東京帝國大學教授
理學博士
竹內端三著

中等算術代數學教科書

增課課程

東京　三省堂　大阪

昭和十四年十一月一日
文部省檢定濟
中學校數學科用

中等算術代數學教科書

增課課程

東京帝國大學敎授
理學博士
竹內端三著

東京 三省堂 大阪

緒　　言

著者ハ曩ニ中學校ニ於ケル數學科ヲ,算術及ビ代數學ノ方面ト幾何學及ビ三角法ノ方面トニ分ケテ教授スル場合ノ前者ニ對スル基本課程用ノ教科書トシテ,中等算術代數學教科書[基本課程]上卷及ビ下卷ヲ著ハシタノデアツタ.

本書ハ前書ト同樣ノ目的ヲ以テ算術及ビ代數學ニ關スル增課課程用ノ教科書トシテ編纂シタモノデアル.

惟フニ增課課程ニ於テハ既修ノ知識ヲ整理シソノ基礎ヲ鞏固ニシ,更ニソノ進展ヲ圖リ應用ヲ試ミ,以テ演繹的推理力ト函數的考察力トヲ涵養スルト共ニ正確且迅速ナル運算力ノ上達ニ努メルベキデアル.

本書ハ以上ノ趣旨ヲ以テ編纂シタノデアルガ,ソノ組織ニツイテ大要ヲ述ベレバ次ノ如クデアル.

(1)　第一篇ニ於テ先ヅ既修事項ノ補充及ビ總括ヲスルコトトシタ. 稍〻複雜ナル式ノ因數分解,最大公約數ヲ

求メル一般ナル算法,開平法及ビ開立法,特別ナル高次方程式ノ解法等ガソノ主ナル題目デアル.

(2) 第二篇ニ於テ級數,第三篇ニ於テ對數ヲ述ベ,第四篇ニ於テ歩合算ヲ述ベテ結末トシタ. 蓋シ歩合算ニ於ケル積立,年賦償還等ノ諸公式ハ級數ノ應用デ,又ソノ計算ニハ對數ヲ用キルカラ極メテ自然的ナル總括トナルノデアル.

(3) 雜級數,不等式,函數ニツイテハ附錄トシテ各一章ヲ設ケテ詳細ニ述ベ,教授者ノ都合ニヨツテ適宜ナル取扱ヲナシ得ルヤウニシタ.

(4) 問題ハ實力ノ培養ニ資スベキ穩當ナルモノヲ選定シタガ,又重要ナル內容ヲモツモノハ努メテコレヲ採擇スルコトトシタ. 對稱式,交代式,部分分數等ハソノ例デアル. 更ニコレヲ敷衍シ或ハ應用ヲ試ミル等ハ教授者ノ取扱ニ一任スルモノデアル.

終リニ臨ミ著者ハ舊著ノ各教科書ニ對シテ適切懇篤ナル忠言ヲ寄セラレタ大方ノ諸賢ニ厚ク感謝ノ意ヲ表スルト共ニ尙ホ本書ニ對シテモ同樣ニ叱正ヲ賜ハランコトヲ切望スル.

昭和十四年七月

著　者　識

目　次

第一篇　基本課程ノ補充及ビ總括

頁

第一章　因數分解 1
第二章　約數及ビ倍數 14
第三章　開平及ビ開立 24
第四章　方程式 33
雜　題 I. 58

第二篇　級　數

第一章　等差級數 63
第二章　等比級數 70
雜　題 II. 81

第三篇　對　數

第一章　一般ノ指數 86
第二章　對數 92
第三章　常用對數 101
雜　題 III. 116

第四篇　歩合算 120
雜　題 IV. 143

附 錄

第一章 雜級數 …………………………… 1
第二章 不等式 …………………………… 5
第三章 函數 …………………………… 14

補充問題 …………………………… 1—15

答 …………………………… 1— 9

對數表

公式一覽表

中等算術代數學教科書

[增 課 課 程]

第一篇

基本課程ノ補充及ビ總括

第一章 因數分解

1. 必要ナル條件,十分ナル條件

或ルコトガ成立スルタメニ必ズ滿足サレナケレバナラヌ條件ヲ**必要ナル條件**トイフ. 又或ル條件ガ滿足サレレバソノコトガ必ズ成立スルトキハ,ソノ條件ヲ**十分ナル條件**トイフ.

例1. 二ツノ因數 A, B ノ積 A·B ガ 0 トナルタメニハ必ズヤ A=0 ナルカ又ハ B=0 ナルコトヲ要スル,コレ必要ナル條件デアル. 何トナレバモシ A モ B モ 0 デナケレバ積 A·B ハ 0 トナラナイカラデアル.

次ニ,積 A·B ヲ 0 ナラシメルニハ A, B ヲ如何ニスレバ宜イカトイフニ,ソレニハ A=0 ナルカ又ハ B=0 ナラシメレバ宜イ,コレ十分ナル條件デアル. 何トナレバ A, B ノ何レカ一ツガ 0 ナラバ積 A·B ハ必ズ 0 トナルカラデアル.

コレヲマトメテ次ノ如クニイフコトガ出來ル.

二ツノ因數 A, B ノ積ガ 0 トナルタメニ必要デ且十分ナル條件ハ A, B ノ中少クモ何レカ一ツノ因數ガ 0 ナルコトデアル.

例 2. x ニ關スル一次ノ整式 $ax+b$ ガ x ノ値ノ如何ニカカハラズ零トナルタメニ必要ナル條件ヲ考ヘル.

先ヅ $a\neq0$ トスレバ $ax+b$ ハ $x=-\dfrac{b}{a}$ ナルトキニ限リ零トナリ, x ニ他ノ値ヲ代入スルトキハ決シテ零トナラヌ.

故ニ x ノ値ノ如何ニカカハラズ $ax+b$ ガ零トナルタメニハ,先ヅ是非共 $a=0$ ナルコトヲ要スル.

サテ $a=0$ トスレバ原式ハ $0\cdot x+b$ 卽チ單ニ b トナル. 從ツテ $b=0$ ナルトキニ限リ原式ハ零トナル.

結局原式ガ常ニ零ナルタメニハ是非共 $a=0$, $b=0$ ナルコトヲ要スル,コレ卽チ必要ナル條件デアル.

逆ニ $a=0$, $b=0$ ナルトキハ x ノ値ノ如何ニカカハラズ原式ガ零トナルコト明カデアル. 故ニコノ條件ハ又十分ナル條件デアル.

例題

1. A, B ヲ實數トシ, $A^2+B^2=0$ ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求メヨ.

2. 次ノ方程式ニ適スル x, y ノ實數値ヲ求メヨ.

$$(3x+5y-2)^2+(2x-3y-1)^2=0$$

3. $a^2+c^2=2b(a+c-b)$ ナルトキハ, $a=b=c$ デアル. 但シ a, b, c ハ何レモ實數トスル.*

* 以後特ニ斷ラナイ場合ニハ既知數ヲ表ハス文字ハ常ニ實數ヲ表ハスモノトスル.

4. x ニ關スル二ツノ一次式ガ x ノ値ノ如何ニカカハラズ相等シイタメニ必要ニシテ且十分ナル條件如何.

5. K ガ如何ナル値ヲ取ルモ常ニ

$$(aK+b)x-(bK-a)y-1$$

ヲ零ナラシメル x, y ノ値ヲ求メヨ.

2. 特別ノ工夫ニヨル因數分解

例 1. $x^2-12x+32$ ヲ因數ニ分解セヨ.

コレハ視察ニヨツテ容易ニ分解出來ルモノデアルガ,又次ノ如クニモ工夫サレル.

解
$$\begin{aligned}x^2-12x+32&=x^2-12x+36-4\\&=(x-6)^2-2^2\\&=\{(x-6)+2\}\{(x-6)-2\}\\&=(x-4)(x-8).\end{aligned}$$

例 2. $x^4+x^2y^2+y^4$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x^4+x^2y^2+y^4}&=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2\\&=(x^2+y^2)^2-(xy)^2\\&=\boldsymbol{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}.\end{aligned}$$

例 3. $a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解 先ヅ與ヘラレタ式ニ $3a^2b+3ab^2$ ヲ加ヘ,後コレヲ減ズレバ

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}\\
&\quad=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc\\
&\quad=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)\\
&\quad=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)\\
&\quad=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}\\
&\quad=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)\\
&\quad=\boldsymbol{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}.
\end{aligned}$$

例 2 ニ於ケル式ハ x ト y トヲ入レ換ヘテモ變ラヌ式デアル. 一般ニカヤウナ式ヲソノ二ツノ文字ニツイテノ**對稱式**トイフ.

例 3 ノ式ハ a, b, c ヲ如何樣ニ入レ換ヘテモ變ラヌ. コレハソノ三ツノ文字ニツイテノ對稱式デアル.

$\boxed{例}$ **4.** $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ ヲ因數ニ分解セヨ.

$\boxed{解}$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}\\
&\quad=x^2(y-z)+y^2z-xy^2+xz^2-yz^2\\
&\quad=x^2(y-z)+yz(y-z)-x(y^2-z^2)\\
&\quad=(y-z)\{x^2+yz-x(y+z)\}\\
&\quad=(y-z)\{x(x-y)-z(x-y)\}\\
&\quad=(y-z)(x-y)(x-z)\\
&\quad=\boldsymbol{(x-y)(x-z)(y-z)}.
\end{aligned}$$

例 4 ニ於ケル式ハ x, y, z ノ中何レノ二文字ヲ入レ換ヘテモ,原式ト符號ノミヲ異ニスル式ヲ得ル.

一般ニカヤウナ式ヲソレラノ文字ニツイテノ**交代式**トイフ.

$\boxed{注意}$ 上ノ例2,3,4ノ結果ハ何レモ公式トシテ用ヰラレル.

$\boxed{例}$ **5.** $x^3-6x^2+11x-6$ ヲ因數ニ分解セヨ.

$\boxed{解}$ 與ヘラレタ式ニ於テ $x=1$ ト置ケバソノ數値ハ 0 トナル,ヨツテ與ヘラレタ式ハ $x-1$ デ割リ切レネバナラヌ. 何トナレバ,與ヘラレタ式ヲ $x-1$ デ割ツタトキノ整商ヲ Q (x ニツイテノ二次式) トシ,モシ餘リガアレバソレヲ R (x ヲ含マナイ唯ノ數) トスレバ,

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)Q+R$$

ナル恆等式ガ成立スル筈デアル.

故ニ $x=1$ ト置イタトキノ與ヘラレタ式ノ數値ハ R ニ等シイ,ヨツテ R ハ 0 デアル. 從ツテ與ヘラレタ式ハ $x-1$ ナル因數ヲモツ. 故ニ與ヘラレタ式ヲ $x-1$ デ割リ,コレヲ因數ニ分解スレバ次ノ如クニナル.

$$\begin{aligned}
x^3-6x^2+11x-6&=(x-1)(x^2-5x+6)\\
&=(x-1)(x-2)(x-3).
\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ **6.** $x^2+3xy+2y^2+5x+7y+6$ ヲ因數ニ分解セヨ.

$\boxed{解}$ 二次ノ部分ヲ因數ニ分解スレバ,

$$x^2+3xy+2y^2=(x+y)(x+2y).$$

原式ノ常數項ハ $\quad 6=2\times 3.$

ヨツテ試ミニ

$$(x+y+3)(x+2y+2)$$

ナル積ヲ考ヘレバ,二次ノ部分及ビ常數項ハ原式ト一致スル. ケレドモ一次ノ部分ハ

$$3(x+2y)+2(x+y)=5x+8y$$

トナツテ原式ト一致シナイ.

ソコデ更ニ

$$(x+y+2)(x+2y+3)$$

トシテ一次ノ部分ヲ驗スニ,

$$2(x+2y)+3(x+y)=5x+7y$$

トナツテ原式ト一致スル.

故ニ　　原式$=(x+y+2)(x+2y+3)$.

例　　題

1. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

(1) x^3-x^2-5x+6　　(2) $x^3+y^3+3xy-1$

(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(4) $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

(5) $a^3+8b^3+27c^3-18abc$

(6) $2x^3-7x^2+7x-2$

(7) $a(a^2-1)-b(b^2-1)+ab(a-b)$

(8) $a^4+4a^2x^2+16x^4$　　(9) x^3+4x^2+x-6

(10) x^3+x^2-2　　(11) $x^2-xy-x+2y-2$

(12) $x^2+2xy+y^2-x-y-2$

(13) $2x^2-5x-5xy-5y+2y^2-25$

(14) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

(15) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$

2. 次ノ各式ヲ計算セヨ.

(1) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}\times\dfrac{x^3-3x+2}{4x^2-1}$

(2) $\dfrac{x+24}{x^3+x^2-3x-6}+\dfrac{x-15}{x^3+2x^2-3}$

3. $x,\ y,\ z$ ニツイテノ一次ノ同次對稱式及ビ二次ノ同次對稱式ヲ書ケ.

4. 二ツノ對稱式ノ和,差,積ハ矢張リ同ジ文字ニツイテノ對稱式ナルコトヲ例ニツイテ示セ.

5. 二ツノ交代式ノ積及ビ商ハ同ジ文字ニツイテノ對稱式ナルコトヲ例ニツイテ示セ.

3. 剩餘定理

前節ノ例5ニ於ケル論法ヲ用キレバ更ニ一般ナル次ノ定理ヲ得ル.

xニ關スル一ツノ整式Aニ於テ $x=a$ ト置イタトキノソノ式ノ値ハ,A ヲ $x-a$ デ割ツタトキノ剩餘ニ等シイ.

何トナレバ,A ヲ $x-a$ デ割ツタトキノ整商ヲQトシ,

剩餘卽チ餘リヲ R トスレバ

$$A=(x-a)Q+R.$$

コレハ恆等式デ且 R ハ x ヲ含マナイ唯ノ數デアル. 故ニ今ココデ $x=a$ ト置ケバ,右邊ハ單ニ R トナリ,左邊ハ A ニ於テ $x=a$ ト置イタ式トナル. ヨツテ本定理ヲ得ル. コレヲ**剩餘定理**トイフ.

コノ定理ノ特別ノ場合トシテ更ニ次ノ定理ガアル.

x ニ關スル一ツノ整式 A ニ於テ $x=a$ ト置イタトキノソノ式ノ値ガ 0 ナラバ, A ハ $x-a$ デ整除サレル.

前節ノ例 5 ノ解ハ卽チコレヲ應用シタモノデアル. ナホ二三ノ應用ノ例ヲ次ニ示ス.

例 1. 實際ニ割リ算ノ演算ヲ行ハナイデ,二次式 $3x^2+2x-21$ ヲ夫々一次式 $x-2$, $x+3$, $2x+1$ デ割ツタトキノ剩餘ヲ求メヨ.

解　$x=2$ トスレバ原式ハ

$$3\times2^2+2\times2-21=-5.$$

又　$x=-3$ トスレバ原式ハ

$$3\times(-3)^2+2\times(-3)-21=0.$$

次ニ $2x+1$ デ割ツタトキヲ考ヘルニ,商ヲ Q, 剩餘ヲ R トスレバ

$$3x^2+2x-21=(2x+1)\times Q+R.$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\times 2Q+R.$$

故ニ $2x+1$ デ割ツタ剩餘ト $x+\frac{1}{2}$ デ割ツタ剩餘トハ同一ノモノデアル. ヨツテ $x=-\frac{1}{2}$ トスレバ原式ハ

$$3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-21=-21\frac{1}{4}.$$

故ニ原式ヲ $x-2$ デ割レバ -5 餘リ, $x+3$ デ割レバ割リ切レテ餘リガナク, $2x+1$ デ割レバ $-21\frac{1}{4}$ 餘ル.

例 2. x ト y トニツイテノ交代式ハ, $x-y$ ナル因數ヲモツ.

解　今 x ト y トニツイテノ交代式ヲ P トスレバ, P ニ於テ x ト y トヲ入レ換ヘレバ $-P$ トナル. 今特ニ $x=y$ トスレバ,

$$P=-P,\qquad \text{卽チ}\qquad P=0$$

トナル. 故ニ P ハ $x-y$ ナル因數ヲモツ.

コレニヨレバ前節例 4 ハ次ノ如クニ解カレル.

所題式ハ x ト y, y ト z, z ト x トニツキ夫々交代式デアルカラ, $x-y$, $y-z$, $z-x$ ナル因數ヲモツ. 而シテ原式ハ x, y, z ニ關シテ三次ノ同次式デアルカラ,コノ他ニハ唯ノ數ノ因數ガアルノミデアル. コレヲ L トスレバ,

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$
$$=L(x-y)(y-z)(z-x).\qquad(1)$$

兩邊ニ於ケル x^2y ナル項ノ係數ヲ比較シテ,

$$1=-L, \quad 即チ \quad L=-1.$$

故ニ(1)ハ次ノ如クニナル.

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$
$$=-(x-y)(y-z)(z-x)$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z).$$

例 3. x ニツイテノ三次式 ax^3+bx^2+cx+d ガ x ノ値ノ如何ニカカハラズ零ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ $a=b=c=d=0$ ナルコトデアル.

解 所題式ガ x ノ相異ル三ツノ値 α, β, γ ニツイテ零トナルトスレバ,所題式ハ

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \qquad (1)$$

トナル.

更ニ(1)ガ x ノ α, β, γ ト異ル一ツノ値 δ ニヨツテモ零トナルトスレバ,

$$a(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)=0. \qquad (2)$$

然ルニ假設ニヨリ

$$\delta-\alpha\neq0, \quad \delta-\beta\neq0, \quad \delta-\gamma\neq0.$$

故ニ(2)カラ

$$a=0 \qquad (3)$$

ヲ得,所題式ハ

$$bx^2+cx+d \qquad (4)$$

トナル.

(4)ニツイテ又同樣ノ論法ヲ繰リ返セバ,順次ニ

$$b=0, \quad c=0, \quad d=0 \qquad (5)$$

ヲ得ル.

故ニ $a=b=c=d=0$ ナルコトガ必要ナル條件デアル.

逆ニ又コレガ十分ナル條件ナルコトモ明カデアル.

一般ニ x ニ關スル整式ガ x ノ値ノ如何ニカカハラズ零ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ,各項ノ係數及ビ常數項*ガスベテ零ナルコトデアル.

コレカラ直チニ次ノ定理ヲ得ル.

x ニツイテノ二ツノ整式ガ x ノ値ノ如何ニカカハラズ相等シイタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ,同次ノ項ノ係數及ビ常數項ガ夫々相等シイコトデアル.

例 4. $2x^2+ax+b$ ガ $(x+8)(x+6)$ デ整除サレルタメニハ a, b ヲ如何ナル數トスレバ宜イカ.

解 題言ノ如クニナルタメニハ

$$2x^2+ax+b=2(x+8)(x+6)$$

トナラネバナラヌ. コレガタメニ必要ニシテ且十分ナル條件カラ

* x ヲ含マヌ項ヲイフ.

$$a=2\times(8+6)=28,$$

$$b=2\times8\times6=96$$

ヲ得ル.

本例ノ如ク,例3ノ定理ヲ利用シテ,或ル條件ニ適合スルヤウニ未知ノ係數ヲ定メルコトヲ**未定係數ノ法**トイフ.

例題

1. $3x^5+x^3-3x-1$ ハ $x-1$ ナル因數ヲモツカ.
2. x^n+y^n (n ハ正ノ整數) ハ $x+y$ ナル因數ヲモツカ.
3. x^n-y^n (n ハ正ノ整數) ハ $x-y$ デ割リ切レルカ.
4. $(a-b)^3+c^3$ ハ $a-b+c$ デ割リ切レルカ.
5. $x^2-ax+12$ ハ $x-3$ デ割リ切レルトイフ. a ノ値ヲ求メヨ.
6. $4x^2-7x+1-m$ ガ $2x-3$ デ整除サレルタメニハ m ノ數値ヲ如何ニスレバ宜イカ.
7. $3x^3-mx^2+nx-6$ ガ $x-1$ 及ビ $x+2$ デ整除サレルヤウニ m, n ノ値ヲ定メヨ.
8. x ニツイテノ二次式 ax^2+bx+c ヲ $x-1$ デ除スレバ整除サレ, $x-2$ デ除スレバ1ヲ餘シ, $x-3$ デ除スレバ3ヲ餘ストイフ. コノ二次式ノ係數 a, b 及ビ常數項 c ノ値ヲ求メヨ.

9. $1-(5+x)^n$ (n ハ正ノ整數) ハ $4+x$ デ整除サレル.
10. 二ツノ奇數ノ平方ノ差ハ8ノ倍數デアル.
11. 一端カラ始メテ各位ノ數ニ交互ニ「＋」及ビ「－」ヲツケテ連記シタ代數和ガ11ノ倍數ナラバ,モトノ整數ハ11ナル約數ヲモツ.
12. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

　(1) $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$

　(2) $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$

　(3) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

　(4) $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

13. 次ノ恆等式ガ成立ツヤウニ常數 a, b, c, d ノ値ヲ定メヨ.

$$5x^3-11x^2+10x-2$$
$$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$$

14. 次ノ恆等式ガ成立ツヤウニ常數 A, B, C ヲ定メヨ.

$$\frac{2x^2-5x+10}{(x+2)(x^2+x+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+5}$$

注意　カヤウニ一ツノ分數式ヲ若干箇ノ分數式ノ代數和ニ直スコトヲ**部分分數**ニ分解スルトイフ.

15. 次式ヲ部分分數ニ分解セヨ.

$$\frac{2x^3+7x^2-2x-2}{2x^2+x-6}$$

16. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{6}$

(2) $\dfrac{p}{x(x+p)}+\dfrac{q}{(x+p)(x+p+q)}$

$$+\frac{r}{(x+p+q)(x+p+q+r)}=\frac{1}{2(p+q+r)}$$

第二章　約數及ビ倍數

4. 約數及ビ倍數ノ性質

A, B, C 等ヲ以テ整數又ハ整式ヲ表ハストキハ約數及ビ倍數ニ關シテ次ノ性質ガアル.

(1) BガAノ約數ナルトキハ,BハヌAノ倍數ノ約數デアル.

何トナレバ, B ガ A ノ約數ナラバ $A=mB$ ナル關係ガアル,ココニ m ハ一ツノ整數又ハ整式デアル. 然ルニ A ノ倍數ハ常ニ nA ナル形デ表ハサレル,而シテ n ハ一ツノ整數又ハ整式デアル.

故ニ結局　$nA=n(mB)=(nm)B.$

ココニ nm ハ矢張リ一ツノ整數又ハ整式デアル. 故ニ B ハ A ノ倍數ノ約數デアル.

(2) C ガ A 及ビ B ノ公約數ナルトキハ, C ハ A±B ノ約數デアル.

何トナレバ,假定ニヨリ

$$A=mC,\qquad B=nC.$$

ココニ m 及ビ n ハ各一ツノ整數又ハ整式デアル.

故ニ　$A\pm B=mC\pm nC=(m\pm n)C.$

$m\pm n$ ハ矢張リ一ツノ整數又ハ整式デアル.

故ニ C ハ A±B ノ約數デアル.

(3) C ガ A 及ビ B ノ公約數ナルトキハ,任意ノ整數又ハ整式 a 及ビ b ニ對シ, C ハ常ニ $aA+bB$ ノ約數デアル.

コレハ(1)及ビ(2)ノ結果ヲ綜合シタモノデアル.

5. 最大公約數

二ツノ整數又ハ整式ノ最大公約數ヲ求メル一般ノ方法ヲ次ニ述ベル.

與ヘラレタ二ツノ整數又ハ整式ヲ A, B トシ,整數ナラバソノ小サクナイ方ヲ,整式ナラバソノ次數ノ低クナイ方ヲ A トスル.

先ヅ試ミニ A ヲ B デ割ル. モシ割リ切レレバ B 自身ガ卽チ A ト B トノ最大公約數ナルコト明カデアル.

モシ割リ切レナイトキハソノ整商ヲ Q, 剩餘ヲ R トスレバ

$$A=QB+R, \tag{1}$$

卽チ

$$A-QB=R \tag{2}$$

デアル．故ニ前節ノ(3)ニヨリ，AトBトノ公約數ハ必ズRノ約數デアル．故ニ結局AトBトノ公約數ハスベテBトRトノ公約數ノ中ニ含マレル．又逆ニBトRトノ公約數ハ，(1)ノ式ニヨリ，スベテAノ約數デアル．故ニ結局BトRトノ公約數ハスベテAトBトノ公約數ノ中ニ含マレル．

ヨツテAトBトノ公約數ト，BトRトノ公約數トハ全部同一ノモノデアル．

故ニAトBトノ最大公約數ヲ求メル代リニBトRトノ最大公約數ヲ求メレバ宜イ．而シテココニRハBヲ除數トシタ割リ算ノ餘リデアルカラ必ズBヨリ小(整數ノ場合)又ハBヨリ低次(整式ノ場合)デアル．

ヨツテ次ニハBヲRデ割ツテ見ル．モシ割リ切レレバRハBトRトノ最大公約數デ，從ツテAトBトノ最大公約數デアル．モシ割リ切レナイデ餘リSヲ得ルナラバ，前ト同理ニヨリBトRトノ最大公約數ヲ求メル代リニRトSトノ最大公約數ヲ求メレバ宜イコトトナル．

以下次第ニ斯クノ如ク割リ算ヲ續ケ，常ニソノ餘リヲ以テソノトキノ除數デアツタモノヲ割ルコトトスレバ，最後ニ割リ切レタトキノ除數ガ卽チAトBトノ最大公約數デアル．

注意　二ツノ整數ノ最大公約數ガ1ナルトキ，及ビ二ツノ整式ノ最大公約數ガ文字ヲ含マナイ唯ノ數ナルトキハ，コノ二ツノ整數又ハ整式ハ公約數ヲモタヌトイフコトガアル．

例 1.　$2x^3-x^2-26x+33$ ト x^2+x-12 トノ最大公約數ヲ求メヨ．

$$\begin{array}{r}
2x-3 \\
x^2+x-12\,\big)\,2x^3-\ x^2-26x+33 \\
2x^3+2x^2-24x \\ \hline
-3x^2-\ 2x+33 \\
-3x^2-\ 3x+36 \\ \hline
x-\ 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
x+4 \\
\big)\,x^2+\ x-12 \\
x^2-3x \\ \hline
4x-12 \\
4x-12 \\ \hline
\end{array}$$

答　$x-3$.

斯クノ如クニ計算ヲ續ケルトキハ斜ニ紙面ヲ費シテ不便デアルカラ，ムシロ次ノ如クニ書ク方ガ宜イ．

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x & x^2+\ x-12 & 2x^3-\ x^2-26x+33 & 2x \\
 & x^2-3x & 2x^3+2x^2-24x & \\ \hline
4 & 4x-12 & -3x^2-\ 2x+33 & -3 \\
 & 4x-12 & -3x^2-\ 3x+36 & \\ \hline
 & & x-\ 3 &
\end{array}$$

例 2.　次ノ二式ノ最大公約數ヲ求メヨ．

$$\begin{cases} 3x^2-5x-12 & (1) \\ x^3+3x^2-25x+21 & (2) \end{cases}$$

$3x$	$3x^2-5x-12$	$x^3+3x^2-25x+21$	
	$3x^2-9x$	$3x^3+9x^2-75x+63$	x
4	$4x-12$	$3x^3-5x^2-12x$	
	$4x-12$	$14x^2-63x+63$	
		$42x^2-189x+189$	14
		$42x^2-70x-168$	
		$-119)-119x+357$	
答　$x-3$.		$x-3$	

説明　先ヅ(1)デ(2)ヲ割ラウトスルニ,コノママデハ商ニ分數ノ係數ヲ用キネバナラヌ.　ソノ不便ヲ避ケルタメニ,整式ノ約數ヲ考ヘルトキニハ文字ヲ含マナイ唯ノ數ヲ式全體ニ乘ジ又ハソレデ除シテモ差支ナイカラ,先ヅ(2)ニ3ヲ乘ジテ後(1)デ割ルコトトスル.　同理ニヨリ,コノ計算ノ第二段ニ於テハ更ニ3ヲ乘ジ,又第三段ニ於テハ -119 デ除シタノデアル.

例 3.　7973ト2380トノ最大公約數ヲ求メヨ.

2	2380	7973	3
	1666	7140	
6	714	833	1
	714	714	
		119	

答　119.

注意　整數ノ最大公約數ヲ求メル計算ニ於テハ,途中デ決シテ前例ノ如ク或ル數ヲ以テ乘除シテハナラヌ.

三ツノ整數又ハ整式ノ最大公約數ヲ求メルニハ,先ヅソノ中ノ任意ノ二ツノモノノ最大公約數ヲ求メ,コレト殘リノ一ツトノ最大公約數ヲ求メレバ宜イ.

何トナレバ三ツノ整數又ハ整式ヲA, B, Cトシ, A, Bノ最大公約數ヲGトスレバ, A, Bノ公約數ハ何レモGノ約數デアルカラ, A, B, Cノ公約數ハスベテG, Cノ公約數ノ中ニ含マレル.

又逆ニGノ約數ハ何レモA, Bノ公約數デアルカラG, Cノ公約數ハスベテA, B, Cノ公約數ノ中ニ含マレル.

故ニA, B, Cノ公約數トG, Cノ公約數トハ全ク同一ノモノデアル.　ヨツテA, B, Cノ最大公約數ヲ求メル代リニG, Cノ最大公約數ヲ求メレバ宜イコトヲ知ル.

三ツヨリ多クノ整數又ハ整式ノ場合モ同樣ニ逐次ニ計算シテ行ケバ宜イ.

例 4.　次ノ三ツノ式ノ最大公約數ヲ求メヨ.

$$2a^2+11a-21,\qquad 3a^2+25a+28,$$

$$a^4+5a^3-14a^2-5a-35$$

先ヅ初メノ二式ノ最大公約數ヲ求メル.

$2a$	$2a^2+11a-21$	$3a^2+25a+28$	
	$2a^2+14a$	$6a^2+50a+56$	3
-3	$-3a-21$	$6a^2+33a-63$	
	$-3a-21$	$17)17a+119$	
		$a+7$	

次ニ,コノ最大公約數 $a+7$ ト所題ノ第三式トノ最大公約數ヲ求メル.

$$\begin{array}{r|l|l} a+7 & a^4+5a^3-14a^2-5a-35 & a^3 \\ & a^4+7a^3 & \\ \hline & \quad -2a^3-14a^2 & -2a^2 \\ & \quad -2a^3-14a^2 & \\ \hline & \qquad\qquad -5a-35 & -5 \\ & \qquad\qquad -5a-35 & \end{array}$$

答　$a+7$.

例　題

1. 次ノ各組ノ整數又ハ整式ノ最大公約數ヲ求メヨ.

(1)　$x^2-4x+3,\quad 4x^3-9x^2-15x+18$

(2)　$3x^3+x^2-4x,\quad 4x^2-5x+1$

(3)　3312,　3456　　　(4)　2772,　1716,　3564

(5)　$x^3+2x^2-1,\quad x^3-2x-1,\quad x^3-3x^2+3x-2$

2. 次ノ各分數式ヲ簡單ニセヨ.

(1)　$\dfrac{6x^3+x^2-3x-1}{6x^3+7x^2-5x-3}$　　(2)　$\dfrac{x^3-6x^2+14x-15}{x^3-2x^2+2x+5}$

(3)　$\dfrac{3x^3+7x^2-4}{3x^3+x^2-8x+4}$

(4)　$\dfrac{ab(d-c)^2}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{bc(d-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(d-b)^2}{(b-c)(b-a)}$

6. 最小公倍數

二ツノ整數又ハ整式A, Bノ最大公約數ヲGトシ, A及ビBヲGデ割ツタ商ヲ夫々a及ビbトスレバ,

$$A=aG,\qquad B=bG$$

デ,ココニaトbトハ公約數ヲモタヌ.

故ニAトBトノ最小公倍數ヲLトスレバ,

$$L=abG=aB=bA$$
$$=\frac{AB}{G}.$$

二ツノ整數又ハ整式ノ最小公倍數ヲ求メルニハ,ソノ二數又ハ二式ノ最大公約數ヲ以テソノ一方ノ數又ハ式ヲ割リ,ソノ商ヲ他ノ一方ニ乘ズレバ宜イ.

或ハ與ヘラレタ二數又ハ二式ノ積ヲソノ最大公約數デ割レバ宜イ.

三ツノ整數又ハ整式ノ最小公倍數ヲ求メルニハ,先ヅソノ中ノ二ツノモノノ最小公倍數ヲ求メ,次ニコレト殘リノ一ツトノ最小公倍數ヲ求メレバ宜イ.

何トナレバ三ツノ整數又ハ整式ヲA, B, Cトシ, A, Bノ最小公倍數ヲLトスレバ, A, Bノ公倍數ハ何レモLノ倍數デアルカラ, A, B, Cノ公倍數ハスベテL, Cノ公倍數ノ中ニ含マレル.

又逆ニLノ倍數ハ何レモA, Bノ公倍數デアルカラ, L, Cノ公倍數ハスベテA, B, Cノ公倍數ノ中ニ含マレル.

故ニA, B, Cノ公倍數トL, Cノ公倍數トハ全ク同一ノモノデアル.

コレニヨツテA,B,Cノ最小公倍數ヲ求メル代リニL,Cノ最小公倍數ヲ求メレバ宜イコトヲ知ル.

三ツヨリ多クノ整數又ハ整式ノ場合モ同樣ニ逐次ニ計算シテ行ケバ宜イ.

例 1.　$2x^3-x^2-26x+33$ ト x^2+x-12 トノ最小公倍數ヲ求メヨ.

解　コノ二式ノ最大公約數ハ $x-3$ (前節ノ例 1) デ,

$$(x^2+x-12)\div(x-3)=x+4.$$

故ニ求メル最小公倍數ハ

$$(2x^3-x^2-26x+33)(x+4)$$
$$=2x^4+7x^3-30x^2-71x+132.$$

例 2.　7973 ト 2380 トノ最小公倍數ヲ求メヨ.

解　コノ二數ノ最大公約數ハ 119 (前節ノ例 3) デ,

$$2380\div119=20.$$

故ニ求メル最小公倍數ハ

$$7973\times20=159460.$$

例 3.　次ノ三數ノ最小公倍數ヲ求メヨ.

578,　12427,　40749

解　所題ノ初メノ二數ノ最大公約數ヲ求メレバ, 289 ヲ得ル. ヨツテコノ二數ノ最小公倍數ハ

$$12427\times(578\div289)=24854.$$

コノ 24854 ト所題ノ殘リノ一數トノ最大公約數ヲ求メレバ,再ビ 289 ヲ得ル.

ヨツテ求メル最小公倍數ハ,

$$40749\times(24854\div289)=3504414.$$

例　題

1. 次ノ各組ノ整數又ハ整式ノ最小公倍數ヲ求ム.

(1) 6877,　11687

(2) $4x^3-4x^2-13x-5,\quad 12x^2-4x-65$

(3) $6x^3-2x^2+7x-3,\quad 3x^2-x+1$

(4) 87330,　4510,　5740

(5) $36x^3-7xy^2-y^3,\quad 6x^2+5xy+y^2,\quad 9x^2+6xy+y^2$

2. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

(1) $\dfrac{6x^4+10ax^3+2a^2x^2-20a^3x-28a^4}{3x^3+14ax^2+22a^2x+21a^3}$

(2) $\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$

(3) $\dfrac{x^3+3x^2+5x+15}{x^3+2x^2+5x+10}+\dfrac{x^4+x^3+3x^2+x-2}{x^4+2x^3+3x^2+4x-4}$

3. 二ツノ正ノ整數ノ和ガソノ最大公約數ト最小公倍數トノ和ニ等シイトキハ,コノ二數ノ一ツハ他ノ倍數デアル.

第三章　開平及ビ開立

7. 開平ノ原理

既ニ知レル如ク $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ デアルガ,今コノ右邊ノ式ヲ知ツテソノ平方根ノ一ツデアル $a+b$ ヲ求メル方法ヲ考ヘル.

先ヅ右邊ノ a ニツイテ降冪ニ排列シタ式ノ第一項 a^2 ノ平方根(ノ一ツ)ハ a デ,コレ即チ求メル平方根ノ第一項デアル.

次ニ與ヘラレタ式カラ a^2 ヲ減ズレバ殘リハ $2ab+b^2$ デ,ソノ第一項 $2ab$ ヲ今得タ a ノ二倍即チ $2a$ デ割レバ商 b ヲ得ル,コレ即チ求メル平方根ノ第二項デアル.　ココニ於テ $2a$ ニ b ヲ加ヘタ和ニ更ニ b ヲ乘ジタモノ,即チ $(2a+b)b$ ヲ前ノ殘リカラ減ズレバ最早剩餘ガナイ,コレデ開法ヲ終ル.

以上ノ計算ヲ通常次ノ如クニ記ス.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b \\
\hline
 & a^2+2ab+b^2 \\
 & a^2 \\
\cline{2-2}
2a+b & \quad 2ab+b^2 \\
b & \quad 2ab+b^2 \cdots\cdots(*) \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

說明　平方根ハ一項ヅツ得ルニ從ツテ上欄ニ記入スルモノトスル.　又左方ニアル $2a+b$ ハ先ヅ最初ニ a ノ二倍トシテ $2a$ ヲ書キ,コレデ $2ab$ ヲ割ツタ商 b ヲ附加シテ $2a+b$ トシタモノデアル.　次ニソノ下ニ b ヲ書キ $2a+b$ ニ b ヲ乘ジタ積ヲ * 印ノ所ニ記スモノトスル.

次ニ,同樣ニシテ

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$$

ノ右邊ノ式ヲ知ツテソノ平方根ノ一ツ $a+b+c$ ヲ求メル算法ヲ記セバ,次ノ如クデアル.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b\ \ +c \\
\hline
 & a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\
 & a^2 \\
\cline{2-2}
2a+\ b & \quad 2ab+2ac+b^2 \\
b & \quad 2ab\qquad\ +b^2 \\
\cline{1-2}
2a+2b+c & \qquad\quad 2ac\qquad +2bc+c^2 \\
c & \qquad\quad 2ac\qquad +2bc+c^2\cdots\cdots(*) \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

說明　先ヅ與ヘラレタ式ヲ a ニ關シテ降冪ノ順ニナラベ,ソノ平方根ノ始メノ二項 $a+b$ ヲ求メルマデノ計算ハ前ノ場合ト同樣デアル.

次ニ平方根ノ第三項 c ヲ求メルニハ二度目ノ引キ算ノ殘リ $2ac+2bc+c^2$ ノ始メノ二項ヲ $a+b$ ノ二倍即チ $2a+2b$ デ割レバ宜イ.　コノ除數 $2a+2b$ ハ丁度前ニ左方ニ記シテアル $2a+b$ ト b トヲ加ヘテ作ルモノトスル.　而シテ後,新タニ得タ商 c ヲ附加シテ $2a+2b+c$ トシ,ソノ下ニ c ヲ書キコレヲ乘ジタ積ヲ * 印ノ所ニ記スモノトスル.

注意 1. モシ第一回ノ引キ算ノ殘リノ中最初ノ二項ヲ $2a$ デ割レバ商 $b+c$ ヲ得ル. コレヲ b ノ代リニ用ヰレバ,開法ハ第二回ノ引キ算デ終ル.

注意 2. a^2 ノ平方根ハ a ノ他ニ $-a$ モアル. 故ニ上ノ如クニ計算シテ得ルモノハ平方根ノ中ノ一ツデアル. モシ平方根ノ第一項トシテ $-a$ ヲ取レバ,開平ノ結果ハ例 1 デハ $-a-b$, 例 2 デハ $-a-b-c$ トナル.

8. 正數及ビ整式ノ開平

正數ノ開平ヲスルニハ,先ヅ試算法ニ於ケルガ如クニソノ平方根ノ位數及ビ最高位ノ數ヲ定メ,ソノ最高位ノ數ヲ前節ノ a ト見做シ,スベテ前節ニ述ベタ通リニ順次ニ下位ノ數ヲ決定シテ行ケバ宜イ.

整式ノ開平ヲスルニハ,先ヅコレヲ或ル文字ニ關シテ昇冪又ハ降冪ノ順ニナラベ,前節ノ方法ニヨッテ計算スレバ宜イ.

例 1. 1849 ノ正ナル平方根ヲ求メヨ.

```
       4  3
    | 18|49
    | 16
 83 |  249
  3 |  249
```

驗 $43^2=1849$. 故ニ $\sqrt{1849}=43$.

注意 1. 第一回ノ引キ算ノ殘リ 249 ノ中ノ 24 ヲ 8 (4 ノ二倍) デ割リ商 3 ヲ得ル, コレヲ求メル平方根ノ一ノ位ノ數トスル.

8 トイフハ實ハ 80 ノコトデアルカラ, $2a+b$ ヲ作レバ $80+3=83$ トナル, $8+3$ デハナイ.

注意 2. モシ單ニ 1849 ノ平方根ヲ求メヨトイヘバ,ソノ答ハ 43 及ビ -43 デアル. 以下ノ諸例ニツイテモ同樣デアル.

例 2. 70238 ノ正ナル平方根ヲ求メヨ.

```
        2  6  5
     | 7|02|38
     | 4
  46 | 302
   6 | 276
 525 |  2638
   5 |  2625
     |    13
```

答 $\begin{cases}\text{平方根ノ整數部} & 265,\\ \text{開平ノ餘リ} & 13.\end{cases}$

驗 $265^2+13=70225+13=70238$.

注意 平方根ノ最高位 2 ヲ得タ後,ソノ二倍ナル 4 デ 30 ヲ割リ試ミルニ商 7 ヲ得ル. ケレドモモシ 7 ヲ採用スレバ $47\times7=329$ デ 302 ヨリモ大キイカラ不可デアル. 故ニ 7 ヨリ 1 ダケ減ジテ 6 トシテ試ミレバ $46\times6=276$ デ差支ナイ. 一般ニ採用シヨウトシタ數ガ大キスギルトキハ常ニ斯クノ如ク 1 ヅツ減ジテ試ミルガ宜イ.

例 3. $\sqrt{109}$ ヲ小數第二位マデ計算セヨ.

```
         1  0. 4  4
      | 1|09.00|00
      | 1
  204 |   9 00
    4 |   8 16
 2084 |     8400
    4 |     8336
      |       64
```

答 $\begin{cases}10.44,\\ \text{餘リ} \quad 0.0064.\end{cases}$

驗　$10.44^2+0.0064=108.9936+0.0064=109.$

注意　平方根ノ一ノ位ニ0ヲ置クコトニ注意セヨ.

例 4.　$\sqrt{\frac{2}{3}}$ ヲ小數第三位マデ求メヨ.

先ヅ與ヘラレタ分數ヲ小數ニ直シテ開平スル.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;0.\;8\;\;1\;\;6 \\
\hline
 & 0.66|66|66 \\
 & \;\;64 \\
\cline{2-2}
161 & \;\;\;\;266 \\
1 & \;\;\;\;161 \\
\cline{1-2}
1626 & \;\;\;10566 \\
6 & \;\;\;\;\;9756 \\
\cline{2-2}
 & \;\;\;\;\;\;810
\end{array}
\qquad
答\begin{cases} 0.816, \\ 餘リ\quad 0.000810\ 强. \end{cases}
$$

例 5.　$9x^4-12x^3+10x^2-4x+1$ ノ平方根ヲ求メヨ.

$$
\begin{array}{r|r}
 & 3x^2-\;2x+\;1 \\
\hline
 & 9x^4-12x^3+10x^2-4x+1 \\
 & 9x^4\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\cline{2-2}
6x^2-2x & -12x^3+10x^2\qquad\quad \\
-2x & -12x^3+\;\;4x^2\qquad\quad \\
\cline{1-2}
6x^2-4x+1 & 6x^2-4x+1 \\
 & 6x^2-4x+1 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

答　$\pm(3x^2-2x+1).$

例　題

1. 次ノ各數ヲ平方ニ開ケ,モシ開キ切レナイトキハ平方根ノ整數部及ビソノ開平ノ餘リヲ求メヨ.

　729,　608400,　792100,　67009245

2. 次ノ各數ノ平方根ヲ小數第三位マデ求メヨ.

　3.141592,　$\frac{3}{11}$,　13.5

3. 間口ガ奥行ノ半分デ,面積ガ5618平方米ナル宅地ガアル. 間口如何.

4. 直角三角形ニ於テ直角ヲ挾ム二邊ガ夫々 82cm, 126cm ナルトキ,斜邊ノ長サヲ求メヨ.

5. A,B 二船ガアツテ,A ハ或ル港ヲ出帆シテ正南ニ向ヒ 16 節ノ速サデ進ミ,B ハソノ後 2 時間ヲ經テ同港ヲ出帆シ正東ニ向ヒ 13 節ノ速サデ進ムトスレバ,兩船間ノ距離ガ 89 海里トナルノハ,B ガ出帆シテカラ幾時間ノ後カ.

6. 次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ.

　(1)　$16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

　(2)　$1-6a+15a^2-20a^3+15a^4-6a^5+a^6$

　(3)　$25x^4-30ax^3+29a^2x^2-12a^3x+4a^4$

　(4)　$25x^6-30x^5-31x^4+44x^3+4x^2-16x+4$

　(5)　$\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{ax^2}{3}+\frac{a^2}{9}-2x^3-\frac{4ax}{3}$

9. 開立ノ原理

既ニ知レル如ク $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ デアル. 今コノ右邊ノ a ニツイテ降冪ニ排列シタ式ヲ知ツテソノ立方根 $a+b$ ヲ求メル方法ヲ考ヘルコトトスル.

先ヅ與ヘラレタ式ノ第一項 a^3 ヲ立方ニ開ケバ a ヲ得

ル,コレヲ立方根ノ第一項トスル.

次ニコノ a ノ平方ノ三倍卽チ $3a^2$ ヲ以テ第二項 $3a^2b$ ヲ割レバ b ヲ得ル,コレ卽チ立方根ノ第二項デアル. ココニ於テ $3a^2$ ニ $(3a+b)b$ ナルモノヲ加ヘ,ソノ和 $3a^2+3ab+b^2$ ニ更ニ b ヲ乘ズレバ丁度與ヘラレタ式ノ第二項以下ト等シクナル,ヨツテココニ開法ヲ終ル.

以上ノ計算ヲ通常下ノ如クニ書ク.

$$\begin{array}{lr|l} & & a+b \\ \cline{3-3} & & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (1)\ldots\ldots 3a^2 & & a^3 \\ \cline{3-3} (2)\ldots\ldots 3a+b & 3ab+b^2 & \qquad 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \cline{2-2} & 3a^2+3ab+b^2 & \\ & & \qquad 3a^2b+3ab^2+b^3\ldots\ldots(3) \\ \cline{3-3} \end{array}$$

説明　先ヅ立方根ノ第一項 a ヲ得タ後, $3a^2$ ヲ(1)ノ所ニ記シ,コレデ $3a^2b$ ヲ割ツテ商 b ヲ得ル. 次ニ(2)ノ所ニ $3a+b$ ヲ記シ,ソレニ b ヲ乘ジタ積 $3ab+b^2$ ヲ直チニ(1)ノ $3a^2$ ノ右下ニ書キ,コレト $3a^2$ トノ和ヲ更ニソノ下ニ記シ,コレニ更ニ b ヲ乘ジタ積ヲ(3)ノ所ニ書クモノトスル.

上ノ開立ノ計算ハコレダケデ終ツタケレドモ,モシ第二回ノ引キ算ノ後ニ更ニ剩餘アルトキハ,ソレヲ $3(a+b)^2$ デ割リ試ミテ立方根ノ第三項,例ヘバ c ヲ求メ, $a+b$ ヲ上ノ a ノ如ク, c ヲ上ノ b ノ如クニ取扱ツテ更ニ上ト同樣ノ計算ヲ反復スレバ宜イ.

但シコノ際 $3(a+b)^2$ ヲ作ルニハ,既ニ先ニ記サレテアル

$3ab+b^2$ ト $3a^2+3ab+b^2$ トニ今一ツ b^2 ヲ加ヘレバ丁度

$$(3ab+b^2)+(3a^2+3ab+b^2)+b^2=3(a+b)^2$$

トナルコトヲ利用スル,又 $3(a+b)$ ヲ作ルニハ既ニ記サレテアル $3a+b$ ニ更ニ b ヲ二ツダケ加ヘレバ宜イ. (次節ノ例 2, 3 ヲ見ヨ.)

10. 數又ハ整式ノ開立

正數ノ開立ヲナスニハ先ヅ試算法ニヨツテソノ立方根ノ位數ト最高位ノ數トヲ決定シ,然ル後前節ノ理ニヨツテ順次ニ下位ノ數ヲ求メレバ宜イ. 負數ノ開立ヲナスニハ先ヅソノ絕對値ノ立方根ヲ求メ,然ル後ソノ符號ヲ變ズレバ宜イ.

整式ノ開立ヲナスニハ先ヅコレヲ或ル文字ニ關シテ昇冪又ハ降冪ノ順ニナラベ,前節ノ理ニヨツテ開立スルモノトスル.

例 1.　12167 ヲ立方ニ開ケ.

$$\begin{array}{rr|l} & & 2\quad 3 \\ \cline{3-3} & & 12|167 \\ & & 8 \\ \cline{3-3} & 12 & 4167 \\ 63 & 189 & \\ \cline{2-2} & 1389 & \\ & & 4167 \\ \cline{3-3} \end{array}$$

答　23.

例 2.　12989.47571 ノ立方根ヲ小數第三位マデ求メヨ.

$$
\begin{array}{r r | l}
 & & 2\ \ 3.\ \ 5\ \ 0\ \ 7 \\
\hline
 & & 12|989.475|710|000 \\
 & & 8 \\
 & 12 & 4989 \\
63 & 189 & \\
3 & 1389 & \\
3 & 9 & 4167 \\
\hline
695 & 1587 & 822\,475 \\
5 & 3475 & \\
5 & 162175 & \\
70507 & 25 & 810\,875 \\
\hline
 & 16567500 & 11\,600710000 \\
 & 493549 & \\
\hline
 & 1657243549 & \\
 & & 11\,600704843 \\
\hline
 & & 5157
\end{array}
$$

答 23.507, 餘リ 0.000005157.

例 3. $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$ ヲ立方ニ開ケ.

$$
\begin{array}{r r | l}
 & & 2x^2-\ x+1 \\
\hline
 & & 8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1 \\
 & & 8x^6 \\
\hline
 & 12x^4 & -12x^5+18x^4-13x^3 \\
6x^2-x & -6x^3+x^2 & \\
-x & 12x^4-6x^3+x^2 & \\
-x & x^2 & -12x^5+6x^4-x^3 \\
\hline
6x^2-3x+1 & 12x^4-12x^3+3x^2 & 12x^4-12x^2+9x^2-3x+1 \\
 & 6x^2-3x+1 & \\
\hline
 & 12x^4-12x^3+9x^2-3x+1 & 12x^4-12x^3+9x^2-3x+1 \\
\hline
\end{array}
$$

答 $2x^2-x+1$.

例題

1. 次ノ各數ノ立方根ヲ求メヨ,モシ開キ切レナイトキハ小數第二位マデ求メヨ.

13824, 98611128, 15,

0.8, 454756.609, $\frac{3}{5}$

2. 次ノ各式ヲ立方ニ開ケ.

(1) $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$

(2) $8a^6-36a^5b+66a^4b^2-63a^3b^3+33a^2b^4-9ab^5+b^6$

(3) $27x^6+108x^5+90x^4-80x^3-60x^2+48x-8$

(4) $27x^6-27x^5+171x^4-109x^3+342x^2-108x+216$

(5) $\frac{x^3}{y^3}+\frac{9x^2}{y^2}+\frac{24x}{y}+9-\frac{24y}{x}+\frac{9y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}$

第四章 方程式

11. 同値

二ツノ一元方程式ガ全ク同一ノ根ヲ有スルトキ,卽チ詳シクイヘバ,第一ノ方程式ヲ滿足セシメル未知數ノ値ガ悉ク第二ノ方程式ヲ滿足セシメ,又逆ニ第二ノ方程式ヲ滿足セシメル未知數ノ値ガ悉ク第一ノ方程式ヲ滿足セシメルトキハ,コノ二ツノ方程式ハ**同値デアル**トイフ.

例ヘバ $x+2=5$ (1)

ト $x-1=2$ (2)

トハ同値デアル. (何レモ根ハ3デアル.)

ケレドモ(1)ト

$$x^2-7x+12=0 \qquad (3)$$

トハ同値デナイ,何トナレバ(3)ヲ滿足セシメル一ツノ根4ハ(1)ヲ滿足セシメナイカラデアル.

聯立方程式ニ於テモ,モシ二組ノ聯立方程式ガ全ク同一ノ根ヲ有スルトキハコレヲ同値デアルト稱ヘル.

例ヘバ次ノ二組ハ同値デアル.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y=8 \\ x-2y=-1 \end{cases}$$

12. 同値ニ關スル定理

(1) 方程式ノ兩邊ニ同ジ數又ハ同ジ式ヲ加ヘテ得ル方程式ハモトノ方程式ト同値デアル.

何トナレバ,モトノ方程式ヲ

$$A=B \qquad (1)$$

トシ,コノ兩邊ニ同ジ數又ハ式Pヲ加ヘレバ

$$A+P=B+P. \qquad (2)$$

然ルニPガ未知數ヲ含マナイ場合ハ勿論,Pガ未知數ヲ含ム式ノ場合デモ,(2)ノ左邊ニアルPト右邊ニアルPトハ常ニ同一ノ數値ヲモツカラ,(1)ヲ滿足セシメル未知數ノ値ハ必ズ(2)ヲモ滿足セシメル. 又逆ニ(2)ヲ滿足セシメル未知數ノ値ハ必ズ(1)ヲ滿足セシメル. 故ニ(1)ト(2)トハ同値デアル.

同樣ノ方法ニヨツテ次ノ諸定理ヲ證明スルコトガ出來ル.

(2) 方程式ノ兩邊カラ同ジ數又ハ同ジ式ヲ減ジテ得ル方程式ハモトノ方程式ト同値デアル.

(3) 方程式ノ兩邊ニ零デナイ同ジ數ヲ乘ジ又ハ兩邊ヲ零デナイ同ジ數デ除シテ得ル方程式ハモトノ方程式ト同値デアル.

上ノ(3)ニ於テ「同ジ數」ノ代リニ「同ジ式」トシテモ,ソノ式ガ未知數ヲ含マナイ式ノトキハコノ定理ハ矢張リ成立スル. モシ又ソノ式ガ未知數ヲ含ムトキハ如何ナル結果トナルカ,次ニコレヲ考ヘル.

今方程式

$$A=B \qquad (1)$$

ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム整式Mヲ乘ズレバ

$$MA=MB.$$

コレヲ移項スレバ

$$M(A-B)=0. \qquad (2)$$

サテ(1)ヲ滿足セシメル未知數ノ値ハ A−B ヲ 0 ナラシメルカラ明カニ(2)ヲ滿足セシメル. 次ニ(2)ヲ滿足セシメル未知數ノ値ヲ考ヘルニ,ソレハ M 又ハ A−B ノ何レカヲ 0 ナラシメルモノデナケレバナラヌ. 後者ハ(1)

ヲ滿足セシメルケレドモ前者ハ必ズシモサウデハナイ. 故ニ

(4) 方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム整式ヲ乘ジテ得ル方程式ハ必ズシモモトノ方程式ト同値デハナイ. 一般ニハモトノ方程式ノ根ヨリモ他ノ根ヲモツ. ソノ餘分ノ根ハ今兩邊ニ乘ジタ整式ヲ零ニ等シイト置イテ得ル方程式ノ根デアル.

例ヘバ　$2x=3$　(1)

ノ根ハ $x=\dfrac{3}{2}$ デアルケレドモ,(1)ノ兩邊ニ $x-1$ ヲ乘ジタ方程式　$2x(x-1)=3(x-1),$　(2)

卽チ　$(2x-3)(x-1)=0$

ハ更ニ他ノ一根 $x=1$ ヲモツ. 故ニ(1)ト(2)トハ同値デハナイ,而シテココニ得タ餘分ノ根 $x=1$ ハ今兩邊ニ乘ジタ式ヲ0ニ等シイト置イテ得ル方程式 $x-1=0$ ノ根デアル.

上ノ(4)カラ,直チニ次ノ定理ヲ得ル.

(5) 方程式ノ兩邊ヲ未知數ヲ含ム同ジ整式デ除シテ得ル方程式ハ必ズシモモトノ方程式ト同値デハナイ,或ル場合ニハモトノ方程式ノ根ノ一部又ハ全部ヲ失フコトガアル. ソノ失ハレル根ハ今兩邊ヲ除シタ式ヲ零ニ等シイト置イテ得ル方程式ノ根デアル.

故ニ方程式解法ノ途中デ兩邊ヲ未知數ヲ含ム或ル因數デ除シタトキニハ,必ズソノ因數ヲ0ニ等シイト置イタ方程式ヲ作ツテソノ根ヲ求メルコトヲ忘レテハナラヌ.

例ヘバ $(x-1)(x+6)=5x(x-1)$ ヲ解クニハ,先ヅ兩邊ヲ $x-1$ デ除シタ $x+6=5x$ ヲ解イテ $x=\dfrac{3}{2}$ ヲ得ル,又別ニ $x-1=0$ ト置イテ $x=1$ ナル根ヲ求メネバナラヌ.

(6) 一般ニ方程式 $A=B$ ノ兩邊ヲ n 乘シテ得ル方程式 $A^n=B^n$ ハモトノ方程式ト同値デハナイ.

何トナレバ,後者ハコレヲ書キ直セバ $A^n-B^n=0$

卽チ　$(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1})=0$

トナルカラ, $A=B$ ノ根ノ他ニナホ

$$A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1}=0$$

ノ根ヲモ併セ有スル.

故ニ方程式ヲ解ク途中デ兩邊ノ冪ヲ作ツタトキハ,ソノ結果ヲ必ズモトノ方程式ニ代入シテ驗シヲ行フコトヲ忘レテハナラヌ.

無理方程式ノ解法ニ於テハ必ズ根ノ驗シヲセネバナラヌコトハコノ原理ニヨルノデアル.

以上述ベタ諸定理ハ實ハ今マデ種々ノ方程式ヲ解クニ當ツテ常ニ利用シテキタモノデアル.

例ヘバ方程式

$$5x-8=3x+4$$

ヲ解カウトスルニ,先ヅコレヲ移項シテ

$$2x=12$$

トスルノハ本節ノ定理(1)及ビ(2)ニヨルノデアル.

次ニ兩邊ヲ 2 デ割ツテ

$$x=6$$

ヲ得ルノハ定理(3)ニヨルノデアル.

コレニヨツテ考ヘルニ,

方程式ノ解法トハツマリ與ヘラレタ方程式ヲ變形シテモトト同値デ且未知數ノ値ガ明カナ方程式ニ歸セシメルコトニ他ナラヌ.

例　　題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1)　$\dfrac{6x-3}{2x+7}=\dfrac{3x-2}{x+5}$

(2)　$\dfrac{24-5x}{x-2}+\dfrac{8x-49}{4-x}=\dfrac{28}{x-2}-13$

(3)　$\dfrac{x^2-2x-12}{x^2-4}+\dfrac{3}{x-2}=1\dfrac{1}{3}$

(4)　$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$

(5)　$2x^2-3\sqrt{2x^2-7x+7}=7x-3$

13. 置換ニヨツテ解キ得ル方程式

二次ヨリ高イ次數ノ方程式(コレヲ**高次方程式**トイフ)ノ解法ヲ一般ニ論ズルコトハ高等數學ノ範圍ニ屬スル.ココニハ特別ナ工夫ニヨツテ解キ得ル高次方程式ノ二三ノ例ヲ示ス.

例 1.　$4x^4-37x^2+9=0$　ヲ解ケ.

解　與ヘラレタ方程式ニ於テ $x^2=y$ ト置ケバ

$$4y^2-37y+9=0.$$

コレヲ解イテ

$$y=9 \quad 又ハ \quad y=\frac{1}{4}.$$

故ニ　$x^2=9$　即チ　$x=\pm 3$,

又ハ　$x^2=\dfrac{1}{4}$　即チ　$x=\pm\dfrac{1}{2}$.

ヨツテ與ヘラレタ方程式ハ

$$3,\quad -3,\quad \frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2}$$

ナル四ツノ根ヲモツ.

例 2.　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$　ヲ解ケ.

解　左邊ニ於ケル因數ノ二ツヅツノ積ヲ作レバ

$$(x+1)(x+4)=x^2+5x+4,$$

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6.$$

故ニ　$x^2+5x=y$

ト置ケバ,與ヘラレタ方程式ハ

$$(y+4)(y+6)=120,$$

即チ　$y^2+10y-96=0.$

コレヲ解ケバ $y=6$ 又ハ $y=-16$ ヲ得ル.

$y=6$ トスレバ

$$x^2+5x-6=0.$$

コレヲ解ケバ

$$x=1 \quad 又ハ \quad x=-6.$$

$y=-16$ トスレバ

$$x^2+5x+16=0.$$

コレヲ解ケバ

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{39}\,i.}{2}$$

故ニ根ハ次ノ四ツデアル.

$$1,-6,\quad \frac{-5\pm\sqrt{39}\,i}{2}$$

例 3.　$6x^4-7x^3-12x^2-7x+6=0$　ヲ解ケ.

解　求メル根ガ 0 デナイコトハ視察ニヨツテ明カデアル. ヨツテ與ヘラレタ方程式ノ兩邊ヲ x^2 デ割レバ,

$$6x^2-7x-12-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}=0,$$

卽チ　$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0.$$

ココニ於テ　$x+\dfrac{1}{x}=y$　ト置ケバ,

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}.$$

故ニ　$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

ヨツテ與ヘラレタ方程式ハ

$$6(y^2-2)-7y-12=0,$$

卽チ　$$6y^2-7y-24=0.$$

コレヲ解ケバ　$y=\dfrac{8}{3}$　又ハ　$y=-\dfrac{3}{2}.$

從ツテ　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{3}$　又ハ　$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2},$

卽チ　$3x^2-8x+3=0$　又ハ　$2x^2+3x+2=0.$

コレヲ解ケバ夫々

$$x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3} \quad 又ハ \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{7}\,i}{4}.$$

コレ卽チ與ヘラレタ方程式ノ四根デアル.

注意　本例ノ方程式ノ如ク,總テノ項ヲ一邊ニ集メ未知數ニ關シテ降冪又ハ昇冪ノ順ニ排列シタトキ,左右兩端カラ同ジ順番ニアル項ノ係數ガ常ニ相等シイモノヲ**逆數方程式**又ハ**相反方程式**トイフ. 次數ガ偶數ナル逆數方程式ハ常ニ本例ノ如キ方法ニヨツテソノ次數ヲ半減スルコトガ出來ル.

例　　題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1)　$x^4-10x^2+9=0$　　(2)　$\dfrac{9}{x^4}-\dfrac{32}{x^2}=16$

(3)　$\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=2$　　(4)　$(x^2-x)(x^2-x+1)=6$

(5)　$(x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19$

(6)　$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=9$

(7)　$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

(8)　$x^4+x^3+x^2+x+1=0$

14. 因數分解ニヨツテ解キ得ル方程式

與ヘラレタ一元二次方程式ノスベテノ項ヲ左邊ニ移シタトキ,ソノ左邊ノ式ガ視察ニヨツテ因數ニ分解サレルトキハ,直チニモトノ方程式ノ根ヲ知リ得ルコトハ第1節ノ例1ニヨツテ明カデアル.

コノ理ハ二次方程式ニ限ラズ一般ノ高次方程式ニツイテモ同樣デアル.

逆ニ,xニ關スル或ル整式ノ値ヲ0ナラシメルxノ一ツノ値(卽チソノ整式ヲ0ニ等シイト置イテ得ル方程式ノ一ツノ根)ヲ知ルトキハ,コレニヨツテモトノ整式ノ一ツノ因數ヲ得ルコトハ第3節ニ於テコレヲ述ベタ.

斯クノ如ク,或ル整式ヲ0ニ等シイト置イタ方程式ヲ解クコトト,ソノ整式ヲ因數ニ分解スルコトトハ密接ナル關係ヲ有スルモノデ,コノ關係ヲ利用シテ高次方程式ヲ解キ得ルコトガアル.

例 1. $(x^2-5)(x^2-4)=4x(x^2-4)$ ヲ解ケ.

解 右邊ノ式ヲ左邊ニ移シテ (x^2-4) デ括レバ

$$(x^2-4)(x^2-4x-5)=0.$$

從ツテ　$(x-2)(x+2)(x+1)(x-5)=0.$

故ニ求メル根ハ 2, −2, −1, 5 ノ四ツデアル.

例 2. $x^3-6x^2+11x-6=0$ ヲ解ケ.

解 視察ニヨツテ $x=1$ ナル一根ガアルコトヲ知ル.故ニ與ヘラレタ方程式ノ左邊ハ$x-1$デ割リ切レル,ヨツテ實際ニ割ツテ見レバ

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0.$$

從ツテ　$(x-1)(x-2)(x-3)=0.$

故ニ求メル根ハ次ノ三ツデアル.

$$x=1,\quad 2,\quad 3$$

15. 立方根

先ヅ1ノ立方根ヲ求メルタメニコレヲxトスレバ

$$x^3=1 \quad 卽チ \quad x^3-1=0$$

ナル方程式ヲ得ル. コノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

ヨツテ　$x-1=0$ トスレバ $x=1$,

又 $x^2+x+1=0$ トスレバ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

故ニ1ノ立方根ハ三ツアツテ次ノ通リデアル.

$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

通常 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ヲ表ハスニωナル文字ヲ用ヰル. 然ルトキハ

$$\omega^2=\frac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}*$$

* モシ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ヲωトスレバ $\omega^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ トナル.

トナルカラ,1ノ三ツノ立方根ハ次ノ如クニ表ハサレル.

$$1,\qquad \omega,\qquad \omega^2$$

次ニaヲ0デナイ任意ノ實數トスレバ,aノ立方根デ實數ナルモノハ一ツアツテ,ソレハaト同符號デアル.ソノ立方根ヲ表ハスニ$\sqrt[3]{a}$ヲ以テスル.　サテ一般ニaノ立方根ヲxトスレバ

$$x^3=a\quad 即チ\quad x^3=(\sqrt[3]{a})^3.$$

コレヲ書キ直セバ

$$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3=1.$$

即チ$\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}}$ハ1ノ立方根デアル.　故ニ上述ノ結果ニヨリ

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}}=1,\qquad \omega,\qquad \omega^2.$$

從ッテ　$x=\sqrt[3]{a},\quad \omega\sqrt[3]{a},\quad \omega^2\sqrt[3]{a}.$

故ニ0以外ノ任意ノ實數ハ常ニ三ツノ立方根ヲモツ.ソノ中一ツハ實數デ他ノ二ツハ虚數ヲ含ムモノデアル.第10節ニ述ベタ開立デ求メラレルモノハ立方根ノ中ノ實數ナルモノデアル.

例ヘバ8ノ立方根ハ次ノ如ク三ツアル.

$$2,\qquad 2\omega,\qquad 2\omega^2,$$

即チ　$2,\quad -1+\sqrt{3}i,\quad -1-\sqrt{3}i.$

例　題

1. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1) $x^3-5x+4=0$　　(2) $3x^3-14x^2+20x-8=0$

(3) $x(x-1)(x-2)=7\cdot8\cdot9$

(4) $x^4+7x^3-7x-1=0$

(5) $x^4-5x^3+30x-16=0$

(6) $x^6+1=0$　　(7) $x^6+7a^3x^3-8a^6=0$

(8) $x^5+3x^4-2x^3-2x^2+3x+1=0$

(9) $(x^2-p^2+q^2-r^2)^2=4(pr-qx)^2$

(10) $(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4)$

(11) $(x-a)^3+(x-b)^3=(2x-a-b)^3$

(12) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{10}{3}$

(13) $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{4(a-b)}$

2. $1,\ 1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$ナル三ツノ根ヲモツ三次方程式ヲ作レ.

3. 三次方程式$x^3+px^2+qx+r=0$ノ根ヲα,β,γトスレバ,

$$-p=\alpha+\beta+\gamma,$$
$$q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,$$
$$-r=\alpha\beta\gamma.$$

4. 三次方程式$x^3-2x^2+3x-4=0$ノ三根ノ平方ノ和ヲ求メヨ.

16. 特別ノ工夫ニヨツテ解キ得ル聯立方程式

三元以上又ハ三次以上ノ聯立方程式デモ特別ノ工夫ニヨツテ解キ得ルモノガアル. 又二元二次デ普通ノ方法デ解キ得ルモノデモ或ル場合ニハ特別ノ工夫ニヨツテ更ニ簡單ニ解キ得ルコトガアル. 次ニ二三ノ例ヲ示ス.

例1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} x+y=9 & (1) \\ x^2-xy+y^2=21 & (2) \end{cases}$$

解 先ヅ $(1)^2-(2)$ ヲ作レバ

$$3xy=60 \quad 即チ \quad xy=20.$$

故ニ x ト y トハ次ノ方程式ノ二根デアル.

$$X^2-9X+20=0.$$

コレヲ解ケバ $X=4$ 又ハ $X=5$.

故ニ求メル根ハ次ノ二組デアル.

$$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$$

例2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2a+b & (1) \\ \dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{a^3b+a^2b^2} & (2) \end{cases}$$

解 (2) カラ $xy=a^3b+a^2b^2$.

故ニ $$\frac{xy}{ab}=a^2+ab.$$

今 $\dfrac{x}{a}=P$, $\dfrac{y}{b}=Q$ トスレバ

$$\begin{cases} P+Q=2a+b \\ PQ=a^2+ab \end{cases}$$

故ニ P ト Q トハ次ノ方程式ノ二根デアル.

$$X^2-(2a+b)X+a(a+b)=0.$$

コレヲ解ケバ $X=a$ 又ハ $X=a+b$.

故ニ P ト Q トノ値ハ次ノ二組デアル.

$$\begin{cases} P=a \\ Q=a+b \end{cases} \qquad \begin{cases} P=a+b \\ Q=a \end{cases}$$

ヨツテ
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}=a \\ \dfrac{y}{b}=a+b \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}=a+b \\ \dfrac{y}{b}=a \end{cases}$$

故ニ
$$\begin{cases} x=a^2 \\ y=ab+b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a^2+ab \\ y=ab \end{cases}$$

例3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=43 \\ 10(x+y)=7xy \end{cases}$$

解 先ヅ $x+y=u$, $xy=v$ ト置ケバ,

$$x^2+y^2=u^2-2v$$

デアルカラ,與ヘラレタ方程式ハ次ノ如クニ書キ直サレル.

$$\begin{cases} u^2-2v+2u=43 \\ 10u=7v \end{cases}$$

コレヲ解ケバ　$\begin{cases} u=7 \\ v=10 \end{cases}$　　$\begin{cases} u=-\dfrac{43}{7} \\ v=-\dfrac{430}{49} \end{cases}$

ココニ於テ x ト y トノ和ト積トガ知レタカラ前例ニ於ケルガ如クニシテ x ト y トヲ求メルコトガ出來ル.

求メル根ハ次ノ四組デアル.

$$\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{-43+\sqrt{3569}}{14} \\ y=\dfrac{-43-\sqrt{3569}}{14} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{-43-\sqrt{3569}}{14} \\ y=\dfrac{-43+\sqrt{3569}}{14} \end{cases}$$

例 4.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ x^3+y^3=35 & (2) \end{cases}$$

解　(2)ノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=35.$$

故ニ(1)ニヨツテ

$$x^2-xy+y^2=7. \qquad (3)$$

ココニ於テ $(1)^2-(3)$ ヲ作レバ

$$3xy=18 \quad 卽チ \quad xy=6. \qquad (4)$$

(1)ト(4)カラ直チニ根ヲ得ルコト次ノ通リデアル.

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

注意　或ハ $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ ナル關係ヲ利用シテモ解クコトガ出來ル.

例 5.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} xy+zx=20 & (1) \\ yz+xy=14 & (2) \\ zx+yz=18 & (3) \end{cases}$$

解　(1)+(2)−(3) ヲ作レバ

$$2xy=16 \quad 卽チ \quad xy=8. \qquad (4)$$

同樣ニ (2)+(3)−(1) カラ　$yz=6,$　(5)

(3)+(1)−(2) カラ　$zx=12.$　(6)

ココニ於テ更ニ (4)×(5)÷(6) ヲ作レバ

$$y^2=4 \quad 卽チ \quad y=\pm 2.$$

コレヲ(4)及ビ(5)ニ代入スレバ x 及ビ z ヲ得ル. ヨツテ求メル根ハ次ノ二組デアル.

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$$

例 6.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} x-y-z=2 & (1) \\ x^2+y^2-z^2=28 & (2) \\ xy=6 & (3) \end{cases}$$

解 1.　先ヅ(1)カラ z ヲ出シ,コレヲ(2)ニ入レレバ

$$x^2+y^2-(x-y-2)^2=28.$$

コレヲ簡約スレバ

$$xy+2(x-y)=16.$$

コレト(3)トヲ組合セテ解ケバ

$$x=6,\ \ y=1\quad 又ハ\quad x=-1,\ \ y=-6.$$

コノ値ヲ(1)ニ代入シテ z ヲ求メレバ,結局次ノ二組ノ根ヲ得ル.

$$\begin{cases}x=6\\ y=1\\ z=3\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-1\\ y=-6\\ z=3\end{cases}$$

解 2.　與ヘラレタ聯立方程式ヲ書キ直セバ

$$\begin{cases}x-y=z+2 & (1')\\ x^2+y^2=z^2+28 & (2')\\ xy=6 & (3')\end{cases}$$

$(1')^2-(2')$　ヲ作リ,簡約スレバ

$$-xy=2z-12.$$

コレト(3′)トカラ直チニ $z=3$ ヲ得ル.　コノ値ヲ(1′)及ビ(2′)ニ代入スレバ

$$\begin{cases}x-y=5\\ x^2+y^2=37\end{cases}$$

コレヲ解ケバ x 及ビ y ノ値ヲ得ル.

解 3.　先ヅ　$(2)-(3)\times 2$　ヲ作レバ

$$(x-y)^2-z^2=16.$$

卽チ　　$(x-y-z)(x-y+z)=16.$

ココニ(1)ヲ代入スレバ

$$x-y+z=8$$

トナル,コレト(1)カラ

$$x-y=5,\qquad z=3.$$

更ニコレヲ(3)ト組合セレバ x 及ビ y ノ値ヲ得ル.

例　題

1.　次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $\begin{cases}x-y=4\\ x^3-y^3=208\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12}\\ xy=24\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+y=a\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=b\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x^2+y^2=15-x\\ y(2x+1)=15\end{cases}$

(5) $\begin{cases}xy+x+y=11\\ x^2y+xy^2=30\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=91\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\end{cases}$

(7) $\begin{cases}\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=\dfrac{5}{9}\end{cases}$　　(8) $\begin{cases}x+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{2}\\ y+\dfrac{2}{x}=4\end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+y=63 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{41}{20} \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \\ xy+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

(11) $\begin{cases} (x+y)(x+z)=20 \\ (y+z)(y+x)=12 \\ (z+x)(z+y)=15 \end{cases}$　　(12) $\begin{cases} x(2y-3z)+63=0 \\ y(z-x)+6=0 \\ z(x-2y)-5=0 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} xy+x+y=29 \\ yz+y+z=23 \\ zx+z+x=19 \end{cases}$　　(14) $\begin{cases} x+y+2z=11 \\ xy+z^2=15 \\ x^2+y^2+5z^2=58 \end{cases}$

(15) $x+y+z=5,\quad x^2+y^2+z^2=9,\quad xyz=4$

2. 或ル人若干粁ノ道ヲ旅行スルニ 32 km ヲ行ツタ後,一時間ニ 1.6 km ヅツソノ速サヲ增シタタメ $\dfrac{1}{3}$ 時間早ク到着シタ. モシ初メカラコノ增シタ速サデ行ツタナラバ一時間早ク到着スルコトニナルトイフ. コノ道程ヲ求メヨ.

3. 三數ガアツテ,何レノ二ツノ相乘積モ殘リノ一ツニ等シイトイフ. 各數ヲ求メヨ.

4. 甲乙兩地間ノ距離ハ 616 km デアル. A 號飛行機ガ甲地ヲ出發シテ乙地ニ向ツタ後 1 時間ヲ經テ B 號飛行機ハ乙地ヲ出發シテ甲地ニ向ツタ. 而シテ途中行キ逢ツタ後 A 號ハ 2 時間 55 分デ乙地ニ着キ, B 號ハ 3 時間デ甲地ニ着イタ. 各飛行機ノ速サ如何.

17. 文字方程式應用問題

例 **1.** 甲ハ a 圓,乙ハ b 圓ヲモツテヰル. 今甲ノ所持金ヲ乙ノ所持金ノ n 倍ナラシメルニハ,兩人ノ間ニ如何ニ金ヲ受渡スレバ宜イカ.

解　今乙カラ甲ニ x 圓ヲ與ヘテ題意ノ如クナツタトスレバ,ソノトキ甲ノ所持金ハ $(a+x)$ 圓,乙ノ所持金ハ $(b-x)$ 圓デアルカラ,次ノ方程式ヲ得ル.

$$a+x=n(b-x).$$

コレヲ解ケバ　　$x=\dfrac{nb-a}{n+1}.$

故ニ,乙カラ甲ニ $\dfrac{nb-a}{n+1}$ 圓ヲ與ヘレバ宜イ.

ココニ $\dfrac{nb-a}{n+1}$ ガ正ナラバ實際乙カラ甲ニ金ヲ與ヘルノデアルケレドモ,モシ負ナラバ實ハ甲カラ乙ニ與ヘルコトトナル. 試ミニ學生自ラ次ノ數値ニヨツテ上ノ答ヲ驗シテ見ヨ.

(1) $a=10,\quad b=8,\quad n=2$

(2) $a=10,\quad b=5,\quad n=2$

(3) $a=10,\quad b=2,\quad n=2$

(4) $a=20,\quad b=25,\quad n=\dfrac{1}{2}$

例 **2.** 甲乙二種ノ米ガアツテ, 1 kg ノ價甲ハ a 圓,乙ハ b 圓デアル. 今甲 m kg ニ乙幾瓩ヲ混ズレバ 1 kg ニツキ c 圓ノ米トナルカ.

解 求メル瓩數ヲxトスレバ,混合米ノ瓩數ハ$m+x$デ,ソノ價ハ $(am+bx)$ 圓デアル. 然ルニ題意ニヨリコノ價ハ $c(m+x)$ 圓ニ等シクナケレバナラヌ. 故ニ

$$am+bx=c(m+x).$$

コレヲ解ケバ　$x=\dfrac{(a-c)m}{c-b}$.

故ニ答ハ　$\dfrac{(a-c)m}{c-b}$ kg トナル.

本題ニ於テハmハ正數ト考ヘテ宜イ. ヨツテ $a>c>b$ 又ハ $b>c>a$ ナラバコノ答ハ正デ,サウデナケレバ一般ニ負デアル. 負ナルトキハ本題ノ要求ガ不可能ナルコトヲ表ハス.

例ヘバ $a>b>c$ ナルトキ不可能ナル理ヲ題意ニツイテ直接ニ考ヘヨ.

モシ $a=c>b$ ナラバ如何.

モシ $a=c=b$ ナラバ如何.

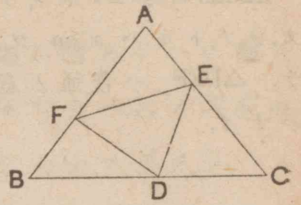
モシ $a>c=b$ ナラバ如何.

斯クノ如ク問題中ニアル文字ガ特別ナル値ヲ取ルトキハ,一般ノ解法ガ適用サレナイコトガアル. 又ソノ結果ニ對シテ特別ナル解釋ヲ與ヘナケレバナラヌコトモアル. コレラヲ一々檢査スルコトヲ**吟味**トイフ.

例 3. 次頁ノ圖ニ於テABCハ一邊aナル正三角形,又DEFハコレニ內接スル正三角形デ

$$\triangle DEF=m\triangle ABC \quad (0<m<1)$$

デアル. 線分AEノ長サヲ求メヨ.



解 AE$=x$ トスレバ,

AF$=a-x$ デアル.

△AEF カラ*

$$EF^2=AE^2+AF^2-2.AE.AF.\cos A$$
$$=x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\times\frac{1}{2}$$
$$=a^2-3ax+3x^2.$$

假設ニヨリ

$$m=\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{EF^2}{BC^2}=\frac{a^2-3ax+3x^2}{a^2}.$$

コレヲ書キ直セバ

$$3x^2-3ax+(1-m)a^2=0.$$

コレヲ解ケバ

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3(4m-1)}}{6}\times a.$$

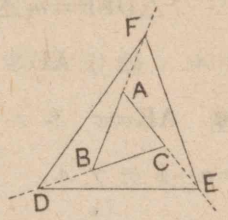
故ニ, $\frac{1}{4}<m<1$ ナルトキハ二根トモニ實數トナリ,且 $0<x<a$ トナルカラ,採用サレル.

$m=\frac{1}{4}$ ナルトキハ等根 $\frac{a}{2}$ トナリ,又 $m<\frac{1}{4}$ ナルトキハ虚根トナル.

注意 1. コレニヨツテ見レバ △DEF ノ面積ノトリ得ル最小値ハ $\frac{1}{4}$ △ABC デアル.

* 三角法ニヨラズニ,普通ノ面積定理ニヨルモ同ジ結果ヲ得ル.

注意 2. $m\geqq 1$ トシテモ實根ヲ得ルガ,ソノトキハ $x\geqq a$ 又ハ $x\leqq 0$ トナツテ, △DEF ハ普通ノ意味ノ内接形デハナイ.



例　題

1. 今年甲ハ a 歳,乙ハ b 歳デアル. 甲ノ年齢ガ乙ノ年齢ノ n 倍トナルノハ何時カ.
次ノ諸數ニツイテソノ結果ヲ驗セ.
(1) $a=48$,　$b=16$,　$n=2$
(2) $a=25$,　$b=4$,　$n=3$
(3) $a=20$,　$b=8$,　$n=3$
(4) 一般ニ $n=1$ ナルトキハ如何.

2. 鶴龜合セテ a 頭ヰテ,ソノ足數ハ b 本デアル. 鶴龜各幾頭カ. 又コノ問題ガ成立スルタメニハ a ト b トハ如何ナル關係ヲモタネバナラヌカ.

3. 甲乙二種ノ砂糖ガアツテ, 1kg ノ價甲ハ p 圓,乙ハ q 圓デアル. コレヲ混合シテ 1kg r 圓ノモノ $a$kg ヲ作ルニハ,各種幾瓩ヲ取ルベキカ.

4. n 時ノ後時計ノ兩針ガ始メテ相重ナル時刻ヲ求メヨ. 但シ n ハ 12 ヨリ大デナイ正ノ整數デアル.

5. 周圍 $2p$m ナル矩形ノ地面ガアル. 今ソノ一邊ヲ am 長クシ,コレニ隣ル邊ヲ bm 短クスレバ,面積ハ s 平方米増ス. モトノ各邊ノ長サヲ求メヨ.

6. 甲乙二人同額ノ資本ヲ以テ商業ヲ始メ,甲ハ a 割ヲ利シ,乙ハ b 割ヲ損シ,結局甲ノ所有金ハ乙ノ所有金ヨリ c 圓多クナツタ. 初メノ資本金ヲ求メヨ.

7. a 年前ニハ弟ノ年齢ハ兄ノ年齢ノ n 分ノ一デアツタガ,今年ハ m 分ノ一トナツタ. 兄弟ノ年齢各幾許カ.

8. △ABC ノ底 BC ヲ a, 高サヲ h トスル. 底邊上ニ一邊ヲモツ矩形ヲコノ三角形ニ内接セシメ,ソノ周ヲ $2l$ ニ等シカラシメルトキ,コノ矩形ノ面積ヲ求メヨ. 但シ $a>l>h$ トスル.

9. 半徑ガ夫々 a, b ナル二圓ガ外切スルトキ,コノ二圓及ビソノ共通外切線ニ切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ.

10. 半徑 a ナル半圓 O ニ,直徑 a ナル圓 C ガ内切シテヰル. 半圓 O ニ内切シ圓 C ニ外切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ.

11. 半圓 O ト圓 C トヲ前問ノ通リトシ,圓 O ニ内切シ圓 C ニ外切シ,且半圓 O ノ直徑ノ上ニ中心ヲモツ圓ノ半徑ヲ求メヨ.

雜　題 I.

1. $A+B+C=0$ ナルトキ,

$$A^3+B^3+C^3=3ABC.$$

2. 次ノ各等式ガ成立ツ.

(1) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

(2) $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$

$$=3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$$

(3) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

(4) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

$$+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

(5) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+u^2)$

$$=(ax+by+cz+du)^2+(bx-ay+dz-cu)^2$$

$$+(cx-dy-az+bu)^2+(dx+cy-bz-au)^2$$

3. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

(1) $x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz$

(2) $a^4(x+y)^2-2a^2b^2(x^2+y^2)+b^4(x-y)^2$

(3) $x^3-2a^2x+a^3$

(4) $(a+b-1)^3+2(a^3+b^3-1)+6ab$

(5) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$

4. 次ノ各組ノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ求メヨ.

(1) $3x^4+2x^3+4x^2-x+2,\quad 3x^4+4x^3+5x^2-2x+1$

(2) $2x^3-ax^2-a^3,\quad 3x^4-5ax^3+a^2x^2+a^4$

(3) $x^3+x^2-7x+2,\quad 2x^3-x^2-7x+2,\quad x^3-4x^2+4x$

(4) $x^3-4x^2+4x-3,\quad x^3-x^2-7x+3,\quad x^3-5x^2+9x-9$

(5) $2x^3-7x^2+7x-2,\quad 4x^3-13x^2+11x-2,$

x^4-3x^3+6x-4

5. 二ツノ式 $2x^3-x^2+x-6$ ト $6x^3-9x^2+10x-15$ トヲ同時ニ零ナラシメル x ノ値ヲ求メヨ.

6. 或ル數ト 6 トノ最小公倍數ハ 96 デアル. 或ル數ハ何カ.

7. x^2+mx+n ト x^2+nx+m トガ x ニ關スル一次ノ最大公約數ヲ有スルトキハ,ソノ最小公倍數ハ $x^3+(mn-1)x-mn$ デアル.

8. $4x^4-ax^3+bx^2-40x+16$ ガ完全平方式ナルタメニハ係數 a 及ビ b ノ値ヲ如何ニ定ムベキカ.

9. 次式ガ完全立方式トナルヤウニ係數 a 及ビ常數項 b ノ値ヲ定メヨ.

$$343x^6-441x^5-546x^4+603x^3+390x^2+ax+b$$

10. $y^2+5xy+mx^2+x+y-2$ ガ x, y ニツイテ一次ノ二因數ニ分解サレルタメニハ,m ノ値ヲ如何ニ定ムベキカ.

11. a, b, c ガ $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ根デ,且 $s=a+b+c$ ナルトキハ,

$$(s-a)(s-b)(s-c)=r-pq$$

デアル.

12. p, q, r ハ何レモ正數デ且 $p \neq r$ ナルトキ,

$$x^4+px^3+qx^2+rx+1=0,$$

$$x^4+rx^3+qx^2+px+1=0$$

ガ共通ナル根ヲモツナラバ,

$$p+r=q+2$$

デアル.

13. 143650 カラナルベク小サイ整數ヲ減ジテソノ殘リヲ完全平方ナラシメルニハ,減ズベキ整數如何.

14. 連續スル四ツノ整數ノ積ニ 1 ヲ加ヘレバ完全平方數トナル.

15. モシ代數式

$$x+\frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

ノ値ガ x ト y トヲ交換シテモ變ラナイトキハ,x ト z ヲ交換シテモ矢張リ變ラナイ. 但シ x, y, z ハ相等シクナイ數トスル.

16. 三ツノ整式 $x(1-y),\ y(1-z),\ z(1-x)$ ノ値ガ相等シイトキハ,コレラハ何レモ 1 ニ等シイ. 但シ x, y, z ハ互ニ相等シクナイトスル.

17. $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ ナルトキハ, x, y, z ノ中少クトモ一ツハ 1 ニ等シイ.

18. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1) $3x^3-14x^2+17x-6=0$

(2) $x^4-15x^2+10x+24=0$

(3) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$

(4) $\dfrac{x+3}{3-x}+\dfrac{x+6}{6-x}+\dfrac{x+9}{9-x}=3$

(5) $\dfrac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\dfrac{a+b-2x}{a-b}$

19. 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $x^3-y^3=26,\quad x^2y-xy^2=6$

(2) $x^2+y^2+x-y=32,\quad (x^2+y^2)(x-y)=87$

(3) $\dfrac{x^3}{y}-\dfrac{y^3}{x}=\dfrac{15}{2},\quad \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2}$

(4) $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3 \\ x-by+b^2z=b^3 \\ x-cy+c^2z=c^3 \end{cases}$　　(5) $\begin{cases} xz=y^2 \\ x+y+z=19 \\ x^2+y^2+z^2=133 \end{cases}$

(6) $x^2+2yz=12,\quad y^2+2zx=12,\quad z^2+2xy=12$

(7) $x-2=(3-2y)z,\quad 2x+1=(2+3y)z,\quad 3x-2=(5+4y)z$

(8) $x+y+z=9,\quad 2yz=3x,\quad x^2+y^2+z^2=29$

(9) $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{7}{x},\quad \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=\dfrac{8}{y},\quad \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{z}$

(10) $yz-f^2=cy+bz,\quad zx-g^2=az+cx,\quad xy-h^2=bx+ay$

20. 次ノ各方程式ヲ滿足スル實數 x, y ヲ求メヨ.

(1)　$(x^2+xy-12)^2+(xy-2y^2-1)^2=0$

(2)　$(x^2+1)(y^2+4)-8xy=0$

21. 直角三角形ガアツテ,ソノ周圍ハ 30 cm デ,ソノ面積ハ30平方糎デアル. 各邊幾糎ナルカ.

22. 二邊ノ和 5 cm, 底邊 4 cm,高サ 1.2 cm ナル三角形ノ二邊ノ長サ各如何.

23. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ和 m 及ビ斜邊ヘノ高サ h ヲ知ツテ,ソノ斜邊ノ長サヲ求メヨ.

24. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC=a 及ビ一鋭角 B ノ二等分線ノ長サ d ヲ知ツテ,邊 AB ノ長サヲ求メヨ.

25. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ差 $2d$ 及ビ周圍 $2l$ ヲ知ツテ,直角ノ二邊ノ長サヲ求メヨ.

26. 或ル人甲地カラ乙地ニ行クニソノ速サヲ毎時 a km トスレバ豫定ヨリ b 時間遲レ,又毎時 c km トスレバ豫定ヨリ d 時間早ク到着スルトイフ. 豫定ノ時刻ニ到着スルニハ速サヲ何程トスレバ宜イカ.

第二篇

級數

第一章　等差級數

18. 等差級數

一列ノ數ガアツテ,ソノ中ノ任意ノ一數ニ或ル一定ノ數ヲ加ヘタモノガ常ニソノ次ニアル數ニ等シイトキハ,コレラノ一列ノ數ヲ**等差級數**又ハ**算術級數**トイヒ,ソノ各數ヲ**項**トイフ. 最初ノ項ヲ**初項**トイヒ,項數ニ限リアルトキハ最後ノ項ヲ**末項**トイフ.

例ヘバ　1, 2, 3, 4, 5, ...　(1)

ニ於テハ,各數ニ 1 ヲ加ヘレバソノ次ニアル數ヲ得ル.

又　9, 6, 3, 0, −3, −6, ...　(2)

ニ於テハ各數ニ −3 ヲ加ヘレバソノ次ニアル數ヲ得ル.

故ニ(1),(2)ハ何レモ等差級數デアル.

等差級數ニ於テハ或ル項カラソノ直グ前ノ項ヲ減ジタ差ハ常ニ相等シイ,コレ卽チ等差級數ノ名アル所以デ,コノ一定ノ差ヲ**公差**トイフ.

上ノ例(1)ノ公差ハ 1, (2)ノ公差ハ -3 デアル.

等差級數ノ初項ヲ a トシ,公差ヲ d トスレバ,ソノ級數ハ $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ldots$

デ,最初カラカゾヘテ第 n 項ニ當ルモノハ

$$\boldsymbol{a+(n-1)d}$$

デアル. コノ式ニ於テ n ノ値ヲ順次ニ $1, 2, 3, \ldots\ldots$ ト置ケバ,級數ノスベテノ項ヲ得ル,故ニコレヲ**一般項**トイフ.

例 等差級數

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ldots$$

ノ公差,一般項及ビ第 100 項ヲ求メヨ.

解 公差ヲ d トスレバ

$$d=3-1=5-3=\cdots\cdots=2.$$

故ニ一般項卽チ第 n 項ハ

$$1+2(n-1)=2n-1.$$

第 100 項ハ

$$2\times100-1=199.$$

例題

1. 等差級數

$$2,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ \ldots\ldots$$

ノ第 150 項ヲ求メヨ.

2. 前題ノ級數ニ於テ末項ヲ -100 トスレバ,全體ノ項數如何.

3. 第 k 番ガ $4k-3$ ナル一列ノ數ハ等差級數デアル.

4. 第 3 項ガ 10, 第 10 項ガ 3 ナル等差級數ノ初項及ビ公差如何.

5. 7 ヨリ始メテ, 7 ノ倍數ノミヲ順次ニ列記スルトキハ,第 45 番目ノ數ハ何カ.

19. 等差中項

三數ガ等差級數ヲナストキハ,ソノ中間ノ一數ヲ兩端ノ二數ノ**等差中項**トイフ.

今 a, b, c ガ等差級數ヲナストスレバ, b ハ a ト c トノ等差中項デ,ココニ

$$b-a=c-b,$$

卽チ

$$b=\frac{a+c}{2}.$$

ヨッテ二數ノ等差中項ノコトヲ**相加平均**又ハ**算術平均**トモイフ.

一般ニ三ツヨリ多クノ數ガ等差級數ヲナストキニモ,ソノ兩端ヲ除イタ中間ノ諸數ヲ兩端ノ二數ノ等差中項トイフ.

今二數 a, b ノ間ニ m 箇ノ等差中項ガアルトスレバ, a ヲ初項トスルトキ b ハ第 $(m+2)$ 項ニ當ル. 故ニコノ級數ノ公差ヲ d トスレバ

$$b=a+(m+1)d,$$

卽チ　$$d=\frac{b-a}{m+1}.$$

故ニ m 箇ノ等差中項ハ次ノ如クデアル.

$$a+\frac{b-a}{m+1},\ a+\frac{2(b-a)}{m+1},\ a+\frac{3(b-a)}{m+1},\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots,\ a+\frac{m(b-a)}{m+1}.$$

コレヲ書キ直セバ

$$\frac{ma+b}{m+1},\ \frac{(m-1)a+2b}{m+1},\ \frac{(m-2)a+3b}{m+1},\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots,\ \frac{a+mb}{m+1}.$$

例　題

1. 5ト33トノ間ニ6箇ノ等差中項ヲ挿入セヨ.

2. a ト b トノ間ニ m 箇ノ等差中項ヲ挿入シ, a カラカゾヘテ第 k 番ニアルモノヲ求メヨ.

3. 前題ノ場合ニ於テ a カラカゾヘテ k 番目ノモノト, b カラ逆ニカゾヘテ k 番目ノモノトノ和ハ常ニ $a+b$ ニ等シイ.

4. 10ト或ル數トノ間ニ13箇ノ等差中項ヲ挿入シタ所ガ,ソノ中10カラカゾヘテ7番目ノモノハ0デアル. 或ル數トハ何カ.

20. 等差級數ノ和

項數 n ナル等差級數ノ初項ヲ a, 公差ヲ d トスレバ,末項ハ $a+(n-1)d$ デアル. 故ニコノ級數ノ總和ヲ S トスレバ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}.\quad(1)$$

今コノ末項ヲ l デ表ハシ,項ノ順序ヲ轉倒シテ書ケバ,

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+\{l-(n-1)d\}.\quad(2)$$

ヨッテ(1),(2)ノ兩式ヲ邊々相加ヘレバ,

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)=n(a+l)$$

故ニ　$$S=\frac{n(a+l)}{2}.\quad(3)$$

コレ卽チ等差級數ノ總和ヲ求メル一ツノ公式デアル.

(3)ニ於テ $l=a+(n-1)d$ ヲ代入スレバ,更ニ次ノ公式ヲ得ル.

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.\quad(4)$$

例 **1.** 自然數 1, 2, 3, …… ノ 100 マデノ和ヲ求メヨ.

(正ノ整數ノコトヲ**自然數**トモイフ.)

解　公式(3)ニ於テ

$$a=1,\quad l=100,\quad n=100$$

トスレバ,

$$S=\frac{100(100+1)}{2}=5050.$$

例 **2.** 等差級數 36, 32, 28, …… ノ幾項ノ和ガ 156 トナルカ.

解 公式(4)ニ於テ

$$S=156, \quad a=36, \quad d=-4$$

トスレバ,

$$156=\frac{n}{2}\{72-4(n-1)\},$$

卽チ $n^2-19n+78=0.$

コレヲ解ケバ $n=6$ 又ハ $n=13.$

故ニ求メル項數ハ 6 又ハ 13 デアル. (兩根共ニ採用サレル. 學生自ラコノ結果ヲ驗セ.)

例題

1. 1 カラ始メテ 3, 5, 7 等順次ニ奇數ヲ加ヘテ行クトキハ,ソノ和ハ常ニ完全平方數デアル.
2. 等差級數 5, 13, 21, …… ノ 10 項ノ和ヲ求メヨ.
3. 初項 12, 公差 −3 ナル等差級數ノ 35 項ノ和ヲ求メヨ.
4. 第 n 項ガ $2n+3$ ナル級數ノ m 項ノ和ヲ求メヨ.
5. 初項ガ 105, 第 14 項ガ 7 ナル等差級數ノ第 5 項カラ第 20 項マデノ和ヲ求メヨ.
6. 13 ト 27 トノ間ニ若干箇ノ等差中項ヲ挿入シ, 13 及ビ 27 ト合セテソノ總和ガ 140 トナルヤウニスルニハ, 挿入スベキ項數及ビ公差如何.
7. 200 ト 300 トノ間ニアル 7 ノ倍數ノ總和ヲ求メヨ.
8. 三桁ノ整數デ 17 ヲ以テ除スルトキ剩餘 3 ヲ得ルモノノ總和如何.

9. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ナル三數ハ等差級數ヲナスコトヲ確カメ, コレヲ第 10 項マデ繼續シタトキノ總和ヲ求メヨ.
10. 21, 18, 15, …… ノ幾項ノ和ガ 84 トナルカ.
11. 30, 35, 40, …… ノ幾項ノ和ガ 105 トナルカ.
12. 一直線上ニ 3m ヅツ隔テテ 10 箇ノ石ヲ置イテアル. 今ソノ一端ノ石ノ所ニ立ツテヰル人ガスベテノ石ヲソノ所ニ運ビ集メルニハ, 全體デ幾米ノ距離ヲ步ムベキカ. 但シ一度ニ一箇ヨリ多クハ運ビ得ナイモノトスル.
13. $1+5+9+\cdots\cdots$ ノ和ヲ 190 ニ等シクスルニハ幾項ヲ加ヘレバ宜イカ.
14. $2\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+6\frac{3}{4}+\cdots\cdots$ ノ 23 項ノ和ヲ求メヨ.
15. $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ.
16. 甲ハ毎月 5 圓ヅツ貯金シ, 乙ハ第一月ニ 1 圓, 第二月ニ 2 圓, 第三月ニ 3 圓等, 毎月 1 圓ヅツ增シテ貯金スルモノトスレバ, 第幾月ニナレバ兩人ノ貯金額ガ相等シクナルカ.
17. 甲乙兩人同時ニ同地ヲ發シ同方向ニ進ムニ, 甲ハ初日ニ 48 km, 以後毎日 $1\frac{1}{3}$ km ヅツ減ジテ步ミ, 乙ハ毎

日 32km ヲ歩ムトスレバ出發後幾日目ニ兩人相會スルカ.

18. 或ル凸多角形ノ内角ガ等差級數ヲナシ,ソノ最小角ハ 120°, 公差ハ 5° デアル. ソノ邊數如何.

19. 20ヲ四部ニ分ケテ等差級數ヲナサシメ,ソノ第一第四ノ乘積ト第二第三ノ乘積トノ比ヲ 2:3 ニ等シクスレバ,四數各如何.

20. 等差級數ヲナス四ツノ整數ガアツテ,ソノ和ハ24デ,ソノ積ハ945デアル. コノ四ツノ整數ヲ求メヨ.

第二章 等比級數

21. 等比級數

一列ノ數ガアツテ,ソノ中ノ任意ノ一數ニ或ル一定ノ數ヲ乘ジタモノガ常ニソノ次ニアル數ニ等シイトキハ,コレラノ一列ノ數ヲ**等比級數**又ハ**幾何級數**トイフ.

例ヘバ $1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad \ldots\ldots \qquad (1)$

$12,\quad -4,\quad \frac{4}{3},\quad -\frac{4}{9},\quad \ldots\ldots \qquad (2)$

ノ如キハ何レモ等比級數デアル.

項,初項,末項等ノ語ノ意味ハ等差級數ニ於ケルト同ジデアル.

等比級數ニ於テハ或ル項ノソノ直グ前ノ項ニ對スル比ハ常ニ相等シイ,コレ卽チ等比級數ノ名アル所以デ,コノ一定ノ比ヲ**公比**トイフ.

上ノ例(1)ノ公比ハ2,(2)ノ公比ハ $-\frac{1}{3}$ デアル.

一般ニ等比級數ノ初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバソノ級數ハ $\qquad a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots\ldots$

デ,第 n 項ハ

$$ar^{n-1}.$$

コレ卽チ**一般項**ノ式デアル.

例題

1. 初項10,公比 $\frac{1}{2}$ ナル等比級數ヲ第5項マデ書ケ.
2. 第 n 番ガ $(-1)^n\times2\times5^{n-1}$ ナル一列ノ數ガアル. ソノ第3番カラ第7番マデヲ書ケ. コレハ等比級數ナルヤ否ヤ.
3. 第3項ガ18デ,第4項ガ54ナル等比級數ノ初項及ビ公比ヲ求メヨ.

22. 等比中項

三數ガ等比級數ヲナストキハ,ソノ中間ノ一數ヲ兩端ノ二數ノ**等比中項**トイフ.

今 a, b, c ガ等比級數ヲナストスレバ, b ハ a ト c トノ

等比中項デ,ココニ

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \qquad \text{卽チ} \qquad b^2=ac.$$

從ツテ $$b=\pm\sqrt{ac}.$$

ヨツテ二數ノ等比中項ノコトヲ**相乘平均**又ハ**幾何平均**トモイフ.

三ツヨリ多クノ數ガ等比級數ヲナストキニモ,ソノ兩端ノ二數ヲ除イタ中間ノ諸數ヲ兩端ノ二數ノ等比中項トイフ.

今二數 a, b ノ間ニ m 箇ノ等比中項ガアルトスレバ, b ハ a カラ數ヘテ第 $(m+2)$ 項ニ當ル. 故ニコノ級數ノ公比ヲ r トスレバ

$$b=ar^{m+1} \qquad \text{從ツテ} \qquad r^{m+1}=\frac{b}{a}.$$

故ニ r ハ $\frac{b}{a}$ ノ $(m+1)$ 乘根デアル. ヨツテ m 箇ノ等比中項ハ $ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots, ar^m$ ノ r ニ $\frac{b}{a}$ ノ $(m+1)$ 乘根ヲ代入シタモノデアル.

例ヘバ $a=7,\ b=567,\ m=3$ トスレバ, $r=\pm3,\ \pm3i$ デ,從ツテ求メル等比中項ハ次ノ四通リデアル.

$21,$	$63,$	189
$-21,$	$63,$	-189
$21i,$	$-63,$	$-189i$
$-21i,$	$-63,$	$189i$

注意 二數ノ等比中項ハ常ニ正負二通リアルコトヲ忘レテハナラヌ. 而シテ a, b ガ同符號ノ數デナケレバ,ソノ等比中項 $\pm\sqrt{ab}$ ハ實數デハナイ.

一般ニ二數 a, b ノ間ニ m 箇ノ等比中項ヲ挿入スルトキ,モシ虚數ヲモ許セバ $m+1$ 通リノ等比中項ヲ得ル. ケレドモ以下特ニ斷ハラナイトキハ常ニ實數ナルモノノミヲ取ルコトトスル.

例題

1. 7 ト 112 トノ間ニ 3 箇ノ等比中項ヲ挿入セヨ.
2. a, b ノ間ニ m 箇ノ等比中項ヲ挿入シタトキ, b カラ逆ニ數ヘテ k 番目ニアルモノハ何カ.
3. 前題ニ於テ a カラカゾヘテ k 番目ノモノト, b カラ逆ニカゾヘテ k 番目ノモノトノ積ハ何カ.

23. 等比級數ノ和

項數 n ナル等比級數ノ初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ,末項ハ ar^{n-1} デアル. 故ニコノ級數ノ總和ヲ S トスレバ

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}. \qquad (1)$$

コノ兩邊ニ r ヲ乘ズレバ

$$Sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n. \qquad (2)$$

(1), (2) ヲ邊々相減ズレバ

$$S(1-r)=a-ar^n.$$

故ニ $$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}. \qquad (3)$$

或ハ　　$S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$.　　(4)

コレ卽チ等比級數ノ總和ヲ求メル公式デ, $r<1$ ナルトキハ(3)ヲ, $r>1$ ナルトキハ(4)ヲ用ヰルガ便利デアル.

モシ $r=1$ ナルトキハ公式(3)及ビ(4)ハ成立シナイ. ケレドモコノ場合ニハ

$$S=a+a+a+\cdots\cdots+a=na$$

デアルカラ直チニ總和ガ得ラレル.

注意　(3), (4)ニ於テ初項ヲ a^{n-1}, 公比ヲ $\pm\dfrac{b}{a}$ ト置キ少シク變形スレバ,次ノ重要ナル公式ヲ得ル.

n ガ任意ノ正ノ整數ナルトキ

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1}).$$

特ニ n ガ偶數ナラバ

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots-b^{n-1}).$$

又 n ガ奇數ナラバ

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+b^{n-1})$$

(コレラノ公式ハ剩餘定理(第3節)ニヨツテモ證明サレル).

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),\qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

等ハ上ノ公式ノ特別ナル場合デアル.

例　題

1. $1+2+4+8+\cdots\cdots$ ノ10項ノ和ヲ求メヨ.
2. $1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots\cdots$ ノ第5項カラ第20項マデノ和ヲ求メヨ.

3. 初項 a, 末項 l, 公比 r ナル等比級數ノ總和ヲ S トスレバ,

$$S=\frac{a-lr}{1-r}=\frac{lr-a}{r-1}.$$

4. n 項ノ和ガ $a(1+a)\{1-a^n\div(1+a)^n\}$ ニ等シイ等比級數ノ初項及ビ公比ヲ求メヨ.
5. 等比級數ノ第 n 項マデノ和ガ S, 第 $2n$ 項マデノ和ガ t ナルトキ,第 $3n$ 項マデノ和ハ

$$\frac{S^2-St+t^2}{S}.$$

6. 次ノ等比級數ノ和ヲ求メヨ.

　(1)　$1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\cdots\cdots+\dfrac{64}{729}$

　(2)　$4+0.8+0.16+\cdots\cdots+0.00001024$

7. 或ル等比級數ノ第3項ハ2デ,第6項ハ $-\dfrac{1}{4}$ デアル. コノ級數ノ初項カラ第10項マデノ和ヲ求メヨ.
8. 或ル等比級數ノ第10項マデノ和ハ第5項マデノ和ノ244倍ニ等シイ. コノ級數ノ公比ヲ求メヨ.

24.　無限等比級數

項數ガ無限ナル級數ヲ**無限級數**トイヒ,ソノ級數ガ等比級數ナルトキハ**無限等比級數**トイフ.

前節ニ得タ公式(3)ハ次ノ如クニ書キ直スコトガ出來ル.

$$S=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

ココニ公比 r ノ絶對値ガ 1 ヨリ大ナルトキハ項數 n ヲ增スニ從ツテ總和 S ノ絶對値モ亦次第ニ增大スルコト明カデアル.

ケレドモ r ノ絶對値ガ 1 ヨリ小ナルトキハコレト異ナル. 1 ヨリ小ナル正數ハコレヲ二乘,三乘等高イ羃ニスレバスル程マスマス小サクナルカラ項數 n ヲ增スニ從ツテ,上式ノ右邊ノ第二項ナル $\frac{ar^n}{1-r}$ ノ絶對値ハ漸次小サクナル. 故ニ結局 n ヲ十分大ニスレバ,S ヲ $\frac{a}{1-r}$ ニ何程デモ近クスルコトガ出來ル. コノ事實ヲ次ノ如クニイヒ表ハス.

初項ガ a デ,公比 r ノ絶對値ガ 1 ヨリ小ナル等比級數ノ和ハ,項數ガ限リナク大ナルトキ $\frac{a}{1-r}$ ナル**極限値**ヲモツ.

或ハ更ニ略言シテ,斯クノ如キ無限等比級數ノ和ハ $\frac{a}{1-r}$ デアルトモイフ.

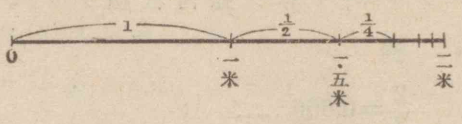
上ノ事實ヲ式デ書ケバ次ノ如クデアル.

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots=\frac{a}{1-r}\quad(-1<r<1)$$

例　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

〔**圖解**〕例ヘバ 1 ヲ 1m ノ長サトスレバ, $\frac{1}{2}$ ハ $\frac{1}{2}$m, $\frac{1}{4}$

ハ $\frac{1}{4}$m 等デ,コノ級數ヲ無限ニ續ケレバソノ和ガ 2m ニ限リナク接近スルコトハ次ノ圖ヲ見テ知ラレル.



例　題

1. 次ノ無限等比級數ノ和ヲ求メヨ.

　(1)　$1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$

　(2)　$9-6+4-\cdots\cdots$

　(3)　初項ガ13デ,第 3 項ガ $\frac{1}{13}$ ナルトキ

2. 線分 $A_0A_1(=2\text{m})$ ヲ直徑トスル第一ノ半圓ヲ畫キ,ソノ直徑上ニ A_1A_2 ヲ A_0A_1 ノ五分ノ四ニ取リ,A_1A_2 ヲ直徑トスル第二ノ半圓ヲ第一ノ半圓ノ反對ノ側ニ畫キ,次ニソノ直徑上ニ A_2A_3 ヲ A_1A_2 ノ五分ノ四ニ取リ,A_2A_3 ヲ直徑トスル第三ノ半圓ヲ第二ノ半圓ノ反對ノ側ニ畫ク. 斯クシテ交互ニ A_0A_1 ノ兩側ニ半圓ヲ無限ニ畫イテ渦狀線ヲ作レバ,ソノ渦狀線ノ長サ何程トナルカ. 又渦狀線ノ終極ノ端ハ A_0 ヲ距ルコト幾許デアルカ.

25. 循環小數

無限等比級數ノ和ヲ求メルコトヲ應用シテ,循環小數

ヲ分數ニ直スコトガ出來ル.

或ル分數ヲ小數ニ直スニハ,ソノ分子ヲ分母デ割レバ宜イ. 然ルニソノ割リ算ヲ如何程續ケテモ割リ切レナイコトガアル. 例ヘバ

$$\frac{2}{3}=0.666\ldots\ldots$$

斯クノ如キ場合ニハソノ小數ハ必ズ循環小數トナルモノデアル. 何トナレバ,割リ算ノ一段毎ニ生ズル餘リハ常ニ除數(卽チ分數ノ分母)ヨリ小サイカラ,何時マデモ割リ算ヲ續ケル中ニハツヒニ同ジ餘リガ再ビ表ハレテ來ル,ココニ至ツテ商ノ數字ハ循環シ始メルコトトナル.

故ニ分數ヲ小數ニ直セバ,ソノ結果ハ限リアル位數ノ小數(卽チ有限小數)トナルカ又ハ循環小數トナル. 然ルニ有限小數ハ10卽チ2×5ノ或ル冪ヲ分母トスル分數ニ等シイカラ,有限小數ニ等シイ分數ハコレヲ既約分數トスルトキハソノ分母ニ2及ビ5ヨリ他ノ素因數ヲモツコトハナイ.

分母ニ2及ビ5ヨリ他ノ素因數ヲモツ既約分數ヲ小數ニ直セバ循環小數トナル.

分母ニ2及ビ5ヨリ他ノ素因數ヲモタナイ分數ヲ小數ニ直セバ,有限小數トナル.

例 $\frac{13}{15}=\frac{13}{3\times5}=0.8666\ldots\ldots$ (循環小數)

$\frac{13}{20}=\frac{13}{2^2\times5}=\frac{13\times5}{2^2\times5^2}=\frac{65}{10^2}=0.65$ (有限小數)

サテ有限小數ヲ分數ニ直スコトハ算術デ知ル如ク容易デアルカラココニ說カナイ.

循環小數ヲ分數ニ直スニハ,前節ノ公式ニヨリ次ノ如クニスル.

例 1. $0.\dot{4}=\frac{4}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\cdots\cdots$

$$=\frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{10-1}=\frac{4}{9}.$$

例 2. $1.\dot{2}5\dot{4}=1+\frac{254}{1000}+\frac{254}{1000^2}+\frac{254}{1000^3}+\cdots\cdots$

$$=1+\frac{\frac{254}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=1+\frac{254}{1000-1}=1\frac{254}{999}.$$

一般ニ小數第一位カラ直チニ循環部ガ始マル循環小數ヲ分數ニ直スニハ,循環部ノ數字ヲソノママナラベタ數ヲ分子トシ,循環部ノ位數ダケ9ヲ列記シタ數ヲ分母トスレバ宜イ.

例 3. $3.2\dot{4}1\dot{6}=3+0.2\dot{4}1\dot{6}=3+(2.\dot{4}1\dot{6}\div10)$

$$=3+\left(2\frac{416}{999}\div10\right)=3+\frac{2\times999+416}{9990}$$

$$=3+\frac{2(1000-1)+416}{9990}=3+\frac{2000+416-2}{9990}$$

$$=3+\frac{2416-2}{9990}=3+\frac{2414}{9990}\left(=3\frac{1207}{4995}\right)$$

循環シナイ小數位ヲ含ンデヰル循環小數ヲ分數ニ直スニハ,循環シナイ部分ニ循環部ヲ一通リ連記シタ整數カラ循環シナイ部分ニ當ル整數ヲ引イタ差ヲ分子トシ,循環部ノ位數ダケ9ヲ列記シコレニ循環シナイ部分ノ位數ダケ0ヲ添ヘタ數ヲ分母トスレバ宜イ.

注意 1. 整數及ビ分數ヲ總稱シテ**有理數**トイフ. ソノ特徴ハコレヲ小數ニ化シタ結果ガ有限小數又ハ循環小數トナルコトデアル. 循環セザル無限小數デ表サレル數ヲ**無理數**トイヒ,有理數ト無理數トヲ總稱シテ**實數**トイフ.

- 實數
  - 有理數
    - 正ノ整數 (自然數)
    - 正ノ分數
    - 零
    - 負ノ整數
    - 負ノ分數
  - 無理數
    - 正ノ無理數
    - 負ノ無理數

注意 2. $\sqrt{2}=1.4142\ldots\ldots$ ノ如キ不盡根數ハ,小數位ガ限リナク續クケレドモ循環小數デハナイ.

何トナレバモシ循環小數デアルナラバ本節ノ方法ニヨツテコレヲ分數ニ直スコトガ出來ル筈デアルケレドモ, $\sqrt{2}$ ハ決シテ分數デ表ハサレナイコトハ次ノ如クニ證明サレル.

今 a ト b トヲ互ニ素ナル二ツノ正ノ整數トシ,

$$\sqrt{2}=\frac{b}{a} \qquad (1)$$

トスル. 然ルトキハ

$$2a^2=b^2 \qquad (2)$$

トナルカラ b ハ 2 ナル約數ヲモツ. 故ニ

$$b=2c \quad (c\text{ ハ或ル正ノ整數})$$

ト置キ(2)ニ代入シテ變形スレバ,

$$a^2=2c^2. \qquad (3)$$

故ニ a モ亦 2 ナル約數ヲモツコトトナリ, a ト b トガ互ニ素ナルコトノ假設ニ反スル. ヨツテ(1)ハ成立タナイ.

例　題

1. 次ノ各循環小數ヲ分數ニ直セ.

$$0.\dot{2}0\dot{3}, \qquad 1.4\dot{7}\dot{8}, \qquad 20.0\dot{0}57\dot{2}$$

2. 次ノ各式ヲ計算セヨ.

$$2.3\dot{1}\times 0.45\dot{6}\dot{2}, \qquad 0.2\dot{4}\dot{0}\div 7.5\dot{1}$$

$2\frac{10234-10}{99990}$

2

雜　題　II.

1. 等差級數ノ第 $n-3$ 項,第 $n-2$ 項ヲ夫々 p, q トシ第 n 項ヲ p, q デ表ハセ.

2. 等差級數ノ第 3 項,第 $p+2$ 項,第 $3p$ 項ガ公比ガ 1 デナイ等比級數ヲナストキハ,第 $p-2$ 項ハ初項ノ 2 倍デアル.

3. 一列ノ數ニ於テ,ソノ各數ノ逆數ガ等差級數ヲナス

トキニハ,モトノ一列ノ數ヲ**調和級數**トイフ. 次ノ調和級數ヲ第6項マデ書ケ.

(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

(2) 6, 3, 2, ……

4. x, y, z ガ調和級數ヲナストキ,次ノ式ノ値如何.

$$\frac{y}{y-x}+\frac{y}{y-z}$$

5. 二數 a, b ノ調和中項ヲ求メヨ.* 又二數 a, b ノ間ニ m 箇ノ調和中項ヲ挿入セヨ.

6. 二ツノ相異ナル正數ノ等差中項ハ等比中項ヨリモ大デアル.

7. 二數 a, b ノ等差,等比及ビ調和中項ヲ夫々 A, G 及ビ H トスレバ,

$$AH=G^2.$$

又 a, b ヲ共ニ正デ相等シクナイモノトシ,G ヲ正ナル等比中項トスレバ,

$$A>G>H.$$

8. a, b, c, d ガ等比級數ヲナストキハ,

$$(a-c)^2+(b-d)^2+(b-c)^2=(a-d)^2.$$

9. a, b, c ガ等差級數ヲナシ, x ガ a ト b トノ等比中項,

* 調和級數ニ於テ兩端ノ二數ヲ除イタ中間ノ諸數ヲソノ兩端ノ二數ノ**調和中項**トイフ.

y ガ b ト c トノ等比中項ナラバ, x^2, b^2, y^2 ハ等差級數ヲナス.

10. a^2, b^2, c^2 ガ等差級數ヲナストキハ,

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$$

モ亦等差級數ヲナス.

11. 次ノ二次方程式ガ等根ヲ有スルタメニハ, a, b, c ガ等差級數ヲナサネバナラヌ.

$$(a-b+c)x^2+2(a+c)x+4b=0$$

又ソノ等根ヲ求メヨ.

12. 次ノ二次方程式ノ根ガ實數ナルタメニハ, a, b, c ハ等比級數ヲナサネバナラヌ.

$$(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$$

又ソノ實根ハソノ級數ノ公比デアル.

13. 次ノ式ノ各括弧內ヲ夫々一項トシテ,第 n 項內ノ和及ビ(1)カラ第 n 項マデノ和ヲ求メヨ.

$$(1)+(2+3)+(4+5+6)+\cdots\cdots$$

14. 或ル數 a ヲ先ヅ r 倍シテ d ヲ加ヘ,次ニ前回ニ得タ數ヲ r 倍シテ d ヲ加ヘ,順次斯クノ如キ手續ヲ繰リ返スコト n 回ノ後ニ得ル數 l 及ビ各回ノ終リニ得タ數ノ總和 S ヲ求メヨ. 又 $a=1000$, $r=2$, $d=100$, $n=10$ トシテ l 及ビ S ノ數値ヲ算出セヨ.

15. 級數ガアツテ,奇數番目ノ項ハ等差級數ヲナシ,偶數

番目ノ項ハ等比級數ヲナシ,且ソノ初メノ四項ハ 1, 2, 3, 4 デアル. ソノ初メノ n 項ノ和ヲ求メヨ. 但シ n ハ奇數デアル.

16. 729 ト 64 トノ間ニ 5 箇ノ等比中項ヲ挿入スルトキ, 729 カラ數ヘテ 4 項目ノ數如何.

17. 甲乙兩人同所ヲ同時ニ出發シ同方向ニ行クニ每日ノ行程甲ハ終始 28km デアルガ,乙ハ初日 40km, 次ノ日 38km 等次第ニ斯クノ如ク每日 2km ヅツ減少スル. 甲ノ乙ニ追ヒツクノハ何日目カ.

18. 長サ am ノ物カラ,初メソノ $\frac{1}{3}$ ヲ取リ去リ,次ニソノ殘リノ $\frac{1}{3}$ ヲ取リ去リ,次ニ又ソノ殘リノ $\frac{1}{3}$ ヲ取リ去リ次第ニ斯クノ如クニ限リナク進ムトキハ,取リ去ツタ部分ノ長サ總計幾米カ.

19. 一邊ノ長サ a ナル正三角形ノ三邊ノ中點ヲ頂點トスル三角形ヲ作リ,次ニコノ三角形ニツイテ更ニ同樣ノ作圖ヲナシ,コノ作圖ヲ限リナク續ケテ得ル所ノ無數ノ三角形ノ面積ノ和ヲ求メヨ. 但シモトノ正三角形ハ算入シナイモノトスル.

20. 若干箇ノ碁石ガアツテ丁度正三角形ニ排列シ得ル. 又コレニ 4 箇ヲ加ヘレバ一ツノ矩形ニ排列シ得テ,ソノ一邊ノ數ハ前ノ正三角形ノ一邊ノ數ニ等シク,他ノ一邊ノ數ハコレヨリ 3 箇少イ. 碁石ノ數幾何

カ.

21. 矩形ノ地ガアツテ,短邊ハ對角線ヨリ 15m ヲ減ジタモノノ半ニ等シク,短邊ト長邊トノ和ハ對角線ヨリモ 20m 長イ. 短邊,長邊及ビ對角線ノ長サ各如何.

22. 或ル三角形ノ底邊ハ 28cm, 高サハ 22cm デアル. コノ三角形ニ內接スル正方形ノ一邊ノ長サ如何. 但シ正方形ノ一邊ハ三角形ノ底邊ノ上ニアルモノトスル.

23. 大中小三ツノ球ガアツテ,ソノ直徑ノ和ハ 12cm デ,又大球ノ表面積ハ他ノ二ツノ表面積ノ和ニ等シク,又三ツノ球ノ體積ノ和ハ直徑 6cm ノ球ノ體積ニ等シイ. 各球ノ直徑ハ幾糎カ.

24. 二邊ガ a, b デ斜邊ガ c ナル直角三角形ノ內接圓及ビ外接圓ノ直徑ヲ夫々 d 及ビ D トスル. a, b, c ガ等差級數ヲナストキ, d, a, b, D ハ如何ナル級數ヲナスカ.

25. 直角三角形ノ周圍ガ最小邊ノ k 倍デアル. 今コノ三邊ガ等差級數ヲナストスレバ k ノ値如何.

第三篇

對數

第一章 一般ノ指數

26. 分數ノ指數

一般ニ或ル數ノ冪ノn乘根ヲ求メルニハ,モシソノ指數ガnデ割リ切レルトキハ,ソノ指數ヲnデ割レバ宜イ.

例ヘバ

$$\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a,$$

$$\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2,$$

$$\sqrt[n]{a^{kn}}=a^{\frac{kn}{n}}=a^k.$$

即チmガnデ割リ切レルトキハ次ノ公式ガ成立スル.

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

モシmガnデ割リ切レナイトキハ,コノ公式ノ右邊ニ分數ナル指數ヲ生ズルカラ,今マデ知ツテヰル範圍デハ意味ノナイモノトナル. ヨツテココデ新タニ次ノ如ク定義スル.

mガnデ割リ切レナイ場合ニモナホ$a^{\frac{m}{n}}$ハ$\sqrt[n]{a^m}$ノコトヲ表ハスモノトスル.

斯ク定メレバmガnデ割リ切レルトキモ,割リ切レナイトキモ,常ニ

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

今後常ニコノ定義ニヨツテ分數ノ指數ヲ用ヰルコトトスル. 例ヘバ

$$a^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}.$$

$\sqrt{25}$

例題

1. 次ノ各冪ノ値ヲ求メヨ.

$$25^{\frac{1}{2}},\quad 8^{\frac{2}{3}},\quad 256^{\frac{3}{4}},\quad (-64)^{\frac{4}{3}}$$

2. aノ平方ノ五乘根,b^2ノ四乘根ノ七乘ヲ各冪ノ形ニ書ケ.

3. $a^{2.5}$ノ意味如何.

27. 零又ハ負ナル指數

m及ビnガ正ノ整數デ,$m>n$ナルトキハ

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}. \qquad (1)$$

モシ $m=n$ ナルトキニモ(1)ヲ成立セシメヨウトスレバ

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

即チ $1=a^0$

トナル. ヨッテ次ノ如クニ定義スル.

一般ニ或ル數ノ0乘ハ常ニ1デアル.

即チ $$a^0=1. \qquad (2)$$

モシ $m<n$ ナルトキ,例ヘバ $n=m+p\,(p>0)$ ナルトキニモナホ(1)ヲ成立セシメヨウトスレバ,

$$\frac{a^m}{a^{m+p}}=a^{m-(m+p)},$$

即チ $$\frac{1}{a^p}=a^{-p}$$

トナル. ヨッテ次ノ如クニ定義スル.

一般ニ或ル數ノ $-p$ 乘冪トハソノ數ノ p 乘冪ノ逆數ノコトデアル.

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}. \qquad (3)$$

又コノ定義ハ p ガ分數ナルトキニモ適用スルモノトスル. 例ヘバ

$$a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}.$$

注意 1. (1)ノ眞ナルコトハ m, n ガ正ノ整數デ,且 $m>n$ ナルトキニノミ證明サレタモノデアル. 本節ニ於テ $m=n$ 及ビ $m<n$ ナル場合ニ(1)ナル式ヲ用ヰタノハ,試ミニ斯ク置イテ a^0 及ビ a^{-p} ノ意味ヲ定メル定義ノ根據ヲ示シタニ過ギナイ. コレデ(2)及ビ(3)ノ眞ナルコトヲ「證明」シタノデハナイ. (2)及ビ(3)ハ定義デアルカラソノ眞偽ヲ問ハルベキ性質ノモノデハナイ.

注意 2. 本節ノ定義ノ結果トシテ公式(1)ハ今後 m, n ノ何レガ大ナリトスルモ常ニ用ヰラレルコトトナル.

注意 3. 公式(1)ハ元來 $a\neq0$ ト考ヘナケレバ成立シナイモノデアルカラ,本節ノ定義(2),(3)等ニ於テモ矢張リ $a\neq0$ トスベキコト勿論デアル. 故ニ a^0 ガ1デアルトイフノハ a ガ0デナイトキニ限ルモノデ, 0^0 ハ全然意味ガナイ.

例題

次ノ各冪ノ値ヲ求メヨ. $\sqrt[3]{27}$

$$27^{-\frac{2}{3}}, \qquad (8^{-2})^{\frac{1}{3}}, \qquad 32^{-\frac{3}{5}}$$

28. 一般ノ指數ノ法則

指數ガ正ノ整數ナル場合ニ證明サレタ指數ノ法則

$$a^ma^n=a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

$$(ab)^n=a^nb^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

等ハ,指數ノ意味ガ前二節ニヨッテ擴張サレタ後ニモナホ成立スルモノデアル. 次ニソノ證明ノ一例ヲ示ス.

例ヘバ $$a^ma^n=a^{m+n}$$

ニ於テ, m 又ハ n ガ負ノ整數デモ成立スルコトヲ證明スルニハ,試ミニ $m=-m'$ $(m'>0)$, $n>0$ トスレバ,前節ノ定義

及ビ注意 2 ニ述ベタコトニヨリ,

$$a^m a^n = a^{-m'} a^n = \frac{1}{a^{m'}} a^n = \frac{a^n}{a^{m'}}$$

$$= a^{n-m'} = a^{n+m} = a^{m+n}.$$

モシ又 $m=-m'\ (m'>0)$, $n=-n'\ (n'>0)$ トスレバ,

$$a^m a^n = a^{-m'} a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'} a^{n'}}$$

$$= \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-(m'+n')} = a^{m+n}.$$

次ニ, m ガ分數ナル場合ヲ考ヘテ $m=\frac{p}{q}$ トシ, ココニ p ハ正又ハ負ノ整數, q ハ正ノ整數トシ, 又 n ハ整數デアルトスレバ,

$$a^m a^n = a^{\frac{p}{q}} a^n = \sqrt[q]{a^p}\, a^n = \sqrt[q]{a^p a^{nq}}$$

$$= \sqrt[q]{a^{p+nq}} = a^{\frac{p+nq}{q}} = a^{\frac{p}{q}+n}$$

$$= a^{m+n}.$$

ソノ他ノ場合ノ證明モコレニ準ズル.

既ニ上記ノ諸公式ガ成立スレバ, コレニヨツテ一般ノ指數ノ冪ヲ含ム式モ正ノ整數ノ指數ノ場合ト同樣ニ取扱ツテ計算スルコトガ出來ル.

$\boxed{\text{例}}$ $(ab^{-2}c^3)^{\frac{1}{3}} \div (a^3 b^2 c^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}$

$$= a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}} c \div a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{4}} c^{-\frac{1}{12}}$$

$$= a^{\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)} b^{\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)} c^{\left(1+\frac{1}{12}\right)}$$

$$= a^{-\frac{5}{12}} b^{-\frac{7}{6}} c^{\frac{13}{12}}.$$

例題

1. $10^{0.4}$, $10^{0.5}$, 3 ヲ大小ノ順ニナラベヨ.

2. $x=3a+b^3$, $y=3b+a^3$, $ab=1$ ナルトキ, 次式ノ値ヲ求メヨ.

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}}$$

3. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

(1) $(-32x^{10})^{\frac{3}{5}}$　　(2) $(a^{\frac{2}{3}} b^4)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{4}{3}} b$

(3) $ab^{-2} \div a^{-3} b$　　(4) $[a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{bc^5}]^{\frac{2}{3}}$

(5) $(x^{-1} + x^{\frac{1}{2}} + 2)(x^{-1} + x^{\frac{1}{2}} - 2)$

(6) $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})\{a + b + (ab)^{\frac{1}{2}}\}$

(7) $\dfrac{2^n \times (2^{n-1})^n}{4^{\frac{n+1}{2}} \times (2^n - 2^{n-1})} \times \dfrac{1}{8^{-n}}$

(8) $(x^{\frac{a+b}{c-a}})^{\frac{1}{b-c}} \times (x^{\frac{b+c}{a-b}})^{\frac{1}{c-a}} \times (x^{\frac{c+a}{b-c}})^{\frac{1}{a-b}}$

(9) $(x^{\frac{6}{7}} - 2x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}})^2$

(10) $\dfrac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \dfrac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \dfrac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{4}{1+a}$

(11) $(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})$

(12) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}})$

4. $x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{8}} y^{\frac{1}{8}} + 6x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} - 4x^{\frac{1}{8}} y^{\frac{3}{8}} + y^{\frac{1}{2}}$ ヲ $x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{8}} y^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{4}}$ デ除セヨ.

5. 次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ.

(1) $x-2+x^{-1}$　　(2) $x^{\frac{1}{2}}-6+9x^{-\frac{1}{2}}$

(3) $a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{5}{6}}+4a+2a^{\frac{7}{6}}-4a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{5}{3}}$

(4) $2\sqrt{x}+3x^2-x-2\sqrt{x^5}+x^3+1$

6. $x^3+\dfrac{1}{x^3}-6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+15\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-20$ ヲ立方ニ開ケ.

7. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1) $x^{\frac{3}{4}}+8x^{-\frac{3}{4}}=9$　　(2) $x^{\frac{2}{7}}-6=x^{\frac{1}{7}}$

(3) $8^{\frac{2}{3}x}+8=9\div2^{-x}$　　(4) $2^{x+1}+4^x=80$

(5) $4^x+8=9\times2^x$

(6) $\begin{cases} x+y=13 \\ x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=1 \end{cases}$　　(7) $\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=65 \\ xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y=20 \end{cases}$

第二章 對 數

29. 指數ト羃トノ關係

a ヲ1ヨリ大ナル整數トシ,a^x ナル羃ガ指數 x ノ變動ニ伴ツテ如何ニソノ値ヲ變ズルカヲ次ニ考ヘル.

先ヅ x ガ正又ハ負ノ整數ノトキハ,x ガ大ニナル程 a^x モ亦從ツテ大ニナルコト明カデアル.

卽チ

$$\cdots\cdots>a^3>a^2>a^1>a^0>a^{-1}>a^{-2}>a^{-3}>\cdots\cdots$$

次ニ x ガ分數ノ場合ヲ考ヘルニ m, n, m', n' ガ整數デ n, n' ハ正トシ,且

$$\frac{m}{n}>\frac{m'}{n'}$$

トスレバ,　　$mn'>m'n$

デアル. 故ニ　　$a^{mn'}>a^{m'n}$.

ココニ於テ兩邊ノ nn' 乗根ヲ求メレバ,

$$a^{\frac{m}{n}}>a^{\frac{m'}{n'}}.$$

卽チ指數ガ分數ノ場合デモ,矢張リ指數ノ大ナル羃ノ方ガ大デアル. 整數モ亦假分數ノ形トシテ考ヘレバ,整數ノ指數ノ場合モコノ中ニ含マシメルコトガ出來ル.

$a>1$ ナルトキハ,a^x ハ x ガ增スト共ニ增大スル. 而シテ x ガ正デ絶對値ガ限リナク大ニナルトキハ a^x ハ正デ限リナク大トナリ,x ガ負デソノ絶對値ガ限リナク大ニナルトキハ a^x ハ正デ限リナク0ニ近ヅク.

例ヘバ

$$10^4=10000,\quad 10^3=1000,\quad 10^2=100,$$
$$10^1=10,\quad 10^0=1,\quad 10^{-1}=0.1,$$
$$10^{-2}=0.01,\quad 10^{-3}=0.001,\quad 10^{-4}=0.0001.$$

$0<a<1$ ノ場合ニモ上ト同樣ノ論法ニヨツテ a^x ノ値ノ變化ヲ調ベレバ次ノ結果ヲ得ル.

$0<a<1$ ナルトキハ, a^x ハ x ガ增スト共ニ減少スル. 而シテ x ガ正デ絕對値ガ限リナク大ニナルトキハ a^x ハ正デ限リナク 0 ニ近ヅキ, x ガ負デソノ絕對値ガ限リナク大ニナルトキハ a^x ハ正デ限リナク大トナル.

30. 對數ノ定義

前節ノ結果ニヨリ次ノ如ク結論スルコトガ出來ル.

a ガ正數デ 1 ニ等シクナイトキ, x ヲ正及ビ負ノアラユル實數トスレバ, a^x ハアラユル正數ノ値ヲ一度ヅツ取ル.

故ニ任意ノ正數 n ニ對シテ

$$a^x=n$$

ナル如キ x ハ必ズ一ツアル, 而シテ唯一ツニ限ル.

コノ x ヲ「a ヲ底トスル n ノ**對數**」トイフ. 即チ「a ヲ底トスル n ノ對數」トハ, a ヲ幾乘スレバ n ニ等シクナルカヲ示ス指數ノコトデアル.

a ヲ底トスル n ノ對數ノコトヲ

$$\log_a n$$

ト書ク. 即チ

$$a^x=n \qquad 及ビ \qquad x=\log_a n$$

ハツマリ同ジコトヲイヒ表ハスモノデアル.

例ヘバ

$$2^3=8 \qquad 故ニ \qquad \log_2 8=3,$$

$$16^{\frac{1}{4}}=2 \qquad 故ニ \qquad \log_{16} 2=\frac{1}{4},$$

$$5^{-2}=\frac{1}{25}=0.04 \qquad 故ニ \qquad \log_5 0.04=-2.$$

或ル數ノ對數ニ對シテモトノ數自身ヲ**眞數**トイフコトガアル.

對數ノ定義ト前節ニ述ベタ所トヲ參考スレバ, 直チニ次ノ性質ノアルコトヲ知ル.

(1) 對數ノ底トシテハ 1 ニ等シクナイ任意ノ正數ヲ用キルコトガ出來ル.

(2) 負數ハ對數ヲモタナイ.

(3) 1 ノ對數ハ 0 デアル.

何トナレバ a ヲ如何ナル正數トスルモ常ニ

$$a^0=1$$

トナルカラデアル.

(4) 底ニ等シイ數ノ對數ハ 1 デアル.

何トナレバ a ヲ如何ナル數トスルモ常ニ

$$a^1=a$$

トナルカラデアル.

(5) 二ツノ數ガ相等シイトキハソノ對數モ亦

THREEGOL

相等シイ. 逆ニ又二ツノ數ノ對數ガ相等シイトキハソノ眞數モ相等シイ.

何トナレバ或ル數ノ對數ハ唯一ツニ限リ,又逆ニ或ル對數ノ眞數モ唯一ツニ限ルカラデアル.

例 題

1. 5ヲ底トスルトキ,次ノ各數ノ對數如何.

$$25,\quad \sqrt{5},\quad 0.008,\quad \frac{1}{625}$$

2. 次ノ各式カラ x ヲ求メヨ.

(1) $\log_x 128=14$　　(2) $\log_{2\sqrt{3}} 1728=x$

(3) $\log_{10} 0.001=x$　　(4) $\log_2 x=5.5$

(5) $\log_2(2^{x+1}-8)=x$

(6) $\log_a(x^2-13)-\log_a(x-1)=0$

31. 對數ヲ求メルコト

前節ニ例示シタ如ク,a ト n トガ特別ナル關係ヲモツトキハ $\log_a n$ ノ値ヲ求メルコトハ容易デアルケレドモ,一般ニ任意ノ數ノ對數ヲ求メルコトハ斯クノ如ク容易デハナイ. 併シ或ル數ノ對數ハトニカク求メ得ルモノデアルコトヲ示スタメニ,次ニソノ求メ方ノ一例ヲ擧ゲル.

例ヘバ $\log_{10}2$ ヲ求メルタメニ先ヅ $\log_{10}2=x$ トスレバ

$$10^x=2. \qquad (1)$$

故ニ $0<x<1$ デアル. ヨッテ $x=\dfrac{1}{y}$ ト置イテ(1)ニ代入スレバ,

$$10^{\frac{1}{y}}=2 \quad 卽チ \quad 10=2^y. \qquad (2)$$

故ニ $3<y<4$ デアル.* ヨッテ $y=3+\dfrac{1}{z}$ ト置イテ(2)ニ代入スレバ,

$$10=2^{3+\frac{1}{z}} \quad 卽チ \quad 10=8\times 2^{\frac{1}{z}}.$$

コレカラ $$\left(\frac{5}{4}\right)^z=2. \qquad (3)$$

故ニ $3<z<4$ デアル. ヨッテ $z=3+\dfrac{1}{u}$ ト置イテ(3)ニ代入スレバ,

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{u}}=2 \quad 卽チ \quad \frac{125}{64}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}}=2.$$

コレカラ $$\frac{5}{4}=\left(\frac{128}{125}\right)^u.$$

故ニ $9<u<10$ デアル.

以下何所マデモ同樣ノ手順ヲ繰リ返スコトヲ得ルケレドモ,試ミニ $u=9$ トシテ上記ノ計算ヲ終レバ,

$$z=3+\frac{1}{u}=3+\frac{1}{9}=\frac{28}{9},$$

$$y=3+\frac{1}{z}=3+\frac{9}{28}=\frac{93}{28},$$

$$x=\frac{1}{y}=\frac{28}{93}=0.30107\ldots\ldots$$

*$2, 2^2, 2^3$, ...等ヲ作ッテ10ト比較シ,ヨッテ $3<y<4$ ナルコトヲ知ルノデアル. 以下同樣.

.コノ x ガ即チ $\log_{10}2$ ノ近似値デ,ナホ精密ニ計算シタモノト比較スレバ小數第四位マデ正シイモノデアルコトヲ知ル.

32. 積及ビ商ノ對數

(1) 積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シイ.

何トナレバ

$$\log_a m = x, \qquad \log_a n = y$$

トスレバ $\qquad a^x = m, \qquad a^y = n.$

從ツテ $\qquad mn = a^x a^y = a^{x+y}.$

故ニ

$$\begin{aligned}\log_a(mn) &= x+y\\ &= \log_a m + \log_a n.\end{aligned}$$

因數ガ三ツアルトキハ

$$\begin{aligned}\log_a(mnp) &= \log_a\{(mn)p\}\\ &= \log_a(mn) + \log_a p\\ &= \log_a m + \log_a n + \log_a p.\end{aligned}$$

一般ニ因數ガ幾ツアルトキデモ同様ノ結果ヲ得ル.

(2) 商ノ對數ハ被除數ノ對數カラ除數ノ對數ヲ減ジタ差ニ等シイ.

何トナレバ

$$\log_a m = x, \qquad \log_a n = y$$

トスレバ $\qquad a^x = m, \qquad a^y = n.$

從ツテ $\qquad \dfrac{m}{n} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$

故ニ

$$\begin{aligned}\log_a \frac{m}{n} &= x-y\\ &= \log_a m - \log_a n.\end{aligned}$$

モシ特別ノ場合トシテ $m=1$ トスレバ,

$$\log_a \frac{1}{n} = \log_a 1 - \log_a n = -\log_a n.$$

故ニ

(3) 或ル數ノ逆數ノ對數ハモトノ數ノ對數ノ符號ヲ變ジタモノニ等シイ.

或ル數ノ逆數ノ對數ヲモトノ數ノ**餘對數**又ハ**補對數**トイフ.

餘對數ヲ colog ナル記號デ表ハスコトガアル,即チ

$$\mathrm{colog}_a n = \log_a \frac{1}{n} = -\log_a n.$$

例　題

1. $\log_{10}2 = 0.3010$ 及ビ $\log_{10}3 = 0.4771$ ヲ知ツテ, 10 ヲ底トスル次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ.

$$20, \quad 6, \quad 5, \quad 0.5, \quad \frac{2}{3}, \quad 1.6, \quad 9$$

2. $\log_2 3 = 1.5850$ ノミヲ知ツテ, 2 ヲ底トスル次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ.

$$6, \quad 4, \quad \frac{3}{2}, \quad 1.\dot{3}$$

3. $\log_a b$ ト $\log_b a$ トハ互ニ逆數デアル. コレニヨツテ前二題ヲ参照シテ $\log_2 10$ 及ビ $\log_3 2$ ヲ求メヨ.

33. 羃及ビ羃根ノ對數

或ル數ノ羃ノ對數ハモトノ數ノ對數ニソノ羃ノ指數ヲ乘ジタ積ニ等シイ.

何トナレバ

$$\log_a n = x$$

トスレバ, $a^x = n.$

従ツテ $n^r = (a^x)^r = a^{rx}.$

故ニ

$$\log_a (n^r) = rx$$

$$= r \log_a n.$$

コノ證明ニ於テハ r ハ必ズシモ整數デアル必要ハナイカラ,例ヘバ $r = \frac{p}{q}$ トスレバ,

$$\log_a \sqrt[q]{n^p} = \frac{p}{q} \log_a n.$$

例題

1. 前節ノ例題ニ用キタ諸對數ニヨリ次ノ値ヲ求メヨ.

$\log_{10}\sqrt{2}$, $\log_{10}128$, $\log_{10}\sqrt[3]{12}$,

$\log_2(8\sqrt{3})$, $\log_2 81$, $\log_{10}\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

2. $\log_a x = m$, $\log_a y = n$, $\log_a z = p$ ナルトキ,次ノ各式ヲ m, n, p デ表ハセ.

(1) $\log_a \frac{\sqrt[3]{x^2}}{y^2 z^4}$ (2) $\log_a\left(x^2 y^3 z^{-1} \times \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}\, y^{\frac{1}{2}}}\right)$

(3) $\log_a \sqrt{\frac{x}{y^2} \div \sqrt[3]{xy^2z^{-1}}}$

3. $y = a^x$ ナルトキハ次ノ二式ガ成立ツ.

(1) $y = n^{x \log_n a}$ (2) $\log_n y = a^{\log_a x} \log_n a$

4. 次ノ各方程式カラ x ヲ求メヨ.

(1) $\log_a(x-2) + \log_a(x-3) = 0$

(2) $\log_a\sqrt{5x+1} + \frac{1}{2}\log_a(3x+4) = \log_a 30$

5. 次ノ各聯立方程式カラ x 及ビ y ヲ求メヨ.

(1) $x^2 + y^2 = 29$, $\log_{10}x + \log_{10}y = 1$

(2) $\log_a(xy) = m$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = n$

第三章 常用對數

34. 常用對數

對數ノ底ヲ10トスルトキハ計算上ニ種々便利ナコトガアル(ソノ理由ハ以下ノ諸節ニ於テ明カニナル). ヨツテ實用上ニハ常ニ10ヲ底トスル對數ノミガ用キラレル.

10ヲ底トスル對數ヲ**常用對數**トイフ.

以下本書ニ於テ單ニ對數トイヘバ必ズ常用對數ノコトトシ,常用對數ヲ記號デ書クトキハ底ヲ省略スルコト

トスル. 例ヘバ單ニ $\log 2$ トイヘバ $\log_{10} 2$ ノ意味デ, $10^x=2$ ナル如キ x ノコトデアル.

35. 指標及ビ假數

例ヘバ

$$\log 5.83=0.7657$$

ナルコトヲ知ツテ, $\log 583$ ヲ求メレバ次ノ如クデアル.

$$\begin{aligned}\log 583&=\log(5.83\times10^2)\\&=\log 5.83+\log 10^2\\&=\log 5.83+2\log 10\\&=0.7657+2\\&=2.7657.\end{aligned}$$

コノ例ニヨツテ直チニ推知サレル如ク,一般ニ或ル數ヲ 10, 10^2, 10^3, ...倍スルトキハ,ソノ對數ハ夫々 1, 2, 3, ...ダケ增スモノデアル. 卽チ

或ル數ノ數字ノ排列ヲソノママニシテ小數點ノ位置ヲ一位右ニ移ス每ニソノ對數ハ1ヅツ增ス.

從ツテ又

小數點ノ位置ヲ一位左ニ移ス每ニ對數ハ1ヅツ減ズル.

例ヘバ

$$\log 5830=0.7657+3=3.7657,$$

$$\log 0.583=0.7657-1=-0.2343.$$

サテ斯クノ如キ場合ニ於テ,對數ニ整數 1, 2, 3, ...等ヲ加ヘルコトハ容易デアルケレドモ,對數カラコレラノ整數ヲ減ズルトキニハ一般ニ小數點以下ノ數字ヲ悉ク變ジナケレバナラヌ. ヨツテソノ不便ヲ避ケルタメニ,常用對數ニ於テハソノ小數部分ハ常ニ正ナラシメルヤウニシテ,例ヘバ

$$\log 0.583=0.7657-1=\bar{1}.7657$$

$$\log 0.0583=0.7657-2=\bar{2}.7657$$

ノ如クニ書クコトトスル. ココニ $\bar{1}, \bar{2}$ 等ハソノ負號ノ下ニアル數ノミガ負ナルコトヲ示スモノデアル,從ツテ小數位ニアル 7657 ハ正ナルモノト考ヘルノデアル.

コノ記數法ニ於ケル對數ノ整數部ヲ**指標**トイヒ,小數部ヲ**假數**トイフ.

36. 指標ノ法則

整數部分ガ一位ナル正數ハ1ト10トノ間ニアル,故ニソノ對數ハ0ト1トノ間ニアル. 例ヘバ

$$1<5.83<10,$$

卽チ $\quad 10^0<5.83<10^1.$

故ニ $\quad 0<\log 5.83<1.$

一般ニ,整數部分ガ一位ナル數ノ對數ノ指標ハ 0 デアル.

而シテ前節ニ於テ知ルガ如ク,或ル數ノ數字ノ排列ヲソノママニシテ小數點ノ位置ヲ一位ヅツ右又ハ左ニ移スニ從ツテ,ソノ對數ノ指標ハ夫々 1 ヅツ增シ又ハ減ズルカラ,一般ニ次ノ法則ヲ得ル.

整數部分ガ 0 デナクテ,ソノ整數部分ガ n 位ナル數ノ對數ノ指標ハ $n-1$ デアル.

整數部分ガ 0 デ小數第 n 位ニ始メテ 0 デナイ數字ヲモツ數ノ對數ノ指標ハ $\bar{n}$ デアル.

例　$\log 58300 = 4.7657$

$\log 583 = 2.7657$

$\log 0.583 = \bar{1}.7657$

$\log 0.00583 = \bar{3}.7657$

$\log 0.0006583 = \bar{4}.7657$

例　題

本節ノ例題ヲ解クニハ次ノ諸對數ハ既知ナルモノトスル.

$\log 2 = 0.3010$	$\log 11 = 1.0414$
$\log 3 = 0.4771$	$\log 13 = 1.1139$
$\log 7 = 0.8451$	$\log 17 = 1.2304$

1. 次ノ各數ノ對數ノ指標ダケヲ求メヨ.

1245,	0.34,	0.00432,
24×10^5,	21^3,	$946\div10^7$,
$\dfrac{84}{1000}$	$\sqrt[3]{0.047}$,	$\sqrt{5748.25}$

2. 次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ.

24,	0.7,	500,	0.00012,
30^{10},	286,	$\dfrac{49}{221}$,	$\sqrt{51}$

3. 次ノ各數ヲ對數トスル眞數ヲ求メヨ.

$\bar{2}.8451$,	3.1139,	$0.3010+\bar{3}.0414$,
$4.1139-0.3010$,	0.3010×3,	$\bar{4}.8451$

4. 2^{100} ハ幾位ノ數カ.

5. $\dfrac{1}{3^{50}}$ ハ小數點以下幾位ニ於テ始メテ有效數字(零デナイ數字)ヲ有スルカ.

6. $2^n > 100000 > 2^{n-1}$ ナル關係ガ成立スル n ノ整數値如何.

7. 次ノ式ノ値ヲ求メヨ.

$$\frac{1}{2}\log 20449 - \log\frac{7}{4} - \log\frac{13}{35} + \log\frac{5}{11}$$

8. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1)　$\log(x-2)-\log(x^2-6x+8)+1=0$

(2)　$\begin{cases}\log x+\log y=2+3\log 2\\ 2x+y=80\end{cases}$

(3)　$\begin{cases}\log x+\log y=2\\ x^2+y^2=641\end{cases}$

37. 對數表

或ル數ノ對數ヲ算出スルコトハ一般ニ容易デナイ,又種々ノ數ノ對數ヲ一々記憶スルコトモ到底不可能デアルカラ,實際上ノ問題ニ於テハ數(卽チ眞數)トソノ對數トヲ相對照シテ列記シタ表ヲ用キルノデアル. ソノ表ヲ**對數表**トイフ.

ケレドモ對數ノ指標ハ前節ニ述ベタ法則ニヨツテ直チニ知ルコトガ出來ルカラ對數表ニハコレヲ揭載シナイ. 又一般ニ對數ノ假數ハ必ズシモ有限小數デナイカラ表ニハコレヲ小數若干位マデニ四捨五入シタ値ヲ揭載スル. 本書ノ卷末ニ添附シタ二表ハ夫々小數第四位及ビ第七位マデニ四捨五入シタモノデ,夫々「四桁ノ對數表」及ビ「七桁ノ對數表」トイフ.

以下本書ノ問題ニ於テハ特ニ斷リナキ限リ卷末ノ四桁ノ對數表ヲ使用スルモノトスル. ソノ見方ハ次ノ諸例ニヨツテ知ルガ宜イ.

例 **1.** $\log 260$ ヲ求メヨ.

コノ對數ノ指標ガ 2 ナルコトハ直チニ視察ニヨツテ知ラレル. 次ニ假數ヲ求メルニハ,表ノ左端ノ欄デ26トアル所ヲ求メ,又表ノ上端ノ欄デ 0 トアル所ヲ求メ,26ノ右,0ノ下ニ當ル交叉點ヲ見レバ 4150 トアル,コレ卽チ求メル假數デアル.

故ニ

$$\log 260 = 2.4150.$$

例 **2.** $\log 2.73$ ヲ求メヨ.

前例ノ如クニシテ假數ヲ求メレバ 362 ヲ得ルケレドモコレハ小數第一位ニアル筈ノ 4 ヲ略シタモノデアルカラ

$$\log 2.73 = 0.4362$$

デアル. スベテ假數ノ小數第一位ハ同一ノモノガ多數ニアルカラソノ先頭ニアル一ツノ假數ノ他ハ表ニハコレヲ省略シテアル.

例 **3.** $\log 0.798$ ヲ求メヨ.

コノ場合ニハ, 79 ノ右, 8 ノ下ナル交叉點ニハ 020 ナル數ガアツテ,ソノ左上ニ * ナル記號ガアル. コノ記號ガアルトキハ,假數ノ小數第一位トシテ上方ニアル 8 ヲ取ラズニ,却ツテ下方ニアル 9 ヲ取ルノデアル. 故ニ

$$\log 0.798 = \bar{1}.9020.$$

例 **4.** $\log 3$ ヲ求メヨ.

$\log 3$ ノ假數ハ $\log 300$ ノ假數ト同一デアル.

故ニ

$$\log 3 = 0.4771.$$

例 **5.** $\log x = 2.6571$ ナル x ヲ求メヨ.

答 $x = 454.$

例 6. 對數 $\bar{3}.8028$ ノ眞數如何.

答 0.00635.

例 題

1. 次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ.

647, 951000, 0.00509, 4.7, 13.7

2. 次ノ各對數ノ眞數ヲ求メヨ. $\bar{3}$ $\bar{3}.7067$

0.9243, $\bar{2}.9872$, 5.2014

38. 比例部分ノ理

與ヘラレタ數ガ三桁ヨリ多クノ有效數字ヲ有スルトキハ,ソノ對數ハ卷末ノ表ニ記載サレテヰナイ. コノ場合ニソノ對數ヲ求メルニハ次ノ原理ニヨツテ計算スルノデアル.

二ツノ眞數ノ差ガ小ナルトキニハソレニ伴フ對數ノ差ハホボ眞數ノ差ニ比例スル.

卽チ式デ示セバ次ノ如クデアル.

a, b, c ノ相互ノ差ガ小ナルトキハ,

$$(\log a-\log c):(\log b-\log c)=(a-c):(b-c)$$

コレヲ**比例部分ノ理**ト稱ヘル. (證明ハ附錄第10節ニアル.)

例 1. $\log 4452$ ヲ求メヨ.

表ニヨリ $\log 4450=3.6484,$

$\log 4460=3.6493.$

故ニ $\log 4460-\log 4450=0.0009.$

ヨツテ今 $\log 4452-\log 4450=x$

トスレバ,比例部分ノ理ニヨリ

$$(4460-4450):(4452-4450)=0.0009:x,$$

卽チ $10:2=0.0009:x$

故ニ $x=0.0009\times\frac{2}{10}=0.00018.$

ヨツテ
$$\begin{aligned}\log 4452&=\log 4450+0.00018\\&=3.6484+0.00018\\&=3.64858.\end{aligned}$$

コノ結果ヲ四捨五入シテ $\log 4452=3.6486.$

コノ計算ニ於ケル 0.0009 (又ハ小數第四位ヲ單位トシテ單ニ 9) ノ如キ數ヲ**表差**トイヒ,又 0.00018 (又ハ單ニ 1.8) ノ如キ數ヲ**比例部分**トイフ.

實際ニハ上ノ如キ計算ノ勞ヲ省クタメニ,種々ノ表差ニ對シテソノ $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \dots\dots, \frac{9}{10}$ 等ヲ表ニ作ツタモノヲ對數表ノ傍ニ添ヘルノヲ常トスル,コレヲ**比例部分ノ表**ト稱ヘル. 本書ノ卷末ニアル比例部分ノ表ニ於ケル上欄ノ見出シハ表差デ,左端ノ見出シ 1, 2, ... ハ夫夫 $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots\dots$ ノ意味デアル. 8.40 0.0971

上ニ擧ゲタ例ハ,實際ノ計算デハ比例部分ノ表ヲ用ヰ

テ次ノ如クニ記セバ宜イ.

$$\log 4450 = 3.6484 \qquad \text{表差 } 9$$
$$\begin{array}{r} 2\ldots\ldots\ldots 1.8 \\ \hline \log 4452 = 3.64858 \end{array}$$

コレヲ四捨五入シテ $\log 4452 = 3.6486$.

例 2. $\log 1.8765$ ヲ求メヨ.

$$\log 1.87 = 0.2718 \qquad \text{表差 } 24$$
$$\begin{array}{r} 6\ldots\ldots\ldots 14.4 \\ 5\ldots\ldots\ldots 12.0 \\ \hline \log 1.8765 = 0.27336 \end{array}$$

コレヲ四捨五入シテ $\log 1.8765 = 0.2734$.

例 3. $\log x = 1.8435$ ナル x ヲ求メヨ.

$$\log x = 1.8435 \qquad \text{表差 } 7$$
$$\begin{array}{r} \log 69.7 = 1.8432 \\ \hline 3 \\ 4\ldots\ldots\ 2.8 \\ \hline x = 69.74. \end{array}$$

注意 1. 四桁ノ對數表ヲ用キ比例部分ノ理ニヨツテ算出シタ値ニ於テハ,ソノ小數第五位以下ハ必ズシモ確實デナイ. ヨツテ通常ハ上ノ例ニ示シタ如ク第四位マデニ四捨五入スルモノトスル. 又眞數ヲ求メル場合ニ於テハソノ最高位四桁ヨリ多クハ殆ンドコレヲ取ル要ガナイ.

注意 2. 本節ノ諸例ニ示シタ如ク二ツノ相隣接スル對數又ハ眞數ノ値カラソノ中間ノモノヲ推算スルコトヲ**挿入法**ト稱ヘル.

例題

1. 次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ.

   1324, 0.08451, 7.3008, 4399700

2. 次ノ各對數ノ眞數ヲ求メヨ.

   0.9093, $\bar{1}.8030$, 2.6872

39. 對數ノ應用

例 1. $x = 64.27 \times 3.1416$ ヲ計算セヨ.

$$\begin{array}{r} \log 64.27 = 1.8080 \\ \log 3.1416 = 0.4971 \\ \hline \log x = 2.3051 \\ x = 201.9. \end{array}$$

例 2. $x = \dfrac{1.234}{780.9}$ ヲ計算セヨ.

$$\begin{array}{r} \log 1.234 = 0.0913 \\ \log 780.9 = 2.8926 \\ \hline \log x = \bar{3}.1987 \\ x = 0.00158. \end{array}$$

或ハ餘對數ヲ用キテ次ノ如クスルモ宜イ.

$$\begin{aligned} \log 1.234 &= 0.0913 \\ \operatorname{colog} 780.9 &= \bar{3}.1074 \\ \hline \log x &= \bar{3}.1987 \\ x &= 0.00158. \end{aligned}$$

例 3. $x=\sqrt[5]{0.3427^3}$ ヲ計算セヨ.

$$\begin{aligned} \log 0.3427 &= \bar{1}.5349 \\ \log 0.3427^3 &= 3\times\bar{1}.5349 \\ &= 3(-1+0.5349) \\ &= -3+1.6047 \quad\cdots\cdots(1) \\ &= \bar{2}.6047 \\ \log x &= \frac{1}{5}\times\bar{2}.6047 \\ &= \frac{1}{5}(-2+0.6047) \\ &= \frac{1}{5}(-5+3.6047) \\ &= -1+0.7209 \quad\cdots\cdots(2) \\ &= \bar{1}.7209 \end{aligned}$$

故ニ　$x=0.5259.$

指標ガ負ナル對數ニ正ノ整數ヲ乘ズルニハ,(1)ノ如ク指標ト假數トニ別々ニソノ整數ヲ乘ジテ後,ソレラノ積ノ代數和ヲ作レバ宜イ. 又指標ガ負ナル對數ヲ正ノ整數デ割ルニハ,(2)ノ如ク先ヅ指標ヲソノ倍數ニ直シテ後,コレヲ割レバ宜イ.

例 4. $\dfrac{27.4^3\times\sqrt{1.58}}{\sqrt[3]{76.42\times0.9963}}$ ノ値ヲ求メヨ.

先ヅコノ分數ヲ x トシ,ソノ分子ヲ a, 分母ヲ $\sqrt[3]{b}$ トスレバ,

$$x=\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$$

$$\begin{aligned} \log 27.4 &= 1.4378 \\ \log 1.58 &= 0.1987 \\ \hline 3\log 27.4 &= 4.3134 \\ \frac{1}{2}\log 1.58 &= 0.0994 \\ \hline \log a &= 4.4128 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log 76.42 &= 1.8832 \\ \log 0.9963 &= \bar{1}.9984 \\ \hline \log b &= 1.8816 \\ \log\sqrt[3]{b} &= 0.6272 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 4.4128 \\ \log\sqrt[3]{b} &= 0.6272 \\ \hline \log x &= 3.7856 \\ x &= 6104. \end{aligned}$$

例　題

1. 對數ヲ應用シテ次ノ各計算ヲナセ.

(1) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times7.62^2$

(3) $1\div2.7183$　(4) $\sqrt[5]{7405}$

(5) $\dfrac{(794.3+108.2)^2}{34.5^2-4}$　(6) $\dfrac{83.5\times\sqrt[3]{4.57}}{\sqrt{0.351\times187.3}}$

2. 直角三角形ノ斜邊ガ 86 cm デ,直角ヲ夾ム邊ノ一ツガ 47 cm デアル. 殘リノ一邊ノ長サ如何.

3. 一邊ノ長サ 1m ナル正方形ニ外接スル圓ノ周圍ハ幾許カ.

4. 高サ 76 cm, 截口ノ直徑 1.2 cm ナル玻璃圓管ヲ滿スニ要スル水銀ノ重量ヲ求メヨ. 但シ水銀ノ比重ヲ 13.596 トスル.

5. 球ノ半徑ヲ r トスレバ,ソノ表面積ハ $4\pi r^2$ デ,體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル. 今地球ノ子午線圈(子午線ニ沿フ全周)ノ長サヲ約 40000 km トスレバ,地球ノ表面積及ビ體積各如何.

40. 指數方程式

指數ニ未知數ヲ有スル方程式ヲ**指數方程式**トイフ.

例 $2^x=3$ ヲ解ケ.

解 先ヅ兩邊ノ對數ヲ取レバ,

$$x\log 2=\log 3$$

$$x=\frac{\log 3}{\log 2}=\frac{0.4771}{0.3010}=\frac{4771}{3010}$$

$$\log 4771=3.6786$$

$$\log 3010=3.4786$$

$$\log x=0.2000$$

$$x=1.585.$$

本例ハ換言スレバ $x=\log_2 3$ ヲ求メルコトデアル. 一般ニ10デナイ正數 a (1ヲ除ク)ヲ底トスルトキノ或ル數 n ノ對數ヲ求メルニハ

$$a^x=n$$

ナル指數方程式ヲ解ケバ宜イ. コレヲ解ケバ

$$x=\frac{\log n}{\log a}.$$

ヨツテ次ノ公式ヲ得ル.

$$\log_a n=\frac{\log n}{\log a}.$$

故ニ常用對數表ヲ用ヰレバ,コレニヨツテ他ノ任意ノ數ヲ底トスル對數ヲモ求メルコトガ出來ル.

例題

1. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1) $3^x=2$ (2) $3^{x-2}=2\times5^x$

(3) $2^{2x}-7\times2^x+12=0$

(4) $2^{x+1}-(3+2^x)+(5\times2^{x-1})=9$

(5) $2^x=8^{y+1}$, $27^y=3^{x-y}$

(6) $x^{x+y}=y^4$, $y^{x+y}=x$ 但シ $x>0$, $y>0$.

2. 次ノ各等式ガ成立ツ.

(1) $\log_b n=\dfrac{\log_a n}{\log_a b}$ (公式トシテ用キラレル.)

(2) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$

3. 2.7183 ヲ底トスルトキノ, 2 及ビ 10 ノ對數ヲ求メヨ.

雜 題 III.

1. $\log_3 2=a$, $\log_3 7=b$ トシ $\log_{14}56$ ノ値ヲ a, b デ表ハセ.

2. $\left(\dfrac{50}{49}\right)^{100}$ ハ 10 ヨリ大ナルカ叉ハ小ナルカ. 但シ $\log 2=0.301$, $\log 7=0.845$ トスル.

3. 連乘積 $3^1\times3^2\times3^3\times3^4\times\cdots\cdots$ ガ始メテ一千萬ヲ超エルマデニハ幾ツノ因數ヲ取ラネバナラヌカ. 但シ $\log 3=0.47712$ トスル.

4. a ヲ正ノ整數トスルトキ,對數ノ指標ガ a トナル如キ正ノ整數ハ幾ツアルカ.

5. $a^2+b^2=c^2$ ナルトキハ

$$\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\times\log_{c-b}a.$$

6. 次ノ式ヲ簡約セヨ.

$$\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$$

7. $x^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$ ナルトキ,次式ノ値如何.

$$\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$$

8. $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ ト $11\sqrt{7}+13\sqrt{5}$ トノ比例中項ヲ求メヨ.

9. $x^4+6x^3+7x^2+ax+b$ ガ完全平方式トナルヤウニ a, b ノ數値ヲ定メヨ.

10. $y=\dfrac{2-x}{x^2-m}$ ナルトキ x ガ y ニツイテノ有理式トナルタメニハ, m ノ値ヲ如何ニ定メレバ宜イカ.

11. 三ツノ數 a, b, c ガ等差級數ヲナシ, b, a, c ガ等比級數ヲナセバ, a, c, b ハ調和級數ヲナス.

12. $x:y:z=a:b:c$ ナルトキハ,

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{y-b}{y+b}-\frac{2(z^2-c^2)}{z^2+c^2}=\frac{8(x+y+z)^2(a+b+c)^2}{(x+y+z)^4-(a+b+c)^4}.$$

13. $\dfrac{bz+cy}{b-c}=\dfrac{cx+az}{c-a}=\dfrac{ay+bx}{a-b}$ ナルトキハ,

$$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz.$$

14. a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ二次方程式

$$(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$$

ノ二根ハ相等シイ. 叉ソノ逆ハ如何.

15. $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ ヲ等比級數トスレバ,

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)\div\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$
$$=a_1a_n.$$

16. 級數 (13), (14+15), (16+17+18), ……ノ第 n 項ヲ最簡ナル形デ表ハセ.

17. 二ツノ數ガアッテ,ソノ和,ソノ積及ビソノ平方ノ差

ガ悉ク相等シイ．ソノ二數ヲ求メヨ．

18. 等差級數ヲナス三數ノ和ガ24デ,コノ三數ニ夫々1, 2, 12ヲ加ヘレバ等比級數ヲナス．コノ三數ヲ求メヨ．

19. 或ル等比級數ノ第一項ト第四項トノ和ハ133デ,第二項ト第三項トノ和ハ70デアル．コノ四項ヲ求メヨ．

20. $2.5^x=1000$. $0.25^y=1000$ ナルトキハ,

$$x^{-1}-y^{-1}=3^{-1}.$$

21. $(\log x)^{\log x}=x$ ナルトキ, x ノ値如何.

22. $6^x=\dfrac{10}{3}-6^{-x}$ ヲ解キ, x ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ．但シ $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ トスル．

23. 對數表ヲ用キテ次ノ各方程式ヲ解ケ．

(1) $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+1}+4^{x+3}$

(2) $2^{2x-13y}=3,\qquad 3^{5x-7y}=9^{2x}$

24. 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ．

(1) $3x^2-5y^2=28,\qquad 3xy-4y^2=8$

(2) $x+y=xy=x^2+y^2$

(3) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{9}{xy}=5,\qquad xy+\dfrac{9x}{y}=20$

(4) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{b}+\dfrac{b}{y}$

25. 甲乙二人ガ 880 m ノ競走ヲナスニ,ソノ速サノ比ハ 22 : 21 デ,乙ハ5秒時ノ先發ヲシタケレドモ5m負ケタ．甲乙ノ速サ各如何.

26. 甲乙二人池ノ周圍ヲ走ルニ同一ノ向キニ行クトキハ20分毎ニ一所ニナリ,相反スル向キニ行クトキハ4分毎ニ出會フトイフ．甲乙各幾分間デ一周スルカ．

27. 或ル鐵道ノ兩端驛カラ相向ツテ同時ニ出發シタ甲乙二ツノ列車ガ,出發後12時間デ途中デ出會ヒ,ソノ後甲ハ乙ヨリ7時間早ク終端驛ニ着イタ．各列車ガ全道程ヲ行クニ要スル時間ヲ求メヨ．

28. 四十五度ナル角ノ一邊ノ上ニ於テ,頂點Aカラ2mノ所ニ點Pヲ取リ,ソレカラ他ノ邊ニ垂線 PP_1 ヲ引キ,ソノ足 P_1 カラ邊 AP ニ垂線 P_1P_2 ヲ引キ,ソノ足 P_2 カラ邊 AP_1 ニ垂線 P_2P_3 ヲ引キ,斯クノ如キ方法ヲ際限ナク續ケテ行フトキ,コレラノ垂線ノ長サノ和ノ極限ヲ四捨五入ノ法ニヨツテ米ノ小數第二位マデ計算セヨ．

29. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ．

$$\begin{cases}\log\dfrac{x+4y}{2}=\log x+\log\dfrac{y}{5}\\[2ex] \log\dfrac{x}{6}+\log\dfrac{y}{5}=\log(3x-2y)\end{cases}$$

30. $\log(a^3-b^3)=\log(a-b),\qquad \log(a^2+b^2)=\log a+\log b$ ナルトキハ, $ab=\dfrac{1}{2}$ デアル．

第四篇

步　合　算

41. 步　合

或ル數Rノ他ノ數Aニ對スル比ノ値ヲ小數デ表ハシタモノヲ**步合**トイヒ,Aヲ**元高**,Rヲ**步合高**トイフ.

例ヘバ500圓ノ2000圓ニ對スル步合ハ

$$\frac{500^{円}}{2000^{円}}=0.25$$

デ,ココニ500圓ハ步合高,2000圓ハ元高デアル.

一般ニ步合ヲrトスレバ

$$r=\frac{R}{A}.$$

ヨツテ　　$R=Ar,\quad A=\frac{R}{r}.$

習慣上步合ノ呼ビ方トシテ,十分ノ一ヲ**割**,百分ノ一ヲ**分**(或ハ**步**),千分ノ一ヲ**厘**,……等トイフ.故ニ步合ノ分,厘等ハ普通ノ小數ノ分,厘等ヨリモ一位ヅツ下ニアル.例ヘバ上ノ例ニ擧ゲタ0.25ハ「二割五分」ト讀ム.

或ル場合ニハ特ニ元高ヲ100ト定メテ「100ニツキR」トイフイヒ方デ步合ヲ示スコトガアル,コレヲ**百分率**トイフ.百分率ヲ書クニハ「100ニツキR」ヲR%ナル記號ヲ用キテ,コレヲR「**ぱーせんと**」ト讀ム.例ヘバ二割五分(卽チ百ニツキ二十五)ノコトヲ25%ト記シ,コレヲ二十五「ぱーせんと」ト讀ム.

元高ト步合高トノ合計ヲ**合計高**トイヒ,元高カラ步合高ヲ引イタ殘リヲ**殘高**トイフ.

合計高ヲS,殘高ヲDトスレバ

$$S=A+R=A(1+r),$$

$$D=A-R=A(1-r).$$

ヨツテ　　$A=\frac{S}{1+r}=\frac{D}{1-r}.$

〔例〕　定價1.50圓ノ品物ヲ定價ノ2割引デ買ヘバ幾ラカ.

〔解〕　元高1.50圓,步合0.2ニ對スル殘高ヲ求メレバ宜イ.卽チ

$$1.50^{円}(1-0.2)=1.20^{円}$$

答　1圓20錢.

例　題

1. 250圓ノ6割增シハ幾ラカ.
2. 一ツノ銀時計ノ賣價33圓デ,コレハ仕入レ値ヨリ3割2分增シタモノデアル.仕入レ値ハ何程カ.

3. 2割4分引イテ 190 圓ニナル品ハモシ割引シナケレバ幾圓カ.

4. 原價ノ 1割増シヲ定價トシタ品物ガアル. コレヲ定價ノ 1割引デ賣レバ損益何程カ.

5. 或ル人買物ノ周旋ヲシテ,手數料トシテ買値ノ 1割2分5厘ニ當ル 185 圓ヲ得タ. 買値如何.

6. 23% ノ利益ヲ見積ツテ定價ヲツケタ商品ヲ,定價ノ15% 引デ賣レバ利益ノ歩合何程カ.

7. 原價ノ 2割増シニ定價ヲツケタ品ガアル. 損ヲシナイ程度デコノ定價ヲ幾割幾分マデ引クコトガ出來ルカ. 但シ分未滿四捨五入セヨ.

8. 或ル人射的ヲスルニ,最初ハ12發ノ中5發命中スル割合デアツタガ,後ニハ13發ノ中8發命中スル割合ニナツタ. 前後ニ於ケル各命中ノ百分率及ビソノ率ノ增加ノ百分率ヲ求メヨ.

42. 單利法

金錢ヲ貸借シタトキ一定ノ率ニヨリ借主カラ貸主ニ支拂フ金高ヲ**利子**又ハ**利息**トイフ 利子ニ關スル用語ト一般ノ歩合ニ關スルモノトヲ對照スレバ次ノ如クデアル.

元高..............(元高)..............A

利率..............(歩合)..............r

利子..............(歩合高)........R

元利合計......(合計高)........S

上ニ利率ト稱ヘタモノハ一單位期間ノ利子ノ元金ニ對スル歩合デ,ソノ單位ガ一年ノトキハ,特ニ**年利率**トイフ. 一日ヲ單位トスルトキハ,利率ガアマリ小サクナルカラ,特ニ元金百圓ニ對スル利子ノ金高ヲ以テ利率ヲ示シ,コレヲ**日歩**トイフ. 例ヘバ日歩一錢八厘トイヘバ百圓ニツキ一日ニ一錢八厘ノ割合ナルコトヲ示スノデアル.

利子ガ元金ニモ期間ニモ比例スルモノトシテ計算スル法ヲ**單利法**トイフ.

A, r, R, S ノ意味ヲ前記ノ通リトシ期間ヲ t トスレバ,單利法ニ關スル主ナル公式ハ下ノ如クデアル.

$$R=Art,$$

$$S=A+R=A(1+rt).$$

注意 t ニ用ヰル單位ハ r ニ於ケルモノニ相當スルヲ要スル. 例ヘバ r ガ年利率ナラバ, t ハ年數ヲ示スガ如クデアル.

例 元金 2450 圓,年利率3分5厘, 2年8箇月ノ元利合計ヲ求メヨ.

解 求メル元利合計ハ

$$2450\text{圓}\times\left(1+0.035\times2\frac{8}{12}\right)=2678.66\ldots\ldots\text{圓}$$

答 2678.67 圓(弱).

例 題

1. 元金540圓,年利4分8厘,2年4箇月ノ元利合計ヲ求メヨ.

2. 元金350圓ヲ年利8分5厘デ貸シ,元利合計454.125圓ヲ得タ. 期間ヲ求メヨ.

3. 日步2錢デ1095圓ヲ12月20日カラ翌年ノ2月23日マデ貸ストキ,ソノ元利合計何程カ. 但シ貸付ケノ日及ビ返濟ノ日ハ何レモ期間ニ算入スルモノトスル.*

4. 配當率年8分,50圓拂込ノ株券ノ相場64圓デアル. コノ利廻リ何程カ.

43. 手形ノ割引

手形トハコレト引キ換ヘニ或ル金額ヲ或ル期日ニ支拂フコトヲ記シタ證券デアル.

支拂期日ノ定マツテヰル手形ノ受取人ガソノ期日ヨリモ前ニ金ヲ受取ラウトスルトキハ,ソノ手形ヲ銀行ニ賣渡シ,ソノ日カラ期日マデノ間ニ相當スル利子ヲ額面高カラ引キ去ツタ殘高ヲ受取ルモノトスル. 斯クスルコトヲ**手形ノ割引**トイフ.

*以後本書ニ於テハ,日步ノ期間ノ計算ニハ兩端ノ二日トモ期間ニ算入スルモノトスル.

額面高…………(元高)……………A

割引步合……(步合)……………r

割引高…………(步合高)………R

手取金…………(殘高)……………D

期間(賣渡日カラ支拂期日マデノ間)…………………t

トスレバ,

$$R=Art,$$

$$D=A-R=A(1-rt).$$

コノ計算法ニヨル割引ヲ**銀行割引**トイフ.

ケレドモ理論上カライヘバコノ計算法ハ不合理デアル. 手取金ヲ算出スルニハ,コレニ期間tダケノ利子ノツイタモノガ丁度額面高Aトナルヤウニスベキ筈デアル. 斯クノ如キ手取金ヲxトスレバ,

$$x(1+rt)=A.$$

故ニ
$$x=\frac{A}{1+rt}.$$

コノ方法ニヨル割引ヲ**眞割引**トイヒ,xヲ**現價**トイフ. 但シ實際ニハ眞割引ハ計算ガ面倒デアルカラ用ヰラレナイデ,銀行割引ノミガ行ハレル. 從ツテ現價トイフ語ハ銀行割引ノ手取金ノコトニモ用ヰラレル.

銀行割引ニヨル方ガ眞割引ニヨルヨリモ割引高ガ多イ.

例 1. 額面 5400 圓ノ手形ヲ期限ノ 120 日前ニ年 6 分デ銀行ニ讓渡スレバ,手取金何程カ.

解 $$5400\text{圓}\times\left(1-0.06\times\frac{120}{365}\right)=5293.479\ldots\ldots\text{圓}$$

答 5293.48 圓(弱).

例 2. 前問ニ於テモシ眞割引ニヨツテ計算スレバ如何.

解 求メル手取金ハ公式ニヨツテ

$$\frac{5400}{1+0.06\times\frac{120}{365}}=5295.540\ldots\ldots$$

答 5295.54 圓(强).

例 題

1. 割引步合日步 2 錢 5 厘,期間 50 日ノ銀行割引ハ日步何程ノ眞割引ニ相當スルカ.
2. 額面 3000 圓,支拂期日 5 月 10 日ナル爲替手形ヲ或ル日ニ銀行ニ持ツテ行キ,日步 2 錢 6 厘デ割引シテ賣渡シ手取金 2985.18 圓ヲ得タ. ソノ日ハ何日カ.

44. 支拂期日ノ平均

今日カラ夫々 l 日, m 日, n 日後ニ支拂フ額面 A 圓, B 圓, C 圓ナル三枚ノ手形ヲ額面 (A+B+C) 圓ナル一枚ノ手形ニ書キ換ヘルトスレバ,ソノ支拂期

日ヲ今カラ幾日後トスベキカヲ考ヘル問題ヲ**支拂期日ノ平均**トイフ.

求メル期日ヲ今カラ x 日後トシ,一日ヲ單位トスル利率ヲ r トシテ銀行割引ノ法ニヨレバ,額面 A 圓, B 圓, C 圓ノ手形ノ今日ニ於ケル現價ハ夫々 $A(1-lr)$ 圓, $B(1-mr)$ 圓, $C(1-nr)$ 圓デアル. 又額面 (A+B+C) 圓デ支拂期日ガ今カラ x 日後ナル手形ノ現價ハ $(A+B+C)(1-xr)$ 圓デアル.

故ニ求メル日數 x ハ次ノ方程式カラ定メラレル.

$$A(1-lr)+B(1-mr)+C(1-nr)$$
$$=(A+B+C)(1-xr).$$

故ニ, $$x=\frac{Al+Bm+Cn}{A+B+C}.$$

例 額面ガ 500 圓, 1000 圓, 1500 圓デ,ソノ支拂期日ガ夫々 60 日後, 120 日後, 200 日後ナル三ツノ手形ヲ一枚ノ 3000 圓ノ手形ニ書キ替ヘレバソノ支拂期日ハ何日後カ.

解 $$\frac{500\times60+1000\times120+1500\times200}{500+1000+1500}=150.$$

答 150 日後.

例 題

1. 本節ノ例ニ於テ求メル支拂期日ハ,起算ノ日ヲ變ジテモ變ラヌ. 例ヘバ,今日カラ p 日後ニ起算シタトシテコレヲ驗セ.

2. 今カラ夫々5箇月, 7箇月, 10箇月後ニ支拂フベキ150圓, 350圓, 500圓ノ負債ガアル. コレヲ整理シテ一時ニ1000圓ヲ支拂ツテ皆濟トスルニハ,支拂期日ヲ如何ニスレバ宜イカ. 但シコノ計算ニ於テ1箇月未滿ノ端數アルトキハ1箇月ヲ30日トシテ日數ニ直シ,1日未滿ハ四捨五入スルモノトスル.

3. 今カラ1箇年後ニ2500圓ヲ拂フ義務ヲ有スル人ガ,モシ8箇月後ニ1500圓ヲ拂フコトトスレバ,殘金1000圓ハ何時拂ヘバ宜イカ.

45. 複利法

複利法トハ毎期ノ終リニ於テソノ期間ニ生ジタ利子ヲ元金ニ加ヘ,ソノ和ヲ次ノ期間ノ元金トシテ又ソノ利子ヲ生ゼシメ,次第ニ斯クノ如ク元金ヲ増加シテ利子ヲ生ゼシメテ行ク法デアル.

郵便貯金,銀行預金等ハ何レモ一年又ハ半年ヲ一期トシテ複利法ニヨツテ利子ヲ計算スル.

元金ヲA圓,利率ヲrトスレバ,第1期ノ終リニ於ケル元利合計ハ$A(1+r)$圓デアル. 而シテコレガ第2期ノ元金デアルカラ,第2期ノ終リニ於ケル元利合計ハ$A(1+r)^2$圓デアル. 次第ニ斯クノ如クデアルカラ一般ニ第n期ノ終リニ於ケル元利合計ヲS圓トスレバ

$$S=A(1+r)^n.$$

今A圓ダケノ金ヲ他カラ受取ル代リニ,コレヲソノママn期間貸付ケテ置ケバ,n期間ノ終リニハ元利合計S圓トナツテ返ツテ來ルカラ,ツマリ今日ノA圓トn期後ノS圓トハ同等ノ價値ヲモツト考ヘテ宜イ. ヨツテA圓ノコトヲn期後ニ受取ルベキ金額S圓ノ**現價**トイフコトガアル.

現價ヲ求メル公式ハ次ノ如クデアル.

$$A=\frac{S}{(1+r)^n}.$$

例 1. 元金350圓,年利4分8厘,一年毎ノ複利トスレバ,15年後ノ元利合計幾許カ.

解 $$S=350(1+0.048)^{15}.$$

$$\log 350=2.5441$$
$$15\log 1.048=0.3060 \qquad \log 1.048=0.0204$$
$$\log S=2.8501$$
$$S=708.2$$

答 708.2圓.

注意 四桁ノ對數表ニアル假數ハ小數第四位ノ半單位マデノ誤差ヲ含ミ得ル. 從ツテコレカラ挿入法ニヨツテ得タ$\log 1.048$ノ15倍ナル値ニ於テハソノ誤差ハ小數第四位ノ數字ニ著シク影響スルコトガアルカモ知レヌ. ヨツテ念ノタメ七桁ノ對數表ニヨツテ見レバ,

$$\log 1.048=0.0203613.$$

故ニ　$15 \log 1.048 = 0.3054195.$

コレヲ用ヰレバ

$$\log S = 2.5441 + 0.3054 = 2.8495,$$
$$S = 707.2.$$

コノ方ガ眞ニ近イ答デアル.

例 2. 前題ニ於テ,期間ヲソノ四分ノ一トスレバ元利合計ハ何程トナルカ.

解 15年ノ四分ノ一ハ3年9箇月デアル. ヨツテ先ヅ3年間ノ元利合計ヲS_1圓トスレバ,

$$S_1 = 350(1+0.048)^3$$

次ニS_1ヲ元金トシテ9箇月間ノ元利合計S圓ヲ求メレバ,

$$S = S_1\left(1+0.048\times\frac{9}{12}\right) = S_1\times 1.036.$$

故ニ結局　$S = 350\times 1.048^3 \times 1.036.$

$$\log 350 = 2.5441$$
$$3\log 1.048 = 0.0611 \qquad \log 1.048 = 0.0203613$$
$$\log 1.036 = 0.0153$$
$$\overline{\log S = 2.6205}$$
$$S = 417.4$$

答　417.4 圓.

注意 公式 $S = A(1+r)^n$ ニ於ケル n ハ必ズ整數デアルトスル. 故ニ期間ガ一單位未滿ノ端數ヲ有スルトキハ,ソノ部分ダケハコノ例ノ如クニ計算スル.

例 3. 元金2500圓,年利4分,一年毎ノ複利*デ元利合計3500圓ヲ得ルニハ幾年幾月カカルカ. 但シ1箇月未滿ハ切上ゲトスル.

解 上ノ注意ニ述ベタ如ク,公式ニ於ケル n ハ必ズ整數デアルコトヲ要スルケレドモ,假リニ n ガ一期未滿ノ端數ヲ有スルモノトシテSヲ求メテモ大體眞ニ近イ値ヲ與ヘル. ヨツテ今試ミニ

$$3500 = 2500(1+0.04)^n$$

ト置イテ見レバ,

$$7 = 5\times 1.04^n.$$

卽チ　$1.4 = 1.04^n.$

故ニ　$n = \dfrac{\log 1.4}{\log 1.04} = \dfrac{0.1461}{0.0170} = \dfrac{1461}{170}.$

$$\log 1461 = 3.1647$$
$$\log 170 = 2.2304$$
$$\overline{\log n = 0.9343}$$
$$n = 8.596.$$

故ニ求メル期間ハ約八年半ナルコトヲ知ル. ココニ於テ更ニソノ一年未滿ノ端數ヲ x 月トスレバ,

$$3500 = 2500(1+0.04)^8\left(1+0.04\times\frac{x}{12}\right).$$

* 以後複利ノ問題デハ特ニ斷リナキ限リ一年毎ノ複利トスル.

コレカラxヲ求メルコト次ノ如クデアル.

$$1+\frac{x}{300}=\frac{1.4}{1.04^8}.$$

$$\log 1.4=0.1461$$

$$8\log 1.04=0.1363 \qquad \log 1.04=0.0170333$$

$$\log\left(1+\frac{x}{300}\right)=0.0098$$

$$1+\frac{x}{300}=1.023 \qquad x=6.9$$

答 8年7箇月.

以上ノ諸例ニ於テハ元金ノ全部ニ利子ヲツケルコトトシタケレドモ,實際ニ行ハレル所デハ必ズシモサウデナイ. 例ヘバ銀行デハ元金ノ10圓未滿ニハ利子ヲツケナイ,郵便貯金デハ10錢未滿ニハ利子ヲツケナイ,而シテ毎期ノ利子ノ計算ニ於テソノ厘以下ハ切捨テルモノトスル. 從ツテ實際ニ於テハ元利合計ヲ求メルニ上ノ如ク對數ヲ用ヰテ一度ニ計算スルコトハ出來ナイノデ,各期毎ニ一々利子ヲ計算シテ元金ニ加ヘテ行カネバナラヌ.

例題

1. 元金7500圓,年利4分6厘,半年毎ノ複利デ10年間ニ元利合計何程トナルカ.
2. 元金9000圓,年利5分ノ複利デ元利合計16000圓ヲ得ルニハ期間ヲ幾年幾月トセネバナラヌカ.

3. 年利6分ノ複利デ元利合計ガ元金ノ二倍トナルニハ幾年間貸付ケネバナラヌカ. 但シ一年未滿ハ一年ニ切上ゲルモノトスル.
4. 年利5分ノ複利トシテ,今カラ25年後ニ受取ルベキ金10000圓ノ現價ヲ求メヨ.
5. 年利率1割ノ複利法ニヨレバ,7年6箇月ノ元利合計ハ元金ノ幾倍カ.
6. 元金Aデ2年間ノ利子ガ,單利法ニヨルトキト一年毎ノ複利法ニヨルトキトデdダケ違フトスレバ,年利率如何.
7. 二口ノ貸金ガアツテ,甲ロハ元金600圓デ複利ニヨル6年間ノ利息ガ462.9366圓デ,又乙ロノ7年間ノ元利合計ト3年間ノ元利合計トノ比ハ1296:625デアル. コノ兩ロノ利率ハ何レガ高イカ.

46. 年賦積立

今a圓ヲ貯金シ,ナホ今後滿一年毎ニa圓ヅツ逐次ニ積立テルコトトシ,年利率r,一年毎ノ複利デ利子ヲ加ヘテ行ケバ,第n回目ノa圓ヲ貯金シタトキ(卽チ最初カラ滿$n-1$年後)ノ元利合計何程トナルカ. コレヲ**年賦積立**ノ問題トイフ.

先ヅ最初カラ順次ニ貯金シテ行ツタ a 圓ハ最後ノ時マデニ夫々次ノヤウナ元利合計トナツテヰル.

	貯金後經過年數	元利合計
最初ノ a 圓	$n-1$	$a(1+r)^{n-1}$ 圓
第二回ノ a 圓	$n-2$	$a(1+r)^{n-2}$ 圓
第三回ノ a 圓	$n-3$	$a(1+r)^{n-3}$ 圓
…………		
…………		
第 $(n-1)$ 回ノ a 圓	1	$a(1+r)$ 圓
最後ノ a 圓	0	a 圓

ヨツテ求メル總計ヲ S 圓トスレバ,

$$S=a\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(1+r)+1\}$$
$$=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}.$$

故ニ
$$S=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}.$$

例 **1.** 毎年末金 100 圓ヅツ預ケテ行クトキハ第25年ノ終リニハ元利合計何程トナルカ．但シ年利率 4 分 8 厘ノ複利トスル．

解
$$S=\frac{100}{0.048}\{1.048^{25}-1\}.$$

先ヅ $1.048^{25}=x$ ト置ケバ,

$$\log 1.048=0.0203613$$
$$\log x=25\log 1.048=0.5090$$
$$x=3.228.$$

故ニ
$$S=\frac{222.8}{0.048}=4641.66\cdots\cdots$$

答　約 4642 圓.

例 **2.** 毎年ノ初メニ若干圓ヅツ貯金シテ行キ第30年ノ終リニ元利合計10000圓ヲ得ルニハ,何程ヅツ貯金スレバ宜イカ．但シ年利率 5 分ノ複利トスル．

解　第30年ノ終リニハ第30回ノ貯金ヲ終ツテカラ更ニ一年間ノ利子ガツイテヰル筈デアル.

故ニ
$$10000=\frac{a}{0.05}(1.05^{30}-1)\times 1.05.$$

先ヅ $1.05^{30}=x$ ト置ケバ,

$$\log 1.05=0.0211893$$
$$\log x=30\log 1.05=0.6357$$
$$x=4.322.$$

故ニ
$$a=\frac{10000}{21\times 3.322}.$$

$$\log 10000=4.0000$$
$$\operatorname{colog} 21=\bar{2}.6778$$
$$\operatorname{colog} 3.322=\bar{1}.4786$$
$$\log a=2.1564$$
$$a=143.4$$

答　143.4 圓.

x=1.750

例　題

1.　年利率3分8厘ノ複利デ毎年始ニ300圓ヅツ積立テレバ,第15年末ニ於ケル元利合計何程カ.

2.　年利率4分デ,半年毎ニ利子ヲ元金ニ繰リ込ムモノトシ,毎年始ニ100圓ヅツ積立テレバ,第10年末ニ於ケル元利合計何程カ.

3.　毎年末ニ50圓ヅツ年利率2分5厘ノ複利デ積立テレバ,元利合計ガ2000圓ヲ超過スルニハ何年ヲ要スルカ.

47.　年賦返濟

今A圓ヲ借リタトシ,年利率r,一年毎ノ複利デ利子ヲ計算スルモノトスル.　サテコレヲ返濟スルニ今カラ後滿一年毎ニ若干圓ヅツ等額ノ金ヲ返シテ行キ,丁度n年後ニナツテ皆濟トナルヤウニスルニハ,毎回何程ヅツ返濟スレバ宜イカ.

コレヲ**年賦返濟**ノ問題トイヒ,ソノ等額ナル毎年ノ返濟金ヲ**年賦金**トイフ.

先ヅ毎回返濟スベキ金高ヲa圓トスル.　今借リタA圓ハ一年後ニハ元利合計$A(1+r)$圓トナル.　コノトキa圓ダケ返濟スルカラ殘ツタ借金ハ

$$A(1+r)-a\,(圓).$$

故ニ第二年目ノ終リニハソノ元利合計ハ

$$\{A(1+r)-a\}(1+r)=A(1+r)^2-a(1+r)\,(圓).$$

コノトキ又a圓ダケ返濟スルカラ,殘ツタ借金ハ

$$A(1+r)^2-a(1+r)-a\,(圓).$$

次第ニ斯クノ如クニシテ進ミ,ツヒニ第n年目ノ終リニ殘ツタ借金ガ0トナルヤウニスレバ宜イ.

ヨツテ次ノ方程式ヲ得ル.

$$A(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots-a(1+r)-a=0.$$

即チ

$$A(1+r)^n=a\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(1+r)+1\}$$
$$=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}.$$

コレカラaヲ求メレバ

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=\frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}.$$

コノ問題ハ又年賦積立ノ問題ト關聯シテ,次ノ如クニモ解クコトガ出來ル.

今借リタA圓ノn年後ニ於ケル元利合計ハ

$$A(1+r)^n\,(圓).$$

コレヲ如何ナル方法デ返濟スルトシテモ,トニカクn年後ニハ貸主ノ手許ニ$A(1+r)^n$圓ダケノ金ガ生ズルヤウ

ニスレバ宜イ．然ルニ滿一年每ニ a 圓ヅツ返濟スルトイフコトハ,ツマリ借主ガ貸主ノ手許ニ每年 a 圓ヅツノ年賦積立ヲスルト同ジコトデ,ソノ n 年後ニ於ケル元利合計ハ前節ノ公式ニヨリ

$$\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}\ (\text{圓}).$$

コレヲ $A(1+r)^n$ 圓ニ等シイト置ケバ,

$$\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}=A(1+r)^n.$$

コレカラ a ヲ求メレバ前ニ得タト同一ノ結果ヲ得ル．

例　金7000圓ノ借金ヲ,年利6分ノ複利デ,12箇年ノ年賦償却トスルニハ,年賦金如何．

解　$$a=\frac{7000\times0.06}{1-1.06^{-12}}.$$

先ヅ $1.06^{-12}=x$ ト置ケバ

$$\log 1.06=0.0253059$$

$$\log x=-12\log 1.06=\bar{1}.6963$$

$$x=0.4969.$$

故ニ　$$a=\frac{420}{0.5031}\qquad \log 420=2.6232$$

$$\log 0.5031=\bar{1}.7017$$

$$\log a=2.9215$$

$$a=834.6$$

答　834.6圓．

例　題

1. 5000圓ヲ借入レコレヲ7箇年賦デ返濟スルニ,年6分ノ複利トスレバ,年賦金何程カ．

2. 10000圓ヲ年8分ノ複利デ借入レ10年間据置イタ後,次ノ10年間每年末ニ等額ノ金高ヲ支拂ツテコレヲ返濟スルニハ,ソノ金高何程カ．

48. 年　金

每年一定ノ額ダケ支拂ハレル金ヲ**年金**トイフ．或ル定マツタ期間內ダケ支拂ハレル年金ヲ**定期年金**トイヒ,無限ニ繼續サレル年金ヲ**永續年金**トイフ．

今カラ滿一年每ニ a 圓ヅツ n 年間支拂ハレル定期年金ガアルトシ,年利率 r, 一年每ノ複利デ,ソノ年金ノ每回ノ支拂高ノ今日ニ於ケル現價ヲ求メレバ次ノ如クデアル．

滿一年後ニ受取ルベキ a 圓ノ現價　$\frac{a}{1+r}$ 圓,

滿二年後　〃　〃　〃　〃　$\frac{a}{(1+r)^2}$ 圓,

…………………………

…………………………

滿 n 年後　〃　〃　〃　〃　$\frac{a}{(1+r)^n}$ 圓．

コレラノ現價ノ總和ヲAトスレバ,

$$A=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{a}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{a}{1+r}\times\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{a}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}. \qquad (1)$$

コレヲ定期年金ノ**現價**トイフ.

モシコノ年金ガ永續年金ナラバ,ソノ現價ハ

$$A=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots\cdots$$

デ,コノ右邊ハ無限等比級數デアル. 而シテコノ公比 $\frac{1}{1+r}$ ハ明カニ1ヨリ小サイ正數デアルカラ,ソノ總和ヲ求メルコトガ出來ル. 卽チ

$$A=\frac{\frac{a}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{a}{r}. \qquad (2)$$

(1)及ビ(2)ナル公式ハ又次ノ如ク考ヘテモ作ルコトガ出來ル.

每年a圓ヅツ,n年間ノ定期年金ヲ支拂フ者ハ,恰カモ今若干ノ借金ヲ有シテ每年a圓ヅツノ年賦返濟ヲナシ,滿n年後ニ皆濟トナルト同ジコトデアル. 斯ク考ヘレバ年金ノ現價ヲ求メルトイフコトハ,支拂者ノ現在ノ借金高ヲ求メルコトニ當ル. ヨツテ前節ノ公式ニ於ケル

aヲ年金高,Aヲ現價ト解釋スレバ宜イ,卽チ

$$a=\frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}$$

ヲ書キ直シテ

$$A=\frac{a}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}.$$

又每年a圓ヅツノ永續年金ノ現價トイフハ卽チ每年a圓ヅツノ利子ヲ生ズル元金ノコトデアルト考ヘテ宜イ. 故ニ

$$A=\frac{a}{r}.$$

例 今カラ滿5年後カラ始メテ10年間繼續サレル100圓ヅツノ年金ガアル. 年利率5分ノ複利デ,ソノ年金ノ今日ニ於ケル現價ヲ求メヨ.

解 今カラ滿4年後ニ於ケルソノ年金ノ現價ハ,公式ニヨリ

$$\frac{100}{0.05}(1-1.05^{-10})\text{圓}.$$

故ニ今日ニ於ケル現價ヲA圓トスレバ,

$$A=\frac{100}{0.05}(1-1.05^{-10})\times\frac{1}{1.05^4}.$$

コレヲ計算スルニ,先ヅ

$$1.05^{-10}=x$$

ト置ケバ,

$$\log 1.05 = 0.0211893$$

$$\log x = -10 \log 1.05 = \bar{1}.7881$$

$$x = 0.6139$$

$$1 - x = 0.3861$$

$$\begin{array}{rr} \log 100 = 2.0000 & \log 0.05 = \bar{2}.6990 \\ \log 0.3861 = \bar{1}.5867 & 4 \log 1.05 = 0.0848 \\ \hline 1.5867 & \bar{2}.7838 \\ \bar{2}.7838 & \\ \hline \log A = 2.8029 & \end{array}$$

$$A = 635.1$$

答　635.1 圓.

例　題

1. 年利率5分トスルトキ永續年金250圓ノ現價如何.

2. 今カラ向フ10箇年間ハ毎年末ニ100圓ヲ受ケ,ソノ後ハ毎年末ニ50圓ヅツヲ永久ニ受クベキ年金ガアル. 年利率4分8厘トシテソノ現價ヲ計算セヨ.

3. 今若干圓ヲ銀行ニ預ケテ置キ,滿一年後カラ始メテ毎年1000圓ヅツ20年間ノ年金ヲ得ルニハ,今幾許ヲ預クベキカ. 但シ年利率5分ノ複利トスル.

4. 150圓ノ永續年金ヲ有スル人ガ,ソノ契約ヲ變ジテ

コレヲ30年繼續ノ定期年金トスレバ,年金額何程トナルカ. 但シ年利率6分ノ複利トスル.

雜　題　IV.

1. $5\frac{1}{16}$ ノ -0.75 乘羃ハイクラカ.

2. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ,次ノ式ノ値如何.

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$$

3. $x=\frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}$ ナルトキ,次ノ式ノ値ヲ求メヨ.

$$x^3+(3-\sqrt{2})x^2+(2-3\sqrt{2})x+9$$

4. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

　(1)　$2x^2(2x-1)^2=9(6x^2-3x+5)$

　(2)　$x^4+x^{\frac{8}{5}}=(2^6+2^{-6})x^2\sqrt[5]{x^4}$

5. $x^4-3x^2+1=0$ ノ根ヲ小數三位マデ計算セヨ.

6. 次ノ聯立方程式ニ於ケル a ノ値如何.

$$ax+y=1, \qquad x+5ay=2, \qquad 2x+6y=3$$

7. $y=10^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$ ナルトキハ, $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

8. $ax^3+3bx^2+3cx+d$ ガ $ax^2+2bx+c$ デ割リ切レルトキハ, a, b, c, d ハ等比級數ヲナシ,且 x ニ關シテ第一式ハ完全立方式,第二式ハ完全平方式デアル.

9. x ガ整數ナルトキハ, $2x^3+4x$ ハ 6 デ割リ切レル.

10. 次式ヲ簡單ニセヨ.

$$\frac{3x^3-x^2-x-1}{3x^3+5x^2+3x+1}+\frac{x^3+3x^2+5x+3}{x^3+x^2+x-3}$$

11. 次ノ二ツノ多項式ノ積ヲ一ツノ多項式ノ形デ表ハセ.

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots+x^{2n+1},$$

$$x-x^2+x^3-x^4+\cdots\cdots+x^{2n+1}$$

12. 次ノ恆等式ガ成立ツヤウニ未定係數 p, q ノ値ヲ定メヨ.

$$x^4+y^4=(x^2+pxy+y^2)(x^2+qxy+y^2)$$

13. 二次方程式 $x^2+px+q=m$ ノ一根ガ n デ,又 $x^2+px+q=n$ ノ一根ガ m ナラバ,コノ二ツノ二次方程式ノ他ノ二根ヲ根トスル方程式ハ $x^2+(p-1)x+q+1=0$ デアル.

14. 銀行割引高ト眞割引高トノ差ハ,眞割引高ヲ元金トシテ割引期間ニ生ズル利子ニ等シイ.

15. 年利率ヲ 7 分トスレバ,今カラ 100 年後ニ受取ルベキ金 10000 圓ノ現價如何.

16. 今カラ滿一年後ニ始マリ,ソノ後ハ隔年ニ a 圓ヅツ引キ續イテ n 回受クベキ年金ノ現價如何. 但シ年利率 r ノ複利トスル.

17. p 圓ノ社債ヲ募集シ m 年間据置イテ後,毎年同額ヅツ償却シ n 年間ニ償却シ終ルニハ,毎年ノ償却金額何程カ. 但シ年利率 r ノ複利トスル.

18. 或ル年ノ始メニ或ル金額ヲ貯金シ10年間据置キ,11年目カラ毎年始ニ 450 圓ヅツヲ引キ出シ, 6 年間ニ全部ヲ引キ出スニハ,初メノ貯金額ヲ何程トスベキカ. 但シ年利 4 分 5 厘ノ複利トスル.

19. 金10000圓ヲ年 6 分ノ複利デ預入レ,ソレカラ滿 1 箇年毎ニ金1000圓ヅツ引キ出セバ,第10回目ニ引キ出シタ後ノ殘額如何.

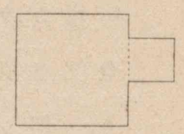
20. 毎年末金100圓ヅツヲ仕拂ツテ金 2400 圓ノ負債ヲ償却ショウトスル. 年利率ヲ 4 分トスレバ幾年デ償却シ終ルカ. 但シ最後ノ年ダケハ 100 圓未滿ヲ仕拂フモノトスル.

21. 3 年間ノ利息ガ單利法デ 450 圓,又一年毎ノ複利法デ 477.45 圓トナルベキ元金及ビ利率如何.

22. 或ル事業ニ於テ甲ハ若干圓ヲ資本トシテ金 480 圓ノ利益ヲ得,乙ハ甲ヨリモ金 1200 圓ダケ少イ資本デ同額ノ利益ヲ得タ. 而シテソノ利益ノ歩合ノ差ハ 2 分デアル. 甲乙兩人ノ資本及ビ利益ノ歩合ヲ求メヨ.

23. 5 箇月後ニ支拂ハレルベキ 300 圓ノ手形ヲ今 295 圓デ買ヘバ損益如何. 但シ年利 7 分トシテ計算セヨ.

24. 或ル山林ニ於ケル毎年ノ植樹及ビ伐採ノ數ハ夫々各年ノ始メニ存在スル樹木數ノ $\frac{1}{6}$ 及ビ $\frac{1}{8}$ デアル．樹木數ガ今ノ 2 倍トナルハ幾年後カ．但シ $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ トスル．



25. 大小二箇ノ正方形ヲ接合シテ得ラレル圖ノ如キ紙片ガアル．ソノ面積ハ 80 平方粍デ周圍ハ 40 cm デアル．各正方形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ．

26. 直徑 1 m ナル圓ニ内接スル周圍 2.5 m ナル梯形ノ各邊ノ長サヲ求メヨ．但シ梯形ノ一邊ハ圓ノ直徑デアル．

27. 長サ 16 m ナル直線 AB ヲ直徑トスル圓ニ内切シ直線 AB 上ニ中心ヲ有シテ互ニ外切スル二ツノ圓ガアル．コノ二ツノ圓ノ面積ノ和ガ直徑 AB ナル圓ノ面積ノ $\frac{5}{8}$ ヲ占メルトキハ，コノ二ツノ圓ノ直徑ノ長サ各如何．

28. 甲乙丙ノ三人ガ a m ノ距離ヲ競走シテ甲乙丙ノ順ニ到着シタ．甲ガ決勝線ニ入ツタトキ乙ハ b m, 丙ハ c m 決勝線ノ手前ニヰタ．乙ガ決勝線ニ入ツタトキ丙ハナホ幾米遲レテヰタカ．

附　　錄

第一章　雜　級　數

1.　級　數

等差，等比又ハ調和級數デナクトモ，トニカク一定ノ法則ニ從ツテ順次ニ作ラレル一列ノ數ヲ一般ニ**級數**ト稱ヘル．ココニ二三ノ特別ナル級數ノ總和ヲ求メルコトヲ述ベル．

例 1.　級數 $1+11+111+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ．

解 1.　今求メル和ヲ S トシ，S ト 10S トヲ次ノ如クニナラベテ見ル．

$$S=1+11+111+\cdots\cdots+(\overbrace{11\ldots1}^{n\text{位}}).$$

$$10S=\quad 10+110+\cdots\cdots+(11\ldots0)+(\overbrace{11\ldots0}^{(n+1)\text{位}}).$$

ヨツテ邊々相減ズレバ，

$$9S=-\overbrace{1-1-1-\cdots-1}^{n\text{箇}}+(\overbrace{11\ldots0}^{(n+1)\text{位}}).$$

然ルニ

$$(\overbrace{11\ldots0}^{(n+1)\text{位}})=10+10^2+\cdots\cdots+10^n=\frac{10(10^n-1)}{10-1}$$

$$=\frac{10(10^n-1)}{9}.$$

故ニ

$$9S=\frac{10(10^n-1)}{9}-n.$$

從ツテ

$$S=\frac{10(10^n-1)}{81}-\frac{n}{9}.$$

解 2.　求メル和ヲ S トスレバ，

$$9S=9+99+999+\cdots\cdots+\overbrace{999\ldots9}^{n\text{位}}$$

$$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots\cdots+(10^n-1)$$

$$=10+10^2+10^3+\cdots\cdots+10^n-n$$

$$=\frac{10^{n+1}-10}{10-1}-n.$$

故ニ $$S=\frac{10(10^n-1)}{81}-\frac{n}{9}.$$

例 2. 次ノ級數ノ總和ヲ求メヨ.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$$

解 公式 $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$ ニ於テ,

$x=1$ トスレバ $2^3=1^3+3.1^2+3.1+1,$

$x=2$ トスレバ $3^3=2^3+3.2^2+3.2+1,$

$x=3$ トスレバ $4^3=3^3+3.3^2+3.3+1,$

$x=4$ トスレバ $5^3=4^3+3.4^2+3.4+1,$

$\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots$

$x=n$ トスレバ $(n+1)^3=n^3+3.n^2+3.n+1.$

コレラノ式ヲ邊々相加ヘ,兩邊ニ共通ナル

$$2^3,\ 3^3,\ \ldots\ldots,\ n^3$$

ヲ互ニ消シ合ヘバ,

$$(n+1)^3=3.(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+(n+1).$$

ココニ於テ今求メル總和ヲSトスレバ,

$$(n+1)^3=3S+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1).$$

ヨツテ $$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

例 3. 次ノ級數ノ n 項ノ總和ヲ求メヨ.

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots\cdots$$

解 今 $a_r=(r-1)r(r+1)(r+2)$

ト置ケバ $a_{r+1}=r(r+1)(r+2)(r+3).$

故ニ $a_{r+1}-a_r=4r(r+1)(r+2).$

コノ式ニ於テ順次ニ $r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n$ トスレバ

$$a_2-a_1=4\times1.2.3,$$
$$a_3-a_2=4\times2.3.4,$$
$$a_4-a_3=4\times3.4.5,$$

$\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots$

$$a_{n+1}-a_n=4.n(n+1)(n+2).$$

コレラノ式ヲ邊々相加ヘ,求メル和ヲSト置ケバ

$$a_{n+1}-a_1=4\times S,$$

卽チ $$n(n+1)(n+2)(n+3)-0=4S.$$

故ニ $$S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

例 4. 次ノ總和ヲ求メヨ.

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

解 今先ツA, Bハ共ニ n ヲ含マナイ數トシテ

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1} \qquad (1)$$

ト置キ,A, Bノ値ヲ定メレバ,

$$A=1,\qquad B=-1.$$

故ニ $$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}. \qquad (2)$$

(2)ニ於テ次第ニ $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n$ トスレバ

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

コレラノ式ヲ邊々相加ヘ,求メル和ヲSトスレバ

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

卽チ $$S=\frac{n}{n+1}.$$

例 題

1. 次ノ各級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ.

(1) $a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots$

(2) $0.5+0.55+0.555+0.5555+\cdots\cdots$

(3) $2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots\cdots$

(4) $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots$

(5) $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$

(6) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots$

(7) $1.3+3.5+5.7+\cdots\cdots$

(8) $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots$

(9) $2.4+4.6+6.8+\cdots\cdots$

(10) $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots$

(11) $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\cdots\cdots$

(12) $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+\cdots\cdots$

2. 次ノ各無限級數ノ和ヲ求メヨ.

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{32}+\cdots\cdots$

(2) $1-\dfrac{5}{7}+\dfrac{3}{7^2}+\dfrac{1}{7^3}-\dfrac{5}{7^4}+\dfrac{3}{7^5}+\dfrac{1}{7^6}-\dfrac{5}{7^7}+\dfrac{3}{7^8}+\cdots\cdots$

(3) $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\dfrac{1}{4.5}+\cdots\cdots$

3. 次ノ方程式ガ等根ヲ有スルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ.

$$\frac{a}{x(x+a)}+\frac{b}{(x+a)(x+a+b)}+\frac{c}{(x+a+b)(x+a+b+c)}$$
$$+\frac{d}{(x+a+b+c)(x+a+b+c+d)}=\frac{1}{m(a+b+c+d)}$$

但シ $a+b+c+d\neq 0$ トスル.

4. 半徑ガ夫々 1m, 3m, 5m, ……, $(2n-1)$m ナル n 箇ノ圓ノ面積ノ總和ヲ求メヨ.

第二章 不 等 式

2. 不等式ノ種類

不等號ヲ以テ二ツノ代數式ヲ連結シ,ソノ値ノ相等シクナイコトヲ表ハシタモノヲ**不等式**トイヒ,ソノ各一方ノ式ヲ不等式ノ**邊**トイフ. 邊ニ**左邊**,**右邊**ノ別アルコトハ等式ノ場合ト同ジデアル.

例ヘバ　$x^2+3>0,$　(1)

$x-2>5,$　(2)

$2x<x+1$　(3)

ノ如キハ何レモ不等式デアル.

上ノ例ノ中 (1) ハ x ニ如何ナル實數ノ値ヲ與ヘテモ常ニ眞デアル. コレニ反シテ (2) ハ $x>7$ ナルトキニ限リ, (3) ハ $x<1$ ナルトキニ限ツテ成立スル不等式デアル. コレニヨツテ不等式ニハ次ノ二種アルコトヲ知ル.

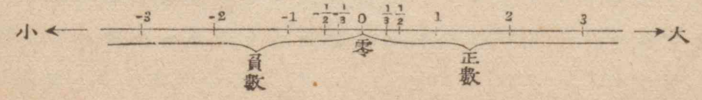
式中ノ文字ニ如何ナル實數ノ値ヲ與ヘテモ,常ニ成立スル不等式ヲ**絕對的不等式**トイフ. 例ヘバ (1) ノ如キモノデアル.

式中ノ或ル文字ニ特別ナ制限ヲツケナケレバ成立シナイ不等式ヲ**條件附不等式**トイヒ,ソノ制限ヲツケルベキ文字ヲソノ不等式ノ**未知數**トイフ. 例ヘバ (2) 及ビ (3) ハ條件附不等式デ, x ハソノ未知數デアル.

條件附不等式ヲ成立セシメルタメニ未知數ニツケルベキ制限ヲ求メルコトヲ稱シテソノ不等式ヲ**解ク**トイフ.

3. 基本ノ定理

正及ビ負ノ數ノ大小ノ關係ヲ示スニ次ノ如ク一直線上ノ點ヲ以テスルコトハ既ニ知ルトコロデアル. 今コノ圖ニ於テ,或ル數ニ正數ヲ



加ヘルトイフコトハソノ數ノ位置カラ右ニ進ムコトニ當リ,又或ル數ニ負數ヲ加ヘルトイフコトハ左ニ進ムコトニ當ル. 故ニ一ツノ數aカラ他ノ數bヲ減ジタ差ガ正ナルトキハ,bニ正數ヲ加ヘテaヲ得ル筈デアルカラ,圖ニ於テaハbヨリ右ニアル,卽チaハbヨリ大デアル. 同樣ニ,aカラbヲ減ジタ差ガ負ナルトキハ,aハbヨリ小デアル. ヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

$a-b$ガ正ナルトキハ,aハbヨリ大デアル.
$a-b$ガ負ナルトキハ,aハbヨリ小デアル.

サテ或ル數ガ正ナルトキハソノ數ハ0ヨリ大デ,負ナルトキハ0ヨリ小デアルカラ,上ノ定理ヲ次ノ如クイヒ直スコトガ出來ル.

$a-b>0$ナルトキハ$a>b$デ,
$a-b<0$ナルトキハ$a<b$デアル.

又逆ニ$a>b$ナラバ必ズ$a-b>0$デアル. 何トナレバ,モシ$a-b<0$ナラバ上ノ定理ニヨリ$a<b$デナケレバナラヌ,モシ又$a-b=0$ナラバ$a=b$デナケレバナラヌ,ヨツテ$a>b$ナラバ是非共$a-b>0$デアルヨリ他ナイ. 同樣ニ,$a<b$ナラバ必ズ$a-b<0$デアル. 故ニ

$a>b$ナルトキハ$a-b>0$デ,
$a<b$ナルトキハ$a-b<0$デアル.

4. 不等式ノ性質

(1) 不等式ノ兩邊ニ同ジ數ヲ加ヘ,又ハ兩邊カラ同ジ數ヲ減ジテモ,不等式ハソノ向キヲ變ジナイ*.

何トナレバ$a>b$ナルトキハ$a-b>0$デアル. ヨツテ任意ノ數ヲcトスレバ

$$a-b=(a+c)-(b+c)>0.$$

*「向キヲ變ジナイ」トイフノハ前ニ大デアツタ方ノ邊ガ後ニモ矢張リ大デアルコトヲイフ. モシ「向キヲ變ズル」トイヘバコレガ反對ニナルコトデアル.

故ニ
$$a+c>b+c.$$

ココニcハ正デモ負デモ差支ナイカラ,コノ證明ハ兩邊カラ同ジ數ヲ減ズル場合ヲモ含ムモノデアル.

コノ定理ヲ應用スレバ,等式ノ場合ニ於ケルガ如ク,不等式ニ於テモ移項ヲナスコトガ出來ル. 卽チ

(2) 不等式ノ一邊ニアル項ノ符號ヲ變ジテコレヲ他ノ邊ニ移スコトガ出來ル.

例ヘバ$a+b>c-d$ヲ移項シテ$a+d>c-b$トスルガ如クデアル.

(3) 不等式ノ兩邊ニ同ジ正數ヲ乘ジ又ハ兩邊ヲ同ジ正數デ除シテモ,不等式ハソノ向キヲ變ジナイ.

何トナレバ$a>b$ナルトキハ$a-b$ハ正デアル. ヨツテコレニ任意ノ正數cヲ乘ズレバ,$c(a-b)$卽チ$ca-cb$ハ矢張リ正デアル. 故ニ$ca>cb$トナル. ココニcハ正ノ分數トシテモ差支ナイカラ,コノ證明ハ兩邊ヲ同ジ正數デ除スル場合ヲモ含ムモノデアル.

(4) 不等式ノ兩邊ニ同ジ負數ヲ乘ジ,又ハ兩邊ヲ同ジ負數デ除スレバ,不等式ハソノ向キヲ變ズル.

何トナレバ,(3)ノ證明中デcヲ負數トスレバ$ca-cb$ハ負數トナリ,從ツテ$ca<cb$トナルカラデアル.

(5) 同ジ向キノ多クノ不等式ヲ邊々相加ヘルトキハ,矢張リ同ジ向キノ不等式ヲ得ル.

例ヘバ$a>b$, $c>d$トスレバ,$a-b$及ビ$c-d$ハ共ニ正デアル. 故ニソノ和モ亦正デアル. 卽チ

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)>0.$$

故ニ
$$a+c>b+d.$$

二ツヨリ多クノ不等式ニツイテモ同樣ニ證明サレル.

(6) 兩邊ガ共ニ正ナル同ジ向キノ多クノ不等式ヲ邊々相乘ズルトキハ,矢張リ同ジ向キノ不等式ヲ得ル.

例ヘバa, b, c, dガ何レモ正數デ$a>b$, $c>d$ナルトキハ,ソノ兩邊ニ夫々正數c及ビbヲ乘ズレバ

$$ac>bc, \qquad bc>bd.$$

ヨッテ $\qquad ac>bd.$

モシ更ニ e, f ヲ正數トシ, $e>f$ ナル第三ノ不等式ガアルトキハ前ノ二ツノ不等式カラ得タ結果ノ $ac>bd$ ニ更ニ $e>f$ ヲ邊々相乘ズレバ $ace>bdf$ ヲ得ル.

三ツヨリ多クノ不等式ニツイテモ同樣ニ證明サレル.

例 題

1. 一ツノ不等式カラコレト向キヲ異ニスル他ノ不等式ヲ邊々相減ズルトキハ,始メノ不等式ト同ジ向キノ不等式ヲ得ル.
2. 一ツノ不等式カラコレト同ジ向キノ他ノ不等式ヲ邊々相減ズルトキハ,ソノ結果如何.
3. 兩邊ガ共ニ負ナル二ツノ同ジ向キノ不等式ヲ邊々相乘ズルトキハ,ソレト向キヲ異ニスル不等式ヲ得ル.
4. 兩邊ガ共ニ正ナル不等式ト,兩邊ガ共ニ負デコレト向キヲ異ニスル不等式トヲ邊々相乘ズルトキハ,兩邊ガ共ニ負ナル方ノ不等式ト同ジ向キノ不等式ヲ得ル.
5. 等式ト不等式トヲ邊々相加ヘ又ハ相乘ズル場合ノ結果ヲ吟味セヨ.

5. 一次不等式ノ解法

例 1. $8x-3>5x+9$ ヲ解ケ.

解 先ヅ移項スレバ

$$8x-5x>9+3,$$

卽チ $\qquad 3x>12.$

兩邊ヲ正數 3 デ割レバ $\quad x>4.$

コレ卽チ所要ノ限界デアル.

例 2. $x-\frac{1}{2}<3(x-1)+\frac{2}{3}$ ヲ解ケ.

解 括弧ヲ解キ,移項スレバ

$$x-3x<-3+\frac{2}{3}+\frac{1}{2},$$

卽チ $\qquad -2x<-\frac{11}{6}.$

兩邊ヲ負數 -2 デ割レバ

$$x>\frac{11}{12}.$$

例 3. 果物若干箇ヲ若干箇ノ箱ニ詰メルニ,一箱ニ14箇ヅツ詰メレバ果物36箇餘リ,一箱ニ20箇ヅツ詰メレバ最後ノ一箱ダケハ充滿シナイトイフ. 果物ノ數如何.

解 先ヅ箱數ヲ x トスレバ,果物ノ總箇數ハ $14x+36$ デアル. 故ニ一箱20箇詰メニスルトキハ最後ノ一箱ニ入レルベキ果物ノ箇數ハ

$$14x+36-20(x-1)$$

デ,コレハ題意ニヨリ20ヨリ少イ. ヨッテ次ノ不等式ヲ得ル.

$$20>14x+36-20(x-1)\geqq 0.$$

コノ不等式ノ前ノ部分ヲ取ッテ解ケバ

$$x>6.$$

又後ノ部分ヲ取ッテ解ケバ

$$x\leqq 9\frac{1}{3}.$$

然ルニ x ハ整數ナルベキニヨリ,コノ兩方ノ限界內ニアルモノハ7, 8, 9ノ三ツニ限ル. コレラノ x ノ値ヲ $14x+36$ ニ代入スレバ夫々 134, 148, 162 ヲ得ル.

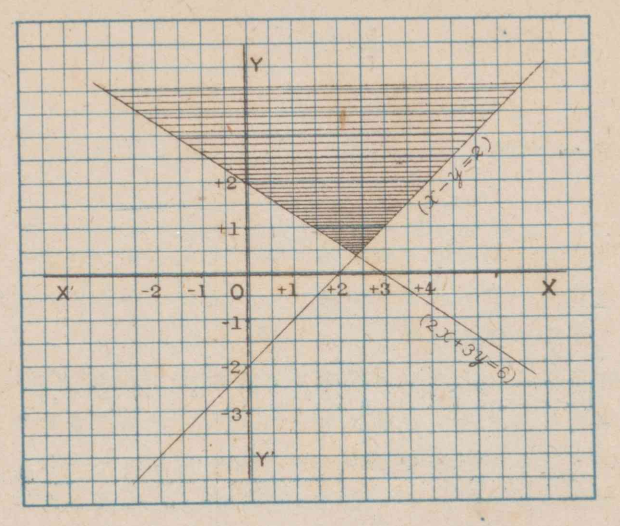
答 134箇又ハ148箇又ハ162箇.

例 4. 次ノ聯立不等式ヲ圖解セヨ.

$$\left.\begin{array}{r} x-\ y<2 \\ 2x+3y>6 \end{array}\right\}$$

解 (1) $x-y<2$ ニ適スル點ハスベテ直線 $(x-y=2)$ ニヨッテ分タレタ平面ノ二ツノ部分ノ中,原點ト同ジ側ノ部分ニアル. 逆ニコノ部分內ノ點ハ皆 $x-y<2$ ニ適スル.

(2) $2x+3y>6$ ニ適スル點ハスベテ直線 $(2x+3y=6)$ ニヨッテ分タレタ平面ノ二ツノ部分ノ中,原點ト反對ノ側ノ部分ニアル. 逆ニコノ部



分内ノ點ハ皆 $2x+3y>6$ ニ適スル.

故ニ $x-y<2$ 及ビ $2x+3y>6$ ニ適スル點ハ皆 $x-y=2$ 及ビ $2x+3y=6$ ノ圖ナル二ツノ直線ニヨツテ限ラレタ平面ノ四ツノ部分ノ中,圖ニ陰影ヲ附シテ示シタ部分内ニアル. 逆ニコノ部分内ノ點ハ皆 $x-y<2$ 及ビ $2x+3y>6$ ニ適スル.

例 題

1. 次ノ各不等式ヲ解ケ.

(1) $2x+7>5x-9$

(2) $(x-1)(x-2)>x^2+3x-8$

(3) $\frac{x}{10}<\frac{x}{15}+1<\frac{x}{9}$. 但シ x ハ整數トスル.

2. 次ノ各組ノ不等式又ハ不等式ト等式トヲ滿足セシメル x 及ビ y ノ限界ヲ求メヨ.

(1) $\begin{cases} x-3<2x \\ 2x+3>3x-2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 2y-3x>1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 7x+5y=16 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 3x-45>3-x \\ x-24<2x \end{cases}$

3. 分數ガアツテ,分母ニ1ヲ加ヘルトキハソノ値ハ $\frac{2}{3}$ ニ等シクナリ,分子ニ2ヲ加ヘルトキハソノ値ハ1ト2トノ間ニアル. コノ分數ヲ求メヨ. 但シ分母分子ハ共ニ正ノ整數トスル.

4. 大小二ツノ整數ガアツテ,ソノ和ハ73デ,大數ノ3倍ハ小數ト8トノ和ノ5倍ヨリモ大デ,大數カラ8ヲ減ジタ差ノ3倍ハ小數ノ7倍ヨリモ小デアル. 各數如何.

5. 若干口ノ仕拂ヲナスニ,從來ハ厘位未滿ヲ切リ捨テル習慣デアツタノヲ改メテ錢位未滿ヲ切リ捨テルコトトシタタメニ12錢ダケ得ヲシタ. 一口ノ金額ハ各5圓以上デ合計75圓未滿デアル. 仕拂ノ口數如何.

6. 絶對的不等式

例 1. a ト b トハ共ニ實數デ,且相等シクナイトスレバ

$$a^2+b^2>2ab \quad (1)$$

ナル關係ガアル.

解 何トナレバ今左邊カラ右邊ヲ減ジタ差ヲ作レバ

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2.$$

而シテ a ト b トハ相等シクナイカラ $a-b$ ハ0デハナイ,且實數デアルカラソノ平方ハ必ズ正數デアル. ヨツテ所題ノ式ヲ得ル.

モシ又 a ト b トガ相等シイトキハ明カニ

$$a^2+b^2=2ab. \quad (2)$$

故ニ(1)ト(2)トヲマトメテ,a ト b トガ任意ノ實數ナルトキハ,常ニ

$$a^2+b^2 \geqq 2ab. \quad (3)$$

ココニ於テ a^2 及ビ b^2 ヲ夫々A及ビBデ表ハセバ(A, B ハ負ナルコトハナイ),次ノ結果ヲ得ル.

$$\frac{A+B}{2} \geqq \sqrt{AB}. \quad (4)$$

即チ,負デナイ任意ノ二數ノ相加平均ハ一般ニ相乘平均ヨリモ大デ,唯二數ガ相等シイトキニ限リ兩平均モ亦相等シイ.

例 2. a ト b トハ共ニ正數デ,且相等シクナイトキ,

$\frac{a+b}{2}$ ト $\frac{2ab}{a+b}$ トハ何レガ大ナルカ.

解 先ヅコノ二式ノ差ヲ作レバ

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

然ルニ假定ニヨリコノ結果ハ正デアル. 故ニ

$$\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}.$$

例題

1. a, b, c ヲ相等シクナイ正數トスレバ次ノ各不等式ガ成立スル.

(1) $a^3+b^3>ab(a+b)$　　(2) $a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$

(3) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)<2(a^3+b^3+c^3)$

(4) $6abc<bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$

(5) $a^3+b^3+c^3>3abc$　　(6) $(a^3+b^3)(a+b)>(a^2+b^2)^2$

2. n ガ正數ナルトキ n^3 ト n^2-n+1 トハ何レガ大ナルカ. 又 n^3 ト n^2+n-1 トハ如何.

3. $1+2x^4$ ト x^2+2x^3 トノ大小ノ關係如何.

4. a ト b トガ共ニ正ナルトキ,次ノ二式ノ大小ヲ判定セヨ.

$$\frac{2a+3b}{3a+4b},\qquad \frac{5a+6b}{9a+8b}$$

5. $ac=bd$ デナイトキハ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ad+bc)^2$.

6. a 及ビ b ヲ如何ナル正數トスルモ, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ノ値ハ2ヨリ小デナイ.

7. $(a+b+c)^2$ ト $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$ トハ何レガ大ナルカ.

8. a, b, c, x, y, z ガ正數ナルトキハ,次式ノ値ハ9ヨリ小デナイ.

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

7. 一元二次不等式ノ解法

x ヲ未知數トスル一元二次不等式ノスベテノ項ヲ左邊ニ集メ,コレヲ簡約シテ x^2 ノ係數デ兩邊ヲ除スレバ

$$x^2+px+q>0 \qquad (1)$$

又ハ

$$x^2+px+q<0 \qquad (2)$$

ナル形トナル. コレヲ解クニハ先ヅ方程式

$$x^2+px+q=0 \qquad (3)$$

ヲ考ヘ,ソノ根ノ虚實ニヨツテ次ノ三ツノ場合ヲ區別スルヲ要スル.

(I) $p^2-4q>0$ ナルトキハ(3)ハ二ツノ相異ナル實根ヲモツ,コレヲ α 及ビ β トスレバ

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta).$$

今假リニ $\alpha>\beta$ トスレバ,

$x>\alpha>\beta$ ナルトキハ

$x-\alpha>0$. $x-\beta>0$ 從ツテ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$,

$\alpha>x>\beta$ ナルトキハ

$x-\alpha<0$, $x-\beta>0$ 從ツテ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$,

$\alpha>\beta>x$ ナルトキハ

$x-\alpha<0$, $x-\beta<0$ 從ツテ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$.

故ニ(1)ノ解ハ $x>\alpha$ 又ハ $x<\beta$,

(2)ノ解ハ $\alpha>x>\beta$.

(II) $p^2-4q=0$ ナルトキハ(3)ハ實數ナル等根ヲモツ,コレヲ α トスレバ

$$x^2+px+q=(x-\alpha)^2.$$

故ニ,(1)ハ $x=\alpha$ デナイ限リ任意ノ x ノ値ニヨツテ滿足セシメラレル. (2)ハ x ノ如何ナル値ニヨツテモ滿足セシメラレナイ.

(III) $p^2-4q<0$ ナルトキハ(3)ハ二ツノ虚根ヲモツ,故ニコノ場合ニハ(3)ノ左邊ヲ實數ノ係數ヲ有スル因數ニ分解スルコトハ出來ナイ. ヨツテ次ノ如クニ考ヘル.

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

ココニ $4q-p^2>0$ デアルカラ,コノ式ノ右邊ハ常ニ正ナル値ヲ取ル.

故ニ,(1)ハ任意ノ x ノ値ニヨツテ滿足セシメラレ,(2)ハ如何ナル x ノ値ニヨツテモ滿足セシメラレナイ.

例 1. $x^2-2x-3<0$ ヲ解ケ.

解 左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x+1)(x-3)<0$$

トナル. 故ニ求メルxノ限界ハ

$$-1<x<3.$$

例 2. $2x^2-7x<x^2-x-14$ ヲ解ケ.

解 全體ヲ左邊ニ移セバ

$$x^2-6x+14<0,$$

卽チ $$(x-3)^2+5<0.$$

故ニ如何ナルxノ値ニヨツテモ滿足セシメラレナイ.

例 題

1. 次ノ各不等式ヲ解ケ.

$x^2-6x-8>0,\quad 4x^2+1>4x,\quad 1-3x-5x^2<0,$

$3x^2-7x<1-3x,\quad (x-1)(x-2)>x,\quad x(x-1)<2(2x+3)$

2. 二次式

x^2-2x-3 及ビ $x^2-6x+14$

ノ圖ヲ畫キコレニヨツテ本節ノ例1及ビ例2ヲ圖解セヨ.

3. $x^2-5x+6>0$ デ,同時ニ $x^2-9x+8<0$ ナルベキxノ範圍ヲ定メヨ.

4. $x^2-2m(x-4)-15=0$ ガ實根ヲ有スルタメニmノ取ルベキ値ノ限界如何.

第三章 函 數

8. 函 數

例ヘバ $2x^2-3x-2$ ナル式ガアルトキ, xノ値ガ定マレバコノ式ノ値モ亦定マリ, xノ値ガ變動スレバコノ式ノ値モ亦變動スル. 斯クノ如キ關係ヲイヒ表ハスニ「$2x^2-3x-2$ ハxノ**函數**デアル」トイフ. モシ

$$y=2x^2-3x-2$$

ト置クトキハ「yハxノ函數デアル」トモイフコトガ出來ル.

函數ノ一般ナル定義ハ次ノ如クデアル.

相伴ツテ變動スル二ツノ數x及ビyガアツテ, xガ定マルトキコレニ從ツテyモ亦定マルナラバ, yヲxノ函數トイフ.

xノ函數ハ必ズシモxヲ含ム代數式デ表ハサレルモノナルコトヲ要シナイ,例ヘバ $\sin x$ ノ如キモ勿論xノ函數デアル. 又次節ノ例3ノ如ク全然式ヲ以テ表ハサレテキナイ函數モアル.

一般ニxノ函數yガxニツイテノ代數式デ表ハサレルトキハコレヲ**代數函數**トイフ. 例ヘバ

$$y=2x^2-3x-2 \qquad (1)$$

$$y=\frac{1+x+4x^2}{3-2x} \qquad (2)$$

$$y=x+\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}} \qquad (3)$$

ノ如キハ何レモ代數函數デアル. 特ニ(1), (2)ノ如クyガxニツイテノ有理式ヲ以テ表ハサレルモノヲ**有理函數**トイヒ,ソノ式ガ(1)ノ如ク整式ナルトキハ**有理整函數**,又(2)ノ如ク分數式ナルトキハ**有理分數函數**トイフ. 又(3)ノ如ク無理式ヲ含ムトキハ**無理函數**トイフ.

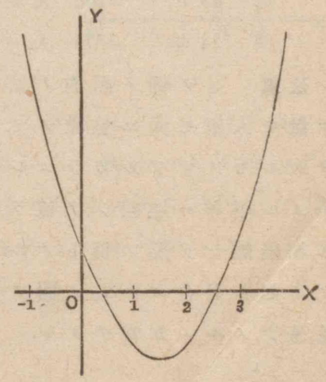
又例ヘバ

$$y=a^x, \qquad (4)$$

$$y=\log_a x, \qquad (5)$$

$$y=\sin x \qquad (6)$$

ノ如キハ代數函數デハナイ. 代數函數デナイモノヲ總稱シテ**超越函數**トイフ. 特ニ(4)ヲ**指數函數**, (5)ヲ**對數函數**,又(6)ノ如キモノヲ**三角函數**トイフ.



9. 函數ノ圖形表示

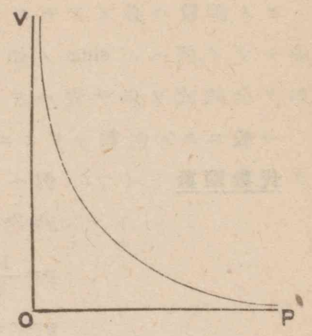
yヲxノ函數トシ, xガ種々ノ値ヲ取ルトキコレニ伴ツテyノ値ガ如何ニ變動スルカヲ圖形ニヨツテ示スニハ, xヲ横線トシ, yヲ縱線トスル點ノ軌跡デアル圖(一般ニハ曲線)ヲ作レバ宜イ.

例 1. 函數 x^2-3x+1 ヲ圖示セヨ.

$y=x^2-3x+1$ ト置イテ, x ヲ横線, y ヲ縦線トスル點ノ軌跡ヲ求メレバ前頁ノ圖ノ如キ曲線(拋物線)ヲ得ル.

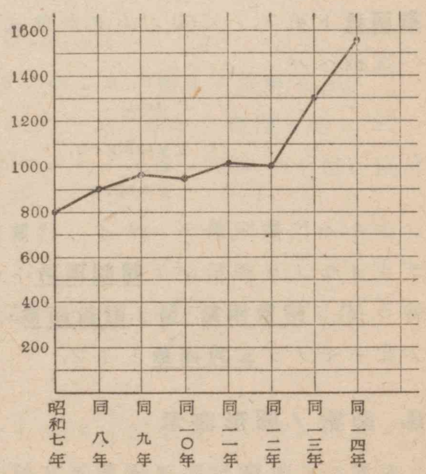
例 2. 一定量ノ氣體ノ體積ヲVトシ,ソノ壓力ヲPトスレバ物理學デ知ル如クPV=C (Cハ一定ノ正數)ナル關係ガアル.

今VヲPノ函數ト考ヘテソノ圖ヲ畫ケバ右圖ニ示スガ如キ曲線ヲ得ル. 但シココニPハ正ノ値ノミヲ取ルカラ,コノ圖ハ縦軸ノ右ノ方ニノミアル曲線(雙曲線ノ半分)デアル.



例 3. 或ル學校ノ入學志望者ノ數ハ過去8年間ニ於テ下ノ如クデアルトイフ. 人數ヲ年數ノ函數トシテ圖示セヨ.

昭和 7 年	806	人
同 8 年	904	人
同 9 年	980	人
同 10 年	950	人
同 11 年	1016	人
同 12 年	1002	人
同 13 年	1308	人
同 14 年	1574	人



注意 コノ例ノ函數ノ如キハ年數モ人數モ共ニ整數ノミノ値ヲ取ルモノデアルカラコレヲ表示スル圖形ハ連續シタ線ヲナサズ,相隔離シタ點ノ群トナル. 斯クノ如キ場合ニハ右ノ圖ノ如クコレラノ點ヲ順次ニ直線デ連結シテ見易クスルノガ常デアル.

例 題

1. 次ノ各函數ノ圖形表示ヲナセ.

(1) $y=2x^2-3x+4$　(2) $y=4x^2-12x+9$　(3) $y=10-x-3x^2$

(4) $y=x^3$　(5) $y=\sqrt{x}$　(6) $y=\sqrt[3]{x}$

(7) $y=\pm\sqrt{1-x^2}$　(8) $y=\frac{x}{1+x^2}$　(9) $y=\log x$

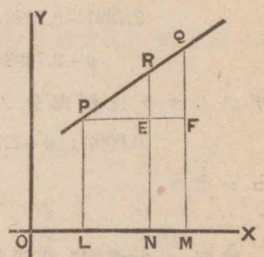
(10) $y=(-1)^x$ 但シ x ハ整數トスル.

(11) $y=(-2)^x$ 但シ x ハ整數トスル.

2. x ヲ正數トシ, x ヲ帶小數ノ形ニ書イタトキノ整數部分ヲ y トスレバ, y ハ x ノ函數デアル. コノ函數ヲ表示スル圖ヲ畫ケ.

10. 挿入法

函數ヲ表示スル圖形ハ必ズシモ常ニ單純ナ曲線又ハ直線トハ限ラヌ,場合ニヨツテハ極メテ複雜ニ屈曲スルコトモアル. ケレドモ如何ナル曲線デモソノ一小部分ノミヲ取ツテ見ルトキハコレヲ直線ノ一部分ト見做シテモ大差ナイモノデアル. 例ヘバ前節ニ示シタ函數 x^2-3x+1 ノ圖ニ於テ, x ノ値ノ0ト3トノ間ニアル部分ハ著シク彎曲シテヰルガ,1ト2トノ間デハ最早左程デナイ. モシ1.5ト2ノ間,或ハ1.5ト1.6ノ間等ヲ考ヘレバソノ部分ダケデハ曲線ハ殆ンド直線ノ如ク見エル.



今 x ノ或ル函數 y ヲ取リコレヲ圖示シタ曲線ノ一部分PQヲ假リニ直線ト考ヘ, P, Q及ビPQ上ノ任意ノ一點Rカラ横軸ニ夫々垂線PL, QM, RNヲ下シ,又Pヲ過ギリ横軸ニ平行ナ直線ヲ引キ, RN及ビQMト交ハル點ヲ夫々E及ビFトスル. 然ルトキハ幾何學ニヨリ二ツノ三角形PQF及ビPREハ相似デアルカラ

$$QF:RE=PF:PE.$$

故ニ今

$$OL=x_1,\qquad ON=x_2,\qquad OM=x_3,$$

$$PL=y_1,\qquad RN=y_2,\qquad QM=y_3$$

トスレバ

$$y_3-y_1 : y_2-y_1 = x_3-x_1 : x_2-x_1.$$

ヨツテ次ノ法則ヲ得ル.

一般ニyガxノ函數ナルトキ,xノ極メテ微小ナル變動ニ伴フyノ變動ハホボxノ變動ニ比例スル.

コレ即チ第38節ニ述ベタ比例部分ノ原理ニ他ナラヌ. 故ニ比例部分ノ理ハ對數ノ場合ニ限ラズ一般ニ種々ノ函數ニ適用サレルモノデ,コレニヨツテ對數以外ノ函數ニ於テモ挿入法ヲ行フコトガ出來ル.

例 $y=\sqrt{1+x^2}$ ニ於テ

$x=2.54$ ナルトキ $y=2.7298$,

$x=2.55$ ナルトキ $y=2.7391$

ナルコトヲ知リ, $x=2.543$ ナルトキノ y ヲ求メヨ.

解 求メル値ヲyデ表ハセバ,

$2.7391-2.7298=0.0093 \qquad 2.55-2.54=0.01$

$y-2.7298=$(未知) $\qquad 2.543-2.54=0.003$

デアルカラ比例部分ノ理ニヨリ

$$0.0093 : (y-2.7298)=0.01 : 0.003.$$

コレカラ

$$y=2.7326.$$

實際ニ $x=2.543$ ヲ函數 $\sqrt{1+x^2}$ ニ代入シテyヲ求メテモコレト同一ノ結果ヲ得ル. 但シコノ例ニ於ケル函數ノ値ハスベテ小數第五位以下ヲ四捨五入シタモノデアル.

11. 極大値及ビ極小値

例ヘバ $y=2x^2-3x-2$ ナル函數ニ於テ,xノ値ヲ次第ニ變動サセテコレニ伴フyノ値ノ變動スル有様ヲ見レバ次ノ如クデアル. (學生自ラコノ函數ノ圖ヲ畫イテ見ヨ.)

xガ負デ絶對値ガ非常ニ大ナルトキハ, y ハ非常ニ大ナル正數デアル.

xガ負デソノ絶對値ガ減ズルニ從ヒ, y ハ次第ニソノ値ヲ減ジ,ツヒニ $x=0$ ニ至レバ $y=-2$ トナル.

xガ0カラ增大シ始メルトキハ,最初ノ間ハyハ -2 カラナホ減少シテ行クケレドモ, xガ1ニ至ラナイ間ニ(實ハ $x=\frac{3}{4}$ ナル所デ) yノ減少ハ極點ニ達シ,コレカラ後ハxガ增スニ從ツテyモ亦增大スル.

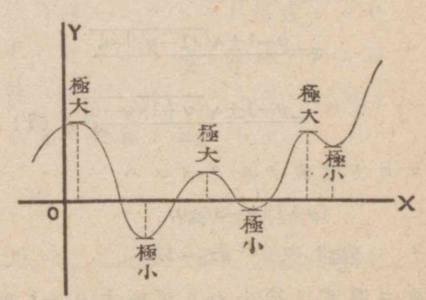
斯クノ如ク一般ニ或ル函數ニ於テxノ値ガ次第ニ變動スルトキ,ソノ途中ノ或ル所マデハyノ値ガ次第ニ減少シテ行キ,ソレカラ後ハ却ツテ增大シ始メル如キ場合ニハ,ソノ減少ノ極點ニ達シタトキノyノ値ヲソノ函數ノ**極小値**トイフ.

モシコレニ反シテ,或ル所マデハyノ値ガ次第ニ增大シテ行キ,ソレカラ後ハ却ツテ減少シ始メル如キ場合ニハ,ソノ增大ノ極點ニ達シタトキノyノ値ヲソノ函數ノ**極大値**トイフ.

上ニ擧ゲタ二次式ノ例ハ極大値ヲ有シナイモノデアル.

極大値及ビ極小値ノコトヲ略シテ單ニ**極大**及ビ**極小**トイフコトガアル.

一ツノ函數デ幾ツモ極大及ビ極小ヲモツモノガアル. 極大又ハ極小ハ必ズシモソノ函數ノ取ル最大又ハ最小ノ値トハ限ラナイ. 或ル場合ニハ一ツノ極大ガ同ジ函數ノ一ツノ極小ヨリ却ツテ小ナルコトモアル. コレラノコトハココニ示シタ圖ニヨツテ會得スルガ宜イ.



例 1. $y=2x^2-3x-2$ ノ極小ヲ求メヨ.

解 右邊ヲ變形スレバ

$$y=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}.$$

故ニyガ極小トナルノハ $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$ ガ極小トナルトキ即チ $x=\frac{3}{4}$ ナルトキデアル. ヨツテ求メル極小値ハ $y=-\frac{25}{8}$ デアル.

或ハ次ノ如クニ解スルモ宜イ.

$$y=2x^2-3x-2$$

ヲ書キ直セバ

$$2x^2-3x-(2+y)=0.$$

コレヲ x ニ關シテ解ケバ

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+8(2+y)}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25+8y}}{4}.$$

然ルニ今考ヘル x ハ勿論實數ニ限ルカラ

$$25+8y\geqq 0,$$

卽チ

$$y\geqq -\frac{25}{8}$$

デナケレバナラヌ. 故ニ y ノ極小値ハ $-\frac{25}{8}$ デアル.

例 2. $\frac{x^2+x+1}{x}$ ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ.

解 先ヅ $\frac{x^2+x+1}{x}=y$

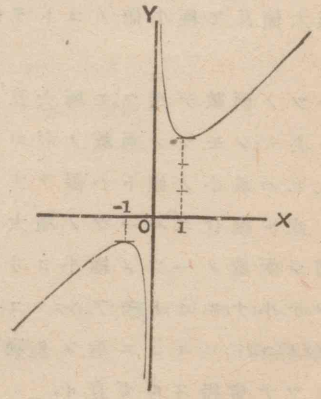
ト置キ,分母ヲ拂ツテ移項スレバ

$$x^2+(1-y)x+1=0.$$

コレヲ x ニ關シテ解ケバ

$$x=\frac{y-1\pm\sqrt{(1-y)^2-4}}{2}$$

$$=\frac{y-1\pm\sqrt{(y+1)(y-3)}}{2}. \quad (1)$$



故ニ x ガ實數ナルタメニハ

$$(y+1)(y-3)\geqq 0,$$

卽チ $y\geqq 3$ 又ハ $y\leqq -1$.

故ニ原式ノ極小ハ 3 デ,極大ハ -1 デアル.

$y=3$ 及ビ $y=-1$ ヲ (1) ニ入レテ x ヲ求メレバ,夫々 $x=1$ 及ビ $x=-1$ ヲ得ル. コレ卽チ原式ガ極小及ビ極大トナル x ノ値デアル.

注意 コノ例ニ於テハ極小ガ極大ヨリモ大デアル.

例題

1. 次ノ各二次式ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ.

$x^2-8x+83$, $7-2x-x^2$,
$(7+x)(2-x)$, $(x-1)^2+(x+2)^2$

2. 與ヘラヘタ正數 a ヲ二部ニ分ケテ,ソノ二部ノ積ヲ極大ナラシメヨ.

3. 一定ノ面積ヲ有スル矩形ノ中デ周圍ノ極小ナルモノヲ求メヨ.

4. 次ノ各分數式ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ.

$\frac{3x-4}{x^2}$, $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $\frac{4-x}{3+3x-x^2}$

5. 分數式

$$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$$

ノ値ハ 7 ト $\frac{1}{7}$ トノ間ニアル.

6. 與ヘラレタ正方形ニ內接スル極小ナル面積ノ正方形ヲ求メヨ.

7. 底邊 b, 高サ h ナル三角形ニ內接スル矩形ノ面積ノ極大如何.

8. 或ル商品ヲ賣ルニ一箇ノ定價A錢トシタトキB箇賣レタケレドモ,定價ヲ a 錢値上ゲシタトキハ賣レ行キガ b 箇減ジタトイフ. 賣レ行キノ減少ハ値上ゲノ高ニ比例スルモノトスレバ,賣リ上ゲ金高ヲ極大ナラシメルニハ定價ヲ幾錢トスベキカ.

12. 極大極小ニ關スル定理

二ツノ正數ノ和ガ一定ナルトキハ,ソノ二數ノ差ヲ極小ナラシメルトキニソノ積ガ極大トナル.

何トナレバ,二數ヲ x 及ビ y トシ,ソノ和ヲ a トスレバ,

$$xy=\frac{1}{4}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$$

$$=\frac{1}{4}\{(a^2-(x-y)^2\}.$$

故ニ $(x-y)^2$ ガ極小ナルトキ,卽チ x ト y トノ差ガ極小ナルトキニ, xy ガ極大トナル.

モシ x ト y トガ相等シクナルコトヲ得ル場合ニハ, $x=y$ ナルトキニ xy ガ極大トナルコト明カデアル. (前節ノ例題2ヲ見ヨ).

例 $2-x^2-x^4$ ノ極大ヲ求メヨ.

解 $$2-x^2-x^4=(2+x^2)(1-x^2).$$

ココニ二ツノ因數 $2+x^2$ ト $1-x^2$ トノ和ハ3デ一定デアル. 故ニソノ因數ノ差 $1+2x^2$ ガ極小ナルトキニソノ積卽チ原式ハ極大トナル. コノ差ハ $x=0$ ナルトキニ極小トナル. 故ニ $x=0$ ト置イテ原式ノ極大ハ2ナルコトヲ知ル.

上ノ定理ニヨリ更ニ次ノ定理ヲ得ル.

若干ノ正數ノ和ガ一定デコレラノ數ハ悉ク相等シクナルコトガ出來ルモノトスレバ,コレラノ數ノ積ガ極大トナルニハソノスベテノ數ガ悉ク相等シクナラネバナラヌ.

何トナレバ若干ノ正數ヲ $x, y, z, \ldots\ldots$ トシ,今例ヘバ $x\neq y$ トスレバ

$$(x,\ y)\quad 及ビ\quad \left(\frac{x+y}{2},\quad \frac{x+y}{2}\right)$$

ナル二組ノ數ニ於テソノ和ハ各 $x+y$ デアルケレドモ,後者ノ方ガ二數ガ相等シイカラ前ノ定理ニヨリ

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}>xy$$

デアル. 故ニ

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}z\ldots\ldots>xyz\ldots\ldots,$$

故ニ一定ノ和ヲ有スル若干ノ正數ノ中相等シクナイ二數ガ存スル限リ,ソレラノ積ハ未ダ極大ニ達シタト考ヘルコトハ出來ヌ. 故ニ極大トナルニハスベテノ正數ガ悉ク相等シクナラネバナラヌ.

例 周圍ノ長サガ一定ナル三角形ノ中デ面積ノ極大ナルモノヲ求メヨ.

解 三角形ノ三邊ヲ a, b, c トシ,ソノ面積ヲ S トスレバ,

$$\mathrm{S}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\qquad s=\frac{a+b+c}{2}$$

デアル. 然ルニ題意ニヨリ s ハ一定デアルカラ, S ヲ極大ナラシメルニハ

$$(s-a)(s-b)(s-c)$$

ヲ極大ナラシメレバ宜イ. サテコノ三ツノ因數ノ和ハ

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-(a+b+c)=3s-2s=s$$

デ一定デアル. 又コノ三ツノ因數ハ悉ク相等シクナルコトガ出來ル, 卽チ

$$a=b=c$$

ナラシメレバ宜イ.

故ニ,周圍ノ長サガ一定ナル三角形ノ中デ面積ノ極大ナルモノハ正三角形デアル.

例 題

1. 二ツノ正數ノ積ガ一定ノトキハ,ソノ二數ノ差ヲ極小ナラシメルトキニソノ和ガ極小トナル.
2. 若干ノ正數ノ積ガ一定デ,コレラノ數ハ悉ク相等シクナルコトガ出來ルモノトスレバ,コレラノ數ノ和ガ極小トナルニハソノスベテノ數ガ悉ク相等シクナラネバナラヌ.
3. 稜ノ長サノ和ガ一定ナル直六面體ノ中デ體積ノ極大ナルモノハ何カ.
4. 體積ガ一定ナル直六面體ノ稜ノ長サノ和ノ極小ナルモノハ何カ.
5. 三角形ABCノ底邊BCノ大キサ及ビ位置ガ一定シ,且二邊AB, ACノ和ガ一定ナルトキ,Aカラ引イタ中線ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ.
6. a, b, c ガ一ツノ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ハス數ナルトキ
$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$
ハ, x ノ如何ナル實數値ニ對シテモ常ニ正デアル.
7. 長サ a ナル線分ヲ二分シ,ソノ一方ヲ一邊トスル正方形ノ m 倍ト他方ヲ一邊トスル正方形ノ n 倍トノ和ヲ最小ナラシメルニハ,各部分ノ長サヲ如何ニスベキカ.
8. 半徑Rナル圓ノ中心Oカラ a ナル距離ニアル弦MNガ與ヘラレ

テアル. 今MN(延長ハ取ラズ)トPデ交ハル直徑ABヲ引キ,

$$AP^2+BP^2=l^2$$ (l ハ與ヘラレタ線分)

ナラシメヨ. 又コノ作圖ノ可能ナルタメニ l ノ取ルベキ値ノ範圍如何.

9. 周圍ガ與ヘラレタ三角形カラソノ內接圓ヲ截リ取ツタ殘リノ面積ガ最大ナルトキハ,三角形ノ面積ハ內接圓ノ面積ノ二倍ニ等シイ.

10. 某會社ノ製產品1箇ノ代價10錢ノトキハ每日平均 n 箇賣レル. 今コレヲ p 割値上ゲスレバ每日平均 $\frac{pn}{20}$ 箇ヅツ賣レナクナル. 會社ノ收入ヲ最大ニスルニハ1箇ノ代價ヲ何程ニスベキカ.

補充問題

第一 整式

1. m ヲ正ノ整數トスレバ, $\frac{16^m}{4}+1$ ハ5ノ倍數デアル.

2. m, n ガ共ニ整數デ,且 $m-n$ ガ3ノ倍數ナラバ, $m^2-5mn+4n^2$ ハ9ノ倍數デアル.

3. 整式 $nx^{n+1}-nx^n-x^n+1$ ハ $(x-1)^2$ デ整除シ得ル.

4. x デ割リ切レ, $x-3$ デ割レバ1ヲ餘シ, $x-2$ デ割レバ5ヲ餘ス如キ, x ニツイテノ二次ノ整式ヲ求メヨ.

5. x^2+px+q ヲ $x-1$ デ割レバ6餘リ, $x+1$ デ割レバ2餘ルトイフ. p 及ビ q ノ値如何.

6. $2x^2-3xy+y^2-10x+7y+2$ ナル式ノ x, y ヲ夫々 $x+a, y+b$ デ置キ換ヘテ x 及ビ y ノ一次ノ項ヲ消失セシメルニハ, a, b ヲ如何ニ定ムベキカ.

7. 二ツノ整式P, P′ヲ整式Dデ割ツタトキノ剩餘ヲ夫々R, R′トスレバ, PP′及ビRR′ヲDデ割ツタトキノ剩餘ハ相等シイ.

8. 有理整式A, B, Q, Rノ間ニ A=BQ+R ナル關係ガアルトキハ, B, Rノ最大公約數トA, Bノ最大公約數トハ同ジモノデアル.

9. 次ノ二式ノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ求メヨ.

$$(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280, \qquad 3x^2+4x-7$$

10. 正ナル二數ノ和ガ 128400 デソノ最大公約數ガ 8025 デアル. 斯クノ如キ二數ハ幾通リアルカ,悉ク求メヨ.

11. 二數ノ最大公約數ト最小公倍數トノ積ガ 1664704 デ,一數ハ 708 デアル. コノ二數ノ最大公約數及ビ最小公倍數各如何.

12. 相異ナル三ツノ二次式ノ最小公倍數ガ

$$x^3-5x^2-2x+24$$

デ,三式中ノ二ツハ夫々

$$x^2-x-6,\qquad x^2-2x-8$$

デアル. 第三式ヲ求メヨ.

13. $6x^3-7x^2-16x+12$ 及ビ $3x^3-5x^2-4x+4$ ノ中各一方ダケヲ零ナラシメル x ノ値ヲ求メヨ.

14. 方程式 $x^3+ax^2-bx+1=0$ ト $x^3-bx^2+ax+1=0$ トガ唯一ツノ共通ナル根ヲ有スルトキハ, a ト b トノ關係如何.

15. x^2+ax+b ト x^2+mx+n トノ最大公約數ガ $x+f$ ナルトキハ,兩式ノ最小公倍數ハ

$$x^3+(a+m-f)x^2+(am-f^2)x+f(a-f)(m-f).$$

16. x^3+ax^2+bx+c 及ビ x^2+bx+c ガ公約數 $x-k\,(k\neq0)$ ヲ有スルトキハ,

$$(a-1)^2-b(a-1)+c=0.$$

17. k ガ零デナイ任意ノ數ナルトキ, $x^4+k(x^2+px+q)$ ガ完全平方ナルタメニハ, p ト q トノ間ニ如何ナル關係ガ成立スベキカ.

18. x, y ガ正ノ整數デ $(2x-y)(x-2y)=5$ ナルトキ, x, y ノ値ヲ求メヨ.

19. 次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ.

(1) $4+12x-7x^2-12x^3+34x^4-24x^5+9x^6$

(2) $16x^8-16x^6+8x^5-36x^4-4x^3+21x^2-10x+25$

20. 次式ノ立方根ヲ求メヨ.

$$343x^6-441x^5-105x^4+225x^3+30x^2-36x-8$$

第二　消去法ソノ他

1. $\dfrac{y-z}{y+z}=a,\quad \dfrac{z-x}{z+x}=b$ 及ビ $\dfrac{x-y}{x+y}=c$ カラ x, y, z ヲ消去セヨ.

2. 次ノ式カラ x, y, z ヲ消去セヨ.

$$\frac{x^2(y+z)}{a^3}=\frac{y^2(z+x)}{b^3}=\frac{z^2(x+y)}{c^3}=\frac{xyz}{abc}=1$$

3. 次ノ三式カラ x, y, z ヲ消去セヨ.

$$x+y+z=a,\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\quad x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3$$

4. 共ニ 0 デナイ x, y ニ對シテ

$$ax+by=0,\qquad a'x+b'y=0$$

ガ同時ニ成立スルタメニ必要ナル條件如何.

5. x, y ノ同ジ値ニ對シテ次ノ三ツノ方程式ガ同時ニ成立スルタメニハ, a, b, c, l, m, n ノ間ニ如何ナル關係ガナケレバナラヌカ.

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{l}{a},\quad \frac{1-xy}{x-y}=\frac{m}{b},\quad \frac{1+xy}{x-y}=\frac{n}{c}$$

6. $a+b+c=0$ ナルトキハ,

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9.$$

7. $a+b+c=0$ ナラバ,

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3.$$

8. $a+b+c=0$ ナルトキ,次式ヲ簡單ニセヨ.

$$\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$$

9. $bc+ca+ab=1$ ナルトキ,

$$\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{b^2-1}+\frac{c}{c^2-1}=\frac{4abc}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}.$$

10. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+x}=0,\quad \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+y}=0$ 及ビ

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0$ ナルトキハ, $a+b+c=0.$

11. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1,\quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$ ナルトキハ,

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=1.$$

12. $x=by+cz,\quad y=cz+ax,\quad z=ax+by$ ナルトキハ,

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$$

13. $\dfrac{x+y}{a^2}=\dfrac{y+z}{b^2}=\dfrac{z+x}{c^2},\quad xy+yz+zx=0$ ナラバ, $a\pm b\pm c=0.$

14. x, y, z ガ相等シクナク,且

$$3y+\frac{(z-x)^2}{y}=3z+\frac{(x-y)^2}{z}=2$$

ナルトキハ, $x+y+z=1$ 及ビ $3x+\dfrac{(y-z)^2}{x}=2.$

15. $a^2+b^2+c^2=p^2,\quad l^2+m^2+n^2=q^2,\quad al+bm+cn=pq$ ナルトキハ,

$$\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}.$$

16. $x,\ y,\ z$ ハ不等デ,且 $x=\dfrac{a+by}{c+dy},\quad y=\dfrac{a+bz}{c+dz},\quad z=\dfrac{a+bx}{c+dx}$ ナルトキハ,

$$ad+bc+b^2+c^2=0.$$

17. 一ツノ數トソノ逆數トノ差ガ m デ,各ノ平方ノ差ガ n ナルトキハ,

$$m^2(m^2+4)=n^2.$$

18. $x=b+c-a,\quad y=c+a-b,\quad z=a+b-c$ ナルトキハ,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

19. $(x+a)^2+(y+b)^2=4(ax+by)$ ナルトキハ, $x=a,\ y=b$ デアル.

20. $2s=a+b+c$ ナルトキハ,

$$s(s-b)(s-c)+s(s-c)(s-a)$$
$$+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)=abc.$$

第三方程式

1. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

（1） $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$

（2） $x^8-2x^6+3x^4-2x^2+1=0$

（3） $\dfrac{2x-3}{x-1}-\dfrac{3x-8}{x-2}+\dfrac{x+3}{x-3}=0$

（4） $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-c}+\dfrac{x-c}{x-a}=3$

（5） $\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-7}=0$

2. 次ノ各無理方程式ヲ解ケ.

（1） $x\sqrt{x^2+12}+x\sqrt{x^2+6}=3$

（2） $\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2+x}$

（3） $\sqrt{x+1+\sqrt{2(x+3)}}-1=\sqrt{x}$

（4） $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$

（5） $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}\,x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}\,x}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}\,x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}\,x}}$

（6） $x^2-x+3\sqrt{2x^2-3x+2}=\dfrac{x}{2}+7$

3. 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

（1） $\begin{cases} x^2+4y^2=(x+2y-1)^2 \\ 4x^2+9y^2=(2x-3y+2)^2 \end{cases}$

（2） $x+y=2,\qquad x^3+xy+y^3=38$

（3） $\begin{cases} 2x+6\sqrt{2x+y+4}=23-y \\ 4x^2-6x=y^2+3y \end{cases}$

（4） $15(x-1)(y-1)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=8$

（5） $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=35 \\ 3x^2+xy-2y^2=25 \end{cases}$

（6） $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13 \\ 3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9 \end{cases}$

（7） $\dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{x-1}{-y+1}=\dfrac{m(x+1)+n}{-m(y+1)+n}$

（8） $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2=1,\qquad \dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=\dfrac{ab}{a+b}$

（9） $\begin{cases} ax+by+cz=1 \\ bx+cy+az=1 \\ cx+ay+bz=1 \end{cases}$　　（10） $\begin{cases} ax+by=xy \\ by+cz=yz \\ cz+ax=zx \end{cases}$

（11） $\begin{cases} x+y+z=15 \\ x^3+y^3+z^3=495 \\ xyz=105 \end{cases}$

（12） $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2,\qquad x^2-y^2+x-2=0$

（13） $x^2y+xy^2=30,\qquad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}$

（14） $x(x+y+z)=12,\qquad (2y+z)(x+y+z)=30,$
$(y+2z)(x+y+z)=42$

（15） $ax=by=cz=du,\qquad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{m}$

4. 方程式 $x^2+2(p+1)x+6p+5=0$ ガ等根ヲ有スルタメニ p ノ取ルベキ値如何.

5. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ノ五乘ノ和ヲ求メヨ.

6. 二次方程式 $x^2+ax+b=0$ ト $x^2+px+q=0$ トガ一ツノ共通根ヲ有スルトキ,ソノ共通デナイ二ツノ根ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ.

7. $(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2)=(al+bm+cn)^2$ ナラバ,次ノ聯立方程式ハ不定デアル.

$$ax+by+c=0,\qquad lx+my+n=0$$

8. 聯立方程式 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3,\ x^2+y^2+1=2x$ ヲ滿足セシメル x, y ノ實數値ハ存在シナイ.

9. x 及ビ y ヲ未知數トスル次ノ聯立方程式ヲ解イテ $x=y$ ナル根ヲ得ルタメニハ, k ノ値如何. 又ソノ場合ニ於ケル x 及ビ y ノ値如何.

$$kx-6y=5k-3,\quad 2x+(k-7)y=-7k+29$$

10. $x^2+y^2=1,\ ax+by=c$ ナルトキ, $bx-ay$ ノ値如何.

11. 次ノ二ツノ方程式ヲ同時ニ滿足スル x 及ビ y ノ値ガ相等シクナルヤウニ t ヲ定メヨ.

$$(5+t)x-(1-t)y=8+7t,$$
$$(1-t)x-(2+t)y=3(1+t)$$

12. 聯立方程式 $2x^2+3y^2=a,\ x+y=b$ ヲ滿足スル二組ノ根ヲ夫々 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ トスルトキ, $x_1+x_2=6,\ y_1y_2=3$ ナルヤウニ a, b ノ値ヲ定メヨ.

13. 甲乙二人ガ或ル池ノ周ヲ反對ノ方向ニ廻ルトキハ一分毎ニ相會シ,又コノ池ヲ一周スルニ要スル時間ハ甲ハ乙ヨリ50秒少イ. モシ兩人コノ池ノ周ヲ同ジ方向ニ廻ルトキハ甲ハ何分毎ニ乙ヲ追越スカ.

14. AOB, COD ハ點 O ニ於テ互ニ直交スル二ツノ直線デ,今甲ハ AB 上ヲ A カラ B ニ向ヒ毎分 5m ノ速サデ,乙ハ CD 上ヲ C カラ D ニ向ヒ毎分 12m ノ速サデ進行シ,甲ガ B ニ達シタトキ乙ハ D ニ達シタ. 而シテ OB, OD ハ何レモ $\dfrac{50}{7}$m デアル. 然ラバ何時何所デ甲ト乙トノ距離ガ 10m デアツタカ.

15. 甲乙二港ノ間ヲ規定ノ速サデ通フ汽船ガアル. ソノ速サヲ毎時2浬ヅツ增セバ時間ニ於テ15分間ノ短縮ヲ見ル,又速サヲ毎時 3 浬ヅツ減ズレバ時間ニ於テ30分間ノ延長トナル. 甲乙二港間ノ距離及ビ規定ノ速サヲ問フ.

16. 甲驛カラ乙驛ヲ經テ丙驛ニ行ク汽車ガアル. ソノ速サハ甲乙間デハ毎時 a m, 乙丙間デハ毎時 b m デアルケレドモ,甲丙間ヲ通シテ平均スレバ毎時 c m トナル. 甲乙,乙丙間ノ距離ノ比ヲ求メヨ.

17. 二ツノ列車ガ 600 km ノ距離ヲ行クニ要スル時間ノ差ハ5時間デアル. モシ雙方トモ速サヲ毎時 10 km ヅツ減ズレバコノ差ハ3時間ダケ增ス. 各列車ノ速サヲ求メヨ.

18. 甲地カラ乙地ニ向ツタ自動車ト乙地カラ甲地ニ向ツタ徒歩者トガアル. モシ自動車ガ乙地ニ着シテ直チニ甲地ニ引返スモノトスレバ,徒歩者ガ自動車ヨリ早ク甲地ニ着スルニハ徒歩者ハ乙地出發後少クトモ何分間ノ後ニ自動車ト出會フコトヲ要スルカ. 但シ自動車ノ速サハ徒歩者ノ速サノ n 倍デ,甲乙兩地間ヲ徒歩スルニ要スル時間ハ a 分デアル.

19. 海底ノ二ケ所ニ鉛直ニ立ツテヰル長サ相等シイ甲乙二本ノ棒ガアル. 干潮時ニハ棒ノ水面上ニ出テヰル部分甲ハ乙ノ m 倍デアルガ水深ガ a 米增シタ滿潮時ニハ棒ノ水面上ニ出テヰル部分甲ハ乙ノ n 倍トナル. 甲乙各棒ノ位置ノ水深ノ差如何.

20. 直線道路ヲ夫々一定ノ速サデ同方向ニ走ル甲乙丙三臺ノ自動車ガアツテ,常ニ甲ハ先頭デ乙丙ノ順序デコレニ續イテヰル. 甲乙間ノ距離ノ乙丙間ノ距離ニ對スル比ヲ見ルニ,或ル瞬間ニハ1:2デ,ソレカラ20分後ニハ2:5トナリ,更ニ10分後ニハ1:3トナツタ. 然ラバ甲乙ノ速サノ差ト乙丙ノ速サノ差トノ間ニ如何ナル關係アルカ.

第四 級數

1. b ガ a ト c トノ調和中項ナルトキハ,

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

2. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ ガ等差級數ヲナストキハ,

$$3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a).$$

3. a, b, c ガ等差,等比又ハ調和級數ヲナストキハ,夫々

$$a-b:b-c=a:a,$$

$$a-b:b-c=a:b,$$

$$a-b:b-c=a:c.$$

4. x, a, b, y ガ等差級數, x, c, d, y ガ等比級數, x, e, f, y ガ調和級數ヲナストキハ,

$$xy=cd=af=be.$$

5. a, b, c ガ相異ナル三ツノ數ナルトキ, a, b, c ガ等差級數ヲナシ, a^2, b^2, c^2 ガ調和級數ヲナスコトガアルカ.

6. x, y, z ガ等比級數ヲナストキハ, $x^2+y^2+z^2$ ハ x, y, z ノ一次ノ同次式ノ積ニ分タレル.

7. 等差級數ノ第 p 項,第 q 項,第 r 項ヲ夫々 x, y, z トスルトキ x, y, z ガ正ノ整數ナラバ,第 x 項,第 y 項,第 z 項ガ夫々 p, q, r ナル如キ等差級數ガ存在スル.

8. 四數 a, x, y, b ガ等差級數ヲナシ,且三數 a, y, x ガ等比級數ヲナストキハ,比 $a:b$ ノ値如何.

9. 初項 a, 公比 r ナル等比級數ノ項數ガ $1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ ナルトキノ和ヲ夫々 S_1, S_2, S_3, ……, S_n トシ,

$$S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n$$

ノ値ヲ出來ルダケ簡單ナ式デ表ハセ.

10. 第 n 項マデノ和ガ 3^n+a ナル級數ハ等比級數カ.

11. 等差級數ト等比級數トガアツテ,ソノ初項ハ共ニ正デ相等シク,且第 $2n+1$ 項モ亦相等シイトキハ,第 $n+1$ 項ハ何レガ大ナルカ.

12. 初項 7, 末項 448, ソノ和 889 ナル等比級數ノ公比ヲ求メヨ.

13. 相異ナル三ツノ數ガ等差級數ヲナシ,且同時ニ(同ジ順序デ)等比級數ヲナスコトガアルカ. 又モシ順序ノ變更ヲ許セバ如何.

14. 級數 $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{8}$, $16\frac{1}{16}$, ……ノ第20項マデノ總和ヲ求メヨ.

15. 0.3, 0.33, 0.333, ……ナル n 箇ノ小數ノ和ヲ求メヨ.

16. 次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ.

$$1+3x+5x^2+9x^3+17x^4+\cdots\cdots+(1+2^k)x^k+\cdots\cdots$$

17. 級數 $1+\frac{3}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\frac{9}{3^4}+\cdots\cdots$ ノ無限項ノ和ヲ求メヨ.

18. a_0, a_1, a_2, ……, a_n ガ等差級數ヲナストキハ,

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n=\frac{A+Bx+Cx^{n+1}+Dx^{n+2}}{1-2x+x^2}$$

ナル形ノ恆等式ガ成立スル.

19. 等差級數 2, 5, 8, ……, 200 及ビ 2, 7, 12, ……, 202 ニ於テ相一致スル項ハ幾ツアルカ. 又ソレラノ項ノ和如何.

20. 等差級數 1, 4, 7, ……ノ幾項ヲ取レバ初メノ半分ノ和ト後ノ半分ノ和トノ比ガ 10:31 トナルカ.

21. 三數 m^2+m+1, $m^2+2m+11$, $m^2+3m+28$ ガ等比級數ヲナストキ, m ノ値如何.

22. 三角形ノ三邊ガ等比級數ヲナストキ,ソノ公比ハ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ヨリ大デ, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ヨリ小デアル.

23. 三數 $\frac{a}{b-c}$, $\frac{b}{c-a}$, $\frac{c}{a-b}$ ガ等差級數ヲナストキハ,

$$\frac{a^3-2b^3+c^3}{a^2-2b^2+c^2}=\frac{a+b+c}{2}.$$

24. 第 n 項ガ $an+b$ ナル級數ハ等差級數デアル.

25. $\frac{b+c}{1-bc}$, b, $\frac{a+b}{1-ab}$ ガ等差級數ヲナストキハ, $\frac{1}{a}$, b, $\frac{1}{c}$ モ亦等差級數ヲナス.

26. 初項 a, 第二項 b ナル等差級數ニ於テ, $\frac{a}{a-b}$ ガ正ノ整數ナラバ,ソノ級數ノ中ニハ零ニ等シイ項ガアル.

27. 等比級數 $2,\ -2\sqrt{3},\ \ldots\ldots$ ノ幾項ノ和ガ $26-8\sqrt{3}$ トナルカ.

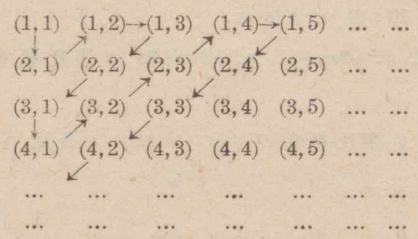
28. 初項ガ 2 デ,初項カラ無限ニ至ル和ノ極限ト第四項マデノ和トガ 256 : 175 ナル比ヲ有スル無限等比級數ノ總和ヲ求メヨ.

29. 四數ガアツテ,初メノ三數ハ等比級數ヲナシソノ和ハ 19 デ,後ノ三數ハ等差級數ヲナシソノ和ハ 12 デアル. コノ四數ヲ求メヨ.

30. 初項ガ夫々 a, b デ公比ガ相等シイ二ツノ等比級數ガアツテ,第一ノ級數ノ無限項ノ和ノ平方ハ第二ノ級數ノ無限項ノ和ニ等シイトイフ. 公比ヲ求メヨ.

31. ∠C ガ直角ナル三角形 ABC ガアル. 今邊 AC ノ上ニ ABC ト相似ナル三角形 ACD ヲ A, C, D ガ夫々 A, B, C ニ對應スルヤウニ作リ,次ニ邊 AD ノ上ニ同ジク ACD ト相似ナル三角形 ADE ヲ A, D, E ガ夫々 A, C, D ニ對應スルヤウニ作ル. 順次斯クノ如クニシテ無數ニ多ク作ツタ三角形ノ面積ノ總和ヲ求メヨ. 但シ邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トシテ計算セヨ.

32. 下ノ圖ノ如クニ整數ノ組ヲ縱橫ニ排列シ,矢ヲ以テ示ス順序ニ從ツテ番號ヲツケレバ, (10, 36) ハ第何番ニ當ルカ.



第五　對數及ビ步合算

1. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1) $2^{x^2}=8\times 2^{2x}$　　　(2) $x^{\log x}=100x$

2. 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $(x-4)^y=100(x-5)^{-y}$,　$(3x)^y=100$

(2) $6^x=5y$,　$7^x=3y$

3. x ヲ正ノ整數トシテ, $10^x<2^{50}<10^{x+1}$ ヲ解ケ. 但シ $\log 2=0.30103$.

4. x ヲ整數トシ, 1.08^x ノ整數部分ガ四桁ノ數ナルタメニハ, x ノ最大値及ビ最小値如何. 但シ $\log 2=0.30103$,　$\log 3=0.47712$.

5. $\log_a N$, $\log_b N$ 及ビ $\log_c N$ ガ調和級數ヲナストキハ, a, b 及ビ c ハ如何ナル級數ヲナスカ.

6. x, y, z ガ調和級數ヲナセバ,

$$\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z).$$

7. x 及ビ y ハ互ニ無關係ニ變化スル二量デ, u ハ $\log x$ ニ比例シ, y ノ二乘ニ逆比例スル量デアル. $x=10,\ y=5$ ナルトキ $u=1$ ナラバ, $x=100,\ y=10$ ナルトキ u ノ値如何.

8. 或ル人所持金ノ $\frac{1}{5}$ ヲ費シ,次ニソノ殘金ノ $\frac{1}{5}$ ヲ費シ,次ニ又ソノ殘金ノ $\frac{1}{5}$ ヲ費シ,次第ニ斯クノ如ク費ストキハ,殘金ガ初メノ所持金ノ $\frac{1}{100}$ ヨリモ少クナルノハ幾回ノ後カ. 但シ $\log 2=0.30103$.

9. 4% ノ鹽分ヲ含ム液若干瓦カラ水分ヲ蒸發シテ 10% ノ鹽分ヲ含ム液トシタ後,コレニ 4% ノ鹽分ヲ含ム液 300 g ヲ混ジタ所ガ 6% ノ鹽分ヲ含ム液ヲ得タ. 初メノ液ハ幾瓦デアツタカ.

10. 寶石入純金ノ指環ノ重サ 9.1 g デアルガコレヲ水中デ計レバ 8.1 g デアル. 金ノ比重ハ 19, 寶石ノ比重ハ 2.5 ナルコトヲ知ツテ,金及ビ寶石ノ重サヲ求メヨ.

11. 今カラ n 年前ノ米價ヲ今カラ 4 年前ノニ比較スルニ 1 圓ニツイテハ 3 升安ク, 1 升ニツイテハ 30 錢安カツタ. 今カラ n 年前ノ米價ハ 1 升ニツキ何錢デアツタカ.

12. 純酒精 5l 入リノ瓶カラ酒精若干ヲ汲出シソノ代リニ水ヲ入レ,更ニ最初ニ汲出シタ量ノ 2 倍ダケノ混合液ヲ汲出シソノ代リニ水ヲ入レタ所ガ,瓶中ニ殘ツタ混合液ハ 83.2% ノ酒精ヲ含ム. 最初ニ汲出シタ酒精ノ量ヲ求メヨ. 但シ立方糎未滿ハ四捨五入セヨ.

13. 上下二種ノ茶ヲ或ル割合ニ混合シ,コレヲ或ル値段デ賣レバ全體デ a 割ノ利ガアル. モシ兩種ヲ別々ニコノ値段デ賣レバ夫々 b 割及ビ c 割ノ利ガアル. 混合ノ割合ヲ求メヨ.

14. 今ヨリ滿 n 年後ニA圓ヲ拂フ代リニ,今カラ滿一年毎ニ一定ノ金額 a 圓ヅツヲ n 回拂ツテ皆濟シヨウトスル. 年利率ヲ r トシテ單利法ニヨツテ a ヲ求メヨ.

15. 某物品ニ對シ戰時中二回値上ゲヲシタ. 第二回ノ値上ゲノ割合ハ第一回ノ値上ゲノ割合ヨリモ1割少カツタ. 而シテ平和克復後ソノ價格ヲ半減シタガナホ戰前ノ價格ニ對シテ5割3分ノ增シデアル. 各回値上ゲノ割合如何.

16. 或ル人14年間毎年末ニ年賦金1200圓ヲ支拂ヒ丁度皆濟サレル負債ヲ有シ,ソノ借入年利率ハ5分8厘デアル. 第5年末ノ年賦金ヲ支拂ツタトキ殘額ヲ一時ニ返濟スルニハ幾何ノ金額ヲ要スルカ.

17. 六分利附某市公債額面100圓ノ相場109.5圓デ,五分利附整理公債額面100圓ノ相場102圓ナルトキ,若干ノソノ市公債ヲ整理公債ニ賣リ替ヘタタメ1箇年ノ利子ノ收入129圓ダケ減ジタ. 然ラバコノ人ノ賣リ拂ツタ市公債ノ額面高何程カ.

18. 今生レタ子ノ學資金トスルタメニ今後滿1年毎ニ同額ノ金ヲ貯金シテ行キ,子ガ滿10歲ニ達シタ後ハソノママ据置キ,滿15歲トナルトキ,元利合計3000圓トナルヤウニシタイ. 年利4分8厘トスレバ,毎年ノ貯金額ヲ何程トスレバ宜イカ.

19. 或ル人年利率6分デ3000圓ヲ借リ,3箇年賦デコレヲ皆濟シヨウトスル. 年賦金如何.

20. 或ル商人甲乙二箇ノ品物ヲ合セテ125圓デ買ヒ,甲ヲ91圓,乙ヲ36圓デ賣ツタ所ガ,甲デ利シタ步合ト乙デ損シタ步合ト相等シカツタトイフ. 各ノ原價如何.

21. 或ル年ニ於ケルA, B, Cノ三國ノ人口ノ比ハ $a:b:c$ デアルガ,各國ノ人口ハ年々公比夫々 r, r', r'' ナル等比級數ヲナシテ增加シ n 年後ニ於ケル三國ノ人口ハ公比 m ナル等比級數ヲナスコトニナル. 公比ノ連比 $r:r':r''$ ノ値ヲ a, b, c, m, n デ表ハセ.

22. 金4750圓ヲ甲乙丙3人ニ等比級數ヲナスヤウニ分配シ,各人コレヲ資本トシテ商業ヲ營ンデ1年後ニ甲ハ1割2分,乙ハ1割3分,丙ハ1割2分ノ利益ヲ得タ. 而シテソノ利益金額ハ等差級數ヲナストイフ. 最初ノ資本金各如何.

23. log 108=2.0334 及ビ log 24=1.3802 カラ log 2 及ビ log 3 ヲ求メ,更ニ次ノ方程式ノ根ヲ小數第三位マデ算出セヨ.

$$2^{x+y}=6^y,\qquad 3^{x-1}=2^{y+1}$$

24. $\dfrac{\log_a x}{\log_{am} x}=1+\log_a m$ ナル等式ガ成立スル.

25. 煎茶150斤ト番茶250斤トヲ360圓デ買ヒ,煎茶ハ20%番茶ハ15%ノ利益ヲ見込ンデ賣リ64.50圓ノ利益ヲ得タ. 煎茶,番茶各一斤ノ賣價ヲ求メヨ.

第六雜題

1. $a=1+\sqrt{5}$, $b=1-\sqrt{5}$ ナルトキハ,

$$4(a^n-b^n)^2+(a^{n+1}-b^{n+1})^2=2\sqrt{5}(a^{2n+1}-b^{2n+1}).$$

2. $\dfrac{2y-3x}{3y-2x}=5$ ナルトキ, $\sqrt{x-y}:\sqrt{x+y}$ ノ値如何.

3. $a=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ナルトキ,次ノ式ノ値ヲ求メヨ.

$$\frac{\dfrac{ab^2-a}{ab+1}+a}{\dfrac{a^2b+b}{ab+1}-b}$$

4. $x+y+z$ ガ一定デ $(z+x-2y)(x+y-2z)$ ガ yz ニ比例スルトキハ, $2(y+z)-x$ ハ yz ニ比例スル.

5. 電線ノ抵抗Rハソノ長サ l ニ比例シ切口ノ直徑 d ノ平方ニ逆比例シ,又電線ノ體積Vハ l 及ビ d^2 ニ比例スル. コレカラR, V, d ノ間ノ關係ヲ求メヨ. 又直徑12「ミリメートル」,長サ1「キロメートル」デ抵抗0.154「オーム」ノ銅線ヲ直徑5「ミリメートル」ノ線ニナルマデ引キ伸セバ抵抗何「オーム」トナルカ.

6. $a>b>c>0$ ナルトキハ,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

7. a, b, c ガ實數ナルトキ,

$$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$$

ガ x ニ關シテ完全平方式トナルタメニハ, $a=b=c$ ナルコトガ必要且十分ナル條件デアル.

8. $a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$ ガ x, y ニ關シテ完全平方式ナルトキハ, a, b, c ハ調和級數ヲナス.

9. 聯立方程式 $x+\frac{1}{y}=a,\ y+\frac{1}{x}=b$ ノ二組ノ根ガ相一致スルトキ, a, b ノ關係及ビコノ方程式ノ根ヲ求メヨ.

10. 次ノ三式ヲ同時ニ成立セシメル x, y ノ値ヲ求メヨ.

$$\begin{cases} x^2+2y^2=3x+16 \\ 2x^2+3y^2=4y+23 \\ 3x^2+4y^2=9x+10y \end{cases}$$

11. 二邊ノ和 28 cm, 底邊 14 cm, 高サ 12 cm ナル三角形ノ底邊デナイ二邊ノ長サ各如何.

12. 或ル整數ヲ二等分シソノ商ニ端數アラバコレヲ棄テ,次ニ今得タ整數ヲ二等分シソノ商ニ端數アラバコレヲ棄テル. 斯クノ如クスルコト n 回デ最後ニ答 1 ヲ得タ. 斯クノ如キ整數ノ最大ナルモノ及ビ最小ナルモノハ何カ.

13. 小數ニ直ストキ 0.41…… トナル如キ分數ノ中デ分子ガ 79 ナルモノヲ求メヨ.

14. a ガ正ノ實數ナルトキハ, $a^3+10a>6a^2$.

15. $x\{240000-25000(x-8)\}$ ヲ極大ナラシメル x ノ値ヲ求メヨ.

16. 方程式 $x^2+1+\frac{1}{x^2+1}=2a$ ニ適合スル x ノ値ガ悉ク實數ナルタメニハ a ノ値如何.

17. $z-30$ ハ t ニ比例スル一數ト t^2 ニ比例スル一數トノ和デ, $t=3$ ナルトキ $z=84$, 又 $t=4$ ナルトキ $z=110$ デアル. z ヲ最小ナラシメル t ノ値及ビソノ z ノ最小値ヲ求メヨ.

18. 次式ヲ部分分數ニ分解セヨ.

$$\frac{x^2-10x+13}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

19. 1, 3, 5, ……ナル連續奇數 $2n+1$ 箇ノ中, 3 ノ倍數ナルモノノ總和ヲ

求メヨ.

20. $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\frac{2}{5^5}+\frac{3}{5^6}+\cdots\cdots$ ナル級數ノ無限項ノ和ヲ求メヨ.

21. $(2n+1)$ 項ヨリナル等差級數ニ於テハ奇數項ノ和ト偶數項ノ和トノ比ハ $(n+1):n$ デアル.

22. 或ル商品ノ生產原價ハ原料費,加工賃銀,機械運轉費ノ和ニ等シイトイフ. コノ商品ノ一昨年ニ於ケル生產原價ハ 160 圓デアツタガ,昨年ハ一昨年ニ比シ原料費ニ於テ 1 割,加工賃銀ニ於テ 8 分,機械運轉費ニ於テ 5 分夫々騰貴シタタメ生產原價ハ 174.50 圓トナツタ. 然ルニ本年ハ更ニ昨年ニ比シ原料費ニ於テ 2 割,加工賃銀ニ於テ 1 割,機械運轉費ニ於テ 8 分騰貴シタタメソノ生產原價ハ 202.74 圓トナツタ. コノ商品ノ本年ニ於ケル原料費,加工賃銀,機械運轉費各何程カ.

答

雜　　題 I.

3. (1) $(x-y+z)(x+y-3z)$.

(2) $(a-b)(a+b)\{(a+b)x+(a-b)y\}\{(a-b)x+(a+b)y\}$.

(3) $(x-a)(x^2+ax-a^2)$.　　(4) $3(a+b-1)(a^2+b^2+1)$.

(5) $(b+c)(c+a)(a+b)$.

4. (1) 最大公約數ナシ,最小公倍數ハ原二式ノ積.

(2) 最大公約數 $x-a$,

最小公倍數 $(2x^2+ax+a^2)(3x^4-5ax^3+a^2x^2+a^4)$.

(3) 最大公約數 $x-2$,

最小公倍數 $x(x-2)^2(x^2+3x-1)(2x^2+3x-1)$.

(4) 最大公約數 $x-3$,

最小公倍數 $(x-3)(x^2-x+1)(x^2+2x-1)(x^2-2x+3)$.

(5) 最大公約數 x^2-3x+2,

最小公倍數 $(2x-1)(4x-1)(x^2-2)(x^2-3x+2)$.

5. $x=\frac{3}{2}$.　　**6.** 32 又ハ 96.

8. $a=-20,\ b=9$ 又ハ $a=20,\ b=41$.　　**9.** $a=-225,\ b=-125$.

10. $m=6$.　　**13.** 9.

18. (1) $3, 1, \frac{2}{3}$.　　(2) $-1, 2, 3, -4$.

(3) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4}$,　$\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4}$.

(4) $0,\ 6\pm\sqrt{3}$.　　(5) $a,\ b,\ \frac{a+b}{2}$.

19. (1) $x=3, y=1;\ x=-1, y=-3;\ x=3\omega, y=\omega;\ x=-\omega, y=-3\omega;\ x=3\omega^2, y=\omega^2;\ x=-\omega^2, y=-3\omega^2$.

(2) $x=5,\ y=2;\ x=-2,\ y=-5;\ x=\frac{29\pm\sqrt{835}\,i}{2},\ y=\frac{-29\pm\sqrt{835}\,i}{2}$.

但シ複號ハ共ニ正又ハ共ニ負.

(3) $x=2,\ y=1;\ x=-2,\ y=-1;\ x=1,\ y=-2;\ x=-1,\ y=2$.

(4) a, b, c ノ中ニ相等シイモノガナケレバ

$$x=abc,\ y=bc+ca+ab,\ z=a+b+c.$$

a, b, c ノ中ニ相等シイモノガアレバ　不定.

(5) $x=4,\ y=6,\ z=9;\ x=9,\ y=6,\ z=4.$

(6) $x=y=z=\pm 2.$　　(7) $x=-\dfrac{17}{6},\ y=\dfrac{2}{11},\ z=-\dfrac{11}{6}.$

(8) $x=4,\ y=3,\ z=2;\ x=4,\ y=2,\ z=3;$

$x=\dfrac{13}{2},\ y=\dfrac{5+i\sqrt{131}}{4},\ z=\dfrac{5-i\sqrt{131}}{4};$

$x=\dfrac{13}{2},\ y=\dfrac{5-i\sqrt{131}}{4},\ z=\dfrac{5+i\sqrt{131}}{4}.$

(9) $x=2\sqrt{3},\ y=\sqrt{15},\ z=2\sqrt{5};\ x=2\sqrt{3},\ y=-\sqrt{15},\ z=-2\sqrt{5};$

$x=-2\sqrt{3},\ y=\sqrt{15},\ z=-2\sqrt{5};\ x=-2\sqrt{3},\ y=-\sqrt{15},\ z=2\sqrt{5}.$

(10) $x=a\pm\sqrt{\dfrac{(g^2+ca)(h^2+ab)}{f^2+bc}},\quad y=b\pm\sqrt{\dfrac{(h^2+ab)(f^2+bc)}{g^2+ca}},$

$z=c\pm\sqrt{\dfrac{(f^2+bc)(g^2+ca)}{h^2+ab}}.$

但シ複號ハ同時ニ同號ヲトル.

20. (1) $x=3,\ y=1;\ x=-3,\ y=-1;\ x=\dfrac{4\sqrt{6}}{3},\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{6};$

$x=-\dfrac{4\sqrt{6}}{3},\ y=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}.$

(2) $x=1,\ y=2;\ x=-1,\ y=-2.$

21. 5 cm, 12 cm, 13 cm.　　**22.** 3.7 cm, 1.3 cm.

23. $-h+\sqrt{h^2+m^2}.$　　**24.** $\dfrac{d^2+d\sqrt{d^2+8a^2}}{4a}.$

25. $d+2l-\sqrt{2l^2+d^2},\ -d+2l-\sqrt{2l^2+d^2}.$

26. 毎時 $\dfrac{ac(b+d)}{ab+cd}$ km.

雜　題 II.

1. $3q-2p.$

3. (1) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{11},\ \dfrac{1}{14},\ \dfrac{1}{17},\ \ldots\ldots$

(2) $6,\ 3,\ 2,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{6}{5},\ 1,\ \ldots\ldots$　　**4.** 2.

5. $\dfrac{2ab}{a+b}.$ m 箇ノ中項ヲ挿入シタトキハ

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a-b}{(m+1)ab}},\quad \frac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{2(a-b)}{(m+1)ab}},\quad \ldots\ldots$$

卽チ　$\dfrac{ab(m+1)}{a+mb},\quad \dfrac{ab(m+1)}{2a+(m-1)b},\quad \ldots\ldots$

11. $b\neq 0$ ナラバ $x=-2.$

13. 第 n 項ハ $\dfrac{n^3+n}{2}$, n 項ノ和ハ $\dfrac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2).$

14. $l=ar^n+\dfrac{d(1-r^n)}{1-r},\quad S=\dfrac{ar(1-r^n)}{1-r}+\dfrac{d}{1-r}\left[n-\dfrac{r(1-r^n)}{1-r}\right].$

l ノ數値ハ 1126300,　S ノ數値ハ 2249600.

15. $\dfrac{(n+1)^2}{4}+2^{\frac{n+1}{2}}-2.$　　**16.** $\pm 216.$　　**17.** 13 日目.

18. a m.　　**19.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2.$　　**20.** 36 箇.

21. 短邊 25 m, 長邊 60 m, 對角線 65 m.

22. $\begin{cases} 12.32\text{ cm}, \\ 102\dfrac{2}{3}\text{ cm}. \end{cases}$　　**23.** 大 5 cm, 中 4 cm, 小 3 cm.

24. 等差級數.　　**25.** $k=4.$

雜　題 III.

1. $\dfrac{3a+b}{a+b}.$　　**2.** $\left(\dfrac{50}{49}\right)^{100}<10.$　　**3.** 5 項.

4. 9×10^a 箇.　　**6.** 1.

7. $\begin{cases} a>1 & \text{ナルトキハ} & a^2 \\ a<1 & ,,\quad ,, & \dfrac{1}{a^2} \\ a=1 & ,,\quad ,, & 1 \end{cases}$　　**8.** $\pm(\sqrt{7}+\sqrt{5}).$　**9.** $a=-6,\ b=1.$　**10.** $m=4.$

16. $\dfrac{1}{2}n(n^2+25).$

17. $x=0,\ y=0$ 又ハ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

18. 3, 8, 13 又ハ 24, 8, −8.

19. 8, 20, 50, 125 又ハコノ順ヲ逆ニシタモノ.

21. $x=10^{10}.$　　**22.** $x=0.613$ 又ハ $-0.613.$

23. (1) $x=0.03.$　　(2) $x=11.095,\ y=1.585.$

24. (1) $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-6 \\ y=-4 \end{cases}$

(2) $x=y=0.$ $\begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-9 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=b \\ y=a \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{b} \\ y=a \end{cases}$ $\begin{cases} x=b \\ y=\dfrac{b^2}{a} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt[3]{a^2b} \\ y=\sqrt[3]{ab^2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\sqrt[3]{a^2b}\omega \\ y=\sqrt[3]{ab^2}\omega^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt[3]{a^2b}\omega^2 \\ y=\sqrt[3]{ab^2}\omega \end{cases}$

25. 甲 440 m, 乙 420 m. **26.** 一人ハ $6\frac{2}{3}$ 分, 他ハ 10 分.

27. 甲 21 時間, 乙 28 時間. **28.** 4.83 m.

29. $x=12,\ y=15.$

雜題 IV.

1. $\frac{8}{27}.$ **2.** 1. **3.** 3.

4. (1) $x=3,\ -\frac{5}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{11}i}{4}.$ (2) $x=0,\ \pm 32,\ \pm\frac{1}{32}.$

5. $x=\pm 1.618,\ \pm 0.618$ **6.** 1 又ハ $\frac{7}{15}.$ **10.** $\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}.$

11. $x^2+x^4+x^6+x^6\cdots\cdots+x^{4n+2}.$ **12.** $p=\pm\sqrt{2},\ q=\mp\sqrt{2}.$

15. 11.53 圓.

16. $\frac{a(1+r)}{r(2+r)}\left[1-\frac{1}{(1+r)^{2n}}\right]$ 圓. **17.** $\frac{pr(1+r)^{m+n}}{(1+r)^n-1}$ 圓.

18. 1561.4 圓. **19.** 4727 圓.

20. 83 年. **21.** 元金 2500 圓, 年利率 6 分

22. 資本金甲 6000 圓, 乙 4800 圓, 利益ノ歩合甲 8 分, 乙 1 割.

23. 3.75 圓ノ損. **24.** 17 年後. **25.** 8 cm, 4 cm.

26. 上底 $\frac{1}{2}$ m, 下底 1 m, 兩脚各 $\frac{1}{2}$ m.

27. 12 m, 4 m. **28.** $\frac{a(c-b)}{a-b}$m.

補充問題

第一 整式

4. $-\frac{13}{6}x^2+\frac{41}{6}x.$ **5.** $p=2,\ q=3.$ **6.** $a=1,\ b=-2.$

9. 最大公約數 $x-1,$

最小公倍數 $(x^2+7x+26)(x-1)(x+8)(3x+7).$

10. $\begin{cases} 8025 \\ 120375 \end{cases}$ $\begin{cases} 24075 \\ 104325 \end{cases}$ $\begin{cases} 40125 \\ 88275 \end{cases}$ $\begin{cases} 56175 \\ 72225 \end{cases}$

11. 最大公約數 37, 最小公倍數 44992.

12. $x^2-7x+12.$

13. 第一式ノミヲ 0 ナラシメル値 $x=-\frac{3}{2},$

第二式ノミヲ 0 ナラシメル値 $x=-1.$

14. $a+b\neq 0,\ a-b+2=0.$ **17.** $p^3+8q^2=0.$

18. $x=1,\ y=3;\ x=3,\ y=1.$

19. (1) $\pm(2+3x-4x^2+3x^3).$ (2) $\pm(4x^4-2x^2+x-5).$

20. $7x^2-3x-2.$

第二 消去法ソノ他

1. $abc+a+b+c=0.$ **2.** $a^3+b^3+c^3+abc=0.$

3. $a(3b^2-a^2)=2c^3.$ **4.** $ab'=a'b.$

5. $a^2(n^2b^2-m^2c^2)=b^2c^2(l^2-a^2).$ **8.** $-abc.$

第三 方程式

1. (1) $a=b=c$ ナラバ不定,然ラザレバ

$$x=-\frac{a+b+c}{3}.$$

(2) $x=\pm\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}.$ (3) $x=\frac{21\pm\sqrt{105}}{14}.$

(4) $a=b=c$ ナラバ不定,然ラザレバ

$$x=\frac{ab^2+bc^2+ca^2-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}.$$

(5) $0,\ \pm 5.$

2. (1) $x=\frac{1}{2}$.　(2) 根ガナイ.　(3) $x=3$.
   (4) $x=-\sqrt{2}$.　(5) $x=0$.　(6) $x=2,\ -\frac{1}{2}$.

3. (1) $x=\frac{7\pm\sqrt{57}}{4},\ y=\frac{21\pm\sqrt{57}}{48}$ 但シ複號ハ同符號ヲ取ル.
   (2) $x=1+\sqrt{7},\ y=1-\sqrt{7};\ x=1-\sqrt{7},\ y=1+\sqrt{7}$.
   (3) $x=2,\ y=1$.　(4) $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{5};\ x=\frac{1}{5},\ y=\frac{1}{3}$.
   (5) $x=3,\ y=2;\ x=-3,\ y=-2$.
   (6) $x=y=1;\ x=\frac{-5+\sqrt{7}i}{},\ y=\frac{-5-\sqrt{7}i}{};$
   $x=\frac{-5-\sqrt{7}i}{2},\ y=\frac{-5+\sqrt{7}i}{}$.
   (7) $x=\frac{n+2m}{n-2m},\ y=\frac{n-2m}{n+2m}$. 但シ $(n-2m)(n+2m)=0$ ナラバ不能.
   (8) $x=y=\frac{ab}{a+b};\ x=y=-\frac{ab}{a+b}$.
   (9) $x=y=z=\frac{1}{a+b+c}$.
   (10) $x=y=z=0;\ x=\frac{2bc}{-a+b+c},\ y=\frac{2ca}{a-b+c},\ z=\frac{2ab}{a+b-c}$.
   (11)

x	3	3	5	5	7	7
y	5	7	3	7	3	5
z	7	5	7	3	5	3

   (12) $x=y=2$.
   (13) $x=2,\ y=3;\ x=3,\ y=2;\ x=-6,\ y=1;\ x=1,\ y=-6$.
   (14) $x=2,\ y=1,\ z=3;\ x=-2,\ y=-1,\ z=-3$.
   (15) $x=\frac{(a+b+c+d)m}{a},\ y=\frac{(a+b+c+d)m}{b},$
   $z=\frac{(a+b+c+d)m}{c},\ u=\frac{(a+b+c+d)m}{d}$.

4. $p=2(1\pm\sqrt{2})$.　5. $\frac{-b(5a^2c^2-5ab^2c+b^4)}{a^5}$.

6. $(b-q)^2x^2+(a-p)(b^2-q^2)x+bq(a-p)^2=0$.

8. $x=y=\frac{1+i}{2};\ x=y=\frac{1-i}{2};\ x=\frac{4+2i}{5};\ y=\frac{2+i}{5};$
   $x=\frac{4-2i}{5},\ y=\frac{2-i}{5}$.

9. $k=3$ ナルトキ $x=y=-4$; $k=\frac{21}{4}$ ナルトキ $x=y=-31$.

10. $\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$.　11. $-\frac{5}{4},\ -\frac{4}{5}$.

12. $a=35,\ b=5$.　13. 5 分.

14. $\frac{10}{7}$ 分前,コノトキ甲ハ O 點ニ,乙ハ O ヨリ C ノ方ニ 10 m ノ距離ニヰル. 又 $\frac{10}{1183}$ 分前,コノトキ甲ハ O カラ B ノ方ニ $\frac{1200}{169}$ m ノ距離ニ,乙ハ O カラ D ノ方ニ $\frac{1190}{169}$ m ノ距離ニヰル.

15. 二港間ノ距離 45 浬,規定ノ速サ毎時 18 浬.

16. $a(b-c):b(c-a)$.　17. 毎時 40 km, 60 km.

18. $\frac{a(n-1)}{n+1}$ 分後.　19. $\frac{a(m-1)(1-n)}{m-n}$ m.

20. 兩者相等シイ.

第四 級數

5. $a:b:c=-4\pm\sqrt{3}:-1\pm\sqrt{3}:2$ ナルトキ調和級數ヲナス.

8. 1 又ハ $-\frac{4}{5}$.　9. $\frac{na}{1-r}-\frac{ar(1-r^n)}{(1-r)^2}$.

10. $a=-1$ ナルトキニ限リ原級數ハ等比級數ヲナス.

11. 絶對値ニ於テ一般ニ等差級數ノ方ガ大デアル.

12. 2.

13. 不可能デアル,順序ノ變更ヲ許セバ可能デアル.

14. $2^{21}-1-\frac{1}{2^{20}}$.　15. $\frac{(9n-1)10^n+1}{27\times10^n}$.

16. $\frac{(2+2^n)x^{n+1}-(1+2^n)x^n-2x^2+1}{2x^2-3x+1}$.　17. 3.

19. 一致スル項數 14, 總和 1393.

20. 14 項.　21. $-3,\ \frac{31}{6}$.

27. 5 項.　28. 8 又ハ $\frac{8}{7}$.

29. 9, 6, 4, 2 又ハ 25, −10, 4, 18

30. $a^2<2b$ ナラバ $\frac{b-a^2}{b}$.

31. $\frac{b^3}{2a}$, 但シ △ABC ヲ含マナイ.　32. 第 1000 番.

第五　對數及ビ步合算

1. (1) $x=3,\ -1.$　　(2) $x=100,\ \frac{1}{10}.$

2. (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{2}{\log 6} \end{cases}$　　$\begin{cases} x=10 \\ y=\dfrac{2}{1+\log 3} \end{cases}$

   (2) $\log y=\dfrac{\log 6.\ \log 3.-\log 7.\ \log 5}{\log 7-\log 6},\quad x=\dfrac{\log 5-\log 3}{\log 6-\log 7}.$

3. $x=15.$

4. 最大値 119, 最小値 90.

7. $u=\frac{1}{2}.$

8. 21 回以後.

9. 375 g.

10. 金 7.6 g, 寶石 1.5 g.

11. 20 錢.

12. 291 立方糎.

13. 上茶ト下茶トノ割合 $(10+b)(c-a):(10+c)(a-b).$

14. $\dfrac{2A}{n\{2+(n-1)r\}}$ 圓.

15. 第一回 8 割, 第二回 7 割.

16. 8235 圓.

17. 20400 圓.

18. 190.5 圓.

19. 1122.2 圓.

20. 甲 65 圓, 乙 60 圓; 又ハ甲 87.5 圓, 乙 37.5 圓.

21. $\sqrt[n]{bc}:\sqrt[n]{mac}:\sqrt[n]{m^2ab}.$

22. 甲 2250 圓, 乙 1500 圓, 丙 1000 圓; 又ハ甲 1000 圓, 乙 1500 圓, 丙 2250 圓.

23. $\log 2=0.3010,\ \log 3=0.4772;\ x=2.708,\ y=1.708.$

25. 煎茶 1.68 圓, 番茶 0.69 圓.

第六　雜題

2. $\sqrt{\frac{3}{10}}.$

3. $\dfrac{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}{2}.$

5. $R\propto\dfrac{V}{d^4}$, 5.109「オーム」.

9. $ab=4;\ x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}.$

10. $x=2,\ y=3.$

11. 15 cm, 13 cm.

12. 最大ナルモノ $2^{n+1}-1$, 最小ナルモノ 2^n.

13. $\frac{79}{192},\ \frac{79}{191},\ \frac{79}{190},\ \frac{79}{189}.$

15. $x=\frac{44}{5}.$

16. 1.

17. $t=-3,\ z=12.$

18. $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{x-3}.$

19. $4n+1$ ガ (3 ノ倍數)ナラバ $\dfrac{4(n+1)^2}{3}.$

   $4n+1$ ガ (3 ノ倍數)$+1$ ナラバ $\dfrac{4n^2}{3}.$

   $4n+1$ ガ (3 ノ倍數)$+2$ ナラバ $\dfrac{(2n+1)^2}{3}.$

20. $\frac{13}{24}.$

22. 原料費 132 圓, 加工賃銀 59.40 圓, 機械運轉費 11.34 圓.

	0
100	00 00000
101	43214
102	86002
103	01 28372
104	70333
105	02 11893
106	53059
107	93838
108	03 34238
109	74265
110	04 13927
111	53230
112	92180
113	05 30748
114	69049
115	06 06978
116	44580
117	81859
118	07 18820
119	55470
120	91812
121	08 27854
122	63598
123	99051
124	09 34217
125	69100
126	10 03705
127	38037
128	72100
129	11 05897
130	39434

七桁ノ對數表 (1000—1309)

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00	00000	04341	08677	13009	17337	21661	25980	30295	34605	38912
101		43214	47512	51805	56094	60380	64660	68937	73210	77478	81742
102		86002	90257	94509	98756	*03000	*07239	*11474	*15704	*19931	*24154
103	01	28372	32587	36797	41003	45205	49403	53598	57788	61974	66155
104		70333	74507	78677	82843	87005	91163	95317	99467	*03613	*07755
105	02	11893	16027	20157	24284	28406	32525	36639	40750	44857	48960
106		53059	57154	61245	65333	69416	73496	77572	81644	85713	89777
107		93838	97895	*01948	*05997	*10043	*14085	*18123	*22157	*26188	*30214
108	03	34238	38257	42273	46285	50293	54297	58298	62295	66289	70279
109		74265	78248	82226	86202	90173	94141	98106	*02066	*06023	*09977
110	04	13927	17873	21816	25755	29691	33623	37551	41476	45398	49315
111		53230	57141	61048	64952	68852	72749	76642	80532	84418	88301
112		92180	96056	99929	*03798	*07663	*11525	*15384	*19239	*23091	*26939
113	05	30748	34626	38464	42299	46131	49959	53783	57605	61423	65237
114		69049	72856	76661	80462	84260	88055	91846	95634	99419	*03200
115	06	06978	10753	14525	18293	22058	25820	29578	33334	37086	40834
116		44580	48322	52061	55797	59530	63259	66986	70709	74428	78145
117		81859	85569	89276	92980	96681	*00379	*04073	*07765	*11453	*15138
118	07	18820	22499	26175	29847	33517	37184	40847	44507	58164	51819
119		55470	59118	62763	66404	70043	73679	77312	80942	84568	88192
120		91812	95430	99045	*02656	*06265	*09870	*13473	*17073	*20669	*24263
121	08	27854	31441	35026	38608	42187	45763	49336	52906	56473	60037
122		63598	67157	70712	74265	77814	81361	84905	88446	91984	95519
123		99051	*02581	*06107	*09631	*13152	*16670	*20185	*23697	*27206	*30713
124	09	34217	37718	41216	44711	48204	51964	55180	58665	62146	65624
125		69100	72573	76043	79511	82975	86437	89896	93353	96806	*00257
126	10	03705	07151	10594	14034	17471	20905	24337	27766	31193	34616
127		38037	41456	44871	48284	51694	55102	58507	61909	65309	68705
128		72100	75491	78880	82267	85650	89031	92410	95785	99159	*02529
129	11	05897	09262	12625	15985	19343	22698	26050	29400	32747	36092
130		39434	42773	46110	49444	52776	56105	59432	62756	66077	69396

恒等式

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)$$

n ガ正ノ整數ナルトキ

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})$$

n ガ偶數ナルトキ

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots-b^{n-1})$$

n ガ奇數ナルトキ

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+b^{n-1})$$

級數

等差級數

初項 a, 公差 d, 項數 n, 第 n 項 l,

第 n 項マデノ和 S ナルトキ

$$l=a+(n-1)d,\qquad d=\frac{l-a}{n-1},$$

$$S=\frac{n(a+l)}{2},\qquad S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

等比級數

初項 a, 公比 r, 項數 n, 第 n 項 l,

第 n 項マデノ和 S ナルトキ

$$l=ar^{n-1},\qquad r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},$$

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

$-1<r<1$ ナル無限級數ノ和

$$\frac{a}{1-r}.$$

冪及ビ冪根

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\qquad \sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m\qquad a^0=1$$

$$a^m\div a^n=a^{m-n}\qquad \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\qquad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$$

$$(ab)^n=a^nb^n\qquad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

對數

$a^x=n$ ナルトキ, $x=\log_a n$.

$$\log_a 1=0\qquad \log_a a=1$$

$$\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$$

$$\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$$

$$\log_a(m^r)=r\log_a m$$

$$\log_b n=\frac{\log_a n}{\log_a b}$$

歩合算

元金 A, 年利率 r, 年數 n, 元利合計 S トスレバ, 單利法 $S=A(1+nr)$, 複利法 $S=A(1+r)^n$.

毎年 A ヅツノ年賦積立ノ元利合計ハ

$$S=\frac{A}{r}\{(1+r)^n-1\}.$$

負債金 A ヲ返濟スベキ年賦金 a ハ

$$a=\frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}.$$

a ヅツノ年金ノ現價 A ハ, 定期年金ナラバ $A=\frac{a}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}$, 永續年金ナラバ $A=\frac{a}{r}$.

昭和十四年八月十九日印刷
昭和十四年八月廿五日發行
昭和十四年十月十日修正再版印刷
昭和十四年十月十五日修正再版發行

不許複製

中等算術代數學教科書
〔增課課程〕
定價金九十一錢

著作者　竹内端三

東京市神田區神保町一丁目一番地
發行者　株式會社三省堂
代表者　龜井豐治

東京市蒲田區仲六郷一丁目五番地
印刷者　株式會社三省堂蒲田工場
代表者　喜多見昇

發行所
東京市神田區神保町一丁目一番地
株式會社三省堂
（振替口座東京三一五五五）
大阪市西區阿波座下通二丁目六番地
株式會社三省堂大阪支店

增課竹内算代

立川尊司

吉田口
立川材木商

昭和拾七年壹月八日

昭和十七年十月一日 日 使始

廣島縣高田郡小田村字上本原

廣島縣立高田中學校 第四學年A組

立川尊司

Hirosima
Takata
[illegible]
[illegible] 立川尊司

極小

廣島縣廣島郡 縣立
廣島中學校