再訂

新實業幾何學教科書

理學博士 松本鐵三 編

らふあえる筆 數學者ノ群「あてねノ學校」

京都帝國大學理學部敎授

理學博士 松本敏三 編

再訂

新實業幾何學敎科書

文部省檢定濟

昭和十二年一月十三日 實業學校數學科

東京 冨山房 神田

再訂版序

本書ガソノ初版發行以來ノ數年間ニ於テ,廣ク江湖ノ歡迎ニ浴シ,且ツ多數ノ學校ニ採用セラレタルハ,編者ノ大イニ欣幸トスルトコロデアル。

今回編者ハ本書ノ姉妹篇タル新實業算術教科書及ビ新實業代數學教科書ノ再訂版ヲ公ニシタ。從ツテ本書モ亦再訂ヲ必要トスル。今回ノ改訂ニ當ツテハ,印刷及ビ挿圖ノ整美ニ努メ,內容ニ關シテハ說述ノ改良,問題ノ取捨等尠クナイ。但シ本書ノ仕組ハ初版以來カハル所ハナイ。內容ノ取捨ニ就イテハ敎授者ノ自由手腕ニ信頼スルモノデアル。

大方諸彥ノ高評ヲ希フ。

昭和十一年十月

編者識

初版緒言

本書ハ諸種ノ實業學校程度ノ幾何學教科書トシテ編纂シタモノデアル。

實業學校ニ於テ幾何學ヲ課スル理由ハ勿論ソノ應用ニアル。然シ一口ニ應用トイツテモ,ソレハ頭腦ニヨルコトデアル。頭腦ガ綿密デナケレバ何事モ出來ルモノデナイ。緻密ニシテ嚴格ナル推理力ハ何レノ場合ニ於テモ最モ必要デアル。コノ嚴密ナル推理ノ力ヲ養成スルニハ幾何學ヲ以テ第一トスル。コノ考ヨリシテ編者ハ最モ嚴密ニ各定理ヲ講述シタ。然シ嚴密ナルガ爲メニ理解ノ難澁ナルハ編者ノ最モ嫌フ所デアル。編者ガ出來ル得ル限リ平易ヲ旨トシタノハコノ理由ニヨルノデアル。更ニ編者ハソノ結果ノ應用ニ留意シ,或ハ明晰ナル圖ヲ添ヘ又ハ名畫ヲ挿入シテ,如何ニ幾何學ガ重要ニシテ興味深キカヲ示シタ。

細部ニ入ツテ語ルナラバ,本書ノ緒論ニ於テ線分及ビ角ニ關スル初等知識ヲ授ケ,旁ラ幾何學ノ歴史及ビ目的ヲ話シ,次デ定理,系,公理等ヲ說明シタ。初學ノ生徒ハ常識ト學問トヲ區別スルコト困難ナルタメ,幾何學ノ最初ハ難解デアル。コノ第一章緒論ハ幾何學入門トモ稱ス可ク,ヤガテ嚴密ナル推論ヲナス基礎ヲ作ルモノトシテ役立ツコトヲ希望スル。又コノ緒論ニ於テハ線分及ビ

角ガ量ナルコトヲ充分了解スルヲ要スル。

平行線ハコレヲ幾何學ノ初メノ部分ニ教授シテモヨイガ,サウスルト平行線ガ必然的ナ觀念ナルカノ如キ感ヲ與ヘ,他日非ゆうーくりっど幾何學等ノ了解ヲ害フカヲ虞レル。又作圖題モ後章ニ於テ纒メテ教授スルコトトシタ。作圖題ヲ一纒ニセズシテコレヲ隨所ニ揭ゲルコトハ作圖ニ對スル嚴正ナル理解ヲ與ヘ難キカヲ虞レル。圖ヲ畫クコトガ作圖デハナイ。作圖題トハ一定ノ法ノ拘束ノ下ニアルノデアル。未ダ充分幾何學的知識ヲ習得シナイ以前ニ於テ,ヨクコノ法ノ拘束ヲ感知スルコトガ出來ルヤ否ヤハ,甚ダ疑問トセザルヲ得ナイ。

本書ハ續編ニ於テ立體幾何學及ビ三角法初步ヲ授ケテアル。コノ續編ハ授業時間數ニ應ジテソノ一部又ハ全部ヲ削除シテモヨイ。又立體幾何學ヲ削除シテ三角法ヲ教ヘテモ勿論差支ナイ。

編者ハ中等數學教科書ヲ編纂シテ種々ナル研究ヲナシ,今茲ニ又實業教科書ノ編纂ニ及ンダノデアル。然シ編者ノ實業教科書ハ決シテ中等教科書ノ頁數ヲ短縮シタモノデナイ。全ク新規ニ統制ヲ持ツタ著書デアル。

筆ヲ擱クニ當リ編者ハ實地教授ノ任ニアル大方諸彥ノ高評ト忠言トヲ切望スルモノデアル。

昭和五年十月

編者識

目　次

續　編

再　訂

新實業幾何學教科書

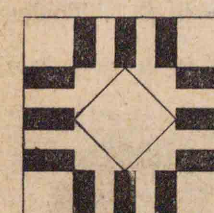
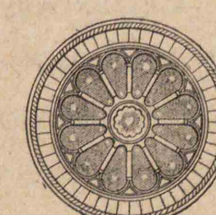
全

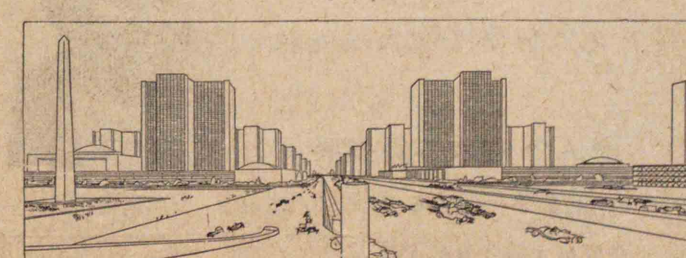
平面幾何學

第一章　緒　論

1.　幾何學

矩形□,圓○,平行線＝等ハ幾何學的圖形デアル。斯様ナ圖形ハ澤山アル。次ニ示スモノハ幾何學的圖形ヲ應用シタ圖デアル。

幾何學ニ於テハ斯様ナ圖形ニツイテソノ構成法ヤ計算又ハソレ等ノ性質ヲ研究スル。

幾何學ノ發達 幾何學ハぎりしやカラ吾々ニ傳ハツタモノデ,幾何學ノ原語 Geometry ハ二ツノぎりしや語 ge-metron ヨリ來リ,「土地」ト「計ル」ノ意味デアル。ソシテ幾何學ハぎりしやヘハえじぷとカラ傳ハツテ來タモノデアル。えじぷとノぴらみっどノ壁ニハ澤山ナ幾何學的圖案ガアル。えじぷとデハないる河ガ年々氾濫シタノデ,ソノ度毎ニ土地ヲ測量シナケレバナラナカツタ。コレニヨツテ幾何學ガえじぷとニ發達シタノデアルト傳ヘラレテキル。

ぎりしやノ七哲ノ一人デアル**たーれす** (Thales, 640—546 B.C.*) ハえじぷとヲ旅行シテ種々ノ修業ヲナシ,中ニモ幾何學ニ於ケル力ハ彼ノ教師達ヲ驚カシタトイフ。ぎりしやニ歸ツテカラ彼ハ旅行中修得シタ幾何學ヲ友人達ニ教ヘタ。

たーれす

ぎりしや人ハ漸次必要ト共ニ幾何學ソレ自身ニ興味ヲモツヤ

* B.C. ハ西暦紀元前ノ意味デアル。

ウェナリ,たーれすノ時代カラ三百年ヲ經タ頃ニハ幾何學ハぎりしやニ於テ立派ナ學問トナツテキタ。

ぴたごらす (Pythagoras, 約580—約500 B.C.) ヤ**ぷらとー** (Plato, 429—348 B.C.) ハ偉大ナ學者デアツタ。ぷらとーハ自分ノ學校ノ入口ニ「幾何學ヲ知ラザルモノハ入ルヲ許サズ」ト掲示シテオイタ。彼ハ又神ハ永遠ニ幾何學スル」トイフ程信ジテキタ。コノ時代ニ種々ノ教科書ガ書カレタノデアルガ標準的ナモノヲ書イタノハ**ゆーくりっど**(Euclid, 約330 B.C.生)デアツタ。コノゆーくりっどノ書イタ教科書ハ誠ニ立派ナモノデ,ソノ後2200年ノ久シイ間教科書トシテ用ヒラレ,種々ナ學者ニヨツテ改良進歩ヲナシ遂ニ今日ニ到ツタ。

ぴたごらす

ぷらとー

ゆーくりっど

吾々ガ學ブ幾何學ハゆーくりっどカラ傳ハツタモノデアツテ,一

名ゆーくりっど**幾何學**トモイフ。

2. 立體・面・線・點

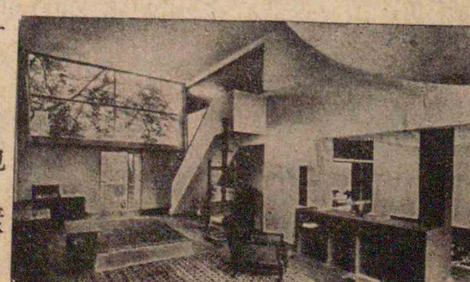
物體ヲソノ**形**,**大イサ**,**位置**ダケニツイテ考ヘルトキ,ソレヲ**立體**トイフ。立體ノ限界ヲ**面**トイフ。面ノ限界又ハ二面ガ出會フ所ヲ**線**トイフ。線ノ端又ハ二線ノ出會フ所ヲ**點**トイフ。

點ハ位置バカリ,線ハ位置ト長サバカリ,面ハ大イサト位置バカリヲモツ。

然シ點ヲ書キ表ハスニハ •,× ヲ用ヒ,コレニA, B等ノ文字ヲツケ**點A**,**點B**等ト呼ブ。

3. 直線・平面

細イ絹絲ヲ張ツタヤウナ眞直（マツスグ）ナ線ヲ**直線**トイフ。コレヲ嚴格ニイヘバ「直線トハ長サガアツテ大イサガナク,且ツソノ何レノ部分ヲ他ノ部分ニ如何樣ニ重ネテモ全ク



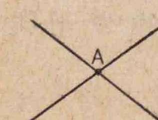
合スルモノ」デアル。

直線ハ通常———ヲ以テ表ハシ,ソレヲ畫クニハ定規ヲ用ヒル。

直線デナイ線ヲスベテ**曲線**トイフ。

靜カナ水面ノヤウナ平ラナ面ヲ**平面**トイフ。コレヲ嚴格ニイヘバ「平面トハ廣サガアツテ厚サガナク,且ツソノ何レノ部分ヲ他ノ部分ニ如何樣ニ(ソノマヽ又ハ裏返シテ)重ネテモ全ク合スルモノ」デアル。

平面ニハ廣サガアルカラソノ上ニ點ヲトルコトガ出來,且ツ平ラデアルカラ直線ヲ畫クコトガ出來ル。又ソノ直線ヲ平面カラ離サズニ如何樣ニデモ動カスコトガ出來ル。



一平面上ノ二直線ガ切リ合フ所ハ點デアル。コレヲソノ二直線ノ**交點**トイヒ,二直線ハソノ點デ**交ル**トイフ。

平面デナイ面ヲスベテ**曲面**トイフ。

問1. 一ツノ平面上ノ二點ヲ過ル直線ヲ引クトソノ直線ハソノ平面ニ密着スルカ。

問2. 大工ガ板ヲ削ルトキ,指金（サシガネ）ノ緣ヲアテヽ透

シテ見ルノハ何故カ。

4. 圖形

立體,面,線,點又ハソレ等ノ集合ヲ**圖形**トイフ。一平面上ノ圖形ヲ**平面圖形**トイヒ,特ニソレガ直線バカリカラ出來テヰルトキハ**直線圖形**トイフ。

圖形ハソノ位置ヲカヘテモカハラナイ。

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ重ネタトキニ,ソノ二ツノ圖形ガ全ク合スルナラバ,コレ等ハ**合同**又ハ**全等**デアルトイフ。

幾何學トハ圖形ノ性質ヲ論ズル學科デアル。特ニ**平面幾何學**ニ於テハ平面圖形ノ性質ヲ論ジ,**立體幾何學**ニ於テハ立體ガ干與スル圖形ノ性質ヲ論ズル。

5. 直線ノ種類

二點ヲ過ル直線ハ一ツハ必ズアル,ソシテ唯一ツニ限ル。

コレハ自明ノ理デアルガ,試ミニ紙面上ニ二點ヲ取リ,定規ヲアテヽソレ等ヲ過ル直線ヲ引イテ見ルニ,如何ニシテモ一本シカ引キ得ナイ。

上ノコトヲ**二點ハ一直線ヲ決定スル**トイフ。

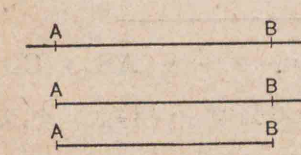
コレヨリ次ノコトガワカル。

(i) 二點ヲ共有スル二直線ハ合シテ一直線トナル。

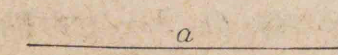
(ii) 二直線ハ一點ヨリ多クノ點デ交ラナイ。

直線ハ双方ヘ限リナク長イモノデアル。因テ**平面上ニ於テ一直線ノ兩側ニ各ゝ一點ヲトルト,コレ等ヲ過ル直線ハ必ズ初メノ直線ト交ル。**

直線ハ通常ソノ上ニ任意ニ二點A,Bヲトリ**直線AB**ト呼ブ。直線上ニ一點ヲトリソノ一方ダケヲ考ヘルトキハ,コレヲ**半直線**トイフ。半直線ABノ場合ニハ通常Aヲソノ一端ノ點トスル。直線上ニ二點ヲトリ,ソノ間ノ部分ダケヲ考ヘルトキハ,**線分**又ハ**有限直線**トイフ。コレヲ表ハスニハソノ兩端ノ點A,Bヲ用ヒ**AB**又ハ$\overline{\mathbf{AB}}$ト書キ,**線分AB**ト呼ブ。



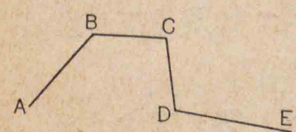
二點ヲ兩端トスル線分ヲ引クコトヲ,ソノ**二點ヲ結ブ**トイフ。



直線及ビ線分ハ時トシテハ唯一ツノ文字例ヘバ

a デ表ハシ,夫々**直線 a**,**線分 a** トイフコトガアル。

半直線又ハ線分ハ直線ノ一部分デアル。ソシテソノ殘リノ部分ヲソノ半直線又ハ線分ノ**延長**トイフ。



線分ガ幾ツカ連ナツテ出來タモノヲ**折線**トイヒ,線分ノ各端ニツケタ文字ヲ連ネテ呼ブ。例ヘバ**折線** ABCDE ノヤウデアル。

6. 距離・中點

二點間ノ距離トハ,ソノ二點ヲ結ブ線分ノ長サノコトデアル。

二ツノ線分 AB, CD ガ與ヘラレタトキ, AB ト CD トガ合同ナラバ,コレ等ノ線分ノ長サハ相等シク,又 A, B 間ノ距離ハ C, D 間ノ距離ニ等シイ。コレヲ

AB=CD トカク。

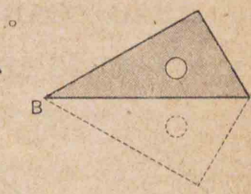
モシ或一ツノ線分ノ長サヲ**長サノ單位**ニトルト,任意ノ線分ノ長サヲ計ルコトガ出來ル。

長サノ基本單位ハ **1めーとる**デアル。

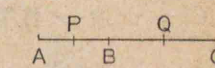
線分 AB 上ニ一點 M ヲトリ, AM=MB ナルトキ,M ヲ線分 AB ノ**中點**又ハ**二等分點**トイフ。

線分ノ中點ハ唯一ツヨリナイ。

問 1. 定規ノ正否ヲ驗スニハドウスレバヨイカ。

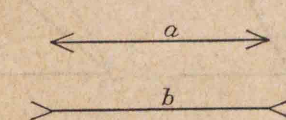


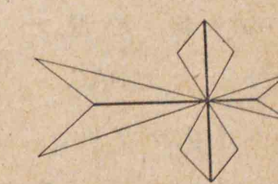
問 2. 或直線ノ一部分ヲ他ノ直線上ニ重ネルト,コレ等ノ二直線ハ全ク合スルトイフ。何故カ。



問 3. 一直線上ニ三點 A, B, C ガ圖ノヤウナ順ニアツテ AB=a糎, BC=b糎 ナルトキ, AB ノ中點 P ト BC ノ中點 Q トノ距離如何。

問 4. 次ノ兩圖ニ於テ太イ線分ノ長サハ夫々相等シイカ。

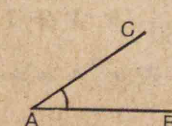




7. 角

一點カラ引イタ二ツノ半直線ハ**角ヲナス**又ハ**角ヲ夾ム**トイフ。

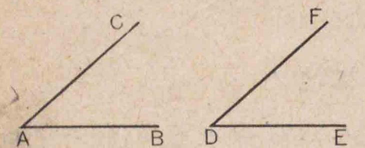
角ヲナス二直線ヲ角ノ**邊**,二邊ノ交點ヲ角ノ**頂點**トイフ。



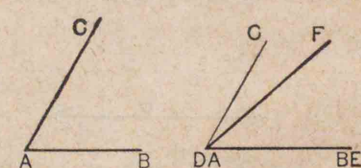
圖ニ於テ A ハ角ノ頂點, AB, AC ハソノ邊デアル。コノ角ヲ表ハス

ニハ ∠BAC, ∠CAB 又ハ ∠A ト書キ,∠ヲ角ト讀ム。

二ツノ角BAC, EDFガ與ヘラレタトキ,ソレ等ノ頂點及ビ二邊ヲ夫々重ネ得ルトキ,コノ二ツノ角ノ大イサハ相等シイトイヒ,コレヲ ∠BAC＝∠EDF ト書ク。

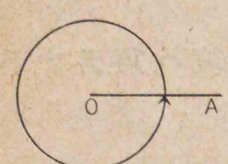


モシ ∠BAC ノ大イサヲ**角ノ單位**ニトルト,任意ノ角ノ大イサヲ計ルコトガ出來ル。又 ∠BAC, ∠EDF ガ與ヘラレタトキ,次圖ノヤウニAヲDニ,邊ABヲ邊DEニ重ネ,二ツノ角ヲDEノ同ジ側ニ倒ストキ,ACガ細イ線ノ位置ヲ取ツタナラバ,∠BAC ハ ∠EDF ヨリ大デアル。



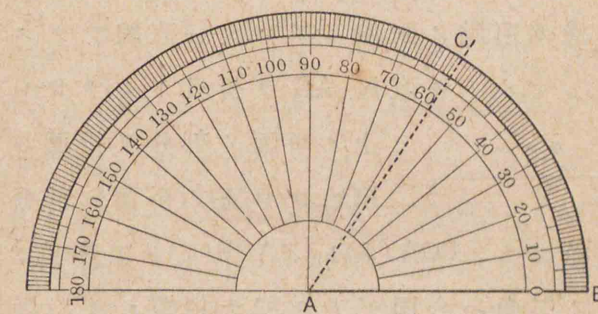
角ノ基本單位ハ**1度**デアル。

今半直線OAガOヲ固定シテ矢デ示スヤウニ一周シタトキ,コノ角ヲ**一周角**トイヒ,ソノ大イサヲ**360度**トスル。ソノ $\frac{1}{360}$ ノ大イサヲモツ角ハ**1度**デアル。1度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**1分**,1分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**1秒**トイフ。度,分,秒ヲ書キ表ハスニハ夫々°,′,″ヲ數字ノ右肩ニ小サク記ス。

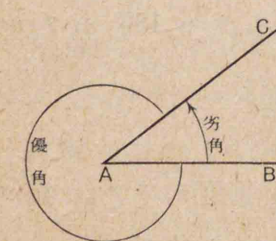


例ヘバ8度3分25秒ヲ 8°3′25″ ト書ク。

角ヲ計ルニハ**分度器**ヲ用ヒル。例ヘバ ∠BAC ヲ計ルニハ分度器ヲ圖ノヤウニ置キ,邊ACニ當ル數ヲ讀メバヨイ。卽チ圖ニ於テハ ∠BAC=57° デアル。



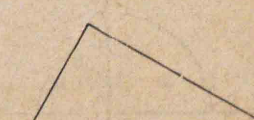
次ニ半直線AB, ACハ圖ノヤウニ二ツノ角ヲナスモノト見ルコトガ出來ル。斯樣ナ二ツノ角ヲ**共軛角**トイヒ,大ナル方ヲ**優角**,小ナル方ヲ**劣角**トイフ。共軛ナ二角ノ和ハ360°デアル。



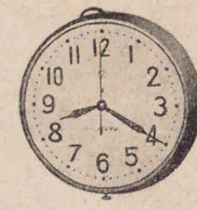
注意 單ニ角トイヘバ通常劣角ヲ指スモノトスル。

問1. 分度器ヲ用ヒテ 30°, 45°, 60°, 135° ノ角ヲ作レ。

問2. 右圖ノ各角ハ何度デアルカ。又ソノ和ヲ求メヨ。

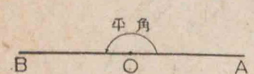


問3.　右ノ時計ノ兩針ハ何度ノ角ヲナスカ。



8.　平角・直角

特別ナ場合トシテ圖ノヤウニ,角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアッテ一直線ヲナスコトガアル。コノトキ直線ABヲ折目トシテソレカラ上ノ平面ノ部分ヲ折返スト,

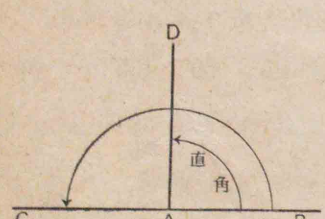


BOAカラ下ノ平面ノ部分ニ重ナル。從ツテ∠BOA(上)ト∠AOB(下)トモ亦重ナル。故ニコノ二角ハ合同デアル,卽チ相等シイ。因テ∠BACハ一周角ノ半分デ,ソノ大イサハ180°デアル。斯樣ナ角ヲ**平角**トイフ。

平角ノ半分ヲ**直角**トイフ。

因テ平角ハ二直角,一周角ハ四直角デアル。從ツテ直角ハソノ大イサガ90°ナル一定ノ角デアル。

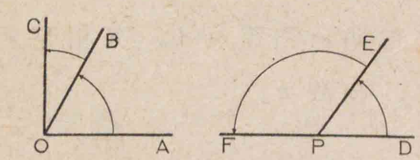
圖ニ於テAハ頂點,AB,ACハ一直線デ∠BADガ∠DACニ等シイトスルト,∠BACハ平角,∠BADト∠DACトハ直角デアル。



幾何學デハ角ノ單位ニ直角ヲ用ヒル。直角ノ記

號ハR∠デアル。

二角ノ和ガ直角ナルトキソノ各角ヲ他ノ角ノ**餘角**トイヒ,又二角ノ和ガ平角ナルトキ,ソノ各角ヲ他ノ角ノ**補角**トイフ。

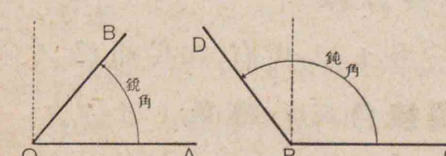


圖ニ於テ∠AOCヲ直角,∠DPFヲ平角トスル。然ルトキハ∠AOBノ餘角ハ∠BOC,∠BOCノ餘角ハ∠AOBデアル。又∠DPEノ補角ハ∠EPF,∠EPFノ補角ハ∠DPEデアル。

直線上ノ一點カラ半直線ヲ引クトキコノ半直線ハ初メノ直線ノ上ニ**立ツ**トイフ。

前圖ニ於テPEハDFノ上ニ立ツテヰル。

直角ヨリ小ナル角ヲ**銳角**,直角ヨリ大デ平角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ。



圖ニ於テ∠AOBハ銳角,∠CPDハ鈍角デアル。

問1.　$\frac{1}{3}$直角,$\frac{2}{5}$直角,$\frac{6}{11}$平角ヲ度,分,秒ニ直セ。

問2.　30°, 45°, 60°ヲ直角ヲ單位トシテ表ハセ。

問 3. 30°, 45°, $\frac{2}{3}$直角ノ夫々ノ餘角ヲイヘ。

問 4. 60°, 直角, $\frac{2}{5}$直角ノ夫々ノ補角ヲイヘ。

問 5. 二ツノ角ノ差ハ 30° デ,コノ二ツノ角ハ互ニ補角デアルトイフ。コノ二ツノ角ヲ求メヨ。

問 6. 相等シイ角ノ餘角ハ相等シイ。又相等シイ角ノ補角ハ相等シイ。何故カ。

9. 定義

嚴密ナ推理デハソレニ用ヒル言葉ガ何ヲ指シ,何ヲ表ハシテキルカヲ一々明瞭ニ述ベテ置クコトガ必要デアル。コノ

用語ノ意味ヲ述ベタモノヲ**定義**トイフ。

例ヘバ上ノ「用語ノ意味ヲ述ベタ……」ハ定義ノ定義デアル。

問 直線,平面,圖形,直角,鋭角,鈍角ノ定義ヲ述ベヨ。

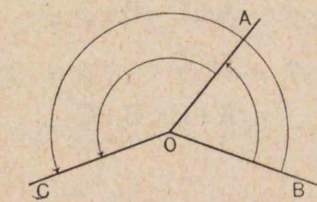
10. 隣接角・二等分線

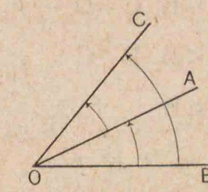
定義 頂點ト一邊トヲ共有シ,共通邊ノ兩側ニアル二角ヲ**隣接角**(又ハ**接角**)トイフ。

共通デナイ二邊ニ夾マレタ角ヲソノ二ツノ隣接角ノ和トイフ。

次頁ノ圖ニ於テ ∠BOA ト ∠AOC ハ互ニ接角デ,

∠BOC ハソノ和デアル。逆ニ ∠BOA ヲ ∠BOC ト ∠AOC トノ差,∠AOC ヲ ∠BOC ト ∠BOA トノ差トイフ。





定義 一ツノ角ヲ二ツノ相等シイ接角ニ分ケル直線ヲ,初メノ角ノ**二等分線**トイフ。

前圖ニ於テ ∠BOA=∠AOC ナラバ, OA ハ ∠BOC ノ二等分線デアル。

角ノ二等分線ハ唯一ツヨリナイ。

11. 公理

嚴密ナ學科ノ推理ノ最モ根本ニハ必ズ説明ノ出來ナイトコロガアル。**何人モコレヲ眞ナリト容認スル**カラ,始メテソノ學科ガ出來上ルノデアル。

定義 説明ハ出來ナイガ,眞ナリト容認スル推理ノ最モ根本トナルモノヲ**公理**トイフ。

公理ニハ**普通公理**ト**幾何公理**トノ二種ガアル。

普通公理ハ量ニ關スル公理デ,幾何公理ハ圖形ニ關スル公理デアル。

普通公理ハ例ヘバ四ツノ量 A, B, C, D ノ間ニ成立

ツトコロノ，

(i) $A=B,\ B=C$ ナラバ $A=C$

(ii) $A=B,\ C=D$ ナラバ $A\pm C=B\pm D$

(iii) $A<B,\ B<C$ ナラバ $A<C$

(iv) $A<B$ ナラバ $A+C<B+C$

ノヤウナモノデアル。

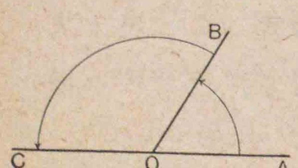
幾何公理ハ前ニ述ベタ「圖形ハソノ位置ヲカヘテモカハラナイ」，「二點ヲ過ル直線ハ一ツハ必ズアル，ソシテ唯一ツニ限ル」，「平面上ニ於テ一ツノ直線ノ兩側ニ各〻一點ヲトルト，コレ等ヲ過ル直線ハ必ズ初メノ直線ト交ル」ノヤウナモノデアル。

12. 定理・系

定義 幾何學ニ於テハ論理的ニ間違ヒナイト知ツタ事柄ヲ**定理**トイフ。

定理(又ハ定義，公理)ヨリスグワカル事柄ヲソノ**系**トイフ。系モ亦定理ノ一種デアル。

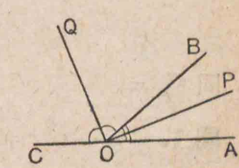
定理 1. 接角ヲナス二ツノ角ノ和ガ二直角ナルトキ，共通デナイ二ツノ邊ハ一直線ヲナス。



接角ヲナシテヰル二ツノ角ヲ $\angle AOB$, $\angle BOC$, トシ，

$\angle AOB+\angle BOC=2R\angle$ トスル。然ルトキハ OA, OC ハ一直線ヲナス。

問 接角ヲナス二ツノ角ノ二等分線ガ直角ヲナストキ，初メノ接角ノ共通デナイ二邊ハ一直線ヲナス。



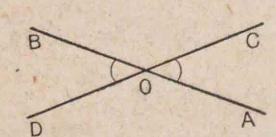
13. 對頂角

定義 二ツノ直線ガ相交ツテナス四ツノ角ノ中，接角デナイ二角ヲ**對頂角**トイフ。

下ノ圖ニ於テ二ツノ直線 AB, CD ガ O デ交ル。ソノトキ $\angle ACC$ ト $\angle BOD$ ハ對頂角，又 $\angle COB$ ト $\angle AOD$ モ對頂角デアル。

定理 2. 對頂角ハ相等シイ。

二ツノ直線AB, CDノ交點ヲOトスル。



然ルトキハ

$\angle AOC=\angle BOD,\ \angle COB=\angle AOD$

デアル。

何トナレバ，OC ハ AB ノ上ニ立ツテヰルカラ

$$\angle AOC+\angle COB=2R\angle$$

又 OB ハ CD ノ上ニ立ツテヰルカラ

$$\angle COB+\angle BOD=2R\angle$$

∴ $\angle AOC+\angle COB=\angle COB+\angle BOD$

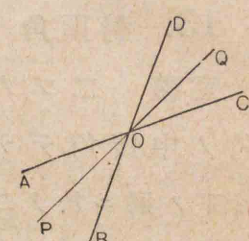
双方カラ$\angle COB$ヲ引クト

$$\angle AOC=\angle BOD$$

同樣ニ $\angle COB=\angle AOD$

問 1. 一ツノ直線 AB 上ノ一點 O カラコノ直線ノ兩側ニ OC, OD ヲ引キ, $\angle AOC=\angle BOD$ ナラシメルトキ, OC, OD ハ一直線ヲナス。

問 2. 一ツノ角ノ二等分線ノ延長ハコノ角ノ對頂角ヲ二等分スル。

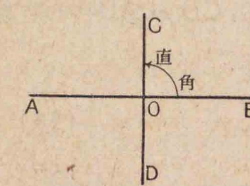


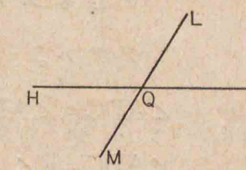
14. 垂線・斜線

定義 二ツノ直線ガ交ツテナス角ノ一ツガ直角ナルトキハ,コノ二ツノ直線ハ互ニ**垂直デアル**トイフ。或ハ二ツノ直線ハ**直交スル**又ハ**直角ニ交ル**トモイフ。ソシテ一方ノ直線ガ他方ノ直線ノ上ニ立ツト考ヘルトキ,前ノ直線ヲ後ノ直線ノ**垂線**トイヒ,ソノ出會フ點ヲ垂線ノ**足**トイフ。

二ツノ直線ガ直角ニ交ラナイトキハ,一方ノ直線ガ他方ノ直線ノ上ニ立ツト考ヘルト

キ,前ノ直線ヲ後ノ直線ノ**斜線**トイヒ,ソノ出會フ點ヲ斜線ノ**足**トイフ。





圖ニ於テ$\angle BOC$ハ直角デ,$\angle KQL$ハ直角デナイトスル。然ルトキハ AB, CD ハ互ニ垂直デ, OC ハ AB ノ垂線, OA ハ CD ノ垂線, O ハ垂線ノ足デアル。次ニ LQ ハ HK ノ斜線, QH ハ LM ノ斜線, Q ハ斜線ノ足デアル。

垂直ノ記號ニハ⊥ヲ用ヒル。上圖ニ於テ **AB⊥CD** 又ハ **OC⊥AB, OA⊥CD** ト書ク。

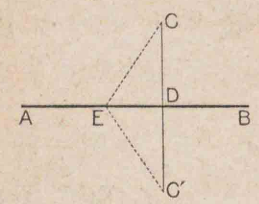
系 一直線上ノ一點ニ於テコレニ垂直ナ直線ハ唯一ツデアル。

如何トナラバ,垂線ハ平角ノ二等分線デアルカラ唯一ツデアル。

定理 3. 一直線外ノ一點カラコレニ垂線ヲ引クコトガ出來ル。ソシテコノ垂線ハ唯一ツヨリナイ。

AB ヲ直線, C ヲソノ上ニナイ點トスル。

(i) 直線 AB ヲ折目トシテ,點 C ガアル平面ノ部



分ヲ折返スト點Cハ點C′ニ來ル。CトC′ヲ結ビABトノ交點ヲDトスルト,CDハABノ垂線デアル。

如何トナラバ　$\angle ADC=\angle ADC'$　(§4)

∴　$\angle ADC=R\angle$　(§8)

即チ　$AB\perp CC'$　(定義)

(ii) 次ニ垂線CDノ外ニナホ垂線CEガアルトスル,但シEハソノ足デアル。ソノトキ直線ABヲ折目トシテ,點Cガアル平面ノ部分ヲ折返ストECハEC′ニ重ナル。

故ニ　$\angle AEC=\angle AEC'$　(§4)

モシ$\angle AEC=R\angle$トスルト上ノ結果ヨリ

$$\angle AEC+\angle AEC'=2\angle AEC=2R\angle$$

トナル。故ニ定理1ニヨリCEC′ハ一直線デナケレバナラナイ。然ルニCDC′モ一直線デアルカラ,コレハ不都合デアル。因テ點Cヲ過ルABヘノ垂線ハ一ツヨリナイ。

定義　一直線外ノ一點カラコノ直線ニ垂直ニ下シタ線分ノ長サヲ,コノ點トコノ直線トノ**垂直距離**又ハ單ニ**距離**トイフ。

15. 定理ノ形式

定理ノ文章ハ總テ次ノヤウニ書キ直スコトガ出來ル。

「若シ…………トセヨ」「然ラバ…………デアル」

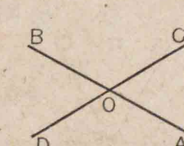
コノ初メノ部分ハ**假リニ斯樣デアルトキメタ事柄**デアツテ,コレヲ**假設**トイフ。後ノ部分ハソノ假設カラ**起ツテ來ル結果**デアツテ,コレヲ**終結**トイフ。

假設カラ終結ヲ推論スル道行キヲ**證明**トイフ。

例ヘバ§13ノ定理2「對頂角ハ相等シイ」ハ次ノヤウニ書キ直スコトガ出來ル。

「若シ對頂角アリトセヨ」「然ラバソノ對頂角ハ相等シイ」

コノ初メノ部分ガ假設デ,後ノ部分ハ終結デアル。



尙コレヲ圖ノ上デ表ハスト「二ツノ直線AB,CDノ交點ヲOトシ,$\angle AOC$, $\angle BOD$; $\angle COB$, $\angle AOD$ヲ夫々對頂角トスル」ガ假設デ,「$\angle AOC=\angle BOD$, $\angle COB=\angle AOD$」ガ終結デアル。

定理2ノ說明中「何トナレバ」カラ終リマデハ證明デアル。

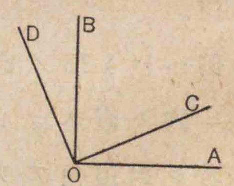
注意 簡單ナ定理特ニ系ノ證明ハ略スルコトガ多イ。然シソレ等ハ何レモ既有知識デ證明出來ル事柄デアル。證明出來ナイ事柄ヲ定理トイフコトハ出來ナイ。

練習 (1)

1. 一ツノ角ノ二等分線ノ延長ハソノ共軛角ヲ二等分スル。

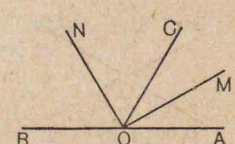
2. 一ツノ角ノ二等分線ト,ソノ對頂角ノ二等分線トハ一直線ヲナス。

3. 圖ニ於テ ∠AOB, ∠COD ハ何レモ直角デアルトスレバ, ∠AOC＝∠BOD デアル。



4. 前題ニ於テ ∠BOC ガ 65° デアルトスレバ優角 AOD ハ何度デアルカ。

5. 直線 AB 上ノ一點 O カラ半直線 OC ヲ引キ, ∠AOC, ∠COB ノ二等分線ヲ夫々 OM, ON トスレバ, OM⊥ON デアル。



6. 前問ノ圖ニ於テ ∠AOC ノ二等分線ヲ OM, 又

ON⊥OM トスレバ, ON ハ ∠BOC ヲ二等分スル。

第二章 三角形

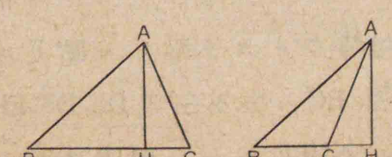
16. 三角形

定義 三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**三角形**トイフ。

三角形ヲ圍ム各線分ヲ三角形ノ**邊**,相隣ル二邊ガ夾ム形內ノ角ヲ三角形ノ**角**,ソノ角ノ頂點ヲ三角形ノ**頂點**ト名ヅケル。

三角形ヲ表ハスニハ頂點ニツケタ文字ヲナラベ,**三角形 ABC** 或ハ **△ABC** ト書ク。三角形ノ一ツノ角ト,ソノ角ヲ夾マナイ邊トハ相**對スル**トイヒ,ソノ邊ヲ角ノ**對邊**,角ヲ邊ノ**對角**トイフ。

三角形ノ一ツノ頂點ニ着目シタトキ,ソノ對邊ヲ**底邊**,頂點ニ於ケル角ヲ**頂角**,底邊ノ兩端ニ於ケル角ヲ**底角**トイフ。又頂點ト底邊トノ距離ヲ三角形ノ**高サ**トイフ。



圖ニ於テ角 A ノ對邊ハ BC, 邊 BC ノ對

角ハ∠A デアル。又 A ヲ頂點ト見ルト BC ハ底邊, ∠A ハ頂角, ∠B, ∠C ハ底角, AH ハ高サデアル。

注意 三角形ニハ**六ツノ原素**ガアル,三ツノ邊ト三ツノ角ガ即チソレデアル。コレ等ノ六原素ノ間ニハ種々ノ關係ガアル。

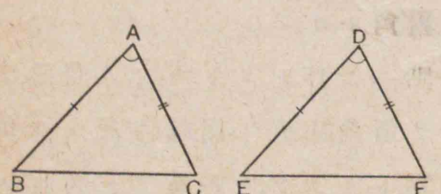
17. 三角形ノ合同(一)

定理 4. **二邊トソノ夾角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。**

假設 △ABC ト △DEF ニ於テ AB=DE, AC=DF, ∠A=∠D トスルト

終結 △ABC ト △DEF トハ合同デアル。

證明 △ABC ヲ △DEF ノ上ニ置キ,點 A ヲ點 D ニ邊 AB ヲ邊 DE ノ上ニ重ネル。但シ點 C ト點 F トヲ DE ノ同ジ側ニアルヤウニ置ク。然ルトキハ邊 AB ト邊 DE トハ相等シイカラ點 B ハ點 E ニ重ナル。



又 ∠A ハ ∠D ニ相等シク且ツ AC ガ DF ニ相等シイカラ點 C ハ點 F ニ重ナル。即チ三邊 AB, AC, BC ハ夫々三邊 DE, DF, EF ニ重ナル。因テ △ABC ト △DEF トハ合同デアル。

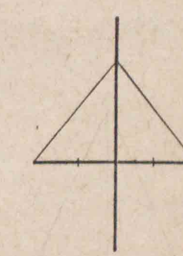
注意 1. 合同ノ記號ニ≡ヲ用ヒル。例ヘバ三角形 ABC ト三角形 DEF ガ合同ナルトキハ,次ノヤウニ書ク。

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

注意 2. 合同ナ二ツノ三角形ニ於テハ等シイ角ト等シイ邊トハ夫々相對スル。

定義 合同ナ圖形ニ於テハ相等シイ邊,相等シイ角及ビソノ頂點ヲ夫々**對應邊**,**對應角**及ビ**對應頂點**トイフ。

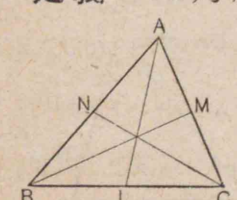
定義 一ツノ線分ノ中點ヲ過リ,ソノ線分ニ垂直ナ直線ヲ,ソノ線分ノ**垂直二等分線**トイフ。



系 **一ツノ線分ノ垂直二等分線上ノ任意ノ一點ハ,線分ノ兩端カラ等距離ニアル。**

問 三角形 ABC ノ頂點 A カラ邊 BC ニ下シタ垂線ガ BC ノ中點ヲ過レバ, AB=AC デアル。

定義 三角形ノ一頂點トソノ對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲコノ三角形ノ**中線**トイフ。



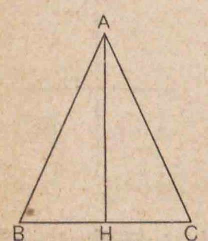
圖ニ於テ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 L, M, N トスレバ線分 AL, BM, CN ハ何レモ中線デアル。

18. 三角形ノ分類

定義　二邊ガ相等シイ三角形ヲ**二等邊三角形**又ハ**等脚三角形**トイフ。

三邊ガ相等シイ三角形ヲ**正三角形**又ハ**等邊三角形**トイフ。

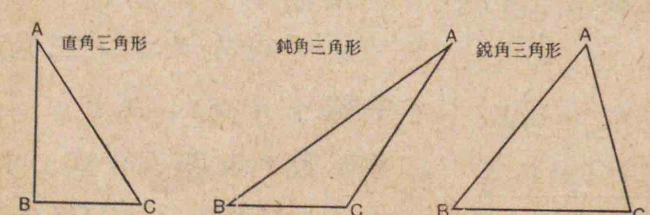
二等邊三角形ニ於テハ通常等シイ二邊ノ交點ヲ**頂點**,頂點ニ對スル邊ヲ**底邊**トイフ。



圖ニ於テ $AB=AC$ ナルトキ,A ハ頂點,BC ハ底邊デアル。從ツテ $\angle A$ ハ頂角,$\angle B$ 及ビ $\angle C$ ハ底角デアル。又 $AH\perp BC$ トスレバ,AH ハ高サデアル。

定義　一角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイヒ,直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**トイフ。

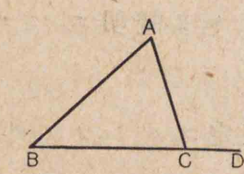
一角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**トイ



フ。

三ツノ角ガ何レモ鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**トイフ。

定義　三角形ノ一ツノ邊トソレニ隣ル邊ノ延長トガ夾ム角ヲ三角形ノ**外角**トイヒ,外角ニ對シテソノ隣接角ヲ**內角**トイフ。又外角ニ隣ラナイ二ツノ內角ノ各ヽヲソノ外角ノ**內對角**トイフ。



圖ニ於テ CD ヲ BC ノ延長トスレバ $\angle ACD$ ハ一ツノ外角デ,$\angle A$, $\angle B$ ハソノ內對角デアル。

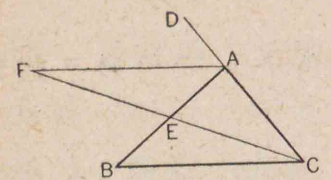
注意　BC ヲ C ノ方ヘ延長スルコトヲ BC ヲ延長スルトイフ。

定理 5. 三角形ノ外角ハソノ內對角ヨリ大デアル。從ツテ三角形ノ二角ハ必ズ鋭角デアル。

假設　$\triangle ABC$ ガ與ヘラレ, CA ヲ D マデ延長シ,$\angle BAD$ ヲ外角トスルト

終結　$\angle BAD$ ハ $\angle B$, $\angle C$ ヨリ大デアル。

證明　頂點 C カラ出ル中線 CE ノ延長上ニ CE ニ等シク EF ヲトリ,A ト F トヲ結ブ。然ルトキハ



$\triangle BCE$ ト $\triangle AFE$ トニ於テ

$BE=AE$

$CE=EF$

$\angle BEC=\angle AEF$ (對頂角)

$\therefore$ $\triangle BCE\equiv\triangle AFE$ (定理 4) $\therefore$ $\angle B=\angle EAF$

然ルニ AF ハ $\angle BAD$ 内ニアルカラ

$\angle EAF<\angle BAD$

$\therefore$ $\angle B<\angle BAD$

同様ニ $\angle C<\angle BAD$ ナルコトヲ證明スルコトガ出來ル。

次ニ $\angle A$ ヲ直角又ハ鈍角ト假定スルト,ソノ外角 BAD ハ直角又ハ鋭角デアル。然ルニ上ノ證明ヨリ $\angle B$, $\angle C$ ハ $\angle BAD$ ヨリ小デアルカラ,ソレ等ハ共ニ鋭角デアル。即チ三角形ノ二角ハ鋭角デアル。

注意 コノ定理ヨリ三角形ヲ角ノ大イサニツイテ分類スルト,頁26ニ述ベタ三種ヨリナイコトガワカル。

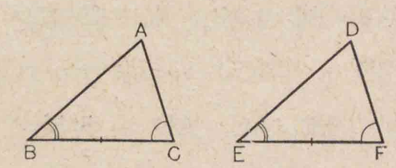
19. 三角形ノ合同(二)

定理 6. 二角トソノ間ノ邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。

假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$, $BC=EF$ トスルト

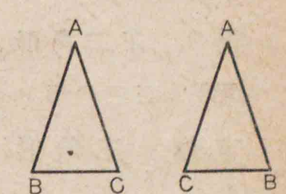
終結 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ デアル。

證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ノ上ニ重ネルニ $BC=EF$ デアルカラ點 B ヲ點 E ニ,點 C ヲ點 F ニ重ネルコトガ出來ル,ソシテ點 A ト點 D ガ EF ノ同ジ側ニアルヤウニ置ク。然ルトキハ $\angle B=\angle E$ デアルカラ BA ハ ED ニ重ナリ,$\angle C=\angle F$ デアルカラ CA ハ FD ニ重ナル。従ッテ點 A ハ點 D ニ重ナル。



因テ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

系 1. 二角ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル。 ($\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=\angle C$ トシ,コノ三角形ヲ裏返シタ三角形トモトノ三角形トヲ比較セヨ)



系 2. 三ツノ角ガ相等シイ三角形ハ正三角形デアル。

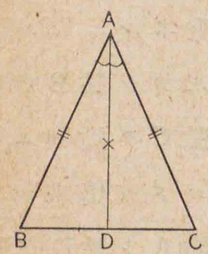
問 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ニ垂直ナルトキ,コノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

20. 二等邊三角形・正三角形

定理 7. 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB=AC$ トスルト

終結 $\angle B=\angle C$ デアル。



證明 頂角Aノ二等分線ヲ引キ,底邊 BC ト交ル點ヲDトスル。

$\triangle ABD$ ト $\triangle ACD$ トニ於テ

$AB=AC$, AD ハ共通,

$\angle BAD=\angle CAD$

$\therefore \quad \triangle BAD\equiv\triangle CAD$ (定理4)

$\therefore \quad \angle B=\angle C$

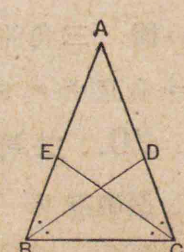
系1. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底ニ垂直デ且ツ底ヲ二等分スル。從ツテ二等邊三角形ノ高サ,頂角ノ二等分線,底邊ノ垂直二等分線及ビ頂點カラ出ル中線ハ皆合スル。

系2. 正三角形ノ三ツノ角ハ相等シイ。

注意 正三角形ノコトヲ**等角三角形**トモイフ。

定義 三角形ノ頂角ノ二等分線ノ頂點ト對邊トノ間ニアル線分ヲ,ソノ頂角ノ**二等分線**トイフ。(§10參照)

問1. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ハ相等シイ。



問2. 正三角形ノ三邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル三角形ハ亦正

三角形デアル。

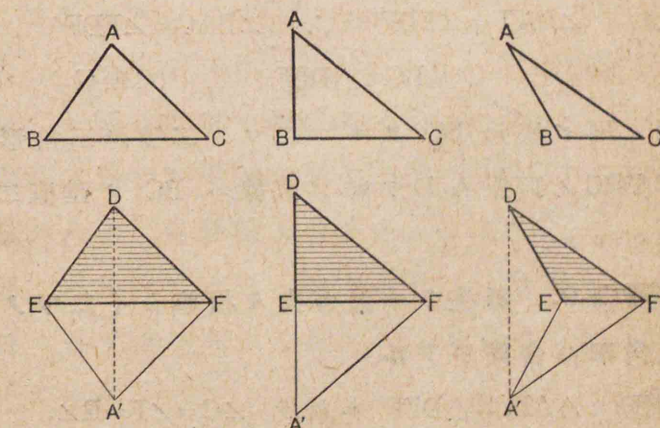
21. 三角形ノ合同(三)

定理 8. 三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。

假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $AB=DE, AC=DF, BC=EF$ トスルト

終結 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ デアル。

證明 $\triangle ABC$ ノ頂點Bヲ頂點Eニ,邊 BC ヲ邊 EF ニ重ネルト, $BC=EF$ デアルカラ C ハ F ニ重ナル。次ニ $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'EF$ ノ位置ニ移シ, A' ト D ヲ結ブ。



(i) A'D ガ EF ニ交ル場合。

$\triangle FA'D$ ニ於テ $\quad FA'=FD$

$\therefore \quad \angle FA'D=\angle FDA'$

同様ニ △EA'D ニ於テ　$\angle EA'D=\angle EDA'$

∴　$\angle FA'D+\angle EA'D=\angle FDA'+\angle EDA'$

∴　$\angle EA'F=\angle EDF$　∴　$\angle BAC=\angle EDF$

∴　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　(定理4)

(ii) A'D ガ點 E ヲ過ル場合。

△FA'D ヨリ　$\angle A'=\angle D$

∴　$\angle A=\angle D$

∴　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　(定理4)

(iii) A'D ガ EF ニ交ラナイ場合。

$\angle FA'D\sim\angle EA'D=\angle FDA'\sim\angle EDA'$

∴　$\angle EA'F=\angle EDF$　∴　$\angle BAC=\angle EDF$

∴　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　(定理4)

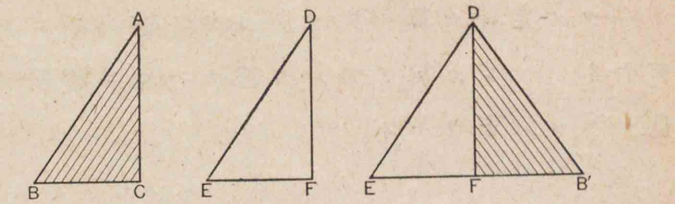
問　同ジ底邊 BC ヲモツ二ツノ二等邊三角形 ABC, DBC ノ頂點 A, D ヲ結ブ直線ハ BC ノ垂直二等分線デアル。

定理 9. 斜邊ト一邊ガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。

假設　△ABC, △DEF ニ於テ　$\angle C=\angle F=R\angle$, AB=DE, AC=DF トスルト

終結　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ デアル。

證明　△ABC ヲ裏返シテ後,點 A ヲ點 D ニ,邊 AC



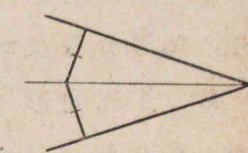
ヲ邊 DF ノ上ニ重ネルト, AC=DF デアルカラ C ハ F ニ重ナル。ソシテ B ノトル位置ヲ B' トスルト

$$\angle DFE+\angle DFB'=2R\angle$$

ソレ故 EFB' ハ一直線ヲナス。

然ルニ DE=AB=DB' デアルカラ △DEB' ハ二等邊三角形デ, DF ハソノ高サデアル。故ハ DF ハ頂角ヲ二等分スル。(定理7,系1)

∴　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　(定理4)



系　一點カラ角ノ兩邊ニ下シタ垂線ノ長サガ相等シイトキ,ソノ點ハ角ノ二等分線上ニアル。

問　三角形ノ底邊ノ兩端カラソノ對邊ニ引イタ垂線ノ長サガ等シイトキ,ソノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

22. 定理ノ逆

定義　一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ取リカヘタモノヲ,モトノ定理ノ逆トイフ。

一ツノ定理ガ眞デアツテモソノ逆ハ必ズシモ眞デナイ。ソレガ眞デアルカ否カハ別ニ證明ヲシテ見ナケレバナラナイ。

練習 (2)

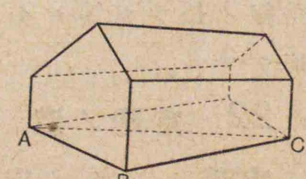
1. 角 XAY ノ一邊 AX 上ニ二點 B, C ヲ,他ノ邊 AY 上ニ二點 D, E ヲトリ, AB=AD, AC=AE ナラシメルトキ,線分 BE ト線分 CD トハ相等シイ。

2. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ双方ニ等シク延長シテ BD=CE ナル點 D, E ヲトルト,三角形 ADE モ亦二等邊三角形デアル。

3. 正三角形ノ一頂點カラ出ル中線,高サ,ソノ頂角ノ二等分線及ビ對邊ノ垂直二等分線ハ合スル。

4. 正三角形ノ三ツノ中線ハ相等シク,從ツテ三ツノ高サ及ビ三ツノ頂角ノ二等分線ハ相等シイ。

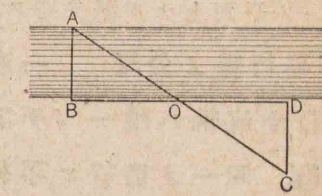
5. 平地ニ建テタ圖ノヤウナ家屋ガアル。コノ家ノ内ニ入ラズニ AC ノ距離ヲ知ルニハドウスレバヨイカ。



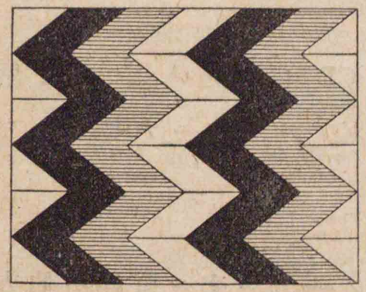
6. 三ツノ線分 AB, CD, EF ガ一點 O デ交ツテ O ガ各線分ノ中點ナルトキ,

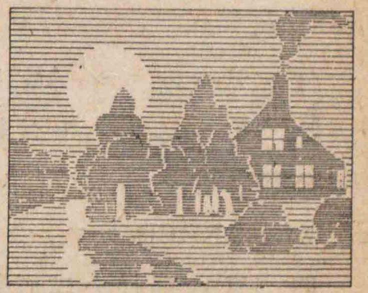
二ツノ三角形 ACE, BDF ハ合同デアル。

7. 河幅 AB ヲ計ルニハ圖ノヤウニシテ CD ヲ計レバヨイ,何故カ。但シ ∠B=∠D=R∠, BO=OD。



第三章 平行線





23. 平行線

定義 同一ノ平面上ニアツテ相交ラナイ二直線ハ互ニ**平行デアル**トイヒ,ソレ等ヲ**平行線**トイフ。

平行ノ記號ニハ // ヲ用ヒル。

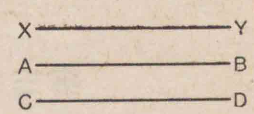
上ノ定義ヨリ同一ノ平面上ノ二直線ハ相交ルカ,互ニ平行ナルカノ何レカデアル。

注意 吾々ハ平面圖形ヲ論ジテヰルノデアルカラ,以下「同一ノ平面上」ナル語ヲ略スル。

平行線ノ公理 **一直線外ノ一點ヲ過リ,コレニ平行ナ直線ハ唯一ツデアル。**

系 **同一ノ直線ニ平行ナ二直線ハ互ニ平行デアル。**

$\left.\begin{matrix} XY \parallel AB \\ XY \parallel CD \end{matrix}\right\}$ ナラバ $AB \parallel CD$



デアル。

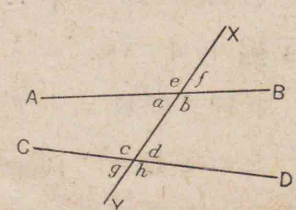
何トナレバ,モシ AB ト CD トガ交レバ,ソノ交點カラ XY ニ二ツノ平行線ガアルワケニナル。コレハ公理ニ背ク。

故ニ $AB \parallel CD$ デアル。

問 互ニ平行ナ二直線ノ一方ニ交ル直線ハ他方ニモ交ル。

24. 内角・錯角

定義 圖ノヤウニ一直線 XY ガ二直線AB, CD ト交ルトキ出來ル,八ツノ角ヲ a, b, c, d, e, f, g, h ト名ヅケルトキ, a, b, c, d ヲ**内角**, $e, f, g,$



h ヲ**外角**, a ト d; b ト c ヲ**錯角**, e ト c; f ト d; a ト g; b ト h ヲ**同位角**トイフ。

問 一直線ガ二直線ト交ッテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイトキ

(1) 他ノ一組ノ錯角ハ相等シイ。

(2) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。

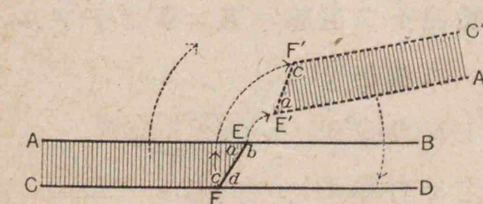
(3) 二組ノ同側ニアル内角ハ夫々互ニ補角ヲナス。

25. 平行線ノ定理

定理 10. **一ツノ直線ガ他ノ二直線ト交ッテ出來ル一組ノ錯角ガ相等シイトキ,後ノ二直線ハ互ニ平行デアル。**

假設 直線 AB, CD ニ直線 EF ガ交ッテ出來ル錯角ノ中 $\angle a = \angle d$ トスルト

終結 $AB \parallel CD$ デアル。



證明 圖ノヤウニ,圖形 AEFC ヲ切リハナシテ DFEB 上ニ重ネルニ, $\angle a = \angle d$ ナル故,各〻ノ補角デアル $\angle b$ ト $\angle c$ ハ相等シイ。卽チ $\angle b = \angle c$

故ニ $E'F'$ ヲ FE ニ重ネルト $E'A'$ ハ FD ニ重ナリ, $F'C'$ ハ EB ニ重ナル。因テ圖形 $A'E'F'C'$ ハ $DFEB$ ニ全ク重ナル。

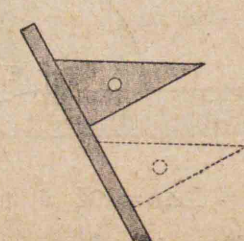
扨テ AB ガ CD ト EF ノ左側デ交ツタトスルト, $E'A'$ ト $F'C'$ トモ交リ,コレ等ト全ク重ナツタ FD ト EB モ亦交ルコトニナル。因テ AB, CD ハ二點デ交ル。コレハ不都合デアル。故ニ AB, CD ハ一點デ交ルコトハ出來ナイ。卽チ平行デアル。

注意 コノ證明法ヲ**歸謬法**トイフ。歸謬法トハ證明シヨウトスル終結ノ代リニソノ反對ヲ假定スルト不都合ヲ生ズルコトヲ明ラカニシ,因テモトノ終結ガ正シイコトヲ斷定スル證明法デアル。

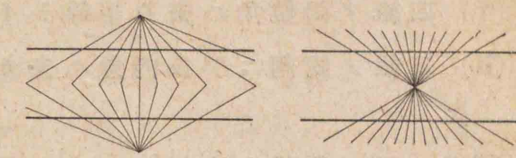
系 1. 一直線ガ二直線ト交ツテ出來ル一組ノ同位角ガ等シイカ,又ハ一組ノ同側ニアル內角ガ補角ヲナストキ,コノ二直線ハ互ニ平行デアル。

系 2. 一直線ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアル。

問 1. 三角定規ヲ二枚用ヒルカ又ハ直線定規ト三角定規トヲ一枚ヅツ用ヒテ平行線ヲ畫ケ。又平行線トナル理由ヲ述ベヨ。



問 2. 右圖ノ太イ二直線ハ夫々互ニ平行デアルカ。



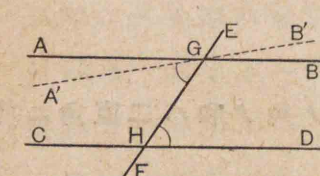
問 3. 二ツノ線分 AB, CD ガ點 O デ交リ,且ツ O ガ各線分ノ中點ナルトキ, $AC \parallel BD$, $AD \parallel BC$ デアル。

定理 11. 一直線ガ二ツノ平行線ト交ツテ出來ル錯角ハ相等シイ。

假設 $AB \parallel CD$ トシ, EF ガ AB, CD ト夫々 G H デ交ルトスルト

終結 $\angle AGH = \angle GHD$, $\angle BGH = \angle GHC$ デアル。

證明 モシ錯角 AGH, GHD ガ等シクナケレバ點 G ヲ過ツテ直線 $A'B'$ ヲ



$\angle A'GH = \angle GHD$ ナルヤウニ引クト $A'B' \parallel CD$

然ルニ $AB \parallel CD$

因テ AB $A'B'$ ハ一點 G ヲ過ツテ CD ニ平行デアル。コレハ平行線ノ公理ニ背クカラ不都合デアル。

$\therefore \quad \angle AGH = \angle GHD$

從ツテ $\quad \angle BGH = \angle GHC$

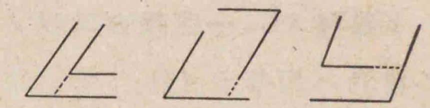
系 1. 一ツノ直線ガ二ツノ平行線ト交ルトキ

(i) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。

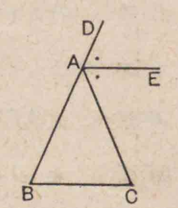
(ii) 二組ノ同側ニアル內角ハ夫々互ニ補角ヲナス。

系 2. 互ニ平行ナ直線ノ一方ニ垂直ナ直線ハ他方ニモ亦垂直デアル。(共通垂線)

問 1. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ト夫々互ニ平行ナルトキ,コノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。



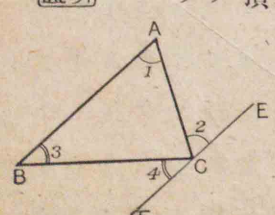
問 2. 二等邊三角形ノ頂點ヲ過リ底邊ニ平行ナ直線ハ頂角ノ外角ヲ等分スル。



26. 三角形ノ角ノ和

定理 12. 三角形ノ三ツノ角ノ和ハ二直角ニ等シイ。

證明 一ツノ頂點例ヘバ C ヲ過ツテ對邊 AB ニ平行ニ EF ヲ引クト



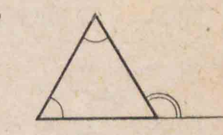
$\angle 1=\angle 2$ 及ビ $\angle 3=\angle 4$

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C$

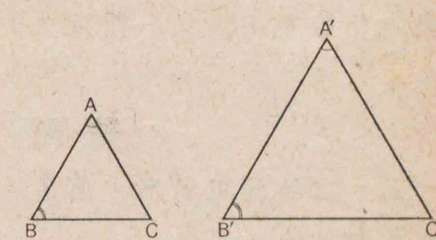
$=\angle 1+\angle 3+\angle C$

$=\angle 2+\angle 4+\angle C=\angle ECF=2R\angle$

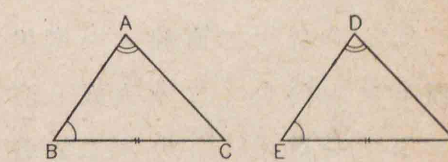
系 1. 三角形ノ外角ハソノ內對角ノ和ニ等シイ。從ツテ內對角ノ何レヨリモ大デアル。(定理5)



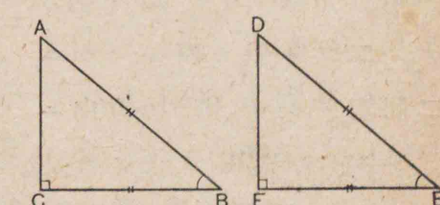
系 2. 一ツノ三角形ノ二角ガ他ノ三角形ノ二角ニ夫夫等シイトキ,殘リノ一角ハ相等シイ。



系 3. 一邊トソノ對角及ビ他ノ一角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。(定理6)



系 4. 斜邊ト一鋭角ガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。



系 5. 角ノ二等分線上ノ點ハソノ兩邊カラ等距離ニアル。

系 6. 直角三角形ノ二ツノ鋭角ハ互ニ餘角ヲナス。

問1. 正三角形ノ一角ハ何度デアルカ。

問2. 頂角ガ30°ナル二等邊三角形ノ底角ハ何度デアルカ。

問3. 二ツノ角ノ二邊ガ夫々垂直ナラバ,コノ二角ハ相等シイカ又ハ補角ヲナス。

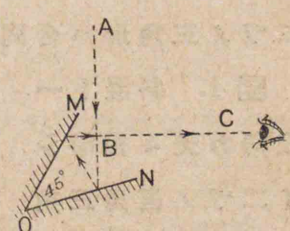
練習 (3)

1. 二等邊三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ハ底ニ平行デアル。

2. 平行ナ二直線ニ一直線ガ交ルトキ,一組ノ同側ニアル内角ノ二等分線ハ直交スル。

3. 一角ガ60°ナル二等邊三角形ハ正三角形デアル。

4. 光線ABガ45°ノ角ヲナス二ツノ鏡デ圖ノヤウニ二回反射シテBCノ方向ニ進ンダ。∠ABCヲ求メヨ。

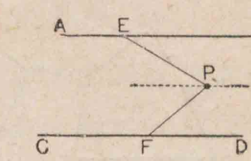


(入射光線ト反射光線ハ鏡ト常ニ等角ヲナス)

5. ∠Cヲ直角トスル三角形ABCノ∠Aノ二等分線トBCトノ交點ヲDトシ,Dカラ邊ABニ下シタ垂線ヲDE,ソノ足ヲEトスレバ,DE=DCデアル。

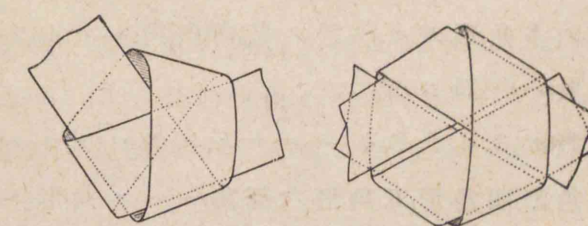
6. 三角形ABC内ノ一點ヲOトスルト,角BOCハ角Aヨリ大デアル。

7. PハAB,CD間ノ點デアル。然ルトキハ次ノ關係ガ成立スル。



$$\angle EPF=\angle PEB+\angle PFD$$

第四章 多角形



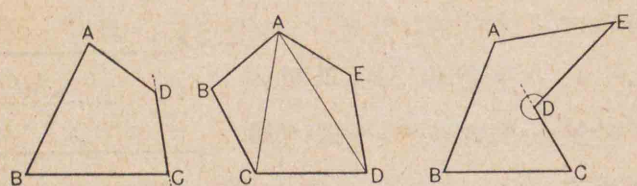
27. 多角形

定義 相續イタ幾ツカノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**多角形**トイヒ,ソノ相隣ラナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ**對角線**トイフ。

多角形ノ邊,角,頂點ノ定義ハ三角形ノ場合ニ同ジ。

次ニ各邊ヲ如何程延長シテモソノ多角形ヲキラナイトキハ,コノ多角形ヲ**凸多角形**トイヒ,サウデナイ

モノヲ**凹多角形**トイフ。



注意 普通ニ多角形トイヘバ凸多角形ヲ指ス。

邊ガ皆等シイ多角形ヲ**等邊多角形**トイヒ,角ガ皆等シイ多角形ヲ**等角多角形**トイフ。等邊デ且ツ等角ナ多角形ヲ**正多角形**トイフ。

一ツノ多角形ガモツ邊ノ數,角(內角トモイフ)ノ數,頂點ノ數ハ皆同ジデアル。

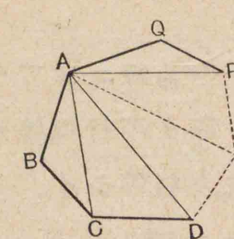
角ノ數ガ3, 4, 5, 6,……, n ナルニ從ツテ,コノ多角形ヲ**三角形,四角形,五角形,六形角,……, n 角形**トイフ。或ハ邊ノ數ニ從ツテ**三邊形,四邊形,五邊形,六邊形,……, n 邊形**トモイフ。

定理 13. n 邊形ノ內角ノ總和ハ $(2n-4)$R∠ デアル。

假設 n 邊形ヲ ABCD……PQ トスルト

終結 $\angle A+\angle B+\angle C+\cdots\cdots+\angle P+\angle Q=(2n-4)$R∠ デアル。

證明 一ツノ頂點 A カラ對角線 AC, AD ……, AP



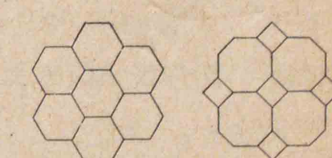
ヲ引クト, n 邊形ハ $(n-2)$ 個ノ三角形ニ分タレル。ソシテコレ等ノ三角形ノ內角ノ總和ハ n 邊形ノ內角ノ總和デアル。然ルニ一ツノ三角形ノ內角ノ和ハ 2R∠ デアルカラ,求ムル內角ノ總和ハ 2R∠ ノ $(n-2)$ 倍,卽チ $(2n-4)$R∠ デアル。

系 1. 正 n 邊形ノ一ツノ內角ハ $\frac{2n-4}{n}$R∠ デアル。

系 2. 多角形ノ外角ノ總和ハ 4R∠ デアル。

問 1. 四邊形ノ內角ノ總和ハ 4R∠ デアル。

問 2. 右圖ノヤウニ正六角形又ハ正四角形ト正八角形トヲ用ヒテ全平面ヲ塡メルコトガ出來ル,何故カ。



28. 平行四邊形

定義 相對スル邊ガ夫々平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**トイフ。

コノトキ相對スル二邊ノ共通垂線ノ長サヲソノ**高サ**トイフ。

平行四邊形 ABCD ヲ ▱ABCD,

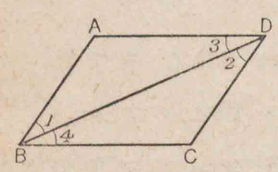
▱AC 又ハ ▱BD ト書ク。

定理 14. 平行四邊形ハ,ソノ一對角線ニヨツテ合同ナ二ツノ三角形ニ分タレル。因テ平行四邊形ノ相對スル邊及ビ相對スル角ハ夫々相等シイ。

假設　▱ABCD ニ於テ一對角線ヲ BD トスルト

終結　$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, $AB=CD$, $AD=CB$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$ デアル。

證明　$AB /\!/ CD$ ナル故　$\angle 1=\angle 2$



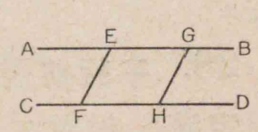
$AD /\!/ BC$ ナル故　$\angle 3=\angle 4$

且ツ BD ハ $\triangle ABD$, $\triangle CDB$ ニ共通デアル。

$\therefore$　$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

從ッテ　$AB=CD$, $AD=CB$ 及ビ $\angle A=\angle C$

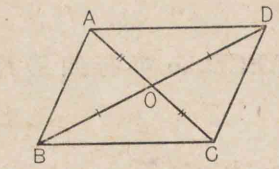
同樣ニ對角線 AC ヲ引キ $\angle B=\angle D$ ヲ證明スルコトガ出來ル。



系 1. 平行二直線間ニアル平行二線分ハ相等シイ。

系 2. 平行二直線間ノ共通垂線ノ長サハ一定デアル。(コノ長サヲ**平行二直線ノ距離**トイフ)

定理 15. 平行四邊形ノ對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。



證明　略スル。

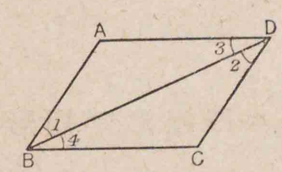
問　二等邊三角形ノ底邊上ノ一點カラ二邊ニ平行線ヲ作ツテ出來ル平行四邊形ノ周ハモトノ三角形ノ二ツノ等邊ノ和ニ等シイ。

定理 16. 相對スル二邊ガ平行デ且ツ相等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル。

假設　四邊形 ABCD ニ於テ $AB /\!/ CD$, $AB=CD$ トスルト

終結　ABCD ハ平行四邊形デアル。

證明　BD ヲ結ベバ $\triangle ABD$, $\triangle CDB$ ニ於テ



$$\left.\begin{array}{l} AB=CD \\ BD \text{ ハ共通} \\ \angle 1=\angle 2 \end{array}\right\}$$

$\therefore$　$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

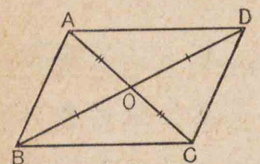
因テ　$\angle 3=\angle 4$

$\therefore$　$AD /\!/ CB$　且ツ　$AB /\!/ CD$

故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

定理 17. 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スル四邊形ハ平行四邊形デアル。

假設　四邊形 ABCD ニ於テ $OA=OC$, $OB=OD$ ト



スルト

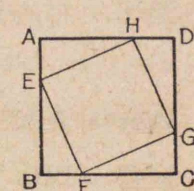
終結　ABCD ハ平行四邊形デアル。

證明　略スル。

29. 正方形

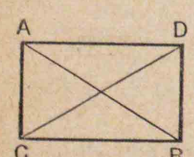
定義　總テノ邊總テノ角ガ相等シイ四邊形ヲ**正方形**トイフ。

問　正方形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA 上ニ夫々點 E, F, G, H ヲトリ, AE＝BF＝CG＝DH トスレバ EFGH ハ正方形デアル。



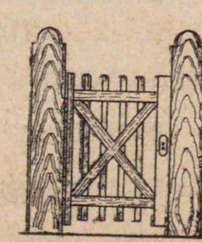
30. 矩　形

定義　各角ガ皆直角ナル四邊形ヲ**矩形**トイフ。



系　**矩形ハ平行四邊形デアル。**

問 1.　一角ガ直角ナ平行四邊形ハ矩形デアル。

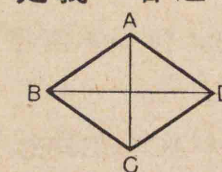


問 2.　矩形ノ對角線ハ相等シイ。

問 3.　對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。

31. 菱　形

定義　各邊ガ皆等シイ四邊形ヲ**菱形**トイフ。



系　**菱形ハ平行四邊形デアル。**

問 1.　二隣邊ガ相等シイ平行四邊形ハ菱形デアル。

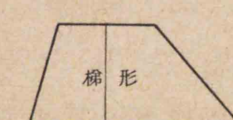
問 2.　菱形ノ對角線ハ直交スル。

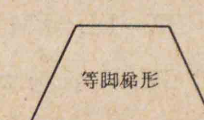
問 3.　對角線ガ互ニ他ヲ垂直ニ二等分スル四邊形ハ菱形デアル。

32. 梯　形

定義　一組ノ對邊ガ平行デ他ノ一組ガ平行デナイ四邊形ヲ**梯形**トイフ。

コノトキ平行ナ二邊ヲ**底**トイヒ,ソノ距離ヲ**高サ**トイフ。





平行デナイ二邊ガ相等シイ梯形ヲ**等脚梯形**トイフ。

問 1.　等脚梯形ノ兩底角(底ノ兩端ノ角)ハ相等シイ。

問 2.　一組ノ底角ガ相等シイ梯形ハ等脚梯形デアル。

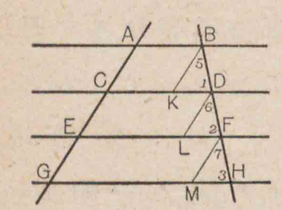
問 3.　等脚梯形ノ對角線ハ相等シイ。

33. 多クノ平行線

定理 18. 多クノ平行線ガソレ等ト交ル一直線カラ等シイ線分ヲキリトルトキ,他ノ何レノ直線ト交ツテモ亦等シイ線分ヲキリトル。

假設　AB∥CD∥EF∥GH デアッテ AC＝CE＝EG トスルト

終結　BD＝DF＝FH デアル。



證明　AG ニ平行ニ BK, DL, FM ヲ引ク。然ルトキハ ACKB ハ平行四邊形デアル。

$\therefore$　AC＝BK

同様ニ　CE＝DL,　EG＝FM

然ルニ假設ニヨリコレ等ノ等式ノ左邊ハ相等シイ。

故ニ　BK＝DL＝FM　(1)

次ニ AB, CD, EF, GH ハ平行ナル故

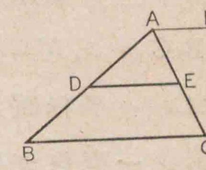
$\angle 1=\angle 2=\angle 3$　(2)

又 BK, DL, FM ハ同一ノ直線 AG ニ平行ナル故亦互ニ平行デアル。故ニ

$\angle 5=\angle 6=\angle 7$　(3)

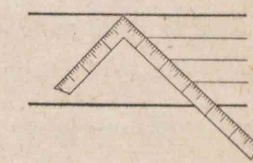
(1), (2), (3) ヨリ　△BKD≡△DLF≡△FMH

$\therefore$　BD＝DF＝FH



系 1. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ過リ底ニ平行ナ直線ハ第三邊ノ中點ヲ過ル。

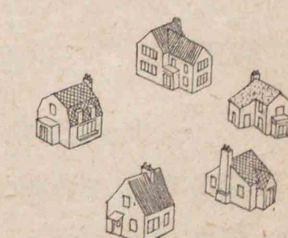
系 2. 梯形ノ平行デナイ一邊ノ中點ヲ過リ底ニ平行ナ直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ過ル。



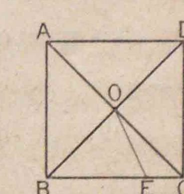
問　大工ガ板幅ヲ幾ツカニ等分スルトキ,物指ヲ圖ニ示スヤウニアテル。何故カ。

練習 (4)

1. 内角ノ總和ガ 16R∠ ナル多角形ノ邊數ヲ求メヨ。



2. 圖ノ様ニ住宅ガ5軒アル。二軒ヅツ他ノ家ニ道ヨリセズニ直線的ニ往來出來ルヤウニ道ヲツケルニハ道ガ何本イルカ。



3. 正方形 ABCD ノ一頂點 B カラ邊 BC 上ニ BO＝BE ナルヤウニ點 E ヲトルト, ∠BOE＝3∠COE デアル。

4. 三角形ABCノ邊BCノ中點ヲDトシ, BE, CFヲB, CカラADニ下シタ垂線トシBF, CEヲ結ベバ, BECFハ平行四邊形デアル。

5. 一直線ガ平行二直線ト交ツテナス內角ノ二等分線ハ矩形ヲ作ル。

6. 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點カラ二邊ニ下シタ垂線ノ和ハ底ノ一端カラ對邊ニ下シタ高サニ等シイ。

7. 平行四邊形ABCDノ∠A, ∠Bノ二等分線ガ夫々BC, ADト點X, Yデ交ルトスルト, AXトBYトハ互ニ他ヲ二等分スル。

第五章 三角形ノ邊ト角ノ大小・重心

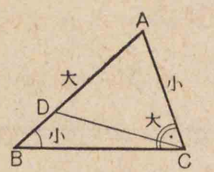
34. 一ツノ三角形ノ邊ト角

定理 19. 三角形ノ大ナル邊ノ對角ハ小ナル邊ノ對角ヨリ大デアル。逆ニ大ナル角ノ對邊ハ小ナル角ノ對邊ヨリ大デアル。

假設 △ABC ニ於テ AB>AC トスルト

終結 ∠C>∠B デアル。

證明 大ナル邊 AB 上ニ小ナル邊 AC ニ等シク



AD ヲトルト D ハ必ズ A, B 間ニアル。

扨テ AD=AC

∴ ∠ACD=∠ADC>∠B

然ルニ ∠C>∠ACD ∴ ∠C>∠B

逆ニ

假設 △ABC ニ於テ ∠C>∠B トスルト

終結 AB>AC デアル。

證明 モシ AB>AC デナイトスルト, AB=AC カ又ハ AB<AC デナケレバナラナイ。

扨テモシ AB=AC トスルト ∠B=∠C トナリ,假設ニ反スル。

又モシ AB<AC トスルト ∠C<∠B トナリ,コレモ假設ニ反スル。

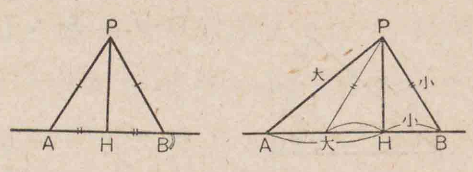
ソレ故 AB>AC デナケレバナラナイ。

系 1. 直角三角形ニ於テ斜邊ハ三邊中最大デアル。

系 2. 一點ト一直線トノ垂直距離ハソノ點トソノ直線上ノ任意ノ點トノ距離ノ中,最小デアル。

系 3. 直線外ノ一點カラコノ直線ニ垂線ト斜線トヲ作ルトキ,垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ斜線

ハ相等シク,大ナル距離ニ足ヲモツ斜線ハ



小ナル距離ニ足ヲモツ斜線ヨリ大デアル。

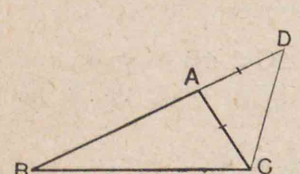
系 4. 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大デアル。

定理 20. 三角形ノ任意ノ二邊ノ和ハ殘リノ一邊ヨリ大デアル。

假設　$\triangle ABC$ ノ三邊ヲ AB, AC, BC トスルト

終結　$AB+AC>BC$ デアル。

證明　BA ヲ延長シ, AC ニ等シク AD ヲトリ, DC ヲ結ブト　$\angle ACD=\angle ADC$



又　$\angle BCD=\angle BCA+\angle ACD$

$\therefore$　$\angle BCD>\angle ADC$

$\therefore$　$BD>BC$

然ルニ　$BD=AB+AC$

$\therefore$　$AB+AC>BC$

系 1. 三角形ノ任意ノ二邊ノ差ハ殘リノ一邊ヨリ小デアル。

系 2. 與ヘラレタ二點ヲ兩端トスル任意ノ折線ハソノ二點ヲ結ブ線分ヨリ大デアル,即チ二點間ノ

距離ハソノ二點間ノ最短通路デアル。

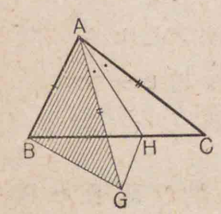
35. 二ツノ三角形ノ邊ト角

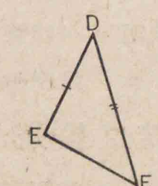
定理 21. 二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ニ於テ,ソノ夾角ガ大ナル方ノ第三邊ハ夾角ガ小ナル方ノ第三邊ヨリ大デアル。逆ニ二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ニ於テ,第三邊ガ大ナル方ノ對角ハ第三邊ガ小ナル方ノ對角ヨリ大デアル。

假設　$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A>\angle D$ トスルト

終結　$BC>EF$ デアル。

證明　DE ヲ圖ノ如ク AB ニ重ネ, F ノトル位置ヲ G トスル。然ルトキハ $\angle A>\angle D$ ナル故, AG ハ $\angle BAC$ 內ニ來ル。





次ニ $\angle GAC$ ノ二等分線ヲ作リ, BC トノ交點ヲ H トシ, H, G ヲ結ブト

$\triangle AGH\equiv\triangle ACH$　$\therefore$　$GH=HC$

扨テ $\triangle BHG$ ニ於テ

$BH+HG>BG$　$\therefore$　$BH+HC>EF$

即チ　$BC>EF$

逆ニ

假設 AB=DE, AC=DF, BC>EF トスルト

終結 ∠A>∠D デアル。

證明 ∠A<∠D トスレバ上ノ證明ヨリ BC<EF, ∠A=∠D トスレバ三角形ノ合同定理ヨリ BC=EF コレ等ハ共ニ假設ニ反スル。

故ニ ∠A>∠D デナケレバナラナイ。

注意 コノ逆ノ證明法ヲ**轉換法**トイフ。

吾々ハ既ニ AB=DE, AC=DF ナル △ABC, △DEF ニ於テ

∠A>∠D ナルトキハ BC>EF

∠A=∠D ナルトキハ BC=EF

∠A<∠D ナルトキハ BC<EF

ナルコトヲ知ツタ。コレデ∠Aト∠Dトノ間ニ起ル總テノ場合ヲ盡シ,且ツ終結ハ皆異ナツテキル。斯樣ナ場合ニハ逆ハ常ニ眞デアル。ソノ證明ニハ轉換法ヲ用ヒルノガ便利デアル。定理19ノ逆ニモコノ證明法ヲ用ヒテアル。

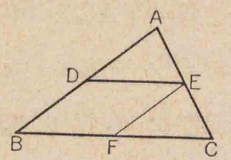
36. 二邊ノ中點ヲ結ブ線分

定理 22. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行デ,且ツソノ半分ニ等シイ。

假設 △ABC ニ於テ AD=DB, AE=EC トスルト

終結 DE∥BC, DE=$\frac{1}{2}$BC デアル。

證明 AB ノ中點DカラBC ニ平行ニ引イタ直線ハ AC ノ中點ヲ過ル。(定理18系1)



然ルニ AC ノ中點ハ E ノ外ニナイ。因テコノ平行線ハ DE ニ合スル。

即チ DE∥BC

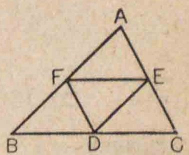
次ニ BC ノ中點ヲFトスルト,上ト同樣ニ

EF∥BD

故ニ DBFE ハ平行四邊形デアル。

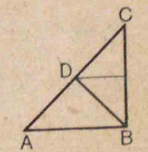
$$\therefore \quad DE=BF=\frac{1}{2}BC$$

問 1. 三角形ノ三邊ノ中點ヲ順次ニ結べバ四ツノ合同ナ三角形ヲ得ル。



問 2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結べバ平行四邊形ヲ得ル。

問 3. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點カラ等距離ニアル。

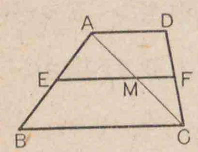


定理 23. 梯形ノ平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ,且ツソノ和ノ半分ニ等シイ。

假設 梯形 ABCD ニ於テ AD∥BC トシ, E,F ヲ夫夫 AB,DC ノ中點トスルト

終結 EF∥BC, EF=$\frac{1}{2}$(AD+BC) デアル。

證明 △ABC ニ於テ AB ノ中點 E カラ BC(AD) ニ



平行ニ引イタ直線ハ AC ノ中點 M ヲ過ル。故ニコノ直線ハ亦 △ACD ニ於テ CD ノ中點ヲ過ル。然ルニ CD ノ中點ハ F ノ他ニナイ。因テコノ平行線ハ EF ニ合スル。

卽チ　$EF \parallel BC$

且ツ　$EM=\frac{1}{2}BC,\quad MF=\frac{1}{2}AD$

$\therefore \quad EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$

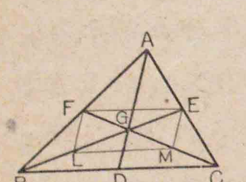
37. 三角形ノ重心

定理 24. 三角形ノ三中線ハ一點デ交ル。又ソノ交點ハ各中線上各頂點カラ夫々 $\frac{2}{3}$ ノ處デアル。

假設　△ABC ノ三中線ヲ AD, BE, CF トスルト

終結　AD, BE, CF ハ夫々頂點カラ $\frac{2}{3}$ ノ一點デ交ル。

證明　BE, CF ノ交點ヲ G トシ, BG, CG ノ中點ヲ夫々 L, M トスル。



$$\left.\begin{array}{l} LM \overset{*}{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC \\ FE \,\underline{\parallel}\, \frac{1}{2}BC \end{array}\right\} \quad \therefore \ LM \,\underline{\parallel}\, FE$$

* コノ記號ハ＝ト//トヲ意味スル。

故ニ LMEF ハ平行四邊形デアル。

因テ　$BL=LG=GE,\quad CM=MG=GF$

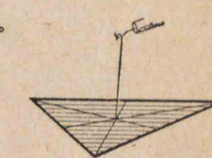
卽チ G ハ BE, CF 上各頂點カラ $\frac{2}{3}$ ノ處デアル。

同様ニ AD ト BE トノ交リハ BE 上 $\frac{2}{3}$ ノ點ナルコトガ證明出來ル。

因テ三中線ハ各頂點カラ各々 $\frac{2}{3}$ ノ一點 G デ交ル。

注意　コノ點ヲ三角形ノ**重心**トイフ。

厚紙デ三角形ヲ作リ,絲デ吊シテ釣合フ點ハソノ重心デアルコトヲ確メヨ。



練習 (5)

1. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點ヲ D トスレバ, DA<AC デアル。

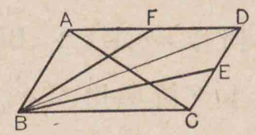
2. 梯形ノ對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ且ツ兩底ノ差ノ半分ニ等シイ。

3. 平行四邊形 ABCD ノ各頂點カラコノ平行四邊形ヲキラナイ直線 XY ヘ垂線 AA′, BB′, CC′, DD′ ヲ下ストキ, AA′+CC′=BB′+DD′ デアル。

4. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トシ, A, B, C, G カラコノ三角形ヲキラナイ一直線ヘ垂線 AA′, BB′, CC′, GG′ ヲ引クト, 3GG′=AA′+BB′+CC′ デアル。

5.　三角形ABC ニ於テ AB=AC トシ,BA ヲ D マデ延長シテ AD=AB トスレバ, CD⊥BC デアル。

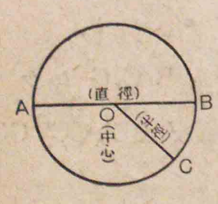
6.　平行四邊形 ABCD ノ邊 CD, DA ノ中點ヲ夫々E, F トスレバ, BE, BF ハ AC ヲ三等分スル。



第六章　圓

38. 圓

定義　線分ノ一端ヲ固定シ,ソノ線分ヲ一周リ廻轉スルトキ,他端ノ畫ク曲線ヲ**圓周**,固定シタ點ヲ**圓ノ中心**トイヒ,線分ガ畫イタ平面ノ部分ヲ**圓**トイフ。



ソシテ圓ノ中心カラ圓周マデ引イタ線分ヲ圓ノ**半徑**トイフ。圓ノ中心ヲ過ツテ

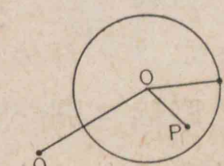
兩端ガ圓周上ニアル線分ヲ圓ノ**直徑**トイフ。

圓又ハ圓周ヲ表ハスニハ圓周上ノ三點例ヘバA, B, C ヲトリ,**圓ABC**又ハ**圓周ABC**トイフ。時トシテハ中心ヲ表ハス文字Oヲ用ヒテ**圓O**トモイフ。

系 1.　一ツノ圓ノ半徑ハ皆相等シイ。又直徑ハ半徑ノ 2倍デアル。

系 2.　一ツノ圓ノ直徑ハ皆相等シイ。

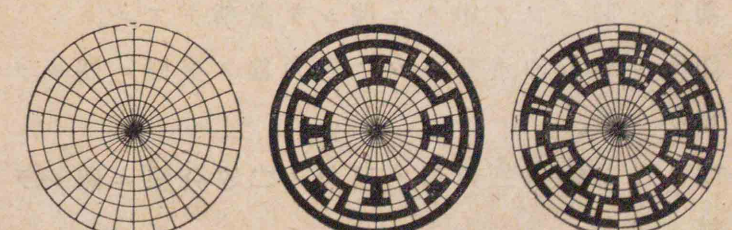
系 3.　一ツノ點ト圓ノ中心トノ距離ガ圓ノ半徑ヨリ小ナルカ等シイカ又ハ大ナルカニ從ツテ,ソノ點ハ圓內,圓周上又ハ圓外ニアル。又コノ逆モ眞デアル。



系 4.　半徑ガ等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

問　直徑ガ等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

定義　二ツ以上ノ合同ナ圓ヲ**等圓**トイヒ,中心ヲ共有スル圓ヲ**同心圓**トイフ。



39. 對稱圖形

定義 一點ヲ過ツテ或圖形上ニ兩端ヲモツ總テノ線分ガ皆ソノ點デ二等分セラレルトキ,ソノ圖形ハソノ**點ニ關シテ對稱デアル**又ハ**點對稱ヲモツ**トイヒ,ソノ點ヲ**對稱ノ中心**トイフ。

一直線ヲ折目トシテ或圖形ヲ折返ストキ,ソノ二ツノ部分ガ全ク合スレバ,ソノ圖形ハソノ**直線ニ關シテ對稱デアル**又ハ**線對稱ヲモツ**トイヒ,ソノ直線ヲ**對稱ノ軸**トイフ。

系 1. 一ツノ圖形ノ對稱ノ軸ハソノ圖形ヲ合同ナ二ツノ部分ニ分ケル。

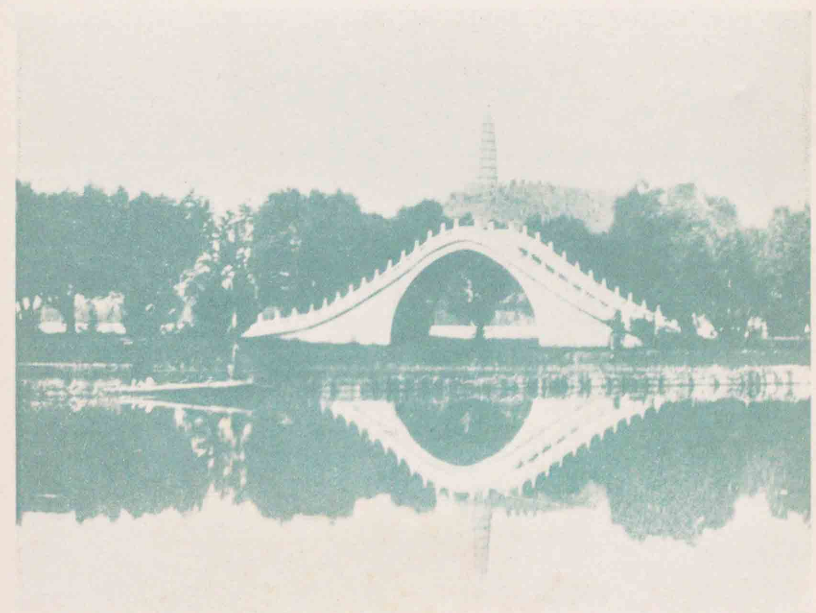
系 2. 一ツノ圖形ノ對稱ノ中心ヲ過ル任意ノ直線ハソノ圖形ヲ合同ナ二ツノ部分ニ分ケル。

(一方ヲ對稱ノ中心ノ周リニ二直角ダケ廻轉セヨ)

問 1. 圓ハソノ中心ニ關シテ對稱デアル。

問 2. 平行四邊形ハソノ對角線ノ交點ニ關シテ對稱デアル。

問 3. 二等邊三角形ハ頂角ノ二等分線ニ關シテ對稱デアル。



夏宮殿ノ駱駝橋 (北京)

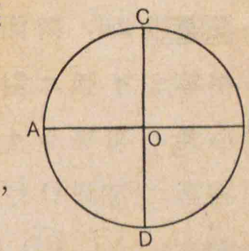
40. 圓周ノ對稱

定理 25. **圓周ハ直徑ニ關シテ對稱デアル。**

證明　略スル。

系 1.　**直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分スル。**

系 2.　**互ニ垂直ナ二ツノ直徑ハ圓及ビ圓周ヲ四等分スル。**



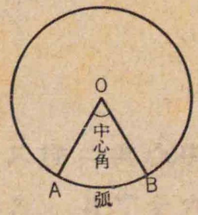
定義　圓ガ一ツノ直徑デ分タレタ二ツノ部分ヲ各〻**半圓**トイヒ，互ニ垂直ナ二ツノ直徑デ分タレタ四ツノ部分ヲ各〻**四分圓**又ハ**象限**トイフ。

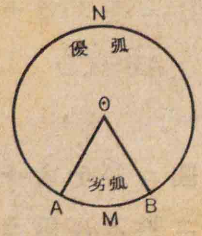
41. 弧ト中心角

定義　圓周ノ一部分ヲ**弧**トイフ。

弧ヲ表ハスニハソノ兩端ノ文字ヲ用ヒル。例ヘバ下圖ニ於テハ**弧 AB** 又ハ $\overset{\frown}{AB}$ ト書ク。

定義　弧ノ兩端カラ引イタ二ツノ半徑ノナス角ヲ**中心角**トイフ。





コノトキ弧ト中心角トハ**相對スル**トイフ。

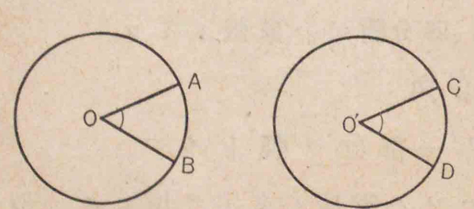
O 圓周上ニ二點 A, B ヲトルト，

全圓周ハ二ツノ弧ニ分タレル。ソレ等ノ中劣角AOBニ對スル弧ヲ**劣弧**,優角AOBニ對スル弧ヲ**優弧**トイヒ,弧ノ上ニ夫々一點ヲトリ,**弧AMB,弧ANB**又ハ$\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$ト書イテ區別スル。

定理 26. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ中心角ハ相等シイ弧ニ對スル。逆ニ相等シイ弧ニ對スル中心角ハ相等シイ。

假設 等圓O,O'ニ於テ $\angle AOB=\angle CO'D$ トスルト

終結 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ デアル。



證明 圓O'ヲ(ソノマヽ又ハ裏返シテ)圓Oノ上ニオキ,O'ヲOニ,O'CヲOAニ重ネルトCハAニ重ナル。

次ニ $\angle AOB=\angle CO'D$ ナル故,O'DハOBニ重ナリ,DハBニ重ナル。然ルニ兩圓周ハ既ニ重ナツテキル。故ニ $\widehat{CD}$ハ$\widehat{AB}$ニ全ク重ナル。

$\therefore \qquad \widehat{AB}=\widehat{CD}$

逆ノ證明ハ略スル。

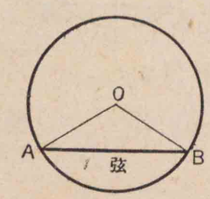
系 同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大デアル。又コノ逆モ眞デアル。

問1. 同圓又ハ等圓ニ於テ中心角ガ2倍,3倍,…ニナレバ,ソレニ對スル弧モ亦2倍,3倍,…ニナル。

問2. 圓周上ノ一點カラ二ツノ半徑(又ハソノ延長)ニ下シタ垂線ガ等シケレバ,二ツノ半徑ノ夾ム弧ハソノ點デ二等分セラレル。

42. 弧ト弦

定義 弧ノ兩端ヲ結ブ線分ヲ**弦**トイフ。

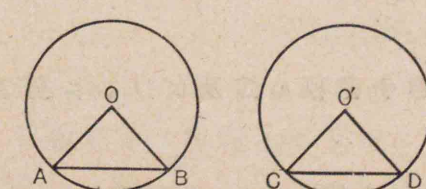


コノトキ弧ト弦トハ**相對スル**トイフ。一ツノ弦ニ對スル弧ハ二ツアルガ通常劣弧ヲトルモノトスル。

定理 27. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弧ニ對スル弦ハ相等シイ。逆ニ相等シイ弦ニ對スル弧ハ相等シイ。

假設 等圓O, O'ニ於テ $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ トスルト

終結 $AB=CD$ デアル。



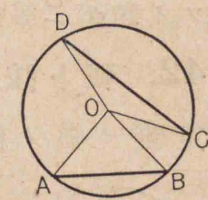
證明 O, O'ハ等圓デアツテ $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ ナル故 $\angle AOB=\angle CO'D$

∴ $\triangle AOB \equiv \triangle CO'D$

∴ $AB = CD$

逆ノ證明ハ略スル。

系 **同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル弧ニ對スル弦ハ小ナル弧ニ對スル弦ヨリ大デアル。又コノ逆モ眞デアル。**



證明 O 圓周上デ $\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{AB}$ トスルト $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ ニ於テ

$\angle COD > \angle AOB$

且ツソレ等ヲ夾ム二邊ハ夫々相等シイ。

故ニ $CD > AB$

逆ノ證明ハ略スル。

問1. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ中心角ニ對スル弦ハ相等シイ。

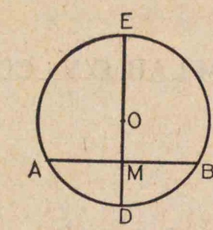
問2. 同圓又ハ等圓ニ於テ,一ツノ弧 AB ガ他ノ弧 CD ノ 2 倍ナルトキ,弦 AB ハ弦 CD ノ 2 倍ヨリ小デアル。($\overset{\frown}{AB}$ ヲ二等分セヨ)

43. 弦ト中心

定理 28. 弦ニ垂直ナ直徑ハ弦及ビソレニ對スル弧ヲ二等分スル。

證明 略スル。(圓周ハ直徑ニ關シテ對稱ナルコトヨ

リ明ラカデアル)



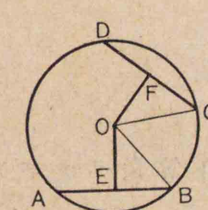
系 1. 弦ノ垂直二等分線ハ中心ヲ過ル。

系 2. 弦ノ中點ト中心トヲ結ブ直線ハ弦ニ垂直デアル。

定理 29. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル。逆ニ中心カラ等距離ニアル弦ハ相等シイ。

假設 圓 O ニ於テ $AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ トスルト

終結 $OE = OF$ デアル。



證明 $OE \perp AB$ ナル故 E ハ AB ノ中點デアル。

同樣ニ F ハ CD ノ中點デアル。

扨テ $AB = CD$ ナル故 $EB = FC$

又 $OB = OC$ 且ツ $\angle E = \angle F = R\angle$

∴ $\triangle OBE \equiv \triangle OCF$

∴ $OE = OF$

逆ノ證明ハ略スル。

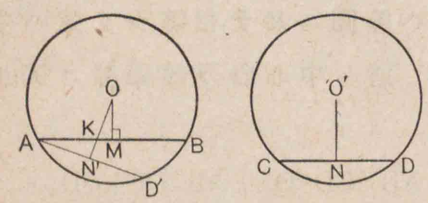
定理 30. 同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル弦ハ小ナル弦ヨリ中心ニ近イ。逆ニ中心ニ近イ弦ハ遠イ弦

ヨリ大デアル。

[假設] 等圓 O,O' ニ於テ $AB>CD$, $OM\perp AB$, $O'N\perp CD$ トスルト

[終結] $OM<O'N$ デアル。

[證明] O 圓周上デ $\overset{\frown}{AD'}$ ヲ $\overset{\frown}{CD}$ ニ等シクトレバ



$$AD'=CD$$

次ニ $ON'\perp AD'$ トスレバ

$$ON'=O'N$$

扨テ $\overset{\frown}{AD'}<\overset{\frown}{AB}$ デアルカラ ON' ト AB トハ交ル。ソノ交點ヲ K トスレバ

$$OM<OK<ON'$$

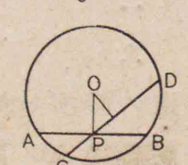
$$\therefore \quad OM<O'N$$

逆ノ證明ハ略スル。(轉換法)

問 1. 直徑上ノ一點ヲ過リコレト等角ヲナス二ツノ弦ハ相等シイ。

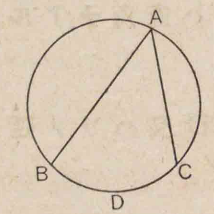
問 2. 弦ノ最大ナルモノハ直徑デアル。

問 3. 圓內ノ一點ヲ過ル弦ノ中，ソノ點デ二等分セラレルモノハ最小デアル。



44. 圓周角

定義 圓周上ノ一點カラ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲ**圓周角**トイフ。



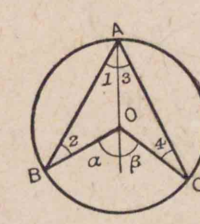
コノトキ圓周角トソノ二邊ガ夾ム弧トハ相**對スル**トイフ。

定理 31. 圓周角ハ同ジ弧ニ對スル中心角ノ半分デアル。

[假設] 圓 O ニ於テ $\overset{\frown}{BC}$ ニ對スル圓周角ヲ $\angle BAC$, 中心角ヲ $\angle BOC$ トスルト

[終結] $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ デアル。

[證明] $OA=OB$ $\quad\therefore\quad \angle 1=\angle 2$



然ルニ $\angle\alpha=\angle 1+\angle 2=2\angle 1$

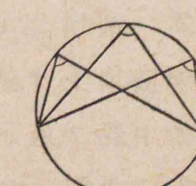
$\therefore \quad \angle 1=\frac{1}{2}\angle\alpha$

同様ニ $\angle\beta=2\angle 3$

$\therefore \quad \angle 3=\frac{1}{2}\angle\beta$

$$\therefore \quad \angle BAC=\angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)=\frac{1}{2}\angle BOC$$

[注意] 中心 O ガ $\angle BAC$ 內ニナイ場合ニモ同様ニ證明スルコトガ出來ル。



系 1. 同ジ弧ニ對スル圓周角ハ皆相等シイ。

系 2. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。又コノ逆モ眞デアル。

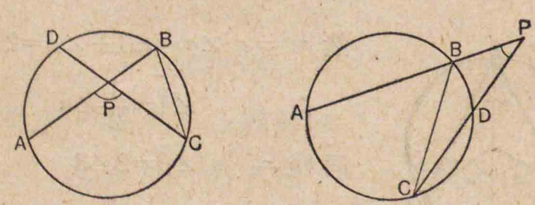
系 3. 半圓周ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デアル。又コノ逆モ眞デアル。

定理 32. 圓ノ二ツノ弦 AB, CD 又ハソノ延長ノ交點ヲ P トスルトキ, ∠APC ハ

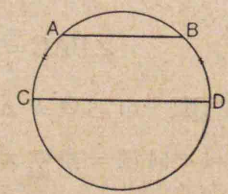
(i) P ガ圓內ニアルト,ソノ角及ビ對頂角ガ夾ム弧 AC, BD ニ對スル圓周角ノ和ニ等シイ。

(ii) P ガ圓外ニアルト,ソノ角ガ夾ム弧 AC, BD ニ對スル圓周角ノ差ニ等シイ。

證明 略スル。



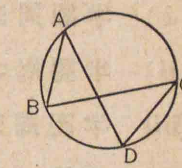
問 1. 一圓周ガ二ツノ平行線デキリトラレル弧ハ相等シイ。



問 2. 圓周角 APB ノ二等分線ハ P ガ圓周上ヲ動イテモ,常ニ弧 AB ノ中點ヲ過ル。

問 3. 次圖ニ於テ AB=CD ナラバ, BC=AD デアル。又コノ逆モ眞デアル。

(B ト D ヲ結べ)



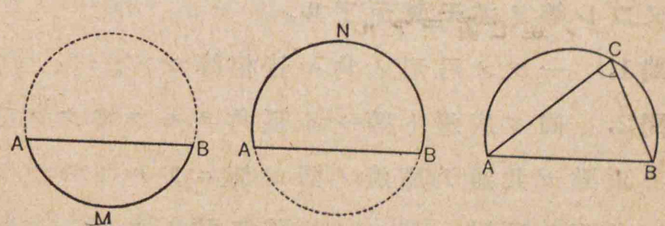
問 4. 直徑ノ兩端ニ於テコレト等角ヲナス二ツノ弦ハ相等シイ。

45. 弓形

定義 圓ノ弧トソレニ對スル弦トデ圍マレタ平面ノ部分ヲ**弓形**トイフ。

弓形ノ弧上ノ一點ヲソノ弧ノ兩端ニ結ンダ二ツノ弦ノナス角ヲ**弓形ノ角**或ハ**弓形ノ含ム角**トイフ。

弓形ヲ表ハスニハ弧ノ上ノ一點ヲ表ハス文字ヲ弧ノ兩端ヲ表ハス文字ノ間ニ置ク。例ヘバ圖ニ於



ケル二ツノ弓形ハ**弓形 AMB** 及ビ**弓形 ANB** デアル。又 ∠ACB ハ弓形 ACB ノ角デアル。

弓形ヲ圓ノ一部分トミルト弓形ノ角ハ圓周角デアル。因テ次ノ系ヲ得ル。

系 1. 弓形ノ角ハソノ弧ガ

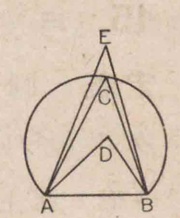
(i) 半圓周ヨリ大ナルトキハ鋭角デアル。

(ii) 半圓周ニ等シイトキハ直角デアル。

(iii) 半圓周ヨリ小ナルトキハ鈍角デアル。

又コレ等ノ逆モ眞デアル。

系 2. 一ツノ點ヲ弓形ノ弦ノ兩端ニ結ンデ出來ル二ツノ線分ノナス角ハ



(i) ソノ點ガ弓形ノ内ニアルトキハ弓形ノ角ヨリ大デアル。

(ii) ソノ點ガ弓形ノ外ニアツテ弦ニ關シテ弧ト同ジ側ニアルトキハ,弓形ノ角ヨリ小デアル。

又コレ等ノ逆モ眞デアル。

問 1. 一ツノ弓形ノ角ハ皆相等シイ。

問 2. 同ジ底邊ト等シイ頂角ヲモツ多クノ三角形ハ頂點ガ共通ナ底邊ノ同ジ側ニアルトキ,ソレ等ノ三角形ノ頂點ハ皆ソノ底邊ヲ弦トスル一ツノ弓形ノ弧ノ上ニアル。

46. 圓ト直線

定理 33. 圓周ト直線トハ,圓ノ中心ト直線トノ距離ガ

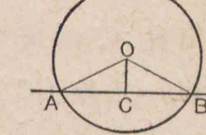
(i) 半徑ヨリ小ナルトキハ二點デ出會フ。

(ii) 半徑ニ等シイトキハ一點デ出會フ。

(iii) 半徑ヨリ大ナルトキハ出會ハナイ。

又コレ等ノ逆モ眞デアル。

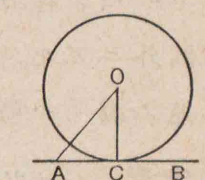
假設 圓ノ中心ヲO,直線ヲAB, OトABトノ距離ヲOCトシ



(i) OCハ半徑ヨリ小

(ii) OCハ半徑ニ等シイ

(iii) OCハ半徑ヨリ大トスルト

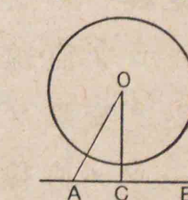


終結 圓周ト直線トハ

(i) 二點デ出會フ。

(ii) 一點デ出會フ。

(iii) 出會ハナイ。



證明 (i) OCハ半徑ヨリ小デアルカラCハ圓内ニアル。然ルニ直線ハ双方ヘ限リナク長イカラ,直線AB上ニハ圓Oノ外ノ點ガアル。故ニ直線ABハ少クモ一點デコノ圓周ト出會フ。ソノ點ヲAトシ,OCニ關シテOAニ對稱ナ線分OBヲ引クトOBトOAハ相等シイ。然ルニOAハ半徑デアルカラOBモ亦半徑ニ等シク,從ツテBハ圓周上ニアル。Oカラ直

線 AB ニ引イタ等シイ斜線ハ唯二ツデアルカラ,圓周トコノ直線トハ唯二ツノ點A, Bデ出會フ。

(ii) 垂線 OC ガ半徑ニ等シイカラ,任意ノ斜線 OA ハ半徑ヨリ大デアル。故ニ直線上C以外ノ點ハ圓外ニアル。故ニ圓周トコノ直線トハ唯一點Cデ出會フ。

(iii) 垂線 OC ガ半徑ヨリ大デアルカラ,任意ノ斜線 OA モ半徑ヨリ大デアル。故ニ直線上ノ點ハ總テ圓外ニアル。故ニ圓周ハコノ直線ト出會ハナイ。

逆ノ證明ハ略スル。

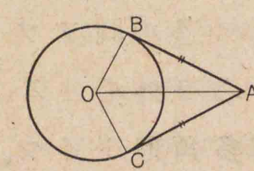
定義 一ツノ直線ガ圓周ト二點デ出會フトキ,コノ直線ハ圓ト**交ル**トイヒ,ソノ出會ツタ點ヲ**交點**,ソノ直線ヲ圓ノ**割線**トイフ。

一ツノ直線ガ圓周ト唯一點デ出會フトキ,コノ直線ハ圓ニ**切スル**トイヒ,ソノ直線ヲ圓ノ**切線**トイフ。切線ガ圓周ト出會ツタ點ヲ**切點**トイフ。

系1. 圓周上ノ任意ノ一點ニ於ケル切線ハソノ點ヘ引イタ半徑ニ垂直デアル。

系2. 切點ヲ過リ切線ニ垂直ナ直線ハ圓ノ中心ヲ過ル。

系3. 一點カラ圓ニ二ツノ切線ヲ引クトキ,ソノ點ト切點トノ距離ハ相等シイ。



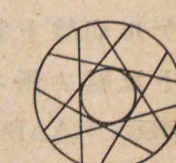
定義 圓外ノ一點カラ圓ニ切線ヲ引クトキ,切點ト初メノ點トノ距離ヲ**切線ノ長サ**トイフ。

問1. 直徑ノ兩端ニ於ケル切線ハ平行デアル。

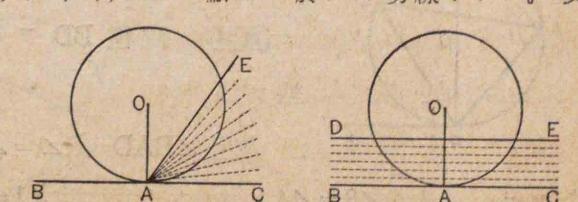
問2. 圓ノ一ツノ切線ニ平行ナ弦ハ何レモソノ切點ヲ過ル直徑ノタメニ垂直ニ二等分セラレル。

問3. 圓外ノ一點ト圓ノ中心トヲ結ブ直線ハソノ點カラ引イタ圓ノ二ツノ切線ガナス角ヲ二等分シ且ツ二ツノ切點ヲ結ブ弦ノ垂直二等分線デアル。

問4. 二ツノ同心圓ノ小圓ニ切スル大圓ノ弦ハ皆相等シイ。



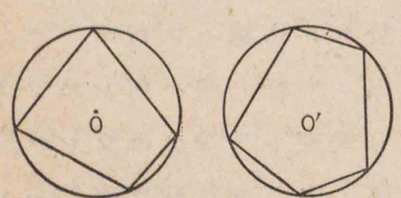
注意 下ノ圖ガ示スヤウニ,圓ノ一ツノ割線 AE ガ A ヲ中心トシテ廻轉シ,次第ニ AC ニ近ヅキ遂ニ AC ニ重ナルトキ,AE ハ點 A ニ於ケル切線トナル。又 OA ニ垂直ナ割線 DE ガ初メノ位置ニ平行シ



ナガラ中心Oヲ遠ザカリ遂ニ BC ニ合スルトキ, DE ハ點 A ニ於ケル切線トナル。

47. 外接圓ト內接多角形

定義 多角形ノ總テノ頂點ヲ過ル圓ヲソノ多角形ノ**外接圓**,ソノ圓ノ中心ヲ**外心**トイフ。又コノ多角形ヲ圓ノ**內接多角形**トイフ。

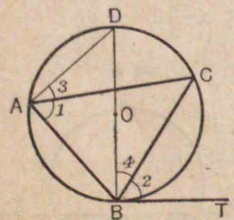


コノトキ圓ハ多角形ニ**外接スル**トイヒ,多角形ハ圓ニ**內接スル**トイフ。

上圖ハ內接四邊形,內接五邊形デアル。

定理 34. **內接三角形ノ頂角ハソノ對邊ノ端ニ於ケル切線ト對邊トノナス角ノ中,對邊ニ關シテソレト反對ノ側ニアル角ニ等シイ。**

假設 △ABC ハ圓 O ニ內接シ, B ニ於ケル切線ヲ BT トスルト



終結 ∠BAC=∠TBC デアル。

證明 直徑 BD ヲ引キ, AD ヲ結ブト

$$\angle BAD = R\angle = \angle TBD$$

然ルニ $\angle 3 = \angle 4$ ∴ $\angle 1 = \angle 2$

卽チ $\angle BAC = \angle TBC$

注意 邊 BC ガ半圓 BAD 內ニアルトキモ同樣ニ證明出來ル。

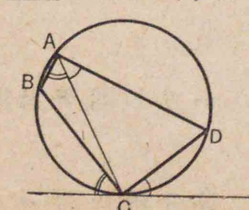
系 **內接三角形ノ一邊ノ端カラソノ邊ニ關シテ三角形ト反對ノ側ニ引イタ直線トソノ邊トノナス角ガ,ソノ邊ニ對スル頂角ト等シケレバ,ソノ直線ハ外接圓ニ切スル。**

問 1. 圓周上ノ一點 A カラ弦 AB 及ビ切線 AT ヲ引キ, ∠BAT ノ二等分線ガ $\overset{\frown}{AB}$ ト交ル點ヲ M トスルト, M ハ $\overset{\frown}{AB}$ ノ中點デアル。

問 2. 圓周上ノ一點 A カラ弦 AB, AC 及ビ切線 AT ヲ引キ, B カラ AT ニ平行ニ引イタ直線ガ弦 AC (又ハソノ延長)ト交ル點ヲ D トスルト, AB ハ圓 BDC ノ切線デアル。

定理 35. **圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。又コノ逆モ眞デアル。**

假設 圓ニ內接スル四邊形ヲ ABCD トスルト



終結 $\angle BAD + \angle BCD = 2R\angle$
$\angle ABC + \angle ADC = 2R\angle$

證明 略スル。

系 **圓ニ內接スル四邊形ノ**

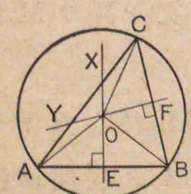
一外角ハソノ內對角(外角ニ隣ル內角ノ對角)**ニ等シイ。又コノ逆モ眞デアル。**

定理 36. 三角形ノ外接圓ハ一ツハ必ズアル,ソシテ唯一ツニ限ル。

假設　三角形ヲABCトスルト

終結　△ABCノ外接圓ハ一ツハ必ズアル。ソシテ唯一ツヨリナイ。

證明　AB, BCノ垂直二等分線EX, FYヲ引ク。



AB, BCハ交ツテヰルカラ, EX, FYハ必ズ交ル。ソノ交點ヲOトシ, OA, OB, OCヲ結ブト

OA=OB,　OB=OC　(定理4系)

ソレ故Oヲ中心トシOAヲ半徑トスル圓ハ三點A, B, Cヲ過ル。因テコノ圓ハ△ABCノ外接圓デアル。卽チ外接圓ハ一ツハ必ズアル。

次ニ二直線EX, FYノ交點ハ唯一ツヨリナイカラ,三點A, B, Cヲ過ル圓ノ中心モ唯一ツヨリナイ。從ツテ△ABCノ外接圓ハ唯一ツヨリナイ。

系 1. 一直線上ニナイ三點ハ一ツノ圓ヲ決定スル。

系 2. 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點

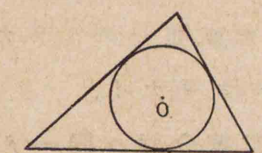
ヲ過ル。ソシテソノ點ハ三頂點カラ等距離ニアル。

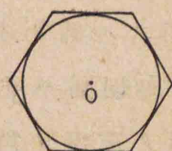
問　一點カラ圓周上ノ三點ニ引イタ線分ガ相等シイトキ,ソノ點ハソノ圓ノ中心デアル。

48. 內切圓ト外切多角形

定義　多角形ノ總テノ邊ニ切スル圓ヲソノ多角形ノ**內切圓**,ソノ中心ヲ**內心**トイフ。又ソノ多角形ヲ圓ノ**外切多角形**トイフ。

コノ場合ニ圓ハ多角形ニ**內切スル**トイヒ,多角形ハ圓ニ**外切スル**トイフ。



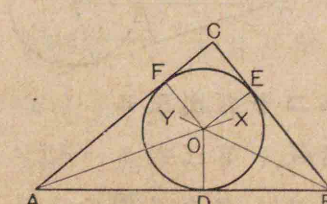


圖ニ於テ三角形及ビ六角形ハ共ニ圓Oノ外切多角形デ,圓Oハソレ等ノ內切圓デアル。

定理 37. 三角形ノ內切圓ハ一ツハ必ズアル,ソシテ唯一ツニ限ル。

假設　三角形ヲ△ABCトスルト

終結　△ABCノ內切圓ハ一ツハ必ズアル。ソシテ唯一ツヨリナイ。



證明　∠A, ∠Bノ二等分線AX,BYヲ引クト, ∠XAB+∠YBAハ2R∠

ヨリ小デアルカラ AX, BY ハ必ズ交ル。ソノ交點ヲ O トシ, O カラ三邊ニ夫々垂線 OD, OE, OF ヲ下スト

$$OE=OD,\quad OF=OD$$ (定理12系5)

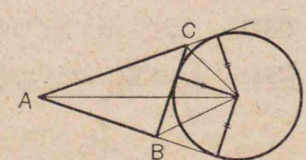
ソレ故 O ハ三邊 AB, BC, CA カラ等距離ニアル。

今コノ距離ヲ半徑トシ, O ヲ中心トスル圓ヲ畫クト, コノ圓ハ三角形ノ三邊ニ切スル。(定理33) 因テコノ圓ハ △ABC ノ内切圓デアル。卽チ内切圓ハ一ツハ必ズアル。

次ニ AX, BY ノ交點ハ唯一ツヨリナイカラ, 三邊 AB, BC, CA ニ切スル圓ノ中心モ亦唯一ツヨリナイ。從ツテ △ABC ノ内切圓ハ唯一ツヨリナイ。

系 1. 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ過リ, ソノ點ハ三邊カラ等距離ニアル。

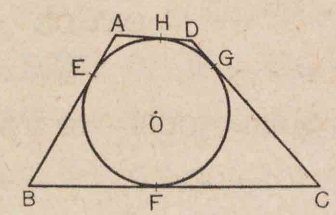
系 2. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線及ビ他ノ二角ノ外角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ過リ, ソノ點ハ三邊カラ等距離ニアル。因テコノ點ヲ中心トシテ, 三角形ノ二邊ノ延長ト殘リノ一邊トニ切スル圓ヲ作ルコトガ出來ル。



定義 三角形ノ二邊ノ延長ト第三邊トニ切スル圓ヲ三角形ノ**傍切圓**トイヒ, ソノ中心ヲ**傍心**トイフ。

定理 38. 圓ニ外切スル四邊形ノ相對スル邊ノ和ハ相等シイ。

假設 圓 O ニ外切スル四邊形ヲ ABCD トスルト



終結 $AB+CD=BC+AD$ デアル。

證明 AB, BC, CD, DA ガ圓 O ニ切スル點ヲ夫々 E, F, G, H トスル。然ルトキハ

$$\left.\begin{array}{ll} AE=AH, & BE=BF \\ CG=CF, & DG=DH \end{array}\right\}$$ (定理33系3)

$$\therefore\quad AE+BE+CG+DG=AH+BF+CF+DH$$

卽チ $$AB+CD=BC+AD$$

系 四邊形ノ相對スル邊ノ和ガ相等シイトキ, コノ四邊形ハ圓ニ外切スル。

問 1. 圓ニ外切スル平行四邊形ハ菱形デアル。

問 2. 圓ニ外切スル矩形ハ正方形デアル。

49. 外切正多角形・内接正多角形

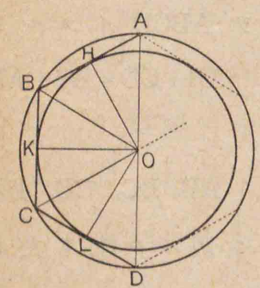
定理 39. 正多角形ハコレニ外接圓及ビ内切圓ヲ畫クコトガ出來ル。

假設 正多角形ヲ ABCD……トスルト

終結 ABCD……ニ (i) 外接圓, (ii) 内切圓ヲ畫クコ

トガ出來ル。

〔證明〕 (i) $\angle A, \angle B$ ノ二等分線ノ交點ヲ O トスル。



然ルトキハ $\angle OAB=\angle OBA$

$\therefore\ OA=OB$

OC ヲ結ブト

$\triangle OAB\equiv\triangle OCB$ (定理4)

$\therefore\ OA=OC$

$\therefore\ OA=OB=OC$

扨テ $\angle OCB=\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle BCD$

ソレ故OCハ$\angle BCD$ノ二等分線デアル。

次ニ OD ヲ結ブト上ト同様ニ

$$OB=OC=OD$$

ヲ得ル。以下順ニ進ンデ

$$OA=OB=OC=OD=\cdots\cdots$$

因テOヲ中心トシOAヲ半徑トスル圓ハ各頂點A, B, C, D, ……ヲ過ル。

即チコノ圓ハ正多角形ABCD……ノ外接圓デアル。

(ii) O カラ AB, BC, CD, …… ニ垂線 OH, OK, OL, ……ヲ下スト $AB=BC=CD=\cdots\cdots$ ナル故

$OH=OK=OL=\cdots\cdots$ (定理29)

因テOヲ中心トシOHヲ半徑トスル圓ハ各邊

AB, BC, CD, ………ニ切スル。

即チコノ圓ハ正多角形ABCD……ノ內切圓デアル。

〔注意〕 正多角形ノ外接圓ノ中心ト內切圓ノ中心ハ同一ノ點デアル。コノ點ヲ**正多角形ノ中心**トイフコトガアル。

〔定理〕40. 圓ノ中心ニ於ケル一周角ヲ幾ツカニ等分スル半徑ノ端ノ點ヲ順次ニ結ブトキハ,內接正多角形ヲ得ル。又ソノ半徑ノ端ノ點デ圓ニ切線ヲ引クトキハ,外切正多角形ヲ得ル。

〔假設〕 圓Oニ於テ中心ニ於ケル一周角ヲ幾ツカニ等分スル半徑ヲ OA, OB, OC, OD, ……トシ,

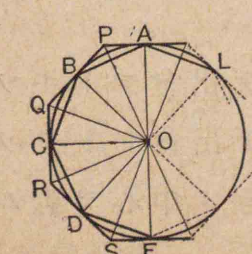
(i) A, B, C, D, ………ヲ結ブ

(ii) A, B, C, D, ………ニ於ケル圓Oノ切線ノ次々ノ交點ヲ P, Q, R, S, ……トスルト

〔終結〕 (i) ABCDE……ハ圓Oノ內接正多角形

(ii) PQRS……ハ圓Oノ外切正多角形デアル。

〔證明〕 (i) $OA=OB=OC=\cdots\cdots$



$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\cdots\cdots$

$\therefore\ \triangle OAB\equiv\triangle OBC\equiv\triangle OCD\equiv\cdots$

$\therefore\ AB=BC=CD=\cdots\cdots$

且ツ $\angle LAB=\angle ABC=\cdots\cdots$

故ニ ABCDE……ハ正多角形,

即チ圓 O ノ內接正多角形デアル。

(ii) 次ニ OP, OQ,……ハ ∠AOB, ∠BOC,……ノ二等分線デ,明カニ △OAP≡△OBQ デアル。

又 △OAP≡△OBP デアルカラ

△OAP≡△OBP≡△OBQ

ヲ得ル。以下同樣ニ進ンデ

△OAP≡△OBP≡△OBQ≡△OCQ≡……

從ッテ　PQ=QR=RS=……,

及ビ　∠P=∠Q=∠R=……

即チ PQRS……ハ外切正多角形デアル。

問 1. 正方形ノ一邊ハソノ內切圓ノ直徑ニ等シイ。

問 2. 圓ニ內接スル等邊多角形ハ正多角形デアル。

問 3. 圓ニ外切スル等角多角形ハ正多角形デアル。

50. 二ツノ圓

定義　二ツノ圓周ガ二點デ出會フトキソレ等ハ相**交ル**トイヒ,唯一點デ出會フトキソレ等ハ相**切スル**トイフ。二圓ノ中心ヲ過ル直線ヲ二圓ノ**中心線**トイフ。

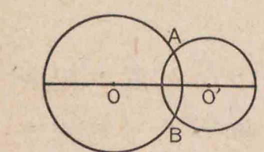
注意　三點ハ一ツノ圓ヲ決定スルカラ二ツノ圓周ハ三點以上デ出會ハナイ。

定理 41. 二ツノ圓周ガ相交ルトキ,ソノ交點ハソノ中心線ニ關シテ對稱デアル。

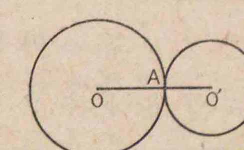
假設　O, O′ ノ圓周ガ二點 A, B デ交ルトスルト

終結　A, B ハ中心線 OO′ ニ關シテ對稱デアル。

證明　圓ハ直徑ニ關シテ對稱デアルカラ,中心線 OO′ ヲ折目トシテ,ソレカラ上ノ平面ヲ下ヘ折返スト,上ノ半圓ハ夫々下ノ半圓ニ合スル。故ニ上ノ注意ヨリ A ハ B ニ合スル。因テ A, B ハ OO′ ニ關シテ對稱デアル。

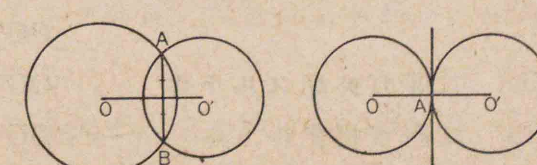


系 1. 二ツノ圓周ガ相切スルトキ,ソノ切點ハソノ中心線上ニアル。



(モシ切點ガ中心線上ニナケレバ,ソレニ關シ對稱ナ點デ再ビ出會フ。因テ二ツノ圓周ハ相交ルコトトナル)

系 2. 二ツノ圓周ガ相交ルトキ,ソノ中心線



ハ共通弦ヲ垂直ニ二等分スル。

系 3. **二ツノ圓周ガ相切スルトキ,ソノ切點ヲ過リ中心線ニ垂直ナ直線ハ二圓ニ共通ナ切線デアル。**

問 1. 相交ル二圓ノ交點ヲA,Bトシ,Aヲ過ツテ二圓ノ直徑AC,ADヲ引クトキ,三點C,B,Dハ一直線上ニアル。

問 2. 一ツノ直線上ノ一點ニ於テコノ直線ニ切スル二ツノ圓ハ相切スル。

問 3. 二ツノ圓ガ相切スルトキ,ソノ切點ヲ過ル任意ノ直線ハソノ二圓カラ等シイ角ヲ含ム弓形ヲキリトル。

51. 二圓ノ位置ノ關係

定義 相切スル二圓ガ互ニ他ノ外ニアルトキ,ソレ等ハ**外切スル**トイヒ,一方ガ他方ノ內ニアルトキ,ソレ等ハ**內切スル**トイフ。

定理 42. **二圓O,O'ノ半徑ヲ夫々r, r'トシ**

(i) **一方ノ圓ガ他方ノ圓ノ全ク外ニアルトキ** $OO' > r + r'$

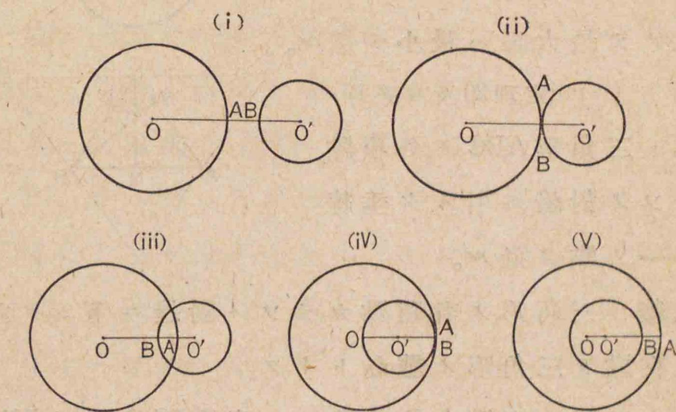
(ii) **二圓ガ外切スルトキ** $OO' = r + r'$

(iii) **二圓ガ相交ルトキ** $r \sim r' < OO' < r + r'$

(iv) **二圓ガ內切スルトキ** $OO' = r \sim r'$

(v) **一方ノ圓ガ他方ノ圓ノ全ク內ニアルトキ** $OO' < r \sim r'$

證明 略スル。



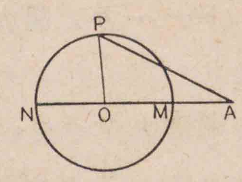
注意 二ツノ圓ノ位置ノ關係ハ上ノ五ツノ他ニハナイ。

練習 (6)

1. 矩形,菱形ハ夫々二ツノ對稱ノ軸ヲモチ,正方形ハ四ツノ對稱ノ軸ヲモツ。ソシテコレ等ノ軸ノ交點ハ對稱ノ中心デアル。一般ニ互ニ垂直ナ二ツノ對稱ノ軸ヲモツ圖形ハ軸ノ交點ニ關シテ對稱デアル。

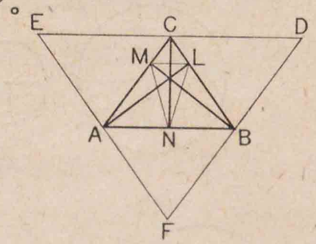
2. 一ツノ直線ガ二ツノ同心圓ノ周ト交ルトキ,ソノ直線ノ二ツノ圓周ノ間ニ夾マレル部分ハ相等

シイ。



3. 一ツノ點カラ圓周上ノ一點マデ引イタ線分ノ中,中心ヲ過ルモノガ最大又ハ最小デアル。

(定理20及ビ系1)



4. 三角形ABCノ各項點カラソノ對邊ヘ引イタ垂線ハ同一ノ點ヲ過ル。

定義 三角形ノ各頂點カラソノ對邊ニ下シタ垂線ノ交點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。

5. 二圓ノ交點A,Bヲ過ツテ直線PAQ及ビRBSヲ引キ,圓周ト夫々P,Q及ビR,Sデ交ラシメルトキPR∥QS デアル。

6. 二圓ガ切スルトキ,ソノ切點ヲ過ル任意ノ二ツノ直線ガ二ツノ圓周カラキリトル弧ノ弦ハ平行デアル。

7. 一ツノ圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ヲ畫クトキ,ソノ切點ヲ過ル大圓ノ弦ハ小圓ノ周ニヨツテ二等分セラレル。

8. 三角形ABCノ垂心ヲHトスルト,四點A,B,C,Hノ中,任意ノ一ツハ他ノ三ツヲ頂點トスル三角形

ノ垂心デアル。

9. 三角形ノ外心,內心,垂心ノ中二ツヅツガ同一ノ點ナルトキ,コノ三角形ハドンナ三角形カ。

10. 三角形ABCノ頂點Aニ於テ引イタ外接圓ノ切線ニ平行ナ直線ガ邊AB,ACト交ル點ヲ夫々P,Qトスルト,四邊形 BPQC ハ圓ニ內接スル。

11. 互ニ外ニアル二圓ノ周上ニ兩端ヲモツ線分ノ中,最大及ビ最小ナルモノハソノ中心線上ニアル。

12. 三角形ABCノ垂心ヲH,外心ヲO,OカラBCニ下シタ垂線ノ足ヲMトスルト, $AH=2OM$ デアル。

13. 圓ニ內接スル多角形ノ角ガ皆等シイトキ,ソノ邊ハ一ツオキニ相等シイ。從ツテ邊數ガ奇數ナラバ,ソノ多角形ハ正多角形デアル。

第七章 作圖題

52. 作圖題

定義 與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ畫ク幾何學的方法ヲ求メル問題ヲ**作圖題**トイヒ,圖形ヲ畫ク幾何學的方法ヲ**作圖法**或ハ單ニ**作圖**トイフ。

圖形ヲ畫クコトヲ**作圖スル**トイヒ,又作圖シテ得タ圖形ヲ作圖ノ**解答**トイフ。

53. 作圖ノ器具

作圖スルニ際シテ用ヒル器具ハ次ノ二ツニ限ラレテアル。

(i) **目盛ノナイ定規**…………(直線ヲ畫クモノ)

(ii) **こんぱす**……………………(圓ヲ畫クモノ)

注意　線分ノ長サヲ計リ又ハ線分ヲ幾ツカニ等分スルタメニ目盛ノアル定規卽チ物指ヲ用ヒタリ,角ヲ計ルタメニ分度器又ハ三角定規ノ角ヲ用ヒタリ等スル作圖ノ仕方ハ幾何學的作圖法トハイハナイ。

54. 作圖ノ公法

作圖スルニ際シ前節デ述ベタヤウナ定規及ビこんぱすダケヲ用ヒルトイフコトハ,作圖ノ最初カラ次ノ二ツノコトガ出來ルモノト認メテアルノト同様デアル。

(i) **任意ノ二點ヲ過ル直線ヲ引クコト。**

(ii) **任意ノ點ヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓ヲ畫クコト。**

コレ等ヲ**作圖ノ公法**トイフ。從ツテ

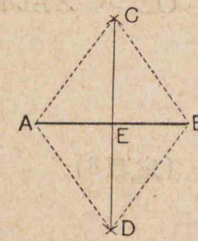
(i)ニヨツテ線分ヲ延長スルコトガ出來ル。

(ii)ニヨツテ線分ヲ他ニ移スコトガ出來ル。

55. 基本ノ作圖題

作圖題 1.　與ヘラレタ線分ヲ二等分セヨ。

題意　與ヘラレタ線分ヲ AB トシ, AB ヲ二等分スルコトヲ求メル。



作圖　A 及ビ B ヲ中心トシテ,任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ畫キ,ソノ交點ヲ C, D トシ, C ト D ヲ結ビ,コレガ AB ト交ル點ヲ E トスル。然ルトキ E ハ AB ヲ二等分スル。

證明　AC, BC, AD, BD ヲ結ブト

$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$　(定理 8)

$\therefore$　$\triangle ACE \equiv \triangle BCE$　(定理 4)

$\therefore$　$AE = EB$

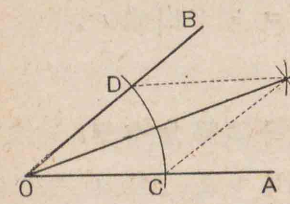
卽チ AB ハ E デ二等分セラレル。

注意　コノ作圖ハ常ニ可能デ,解答ハ唯一ツデアル。

問　與ヘラレタ線分ヲ直徑トスル圓ヲ畫ケ。

作圖題 2.　與ヘラレタ角ヲ二等分セヨ。

題意　與ヘラレタ角ヲ AOB トシ,コレヲ二等分スル直線ヲ引クコトヲ求メル。



作圖　Oヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓ヲ畫キOA, OB ト交ル點ヲ夫々C, Dトスル。次ニC及ビDヲ中心トシテ,任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ畫キ,ソノ交點ヲEトシ, OEヲ結ブト OEハ ∠AOBヲ二等分スル。

證明　EC, EDヲ結ブト

$\triangle OCE \equiv \triangle ODE$　　（定理8）

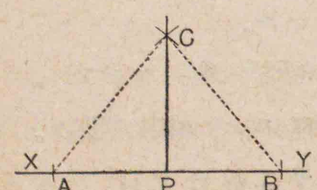
$\therefore \quad \angle EOC = \angle EOD$

卽チ OEハ ∠AOBヲ二等分スル。

注意　コノ作圖ハ常ニ可能デ,解答ハ唯一ツデアル。

作圖題 3.　與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ヲ過リ,ソノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

題意　與ヘラレタ直線ヲ XYトシ, XY上ノ與ヘラレタ點ヲPトスル。Pヲ過ッテ XYニ垂線ヲ引クコトヲ求メル。



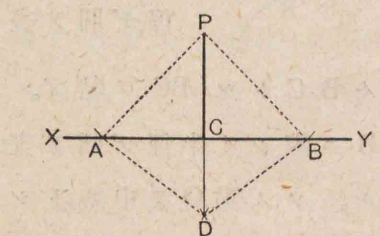
作圖　略スル。（作圖題2ノ特別ナ場合デアル）

問 1.　與ヘラレタ角ヲ四等分セヨ。

問 2.　與ヘラレタ圓ノ周上ニ在ル與ヘラレタ點ニ於テ,ソノ圓ニ切線ヲ引ケ。

作圖題 4.　與ヘラレタ直線外ノ與ヘラレタ點カラ,コノ直線ヘ垂線ヲ引ケ。

題意　與ヘラレタ直線ヲ XYトシ, XY外ノ點ヲPトスル。PカラXYヘ垂線ヲ下スコトヲ求メル。



作圖　Pヲ中心トシテ XYニ交ル任意ノ半徑ノ圓ヲ畫キ, XYトノ交點ヲA, Bトスル。

次ニA, Bヲ中心トシテ任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ畫キ,ソノ交點ヲDトスル。PトDヲ結ビXYトノ交點ヲCトスル。

PCハ求ムル垂線デアル。

證明　略スル。

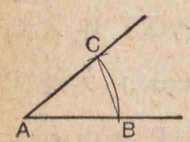
注意　作圖ハ常ニ可能デ,解答ハ唯一ツデアル。

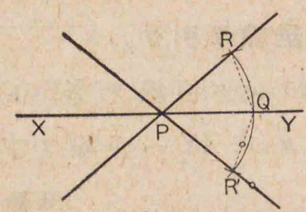
問　與ヘラレタ三角形ノ高サヲ作レ。

作圖題 5.　與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ニ於テ,ソノ直線ト與ヘラレタ角ヲナス直線ヲ引ケ。

題意　與ヘラレタ直線ヲ XYトシ, XY上ノ與ヘ

ラレタ點ヲPトシ,與ヘラレタ角ヲBACトスル。 Pヲ過ツテ XY ト ∠BAC ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求メル。





作圖 Aヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓ヲ畫キ,角ノ二邊ト交ル點ヲ夫々B, CトシBCヲ結ブ。

次ニPヲ中心トシテ, AB ニ等シイ半徑デ圓ヲ畫キ, PY ト交ル點ヲQトスル。ソノ點Qヲ中心トシテ, BC ニ等シイ半徑デ圓ヲ畫キ,前ノ圓トノ交點ヲR, R'トスル。PトRトヲ結ベバ PR ハ求ムル直線デアル。

證明 QRヲ結ブト

$\triangle PQR \equiv \triangle ABC$ (定理8)

$\therefore$ $\angle QPR = \angle BAC$

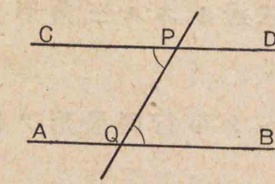
ソレ故 PR ハ求ムル直線デアル。

注意 PR' ヲ結ブト,コレモ亦求ムル直線デアル。ソレ故解答ハ二ツアル。

問 與ヘラレタ二角ノ和ヲ作レ。

作圖題 6. 與ヘラレタ點ヲ過ツテ與ヘラレタ直線ニ平行線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ點ヲP,直線ヲ AB トスル。 Pヲ過ツテ AB ニ平行線ヲ引クコトヲ求メル。



作圖 AB 上ニ任意ノ點Qヲトリ, PQ ヲ結ブ。次ニ點Pニ於テ ∠BQP ニ等シイ錯角 QPC ヲナスヤウニ直線 CD ヲ引ク。(作圖題5)

CD ハ求ムル直線デアル。

證明 略スル。(定理10)

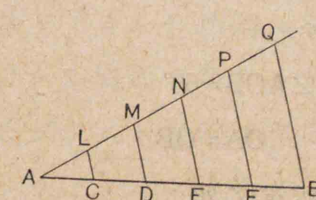
作圖題 7. 與ヘラレタ線分ヲ等分セヨ。

題意 與ヘラレタ線分ヲ AB トシ, AB ヲ例ヘバ五等分スルコトヲ求メル。

作圖 Aカラ任意ノ半直線ヲ引キ,ソノ上ニ

AL=LM=MN=NP=PQ

ナルヤウニ L, M, N, P, Q ヲトリ, QB ヲ結ブ。



次ニ P, N, M, L ヲ過ツテ QB ニ平行線ヲ引キ, AB トノ交點ヲ夫々 F, E, D, C トスル。 C, D, E, F ハ求ムル點デアル。

證明 略スル。(定理18)

注意 作圖ハ常ニ可能デアル,即チ幾等分デモ出來ル。

問1. 二邊トソノ夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

問2. 與ヘラレタ三線分ヲ三邊トスル三角形ヲ作レ。

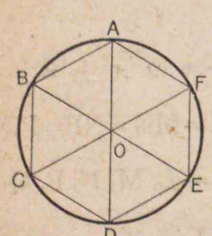
問3. 二邊トソノ夾角ヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作レ。

56. 作圖題ノ完全解

作圖題 8. 圓ニ内接スル正六角形ヲ作レ。

題意 與ヘラレタ圓ヲOトシ,コノ圓ニ内接スル正六角形ヲ作ルコトヲ求メル。

(i) 先ヅ作圖ガ出來タモノトシ,即チ圓Oニ正六角形ABCDEFヲ内接シタトスル。



A, B, C, D, E, F ヲ中心Oト結ブト,中心ニ於ケル一周角ハ六等分セラレテ

$$\angle AOB=60^\circ$$

然ルニ　$OA=OB$

デアルカラ △OABハ正三角形デアル。

∴　$AB=OA$

即チ正六角形ノ一邊ハ半徑ニ等シイ。故ニ次ノヤウニ作圖スレバヨイ。

(ii) O圓周上ニ一點Aヲ取リ,半徑ノ長サニ等シクこんぱすヲ開イテ順々ニ圓周ヲキッテ點B, C, D, E, Fヲ定メ,コレ等ヲ順々ニ結べバ,出來タ六角形ABCDEFハ内接正六角形デアル。

(iii) △OAB, △OBC, △OCD, △ODE, △OEF ハ總テガ正三角形デアル。

$$\therefore\ \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=60^\circ$$

然ルニOノ周リノ一周角ハ360°デアルカラ

$$\angle FOA=60^\circ$$

因テ中心ニ於ケル一周角ガ六等分セラレタカラABCDEFハ内接正六角形デアル。(定理40)

(iv) 圓周ヲ半徑ノ長サニ等シク開イタこんぱすデAカラ順ニキッテ行クコトハ必ズ出來テ且ツ一通リデアルカラ,解答ハ常ニ可能デ且ツ一ツデアル。

以上デコノ作圖題ハ完全ニ解カレタ。

扨テ作圖題ヲ解クニ當ッテ取ッタ道行キノ中,(i)ハ先ヅ求ムル圖形ガ作圖シ得タモノトシテ,ソノ圖形ニツイテソノ性質及ビ既知事項ト未知事項トノ關係等ヲシラベ,ソシテ如何ニスレバ作圖シ得ルカトイフコトヲ考ヘタノデアル。コレヲ作圖題ノ**解析**トイフ。(ii)ハ解析ノ結果ニ基イテ所要ノ作圖ヲ

行ツタモノデアル。コレヲ作圖題ノ**作圖**又ハ**總合**トイフ。(iii)ハ作圖法ノ正シイコトヲ示シタモノ卽チ**證明**デアル。ソシテ(iv)ハ作圖ガ可能ナル場合及ビ解答ノ數ヲ探シタモノデアツテ,コレヲ作圖題ノ**吟味**トイフ。

困難ナ作圖題ハ通常コノ解析,作圖,證明,吟味ノ四階段ヲ經テ完全ニ解決シ得ルモノデアル。然シ容易ナ作圖題ハ作圖,證明,吟味ノ三階段デヨイ。

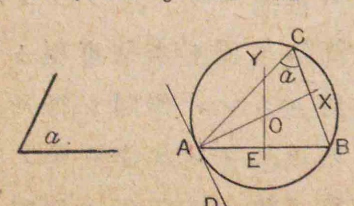
問 1. 圓ニ外切スル正六角形ヲ作レ。

問 2. 圓ニ内接及ビ外切スル正方形,正八角形ヲ作レ。

問 3. 圓ニ内接及ビ外切スル正三角形,正十二角形ヲ作レ。

作圖題 9. 與ヘラレタ線分上ニ與ヘラレタ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ。

題意 與ヘラレタ線分ヲ AB トシ,與ヘラレタ角ヲ α トスル。AB 上ニ $\angle\alpha$ ヲ含ム弓形ヲ畫クコトヲ求メル。



作圖 A ヲ過リ AB ト $\angle\alpha$ ヲナス直線 AD ヲ引キ,A ニ於テコノ AD ニ垂線 AX ヲ立テル。

次ニ AB ノ垂直二等分線 EY ヲ引キ,コレト AX トノ交點ヲ O トスル。O ヲ中心トシテ半徑 OA ノ圓ヲ畫ケバ $\angle BAD$ ニ夾マレナイ弧ト AB トノナス弓形ガ求メルモノデアル。

證明 OA=OB デアルカラ圓 O ハ B ヲ過ル。

又 $\angle BAD=\angle\alpha$

$\angle BAD=\angle ACB$ (定理34)

∴ $\angle ACB=\angle\alpha$

ソレ故弓形 ACB ハ $\angle\alpha$ ヲ含ム。

吟味 (イ) 直線 AB ニ關シテ弓形 ACB ト對稱ナ弓形モ亦條件ニ適スルカラ解答ハ二ツデアル。

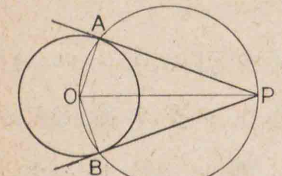
(ロ) 作圖ガ出來ルタメニハ $\angle\alpha<2R\angle$ デナケレバナラナイ。

問 與ヘラレタ圓カラ與ヘラレタ角ヲ含ム弓形ヲキリトレ。

57. 切線ノ作圖題

作圖題 10. 與ヘラレタ點カラ與ヘラレタ圓ヘ切線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ圓ヲ O, 與ヘラレタ點ヲ P トスル。P カラ圓 O ヘ切線ヲ引クコトヲ求メル。



[作圖] OPヲ結ビ,コレヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,圓Oトノ交點ヲA,Bトスル。PA,PBヲ結ブト,コレ等ハ求ムル切線デアル。

[證明] 略スル。

[吟味] (イ) Pガ圓Oノ外ニアレバ解答ハ二ツ。

(ロ) Pガ圓Oノ周上ニアレバ解答ハ一ツ。

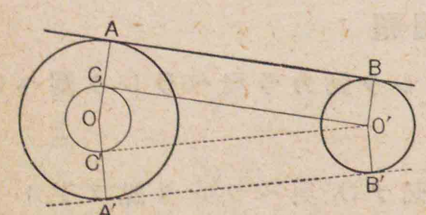
(ハ) Pガ圓Oノ内ニアレバ解答ハナイ。

[作圖題] 11. 與ヘラレタ二ツノ圓ニ共通ナ切線ヲ引ケ。

[題意] 與ヘラレタ圓ヲO,O′トシ,ソレ等ニ共通ナ切線(**共通切線**)ヲ引クコトヲ求メル。

(i) 二圓ガ共通切線ノ同側ニアル場合。(**共通外切線**)

[解析] ABヲ共通外切線ノ一ツト假定シ,ソノ切點ヲA,Bトスル。OA, O′Bヲ結ブ。扨テ次ニ小ナル圓ノ中心O′カラABニ平行線ヲ引イテOAトノ交リヲCトスレバ,四邊形CABO′ハ矩形デ



∠OCO′=R∠ デアル。

ソシテ OC=OA−AC=OA−O′B

ソレ故O′CハOヲ中心トシ,OCヲ半徑トスル圓ノ切線デアル。

[作圖] 大ナル圓ノ中心Oヲ中心トシ,二圓ノ半徑ノ差ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,O′カラコノ圓ニ切線O′Cヲ引キ,ソノ切點ヲCトスル。(作圖題10) Cヲ過ル圓Oノ半徑OAヲ畫キ,OAニ平行ニ圓O′ノ半徑O′Bヲ引ク。然ルトキハ直線ABハ求ムル共通外切線デアル。

[證明] 四邊形CABO′ハ矩形デアルカラ OA⊥AB, O′B⊥AB。即チABハ兩圓ニ切スル。

[吟味] 求ムル切線ノ數ハO′カラ二圓ノ半徑ノ差ヲ半徑トシタ第三ノ圓ニ引イタ切線ノ數ト同數デアルカラ,點O′ガ

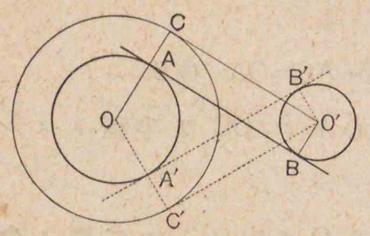
(イ) 第三ノ圓ノ外ニアレバ解答ハ二ツ。

(ロ) 第三ノ圓周上ニアレバ解答ハ一ツ。

(ハ) 第三ノ圓ノ内ニアレバ解答ハナイ。

(ii) 二圓ガ共通切線ノ兩側ニアル場合。(**共通内切線**)

[作圖] 大ナル圓ノ中心Oヲ中心トシ,二圓ノ半徑



ノ和ヲ半徑トシテ第三ノ圓ヲ畫キ,O'カラコノ圓ニ切線 O'C ヲ引キ C ヲソノ切點トスル。OC ヲ結ビコレトO圓周トノ交點ヲ A トシ,O'カラ OC ニ平行ニ圓O'ノ半徑 O'B ヲ作レバ, AB ハ求ムル共通内切線デアル。

[證明], [吟味] 略スル。

問 二圓ノ共通外切線及ビ共通内切線ノ交點ハ二圓ノ中心線上ニアル。

練習 (7)

1. 二線分ノ和ト差ヲ與ヘテ各線分ヲ見出セ。

2. 圓周ガ與ヘラレタトキ,ソノ中心ヲ求メヨ。

3. 與ヘラレタ點ヲ中心トシテ,與ヘラレタ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

4. 與ヘラレタ點 A ヲ過ッテ,與ヘラレタ角 XOY ノ二邊ト夫々 B,C デ交ル直線ヲ引キ, △OBC ガ二等邊三角形ニナルヤウニセヨ。

5. 與ヘラレタ角 BAC 内ノ與ヘラレタ點 O ヲ過ッテ角ノ二邊マデ線分 POQ ヲ引キ,ソノ線分ガ O デ二等分セラレルヤウニセヨ。

6. 一邊ト一角ヲ知ッテ二等邊三角形ヲ作レ。

7. 頁96問 2 ヲ吟味セヨ。

8. 甲乙二人ガ 500m ヲ隔テタ地點ニ於テ電光ヲ見タ後,甲ハ 3 秒,乙ハ 4 秒ヲ經テ雷鳴ヲ聞イタ。雷ノ位置ヲ作圖セヨ。(音ノ速サハ毎秒 333 m)

9. 二角ト一邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

10. 難破船ガ既知ノ燈臺 A, B ノ信號ヲ南北ノ線ト夫々角 α, β ヲナスヤウニ見タ。難破船ノ位置ヲ作圖セヨ。

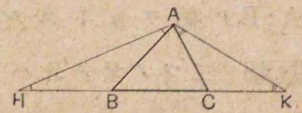
11. 與ヘラレタ底邊,頂角及ビ高サヲモツ三角形ヲ作レ。

12. 與ヘラレタ點ヲ過ッテ與ヘラレタ圓ノ割線ヲ引キ,圓内ノ部分ヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ。

13. 定直線 XY ノ同ジ側ニ,與ヘラレタ二點 A, B ガアル。 XY 上ニ點 P ヲ見出シ, $\angle APX = \angle BPY$ トナルヤウニセヨ。

14. 直角ヲ三等分セヨ。

15. 二角ト周ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。



16. 角 XOY ノ一邊 OX 上ノ與ヘラレタ點 A ニ於テコレニ切シ,且ツ OY ニ切スル圓ヲ畫ケ。

第八章　比・比例線

58. 量ノ比

定義　同種類ノ二ツノ量 A,B ニツイテ A ガ B ノ何倍デアルカトイフ關係ヲ **A ノ B ニ對スル比** トイヒ,コレヲ **A:B** 或ハ $\frac{A}{B}$ ト書ク。ソシテ A,B ヲ比ノ**項**トイヒ,A ヲ比ノ**前項**,B ヲ比ノ**後項**トイフ。

A:B ヲ **A ノ B ニ對スル比**又ハ **A 對 B** ト讀ム。

注意　同種類ノ量デナケレバ比ハ考ヘラレナイコトハ明ラカデアル。

定義　或量 A ヲ他ノ量 B ヲ單位トシテ計ツタトキニ得タ數ヲ A ノ B ニ對スル**比ノ値**トイフ。

A:B ノ値ヲ n トスルト A=nB デアル。

注意　二ツノ量ノ比ハソノ値ニヨツテ定マルカラ,二ツノ比ガ等シイトハ,ソノ比ノ値ガ等シイコトデアル。

定理 43. 二ツノ量ノ比ハコレ等ヲ同ジ單位デ計ツテ得タ二數ノ比ニ等シイ。ソシテコノ比ハ計ル單位ノ大イサニ關シナイ。

假設　二ツノ量ヲ A,B トシ,コレヲ量 C デ計ツテ得タ數ヲ夫々 a, b トスルト

終結　$A:B=a:b$, 且ツ $a:b$ ハ量 C ノ大イサニ關シナイ。

證明　　$A=aC$　　　$B=bC$

$\therefore$　$C=\frac{B}{b}$　　$\therefore$　$A=\frac{a}{b}B$

$\therefore$　$A:B=a:b$

次ニ A,B ヲ C 以外ノ單位例ヘバ D デ計ツテ得タ數ヲ夫々 a', b' トスル。今 $D=nC$ トスルト

$$A=a'D=a'nC,\quad B=b'D=b'nC$$

然ルニ　　$A=aC,\quad B=bC$

$\therefore$　$aC=a'nC,\quad bC=b'nC$

$\therefore$　$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$

即チ比ハ計ル單位ノ大イサニ關シナイ。

定義　同種類ノ量 A,B ニツイテ B:A ヲ A:B ノ**反比**又ハ**逆比**トイフ。

$\frac{A}{B}=n$ ナルトキハ　　$\frac{B}{A}=\frac{1}{n}$

從ツテ $(A:B)(B:A)=1$ デアル。

定義 二ツ以上ノ比ノ相乘積ヲソレ等ノ比ノ**相乘比**又ハ**複比**トイフ。相等シイ二ツノ比ノ複比ヲ**二乘比**,相等シイ三ツノ比ノ複比ヲ**三乘比**トイフ。

例ヘバ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}\times\frac{G}{H}$ ナルトキ $\frac{A}{B}$ ハ $\frac{C}{D}, \frac{E}{F}, \frac{G}{H}$ ノ複比デアル。次ニ $\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$ デ且ツ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}$ ナルトキ $\frac{A}{B}$ ハ $\frac{C}{D}$ 又ハ $\frac{E}{F}$ ノ二乘比デアル。コレヲ $\frac{A}{B}=\left(\frac{C}{D}\right)^2$ 又ハ $\frac{A}{B}=\left(\frac{E}{F}\right)^2$ ト書ク。

定理 44. 同種類ノ三ツノ量 A, B C ニ於テ $\frac{A}{C}$ ハ $\frac{A}{B}$ ト $\frac{B}{C}$ トノ複比デアル。

證明 $\frac{A}{B}=m$ 及ビ $\frac{B}{C}=n$ トスルト

$$A=mB \quad 及ビ \quad B=nC \qquad \therefore \ A=mnC$$

卽チ
$$\frac{A}{C}=mn=\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}.$$

注意 四ツ以上ノ量ニツイテモ同樣デアル。

問 同種類ノ量 A, B, C ニ於テ, $A:B$ ガ $B:C$ ニ等シイトキ, $\frac{A}{C}=\left(\frac{A}{B}\right)^2$ デアル。

注意 上ノ諸定理ヨリ代數學デ述ベタ比ノ性質ハ同種類ノ量ニ適用セラレル。

例ヘバ m ヲ實數トスルト $A:B=mA:mB$ デアル。

59. 量ノ比例式

定義 四ツノ量 A, B, C, D ノ中, A ト B, C ト D ハ夫々同種類デ, $A:B$ ガ $C:D$ ニ等シイトキ,コノ四量ハ**比例ヲナス**トイフ。

量 A, B, C, D ガ比例ヲナストキ, $\mathbf{A:B=C:D}$ 又ハ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ト書キ,コレ等ヲ**比例式**トイフ。

ソシテ A, B, C, D ヲ夫々比例式ノ**第一項**,**第二項**,**第三項**,**第四項**トイヒ, A ト C, B ト D ハ**相對應スル**トイフ。又 A, D ヲ比例式ノ**外項**, B, C ヲソノ**內項**, D ヲソノ**第四比例項**トイフ。

定義 同種類ノ三ツノ量 A, B, C ニ於テ $A:B$ ガ $B:C$ ニ等シイトキ,コノ三量ハ**比例ヲナス**トイヒ, B ヲ A, C ノ**比例中項**, C ヲ A, B ノ**第三比例項**トイフ。

定理43ニヨリ代數學ノ比例ノ公式ハ量ニモ用ヒラレル。因テ四量 A, B, C, D ニ於テ

(i) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナルトキ, $A \gtreqless B$ ナラバ $C \gtreqless D$

(ii) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ 及ビ $\frac{A}{B}=\frac{E}{F}$ ナルトキ, $\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$

(iii) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナルトキ, $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$

(iv) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナルトキ, $\frac{mA}{mB}=\frac{nC}{nD}$

(v) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナルトキ, $\frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D}$

又 $A>B$, 從ツテ $C>D$ ナルトキ, $\frac{A-B}{B}=\frac{C-D}{D}$

(vi) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナルトキ, A, B, C, D ガ皆同種類ナラバ

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D} \text{ 及ビ } \frac{D}{B}=\frac{C}{A}$$

(vii) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\cdots\cdots$ ナルトキ, A, B, C, D, E, F, …

…ガ皆同種類ナラバ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\cdots\cdots\cdots=\frac{A+C+E+\cdots\cdots}{B+D+F+\cdots\cdots}$$

又 $A>C$, 從ツテ $B>D$ ナルトキ

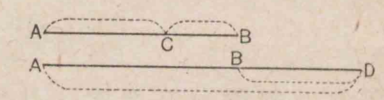
$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{A-C}{B-D}$$

(viii) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナルトキ, $\left(\frac{A}{B}\right)^2=\left(\frac{C}{D}\right)^2$

60. 内分・外分

定義 一ツノ線分上ノ點ハソノ線分ヲ**内**

分スルトイヒ, ソノ點ヲソノ線分ノ**内分點**トイフ。一ツノ線分ノ延長上ノ點ハソノ線分ヲ**外分スル**トイヒ, ソノ點ヲソノ線分ノ**外分點**トイフ。ソシテ分點カラソノ線分ノ兩端マデノ距離ヲソノ**分**トイフ。



注意 一ツノ線ガ内分セラレタトキ全線分ハ二ツノ分ノ和デ, 外分セラレタトキ全線分ハ二ツノ分ノ差デアル。

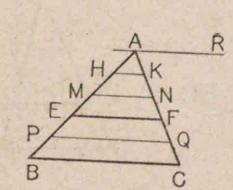
61. 平行線ニヨル分

定理 45. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ハ他ノ二邊ヲ同ジ比ニ内分又ハ外分スル。

假設 △ABC ニ於テ BC ニ平行ナ直線ガ AB, AC (又ハソノ延長)ト交ル點ヲ夫々 E, F トスルト

終結 AE : EB = AF : FC デアル。

證明 AH ヲ單位トシテ計ツタトキ, 例ヘバ



$AE=3\cdot AH$, $EB=2\cdot AH$ トナツタトスル。今各分點ヲ過ツテ BC ニ平行線ヲ引キ, 又 A ヲ過ツテ BC ニ平行線ヲ引クト

$$AH=HM=ME=EP=PB$$

$\therefore$ $AK=KN=NF=FQ=QC$ (定理18)

故ニ $AF=3\cdot AK,\quad FC=2\cdot AK$

因テ $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{3\cdot AK}{2\cdot AK}=\dfrac{3}{2}$ 又 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{3\cdot AH}{2\cdot AH}=\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\quad \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$$

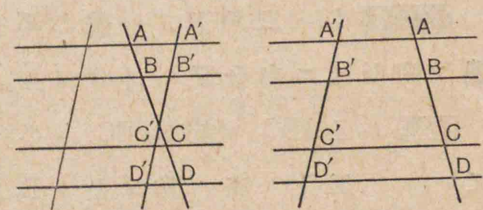
系 1. 前圖ニ於テ次ノ比例式ヲ得ル。

(i) $AE\cdot AB=AF:AC$

(ii) $AB:BE=AC:CF$

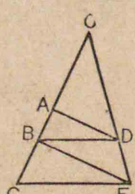
(iii) $AE:AB=EF:BC$

系 2. 多クノ平行線ガ二直線ト交ツテ,コレヲ幾ツカノ部分ニキルトキ,ソノ對應スル部分ノ比ハ相等シイ。



問 1. 一點カラ引イタ三ツノ直線ガ二ツノ平行線ト交ル點ヲ夫々 A, B, C; A′, B′, C′ トスルト $AB:A'B'=BC:B'C'$ デアル。

問 2. 右圖ニ於テ $BD\parallel CE$, $AD\parallel BE$ ナルトキ, $OA:OB=OB:OC$ デアル。

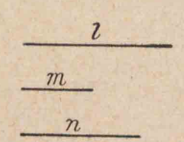


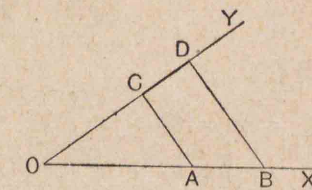
62. 線分ヲ比ニ分ツコト

作圖題 12. 與ヘラレタ三ツノ線分ノ第四比例項ヲ求メヨ。

題意 與ヘラレタ三ツノ線分ヲ l, m, n トスルトキ, $l:m=n:x$ ナル線分 x ヲ求メル。

作圖 任意ノ角 XOY ヲ作リ,ソノ一邊 OX 上ニ l ニ等シク OA ヲトリ, m ニ等シク且ツ同ジ向キニ AB ヲトル。次ニ OY 上ニ n ニ等シク OC ヲトリ, AC ヲ結ビ, B カラ AC ニ平行線ヲ引キ, OY トノ交點ヲ D トスルトキ, CD ハ求ムル線分デアル。





證明 略スル。

問 與ヘラレタ二ツノ線分ノ第三比例項ヲ求メヨ。

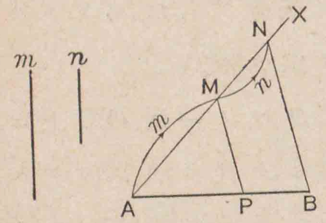
作圖題 13. 與ヘラレタ線分ヲ與ヘラレタ比ニ內分又ハ外分セヨ。

題意 與ヘラレタ線分ヲ AB, 與ヘラレタ比ヲ $m:n$ トスル。 AB ヲ $m:n$ ノ比ニ(i)內分,(ii)外分スル點ヲ求メル。

(i) 內分ノ場合。

作圖 A ヲ過ツテ直線 AX ヲ引キ,ソノ上ニ m ニ

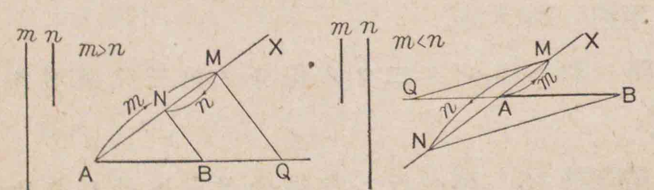
等シクAMヲトリ,ソノ延長上ニnニ等シクMNヲトリ, NBヲ結ビ,MカラNBニ平行ニ引イタ直線トABトノ交リヲPトスルト,Pハ求ムル點デアル。



[證明] 略スル。

(ii) 外分ノ場合。

[作圖] AX上ニmニ等シクAMヲトリ,MカラAノ方ニnニ等シクMNヲトリ, NBヲ結ビ,MカラNBニ平行線ヲ引キ, ABノ延長トノ交點ヲQトスルト,Qハ求ムル點デアル。

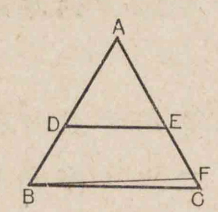


[證明] 略スル。

問 ABヲCデ内分シ, AB:AC$=m:n$ナルヤウニセヨ。但シm,nハ與ヘラレタ定線分デアル。

[定理] 46. 三角形ノ二邊ヲ同ジ比ニ内分(又ハ外分)スル點ヲ結ブ直線ハ第三邊ニ平行デアル。

[假設] △ABC ニ於テ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ トスルト



[終結] DE∥BC デアル。

[證明] BF∥DE トスレバ

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EF}$$

然ルニ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

∴ $\frac{AE}{EF}=\frac{AE}{EC}$ ∴ EF＝EC

故ニFハCニ重ナル。 ∴ BC∥DE

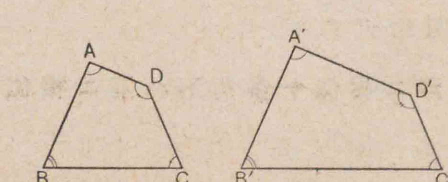
外分ノトキモ同樣ニ證明出來ル。

[系] 與ヘラレタ線分ヲ與ヘラレタ比ニ内分(又ハ外分)スル點ハ唯一ツニ限ル。

第九章 相似形

63. 相似多角形

定義 邊數ガ等シイ二ツノ多角形ニ於テ,總テノ角ガ順ニ夫々相等シイトキ,ソノ二ツノ多角形ハ互ニ等角デアルトイフ。ソノ相等シイ角ヲ

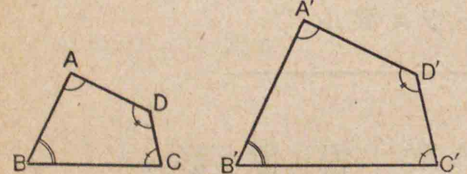


對應角トイヒ,對應角ノ間ニアル邊ヲ**對應邊**トイフ。

定義 二ツノ多角形ガ互ニ等角デ,且ツ對應邊ノ比ガ相等シイトキ,ソノ二ツノ多角形ハ互ニ**相似デアル**トイヒ,コノ圖形ヲ**相似形**トイフ。ソシテソノ對應邊ノ比ヲ**相似比**トイフ。

相似多角形ハソノ角又ハ邊ノ數ニ從ッテ**相似三角形,相似四邊形,相似五邊形,**………トイフ。

相似ノ記號ニハ∽ヲ用ヒル。



圖ノ二ツノ四邊形ニ於テ

$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C',\quad \angle D=\angle D'$

且ツ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

ナルトキ,四邊形ABCD∽四邊形A'B'C'D'デアル。

ソシテ $\frac{AB}{A'B'}$ ハ相似比デアル。

系 **一ツノ多角形ニ相似ナ多角形ハ互ニ相似デアル。**

證明 例ヘバ 四邊形ABCD∽四邊形A'B'C'D'

且ツ 四邊形ABCD∽四邊形A''B''C''D'' トスルト

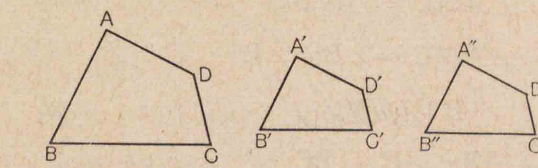
$\angle A=\angle A',\quad \angle A=\angle A''\quad \therefore\ \angle A'=\angle A''$

同樣ニ

$\angle B'=\angle B''$,

$\angle C'=\angle C''$,

$\angle D'=\angle D''$



次ニ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'} \qquad (1)$$

又 $$\frac{AB}{A''B''}=\frac{BC}{B''C''}=\frac{CD}{C''D''}=\frac{DA}{D''A''} \qquad (2)$$

(2)÷(1) $$\frac{A'B'}{A''B''}=\frac{B'C'}{B''C''}=\frac{C'D'}{C''D''}=\frac{D'A'}{D''A''}$$

故ニ 四邊形A'B'C'D'∽四邊形A''B''C''D'' デアル。

64. 三角形ノ相似

定理 47. 二角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル。

假設 △ABC, △A'B'C' ニ於テ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ トスルト

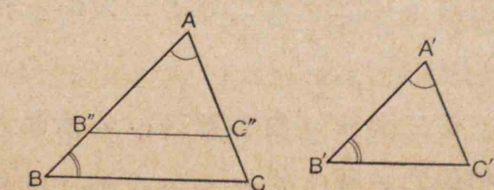
終結 △ABC∽△A'B'C' デアル。

證明 $\angle A=\angle A'$

$\angle B=\angle B'$

デアルカラ

$\angle C=\angle C'$



次ニ AB, AC 上ニ夫々 $A'B'$, $A'C'$ ニ等シク AB'', AC'' ヲトリ, $B''C''$ ヲ結ブトキハ

$$\triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C'$$

$$\therefore \quad \angle AB''C'' = \angle B' = \angle B$$

$$\therefore \quad B''C'' \parallel BC$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''} \qquad \text{(定理45系1)}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

系 1.　三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ト他ノ二邊(又ハソノ延長)トデ出來ル三角形ハ,モトノ三角形ニ相似デアル。

系 2.　二ツノ相似三角形ノ對應頂點カラノ高サノ比ハソノ相似比ニ等シイ。

問1.　弦 AB, CD(又ハソノ延長)ノ交點ヲ E トスレバ, $\triangle AEC$ ト $\triangle DEB$ トハ相似デアル。

問2.　三角形 ABC ニ於テ AD, BE ヲ高サトシ,ソノ交點ヲ F トスレバ, $\triangle AFE \backsim \triangle BFD$ デアル。

問3.　頂角ガ相等シイ二ツノ二等邊三角形ハ相似デアル。

問4.　二ツノ相似三角形ノ內切圓又ハ外接圓ノ半徑ノ比ハ,ソノ相似比ニ等シイ。

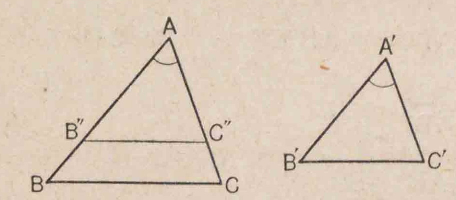
定理 48.　一角ガ相等シク,且ツソノ角ヲ夾ム二邊ガ比例ヲナス二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル。

假設　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $\angle A = \angle A'$ 及ビ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ トスルト

終結　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ デアル。

證明　AB, AC 上ニ夫々 $A'B'$, $A'C'$ ニ等シク AB'', AC'' ヲトリ, $B''C''$ ヲ結ブトキハ

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle AB''C''$$



又假設ヨリ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

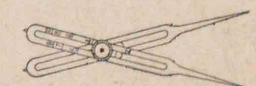
$$\therefore \quad \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''}$$

$$\therefore \quad B''C'' \parallel BC \qquad \text{(定理46)}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim AB''C''$$

即チ　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

問1.　圖ハ比例こんぱすデアル。コノ用ヒ方ヲ述ベヨ。



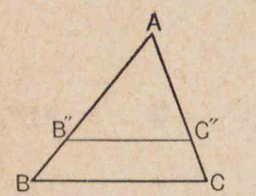
問2.　二ツノ相似三角形ノ對應スル頂點カラ引イタ中線ノ比ハソノ相似比ニ等シイ。

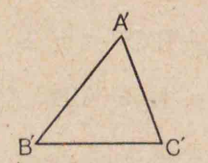
定理 49.　三邊ガ比例ヲナス二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル。

假設 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ ニ於テ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$ トスルト

終結 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ デアル。

證明 AB, AC 上ニ夫々 $A'B', A'C'$ ニ等シク AB'', AC'' ヲトルト





$AB : AB'' = AC : AC''$ デアルカラ

$\triangle ABC \backsim \triangle AB''C''$ (定理48)

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{BC}{B''C''}$

又假設ヨリ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$

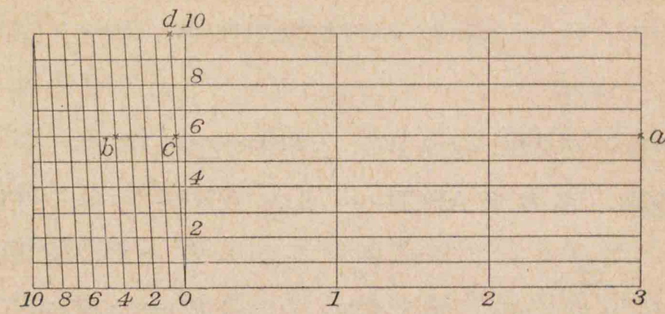
$\therefore \quad \dfrac{BC}{B''C''}=\dfrac{BC}{B'C'} \quad \therefore \quad B''C''=B'C'$

$\therefore \quad \triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C'$

卽チ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

問1. 二ツノ三角形ノ相似ノ場合ト合同ノ場合トヲ比較セヨ。

問2. **對角線尺** 次圖ニ於テ左ノ端デ1ノ長サヲ上ト下トデ夫々10ニ等分スル。次ニ縱ヲ10ニ等分シテソノ各分點ヲ過ツテ平行線ヲ引ク。今上ノ



10等分點ノ初メノ點卽チ d ト下ノ0トヲ結ブ直線ト横ノ平行線トヲ交ラシメル。然ルトキハ例ヘバ $6c$ 間ノ長サハ

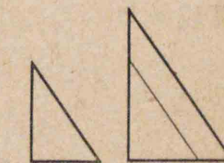
$$\frac{(6c\text{間ノ長サ})}{(10d\text{間ノ長サ})}=\frac{(0\,6\text{間ノ長サ})}{(0\,10\text{間ノ長サ})}=\frac{6}{10}$$

$\therefore \quad (6c\text{間ノ長サ})=\dfrac{6}{10}(10d\text{間ノ長サ})$

因テ $6c$ 間ノ長サハ 1ノ $\dfrac{1}{10}=0.1$ ノ $\dfrac{6}{10}$ 倍,卽チ 0.06 デアル。

(1) $6b$ 間ノ長サヲ求メヨ。

(2) ab 間ノ長サヲ求メヨ。



問3. 斜邊ト他ノ一邊ガ比例ヲナス二ツノ直角三角形ハ相似デアル。

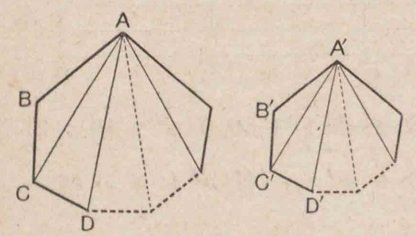
65. 多角形ノ相似

定理 50. 二ツノ相似多角形ハコレヲ同數ノ相似三角形ニ分ツコトガ出來ル。

假設 二ツノ相似多角形ヲ ABCD……, A′B′C′D′……トスルト

終結 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$, ……

證明 多角形 ABCD…… 及ビ A′B′C′D′…… ノ頂點 A, A′ ト殘リノ頂點トヲ夫々結ブト,兩多角形ハ同數ノ三角形ニ分タレル。



扨テ $\angle B=\angle B'$

及ビ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C' \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

又假設ヨリ $$\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'} \qquad (2)$$

(1)ヨリ $\angle BCA=\angle B'C'A'$

假設ヨリ $\angle BCD=\angle B'C'D'$

$\therefore$ $\angle ACD=\angle A'C'D'$ (3)

(2)ト(3)ヨリ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$

同様ニシテ順々ニ證明スルコトガ出來ル。

系 一組ノ對應邊ガ相等シイ二ツノ相似多角形ハ合同デアル。

問 與ヘラレタ線分ノ上ニ與ヘラレタ五邊形ト相似ナ五邊形ヲ作レ。

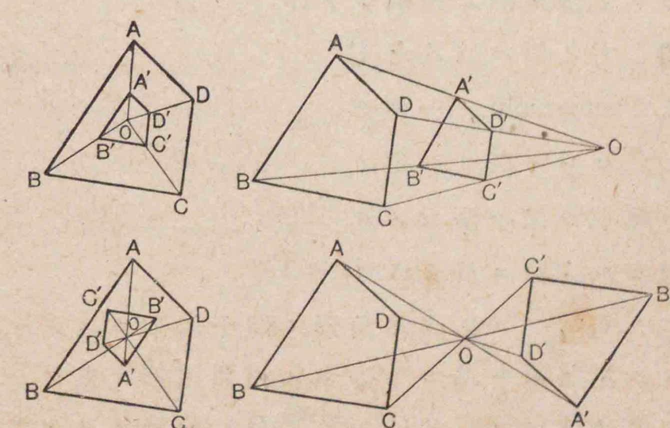
定理 51. 多角形ノ各頂點ヲ一點ニ結ンダ線分ヲ同ジ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ夫々順ニ結ンデ出來ル多角形ハ,モトノ多角形ニ相似デアル。

假設 多角形ヲ ABCD トシ,一點ヲ O トスル。OA, OB, OC, OD ヲ夫々 A′, B′, C′, D′ デ,

$$\frac{A'O}{A'A}=\frac{B'O}{B'B}=\frac{C'O}{C'C}=\frac{D'O}{D'D}$$

ナルヤウニ内分又ハ外分スルト

終結 多角形 ABCD $\backsim$ 多角形 A′B′C′D′ デアル。



證明 $\frac{A'O}{A'A}=\frac{B'O}{B'B}$ ナル故, $A'B' /\!/ AB$ デアル。

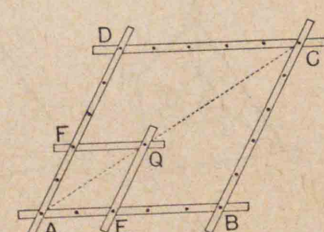
同様ニシテ多角形 A'B'C'D' ノ邊ハ皆夫々多角形 ABCD ノ邊ニ平行デアル。從ツテ多角形 A'B'C'D' ト多角形 ABCD トハ互ニ等角デアル。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{又} & \frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}\\ \text{及ビ} & \frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}\end{array}\right\}\quad\therefore\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

同様ニシテ多角形 ABCD ノ邊ハ皆夫々多角形 A'B'CD' ノ邊ト比例ヲナス。

故ニ　多角形 ABCD ∽ 多角形 A'B'C'D'

系 **多角形ノ各頂點ヲ一點ニ結ブ線分上ニ頂點ヲ置キ,各邊ガモトノ多角形ノ各邊ニ平行ナ多角形ハモトノ多角形ニ相似デアル。**

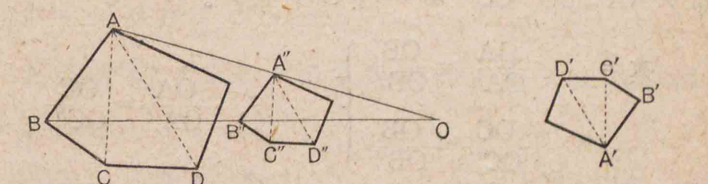


問　右ノ圖ハぱんとぐらふ (Pantograph) ノ一種デアル。コレハ圖ヲ一定ノ比ニ縮小シ又ハ擴大スルニ用ヒル。圖ニ於テAヲ固定シ,Qニアル針ヲ多角形ノ周上ニ動カストキ,Cニアル鉛筆ハ各邊ガ2倍半ノ相似圖形ヲ畫ク。ソノ理由ヲ述ベヨ。又Cニ針ヲ,Qニ鉛筆ヲツケタトキハ如何。

定理 52. 二ツノ相似多角形ハ各對應邊ガ平行ナルヤウニ置クコトガ出來ル。ソノトキ對應角ノ頂點ヲ結ブ直線ハ一點デ交ル。

假設 二ツノ多角形ヲ ABCD……, A'B'C'D'…… トシ,且ツコレ等ガ互ニ相似デアルトスル。

終結 $AB /\!/ A'B'$, $BC /\!/ B'C'$, $CD /\!/ C'D'$, …… トナルヤウニ置クコトガ出來ル。ソシテソノトキ,直線 AA', BB', CC', DD', …… ハ一點デ交ル。



證明 Aヲ C, D, …… ノ各々ニ,A' ヲ C', D', …… ノ各々ニ結ブ。次ニ A''B'' ヲ A'B' ニ等シク且ツ AB ニ平行トナルヤウニ引キ,又 B'' カラ B''C'' ヲ B'C' ニ等シク且ツ BC ニ平行トナルヤウニ引クト

$$\angle A''B''C''=\angle ABC$$

然ルトキハ　$\angle A''B''C''=\angle ABC=\angle A'B'C'$

$\therefore$　$\triangle A''B''C''\equiv\triangle A'B'C'$　(1)

$\therefore$　$A''C''=A'C'$　(2)

次ニ直線AA'', BB''ノ交點ヲOトシ,直線BB'', CC''ノ交點ヲO'トスルト

$$\left.\begin{aligned}&\frac{AB}{A''B''}=\frac{OB}{OB''}\\ &\frac{BC}{B''C''}=\frac{O'B}{O'B''}\end{aligned}\right\} \quad \therefore \frac{OB}{OB''}=\frac{O'B}{O'B''}$$

又假設及ビ(1)ヨリ

$$\frac{AB}{A''B''}=\frac{BC}{B''C''}$$

故ニOトO'トハ合スル。(定理46系)

即チAA'', BB'' CC''ハ一點Oデ交ル。

$$\text{次ニ}\quad \left.\begin{aligned}&\frac{OA}{OA''}=\frac{OB}{OB''}\\ &\frac{OC}{OC''}=\frac{OB}{OB''}\end{aligned}\right\} \quad \therefore \frac{OA}{OA''}=\frac{OC}{OC''}$$

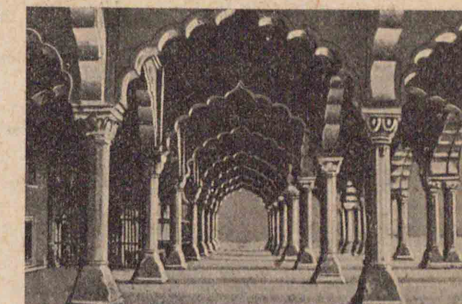
$$\therefore \quad A''C'' \,/\!/\, AC \qquad (3)$$

更ニ(2)ト(3)トヨリ$A''C''$ヲ$A''B''$ノヤウニ考ヘテ上ノ作圖ヲ繰返ストト多角形$A''B''C''D''$......ハ多角形$A'B'C'D'$......ニ合同デ,ソノ各邊ハ多角形$ABCD$......ノ對應邊ニ平行トナル。且ツ對應角ノ頂點ヲ結ブ直線ハ一點Oデ交ル。

注意 モシ與ヘラレタ二ツノ相似多角形ガ合同ナラバ對應角ノ頂點ヲ結ブ直線ハ互ニ平行ナルコトガアル。

定義 二ツノ相似多角形ヲ各對應邊ガ平行ナル

ヤウニ置クトキ,對應角ノ頂點ヲ結ブ直線ノ交點ヲ,ソノ二ツノ相似多角形ノ**相似ノ中心**トイフ。



印度ノでひるノ廻廊

問 二ツノ相似多角形ノ相似ノ中心Oヲ過ッテ,ソノ二ツノ多角形ヲキル直線ガ一組ノ對應邊ノ間ニ夾マレル部分ハ,Oデ相似比ニ分タレル。

定理 53. 二ツノ相似多角形ノ周ノ比ハ相似比ニ等シイ。

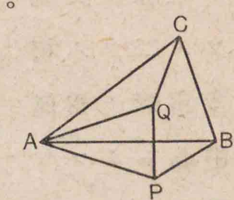
證明 多角形$ABCDE$......$\backsim$多角形$A'B'C'D'E'$......トスレバ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots=\frac{AB+BC+CD+\cdots\cdots}{A'B'+B'C'+C'D'+\cdots\cdots}$$

練習 (8)

1. 一ツノ圓ガ他ノ圓ニ内切スルトキ,ソノ切點ヲ過ル大圓ノ弦ガ小圓ノ周デ分タレル分ノ比ハ一定デアル。

2. 四邊形 ABCD ノ一邊 BC 上ノ任意ノ點 E カラ BA, BD ニ平行ニ引イタ直線ト CA, CD トノ交點ヲ夫々 F, G トスルト, FG // AD デアル。



3. 圖ニ於テ, △ABC, △APQ ハ相似形デ AB ト AP, AC ト AQ ハ對應邊デアル。然ルトキハ △APB ∽ △AQC デアル。

4. 與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ三角形ニ相似ナ三角形ヲ内接セシメヨ。

5. 與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ三角形ニ相似ナ三角形ヲ外切セシメヨ。

6. 高サガ與ヘラレテ與ヘラレタ三角形ニ相似ナ三角形ヲ作レ。

7. 與ヘラレタ三角形ニ正方形ヲ内接セシメヨ。

第十章 面 積

66. 面 積

定義 線デ圍マレタ圖形ノ廣サヲソノ**面積**トイフ。

二ツノ圖形ノ面積ガ相等シイトキ, ソノ圖形ハ等

積デアルトイヒ, ソレヲ表ハスニ記號 **=** ヲ用ヒル。

定義 與ヘラレタ線分ヲ一邊トスル正方形ヲ, ソノ**線分上ノ正方形**トイフ。

面積ノ基本單位ハ **1 平方米**デアル。

モシ正方形 ABCD ノ一邊 AB ガ a m デアルト, ソノ面積ハ a^2 平方米デアル。ソシテ a^2 ヲ**面積ヲ表ハス數**トイフ。他ノ單位デ計ッテモ同ジ言葉ヲ用ヒル。

正方形 ABCD ノ面積ヲ表ハスニハソノ一邊, 例ヘバ AB ヲトッテ $\mathbf{AB}^2$ (又ハ $\overline{\mathrm{AB}}^2$) ト書キ, **AB ノ平方**トイフ。

正方形ノ面積ハソノ一邊ノ平方デアル。

67. 矩形ノ面積

定義 與ヘラレタ二ツノ線分ヲ相隣ル二邊トスル矩形ヲ, ソノ**二線分ノ矩形**(又ハ**二線分ノ包ム矩形**)トイフ。

矩形ノ一邊ヲ**底邊**(**横**), 隣邊ヲ**高サ**(**縱**)トイフ。

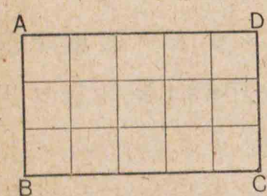
定理 54. 矩形ノ面積ヲ表ハス數ハ, ソノ二隣邊ヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

假設 矩形 ABCD ノ面積及ビ二隣邊ヲ表ハス數

ヲ夫々S, a, b トスル。但シAB, BCハ同ジ單位デ計リ,面積ハソノ長サノ單位デ組立テラレタ面積ノ單位デ計ツタモノトスルト

終結 $S=ab$ デアル。

證明 ABヲa等分シ,BCヲb等分スルト,ソノ各部分ハ單位ノ長サデアル。



今AB, BCノ各分點ヲ過ッテBC, ABニ夫々平行線ヲ引クト,コノ矩形ハab個ノ正方形ニ分タレル。ソシテソレ等ノ正方形ハ皆合同デ,ソノ面積ハ單位面積デアル。因テ $S=ab$

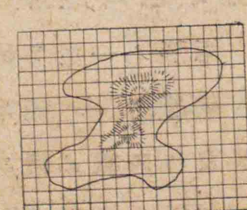
注意 矩形ABCDノ面積ヲ表ハスニハソノ二隣邊例ヘバAB, BCヲトツテ **AB·BC** ト書キ,**AB, BCノ積**トイフ。

因テ上ノ定理ヲ次ノヤウニ述ベラレル。

矩形ノ面積ハソノ二隣邊ノ積デアル。 或ハ **矩形ノ面積ハ底邊ト高サトノ積デアル。**

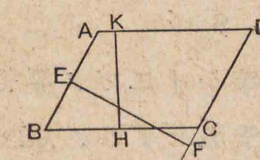
問1. 矩形ノ一邊ヲ2倍シ,ソノ隣邊ヲ3倍ニスルトキ,面積ハ何倍ニナルカ。

問2. 圖ノヤウニ方眼紙ニ孤島ノ地圖ガ書イテアル。ソノ地積ハ約幾あーるカ。但シ1眼ハ1平方粁デアル。



68. 平行四邊形ノ面積

定義 平行四邊形ノ四邊ノ中,何レカノ一邊ヲ底邊トイヒ,底邊トソノ對邊トノ距離ヲ平行四邊形ノ**高サ**トイフ。

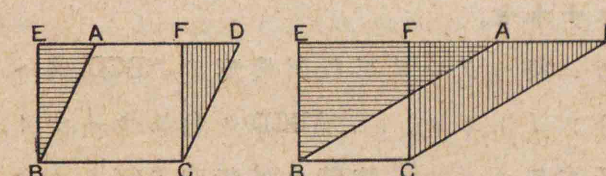


圖ノ平行四邊形ABCDニ於テBCヲ底邊トミルトキ,HKハソノ高サデアル。又ABヲ底邊ト見ルトキ, EFハソノ高サデアル。

定理 55. 平行四邊形ハソレト底邊及ビ高サガ夫々等シイ矩形ト等積デアル。

假設 平行四邊形ヲ ABCDトシ,コレト底邊及ビ高サガ夫々等シイ矩形ヲ EBCF トスルト

終結 ▱ABCD=▭EBCF デアル。



證明 ▱ABCD, ▭EBCFハ底邊及ビ高サガ夫々相等シイカラ,圖ノヤウニ重ネルコトガ出來ル。扨テ二ツノ直角三角形EBA, FCDニ於テ

EB=FC,　BA=CD

$\therefore \qquad \triangle EBA \equiv \triangle FCD$

$\therefore \quad$ 四邊形 $EBCD - \triangle EBA =$ 四邊形 $EBCD - \triangle FCD$

即チ $\qquad$ ▱$ABCD =$ ▱$EBCF$

系 1. 平行四邊形ABCDノ面積,底邊及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫々 S, b, h トスルト, $S = bh$

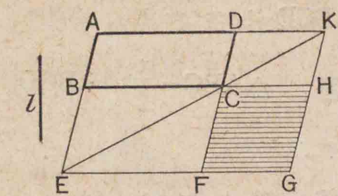
系 2. 底邊及ビ高サガ夫々相等シイ二ツノ平行四邊形ハ等積デアル。又コノ逆モ眞デアル。(逆ハ二ツアル)

問 與ヘラレタ平行四邊形ヲソノ面積ト一邊トヲカヘナイデ,一ツノ角ガ與ヘラレタ角ニ等シイ平行四邊形ニナホセ。

作圖題 14. 與ヘラレタ平行四邊形ノ角ヲカヘナイデ,一邊ガ與ヘラレタ長サニ等シイ等積ナ平行四邊形ニナホセ。

題意 與ヘラレタ平行四邊形ヲ ABCD, 與ヘラレタ線分ヲ l トスル。 ▱ABCD ノ角ヲカヘナイデ,一邊ガ l デ,且ツコレト等積ナ平行四邊形ニナホスコトヲ求メル。

作圖 ▱ABCD ノ邊 AD ヲ延長シ, l ニ等シイヤウニ DK ヲトル。 KC ヲ延長シ, AB ノ延長トノ交點ヲ E トスル。 E, K ヲ過ツテ AD, AB ニ夫々平行



線ヲ引キ,ソノ交點ヲ G トスル。次ニ BC, DC ノ延長ガ KG, EG ト交ル點ヲ夫夫 H, F トスレバ ▱CFGH ハ求ムル平行四邊形デアル。

證明 四邊形 AEGK, BEFC, DCHK ハ何レモ平行四邊形デアツテ, EK ハソレ等ノ對角線デアル。

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} \triangle AEK &\equiv \triangle GKE \\ \triangle BEC &\equiv \triangle FCE \\ \triangle DCK &\equiv \triangle HKC \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad ▱ABCD = ▱CFGH$$

ソシテ ▱CFGH ノ一邊 CH ハ l ニ等シク,四ツノ角ハ夫々 ▱ABCD ノ角ニ等シイ。故ニ ▱CFGH ハ求ムルモノデアル。

注意 上ノ圖ニ於テ ▱ABCD, ▱CFGH ヲ ▱AEGK ノ對角線ニ沿フ**餘形**トイフ。

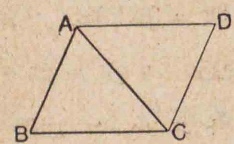
問 與ヘラレタ平行四邊形ノ面積ヲカヘズニ,一角ト一邊ガ與ヘラレタ平行四邊形ニナホセ。

69. 三角形ノ面積

定理 56. 三角形ハコレト底邊,高サガ夫々相等シイ平行四邊形ノ半分ト等積デアル。

假設 三角形ヲ ABC トシ,コレト底邊及ビ高サガ

夫々等シイ平行四邊形ヲ ABCD トスルト



終結　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABCD$ デアル。

證明　略スル。

系 1.　三角形ノ面積底邊及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫々 S, b, h トスルト,　$S=\frac{1}{2}bh$

系 2.　底邊及ビ高サガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ等積デアル。又コノ逆モ眞デアル。

系 3.　二邊ガ夫々相等シク,且ツソノ夾角ガ互ニ補角ヲナス二ツノ三角形ハ等積デアル。

問 1.　三角形ノ中線ハソノ三角形ヲ二等分スル。

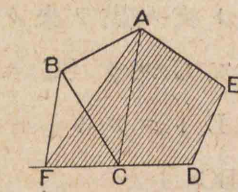
問 2.　同ジ底邊ヲモツ等積ナ二ツノ三角形ノ頂點ヲ結ブ線分ハ底邊ニ平行デアルカ,又ハ底邊デ二等分セラレル。

問 3.　正多角形ノ面積ハソノ周ト内切圓ノ半徑トノ積ノ半分ニ等シイ。

作圖題 15.　與ヘラレタ多角形(三角形ヲ除ク)**ヲ,ソノ邊數ガ一ツ少イ多角形ニナホセ。**

題意　與ヘラレタ多角形ヲ假ニ五角形トシ,コレヲ ABCDE トスル。コレヲ等積ナ四角形ニナホスコトヲ求メル。

解析　圖ノヤウニ五角形 ABCDE ヲコレト等積ナ四角形 AFDE ニナホシ得タトスルト



$$\triangle ABC=\triangle AFC$$

且ツコノ兩三角形ハ同ジ底ノ同側ニアルカラ

$$AC \parallel BF$$

作圖　AC ヲ結ビ, B ヲ過ツテ AC ニ平行線ヲ引キ, DC ノ延長ト交ル點ヲ F トスル。AF ヲ結ブト四角形 AFDE ハ求ムルモノデアル。

證明　略スル。

吟味　作圖ハ常ニ可能デアル。

注意　コノ作圖ヲ續ケテ行フト,與ヘラレタ多角形ヲ,ソレト等積ナ三角形ニナホスコトガ出來ル。

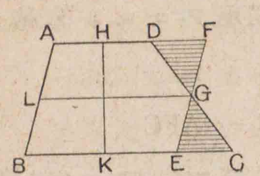
問　與ヘラレタ三角形ノ底邊ヲカヘズニ,一底角ガ與ヘラレタ角ニ等シイ等積ナ三角形ニナホセ。

70. 梯形ノ面積

定理 57.　梯形ハソノ兩底ノ和ノ半分ヲ底トシ,ソノ高サヲ高サトスル平行四邊形ト等積デアル。

假設　梯形ヲ ABCD トシ,ソノ兩底ヲ AD, BC, 高サヲ HK トスルト

終結　梯形 $ABCD=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot HK$ デアル。



[證明] DC ノ中點Gヲ過ツテ, AB ニ平行線ヲ引キ, BC 及ビ AD ノ延長ト交ル點ヲ夫々 E, F トスル。又GカラBCニ平行線 GL ヲ引キ, AB ト交ル點ヲ L トスルト

$$GL=\frac{1}{2}(AD+BC)$$

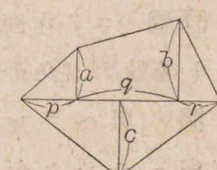
扨テ $\triangle GEC \equiv \triangle GFD$

∴ 梯形 $ABCD = \square ABEF$

$$=BE \cdot HK = GL \cdot HK$$

$$=\frac{1}{2}(AD+BC) \cdot HK$$

[系] 梯形ノ面積,兩底及ビ高サヲ表ハス數ヲ夫々 S, a, b, h トスルト, $S=\frac{1}{2}h(a+b)$



問1. 右ノ圖形ノ面積ヲ求メヨ。

問2. 梯形 ABCD ノ平行デナイ二邊 AB, CD ノ延長ノ交點ヲ E トスルト, $\triangle EAC = \triangle EBD$ デアル。

[練習] (9)

1. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ過ル直線ハ本形ヲ二等分スル。

2. 平行四邊形 ABCD 内ニ一點 P ヲトルト $\triangle PAB$ ト $\triangle PCD$ ノ和ハ $\square ABCD$ ノ半分デアル。

3. 與ヘラレタ三角形ト等積ナ矩形ヲ作レ。

4. 四邊形ハソノ兩對角線ヲ二隣邊トシ,ソノ夾角ヲ夾角トスル三角形ト等積デアル。

5. 二邊ノ長サガ夫々一定ナル三角形ノ中,ソノ夾角ガ直角ナ三角形ノ面積ハ最大デアル。

6. 與ヘラレタ圓ニ内接スル矩形ノ中,面積ノ最大ナモノハ何カ。

7. 三角形ノ重心ヲ各頂點ニ結ブト,ソノ三角形ハ三ツノ等積ナ三角形ニ分タレル。

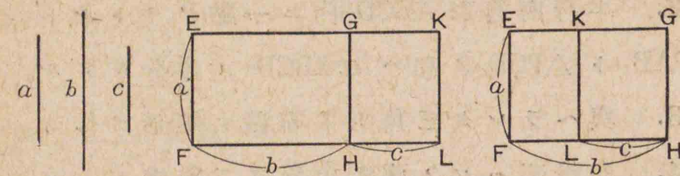
71. 矩形ノ公式

[定理] 58. 二線分ノ和又ハ差ト他ノ一線分トノ矩形ハ,初メノ二線分ノ各ヽト後ノ線分トノ矩形ノ和又ハ差ニ等シイ。

[假設] 二ツノ線分ヲ b, c $(b>c)$ トシ,他ノ線分ヲ a トスルト

[終結] $a(b \pm c)=ab \pm ac$ デアル。

[證明] 一直線上ニ b ニ等シク FH ヲ, c ニ等シク HL ヲトリ, F カラコレニ垂線 FE ヲ立テ,コレヲ a



ニ等シクトル。次ニ EF, FL ノ矩形 EFLK 及ビ HL, LK ノ矩形 HLKG ヲ作ルトキハ

$$\square EFLK = a(b \pm c)$$

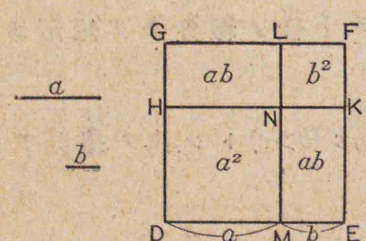
又

$$\square EFLK = \square EFHG \pm \square GHLK$$
$$= ab \pm ac$$

$$\therefore \quad a(b \pm c) = ab \pm ac$$

系 $a(b+c-d)=ab+ac-ad$, 但シ $b+c>d$

定理 59. 二線分ノ和ノ上ノ正方形ハ,ソノ各線分上ノ正方形ノ和ニ,ソノ二線分ノ矩形ノ 2倍ヲ加ヘタモノニ等シイ。



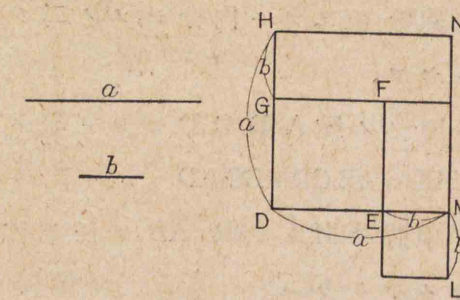
假設 二線分ヲ a, b トスルト

終結

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

證明 略スル。

定理 60. 二線分ノ差ノ上ノ正方形ハ,ソノ各線分上ノ正方形ノ和ヨリソノ二線分ノ矩形ノ 2倍ヲ



引イタモノニ等シイ。

假設 二線分ヲ $a, b\ (a>b)$ トスルト

終結

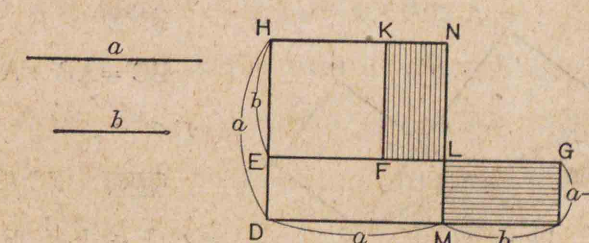
$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

證明 略スル。

定理 61. 二線分ノ和ト差トノ矩形ハ,ソノ二線分ノ各ノ平方ノ差ニ等シイ。

假設 二線分ヲ $a, b\ (a>b)$ トスルト

終結 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$



證明 略スル。

系 一線分ヲ任意ノ點デ内分又ハ外分スルトキ,ソノ二ツノ分ノ矩形ハソノ線分ノ半分ノ上ノ正方形ト分點及ビ中點ノ間ノ部分ノ上ノ正方形トノ差ニ等シイ。

問1. 與ヘラレタ線分ヲ二ツニ内分シ,ソノ二ツノ分ノ矩形ヲ最大ニセヨ。

問2. 一直線上ニ四ツノ點 A, B, C, D ガコノ順ニアルトキハ

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$$

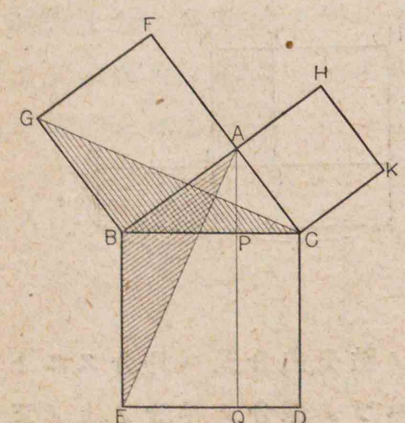
問3. 線分 AB ノ中點ヲ M トシ,又 AB ヲ任意ノ點 P デ内分又ハ外分スルトキハ

$$AP^2+BP^2=2(AM^2+MP^2)$$

72. ぴたごらすノ定理

定理 62. 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ平方ハ他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和ニ等シイ。*

假設 △ABC ニ於テ ∠A ヲ直角トスルト



終結 $BC^2=AB^2+AC^2$ デアル。

證明 BC, AB AC ノ上ニ夫々正方形ヲ作リ,夫々 BCDE, ABGF, ACKH トスル。A カラ BE ニ

* コレヲ Pythagoras ノ定理トイフ。然シ上ノ證明ハゆーくりっどノ著書ニ載セラレタモノデアル。

平行線ヲ引キ BC, ED トノ交點ヲ夫々 P, Q トシ, AE, CG ヲ結ブト

然ルニ $\left.\begin{array}{l}\triangle ABE\equiv\triangle GBC\\ ▭BQ=2\triangle ABE\\ \square BF=2\triangle GBC\end{array}\right\}\therefore\ ▭BQ=\square BF \quad (1)$

同様ニ $▭CQ=\square CH \quad (2)$

(1),(2) ヲ邊々相加ヘルト

$$\square BD=\square BF+\square CH$$

卽チ $BC^2=AB^2+AC^2$

系 ∠A ガ直角ナル三角形ノ頂點 A, B, C ノ對邊ヲ表ハス數ヲ夫々 a, b, c トスルト $a^2=b^2+c^2$ 從ツテ $b^2=a^2-c^2$, $c^2=a^2-b^2$ ヲ得ル。

問1. 直角三角形ノ斜邊及ビ他ノ一邊ノ長サガ夫々29糎,21糎ナルトキ,第三邊ノ長サハ何糎カ。

問2. 與ヘラレタ二ツノ正方形ノ差ニ等シイ正方形ヲ作レ。

問3. 一邊 a ノ正方形ノ對角線ハ $\sqrt{2}a$ デアル。又一邊 a ノ正三角形ノ高サハ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ デアル。

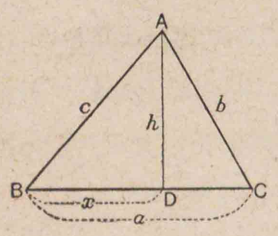
73. へろんノ公式

定理 63. 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ノ對邊及ビ面積ヲ表ハス數ヲ夫々 a, b, c, S トスルト

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad 但シ\quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

證明　∠B, ∠C ヲ鋭角ト考ヘルコトガ出來ル。

今頂點 A カラ底邊ヘ垂線 AD ヲ下シ, AD ヲ表ハス數ヲ h トスル。又 BD ヲ表ハス數ヲ x トスルト



$$S=\frac{1}{2}ah$$

$$\therefore\quad 4S^2=a^2h^2 \quad (1)$$

然ルニ △ABD ヨリ　$h^2=c^2-x^2$　(2)

$$\therefore\quad 4a^2h^2=4a^2c^2-4a^2x^2$$
$$=(2ac+2ax)(2ac-2ax)$$

(1) ヲ代入スルト

$$16S^2=(2ac+2ax)(2ac-2ax) \quad (3)$$

又 △ADC ヨリ

$$b^2=h^2+DC^2=h^2+(a-x)^2$$
$$=c^2-x^2+a^2+x^2-2ax \quad [(2)ヲ代入シタ]$$
$$=a^2+c^2-2ax$$

$$\therefore\quad 2ax=a^2+c^2-b^2$$

コレヲ (3) ニ代入スルト

$$16S^2=(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)$$

$$=\{(a+c)^2-b^2\}\{b^2-(a-c)^2\}$$
$$=(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c) \quad (4)$$

次ニ　$a+b+c=2s$ ヲ用ヒテ

$$a+b+c-2b=2s-2b$$

即チ　$a-b+c=2(s-b)$

同様ニ　$a+b-c=2(s-c)$

$-a+b+c=2(s-a)$

因テ (4) ハ　$16S^2=16s(s-a)(s-b)(s-c)$

$$\therefore\quad S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,*$$

問 1.　底邊ガ 72 cm, 他ノ邊ガ 45 cm ナル二等邊三角形ノ面積ヲ求メヨ。(二樣ニ計算セヨ)

問 2.　三角形 ABC ノ内切圓ノ半徑ヲ r トスルト,

$$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\quad デアル。$$

74. 矩形ノ面積ノ比

定理 64. 高サ(又ハ底邊)ガ相等シイ二ツノ矩形ノ比ハ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

假設　□ABCD, □PQRS ニ於テ AB=PQ トスルト

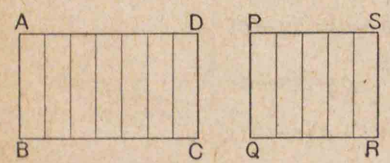
終結　$\frac{□ABCD}{□PQRS}=\frac{BC}{QR}$ デアル。

* へろん(Heron. 西暦約 100 年)ガコノ公式ヲ作ツタ。然シあるきめです(Archimedes. 約 250 B.C.)ハソレヲ既ニ知ツテヰタ。彼ハぎりしや七賢人ノ最後ノ人デアル。

證明　BC QR ヲ同ジ單位デ計ツテ得タ數ヲ夫々 m, n トスルト

$$\frac{BC}{QR}=\frac{m}{n} \qquad \text{(定理43)} \qquad (1)$$

次ニ BC, QR ヲ夫々 m, n 個ニ等分シ,ソノ各分點ヲ過ツテ, BC, QR ニ夫々垂線ヲ立テルト, 矩形 ABCD, PQRS ハ夫々 m, n 個ノ合同ナ矩形ニ分タレル。



$$\therefore \qquad \frac{\square AC}{\square PR}=\frac{m}{n} \qquad \text{(定理43)} \qquad (2)$$

(1),(2) ヨリ　$$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{BC}{QR}$$

注意　上ノ定理ハ次ノヤウニ述ベラレル。

高サ(又ハ底邊)ガ一定ナル矩形ハソノ底邊(高サ)ニ比例スル。

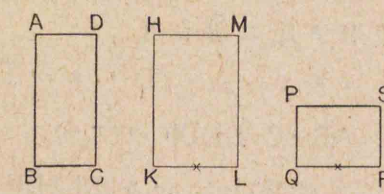
系1　高サ(又ハ底邊)ガ相等シイ二ツノ平行四邊形ノ比ハソノ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

系2　高サ(又ハ底邊)ガ相等シイ二ツノ三角形ノ比ハソノ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

定理 65.　二ツノ矩形ノ比ハソノ底邊ノ比ト高サノ比ノ複比ニ等シイ。

假設　二ツノ矩形ヲ ABCD, PQRS トスルト

終結　□AC : □PR = (BC : QR)(AB : PQ) デアル。



證明　今底邊ガ QR, 高サガ AB ニ等シイ矩形 HKLM ヲ作ルト

$$\frac{\square AC}{\square HL}=\frac{BC}{KL}=\frac{BC}{QR} \qquad \text{(定理64)}$$

又 $$\frac{\square HL}{\square PR}=\frac{HK}{PQ}=\frac{AB}{PQ} \qquad \text{(定理64)}$$

$$\therefore \qquad \frac{\square AC}{\square HL}\times\frac{\square HL}{\square PR}=\frac{BC}{QR}\times\frac{AB}{PQ}$$

$$\therefore \qquad \frac{\square AC}{\square PR}=\frac{BC}{QR}\times\frac{AB}{PQ} \qquad \text{(定理44)}$$

系　A, B, C, D ヲ四ツノ線分トスルト

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

問1.　二ツノ平行四邊形ノ比ハ底邊ノ比ト高サノ比ノ複比ニ等シイ。

問2.　二ツノ三角形ノ比ハ底邊ノ比ト高サノ比ノ複比ニ等シイ。

問3.　二ツノ正方形ノ比ハ邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

75. 三角形ノ面積ノ比

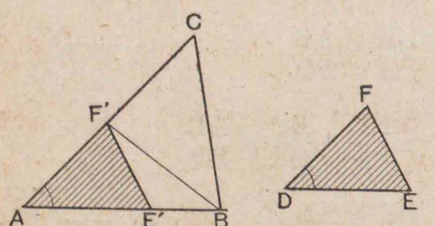
定理 66. 一角ガ相等シイ二ツノ三角形ノ比ハ, ソノ角ヲ夾ム二邊ノ矩形ノ比ニ等シイ。

假設　$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $\angle A=\angle D$ トスルト

終結　$\triangle ABC : \triangle DEF = AB\cdot AC : DE\cdot DF$ デアル。

證明　AB, AC (又ハソノ延長)上ニ夫々 DE, DF ニ等シク AE′, AF′ ヲトルト, $\angle A=\angle D$ デアルカラ

$$\triangle AE'F' \equiv \triangle DEF$$



次ニ F′B ヲ結ブト

$$\left.\begin{aligned} \frac{\triangle ABC}{\triangle ABF'} &= \frac{AC}{AF'} \\ \text{又}\quad \frac{\triangle ABF'}{\triangle AE'F'} &= \frac{AB}{AE'} \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle AE'F'} = \frac{AC}{AF'} \times \frac{AB}{AE'} = \frac{AC\cdot AB}{AF'\cdot AE'}$$

$$\therefore\quad \triangle ABC : \triangle DEF = AB\cdot AC : DE\cdot DF$$

系　一角ガ互ニ補角ヲナス二ツノ三角形ノ比ハ, ソノ角ヲ夾ム二邊ノ矩形ノ比ニ等シイ。

76. 相似多角形ノ面積ノ比

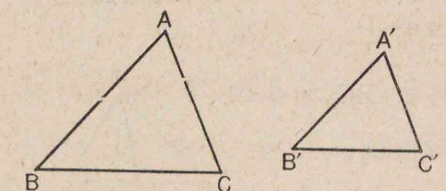
定理 67. 二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ,ソノ對應邊ノ二乘比ニ等シイ。

假設　二ツノ相似三角形ABC, A′B′C′ ニ於テ AB,

BC, CA ノ對應邊ヲ夫々 A′B′, B′C′, C′A′ トスルト

終結　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{AB^2}{A'B'^2}$ デアル。

證明　$\angle B=\angle B'$ デアルカラ



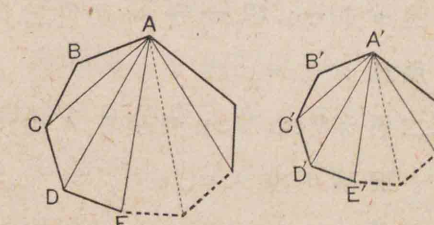
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{BC}{B'C'}$$

然ルニ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

ソレ故　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{AB}{A'B'} \times \dfrac{AB}{A'B'} = \left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2$

定理 68. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シイ。



假設　二ツノ相似多角形 ABCD……, A′B′C′D′……ノ對應邊ヲ AB ト A′B′, BC ト B′C′, ……トスルト

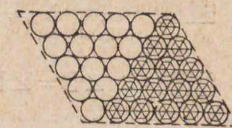
終結　ABCD…… : A′B′C′D′…… $= AB^2 : A'B'^2$ デアル。

證明　略スル。

系　邊數ガ等シイ二ツノ正多角形ノ面積ノ比ハ, ソノ外接圓又ハ内切圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シイ。

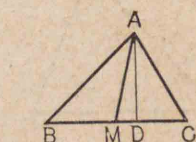
練習 (10)

1. 圖ノヤウニ積ンダ俵ノ數ヲ勘定スル方法ヲ工夫シ,更ニ一般ニ次ノ公式ヲ得ヨ。



$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2. △ABC ニ於テ M ヲ BC ノ中點トスルト次ノ關係ガアル。



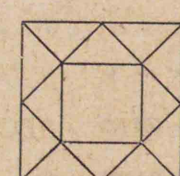
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

3. 平行四邊形 ABCD ニ於テ $AB=13^{cm}$, $BC=14^{cm}$, $AC=15^{cm}$ ナルトキ,面積ハ幾平方糎デアルカ。又 A カラ BC ニ下シタ垂線ノ長サハ幾糎デアルカ。

4. 直角ヲ夾ム二邊ガ 40 cm, 42 cm ナル直角三角形ノ内切圓ノ半徑ハ幾糎デアルカ。

5. 梯形ノ平行ナ二邊ガ 7 cm, 10 cm デ,殘リノ邊ガ 5 cm, 4 cm ナルトキ,ソノ面積ヲ求メヨ。

6. 右圖ノヤウニ一邊 a ナル正方形中ニ畫カレタ各線分ノ長サ及ビ各多角形ノ面積ヲ求メヨ。(あるきめです)



7. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫々 D, E ヲトリ AD:BD=3:5, AE:EC=1:2 トナルヤウニシ,

DE ヲ結ブトキ, △ADE:△ABC ハ如何。

8. 三角形 ABC ノ頂點 A カラ底邊 BC マデ引イタ線分 AD 上ノ任意ノ點ヲ P トスルトキ, △APB ノ △APC ニ對スル面積ノ比ハ, BD:DC ニ等シイ。

9. 一角ガ相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,相隣ル二邊ノ矩形ノ面積ノ比ニ等シイ。

10. 半徑 r ノ圓ニ内接スル正三角形ト正六邊形トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

第十一章 二線分ノ積

77. 比例線分

定理 69. 四ツノ線分ガ比例ヲナストキ,ソノ外項ノ積ハ内項ノ積ニ等シイ。

假設 四ツノ線分ヲ A, B, C, D トシ, A:B=C:D トスルト

終結 A·D=B·C デアル。

證明 A, B, C, D ヲ同ジ單位デ計ッテ得タ數ヲ夫夫 a, b, c, d トスルト

A:B=a:b 及ビ C:D=c:d

ソシテ A:B=C:D デアルカラ a:b=c:d

ソレ故代數學ニヨツテ　$ad=bc$

然ルニ ad, bc ハ夫々A, Dノ矩形, B, Cノ距形ノ面積ヲ表ハス數デアルカラ

$$A\cdot D=B\cdot C$$

系　上ノ定理ノ逆ハ眞デアル。

問　二ツノ矩形又ハ三角形ガ等積ナルトキ,ソノ高サノ比ハ底邊ノ比ノ反比ニ等シイ。

78. 直角三角形

定理 70. 直角三角形ノ直角ノ頂點カラ斜邊ヘ下シタ垂線ハ,モトノ直角三角形ヲソレト相似デ且ツ互ニ相似ナ二ツノ直角三角形ニ分ツ。

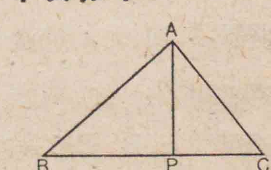
證明　略スル。

系　∠A ヲ直角トスル三角形 ABC ノ頂點 A カラ斜邊ニ下シタ垂線ノ足ヲ P トスルト

(i)　$AB^2=BP\cdot BC$

(ii)　$AC^2=PC\cdot CB$

(iii)　$AP^2=PB\cdot PC$



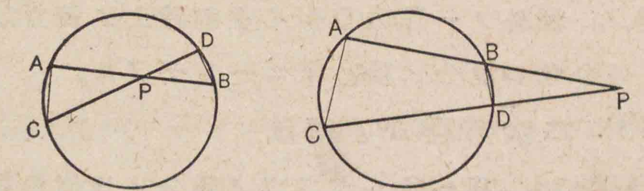
問　上ノ系ヲ用ヒテぴたごらすノ定理ヲ證セヨ。

79. 弦・切線

定理 71. 圓ノ二ツノ弦又ハソノ延長ガ交ルトキ,ソノ交點ガ分ツ各弦ノ二ツノ分ノ積ハ相等シイ。

假設　圓ノ二ツノ弦AB, CD又ハソノ延長ノ交點ヲPトスルト

終結　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$ デアル。



證明　AC, BD ヲ結ブト

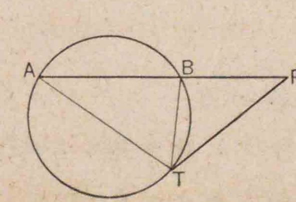
$$\left.\begin{array}{l}\angle APC=\angle DPB\\ \angle ACP=\angle DBP\end{array}\right\}\quad\therefore\quad \triangle APC\backsim\triangle DPB$$

$$\therefore\quad PA:PD=PC:PB$$

即チ　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

系　二線分又ハソノ双方ノ延長ガ相交リ,ソノ交點デ分レタ各線分ノ二ツノ分ノ積ガ相等シイトキ,ソノ二線分ノ端ハ同一ノ圓周上ニアル。

定理 72. 圓外ノ一點カラ引イタ割線上ノ弦ガソノ點デ外分サレタ分ノ積ハ,ソノ點カラ圓ヘ引イタ切線ノ平方ニ等シイ。



假設　圓外ノ點Pカラ引イタ割線ヲPBAトシ,切線ヲPTトスルト

終結 PA·PB=PT^2 デアル。

證明 略スル。

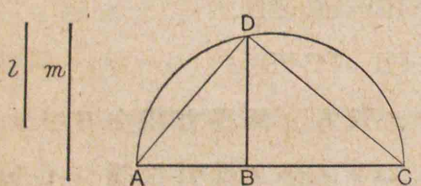
系 1. **上ノ定理ノ逆ハ眞デアル。**

系 2. **圓外ノ一點カラ引イタ割線上ノ弦ガソノ點デ外分サレタ分ノ積ハ常ニ一定デアル。**

80. 二次方程式ノ解法

作圖題 16. **與ヘラレタ二ツノ線分ノ比例中項ヲ求メヨ。**

題意 與ヘラレタ二ツノ線分ヲ l, m トシ, l, m ノ比例中項トナル線分ヲ求メヨ。



作圖 一ツノ直線上ニ l ニ等シク AB, 又同方向ニ m ニ等シク BC ヲトリ, AC ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, B カラ AC ニ垂線ヲ立テ圓周トノ交點ヲ D トスルト, BD ハ求ムル線分デアル。

證明 略スル。(定理70系)

吟味 作圖ハ常ニ可能デ,解答ハ唯一ツデアル。

注意 二線分トソノ比例中項ヲ表ハス數ヲ夫々 l, m, x トスルト,上ノ作圖題ハ方程式 $x^2=lm$ ヲ解クコトデアル。

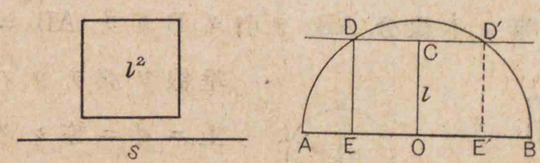
問 1. 與ヘラレタ正方形ノ k 倍ニ等シイ正方形ヲ作レ。又與ヘラレタ線分ノ $\sqrt{3}$ 倍, $\sqrt{5}$ 倍ニ等シイ線分ヲ作レ。

問 2. 定理72ヲ用ヒテ二線分ノ比例中項ヲ求メヨ。

作圖題 17. **二ツノ線分ノ和ト積ヲ與ヘテ各線分ヲ求メヨ。**

題意 二線分ノ和 s トソレ等ノ積卽チソレニ等シイ正方形 l^2 ヲ與ヘテ各線分ヲ求メル。

作圖 s ニ等シイ線分 AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ,圓ノ中心 O カラ AB ニ立テタ垂線ノ上ニ l ニ等シク OC ヲトル。C ヲ過ッテ AB ニ平行線ヲ引キ,圓周トノ交點ヲ D, D′ トスル。D カラ AB ニ垂線 DE ヲ下シ,ソノ足ヲ E トスルト, AE, EB ハ求ムル二線分デアル。



證明
$$AE+EB=s$$
又
$$AE \cdot EB=ED^2=l^2$$
因テ AE, EB ハ求ムル二線分デアル。

吟味 (イ) $l<\dfrac{s}{2}$ ナラバ解答ハ一ッ(相等シイ二ツ)。

(ロ) $l=\frac{s}{2}$ ナラバ解答ハ一ツ。

(ハ) $l>\frac{s}{2}$ ナラバ問題ハ不能デアル。

注意 AE$=x$ トスルト, EB$=s-x$ トナル。因テ $x(s-x)=l^2$ ヲ得ル。

今 l, s, x ヲ各線分ヲ表ハス數トミルトキ

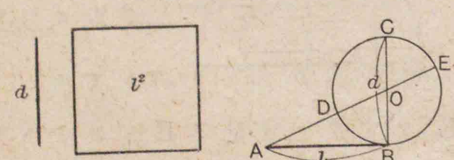
$$x^2-sx+l^2=0 \qquad (1)$$

因テ上ノ吟味ハ x ニ就イテノ二次方程式(1)ノ根ノ吟味ト一致スル。

問 二次方程式 $x^2-10x+16=0$ ノ根ヲ幾何學的ニ作圖セヨ。

作圖題 18. 二ツノ線分ノ差(d)ト積(l^2)トヲ與ヘテ各線分ヲ求メヨ。

作圖 l ニ等シイ線分 AB ヲ引キ, B カラ AB ニ垂線ヲ立テソノ上ニ d ニ等シク BC ヲトリ, BC ヲ直徑トシテ圓 O ヲ畫ク。次ニ A, O ヲ過ル直線ガ圓周ト交ル點ヲ D, E トスルト, AD, AE ガ求ムル線分デアル。



證明 $\mathrm{AE}-\mathrm{AD}=\mathrm{DE}=\mathrm{BC}=d$

又 $\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AB}^2=l^2$

因テ AD, AE ハ求ムル二線分デアル。

吟味 作圖ハ常ニ可能デ,解答ハ唯一ツデアル。

注意 AD$=x$ トスルト, AE$=d+x$ デアル。因テ $x(d+x)=l^2$ ヲ得ル。

今 l, d, x ヲ各線分ヲ表ハス數トミルトキ

$$x^2+dx-l^2=0 \qquad (1)$$

因テ上ノ吟味ハ x ニ就イテノ二次方程式(1)ノ根ノ吟味ト一致スル。ソシテコノ方程式ハ常ニ實根ヲモツ,即チ上ノ作圖ハ常ニ可能デアル。

問 $x:a=b:(x-c)$ ヲ滿足スル x ヲ幾何學的ニ作圖セヨ。

練習 (11)

1. 與ヘラレタ平行四邊形ト等積ナ正方形ヲ作レ。

2. 與ヘラレタ三角形ト等積ナ正方形ヲ作レ。

3. 與ヘラレタ底ヲ有シ,與ヘラレタ正方形ト等積ナ二等邊三角形ヲ作レ。

4. 與ヘラレタ斜邊ヲ有シ,定正方形ト等積ナ直角三角形ヲ作レ。

5. 相交ル二圓ノ共通弦ノ延長ハ,ソノ二圓ノ共通切線ノ切點間ノ線分ヲ二等分スル。

6. 與ヘラレタ二點ヲ過リ,且ツ與ヘラレタ直線ニ切スル圓ヲ書ケ。

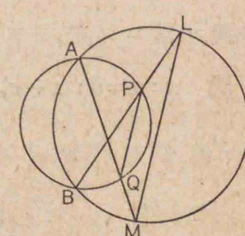
7. 三角形ABCノ三頂點カラ對邊ヘ下シタ垂線ヲ夫々AD, BE, CFトシ,ソノ垂心ヲHトスルト

$$AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$$

8. 直角三角形ABCニ於テAカラ斜邊BCニ下シタ垂線ノ足ヲDトスルト

$$AB^2 : AC^2 = BD : CD$$

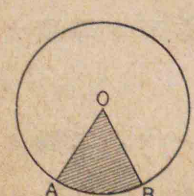
9. 右圖ニ於テ $LM /\!/ PQ$, AQMハ一直線デアル。L, P, Bガ一直線ナルコトヲ證明セヨ。又コノ逆モ眞デアル。



第十二章 圓ノ周,面積

81. 扇形

定義 圓ノ二ツノ半徑トソレ等ニ夾マレタ弧トデ圍マレタ圓ノ部分ヲ**扇形**トイフ。

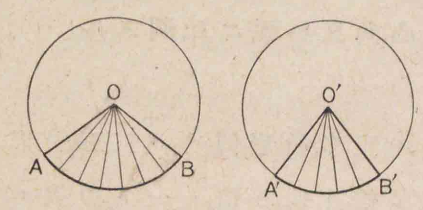


左圖ノ扇形ヲ表ハスニハ**扇形AOB**ト書ク。

定理 73. 同圓又ハ等圓ニ於テ,二ツノ中心角ノ比ハソレニ對スル弧ノ比ニ等シイ。

假設 等圓O及ビO′ニ於テ,中心角ヲ∠AOB及ビ∠A′O′B′トシ,ソレニ對スル弧ヲ夫々$\overset{\frown}{AB}$及ビ$\overset{\frown}{A'B'}$トスルト

終結 $\angle AOB : \angle A'O'B' = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{A'B'}$ デアル。



證明 ∠AOB及ビ∠A′O′B′ヲ同ジ單位デ計ツテ得タ數ヲ,例ヘバ7, 5トスルト

$$\angle AOB : \angle A'O'B' = 7 : 5 \qquad (1)$$

次ニ∠AOB及ビ∠A′O′B′ヲ夫々七等分,五等分スル半徑ヲ書イタトスルト,12個ノ小ナル扇形ヲ得ル。然ルニコレ等ノ扇形ノ弧ハ皆相等シイ。因テ$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ハ小ナル扇形ノ弧ノ夫々7倍,5倍デアル。

$$\therefore \quad \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{A'B'} = 7 : 5 \qquad (2)$$

(1),(2)ヨリ $\angle AOB : \angle A'O'B' = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{A'B'}$

一ツノ圓ニツイテモ同樣デアル。

系 同圓又ハ等圓ニ於テ,扇形ノ比ハソノ中心角ノ比又ハソノ弧ノ比ニ等シイ。

證明 本定理ノ圖ニ於テ等分シテ得タ小ナル扇

形ハ皆相等シイ。ソレ故

$$扇形 AOB : 扇形 A'O'B' = 7 : 5 \qquad (3)$$

(1),(2),(3) ヨリ

$$扇形 AOB : 扇形 A'O'B' = \angle AOB : \angle A'O'B' = \overparen{AB} : \overparen{A'B'}$$

コノ系ハ次ノヤウニ述ベラレル。

扇形ノ面積ハソノ中心角又ハ弧ニ比例スル。

82. 圓ノ周,面積

圓ニ外切又ハ内接スル正多角形,例ヘバ正五邊形ヲ考ヘ,次ニソノ邊數ヲ2倍,4倍,8倍,……ト順次ニ増加スルトキハ,外切正多角形ノ周モ,内接正多角形ノ周モ共ニ限リナク圓周ニ近ヅキ,邊ノ數ヲ限リナク多クシタ極限ニ於テ外切正多角形及ビ内接正多角形ノ周ハ共ニ圓周トナル。

定義 圓ニ外切又ハ内接スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クシタトキ,ソノ周ノ極限ヲ**圓周ノ長サ**(又ハ單ニ**圓周**)トイフ。

扨テ圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ヲ上ニ述ベタヤウニ多クスルト,ソノ周ハ次第ニ減少スル。又圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ヲ多クスルトソノ周ハ次第ニ増大スル。故ニ

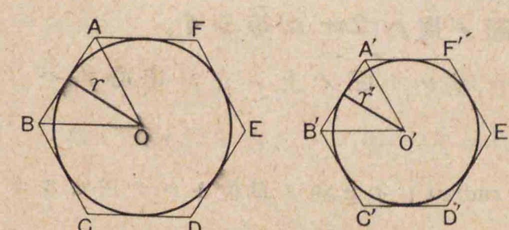
圓周ハ任意ノ外切正多角形ノ周ヨリ小デ,任意ノ内接正多角形ノ周ヨリ大デアル。

定義 圓ニ外切又ハ内接スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クシタトキ,ソノ面積ヲソノ**圓ノ面積**トイフ。

定理 74. 圓周トソノ直徑トノ比ハ一定デアル。

假設 二圓 O, O' ノ半徑ヲ夫々 r, r', ソノ周ヲ夫夫 c, c' トスルト

終結 $c : 2r = c' : 2r'$ デアル。



證明 各圓ニ外切スル同ジ邊數ノ正多角形ヲ畫キ,ソノ一邊ヲ夫々AB, A'B', ソノ周ヲ夫々 p, p' トスルト

$$p : p' = AB : A'B'$$

又△OAB∽△O'A'B' デアルカラ

$$AB : A'B' = r : r'$$

$$\therefore \quad p : p' = r : r'$$

$$\therefore \quad p : 2r = p' : 2r'$$

扨テコノ比例式ハ正多角形ノ邊數ヲ2倍,4倍,8

倍,………ト如何程增加シテモ成立スル。ソシテ邊數ヲ限リナク多クシタトキp, p'ノ極限ハ夫々c, c'デアルカラ

$$c:2r=c':2r'$$

卽チ圓周ト直徑トノ比ハ一定デアル。

定義 一ツノ圓ニ於テソノ圓周ト直徑トノ比ヲ**圓周率**トイフ。

圓周率ハ上ノ定理ニヨリ一定ノ數デアル。コレヲ通常πデ表ハス。

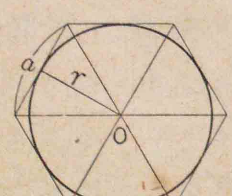
系 **半徑rノ圓ノ周ハ$2\pi r$ニ等シイ。**

問 圓ノ半徑ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ$\frac{180}{\pi}$度デアル。

注意 コノ角ヲradianトイヒ,角ノ單位トシテ用ヒルコトガアル。

定理 75. 半徑rノ圓ノ面積ハπr^2ニ等シイ。

證明 半徑rノ圓ノ面積ヲSトシ,コノ圓ニ外切スル正n邊形ノ一邊ヲa,周ヲpトスルトキ,コノ正n邊形ノ面積ハ $n\times\frac{1}{2}ar=\frac{1}{2}pr$ デアル。ソシテコノ關係ハ正多角形ノ



邊數ヲ如何程多クシテモ常ニ成立スル。

今正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クスルトキ,正多角形ノ面積ノ極限ハSトナリ,周pノ極限ハ圓周卽チ$2\pi r$トナル。

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\times 2\pi r\cdot r=\pi r^2$$

系 **扇形ノ面積ハソノ弧ト半徑トノ積ノ半分デアル。**

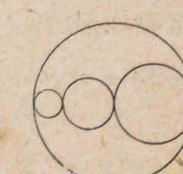
問 半徑 6 cm ノ圓ニ於テ,60度ノ中心角ニ對スル弧ト弦トノ間ニアル弓形ノ面積ヲ小數第二位マデ計算セヨ。但シπヲ 3.1416 トスル。モシ半徑ガaナラバ如何。

注意 πノ近似値トシテ**3.1416**又ハ$\frac{22}{7}$或ハ$\frac{355}{113}$ヲ用ヒル。

練習 (12)

1. 中心角45°ニ對スル弧ノ長サガ11mナルトキ,ソノ圓ノ半徑ノ長サハ約幾米カ。

2. 定圓ノ直徑ヲ幾ツカニ分チ,ソノ各部分ヲ直徑トシテ畫イタ圓ノ周ハ定圓ノ周ニ等シイ。

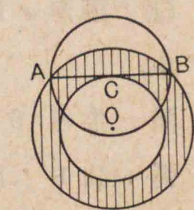


3. 與ヘラレタ二ツノ圓ノ和(又ハ差)ニ等シイ面積ヲモツ圓ヲ畫ケ。

4. 半徑 r ノ圓ニ内接スル正八邊形ノ一邊及ビ面積ヲ求メヨ。

5. 半徑 15 cm ノ圓ノ面積ヲ二ツノ同心圓ヲ畫イテ三等分スルトキ,各圓ノ半徑ヲ求メヨ。

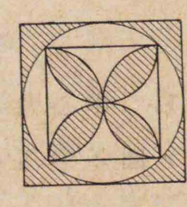
6. 半徑 a, b ナル二ツノ同心圓ノ周ノ間ニアル部分ノ面積ハ小圓ニ切スル大圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シイ。



7. 半徑 10 cm ノ二ツノ等圓ノ周ガ互ニ他ノ中心ヲ過ルヤウニ交ルトキ,二圓ノ共通部分ノ面積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.14$ トスル。

8. 半徑 r ノ三ツノ等圓ガ互ニ外切スルトキ,ソレ等ノ圓ノ弧デ圍マレタ部分ノ面積ヲ求メヨ。

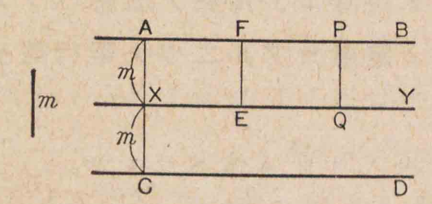
9. 圖ニ於テ陰影ノアル部分ノ面積ト,陰影ノナイ部分ノ面積トヲ比較セヨ。



第十三章 軌跡

83. 軌跡

直線 XY ノ兩側ニ於テ m ノ距離ニ二ツノ平行線 AB, CD ヲ引ク。



扨テ XY 上ノ任意ノ點 E カラソレニ垂線 EF ヲ立テ m ニ等シク F ヲトルト,F ハ AB 又ハ CD ノ上ニアル。即チ XY トノ距離ガ m ニ等シイ點ハ悉ク AB 又ハ CD 上ニアル。

逆ニ AB 或ハ CD 上ノ任意ノ點 P カラ XY ニ垂線 PQ ヲ下スト,四邊形 FEQP ハ矩形デアルカラ,$PQ=FE=m$ デアル。即チ AB 或ハ CD 上ノ點ハ悉ク XY カラ m ノ距離ニアル。

上ニ述ベタコトヨリ,直線 AB 及ビ CD ハ直線 XY トノ距離ガ m ニ等シイ點ヲ悉ク含ミ,且ツ XY トノ距離ガ m ニ等シクナイ點ハ一ツモ含ンデキナイコトガワカル。

定義 或圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スル點ヲ悉ク含ミ,且ツソノ條件ニ適シナイ點ヲ

一ツモ含マナイトキ,ソノ圖形ヲソノ條件ニ適スル點ノ**軌跡**トイフ。

上ノ例ハ次ノヤウニ述ベラレル。

一定直線カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ直線ノ兩側ニ於テソノ距離ニアル二ツノ平行線デアル。

又圓周ハ明ラカニ次ノヤウニ述ベラレル。

一定點カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ圓周デアル。

注意 上ノ定義ヨリ或圖形カ與ヘラレタ條件ニ適スル點ノ軌跡ナルコトヲ斷定スルニハ,次ノ一組ノ定理ヲ證明スルノデアル。

(1) **條件ニ適スル點ハ悉クソノ圖形上ニアル。**

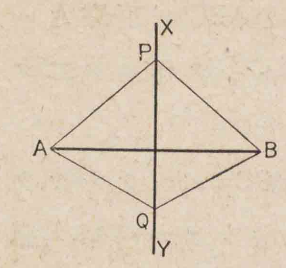
(2) **ソノ圖形上ノ點ハ悉ク條件ニ適スル。**

84. 重要ナ軌跡

軌跡題1. **二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。**

假設 二定點ヲA. Bトシ,ABノ垂直二等分線ヲXYトスルト

終結 A及ビBカラ等距離ニアル點ノ軌跡ハXYデアル。



證明 (1) PA=PB トスレバPハ二等邊三角形PABノ頂點デアルカラ XY上ニアル。

即チA, Bカラ等距離ニアル點ハ悉クXY上ニアル。

(2) XY上ニ任意ノ點Qヲトルト

QA=QB (定理4系)

即チXY上ノ點ハ悉クA, Bカラ等距離ニアル。

以上(1),(2)ニヨッテ二定點A, Bカラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ線分ABノ垂直二等分線XYデアル。

問1. 定直線ニ切スル定半徑ノ圓ノ中心ノ軌跡ハソノ直線ニ平行ナ二ツノ直線デアル。

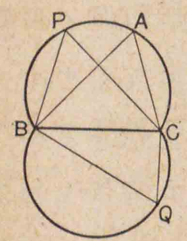
問2. 定圓ノ定長ナ弦ノ中點ノ軌跡ハ定圓ト同心ナ圓周デアル。

問3. 二定點ヲ過ル圓ノ中心ノ軌跡ハコノ二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。

軌跡題2. **一定ノ底邊ト一定ノ頂角ヲモツ三角形ノ頂點ノ軌跡ハ底邊ヲ弦トスル二ツノ弧デアル。**

假設 位置及ビ長サガ一定ナル三角形ノ底邊ヲBCトシ,BCヲ弦トシテ定角αヲ含ム弓形ノ弧ヲBCノ兩側ニ作ッタトスルト

終結 ∠BAC ガ定角 α ナル △ABC ノ頂點 A ノ軌跡ハ BC ヲ弦トシテ作ツタ二ツノ弓形ノ弧デアル。



證明 (1) $\angle BPC=\angle\alpha$ ナルヤウナ點 P ハ BC ヲ弦トスル弓形ノ弧上ニアル。(定理31系2)

即チ條件ニ適スル點ハ悉ク $\overset{\frown}{BC}$ 上ニアル。

(2) $\overset{\frown}{BC}$ 上ノ任意ノ點 Q ヲトルト

$\angle BQC=\angle\alpha$ (定理31系2)

即チ二ツノ弓形ノ弧ノ上ノ點ハ悉ク條件ニ適スル。

以上(1),(2)ニヨツテ求ムル軌跡ハ BC ヲ弦トシ,ソノ上ニ $\angle\alpha$ ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル。

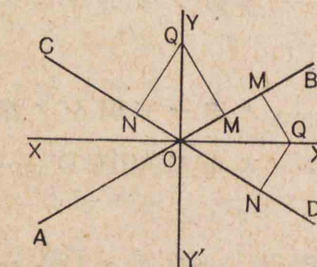
系 位置ト長サトガ一定ナ線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ハ,ソノ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

問 定圓上ノ定點ヲ過ル弦ノ中點ノ軌跡ハ,ソノ點トソノ圓ノ中心トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

軌跡題 3. 相交ル二定直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

題意 相交ル二定直線ヲ AB, CD トシ,ソノ交點ヲ O トスル。AB, CD カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メル。

解 (1) AB, CD カラ等距離ニアル一ツノ點 Q ヲ ∠BOD 或ハ ∠AOC 内ニトルト,Q ハ ∠BOD ノ二等分線 XOX′ 上ニアル。(定理9系) 又點 Q ヲ ∠BOC 或ハ ∠AOD 内ニトルト,Q ハ ∠BOC ノ二等分線 YOY′ 上ニアル。



即チ AB, CD カラ等距離ニアル點ハ悉ク XX′ 又ハ YY′ ノ上ニアル。

(2) XX′ 又ハ YY′ 上ニ任意ノ點 Q ヲトリ,Q カラ AB, CD ニ夫々垂線 QM, QN ヲ下スト, QM=QN デアル。(定理12系5)

即チ XX′ 及ビ YY′ 上ノ點ハ悉ク AB, CD カラ等距離ニアル。

以上(1),(2)ニヨツテ相交ル二直線 AB, CD カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノナス角ノ二等分線 XX′ 及ビ YY′ デアル。

問 相交ル二定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ

求メヨ。

軌跡題 4.　定點カラ定多角形ノ周マデ引イタ線分ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ハ,定點ヲ相似ノ中心トスルモトノ多角形ニ相似ナ多角形ノ周デアル。

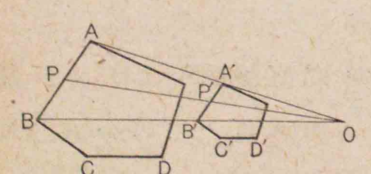
假設　O ヲ定點, ABCD ……ヲ定多角形トスル。$A'B'C'D'$ ……ハ O ヲ相似ノ中心トシ,定比 $m:n$ ヲ相似比トスル定多角形 ABCD……ニ相似ナ多角形トスルト

終結　O カラ多角形ABCD……ノ周マデ引イタ線分ヲ $m:n$ ノ比ニ分ツ點ノ軌跡ハ多角形 $A'B'C'D'$……ノ周デアル。

證明　(1) ABCD……ノ周上ノ一點 P ト O トヲ結ブ線分 OP ヲ $m:n$ ノ比ニ分ツ點ヲ P' トスルト

$$\left.\begin{aligned}\frac{OP}{OP'}&=\frac{m}{n},\\ \text{然ルニ}\quad\frac{OA}{OA'}&=\frac{m}{n}\end{aligned}\right\}\qquad\therefore\ \frac{OP}{OP'}=\frac{OA}{OA'}$$

$$\therefore\quad AP /\!/ A'P'$$



然ルニ　$AB /\!/ A'B'$

故ニ $A'P'$ ハ $A'B'$ ト重ナリ,P' ハ $A'B'$ 上ニ來ル。

卽チ條件ニ適スル點ハ悉ク $A'B'C'D'$……ノ周上ニ

アル。

(2) $A'B'C'D'$……ノ周上ニ一點 P' ヲトリ OP' ヲ結ビ,コレヲ延長シテ AB トノ交リヲ P トスルト

$AB /\!/ A'B'$ デアルカラ

$$\frac{OP}{OP'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{m}{n}$$

卽チ $A'B'C'D'$……ノ周上ノ點ハ悉ク條件ニ適スル。

以上(1),(2)ニヨリ求ムル軌跡ハ多角形 $A'B'C'D'$……ノ周デアル。

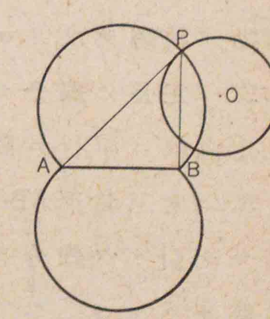
問　一定點カラ一定圓周マデ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

85. 軌跡ノ應用

例　一ツノ點カラ定線分 AB ヲミル角ガ定角 α ナルヤウナ點ヲ定圓 O ノ周上ニ求メヨ。

解析　求ムル點 P ヲ得タトスレバ

$$\angle APB=\angle\alpha$$



因テ P ハ AB ヲ定角 α ニ見ル點ノ軌跡上ニアル。ソレ故次ノヤウナ作圖ガ出來ル。

作圖　AB ヲ弦トシ定角 α ヲ含ム弓形ノ弧ヲ

ABノ兩側ニ作リ,コノ弧ト圓Oノ周トノ交點ヲPトスルト,Pハ求ムル點デアル。

證明 PハO圓ノ周上ニアル。次ニPハ$\overset{\frown}{AB}$上ニアル點ナル故

$$\angle APB = \angle \alpha$$

吟味 ABノ兩側ニアル弓形ノ弧ABトO圓周トノ交點ノ數ハ,解答ノ數ト同ジデアル。

問 1. 相交ル二定直線カラ夫々與ヘラレタ距離ニアル點ヲ求メヨ。

問 2. 相交ル二定直線カラ等距離デ,且ツ二定點カラモ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

練習 (13)

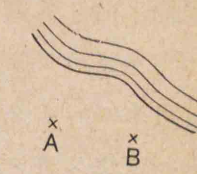
1. 互ニ垂直ナ二定直線上ニ端ヲモツ定線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 定長ノ線分ガソノ一端ヲ定圓周上ニ置キ,且ツ定直線ニ平行ニ動クトキ,他端ノ軌跡ヲ求メヨ。

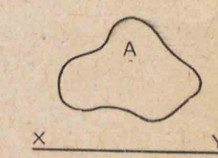
3. 定三角形ABC外ノ定點Oカラコノ三角形ノ周マデ引イタ線分ヲ與ヘラレタ比ニ内分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 川ノ同ジ側ニアル二村カラ等距離ニアルヤ

ウニ橋ヲ架ケルニハ何處ヘ架ケタラヨイカ。



5. 一ツノ閉ヂタ曲線内ノ一點カラ,ソノ曲線ニ交ラナイ一直線ニ至ル線分ガソノ曲線デ二等分セラレルヤウニセヨ。

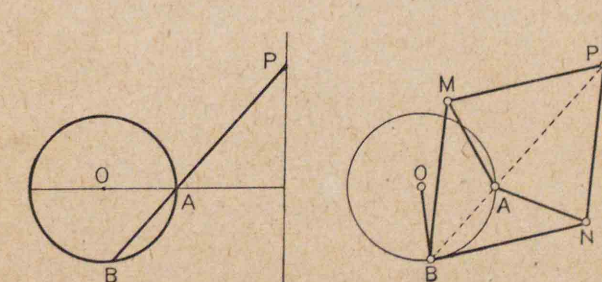


6. 底邊,頂角及ビ頂點カラ出ル中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

7. 與ヘラレタ點ヲ過リ,與ヘラレタ圓ニ切スル與ヘラレタ半徑ノ圓ヲ畫ケ。

8. 定圓外ノ定點Aカラ割線ABCヲ引キ,ソノ圓内ノ部分BCヲABニ等シクセヨ。

9. 定圓Oノ周上ノ定點Aヲ過ル弦BAノ延長上ニ一點Pヲトリ,AB·APガ一定ナルヤウナ點Pノ軌跡ハ一直線デアル。



注意 前ノ右圖ハ直線ヲ引ク器械デアル。四邊形 BMPN ハ菱形デ,圖中ノ太イ直線ハ定長デアルガ皆各端デ廻轉出來ル。A ヲ固定シ,B ヲ O 圓周上デ廻スト,P ニアル鉛筆ハ直線ヲ畫ク。コノ理由ヲ述ベヨ。

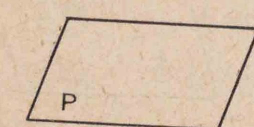
續編

立體幾何學

第十四章　平行・垂直

86. 點・直線・平面

平面上ニハ無數ノ點,直線ガアルヤウニ,空間ニハ亦無數ノ點,直線,平面ガアル。空間ノ點,直線ヲ表スニハ今マデト同ジ記號ヲ用ヒルガ,平面ヲ表スニハ

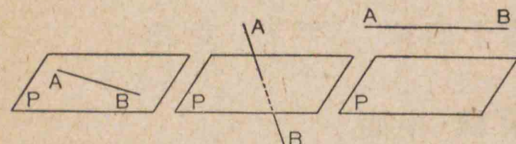


平行四邊形ヲ用ヒ,ソノ一隅ニ例ヘバPト書キ,**平面P**トイフ。然シ平面ハ通常イクラデモ廣ガツテヰルモノト考ヘル。

空間ノ一直線ト一平面トヲ考ヘルトキ,直線ハ眞直ナ線デアリ,平面ハ平ラナ面デアルカラ,モシ直線ガ平面ト二點デ出會フナラバソノ直線ハソノ平面ニ全ク**含マレル**。因テ或平面上ニナイ直線ヲ考ヘルト,ソノ直線ハソノ平面ト唯一點デ出會フカ又ハ出會ハナイカノ何レカデアル。

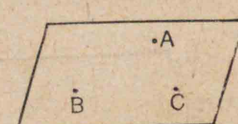
定義 直線ト平面トガ唯一點ヲ共有スルトキソレ等ハ相**交ル**トイヒ,ソノ共通點ヲ**交點**(又ハ**交リ**)トイフ。

モシ直線ト平面トガ一點ヲモ共有シナイトキ,ソレ等ハ互ニ**平行デアル**トイフ。



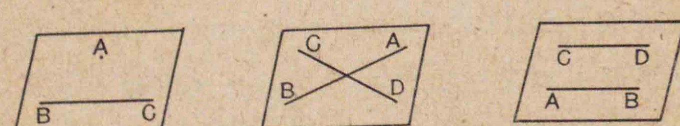
平面Pト直線ABトガ平行ナルトキ, AB∥P 又ハ P∥AB ト書ク。

公理 **一直線上ニナイ三點ヲ過ル平面ハ一ツハ必ズアル,ソシテ唯一ツニ限ル。**



コレヲ「一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ決定スル」トイフ。

定理 **76. (i)一直線トソノ上ニナイ一點, (ii)相交ル二直線, (iii)互ニ平行ナ二直線 ハ夫々一平面ヲ決定スル。**



證明 (i) 直線BC上ノ二點B, Cト直線外ノ一點Aトハ一平面ヲ決定スル。(公理) コノ平面ニ直線

BCガ全ク含マレル。因テBCトソノ上ニナイ一點トハ一平面ヲ決定スル。

(ii) 證明略スル。

(iii) 平行二直線ヲAB CDトスルト,平行線ノ定義ヨリソレ等ハ同一平面上ニアル。コノ平面ハABトCD上ノ一點Cトデ決定セラレル。

因テ平行二直線AB, CDハ一平面ヲ決定スル。

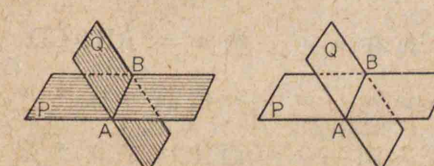
問1. 二ツノ平行線トソノ各々ニ交ル一直線トハ同一ノ平面上ニアル。

問2. 一點ヲ過リ定直線ニ平行線ヲ引ケ。

87. 平面ノ交線

公理 **二平面ガ出會フ處ハ一直線デアル。**

定義 一直線ヲ共有スル二平面ハ相**交ル**トイヒ,ソノ直線ヲ二平面ノ**交線**(又ハ**交リ**)トイフ。



相交ラナイ二平面ハ互ニ**平行デアル**トイフ。

二平面P, Qガ平行ナルトキ, P∥Q ト書ク。

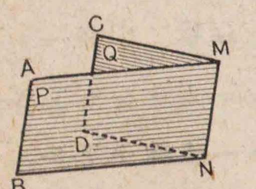
問1. 二平面ノ位置ノ關係ハドレダケアルカ。

問2. 平行ナ二平面ノ各々ノ上ニ一ツヅツアル二直線ハ互ニ平行デアルカ。

注意 立體幾何學デ二直線ガ平行デアルトイフコトヲ證明スルニハ,ソレ等ガ交ラナイトイフコトダケデハ不十分デアル。尙ソノ上ニソレ等ガ同一平面上ニアルトイフコトヲ證明セネバナラナイ。

定理 77. 平行二直線ノ一ツヅツヲ含ム二平面ノ交線ハ,モトノ平行線ニ平行デアル。

假設 AB ト CD トハ平行デ,平面 P ハ AB ヲ含ミ,平面 Q ハ CD ヲ含ム。MN ヲ P, Q ノ交線トスルト



終結 $MN \parallel AB$, $MN \parallel CD$ デアル。

證明 モシ MN ト AB ガ平行デナイトスルト,ソレ等ハ同一ノ平面 P 上ニアルカラ交ル。因テ AB ト Q トハソノ交點ヲ共有スル。然ルニ $AB \parallel CD$ ナル故 AB ハ Q ニ含マレル。コレハ假設ニ反スル。ソレ故 MN ト AB トハ同一ノ平面上ニアツテ交ラナイ。

卽チ　$MN \parallel AB$　同樣ニ　$MN \parallel CD$

系1. 二ツノ平行線ノ一ツニ平行ナ直線ハ他ニ

モ平行デアル。

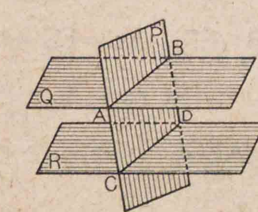
系2. 一直線ニ平行ナ二平面ノ交線ハ,モトノ直線ニ平行デアル。

問1. 空間ニアル二直線ノ位置ノ關係ハドレダケアルカ。

問2. 平行二直線ノ一方ダケヲ含ム平面ハ他方ニ平行デアル。

定理 78. 一平面ガ平行ナ二平面ト交ルトキ,二ツノ交線ハ互ニ平行デアル。

假設 平行二平面ヲ Q, R トシ,他ノ一平面ヲ P トスル。又 P, Q ノ交線ヲ AB トシ,P, R ノ交線ヲ CD トスルト



終結 $AB \parallel CD$ デアル。

證明 $Q \parallel R$ ナル故 AB, CD ハ交ラナイ。又コノ二直線ハ同一ノ平面 P 上ニアル。ソレ故 $AB \parallel CD$ デアル。

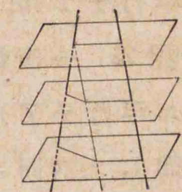
系1. 二ツノ平行平面ノ一ツニ交ル直線ハ他ニモ交ル。

系2. 平面外ノ一點ヲ過リソレニ平行ナ平面ハ唯一ツデアル。

問1. 二直線ガ平行ナ三平面デキリ取ラレル線

分ハ比例ヲナス。

問2. 平行ナ二平面ガ他ノ平行ナ二平面ト交ツテ出來ル四ツノ交線ハ互ニ平行デアル。

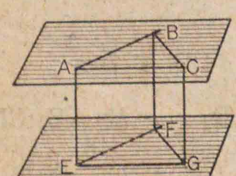


88. 二直線ノナス角

定理 79. 相交ル二直線ガ夫々他ノ相交ル二直線ニ平行ナルトキ,前者ノ夾ム角ハ後者ノ夾ム角ニ等シイ。

假設 圖ノヤウニ AB ト AC, EF ト EG トハ相交リ, AB∥EF, AC∥EG トスルト

終結 ∠BAC=∠FEG デアル。



證明 AB=EF, AC=EG ナルヤウニトル。然ルトキハ四邊形 AEFB, AEGC ハ共ニ平行四邊形デアル。

ソレ故 $BF \mathrel{\underline{\parallel}} AE$ 及ビ $CG \mathrel{\underline{\parallel}} AE$

∴ $BF \mathrel{\underline{\parallel}} CG$

ソレ故四邊形 BFGC ハ平行四邊形デアル。

∴ CB=GF ∴ △BAC≡△FEG

∴ ∠BAC=∠FEG

系 1. 任意ノ一點カラ一平面上ニナイ二直線ニ

夫々平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ皆相等シイ。

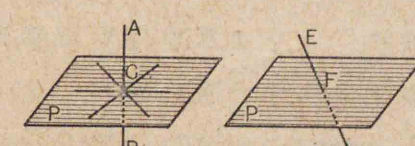
定義 任意ノ一點カラ一平面上ニナイ二直線ニ夫々平行ニ引イタ二直線ノナス角ヲ,一平面上ニナイ**二直線ノナス角**トイフ。モシコノ角ガ直角ナラバコレ等ノ二直線ハ互ニ**垂直デアル**トイフ。

系 2. 平行ナ二直線ノ一方ニ垂直ナ直線ハ他方ニモ亦垂直デアル。

89. 平面ト直線ノ垂直

定義 一平面ニ交ル一直線ガソノ交點ヲ過ツテソノ平面上ニ引イタ總テノ直線ニ垂直ナルトキ,ソノ直線ト平面トハ互ニ**垂直デアル(又ハ直交スル)**トイヒ,ソノ直線ヲソノ平面ノ**垂線**トイフ。

平面ニ垂直デナイ直線ヲソノ平面ノ**斜線**トイフ。



平面ノ垂線或ハ斜線ガコノ平面ト交ル點ヲソノ垂線或ハ斜線ノ足トイフ。圖ノ AB ハ平面 P ノ垂線デソノ足ハ C, EF ハ斜線デソノ足ハ F デアル。AB ガ平面 P ノ垂線デアルコトヲ

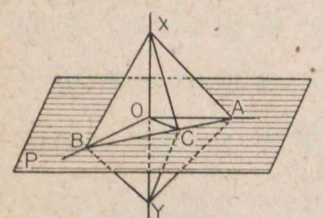
AB⊥P ト書ク。

定理 80. 相交ル二直線ノ交點ヲ過リソレ等ニ垂直ナ直線ハ,モトノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デアル。

假設　O デ交ル二直線 OA, OB ハ一平面 P ヲ決定スル。O ヲ過ル直線 XY ガ OA, OB ニ垂直ナルトキ

終結　XY⊥P デアル。

證明　平面 P 上デ任意ノ直線 OC ヲ引イタトキ, XY⊥OC ナルコトヲ證明スレバヨイ。



今 OA, OB, OC ト夫々 A, B, C デ交ル直線ヲ引キ,又 XY 上ニ P ノ兩側ニ OX=OY ナルヤウニ二點 X, Y ヲトリ,コレ等ヲ A, B, C ノ各々ニ結ブト

OA⊥XY (假設)　∴　XA=YA

又　OB⊥XY (假設)　∴　XB=YB

∴　△XAB≡△YAB　從ッテ　△XAC≡△YAC

∴　XC=YC

∴　△XOC≡△YOC

從ッテ　∠XOC=∠YOC

∴　XY⊥OC.

注意　上ノ定理ノ圖ノ二點 X, Y ハ平面 P ニ關シテ對稱デアル。

系 1. 相交ル二直線ニ垂直ナ直線ハ,ソノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デアル。

系 2. 一直線ガ一平面ニ垂直ナルトキ,ソノ直線ハコノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直デアル。

系 3. 一點ヲ過リ一直線ニ垂直ナ平面ハ唯一ツデアル。又一點ヲ過リ一平面ニ垂直ナ直線ハ唯一ツデアル。

問　二平面 P, Q ノ交線ヲ XY トシ,又 AB⊥P, AC⊥Q トスル。次ニ二直線 AB, AC ノ決定スル平面ヲ R トスルト, R⊥XY デアル。

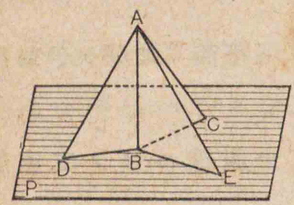
90. 點ト平面ノ距離

定理 81. 平面外ノ一點カラコノ平面ヘ垂線及ビ斜線ヲ引クトキ

(i) 垂線ハ最小デアル。

(ii) 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ斜線ハ相等シイ。

(iii) 垂線ノ足カラ大ナル距離ニ足ヲモツ斜線ハ,小ナル距離ニ足ヲモツ斜線ヨリ大デアル。



假設 點Aヲ平面P外ノ點トシ, ABヲ垂線, AC, AD, AEヲ斜線トシ,ソノ足ヲ夫夫B, C, D, Eトスル。

又 $BC=BD<BE$ トスルト

終結 (i) ABハ最小 (ii) $AC=AD$ (iii) $AC<AE$ デアル。

證明 略スル。(三ツノ直角三角形ABC, ABD, ABEヲ比ベヨ)

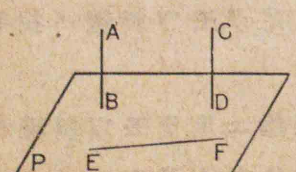
系 **コノ定理ノ逆ハ眞デアル。**

問 一點カラ一平面ニ下シタ垂線トノナス角ガ大ナル斜線ハ,小ナル角ヲナス斜線ヨリ大デアル。

定義 平面外ノ一點カラソレニ下シタ垂線ノ長サヲソノ**點ト平面ノ距離**トイフ。

91. 二平面ノ距離

定理 82. **平行ナ二直線ノ一方ニ垂直ナ平面ハ他方ニモ亦垂直デアル。**



假設 $AB \parallel CD$, $AB \perp P$ トスルト

終結 $CD \perp P$ デアル。

證明 $AB \perp P$ ナル故 AB

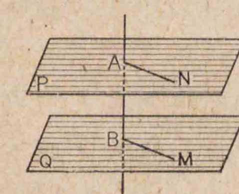
ハP上ノ直線 EFニ垂直デアル。(定理80系2)

然ルニ $AB \parallel CD$ ∴ $EF \perp CD$ (定理79系2)

∴ $CD \perp P$

系 **一平面ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアル。**

定理 83. **平行ナ二平面ノ一方ニ垂直ナ直線ハ他方ニモ亦垂直デアル。**



假設 $P \parallel Q$, $AB \perp P$ ナラバ

終結 $AB \perp Q$ デアル。

證明 $AB \perp P$ ナル故, ABハPト交ル,ソノ點ヲAトスル。

又ABハPト交ルカラQトモ交ル,ソノ點ヲBトスル。今Bヲ過ルQ上ノ任意ノ直線BMトABトノ決定スル平面ガPト交ル直線ヲANトスルト

$BM \parallel AN$ (定理78)

然ルニ $\angle NAB=R\angle$ ∴ $\angle MBA=R\angle$

∴ $AB \perp Q$

系1. **一直線ニ垂直ナ二平面ハ平行デアル。**

系2. **平行ナ二平面ノ双方ニ垂直ナ直線ノ二平面間ニ夾マレル部分ノ長サハ相等シイ。**

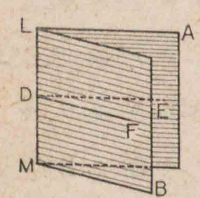
定義 平行ナ二平面ノ双方ニ垂直ナ直線ガソノ二平面ノ間ニ夾マレル線分ノ長サヲ

ソレ等**二平面ノ距離**トイフ。

問　平行ナ二平面ノ一方カラ他方マデ引イタ線分ノ中,二平面ノ距離ハ最小デアル。

92. 二面角

定義　相交ル二平面ハ**二面角ヲナス**トイヒ,ソノ交線ヲ二面角ノ**稜**,二平面ノ各々ヲ二面角ノ**面**トイフ。



二面角ノ稜ヲ軸トシテ一方ノ面ヲ動カスト遂ニ他方ノ面ト合スル。コノトキノ廻轉ノ大小ガ二面角ノ大小デアル。

定義　二面角ノ稜上ノ任意ノ點ヲ過リ,各面上デソノ稜ニ垂直ニ引イタ二直線ノナス二面角內ノ角ヲ**二面角ノ平面角**トイフ。

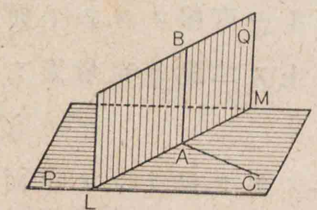
上圖ハ二面角デ,∠EDFハソノ平面角デアル。又定理79ヨリ二面角ノ平面角ノ大イサハソノ頂點ノ位置ニ關セズ一定デアル。然ルニ二面角ノ面ガ合スルトソノ平面角ノ邊モ合シ,一ツノ面ガ廻轉スルト平面角ノ一邊モ廻轉シ,廻轉ノ大小ハ全ク相等シイ。因テ

定義　二面角ノ平面角ノ大イサヲ**二面角ノ大イサ**トイフ。モシコノ平面角ガ直角ナラバ二面角ノ面ハ互ニ**垂直デアル**トイフ。

定理 84. **一平面ニ垂直ナ直線ヲ含ム平面ハモトノ平面ニ垂直デアル。**

假設　ABハPノ垂線デ,QハABヲ含ムトスルト

終結　P⊥Qデアル。



證明　P,Qノ交線ヲLMトシ,P上ニ於テAヲ過リ,LMニ垂直ニACヲ引クト　AB⊥LM, AC⊥LM

ソレ故∠BACハP,Qノナス二面角ノ平面角デアル。

然ルニ　AB⊥P　∴　∠BAC=R∠

∴　P⊥Q

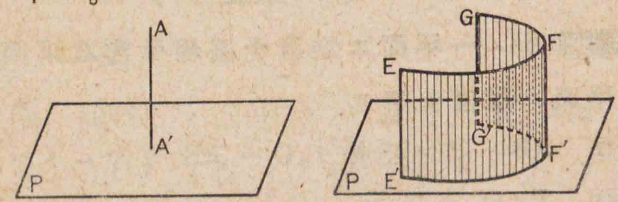
系　**一平面ニ垂直ナ二平面ノ交線ハモトノ平面ニ垂直デアル**

問　一點デ交ル二ツヅツ互ニ垂直ナ三直線ノ各々ハ,他ノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デアル。

93. 正射影

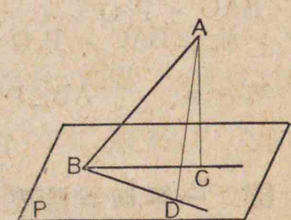
定義　一點カラ一平面ニ引イタ垂線ノ足ヲソノ平面上ニ投ズルソノ**點ノ正射影**トイ

フ。或線上ノ點ノ一平面上ニ投ズル正射影ノ軌跡ヲソノ平面上ニ投ズルソノ**線ノ正射影**トイフ。



問1.　一平面ニ垂直デナイ一直線ノソノ平面上ニ投ズル正射影ハ,ソノ直線上ノ二點ノ正射影ヲ過ル直線デアル。

問2.　一平面ノ斜線ガソノ足ヲ過リ,ソノ平面上ニ引イタ總テノ直線トナス角ノ中,ソノ正射影トナス鋭角ハ最小デアル。



定義　一平面ノ斜線ト,ソノ平面上ニ投ズル正射影トガナス鋭角ヲソノ**斜線ト平面ノナス角**トイフ。

練習　(14)

1.　一平面上ニナイ四ツノ點ガアルトキ,コレ等ノ點デ決定セラレル平面ノ數ハ幾ツアルカ。

2.　四ツノ頂點ガ一平面上ニナイ四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ブト,一ツノ平行四邊形ヲ得ル。

定義　四ツノ頂點ガ一平面上ニナイ四邊形ヲ**捩(ヨヂレ)四邊形**又ハ**歪(ヒズミ)四邊形**トイフ。

3.　一平面外ノ定點ヲ過リ,ソノ平面ニ平行ナ直線ノ軌跡ヲ求メヨ。

4.　與ヘラレタ點ヲ過リ,與ヘラレタ平面ニ平行デ且ツ與ヘラレタ直線ニ交ル直線ヲ引ケ。

5.　二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

6.　與ヘラレタ一直線ヲ含ミ,與ヘラレタ二點カラ等距離ニアル平面ヲ作レ。

7.　三角形ABCノ垂心カラソノ平面ニ引イタ垂線上ノ任意ノ點ヲMトスルト,MA⊥BC デアル。

8.　相交ル二平面ノ一方ノ上ニアル平行四邊形ガ他方ノ上ニ投ズル正射影ハ,亦平行四邊形デアル。

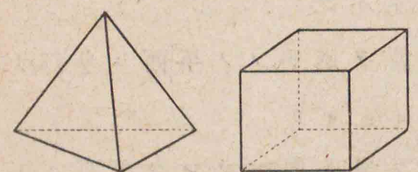
第十五章　多　面　體

94.　多面體

定義　幾ツカノ平面デ圍マレタ立體ヲ**多面體**トイフ。多面體ノ限界ハ皆多角形デア

ツテコレ等ヲ多面體ノ**面**,面ノ交線ヲ**稜**,稜ト稜トノ交點ヲ**頂點**トイフ。

多面體ハ面ノ數ニ從ツテ**四面體**,**五面體**,……トイフ。



圖ハ四面體ト六面體デアル。

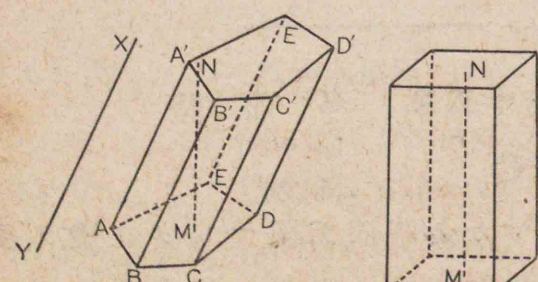
問　二面體,三面體等トイフ多面體ハ出來ルカ。

注意　多面體ノ何レノ面ヲ擴張シテモソノ多面體ヲキラナイトキ,コレヲ**凸多面體**トイフ。

通常多面體トイヘバ凸多面體ノコトデアル。

95. 角壔

定義　一直線ニ平行ナ三ツ以上ノ平面ト,ソノ直線ニ交ル二ツノ平行ナ平面トデ圍マレタ多面體ヲ**角壔**トイフ。



一直線ニ平行ナ各々ノ平面ヲ角壔ノ**側面**,側面ノ交線ヲ**側稜**,側面ノ面

積ノ和ヲ**側面積**トイフ。又平行ナ二平面ヲ**底面**,ソノ面積ヲ**底面積**,兩底面ノ距離ヲ角壔ノ**高サ**トイフ。

角壔ハ底面ノ邊數ニ從ツテ**三角壔**,**四角壔**,………トイフ。

問1.　n 邊多角形ヲ底面トスル角壔ハ $(n-2)$ 個ノ三角壔ニ分ツコトガ出來ル。

問2.　角壔ノ側面ハ皆平行四邊形デアル。

定義　側面ガ底面ニ垂直ナ角壔ヲ**直角壔**トイヒ,垂直デナイ角壔ヲ**斜角壔**トイフ。又底面ガ正多角形ナル直角壔ヲ**正角壔**トイフ。

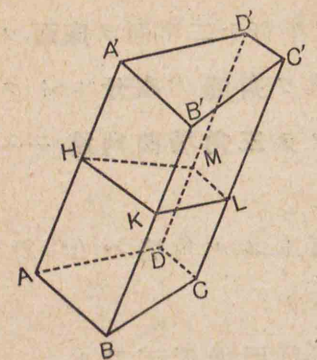
角壔ヲソノ側稜(或ハソノ延長)ニ垂直ナ平面デキツタ切口ヲ**直截面**トイフ。

定理 85.　斜角壔ノ側面積ハ直截面ノ周ト一側稜トノ積ニ等シイ。

證明　例ヘバ四角壔* ABCD-A'B'C'D' ノ直截面ヲ HKLM トスルト

$$\square AA'B'B = HK\cdot AA'$$
$$\square BB'C'C = KL\cdot BB'$$
$$\square CC'D'D = LM\cdot CC'$$
$$\square DD'A'A = MH\cdot DD'$$

* 角壔ノ記號ニハ上ノヤウニ兩底面ノ記號ヲ並ベテ記ス。



又 AA'=BB'=CC'=DD'

故ニ側面積ハ

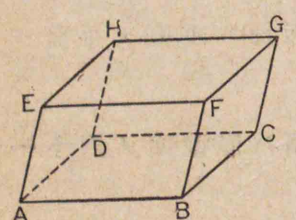
(HK+KL+LM+MH)·AA'

ニ等シイ。

系 直角壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

問1. 或斜角壔ノ直截面ハ一邊 3 cm ノ正六角形デ,側稜ハ 6 cm デアルトイフ。側面積ヲ求メヨ。

問2. 底面ノ一邊ガ 2 cm, 高サガ 12 cm アル正三角壔ノ全表面積ヲ求メヨ。



定義 底面ガ平行四邊形デアル角壔ヲ**平行六面體**トイフ。

問1. 平行六面體ノ六ツノ面ハ二ツヅツ互ニ平行デアル。又平行ナ二ツノ面ハ合同デアル。

問2. 平行六面體ニハ幾ツノ稜ガアルカ。

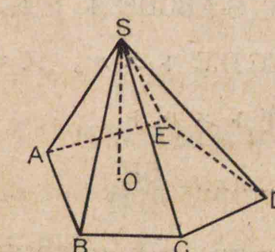
定義 各々ノ面ガ矩形デアル平行六面體ヲ**直六面體**又ハ**直方體**トイヒ,各々ノ面ガ正方形デアル直六面體ヲ**立方體**トイフ。

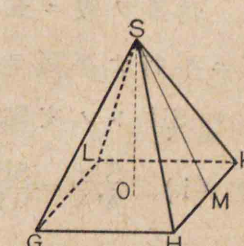
問 一稜ガ a ナル立方體ノ全表面積ヲ求メヨ。

96. 角錐·角錐臺

定義 一ツノ多角形ノ各邊ヲ底邊トシ,ソノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形ト,モトノ多角形トデ圍マレタ多面體ヲ**角錐**トイフ。

コノトキモトノ多角形ヲ角錐ノ**底面**,ソノ面積ヲ**底面積**トイヒ,後ノ各三角形ヲ**側面**,ソノ面積ノ總和ヲ**側面積**トイフ。又相隣ル側面ノ交線ヲ**側稜**,總テノ側稜ノ交點ヲ**頂點**トイヒ,頂點ト底面トノ距離ヲ**高サ**トイフ。





角錐ハ底面ノ邊數ニ從ッテ**三角錐**,**四角錐**,………トイフ。

注意 三角錐ハ四面體テアッテ,ドノ面ヲ底面ト考ヘテモヨイ。

定義 角錐ノ底面ガ正多角形デ,ソノ頂點

カラ底面ニ下シタ垂線ノ足ガ底面ノ中心デアル角錐ヲ,**正角錐**トイフ。

正角錐ノ頂點カラ底面ノ一邊ニ下シタ垂線(前頁ノ圖ノSM)ヲ**斜高**トイフ。

問1. n邊多角形ヲ底面トスル角錐ハ$(n-2)$個ノ三角錐ニ分ツコトガ出來ル。

問2. 正角錐ノ側面ハ皆合同ナ二等邊三角形デアル。

定理 86. 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デキルトキ

(i) 側稜及ビ高サハ同ジ比ニ分タレル。

(ii) 截面(切口)ハ底面ニ相似ナ多角形デアル。

假設 角錐ヲ假ニ五角錐* S-ABCDE トシ底面 ABCDE ニ平行ナ平面ヲ A'B'C'D'E' トスル。又コノ截面ト高サ SH トノ交點ヲ H' トスルト

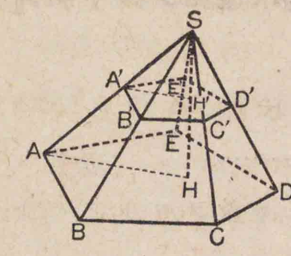
終結 (i) $\dfrac{SA'}{A'A}=\dfrac{SB'}{B'B}=\cdots\cdots\cdots=\dfrac{SH'}{H'H}$

(ii) 多角形 A'B'C'D'E' ∽ 多角形 ABCDE デアル。

證明 (i) A'B' // AB デアルカラ

$$\frac{SA'}{A'A}=\frac{SB'}{B'B}$$

* 角錐ノ記號ニハ上ノヤウニ頂點ト底面ノ記號トヲ並ベテ記ス。



同様ニ

$$\frac{SB'}{B'B}=\frac{SC'}{C'C}=\cdots\cdots$$

又 A'H' // AH デアルカラ

$$\frac{SA'}{A'A}=\frac{SH'}{H'H}$$

(ii) 底面及ビ截面ハソノ各邊ガ平行デ且ツ同ジ向キデアルカラ

$$\angle A'B'C'=\angle ABC,\ \angle B'C'D'=\angle BCD,\ \cdots\cdots \qquad (1)$$

又 $\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{A'B'}{AB},\qquad \dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{B'C'}{BC}$

$$\therefore\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

同様ニ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}=\cdots\cdots\cdots \qquad (2)$

(1),(2) ヨリ 多角形 A'B'C'D'E' ∽ 多角形 ABCDE

系1. 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デキルトキ,底面ト截面トノ面積ノ比ハ,頂點カラ各面ニ至ル距離ノ比ノ二乘比ニ等シイ。

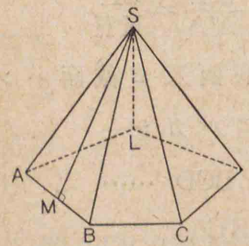
系2. 底面積ト高サガ夫々相等シイ二ツノ角錐ノ各底面ニ平行デ,且ツ各頂點カラ等距離ニアル截面ハ等積デアル。

問 角錐ノ高サノ中點ヲ過ツテ底面ニ平行ナ截面ノ面積ト底面積トノ比ヲ求メヨ。

定理 87. 正角錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ。

證明 正角錐 S-ABC……L ニ於テ

△SAB≡△SBC≡……



今底面ノ邊數ヲ n トスルト,ソノ側面積ハ

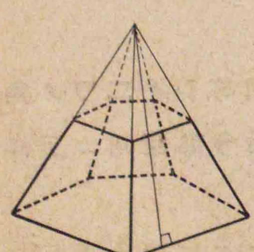
$$\triangle SAB \times n = \frac{1}{2} AB \cdot SM \times n$$

$$= \frac{1}{2}(\text{底面ノ周}) \times \text{斜高}$$

定義 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デキルトキ,截面ト底面ノ間ノ立體ヲ**角錐臺**トイフ。

角錐臺ノ平行ナ二面ヲ**底面**,ソノ一方ヲ**上底**,他方ヲ**下底**,兩底間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。又底面以外ノ各面ヲ**側面**,側面ノ交線ヲ**側稜**トイフ。

定義 正角錐カラ出來ル角錐臺ヲ**正角錐臺**トイフ。



コノトキモトノ正角錐ノ斜高ガ兩底面デ截取ラレル部分ヲソノ**斜高**トイフ。角錐臺ノ側面ハ皆梯形デ,正角錐臺ノ側面ハ皆合同ナ等脚梯形デアル。

問 正角錐臺ノ側面積ハ兩底ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ。

97. 體積・體積ノ單位

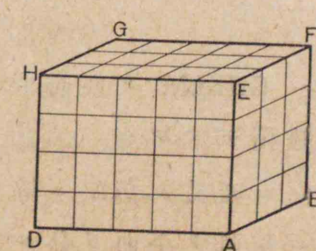
定義 立體ノ面デ圍マレタ空間ノ部分ヲソノ立體ノ**體積**トイフ。

底面ガ合同デ,且ツ高サガ相等シイ二ツノ直角壔ハ相對應スル面ガ重ナルヤウニ置クコトガ出來ル。斯樣ナ二ツノ立體ハ**合同デアル**トイフ。

合同ナ立體ノ體積ハ相等シイ,卽チ**等積デアル**。

稜ノ長サガ單位ノ長サニ等シイ立方體ノ體積ヲ**體積ノ單位**トシ,長サノ單位ニ**立方**ナル語ヲ前置スル。例ヘバ一稜ガ1mデアル立方體ノ體積ハ1立方米デアル。

定理 88. 直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ,一ツノ頂點デ出會フ三ツノ稜ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。



證明 例ヘバ稜 AB ガ單位ノ 3 倍,稜 AE ガ 4 倍,稜 AD ガ 5 倍トスルト,コノ直六面體ハ 3×4×5 個ノ立方體ニ分タレル。ソシ

テ各立方體ノ體積ハ單位ノ體積デアルカラ,直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ 3×4×5 デアル。

ソコデ直六面體ノ體積及ビ一頂點Aデ出會フ三ツノ稜ノ長サヲ表ハス數ヲ夫々 V, a, b, c トスルト $V=abc$ デアル。即チ

直六面體ノ體積ハ一頂點デ出會フ三ツノ稜ノ積ニ等シイ。

系 **直六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。**

問1. 立方體ノ體積ハ一稜ノ立方ニ等シイ。

問2. 二稜ガ夫々相等シイ二ツノ直六面體ノ體積ノ比ハ,第三稜ノ比ニ等シイ。

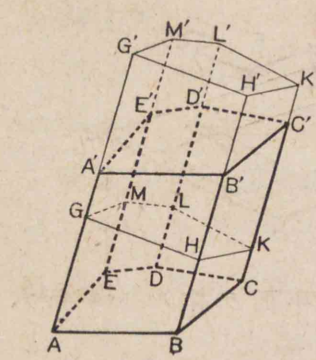
98. 角壔ノ體積

定理 89. 斜角壔ハソノ直截面ヲ底面トシ,側稜ヲ高サトスル直角壔ト等積デアル。

假設 斜角壔ヲ ABCDE-A'B'C'D'E' トシ,ソノ直截面ヲ GHKLM トスルト

終結 ABCDE-A'B'C'D'E' ハ GHKLM ヲ底面トシ, AA' ヲ高サトスル直角壔ト等積デアル。

證明 各側稜ヲ AA' ノ方向ニ延長シ,AA' ニ等シク GG' ヲトリ,G' ヲ過リ AG' ニ垂直ナ平面ヲ作ルト,

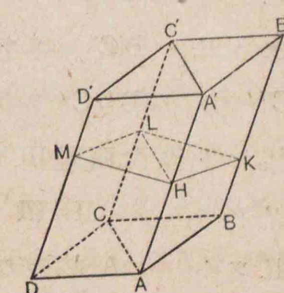


直角壔 GHKLM-G'H'K'L'M' ヲ得ル。

扨テ多面體ABCDE-GHKLM ト多面體A'B'C'D'E'-G'H'K'L'M' トハ合同デアル。ソノ双方ヘ多面體 GHKLM-A'B'C'D'E' ヲ加ヘルト

斜角壔 ABCDE-A'B'C'D'E'＝直角壔 GHKLM-G'H'K'L'M'

系 **平行六面體ヲ同一ノ面上ニナイ平行ナ二稜ヲ含ム平面デキルト,等積ナ二ツノ三角壔ニ分タレル。**

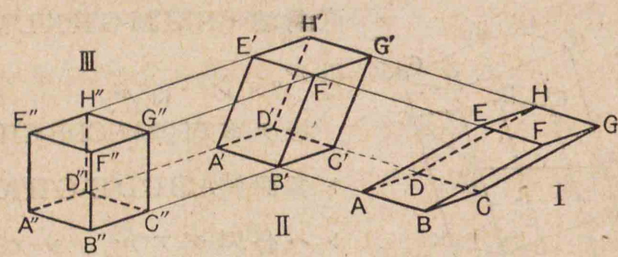


定理 90. 平行六面體ノ體積ハ,ソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

假設 平行六面體 ABCD-EFGH ノ底面ヲ ▱ABCD トスルト

終結 ソノ體積ハ ▱ABCD×(高サ) デアル。

證明 底面 ABCD, EFGH ガアル平面ヲ夫々 P, Q トスル。與ヘラレタ平行六面體 I ノ AB ニ平行ナ稜ヲ延長シ,ソノ上ニ AB ニ等シク A'B' ヲトリ A',



B′ヲ過ツテ稜 A′B′ ニ垂直ナ二平面ヲ作ルト平行六面體 II ヲ得ル。

ソシテ　　$\mathrm{I}=\mathrm{II}$　　(定理89)

且ツ　▱ABCD＝□A′B′C′D′,　▱ABFE＝▱A′B′F′E′

次ニ II ノ B′C′ ニ平行ナ稜ヲ延長シ,B′C′ ニ等シク B″C″ ヲトリ B″, C″ ヲ過ツテ稜 B′C′ ニ垂直ナ二平面ヲ作ルト直六面體 III ヲ得ル。

ソシテ　　$\mathrm{II}=\mathrm{III}$　　∴　$\mathrm{I}=\mathrm{III}$

且ツ　　▱ABCD＝□A′B′C′D′＝□A″B″C″D″

又 I, II, III ノ高サハ平行二平面 P, Q ノ距離デアルカラ相等シイ。

然ルニ　　III＝□A″B″C″D″×(高サ)　　(定理88系)

∴　　I＝▱ABCD×(高サ)

系 1.　三角壔ノ體積ハ,ソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

系 2.　直角壔ノ體積ハ,ソノ底面積ト高サトノ積

ニ等シイ。

系 3.　斜角壔ノ體積ハ,ソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

注意　角壔ノ體積,底面積,高サヲ表ハス數ヲ夫々 V, S, h トスルト　　$V=Sh$

問 1.　或斜角壔ノ底面ハ三邊ガ 2cm, 3cm, 4cm ノ三角形デ,高サハ 5cm デアルトイフ。體積ヲ求メヨ。

問 2.　底面ガ等積ナ二ツノ角壔ノ體積ノ比ハ,高サノ比ニ等シイ。

99. 角錐ノ體積

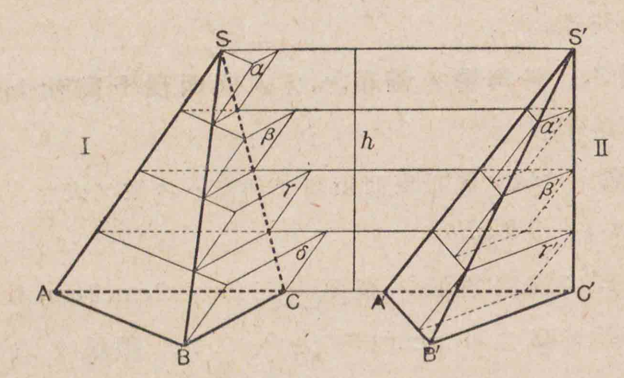
定理 91.　底面及ビ高サガ夫々相等シイ二ツノ三角錐ハ等積デアル。

假設　二ツノ三角錐 S-ABC, S′-A′B′C′ ニ於テ底面 ABC, A′B′C′ ガ等積デ,高サヲ共ニ h トスルト

終結　三角錐 S-ABC ＝三角錐 S′-A′B′C′ デアル。

證明　今三角錐 S-ABC ヲ I, S′-A′B′C′ ヲ II トスル。二ツノ三角錐ヲ同一平面上ニ立テ,高サ h ヲ n 等分(例ヘバ四等分)シ,各分點ヲ過ツテ底面ニ平行ナ平面ヲ作ルト,對應スル截面ハ等積デアル。(定理86系2)

次ニ底面及ビ各截面ヲ底面トシ, I ニ於テハ上方ニ II ニ於テハ下方ニ圖ノヤウナ角壔ヲ作ルト



$\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ (定理90系3)

ソシテ $\mathrm{I}<\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\mathrm{II}>\alpha'+\beta'+\gamma'$

∴ $\mathrm{I}-\mathrm{II}<\delta$

然ルニδノ高サハ$\frac{h}{n}$デアルカラ,nヲ限リナク増ストδハ0ニナル。

∴ $\mathrm{I}\leqq\mathrm{II}$

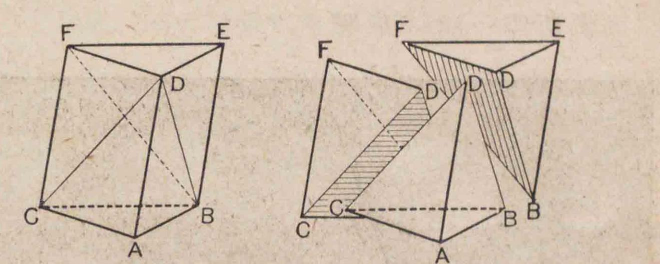
モシI, IIヲトリカヘテ論ズルト

$\mathrm{II}\leqq\mathrm{I}$

∴ $\mathrm{II}=\mathrm{I}$ 卽チ等積デアル。

定理 92. 三角壔ハコレヲ等積ナ三ツノ三角錐ニ分ツコトガ出來ル。

證明 三角壔 ABC-DEF ヲ B, C, D ノ決定スル平面ト, B, D, F ノ決定スル平面トデキルト,三ツノ三角錐 D-ABC, D-BFC, D-BEF ニ分タレル。



扨テ △ABC≡△DEF, 高サハ共通 ∴ D-ABC=B-DEF (定理91)

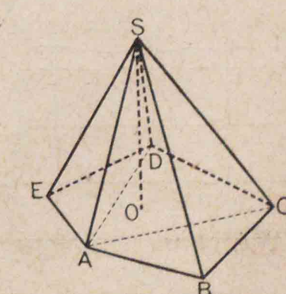
卽チ D-ABC=D-BEF

又 △FBC≡△BFE, 高サハ共通 ∴ D-BFC=D-BEF

ソレ故三ツノ三角錐ハ互ニ等積デアル。

系 1. 三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。

系 2. 角錐ノ體積(V)ハソノ底面積(S)ト高サ(h)トノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。

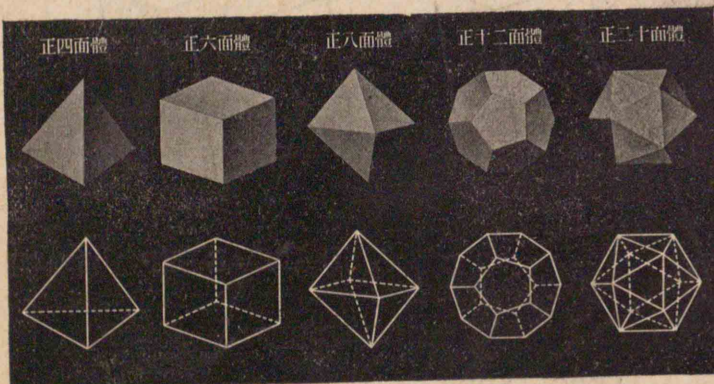


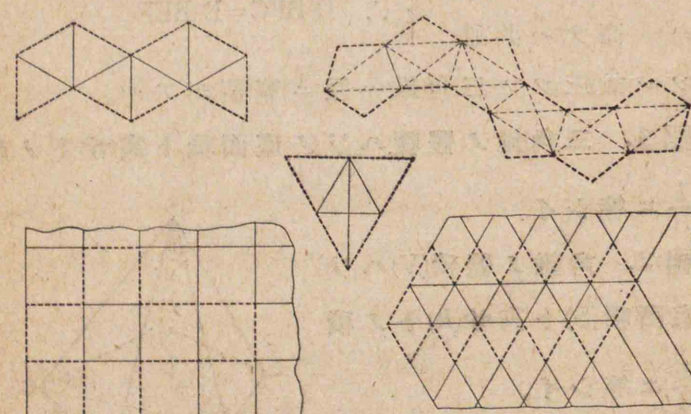
注意 $V=\frac{1}{3}Sh$

100. 正多面體

定義 面ガ皆合同ナ正多角形デ,各頂點ノ面ノ數ガ相等シイ多面體ヲ**正多面體**トイフ

正多面體ハ次ノ五種デアル。





(i) 正四面體 (正三角形ノ角ガ一頂點ニ3ツ集マル)

(ii) 正六面體 (正四角形ノ角ガ一頂點ニ3ツ集マル)

(iii) 正八面體 (正三角形ノ角ガ一頂點ニ4ツ集マル)

(iv) 正十二面體 (正五角形ノ角ガ一頂點ニ3ツ集マル)

(v) 正二十面體 (正三角形ノ角ガ一頂點ニ5ツ集マル)

コレ等ノ模型ヲ作ルニハ前圖ノ點線ニ沿ウテ厚紙ヲキリ,實線ニ沿ウテ折リ,ソレヲ糊デ貼レバヨイ。

練習 (15)

1. 角錐ノ側面積ハ底面積ヨリ大デアル。

2. 四面體ノ各頂點トソノ對面ノ重心トヲ結ブ四ツノ線分ハ同一ノ點デ交リ,ソノ交點ハソレ等ノ各線分ヲ3:1ニ内分スル。

注意 コノ交點ヲ四面體ノ**重心**トイフ。

3. 一稜ガ a ナル正四面體ノ高サヲ求メヨ。

4. 體積 a 立方米ノ立方體ノ對角線ハ幾米カ。

5. 平行六面體ノ底面ハ矩形デアッテ,ソノ二邊ハ7cm, 10cmデアル。又底面ニ交ル稜ハ12cmデ,底面ト60°ノ角ヲナストイフ。ソノ體積ヲ求メヨ

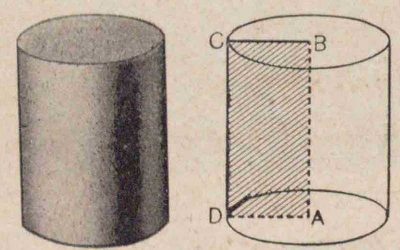
6. 正三角錐ノ底面ノ一邊ノ長サガ8cmデ,側稜ガ底面トナス角ハ45°デアル。體積ヲ求メヨ。

7. 底面積ガ a 平方糎高サガ h cmアル角錐ヲ底面ニ平行デ頂點カラ h'cmノ距離ニアル平面デキルトキ,二ツノ部分ノ體積ハ各〻何程カ。

第十六章 曲面體

101. 直圓壔

定義 矩形ガソノ一邊ヲ軸トシテ一周リ廻轉シテ出來ル立體ヲ**直圓壔**トイフ。



コノトキ廻轉ノ軸トシタ邊(AB)ヲ直圓壔ノ**軸**,軸ニ垂直ナ二邊(AD, BC)デ出來ル等圓ヲ**底面**,軸ニ平行ナ邊(CD)デ出來ル曲面ヲ**側面**トイフ。又側面ヲ畫ク直線(CD)ヲ總テノ位置デ直圓壔ノ**母線**,底面ノ半徑(AD)ヲソノ**半徑**,兩底間ノ距離(AB)ヲ直圓壔ノ**高サ**トイフ。

問 1. 直圓壔ノ底面ニ平行ナ截面ハ底面ニ等シイ圓デアル。

問 2. 直圓壔ノ側面上ノ點ハ皆軸カラ等距離ニアル。

問 3. 直圓壔ノ軸ヲ含ム平面デソレヲキッタ截面ハドンナ多角形カ。

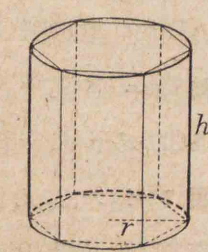
定義 直圓壔ノ兩底面ニ內接(又ハ外切)スル底面

ヲモツ直角壔ハ直圓壔ニ**內接(外切)スル**トイフ。

定理 93. 直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シク,ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

假設 直圓壔ノ半徑,高サ,側面積及ビ體積ヲ表ハス數ヲ夫々 r, h, S, V トスルト

終結 $S=2\pi rh$, $V=\pi r^2 h$ デアル。



證明 直圓壔ニ內接スル側面ガ n 個ノ正角壔ヲ作ル。今コノ正角壔ノ側面積ヲ S′,底面ノ周ヲ p トスルト

$$S'=ph \qquad (1)$$

次ニコノ正角壔ノ邊數ヲ順次ニ 2 倍, 4 倍, …… ト增スニ從ツテ, S′, p ハ夫々 S $2\pi r$ (圓ノ周) ニ近ヅキ, n ヲ限リナク增シタ極限ニ於テ夫々 S, $2\pi r$ トナル。

因テ (1) ヨリ $S=2\pi rh$

同樣ニシテ $V=\pi r^2 h$

系 直圓壔ノ全表面積ハ $2\pi r(h+r)$ デアル。

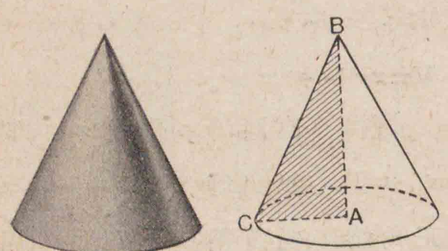
問 1. 半徑ガ 5 cm, 高サガ 13 cm アル直圓壔ノ全表面積ヲ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トスル。

問 2. 側面積ガ 94.248 平方糎,高サガ 5 cm ナル直

圓壔ノ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。

102. 直圓錐

定義 直角三角形ノ一鋭角ノ對邊ヲ軸トシテ,一周リ廻轉シテ出來ル立體ヲ**直圓錐**トイフ。



コノトキ廻轉ノ軸トシタ邊(AB)ヲ直圓錐ノ**軸**,軸ニ垂直ナ邊(AC)デ出來ル圓ヲ**底面**,斜邊(BC)デ出來ル曲面ヲ**側面**トイフ。又側面ヲ畫ク直線(BC)ヲ總テノ位置デ直圓錐ノ**母線**,底面ノ半徑(AC)ヲソノ**半徑**,軸ノ長サ(AB)ヲ直圓錐ノ**高サ**,軸ト母線トノ交點(B)ヲ**頂點**トイフ。

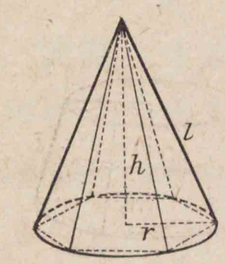
問 1. 直圓錐ノ底面ニ平行ナ截面ハ圓デアル。

問 2. 直圓錐ノ軸ヲ含ム截面ハ二等邊三角形デアル。

定義 直圓錐ト頂點ヲ共有シ底面ニ内接(又ハ外切)スル底面ヲモツ直角錐ハ直圓錐ニ**内接(外切)スル**トイフ。

定理 94. 直圓錐ノ側面積ハ,ソノ底面ノ周ト母

線トノ積ノ半分デアル。又ソノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{2}$ デアル。



假設 直圓錐ノ底面ノ半徑,母線,高サ,側面積及ビ體積ヲ表ス數ヲ夫夫 r, l, h, S, V トスルト

終結 $S=\pi rl$, $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ デアル。

證明 略スル。

系1. 直圓錐ノ全表面積ハ $\pi r(l+r)$ デアル。

系2. 直圓錐ヲ底面ニ平行ナ平面デキルトキ

(i) **底面ト截面ノ半徑ノ比ハ高サノ比ニ等シイ。**

(ii) **底面ト截面ノ面積ノ比ハ高サノ比ノ二乘比ニ等シイ。**

問 1. 半徑ガ 3 cm,高サガ 4 cm アル直圓錐ノ側面積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.14$ トスル。

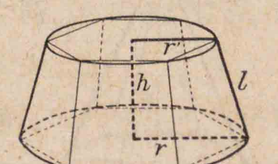
問 2. 漏斗ノ直圓錐狀ノ部分ノ直徑ガ 10 cm デ,深サガ 12 cm アルトキ,コノ部分ニハ水幾立ヲ入レ得ルカ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。

103. 直圓錐臺

定義 直圓錐ノ底面トコレニ平行ナ截面トノ間ニアル部分ヲ**直圓錐臺**トイフ。

直圓錐ノ底面及ビ截面ヲ共ニ直圓錐臺ノ**底面**ト

イヒ,ソノ一方ヲ**上底**,他方ヲ**下底**トイフ。又兩底ノ間ニアルモトノ直圓錐ノ母線及ビ高サノ部分ヲ夫夫ソノ**母線**及ビ**高サ**トイフ。



問 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ夫々 r, r', 母線ヲ l, 高サヲ h トスルト側面積ハ $\pi(r+r')l$, 體積ハ $\frac{\pi}{3}(r^2+rr'+r'^2)h$ デアル。

練習 (16)

1. 直圓壔ノ高サガ 7cm デ,ソノ全表面積ガ半徑 14cm ノ圓ノ面積ニ等シイトキ,ソノ體積ヲ求メヨ。

2. 等積ナ二ツノ矩形ガアル。今ソレ等ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉シテ出來タ二ツノ直圓壔ノ側面積ノ比及ビ體積ノ比ヲ求メヨ。

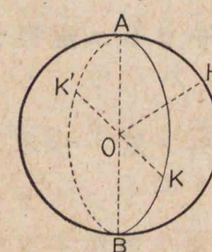
3. 直角三角形ノ三邊ノ比ガ 3:4:5 デアル。コノ各邊ヲ軸トシテ廻轉シテ出來ル三ツノ曲面體ノ體積ノ連比ヲ求メヨ。

4. 直圓錐ヲソノ軸ノ中點ヲ過リ底ニ平行ナ平面デキルトキ,新タニ出來タ直圓錐ト初メノ直圓錐トノ體積ノ比ヲ求メヨ。

第十七章 球

104. 球

定義 半圓ヲソノ直徑ヲ軸トシテ一周リ廻轉シテ出來ル立體ヲ**球**トイヒ,ソノ曲面ヲ**球面**(又ハ單ニ**球**)トイフ。



コノトキ軸トシタ半圓ノ中心(O)ヲ球ノ**中心**,中心ト球面上ノ點トノ距離(OK OH,等)ヲソノ**半徑**,中心ヲ過リ兩端ガ球面上ニアル線分(AB, KK' 等)ヲソノ**直徑**トイフ。

球ヲ表ハスニハ中心ノ文字ヲ用ヒ,例ヘバ**球 O** ト書ク。

球ノ半徑ハ皆相等シク,球面ハ中心ニ關シテ對稱ナルコトハ明カラデアル。

一點ガ球ノ內,外又ハ球面上ニアルニ從ツテ,ソノ點ト球ノ中心トノ距離ハ半徑ヨリ小,大又ハ相等シイ。

又コレ等ノ逆モ眞デアル。

問 1. 一定點カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

問 2. 二定點ヲ直角ニ見ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

105. 切點・交リ

定義 球面ト唯一點ヲ共有スル平面又ハ直線ハソノ球ニ**切スル**トイヒ,ソノ共有點ヲ**切點**トイフ。コノトキソノ平面ヲ**切平面**,ソノ直線ヲ**切線**トイフ。

定理 95. 球ノ半徑ノ一端ニ於テ,ソレニ垂直ナ平面又ハ直線ハソノ球ニ切スル。

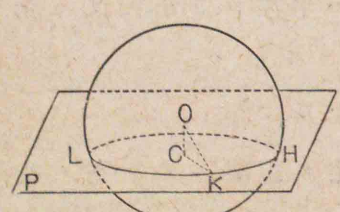
證明 平面又ハ直線上ノ切點以外ノ點ハ皆球ノ外ニアル。

問 球面上ノ一定點ニ於ケル切線ノ軌跡ハソノ點ニ於ケル切平面デアル。

定理 96. 球ヲ平面デキツタ截面ハ圓デアル。

假設 球Oヲキル平面ヲPトシ,ソノ截面ト球面トノ出會フ線ヲHKLトスルト

終結. HKLハ圓周デアル。



證明 OカラPニ下シタ垂線ノ足ヲCトスルト,Cハ定點デアル。次ニHKL上ニ任意ノ一點Kヲトルト,OKハ球

ノ半徑デアルカラ定長デアル。

従ツテ CK モ亦定長デアル。(ぴたごらすノ定理)

次ニ C 及ビ曲線 HKL ハ平面P上ニアル。

故ニ截面ハCヲ中心トスル圓デアル。

系 1. 球ノ中心トソレヲ過ラナイ截面ノ中心トヲ結ブ直線ハソノ截面ニ垂直デアル。

系 2. 球ヲ二平面デキルトキ

(i) **中心カラ等距離ニアル截面ハ相等シイ。**

(ii) **中心カラ遠イ截面ハ近イ截面ヨリ小デアル。**

系 3. 球面ト直線トハ二ツヨリ多クノ點デ出會ハナイ。

問 1. 半徑 5cm ノ球ノ中心カラ 3cm ノ距離ニアル平面デキツタ球ノ截面ノ半徑ヲ求メヨ。

問 2. 球ノ截面ノ中,最モ大ナルモノヲ求メヨ。

問 3. 球面上ノ三點ヲ過ル圓ヲ畫ケ。

定義 平面ト球トガ一ツノ圓ヲ共有スルトキ,ソノ平面ト球トハ**相交ル**トイフ。

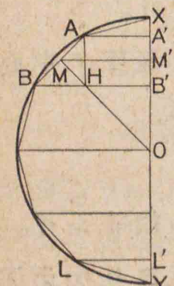
定義 球ノ中心ヲ過ル截面ヲソノ球ノ**大圓**トイヒ,ソノ他ノ截面ヲソノ**小圓**トイフ。

問 大圓ハ球及ビ球面ヲ二等分スル。

106. 球ノ表面積

定理 97. **半徑 r ノ球ノ表面積ハ $4\pi r^2$ デアル。**

證明 半徑 r ノ半圓ノ周ヲ n 等分(例ヘバ六等分)シ,各分點ヲ順次ニ結ブト n 個ノ弦ヲ得ルガ,コレ等ハ直徑 XY ノ周リニ廻轉スルト直圓錐臺又ハ直圓錐(或ハ直圓壔)ノ側面ヲ畫ク。今弦 AB(ソノ中點 M)ヲトリ, A, B, M カラ XY ヘ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 A′, B′, M′ トシ, MO ヲ結ビ, A カラ BB′ ヘ垂線 AH ヲ下スト,側面積ハ $\pi(AA'+BB')\cdot AB$ デアル。(§103 問)



然ルニ $AA'+BB'=2MM'$

又 $\triangle ABH \backsim \triangle MOM'$

$\therefore$ $AB:AH=MO:MM'$

$\therefore$ $AB:A'B'=MO:MM'$

$\therefore$ $MM'\cdot AB=MO\cdot A'B'$

ソレ故側面積ハ $2\pi MO\cdot A'B'$ デアル。

次ニ n 個ノ弦ハ皆 O カラ等距離ニアル故,ソノ距離 MO ヲ h デ表ハシ, n 個ノ弦ノ畫ク側面積ヲ S′ トスルト

$$S'=2\pi h(XA'+A'B'+\cdots\cdots+L'Y)=4\pi rh$$

扨テ n ヲ順次ニ增スト各弦ハ順次ニ短クナリ,同時ニ h ハ r ニ近ヅキ, S′ ハ球ノ表面積 S ニ近ヅクカラ極限ニ於テハ

$$S=4\pi r\cdot r=4\pi r^2$$

系 **球ノ表面積ハ大圓ノ面積ノ 4 倍デアル。**

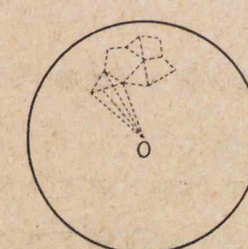
問 1. 球面ト等シイ面積ノ圓ノ半徑ヲ求メヨ。

問 2. 地球ヲ球ト見做スト,子午線(大圓ノ周)ノ長サハ約4000萬米デアル。表面積ヲ求メヨ。

107. 球ノ體積

定理 98. **半徑 r ノ球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル。**

證明 球面上ニ總テノ頂點ヲモツ多面體ヲ考ヘ,ソノ各頂點ヲ球ノ中心 O ニ結ブト,多クノ角錐ヲ得ル,ソノ體積ノ總和ヲ V′ トスル。又角錐ノ底面ヲ S, S′, S″,…… トシ,コレ等ノ O カラノ距離ヲ夫々 $h, h', h'', \cdots\cdots$ トスルト



$$V'=\frac{1}{3}(Sh+S'h'+S''h''+\cdots\cdots) \quad \text{(定理 92 系 2)}$$

扨テ順次ニ多面體ノ面ノ數ヲ增シ,從ツテ各面ヲ小ニスルト $h, h', h'', \cdots\cdots$ ハ皆 r ニ近ヅキ, S, S′, S″, …

……ノ和ハ球面ニ近ヅキ,V′ハ球ノ體積 r ニ近ヅクカラ,極限ニ於テハ

$$V=\frac{1}{3}r(4\pi r^2)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

問 半徑3cmノ球ノ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トスル。

練習 (17)

1. 球ノ小圓ノ切線ハソノ球ノ切線デアル。

2. 球外ノ定點カラ引イタ切線ハ皆相等シク,ソノ切點ハ一ツノ小圓ノ周ノ上ニアル。

3. 球帶ノ側面積ハモトノ球ノ大圓ノ周ト,球帶ノ高サトノ積ニ等シイ。

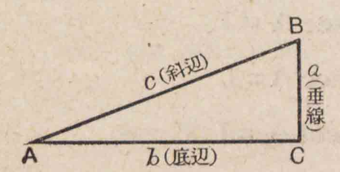
注意 平行二平面間ニ夾マレタ球面ノ部分ヲ**球帶**トイヒ,二平面間ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ。

4. 二ツノ球ノ半徑ヲ夫々 a cm, b cm トスルトキ,ソノ二ツノ球ノ表面積ノ和ニ等シイ表面積ヲモツ球ノ半徑ヲ求メヨ。

平面三角法

第十八章 鋭角ノ三角函數

108. 鋭角ノ三角函數



∠C ヲ直角トスル三角形 ABC ニ於テ ∠A, ∠B, ∠C ノ對邊ノ長サヲ夫々 a, b, c トスル。ソシテ

$\frac{a}{c}$ ヲ ∠A ノ**正弦**(sine) トイヒ, **sin A** ト記ス。

$\frac{b}{c}$ ヲ ∠A ノ**餘弦**(cosine) 〃 **cos A** 〃

$\frac{a}{b}$ ヲ ∠A ノ**正切**(tangent) 〃 **tan A** 〃

$\frac{b}{a}$ ヲ ∠A ノ**餘切**(cotangent) 〃 **cot A** 〃

$\frac{c}{b}$ ヲ ∠A ノ**正割**(secant) 〃 **sec A** 〃

$\frac{c}{a}$ ヲ ∠A ノ**餘割**(cosecant) 〃 **cosec A** 〃

即チ次ノヤウニナル。

$$\sin A=\frac{a\,(\text{垂線})}{c\,(\text{斜邊})},\quad \cos A=\frac{b\,(\text{底邊})}{c\,(\text{斜邊})},\quad \tan A=\frac{a\,(\text{垂線})}{b\,(\text{底邊})},$$

$$\cot A=\frac{b\,(\text{底邊})}{a\,(\text{垂線})},\quad \sec A=\frac{c\,(\text{斜邊})}{b\,(\text{底邊})},\quad \operatorname{cosec} A=\frac{c\,(\text{斜邊})}{a\,(\text{垂線})}$$

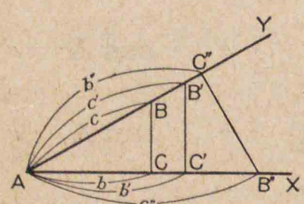
コレ等ノ比ヲ∠Aノ**三角函數**トイフ。三角函數ハ勿論不名數デアル。又上ノ定義ヨリ cosecA, secA, cotA ハ夫々 sinA, cosA, tanA ノ逆數ナルコトガワカル。因テ次ノ公式ヲ得ル。

$$\sin A \operatorname{cosec} A=1$$

$$\cos A \sec A=1$$

$$\tan A \cot A=1$$

從ツテ今後 secA, cosecA 等ニツイテハ略シテ述ベナイコトガアル。



銳角 XAY ノ邊上ニ點 B, B′, B″ ヲトリ,コレ等カラ他ノ邊ヘ下シタ垂線ノ足ヲ夫々C, C′, C″トスルト

$$\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'\backsim\triangle AB''C''$$

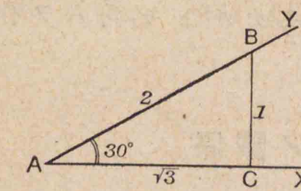
$$\therefore\quad \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\frac{a''}{c''}\qquad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}\qquad \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''}$$

故ニ∠A (∠XAY) ノ三角函數ノ値ハ角ガ一定ナラバ皆一定デアル。

109. 30°, 60°, 45° ノ三角函數

∠XAY ヲ 30° トシ,邊 AY 上ニ AB=2 ナル點 B ヲトリ, B カラ邊 AX ニ下シタ垂線ノ足ヲ C トスルト

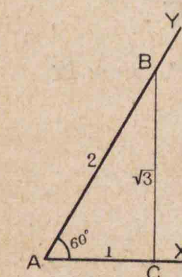


$BC=1,\ AC=\sqrt{3}$

デアル。

$$\therefore\quad \sin 30^\circ=\frac{1}{2},\qquad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \cot 30^\circ=\sqrt{3}$$



同様ニシテ

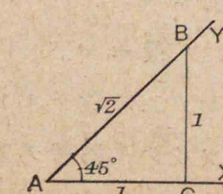
$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3},\quad \cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

次ニ∠XAY ヲ 45° トシ,邊 AX 上ニ AC=1 ナル點 C ヲトリ, C ニ於ケル AX ノ垂線ガ AY ト交ル點ヲ B トスルト, BC=1, AB=$\sqrt{2}$ デアル。

$$\therefore\quad \sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ=1=\cot 45^\circ$$



問 1. 30°, 60°, 45° ノ正割,餘割ノ値ヲイヘ。

問 2. $\sin 30^\circ \cos 45^\circ - \cos 30^\circ \sin 45^\circ$ ヲ求メヨ。

問 3. $\tan 60^\circ \sec 30^\circ - \cot 30^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ$ ヲ求メヨ。

問 4. $\sin A=\frac{3}{5}$ 及ビ $\tan A=\frac{1}{2}$ ナルトキ,角 A ヲ作レ。

110. 三角函數ノ相互ノ關係

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}},\qquad \frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$$ ナル故,定義ヨリ

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

次ニぴたごらすノ定理ヨリ $a^2+b^2=c^2$ ナル故

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

即チ

$$(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$$

又 $a^2+b^2=c^2$ ノ兩邊ヲ b^2 又ハ a^2 デ割ルト夫々

$$1+(\tan A)^2=(\sec A)^2$$

$$1+(\cot A)^2=(\operatorname{cosec} A)^2$$

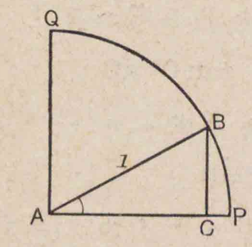
問 1. $\sin^4 A=1-2\cos^2 A+\cos^4 A$ ヲ證セヨ。

問 2. $\tan^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\cot^2 A+\sec^2 A$ ヲ證セヨ。

注意 $(\sin A)^4$ ヲ $\sin^4 A$ ト書ク。一般ニ m ガ正整數ナルトキ $(\sin A)^m$ ヲ $\sin^m A$ ト書ク。他ノ函數ニツイテモ同樣デアル。

111. 三角函數ノ値ノ變化

角ノ大イサガ定マルト,ソノ三角函數ノ値ハ皆定マル。然シ角ノ大イサガカハルトキハドウカ。コレヲ知ルタメニ半徑ノ長サガ1ナル圓ノ一象限PAQヲトリ,Bガ弧PQノ上ヲPカラ出發シテQマデ動クモノト考ヘルト,∠PABハ0°カラ90°マデ漸次ニ增大スル。今BカラAPニ下シタ垂線ノ足ヲCトスルト



$$\sin A=\frac{BC}{AB}=BC,\qquad \cos A=\frac{AC}{AB}=AC$$

デアルカラ,∠Aノ大イサガ0°カラ90°マデ順次ニ增スニ從ツテ,ソノ**正弦ノ値ハ次第ニ增シ**,反對ニ**餘弦ノ値ハ次第ニ減ル**。且ツ $BC<1$, $AC<1$ デアルカラ**鋭角Aノ正弦モ餘弦モソノ値ハ1ヨリ小デアル**。

次ニ $\tan A=\frac{BC}{AC}$ ハ∠Aガ增スニ從ツテBCガ增シ,ACガ減ルカラ,ヤハリ **tan A ハAト共ニソノ値ヲ增ス**。ソシテ $\tan 45^\circ=1$ デアルカラ**正切ノ値ハ1ヨリ小ナルコトモ,1ニ等シイコトモ,1ヨリ大ナルコトモアル**。且ツ∠Aガ90°ニ近ヅクニ從ヒ,ソ

ノ値ハイクラデモ大トナル。

問 ∠A ノ大イサガ0°カラ 90° マデ順次ニ増ストキ cot A ノ値ハドンナ變化ヲスルカ。

次ニ前頁ノ圖ニ於テ B ガ P ニキタト考ヘルト

$$\sin 0°=0,\quad \cos 0°=1,\quad \tan 0°=0$$

デアリ,B ガ充分 Q ニ近ヅイタトキヲ考ヘルト

$$\sin 90°=1,\quad \cos 90°=0$$

又 tan A ハイクラデモ増シテ限リナイカラ,コレヲ $\tan 90°=\infty$ ト書キ,∞ ヲ**無限大**ト讀ム。

注意 無限大ハ決シテ數デハナイ。

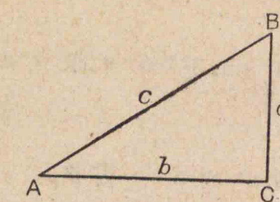
問 cot 90°, cot 0° ハ如何。

112. 三角函數ノ眞數表

前節ノヤウニ考ヘルト,任意ノ鋭角ノ三角函數ハ幾何學的ニハ容易ニ求メラレルガ,ソノ數値ハ一般ニ容易ニ計算スルコトガ出來ナイ。ノミナラズソノ數値ハ一般ニ小數點以下ガ有限デナイ。因テコレ等ノ値ヲ10分毎ニ小數點以下四位マデ求メ,コレヲ表ニシテアル。コノ表ヲ**三角函數ノ眞數表**トイフ。

113. 餘角ノ三角函數

∠C ヲ直角トスル △ABC ニ於テ ∠B=90°−∠A



デアルカラ,∠A ノ三角函數ト同様ニ ∠B ノ三角函數ヲ定義スルコトガ出來ル。ソレハ單ニ a ト b ヲ入レカヘサヘスレバヨイ。即チ

$$\sin B=\frac{b}{c},\qquad \cos B=\frac{a}{c},$$

$$\tan B=\frac{b}{a},\qquad \cot B=\frac{a}{b}$$

コレ等ヲ ∠A ノ三角函數ト比ベ ∠B=90°−∠A ニ注意スルトキハ次ノ關係ヲ得ル。

$$\sin(90°-A)=\cos A$$
$$\cos(90°-A)=\sin A$$
$$\tan(90°-A)=\cot A$$
$$\cot(90°-A)=\tan A$$

コレ等ヲ**餘角ノ公式**トイフ。

問 30°ノ三角函數ヨリ 60° ノ三角函數ヲ求メヨ。

114. 三角函數ノ眞數表ノ用法

三角函數ノ眞數表ハ巻末ニ掲ゲタヤウニ0°カラ 90° マデノ10分オキノ角ノ三角函數ノ値ヲ載セタ表デアルガ,餘角ノ公式ヲ用ヒ,單ニ0°カラ 45° マデノ角ノ三角函數ノ値ヲ載セテ,ソレヲ 45° カラ 90° マデノ角ノ場合ニモ使用スルコトガ出來ルヤウニシ

テアル。

例1 三角函數ノ眞數表ヨリ $\sin 3°20'$ ヲ求メルト 0.0581 デアル。

コレハ勿論近似値デアルガ,次ノヤウニ書ク。

$$\sin 3°20' = 0.0581$$

問 三角函數ノ眞數表ヨリ次ノ値ヲ求メヨ。

(1) $\cos 20°40'$　　(2) $\tan 16°50'$

(3) $\cot 63°10'$　　(4) $\sin 74°30'$

例2 三角函數ノ眞數表ヨリ $\sin x = 0.3145$ ナル鋭角 x ヲ求メルト $x = 18°20'$ デアル。

コレヲ次ノヤウニ演算スル。

$$\begin{array}{l} \sin x = 0.3145 \\ \quad 0.3145 = \sin 18°20' \\ \hline \quad\quad x = \quad 18°20' \end{array}$$

問 次ノ各等式ヲ滿足スル鋭角 x ヲ求メヨ。

(1) $\sin x = 0.4669$　　(2) $\cos x = 0.9063$

(3) $\tan x = 0.5696$　　(4) $\cot x = 0.7002$

更ニ三角函數ノ眞數表ハ對數表ノヤウニ,表ニナイ角ノ三角函數ノ値ヲ求メ,又ハソノ逆ノ目的ニ用ヒルコトガ出來ル。

例3 $\sin 26°34'$ ヲ求メヨ。

解 表カラ　$\sin 26°30' = 0.4462$

$$\sin 26°40' = 0.4488$$

即チ角ガ $10'$ 増スト正弦ノ値ハ 0.0026 増ス。今角ノ微小ナ變化ニツレテ正弦ノ値ガ比例シテ増スモノトシ,$4'$ ニ對シテ x ダケ増ストスレバ

$$10' : 4' = 0.0026 : x$$

$$\therefore \quad x = 0.0026 \times \frac{4}{10} = 0.0010$$

コレヲ 0.4462 ニ加ヘテ得ル 0.4472 ハ答デアル。

コノトキ 0.0026 ヲ單ニ **26** ト記シ,**表差**トイヒ,次ノヤウニ演算スル

$$\begin{array}{lr} \sin 26°34' & \\ \sin 26°30' = 0.4462 & (26 \\ \quad\quad 4'(+) \quad 10(+) & \\ \hline \sin 26°34' = 0.4472 & \end{array}$$

注意 正弦ト正切トハ角ガ増ストソノ値ヲ増スガ,餘弦ト餘切トハ却ツテソノ値ガ減ル。

問 次ノ各々ヲ計算セヨ。

(1) $\sin 73°52'$　　(2) $\tan 38°15'$

例4 $\cos 38°23'$ ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{lr} \cos 38°23' & \\ \cos 38°30' = 0.7826 & (18 \\ \quad\quad 7'(-) \quad 13(+) & \\ \hline \cos 38°23' = 0.7839 & \end{array}$$

問　次ノ各々ヲ求メヨ。

(1)　$\cos 18°47'$　　　　(2)　$\cot 66°6'$

例5　$\sin x=0.3535$　ヨリ鋭角 x ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{rl} \sin x=0.3535 & \\ 0.3529=\sin 20°40' & \quad (29 \\ \underline{\quad 6(+) \qquad 2'(+)} & \\ 0.3335=\sin 20°42' & \end{array}$$

$\therefore$　$x=20°42'$

例6　$\cos x=0.9762$ ヨリ鋭角 x ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{rl} \cos x=0.9762 & \\ 0.9757=\cos 12°40' & \quad (6 \\ \underline{\quad 5(+) \qquad 8'(-)} & \\ 0.3535=\cos 12°32' & \end{array}$$

$\therefore$　$x=12°32'$

問　次ノ各々ヨリ鋭角 x ヲ求メヨ。

(1)　$\sin x=0.7304$　　　(2)　$\cos x=0.9493$

(3)　$\tan x=3.779$　　　(4)　$\cot x=0.7065$

115. 三角形ノ解法

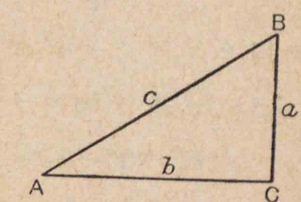
三角形 ABC ノ六原素卽チ角 A, B, C ト邊 a, b, c ノ中,三原素ヲ知ツテ殘リノ三原素ヲ見出スコトヲコノ**三角形ヲ解ク**トイフ。

直角三角形ニ於テハ直角ヲ除イタ殘リノ五原素ノ中二原素ヲ知ツテ他ノ三原素ヲ求メルコトガ出來ル。

注意　三原素 A, B, C ヲ知ツテモ殘リノ三原素 a, b, c ヲ求メルコトハ出來ナイ。コノトキハ無數ノ相似三角形ヲ得ルカラデアル。ツマリ $A+B+C=180°$ デアルカラ A, B, C ノ三ツヲ與ヘルコトハ何レカ二ツヲ與ヘルコトニ歸着スル。ソレデコノ場合ヲ除カネバナラナイ。

116. 直角三角形ノ邊ト角ノ關係

$\angle C$ ヲ直角トスル三角形 ABC ニ於テ §108 ヨリ次ノ關係ヲ得ル。



$$a=c\sin A=b\tan A$$

又ハ

$$a=c\cos B=b\cot B$$

$$b=c\cos A=a\cot A$$

又ハ

$$b=c\sin B=a\tan B$$

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos A}=\sqrt{a^2+b^2}$$

又ハ

$$c=\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\sin B}$$

コレ等ニヨツテ直角三角形ヲ解クコトガ出來ル。

117. 直角三角形ノ解法

$\angle C$ ヲ直角トスル三角形 ABC ヲ解ク場合ハ次ノ

四ツニ歸着スル。

(i) 斜邊ト直角ヲ夾ム一邊ヲ知ルトキ。

(ii) 斜邊ト一鋭角ヲ知ルトキ。

(iii) 一鋭角ト直角ヲ夾ム一邊ヲ知ルトキ。

(iv) 直角ヲ夾ム二邊ヲ知ルトキ。

コレ等ノ場合ノ解法ハ夫々次ノヤウデアル。

(i) c, a ヲ知ツテ A, B, b ヲ求メルニハ公式

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad B=90^\circ-A,\qquad b=c\cos A$$

ヲ用ヒル,卽チ先ヅ A ヲ求メ,次ニ B, b ヲ求メル。

(ii) c, A ヲ知ツテ B, a, b ヲ求メルニハ公式

$$B=90^\circ-A,\qquad a=c\sin A,\qquad b=c\cos A$$

ヲ用ヒル。

(iii) A, a ヲ知ツテ B, b, c ヲ求メルニハ公式

$$B=90^\circ-A,\qquad b=a\cot A,\qquad c=\frac{a}{\sin A}$$

ヲ用ヒル。

(iv) a, b ヲ知ツテ A, B, c ヲ求メルニハ公式

$$\tan A=\frac{a}{b},\qquad B=90^\circ-A,\qquad c=\frac{a}{\sin A}$$

ヲ用ヒル。

例1 $c=25^{\mathrm{m}},\ a=10^{\mathrm{m}}$ ナル直角三角形 ABC ヲ解ケ。

解 (i)ノ場合デアルカラ

$$\sin A=\frac{10}{25}=0.4000$$

$$0.3987=\sin 23^\circ 30' \qquad (27$$

$$\underline{\quad 13(+)\qquad\qquad 5'(+)}$$

$$0.4000=\sin 23^\circ 35'$$

$\therefore\quad A=23^\circ 35' \qquad \therefore\quad B=66^\circ 25'$

又 $b=25\cos 23^\circ 35'=25\times 0.9165=22.91^{(\mathrm{m})}$

例2 $a=74^{\mathrm{m}},\ b=25^{\mathrm{m}}$ ヲ知ツテ直角三角形 ABC ヲ解ケ。

解 (iv)ノ場合デアルカラ

$$\tan A=\frac{74}{25}=2.960$$

$\therefore\quad A=71^\circ 20' \qquad \therefore\quad B=18^\circ 40'$

又 $c=\dfrac{74}{\sin 71^\circ 20'}=\dfrac{74}{0.9474}=78.11^{(\mathrm{m})}$

問 次ノ各々ノ場合ニ直角三角形($\angle C=90^\circ$)ヲ解ケ。

(1) $A=25^\circ 20',\quad a=85.58^{\mathrm{m}}$

(2) $c=240^{\mathrm{m}},\quad A=17^\circ$

(3) $c=1000^{\mathrm{m}},\quad a=510^{\mathrm{m}}$

(4) $a=250^{\mathrm{m}},\quad b=101^{\mathrm{m}}$

118. 測量問題

直角三角形ノ解法ヲ應用スルト簡單ナ**測量問題**ヲ解クコトガ出來ル。測量問題トハ高サ,距離,面積等ヲ測定スル問題ノコトデアルガ,次ノ術語ヲ了解

シナケレバナラナイ。

(i) 觀測者ノ眼(點ト考ヘル)ヲ觀測スベキ物體(點ト考ヘル)ニ連ネタ直線ヲ**視線**トイフ。

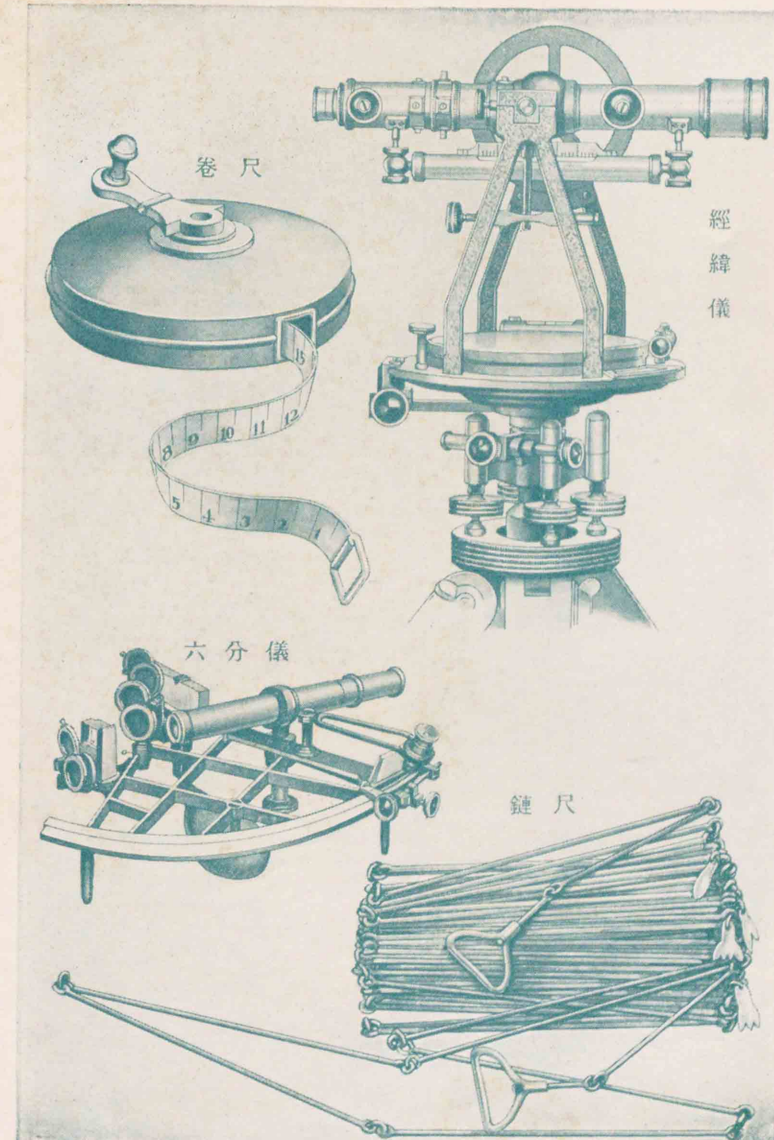
(ii) 測量スル際ニ基準トシテ選ブ直線ヲ**基線**トイヒ,豫メソノ長サヲ測ツテオク。コノ長サヲ測ルニハ**鏈尺**又ハ**卷尺**ヲ用ヒル。

(iii) 錘ヲ吊シタ糸ノ垂レル向キヲ**鉛直線**トイヒ,コレヲ含ム平面ヲ**鉛直面**(又ハ**直立面**)トイフ。鉛直線ニ垂直ナ平面ヲ**水平面**トイヒ,コノ上ニアル直線ヲ**水平線**トイフ。水平線ヲ決定スルニハ**水準器**ヲ用ヒル。

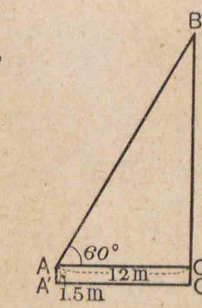
(iv) 一水平面上ニアル二ツノ水平線間ノ角ヲ**水平角**トイフ。又一鉛直面上ニ於テ觀測者ノ眼ヲ過ル水平線ガ視線トナス角ノ中デ,視線ガ水平線ノ上方ニアルカ,下方ニアルカニ從ツテ夫々**仰角**(或ハ**高度**),**俯角**(或ハ**深度**)トイフ。水平角,仰角,俯角ヲ測ルニハ**經緯儀**ヲ用ヒル。

(v) 觀測者ノ眼カラ出タ二ツノ視線間ノ角ヲ觀測スベキ二點ノ**距角**トイフ。モシコレ等ノ二ツノ視線ノ定メル平面ガ水平面デモナク,鉛直面デモナイトキ,ソノ距角ヲ測定スルニハ**六分儀**ヲ用ヒル。

測量用器具



例1 直立シタ樹木カラ12mノ地點デソノ頂上ノ仰角ヲ測ツテ60°ヲ得タ。コノ木ノ高サヲ求メヨ。但シ觀測者ノ眼ノ高サハ地上1.5mデ,觀測者ノ足下(モト)ト樹木ノ根元(モト)トハ同一水面上ニアルトスル。



解 BC'ヲ直立シタ樹木,A'ヲ觀測地點,Aヲ觀測者ノ眼トシ,AC, A'C'ヲ同一鉛直面上ニアル二ツノ水平線トスルト

$$CC'=AA'=1.5^{m},\quad AC=12^{m},\quad \angle BAC=60^\circ$$

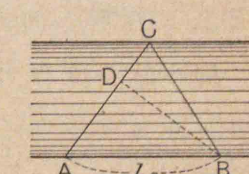
今 BC ヲ x m トスルト直角三角形ABCヨリ

$$x=AC\tan 60^\circ=12\sqrt{3}$$

故ニ樹木ノ高サハ　$(12\sqrt{3}+1.5)=22.28\cdots\cdots$

答　約22.3m

例2 河岸ノ一點Aト對岸ノ點Cトノ距離ヲ測ル方法ヲ述ベヨ。



解 Aト同ジ側ニ基線ABヲトリ,ソノ長サヲlトスル。次ニA,BカラCヲ望ミ∠A, ∠Bヲ測ル。次ニ簡單ノタメBカラ△ABCノ邊ACニ下シタ垂線BDノ足DガA, C間ニアルトスルト

$$BD = AB\sin A = l\sin A$$

$$AD = l\cos A,\quad \angle ABD = 90° - A$$

$$\therefore\qquad \angle CBD = B - (90° - A) = A + B - 90°$$

故ニ△BCDヨリ　$CD = BD\tan CBD$

$$= l\sin A\tan(A + B - 90°)$$

ソレ故　$AC = l[\cos A + \sin A\tan(A + B - 90°)]$

例ヘバ　$\angle A = 75°,\ \angle B = 60°,\ l = 800^{m}$ トスルト

$$AC = 800[\cos 75° + \sin 75°\tan(135° - 90°)]$$

$$= 800[\cos 75° + \sin 75°\tan 45°]$$

$$= 800[0.2588 + 0.9659 \times 1] = 979.76^{(m)}$$

119. 方　位

觀測者ノ眼カラ觀測物體ニ至ル視線ノ方向ヲ**方位**トイフ。

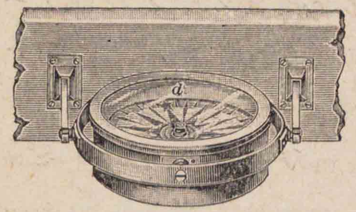
方位ヲ定メルニハ次ノ二法ノ何レカニヨル。

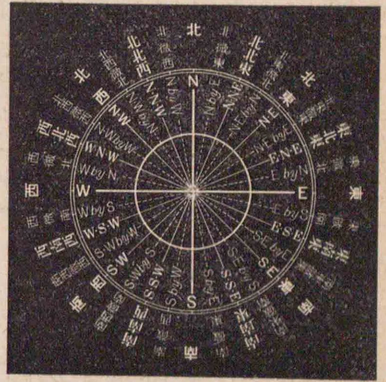
(i) 北(N)及ビ南(S)ノ方位ヲ基準トシ,ソレカラ東(E)及ビ西(W)ヘ傾ク 90° マデノ角ヲ用ヒル方法。

例ヘバN30°W トイヘバ,北カラ西ヘ 30° 傾イタ方向ノコトデアル。

(ii) 東西南北ノ方位ヲ定メ,ソレ等ノ間ノ角ヲ各〻八等分シテ32個ノ方位ヲ定メ,コレ等ニ次圖ノヤウナ名稱ヲツケル方法。

航海ニ用ヒラレル羅針盤ハコノ方法ニヨル。





例　北ニ進ム人ガ北北西ニ見タ人家ヲ 300 m 進ンダトキ西ニ見タトイフ。人家ト道路トノ距離ヲ求メヨ。

解　A,Bヲ二回ノ觀測點,Cヲ人家トスルト,三角形 ABC ハ B ヲ直角トシ,$\angle A = 22°30'$, $AB = 300^{m}$ デアル。又 CB ハ人家ト道路トノ距離デアル。

ソシテ　$CB = AB\tan A = 300\tan 22°30'$

$= 300 \times 0.4142 = 124.26$　　答 124.26 m

問 1. 平地ニ直立スル高サ 6 m ノ旗竿ノ長サガ 3.564 m ノ影ヲ地上ニ投ズルトキ,太陽ノ高度ヲ求メヨ。

問 2. 高サ 18 m ノ屋上デ丘ノ頂ノ仰角 45° ヲ得,屋下デ仰角 60° ヲ得タ。丘ノ高サヲ求メヨ。

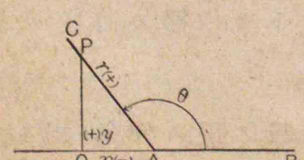
問3. 或人ガA地デ山頂Bヲ望ミ仰角 30° ヲ得タ。A地ガ海面上 2130 m ノ地點ナラバBハ海面上幾米ノ地點デアルカ。但シ五萬分ノ一ノ地圖デハA,B兩地間ノ水平距離ハ丁度 0.8 cm アル。(五萬分ノ一ノ地圖上デ 1 cm ノ距離ノ實長ハ 500 m デアル)

問4. 湖岸ニアル高サ h m ノ塔上カラ靜止セル雲ノ一點ヲ眺メテ仰角 α ヲ得,同時ニ湖水ニ映ルソノ影ヲ望ンデ俯角 β ヲ得タ。雲ノ水面カラノ高サヲ求メル公式ヲ出セ。

問5. 或原野ニ於テ前方ニ見エル山頂ノ仰角ヲ測ツテ 19°20′ ヲ得,次ニ山ニ向ツテ 350 m 進ミ再ビソノ仰角ヲ測ツタニ 21°50′ デアツタ。山ノ高サ及ビ第二觀測點カラ山マデノ距離ヲ求メヨ。

第十九章 鈍角ノ三角函數

120 鈍角ノ三角函數



鈍角BACヲ θ トスル。邊 AC 上ニ任意ニ一點 P ヲトリ,P カラ邊 BA ノ延長ニ垂線ヲ下シ,ソノ足ヲ

Q トスル。コノ直角三角形 PAQ ノ三邊 r, x, y ヲ用ヒテ鈍角 θ ノ三角函數ヲ次ノヤウニ定義スル。

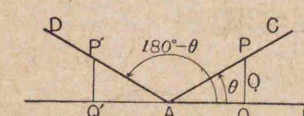
$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x},$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y},\quad \sec\theta=\frac{r}{x},\quad \operatorname{cosec}\theta=\frac{r}{y}$$

ソシテ三邊ニ符號ヲツケテ **r トyトヲ共ニ正トシ,x ヲ負トスル。** 從ツテ θ ガ鈍角ナルトキ $\sin\theta$, **$\operatorname{cosec}\theta$ ハ正デアルガ, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ハ負デアル。**

121. 補角ノ公式

∠BAC ヲ鋭角 θ トシ,∠BAD ヲ ∠BAC ノ補角トスルト,∠BAD ハ 180°$-\theta$ トナリ鈍角デアル。邊 AC, AD ノ上ニ夫々 P, P′ ヲトリ,P, P′ カラ BA 及ビソノ延長ニ垂線ヲ立テ,ソノ足ヲ夫々 Q, Q′ トシ,AP=AP′ トスルト,∠P′AQ′=∠BAC デアルカラ,



$$\triangle AP'Q' \equiv \triangle APQ$$

∴ P′Q′=PQ, AQ′=−AQ 但シ AP′=AP

因テ次ノ公式ヲ得ル。

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta,\qquad \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta,\qquad \cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta$$

問 1. 次ノ各角ノ三角函數ヲ求メヨ

(1) 135° (2) 120° (3) 150°

問 2. 180° ノ三角函數ヲ求メヨ。

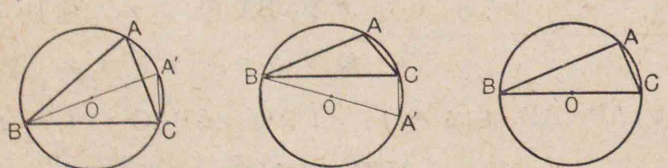
第二十章 一般ノ三角形

本章ニ於テ單ニ三角形トイヘバ三角形 ABC ノコトデ,ソノ六原素ハ邊 a, b, c ト角 A, B, C トデアル。但シ A+B+C=180° デアル。

122. 正弦法則

三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ R トスルト

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



證明 外心 O ヲ過ル直徑 BA′ ヲ引キ, A′C ヲ結ブ。A ガ直角デナケレバ A′ ハ C ニ重ナラナイカラ ∠BCA′ ハ直角デアル。

$$\therefore \quad a=2R\sin A'$$

モシ A ガ鋭角ナラバ $A'=A$

モシ A ガ鈍角ナラバ $A'=180°-A$

$$\therefore \quad \sin A'=\sin A$$

$$\therefore \quad a=2R\sin A$$

又 A ガ直角ナラバ A′ ト C トガ重ナルカラ

$$a=2R=2R\sin 90°=2R\sin A$$

要スルニ A ノ大イサノ如何ニ拘ハラズ

$$a=2R\sin A \qquad \therefore \quad \frac{a}{\sin A}=2R$$

同樣ニ $\dfrac{b}{\sin B}=2R,\quad \dfrac{c}{\sin C}=2R$

問 次ノ各々ヲ證セヨ。

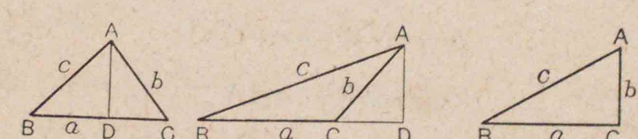
(1) $\sin A+\sin B>\sin C$ (2) $\sin A\sim\sin B<\sin C$

123. 餘弦法則(一)

$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$b=c\cos A+a\cos C$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$



證明 A カラ BC 或ハソノ延長ニ垂線ヲ下シ,ソノ足ヲ D トスル。

DガBC上ニアルトキ

$$a=BC=BD+DC$$

ソシテ　$BD=AB\cos B=c\cos B$

$$DC=AC\cos C=b\cos C$$

$$\therefore\quad a=b\cos C+c\cos B$$

DガCBノ延長上ニアルトキ

$$a=BC=BD-CD$$

ソシテ　$BD=c\cos B,$

$$CD=AC\cos ACD=b\cos(180^\circ-C)=-b\cos C$$

$$\therefore\quad a=c\cos B-(-b\cos C)$$

$$=c\cos B+b\cos C$$

又DガCニ來タトキハ　$\angle C=90^\circ,\ \cos C=\cos 90^\circ=0$

$$\therefore\quad a=BC=AB\cos B=c\cos B$$

$$=c\cos B+b\cos C$$

要スルニドンナ三角形デモ

$$a=b\cos C+c\cos B$$

同様ニ　$b=c\cos A+a\cos C$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

問　次ノ等式ノ正シイコトヲ證セヨ。

$$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

124. 餘弦法則(二)

前節ノ餘弦法則ノ各等式ノ兩邊ニ夫々 $a, -b, -c$ ヲ掛ケテ加ヘルト

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$$

卽チ　$\mathbf{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$

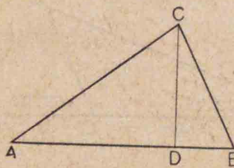
同様ニ　$\mathbf{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B}$

$$\mathbf{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C}$$

問　次ノ等式ヲ證セヨ。

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

125. 三角形ノ面積



三角形ノ三ツノ角ノ中,少クトモ二ツハ銳角デアル。因テソノ銳角ヲA, Bトシ,頂點Cカラ對邊ABニ下シタ垂線ノ足ヲDトスルト,Dハ邊AB上ニアル。

故ニ　$CD=b\sin A$

今三角形ノ面積ヲSトスルト

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}bc\sin A$$

因テ正弦法則ヲ用ヒテ次ノ公式ヲ得ル。

$$\mathbf{S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}$$

問 1.　二邊ガ與ヘラレタ三角形ノ中,面積ノ最大ナモノハ,二邊ノ夾ム角ガ直角ナ三角形デアルコトヲ證セヨ。

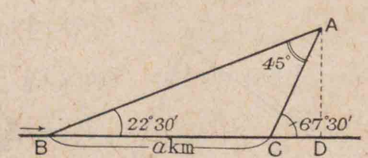
問 2.　四邊形ノ面積ハ兩對角線トソノ夾角ノ正弦トノ積ノ半分ニ等シイコトヲ證セヨ。

126. 測量問題

例 1　東ニ進ム船ガ或點デ海岸ノ燈臺ヲ東北東ニ眺メテカラ a km 進ンダトキ北北東ニ眺メタトイフ。初メノ點ト燈臺トノ距離ヲ求メヨ。

解　A ヲ燈臺,B ヲ初メノ點,C ヲ第二ノ點トスル。三角形 ABC ニ於テ

$$\frac{AB}{\sin 67^\circ 30'}=\frac{BC}{\sin 45^\circ}$$



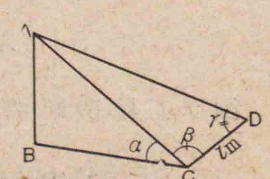
$$\therefore\ AB=\frac{\sin 67^\circ 30'}{\sin 45^\circ}a$$

$$=1.307a \text{ 弱}$$

答　$1.307a$ km弱

問 2　平地上ニ基線 CD (l m) ヲトリ, C ニ於テ山頂 A ノ仰角 α ヲ求メ,別ニ角 ACD (β), CDA (γ) ヲ測ツテ山ノ高サヲ求メヨ。

解　AB ヲ平地上ノ山ノ高サトスル。



△ACB ニ於テ $AB=AC\sin\alpha$,

又△ACD ニ於テ

$$AC=\frac{CD\sin\gamma}{\sin(180^\circ-\beta-\gamma)}=\frac{l\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

$$\therefore\quad AB=\frac{l\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

問　平地上ノ基線 CD (l m) ト山頂 A トガ同一鉛直面內ニアルトキ, C, D ニ於ケル A ノ仰角 α, β ヲ測ツテ山ノ高サヲ求メヨ。

問題ノ答

§ 6. **3.** $\frac{1}{2}(a+b)$ cm

§ 7. **2.** 90°, 60°, 30°; 180° **3.** 130°

§ 8. **1.** 30°, 36°, $98°10'54\frac{6}{11}''$ **2.** $\frac{1}{3}$直角, $\frac{1}{2}$直角, $\frac{2}{3}$直角 **3.** 60°, 45°, $\frac{1}{3}$直角 **4.** 120°, 直角, $1\frac{3}{5}$直角 **5.** 105°, 75°

頁 22.

練習 (1)

4. 210°

§ 26. **1.** 60° **2.** 75°

頁 42.

練習 (3)

4. 90°

頁 51.

練習 (4)

1. 十邊形 **2.** 10 本

頁 119. **2.** (1) 0.46 (2) 3.46

§ 67. **1.** 6 倍 **2.** 770000 あーる

§ 70. **1.** $\frac{1}{2}[p(a+c)+q(a+b+c)+r(b+c)]$

§ 72. **1.** 20 cm

§ 73. **1.** 972 平方糎

頁 146.

練 習 (10)

3. 168 平方粍, 12 cm　4. 12 cm　5. 34 平方粍

6. 小正方形ノ一邊ハ $\frac{1}{2}a$, 面積ハ $\frac{1}{4}a^2$; 小直角三角形ノ直角ノ二邊ハ何レモ $\frac{\sqrt{2}}{4}a$, 面積ハ $\frac{1}{16}a^2$

7. $\frac{1}{8}$　10. 1:2

頁 159. 3.26 平方粍, $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$ 即チ 約 $0.09a^2$

頁 159.

練 習 (12)

1. 14 m

4. $\sqrt{2-\sqrt{2}}\,r$, $2\sqrt{2}\,r^2$　5. $5\sqrt{6}$, $5\sqrt{3}$

7. 122.8平方粍　8. $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}r^2$ 即チ 約 $0.16r^2$

9. 相等シイ

頁 184.

練 習 (14)

1. 四ツ

頁 188. 1. 108 平方粍　2. $(72+2\sqrt{3})$ 平方粍

2. 12 本

頁 189. $6a^2$

頁 191. 1:4

§ 98. 1. $\frac{15\sqrt{15}}{4}$ 立方粍

頁 201.

練 習 (15)

3. $\sqrt{\frac{2}{3}}a$　4. $\sqrt{3}\sqrt[3]{a}$ m　5. $420\sqrt{3}$ 立方粍

6. $42\frac{2}{3}$ 立方粍　7. $\frac{ah'^3}{3h^2}$ 立方粍, $\frac{a(h^3-h'^3)}{3h^2}$ 立方粍

頁 203. 1. $565\frac{5}{7}$ 平方粍　2. 141.372 立方粍

頁 205. 1. 47.1 平方粍　2. 0.31416 立

頁 206.

練 習 (16)

1. 1077.5688 立方粍　2. 1, 底ノ半徑ノ比

3. 20 : 15 : 12　4. 1 : 8

頁 209. 1. 4 cm

§ 106. 1. 球ノ半徑ノ 2 倍ノ半徑　2. 509090909 平方粁

§ 107. $113\frac{1}{7}$ 立方粍

頁 212.

練 習 (17)

4. $\sqrt{a^2+b^2}$

§ 109. 1. $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 2, $\sqrt{2}$; 2, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}$　2. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3. 0

頁 218. $\cot 90^\circ=0$. $\cot 0^\circ=\infty$

頁 220. (1) 0.9356　(2) 0.3026　(3) 0.5059　(4) 0.9636

(1) 27°50′　(2) 25°　(3) 29°40′　(4) 55°

頁 221. (1) 0.9607　(2) 0.7884

頁 222. (1) 0.9468　(2) 0.4431

(1) 46°55′　(2) 18°19′　(3) 75°10.7′　(4) 54°46′

§ 117. (1) B = 64°40′, b = 180.77 m, c = 200 m

(2) $B=73^\circ$, $a=70.176$ m, $b=229.512$ m

(3) $A=30^\circ40'$, $B=59^\circ20'$, $b=860.1$ m

(4) $A=68^\circ$, $B=22^\circ$, $c=269.63$ m

§ 119. **1.** $59^\circ17'$ **2.** $27+9\sqrt{3}$ m **3.** 2360.96 m

4. $\dfrac{h(\cot\alpha+\cot\beta)}{\cot\alpha-\cot\beta}$ m **5.** 987 m强, 2465 m强

§ 121. **1.** (1) $\sin 135^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 135^\circ=-1$,

$\cot 135^\circ=-1$ $\sec 135^\circ=-\sqrt{2}$, $\operatorname{cosec} 135^\circ=\sqrt{2}$

(2) $\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$, $\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$,

$\cot 120^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec 120^\circ=-2$, $\operatorname{cosec} 120^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) $\sin 150^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\cos 150^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 150^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\cot 150^\circ=-\sqrt{3}$, $\sec 150^\circ=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{cosec} 150^\circ=2$

1. $\sin 180^\circ=0$, $\cos 180^\circ=-1$, $\tan 180^\circ=0$, $\cot 180^\circ=\infty$,

$\sec 180^\circ=-1$, $\operatorname{cosec} 180^\circ=\infty$

§ 126. $x=\dfrac{l}{\cot\alpha-\cot\beta}$ m

三角函數ノ
眞數表

°	′	sin	tan	cot	cos	′	°
0	0	0.0000	0.0000	∞	1.0000	0	90
	10	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50	
	20	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40	
	30	0.0087	0.0087	114.5887	0.0000	30	
	40	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20	
	50	0.0145	0.0145	68.7501	0.9999	10	
1	0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0	89
		cos	cot	tan	sin	′	°

°	′	sin	tan	cot	cos	′	°	°	′	sin	tan	cot	cos	′	°
1	0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0	89	7	0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0	83
	10	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50			10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50	
	20	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40			20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40	
	30	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30			30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30	
	40	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20			40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20	
	50	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10			50	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10	
2	0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0	88	8	0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0	82
	10	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50			10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50	
	20	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40			20	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40	
	30	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30			30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30	
	40	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20			40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20	
	50	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10			50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10	
3	0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0	87	9	0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0	81
	10	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50			10	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50	
	20	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40			20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40	
	30	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30			30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30	
	40	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20			40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20	
	50	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10			50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10	
4	0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0	86	10	0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0	80
	10	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50			10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50	
	20	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40			20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40	
	30	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30			30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30	
	40	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20			40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20	
	50	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10			50	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10	
5	0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0	85	11	0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0	79
	10	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50			10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50	
	20	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40			20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40	
	30	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30			30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30	
	40	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20			40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20	
	50	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10			50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10	
6	0	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	0	84	12	0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0	78
	10	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50			10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50	
	20	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40			20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40	
	30	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30			30	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30	
	40	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20			40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20	
	50	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10			50	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10	
7	0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0	83	13	0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0	77
		cos	cot	tan	sin	′	°			cos	cot	tan	sin	′	°

°	′	sin	tan	cot	cos	′	°	°	′	sin	tan	cot	cos	′	°
13	0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0	77	21	0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0	69
	10	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50			10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50	
	20	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40			20	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40	
	30	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30			30	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30	
	40	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20			40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20	
	50	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10			50	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10	
14	0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0	76	22	0	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	0	68
	10	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50			10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50	
	20	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40			20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40	
	30	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30			30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30	
	40	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20			40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20	
	50	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10			50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10	
15	0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0	75	23	0	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0	67
	10	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50			10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50	
	20	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40			20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40	
	30	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30			30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30	
	40	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20			40	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20	
	50	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10			50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10	
16	0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0	74	24	0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0	66
	10	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50			10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50	
	20	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40			20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40	
	30	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30			30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30	
	40	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20			40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20	
	50	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10			50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10	
17	0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0	73	25	0	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0	65
	10	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50			10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50	
	20	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40			20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40	
	30	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30			30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30	
	40	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20			40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20	
	50	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10			50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10	
18	0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0	72	26	0	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0	64
	10	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50			10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50	
	20	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40			20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40	
	30	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30			30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30	
	40	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20			40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20	
	50	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10			50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10	
19	0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0	71	27	0	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0	63
	10	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50			10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50	
	20	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40			20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40	
	30	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30			30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30	
	40	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20			40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20	
	50	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10			50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10	
20	0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0	70	28	0	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0	62
	10	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50			10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50	
	20	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40			20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40	
	30	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30			30	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30	
	40	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20			40	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20	
	50	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10			50	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10	
21	0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0	69	29	0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0	61
		cos	cot	tan	sin	′	°			cos	cot	tan	sin	′	°

° ′	sin	tan	cot	cos		° ′	sin	tan	cot	cos	
29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61	37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 53
10	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50	10	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50
20	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40	20	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40
30	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30	30	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30
40	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20	40	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20
50	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10	50	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10
30 0	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	0 60	38 0	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	0 52
10	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50	10	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50
20	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40	20	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	40
30	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30	30	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	30
40	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20	40	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	20
50	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10	50	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	10
31 0	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	0 59	39 0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0 51
10	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50	10	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	50
20	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40	20	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	40
30	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30	30	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	30
40	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20	40	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	20
50	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10	50	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	10
32 0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	0 58	40 0	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	0 50
10	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50	10	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642	50
20	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40	20	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	40
30	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30	30	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	30
40	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20	40	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	20
50	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10	50	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	10
33 0	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	0 57	41 0	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	0 49
10	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50	10	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	50
20	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40	20	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	40
30	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30	30	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	30
40	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20	40	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	20
50	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10	50	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	10
34 0	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	0 56	42 0	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	0 48
10	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50	10	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412	50
20	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40	20	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	40
30	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30	30	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	30
40	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20	40	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	20
50	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10	50	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	10
35 0	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	0 55	43 0	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	0 47
10	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50	10	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	50
20	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40	20	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	40
30	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30	30	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	30
40	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20	40	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	20
50	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10	50	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	10
36 0	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	0 54	44 0	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	0 46
10	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50	10	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	50
20	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40	20	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	40
30	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30	30	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	30
40	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20	40	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	20
50	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10	50	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092	10
37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 55	45 0	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	0 45
	cos	cot	tan	sin	′ °		cos	cot	tan	sin	′ °

再訂 新實業幾何學教科書

昭和5年12月2日印刷
昭和5年12月5日發行
昭和7年11月28日訂正再版發行
昭和8年8月18日訂正三版發行
昭和11年10月23日訂正四版印刷
昭和11年10月26日訂正四版發行
昭和11年12月25日訂正五版印刷
昭和11年12月28日訂正五版發行

定價 金壹圓〇四錢

發行所
合資會社 冨山房
振替口座東京五〇一番
電話神田二一七一=二一七八番
東京市神田區神保町一丁目三番地

印刷者 川口印刷所
東京市芝區西芝浦三丁目二番地

代表者 坂本嘉治馬

發行者 合資會社 冨山房
東京市神田區神保町一丁目三番地

編者 松本敏三

東京・冨山房發行・神田

定理索引