文部省檢定濟

昭和七年九月二十七日　中學校數學科用

中等教育

# 幾何三角法教科書

［增課］

東北帝國大學名譽教授

理學博士

林鶴一

著

四・五學年用



東京開成館

# 目　次

# 第一篇

# 平面幾何學ノ補充

## 第一章　定理ノ證明法

### 1. 直接證明法

直接證明法ハ假設カラ出發シテ順次推論ヲ進メテ終結ニ達スル方法デ,通常用ヒラレルモノデアル。

例　$\triangle ABC$ ノ外接圓ノ周上ノ任意ノ點 P カラ三邊 AB, BC, CA ヘ夫々垂線 PL, PM, PN ヲ引ケバ,其ノ足 L, M, N ハ同一ノ直線上ニアル。

**考ヘ方**　ML, MN ヲ結ビ $\angle PML + \angle PMN = 2R\llcorner$ デアルコトヲ證明スル。

**證明**　$\angle PLB$ ト $\angle PMB$ トハ共ニ直角デアル(假設)。

故ニ PLBM ハ圓ニ内接スル四角形デアル。

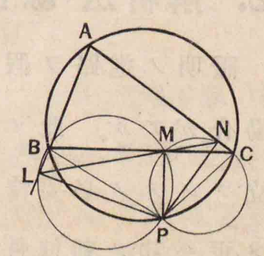
依ツテ PB ヲ結ブト

$\angle PBL = \angle PML$

又 PC ヲ結ブト

$\angle PBL = \angle PCA$

故ニ　$\angle PML = \angle PCN$



又 $\angle PMC$ ト $\angle PNC$ トハ共ニ直角デアル(假設)カラ, PMNC ハ圓ニ内接スル四角形デアル。

故ニ　　$\angle PCN+\angle PMN=2R\llcorner$

故ニ　　$\angle PML+\angle PMN=2R\llcorner$

故ニ L, M, N ハ同一ノ直線上ニアル。

注意　本定理ヲ**しむそん** Simson **ノ定理**トイヒ, LMN ヲP 點ニ關スル $\triangle ABC$ ノ**しむそん線**トイフ。

**問 1.** しむそんノ定理ノ逆ヲ述べ,且之ヲ證明セヨ。

**問 2.** 圓ニ内接スル三角形ノ一頂點ヲ一端トスル直徑ノ他ノ端ト垂心トヲ結ブ線分ト底邊トハ互ニ他ヲ二等分スル。

(先ヅ鋭角三角形ニ就イテ證明シ,其ノ證明ハ鈍角三角形ノ場合ニモ當テハマルカドウカヲ研究セヨ)

## 2. 解析法・綜合法

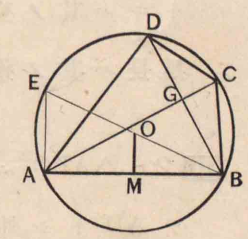
(考へ方)　(証明)

證明ノ進路ヲ假設カラ出發シテハ考案ニ困難ナ場合ガアル。此ノトキ終結カラ出發シテ終結ガ成立ツタメノ必要條件ヲ考究シテ一ツノ新條件ヲ求メ,更ニ其ノ新條件ガ成立ツタメノ必要條件ヲ探究シ,順次其ノ條件ヲ求メテ遂ニ假設又ハ假設カラ容易ニ斷定サレル事柄ニ到達スル方法ヲ**解析法**トイヒ,解析法ノ推究ヲ逆ニシテ證明スル方法ヲ**綜合法**トイフ。



**例 1.** 圓ニ内接スル四角形 ABCD ノ對角線 AC, BD ガ直交スレバ,其ノ圓ノ中心カラ AB ヘノ距離 OM ハ邊 CD ノ半分ニ等シイ。

**解析**　直徑 BOE ヲ引キ, AE ヲ結ブト $AE=2OM$ 依ツテ $OM=\frac{1}{2}CD$ デアルタメニハ




$$AE=CD$$

デアルコトヲ要スル。從ツテ

$$\angle ABE=\angle CBD$$

デアルコトヲ要スル。從ツテ $\triangle ABE$ ト $\triangle CBG$ トカラ $\angle BAE=\angle BGC=R\llcorner$ デアルコトニ着目シテ

$$\angle AEB=\angle GCB$$

デアルコトヲ要スル。然ルニコレハ同ジ弧 AB ノ上ニ立ツ二ツノ圓周角デアル。

依ツテ之ヲ證明ノ出發點トシテ上ノ進路ヲ逆ニ取ツテ證明ヲ得ル。(學生之ヲ試ミヨ)

**注意 1.** 解析法デ次々ノ條件ガ直グ前ノ條件ヲ滿足スル必要ニシテ十分ナル條件デアレバ解析法ダケデ證明ハ完全デアル。然シ上ノ例1ノヤウニ終結ガ成立ツコトカラ逆ニ必要ナル條件ダケヲ研究シタ場合ニハ必ズ綜合法ニヨツテ定理ノ眞ナルコトヲ明ラカニセネバナラナイ。此ノ場合解析法ハ證明ノ考ヘ方デアルカラ特ニ記スル必要ハナイ。ケレドモ練習ノタメニ證明ノ前ニ書イテ見ルコトハ甚ダ有益デアル。

**問 1.** 圓ニ内接スル四角形ノ對角線ガ直交スルトキハ,其ノ交點カラ一ツノ邊ヘ引イタ垂線ノ延長ハ其ノ邊ノ對邊ヲ二等分スル。

(ぶらまぐぷた Brahmagupta ノ定理)

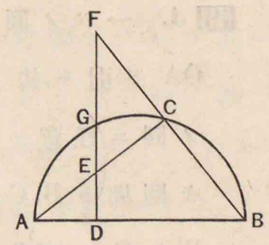
**問 2.** △ABC ニ於テ A カラ邊 BC ヘ引イタ垂線ヲ AD トシ,外心ヲ O, 内心ヲ I トスルト, AI ハ ∠OAD ヲ二等分スル。

**注意 2.** 終結カラ逆進シテ假設ニ到達スル代リニ,次ノ例2ノヤウニ假設ト終結トノ双方カラ推論ヲ進メテ或一致スル事柄ヲ見出シテモヨイ。之ガ多ク用ヒル考ヘ方デアル。

**例 2.** C ハ半圓周 ACB 上ノ一ツノ點デ, D ハ其ノ直徑 AB 上ノ一點デアル。D カラ AB ヘ垂線ヲ引キ AC, BC 及ビ半圓周ト夫々 E, F 及ビ G デ交ハラ



シメルト, DG ハ DE ト DF トノ比例中項デアル。




**解析** DG ガ DE ト DF トノ比例中項デアルタメニハ

$$\overline{DG}^2=DE\cdot DF \qquad (1)$$

デアルコトヲ要スル。然ルニ

$$\overline{DG}^2=AD\cdot DB$$

デアルカラ,(1)ガ成立ツタメニハ

$$AD\cdot DB=DE\cdot DF$$

從ツテ $AD:DE=DF:DB$ (2)

デアルコトヲ要スル。

又假設カラ $\angle ADE=\angle ACB(=R\llcorner)$ デアルカラ

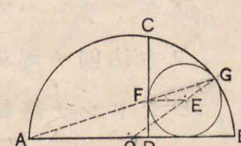
$$\angle DAE=\angle F$$

故ニ $\triangle ADE\backsim\triangle FDB$

故ニ $AD:DE=DF:DB$ (2)

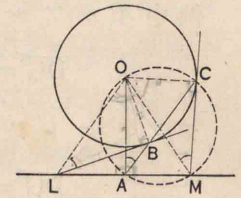
**證明** (學生之ヲナセ)

**問 3.** 半圓 ACB ノ弧 ACB 上ノ任意ノ點 C カラ直徑 AB ヘ引イタ垂線ヲ CD トシ, 弧 CB, 垂線 CD 及ビ直徑 AB ニ切スル圓ト弧 CB トノ切點ヲ G トシ, CD トノ切點ヲ F トスルト,三點



A, F, G ハ同一ノ直線上ニアル。

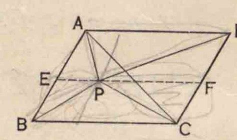
**問4.** 一ツノ圓ノ中心 O カラ一直線 LM へ垂線 OA ヲ引キ,其ノ足 A カラ此ノ圓ニ任意ノ割線 ABC ヲ引キ圓周ト B, C デ交ハラシメ, B ト C トデ此ノ圓ニ切スル直線ガ LM ト夫々 L, M デ交ハレバ, AL ト AM トハ相等シイ。




**問5.** ABCD ハ平行四邊形デ, P ヲ △ABC 内ノ任意ノ點トスレバ

$$\triangle PAB+\triangle PAC=\triangle PAD$$

デアル。




(證明スベキ式ノ兩邊ニ △PBC ヲ加ヘテ考ヘヨ)

**注意3.** 定理ノ證明ノ考ヘ方ハ本節ニ述ベタモノニヨルノガヨイガ,前節ニ述ベタモノ即チ假設カラ出發シテ終結ニ達スル推究ヲ鍛練スルコトハ又甚ダ重要デアル。コレハ定理ハ其ノ終結ガ知レテヰルカラ本節ノ方法即チ解析ヲ行フコトガ出來ルガ,假設ノミヲ知ツテドンナ終結ヲ得ルカヲ推究スル場合即チ定理ノ發見ヲナス場合ニハ上ノヤウナ推究ハ用ヒラレナイカラデアル。



## 3. 間接證明法

定理ヲ證明スルニ,之ヲ直接ニ證明シナイデ,其ノ對偶ヲ證明スル方ガ容易デアルコトガアル。即チ

「A ガ B ナレバ C ハ D デアル」 (1)

トイフ定理ヲ證明スルニ,其ノ對偶デアル

「C ガ D デナイナラバ A ハ B デナイ」 (2)

ヲ證明スルノデアル。

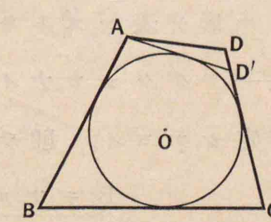
例ヘバ「四角形ノ對角ガ互ニ補角デアルトキハ,此ノ四角形ハ圓ニ内接スル」ヲ證明スルニ**歸謬法**ト稱シテ,其ノ對偶ヲ證明シタコトハ記憶スルコトデアラウ。

**例** 四角形ノ二組ノ對邊ノ和ガ相等シイトキハ此ノ四角形ハ圓ニ外接スル。　大低逆ヲ證明スル時

**證明** 四角形 ABCD ニ於テ

$$AB+CD=BC+AD \qquad (1)$$

トシ邊 AB, BC, CD ニ切スル圓 O ヲ畫キ,假リニ AD ガ此ノ圓ニ切シナイトシテ,頂點 A カラ此ノ圓ニ切線 AD′ ヲ引キ, CD 又ハ其ノ延長ト D′ デ交ハラ



シメルト, ABCD′ ハ圓ノ外接四角形デアルカラ

$$AB+CD'=BC+AD' \qquad (2)$$

(1)ト(2)トカラ

$$AD\sim AD'=DD'$$

ヲ得ル。コレハ不合理デアル。

故ニ AD ハ圓 O ニ切スル。

即チ四角形 ABCD ハ圓 O ニ外接スル。

**問** 1. 凸多角形ニハ三ツヨリモ多ク鋭角ハナイ。

**問** 2. △ABC ノ一邊 BC ノ兩端カラ對邊ヘ引イタ二線分BD, CE ハ決シテ互ニ二等分スルコトハナイ。

## 4. 同一法

或定理ガ證明セラレ,之ヲ

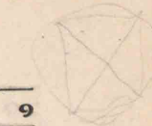
A デアルトキハ B デアル

ナル形デ表ハストキ, A ナルモノモ, B ナルモノモ唯一ツダケシカナイト,此ノ定理ノ逆モ眞デアルト斷定シテヨイ。即チ

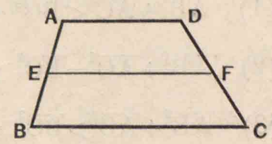
B デアルトキハ A デアル。

此ノ證明法ヲ**同一法**トイフ。





例ヘバ「梯形 ABCD ノ平行デナイ一邊 AB ノ中點 E カラ底ニ平行ニ引イタ直線ハ他ノ邊 CD ノ中點ヲ通ル」トイフ定理ガ證明セラレルト「梯形 ABCD ノ平行デナイ二邊AB, CD ノ中點ヲ結ブ直線ハ底ニ平行デアル」ハ同一法ニヨツテ直ニ眞デアルト斷定シテヨイ。




## 5. 轉換法

或事柄ニ就イテ互ニ關聯スル一群ノ定理ガ證明セラレ,其等ノ定理ノ假設ハ其ノ事柄ニ就イテノ總テノ場合ヲ盡クシ(從ツテ其ノ中一ツハ必ズ成立ツ)且其ノ終結ハ互ニ相容レナイ(同時ニ二ツ以上成立ツコトハ出來ナイ)トキハ,其等ノ定理ノ逆ハ皆成立ツト斷定シテヨイ。コレハ一群ノ定理ノ逆ヲ一括シテ證明スル論理的證明法デ,之ヲ**轉換法**トイフ。

例ヘバ「△ABC ニ於テ

(1) $\angle A>90°$ ナラバ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2<\overline{BC}^2$ デアル。

(2) $\angle A=90°$ ナラバ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ デアル。

(3) $\angle A<90°$ ナラバ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2>\overline{BC}^2$ デアル」トイフ

三定理ガ證明セラレタナラバ,此ノ逆ハ皆成立ツト斷定シテヨイ。卽チ

(1)′ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2<\overline{BC}^2$ ナラバ $\angle A$ ハ鈍角デアル。

(2)′ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ ナラバ $\angle A$ ハ直角デアル。

(3)′ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2>\overline{BC}^2$ ナラバ $\angle A$ ハ鋭角デアル。

何故ナレバ例ヘバ(1)′ヲ考ヘルニ,若シ假リニ $\angle A$ ガ鈍角デナイトスレバ, $\angle A$ ハ直角デアルカ又ハ鋭角デアルカデアルカラ,(2)ト(3)トカラ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ ハ $\overline{BC}^2$ ニ等シイカ又ハ $\overline{BC}^2$ ヨリモ大デ,共ニ假設ニ反スルカラデアル。

**問** $\triangle ABC$ ニ於テ AD ヲ一ツノ中線トシ

(1) $AD>BD$ ナラバ $\angle BAC<90°$ デアル。

(2) $AD=BD$ ナラバ $\angle BAC=90°$ デアル。

(3) $AD<BD$ ナラバ $\angle BAC>90°$ デアル。

之ヲ證明シ,且此ノ三定理ノ逆ヲ考ヘヨ。

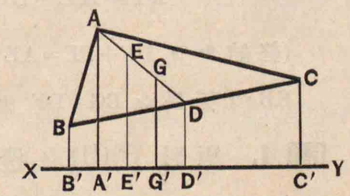
## 6. 補助圖形

幾何學ノ問題ヲ證明スル場合ニ或部分ノ性質ヲ明瞭ナラシメ,且既知ノ定理ノ應用ヲ容易ナラシメルタメニ補助圖形ヲ畫クコトガ必要デアル。一ツノ補助線ノ助ケニヨッテ證明ニ成功シ,又補助圖形ノ相違デ證明ニ繁簡ノ差ヲ生ズルコトハ常ニ經驗スル所デアル。故ニ補助圖形ハ極メテ重要デアルガ如何ナル補助圖形ヲ利用スレバ定理ヲ簡潔ニ證明スルコトガ出來ルカハ法則トシテ述ベルコトガ出來ナイ。唯補助圖形ハ成ルベク少クスルコトハ望マシイ。



**例 1.** $\triangle ABC$ ノ各頂點カラ此ノ三角形ヲ截ラナイ直線 XY マデノ距離ノ和 $AA'+BB'+CC'$ ハ $\triangle ABC$ ノ重心 G カラ XY マデノ距離 $GG'$ ノ 3 倍ニ等シイ。

**考ヘ方** $BB'+CC'$ ニ關係アル D カラ XY ヘ引イタ垂線 $DD'$ ト, $AA'+GG'$ ニ關係アル AG ノ中點 E カラ XY ヘ引イタ垂線 $EE'$ トヲ補助線トシテ利用スル。




**證明** $AA'+GG'=2EE'$

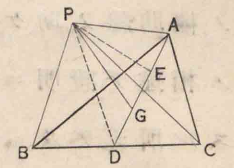
$BB'+CC'=2DD'$

邊々相加ヘテ

$$AA'+BB'+CC'+GG'=2(EE'+DD')$$
$$=4GG'$$

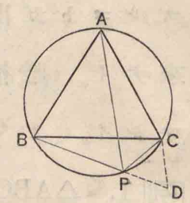
$$\therefore\quad AA'+BB'+CC'=3GG'$$

**問 1.** △ABC ノ重心ヲ G トシ, P ヲ任意ノ點トスルト




$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$
$$=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{GP}^2$$

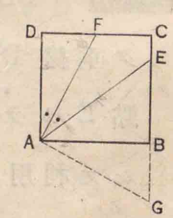
**問 2.** △ABC ヲ圓ニ内接スル正三角形トシ, P ヲ劣弧 BC 上ノ任意ノ點トスルト




PA＝PB＋PC

(PB＋PC ヲ得ルタメニ BP ヲ延長シテ PD＝PC ナルヤウニ D ヲ定メル)

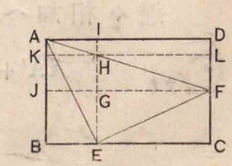
**問 3.** 正方形 ABCD ノ A カラ BC ニ任意ノ直線 AE ヲ引キ, ∠DAE ノ二等分線 AF ト CD トノ交點ヲ F トスルト




DF＝AE－BE

(終結カラ DF＋BE＝AE ヲ得ルカラ, EB ヲ延長シ BG＝DF ナルヤウニ G ヲ取ル)

**問 4.** 矩形 ABCD ノ邊 BC 上ノ一點ヲ E トシ, CD 上ノ一點ヲ F トスルト



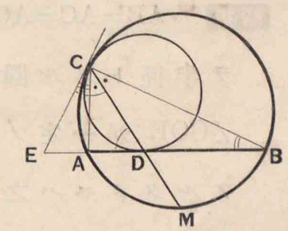

2△AEF＋BE·DF＝ABCD

(2△AEF ヲ矩形内ニ得ルタメ H ヲ通ツテ BC ニ平行ニ KL ヲ引ク)



**例 2.** 圓ノ弦 AB ガ此ノ圓ヲ分ケタ弓形ノ一ツニ内接スル圓ノ切點ヲ C, D トスレバ, CD ハ此ノ弓形ノ弧ノ共軛弧ノ中點ヲ通ル。

**解析** CD ノ延長ト $\overset{\frown}{ACB}$ ノ共軛弧トノ交點ヲ M トスル。M ガ $\overset{\frown}{AMB}$ ノ中點デアルコトヲ證明スルニハ




∠ACD＝∠DCB

ヲ證明スレバヨイ。

ソコデ共通切線 CE ヲ引キ, AB ノ延長ト E デ交ハラシメテ角ノ關係ヲ推究スル。即チ

∠ACD＝∠ECD－∠ECA

∠DCB＝∠EDC－∠B

次ニ ∠ECD ト ∠EDC 及ビ ∠ECA ト ∠B ノ關係ヲ考ヘル。

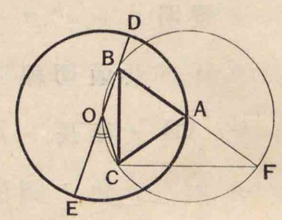
**注意** 一般ニ相切圓·相交圓ニ關スル問題ハ, 共通切線ヲ引クカ, 共通中心線ヲ引クカ, 共通弦ヲ引クカノ何レカノ補助圖形ヲ用ヒルガヨイ。

**問 5.** 二ツノ圓ガ A デ内切スルトキニ, 外圓ノ弦 BC ガ D, E デ内圓ニ交ハレバ, ∠BAD ト ∠CAE トハ相等シイ。

例 3. 二等邊三角形 ABC ノ等邊 AB, AC ハ一ツノ定圓 O ノ半徑ニ等シク, ∠A ハ一定ノ大サデアル。ソシテ A ガ定圓 O ノ周上ニアツテ, B ハ此ノ圓ノ定直徑 DE 上ニアレバ, CO ハ常ニ DE ト一定ノ大サノ角ヲ作ル。但シ B ト O トハ合シナイトスル。

解析 AB=AC=AO デアルカラ, A ヲ中心トシ AB ヲ半徑トスル圓ヲ畫イテ角ノ關係ヲ考ヘル。

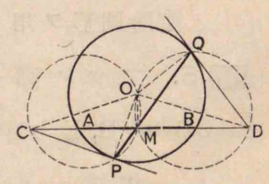
∠COE ガ一定ノ大サデアルタメニハ之ニ等シイ ∠F ガ一定ノ大サデアルコトヲ要スル。




從ツテ 2∠F ニ等シイ ∠BAC ガ一定ノ大サデアルコトヲ要スル(假設)。

問 6. 圓 O ニ其ノ外部ノ一點 P カラ二ツノ切線 PA, PB ト一ツノ割線 PCD トヲ引キ弦 CD ノ中點ヲ M トスルト, MP ハ ∠AMB ヲ二等分スル。

問 7. 圓ノ弦 AB ノ中點 M ヲ通ル任意ノ弦 PQ ノ兩端ニ於ケル切線ガ AB ノ延長ト交ハル點ヲ C, D ト

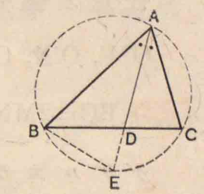





スレバ, AC ト BD トハ相等シイ。

問 8. △ABC ノ A ニ於ケル内角又ハ外角ノ二等分線ガ邊 BC 又ハ其ノ延長ヲ截ル點ヲ D トスレバ

$$\overline{AD}^2 = AB\cdot AC \sim BD\cdot DC$$




(BD·DC ニ等シイ矩形ヲ得ル目的デ外接圓ヲ畫ク。

$\overline{AD}^2 = AB\cdot AC - BD\cdot DC$ デアルタメニハ

$BD\cdot DC = AD\cdot DE$ デアルカラ

$\overline{AD}^2 + AD\cdot DE = AB\cdot AC$ デアルコト,

從ツテ $AD\cdot AE = AB\cdot AC$ デアルコト,

從ツテ $AB : AE = AD : AC$ デアルコトヲ要スル。

ソシテ $\angle BAE = \angle EAC$ デアルカラ

$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$ デアルコトヲ要スル)

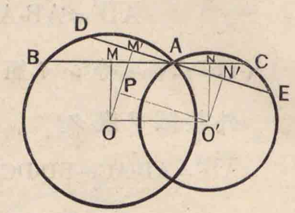
## 7. 平行移動法

平行移動法ハ圖形中ノ或直線ヲ其ノ位置ニ平行デアル他ノ適當ノ位置ニ移シテ他ノ線トノ連絡ヲ良クスル方法デアル。

例 相交ハル二定圓 O, O′ ノ交點ノ一ツ A ヲ通ツテ,其ノ二圓周ノ間ニ夾マレル線分ノ中デ,其ノ二圓

ノ中心ヲ結ブ直線 OO′ ニ平行デアルモノガ最大デアル。

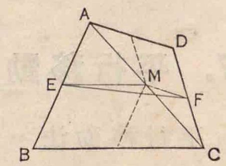
**解析**　BC ヲ OO′ ニ平行デアル線分, DE ヲ他ノ任意ノ線分トシ, O, O′ カラ BC, DE ニ垂線 OM, OM′, O′N, O′N′ ヲ引クト



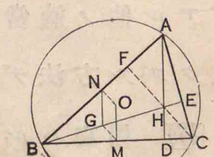

$BC=2MN$, $DE=2M'N'$ デアルカラ, $BC>DE$ デアルタメニハ $MN>M'N'$ デアルコトヲ要スル。

ソシテ $MN=OO'$ デアルカラ, M′N′ ヲ O′P ノ位置ニ平行ニ移動スル(O′ カラ M′N′ ニ平行ニ O′P ヲ引ク)ト, OO′ ハ直角三角形ノ斜邊トナリ, O′P ハ其ノ直角ノ一邊トナル。

**問 1.** 四角形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ他ノ一組ノ邊ノ和ノ半分ヨリモ大デナイ。




**問 2.** △ABC ノ外心カラ一邊 BC マデノ距離ハ, A カラ此ノ三角形ノ垂心マデノ距離ノ半分ニ等シイ。



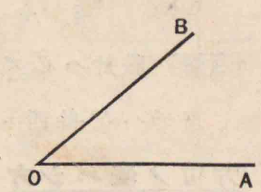



# 第二章　直線圖形

## 8. 角

**半直線**　一ツノ點カラ引カレタ直線ヲ**半直線**トイフ。

故ニ**角**ハ一ツノ點カラ引カレタ二ツノ半直線デ出來タ圖形デアル




**問 1.** 角ノ種類ヲ擧ゲテ其ノ各〻ノ定義ヲ述ベヨ。

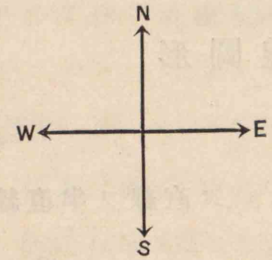
**問 2.** 角ニ關スル重要ナ定理ヲ述ベヨ。

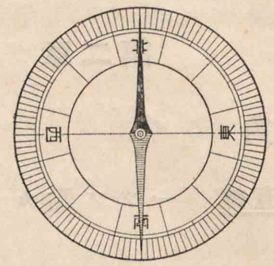
**問 3.** 相交ハル二直線ノ交點ヲ通リ其ノ一組ノ對頂角ヲ二等分スル直線ニ直交スル直線ハ他ノ一組ノ對頂角ヲ二等分スル。

**問 4.** 二角ノ邊ノ一組ガ平行デ他ノ一組ガ垂直デアレバ,此ノ二角ノ大サニドンナ關係ガアルカ。

## 9. 方位

**方位**ヲ示スニハ東·西·南·北ノ四方向ヲ基準ニスル。方向ヲ定メルニハ磁針又ハ北極星ナドニヨル。

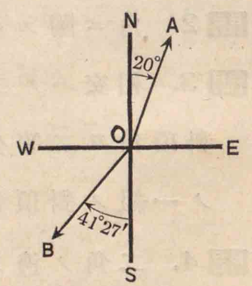


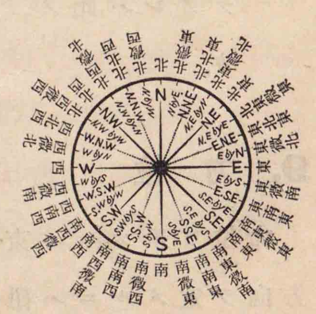

注意 磁針ハ必ズシモ正シク南北ヲ指サナイ。現今東京デハ5°餘西ニ,樺太デハ8°餘西ニ偏シテヰル。

**方位ノ表ハシ方** 方位ヲ表ハスニハ通常次ノ二法ヲ用ヒル。

[1] 陸地測量デハ通常北(或ハ南)カラ東(或ハ西)ヘ偏スル角度ヲ以テスル。例ヘバ右ノ圖デ OA ノ方位ヲ北 20° 東 (N 20° E) デ示シ, OB ノ方位ヲ南 41°27′ 西 (S41°27′W) デ示ス。



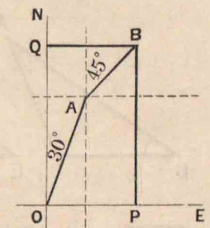

[2] 航海用ノ羅針盤デハ東西南北ノ四方位ノ間ヲ各〻八等分シ,此ノ三十二方位ニ右ノ圖ニ示スヤウナ名稱ヲ用ヒル。ソレデ例ヘバ北22°30′東





ハ北北東ト呼ビ, 南11°15′西ハ南微西ト呼ビ,マタ西22°30′北ハ西北西ト呼ブ。

9 問 或人ガ東西及ビ南北ニ通ズル二ツノ道路ノ交叉點カラ出發シテ N30°E ノ方向ニ 600*m* 進ミ,更ニ方向ヲ北東ニ轉ジテ 400*m* ヲ進ンデ某地ニ達シタトイフ。此ノ地點ハ兩道路カラ各〻幾米距タッテヰルカ。




## 10. 三角形ノ合同

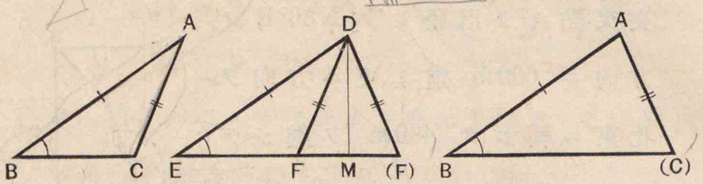
問 1. 二ツノ三角形ガ合同デアル三ツノ基礎定理ヲ擧ゲヨ。

注意 1. 三角形ノ合同ニヨッテ線分叉ハ角ノ等シイコトヲ證明スルコトガ出來ル場合ハ甚ダ多イ。

問 2. △ABC ノ二ツノ中線 BD, CE ヲ延長シテ DF=BD, EG=CE ナルヤウニ F, G ヲ取ルト F, A, G ハ同一ノ直線上ニアル。

例 一ツノ三角形 (ABC) ノ二邊 (AB, AC) ガ夫々他ノ三角形 (DEF) ノ二邊 (DE, DF) ニ等シク,其ノ一

組ノ等邊(AC, DF)ニ對スル角ガ等シイトキハ,他ノ一組ノ等邊(AB, DE)ニ對スル角ハ相等シイカ又ハ補角デアル。




**證明**　△ABC ヲ △DEF ノ上ニ重ネ, A ヲ D ノ上ニ, 邊 AB ヲ邊 DE ノ上ニ重ネ, C ト F トガ DE ノ同ジ側ニアルヤウニスルト, ∠B=∠E デアルカラ,邊 BC ハ邊 EF ノ上ニアツテ,點 C ハ直線 EF 上ノドコカニ落チル。

ソシテ AC=DF デ A ハ D ノ上ニ重ナツタカラ AC ト DF トノ位置ノ關係ハ,次ノ三ツノ場合ノ何レカ一ツデアル。

(1) AC ト DF トガ共ニ D カラ EF へ引イタ垂線 DM ニ重ナル場合(兩三角形ガ直角三角形デアルトキ)。

(2) AC ト DF トガ共ニ DM ノ同ジ側ニアツテ重ナル場合。



(3) AC ト DF トガ DM ノ兩側ニアツテ,之ト等角ヲナス場合。

故ニ(1)及ビ(2)ノ場合デハ AB ト DE トニ對スル角ハ相等シク,兩三角形ハ合同デアル。

又(3)ノ場合デハ AB ト DE トニ對スル角ハ互ニ補角デアル。

**注意** **2.** 次ノ各々ノ場合ニハ ∠C ト ∠F トガ補角デアルコトガ出來ナイカラ,兩三角形ハ合同デアル。

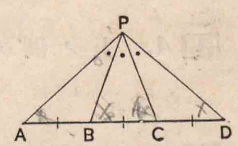
(*a*) ∠B ト ∠E トガ直角又ハ鈍角デアルトキ。

(*b*) ∠C ト ∠F トガ共ニ鋭角,共ニ鈍角デアルトキ,又ハ何レカ一ツガ直角デアルトキ。

(*c*) AC, DF ガ AB, DE ヨリモ大キイトキ。

**問 3.** 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ガ對邊ヲ二等分スルトキハ,此ノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

**問 4.** 二點 B, C ハ一ツノ線分 AD ヲ三等分スル點デアルトキ,直線 AD 外ニ一點 P ヲ取ツテ ∠APD ガ PB ト PC トデ三等分サレルヤウニスルコトガ出來ルカドウカ。



## 11. 多角形ノ内角ノ和

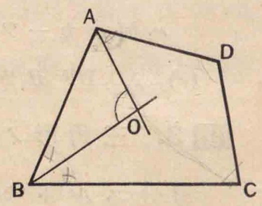
**問 1.** 多角形ノ内角及ビ外角ノ和ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 正 $n$ 角形ノ一ツノ内角及ビ一ツノ外角ヲ表ハス公式ヲ書ケ。

**問 3.** 或正多角形ノ一角ガ $162^\circ$ デアル。此ノ邊數ヲ求メヨ。

**例** 四角形 ABCD ノ相隣ル二角 A, B ノ二等分線ノ交角 O ノ大サハ $\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$ ニ等シイ。

**證明** $\angle O=2R\llcorner-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$




然ルニ四角形ノ内角ノ和ハ $4R\llcorner$ デアルカラ

$\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=2R\llcorner$

$\therefore\ \frac{1}{2}(\angle C+\angle D)=2R\llcorner-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$

$\therefore\ \angle O=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$

**問 4.** 上ノ例デ $\angle A$, $\angle C$ ノ二等分線ノ交角ハドウカ。

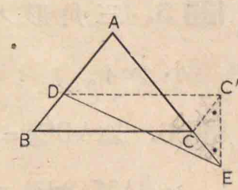
**問 5.** $\triangle ABC$ ノ $\angle B$ ト $\angle C$ トノ二等分線ノ交角及ビ B ト C トニ於ケル外角ノ二等分線ノ交角ヲ $\angle A$ デ表ハセ。



## 12. 三角形ノ邊ト角トノ大小

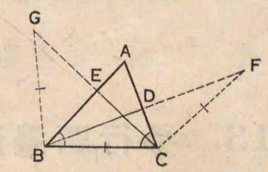
**問 1.** 三角形ノ邊ト角トノ大小ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 二等邊三角形 ABC ノ邊 AC ノ延長上ニ一點 E ヲ取リ, AB 上ニ一點 D ヲ取ッテ BD=CE ナルヤウニスレバ DE>BC デアル。




(BC ヲ DC′ ノ位置ニ平行移動シ $\triangle DEC'$ ノ $\angle DC'E$ ト $\angle DEC'$ トヲ比較スル)

**問 3.** $\triangle ABC$ ニ於テ AB>AC デ B, C カラ對邊ヘ引イタ垂線ヲ BD, CE トスルト, BD ハ CE ヨリモ大キイ。




(BD, CE ヲ延長シ BF, CG ヲ夫々 BD, CE ノ 2 倍ニ等シクスル)

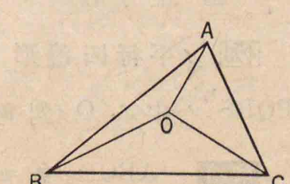
**例** O ヲ $\triangle ABC$ 内ノ任意ノ點トスレバ

$$OA+OB+OC<AB+BC+CA$$

**證明** $OA+OB<CA+CB$

$OB+OC<AB+AC$

$OC+OA<BA+BC$




此ノ三式ヲ邊々相加ヘテ

$$2(OA+OB+OC)<2(AB+BC+CA)$$

$$\therefore \quad OA+OB+OC<AB+BC+CA$$

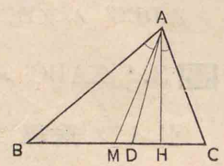
**問4.** 上ノ例ノ假設デ次ノ式ヲ證明セヨ。

$$OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

**問5.** 三角形ノ三ツノ高サノ和ハ其ノ周ヨリモ小サイ。

**問6.** △ABC ニ於テ, AD ヲ ∠BAC ノ二等分線トシ, AM, AH ヲ夫々 A カラ BC ニ引イタ中線ト垂線トスレバ, AD ハ AM ト AH トノ間ニアル。

(∠BAM, ∠CAH ガ共ニ $\frac{1}{2}$∠BAC ヨリモ小サイコトニ着眼セヨ)




## 13. 平行四邊形・矩形・正方形

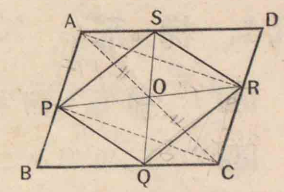
**問1.** 次ノモノニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

1 平行四邊形　　2 矩形
3 正方形　　4 菱形

**例** 平行四邊形 ABCD ニ内接スル平行四邊形 PQRS ノ中心 O (對角線ノ交點)ハ皆相合スル。

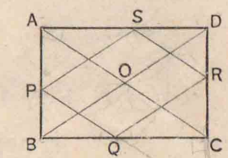
**解析** ABCD ヲモ内接形ノ極端ナ位置ト考ヘラレルカラ,中心 O ガ常ニ相合スルタメニハ O ガ AC ノ中點ニ合スルコトヲ要スル。





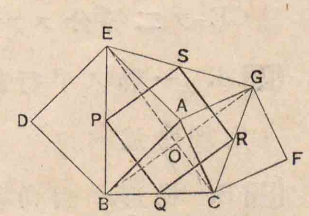

依ッテ APCR ガ平行四邊形デアルコト, 從ッテ AP ト CR トガ平行デ且相等シイコト, 從ッテ △PAS≡△RCQ デアルコトヲ要スル。

**問2.** 矩形 ABCD ニ内接スル四角形 PQRS ノ三邊ガ夫々此ノ矩形ノ對角線ニ平行デアレバ, PQRS ハ平行四邊形デアル。ソシテ其ノ各隣邊ハ夫々 ABCD ノ各邊ニ等角ヲナシ,其ノ周ハ AC+BD ニ等シイ。




**問3.** △ABC ノ邊 AB, AC ノ上ニ其ノ外方ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ作リ, EB, BC, CG, GE ノ中點ヲ夫々 P, Q, R, S トスレバ, PQRS ハ正方形デアル。

(PQRS ハ平行四邊形デアルカラ,其ノ二隣邊ガ相等シク且垂直デアルコトヲ證明スル)



## 14. 梯形

**問 1.** 梯形ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 三角形ノ二邊ノ中點ヲ通ル直線ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

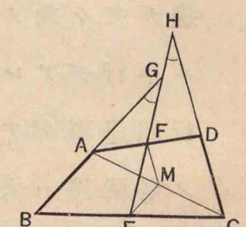
○ **例** 四角形 ABCD ニ於テ $AB=CD$ ナルトキ,二邊 BC, AD ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ, AB, CD ノ延長ハ EF ト等角ヲナス。

**解析** AC ノ中點ヲ M トスルト, $EM \parallel AB$, $FM \parallel CD$ デアルカラ, AB, CD ノ延長ガ EF ト等角ヲナスニハ

$$\angle MEF=\angle MFE$$

從ッテ　$ME=MF$

デアルコトヲ要スル。




**問 3.** △ABC ノ邊 BC 上ニ一點 D ヲ取リ $BD=2CD$ ナルヤウニシ, E ヲ AB ノ中點トスレバ, AD ハ CE ヲ二等分スル。

**問 4.** 一群ノ平行線ト其ノ截線トニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

**問 5.** 梯形ノ對角線ガ等シイトキハ,之ハ等脚梯形デアル。

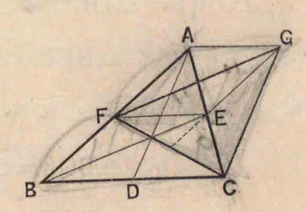


## 15. 三角形ノ中線ト重心

**問 1.** 三角形ノ中線ト重心ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

**例** △ABC ニ於テ D, E, F ヲ夫々三邊 BC, CA, AB ノ中點トシ, AF ト FE トヲ二邊トスル平行四邊形 AFEG ヲ作レバ, △CGF ノ三邊ハ夫々 △ABC ノ三中線ニ等シイ。

**解析** $CG=AD$, ~~GF~~ FG $=BE$ ヲ證明スレバヨイノデアルカラ, ADCG ト BEGF トガ平行四邊形デアルコトヲイヘバヨイ。

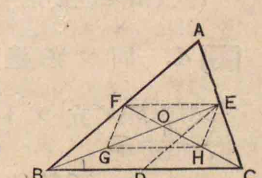



**問 2.** 上ノ例ヲ應用シテ,與ヘラレタ三線分ニ等シイ三中線ヲ有スル三角形ヲ作圖セヨ。

**問 3.** AD ヲ △ABC ノ一ツノ中線トスルト

$$\frac{1}{2}(AB+AC)>AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$$

**問 4.** △ABC ノ邊 AC, AB 上ニ夫々 E, F ヲ取リ, BE, CF ノ交點ヲ O トスルトキ, $BO=2OE$, $CO=2OF$ デアレバ, O ハ此ノ △ABC ノ重心デアル。

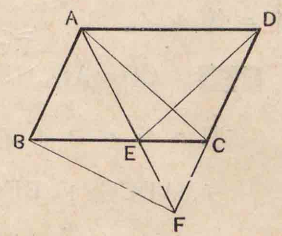


## 16. 多角形ノ面積

**問** 1. 矩形ノ面積ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

**問** 2. 平行四邊形·三角形ノ面積ニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

**例** 平行四邊形 ABCD ノ頂點 A カラ直線ヲ引キ BC ト E デ, CD 又ハ其ノ延長ト F デ交ハラシメレバ, △BEF=△DEC デアル。




**解析** △BEF=△DEC

デアルタメニハ

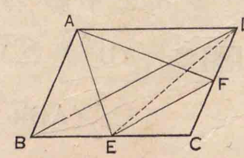
△BCF=△DEF

然ルニ △BCF=△AFC

故ニ △AFC=△DEF デアルコトヲ要スル。

**問** 3. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 BD ニ平行ニ EF ヲ引キ, BC ト CD トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ

△ABE=△ADF




(△ABE=△DBE デアル。△ADF ハ何ニ等シイカ)

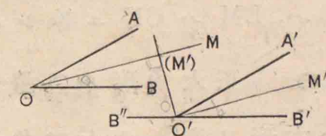
**問** 4. 同ジ底邊 BC ノ上ニ二ツノ三角形 ABC, A′BC ガ立ツトキ, AA′ ノ中點ヲ M トスレバ

$$\triangle MBC=\frac{1}{2}(\triangle ABC \pm \triangle A'BC)$$



## 問題 1

1. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ平行デアレバ,此ノ二角ノ二等分線ハ互ニ平行デアルカ又ハ直交スル。




2. 平行線ニ關スル公理ト重要定理トヲ述ベヨ。

3. 二等邊三角形ABCノ兩底角ノ二等分線ガ對邊ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ, EF ハ BC ニ平行デアル。

4. 二等邊三角形ノ底ノ兩端 B, C カラ對邊ニ相等シイ線分 BD, CE ヲ引ケバ, BE ト CD トハ等シイカドウカ。

5. 三角形 ABC ノ一邊 AB ノ中點 D カラ AC ニ DE ヲ引キ, DE ガ $\frac{1}{2}$BC ニ等シイトキハ, DE ハ BC ニ平行デアルカドウカ。

6. 等脚三角形 ABC ニ於テ AB=AC トシ, AB 上ニ一點 D ヲ, AC ノ延長上ニ一點 E ヲ取リ, BD=CE ナルヤウニスルトキハ, DE ハ BC デ二等分セラレル。

7. 直角三角形 ABC ノ斜邊デナイ二邊 AB, AC ノ上ニ其ノ形外ニ正方形 ABEF, ACGH ヲ作リ, E, G カラ斜邊 BC ノ延長ヘ垂線 EM, GN ヲ引クトキハ, BM ハ CN ニ等シイ。

8. 正六角形ノ各邊ノ上ニ其ノ形外ニ六ツノ正方形ヲ書イテ十二角形ヲ作ルト,コレハ正十二角形デアルカドウカ。

9. 四角形 ABCD ニ於テ二邊 AB, CD ガ互ニ平行デ,其ノ和ガ邊 BC ニ等シイトキハ, ∠ABC, ∠BCD ノ二等分線ハ AD 上デ交ハル。

10. 三角形ノ頂點カラ二ツノ底角及ビ其ノ外角ノ二等分線ヘ引イタ垂線ノ足ハ皆此ノ三角形ノ底デナイ二邊ノ中點ヲ通ル直線上ニアル。

11. △ABC ノ頂點 B, C カラ其ノ對邊ヘ垂線 BE, CF ヲ引クト, EF ノ中點ト BC ノ中點トヲ結ブ直線ハ EF ニ垂直デアル。

12. 四角形ノ二組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二直線ト對角線ノ中點ヲ結ブ直線トハ同ジ點ヲ通ル。

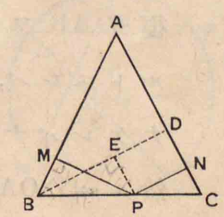
13. △ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D, 中線 AD ノ中點ヲ E トシ, BE ト AC トノ交點ヲ F トスルト, F ハ AC ノ三等分點ノ一ツデアル。



14. 平行四邊形 ABCD ノ二邊 CD, DA ノ中點ヲ夫夫 E, F トスルト, BE, BF ハ對角線 AC ヲ三等分スル。

15. 梯形 ABCD ノ兩底ヲ AD, BC トシ,之ニ平行ナル直線ガ AB, CD ト夫々 M 及ビ N デ交ハリ, MN ガ $\frac{1}{2}$(AD+BC) ニ等シイトキハ, M 及ビ N ハ夫々 AB, CD ノ中點デアル。

16. 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ點カラ他ノ二邊ヘ引イタ垂線ノ和ハ常ニ一定ノ長サデアル。又點ヲ底邊ノ延長上ニ取ルトドウカ。




17. 梯形 ABCD ノ兩底ヲ AB, CD トシ, B カラ AD ニ平行ニ引イタ直線ト, D カラ BC ニ平行ニ引イタ直線トノ交點ヲ E トスルト, △CDE=△ABE デアル。

18. △ABC ノ邊 AB, AC ノ上ニ外側ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ作ルト, △AEG ハ △ABC ニ等シイ。

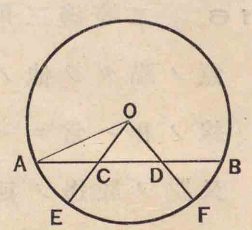
# 第三章 圓

## 17. 中心角・弧・弦

**問** 1. (1)圓ノ中心角ト之ニ對スル弧,(2)圓ノ弧ト其ノ弦トノ大サニ關スル重要定理ヲ述ベヨ。

**例** 弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ其ノ弦ニ對スル弧ヲ三等分スルカ。

**證明** 圓Oニ於テ,弦ABヲC, Dデ三等分スル半徑ガ$\widehat{AB}$ヲE, Fデ三等分スルトスレバ,$\angle AOE=\angle EOF$デナケレバナラナイ。




然ルニ$\triangle OAD$ニ於テ$OA>OD$デ,OCハ其ノ中線デアルカラ$\angle AOC<\angle COD$デアル。コレハ矛盾デアル。

故ニ弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ其ノ弦ニ對スル弧ヲ三等分シナイ。

**問** 2. 圓Oノ弦ABヲCマデ延長シテBCヲ半徑ニ等シク取リ,CDOEヲ引イテ圓周トD, Eデ交ハラシメレバ

$$\widehat{BD}=\frac{1}{3}\widehat{AE},\qquad \angle AOE=3\angle C$$

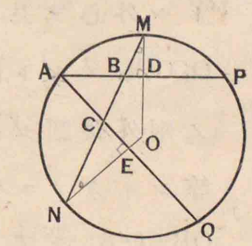


## 18. 弦・中心線

**問** 1. 圓ノ弦ト中心線ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**例** AP, AQハ一ツノ圓ノ二ツノ弦デアル。ソシテM, Nヲ夫々$\widehat{AP}$及ビ$\widehat{AQ}$ノ中點トシ,弦MNガAP, AQ又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々B, CトスレバABトACトハ相等シイ。

**解析** OM, ONヲ結ブト$OM\perp AP$, $ON\perp AQ$デアル。




サテ

$AB=AC$ ナラバ

$\angle MBD=\angle NCE$

從ッテ$\angle OMN=\angle ONM$デアルコトヲ要スル。

**問** 2. 圓ノ弦ノ大小ニ關スル定理ヲ擧ゲヨ。

**問** 3. 圓ノ二ツノ等弦ガ相交ハレバ,其ノ交點デ分ケラレル部分ハ二ツヅツ相等シイ。

**問** 4. 同ジ點ヲ通ル相等シイ弦(直徑デナイ)ハ二ツヨリハ多クナイ。

**問** 5. 圓ノ一ツノ弦ヲ二等分スル弦ヲ引キ,其ノ弦ヲ二等分スル第三ノ弦ヲ引キ,次第ニカヤウニ弦ヲ引ケバ,其ノ弦ハ次第ニ大キクナル。

(系) 底辺ト頂角ガ一定ナル三角形ノ外接円ノ大サハ一定デアル



## 19. 圓周角

問 1. 圓周角ト中心角ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

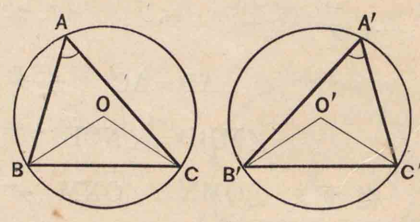
問 2. 弓形ト其ノ含ム角ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

例 1. 底邊ト頂角ノ大サトガ等シイ二ツノ三角形ノ外接圓ハ相等シイ。

解析　△ABC, △A′B′C′ ニ於テ

$$BC=B'C',\quad \angle A=\angle A'$$

トシ,外心ヲ夫々 O, O′ トスルト,此ノ兩外接圓ガ相等シイタメニハ,




OB=O′B′ デアルコトヲ要スル。

從ツテ △OBC≡△O′B′C′ デアルコトヲ要スル。

問 3. 上ノ例デ ∠A ト ∠A′ トガ補角デアレバドウカ。

問 4. H ヲ △ABC ノ垂心トスレバ, △HBC, △HCA, △HAB ノ外接圓ノ大サニ差ガアルカ。

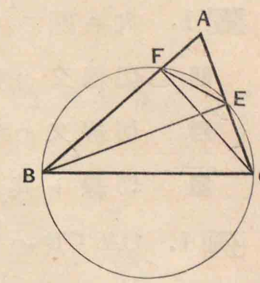
例 2. △ABC ノ底邊 BC ガ一定デ,頂角 A ノ大サガ一定デアレバ, B, C カラ對邊ヘ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ線分 EF ノ長サハ一定デアル。

(定理) 底辺ガ等シクテ頂角ガ等シイカ又ハ補角ヲナス二ツノ三角形ノ外接円ハ相等シ



解析　∠BEC ト ∠BFC トガ共ニ直角デアルカラ EF ハ BC ヲ直徑トスル圓ノ弦デアル。

故ニ EF ノ長サガ一定デアルタメニハ,圓周角 EBF ガ一定ノ大サデアルコトヲ要スル。




問 5. △ABC ノ外接圓周上ノ一點 P カラ三邊 BC, CA, AB ヘ垂線ヲ引キ,其ノ各〻ガ再ビ圓周ト交ハル點ヲ夫々 A′, B′, C′ トスレバ, △A′B′C′ ハ原ノ三角形ト合同デアル。

問 6. AB ト CD トハ圓 O ノ平行ナル二弦デ, M ハ CD ノ中點デアル。今 B ト M トヲ通ル弦ヲ BE トスレバ,四ツノ點 A, E, O, M ハ同ジ圓周上ニアル。

問 7. 圓內デ直交スル二ツノ弦ガ圓周ヲ分ケル四ツノ弧ノ中デ相隣ラナイ二ツノ弧ノ和ハ其ノ圓ノ半圓周ニ等シイ。

又二弦ガ其ノ延長デ交ハル場合ハドウカ。

## 20. 切線・割線

**問 1.** 次ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**1** 切線又ハ割線ト半徑。

**2** 切線又ハ割線ト中心トノ距離。

**3** 切線ト其ノ切點ヲ通ル弦トノ夾ム角。

**例 1.** OA, OB ハ圓 O ノ垂直ナル二ツノ半徑デアル。今 B カラ任意ノ弦 BQ ヲ引イテ OA ト P デ交ハラシメ, Q ニ於ケル切線 QR ヲ引イテ OA ノ延長ト R デ交ハラシメルト, △PQR ハ等脚三角形デアル。

**解析**　$\angle RQP = \angle RPQ = \angle BPO$

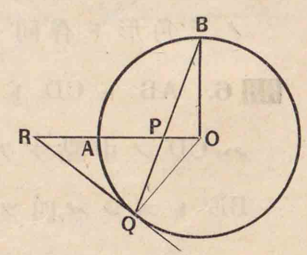
デアレバヨイ。然ルニ

$\angle RQO = \angle BOP = R\llcorner$

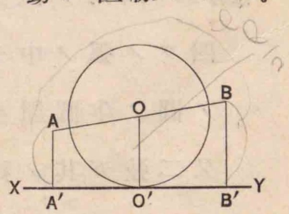
デアルカラ

$\angle OQB = \angle OBQ$

デアレバヨイ。




**問 2.** A, B ハ二定點デ, XY ハ動ク直線デアル。ソシテ A, B カラ XY マデノ距離ノ和ハ常ニ等シイ。然ラバ XY ハ一ツノ定マツタ圓ニ切シナガラ動ク。



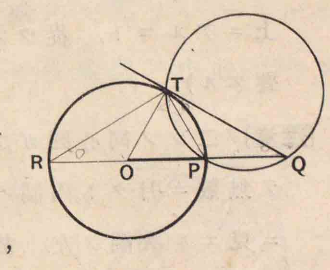



**例 2.** 圓 O ノ半徑 OP ヲ之ト等シイ長サニ Q マデ延長シ, Q カラ此ノ圓ニ切線 QT ヲ引イテ切點ヲ T トスレバ, 圓 PQT ハ圓 O ニ等シイ。

**解析**　圓 PQT ト圓 O トハ弦 PT ヲ共有スルカラ $\angle TQP = \angle TRP$ デアルコトヲ證明スレバヨイ。

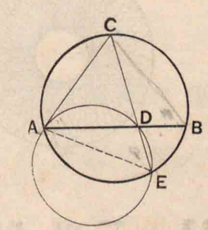
然ルニ △QTO ハ直角三角形デアツテ, P ハ其ノ斜邊ノ中點デアルカラ,

$\angle TQP = \angle PTQ$ デアル。




故ニ $\angle PTQ = \angle TRP$ デアルコトヲ要スル。

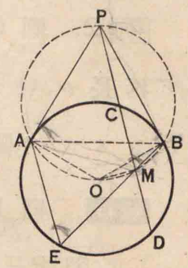
**問 3.** 弧 AB ノ中點 C ヲ通ル任意ノ直線ヲ引キ弦 AB 又ハ其ノ延長ト D デ, 弧 AB ノ共軛弧又ハ弧 AB ト E デ交ハラシメレバ, △ADE ノ外接圓ハ AC ニ切スル。




(圓 ADE ガ AC ニ切スルニハ $\angle CAD = \angle E$ デアルコトヲ要スル)

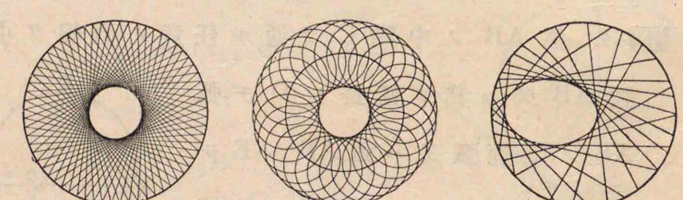
**問 4.** 圓 O ノ外部ノ一點 P カラ二ツノ切線 PA, PB トーツノ割線 PCD トヲ引キ, A カラ CD ニ

平行ナル弦 AE ヲ引クトキハ, BE ハ弦 CD ヲ二等分スル。




(BE ト CD トノ交點 M ガ CD ノ中點デアルタメニハ OM⊥CD デアルコトヲ要スル。故ニ P, A, O, M, B ガ同ジ圓周上ニアルコト, 從ツテ ∠PMB=∠PAB デアルコトヲ要スル)

注意 二ツノ同心圓ガアルトキ,內圓ニ切スル外圓ノ弦ヲ無數ニ引クト,內圓ハ丁度此等ノ切線デ作レタヤウニ見エル(次圖ノ左)。故ニ此ノ內圓ヲ此等ノ弦ノ**包線**トイフ。此ノヤウニ線ノ運動デ線ガ出來ルト考ヘルコトガアル。



## 21. 二ツノ圓

問 1. 次ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

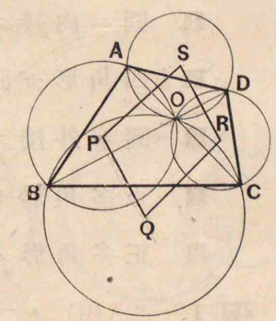
❶ 相交ハル二ツノ圓ノ共通中心線ト其ノ兩圓周ノ交點ノ位置及ビ兩圓ノ共通弦。



❷ 相切スル二ツノ圓ノ共通中心線ト切點ノ位置。

❸ 二ツノ圓ノ相互ノ位置ト兩圓ノ半徑ノ和及ビ差。

例 四角形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスルト, △OAB, △OBC, △OCD, △ODA ノ外接圓ノ中心ハ一ツノ平行四邊形ノ頂點トナル。




證明 四ツノ圓ノ中心ヲ P, Q, R 及ビ S トスルト

PQ⊥BD, SR⊥BD

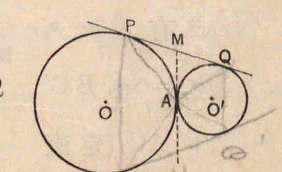
∴ PQ∥RS

同樣ニ PS∥QR

故ニ PQRS ハ平行四邊形デアル。

問 2. 三角形ノ三邊ノ上ニ形外ニ正三角形ヲ作ルトキハ,其ノ三ツノ正三角形ノ外接圓ノ中心ハ一ツノ正三角形ノ頂點トナル。

問 3. A デ外切スル二ツノ圓ノ共通外切線ノ切點ヲ P, Q トスレバ, A ハ PQ ヲ直徑トスル圓ノ周上ニアル。



**問 4.** 前問デ $P', Q'$ ヲ他ノ共通外切線ノ切點トシ, $M, N$ ヲ共通内切線ト $PQ, P'Q'$ トノ交點トスルト, $MN \parallel PP' \parallel QQ'$ デ $MN=\frac{1}{2}(PP'+QQ')$ デアル。

## 22. 内接形・外接形

**問 1.** 次ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

❶ 圓ニ内接スル四角形ノ角ノ關係。

❷ 四角形ガ圓ニ内接スル條件。

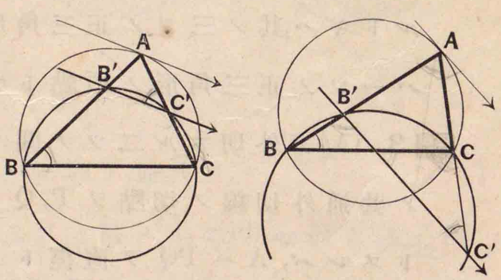
❸ 圓ニ外接スル四角形ノ邊ノ關係。

❹ 正多角形ト圓トノ關係。

❺ 正多角形ノ面積。

**例 1.** $\triangle ABC$ ノ二ツノ頂點 $B, C$ ヲ通ル任意ノ圓周ガ二邊 $AB, AC$ ト交ハル點ヲ夫々 $B', C'$ トスレバ, 直線 $B'C'$ ハ常ニ一定ノ方向ヲ有スル。

**解析** $B'C'$ ガ一定ノ方向ヲ有スルタメニハ $B'C'$ ト $AC$ (定直線)トノ交角ガ一定デアルコトヲ要スル。

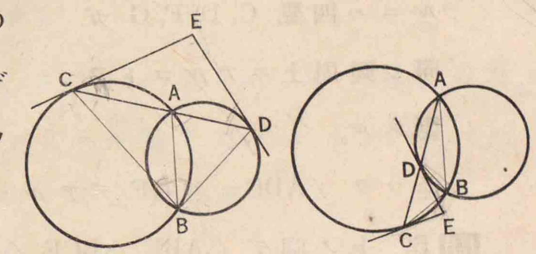





**問 2.** 圓ニ内接スル六角形ノ二組ノ對邊ガ平行デアレバ,殘リノ一組ノ對邊モ平行デアル。

**例 2.** 二ツノ圓ノ交點ヲ $A, B$ トシ, $A$ ヲ通ル割線 $CAD$ ガ此ノ二圓周ト交ハル點 $C, D$ ニ於テ夫々兩圓ニ切線ヲ引キ,其ノ交點ヲ $E$ トスレバ, $E, C, B, D$ ハ同ジ圓周上ニアル。

**解析** 四角形 $ECBD$ ガ圓ニ内接スルタメニハ $\angle E+\angle CBD$ ガ 2 直角デアルコトヲ要スル。




コレニハ

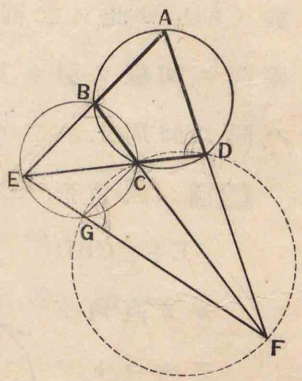
$\angle CBD=\angle ECD+\angle EDC$ デアルコトヲ要スル。

**問 3.** 上ノ例デ $CAD$ ト $C'AD'$ トヲ任意ノ二ツノ割線トシ $CC'$ ト $DD'$ トノ交點ヲ $E$ トスレバドウカ。

**問 4.** $\triangle ABC$ ノ各頂點カラ對邊ヘ引イタ垂線ヲ $AD, BE, CF$ トスレバ,垂心 $H$ ハ $\triangle DEF$ ノ内心デアル。

**注意** $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ**垂足三角形**トイフ。

例 3. 圓ニ內接スル四角形 ABCD ノ二邊 AB, CD ノ延長ノ交點ト,他ノ二邊 BC, AD ノ延長ノ交點トヲ夫々 E, F トスレバ, △BCE, △CDF ノ外接圓ノ周ハ EF 上デ交ハル。

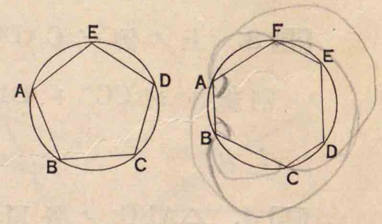



解析 圓 BCE ト EF トノ交點ヲ G トスルト,兩圓 BEC, CDF ノ周ガ EF 上デ交ハルニハ四點 C, D, F, G ガ同ジ圓周上ニアルコトヲ要スル。

從ツテ ∠ADC=∠CGF デアルコトヲ要スル。

問 5. 上ノ圖デ △ABF, △BCE, △CDF 及ビ △ADE ノ外接圓周ハ同ジ點ヲ通ル。

問 6. 圓ニ內接スル多角形ノ角ガ皆等シイトキハ,此ノ多角形ハ正多角形デアルカ。



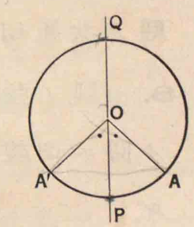

問 7. 邊ノ數ガ偶數デアル多角形ガ一ツノ圓ニ外接スルトキハ,其ノ一ツ置キニ取ツタ邊ノ和ハ相等シイ。



## 問題 2

1. 定マツタ一ツノ直線上ニ中心ヲ置キ,此ノ直線外ノ一ツノ定點ヲ通ル圓周ハ皆他ノ一ツノ定點ヲ通ル。

2. 同一ノ點ヲ通ル總テノ直線ニ關シテ對稱デアル圖形ハ其ノ點ヲ中心トスル圓デアル。



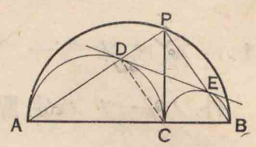

3. △ABC ノ內心ヲ O トシ, AO, BO, CO ノ延長ガ其ノ外接圓ノ周ト交ハル點ヲ夫々 A′, B′, C′ トスルト, O ハ △A′B′C′ ノ垂心デアル。

4. 一ツノ圓ノ內ニアル點ト外ニアル點トヲ通ル圓周ハ其ノ圓ニ交ハル。

5. 二ツノ圓 O, O′ ノ交點ヲ A, B トシ, 圓 O ノ周上ノ任意ノ點ヲ P トシ, PA, PB ガ圓 O′ ノ周ト交ハル點ヲ夫々 C, D トスルト,弦 CD ノ長サハ一定デアル。

6. 互ニ外方ニ離レル二ツノ圓ノ二組ノ共通切線ノ交點ト其ノ二圓ノ中心トハ同一ノ直線上ニアル。

**7.** 半圓周上ノ一點Pカラ直徑ABヘ垂線PCヲ引キ, AP, BPガAC, BCヲ直徑トスル圓ト交ハル點ヲ夫々D, Eトスルト, DEハ後ノ二ツノ圓ノ共通切線デアル。



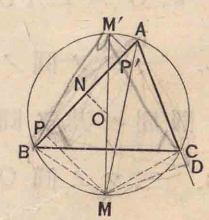

**8.** 圓ノ弦ガ直交スルトキ,其ノ各〻ノ端ニ於テ其ノ圓ニ切線ヲ引イテ出來ル四角形ハ圓ニ內接スル。

**9.** M, M′ヲ△ABCノ外接圓ノBCニ對スル弧ノ中點トシ, M, M′カラABヘ引イタ垂線ヲMP, M′P′トスルト

$$AP=BP'=\frac{1}{2}(AB+AC)$$

$$AP'=BP=\frac{1}{2}(AB\sim AC)$$

$$\angle AMM'=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C)$$




**10.** 一ツノ四角形ノ內接圓ト外接圓トガ畫カレルトキハ,其ノ相對スル切點ヲ結ブ二ツノ直線ハ直交スル。

**11.** 直角三角形ABCノ內接圓ガ斜邊AB及ビBCニ切スル點ヲD, Eトシ, DEトACノ延長トノ交



點ヲFトスルトBD=CFデアル。

**12.** 一ツノ圓周上ニ三點A, B, Cヲ取リ,弧BC(其ノ上ニAガナイトスル)ノ中點ヲDトシ,線分DA上ニDBニ等シクDOヲ取レバ, Oハ△ABCノ內心デアル。

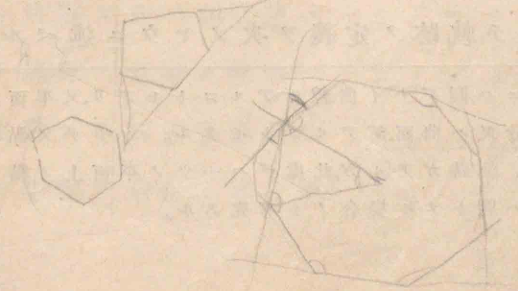
**13.** 三角形ノ傍心ト內心トヲ結ブ線分ハ其ノ三角形ノ外接圓ノ周デ二等分セラレル。

**14.** 三角形ABCノ三邊BC, CA, ABノ長サヲ夫々$a, b, c$デ表ハシ,內接圓ノ半徑ヲ$r$, 又邊BC, CA, ABニ切スル傍接圓ノ半徑ヲ夫々$r', r'', r'''$トシ且此ノ三角形ノ面積ヲ$S$, $a+b+c$ヲ$2s$デ表ハスト

$$S=sr=(s-a)r'=(s-b)r''=(s-c)r'''$$

**15.** 正多角形ノ一外角ト,其ノ一邊ニ對スル外接圓ノ中心角トハ相等シイ。

**16.** 正多角形ノ內部ノ任意ノ點カラ各邊ヘ引イタ垂線ノ和ハ一定デアル。



# 第四章　軌跡及ビ作圖

## 23. 軌跡ノ定義

軌跡トハ點ガ或定メラレタ條件ニ從ツテ移動シタトキ,其ノ通過シタ道跡ヲ表ハス線デ,コレハ次ノ二ツノ事柄ニ分ケテ考ヘラレル。

[1]　其ノ條件ニ適スル點ハ皆其ノ線ノ上ニアルコト。

[2]　其ノ線ノ上ニアル點ハ皆其ノ條件ニ適スルコト。

即チ[1]ハ其ノ線ガ其ノ條件ニ適スル點ヲ皆含ムコトヲ表ハシ, [2] ハ其ノ線ノ上ニハ其ノ條件ニ適シナイ點ハ一ツモナイコトヲ表ハス。

此處ニ線トイフノハ一ツ又ハ幾ツカノ直線又ハ線分,或ハ一ツ又ハ幾ツカノ圓周又ハ弧,或ハ此等ノ集合デアル。* 故ニ此ノ線ノ代リニ圖形トイフ言葉ヲ用ヒテ軌跡ノ定義ヲ次ノヤウニ述ベル。

* 軌跡ニハ圓デナイ曲線デアルコトモアリ,又平面ハ平面ノ一部分又ハ曲面デアルコトモアル。ソシテ又點ノ軌跡ノ外ニ線ノ軌跡ガアルガ,此處デハ一ツノ平面上ノ點ノ軌跡ガ直線又ハ圓トナル場合ノミ考究スル。



**定義**　或條件ニ適スル點ガ皆或圖形ノ上ニアツテ~~又~~逆ニ其ノ圖形ノ上ノ點ハ皆其ノ條件ニ適スルトキハ,其ノ圖形ヲ其ノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。

## 24. 重要ナ軌跡

**問 1.** 次ノ軌跡ヲ表ハス定理ヲ述ベヨ。

1　一定點カラ定距離ニアル點ノ軌跡。

2　一定直線カラ定距離ニアル點ノ軌跡。

3　二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡。

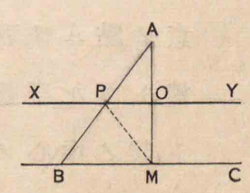
4　二定直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡。

5　一定線分ヲ直角ニ見込ム點ノ軌跡。

6　一定線分~~ノ~~ヲ一定ノ大サノ角~~ヲ~~ニ見込ム點ノ軌跡。

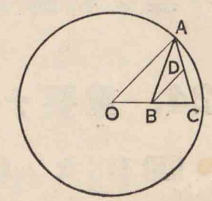
軌跡問題ノ中ニハ上ノ何レカ一ツニ歸着セシメルコトノ出來ルモノガ多イ。

**問 2.** 一定點カラ一定直線ヘ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ハ,其ノ定點カラ其ノ定直線ヘ引イタ垂線ノ垂直二等分線



デアル。(其ノ定點カラ其ノ定直線ヘ引イタ一ツノ線分ノ中點ヲ通リ其ノ定直線ニ平行ナル直線デアルトイツテモヨイ)

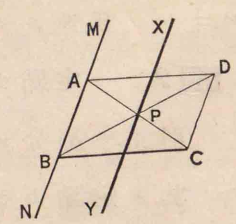
**問 3.** △ABC ノ底邊 BC ノ位置ト長サトガ一定デ,且中線 BD ノ長サガ一定デアレバ,頂點 A ノ軌跡ハ點 B ニ關スル點 C ノ對稱點ヲ中心トスル一ツノ圓周デアル。




**注意** 軌跡ヲ表ハス定理ヲ證明スルニハ,第23節ノ[1]ト[2]トヲ證明スルノガ一般デアルガ,時ニハ先ヅ[2]ヲ證明シ(軌跡ノ定理デハ軌跡デアル圖形ガ終結トシテワカツテキルカラ)次ニ[1]ノ對偶卽チ其ノ圖形ノ上ニナイ點ハ皆定メラレタ條件ニ適シナイコトヲ證明スル方ガ簡單デアルコトガアル。

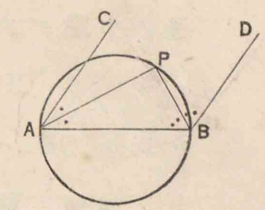
メ **問 4.** 問2ヲ上ノ注意ノ方法デ證明セヨ。

**問 5.** BC ハ定線分デ, MBN ハ B ヲ通ル一ツノ定直線デアル。今 MN 上ニ任意ノ點 A ヲ取リ AB, BC ヲ二邊トスル平行四邊形ヲ作ルト,其ノ中心ノ軌跡ハ BC ノ中點ヲ通リ MN ニ平行ナル直線デアル。






**問 6.** AB ハ定線分デ, AC, BD ハ其ノ同ジ側ニアル任意ノ一組ノ平行線デアル。然ラバ ∠BAC ト ∠ABD トノ二等分線ノ交點ノ軌跡ハ AB ヲ直徑トスル圓周デアル。




## 25. 軌跡ノ求メ方

軌跡ヲ求メルニハ定メラレタ條件ニ適スルト假定スル點ヲ設ケ,適當ナ補助圖形ヲ加ヘテ其ノ點ハドンナ線ノ上ニアルベキカヲ考究シテ其ノ線ヲ發見シ且第23節ノ[1]ヲ證明スル(コレニハ定メラレタ條件ニ適スル特殊點ヲ利用スルトヨイコトガアル)。ソシテ次ニ其ノ逆ヲ證明スル~~ガヨイ~~。必要ガアル

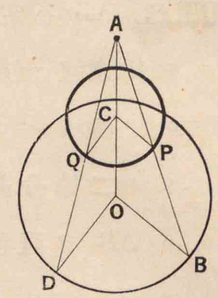
**例 1.** 與ヘラレタ點 A カラ與ヘラレタ圓 O ノ周ヘ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**解** A カラ圓 O ノ周上ノ任意ノ點 B ニ至ル線分 AB ヲ引キ,其ノ中點ヲ P トスルト, P ハ與ヘラレタ條件ニ適スル一點デアル。

AO ヲ結ビ,其ノ中點ヲ C トシ, OB, CP ヲ結ブト

PトCトハ夫々△ABOノ二邊ノ中點デアルカラ

$$CP=\frac{1}{2}OB$$




ソシテOBハBガ圓Oノ周上ヲ如何ニ移動スルモ長サガ一定デアル。

故ニCPノ長サモPノ移動ニ關ハラズ一定デアル。ソシテCハ不動ノ點デアル。

故ニPハCヲ中心トシテ與ヘラレタ圓Oノ半徑ノ半分ニ等シイ半徑ヲ有スル圓周(C)上ニアル。

次ニ此ノ圓周(C)上ニ任意ノ點Qヲ取リ,AQヲ引キ,其ノ上ニ點DヲQD=AQナルヤウニ取ルト

$$OD=2CQ,\qquad CQ=CP=\frac{1}{2}OB$$

デアルカラ

$$OD=OB$$

故ニDハ圓Oノ周上ノ點デアル。

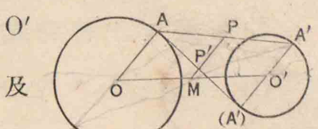
故ニQハ定メラレタ條件ニ適スル。

故ニ求メル軌跡ハ此ノ圓周(C)デアル。

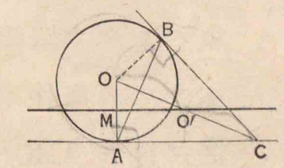


**問 1.** 一定點カラ他ノ一定點ヲ通ル直線ヘ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

**問 2.** 與ヘラレタ二圓O,O'ノ平行ナル半徑ヲOA及ビO'A'トシ,線分AA'ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

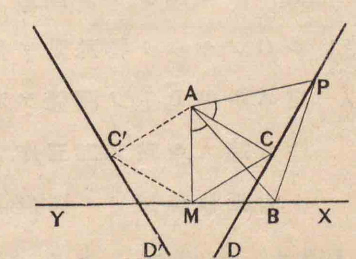



**問 3.** 與ヘラレタ圓Oノ周上ノ定點Aカラ引イタ切線ノ上ニ任意ノ點Cヲ取リ,ソレカラ此ノ圓ニ切線CBヲ引クトキ△ABCノ外心ノ軌跡ヲ求メヨ。




**例 2.** 與ヘラレタ點Aカラ與ヘラレタ直線XYヘ引イタ任意ノ線分ヲ底邊トスル正三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**解** AカラXYヘ引イタ任意ノ線分ヲABトシ,之ヲ底邊トシテ正三角形ABPヲ作ルト,其ノ頂點Pハ定メラレタ條件ニ適スル一點デアル。



今 A カラ XY ヘ垂線 AM ヲ引キ, AM ヲ底邊トシテ正三角形 AMC ヲ作ルト, C ハ定メラレタ條件ニ適スル特殊點デ定點デアル。

CP ヲ結ブト　$\triangle CAP \equiv \triangle MAB$

故ニ　　$\angle ACP = \angle AMB = R$∟

故ニ P ハ C ヲ通リ AC ニ垂直ナル直線ノ上ニアル。

此ノヤウナ圖形ハ AM ノ兩側ニ出來ルカラ,定メラレタ條件ニ適スル點ハ, AM ヲ底邊トスル正三角形 AMC, AMC′ ノ頂點 C, C′ ヲ通リ夫々 AC 及ビ AC′ ニ垂直ナル二直線ノ上ニアル。

次ニ此ノ二直線ノ上ノ點ハ皆定メラレタ條件ニ適スル。(學生之ヲ證明セヨ)

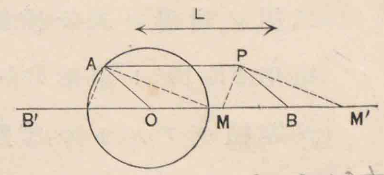
故ニ求メル軌跡ハ此ノ二直線デアル。

注意 1. 軌跡デアル圖形ヲ發見スルニ上ノ例 2 ニ於ケル C ノヤウナ特殊點ヲ作リ,ソレト條件ニ適スルト假定スル點 P トノ關係ヲ考ヘルトヨイコトガアル。條件ニ適スル點ヲ二三作ツテ特殊點トノ關係ヲ考ヘルト,大抵軌跡デアル圖形ノ見當ハツクモノデアル。

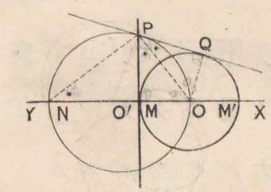
問 4. 與ヘラレタ長サヲ有シ,與ヘラレタ直線ニ



平行ナル線分ガ,其ノ一端ヲ與ヘラレタ圓周ノ上ニ置イテ滑ルトキ他ノ端ノ軌跡ヲ求メヨ。(平行移動)



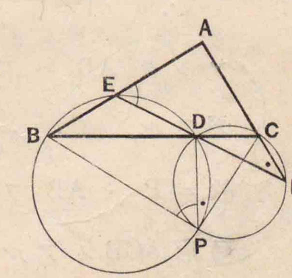

問 5. 定圓 O ト其ノ中心 O ヲ通ル定直線 XOY ガアル。XOY 上ニ中心ヲ置キ且 O ヲ通ル圓 O′ ト圓 O トニ共通切線ヲ引クトキ,圓 O′ ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。




例 3. △ABC ノ邊 BC 上ノ定點 D ヲ通ル直線ヲ引キ,二邊 AB, AC 又ハ其ノ延長トノ交點ヲ夫々 E, F トスルトキ △BDE, △CDF ノ外接圓ノ D デナイ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

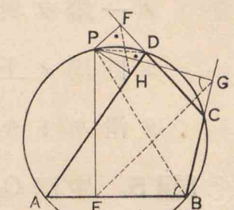
解 A, B, P, C ハ同ジ圓周上ニアル(第22節問 3)。故ニ P ハ △ABC ノ外接圓ノ周上ニアル。

逆ニ此ノ圓周上ノ點ハ皆定メラレタ條件ニ適スル。




問 6. 動點 P カラ圓ニ内接スル四角形 ABCD ノ

二組ノ對邊ニ夫々垂線 PE, PF ト PG, PH ヲ引キ,
矩形 PE・PF ト矩形 PG・PH ト
ガ等積デアルトキ, P 點ノ軌
跡ヲ求メヨ。




(△PEG∽△PHF カラ ∠PDA＝∠PBA
デアルコトヲ誘導セヨ)

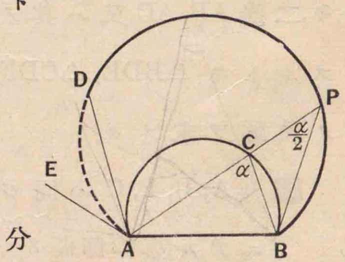
**例 4.** ACB ハ與ヘラレタ弓形デ, C ハ其ノ弧ノ上ノ動點デアル。AC ノ延長上ニ點 P ヲ取リ CP＝BC ナルヤウニスルトキ, P ノ軌跡ヲ求メヨ。

**解** ∠ACB ハ C ノ位置ニ關ハラズ一定ノ大サヲ有スル。之ヲ $\alpha$ トスルト

$$\alpha=\angle P+\angle PBC$$

ソシテ $\angle PBC=\angle P$

$$\therefore \quad \angle P=\frac{\alpha}{2} \quad (\text{一定})$$




ソシテ AB ハ不動ノ線分デアル。

故ニ P ハ AB ヲ弦トシ $\frac{\alpha}{2}$ ニ等シイ角ヲ含ミ, 且弓形 ACB ノアル側ニアル弓形 APB ノ弧ノ上ニアル。

然ルニ C ガ漸次 A ニ近ヅクニ從ッテ AC ハ A



ニ於ケル圓 ACB ノ切線 AD ニ近ヅキ, ∠BAD ノ外ニ決シテ出ルコトハナイ。ソシテ

$$\angle BAD=180^\circ-\alpha.$$

又 A ニ於ケル圓 ADB ノ切線ヲ AE トスルト

$$\angle BAE=180^\circ-\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \quad \angle BAD<\angle BAE$$

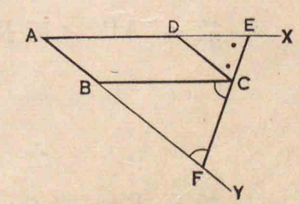
故ニ AD ハ弧 APB ノ弦デアル。從ッテ P ハ弧 BD ノ上ニアル。

次ニ弧 BD ノ上ノ點ハ皆定メラレタ條件ニ適スル。(學生之ヲ證明セヨ)

故ニ求メル軌跡ハ弧 BD デアル。

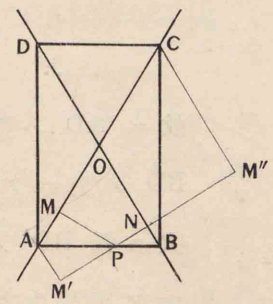
**注意 2.** 此ノ例 4 ノヤウニ軌跡ガ或線ノ全部デハナク其ノ一部デアルコトガアル。故ニ定メラレタ條件ニ適スル點ガ或線ノ上ニアルコトヲ知レバ, 其ノ線全部ノ上ノ點ガ其ノ條件ニ適スルカドウカヲ考ヘ, 若シ其ノ線ノ一部ガ軌跡トナル場合ニハ其ノ限界ヲ嚴密ニ吟味決定スルコトガ肝要デアル。

**問 7.** AX, AY ハ與ヘラレタ二ツノ半直線デ, 平行四邊形 ABCD ノ二邊 AB, AD ガ夫々 AX, AY 上ニアッテ,



其ノ周ガ一定デアルトキ,頂點Cノ軌跡ヲ求メヨ。

例 5. 相交ハル二直線AC, BDニ至ル距離ノ和ガ與ヘラレタ線分Lニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。




解 AC, BDノ交點ヲOトシ, Pヲ∠AOBノ内ニアツテ, 定メラレタ條件ニ適スル點トシ, PカラAC, BDへ夫夫垂線PM, PNヲ引クト

$$PM+PN=L$$

NPヲ延長シ,其ノ上ニ$PM'=PM$ナルヤウニ$M'$ヲ取リ, $M'$カラBDニ平行ニ$M'A$ヲ引イテACトノ交點ヲAトスルト, $NM'=L$デアルカラAハ定點(特殊點)デアル。ソシテ

$$\triangle PAM'\equiv\triangle PAM$$

$$\therefore \quad \angle PAM'=\angle PAM$$

故ニAPノ延長トBDトノ交點ヲBトスルト

$$\angle OBA=\angle OAB$$

$$\therefore \quad OB=OA$$

故ニPハ線分ABノ上ニアル。



逆ニ線分ABノ上ノ點ハ皆定メラレタ條件ニ適スル。

故ニ∠AOBノ内ニアツテ求メル軌跡ハ線分ABデアル。

同様ニ∠BOC, ∠COD, ∠DOAノ内ニアツテ求メル軌跡ハ夫々線分BC, CD, DAデアル。但シOC, ODハ共ニOAニ等シイ。

故ニ求メル軌跡ハ此等ノ四線分カラ出來ル矩形ABCDノ周デアル。

**軌跡ノ作圖** OB上ニ任意ノ點Nヲ取リNカラOBへ垂線$NM'$ヲ引キ$NM'=L$ナルヤウニ$M'$ヲ定メ, $M'$ヲ通ツテBDニ平行ニ$M'A$ヲ引キACトノ交點ヲAトスル。

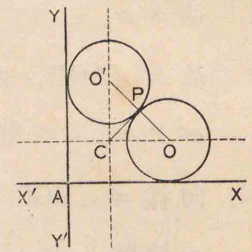
次ニAC, BDノ上ニOAニ等シクOB, OC, ODヲ取リ, AB, BC, CD, DAヲ結ブ。

注意 3. 多クノ場合ニハ,求メル軌跡ガドンナ圖形デアルカヲ考ヘル間ニ自然ニ作圖セラレルガ,上ノ例5ノヤウニ其ノ作圖ガ明ラカデナイ場合ニハ別ニ之ヲ明ラカニスルコトガ必要デアル。

問 8. 相交ハル二定直線ニ至ル距離ノ差ガ與ヘ

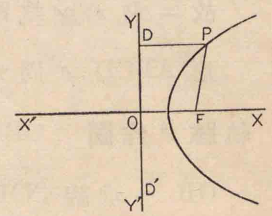
ラレタ線分Lニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**問 9.** 等圓ガ直交スル二直線ニ一ツヅツ切シ且互ニ外切シナガラ移動スルトキ,其ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

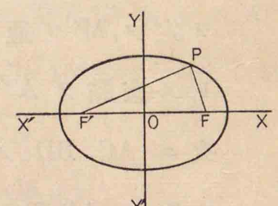



**注意 4.** 點ノ軌跡ハ定メラレタ條件ニヨツテハ直線及ビ圓以外ノ曲線デアルコトガアル。

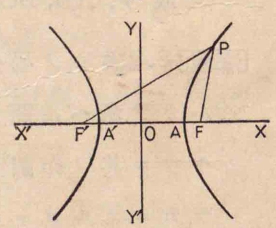
例ヘバ一定點(F)ト一定直線(DD')トカラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ**拋物線**デアル。




又二定點(F, F')カラノ距離ノ和ガ一定デアル點ノ軌跡ハ**楕圓**デアル。




又二定點(F, F')カラノ距離ノ差ガ一定デアル點ノ軌跡ハ**双曲線**デアル。




此等ハ皆重要ナ曲線デアルガ本書ノ程度デハ之ヲ說カナイ.



## 問 題 3

1. 二等邊三角形 ABC ノ底 BC ニ垂直ナル直線ガ AB, AC 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 M, N トスルトキ,線分 MN ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 與ヘラレタ三角形ノ頂點ヲ A, B, C トシ, △PAB ト △PAC トガ等積デアルヤウニ點 P ヲ取ルトキ, P ノ軌跡ヲ求メヨ。

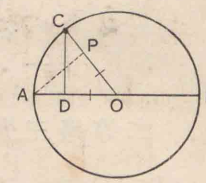
3. BC ハ一ツノ定線分, BA ハ B ヲ通ル一ツノ定直線デアル。今 BC ヲ底トシ BA 上ニ頂點ヲ有スル三角形ヲ作ルトキ,此ノ三角形ノ重心ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 三角形ノ底邊ガ一定デ,他ノ二邊ノ差ガ不變デアルトキ,頂角ノ二等分線ヘ底邊ノ兩端カラ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。
又頂角ニ隣ル外角ノ二等分線ヘ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ハドウカ。

5. 定直線ト夫々其ノ上ノ二定點ニ於テ切シ互ニ外切スル二圓ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

6. 圓 O ノ周上ヲ運行スル點 C ガアル。此ノ點 C

ガ此ノ圓ノ一定直徑AOB＝投ジタ正射影ヲDトシ,半徑OC上＝OD＝等シクOPヲ取ルトキ,Pノ軌跡ヲ求メヨ。



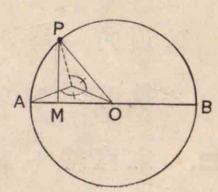

**7.**　與ヘラレタ線分ABヲCデ二ツ＝分ケ,其ノ兩部分ヲ底邊トシABノ同ジ側＝二ツノ正三角形ACD, BCD′ヲ作ルトキ,線分DD′ノ中點Pノ軌跡ヲ求メヨ。

**8.**　正三角形ABC內＝一點Pヲ取リ,Pカラ二邊AB, AC＝至ル距離ノ和ガPカラBC＝至ル距離＝等シイヤウ＝スルトキ,Pノ軌跡ヲ求メヨ。

**9.**　底邊ノ位置及ビ大サト頂角ノ大サトガ一定デアル三角形ノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ。

**10.**　ABヲ定圓Oノ與ヘラレタ直徑トスル。Pヲ其ノ周上ノ動點トシ,PカラABヘ垂線PMヲ引クトキ,△POMノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ。

(軌跡ハ四ツノ弧ヨリ成ル眼鏡形ノ圖形デアル)






## 26. 作圖題

**問1.**　幾何學デ作圖題ヲ解クノ＝用ヒル器具ハ何々カ。又其ノ各々ノ用途ヲ述ベヨ。

**問2.**　作圖ノ公法トハ何カ。又ソレヲ述ベヨ。

**作圖題ノ解法**　作圖題ヲ解ク＝ハ次ノ順序方法＝ヨル。

[1]　**解析**　求メル圖形ガ既＝畫カレタトシ,解答ト假定スル圖形ヲ畫キ,之＝適當ナ補助圖形ヲ加ヘテ其ノ圖形ガ與ヘラレタ條件＝適スルタメ＝ハドンナ條件ガ成立タネバナラナイカヲ考ヘ,順次其ノ條件(作圖ノ必要條件)ヲ變化シテ遂＝直＝作圖シ得ラレル條件ヲ發見スルコト。

[2]　**作圖**　解析デ得タ最後ノ條件＝適スル圖形ヲ畫イテ之ヲ出發點トシ,解析デ取ツタ進路ヲ逆＝シテ順次其ノ各段階＝於ケル條件＝適スル作圖ヲナスコト。

[3]　**證明**　解答デアル圖形ガ與ヘラレタ條件＝適スルコトヲ證明スルコト。

[4]　**吟味**　解析デ得タ條件(作圖ノ必要條件)＝ヨツテ作圖＝可能·不可能ノ場合ハナイカドウカヲ研

究シ,若シ不可能ノ場合ガアルナラバ,其ノ可能デアルタメノ條件(與ヘラレタ元素ノ關係)ヲ定メ,又其ノ可能デアル場合ニ出來ル解答ノ數ニ就イテ研究スル。

**注意** 1. 解析ノ所デ述ベタ作圖シ得ラレル條件トイフノハ作圖ノ公法及ビ既ニ作圖シ得ラレタ基本作圖ノ條件ノコトデアル。但シ次ノ各々ハナシ得ラレルモノトシテヨイ。

(1) 平面上ニ任意ノ點ヲ取ルコト。

(2) 相交ハル二線ノ交點ヲ取ルコト。

**注意** 2. 解析デ得タ條件ハ解答トナル圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スルタメノ必要條件ヲ基トシタノデアルカラ,作圖デ出來タ圖形ハ與ヘラレタ條件ニ適スルタメニ必要デアル性質ハ備ヘテヰルケレドモ,マダ其ノ條件ニ適スルニ十分デアルカドウカハワカラナイ。ソレデ必ズ證明ヲナシテ作圖デ出來タ圖形ガ與ヘラレタ總テノ條件ニ適スルコトヲ確メネバナラナイ。

**問** 3. 基本作圖題ヲ述ベヨ。

**例** 三角形 ABC ノ内ニ,底邊 BC ニ平行ナル直線 DE ヲ引キ,二邊 AB, AC ト夫々 D, E デ交ハラシメ, DE=BD+CE ナラシメヨ。

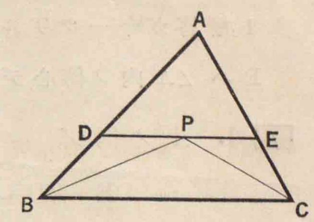


**解析** 求メル直線 DE ガ既ニ引カレタトシ,其ノ上ニ DP ヲ BD ニ等シク取ルト

$\angle DBP=\angle DPB$

$\angle PBC=\angle DPB$

$\therefore\ \angle DBP=\angle PBC$




即チ BP ハ ∠ABC ノ二等分線デアルコトヲ要スル。

同様ニ PE=CE デアルカラ, CP ハ ∠ACB ノ二等分線デアルコトヲ要スル。

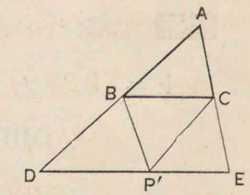
從ッテ P ハ ∠ABC ト ∠ACB トノ二等分線ノ交點(△ABC ノ内心)デアルコトヲ要スル。

**作圖** ∠ABC ト ∠ACB トノ二等分線ヲ引キ,其ノ交點ヲ P トスル。

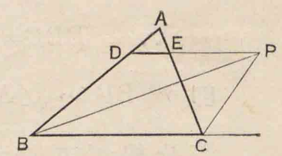
P ヲ通ッテ BC ニ平行ニ DE ヲ引キ, AB, AC ト夫々 D, E デ交ハラシメルト, DE ハ求メル直線デアル。

**證明** (學生之ヲ行ヘ)

**吟味** 三角形ノ内心ハ常ニ存在シ且其ノ數ハ唯一ツデアルカラ,此ノ問題ハ常ニ可能デアル。ソシテ解答ハ唯一ツデアル。




注意 3. DEヲ形外ニ出ルコトヲ許ス(DEガAB, ACノ延長ヲ截ル)ト,解答ガ今一ツアル。此ノトキPハ∠A内ノ傍心デアル。

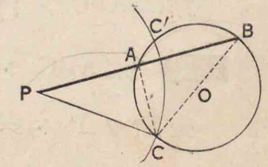



問 4. 上ノ例デ

$$DE=BD\sim CE$$

ナルヤウニDEヲ引ケ。

問 5. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ヲ引キ,此ノ直線カラ其ノ二圓ガ截リ取ル弦ガ等シイヤウニセヨ。




問 6. 與ヘラレタ圓Oノ外ノ與ヘラレタ點Pカラ此ノ圓ニ割線PABヲ引キ PA=AB ナルヤウニセヨ。

## 27. 軌跡交截法

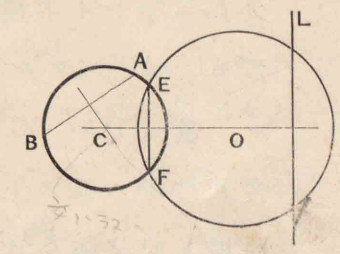
作圖題解法ノ解析ニ於テ,其ノ解法ガ或二ツノ條件ニ適スル點ノ作圖ニ歸着スル場合ハ頗ル多イ。此ノ場合ハ,其ノ條件ノ中ノ一ツヲ除キ他ニ適合スル點ノ軌跡ヲ作ルガヨイ。カヤウニシテ二ツノ異



ナル軌跡ヲ得ルトキハ,其ノ交點ガ求メル點トナル。

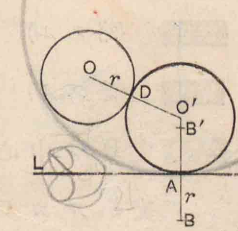
例 1. 二定點A, Bヲ通リ且定圓Oト交ハツテ出來ル共通弦EFガ與ヘラレタ直線Lニ平行デアルヤウニ圓ヲ畫ケ。

解析 求メル圓ノ中心ヲCトスルト,Cハ二定點A, Bカラ等距離ニアリ,且COガ共通弦EFニ垂直デアルカラCOガLニ垂直デナケレバナラナイ。




故ニCハABノ垂直二等分線トOヲ通ツテLニ直交スル直線トノ交點デアルコトヲ要スル。

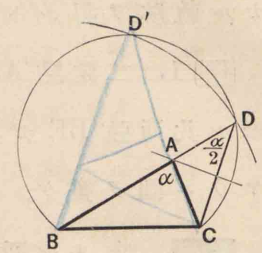
問 1. 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ且一定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。




P576

例 2. 底邊BCト他ノ二邊ノ長サノ和$l$ト頂角ノ大サ$\alpha$トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

解析 (1) 底邊ノ位置モ長サモ定マツテヰルカラ,頂點ガ求メラレルトヨイ。




△ABC ヲ求メル三角形トシ, BA ヲ D マデ延長シテ AD=AC トナルヤウニスルト BD=AB+AC=$l$ デアルカラ, D ハ B ヲ中心トシテ $l$ ニ等シイ半徑ヲ有スル圓周ノ上ニアル。

又 AD=AC デアルカラ $\angle D=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{\alpha}{2}$ デアル。故ニ D ハ BC ヲ弦トシ $\frac{\alpha}{2}$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ弧ノ上ニアル。從ツテ D ハ先キノ圓周ト此ノ弧トノ交點デアルコトヲ要スル。

ソシテ頂點 A ハ BD ト CD ノ垂直二等分線トノ交點デアルコトヲ要スル。

**作圖** (略スル)

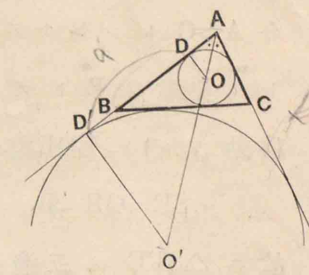
**證明** (略スル)

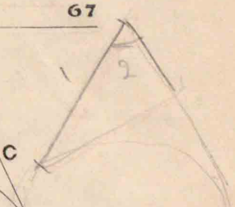
**吟味** B ヲ中心トスル圓周ハ弧 BDC ト二點 D, D' デ交ハルカラ,解答ハ二ツアルヤウデアルガ, △ABC ト D' カラ得ル三角形トハ合同デアル。

**解析** (2) BC=$a$ トスレバ, $a+l$ ハ △ABC ノ周ニ等シイカラ,之ヲ $2s$ トスル。

今 △ABC ノ内接圓 O ト ∠A 内ノ傍接圓 O' トヲ

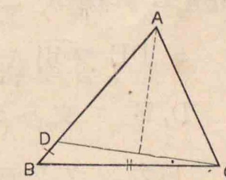




畫キ,其ノ AB トノ切點ヲ夫々 D, D' トスルト AD=$s-a$, AD'=$s$ デアルカラ, O, O' ハ夫夫 ∠BAC ノ二等分線ト D, D' ニ於ケル AB ノ垂線トノ交點デアルコトヲ要スル。

**問 2.** 二角ト其ノ對邊ノ和トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

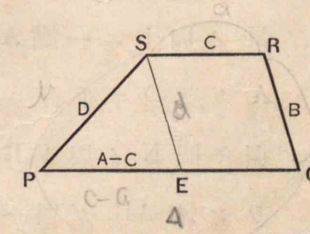



**問 3.** 底邊他ノ二邊ノ差ト兩底角ノ差トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

## 28. 平行移動法

**例** 四邊ノ長サヲ與ヘテ梯形ヲ作レ。

**解析** A, B, C, D ヲ與ヘラレタ四ツノ長サトスル。




問題ガ既ニ解ケタトシ, PQRS ヲ解答トシ PQ, QR, RS, SP ガ夫々 A, B, C, D ニ等シイトスル。

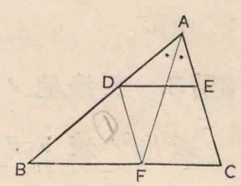
今 A>C トシ, S カラ RQ ニ平行ニ SE ヲ引キ PQ トノ交點ヲ E トスル (RQ ヲ SE ノ位置ニ平行移動スル)ト, EQRS ハ平行四邊形デアルカラ

$$SE=QR=B, \quad PE=PQ-EQ=A-C$$

故ニ △SPE ノ三邊ガ夫々 A−C, B, D ニ等シイコトヲ要スル。

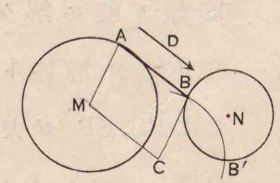
依ツテ先ヅ此ノ三角形ヲ作圖シテ解答ガ得ラレル。

**問 1.** △ABC ノ底 BC ニ平行ニ DE ヲ引キ AB, AC ト夫々 D, E デ交ハラシメ, AD=CE トナルヤウニセヨ。




**問 2.** 與ヘラレタ直線ニ平行デ,他ノ與ヘラレタ二直線ノ間ニ夾マレル部分ガ與ヘラレタ長サニ等シイヤウニ直線ヲ引ケ。

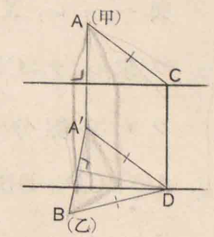
**問 3.** 二圓 M, N ト一直線 D ガ與ヘラレタトキ,圓 M ノ周上ニ一點 A ヲ求メ, A カラ D ニ平行ニ AB ヲ引キ圓 N ノ周ト B デ交ハラシメ AB ガ與ヘラレタ






長サ $l$ ニ等シイヤウニセヨ。

**問 4.** 川ヲ隔テテ甲乙二軒ノ家ガアル。此ノ川ニ橋ヲ架ケルニ,其ノ兩岸ノ渡リ口ガ甲乙カラ等距離ニアルヤウニシタイ。橋ノ位置ヲ定メヨ。但シ川ノ兩岸ハ平行デ,橋ハ岸ニ垂直ニ架ケルモノトスル。

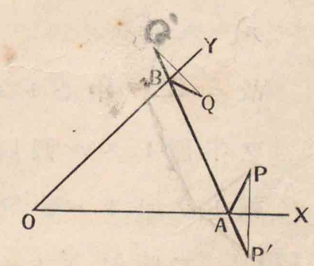



又甲カラ乙ニ至ル道程ガ最小ナルヤウニスルニハドウスレバヨイカ。

## 29. 對稱法

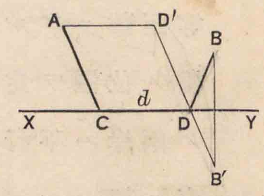
**例 1.** 與ヘラレタ角 XOY ノ内部ニ二定點 P, Q ガアル。今二邊 OX, OY 上ニ夫々二點 A, B ヲ求メテ折線 PABQ ノ長サガ最小ナルヤウニセヨ。

**解析** OX ニ關スル P ノ對稱點 P′ ト, OY ニ關スル Q ノ對稱點 Q′ トヲ取レバ PA=P′A, QB=Q′B デアルカラ,折線 PABQ ノ長サハ P′ABQ′ ノ長サニ等シイ。



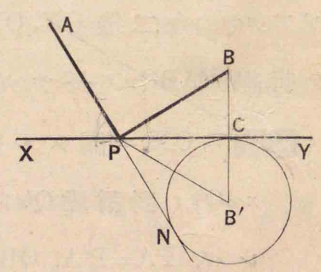
故ニ P′ABQ′ ガ一直線トナルヤウニ A, B ヲ取ルコトガ必要デ(且十分)デアル。

**問 1.** 一直線 XY ト其ノ同ジ側ニ二點 A, B トガ與ヘラレ, XY 上ニ二點 C, D ヲ求メテ CD ノ長サヲ與ヘラレタ線分 $d$ ニ等シクシ, 且 AC+CD+DB ヲ最小ナルヤウニセヨ。




**例 2.** 一直線 XY ト其ノ同ジ側ニ二點 A, B トガ與ヘラレ, XY 上ニ一點 P ヲ求メ, ∠APX ガ ∠BPY ノ 2 倍デアルヤウニセヨ。

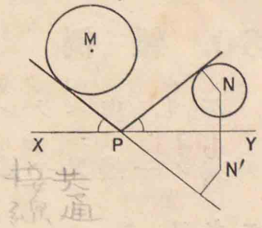
**解析** XY ニ關スル點 B ノ對稱點ヲ B′ トスルト, ∠B′PC=∠BPC デアルカラ, PB′ ハ ∠APX ノ對頂角 CPN ノ二等分線デアル。




故ニ B′ ヲ中心トシ B′C ヲ半徑トスル圓周ヲ畫クト, APN ハ此ノ圓ノ切線トナラネバナラナイ。

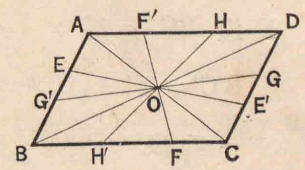
**問 2.** 二圓 M, N ト一直線 XY トガ與ヘラレタトキ, XY 上ニ一點 P ヲ求メ, P カラ此ノ二圓ニ引イタ切線ガ XY ニ等シイ傾キヲナスヤウニセヨ。






**例 3.** 中心ト各邊上ニアルベキ四ツノ點トガ與ヘラレテ平行四邊形ヲ作レ。

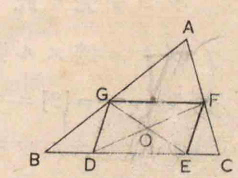
**解析** 求メル平行四邊形ヲ ABCD トシ, O ヲ其ノ中心トシ, E, F, G, H ヲ夫々邊 AB, BC, CD, DA 上ニアルベキ點トスル。




O ハ ABCD ノ對稱ノ中心デアルカラ, O ニ關スル E, F, G, H ノ對稱點 E′, F′, G′, H′ ハ夫々邊 CD, DA, AB, BC 上ニアルコトヲ要スル。

カヤウニシテ各邊上ニアルベキ二點ガ定マルカラ, ABCD ノ四邊ヲ引クコトガ出來ル。

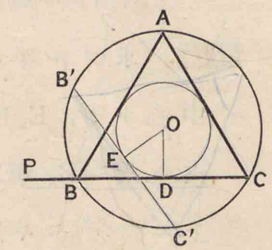
**問 3.** 與ヘラレタ三角形ニ内接シ且其ノ形内ノ與ヘラレタ點ヲ中心トスル平行四邊形ヲ作レ。



## 30. 雜　例

**例 1.** 與ヘラレタ圓Oニ正三角形ヲ内接セシメテ其ノ一邊(又ハ延長)ガ與ヘラレタ點Pヲ通ルヤウニセヨ。

**解析** 求メル三角形ヲABCトシ其ノ邊BC(又ハ延長)ガ與ヘラレタ點Pヲ通ルトスル。




邊BCニ等シイ任意ノ弦B'C'ヲ引キ,OカラBC, B'C'ヘ垂線OD, OEヲ引クト, OD=OEデアルカラBCハOヲ中心トシOEヲ半徑トスル圓ニ切スルコトヲ要スル。

**注意** 本問題ヲ解クニハ次ノ二條件ニ適スル弦BCヲ引クコトヲ工夫スルノデアル。

[1] 圓Oノ内接正三角形ノ一邊ニ等シイコト。

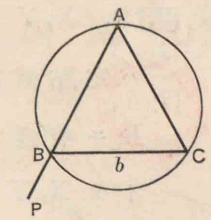
[2] 與ヘラレタ點Pヲ通ルコト。

ソコデ先ヅ此ノ二條件ノ中ノ一ツ[2]ヲ度外視シテ[1]ダケニ適スル弦B'C'ヲ引キ,次ニ此ノ弦ヲ[1]ノ性質ヲ失ハズニ[2]ニモ適スルヤウニ其ノ位置ヲ變ヘルコトヲ工夫スルノデアル。

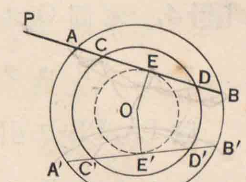
**問 1.** 與ヘラレタ圓ニ内接スル二等邊三角形ヲ



畫キ,其ノ底邊ガ與ヘラレタ長サ$b$ニ等シク,他ノ邊ノ一ツガ與ヘラレタ點Pヲ通ルヤウニセヨ。



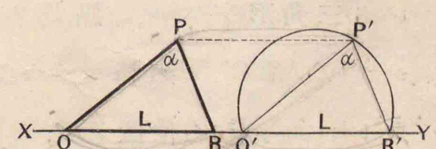

**問 2.** 一定點ヲ通ツテ與ヘラレタ二ツノ同心圓ニ割線ヲ引キ,其ノ二圓周ノ間ニ夾マレル部分ガ與ヘラレタ長サニ等シイヤウニセヨ。




**例 2.** 定直線XY外ニ定點Pガアル。Pカラ角$\alpha$ニ等シイ角ヲナス二直線ヲ引キ,之ガXYカラ截リ取ル部分QRヲ定線分Lニ等シイヤウニセヨ。

**解析** XY上ニLニ等シイ部分Q'R'ヲ取リ平行四邊形PQQ'P'ヲ作レバ

$$PP'=QQ'=RR'$$



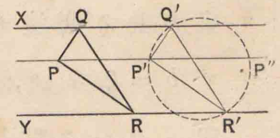

デアルカラ, PRR'P'ハ平行四邊形デアル。

故ニ　$PQ \parallel P'Q'$　及ビ　$PR \parallel P'R'$

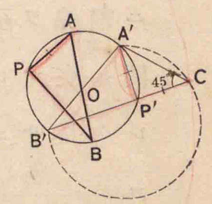
故ニ　$\angle Q'P'R' = \angle QPR = \alpha$

依ツテP'ノ位置ヲ定メルコトガ出來ル。

問 3. X, Y ハ定平行線デ, P ハ定點デアル。今 P カラ互ニ垂直ナル二直線ヲ引イテ X, Y ト夫々 Q, R デ交ハラシメ, QR ガ與ヘラレタ長サ L ニ等シイヤウニセヨ。




問 4. 定圓 O ノ周上ニ定點 P ガアル。P カラ互ニ垂直ナル二弦 PA, PB ヲ引イテ,其ノ和ガ與ヘラレタ長サニ等シイヤウニセヨ。




## 問 題 4

1. △ABC ト △A'B'C' トハ合同ナル二ツノ與ヘラレタ三角形デアル。點 P ヲ求メ,此ノ點ヲ中心トシテ △A'B'C' ヲ廻轉シテ △ABC ニ重ネ合ハセヤウトスル。P ノ位置ヲ定メヨ。

2. 定圓 O 内ニ二定點 A, B ガアツテ, OA=OB デアル。此ノ圓周上ニ點 P ヲ求メ, P カラ A, B ヲ通ル二弦 PC, PD ヲ引キ PC=PD ナルヤウニセヨ。

3. A ヲ與ヘラレタ直線 XY 上ノ定點トシ, P ヲ XY 上ニナイ定點トスル。XY 上ニ點 C ヲ求メ AC+CP ガ與ヘラレタ線分 L ニ等シイヤウニセヨ。

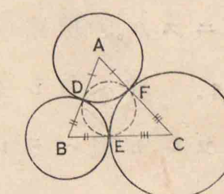


4. 與ヘラレタ直線 AB ニ其ノ上ノ定點 A デ切シ且其ノ上ニナイ定點 C ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。

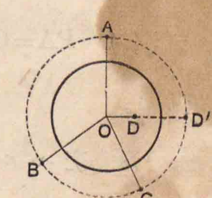
5. 與ヘラレタ圓ト直線トガ交ハラナイトキ,此ノ双方ニ切シ且與ヘラレタ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

6. 三ツノ與ヘラレタ點ヲ中心トシ互ニ外切スル三ツノ圓周ヲ畫ケ。

(AD ノ長サヲ考ヘヨ。又問題ノ中ノ外切スルヲ單ニ切スルトスレバドウカ)



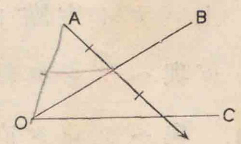

7. 四點 A, B, C, D ハ同ジ圓周上ニナイ定點デアル。ソシテ此ノ何レノ三點ヲ取ツテモ同ジ直線上ニナイトキ,此ノ四點カラ等距離ニアル圓周ヲ畫ケ。(解答ノ數ニ注意セヨ)




8. 與ヘラレタ點ヲ中心トシ與ヘラレタ直線ニ交ハル圓ヲ畫イテ,出來ル弓形ノ一ツノ含ム角ガ與ヘラレタ角ニ等シイヤウニセヨ。

9. 定點 A カラ或方向ニ等速デ直進スル船ガアル。

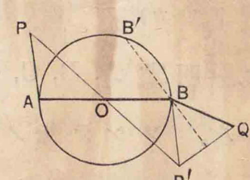
或人ガ或地點Oカラ此ノ船ヲ望見シタトキ,Aヲ出發シテ $t$ 時間後ニ定直線 OB ノ上ニ來リ,ソレカラ $t$ 時間後ニ他ノ定直線 OC ノ上ニ來タ。此ノ船ノ航路ヲ示ス線ヲ畫ケ。




**10.** 直線狀ノ鐵道ヲ敷設スルニ,定メラレタ三箇所ノ地點カラ其ノ線路マデノ距離ガ等シイヤウニスル。線路ノ位置ヲ定メヨ。

**11.** 與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ長サノ弦ヲ引キ,ソレガ與ヘラレタ弦デ二等分サレルヤウニセヨ。

**12.** 圓Oト二點P,Qトガ與ヘラレタトキ,此ノ圓ノ直徑 AB ヲ引キ PA=QB トナルヤウニセヨ。




**13.** 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ヲ引キ,ソレガ其ノ二圓ノ周カラ截リ取ラレル部分ノ長サヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ。

**14.** 與ヘラレタ二圓ヲ截ル一直線ヲ引キ,其ノ二圓ノ弦トナル部分ガ夫々與ヘラレタ二線分ニ等シイヤウニセヨ。



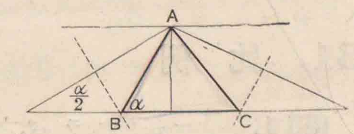
**15.** 次ノモノヲ知ッテ三角形ヲ作レ。

❶ 周ト二角。

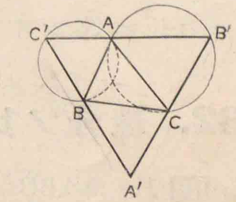
❷ 周ト一底角ト高サ。

❸ 一邊ト一角ト一中線。(五ツノ場合ガアル)

❹ 高サト底ノ兩端カラ出ル中線。



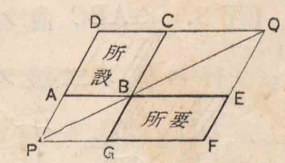

**16.** 與ヘラレタ三角形ニ,與ヘラレタ正三角形ニ等シイ正三角形ヲ外接セシメヨ。




**17.** 周ト對角線ノ長サトヲ知ッテ矩形ヲ作レ。

**18.** 與ヘラレタ正三角形ト等積デ,一邊ガ此ノ三角形ノ一邊ニ等シク且一角ガ與ヘラレタ角ニ等シイ平行四邊形ヲ作レ。

**19.** 與ヘラレタ平行四邊形ト等積デ,一邊ト一角トガ夫々與ヘラレタ線分ト角トニ等シイ平行四邊形ヲ作レ。




**20.** 矩形ノ一邊上ノ定點カラ二直線ヲ引イテ此ノ矩形ヲ三等分セヨ。

# 第五章 比 例

## 31. 比 例

**問 1.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナラバ,之カラドンナ比例式ガ出來ルカ。色々ナ結果ヲ示セ。

**問 2.** $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots$ ナラバ,此ノ各比ハドンナ比ニ等シイカ。

## 32. 線分ノ比例

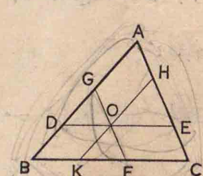
**問 1.** △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ他ノ二邊(又ハ延長)ヲ D, E デ截ルトキ出來ル比例ニ關スル定理(たーれす Thales ノ定理)ヲ述ベヨ。

**問 2.** 二圓ガ A デ内切スルトキ,内圓ニ切スル外圓ノ弦ヲ BC トシ, AB, AC ガ内圓ノ周ト P, Q デ交ハレバ AP : PB=AQ : QC デアル。

**問 3.** △ABC 内ノ一點 O ヲ通リ BC, CA, AB ニ平行ニ他ノ二邊ノ間ニ夫々 DE, FG, HK ヲ引ケバ

$\dfrac{DE}{BC}+\dfrac{FG}{CA}+\dfrac{HK}{AB}=2$ デアル。

(左邊ノ各比ノ後項ヲ AB ニ變ヘヨ)



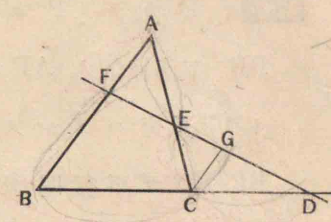



**例** △ABC ノ三邊 BC, CA, AB 又ハ其ノ延長ガ一直線デ夫々 D, E, F デ截ラレルト $\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$ デアル。 (めねらうす Menelaus ノ定理)

**證明** C カラ AB ニ平行ニ CG ヲ引キ, DE ト G デ交ハラシメルト

$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BF}{CG}$, $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{CG}{AF}$

$\therefore\ \dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{BF}{CG}\times\dfrac{CG}{AF}\times\dfrac{AF}{FB}=1$




**問 4.** 上ノ圖デ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{p}{q}$ デアルトキ, $\dfrac{CE}{EA}$ ノ値ヲ求メヨ。

## 33. 線分ノ分割

**問 1.** 次ノ作圖題ヲ解ケ。

❶ 定線分ヲ定比ニ分割セヨ。(比例配分)

❷ 與ヘラレタ三線分ノ第四比例項ヲ求メヨ。

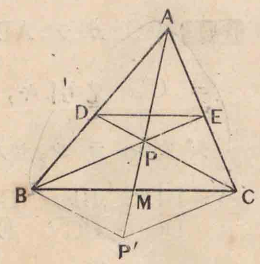
❸ 與ヘラレタ二線分ノ第三比例項ヲ求メヨ。

**問 2.** たーれすノ定理ノ逆ヲ述べ,之ヲ證明セヨ。

**問 3.** めねらうすノ定理ノ逆ヲ述べ,之ヲ證明セヨ。

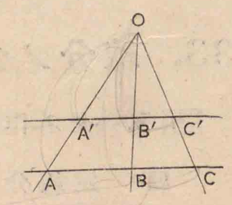
**例** △ABC ノ邊 BC ニ平行ニ DE ヲ引キ, AB, AC トノ交點ヲ夫々 D, E トシ, BE ト CD トノ交點ヲ P トスレバ, AP ハ邊 BC ノ中點ヲ通ル。

**解析** B カラ CP ニ平行ニ BP′ ヲ引イテ AP ノ延長ト P′ デ交ハラシメルト, BP′CP ガ平行四邊形デアルコト,從ッテ CP′ ∥ BE デアルコトヲ要スル。




從ッテ $\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{PP'}=\frac{AD}{DB}$ デアルコトヲ要スル。

**問 4.** 一點 O カラ出ル三ツノ半直線 OA, OB, OC ガ二ツノ平行線 ABC, A′B′C′ ヲ夫々 A, B, C 及ビ A′, B′, C′ デ截ルトキハ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ デアル。



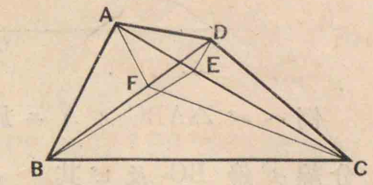

又此ノ逆ヲ證明セヨ。

## 34. 三角形ノ內角·外角ノ二等分線

**問 1.** 三角形ノ內角或ハ外角ノ二等分線ト其ノ角ノ對邊ノ部分ニ關スル定理ヲ述ベヨ。



**例** 四角形 ABCD ノ ∠A, ∠C ノ二等分線ガ對角線 BD 上デ交ハルトキハ, ∠B, ∠D ノ二等分線ハ對角線 AC 上デ交ハル。




**解析** ∠B ノ二等分線ト AC トノ交點ヲ E トスルト, DE ガ ∠D ノ二等分線デアルコトヲ要スル。

從ッテ AE:EC=DA:DC デアルコトヲ要スル。

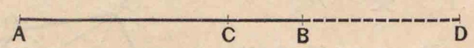
然ルニ AB:AD=CB:CD デアルカラ,

AB:BC=DA:DC 從ッテ AE:EC=AB:BC デアルコトヲ要スル。

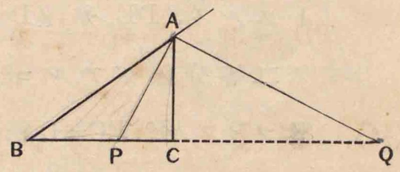
**問 2.** ∠C ヲ直角トスル直角三角形 ABC ノ ∠A ノ二等分線ト對邊 BC トノ交點ヲ D トシ,且此ノ三角形ノ面積ハ 6 平方糎デ,邊 AC ノ長サハ 4 糎デアル。AB ト AD トノ長サヲ求メヨ。

## 35. 調和列點

**定義** 線分 AB ヲ相等シイ比ニ內分及ビ外分スル點ヲ夫々 C 及ビ D トスレバ, C ト D トハ AB ヲ**調和ニ分ケル**トイヒ,此ノ四點 A, B, C, D ヲ**調和列點**トイフ。ソシテCトDトハ A, B ニ關シテ**調和共軛點**デアルトイフ。




例ヘバ△ABCノAニ於ケル内角ト外角トノ二等分線ガ邊 BC 及ビ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P, Q トスルト, B, C, P, Q ハ調和列點デアル。




**問 1.** 圓ノ直徑 CD 上ノ一點 B カラ之ヘ垂線 BP ヲ引キ,圓周トノ交點 P ニ於テ此ノ圓ニ切線 PA ヲ引キ CD ノ延長ト A デ交ハラシメルト, A, B, C, D ハ調和列點デアル。

**問 2.** A, P, B ハ同ジ直線上ニ此ノ順ニアル三點デアル。AB ノ延長上ニ Q 點ヲ取リ, A, B, P, Q ガ調和列點デアルヤウニセヨ。

**例** A, B, C, D ハ調和列點デ, P ハ直線 AB 外ノ一點デアルトキ, B ヲ通リ PA ニ平行ナル直線ガ PC, PD ト夫々 E, F デ交ハレバ BE=BF デアル。

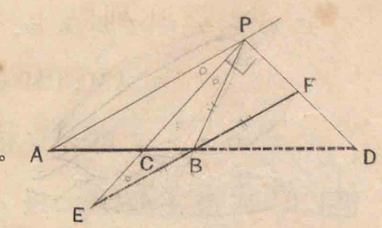
**解析** $\frac{AP}{BE}=\frac{AC}{BC}$, $\frac{AP}{BF}=\frac{AD}{BD}$ デアルカラ, BE=BF



ナルタメニハ

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

デアルコトヲ要スル。




**問 3.** 右ノ圖デ

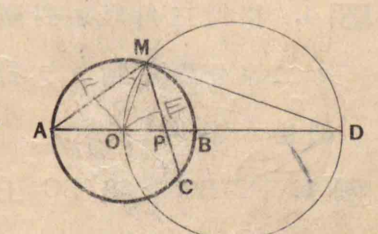
∠CPD=R∟ デアレバ, PC ハ ∠APB ヲ二等分シ, PD ハ其ノ外角ヲ二等分スル。

## 36. あぽろにうすノ定理

**問 1.** 二定點カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シイ點ノ軌跡(Apollonius ノ定理)ヲ述ベヨ。

**問 2.** A, B, C ハ一ツノ定直線上ノ三定點デアル。一點 P ヲ求メテ PA : PB : PC ガ與ヘラレタ比 $l:m:n$ ニ等シイヤウニセヨ。

**例** AB ハ定圓 O ノ定直徑デ, P ハ AB 上ノ定點デアル。此ノ定圓周上ニ一點 M ヲ求メ,弦 MPC ヲ引キ,之ヲ弦 MA ニ等シイヤウニセヨ。




**解析** MA=MC デアルタメニハ

∠AMO=∠OMP

デアルコトヲ要スル。從ツテ

$$AM:PM=AO:PO$$

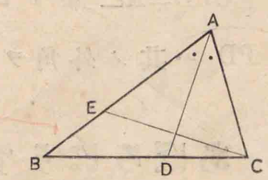
デアルコトヲ要スル。依ツテMノ軌跡ガワカル。

問3. 底邊ト他ノ二邊ノ比ト次ノモノトヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

1 一底角。

2 兩底角ノ差。

3 兩底角ノ和。




## 37. 三角形ノ相似

問1. 二ツノ三角形ガ相似デアル條件ヲ擧ゲヨ。

問2. 一ツノ鋭角ヲ夾ム二邊ノ比ガ相等シイ二ツノ直角三角形ハ相似デアル。

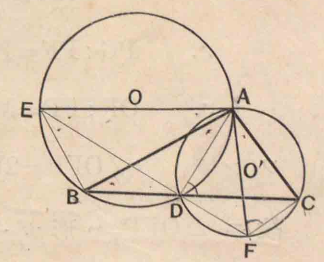
問3. 相似三角形ノ内接圓ノ半徑ノ比モ,外接圓ノ半徑ノ比モ其ノ相似比ニ等シイ。

問4. 相似三角形ノ對應スル高サノ比モ,對應角ノ二等分線(頂點カラ對邊マデノ部分)ノ比モ相似比ニ等シイ。

例1. △ABCノ邊BC上又ハ其ノ延長上ニ任意ノ點Dヲ取レバ,圓ABDト圓ACDトノ半徑ノ比ハ



AB:ACニ等シイ。




解析 二ツノ圓ノAヲ通ル直徑ヲAE,AFトスルト

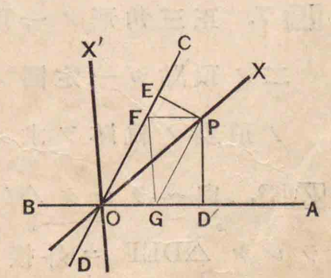
$$AE:AF=AB:AC$$

デアルコトヲ要スルカラ,△ABE∽△ACFデアルコトヲ要スル(問2)。

問5. 二ツノ圓ガAトBトデ交ハリ,Bヲ通ル任意ノ直線ガ此ノ二圓周トC及ビDデ交ハレバ,ACトADトノ比ハ一定デアル。

問6. 圓Oニ其ノ外部ノ一點Pカラ二ツノ切線PA,PBヲ引キ,圓周上ノ任意ノ點CカラAB,PA,PBヘ垂線CL,CM,CNヲ引クトキハ,CLハCMトCNトノ比例中項デアル。

例2. 相交ハル二定直線AB,CDカラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比M:Nニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。




解析 Pヲ條件ニ適スル任意ノ一點トシ,PカラAB,CDヘ夫々垂線PD,PEト平行線PF,PGトヲ引ケバ

$\triangle PDG \backsim \triangle PEF$

$\therefore$　$PG : PF = PD : PE = M : N$

$\therefore$　$OF : FP = M : N$　(一定)

ソシテ　$\angle OFP = 2R\llcorner - \angle AOC$　(一定)

故ニ $\triangle OFP$ ハ形ガ一定(常ニ一定三角形ニ相似)デアル。故ニ $\angle FOP$ ガ一定デアル。

故ニ P ガ $\angle AOC$ 又ハ其ノ對頂角ノ内ニアル場合ハ，O ヲ通リ $\angle AOC$ 及ビ其ノ對頂角ノ内ニアル一ツノ直線ノ上ニアルコトヲ要スル。

同樣ニ P ガ $\angle COB$ 又ハ其ノ對頂角ノ内ニアル場合ハ，O ヲ通リ此ノ二角ノ内ニアル一ツノ直線ノ上ニアルコトヲ要スル。

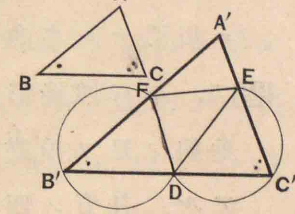
注意　本題デハ軌跡ノ作圖法ヲ明示スルコトヲ要スル。又軌跡ハ二ツノ直線ヨリ成ルガ，其ノ一ツ $OX'$ (前圖) ハ GF ニ平行デアル。

**問 7.** 正三角形ノ一頂點ヲ一定點 A ニ固定シ，第二ノ頂點ガ一定圓ノ周上ヲ移動スルトキ，第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**例 3.** 與ヘラレタ $\triangle ABC$ ニ相似ナル三角形ヲ與ヘラレタ $\triangle DEF$ ニ外接セシメヨ。

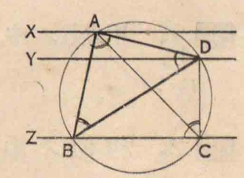


**解析**　$\triangle A'B'C'$ ヲ求メル三角形トシ，~~$\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$ トスルト~~，$B'$ ハ DF ヲ弦トシ $\angle B$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ弧ノ上ニアツテ，$C'$ ハ DE ヲ弦トシ $\angle C$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ弧ノ上ニアルコトヲ要スル。




**問 8.** 上ノ例デ $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ニ合同デアルヤウニスルニハドウスルカ。

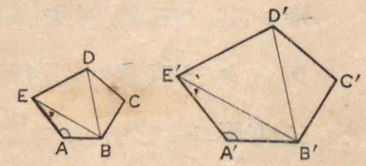
**問 9.** 與ヘラレタ三ツノ平行線ノ上ニ夫々一ツヅツ頂點ヲ置キ，與ヘラレタ三角形ニ相似ナル三角形ヲ畫ケ。




## 38. 多角形ノ相似

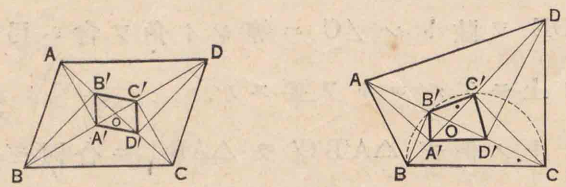
**問 1.** 二ツノ相似多角形ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 相似多角形ハ同數ノ夫々相似ナル三角形ニ分ケルコトガ出來ル。



**問 3.** 與ヘラレタ線分ノ上ニ與ヘラレタ多角形ニ相似ナル多角形ヲ作レ。

**問 4.** 平行四邊形ノ各頂點カラ對角線ヘ引イタ垂線ノ足ヲ頂點トスル四邊形ハ原形ト相似デアル。任意ノ四邊形デハドウカ。



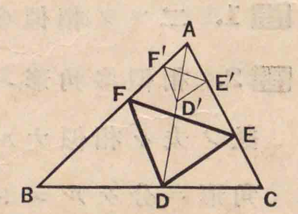

## 39. 相似ノ中心・相似法

**問 1.** 相似ノ中心ノ定義ト之ニ關スル定理トヲ述ベヨ。

**問 2.** 相似ノ中心ノ利用(相似法)デ前節ノ問2ヲ解ケ。

**例** 與ヘラレタ$\triangle ABC$ニ內接シ,其ノ三邊ガ夫々與ヘラレタ三直線ニ平行ナル三角形ヲ畫ケ。

**解析** $\triangle DEF$ヲ$\triangle ABC$ニ內接シ,其ノ三邊ガ夫々與ヘラレタ三直線ニ平行ナル三角形トスル。

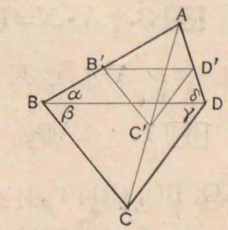



今$\triangle D'E'F'$ヲ三邊ガ夫々與ヘラレタ直線ニ平



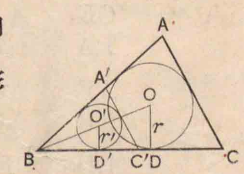
行デ$E', F'$ガ夫々$AC, AB$ノ上ニアル任意ノ三角形トスルト,$\triangle D'E'F'$ハ$\triangle DEF$ニ相似デ對應邊ガ夫々平行デアルカラ,$A$ハ此ノ兩形ノ相似ノ中心デアル。從ツテ$D$ハ$AD'$ト$BC$トノ交點デナケレバナラナイ。

**問 3.** 四角形ノ一對角線(AC)ノ長サト,他ノ對角線ガ各邊ト作ル四角ノ大サ$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$トヲ知ツテ,此ノ四角形ヲ作レ。




**問 4.** 一邊ト高サトノ和ニ等シイ線分ガ與ヘラレタトキ正三角形ヲ作レ。

**問 5.** 一角ト其ノ二邊ノ比ト內接圓ノ半徑トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。




($BC' : BC = r' : r$ ニ注意セヨ)

## 40. 矩形・三角形ノ面積ノ比例

**問 1.** 次ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

❶ 矩形及ビ三角形ノ面積ト底邊又ハ高サトノ比例。

❷ 比例スル線分ト其ノ線分ノ包ム矩形。

**問 2.** △ABC ニ於テ邊 BC 上ノ一點 X カラ二邊 AB, AC ニ平行ニ XY, XZ ヲ引キ,邊 AC, AB ト夫夫 Y, Z デ交ハラシメレバ, △AYZ ハ △BZX ト △CXY トノ比例中項デアル。

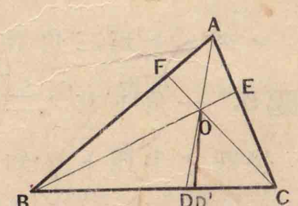
**問 3.** $A\cdot X=K^2$ ニ適スル線分 X ヲ作圖セヨ。但シ A 及ビ K ハ與ヘラレタ線分トスル。

**例 1.** △ABC ノ三頂點カラ,同ジ點ヲ通ルヤウニ AO, BO, CO ヲ引キ對邊ト夫々 D, E, F デ交ハラシメレバ, $\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$ デアル。 (ちぇば Ceva ノ定理)

**解析** $\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}$,

$\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle BOC}{\triangle BOA}$,

$\frac{AF}{FB}=\frac{\triangle COA}{\triangle COB}$



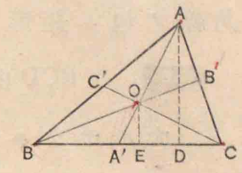

$$\therefore \frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}\times\frac{\triangle BOC}{\triangle BOA}\times\frac{\triangle COA}{\triangle COB}=1$$

**問 4.** 上ノ例ノ逆ヲ證明セヨ。

**問 5.** 三角形ノ各角ノ二等分線ガ同ジ點ヲ通ルコト及ビ三角形ノ三中線ガ同ジ點ヲ通ルコトヲ證明セヨ。

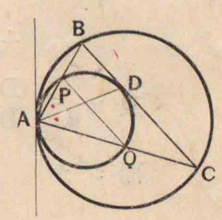


**問 6.** △ABC 内ノ任意ノ點 O ト頂點 A, B, C トヲ結ビ,其ノ延長ガ對邊ト交ハル點ヲ夫々 A′, B′, C′ トスルト $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$ デアル。




**例 2.** A デ内切スル二ツノ圓ガアル。小圓ノ周上ノ任意ノ點 D ニ於テ之ニ切スル大圓ノ弦 BC ヲ引キ AB, AC ヲ結ビ小圓ノ周ト夫々 P, Q デ交ハラシメレバ $DC\cdot AP=DB\cdot AQ$ デアル。

**解析** $DC\cdot AP=DB\cdot AQ$ デアルタメニハ $\frac{AP}{AQ}=\frac{DB}{DC}$ デアルコトヲ要スル。

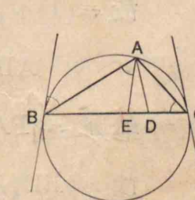



然ルニ PQ∥BC デアルカラ

$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$ デアルコトヲ要スル。

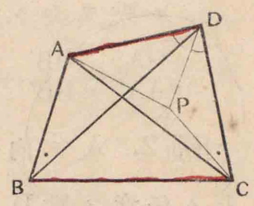
從ッテ AD ガ ∠BAC ヲ二等分スルコトヲ要スル。

**問 7.** 圓ニ内接スル △ABC ノ頂點 A カラ C, B ニ於ケル切線ニ平行ニ AD, AE ヲ引キ, BC ト夫々 D, E デ交ハラシメレバ $\frac{BE}{CD}=\frac{AB^2}{AC^2}$ デアル。




(△ABE∽△ABC カラ $\overline{AB}^2=BE\cdot BC$ ヲ得テ之ヲ使用セヨ)

例 3. 四角形ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ對角線ノ包ム矩形ヨリモ小デナイ。




證明 $\angle BCD$ 內ニ $\angle DCP=\angle ABD$ ナルヤウニ CP ヲ,又 $\angle ADC$ 內ニ $\angle CDP=\angle ADB$ ナルヤウニ DP ヲ引クト

$$\triangle ADB \backsim \triangle PDC$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BD}=\frac{PC}{CD}$$

$$\therefore \quad AB\cdot CD=BD\cdot PC \qquad (1)$$

及ビ $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{DP}{DC}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{DA}{DP}=\dfrac{DB}{DC}$

而シテ $\angle ADP=\angle BDC$

$$\therefore \quad \triangle DAP \backsim \triangle DBC$$

$$\therefore \quad \frac{DA}{PA}=\frac{BD}{BC}$$

$$\therefore \quad BC\cdot DA=BD\cdot PA \qquad (2)$$

故ニ(1)ト(2)トヲ邊々相加ヘテ

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=BD(PA+PC)$$

然ルニ PA+PC ハ AC ヨリモ小デナイ。

故ニ BD(PA+PC) ハ BD·AC ヨリモ小デナイ,卽チ $AB\cdot CD+B\cancel{D}C\cdot DA$ ハ $AC\cdot BD$ ヨリモ小デナイ。



注意 PA+PC=AC デアルトキ,從ツテ P ガ AC 上ニアルトキ，從ツテ四角形 ABCD ガ圓ニ內接スルトキハ $AB\cdot CD+BC\cdot DA$ ハ $AC\cdot BD$ ニ等シイ。

問 8. とれみー(Ptolemy)ノ定理及ビ其ノ逆ヲ述べ,且之ヲ證明セヨ。

問 9. 正三角形 ABC ノ外部ニ一點 P ガアル。若シ PA=PB+PC デアレバ, P ハ △ABC ノ外接圓ノ周上ノ點デアル。

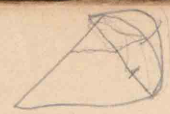
## 41. 一角ノ等シイ二ツノ三角形ノ比

問 1. 一角ノ等シイ二ツノ三角形ノ比ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

問 2. △ABC ノ三邊上ニ夫々 X, Y, Z ヲ取リ, AX, BY, CZ ガ夫々 AB, BC, CA ノ三分ノ二デアルヤウニスレバ, △XYZ ハ $\frac{1}{3}$△ABC ニ等シイ。

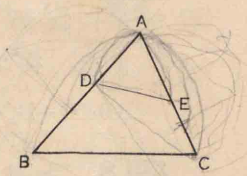
問 3. △ABC ト △DEF トガ等積デ, ∠A ト ∠D トガ等シイトキハ AB, AC, DE, DF ノ間ニドンナ比例式ガ成立ツカ。又此ノ場合,更ニ DE=DF デアルトキハドウカ。

問 4. D ハ與ヘラレタ △ABC ノ邊 AB 上ノ定點





デアル。他ノ邊 AC 上ニ一點 E ヲ求メテ △ADE ガ △ABC ノ $\frac{n}{m}$ ニ等シイヤウニセヨ。



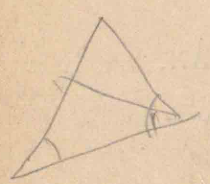

$\frac{AD \times AE}{AB \times AC} = \frac{n}{m}$

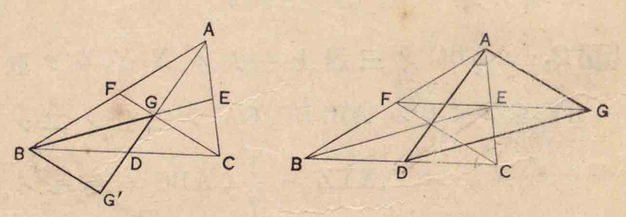
## 42. 相似多角形ノ比

**問 1.** 相似三角形ノ面積ノ比及ビ相似多角形ノ面積ノ比ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** △ABC ノ二中線 BD, CE ノ交點ヲ G トシテ, △BGC ト △DGE トノ比ヲ求メヨ。

**問 3.** 三角形ノ三中線ニ等シイ三邊ヲ有スル三角形ト原ノ三角形トノ比ヲ求メヨ。






**問 4.** 同ジ圓ニ內接スル正六角形ト外接スル正六角形トノ比ヲ求メヨ。

**問 5.** △ABC ヲ其ノ一邊 BC ニ平行ナル二直線デ三等分スレバ二邊 AB, AC ハ此ノ二直線デ大約 1000:414:318 ノ比ニ分ケラレル。



## 43. 弦ノ部分ノ包ム矩形

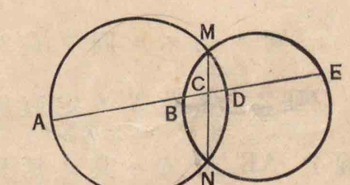
**問 1.** 一ツノ圓ノ相交ハル二弦ノ部分ノ包ム矩形ニ關スル定理ヲ述ベヨ。

**問 2.** 二ツノ線分 AB, CD 又ハ其ノ延長ガ P デ交ハルトキ, A, B, C, D ガ同ジ圓周上ニアルノハドンナ場合カ。

**問 3.** P ハ弦 AB ノ延長上ノ一點デ, C ハ圓周上ノ一點デアル。PA, PB, PC ノ間ニドンナ關係ガアルトキ, PC ガ圓 ABC ニ切スルカ。

**例 1.** 相交ハル二圓ノ共通弦上ノ任意ノ點 C ヲ通ツテ直線ヲ引キ,各圓ト夫々 A, D 及ビ B, E デ交ハラシメルト AB : BC = ED : DC デアル。

**解析**　AB : BC = ED : DC




デアルタメニハ

$$AB \cdot DC = BC \cdot ED$$

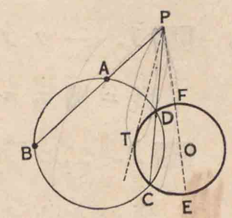
從ツテ

$$(AC - BC)DC = BC(EC - DC)$$

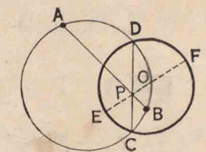
從ツテ　$AC \cdot CD = BC \cdot CE$

デアルコトヲ要スル。コレハ何レモ MC·CN ニ等シイ。

**問 4.** A, B ハ二定點デ O ハ一定圓デアル。A, B ヲ通ル任意ノ圓ト圓 O トノ共通弦又ハ其ノ延長ハ皆同ジ點ヲ通ル。




(A, B ヲ通リ圓 O ト交ハル一ツノ圓ヲ書キ, 其ノ交點ヲ C, D トシ, AB ト CD トノ交點ヲ P トスル。又 A, B ヲ通リ圓 O ト交ハル他ノ任意ノ圓ト圓 O トノ交點ヲ E, F トスルト, 割線 PE ハ F ヲ通ル)



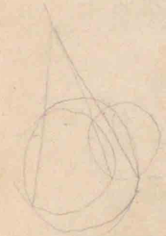

**問 5.** 前問ノ圖デ P カラ圓 O ニ切線ヲ引キ切點ヲ T トスルト, 圓 ABT ハ圓 O ニ切スル。

**問 6.** 與ヘラレタ二點ヲ通リ與ヘラレタ一ツノ圓ニ切スル圓ヲ書ケ。

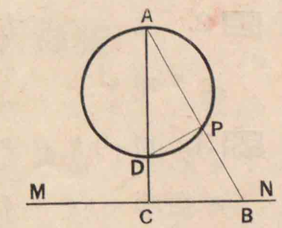
**例 2.** 定點 A ト定直線 MN 上ノ動點 B トヲ結ブ線分 AB 上又ハ其ノ延長上ニ一點 P ヲ取ッテ矩形 AB・AP ヲ與ヘラレタ平方 $K^2$ ニ等シクスルトキ P 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**解析** A カラ MN ヘ垂線 AC ヲ引キ, AC 上又ハ其ノ延長上ニ一點 D ヲ AC・AD$=K^2$ ナルヤウニ





取レバ




AP・AB=AC・AD

デアルカラ C, B, P, D ハ同ジ圓周上ニアル。

故ニ

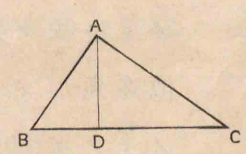
∠APD=∠ACB=R∟

従ッテ P ハ AD ヲ直徑トスル圓周上ニアルコトヲ要スル。

**問 7.** A, B ハ二ツノ定點デ, C ハ直線 AB ノ延長上ノ定點デアル。C カラ A, B ヲ通ル圓ニ引イタ切線ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

## 44. 比例中項

**問 1.** 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ヘ垂線 AD ヲ引キ, 次ノ各〻ヲ證明セヨ。




1 $\overline{AD}^2=BD\cdot DC$　　2 $\overline{AB}^2=BD\cdot BC$

3 $\overline{AC}^2=CD\cdot CB$　　4 $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BD:DC$

**注意** 1 ニ於テハ AD ハ BD ト DC トノ比例中項デアル。

問 2. 二ツノ正方形ノ比 $m^2:n^2$ ニ等シイ線分ノ比ヲ作レ。

問 3. 與ヘラレタ二線分ノ比例中項(二線分ノ包ム矩形ニ等シイ正方形)ヲ作ル方法ヲ述ベヨ。

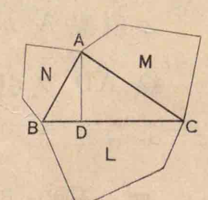
問 4. △ABC ノ頂點 A カラ對邊 BC ヘ引イタ垂線ノ足 D ガ邊 BC 上ニアッテ $\overline{AD}^2=BD\cdot DC$ ナレバ ∠BAC ハ直角デアル。

## 45. ぴたごらすノ定理

問 1. ぴたごらす(Pythagoras)ノ定理ヲ述ベヨ。

問 2. 與ヘラレタ二ツノ正方形ノ和又ハ差ニ等シイ正方形ヲ作ル方法ハドウカ。

問 3. ∠A ヲ直角トスル直角三角形 ABC ノ三邊ノ上ニ夫々其ノ三邊ヲ對應邊トスルヤウニ相似多角形ヲ畫クトキ,斜邊 BC ノ上ノ多角形ノ面積ハ他ノ二邊 AB, AC ノ上ノ多角形ノ面積ノ和ニ等シイ。

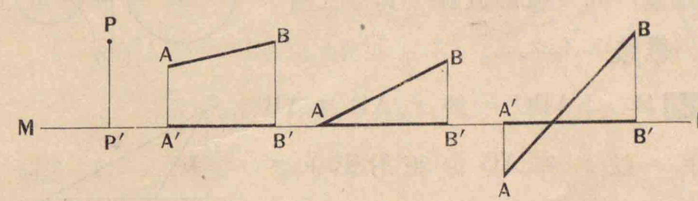



($\overline{BC}^2:\overline{CA}^2:\overline{AB}^2=BC:CD:BD$ ヲ用ヒヨ)



## 46. ぴたごらすノ定理ノ擴張

或點カラ或直線ヘ引イタ垂線ノ足ヲ其ノ直線ニ投ジタ其ノ**點ノ正射影**トイヒ,或線分ノ兩端カラ或直線ヘ引イタ垂線ノ足ノ間ニアル部分ヲ其ノ**線分ノ正射影**トイフ。

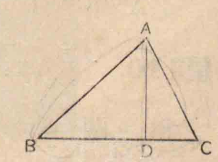



問 1. 線分 AB ノ直線 MN ニ投ジタ正射影ヲ A′B′ トスレバ, AB ト A′B′ トノ大小ノ關係ハドウカ。

問 2. 上ノ圖デ AB ト MN トノ角ヲ $\alpha$ トシ, AB ノ長サヲ $a$ トスレバ $A'B'=a\cos\alpha$ デアル。

問 3. 等長デ且平行デアル線分ガ同ジ直線ニ投ジタ正射影ハ相等シイ。

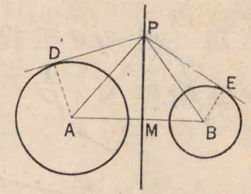
問 4. 三角形ノ二邊ノ平方ノ差ハ其ノ二邊ガ第三邊ニ投ジタ正射影ノ平方ノ差ニ等シイ。




問 5. 二定點カラノ距離ノ平方ノ差ガ定量 $K^2$ ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

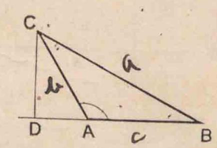
**問** 6. 定圓 O ト定點 A トガアル。今動點 P カラ此ノ圓ニ引イタ切線ガ PA ニ等シイヤウニ點 P ガ動クトキ,其ノ畫ク軌跡ヲ求メヨ。

Q **問** 7. 二定圓ニ引イタ切線ガ相等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

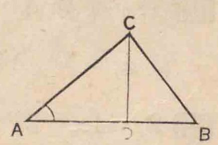



注意 此ノ軌跡(直線)ヲ其ノ二圓ノ根軸トイフ。

**問** 8. △ABC ニ於テ, AD ヲ AB ニ投ジタ AC ノ正射影トスレバ



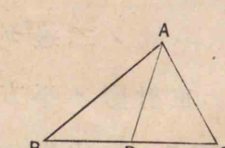

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\pm 2AB\cdot AD$$




但シ ∠A ガ鈍角ナラバ＋ヲ取リ,鋭角ナラバ－ヲ取ル。

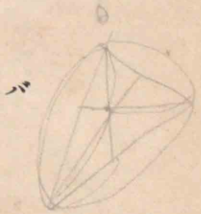
**問** 9. △ABC ノ三邊 BC, CA, AB ヲ夫々 $a$, $b$, $c$ デ表ハストキ, $\angle A=120^\circ$ ナレバ $a^2=b^2+c^2+bc$ デ, $\angle A$ 6° ナレバ $a^2=b^2+c^2-bc$ デアル。

**問** 10. 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ニ關スル定理ヲ述ベヨ。




**問** 11. 平行四邊形ノ四邊ノ平方ト二對角線ノ平方トノ間ニハドンナ關係ガ





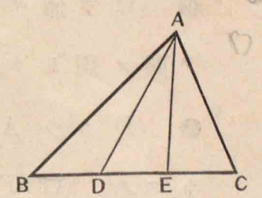
アルカ。一般ノ四邊形デハドウカ。

例 △ABC ノ一邊 BC ヲ D, E デ三等分スレバ

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$$

**證明** $\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{DE}^2$

$\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2$




邊々相加ヘテ

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2$$

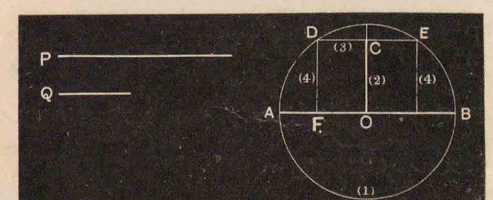
$$\therefore\quad \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+\overline{BE}^2\quad (\because\ 4\overline{DE}^2=\overline{BE}^2)$$

**問** 12. △ABC ノ重心ヲ G トスレバ

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$$

## 47. 作圖題

**[1] 二線分ノ和(P)ト其ノ二線分ノ包ム矩形ノ面積(Q²)* トヲ知ツテ其ノ二線分ヲ求メヨ.**




**作圖** ❶ P ニ等シイ線分 AB ヲ直徑トスル圓周

* スベテ面積ハ正方形ノ面積デ與ヘラレルトスル。從ツテ其ノ正方形ノ一邊デアル線分ノ長サガ與ヘラレタトスル。

ヲ畫キ,其ノ中心ヲOトスル。

❷ ABニ垂直ナル半徑上ニQニ等シクOCヲ取ル。

❸ Cヲ通リABニ平行ナル弦DEヲ引キ,此ノ圓ノ周トノ交點ヲD,Eトスル。

❹ DカラABヘ垂線DFヲ引キ其ノ足ヲFトスル。AF,FBハ求メル二線分デアル。

**證明** (略スル)

**吟味** 本題ハ點Dガ存在スルトキ,即チ $OC \leqq OA$ 從ツテ $Q \leqq \frac{P}{2}$ デアルトキニ限ツテ解答ガアル。

ソシテ $Q < \frac{P}{2}$ デアルトキハ DEハ此ノ圓ト交ハルカラ ABヲ分ケル點ハ二ツ得ラレルガ解答ハ唯一種デアル。

又 $Q = \frac{P}{2}$ デアルトキハ兩線分ハ共ニ $\frac{P}{2}$ デアル。

**注意** 1. P, Qノ數値ヲ夫々$p, q$トシ,求メル線分ノ數値ヲ$x, y$トスレバ,本問題ハ

$x+y=p,\ xy=q^2$ ナル一組ノ方程式

從ツテ $x^2-px+q^2=0$ ナル一元二次方程式

ノ幾何學的解法ヲ求メルモノデアル。



今圖ニヨツテ$x$ト$y$トヲ計算スルト

$$x=AF=OA-OF, \quad y=FB=OA+OF$$

且 $$\overline{OF}^2=\overline{OD}^2-\overline{DF}^2=\overline{OA}^2-\overline{OC}^2$$

故ニ $$OF=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}$$

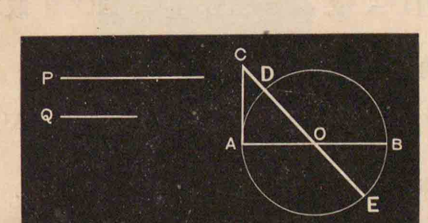
從ツテ $$x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2-4q^2}{4}}=\frac{p-\sqrt{p^2-4q^2}}{2}$$

及ビ $$y=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2-4q^2}{4}}=\frac{p+\sqrt{p^2-4q^2}}{2}$$

デ,コレガ上ノ方程式ノ二根デアル。

**問** 1. $x^2-10x+16=0$ ヲ作圖ニヨツテ解ケ。

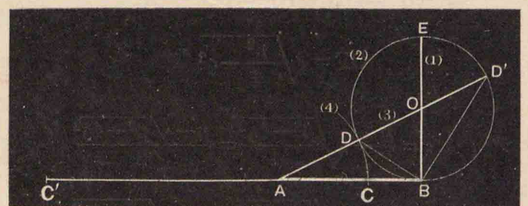
**[2] 二線分ノ差(P)ト其ノ二線分ノ包ム矩形ノ面積($Q^2$)トヲ知ツテ其ノ二線分ヲ求メヨ.**




**作圖** Pニ等シイ線分ABヲ直徑トシテ圓周ヲ畫キ,其ノ一端Aニ於ケル此ノ圓ノ切線上ニQニ等シクACヲ取リ,Cカラ中心線CDOEヲ引ケバ,CD, CEハ求メル二線分デアル。

**吟味** 本題ハ常ニ成立スル。

**[3] 與ヘラレタ線分(AB)ヲ二分シ,其ノ一部分ヲ他ノ部分ト全線分トノ比例中項ナラシメヨ.**




作圖 ❶ 與ヘラレタ線分 AB ノ一端 B カラ BA ニ等シイ垂線 BE ヲ引ク。

❷ BE ヲ直徑トスル圓周 O ヲ畫ク。

❸ A ヲ通ル中心線 ADD′ ヲ引ク。

❹ AD ニ等シク AB 上ニ AC ヲ取ルト, C ハ求メル内分點デアル。

又 AD′ ニ等シク BA ノ延長上ニ AC′ ヲ取ルト, C′ ハ求メル外分點デアル。

證明 AB ハ B 點デ圓 O ニ切スルカラ

$$AB^2 = AD \cdot AD' = AD(AD + DD')$$

故ニ $$AB^2 = AC(AC + AB)$$

故ニ $$\frac{AB}{AC} = \frac{AC+AB}{AB}$$

故ニ $$\frac{AB-AC}{AC} = \frac{AC+AB-AB}{AB}$$



故ニ $$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

同樣ニ $$\frac{BC'}{AC'} = \frac{AC'}{AB}$$

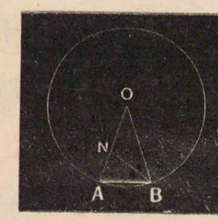
注意 2. 上ノヤウニ線分ヲ分割スルコトヲ**中末比ニ分ケル**トイヒ,之ヲ**黃金分割**トモイフ。

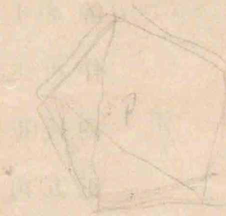
問 2. 上ノ分割法デハ

$$AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB, \quad AC' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$$

問 3. 正五角形 ABCDE ノ對角線 AC, BE ノ交點ヲ P トスレバ, P ハ AC, BE ヲ中末比ニ分ケル。

**[4] 正十角形及ビ正五角形ヲ作レ.**



解析 正十角形ガ既ニ畫カレタトシ, AB ヲ其ノ一邊トシ,其ノ外接圓ヲ畫キ,中心ヲ O トスレバ

$$\angle AOB = \frac{360°}{10} = 36°$$

$$\angle OAB = \angle OBA = 72°$$

故ニ ∠OBA ノ二等分線 BN ヲ引ケバ

$$\angle ABN = 36°$$

故ニ　$\triangle BAN \backsim \triangle OAB$

故ニ　$AN:AB=AB:AO$

然ルニ $\triangle ONB$, $\triangle ABN$ ハ共ニ等脚三角形デアルカラ

$$AB=BN=NO$$

故ニ　$AN:NO=NO:AO$

故ニ N ハ半徑 AO ヲ中末比ニ分ケル點デアル。

作圖 任意ノ圓ヲ畫イテ其ノ半徑 OA ヲ引キ,之ヲ N デ中末比ニ内分シ,其ノ大キナ部分 ON ニ等シイ弦 AB ヲ作リ,之ニ等シイ連接スル弦ヲ作ルト,此ノ圓ニ内接スル正十角形ガ出來ル。

内接正十角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ブト内接正五角形ガ出來ル。

問 4. 圓ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,其ノ内接正十角形ノ一邊ハ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ デアル。

問 5. 與ヘラレタ圓ニ内接スル正十五角形ヲ作レ。$\left(\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\text{ ニ着目セヨ}\right)$

注意 3. 正七角形・正九角形・正十一角形ノヤウナ正多角形ハ近似的デナケレバ作圖スルコトガ出來ナイ。諸子ガ既ニ作圖シ得タ正多角形ノ邊數ヲ擧ゲヨ。



## 48. 圓ノ周ト面積

問 1. 圓ノ周ト其ノ圓ノ内接・外接正多角形ノ周トノ間ニハドンナ關係ガアルカ。

問 2. 圓周率ニ就イテ知ル所ヲ述ベヨ。

問 3. 圓周率ヲ 3.14159 トスルノト $\frac{22}{7}$ トスルノトハ半徑 $120\,m$ ノ圓ノ周デ幾ラノ差ガアルカ。

問 4. 半徑ガ R デアル圓ノ周ヲ表ハス式ヲ書ケ。

問 5. 圓ノ周ハ何ニ比例シテ變化スルカ。

問 6. 與ヘラレタ幾ツカノ圓ノ周ノ和ニ等シイ周ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

問 7. 正多角形ノ面積ヲ求メル公式ヲ書ケ。

問 8. 半徑ガ R デアル圓ノ面積ヲ表ハス式ヲ書ケ。

問 9. 圓ノ面積ハ何ニ比例シテ變化スルカ。

問 10. 圓ノ弧ハ何ニ比例スルカ。

問 11. 扇形ノ面積ヲ求メル方法ヲ述ベヨ。

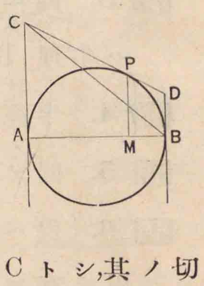
問 12. 面積ニ於テ,與ヘラレタ圓ノ 2 倍,3 倍ニ等シイ圓ヲ作圖セヨ。

又與ヘラレタ二ツノ圓ノ和又ハ差ニ等シイ圓ヲ作圖セヨ。

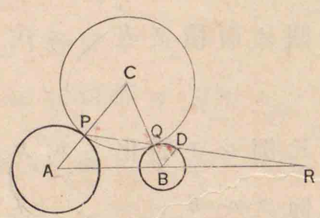
## 問題 5

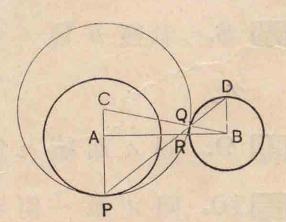
1. $\triangle$ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ノ,二邊 AB, AC デ夾ミ取ラレル部分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。又其ノ部分ヲ定比ニ分ケル點ノ軌跡ヲ求メヨ

2. 圓周上ノ一點 P カラ直徑 AB ヘ垂線 PM ヲ引キ,又 P 及ビ A, B ニ於ケル切線ノ交點ヲ夫々 C, D トスレバ, AD, BC ハ PM ヲ二等分スル。

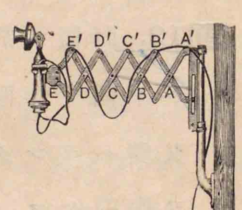



3. 二定圓 A, B ニ切スル任意ノ圓ヲ C トシ,其ノ切點ヲ P, Q トスルト,直線 PQ ハ常ニ或定點ヲ通ル。




4. 右ノ圖ノヤウナ電話機ガアル。各々ノ四角形ハ相等シイ菱形デ,連結部 A, B, C, D, E ハ目釘ノ周リニ廻轉自由デアル。此ノ電話機ヲ引張ルトキ, A, B, C, D, E ノ動ク距離






ヲ比較セヨ。

5. 二ツノ圓ニ二ツノ共通內切線ヲ引ケバ,其ノ切點間ニ夾マレル劣弧ノ比ハ兩圓ノ半徑ノ比ニ等シイ。

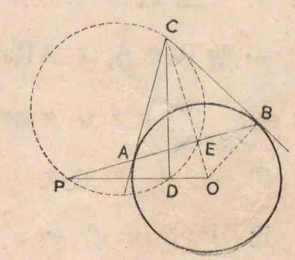
6. 圓外ノ一點 P カラ圓ニ割線 PAB ト切線 PC トヲ引キ A, B カラ PC ニ垂線 AL, BM ヲ引キ, C カラ AB ニ垂線 CN ヲ引クト $AL \cdot BM = \overline{CN}^2$ デアル。

7. 圓ノ二弦 AB, AC ノ夾角 BAC ガ 60° デアルトキ,弧 AB ノ中點 M ト弧 AC ノ中點 N トヲ結ブ直線ガ AB, AC ニ交ハル點ヲ夫々 P, Q トスルト, $\overline{PQ}^2 = PM \cdot QN$ デアル。

8. $\triangle$ABC ノ三邊 BC, CA, AB 上ニ夫々 D, E, F ガアッテ, $\frac{BD}{CD}=\frac{1}{2}$, $\frac{CE}{AE}=\frac{2}{3}$, $\frac{AF}{BF}=\frac{3}{4}$ デアルトキ, $\triangle$DEF ト $\triangle$ABC トノ比ヲ求メヨ。

9. $\triangle$ABC ノ二邊 AB, AC ニ交ハル直線トノ交點ヲ D, E トシ, AD:DB=2:1, $\triangle$ADE:DECB=2:3 デアルトキ, AE:EC ヲ求メヨ。

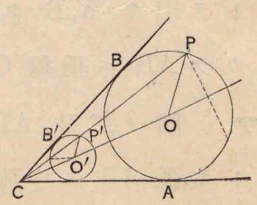
10. O ハ定圓, P ハ定點デアル。P カラ任意ノ割線 PAB ヲ引キ,圓周トノ交點 A, B ニ



於ケル切線ノ交點 C カラ PO ヘ垂線 CD ヲ引ケバ,其ノ足 D ハ常ニ同ジ位置ニアル。

**11.**　△ABC ノ三頂點カラ同一ノ點 O ヲ通ルヤウニ夫々對邊マデ AD, BE, CF ヲ引イテ,矩形 AO·OD, BO·OE, CO·OF ガ相等シイナラバ, O ハ垂心デアル。

**12.**　與ヘラレタ二直線ニ切シ且與ヘラレタ一點ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。

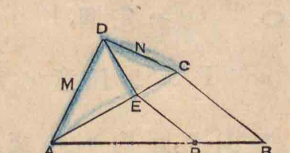



**13.**　△ABC ノ A ヲ通ツテ外接圓ニ切スル直線ガ BC ノ延長ト D デ交ハレバ $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BD:CD$ デアル。又此ノ問題ニヨツテ面積ノ比 $M^2:N^2$ ヲ線分ノ比ニ直セ。

**14.**　二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ定量 $K^2$ ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メ,且之ヲ作圖セヨ。

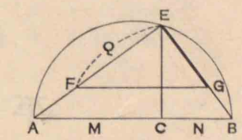
**15.**　二定點 A, B ト一定直線 MN ガアル。MN 上ニ一點 P ヲ求メ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ ガ最小ナルヤウニセヨ。

**16.**　與ヘラレタ線分 AB ヲ與ヘラレタ二ツノ正方形ノ比 $M^2:N^2$ ニ分ケヨ。

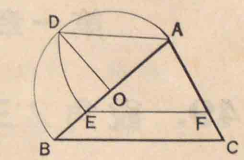




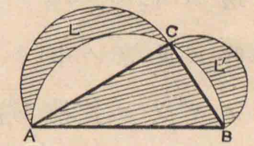

**17.**　與ヘラレタ正方形 $Q^2$ トノ比ガ與ヘラレタ比 M:N ニ等シイ正方形ヲ作レ。




**18.**　與ヘラレタ三角形ヲ其ノ一邊ニ平行ナル直線デ二等分セヨ。又之ヲ與ヘラレタ比ニ分ケヨ。

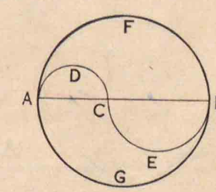



**19.**　直角三角形ABC ノ三邊ノ上ニ圖ノヤウニ半圓ヲ畫クトキハ,二ツノ新月形 L, L′ ノ和ハ △ABC ニ等シイ。




(ひぽくらてす Hippocrates ノ定理)

**20.**　圓ノ直徑 AB 上ニ一點 C ヲ取リ, AC, BC ヲ直徑トスル半圓ヲ右ノ圖ノヤウニ AB ノ反對ノ側ニ畫クトキハ,曲線形 ADCEBF ト AGBECD トノ比ハ BC:AC ニ等シイ。




又此ノ定理ニヨツテ圓ヲ定比ニ二分スル方法ト,圓ヲ任意ノ數ニ等分スル方法トヲ工夫セヨ。

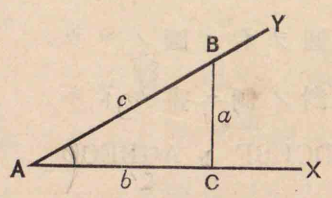
# 第二篇

# 平面三角法

## 第一章　鋭角•鈍角ノ三角函數

### 49. 鋭角ノ三角函數

∠XAY ヲ鋭角トシ,其ノ一邊 AY 上ノ一點 B カラ他ノ邊 AX ヘ垂線 BC ヲ引キ,直角三角形 ABC ノ三邊 AB, BC, CA ヲ夫々**斜邊** ($c$), **對邊** ($a$), **底邊** ($b$) ト呼ビ,此等ノ中カラ二ツヅツ取ツテ得ラレル比ニ次ノヤウナ名稱ト記號トヲ用ヒルコトハ既ニ學ンダ通リデアル。




$$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{a}{c}=\mathbf{sin\,A}$$ ［角 A ノ**正弦**］(Sine)

$$\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}=\frac{b}{c}=\mathbf{cos\,A}$$ ［角 A ノ**餘弦**］(Cosine)

$$\frac{\text{對邊}}{\text{底邊}}=\frac{a}{b}=\mathbf{tan\,A}$$ ［角 A ノ**正切**］(Tangent)



$$\frac{\text{底邊}}{\text{對邊}}=\frac{b}{a}=\mathbf{cot\,A}$$ ［角 A ノ**餘切**］(Cotangent)

注意　以上ノ外ニ**正割**ト**餘割**トガアル。

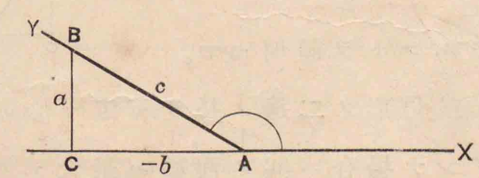
$$\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}=\frac{c}{b}=\frac{1}{\cos A}=\mathbf{sec\,A}$$ ［角 A ノ**正割**］(Secant)

$$\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sin A}=\mathbf{cosec\,A}$$ ［角 A ノ**餘割**］(Cosecant)

然シ此等ヲ用ヒルコトガ少イカラ詳說シナイ。

### 50. 鈍角ノ三角函數

∠XAY ガ鈍角デアルトキハ, B カラ AX ヘ引イタ垂線ノ足 C ハ XA ノ延長上ニアルカラ,直角三角形 ABC ノ一邊 AC ノ長サ ($b$) ガ角 A ガ鋭角ノ場合ト反對ノ向キノ長サトナル。故ニ之ヲ負ノ長サ ($-b$) トシテ次ノヤウニ定メル。




$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \cos A=-\frac{b}{c},$$

$$\tan A=-\frac{a}{b},\qquad \cot A=-\frac{b}{a}$$

例ヘバ　$\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}, \quad \cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

又上ノ定義カラ或角Aト其ノ補角180°−Aトノ三角函數ニハ次ノ關係ガアルコトガワカル。

$$\sin A = \sin(180^\circ - A)$$

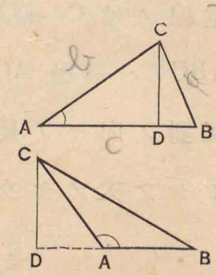
$$\cos A = -\cos(180^\circ - A)$$

$$\tan A = -\tan(180^\circ - A)$$

故ニ鈍角ノ三角函數ノ値ハ其ノ補角(鋭角)ノ三角函數ノ値デ定メルコトガ出來ル。

**問** 1. 135° ト 150° トノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

**問** 2. △ABC ノ二邊 AC, AB ヲ夫々 $b$, $c$ デ表ハシ,其ノ面積ヲ $S$ デ表ハセバ




$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

デアルコトヲ證明セヨ。

**問** 3. 三角形ノ二邊ノ長サガ定マレバ,其ノ夾角ガドンナ場合ニ其ノ面積ハ最大デアルカ。直角!

## 51. 0°, 90°, 180° ノ三角函數

第49節ノ定義ニ就イテ考ヘルト,$c$ノ値ヲ定メテ置ケバ角Aガ小トナルニ從ツテ$a$ノ値ハ漸次小ト



ナリ,角Aガ限リナク小トナレバ$a$ノ値モ限リナク小トナル。依ツテ

$$\sin 0^\circ = 0$$

同様ニ $\tan 0^\circ = 0$

又 $\sin 180^\circ = 0$

$$\tan 180^\circ = 0$$

及ビ $\cos 90^\circ = 0$

次ニ角Aガ90°ニ近ヅクト$a$ノ値ハ$c$ノ値ニ近ヅクカラ

$$\sin 90^\circ = 1$$

同様ニ $\cos 0^\circ = 1$

次ニ角Aガ0°カラ増シテ次第ニ90°ニ近ヅクト,正切ノ値ハ0カラ増大シテ角Aガ90°ニ近ヅクト其ノ値ハ限リナク大トナリ,ドンナ大ナル數ヨリモ大トナル。之ヲ略言シテ90°ノ正切ハ**無限大**デアルトイヒ,次ノヤウナ記號デ表ハス。

$$\tan 90^\circ = \infty$$

同様ニ $\cot 0^\circ = \infty$

**問** 角Aガ0°カラ180°マデ變ズルトキ $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ ノ變化ヲ表ハスぐらふヲ書ケ。

## 52. 三角法

幾何學デ三角形ハ三邊或ハ二邊ト其ノ夾角ナドガ與ヘラレルト定マルコトヲ既ニ學ンダガ,與ヘラレタ邊ヤ角ナドノ數値ニヨツテ未知ノ邊ヤ角ナドノ數値ヲ算出スルコトハ特別ノモノノ外ハ出來ナカツタ。

**三角法**ハ三角函數ノ性質ヲ研究シ,又之ニヨツテ三角形ノ邊ト角トノ數量的關係ヲ求メテ,其等ヲ算出スル方法ト,之ヲ高サヤ距離等ノ測量ニ應用スル方法トヲ考究スル學問デアル。

伊能忠敬
(西暦 1745-1818)

注意 初メテ我國ノ沿岸ヲ測量シテ精確ナ地圖ヲ作ツタノハ伊能忠敬デアル。伊能忠敬ハ寛政十二年,齡五十六歳ノ身ヲ以テ此ノ測量ヲ始メ極メテ簡單ナ器械デ前代未聞ノ大事業ヲ成シ遂ゲタ。其ノ地圖ハ甚ダ精確ナモノデ,後年外國人ガ優レタ器械デ測量シタモノト違ハナカツタ。



## 53. 同角ノ三角函數ノ關係

[1] **逆數關係** 正切ト餘切トノ定義カラ

$$\cot A=\frac{1}{\tan A},\qquad \tan A\cot A=1 \qquad (1)$$

又

$$\sec A=\frac{1}{\cos A},\qquad \cos A\sec A=1$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A},\qquad \sin A\operatorname{cosec} A=1$$

[2] **相除關係** 次ノ關係モ定義カラ容易ニワカル。

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A} \qquad (2)$$

依ツテ $\sin A=\cos A\tan A,\quad \cos A=\sin A\cot A$

**問 1.** $\tan x+\cot x=2$ カラ $\tan x$ ノ値ヲ求メヨ。

[3] **平方關係** 第49節ト第50節トノ直角三角形 ABC ニ於テ AC ノ正負ニ關ハラズ

$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$$

兩邊ヲ $\overline{AB}^2$ デ割レバ

$$(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$$

之ヲ次ノヤウニ記ス。

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1 \qquad (3)$$

從ツテ $\sin^2 A=1-\cos^2 A,\quad \cos^2 A=1-\sin^2 A$

同様ニ $1+\tan^2 A=\sec^2 A,\quad 1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$

**問 2.** 因數分解ニヨリ $\sin^4 A-\cos^4 A$ ハ $\sin^2 A-\cos^2 A$ ニ等シイコトヲ示セ。

**問 3.** $\cos^2 A-\sin^2 A$ ヲ $2\cos^2 A-1$ 及ビ $1-2\sin^2 A$ ニ變化セヨ。

## 54. 三角函數ノ一ツデ他ヲ表ハス法

**例** $\sin A$ ヲ以テ他ノ三角函數ヲ表ハセ。

**解** 公式(3)カラ

$$\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}$$

從ツテ公式(2)カラ

$$\tan A=\pm\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

$$\cot A=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$$

但シ符號ハ A ガ銳角ノトキハ＋ヲ取リ, A ガ鈍角ノトキハ－ヲ取ルコトトスル。

?**問 1.** $\cos A$ ヲ以テ他ノ函數ヲ表ハセ。　此の時ノ符号

**問 2.** $\tan A$ ヲ以テ他ノ函數ヲ表ハセ。

**問 3.** $\tan A=\frac{8}{15}$ ナルトキ, $\sin A$, $\cos A$ ノ値ヲ求メヨ。

**問 4.** $\sin A=\frac{12}{13}$ トシテ他ノ函數ヲ求メヨ。



## 55. 三角恒等式

**例 1.** $(1+\cos A)^2+(1+\sin A)^2=3+2(\sin A+\cos A)$ ヲ證明セヨ。

**證明** 
$$\begin{aligned}\text{左邊}&=1+2\cos A+\cos^2 A+1+2\sin A+\sin^2 A\\&=2+(\cos^2 A+\sin^2 A)+2(\cos A+\sin A)\\&=2+1+2(\cos A+\sin A)\\&=3+2(\sin A+\cos A)\end{aligned}$$

**問 1.** $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$ ヲ證明セヨ。

**例 2.** $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)$ ヲ證明セヨ。

**證明** 
$$\begin{aligned}\text{左邊}&=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)\\&=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha\}\\&=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)\end{aligned}$$

**問 2.** $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$ ヲ證明セヨ。

## 56. 三角方程式

未知角ノ三角函數ヲ含ム等式ヲ**三角方程式**トイフ。

**例** $3\sin x=2\cos^2 x$ ヲ解ケ。

**解** $\cos^2 x$ ヲ $1-\sin^2 x$ ニ代ヘテ整頓スルト

$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0$$

之カラ　$\sin x=\dfrac{1}{2}$　或ハ　$-2$

然ルニ　$\sin x=-2$　ハ不可能デアル。(何故カ)

故ニ　$\sin x=\dfrac{1}{2}$　カラ

$x=30°$　或ハ　150°　　**答**　30°, 150°

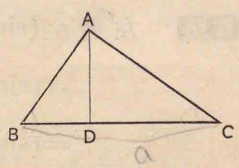
**問**　次ノ方程式ヲ解ケ。

**1**　$3\tan^2 x-4\sqrt{3}\tan x+3=0$

**2**　$\sin^2 x+\sin x=\dfrac{2}{3}$　(巻末ノ眞數表ヲ用ヒヨ)

## 問　題　6

**1.**　直角三角形ABCニ於テ直角ノ頂點Aカラ斜邊 BC($a$) ヘ垂線 AD ヲ引クト




$AD=a\sin B\sin C$　デアルコトヲ證明セヨ。

**2.**　一角ガ等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ各三角形ニ於ケル其ノ角ヲ夾ム二邊ノ矩形ノ比ニ等シイコトヲ第50節問2ノ公式ヲ用ヒテ證明セヨ。

**3.**　次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

**1**　$(1-\sin^2 A)\tan^2 A=\sin^2 A$

**2**　$\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A\cos^2 A$



**3**　$\tan A+\sec A=\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}}$　(第49節注意參照)

**4**　$\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x$

**5**　$\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\tan\theta$

**6**　$\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$

**7**　$(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$

**4.**　次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$(x\cos A-y\sin A)^2+(x\sin A+y\cos A)^2$$

**5.**　次ノ方程式ヲ解ケ。($x, y$ ヲ未知數トスル)

$$\begin{cases} x\sin A+y\cos A=1 \\ x\cos A-y\sin A=1 \end{cases}$$

**6.**　次ノ方程式ニ適スル $x$ ノ値ヲ言ヘ。

**1**　$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**2**　$\tan x=1$

**3**　$2\cos x+\sqrt{2}=0$

**7.**　一ツノ圓ノ周上ノ定點Bカラ出ル弦ノ長サハ，此ノ弦トBヲ通ル此ノ圓ノ切線トノナス角ノ正弦ニ比例スルコトヲ證明セヨ。

## 第二章　加法定理・減法定理

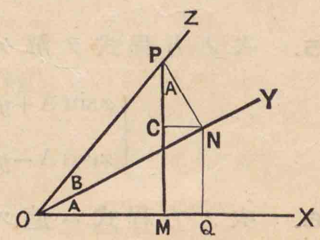
### 57. 正弦・餘弦ノ加法定理

AトBトヲ任意ノ二角トスレバ

$$\left.\begin{array}{l}\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\ \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B\end{array}\right\}\quad(4)$$

**證明**　∠XOY ヲ A, ∠YOZ ヲ B デ表ハセバ,其ノ和 ∠XOZ ハ A+B デアル。

今 ∠XOZ<90° トシ, OZ 上ニ一點 P ヲ取リ, P カラ OX, OY ヘ夫々垂線 PM, PN ヲ引キ, N カラ OX, PM ヘ夫々垂線 NQ, NC ヲ引ケバ




$$\angle CPN=\angle QON=A$$

$$\sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{QN+CP}{OP}=\frac{QN}{OP}+\frac{CP}{OP}$$

$$=\frac{QN\cdot ON}{ON\cdot OP}+\frac{CP\cdot NP}{NP\cdot OP}$$

$$=\frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{CP}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$



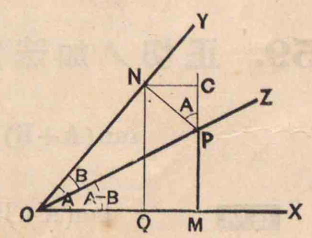
同様ニ　$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

### 58. 正弦・餘弦ノ減法定理

$$\left.\begin{array}{l}\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B\\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B\end{array}\right\}\quad(5)$$

**證明**　A>B トシ, ∠XOY ヲ A, ∠YOZ ヲ B トシ, OZ ヲ OX ト OY トノ間ニアルヤウニスレバ, ∠XOZ ハ A−B デアル。

前節ト同様ノ作圖ヲスルト




$$\sin(A-B)=\frac{MP}{OP}=\frac{QN-PC}{OP}$$

$$=\frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{PC}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

同様ニ　$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

**注意** 1.　本節及ビ前節ノ證明デハ, A, B, A+B, A−B ハ何レモ90°ヨリ小ナル角ト假定シタガ,サウデナイ場合モ同様ノ方法デ證明セラレル。

**注意** 2.　以下 A−B ニ就イテハ A>B デアル場合ダケヲ論ズルコトトスル。

問　次ノ等式ヲ證明セヨ。

**1** $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75^\circ$

**2** $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin 75^\circ$

**3** $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3} = \cot 75^\circ$

**4** $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3} = \cot 15^\circ$

cos

## 59. 正切ノ加法定理・減法定理

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B} \qquad (6)$$

**證明**

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$
$$= \frac{\sin A\cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

終リノ式ノ分母子ヲ $\cos A \cos B$ デ割レバ

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B}$$

同様ニ次ノ關係モ證明セラレル。

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B} \qquad (7)$$

問　次ノ公式ヲ證明セヨ。

**1** $\tan(45^\circ \pm \theta) = \dfrac{1\pm\tan\theta}{1\mp\tan\theta}$　（複號同順）

**2** $\cot(A\pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$　（複號同順）



## 60. 倍角ノ三角函數

公式(4)及ビ(6)ニ於テBヲAトスルト

$$\left.\begin{aligned}
\sin 2A &= 2\sin A \cos A \\
\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\
&= 1-2\sin^2 A \\
&= 2\cos^2 A - 1 \\
\tan 2A &= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

**系**　$\sin A = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$,

$\cos A = 1-2\sin^2\dfrac{A}{2} = 2\cos^2\dfrac{A}{2} - 1$

問1.　次ノ公式ヲ證明セヨ。

**1** $\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\pm\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2 = 1\pm\sin\theta$　（複號同順）

**2** $1+\cos A = 2\cos^2\dfrac{A}{2}$,　$1-\cos A = 2\sin^2\dfrac{A}{2}$

問2.　$3A=2A+A$ トシテ次ノ公式ヲ證明セヨ。

**1** $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

**2** $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

**3** $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

## 61. 半角ノ三角函數

前節カラ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\\ \cos\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\\ \text{従ッテ}\quad\tan\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

但シ根號ノ前ノ符號ハ $\frac{A}{2}$ ノ大サニヨリ適當ニ定メナケレバナラナイ。

問 1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

❶ $\sin 22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

❷ $\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

❸ $\tan 22°30' = \sqrt{2}-1$

問 2. 一邊ガ $a$ ナル正八角形ノ面積ヲ求メヨ。又其ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

## 62. 正弦・餘弦ノ積 積ヲ和又ハ差ニ直ス

公式(4)及ビ(5)ニ加法及ビ減法ヲ施スト

$$\left.\begin{aligned}2\sin A\cos B&=\sin(A+B)+\sin(A-B)\\ 2\cos A\sin B&=\sin(A+B)-\sin(A-B)\\ 2\cos A\cos B&=\cos(A+B)+\cos(A-B)\\ 2\sin A\sin B&=\cos(A-B)-\cos(A+B)\end{aligned}\right\}\quad(10)$$



問 $2\cos 50°\sin 30° = \sin 80° - \sin 20°$ ヲ證明セヨ。

## 63. 正弦・餘弦ノ和及ビ差 和差ヲ積ニ直ス

前節ノ公式ニ於テ $A+B=\alpha,\ A-B=\beta$ トスレバ

$A=\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\quad B=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ デアルカラ,

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\ \sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\ \cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\ \cos\beta-\cos\alpha&=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

例 $\sin 50°+\sin 10°$ ヲ簡單ニセヨ。

解 $\sin 50°+\sin 10° = 2\sin\frac{1}{2}(50°+10°)\cos\frac{1}{2}(50°-10°)$

$= 2\sin 30°\cos 20° = 2\times\frac{1}{2}\times\cos 20°$

$= \cos 20°$

問 次ノ等式ヲ證明セヨ。

❶ $\cos 35° - \cos 125° = \sqrt{2}\cos 10°$

❷ $\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$

❸ $\frac{\sin A+\sin 4A+\sin 7A}{\cos A+\cos 4A+\cos 7A} = \tan 4A$

## 問　題　7

**1.** 次ノ等式ヲ證明セヨ。

❶ $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

❷ $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

❸ $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$

❹ $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}$ （複號同順）

❺ $\cos\theta\pm\sin\theta=\sqrt{2}\sin(45^\circ\pm\theta)$

$=\sqrt{2}\cos(45^\circ\mp\theta)$ （複號同順）

❻ $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

❼ $\cos 4A=1-8\cos^2 A+8\cos^4 A$

❽ $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$

?. ❾ $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$

**2.** 次ノ式ヲ積ノ形ニ變ヘヨ。

❶ $\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A$

❷ $\sin A+\sin(A+120^\circ)+\sin(A+240^\circ)$

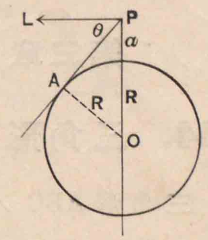
**3.** 公式(4)及ビ(6)ヲ用ヒテ次ノ式ヲ展開セヨ

❶ $\sin(A+B+C)$　　❷ $\cos(A+B+C)$

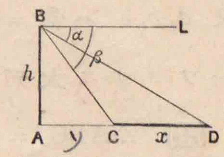
❸ $\tan(A+B+C)$



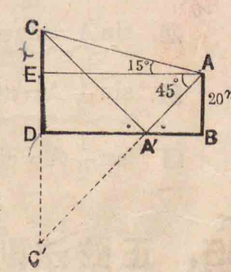
**4.** 高サ$a$米ノ山頂カラ地平線ヲ望ム線(地球面ヘノ切線ト同ジ方向)ノ俯角ヲ$\theta$トスレバ,地球ノ半徑ハ$\dfrac{a\cos\theta}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}$米デアルコトヲ證明セヨ。




**5.** 海濱ニアル高サ$h$米ノ高樓カラ海上ニアル二船ガ同ジ方向ニ見エ,且其ノ俯角ガ夫々$\alpha$及ビ$\beta$デアルコトヲ知ツタ。然ラバ此ノ二船ノ距離ハ幾米カ。




**6.** 湖水面上$20\,m$ノ處カラ風船球ヲ望ムニ其ノ仰角ハ$15^\circ$デ,其ノ像ノ俯角ハ$45^\circ$デアルトイフ。然ラバ湖水面上風船球ノ高サハ何程カ。



# 第三章　三角形ノ角ト邊トノ關係

## 64. 三角形ノ角ト邊

三角形 ABC ノ角ヲ A, B, C デ表ハシ,其ノ對邊ヲ夫夫 $a, b, c$ デ表ハス。サウスルト,角 A, B, C ハ何レモ 0° ト 180° トノ間ニアル。ソシテ A+B+C=180° デアル。又 $a, b, c$ ハ常ニ正數デ,且何レノ二ツノ和モ殘リノ一ツヨリモ大デアル。

**問** △ABC ニ於テ,次ノ關係ガアルコトヲ證明セヨ。

❶ $\sin A=\sin(B+C)$　　❷ $\cos A=-\cos(B+C)$

❸ $\sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C)$　　❹ $\cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}(B+C)$

❺ $\tan\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}(B+C)$　　❻ $\sin 2A=-\sin 2(B+C)$

2 sin A cos A

## 65. 正弦法則

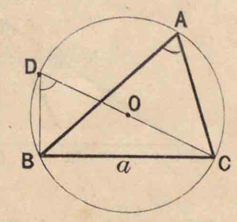
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad (12)$$

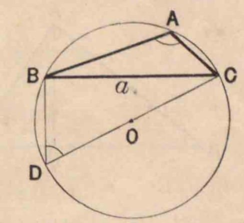
**證明** △ABC ニ外接圓ヲ畫キ, C カラ直徑 CD ヲ引キ, BD ヲ結ブト

A<90° ナルトキハ　D=A

A>90° ナルトキハ　D=180°−A






故ニ何レノ場合デモ

$$\sin D=\sin A$$

然ルニ　　$BC=CD\sin D$

依ッテ外接圓ノ半徑ヲ $R$ デ表ハスト

$$2R=\frac{a}{\sin A}$$

同樣ニ　$2R=\frac{b}{\sin B}$　及ビ　$2R=\frac{c}{\sin C}$

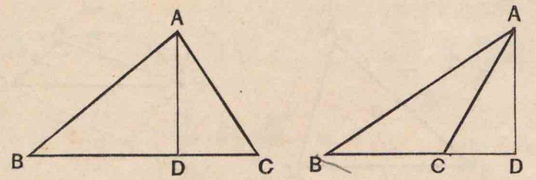
故ニ　$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

**注意** A=90° ノトキニモ同ジ等式ハ成立ツ。

**問** △ABC ニ於テ, ∠A ガ 60° デ邊 BC ガ 6 $cm$ デアル。其ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

## 66. 第一餘弦法則

$$\left.\begin{aligned} a&=b\cos C+c\cos B\\ b&=c\cos A+a\cos C\\ c&=a\cos B+b\cos A \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$




**證明** $a=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}+\mathrm{DC}$ （上ノ左圖）

$=\mathrm{AB}\cos\mathrm{B}+\mathrm{AC}\cos\mathrm{C}$

$=c\cos\mathrm{B}+b\cos\mathrm{C}$

若シCガ鈍角デアルトキ(上ノ右圖),又ハBガ鈍角デアルトキハ BC ハ BD∼CD トナリ, cosC 又ハ cosB ガ負數トナツテ同ジ等式ヲ得ル。

同様ニ $b$ 及ビ $c$ ノ式モ求メラレル。

**問** Cガ直角デアルトキ同ジ等式ガ成立ツカ。

## 67. 第二餘弦法則 二辺ト夾角デ他辺ヲ計算

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos\mathrm{B}\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

**證明** 公式(13)ノ三式ノ兩邊ニ夫々 $a, -b, -c$ ヲ掛ケテ邊々相加ヘルト

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos\mathrm{A}$$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$$



他ノ式モ同様ニ求メルコトガ出來ル。

**注意** 第46節ノ問8ニヨツテモ證明スルコトガ出來ル。

**系**

$$\left.\begin{aligned}\cos\mathrm{A}&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos\mathrm{B}&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos\mathrm{C}&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

**問 1.** $b=12m,\ c=9m,\ \mathrm{A}=120^\circ$ ナルトキ $a$ ヲ計算セヨ。

**問 2.** 一角ガ $60^\circ$ デ二邊ガ夫々 $4cm,\ 3cm$ デアル平行四邊形ノ兩對角線ノ長サヲ求メヨ。

## 68. 正切法則

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\qquad(16)$$

**證明** $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R(\sin\mathrm{A}-\sin\mathrm{B})}{2R(\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B})}=\frac{\sin\mathrm{A}-\sin\mathrm{B}}{\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{2\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$$

**系** $$\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}\mathrm{C}\qquad(17)$$

**問** 次ノ等式ヲ證明セヨ。

**1** $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}}$　　**2** $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}}$

sin C = sin (A+B)

## 69. 半角ノ正弦・餘弦・正切

公式(8)ノ系及ビ(15)ニヨッテ

$$2\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}=1-\cos\mathrm{A}$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

三角形ノ周ノ半分(**半周**)ヲ $s$ トスレバ

$$a+b+c=2s$$

$$a+b-c=2(s-c)$$

$$a-b+c=2(s-b)$$

之ヲ上ノ式ニ代入シテ

$$2\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

同様ニ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{\mathrm{C}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$



又上ト同様ニシテ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{\mathrm{B}}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{\mathrm{C}}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

從ッテ

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{\mathrm{B}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{\mathrm{C}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

A, B, C ハ三角形ノ三角ナリ
∴ A, D, C トモニ 120°
ヨリ少
∴ 鈍角デアッテ値モ角
ナリエナイ.

**問** 次ノ等式ヲ證明セヨ。

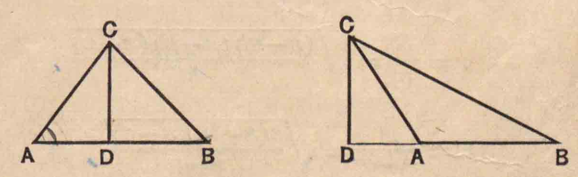
$$(s-a)\tan\frac{\mathrm{A}}{2}=(s-b)\tan\frac{\mathrm{B}}{2}=(s-c)\tan\frac{\mathrm{C}}{2}$$

## 70. 三角形ノ面積

三角形 ABC ノ面積ヲ $S$ デ表ハセバ

[i]　$S=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\frac{1}{2}ca\sin\mathrm{B}=\frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}$　　(21)

[ii]　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　　(22)



**證明** [i] (第50節問2ヲ参照シテ學生之ヲ證明セヨ)

[ii] $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ ノ右邊ヲ $\frac{1}{2}bc\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ トシテ,之ニ公式(18)及ビ(19)ヲ用ヒルト次式ヲ得ル。

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(ひーろー Hero 又ハ へろん Heron ノ公式)

**問 1.** 三角形ノ二邊ガ $30m$ ト $12m$ トデ其ノ夾角ガ 120° デアル。其ノ面積ヲ求メヨ。

**問 2.** 三邊ガ夫々 $17m$, $24m$, $35m$ デアル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

**問 3.** 三角形ノ三邊ノ長サガ夫々 $39cm$, $40cm$, $25cm$ デアル。$39cm$ ノ邊ニ對スル高サヲ求メヨ。

**問 4.** $S=\frac{1}{2}a^2\sin B\sin C\operatorname{cosec} A$, $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$ ヲ證明セヨ。

## 71. 三角形ノ内接圓・傍接圓ノ半徑

内接圓ノ半徑ヲ $r$, 傍接圓ノ半徑ヲ $r'$, $r''$ 及ビ $r'''$ デ表ハセバ

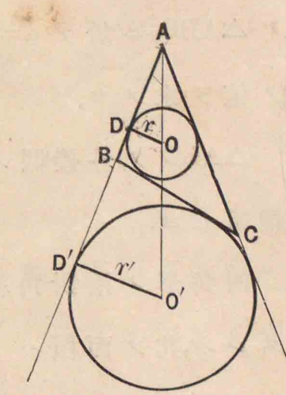
$$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad (23)$$

及ビ

$$r'=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} \quad \text{等} \qquad (24)$$



**證明** 右ノ圖ニ於テ




$$r=OD=AD\tan\frac{A}{2}$$
$$=(s-a)\tan\frac{A}{2}$$
$$r'=O'D'=AD'\tan\frac{A}{2}$$
$$=s\tan\frac{A}{2}$$

之ニ公式(20)ヲ用ヒテ證明セラレル。

**問** 三邊ガ 3, 5, 6 デアル三角形ノ内接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

## 問題 8

**1.** △ABC ニ次ノ關係ガアルコトヲ證明セヨ。

❶ $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

❷ $\sin A+\sin B>\sin C$

❸ $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$

**2.** △ABC ニ $\sin^2 A=\sin^2 C-\sin^2 B$ ナル關係ガアルトキハ,此ノ三角形ハドンナ三角形デアルカ。

**3.** △ABC ニ於テ $a=7$, $b=3$, $c=5$ ナルトキ, A ノ大サヲ求メヨ。

**4.**　△ABC ニ於テ $a=7,\ b=15,\ c=20$ ナルトキ, $\cos\dfrac{C}{2}$ ノ値ヲ求メヨ。

**5.**　△ABC ノ外接圓ノ半徑ハ $\dfrac{abc}{4S}$ ニ等シイコトヲ證明セヨ。

**6.**　四角形ノ兩對角線ヲ $d,\ d'$ トシ其ノ夾角ヲ $\theta$ トスレバ,其ノ面積ハ $\dfrac{1}{2}dd'\sin\theta$ デアルコトヲ證明セヨ。

**7.**　圓ニ内接スル四角形 ABCD ニ於テ相隣レル二角 A ト B トノ正弦ノ比ハ對角線 BD ト AC トノ比ニ等シイコトヲ證明セヨ。

又　$\angle CAD=\alpha,\ \angle BAC=\beta,\ \angle ABD=\gamma$ トスレバ,

$CD=\dfrac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$ デアルコトヲ證明セヨ。

**8.**　前問デ AB, BC, CD, DA ヲ夫々 $a,\ b,\ c,\ d$ トシ,四角形 ABCD ノ面積ヲ $S$ トスレバ

**1**　$\sin B=\dfrac{2S}{ab+cd}$　　**2**　$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}$

デアルコトヲ證明セヨ。



# 第四章　三角形ノ解法

## 72. 三角函數ノ對數表

三角函數ヲ含ム計算ニ今マデハ三角函數ノ眞數表ヲ使ツタガ,複雜ナ計算デハ其ノ對數ヲ使用スル方ガ便利デアルカラ,三角函數ノ眞數ノ對數ヲ列ベテアル**三角函數ノ對數表**ヲ用ヒル。

三角函數ノ對數表ノ組織ハ大略眞數表及ビ數ノ對數表ト同ジデアルガ,タヾ三角函數ノ値ハ1ヨリモ小サイモノガ多イカラ其ノ對數ノ指標ハ負數ガ多イ。シカシ表中ニ負ノ指標ヲ記入スルコトヲ避ケテ,指標ニ10ヲ加ヘタモノガアル。之ヲ**表對數**トイヒ,之ヲ表ハスニハ Lsin, Lcos 等トスル。

故ニ例ヘバ　$\log\sin A=L\sin A-10$　デアル。

本書ノ附表ニ載セテアルノハ10′飛ビノ四桁ノ表對數デアル。

次ニ其ノ用例ヲ示ス。

例 **1.**　$L\sin 28°47'$ ヲ求メヨ。

**解**　表ヨリ　$L\sin 28°40'=9.6810$

　　及ビ　$L\sin 28°50'=9.6833$

角ノ變化ガ微小ナトキハ之ニ對應スル三角函數ノ對數ノ變化ハ其ノ角ノ變化ニ正比例スル(之ヲ**比例部分ノ法則**トイフ)トシテ差支ナイ。

然ルニ角10′ノ増加ニ伴フ對數ノ増加ハ　0.0023（之ハ表ノ中ニ表差トシテLsinノ行ノ右ニ記シテアル）デアルカラ 7′ ニ對スル増加ハ次ノ比例式デ求メラレル。

$$10' : 7' = 0.0023 : x \qquad \therefore \quad x = 0.0016$$

依ツテ

$$\mathrm{Lsin}\,28°47' = 9.6810 + 0.0016 = \underline{9.6826} \quad (答)$$

此ノ計算ヲ次ノヤウニ記ス。

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Lsin}\,28°47' & & \\ \quad 28°40' \cdots\cdots 9.6810 & & 表差=23 \\ \qquad 7' \cdots\cdots\cdots \overset{*}{16} & & 23\times0.7=\overset{*}{16} \\ \hline \mathrm{Lsin}\,28°47' \quad =\underline{9.6826} & (答) & \end{array}$$

**問 1.**　Ltan 43°32′ 及ビ Lsin 63°23′ ヲ求メヨ。

**例 2.**　logcos 17°31′40″ ヲ求メヨ。

**解**

$$\begin{array}{lll} \log\cos 17°31'40'' & & \\ \quad 17°40' \cdots\cdots\cdots \bar{1}.9790 & & 表差=4 \\ \quad -8'20'' \cdots\cdots\cdots \overset{*}{3} & & 0.4\times8\frac{1}{3}=\overset{*}{3} \\ \hline \log\cos 17°31'40'' \quad =\underline{\bar{1}.9793} & (答) & \end{array}$$

0.424



**問 2.**　logcot 18°35′10″ ヲ求メヨ。

**例 3.**　logsin A $=\bar{1}.4488$　カラ A ヲ求メヨ。

**解**

$$\begin{array}{ll} \log\sin A = \bar{1}.4488 & \\ \quad 47 \cdots\cdots 16°10' & 表差=44 \\ \quad 41 \cdots\cdots\cdots 9'.\overset{*}{3} & \frac{41}{4.4}=9.\overset{*}{3} \\ \hline \quad A=\underline{16°19'.3} \quad (答) & \end{array}$$

**問 3.**　次ノ式カラ A ヲ求メヨ。

❶ Lsin A = 9.8436　　❷ Ltan A = 9.4213

❸ logtan A = 1.2007　　❹ logcos A $=\bar{1}.4890$

**問 4.**　Lsin 13°10′ = 9.3575,　Lsin 13°20′ = 9.3629　カラ Lsin 13°17′20″ ヲ求メヨ。

## 73.　三角形ノ解法

三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合ガアル。

[1]　一邊ト其ノ兩端ノ角トヲ知ル場合。

[2]　二邊ト其ノ夾角トヲ知ル場合。

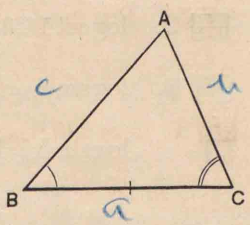
[3]　二邊ト其ノ一對角トヲ知ル場合。

[4]　三邊ヲ知ル場合。

## 74.　[1]ノ場合ノ解法

$a$ ト B, C トヲ知ルトキハ次ノ公式ヲ用ヒル。

(公式) $\begin{cases} A=180^\circ-(B+C) \\ b=\dfrac{a\sin B}{\sin A} \\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A} \end{cases}$




對數ヲ用ヒルタメ第二式,第三式ハ夫々之ヲ

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

トスベキデアルガ,煩ヲ避ケルタメ以下ノ諸節デハ一々此ノヤウナ式ハ示サナイ。

例　$a=142\,m$,　$B=47^\circ35'$,　$C=61^\circ43'$　トシテ三角形ヲ解ケ。

解　$$A=180^\circ-(B+C)$$

$$A=180^\circ-(47^\circ35'+61^\circ43')=70^\circ42'$$

又　$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

$$\begin{array}{r} \log a=2.1523 \\ \log\sin B=\bar{1}.8682 \\ -\log\sin A=0.0251 \\ \hline \log b=2.0456 \\ \therefore\ b=111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log a=2.1523 \\ \log\sin C=\bar{1}.9448 \\ -\log\sin A=0.0251 \\ \hline \log c=2.1222 \\ \therefore\ c=132.5 \end{array}$$

答　$A=70^\circ42'$,　$b=111\,m$,　$c=132.5\,m$。



注意　上ノ對數計算ニヨツテ得タ結果ハ勿論近似値デアル。

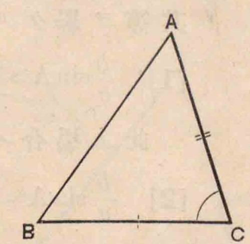
問 1.　$a=485.6\,m$,　$B=38^\circ52'$,　$C=80^\circ26'$　ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

問 2.　$A=32^\circ47'$,　$B=44^\circ17'$,　$b=372.7\,m$　ヲ知ツテ $a$ ヲ計算セヨ。

## 75. [2] ノ場合ノ解法

$a, b$ ト C トヲ知ルトキハ次ノ公式ヲ用ヒル。

(公式) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\dfrac{C}{2} \\ \tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2} \\ c=\dfrac{(a-b)\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{1}{2}(A-B)} \end{cases}$ (第 68 節問)




先ヅ第一式カラ $\frac{1}{2}(A+B)$, 第二式カラ $\frac{1}{2}(A-B)$ ヲ求メ,之ヲ加減シテ A ト B トヲ算出シ,次ニ第三式ニヨツテ $c$ ヲ計算スル。

問　次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。

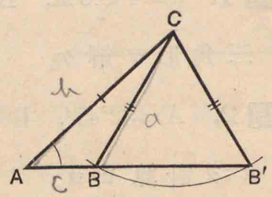
1　$a=456.1\,m$,　$b=296.9\,m$,　$C=74^\circ20'$

2　$a=522\,m$,　$b=320\,m$,　$C=34^\circ22'$

## 76. [3]ノ場合ノ解法

$a, b$ ト A トヲ知ルトキハ次ノ公式ヲ用ヒル。

$$(\text{公式})\begin{cases} \sin B = \dfrac{b\sin A}{a} \\ C = 180^\circ - (A+B) \\ c = \dfrac{a\sin C}{\sin A} \end{cases}$$




**吟味** 第一式カラBヲ定メルトキニ $a, b$, Aノ値ニヨリ二ツノ解ヲ得ル場合(**兩意ノ場合**)ト,一ツノ解ヲ得ル場合ト,不能ノ場合トガ起ル。次ニ其等ヲ擧ゲルト,

[1] $\dfrac{b}{a}\sin A > 1$ ノトキハ $\sin B > 1$ デアルカラ,此ノ場合ハ不能デアル。

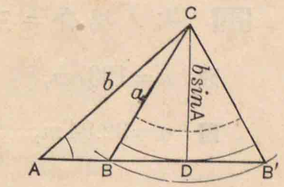
[2] $\dfrac{b}{a}\sin A = 1$ ノトキハ $\sin B = 1$ デアルカラ,$B = 90^\circ$ デアル。依ツテ $A < 90^\circ$ ナルトキニ限ツテ一ツノ解ガアル。

[3] $0 < \dfrac{b}{a}\sin A < 1$ ノトキハ $\sin B < 1$ デアルカラ,第一式ニ適スルBノ値ハ二ツアツテ,一ツハ鋭角,一ツハ鈍角デアル。ソレデ $a \geqq b$ 又ハ $a < b$ ナルニ從ツテ一ツ又ハ二ツノ解ガアル。

**注意** 以上ノ結果ハ $b\sin A$ ガ頂點CカラAB ヘ引



イタ垂線CDノ長サデアルコトニ着目スレバヨクワカル。




**問** 次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。

**1** $a = 250\,cm,\ c = 125\,cm,\ A = 120^\circ$

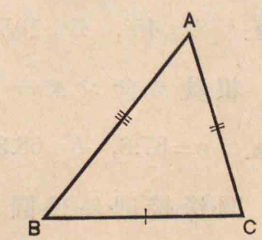
**2** $A = 30^\circ,\ a = 3\,m,\ b = 3\sqrt{3}\,m$

**3** $c = \sqrt{2}\,m,\ b = 1\,m,\ B = 30^\circ$

## 77. [4]ノ場合ノ解法

$a, b, c$ ヲ知ルトキハ次ノ公式ヲ用ヒル。

$$(\text{公式})\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{cases}$$




**注意 1.** 上ノ公式ト公式(23)カラ出來ル次ノ式モ實際ノ計算ニハ便利デアル。

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{s-a},\quad \tan\frac{B}{2} = \frac{r}{s-b},\quad \tan\frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}$$

**注意 2.** 此ノ解法ノヤウニA, B, Cヲ別々ニ求メタ場合ニハ其ノ和ガ $180^\circ$ ニ等シイカ否カヲ驗セヨ。但シ其ノ場合,和ガ1分内外ノ誤差ヲ生ズルハ已ムヲ得ナイ。

**問** 次ノ場合ニ三角形ヲ解ケ。

**1** $a=123cm,\quad b=113cm,\quad c=103cm$

**2** $a=32.94m,\quad b=45.16m,\quad c=15.42m$

## 問題 9

1. 次ノ各部分ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ。

**1** $\mathrm{B}=60°40',\quad \mathrm{C}=59°10',\quad a=10.62$

**2** $\mathrm{B}=82°20',\quad \mathrm{C}=40°20',\quad b=479$

**3** $b=20.71,\quad c=18.87,\quad \mathrm{A}=55°12'$

**4** $a=317,\quad b=533,\quad c=510$

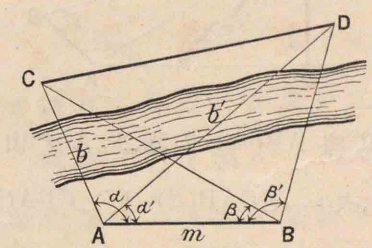
2. $\mathrm{A}=45°,\ \mathrm{B}=105°,\ \mathrm{AB}=c$ トシテ BC 及ビ CA ヲ根號ヲ含ンダママノ式デ表ハセ。

3. $a=87.6,\ b=68.3,\ c=74.3$ トシテ面積及ビ内接圓・傍接圓・外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。



# 第五章 測量問題

## 78. 近ヅキ得ナイ二點ノ距離




C, D ヲ二點トシ之ヲ望ミ得ル適當ナ二點 A, B ヲ選ンデ基線 AB$(m)$ ヲ測リ, A 點デ $\angle\mathrm{BAC}(\alpha)$, $\angle\mathrm{BAD}(\alpha')$ 及ビ $\angle\mathrm{CAD}(\theta)$ ヲ測リ,又 B 點デ $\angle\mathrm{ABC}(\beta)$, $\angle\mathrm{ABD}(\beta')$ ヲ測ル。サウスルト

$$\triangle\mathrm{ABC}\ \text{カラ}\quad \mathrm{AC}=\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\triangle\mathrm{ABD}\ \text{カラ}\quad \mathrm{AD}=\frac{m\sin\beta'}{\sin(\alpha'+\beta')}$$

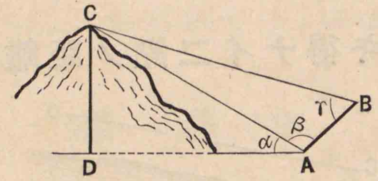
ヲ得ル。依ツテ $\triangle\mathrm{ACD}$ カラ $\angle\mathrm{ACD}$, $\angle\mathrm{ADC}$ ヲ求メ夫々 $\gamma,\ \delta$ デ表ハスト

$$\mathrm{CD}=\frac{(\mathrm{AC}-\mathrm{AD})\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\delta)}$$

之ニヨツテ CD ヲ求メルコトガ出來ル。

**注意** 四點 A, B, C, D ガ同ジ平面上ニアルトスレバ $\theta$ ヲ測ルニ及バナイ。

## 79. 山ノ高サ




先ヅ適當ナ基線 AB($m$) ヲ測リ，A デ山頂 C ノ仰角 CAD($\alpha$) ヲ測リ，次ニ $\angle$CAB($\beta$) ト $\angle$CBA($\gamma$) トヲ測ル。

サウスルト，$\triangle$ABC カラ

$$\mathrm{AC}=\frac{m\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

然ルニ　$$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\sin\alpha$$

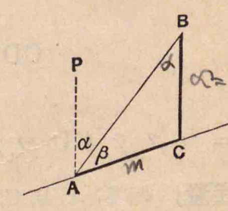
故ニ　$$\mathrm{CD}=\frac{m\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$$

**問 1.** 上ノ圖デ

$\angle\mathrm{CAB}=105°$, $\angle\mathrm{CBA}=30°$, $\angle\mathrm{CAD}=60°$, $\mathrm{AB}=30\,m$

デアレバ山ノ高サ(CD)ハドウカ。

**問 2.** 坂路ノ上ニ立ツテヰル塔 BC ガアル。此ノ坂路上ノ一點 A デ塔頂ト塔脚トヲ視テ，$\angle$BAP($\alpha$) 及ビ $\angle$BAC($\beta$) ヲ得タ。此ノ塔ノ高サヲ求メヨ。但シ AC ノ長サヲ $m$ トスル。






## 80. 三角測量

大キナ地形ヲ測量スルニハ其ノ地面上ニ若干ノ地點ヲ選ビ，此等ヲ頂點トスル數多ノ三角形ヲ以テ地面ヲ被フモノト考ヘル。ソシテ此等ノ三角形ノ諸邊ノ中最モ便宜ナ數邊ノ長サハ之ヲ基線トスルタメニ極メテ精密ニ之ヲ測ル。

陸軍陸地測量部デハ全國ノ地圖ヲ作ルタメニ次ノ基線ヲ測ツテヰル。

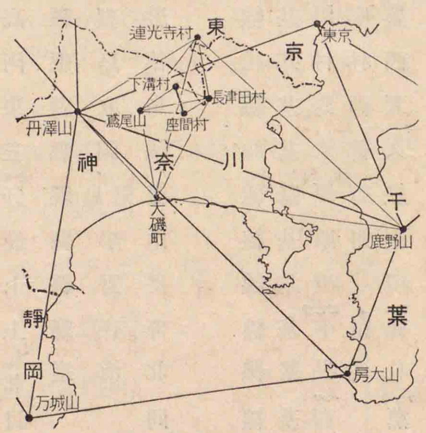
| | | | |
|---|---|---|---|
| 相模野基線 | 神奈川縣 | 高座郡 | 5210.2125 $m$ |
| 三方原(ミカタハラ)基線 | 靜岡縣 | 濱名郡<br>引佐郡 | 10839.9757 $m$ |
| 饗庭野(アヒバノ)基線 | 滋賀縣 | 高島郡 | 3065.7239 $m$ |
| 西林村基線 | 德島縣 | 阿波郡 | 2832.2124 $m$ |
| 天神野基線 | 鳥取縣 | 東伯郡 | 3301.8051 $m$ |
| 久留米基線 | 福岡縣 | 三井郡 | 3161.0071 $m$ |
| 笠野原基線 | 鹿兒島縣 | 肝屬(キモツキ)郡 | 5875.5088 $m$ |
| 鹽野原基線 | 山形縣 | 最上郡 | 5129.5872 $m$ |
| 須坂基線 | 長野縣 | 上高井郡 | 3291.9120 $m$ |
| 鶴兒平(ツルコダヒラ)基線 | 靑森縣 | 上北郡 | 4006.0309 $m$ |
| 札幌基線 | 北海道 | 札幌郡<br>札幌市 | 4539.7703 $m$ |
| 薫別(クンネベツ)基線 | 同 | 目梨郡 | 4069.8502 $m$ |
| 聲問(コエトヒ)基線 | 同 | 宗谷郡 | 2677.5035 $m$ |
| 沖繩基線 | 沖繩縣 | 中頭(ナカガミ)郡 | 4151.6773 $m$ |
| 擇捉(エトロフ)基線 | 北海道 | 紗那(シヤナ)郡 | 4105.6081 $m$ |

| | | |
|---|---|---|
| 宜(ギ)蘭(ラン)基線 | 臺灣臺北州羅東郡 | 4225.8415 $m$ |
| 埔里社基線 | 同　臺中州能高郡 | 2575.7965 $m$ |
| 鳳山基線 | 同　高雄州鳳山郡 | 4961.3844 $m$ |
| 大谷基線 | 樺太豐原郡 | 4999.6897 $m$ |
| 敷香基線 | 同　敷香郡 | 4999.4504 $m$ |

此等ノ基線ト各地點ニ於テ測ツタ他ノ地點ニ向ヘル直線間ノ角トヲ以テ順次間接ニ三角形ノ解法ヲ用ヒテ各地點間ノ距離ヲ測量スル。

此ノヤウナ測量ヲ**三角測量**トイヒ,三角形ノ大小ニヨツテ一等,二等,三等ノ別ガアル。又地面ヲ被ヘル三角形ノ群ヲ**三角網**トイフ。但シ大地測量ノヤウニ地面上甚ダ遠イ諸點間ノ距離ヲ測ルトキニハ,之ヲ直線ト見做サズシテ,球面ノ大圓弧ヨリナル球面三角形ノ邊トナスベキデアル。從ツテ其ノ計算ハ

相模野附近ノ三角網




基線(下溝村·座間村間)ヲ一邊トスル小三角形カラ次第ニ三角形ヲ擴大シテ終ニ一等三角形ノ一邊(丹澤山·鹿野山間)ヲ作ルコトヲ示ス。



**球面三角法***ニヨラナケレバナラナイ。

## 問題 10

1. 縮尺 $\frac{1}{600}$ ノ圖面上ニ $\triangle ABC$ ノ土地ガアル。今之ヲ圖面ノ上デ測ルニ $\angle ABC=15°$, $\angle ACB=45°$, $BC=40\,cm$ デアル。此ノ土地ノ廣サヲ計算セヨ。

2. 海濱ニ聳エル山ノ高サ CD ヲ測ルタメニ $365\,m$ 距タル二船 A, B ニ於テ $\angle BAC=67°16'$, $\angle ABC=54°20'$, 仰角 $CAD=35°30'$ ヲ測ツタ。之カラ山ノ高サヲ算定セヨ。(148頁ノ上圖ヲ見ヨ)

3. 或山ノ頂上デ同ジ方向ニアル二ツノ家屋ノ俯角ヲ測ツテ $23°20'$ ト $18°10'$ トヲ得タ。又此ノ兩家屋ノ距離ハ $440\,m$ デアル。此ノ山ノ高サヲ求メヨ。但シ兩家屋ハ同ジ水平面上ニアルモノトスル。

4. N 15° W ノ方位ニ向ヒ一直線ノ道路ヲ進行シタ人ガ,正北ニ當ツテ一ツノ塔ヲ見テカラ $200\,m$ 進ンダトキ再ビ此ノ塔ヲ北東ノ方位ニ見タトイフ。然ラバ此ノ塔ヲ正北ニ見タトキノ位置カラ塔マデノ距離ハ幾米カ(米ノ小數第一位未滿四捨五入)。

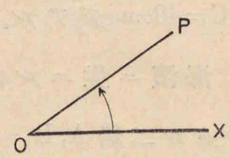
* 三角法ヲ二ツニ分ケ,平面上ノ三角形ニ關スルモノヲ**平面三角法**トイヒ,球面三角形ニ關スルモノヲ**球面三角法**トイフ。

# 第六章　一般ノ角ノ三角函數

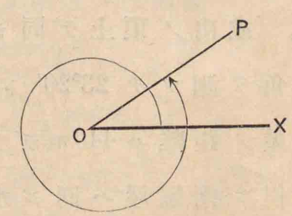
## 81. 一般ノ角

∠XOP ハ其ノ頂點 O ヲ一端トスル半直線ガ其ノ角ノ平面上ヲ OX ノ位置カラ OP ノ位置マデ廻轉シテ出來タモノト考ヘル。

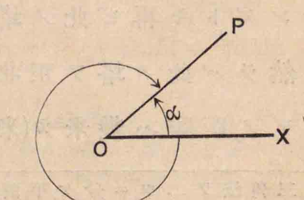
此ノトキ OX ヲ角ノ**主線**, OP ヲ角ノ**動徑**トイフ。




角ノ大小ハ動徑ガ主線カラ發シテ其ノ位置ニ達スルマデニ廻轉シタ量ノ多少ニヨルモノデアルカラ,動徑ガ OX ヲ發シテ幾回モ OX ノ位置ヲ通過シテ OP ノ位置ニ來タモノトモ考ヘラレル。從ツテ ∠XOP ヲ 360° ヨリモ大キイ角ト考ヘルコトガ出來ル。




又動徑ガ主線カラ廻轉スル方向ハ次ノ圖ニ示スヤウニ二ツアル。此ノ相反スル二ツノ方向ヲ區別スルタメニ角ノ大サニ正負ノ符號ヲ附ケテ,時計ノ針ト反對





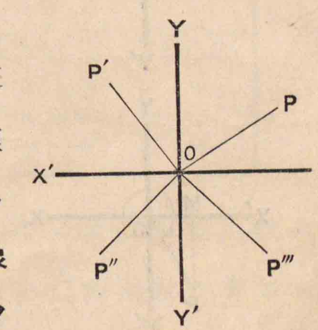

ノ方向ニ廻轉シテ出來タ角ヲ**正角**トシ,時計ノ針ト同ジ方向ニ廻轉シテ出來タ角ヲ**負角**トスル。

以上ノ事柄カラ**一般ノ角**ノ大サニハ正負ノアラユル値及ビ0ガアルコトヲ知ル。故ニ前圖ニ示ス ∠XOP ハ正負無數ノ角ヲ表ハスガ,其ノ中ノ最小ナ正角ヲ $\alpha$ トスルト,其ノ總テノ角ノ値ハ次ノ式デ表ハサレル。但シ $n$ ハ 0 又ハ正負ノ整數ヲ表ハス。

$$\alpha+n.360^\circ$$

## 82. 象限

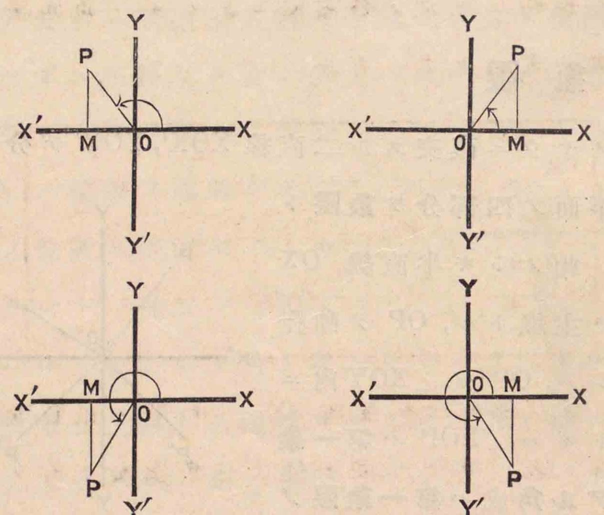
圖ノヤウニ直交スル二直線 XOX', YOY' デ分ケラレタ平面ノ四部分ヲ**象限**トイフ。此ノトキ半直線 OX ヲ角ノ主線トシ, OP ヲ動徑トスレバ, OP ガ ∠XOY 内ニアルトキハ ∠XOP ハ**第一象限ニアル角**或ハ**第一象限ノ角**トイヒ, OP ガ ∠YOX' 内, ∠X'OY' 内, ∠Y'OX 内ニアルニ從ツテ其ノ角ハ夫々**第二,第三,第四象限ニアル角**或ハ**第二,第三,第四象限ノ角**トイフ。



問　120°, 225°, 405°, −30°, −300, 750° ハ各;第何象限ノ角デアルカ。

## 83. 一般ノ角ノ三角函數

$\angle XOP$ ヲ $\theta$ デ表ハシ, OX ヲ主線, OP ヲ動徑トスレバ,角 $\theta$ ノ三角函數ハ OP 上ノ一點 P カラ OX 或ハ其ノ延長上ヘ垂線 PM ヲ引イテ鋭角ヤ鈍角ノ場合ト同樣ニ次ノヤウニ定メル。




$$\sin\theta = \frac{MP}{OP},\quad \cos\theta = \frac{OM}{OP},$$

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM},\quad \cot\theta = \frac{OM}{MP}$$



ソシテ垂線 MP, 動徑 OP, 其ノ射影 OM ノ長サニ關シテ次ノヤウニ正負ノ規約ヲ設ケル。

**[1] 動徑 OP ハ常ニ正トスル.**

**[2] 垂線 MP ハ XOX′ ニ關シテ OY ト同ジ側ニアルトキハ正トシ, OY′ ト同ジ側ニアルトキハ負トスル.**

**[3] 射影 OM ハ OX 上ニアルトキハ正トシ, OX′ 上ニアルトキハ負トスル.**

此ノ規約ニヨツテ各象限ニ於ケル三角函數ノ符號ハ次ノ表ノヤウニナル。

| 函數＼象限 | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | + | + | − | − |
| $\cos\theta$ | + | − | − | + |
| $\tan\theta$<br>$\cot\theta$ | + | − | + | − |

既ニ述ベタヤウニ動徑 OP ノ位置ハ正負共ニ無數ノ角ヲ表ハスカラ,同ジ値ノ三角函數ヲ有スル角 $\theta$ ハ無數ニアル。今其ノ中ノ最小ナ正角ヲ $\alpha$ トスルト,此等ノ總テノ角ノ三角函數ハ皆夫々 $\alpha$ ノ三角函數ニ等シイ。即チ

$$\left.\begin{aligned}\sin(n.360^\circ+\alpha)&=\sin\alpha\\ \cos(n.360^\circ+\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(n.360^\circ+\alpha)&=\tan\alpha\\ &\text{等}\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

但シ $n$ ハ正負ノ整數又ハ 0 デアル。

從ツテ **或角ニ 360° ノ任意整數倍ヲ加減スルモ其ノ三角函數ノ値ハ變ハラナイ.**

**問 1.** 次ノ各角ノ三角函數ノ符號ヲイヘ。

135°, 265°, 275°, −10°, −91°, −1000°

**問 2.** 次ノ各角ノ三角函數ヲ求メヨ。

390°, 765°, 10860°, −330°, −1020°

**問 3.** 正弦ガ $\frac{1}{2}$ ニ等シイ角ヲ三ツイヘ。

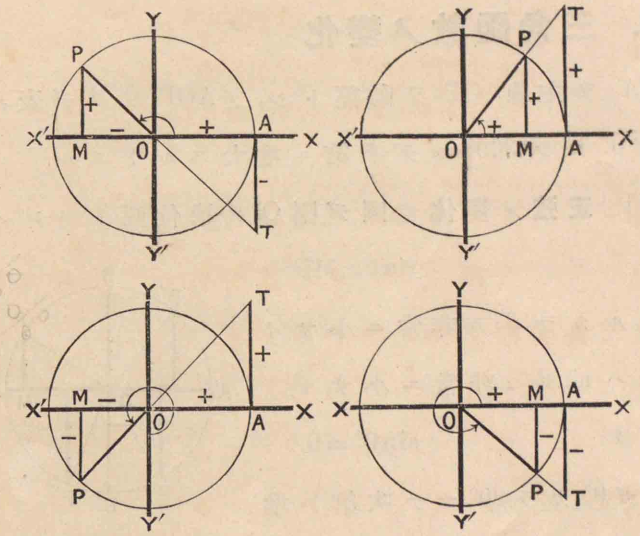
## 84. 三角函數ヲ線分デ表ハスコト

∠XOP ノ頂點 O ヲ中心トシ,單位ノ長サヲ半徑トスル圓(之ヲ**單位圓**トイフ)ヲ畫キ,主線 OX, 動徑 OP ト夫々 A, P デ交ハラシメ且 A ニ於ケル其ノ圓ノ切線ト OP トノ交點ヲ T トスレバ, OP ト OA トノ數値ハ共ニ 1 デアルカラ, ∠XOP ヲ $\theta$ デ表ハスト,

$$\sin\theta=\mathrm{MP},\quad \cos\theta=\mathrm{OM},\quad \tan\theta=\mathrm{AT}$$

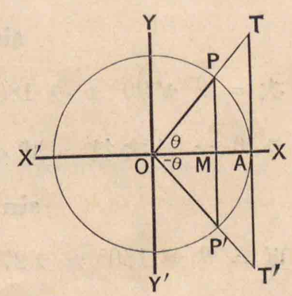
但シ MP, OM, AT ハ夫々其ノ數値ヲ表ハスモノト






シ,正トモ,負トモ又 0 トモナル。

## 85. 負角ノ三角函數




右ノ圖デ

∠XOP$=\theta$, ∠XOP'$=-\theta$

トシ,此ノ二角ノ三角函數ヲ比較シテ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)&=\cos\theta\\ \tan(-\theta)&=-\tan\theta\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

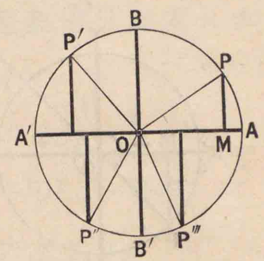
**問** −45°, −30°, −60°, −120° ノ三角函數ヲイヘ。

## 86. 三角函數ノ變化

OA ヲ主線, OP ヲ動徑トシ, $\angle AOP$ ヲ $\theta$ デ表ハシ, $\theta$ ガ $0°$ カラ $360°$ マデ次第ニ增大スルトスル。

[1] **正弦ノ變化** 圖デ圓 O ヲ單位圓トスレバ

$$\sin\theta = MP$$




デアルカラ $\theta$ ガ非常ニ小サイトキハ $\sin\theta$ モ非常ニ小サイ。ソシテ

$$\sin 0° = 0$$

$\theta$ ガ $0°$ カラ $90°$ マデ次第ニ增大スルトキ $\sin\theta$ ハ之ニ伴ツテ 0 カラ 1 マデ次第ニ增大スル。ソシテ

$$\sin 90° = 1$$

次ニ $\theta$ ガ $90°$ カラ $180°$ マデ增大スルトキ $\sin\theta$ ハ 1 カラ 0 マデ次第ニ減少スル。ソシテ

$$\sin 180° = 0$$

更ニ $\theta$ ガ $180°$ カラ $270°$ マデ增大スルトキ $\sin\theta$ ハ常ニ負デ其ノ絕對値ハ 0 カラ 1 マデ次第ニ增大スル。ソシテ

$$\sin 270° = -1$$

$\theta$ ガ $270°$ カラ $360°$ マデ增大スルトキ, $\sin\theta$ ハ尙負デ其ノ絕對値ハ 1 カラ 0 マデ減少スル。ソシテ



$$\sin 360° = 0$$

$\theta$ ガ $360°$ ヲ超エテ更ニ增大スレバ,復タ上ト同一ノ變化ヲ繰返スコトハ明ラカデアル。

[2] **餘弦ノ變化** 前頁ノ圖デ

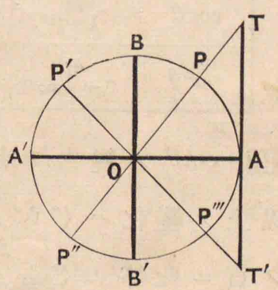
$$\cos\theta = OM$$

デアル。ソレデ第一象限デハ $\cos\theta$ ハ 1 カラ 0 マデ減少シ,第二象限デハ 0 カラ $-1$ マデ減少シ,第三,第四象限デハ反對ニ增大スル。ソシテ

$$\cos 0° = 1, \quad \cos 90° = 0, \quad \cos 180° = -1,$$
$$\cos 270° = 0, \quad \cos 360° = 1$$

[3] **正切ノ變化** 次圖デ圓 O ヲ單位圓トスレバ

$$\tan\theta = AT$$




ソシテ $\tan 0° = 0$

$\theta$ ガ $0°$ カラ $90°$ マデ次第ニ增大スレバ, $\tan\theta$ ハ 0 カラ次第ニ增大シ, $\theta$ ガ十分 $90°$ ニ近ヅケバ, $\tan\theta$ ハ如何ニ大ナル正數ヨリモ更ニ大トナル。然シ $\theta$ ガ $90°$ ヲ超エルト同時ニ $\tan\theta$ ハ俄ニ負トナツテ其ノ絕對値ハ如何ナル數ヨリモ大デアル。故ニ

$$\tan 90° = \pm\infty$$

$\theta$ ガ $90°$ カラ $180°$ マデ增大スルトキハ, $\tan\theta$ ハ常ニ負デ其ノ絶對値ハ $\infty$ カラ $0$ マデ減少スル。ソシテ

$$\tan 180° = 0$$

$\theta$ ガ第三象限ニアルトキハ $\tan\theta$ ハ第一象限ノ場合ト同ジ變化ヲナシ,第四象限ニ於テハ第二象限ノ場合ト同ジ變化ヲスル。ソシテ

$$\tan 270° = \pm\infty, \quad \tan 360° = 0$$

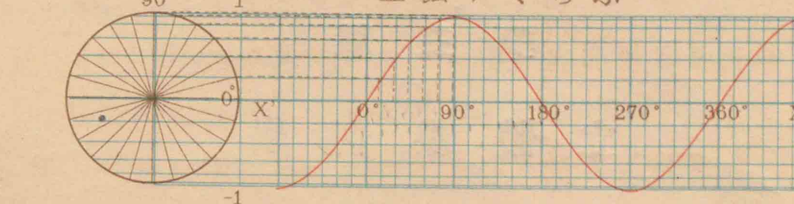
以上三ツノ三角函數ノ變化ハ次表ノ通リデアル。

| $\theta$ ／ 函數 | 第一象限 $0°\to 90°$ | 第二象限 $90°\to 180°$ | 第三象限 $180°\to 270°$ | 第四象限 $270°\to 360°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 增 $0\to 1$ | 減 $1\to 0$ | 減 $0\to -1$ | 增 $-1\to 0$ |
| $\cos\theta$ | 減 $1\to 0$ | 減 $0\to -1$ | 增 $-1\to 0$ | 增 $0\to 1$ |
| $\tan\theta$ | 增 $0\to +\infty$ | 增 $-\infty\to 0$ | 增 $0\to +\infty$ | 增 $-\infty\to 0$ |

**問** $\cot\theta$ ノ變化ヲ考究セヨ。

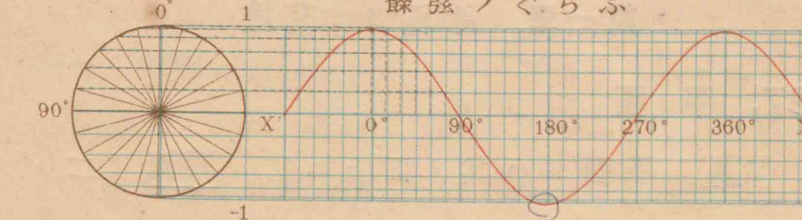
以上ノ變化ハぐらふデ示スト一層明ラカデアル。次ノ頁ニ此等ノぐらふヲ示ス。此等ノ曲線ハ夫々 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ ノぐらふデ,之ヲ夫々**正弦曲線**,**餘弦曲線**,**正切曲線**トイフ。

正弦ノぐらふ

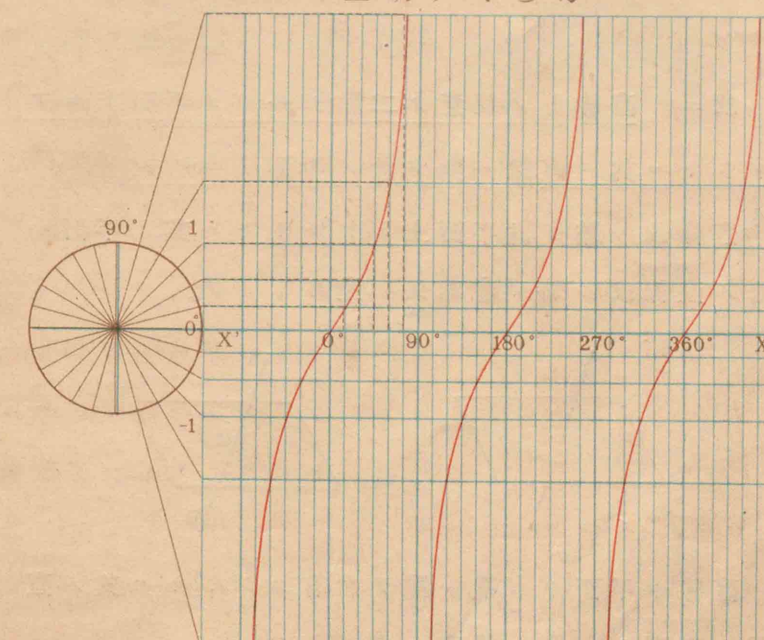



連續

餘弦ノぐらふ




正切ノぐらふ




不連續

# 第三篇

# 立體幾何學

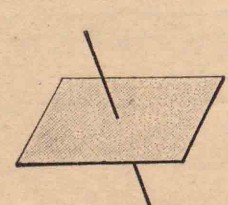
## 第一章　平面及ビ直線

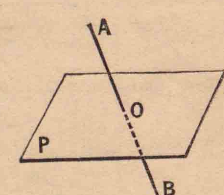
### 87. 平面

定義　**平面**トハ其ノ面上ニアル任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全ク其ノ面ニ密着スル面ヲイフ。

故ニ　直線上ノ任意ノ二點ガ一ツノ平面上ニアルトキハ,其ノ直線ハ全ク此ノ平面上ニアル。

直線或ハ點ガ或平面上ニアルトキハ,其ノ平面ハ此ノ直線或ハ點ヲ**含ム**又ハ**通ル**トイフ。





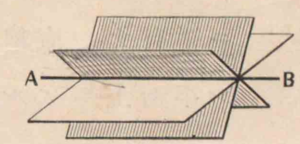

直線ト平面トガ唯一點ヲ共有スルトキハ,其ノ直線ト平面トハ互ニ**相交ハル**トイフ。



注意　平面ハ何レノ方向ヘモ無限ニ擴ガツテヰルモノデアルガ,之ヲ書キ表ハスニハ其ノ上ニアル圖形(適當ナ圖形ガナイトキハ平行四邊形)デ示ス。例ヘバ前圖ニ於ケル平面Pノヤウデアル。

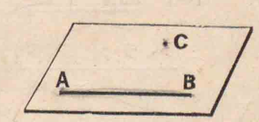
### 88. 平面ノ決定

平面上ニアル一直線ヲ固定シテモ其ノ平面ハ此ノ直線ヲ軸トシテ自由ニ廻轉スルコトガ出來ル。然シ更ニ此ノ直線外ニ平面上ノ一點ヲ固定スレバ其ノ平面ハ廻轉スルコトガ出來ナイ,卽チ全ク定マル。




公理一　一直線ト其ノ上ニナイ一點トヲ含ム平面ハ唯一ツシカナイ。

右ノ圖デ,直線 AB ト點 C トヲ含ム平面ハ唯一ツシカナイ。




此ノ公理ヲ通例次ノヤウニ述ベル。

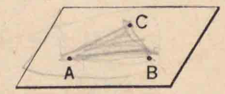
**一直線ト其ノ上ニナイ一點トハ一平面ヲ決定スル.**

決定ー(一定數ー唯一ツ)

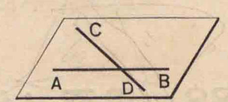


系 次ノ各〻ハ一平面ヲ決定スル。

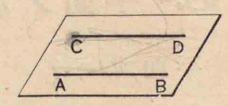
[1] 一直線上ニナイ三點。




[2] 相交ハル二直線。



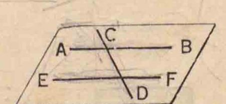

[3] 平行ナル二直線。



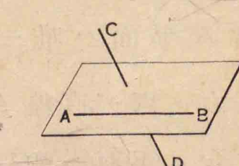

(平行線 AB, CD ハ同ジ平面上ニアル。ソシテ其ノ平面ハ AB ト CD 上ノ一點 C トデ決定スルカラデアル)

問 相交ハル二直線ノ一ツニ交ハツテ他ノ一ツニ平行ナル直線ハ總テ原ノ二直線デ決定サレル平面上ニアル。

注意 空間ニアル二直線ノ配置ハ必ズ次ノ何レカ一ツデアル。




[1] 同ジ平面上ニアル場合(相交ハルカ,又ハ平行デアル)。



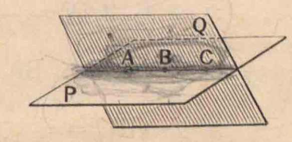

[2] 同ジ平面上ニナイ場合(相交ハラズ且平行デナイ)。

## 89. 平面ノ交ハリ

定理一 **一點(A)ヲ共有スル二平面(P, Q)ハ此ノ點(A)ヲ通ル一直線ヲ共有スル.**



證明 二面ノ出會フ處ハ線デアルカラ,二平面 P, Q ガ一點 A ヲ共有スルトキハ,其ノ出會フ處ハ A ヲ通ル線デアル。




今其ノ線上ニ於テ點 A ノ外ニ任意ノ二點 B, C ヲ取レバ,三點 A, B, C ハ一直線上ニアル。

何故ナレバ,若シサウデナイトスレバ,一直線上ニナイ三點ヲ含ム平面ガ P ト Q ト二ツアルコトニナリ,公理一ニ背クカラデアル。

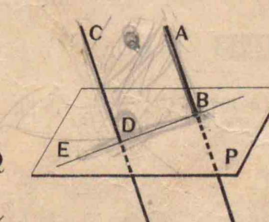
故ニ二平面 P, Q ハ A ヲ通ル唯一ツノ直線ヲ共有スル。

定義 二平面ガ一直線ヲ共有スルトキハ,其ノ二平面ハ**相交ハル**トイヒ,其ノ直線ヲ**交線**又ハ**交ハリ**トイフ。

?

定理二 **平行線(AB, CD)ノ一ツ(AB)ニ交ハル平面(P)ハ他ノ一ツ(CD)ニモ交ハル.**

證明 直線 AB ト平面 P トノ交點ヲ B トスルト,P ト AB, CD ノ決定スル平面 Q トハ此ノ點 B ヲ共有スル



カラＢヲ通ル一直線デ交ハル。 (定理一)

此ノ交線ヲ BE トスルト, BE ハ AB ニ交ハルカラ CD ニモ交ハル。其ノ交點ヲＤトスレバ, P ト CD トハ此ノ點Ｄヲ共有スル。

次ニ直線 CD 上ノＤデナイ點ハ皆平面Ｐノ外ニアル。

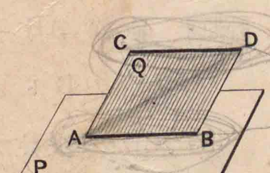
何故ナレバ,若シ CD 上ノ他ノ一點例ヘバＣガＰノ上ニアルトスルナラバ,一直線 BD ト其ノ上ニナイ一點Ｃトヲ含ム平面トシテＰトＱトノ二ツヲ得ルカラデアル。

故ニ平面Ｐハ CD ニ交ハル。

## 90. 直線ト平面トノ平行

定理三 **平行線 (AB, CD) ノ一ツ (AB) ヲ含ミ,他ノ一ツ (CD) ヲ含マナイ平面 (P) ハ後ノ直線 (CD) ニ交ハラナイ.**

證明 AB ト CD トハ平行デアルカラ,一平面ヲ決定スル。




此ノ平面ヲＱトスルト,二



平面ＰトＱトノ交線ハ AB デアル。

依ツテ若シＰガ CD ニ交ハルナラバ,其ノ交點ハ AB ト CD トノ交點デナケレバナラナイ。

然ルニ AB ト CD トハ交ハラナイ。

故ニ直線 CD ハ平面Ｐニ交ハラナイ。

定義 直線ト平面トガ交ハラナイトキハ,此ノ兩者ハ互ニ**平行デアル**トイフ。

故ニ定理三ハ次ノヤウニ述ベルコトガ出來ル。

**平行線ノ一ツヲ含ミ,他ノ一ツヲ含マナイ平面ハ後ノ直線ニ平行デアル.**

又定理三ハ次ノヤウニ述ベルコトモ出來ル。

**一直線ガ之ヲ含マナイ平面上ノ一直線ニ平行デアレバ,初メノ直線ハ其ノ平面ニ平行デアル.**

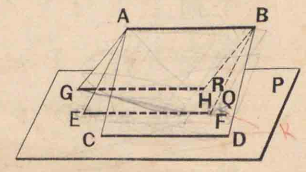
問 1. 一直線ト一平面トノ空間ニ於ケル總テノ配置ヲ問フ。 (第88節注意參照)

定理四 **一平面(P)ニ平行ナル一直線(AB)ヲ含ム平面(Q, R等)ト其ノ平面(P)トノ交線(CD, EF等)ハ其ノ直線(AB)ニ平行デ且互ニ平行デアル.**

證明 直線 AB ハ平面Ｐニ平行デアルカラ此ノ平面ト交ハラナイ。依ツテ AB ハＰ上ニアル

直線 CD ト交ハラナイ。

ソシテ AB ト CD トハ共ニ同ジ平面 Q ノ上ニアル。




故ニ　　CD ∥ AB

同様ニ EF, GH 等モ亦 AB ニ平行デアル。

次ニ CD ト EF トハ平行デアル。

何故ナレバ,若シサウデナイトスレバ,此ノ兩直線ハ共ニ平面 P 上ニアルカラ相交ハル。其ノ交點ヲ K トスレバ, AB ト其ノ上ニナイ一點 K トヲ含ム二平面 Q, R ガ出來ルカラデアル。

同様ニ交線ノ何レノ二ツモ亦平行デアル。

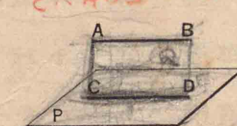
?

**系一**　一直線(AB)ニ平行ナル平面(P)上ノ一點(C)ヲ通ツテ此ノ直線ニ平行ナル直線(CD)ヲ引クトキハ,其ノ直線ハ全ク此ノ平面(P)上ニアル。

下ーデヨイカ、

CハAB上ニナシ

(何故ナレバ AB ト C トノ決定スル平面ト P トノ交線ヲ CD トスルト, CD ガ C ヲ通ツテ AB ニ平行ナル直線デアルカラデアル)

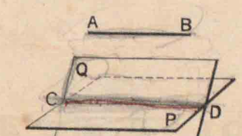



**系二**　同ジ直線(AB)ニ平行ナル二平面(P, Q)ノ

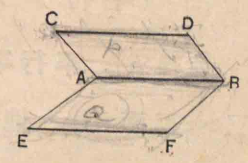


交線(CD)ハ其ノ直線(AB)ニ平行デアル。

(何故ナレバ CD 上ノ一點 C ヲ通ツテ AB ニ平行ナル直線ヲ引クト,此ノ直線ハ平面 P 上ニアリ,又平面 Q 上ニアル(系一)。故ニ此ノ直線ガ卽チ CD デアルカラデアル)

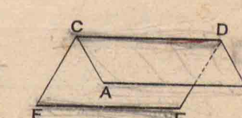



**系三**　平行線(CD, EF)ヲ一ツヅツ含ム二ツノ平面ノ交線(AB)ハ此ノ平行線(CD, EF)ノ各々ニ平行デアル。

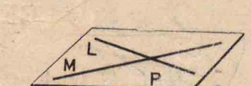


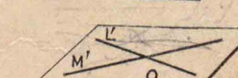

**系四**　同ジ直線(AB)ニ平行ナル二直線(CD, EF)ハ互ニ平行デアル。

(何故ナレバ AB ト CD トノ決定スル平面ト, EF ト CD 上ノ一點 C トノ決定スル平面トノ交線ハ AB ニ平行デアルカラ,卽チ CD デアル。ソシテ此ノ交線ハ又 EF ニモ平行デアル(系三)カラデアル)




**系五**　相交線(L, M)ガ夫々此等ト同ジ平面上ニナイ他ノ相交線(L′, M′)ニ平行デアレバ,此ノ二組ノ相交線ノ決定スル平面(P, Q)ハ交ハラナイ。




(歸謬法)

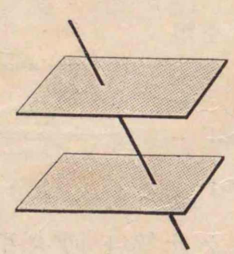
問 2. 折面四邊形(四頂點ガ悉ク同ジ平面上ニナイモノ)ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二直線ハ互ニ他ヲ二等分スル。

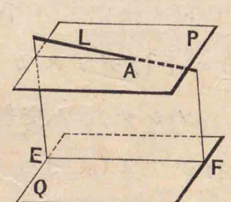
## 91. 平面ノ平行

定義 二平面ガ交ハラナイトキハ,此ノ二平面ハ平行デアルトイフ。

定理五 **平行平面(P, Q)ノ一ツ(P)ニ交ハル直線(L)又ハ平面(R)ハ他ノ一ツ(Q)ニモ交ハル.**

證明 [1] 假ニ直線Lガ平面Qニ交ハラナイトシ,LトQ上ノ任意ノ點Eトヲ含ム平面トQト

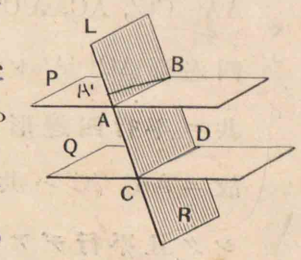





ノ交線ヲ EF トスルト,Lハ EF ニ平行デアル。(定理四)
又PトQトハ平行デアルカラ EF ハPニ平行デアル。故ニLハ全クPニ含マレル。(定理四系一)
コレハ假設ニ戻ル。故ニLハ平面Qニ交ハル。



[2] 二平面PトRトノ交線ヲ AB トシ,Rノ上ニ於テ AB 上ノ任意ノ點Aヲ通ッテ AB ニ交ハル直線Lヲ引クト,LハPニ交ハルカラ又平面Qニモ交ハル。 (上ノ[1])




ソシテ其ノ交點Cハ二平面RトQトノ上ニアル。故ニ二平面RトQトハCヲ通ル一直線デ交ハル。

定理六 **一平面ガ平行平面ニ交ハレバ,其ノ交線ハ平行デアル.**

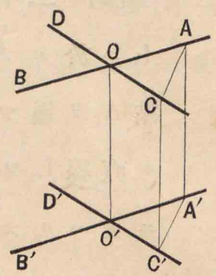
(學生之ヲ證明セヨ)

問 平行平面ガ他ノ平行平面ニ交ハレバ,其ノ四ツノ交線ハ互ニ平行デアル。

定理七 **一組ノ相交線(AOB, COD)ガ夫々他ノ一組ノ相交線(A'O'B', C'O'D')ニ平行デアルトキハ,其ノ夾角ハ相等シイカ,又ハ互ニ補角デアル.**

證明 O及ビO'カラ AB 及ビ A'B' ノ上ニ,CD ト C'D' トノ決定スル平面ノ同ジ側ニ,OA=O'A' ナルヤウニA及ビA'ヲ取リ,同樣ニ CD 及ビ C'D'

ノ上ニ C 及ビ C′ ヲ取リ, OO′, AA′, CC′, AC, A′C′ ヲ結ブト, 四邊形 AOO′A′ ト COO′C′ トハ共ニ平行四邊形デアル。




故ニ AA′, CC′ ハ共ニ OO′ ニ等シク且平行デアル。(P169 系四)

從ツテ四邊形 AA′C′C ハ平行四邊形デアル。

依ツテ　　$AC=A'C'$

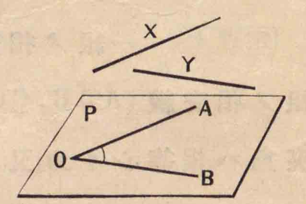
故ニ　　$\triangle AOC\equiv\triangle A'O'C'$

故ニ　　$\angle AOC=\angle A'O'C'$

同様ニ $\angle AOD$ ト $\angle A'O'D'$ ナドモ相等シイ。

又 $\angle AOC$ ト $\angle B'O'C'$ ナドハ互ニ補角デアル。

**定義**　同ジ平面上ニナイ二直線ノナス角トハ任意ノ一點カラ其ノ直線ノ各ニ平行ニ引イタ二直線ノ夾角ヲイフ。




若シ其ノ夾角ガ直角デアルトキハ,其ノ二直線ハ互ニ垂直デアルトイフ。

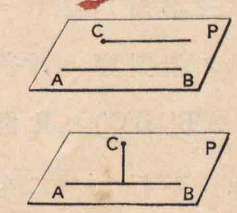


## 問題 11

1. 三平面ハドンナ配置ニアルカ。特別ナ場合ヲモ擧ゲヨ。?

2. 與ヘラレタ一點ヲ通ツテ與ヘラレタ一直線ニ平行ナル直線ト垂直ナル直線トヲ引ケ。

**注意**　本問題ハ立體幾何學ニ於ケル作圖題デアル。

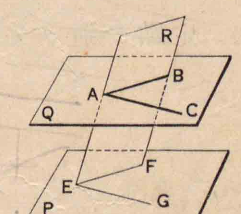



立體幾何學ニ於ケル作圖題ノ解法ハ其ノ正確ナ圖形ヲ書クコトハ出來ナイカラ,次ノ方法ニヨツテ解答トナル圖形ノ位置ノ決定法ヲ論定スレバヨイ。

[1]　第88節ニヨツテ平面ヲ作ルコト。

[2]　既ニ位置ヲ定メタ平面上ニ於テ平面幾何學デ定メタ作圖ヲナスコト。

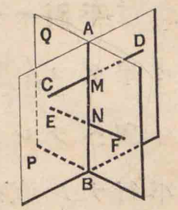
3. 一定點ヲ通ツテ一定平面ニ平行ナル直線ヲ引ケ。又平行ナル平面ヲ作レ。



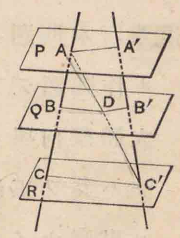

4. 同ジ點ヲ通ツテ同ジ平面ニ平行ナル直線ヲ引ケバ,其等ノ直線ハ皆其ノ點ヲ通ツテ此ノ平面ニ平行ナル平面上ニアル。?

5. 與ヘラレタ一直線ヲ通リ,此ノ直線ト同ジ平面上ニナイ與ヘラレタ直線ニ平行ナル平面ヲ作レ。

6. 一定點Aヲ通ツテ同ジ平面上ニナイ二定直線CD, EFニ交ハル直線ヲ引ケ。




7. 二直線ABC, A′B′C′ガ平行ナル三平面P, Q, Rニ交ハルトキハ,其ノ相對應セル部分(AB, BC 及ビ A′B′, B′C′)ハ比例ヲナス。




8. 平行ナル二平面間ニ夾マレル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。又此ノ線分ヲ定比ニ分ケル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 立體幾何學デハ點ノ軌跡ガ面デアルコトガアル。又點ノ軌跡ノ外ニ線ノ軌跡モアル。

9. 定點ヲ通リ定平面ニ平行ナル直線ノ軌跡ヲ求メヨ。



## 第二章 垂線

### 92. 垂線・斜線

**定理八 相交線(OC, OD)ノ各〻ニ垂直ナル直線(OA)ハ,此ノ二直線ノ決定スル平面上ニアツテ,其ノ交點(O)ヲ通ル任意ノ直線(OE)ニ垂直デアル.**

證明 OC, OE, OD ニ夫々 C, E, D デ交ハル任意ノ直線ヲ引キ,又 AO ヲ B マデ延長シテ, OB=OA ナラシメ,二點 A, B ヲ各〻三點 C, E, D ニ結ブト, OC, OD ハ共ニ AB ノ垂直二等分線デアル。

故ニ $AC=BC$

及ビ $AD=BD$

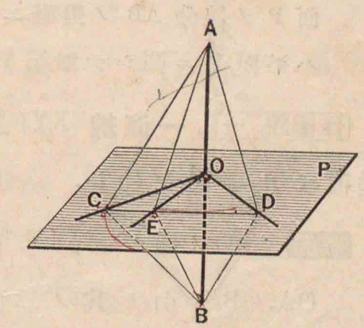
故ニ $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$

故ニ $\angle ACD = \angle BCD$

故ニ $\triangle ACE \equiv \triangle BCE$

故ニ $AE=BE$

故ニ $OA \perp OE$




系 一平面ニ交ハル直線ガ,其ノ交點ヲ通ル其ノ平面上ノ二直線ノ各〻ニ垂直デアレバ,其ノ直線ハ其ノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直デアル。

定義　平面ニ交ハル直線ガ,其ノ交點ヲ通ル此ノ平面上ノ總テノ直線ニ垂直デアレバ,此ノ直線ヲ其ノ**平面ノ垂線**トイヒ,此ノ直線ト其ノ平面トハ互ニ**垂直**デアルトイフ。

又平面ニ交ハツテ垂直デナイ直線ヲ其ノ**平面ノ斜線**トイフ。

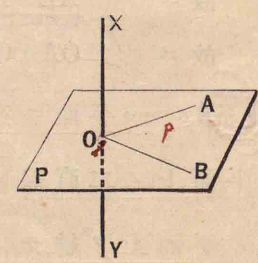
垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲ其ノ垂線又ハ斜線ノ**足**トイフ。

注意　前頁ノ圖デ,直線 AB ト平面 P トハ互ニ**直交スル**トモイヒ,斜線ト平面トハ互ニ**斜交スル**トイフ。又平面 P ヲ線分 AB ノ**垂直二等分面**トイフ。又二點 A, B ハ平面 P ニ關シテ**對稱デアル**トイフ。

作圖題 一　**一直線(XY)上ノ一點(O)ヲ通ツテ,之ニ垂直ナル平面ヲ作レ.**

作圖　O ヲ通ツテ XY ニ垂直ナル任意ノ二直線 OA, OB ヲ引キ,其ノ二直線ノ決定スル平面 P ヲ作レ。

P ハ求メル平面デアル。




證明　(學生之ヲナセ)

吟味　若シ O ヲ通ツテ XY ニ



垂直ナル平面ガ P ノ外ニアルナラバ,之ヲ Q トシテ XY ヲ含ミ P, Q ノ交線ヲ含マナイ任意ノ平面 R ヲ作ルト, R ト P, Q トノ交線ハ共ニ R 上ニアツテ O ヲ通リ XY ニ垂直デアル。之ハ不合理デアル。

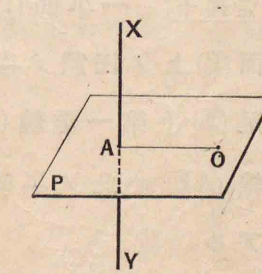
依ツテ求メル平面ハ唯一ツニ限ル。

系一　一直線上ノ一點ヲ通ツテ之ニ垂直ナル直線ハ,皆此ノ點ヲ通ツテ此ノ直線ニ垂直ナル平面上ニアル。

系二　二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,其ノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分面デアル。

作圖題 二　**一直線(XY)上ニナイ一點(O)ヲ通ツテ之ニ垂直ナル平面ヲ作レ.**

作圖　O カラ XY ニ垂線 OA ヲ引キ,其ノ足 A ヲ通ツテ XY ニ垂直ナル平面ヲ作レバ之ガ求メル平面デアル。

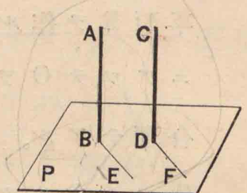



證明　(學生之ヲナセ)

吟味　求メル平面ハ唯一ツシカナイ。

定理九 **平行線(AB, CD)ノ一ツ(AB)ニ垂直ナル平面(P)ハ他ノ一ツ(CD)ニモ垂直デアル.**

證明 二直線AB,CDハ平行デ,平面PハABニ交ハルカラCDニモ交ハル(定理二)。其ノ交點ヲDトスル。




Dヲ通ツテP上ニ任意ノ直線DFヲ引キ,BカラDFニ平行ニBEヲ引クト,∠CDFハ∠ABEニ等シイカ又ハ補角デアル。 (定理七)

ソシテ∠ABEハ直角デアル。 (假設)

故ニ∠CDFハ直角デアル。

故ニ平面PハCDニ垂直デアル。

## 93. 三垂線ノ定理

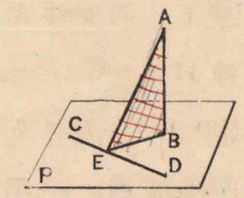
定理十 **一平面(P)ノ垂線(AB)ノ足(B)カラ此ノ平面(P)上ノ任意ノ直線(CD)ヘ垂線(BE)ヲ引ケバ,其ノ足(E)ト第一垂線(AB)上ノ任意ノ點(A)トヲ結ブ直線(AE)ハ此ノ平面(P)上ノ其ノ直線(CD)ニ垂直デアル.** (三垂線ノ定理)

證明 CDハ相交ハル二直線AB, BEノ各〻ニ垂直



デアルカラ平面ABEニ垂直デアル。

從ツテ平面ABE上ノ直線AEハCDニ垂直デアル。



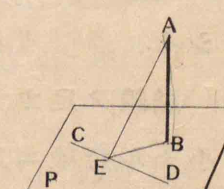

系一 一平面(P)外ノ一點(A)カラ此ノ平面(P)及ビ其ノ上ノ任意ノ直線(CD)ヘ夫々垂線(AB, AE)ヲ引クト,其ノ足ヲ結ブ直線(BE)ハ其ノ直線(CD)ニ垂直デアル。

系二 一平面(P)外ノ一點(A)カラ此ノ平面(P)上ノ任意ノ直線(CD)ニ垂線(AE)ヲ引キ,其ノ足(E)カラ其ノ平面(P)上ニ其ノ直線(CD)ニ垂線(BE)ヲ引キ,之ニ初メノ點(A)カラ垂線(AB)ヲ引クト,其ノ垂線(AB)ハ平面(P)ニ垂直デアル。

作圖題 三 **一平面(P)外ノ一點(A)カラ此ノ平面ヘ垂線ヲ引ケ.**

作圖 (上ノ系二ニヨレ)

吟味 求メル垂線ハ唯一ツニ限ル。

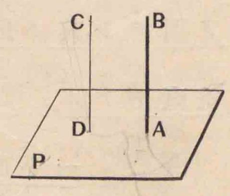


〔系〕 同ジ平面(P)ニ垂直ナル二直線(AB, CD)ハ平行デアル。

(CD上ノ一點ヲ通リABニ平行ナル直線ハCDニ合スル)

**作圖題 四** **一平面(P)上ノ一點(A)ヲ通ツテ,此ノ平面ヘ垂線ヲ引ケ.**

**作圖** ❶ 平面P外ニ任意ノ點Cヲ取ッテ,Cカラ此ノ平面Pヘ垂線CDヲ引ク。 (作圖題三)




❷ AカラCDニ平行ニABヲ引ク。

ABハ求メル垂線デアル。

**吟味** 求メル垂線ハ唯一ツシカナイ。

**定理十一** **一平面(P)外ノ一點(M)カラ此ノ平面ヘ垂線ト斜線トヲ引クト,**

**[1] 垂線ハ總テノ斜線ヨリモ小デアル.**

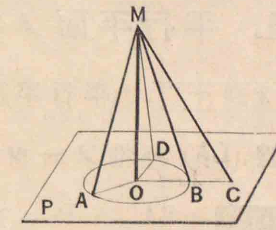
**[2] 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲ有スル斜線ハ相等シイ.**

**[3] 垂線ノ足カラ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ,小ナル距離ニ足ヲ有スルモノヨリモ大デアル.**

MOヲ平面Pノ垂線トシ, MA, MB, MC等ヲ其ノ斜



線トスレバ,




[1] MOハMA, MB等ヨリモ小デアル。

[2] OB=OAナラバ

MB=MAデアル。

[3] OC>OAナラバ

MC>MAデアル。

(學生之ヲ證明セヨ)

**系一** 此ノ定理ノ逆モ眞デアル。 (轉換法)

**問1.** 一平面外ノ一點カラ此ノ平面ヘ垂線ト斜線トヲ引クトキハ,相等シイ斜線ハ垂線ト等角ヲナシ,大ナル斜線ハ小ナル斜線ヨリモ垂線ト大ナル角ヲナス。又此ノ逆モ眞デアル。

**問2.** 一點カラ一平面ニ至ル定長ノ斜線ノ足ノ軌跡ハ一ツノ圓周デアル。

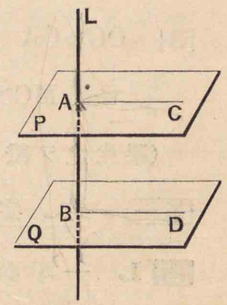
**系二** 一直線上ニナイ三定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,此ノ三點ヲ通ル圓ノ中心ヲ通ッテ此ノ圓ノ平面ニ垂直ナル直線デアル。

**定義** 一點カラ一平面ヘ引イタ垂線ノ長サヲ其ノ點ト平面トノ距離トイフ。

## 94. 平行平面ノ共通垂線

定理十二 **平行平面(P, Q)ノ一ツ(P)ニ垂直ナル直線(LA)ハ他ノ一ツ(Q)ニモ垂直デアル.**

證明 LAハPニ交ハルカラ,Qニモ交ハル。其ノ交點ヲ夫々A, Bトスル。B點カラQ上ニ任意ノ直線BDヲ引キ,BD, BLノ決定スル平面トPトノ交線ヲACトスルト,BDハACニ平行デアル。(定理六)




然ルニLAハACニ垂直デアル。

故ニLBハBDニ垂直デアル。

從ッテLAハQニ垂直デアル。

注意 此ノ定理ニヨッテ平行二平面ハ共通垂線ヲ有スルトイフ。

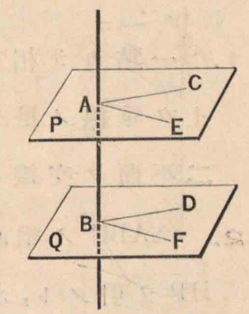
系 平行平面ノ間ニアル共通垂線ノ部分ハ皆等シイ。

定義 平行平面ノ間ニアル共通垂線ノ部分ノ長サヲ其ノ**平行平面ノ距離**トイフ。



定理十三 **同ジ直線(AB)ニ垂直ナル二平面(P, Q)ハ互ニ平行デアル.**

證明 ABヲ含ム任意ノ二平面トPトノ交線ヲ夫々AC及ビAEトシ,Qトノ交線ヲ夫々BD及ビBFトスルト,




AC ∥ BD, AE ∥ BF

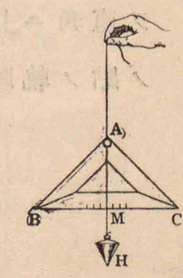
故ニP, Qハ平行デアル。

(定理四系五)

## 95. 鉛直線・水平面

錘ヲ吊シタトキノ絲ノ方向ヲ**鉛直線**トイヒ,鉛直線ニ垂直ナル平面ヲ**水平面**トイフ。ソシテ水平面上ニアル直線ヲ**水平線**トイヒ,二ツノ水平線ノ夾ム角ヲ**水平角**トイフ。

問1. 右ノ圖ニ示スヤウナ裝置デ水平線(BC)ヲ求メルコトガ出來ル。其ノ裝置ヲ工夫セヨ。

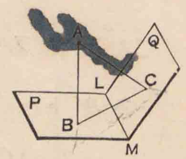



問2. 水準器デ或面ガ水平面デアルカドウカヲ知ルニハ,水準器ヲ其ノ面上デ二

ツノ異ナル方向ニ置イテ見ルコトガ必要デ且十分デアルコトヲ證明セヨ。

### 問 題 12

1. 一點カラ相交ハル二平面ヘ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ其ノ二平面ノ交線ニ垂直デアル。

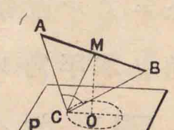



2. △ABC ノ垂心 H ヲ通ツテ △ABC ノ平面ヘ垂線 HP ヲ引クト, AP ト BC トハ垂直デアル。

3. 平行四邊形ノ一對角線ヲ通ル平面ハ他ノ對角線ノ兩端カラ等距離ニアル。

4. 與ヘラレタ一直線ヲ通リ且與ヘラレタ二點カラ等距離ニアル平面ヲ作レ。

5. 一平面外ニ與ヘラレタ一直線ヲ直角ニ見ルヤウナ此ノ平面上ノ點ノ軌跡ハ一ツノ圓周デアル。



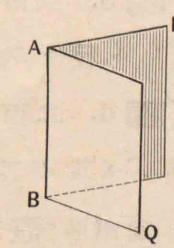



## 第三章 二面角及ビ多面角

### 96. 二面角

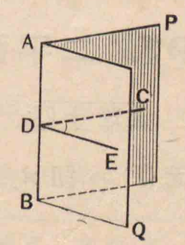
[定義] 同ジ直線デ終ル二平面ヨリ成ル圖形ヲ**二面角**トイヒ,其ノ直線ヲ二面角ノ**稜**,其ノ二平面ヲ二面角ノ**面**トイフ。

例ヘバ二平面 ABP, ABQ ガ共ニ直線 AB デ終ルト考ヘルト,此ノ二平面ハ二面角ヲ作ル。之ヲ二面角 PABQ 又ハ二面角 AB ト記ス。




今此ノ二面角ノ稜 AB ヲ含ム一平面ガ面ABP ノ位置カラ稜ヲ軸トシテ廻轉シ,角内ヲ周ツテ他ノ面ABQ ニ重ナツタトキハ,此ノ平面ハ此ノ**二面角ヲ畫ク**又ハ此ノ**二面角ダケ廻轉シタ**トイフ。ソシテ二面角ノ大小ハ此ノ廻轉ノ量デワカル。

二面角ノ各〻ノ面ノ上ニ其ノ稜ノ上ノ任意ノ一點カラ夫々稜ニ垂線ヲ引イテ出來ル角ハ其ノ頂點ノ位置ニ關ハラズ大サガ一定デアル。



此ノ角ヲ**二面角ノ平面角**トイヒ,此ノ平面角ノ大サヲ其ノ二面角ノ大サトスル。

平面角ノ相等シイ二面角ハ相等シイ。

問 1. 對稜二面角*ハ相等シイ。

問 2. 一平面ガ平行平面ニ交ハルトキ出來ル二組ノ錯二面角*及ビ四組ノ同位二面角*ハ夫々相等シイ。

問 3. 二面角ノ大サヲ表ハス平面角ノ二等分線ト稜トヲ含ム平面ハ其ノ二面角ヲ二等分スル。

問 4. 二面角ノ二面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ其ノ二面角ノ二等分面デアル。

定義　**直二面角**トハ其ノ平面角ガ直角デアル二面角ヲイフ。

二平面ノナス二面角ガ直二面角デアレバ,其ノ二平面ハ互ニ**垂直**デアルトイフ。

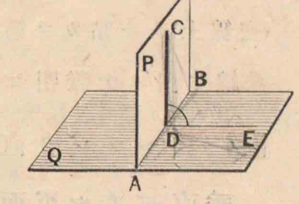
## 97. 二平面ノ垂直

定理十四　**一平面(Q)ノ垂線(CD)ヲ含ム任意ノ平面(P)ハ,初メノ平面(Q)ニ垂直デアル.**

* 此等ノ意義ハ別ニ定義ヲ揭ゲナクトモ明ラカデアラウ。



證明　P,Q ノ交線 AB ハ D ヲ通ル。今 Q 上ニ D カラ AB ニ垂線 DE ヲ引クト, CD ガ Q ニ垂直デアルカラ ∠CDE ハ直角デアル。




ソシテ ∠CDE ハ二平面 P, Q ノナス二面角ノ平面角デアル。

故ニ P ハ Q ニ垂直デアル。

注意　鉛直線ヲ含ム平面ハ水平面ニ垂直デアル。此ノ平面ヲ**直立面**又ハ**鉛直面**トイフ。

定理十五　**二平面(P, Q)ガ互ニ垂直デアレバ,其ノ一ツ(P)ノ上ニアツテ其ノ交線(AB)ニ垂直ナル直線(CD)ハ他ノ一ツ(Q)ニ垂直デアル.**

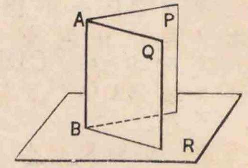
證明　上ノ圖ニ於テ,Q 上ニ D ヲ通ル AB ノ垂線 DE ヲ引クト, ∠CDE ハ直角デアル。　(假設)

故ニ CD ハ AB ト DE トニ垂直デアル。

從ツテ CD ハ Q ニ垂直デアル。

系一　二平面ガ互ニ垂直デアレバ,其ノ一ツノ上ノ一點カラ他ノ一ツヘ引イタ垂線ハ全ク初メノ平面上ニアル。

**系二**　相交ハル二平面ガ共ニ第三ノ平面ニ垂直デアレバ,其ノ交線ハ此ノ第三ノ平面ニ垂直デアル。



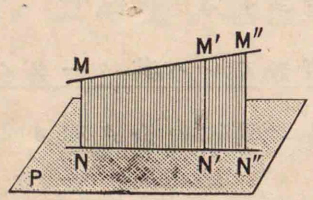

(交線上ノ一點カラ第三ノ平面ヘ垂線ヲ引イテ證明セヨ)

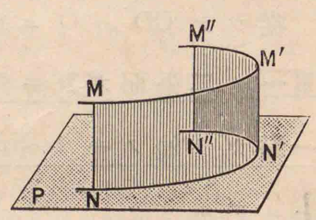
**問**　與ヘラレタ直線ヲ含ミ且與ヘラレタ平面ニ垂直デアル平面ヲ作レ。

## 98. 正射影

**定義**　一點カラ一平面ヘ引イタ垂線ノ足ヲ此ノ平面上ニ投ジタ其ノ**點ノ正射影**トイフ。

又一平面上ニ投ジタ**線ノ正射影**トハ此ノ平面上ニ投ジタ其ノ線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ヲイフ。



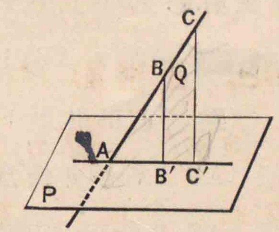



前ノ圖デ,Pヲ平面,MM'M''ヲ任意ノ線トシ,點Mガ此ノ線上ヲ運動スルモノト考ヘルト,P上ニ投ジタ此ノ點ノ正射影ハ線NN'N''ヲ畫ク。之ガP上ニ投ジタ線MM'M''ノ正射影デアル。

**注意**　正射影ヲ單ニ射影トイフコトガアル。

**定理十六**　**平面(P)ニ直交シナイ直線(ABC)ノ,此ノ平面上ニ投ジタ正射影ハ直線デアル.**

**證明**　ABC上ノ任意ノ點BカラPニ垂線BB'ヲ引キ,ABCトBB'トノ決定スル平面QトPトノ交線ヲAB'C'トスルト,QハPニ垂直デアル。




(定理十四)

故ニABC上ノ總テノ點カラPヘ引イタ垂線及ビAB'C'上ノ總テノ點カラPヘ引イタ垂線ハ皆Q上ニアル。(定理十五系一)

故ニABC上ノ總テノ點ノ正射影ハAB'C'上ニアル。ソシテ又AB'C'上ノ總テノ點ハABC上ノ點ノ正射影デアル。

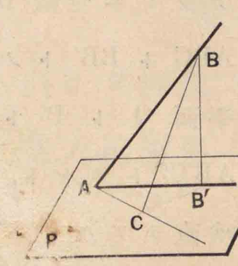
故ニ直線ABCノ正射影ハ直線AB'C'デアル。

問1. 直線ガ平面ニ垂直デアレバ其ノ射影ハ點デ,直線ガ平面ニ平行デアレバ其ノ射影ハ之ニ平行ナル直線デアル。逆モ眞デアル。

問2. 相等シク且平行ナル二線分ガ同ジ平面上ニ投ジタ射影ハ相等シク且平行デアル。

定理十七 **平面(P)ノ斜線(AB)ガ,此ノ平面上ニアツテ其ノ足(A)ヲ通ル諸直線トナス角ノ中デ,其ノ正射影(AB')トナス鋭角ガ最小デアル.**

證明 B' ヲ AB 上ノ任意ノ點 B ノ正射影トシ, P 上ノ AB' デナイ任意ノ直線ヲ AC トスル。




今 AC ヲ AB' ニ等シク取レバ, △BAB' ト △BAC トニ於テ, AB ハ共通, $AB'=AC$ 且 $BB'<BC$ デアル。

故ニ $\angle BAB' < \angle BAC$

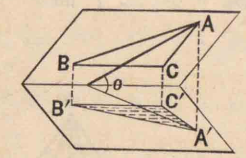
## 99. 直線ト平面トノナス角

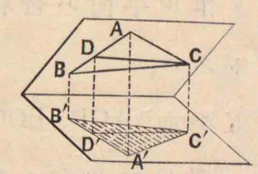
定義 **直線ト平面トノナス角**トハ其ノ直線ト其ノ正射影トノナス鋭角ヲイフ。



問1. 平面ト $\angle\alpha$ ヲナス線分 $a$ ガ其ノ平面上ニ投ジタ正射影ノ長サハ $a\cos\alpha$ デアル。

問2. △ABC ガ其ノ平面ト $\angle\theta$ ヲナス平面上ニ投ジタ正射影ノ面積ハ △ABC ノ面積ニ $\cos\theta$ ヲ掛ケタモノデアル。




又面積 P ナル多角形デアルト,其ノ正射影ノ面積ハ $P\cos\theta$ デアル。

問3. 一ツノ丘ガアツテ,其ノ麓カラ頂上マデ直線狀ヲナス坂道ノ長サガ 1050 $m$ デ,頂上カラ麓ヲ望ム俯角ハ 30° デアル。此ノ丘ノ高サヲ求メヨ。

注意 或點ヲ觀測スルトキ,其ノ視線ト眼ヲ通ル水平面トノ角ヲ其ノ點ガ水平面ヨリモ高イトキハ**仰角**又ハ**高度**トイヒ,水平面ヨリモ低イトキハ**俯角**トイフコトハ既ニ知ツテヰル。

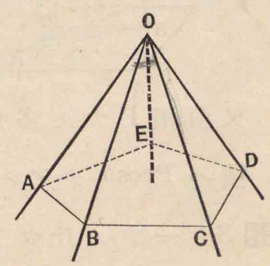
問4. 二本ノ木ガ同ジ水平面ニ直立スル。此ノ水平面ノ上デ此ノ二本ノ木ノ頂ヲ視ル仰角ガ相等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

## 100. 多面角

[定義] 一點ヲ共有シ且二ツヅツ順次ニ交ハル三ツ以上ノ平面ヨリ成ル圖形ヲ**多面角**トイフ。

多面角ヲ作ル平面ハ皆相隣レル二平面ノ交線デ終ルモノトスル。

例ヘバ五平面 AOB, BOC, COD 等ガ一點Oヲ共有シテ, 直線 OA, OB, OC 等デ交ハルトキハ,五平面ノ多面角(之ヲ O-ABCDE ト記ス)ガ出來ル。




O ヲ多面角ノ**頂點**トイヒ, 各平面ヲ其ノ**面**, 交線 OA, OB, OC 等ヲ其ノ**稜**, 相隣レル稜ノ夾ム角 AOB, BOC, COD 等ヲ其ノ**面角**トイフ, 又相隣レル二面ノナス二面角ヲ其ノ**稜角**トイフ。

多面角ハ其ノ面數ニヨツテ**三面角**,**四面角**,**五面角**等ニ區別スル。

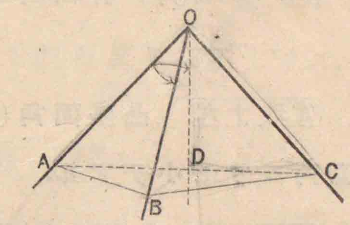
多面角ノ總テノ稜ヲ一平面デ截レバ,此ノ平面ト其ノ多面角ノ各面トノ交線デ一ツノ多角形ガ出來ル。之ヲ多面角ノ**截面**(セツ)又ハ**底面**トイフ。



截面ガ凸多角形デアル多面角ヲ**凸多面角**トイフ。

[定理十八] **三面角ノ各面角ハ他ノ二ツノ面角ノ和ヨリモ小デアル.**

**證明** 三面角 O-ABC ニ於テ ∠AOC ヲ最大ナ面角トスル。




二稜 OA, OC ト A, C デ交ハル任意ノ直線 AC ヲ引キ, ∠AOC ノ内ニ OA ト ∠AOB ニ等シイ角ヲ作ル直線 OD ヲ引イテ, AC トノ交點ヲ D トシ稜 OB 上ニ OD ニ等シク OB ヲ取リ, AB, BC ヲ結ブト

$$\triangle AOB \equiv \triangle AOD$$

故ニ $AB = AD$

然ルニ △ABC ニ於テ

$$AC < AB + BC$$

故ニ $DC < BC$

依ツテ △ODC ト △OBC トカラ

$$\angle DOC < \angle BOC$$

兩邊ニ夫々等角 AOD, AOB ヲ加ヘルト

$$\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$$

ソシテ $\angle AOB < \angle AOC + \angle BOC$

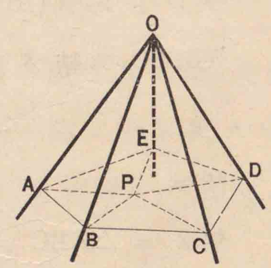
及ビ $\angle BOC < \angle AOC + \angle AOB$

ハ勿論デアル。

**問** 多面角ノ各面角ハ殘リノ面角ノ和ヨリモ小デアル。

定理十九 **凸多面角(O-ABC……)ノ面角ノ和ハ4直角ヨリモ小デアル.**

**證明** 任意ノ截面ABC……ヲ作リ其ノ内ノ任意ノ點Pヲ截面ノ各頂點ニ結ブト,截面上ニ出來ル三角形ノ數ハ,Oヲ共通ノ頂點トシ截面ノ各邊ヲ底トスル,多面角ノ各面上ノ三角形ノ數ニ等シイ。




故ニ此ノ二組ノ三角形ノ内角ノ總和ハ等シイ。

然ルニ $\angle EAB < \angle OAE + \angle OAB$ (定理十八)

$\angle ABC < \angle OBA + \angle OBC$

$\angle BCD < \angle OCB + \angle OCD$

……… ……… ………



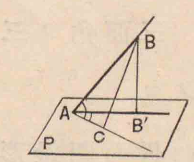
此等ノ不等式ヲ邊々相加ヘルト,Pヲ共通ノ頂點トスル組ノ三角形ノ底角ノ總和ハ,Oヲ共通ノ頂點トスル組ノ三角形ノ底角ノ總和ヨリモ小デアルコトガワカル。

故ニ面角AOB, BOC, COD,……ノ和ハ點Pノ周リニアル角ノ和卽チ4直角ヨリモ小デアル。

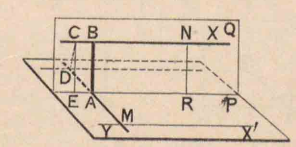
## 問題 13

**1.** 一點カラ相交ハル二平面ヘ夫々垂線ヲ引クト,其ノ二ツノ垂線ノ夾角ハ夫々其ノ二平面ノナス二面角ノ平面角ニ等シイ。

**2.** ABヲ平面Pノ斜線,Aヲ其ノ足,AB′ヲ其ノ正射影トシ,ACヲAヲ通ルP上ノ任意ノ直線トスルト,∠B′ACガ大キクナルニ從ツテ∠BACハ大キクナルコトヲ證明セヨ。

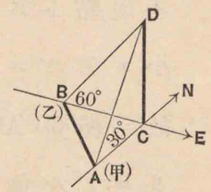



**3.** 同ジ平面上ニナイ二直線ニ交ハル共通垂線ヲ引ケ。ソシテ其ノ共通垂線ガ此ノ二直線間ヲ結ブ最短線分デアルコトヲ證



明セヨ。

**4.** 海上デ相距タルコト $2km$ ノ甲乙二艦デ,同時ニ或飛行船ノ方位及ビ仰角ヲ測ッタラ,甲艦デハ北方ニ仰角30°,乙艦デハ東方ニ仰角 60° ヲ得タ。此ノ飛行船ノ高サヲ求メヨ。




**5.** 三面角ノ各稜角ヲ二等分スル三平面ハ同ジ直線ヲ通ル。

**6.** 三面角ノ三面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**7.** 三面角ノ三稜ト等角ヲナス直線ヲ引ケ。

**8.** 三面角ノ三稜カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**9.** 折面四邊形ノ角ノ和ハ4直角ヨリモ小デアル。



# 第四章　角壔及ビ角錐

## 101. 多面體

定義　幾ツカノ平面デ圍マレタ立體ヲ**多面體**トイフ。

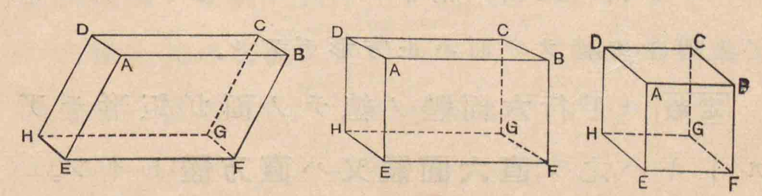
多面體ノ限界ハ多角形デアル。此等ノ多角形ヲ多面體ノ**面**トイヒ,其ノ邊及ビ頂點ヲ夫々多面體ノ**稜**及ビ**頂點**トイフ。又同ジ面上ニナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ。

多面體ハ少クトモ四面ヲ有スル。ソシテ其ノ面數ニヨッテ**四面體・五面體・六面體**等ニ區別スル。

多面體ノ何レノ面ヲ擴ゲルモ,其ノ體內ニ入ラナイモノヲ**凸多面體**トイフ。

本書デハ凸多面體ノミヲ論ズル。

定義　相對スル面ガ互ニ平行デアル六面體ヲ**平行六面體**トイフ。



**問** 1. 平行六面體ハ次ノ性質ヲ有スル。

❶ 三組ノ對面ハ各〻合同ナル平行四邊形デアル。

❷ 四ツヅツ相等シク且平行デアル12ノ稜ガアル。

❸ 四ツヅツ相等シイ24ノ面角ガアル。

❹ 二ツヅツ相等シイ12ノ二面角ガアル。

❺ 四ツノ對角線ハ其ノ中點デ相交ハル。此ノ交點ヲ平行六面體ノ**中心**トイフ。

**問** 2. 平行六面體ノ中心ヲ通リ,且兩端ガ其ノ面上ニアル線分ハ皆此ノ中心デ二等分セラレル。此ノヤウナ立體ヲ**點對稱ヲ有スル立體**トイヒ,其ノ點ヲ**對稱ノ中心**トイフ。

**問** 3. 平行六面體ノ一ツノ頂點カラ出ル三稜ガ互ニ垂直デアレバ,相隣レル面ハ互ニ垂直デ,總テノ面ハ矩形デアル。又此ノ場合ニ同ジ頂點カラ出ル三稜ガ相等シイトキハ總テノ稜ハ相等シク,總テノ面ハ正方形デアル。

**定義** 平行六面體ノ總テノ面ガ矩形デアルトキハ,之ヲ**直六面體**又ハ**直方體**トイフ。



又平行六面體ノ總テノ面ガ正方形デアルトキハ,之ヲ**立方體**又ハ單ニ**立方**トイフ。

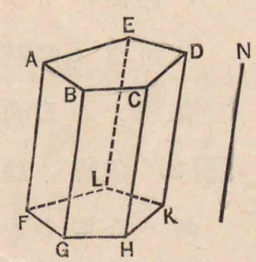
**問** 4. 直方體ノ稜ハ之ニ交ハル面ニ垂直デアル。

**問** 5. 直方體ノ對角線ハ皆相等シイ。ソシテ其ノ平方ハ一頂點カラ出ル三稜ノ平方ノ和ニ等シイ。

**問** 6. 立方體ノ面ハ皆合同ナル正方形デ,其ノ對角線ノ平方ハ一稜ノ平方ノ3倍ニ等シイ。

## 102. 角壔

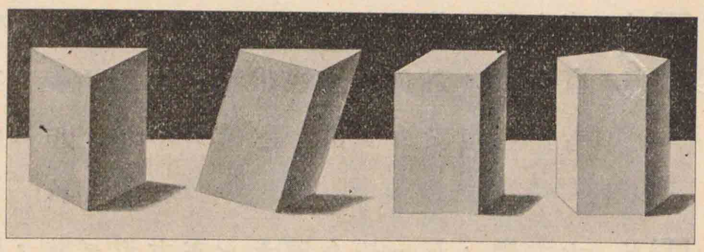
**定義** 二面ガ平行デ且他ノ面ガ皆同ジ直線ニ平行デアル多面體ヲ**角壔**(カクタウ)トイフ。




角壔ノ平行ナル二面ヲ其ノ**底面**又ハ**底**トイヒ,他ノ面(同ジ直線ニ平行ナル)ヲ其ノ**側面**トイフ。側面ノ交線ヲ**側稜**トイヒ,兩底面ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

角壔ハ其ノ底面ノ邊數ニヨッテ**三角壔**・**四角壔**・**五角壔**等ニ區別スル。上圖ハ五角壔デ,之ヲABCDE-FGHKL又ハABCDE-Fト記ス。

定義 側稜ガ底面ニ垂直デアル角壔ヲ**直角壔**トイヒ,サウデナイモノヲ**斜角壔**トイフ。



定義 底面ガ正多角形デアル直角壔ヲ**正角壔**トイフ。

角壔ノ總テノ側稜ニ交ハツテ且之ニ垂直デアル截面ヲ其ノ**直截面**トイフ。

問 1. 角壔ノ側面ハ皆平行四邊形デアル(直角壔ノ側面ハドウカ)。

又角壔ノ側稜ハ互ニ平行デ且相等シク,兩底ハ合同ナル多角形デアル。

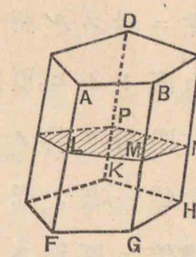
問 2. 角壔ノ總テノ側稜ニ交ハル二ツノ平行截面ハ合同ナル多角形デアル。

問 3. 側稜ガ $a$ デ其ノ**傾キ**(側稜ト底面ノ垂線トノナス角)ガ $\alpha$ デアル斜角壔ノ高サハ $a\cos\alpha$ デアル。



定理二十 **角壔ノ側面積ハ其ノ直截面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ.**

證明 ABCD……FGHK……ヲ角壔, LMNP……ヲ其ノ直截面トスルト




$\square AG = LM \cdot AF$

$\square BH = MN \cdot BG$

$\square CK = NP \cdot CH$

……………

且　$AF = BG = CH = \cdots\cdots$　デアルカラ

角壔ノ側面積ハ $(LM+MN+NP+\cdots\cdots)AF$ ニ等シイ。

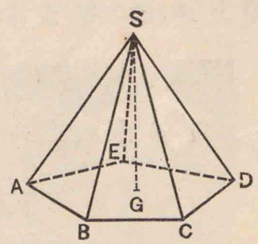
系 直角壔ノ側面積ハ其ノ底ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

問 4. 底面ノ一邊ガ $a$ 米,高サガ $h$ 米デアル正六角壔ノ側面積ト全面積トヲ求メヨ。

## 103. 角錐

定義 一ツノ多角形ト,其ノ邊ヲ夫々底邊トシ其ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トデ圍ム多面體ヲ**角錐**トイフ。

同ジ頂點ヲ共有スル三角形ノ面ヲ角錐ノ**側面**,其ノ共通ノ頂點ヲ其ノ**頂點**,側面ノ交線ヲ其ノ**側稜**トイフ. 又頂點ニ對スル面ヲ角錐ノ**底面**又ハ**底**トイヒ,頂點カラ之ヘ引イタ垂線ヲ其ノ**高サ**トイフ。



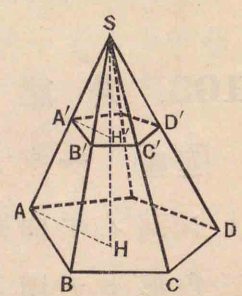

角錐ハ其ノ底面ノ邊數ニヨッテ**三角錐,四角錐,五角錐**等ニ區別スル。上圖ハ五角錐デ,之ヲ O−ABCDE ト記ス。

定理二十一 **角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキハ**

[1] **側稜及ビ高サハ相似ニ分ケラレル.**

[2] **截面ト底面トハ相似デアル.**

**證明** S−ABCD…… ヲ角錐トシ, A′B′C′D′…… ヲ其ノ底面ニ平行ナル截面トシ, SH ヲ角錐ノ高サトシ,截面トノ交點ヲ H′ トスル。




[1] A′H′ ト AH トハ平行ナル二平面ト平面SAH トノ交線デアルカラ平行デアル。



故ニ $\dfrac{SA'}{A'A}=\dfrac{SH'}{H'H}$

同樣ニ $\dfrac{SB'}{B'B}$, $\dfrac{SC'}{C'C}$ 等モ皆 $\dfrac{SH'}{H'H}$ ニ等シイ。

故ニ $\dfrac{SA'}{A'A}=\dfrac{SB'}{B'B}=\dfrac{SC'}{C'C}=\cdots\cdots=\dfrac{SH'}{H'H}$

[2] 截面ト底面トノ角ハ其ノ邊ガ夫々平行デ且同ジ方向デアルカラ夫々順ニ相等シイ。

又截面ト底面トノ對應邊ノ比ハ明ラカニ SA′:SA, SB′:SB 等ニ等シイカラ皆等シイ。

故ニ 截面A′B′C′D′……∽底面ABCD……

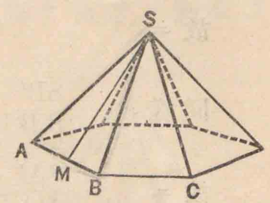
系一 截面ト底面トノ比ハ之カラ頂點マデノ距離ノ比ノ二乘比ニ等シイ。

系二 等底等高ナル二ツノ角錐ノ各頂點カラ等距離デ底面ニ平行ナル截面ハ等積デアル。

注意 前頁ノ下圖ニ於ケル角錐 S−ABCD…, S−A′B′C′D′… ノヤウナモノヲ**相似多面體**トイフ。相似多面體ノ對應スル稜ノ比ハ皆相等シイ。此ノ比ヲ兩形ノ**相似比**トイフ。

定義 底面ガ正多角形デ,且底面上ニ投ジタ頂點ノ正射影ガ底面ノ中心トナル角錐ヲ**正角錐**トイフ。

正角錐ノ側面ハ皆合同ナル等脚三角形デアル。




頂點カラ底面ノ邊ヘ引イタ垂線ヲ其ノ**斜高**トイフ。

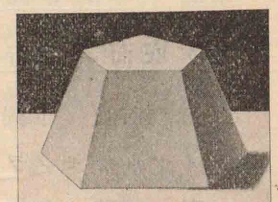
[定理二十二] **正角錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ.**

**證明** (學生之ヲ證明セヨ)

**問** 高サガ $a$ 米,底面ノ一邊ガ $b$ 米デアル正六角錐ノ側面積ヲ求メヨ。

## 104. 角錐臺

[定義] 角錐ノ底面ニ平行ナル截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ**角錐臺**トイフ。



截面ト底面トヲ共ニ角錐臺ノ**底面**又ハ**底**トイヒ,其ノ間ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。

**問** 正角錐臺ノ側面積ハ,其ノ兩底ノ周ノ和ノ半分ト斜高(側面デアル梯形ノ高サ)トノ積ニ等シイ。



## 105. 立體ノ體積

[定義] 立體ガ占メル空間ノ部分ノ大サヲ其ノ**體積**トイフ。

體積ヲ計ルニハ通常單位ノ長サヲ一稜トスル立方體ノ體積ヲ以テ單位トスル。

[定理二十三] **等高デ且底面ガ合同デアルニツノ直角壔ハ合同デアル.**

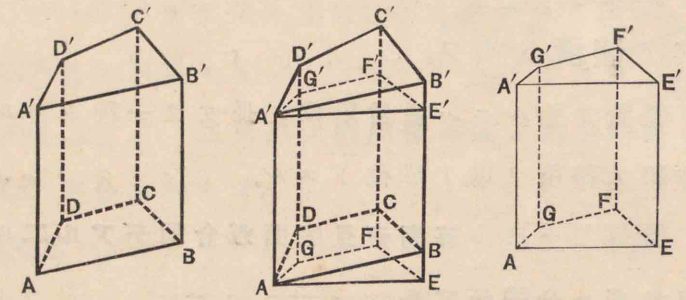
[系] 同ジ頂點カラ出ル三稜ガ夫々相等シイ直方體ハ合同デアル。又一稜ガ相等シイ立方體ハ合同デアル。

## 106. 角壔ノ體積

[定理二十四] **斜角壔ハ其ノ直截面ヲ底面トシ其ノ側稜ヲ高サトスル直角壔ト等積デアル.**

**證明** ABCD-A'B'C'D' ヲ斜角壔トシ,其ノ稜 AA' ノ兩端ヲ通リ之ニ垂直ナル平面ヲ作ッテ直角壔 AEFG-A'E'F'G' ヲ作ルト,二ツノ立體 ABCDEFG ト A'B'C'D'E'F'G' トハ合同デアル。何故ナレバ面 AEFG ト A'E'F'G' トハ合同デ,且稜 EB, FC, GD

ハ夫々 $E'B'$, $F'C'$, $G'D'$ ニ等シク何レモ上ノ合同ナル面ニ垂直デアルカラデアル。

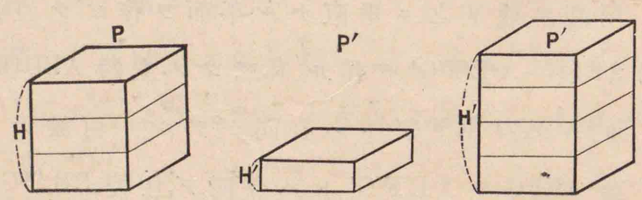



故ニ此ノ立體 $A'B'C'D'E'F'G'$ ト $ABCDEFG$ トノ各〻ニ立體 $ABCDA'E'F'G'$ ヲ加ヘテ出來ル斜角壔 $ABCD-A'B'C'D'$ ト直角壔 $AEFG-A'E'F'G'$ トハ等積デアル。

## 107. 直方體ノ體積

定理 二十五 **底面ガ合同デアル二ツノ直方體 $(P, P')$ ノ比ハ其ノ高サ $(H, H')$ ノ比ニ等シイ.**

**證明** [1] $H=mH'$ ($m$ ハ整數) トスル。






此ノ場合ハ $H$ ヲ $m$ 等分シテ各分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル截面ヲ作ルト, $P$ ハ $P'$ ニ合同デアル $m$ 箇ノ部分ニ分ケラレル。

故ニ $$P:P'=m:1=H:H'$$

[2] $H=\frac{n}{m}H'$ ($m, n$ ハ整數) トスル。

此ノ場合ハ $\frac{1}{m}H'$ ニ等シイ長サヲ各〻ノ部分トスルヤウニ $H'$ ト $H$ トヲ等分スルト, $H'$ ハ $m$ 等分セラレ, $H$ ハ $n$ 等分セラレル。ソシテ其ノ各〻ノ分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル截面ヲ作ルト, $P$ ト $P'$ トハ夫々 $n$ 箇ト $m$ 箇トニ等分セラレ,其ノ各〻ノ部分ハ皆合同デアル。

故ニ $$P:P'=n:m=H:H'$$

系 二稜ガ夫々相等シイ二ツノ直方體ノ比ハ第三稜ノ比ニ等シイ。

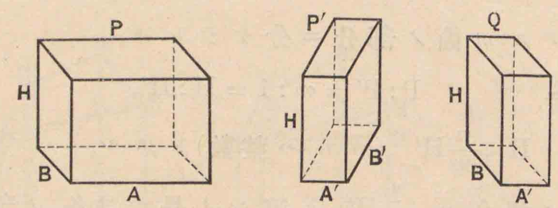
定理 二十六 **等高ノ二ツノ直方體ノ比ハ其ノ底ノ比ニ等シイ.**

**證明** $P$ ト $P'$ トヲ二ツノ直方體トシ,底ノ二邊ヲ夫々 $A, B$ 及ビ $A', B'$, 高サヲ $H$ トスル。

今 $A', B, H$ ヲ三稜トスル直方體ヲ $Q$ トスルト,

$$\frac{P}{Q}=\frac{A}{A'} \text{ 及ビ } \frac{Q}{P'}=\frac{B}{B'} \quad \text{(定理二十五系)}$$

故ニ　$\frac{P}{P'}=\frac{A}{A'}\times\frac{B}{B'}=\frac{A\cdot B}{A'\cdot B'}$




卽チ $P$ ト $P'$ トノ比ハ其ノ底ノ比ニ等シイ。

系一　二ツノ直方體ノ比ハ其ノ三稜ヲ表ハス數値ノ積ノ比ニ等シイ。

系二　直方體ノ體積ヲ表ハス數値ハ其ノ三稜ヲ表ハス數値ノ積ニ等シイ。從ツテ底面(以下數値トイフ語ヲ略スル)ト高サトノ積ニ等シイ。

系三　立方體ノ體積ハ其ノ稜ノ三乘冪ニ等シイ。

注意　數ノ三乘冪ヲ其ノ立方トイフ。

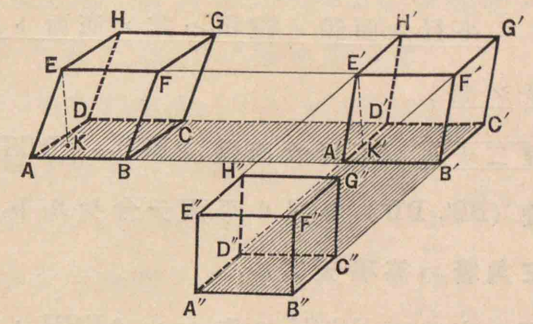
## 108.　平行六面體ノ體積

**定理二十七　平行六面體(ABCD-EFGH)ハ之ト等底等高ノ直方體ニ等シイ.**

證明　稜 $AB$ ヲ延長シ,其ノ上ニ $A'B'$ ヲ $AB$ ニ等シク取リ, $A'$ 及ビ $B'$ ヲ通リ $AB'$ ニ垂直ナル平面



ヲ作リ, $AB$ ニ平行ナル三ツノ稜ノ延長ト交ハラシメルト,直四角壔 $A'D'H'E'-B'C'G'F'$ ヲ得ル。




次ニ此ノ直四角壔 $A'G'$ ノ稜 $D'A'$ ヲ延長シ,其ノ上ニ $D''A''$ ヲ $D'A'$ ニ等シク取リ, $A''$ 及ビ $D''$ ヲ通リ $D'A''$ ニ垂直ナル平面ヲ作リ,上ノ直四角壔ノ $D'A'$ ニ平行ナル三ツノ稜ノ延長ヲ截ラシメルト,直方體 $A''B''C''D''-E''F''G''H''$ ヲ得ル。

然ルニ此ノ直方體 $A''G''$ ト平行六面體 $AG$ トヲ見ルニ,兩底 $A''C''$ ト $AC$ トハ底ト高サトヲ夫々等シクスル平行四邊形ト矩形デアルカラ等積デアル。且此ノ兩四角壔ノ高サハ共ニ平行デアル二平面間ノ距離デアルカラ相等シイ。

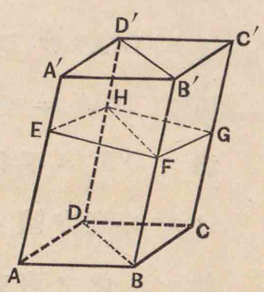
ソシテ平行六面體 $AG$ ハ直四角壔 $A'G'$ ニ等シク,且 $A'G'$ ト直方體 $A''G''$ トハ等積デアル。

故ニ平行六面體 AG ハ之ト等底等高デアル直方體 A″G″ ニ等シイ。

系　平行六面體ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ニ等シイ。

定理二十八　**平行六面體 (ABCD−A′B′C′D′) ヲニツノ對稜 (BB′, DD′) ヲ通ル平面デ分ケルト,出來ルニツノ三角壔ハ等積デアル.**

證明　直截面 EFGH ヲ作ルト, △EFH ト △GHF トハ合同デ,此ノ兩三角形ハ夫々三角壔 ABD′ ト BCD′ トノ直截面デアル。




故ニ三角壔 ABD′ ト BCD′ トハ夫々 △EFH ト △GHF トヲ底面トシ BB′ ヲ高サトスルニツノ直三角壔ト等積デアル。ソシテ此ノ兩直三角壔ハ合同デアル。

故ニ三角壔 ABD′ ト BCD′ トハ等積デアル。

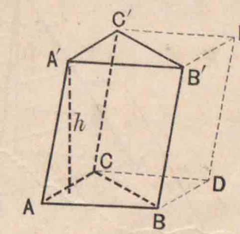
注意　三角壔 ABD′, BCD′ ハ其ノ各面及ビ稜角ガ夫々相等シイケレドモ,必ズシモ此ノ兩者ハ合同デアルトハ限ラナイ。



## 109. 三角壔ノ體積

定理二十九　**三角壔 (ABC-A′B′C′) ノ體積ハ其ノ底面 (ABC) ト高サ ($h$) トノ積ニ等シイ.**

證明　平行四邊形 ABDC ト A′B′D′C′ トヲ作リ, DD′ ヲ結ビテ平行六面體 AD′ ヲ作ルト,三角壔 ABC′ ハ此ノ平行六面體ノ半分デアル。　(定理二十八)




故ニ

$$\text{三角壔 } ABC' = \frac{\square ABDC \times h}{2} \qquad \text{(定理二十七系)}$$

$$= \triangle ABC \times h$$

系一　角壔ノ體積ハ其ノ底面ト高サトノ積ニ等シイ。

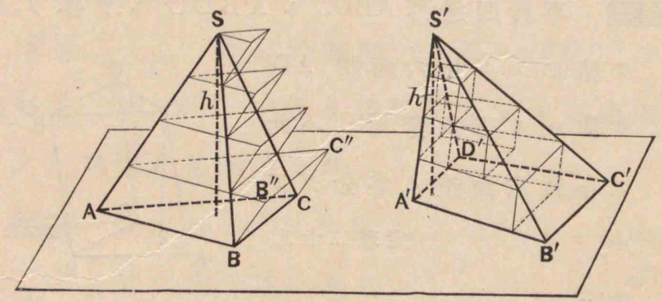
(何故ナレバ任意ノ角壔ハ之ト等高デアル若干ノ三角壔ニ分ケルコトガ出來ルカラデアル)

系二　等底等高ノ角壔ハ相等シク,等高(又ハ等底)ノ角壔ノ比ハ底(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ。

問　正三角壔ガアッテ,其ノ底ノ一邊ハ $a$ 米デ高サハ $h$ 米デアル。其ノ體積ハ幾立方米デアルカ。又正六角壔ニ就イテ同ジ問題ヲ解ケ。

## 110. 角錐ノ體積

**定理 三十** **等底 (ABC, A′B′C′D′) 等高 ($h$) ナル二ツノ角錐 (S-ABC, S′-A′B′C′D′) ハ等積デアル.**




**證明** 二ツノ角錐ノ體積ヲ夫々$V$, $V'$トスル。今兩角錐ノ高サヲ$n$等分シ,各分點ヲ通リ夫々底面ニ平行ナル平面ヲ作ルト,兩角錐ノ對應スル截面ハ夫々相等シイ。 (定理二十一系二)

次ニ角錐S-ABCノ方ニハ上ノ各截面ヲ下底トシ稜SAノ各部分ヲ夫々其ノ一稜トスル$n$箇ノ角壔ヲ作リ,又角錐S′-A′B′C′D′ノ方ニハ上ノ各截面ヲ上底トシ稜S′A′ノ各部分ヲ夫々其ノ一稜トスル$(n-1)$箇ノ角壔ヲ作ルト,此等ノ兩角壔ハ上カラ順ニ夫々相等シク,S-ABCノ方ガ最下ノ一ツABC″ダケ多イ。



故ニ此ノヤウニ作ツタ角壔ノ和ヲ夫々$P$ト$P'$トスルト,$P$ト$P'$トノ差ハ角壔ABC″デアル.

故ニ $$P-P'=\triangle ABC\times\frac{h}{n}$$

$n$ヲ大キクスルト此ノ差ハドンナニモ小トナル。ソシテ此ノ差ハ$V$ト$V'$トノ差ヨリモ大デアルコトハ勿論デアル。

故ニ若シ$V$ト$V'$トガ等シクナイトシテ其ノ差ヲ$d$トスルト,$d$ハ或一定ノ量デ

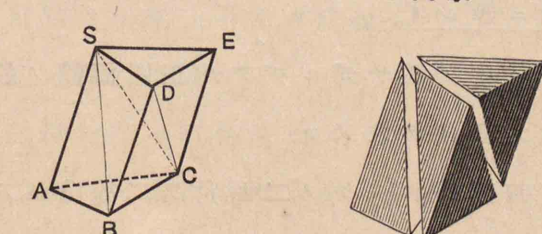
$$P-P'>d$$

コレハ不合理デアル。

故ニ $$V=V'$$

**問** 1. 平行四邊形ヲ底トスル四角錐ノ頂點ト底ノ對角線トヲ含ム平面ハ之ヲ二等分スル。

**定理 三十一** **三角壔 (ABC-SDE) ハ之ヲ等積デアル三ツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル.**



**證明** 三角壔 ABC-SDE ハ S ヲ共通ノ頂點トスル三ツノ三角錐 S-ABC, S-BCD, S-CDE ニ分ケルコトガ出來ル。

ソシテ第一ト第二トハ等底 SAB, SBD ヲ有シ C ヲ共通ノ頂點トスルモノト見ルコトガ出來ルカラ等積デアル。

同様ニ第二ト第三モ等積デアル。

從ツテ此等ノ三ツノ三角錐ハ等積デアル。

系一 <u>三角錐ハ等底等高ノ三角壔ノ三分ノ一ニ等シイ。</u>

系二 <u>角錐ハ之ト等底等高ノ角壔ノ三分ノ一ニ等シイ。</u>

從ツテ角錐ノ體積ヲ $V$ トシ,底面積ヲ $B$,高サヲ $h$ トスルト,

$$V=\frac{1}{3}Bh$$

系三 <u>等高(又ハ等底)ノ二ツノ角錐ノ比ハ底(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ。</u>

**問2.** 一稜ノ長サガ $a$ デアル正四面體ノ體積ヲ表ハス公式ヲ求メヨ。

**問3.** 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ對稜ヲ其ノ兩側面ノ比ニ分ケル。



## 問題 14

1. 直六面體ガアル。其ノ對角線ノ長サハ 14$cm$ デ,三稜ノ長サノ比ハ 2:3:6 デアルトイフ。此ノ直六面體ノ體積ヲ求メヨ。

2. 平行六面體ノ十二ノ稜ノ平方ノ和ハ四ツノ對角線ノ平方ノ和ニ等シイ。

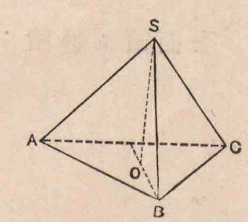
3. 四面體デハ,

❶ 對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ同ジ點ヲ通ル。

❷ 各稜角ヲ二等分スル平面ハ同ジ點ヲ通リ,其ノ點ハ各面カラ等距離ニアル。

❸ 各頂點ヲ對面ノ重心ニ結ブ四ツノ線分ハ同ジ點デ交ハリ,且此ノ點デ互ニ 3:1 ニ分ケラレル(此ノ點ヲ**四面體ノ重心**トイフ)。

4. 正四面體 S−ABC デハ,




❶ 頂點カラ底ヘ引イタ垂線ハ底ノ重心ヲ通ル。

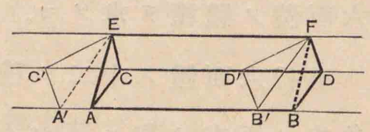
❷ 對稜ハ互ニ直角ヲナス。

❸ 二面角ノ大サヲ求メヨ。但シ sin 70°=0.9397, sin 71°=0.9455 ヲ與ヘタトスル。

5. 四面體ノ各頂點カラ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

6. 角錐ノ底ニ平行ナル截面ヲ作リ,其ノ面積ガ底ノ半分ニ等シイヤウニセヨ。

7. 同ジ平面ノ上ニナイ三ツノ平行線ガアッテ,之カラ定長ノ三線分ヲ截リ取ル任意ノ平行ナル二平面ヲ作ルト,出來ル三角壔ハ皆等積デアル。




8. 正四面體內ノ任意ノ點カラ各面ヘ引イタ垂線ノ和ハ其ノ高サニ等シイ。

9. 三角錐 S-ABC ニ於テ $SA=8m$, $SB=10m$ デアレバ, $\angle ASB$ ノ二等分線 SE ト稜 SC トノ決定スル平面ハ此ノ三角錐ノ體積ヲドンナ比ニ分ケルカ。

10. 底ノ一邊ガ $4cm$, 側稜ガ $10cm$ デアル正四角錐ノ全面積ト體積トヲ求メヨ。

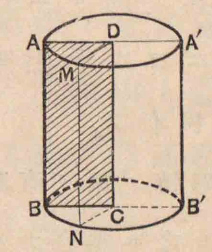


# 第五章 直圓壔·直圓錐·球*

## 111. 直圓壔

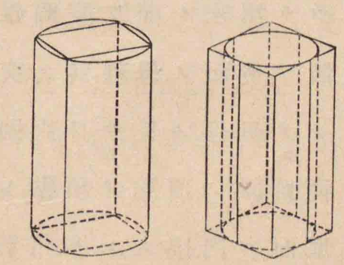
**定義** 矩形ガ其ノ一邊ヲ軸トシテ其ノ周リニ一廻轉シタトキ,他ノ三邊ノ廻轉ニヨッテ出來ル面デ圍マレタ立體ヲ**直圓壔**トイフ。

軸ニ垂直ナル二邊ノ廻轉ニヨッテ出來ル面ハ等シイ圓デ,之ヲ直圓壔ノ**底面**又ハ**底**トイヒ,他ノ邊ノ廻轉ニヨッテ出來ル面ハ一ツノ曲面デ之ヲ其ノ**側面**トイフ。




又軸ノ長サ(卽チ兩底ノ距離)ヲ直圓壔ノ**高サ**トイヒ,軸ニ對スル邊ノ各々ノ位置ヲ側面ノ**母線**トイフ。

**問 1.** 直圓壔ノ底ノ周上ノ任意ノ點カラ軸ニ平行ニ引イタ直線ハ母線デアル。



直圓壔ノ兩底ニ內接又ハ外接スル底面ヲ有スル直角壔ヲ其ノ直圓壔ニ**內**

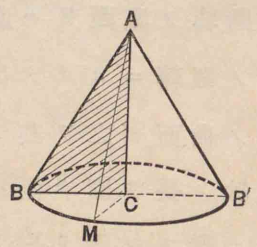
* 直圓壔,直圓錐及ビ球等ヲ總稱シテ曲面體トイフ。

接又ハ外接スル直角壔トイフ。

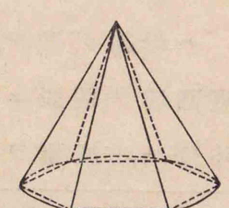
問 2. 直圓壔ノ軸ニ垂直ナル平面デノ截面ハ底ニ等シイ圓デアル。

## 112. 直圓錐

定義　直角三角形ガ直角ノ一邊ヲ軸トシテ其ノ周リニ一廻轉シタトキ,他ノ二邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面デ圍マレタ立體ヲ**直圓錐**トイフ。




廻轉ノ軸ヲ**直圓錐ノ高サ**トイヒ,之ニ垂直ナル邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル圓ヲ其ノ**底面**又ハ**底**トイフ。又斜邊ノ廻轉ニヨツテ出來ル面ヲ直圓錐ノ**側面**トイヒ,斜邊ノ各々ノ位置ヲ側面ノ**母線**,其ノ交點ヲ直圓錐ノ**頂點**トイフ。ソシテ母線ノ長サヲ直圓錐ノ**斜高**トイフ。



直圓錐ノ頂點ヲ頂點トシ其ノ底面ニ内接スル多角形ヲ底トスル角錐ヲ其ノ直圓錐ニ内接スル角錐トイフ。



問　直圓錐ノ軸ニ垂直ナル截面ハ圓デアル。

## 113. 直圓壔・直圓錐ノ表面積ト體積

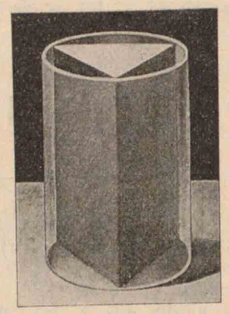
公理二　直圓壔又ハ直圓錐ニ内接スル正角壔又ハ正角錐ノ側面積ト體積トハ夫々其ノ圓壔又ハ圓錐ノ側面積ト體積トヨリモ小デアル。サレド其ノ角壔又ハ角錐ノ底ノ邊數ヲ多クスルコトニヨツテ其ノ側面積ト體積ヲ如何程デモ其ノ圓壔又ハ圓錐ノ側面積ト體積トニ近迫セシメルコトガ出來ル。

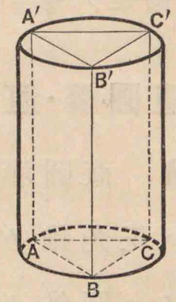
此ノ事實ヲ通例次ノヤウニ述ベル。

直圓壔又ハ直圓錐ノ側面積ト體積トハ夫々之ニ内接スル正角壔又ハ正角錐ノ底ノ邊數ガ無限ニ增シタトキノ其ノ側面積ト體積トノ**極限**デアル。

注意　圓ノ周(及ビ面積)ハ之ニ内接スル正多角形ト外接スル正多角形トノ邊數ガ限リナク增シタトキノ其ノ周(及ビ面積)ノ共通ノ極限デアル。

定理 三十二　**直圓壔ノ側面積ハ底ノ周ト高サトノ積ニ等シイ.**






**證明** 直圓壔ニ內接スル正多角壔ヲ作ルト,此ノ內接角壔ノ側面積ハ其ノ底ノ周ト其ノ高サ(卽チ其ノ圓壔ノ高サ)トノ積ニ等シイ。(定理二十系)

今此ノ內接角壔ノ底ノ邊數ヲ無限ニ增ストキハ,其ノ周ハ無限ニ此ノ圓壔ノ底ノ周ニ近迫シ,同時ニ此ノ角壔ノ側面積ハ無限ニ此ノ圓壔ノ側面積ニ近迫スル。

故ニ此ノ角壔ノ側面積ノ極限卽チ圓壔ノ側面積ハ其ノ底ノ周(圓周)ト高サトノ積ニ等シイ。

系 直圓壔ノ高サヲ$h$,其ノ底ノ半徑ヲ$r$トスルト,

側面積$=2\pi rh$, 全面積$=2\pi r(h+r)$

**問 1.** 高サガ底ノ直徑ニ等シイ直圓壔ノ側面積ハ底ノ半徑ノ平方ニ比例スル。



**定理 三十三 直圓錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ.**

(定理二十二ニヨリ前定理ノ證明ニ準ジテ之ヲ證明セヨ)

系 直圓錐ノ斜高ヲ$h'$,其ノ底ノ半徑ヲ$r$トスルト,

側面積$=\pi rh'$, 全面積$=\pi r(h'+r)$

**問 2.** 直圓錐ノ側面積ハ,高サノ中點ヲ通ツテ底ニ平行ナル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シイ.

**定理 三十四 直圓壔ノ體積ハ其ノ底ト高サトノ積ニ等シク,直圓錐ノ體積ハ其ノ底ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ.**

(定理二十九系一及ビ定理三十一系二ヲ用ヒテ之ヲ證明セヨ)

系 直圓壔又ハ直圓錐ノ高サヲ$h$,其ノ底ノ半徑ヲ$r$トスルト,

直圓壔ノ體積$=\pi r^2h$

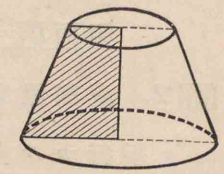
直圓錐ノ體積$=\frac{1}{3}\pi r^2h$

**問 3.** 矩形ノ二隣邊ヲ$a$, $b$トシ,此ノ二邊ヲ各〻軸トシテ,此ノ矩形ヲ廻轉シテ生ズル二ツノ直圓壔ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

## 114. 直圓錐臺

定義 直圓錐ノ底面ト之ニ平行ナル截面トノ間ニアル部分ヲ**直圓錐臺**トイフ。

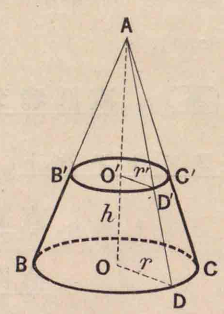
梯形ノ一邊ガ其ノ底ニ垂直デアルトキ,此ノ邊ヲ軸トシテ一廻轉スルト直圓錐臺ガ出來ル。軸ノ長サヲ其ノ**高サ**トイヒ,之ニ對スル邊ヲ其ノ**斜高**(**母線**)トイフ。



**定理 三十五** **直圓錐臺ノ兩底ノ半徑ヲ $r$ ト $r'$ トシ,其ノ高サヲ $h$, 斜高ヲ $h'$ トシ,側面積ヲ $F$, 體積ヲ $V$ トスルト,**

[1] $F=\pi h'(r+r')$

[2] $V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$




**證明** 兩底ヲ BDC ト B'D'C' トシ,其ノ中心ヲ夫々 O,O' トスル。側面ヲ延長シテ出來ル直圓錐ノ頂點ヲ A トスレバ,

[1] F ハ二ツノ直圓錐 A-BDC, A-B'D'C' ノ側面積ノ差デアルカラ,

$$F=\pi r(\mathrm{AD})-\pi r'(\mathrm{AD'}) \qquad \text{(定理三十三)}$$



然ルニ $\frac{\mathrm{AD}}{r}=\frac{\mathrm{AD'}}{r'}=\frac{\mathrm{AD}-\mathrm{AD'}}{r-r'}=\frac{h'}{r-r'}$

$$\therefore\quad \mathrm{AD}=\frac{h'r}{r-r'},\quad \mathrm{AD'}=\frac{h'r'}{r-r'}$$

$$\therefore\quad F=\pi\left(\frac{h'r^2}{r-r'}-\frac{h'r'^2}{r-r'}\right)$$

$$=\pi h'\times\frac{r^2-r'^2}{r-r'}$$

$$=\pi h'(r+r')$$

[2] $V$ ハ直圓錐 A-BDC ト A-B'D'C' トノ差デアルカラ,

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2(\mathrm{AO})-\frac{1}{3}\pi r'^2(\mathrm{AO'}) \qquad \text{(定理三十四)}$$

ソシテ $\frac{\mathrm{AO}}{r}=\frac{\mathrm{AO'}}{r'}=\frac{\mathrm{AO}-\mathrm{AO'}}{r-r'}=\frac{h}{r-r'}$ デアルカラ

[1]ト同樣ノ方法デ

$$V=\frac{1}{3}\pi h\times\frac{r^3-r'^3}{r-r'}$$

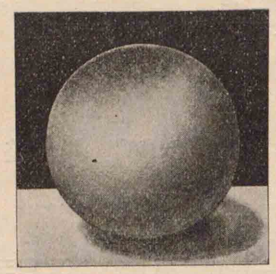
$$=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$$

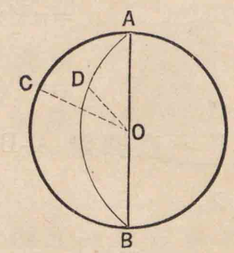
系 直圓錐臺ノ側面積ハ軸ヲ垂直ニ二等分スル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シイ。

問 口徑 30cm, 底徑 20cm, 深サ 25cm ノばけつニ滿ツル水ノ重サヲ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トセヨ。

## 115. 球

定義 半圓ガ其ノ直徑ヲ軸トシテ其ノ周リニ一廻轉シタトキ,其ノ弧ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面デ圍マレタ立體ヲ**球**トイフ。






弧ノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面ヲ**球面**トイフ。球面ハ此ノ半圓ノ中心カラ等距離ニアル點ノ軌跡デアルコトハ明ラカデアル。此ノ中心ヲ球ノ**中心**トイヒ,中心カラ球面上ノ各點ニ至ル線分ヲ球ノ**半徑**トイフ。又中心ヲ通リ兩端ガ球面デ終ル線分ヲ其ノ**直徑**トイフ。

球面ハ其ノ中心ニ關シテ對稱デアル。

問 1. 半徑ノ等シイ球ハ合同デアル。

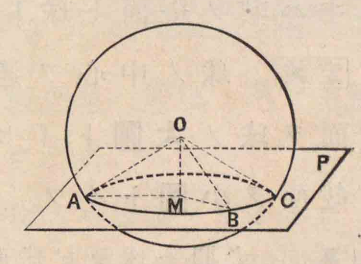
問 2. 同ジ平面上ニナイ四ツノ點ヲ通ル球面ハ唯一ツシカナイ。(問題 14 ノ 5 參照) 此ノ球面ハ其ノ四點ヲ頂點トスル四面體ニ**外接スル**トイフ。



## 116. 球ノ截面

定理 三十六 **球ヲ平面デ截ツタ面ハ圓デアル.**

**證明** 截面PガP球ノ中心ヲ通ラナイトシ,Pト球面トノ出會フ線ヲ ABC トスル。




OカラPヘ垂線OMヲ引クトMハ定點デアル。今ABC上ノ任意ノ點ヲAトシ, OA, AM ヲ結ブト, OA, OM ノ長サハ一定デアルカラ MA ノ長サモ一定デアル。

故ニAハ截面P上ノMヲ中心トスル圓周上ニアル

次ニ此ノ圓周上ニ任意ノ點Bヲ取ルト,

MB=MA デアルカラ OB=OA デアル。

故ニBハ此ノ球面上ノ點デアル。

依ツテ此ノ截面ハ圓デアル。

(PガOヲ通ル場合ハ,學生之ヲ證明セヨ)

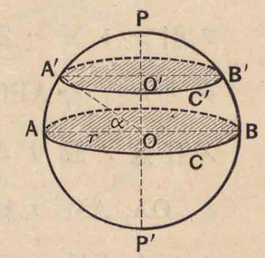
系 中心カラ等距離ニアル截面ハ皆相等シク,中心カラ遠イ距離ニアル截面ハ近イ距離ニアル截

面ヨリモ小デアル。

(何故ナレバ,球ノ半徑ヲ$r$,截面ノ半徑ヲ$r'$トシ,兩中心ノ距離ヲ$d$トスルト, $r'^2=r^2-d^2$ デアルカラデアル)

定義 平面ト球トガ一ツノ圓ヲ共有スルトキハ,其ノ平面ト球トハ**相交ハル**トイフ。

定義 球ノ中心ヲ通ル截面ヲ球ノ**大圓**トイヒ,他ノ截面ヲ**小圓**トイフ。




系 大圓ハ球及ビ球面ヲ二等分スル。

問 1. $\angle AOA'=\alpha$ トスルト $O'A'$ (截面ノ半徑)$=r\cos\alpha$ デアル。但シ$r$ハ球ノ半徑トスル。

定義 球ノ大圓又ハ小圓ノ中心ヲ通リ其ノ圓ニ垂直ナル直線ヲ其ノ圓ノ**軸**トイヒ,軸ト球面トノ交點ヲ其ノ圓ノ**極**トイフ。

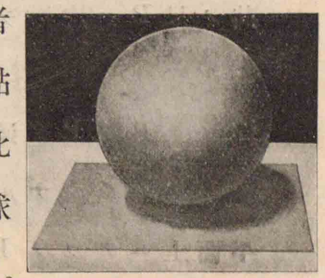
問 2. 大圓又ハ小圓ノ軸ハ球ノ中心ヲ通リ,其ノ極ハ其ノ圓周上ノ總テノ點カラ等距離ニアル。

## 117. 球ノ切線ト切平面

定義 直線又ハ平面ト球面トガ唯一點ヲ



共有スルトキハ,此ノ兩者ハ**相切スル**トイヒ,其ノ點ヲ**切點**トイフ。ソシテ此ノ直線及ビ平面ヲ夫々球ノ**切線**及ビ**切平面**トイフ。



系 球ノ切線又ハ切平面ハ切點ニ至ル半徑ニ垂直デアル。逆モ亦眞デアル。

問 四面體ノ四面ニ切スル球面ノ中心ヲ求メヨ。

(問題14ノ3[2]參照)

此ノ球ヲ四面體ノ**內接球**トイフ。

## 118. 二ツノ球

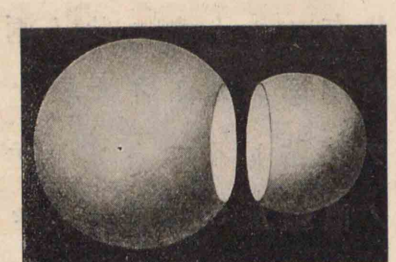
定義 一ツノ球ノ一部分ガ他ノ球ノ內ニアルトキハ,此ノ兩球ハ**相交ハル**トイフ。

定理三十七 **二ツノ球面ノ交ハリハ圓周デ,其ノ圓ノ平面ハ兩球ノ共通中心線ニ垂直デアル.**

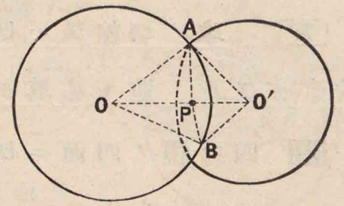
證明 二ツノ球面$O, O'$ノ交ハリノ上ノ任意ノ點ヲ$B$トスルト,$\triangle OBO'$ニ於テ$OO'$ノ位置ト大サトガ一定デ且他ノ二邊ノ長サモ一定デアル。

故ニ$B$カラ$OO'$ヘ引イタ垂線ノ長サハ一定デ,

其ノ足Pハ定點デアル。



依ッテBハPヲ通リ$OO'$ニ垂直ナル平面上ニアッテPヲ中心トスル一ツノ圓周上ニアル。




次ニ此ノ圓周上ニ任意ノ點Aヲ取ルト,$OO'$ハ圓Pノ平面ニ垂直デ且PA, PBハ相等シイカラOA, $O'A$ハ夫々OB, $O'B$ニ相等シイ。

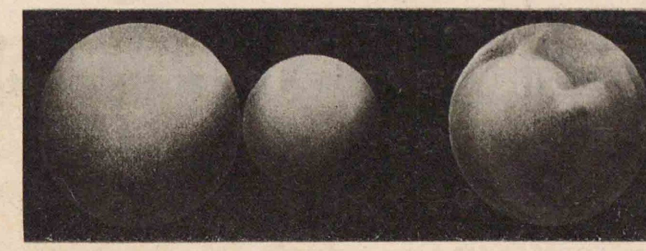
依ッテAハ兩球面ノ交ハリノ上ノ點デアル。

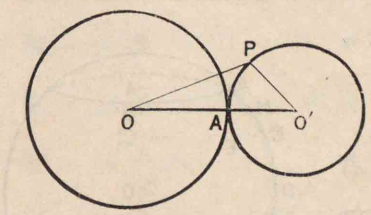
依ッテ兩球面ノ交ハリハ一ツノ圓周デ,其ノ圓ノ平面ハ共通中心線$OO'$ニ垂直デアル。

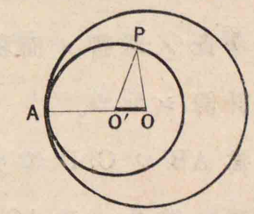
定義　二ツノ球面ガ唯一點ヲ共有スルトキハ,此ノ兩球ハ**相切スル**トイヒ,其ノ點ヲ其ノ**切點**トイフ。

二ツノ球面ガ相切スルトキ,各〻ガ他ノ外ニアルトキハ**外切スル**トイヒ,其ノ一ツガ全ク他ノ內ニアルトキハ**內切スル**トイフ。







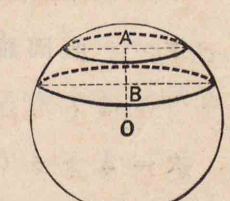

問1. 共通中心線上ノ一點ヲ共有スル二ツノ球面ハ相切スル。

問2. 相切スル二ツノ球面ノ切點ハ其ノ共通中心線上ニアル。

問3. 二ツノ球ノ位置ト其ノ中心間ノ距離及ビ半徑トノ間ノ關係ハドウカ。

## 119. 球帶

定義　平行ナル二ツノ截面ノ間ニアル球面ノ部分ヲ**球帶**トイフ。



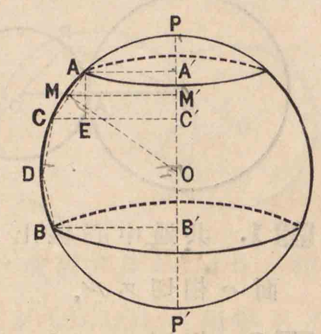

此ノ兩截面ノ距離ヲ球帶ノ高

サ又ハ厚サトイフ。

定理 三十八 **球帶ノ面積ハ其ノ高サト其ノ球ノ大圓ノ周トノ積ニ等シイ.**

**證明** 中心ガOデアル圓ノ直徑PP′ヲ軸トシテ弧ACBヲ廻轉スルト一ツノ球帶ヲ生ズル。

今此ノ球帶ノ面積ヲ計算シヨウ。




弧ABヲC, D等デ若干ニ等分シ,弦AC, CD等ヲ引キ,Oカラ弦ACヘ垂線OMヲ引キ,又PP′ノ上ニ投ジタA, M, C, Bノ正射影ヲ夫々A′, M′, C′, B′トスルト,A′B′ハ此ノ球帶ノ高サデアル。

先ヅ弦ACノ廻轉ニヨツテ生ズル曲面ノ面積ヲ求メルニ,此ノ面積ハACC′A′ノ廻轉ニヨツテ生ズル直圓錐臺ノ側面積デアルカラ

$$2\pi MM'\cdot AC \quad \text{(定理三十五系)}$$

次ニAカラCC′ヘ垂線AEヲ引クト

$$\triangle ACE \backsim \triangle MOM'$$



故ニ $$\frac{AC}{AE}=\frac{OM}{MM'}$$

故ニ $$MM'\cdot AC=OM\cdot AE$$

ソシテ $AE=A'C'$ デアルカラ

上ノ側面積ハ

$$2\pi OM\cdot A'C' \quad \text{デアル。}$$

故ニ折線ACD……Bノ廻轉ニヨツテ出來ル曲面ノ面積ハOMヲ半徑トスル圓周トA′B′トノ積ニ等シイ。

弧ABノ分點ノ數ヲ無限ニ增ストキハ,此ノ折線ノ極限ハ弧ABトナリ,OMノ極限ハ球ノ半徑トナル。ソシテ上ノ曲面ノ面積ノ極限ハ球帶ノ面積デ

$$2\pi\times(\text{半徑})\times A'B' \quad \text{トナル。}$$

故ニ球帶ノ面積ハ大圓周ト高サトノ積ニ等シイ。

## 120. 球ノ表面積ト體積

定理 三十九 **球ノ半徑ヲ$r$トスルト,其ノ表面積ハ$4\pi r^2$デアル.**

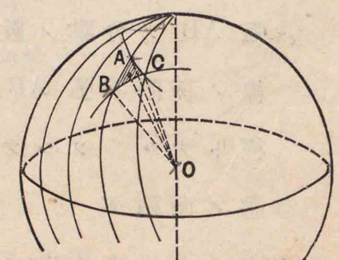
(球帶ノ面積カラ之ヲ誘導セヨ)

**問 1.** 球ノ表面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ側面積ニ等シク,其ノ全面積ノ三分ノ二ニ等シイ。

(あるきめです Archimedes ノ定理)

**定理 四十** **球ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,其ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル.**

**證明** 球面上ニ多數ノ點ヲ取リ,此等ヲ二ツヅツ結ンデ三角形ヲ作ルト,各面ガ皆三角形デアル多面體ガ此ノ球ニ内接スルコトトナル。




此ノ多面體ノ頂點ヲ悉ク球ノ中心ニ結ブト,此ノ多面體ハ多クノ三角錐ノ總和ト見做スコトガ出來ル。

ソシテ球面上ニ取ル點ノ數ヲ無限ニ增セバ,此ノ多面體ノ體積ヲ如何程デモ球ノ體積ニ近迫セシメルコトガ出來ル。

ソシテ此ノ時其ノ表面積ハ如何程デモ球ノ表



面積ニ近迫シ,且又此ノ多面體ヲ作ル諸三角錐ノ高サハ如何程デモ球ノ半徑ニ近迫スル。

然ルニ三角錐ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times(\text{底面積})\times(\text{高サ})$$

デアルカラ,上ノ三角錐ノ總和ノ極限デアル球ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times(\text{球ノ表面積})\times(\text{半徑})\quad \text{デアル。}$$

故ニ球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル。

**問 2.** 鑄鐵球ガアッテ,其ノ重量ハ $36kg$ デアル。其ノ直徑ハ幾ラカ。但シ鑄鐵ノ比重ハ7.2トスル。

**問 3.** 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シイ。(あるきめですノ定理)

あるきめです
(287-212 B.C.頃)

## 問題 15

1. 直徑 $1m$, 高サ $2m$ ノ直圓壔カラ最大ナ四角壔ヲ取ルナラバ,其ノ體積ハ幾ラカ。
2. $2l$ ノ水ヲ底ノ半徑 $5cm$ アル直圓壔形ノ器ニ

移シ入レルトキハ,水面ノ高サハ幾ラトナルカ。

但シ $\pi=3.1416$ トセヨ。

3. 直圓錐ヲ其ノ頂點カラ底ヘ引イタ垂線ノ中點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル平面デ截ルトキ出來ル二ツノ部分ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

4. 雨ノ日ニ屋外ニ置イタ口徑30cm, 底徑18cm, 深サ24cmノばけつニ水ガ其ノ深サノ半分ダケ溜ツタトイフ。一平方米ノ地面ノ上ニ降ツタ雨量ハ幾立デアツタカ。

5. 直角三角形ノ直角ノ二邊ガ6cm, 8cmデアルモノガアル。此ノ三角形ヲ其ノ斜邊ヲ軸トシテ一廻轉シテ出來ル立體ノ體積ヲ求メヨ。

6. 球面外ノ一點カラ此ノ球ヘ引イタ切線ハ皆相等シク且其ノ切點ハ同ジ小圓ノ周上ニアル。

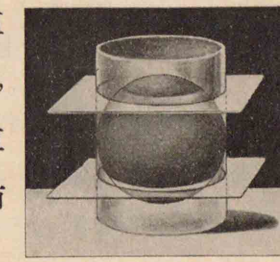
7. 二ツノ定點カラノ距離ノ比ガ一定デアル點ノ軌跡ハ一ツノ球面デアル。

8. 半徑ガ10cmデアル球面ト此ノ球ノ中心カラ8cmダケ距タツタ平面トノ交ハリニ內接スル正三角形ノ面積ヲ求メヨ。

9. 內徑12cmノ中空ノ直圓筒ヲ直立セシメ,其ノ上ニ直徑36cmノ球ヲ載セタトキ,球面ノ最モ低イ點ハ圓筒ノ上端ノ面カラ幾ラノ距離ニアルカ。



10. 直圓壔ニ內接スル球ガアル。此ノ球ト直圓壔トヲ直圓壔ノ軸ニ垂直ナル二平面デ截ルトキハ,此ノ二平面ノ間ニアル直圓壔ノ側面積ト球帶ノ面積トハ相等シイ。



11. 稜ノ長サガ $a$ デアル正四面體ニ外接スル球ト內接スル球トノ半徑ヲ求メヨ。

12. 半徑ガ6cmデアル圓Oノ平面上ノ一點ヲAトシ,OAヲ10cmトスル。今Aカラ此ノ圓ニ切線ABヲ引キ,Bヲ切點トシ,OAヲ軸トシテ此ノ圖形ヲ一廻轉スルトキ出來ル立體ノ全表面積ヲ求メヨ。

13. 直圓錐ノ斜高ガ其ノ底ノ直徑ニ等シイトキハ,其ノ體積ト此ノ直圓錐ニ內接スル球ノ體積トノ比ハ9:4ニ等シイ。

# 補習問題

## 第一　證明問題

### [1] 等角問題

1. △ABC ニ於テ AB=AC デアル。今形内ニ一點 P ヲ取リ ∠APB=∠APC ナルヤウニスルト, ∠BAP=∠PAC デアル。

2. 一點 P カラ一ツノ圓ニ A デ切スル切線 PA ヲ引キ PA ノ中點 M カラ其ノ圓ト B, C デ交ハル任意ノ直線 MBC ヲ引ケバ ∠MPB=∠MCP デアル。

3. △ABC ノ ∠B, ∠C ノ二等分線ガ對邊ニ交ハル點ヲ夫夫 D, E トシ, ED ノ延長ガ BC ニ交ハル點ヲ F トスルト, AF ハ ∠A ノ外角ヲ二等分スル。

4. 正方形 ABCD ノ B ヲ通リ AC ニ平行線ヲ引キ,其ノ上ニ E ヲ取リ(C ト E トヲ AB ノ同ジ側ニ) AE=AC ナルヤウニスレバ ∠CAE=2∠BAE デアル。

5. A, B ヲ一直線上ノ二點トシ C, D ヲ他ノ一直線上ノ二點トスルト, ∠ADC ト ∠CBA トヲ二等分スル直線ノナス角 BOD ハ ∠DAB ト ∠BCD トノ和ノ半分ニ等シイ。

6. 一線分 AB ノ同ジ側ニアル二ツノ異ナル三角形 CAB, DAB ニ於テ, AC=AD デ且 BC=BD デアルコトハ出來ナイコトヲ證明セヨ。

## [2] 圓座問題

7. 四ツノ點ガ同ジ圓周上ニアル(圓座デアル)コトヲ斷定スル基礎定理ヲ述ベヨ。

8. 四角形ノ二組ノ對邊ヲ延長シテ出來ル角ノ二等分線ガ直交スルトキハ,此ノ四角形ハ圓ニ內接スル。

9. △ABC デ ∠A=60° ナルトキ此ノ三角形ノ垂心ヲ H,內心ヲ O トスルト,四點 B, O, H, C ハ同ジ圓周上ニアル。

10. 圓 O ノ外部ニアル二點 P, Q カラ切線 PA, PB 及ビ QC, QD ヲ引キ AB, CD ノ中點ヲ M, N トスレバ,四角形 PQNM ハ圓ニ內接スル。

11. △ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊ト交ハル點ヲ P トシ, AP ヲ延長シテ其ノ上ニ Q ヲ取リ AP, AQ ノ包ム矩形ヲ AB, AC ノ包ム矩形ニ等シクスレバ, Q ハ △ABC ノ外接圓ノ周上ニアル。

12. 三角形ノ各邊ノ中點,各頂點カラ對邊ヘ引イタ垂線ノ足及ビ各頂點ト垂心トノ距離ノ中點トノ九ツノ點ハ同ジ圓周上ニアル。(此ノ點ヲ三角形ノ**九點圓**トイフ)

## [3] 直線平行問題

13. 二直線ガ平行デアルコトヲ證明スルニ用ヒル定理ヲ列擧セヨ。

14. 四角形ABCD ノ邊 AB, BC ヲ直徑トスル圓ノ共通弦ト



CD, DA ヲ直徑トスル圓ノ共通弦トハ互ニ平行デアル。

15. 一ツノ圓ノ中心 C ハ他ノ圓 O ノ周上ニアル。此ノ二圓ノ交點ヲ A, B トシ,圓 O ノ周上ノ任意ノ點 P カラ PXB, PAY ヲ引キ圓 C ト夫々 X, Y デ交ハラシメレバ AX∥BY デアル。

16. △ABC ノ頂點 A カラ ∠B, ∠C ノ二等分線ヘ引イタ垂線ノ足ヲ夫々 F 及ビ G トスレバ F ト G トヲ結ブ直線ハ BC ニ平行デアル。

17. 四角形 ABCD ノ對角線 AC ノ中點ヲ O トシ, ∠AOB, ∠BOC, ∠COD 及ビ ∠DOA ヲ二等分スル直線ガ AB, BC, CD 及ビ DA ト交ハル點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ, EF∥GH デアル。

## [4] 直線直交問題

18. △ABC ニ於テ AB=2BC, ∠B=2∠A デアレバ ∠C ハ直角デアル。

19. △ABC ノ外接圓ノ弧 AB, AC ノ中點ヲ結ブ直線ハ ∠A ノ二等分線ト直交スル。

20. 正二十角形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{20}$ ニ於テ,二直線 $A_1A_8$ ト $A_3A_{16}$ トハ垂直デアル。

21. 頂點 A ヲ共有シ底邊ガ等シイ二ツノ三角形 ABC, ADE ノ外接圓ノ共通切線ハ其ノ共通弦ノ延長ニ垂直デアル。

22. △ABC ノ邊 BC ノ中點 M ヲ通リ之ニ垂直ナル直線ガ外接圓周ニ交ハル點ヲ P, Q トシ, P, Q カラ AB ニ垂線 PR, QS ヲ引ケバ △RSM ハ直角三角形デアル。

23. 定圓ノ任意ノ直徑 AB 上ノ一點 P ヲ通リ AB ニ垂直ナル弦 CD ヲ作リ, C, D ニ於ケル此ノ圓ノ切線ノ交點ヲ Q トシ, P, Q ヲ通ル任意ノ圓ト與ヘラレタ圓トノ交點ヲ E トスレバ, E ニ於ケル二圓ノ切線ハ互ニ垂直デアル。

## [5] 直線定方向問題

24. P ハ定圓ノ周上ノ定點デ, A, B ヲ此ノ圓ニ交ハル任意ノ圓トノ交點トシ, PA, PB ガ此ノ第二ノ圓ト交ハル點ヲ X, Y トスレバ, XY ハ方向ガ一定デアル。

25. AB ヲ直徑トスル半圓周上ノ任意ノ二點ヲ P, Q トシ, AP ト BQ トノ交點ヲ X, AQ ト BP トノ交點ヲ Y トスルト, XY ハ常ニ一定ノ方向ヲ有スル。

26. 定圓 O ノ周上ノ定點 C ヲ中心トスル一ツノ定圓ガアル。今圓 O ノ周上ノ任意ノ點 P カラ圓 C ニ引イタ二ツノ切線ガ圓 O ト交ハル點ヲ A, B トスルト, AB ハ常ニ一定ノ方向ヲ有スル。

## [6] 三點一直線上問題

27. ABCDEF ハ圓ニ內接スル正六角形デアル。今 AC ト BD トノ交點ヲ P, BE ト CF トノ交點ヲ Q, AE ト DF トノ交點ヲ R トスルト, P, Q, R ハ一直線上ニアル。



28. △ABC ノ外接圓ノ ∠C 內ニアル弧 AB 上ノ任意ノ點ヲ M トシ, 邊 AB, BC 上ニ夫々 R ト P トヲ取リ又 CA ノ延長上ニ Q ヲ取リ, ∠MPB=∠MQA=∠MRB ナルヤウニスルト, 三點 P, Q, R ハ一直線上ニアル。

29. A ニ於テ外切スル二ツノ圓ガアル, 此ノ二圓ト夫々 B, C ニ於テ外切スル第三ノ圓 O ヲ畫キ, AB, AC ノ延長ガ再ビ圓 O ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ, 三點 O, D, E ハ一直線上ニアル。

30. △ABC ノ B, C ニ於ケル內角及ビ外角ノ二等分線ニ A カラ垂線ヲ引ケバ, 其ノ四ツノ足ト邊 AB, AC ノ中點トハ皆同ジ直線上ニアル。

31. 三角形ノ垂心, 重心, 外心及ビ九點圓ノ中心ハ同一ノ直線上ニアル。

## [7] 三圓周集交問題

32. △ABC ノ邊 BC, CA, AB 上又ハ其ノ延長上ニ夫々任意ノ點 D, E, F ヲ取レバ, △AEF, △BFD, △CDE ノ外接圓周ハ一點ニ集交スル。

33. 三角形ニ外接圓ヲ畫キ, 其ノ形外ニアル弓形ヲ其ノ弦デ形內ニ折込ムト, 其ノ三ツノ弧ハ一點ニ集交スル。

## [8] 三直線集交問題

34. △ABC ノ二邊 AB, AC ノ上ニ形外ニ正方形 ABDE, ACGF ヲ畫キ, A カラ BC ニ垂線 AP ヲ引クト, AP, BG, CD ハ一點ニ集交スル。

35. 平行四邊形 PQRS ノ各頂點ガ夫々一ツヅツ他ノ一定平行四邊形 ABCD ノ各邊ノ上ニアルトキハ,此ノ二ツノ平行四邊形ノ對角線ハ一點ニ集交スル。

36. 四角形 ABCD ニ於テ AB∥CD デ, AB+CD=BC ナラバ, ∠ABC, ∠BCD ノ二等分線ハ AD 上デ交ハル。

37. 圓ニ外接スル四角形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ切點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ, EG, FH, AC, BD ハ一點ニ會スル。

38. △ABC ノ各邊ノ上ニ形外ニ正三角形 BCA′, CAB′, ABC′ ヲ畫クトキハ,此ノ三ツノ三角形ノ外接圓周ハ一點ニ會スル。ソシテ AA′, BB′, CC′ ハ一點ニ集交スル。

39. 平行四邊形 ABCD ノ邊 AB ニ平行ニ EF ヲ引キ BC ニ平行ニ GH ヲ引キ, AD, BC, AB, CD トノ交點ヲ夫々 E, F, G, H トシ,又 EF ト GH トノ交點ヲ P トスレバ, ▱AH, ▱BP, ▱CE ノ對角線ハ一點ニ會スル。

## [9] 線分相等問題

40. H ヲ △ABC ノ垂心, O ヲ外心トシ, AB 上ニ AH ニ等シク AD ヲ取リ, AC 上ニ AO ニ等シク AE ヲ取レバ, DE ハ此ノ三角形ノ外接圓ノ半徑ニ等シイ。



41. △ABC ノ頂點 B, C 及ビ外心 O ヲ通ル圓周ト AB 又ハ其ノ延長トノ交點 Q ト C トヲ結ベバ, QA=QC デアル。

42. 圓 O 外ノ一點 P カラ切線 PC ト割線 PAB トヲ引キ又切點 C ヲ通ル直徑 CD ヲ引キ BD, PO ヲ結ビ A ヲ通リ PO ニ平行ニ AEF ヲ引キ CD, BD ト夫々 E, F デ交ラシメレバ, AE=EF デアル。

43. 頂角 A ガ 60° デアル三角形デ二底角 B ト C トノ二等分線ガ夫々對邊ト交ハル點ヲ D, E トシ, BD ト CE トノ交點ヲ O トスルト, OD=OE デアル。

44. 圓ノ相交ハル二弦 CF, DG ノ交點 E ヲ通リ FG ニ平行線ヲ引キ CD ノ延長ト A デ交ハラシメレバ, EA ハ A カラ引イタ切線ニ等シイ。

45. △ABC ヲ ∠A ヲ直角トスル三角形トシ, AB, AC ノ外方ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ作リ, CD ト AB トノ交點ヲ M, BF ト AC トノ交點ヲ N トスルト, AM=AN デアル。

46. 中心ガ O デアル圓ノ周上ニ直徑ノ兩端デナイヤウニ二點 A, B ヲ取リ, A ヲ通ル任意ノ弦 AC ト A, B, O ヲ通ル圓周トノ交點ヲ P トスルト, PB=PC デアル。

47. 圓周上ノ二點 A, B ニ於ケル切線ノ交點ヲ C トシ,直徑 EF ノ E ニ於ケル切線 ET ト FA, FC, FB トノ交點ヲ夫々 G, I, H トスレバ, I ハ GH ノ中點デアル。

48. ▱ABCD ノ內側ニ正三角形 BCE, CDF ヲ作ルトキ, △AEF ハ正三角形デアル。

49. △ABC ニ於テ ∠B ガ ∠C ノ 2 倍デ, A カラ BC ヘ引イタ垂線ノ足ヲ D トシ, BC ノ中點ヲ E トスルト, AB=2DE デアル。

## [10] 線分不等問題

50. △ABC ノ內接圓ガ AB, AC ニ切スル點ヲ夫々 F, E トシ,之ト同心ナル圓周ガ線分 AF, CE ト交ハル點ヲ夫々 E′, F′ トスレバ E′F′>EF デアル。

51. △ABC ノ邊 AB 上ノ一點 D カラ DE ヲ引イテ AC ト E デ交ハラシメ ∠AED ヲ ∠B ニ等シカラシメルトキ,若シ AB>AC ナレバ BE>CD デアル。

52. 圓ノ直徑 AB 上ノ一點 C カラ AB ニ垂線 CD ヲ引キ圓周ト D デ交ハラシメ,又 AC, BC ヲ對角線トスル二ツノ正方形ヲ畫キ,其ノ AB ノ同ジ側ニアル頂點ヲ E, F トスルト, EF ハ CD ヨリモ大デアル。

53. △ABC ト △DEF トニ於テ ∠A=∠D, AB+AC=DE+DF, AB∼AC>DE∼DF デアルナラバ, BC>EF デアル。

54. △ABC ノ中線 AD 上ノ任意ノ點ヲ P トシ, AB>AC ナレバ AB+PC>AC+PB デアル。

55. 圓ノ弦 AB デ分ケラレタ弧ノ一ツノ二等分點 C ト他ノ弧上ノ任意ノ點 D トヲ通ル直線 CD 上ノ任意ノ點ヲ E トスルト, AD ト BD トノ差ハ AE ト BE トノ差ヨリモ小デナイ。



56. 半徑ガ夫々 $a$, $b$ $(a>b$ トスル) ナル二圓 A, B ガアル。中心 A, B ヲ結ブ線分ノ中點ヲ M トシ,又圓 A ノ周上ノ任意ノ點 P ト圓 B ノ周上ノ任意ノ點 Q トヲ結ブ線分 PQ ノ中點ヲ N トスルト, $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\geqq \mathrm{MN} \geqq \frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ デアル。

57. △ABC ニ於テ ∠A>∠B>∠C ナルトキ, ∠A, ∠B, ∠C 內ノ傍接圓ノ半徑ヲ夫々 $r_a, r_b, r_c$ トスルト, $r_a>r_b>r_c$ デアル。

## [11] 切線·切圓問題

58. 二ツノ圓ガ P デ外切シ一ツノ直線ガ此ノ二圓ニ A, B デ切スルトキハ AB ヲ直徑トスル圓ハ此ノ二圓ノ中心ヲ結ブ直線ニ切スル。

59. 圓 O 外ノ一點 C カラ此ノ圓ニ引イタ一ツノ切線ノ切點ヲ A トシ, C ヲ通リ O ヲ通ラナイ任意ノ割線ト圓周トノ交點ヲ E, F トスル。又 A ヲ通リ CO ト圓內ノ點 D デ交ハル弦ヲ引キ,若シ E, D, O, F ガ圓座デアレバ AD ト圓周トノ交點ハ C カラ圓 O ニ引イタ他ノ切線ノ切點デアル。

60. 一ツノ直線 AB ニ垂直ニ AB ノ同ジ側ニ AC, BD ヲ引キ $\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$ ナルヤウニスレバ, AC 及ビ BD ヲ直徑トスル二ツノ圓ハ互ニ相切スル。

**61.** 圓ノ弦 AB ノ中點 M ヲ通ル弦 CD ヲ引キ, D カラ AB ニ平行ニ DE ヲ引キ圓周ト E デ交ハラシメ, CE ヲ結ビ AB ト F デ交ハラシメレバ,三點 E, F, M ヲ通ル圓ハ初メノ圓ニ切スル。

**62.** $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ヲ AD トスル。今 D ニ於テ BC ニ切シ且 A ヲ通ル圓ヲ畫ケバ此ノ圓ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓ニ切スル。

## [12] 多角形ノ面積問題

**63.** 三角形ノ重心ヲ通ル直線ガ其ノ三角形ノ面積ヲ二等分スルノハドンナ場合カ。

**64.** 四角形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點ヲ夫々 M, N トシ, MN ト CD トノ交點ヲ Q トスレバ $\triangle QAB=\frac{1}{2}ABCD$ デアル。

**65.** 四角形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點ヲ夫々 M, N トシ, MN 上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ

$$\triangle PAB+\triangle PCD=\triangle PBC+\triangle PAD$$

デアル。

**66.** 正方形 ABCD ニ於テ $\triangle ABC$ ノ內心 O カラ AD, CD ヘ夫々垂線 OE, OF ヲ引ケバ,正方形 EOFD ノ 2 倍ハ ABCD ニ等シイ。

**67.** M, N ヲ四角形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點トシ M, N カラ夫々 BD, AC ニ平行線ヲ引キ其ノ交點 O ヲ各邊ノ中點ニ結ブ四直線ハ ABCD ヲ四等分スル。



## [13] 比例問題

**68.** $\triangle ABC$ ニ於テ D ハ AB ノ中點, E ハ AC ノ三等分點デ A ニ近イモノトスル。ソシテ CD ト BE トノ交點ヲ P トシテ比 PB : PE ノ値ヲ求メヨ。

**69.** 一點 O カラ出ル四ツノ直線 OA, OB, OC, OD ガアツテ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=45^\circ$ トスル。今一ツノ直線ガ之ヲ夫夫 A, B, C, D デ截ツテ且 AO=DO ナルヤウニスルト, AB ト CD トハ AD ト BC トノ比例中項デアル。

**70.** 二點 A, B ヲ通ル三ツノ圓ヲ $O_1, O_2, O_3$ トシ, A ヲ通ル二直線ト此ノ三圓周トノ交點ヲ夫々 $L_1, L_2, L_3$; $M_1, M_2, M_3$ トスレバ $L_1L_2 : L_2L_3=M_1M_2 : M_2M_3$ デアル。

**71.** $\triangle ABC$ ノ邊 AB 上ニ AB ノ中點デナイ任意ノ點 P ヲ取リ, P カラ BC ニ平行ニ直線 $PP_1$ ヲ引キ, AC トノ交點ヲ $P_1$ トスル。次ニ $P_1$ カラ AB ニ平行ニ $P_1P_2$ ヲ引キ BC トノ交點ヲ $P_2$ トスル。次ニ又 $P_2$ カラ AC ニ平行ニ $P_2P_3$ ヲ引キ AB トノ交點ヲ $P_3$ トスル。此ノヤウニ作圖ヲ續ケルナラバ點 $P_1, P_2, P_3$ …… ノ中ニ P ト一致スルモノガアルカ。ソシテ其ノ始メノモノハ $P_1$ カラ第何番目ノ點デアルカ。

**72.** 圓ノ內接四角形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ E トスルト $AB\cdot AD : BC\cdot CD=AE : CE$ デアル。

**73.** 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB 上ニ一點 D ヲ取リ,又 AB

ノ延長上ニ一點 E ヲ取リ ∠BCD＝∠A＝∠BCE ナルヤウニスルト, AD : BD＝$\overline{EA}^2 : \overline{EC}^2$ デアル。

74. AD ハ △ABC ノ ∠A ノ二等分線デ DE, DF ガ夫々 ∠ADB, ∠ADC ヲ二等分シテ邊 AB, AC ニ夫々 E, F デ交ハレバ △BEF : △CEF＝BA : CA デアル。

75. 二ツノ同心圓ガアル。外圓周上ノ一點 A カラ內圓ニ切線 AP, AQ ヲ引キ切點 Q, P ヲ通ル直線 QPR ガ外圓ト交ハル點ヲ R トシ,直線 APB ト外圓トノ交點ヲ B トスレバ $\overline{RA}^2 : \overline{RB}^2$＝QR : PR デアル。

76. P ニ於テ內切スル二ツノ圓ガアル。其ノ共通ノ中心線ニ垂直ナル二ツノ直線ガ外圓ニ A, B デ,又內圓ニ C, D デ夫々交ハレバ PA : PB＝PC : PD デアル。

## [14] 面積問題ノ續キ

77. AB ハ圓ノ直徑デ CD ハ之ニ垂直ナル弦デアル。CD 上ニ一點 M ヲ取リ AM, BM ガ圓ト再ビ交ハル點ヲ夫々 E, F トスルト CE·DF＝CF·DE デアル。

78. 圓ノ直徑 AB 上ノ一定點 P ヲ通ル任意ノ弦 CPD ヲ引キ弦 AC, AD 又ハ其ノ延長ガ AB ニ垂直ナル弦 GPH 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ M, N トスレバ, PM ト PN トノ包ム矩形ハ常ニ $\overline{PG}^2$ ニ等シイ。

79. 中心ガ O デアル圓ノ任意ノ弦 AD 上ニ任意ノ二點 B,



C ヲ取リ, OB, OC ヲ結ビ線分 AB, BC, CD, OB, OC ノ間ニ成立ツ關係ヲ一ツノ式デ示セ。

80. △ABC ニ於テ底 BC ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分スル點ヲ夫々 D 及ビ E トシ, DE ノ中點ヲ M トスルト, $\overline{MA}^2$＝MC·MB デアル。

81. 三角形ノ三頂點カラ互ニ平行ナル直線ヲ引イテ夫々對邊又ハ其ノ延長ト交ハラシメレバ,其ノ交點ヲ頂點トスル三角形ト原ノ三角形トノ面積ノ關係ハドウカ。

## [15] ぴたごらすノ定理

82. 直角三角形 ABC ノ各邊ヲ一邊トシ其ノ外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ書キ A カラ BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ H トスレバ, △BDH＝△ABF, △CDH＝△CAE デアル。

83. 二等邊三角形ノ一邊 AB ニ垂線 CD ヲ引キ D カラ底邊 BC ヘ垂線 DP ヲ引クト $\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PD}^2$ デアル。

84. △ABC ノ邊 BC 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ $\overline{AB}^2-\overline{AP}^2$＝BP·PC ナルトキハ,此ノ三角形ハドンナ三角形デアルカ。

85. 一ツノ圓ト其ノ周上ノ一點 O ヲ中心トスル一ツノ圓トノ交點ヲ B, C トシ,初メノ圓ノ弧 BOC 上ノ任意ノ點ヲ A トスレバ AB·AC＝$\overline{OB}^2-\overline{OA}^2$ デアル。

86. P, Q, R ハ夫々 △ABC ノ三邊 BC, CA, AB 上ノ點デアル。此ノ三點ヲ通ツテ夫々 BC, CA, AB ニ垂直ナル三直

線ガ一點ニ會スルタメニ必要デ十分ナル條件ハ

$$\overline{BP}^2-\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2-\overline{AQ}^2+\overline{AR}^2-\overline{BR}^2=0$$

デアルコトヲ證明セヨ。

87. △ABC ノ邊 BC ノ兩側ニ正三角形 BCD, BCD′ ヲ作レバ, $\overline{AD}^2+\overline{AD'}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$ デアル。

## [16] 定量問題

88. 線分 AB ヲ C デ分ケテ AC, BC ノ上ニ AB ノ同ジ側ニ正三角形 PAC, QBC ヲ作レバ, AQ, BP ノ交角ノ大サハ一定デアル。

89. △ABC ノ底 BC ト頂角 A トガ一定デアルトキ, B, C カラ對邊へ引イタ垂線ノ足ヲ E, F トスレバ, EF ノ長サハ一定デアル。

90. A, B ヲ一ツノ圓周上ノ二定點トシ, O ヲ其ノ圓內ノ一點トスル。AO, BO ヲ結ビ之ヲ延長シテ此ノ圓周ト P 及ビ Q デ交ハラシメルトキ, PQ ノ長サヲ常ニ一定ナルヤウニスレバ, O 點ノ位置ニ關セズ △OPQ ノ外接圓ノ大サハ一定デアル。

91. 對角線ノ長サト其ノ夾角トガ一定デアレバ,此ノ四角形ノ面積ハ一定デアル。

92. 平行四邊形內ノ任意ノ點カラ各邊へ引イタ垂線ノ足ヲ結ビテ出來ル四角形ノ面積ハ一定デアル。



93. 定線分ヲ內分シ其ノ各部分ノ上ニ正三角形ヲ作レバ, 其ノ高サノ和ハ一定ノ長サデアル。外分スル場合ハドウカ。

94. 定マツタ矩形ニ內接スル平行四邊形ノ各邊ヲ其ノ矩形ノ對角線ニ平行ナラシメルト,此ノ平行四邊形ノ周ハ一定ノ長サデアル。

95. 半圓ノ直徑 AB 上ニ中心 O ノ兩側ニ O カラ等シイ距離ニ C, D ヲ取リ, C, D ヲ通ツテ任意ノ平行線 CP, DQ ヲ引キ半圓周ト P, Q デ交ハラシメレバ,矩形 CP·DQ ノ面積ハ一定デアル。

96. A ヲ半徑ガ $r$ デアル圓周上ノ任意ノ點トシ, O ヲ其ノ中心トスル。今 P ヲ圓外ノ一定點トシ, OP 上ニ一點 Q ヲ取リ $OP\cdot OQ=r^2$ ナルヤウニスルト,比 AP : AQ ハ一定デアル。

97. 相交ハル二圓 O, O′ ニ於テ其ノ交點ノ一ツヲ A トシ, 任意ノ割線ヲ引キ,圓 O ト B, C デ,圓 O′ ト D, E デ交ハラシメルト比 AB·AC : AD·AE ハ一定デアル。

98. 正方形 ABCD ニ外接スル圓ニ於テ弧 AD 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ,比 (PC+PA) : PB 及ビ (PC−PA) : PD ハ各〻一定デアル。

99. AB ハ定圓 O ノ定直徑デアル。AB ニ平行ナル動弦ヲ PQ トスレバ, $\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2$ ノ値ハ一定デアル。

100. 圓ノ一ツノ直徑上ニ中心カラ等距離ニアル二點ヲA, Bトシ,Bヲ通ル任意ノ弦ヲCDトスレバ,$\triangle ACD$ノ三邊ノ平方ノ和ハ一定デアル。

### [17] 定點通過問題

101. 定角Oノ二邊上ニ定點A, Bガアル。OA, OBノ延長上ニ夫々點P, Qヲ取リ$AP \cdot BQ = OA \cdot OB$ナルヤウニスルト,直線PQハ常ニ$OA \cdot OB$ヲ二隣邊トスル平行四邊形ノ一頂點ヲ通ル。

102. 定圓外ノ一定點Aカラ圓周マデ任意ノ線分ABヲ引キ,Bカラ之ニ垂直ナル弦BCヲ引ケバ,Cヲ通ツテBCニ垂直ナル直線ハ一ツノ定點ヲ通ル。

103. 定圓O外ニアル定直線XY上ノ任意ノ點カラ此ノ圓ニ二切線ヲ引ケバ,其ノ切點ヲ結ブ直線トOカラXYヘ引イタ垂線トノ交點ハ一ツノ定點デアル。

104. Aハ定圓周上ノ定點,Bハ定直線X上ノ定點デアル。A, Bヲ通ル任意ノ圓ガXト交ハル點ヲCトシ,定圓周ト交ハル點ヲDトスレバ,直線CDハ或定點ヲ通ル。

105. 一定點Pカラ定圓Oニ任意ノ割線ヲ引キ圓トノ交點ヲA, Bトシ,A, Bニ於ケル此ノ圓ノ切線ノ交點ヲCトスレバ三點A, B, Cヲ通ル圓周ハ必ズ一定點ヲ通ル。

106. 正三角形ABCノ外接圓ノ弧AB, ACノ二等分點ヲ夫々



M, Nトシ弧BC上ノ任意ノ點ヲPトスル。今PM, PNガ邊AB, ACト交ハル點ヲ夫々D, Eトスルト,DEハ或定點ヲ通過スル。

### [18] 定圓切線問題

107. $O, O'$ヲ中心トスル二ツノ定圓ノ交點ヲA, Bトシ圓Oノ周上ノ任意ノ點Pカラ引イタ直線PA, PBガ圓$O'$ト交ハル點ヲC, Dトスレバ,弦CDガ圓$O'$ノ直徑デナイナラバ常ニ或一ツノ定圓ニ切スル。

108. 定圓ニ內接スル$\triangle ABC$ノ頂點Aガ定點デ二邊AB, ACノ積ガ一定デアレバ,底BCハ他ノ一定圓ニ切スル。

109. 平行線AB, CDガアル。今AB上ノ定點TデABニ切スル任意ノ圓ヲ畫イテCDト交ハル點ヲX, Yトスレバ,X, Yニ於ケル此ノ圓ノ切線ハ皆一ツノ定圓ニ切スル。

110. 平行線甲乙ト甲上ニ一點Aトガ與ヘラレタトキ,甲乙ノ上ニ夫々P, Qヲ取リ$\angle QPA = 2\angle QAP$ナルヤウニスレバ,直線PQハ或一ツノ定圓ニ切スル。

## 第二　軌跡問題

### [1] 動點定線上問題

111. Oヲ中心トスル圓周上ノ一定點Aカラ任意ノ弦AP

ヲ引キ,次ニAニ於ケル切線上ニ AP ニ等シク AT ヲ取リ, TP ト AO トノ交點ヲQトスルト, AP ノ移動ニ伴ツテQ點ハドンナ範圍ニ移動スルカ。

**112.** 弧 AB 上ノ定點Cヲ通ツテ任意ノ直線ヲ引キ弦 AB 及ビ其ノ弧又ハ共軛弧ト夫々 D, E デ交ハラシメレバ △ADE ノ外接圓ノ中心ハ一定直線ノ上ニアル。

**113.** XX′, YY′ ハAニ於テ相交ハル二直線デアル。此ノ二直線上ニ夫々中心ヲ有シAヲ通ル任意ノ二ツノ圓周ヲ畫ケバ,其ノ共通切線ノ交點ハ常ニ二ツノ定直線ノ中ノ一ツノ上ニアル。

**114.** 一定點Oカラ一定圓ニ任意ノ割線ヲ引キ,其ノ交點ヲ P, Q トシ,弦 PQ 上ニ一點Rヲ取リ OP:OQ ガ PR:RQ ニ等シイヤウニスレバ, Rハ常ニ一定直線ノ上ニアル。

**115.** AB ハ定圓Oノ定弦デ, AC ハAカラ出ル此ノ圓ノ任意ノ弦デアル。然ラバ AB, AC ヲ二隣邊トスル平行四邊形ノ對角線ノ交點Pハ一ツノ定圓ノ周上ニアル。

**116.** 直角三角形ノ直角ノ頂點ハ定點デ斜邊ノ兩端ガ一ツノ定圓ノ周上ヲ動クトキハ,此ノ三角形ノ外心ハ他ノ一定圓ノ周上ヲ動ク。

**117.** PQ ヲ定圓Oノ定弦 AB デ二等分セラレル任意ノ弦トスレバ, P, Q デ圓Oニ切スル二切線ノ交點ハ常ニ一ツノ定圓ノ周上ニアル。



### [2] 直線軌跡

**118.** 二等邊三角形ABCノ頂點Aヲ中心トスル任意ノ圓ニ底 BC ノ兩端カラ引イタ切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**119.** 直角 AOB 内ノ一點Pカラ OA, OB ニ引イタ垂線ノ足ヲC及ビDトスルトキ, PC+2PD ガ定線分Lニ等シイヤウニP點ヲ取リPノ軌跡ヲ求メヨ。

**120.** △ABC ノ頂點Aト對邊 BC 上ノ動點Dトヲ結ビ其ノ延長上ニ一點Pヲ取リ $\triangle ACD:\triangle BPD=\overline{CD}^2:\overline{BD}^2$ ナルヤウニスルトキ,Pノ軌跡ヲ求メヨ。

**121.** 直交スル二定直線甲乙ガアツテ, A, B ヲ甲ノ上ノ二ツノ定點,Pヲ乙ノ上ノ任意ノ點トスルトキ, A, B ニ於テ夫々 PA, PB ニ垂直ナル二直線ノ交點Qノ軌跡ハ甲ニ直交スル一ツノ直線デアル。

**122.** 定圓内ノ定點ヲ通ル弦ノ兩端ニ於ケル此ノ圓ノ切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

### [3] 圓軌跡·弧軌跡

**123.** 定圓ノ定直徑 AB ノ一端Aニ於テ切線 AT ヲ引キ,次ニBカラ任意ノ直線 BQT ヲ引イテ圓周及ビ切線 AT トノ交點ヲ夫々Q及ビTトスル。今 QT 上ニP點ヲ取リ,Pト AT トノ距離ヲ PQ ニ等シクスルトキPノ軌跡ヲ求メヨ。

124. 與ヘラレタ圓周上ニ中心ヲ置キ一定ノ半徑ヲ有スル圓ヲ作リ之ニ一定ノ方向ヲ有スル切線ヲ引クトキ其ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

125. 定圓ノ任意ノ弦ヲ分ケテ其ノ二部分ノ包ム矩形ガ定量 $K^2$ ニ等シイヤウナ分點ノ軌跡ヲ求メヨ。

126. 定直線 XY ト其ノ上ニナイ定點 O ガアル。今或圖形ノ上ノ任意ノ點ヲ P トシ, OP 又ハ其ノ延長上ニ Q 點ヲ取リ,矩形 OP·OQ ノ面積ヲ一定ナラシメルトキ, Q ノ軌跡ガ XY デアレバ P ノアル圖形ハドンナ圖形デアルカ。

127. 定圓周上ノ定點 A カラ出ル此ノ圓ノ弦 AB ノ中點ニ垂線 MC ヲ立テ MA=MC ナラシメルトキ C ノ軌跡ヲ求メヨ。

128. AB ヲ定圓ノ定弦トシ, PQ ヲ長サダケガ一定デアル此ノ圓ノ移動スル弦トスルトキ, AP ト BQ トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

129. △ABC ノ底 BC ヲ固定シ頂角 A ノ大サガ一定デアルトキ其ノ重心 G ノ軌跡ヲ求メヨ。

130. ∠XOY ヲ定マツタ銳角トシ,二邊 OX, OY 上ニ夫々定點 A, B ガアツテ OA=OB デアル。今此ノ角ノ內部ニ P 點ヲ取リ ∠OPA=∠OPB デアルヤウニスル P ノ軌跡ヲ求メヨ。

131. △ABC ヲ正三角形トシ, P ヲ動點トスル。今 P ガ二角 APB, APC ガ相等シイヤウニ動クトキ P ノ軌跡ヲ求メヨ。



132. 矩形 ABCD ノ一組ノ對邊 AB, CD ニ對スル二角 APB, DPC ガ相等シイヤウニ動クトキ P 點ノ軌跡ヲ求メヨ。又 ABCD ガ正方形デアレバドウカ。

133. 與ヘラレタ圓ノ任意ノ弦 AB ノ延長上ニ點 P ヲ取リ, AB=BP ナルヤウニ P 點ヲ取レバ P 點ハドンナ範圍ノ內ニアルカ。

134. 相交ハル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ定線分 L ヨリモ小デアル點ノ存在スル範圍ヲ定メヨ。

## 第三　作圖題

### [1] 點ヲ求メル問題

135. 與ヘラレタ線分 AB 上ノ一定點 O ヲ通ル直線 CD 上ニ一點 P ヲ求メ PA:PB=AO:BO ナルヤウニセヨ。

136. 圓 O ト直線 X ト X 上ノ一點 A トガ與ヘラレタトキ, X 上ニ一點 P ヲ求メ P カラ圓 O ニ引イタ切線ガ AP ニ等シイヤウニセヨ。

137. XX′, YY′ ヲ二ツノ與ヘラレタ平行線トシ, A, B ヲ XX′ ニ對シ YY′ ト反對ノ側ニ與ヘラレタ點トスル。YY′ 上ニ一點 C ヲ求メ AC, BC ガ XX′ カラ截リ取ル線分ノ長サヲ與ヘラレタ長サ $l$ ニ等シクセヨ。

138. △ABC ノ頂點 A ヲ通ツテ BC ニ平行ニ引イタ直線上ニ一點 D ヲ定メ AC ト BD トノ交點ヲ E トシ, △ABE ガ △AED ノ 2 倍デアルヤウニセヨ。

139. 三點 A, B, C ガ一定直線上ニ此ノ順ニ與ヘラレタトキ, 此ノ直線上ニ一點 O ヲ求メ, OB ガ OA, OC ノ比例中項デアルヤウニセヨ。

140. 與ヘラレタ角内ニ定點 P ガアル。此ノ角ノ一邊上ニ一點 A ヲ求メ, A ト他ノ邊トノ距離ガ AP ニ等シイヤウニセヨ。

## [2] 圓ヲ畫ク問題

141. 與ヘラレタ直線上ニ中心ヲ有シ與ヘラレタ一點ヲ通リ且與ヘラレタ圓周ヲ二等分スル圓周ヲ畫ケ。

142. 二ツノ與ヘラレタ點 A, B ヲ通リ一ツノ與ヘラレタ圓 O ヲ G, H デ截ル圓周ヲ畫キ, 弦 GH ガ圓 O ノ直徑トナルヤウニセヨ。

143. 所設ノ圓ノ中心ヲ通ル一定直線上ニ中心ヲ置キ其ノ圓ト直交シ且一定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。

注意 交點ニ於ケル二圓ノ切線ガ直交スルトキ其ノ**二圓ハ直交スル**トイフ。

144. 正三角形 ABC ノ二邊ヅツニ切シ且互ニ外切スル三ツノ等圓ヲ畫ケ。



## [3] 直線ヲ引ク問題

145. AB, CD ハ平行線デ P ハ AB 上ノ定點デアル。今他ノ一定點 Q ヲ通リ AB, CD ニ夫々 X, Y デ交ハル直線ヲ引キ XY=XP デアルヤウニセヨ。

146. 與ヘラレタ點 P ヲ通ル直線ヲ引キ, 與ヘラレタ角 XOY ノ二邊ヲ夫々 A, B デ截リ OA+OB ヲ與ヘラレタ長サニ等シイヤウニセヨ。又矩形 PA·PB ガ與ヘラレタ正方形ニ等シイヤウニセヨ。

147. 鋭角 AOC ト其ノ頂點 O ヲ通リ角内ニアル直線 OB ガ與ヘラレタトキ, 與ヘラレタ長サ $l$ ニ等シイ線分 ABC ヲ引キ, OA, OB, OC ト夫々 A, B, C デ交ハラシメ, AB=BC ナルヤウニセヨ。

148. 定點 P ヲ通ツテ一ツノ直線ヲ引キ三ツノ半直線 OX, OY, OZ ト夫々 A, B, C デ交ハラシメ △OAB=△OBC ナルヤウニセヨ。

149. 或紙上ニ畫カレタ二直線 AB, CD ガアル。此ノ二直線ハ平行デナク又紙上デハ交ハラナイモノデアル。今紙上ノ一定點 P ヲ通リ AB, CD ノ交點ヲ通ルベキ直線ヲ引ケ。

150. 定直線 XY ノ兩側ニ二ツノ定點 A, B ガアル。今 XY 上ニ長サガ與ヘラレタ線分 PQ ヲ置キ AP ト BQ トガ平行デアルヤウニセヨ。

151. 定圓內ノ定點Pヲ通ル弦 APB ヲ引キ AP−PB ヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ。

又 AP=2PB ナルヤウニセヨ。

152. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツAヲ通ツテ一直線ヲ引キ各圓トノ交點ヲ夫々P,Qトシ矩形 AP·AQ ガ與ヘラレタ正方形$K^2$ニ等シイヤウニセヨ。

153. 一ツノ直線Xト一ツノ圓Oトガ與ヘラレ,一ツノ直線ヲ引キXトAデ,圓OトB,Cデ交ハラシメ,AB,AC ヲ夫夫與ヘラレタ長サ M,N ニ等シクセヨ。

154. 與ヘラレタ線分 AB ヲ單位トシテ測ツタトキ長サガ$\sqrt[4]{3}$デ表ハサレル線分ヲ作圖セヨ。

## [4] 三角形ノ作圖問題

155. 一ツヅツ頂點ヲ置ク三ツノ同心圓周ガ與ヘラレテ正三角形ヲ作レ。

156. 周ト高サトヲ知ツテ二等邊三角形ヲ作レ。

157. 頂角ト高サト周トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

158. 頂角ト其ノ一邊ヘノ中線ノ長サト面積($2K^2$)トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

159. △ABC, △DEF ヲ二ツノ與ヘラレタ三角形トシ, △ABC ニ相似デ △DEF ニ等積デアル三角形ヲ作レ。

160. 二邊 $a$, $b$ ト $a$ ノ對角Aトガ與ヘラレタトキ三角形ヲ作圖シテ二ツノ解答ヲ得タトキ,此ノ二ツノ三角形ノ第三邊ヲ $c_1$, $c_2$ トスレバ, $b^2=a^2+c_1c_2$ デアルコトヲ證明セヨ。



## [5] 多角形ノ作圖問題

161. 二ツノ定メラレタ平行線間ノ定點ヲ一頂點トシ,他ノ二頂點ヲ一ツヅツ其ノ平行線上ニ置ク正方形ヲ作レ。

162. 周ガ與ヘラレタ矩形ヲ與ヘラレタ圓ニ內接セシメヨ。

163. 與ヘラレタ圓ニ外接シ,與ヘラレタ長サノ邊ヲ有スル菱形ヲ作レ。

164. 兩對角線ノ長サト其ノ交角ノ大サト一組ノ隣邊ノ和トヲ知ツテ梯形ヲ作レ。

165. 外接圓ノ半徑,兩底ノ差及ビ高サトヲ知ツテ等脚梯形ヲ作レ。

166. 定圓外ニ二定點 A, B ガアル。此ノ圓周上ニ二點 C, D ヲ求メ四邊形 ACDB ガ平行四邊形デアルヤウニセヨ。

167. AB, AD ノ長サ, BC:CD ノ値及ビ ∠D ノ大サト, △ACD ノ面積ガ與ヘラレタトキ四邊形 ABCD ヲ作レ。

## [6] 面積ノ等積變形·分割問題

168. 與ヘラレタ平行四邊形ヲ頂角ガ與ヘラレタ角ニ等シイ二等邊三角形ニ變化セヨ。

169. 與ヘラレタ多角形ヲ等積ナル正三角形ニ變形セヨ。

170. 與ヘラレタ四角形 ABCD ノ邊 AB 上ニ之ト等積ナル菱形ヲ作レ。

171. 與ヘラレタ直線ニ平行ナル直線デ與ヘラレタ三角形ヲ二等分セヨ。

172. 一ツノ邊ニ平行ナル二直線デ與ヘラレタ三角形ヲ三部分ニ分ケテ其ノ比ヲ與ヘラレタ比 $l:m:n$ ニ等シイヤウニセヨ。

173. 與ヘラレタ圓ヲ其ノ同心圓周デ $l, m, n$ ニ比例スル三部分ニ分ケヨ。

## [7] 極大極小問題

174. 定圓ノ周上ノ一點カラ其ノ圓外ニアル一定圓ニ引イタ二ツノ切線ノ交角ガ最大及ビ最小ナル點ノ位置ヲ定メヨ。

175. 二定點 A, B ヲ一定直線又ハ一定圓周上ノ一點 P ニ結ビ ∠APB ヲ最大ナラシメル P ノ位置ヲ求メヨ。

176. 一ツノ圓周ト之ニ出會ハナイ一ツノ直線ガ與ヘラレタトキ,此ノ各〻ノ上ニ端ヲ有シ,他ノ與ヘラレタ直線ニ平行ナル最小線分ヲ引ケ。

177. 一ツノ平板上ニ二個ノ極メテ細イ留針 P, Q ヲ固定シ,三角定木 ABC ヲ其ノ二邊 AB, AC ガ常ニ此ノ留針ニ觸レルヤウニ其ノ板上ニ動カストキ定木ノ一尖端 A カラ P 及ビ Q ニ至ル長サノ和ガ最大トナル A 點ノ位置ヲ求メヨ。



178. 與ヘラレタ底 AB 上ニ立ツ △ABC ノ二邊ノ和 AC+BC ガ一定デアレバ, AC=BC ナルトキガ此ノ三角形ノ面積ハ最大デアル。

179. 同底等高ノ三角形ノ中デ周ノ最小デアルノハ二等邊三角形デアル。

180. 一ツノ與ヘラレタ角 XOY ノ二邊 OX, OY ノ上ニ夫々 A, B ヲ取リ OA+OB ガ一定デアルヤウニスレバ, OA=OB ナルトキニ

❶ △OAB ノ面積ハ最大デアル。

❷ 線分 AB ハ最小デアル。

❸ 圓 OAB ハ最小デアル。

181. A ハ定圓 O ノ周上ノ定點デ XY ハ定弦デアル。A カラ弦 APQ ヲ引キ XY ト P デ交ハラシメ矩形 AP·PQ ガ最大デアルヤウニセヨ。

182. 一ツノ定圓ノ外ニ二定點 A, B ガアル。此ノ圓周上ヲ弦 PQ ノ長サガ一定デアルヤウニ動ク二點 P, Q ガアルトキ, PQ ガドンナ位置ニアルトキ $\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2$ ガ最大又ハ最小デアルカ。

# 第四 計算問題

183. △ABC ノ二邊 BC, CA 上ニ夫々點 P, Q ヲ $BP:PC=m:n$, $CQ:QA=p:q$ ナルヤウニ取リ, AP, BQ ノ交點ヲ R トシ,比 AR:RP ノ値ヲ $m, n, p, q$ デ表ハセ。

184. 一邊ガ $a$ デアル正三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ結ブ線分上ノ任意ノ點ヲ D トシ, BD ノ延長ト邊 AC トノ交點及ビ CD ノ延長ト AB トノ交點ヲ夫々 E, F トスル。$CE=x$, $BF=y$ トシテ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ノ値ヲ求メヨ。

185. 四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA 上ニ夫々 P, Q, R, S ヲ取リ $\frac{AP}{PB}=\frac{CQ}{QB}=\frac{CR}{RD}=\frac{AS}{SD}=\frac{m}{n}$ ナラシメルトキ PQRS ト ABCD トノ比ヲ求メヨ。

186. △ABC ノ三邊ヲ $a, b, c$ トシ各角ノ二等分線ノ長サヲ $a, b, c$ デ表ハセ。

187. 兩底ガ $a, b$, 高サガ $h$ デアル梯形ヲ底ニ平行シテ二等分スル線分ノ長サヲ計算セヨ。

188. AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ A 及ビ中心 C カラ引イタ平行線 AD, CE ガ半圓周ト交ハル點ヲ夫々 D 及ビ E トスル。今梯形 ADEC ノ面積ガ △BED ノ 2 倍ナルトキ ∠BAD ノ大サヲ求メヨ。

189. 半徑 10 *cm* ノ圓周ヲ 3:4:5 ニ分ケル點ヲ A, B, C トシテ △ABC ノ面積ヲ求メヨ。



190. 三ツノ圓 O, P, Q ガアル,其ノ二ツヅツノ共通內切線及ビ共通外切線ノ長サガ P ト Q トデハ夫々 4 *cm* ト 30 *cm*, Q ト O トデハ夫々 6 *cm* ト 40 *cm*, O ト P トデハ夫々 10 *cm* ト 36 *cm* デアル。各圓ノ半徑ヲ求メヨ。

191. 同ジ圓ニ內接・外接スル同邊數ノ二ツノ正多角形ガアル。其ノ面積ノ比ハ 3:4 デアル。邊數ヲ求メヨ。

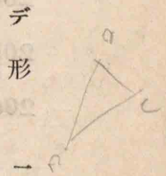
192. 圓周率ヲ $\pi$ トスルト $3<\pi<4$ デアルコトヲ證明セヨ。

193. 半徑 15 *cm* ト 5 *cm* トノ二ツノ丸太ヲ並ベテ縛ルニ要スル針金ノ一廻リ分ノ長サヲ計算セヨ。但シ圓周率ハ $\frac{22}{7}$ トセヨ。

194. 半徑 $a$, 中心角 120° ノ扇形ニ內接スル圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

195. 一邊ガ $a$ デアル正三角形ニ四ツノ等圓ヲ二ツヅツ相切スルヤウニ內接スルトキニ其ノ半徑ヲ求メヨ。

196. 一定三角形ガ一定直線ノ上ヲ轉ツテ一廻轉スルマデニ其ノ外心ノ畫ク三ツノ圓弧ノ長サノ和ハ其ノ三角形ノ外接圓ノ周ニ等シイ。



197. 直角三角形 ABC ニ內接圓ヲ畫キ,之ニ外切シ ∠C ノ二邊ニ切スル圓ヲ畫キ,更ニ其ノ圓ニ外切シ ∠C ノ二邊ニ切スル圓ヲ畫キ順次カヤウニ C ノ方ニ無數ノ圓ヲ畫クトキ,其ノ直徑ノ和ヲ求メヨ。但シ邊 AB ハ最短デ BC, CA ハ順次 3 *cm* ヅツ長イトスル。

## 第五　三角法問題

**198.** 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

❶ $\tan A\sin A+\cos A=\sec A$　❷ $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$

**199.** 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)$$

**200.** 角 A, B ヲ共ニ正ノ鋭角トシ, $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキ $\cos(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ。

**201.** $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\cos 36^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

**202.** $\cos 57^\circ+\cos 23^\circ-\sin 34^\circ$ ヲ積ノ形ニ直セ。

**203.** $x, y, z$ ガ等差級數デアレバ

$$\frac{\tan y}{\tan(y-z)}=\frac{\sin x+\sin z}{\sin x-\sin z}=\frac{\tan\frac{1}{2}(x+z)}{\tan\frac{1}{2}(x-z)}$$

デアルコトヲ證明セヨ。

**204.** $3\tan\theta=1$ トシテ $2\cos 2\theta-\sin 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

**205.** $\dfrac{\cos 3\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}=\cot\theta-\tan\theta$ ヲ證明セヨ。

**206.** $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ,次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

**207.** $x^2+6x+7=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トシテ, $\alpha+\beta$ ノ値ヲ求メヨ。但シ $\alpha, \beta$ ハ共ニ $180^\circ$ ヨリモ小サイ正角トスル。

**208.** 次ノ無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。

$$a\sin\theta,\quad a\sin\theta\cos\theta,\quad a\sin\theta\cos^2\theta,\ \cdots\cdots$$



**209.** $0^\circ<A<45^\circ$ ナルトキハ

$$\frac{\sin(A+B)-4\sin A+\sin(A-B)}{\cos(A+B)-4\cos A+\cos(A-B)}$$

ノ値ハ 0 ト 1 トノ間ニアルコトヲ證明セヨ。

**210.** 次ノ方程式ヲ解ケ。

❶ $\cos 2x+5\cos x+3=0$　$(0^\circ<x<360^\circ$ トスル$)$

❷ $4\cos 2\theta+3\tan^2\theta=3$　$(90^\circ<\theta<270^\circ$ トスル$)$

❸ $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$(0^\circ<x<180^\circ$ トスル$)$

**211.** $\triangle ABC$ ニ於テ次ノ式ヲ證明セヨ。

$$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$$

**212.** $\triangle ABC$ ニ於テ A カラ BC ヘ引イタ垂線ノ長サヲ $a$ ト $\angle B$ ト $\angle C$ トデ表ハセ。

**213.** $\triangle ABC$ ニ於テ $a, b, c$ ガ等差級數デアレバ, $\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{C}{2}=3$ デアルコトヲ證明セヨ。

**214.** 半徑ガ夫々 $2cm$, $4cm$, $6cm$ デアル三圓ガ互ニ外切スルトキ,三ツノ切點ヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

**215.** $a=20\sqrt{3}$, $b=60$, $A=30^\circ$ ナルトキ三角形ヲ解ケ。

**216.** 直線狀ノ道路ヲ進ム人ガアル。此ノ道路上ノ一點 A ニ於テ道路ト $30^\circ$ ヲナス方向ニ二物體 P, Q ヲ認メ,ソレカラ $1km$ 進ンデ B 點ニ至リココカラ再ビ P, Q ヲ望ンデ $\angle PBQ=60^\circ$ ナルコトヲ知ツタ。ソシテ此ノ角度ハ此ノ人ガ P, Q ヲ見込ム角ノ中ノ最大ナモノデアル。P, Q ノ距離ヲ求メヨ。

**217.** 市街電車ト高架電車トガアツテ,其ノ軌道ハ夫々高サノ差ガ $5m$ デアル二ツノ水平面上ニアル直線デ且 $60°$ ノ角ヲナス。ソシテ市街電車ノ速サハ毎秒 $4m$, 高架電車ノ速サハ毎秒 $10m$ デアル。然ラバ兩電車ガ同時ニ交叉點ヲ通過シテカラ $t$ 秒後ニ於ケル兩電車ノ距離ハ幾米デアルカ。

## 第六　立體幾何學問題

**218.** 二平面ガ交ハルトキ其ノ一ツノ上ノ一直線ガ他ノ面ノ上ノ其ノ射影トナス鋭角ハ其ノ直線ガ兩平面ノ交線ニ垂直デアルトキ最大トナル。

**219.** 教室ノ床ノ平面ガ壁ノ面ト垂直デアルカドウカヲ知ルニハドウスレバヨイカ。

**220.** 相交ハル二平面上ニ各〻一ツヅツ定點 $P, Q$ ガアル。今交線上ニ一點 $R$ ヲ定メテ $PR+QR$ ガ最小ナルヤウニスルニハ $R$ ノ位置ヲドコニスレバヨイカ。

**221.** 直角三角形ノ直角ノ一邊ガ一平面ニ平行デアレバ,此ノ平面上ニ投ジタ其ノ正射影モ亦直角三角形デアル。

**222.** 四面體ノ各頂點ヲ夫々其ノ對面ノ重心ニ結ブ四ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

**223.** 一稜ノ長サガ $a$ 糎デアル正四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ線分ハ此ノ二稜ニ垂直デアルコトヲ證明シ,且其ノ長



サヲ求メヨ。

**224.** 四面體 $ABCD$ ニ於テ面 $BCD$ 内ニ一點 $P$ ヲ取レバ

$$\angle BAC+\angle BAD>\angle PAC+\angle PAD$$ デアル。

**225.** 四面體 $O\text{-}ABC$ ニ於テ $C$ ヲ通ル平面 $CDE$ ヲ作リ稜 $OA$, $OB$ ヲ夫々 $D, E$ デ截ルトキ,四面體 $O\text{-}ABC$ ト $O\text{-}CDE$ トノ比ヲ求メヨ。

**226.** 正六角錐ガアツテ,其ノ底ノ一邊ノ長サハ $30cm$ デ,側稜ト高サトハ $30°$ ノ角ヲナス。此ノ角錐ノ體積ヲ求メヨ。

**227.** 角錐臺ノ體積ハ兩底ト其ノ比例中項トノ和ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

**228.** 高サガ $20cm$ ノ直圓錐ト底ノ半徑ガ $10cm$ ノ直圓壔ガアツテ,此ノ兩者ハ等積デ且側面積ガ相等シイ。然ラバ此ノ直圓錐ノ底ノ半徑ト直圓壔ノ高サトハ各〻幾ラカ。

**229.** 直徑 $4cm$ ノ球ヲ一邊 $6cm$ ノ正三角形ノ三邊デ支ヘタトキ,球ノ最高點ト此ノ三角形ノ面トノ距離ヲ求メヨ。

**230.** 半徑 $r$ ノ球ニ内接スル直圓錐ノ側面積ヲ其ノ底面積ノ $2$ 倍ニ等シクスルトキ,其ノ高サヲ求メヨ。

## 計算問題ノ答

### 問題 5 [108—110頁]

4. 1:3:5:7:9　　8. 2:7　　9. 3:2

### 問題 6 [120—121頁]

4. $x^2+y^2$　　5. $x=\sin A+\cos A,\ y=\cos A-\sin A$

### 問題 7 [128—129頁]

2. ❶ $4\cos 4A\cos 2A\cos A$　　❷ $0$

3. ❶ $\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C$

❷ $\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B$

❸ $\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$

5. $\dfrac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$米　　6. $\boxed{20\sqrt{3}\text{米}}$

### 問題 8 [137—138頁]

2. 直角三角形　　3. $120°$　　4. 0.447

### 問題 9 [146—146頁]

1. ❶ $A=60°10',\ b=10.67,\ c=10.51$　　❷ $A=57°20',\ a=406.8,\ c=312.8$

❸ $B=67°27',\ C=57°21',\ a=18.52$　　❹ $A=35°18',\ B=76°18',\ C=68°24'$

2. $BC=\sqrt{2}c,\ CA=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}c$　　3. 面積 2469, 内接圓ノ半徑 21.4, 傍接圓ノ半徑 89.1, 52.5, 60.8, 外接圓ノ半徑 45.3

### 問題 10 [151—151頁]

1. 60.86 平方米　　2. 202.2 米　　3. 603.6 米　　4. 244.9 米强

### 問題 13 [195—196頁]

4. 1095 米强

### 問題 14 [215—216頁]

1. 288 立方粍　　4. ❸ $70°32'$　　9. 4:5

10. $(32\sqrt{6}+16)$ 平方粍, $\dfrac{32}{3}\sqrt{23}$ 立方粍

## 問題 15 [233－235 頁]

1. 1 立方米　2. 25.4 糎　3. 1:7　4. 59.2 立

5. 241 立方糎强　8. $27\sqrt{3}$ 平方糎　9. 約 1.03 糎

11. $\frac{\sqrt{6}}{4}a$, $\frac{\sqrt{6}}{12}a$　12. 約 482.5 平方糎

## 補習問題

### 第四　計算問題

183. $\frac{(m+n)q}{mp}$　184. $\frac{3}{a}$　185. $\frac{2mn}{(m+n)^2}$　186. $\sqrt{bc\left\{1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right\}}$ 等

187. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　188. 60°　189. $25(3+\sqrt{3})$ 平方糎

190. 13 *cm*, 17 *cm*, 23 *cm*　191. 6　193. 108 *cm* (約)

194. $(2\sqrt{3}-3)a$　195. $\frac{\sqrt{3}}{12}a$　197. $3(\sqrt{10}+1)$ 糎

### 第五　三角法問題

199. 1　200. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　201. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

202 $4\sin 16°.5 \sin 56°.5 \cos 17°$　204. 1　207. 45° 或ハ 225°

208. $a\cot\frac{\theta}{2}$　210. **1** 120°, 240°　**2** 135°, 150°, 210°, 225°　**3** 105°

212. $\frac{a\sin B\sin C}{\sin(B+C)}$　214. 4.8 平方糎

215. $B=60°$, $C=90°$, $c=40\sqrt{3}$ 或ハ $B=120°$, $C=30°$, $c=20\sqrt{3}$

216. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 粁　217. $\sqrt{156t^2+25}$ 米或ハ $\sqrt{76t^2+25}$ 米

### 第六　立體幾何學問題

223. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 糎　225. OA·OB:OD·OE　226. 40500 立方糎

228. 22.7 *cm*, 34.3 *cm*　229. 3 *cm*　230. $\frac{3}{2}r$

## 數ノ對數表

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| **15** | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| **20** | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| **25** | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| **30** | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| **35** | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| **40** | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |

| 比例部分 | 43. | 42. | 41. | 39. | 38. | 37. | 36. | 35. | 34. | 33. | 32. | 31. | 29. | 28. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **2** | 9 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| **3** | 13 | 13 | 12 | 12 | 11 | 11 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 8 |
| **4** | 17 | 17 | 16 | 16 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 13 | 13 | 12 | 12 | 11 |
| **5** | 22 | 21 | 21 | 20 | 19 | 19 | 18 | 18 | 17 | 17 | 16 | 16 | 15 | 14 |
| **6** | 26 | 25 | 25 | 23 | 23 | 22 | 22 | 21 | 20 | 20 | 19 | 19 | 17 | 17 |
| **7** | 30 | 29 | 29 | 27 | 27 | 26 | 25 | 25 | 24 | 23 | 22 | 22 | 20 | 20 |
| **8** | 34 | 34 | 33 | 31 | 30 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 26 | 25 | 23 | 22 |
| **9** | 39 | 38 | 37 | 35 | 34 | 33 | 32 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 26 | 25 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **40** | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| **45** | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| **50** | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |
| **55** | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| **60** | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| **65** | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| **70** | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |

| | 27. | 26. | 25. | 24. | 23. | 22. | 21. | 19. | 18. | 17. | 16. | 15. | 14. | 13. | 12. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| **3** | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 |
| **4** | 11 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| **5** | 14 | 13 | 13 | 12 | 12 | 11 | 11 | 10 | 9 | 9 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 |
| **6** | 16 | 16 | 15 | 14 | 14 | 13 | 13 | 11 | 11 | 10 | 10 | 9 | 8 | 8 | 7 |
| **7** | 19 | 18 | 18 | 17 | 16 | 15 | 15 | 13 | 13 | 12 | 11 | 11 | 10 | 9 | 8 |
| **8** | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 18 | 17 | 15 | 14 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 10 |
| **9** | 24 | 23 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 17 | 16 | 15 | 14 | 14 | 13 | 12 | 11 |

10.18

# 數ノ對數表

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |

| | 43. | 42. | 41. | 39. | 38. | 37. | 36. | 35. | 34. | 33. | 32. | 31. | 29. | 28. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **2** | 9 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| **3** | 13 | 13 | 12 | 12 | 11 | 11 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 8 |
| **4** | 17 | 17 | 16 | 16 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 13 | 13 | 12 | 12 | 11 |
| **5** | 22 | 21 | 21 | 20 | 19 | 19 | 18 | 18 | 17 | 17 | 16 | 16 | 15 | 14 |
| **6** | 26 | 25 | 25 | 23 | 23 | 22 | 22 | 21 | 20 | 20 | 19 | 19 | 17 | 17 |
| **7** | 30 | 29 | 29 | 27 | 27 | 26 | 25 | 25 | 24 | 23 | 22 | 22 | 20 | 20 |
| **8** | 34 | 34 | 33 | 31 | 30 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 26 | 25 | 23 | 22 |
| **9** | 39 | 38 | 37 | 35 | 34 | 33 | 32 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 26 | 25 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **40** | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| **45** | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| **50** | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |
| **55** | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| **60** | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| **65** | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| **70** | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |

| | 27. | 26. | 25. | 24. | 23. | 22. | 21. | 19. | 18. | 17. | 16. | 15. | 14. | 13. | 12. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| **3** | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 |
| **4** | 11 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| **5** | 14 | 13 | 13 | 12 | 12 | 11 | 11 | 10 | 9 | 9 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 |
| **6** | 16 | 16 | 15 | 14 | 14 | 13 | 13 | 11 | 11 | 10 | 10 | 9 | 8 | 8 | 7 |
| **7** | 19 | 18 | 18 | 17 | 16 | 15 | 15 | 13 | 13 | 12 | 11 | 11 | 10 | 9 | 8 |
| **8** | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 18 | 17 | 15 | 14 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 10 |
| **9** | 24 | 23 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 17 | 16 | 15 | 14 | 14 | 13 | 12 | 11 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **70** | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| **75** | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| **80** | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| **85** | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| **90** | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| **95** | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |
| **100** | 00000 | 00043 | 00087 | 00130 | 00173 | 00217 | 00260 | 00303 | 00346 | 00389 |
| 101 | 00432 | 00475 | 00518 | 00561 | 00604 | 00647 | 00689 | 00732 | 00775 | 00817 |
| 102 | 00860 | 00903 | 00945 | 00988 | 01030 | 01072 | 01115 | 01157 | 01199 | 01242 |
| 103 | 01284 | 01326 | 01368 | 01410 | 01452 | 01494 | 01536 | 01578 | 01620 | 01662 |
| 104 | 01703 | 01745 | 01787 | 01828 | 01870 | 01912 | 01953 | 01995 | 02036 | 02078 |
| **105** | 02119 | 02160 | 02202 | 02243 | 02284 | 02325 | 02366 | 02408 | 02449 | 02490 |
| 106 | 02531 | 02572 | 06212 | 02653 | 02694 | 02735 | 02776 | 02816 | 02857 | 02898 |
| 107 | 02938 | 02979 | 03019 | 03060 | 03100 | 03141 | 03181 | 03222 | 03262 | 03302 |
| 108 | 03342 | 03383 | 03423 | 03463 | 03503 | 03543 | 03583 | 03623 | 03663 | 03703 |
| 109 | 03743 | 03782 | 03822 | 03862 | 03902 | 03941 | 03981 | 04020 | 04060 | 04100 |

## 三角函數ノ眞數表

| 角 \ 函數 | sin | cos | tan | cot | sec | cosec | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | **0.0000** | **1.0000** | **0.0000** | ∞ | **1.0000** | ∞ | 90° |
| 1° | 0.0175 | 0.9998 | 0.0175 | 57.290 | 1.0002 | 57.299 | 89° |
| 2° | 0.0349 | 0.9994 | 0.0349 | 28.636 | 1.0006 | 28.654 | 88° |
| 3° | 0.0523 | 0.9986 | 0.0524 | 19.081 | 1.0014 | 19.107 | 87° |
| 4° | 0.0698 | 0.9976 | 0.0699 | 14.301 | 1.0024 | 14.336 | 86° |
| 5° | **0.0872** | **0.9962** | **0.0875** | **11.430** | **1.0038** | **11.474** | 85° |
| 6° | 0.1045 | 0.9945 | 0.1051 | 9.5144 | 1.0055 | 9.5668 | 84° |
| 7° | 0.1219 | 0.9925 | 0.1228 | 8.1443 | 1.0075 | 8.2055 | 83° |
| 8° | 0.1392 | 0.9903 | 0.1405 | 7.1154 | 1.0098 | 7.1853 | 82° |
| 9° | 0.1564 | 0.9877 | 0.1584 | 6.3138 | 1.0125 | 6.3925 | 81° |
| 10° | **0.1736** | **0.9848** | **0.1763** | **5.6713** | **1.0154** | **5.7588** | 80° |
| 11° | 0.1908 | 0.9816 | 0.1944 | 5.1446 | 1.0187 | 5.2408 | 79° |
| 12° | 0.2079 | 0.9781 | 0.2126 | 4.7046 | 1.0223 | 4.8097 | 78° |
| 13° | 0.2250 | 0.9744 | 0.2309 | 4.3315 | 1.0263 | 4.4454 | 77° |
| 14° | 0.2419 | 0.9703 | 0.2493 | 4.0108 | 1.0306 | 4.1336 | 76° |
| 15° | **0.2588** | **0.9659** | **0.2679** | **3.7321** | **1.0353** | **3.8637** | 75° |
| 16° | 0.2756 | 0.9613 | 0.2867 | 3.4874 | 1.0403 | 3.6280 | 74° |
| 17° | 0.2924 | 0.9563 | 0.3057 | 3.2709 | 1.0457 | 3.4203 | 73° |
| 18° | 0.3090 | 0.9511 | 0.3249 | 3.0777 | 1.0515 | 3.2361 | 72° |
| 19° | 0.3256 | 0.9455 | 0.3443 | 2.9042 | 1.0576 | 3.0716 | 71° |
| 20° | **0.3420** | **0.9397** | **0.3640** | **2.7475** | **1.0642** | **2.9238** | 70° |
| 21° | 0.3584 | 0.9336 | 0.3839 | 2.6051 | 1.0711 | 2.7904 | 69° |
| 22° | 0.3746 | 0.9272 | 0.4040 | 2.4751 | 1.0785 | 2.6695 | 68° |
| 23° | 0.3907 | 0.9205 | 0.4245 | 2.3559 | 1.0864 | 2.5593 | 67° |
| 24° | 0.4067 | 0.9135 | 0.4452 | 2.2460 | 1.0946 | 2.4586 | 66° |
| 25° | **0.4226** | **0.9063** | **0.4663** | **2.1445** | **1.1034** | **2.3662** | 65° |
| 26° | 0.4384 | 0.8988 | 0.4877 | 2.0503 | 1.1126 | 2.2812 | 64° |
| 27° | 0.4540 | 0.8910 | 0.5095 | 1.9626 | 1.1223 | 2.2027 | 63° |
| 28° | 0.4695 | 0.8829 | 0.5317 | 1.8807 | 1.1326 | 2.1301 | 62° |
| 29° | 0.4848 | 0.8746 | 0.5543 | 1.8040 | 1.1434 | 2.0627 | 61° |
| 30° | **0.5000** | **0.8660** | **0.5774** | **1.7321** | **1.1547** | **2.0000** | 60° |
| 31° | 0.5150 | 0.8572 | 0.6009 | 1.6643 | 1.1666 | 1.9416 | 59° |
| 32° | 0.5299 | 0.8480 | 0.6249 | 1.6003 | 1.1792 | 1.8871 | 58° |
| 33° | 0.5446 | 0.8387 | 0.6494 | 1.5399 | 1.1924 | 1.8361 | 57° |
| 34° | 0.5592 | 0.8290 | 0.6745 | 1.4826 | 1.2062 | 1.7883 | 56° |
| 35° | **0.5736** | **0.8192** | **0.7002** | **1.4281** | **1.2208** | **1.7434** | 55° |
| 36° | 0.5878 | 0.8090 | 0.7265 | 1.3764 | 1.2361 | 1.7013 | 54° |
| 37° | 0.6018 | 0.7986 | 0.7536 | 1.3270 | 1.2521 | 1.6616 | 53° |
| 38° | 0.6157 | 0.7880 | 0.7813 | 1.2799 | 1.2690 | 1.6243 | 52° |
| 39° | 0.6293 | 0.7771 | 0.8098 | 1.2349 | 1.2868 | 1.5890 | 51° |
| 40° | **0.6428** | **0.7660** | **0.8391** | **1.1918** | **1.3054** | **1.5557** | 50° |
| 41° | 0.6561 | 0.7547 | 0.8693 | 1.1504 | 1.3250 | 1.5243 | 49° |
| 42° | 0.6691 | 0.7431 | 0.9004 | 1.1106 | 1.3456 | 1.4945 | 48° |
| 43° | 0.6820 | 0.7314 | 0.9325 | 1.0724 | 1.3673 | 1.4663 | 47° |
| 44° | 0.6947 | 0.7193 | 0.9657 | 1.0355 | 1.3902 | 1.4396 | 46° |
| 45° | **0.7071** | **0.7071** | **1.0000** | **1.0000** | **1.4142** | **1.4142** | 45° |
| | cos | sin | cot | tan | cosec | sec | 函數 \ 角 |

## 三角函數ノ對數表 (其ノ一)

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos | 差 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0° 0′** | −∞ | | −∞ | | ∞ | **10.0000** | 0 | **0′ 90°** |
| 10′ | **7.4637** | 3011 | **7.4637** | 3011 | **12.5363** | 0000 | 0 | 50′ |
| 20′ | 7648 | 1760 | 7648 | 1761 | 2352 | 0000 | 0 | 40′ |
| 30′ | 9408 | 1250 | 9409 | 1249 | 0591 | 0000 | 0 | 30′ |
| 40′ | 8.0658 | 969 | 8.0658 | 969 | 11.9342 | 0000 | 0 | 20′ |
| 50′ | 1627 | 792 | 1627 | 792 | 8373 | 0000 | 1 | 10′ |
| **1° 0′** | **8.2419** | 669 | **8.2419** | 670 | **11.7581** | **9.9999** | 0 | **0′ 89°** |
| 10′ | 3088 | 580 | 3089 | 580 | 6911 | 9999 | 0 | 50′ |
| 20′ | 3668 | 511 | 3669 | 512 | 6331 | 9999 | 0 | 40′ |
| 30′ | 4179 | 458 | 4181 | 457 | 5819 | 9999 | 1 | 30′ |
| 40′ | 4637 | 413 | 4638 | 415 | 5362 | 9998 | 0 | 20′ |
| 50′ | 5050 | 378 | 5053 | 378 | 4947 | 9998 | 1 | 10′ |
| **2° 0′** | **8.5428** | 348 | **8.5431** | 348 | **11.4569** | **9.9997** | 0 | **0′ 88°** |
| 10′ | 5776 | 321 | 5779 | 322 | 4221 | 9997 | 1 | 50′ |
| 20′ | 6097 | 300 | 6101 | 300 | 3899 | 9996 | 0 | 40′ |
| 30′ | 6397 | 280 | 6401 | 281 | 3599 | 9996 | 1 | 30′ |
| 40′ | 6677 | 263 | 6682 | 263 | 3318 | 9995 | 0 | 20′ |
| 50′ | 6940 | 248 | 6945 | 249 | 3055 | 9995 | 1 | 10′ |
| **3° 0′** | **8.7188** | 235 | **8.7194** | 235 | **11.2806** | **9.9994** | 1 | **0′ 87°** |
| 10′ | 7423 | 222 | 7429 | 223 | 2571 | 9993 | 0 | 50′ |
| 20′ | 7645 | 212 | 7652 | 213 | 2348 | 9993 | 1 | 40′ |
| 30′ | 7857 | 202 | 7865 | 202 | 2135 | 9992 | 1 | 30′ |
| 40′ | 8059 | 192 | 8067 | 194 | 1933 | 9991 | 1 | 20′ |
| 50′ | 8251 | 185 | 8261 | 185 | 1739 | 9990 | 1 | 10′ |
| **4° 0′** | **8.8436** | 177 | **8.8446** | 178 | **11.1554** | **9.9989** | 0 | **0′ 86°** |
| 10′ | 8613 | 170 | 8624 | 171 | 1376 | 9989 | 1 | 50′ |
| 20′ | 8783 | 163 | 8795 | 165 | 1205 | 9988 | 1 | 40′ |
| 30′ | 8946 | 158 | 8960 | 158 | 1040 | 9987 | 1 | 30′ |
| 40′ | 9104 | 152 | 9118 | 154 | 0882 | 9986 | 1 | 20′ |
| 50′ | 9256 | 147 | 9272 | 148 | 0728 | 9985 | 2 | 10′ |
| **5° 0′** | **8.9403** | 142 | **8.9420** | 143 | **11.0580** | **9.9983** | 1 | **0′ 85°** |
| 10′ | 9545 | 137 | 9563 | 138 | 0437 | 9982 | 1 | 50′ |
| 20′ | 9682 | 134 | 9701 | 135 | 0299 | 9981 | 1 | 40′ |
| 30′ | 9816 | 129 | 9836 | 130 | 0164 | 9980 | 1 | 30′ |
| 40′ | 9945 | 125 | 9966 | 127 | 0034 | 9979 | 2 | 20′ |
| 50′ | 9.0070 | 122 | 9.0093 | 123 | 10.9907 | 9977 | 1 | 10′ |
| **6° 0′** | **9.0192** | 119 | **9.0216** | 120 | **10.9784** | **9.9976** | 1 | **0′ 84°** |
| 10′ | 0311 | 115 | 0336 | 117 | 9664 | 9975 | 2 | 50′ |
| 20′ | 0426 | 113 | 0453 | 114 | 9547 | 9973 | 1 | 40′ |
| 30′ | 0539 | 109 | 0567 | 111 | 9433 | 9972 | 1 | 30′ |
| 40′ | 0648 | 107 | 0678 | 108 | 9322 | 9971 | 2 | 20′ |
| 50′ | 0755 | 104 | 0786 | 105 | 9214 | 9969 | 1 | 10′ |
| **7° 0′** | **9.0859** | 102 | **9.0891** | 104 | **10.9109** | **9.9968** | 2 | **0′ 83°** |
| 10′ | 0961 | 99 | 0995 | 101 | 9005 | 9966 | 2 | 50′ |
| 20′ | 1060 | 97 | 1096 | 98 | 8904 | 9964 | 1 | 40′ |
| 30′ | 1157 | 95 | 1194 | 97 | 8806 | 9963 | 2 | 30′ |
| 40′ | 1252 | 93 | 1291 | 94 | 8709 | 9961 | 2 | 20′ |
| 50′ | 1345 | 91 | 1385 | 93 | 8615 | 9959 | 1 | 10′ |
| **8° 0′** | **9.1436** | | **9.1478** | | **10.8522** | **9.9958** | | **0′ 82°** |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin | 差 | 角 |

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **8° 0′** | **9.1436** | 89 | **9.1478** | 91 | **10.8522** | **9.9958** |
| 10′ | 1525 | 87 | 1569 | 89 | 8431 | 9956 |
| 20′ | 1612 | 85 | 1658 | 87 | 8342 | 9954 |
| 30′ | 1697 | 34 | 1745 | 86 | 8255 | 9952 |
| 40′ | 1781 | 82 | 1831 | 84 | 8169 | 9950 |
| 50′ | 1863 | 80 | 1915 | 82 | 8085 | 9948 |
| **9° 0′** | **9.1943** | 79 | **9.1997** | 81 | **10.8003** | **9.9946** |
| 10′ | 2022 | 78 | 2078 | 80 | 7922 | 9944 |
| 20′ | 2100 | 76 | 2158 | 78 | 7842 | 9942 |
| 30′ | 2176 | 75 | 2236 | 77 | 7764 | 9940 |
| 40′ | 2251 | 73 | 2313 | 76 | 7687 | 9938 |
| 50′ | 2324 | 73 | 2389 | 74 | 7611 | 9936 |
| **10° 0′** | **9.2397** | 71 | **9.2463** | 73 | **10.7537** | **9.9934** |
| 10′ | 2468 | 70 | 2536 | 73 | 7464 | 9931 |
| 20′ | 2538 | 68 | 2609 | 71 | 7391 | 9929 |
| 30′ | 2606 | 68 | 2680 | 70 | 7320 | 9927 |
| 40′ | 2674 | 66 | 2750 | 69 | 7250 | 9924 |
| 50′ | 2740 | 66 | 2819 | 68 | 7181 | 9922 |
| **11° 0′** | **9.2806** | 64 | **9.2887** | 66 | **10.7113** | **9.9919** |
| 10′ | 2870 | 64 | 2953 | 67 | 7047 | 9917 |
| 20′ | 2934 | 63 | 3020 | 65 | 6980 | 9914 |
| 30′ | 2997 | 61 | 3085 | 64 | 6915 | 9912 |
| 40′ | 3058 | 61 | 3149 | 63 | 6851 | 9909 |
| 50′ | 3119 | 60 | 3212 | 63 | 6788 | 9907 |
| **12° 0′** | **9.3179** | 59 | **9.3275** | 61 | **10.6725** | **9.9904** |
| 10′ | 3238 | 58 | 3336 | 61 | 6664 | 9901 |
| 20′ | 3296 | 57 | 3397 | 61 | 6603 | 9899 |
| 30′ | 3353 | 57 | 3458 | 59 | 6542 | 9896 |
| 40′ | 3410 | 56 | 3517 | 59 | 6483 | 9893 |
| 50′ | 3466 | 55 | 3576 | 58 | 6424 | 9890 |
| **13° 0′** | **9.3521** | 54 | **9.3634** | 57 | **10.6366** | **9.9887** |
| 10′ | 3575 | 54 | 3691 | 57 | 6309 | 9884 |
| 20′ | 3629 | 53 | 3748 | 56 | 6252 | 9881 |
| 30′ | 3682 | 52 | 3804 | 55 | 6196 | 9878 |
| 40′ | 3734 | 52 | 3859 | 55 | 6141 | 9875 |
| 50′ | 3786 | 51 | 3914 | 54 | 6086 | 9872 |
| **14° 0′** | **9.3837** | 50 | **9.3968** | 53 | **10.6032** | **9.9869** |
| 10′ | 3887 | 50 | 4021 | 53 | 5979 | 9866 |
| 20′ | 3937 | 49 | 4074 | 53 | 5926 | 9863 |
| 30′ | 3986 | 49 | 4127 | 51 | 5873 | 9859 |
| 40′ | 4035 | 48 | 4178 | 52 | 5822 | 9856 |
| 50′ | 4083 | 47 | 4230 | 51 | 5770 | 9853 |
| **15° 0′** | **9.4130** | 47 | **9.4281** | 50 | **10.5719** | **9.9849** |
| 10′ | 4177 | 46 | 4331 | 50 | 5669 | 9846 |
| 20′ | 4223 | 46 | 4381 | 49 | 5619 | 9843 |
| 30′ | 4269 | 45 | 4430 | 49 | 5570 | 9839 |
| 40′ | 4314 | 45 | 4479 | 48 | 5521 | 9836 |
| 50′ | 4359 | 44 | 4527 | 48 | 5473 | 9832 |
| **16° 0′** | **9.4403** | | **9.4575** | | **10.5425** | **9.9828** |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin |

5580

# 三角函數ノ對數表 (其ノ一)

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos | 差 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° 0′ | -∞ | | -∞ | | ∞ | 10.0000 | | 0′ 90° |
| 10′ | 7.4637 | | 7.4637 | | 12.5363 | 0000 | 0 | 50′ |
| 20′ | 7648 | 3011 | 7648 | 3011 | 2352 | 0000 | 0 | 40′ |
| 30′ | 9408 | 1760 | 9409 | 1761 | 0591 | 0000 | 0 | 30′ |
| 40′ | 8.0658 | 1250 | 8.0658 | 1249 | 11.9342 | 0000 | 0 | 20′ |
| 50′ | 1627 | 969 | 1627 | 969 | 8373 | 0000 | 0 | 10′ |
| 1° 0′ | 8.2419 | 792 | 8.2419 | 792 | 11.7581 | 9.9999 | 1 | 0′ 89° |
| 10′ | 3088 | 669 | 3089 | 670 | 6911 | 9999 | 0 | 50′ |
| 20′ | 3668 | 580 | 3669 | 580 | 6331 | 9999 | 0 | 40′ |
| 30′ | 4179 | 511 | 4181 | 512 | 5819 | 9999 | 0 | 30′ |
| 40′ | 4637 | 458 | 4638 | 457 | 5362 | 9998 | 1 | 20′ |
| 50′ | 5050 | 413 | 5053 | 415 | 4947 | 9998 | 0 | 10′ |
| 2° 0′ | 8.5428 | 378 | 8.5431 | 378 | 11.4569 | 9.9997 | 1 | 0′ 88° |
| 10′ | 5776 | 348 | 5779 | 348 | 4221 | 9997 | 0 | 50′ |
| 20′ | 6097 | 321 | 6101 | 322 | 3899 | 9996 | 1 | 40′ |
| 30′ | 6397 | 300 | 6401 | 300 | 3599 | 9996 | 0 | 30′ |
| 40′ | 6677 | 280 | 6682 | 281 | 3318 | 9995 | 1 | 20′ |
| 50′ | 6940 | 263 | 6945 | 263 | 3055 | 9995 | 0 | 10′ |
| 3° 0′ | 8.7188 | 248 | 8.7194 | 249 | 11.2806 | 9.9994 | 1 | 0′ 87° |
| 10′ | 7423 | 235 | 7429 | 235 | 2571 | 9993 | 1 | 50′ |
| 20′ | 7645 | 222 | 7652 | 223 | 2348 | 9993 | 0 | 40′ |
| 30′ | 7857 | 212 | 7865 | 213 | 2135 | 9992 | 1 | 30′ |
| 40′ | 8059 | 202 | 8067 | 202 | 1933 | 9991 | 1 | 20′ |
| 50′ | 8251 | 192 | 8261 | 194 | 1739 | 9990 | 1 | 10′ |
| 4° 0′ | 8.8436 | 185 | 8.8446 | 185 | 11.1554 | 9.9989 | 1 | 0′ 86° |
| 10′ | 8613 | 177 | 8624 | 178 | 1376 | 9989 | 0 | 50′ |
| 20′ | 8783 | 170 | 8795 | 171 | 1205 | 9988 | 1 | 40′ |
| 30′ | 8946 | 163 | 8960 | 165 | 1040 | 9987 | 1 | 30′ |
| 40′ | 9104 | 158 | 9118 | 158 | 0882 | 9986 | 1 | 20′ |
| 50′ | 9256 | 152 | 9272 | 154 | 0728 | 9985 | 1 | 10′ |
| 5° 0′ | 8.9403 | 147 | 8.9420 | 148 | 11.0580 | 9.9983 | 2 | 0′ 85° |
| 10′ | 9545 | 142 | 9563 | 143 | 0437 | 9982 | 1 | 50′ |
| 20′ | 9682 | 137 | 9701 | 138 | 0299 | 9981 | 1 | 40′ |
| 30′ | 9816 | 134 | 9836 | 135 | 0164 | 9980 | 1 | 30′ |
| 40′ | 9945 | 129 | 9966 | 130 | 0034 | 9979 | 1 | 20′ |
| 50′ | 9.0070 | 125 | 9.0093 | 127 | 10.9907 | 9977 | 2 | 10′ |
| 6° 0′ | 9.0192 | 122 | 9.0216 | 123 | 10.9784 | 9.9976 | 1 | 0′ 84° |
| 10′ | 0311 | 119 | 0336 | 120 | 9664 | 9975 | 1 | 50′ |
| 20′ | 0426 | 115 | 0453 | 117 | 9547 | 9973 | 2 | 40′ |
| 30′ | 0539 | 113 | 0567 | 114 | 9433 | 9972 | 1 | 30′ |
| 40′ | 0648 | 109 | 0678 | 111 | 9322 | 9971 | 1 | 20′ |
| 50′ | 0755 | 107 | 0786 | 108 | 9214 | 9969 | 2 | 10′ |
| 7° 0′ | 9.0859 | 104 | 9.0891 | 105 | 10.9109 | 9.9968 | 1 | 0′ 83° |
| 10′ | 0961 | 102 | 0995 | 104 | 9005 | 9966 | 2 | 50′ |
| 20′ | 1060 | 99 | 1096 | 101 | 8904 | 9964 | 2 | 40′ |
| 30′ | 1157 | 97 | 1194 | 98 | 8806 | 9963 | 1 | 30′ |
| 40′ | 1252 | 95 | 1291 | 97 | 8709 | 9961 | 2 | 20′ |
| 50′ | 1345 | 93 | 1385 | 94 | 8615 | 9959 | 2 | 10′ |
| 8° 0′ | 9.1436 | 91 | 9.1478 | 93 | 10.8522 | 9.9958 | 1 | 0′ 82° |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin | 差 | 角 |

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos | 差 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8° 0′ | 9.1436 | | 9.1478 | | 10.8522 | 9.9958 | | 0′ 82° |
| 10′ | 1525 | 89 | 1569 | 91 | 8431 | 9956 | 2 | 50′ |
| 20′ | 1612 | 87 | 1658 | 89 | 8342 | 9954 | 2 | 40′ |
| 30′ | 1697 | 85 | 1745 | 87 | 8255 | 9952 | 2 | 30′ |
| 40′ | 1781 | 34 | 1831 | 86 | 8169 | 9950 | 2 | 20′ |
| 50′ | 1863 | 82 | 1915 | 84 | 8085 | 9948 | 2 | 10′ |
| 9° 0′ | 9.1943 | 80 | 9.1997 | 82 | 10.8003 | 9.9946 | 2 | 0′ 81° |
| 10′ | 2022 | 79 | 2078 | 81 | 7922 | 9944 | 2 | 50′ |
| 20′ | 2100 | 78 | 2158 | 80 | 7842 | 9942 | 2 | 40′ |
| 30′ | 2176 | 76 | 2236 | 78 | 7764 | 9940 | 2 | 30′ |
| 40′ | 2251 | 75 | 2313 | 77 | 7687 | 9938 | 2 | 20′ |
| 50′ | 2324 | 73 | 2389 | 76 | 7611 | 9936 | 2 | 10′ |
| 10° 0′ | 9.2397 | 73 | 9.2463 | 74 | 10.7537 | 9.9934 | 2 | 0′ 80° |
| 10′ | 2468 | 71 | 2536 | 73 | 7464 | 9931 | 3 | 50′ |
| 20′ | 2538 | 70 | 2609 | 73 | 7391 | 9929 | 2 | 40′ |
| 30′ | 2606 | 68 | 2680 | 71 | 7320 | 9927 | 2 | 30′ |
| 40′ | 2674 | 68 | 2750 | 70 | 7250 | 9924 | 3 | 20′ |
| 50′ | 2740 | 66 | 2819 | 69 | 7181 | 9922 | 2 | 10′ |
| 11° 0′ | 9.2806 | 66 | 9.2887 | 68 | 10.7113 | 9.9919 | 3 | 0′ 79° |
| 10′ | 2870 | 64 | 2953 | 66 | 7047 | 9917 | 2 | 50′ |
| 20′ | 2934 | 64 | 3020 | 67 | 6980 | 9914 | 3 | 40′ |
| 30′ | 2997 | 63 | 3085 | 65 | 6915 | 9912 | 2 | 30′ |
| 40′ | 3058 | 61 | 3149 | 64 | 6851 | 9909 | 3 | 20′ |
| 50′ | 3119 | 61 | 3212 | 63 | 6788 | 9907 | 2 | 10′ |
| 12° 0′ | 9.3179 | 60 | 9.3275 | 63 | 10.6725 | 9.9904 | 3 | 0′ 78° |
| 10′ | 3238 | 59 | 3336 | 61 | 6664 | 9901 | 3 | 50′ |
| 20′ | 3296 | 58 | 3397 | 61 | 6603 | 9899 | 2 | 40′ |
| 30′ | 3353 | 57 | 3458 | 61 | 6542 | 9896 | 3 | 30′ |
| 40′ | 3410 | 57 | 3517 | 59 | 6483 | 9893 | 3 | 20′ |
| 50′ | 3466 | 56 | 3576 | 59 | 6424 | 9890 | 3 | 10′ |
| 13° 0′ | 9.3521 | 55 | 9.3634 | 58 | 10.6366 | 9.9887 | 3 | 0′ 77° |
| 10′ | 3575 | 54 | 3691 | 57 | 6309 | 9884 | 3 | 50′ |
| 20′ | 3629 | 54 | 3748 | 57 | 6252 | 9881 | 3 | 40′ |
| 30′ | 3682 | 53 | 3804 | 56 | 6196 | 9878 | 3 | 30′ |
| 40′ | 3734 | 52 | 3859 | 55 | 6141 | 9875 | 3 | 20′ |
| 50′ | 3786 | 52 | 3914 | 55 | 6086 | 9872 | 3 | 10′ |
| 14° 0′ | 9.3837 | 51 | 9.3968 | 54 | 10.6032 | 9.9869 | 3 | 0′ 76° |
| 10′ | 3887 | 50 | 4021 | 53 | 5979 | 9866 | 3 | 50′ |
| 20′ | 3937 | 50 | 4074 | 53 | 5926 | 9863 | 3 | 40′ |
| 30′ | 3986 | 49 | 4127 | 53 | 5873 | 9859 | 4 | 30′ |
| 40′ | 4035 | 49 | 4178 | 51 | 5822 | 9856 | 3 | 20′ |
| 50′ | 4083 | 48 | 4230 | 52 | 5770 | 9853 | 3 | 10′ |
| 15° 0′ | 9.4130 | 47 | 9.4281 | 51 | 10.5719 | 9.9849 | 4 | 0′ 75° |
| 10′ | 4177 | 47 | 4331 | 50 | 5669 | 9846 | 3 | 50′ |
| 20′ | 4223 | 46 | 4381 | 50 | 5619 | 9843 | 3 | 40′ |
| 30′ | 4269 | 46 | 4430 | 49 | 5570 | 9839 | 4 | 30′ |
| 40′ | 4314 | 45 | 4479 | 49 | 5521 | 9836 | 3 | 20′ |
| 50′ | 4359 | 45 | 4527 | 48 | 5473 | 9832 | 4 | 10′ |
| 16° 0′ | 9.4403 | 44 | 9.4575 | 48 | 10.5425 | 9.9828 | 4 | 0′ 74° |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin | 差 | 角 |

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos | 差 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16° 0′ | 9.4403 | | 9.4575 | | 10.5425 | 9.9828 | | 0′ 74° |
| 10′ | 4447 | 44 | 4622 | 47 | 5378 | 9825 | 3 | 50′ |
| 20′ | 4491 | 44 | 4669 | 47 | 5331 | 9821 | 4 | 40′ |
| 30′ | 4533 | 42 | 4716 | 47 | 5284 | 9817 | 4 | 30′ |
| 40′ | 4576 | 43 | 4762 | 46 | 5238 | 9814 | 3 | 20′ |
| 50′ | 4618 | 42 | 4808 | 46 | 5192 | 9810 | 4 | 10′ |
| 17° 0′ | 9.4659 | 41 | 9.4853 | 45 | 10.5147 | 9.9806 | 4 | 0′ 73° |
| 10′ | 4700 | 41 | 4898 | 45 | 5102 | 9802 | 4 | 50′ |
| 20′ | 4741 | 41 | 4943 | 45 | 5057 | 9798 | 4 | 40′ |
| 30′ | 4781 | 40 | 4987 | 44 | 5013 | 9794 | 4 | 30′ |
| 40′ | 4821 | 40 | 5031 | 44 | 4969 | 9790 | 4 | 20′ |
| 50′ | 4861 | 40 | 5075 | 44 | 4925 | 9786 | 4 | 10′ |
| 18° 0′ | 9.4900 | 39 | 9.5118 | 43 | 10.4882 | 9.9782 | 4 | 0′ 72° |
| 10′ | 4939 | 39 | 5161 | 43 | 4839 | 9778 | 4 | 50′ |
| 20′ | 4977 | 38 | 5203 | 42 | 4797 | 9774 | 4 | 40′ |
| 30′ | 5015 | 38 | 5245 | 42 | 4755 | 9770 | 4 | 30′ |
| 40′ | 5052 | 37 | 5287 | 42 | 4713 | 9765 | 5 | 20′ |
| 50′ | 5090 | 38 | 5329 | 42 | 4671 | 9761 | 4 | 10′ |
| 19° 0′ | 9.5126 | 36 | 9.5370 | 41 | 10.4630 | 9.9757 | 4 | 0′ 71° |
| 10′ | 5163 | 37 | 5411 | 41 | 4589 | 9752 | 5 | 50′ |
| 20′ | 5199 | 36 | 5451 | 40 | 4549 | 9748 | 4 | 40′ |
| 30′ | 5235 | 36 | 5491 | 40 | 4509 | 9743 | 5 | 30′ |
| 40′ | 5270 | 35 | 5531 | 40 | 4469 | 9739 | 4 | 20′ |
| 50′ | 5306 | 36 | 5571 | 40 | 4429 | 9734 | 5 | 10′ |
| 20° 0′ | 9.5341 | 35 | 9.5611 | 40 | 10.4389 | 9.9730 | 4 | 0′ 70° |
| 10′ | 5375 | 34 | 5650 | 39 | 4350 | 9725 | 5 | 50′ |
| 20′ | 5409 | 34 | 5689 | 39 | 4311 | 9721 | 4 | 40′ |
| 30′ | 5443 | 34 | 5727 | 38 | 4273 | 9716 | 5 | 30′ |
| 40′ | 5477 | 34 | 5766 | 39 | 4234 | 9711 | 5 | 20′ |
| 50′ | 5510 | 33 | 5804 | 38 | 4196 | 9706 | 5 | 10′ |
| 21° 0′ | 9.5543 | 33 | 9.5842 | 38 | 10.4158 | 9.9702 | 4 | 0′ 69° |
| 10′ | 5576 | 33 | 5879 | 37 | 4121 | 9697 | 5 | 50′ |
| 20′ | 5609 | 33 | 5917 | 38 | 4083 | 9692 | 5 | 40′ |
| 30′ | 5641 | 32 | 5954 | 37 | 4046 | 9687 | 5 | 30′ |
| 40′ | 5673 | 32 | 5991 | 37 | 4009 | 9682 | 5 | 20′ |
| 50′ | 5704 | 31 | 6028 | 37 | 3972 | 9677 | 5 | 10′ |
| 22° 0′ | 9.5736 | 32 | 9.6064 | 36 | 10.3936 | 9.9672 | 5 | 0′ 68° |
| 10′ | 5767 | 31 | 6100 | 36 | 3900 | 9667 | 5 | 50′ |
| 20′ | 5798 | 31 | 6136 | 36 | 3864 | 9661 | 6 | 40′ |
| 30′ | 5828 | 30 | 6172 | 36 | 3828 | 9656 | 5 | 30′ |
| 40′ | 5859 | 31 | 6208 | 36 | 3792 | 9651 | 5 | 20′ |
| 50′ | 5889 | 30 | 6243 | 35 | 3757 | 9646 | 5 | 10′ |
| 23° 0′ | 9.5919 | 30 | 9.6279 | 36 | 10.3721 | 9.9640 | 6 | 0′ 67° |
| 10′ | 5948 | 29 | 6314 | 35 | 3686 | 9635 | 5 | 50′ |
| 20′ | 5978 | 30 | 6348 | 34 | 3652 | 9629 | 6 | 40′ |
| 30′ | 6007 | 29 | 6383 | 35 | 3617 | 9624 | 5 | 30′ |
| 40′ | 6036 | 29 | 6417 | 34 | 3583 | 9618 | 6 | 20′ |
| 50′ | 6065 | 29 | 6452 | 35 | 3548 | 9613 | 5 | 10′ |
| 24° 0′ | 9.6093 | 28 | 9.6486 | 34 | 10.3514 | 9.9607 | 6 | 0′ 66° |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin | 差 | 角 |

## 三角函數ノ對數表 (其ノ二)

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos | 差 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **24° 0′** | **9.6093** | 28 | **9.6486** | 34 | **10.3514** | **9.9607** | 5 | **0′ 66°** |
| 10′ | 6121 | 28 | 6520 | 33 | 3480 | 9602 | 6 | 50′ |
| 20′ | 6149 | 28 | 6553 | 34 | 3447 | 9596 | 6 | 40′ |
| 30′ | 6177 | 28 | 6587 | 33 | 3413 | 9590 | 6 | 30′ |
| 40′ | 6205 | 27 | 6620 | 34 | 3380 | 9584 | 5 | 20′ |
| 50′ | 6232 | 27 | 6654 | 33 | 3346 | 9579 | 6 | 10′ |
| **25° 0′** | **9.6259** | 27 | **9.6687** | 33 | **10.3313** | **9.9573** | 6 | **0′ 65°** |
| 10′ | 6286 | 27 | 6720 | 32 | 3280 | 9567 | 6 | 50′ |
| 20′ | 6313 | 27 | 6752 | 33 | 3248 | 9561 | 6 | 40′ |
| 30′ | 6340 | 26 | 6785 | 32 | 3215 | 9555 | 6 | 30′ |
| 40′ | 6366 | 26 | 6817 | 33 | 3183 | 9549 | 6 | 20′ |
| 50′ | 6392 | 26 | 6850 | 32 | 3150 | 9543 | 6 | 10′ |
| **26° 0′** | **9.6418** | 26 | **9.6882** | 32 | **10.3118** | **9.6537** | 7 | **0′ 64°** |
| 10′ | 6444 | 26 | 6914 | 32 | 3086 | 9530 | 6 | 50′ |
| 20′ | 6470 | 25 | 6946 | 31 | 3054 | 9524 | 6 | 40′ |
| 30′ | 6495 | 26 | 6977 | 32 | 3023 | 9518 | 6 | 30′ |
| 40′ | 6521 | 25 | 7009 | 31 | 2991 | 9512 | 7 | 20′ |
| 50′ | 6546 | 24 | 7040 | 32 | 2960 | 9505 | 6 | 10′ |
| **27° 0′** | **9.6570** | 25 | **9.7072** | 31 | **10.2928** | **9.9499** | 7 | **0′ 63°** |
| 10′ | 6595 | 25 | 7103 | 31 | 2897 | 9492 | 6 | 50′ |
| 20′ | 6620 | 24 | 7134 | 31 | 2866 | 9486 | 7 | 40′ |
| 30′ | 6644 | 24 | 7165 | 31 | 2835 | 9479 | 6 | 30′ |
| 40′ | 6668 | 24 | 7196 | 30 | 2804 | 9473 | 7 | 20′ |
| 50′ | 6692 | 24 | 7226 | 31 | 2774 | 9466 | 7 | 10′ |
| **28° 0′** | **9.6716** | 24 | **9.7257** | 30 | **10.2743** | **9.9459** | 6 | **0′ 62°** |
| 10′ | 6740 | 23 | 7287 | 30 | 2713 | 9453 | 7 | 50′ |
| 20′ | 6763 | 24 | 7317 | 31 | 2683 | 9446 | 7 | 40′ |
| 30′ | 6787 | 23 | 7348 | 30 | 2652 | 9439 | 7 | 30′ |
| 40′ | 6810 | 23 | 7378 | 30 | 2622 | 9432 | 7 | 20′ |
| 50′ | 6833 | 23 | 7408 | 30 | 2592 | 9425 | 7 | 10′ |
| **29° 0′** | **9.6856** | 22 | **9.7438** | 29 | **10.2562** | **9.9418** | 7 | **0′ 61°** |
| 10′ | 6878 | 23 | 7467 | 30 | 2533 | 9411 | 7 | 50′ |
| 20′ | 6901 | 22 | 7497 | 29 | 2503 | 9404 | 7 | 40′ |
| 30′ | 6923 | 23 | 7526 | 30 | 2474 | 9397 | 7 | 30′ |
| 40′ | 6946 | 22 | 7556 | 29 | 2444 | 9390 | 7 | 20′ |
| 50′ | 6968 | 22 | 7585 | 29 | 2415 | 9383 | 8 | 10′ |
| **30° 0′** | **9.6990** | 22 | **9.7614** | 30 | **10.2386** | **9.9375** | 7 | **0′ 60°** |
| 10′ | 7012 | 21 | 7644 | 29 | 2356 | 9368 | 7 | 50′ |
| 20′ | 7033 | 22 | 7673 | 28 | 2327 | 9361 | 8 | 40′ |
| 30′ | 7055 | 21 | 7701 | 29 | 2299 | 9353 | 7 | 30′ |
| 40′ | 7076 | 21 | 7730 | 29 | 2270 | 9346 | 8 | 20′ |
| 50′ | 7097 | 21 | 7759 | 29 | 2241 | 9338 | 7 | 10′ |
| **31° 0′** | **9.7118** | 21 | **9.7788** | 28 | **10.2212** | **9.9331** | 8 | **0′ 59°** |
| 10′ | 7139 | 21 | 7816 | 29 | 2184 | 9323 | 8 | 50′ |
| 20′ | 7160 | 21 | 7845 | 28 | 2155 | 9315 | 7 | 40′ |
| 30′ | 7181 | 20 | 7873 | 29 | 2127 | 9308 | 8 | 30′ |
| 40′ | 7201 | 21 | 7902 | 28 | 2098 | 9300 | 8 | 20′ |
| 50′ | 7222 | 20 | 7930 | 28 | 2070 | 9292 | 8 | 10′ |
| **32° 0′** | **9.7242** | | **9.7958** | | **10.2042** | **9.9284** | | **0′ 58°** |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin | 差 | 角 |

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **32° 0′** | **9.7242** | 20 | **9.7958** | 28 | **10.2042** | **9.9284** |
| 10′ | 7262 | 20 | 7986 | 28 | 2014 | 9276 |
| 20′ | 7282 | 20 | 8014 | 28 | 1986 | 9268 |
| 30′ | 7302 | 20 | 8042 | 28 | 1958 | 9260 |
| 40′ | 7322 | 20 | 8070 | 27 | 1930 | 9252 |
| 50′ | 7342 | 19 | 8097 | 28 | 1903 | 9244 |
| **33° 0′** | **9.7361** | 19 | **9.8125** | 28 | **10.1875** | **9.9236** |
| 10′ | 7380 | 20 | 8153 | 27 | 1847 | 9228 |
| 20′ | 7400 | 19 | 8180 | 28 | 1820 | 9219 |
| 30′ | 7419 | 19 | 8208 | 27 | 1792 | 9211 |
| 40′ | 7438 | 19 | 8235 | 28 | 1765 | 9203 |
| 50′ | 7457 | 19 | 8263 | 27 | 1737 | 9194 |
| **34° 0′** | **9.7476** | 18 | **9.8290** | 27 | **10.1710** | **9.9186** |
| 10′ | 7494 | 19 | 8317 | 27 | 1683 | 9177 |
| 20′ | 7513 | 18 | 8344 | 27 | 1656 | 9169 |
| 30′ | 7531 | 19 | 8371 | 27 | 1629 | 9160 |
| 40′ | 7550 | 18 | 8398 | 27 | 1602 | 9151 |
| 50′ | 7568 | 18 | 8425 | 27 | 1575 | 9142 |
| **35° 0′** | **9.7586** | 18 | **9.8452** | 27 | **10.1548** | **9.9134** |
| 10′ | 7604 | 18 | 8479 | 27 | 1521 | 9125 |
| 20′ | 7622 | 18 | 8506 | 27 | 1494 | 9116 |
| 30′ | 7640 | 17 | 8533 | 26 | 1467 | 9107 |
| 40′ | 7657 | 18 | 8559 | 27 | 1441 | 9098 |
| 50′ | 7575 | 17 | 8586 | 27 | 1414 | 9089 |
| **36° 0′** | **9.7692** | 18 | **9.8613** | 26 | **10.1387** | **9.9080** |
| 10′ | 7710 | 17 | 8639 | 27 | 1361 | 9070 |
| 20′ | 7727 | 17 | 8666 | 26 | 1334 | 9061 |
| 30′ | 7744 | 17 | 8692 | 26 | 1308 | 9052 |
| 40′ | 7761 | 17 | 8718 | 27 | 1282 | 9042 |
| 50′ | 7778 | 17 | 8745 | 26 | 1255 | 9033 |
| **37° 0′** | **9.7795** | 16 | **9.8771** | 26 | **10.1229** | **9.9023** |
| 10′ | 7811 | 17 | 8797 | 27 | 1203 | 9014 |
| 20′ | 7828 | 16 | 8824 | 26 | 1176 | 9004 |
| 30′ | 7844 | 17 | 8850 | 26 | 1150 | 8995 |
| 40′ | 7861 | 16 | 8876 | 26 | 1124 | 8985 |
| 50′ | 7877 | 16 | 8902 | 26 | 1098 | 8975 |
| **38° 0′** | **9.7893** | 17 | **9.8928** | 26 | **10.1072** | **9.8965** |
| 10′ | 7910 | 16 | 8954 | 26 | 1046 | 8955 |
| 20′ | 7926 | 15 | 8980 | 26 | 1020 | 8945 |
| 30′ | 7941 | 16 | 9006 | 26 | 0994 | 8935 |
| 40′ | 7957 | 16 | 9032 | 26 | 0968 | 8925 |
| 50′ | 7973 | 16 | 9058 | 26 | 0942 | 8915 |
| **39° 0′** | **9.7989** | 15 | **9.9084** | 26 | **10.0916** | **9.8905** |
| 10′ | 8004 | 16 | 9110 | 25 | 0890 | 8895 |
| 20′ | 8020 | 15 | 9135 | 26 | 0865 | 8884 |
| 30′ | 8035 | 15 | 9161 | 26 | 0839 | 8874 |
| 40′ | 8050 | 16 | 9187 | 25 | 0813 | 8864 |
| 50′ | 8066 | 15 | 9212 | 26 | 0788 | 8853 |
| **40° 0′** | **9.8081** | | **9.9238** | | **10.0762** | **9.8843** |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin |

# 三角函數ノ對數表 (其ノ二)

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos | 差 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **24° 0′** | **9.6093** | 28 | **9.6486** | 34 | **10.3514** | **9.9607** | 5 | **0′ 66°** |
| 10′ | 6121 | 28 | 6520 | 33 | 3480 | 9602 | 6 | 50′ |
| 20′ | 6149 | 28 | 6553 | 34 | 3447 | 9596 | 6 | 40′ |
| 30′ | 6177 | 28 | 6587 | 33 | 3413 | 9590 | 6 | 30′ |
| 40′ | 6205 | 27 | 6620 | 34 | 3380 | 9584 | 5 | 20′ |
| 50′ | 6232 | 27 | 6654 | 33 | 3346 | 9579 | 6 | 10′ |
| **25° 0′** | **9.6259** | 27 | **9.6687** | 33 | **10.3313** | **9.9573** | 6 | **0′ 65°** |
| 10′ | 6286 | 27 | 6720 | 32 | 3280 | 9567 | 6 | 50′ |
| 20′ | 6313 | 27 | 6752 | 33 | 3248 | 9561 | 6 | 40′ |
| 30′ | 6340 | 26 | 6785 | 32 | 3215 | 9555 | 6 | 30′ |
| 40′ | 6366 | 26 | 6817 | 33 | 3183 | 9549 | 6 | 20′ |
| 50′ | 6392 | 26 | 6850 | 32 | 3150 | 9543 | 6 | 10′ |
| **26° 0′** | **9.6418** | 26 | **9.6882** | 32 | **10.3118** | **9.6537** | 7 | **0′ 64°** |
| 10′ | 6444 | 26 | 6914 | 32 | 3086 | 9530 | 6 | 50′ |
| 20′ | 6470 | 25 | 6946 | 31 | 3054 | 9524 | 6 | 40′ |
| 30′ | 6495 | 26 | 6977 | 32 | 3023 | 9518 | 6 | 30′ |
| 40′ | 6521 | 25 | 7009 | 31 | 2991 | 9512 | 7 | 20′ |
| 50′ | 6546 | 24 | 7040 | 32 | 2960 | 9505 | 6 | 10′ |
| **27° 0′** | **9.6570** | 25 | **9.7072** | 31 | **10.2928** | **9.9499** | 7 | **0′ 63°** |
| 10′ | 6595 | 25 | 7103 | 31 | 2897 | 9492 | 6 | 50′ |
| 20′ | 6620 | 24 | 7134 | 31 | 2866 | 9486 | 7 | 40′ |
| 30′ | 6644 | 24 | 7165 | 31 | 2835 | 9479 | 6 | 30′ |
| 40′ | 6668 | 24 | 7196 | 30 | 2804 | 9473 | 7 | 20′ |
| 50′ | 6692 | 24 | 7226 | 31 | 2774 | 9466 | 7 | 10′ |
| **28° 0′** | **9.6716** | 24 | **9.7257** | 30 | **10.2743** | **9.9459** | 6 | **0′ 62°** |
| 10′ | 6740 | 23 | 7287 | 30 | 2713 | 9453 | 7 | 50′ |
| 20′ | 6763 | 24 | 7317 | 31 | 2683 | 9446 | 7 | 40′ |
| 30′ | 6787 | 23 | 7348 | 30 | 2652 | 9439 | 7 | 30′ |
| 40′ | 6810 | 23 | 7378 | 30 | 2622 | 9432 | 7 | 20′ |
| 50′ | 6833 | 23 | 7408 | 30 | 2592 | 9425 | 7 | 10′ |
| **29° 0′** | **9.6856** | 22 | **9.7438** | 29 | **10.2562** | **9.9418** | 7 | **0′ 61°** |
| 10′ | 6878 | 23 | 7467 | 30 | 2533 | 9411 | 7 | 50′ |
| 20′ | 6901 | 22 | 7497 | 29 | 2503 | 9404 | 7 | 40′ |
| 30′ | 6923 | 23 | 7526 | 30 | 2474 | 9397 | 7 | 30′ |
| 40′ | 6946 | 22 | 7556 | 29 | 2444 | 9390 | 7 | 20′ |
| 50′ | 6968 | 22 | 7585 | 29 | 2415 | 9383 | 8 | 10′ |
| **30° 0′** | **9.6990** | 22 | **9.7614** | 30 | **10.2386** | **9.9375** | 7 | **0′ 60°** |
| 10′ | 7012 | 21 | 7644 | 29 | 2356 | 9368 | 7 | 50′ |
| 20′ | 7033 | 22 | 7673 | 28 | 2327 | 9361 | 8 | 40′ |
| 30′ | 7055 | 21 | 7701 | 29 | 2299 | 9353 | 7 | 30′ |
| 40′ | 7076 | 21 | 7730 | 29 | 2270 | 9346 | 8 | 20′ |
| 50′ | 7097 | 21 | 7759 | 29 | 2241 | 9338 | 7 | 10′ |
| **31° 0′** | **9.7118** | 21 | **9.7788** | 28 | **10.2212** | **9.9331** | 8 | **0′ 59°** |
| 10′ | 7139 | 21 | 7816 | 29 | 2184 | 9323 | 8 | 50′ |
| 20′ | 7160 | 21 | 7845 | 28 | 2155 | 9315 | 7 | 40′ |
| 30′ | 7181 | 20 | 7873 | 29 | 2127 | 9308 | 8 | 30′ |
| 40′ | 7201 | 21 | 7902 | 28 | 2098 | 9300 | 8 | 20′ |
| 50′ | 7222 | 20 | 7930 | 28 | 2070 | 9292 | 8 | 10′ |
| **32° 0′** | **9.7242** | | **9.7958** | | **10.2042** | **9.9284** | | **0′ 58°** |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin | 差 | 角 |

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos | 差 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **32° 0′** | **9.7242** | 20 | **9.7958** | 28 | **10.2042** | **9.9284** | 8 | **0′ 58°** |
| 10′ | 7262 | 20 | 7986 | 28 | 2014 | 9276 | 8 | 50′ |
| 20′ | 7282 | 20 | 8014 | 28 | 1986 | 9268 | 8 | 40′ |
| 30′ | 7302 | 20 | 8042 | 28 | 1958 | 9260 | 8 | 30′ |
| 40′ | 7322 | 20 | 8070 | 27 | 1930 | 9252 | 8 | 20′ |
| 50′ | 7342 | 19 | 8097 | 28 | 1903 | 9244 | 8 | 10′ |
| **33° 0′** | **9.7361** | 19 | **9.8125** | 28 | **10.1875** | **9.9236** | 8 | **0′ 57°** |
| 10′ | 7380 | 20 | 8153 | 27 | 1847 | 9228 | 9 | 50′ |
| 20′ | 7400 | 19 | 8180 | 28 | 1820 | 9219 | 8 | 40′ |
| 30′ | 7419 | 19 | 8208 | 27 | 1792 | 9211 | 8 | 30′ |
| 40′ | 7438 | 19 | 8235 | 28 | 1765 | 9203 | 9 | 20′ |
| 50′ | 7457 | 19 | 8263 | 27 | 1737 | 9194 | 8 | 10′ |
| **34° 0′** | **9.7476** | 18 | **9.8290** | 27 | **10.1710** | **9.9186** | 9 | **0′ 56°** |
| 10′ | 7494 | 19 | 8317 | 27 | 1683 | 9177 | 8 | 50′ |
| 20′ | 7513 | 18 | 8344 | 27 | 1656 | 9169 | 9 | 40′ |
| 30′ | 7531 | 19 | 8371 | 27 | 1629 | 9160 | 9 | 30′ |
| 40′ | 7550 | 18 | 8398 | 27 | 1602 | 9151 | 9 | 20′ |
| 50′ | 7568 | 18 | 8425 | 27 | 1575 | 9142 | 8 | 10′ |
| **35° 0′** | **9.7586** | 18 | **9.8452** | 27 | **10.1548** | **9.9134** | 9 | **0′ 55°** |
| 10′ | 7604 | 18 | 8479 | 27 | 1521 | 9125 | 9 | 50′ |
| 20′ | 7622 | 18 | 8506 | 27 | 1494 | 9116 | 9 | 40′ |
| 30′ | 7640 | 17 | 8533 | 26 | 1467 | 9107 | 9 | 30′ |
| 40′ | 7657 | 18 | 8559 | 27 | 1441 | 9098 | 9 | 20′ |
| 50′ | 7575 | 17 | 8586 | 27 | 1414 | 9089 | 9 | 10′ |
| **36° 0′** | **9.7692** | 18 | **9.8613** | 26 | **10.1387** | **9.9080** | 10 | **0′ 54°** |
| 10′ | 7710 | 17 | 8639 | 27 | 1361 | 9070 | 9 | 50′ |
| 20′ | 7727 | 17 | 8666 | 26 | 1334 | 9061 | 9 | 40′ |
| 30′ | 7744 | 17 | 8692 | 26 | 1308 | 9052 | 10 | 30′ |
| 40′ | 7761 | 17 | 8718 | 27 | 1282 | 9042 | 9 | 20′ |
| 50′ | 7778 | 17 | 8745 | 26 | 1255 | 9033 | 10 | 10′ |
| **37° 0′** | **9.7795** | 16 | **9.8771** | 26 | **10.1229** | **9.9023** | 9 | **0′ 53°** |
| 10′ | 7811 | 17 | 8797 | 27 | 1203 | 9014 | 10 | 50′ |
| 20′ | 7828 | 16 | 8824 | 26 | 1176 | 9004 | 9 | 40′ |
| 30′ | 7844 | 17 | 8850 | 26 | 1150 | 8995 | 10 | 30′ |
| 40′ | 7861 | 16 | 8876 | 26 | 1124 | 8985 | 10 | 20′ |
| 50′ | 7877 | 16 | 8902 | 26 | 1098 | 8975 | 10 | 10′ |
| **38° 0′** | **9.7893** | 17 | **9.8928** | 26 | **10.1072** | **9.8965** | 10 | **0′ 52°** |
| 10′ | 7910 | 16 | 8954 | 26 | 1046 | 8955 | 10 | 50′ |
| 20′ | 7926 | 15 | 8980 | 26 | 1020 | 8945 | 10 | 40′ |
| 30′ | 7941 | 16 | 9006 | 26 | 0994 | 8935 | 10 | 30′ |
| 40′ | 7957 | 16 | 9032 | 26 | 0968 | 8925 | 10 | 20′ |
| 50′ | 7973 | 16 | 9058 | 26 | 0942 | 8915 | 10 | 10′ |
| **39° 0′** | **9.7989** | 15 | **9.9084** | 26 | **10.0916** | **9.8905** | 10 | **0′ 51°** |
| 10′ | 8004 | 16 | 9110 | 25 | 0890 | 8895 | 11 | 50′ |
| 20′ | 8020 | 15 | 9135 | 26 | 0865 | 8884 | 10 | 40′ |
| 30′ | 8035 | 15 | 9161 | 26 | 0839 | 8874 | 10 | 30′ |
| 40′ | 8050 | 16 | 9187 | 25 | 0813 | 8864 | 11 | 20′ |
| 50′ | 8066 | 15 | 9212 | 26 | 0788 | 8853 | 10 | 10′ |
| **40° 0′** | **9.8081** | | **9.9238** | | **10.0762** | **9.8843** | | **0′ 50°** |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin | 差 | 角 |

| 角 | L sin | 差 | L tan | 通差 | L cot | L cos | 差 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **40° 0′** | **9.8081** | 15 | **9.9238** | 26 | **10.0762** | **9.8843** | 11 | **0′ 50°** |
| 10′ | 8096 | 15 | 9264 | 25 | 0736 | 8832 | 11 | 50′ |
| 20′ | 8111 | 14 | 9289 | 26 | 0711 | 8821 | 11 | 40′ |
| 30′ | 8125 | 15 | 9315 | 26 | 0685 | 8810 | 10 | 30′ |
| 40′ | 8140 | 15 | 9341 | 25 | 0659 | 8800 | 11 | 20′ |
| 50′ | 8155 | 14 | 9366 | 26 | 0634 | 8789 | 11 | 10′ |
| **41° 0′** | **9.8169** | 15 | **9.9392** | 25 | **10.0608** | **9.8778** | 11 | **0′ 49°** |
| 10′ | 8184 | 14 | 9417 | 26 | 0583 | 8767 | 11 | 50′ |
| 20′ | 8198 | 15 | 9443 | 25 | 0557 | 8756 | 11 | 40′ |
| 30′ | 8213 | 14 | 9468 | 26 | 0532 | 8745 | 12 | 30′ |
| 40′ | 8227 | 14 | 9494 | 25 | 0506 | 8733 | 11 | 20′ |
| 50′ | 8241 | 14 | 9519 | 25 | 0481 | 8722 | 11 | 10′ |
| **42° 0′** | **9.8255** | 14 | **9.9544** | 26 | **10.0456** | **9.8711** | 12 | **0′ 48°** |
| 10′ | 8269 | 14 | 9570 | 25 | 0430 | 8699 | 11 | 50′ |
| 20′ | 8283 | 14 | 9595 | 26 | 0405 | 8688 | 12 | 40′ |
| 30′ | 8297 | 14 | 9621 | 25 | 0379 | 8676 | 11 | 30′ |
| 40′ | 8311 | 13 | 9646 | 25 | 0354 | 8665 | 12 | 20′ |
| 50′ | 8324 | 14 | 9671 | 26 | 0329 | 8653 | 12 | 10′ |
| **43° 0′** | **9.8338** | 13 | **9.9697** | 25 | **10.0303** | **9.8641** | 12 | **0′ 47°** |
| 10′ | 8351 | 14 | 9722 | 25 | 0278 | 8629 | 11 | 50′ |
| 20′ | 8365 | 13 | 9747 | 25 | 0253 | 8618 | 12 | 40′ |
| 30′ | 8378 | 13 | 9772 | 26 | 0228 | 8606 | 12 | 30′ |
| 40′ | 8391 | 14 | 9798 | 25 | 0202 | 8594 | 12 | 20′ |
| 50′ | 8405 | 13 | 9823 | 25 | 0177 | 8582 | 13 | 10′ |
| **44° 0′** | **9.8418** | 13 | **9.9848** | 26 | **10.0152** | **9.8569** | 12 | **0′ 46°** |
| 10′ | 8431 | 13 | 9874 | 25 | 0126 | 8557 | 12 | 50′ |
| 20′ | 8444 | 13 | 9899 | 25 | 0101 | 8545 | 13 | 40′ |
| 30′ | 8457 | 12 | 9924 | 25 | 0076 | 8532 | 12 | 30′ |
| 40′ | 8469 | 13 | 9949 | 26 | 0051 | 8520 | 13 | 20′ |
| 50′ | 8482 | 13 | 9975 | 25 | 0025 | 8507 | 12 | 10′ |
| **45° 0′** | **9.8495** | | **10.0000** | | **10.0000** | **9.8495** | | **0′ 45°** |
| | L cos | 差 | L cot | 通差 | L tan | L sin | 差 | 角 |

中等教育

# 幾何三角法教科書

［増課］

定價 金壹圓

昭和七年九月六日　初版印刷
昭和七年九月十日　初版發行
昭和七年九月十五日　訂正再版印刷
昭和七年九月二十日　訂正再版發行

著作者　林　鶴　一

發行者　東京市小石川區小日向水道町八十四番地
株式會社 東京開成館
代表者 松本繁吉

印刷者　東京市牛込區市谷加賀町一丁目十二番地
寺井藤左工門

販賣所　東京市日本橋區吳服橋二丁目5　林平書店
販賣所　大阪市東區北久寶寺町四丁目角　三木佐助

發行所

東京市小石川區小日向水道町　株式會社　東京開成館　振替貯金口座 東京五三二二番

大日本印刷株式會社印刷

石川縣立金澤第二中學校

第~~四~~五學年~~丙~~甲組

石坂直人