東京帝國大學教授
理學博士
竹内端三著

中等幾何三角法教科書

增課課程

東京　三　省　堂　大阪

昭和十四年十一月二日
文部省檢定濟
中學校數學科用

中等幾何三角法教科書

增課課程

東京帝國大學教授
理學博士
竹內端三著

東京　三省堂　大阪

緒　　言

著者ハ曩ニ中學校ニ於ケル數學科ヲ,算術及ビ代數學ノ方面ト幾何學及ビ三角法ノ方面トニ分ケテ教授スル場合ノ後者ニ對スル基本課程用ノ教科書トシテ,中等幾何三角法教科書[基本課程]上卷及ビ下卷ヲ著ハシタノデアツタ.

本書ハ前書ト同樣ノ目的ヲ以テ幾何學及ビ三角法ニ關スル增課課程用ノ教科書トシテ編纂シタモノデアル.

惟フニ增課課程ニ於テハ既修ノ知識ヲ整理シソノ基礎ヲ鞏固ニシ,更ニソノ進展ヲ圖リ應用ヲ試ミ,以テ本科ノ特色タル整然タル理論ト精確ナル結果トヲ示シ,本科教授ノ目的ノ達成ニ努メルベキデアル. 本書ハコノ趣旨ヲ以テ編纂シタノデアルガ,尙ホソノ組織ニツキ大要ヲ述ベレバ次ノ如クデアル.

(1) 第一篇ニ於テ平面幾何學ノ總括ヲナシ,コレヲ補フニ古來知ラレテキル著名ナル定理並ニ興味アル事項

ヲ以テシ,特ニ軌跡及ビ作圖題ノ解法ニ關スル系統的敍述ヲ試ミ,既得ノ知識ノ充實發展ヲ圖ツタ.

(2) 第二篇ニ於テ一般ナル角ノ三角函數ヲ述ベ,第三篇ニ於テ三角形ノ解法ヲ授ケテソノ應用ノ一斑ヲ示シ以後隨時隨所コレヲ活用スルコトトシタ.

(3) 第四篇以下ニ於テ立體幾何學ヲ述ベタ. 空間ニ關シ直觀又ハ經驗ニヨツテ眞デアルト認メラレタ事實カラ推理ニヨツテ多クノ未知ノ事實ヲ導キ,多面體曲面體ノ表面積及ビ體積ノ計算ヲ以テ完結シタ. 玆ニ一言ヲ要スルコトハ球面圖形ニ關スル重要ナル二三ノ性質ヲ新タニ述ベタコトデアル. コレラニ對スル證明ヲ一一授クベキカ否カハ教授者ノ見込ニヨル. シカシ何レニシテモ球面ノ性質ヲヨク認識スルコトハ航海,航空等ニ必要ナルノミナラズ,平面上ノ圖形ト球面上ノ圖形トノ間ノ相違點並ニ相似點ヲ明ラカニスルコトニヨツテ空間ノ概念ハ益〻明瞭確實ニナルコトト信ズル.

(4) 問題ハ實力ノ培養ニ資スベキ穩當ナルモノヲ選定シタガ,又重要ナル內容ヲモツモノハ努メテコレヲ採擇スルコトトシタ,調和束線,反形ノ如キソノ例デアル. コレラノ問題ヲ更ニ敷衍シ或ハ更ニ進ンデソノ應用ヲ試ミル等ハ教授者ノ取扱ニ一任スルモノデアル.

終リニ臨ミ著者ハ舊著ノ各種教科書ニ對シテ適切懇篤ナル忠言ヲ寄セラレタ大方ノ諸賢ニ厚ク感謝ノ意ヲ表スルト共ニ,尚ホ本書ニ對シテモ同様ニ叱正ヲ賜ハランコトヲ切望スル.

昭和十四年七月

著 者 識

目　次

中等幾何三角法教科書

[增課課程]

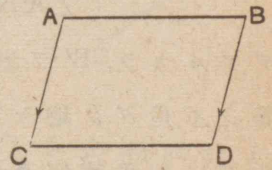
第一篇

平面幾何學補充及ビ總括

第一章　變位及ビ相似多角形

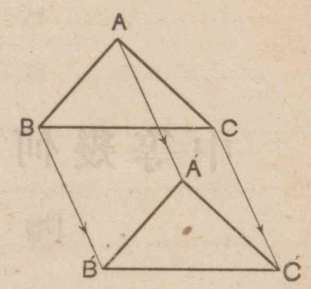
1. 平行移動,廻轉,裏返シ

一平面上ニ二ツノ相等シイ線分 AB, CD ガアツテ,ソノ端ヲ夫々結ブ線分 AC, BD ガ相等シク且互ニ平行ナルトキハ, ACDB ハ平行四邊形デ, AB ト CD トハ平行デアル. 故ニ AB ヲ同一平面上デソノ方向ヲ變ゼズニ變位サセテ, CD ト相合セシメルコトガ出來ル.

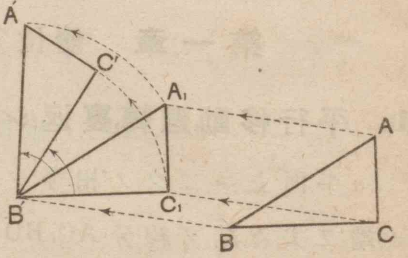


線分ニ限ラズ,一般ニ同一平面上ニアル任意ノ二ツノ合同ナル圖形ニ於テ,ソノ相對應スル點ヲ夫々結ブ線分ガ悉ク相等シク且互ニ平行ナルトキハ,ソノ一ツノ圖形

ヲ同一平面上デソノ方向ヲ變ゼズニ變位サセテ他ノ一ツト相合セシメルコトガ出來ル．斯クノ如キ變位ヲ稱シテ**平行移動**トイフ．



同一平面上ニ二ツノ合同ナル圖形ガアルトキ,平行移動ノミデソノ一ツヲ他ノ一ツト相合セシメルコトハ必ズシモ可能デナイ．例ヘバ下ノ圖ニ於テ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ デアルガ, $\triangle ABC$ ヲ平行移動ニヨツテ $\triangle A_1B'C_1$ ノ位置ニ變位セシメタトキ, A_1, C_1 ハ必ズシモ夫々 A', C' トハ相合シナイ．ケレドモココニ

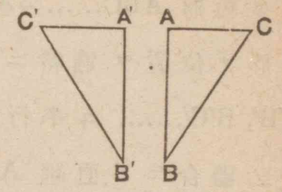


$$\angle A'B'A_1 = \angle C'B'C_1 \qquad (1)$$

デアルカラ, B' ヲ固定シテ $B'A_1$ 及ビ $B'C_1$ ヲ(1)ノ如キ相等シイ角ダケ廻セバ, $\triangle A_1B'C_1$ ハ $\triangle A'B'C'$ ト相合スル．斯クノ如キ變位ヲ**廻轉**トイフ．廻轉ニ際シテ變位シナイ點(上ノ例デハB')ヲソノ**廻轉ノ中心**トイフ．

同一平面上デ平行移動及ビ廻轉ヲ如何程行ツテモ相合セシメ得ナイ合同圖形ノ位置ガアル．例ヘバ次頁ノ上圖ニ於テ, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ デアルケレドモ,コレヲ相

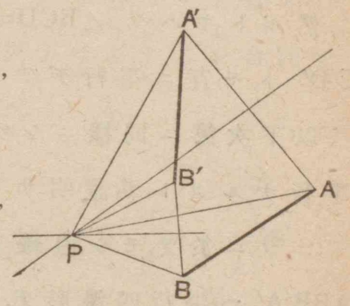
合セシメルニハソノ何レカ一方ヲコノ平面カラ離シテ**裏返シ**ニセネバナラヌ．二ツノ合同ナル圖形ガ,ソノ一ツヲ裏返シニシナケレバ他ノ一ツト相合シナイヤウナ位置ニアルトキハ互ニ**裏向キ**デアルトイフ．



一般ニ線對稱ヲナス二ツノ圖形ハ互ニ裏向キデアル．

注意　同一平面上ニアル裏向キデナイ二ツノ合同圖形ヲ相合セシメルニハ平行移動ト廻轉トヲ行ヘバ宜イコトハ上述ノ如クデアルケレドモ,モシ廻轉ノ中心ヲ適當ノ點ニ選ベバ一般ニハ單ニ一ツノ廻轉ノミデ相合セシメルコトモ出來ル．

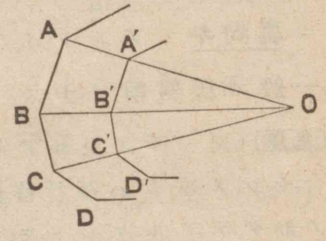
例ヘバ右圖ニ於テ $AB=A'B'$ トシ, AA' 及ビ BB' ノ垂直二等分線ガPニ於テ交ハツタトスル．今 AB ヲ P ヲ中心トシ$\angle APA'$ダケ廻轉スレバ, AB ハ $A'B'$ ニ合スル．



2. 相似變換

定理　**一.** 互ニ相似ナル二ツノ多角形ハ,ソノ對應邊ガ夫々平行ナルヤウニ置クコトガ出來ル．斯ク置イタトキニハ夫々相對應スル頂點ヲ過ギル直線ハスベテ平行ナルカ,又ハスベテ同一ノ點ヲ過ギル．

多角形 $ABC\ldots\ldots\backsim A'B'C'\ldots\ldots$ ナルトキハ,コノ二ツノ多角形ノ位置ヲ適當ニ取レバ邊 $AB, BC, \ldots\ldots$ ヲシテ夫々邊 $A'B', B'C', \ldots\ldots$ ニ平行ナラシメルコトガ出來ル．而シテソノ場合ニハ直線 $AA', BB', CC', \ldots\ldots$ ハスベテ平行ナルカ,又ハスベテ同一ノ點ヲ過ギル．



〔證明〕 $\angle ABC=\angle A'B'C'$ デアルカラ,ソノ二邊 AB, BC ガ夫々 $A'B', B'C'$ ニ平行ナルヤウニ兩形ヲ置クコトガ出來ル．

然ルトキハ又 $\angle BCD=\angle B'C'D'$ デアルカラ,邊 CD ト $C'D'$ トモ互ニ平行デアル．

以下次第ニ同樣ニシテ兩形ノスベテノ對應邊ガ夫々平行ナルコトガ證明サレル．

ココニ於テ,モシ直線 AA', BB' ガ平行デアルトスレバ $ABB'A'$ ハ平行四邊形デ, $AB=A'B'$ トナル．

然ルトキハ他ノスベテノ對應邊モ夫々相等シイ．

卽チ　$BC=B'C',\ CD=C'D',\ \ldots\ldots$

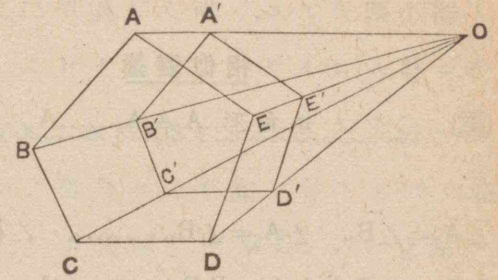
從ツテ　$BCC'B',\ CDD'C',\ \ldots\ldots$

等ハ皆平行四邊形デアル．

故ニ　$AA',\ BB',\ CC',\ DD',\ \ldots\ldots$

ハスベテ平行デアル．(コノ場合ニハ兩形ハ互ニ相似デ

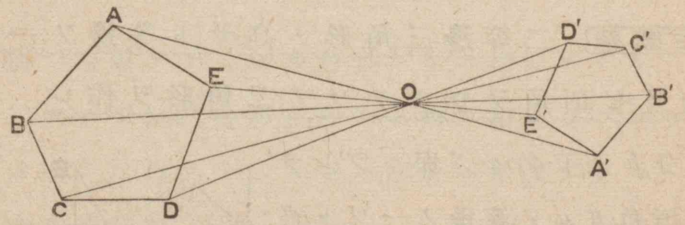
アルバカリデナク,實ハ合同デアル.)



モシ直線 AA', BB' ガ相交ハルトスレバ,ソノ交點ヲ O トスル．然ルトキハ

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

故ニ C, C', O ハ一直線上ニアル,卽チ直線 BB', CC' ノ交點モ亦 O デアル．次第ニ上ト同樣ノ論法ヲ繰リ返セバ,結局 AA', BB', CC' 等ハスベテ O ヲ過ギルコトヲ知ル．(コノ場合ニハ兩形ハ一般ニ合同デナイガ,シカシ合同ナルコトモアル．下圖ニツイテ考ヘヨ.)



本定理ニ於ケルガ如クニ置カレタトキハ,相似多角形 $ABCD\ldots\ldots$ ト $A'B'C'D'\ldots\ldots$ トハ**相似ノ位置ニアル**トイヒ,點 O ヲ**相似ノ中心**トイフ．圖ニハ二ツノ相似五角形 $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ ニツイテ二種ノ相似ノ位置ヲ示ス．コノ圖ニ於テ $ABCDE$ ハ $A'B'C'D'E'$ ノ擴大圖デ,從ツテ後者ハ前

者ノ縮小圖デアル．斯クノ如キ二ツノ圖形ノ一方カラ他方ニ移ルコトヲ**相似變換**トイフ．

[系] 二ツノ n 角形 $A_1A_2A_3……A_n$ ト $B_1B_2B_3……B_n$ トニ於テ，

$\angle A_2=\angle B_2$,　$\angle A_3=\angle B_3$,　……,　$\angle A_{n-1}=\angle B_{n-1}$,

$A_1A_2:B_1B_2=A_2A_3:B_2B_3=……=A_{n-1}A_n:B_{n-1}B_n$

ナルトキハ，兩形ハ互ニ相似デアル．

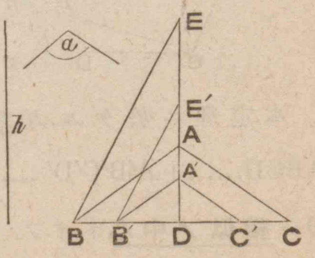
（本定理ニ於ケル如ク兩形ヲ置イテ見ヨ．）

[注意] 普通ノ定義ニ於テハ二ツノ多角形ガ相似ナル條件トシテ，互ニ等角ナルコトト總テノ對應邊ノ比ガ相等シイコトトヲ擧ゲテアルケレドモ，コノ系ニヨツテ見レバソノ條件ヲ稍少クスルコトガ出來ル．

3. 相似法

[作圖題] 二等邊三角形ノ高サト等邊ノ一ツトノ和及ビ頂角ヲ知ツテソノ三角形ヲ作レ．

線分 h 及ビ角 α ガ與ヘラレタトキ，頂角ガ α デ，等邊ノ一ツト高サトノ和ガ h ニ等シイ二等邊三角形ヲ作ラウトスル．



[作圖] 先ヅ頂角 A' ガ α ナル任意ノ二等邊三角形 $A'B'C'$ ヲ作リ，A' カラ底邊 $B'C'$ ニ垂線 $A'D$ ヲ引ク．次ニ $A'D$ ノ A' ヲ通シテノ延長上ニ

$$A'B'=A'E'$$

ナルヤウニ點 E' ヲ，又

$$h=DE$$

ナルヤウニ點 E ヲ取ル．E ヲ過ギリ $E'B'$ ニ平行ナル直線ヲ引キ $B'C'$（又ハソノ延長）トノ交點ヲ B トスル．點 B ヲ過ギリ $B'A'$ ニ平行ナル直線ヲ引キ DE トノ交點ヲ A トシ，更ニ A 點ヲ過ギリ $A'C'$ ニ平行ナル直線ヲ引キ $B'C'$（又ハソノ延長）トノ交點ヲ C トスレバ，三角形 ABC ハ求メル二等邊三角形デアル．

[證明][吟味] 學生自ラコレヲ試ミヨ．

上ノ解法ノ如ク先ヅ求メル圖形ト相似ナル圖形ヲ作リ，コレヨリ所要ノ圖形ヲ得ル方法ヲ**相似法**トイフ．

例題

1. 同ジ邊數ヲモツ正多角形ハ互ニ相似デアル．
2. 二ツノ平行四邊形ニ於テ一角ガ相等シク，コレヲ夾ム邊ガ比例ヲナストキハ，兩形ハ相似デアル．
3. 多角形 $A_1A_2……A_n\backsim B_1B_2……B_n$ ナルトキ，對角線 A_1A_k 及ビ B_1B_k（k ハ 3 カラ $n-1$ マデノ間ノ任意ノ整數）ヲ引イテ兩形ヲ各二ツニ分ケレバ，

$$A_1A_2……A_k\backsim B_1B_2……B_k,$$
$$A_1A_k……A_n\backsim B_1B_k……B_n.$$

4. 二ツノ相似多角形ノ周圍ノ比ハ一雙ノ對應邊ノ比ニ等シイ.

5. 互ニ裏向キデナイ二ツノ合同ナル三角形ヲ,廻轉ノミニヨツテ相合セシメヨ.

6. 底邊ト等邊トノ和(又ハ差)及ビ頂角ヲ知ツテ二等邊三角形ヲ作レ.

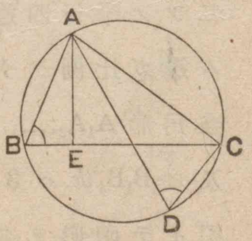
7. 一定直線ニ平行線ヲ引キ與ヘラレタ三角形ノ二邊ト交ハラシメ,一雙ノ對應部分ノ和(又ハ差)ヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ.

8. 與ヘラレタ三角形ニ相似ナル三角形ヲ作リ,ソノ外接圓ノ半徑ヲ與ヘラレタ線分ニ等シカラシメヨ.

4. とれみーノ定理

定理 二. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ,一ツノ頂點カラ對邊ニ引イタ高サトコノ頂角ヲ夾ム二邊トノ第四比例項デアル.

AD ヲ $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ直徑トシ, AE ヲ BC ニ引イタ高サトスレバ,



$$AE : AB = AC : AD.$$

證明 $\triangle ABE$ ト $\triangle ADC$ トニ於テ,

$$\angle B = \angle D,$$

$$\angle AEB = \angle ACD (=\text{直角}).$$

故ニ $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$.

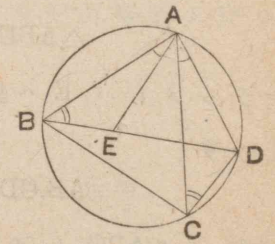
ヨツテ $AE : AB = AC : AD$.

定理 三. 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ,對角線ノ包ム矩形ニ等シイ.

(コレヲとれみー(Ptolemy)ノ定理トイフ.)

ABCD ヲ圓ニ内接スル四邊形トスレバ,

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$



證明 BD 上ニ一點 E ヲ取リ,

$$\angle BAE = \angle CAD$$

ナラシメル. 然ルトキハ,コレト

$$\angle ABD = \angle ACD$$

トカラ, $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$. (1)

從ツテ $AB : AC = BE : CD$.

故ニ $AB.CD = AC.BE$. (2)

次ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle AED$ トニ於テ

$\angle BAC = \angle EAD$, 〔作圖ニヨル〕

$AB : AC = AE : AD$. 〔(1)ニヨル〕

故ニ $\triangle ABC \backsim \triangle AED$.

從ツテ $BC : ED = AC : AD$.

故ニ $AD.BC = AC.ED$. (3)

(2) ト (3) トカラ

$$AB.CD+AD.BC=AC.BE+AC.ED$$
$$=AC(BE+ED)$$
$$=AC.BD.$$

系 1. 圓ニ内接シナイ四邊形ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ,ソノ對角線ノ包ム矩形ヨリ大デアル.

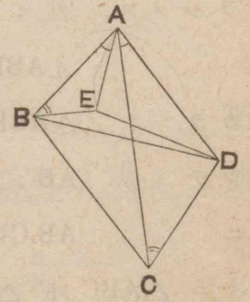
(略解) 圓ニ内接シナイ四邊形 ABCD ニ於テ AB ニツキソノ形ノ側ニ點 E ヲトリ,

$$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$$

ナラシメレバ, E ハ對角線 BD 上ニナイ.

而シテ

$$AB.CD=AC.BE. \quad (1)$$



次ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle AED$ ニ於テ

$$\angle BAC=\angle EAD,$$
$$AB : AC=AE : AD.$$

故ニ
$$\triangle ABC \backsim \triangle AED.$$

而シテ
$$AD.BC=AC.ED. \quad (2)$$

(1) ト (2) トカラ

$$AB.CD+AD.BC=AC.BE+AC.ED$$
$$=AC(BE+ED).$$

然ルニ
$$BE+ED>BD.$$

ヨツテ
$$AB.CD+AD.BC>AC.BD.$$

系 2. 對邊ノ包ム矩形ノ和ガ對角線ノ包ム矩形ニ等シイ四邊形ハ圓ニ内接スル.

例　　題

1. 正三角形ノ外接圓ノ周上ノ一點カラ三頂點ニ至ル三ツノ距離ノ中デ,最大ナルモノハ他ノ二ツノ和ニ等シイ.

2. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ガ BC 及ビ外接圓ト交ハル點ヲ夫々 D 及ビ E トスレバ,

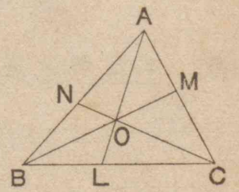
$$AB.AC=AD.AE.$$

　又 $\angle A$ ノ外角ノ二等分線ニツイテハ如何.

3. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ,ソノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハソノ四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シイ.

5. せばノ定理

定理 四. 三角形 ABC ノ平面上ノ任意ノ點ヲ O トシ,直線 AO, BO, CO ガ夫々邊 BC, CA, AB 又ハソレラノ延長ト交ハル點ヲ L, M, N トスレバ,



$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

(コレヲせば(Ceva)ノ定理トイフ.)

証明　$\triangle ALB$ ト $\triangle ALC$ トハ A ヲ過ギル共通ノ高サヲモツカラ，

$$\frac{BL}{LC}=\frac{\triangle ALB}{\triangle ALC}. \qquad (1)$$

同樣ニ　$\triangle OLB$ ト $\triangle OLC$ トカラ

$$\frac{BL}{LC}=\frac{\triangle OLB}{\triangle OLC}. \qquad (2)$$

(1),(2) カラ

$$\frac{BL}{LC}=\frac{\triangle ALB-\triangle OLB}{\triangle ALC-\triangle OLC}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC},$$

卽チ

$$\frac{BL}{LC}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}. \qquad (3)$$

同樣ニシテ

$$\frac{CM}{MA}=\frac{\triangle BOC}{\triangle BOA}, \qquad (4)$$

$$\frac{AN}{NB}=\frac{\triangle COA}{\triangle COB}. \qquad (5)$$

(3)×(4)×(5) ヲ作レバ，

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}\cdot=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}\cdot\frac{\triangle BOC}{\triangle BOA}\cdot\frac{\triangle COA}{\triangle COB}$$
$$=1.$$

系　本定理ノ逆モ眞デアル.

例　題

1. $\triangle ABC$ ノ邊 AB 上ニ點 X ヲ，AC 上ニ點 Y ヲトリ，

$$AX : XB=AY : YC$$

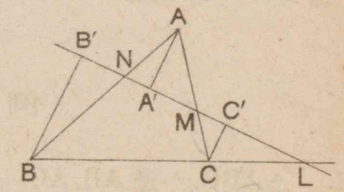
ナラシメ，BY ト CX トノ交點ヲ O トスレバ，AO ハ邊 BC ノ中點ヲ過ギル.

2. $\triangle ABC$ ノ内接圓ガ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスレバ，直線 AD, BE, CF ハ同一點ヲ過ギル.

3. 前問ニ於テ $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ 内ノ傍接圓ガ BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスレバ如何.

6.　めねらうすノ定理

定理　五.　三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 又ハソレラノ延長ト一直線トノ交點ヲ夫夫 L, M, N トスレバ，



$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

(コレヲめねらうす(Menelaus)ノ定理トイフ.)

証明　頂點 A, B, C カラ直線 LMN ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 A′, B′, C′ トスル. 然ルトキハ BB′ ト CC′ トハ平行デアルカラ，

$$\frac{BL}{LC}=\frac{BB'}{CC'}. \qquad (1)$$

同樣ニシテ

$$\frac{CM}{MA}=\frac{CC'}{AA'}, \qquad (2)$$

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AA'}{BB'}. \qquad (3)$$

(1)×(2)×(3) ヲ作レバ,

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{AA'}\cdot\frac{AA'}{BB'}$$

$$=1.$$

系 本定理ノ逆モ眞デアル.

注意 せばノ定理ニ於テハL, M, Nハ全部邊上ニアルカ又ハ二ツダケ邊ノ延長上ニアル. コレニ反シテめねらうすノ定理ニ於テハ一ツ又ハ三ツガ延長上ニアル. コレガ兩定理ノ重要ナル相違點デアル.

例 題

1. △ABC ノ邊 AB, AC 上ニ夫々點 P, Q ヲトリ, AP=2PB, AQ=$\frac{1}{2}$QC ナラシメレバ,直線 PQ ハ邊 BC ヲ如何ナル比ニ分ツカ.

2. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トシ, EF ト AD トノ交點ヲ P, CP ト AB トノ交點ヲ Q トスレバ, AQ : AB=1 : 3.

3. △ABC ノ內接圓ガ邊 BC, CA, AB ト切スル點ヲ夫々 D, E, F トシ,直線 EF ト BC, FD ト CA, DE ト AB トノ交點ヲ夫々 P, Q, R トスレバ, AR : BR=AE : BD. 又 P, Q, R ハ一直線上ニアル.

第二章 軌 跡

7. 定理ノ裏及ビ對偶

一ツノ定理

「A=B ナラバ, C=D デアル」 (1)

ガアルトキ,コレニ對シテ

「C=D ナラバ, A=B デアル」 (2)

ヲソノ**逆**トイフコト及ビ定理ノ逆ハ必ズシモ眞デナイコトハ既ニ知ルトコロデアル.

今モシ(1)ノ假設及ビ終結ヲ共ニ否定シテ

「A=B デナケレバ, C=D デナイ」 (3)

トスルトキハ,コレヲ(1)ノ**裏**トイフ.

一ツノ定理ノ裏ハ必ズシモ眞デナイ. ソノ眞デアルヤ否ヤハ別ニ考究セネバナラヌ.

例ヘバ

「一ツノ四邊形ガ平行四邊形ナラバ,ソノ對角線ハ各他ヲ二等分スル」 (4)

ハ眞デ,ソノ裏ノ

「一ツノ四邊形ガ平行四邊形デナケレバ,ソノ對角線ハ各他ヲ二等分シナイ」

モ亦眞デアル. コレニ反シテ

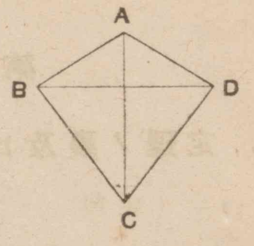
「一ツノ四邊形ガ矩形ナラバ,ソノ對角線ハ相等シイ」

ハ眞デアルケレドモ,ソノ裏ノ

「一ツノ四邊形ガ矩形デナケレバ,ソノ對角線ハ相等シク

ナイ」

ハ必ズシモ眞デハナイ.（圖ヲ見ヨ.）



次ニ(1)ノ假設ト終結トヲ交換スルト同時ニ共ニ否定スルトキハ

「C=Dデナケレバ, A=Bデナイ」(5)

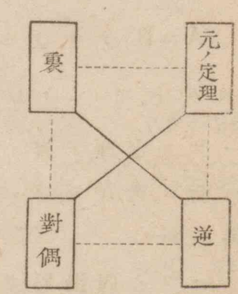
トナル. コレヲ(1)ノ**對偶**トイフ. 對偶ハ卽チ逆ノ裏,裏ノ逆デアル.

一ツノ定理ノ對偶ハ常ニ眞デアル.

例ヘバ(4)ノ對偶ハ

「對角線ガ各他ヲ二等分シナイ四邊形ハ平行四邊形デナイ」デ,コレハ明カニ眞デアル.

何トナレバ,モシ平行四邊形デアルトスレバ,(4)ニヨツテソノ對角線ガ各他ヲ二等分シ假設ニ反スルカラデアル.



モトノ定理トソノ逆,裏及ビ對偶ノ關係ハ圖ニ示スガ如クデアル,圖中點線デ連結シタ二ツハ必ズシモ兩立シナイ關係ヲ表ハシ,實線デ連結シタ二ツハ必ズ兩立スル關係ヲ表ハス.

例題

「とれみーノ定理」ノ逆,裏及ビ對偶ヲ述べ,ソノ眞否ヲ考ヘヨ.

8. 必要ナル條件,十分ナル條件

或ルコトガ成立スルタメニ必ズ滿足サレナケレバナラヌ條件ヲ**必要ナル條件**トイフ.

又或ル條件ガ滿足サレレバソノコトガ必ズ成立スルトキハ,ソノ條件ヲ**十分ナル條件**トイフ.

例 1. 二ツノ圓ノ中心ヲ O, O', ソノ半徑ヲ夫々 r, r' トスレバ,兩圓ガ外切スルタメニハ必ズヤ

$$OO'=r+r' \qquad (1)$$

ナル條件ガ滿足サレナケレバナラヌ. 故ニ(1)ハコノ二ツノ圓ガ外切スルタメノ必要ナル條件デアル.

又逆ニ(1)ナル條件ガ滿足サレルトキハ二ツノ圓 O, O' ハ必ズ外切スル. 故ニ(1)ハ又コノ二ツノ圓ガ外切スルタメノ十分ナル條件デアル.

コレヲマトメテ次ノ如クニイフコトガ出來ル.

「二ツノ圓ガ外切スルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ,兩圓ノ中心ノ間ノ距離ガ兩半徑ノ和ニ等シイコトデアル.」

例 2. 前例ノ二ツノ圓ニ於テ,モシ兩圓ガ相交ハルトスレバ,

$$OO'<r+r' \qquad (2)$$

及ビ

$$OO'>r\sim r' \qquad (3)$$

ナル條件ガ滿足サレナケレバナラヌ. 故ニ(2)及ビ(3)ハ何レモ必要ナル條件デアル.

ケレドモ(2)ノミデ(3)ヲ伴ハナイトキハOO'ハ$r\sim r'$ニ等シイコトモ,又ハコレヨリ小ナルコトモ起リ得ル,從ツテ兩圓ハ必ズシモ相交ハルトハ限ラナイ. 故ニ(2)ダケデハ兩圓ガ相交ハルタメノ十分ナル條件デハナイ.

同樣ニ,(3)ダケデモ十分ナル條件デハナイ.

コレニ反シテ(2)ト(3)トガ同時ニ滿足サレルトキハ兩圓ハ確カニ相交ハル. 故ニ(2)ト(3)トヲ合セテ始メテ十分ナル條件トナルノデアル.

例題

1. 四角形ガ圓ニ內接スルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ一雙ノ相對スル角ガ補角ヲナスコトデアル.
2. 四邊形ガ圓ニ外接スルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求メヨ.
3. 二直線 l, m ガ他ノ一直線 g ト交ハルトキ, l, m ガ平行ナルタメニ必要ナル條件ヲ(例ヘバ同位角,錯角等ニ注目シテ)求メヨ. 又十分ナル條件ハ如何.

9. 軌跡

圓周上ノ點ハ皆ソノ中心カラ半徑ニ等シイ距離ニアル. 逆ニ,ソノ中心カラ半徑ニ等シイ距離ニアル點ハ皆

圓周上ニアル. 故ニ今一定點カラ與ヘラレタ距離ニアル點ヲスベテ含ミ,然ラザル點ハ一ツモ含マヌヤウナ圖形ハ何カト考ヘレバ,ソレハソノ定點ヲ中心トシ,與ヘラレタ距離ニ等シイ半徑ヲモツ圓周デアル. 斯クノ如ク一般ニ與ヘラレタ條件ニ適スル點ヲスベテ含ミ,然ラザル點ハ一ツモ含マヌヤウナ圖形ヲ考ヘルコトノ必要ハ屢々アル. ヨツテ次ノ定義ヲ設ケル.

定義　或ル圖形上ノ點ハ皆與ヘラレタ條件ニ適シ,又逆ニソノ條件ニ適スル點ハ皆ソノ圖形上ニアルトキハ,ソノ圖形ヲ稱シテソノ條件ニ適スル點ノ**軌跡**トイフ.

軌跡トイフ語ヲ用ヰテ圓周ニ關スル上ノ事實ヲイヒ表ハセバ次ノ定理ヲ得ル.

定理　六.　定點カラ定距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ點ヲ中心トシソノ定距離ニ等シイ半徑ヲモツ圓周デアル.

軌跡ノ意味ヲ更ニ考ヘ直シテ見レバ次ノ如クニモイフコトガ出來ル. 今一ツノ點ガ平面上デ變位スルトキ,モシコレニ或ル條件ヲツケレバ(例ヘバ一定點カラ常ニ一定ノ距離ニアルト定メルガ如クデアル),ソノ點ハコレガタメニ制限サレテ或ル特殊ノ線又ハ平面ノ一部分ノ上ニノミ變位シ得ルコトトナル. コノ限ラレタ變位ノ

範圍ガ卽チ上ニ定義シタ軌跡トイフモノニ當ル. 故ニ或ル條件ニ適スル點ノ軌跡トハ,一ツノ點ガ常ニソノ條件ニ適シツツ變位スルトキ,ソノ點ノ通過シ得ルスベテノ範圍ヲイフト考ヘテモ宜イ.

軌跡ハ一ツノ線(直線又ハ曲線)ナルコトモアリ,或ハソノ一部分ナルコトモアリ,或ハ幾ツカノ線ノ集マツテ出來タ圖形ナルコトモアル. 又條件ノ如何ニヨツテハ平面ノ全部或ハソノ一部分トナルコトモアル.

10. 軌跡ノ斷定法

定理六ニ於テ軌跡ガ圓周ナルコトヲ斷定スルニハ定義ニ從ツテ次ノ二ツノ事實ニヨツタ.

(1) 條件ニ適スル點ハ皆ソノ圖形上ニアル.

(2) ソノ圖形上ニアル點ハ皆條件ニ適スル.

但シココニイフ條件トハ「定點カラ定距離ニアル」トイフ條件ノコトデ,圖形トハ「ソノ定點ヲ中心トシ,ソノ定距離ヲ半徑トスル圓周」ノコトデアル.

(1)ト(2)トハ互ニ逆デアル. コノ兩方ヲ證明シナケレバ軌跡ハ完全ニ決定サレナイ. 何トナレバ(1)ノミデハ條件ニ適シナイ點モ同ジ圖形ノ上ニ存在スルカモ知レヌトイフ疑ガアル,從ツテ軌跡ハソノ圖形ノ全部ナルカ一部ナルカ不明デアル. 又(2)ノミデハソノ圖形以外ニモナホ條件ニ適スル點ガ存在スルカモ知レヌトイフ疑

ガアル,從ツテ軌跡ハソノ圖形ダケニ止マルヤ否ヤ不明デアル. 故ニ(1),(2)ハ兩方トモ省略スルコトハ出來ヌ.

併シ一般ニ或ル定理ヲ證明スル代リニソノ對偶ヲ證明シテモ宜イカラ(第7節),定理六ヲ證明スルニハ(1)ト(2)トヲ證明スル代リニソノ一方又ハ兩方ノ對偶ヲ取ツテコレヲ證明シテモ宜イ. (1),(2)ノ對偶ハ夫々次ノ如クデアル.

(1′) ソノ圖形上ニナイ點ハ條件ニ適シナイ.

(2′) 條件ニ適シナイ點ハソノ圖形上ニナイ.

コレニヨツテ見レバ定理六ニ限ラズ,一般ニ或ル圖形ガ或ル條件ニ適スル點ノ軌跡デアルコトヲ證明スルニハ次ノ四種ノ方法ガアルコトガワカル.

〔A〕 (1) ト (2) トヲ證明スル法.

〔B〕 (1) ト (2′) トヲ證明スル法.

〔C〕 (1′) ト (2) トヲ證明スル法.

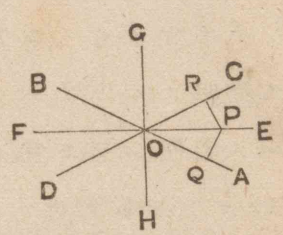
〔D〕 (1′) ト (2′) トヲ證明スル法.

次ニ上ニ述ベタ各種ノ證明法ノ例ヲ示ス.

定理 七. 二ツノ相交ハル定直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ二直線ノナス二雙ノ對頂角ノ各ヲ二等分スル二ツノ直線デアル.

AB, CD ヲ O ニ於テ相交ハル二ツノ定直線トスル. 然

ルトキハコノ二直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ二雙ノ對頂角 AOC, BOD 及ビ COB, AOD ノ各ヲ二等分スル二ツノ直線 EOF 及ビ GOH デアル.



證明　〔A〕ノ方法ニヨツテ證明スルト下ノ如クデアル.

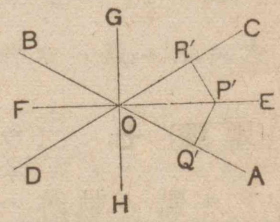
(1)　今二直線 AOB, COD カラ等距離ニアル一點ガアルトシ,コレヲ P ト名ヅケル. 然ルトキハ P カラコレラノ二直線ニ夫々引イタ垂線 PQ, PR ハ相等シク,從ツテ

$$\triangle POQ \equiv \triangle POR.$$

故ニ　$\angle POQ = \angle POR.$

卽チ P ハ二直線 AOB, COD ノナス角ノ二等分線 EOF. GOH ノ中ノ何レカ一ツノ上ニアル.

(2)　逆ニ EOF, GOH ノ中ノ何レカ一ツノ上ニ任意ノ一點 P′ ヲ取リ,コレカラ二直線 AOB, COD ニ夫々垂線 P′Q′, P′R′ ヲ引クトキハ



$$\triangle P'OQ' \equiv \triangle P'OR'.$$

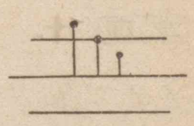
從ツテ　$P'Q' = P'R'.$

故ニ二直線 AOB, COD カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ二直線 EOF, GOH デアル.

定理 八. 定直線カラ定距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ直線カラソノ定距離ニアル平行ナル二直線デアル.

證明　〔B〕ノ方法ニヨツテ證明スルニハ次ノ二ツノコトヲイヘバ宜イ.

(1)　定直線カラ定距離ニアル點ハ,斯クノ如キ二ツノ平行線ノ中ノ何レカ一ツノ上ニアル.



(2′)　ソノ定直線カラソノ定距離ニナイ點ハ斯クノ如キ平行線ノ何レノ上ニモナイ.

(學生自ラコノ證明ヲ完成セヨ.)

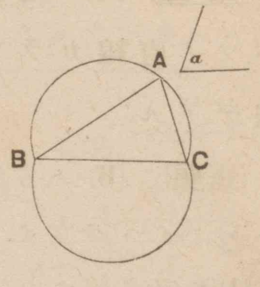
定理 九. 三角形ノ底邊ノ位置及ビ大キサガ一定シ,且頂角ノ大キサガ一定ナルトキ,ソノ頂點ノ軌跡ハ底邊ノ上ニ立チ與ヘラレタ頂角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル.

三角形 ABC ニ於テ底邊 BC ノ位置及ビ大キサガ一定シ,且頂角 A ノ大キサガ一定角 α ニ等シイトスル. 然ルトキハ頂點 A ノ軌跡ハ BC ノ兩側ニ於テ夫々ソノ上ニ立チ $\angle\alpha$ ニ等シイ角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル.

證明　〔C〕ノ方法ニヨツテ證明スルニハ次ノ二ツノコトヲイヘバ宜イ. (學生自ラソノ證明ヲ完成セヨ.)

(2) 斯クノ如キ弓形ノ弧上ニ任意ノ一點ヲ取レバ,

$\angle BAC = \angle \alpha$.



(1′) 斯クノ如キ弓形ノ弧上ニナイ任意ノ點ヲAトスレバ,

$\angle BAC \neq \angle \alpha$.

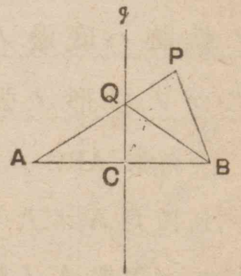
定理 十. 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル.

A,Bヲ二定點トスル. 然ルトキハコノ二點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,線分ABノ垂直二等分線gデアル.

證明 〔D〕ノ方法ニヨツテ證明スルト次ノ如クデアル.

(1′) gノ外部ニ任意ノ一點Pヲ取リPA及ビPBヲ結ベバ,何レカ一方ハ必ズgト交ハル,ソノ交點ヲQトスル. 然ルトキハ

$QA = QB$.



從ツテ $PA \gtrless PB$.

故ニPハ條件ニ適シナイ.

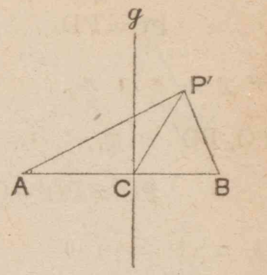
(2′) 逆ニ $P'A \gtrless P'B$ ナル如キ一點P′ヲ取リ,コレト線分ABノ中點Cトヲ結

ベバ,$\triangle P'CA$, $\triangle P'CB$ニ於テ

$CA = CB$, $P'C$ハ共通, $P'A \gtrless P'B$.

故ニ $\angle P'CA \gtrless \angle P'CB$.

故ニ$P'C$ハABニ垂直デナイ. ヨツテP′ハgノ上ニナイ.



故ニA,Bカラ等距離ニアル點ノ軌跡ハgデアル.

11. 軌跡ノ索メ方

前節ノ諸定理ニ於ケルガ如キ簡單ナル軌跡ハ最初カラ直チニコレヲ知ルコトガ出來ルケレドモ,條件ガ複雜ナルモノニナルトソノ軌跡ノ圖形ヲ推知スルコトガ困難ナル場合ガ多イ. ソノ場合ニ軌跡ヲ索メルニハ,先ヅ條件ニ適スル一點ガアルトスレバソノ點ハ如何ナル性質ヲモツカヲ調ベ,從ツテ如何ナル線上ニナケレバナラヌカヲ推定スル. 而シテ後,逆ニ今考ヘタ線上ニ任意ノ一點ヲ取ツテソレガ實際條件ニ適スルヤ否ヤヲ考ヘル. 定理七ノ證明ハコノ手段ニヨツタモノデアル.

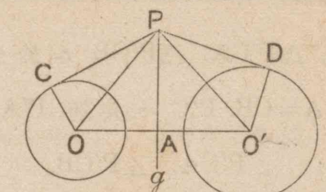
例 一點カラ二定圓ニ引イタ切線ノ切點マデノ長サガ相等シイトキ,ソノ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

(コノ軌跡ヲコノ二圓ノ**根軸**トイフ.)

解 二定圓ヲO, O′,點Pカラコレラニ引イタ切線ノ切點ヲ夫々C,Dトシ,

$PC=PD \qquad (1)$

デアルトスル.



PO, PO' ヲ結ベバ,

$$PC^2=PO^2-OC^2, \quad 又 \quad PD^2=PO'^2-O'D^2.$$

故ニ (1) ニヨリ

$$PO^2-OC^2=PO'^2-O'D^2. \qquad (2)$$

今 $OC<O'D$ トスレバ, (2) カラ

$$PO'^2-PO^2=O'D^2-OC^2. \qquad (3)$$

又 P カラ OO' ニ下シタ垂線ノ足ヲ A トスレバ,

$$PO'^2-PO^2=AO'^2-AO^2. \qquad (4)$$

故ニ (3), (4) カラ

$$AO'^2-AO^2=O'D^2-OC^2.$$

コレヲ變形スレバ,

$$OO'(AO'-AO)=O'D^2-OC^2. \qquad (5)$$

ココニ OO', $O'D$, OC ハ何レモ定量デアルカラ, (5) カラ

$$AO'-AO=定量.$$

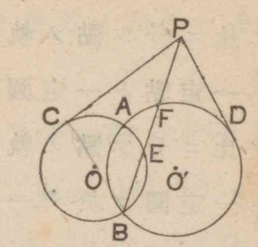
従ッテ A ハ定點ナルコトヲ知ル. ヨッテ點 P ハソノ定點 A ヲ過ギリ定直線 OO' ニ垂直ナル定直線 g 上ニアル.

逆ニ g 上ノ點ガ何レモ條件ニ適スルコトモ容易ニ證明サレル. (學生自ラコレヲ試ミヨ.)

故ニ求メル軌跡ハ直線 g デアル.

注意 二圓 O, O′ ガ相交ハルトキハ, ソノ交點ヲ A, B トシ,

直線 PB ト圓 O, O′ トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ,



$$PE.PB=PC^2, \quad 又 \quad PF.PB=PD^2.$$

故ニ (1) ニヨリ

$$PE.PB=PF.PB,$$

即チ $\qquad PE=PF.$

故ニ點 E, F ハ共ニ點 A ト相一致シ, g ハ直線 AB トナル. コノ場合ニハ g ノ中兩圓ノ内部ニアル部分ハ軌跡カラ除外スベキデアル.

系 **1.** 中心ガ一直線上ニナイ三圓ノ二ツヅツノ三ツノ根軸ハ一點ヲ過ギル.

(ソノ點ヲコノ三圓ノ**根心**トイフ.)

系 **2.** 互ニ全ク他ノ外ニアル二圓ノ二ツノ共通外切線ト二ツノ共通内切線トノ各切點間ノ中點ナル四點ハ一直線上ニアル.

例題

1. 一定點ヲ過ギリ, 定長ノ半徑ヲモツ圓ノ中心ノ軌跡如何.
2. 一定直線上ノ一定點ニ於テコレニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何.
3. 相交ハル二定直線ノ各ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何. モシ二定直線ガ平行ナラバ如何.
4. 一定點ト一定直線上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ定

比ニ分ツ點ノ軌跡如何.

5. 一定點ト一定圓周上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡如何.

6. 一定圓ニ於テ,一定點ヲ過ギル弦ノ中點ノ軌跡如何.

7. 一定圓周上ノ二定點ヲ A, B トシ,同ジ圓周上ニ任意ノ一點 C ヲ取リ,弦 AC ヲ C ヲ通シテ延長シソノ上ニ CB=CD ナルヤウニ點 D ヲ取ルトキ, D ノ軌跡如何.

8. AB, CD ハ一定圓ニ於ケル二ツノ弦デ, AB ハ位置及ビ大キサガ定マリ, CD ハ大キサノミ定マツテキルトキ,弦 AC, BD (又ハソノ延長)ノ交點ノ軌跡如何.

9. 定長ノ線分ノ兩端ガ,垂直ニ相交ハル二定直線上ニ一ツヅツアツテ動クトキ,ソノ線分ノ中點ノ軌跡如何.

10. 相交ハル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡如何. モシ二定直線ガ平行ナラバ如何.

11. 三角形ノ底邊ノ位置及ビ大キサト頂角ノ大キサトガ定ツテキルトキ,ソノ三角形ノ次ノモノノ各軌跡如何.

(1) 內心 (2) 重心

(3) 頂角ノ內部ニアル傍心

(4) 垂心

12. 一點カラ二定點ニ至ル距離ノ平方ノ和(又ハ差)ガ一定ナルトキ,ソノ點ノ軌跡如何.

13. 二定圓ヲ O, O′ トシ,任意ノ圓ヲ畫キ圓 O ト P, Q, 圓 O′ ト R, S ニ於テ交ハラシメ,二直線 PQ, RS ノ交點 A カラ, OO′ ニ垂線 AB ヲ下セバ, AB ハ二圓 O, O′ ノ根軸デアル.

12. 軌跡ノ交ハリ

作圖題ハ結局二ツノ條件ヲ兼ネ備ヘタ點ヲ求メル問題ニ歸着スルモノガ多イ.

例ヘバ「與ヘラレタ三點ヲ過ギル圓ヲ畫ケ」トイフ作圖題ヲ解クニハ,ソノ圓ノ中心ヲ求メレバ宜イ. 故ニ換言スレバ「三定點カラ等距離ニアル點ヲ求メヨ」トイフ問題ト同ジコトデアル. 今ソノ三定點ヲ A, B, C トスレバ,求メル點ハ

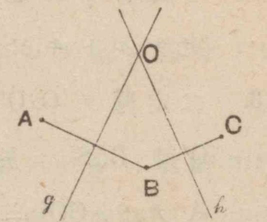
(1) A, B カラ等距離ニアルコト

(2) B, C カラ等距離ニアルコト

ノ二條件ヲ兼ネ備ヘタ點デナケレバナラヌ. (A, C カラ等距離ニアルコトハ(1)ト(2)トカラ當然ノ結果トシテ出テ來ルカラ特ニ列擧スルヲ要シナイ.)

サテ(1)ニ適スル點ノ軌跡ハ線分 AB ノ垂直二等分線 g デアルカラ,今求メル中心ハ g 上ニナケレバナラヌ.

同理ニヨツテ又中心ハ線分 BC ノ垂直二等分線 h ノ上ニモナケレバナラヌ. 結局求メル中心ハ g ト h トノ交點Oデナケレバナラヌ. 斯クシテ中心ヲ決定シ,ヨツテ求メル圓ヲ畫クコトガ出來ル.



一般ニ甲乙二ツノ條件ヲ兼ネ備ヘタ點ヲ求メルニハ,甲ノ條件ニ適スル點ノ軌跡ト,乙ノ條件ニ適スル點ノ軌跡トノ交ハリヲ求メレバ宜イ.

コノ方法ハ作圖題ヲ解クトキニ屢々利用サレルモノデアル.

例題

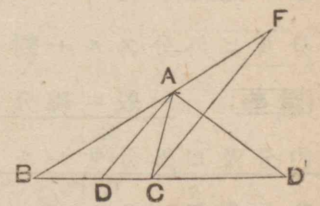
1. 三定點 A,B,C ガ與ヘラレテ, A,B カラ等距離ニ,且 C カラ與ヘラレタ距離ニアル點ヲ求メヨ.
2. 四定點 A,B,C,D カラ等距離ニアル一點ハ常ニ求メラレルカ.
3. 相交ハル二定直線ニ至ル距離ガ相等シク,且二定點カラ等距離ニアル點ヲ求メヨ.
4. 位置及ビ大キサノ定マツテヰル二ツノ線分 AB,CD ガアル. 今一點 P ヲ求メテ ∠APB ヲ定角 α ニ等シカラシメ,且 ∠CPD ヲ他ノ定角 β ニ等シカラシメヨ.

5. 二定點 A,B 及ビ一定直線 g ガ與ヘラレタトキ, g 上ニ一點 C ヲ取リ AC^2+BC^2 ヲ定平方ニ等シカラシメヨ.
6. 一定直線上ニ一點ヲ求メ,ソノ點カラ二定圓ニ引イタ切線ノ切點マデノ長サヲ相等シカラシメヨ.

13. 調和列點

定理 十一. 三角形ノ頂角及ビコレニ隣ル外角ノ二等分線ハ,夫々底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分及ビ外分スル.

三角形ABCニ於テ,頂角 A 及ビソノ外角ノ二等分線ガ底邊 BC 及ビソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 D, D′ トスレバ



$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC},\qquad \frac{BD'}{CD'}=\frac{AB}{AC}.$$

證明 C ヲ過ギリ AD ニ平行ニ CF ヲ引キ, BA ノ延長ト F ニ於テ交ハラシメレバ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{FA}.$$

而シテ $\angle AFC=\angle BAD$,

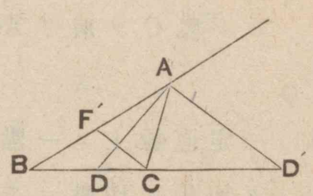
$\angle ACF=\angle DAC$.

然ルニ $\angle BAD=\angle DAC$.

故ニ　$\angle AFC = \angle ACF.$

從ツテ　$FA = CA.$

故ニ　$\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}.$



Cヲ過ギリD'Aニ平行線ヲ引キ,ABトF'ニ於テ交ハラシメレバ,外角ノ二等分線ノ場合モ同樣ニシテ證明サレル.但シAB=ACナルトキハ點D'ハ存在シナイ,コノ場合ダケハ本定理カラ除外スル.

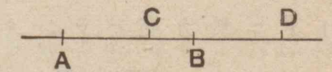
系　コノ定理ノ逆モ眞デアル.

上ノ定理ニ於ケル二點D,D'ハ線分BCヲ同一ノ比ニ内分及ビ外分スル一對ノ點デアル.

定義　一般ニ線分ABガ二點C,Dニヨツテ同ジ比ニ内分及ビ外分サレルトキハ,線分ABハC,Dニヨツテ**調和ニ分タレル**トイヒ,コノ四點A,B,C,Dヲ**調和列點**トイフ.

然ルニ　$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$

ナルトキハ



$$\frac{CB}{DB} = \frac{CA}{DA}$$

デアル.(更迭ノ理)

故ニABガC,Dニヨツテ調和ニ分タレルトキハ,CDハ又A,Bニヨツテ調和ニ分タレル.ヨツテAトB,Cト

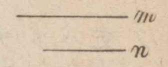
Dヲ各一對ノ**共軛點**トイフ.

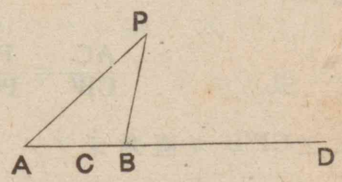
本書ニ於テハ調和列點ヲ呼ブニ,共軛ナル二點ヲ列ベテ,例ヘバ上圖ノ如キトキハ,調和列點A,B,C,Dノ如クニイフ.

定理　**十二.**　二定點カラノ距離ノ比ガ1ニ等シクナイ一定ノ値ヲモツヤウナ點ノ軌跡ハ,二定點ノ間ヲソノ比ニ内分及ビ外分スル一對ノ共軛點ヲ直徑ノ兩端トスル圓周デアル.

(コレヲあぽろにうす(Apollonius)ノ定理トイフ.)

A,Bヲ二定點トシ,線分ABヲ1ニ等シクナイ一定ノ比$m:n$ニ内分及ビ外分スル一對ノ共軛點ヲC及ビDトスル.

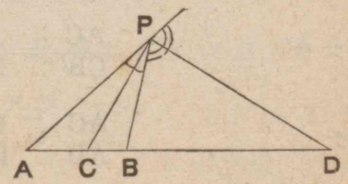




然ルトキハ

$$\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n}$$

ナル點Pノ軌跡ハCDヲ直徑トスル圓周デアル.



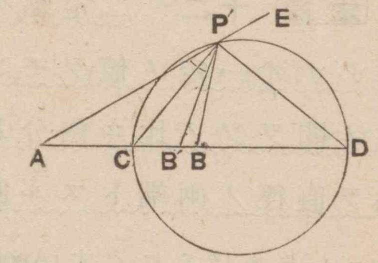
證明　今Pヲ條件ニ適スル一點トシ,PC,PDヲ結ベバ,コレラハ夫々∠APB及

ビソレニ隣ルソノ補角ノ二等分線デアル．故ニ $\angle CPB$ ト $\angle BPD$ ノ和,卽チ $\angle CPD$ ハ直角デアル．故ニ P ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアル．

次ニ逆ニ CD ヲ直徑トスル圓周上ニ一點 P' ヲ取ツタトキ

$$\frac{P'A}{P'B}=\frac{m}{n}$$

ナルコトヲ證明セネバナラヌ．



今 $\angle AP'C$ ニ等シク $\angle CP'B'$ ヲ直線 $P'C$ ノ反對ノ側ニ作リ, $P'B'$ ト AB 又ハソノ延長トノ交ハリヲ B' トスル．

然ルトキハ

$$\frac{AC}{CB'}=\frac{P'A}{P'B'}.$$

又 $\angle CP'D$ ガ直角デアルカラ, $P'D$ ハ $\angle AP'B'$ ニ隣ルソノ補角 $B'P'E$ ヲ二等分スルコトトナル．

故ニ $$\frac{AD}{B'D}=\frac{P'A}{P'B'}.$$

ヨツテ $$\frac{AC}{CB'}=\frac{AD}{B'D},$$

卽チ $$\frac{AC}{AD}=\frac{CB'}{B'D}. \qquad (1)$$

然ルニ假定ニヨリ

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD},$$

卽チ $$\frac{AC}{AD}=\frac{CB}{BD}. \qquad (2)$$

(1), (2) カラ $$\frac{CB'}{B'D}=\frac{CB}{BD}.$$

故ニ B, B' ハ實ハ同一點デアル．

從ツテ $$\frac{P'A}{P'B}=\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}.$$

故ニ $$\frac{P'A}{P'B}=\frac{m}{n}.$$

例　題

1. $\triangle ABC$ ニ於テ BC ノ中點ヲ D トシ, $\angle ADB$, $\angle ADC$ ノ二等分線ガ夫々 AB, AC ト交ハル點ヲ E, F トスレバ, EF ト BC トハ互ニ平行デアル．又コノ逆ハ如何．

2. 線分 AB ガ二點 C, D ニヨツテ調和ニ分タレルトキ, 線分 CD, AB ノ中點ヲ夫々 M, N トスレバ,

$$MA.MB=MC^2, \qquad NC.ND=NA^2.$$

3. 四點 A, C, B, D, ガコノ順ニ一直線上ニアリ,且 CD ノ中點 M ガ B ト D トノ間ニアツテ,

$$MA.MB=MC^2$$

ナラバ, A, B, C, D ハ調和列點ヲナス．(前問ノ逆)

4. 四點 A, B, C, D ガ調和列點ヲナストキ,線分 AC, AD, AB ノ長サヲ夫々 c, d, b トスレバ,

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{b}.$$

(コノコトヲ略シテ單ニ

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$$

トモ書ク.)

5. 四點 A, C, B, D ガ一直線上ニコノ順ニアツテ

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$$

ナルトキハ, A, B, C, D ハ調和列點ヲナス. (前問ノ逆)

6. 四點 A, B, C, D ガ調和列點ヲナストキ,ソノ直線外ノ任意ノ一點 P トコレラノ四點トヲ夫々結ビ, B ヲ過ギリ PA ニ平行ナル直線ト PC, PD トノ交點ヲ夫夫 L, M トスレバ, LB=BM デアル.

又コノ逆モ眞デアル.

7. 一點ヲ共有スル四直線ガ他ノ一直線ト交ハリ,ソノ交點ガ調和列點ヲナストキハ,他ノ如何ナル直線トノ交點モ調和列點ヲナス.

定義 カクノ如キ四直線ヲ**調和束線**トイフ.

8. △ABC ノ頂點 A, B, C カラ對邊ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トスルトキ, DF, DE, DA, DC ハ調和束線ヲナス.

9. 調和列點 A, B, C, D ト A′, B′, C′, D′ トニ於テ AA′, BB′ CC′ ガ同一點ヲ過ギルトキハ, DD′ モ亦同點ヲ過ギル.

10. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トスルトキ,角 A 及ビソノ外角ノ二等分線ガ直線 BC ト交ハル點ヲ P, Q トスレバ,線分 PQ ノ長サ如何.

11. 底邊,高サ(又ハ頂角)及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

12. 三定點カラノ距離ノ比ガ $l:m:n$ ナル點ヲ求メヨ.

第三章 線分ノ計算

14. 線分ノ計算

二線分 L, M ノ包ム矩形ヲ L.M デ表ハシ,又 L ヲ邊トスル正方形ヲ L^2 デ表ハセバ, L ト M トノ和ヲ邊トスル正方形ノ面積ニ關スル定理ハ次ノ如クニ表ハサレル.

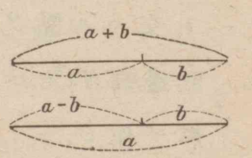
$$(L+M)^2=L^2+M^2+2.L.M.$$

卽チ線分ノ長サニツイテ恰モ數ニ關スル代數的公式ト同樣ノ關係ガ成立ツコトヲ知ル. 實際或ル程度マデハ數ト全ク同樣ノ法則ニ從ツテ線分ノ加減乘除等ヲ行フ

コトガ出來ルモノデアル．コレヲ**線分ノ計算**トイフ.

15. 四則及ビ開平

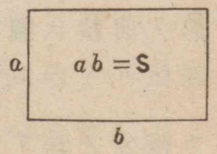
線分ノ四則及ビ開平ノ意味ヲ次ノ如クニ定義スル．但シ以下線分ノ長サノコトヲ略シテ單ニ線分ト稱シ,コレヲ a, b, c 等デ表ハスモノトシ,四則及ビ開平等ノ記號ハスベテ代數學ニ於ケルト同一ノモノヲ用キルコトトスル.



二ツノ線分ノ和トハソノ二ツヲ繼ギ足シテ得ル一ツノ線分ノコトデアル.

一ツノ線分カラ他ノ線分ヲ引イタ差トハ,ソレト後者トノ和ガ前者ニ等シクナルヤウナ一ツノ線分ノコトデアル．但シ前者ガ後者ヨリ小ナル場合ニハ引クコトガ出來ナイモノトスル,卽チ「負ノ線分」トイフモノハ本書ノ程度ニ於テハ考ヘナイコトトスル.

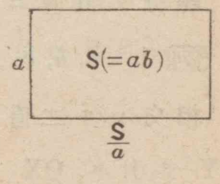
二ツノ線分ノ積トハソノ二ツガ包ム矩形ノ面積ノコトデアル．但シコレヲ圖ニ表ハストキニハ必ズシモ矩形トスルヲ要シナイ,コレト等積ナル任意ノ多角形* ヲ



*多角形デナイ形ノ面積ハ未ダ取扱ハナイカラココニハ多角形ト限ル.

以テコレニ代ヘテモ宜イ.

サテ二ツノ線分ノ積ハ一ツノ線分デナクシテ多角形ノ面積デアルカラ,掛ケ算ノ逆算法デアル割リ算ヲ考ヘルニ當ツテハ,ソノ被除數ニ相應スルモノハ一ツノ多角形ノ面積デ,除數ニ相應スルモノハ一ツノ線分デアルトセネバナラヌ．ヨツテ次ノ如ク定義スル.



一ツノ多角形ノ面積ヲ一ツノ線分デ割ツタ商トハ,ソレト後者(線分)トノ積ガ前者(多角形ノ面積)ニ等シクナルヤウナ一ツノ線分ノコトデアル.

以上ノ如ク定義サレタ線分ノ四則ニツイテハ次ノ(代數學ニ於ケルト同樣ナル)諸法則ガ成立スルコト明カデアル.

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba,$$
$$a+b+c=a+(b+c),$$
$$a(b+c)=ab+ac,$$
$$a(b-c)=ab-ac.$$

從ツテ又コレラカラ誘導サレル種々ノ代數的公式モ成立スル．但シ小ナル線分カラ大ナル線分ヲ引クコト,二ツヨリ多クノ線分ヲ相乘ズルコト(abc ノ如キ),面積ト線分トノ和又ハ差ヲ作ルコト($ab+c$ ノ如キ)等,スベテ意義ノナイモノハ避ケルモノトスル.

掛ケ算ノ特別ノ場合トシテ掛ケ合セル二ツノ線分ガ相等シイトキハ,ソノ積ハ卽チモトノ各**線分ノ平方**デアル.

逆ニ,一ツノ多角形ノ面積ガ與ヘラレタトキ,コレガ如何ナル線分ノ平方ナルカヲ求メル算法ヲ**開平**トイヒ,ソノ線分ヲ與ヘラレタ**面積ノ平方根**トイフ.

線分ノ計算ニ關スル二三ノ例ヲ次ニ示ス.

例 1. a, b, c ヲ知ツテ $\frac{ab}{c}$ ヲ求メヨ.

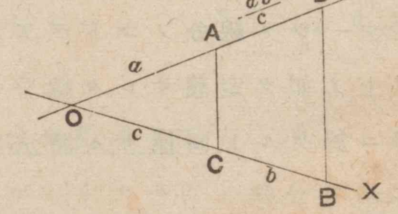
相交ハル二直線 OX, OY ヲ引キ, OX 上ニ

$OC=c,\quad CB=b$

ヲ取リ,又 OY 上ニ

$OA=a$

ヲ取リ,次ニ B ヲ過ギリ AC ニ平行ナル直線ヲ引キ,コレト OY トノ交點ヲ D トスル. AD ハ卽チ求メル線分デアル.



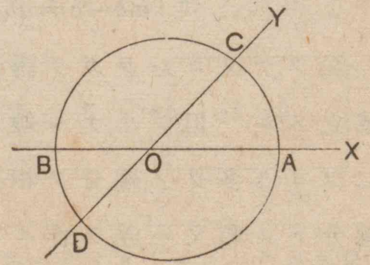
或ハ OX 上ニ O カラ互ニ反對ノ方向ニ

$OA=a,\quad OB=b$

ヲ取リ, OY 上ニ

$OC=c$

ヲ取リ,三點 A, C, B ヲ過ギル



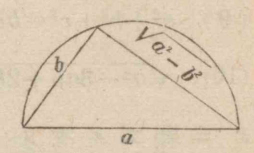
圓ト OY ノ O ヲ通シテノ延長トノ交點ヲ D トスレバ,

$$OD=\frac{ab}{c}.$$

例 2. $a, b\ (a>b)$ ヲ知ツテ

$$\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

ヲ求メヨ.



與ヘラレタ式ヲ變形スレバ,

$$\sqrt{(a+b)(a-b)}=\sqrt{a^2-b^2}.$$

故ニ斜邊ガ a, 他ノ一邊ガ b ナル直角三角形ヲ作レバ,ソノ第三邊ガ卽チ求メル線分デアル.

例 3. a ヲ知ツテ $\sqrt{2}a$ ヲ求メヨ.

與ヘラレタ式ヲ書キ直セバ,

$$\sqrt{2}a=\sqrt{a^2+a^2}.$$

故ニ直角ヲ夾ム二邊ガ共ニ a ナル直角三角形ノ斜邊(卽チ一邊ガ a ナル正方形ノ對角線)ヲ求メレバ宜イ.

例題

1. a, b, c ヲ知ツテ次ノ各計算ノ結果ヲ作圖ニヨツテ求メヨ.

(1) $3a+\frac{b^2}{c}$　　(2) $2a^2+b^2$

(3) $\sqrt{a(b-c)}$, 但シ $b>c$　　(4) a^2-ab+b^2

(5) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$　　(6) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(7)　$(a+b)^2-(a-b)^2$, 但シ $a>b$

(8)　$\sqrt{3}a+\sqrt{5}b$

(9)　$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

(10)　$\sqrt{a^2-3ab+2b^2}$, 但シ $a>2b$

2.　x ニ關スル次ノ一次方程式ヲ作圖ニヨツテ解ケ.

(1)　$ax-b^2=a^2$

(2)　$cx-b(a+x)=0$, 但シ $c>b$

16. 一元二次方程式ノ解法

數ニ關スル一元二次方程式ハ常ニ

$$x^2+px+q=0$$

ナル形ニ書クコトガ出來ル,ココニ x ハ未知數, p,q ハ既知數トスル. 而シテコレヲ解クコトハ代數學ニ於テ既ニ學ンダ所デアル.

今線分ノ計算ニツイテコレト同樣ナ問題ヲ考ヘルニ, x,p ヲ各一ツノ線分トスレバ, x^2 及ビ px ハ何レモ面積ヲ表ハスカラ, q ハ一ツノ面積ニ等シクナケレバナラヌ. ヨツテ q ノ代リニ q^2 ト書クコトトシ,コノ新シイ q ハ一ツノ線分ヲ表ハスモノトスル. 且又今考ヘル線分ノ計算ニ於テハ負ノ量ヲ考ヘナイカラ代數學ニ於ケル如ク p,q 等ノ文字ニ任意ニ正又ハ負ノ符號ヲ含マシメルコトハ出來ヌ. ヨツテ方程式ノ形ヲ

$$x^2\pm px\pm q^2=0$$

トシ,符號ノ四種ノ各組合セニツイテコノ方程式ガモツ正根ヲ求メルコトヲ考ヘル.

〔1〕　$$x^2+px+q^2=0.$$

コノ方程式ハ正根ヲモタナイコト明カデアル.

〔2〕　$$x^2-px+q^2=0.$$

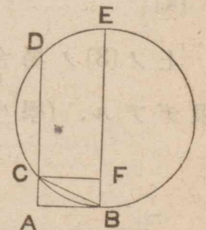
コレヲ書キ直セバ

$$x(p-x)=q^2.$$

ヨツテ次ノ如キ作圖ヲスル.

先ヅ　$AB=q$

ナル線分ヲ引キ,ソノ一端 B ニ於テコレニ切スル直徑 p ナル圓ヲ畫キ, A ニ於テ AB ニ垂直ニ引イタ直線トコノ圓周トノ交點ヲ C, D トスレバ, AC 及ビ AD ハ何レモ與ヘラレタ方程式ノ根デアル.



何トナレバ,

$$AC=x$$

トシ, C カラコノ圓ノ直徑 BE ニ垂線 CF ヲ引ケバ,

$$AC=BF$$

デ　$$BF.FE=BF(BE-BF)=CF^2,$$

卽チ　$$x(p-x)=q^2.$$

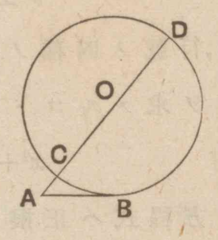
$AD=x$ トスルモ同樣ノ結果ヲ得ル. (但シ $2q>p$ ナラ

バ根ガナイ)

〔3〕　$x^2+px-q^2=0.$

コレヲ書キ直セバ

$$x(x+p)=q^2.$$



今　$AB=q$

ナル線分ノ一端Bニ於テコレニ切スル直徑 p ナル圓Oヲ畫キ,直線AOガコノ圓ト交ハル二ツノ點ノ中Aニ近イ方ヲC, 遠イ方ヲDトスレバ, ACガ求メル所ノ正根デアル. 何トナレバ

$$AC.AD=AC.(AC+CD)=AB^2.$$

故ニ　$AC=x$

トスレバ　$x(x+p)=q^2.$

〔4〕　$x^2-px-q^2=0.$

上ノ〔3〕ノ場合ト同樣ノ作圖ヲスレバ, ADガ求メル正根デアル. (學生自ラコレヲ證明セヨ.)

例　　題

1. $x^2-10x+16=0$ ノ二根ヲ本節ノ作圖法ニヨツテ求メヨ.

2. 代數學ニヨレバ,二次方程式

$$x^2-px+q^2=0$$

ノ根ハ

$$x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q^2}}{2}$$

デアル. コレニヨツテ線分 x ヲ求メル作圖法ヲ考ヘヨ.

3. 二ツノ線分ノ和ト,ソノ包ム矩形ト等積ナル正方形トヲ知ツテ,モトノ各線分ヲ求メヨ.

4. 前問ニ於テ和ノ代リニ差ヲ知ルトキハ如何ニスレバ宜イカ.

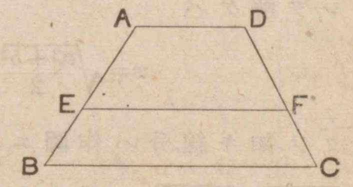
5. a, b, c ガ與ヘラレタ線分ナルトキ,比例式

$$x:a=b:x+c$$

ニ適合スル線分 x ヲ求メヨ.

17. 作圖題ニ於ケル應用

[作圖題] **1.** 與ヘラレタ梯形ノ面積ヲソノ底ニ平行ナル直線デ二等分セヨ.

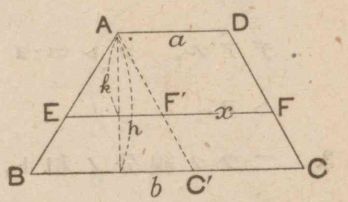


四邊形ABCDヲ邊AD, BCガ平行ナル梯形トスル. 今ソノ底BCニ平行ナル直線デソノ面積ヲ二等分シヨウトスル.

[解析] 今求メル直線ガ引ケタトシ,ソノ直線ト邊AB, DCトノ交點ヲ夫々E, Fトスル. 直線AD, BCノ距離ヲ h, AD, EFノ距離ヲ k トシ,

$AD=a,\quad EF=x,\quad BC=b$

トスレバ,



$$ABCD=\frac{1}{2}h(b+a),$$

$$AEFD=\frac{1}{2}k(x+a).$$

然ルニ　$ABCD=2.AEFD$

デアルカラ　$h(b+a)=2k(x+a),$

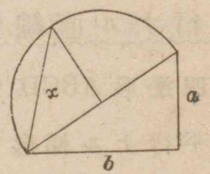
卽チ　$\dfrac{h}{k}=\dfrac{2(x+a)}{b+a}.$

然ルニ又一方ニ於テ A ヲ過ギリ DC ニ平行ナル直線ガ EF,BC ト交ハル點ヲ夫々 F',C' トスレバ

$$\frac{h}{k}=\frac{AB}{AE}=\frac{BC'}{EF'}=\frac{b-a}{x-a}.$$

故ニ　$\dfrac{2(x+a)}{b+a}=\dfrac{b-a}{x-a},$

卽チ　$2(x^2-a^2)=b^2-a^2.$



コレヲ解ケバ

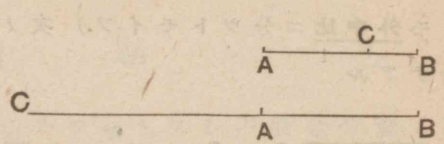
$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

斯クノ如キ線分ハ作圖ニヨツテ作ルコトガ出來ル.

【作圖】,【證明】　學生自ラコレヲ試ミヨ.

【作圖題】**2.** 與ヘラレタ線分ヲ內分又ハ外分シ, 全線分トソノ一ツノ分トノ積ヲ他ノ分ノ平方ニ等シクセヨ.

線分 AB ヲ C ニ於テ內分又ハ外分シ,



$$AB.BC=AC^2$$

ナラシメヨウトスル.

【解析】　$AB=a,\quad AC=x$

トスレバ,內分ノ場合ニハ

$$BC=a-x$$

デアルカラ　$a(a-x)=x^2,$

卽チ　$x^2+ax-a^2=0.$　　(1)

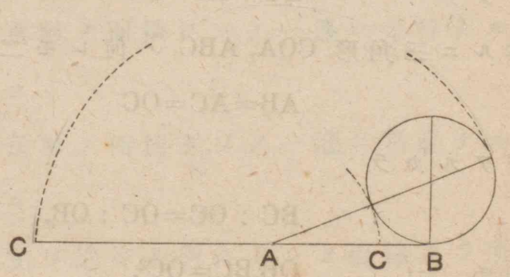
又外分ノ場合ニハ

$$BC=a+x$$

デアルカラ　$a(a+x)=x^2,$

卽チ　$x^2-ax-a^2=0.$　　(2)

ヨツテ(1)又ハ(2)ヲ解ケバ,夫々內分又ハ外分スル點 C ヲ決定スルコトガ出來ル.



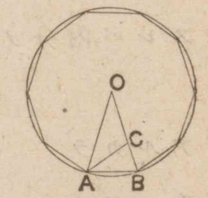
【作圖】,【證明】　學生自ラコレヲ試ミヨ.

附言. 一ツノ線分ヲ斯クノ如ク全線分ト一ツノ分トノ積ガ他ノ分ノ平方ニ等シイヤウニ分ツコトハ種々ノ場合ニ應用ガアルモノデ,コレヲ**黃金分割**トイフ. (又ハ**中末比**ニ分ツ

トモ**外中比**ニ分ツトモイフ.) 次ノ作圖題3ハソノ應用ノ一例デアル.

作圖題 3. 與ヘラレタ圓ニ內接スル正十角形ヲ畫ケ.

解析 圓 O ニ內接スル正十角形ノ一邊ヲ AB トスレバ,



$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ.$$

從ッテ $\angle OAB=\angle OBA=72^\circ.$

故ニ角 OAB ノ二等分線 AC ヲ引ケバ,

$$\triangle ABC \backsim \triangle OBA$$

ナルコトハ容易ニ證明サレル.

ヨッテ $BC:AB=AB:OB.$

然ルニ三角形 COA, ABC ハ何レモ二等邊デ

$$AB=AC=OC$$

デアルカラ

$$BC:OC=OC:OB,$$

即チ $OB.BC=OC^2.$

故ニ與ヘラレタ圓ノ半徑ヲ C ニ於テ斯クノ如クニ內分スレバ(黃金分割), OC ハ卽チコノ圓ニ內接スル正十角形ノ一邊ニ等シイ.

作圖, **證明** 學生自ラコレヲ試ミヨ.

例題

1. 與ヘラレタ線分ノ長サヲ a トスレバ,黃金分割ニ於ケル各ノ分ノ長サ如何.
2. 與ヘラレタ線分ヲ一邊トスル正十角形ヲ畫ケ.
3. 與ヘラレタ圓ニ內接スル正五角形,及ビ與ヘラレタ一邊ヲモツ正五角形ヲ畫ケ.
4. 正十五角形ノ作圖法如何.
   ($\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ ナルコトヲ利用セヨ.)
5. 直角ヲ五等分セヨ.
6. 正五角形ノ外角ヲ三等分セヨ.
7. 與ヘラレタ多角形ト相似デ,且ソレトノ面積ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シイ多角形ヲ作レ.
8. 與ヘラレタ三角形ノ面積ヲソノ一邊ニ平行ナル直線デ二等分セヨ.
9. 與ヘラレタ三角形ノ面積ヲソノ一邊ニ垂直ナル直線デ二等分セヨ.
10. 與ヘラレタ二點ヲ過ギリ,與ヘラレタ直線カラ所定ノ長サノ線分ヲ截リ取ル圓ヲ畫ケ.
11. △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 X, Y トシ, X カラ BC ニ垂線 XZ ヲ引キ,

    $XY+XZ$

ヲ與ヘラレタ長サニ等シクショウトスル,直線 XY ノ作圖法如何.

12. 一直線上ニ四點 A, B, C, D ガコノ順ニアルトキ,同ジ直線上ニ一點 O ヲ取ツテ,

$$OA.OD = OB.OC$$

ナラシメヨ.

13. △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線 DE ヲ引イテ AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ハラシメ,

$$\triangle ADE = \triangle EBC$$

ナラシメヨ.

14. a, m, n ヲ既知ノ線分トシ,次ノ各聯立方程式ヲ作圖ニヨツテ解ケ.

(1) $x+y=a,\qquad x:y=m:n$

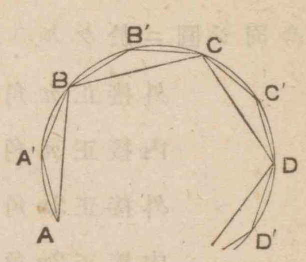
(2) $x^2+y^2=a^2,\qquad x:y=m:n$

第四章

正多角形及ビ圓ニ關スル計算

18. 作圖シ得ル正多角形

正 n 角形 ABCD...... ノ外接圓ノ弧 AB, BC, CD,...... ヲ各二等分シ,ソノ分點ヲ夫々 A', B', C'...... トスレバ,多角形 $AA'BB'CC'D$......ガ正 $2n$ 角形ナルコトハ容易ニ證明サレル. 故ニ正 n 角形ガ作圖サレルトキハ從ツテ正 $2n$ 角形,正 $4n$ 角形等,一般ニ正 $2^h n$ 角形(h ハ任意ノ正ノ整數)ヲ作圖スルコトガ出來ル.

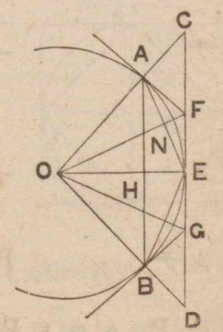


今正三角形,正四角形(正方形)ハ容易ニ作圖シ得ル. 又正五角形,正十五角形モ作圖シ得ル(前節例題 3 及ビ 4). 從ツテ次ノ邊數ヲモツ正多角形ハ一マデ學ンダ所デスベテ作圖スルコトノ出來ルモノデアル.

$$3.2^h,\quad 4.2^h,\quad 5.2^h,\quad 15.2^h.$$

19. 一ツノ圓ノ外接及ビ內接正多角形ノ周圍ノ計算

中心 O ナル圓ニ於テ,內接正 n 角形ノ一邊ヲ AB, 外接正 n 角形ノ一邊ヲ CD トシ,且 CD ノ切點 E ハ弧 AB ノ中點ニアルトスル. A 及ビ B ニ於ケルコノ圓ノ切線ガ CD ト交ハル點ヲ夫々 F 及ビ G トスレバ, OF, OG ガ夫々角 COE, DOE ノ二等分線ナルコト,從ツテ又 FG ガ外接正 $2n$ 角形ノ一邊ナルコトハ容易ニ證明サレル.



今同ジ圓ニ於ケル

外接正n角形ノ周圍ヲ P,

内接正n角形ノ周圍ヲ p,

外接正$2n$角形ノ周圍ヲ P_1,

内接正$2n$角形ノ周圍ヲ p_1

トスル,卽チ P, p, P_1, p_1 等ヲ次ノヤウナ意味ニ用ヰル.

$$CD=2.CE=\frac{P}{n},\qquad FG=2.FE=\frac{P_1}{2n},$$

$$AB=2.AH=\frac{p}{n},\qquad AE=2.EN=\frac{p_1}{2n}.$$

サテ $\triangle COD \backsim \triangle AOB$

ナルコト及ビ定理十一ヲ參考スレバ,

$$\frac{CD}{AB}=\frac{OC}{OA}=\frac{OC}{OE}=\frac{CF}{FE}.$$

故ニ $$\frac{AB+CD}{AB}=\frac{CF+FE}{FE}=\frac{CE}{FE},$$

卽チ $$\frac{\frac{p}{n}+\frac{P}{n}}{\frac{p}{n}}=\frac{\frac{P}{2n}}{\frac{P_1}{4n}}.$$

故ニ $$\frac{p+P}{p}=\frac{2P}{P_1}.$$

從ッテ $$P_1=\frac{2pP}{p+P}.$$

卽チ P_1 ハ p ト P トノ調和中項デアル.

又 $\triangle AHE \backsim \triangle ENF$

デアルカラ $$\frac{AH}{AE}=\frac{EN}{EF},$$

卽チ $$\frac{\frac{p}{2n}}{\frac{p_1}{2n}}=\frac{\frac{p_1}{4n}}{\frac{P_1}{4n}}.$$

故ニ $$\frac{p}{p_1}=\frac{p_1}{P_1}.$$

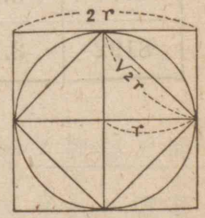
從ッテ $$p_1=\sqrt{pP_1}.$$

卽チ p_1 ハ p ト P_1 トノ等比中項デアル.

故ニ一ツノ圓ニ外接及ビ內接スル二ツノ正n角形ノ周圍P及ビpカラ始メテ逐次ニ相連續スル二數ノ調和中項及ビ等比中項ヲ交互ニ取ッテ進ムトキ得ル一列ノ數

$$P,\ p,\ P_1,\ p_1,\ P_2,\ p_2,\ \ldots\ldots$$

ヲ作ルトキハ, P_h, p_h ハ夫々同ジ圓ノ外接正 $2^h n$ 角形及ビ內接正 $2^h n$ 角形ノ周圍デアル.



半徑 r (直徑 $2r$) ナル圓ニ外接及ビ內接スル二ツノ正方形ノ周圍ヲ考ヘレバ,

$$P=2r\times 4,$$

$$p=4\sqrt{2}r=2\sqrt{2}\times 2r=2.8284271\times 2r\ (約)$$

ナルコトハ容易ニ計算サレル. コレカラ始メテ上記ノ理ニヨリ順次ニ同ジ圓ニ外接及ビ內接スル正八,十六,…

角形ノ周圍(小數第七位未滿四捨五入)ヲ計算スレバ下表ノ如クデアル.

邊數	外接正多角形ノ周	内接正多角形ノ周
4	4.0000000 ×2r	2.8284271 ×2r
8	3.3137085 ×2r	3.0614675 ×2r
16	3.1825979 ×2r	3.1214452 ×2r
32	3.1517249 ×2r	3.1365485 ×2r
64	3.1441184 ×2r	3.1403312 ×2r
128	3.1422236 ×2r	3.1412773 ×2r
256	3.1417504 ×2r	3.1415138 ×2r
512	3.1416321 ×2r	3.1415729 ×2r
1024	3.1416025 ×2r	3.1415877 ×2r
2048	3.1415951 ×2r	3.1415914 ×2r
4096	3.1415933 ×2r	3.1415923 ×2r
8192	3.1415928 ×2r	3.1415926 ×2r

例題

1. 本節ノ圖ニ於テ,圓Oノ半徑ヲrトシ,又

$$AB=a,\quad CD=b$$

トスレバ,

$$OH=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\qquad \frac{CE}{OE}=\frac{AH}{OH}.$$

又コレニヨツテ

$$a=\frac{2rb}{\sqrt{b^2+4r^2}},\qquad b=\frac{2ra}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

2. 更ニ同ジ圖ニ於テ,EOノ延長ガ再ビ圓ト交ハル點ヲKトスレバ,

$$AE^2=EH.EK$$

デ,ココニ

$$EH=r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\qquad EK=2r$$

ナルコトニ注目シ,ヨツテ

$$AB=a,\qquad AE=a'$$

トスレバ,次ノ關係ガアル.

$$a'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a^2})},$$

$$a=\frac{a'\sqrt{4r^2-a'^2}}{r}.$$

20. 圓周ノ長サ

定義 一ツノ圓ニ外接スル正n角形ノ周圍ガ同ジ圓ニ内接スル正n角形ノ周圍ヨリ大ナルコトハ容易ニ證明サレル. 而シテソノ邊數nヲ增ストキハ外接形ノ周圍ハ次第ニ小トナリ,内接形ノ周圍ハ次第ニ大トナリ,雙方相接近シテ來ル. ソノ共通ノ極限値ヲ**圓周ノ長サ**

トスル.

サテ前節ノ終リニ擧ゲタ表ニヨレバ,一ツノ圓ノ外接及ビ内接正多角形ノ周圍ノソノ圓ノ直徑ニ對スル比ノ値ハ,邊數ガ漸次增加スルニ從ツテ外接ノ場合ト内接ノ場合トハ次第ニ相接近シ,ツヒニ邊數ガ 8192 トナレバコノ二種ノ比ノ値ハ小數第六位マデハ全ク一致スルコトガワカル. 故ニ圓周ノ長サハ直徑ノ約 3.141592 倍デアル. ナホ外接及ビ内接正多角形ノ邊數ヲ增加シテ見レバ上記ノ二種ノ比ノ値ハ小數點以下更ニ多クノ桁數マデ相一致スル,從ツテ圓周ノソノ直徑ニ對スル比ノ値ヲ更ニ精シク定メルコトガ出來ル. コノ比ノ値ハ實ハ無理數デ,有限ナル桁數ノ小數デ正シク表ハサレナイコトハ高等數學ノ證明スル所デアル. ヨツテ通常コレヲ π (パイ)ナルぎりしや文字デ表ハスコトトスル.

以上ノ結果ニヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

定理 十三. 半徑 r ナル圓周ノ長サハ $2\pi r$ デアル.

系 圓周ノ長サハソノ半徑(又ハ直徑)ニ比例スル.

附言. 圓周ノソノ直徑ニ對スル比ノ値(卽チ π)ヲ圓周率トイフ. ソノ値ハ今日デハ小數第七百七位マデ算出サレテアル. 試ミニソノ最初ノ若干位ヲ擧ゲレバ次ノ如クデアル.

$$\pi=3.141592653589793238462643383279\ldots\ldots$$

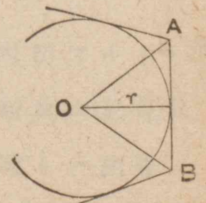
ケレドモ實用ニハ大抵 3.1416 ナル近似値ヲ用ヰル. 又屢,分數 $\frac{22}{7}=3.1428\ldots\ldots$ 及ビ $\frac{355}{113}=3.14159292\ldots\ldots$ ヲ用ヰルコトガアル.

例　題

1. 半徑 120m ナル圓周ノ長サヲ計算セヨ,但シ圓周率ノ近似數トシテ 3.1416 ヲ用ヰ,「デシメートル」位未滿ヲ四捨五入セヨ.
2. 周圍 300m ナル圓形ノ池ノ直徑ヲ米ノ小數第一位マデ正シク求メヨ.
3. 半徑 r ナル圓ニ於テ,長サ l ナル弧ニ對スル中心角ノ度數ヲ求メヨ.

21. 圓ノ面積

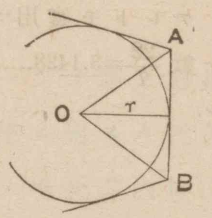
圓ノ面積ハコレニ内接スル正多角形ノ面積ヨリモ大デ,外接スル正多角形ノ面積ヨリモ小デアル. 然ルニ邊數ヲ限リナク增ストキハ兩多角形ノ面積ハ共通ノ極限値ヲモツ. コレニヨツテ圓ノ面積ヲ求メルコトガ出來ル.



半徑 r ナル圓ノ中心ヲ O,コレニ外接スル正 n 角形ノ一邊ヲ AB トスレバ,

$$\triangle AOB=\frac{1}{2}AB.r.$$

今コノ正n角形ノ面積ヲSトスレバ,



$$S=n.\triangle AOB=\frac{1}{2}n.AB.r.$$

然ルニ$n.AB$ハ正n角形ノ周圍デアル,

コレヲPデ表ハセバ,

$$S=\frac{1}{2}Pr.$$

ココニ於テ邊數nヲ限リナク增ストキハ,極限ニ於テPハ圓周ノ長サ卽チ$2\pi r$トナリ,Sハ今求メヨウトスル圓ノ面積トナル. 故ニ次ノ定理ヲ得ル.

定理 十四. 半徑rナル圓ノ面積ハπr^2デアル.

系 圓ノ面積ハソノ半徑(又ハ直徑)ノ平方ニ比例スル.

サテ一ツノ圓ニ於ケル扇形ノ面積ガコレニ屬スル弧ノ長サニ比例スルコトハ容易ニ證明サレル. 故ニ今半徑rナル圓ノ面積ヲS,同ジ圓ニ於テaナル長サノ弧ヲモツ扇形ノ面積ヲAトスレバ,

$$\frac{A}{S}=\frac{a}{2\pi r}.$$

故ニ

$$A=\frac{a}{2\pi r}S=\frac{a}{2\pi r}\pi r^2=\frac{ar}{2}.$$

ヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

定理 十五. 扇形ノ面積ハソノ半徑ノ長サト弧ノ長サトノ積ノ半分ニ等シイ.

例題

1. 一邊ノ長サ1cmナル正方形ニ外接スル圓ノ面積如何.
2. 一平方米ノ面積ヲモツ圓ノ直徑ヲ求メヨ. 但シ粍位未滿ハ四捨五入セヨ.
3. 周圍Pナル圓ノ面積ハ $\frac{P^2}{4\pi}$ デアル.
4. 半徑r,中心角a度ナル扇形ノ面積如何.
5. 半徑rナル圓板ニ圓形ノ穴ヲ穿チ殘部ノ面積ヲ初メノ面積ノ$\frac{3}{4}$ナラシメルニハ,穴ノ半徑ヲ何程トスレバ宜イカ.
6. 三ツノ圓周ノ和(又ハ二圓周ノ和ト第三圓周トノ差)ニ等シイ一ツノ圓ヲ作レ.
7. 與ヘラレタ二圓ノ面積ノ和(又ハ差)ニ等シイ面積ヲモツ圓ヲ畫ケ.
8. 半徑ノ比ガ1:2ナル二圓ガCニ於テ內切スルトキ,大圓ノ一ツノ直徑ト兩圓トノ交點ヲ順次ニP,Q,R,Sトスレバ,大圓ノ弧CPト小圓ノ弧CQトハ相等シイ.

雜　題 I.

1. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 BD 上ノ一點 P ヲ過ギリ AB 及ビ AD ニ平行ナル二直線ヲ引キ AD, BC ト L, L′; AB, DC ト M, M′ ニ於テ交ハラシメレバ,三直線 ML, L′M′, BD ハ同一點ヲ過ギル.

2. △ABC ニ於テ任意ノ一點 O ヲトリ,直線 AO, BO, CO ガ BC, CA, AB ト交ハル點ヲ夫々 D, E, F トシ,三點 D, E, F ヲ過ギル圓ガ再ビ BC, CA, AB ト交ハル點ヲ夫夫 D′, E′, F′ トスレバ,直線 AD′, BE′, CF′ ハ同一點ヲ過ギル.

3. △ABC ノ內心ヲ I, ∠B 及ビ ∠C 內ノ傍心ヲ夫々 I′, I″ トスルトキ, AI 上ニ一點 X ヲトリ, BX, CX ガ夫夫 AC, AB ト交ハル點ヲ Q, R トシ,直線 QR ガ BC ト交ハル點ヲ P トスレバ,三點 I′, I″, P ハ同一直線上ニアル.

4. △ABC ノ垂心ヲ H, 外心ヲ O, 邊 BC ノ中點ヲ M トスレバ,

　(1) AH=2.OM,　　(2) ∠HAO=∠B～∠C.

5. △ABC ノ垂心ヲ H, AH ガ BC ト交ハル點ヲ D トスレバ, BD.DC=AD.HD.

6. △ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ R, 內接圓ノ半徑ヲ r, 又

內心 I カラ邊 AC ニ下シタ垂線ノ足ヲ D, 外接圓ノ弧 BC ノ中點 M ヲ過ギル直徑ノ他端ヲ L トスレバ.

　(1) IM=BM=CM,　　(2) △LMC∽△AID,

　(3) AI.IM=2Rr.

7. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F, 頂點 A, B, C カラ對邊ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 L, M, N, 又垂心ヲ H トシ, AH, BH, CH ノ中點ヲ夫々 P, Q, R トスレバ,九點 D, E, F, L, M, N, P, Q, R ハ同一圓周(コレヲ**九點圓**トイフ)上ニアル.

8. 九點圓ノ中心ハ,原三角形ノ垂心ト外心トノ間ノ中點デ,ソノ半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半分デアル.

9. 三角形ノ外接圓周上ノ一點カラ三邊ニ下シタ垂線ノ足ハ同一直線(コレヲ**しむそん線**トイフ)上ニアル.
(コレヲしむそん(Simson)ノ定理トイフ.)

10. 三角形ノ外接圓ノ一ツノ直徑ノ兩端ニツイテノしむそん線ハ互ニ直交スル.

11. 直交スル二圓ノ一ツノ中心ヲ過ギル直線ガソノ兩圓周ト交ハル四點ハ調和列點ヲナス.

12. 圓 O ノ半徑ヲ r トシ,圓外ノ一點 P カラソノ圓ニ引イタ二切線ノ切點ヲ A, B トスルトキ,直線 AB ガ OP ト交ハル點ヲ Q トスレバ, OP.OQ=r^2 デアル.

定義　半徑 r ナル圓ノ中心 O ヲ端トスル半直線上

ニ二點 P, Q ヲトリ, OP.OQ=r^2 ナラシメルトキ, Q カラ OQ ニ立テタ垂線 QQ′ ヲ點 P ノ**極線**トイヒ, 點 P ヲ QQ′ ノ**極**トイフ.

從ツテ點 P カラ OP ニ立テタ垂線 PP′ ハ點 Q ノ極線デ, 點 Q ハ PP′ ノ極デアル.

13. 一ツノ圓ニツイテノ點 P ノ極線上ノ一點ヲ Q トスレバ, ソノ圓ニツイテノ點 Q ノ極線ハ點 P ヲ過ギル.

14. 圓 O ニツイテノ點 P ノ極線ヲ QQ′ トスレバ, P ヲ過ギル直線ガ圓 O 及ビ QQ′ ト交ハル三點ハ P ト共ニ調和列點ヲナス.

15. 圓 O ニツイテノ點 P ノ極線上ノ一點ヲ A トスレバ, A カラ圓 O ニ引イタ二切線ハソノ極線及ビ AP ト共ニ調和束線ヲナス.

16. 一定點カラ他ノ一定點ヲ中心トスル同心圓ニ引イタ切線ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ.

17. 一ツノ圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

18. 定長ナル線分ノ一端ヲ常ニ一定圓周上ニアラシメ, コノ線分ヲ他ノ一定直線ニ平行ニシテ動カストキ, コノ線分ノ他ノ一端ノ軌跡如何.

19. 定長ナル等邊ヲモツ二等三角形 ABC ノ底邊 BC ガ定直線上ニアリ, 且 B ハ定點デアルトスル. 今 CA ヲ A ノ方ニ延長シテ CA ニ等シク AP ヲ取ルトキ, 點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

20. AB ヲ定圓ノ定弦トシ, AC ヲ任意ノ弦トスルトキ, AB, AC ヲ隣邊トスル平行四邊形 ABDC ノ對角線ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

21. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ニ垂直ナル任意ノ直線ト邊 BA, CA 又ハソノ延長トノ交點ヲ D, E トスルトキ, 直線 CD, BE ノ交點ノ軌跡如何.

22. 相交ハル二定圓ノ一ツノ交點 A ヲ過ギッテ一定直線 BAC ヲ引キ二圓ト夫々 B, C デ交ハラシメ, 又 A ヲ過ギッテ任意ノ直線 DAE ヲ引キ二圓ト夫々 D, E デ交ハラシメレバ, BD, CE ノ交點 P ノ軌跡如何.

23. 二ツノ定直線カラノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

24. 定點 A ト定直線 XY 上ノ任意ノ點 P トヲ通ル直線 AP 上ニ點 Q ヲ取リ AP.AQ ヲ一定ナラシメルトキ, 點 Q ノ軌跡如何.

定義　或ル圖形 g 上ノ任意ノ點 P ト定點 A トヲ過ギル直線上ニ點 Q ヲトリ, AP.AQ=定量ナラシメルトキ, 點 Q ノ軌跡ヲ g ノ**反形**トイヒ, 定點 A ヲソノ**中心**トイフ. 又 g ノ反形ヲ求メルコトヲ g ヲ**反轉スル**トイフ.

25. 圓ヲソノ周上ノ一點ヲ中心トシテ反轉セヨ.

26. 前問ニ於テ反轉ノ中心ヲソノ周上デナイ位置ニト

ルトキハ如何.

27. 定點 A ヲ過ギル任意ノ直線ガ定直線ト交ハル點ヲ B トシ, △ABC ヲ與ヘラレタ三角形ト相似ニ作ルトキ,頂點 C ノ軌跡如何.

28. 半徑 5cm ノ甲乙二圓ガアツテ,甲圓ハ固定シ,乙圓ハ甲圓ト $\frac{2}{3}$ 直角ノ交角ヲ保ツテ動クトキ,乙圓ノ中心ノ軌跡如何.

29. 與ヘラレタ二直線ニ切シ,與ヘラレタ半徑ヲモツ圓ヲ畫ケ.

30. 與ヘラレタ一ツノ直線ト一ツノ圓トニ切シ,與ヘラレタ半徑ヲモツ圓ヲ畫ケ.

31. 與ヘラレタ二ツノ圓ニ切シ,與ヘラレタ半徑ヲモツ圓ヲ畫ケ.

32. 底邊,外接圓ノ半徑及ビ頂點カラ引イタ中線ヲ知ツテ,三角形ヲ作レ.

33. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ和又ハ差ヲ知ツテ,三角形ヲ作レ.

34. 底邊,頂角及ビ內接圓ノ半徑ヲ知ツテ,三角形ヲ作レ.

35. 一定點ヲ過ギリ定圓ニ割線ヲ引キ,コノ圓ガコノ割線カラ截リ取ル弦ヲ與ヘラレタ長サニ等シカラシメヨ.

36. 與ヘラレタ圓ニ切線ヲ引キ,他ノ與ヘラレタ圓ガコレカラ截リ取ル弦ヲ與ヘラレタ長サニ等シカラシメヨ.

37. 與ヘラレタ直線ニ與ヘラレタ點ニ於テ切シ,且他ノ與ヘラレタ點ヲ過ギル圓ヲ畫ケ.

38. 與ヘラレタ圓周上ノ與ヘラレタ點ニ於テコレニ切シ,且與ヘラレタ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

39. 底邊,兩底角ノ差及ビ他ノ二邊ノ差ヲ知ツテ,三角形ヲ作レ.

40. 三角形ノ一邊,他ノ二邊ノ比及ビ一角ガ與ヘラレタトキ,コノ三角形ヲ作レ.

41. 一邊,對角ノ二等分線及ビ他ノ二邊ノ比ガ與ヘラレタトキ,コノ三角形ヲ畫ケ.

42. 與ヘラレタ弓形ノ弧 APB 上ニ一點 P ヲ求メ, PA.PB ヲ與ヘラレタ正方形ニ等シクセヨ.

43. △ABC ノ A ヲ過ギル直線ト邊 BC 及ビソノ外接圓周トノ交點ヲ D, E トスルトキ常ニ AB.AC＝AD.AE ナラバ, AB＝AC デアル.

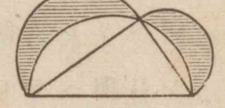
44. △ABC ノ ∠A 或ハソノ外角ノ二等分線ガ邊 BC 又ハソノ延長ト交ハル點ヲ D トスレバ,

$$AB.AC=BD.DC\pm AD^2.$$

但シ複號ハ內角ノ場合ニハ＋,外角ノ場合ニハ－ヲ取ル.

45. 半徑 a ナル圓ニ於テ 120° ノ角ヲ含ム弓形ノ面積ヲ求メヨ.

46. 直角三角形ノ各邊ノ上ニ半圓ヲ畫クトキニ生ズル二ノ新月形(圖ニ陰影ヲツケテコレヲ示ス)ノ和ハ直角三角形ト等積デアル. (コレヲひぽくらてす(Hippocrates)ノ定理トイフ.)

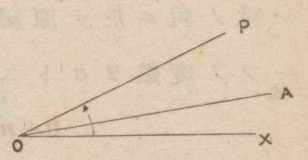


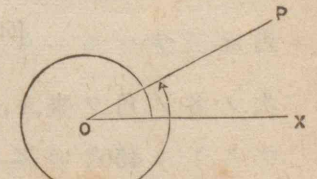
第二篇
一般ノ角ノ三角函數

第一章　一般ノ角ノ三角函數

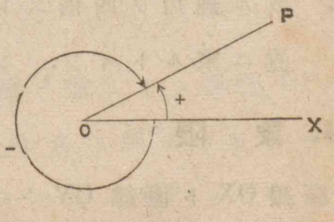
22. 一般ノ角

一定點 O カラ引イタ半直線 OA ガ OX ナル位置カラ發シテ一ツノ平面内ニ於テ O ノ周リニ廻轉シ, OP ナル位置ニ來タトスレバ,ココニ角 XOP ヲ生ズル. OX ヲ**原線**, OA ヲ**動徑**トイフ. 角ノ大小トイフノハ畢竟動徑ガ原線カラ發シテソノ最後ノ位置ニ至ルマデノ廻轉ノ多少ノコトデアルト考ヘレバ,角ノ大キサニハ限リガナイ. 卽チ圖ノ如ク動徑ガ OX ノ位置ヲ通リ越シテナホ廻轉シタトスレバ,角 XOP ハ 360° 以上ニモナル.





ナホ又動徑ガ OX カラ OP ニ至ルニソノ廻轉ノ方向ガ二ツアル,右ノ圖ニ於テ矢ヲ以テ示スガ如クデアル.



コノ相反スル二ツノ方向ヲ區別スルタメニ角ノ大キサニ正負ノ符號ヲツケル．通常ノ規約トシテハ,動徑ノ廻轉ガ時計ノ針ノ廻轉ト反對ノ方向ヲ取ツタトキ生ズル角ヲ**正角**トシ,時計ノ針ノ廻轉ト同一ノ方向ヲ取ツタトキノ角ヲ**負角**ト定メル．

コレニヨツテ

角ノ大キサハ正,負及ビ零ノアラユル値ヲ取リ得ルモノトナル．コレヲ**一般ノ角**トイフ．

一般ノ角ニ於テ原線ト動徑ノ位置ノミヲ知ルトキ,ソノ一ツノ度數ヲ a トスレバ,ソノ角ノ最モ一般ナル度數ハ

$$a+n.360^\circ$$

ニヨツテ表ハサレル,ココニ n ハ任意ノ整數(正又ハ負ノ整數,又ハ0)トスル．

例　　題

1. 次ノ各ノ角ヲ畫キ,矢ヲ以テ廻轉ノ跡ヲ示セ．

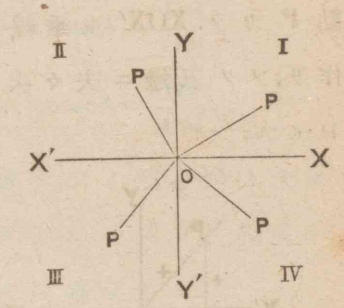
450°,　-120°,　-405°

2. 或ル鈍角ヲ四倍スレバソノ動徑ハ丁度前ト同ジ位置ニ來ルトイフ．ソノ角ヲ求メヨ．

23. 象　限

原線 OX ト直線 OY トガ直交スルモノトシ, XO, YO ノ

延長ヲ夫々 OX′, OY′ トスル．



角 XOP ノ動徑 OP ガ OX ト OY トノ間ニアルトキハコノ角ハ**第一象限**ニアルトイヒ,コレカラ順次ニ OP ガ OY ト OX′ ノ間, OX′ ト OY′ ノ間, OY′ ト OX ノ間ニアルニ從ツテ,角 XOP ハ夫々**第二,第三,第四象限**ニアルトイフ．例ヘバ 225° ハ第三象限ニアル角, -300° 及ビ 400° ハ第一象限ニアル角デアル．

例　　題

1. 次ノ各角ハ第何象限ニアルカ．

30°,　125°,　330°,

-30°,　-125°,　-480°

2. 第一象限ニアル角ノ半分ハ第一又ハ第三象限ニアル．

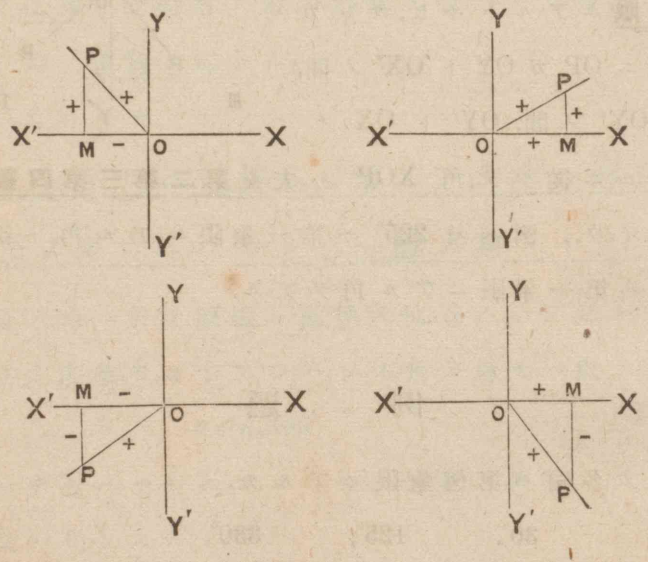
3. 第四象限ニアル角ノ二倍ハ第何象限ニアルカ．

24. 一般ノ角ノ三角函數

XOX′ 及ビ YOY′ ノ意味ヲ前節ノ通リトシ,動徑 OP ニヨツテ作ラレタ角 XOP ヲ單ニ角 A ト呼ブコトトスル．

今角 A ガ何レノ象限ニアツテモ常ニ OP 上ノ任意ノ

一點 P カラ XOX′ ニ垂線 PM ヲ引イテ,直角三角形 OPM ヲ作リ,ソノ三邊ニ夫々次ノ如ク正負ノ符號ヲツケルモノトスル.



(1)　斜邊 OP ハ常ニ正トスル.

(2)　底邊 OM ハ OX 上ニアルトキハ正トシ,OX′ 上ニアルトキハ負トスル.

(3)　垂線 PM ハ XOX′ ニ對シテ OY ト同ジ側ニアルトキハ正トシ,OY′ ト同ジ側ニアルトキハ負トスル.

斯クノ如クニ符號ヲツケタ線分ヲ用キテ,次ノ如ク定義スル.

$$\sin A=\frac{PM}{OP},\quad \cos A=\frac{OM}{OP},\quad \tan A=\frac{PM}{OM},$$

$$\cot A=\frac{OM}{PM},\quad \sec A=\frac{OP}{OM},\quad \operatorname{cosec} A=\frac{OP}{PM}$$

コレ即チ一般ノ角ノ三角函數デ,ソノ値ハ角ノ大キサノミニヨツテ定マルコト明カデアル. 又ソノ符號ハ上ニ述ベタ規約ニヨリ次表ノ如クニ確定スル.

象限＼函數	sin cosec	cos sec	tan cot
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

25. 三角函數ノ間ノ關係

一般ノ角ニツイテモ次ノ式ガ成立スルコトハ定義ニヨツテ容易ニ證明サレル.

$$\left.\begin{aligned}\sin A\operatorname{cosec} A&=1\\ \cos A\sec A&=1\\ \tan A\cot A&=1\end{aligned}\right\}(1)\qquad \left.\begin{aligned}\tan A&=\frac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A&=\frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin^2A+\cos^2A&=1\\ 1+\tan^2A&=\sec^2A\\ 1+\cot^2A&=\operatorname{cosec}^2A\end{aligned}\right\}(3)$$

(1),(2)及ビ(3)ニヨッテ,一ツノ角ノ三角函數ノ中何レカ一ツヲ知ルトキハ他ノ五ツヲ求メルコトガ出來ル.

例　Aガ第三象限ノ角デ $\sin A=-a\ (a>0)$ ナルトキ,他ノ三角函數ヲ求メヨ.

解　$\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\sqrt{1-a^2}$,

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\quad \cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a},$$

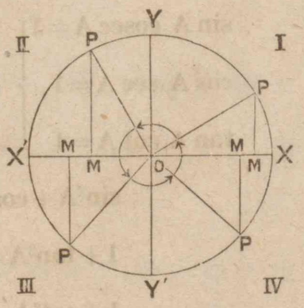
$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}},\quad \operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=-\frac{1}{a}.$$

例　題

1. Aガ第二象限ノ角ナルトキ, $\tan A$ ヲ用キテ他ノ三角函數ヲ表ハセ.
2. $\sec A=-a\ (a>0)$ ナルトキ, Aノ他ノ三角函數ヲ求メヨ.

26. 三角函數ノ値ノ變動

第24節ノ定義ニヨリ,動徑OPガ原線OXカラ發シテ順次ニ I, II, III, IV ノ各象限ヲ經過スルトキ,コレニ伴フ角XOPノ三角函數ノ値ノ變動ハ次ノ如クデアルコトヲ知ル.



函數＼角・象限	0°	I	90°	II	180°	III	270°	IV	360°
sin	0	+増	1	+減	0	−減	−1	−増	0
cos	1	+減	0	−減	−1	−増	0	+増	1
tan	0	+増	∞　−∞	−増	0	+増	∞　−∞	−増	0
cot	∞	+減	0	−減	−∞　∞	+減	0	−減	−∞
sec	1	+増	∞　−∞	−増	−1	−減	−∞　∞	+減	1
cosec	∞	+減	1	+増	∞　−∞	−増	−1	−減	−∞

注意 1.　表中「角」ノ欄ニアル 0°, 90°, 180°, 270°, 360° 等ハ各コレニ 360° ノ任意ノ整數倍ヲ附加シテモ宜イ.　コレラノ角ノ三角函數ナルモノハ第24節ノ定義ノ中ニ含マレナイモノデ,コノ表ニ於テ始メテソノ値ヲ定義シタモノデアル.

注意 2.　Aガ第一象限ヲ經テ 90° ニ近ヅクトキハ $\tan A$ ハ正デ∞トナルケレドモ, Aガ第二象限ノ方カラ 90° ニ近ヅクトキハ $\tan A$ ハ負デソノ絕對値ガ∞トナル,ヨッテコレヲ−∞ト書ク.　元來 $\tan 90°$ ナルモノハ到底コレニ一定ノ數値ヲ與ヘルコトガ出來ヌモノデ(∞ハ數デハナイ)吾人ハ唯Aガ限リナク 90° ニ近ヅクトキノ $\tan A$ ノ變動ノ有樣ガ∞又ハ−∞デアルトイヒ得ルニ過ギナイ.

コノ他一般ニ 90° ノ奇數倍ナル角ノ正切,正割及ビ 90° ノ偶

數倍ナル角ノ餘切,餘割ニツイテモ常ニ上ト同樣ニ考フベキモノデアル.

注意 3. 如何ナル角ニツイテモ正弦及ビ餘弦ハソノ絶對値ガ1ヨリ大ナルコトハナイ. 正割及ビ餘割ハソノ絶對値ガ1ヨリ小ナルコトハナイ. 正切及ビ餘切ニハ何等斯クノ如キ制限ガナイ.

例　題

1. $1-\sin A$ ノ値ノ變動ヲ考ヘ,ソノ取リ得ル最大値及ビ最小値ヲ求メヨ.
2. $1-\cos A$ ニツイテ前題ト同樣ノコトヲナセ.
3. $\tan A=-\dfrac{5}{3}$ ナル角 A ヲ圖示セヨ.
4. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

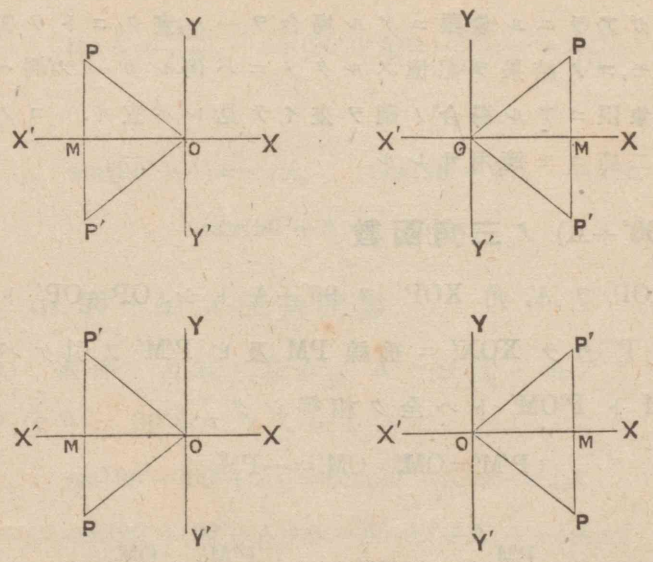
　(1) $\cos^2 x-2\cos x=3$

　(2) $\cot^2 x+\operatorname{cosec} x-1=0$

27. $(-A)$ ノ三角函數

原線 OX ト A ナル角ヲナス動徑 OP ト, $-A$ ナル角ヲナス動徑 OP′ トハ常ニ OX ニ關シテ對稱ノ位置ニアル. 今 OP 上ノ一點 P カラ OX (或ハソノ延長 OX′) ニ垂線 PM ヲ引キ,更ニコレヲ延長シテ OP′ ト P′ ニ於テ交ハラシメルトキ,二ツノ三角形 OPM, OP′M ハ全ク相等シク,

$$OP'=OP.$$



又 P′M ト PM トモソノ長サハ相等シイケレドモ,ソノ符號ハ相反スル,即チ

$$P'M=-PM.$$

然ルニ

$$\sin A=\frac{PM}{OP},\quad \sin(-A)=\frac{P'M}{OP'}=-\frac{PM}{OP}.$$

又

$$\cos A=\frac{OM}{OP},\quad \cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}.$$

故ニ次ノ公式ヲ得ル.

$$\mathbf{\sin(-A)=-\sin A,\qquad \cos(-A)=\cos A.}$$

從ツテ

$$\mathbf{\tan(-A)=-\tan A.}$$

注意 コレラノ式ヲ完全ニ證明スルタメニハ上記ノ圖ノ

如クAガアラユル象限ニアル場合ヲ一々畫クコトヲ要スルケレドモ,コノ結果ヲ記憶スルタメニハ何レカ一ツ(例ヘバAガ第一象限ニアル場合)ノ圖ヲ畫イテ見レバ宜イ. コノコトハ次ノ二節ニモ適用サレル.

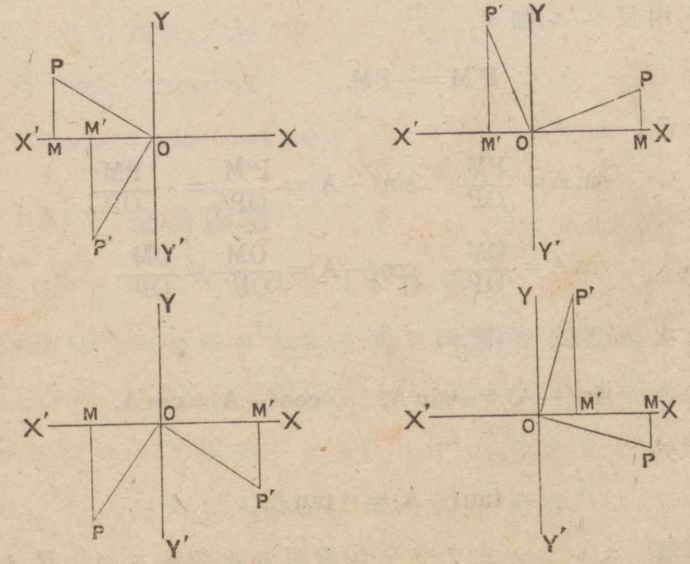
28. $(90^\circ+A)$ ノ三角函數

角 XOP ヲ A, 角 XOP′ ヲ $90^\circ+A$ トシ, OP=OP′ トシテ P 及ビ P′ カラ XOX′ ニ垂線 PM 及ビ P′M′ ヲ引ケバ,三角形 OPM ト P′OM′ トハ全ク相等シク

$$P'M'=OM,\quad OM'=-PM.$$

然ルニ

$$\sin A=\frac{PM}{OP},\quad \sin(90^\circ+A)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{OM}{OP}.$$



又

$$\cos A=\frac{OM}{OP},\quad \cos(90^\circ+A)=\frac{OM'}{OP'}=-\frac{PM}{OP}.$$

故ニ

$$\mathbf{\sin(90^\circ+A)=\cos A,\quad \cos(90^\circ+A)=-\sin A,}$$

$$\mathbf{\tan(90^\circ+A)=-\cot A.}$$

29. $(n.\,90^\circ\pm A)$ ノ三角函數

(1)　前節ノ公式ニ於ケル A ハ任意ノ角デアルカラ今 A ノ代リニ $90^\circ+A$ ヲ入レレバ

$$\sin\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=\cos(90^\circ+A)=-\sin A,$$

$$\cos\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\sin(90^\circ+A)=-\cos A.$$

ヨツテ次ノ公式ヲ得ル.

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{\sin(180^\circ+A)=-\sin A,\quad \cos(180^\circ+A)=-\cos A,}\\&\mathbf{\tan(180^\circ+A)=\tan A.}\end{aligned}\right\}\ (1)$$

(2)　上ニ得タ(1)ニ於テ更ニ A ノ代リニ $180^\circ+A$ ヲ入レレバ次ノ式ヲ得ル.

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{\sin(360^\circ+A)=\sin A,\quad \cos(360^\circ+A)=\cos A,}\\&\mathbf{\tan(360^\circ+A)=\tan A.}\end{aligned}\right\}\ (2)$$

A ト $360^\circ+A$ トハ動徑ノ位置ガ全ク同一デアルカラコノ結果ハ當然デアル. 更ニコレヲ一般ニスレバ n ヲ任意ノ整數トシテ,

$$\mathbf{\sin(n.\,360^\circ+A)=\sin A}$$

等トスルコトガ出來ル.

(3)　前節ノ式及ビ本節 (1), (2) ニ於テ A ノ代リニ $-A$ ヲ入レレバ次ノ三組ノ公式ヲ得ル.

$$\left.\begin{aligned}&\sin(90^\circ-A)=\cos A, \qquad \cos(90^\circ-A)=\sin A,\\&\qquad\tan(90^\circ-A)=\cot A.\end{aligned}\right\}\ (3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(180^\circ-A)=\sin A, \qquad \cos(180^\circ-A)=-\cos A,\\&\qquad\tan(180^\circ-A)=-\tan A.\end{aligned}\right\}\ (4)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(360^\circ-A)=-\sin A, \qquad \cos(360^\circ-A)=\cos A,\\&\qquad\tan(360^\circ-A)=-\tan A.\end{aligned}\right\}\ (5)$$

注意　A ノ如何ニカカハラズ $90^\circ-A$ 及ビ $180^\circ-A$ ヲ夫々 A ノ餘角及ビ補角ト稱ヘル.

30.　任意ノ角ノ三角函數ヲ正ノ鋭角ノ三角函數デ表ハスコト

先ヅ負角ノ三角函數ハ第27節ノ公式ニヨツテコレヲ正角ノ三角函數ニ直ス.　モシソノ正角ガ 360° 以上ナルトキハ前節ノ(2)ニヨツテコレカラ 360° ノ適當ナ倍數ヲ減ジテ 360° 以下ノ正角ニ直ス.　ナホソノ角ガ 180° 以上ナルトキハ前節ノ(1)ニヨツテコレヲ 180° 以下ノ角ニ直シ,ソノ結果ノ角ガナホ 90° 以上ナルトキハ前節ノ(4)ニヨツテソノ補角ニ直セバ確カニ 90° 以下ノ正角トナル.

以上ノ取扱ヒニ於テハ函數ノ種類ハ少シモ變ズルコトガナイ,例ヘバ任意ノ角ノ正弦ハ常ニ正ノ鋭角ノ正弦ヲ用ヰテコレヲ表ハスコトヲ得ル.

モシ函數ノ種類ヲ變ズルコトヲ許セバ,更ニ前節ノ(3)ニヨツテ角ヲ 45° 以下ノ正角ニ直スコトモ出來ル.

例 1.　$\sin 1765^\circ=\sin(4\times360^\circ+325^\circ)$

$$=\sin 325^\circ=\sin(180^\circ+145^\circ)$$
$$=-\sin 145^\circ=-\sin(180^\circ-35^\circ)$$
$$=-\sin 35^\circ.$$

例 2.　$\tan(-1190^\circ)=-\tan 1190^\circ=-\tan(3\times360^\circ+110^\circ)$

$$=-\tan 110^\circ=-\tan(180^\circ-70^\circ)$$
$$=\tan 70^\circ=\tan(90^\circ-20^\circ)=\cot 20^\circ.$$

ケレドモ必ズシモ常ニ上記ノ手順ニ拘泥スル必要ハナイ.　例ヘバ前節ノ(5)及ビ(1)ニヨツテ夫々次ノ如クニ考ヘテモ宜イ.

$$\sin 1765^\circ=\sin(5\times360^\circ-35^\circ)$$
$$=\sin(-35^\circ)=-\sin 35^\circ.$$

又　$\tan(-1190^\circ)=\tan(7\times180^\circ-1190^\circ)$

$$=\tan 70^\circ.$$

例　題

次ノ各三角函數ヲ或ル正ノ鋭角ノ同ジ三角函數デ表ハセ.

$\sin(-2000^\circ)$,　$\tan 523^\circ41'$,　$\cos(-293^\circ26')$

雜　例　題

1. 次ノ各三角函數ヲ求メヨ.

$$\sin 585^\circ,\qquad \cos 690^\circ,\qquad \sec(-930^\circ)$$

2. 卷末ノ銳角ノ三角函數表ニヨリ,次ノ各角ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求メヨ.

$$238^\circ,\qquad -1072^\circ$$

3. 次ノ各公式ガ成立ツ.

$$(1)\begin{cases}\sin(270^\circ+A)=-\cos A\\ \cos(270^\circ+A)=\sin A\\ \tan(270^\circ+A)=-\cot A\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\sin(270^\circ-A)=-\cos A\\ \cos(270^\circ-A)=-\sin A\\ \tan(270^\circ-A)=\cot A\end{cases}$$

4. $\sin(A-90^\circ)$, $\cos(A-90^\circ)$, $\tan(A-90^\circ)$ ヲ A ノ三角函數デ表ハセ.

5. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

(1) $\cos A+\sin(270^\circ+A)+\sin(A-270^\circ)+\cos(A+180^\circ)$

(2) $\sin(-270^\circ)+\tan^2(180^\circ-\alpha)-\operatorname{cosec}^2(450^\circ-\alpha)$

6. 360° 以下ノ正角デ次ノ方程式ヲ滿足セシメルスベテノ角 x ヲ求メヨ.

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=0$$

7. $\cos\theta=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ ナルトキ, $\tan\theta$ ノ値如何.

8. θ ヲ如何ナル角トスルモ $x+\dfrac{1}{x}=\sin\theta$ ヲ滿足セシメル實數 x ハ存在シナイ.

$2x^2-7x+13=0$

$(2x-1)(2x$

第二章　加　法　定　理

31. 正弦及ビ餘弦ノ加法定理

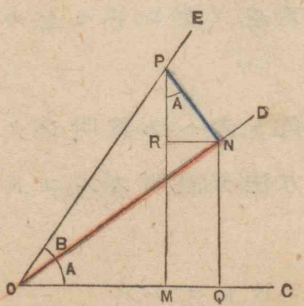
二角 A, B ノ各ノ正弦及ビ餘弦ヲ知ツテ, A+B ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メルニハ次ノ式ニヨル.

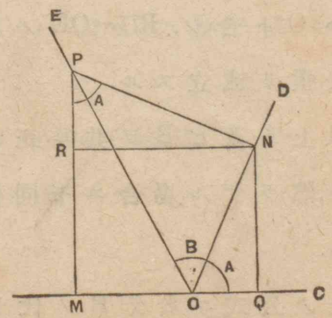
$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

コレヲ正弦及ビ餘弦ノ**加法定理**トイフ.

A 及ビ B ヲ共ニ正ノ銳角トスレバ,ソノ和 A+B ハ銳角,鈍角又ハ直角デアル,下ノ圖ハ和ガ銳角及ビ鈍角ナル場合ヲ示ス.





$\angle COD=A$, $\angle DOE=B$ トシ, OE 上ノ任意ノ一點 P カラ OC, OD ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引ケバ, $\angle MPN$ ハ A ニ等シイ. 次ニ N カラ OC, PM ニ夫々垂線 NQ, NR ヲ引クトキハ

$$\sin(A+B)=\frac{PM}{OP}=\frac{PR+RM}{OP}$$
$$=\frac{PR+NQ}{OP}=\frac{NQ}{OP}+\frac{PR}{OP}$$
$$=\frac{NQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ-MQ}{OP}$$
$$=\frac{OQ-RN}{OP}=\frac{OQ}{OP}-\frac{RN}{OP}$$
$$=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RN}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

A+B ガ直角ナルトキハ, OE ガ OC ニ垂直トナルカラ, M ハ O ト合シ, R ハ OE ノ上ニアル. ケレドモ上ノ證明ハ矢張リ成立スル.

以上 A 及ビ B ヲ共ニ正ノ鋭角ト考ヘテ證明シタケレドモ,然ラザル場合ニモ同様ノ方法デ證明スルコトガ出來ル.

上ノ公式ニ於テ B ノ代リニ −B トスレバ

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$
$$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$
$$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$$
$$=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

本節ノ結果ヲ併記スレバ下ノ如クデアル.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \qquad (\mathrm{I})$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B \qquad (\mathrm{II})$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \qquad (\mathrm{III})$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \qquad (\mathrm{IV})$$

コレラノ四式カラ後節ニ述ベル種々ノ公式ヲ誘出シ得ルバカリデナク,今迄ニ得タ三角函數ノ性質ニ關スル公式ハ皆コノ四式ノ中ニ含有サレルモノデアル. 例ヘバ(I)ニ於テ $B=90^\circ$ ト置ケバ,

$$\sin(A+90^\circ)=\sin A\cos 90^\circ+\cos A\sin 90^\circ=\cos A$$

デ,コレ卽チ第28節ノ公式デアル. 又(II)ニ於テ $A=0^\circ$ ト置ケバ

$$\sin(-B)=\sin 0^\circ\cos B-\cos 0^\circ\sin B=-\sin B$$

トナリ,コレ卽チ第27節ノ公式ト同ジデアル.

例　　題

1. 75°(=45°+30°) ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ.

2. 15°(=45°−30°) ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ.

3. $\sin(45°+A)$ 及ビ $\cos(45°-A)$ ヲ $\sin A$ 及ビ $\cos A$ ヲ用キテ表ハセ.

32. 正切ノ加法定理

前節ノ(I)及ビ(III)ニヨリ.

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}.$$

コノ最後ノ式ノ分母及ビ分子ヲ $\cos A\cos B$ デ除スレバ,

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

コレ卽チ正切ノ加法定理デアル.

同様ニ (II) 及ビ (IV) カラ次ノ式ヲ得ル.

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

例　　題

次ノ各等式ガ成立ツ.

(1)　$\tan(45°\pm A)=\dfrac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$

(2)　$\cot(A\pm B)=\dfrac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A}$

(3)　$\cot(45°\pm A)=\dfrac{\cot A\mp 1}{\cot A\pm 1}$

33. 倍角公式

正弦,餘弦及ビ正切ノ加法定理ニ於テ, B=A ト置ケバ次ノ式ヲ得ル.

$$\sin 2A=2\sin A\cos A,$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A,$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

コレラヲ<u>二倍角公式</u>トイフ.

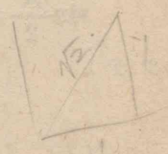
更ニ加法定理ニ於テ, B=2A ト置キ,二倍角公式ヲ應用スレバ次ノ公式ヲ得ル. (學生自ラソノ計算ヲ試ミヨ.)

$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A,$$

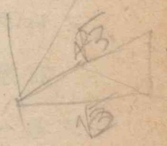
$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A,$$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

コレラヲ<u>三倍角公式</u>トイフ.



例　　題



1. 次ノ各等式ガ成立ツ.

(1)　$(\sin x\pm\cos x)^2=1\pm\sin 2x$

(2)　$\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\sin 2x$　　(3)　$\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

(4)　$\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\tan x$　　(5)　$\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$

(6)　$\dfrac{\cos 3A+\sin 3A}{\cos A-\sin A}=1+2\sin 2A$

(7)　$4\sin A\cos^3 A-4\cos A\sin^3 A=\sin 4A$

(8)　$\tan A\tan 2A\tan 3A=\tan 3A-\tan 2A-\tan A$

2. $A=18^\circ$ ナルトキハ $\sin 2A=\cos 3A$ デアル．コレカラ $\sin 18^\circ$ ノ値ヲ求メヨ．

3. $\sin 54^\circ$ ノ値ヲ求メヨ．

34. 半角公式

Aノ三角函數ニヨッテ $\dfrac{A}{2}$ ノ三角函數ヲ表ハス式ヲ作ルニハ cos A ヲ用キルノガ便利デアル．卽チ餘弦ノ二倍角公式ニ於テAノ代リニ $\dfrac{A}{2}$ ヲ入レレバ

$$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=1-2\sin^2\frac{A}{2}.$$

ヨッテ

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\qquad \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

ヨッテ

$$\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.$$

コレラヲ**半角公式**トイフ．

右邊ニ於ケル正負ノ符號ハ $\dfrac{A}{2}$ ガ何レノ象限ニアルカヲ考ヘテ適當ニ選ブモノトスル．

例　$\cos 330^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ知ッテ，165° ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ．

解　$$\sin 165^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 330^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos 165^\circ=-\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

例　題

半角公式ニヨッテ，15° 及ビ $22^\circ 30'$ ノ三角函數ヲ求メヨ．

35. 乘積公式

正弦及ビ餘弦ノ加法定理ノ中(I)ト(II)又ハ(III)ト(IV)ヲ相加ヘ又ハ減ズレバ次ノ四式ヲ得ル．

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)+\sin(A-B)&=2\sin A\cos B\\ \sin(A+B)-\sin(A-B)&=2\cos A\sin B\\ \cos(A+B)+\cos(A-B)&=2\cos A\cos B\\ \cos(A+B)-\cos(A-B)&=-2\sin A\sin B\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ココニ於テ　$A+B=C,\quad A-B=D$

ト置ケバ　$A=\dfrac{C+D}{2},\quad B=\dfrac{C-D}{2}$

トナル．ヨッテ(1)ヲ書キ直セバ次ノ如クニナル．

$$\left.\begin{aligned}\sin C+\sin D&=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\ \sin C-\sin D&=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\\ \cos C+\cos D&=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\ \cos C-\cos D&=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

(1)及ビ(2)ハ二角ノ正弦及ビ餘弦ノ和又ハ差ヲ積ノ形ニ變ジ,モシクハ積ヲ和又ハ差ノ形ニ變ズル場合ニ用キラレル公式デアル．

例 1.　$\sin(n+1)A+\sin(n-1)A=2\sin\dfrac{(n+1)A+(n-1)A}{2}\times$

$$\cos\frac{(n+1)A-(n-1)A}{2}=2\sin nA\cos A.$$

例 2.　$\sin\theta\sin3\theta=\dfrac{2\sin\theta\sin3\theta}{2}$

$$=\frac{\cos(3\theta-\theta)-\cos(3\theta+\theta)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos2\theta-\cos4\theta).$$

例　　題

1.　次ノ各式ヲ積ノ形ニ變ゼヨ．

（1）　$\sin3A+\sin5A$

（2）　$\cos x+\cos3x+\cos5x+\cos7x$

2.　次ノ式ヲ簡單ニセヨ．

$$\frac{\sin A+\sin4A+\sin7A}{\cos A+\cos4A+\cos7A}$$

3.　次ノ等式ガ成立ツ．

$$\sin50^\circ+\sin10^\circ=\cos20^\circ$$

4.　次ノ各式ノ値ヲ求メヨ．

（1）　$8\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ$

（2）　$\cos10^\circ+\cos110^\circ+\cos130^\circ$

雜　題 II.

1.　A, B. ガ共ニ正ノ鋭角デ, $\sin A=\dfrac{1}{3}$, $\cos B=\dfrac{1}{2}$ ナルトキ, $\sin(A+B)$ ノ値如何．

2.　α ガ正ノ鋭角, β ガ正ノ鈍角デ $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$ ナルトキ, $\cos(\alpha-\beta)$ ノ値如何．

3.　$\cos\alpha=\dfrac{11}{61}$,　$\sin\beta=\dfrac{9}{41}$ ナルトキ, $\cos(\alpha-\beta)$ ノ値如何．

4.　$\tan\dfrac{A}{2}=t$ ナルトキ, t ヲ用キテ A ノスベテノ三角函數ヲ表ハセ．

5.　次ノ各公式ガ成立ツ．

（1）　$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$

$$=\cos^2B-\cos^2A$$

（2）　$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B$

$$=\cos^2B-\sin^2A$$

(3)　$\sin(A+B+C)$

$$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$$
$$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$$

(4)　$\cos(A+B+C)$

$$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$$
$$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$$

(5)　$\tan(A+B+C)$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$$

6.　$A+B+C=180^\circ$ ナルトキ,次ノ各等式ガ成立ツ.

(1)　$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(2)　$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(3)　$\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

7.　$\sin A+\sin B+\sin C=0,\quad \cos A+\cos B+\cos C=0$ ナルトキハ, $3(B-C)$, $3(C-A)$, $3(A-B)$ ハ各 360° ノ整數倍デアル.

8.　方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トスルトキ,

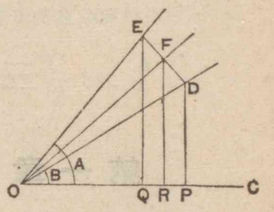
$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$$

ノ値ハ q デアル.

9.　次ノ方程式ヲ解ケ.

$$\cos\theta\cos3\theta=\sin\theta\sin5\theta$$

10.　圖ニ於テ $OD=OE=1$, $\angle COE=A$, $\angle COD=B$ デ, OF ハ角 DOE ノ二等分線,又 EQ, FR, DP ハ何レモ OC ニ垂直デアルトスル. コレニヨツテ幾何學的ニ



$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

ナルコトヲ示セ.

第三篇

三角形ノ解法

第一章　三角形ニ關スル公式

36. 三角形ノ原素

一ツノ三角形ハ三ツノ角及ビ三ツノ邊ヲモツ, コレラヲ總稱シテ三角形ノ原素トイフ.

今三角形ノ角ヲ A, B, C, コレニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ, A, B, C ハ何レモ 0° ト 180° トノ間ニアツテ, 且 $A+B+C=180^\circ$ ナル關係ガアル.

又 a, b, c ハ正デ,ソノ何レノ二ツノ和モ殘リノ一ツヨリ大デアル,卽チ $a+b>c$ 等ノ關係ガアル.

三角形ノ原素ノ間ニハナホ種々ノ關係ガアル,ソノ重要ナルモノヲ本章デ述ベル. 以下本章ニ於テハ三角形ノ原素ヲ常ニ上ノ如キ記號デ表ハスコトトスル.

例　題

三角形 ABC ニ於テ次ノ關係ガアル.

(1) $\sin A=\sin(B+C)$,　$\cos A=-\cos(B+C)$

(2) $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$,　$\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$

(3) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

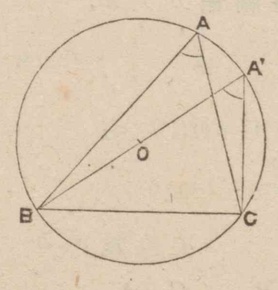
(4) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

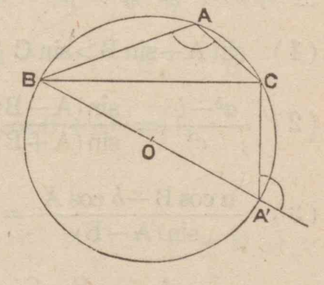
(5) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

37. 原素間ノ關係 I (正弦則)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

今 A ガ鋭角又ハ鈍角ナル場合ヲ考ヘ,三角形 ABC ノ外接圓ヲ畫キ,ソノ半徑ヲ R トスル.





コノ圓ニ於テ B ヲ過ギル直徑ノ他ノ端ヲ A′ トシ, CA′ ヲ結ベバ,角 BA′C ハ角 A ニ等シイカ (A ガ鋭角ナルトキ), 又ハ A ノ補角ニ等シイ (A ガ鈍角ナルトキ).

何レニシテモ　$\sin BA'C=\sin A$ デアル.

然ルニ　$BC=BA'\sin BA'C$

デアルカラ　$a=2R\sin A$.

卽チ　$\frac{a}{\sin A}=2R.$　(1)

A ガ直角ナルトキハ, $\sin A=1$, $a=2R$ デアルカラ,(1)

ハ矢張リ眞デアル.

同様ニシテ

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\qquad \frac{c}{\sin C}=2R. \qquad (2)$$

(1)及ビ(2)ヲ比較スレバ所題ノ式ヲ得ル.

コレヲ**正弦則**トイフ.（各分數ノ値ガ外接圓ノ直徑ニ等シイコトニ注意セヨ.）

例　題

1. 三角形ノ原素ノ間ニ次ノ各關係ガアル.

（1）$\sin A+\sin B>\sin C$

（2）$\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

（3）$\dfrac{a\cos B-b\cos A}{\sin(A-B)}=\dfrac{c}{\sin C}$

（4）$a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}+b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}$

$$+c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0$$

（5）$\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

2. △ABC ニ於テ $A:B:C=3:4:5$ ナルトキ, $a:b:c$ ヲ求メヨ.

3. △ABC ニ於テ $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=0$ ナラバ, $C=90^\circ$ デアル.

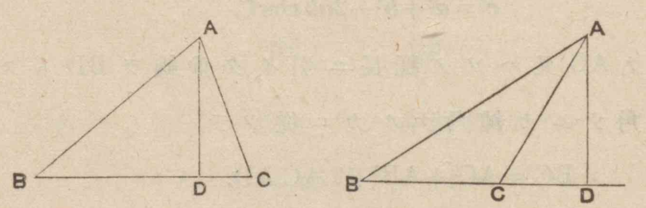
38. 原素間ノ關係 II

$$a=b\cos C+c\cos B,$$

$$b=c\cos A+a\cos C,$$

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

A カラ BC ニ垂線 AD ヲ引ケバ, B 及ビ C ガ共ニ鋭角ナルトキハ, D ハ邊 BC ノ上ニアル.



ヨツテ　$BC=BD+DC=AB\cos B+AC\cos C.$

故ニ　$a=b\cos C+c\cos B.$

モシ C ガ鈍角ナラバ, D ハ BC ヲ C ノ方ニ延長シタ上ニアル. ヨツテ

$$BC=BD-CD=AB\cos B-AC\cos(180^\circ-C)$$

$$=AB\cos B+AC\cos C.$$

故ニ再ビ　$a=b\cos C+c\cos B.$

B ガ鈍角ナルトキモ亦同様デアル.

C ガ直角ナルトキハ, $a=c\cos B$, $\cos C=0$; 故ニ上ノ式ハナホコノ場合ニモ眞デアル. B ガ直角ナルトキモ亦然リ.

故ニ上ノ式ハスベテノ場合ヲ通ジテ眞ナルコトガ知ラレル. 所題ノ第二式及ビ第三式モ同様ニシテ證明サレル.

39. 原素間ノ關係 III (餘弦則)

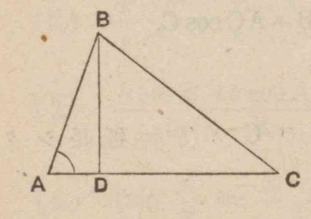
$$\mathbf{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,}$$

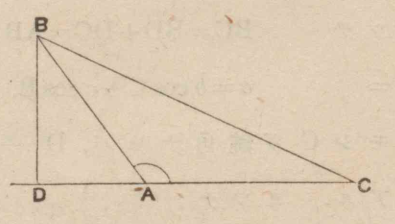
$$\mathbf{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,}$$

$$\mathbf{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.}$$

B カラ AC 又ハソノ延長ニ引イタ垂線ヲ BD トスレバ, A ガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ

$$BC^2=AC^2+AB^2\mp 2.AC.AD.$$





然ルニ一方ニ於テ, A ガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ

$$AD=AB\cos A,$$

又ハ $$AD=AB\cos(180°-A)=-AB\cos A$$

デアルカラ,何レニシテモ

$$BC^2=AC^2+AB^2-2.AC.AB\cos A,$$

即チ $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

又 A ガ直角ナルトキハ,ぴたごらすノ定理ニヨツテ $a^2=b^2+c^2$ デ且 $\cos A=0$ デアルカラ,上ノ式ハ眞デアル. 故ニ所題ノ第一式ハ常ニ眞デアル.

第二式,第三式モ同様ニ證明サレル.

コレヲ**餘弦則**ト稱ヘル. 或ハ前節ノ關係ヲ**第一餘弦則**トイヒ,本節ノ關係ヲ**第二餘弦則**トイフコトモアル.

例 題

1. 三角形ノ原素ノ間ニ次ノ各關係ガアル.

(1) $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$

(2) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

(3) $b\cos A-a\cos B=\dfrac{b^2-a^2}{c}$

(4) $(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}=c^2$

(5) $2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)=a^2+b^2+c^2$

2. $\triangle ABC$ ニ於テ $a=\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=3+\sqrt{3}$ ナルトキ, A, B, C ヲ求メヨ.

40. 原素間ノ關係 IV

餘弦則ニヨリ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2}.$$

故ニ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}.$

今 $a+b+c=2s$ ト置ケバ,

$a+b-c=2(s-c),\quad a-b+c=2(s-b)$

デアルカラ,

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

ココニ $\frac{A}{2}$ ハ正ノ鋭角デアルカラ, $\sin\frac{A}{2}$ ハ正デアル.

故ニ

同様ニシテ
$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

モシ餘弦則ニ於テ $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$ トシテ,上ト同様ノ計算ヲスレバ次ノ式ヲ得ル.

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

従ッテ(1)ト(2)カラ次ノ式ヲ得ル.

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

例題

1. 三角形ノ原素ノ間ニ次ノ各關係ガアル.

(1) $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(2) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$

(3) $(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c.\cot\frac{C}{2}$

2. $a=25,\ b=52,\ c=63$ ナルトキ, $\tan\frac{A}{2},\ \tan\frac{B}{2},\ \tan\frac{C}{2}$ ノ値ヲ求メヨ.

3. a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ,

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3.$$

41. 原素間ノ關係 V

正弦則ニヨリ

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

故ニ

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}.$$

故ニ

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

他ノ角及ビ邊ノ間ニモ同様ノ關係ガアル. コレヲ**ねぴあ(Napier)ノ公式**トイフ.

上ノ式ハBトC, 又ハbトcノ大小如何ニカカハラズ眞デアルケレドモ,實際使用スルトキニハナルベク負數ヲ避ケルガ便デアル. 故ニ例ヘバ

$A>B>C$, 從ツテ $a>b>c$

トスレバ,次ノ三ツノ式ヲ用ヰルガ宜イ.

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},\quad \tan\frac{A-C}{2}=\frac{a-c}{a+c}\cot\frac{B}{2},$$

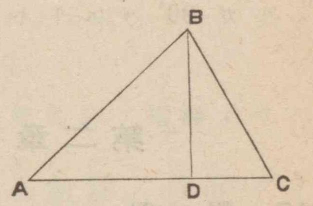
$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

例　　題

三角形ニツキ次ノ各公式ガ成立ツ.

(1) $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$　　(2) $\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$

42. 面　積



三角形ABCノ面積ヲSトスル. 頂點Bカラ底邊ACニ垂線BDヲ引ケバ

$$S=\frac{1}{2}AC.BD.$$

而シテ　$AC=b$,　　$BD=c\sin A$

デアルカラ

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

同様ニ

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

上ノ式ヲ第40節ノ公式ニヨッテ書キ直セバ

$$S=\frac{1}{2}bc.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

卽チ　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

コレ平面幾何學デ知レル**へろん(Heron)ノ公式**デアル.

例　　題

1. 三邊ガ26 cm, 35 cm, 51 cmナル三角形ノ面積ヲ求メヨ.

2. 二ツノ邊ガ 18m 及ビ 25m デソノ夾角ガ 60° ナル三角形ノ地面ノ面積如何.

3. 三角形ノ二邊ノ長サガ一定ナラバ,ソノ面積ハ夾角ガ 90° ナルトキニ最大トナル.

第二章 三角函數ノ對數表

43. 對數

三角形ニ關スル計算ニ於テハ對數ヲ利用スルコトガ多イ. ケレドモ對數ノ理論ハ代數學ニ屬スベキモノデアルカラ,ココニコレヲ詳述シナイ. 唯概要ヲ記シテ參考ニ供スル.

定義 $a^x=n$ ナルトキ, x ヲ稱シテ「a ヲ底トシタ n ノ**對數**」トイヒ,コレヲ $x=\log_a n$ ト記ス.

又 n ヲ對數 x ノ**眞數**トイフ.

定理

(1) $\log_a a=1$ (2) $\log_a 1=0$

(3) $\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$

(4) $\log_a \dfrac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$

(5) $\log_a(m^r)=r\log_a m$ (6) $\log_a \sqrt[r]{m}=\dfrac{1}{r}\log_a m$

定義 10ヲ底トシタ對數ヲ**常用對數**トイフ.

常用對數ニ於テハ底ヲ略シテ記サナイ. 今後本書ニ於ケル對數ハスベテ常用對數トスル.

注意 對數ガ負ナル場合デモ,ソノ數値ヲ記スニハ小數部分ヲ常ニ正ナラシメ,負號ハ整數部分ノ上ニ冠ラセル. 例ヘバ -1.2564 ノ代リニ $\bar{2}.7436$ ノ如クニ書ク.

對數ノ小數部分ヲ**假數**トイヒ,整數部分ヲ**指標**トイフ.

定理 或ル數ト,ソノ數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數トノ對數ハ同一ノ假數ヲモツ.

指標ノ法則 或ル數ノ對數ノ指標ハ,ソノ數ガ

1ヨリ大ナルトキハソノ整數部分ノ桁數カラ1ヲ減ジタモノニ等シク,

1ヨリ小ナルトキハソノ小數點以下初メテ現ハレル有效數字ノアル桁マデノ桁數ニ負號ヲ附シタモノニ等シイ.

44. 三角函數ノ對數表

實際ノ計算ニハ三角函數ノ値ソレ自身ヨリモソノ對數ノ値ノ方ガ必要ガ多イカラ,コレヲ表ニシタモノガアル,コレヲ三角函數ノ對數表ト稱ヘル.

本書ノ卷末ニツケタモノハ $10'$ 置キノ角ニツイテ小數第四位マデノ近似値ヲ示シタモノデアル.

例 $\log\sin 25^\circ 20'=\bar{1}.6313$ $\log\sin 54^\circ 30'=\bar{1}.9107$

$\log\cos 40^\circ 10' = \bar{1}.8832$　　$\log\cos 79^\circ 50' = \bar{1}.2468$

$\log\tan 15^\circ 20' = \bar{1}.4381$　　$\log\cot 89^\circ\ 0' = \bar{2}.2419$

正弦,餘弦及ビ45°ヨリ小ナル角ノ正切等ハ1ヨリ小デアルカラソノ對數ハ負ノ指標ヲモツ. 然ルニ數字ノ上ニ一々負號ヲツケルコトハ印刷上不便デアルカラ,對數ノ眞ノ値ニ10ヲ加ヘテ正數トシタモノヲ表ニスルコトガアル. 斯クノ如キ場合ニハ,コレヲ特ニ**表對數**トイヒ, log sin 等ノ代リニ Lsin 等ト書ク. 例ヘバ

$L\sin 25^\circ 20' = 9.6313,$　　$L\tan 15^\circ 20' = 9.4381.$

例　題

1. 表ニヨッテ次ノ値ヲ求メヨ.

$\log\sin 7^\circ 10',$　　$\log\cos 18^\circ 0',$　　$\log\sin 112^\circ 20'$

2. 次ノ式ヲ滿足セシメル正ノ鋭角 x ヲ求メヨ.

$\log\sin x = \bar{1}.4939,$　　$\log\cos x = \bar{1}.6990,$

$\log\tan x = \bar{1}.9848$

45. 比例部分ノ理

表中ニナイ鋭角ノ三角函數ノ對數ヲ求メヨウトスルトキハ,

角ノ變化ガ微小ナルトキハ,ソレニ伴フ三角函數ノ對數ノ變化ハホボ角ノ變化ニ正比例スル

ト見做シテコレヲ計算スルノデアル. コレヲ**比例部分ノ理**ト稱ヘル.

例 1. $\log\sin 27^\circ 16'$ ヲ求メヨ.

解　表ニヨリ　$\log\sin 27^\circ 10' = \bar{1}.6595,$

$\log\sin 27^\circ 20' = \bar{1}.6620.$

故ニ　$\log\sin 27^\circ 20' = \log\sin 27^\circ 10' + 0.0025.$

ヨッテ今　$\log\sin 27^\circ 16' = \log\sin 27^\circ 10' + x$

トスレバ,比例部分ノ理ニヨリ

$10' : 6' = 0.0025 : x.$

コレカラ　$x = 0.0025 \times \frac{6}{10} = 0.0015.$

故ニ　$\log\sin 27^\circ 16' = \log\sin 27^\circ 10' + 0.0015$

$= \bar{1}.6595 + 0.0015$

$= \bar{1}.6610.$

コノ計算ニ於ケル0.0025(又ハ小數ノ末位ヲ單位トシテ單ニ25)ノ如キ數ヲ**表差**トイヒ; 0.0015(又ハ單ニ15)ノ如キ數ヲ**比例部分**トイフ.

log sin 及ビ log cos ニ對スル表差ハ各表中ノ「差」ト題シタ欄内ニアル,又 log tan 及ビ log cot ハ共通ノ表差ヲモツカラ,表ノ中央ニ「通差」ナル欄ヲ設ケテコレヲ載セテアル.

又計算ノ勞ヲ省クタメニ各ノ表差ニ對シテソノ $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ……, $\frac{9}{10}$ 等ヲ表トシタモノヲ對數表ノ傍ニ添ヘテアル,コレヲ比例部分ノ表ト稱ヘル.

故ニ上ノ例ハ實際ノ計算デハ次ノ如クニ記ス.

$\log\sin 27^\circ 10' = \bar{1}.6595$ 表差25

$6' \ldots\ldots 15.0$

$\log\sin 27^\circ 16' = \bar{1}.6610$

例 2. $\log\cos 48^\circ 12'$ ヲ求メヨ.

解 餘弦ハ角ガ增大スルニ從ツテ却ツテソノ値ヲ減ズルコトニ注意シ,次ノ如クニ計算スル.

$\log\cos 48^\circ 10' = \bar{1}.8241$ 表差14

$2' \ldots\ldots -2.8$

$\log\cos 48^\circ 12' = \bar{1}.8238$

或ハ $\log\cos 48^\circ 20' = \bar{1}.8227$ 表差14

$-8' \ldots\ldots 11.2$

$\log\cos 48^\circ 12' = \bar{1}.8238$

例 3. $\log\tan 56^\circ 24' 40''$ ヲ求メヨ.

解 $24'40'' = 24.'67$

ヨツテ次ノ如クニ計算スル.

$\log\tan 56^\circ 20' = 0.1765$ 表差27

$4' \ldots\ldots 10.8$

$0.6 \ldots\ldots 16.2$

$0.07 \ldots\ldots\ldots 18.9$

$\log\tan 56^\circ 24'.67 = 0.1777\,6\,0\,9$

故ニ四捨五入シテ

$\log\tan 56^\circ 24' 40'' = 0.1778.$

例 4. $\log\sin x = \bar{1}.9545$ ナル正ノ鋭角 x ヲ求メヨ.

解 $\log\sin x = \bar{1}.9545$

$\log\sin 64^\circ 10' = \bar{1}.9543$ 表差 6

2

$3' \ldots\ldots 1.8$

2

$0.3 \ldots 1.8$

$64^\circ 13'.3$ 2

故ニ $x = 64^\circ 13'.3.$

例 5. $\log\cos x = \bar{1}.3614$ ナル正ノ鋭角 x ヲ求メヨ.

例2ト同様ノ注意ヲ以テ次ノ如クニ計算スル.

解 $\log\cos x = \bar{1}.3614$

$\log\cos 76^\circ 40' = \bar{1}.3629$ 表差54

15

$2' \ldots\ldots 10.8$

42

$0.8 \ldots\ldots 43.2$

$x = 76^\circ 42'.8$ -12

注意 小數第四位マデノ表ヲ用ヰ,比例部分ノ理ニヨツテ算出シタ値ニ於テハソノ小數第五位以下ハ必ズシモ確實デナイ. 通常ハ上ノ諸例ニ示ス如ク第四位マデニ四捨五入ス

ルモノトスル．又角ヲ求メル場合ニ於テハ1分ノ小數第二位以下ハ殆ンドコレヲ取ル要ガナイ．

例　　題

1. 次ノ各値ヲ求メヨ．

$\log\sin 10°45'$,　　$\log\cos 20°3'$,　　$\log\tan 77°17'$

2. 次ノ各式ヲ滿足セシメル正ノ鋭角 x ヲ求メヨ．

$\log\tan x = \bar{1}.5551$, $\log\sin x = \bar{1}.9876$, $\log\cos x = \bar{1}.7890$

3. $0°$ ト $360°$ トノ間ニアツテ次ノ各方程式ヲ滿足セシメル角 θ ヲ求メヨ．

(1)　$\cos 3\theta = \cos^2\theta$

(2)　$1+\sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$

(3)　$5\cos\theta - 2\sin\theta = 2$

4. 次ノ式カラ x 及ビ y ヲ求メヨ．

$$\begin{cases} \sin 26°10' = 0.4410 \\ \sin 26°17' = x \\ \sin y = 0.4415 \\ \sin 26°20' = 0.4436 \end{cases}$$

第三章　三角形ノ解法

46. 三角形ノ解法

一ツノ三角形ノ六ツノ原素ノ中,一般ニ何レカ三ツガ與ヘラレルトキハ他ノ三ツヲ算出スルコトガ出來ル,卽チ所謂三角形ヲ**解ク**コトガ出來ル．但シソノ與ヘラレル三原素ノ中少クモ一ツハ邊ナルコトヲ要スル．

故ニ三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合ガアル．

(1)　一邊ト二角トヲ知ル場合

(2)　二邊トソノ夾角ヲ知ル場合

(3)　二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知ル場合

(4)　三邊ヲ知ル場合

以下次第ニ節ヲ逐ツテコレラノ各ノ解法ヲ述ベル．但シ A, B, C ハ三角形ノ角, a, b, c ハ夫々ノ對邊ヲ表ハスコトトスル．

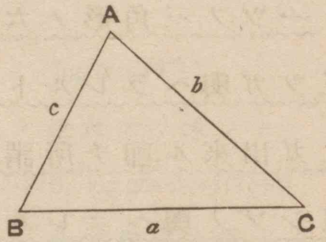
注意　六ツノ原素以外ノモノデモ適當ナ三ツノ量ガ與ヘラレバ三角形ハ定マル,例ヘバ三ツノ中線ガ與ヘラレル場合ノ如クデアル．斯クノ如キ場合ニ於テモ與ヘラレタ三ツノ量ヲ用ヰテソノ三角形ノ原素ヲ悉ク算出スルコトヲ稱シテ三角形ヲ**解ク**トイフ．

47. 一邊ト二角トヲ知ル場合

與ヘラレタ一邊ヲ a トスル. 與ヘラレタ二角ハ A, B C ノ中ノ何レトスルモ,殘リノ一ツハ

$$A+B+C=180^\circ$$

ナル關係ニヨツテ定マル. 次ニ正弦則ニヨリ



$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

コレニヨツテ b 及ビ c ヲ得ル.

對數ヲ用キルトキノ式トシテハ夫々

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A,$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

トスベキデアルケレドモ,繁ヲ避ケルタメ以下ノ諸節ニ於テハ一々斯ク書キ直スコトヲ略ス.

48. 二邊トソノ夾角ヲ知ル場合

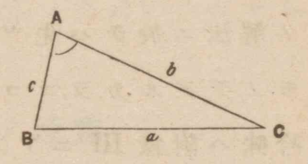
A, b, c ヲ與ヘラレタモノトシ, $b>c$ トスル. 先ツ $B+C=180^\circ-A$ デアルカラ

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}. \tag{1}$$

又第41節ノ公式ニヨリ

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}. \tag{2}$$

(2)カラ $\frac{B-C}{2}$ ガ定マリ,コレト(1)トカラ



$$B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},$$

$$C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}$$

トシテ, B 及ビ C ヲ得ル. 最後ニ正弦則ニヨリ

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}\quad 又ハ\quad a=\frac{c\sin A}{\sin C}.$$

($b=c$ 及ビ $b<c$ ナル場合ハ學生自ラ考ヘヨ.)

49. 二邊トソノ夾角ヲ知ツテ第三邊ヲ求メルコト

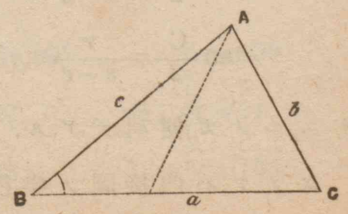
A, b, c ヲ知ツテ a ヲ求メルニ,前節ノ方法ヨリモ更ニ便利ナ法ガアル. 卽チ先ツ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求メルコトハ前節ノ如クシ,コレカラ第41節ノ例題ニ擧ゲタ式ニヨリ

$$a=(b+c)\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\quad 又ハ\quad a=(b-c)\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

50. 二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知ル場合

B, b, c ヲ與ヘラレタモノトスレバ,先ヅ正弦則ニヨリ

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}.$$



コレニヨツテ C ヲ求メ,從ツテ

$$A=180^\circ-(B+C)$$

ヲ得ル. 再ビ正弦則ニヨリ $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$ ヲ得ル.

コノ解法ニ於テハ先ヅ $\sin C$ ノ値ヲ求メ,コレカラ C ヲ出スモノデアルカラ,ココニ種々ノ場合ヲ生ズル. (詳細ナル吟味ハ附錄 III ニアル.)

51. 三邊ヲ知ル場合

コノ場合ニハ第40節ノ公式ノ中

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\qquad s=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ニヨツテ三ツノ角ヲ求メルガ宜イ.

實際ニ計算スルニハ,先ヅ

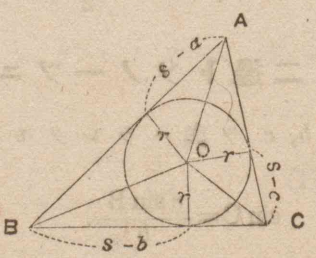
$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

ナル r ヲ計算シテ置イテ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$$



トスルノガ便利デアル.

コノ r ハ内接圓ノ半徑デアルコトニ注意セヨ.

注意　$\sin\frac{A}{2}$ 又ハ $\cos\frac{A}{2}$ 等ノ公式デハ a, b, c $s-a$, $s-b$, $s-c$ 等ノ對數ヲ要スルケレドモ, $\tan\frac{A}{2}$ ノ公式デハ s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ ダケノ對數デ足リルノデアル.

52. 三角形解法ニツイテノ注意

(1) 表ニ揭ゲラレタ數ハ小數若干位マデノ近似値ニ過ギナイ,又比例部分ノ理モ絶對ニ精確ナモノデハナイ(特ニ表差ガ比較的大ナル部分ニ於テ最モ不確實デアル). 故ニ表ヲ用キテ計算シタ結果ニ於テハ或ル程度以上ノ精密ハ到底望マレナイ.

(2) 計算ニ際シテ無用ノ小數位ヲ多ク取ラナイヤウニ注意セヨ. 使用スル表ノ精粗ニヨリ,又與ヘラレタ既知數ノ確實ノ程度ニモヨリ,殊ニ實地問題ニ於テハソノ必要ノ程度ヲ考ヘテ常ニ適當ナ桁數ヲ選定スベキデアル. (第45節ノ注意ヲ參照セヨ.)

(3) 與ヘラレタ數ガ簡單デ對數ヲ用キル要ノナイトキ,或ハ三角形ガ直角三角形又ハ二等邊三角形等ノ特殊ナモノナルトキハ,必ズシモ本章ニ述ベタ方法ニ拘泥スルコトナク,臨機ノ工夫ニヨツテ簡單ニ解イテ宜イ.

例題

1. 次ノ各三角形ヲ解ケ.

(1) $\begin{cases}a=55\\ A=41^\circ13'\\ B=71^\circ19'\end{cases}$　(2) $\begin{cases}A=76^\circ30'\\ b=87\\ c=38\end{cases}$　(3) $\begin{cases}a=109\\ b=71\\ c=100\end{cases}$

2. 三邊ノ長サガ 20, 21, 29 ナルトキ,最大ナル角ヲ求メヨ.

3. $B=30^\circ$, $b=50\sqrt{3}$, $c=150$ ナル三角形ハ二ツアリ,一ツハ二等邊三角形,一ツハ直角三角形デアル. 又各ノ第三邊ヲ求メヨ.

4. $b:c=2:\sqrt{3}$ デ,且 $B=C+30^\circ$ ナル三角形ノ三ツノ角ヲ求メヨ.

雜　題 III.

(次ノ諸問題ニ用キタ記號ハスベテ第36節ニ説明シタノト同ジ意味ヲモツモノトスル.)

1. 三角形ノ原素ノ間ニ次ノ各關係ガアル.

(1) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$

(2) $a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$

(3) $a^2=(b+c)^2\sin^2\dfrac{A}{2}+(b-c)^2\cos^2\dfrac{A}{2}$

(4) $\dfrac{s^2}{abc}=\dfrac{1}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{1}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}$

2. $\cot A, \cot B, \cot C$ ガ等差級數ヲナストキハ, a^2, b^2, c^2 モ亦等差級數ヲナス. 又コノ逆ハ如何.

3. $\cot\dfrac{A}{2}$, $\cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ, a, b, c モ亦等差級數ヲナス. 又コノ逆ハ如何.

4. 頂點 A カラ引イタ中線 AD ノ長サハ

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}.$$

5. 角 A ノ二等分線ノ長サハ $\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$, 又 A ニ隣ル外角ノ二等分線ノ長サハ $\dfrac{2bc}{b\sim c}\sin\dfrac{A}{2}$ デアル.

6. $A=30^\circ$, $B=45^\circ$ ナラバ $a:b:c$ ノ値如何.

7. $a\cos A=b\cos B$ ナル關係ヲモツ三角形ハ二等邊又ハ直角三角形デアル.

8. 一邊トソノ兩端ノ二角トデ三角形ノ面積ヲ表ハス公式ヲ作レ.

又ソレニヨツテ $a=20\,\mathrm{cm}$, $B=76^\circ$, $C=44^\circ$ ナルモノノ面積ヲ求メヨ.

9. 四角形ノ二ツノ對角線ヲ m, n 又ソノ夾角ヲ α トスレバ,ソノ面積ハ $\dfrac{1}{2}mn\sin\alpha$ デアル.

10. 三角形ノ內心ヲ O トシ, OA, OB, OC ヲ夫々 α, β, γ トスレバ

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2=abc.$$

11. 三角形ノ面積ヲ S,又外接圓及ビ內接圓ノ半徑ヲ夫夫 R, r トスレバ,

(1) $R=\dfrac{abc}{4S}$,

(2) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

12. R, r ヲ前問ノ通リトシ,外心ヲ O,內心ヲ I トスレバ,

(1) $\mathrm{AI}=4\mathrm{R}\sin\dfrac{\mathrm{B}}{2}\sin\dfrac{\mathrm{C}}{2}$,

(2) $\mathrm{OI}^2=\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}.r$.

13. 三角形ノ垂心ヲ H トシ, AH, BH, CH ガ對邊ト交ハル點ヲ夫々 D, E, F, 又 R ヲ前問ノ通リトスレバ,

(1) $\mathrm{AH}=2\mathrm{R}\cos\mathrm{A}$, (2) $\mathrm{HD}=2\mathrm{R}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}$,

(3) $\mathrm{EF}=\mathrm{R}\sin 2\mathrm{A}$,

(4) $\triangle\mathrm{DEF}=\dfrac{1}{2}\mathrm{R}^2\sin 2\mathrm{A}\sin 2\mathrm{B}\sin 2\mathrm{C}$.

14. 一點 O ヲ共有スル四直線ト一ツノ直線トノ交點ヲ順次ニ A, B, C, D トスレバ,

$$\frac{\sin\angle\mathrm{AOB}}{\sin\angle\mathrm{BOC}}:\frac{\sin\angle\mathrm{AOD}}{\sin\angle\mathrm{DOC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}:\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}.$$

15. 前問ニ於テ更ニ他ノ一ツノ直線ト OA, OB, OC, OD トノ交點ヲ夫々 A′, B′, C′, D′ トスレバ,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}:\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{B'C'}}:\frac{\mathrm{A'D'}}{\mathrm{D'C'}}.$$

16. 一直線上ノ四點ヲ A, B, C, D, 又ソノ直線外ノ二點ヲ O, P トスレバ,

$$\frac{\sin\angle\mathrm{AOB}}{\sin\angle\mathrm{BOC}}:\frac{\sin\angle\mathrm{AOD}}{\sin\angle\mathrm{DOC}}=\frac{\sin\angle\mathrm{APB}}{\sin\angle\mathrm{BPC}}:\frac{\sin\angle\mathrm{APD}}{\sin\angle\mathrm{DPC}}.$$

17. 三角函數ヲ用キテせばノ定理ヲ證明セヨ.

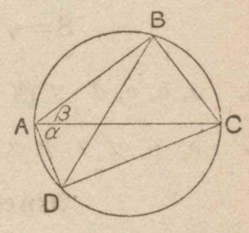
(先ヅ定理四ノ結果ヲ $\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{MA}}\cdot\dfrac{\mathrm{BL}}{\mathrm{NB}}\cdot\dfrac{\mathrm{CM}}{\mathrm{LC}}=1$ ト書キ直シ,

ココニ $\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{MA}}=\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AO}}\cdot\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AM}}$ 等トシテ正弦則ヲ應用スル.)

18. めねらうすノ定理ニツキ前問ト同様ノコトヲナセ.

19. 圓ニ内接スル四角形 ABCD ニ於テ AC ガソノ圓ノ直徑ナルトキ,

$$\angle\mathrm{DAC}=\alpha,\quad \angle\mathrm{BAC}=\beta$$



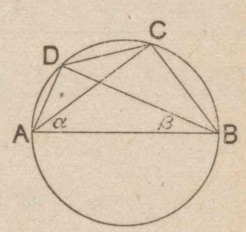
トシ,とれみーノ定理ヲ用キテ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ナルコトヲ示セ.

20. 圓ニ内接スル四角形 ABCD ニ於テ AB ガソノ圓ノ直徑ナルトキ,

$$\angle\mathrm{BAC}=\alpha,\quad \angle\mathrm{ABD}=\beta$$



トシ,とれみーノ定理ヲ用キテ

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

ナルコトヲ示セ.

21. 四邊形 ABCD ニ於テ, 邊 AB, BC, CD, DA ヲ夫々 a, b, c, d トシ,又ソノ面積ヲ S トスレバ,

(1) $2\mathrm{S}=ad\sin\mathrm{A}+bc\sin\mathrm{C}$,

(2) $a^2+d^2-b^2-c^2=2ad\cos\mathrm{A}-2bc\cos\mathrm{C}$.

22. 前問ヲ參考シ次ノ式ヲ導ケ.

$$\mathrm{S}^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}$$

但シ $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$.

23. 前問ニ於テ,

(1) 四邊形ガ圓ニ内接スルトキハ,

$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

(2) 二邊ノ和ガ他ノ二邊ノ和ニ等シイトキハ,

$$S=\sqrt{abcd}\,\sin\frac{A+C}{2}.$$

24. a, b, c, d ヲ前ノ通リトシ,對角線 AC, BD ヲ夫々 m, n, 又ソノナス角ヲ θ トスレバ,

$$2mn\cos\theta=(b^2+d^2)\sim(a^2+c^2).$$

25. 前問ヲ參考シ次ノ式ヲ導ケ.

$$S=\frac{1}{4}\{(b^2+d^2)\sim(a^2+c^2)\}\tan\theta$$

第四篇

直線及ビ平面

第一章 緒論

53. 立體幾何學

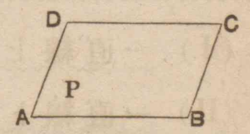
第一篇カラ第三篇マデニ於テハ主トシテ平面圖形ニツイテ述ベタ(平面幾何學及ビ平面三角法).

コレカラハオモニ同一ノ平面上ニナイ圖形ノ形,大キサ及ビ位置ニ關スル性質ヲ述ベル(立體幾何學).

ヨツテコレカラ公理,定理ノ番號ヲ新ニスル.

公理 一. 一平面上ノ二點ヲ過ギル直線ハ全クソノ平面上ニアル.

平面ハソノ上ノ何レノ方向ニモ限リナク擴ガツテキルモノデアル. ケレドモコレヲ圖ニ表ハスニハソノ上ニ畫イターツノ平行四邊形ヲ以テスルノガ常デアル.



定義 一點又ハ一直線ガ一平面上ニアルトキハ,コノ平面ハソノ點又ハソノ直線ヲ**過ギル**或ハ**含ム**トイフ.

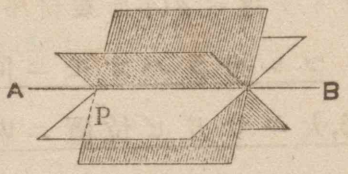
一直線ト一平面トガ少クトモ一點ヲ共有スルトキハ,

ソノ直線トソノ平面トハ**出會フ**トイフ.（直線ガ全ク平面上ニアル場合ヲモ含ム.）

又一直線ト一平面トガ唯一點ノミヲ共有スルトキハ, ソノ直線トソノ平面トハ**相交ハル**トイフ.

54. 平面ノ基本性質

公理 二. 二點ヲ過ギル平面ハ無數ニ多クアル.



故ニ一直線上ニ任意ノ二點ヲ取レバコレヲ過ギル平面ハ無數ニ多クアル. 而シテソレラノ平面ハ何レモモトノ一直線ヲ含ンデヰル.（公理一ヨッテ公理二ノ代リニ次ノ如クイフコトモ出來ル.

一直線ヲ含ム平面ハ無數ニ多クアル.

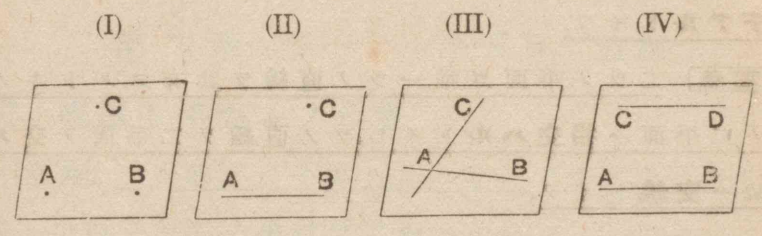
公理 三. 次ノ各ノ條件ニ適スル平面ハ一ツアル, 而シテ唯一ツニ限ル.

(I) 一直線上ニナイ三點ヲ含ムコト.

(II) 一直線トソノ上ニナイ一點トヲ含ムコト.

(III) 相交ハル二直線ヲ含ムコト.

(IV) 平行ナル二直線ヲ含ムコト.



或ハコレラノ各條件ハ夫々一ツノ平面ヲ**決定スル**トモイフ.

55. 二直線ノ位置

公理 四. 空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ハ次ノ四種ニ限ル.

モシ同一平面上ニアルトキハ,

(1) 相交ハルカ,　(2) 互ニ平行ナルカ,

(3) 全ク相一致スル.

同一平面上ニナイトキハ,

(4) 相交ハラズ,又互ニ平行デモナク,又全ク相一致モシナイ.

56. 二平面ノ位置

定義 二ツノ平面ガ少クトモ一點ヲ共有スルトキハソノ二平面ハ**出會フ**トイフ.（二平面ガ相一致スル場合ヲモ含ム.）

モシ二平面ガ出會ハナイトキハ,ソノ二平面ハ互ニ平

行デアルトイフ.

定義 二ツノ平面ガ唯一ツノ直線ヲ共有スルトキハソノ二平面ハ**相交ハル**トイヒ,ソノ直線ヲ二平面ノ**交ハリ**又ハ**交線**トイフ.

公理 **五.** 二平面ノ位置ノ關係ハ次ノ三種ニ限ル.

モシ二平面ガ出會フナラバ,

(1) 相交ハルカ, (2) 全ク相一致スル.

二平面ガ出會ハナイトキハ,

(3) 互ニ平行デアル.

例題

1. 三點 A, B, C ヲ順次ニ結ブ三ツノ線分 AB, BC, CA ハ皆同一平面上ニアル.

2. 四點 A, B, C, D ヲ順次ニ結ブ四ツノ線分ノ中, AB ト CD トガ平行ナラバ,コレラノ四ツノ線分ハ皆同一平面上ニアル.

3. 悉クハ同一平面上ニナイ三直線ガ同一點ヲ過ギルトキ,コレラノ直線デ決定サレル平面ハ何程アルカ.

4. 悉クハ同一平面上ニナイ四ツノ點ガアルトキ,コレラノ點デ決定サレル平面ハ何程アルカ.

第二章 平行ナル平面及ビ直線

57. 直線ト平面トノ位置

定義 一直線ト一平面トガ出會ハナイトキハ,コノ直線ト平面トハ互ニ**平行デアル**トイフ.

公理 **六.** 一直線ト一平面トノ位置ノ關係ハ次ノ三種ニ限ル.

モシ直線ト平面トガ出會フトキハ,

(1) 相交ハルカ,

(2) 直線ガ平面ニ含マレル.

又直線ト平面トガ出會ハナイトキハ,

(3) 互ニ平行デアル.

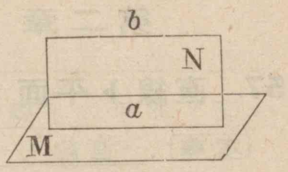
58. 平行直線ニ關スル定理

定理 **一.** 二直線ガ平行ナルトキ,ソノ一直線ヲ含ミ他ノ一直線ヲ含マナイ平面ハ後ノ一直線ニ平行デアル.

二ツノ平行ナル直線ヲ a, b トシ, a ヲ含ミ b ヲ含マナイ一ツノ平面ヲ M トスレバ, M ハ b ニ平行デアル.

證明 a, b ハ平行デアルカラ一ツノ平面ヲ決定スル. コレヲ N トスレバ, a ハ卽チ二平面 M ト N トノ交ハリデアル.

故ニ假リニ b ガ平面Mト出會フコトガアルトスレバ,ソノ交點ハ a 上ニナケレバナラヌ. 從ツテ a, b ハ相交ハルコトトナル.



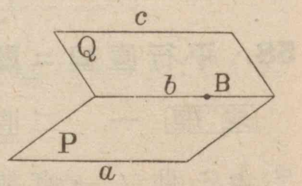
然ルニ b ト a トハ假設ニヨリ平行デアルカラ相交ハルコトハナイ.

故ニ b トMトハ出會ハナイ,卽チ互ニ平行デアル.

系 1. 二直線ガ平行ナルトキ,夫々ソノ一ツヅツヲ含ム二ツノ平面ノ交ハリハソレラノ二直線ノ各ニ平行デアル.

系 2. 同一直線 a ニ平行ナル二直線 b, c ハ互ニ平行デアル.

證明 a ト b トニヨツテ決定サレル平面ヲPトシ,又 b 上ノ一點Bト直線 c トデ決定サレル平面ヲQトスル.



然ルトキハPトQトノ交ハリハ a ニ平行デアル(系 1). 故ニソノ交ハリハP上ニアツテ,點Bヲ過ギリ a ニ平行ナル直線デアル,卽チ直線 b デアル. 而シテ c ハソノ交ハリニ平行デナケレバナラヌ(系 1).

故ニ b ト c トハ互ニ平行デアル.

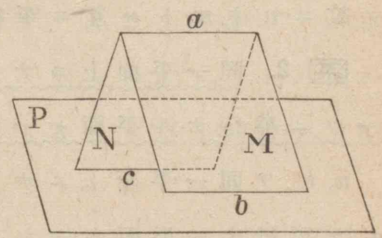
定理 二. 一直線ト一平面トガ平行ナルトキ

ハ,ソノ直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交ハリハ前ノ直線ニ平行デ,又互ニ平行デアル.

直線 a ト平面Pトヲ互ニ平行デアルトシ,a ヲ含ム平面M及ビNト平面Pトノ交ハリヲ夫々 b, c トスレバ,b, c ハ何レモ a ニ平行デ,且又互ニ平行デアル.

證明 a トPトハ互ニ平行デアルカラ出會ハナイ.

故ニ a ハP上ノ直線 b ト出會フコトハナイ. 而シテ a ト b トハ同一平面Mノ上ニアル.



故ニ a ト b トハ互ニ平行デアル.

同樣ニ a ト c トモ亦互ニ平行デアル.

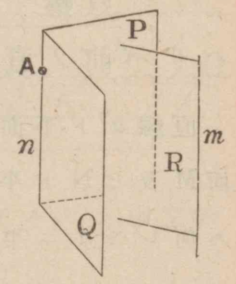
從ツテ又 b ト c トモ互ニ平行デアル(定理一系 2).

系 1. 同一ノ直線ニ平行ナル二平面ノ交ハリハソノ直線ニ平行デアル.

同一ノ直線 m ニ平行ナル二平面P,Qノ交ハリヲ n トスレバ,n ト m トハ互ニ平行デアル.

證明 交線 n 上ノ任意ノ一點Aト m トヲ含ム平面ヲRトスレバ,Rト平面Pトノ交ハリハAヲ過ギリ m ニ平行ナル直線デアル.

同様ニ R ト Q トノ交ハリモ A ヲ過ギリ m ニ平行ナル直線デアル.



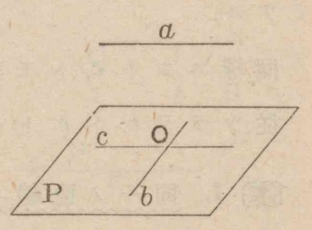
然ルニ一點 A ヲ過ギテ m ニ平行ナル直線ハ唯一ツダケデアル.

故ニ P ト R トノ交ハリモ, Q ト R トノ交ハリモ同一直線デ, ツマリ P ト Q トノ交ハリデアル.

故ニ n ト m トハ互ニ平行デアル.

系 2. 同一平面上ニナイ二直線ノ一ツヲ含ンデ, 他ノ一ツニ平行ナル平面ハ一ツアル, 而シテ唯一ツニ限ル.

a, b ヲ同一平面上ニナイ二直線トスレバ, b ヲ含ンデ a ニ平行ナル平面ハ一ツアル, 而シテ唯一ツダケデアル.

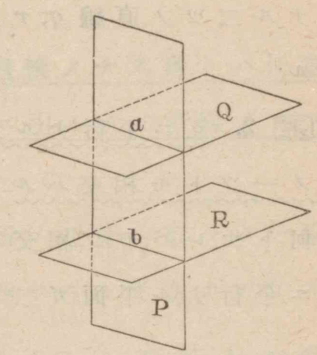


證明 b 上ノ一點 O ト直線 a トノ定メル平面ニ於テ, O ヲ過ギリ a ニ平行ナル直線 c ヲ引ケバ, 二直線 b, c ノ定メル平面 P ハ b ヲ含ミ a ニ平行デアル(定理一).

P ノ他ニハ b ヲ含ミ a ニ平行ナル平面ハナイ. 何トナレバ, モシアルトスレバ, ソノ平面ト P トノ交ハリナル b ハ a ニ平行デナケレバナラヌコトトナッテ(系 1), 假設ニ反スルカラデアル.

59. 平行平面ニ關スル定理

互ニ平行ナル二平面 Q 及ビ R 上ニ夫々任意ノ一點ヲ取リソレラノ二點ヲ過ギル平面 P ヲ作レバ P ハ Q 及ビ R ト交ハル.



今 P ト Q 及ビ P ト R トノ交ハリヲ夫々 a, b トスレバ a, b ハ互ニ平行デアル.

何トナレバ Q ト R トハ平行デアルカラ出會ハナイ, 從ッテ a ト b トハ相交ハラナイ. 而シテ a ト b トハ同一ノ平面 P ノ上ニアル. 故ニ a ト b トハ互ニ平行デアル.

ヨッテ次ノ定理ヲ得ル.

定理 三. 互ニ平行ナル二平面ガ一ツノ平面ト交ハルトキハ, ソノ交ハリハ互ニ平行デアル.

系 1. 平面外ノ一點ヲ過ギリ, ソノ平面ニ平行ナル平面ハ唯一ツ存在スル.

平面 P 外ノ一點ヲ A トスル. (先ヅ A ヲ過ギリ P ニ平行ナル平面ノ存在スルコトハ學生自ラ證明セヨ.) モシ A ヲ過ギリ P ニ平行ナル平面ガ二ツアルナラバ, コレヲ Q, R トスル. A ヲ過ギリ P ト交ハル平面ノ中デ Q, R ノ交ハリヲ含マナイ一平面ヲ取リ, コレト P, Q, R トノ交ハリヲ夫々 p, q, r トスレバ, 一點 A ヲ過ギリ一直線 p ニ平

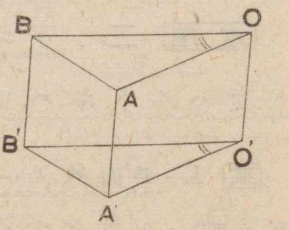
行ナル二ツノ直線 q, r ガアルコトトナル,コレ不合理デアル.

系 2. 互ニ平行ナル二平面ノ一ツト相交ハル平面ハ他ノ一ツトモ相交ハル.

何トナレバ,モシ相交ハラナケレバ一點ヲ過ギリ一平面ニ平行ナル平面ガ二ツアルコトトナルカラデアル.

定理 四. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ一ツノ角ノ二邊ニ夫々平行デ,且ソノ相對應スル邊ガ二角ノ頂點ヲ過ギル直線ニ關シテ夫々同ジ側ニアルトキハソノ二ツノ角ハ相等シイ.

$\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トニ於テ, OA ハ O'A' ニ平行, OB ハ O'B' ニ平行デ,且夫々 OO' ニ關シテ同ジ側ニアルトキハ, $\angle AOB = \angle A'O'B'$.



證明 $OA = O'A'$, $OB = O'B'$ ナラシメレバ, OAA'O' 及ビ OBB'O' ハ共ニ平行四邊形デアル.

故ニ AA', BB' ハ共ニ OO' ト相等シク且平行デアル,從ッテ又互ニ相等シク且平行デアル.

故ニ ABB'A' ハ平行四邊形デ, $AB = A'B'$.

從ッテ $\triangle OAB$ ト $\triangle O'A'B'$ トハ三邊ガ夫々相等シイカラ合同デアル.

故ニ $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

定義 同一平面上ニナイ二直線ノナス角トハ,任意ノ一點ヲ過ギリ夫々コレニ平行ニ引イタ二直線ノナス角ノコトデアル.

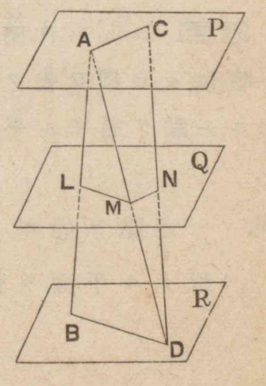
ソノ角ノ大キサガ上ニイフ所ノ任意ニ取ッタ一點ノ位置ニ無關係ナルコトハ定理四ニヨッテ明カデアル.

定理 五. 二直線ガ三ツノ互ニ平行ナル平面ト相交ハッテ截リ取ラレル線分ハ比例ヲナス.

二直線 AB, CD ガ互ニ平行ナル三平面 P, Q, R ト交ハル點ヲ夫々 A, L, B 及ビ C, N, D トスレバ,

$$AL : LB = CN : ND.$$

證明 A, D ヲ結ビ,コレト平面 Q トノ交ハリヲ M トスレバ, AB ト AD トガ定メル平面ト Q 及ビ R トノ交ハリナル LM ト BD トハ互ニ平行デアル (定理三).



同樣ニ MN ト AC トモ互ニ平行デアル.

故ニ $AL : LB = AM : MD$,

$AM : MD = CN : ND$.

從ッテ $AL : LB = CN : ND$.

例 題

1. 平行ナル二平面ノ間ニ夾マレル平行ナル二線分ハ相等シイ.

2. 四邊形ノ四邊ガ必ズシモ悉ク同一平面上ニナイ場合デモ,ソノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブ四ツノ線分ハ一ツノ平行四邊形ヲ作ル.

[定義] 四邊ガ同一平面上ニナイ四邊形ヲ**ごーしゆ四邊形**(又ハ**捩四邊形**)トイフ.

3. 互ニ平行ナル二直線ノ一ツガ一平面ト交ハルトキハ,他ノ一ツモ亦ソノ平面ト交ハル.

4. 互ニ平行ナル二平面ノ一ツト交ハル直線ハ他ノ一ツトモ交ハル.

5. 一定點ヲ過ギリ,二定直線ノ各ト出會フ一直線ヲ引クコトヲ求ム.

[注意] コレハ作圖題デアル. 立體幾何學ノ作圖題ニ於テハ直線及ビ圓ヲ畫クコト(平面幾何學ニ於ケル作圖ノ公法)ノ他ニ「三點ヲ過ギル平面ヲ作ルコト」モ亦出來得ルモノト考ヘル.

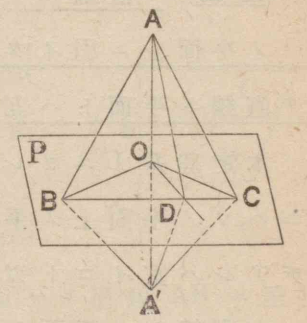
6. 一定點ヲ過ギリ同一平面上ニナイ二直線ノ各ニ平行ナル平面ヲ作ルコトヲ求ム.

第三章 垂直ナル平面及ビ直線

60. 一平面ノ垂線

[定理] **六.** 相交ハル二直線ノ交點ヲ過ギリ且ソノ各ニ垂直ナル直線ハ,ソノ二直線ヲ含ム平面上ニアツテソノ交點ヲ過ギル任意ノ直線ニ垂直デアル.

二直線 OB, OC ノ交點 O ヲ過ギツテコノ二直線ニ垂直ナ直線ヲ OA トシ,OB, OC ヲ含ム平面 P 上ニアツテ O ヲ過ギル任意ノ直線ヲ OD トスレバ,OA ト OD トハ互ニ垂直デアル.



[證明] 平面 P 上デ OB, OD, OC ト相交ハル直線ヲ引キ,ソノ交點ヲ夫々 B, D, C トスル.

AO ヲ延長シテ $OA'=OA$ ナラシメ, A, A' ヲ各 B, D, C ト結ベバ, OB, OC ハ何レモ AA' ノ垂直二等分線デアルカラ,

$$AB=A'B,\quad AC=A'C,$$

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC.$

從ツテ $\angle ABD = \angle A'BD.$

故ニ $\triangle ABD \equiv \triangle A'BD.$

從ッテ　　$AD=A'D$.

故ニ　　$\triangle AOD\equiv\triangle A'OD$.

故ニ　　$\angle AOD=\angle A'OD$.

卽チ OA ト OD トハ互ニ垂直デアル.

系 1. 一平面上ノ互ニ平行デナイ任意ノ二直線ノ各ニ垂直ナル直線ハ,ソノ平面上ノ任意ノ直線ニ垂直デアル.

定義 一直線ガ一平面ト交ハリ,ソノ交點ヲ過ギツテソノ平面上ニ引イタスベテノ直線ニ垂直ナルトキハ,ソノ直線ト平面トハ互ニ**垂直デアル**トイフ.

本定理系1ニヨレバ,一直線ガ一平面ニ垂直ナルタメニハ,ソノ平面上ノ平行デナイ任意ノ二直線ノ各ニ垂直デアレバ宜イコトガ知ラレル.

一直線ト一平面トガ互ニ垂直ナルトキ,ソノ直線ヲソノ平面ノ**垂線**トイヒ,垂直デナク相交ハルトキハ,ソノ直線ヲソノ平面ノ**斜線**トイフ.

垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲソノ垂線又ハ斜線ノ足トイフ.

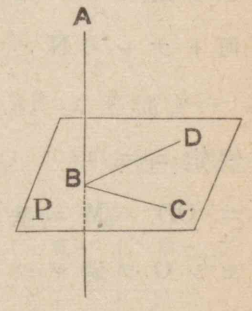
系 2. 一直線ガ一平面ニ垂直ナルトキハ,ソノ足ヲ過ギリソノ直線ニ垂直ナル直線ハソノ平面上ニアル.

系 3. 互ニ平行ナル二直線ノ一ツガ一平面ニ垂直ナルトキハ,他ノ一ツモ亦ソノ平面ニ垂直デアル.

定理 七. 一直線上ノ一點ヲ過ギリコレニ垂直ナル平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル.

直線 AB 上ノ一點 B ヲ過ギツテ AB ニ垂直ナル平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツダケデアル.

證明 B ヲ過ギツテ AB ニ任意ノ二ツノ垂線 BC, BD ヲ引キ, BC, BD ノ定メル平面ヲ P トスレバ, P ハ AB ニ垂直ナ平面デアル(定理六).

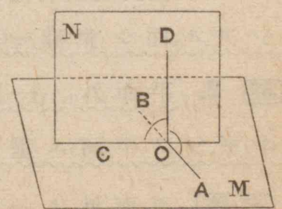


モシ平面 P ノ外ニ B ヲ過ギツテ AB ニ垂直ナル平面 Q ガアレバ (BC ヲ P,Q ノ交ハリデナイトシテ)AB, BC ノ定メル平面 R ト Q トノ交ハリヲ BE トスレバ, BC, BE ハ AB ト共ニ R 上ニアリ,且一點 B ヲ過ギツテ同一ノ直線 AB ニ垂直ナルコトトナル,コレ不合理デアル.

故ニ斯クノ如キ平面ハ P ノ他ニハナイ.

系 一直線外ノ一點ヲ過ギリコレニ垂直ナル平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル.

定理 八. 平面上ノ一點ヲ過ギリコレニ垂直ナル直線ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル.



平面 M 上ノ一點 O ヲ過ギツテ

平面Mニ垂直ナル直線ハ一ツアル,而シテ唯一ツダケデアル.

證明 平面M上ニOヲ過ギル任意ノ一直線ABヲ引キ,Oヲ過ギテABニ垂直ナル平面Nヲ作リ,MトNトノ交ハリヲOCトスル.

Oヲ過ギリ平面N上デOCニ垂直ニODヲ引ケバ,ODハOヲ過ギテMニ垂直ナル直線デアル.

何トナレバNハABニ垂直デアルカラ.

$\angle AOD=$直角.

又假定ニヨリ　$\angle COD=$直角.

故ニODハMニ垂直デアル(定理六).

モシOヲ過ギテMニ垂直ナル直線ガODノ他ニモアレバ,コレヲOHトスル. OHトODトデ決定サレル平面トMトノ交ハリヲOKトスレバ,OH, ODハOKト同一平面上ニアツテ共ニOKニ垂直トナル,コレ不合理デアル.

故ニOヲ過ギテMニ垂直ナル直線ハODノ他ニハナイ.

系 1. 平面外ノ一點ヲ過ギリコレニ垂直ナル直線ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル.

系 2. 平面外ノ一點トソノ平面上ノ點トヲ結ブ線分ノ中デ,ソノ平面ニ垂直ナルモノガ最小デアル.

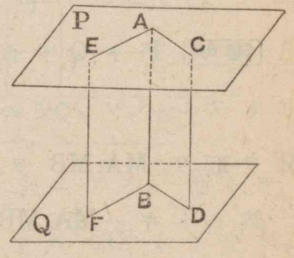
定義 平面外ノ一點ヲ過ギリソノ平面ニ垂直ナル直線ノソノ點ト平面トノ間ニアル部分ノ長サヲソノ**點ト平面トノ間ノ距離**トイフ.

系 3. 同一ノ平面ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル.

61. 二平面ノ共通垂線

定理 九. 互ニ平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ亦垂直デアル.

平面PトQトハ互ニ平行デ,一直線ABガ平面PトAニ於テ垂直ニ交ハルトキハ,ABハ亦Qトモ垂直ニ交ハル.



證明 PトQトハ互ニ平行デABハPト交ハルカラ,Qトモ亦交ハル(第59節例題4). ソノ交點ヲBトスル.

ABヲ含ム一平面トP及ビQトノ交ハリヲ夫々AC, BDトスレバ,ACトBDトハ互ニ平行デアル.

然ルニABハPノ垂線デアルカラ,

$\angle BAC=$直角.　故ニ　$\angle ABD=$直角.

又ABヲ含ム他ノ一平面トP及ビQトノ交ハリヲ夫々AE, BFトスレバ,同様ニシテ

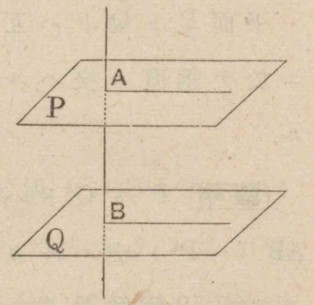
$\angle ABF=$直角.

ヨツテ AB ハ平面 Q 上ノ二直線 BD, BF ノ各ニ垂直デアル.

故ニ AB ハ平面 Q ニ垂直デアル.

定義 平行ナル二平面ノ間ニアル共通垂線ノ線分ノ長サガソノ位置ニ無關係ナルコトハ容易ニ證明サレル, コレヲソノ**二平面ノ間ノ距離**トイフ.

定理 十. 同一直線ニ垂直ナル二ツノ平面ハ互ニ平行デアル.



二平面 P, Q ガ同一直線 AB ニ垂直ナラバ, P, Q ハ互ニ平行デアル.

證明 P ト Q トガ互ニ平行デナイトスレバ, ソノ交ハリノ上ニ一點 M ヲ取リ, MA, MB ヲ結ブ.

然ルトキハ MA, MB ハ共ニ AB ニ垂直デアル.

卽チ一點 M カラ AB ニ二ツノ垂線ガ引カレルコトトナル, コレ不合理デアル.

故ニ P ト Q トハ互ニ平行デナケレバナラヌ.

62. 正射影

定義 一點ノ一平面上ニ投ズル**正射影**トハ, ソノ點カラソノ平面ニ引イタ垂線ノ足ノコトデアル.

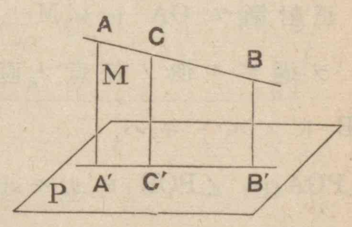
一直線ノ一平面上ニ投ズル**正射影**トハ, ソノ直線上ノ

點ノ正射影ノ軌跡ノコトデアル.

定理 十一. 一平面ニ垂直デナイ一直線ノソノ平面上ニ投ズル正射影ハ, ソノ一直線上ノ二點ノ正射影ヲ過ギル一直線デアル.

一平面 P ニ垂直デナイ一直線ヲ AB トシ, AB 上ノ任意ノ二點 A, B ノ P 上ニ投ズル正射影ヲ夫々 A', B' トスレバ, AB ノ正射影ハ直線 $A'B'$ デアル.

證明 AA', BB' ハ共ニ P ニ垂直デアルカラ, 互ニ平行デアル.



AA' 及ビ BB' ノ定メル平面ヲ M トスル.

AB 上ノ任意ノ一點 C カラ AA' ニ平行ニ CC' ヲ引ケバ, CC' ハ M 上ニアル. 而シテ $A'B'$ ハ AA' ト交ハルカラコレト平行ナル CC' トモ交ハル, ソノ交點ヲ C' トスル. 然ルトキハ CC' ハ平面 P ニ垂直デ(定理六系3), C ノ正射影ハ C' デアル.

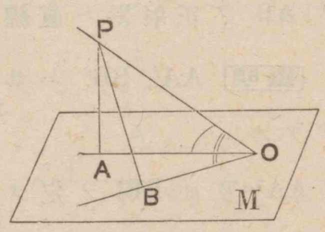
故ニ AB 上ノスベテノ點ノ正射影ハ直線 $A'B'$ ノ上ニアル.

又逆ニ $A'B'$ 上ノ任意ノ點 C' カラ平面 M 上ニ於テ $A'A$ ニ平行ナル直線 $C'C$ ヲ引ケバ, AB ハ $A'A$ ト交ハルカラコレト平行ナル $C'C$ トモ交ハル, ソノ交點ヲ C トスル. 然

ルトキハ CC' ハ平面 P ニ垂直デ,C' ハ C ノ正射影デアル.
故ニ $A'B'$ 上ノスベテノ點ハ AB 上ノ點ノ正射影デアル.

故ニ AB ノ P 上ニ投ズル正射影ハ $A'B'$ デアル.

定理 十二. 一ツノ平面ノ斜線ガソノ平面上ニ於テソノ足ヲ過ギル諸直線トナス角ノ中,ソノ斜線ノ正射影トナス鋭角ガ最小デアル.



OP ヲ平面 M ノ斜線,O ヲソノ足トスル. 又 M 上ニ投ズル OP ノ正射影ヲ OA トシ,M 上ニ於テ O ヲ過ギル他ノ任意ノ直線ヲ OB トスルトキハ,

$\angle POA$ ハ $\angle POB$ ヨリモ小デアル.

證明 點 P ノ正射影ヲ A トシ, $OA=OB$ ナラシメレバ,
$\triangle AOP$ ト $\triangle BOP$ トニ於テ

$OA=OB$, OP ハ共通.

而シテ $PA<PB$.

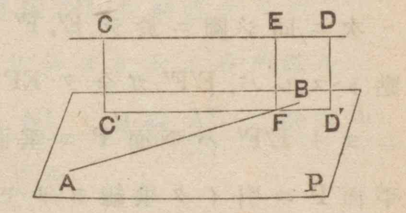
故ニ $\angle POA<\angle POB$.

定義 **一直線ト一平面トノナス角**トハ,ソノ平面上ニ投ズルソノ直線ノ正射影ト,モトノ直線トノナス角ヲイフ.

63. 二直線ノ共通垂線

定理 十三. 同一平面上ニナイ二直線ノ各トニ垂直ニ相交ハル直線ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル. 兩直線上ニ夫々一端ヲモツ線分ノ中デソノ共通垂線ナルモノガ最モ短カイ.

證明 同一平面上ニナイ二直線ヲ AB, CD トスル. AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 P ヲ作リ, CD ノ P 上ニ投ズル正射影ヲ $C'D'$ トスル.



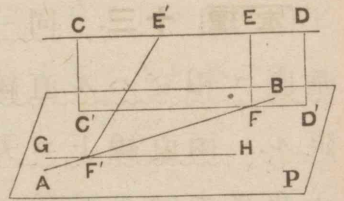
$C'D'$ ハ CD ニ平行デアルカラ AB ニ平行デハナイ. 故ニ $C'D'$ ハ AB ト一ツノ點 F ニ於テ交ハル.

サテ定理十一ニヨレバ,$C'D'$ 上ノ點ハスベテ CD 上ノ或ル點ノ正射影デアル. ヨッテ今 F ヲ CD 上ノ一點 E ノ正射影トスレバ, EF ハ平面 P ニ垂直デアルカラ AB 及ビ $C'D'$ ニ垂直デアル.

従ッテ EF ハ AB 及ビ CD ニ垂直デ,而シテコレラト相交ハル.

モシ EF ノ他ニ AB, CD ト相交ハル共通垂線 $E'F'$ ガアルトスレバ,ソレト AB, CD トノ交點ヲ夫々 F', E' トスル.

F' 及ビ CD ヲ含ム平面ト P トノ交ハリヲ GH トスレバ, GH ハ CD ニ平行デアル(定理二).



従ッテE'F'ハABトGHトニ垂直デアルカラ平面Pノ垂線デアル.

然ラバF'ハE'ノM上ニ投ズル正射影デアルカラC'D'ノ上ニナケレバナラヌ. 従ッテF'ハFト同ジ點デ,ツマリE'F'ハEFト相一致スル.

故ニEFノ他ニハAB, CDト相交ハル共通垂線ハナイ.

次ニ同ジ圖ニ於テE', F'ヲ夫々CD, AB上ノ任意ノ二點トスレバ, E'F'ガ全クEFト相合シナイ限リ,上述ノ理ニヨリE'F'ハ平面Pニ垂直デナイカラ, E'F'ハE'カラ平面Pニ引イタ垂線ヨリモ大デアル.

而シテE'カラPニ引イタ垂線ハEFニ等シイ.

故ニEFハE'F'ヨリ小デアル.

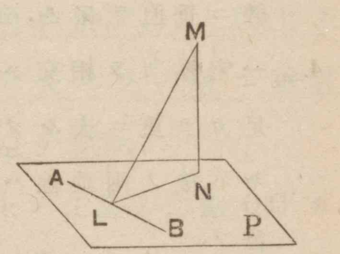
卽チEFハAB, CD上ニ夫々一端ヲモツ線分中デ最モ短カイモノデアル.

定義 二直線ト相交ハル共通垂線ノソノ間ニアル部分ノ長サヲソノ**二直線ノ間ノ距離**トイフ.

64. 三垂線ノ定理

定理 **十四.** 一點カラ一平面及ビソノ平面上ニアル一直線ニ夫々垂線ヲ引クトキハ,ソノ兩垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ前ノ直線ニ垂直デアル.

一點Mカラ平面Pニ引イタ垂線ノ足ヲNトシ,又MカラP上ノ一直線ABニ引イタ垂線ノ足ヲLトスル. 然ルトキハ直線NLハABニ垂直デアル.



證明 ABハ相交ハル二直線MN及ビMLノ各ニ垂直デアル.

故ニABハMN, MLノ定メル平面LMNニ垂直デアル.

従ッテABハ平面LMN上ノ直線NLニ垂直デアル.

同ジ圖ヲ用キテ, 同様ノ論法ニヨリ次ノ系ヲ得ル.

系 1. MNガ平面Pニ垂直, NLガ直線ABニ垂直ナラバ, MLハ直線ABニ垂直デアル.

系 2. MLガ直線ABニ垂直, NLガP上デ直線ABニ垂直デ, MNガ直線LNニ垂直ナラバ, MNハ平面Pニ垂直デアル.

注意 定理十四及ビ系1, 系2ヲ**三垂線ノ定理**トイフ.

例題

1. 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.
2. 一直線上ニナイ三定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ三定點ヲ頂點トスル三角形ノ外心ヲ過ギリ,ソノ三角形ノ平面ニ垂直ナル直線デアル.
3. 相交ハル二平面ノ間ニアル一點カラコノ二平面ノ

各ニ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ直線ハソノ二平面ノ交線ニ垂直デアル.

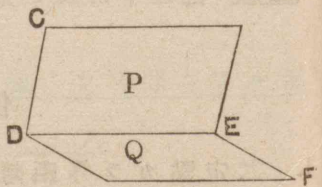
4. 一定點カラ相交ハル二平面ノ各ニ垂線ヲ引キ,ソノ足カラ更ニ夫々ソノ二平面ノ交線ニ垂線ヲ引クトキハ,後ノ兩垂線ハ二平面ノ交線上ノ一點ニ於テ出會フ.

5. 一點カラ一平面ニ引イタ二ツノ斜線ノ中ソノ正射影ノ大ナルモノガ他ヨリ大デアル. ソノ正射影ガ相等シケレバソノ二ツノ斜線モ相等シイ.

第四章　二面角及ビ多面角

65. 二面角

[定義] 相交ハル二平面ノソノ交線ノ一方ニアル二部分ハ**二面角**ヲ作ルトイヒ,ソノ二部分ヲ二面角ノ**面**トイヒ,ソノ交線ヲ二面角ノ**稜**トイフ.

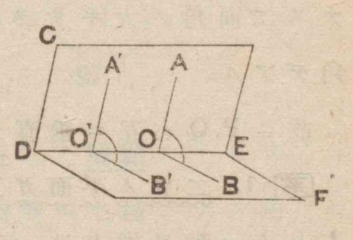


二面角ヲ表ハスニハソノ二面ノ上ニ夫々一點ヅツヲ取リ,ソノ記號ノ間ニ稜上ノ二點ノ記號ヲ挾ンデコレヲ呼ブ. 例ヘバ二面角 C–DE–F トイフガ如クデアル.

併シ唯一ツノ二面角ノミガ存在スルトキハソノ稜ノ上ノ任意ノ二點デコレヲ呼ブコトモアル. 例ヘバ二面角 DE トイフガ如クデアル.

[定理] 十五. 一ツノ二面角ニ於テ,ソノ稜上ノ任意ノ一點カラ各面上ニ於テ夫々ソノ稜ニ垂直ニ引イタ直線ノナス角ハ一定デアル.

二面角 C–DE–F ニ於テ,稜 DE 上ノ任意ノ二點 O,O′ カラ DE ニ垂直ニ AO, A′O′ ヲ面 CDE 上ニ; BO, B′O′ ヲ面 FED 上ニ引ケバ, ∠AOB ト ∠A′O′B′ トハ相等シイ.



[證明] ∠AOB, ∠A′O′B′ ニ於テ, AO, A′O′ 及ビ BO, B′O′ ハ夫々平行デ,且稜 DE ノ同ジ側ニアル.

故ニ　∠AOB＝∠A′O′B′　(定理四)

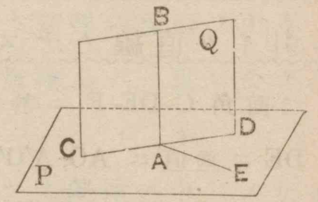
[定義] **二面角ノ大キサ**トイフノハ,ソノ稜上ノ一點カラ各面上ニ於テ夫々ソノ稜ニ引イタ二ツノ垂線ノナス角ノ大キサノコトデアル.

[定義] 二ツノ平面ノナス二面角ガ直角ナルトキハ,ソノ二平面ハ**互ニ垂直デアル**トイフ.

[定理] 十六. 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ前ノ平面ニ垂直デアル.

AB ヲ平面 P 上ノ一點 A ヲ過ギル P ノ垂線トシ,AB ヲ含ム任意ノ平面ヲ Q トスレバ,Q ハ P ニ垂直デアル.

〔證明〕 PトQトノ交ハリヲ CD トスル. P上デAヲ過ギツテ CD ニ垂直ナル直線 AE ヲ引クトキハ,假定ニヨリ AB ガ平面Pニ垂直デアルカラ ∠BAE ハ直角デアル.



然ルニ ∠BAE ハ卽チ P,Q ノナス二面角ノ大キサヲ表ハス角デアル.

故ニ P,Q ハ互ニ垂直デアル.

〔系〕 1. 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ,ソノ交ハリノ上ノ一點ヲ過ギリ一方ノ平面ニ垂直ナル直線ハ他ノ平面ニ含マレル.

〔系〕 2. 相交ハル二平面ガ各第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ,前ノ二平面ノ交線ハ第三ノ平面ニ垂直デアル.

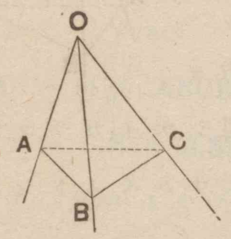
例題

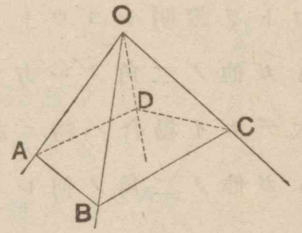
1. 二面角ノ一ツノ面ト他ノ面ノ延長トノナス二面角ハ,モト二面角ト補角ヲナス.

2. 平行ナル二平面ト一平面トガ相交ハツテナス八ツノ二面角ニツキ,互ニ相等シイ二角ヲ示セ. 又互ニ補角ヲナス二角ヲ示セ.

66. 多面角

〔定義〕 一ツノ多角形ノ各頂點ヲ過ギリソノ平面外ノ一點ヲ共通ノ端トスル半直線ヲ引クトキ,順次ニ相隣ル二ツヅツノ半直線ノナス平面角ハ一ツノ**多面角**ヲ作ルトイフ.





ソノ共通ノ端ナル點ヲ多面角ノ**頂點**トイヒ,ソノ半直線ヲ多面角ノ**稜**トイフ. 又相隣ル二稜ノナス角ヲソノ多面角ノ**平面角**トイヒ,各稜ニ於ケル二面角ヲソノ**二面角**トイフ.

多面角ハコレヲ作ル平面角ノ數ニ從ツテ**三面角**,**四面角**等ト稱ヘル.

多面角ヲ表ハスニハ,例ヘバ上圖ノ如キ場合ニハ夫々

O−ABC,　O−ABCD

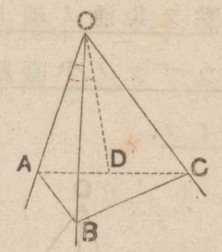
ノ如クニスル.

多面角ヲ作ルトキノモトノ多角形ガ凸多角形ナルトキハ,ソノ多面角ヲ**凸多面角**トイフ.

〔定理〕 十七. 三面角ニ於ケル一ツノ平面角ハ他ノ二ツノ平面角ノ和ヨリ小デアル.

三面角 O−ABC ニ於テ,平面角 AOB, BOC, COA ノ中何

レノ一ツモ餘リノ二ツノ和ヨリ小デアル.



證明 今 $\angle COA < \angle AOB + \angle BOC$ ナルコトヲ證明シヨウトスルニ,

$\angle COA$ ガ他ノ二角ノ一方又ハ兩方ヨリモ大デナイ場合ハ特ニ證明ヲ要シナイカラ,ココデハ $\angle COA$ ガ他ノ二角ノ何レヨリモ大ナルモノトシテ證明スル.

$\angle AOC$ 內ニ $\angle AOD$ ヲ $\angle AOB$ ニ等シク取リ,一直線ト OA, OD, OC トノ交點ヲ夫々 A, D, C トスル.

OB ヲ OD ニ等シク取リ, AB, BC ヲ結ベバ,

$$\triangle AOB \equiv \triangle AOD.$$

故ニ　$AB = AD.$

然ルニ　$AB + BC > AC,$

從ッテ　$BC > DC.$

ヨッテ二ツノ三角形 BOC, DOC ニ於テ

$$\angle DOC < \angle BOC.$$

コノ不等式ト

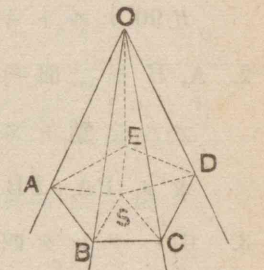
$$\angle AOD = \angle AOB$$

トヲ邊々相加ヘレバ,

$$\angle COA < \angle AOB + \angle BOC.$$

定理 **十八.** 一ツノ凸多面角ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリ小デアル.

多面角 O—ABCDE ニ於テ, ABCDE ヲ凸多角形トスル. 然ルトキハ平面角　$\angle AOB, \angle BOC$ 等ノスベテノ和ハ四直角ヨリ小デアル.



證明 多角形 ABCDE 內ニ任意ノ一點 S ヲ取リ, S ヲ頂點 A, B, C, D, E ト夫々結ブ. 然ルトキハ S ヲ共通ノ頂點トシ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トスル三角形ノ數ト, O ヲ共通ノ頂點トシ多角形ノ各邊ヲ夫夫底邊トスル三角形ノ數トハ相等シイカラ,コノ二組ノ三角形ノ內角ノ和ハ相等シイ.

然ルニ　$\angle OAB + \angle OAE > \angle BAE,$　(定理十七)

卽チ　$\angle OAB + \angle OAE > \angle SAB + \angle SAE.$

B, C, D, E 等ノ點ニ於テモ夫々同樣ノ關係ガアル.

故ニ O ヲ共通ノ頂點トスルスベテノ三角形ノ底角ノ和ハ, S ヲ共通ノ頂點トスルスベテノ三角形ノ底角ノ和ヨリ大デアル.

故ニ O ニ於ケルスベテノ平面角ノ和ハ, S ニ於ケルスベテノ角ノ和ヨリ小デアル,卽チ四直角ヨリ小デアル.

例　題

1. 二面角ノ稜上ノ一點ヲ過ギリ各面上デ夫々稜ノ一

方ノ向キトαナル角ヲナス直線ヲ引クトキ,ソノ二直線ノナス角ノ大キサハ稜上ニ取ツタ最初ノ點ノ位置ニ無關係デアル. 又ソノ二直線ノナス角ハ α ガ90°ナルトキニ最大トナル.

2. A, B ヲ二面角ノ二ツノ面ノ各ノ上ニ夫々一ツヅツアル定點トスルトキ,ソノ二面角ノ稜上ニ一點Pヲ求メ PA+PB ガ最小トナルヤウニセヨ.

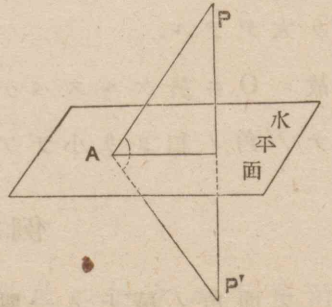
3. 與ヘラレタ四面角ヲ一ツノ平面デ截リ,ソノ截リ口ヲ平行四邊形ナラシメヨ.

4. 一ツノ多面角ニ於ケル一ツノ平面角ハ殘リノ平面角ノ和ヨリ小デアル.

第五章　測量問題

67. 測量上ノ術語

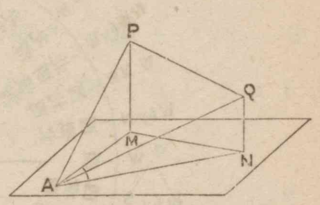
(1) 一點ト地球ノ中心トヲ過ギル直線ヲソノ點ニ於ケル**鉛直線**,コレヲ含ム平面ヲ**鉛直面**トイヒ,鉛直線ニ垂直ナル平面ヲ**水平面**,ソノ上ニアル直線ヲ**水平線**トイフ.



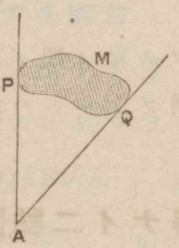
(2) 一點PガAヲ過ギル水平面ヨリ上ニアルトキハ,直線AP ノコノ水平面トナス角ヲ稱シテAニ於ケルPノ**仰角**又

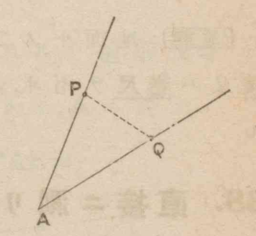
ハ**高度**トイフ. モシ點ノ位置ガP'ノ如クAヲ過ギル水平面ヨリ下ニアルトキハ,コノ角ヲ**俯角**又ハ**深度**トイフ.

(3) 二點P,Qノ間ノ**水平距離**トハ,コノ二點ノ一水平面上ニ投ズル正射影M,Nノ間ノ距離デアル. 二直線 AP, AQ ノ間ノ**水平角**トハコノ二直線ノ一水平面上ニ投ズル正射影 AM, AN ノ間ノ角デアル.



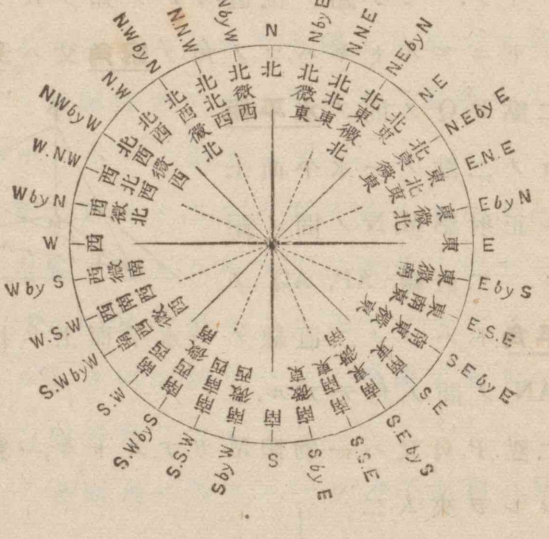
(4) 二點P,Q又ハ一物體Mガアルトキ,一點Aヲ過ギリ丁度コレヲ夾ム二直線ヲAP, AQトスレバ,二點P,Q又ハ物體MハAニ於テPAQナル角ヲ**張ル**トイヒ,コノ角ヲ點Aニ於ケルP,Q又ハMノ**視角**トイフ.





(5) 一水平面內ニ於テ一點カラ見タ他ノ點ノ方向ヲイヒ表ハス角ヲ**方位角**トイフ. 通常ノ陸地測量ニ於テハ北(又ハ南)ノ方向ニ引イタ直線ヲ原線トシテコレカラ測ツタ角ヲ以テ示ス. 例ヘバ北 30° 東 (N 30°E) トイヘバ北カラ30°ダケ東ニ偏シタ方向ノコトデアル.

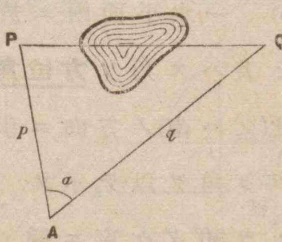
航海用羅針盤ニ於テハ北東南西ノ各ノ間ヲ八等分シ,ソノ各方位ニ次頁ノ圖ノ如キ名稱ヲツケル.



注意　地面上ノ二ツノ點ノ間ノ距離ヲ直接ニ測ルニハ**測鎖**又ハ**巻尺**ヲ用ヰ,又角ヲ測ルニハ**六分儀**又ハ**經緯儀**ヲ用ヰル.

68. 直接ニ測リ得ナイ二點間ノ距離ヲ求メルコト

(1)　二點共ニ別々ニ達シ得ル場合

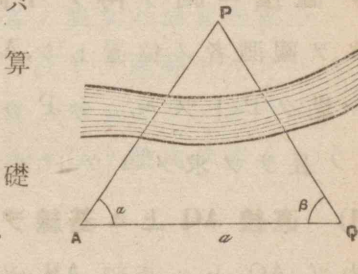


二點ヲP及ビQトスル. 直線PQ上ニナイ一點AカラP及ビQニ至ル各距離ヲ測リ,又Aニ於ケル二點P,Qノ視角ヲ計レバ,第48,49節ノ方法ニヨリPQノ長サヲ得ル. (試ミニ學生自ラコノ場合ノ式

ヲ作レ.

(2)　一點ハ達シ得テ,一點ハ達シ得ナイ場合

Pヲ達シ得ナイ一點,Qヲ達シ得ル一點トスル. 先ヅ直線PQ上ニナイ任意ノ直線AQヲ測リコレヲaトシ,又角QAP及ビAQPヲ計レバ第47節ノ方法ニヨリPQヲ算出スルコトガ出來ル.



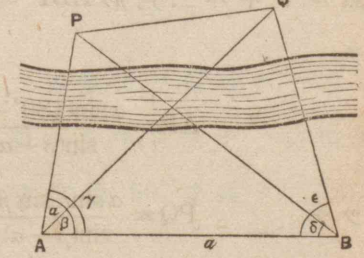
コノAQノ如ク測量ノ基礎トスル直線ヲ**基線**ト稱ヘル.

(3)　二點共ニ達シ得ナイ場合

何レニモ達シ得ナイ二點ヲP,Qトスル. 直線PQ上ニナイ基線ABヲ測リソノ長サヲaトシ,Aニ於テ

$$\angle PAQ=\alpha,\qquad \angle QAB=\beta,\qquad \angle PAB=\gamma$$

ヲ測ル. ココニPQ,ABハ必ズシモ同一平面内ニナイカラγハ$\alpha+\beta$ニ等シイトハ限ラナイ. 故ニγハ矢張リ別ニ測ラナケレバナラヌ.



次ニBニ於テ$\angle PBA=\delta$, $\angle QBA=\varepsilon$ヲ測ル.

然ルトキハ,三角形PAB及ビQABニ於テ正弦則ニヨリ

$$AP=\frac{a\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)},\qquad AQ=\frac{a\sin\varepsilon}{\sin(\beta+\varepsilon)}.$$

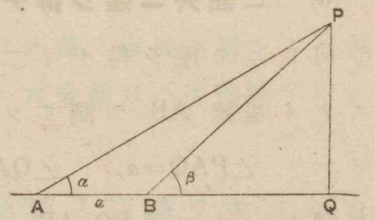
ヨツテ三角形PAQニ於テ二邊AP, AQ及ビソノ夾角αガ既知トナルカラ,(1)ノ場合ノ如クニシテPQヲ得ル.

69. 直接ニ測リ得ナイ高サヲ求メルコト

Aヲ觀測者ノ位置トシ,Aヲ過ギル水平面ヨリ上ニアル一點ヲPトスル. 今PカラコノＡ水平面ニ至ル鉛直線PQノ長サヲ求メヨウトスル.

(1) 直線AQ上ニ基線ヲ取リ得ル場合

先ヅAQ上ニ基線ABヲ測リ,コレヲaトスル. A及ビBニ於テPノ仰角ヲ測リ,コレヲ夫々α及ビβトスル.



然ルトキハ三角形ABPニ於テ

$$AP=\frac{a\sin(180^\circ-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

從ツテ
$$PQ=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

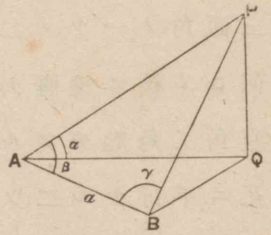
(2) 直線AQ上ニ基線ヲ取リ得ナイ場合

Aカラ任意ノ方向ニ基線ABヲ測リ,コレヲaトシ,

又 $\angle PAQ=\alpha,\quad \angle PAB=\beta,\quad \angle PBA=\gamma$

ヲ測ル. 然ルトキハ三角形PABカラ

$$AP=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$



從ツテ

$$PQ=\frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

注意 實際ニ於テハAハ觀測者ノ眼又ハ測量器械中ノ一點デ地上若干ノ高サニアル. コノ高サヲ眼高トイフ. 上ニ得タPQニ眼高ヲ加ヘタモノガ眞ノ地上カラノ高サデアル. ケレドモ本書ニ於テハ特ニ斷ラナイ限リ眼高ヲ零トシテ計算スルモノトスル.

例題

1. 正東ニ進ム船ガ或ル位置ニ於テ二ツノ燈臺P, Qヲ夫々北15°東及ビ北57°東ニ見タ. ソノ後20浬進ンダ點ニ於テハ夫々北70°西及ビ北10°西ニ見エタ. P, Q間ノ距離ヲ求メヨ.

2. 相距ルコト2kmナル甲乙二地點カラ同時ニ一ツノ飛行機ノ方位及ビ仰角ヲ測ツテ,甲ニ於テハ方位北,仰角30°,乙ニ於テハ方位東,仰角60°ヲ得タ. コノ機ノ高サハ何米カ.

雜題 IV.

1. 同一平面上ニナイ二直線ノ兩方ニ交ハル二ツノ直線ガ互ニ平行トナルコトハナイ.

2. 三面角ノ一ツノ二面角ガ直角ナラバ,コノ三面角ヲ何レノ稜ニ垂直ナル平面デ截ツテモ,ソノ截リ口ハ直角三角形デアル.

3. 互ニ平行ナル二ツノ平面ノ間ニ夾マレル任意ノ線分ヲ定比 $(m:n)$ ニ分ツ點ノ軌跡如何.

4. 同一點ヲ過ギル三ツノ直線ノ各ガ他ノ二ツニ垂直ナルトキハ,ソノ二ツヅツヲ含ム三ツノ平面ハ互ニ垂直デアル.

5. 一ツノ平面 P 及ビソノ同ジ側ニ二點 A, B ガアルトキ, P ノ上ニ一點 C ヲ取リ AC ト CB トノ和ガ最小トナルヤウニセヨ.

6. 前問ニ於テ A, B ガ P ノ反對ノ側ニアルトキ, AC ト BC トノ差ガ最大トナルヤウニセヨ.

7. 三面角ノ各稜トコレニ對スル平面角ノ二等分線トヲ含ム三ツノ平面ハ一直線ニ於テ相交ハル.

8. 平面 P 上ノ三點ヲ A, B, C, 又 P 外ノ一點ヲ O トスルトキ,直線 OA, OB, OC ガ平面 P ト等角ヲナスナラバ, OA=OB=OC デアル.

9. 平面 P 上ノ互ニ平行デナイ三直線ト等角ヲナス直線ハ,平面 P ニ垂直デアル.

10. 線分 AB ガコレト θ ナル角ヲナス平面 P 上ニ投ズル正射影ヲ $A'B'$ トスレバ,

$$A'B'=AB.\cos\theta.$$

11. $\triangle ABC$ ノ三頂點ノ,ソノ平面ト θ ナル角ヲナス平面上ニ投ズル正射影ヲ A', B', C' トスレバ,

$$\triangle A'B'C'=\triangle ABC.\cos\theta.$$

12. 悉クハ同一平面上ニナイ四點カラ等距離ニアル點ヲ求メヨ.

13. 定平面上ニアツテ且一定點カラ定距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

14. 二定點カラ夫々定距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

15. 四角形 ABCD ニ於テ四ツノ角ノ和ガ四直角ナルトキハ, A, B, C, D ハ一平面上ニアル.

16. 三面角 V−ABC ノ内部ノ一點ヲ D トスレバ,

$$\angle AVD+\angle BVD+\angle CVD>\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle BVC+\angle CVA).$$

17. 塔ノ基底カラ或ル樹木ノ頂ノ高度ヲ測レバ α デ,塔ノ頂ニ登ツテソノ樹ノ根元ノ深度ヲ計レバ β デアルトキ,コノ塔ノ高サヲ h トスレバ,樹ノ高サ如何.

18. 或ル人山麓ノ一點ニ於テ山頂ノ仰角ヲ測リ $45°$ ヲ得,ココカラ山頂ニ向ヒ眞直ニ傾斜 $15°$ ナル坂路ヲ登ルコト 160m デ再ビ山頂ノ仰角ヲ測ツテ $60°$ ヲ得タ.山ノ高サヲ求メヨ.

19. 河ノ對岸ニ高サ20mノ臺ガアッテ,ソノ上ニ高サ3mノ銅像ヲ載セテアル. 然ルニ河ヲ隔テテ銅像ノ視角ヲ測レバ丁度ソノ臺ノ基礎ニ立ッテヰル高サ2mノ樹木ノ視角ト等シイ. 河ノ幅ハ何米カ.

20. 相等シイ高サノ二煙突ガアル. 或ル人ソノ基底ヲ結ブ直線上ノ一點ニ於テ近イ方ノ煙突ノ高度ヲ測リ60°ヲ得,更ニコノ點カラソノ直線ニ垂直ナ方向ニ20m歩ンダ後兩煙突ノ高度ヲ測リ45°及ビ30°ヲ得タ. 二煙突ノ高サ及ビソノ間ノ距離ヲ求メヨ.

21. 煙突ノ頂點ヲD,基底ヲCトシ,A及ビBヲCト同ジ水平面ノ上ノ二點トスル. 而シテ實測ニヨリ

$$\angle CAB=105°,\ \angle CBA=30°,\ \angle DAC=60°,\ AB=60m$$

ナル値ヲ得タ. 煙突ノ高サ如何.

22. 或ル樹木ノ根元カラ測ッテ全長ノ三分ノ一ニ當ル所ニ一ツノ枝ガアル. 今樹カラ10mヲ距テテ望メバ枝カラ上ノ部分ハ30°ノ視角ヲ張ル. 樹ノ高サヲ求メヨ.

23. 敵艦ハ我ガ艦ノ正北20海里ノ所ニアッテ北東ノ方向ヲ採リ15節(ノット)ノ速サデ逃走シテヰル. 今我ガ艦ハ$15\sqrt{2}$節ノ速サデ一直線ニコレニ追ヒツカウトスル. 我ガ艦ノ採ルベキ方向如何. 又追ヒツクマデニ何時間ヲ要スルカ.

第五篇
多面體

第一章 角壔及ビ角錐

70. 多面體

[定義] **多面體**トハ若干ノ平面デ圍マレタ立體デアル. (ソノ平面ノ數ハ四ツヨリ少クハナイ.)

多面體ヲ圍ム平面ノ數ガ四,五,六等デアルニ從ッテ,ソノ多面體ヲ**四面體**,**五面體**,**六面體**等ト稱ヘル.

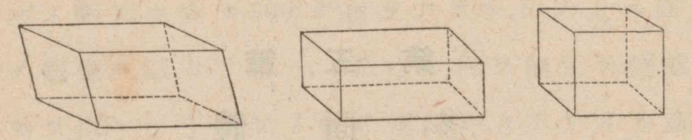
多面體ヲ界スル平面ノ限ラレタ部分(多角形)ヲ多面體ノ**面**トイヒ,面ト面トノ交線ヲ多面體ノ**稜**トイヒ,稜ト稜トノ交點ヲ多面體ノ**頂點**トイフ.

同一ノ面上ニナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ.

多面體ノ何レノ面ヲ延長スルモソノ平面ガモトノ多面體ヲ截ラナイトキハ,コレヲ**凸多面體**トイフ. (本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズル.)

平行六面體トハ三雙ノ相對スル面ガ夫々平行ナル六面體デアル.

各ノ面ガ矩形ナル平行六面體ヲ**直六面體**トイヒ,各ノ面ガ正方形ナル直六面體ヲ**立方體**又ハ**正六面體**トイフ.



平行六面體　　　　直六面體　　　　立方體

71. 角　壔

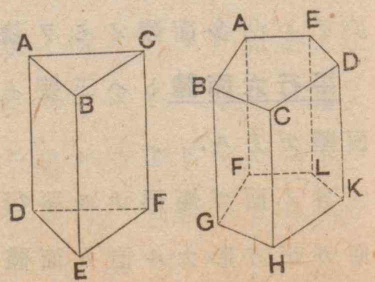
定義 **角壔**トハ一直線ニ平行ナル若干ノ平面及ビソノ直線ト交ハル二ツノ平行ナル平面ニヨツテ圍マレタ多面體デアル.

ソノ一直線ニ平行ナル面ヲ**側面**トイヒ,ソノ一直線ト交ハル二ツノ平行ナル面ヲ角壔ノ**底面**トイフ. 側面ノ交ハリヲ**側稜**トイヒ,二ツノ底面ノ間ノ距離ヲソノ角壔ノ**高サ**トイフ.

角壔ノ側稜ガソノ底面ニ垂直ナルトキハコレヲ**直角壔**トイヒ,垂直デナイトキハコレヲ**斜角壔**トイフ.

角壔ハソノ側面ノ數ガ三,四,五等ナルニ從ツテ,コレヲ**三角壔**,**四角壔**,**五角壔**等ト名ヅケル.

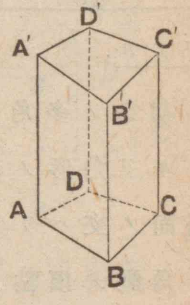
右ノ圖ハ三角壔及ビ五角壔デコレヲ表ハスニハ夫々 ABC−DEF, ABCDE−FGHKL, 或ハ ABC−D, ABCDE−F 等ト記ス.



角壔ノ總テノ側面又ハソノ

延長ヲソノ側稜ニ垂直ナル一平面デ截ツタ截リ口ヲソノ角壔ノ**直截面**トイフ.

定理 **十九.** 角壔ノ側面ハ何レモ平行四邊形デ,ソノ二ツノ底面ハ合同ナル多角形デアル.

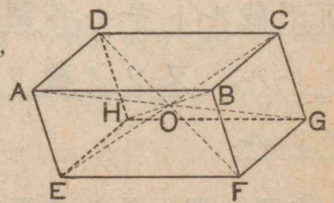


角壔 ABCD−A′B′C′D′ ニ於テ,側面 ABB′A′, BCC′B′ 等ハ何レモ平行四邊形デ,又ソノ二ツノ底面 ABCD, A′B′C′D′ ハ合同ナル多角形デアル.

證明 學生自ラ證明ヲ試ミヨ.

定理 **二十.** 平行六面體ニ於テ三雙ノ相對スル面ハ夫々合同ナル平行四邊形デアル. 又四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ過ギリ,各他ノ三ツヲ二等分スル.

平行六面體 ABCD−EFGH ニ於テ,三雙ノ相對スル面 AC ト EG, AF ト DG, AH ト BG トハ夫々合同ナル平行四邊形デ,又四ツノ對角線 AG, BH, CE, DF ハ皆同一ノ點ヲ過ギリ各他ノ三ツヲ二等分スル.



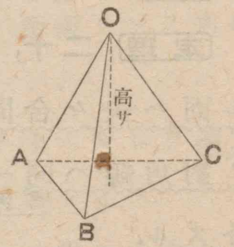
證明 學生自ラ證明ヲ試ミヨ.

72. 角 錐

定義 **角錐**トハ一ツノ多角形ト,ソノ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トシソノ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル若干ノ三角形トニヨツテ圍マレタ一ツノ多面體デアル.

初メノ多角形ヲソノ角錐ノ**底面**トイヒ,同一點ヲ共有スル三角形ノ各ヲ**斜面**,ソノ同一點ヲ**頂點**トイヒ,相隣ル斜面ノ交ハリヲ**斜稜**トイフ.

角錐ノ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ長サヲソノ**高サ**トイフ.

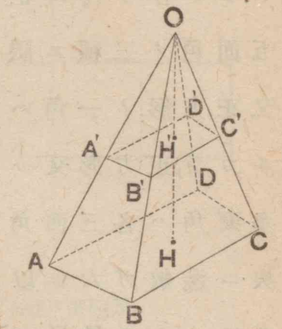


角錐ハソノ底面ガ三角形,四角形等ナルニ從ツテコレヲ**三角錐**,**四角錐**等トイフ.

右ノ圖ハ三角錐デ,コレヲ O−ABC ト記ス.

定理 **二十一.** 角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキハ,各斜稜及ビ高サハ同一ノ比ニ分タレル. 又ソノ截リ口ハ底面ニ相似ナル多角形デアル.

次頁ノ圖ニ於テ,角錐 O−ABCD ノ底面ニ平行ナル平面ニヨツテノ截リ口ヲ A′B′C′D′ トシ,又 O カラ底面ニ引イタ垂線 OH トソノ截リ口トノ交點ヲ H′ トスレバ,OA, OB, OC, OD, OH ハ夫々 A′, B′, C′, D′, H′ ニ於テ同一ノ比ニ分タレル. 又多角形 ABCD ト A′B′C′D′ トハ互ニ相似デアル.



證明 學生自ラ證明ヲ試ミヨ.

系 角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ,ソノ截リ口ノ面積ハ頂點カラソノ截リ口マデノ距離ノ二乘ニ正比例スル.

73. 正多面體

定義 **正多面體**トハ,ソノスベテノ面ガ全ク相等シイ正多角形デ,且ソノスベテノ多面角ガ全ク相等シイ多面體デアル.

定理 **二十二.** 正多面體ハ次ノ五種ニ限ル.

正四面體, 正六面體, 正八面體,

正十二面體, 正二十面體

證明 正多面體ノ多面角ハ何レモ合同デ,且ソノ各平面角ハ正多角形ノ一ツノ角デアルコトヲ要スル.

而シテ一ツノ多面角ヲ作ルニハ三ツ以上ノ平面角ガソノ頂點ヲ共有スルコトヲ要シ,而シテソレラノ平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナルコトヲ要スル.

サテ正三角形ノ一角ハ$\frac{2}{3}$直角デアルカラ,正三角形ヲ面トシテ作リ得ル正多面體ノ多面角ハ三面角,四面角又ハ五面角ノ三種ニ限ル.

又正方形ノ一角ハ1直角,正五角形ノ一角ハ$\frac{6}{5}$直角デアルカラ,正方形又ハ正五角形ヲ以テ作リ得ル正多面體ノ多面角ハ各三面角ノ一種ニ限ル.

次ニ邊數ガ六ツ以上ナル正多角形ノ一角ハ$\frac{4}{3}$直角以上デアルカラ,最早コレヲ以テ多面角ヲ作ルコトハ出來ナイ.

故ニ正多面體ノ一ツノ多面角ヲナス面ハ次ノ五種ニ限ル.

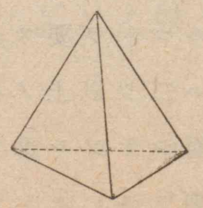
(1)　三ツノ正三角形,　(2)　三ツノ正方形,

(3)　四ツノ正三角形,　(4)　三ツノ正五角形,

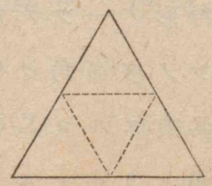
(5)　五ツノ正三角形

注意　コノ五種ノ各ニ對應スル正多面體ハ實際ニ作成スルコトガ出來ル．例ヘバ次ノ展開圖ヲ厚紙ノ上ニ畫キコレヲ點線ニ沿ウテ折リ曲ゲレバソノ模型ヲ得ル.

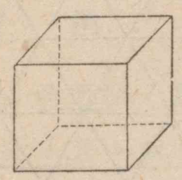
(1)　正四面體



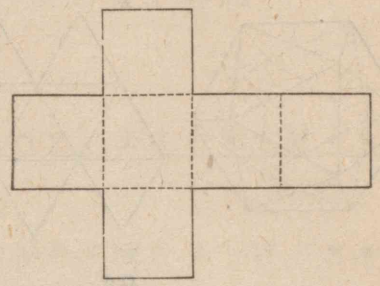
(1′)　正四面體ノ展開圖



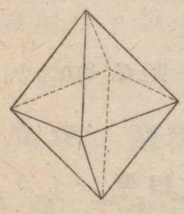
(2)　正六面體(立方體)



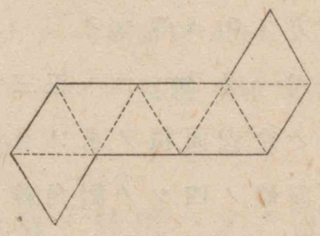
(2′)　正六面體ノ展開圖



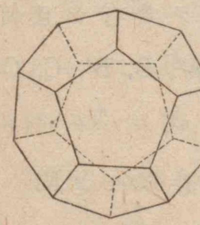
(3)　正八面體



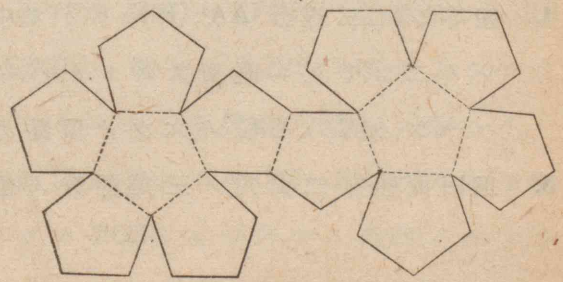
(3′)　正八面體ノ展開圖



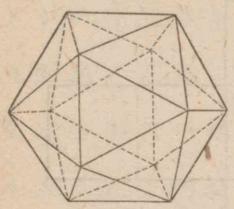
(4)　正十二面體

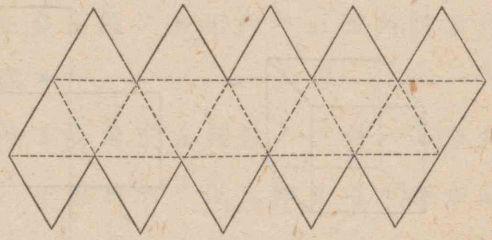


(4′)　正十二面體ノ展開圖



(5) 正二十面體　　(5′) 正二十面體ノ展開圖





例　題

1. 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ平方ノ和ハ十二ノ稜ノ平方ノ和ニ等シイ.
2. 底面ガ一邊 2m ナル正三角形デ,高サガ 3m ナル直角壔ノ全表面積ヲ求メヨ.
3. 直六面體ノ四ツノ對角線ノ長サハ相等シイコトヲ示シ,且一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ長サガ夫々 am, bm, cm ナルトキ,ソノ對角線ノ長サヲ求メヨ.
4. 相等シイ三線分 AA', BB', CC' ガ中點ヲ共有シ且何レノ二ツモ互ニ直交スルトキハ, A, A', B, B', C, C' ハ一ツノ正八面體ノ六ツノ頂點デアル.
5. 正四面體ノ二面角ノ三角函數ノ値ヲ計算セヨ.

第二章　多面體ノ體積

74. 體　積

定義 多面體ノ體積トハソノ面ニヨツテ圍マレタ空間ノ部分ノ大キサヲイフ.

體積ヲ計ルニハ單位ノ長サノ線分ヲ一稜トスル立方體ノ體積ヲ單位トシテ用キル.

合同ナル多面體ノ體積ハ相等シイ. 叉多面體 A ト B トガ合同,C ト D トガ合同ナラバ,多面體 A±C ト B±D トハソノ形ヲ異ニスル場合デモ,ソノ體積ハ相等シイ.

75. 角壔ノ體積

定理 二十三. 斜角壔ノ體積ハソノ直截面ヲ底面トシ,ソノ側稜ニ等シイ高サヲモツ直角壔ノ體積ニ等シイ.

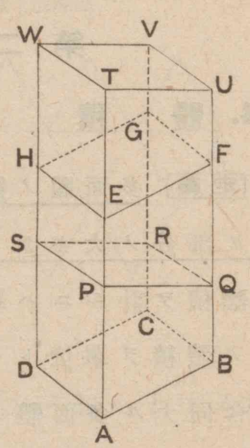
次頁ノ圖ニ於テ,斜角壔 ABCD－EFGH ノ直截面ヲ PQRS トスレバ, ABCD－EFGH ノ體積ハ PQRS ヲ底面トシソノ側稜 AE ニ等シイ高サヲモツ直角壔ノ體積ニ等シイ.

證明 稜 AE ヲ延長シ,ソノ上ニ PT＝AE ナル如キ點 T ヲ取リ,T ヲ過ギツテ PQRS ニ平行ナル平面ヲ作リ,各側面ノ延長トノ交ハリヲ夫々 TU, UV, VW, WT トスル.

然ルトキハ PQRS－TUVW ハ直角壔デ,ソノ側稜ハ AE

ニ等シクソノ底面ハ PQRS デアル.

サテ多面體 ABCD−PQRS ト多面體 EFGH−TUVW トハスベテノ相對應スル稜及ビ角ガ夫々相等シイ故,コノ二ツノ多面體ハ全ク相等シイ.

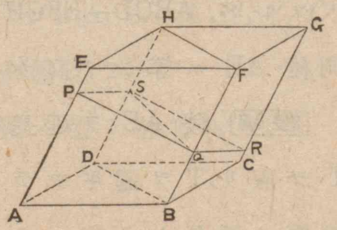


故ニコノ二ツノ多面體ニ夫々同ジ多面體 PQRS−EFGH ヲ加ヘタモノハ相等シイ.

從ツテ斜角壔 ABCD−EFGH ハ直角壔 PQRS−TUVW ニ等シイ.

定理 二十四. 一ツノ平行六面體ヲソノ一雙ノ相對スル稜ヲ含ム平面デ截レバ,相等シイ體積ヲモツ二ツノ三角壔ヲ得ル.

平行六面體 ABCD−EFGH ヲ一雙ノ相對スル稜 BF, DH ヲ含ム平面デ二ツノ三角壔 ABD−EFH, CDB−GHF ニ分ツトキハ,コノ二ツノ三角壔ノ體積ハ相等シイ.

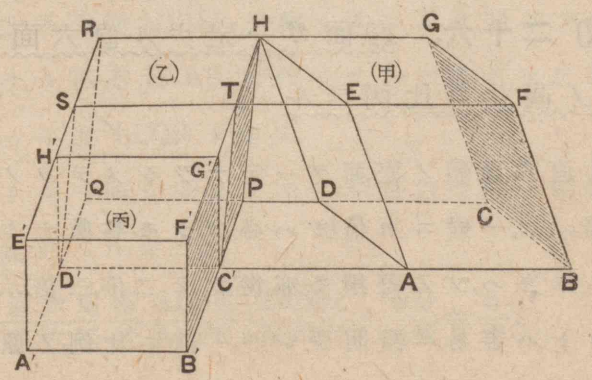


證明 直截面 PQRS ヲ作レバ △PQS≡△RSQ. 而シテコノ兩三角形ハ夫々三角壔 ABD−EFH 及ビ CDB−GHF ノ直截面デアル. 故ニ定理二十三ニヨッテコノ二ツノ三角壔ノ體積ハ相等シイ.(シカシ一般ニハ合同デナイコトニ注意セヨ.)

系 與ヘラレタ三角壔ノ二倍ノ體積ヲモツ平行六面體ヲ作ルコトガ出來ル.

定理 二十五. 平行六面體ト直六面體トニ於テソノ高サガ相等シク,且ソノ底面ノ底邊及ビ高サガ夫々相等シイトキハ,ソノ體積ハ相等シイ.

證明 平行六面體 ABCD−EFGH(甲)ノ稜 GH ヲ延長シ,ソノ上ニ R ヲ取リ, GH=HR ナラシメル. H 及ビ R ヲ過ギッテ夫々 HR ニ垂直ナル平面ヲ作リ,(甲)ノ GH ト平行ナル側稜ノ延長ト交ハラシメテ,一ツノ平行六面體 D′C′PQ−STHR(乙)ヲ作ル.



然ルトキハ(乙)ノ稜 HR ハ GH ニ等シク,又ソノ面 C′H ハ(甲)ノ稜 GH ニ垂直ナル直截面デアルカラ,(甲)ト(乙)トハ相等シイ體積ヲモツ(定理二十三).

次ニ PC' ノ延長上ニ B' ヲ取リ $PC'=C'B'$ ナラシメ,コレニ平行ナル(乙)ノ側稜ヲ延長シ, C' 及ビ B' ヲ過ギリ $C'B'$ ニ垂直ナル平面デ截レバ,直六面體 $A'B'C'D'-E'F'G'H'$ (丙)ヲ得ル.

(丙)ノ稜 $C'B'$ ハ(乙)ノ稜 PC' ニ等シク,又ソノ面 $C'H'$ ハ PC' ニ垂直ナル(乙)ノ直截面デアル. 故ニ(乙)ト(丙)トハ相等シイ體積ヲモツ(定理二十三).

而シテ(丙)ノ面 $A'C'$ ト(甲)ノ面 AC トハ明カニ等底,等高デ,コレヲ夫々(丙)及ビ(甲)ノ底面ト見做セバ兩體ノ高サノ相等シイコトモ明カデアル. 故ニ平行六面體(甲)ノ體積ハ,コレト相等シイ高サ及ビ等底,等高ナル底ヲモツ直六面體(丙)ノ體積ニ等シイ.

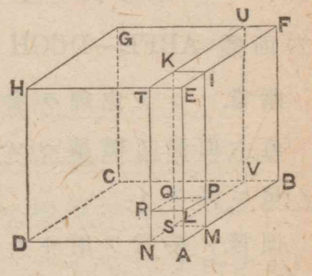
定理　二十六. 底面ガ一定ナル直六面體ノ體積ハソノ高サニ比例スル.

證明　直六面體ノ底面ヲ一定ナラシメテソノ高サヲ二倍,三倍,……,一般ニ n 倍(n ハ必ズシモ整數ナルヲ要シナイ)スルトキハ,ソノ體積モ亦從ツテ二倍,三倍,……, n 倍トナルコトハ容易ニ證明サレル. 故ニ比例ノ原理ニヨリソノ體積ハ高サニ比例スル.

コノ定理ハ又次ノ如クニ換言サレル.

系　二ツノ直六面體ノ底面ガ全ク相等シイトキハ,ソノ體積ノ比ハソノ高サノ比ニ等シイ.

定理　二十七. 直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハソノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ.



直六面體 ABCD−EFGH ノ一ツノ頂點 A ニ於テ出會フ三ツノ稜 AE, AB, AD ノ長サヲ夫々 l, m, n トスレバ,コノ直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ lmn デアル.

證明　AE, AB, AD 又ハソノ延長上ニ AL, AM, AN ヲ夫々單位ノ長サニ等シク取リ,先ヅ N ヲ過ギッテ ABFE ニ平行ナル平面 NVUT ヲ作リ,次ニ M ヲ過ギッテ AETN ニ平行ナル平面 MIKS ヲ作リ,又 L ヲ過ギッテ AMSN ニ平行ナル平面 LPQR ヲ作ル.

然ルトキハ同ジ底面ヲ有スル直六面體ノ體積ハソノ高サニ比例スルカラ,

$$\frac{\text{直六面體 ABFE−DCGH}}{\text{直六面體 ABFE−NVUT}}=\frac{AD}{AN}=\frac{n}{1},$$

$$\frac{\text{直六面體 ABFE−NVUT}}{\text{直六面體 AMIE−NSKT}}=\frac{AB}{AM}=\frac{m}{1},$$

$$\frac{\text{直六面體 AMIE−NSKT}}{\text{直六面體 AMPL−NSQR}}=\frac{AE}{AL}=\frac{l}{1}.$$

コノ三ツノ比ノ相乘比ヲ作レバ,

$$\frac{\text{直六面體 ABFE}-\text{DCGH}}{\text{直六面體 AMPL}-\text{NSQR}}=\frac{lmn}{1}.$$

然ルニ直六面體 AMPL−NSQR ハ單位ノ長サノ線分ヲ一稜トスル立方體デ,ソノ體積ハ1デ表ハサレル. 故ニ直六面體 ABFE−DCGH ノ體積ハ lmn ナル數デ表ハサレル.

附言. コノ定理ヲ次ノ如ク略言スルコトガアル.

「直六面體ノ體積ハソノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ積ニ等シイ.」

同樣ノ略言ヲ用キレバ「直六面體ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ」トモイフコトガ出來ル.

任意ノ平行六面體ハ定理二十五ニヨツテコレヲ等底,等高,等體積ナル直六面體ニ直シ得ルカラ,ソノ體積ハ矢張リ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ.

三角壔ハ定理二十四系ニヨツテ一ツノ平行六面體ノ半分ト考ヘルコトガ出來ルカラ,上記ノ結果ニヨリ,ソノ體積ハ矢張リ底面ト高サトノ積ニ等シイコトトナル.

任意ノ角壔ハコレヲ幾ツカノ等高ナル三角壔ニ分ケテ考ヘレバ,結局矢張リソノ體積ハ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイコトトナル.

ヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

定理 二十八. 角壔ノ體積ハソノ底面ノ面積

ト高サトノ積ニ等シイ.

定義 二ツノ多面體ニ於テ各ノ體積ノ數値(體積ヲ表ハス數)ガ相等シイトキハ,タトヘソノ一方ヲ截リ又ハ繼グコトニヨツテ他方ノモノトナスコトガ出來ナイ場合ト雖,兩者ノ體積ハ相等シイモノトスル.

ヨツテ次ノ系ヲ得ル.

系 1. 等底等高ナル直六面體ノ體積ハ相等シイ.

系 2. 等底等高ナル平行六面體ノ體積ハ相等シイ.

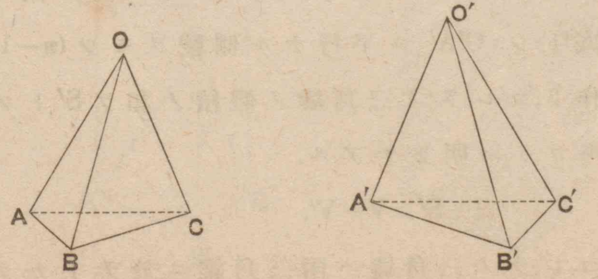
系 3. 等底等高ナル角壔ノ體積ハ相等シイ.

底面デアル多角形ノ邊數ガ相等シクナイ場合ヲモ含ム.)

76. 角錐ノ體積

定理 二十九. 二ツノ三角錐ガ等底デ且等高ナルトキハソノ體積ハ相等シイ.

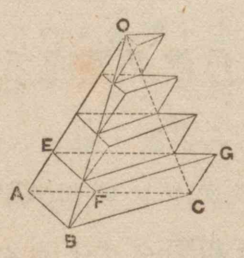
三角錐 O−ABC, O′−A′B′C′ ニ於テ,ソノ底面 ABC, A′B′C′ ガ等積デ且コレニ對スル高サモ相等シイトキハ,兩三角錐ノ體積ハ相等シイ.

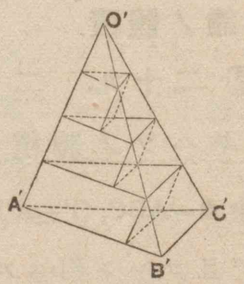


證明 各三角錐ノ側稜 OA, $O'A'$ ヲ夫々 n 等分シ,ソノ分點ヲ過ギリ底面ニ平行ナル平面ヲ作ツテ各角錐ヲ截レバ,相對應スル截リ口ガ夫々等積ナルコトハ定理二十一カラシテ容易ニ證明サレル.

今 $O-ABC$, $O'-A'B'C'$ ノ體積ヲ夫々 V, V' トシ,假リニ $V>V'$ デアルトスル.

先ヅ $O-ABC$ ニ於テソノ底面 ABC 及ビ今作ツタ $(n-1)$ 箇ノ截リ口ヲ夫々下ノ底トシ, OA ニ平行ナル稜ヲモツ n 箇ノ三角壔ヲ作リ,コレラノ三角壔ノ體積ノ和ヲ S トスレバ, $S>V$ ナルコトハ明カデアル.





次ニ $O'-A'B'C'$ ニ於テハ今作ツタ $(n-1)$ 箇ノ截リ口ヲ悉ク上ノ底トシ, $O'A'$ ニ平行ナル側稜ヲモツ $(n-1)$ 箇ノ三角壔ヲ作リ,コレラノ三角壔ノ體積ノ和ヲ S' トスレバ, $V'>S'$ ナルコトハ明カデアル.

ヨツテ　　　$S-S'>V-V'$.

然ルニコレラノ三角壔ハ兩三角錐ニ於テ上カラ順次

ニ第一ハ第一ト等シク,第二ハ第二ト等シク,以下同樣ニ第$(n-1)$ハ第 $(n-1)$ ト等シイ. 故ニ $S-S'$ ハ $O-ABC$ ノ方ノ最モ下ニアル三角壔 $ABC-EFG$ ニ等シイ. ヨツテ

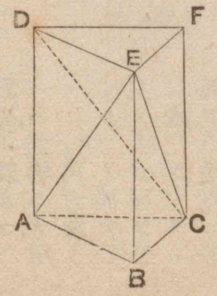
$$\text{三角壔 } ABC-EFG>V-V'.$$

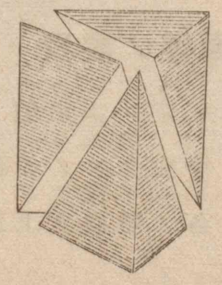
サテ OA ヲ等分スル數 n ガ大ナレバ大ナル程三角壔 $ABC-EFG$ ノ高サガ小トナルカラ,コノ三角壔ノ體積ハ何程デモ小ナラシメルコトガ出來ル. 然ルニ上ノ結果ニヨレバソレハ一定量 $V-V'$ ヨリ大デアルトイフ,コレハ不合理デアル. 故ニ $V>V'$ ナルコトハ出來ナイ.

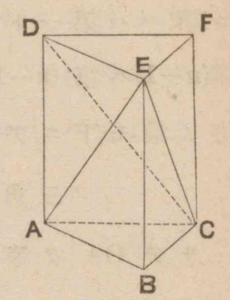
又同樣ノ理由ニヨリ $V<V'$ ナルコトモ出來ナイ. ヨツテ $V=V'$ デナケレバナラヌ.

定理 **三十.** 一ツノ三角壔ハ相等シイ體積ヲモツ三ツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル.

證明 三角壔 $ABC-DEF$ ヲ二ツノ平面 ACE, DCE デ截レバ,三ツノ三角錐 $E-ABC$, $E-ACD$, $E-FDC$ ヲ得ル.







而シテ三角錐E−ACDトE−FDCトニ於テ,高サハ何レモEカラ平面ACFDニ至ル距離デ,又ソノ底面ACD, FDCハ相等シイ. 故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ.

次ニ三角錐E−ABCトE−CDF即チC−DEFトニ於テ,高サハ何レモ平面ABCトDEFトノ間ノ距離デ,又ソノ底面ABC, DEFハ相等シイ. 故ニコノ二ツノ三角錐モ亦相等シイ體積ヲモツ.

斯クシテ三角壔ABC−DEFハ相等シイ體積ヲモツ三ツノ三角錐ニ分タレル.

系 1. 三角錐ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

系 2. 任意ノ角錐ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.

系 3. 等底等高ナル角錐ノ體積ハ相等シイ.

77. 多面體ノ體積

一般ニ任意ノ多面體ノ體積ヲ求メルニハ,先ヅ若干ノ適當ナル平面デソノ多面體ヲ幾ツカノ角壔及ビ角錐ニ分チ,ソノ各ノ體積ヲ上述ノ理ニヨツテ求メ,コレラヲ合計スレバヨイ.

例 題

1. 一稜ノ長サ $a$cm ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ.
2. 一邊ノ長サ am ナル正六角形ヲ底面トシ高サガ $2a$m ナル六角錐ノ側面積及ビ體積ヲ求メヨ. 但シ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ足ガ底面ノ外接圓ノ中心ニアルモノトスル.

定義 底面ガ正多角形デ,頂點ガ底面ノ中心ヲ過ギリ底ニ垂直ナル直線上ニアル角錐ヲ**正角錐**トイフ.

正角錐ノ斜面ハ總テ合同ナル二等邊三角形デ,ソノ高サ(コレヲソノ正角錐ノ**斜高**トイフ)ハ總テ相等シイ.

3. 一ツノ合同ナル三面角ヲモツ二ツノ四面體ノ體積ノ比ハソノ三面角ノ三ツノ稜ノ積ノ比ニ等シイ.
4. 斜角壔ノ斜稜ノ長サヲ l,底面積ヲ A,斜稜ト底面トノナス角ヲ θ トスレバ,ソノ體積ハ $l\,\mathrm{A}\sin\theta$ デアル.

雜 題 V.

1. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハコレニ對スル稜ヲソノ二面角ノ兩面ノ面積ノ比ニ分ツ.
2. 正角錐ノ全斜面ノ面積ハ,ソノ底面ノ周ト一ツノ斜高トノ積ノ半分ニ等シイ.
3. 底面ノ周ガ 8 デ高サガ 3 ナル正四角錐ノ全斜面ノ

面積ヲ求メヨ.

4. 一ツノ斜稜ガ 8,斜稜ト底面トノナス角ガ30°ナル正四角錐ノ體積及ビ全斜面ノ面積ヲ求メヨ.

5. 對角線ガ $\sqrt{18}$ ナル立方體ノ體積ヲ求メヨ.

定義 角錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ツタトキ,ソノ截リロト底面トノ間ニアル部分ヲ**截頭角錐**トイフ.

ソノ截リロトモトノ底面トヲ共ニソノ截頭角錐ノ**底面**トイヒ,兩底面ノ間ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ.

6. 截頭角錐ノ體積ヲV,ソノ兩底ノ面積ヲ夫々 a, b 又ソノ高サヲ h トスレバ,

$$V=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b).$$

7. 正四面體內ノ任意ノ一點カラソノ四面ニ至ル距離ノ和ハ一定デアル.

8. 四面體ノ各頂點トコレニ對スル面ノ重心トヲ結ブ四ツノ線分ハ同一ノ點(コレヲ四面體ノ**重心**トイフ)ヲ通過シ,且コノ點ニ於テ各 1:3 ナル比ニ分タレル.

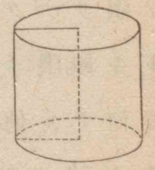
第六篇

曲面體

第一章 直圓壔及ビ直圓錐

78. 直圓壔

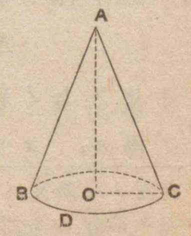
定義 **直圓壔**トハ矩形ヲソノ一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周廻轉セシメルトキ生ズル立體デアル.



廻轉ノ軸トシタ邊ヲソノ直圓壔ノ**軸**トイヒ,コレニ對スル邊ヲ**母線**トイフ. 母線ノ廻轉ニヨツテ生ズル曲面ヲ直圓壔ノ**側面**,軸ニ隣ル二邊ノ廻轉ニヨツテ生ズル二ツノ圓ヲ**底面**トイヒ,ソノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**トイフ. 又軸ノ長サヲ直圓壔ノ**高サ**トイフ.

79. 直圓錐

定義 **直圓錐**トハ直角三角形ヲソノ直角ノ一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周廻轉セシメルトキ生ズル立體デアル.



廻轉ノ軸トシタ一邊ヲ直圓錐ノ**軸**トイヒ,斜邊ヲ**母線**トイフ.

又直角ノ軸デナイ一邊ノ廻轉ニヨツテ生ズル圓ハ軸ニ垂直ナル一ツノ圓デコレヲ**底面**トイヒ,軸ト母線トノ交點ヲ

頂點トイフ.

軸ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**トイヒ,母線ノ長サヲ**斜高**トイフ.

80. 直圓壔及ビ直圓錐ノ體積及ビ表面積

先ヅ直圓壔ニ於テ,ソノ底面ニ内接スル正n邊形ヲ作リ,コレヲ底面トシ,モトノ直圓壔ノ高サヲ高サトスル直角壔ヲ作レバ,邊數nヲ限リナク增大スルニ從ツテコノ直角壔トモトノ直圓壔トハソノ表面ガスベテノ點ニ於テ限リナク相接近スル. ヨツテnガ限リナク增大スルトキ極限ニ於テコノ直角壔ノ體積及ビ表面積ノ數値ガ如何ナル値トナルカヲ考ヘテ,コレヲ直圓壔ノ體積及ビ表面積ノ數値トスル.

サテ直角壔ニ於テハ,底面ノ面積及ビ周ヲ夫々A及ビp, 高サヲhトスレバ,ソノ體積及ビ側面積ハ夫々 Ah 及ビphデアル.

然ルニ今nヲ限リナク增大スレバ極限ニ於テA及ビpハ夫々直圓壔ノ底面デアル圓ノ面積及ビ周トナルカラ,ソノ半徑ヲrトスレバ,

$$A=\pi r^2, \qquad p=2\pi r.$$

コレヲ上ノ結果ニ代入スレバ,直圓壔ノ體積及ビ曲面積*ヲ得ル. ヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

*表面ノ一部又ハ全部ガ曲面ナル立體ヲ**曲面體**トイヒ,ソノ表面ノ中曲面ナル部分ノミノ面積ヲソノ**曲面積**トイフ.

定理 三十一. 半徑r,高サhナル直圓壔ノ體積ヲV,曲面積ヲSトスレバ,

$$V=\pi r^2 h, \qquad S=2\pi rh.$$

次ニ直圓錐ニ於テモ,ソノ底面ニ内接スル正n邊形ヲ作リ,コレヲ底面トシ,モトノ頂點ヲ頂點トスル直角錐ヲ考ヘ,邊數nヲ限リナク增大スルト考ヘテ,モトノ直圓錐ノ體積及ビ曲面積ノ數値ヲ見出シ得ル. ヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

定理 三十二. 底面ノ半徑r,高サh,斜高lナル直圓錐ノ體積ヲV,曲面積ヲSトスレバ,

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h, \qquad S=\pi rl.$$

例　題

1. 高サ 8cm, 底面ノ半徑 6cm ナル直圓錐ノ體積及ビ曲面積ヲ求メヨ.
2. 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニヨツテノ截リ口ハ二等邊三角形デアル.
3. 半徑ガ 1m デ,高サガ 2m ナル直圓壔ノ曲面積及ビ體積ヲ求ム.

定義 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截ツタト

キ,ソノ截リロト底面トノ間ニアル部分ヲ**截頭直圓錐**トイフ.

ソノ截リロトモトノ底面トヲ共ニソノ截頭圓錐ノ**底面**トイヒ,兩底面ノ間ノ距離ヲソノ**高サ**トイヒ,又底面ノ間ニアル母線ノ部分ヲソノ**斜高**トイフ.

4. 截頭直圓錐ノ兩底ノ半徑ヲ a 及ビ b, 高サヲ h, 斜高ヲ l トスレバ,ソノ體積V及ビ曲面積Sハ次式ニヨツテ求メラレル.

$$V=\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2), \qquad S=\pi l(a+b)$$

5. 兩底ノ半徑ガ5及ビ4,高サガ6ナル截頭直圓錐ノ體積及ビ曲面積ヲ求メヨ.

第二章 球

81. 基本性質

定義 球トハ半圓ヲソノ直徑ヲ軸トシテ一周廻轉セシメルトキ生ズル立體デアル. 特ニソノ表面ノミヲ考ヘルトキハコレヲ**球面**トイフ.

廻轉シタ半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**トイフ. 中心カラ球面上ノ一點ニ至ル距離ハスベテ相等シイモノデコレヲ球ノ**半徑**トイヒ,又球ノ中心ヲ過ギリ球面上ニ兩端ヲモツ線分ヲ球ノ**直徑**トイフ.

球面ハ一定點(中心)カラ定距離(半徑ノ長サ)ニアル點ノ軌跡デアル. ヨツテ雜題IVノ12,13,14カラ直チニ次ノコトガワカル.

一平面上ニナイ四點ヲ過ル球面ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル.

球面ト平面トガ一ツヨリ多クノ點ヲ共有スルトキハ,一ツノ圓周ヲ共有シ,ソノ他ノ點ヲ共有シナイ.

二ツノ球面ガ一ツヨリ多クノ點ヲ共有スルトキハ,一ツノ圓周ヲ共有シ,ソノ他ノ點ヲ共有シナイ.

定義 球面ト平面トガ唯一點ノミヲ共有スルトキハ互ニ**相切スル**トイヒ,ソノ平面ヲソノ球面ノ**切平面**,ソノ一點ヲ**切點**トイフ. 球面ト平面トガ一ツノ圓周ヲ共有スルトキハ兩者ハ**相交ハル**トイフ.

公理 七. 球面ト平面トノ位置ノ關係ハ,次ノ三ツノ場合ニ限ル.

(1) 一點モ共有シナイカ, (2) 相切スルカ,

(3) 相交ハル.

定義 二ツノ球面ガ一ツノ圓周ヲ共有スルトキハ相

交ハルトイヒ,唯一點ヲ共有スルトキハ**相切スル**トイフ.相切スル場合ニ互ニ他ノ球ノ外ニアルトキハ兩球ハ互ニ**外切スル**トイヒ,一方ガ他ノ内部ニアルトキハ互ニ**内切スル**トイフ.

公理 八. 半徑ガ相等シクナイ二ツノ球面ノ位置ノ關係ハ,次ノ五ツノ場合ニ限ル.

一點モ共有シナイトキハ,

(1) 互ニ他ノ外部ニアルカ,

(2) 一ツガ全ク他ノ内部ニアル.

唯一點ヲ共有スルトキハ,

(3) 互ニ外切スルカ, (4) 互ニ内切スル.

一ツヨリ多クノ點ヲ共有スルトキハ,

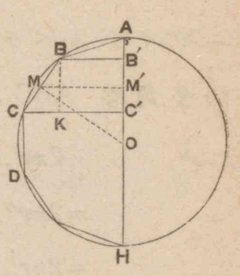
(5) 相交ハル.

モシ二ツノ球面ノ半徑ガ相等シイトキニハ(2)及ビ(4)ノ代リニ二ツノ球面ガ全ク相一致スル特別ノ場合ガ生ズル.

82. 球ノ表面積及ビ體積

今Oヲ中心トシ,半徑rナル半圓ABC......Hガ直徑AHヲ軸トシテ一周廻轉スルモノトシ,ソノトキ生ズル球ノ表面積ヲ求メヨウ.

半圓周 ABC......H ヲ n 等分シ,ソノ分點ヲ B,C,D,......トシ,コレラノ點カラ AH ニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々 B′,C′,......トスレバ,コノ半圓ノ廻轉ニ從ツテ三角形 ABB′, 梯形 B′BCC′ 等ハ夫々一ツノ直圓錐又ハ截頭直圓錐ヲ作ル. コレラノスベテノ體ノ曲面積(弦 AB, BC,......,等ノ廻轉ニヨツテ生ズル曲面積)ノ和ヲ求メ,然ル後 n ナル數ヲ限リナク增大スルト考ヘレバ,ソノ極限トシテノ球ノ表面積ヲ得ル.



今ソノ中ノ一ツデアル梯形 B′BCC′ ノ廻轉體ニツイテ考ヘルニ,ソノ曲面積ハ第80節例題4ニヨリ$\pi.BC(BB'+CC')$デアル. ヨツテ今 BC ノ中點 M カラ AH ニ引イタ垂線ヲ MM′ トスレバ,コノ曲面積ハ $2\pi.BC.MM'$ ニ等シイ.

今 OM ヲ結ビ,又 B カラ CC′ ニ垂線 BK ヲ引ケバ

$$\triangle BCK \backsim \triangle MOM'.$$

ヨツテ $$\frac{BC}{MO}=\frac{BK}{MM'}=\frac{B'C'}{MM'}.$$

故ニ $$BC.MM'=MO.B'C'.$$

ヨツテ上記ノ曲面積ハ又 $2\pi.MO.B'C'$ ト書キ直サレル.

他ノ梯形ノ廻轉體ニツイテモ同樣ノ關係ガアル. 又三角形 ABB′ ハ梯形ノ平行ナル邊ノ一ツガ零トナツタ特別ノ場合ト考ヘレバ矢張リ同樣ノ結果ヲ得ル.

而シテコレラノ結果ニ於テ MO ノ長サハ弦 AB, BC,… 等ニツイテスベテ同一デアル,ヨツテコレヲ r' トスレバ,結局多角形 ABC……H ノ廻轉ニヨツテ生ズル曲面積ハ

$$2\pi r'.AB'+2\pi r'.B'C'+\ldots\ldots$$
$$=2\pi r'(AB'+B'C'+\ldots\ldots)$$
$$=2\pi r'.AH=4\pi r'r$$

トナル.　ココニ於テ n ヲ限リナク增大スレバ r' ハ球ノ半徑 r ニ限リナク接近スル.　ヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

定理 三十三. 半徑 r ナル球ノ表面積ハ $4\pi r^2$ デアル.

次ニ中心 O, 半徑 r ナル球ノ體積ヲ求メルニ,先ヅスベテノ頂點ガコノ球面上ニアル一ツノ多面體ヲ考へ,ソノ各面ノ面積ヲ夫々 $A_1, A_2, \ldots\ldots$ トシ,又中心 O カラコレラノ面ニ引イタ垂線ノ長サヲ夫々 $r_1, r_2, \ldots\ldots$ トスレバ,コノ多面體ハ O ヲ共通ノ頂點トシ各面ヲ底面トスル角錐ノ集マツタモノト考ヘラレルカラ,ソノ全體積ハ

$$\frac{1}{3}r_1A_1+\frac{1}{3}r_2A_2+\ldots\ldots$$

ココニ於テ多面體ノ頂點ノ數ヲ限リナク增大シ,且ソノ各面ヲ限リナク小ナラシメレバ,ソノ全表面ハ球面ニ限リナク接近シ,極限ニ於テ $r_1, r_2, \ldots\ldots$ 等ハスベテ球ノ半徑 r トナリ,又 $A_1+A_2+\ldots\ldots$ ハ球ノ表面積卽チ $4\pi r^2$ ト

ナル.

故ニ球ノ體積ハ $\frac{1}{3}r.4\pi r^2$ 卽チ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル.　ヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

定理 三十四. 半徑 r ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル.

例　題

1. 一球面ト一直線トノ位置ノ關係如何.
2. 半徑 8m ナル球ト體積相等シク底面ノ半徑ガ 7m ナル直圓錐ノ高サヲ求メヨ.

83. 大圓及ビ月形

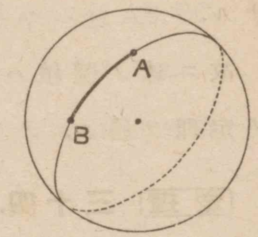
球面ト平面トノ交線ナル圓周ハ,ソノ平面ガ球ノ中心ヲ過ギルトキニ最大トナル.

定義 球ノ中心ヲ過ギル平面ニヨツテノ截リ口ヲ球ノ**大圓**トイヒ,中心ヲ過ギラナイ平面ニヨツテノ截リ口ヲ**小圓**トイフ.

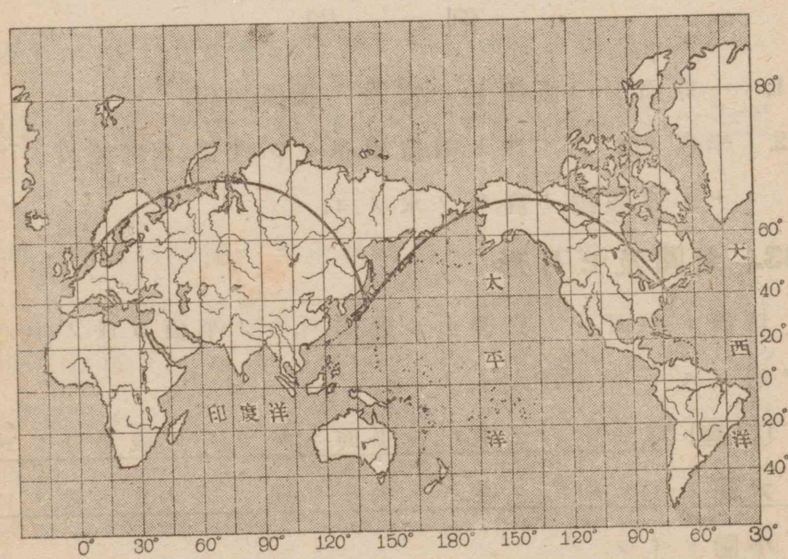
大圓ハ球面ヲ二等分スル.　又同ジ球面ニ於ケル二ツノ大圓ハ互ニ他ヲ二等分スル.

球面上ニ二點 A, B ヲトルトキ,ソレガ一ツノ直徑ノ兩端デアル場合ニハ A, B ヲ過ギル大圓ハ無數ニ多クアルガ,然ラザル場合ニハソノ大圓ハ唯一ツ定マル.　而シテ

ソノ大圓ノ劣弧 AB ハ球面上ニ於ケル A,B 間ノ最短通路デアル.



下ノ圖ニ於ケル太イ曲線ハ東京ろんどん間及ビ東京にゅーよーく間ノ各大圓弧ヲ普通ノ地圖上ニ轉寫シタモノデ,實際ノ地球表面ニ於ケル各兩地間ノ最短通路ヲ示スモノデアル.



定義 二ツノ大圓ノ弧(實ハ半圓周)ニヨツテ圍マレタ球面ノ部分ヲ**月形**トイヒ,ソノ二ツノ大圓ノナス角ヲ**月形ノ角**トイフ.

ココニ二ツノ大圓ノナス角トハソノ大圓ノ平面ガ作ル二面角ノコトデアル,從ツテソノ大キサハ,ソノ大圓ノ

周ノ交點ニ於ケル各圓ノ切線ノナス角ニ等シイ.

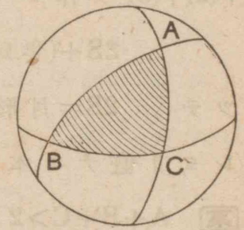
A ナル角ヲモツ月形ノコトヲ月形 A ト呼ブ.

定理 三十五. 同一球面上ニ於テハ月形ノ面積ハソノ角ニ比例スル.

系 月形 A ノ面積 $= \dfrac{A}{4\text{直角}} \times$(全球面積).

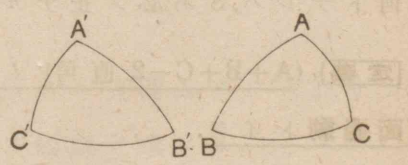
84. 球面三角形

定義 一ツノ球面上ニ於テ三ツノ大圓ノ弧ニヨツテ圍マレタ部分ヲ**球面三角形**トイヒ,ソノ弧ヲ球面三角形ノ**邊**,邊ノ端ヲソノ**頂點**,二邊ノナス角ヲソノ**角**トイフ.



頂點ガ A,B,C ナル球面三角形ノコトヲ記號デ,球面 △ABC ト書ク.

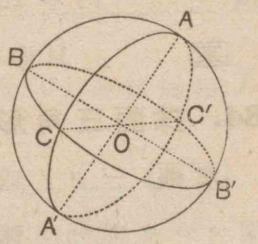
二ツノ球面三角形ニ於テ,相對應スル邊及ビ角ガ夫々相等シクトモ,ソノ對應ノ順序ガ相反スルトキハ兩形ハ必ズシモ合同デハナイ. シカシ兩形ハ對稱的ノ關係ニアルノデ,ソノ面積ハ相等シイ.



定理 三十六. 球面三角形 ABC ハ同ジ球面上ニ於テ $\frac{1}{2}(A+B+C-2\text{直角})$

ナル角ヲ有スル月形ト等積デアル.

證明 球面 $\triangle ABC$ ヲ S デ表ハシ,又 A, B, C カラ引イタ直徑ノ他ノ端ヲ夫々 A', B', C' トスレバ,



$$S+\text{球面}\ \triangle A'BC=\text{月形}\ A, \quad (1)$$

$$S+\text{球面}\ \triangle AB'C=\text{月形}\ B. \quad (2)$$

又 $$S+\text{球面}\ \triangle ABC'=\text{月形}\ C. \quad (3)$$

ココニ於テ二ツノ球面三角形 ABC' ト $A'B'C$ トハ等積ナルコトニ注意シテ (1)+(2)+(3) ヲ作レバ,

$$2S+(\text{半球面})=\text{月形}(A+B+C).$$

從ッテ $$2S=\text{月形}(A+B+C-2\text{直角}).$$

コレヨリ直チニ本定理ヲ得ル.

系 $A+B+C>2$ 直角.

何トナレバ,S ハ必ズ正ナル數値ヲ有スルカラデアル.

定義 $(A+B+C-2$ 直角$)$ ノコトヲ球面三角形 ABC ノ**球面過剰**トイフ.

例 題

1. 球面三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一ツヨリ大デアル.
2. 同ジ球面ニ於ケル球面三角形ノ面積ハソノ球面過剰ニ比例スル.

3. 角ノ單位ヲ直角トシ,球面過剰ヲ E トスレバ,表面積 S ナル球面上ニ於ケル球面三角形ノ面積ハ $\frac{ES}{8}$ デアル.
4. 表面積40平方米ナル球面上ニ於ケル球面三角形ノ三ツノ角ガ夫々 $40°$, $60°$, $100°$ ナルトキ,ソノ面積ヲ求メヨ.

雜 題 VI.

1. 球ノ體積ハコレニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シイ.
2. 半徑 r ナル球面ヲ二ツノ平行ナル平面デ截ルトキ,二平面ノ間ノ距離ヲ h トスレバ,ソノ間ニ夾マレタ球面ノ部分ノ面積ハ $2\pi rh$ デアル.

定義 二ツノ平行ナル平面ノ間ニ夾マレタ球面ノ部分ヲ**球帶**トイフ.

3. 半徑 $r$cm ナル球ニ內接スル直圓錐デ,ソノ高サガ底ノ直徑ニ等シイモノノ體積ヲ求メヨ.
4. 同ジ高サデ半徑ガ夫々 3, 4 ナル二ツノ直圓壔ノ體積ノ和ニ等シイ體積ヲモツ同ジ高サノ直圓壔ノ半徑ヲ求メヨ.
5. 兩底ノ半徑ガ 3, 9 デ高サガ 8 ナル截頭直圓錐ノ斜高,體積及ビ全表面積ヲ求メヨ.

6. 同ジ球面上ノ二ツノ小圓ガ相交ハルトキハ,ソノ二交點ヲ過ギル直線トソノ小圓ノ二中心ヲ過ギル直線トハ互ニ垂直デアル.

定義 一般ニ三ツヨリ多クノ大圓弧ニヨツテ圍マレタ球面ノ部分ヲ**球面多角形**トイヒ,ソノ圍ム大圓弧ノ數ニ從ツテ**球面三角形**,**球面四角形**等トイフ.

7. 球面四角形及ビ球面五角形ノ面積ヲ求メル公式ヲ作レ.

8. 半徑 r ナル球面上ニ於テ四ツノ角ガ $90°$, $100°$, $110°$, $120°$ ナル球面四角形ノ面積ヲ求メヨ.

9. 半徑ガ5及ビ12ナル二ツノ球ノ中心距離ガ13デアル. ソノ交ハリナル圓ノ半徑ヲ求メヨ.

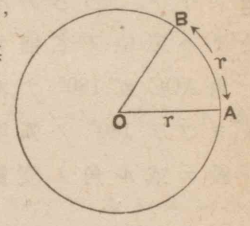
10. 平面Pトソノ上ニナイ定點Oトガ與ヘラレタトキ,平面P上ノ點ヲAトシ,OA上ニ點BヲトリOA.OB＝(定量) ナラシメレバ,點Bノ軌跡如何.

附　錄

I. 弧度法

角ヲ測ルニ六十分法ヲ用キルノハ最モ普通デアルケレドモ,理論上ノ研究ニ當ツテハ別ニ**弧度法**ナルモノヲ用キル.

Oヲ中心トシ,任意ノ半徑 r デ圓ヲ畫キ,弧 AB ヲ半徑ニ等シク取ツタトスル. 然ルトキハ角 AOB ト $360°$ トノ比ハ弧 AB ト全圓周トノ比ニ等シイ,卽チ



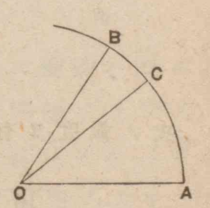
$$\angle AOB : 360° = r : 2\pi r.$$

故ニ
$$\angle AOB = \frac{360°}{2\pi} = 57°.29577951......$$
$$= 57°17'44''.806......$$

デ,コノ角ノ大キサハ半徑 r ノ如何ニカカハラズ一定デアル.

コノ一定ノ角ヲ**らぢあん(Radian)**ト名ヅケ,コレヲ單位トシテ任意ノ角ヲ測ルコトガ出來ル.

今 ∠AOC ヲ一ツノ與ヘラレタ角トスル. Oヲ中心トシ任意ノ半徑 r デ圓ヲ畫キ,角ノ兩邊トA及ビCニ於テ交ハラシメ,弧 AC ノ長サヲ l トスル. 又同ジ圓周上ニ弧 AB ヲ r ニ等シク取レバ,角 AOB ハ1らぢあんデアル. 而シテ



$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{弧\ AC}{弧\ AB} = \frac{l}{r}.$$

故ニ
$$\angle AOC = \frac{l}{r}\ らぢあん.$$

ヨツテ次ノ法則ヲ得ル.

與ヘラレタ角ガ幾らぢあんデアルカヲ知ルニハ,ソノ頂點

ヲ中心トシ,任意ノ半徑デ圓ヲ畫キ,ソノ角ノ兩邊ノ間ニ夾マレタ弧ノ半徑ニ對スル比ヲ求メレバ宜イ. モシ特ニソノ半徑ヲ長サノ單位トスレバ,弧ノ長サノ數値ガ直チニ所要ノらぢあんノ數デアル.

一般ニ $\frac{l}{r}$ ナル數ヲ角AOCノ**弧度**ト名ヅケ,コレニヨツテ角ノ大キサヲ測ル法(卽チらぢあんヲ單位トシテ測ル法)ヲ**弧度法**トイフ. らぢあんヲ表ハスニハ一定ノ記號ナク,弧度法ニ於テハ單位ノ名稱ヲ略スノガ常デアル.

角AOCガ180°ナルトキハ,lハ半圓周トナルカラπrニ等シイ,ヨツテ180°ノ弧度ハπデアル. コレカラ比例ノ考ニヨリ一般ニ或ル角ノ度數ヲx,弧度ヲθトスレバ,

$$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$$

ナル關係ヲ得ル.

主ナル角ノ度數ト弧度トヲ對照スレバ次ノ如クデアル.

度數	0	30	45	60	90	180	270	360
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

例題

1. 次ノ弧度ヲ有スル角ヲ六十分法デ表ハセ.

   $\frac{\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{5}$

2. 次ノ角ヲ弧度法デ表ハセ.

   48°, 110°, 395°30′

3. 半徑Rノ圓ニ於テ,長サcナル弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ幾らぢあんカ.

4. 角AOB, AOB′ヲ任意ノ相等シイ鋭角トシ,Oヲ中心トシ

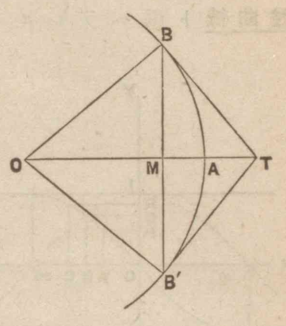
圓BAB′ヲ畫キ,弦BMB′及ビ切線BT, B′Tヲ作ルトキ,

弦 BMB′<弧BAB′<BT+TB′

ナルコトハ既知トスル.

角AOBノ弧度ヲθトスレバ,

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta.$$



5. 前問ノ結果カラ

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta.$$

コレニヨツテ見レバ角ガ微小ナルトキハソノ正弦ト弧度トハ殆ンド相等シイ.

6. 半徑rノ球面上ニ於ケル月形ノ角ノ弧度ヲAトスレバ,ソノ面積ハ$2Ar^2$デアル.

7. 半徑rナル球面上ニ於ケル球面三角形ノ三ツノ角ノ弧度ヲA, B, Cトスレバ,ソノ面積ハ

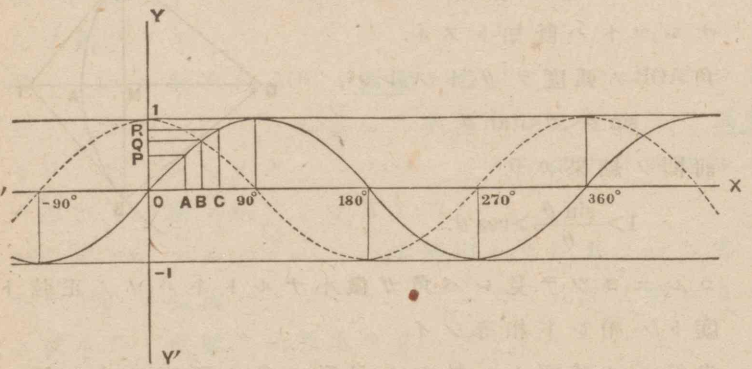
$$(A+B+C-\pi)r^2$$

デアル.

II. 三角函數ノ値ノ變動

角ノ大キサガ變ズルトキコレニ伴フ正弦ノ變動ハ既ニ第26節ニ表示シタ. 今コノ變動ノ模樣ヲ一層明瞭ナラシメルタメニ次頁ノ如キ圖ヲ畫ク. 先ヅOニ於テ直交スル二直線XOX′, YOY′ヲ取リ,OX上ニOカラ測ツタ長サデ角ノ大キサ(例ヘバ度數)ヲ表ハサシメ,ソノ端カラOYニ平行(卽チOXニ垂直)ナル直線ヲソノ方向ニ引キ,ソノ長サデ正弦ノ値ヲ表ハサシメ,但シ角ガ負ナルトキハソノ大キサヲOX′上ニ表ハシ,又正弦ガ負ナルトキハ垂線ヲOY′ノ方向ニ引クモノトスル. 斯クノ如キ垂線ノ端ノ軌跡ヲ考ヘレバ圖ニ實線デ示スヤウ

ナ波狀ノ曲線ヲ得ル,コレ卽チ正弦ノ變動ヲ圖示スルモノデ,**正弦曲線**ト稱ヘラレルモノデアル.



但シ圖ニ於テ A, B, C ハ夫々 30°, 45°, 60° ヲ示シ,又

$$OP=\frac{1}{2},\qquad OQ=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad OR=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

デアルトスル.

同樣ノ考ニヨツテ餘弦ノ變動ヲ圖示スレバ上圖ノ點線ノ如キ曲線ヲ得ル. コレヲ**餘弦曲線**トイフ.

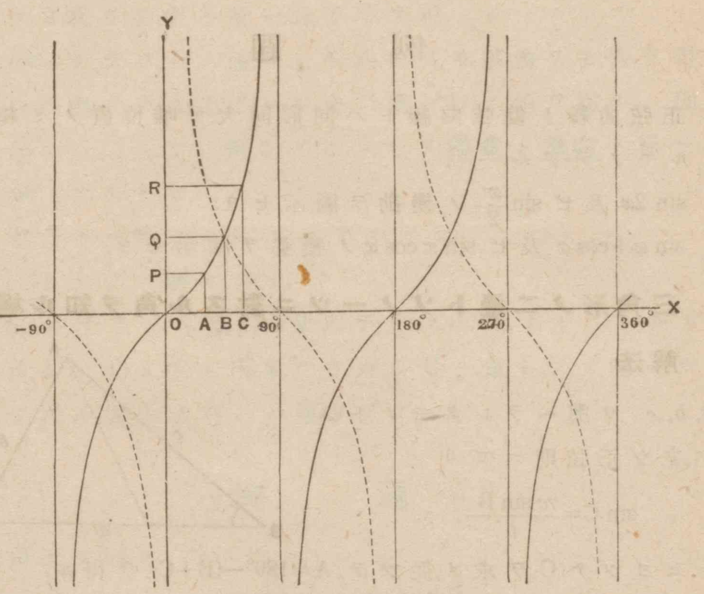
他ノ三角函數ニツイテモ夫々ソノ變動ヲ示ス曲線ガアル. 次頁ノ上圖ノ實線ナル曲線ハ**正切曲線**デ點線ナル曲線ハ**餘切曲線**ヲ表ハシ,又次頁ノ下圖ノ實線ノ曲線ハ**正割曲線**,點線ノ曲線ハ**餘割曲線**デアル. 何レノ圖ニ於テモ A, B, C ノ意味ハ前ノ通リトシ,正切曲線ニ於テハ

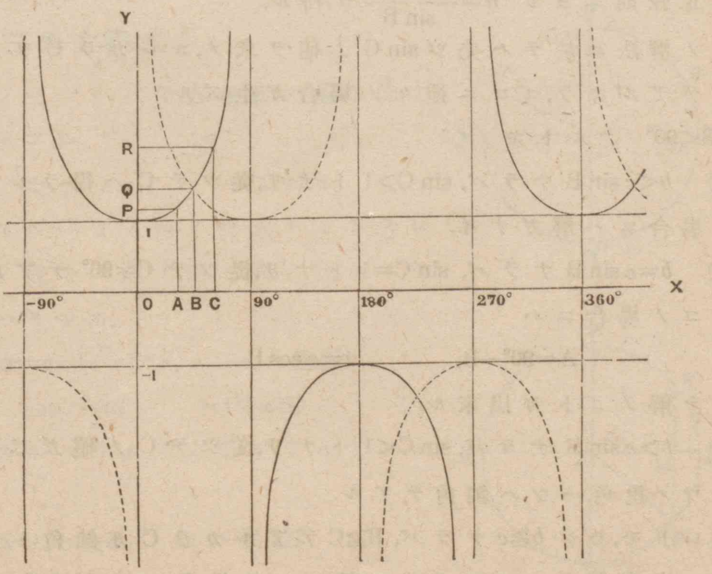
$$OP=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad OQ=1,\qquad OR=\sqrt{3}.$$

正割曲線ニ於テハ

$$OP=\frac{2}{\sqrt{3}},\qquad OQ=\sqrt{2},\qquad OR=2$$

デアルトスル.





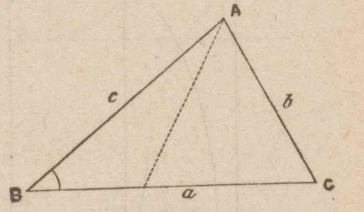
例　題

1. 正弦曲線ト餘弦曲線トハ同形同大デ唯位置ノミ相異ナルモノデアル.

2. $\sin 2x$ 及ビ $\sin\dfrac{x}{2}$ ノ變動ヲ圖示セヨ.

3. $\sin x+\cos x$ 及ビ $\sin x\cos x$ ノ變動ヲ圖示セヨ.

III. 三角形ノ二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知ル場合ノ解法



B, b, c ヲ與ヘラレタモノトスレバ,先ヅ正弦則ニヨリ

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}.$$

コレニヨツテCヲ求メ,從ツテ $A=180°-(B+C)$ ヲ得ル.

再ビ正弦則ニヨリ $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$ ヲ得ル.

コノ解法ニ於テハ先ヅ $\sin C$ ノ値ヲ求メ,コレカラCヲ出スモノデアルカラ,ココニ種々ノ場合ガ生ズル.

I. $B<90°$ ナルトキ

(1) $b<c\sin B$ ナラバ, $\sin C>1$ トナリ,從ツテCハ得ラレナイ.コノ場合ニハ解ガナイ.

(2) $b=c\sin B$ ナラバ, $\sin C=1$ トナリ,從ツテ $C=90°$ デアル.故ニコノ場合ニハ

$$A=90°-B,\qquad a=c\cos B$$

トシテ解クコトガ出來ル.

(3) $b>c\sin B$ ナラバ, $\sin C<1$ トナリ,從ツテCノ値ガ二ツアル,一ツハ鋭角,一ツハ鈍角デアル.

ケレドモ,モシ $b\geqq c$ ナラバ, $B\geqq C$ デアルカラCガ鈍角トナルコトハ出來ナイ. ヨツテCノ値トシテ鋭角ノミヲ採ラナケレバナラヌ,從ツテ解ハ唯一通リデアル.

モシ $b<c$ ナラバ,Cノ値トシテ鋭角ヲモ鈍角ヲモ採リ得ルカラ,コレニ應ジテA及ビ a モ各二種ヅツノ値ヲ採ル. 即チコノ場合ニハ二通リノ解ガアル,コレヲ**兩意ノ場合**ト稱ヘル.

II. $B\geqq 90°$ ナルトキ

コノ場合ニハ明カニ $B>C$ デアルカラ.

(1) $b\leqq c$ ナラバ解ガナイ.

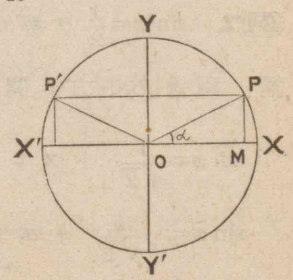
(2) $b>c$ ナラバ勿論 $b>c\sin B$ デ, $\sin C<1$ トナル. ケレドモCハ鈍角トナルコトガ出來ナイカラCノ値トシテ唯一ツ鋭角ノミヲ採ル,從ツテ解ハ一通リデアル.

例　題

次ノ三角形ヲ解ケ.

$$b=8.5,\qquad c=12,\qquad B=40°$$

IV. 三角方程式

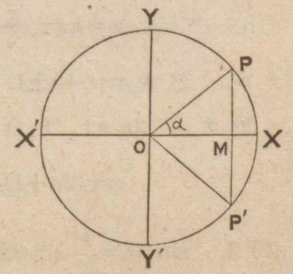


次ノ三ツハ三角方程式ノ基本的ナモノデアル.

(1) $\sin x=a,\qquad -1\leqq a\leqq 1$

ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ α トスレバ, x ノ最モ一般ナ値ハ次ノ式ニヨツテ表ハサレル.

$$x=n\pi+(-1)^n\alpha.\qquad (n\text{ ハ整數})$$



(2) $\cos x=a,\qquad -1\leqq a\leqq 1$

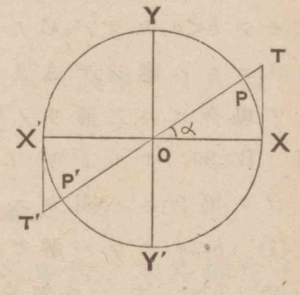
ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ α トスレバ,

$$x=2n\pi\pm\alpha.\qquad (n\text{ ハ整數})$$

(3) $\tan x=a$

ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ α トスレバ,

$$x=n\pi+\alpha. \quad (n\ ハ整數)$$



例 1. 次ノ各ノ式ヲ滿足セシメルスベテノ角 x ヲ求メヨ.

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, (2) $\cos x=-\frac{1}{2}$,

(3) $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

解 各式ニ適スル x ノ一ツノ値ハ夫々 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$ デアル. 故ニ一般ノ解ハ次ノ如クデアル

(1) $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$, (2) $x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$,

(3) $x=n\pi-\frac{\pi}{6}$

例 2. $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ ヲ解ケ.

解 兩邊ヲ平方ニ開ケバ $\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ得ル.

$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ トスレバ, $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$,

$\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ トスレバ, $x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{4}$.

ヨツテ兩者ヲマトメレバ

$$x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}=(4n\pm1)\frac{\pi}{4}$$

トナル. 然ルニ $4n\pm1$ ハスベテノ奇數ヲ表ハスカラソノ內容ニ於テハ $2n+1$ ト全ク相等シイ. ヨツテ次ノ答ヲ得ル.

$$x=(2n+1)\frac{\pi}{4}.$$

例 3. $\sin 2x=\frac{1}{2}$ ヲ解ケ.

解 コノ方程式ヲ滿足セシメル $2x$ ノ一ツノ値ハ $\frac{\pi}{6}$ デアル. 故ニソノ一般ナル値ハ

$$2x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

デアル. ヨツテ

$$x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}.$$

注意 公式 $n\pi+(-1)^n\alpha$ ハ $\sin x=a$ ナル形ノ方程式ノ一般ナル根ヲ與ヘルモノデアルカラ,本例ノ如キ場合ニハ上ノ如ク $2x$ ヲ一ツノ未知角ト見做シテコノ公式ヲ適用スルガ宜イ.

例 4. $\sin 2x=\cos 3x$ ヲ解ケ.

解 コレヲ書キ直セバ

$$\cos(90°-2x)=\cos 3x.$$

故ニ $3x=n.360°\pm(90°-2x)$.

ヨツテ $x=\frac{n.360°\pm90°}{3\pm2}$

$=(4n+1)18°$ 又ハ $(4n-1)90°$.

例 題

1. $n.180°+(-1)^n A$ ナル式ノ表ハス內容ハ $A=30°$ ナル場合モ $A=150°$ ナル場合モ全ク同ジデアル.

2. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1) $\sin 4x+\sin x=0$ (2) $\sin^2 x-2\cos x+\frac{1}{4}=0$

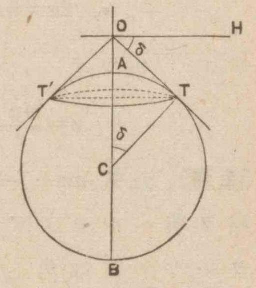
(3) $\tan 2x=8\cos^2 x-\cot x$ (4) $\sin 3\theta=\sin 2\theta$

3. 次ノ各組ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \tan(x+y)=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+y=150°\\ \tan x+\tan y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$

V. 視　界

地球ノ形ヲ完全ナル球ト假定シ, C ヲソノ中心トシ, 一ツノ直徑 BCA ノ延長ノ上ニ任意ノ一點 O ヲ取リ, O カラ球面ニ切線 OT, OT′ 等ヲ引ケバ切點 T, T′ 等ノ軌跡ハ一ツノ圓周トナル. コノ圓周ノ內ダケガ O カラ展望シ得ベキ範圍デ, コレヲ O ニ於ケル**視界**トイヒ, コノ圓周ヲ**視水平**トイフ. 又 OT ノ長サヲ**視界半徑**トイヒ, OT ガ O ヲ過ギル水平面トナス角ヲ**視水平ノ俯角**トイフ



今 $AC=r$, $OA=h$ トスレバ,

$$OT^2=OA.OB=h(2r+h).$$

故ニ

$$OT=\sqrt{h(2r+h)}.$$

ケレドモ通常吾人ノ登リ得ル高サ h ハ地球ノ半徑 r ニ比スレバ頗ル小デアルカラ, 概算ニ於テハ $2r+h$ ノ代リニ $2r$ ヲ用ヰルコトトシ,

$$OT=\sqrt{2hr}$$

トシテ差支ナイ.

從ツテ又視水平ノ俯角ヲ δ トスレバ, 概略

$$\tan\delta=\tan OCT=\frac{OT}{CT}=\sqrt{\frac{2h}{r}}$$

地球ノ半徑ハ大約 3960 哩デ, 1 哩ハ 5280 呎デアルカラ. h 呎ノ高サカラ見得ル視界ノ半徑ノ哩數ハ大約

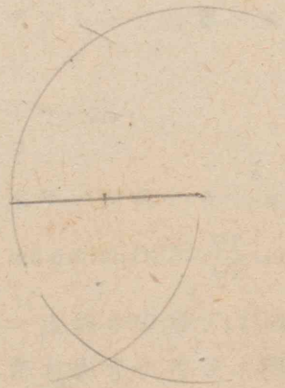
$$\sqrt{2\times\frac{h}{5280}\times 3960}=\sqrt{\frac{3}{2}h}$$

ニ等シイ.

例　題

1. 燈臺ノ火光ヲ 15 哩ノ距離カラ望ミ得ルヤウニスルニハ, ソノ高サヲ何呎以上ナラシメルコトヲ要スルカ.

2. 一ツノ燈臺ニ向ツテ進行スル船ガアル. 檣頭カラ燈臺ノ火光ヲ初メテ視水平ノ線上ニ認メタ後 30 分ヲ經テツヒニ甲板カラモソノ火光ヲ認メ得ルヤウニナツタ. 甲板ハ海面上 16 呎ノ高サニアリ, 檣頭ハ甲板上 48 呎ノ高サニアルトスレバ, コノ船ノ速サ如何.



補充問題

第一　平面幾何學補充

1. 定圓Oノ周上ノ一定點Aカラ任意ノ弦 AP ヲ引キ,ソノ延長上ニ一點Qヲ取リ PQ=AP ナラシメルトキ,點Qノ軌跡ヲ求メヨ.

2. 一定點カラ一定圓周マデ引イタ線分ヲソノ方向ニソノ二倍ニ延長スレバ,ソノ末端ノ軌跡如何.

3. 一定直線上ノ二定點ヲ M, N トスルトキ, M, N ニ於テ夫々 MN ニ切シ,且互ニ相切スル二圓ノ切點ノ軌跡如何.

4. 互ニ相切スル二圓ガ夫々二定點 A, B ニ於テ定圓ニ切スルトキ,コノ二圓ノ切點ノ軌跡如何. 4 宿題

5. AB ヲ定圓Oノ定弦トシ, CD ヲ一定ノ長サノ弦トスル. 今弦 CD ガ兩端ヲ常ニ圓周上ニ置イテ動クトキ, CD ノ中點Gト AB ノ中點Mトヲ結ブ線分 MG ノ中點ノ軌跡如何.

6. 一定圓Oノ周上ノ動點Pカラ定直徑 AOB ニ垂線 PC ヲ引キ,半徑 OP 上ニ OC ニ等シク OQ ヲ取ルトキ,點Qノ軌跡如何.

7. 一定點Pカラ一定圓Oニ引イタ切線ノ切點ヲ A, B トスル. Aヲ過ギリ任意ノ弦 AC ヲ引キ,又Pヲ過ギリ AC ニ平行ナル直線ヲ引キコレト直線 BC トノ交點ヲQトスルトキ,點Qノ軌跡ヲ求メヨ.

8. 定線分 AB 上ノ任意ノ點ヲPトシ, AP, BP ノ上ニソノ各ヲ底邊トスル二ツノ正三角形ヲソノ定線分ノ同ジ側ニ作ルトキ,ソノ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求 宿題 了

宿題 9

メヨ.

9. 定圓ニ於テ定長ナル弦ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡如何.

10. AB ヲ與ヘラレタ圓ノ與ヘラレタ直徑トシ,ソノ一端 B ヲ過ギル任意ノ弦 BQ ノ延長上ニ一點 P ヲ取リ, PQ ノ長サヲ P カラ A ニ於ケル切線ニ引イタ垂線ト等シカラシメルトキ,點 P ノ軌跡如何.

11. 定長ノ線分 AB ガ定角 XOY ノ各邊上ニ夫々一端ヲ置クトキ, A 及ビ B カラ OX, OY ニ夫々垂線ヲ作レバ,ソノ交點 P ノ軌跡如何.

12. ABCD ハ平行四邊形デ, AB ハ位置及ビ長サヲ一定トシ, BC ハソノ長サダケヲ一定トスルトキ, ∠C 及ビ ∠D ノ二等分線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

13. 三定點又ハ四定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡如何.

14. 定圓周上ノ定點 A カラ一定ノ大キサノ角 α ヲナス二ツノ弦 AP, AQ ヲ引クトキ,點 P, Q ニ於ケル二ツノ切線ノ交點 R ノ軌跡如何.

15. 定點 A ヲ過ギリ定圓 O 內ニ引イタ任意ノ弦ノ中點ヲ M トスル. 點 M ニ於テ AM ニ垂直ニ,且 AM ニ等シイ長サノ線分 MP ヲ作ルトキ,點 P ノ軌跡如何.

16. OA, OB ハ定圓 O ノ互ニ垂直ナル定マツタ半徑デアル. PQ ヲ圓 O ノ任意ノ直徑トスルトキ, PA, QB ノ交點 R ノ軌跡如何.

17. 二定直線ニ切シ,且中心ガ他ノ定圓周上(又ハ定直線上)ニアル圓ヲ畫ケ.

18. 二直線ノ交點ガ與ヘラレナイモノトシテ,ソノ交角ノ二等分線ヲ引ケ.

19. 一定圓ト一定直線トガ與ヘラレタトキ,コノ直線上ノ點カラコノ圓ニ切線ヲ引キソノ切點マデノ長サヲ與ヘラレタ線分ニ等シクセヨ.

20. 二圓ノ交點ノ一ツヲ A トシ, A ヲ過ギル一ツノ直線ト二圓トガ再ビ交ハル點ヲ B, C トスルトキ,二ツノ弦 AB, AC ノ和又ハ差ヲ定長ナラシメヨ.

21. 定圓 O ニ切シ,且定直線 PQ 上ノ一定點 P ニ於テコノ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

22. 一對角線ト一邊トノ和(又ハ差)ヲ知ツテ正方形ヲ作レ.

23. 三角形ノ頂角,コノ頂角ニ對スル邊及ビコレト內接圓トノ切點ノ位置ヲ知ツテ,コノ三角形ヲ畫ケ.

24. 三角形ノ底邊,頂角及ビソノ頂點ト內心トノ距離ヲ知ツテ,コノ三角形ヲ作レ.

25. 與ヘラレタ四邊形ニ外接スル正方形ヲ作レ.

26. 頂點ガ一ツヅツ三平行線ノ各ノ上ニアルヤウニ正三角形ヲ作レ.

27. △ABC ノ二邊 AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ハル直線ヲ引キ, DE ヲ定方向ナラシメ,且 BD+DE+EC ヲ定長 l ニ等シカラシメヨ.

28. 四邊形 ABCD ノ邊 BC 上ニ一點 P ヲ求メ, ∠BAP ト ∠CDP トヲ相等シカラシメヨ.

29. 定圓 O ニ外接スル菱形ヲ作リ,ソノ一邊ヲ定長 a ニ等シカラシメヨ.

30. △ABC ノ頂點 A ヲ過ギル一直線ヲ引キ,ソノ上ニ投ズル邊 AB, AC ノ正射影ノ和ヲ最大ナラシメヨ.

31. 相交ハル二圓 O, O′ ノ交點 A ヲ過ギリ二圓周ト夫々 B, C

ニ於テ交ハル直線ヲ引キ，AB.AC ヲ定面積 a^2 ナラシメヨ．

32. 定圓周上ノ二定點 A, B カラ平行ナル二ツノ弦 AA′, BB′ ヲ引キ，梯形 ABB′A′ ヲシテ一定ノ面積 a^2 ヲモタシメヨ．

33. 二定點 A, B ヲ過ギリ，且定圓 O ノ周ヲ二等分スル圓ヲ作レ．

34. 三ツノ高サヲ知ツテ三角形ヲ作レ．

35. 直線 XY ノ同ジ側ニ二定圓 A, B ガアル．XY 上ニ一點 C ヲ求メ，C カラ圓 A, B ニ夫々引イタ切線ガ XY トナス角ヲシテ相等シカラシメヨ．

36. 直線ヲソノ上ノ一點ヲ中心トシテ反轉セヨ．

37. 二點 A, B ニ於テ相交ハル二圓ノ第一ノ圓ノ直徑 EB 又ハソノ延長ガ第二ノ圓ト交ハル點ヲ C，又第二ノ圓ノ直徑 FB 又ハソノ延長ガ第一ノ圓ト交ハル點ヲ D トスレバ，直線 AB ハ三點 B, C, D ヲ過ギル圓ノ中心ヲ過ギル．

38. 與ヘラレタ一點ヲ過ギリ且與ヘラレタ二圓ニ切スル圓ヲ畫ケ．

39. 與ヘラレタ三圓ニ切スル圓ヲ畫ケ．

40. 一直線ガ △ABC ノ三邊 BC, CA, AB 又ハソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 L, M, N，又二直線 BM, CN ノ交點ト A トヲ過ギル直線ガ BC ト交ハル點ヲ P トスレバ，邊 BC ハ P ト L トニヨツテ調和ニ分タレル．

41. △ABC ノ中線 AD 上ニソノ長サノ $\frac{1}{5}$ ニ等シク DE ヲトリ，CE ノ延長及ビ E ヲ過ギリ BC ニ平行ナル直線ガ邊 AB ト交ハル點ヲ夫々 M, N トスレバ，MN ハ AM ノ $\frac{1}{5}$ ニ等シイ．

第二　一般ノ角ノ三角函數

1. A, B ガ正ノ鋭角デ $\sin A=\frac{12}{13}$，$\cos B=\frac{3}{5}$ ナルトキ，$\tan(A+B)$ ノ値如何．

2. α, β ガ正ノ鋭角デ $\tan\alpha=\frac{2}{3}$，$\tan\beta=\frac{3}{2}$ ナルトキ，$\alpha+\beta$ ハ何度カ．

3. 方程式 $x^2+6x+7=0$ ノ二根ヲ $\tan A$，$\tan B$ トスレバ，$A+B$ ノ値如何．

4. 次ノ各等式ガ成立ツ．

(1) $\tan(45^\circ+\alpha)\tan(45^\circ-\alpha)=1$

(2) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

(3) $\sin 2A\ \tan 2A=\dfrac{4\tan^2 A}{1-\tan^4 A}$

(4) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\sin 3B}{\sin B}=4\sin(A+B)\sin(B-A)$

(5) $\tan\dfrac{A+B}{2}-\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$

(6) $\sin 4A=4\sin A\cos^3 A-4\cos A\sin^3 A$

(7) $\cot A+\tan A=2\,\mathrm{cosec}\,2A$

(8) $\cot A-\tan A=2\cot 2A$

(9) $\dfrac{1\pm\sin\alpha}{1\mp\sin\alpha}=\tan^2\left(45^\circ\pm\dfrac{\alpha}{2}\right)$

(10) $\sec\alpha\pm\tan\alpha=\tan\left(45^\circ\pm\dfrac{\alpha}{2}\right)$

5. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次ノ各等式ガ成立ツ．

(1) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(2) $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$

(3) $\sin 8A+\sin 8B+\sin 8C+4\sin 4A\sin 4B\sin 4C=0$

(4) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

(5) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

6. 次ノ各式ノ値ヲ求メヨ.

(1) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ$

(2) $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ$

7. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\sin B=\frac{12}{13}$, $\sin C=\frac{7}{25}$ デ A, B, C ハ何レモ正ノ鋭角トスレバ, $\sin(A+B+C)$ ノ値如何.

8. $A+B+C=180^\circ$, $\cos A=\cos B\cos C$ ナルトキハ,

$$\cot B\cot C=\frac{1}{2}.$$

9. $\tan^2\alpha=1+2\tan^2\beta$ ナルトキハ,

$$\cos 2\alpha+\sin^2\beta=0.$$

10. $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ ナルトキハ,

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}.$$

11. $a\sin\theta+b\cos\theta=c=a\operatorname{cosec}\theta+b\sec\theta$ ナルトキハ,

$$\sin 2\theta=\frac{2ab}{c^2-a^2-b^2}.$$

12. $\tan\beta=\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ ナルトキハ,

$$\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha.$$

13. 次ノ各組ノ式カラ θ ヲ消去セヨ.

(1) $\begin{cases} a\sec^2\theta-b\cos\theta=2a \\ b\cos^2\theta-a\sec\theta=2b \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \operatorname{cosec}\theta-\sin\theta=m \\ \sec\theta-\cos\theta=n \end{cases}$

(3) $\sin\theta+\cos\theta=a$, $\cos 2\theta=b$

14. $\left.\begin{array}{l} y\cos\varphi-x\sin\varphi=a\cos 2\varphi \\ y\sin\varphi+x\cos\varphi=2a\sin 2\varphi \end{array}\right\}$ カラ φ ヲ消去スレバ,

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}.$$

15. $\tan x+\tan y=m$, $\cot x+\cot y=n$, $x+y=a$ カラ x, y ヲ消去

セヨ.

第三　三角形ノ解法

(三角形ノ角ヲ A, B, C, コレニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トスル.)

1. 三邊ガ $a=x^2+x+1$, $b=2x+1$, $c=x^2-1$ ナル三角形ノ最大角ハ何度ナルカ.

2. $A=2C$ ナルトキハ $a^2=bc+c^2$ デアル.

3. $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ ナラバ, a, b, c ハ等差級數ヲナス.

4. $a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$ ナラバ, △ABC ハ二等邊三角形デアル.

5. A, B, C カラ夫々對邊ニ引イタ垂線ヲ AD, BE, CF トスレバ,垂足三角形 DEF ノ三邊ハ $EF=a\cos A$, $FD=b\cos B$, $DE=c\cos C$ デアル.

6. 外接圓及ビ內接圓ノ直徑ノ和ハ $a\cot A+b\cot B+c\cot C$ ニ等シイ.

7. 第19節ノ公式ヲ三角函數ヲ用キテ證明セヨ.

8. 一地點Aニ於テ東南東ノ方向ニ一ツノ飛行機ヲ見,ソノ仰角ヲ測ツテ45°ヲ得タ. 然ルニコレト同時刻ニ,Aカラ北東ニアル一地點Bデハコノ飛行機ヲ正南ノ方向ニ見,又BカラB800m南ニアル一地點Cデハ垂直ニ頭上ニ見タ.コノ機ノ高サハ何米カ.

9. 甲乙二ツノ塔ガアツテ,ソノ高サ甲ハ18m,乙ハ 8m デアル. 而シテ各塔ノ基底ニ於テ互ニ他ノ塔ノ仰角ヲ測ツテ見ルト,甲塔ノ仰角ハ乙塔ノ仰角ノ二倍デアル. 二ツノ塔ノ間ノ距離如何.

10. 湖水ヲ隔テテA及ビBナル二ツノ山ガアツテ,Aノ高サ

ハ湖水面上 hm デアル. 今 A ノ頂カラ B ノ頂ノ仰角ヲ測レバ α デ,又湖水面ニ映ズル B ノ頂ノ像ノ俯角ヲ測レバ β デアル. B 山ノ湖水面上カラノ高サ何米カ.

11. 高サ h ナル望樓カラ東ノ方ニ一ツノ船ヲ見,ソノ俯角 α デアツタガ,一時間ノ後ソノ船ハ南ニ見エ俯角ハ β トナツタ. モシコノ船ガ一直線ニ航行シタモノトスレバ,ソノ速度如何.

12. 高サ h ナル山上カラ西ニ方ツテ一ツノ船ヲ見テ俯角 θ ヲ得タ. ソノ後或ル時間ヲ經テ再ビコレヲ望メバ南30°西ニ方リ俯角ハ φ デアツタ. コノ船ノ前後兩位置ノ距離如何.

第四 直線及ビ平面

1. 一定點ヲ過ギリ與ヘラレタ平面ニ平行デ,且一ツノ定直線ニ交ハル直線ヲ引ケ.

2. 一平面ヲ P トシ, AB, CD ヲ互ニ平行デナク,且 P ニモ平行デナイ空間ノ定直線トスル. 今二平面ヲ作リ,ソノ一ツハ AB ヲ含ミ,他ノ一ツハ CD ヲ含ミ,且ソノ交ハリノ直線ガ P ニ含マレルヤウニセヨ.

3. 平面外ノ一定點カラソノ平面ニ至ル定長ノ斜線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ.

4. 相交ハル二ツノ平面ノ一方ノ上ニアル直線ト,ソレガ他ノ平面上ニ投ズル正射影トノナス鋭角ハ最初ノ直線ガ二ツノ平面ノ交ハリニ垂直ナルトキニ最大デアル.

5. 三角形 ABC ノ垂心 O カラソノ平面ニ垂線 OP ヲ引ケバ,直線 PA ハ A ヲ過ギリ BC ニ平行ナル直線ニ垂直デアル.

6. 二平面 P, Q ノ交線ヲ AB トシ, P 上ニアル $\angle$XOY ノ二等分線 OZ ガ AB ニ垂直ナルトキハ, Q 上ニ投ズル $\angle$XOY ノ正射影ハ OZ ノ正射影ニヨツテ二等分セラレル.

7. 直交スル二直線ノ一ツガ一平面ニ平行ナラバソノ二直線ガソノ平面上ニ投ズル正射影ハ直交スル二直線デアル. 但シ二直線ノ中ノ他ノ一ツハソノ平面ニ垂直デナイモノトスル.

8. 與ヘラレタ一平面ニ交ハル一ツノ斜線ガアル. ソノ足ヲ過ギツテソノ斜線ニ垂直ナル直線ヲソノ平面上ニ引ケ.

9. 同一ノ點ニ於テ出會ヒ同一ノ平面上ニナイ三ツノ直線ガアル. ソノ交點ヲ過ギリ三ツノ直線ト相等シイ角ヲナス直線ヲ引ケ.

10. 一平面上ニ於テ,コノ平面外ノ有限直線ニ對シテ常ニ直角ヲ張ル如キ點ノ軌跡ヲ求ム.

11. 二ツノ相交ハル平面ノ各ニ投ズル正射影ガ共ニ直線ナル如キ線ハ,或ル一ツノ場合ヲ除ク他ハ常ニ直線デアル. 又ソノ例外ナル場合如何.

12. 與ヘラレタ一直線上ニ一點ヲ求メ,二ツノ與ヘラレタ點カラ等距離ナラシメヨ.

13. 二ツノ相交ハル直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

14. 二ツノ相交ハル平面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

15. 三面角ノ三ツノ面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

16. 與ヘラレタ平面上ニ於テ,ソノ平面外ノ二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

17. 二ツノ定平面カラ等距離ニアツテ,且二ツノ定點カラモ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

18. 二定點カラノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求

ム.

19. 一定點Pカラ一ツノ平面ニ平行ナル直線ヲ引イテ他ノ一平面ト交ハラシメ,ソノ交點トPトノ距離ヲ與ヘラレタ長サニ等シカラシメヨ.

20. 一平面外ノ一定點カラ,コノ平面上ニ於テ一定點ヲ通過スル直線ニ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム.

第五 多面體

1. 正四面體ノ高サハソノ足カラ一ツノ面ニ引イタ垂線ノ三倍ニ等シイ.
2. 平行六面體ノ對角線ノ交點ヲ共通ノ頂點トシ,各面ヲ夫夫底トスル六ツノ角錐ノ體積ハ相等シイ.
3. 三角錐ノ相對スル一雙ノ稜ニ平行ナル平面ニヨツテノ截リロハ平行四邊形デアル.
4. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ通過スル三ツノ直線ハ一點ニ於テ相交ハル.
5. 四面體 ABCD ノ三ツノ平面角 ABC, CBD, CDA ガ皆直角ナルトキハ,平面角 ADB モ亦直角デアル.
6. 角錐ノ側面積ハ底ノ面積ヨリ大デアル.
7. 等高ナル二ツノ角錐ヲ,頂點カラ等距離デソノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキハ,ソノ截リロノ面積ハ,兩底面ノ面積ニ比例スル.
8. 正四面體ノ相對スル二稜ハ互ニ垂直デアル.
9. 正四面體ノ一稜ガ 1m ナルトキ,ソノ高サヲ求メヨ.
10. 四面體ノ內ニ一點ヲ取リ,コレヲ頂點トシ各面ヲ底面トスル四ツノ四面體ノ體積ヲ相等シカラシメヨウトスル.ソノ點ノ位置ヲ求ム.

11. 四面體ノ六ツノ稜ノ上ノ正方形ノ和ハ,相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ノ上ノ正方形ノ和ノ四倍ニ等シイ.
12. 一邊ノ長サ 1m ノ正八角形ヲ底トシ,各側稜ト高サトガ互ニ 30°ノ角ヲナス角錐ノ體積ヲ計算セヨ.
13. 一稜ノ長サ a ナル正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ距離ヲ求ム.

第六 曲面體

1. 球ノ面積ハコレニ外接スル直圓壔ノ曲面積ニ等シイ.
2. 球ノ面積ハコレニ外接スル直圓壔ノ全面積ノ三分ノ二ニ等シイ.
3. 半徑 r ノ球ニ內接スル正四面體ノ稜ノ長サヲ計算セヨ.
4. 矩形ノ二ツノ相隣ル邊ノ長サヲ a, b トシ,ソノ各ノ邊ヲ軸トシテコノ矩形ヲ一周廻轉スルトキ生ズル二ツノ直圓壔ノ體積ヲ求メヨ. 又ソノ體積ノ比ヲ求メヨ.
5. 底ノ周 8.8cm デ高サ 2.7cm ナル直圓錐ノ體積ヲ求ム,但シ圓周率ヲ $\frac{22}{7}$ トシテ計算セヨ.
6. 定長ノ線分ノ兩端ガ一ツノ球面上ニアルトキハ,球ノ中心カラソノ線分ニ至ル距離ハ一定デアル.
7. 半圓周ヲ三等分シソノ直徑ノ周リニコレヲ廻轉セシメレバ,ソノ中央ノ弧ニヨツテ生ズル球帶ノ面積ハ他ノ二ツノ弧ニヨツテ生ズルモノノ和ニ等シイ.
8. 半徑 60cm, 斜高 1m ノ直圓錐ノ體積ヲ求メヨ.
9. 定直線ヲ過ギリ定球ニ切スル平面ヲ作レ.
10. 或ル直圓壔ノ高サハ 1m デ,ソノ全面積ハ半徑 2m ナル圓ニ等シイ. コノ圓壔ノ體積ヲ求メヨ.
11. 定直線ヲ過ギリ定球ヲ截ル平面ヲ作リ,ソノ截リロノ半

徑ヲ定長ナラシメヨ.

12. 直圓壔ノ側面體ガ 169.56 平方米デ,ソノ直徑ト高サトノ比ガ 3:2 デアルトキ,コノ體積ハ幾立方米カ.

13. 一ツノ球面ト,ソレト交ハラナイ一直線トノ上ニ夫々一點ヲ求メ,ソノ二點間ノ距離ヲ最短ナラシメヨ.

14. 定平面ニ切シ,且二定點ヲ過ギル球面ノ中心ヲ求メヨ,但シコノ球ノ半徑ハ既知トスル.

15. 一定直線ヲ含ム平面デ定球ヲ截ルトキ,ソノ截リ口ナル圓ノ中心ノ軌跡如何.

16. 球ノ直徑 AB ニ垂直ナル平面ヲ P トスルトキ, A カラ引イタ任意ノ直線ガ球面及ビ平面 P ト交ハル點ヲ夫々 C, D トスレバ, AC.AD ハ一定デアル.

17. 與ヘラレタ球面上ノ一定點 O ヲ過ギル任意ノ直線ヲ引キ球面ト再ビ A ニ於テ出會ハセ,コノ直線上ニ一點 A′ ヲ取リ積 OA.OA′ ヲ一定ナラシメルトキ,點 A′ ノ軌跡ヲ求ム.

18. 球ニ外接スル直圓錐ノ高サガ球ノ直徑ノ二倍デアルトキ,コノ直圓錐ノ體積及ビ全面積ノ夫々球ノ體積及ビ表面積ニ對スル比ヲ求メヨ.

19. 中心 O ナル球面上ノ球面三角形 ABC ニ於テ邊 AB ノ平面ニ垂直ナル直徑ノ頂點 C ノ側ノ端ヲ C′, 又邊 AC ノ平面ニ垂直ナル直徑ノ頂點 B ノ側ノ端ヲ B′ トスレバ, $\angle$A ト $\angle$B′OC′ トハ互ニ補角デアル.

20. 前問ヲ用ヰテ $\angle A+\angle B+\angle C>2$ 直角ナルコトヲ示セ.

第七雜題

1. ABC ハ C ヲ直角トスル二等邊三角形デ, BC ノ中點ヲ D トスレバ, cot BAD=3.

2. 矩形ノ相隣ル二邊ヲ $m, n\ (m>n)$ トシ,ソノ對角線ノ夾ム角ヲ θ トスレバ, $\tan\theta=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$.

3. 半徑 a 及ビ $b\ (a>b)$ ナル二ツノ圓ガ互ニ外切スルトキ,一雙ノ外公切線ノナス角ヲ θ トスレバ,

$$\sin\theta=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

4. $\triangle$ABC ノ邊 BC 上ニ一點 D ヲ取リ, BD : DC $=m:n$ トスレバ,

$(m+n)\cot \mathrm{ADC}=n\cot \mathrm{B}-m\cot \mathrm{C}$.

5. $\triangle$ABC ノ原素間ニ次ノ各關係ガアル.

(1) $a\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})+b\sin(\mathrm{C}-\mathrm{A})+c\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0$

(2) $\dfrac{a^2\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\sin \mathrm{A}}+\dfrac{b^2\sin(\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\sin \mathrm{B}}+\dfrac{c^2\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sin \mathrm{C}}=0$

(3) $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\cot \mathrm{A}}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{\cot \mathrm{B}}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{\cot \mathrm{C}}$

(4) $a\cos \mathrm{A}+b\cos \mathrm{B}+c\cos \mathrm{C}=2a\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}$

6. 次ノ各三角形ノ面積ヲ計算セヨ.

(1) $a=13$ cm, $b=14$cm, $c=15$ cm

(2) $a=12$m, B$=45°$, C$=60°$

7. 或ル人 112m ノ繩ヲ 50m, 41m, 21m ノ三部ニ分ケテ地上ニ三角形ヲ作ラウトシタガ,誤ツテソノ一部ヲ 51m トシタ. 然ラバ豫定ト同面積ノ三角形ヲ作ルニハ,殘リノ二部ヲ何米ヅツニスベキカ.

8. $\dfrac{\tan \mathrm{A}}{\tan \mathrm{B}}=\dfrac{\sin^2 \mathrm{A}}{\sin^2 \mathrm{B}}$ ナル關係ヲモツ $\triangle$ABC ハ直角三角形カ,或ハ二等邊三角形デアル.

9. 一ツノ圓ニ外接スル正 n 邊形及ビ正 $2n$ 邊形ノ面積ノ比ガ 3:2 ナルトキ, n ヲ求メヨ.

10. 一ツノ圓ニ內接スル正 $2n$ 邊形ノ面積ハ,同ジ圓ニ內接及ビ外接スル二ツノ正 n 邊形ノ面積ノ比例中項デアル.

11. 一ツノ圓ニ內接及ビ外接スル二ツノ正 n 邊形ノ面積ノ比ガ 3:4 ナルトキ, n ヲ求メヨ.

12. 鋭角三角形 ABC ノ外心ヲ O トシ, AO ノ延長ガ BC ト交ハル點ヲ D トスレバ, $\mathrm{DO.cos(B-C)=AO.cos\ A}$.

13. $\sin^4 A-\cos^4 A$ 及ビ $\sin^6 A+\cos^6 A$ ノ取リ得ベキ最大値及ビ最小値ヲ求メヨ.

14. 一定點カラ同一ノ直線ヲ過ギルスベテノ平面ニ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ.

15. 二ツノ與ヘラレタ平面カラノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

16. 一ツノ圓ガアルトキ,ソノ平面外ノ與ヘラレタ一點カラコノ圓周ニ至ル最大及ビ最小ナル線分ヲ引ケ.

17. AB ヲ圓ノ直徑トシ,一端 A ニ於テソノ圓ノ平面ニ垂線ヲ引キ,ソノ上ノ一點ヲ P トシ,圓周上ノ一點ヲ Q トスレバ,平面 PAQ, PBQ ハ互ニ垂直デアル.

18. 與ヘラレタ二直線ニ交ハリ,且與ヘラレタ一平面ニ垂直ナル直線ヲ作レ.

19. 矩形ノ紙 ABCD ガアッテ, AB ハ 4cm, BC ハ 3cm デアル. 今コレヲ對角線 AC ニ沿ウテ折リ平面 ABC ト CDA トヲ互ニ垂直ナラシメルトキ, B ト D トノ間ノ距離如何.

20. 二平面 M, N 及ビ點 A ガ與ヘラレタトキ, A ヲ過ギリ N ニ平行デ M ト與ヘラレタ角ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引ケ.

21. 直圓錐ノ頂點 S ヲ過ギリ截面 SAB ヲ作リ, ∠ASB ヲ與ヘラレタ角 α ニ等シカラシメヨ.

22. 球トソレニ內接スル立方體トノ體積ノ比ハ $\sqrt{3}\pi:2$ デアル.

23. 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面デ截リ,ソノ曲面積ヲ二等分セヨ.

答

第 二 篇

第 一 章

雜例題(80 頁) **1.** $\sin 585^\circ=-\frac{1}{\sqrt{\ }}$, $\cos 690^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sec(-930^\circ)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.

角	sin	cos	tan
238°	−0.8480	−0.5299	1.6003
−1072°	0.1392	0.9903	0.1405

4. $\sin(A-90^\circ)=-\cos A$, $\cos(A-90^\circ)=\sin A$,

$\tan(A-90^\circ)=-\cot A$.

5. (1) 0. (2) 0. **6.** 150° 又ハ 210°.

7. $\pm\frac{m^2-n^2}{2mn}$.

雜題II.(89 頁) **1.** $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ **2.** 0.

3.

α ノ象限	β ノ象限	値
I	I	$\frac{980}{2501}$
I	II	$\frac{100}{2501}$
IV	I	$-\frac{100}{2501}$
IV	II	$-\frac{980}{2501}$

4. $\sin A=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos A=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan A=\frac{2t}{1-t^2}$

9. $\theta=45^\circ(2n+1)$ 又ハ $22^\circ.5(2n+1)$.

第 三 篇

第 二 章

例 題(108 頁) **3.** (1) 0°, 90°, 270°, 221°24′.5, 138°35′.5.

(2) 45°, 225°, 26°34′.1, 206°34′.1.

(3) 270°, 46°23′.3.

4. $x=0.4428$. $y=26°11'.9$.

第 三 章

例 題(113 頁) **1.** (1) C=67°28′, $b=79.09$, $c=77.10$.

(2) B=78°11.5, C=25°18′.5, $a=86.44$.

(3) A=77°8′.4, B=39°26′.0, C=63°25′.8.

2. 90°.

3. 直角三角形ノトキハ $a=100\sqrt{3}$, 二等邊三角形ノトキハ $a=50\sqrt{3}$.

4. A=30°. B=90°, C=60°.

雜題III.(114 頁) **6.** $2:2\sqrt{2}:\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

8. $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{a^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)}$ 等, 155.6 平方粴.

第 四 篇

第 五 章

例 題(153 頁) **1.** 17 浬. **2.** 1095m (强).

雜題IV.(153 頁) **17.** $h\cot\beta\tan\alpha$. **18.** 309m (强). **19.** 30m (强).

20. 高サ 24.5m (弱), 距離 52m (弱). **21.** 73.48m.

22. 17.3m. **23.** 北 30° 東, 2時 34.5 分間.

第 五 篇

雜題V.(175 頁) **3.** $4\sqrt{10}$. **4.** 體積 128, 全斜面 $32\sqrt{15}$, **5.** $6\sqrt{6}$.

第 六 篇

第 二 章

例 題(188 頁) **4.** $1\frac{1}{9}$ 平方米.

雜題VI.(189 頁) **3.** $\dfrac{128\pi r^3}{375}$ 立方粴. **4.** 5.

5. 斜高 10, 體積 312π, 全表面積 210π.

8. $\dfrac{1}{3}\pi r^2$. **9.** $4\frac{8}{13}$

附 錄

[I] **1.** 18°, 210°, 144°. **2.** $\dfrac{4\pi}{15}$, $\dfrac{11\pi}{18}$, $\dfrac{791\pi}{360}$.

3. $\dfrac{c}{2R}$ らぢあん.

[III] $\begin{cases} A=74°50' \\ C=65°10' \\ a=12.76 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} A=25°10' \\ C=114°50' \\ a=5.62 \end{cases}$

[IV] **1.** A=30° 又ハ 150° トシテ諸角ヲ表ハセズ,

A \ n	−2	−1	0	1	2	3	4	5
30°	−330°	−210°	30°	150°	390°	510°	750°	870°
150°	−210°	−330°	150°	30°	510°	390°	870°	750°

2. (1) $x=\dfrac{2n\pi}{5}$ 又ハ $x=\dfrac{(2n+1)\pi}{3}$. (2) $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

(3) $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ 又ハ $x=\dfrac{1}{4}\left\{n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

(4) $\theta=2n\pi$ 又ハ $\theta=\dfrac{(2n+1)\pi}{5}$.

3. (1) $\begin{cases} x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6} \\ y=m\pi+\dfrac{\pi}{6}-(-1)^n\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=120°+n.90° \\ y=30°-n.90° \end{cases}$

[V] **1.** 150 呎以上. **2.** 每時 9.796 哩.

補 充 問 題

第二　一般ノ角ノ三角函數

1. $-\frac{56}{33}$.　　2. $90°$.　　3. $45°+n.180°$.

6. (1)　0.　　(2)　$\frac{\sqrt{5}-1}{8}$.　　7. $\frac{56}{65}$.

13. (1)　$a^2=b^2$.　　(2)　$m^2n^2(m^2+n^2+3)=1$.

　(3)　$a^2(a^2-2)+b^2=0$.

15. $(n-m)\tan a=mn$.

第三　三角形ノ解法

1. $120°$.　　8. 612.24m.　　9. 24m.

10. $\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}h$ m.

11. 毎時 $h\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta}$ ノ行程デ南 θ 西ニ進ム,

　但シ $\tan\theta=\frac{\cot\alpha}{\cot\beta}$.

12. $h\sqrt{\cot^2\theta+\cot^2\varphi-\cot\theta.\cot\varphi}$.

第七　雜 題

6. (1)　84平方糎.　　(2)　45.646平方米.

7. 26m,　35m.　　9. $n=3$.　　11. $n=6$.

13. 第一式ノ最大値ハ1, 最小値ハ -1.

　第二式ノ最大値ハ1, 最小値ハ $\frac{1}{4}$.

附 表

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分	度
0	0	$-\infty$		$-\infty$		∞		0.0000	0	**90**
	10	$\bar{3}.4637$		$\bar{3}.4637$		2.5363	0	0.0000	50	
	20	$\bar{3}.7648$	3011	$\bar{3}.7648$	3011	2.2352	0	0.0000	40	
	30	$\bar{3}.9408$	1760	$\bar{3}.9409$	1761	2.0591	0	0.0000	30	
	40	$\bar{2}.0658$	1250	$\bar{2}.0658$	1249	1.9342	0	0.0000	20	
	50	$\bar{2}.1627$	969	$\bar{2}.1627$	969	1.8373	0	0.0000	10	
1	0	$\bar{2}.2419$	792	$\bar{2}.2419$	792	1.7581	1	$\bar{1}.9999$	0	**89**
	10	3088	669	3089	670	6911	0	9999	50	
	20	3668	580	3669	580	6331	0	9999	40	
	30	4179	511	4181	512	5819	0	9999	30	
	40	4637	458	4638	457	5362	1	9998	20	
	50	5050	413	5053	415	4947	0	9998	10	
2	0	$\bar{2}.5428$	378	$\bar{2}.5431$	378	1.4569	1	$\bar{1}.9997$	0	**88**
	10	5776	348	5779	348	4221	0	9997	50	
	20	6097	321	6101	322	3899	1	9996	40	
	30	6397	300	6401	300	3599	0	9996	30	
	40	6677	280	6682	281	3318	1	9995	20	
	50	6940	263	6945	263	3055	0	9995	10	
3	0	$\bar{2}.7188$	248	$\bar{2}.7194$	249	1.2806	1	$\bar{1}.9994$	0	**87**
	10	7423	235	7429	235	2571	1	9993	50	
	20	7645	222	7652	223	2348	0	9993	40	
	30	7857	212	7865	213	2135	1	9992	30	
	40	8059	202	8067	202	1933	1	9991	20	
	50	8251	192	8261	194	1739	1	9990	10	
4	0	$\bar{2}.8436$	185	$\bar{2}.8446$	185	1.1554	1	$\bar{1}.9989$	0	**86**
	10	8613	177	8624	178	1376	0	9989	50	
	20	8783	170	8795	171	1205	1	9988	40	
	30	8946	163	8960	165	1040	1	9987	30	
	40	9104	158	9118	158	0882	1	9986	20	
	50	9256	152	9272	154	0728	1	9985	10	
5	0	$\bar{2}.9403$	147	$\bar{2}.9420$	148	1.0580	2	$\bar{1}.9983$	0	**85**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分	度
5	0	$\bar{2}.9403$		$\bar{2}.9420$		1.0580		$\bar{1}.9983$	0	**85**
	10	$\bar{2}.9545$	142	$\bar{2}.9563$	143	1.0437	1	9982	50	
	20	$\bar{2}.9682$	137	$\bar{2}.9701$	138	1.0299	1	9981	40	
	30	$\bar{2}.9816$	134	$\bar{2}.9836$	135	1.0164	1	9980	30	
	40	$\bar{2}.9945$	129	$\bar{2}.9966$	130	1.0034	1	9979	20	
	50	$\bar{1}.0070$	125	$\bar{1}.0093$	127	0.9907	2	9977	10	
6	0	$\bar{1}.0192$	122	$\bar{1}.0216$	123	0.9784	1	$\bar{1}.9976$	0	**84**
	10	0311	119	0336	120	9664	1	9975	50	
	20	0426	115	0453	117	9547	2	9973	40	
	30	0539	113	0567	114	9433	1	9972	30	
	40	0648	109	0678	111	9322	1	9971	20	
	50	0755	107	0786	108	9214	2	9969	10	
7	0	$\bar{1}.0859$	104	$\bar{1}.0891$	105	0.9109	1	$\bar{1}.9968$	0	**83**
	10	0961	102	0995	104	9005	2	9966	50	
	20	1060	99	1096	101	8904	2	9964	40	
	30	1157	97	1194	98	8806	1	9963	30	
	40	1252	95	1291	97	8709	2	9961	20	
	50	1345	93	1385	94	8615	2	9959	10	
8	0	$\bar{1}.1436$	91	$\bar{1}.1478$	93	0.8522	1	$\bar{1}.9958$	0	**82**
	10	1525	89	1569	91	8431	2	9956	50	
	20	1612	87	1658	89	8342	2	9954	40	
	30	1697	85	1745	87	8255	2	9952	30	
	40	1781	84	1831	86	8169	2	9950	20	
	50	1863	82	1915	84	8085	2	9948	10	
9	0	$\bar{1}.1943$	80	$\bar{1}.1997$	82	0.8003	2	$\bar{1}.9946$	0	**81**
	10	2022	79	2078	81	7922	2	9944	50	
	20	2100	78	2158	80	7842	2	9942	40	
	30	2176	76	2236	78	7764	2	9940	30	
	40	2251	75	2313	77	7687	2	9938	20	
	50	2324	73	2389	76	7611	2	9936	10	
10	0	$\bar{1}.2397$	73	$\bar{1}.2463$	74	0.7537	2	$\bar{1}.9934$	0	**80**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
10	0	Ī. 2397	71	Ī. 2463	73	0. 7537	3	Ī. 9934	0	**80**
	10	2468	70	2536	73	7464	2	9931	50	
	20	2538	68	2609	71	7391	2	9929	40	
	30	2606	68	2680	70	7320	3	9927	30	
	40	2674	66	2750	69	7250	2	9924	20	
	50	2740	66	2819	68	7181	3	9922	10	
11	0	Ī. 2806	64	Ī. 2887	66	0. 7113	2	Ī. 9919	0	**79**
	10	2870	64	2953	67	7047	3	9917	50	
	20	2934	63	3020	65	6980	2	9914	40	
	30	2997	61	3085	64	6915	3	9912	30	
	40	3058	61	3149	63	6851	2	9909	20	
	50	3119	60	3212	63	6788	3	9907	10	
12	0	Ī. 3179	59	Ī. 3275	61	0. 6725	3	Ī. 9904	0	**78**
	10	3238	58	3336	61	6664	2	9901	50	
	20	3296	57	3397	61	6603	3	9899	40	
	30	3353	57	3458	59	6542	3	9896	30	
	40	3410	56	3517	59	6483	3	9893	20	
	50	3466	55	3576	58	6424	3	9890	10	
13	0	Ī. 3521	54	Ī. 3634	57	0. 6366	3	Ī. 9887	0	**77**
	10	3575	54	3691	57	6309	3	9884	50	
	20	3629	53	3748	56	6252	3	9881	40	
	30	3682	52	3804	55	6196	3	9878	30	
	40	3734	52	3859	55	6141	3	9875	20	
	50	3786	51	3914	54	6086	3	9872	10	
14	0	Ī. 3837	50	Ī. 3968	53	0. 6032	3	Ī. 9869	0	**76**
	10	3887	50	4021	53	5979	3	9866	50	
	20	3937	49	4074	53	5926	4	9863	40	
	30	3986	49	4127	51	5873	3	9859	30	
	40	4035	48	4178	52	5822	3	9856	20	
	50	4083	47	4230	51	5770	4	9853	10	
15	0	Ī. 4130		Ī. 4281		0. 5719		Ī. 9849	0	**75**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
15	0	Ī. 4130	47	Ī. 4281	50	0. 5719	3	Ī. 9849	0	**75**
	10	4177	46	4331	50	5669	3	9846	50	
	20	4223	46	4381	49	5619	4	9843	40	
	30	4269	45	4430	49	5570	3	9839	30	
	40	4314	45	4479	48	5521	4	9836	20	
	50	4359	44	4527	48	5473	4	9832	10	
16	0	Ī. 4403	44	Ī. 4575	47	0. 5425	3	Ī. 9828	0	**74**
	10	4447	44	4622	47	5378	4	9825	50	
	20	4491	42	4669	47	5331	4	9821	40	
	30	4533	43	4716	46	5284	3	9817	30	
	40	4576	42	4762	46	5238	4	9814	20	
	50	4618	41	4808	45	5192	4	9810	10	
17	0	Ī. 4659	41	Ī. 4853	45	0. 5147	4	Ī. 9806	0	**73**
	10	4700	41	4898	45	5102	4	9802	50	
	20	4741	40	4943	44	5057	4	9798	40	
	30	4781	40	4987	44	5013	4	9794	30	
	40	4821	40	5031	44	4969	4	9790	20	
	50	4861	39	5075	43	4925	4	9786	10	
18	0	Ī. 4900	39	Ī. 5118	43	0. 4882	4	Ī. 9782	0	**72**
	10	4939	38	5161	42	4839	4	9778	50	
	20	4977	38	5203	42	4797	4	9774	40	
	30	5015	37	5245	42	4755	5	9770	30	
	40	5052	38	5287	42	4713	4	9765	20	
	50	5090	36	5329	41	4671	4	9761	10	
19	0	Ī. 5126	37	Ī. 5370	41	0. 4630	5	Ī. 9757	0	**71**
	10	5163	36	5411	40	4589	4	9752	50	
	20	5199	36	5451	40	4549	5	9748	40	
	30	5235	35	5491	40	4509	4	9743	30	
	40	5270	36	5531	40	4469	5	9739	20	
	50	5306	35	5571	40	4429	4	9734	10	
20	0	Ī. 5341		Ī. 5611		0. 4389		Ī. 9730	0	**70**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
20	0	Ī. 5341	34	Ī. 5611	39	0. 4389	5	Ī. 9730	0	**70**
	10	5375	34	5650	39	4350	4	9725	50	
	20	5409	34	5689	38	4311	5	9721	40	
	30	5443	34	5727	39	4273	5	9716	30	
	40	5477	33	5766	38	4234	5	9711	20	
	50	5510	33	5804	38	4196	4	9706	10	
21	0	Ī. 5543	33	Ī. 5842	37	0. 4158	5	Ī. 9702	0	**69**
	10	5576	33	5879	38	4121	5	9697	50	
	20	5609	32	5917	37	4083	5	9692	40	
	30	5641	32	5954	37	4046	5	9687	30	
	40	5673	31	5991	37	4009	5	9682	20	
	50	5704	32	6028	36	3972	5	9677	10	
22	0	Ī. 5736	31	Ī. 6064	36	0. 3936	5	Ī. 9672	0	**68**
	10	5767	31	6100	36	3900	6	9667	50	
	20	5798	30	6136	36	3864	5	9661	40	
	30	5828	31	6172	36	3828	5	9656	30	
	40	5859	30	6208	35	3792	5	9651	20	
	50	5889	30	6243	36	3757	6	9646	10	
23	0	Ī. 5919	29	Ī. 6279	35	0. 3721	5	Ī. 9640	0	**67**
	10	5948	30	6314	34	3686	6	9635	50	
	20	5978	29	6348	35	3652	5	9629	40	
	30	6007	29	6383	34	3617	6	9624	30	
	40	6036	29	6417	35	3583	5	9618	20	
	50	6065	28	6452	34	3548	6	9613	10	
24	0	Ī. 6093	28	Ī. 6486	34	0. 3514	5	Ī. 9607	0	**66**
	10	6121	28	6520	33	3480	6	9602	50	
	20	6149	28	6553	34	3447	6	9596	40	
	30	6177	28	6587	33	3413	6	5690	30	
	40	6205	27	6620	34	3380	5	9584	20	
	50	6232	27	6654	33	3346	6	9579	10	
25	0	Ī. 6259		Ī. 6687		0. 3313		Ī. 9573	0	**65**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
25	0	Ī. 6259	27	Ī. 6687	33	0. 3313	6	Ī. 9573	0	**65**
	10	6286	27	6720	32	3280	6	9567	50	
	20	6313	27	6752	33	3248	6	9561	40	
	30	6340	26	6785	32	3215	6	9555	30	
	40	6366	26	6817	33	3183	6	9549	20	
	50	6392	26	6850	32	3150	6	9543	10	
26	0	Ī. 6418	26	Ī. 6882	32	0. 3118	7	Ī. 9537	0	**64**
	10	6444	26	6914	32	3086	6	9530	50	
	20	6470	25	6846	31	3054	6	9524	40	
	30	6495	26	6977	32	3023	6	9518	30	
	40	6521	25	7009	31	2991	7	9512	20	
	50	6546	24	7040	32	2960	6	9505	10	
27	0	Ī. 6570	25	Ī. 7072	31	0. 2928	7	Ī. 9499	0	**63**
	10	6595	25	7103	31	2897	6	9492	50	
	20	6620	24	7134	31	2866	7	9486	40	
	30	6644	24	7165	31	2835	6	9479	30	
	40	6668	24	7196	30	2804	7	9473	20	
	50	6692	24	7226	31	2774	7	9466	10	
28	0	Ī. 6716	24	Ī. 7257	30	0. 2743	6	Ī. 9459	0	**62**
	10	6740	23	7287	30	2713	7	9453	50	
	20	6763	24	7317	31	2683	7	9446	40	
	30	6787	23	7348	30	2652	7	9439	30	
	40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20	
	50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10	
29	0	Ī. 6856	22	Ī. 7438	29	0. 2562	7	Ī. 9418	0	**61**
	10	6878	23	7467	30	2533	7	9411	50	
	20	6901	22	7497	29	2503	7	9404	40	
	30	6923	23	7526	30	2474	7	9397	30	
	40	6946	22	7556	29	2444	7	9390	20	
	50	6968	22	7585	29	2415	8	9383	10	
30	0	Ī. 6990		Ī. 7614		0. 2385		Ī. 9375	0	**60**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
30	0	$\bar{1}$.6990	22	$\bar{1}$.7614	30	0.2386	7	$\bar{1}$.9375	0	**60**
	10	7012	21	7644	29	2356	7	9368	50	
	20	7033	22	7673	28	2327	8	9361	40	
	30	7055	21	7701	29	2299	7	9353	30	
	40	7076	21	7730	29	2270	8	9346	20	
	50	7097	21	7759	29	2241	7	9338	10	
31	0	$\bar{1}$.7118	21	$\bar{1}$.7788	28	0.2212	8	$\bar{1}$.9331	0	**59**
	10	7139	21	7816	29	2184	8	9323	50	
	20	7160	21	7845	28	2155	7	9315	40	
	30	7181	20	7873	29	2127	8	9308	30	
	40	7201	21	7902	28	2098	8	9300	20	
	50	7222	20	7930	28	2070	8	9292	10	
32	0	$\bar{1}$.7242	20	$\bar{1}$.7958	28	0.2042	8	$\bar{1}$.9284	0	**58**
	10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50	
	20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40	
	30	7302	20	8042	28	1658	8	9260	30	
	40	7322	20	8070	27	1930	8	9252	20	
	50	7342	19	8097	28	1903	8	9244	10	
33	0	$\bar{1}$.7361	19	$\bar{1}$.8125	28	0.1875	8	$\bar{1}$.9236	0	**57**
	10	7380	20	8153	27	1847	9	9228	50	
	20	7400	19	8180	28	1820	8	9219	40	
	30	7419	19	8208	27	1792	8	9211	30	
	40	7438	19	8235	28	1765	9	9203	20	
	50	7457	19	8263	27	1737	8	9194	10	
34	0	$\bar{1}$.7476	18	$\bar{1}$.8290	27	0.1710	9	$\bar{1}$.9186	0	**56**
	10	7494	19	8317	27	1683	8	9177	50	
	20	7513	18	8344	27	1656	9	9169	40	
	30	7531	19	8371	27	1629	9	9160	30	
	40	7550	18	8398	27	1602	9	9151	20	
	50	7568	18	8425	27	1575	8	9142	10	
35	0	$\bar{1}$.7586		$\bar{1}$.8452		0.1548		$\bar{1}$.9134	0	**55**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
35	0	$\bar{1}$.7586	18	$\bar{1}$.8452	27	0.1548	9	$\bar{1}$.9134	0	**55**
	10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50	
	20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40	
	30	7640	17	8533	26	1467	9	9107	30	
	40	7657	18	8559	27	1441	9	9098	20	
	50	7675	17	8586	27	1414	9	9089	10	
36	0	$\bar{1}$.7692	18	$\bar{1}$.8613	26	0.1387	10	$\bar{1}$.9080	0	**54**
	10	7710	17	8639	27	1361	9	9070	50	
	20	7727	17	8666	26	1334	9	9061	40	
	30	7744	17	8692	26	1308	10	9052	30	
	40	7761	17	8718	27	1282	9	9042	20	
	50	7778	17	8745	26	1255	10	9033	10	
37	0	$\bar{1}$.7795	16	$\bar{1}$.8771	26	0.1229	9	$\bar{1}$.9023	0	**53**
	10	7811	17	8797	27	1203	10	9014	50	
	20	7828	16	8824	26	1176	9	9004	40	
	30	7844	17	8850	26	1150	10	8995	30	
	40	7861	16	8876	26	1124	10	8985	20	
	50	7877	16	8902	26	1098	10	8975	10	
38	0	$\bar{1}$.7893	17	$\bar{1}$.8928	26	0.1072	10	$\bar{1}$.8965	0	**52**
	10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50	
	20	7926	15	8980	26	1020	10	8945	40	
	30	7941	16	9006	26	0994	10	8935	30	
	40	7957	16	9032	26	0968	10	8925	20	
	50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10	
39	0	$\bar{1}$.7989	15	$\bar{1}$.9084	26	0.0916	10	$\bar{1}$.8905	0	**51**
	10	8004	16	9110	25	0890	11	8895	50	
	20	8020	15	9135	26	0865	10	8884	40	
	30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30	
	40	8050	16	9187	25	0813	11	8864	20	
	50	8066	15	9212	26	0788	10	8853	10	
40	0	$\bar{1}$.8081		$\bar{1}$.9238		0.0762		$\bar{1}$.8843	0	**50**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
40	0	Ī. 8081	15	Ī. 9238	26	0. 0762	11	Ī. 8843	0	50
	10	8096	15	9264	25	0736	11	8832	50	
	20	8111	14	9289	26	0711	11	8821	40	
	30	8125	15	9315	26	0685	10	8810	30	
	40	8140	15	9341	25	0659	11	8800	20	
	50	8155	14	9366	26	0634	11	8789	10	
41	0	Ī. 8169	15	Ī. 9392	25	0. 0608	11	Ī. 8778	0	49
	10	8184	14	9417	26	0583	11	8767	50	
	20	8198	15	9443	25	0557	11	8756	40	
	30	8213	14	9468	26	0532	12	8745	30	
	40	8227	14	9494	25	0506	11	8733	20	
	50	8241	14	9519	25	0481	11	8722	10	
42	0	Ī. 8255	14	Ī. 9544	26	0. 0456	12	Ī. 8711	0	48
	10	8269	14	9570	25	0430	11	8699	50	
	20	8283	14	9595	26	0405	12	8688	40	
	30	8297	14	9621	25	0379	11	8676	30	
	40	8311	13	9646	25	0354	12	8665	20	
	50	8324	14	9671	26	0329	12	8653	10	
43	0	Ī. 8338	13	Ī. 9697	25	0. 0303	12	Ī. 8641	0	47
	10	8351	14	9722	25	0278	11	8629	50	
	20	8365	13	9747	26	0253	12	8618	40	
	30	8378	13	9773	25	0227	12	8606	30	
	40	8391	14	9798	25	0202	12	8594	20	
	50	8405	13	9823	25	0177	13	8582	10	
44	0	Ī. 8418	13	Ī. 9848	26	0. 0152	12	Ī. 8569	0	46
	10	8431	13	Ī. 9874	25	0126	12	8557	50	
	20	8444	13	Ī. 9899	25	0101	13	8545	40	
	30	8457	12	Ī. 9924	25	0076	12	8532	30	
	40	8469	13	Ī. 9949	26	0051	13	8520	20	
	50	8482	13	Ī. 9975	25	0025	12	8507	10	
45	0	Ī. 8495		0. 0000		0. 0000		Ī. 8495	0	45
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

5	6	7	8	9
43	451	459	466	474
20	528	536	543	551
97	604	612	619	627
72	679	686	694	701
45	752	760	767	774
18	825	832	839	846
89	896	903	910	917
59	966	973	980	987
28	*035	*041	*048	*055
96	102	109	116	122
62	169	176	182	189
28	235	241	248	254
93	299	306	312	319
57	363	370	376	382
20	426	432	439	445
82	488	494	500	506
43	549	555	561	567
03	609	615	621	627
63	669	675	681	686
22	727	733	739	745
79	785	791	797	802
37	842	848	854	859
93	899	904	910	915
49	954	960	965	971
04	*009	*015	*020	*025
58	063	069	074	079
12	117	122	128	133
65	170	175	180	186
17	222	227	232	238
69	274	279	284	289
20	325	330	335	340
70	375	380	385	390
20	425	430	435	440
69	474	479	484	489
18	523	528	533	538
66	571	576	581	586
14	619	624	628	633
61	666	671	675	680
08	713	717	722	727
54	759	763	768	773
00	805	809	814	818
45	850	854	859	863
90	894	899	903	908
34	939	943	948	952
78	983	987	991	996

對　　數　　表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	*004	*009	*015	*020	*025
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

比　　例　　部，

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.

	32	33	34	35	36	37	38	39	41	42
1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.1	4.
2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.2	8.
3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.3	12.
4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.4	16.
5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.5	21.
6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.6	25.
7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.7	29.
8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.8	33.
9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.9	37.

	53	54	55	56	57	58	59	61	62	63
1	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.1	6.2	6.
2	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.2	12.4	12.
3	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.3	18.6	18.
4	21.2	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.4	24.8	25.
5	26.5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.5	31.0	31.
6	31.8	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.6	37.2	37.
7	37.1	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.7	43.4	44.
8	42.4	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.8	49.6	50.
9	47.7	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.9	55.8	56.

	75	76	77	78	79	81	82	84	85	86
1	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.1	8.2	8.4	8.5	8.
2	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.2	16.4	16.8	17.0	17.
3	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.3	24.6	25.2	25.5	25.
4	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.4	32.8	33.6	34.0	34.
5	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.5	41.0	42.0	42.5	43.
6	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.6	49.2	50.4	51.0	51.
7	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.7	57.4	58.8	59.5	60.
8	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.8	65.6	67.2	68.0	68.
9	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.9	73.8	75.6	76.5	77.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	*004	*009	*015	*020	*025
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.1
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.2
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.3
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.4
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.5
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.6
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.7
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.8
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.9

	32	33	34	35	36	37	38	39	41	42	43	44	45	46	47	48	49	51	52
1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.1	5.2
2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	10.2	10.4
3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.3	12.6	12.9	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7	15.3	15.6
4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6	20.4	20.8
5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5	25.5	26.0
6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.6	25.2	25.8	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4	30.6	31.2
7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.7	29.4	30.1	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3	35.7	36.4
8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.8	33.6	34.4	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2	40.8	41.6
9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.9	37.8	38.7	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1	45.9	46.8

	53	54	55	56	57	58	59	61	62	63	64	65	66	67	68	69	71	73	74
1	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.1	7.3	7.4
2	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	14.2	14.6	14.8
3	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	21.3	21.9	22.2
4	21.2	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.4	24.8	25.2	25.6	26.0	26.4	26.8	27.2	27.6	28.4	29.2	29.6
5	26.5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.5	31.0	31.5	32.0	32.5	33.0	33.5	34.0	34.5	35.5	36.5	37.0
6	31.8	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.6	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.2	40.8	41.4	42.6	43.8	44.4
7	37.1	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.7	43.4	44.1	44.8	45.5	46.2	46.9	47.6	48.3	49.7	51.1	51.8
8	42.4	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.8	49.6	50.4	51.2	52.0	52.8	53.6	54.4	55.2	56.8	58.4	59.2
9	47.7	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.9	55.8	56.7	57.6	58.5	59.4	60.3	61.2	62.1	63.9	65.7	66.6

	75	76	77	78	79	81	82	84	85	86	87	89	91	93	94	95	97	98	99
1	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.1	8.2	8.4	8.5	8.6	8.7	8.9	9.1	9.3	9.4	9.5	9.7	9.8	9.9
2	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.2	16.4	16.8	17.0	17.2	17.4	17.8	18.2	18.6	18.8	19.0	19.4	19.6	19.8
3	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.3	24.6	25.2	25.5	25.8	26.1	26.7	27.3	27.9	28.2	28.5	29.1	29.4	29.7
4	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.4	32.8	33.6	34.0	34.4	34.8	35.6	36.4	37.2	37.6	38.0	38.8	39.2	39.6
5	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.5	41.0	42.0	42.5	43.0	43.5	44.5	45.5	46.5	47.0	47.5	48.5	49.0	49.5
6	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.6	49.2	50.4	51.0	51.6	52.2	53.4	54.6	55.8	56.4	57.0	58.2	58.8	59.4
7	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.7	57.4	58.8	59.5	60.2	60.9	62.3	63.7	65.1	65.8	66.5	67.9	68.6	69.3
8	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.8	65.6	67.2	68.0	68.8	69.6	71.2	72.8	74.4	75.2	76.0	77.6	78.4	79.2
9	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.9	73.8	75.6	76.5	77.4	78.3	80.1	81.9	83.7	84.6	85.5	87.3	88.2	89.1

函數 / 度	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0	0.0000	0.0000	1.0000	∞	∞	1.0000	90
1	0.0175	0.0175	1.0002	57.2987	57.2900	0.9998	89
2	0.0349	0.0349	1.0006	28.6537	28.6363	0.9994	88
3	0.0523	0.0524	1.0014	19.1073	19.0811	0.9986	87
4	0.0698	0.0699	1.0024	14.3356	14.3007	0.9976	86
5	0.0872	0.0875	1.0038	11.4737	11.4301	0.9962	85
6	0.1045	0.1051	1.0055	9.5668	9.5144	0.9945	84
7	0.1219	0.1228	1.0075	8.2055	8.1443	0.9925	83
8	0.1392	0.1405	1.0098	7.1853	7.1154	0.9903	82
9	0.1564	0.1584	1.0125	6.3925	6.3138	0.9877	81
10	0.1736	0.1763	1.0154	5.7588	5.6713	0.9848	80
11	0.1908	0.1944	1.0187	5.2408	5.1446	0.9816	79
12	0.2079	0.2126	1.0223	4.8097	4.7046	0.9781	78
13	0.2250	0.2309	1.0263	4.4454	4.3315	0.9744	77
14	0.2419	0,2493	1.0306	4.1336	4.0108	0.9703	76
15	0.2588	0.2679	1.0353	3.8637	3.7321	0.9659	75
16	0.2756	0.2867	1.0403	3.6280	3.4874	0.9613	74
17	0.2924	0.3057	1.0457	3.4203	3.2709	0.9563	73
18	0.3090	0.3249	1.0515	3.2361	3.0777	0.9511	72
19	0.3256	0.3443	1.0575	3.0716	2.9042	0.9455	71
20	0.3420	0.3640	1.0642	2.9238	2.7475	0.9397	70
21	0.3584	0.3839	1.0711	2.7904	2.6051	0.9336	69
22	0.3746	0.4040	1.0785	2.6695	2.4751	0.9272	68
23	0.3907	0.4245	1.0864	2.5593	2.3559	0.9205	67
24	0.4067	0.4452	1.0946	2.4586	2.2460	0.9135	66
25	0.4226	0.4663	1.1034	2.3662	2.1445	0.9063	65
26	0.4384	0.4877	1.1126	2.2812	2.0503	0.8988	64
27	0.4540	0.5095	1.1223	2.2027	1.9626	0.8910	63
28	0.4695	0.5317	1.1326	2.1301	1.8807	0.8829	62
29	0.4848	0.5543	1.1434	2.0627	1.8040	0.8746	61
30	0.5000	0.5774	1.1547	2.0000	1.7321	0.8660	60
31	0.5150	0.6009	1.1666	1.9416	1.6643	0.8572	59
32	0.5299	0.6249	1.1792	1.8871	1.6003	0.8480	58
33	0.5446	0.6494	1.1924	1.8361	1.5399	0.8387	57
34	0.5592	0.6745	1.2062	1.7883	1.4826	0.8290	56
35	0.5736	0.7002	1.2203	1.7434	1.4281	0.8192	55
36	0.5878	0.7265	1.2361	1.7013	1.3764	0.8090	54
37	0.6018	0.7536	1.2521	1.6616	1.3270	0.7986	53
38	0.6157	0.7813	1.2690	1.6243	1.2799	0.7880	52
39	0.6293	0.8098	1.2868	1.5890	1.2349	0.7771	51
40	0.6428	0.8391	1,3054	1.5557	1.1918	0.7660	50
41	0.6561	0.8693	1.3250	1.5243	1.1504	0.7547	49
42	0.6691	0.9004	1.3456	1.4945	1.1106	0.7431	48
43	0.6820	0.9325	1.3673	1 4663	1.0724	0.7314	47
44	0.6947	0.9657	1.3902	1.4396	1.0355	0.7193	46
45	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	0.7071	45
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	度 / 函數

in AcosB+cosAsinB.
in AcosB−cosAsinB.
osAcosB−sin AsinB.
osAcosB+sin AsinB.

$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$.
$\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$.

Acos A.
−sin²A
A−1=1−2sin²A.
n A / an²A.

A−4sin³A.
A−3cos A.
A−tan³A / -3tan²A.

+cos A / 2.
−cos A / 2.

n(A−B)=2sin AcosB.
n(A−B)=2cosAsin B.
os(A−B)=2cosAcos B.
os(A−B)=−2sinAsinB.

$=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$
$=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$
$=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$
$=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$

同ジ正弦ヲ有スル角

$n\pi+(-1)^n\alpha.$

同ジ餘弦ヲ有スル角

$2n\pi\pm\alpha.$

同ジ正切ヲ有スル角

$n\pi+\alpha.$

三　角　形

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B. \\ b=c\cos A+a\cos C. \\ c=a\cos B+b\cos A. \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B. \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C. \end{cases}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}. \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}. \\ \dfrac{a}{b-c}=\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}. \end{cases}$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}. \\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}. \\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}. \\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{r}{s-b}. \\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{r}{s-c}. \end{cases}$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}.$$

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\frac{S}{s}$$

$$r_1=\frac{S}{s-a}. \qquad r_2=\frac{S}{s-b}. \qquad r_3=\frac{S}{s-c}.$$

公式一覽表

三角函數

$$\left.\begin{array}{l}\sin A=垂線\div斜邊.\\ \cos A=底邊\div斜邊.\\ \tan A=垂線\div底邊.\end{array}\right\}$$

	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞

$$\begin{cases}\sin A\times\operatorname{cosec} A=1.\\ \cos A\times\sec A=1.\\ \tan A\times\cot A=1.\end{cases}$$

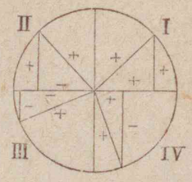
$$\begin{cases}\sin^2A+\cos^2A=1.\\ 1+\tan^2A=\sec^2A.\\ 1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A.\end{cases}$$

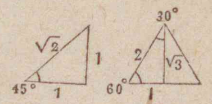
$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.\ \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(-A)=-\sin A.\\ \cos(-A)=\cos A.\\ \tan(-A)=-\tan A.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(90^\circ+A)=\cos A.\\ \cos(90^\circ+A)=-\sin A.\\ \tan(90^\circ+A)=-\cot A.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(180^\circ+A)=-\sin A.\\ \cos(180^\circ+A)=-\cos A.\\ \tan(180^\circ+A)=\tan A.\end{cases}\end{array}\right\}$$

$$\begin{cases}\sin(360^\circ+A)=\sin A.\\ \cos(360^\circ+A)=\cos A.\\ \tan(360^\circ+A)=\tan A.\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(90^\circ-A)=\cos A.\\ \cos(90^\circ-A)=\sin A.\\ \tan(90^\circ-A)=\cot A.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(180^\circ-A)=\sin A.\\ \cos(180^\circ-A)=-\cos A.\\ \tan(180^\circ-A)=-\tan A.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(360^\circ-A)=-\sin A.\\ \cos(360^\circ-A)=\cos A.\\ \tan(360^\circ-A)=-\tan A.\end{cases}\end{array}\right\}$$





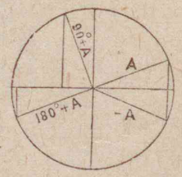
$\sqrt{2}=1.41421$

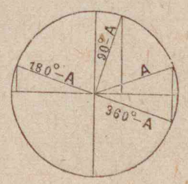
$\sqrt{3}=1.73205$

$\sqrt{5}=2.23607$

$\sqrt{6}=2.44949$

$\pi=3.14159$





$$\left.\begin{array}{l}\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.\\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.\\ \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.\\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.\\ \tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2A=2\sin A\cos A.\\ \cos 2A=\cos^2A-\sin^2A\\ \qquad=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A.\\ \tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2A}.\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A.\\ \cos 3A=4\cos^3A-3\cos A.\\ \tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}.\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.\\ \sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}.\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B.\\ \sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B.\\ \cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B.\\ \cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B.\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}.\\ \sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}.\\ \cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}.\\ \cos C-\cos D=-2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}.\end{array}\right\}$$

α ト同ジ正弦ヲ有スル角

$n\pi+(-1)^n\alpha.$

α ト同ジ餘弦ヲ有スル角

$2n\pi\pm\alpha.$

α ト同ジ正切ヲ有スル角

$n\pi+\alpha.$

三

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin \ldots}$$

$$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B.\\ b=c\cos A+a\cos C.\\ c=a\cos B+b\cos A.\end{cases}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\ldots$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

$$\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ldots\\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\ldots\\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}\ldots\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\ldots\\ \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\ldots\\ \tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\ldots\end{cases}$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-\ldots}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\ldots$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\ldots$$

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)\ldots}{s}}$$

$$r_1=\frac{S}{s-a}.\quad r_2\ldots$$

公式一覽表

三角函數

$$\left.\begin{aligned}\sin A&=垂線\div斜邊.\\ \cos A&=底邊\div斜邊.\\ \tan A&=垂線\div底邊.\end{aligned}\right\}$$

	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞

$$\begin{cases}\sin A\times\mathrm{cosec}\,A=1.\\ \cos A\times\sec A=1.\\ \tan A\times\cot A=1.\end{cases}$$

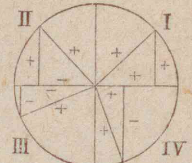
$$\begin{cases}\sin^2A+\cos^2A=1.\\ 1+\tan^2A=\sec^2A.\\ 1+\cot^2A=\mathrm{cosec}^2A.\end{cases}$$

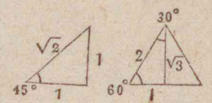
$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.\ \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(-A)=-\sin A.\\ \cos(-A)=\cos A.\\ \tan(-A)=-\tan A.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(90^\circ+A)=\cos A.\\ \cos(90^\circ+A)=-\sin A.\\ \tan(90^\circ+A)=-\cot A.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(180^\circ+A)=-\sin A.\\ \cos(180^\circ+A)=-\cos A.\\ \tan(180^\circ+A)=\tan A.\end{cases}\end{array}\right\}$$

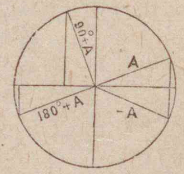
$$\begin{cases}\sin(360^\circ+A)=\sin A.\\ \cos(360^\circ+A)=\cos A.\\ \tan(360^\circ+A)=\tan A.\end{cases}$$

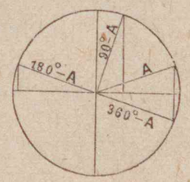
$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(90^\circ-A)=\cos A.\\ \cos(90^\circ-A)=\sin A.\\ \tan(90^\circ-A)=\cot A.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(180^\circ-A)=\sin A.\\ \cos(180^\circ-A)=-\cos A.\\ \tan(180^\circ-A)=-\tan A.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(360^\circ-A)=-\sin A.\\ \cos(360^\circ-A)=\cos A.\\ \tan(360^\circ-A)=-\tan A.\end{cases}\end{array}\right\}$$





$\sqrt{2}=1.41421$
$\sqrt{3}=1.73205$
$\sqrt{5}=2.23607$
$\sqrt{6}=2.44949$
$\pi=3.14159$





$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B.\\ \sin(A-B)&=\sin A\cos B-\cos A\sin B.\\ \cos(A+B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B.\\ \cos(A-B)&=\cos A\cos B+\sin A\sin B.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan(A+B)&=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.\\ \tan(A-B)&=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 2A&=2\sin A\cos A.\\ \cos 2A&=\cos^2A-\sin^2A\\ &=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A.\\ \tan 2A&=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 3A&=3\sin A-4\sin^3A.\\ \cos 3A&=4\cos^3A-3\cos A.\\ \tan 3A&=\frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.\\ \sin\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)+\sin(A-B)&=2\sin A\cos B.\\ \sin(A+B)-\sin(A-B)&=2\cos A\sin B.\\ \cos(A+B)+\cos(A-B)&=2\cos A\cos B.\\ \cos(A+B)-\cos(A-B)&=-2\sin A\sin B.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin C+\sin D&=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.\\ \sin C-\sin D&=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.\\ \cos C+\cos D&=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.\\ \cos C-\cos D&=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.\end{aligned}\right\}$$

> α ト同ジ正弦ヲ有スル角
> $n\pi+(-1)^n\alpha.$
> α ト同ジ餘弦ヲ有スル角
> $2n\pi\pm\alpha.$
> α ト同ジ正切ヲ有スル角
> $n\pi+\alpha.$

三角形

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B.\\ b=c\cos A+a\cos C.\\ c=a\cos B+b\cos A.\end{cases}\qquad\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{cases}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.\qquad\begin{cases}\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.\\[2ex] \dfrac{a}{b-c}=\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.\end{cases}$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

$$\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}.\\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}.\\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}.\\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\dfrac{r}{s-a}.\\ \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\dfrac{r}{s-b}.\\ \tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\dfrac{r}{s-c}.\end{cases}$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}.$$

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\frac{S}{s}$$

$$r_1=\frac{S}{s-a}.\quad r_2=\frac{S}{s-b}.\quad r_3=\frac{S}{s-c}.$$

昭和十四年八月廿三日印刷
昭和十四年八月廿八日發行
昭和十四年十月十日修正再版印刷
昭和十四年十月十五日修正再版發行

不許	中等幾何三角法教科書 〔增課課程〕	複製
	定價金九十五錢	

著作者　竹內端三

東京市神田區神保町一丁目一番地
發行者　株式會社 三省堂
代表者 龜井豐治

東京市蒲田區仲六鄉一丁目五番地
印刷者　株式會社 三省堂蒲田工場
代表者 喜多見昇

發行所
東京市神田區神保町一丁目一番地
株式會社 三省堂
（振替口座東京三一五五五）
大阪市西區阿波座下通二丁目六番地
株式會社 三省堂大阪支店

增課竹內幾三

第四学年

中邑直行

三郎太 春之

中邑