		20′	
			48		52			3		
	50′	4083		4230		5770	9853		10′	
			47		51			4		
15°	0′	$\bar{1}.4130$		$\bar{1}.4281$		0.5719	$\bar{1}.9849$		0′	75°
			47		50			3		
	10′	4177		4331		5669	9846		50′	
			46		50			3		
	20′	4223		4381		5619	9843		40′	
			46		49			4		
	30′	4269		4430		5570	9839		30′	
			45		49			3		
	40′	4314		4479		5521	9836		20′	
			45		48			4		
	50′	4359		4527		5473	9832		10′	
			44		48			4		
16°	0′	$\bar{1}.4403$		$\bar{1}.4575$		0.5425	$\bar{1}.9828$		0′	74°
		log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角	

三角函數ノ對數表（三）

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	
16° 0′	$\bar{1}$.4403	44	$\bar{1}$.4575	47	0.5425	$\bar{1}$.9828	3	0′ 74°
10′	4447	44	4622	47	5378	9825	4	50′
20′	4491	42	4669	47	5331	9821	4	40′
30′	4533	43	4716	46	5284	9817	3	30′
40′	4576	42	4762	46	5238	9814	4	20′
50′	4618	41	4808	45	5192	9810	4	10′
17° 0′	$\bar{1}$.4659	41	$\bar{1}$.4853	45	0.5147	$\bar{1}$.9806	4	0′ 73°
10′	4700	41	4898	45	5102	9802	4	50′
20′	4741	40	4943	44	5057	9798	4	40′
30′	4781	40	4987	44	5013	9794	4	30′
40′	4821	40	5031	44	4969	9790	4	20′
50′	4861	39	5075	43	4925	9786	4	10′
18° 0′	$\bar{1}$.4900	39	$\bar{1}$.5118	43	0.4882	$\bar{1}$.9782	4	0′ 72°
10′	4939	38	5161	42	4839	9778	4	50′
20′	4977	38	5203	42	4797	9774	4	40′
30′	5015	37	5245	42	4755	9770	5	30′
40′	5052	38	5287	42	4713	9765	4	20′
50′	5090	36	5329	41	4671	9761	4	10′
19° 0′	$\bar{1}$.5126	37	$\bar{1}$.5370	41	0.4630	$\bar{1}$.9757	5	0′ 71°
10′	5163	36	5411	40	4589	9752	4	50′
20′	5199	36	5451	40	4549	9748	5	40′
30′	5235	35	5491	40	4509	9743	4	30′
40′	5270	36	5531	40	4469	9739	5	20′
50′	5306	35	5571	40	4429	9734	4	10′
20° 0′	$\bar{1}$.5341	34	$\bar{1}$.5611	39	0.4389	$\bar{1}$.9730	5	0′ 70°
10′	5375	34	5650	39	4350	9725	4	50′
20′	5409	34	5689	38	4311	9721	5	40′
30′	5443	34	5727	39	4273	9716	5	30′
40′	5477	33	5766	38	4234	9711	5	20′
50′	5510	33	5804	38	4196	9706	4	10′
21° 0′	$\bar{1}$.5543	33	$\bar{1}$.5842	37	0.4158	$\bar{1}$.9702	5	0′ 69°
10′	5576	33	5879	38	4121	9697	5	50′
20′	5609	32	5917	37	4083	9692	5	40′
30′	5641	32	5954	37	4046	9687	5	30′
40′	5673	31	5991	37	4009	9682	5	20′
50′	5704	32	6028	36	3972	9677	5	10′
22° 0′	$\bar{1}$.5736	31	$\bar{1}$.6064	36	0.3936	$\bar{1}$.9672	5	0′ 68°
10′	5767	31	6100	36	3900	9667	6	50′
20′	5798	30	6136	36	3864	9661	5	40′
30′	5828	31	6172	36	3828	9656	5	30′
40′	5859	30	6208	35	3792	9651	5	20′
50′	5889	30	6243	36	3757	9646	6	10′
23° 0′	$\bar{1}$.5919	29	$\bar{1}$.6279	35	0.3721	$\bar{1}$.9640	5	0′ 67°
10′	5948	30	6314	34	3686	9635	6	50′
20′	5978	29	6348	35	3652	9629	5	40′
30′	6007	29	6383	34	3617	9624	6	30′
40′	6036	29	6417	35	3583	9618	5	20′
50′	6065	28	6452	34	3548	9613	6	10′
24° 0′	$\bar{1}$.6093		$\bar{1}$.6486		0.3514	$\bar{1}$.9607		0′ 66°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角

三角函數　對數表（四）

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	
24° 0′	$\bar{1}$.6093	28	$\bar{1}$.6486	34	0.3514	$\bar{1}$.9607	5	0′ 66°
10′	6121	28	6520	33	3480	9602	6	50′
20′	6149	28	6553	34	3447	9596	6	40′
30′	6177	28	6587	33	3413	9590	6	30′
40′	6205	27	6620	34	3380	9584	5	20′
50′	6232	27	6654	33	3346	9579	6	10′
25° 0′	$\bar{1}$.6259	27	$\bar{1}$.6687	33	0.3313	$\bar{1}$.9573	6	0′ 65°
10′	6286	27	6720	32	3280	9567	6	50′
20′	6313	27	6752	33	3248	9561	6	40′
30′	6340	26	6785	32	3215	9555	6	30′
40′	6366	26	6817	33	3183	9549	6	20′
50′	6392	26	6850	32	3150	9543	6	10′
26° 0′	$\bar{1}$.6418	26	$\bar{1}$.6882	32	0.3118	$\bar{1}$.9537	7	0′ 64°
10′	6444	26	6914	32	3086	9530	6	50′
20′	6470	25	6946	31	3054	9524	6	40′
30′	6495	26	6977	32	3023	9518	6	30′
40′	6521	25	7009	31	2991	9512	7	20′
50′	6546	24	7040	32	2960	9505	6	10′
27° 0′	$\bar{1}$.6570	25	$\bar{1}$.7072	31	0.2928	$\bar{1}$.9499	7	0′ 63°
10′	6595	25	7103	31	2897	9492	6	50′
20′	6620	24	7134	31	2866	9486	7	40′
30′	6644	24	7165	31	2835	9479	6	30′
40′	6668	24	7196	30	2804	9473	7	20′
50′	6692	24	7226	31	2774	9466	7	10′
28° 0′	$\bar{1}$.6716	24	$\bar{1}$.7257	30	0.2743	$\bar{1}$.9459	6	0′ 62°
10′	6740	23	7287	30	2713	9453	7	50′
20′	6763	24	7317	31	2683	9446	7	40′
30′	6787	23	7348	30	2652	9439	7	30′
40′	6810	23	7378	30	2622	9432	7	20′
50′	6833	23	7408	30	2592	9425	7	10′
29° 0′	$\bar{1}$.6856	22	$\bar{1}$.7438	29	0.2562	$\bar{1}$.9418	7	0′ 61°
10′	6878	23	7467	30	2533	9411	7	50′
20′	6901	22	7497	29	2503	9404	7	40′
30′	6923	23	7526	30	2474	9397	7	30′
40′	6946	22	7556	29	2444	9390	7	20′
50′	6968	22	7585	29	2415	9383	8	10′
30° 0′	$\bar{1}$.6990	22	$\bar{1}$.7614	30	0.2386	$\bar{1}$.9375	7	0′ 60°
10′	7012	21	7644	29	2356	9368	7	50′
20′	7033	22	7673	28	2327	9361	8	40′
30′	7055	21	7701	29	2299	9353	7	30′
40′	7076	21	7730	29	2270	9346	8	20′
50′	7097	21	7759	29	2241	9338	7	10′
31° 0′	$\bar{1}$.7118	21	$\bar{1}$.7788	28	0.2212	$\bar{1}$.9331	8	0′ 59°
10′	7139	21	7816	29	2184	9323	8	50′
20′	7160	21	7845	28	2155	9315	7	40′
30′	7181	20	7873	29	2127	9308	8	30′
40′	7201	21	7902	28	2098	9300	8	20′
50′	7222	20	7930	28	2070	9292	8	10′
32° 0′	$\bar{1}$.7242		$\bar{1}$.7958		0.2042	$\bar{1}$.9284		0′ 58°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角

三角函數ノ對數表（五）

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	
32° 0′	$\bar{1}.7242$		$\bar{1}.7958$		0.2042	$\bar{1}.9284$		0′ 58°
10′	7262	20	7986	28	2014	9276	8	50′
20′	7282	20	8014	28	1986	9268	8	40′
30′	7302	20	8042	28	1958	9260	8	30′
40′	7322	20	8070	28	1930	9252	8	20′
50′	7342	20	8097	27	1903	9544	8	10′
33° 0′	$\bar{1}.7361$	19	$\bar{1}.8125$	28	0.1875	$\bar{1}.9236$	8	0′ 57°
10′	7380	19	8153	28	1847	9228	8	50′
20′	7400	20	8180	27	1820	9219	9	40′
30′	7419	19	8208	28	1792	9211	8	30′
40′	7438	19	8235	27	1765	9203	8	20′
50′	7457	19	8263	28	1737	9194	9	10′
34° 0′	$\bar{1}.7476$	19	$\bar{1}.8290$	27	0.1710	$\bar{1}.9186$	8	0′ 56°
10′	7494	18	8317	27	1683	9177	9	50′
20′	7513	19	8344	27	1656	9169	8	40′
30′	7531	18	8371	27	1629	9160	9	30′
40′	7550	19	8398	27	1602	9151	9	20′
50′	7568	18	8425	27	1575	9142	9	10′
35° 0′	$\bar{1}.7586$	18	$\bar{1}.8452$	27	0.1548	$\bar{1}.9134$	8	0′ 55°
10′	7604	18	8479	27	1521	9125	9	50′
20′	7622	18	8506	27	1494	9116	9	40′
30′	7640	18	8533	27	1467	9107	9	30′
40′	7657	17	8559	26	1441	9098	9	20′
50′	7675	18	8586	27	1414	9089	9	10′
36° 0′	$\bar{1}.7692$	17	$\bar{1}.8613$	27	0.1387	$\bar{1}.9080$	9	0′ 54°
10′	7710	18	8639	26	1361	9070	10	50′
20′	7727	17	8666	27	1334	9061	9	40′
30′	7744	17	8692	26	1308	9052	9	30′
40′	7761	17	8718	26	1282	9042	10	20′
50′	7778	17	8745	27	1255	9033	9	10′
37° 0′	$\bar{1}.7795$	17	$\bar{1}.8771$	26	0.1229	$\bar{1}.9023$	10	0′ 53°
10′	7811	16	8797	26	1203	9014	9	50′
20′	7828	17	8824	27	1176	9004	10	40′
30′	7844	16	8850	26	1150	8995	9	30′
40′	7861	17	8876	26	1124	8985	10	20′
50′	7877	16	8902	26	1098	8975	10	10′
38° 0′	$\bar{1}.7893$	16	$\bar{1}.8928$	26	0.1072	$\bar{1}.8965$	10	0′ 52°
10′	7910	17	8954	26	1046	8955	10	50′
20′	7926	16	8980	26	1020	8945	10	40′
30′	7941	15	9006	26	0994	8935	10	30′
40′	7957	16	9032	26	0968	8925	10	20′
50′	7973	16	9058	26	0942	8915	10	10′
39° 0′	$\bar{1}.7989$	16	$\bar{1}.9084$	26	0.0916	$\bar{1}.8905$	10	0′ 51°
10′	8004	15	9110	26	0890	8895	10	50′
20′	8020	16	9135	25	0865	8884	11	40′
30′	8035	15	9161	26	0839	8874	10	30′
40′	8050	15	9187	26	0813	8864	10	20′
50′	8066	16	9212	25	0788	8853	11	10′
40° 0′	$\bar{1}.8081$	15	$\bar{1}.9238$	26	0.0762	$\bar{1}.8843$	10	0′ 50°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角

三角函數ノ對數表（六）

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	log cos	差	
40° 0′	$\bar{1}.8081$		$\bar{1}.9238$		0.0762	$\bar{1}.8843$		0′ 50°
10′	8096	15	9264	26	0736	8832	11	50′
20′	8111	15	9289	25	0711	8821	11	40′
30′	8125	14	9315	26	0685	8810	11	30′
40′	8140	15	9341	26	0659	8800	10	20′
50′	8155	15	9366	25	0634	8789	11	10′
41° 0′	$\bar{1}.8169$	14	$\bar{1}.9392$	26	0.0608	$\bar{1}.8778$	11	0′ 49°
10′	8184	15	9417	25	0583	8767	11	50′
20′	8198	14	9443	26	0557	8756	11	40′
30′	8213	15	9468	25	0532	8745	11	30′
40′	8227	14	9494	26	0506	8733	12	20′
50′	8241	14	9519	25	0481	8722	11	10′
42° 0′	$\bar{1}.8255$	14	$\bar{1}.9544$	25	0.0456	$\bar{1}.8711$	11	0′ 48°
10′	8269	14	9570	26	0430	8699	12	50′
20′	8283	14	9595	25	0405	8688	11	40′
30′	8297	14	9621	26	0379	8676	12	30′
40′	8311	14	9646	25	0354	8665	11	20′
50′	8324	13	9671	25	0329	8653	12	10′
43° 0′	$\bar{1}.8338$	14	$\bar{1}.9697$	26	0.0303	$\bar{1}.8641$	12	0′ 47°
10′	8351	13	9722	25	0278	8629	12	50′
20′	8365	14	9747	25	0253	8618	11	40′
30′	8378	13	9773	26	0227	8606	12	30′
40′	8391	13	9798	25	0202	8594	12	20′
50′	8405	14	9823	25	0177	8582	12	10′
44° 0′	$\bar{1}.8418$	13	$\bar{1}.9848$	25	0.0152	$\bar{1}.8569$	13	0′ 46°
10′	8431	13	9874	26	0126	8557	12	50′
20′	8444	13	9899	25	0101	8545	12	40′
30′	8457	13	9924	25	0076	8532	13	30′
40′	8469	12	9949	25	0051	8520	12	20′
50′	8482	13	9975	26	0025	8507	13	10′
45° 0′	$\bar{1}.8495$	13	0.0000	25	0.0000	$\bar{1}.8495$	12	0′ 45°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	log sin	差	角

數ノ對數表（一）

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	.0374	40
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	37
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	33
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	31
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	29
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	27
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	25
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	24
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	23
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	21
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	18
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	17
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	.4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	14
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	13
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	12
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8

比例部分（二）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	45.0
51	5.1	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6	35.7	40.8	45.9
52	5.2	10.4	15.6	20.8	26.0	31.2	36.4	41.6	46.8
53	5.3	10.6	15.9	21.2	26.5	31.8	37.1	42.4	47.7
54	5.4	10.8	16.2	21.6	27.0	32.4	37.8	43.2	48.6
55	5.5	11.0	16.5	22.0	27.5	33.0	38.5	44.0	49.5
56	5.6	11.2	16.8	22.4	28.0	33.6	39.2	44.8	50.4
57	5.7	11.4	17.1	22.8	28.5	34.2	39.9	45.6	51.3
58	5.8	11.6	17.4	23.2	29.0	34.8	40.6	46.4	52.2
59	5.9	11.8	17.7	23.6	29.5	35.4	41.3	47.2	53.1
60	6.0	12.0	18.0	24.0	30.0	36.0	42.0	48.0	54.0
61	6.1	12.2	18.3	24.4	30.5	36.6	42.7	48.8	54.9
62	6.2	12.4	18.6	24.8	31.0	37.2	43.4	49.6	55.8
63	6.3	12.6	18.9	25.2	31.5	37.8	44.1	50.4	56.7
64	6.4	12.8	19.2	25.6	32.0	38.4	44.8	51.2	57.6
65	6.5	13.0	19.5	26.0	32.5	39.0	45.5	52.0	58.5
66	6.6	13.2	19.8	26.4	33.0	39.6	46.2	52.8	59.4
67	6.7	13.4	20.1	26.8	33.5	40.2	46.9	53.6	60.3
68	6.8	13.6	20.4	27.2	34.0	40.8	47.6	54.4	61.2
69	6.9	13.8	20.7	27.6	34.5	41.4	48.3	55.2	62.1
70	7.0	14.0	21.0	28.0	35.0	42.0	49.0	56.0	63.0
71	7.1	14.2	21.3	28.4	35.5	42.6	49.7	56.8	63.9
72	7.2	14.4	21.6	28.8	36.0	43.2	50.4	57.6	64.8
73	7.3	14.6	21.9	29.2	36.5	43.8	51.1	58.4	65.7
74	7.4	14.8	22.2	29.6	37.0	44.4	51.8	59.2	66.6
75	7.5	15.0	22.5	30.0	37.5	45.0	52.5	60.0	67.5
76	7.6	15.2	22.8	30.4	38.0	45.6	53.2	60.8	68.4
77	7.7	15.4	23.1	30.8	38.5	46.2	53.9	61.6	69.3
78	7.8	15.6	23.4	31.2	39.0	46.8	54.6	62.4	70.2
79	7.9	15.8	23.7	31.6	39.5	47.4	55.3	63.2	71.1
80	8.0	16.0	24.0	32.0	40.0	48.0	56.0	64.0	72.0
81	8.1	16.2	24.3	32.4	40.5	48.6	56.7	64.8	72.9
82	8.2	16.4	24.6	32.8	41.0	49.2	57.4	65.6	73.8
83	8.3	16.6	24.9	33.2	41.5	49.8	58.1	66.4	74.7
84	8.4	16.8	25.2	33.6	42.0	50.4	58.8	67.2	75.6
85	8.5	17.0	25.5	34.0	42.5	51.0	59.5	68.0	76.5
86	8.6	17.2	25.8	34.4	43.0	51.6	60.2	68.8	77.4
87	8.7	17.4	26.1	34.8	43.5	52.2	60.9	69.6	78.3
88	8.8	17.6	26.4	35.2	44.0	52.8	61.6	70.4	79.2
89	8.9	17.8	26.7	35.6	44.5	53.4	62.3	71.2	80.1

數ノ對數表(二)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	8
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	8
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7895	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	7
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	6
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	6
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4

比例部分(一)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
11	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.6	7.7	8.8	9.9
12	1.2	2.4	3.6	4.8	6.0	7.2	8.4	9.6	10.8
13	1.3	2.6	3.9	5.2	6.5	7.8	9.1	10.4	11.7
14	1.4	2.8	4.2	5.6	7.0	8.4	9.8	11.2	12.6
15	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	9.0	10.5	12.0	13.5
16	1.6	3.2	4.8	6.4	8.0	9.6	11.2	12.8	14.4
17	1.7	3.4	5.1	6.8	8.5	10.2	11.9	13.6	15.3
18	1.8	3.6	5.4	7.2	9.0	10.8	12.6	14.4	16.2
19	1.9	3.8	5.7	7.6	9.5	11.4	13.3	15.2	17.1
20	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0
21	2.1	4.2	6.3	8.4	10.5	12.6	14.7	16.8	18.9
22	2.2	4.4	6.6	8.8	11.0	13.2	15.4	17.6	19.8
23	2.3	4.6	6.9	9.2	11.5	13.8	16.1	18.4	20.7
24	2.4	4.8	7.2	9.6	12.0	14.4	16.8	19.2	21.6
25	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0	22.5
26	2.6	5.2	7.8	10.4	13.0	15.6	18.2	20.8	23.4
27	2.7	5.4	8.1	10.8	13.5	16.2	18.9	21.6	24.3
28	2.8	5.6	8.4	11.2	14.0	16.8	19.6	22.4	25.2
29	2.9	5.8	8.7	11.6	14.5	17.4	20.3	23.2	26.1
30	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0	21.0	24.0	27.0
31	3.1	6.2	9.3	12.4	15.5	18.6	21.7	24.8	27.9
32	3.2	6.4	9.6	12.8	16.0	19.2	22.4	25.6	28.8
33	3.3	6.6	9.9	13.2	16.5	19.8	23.1	26.4	29.7
34	3.4	6.8	10.2	13.6	17.0	20.4	23.8	27.2	30.6
35	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5	21.0	24.5	28.0	31.5
36	3.6	7.2	10.8	14.4	18.0	21.6	25.2	28.8	32.4
37	3.7	7.4	11.1	14.8	18.5	22.2	25.9	29.6	33.3
38	3.8	7.6	11.4	15.2	19.0	22.8	26.6	30.4	34.2
39	3.9	7.8	11.7	15.6	19.5	23.4	27.3	31.2	35.1
40	4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	24.0	28.0	32.0	36.0
41	4.1	8.2	12.3	16.4	20.5	24.6	28.7	32.8	36.9
42	4.2	8.4	12.6	16.8	21.0	25.2	29.4	33.6	37.8
43	4.3	8.6	12.9	17.2	21.5	25.8	30.1	34.4	38.7
44	4.4	8.8	13.2	17.6	22.0	26.4	30.8	35.2	39.6
45	4.5	9.0	13.5	18.0	22.5	27.0	31.5	36.0	40.5
46	4.6	9.2	13.8	18.4	23.0	27.6	32.2	36.8	41.4
47	4.7	9.4	14.1	18.8	23.5	28.2	32.9	37.6	42.3
48	4.8	9.6	14.4	19.2	24.0	28.8	33.6	38.4	43.2
49	4.9	9.8	14.7	19.6	24.5	29.4	34.3	39.2	44.1

比例部分(二)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	45.0
51	5.1	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6	35.7	40.8	45.9
52	5.2	10.4	15.6	20.8	26.0	31.2	36.4	41.6	46.8
53	5.3	10.6	15.9	21.2	26.5	31.8	37.1	42.4	47.7
54	5.4	10.8	16.2	21.6	27.0	32.4	37.8	43.2	48.6
55	5.5	11.0	16.5	22.0	27.5	33.0	38.5	44.0	49.5
56	5.6	11.2	16.8	22.4	28.0	33.6	39.2	44.8	50.4
57	5.7	11.4	17.1	22.8	28.5	34.2	39.9	45.6	51.3
58	5.8	11.6	17.4	23.2	29.0	34.8	40.6	46.4	52.2
59	5.9	11.8	17.7	23.6	29.5	35.4	41.3	47.2	53.1
60	6.0	12.0	18.0	24.0	30.0	36.0	42.0	48.0	54.0
61	6.1	12.2	18.3	24.4	30.5	36.6	42.7	48.8	54.9
62	6.2	12.4	18.6	24.8	31.0	37.2	43.4	49.6	55.8
63	6.3	12.6	18.9	25.2	31.5	37.8	44.1	50.4	56.7
64	6.4	12.8	19.2	25.6	32.0	38.4	44.8	51.2	57.6
65	6.5	13.0	19.5	26.0	32.5	39.0	45.5	52.0	58.5
66	6.6	13.2	19.8	26.4	33.0	39.6	46.2	52.8	59.4
67	6.7	13.4	20.1	26.8	33.5	40.2	46.9	53.6	60.3
68	6.8	13.6	20.4	27.2	34.0	40.8	47.6	54.4	61.2
69	6.9	13.8	20.7	27.6	34.5	41.4	48.3	55.2	62.1
70	7.0	14.0	21.0	28.0	35.0	42.0	49.0	56.0	63.0
71	7.1	14.2	21.3	28.4	35.5	42.6	49.7	56.8	63.9
72	7.2	14.4	21.6	28.8	36.0	43.2	50.4	57.6	64.8
73	7.3	14.6	21.9	29.2	36.5	43.8	51.1	58.4	65.7
74	7.4	14.8	22.2	29.6	37.0	44.4	51.8	59.2	66.6
75	7.5	15.0	22.5	30.0	37.5	45.0	52.5	60.0	67.5
76	7.6	15.2	22.8	30.4	38.0	45.6	53.2	60.8	68.4
77	7.7	15.4	23.1	30.8	38.5	46.2	53.9	61.6	69.3
78	7.8	15.6	23.4	31.2	39.0	46.8	54.6	62.4	70.2
79	7.9	15.8	23.7	31.6	39.5	47.4	55.3	63.2	71.1
80	8.0	16.0	24.0	32.0	40.0	48.0	56.0	64.0	72.0
81	8.1	16.2	24.3	32.4	40.5	48.6	56.7	64.8	72.9
82	8.2	16.4	24.6	32.8	41.0	49.2	57.4	65.6	73.8
83	8.3	16.6	24.9	33.2	41.5	49.8	58.1	66.4	74.7
84	8.4	16.8	25.2	33.6	42.0	50.4	58.8	67.2	75.6
85	8.5	17.0	25.5	34.0	42.5	51.0	59.5	68.0	76.5
86	8.6	17.2	25.8	34.4	43.0	51.6	60.2	68.8	77.4
87	8.7	17.4	26.1	34.8	43.5	52.2	60.9	69.6	78.3
88	8.8	17.6	26.4	35.2	44.0	52.8	61.6	70.4	79.2
89	8.9	17.8	26.7	35.6	44.5	53.4	62.3	71.2	80.1

新　式

幾何三角法教科書

[四・五學年用]

定價　金壹圓

昭和十一年　十　月　五　日印　　刷
昭和十一年　十　月　十　日發　　行
昭和十一年　十　月二十八日訂正再版印刷
昭和十一年十一月　一　日訂正再版發行

檢印

著作者　高木貞治

東京市小石川區小日向水道町八十四番地
發行者　株式會社東京開成館
代表者　松本繁吉

東京市牛込區市谷加賀町一丁目十二番地
印刷者　寺井藤左工門

東京市日本橋區吳服橋二丁目五番地
販賣所　林平書店

大阪市東區北久寶寺町心齋橋筋角
販賣所　三木佐助

發行所　株式會社東京開成館
[振替口座] 東京五三二二番

大日本印刷株式會社印刷