新制幾何學及三角法

[增課課程用]

理學博士 寺尾 壽・藤野了祐
共編

東京 冨山房 發行

文部省檢定濟

昭和八年八月九日　中學校數學科用

新制幾何學及三角法

[增課課程用]

理學博士　寺尾　壽
藤野了祐　共編

東京　冨山房　神田

緒言

本書ハ一昨年公刊シタ「基本課程用新制幾何學」ニ續イテ增課課程ノ教材ニ適スルヤウニ,余等ノ舊著新平面幾何學,新立體幾何學及新平面三角法ヲ纒メテ改訂編纂シタモノデアル.

新令ニヨレバ,中學第四學年デハ基本教材ノ補充ヲ授ケルコトニナツテ居ル,本書ノ第一篇ガ之ニ該當スル. 教材ノ分量ガ少ナイヤウデアルガ,此學年デハ演習ヲ主ニスルコトニスレバ,卷末ノ補充問題ヲ合セテ適當ノ教材ハアルト信ズル. 又第五學年デハ立體幾何及平面三角法ヲ授ケルコトニナツテ居ル,本書ノ第二篇以下ハソレニ當ル.

兎ニ角,本書ハ新令ノ精神ニ基キ改定ノ效果ヲ十分ナラシメルヤウ總テノ點ニ於テ努メタノデアルガ,之ヲ實地ニ試

ミレバ尚改良ヲ要スル點ノ出テ來ルコトハ止ムヲ得ナイデアラウ.

幸ニ本書ヲ使用セラレル諸賢ガ特ニ實際教授上ニ於ケル高見ヲ寄セラレ,本書改良ノ資ニ供セラレンコトヲ偏ニ懇請スル.

昭和八年七月

藤野了祐識ス

目次

新制幾何學及三角法

［增課課程用］

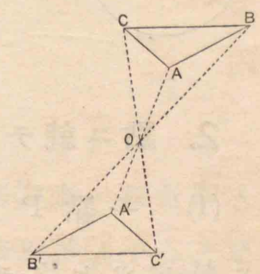
第一篇

基本教材ノ補充

第一章　雜事項

1. 點ニ就テノ對稱

二ツノ圖形ガアツテ,其一ツヲ或點ノ周リニ2∟ダケ廻シタトキ,二ツノ圖形ガ全ク相合スレバ,此兩圖形ハ此點ニ就テ互ニ對稱デアルトイヒ,此點ヲ此兩圖形ノ對稱ノ中心トイフ.



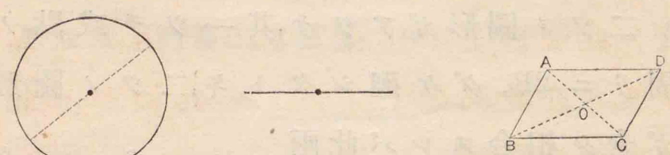
上圖デ,△ABC, △A'B'C' ハ點Oニ就テ互ニ對稱ナル圖形デアツテ,點Oハ此兩圖形ノ對稱ノ中心デアル.

一ツノ圖形ヲ或點ノ周リニ2R∟ダケ廻シタトキ全ク元ノ位置ニ合スレバ,此圖形ハ此點ニ就テ對稱デアルトイヒ,此點ヲ此圖形ノ對稱ノ中心トイフ.

例ヘバ圓ハ其中心ニ就テ對稱デアル.

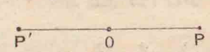
又線分ハ其中點ニ就テ對稱デアル.

又平行四邊形ハ其對角線ノ交點ニ就テ對稱デアル.

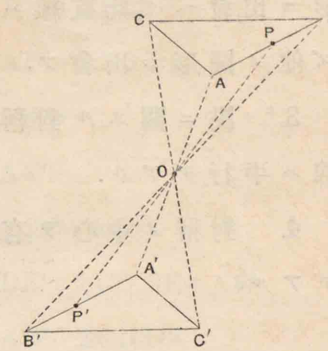


2. 點ニ就テノ對稱圖形ノ基本性質

(1) 一點Pヲ定點Oニ結ビツケ之ヲ延長シテPOニ等シクOP′ヲ取レバ,P′ハOニ就テPト互ニ對稱ナル唯一ノ點デアル.



(2) 二ツノ圖形ガ,或一定點ニ就テソノ各々ノ圖形上ノ任意ノ點ニ對稱ナル點ガ常ニ他ノ圖形上ニアレバ,此兩圖形ハ此點ニ就テ互ニ對稱デアル.



(3) 一ツノ圖形ガアツテ,或一定點ニ就テ此圖形上ノ任意ノ點ニ對稱ナル點ガ常ニ亦此圖形上ニアレバ,此圖形ハ此點ニ就テ對稱デアル.

證明 略スル.

例題

1. 或點ヲ中心トスル對稱圖形ノ相對應*スル二點ヲ結ビツケル線分ハ,其對稱ノ中心ヲ通リ且ツ此點デ二等分サレル.

2. 對稱圖形ノ中心ヲ通ル直線ガ一方ノ圖

* 互ニ對稱ナルコト.

形ニ出會ヘバ此直線ハ此點ト對稱ナル點デ必ズ他ノ圖形ニ出會フ.

3.* 點ニ關スル對稱圖形ノ相對應スル二直線ハ平行デアル.

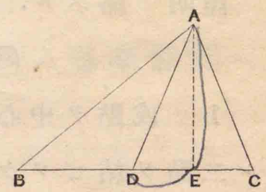
4. 對稱ノ中心ヲ有ツ四邊形ハ平行四邊形デアル.

3. 定　理

三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ第三邊ノ半分ノ平方ト其邊ヘノ中線ノ平方トノ和ノ 2 倍ニ等シイ.

證明　$\triangle ABC$ ニ於テ,邊 BC ノ中點ヲ D トセヨ.

頂點 A カラ BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ E トスルトキ, E ガ線分 DC (又ハ其延長) ノ上ニアルトセヨ.



サウスレバ直角三角形 ABE ニ於テ

$$AB^2=BE^2+AE^2$$
$$=(BD+DE)^2+AE^2$$

$$=BD^2+DE^2+2.BD.DE+AE^2$$
$$=BD^2+AD^2+2.BD.DE$$

又直角三角形 ACE ニ於テ

$$AC^2=CE^2+AE^2$$
$$=(CD\sim DE)^2+AE^2$$
$$=CD^2+DE^2-2.CD.DE+AE^2$$
$$=CD^2+AD^2-2.CD.DE$$
$$=BD^2+AD^2-2.BD.DE$$

$$\therefore\ AB^2+AC^2=2(BD^2+AD^2)$$

例　題

1. 平行四邊形ノ各邊ノ平方ノ和ハ兩對角線ノ平方ノ和ニ等シイ.

2. 二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

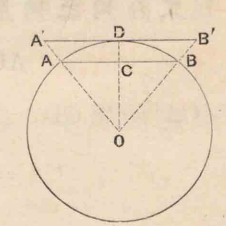
3. 定直線上ニ於テ,其直線外ノ二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ最小ナル點ヲ求メヨ.

4. π ノ近似値ノ計算

(第一)　半徑 r ナル圓ニ內接スル正 n 邊形ノ一邊ノ長サ $(2l)$ ヲ知ッテ同ジ圓

ニ外接スル正 n 邊形ノ一邊ノ長サ $(2l')$ ヲ求メルコト.

解 AB ヲ圓 O ノ内接正 n 邊形ノ一邊, C ヲ其中點トシ, $\widehat{AB}$ ノ中點 D ニ於テ此圓ニ切線ヲ引キ, OA, OB ノ延長ト夫々 A′, B′ デ交ラセレバ, A′B′ ハ此圓ノ外接正 n 邊形ノ一邊デアル.



サテ $$\frac{A'D}{AC}=\frac{OD}{OC}$$

$$\therefore \quad \frac{l'}{l}=\frac{r}{\sqrt{r^2-l^2}}$$

$OC^2=OA^2-AC^2$
$OC=\sqrt{r^2-a^2}$

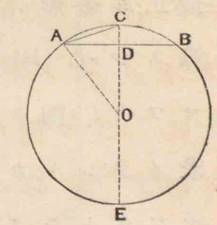
$$\therefore \quad (1) \quad l'=\frac{r.l}{\sqrt{r^2-l^2}}$$

(第二) 半徑 r ナル圓ニ内接スル正 n 邊形ノ一邊ノ長サ $(2l)$ ヲ知ツテ同ジ圓ニ内接スル正 $2n$ 邊形ノ一邊ノ長サ $(2l_1)$ ヲ求メルコト.

解 AB ヲ圓 O ノ内接正 n 邊形ノ一邊トシ, $\widehat{AB}$ ノ中點ヲ C トスレバ, AC ハ此圓ノ内接正

$2n$ 邊形ノ一邊デアル.

C ヲ通ル直徑 CE ヲ引キ, 之ト AB トノ交點卽チ AB ノ中點ヲ D トスレバ



$$CA^2=CE.CD \quad 〔基,* 第 141 節系 2〕$$

$$\therefore \quad CA^2=CE.(CO-DO)$$

$$\therefore \quad (2l_1)^2=2r.(r-\sqrt{r^2-l^2})$$

$$\therefore \quad (2) \quad l_1=\frac{1}{2}\sqrt{2r(r-\sqrt{r^2-l^2})}$$

此ノ (1) ト (2) ニヨツテ π ノ近似値ヲ計算スルコトガ出來ル.

先ヅ圓ノ半徑ヲ長サノ單位ニスレバ圓ノ周ヲ表ス數ハ 2π, 從テ半圓ノ周ヲ表ス數ガ π デアル.

ソコデ上ノ公式 (1), (2) ニ於テ $r=1$ トオケバ

$$(1)' \quad l'=\frac{l}{\sqrt{1-l^2}}$$

$$(2)' \quad l_1=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-l^2}}$$

ヲ得ル. 因テ邊ノ長サガ容易ニ求メラレル内

* 基本課程用ノ意味.

接正 n 邊形ノ一邊ノ長サノ半分 l ヲ直接ニ計算スレバ, $(1)'$ ニヨツテ l' ガ求メラレ,又 $(2)'$ ニヨツテ l_1 (卽チ邊數ガ 2 倍ニナツタトキノ l) ガ求メラレルカラ,更ニ $(1)'$ ニヨツテ邊數ガ 2 倍ニナツタトキノ l' ガ求メラレル.

コノヤウニ上ノ二式ヲ繰返シテ適用スレバ邊數ガ 2 倍ヅヽニ增大スル內接及外接正多角形ノ一邊ノ長サノ半分ガ求メラレル,從テ其周ノ半分ヲ計算スルコトガ出來ル.

カヤウニシテ得ル二組ノ數ハ π ヲ夾ム不足近似値ト過剩近似値トデアル.

サテ圓ノ內接正六邊形ノ一邊ハ半徑ニ等シイカラ, $n=6$ カラ始メテ $(1)'$ 及 $(2)'$ ヲ用ヒ l 及 l' ノ値ヲ小數第六位マデ計算スレバ次ノ通リニナル.

$n=6$ ノトキ $l=0.5$, $l'=0.577351$

$n=12$ ノトキ $l=0.258819$, $l'=0.267949$

....

ソコデ π ノ近似値トシテ次ノ表ヲ得ル.

n	nl	nl'
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187
384	3.14156	3.14166
768	3.14158	3.14161
1536	3.14159	3.14160

此表ニヨレバ, π ハ 3.14159 ト 3.14160 トノ間ニアルコトガ分カル. 從テ上ノ二ツノ値ノ中ノドレヲ π ト見做シテモ其誤差ハ小數第五位ノ 1 ヨリ小サイ.

問題

1. pass 正多角形ニハ對稱ノ中心ガアルカ.

2. 三角形ノ各邊ノ平方ノ和ノ 3 倍ハ各中線ノ平方ノ和ノ 4 倍ニ等シイ.

3. 四邊形ノ對角線ノ平方ノ和ハ,對邊ノ中點ヲ結ビツケル二線分ノ平方ノ和ノ2倍ニ等シイ.

4. 半徑 r ナル扇形ノ角ヲ k° トスレバ

$$弧ノ長サ=\frac{k\pi r}{180},\quad 面積=\frac{k\pi r^2}{360}$$

5. 一邊ガ a cm ノ正八邊形ニ內接及外接スル圓ノ半徑及面積ヲ求メヨ.

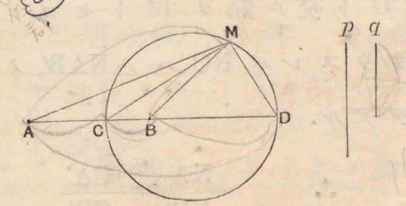
6. 半徑 r m ノ圓ニ內接スル正八邊形及正十二邊形ノ一邊及面積ヲ計算セヨ.

第二章 軌跡及作圖題

5. 軌跡題 (*Apollonius** ノ軌跡)

二定點カラノ距離ノ比ガ定比ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 二定點ヲ A, B トシ,定比ヲ $\frac{p}{q}$ $(p\neq q)$ トセヨ.



先ヅ線分 AB ヲ定比 $\frac{p}{q}$ ニ內分及外分シタ點ヲ夫々 C 及 D トスレバ,此二點ハ與ヘラレタ條件ニ適スル點デアル.

今 M ヲ與ヘラレタ條件ニ適スル他ノ一點トシテ,之ヲ A, B, C, D ノ各々ニ結ビツケヨ.

サウスレバ

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}=\frac{p}{q}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}}$$

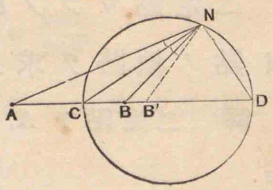
故ニ MC ハ △MAB ノ頂角 M ノ二等分線デアリ, MD ハ其外角ノ二等分線デアル. 〔基,第130節系〕

* ぎりしやノ人,西紀前 260—200 頃.

$$\therefore \quad \angle CMD = R\llcorner$$

故ニ與ヘラレタ條件ニ適スル點ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアル.

逆ニ,此圓周上ニ任意ノ一點Nヲ取リ,之ヲA, B, C, D ノ各々ニ結ビツケ, N カラ NC ト ∠ANC ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引イテ CD ト交ル點ヲ B′ トセヨ.



サウスレバ NC ハ △NAB′ ノ頂角Nノ二等分線デアル.

$$\therefore \quad \frac{NA}{NB'} = \frac{CA}{CB'}$$ 〔基,第130節〕

又 $\angle CND = R\llcorner$

ダカラ, ND ハ △NAB′ ノ頂點Nニ於ケル外角ヲ二等分スル.

$$\therefore \quad \frac{NA}{NB'} = \frac{DA}{DB'}$$ 〔基,第130節〕

從テ $$\frac{CA}{CB'} = \frac{DA}{DB'}$$

$$\therefore \quad (1) \quad \frac{CA}{DA} = \frac{CB'}{DB'}$$

然ルニ $$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$ 〔作圖〕

$$\therefore \quad (2) \quad \frac{CA}{DA} = \frac{CB}{DB}$$

(1), (2) カラ

$$\frac{CB'}{DB'} = \frac{CB}{DB}$$

即チBB′ハ線分CDヲ同ジ比ニ内分スル點デアル. 故ニ點B′ハ點Bニ合スル.〔基,第128節〕

故ニ NC ハ ∠ANB ノ二等分線デアル.

從テ $$\frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB} = \frac{p}{q}$$

故ニ CD ヲ直徑トスル圓周上ノスベテノ點ハ與ヘラレタ條件ニ適スル.

因テ 二定點カラノ距離ノ比ガ(1ニ等シクナイ)定比ニ等シイ點ノ軌跡ハ,此二定點ヲ結ビツケル線分ヲ定比ニ内分及外分スル二點ヲ直徑ノ兩端トスル圓周デアル.

注意 $p=q$ ナラバ,本問題ハ二定點A, Bカラ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メルコトトナル,此ハ已ニ基本課程ノ第112節ニ述ベタ.

例 題

1. 三點 A, B, C ガ一直線上ニ此順ニ並ブトキ,二線分 AB, BC ヲ等角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求メヨ.

2. 定圓弧ヲ二分シテ各弧ノ弦ノ比ヲ定比ニ等シイヤウニセヨ.

3. 底邊,頂角及他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

6. 軌跡ノ交リ

作圖題ハ結局或條件ニ適スル點ヲ求メルコトニ歸着スル. 例ヘバ三點ヲ通ル圓ヲ畫クコトハ其中心ヲ求メルコトニ歸スルシ,又圓外ノ點カラ此圓ニ切線ヲ引クコトハ其切點ヲ求メルコトニ歸スル.

カウイフ場合ニ,若シ與ヘラレタ條件中ノ一ツヲ省ケバ殘リノ條件ダケニ適スル點ハ無數ニアツテ其軌跡トシテ或線ヲ得ルノガ普通デアル. ソコデ先ニ省イタ條件ヲ元ヘ戻シテ他ノ一ツノ條件ヲ省ケバ又新ラシイ軌跡ヲ得ル.

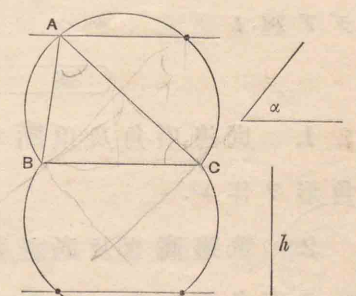
此ノ兩軌跡ノ交リガ所要ノ點デアル.

若シ此ノ兩軌跡ガ出會ハネバ所要ノ條件ニ適スル點ハ一ツモナイ,卽チ其問題ハ不可能デアル.

定義 スベテ,要求サレタ圖形ヲ作リ得ルタメニハ與ヘラレタ量ノ間ニドンナ關係ガナケレバナラヌカ,又違ツタ圖形ガ幾通リ作レルカナドヲ考究スルコトヲ作圖題ノ吟味トイフ.

7. 作圖題

底邊 (BC), 頂角 (α) 及高サ (h) ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.



解 先ヅ底邊 BC ヲ任意ノ位置ニ置ク. ソコデ所要ノ三角形ヲ畫クニハ其頂點ノ位置ガ分カレバイヽ. 因テ先ヅ底邊ト高サトダケガ與ヘラレタトスレバ,頂點ノ軌跡ハ BC カラ h ニ等シイ距離ニアル一雙ノ平行線デアル.〔基,第115節〕

次ニ底邊ト頂角トダケガ與ヘラレタトスレバ,頂點ノ軌跡ハBCヲ弦トシテ $\angle a$ ニ等シイ角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル.〔基,第119節〕

故ニ此ノ兩軌跡ノ交點ノ一ツヲAトスレバ,△ABCハ所要ノ三角形デアル.

吟味　上ノ兩軌跡ノ交點ノ數ハ四ツマデアリ得ル,此場合ニハ他ノ交點ヲ頂點トシテモ所要ノ三角形ガ出來ル,併シ其ハ何レモ前ノ三角形ト合同ダカラ,結局所要ノ三角形ハ唯一ツヨリナイ.

若シ兩軌跡ガ出會ハナケレバ,問題ハ不可能デアル.

例　題

1. 底邊,頂角及頂點カラノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

2. 底邊,高サ及底邊ノ一端カラノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

8. 解析ト綜合

作圖題ヲ解カウトスルトキ,容易ニソノ解法

ヲ考ヘツカネバ,先ヅ所要ノ作圖題ガ或方法デ解ケタ(卽チ所要ノ圖形ガ或方法デ畫ケタ)モノト假定シ,此假定ノ圖ニツイテ圖形中ノ既知ノ部分卽チ初ニ與ヘラレタ線,角等ト未知ノ部分トノ間ニドンナ關係ガアルカヲ考ヘ,其關係ニヨツテ此作圖題ヲ他ノ比較的容易ナ作圖題ニ代ヘ,逐次此樣ニシテ終ニ既知ノ作圖題ニ歸着サセル. 之ヲ作圖題ノ**解析**トイフ.

次ニ解析ニヨツテ得タ結果ヲ基トシテ,之カラ其順序ヲ逆ニ辿ツテ所要ノ作圖法ヲ求メル. 之ヲ作圖題ノ**綜合**トイフ.

次ニ此作圖法ノ正シイコトヲ證明シ,終リニ之ヲ吟味セヨ.

解析
作図
証明
吟味

9. 作圖題

二定圓(O, O′)ニ共通ノ切線ヲ引ケ.

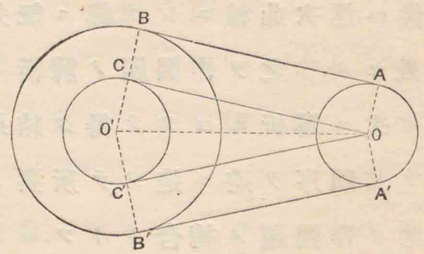
(第一)　外共通切線ノ場合.

解析　ABヲ二定圓O, O′ノ一ツノ外共通切線ト假定シ,其切點A, Bヲ夫々其圓ノ中心O, O′ニ結ビツケレバ

$OA \perp AB, \quad O'B \perp AB$

今圓 O′ ガ圓 O ヨリ大キイトシ, O カラ AB ニ平行線ヲ引イテ O′B トCデ交ラセレバ,四邊形 OABC ハ矩形デアツテ O′C ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シイ,而シテ OC ハ O′ ヲ中心トシ O′C ヲ半徑トスル圓ニ切スル.

作圖　大キイ方ノ圓 O′ ノ中心ヲ中心トシ,二定圓 O, O′ ノ半徑ノ差ニ等シイ半徑デ圓ヲ畫ケ.



次ニ此圓ニ小サイ方ノ圓ノ中心 O カラ切線ヲ引キ〔基,第110節〕,其切點ヲ C, C′ トシ,之ヲ通ル定圓 O′ ノ半徑 O′B, O′B′ ヲ引ケ.

ソコデ O′B, O′B′ ト夫々同方向ニ定圓 O ノ半徑 OA, OA′ ヲ引キ,直線 AB, A′B′ ヲ作レバ,コレガ所要ノ外共通切線デアル.

證明　OABC ハ矩形デアル.

$\therefore \quad AB \perp OA, \quad AB \perp O'B$

因テ AB ハ二圓 O, O′ ノ共通切線デアル.　而シテ兩圓ハ明カニ此共通切線ノ一方ニアル.

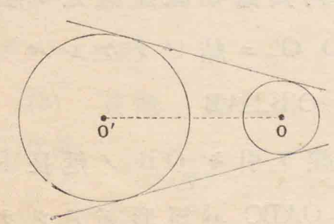
故ニ AB ハ所要ノ外共通切線デアル.

同樣ニ, A′B′ モ亦所要ノ外共通切線デアル.

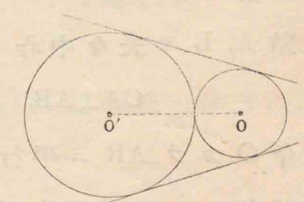
吟味　二定圓 O, O′ ノ位置ノ關係ニヨツテ,其ノ外共通切線ノ數ハ次ノ通リニナル.

(1)　兩圓ガ互ニ全ク他ノ外ニアルカ又ハ相交ルトキハ,外共通切線ハ二ツアル. (甲,乙,丙圖)

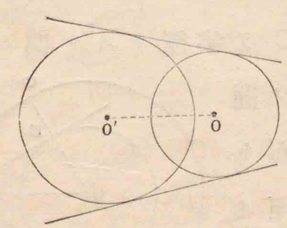
(甲)



(乙)

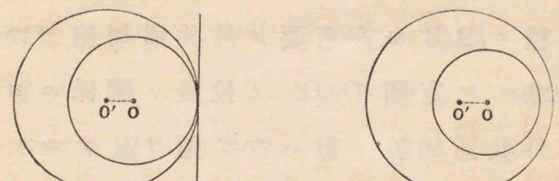


(丙)



(2)　兩圓ガ內切スルトキハ,外共通切線ハ唯一ツデアル. (丁圖)

(3) 一圓ガ全ク他ノ圓ノ內ニアツテ一ツモ出會ハナケレバ,外共通切線ハナイ.(戊圖)



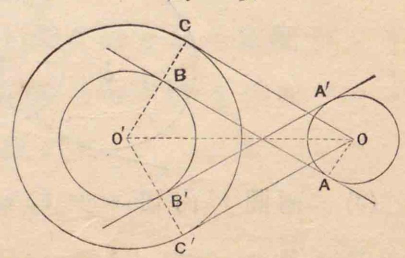
(第二) 內共通切線ノ場合.

解析 AB ヲ一ツノ內共通切線ト假定シ,其切點 A, B ヲ夫々中心 O, O′ ニ結ビツケレバ

$$OA \perp AB, \quad O'B \perp AB$$

今 O カラ AB ニ平行線ヲ引キ O′B ノ延長ト C デ交ラセレバ,四邊形 OABC ハ矩形デアツテ O′C ハ兩圓ノ半徑ノ和ニ等シイ,而シテ OC ハ O′ ヲ中心トシ O′C ヲ半徑トスル圓ニ切スル.

作圖 一ツノ圓 O′ ノ中心ヲ中心トシ,二定圓ノ半徑ノ和ニ等シイ半徑デ圓ヲ畫ケ.



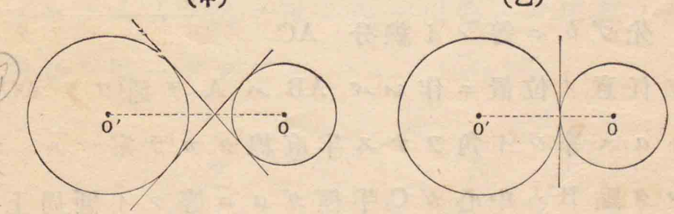
次ニ此圓ニ他ノ圓ノ中心 O カラ切線ヲ引キ,其切點ヲ C, C′ トシ,延長ガ之ヲ通ル圓 O′ ノ半徑 O′B, O′B′ ヲ引キ, B 及 B′ カラ夫々直線 CO, C′O ニ平行線ヲ引ケバ,コレガ所要ノ內共通切線デアル.

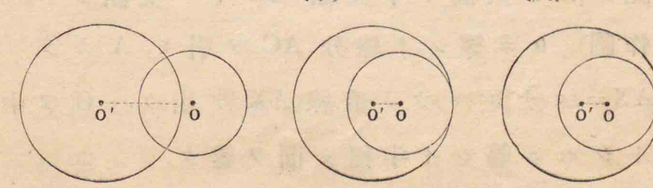
證明 略スル.

吟味 (1) 兩圓ガ互ニ全ク他ノ外ニアツテ一ツモ出會ハナケレバ,內共通切線ハ二ツアル.(甲圖).

(2) 兩圓ガ外切スレバ,內共通切線ハ唯一ツアル.(乙圖)

(3) 其他ノ場合ニハ內共通切線ハナイ.(丙,丁,戊圖)





例題

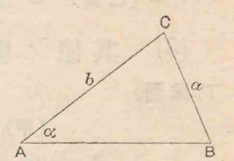
1. 定圓ニ於テ定長ノ弦ヲ引イテ,其延長ガ他ノ定圓ニ切スルヤウニセヨ.

2. 頂角,高サ及內接圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

10. 作圖題

二邊 (a, b) 及其中ノ一邊 (a) ニ對スル角 (α) ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

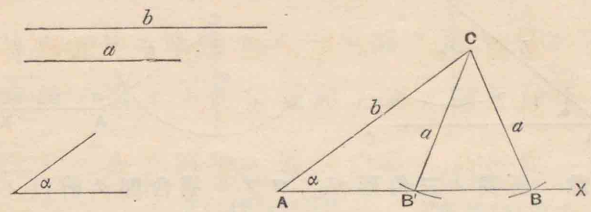
解析 求メル三角形 ABC ガ出來タトシ, $AC=b$, $BC=a$, $\angle A=\alpha$ トセヨ.



先ヅ b ニ等シイ線分 AC ヲ任意ノ位置ニ作レバ AB ハ A ヲ通ツテ AC ト α ニ等シイ角ヲナス半直線ダカラ定マル.

マタ點 B ハ中心ガ C,半徑ガ a ニ等シイ圓周上ノ點ダカラ其圓ト半直線 AB トノ交點デアル.

作圖 b ニ等シイ線分 AC ヲ引キ, A カラ $\angle CAX=\angle\alpha$ ナルヤウニ直線 AX ヲ引ケ. C ヲ中心トシ a ニ等シイ半徑デ圓ヲ畫ケ.

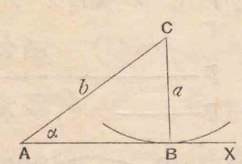


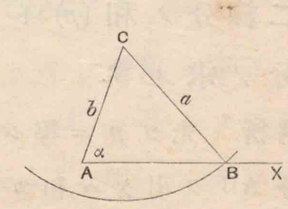
此圓周ト $\angle CAX$ ノ邊 AX トノ交點ヲ B トシ, BC ヲ引ケバ, $\triangle ABC$ ガ所要ノ三角形デアル.

證明 略スル.

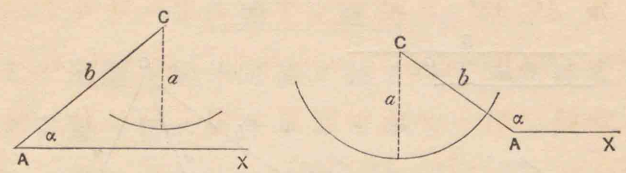
吟味 圓 C ノ周ト邊 AX トガ A ノ外ノ二點デ交レバ所要ノ三角形ハ二ツアル,即チ上圖ノ $\triangle ABC$ 及 $\triangle AB'C$ ガソレデアル.

又圓 C ノ周ト邊 AX トガ次ノ二圖ノ何レカノヤウニ,A ノ外ノ唯一點デ出會ヘバ,所要ノ三角形ハ唯一ツデアル.





又圓 C ノ周ガ次圖ノ何レカノヤウニ邊 AX ニ出會ハナケレバ,本問題ハ不可能デアル.



注意 所要ノ三角形ガ二ツアル場合,即チ前頁ノ圖ノ △ABC, △AB′C ニ於テハ ∠ABC ト ∠AB′C トハ互ニ補角デアル.

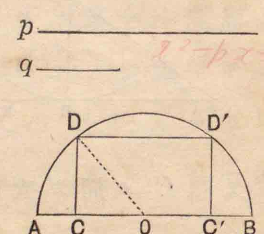
例　題

1. 上ノ作圖題デ, α ガ直角又ハ鈍角ナラバ,所要ノ三角形ガ二ツ出來ルコトハ決シテ無イ.

2.* 二邊ガ夫々相等シク,且ツ其二邊中ノ大キイ邊ニ對スル角ガ相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

11. 作圖題

二線分ノ和 (p) ト積 (q^2) トヲ知ツテ各線分ヲ求メヨ.



解析 先ヅ p ニ等シイ線分 AB ヲ引ケバ,和ガ p ニ等シイ二線分ハ AB ヲ或一點 C デ内分シタ二ツノ分 AC, BC ニ限ル. ソコデ之ヲ所要ノ二線分トシ, AB ヲ直徑トスル半圓ヲ畫キ, C カラ AB ニ垂線ヲ引イテ此半圓周ト交ル點ヲ D トスレバ

$$AC.BC = CD^2 \quad \text{〔基, 第 141 節系 1〕}$$

然ルニ $AC.BC = q^2$ 〔假　設〕

$$\therefore \quad CD = q$$

作圖 p ニ等シイ線分 AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, AB ニ對シテ此半圓ト同ジ側ニ AB カラノ距離ガ q ニ等シイ平行線ヲ引キ,此半圓周トノ一交點ヲ D トシ, D カラ AB ニ垂線 DC ヲ引ケバ,其足 C デ AB ガ分タレタ二ツノ分 AC, BC ガ所要ノ二線分デアル.

證明
$$AC + BC = p$$
$$AC.BC = CD^2 = q^2$$

吟味 (1) $q < \frac{1}{2}p$ ノトキハ前圖ノ通リ二ツノ交點 D, D′ ヲ得ル. 併シ D′ ニヨツテ得ル二線分 AC′, BC′ ハ夫々 BC, AC ニ等シイカラ,解ハ唯一ツデアル.

(2) $q = \frac{1}{2}p$ ノトキハ,上ノ平行線ハ半圓周ニ

切シ,從テCハABノ中點Oニ合シ,所要ノ二線分ハOA, OBトナツテ何レモ$\frac{1}{2}p$ニ等シイ.

(3) $q>\frac{1}{2}p$ ノトキハ,上ノ平行線ハ半圓周ニ出會ハナイカラDガ得ラレナイ,從テCガ得ラレナイ,因テ問題ハ不可能デアル.

注意 次ノヤウニシテAC, BCノ長サヲ計算スルコトガ出來ル.

$$AC=OA-OC$$

$$BC=OB+OC=OA+OC$$

$$OA=\frac{1}{2}p=OD$$

又直角三角形OCDカラ

$$OC^2=OD^2-CD^2=\left(\frac{1}{2}p\right)^2-q^2$$

今線分p, qノ數値ヲヤハリp, qデ表ハセバ

$$OC=\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q^2}$$

$$\therefore\quad AC=\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q^2}$$

$$BC=\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q^2}$$

ツマリ本作圖題ハ,代數學デ聯立方程式

$$x+y=p$$

$$xy=q^2$$

ヲ解クコト,從テ一元二次方程式

$$z^2-pz+q^2=0$$

ヲ解クコトニ對應スルモノデアル.

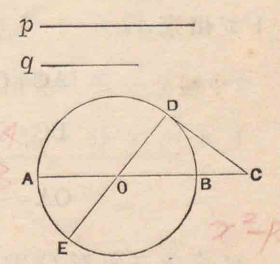
$\boxed{\text{例　題}}$

*和ガ一定ナル二線分ノ積ハ,其等ガ相等シイトキ最大デアル.

12. 作圖題

二線分ノ差(p)ト積(q^2)トヲ知ツテ各線分ヲ求メヨ.

解析 先ヅpニ等シイ線分ABヲ引ケバ,差ガpニ等シイ二線分ハABヲ或一點Cデ外分シタ二ツノ分AC, BCニ限ル.ソコデ之ヲ所要ノ二線分トシ,ABヲ直徑トスル圓ヲ書キ,Cカラ此圓ニ切線ヲ引イテ其切點ヲDトスレバ



$x^2-px-q^2=0$

$$AC.BC=CD^2 \qquad 〔基,第145節〕$$

然ルニ $\quad AC.BC=q^2$

$$\therefore \quad CD=q$$

作圖 p ニ等シイ線分 DE ヲ直徑トシテ圓 O ヲ書キ, D ニ於ケル切線上ニ q ニ等シク DC ヲ取リ, C ト O トヲ通ル直線ヲ引イテ圓 O ノ周ト A, B デ交ラセレバ, AB ガ C デ外分サレタ二ツノ分 AC, BC ガ所要ノ二線分デアル.

證明 $AC-BC=AB=DE=p$

$$AC.BC=CD^2=q^2$$

吟味 本問題ハ常ニ成リ立ツテ,解ハ唯一ツアル.

注意 次ノヤウニシテ AC, BC ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル.

$$AC=OC+OA$$

$$BC=OC-OB=OC-OA$$

$$OA=\frac{1}{2}p$$

又直角三角形 OCD カラ

$$OC^2=OD^2+CD^2=\left(\frac{1}{2}p\right)^2+q^2$$

今線分 p, q ノ數値ヲヤハリ p, q デ表ハセバ

$$OC=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q^2}$$

$$\therefore \quad AC=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q^2}+\frac{1}{2}p$$

$$BC=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q^2}-\frac{1}{2}p$$

ツマリ本作圖題ハ,代數學デ聯立方程式

$$x-y=p$$

$$xy=q^2$$

ノ正數解ヲ求メルコト,從テ一元二次方程式

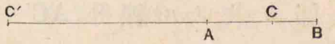
$$z^2-pz-q^2=0$$

ノ根ノ絕對値ヲ求メルコトニ對應スルモノデアル.

13. 中末比

定義 2 定線分ヲ內分或ハ外分シテ,其ノ一ツノ分ガ他ノ分ト全線分トノ比例中項ニナルヤウニスルコトヲ此線分ヲ**中末比**ニ分ケルトイフ.

圖デ $AC^2=BC.AB$



$$AC'^2=BC'.AB$$

ナラバ, C ハ線分 AB ヲ中末比ニ內分スル點デアリ, C′ ハ AB ヲ中末比ニ外分スル點デアル.

作圖題 定線分 (AB) ヲ中末比ニ分ケ

ヨ.

解析　所要ノ内分點ヲ C トスレバ

$$AC^2=BC.AB=(AB-AC).AB$$
$$=AB^2-AC.AB$$
$$\therefore\quad AC^2+AC.AB=AB^2$$
$$\therefore\quad AC.(AC+AB)=AB^2$$

卽チ求メル線分 AC ト之ヨリ大キイ他ノ線分 (AC+AB) トノ差ハ定線分 AB ニ等シク,積ハ定面積 AB^2 ニ等シイ.

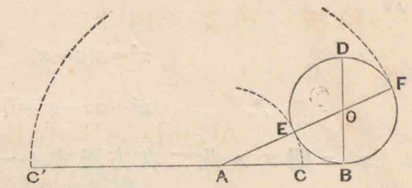
次ニ所要ノ外分點ヲ C′ トスレバ

$$AC'^2=BC'.AB=(AB+AC').AB$$
$$=AB^2+AC'.AB$$
$$\therefore\quad AC'^2-AC'.AB=AB^2$$
$$\therefore\quad AC'.(AC'-AB)=AB^2$$

卽チ求メル線分 AC′ ト之ヨリ小サイ他ノ線分 (AC′−AB) トノ差ハ定線分 AB ニ等シク,積ハ定面積 AB^2 ニ等シイ.

因テ AC, AC′ ハ何レモ差ガ AB ニ等シク積ガ AB^2 ニ等シイ二線分ノ一ツデアル.

作圖　B カラ AB ニ垂線ヲ引キ,其上ニ AB ニ等シク BD ヲ取リ,之ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ,A ト此圓ノ中心 O トヲ通ル直線ヲ引イテ圓ノ周ト E, F デ交ラセル.



次ニ線分 AB 上ニ AE ニ等シク AC ヲ取リ, BA ノ延長上ニ AF ニ等シク AC′ ヲ取レバ,點 C ガ所要ノ内分點デアリ,點 C′ ガ所要ノ外分點デアル.

證明　(1)　$AC'-AC=AB$　〔作　圖〕

(2)　$AC'.AC=AB^2$　〔同　上〕

(1) カラ　$AC'=AB+AC$

之ヲ (2) ニ代入シテ

$$(AB+AC).AC=AB^2$$
$$\therefore\quad AC^2=AB^2-AB.AC=AB.(AB-AC)$$
$$=AB.BC$$

故ニ C ハ所要ノ内分點デアル.

同樣ニシテ, C′ ガ所要ノ外分點デアルコトヲ證明スルコトガ出來ル.

$AB^2=AE.AF$
$=AC(AC+AB)$
$=AC^2+AC.AB$
$\therefore AC^2=AB^2-AC.AB$
$=AB(AB-AC)$
$=AB.BC$

$AB^2=AE.AF$
$=(AC'-AB)AC'$
$=AC'^2-AB.AC'$
$\therefore AC'^2=AB^2+AB.AC'$
$=AB(AB+AC')$
$=AB.BC'$

注意 AB ノ數値ヲ a トシ, AC ノ數値ヲ x トスレバ

$$x^2=a(a-x)$$

$$\therefore \quad x^2+ax-a^2=0$$

x ニ關スル此二次方程式ハ一ツノ正根ト一ツノ負根トヲ有スル,其ノ正根ハ勿論 AC ノ長サデアル.

次ニ其ノ負根ヲ $-y$ トスレバ

$$(-y)^2+a(-y)-a^2=0$$

$$\therefore \quad y^2=a^2+ay=(a+y)a$$

故ニ y ハ AC′ ノ長サヲ表ハス.

因テ結局上ノ二次方程式ノ二根ノ絶對値ガ AC 及 AC′ ノ數値デアル. 而シテ其二根ノ絶對値ノ差ハ a デアツテ積ハ a^2 ニ等シイ.

例　題

前頁ノ圖ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ.

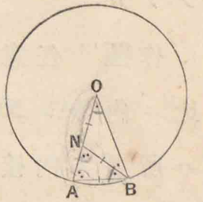
$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.AB, \qquad AC'=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.AB$$

14. 作圖題

① 圓ニ內接スル正十邊形ヲ畫ケ.

解析 AB ヲ圓 O ノ內接正十邊形ノ一邊トセヨ.

半徑 OA, OB ヲ引ケバ $\angle$AOB ハ一點ノ周リノ角 360° ノ $\frac{1}{10}$ 卽チ 36° デアル.



$$\therefore \quad \angle OAB=\angle OBA$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$$

ソコデ $\angle$OBA ノ二等分線ヲ引イテ OA ト N デ交ラセレバ

$$\angle ABN=36^\circ=\angle AOB$$

$$\therefore \quad \triangle BAN \backsim \triangle OAB$$

$$\therefore \quad \frac{AN}{AB}=\frac{AB}{AO}$$

$$\therefore \quad (1) \quad AB^2=AN.AO$$

然ルニ $\angle OBN=36^\circ=\angle AOB$

$$\therefore \quad NB=NO$$

又 $\angle BNA=72^\circ=\angle BAN$

$$\therefore \quad AB=NB$$

$$\therefore \quad AB=NO$$

$$\therefore \quad NO^2=AN.AO \qquad (1)$$

因テ點 N ハ半徑 OA ヲ中末比ニ內分シタ點

デアル.

作圖　任意ノ半徑 OA ヲ引キ,之ヲ N デ中末比ニ內分シ $NO^2=AN.AO$ ナルヤウニスレバ, NO ハ所要ノ內接正十邊形ノ一邊デアル.

證明　略スル.

例題

1. 圓ニ內接スル正五邊形ヲ畫ケ.

2. 直角ヲ五等分セヨ.

3. 一邊ノ長サガ 1cm ナル正十邊形ノ外接圓ノ半徑ヲ計算セヨ.

4. 圓ニ內接スル正十五邊形ヲ畫ケ.

雜題

1. 四邊形ノ周ハソノ兩對角線ノ和ヨリ大キクテ,和ノ2倍ヨリ小サイ.

2. 四邊形ノ對角線ノ交點デナイ任意ノ點カラ各頂點マデノ距離ノ和ハ兩對角線ノ和ヨリ大キイ.

3. 三角形ノ頂點カラ引イタ中線ハ頂角ヲ夾ム二邊ノ和ノ半分ヨリ小サイ.

4. 二等邊三角形ノ底邊ノ一端ト其對邊上ノ任意ノ一點トヲ結ブ線分ハ,後ノ點ト底邊上ノ(兩端デナイ)任意ノ點トヲ結ブ線分ヨリ大キイ.

5. 三角形內ノ一點カラ各頂點マデノ距離ノ和ハ,三角形ノ周ヨリ小サクテ,周ノ半分ヨリ大キイ.

6. 不等邊四角形 ABCD ニ於テ AD ガ最大邊, BC ガ最小邊ナラバ

$$\angle ABC > \angle ADC,\qquad \angle BCD > \angle BAD$$

7. 四邊形ノ各角ノ二等分線デ出來ル四邊

形ノ對角ハ互ニ補角デアル.

若シ初ノ四邊形ガ平行四邊形(若クハ矩形)ナラバ,後ノ四邊形ハドンナ形ニナルカ.

8. 三角形ノ三中線ノ和ハ,三角形ノ周ヨリ小サクテ,周ノ$\frac{3}{4}$ヨリ大キイ.

9. 三角形ノ一角ノ頂點カラ引イタ中線ガ其角ノ二邊トナス角ノ中,小サイ邊トナス角ハ大キイ邊トナス角ヨリ大キイ.

10. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 D カラ任意ノ直線ヲ引キ,邊 BC ト E デ, AB ノ延長ト F デ交ラセレバ　$\triangle ABE=\triangle CEF$

11. 正方形 ABCD ノ對角線 BD 上ノ任意ノ點ヲ E トスレバ

$$2.AE^2=BE^2+ED^2$$

12. 平行四邊形 ABCD 内ノ任意ノ點 E ヲ通ツテ二邊ニ夫々平行ナル直線ヲ引ケバ, D ト E, 及 B ト E ヲ夫々向ヒ合ノ二頂點トスル平行四邊形ノ面積ノ差ハ $\triangle ACE$ ノ面積ノ 2 倍ニ等シイ.

13. 任意ノ三角形ニ於テ,次ノ九點ヲ通ツテ

一ツノ圓ヲ畫クコトガ出來ル.

各邊ノ中點

各頂點カラ對邊ヘ引イタ垂線ノ足

垂心ト各頂點トヲ結ブ線分ノ中點.

此圓ヲ此三角形ノ**九點圓**トイフ.

14. 二直線ガ三平行線ト夫々 A, B, C 及 A′, B′, C′ デ交ツテ $AB:BC=m:n$ デアルトスル. 初ノ二直線ガ平行線ノ間デ交ラナケレバ

$$(m+n).BB'=n.AA'+m.CC'$$

15. 定圓ト定直線トニ切スル任意ノ圓ノ其二切點ヲ結ブ直線ハ恒ニ定點ヲ通ル.

16. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC 上ニ $BD:DC=1:2$ ナル點 D ヲ取レバ

$$2.AB^2+AC^2=6.BD^2+3.AD^2$$

17. 等邊凸多角形内ノ任意ノ點カラ其各邊ニ引イタ垂線ノ和ハ不易デアル.

18. $\angle A$ ガ鋭角ナル $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, AB 上ニ A カラ此圓ニ引イタ切線ニ等シイ線分 AD ヲ取リ, D カラ AB ニ垂線ヲ引イテ AC ノ延長ト E デ交ラセレバ

$$\triangle ABC = \triangle ADE$$

19. △ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ト交ル點ヲ D トスレバ

$$AB.AC = AD^2 + BD.CD$$

20. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ニ任意ノ點 P ヲ取レバ

$$AP^2 = BP.CP + BC^2$$

AP = BP + CP

21. 一定點ヲ通ツテ他ノ二定點カラ等距離ニアル直線ヲ引ケ.

22. 一定點ヲ通ツテ直線ヲ引キ,ソレガ二定平行線間ニ夾マレル部分ヲ定線分ニ等シイヤウニセヨ.

23. 定角內ノ一定點ヲ通ツテ此角ノ二邊ニ終ル線分ヲ引キ,ソレガ此定點デ二等分サレルヤウニセヨ.

24. △ABC ノ一邊 AC 上ニ一點 P ヲ求メ, P カラ他ノ二邊ニ平行ニ引イタ直線ガ邊ト交ル點ヲ夫々 X, Y トスルトキ PX=PY ナルヤウニセヨ.

25. 定點ヲ通ツテ直線ヲ引キ,之ガ定圓ニ交ツテ出來ル弦ヲ定長ニ等シイヤウニセヨ.

26. 底邊,一底角及他ノ二邊ノ和ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

27. 底邊,一底角及他ノ二邊ノ差ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

28. 二定圓ノ一交點ヲ通ツテ,各圓周上ニ一ツヅヽ兩端ガアル最モ長イ線分ヲ引ケ.

29. 底邊,頂角及他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

30. 底邊,頂角及他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

31. 頂角,周及高サヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

32. 定直線ト定圓周トニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

33. 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

34. 定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

35. 二圓ノ交點ヲ A, B トシ, A ヲ通ルーツノ直線ガ兩圓ト夫々 C, D デ交ルトスル. 今 A

ヲ通ル任意ノ直線ヲ引キ兩圓トノ交點ヲ夫々 P, Q トスルトキ,二弦 CP, DQ 又ハ其延長ノ交點 R ノ軌跡ヲ求メヨ.

36. 定線分 AB 又ハ其延長上ニ一點 C ヲ求メ $AC^2-BC^2=k^2$ ナルヤウニセヨ. 但シ k ハ他ノ定線分デアル.

37. 二定點カラノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

38. 定角內ノ一定點ヲ通ル直線ト此角ノ二邊トデ出來ル三角形ノ面積ノ最小ナモノヲ求メヨ.

39. 三角形ヲナス三定直線ノ各〻カラ相等シイ定長ノ弦ヲ截リ取ル圓ヲ畫ケ.

40. 三角形ノ底邊上ノ一定點カラ直線ヲ引イテ其面積ヲ二等分セヨ.

41. 四邊形ノ一頂點カラ直線ヲ引イテ其面積ヲ二等分セヨ.

42. 三角形ノ三中線ヲ邊トスル三角形ノ面積ノ原三角形ノ面積ニ對スル比ヲ求メヨ.

43. 半徑 r ナル圓ニ內接スル正五邊形ノ一

邊ノ長サヲ計算セヨ.

44.* 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル二邊ノ積ノ和ハ其ノ對角線ノ積ニ等シイ. [Ptolemy (えじぷとノ人,西紀130年頃)ノ定理]

45.* 四邊形ノ相對スル二邊ノ積ノ和ガ其ノ對角線ノ積ニ等シケレバ,此四邊形ニ外接圓ヲ畫クコトガ出來ル. (Ptolemy ノ定理ノ逆)

46. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナラバ,對邊ノ積ノ和ハ此四邊形ノ面積ノ 2 倍ニ等シイ.

47.* 一直線ガ △ABC ノ三邊 BC, CA, AB 又ハ其延長ヲ夫々三點 X, Y, Z デ截レバ

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

[Menelaus (ぎりしやノ人,西紀100年頃)ノ定理]

48.* X, Y, Z ハ △ABC ノ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長上ノ三點デ,其中一ツガ延長上ニ二ツガ邊上ニアルカ或ハ三點ガ皆延長上ニアルカデアツテ

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

ナラバ,三點 X, Y, Z ハ一直線上ニアル. (Menelaus ノ定理ノ逆)

49.* △ABC ノ各頂點ヲ任意ノ一點 O ニ結ビツケル直線ガ對邊 BC, CA, AB 又ハ其延長ト夫夫 X, Y, Z デ交レバ

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

[Ceva (いたりーノ人,西紀1700年頃)ノ定理]

50.* X, Y, Z ハ △ABC ノ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長上ノ三點デ,其中一ツガ邊上ニ二ツガ延長上ニアルカ或ハ三點ガ皆邊上ニアルカデアツテ

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

ナラバ,三直線 AX, BY, CZ ハ一點ニ會スル.

(Ceva ノ定理ノ逆)

51. 三角形ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガ對邊ノ延長ト交ル三點ハ一直線上ニアル.

52. △ABC ノ內接圓ガ三邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスレバ,三直線 AD, BE, CF ハ一點ニ會スル.

53. 二定直線ニ至ル距離ノ比ガ定比ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

54. 二定圓ヲ等角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求メヨ.

註 一點ニ於テ或圓ヲ見込ム角トハ,此點カラ此圓ニ引イタ二切線ノナス角ノコトデアル.

55. 定圓周上ノ一定點 O カラ此圓周ト更ニ P デ交ル任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ OP.OQ ガ定正方形ノ面積ニ等シイヤウニ Q ヲ取ル. Q ノ軌跡ヲ求メヨ.

56. 一定點 O カラ直線ヲ引イテ定直線ト P, 定圓周ト Q デ交ラセ, OP:OQ ガ定比ニ等シイヤウニセヨ.

定理 **57.** 定線分トノ比ガ二定正方形ノ面積ノ比ニ等シイ線分ヲ作レ.

58. 定三角形ニ內接スル正方形ヲ作レ.

59. O ハ定點, P ハ定直線 AB 上ノ定點デアル. 今 O ヲ中心トシテ圓ヲ書キ AB ト交ル點ヲ M 及 N トスルトキ, PM, PN ノ比例中項ガ定長ニ等シクナルヤウニセヨ.

60. 定直線ノ同ジ側ニアル二定點ヲ此直線上ノ一點ニ結ビツケル二線分ノナス角ガ最大ナルヤウニセヨ.

61. 二定點ヲ通ツテ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

62. 定圓外ノ二定點ヲ此圓周上ノ一點ニ結ビツケル二線分ノナス角ガ最大又ハ最小ナルヤウニセヨ.

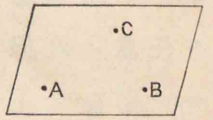
第二篇

平面及直線

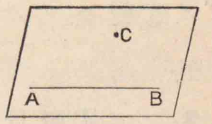
第一章　緒論

15. 平面ノ公理

一直線上ニナイ三定點ヲ通ル平面ハ唯一ツアル.

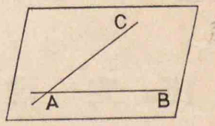


系 1. 一直線ト其上ニナイ一點トヲ含ム平面ハ唯一ツアル.



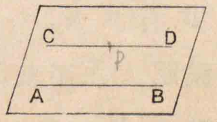
系1. 証明
直線ノ二点
ヲA・Bトス
コノハ同一線
上ニナイABC
デアルカラ公
理ニヨリ一ツアル
系2.

系 2. 相交ル二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツアル.



系 3. 平行ナル二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツアル.

AB, CD
デ同一平面上ニアル
トデ唯一トデアル



同一平面上デ
直線ABトPトハ
一ツ平面ヲ決定スル

注意　或條件ニ適スル面ガ唯一ツアルトキハ,其條件ハ其面ヲ定メルトイフ.

三點 A, B, C ガ定メル平面ヲ平面 (A, B, C) ト書キ,直線 AB ト點 C トデ定マル平面ヲ平面 (AB, C) ト書ク. 其他モ之ニ倣フ.

例題

1. 定點ヲ通ツテ,此點ヲ通ラナイ定直線ニ交ル任意ノ直線ハ,ソノ定點トソノ定直線トデ定マル平面ノ上ニアル.

2. 相交ル二定直線ノ各〻ノ上ノ任意ノ點ヲ結ブ直線ハ,ソノ二定直線ガ定メル平面ノ上ニアル.

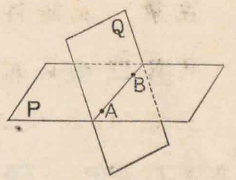
3. 二定平行線ノ各〻ノ上ノ任意ノ點ヲ結ブ直線ハ,ソノ二平行線ガ定メル平面ノ上ニアル.

16. 定理

二ツノ平面ガ出會ヘバ,唯一ツノ直線ヲ共有スル.

證明　二平面 P, Q ガ出會フ線ノ上ニ,任意ニ二點 A, B ヲ取レバ,直線 AB ハ各平面ノ上ニ含

マレル,即チ二平面 P, Q ハ一直線 AB ヲ共有スル.



而シテコノ二平面ハ全ク合シナイ限リ AB 外ノ點ヲ共有スルコトハ出來ナイ.〔前節系1〕

故ニ二平面 P, Q ハタヾ一直線 AB ヲ共有スルダケデアル.

問題

1. 三角形,平行四邊形,梯形ハ何レモ平面圖形デアル.

2. 同一平面ノ上ニナイ二直線ノ各〻ニ交ル二ツノ直線ハ決シテ平行デナイ,又大抵ハ交ラナイ.

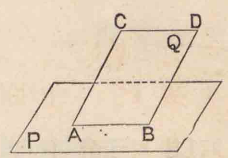
no

3. 同一平面ノ上ニナイ三直線ガドノ二ツヲ取ツテモ交レバ,コノ三直線ハ一點ニ會スル.

第二章 平行ナル平面及直線

17. 定理

二ツノ平行線ノ一ツダケヲ含ム平面ハ,今一ツノ直線ニ平行デアル.



證明　AB, CDヲ二ツノ平行線トシ,平面PガABヲ含ンデCDヲ含マナイトスル.

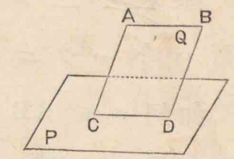
サウスレバ,平行線AB, CDヲ含ム平面Qト平面Pトノ交リハ直線ABダカラ,若シQ上ノ直線CDガ平面Pニ出會フトスレバABニ交ラネバナラヌコトニナル.

此ハAB//CDナル假設ニ背ク.

∴　CD//P

18. 定理

平面ト直線トガ互ニ平行ナラバ,此直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交リハ其直線ニ平行デアル.

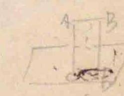


證明　平面Pト直線ABトガ平行デアルトシ,ABヲ含ム任意ノ平面Qト平面Pトノ交リヲCDトスレバ

AB//P

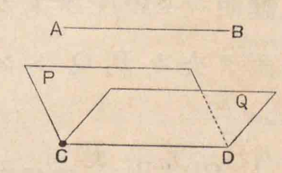
ダカラ,ABハP上ノ直線CDニ出會ハナイ,而シテAB, CDハ同一平面Q上ニアル.

∴　AB//CD



系1.　平面ト直線トガ互ニ平行ナラバ,其平面上ノ一點ヲ通ツテ其直線ニ平行ニ引イタ直線ハ其平面ノ上ニアル.

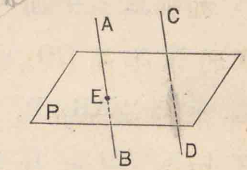
系2.　同一ノ直線ニ平行ナル二平面ノ交リハ其直線ニ平行デアル.



如何ニモ直線ABガ二平面P, Qノ何レニモ平行デアルトスレバ, P, Qノ交線上ノ一點CカラABニ平行ニ引イタ直線ハP, Qノ各〻ノ上ニナケレバナラヌ〔系1〕,從テP, Qノ交線CDニ合スルカラデアル.

系 二ツノ平行線ノ一ツニ交ル平面ハ今一ツニモ交ル.

如何ニモ, AB//CD トシ, 平面 P ガ AB ト E デ交ルトキ,若シ P//CD ナラバ P 上ノ一點 E カラ CD ニ平行ニ引イタ直線 AB ハ P ノ上ニアルコトトナツテ〔系 1〕,假設ニ背クカラデアル.



19. 定理

二ツノ平行線ヲ一ツヅヽ含ム二ツノ平面ノ交リハ元ノ平行線ノ何レニモ平行デアル.

證明 AB//CD トシ, AB, CD ヲ一ツヅヽ含ム平面ヲ夫々 P, Q トシ, P, Q ノ交リヲ EF トスレバ

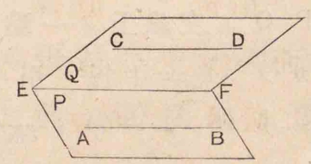
CD//AB

∵ CD // P 〔第 17 節〕

∴ EF // CD 〔前 節〕

同樣ニ

EF // AB



交ル、並(含)ル 平行

系 同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハマタ互ニ平行デアル.

如何ニモ, AB//CD, AB//EF トスレバ,平面 (AB, EF) ト平面 (CD, E) トノ交リハ E ヲ通ツテ AB ニ平行ダカラ〔本定理〕, ツマリ EF デアル.

因テ EF // CD 〔本定理〕

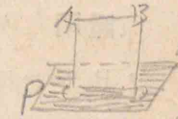
∴AB//CD.

例題

1. 二ツノ平行平面ノ一ツノ上ニアル任意ノ直線ハ他ノ平面ニ平行デアル.

2. 捩(ネヂレ)四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ビツケテ出來ル四邊形ハ平行四邊形デアル.

註 悉クハ同一平面上ニナイ幾ツカノ接續シタ線分デ出來ル閉ヂラレタ圖形ヲ**捩多角形**トイフ. 之ニ對シテ普通ノ多角形ヲ**平面多角形**トイフ.



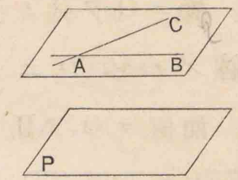
20. 定理

相交ル二直線ノ何レニモ平行ナル平面ハソノ二直線ノ平面ニ平行デアル.

證明 二直線 AB, AC ガ何レモ平面 P ニ平行ナルトキ,若シ P ガ平面 (AB, AC) ニ交ルトス

相交 (AB // P AC // P P // Q

レバ,其交リハ AB, AC ノ何レニモ平行ニナリ〔第18節〕,從テ AB//AC トナリ〔前節系〕,假定ニ背ク.



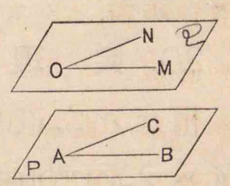
∴ (AB, AC) // P

系 相交ル二直線ガ夫々他ノ相交ル二直線ニ平行ナラバ,前ノ二直線ノ平面ト後ノ二直線ノ平面トハマタ互ニ平行デアル.

21. 定理

一定點ヲ通ツテ一定平面ニ平行ナル平面ハ唯一ツアル.

證明 定點ヲO,定平面ヲPトシ,平面Pノ上ニ相交ル任意ノ二直線AB, ACヲ引キ,Oカラ夫々之ニ平行ニ二直線OM, ONヲ引ケバ



平面 (OM, ON) // P 〔前節系〕

故ニOヲ通ツテPニ平行ナル平面ハ一ツハ必ズアル.

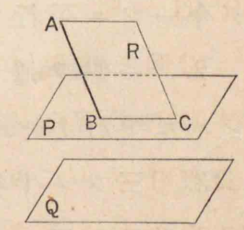
而シテOヲ通ツテPニ平行ナル平面ハ,P上ノ直線 AB, AC ノ何レニモ平行ダカラ,OM 及 ON ヲ含マネバナラヌ〔第18節系1〕,從テ此ハ平面 (OM, ON) ノ外ニハナイ.

系1. 同一ノ平面ニ平行ナル二ツノ平面ハマタ互ニ平行デアル.

系2. 二ツノ平行平面ノ一ツニ交ル平面ハ今一ツニモ交ル.

系3. 二ツノ平行平面ノ一ツニ交ル直線ハ今一ツニモ交ル.

如何ニモ,P, Q ヲ二ツノ平行平面,AB ヲ P ト B デ交ル直線トシ,B ヲ通ツテ P 上ニ任意ノ直線 BC ヲ引クトキ,若シ AB//Q トスレバ,BC ハ勿論 Q ニ平行ダカラ,AB, BC ヲ含ム平面 R ハマタ Q ニ平行トナリ〔前節定理〕,因テ本定理ニ背

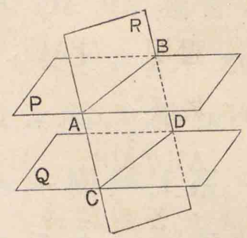


PQハ平行平面
ABハP上ノ線 CDハQ上ノ線
∴AB,CDハ交ラナイシカモ同一平面上ニアリ
∴AB∥CDナリ

クコトニナルカラデアル.

22. 定　理

二ツノ平行平面ガ第三ノ平面ト交ラバ,ツノ交リノ直線ハ互ニ平行デアル.



證明　略スル.

系　幾ツカノ平行線ガ二ツノ平行平面ノ間ニ夾マレル部分ハ皆相等シイ.

例　題

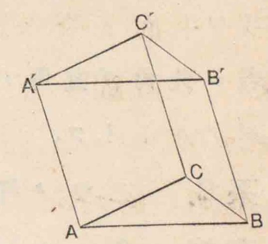
1. 同一平面上ニナイ二直線ノ一ツヲ含ンデ今一ツニ平行ナル平面ハ唯一ツアル.

2. 一點ヲ通ツテ平行デナイ二定直線ノ何レニモ平行ナル平面ハ唯一ツアル.

3. 三ツノ平行平面ニ交ル任意ノ直線ガ此等ノ平面ノ間ニ夾マレル部分ノ比ハ一定デアル.

23. 定　理

二ツノ角ノ二邊ガ夫々(同ジ向キニ)平行ナラバ,コノ二角ハ相等シイ.



證明　$\angle BAC$, $\angle B'A'C'$ ニ於テ

$AB \parallel A'B'$,　$AC \parallel A'C'$

トシ,各對應邊ノ上ニ

$AB = A'B'$,　$AC = A'C'$

ナルヤウニ B, B′, C, C′ ヲ取リ, AA′, BB′, CC′ ヲ引ケバ,四邊形 ABB′A′ 及 ACC′A′ ハ何レモ平行四邊形デアル.

$\therefore$　$BB' = AA' = CC'$

又　$BB' \parallel AA' \parallel CC'$

$\therefore$　$BB' \parallel CC'$　〔第19節系〕

因テ BC, B′C′ ヲ引ケバ四邊形 BCC′B′ モマタ平行四邊形デアル.

$\therefore$　$BC = B'C'$

$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

$\therefore$　$\angle BAC = \angle B'A'C'$

系 1. 任意ノ點カラ同一ノ平面上ニナイ二ツノ定直線ニ夫々平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ一定デアル.

定義 コノ一定ノ角ヲ元ノ二直線ノナス角トイフ.

若シ此角ガ直角ナラバ元ノ二直線ハ互ニ垂直デアルトイフ.

系 2. 二ツノ平行線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ今一ツニモ垂直デアル.

問題

1. 二ツノ平面ガ平行ナラバ,ソノ一ツノ平面上ノ任意ノ點ヲ通ツテ今一ツノ平面ニ平行ニ引イタ直線ハスベテ初ノ平面ノ上ニアル.

2. 三ツノ平面ハ通例一點デ出會フ. 特殊ノ場合ヲ示セ.

3. 同一ノ平面上ニナイ二直線ノ各一ツヲ含ンデ今一ツニ平行ナル二平面ハ互ニ平行デアル.

4. 一定點ヲ通ツテ二ツノ定直線ノ各〻ニ交

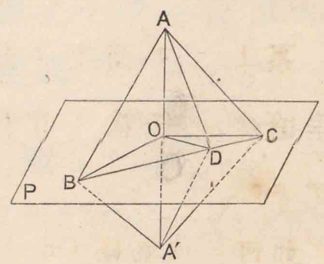
ル直線ヲ引ケ.

註 「……ヲ引ケ又ハ作レ」ナドトイフノハ,平面幾何ノヤウニ定木ト Compass トデ作圖ヲセヨトイフ意デハナイ,單ニ求メル圖形ノ位置ヲ決定セヨトイフ意デアル.

第三章 垂線

24. 定理

平面上ノ相交ル二直線ノ各〻ニ,其交點ヲ通ツテ垂直ナル直線ハ其平面ニ垂直デアル.



【特述】 平面 P 上ノ相交ル二直線ヲ OB, OC トシ,他ノ直線 OA ガ OB, OC ノ何レニモ垂直ナラバ, OA ハ平面 P ニ垂直デアル,卽チ P 上ニ於テ O ヲ通ル任意ノ直線 OD ニ垂直デアル.

證明 OB, OC, OD ニ交ル任意ノ直線ヲ引キ,其交點ヲ夫々 B, C, D トセヨ.

AO ヲ延長シテ AO ニ等シク OA' ヲ取リ, A, A' ヲ各〻 B, C, D ニ結ベバ, OB, OC ハ何レモ線分 AA' ヲ垂直ニ二等分スルカラ

$$AB=A'B, \qquad AC=A'C$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'BC$$

$$\therefore \quad \angle ABD = \angle A'BD$$

$$\therefore \quad \triangle ABD \equiv \triangle A'BD$$

$$\therefore \quad AD = A'D$$

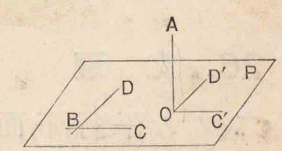
$$\therefore \quad \triangle OAD \equiv \triangle OA'D$$

$$\therefore \quad \angle AOD = \angle A'OD$$

卽チ $OA \perp OD$

$$\therefore \quad OA \perp P$$

系 1. 平面上ノ相交ル二直線ノ各〻ニ垂直ナル任意ノ直線ハ其平面ニ垂直デアル.



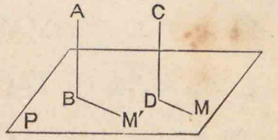
如何ニモ,直線 OA ガ平面 P 上ノ相交ル二直線 BC, BD ノ各〻ニ垂直デアルトイフノハ,其足 O カラ BC, BD ニ夫々平行ニ引イタ二直線 OC', OD' ニ垂直ナルコトダカラデアル.〔第23節定義〕

系 2. 平面ノ垂線ハ其平面上ノ任意ノ直線ニ垂直デアル.

25. 定理

二ツノ平行線ノ一ツニ垂直ナル平面ハ今一ツニモ垂直デアル.

證明 AB, CD ヲ二ツノ平行線トシ, P ヲ AB ニ垂直ナル平面トスル.



CD ノ足 D ヲ通ツテ P ノ上ニ任意ノ直線 DM ヲ引キ, AB ノ足 B カラ之ニ平行ニ BM′ ヲ引ケバ

$AB \perp BM'$ 〔假 定〕

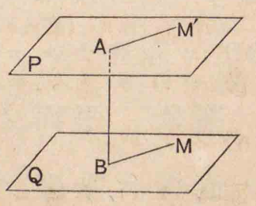
$\therefore$ $CD \perp DM$ 〔第 23 節〕

$\therefore$ $CD \perp P$

26. 定理

二ツノ平行平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ今一ツニモ垂直デアル.

證明 P, Q ヲ二ツノ平行平面トシ, AB ヲ P ニ垂直ナル直線トスル.



AB ガ P, Q ト交ル點ヲ

夫々 A, B トシ, B ヲ通ツテ Q ノ上ニ任意ノ直線 BM ヲ引キ, A カラ之ニ平行ニ AM′ ヲ引ケバ, BM ハ P ニ平行ダカラ, AM′ ハ P ノ上ニアル. 〔第 18 節系 1〕

而シテ $AB \perp AM'$

$\therefore$ $AB \perp BM$

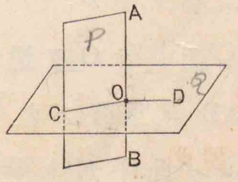
$AB \perp Q$

27. 定理

定點ヲ通ツテ定直線ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアル.

證明 (第一) 定點 O ガ定直線 AB ノ上ニアル場合.

O ヲ通ツテ AB ニ垂直ナル任意ノ二直線 OC, OD ヲ引ケバ



平面 (OC, OD) $\perp$ AB

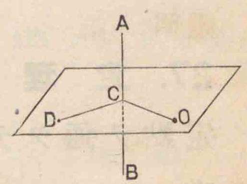
故ニ O ヲ通ツテ AB ニ垂直ナル平面ハ一ツハ必ズアル.

而シテ O ヲ通ル他ノ平面ハ, OC, OD ノ中少

ナクトモ一ツヲ含マナイカラ,例ヘバ OC ヲ含マナイトスレバ,此平面ト平面 (AB, OC) トノ交リハ O ヲ通ル OC 外ノ直線ダカラ AB ニ垂直デナイ,從テ其平面ハ AB ニ垂直デナイ.

故ニ O ヲ通ツテ AB ニ垂直ナル平面ハ上ノ外ニハナイ.

(第二) 定點 O ガ定直線 AB 外ニアル場合.



O カラ AB ニ垂線 OC ヲ引キ,其足 C カラ AB ニ垂直ニ他ノ任意ノ直線 CD ヲ引ケバ

$$\text{平面}(CO, CD)\perp AB$$

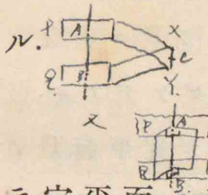
故ニ O ヲ通ツテ AB ニ垂直ナル平面ハ一ツハ必ズアル.

而シテ O ヲ通ル他ノ平面ハ,若シ C ヲ通レバ AB ニ垂直デナイシ〔第一〕,又若シ C ヲ通ラナケレバ此平面ト平面 (AB, OC) トノ交リハ O ヲ通ル OC 外ノ直線ダカラ AB ニ垂直デナイ,從テ其平面ハ AB ニ垂直デナイ.

故ニ O ヲ通ツテ AB ニ垂直ナル平面ハ上ノ

外ニハナイ.

系　同一ノ直線ニ垂直ナル二平面ハ互ニ平行デアル.

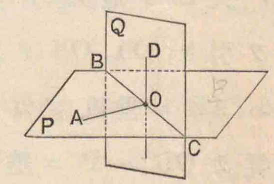


PQハ支ニABニ垂直ナル平面ナリ
PQガ平行デナイトスレバソノ交リ
上ノ一点ヲCトス ソウスレバCヲ通
リABノ平面ガ二ツアルコトニナル
カラ不合理ナリ

28. 定　理

定點ヲ通ツテ定平面ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアル.

證明　(第一) 定點 O ガ定平面 P ノ上ニアル場合.



O ヲ通ツテ P ノ上ニ任意ノ直線 OA ヲ引キ,O ヲ通ツテ OA ニ垂直ナル平面ヲ Q トシ〔前節〕,Q ト P トノ交リヲ BC トスル.

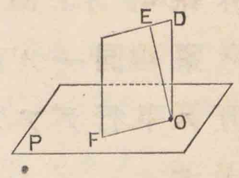
Q ノ上デ O ヲ通ツテ BC ニ垂線 OD ヲ引ケバ

$$OD\perp OA$$

$$\therefore\quad OD\perp P$$

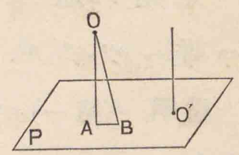
又 O ヲ通ル他ノ任意ノ直線 OE ヲ引キ,平面 (OD, OE) ト P トノ交リヲ OF トスレバ, OE ハ

OF ニ垂直デナイ,從テ OE ハ P ニ垂直デナイ.



故ニ O ヲ通ツテ P ニ垂直ナル直線ハ OD ダケデアル.

(第二) 定點 O ガ定平面 P ノ外ニアル場合.



P 上ノ任意ノ點 O' カラ P ニ垂線ヲ引ケバ〔第一〕, O カラ之ニ平行ニ引イタ直線 OA ハ P ニ垂直デアル. 〔第25節〕

又 O ヲ通ツテ P ニ交ル他ノ任意ノ直線 OB ヲ引キ, OA, OB ノ足ヲ夫々 A, B トスレバ, OA ハ AB ニ垂直ダカラ OB ハ AB ニ垂直デナイ, 從テ OB ハ P ニ垂直デナイ. 故ニ O ヲ通ツテ P ニ垂直ナル直線ハ OA ダケデアル.

系 1. 同一ノ平面ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル.

如何ニモ,若シコレガ平行デナイトスレバ,ソノ一ツノ上ノ一點カラ今一ツニ平行ニ引イタ直線ハマタ其平面ニ垂直トナツテ〔第25節〕,本定理ニ背クカラデアル.

系 2. 平面外ノ一點カラ此平面ニ引イタ線分ノ中デ,垂線ハ最モ短イ.

系 3. 二ツノ平行平面ノ共通垂線ノ長サハ一定デアル.

例題

1. 一點ヲ通ル三直線ガ他ノ一直線ニ垂直ナラバ,此等ノ三直線ハ同一平面ノ上ニアル.

2. 二ツノ平行線ニ夫々垂直ナル二平面ハ互ニ平行デアル.

3. 二ツノ平行平面ニ夫々垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル.

4. 同一ノ直線ニ垂直ナル直線ト平面トハ互ニ平行デアル.

5. 平面外ノ一點カラ此平面ニ垂線及幾ツカノ斜線ヲ引ケバ

(1) 斜線ノ足ガ垂線ノ足カラ等距離ニアルモノハ相等シイシ,遠イモノハ近イモノヨリ大キイ.

逆ニ,相等シイ斜線ノ足ハ垂線ノ足カラ等距離ニアルシ,大キイ斜線ノ足ハ小サイ斜線ノ足

ヨリモ垂線ノ足カラ遠イ.

(2) 垂線ト等シイ角ヲナス斜線ハ相等シイシ,大キイ角ヲナス斜線ハ小サイ角ヲナス斜線ヨリ大キイ.

逆ニ,相等シイ斜線ハ垂線ト等シイ角ヲナスシ,大キイ斜線ハ小サイ斜線ヨリモ垂線ト大キイ角ヲナス.

29. 直射影

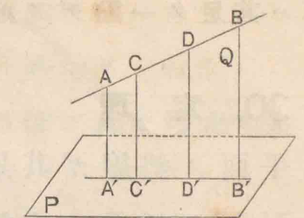
定義 或點カラ或平面ニ引イタ垂線ノ足ヲ其點ノ此平面上ニ於ケル直射影(又ハ正射影)トイフ.

或線上ノ總テノ點ノ一平面上ニ於ケル直射影ノ軌跡ヲ其線ノ此平面上ニ於ケル直射影トイフ.

定理 平面ニ垂直デナイ直線ノ此平面上ニ於ケル直射影ハ直線デアル.

證明 AB ヲ平面 P ニ垂直デナイ直線トシ, AB 上ノ任意ノ二點 A, B カラ P ニ垂線 AA′, BB′ ヲ引キ,其足ヲ夫々 A′, B′ トスレバ,直線 A′B′

ガ AB ノ P 上ニ於ケル直射影デアル.



如何ニモ,先ヅ

$$AA' \parallel BB'$$

ダカラ,圖形 AA′B′B ハ一平面上ニアル. 此平面ヲ Q トショウ.

AB 上ノ任意ノ一點 C カラ P ニ垂線 CC′ ヲ引ケバ

$$CC' \parallel AA'$$

故ニ CC′ ハ Q ノ上ニアル,因テ C ノ直射影 C′ ハ直線 A′B′ 上ニアル.

逆ニ, A′B′ 上ノ任意ノ點 D′ カラ P ニ垂線 D′D ヲ引ケバ

$$DD' \parallel AA'$$

故ニ DD′ ハ Q ノ上ニアル,因テ DD′ ト AB トノ交點ヲ D トスレバ, D′ ハ D ノ直射影デアル.

故ニ A′B′ ハ AB 上ノ總テノ點ノ P 上ニ於ケル直射影ノ軌跡デアル.

卽チ AB ノ直射影ハ直線 A′B′ デアル.

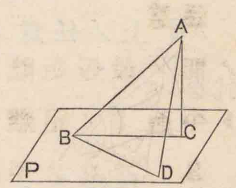
注意 平面ノ垂線ノ此平面上ニ於ケル直射

影ハ其足ノ一點デアル.

30. 定理

平面ノ斜線ガ其足ヲ通ツテ此平面上ニ引イタ任意ノ直線トナス角ノ中デ,ソノ直射影トナス鋭角ガ最小デアル.

證明 AB ヲ平面 P ノ斜線, B ヲ其足, BC ヲ AB ノ P 上ニ於ケル直射影トスル.



B ヲ通ツテ P ノ上ニ任意ノ直線 BD ヲ引キ AB 上ノ一點 A ノ P 上ニ於ケル直射影ヲ C トシ, BD 上ニ BC ニ等シク BD ヲ取リ, A ト D トヲ結べバ, $\triangle ABC$ ト $\triangle ABD$ トニ於テ

$$AB \text{ ハ共通}$$
$$BC=BD$$
$$AC<AD \quad \text{〔第28節系2〕}$$
$$\therefore \angle ABC<\angle ABD$$

定義 直線ガ或平面上ニ於ケルソノ直射影トナス角ヲ,コノ直線ト平面トノナス角トイフ.

平面トソノ垂線トハ直角ヲナストイフ.

例題

1. 平面ニ平行ナル直線ノ此平面上ニ於ケル直射影ハ其直線ニ平行デアル.

2. 平面ニ平行ナル直線上ノ任意ノ點カラ此平面ニ引イタ垂線ノ長サハ一定デアル.

注意 コノ一定ノ長サハコノ直線ト平面トノ間ノ最短距離デアル. コレヲ單ニコノ直線ト平面トノ距離トイフ.

3. 二ツノ平行線ガ一平面トナス角ハ相等シイ.

4. 相等シク且ツ平行ナル二ツノ線分ノ一平面上ニ於ケル直射影ハマタ相等シク且ツ平行デアル.

31. 定理

平面外ノ一點カラ其平面ニ垂線ヲ引キ,其足カラ其平面上ノ直線ニ垂線ヲ引ケバ,後ノ垂線ノ足ト最初ノ點トヲ結ビツケル直線ハ平面上ノ其直線ニ垂直デアル.

證明　平面P外ノ點AカラPニ垂線ABヲ引キ,其足BカラP上ノ或直線CDニ垂線BEヲ引キ,其足EトAトヲ結ベバ

AE⊥CD

BE⊥CD

AB⊥P ∴ AB⊥CD

∴ CD⊥Q

∴ CD⊥AE

結論 AE⊥CD

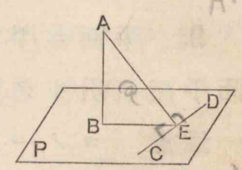
AB⊥P

∴ AB⊥CD

又 BE⊥CD

∴ 平面(AB, BE)⊥CD

∴ AE⊥CD



平面ABEガCDニ垂直デアルコトヲ言ヘバヨシ

注意　本定理ハ通例三垂線ノ定理ト呼バレテ居ル.

系　平面外ノ一點カラ其平面及其上ノ一直線ニ垂線ヲ引ケバ,ソノ二ツノ足ヲ結ビツケル直線ハ平面上ノ其直線ニ垂直デアル.

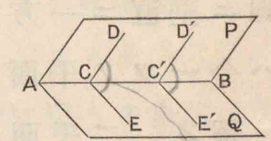
例　題

1. 平面P外ノ一點AカラP上ノ直線BCニ垂線ADヲ引キ,其足DカラPノ上デBCニ垂線DEヲ引キ, AカラDEニ垂線AEヲ引ケバAEハPニ垂直デアル.

2. △ABCノ垂心Oカラ其平面ニ引イタ垂線上ノ任意ノ點ヲDトスレバDA⊥BC

32. 定　理

相交ル二平面ノ交線上ノ任意ノ點ヲ通ッテ,各面ノ上デ其交線ニ垂直ニ引イタ二直線ノナス角ハ一定デアル.



CD.C'D'ハAB＝垂直デアルカラ DC∥D'C'

同様ニCE∥C'E'

二面角

三面角ヲナス

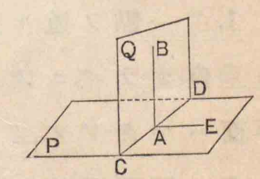
證明　略スル.〔第23節定理參照〕

∴∠DCE＝∠D'C'E'

33. 定　理

一平面ノ垂線ヲ含ム任意ノ平面ハ前ノ平面ニ垂直デアル.

證明　平面Pノ一垂線ABヲ含ム一平面ヲQトシ, P, Qノ交リヲCDトスレバ



AB⊥CD

ソコデ垂線ノ足Aヲ通ッテ,Pノ上デCDニ

垂線 AE ヲ引ケバ, ∠BAE ハ二平面 P, Q ノナス角デアル,而シテ　二面角

$$AB \perp AE$$

$$\therefore \quad P \perp Q$$

系 1. 二平面ガ互ニ垂直ナラバ,其交線ニ垂直ニ一方ノ平面上ニ引イタ直線ハ今一ツノ平面ニ垂直デアル.

系 2. 二平面ガ互ニ垂直ナラバ,ソノ一方ノ平面上ノ一點カラ今一ツノ平面ニ引イタ垂線ハ初ノ平面ノ上ニアル.

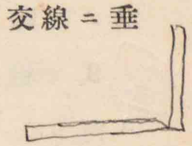
系 3. 同一ノ平面ニ垂直ナル二平面ノ交線ハ初ノ平面ニ垂直デアル.

例題

1. 一點ヲ通ル三直線ガドノ二ツヲ取ッテモ垂直ナラバ,コノ三直線ノ二ツヅヽヲ含ム三平面ハマタドノ二ツヲ取ッテモ垂直デアル.

2. 三平面ガドノ二ツヲ取ッテモ垂直ナラバ,ソノ二ツヅヽノ交リノ三直線ハマタドノ二ツヲ取ッテモ垂直デアル.

3. 一點カラ相交ル二平面ノ各ヽニ引イタ二ツノ垂線ヲ含ム平面ハ初ノ二平面ノ交線ニ垂直デアル.



問題

1. 平面ノ斜線ノ足ヲ通ッテ,其平面ノ上デ,其斜線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアル.

大切 2. 任意ノ點カラ二平面ニ引イタ垂線ノナス角ハ,コノ二平面ノナス角又ハソノ補角ニ等シイ.

3. 二平面ガ夫々他ノ二平面ニ平行ナラバ,各組ノ二平面ノナス角ハ相等シイカ又ハ補角デアル.

4. 平面ニ平行ナル直線ニ垂直ナル平面ハ前ノ平面ニ垂直デアル.

5. 平面ニ垂直デナイ直線ヲ含ンデ其平面ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアル.

6. 定平面カラノ距離ガ定長ニ等シイ點ノ軌跡ハ何カ.

7. 二定點カラ等距離ナル點ノ軌跡ハ何カ.

8. 一直線上ニナイ三定點カラ等距離ナル點ノ軌跡ハ何カ.

9. 相交ル二平面カラ等距離ナル點ノ軌跡ハ何カ.

10. 一平面上デ其上ノ定點ヲ通ル任意ノ直線ヘ,ソノ平面外ノ定點カラ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ハ何カ.

11. 定直線外ノ定點カラ此直線ヲ含ム任意ノ平面ニ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ハ何カ.

12. 同一平面上ニナイ二直線ノ各ヽニ交ツテ且ツ此等ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアル.

而シテ此直線ノ二ツノ交點ノ間ニ夾マレタ部分ノ長サハ,初ノ二直線間ノ最短距離デアル.

定義 同一平面上ニナイ二直線ノ各ヽニ交ツテ且ツ此等ニ垂直ナル直線ヲ特ニ初ノ二直線ノ共通垂線トイフ.

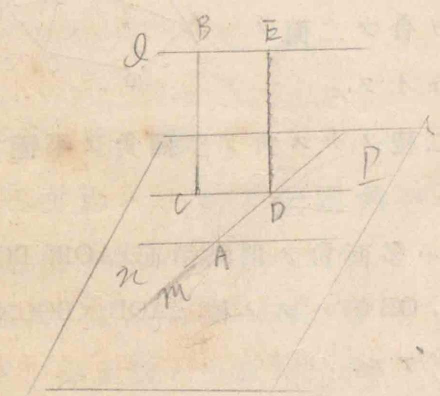
又コノ共通垂線ノ長サ(共通垂線ガ初ノ二直線ノ間ニ夾マレタ部分ノ長サ)即チ此二直線間ノ最短距離ヲ單ニ此二直線間ノ距離トイフ.

13. 一直線ト之ニ平行ナル一平面上ノ或直

線トノ距離ハ,通例初ノ直線ト其平面トノ距離ニ等シイ.

多角形ノ内角ノ和

2Rn − 4R



DEガ求ムル直線

nヲ含ム平面Pヲ作リ
平面Pニ垂直ノ線ヲ引ク
~~l ∥ P~~
ソノ交リヲAトス
lカラP垂直ニBCヲ引ク
Cカラlニ平行ニ引ク
ソトmトノ交ハソノ交ヲDトスルD
カラlニ垂直ニ引ク
ソノ直線DEガ
~~求ム~~
求ムル線ナリ

$l \parallel P$

$CB \perp P$

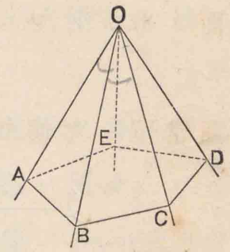
$CD \parallel n$

$DE \parallel BC$

第四章　多面角

34. 定義(多面角)

一點デ出會フ幾ツカノ平面ヲ各隣リ合フ平面トノ交線デ限リ,且ツソノ會點デ限ルトキ,此等ノ平面ハ**多面角**ヲナストイフ.



其點ヲ多面角ノ**頂點**,各平面ヲソノ**面**,隣リ合フ二面ノ交線ヲソノ**稜**トイフ.

隣リ合ヒノ二稜ノナス角ヲ多面角ノ**平面角**トイフ.

上ノ圖デ, O ハ多面角ノ頂點,平面 AOB, BOC 等ハソノ面, OA, OB 等ハソノ稜, ∠AOB, ∠BOC 等ハソノ平面角デアル.

多面角ハソノ面ノ數ニヨツテ夫々**三面角**,**四面角**等トイフ.

多面角ヲ表スニハ頂點ノ名ヲ書クカ,又ハ頂點ノ名ノ次ニ各稜ノ上ノ一點ノ名ヲ順ニ續ケテ書ク. 例ヘバ多面角 O 又ハ O-ABCDE ナド.

多面角ガドノ一ツノ面ヲ延長シテモソノ一方ニアルモノヲ**凸多面角**トイフ,ドレカ一ツノ面ヲ延長スレバソノ兩側ニアルヤウニナルモノヲ**凹多面角**トイフ.

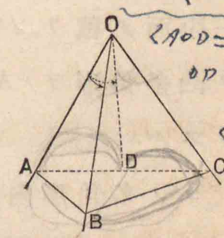
注意　凸多面角(凹多面角)ヲソノ各稜ニ交ル平面デ截レバ,ソノ截口ハ凸多角形(凹多角形)デアル.

通常單ニ多面角トイヘバ凸多面角ノコトデアルトスル.

35. 定理

三面角ノ一ツノ平面角ハ他ノ二ツノ平面角ノ和ヨリ小サイ.

∠AOCヲ最大
∠AOC < ∠AOB + ∠BOC



∠AOD = ∠AOB
OD = OB
∠BOC > ∠COD

證明　三面角 O-ABC ノ三ツノ平面角ノ中,最大デナイモノハ他ノ二ツノ平面角ノ和ヨリ小サイコト言フマデモナイ. ソコデ例ヘバ ∠AOC ガ最大デアルトシ, ∠AOC 内ニ ∠AOB ニ等シク ∠AOD ヲ取リ, OA, OD, OC ニ交ル一直線

ADC ヲ引キ, OB ノ上ニ OD ニ等シク OB ヲ取リ, AB, BC ヲ引ケバ

$$\triangle AOB \equiv \triangle AOD$$

$$\therefore \quad AB = AD$$

$$\therefore \quad DC < BC$$

$$\therefore \quad \angle DOC < \angle BOC$$

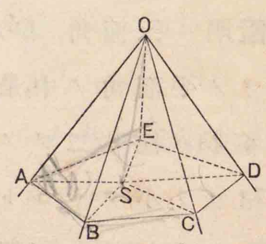
$$\therefore \quad \angle DOC + \angle AOD < \angle BOC + \angle AOB$$

即チ $\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$

36. 定理

凸多面角ノ總テノ平面角ノ和ハ 4 直角ヨリ小サイ.

證明 多面角 O-ABCDE ヲソノ各稜ニ交ル一平面デ截リ,ソノ截口ノ凸多角形ヲ ABCDE トスル.



コノ多角形内ニ一點 S ヲ取リ, SA, SB 等ヲ引ケバ, O ヲ頂點トシテ AB, BC 等ヲ底邊トスル一群ノ三角形ト S ヲ頂點トシテ AB, BC 等

ヲ底邊トスル一群ノ三角形トハ同數ダカラ,ソノ內角ノ和ハ相等シイ.

サテ三面角 A-OEB, B-OAC 等ニ於テ

$$\angle OAE + \angle OAB > \angle EAB$$

$$\angle OBA + \angle OBC > \angle ABC$$

....

此等ノ不等式ヲ邊々相加ヘレバ O ヲ頂點トスル三角形ノ底角ノ和ハ S ヲ頂點トスル三角形ノ底角ノ和ヨリ大キイコトガワカル.

故ニ O ヲ頂點トスル三角形ノ頂角ノ和卽チ多面角ノ總テノ平面角ノ和ハ S ヲ頂點トスル三角形ノ頂角ノ和卽チ 4R∟ ヨリ小サイ.

問題

1. 三面角ノ頂點ヲ通ツテソノ內部ニ引イタ直線ガ各稜トナス三ツノ角ノ和ハコノ三面角ノ三ツノ平面角ノ和ノ半分ヨリ大キイ.

2. 三面角ノ各平面角ガ與ヘラレタトキ,コノ三面角ノ二ツノ面ノナス角ヲ作圖デ求メヨ.

第三篇

多面體

第一章　角壔及角錐

37. 定義

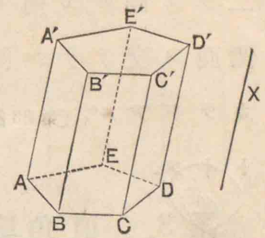
多面體ガドノ一ツノ面ヲ延長シテモソノ一方ニアルモノヲ凸多面體トイフ,ドレカ一ツノ面ヲ延長スレバソノ兩側ニアルヤウニナルモノヲ凹多面體トイフ.

注意　凸多面體ヲ任意ノ平面デ截ツタ截口ハ凸多角形デアル.

通常單ニ多面體トイヘバ凸多面體ノコトデアルトスル.

38. 角壔

二ツノ平行平面ト之ニ交ル一ツノ直線ニ平行ナル幾ツカノ平面トデ圍マレタ多面體ヲ角壔トイフ.



角壔ノ底面,側面,側稜,高サナドノ意義ハ直角壔ノ場合ニ倣フ.

マタ三角壔,四角壔ナドノ意義モ同樣デアル.

角壔ヲ表スニハ其兩底面ノ名ヲ續ケテ書ク.例ヘバ五角壔 ABCDE-A′B′C′D′E′ ナド.

39. 定理

角壔ノ側面ハ何レモ平行四邊形デアル.又兩底面ハ合同デアル.

$AA' \parallel BB'$, $A'B' \parallel AB$ ∴ $ABB'A'$ ハ平行▱

證明　略スル.

系 1.　角壔ノ側稜ハ皆平行デアツテ且ツ相等シイ.

系 2.　角壔ヲソノ各側稜ニ交ル二ツノ平行平面デ截ツタ截口ハ合同デアル.

注意　側稜ガ底面ニ垂直ナル角壔ノ側面ハ悉ク底面ニ垂直デアル.故ニ此ハ直角壔デアル.側稜ガ底面ニ垂直デナイ角壔ノ側面ハ悉クハ底面ニ垂直デナイ.何トナレバ隣リ合フ

ニツノ側面ガ何レモ底面ニ垂直ナラバコノ二側面ノ交リナル側稜ガマタ底面ニ垂直ニナルカラデアル.〔第33節系3〕 此種ノ角壔ヲ**斜角壔**トイフ.

系 3. 直角壔ノ高サハ其側稜ノ長サニ等シイ.

(側面ト底ガ垂直)

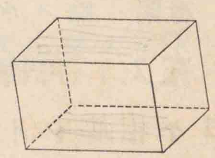
直角トウノ側稜ハ側面ガ底面ニ垂直デアル故両面ノ交線ハ垂直故ニ長サガ等シ

系 4. 直角壔ノ側面ハ何レモ矩形デアル.

側稜ガ底ニ垂直ダカラ

40. 平行六面體

底面ガ平行四邊形ナル角壔ヲ**平行六面體**トイフ.



底面ガ合同デアル

直六面體ハ平行六面體ノ特別ノ場合デアル.

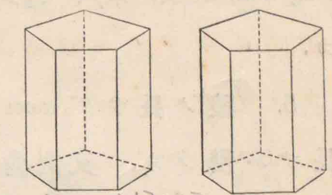
底面ガ矩形デアル直角壔

41. 定 理

底面ガ合同デアツテ高サガ相等シイニツノ直角壔ハ合同デアル.

證明 各直角壔ノ底面ヲ重ネレバ兩角壔ガ全部重ナルコトガ容易ニワカル. 若シ兩角壔

ノ底面ノ位置ガ逆ノ順ニアルトキハ,一方ノ角壔ヲ倒サマニスレバ同ジ順ニナツテ重ネ合セルコトガ出來ル.



底ガ合同デ高サガ等シイノデアルカラ カサネテシバ合入故ニ合同

系 1. 一ツノ頂點ニ出會フ三稜ガ夫夫相等シイニツノ直六面體ハ合同デアル.

底ガ合同デアル又高サガ等シイカラ合同デアル

系 2. 一稜ノ長サガ相等シイニツノ立方體ハ合同デアル.

底面ガ合同デ高サガ等シイ故ニ合同

例 題

1. 平行六面體ノ相對スル面ハ夫々合同ナル平行四邊形デアル. 而シテ十二ノ稜ハ四ツヅヽ平行デアツテ相等シイ.

2. 平行六面體ノ四ツノ對角線(同ジ面上ニナイ二頂點ヲ結ブ線分)ハ一點デ出會ヒ,且ツ此點デ互ニ二等分サレル.

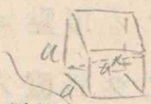
3. 直六面體ノ對角線ハ相等シイ.

4. 直六面體ノ一頂點ニ出會フ三稜ガ夫々

1m, 2m, 3m ナルトキ,ソノ對角線ノ長サハ幾ラカ.

5. 稜ノ長サガ $a$cm ナル立方體ノ對角線ノ長サハ幾ラカ. 又對角線ノ長サガ $a$cm ナル立方體ノ稜ノ長サハ幾ラカ.

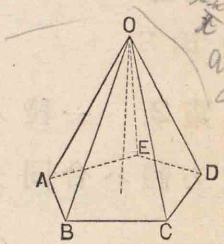
$x^2=a^2+a^2+a^2$
$=3a^2$
$\therefore x=\sqrt{3}a$



$a^2=3x^2$
$a=\sqrt{3}x$
$\therefore x=\frac{a}{\sqrt{3}}$

42. 角錐

角錐ヲ表スニハ其頂點ノ名ノ次ニ底面ノ名ヲ續ケテ書ク. 例ヘバ五角錐 O-ABCDE ナド.



角錐ノ底面ガ正多角形デ,頂點ガ底ノ外接圓ノ中心(即チ內接圓ノ中心)カラ底ニ引イタ垂線ノ上ニアルモノヲ**正角錐**トイフ.

定理 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面デ截レバ

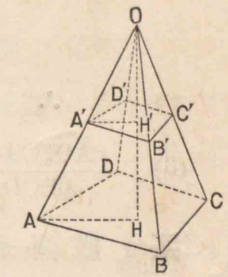
(1) 側稜及高サハ同ジ比ニ分タレル.

(2) 截口ト底面トハ相似デアル.

(3) 截口ノ面積ト底面積トノ比ハ頂

點ト此等ノ面トノ距離ノ平方ノ比ニ等シイ.

證明 角錐 O-ABCD ノ底面 ABCD ニ平行ナル一平面デノ截口ヲ A′B′C′D′ トシ,頂點 O カラ底面ニ引イタ垂線ガ底面及截口ト交ル點ヲ夫夫 H, H′ トスレバ



(1) $A'B' \parallel AB$ 〔第22節〕

$$\therefore \frac{OA'}{A'A}=\frac{OB'}{B'B}$$

同樣ニ $$\frac{OB'}{B'C}=\frac{OC'}{C'C}$$

……………

又 AH, A′H′ ヲ引ケバ

$A'H' \parallel AH$ 〔第22節〕

$$\therefore \frac{OA'}{A'A}=\frac{OH'}{H'H}$$

(2) $\angle ABC=\angle A'B'C'$ 〔第23節〕

同樣ニ $\angle BCD=\angle B'C'D'$

……………

又 $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}=\frac{B'C'}{BC}$$

同樣ニ $$\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}$$

....

$$\therefore\ A'B'C'D' \backsim ABCD$$

(3) $$\frac{A'B'C'D'}{ABCD}=\frac{A'B'^2}{AB^2}=\frac{OA'^2}{OA^2}=\frac{OH'^2}{OH^2}$$

系 底面ガ等積デ高サガ相等シイ二ツノ角錐ヲ,ソノ頂點カラ等距離ノ所デ底面ニ平行ナル平面デ截レバ,二ツノ截口ハ等積デアル.

例題

1. 正角錐ノ側稜ハ皆相等シク,各側面ハ皆合同ナル二等邊三角形デアル.

2. 正角錐ガアル,ソノ底面ハ一邊ガ $2m$ ナル正六邊形デ,ソノ側高(側面ノ高サ)ガ $3m$ デアル.ソノ高サハ幾ラカ.

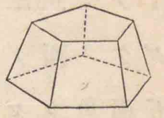
3. 一邊ノ長サガ $5cm$ ナル正六邊形ヲ底面トシ,高サガ $12cm$ ナル正角錐ノ頂點ニ於ケル平面角ノ餘弦ヲ求メヨ.

4. 高サガ h, 底面積ガ a ナル角錐ヲソノ底ニ平行デ頂點カラノ距離ガ h' ナル平面デ截レバ,ソノ截口ノ面積ハ幾ラカ.

5. 角錐ヲ底ニ平行ナル平面デ截ツテ,ソノ截口ノ面積ガ底面積ノ半分ニナルヤウニセヨ.

43. 角錐臺

角錐ヲ其底ニ平行ナル平面デ截ルトキ,ソノ截口ト底面トノ間ノ部分ヲ**角錐臺**トイフ.



コノ截口ト底面トヲ何レモコノ角錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ.

元ノ角錐ノ各側面ノ部分及各側稜ノ部分ヲ夫々角錐臺ノ**側面**及**側稜**トイフ.

元ノ角錐ガ正角錐ナル角錐臺ヲ**正角錐臺**トイヒ,元ノ正角錐ノ側高ノ部分ヲ正角錐臺ノ**側高**トイフ.

注意 角錐臺ノ側面ハ皆梯形デアル. 正角錐臺ノ側面ハ皆合同ナル二等邊梯形デアル.

44. 正多面體

多面體ノ各面ガ合同ナル正多角形デアツテ,ソノ各頂點ニ於ケル多面角ガ皆合同ナルモノヲ**正多面體**トイフ.

定理　正多面體ハ五種ヨリ多クナイ.

證明　正多面體ノ各頂點ニ於ケル多面角ノ平面角ハ何レモ合同ナル正多角形ノ角デアツテ,コレガ三ツ以上集マリ,且ツソノ平面角ノ和ハ 4R∟ ヨリ小サクナケレバナラヌ.

サテ正三角形ノ一角ハ $\frac{2}{3}$R∟ ダカラ,正三角形ダケノ面デ出來ル多面角ハ三面角カ四面角カ五面角カダケデアル.

又正方形ノ一角ハ 1R∟, 正五邊形ノ一角ハ $\frac{6}{5}$R∟ ダカラ,正方形ダケ又ハ正五邊形ダケノ面デ出來ル多面角ハ何レモ三面角ダケデアル.

次ニ正六邊形ノ一角ハ $\frac{4}{3}$R∟ デアツテ

$$\frac{4}{3}\text{R∟}\times 3=4\text{R∟}$$

故ニ六邊以上ノ正多角形ダケヲ面トシテハ多面角ヲ作ルコトガ出來ナイ.

結局正多面體ノ多面角ヲナス面ハ次ノ五種ヨリ多クナイコトガ分カル.

(1)　三ツノ正三角形　(2)　三ツノ正方形

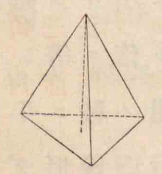
(3)　四ツノ正三角形　(4)　三ツノ正五邊形

(5)　五ツノ正三角形

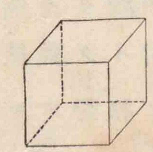
從テ正多面體モマタ五種ヨリ多クハアリ得ナイ.

注意　上ノ五種ヲ夫々多面角トスル正多面體ハ實際ニアツテ,次ノ圖ノ通リデアル.

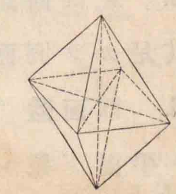
正四面體



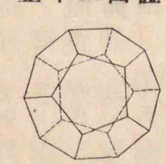
正六面體



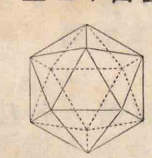
正八面體



正十二面體



正二十面體



問　題

1. 立方體ハ正六面體デアル.

2. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ハ一點デ出會ヒ,且ツ互ニ二等分スル.

3. 四面體ノ各頂點ヲ之ニ對スル面ノ重心ニ結ブ四ツノ直線ハ一點デ出會ヒ,此點カラ各頂點マデノ距離ハ對スル面ノ重心カラ其頂點マデノ距離ノ$\frac{3}{4}$ニ等シイ.

4. 前ノ二問題ノ會點ハ同一ノ點デアル.

5. 正四面體ノ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ハ,其足カラ側面ニ引イタ垂線ノ3倍ニ等シイ.

6. 四面體ヲソノ相對スル一組ノ稜ニ平行ナル平面デ截レバ,ソノ截口ハ平行四邊形デアル.

7. 稜ノ長サガaナル正四面體ノ高サヲ計算セヨ.

8. 四面體ノ各稜ガ與ヘラレタトキ,ソノ高サヲ作圖デ求メヨ.

第二章　求　積

45. 面　積

定理 1. 直角壔ノ側面積*ハ其底面ノ周ト側稜(高サ)トノ積ニ等シイ.

定理 2. 正角錐ノ側面積ハ其底面ノ周ト側高トノ積ノ半分ニ等シイ.

定理 3. 正角錐臺ノ側面積ハ兩底面ノ周ノ和ト側高トノ積ノ半分ニ等シイ.

證明 略スル.

例　題

1. 三稜ノ長サガ夫々a, b, cナル直六面體ノ表面積ヲ求メヨ.

2. 正四角錐ノ底ノ一邊ノ長サガa,高サガhデアル,其側面積ヲ求メヨ.

3. 角壔ノ側面積ハ其側稜ニ垂直ナル平面デノ截口ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ.

* 側面ノ面積ノ和.

46. 體積

定理 直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ其一頂點ニ出會フ三稜ヲ表ス數ノ積ニ等シイ.

證明 略スル.

系1. 立方體ノ體積ヲ表ス數ハ其稜ヲ表ス數ノ立方(三乘)ニ等シイ.

系2. 直六面體ノ體積ヲ表ス數ハソノ底面積ヲ表ス數ト高サヲ表ス數トノ積ニ等シイ. $V=(a.b).c = s.h$

系3. 底面ガ等積デ高サガ相等シイ二ツノ直六面體ハ等積デアル. $V=sh$ $V'=s'h'$

系4. 底面積(又ハ高サ)ガ相等シイ二ツノ直六面體ノ體積ハソノ高サ(又ハ底面積)ニ比例スル. $\frac{V}{V'}=\frac{sh}{s'h'}=\frac{h}{h'}$

系5. 直六面體ノ底面積(又ハ高サ)ヲ表ス數ハ其體積ヲ表ス數ヲ高サ(又ハ底面積)ヲ表ス數デ割ツタ商ニ等シイ.

系6. 立方體ノ一稜ヲ表ス數ハ其體積ヲ表ス數ノ立方根ニ等シイ.

47. 定義(積)

直六面體ノ體積ヲ其一頂點ニ出會フ三稜ノ積トイフ. 又底面積ト高サトノ積トモイフ.

立方體ノ體積ヲ其稜ノ**立方**トイフ.

三ツノ線分 a, b, c ノ積ヲ $a.b.c$ デ表シ,線分 a ノ立方ヲ a^3 デ表ス.

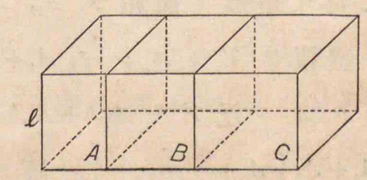
面積 S ト線分 l トノ積ヲ $S.l$ デ表ス.

48. 定理

幾ツカノ面積ノ和ト一ツノ線分トノ積ハソノ各面積ト其線分トノ積ノ和ニ等シイ.

例ヘバ三ツノ面積ヲ A, B, C トシ一ツノ線分ヲ l トスレバ

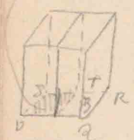
$$(A+B+C).l$$
$$=A.l+B.l+C.l$$



證明 略スル.

系 二ツノ面積ノ差ト一ツノ線分ト

(A−B)



□PQRS=A
□QT=B

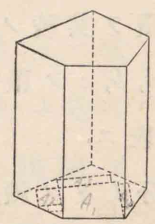
ノ積ハソノ各面積ト其線分トノ積ノ差ニ等シイ.

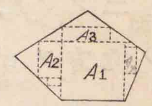
$(A-B)l=Al-Bl$

49. 定理

定理{角壔ノ体積 =(直截面ノ面積)(側稜)

直角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.





證明 直角壔ノ底面内ニ矩形ヲ十分ニ多ク入レヽバ,此等ノ矩形ノ面積ノ和ハ底面ノ面積ニ限リナク近ヅクシ,之ト同時ニ此等ノ各矩形ヲ底面トシ直角壔ノ高サヲ高サトスル直六面體ノ體積ノ和ハマタ直角壔ノ體積ニ限リナク近ヅク.

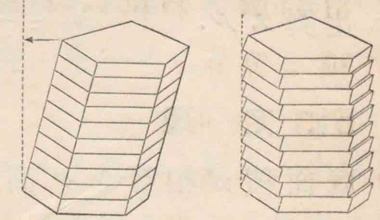
卽チ直角壔ノ底面積ヲ A,高サヲ h,底面内ニ入レタ矩形ノ面積ヲ A_1, A_2, A_3 等トシ,直角壔ノ體積ヲ V トスレバ, $A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots$ ハ限リナク A ニ近ヅキ $A_1.h+A_2.h+A_3.h+\cdots\cdots$ 卽チ $(A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots).h$ ハ限リナク V ニ近ヅク.

$$\therefore \quad V=A.h$$

体積=A h

50. 定理

角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.



證明 角壔ノ側稜ヲ n 等分シ,ソノ各分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル平面ヲ作レバ,此等ノ平面ニヨツテ此角壔ハ n 箇ノ合同ナル薄イ角壔ニ分タレル.

此等ノ角壔ヲ,底ノ相對應スル點ガ元ノ角壔ノ底ノ其點カラ底ニ引イタ垂線ノ上ニアルヤウニズラセバ,底面モ高サモ元ト變ラナイ直角壔ノ形ニ近ヅク.

n ヲ大キクスルニ從ツテ緣邊ノ凹凸ハ段々小サクナリ,n ヲ十分ニ大キクスレバ限リナク直角壔ニ近ヅク,而シテ直角壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ. 故ニ斜角壔ニ於テモマタサウデナケレバナラヌ.

系1. 底面ガ等積デ高サガ相等シイ二ツノ角壔ハ等積デアル.

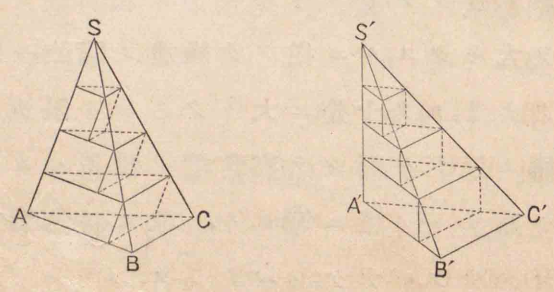
系2. 底面積(又ハ高サ)ガ相等シイ二ツノ角壔ノ體積ハソノ高サ(又ハ底面積)ニ比例スル. $\frac{V}{V'}=\frac{sh}{s'h'}=\frac{h}{h'}$

51. 定理

底面積ガ相等シク高サガ相等シイ二ツノ三角錐ハ等積デアル.

證明 S-ABC 及 S'-A'B'C' ヲ等底等高ナル二ツノ三角錐トスル.

高サヲ n 等分シ,各分點ヲ通ツテ底面ニ平行ナル平面ヲ作レバ,此等ノ平面ニヨツテノ兩角錐ノ截口ノ面積ハ夫々相等シイ.〔第42節系〕



各々ノ截口ヲ底面トシ元ノ角錐ノ高サノ $\frac{1}{n}$ ヲ高サトシ夫々 SA 及 S'A' ニ平行ナル稜ヲ有スル角壔ヲ各々ノ截口ノ下ニ作レバ,兩角錐内ニ出來ル此等ノ角壔ハ一ツヅヽ夫々等積デアツテ〔前節〕,從テ一方ノ角錐内ノ角壔ノ體積ノ和ハ分割スル數ニ拘ラズ恒ニ今一ツノ方ノソレニ等シイ.

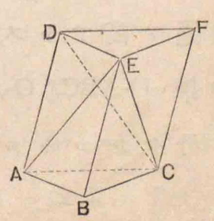
サテ n ヲ十分ニ大キク取レバ,雙方ノ角錐内ノ角壔ノ體積ノ和ハ夫々限リナク其角錐ノ體積ニ近ヅク.

因テ兩角錐ノ體積モマタ相等シクナケレバナラヌ.

52. 定理

三角壔ハ等積ナル三ツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル.

證明 三角壔 ABC-DEF ヲ平面 EAC 及 EDC デ截レバ,三ツノ三角錐 E-ABC, E-ACD, E-FDC ニ分タレル.

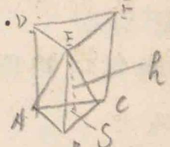


サテ兩三角錐 E-ACD, E-FDC ハ其底面 ACD, FDC ガ等積デアツテソノ高サハ何レモ頂點 E ト平面 ACFD トノ距離ダカラ等積デアル.〔前節〕

又兩三角錐 E-ABC ト E-FDC 卽チ C-DEF トハ底面 ABC, DEF ガ等積デアツテソノ高サハ何レモ元ノ三角壔ノ高サダカラ等積デアル.

卽チ三角壔 ABC-DEF ハ等積ナル三ツノ三角錐ニ分ケラレタ.

系 三角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ.

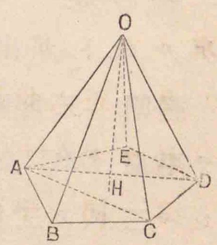


E-ABC
$= \frac{1}{3}(ABC-DEF)$
$= \frac{1}{3} S.h$

53. 定理

角錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ.

證明 例ヘバ五角錐 O-ABCDE ハソノ高サ OH ヲ共通ノ高サトスル三ツノ三角錐 O-ABC, O-ACD, O-ADE ニ分ケルコトガ出來ル. 而シテ



$$\text{O-ABC ノ體積} = \frac{1}{3}.(\triangle ABC).OH$$
$$\text{O-ACD 〃} = \frac{1}{3}.(\triangle ACD).OH$$
$$\text{O-ADE 〃} = \frac{1}{3}.(\triangle ADE).OH$$
$$\therefore \text{O-ABCDE ノ體積} = \frac{1}{3}.(\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE).OH$$
$$= \frac{1}{3}.(ABCDE).OH$$

系 1. 底面ガ等積デ高サガ相等シイ二ツノ角錐ハ等積デアル.

V 體積 S 高 h $V=\frac{1}{3}sh$
V' s' h' $V'=\frac{1}{3}s'h'$

系 2. 底面積(又ハ高サ)ガ相等シイ二ツノ角錐ノ體積ハソノ高サ(又ハ底面積)ニ比例スル.

s=s' h=h' V=V'

$\frac{V}{V'} = \frac{sh}{s'h'} = \frac{h}{h'}$ (s=s') (高サノ比)

問　題

1. 一稜ノ長サガ a ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ.

2. 正六角錐ノ底面ノ一邊ノ長サガ a, 側稜ノ長サガ b ナルトキソノ體積ヲ求メヨ.

3. 同一平面上ニナイ三ツノ平行線ノ一ツノ上ニ定長ノ線分 AB ヲ任意ノ位置ニ取リ,他

ノ二ツノ上ニ一ツヅヽ任意ノ點C, Dヲ取レバ,四面體ABCDノ體積ハAB, C, Dノ位置ニ關セズ常ニ一定デアル.

4. 底面積ガa,高サガhナル角錐ヲ底ニ平行ナル平面デ截リ其體積ヲ二等分スルトキ,頂點カラ截口マデノ距離ヲ求メヨ. 又其截口ノ面積ヲ求メヨ.

5. 角錐臺ノ體積ヲV,兩底面積ヲa, a',高サヲhトスレバ

$$V=\frac{1}{3}.(a+a'+\sqrt{aa'}).h$$

ナルコトヲ證明セヨ.

$a=60\,cm^2$, $a'=15\,cm^2$, $h=12\,cm$ ノトキ Vヲ求メヨ.

6. 稜ノ長サガaナル正八面體ノ體積及對角線ノ長サヲ求メヨ.

$A_n = p_n h$　　$V_n = B_n.h$
$A = p\ h$　　$V = B.h$

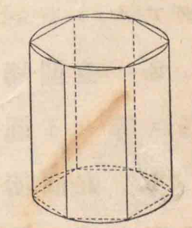
第四篇
曲面體

第一章　直圓壔及直圓錐

54. 直圓壔

定理 直圓壔ノ側面積ハソノ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ.

マタ直圓壔ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ.



證明 直圓壔ノ底ノ周ヲp,高サヲh,側面積ヲA,底面積ヲB,體積ヲVトスル.

直圓壔ノ底面ニ內接スル正n邊形ヲ底面トシ直圓壔ノ高サヲ高サトスル直角壔ヲ作リ,ソノ底ノ周ヲp_n,側面積ヲA_n,底面積ヲB_n,體積ヲV_nトスレバ,邊數nヲ大キクスルニ從ヒp_n, A_n, B_n, V_nハ夫々p, A, B, Vニ近ヅキ,nヲ限リナク大キクスレバ此等ハ夫々限リナク相近ヅク. 從テ$p_n.h$及$B_n.h$

直圓壔 … 底周 p … 高サ h … 底面積 B … 体積 V … 側面積 A
直角壔 … p_n … h … B_n … V_n … A_n

ハマタ夫々限リナク $p.h$ 及 $B.h$ ニ近ヅク.

而シテ n ノ値ニ拘ラズ恒ニ

$$A_n = p_n.h \qquad \text{〔第45節定理1〕}$$

$$V_n = B_n.h \qquad \text{〔第49節〕}$$

$$\therefore\ A = p.h, \qquad V = B.h$$

系 直圓壔ノ底ノ半徑ヲ r トスレバ

$$A = 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

$p=\pi r$

例題

1. 直圓壔ノ軸ヲ含ム平面デノ截口ハ矩形デアル.

2. 直圓壔ノ軸ニ垂直ナル平面デノ截口ハ底ニ等シイ圓デアル.

3. 直圓壔ノ側面積ハ底ノ直徑ト高サトノ比例中項ニ等シイ長サヲ半徑トスル圓ノ面積ニ等シイ.

4. 側面積ガ相等シイ二ツノ圓壔ノ體積ノ比ハ其半徑ノ比ニ等シイ.

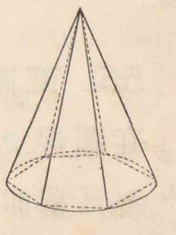
5. 深サト內徑トガ相等シイ直圓壔狀 1l 枡ノ深サヲ mm ノ小數第一位マデ算出セヨ. 但

シ $\pi = 3.1415926535\cdots\cdots\cdots$

55. 直圓錐

定理 直圓錐ノ側面積ハソノ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シイ.

マタ直圓錐ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ.



證明 直圓錐ノ底ノ周ヲ p, 高サヲ h, 斜高ヲ l, 側面積ヲ A, 底面積ヲ B, 體積ヲ V トスル.

直圓錐ノ底面ニ內接スル正 n 邊形ヲ底面トシ,直圓錐ノ頂點ヲ頂點トスル正 n 角錐ヲ作リ,其底ノ周ヲ p_n, 側高ヲ l_n, 側面積ヲ A_n, 底面積ヲ B_n, 體積ヲ V_n トスレバ,邊數 n ヲ大キクスルニ從ヒ p_n, l_n, A_n, B_n, V_n ハ夫々 p, l, A, B, V ニ近ヅキ, n ヲ限リナク大キクスレバ此等ハ夫々限リナク相近ヅク. 從テ $\frac{1}{2}p_n.l_n$ 及 $\frac{1}{3}B_n.h$ ハマタ夫々 $\frac{1}{2}p.l$ 及 $\frac{1}{3}B.h$ ニ近ヅク.

$A_n = \frac{1}{2}P_n \cdot l_n$ $\quad V_n = \frac{1}{3}B_n h$

$A = \frac{1}{2}Pl$ $\quad V = \frac{1}{3}Bh$

而シテ n ノ値ニ拘ラズ恒ニ

$$A_n=\frac{1}{2}.p_n.l_n$$ 〔第45節定理2〕

$$V_n=\frac{1}{3}.B_n.h_n$$ 〔第53節〕

$p=2\pi r$
$B=\pi r^2$

$$\therefore\ A=\frac{1}{2}.p.l,\qquad V=\frac{1}{3}.B.h$$

系 直圓錐ノ底ノ半徑ヲ r トスレバ

$$A=\pi rl$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

$A=\frac{1}{2}pl$
$A=\frac{1}{2}\times 2\pi lr=\pi rl$
$V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\pi r^2h$

56. 直圓錐臺

直圓錐ヲ其底ニ平行ナル平面デ截ルトキ,其截口ト底面トノ間ノ部分ヲ**直圓錐臺**トイフ.

コノ截口ト底面トヲ何レモ直圓錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ.

元ノ直圓錐ノ各側面及各母線ノ部分ヲ夫々直圓錐臺ノ**側面**及**母線**トイフ. 母線ノ長サヲ**斜高**トイフ.

定理 直圓錐臺ノ側面積ハソノ兩底面ノ周ノ和ト斜高トノ積ノ半分ニ等シ

側面積 S 斜高 l 底周 m, n
$S=\frac{1}{2}(m+n)l$

$S=\frac{1}{2}m(l+x)-\frac{1}{2}nx$
$=\frac{1}{2}ml+\frac{1}{2}x(m-n)$
$\frac{m}{n}=\frac{l+x}{x}$
$mx=ln+nx$
$(m-n)x=ln$ コレヲ
$=\frac{1}{2}ml+\frac{1}{2}nl=\frac{1}{2}l(m+n)$

イ.

證明 略スル. 〔第45節定理3ヲ用ヒテ前節ノ定理ノ證明ト同樣ニ證明スルコトガ出來ル〕

例題

1. 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面デノ截口ハ二等邊三角形デアル.

2. 直圓錐ノ軸ニ垂直ナル平面デノ截口ハ圓デアル.

3. 直圓錐ヲ其軸ノ中點ヲ通ツテ底ニ平行ナル平面デ截レバ,各部分ノ體積ノ比ハドウカ.

4. 直角ヲ夾ム二邊ノ比ガ 3:4 ナル直角三角形ヲ,ソノ各邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキ出來ル三ツノ立體ノ體積ノ比ヲ求メヨ.

5. 直圓錐臺ノ體積ヲ V, 兩底面ノ半徑ヲ r, r', 高サヲ h トスレバ

$$V=\frac{1}{3}\pi.(r^2+r'^2+r.r').h$$

6. 深サト底ノ內徑トガ相等シイ直圓錐狀 1 l 枡ノ深サヲ mm ノ小數第一位マデ算出セヨ.

第二章　　球

57. 球

球又ハ球面ヲ表スニハ通例ソノ中心ノ名ヲ唱ヘル. 例ヘバ球O又ハ球面Oナド.

球ニ關スル次ノ諸性質ハ容易ニワカル.

(1)　球ノ半徑及直徑ノ長サハ何レモ一定デアツテ,直徑ハ半徑ノ2倍デアル.

(2)　球面ハ中心カラノ距離ガ半徑ノ長サニ等シイ點ノ軌跡デアル.

(3)　球內ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ小サク,球外ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ大キイ.

逆ニ,中心カラノ距離ガ半徑ヨリ小サイ點ハ球ノ內ニアツテ,半徑ヨリ大キイ點ハ球ノ外ニアル.

(4)　半徑ガ相等シイ二ツノ球ハ合同デアル. 逆ニ,合同ナル二ツノ球ノ半徑ハ相等シイ.

例　　題

1　定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角

ノ頂點ノ軌跡ハ何カ.

2.　二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ハ何カ.

58. 定　理

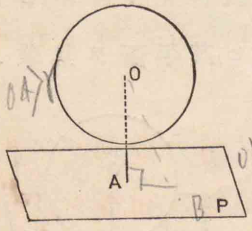
球ノ中心ト平面トノ距離ガ

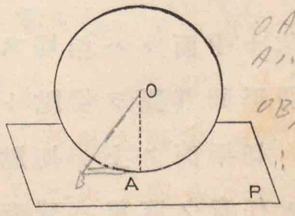
(1)　半徑ヨリ大ナラバ,コノ球面ト平面トハ出會ハナイ.

(2)　半徑ニ等シケレバ,コノ球面ト平面トハ唯一點デ出會フ.

(3)　半徑ヨリ小ナラバ,コノ球面ト平面トハ一ツノ圓周デ出會フ.

證明　(1), (2) 略スル.

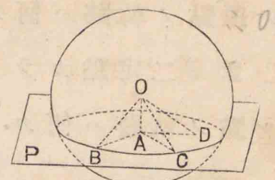




(3)　中心Oカラ平面Pニ引イタ垂線ノ足ヲAトシ,球ノ半徑ヲrトスル.

DA＜r
△AOB≡△AOC
∴ OC＝OB＝r

球面トPトノ交リノ上ノ一點ヲBトシ,Pノ上デAヲ中心ABヲ半徑トスル圓周ヲ考ヘ,此圓周上ニ任意ノ點Cヲ取レバOCハOBニ等シクナルカラCハ球面ノ上ニアル.



AB＞AD ∴ OB＞OD

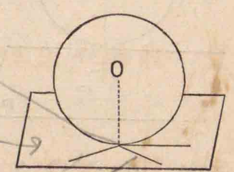
マタPノ上デ此圓周上ニナイ點ヲDトスレバODハOBニ等シクナラナイカラDハ球面ノ上ニナイ.

故ニ球面OトPトハコノ一ツノ圓周デ出會フ.

定義 球面ト平面トガ一ツノ圓周デ出會フトキハ,コノ球ト平面トハ**相交ル**トイフ.

球面ト平面トガ唯一點デ出會フトキハ,コノ球ト平面トハ**相切スル**トイヒ,其平面ヲ其球ノ**切平面**,其點ヲ**切點**トイフ.

切平面ノ上デ切點ヲ通ル任意ノ直線ハ球面ト其點デ出會フダケデアル.



コノ各直線ヲ球ノ**切線**トイフ.

系 1. 球ト平面トノ交リナル圓ノ中心ヲ球ノ中心ニ結ブ直線ハ此平面ニ垂直デアル.

切平面ノ切點ヲ通ル半徑ハ切平面ニ垂直デアル.

系 2. 球ノ中心カラ等距離ニアル平面デ截ツタ截口ノ圓ハ皆相等シイ. 等距離デナイ平面デ截ツタ截口ノ圓ノ中デ,球ノ中心ニ近イモノハ遠イモノヨリ大キイ.

球ノ中心ヲ通ル平面デノ截口ハ最大ナル圓デアル,此圓ヲ球ノ**大圓**トイヒ,其他ノ截口ノ圓ヲ其球ノ**小圓**トイフ.

大圓ノ半徑ハ球ノ半徑ニ等シイ.

球ノ半径 r
截口ノ半径 R
球ノ中心カラノ距離 d
$R^2=r^2-d^2$
d＝r トキハ R＝0
d＝0 R＝r 最大ナル円

例題

1. 球面ト直線トノ交點ハ二ツヨリ多クナイ.

2. 同一直徑ノ兩端デナイ球面上ノ二點ヲ通ル大圓ハ唯一ツアル.

3. 同ジ球ノ二ツノ大圓ハ互ニ他ヲ二等分スル.

4. 大圓ハ球及球面ヲ二等分スル.

定義 大圓デ分タレタ球(又ハ球面)ノ各部ヲ半球(又ハ半球面)トイフ. コノ大圓ノ面ヲコノ半球ノ底面トイフ.

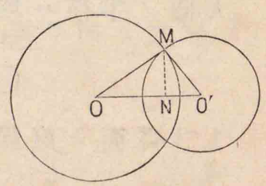
59. 定理

二ツノ球ノ中心間ノ距離ガ半徑ノ和ヨリ小サクテソノ差ヨリ大キケレバ,コノ二ツノ球面ハ一ツノ圓周デ出會フ.

而シテ其圓ノ平面ハ二球ノ中心ヲ結ブ直線ニ垂直デアツテ,其圓ノ中心ハ此直線ノ上ニアル.

$r+r'>d>r\backsim r'$

證明 二球ノ中心O, O'ヲ含ム任意ノ平面デ二球ヲ截レバ,ソノ截口ハ各球ノ大圓デアツテ,從テ其半徑ハ夫々各球ノ半徑ニ等シイ.



サテ假定ニヨツテ,中心間ノ距離ハ半徑ノ和

$r+r'<d$
$r+r'=d$
$r+r'>d$
$r-r'=d$
$r-r'>d$
5ナリ

ヨリ小サクテ差ヨリ大キイカラ,コノ二ツノ大圓ハ相交ル. ソノ一交點ヲMトスレバMハツマリ二ツノ球面ノ一交點デアル.

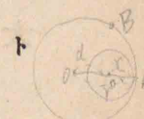
而シテ△OO'Mハ各邊ノ長サガ何レモ一定ダカラ,MカラOO'ニ垂線MNヲ引ケバMNノ長サモ一定デアツテ,其足Nハ定點デアル.

故ニ空間内ニ於ケルM點ノ軌跡ハ定點Nヲ通ツテOO'ニ垂直ナル平面ノ上デ,Nヲ中心トシNMヲ半徑トスル圓周デアル.

即チ二ツノ球面ハコノ一ツノ圓周デ出會フ.

系 中心間ノ距離ガ半徑ノ和ニ等シイカ若クハソノ差ニ等シイ二ツノ球面ハ唯一點デ出會フ.

定義 二ツノ球面ガ一ツノ圓周デ出會フトキハ,コノ二球ハ相交ルトイフ.



二ツノ球面ガ唯一點デ出會フトキハ,コノ二球ハ相切スルトイヒ,其點ヲ切點トイフ.

$r-(r-r')=r'$

中心間ノ距離ガ半徑ノ和ニ等シケレバ各球ハ互ニ他ノ外ニアルシ,半徑ノ差ニ等シケレバ一ガ他ノ内ニアル. 前ノ場合ニハ二球ガ互ニ

外切スルトイヒ,後ノ場合ニハ内ノ球ガ外ノ球ニ内切スル(又ハ略シテ二球ガ内切スル)トイフ.

例　題

二球ガ相切スルトキハ其切點ニ於テ共通ノ切平面ヲ有スル.

60. 球分, 球帶

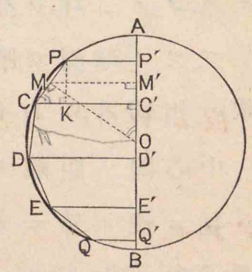
球ヲ平行二平面デ截ルトキ,ソノ兩截面ノ間ニアル球ノ部分ヲ**球分**トイフ.

球分ノ側面ヲ特ニ**球帶**トイフ.

各截口ヲ球分又ハ球帶ノ**底面**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ球分又ハ球帶ノ**高サ**トイフ.

定理　球帶ノ面積ハ之ガ屬スル球ノ大圓ノ周ト球帶ノ高サトノ積ニ等シイ.

證明　半圓ノ直徑 AB ヲ軸トシテソノ弧 PQ ヲ一廻轉サセレバ一ツノ球帶ガ出來ル.



弧 PQ ヲ C, D 等デ幾ツカニ等分シ,弦 PC, CD 等ヲ引キ, P, C, D,……,Q カラ AB ニ夫々垂線 PP′, CC′, DD′,……,QQ′ ヲ引ケバ,弧 PQ ノ廻轉ニ伴ツテ PCC′P′, CDD′C′ 等ハ夫々直圓錐臺ヲ書ク.

PCC′P′ ガ書ク直圓錐臺ノ兩底面ハ夫々 P′ 及 C′ ヲ中心トシ P′P 及 C′C ヲ半徑トスル圓デアツテ斜高ハ PC デアル.

PC ノ中點 M カラ AB ニ垂線 MM′ ヲ引ケバ,

PCC′P′ ガ書ク直圓錐臺ノ側面積ハ CP……

$$\frac{1}{2}.(2\pi.PP'+2\pi.CC').PC \qquad \text{〔第56節定理〕}$$

$$=\pi.(PP'+CC').PC=\pi.(2.MM').PC$$

$$=2\pi.MM'.PC$$

$= \frac{1}{2}\{2\pi PP'+2\pi CC'\}CP$
$=\pi\{\underbrace{PP'+CC'}_{2MM'}\}CP$
$=2\pi MM'CP$
$\triangle PCK \sim \triangle MOM'$

今 M ヲ圓ノ中心 O ニ結ビツケ,又 P カラ CC′ ニ垂線 PK ヲ引ケバ

$$\triangle OMM' \backsim \triangle CPK$$

$\frac{PC}{MO}=\frac{PK}{MM'}$　$PC,MM'=MO\,PK$

$$\therefore\quad OM:MM'=CP:PK$$

$$\therefore\quad MM'.CP=OM.PK=OM.P'C'$$

$\therefore 2\pi MO,PK$

故ニ PCC′P′ ガ書ク直圓錐臺ノ側面積ハ

$$2\pi.OM.P'C'$$

デアル.

① $=2\pi MO\,P'C'$ ②
CD …… $=2\pi N.O,C'D'$
$=2\pi MO,D'C'Q'$
① $=2\pi MO.D'Q'$
$2\pi MO(P'C'+C'D'+D'Q')$
$=2\pi MO,P'Q'$
$2\pi rh$.

サテ　PC＝CD＝………

ダカラ,O カラ PC, CD 等ニ引イタ垂線ノ長サハ皆相等シイ.

故ニ,上ト同様ニシテ CDD′C′ ガ畫ク直圓錐臺ノ側面積ハ $2\pi.OM.C'D'$ デアル. 其他モ之ニ倣フ.

因テ此等ノ直圓錐臺ノ側面積ノ和ハ

$$2\pi.OM.(P'C'+C'D'+\cdots\cdots)=2\pi.OM.P'Q'$$
$$=2\pi.OM.h$$

但シ h ハ球帶ノ高サデアル.

サテ分點ノ數ヲ限リナク多クスレバ,上ノ各直圓錐臺ノ側面積ノ和ハ限リナク球帶ノ面積 S ニ近ヅキ, PC, CD 等ハ限リナク小サクナルカラ OM ハ限リナク球ノ半徑 r ニ近ヅク.

$$\therefore\quad S=2\pi.r.h$$

61. 定　理

球ノ表面積ハ其大圓ノ面積ノ 4 倍ニ等シイ.

證明　球ハソノ高サガ球ノ直徑ニ等シイ球分ト見做サレルカラ,其表面積ヲ S トスレバ

$$S=2\pi.r.2r=4\pi r^2$$

(比)平方ナルカラバ $\left(\frac{r}{r'}\right)^2$

系　球ノ表面積ハ其半徑ノ平方ニ比例スル.

r　表面積　$4\pi r^2$ — S
r'　〃　$4\pi r'^2$ — S'
$\frac{S}{S'}=\frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2}=\frac{r^2}{r'^2}$

例　題

1.　球ノ表面積ハ之ニ外接スル直圓壔(其兩底面ガ球ニ切シ,且ツ其底ニ平行ナル球ノ大圓周ガ其側面ニ含マレル直圓壔)ノ側面積ニ等シイ.

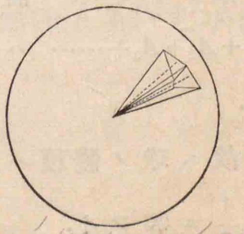
2.　表面積 $1m^2$ ノ球ノ半徑ヲ mm ノ位マデ算出セヨ.

62. 定　理

球ノ體積ハ球ノ表面積ト其半徑トノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ.

~~球ノ體積＝⅓(表面積)(半徑)~~

證明　球ニ内接スル多面體ヲ畫ケバ,此多面體ノ體積ハ,ソノ各面ヲ底面トシ球ノ中心ヲ頂點トスル幾ツカノ角錐ノ體積ノ和ニ等シイ. ソコデ此多面體ノ各面ノ面積ヲ A_1,



~~$\frac{1}{3}$(半徑)(表面積)~~
~~$\frac{1}{3}r.4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3$~~

A_2, A_3, …… トシ,球ノ中心カラ此等ノ面マデノ距離ヲ夫々 h_1, h_2, h_3, …… トシ,多面體ノ體積ヲ V トスレバ

$$V=\frac{1}{3}A_1h_1+\frac{1}{3}A_2h_2+\frac{1}{3}A_3h_3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{3}(A_1h_1+A_2h_2+A_3h_3+\cdots\cdots\cdots)$$

デアル.

サテ此多面體ノ各面ヲ限リナク小サクスレバ, h_1, h_2, h_3, …… ハ何レモ限リナク球ノ半徑ニ近ヅクカラ,球ノ半徑ヲ r トスレバ,多面體ノ體積 V ハ限リナク

$$\frac{1}{3}(A_1r+A_2r+A_3r+\cdots\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{3}(A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots\cdots)r$$

ニ近ヅク. 而シテ之ト同時ニ多面體ノ體積 V ハ限リナク球ノ體積ニ近ヅキ,多面體ノ表面積 $A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots$ ハ限リナク球ノ表面積ニ近ヅク.

故ニ球ノ體積ハ球ノ表面積ト其半徑トノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ.

系 1. 球ノ體積ヲ V, 其半徑ヲ r トスレバ

球体積 $=\frac{1}{3}$(表面積)(半径)
$=\frac{1}{3}\,4\pi r^2\,r$

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad =\frac{4}{3}\pi r^3.$$

系 2. 球ノ體積ハ其半徑ノ立方ニ比例スル.

体積　半径
$\frac{V}{V'}$　$\frac{r}{r'}$　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$　$V'=\frac{4}{3}\pi r'^3$　$\therefore \frac{V}{V'}=\frac{r^3}{r'^3}$

例　題

1. 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイ.

2. 體積 $1\,dm^3$ ナル球ノ半徑ヲ mm ノ位マデ算出セヨ.

問　題

1. 同一平面上ニナイ四點ヲ通ル球面ハ唯一ツアル.

2. 球面上ノ三點ヲ通ル圓周ハ全ク此球面ノ上ニアル.

3. 二定點カラノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ハ何カ.

4. 二定點ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡ハ何カ.

5. 三定點ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡ハ何カ.

6. 一邊ノ長サガ a ナル正三角形ガ其一頂點ヲ通ツテ底ニ平行ナル直線ノ周リヲ廻ツテ出來ル立體ノ全表面積及體積ヲ求メヨ.

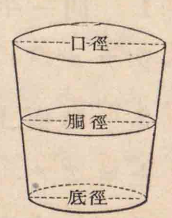
又此旋轉體ノ全表面積ハ此正三角形ノ周ト正三角形ノ重心ガ廻轉シテ畫ク圓ノ周トノ積ニ等シク,其體積ハ正三角形ノ面積ト其重心ガ畫ク圓周トノ積ニ等シイコトヲ示セ.

7. 酒造規則ニ於テ酒樽ノ容量ヲ算出スル公式ハ次ノ通リデアル.

口徑 a 寸,胴徑 b 寸,底徑 c 寸,深サ d 寸ナル酒樽ノ容量ハ

$$0.00201922d\{(a+b)^2+(b+c)^2-(a+c)b\}\text{升}$$

今酒樽ノ上半部及下半部ガ夫々直圓錐臺狀デアルモノトシテ上ノ公式ヲ證明セヨ. 但シ $\pi=3.1416$ トスル. 1升$=64.827$ 立方寸.



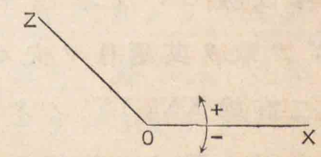
第五篇

三角函數

第一章 一般角ノ三角函數

63. 角ノ正負

角ヲ,一ツノ半直線 OZ ガソレヲ含ムーツノ平面上デ其原點 O ノ周リヲ廻ツテ出來ルモノト見做シ,ソノ廻轉ノ向キニヨツテ之ニ正負ノ符號ヲ附ケルコトトスル.



通常時計ノ針ノ廻轉ノ向キト反對ノ向キニ廻ツテ出來ル角ヲ**正**ノ角,同ジ向キニ廻ツテ出來ル角ヲ**負**ノ角ト規約スル. 又此半直線ノ最初ノ位置 OX ヲ此角ノ**第一邊**トイヒ,ソノ最後ノ位置 OZ ヲソノ**第二邊**トイフ.

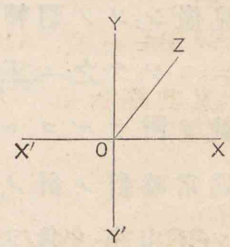
半直線ガソノ原點ノ周リヲ幾度續ケテ廻ツテモイヽトスル,從テ 360° ヨリ大キイ角モ −360° ヨリ小サイ角モアル. 一般ニ

代數的ニ任意ノ大イサノ角ガアル.

注意 二邊ヲ共有スル角ハ無數ニアル. 今其一ツヲAデ表セバ,ソノ總テノ角ハ $n.360°+A$ デ表サレル. コヽニ n ハ任意ノ整數(正,負,0)デアル.

64. 象限

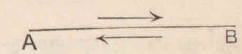
半直線OX及之ト $+90°$ ノ角ヲナス半直線OYヲ取リ其延長ヲ夫々OX′, OY′トスルトキハ,二直線XX′, YY′ノタメニ平面ハ四ツニ仕切ラレル. ソコデOXトOYトニ夾マレタ部分ヲ**第一象限**, OYトOX′トニ夾マレタ部分ヲ**第二象限**, OX′トOY′トニ夾マレタ部分ヲ**第三象限**, OY′トOXトニ夾マレタ部分ヲ**第四象限**トイフ.



而シテOXヲ第一邊トスル角ノ第二邊OZガ第一象限ノ内ニアルカ又ハ第二象限等ノ内ニアルカニ從ツテ此角ガ夫々第一象限又ハ第二象限等ニアルトイフ.

65. 線分ノ正負

一ツノ直線上ノ一ツノ線分ノ長サヲ,ソノ一端カラ他端ニ向ツテ測ツタモノト見做シ,ソノ向キニヨツテ之ニ正負ノ符號ヲ附ケルコトトスル.

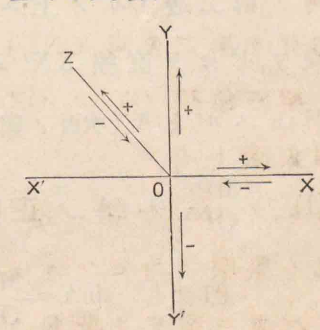


線分ノ兩端ヲA, BトスルトキAカラBニ向ツテ測ツタ長サヲABデ表シ,BカラAニ向ツテ測ツタ長サヲBAデ表ス. 從テABガ正ナラバBAハ負, ABガ負ナラバBAハ正デアツテ,又其絕對値ハ勿論相等シイ.

$$\therefore\quad AB=-BA$$

66. 一般ノ角ノ三角函數

一ツノ半直線OX及之ト $+90°$ ノ角ヲナス半直線OYヲ取リ其延長ヲ夫々OX′, OY′トスル. 又OXヲ第一邊トスル一ツ



ノ角Aノ第二邊ヲOZトスル.

而シテ此等ノ直線上ニ測ツタ線分ノ正負ノ向キニ關シテ次ノ規約ヲ設ケル.

(1) 直線XX′又ハ之ニ平行ナル直線ノ上デハOカラXヘノ向キヲ正ノ向キ(從テ之ト反對ノ向キヲ負ノ向キ)トスル.

(2) 直線YY′又ハ之ニ平行ナル直線ノ上デハOカラYヘノ向キヲ正ノ向キトスル.

(3) 角ノ第二邊OZノ上デハOカラZヘノ向キヲ正ノ向キトスル.

此規約ノ下ニ於テ,

角ノ第二邊OZノ上ニOノ外ニ任意ノ點Pヲ取リ,Pカラ直線XX′ニ垂線PMヲ引キ其足ヲMトスルトキ(次頁ノ圖ヲ見ヨ)

(1) $\dfrac{MP}{OP}$ ヲ $\angle A$ ノ**正弦**トイフ.

即チ $\sin A=\dfrac{MP}{OP}$

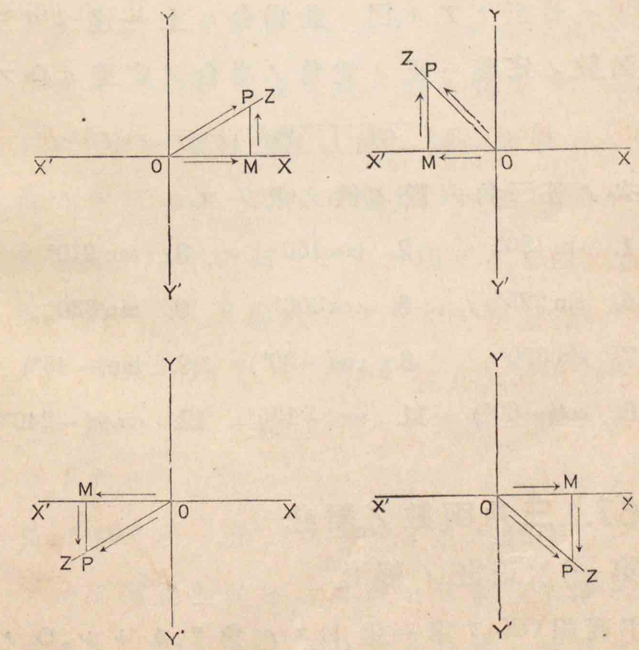
(2) $\dfrac{OM}{OP}$ ヲ $\angle A$ ノ**餘弦**トイフ.

即チ $\cos A=\dfrac{OM}{OP}$

(3) $\dfrac{MP}{OM}$ ヲ $\angle A$ ノ**正切**トイフ.

即チ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$

(4) 正切,餘弦,正弦ノ逆數ヲ夫々此角ノ餘切,正割,餘割トイフ.



注意 1. OP ハ常ニ正デアル.〔規約3〕

OM ハ角ガ第一象限又ハ第四象限ニアルトキハ正,第二又ハ第三象限ニアルトキハ負デアル.〔規約1〕

MP ハ角ガ第一又ハ第二象限ニアルトキハ正,第三又ハ第四象限ニアルトキハ負デアル.

〔規約2〕

注意 2. 角ガ第一象限ニアルトキハ OP, OM, MP ハ皆正デアル,因テ此場合ニ上ニ述ベタ三角函數ノ定義ハ正ノ鋭角ノ場合ノ定義ニ合フ.

例 題

次ノ各三角函數ノ値ヲ求メヨ.

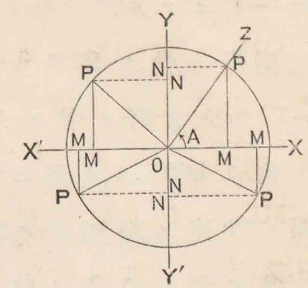
1. $\sin 120°$	**2.** $\cos 150°$	**3.** $\tan 210°$
4. $\sin 225°$	**5.** $\cos 300°$	**6.** $\tan 330°$
7. $\sin 390°$	**8.** $\cos(-30°)$	**9.** $\tan(-45°)$
10. $\cot(-60°)$	**11.** $\sec(-135°)$	**12.** $\operatorname{cosec}(-240°)$

67. 三角函數ノ變化

(第一) 正弦ノ變化

半直線OX ヲ第一邊トスル角ヲ A トシ,O ヲ

中心トスル一ツノ圓ガソノ第二邊 OZ ト交ル點ヲ P トシ,P カラ XX′, YY′ ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引ケバ



$$MP=ON$$

$$\therefore \quad \sin A=\frac{ON}{OP}$$

先ヅ OP ハ正デアツテ常ニ一定デアル. 而シテ角ガ 0° ノトキハ ON ハ 0 デアツテ,角ガ 0° カラ増セバ ON モ段々増シ,竟ニ角ガ 90° ニ達スレバ ON ハ半徑卽チ OP ニ等シクナル. 故ニ角 A ガ 0° カラ 90° マデ變化スル間ニ sinA ハ 0 カラ段々増シテ竟ニ +1 ニ達スル.

次ニ角ガ 90° ヲ超エルトキハ ON ハ段々小サクナリ,竟ニ角ガ 180° ニ達スレバ ON ハ 0 トナル. 故ニ sinA ハ此間 1 カラ次第ニ減ツテ竟ニ 0 トナル.

角ガ 180° カラ増シテ 270° ニ至ル間, ON ハ負デアツテ其絶對値ハ段々増シテ竟ニ半徑ニ等シクナル. 故ニ sinA ハ 0 カラ次第ニ減ツテ竟

ニ -1 ニナル.

同様ニ,角ガ $270°$ カラ $360°$ ニ至ル間, $\sin A$ ハ -1 カラ次第ニ増シテ竟ニ 0 トナル.

角ガ $360°$ カラ更ニ増セバ $\sin A$ ハ前ノ變化ヲ同ジ順序ニ幾回デモ繰返スダケデアル.

角ガ $0°$ カラ負ノ向キニ變化スルトキハ $\sin A$ ハ前ノ變化ヲ逆ノ順序ニ繰返シテ限リナク循環スル.

(第二) 餘弦ノ變化

前頁ノ圖デ $\cos A = \dfrac{OM}{OP}$

サテ角ガ $0°$ ノトキハ OM ハ半徑卽チ OP ニ等シク,角ガ $0°$ カラ増セバ OM ハ次第ニ減リ,角ガ $90°$ ニ達スレバ OM ハ 0 トナル. 故ニ此間 $\cos A$ ハ $+1$ カラ次第ニ減ツテ 0 トナル.

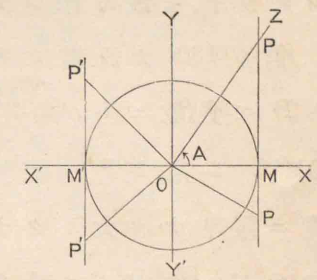
次ニ角ガ $90°$ カラ増シテ $180°$ ニ至ル間, OM ハ負デ其絶對値ハ 0 カラ段々増シテ竟ニ半徑ニ等シクナル. 故ニ $\cos A$ ハ 0 カラ次第ニ減ツテ -1 ニナル.

同様ニ,角ガ $180°$ カラ $270°$ ニ至ル間, $\cos A$ ハ -1 カラ次第ニ増シテ 0 ニナリ,角ガ $270°$ カラ

$360°$ ニ至ル間, $\cos A$ ハ 0 カラ段々増シテ竟ニ $+1$ ニナル.

(第三) 正切ノ變化

半直線 OX ヲ第一邊トスル角ヲ A トシ, O ヲ中心トスル圓ガ OX ト交ル點 M ニ於テ此圓ニ切線ヲ引キ,角ノ第二邊 OZ ト交ル點ヲ P トスレバ



$$\tan A = \frac{MP}{OM}$$

先ヅ角ガ $0°$ カラ $90°$ ニ至ルマデノ間 OM ハ正デアツテ一定デアル,而シテ角ガ $0°$ ノトキハ MP ハ 0 デアツテ,角ガ $0°$ カラ増セバ MP モ段段増シ角ガ $90°$ ニ近ヅクニ從ツテ MP ハ限リナク増スカラ $\tan A$ ハドレホドデモ大キクナル.

角ガ $90°$ ト $180°$ トノ間ニアルトキハ,上ノ圓ト OX' トノ交點 M' ニ於ケル圓ノ切線ガ角ノ第二邊ニ交ル點ヲ P' トスレバ(上ノ圖ヲ見ヨ)

$$\tan A = \frac{M'P'}{OM'}$$

此場合ニハ OM' ハ負デアツテ一定, $M'P'$ ハ正

デ,角ガ極少シク 90° ヲ超エタトキハ M′P′ ハ限リナク大キク從テ tanA ハ急ニ負ニナツテ其絕對值ハ極メテ大キイ. 而シテ角ガ 180° マデ增ス間 M′P′ ハ段々減ツテ竟ニ 0 ニナルカラ, tanA ノ絕對值モ段々減ツテ竟ニ 0 トナル.

角ガ 180° カラ增シテ 270° ニ至ル間, OM′ ハ負, M′P′ モ負,故ニ $\tan A=\frac{M'P'}{OM'}$ ハ正デアル. 而シテ OM′ ハ一定, M′P′ ノ絕對值ハ 0 カラ段々增シテ竟ニ限リナク大キクナルカラ, tanA ハ 0 カラ增シテドレホドデモ大キクナル.

角ガ 270° カラ 360° ニ至ル間, OM ハ正, MP ハ負,故ニ $\tan A=\frac{MP}{OM}$ ハ負デアツテ,其絕對值ハ限リナク大キイ值カラ段々減ツテ竟ニ 0 ニナル.

以上ノ變化ヲ表ニ記セバ次ノ通リデアル.

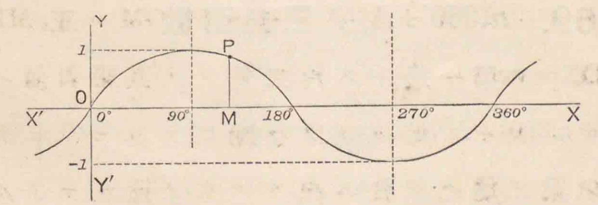
角	0°	$\longrightarrow$	90°	$\longrightarrow$	180°	$\longrightarrow$	270°	$\longrightarrow$	360°
sin	0	$\xrightarrow[(正)]{増}$	1	$\xrightarrow[(正)]{減}$	0	$\xrightarrow[(負)]{減}$	-1	$\xrightarrow[(負)]{増}$	0
cos	1	$\xrightarrow[(正)]{減}$	0	$\xrightarrow[(負)]{減}$	-1	$\xrightarrow[(負)]{増}$	0	$\xrightarrow[(正)]{増}$	1
tan	0	$\xrightarrow[(正)]{増}$	$+\infty$ | $-\infty$	$\xrightarrow[(負)]{増}$	0	$\xrightarrow[(正)]{増}$	$+\infty$ | $-\infty$	$\xrightarrow[(負)]{増}$	0

68. 三角函數ノぐらふ

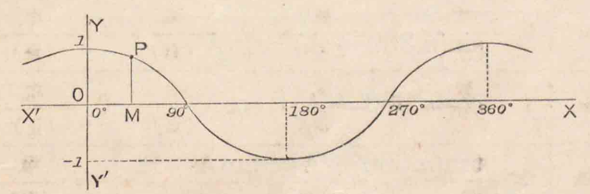
橫軸 XX′ 上ニ原點 O カラ角ノ大イサヲ表ス長サ OM (單位ハ任意) ヲ取リ, M ヲ通ツテ縱軸 YY′ ニ平行ニ引イタ直線ノ上ニ M カラ其角ノ三角函數ノ值ヲ表ス長サ MP (單位ハ任意) ヲ取レバ, P ハ其三角函數ノぐらふノ上ノ一點デアル.

斯樣ニシテぐらふ上ノ多クノ點ヲ求メテ順ニ繫ゲバ其三角函數ノぐらふヲ得ル.

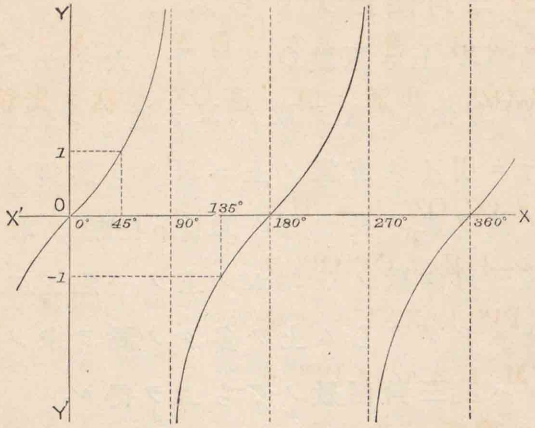
$y=\sin x$ ノぐらふ



$y=\cos x$ ノぐらふ

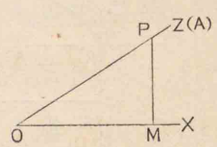


$y=\tan x$ ノぐらふ



69. $n.360°+A$ ノ三角函數

OX ヲ第一邊トスル二角 A ト $n.360°+A$ (n ハ任意ノ整數) トノ第二邊ハ相合スル.



故ニ此二角ノ三角函數ハ全ク同一デアル. 即チ

$$\sin(n.360°+A)=\sin A$$
$$\cos(n.360°+A)=\cos A$$
$$\tan(n.360°+A)=\tan A \quad 等$$

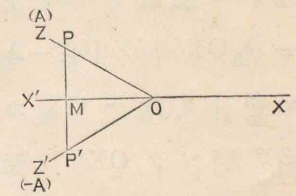
cosineは負号であっても符号に変化なし

70. $-A$ ノ三角函數

OX ヲ第一邊トスル二角 A ト $-A$ トノ第二邊 OZ, OZ' ハ共通ノ第一邊 OX ニ就テ對稱デアル.

角Aが負号であれば sinはかわる cosはかわらぬ

因テ OZ, OZ' 上ニ夫々相等シイ長サ OP, OP' ヲ取リ, PP' ト XX' トノ交點ヲ M トスレバ, PP' ハ XX' ニ垂直デアツテ



$$OP'=OP,\quad OM\ ハ共通,\quad MP'=-MP$$

$$\therefore\quad \sin(-A)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\sin A$$

$$\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A$$

$$\tan(-A)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\tan A$$

系

$$\sin(360°-A)=\sin(-A)=-\sin A$$
$$\cos(360°-A)=\cos(-A)=\cos A$$
$$\tan(360°-A)=\tan(-A)=-\tan A$$

71. 補角ノ三角函數

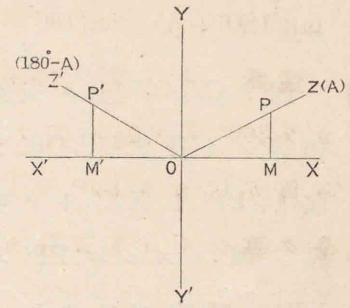
和ガ 180° ニ等シイ二角ハ互ニ補角デアルト

sin A = sin (180°−A)

イフ．例ヘバ 30° ノ補角ハ $180°-30°=150°$ 又 420° ノ補角ハ $180°-420°=-240°$ ナド．

一般ニ A ノ補角ハ $180°-A$ デアル．

サテ OX カラ A ダケ廻ツタ位置ヲ OZ トスレバ，OX カラ $180°-A$ ダケ廻ツタ(卽チ OX カラ 180° 廻ツテ OX′ ニ至リソレカラ −A ダケ廻ツタ) OZ′ ハ ∠XOX′ ノ二等分線 OY ニ關シテ OZ ニ對稱デアル．



因テ OZ, OZ′ 上ニ夫々相等シイ長サ OP, OP′ ヲ取リ，P, P′ カラ夫々 XX′ ニ垂線 PM, P′M′ ヲ引ケバ

$$OP'=OP,\quad M'P'=MP,\quad OM'=-OM$$

$$\therefore\left\{\begin{aligned}\sin(180°-A)&=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin A\\ \cos(180°-A)&=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP}=-\cos A\\ \tan(180°-A)&=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{MP}{-OM}=-\tan A\end{aligned}\right.$$

補角ノ關係

sin A = cos (90°−A)　cot A = tan (90°−A)
cos A = sin (90°−A)　sec A = cosec (90°−A)
tan A = cot (90°−A)　cosec A = sec (90°−A)

系

$$\sin(180°+A)=\sin\{180°-(-A)\}=\sin(-A)=-\sin A$$

$$\cos(180°+A)=\cos\{180°-(-A)\}=-\cos(-A)=-\cos A$$

$$\tan(180°+A)=\tan\{180°-(-A)\}=-\tan(-A)=\tan A$$

注意 上ノ系ノ最後ノ式ニヨレバ，角ガ 180° カラ 360° マデ變ル間ノ正切ノ變化(第127—128頁)ハ角ガ 0° カラ 180° マデ變ル間ノ正切ノ變化ト全ク等シイコトガ分カル．

72. 餘角ノ三角函數

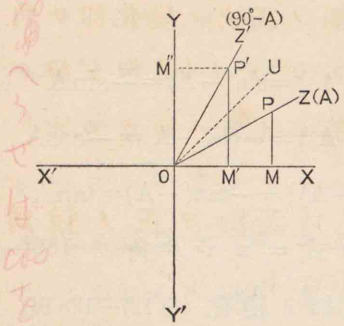
和ガ 90° ニ等シイ二角ハ互ニ餘角デアルトイフ．例ヘバ 30° ノ餘角ハ $90°-30°=60°$ 又 −135° ノ餘角ハ $90°-(-135°)=225°$ ナド．

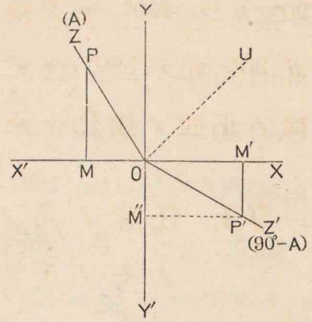
一般ニ A ノ餘角ハ $90°-A$ デアル．

サテ OX カラ A ダケ廻ツタ位置ヲ OZ トスレバ，OX カラ $90°-A$ ダケ廻ツタ(卽チ OX カラ 90° 廻ツテ OY ニ至リ，ソレカラ −A ダケ廻ツタ) OZ′ ハ ∠XOY ノ二等分線 OU ニ關シテ OZ ニ對稱デアル．

因テ OZ, OZ′ 上ニ夫々相等シイ長サ OP, OP′

ある角B





ヲ取リ, P, P′ カラ夫々 XX′ ニ垂線 PM, P′M′ ヲ引キ,又 P′ カラ YY′ ニ垂線 P′M″ ヲ引ケバ

$$OP'=OP,\quad M'P'=OM''=OM,\quad OM'=M''P'=MP$$

$$\therefore\ \sin(90^\circ-A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A$$

$$\cos(90^\circ-A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin A$$

$$\tan(90^\circ-A)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{MP}=\frac{1}{\tan A}=\cot A$$

系

$$\sin(90^\circ+A)=\sin\{90^\circ-(-A)\}=\cos(-A)=\cos A$$

$$\cos(90^\circ+A)=\cos\{90^\circ-(-A)\}=\sin(-A)=-\sin A$$

$$\tan(90^\circ+A)=\tan\{90^\circ-(-A)\}=\cot(-A)=-\cot A$$

注意 上ノ系ノ第一ノ式ニヨレバ,角ガ 0° カラ 360° マデ變ル間ノ餘弦ノ變化(第126頁)ハ角ガ

sin 230° = − sin 50°

90° カラ 450° マデ變ル間ノ正弦ノ變化卽チ角ガ 90° カラ 360° マデ次ニ 0° カラ 90° マデ變ル間ノ正弦ノ變化ト全ク等シイコトガワカル.

73. 任意ノ角ノ三角函數ヲ正ノ鋭角ノモノデ表スコト

任意ノ角ノ三角函數ハ 0° カラ 90° マデノ角ノ同名ノ三角函數デ表スコトガ出來ル.

先ヅ負ノ角ノ三角函數ハ第70節ニヨツテ正ノ角ノ之ト同名ノ函數デ表スコトガ出來ル.

又正ノ角デ 360° 以上ノモノハ第69節ニヨリ之カラ 360° ヲ引ケルダケ引イテ 360° 未滿ノ同名ノ函數ニ直シ,若シソレガ 180° ヨリ大ナラバ第70節ノ系ニヨツテ其共軛角ノ同名ノ函數ニ直シ,若シソレガ 90° ヨリ大ナラバ第71節ニヨツテ其補角ノ同名ノ函數ニ直スコトガ出來ル.

[例] $\sin(-2390^\circ)=-\sin 2390^\circ$

$$=-\sin(6\times360^\circ+230^\circ)=-\sin 230^\circ$$

$$=\sin(360^\circ-230^\circ)=\sin 130^\circ$$

sin(−2390°) = sin 130° = sin 50° = cos 40°

$=\sin(180^\circ-130^\circ)=\sin 50^\circ$

注意 異名ノ三角函數ヲ用ヒレバ,任意ノ角ノ三角函數ハ 0° カラ 45° マデノ角ノ三角函數デ表スコトガ出來ル.

最小正角

例ヘバ $\sin 50^\circ=\cos(90^\circ-50^\circ)=\cos 40^\circ$

例題

1. 次ノ各三角函數ヲ正ノ鋭角ノ同名ノ函數デ表セ.

$\sin 1356^\circ,\quad \cos(-859^\circ),\quad \tan(-4783^\circ)$

2. $A-180^\circ$ ノ三角函數ヲ A ノ三角函數デ表セ.

3. $A-90^\circ$ ノ三角函數ヲ A ノ三角函數デ表セ.

問題

次ノ各角ノ正弦及餘弦ノ値ヲ求メヨ. 但シ n ハ任意ノ整數トスル.

1. $2n.180^\circ+45^\circ$ **2.** $(2n+1).180^\circ-60^\circ$

3. $(2n-1).180^\circ+30^\circ$

次ノ各式ノ値ヲ求メヨ.

4. $\cos 180^\circ\tan(-45^\circ)+\sin 150^\circ\sec 210^\circ$

5. $2\cos 120^\circ\sin 225^\circ-3\sin 120^\circ\tan 135^\circ$

次ノ各方程式ニ適合スル 360° 未滿ノ正ノ角ヲ求メヨ.

6. $\sin x=\frac{1}{2}$ **7.** $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

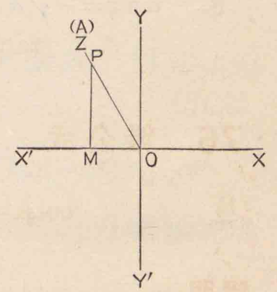
8. $\tan x=-\sqrt{3}$

第二章　三角函數間ノ關係

74. 正弦,餘弦間ノ關係

一ツノ角ノ正弦ノ平方ト餘弦ノ平方トノ和ハ恒ニ 1 ニ等シイ.

證明　OX ヲ第一邊トスル角 A ノ第二邊 OZ 上ノ一點 P カラ XX′ ニ垂線 PM ヲ引ケバ, OM, MP ノ正負ニ拘ラズ



$$MP^2+OM^2=OP^2$$

$$\therefore\quad \frac{MP^2}{OP^2}+\frac{OM^2}{OP^2}=1 \quad 卽チ \quad \left(\frac{MP}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad (\sin A)^2+(\cos A)^2=1$$

此結果ハ通例次ノヤウニ記ス.

$$\mathbf{\sin^2 A+\cos^2 A=1}$$

注意　一般ニ m ガ正ノ整數ナルトキハ $(\sin A)^m$, $(\cos A)^m$ ナドヲ略シテ $\sin^m A$, $\cos^m A$ ナドト書クコトニスル.

平方関係
$\sin^2 A+\cos^2 A=1$
$1+\tan^2 A=\sec^2 A$
$1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$

75. 正弦,餘弦,正切間ノ關係

一ツノ角ノ正切ハソノ正弦ヲソノ餘弦デ割ツタ商ニ等シイ.

證明　前ノ圖デ

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{MP}{OP}\div\frac{OM}{OP}=\frac{MP}{OM}=\tan A$$

$$\therefore\quad \mathbf{\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}}$$

切弦関係

反対

76. 雜公式

(1)　$\mathbf{\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}}$

證明　$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{\cos A}{\sin A}$　〔前　節〕

(2)　$\mathbf{1+\tan^2 A=\sec^2 A}$

證明　$1+\tan^2 A=1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$　〔前　節〕

$$=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{1}{\cos^2 A}\quad〔第 74 節〕$$

$$=\sec^2 A$$

平方関係

(3)　$\mathbf{1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A}$

證明　$1+\cot^2 A=1+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$$=\frac{1}{\sin^2 A}=\operatorname{cosec}^2 A$$

77. 恒等式ノ證明ノ例

[例 1] 次ノ恒等式ヲ證明セヨ.

$$(1+\sin A)^2+(1+\cos A)^2=3+2(\sin A+\cos A)$$

證明 $(1+\sin A)^2+(1+\cos A)^2$

$$=1+2\sin A+\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A$$

$$=2+2(\sin A+\cos A)+(\sin^2 A+\cos^2 A)$$

$$=3+2(\sin A+\cos A)$$ 〔第 74 節〕

[例 2] $\tan A(\cos^2 A-\sin^2 A)=\sin A\cos A(1-\tan^2 A)$ ヲ證明セヨ.

證明 左邊$=\dfrac{\sin A}{\cos A}(\cos^2 A-\sin^2 A)=\sin A\cos A-\dfrac{\sin^3 A}{\cos A}$

右邊$=\sin A\cos A-\sin A\cos A\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\sin A\cos A-\dfrac{\sin^3 A}{\cos A}$

故ニ上ノ等式ハ眞デアル.

例 題

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

1. $\tan A\cos A=\sin A$

2. $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\sin^2 A$

3. $\tan A\sin A+\cos A=\sec A$

4. $\tan A+\cot A=\sec A\,\mathrm{cosec} A$

5. $(1-\cos^2 A)(1+\tan^2 A)=\tan^2 A$

6. $\tan^2 A-\cot^2 A=\sec^2 A-\mathrm{cosec}^2 A$

7. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$

8. $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\cos^2 A-\sin^2 A$

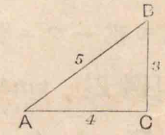
9. $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$

10. $\dfrac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=\tan A\tan B$

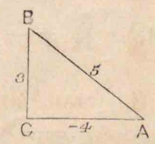
78. 一ツノ三角函數デ他ノ三角函數ヲ表スコト

六ツノ三角函數ノ中,任意ノ一ツガ分カレバ他ノ五ツヲ求メルコトガ出來ル.

[例 1] $\sin A=\dfrac{3}{5}$ ナルトキ他ノ三角函數ヲ求メヨ.



解 斜邊 AB ガ 5, 他ノ一邊 CB ガ 3 ナル直角三角形 ABC ヲ作レバ $\sin A=\dfrac{3}{5}$ デアル,而シテ



$$AC^2=AB^2-CB^2=5^2-3^2=16$$

$$\therefore\ AC=\pm 4$$

$$\therefore\ \cos A=\frac{AC}{AB}=\pm\frac{4}{5},\quad \tan A=\frac{CB}{AC}=\pm\frac{3}{4}$$

従テ　$\cot A=\pm\dfrac{4}{3}$,　$\sec A=\pm\dfrac{5}{4}$,　$\operatorname{cosec} A=\dfrac{5}{3}$

別解　公式　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$　〔第74節〕

カラ cosA ヲ求メテ

$$\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}$$

$$=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$$

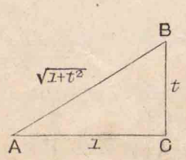
次ニ　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$　〔第75節〕

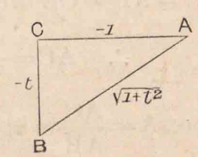
$$=\frac{3}{5}\div\left(\pm\frac{4}{5}\right)=\pm\frac{3}{4}$$

注意　本例デハAガ第何象限ノ角デアルカ分カラナイカラ cosA, tanA 等ノ値トシテ複符號ヲ得テ二通リノ答ヲ得タガ,多クノ場合ニAノ屬スル象限ガ問題ノ條件カラ分カリ,従テ各三角函數ノ符號ガ定マリ其値モ唯一ツニ決定サレルノガ常デアル.

[例 2]　tanA ヲ以テ他ノ三角函數ヲ表セ.

解　tanA ノ値ヲ t トシ,直角ヲ夾ム二邊 AC, CB ノ長サガ夫々 1 及 t 又ハ -1 及 $-t$ ニ等シ





イ直角三角形 ABC ヲ作レバ

$$\tan A=\frac{\pm t}{\pm 1}=t$$

デアル,而シテ

$$AB^2=AC^2+CB^2=(\pm 1)^2+(\pm t)^2=1+t^2$$

$$\therefore\quad AB=\sqrt{1+t^2}$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{CB}{AB}=\frac{\pm t}{\sqrt{1+t^2}}=\pm\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+t^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

従テ　$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$,　$\sec A=\pm\sqrt{1+\tan^2 A}$

$$\operatorname{cosec} A=\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$$

別解　$1+\tan^2 A=\sec^2 A$　〔第76節2〕

$$=\frac{1}{\cos^2 A}$$

之カラ　$\cos A=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$

次ニ　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$　〔第75節〕

$$\therefore\quad \sin A=\tan A\cos A$$

之ニ上ノ cosA ノ値ヲ代入シテ

$$\sin A=\pm\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}\quad \text{等.}$$

例題

1. $\cos A=\dfrac{12}{13}$ ナルトキ $\sin A$ 及 $\tan A$ ヲ求メヨ. 但シ A ハ正ノ鋭角デアル.

2. $\sin A=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ ヲ與ヘテ $\cos A$ 及 $\tan A$ ヲ求メヨ.

3. $\tan A=\dfrac{p}{q}$ ヲ與ヘテ $\sin A$ 及 $\cos A$ ヲ求メヨ.

4. $\tan A=\dfrac{2n(n+1)}{2n+1}$ ナルトキ $\cos A$ ヲ求メヨ.

5. 二數 a, b ノ間ニ $a^2+b^2=1$ ナル關係ガアルトキハ適當ナル角 A ヲ取ツテ $\sin A=a$, $\cos A=b$ ナラシメ得ルコトヲ證明セヨ.

問題

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

1. $\sin(90°-A)\operatorname{cosec}A=\tan(90°-A)$

2. $\cot(90°-A)\cot A\cos(90°-A)\tan(90°-A)=\cos A$

3. $\cos^2A+\cos^2(90°+A)+\cos^2(180°+A)+\cos^2(90°-A)=2$

4. $\operatorname{cosec}(90°+A)\sec(360°-A)+\sin(180°+A)\sec A\tan(180°+A)=1$

5. $\cos A+\sin(270°+A)-\sin(270°-A)+\cos(180°+A)=0$

6. $\tan(45°+A)\tan(45°-A)=1$

7. $\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}-\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=4\cot A\operatorname{cosec}A$

8. $(1-\tan A)^2+(1-\cot A)^2=(\sec A-\operatorname{cosec}A)^2$

9. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1-\sin\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

10. $(1-\sin\theta+\cos\theta)^2=2(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)$

11. $\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x$ ノ値ハ x ノ値ニ關セズ一定ナルコトヲ證明セヨ.

12. 直角三角形 ABC ($\angle A=90°$) ニ於テ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$\tan B+\tan C=\frac{a^2}{bc}$$

次ノ各方程式ニ適合スル 360° 以内ノ正角ヲ求メヨ.

13. $3\tan x=\cot x$

14. $2\cos^2x-\sin x=1$

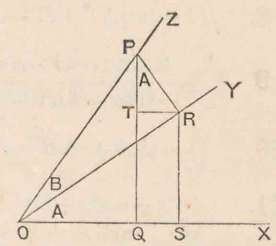
15. $2\sin x=3\cot x$

sin 30° cos 60   sin 60 cos 30
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

第三章　二角ノ和及差ノ三角函數

79. 正弦餘弦ノ加法定理

右ノ圖デ $\angle XOY=A$, $\angle YOZ=B$ トスレバ $\angle XOZ=A+B$ デアル.



今 OZ 上ノ一點 P カラ OX, OY ニ夫々垂線 PQ, PR ヲ引キ, R カラ OX ニ垂線 RS ヲ引キ,又 R カラ PQ ニ垂線 RT ヲ引ケバ

$$\angle RPT=\angle XOY=A$$

サテ $$\sin(A+B)=\frac{QP}{OP}=\frac{QT+TP}{OP}=\frac{SR+TP}{OP}$$

$$=\frac{SR}{OP}+\frac{TP}{OP}$$

$$=\frac{SR}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{TP}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}$$

而シテ $\frac{SR}{OR}=\sin A$, $\frac{OR}{OP}=\cos B$,

$\frac{TP}{RP}=\cos A$, $\frac{RP}{OP}=\sin B$

∴ (1) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ 加法定理

又 $$\cos(A+B)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS-QS}{OP}=\frac{OS-TR}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OP}-\frac{TR}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{TR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

サテ $\frac{OS}{OR}=\cos A$, $\frac{OR}{OP}=\cos B$,

$\frac{TR}{PR}=\sin A$, $\frac{PR}{OP}=\sin B$

∴ (2) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(1), (2) ハ二角ノ和ノ正弦及餘弦ヲ各角ノ正弦ト餘弦トデ表ス公式デアツテ,此等ヲ夫々正弦及餘弦ノ加法定理トイフ.

注意　上ノ圖デハ A, B 及 A+B ガスベテ第一象限ニアルヤウニ書イタ,併シ A, B ガドンナ角デアツテモ全ク同樣ニシテ同一ノ結果ヲ得ルモノデアル.

80. 正弦餘弦ノ減法定理

前節ト同樣ニ,圖ニヨツテ類似ノ結果ヲ求メルコトガ出來ル. 併シ前節ノ公式ニ於テ B ノ代リニ −B ト書ケバ直ニ結果ガ得ラレル.

即チ

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$
$$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$

サテ　$\cos(-B)=\cos B,\quad \sin(-B)=-\sin B$

$\therefore$　$\mathbf{\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

又　$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$
$$=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$

$\therefore$　$\mathbf{\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

[例 1]　$\sin 15°$ 及 $\cos 15°$ ヲ求メヨ.

解　$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$$

[例 2]　$\sin A=\frac{4}{5},\quad \sin B=\frac{5}{13}$ ナルトキ $\sin(A+B)$ ヲ求メヨ.

解　$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

サテ　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$\therefore$　$\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\frac{3}{5}$

同様ニ　$\cos B=\pm\sqrt{1-\sin^2 B}=\pm\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\pm\frac{12}{13}$

$\cos A$ ノ複符號ト $\cos B$ ノ複符號トハ全ク無關係ダカラ,此等ノ値ヲ最初ノ公式ノ右邊ニ代入スルトキ四通リノ仕方ガアル. 即チ

$$\sin(A+B)=\frac{4}{5}\cdot\left(\pm\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}$$
$$=\pm\frac{48}{65}+\frac{15}{65}=\underline{\frac{63}{65}}\quad\text{又ハ}\quad\underline{-\frac{33}{65}}$$

或ハ　$\sin(A+B)=\frac{4}{5}\cdot\left(\pm\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}$
$$=\pm\frac{48}{65}-\frac{15}{65}=\underline{\frac{33}{65}}\quad\text{又ハ}\quad\underline{-\frac{63}{65}}$$

例　題

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

① $2\sin(A-30°)=\sqrt{3}\sin A-\cos A$

② $\sin(A-45°)+\cos(A+45°)=0$

③ $\cos(A-45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A+\sin A)$

④ $\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$

⑤ $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

⑥ A, B ハ何レモ正ノ鋭角デアッテ

$\cos A=\frac{8}{17}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ ナルトキ, $\sin(A-B)$ 及 $\cos(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

81. 正切ノ加法減法定理

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

此分數ノ分母分子ヲ $\cos A\cos B$ デ割レバ

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

同樣ニシテ

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

例題

次ノ各關係式ヲ證明セヨ.

1. $\tan(45°\pm A)=\frac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$

2. $\tan 15°=2-\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$?

3. $\tan 75°=2+\sqrt{3}$

82. 二倍角ノ三角函數

$$\sin 2A=\sin(A+A)=\sin A\cos A+\cos A\sin A$$

$$\therefore\quad \sin 2A=2\sin A\cos A$$ 倍角公式

$$\cos 2A=\cos(A+A)=\cos A\cos A-\sin A\sin A$$

$$\therefore\quad \cos 2A=\cos^2A-\sin^2A$$

或ハ $$\cos 2A=2\cos^2A-1$$

或ハ $$\cos 2A=1-2\sin^2A$$

又 $$\tan 2A=\tan(A+A)=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}$$

$$\therefore\quad \tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}$$

$\tan 3A=\tan(2A+A)=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}=\frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}+\tan A}{1-\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}\tan A}=\frac{2\tan A+\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}$

83. 三倍角ノ三角函數

$$\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$$
$$=2\sin A\cos^2A+(1-2\sin^2A)\sin A$$
$$=2\sin A(1-\sin^2A)+\sin A-2\sin^3A$$
$$\therefore\quad \sin 3A=3\sin A-4\sin^3A$$

$$\cos 3A=\cos(2A+A)=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A$$
$$=(2\cos^2A-1)\cos A-2\sin^2A\cos A$$
$$=2\cos^3A-\cos A-2(1-\cos^2A)\cos A$$
$$\therefore\quad \cos 3A=4\cos^3A-3\cos A$$

例題 → $\therefore \tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}$

大切

1. $\cos A=\frac{1}{3}$ ナルトキ $\cos 2A$ 及 $\cos 3A$ ヲ求メヨ.

2. $\sin A=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin 2A$ ヲ求メヨ. 但シ A ハ鈍角デアルトスル.

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

3. $\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)=\cos 2\theta$

4. $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin 2\alpha$

5. $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$

6. $\dfrac{3\cos\theta+\cos 3\theta}{3\sin\theta-\sin 3\theta}=\cot^3\theta$

84. 半角ノ三角函數

第 82 節ノ公式

$$\cos 2A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$$

ニ於テ, A ノ代リニ $\dfrac{A}{2}$ ト置ケバ

$$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1$$

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A,\quad 2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

此二式ヲ邊々割算スレバ

$$\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

コレ cosA ヲ知ツテ $\dfrac{A}{2}$ ノ正弦,餘弦,正切ヲ求メ

ルタメノ公式デアル.

例題

1. sin22°.5 及 cos22°.5 ヲ求メヨ.

2. $\cos A=\dfrac{1}{2}$, $\cos B=\dfrac{1}{3}$ ナルトキ $\cos\dfrac{1}{2}(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ. 但シ A, B ハ何レモ正ノ鋭角デアルトスル.

3. $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$ ヲ證明セヨ.

13.1.13

85. 正弦餘弦ノ積ヲ和ニ,及和ヲ積ニ直ス公式

A+B, A−B ノ正弦,餘弦ヲ與ヘル公式ヲ邊々相加ヘ又ハ相引ケバ直ニ次ノ四式ヲ得ル.

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$$

之カラ

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(B-A)\}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$

コレ正弦,餘弦ノ積ヲ和又ハ差ニ直スタメノ公式デアル.

又初ノ四式ニ於テ $A+B=a$, $A-B=b$ ト置ケバ

$$A=\frac{a+b}{2}, \qquad B=\frac{a-b}{2}$$

$$\therefore \quad \sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a-\sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a-\cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$$

コレ正弦,餘弦ノ和又ハ差ヲ積ニ直スタメノ公式デアル.

例　題

次ノ各式ヲ積ノ形ニ直セ.

1. $\sin 8\theta+\sin 4\theta$　　**2.** $\sin 5\theta-\sin\theta$

3. $\cos 7\theta+\cos 3\theta$　　**4.** $\cos 3a-\cos 8a$

大切

5. $\sin 60^\circ+\sin 20'$

次ノ各式ヲ和又ハ差ノ形ニ直セ.

6. $\sin 3x \cos 5x$　　**7.** $\sin 4a \sin a$

8. $\cos\frac{5\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$　　**9.** $2\cos 45^\circ \sin 15^\circ$

10. $2\cos 10^\circ \sin 50^\circ$

雜　　題

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

1. $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

2. $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

3. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$

4. $\sin(30°+A)+\sin(30°-A)=\cos A$

5. $\sin(60°+A)-\cos(30°+A)=\sin A$

6. $\sin(45°+\alpha)\sin(45°-\alpha)=\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

7. $\tan(45°+A)=2\tan 2A+\tan(45°-A)$

8. $\sin A+\sin(A+120°)+\sin(A-120°)=0$

9. $\cos^2\theta+\cos^2(60°+\theta)+\cos^2(60°-\theta)=\dfrac{3}{2}$

10. $4\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)=\sin 3A$

11. $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$

12. $\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)$
$$+\cos C\sin(A-B)=0$$

13. $\cos A\pm\sin A=\sqrt{2}\cos(45°\mp A)=\sqrt{2}\sin(45°\pm A)$

14. $\tan(A+60°)\tan(A-60°)=\dfrac{1+2\cos 2A}{1-2\cos 2A}$

15. $\dfrac{\sin A-\sin 3A+\sin 5A}{\cos A-\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A$

16. $\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A=4\cos A\cos 2A\cos 4A$

17. $\sin 2A+\sin 4A+\sin 6A=\dfrac{\sin 4A\sin 3A}{\sin A}$

18. $\dfrac{1\pm\sin A}{1\mp\sin A}=\tan^2\left(45°\pm\dfrac{A}{2}\right)$

[例]　$\sin 18°$ ヲ求メヨ.

解　　$\sin 36°=\cos(90°-36°)=\cos 54°$

故ニ今 $18°$ ヲ θ デ表セバ

$$\sin 2\theta=\cos 3\theta$$

卽チ　　$2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

サテ $\cos\theta=\cos 18°\neq 0$ ダカラ,此方程式ノ兩邊ヲ $\cos\theta$ デ割レバ

$$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3=4(1-\sin^2\theta)-3$$

卽チ　　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$

$\therefore\ \sin\theta=\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　(負ノ根ハ棄テル)

次ノ各等式ヲ證明セヨ.

19. $\cos 36°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

20. $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ = 0$

21. $\tan 50^\circ + \cot 50^\circ = 2\sec 10^\circ$

22. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

$A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次ノ各等式ヲ證明セヨ. (23, 24)

23. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

24. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

25. $\frac{\cos 3A - m\sin 5A - \cos 7A}{\sin 3A + m\cos 5A - \sin 7A}$ ノ値ハ m ニ無關係ナルコトヲ證明セヨ.

次ノ各方程式ニ適合スル 180° 以內ノ正ノ角ヲ求メヨ.

26. $\cos x = \cos 7x$　　27. $\sin 2x = \cos 3x$

28. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

次ノ二式カラ θ ヲ消去セヨ.

29. $a\sin\theta + b\cos\theta = c,\quad a'\sin\theta + b'\cos\theta = c'$

30. $\tan\theta + \sin\theta = m,\quad \tan\theta - \sin\theta = n$

第六篇

三角函數ノ應用

第一章　三角形ノ性質

本章デハ三角形ノ邊ニモ角ニモ符號ヲ考ヘナイ,卽チスベテ其絕對値ニ就テ論ズルコトトスル.

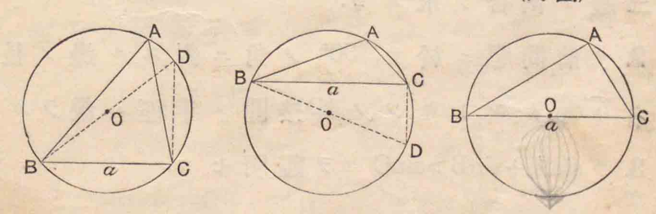
86. 正弦ノ公式

$\triangle ABC$ ノ外接圓ヲ畫キ,ソノ一頂點例ヘバ B ヲ通ル直徑 BD ヲ引キ, D, C ヲ結べバ $\angle BCD$ ハ直角デアル(甲圖及乙圖).

ソコデ外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ

$$a = BD.\sin D = 2R.\sin D$$

(甲圖)　(乙圖)　(丙圖)



サテ甲圖デハ　$\angle D = \angle A$

乙圖デハ　$\angle D = 180^\circ - \angle A$

故ニドノ場合デモ　$\sin D=\sin A$

$$\therefore \boxed{a=2R.\sin A}$$

丙圖デハ　$A=90^\circ$　$\therefore \sin A=1$

而シテ　$a=2R$

故ニヤハリ

同ジ理デ

$$\boxed{\begin{aligned} a&=2R.\sin A\\ b&=2R.\sin B\\ c&=2R.\sin C\end{aligned}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}(=2R)}$$

即チ　三角形ノ邊ハソノ對角ノ正弦ニ比例スル.

此式ヲ三角形ニ關スル**正弦ノ公式**トイフ.

例　題

1. 三角形ノ二角ガ 30° 及 45° ナルトキ,ソノ三邊ノ割合ヲ求メヨ.

2. 前問題ニ於テ, 30° ノ角ニ對スル邊ノ長サガ 5 cm ナルトキ,ソノ外接圓ノ半徑ハ幾ラカ.

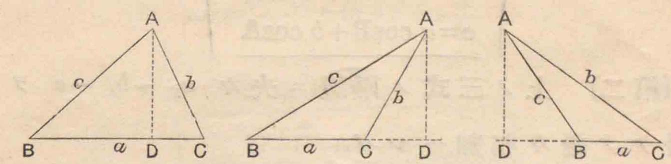
3. $\sin A+\sin B>\sin C$　ヲ證明セヨ.

87. 餘弦ノ公式

(第一)　$\triangle ABC$ ノ頂點 A カラ BC ニ垂線 AD

ヲ引ケバ

(甲圖)　(乙圖)　(丙圖)



甲圖デハ　$BD=AB\cos B$,　$CD=AC\cos C$

$$BC=BD+CD=AB\cos B+AC\cos C$$

即チ　$a=b\cos C+c\cos B$

乙圖デハ　$BD=AB\cos B$,　$CD=AC\cos(180^\circ-C)$

$$BC=BD-CD=AB\cos B+AC\cos C$$

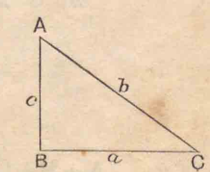
即チ　$a=b\cos C+c\cos B$

丙圖デハ　$CD=AC\cos C$,　$BD=AB\cos(180^\circ-B)$

$$BC=CD-BD=AC\cos C+AB\cos B$$

即チ　$a=b\cos C+c\cos B$

又 B ガ直角ナラバ



$$a=b\cos C$$

$$\cos B=\cos 90^\circ=0$$

$$\therefore a=b\cos C+c\cos B$$

C ガ直角ノトキモ同樣デアル.

故ニ總テノ場合ニ於テ

$$
\text{同樣ニ}\quad \left|\begin{array}{l} \mathbf{a=b\cos C+c\cos B} \\ \mathbf{b=c\cos A+a\cos C} \\ \mathbf{c=a\cos B+b\cos A} \end{array}\right|
$$

（第二）　上ノ三式ノ兩邊ニ夫々 a, $-b$, $-c$ ヲ掛ケテ邊々相加ヘレバ

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$$

$$
\therefore\quad \text{同樣ニ}\quad \left|\begin{array}{ll} \mathbf{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A} & \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \mathbf{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B} & \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \mathbf{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C} & \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{array}\right|
$$

88. 正切ノ公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{b+c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

サテ　$A+B+C=180°$　$\therefore\ \frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$

$$\therefore\quad \cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2},\qquad \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad (1)\quad a\sin\frac{B-C}{2}=(b-c)\cos\frac{A}{2}$$

$$(2)\quad a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$$

(1), (2) ヲ邊々割算シテ

$$\boxed{\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}}$$

二辺 and a b. 夾角 α ニヨツテ他ノ一辺及ビ二角ヲ計算スル法

89. 三邊デ角ヲ與ヘル公式

餘弦ノ第二公式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

カラ

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

ヲ得ル．併シ此式ハ對數計算ニ適シナイ．

ソコデ

$$\boxed{\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}}\quad \boxed{\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}}\quad \text{〔第 84 節〕}$$

ノ中ニ上ノ cosA ノ値ヲ代入スレバ

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

今三角形ノ周ノ半分ヲ s トスレバ

$$a+b+c=2s \qquad b+c-a=2(s-a)$$

$$a-b+c=2(s-b) \qquad a+b-c=2(s-c)$$

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad \text{(負ノ値ハ棄テル)}$$

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \text{(同　上)}$$

$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

此二式ヲ邊々割算シテ

$$\tan\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

同様ニ

$$\tan\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

例　　題

次ノ各等式ヲ證明セヨ.

1. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

2. $\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{b}{a}$

3. $\frac{a\sin C}{b-a\cos C}=\tan A$

4. $c(\cos A+\cos B)=2(a+b)\sin^2\frac{C}{2}$

5. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$

6. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{s-a}{s}$

7. $\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}=\frac{\tan B}{\tan C}$

8. $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

90. 三角形ノ面積

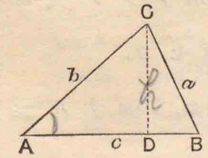
二辺ト夾角ニヨツテ面積

△ABC ノ頂點 C カラ AB ニ垂線 CD ヲ引キ, 面積ヲ S トスレバ

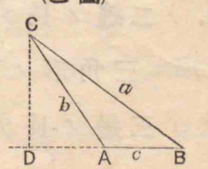
$$S=\frac{1}{2}AB.CD$$

$b\sin A$

(甲圖)



(乙圖)



サテ甲圖デハ　CD $=b\sin A$

乙圖デハ　CD $=b\sin(180°-A)=b\sin A$

故ニドノ場合デモ

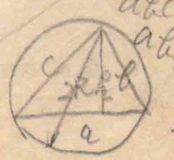
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$bc=h2R$

$abc=ah2R$

$abc=2S2R$

$=4SR$



即チ　三角形ノ面積ハソノ任意二邊ノ積ニソノ夾ム角ノ正弦ヲ掛ケタモノノ半分ニ等シイ.

注意　上ノ式カラ

$$S=\frac{1}{2}bc.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ ヘロンノ公式

ヲ得ル. 此ハ平面幾何デ示シタ三角形ノ三邊ヲ以テ面積ヲ與ヘル公式デアル.

例　題

1. 二邊ノ長サガ $17\,m$, $15\,m$ デソノ夾ム角ガ $60°$ ナル三角形ノ面積ヲ計算セヨ.

2. 三邊ノ長サガ $13\,m$, $14\,m$, $15\,m$ ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ.

次ノ各等式ヲ證明セヨ.

3. $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$

4. $S=\dfrac{abc}{4R}$　但シ R ハ外接圓ノ半徑.

問　題

次ノ各等式ヲ證明セヨ.

1. $b+c-a=(b+c)\cos A-(c-a)\cos B+(a-b)\cos C$

2. $c^2=(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}$

3. $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$　$2R(\sin(B+C)\cos(B-C))=2R\sin A\cos(B-C)$

4. B=2C ナルトキ次ノ二式ヲ證明セヨ.

$$\cos C=\frac{b}{2c},\qquad b^2-c^2=ac$$

5. $a\cos B=b\cos A$ ナラバ三角形ハ二等邊ナルコトヲ證明セヨ.

6. $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$ ナラバ三角形ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ.

7. $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sin^2A}{\sin^2B}$ ナラバ三角形ハ二等邊ナルカ又ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ.

8. △ABC ノ頂點 A ヲ通ル中線ノ長サハ $\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$ ナルコトヲ證明セヨ.

9. △ABC ノ頂角 A ノ二等分線ノ長サハ $\dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$ ナルコトヲ證明セヨ.

10. 三角形ノ三邊ノ長サガ夫々 $\underset{a}{2x+3}$, $\underset{b}{x^2+3x+3}$, $\underset{c}{x^2+2x}$ ナルトキ,ソノ一角ガ 120° ナルコトヲ證明セヨ.

11. a, b, c ガ等差級數ヲナサバ $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ モ亦等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ.

12. A, B, C ガ等差級數ヲナサバ

$$\frac{3}{a+b+c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

13. 正多角形ノ邊數ヲ n, 一邊ヲ a, 面積ヲ S, 內接圓ノ半徑ヲ r, 外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ

$$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360°}{n}=nr^2\tan\frac{180°}{n}=\frac{1}{4}na^2\cot\frac{180°}{n}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

第二章 三角函數ノ對數表ノ用法

91. 三角函數ノ對數表

實用上デハ或角ノ三角函數ヲ直接ニ用ヒルコトハ稀デアツテ多クハ其對數ヲ用ヒル.

本書ノ別冊第4—9頁ニ 0° カラ 90° マデノ 10′ オキノ角ノ正弦,餘弦,正切,餘切ノ四桁ノ對數表(四捨五入シテ小數第四位マデ求メタモノ)ヲ載セテアル.

該表ニハ 45° 以下ノ角ニ就テハ角ノ値ヲ左ニ三角函數ノ名ヲ上ニ掲ゲ, 45° 以上ノ角ニ就テハ角ヲ右ニ三角函數ノ名ヲ下ニ掲ゲテアル.

注意 0° カラ 90° マデノ間,角ガ增スニ從ツテソノ正弦及正切(正ノ字ノ附クモノ,歐語ニcoノ附カヌモノ) ノ對數ハ增シ,餘弦及餘切 (餘ノ字ノ附クモノ,歐語ニcoノ附クモノ) ノ對數ハ減ル. (第67節參照,正切ガ增スカラソノ逆數タル餘切ハ減ル)

92. 與ヘラレタ三角函數ノ對數ヲ求メルコト

角ノ値ガ表ノ中ニアルモノハ表ニ就テ直ニ其三角函數ノ對數ヲ求メルコトガ出來ル.

表ノ中ニナイ場合ニハ數ノ對數ヲ求メルトキト同樣ニ比例挿入法ニヨル.

[例 1]　$\log\sin 17°46'$ ヲ求メヨ.

表ニ就テ　$\log\sin 17°40' = \bar{1}.4821$　表差 40

因テ數ノ對數ノ場合ニ倣ヒ表中ノ比例部分ヲ利用シテ次ノヤウニ計算スル.

$$\begin{array}{r} \log\sin 17°40' = \bar{1}.4821 \\ 6' \cdots\cdots\cdots 24 \\ \hline \log\sin 17°46' = \bar{1}.4845 \end{array}$$

[例 2]　$\log\tan 63°34'$ ヲ求メヨ.

表カラ　$\log\tan 63°30' = 0.3023$　表差 31

(表差ハ tan ト cot トニ共通ダカラ此場合ニハ通差ト書イテアル)

因テ次ノヤウニ計算スル.

$$\begin{array}{r} \log\tan 63°30' = 0.3023 \\ 4' \cdots\cdots\cdots 124 \\ \hline \log\tan 63°34' = 0.3035 \end{array}$$ 〔四捨五入〕

[例 3]　$\log\cos 38°25'$ ヲ求メヨ.

(角ガ增セバ cos ハ減ルコトニ注意セヨ)

$$\begin{array}{r} \log\cos 38°20' = \bar{1}.8945 \\ 5' \cdots\cdots -5 \\ \hline \log\cos 38°25' = \bar{1}.8940 \end{array}$$

[例 4]　$\log\cot 68°57'$ ヲ求メヨ.

$$\begin{array}{r} \log\cot 68°50' = \bar{1}.5879 \\ 7' \cdots\cdots -259 \\ \hline \log\cot 68°57' = \bar{1}.5853 \end{array}$$ 〔四捨五入〕

例　題

表ニヨツテ次ノ各三角函數ノ對數ヲ求メヨ.

1. $\sin 83°26'$　　2. $\cos 22°22'$

3. $\tan 35°27'$　　4. $\cot 56°34'$

5. $\cos 43°34'$

3(Y)

93. 三角函數ノ對數ヲ知ツテ其角ヲ求メルコト

[例 1]　$\log\sin x = \bar{1}.8230$ カラ x ヲ求メヨ.

表ノ中デ,與ヘラレタ對數ヨリ小サクテ之ニ最モ近イモノヲ求メル. 乃チ

$\log\sin 41°40' = \bar{1}.8227$　表差 14

因テ對數ヲ知ツテ眞數ヲ求メル場合ト同樣

ニ,表中ノ比例部分ヲ利用シテ次ノヤウニ計算スル.

$$\begin{array}{rl} \log\sin x=\bar{1}.8230 & \\ 27\cdots\cdots 41^\circ 40' & \\ 3\cdots\cdots\cdots\cdots 2' & \text{〔四捨五入〕} \\ \hline x=41^\circ 42' & \end{array}$$

[例 2] $\log\tan x=0.4692$ カラ x ヲ求メヨ.

$$\begin{array}{r} \log\tan x=0.4692 \\ 71\cdots\cdots 71^\circ 10' \\ 21\cdots\cdots\cdots\cdots 5' \\ \hline x=71^\circ 15' \end{array}$$

[例 3] $\log\cos x=\bar{1}.8550$ カラ x ヲ求メヨ.

表ノ中デ,與ヘラレタ對數ヨリ大キクテ之ニ最モ近イモノヲ求メル. 乃チ

$\log\cos 44^\circ 10'=\bar{1}.8557$ 表差 12

因テ次ノヤウニ計算スル.

$$\begin{array}{rl} \log\cos x=\bar{1}.8550 & \\ 57\cdots\cdots 44^\circ 10' & \\ -7\cdots\cdots\cdots\cdots 6' & \text{〔四捨五入〕} \\ \hline x=44^\circ 16' & \end{array}$$

[例 4] $\log\cot x=\bar{1}.1357$ カラ x ヲ求メヨ.

$$\begin{array}{r} \log\cot x=\bar{1}.1357 \\ 85\cdots\cdots 82^\circ 10' \\ -28\cdots\cdots\cdots\cdots 3' \\ \hline x=82^\circ 13' \end{array}$$

例題

表ニヨツテ次ノ各式カラ x ヲ求メヨ.

1. $\log\sin x=\bar{1}.7865$
2. $\log\cos x=\bar{1}.8705$
3. $\log\tan x=0.0833$
4. $\log\cot x=0.8720$
5. $\log\tan x=\bar{1}.6666$

第三章　三角形ノ解法

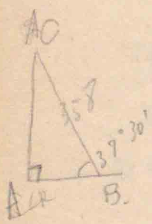
直角三角形ノ解法

94. 斜邊ト一鋭角トヲ知ル場合

[例] 斜邊 $a=358\,m$, 一鋭角 $B=37°30'$ ヲ與ヘテ C, b, c ヲ求メヨ.

解　$C=90°-B=90°-37°30'=52°30'$

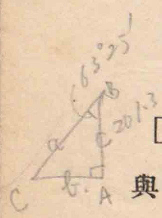
$$b=a\sin B, \qquad c=a\cos B$$



$\log a=2.5539$
$\log \sin B=\bar{1}.7844$
$\log b=2.3383$
65…217.
18……9
$b=217.9\,m$

$\log a=2.5539$
$\log \cos B=\bar{1}.8995$
$\log c=2.4534$
3…284.
1………1
$c=284.1\,m$

95. 直角ノ一邊ト一鋭角トヲ知ル場合



[例] 直角ノ一邊 $c=201.3\,m$, 一鋭角 $B=63°25'$ ヲ與ヘテ C, a, b ヲ求メヨ.

解　$C=90°-B=90°-63°25'=26°35'$

$$a=\frac{c}{\cos B}, \qquad b=c\tan B$$

$\log 201 =2.3032$
3………66
$\log c=2.3039$

$\log \cos 63°20'=\bar{1}.6521$
5′……−13
$\log \cos B=\bar{1}.6508$

$\log \tan 63°20'=0.2991$
5′……16
$\log \tan B=0.3007$

$\log c=2.3039$
$-\log \cos B=0.3492$
$\log a=2.6531$
22……449.
9………9
$a=449.9\,m$

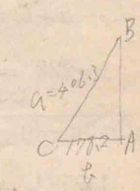
$\log c=2.3039$
$\log \tan B=0.3007$
$\log b=2.6046$
2……402.
4………4
$b=402.4\,m$

96. 斜邊ト他ノ一邊トヲ知ル場合

[例] 斜邊 $a=406.5\,m$, 一邊 $b=178.2\,m$ ヲ與ヘテ B, C, c ヲ求メヨ.

第一解　$\sin B=\dfrac{b}{a}$, $C=90°-B$

$$c=a\cos B$$



$\log 178 =2.2504$
2………5
$\log b=2.2509$

$\log 406 =2.6085$
5………6
$\log a=2.6091$

$\log b=2.2509$
$-\log a=3.3909$
$\log \sin B=\bar{1}.6418$
$B=26°$
$\therefore\ C=64°$

$\log a=2.6091$
$\log \cos B=\bar{1}.9537$
$\log c=2.5628$
3…365.
5………4
$c=365.4\,m$

第二解 $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos}{1+\cos}}$

$C=\frac{C}{2}\times 2,\quad$ B

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{}$

注意 第二解デハ c ヲ

求メナクテモ $\frac{C}{2}$ ヲ計算ス

ト $a+b$ トノ對數デ間ニ合

稍簡便デアル.

$a-b=228.3$

$a+b=584.7$

$$\begin{array}{r} \log 228\ =2.3579 \\ 3\cdots\cdots 6 \\ \hline \log(a-b)=2.3585 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log 584\ =2.7664 \\ 7\cdots\cdots 6 \\ \hline \log(a+b)=2.7670 \end{array}$$

二邊ヲ知ル場合

$=150\,m,\ c=372.2\,m$ ヲ與ヘテ

$C=90^\circ-B$

或ハ $a=\frac{c}{\cos B}$

$$\begin{array}{r} \log b=2.1761 \\ -\log c=\bar{3}.4293 \\ \hline \log\tan B=\bar{1}.6054 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28\cdots\cdots 21^\circ 50' \\ 26\cdots\cdots\cdots 7' \\ \hline B=21^\circ 57' \end{array}$$

$\therefore\ C=68^\circ 3'$

$$\begin{array}{r} \log b=2.1761 \\ -\log\sin B=0.4274 \\ \hline \log a=2.6035 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\cdots 401. \\ 4\cdots\cdots 4 \\ \hline a=401.4\,m \end{array}$$

題

直角三角形ヲ解ケ. 但シ

$59^\circ 30'$

$63^\circ 45'$

97. 直角ヲ夾ム二邊ヲ知ル場合

問　直角ノ二邊 $b=150\,m$, $c=372.2\,m$ ヲ與ヘテ

ヲ求メヨ.

$$\tan B=\frac{b}{c},\qquad C=90^\circ-B$$

$$a=\frac{b}{\sin B}\quad 或ハ\quad a=\frac{c}{\cos B}$$

$\log b=2.1761$
$-\log c=\bar{3}.4293$
$\log\tan B=\bar{1}.6054$
$28\ldots\ldots21^\circ50'$
$26\ldots\ldots\ldots7'$
$B=21^\circ57'$

$\therefore\quad C=68^\circ3'$

$\log b=2.1761$
$\log\sin B=0.4274$
$\log a=2.6035$
$1\ldots401.$
$4\ldots\ldots\ldots4$
$a=401.4\,m$

解ケ．但シ

第二解　$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

$C=\frac{C}{2}\times2,\qquad B=90^\circ-C$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a-b)(a+b)}$ ヲ求メル

注意　第二解デハ c ヲ

求メナクテモ $\frac{C}{2}$ ヲ計算スルト

ト $a+b$ トノ對數デ間ニ合

稍簡便デアル.

$a-b=228.3$
$a+b=584.7$
$\log228\ =2.3579$
$3\ldots\ldots\ldots.6$
$\log(a-b)=2.3585$
$\log584\ =2.7664$
$7\ldots\ldots\ldots$
$\log(a+b)=2.76$

3. $b=100\,m,\quad C=13°$

4. $c=375\,m,\quad B=43°15'$

5. $a=327\,m,\quad b=151\,m$

6. $b=3.587\,km,\quad c=2.167\,km$

一般三角形ノ解法

98. 一邊ト二角トヲ知ル場合

一邊 a 及二角 B, C ガ與ヘラレタトスレバ

$$A+B+C=180°$$

$$\therefore\quad \mathbf{A=180°-(B+C)}$$

ニヨツテ A ヲ求メ,次ニ正弦ノ公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore\quad b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

ニヨツテ b, c ヲ求メル.

[例] $a=485.7\,m,\ B=78°43',\ C=66°28'$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

解 $\log 485 = 2.6857$
$\quad 7\cdots\cdots 6$
$\log a = 2.6863$

$\log\sin 78°40' = \bar{1}.9914$
$\quad 3'\cdots\cdots 9$
$\log\sin B = \bar{1}.9915$

$\log\sin 34°40' = \bar{1}.7550$
$\quad 9'\cdots\cdots 162$
$\log\sin A = \bar{1}.7566$

$\log\sin 66°20' = \bar{1}.9618$
$\quad 8'\cdots\cdots 48$
$\log\sin C = \bar{1}.9623$

$180°$
$-78°43'$
$-66°28'$
$A=34°49'$

$\log a = 2.6863$
$\log\sin B = \bar{1}.9915$
$-\log\sin A = 0.2434$
$\log b = 2.9212$
$b=834.0\,m$

$\log a = 2.6863$
$\log\sin C = \bar{1}.9623$
$-\log\sin A = 0.2434$
$\log c = 2.8920$
$\quad 15\cdots 779.$
$\quad 5\cdots\cdots 8$
$c=779.8\,m$

99. 二邊トソノ夾角トヲ知ル場合

二邊 b, c 及ソノ夾ム角 A ガ與ヘラレタトスレバ

A ニヨツテ B+C ヲ知ル

$$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$$

$\tan\frac{B-C}{2}=$

B−C ヲ知ル

ニヨツテ $\frac{B+C}{2}$ ヲ求メ,次ニ正切ノ公式 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

ニヨツテ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求メ,因テ

$B-C=19°$
$B+C=180°-A$

$$B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},\quad C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}$$

ニヨツテ B, C ヲ求メル.

次ニ $$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$ 〔第88節(2)ノ變形〕

ニヨツテ a ヲ求メル.

注意 a ヲ計算スルトキ公式

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}\quad 又ハ\quad a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

ヲ用ヒテモイヽケレド,上ノ公式ヲ用ヒル方ガ b 又ハ c ノ對數ヲ取ル必要ガナク前ニ既ニ求メタ $b+c$ ノ對數デ間ニ合フカラ便利デアル.

[例] $b=432\,m$, $c=308.5\,m$, $A=89°35'$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

解

$b=432$
$c=308.5$

$b+c=740.5$
$b-c=123.5$

$\log 740=2.8692$
$5\cdots\cdots3$
$\log(b+c)=2.8695$

$\log 123=2.0899$
$5\cdots\cdots175$
$\log(b-c)=2.0917$

$\frac{A}{2}=44°47'.5$

$\log(b-c)=2.0917$
$-\log(b+c)=\bar{3}.1305$
$\log\cot\frac{A}{2}=0.0031$
$\log\tan\frac{B-C}{2}=\bar{1}.2253$

$36\cdots9°30'$
17
$\boxed{154\cdots\cdots2'}$
$16\cdots\cdots2$

$\frac{B-C}{2}=9°32'.2$

180°
89°35′
90°25′

$\log\cot 44°40'=0.0051$
$7'\cdots\cdots-182$
$5\cdots\cdots-13$
$\log\cot\frac{A}{2}=0.0031$

$\log\sin 44°40'=\bar{1}.8469$
$7'\cdots\cdots91$
$5\cdots\cdots65$
$\log\sin\frac{A}{2}=\bar{1}.8479$

$\log\cos 9°30'=\bar{1}.9940$
$2'.2\cdots\cdots-44$
$\log\cos\frac{B-C}{2}=\bar{1}.9940$

$B-C=19°4'$
$B+C=90°25'$
$2B=109°29'$

$\frac{B+C}{2}=45°12'.5$

$\therefore\ B=54°44'.7$
$C=35°40'.3$

$\log(b+c)=2.8695$
$\log\sin\frac{A}{2}=\bar{1}.8479$
$-\log\cos\frac{B-C}{2}=0.0060$
$\log a=2.7234$
$26\cdots528.$
$8\cdots\cdots9$
$a=528.9\,m$

100. 三邊ヲ知ル場合

三邊 a, b, c ガ與ヘラレタトキハ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)^2}}$$

ソコデ $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=r$ ト置ケバ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$$

$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{}$

同様ニ

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\quad \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$$

$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{}$

ニヨツテ $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ ヲ求メ,次ニ

$$\frac{A}{2}\times2=A,\quad \frac{B}{2}\times2=B,\quad \frac{C}{2}\times2=C$$

ニヨツテ A, B, C ヲ求メル.

［例］ $a=506.4\,m$, $b=539.3\,m$, $c=490.7\,m$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

解

$$\begin{array}{r} a=506.4 \\ b=539.3 \\ c=490.7 \\ \hline 2)1536.4 \\ \hline s=768.2 \end{array}$$

$$s-a=261.8$$
$$s-b=228.9$$
$$s-c=277.5$$

$$\begin{array}{rl} \log 261 & =2.4166 \\ 8\cdots\cdots & 136 \\ \hline \log(s-a) & =2.4180 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 228 & =2.3579 \\ 9\cdots\cdots & 171 \\ \hline \log(s-b) & =2.3596 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 277 & =2.4425 \\ 5\cdots\cdots & 75 \\ \hline \log(s-c) & =2.4433 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 768 & =2.8854 \\ 2\cdots\cdots & 1 \\ \hline \log s & =2.8855 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log(s-a)=2.4180 \\ \log(s-b)=2.3596 \\ \log(s-c)=2.4433 \\ -\log s=\bar{3}.1145 \\ \hline 2)4.3354 \\ \hline \log r=2.1677 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log r=2.1677 \\ -\log(s-a)=\bar{3}.5820 \\ \hline \log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.7497 \\ \frac{A}{2}=29^\circ20' \\ \therefore\ A=58^\circ40' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log r=2.1677 \\ -\log(s-b)=\bar{3}.6404 \\ \hline \log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.8081 \\ 70\cdots32^\circ40' \\ \hline 11\cdots\cdots4' \\ \hline \frac{B}{2}=32^\circ44' \\ \therefore\ B=65^\circ28' \end{array}$$

驗　算

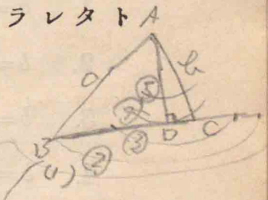
$$\begin{array}{r} A=58^\circ40' \\ B=65^\circ28' \\ C=55^\circ52' \\ \hline 180^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log r=2.1677 \\ -\log(s-c)=\bar{3}.5567 \\ \hline \log\tan\frac{C}{2}=\bar{1}.7244 \\ 26\cdots27^\circ50' \\ \hline 18\cdots\cdots6' \\ \hline \frac{C}{2}=27^\circ56' \\ \therefore\ C=55^\circ52' \end{array}$$

注意　本例デハ求メタ三ツノ角ノ和ガ丁度 180° トナツタケレドモ,通常ハ幾ラカ違フモノデアル.

101. 二邊トソノ一ツニ對スル角トガ與ヘラレタ場合

二邊 a, b 及 a ニ對スル角 A ガ與ヘラレタトスレバ,先ヅ



$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

ニヨツテ B ヲ求メ,次ニ

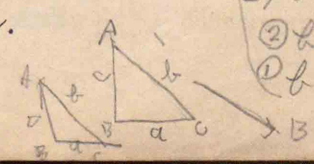
$$C=180^\circ-(A+B)$$

ニヨツテ C ヲ求メ,終リニ

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

ニヨツテ c ヲ求メル.

bノ長サ　解
B<90°
⑤ b<c sinB ナシ
④ b=c sinB 直角△
③ c>b>c sinB 二ツ
② b=c 二等辺△
① b>c 一ツ



B≧90° b>c 解一ツ

注意 1. $\frac{b\sin A}{a}<1$ ナルトキハ初ノ式カラBノ値トシテ一鋭角(對數表デ求メラレルモノ)ト其補角ナル一鈍角トヲ得ル. ソノ各ニ就テ$A+B$ガ$180°$ヨリ小サイトキハ第二ノ式カラ得ルCノ値モ亦二通リアル,從テcモ亦二通リアル. 即チ此場合ニハ二ツノ解ヲ得ル.

注意 2. コヽニ述ベタ三角形ノ解法ハ殆ド實用ニ供サレナイカラ,數ニ就テノ實例ヲ省クコトニスル.

例題

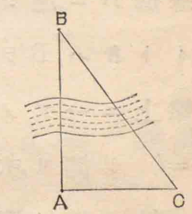
次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

1. $a=874\,m,\quad B=50°16',\quad C=66°0'$
2. $b=764.3\,m,\quad A=76°38',\quad B=18°15'.6$
3. $b=327.6\,m,\quad c=208.1\,m,\quad A=56°37'.6$
4. $b=408\,m,\quad c=497.6\,m,\quad A=65°6'$
5. $a=745.1\,m,\quad b=937.4\,m,\quad c=812.5\,m$
6. $a=325\,m,\quad b=416.7\,m,\quad c=496.3\,m$

第四章 測量上ノ應用

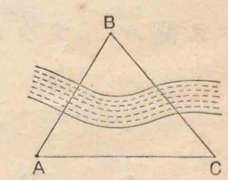
102. 水平面上ニ於テ達シ得ル點カラ達シ得ラレナイ點マデノ距離ヲ測ルコト

Aヲ達シ得ル觀測點,Bヲ達シ得ラレナイ測點トスル.



AカラABニ垂直ナル方向ニ基線ヲ引ケルトキハ其方向ニ任意ノ基線ACヲ測リ,次ニCニ於テ$\angle ACB$ヲ測レバ

$$AB=AC\tan C$$



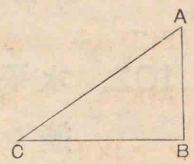
AカラABニ垂直ナル方向ニ基線ヲ引ケナイトキハ,Aカラ任意ノ方向ニ基線ACヲ設ケテ之ヲ測リ,次ニA及Cニ於テ$\angle BAC$及$\angle BCA$ヲ測ル. サウスレバ

$$B=180°-(A+C)$$

$$AB=\frac{AC\sin C}{\sin B}$$

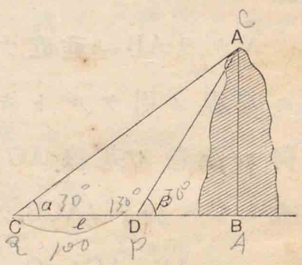
103. 直立體ノ高サヲ測ルコト

直立體ヲ AB トスル.



其基底 B ニ達シ得ル場合ニハ, B ヲ通ル水平面上ニ任意ノ基線 BC ヲ測リ, 次ニ C ニ於テ ∠ACB ヲ測レバ

$$AB = BC \tan C$$



基底 B ニ達シ得ラレナイトキハ, B ヲ通ル水平線上ニ一ツノ基線 CD$=l$ ヲ測リ, 次ニ C 及 D ニ於テ A ノ高度 α 及 β ヲ測ル. サウスレバ △ACD ニ於テ

$$\frac{CD}{\sin A} = \frac{AD}{\sin C}$$

$$\therefore \quad AD = \frac{CD \sin C}{\sin A} = \frac{l \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{AB} = AD \sin\beta = \frac{\boldsymbol{l \sin\alpha \sin\beta}}{\boldsymbol{\sin(\beta-\alpha)}}$$

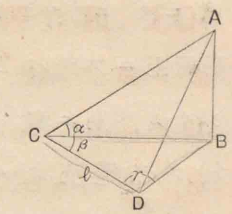
$\frac{CP}{\sin 10°} = \frac{100}{\sin 20}$

$CP = \frac{100 \sin 10°}{\sin 20}$

$CA = \frac{100 \sin 10° \sin 30°}{\sin 20}$

若シ B ヲ通ル水平線上ニ基線ヲ取レナイトキハ, B ヲ通ル水平面上ニ任意ノ方向ニ基線

CD ヲ設ケテ其長サ l ヲ測リ, 次ニ C ニ於テ A ノ高度 α 及 ∠BCD$=\beta$ ヲ測リ, 又 D ニ於テ ∠BDC$=\gamma$ ヲ測ル. サウスレバ △BCD ニ於テ



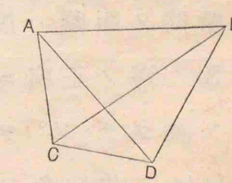
$$B = 180° - (\beta+\gamma)$$

$$BC = \frac{l \sin\gamma}{\sin B}$$

$$\therefore \quad \mathbf{AB} = BC \tan\alpha = \frac{\boldsymbol{l \sin\gamma \tan\alpha}}{\boldsymbol{\sin B}}$$

104. 達シ得ラレナイ二點間ノ距離ヲ測ルコト

A, B ヲ達シ得ラレナイ二點トスル.



適宜ノ場所ニ基線 CD ヲ測リ, 次ニ C ニ於テ ∠ACD 及 ∠BCD ヲ測リ, D ニ於テ ∠ADC 及 ∠BDC ヲ測ル.

サウスレバ △ACD 及 △BCD ニ於テ夫々二角ト一邊トガ分ツテ居ルカラ AC 及 BC ヲ計算スルコトガ出來ル.

次ニCニ於テ$\angle ACB$ヲ測ル. (A, B, C, Dガ同一平面上ニアラバ$\angle ACB$ハ$\angle ACD$ト$\angle BCD$トノ差ニ等シイカラ別ニ測ルニ及バナイ)サウスレバ$\triangle ACB$ニ於テ二邊及ソノ夾角ガ分ツテ居ルカラABヲ求メルコトガ出來ル.

例題

1. 塔ノ基底ト同一水平線上ニアル二點ニ於テ塔頂ノ高度ヲ測ツテ夫々$15°, 75°$ヲ得タ,而シテ此二點間ノ距離ハ$100\,m$デアツタ. 此塔ノ高サハ幾ラカ.

2. 海面上高サ$50\,m$ノ崖ノ上ニ観測者ガアツテ自己ノ位置ヲ含ム鉛直面内ニアル二船ノ俯角ヲ測ツテ夫々$45°, 30°$ヲ得タトイフ. コノ二船間ノ距離ハ幾ラカ.

3. 塔ノ正南ニアル一點Aニ於テ塔頂ノ仰角ヲ測ツテ$45°$ヲ得タ,又塔ノ正東ニアル一點Bニ於テ其仰角ヲ測ツテ$60°$ヲ得タ,而シテABノ距離ハ$150\,m$デアルトイフ. 塔ノ高サハ幾ラカ.

4. 正北ノ方向ニ走ツテキル船カラ二ツノ

燈臺ヲ北東及北$22°30'$東ノ方向ニ見テ,ソレカラ20浬走ツタ後再ビ二燈臺ヲ見タラ何レモ正東ノ方向ニ見エタトイフ. 二燈臺間ノ距離ヲ求メヨ.

註 北東トハ北ト東トノ眞中卽チ北カラ東ノ方ヘ$45°$寄ツタ方向ノコト,又北$22°30'$東トハ北カラ東ノ方ヘ$22°30'$寄ツタ方向ノコトデアル. 他モ之ニ倣フ.

方位(卽チ方向)ヲ書キ表ストキ東,西,南,北ノ代リニ夫夫E, W, S, Nナル文字ヲ用ヒルコトガアル,例ヘバ上ニ記シタ方位ヲ夫々N.E及N22°30′Eト書クノ類デアル.

5. 或人北及北$30°$西ノ方向ニ二物體A, Bヲ見テソレカラ北西ノ方向ニ$1\,km$進ンダトキA, Bノ方向ハ夫々北東及正東ニナツタトイフ. A, B間ノ距離ヲ求メヨ.

問題

1. 高サlナル塔ノ上ニ旗竿ガ立テヽアル. 塔ノ基點ト同一水平面上ニアル一點デ塔ヲ見ル角ヲ測ツテα,旗竿ヲモ共ニ見ル角ヲ測ツテβヲ得タ. 旗竿ノ長サヲ求メヨ.

2. 地上ノ一點ニ於テ山頂ニ立ツテ居ル高サ h ナル塔ノ頂ト基底トノ仰角ヲ測ツテ夫々 α, β ヲ得タ. 因テ山ノ高サヲ求メヨ.

3. 前問題デ, $h=50\,m$, $\alpha=48°35'$, $\beta=47°25'$ トシテ山ノ高サヲ計算セヨ.

4. 平地ニ直立スル電信柱ノ頂ノ仰角トソノ基點ノ俯角トヲ測ツテ夫々 $30°18'$, $8°24'$ ヲ得タトイフ. 今觀測者ノ眼ノ高サヲ $1.6\,m$ トスレバ此柱ノ高サ及此柱ト觀測者トノ距離ハ各、幾ラカ.

5. 或人東西及南北ニ通ズル二ツノ道路ノ交叉點カラ北 $30°$ 東ノ方位ニ $600\,m$ 進ミ, 更ニ方向ヲ北東ニ變ヘ $400\,m$ 進ンデ或地點ニ達シタ, 此地點ノ兩道路カラノ距離ハ夫々幾ラカ.

6. A, B 二ツノ塔ガアル, 觀測者ノ位置 C ト塔 A トノ距離ハ $1764\,m$ デアル. ソコデ ∠CAB ト ∠BCA トヲ測ツテ夫々 $94°54'$, $66°39'$ ヲ得タ. A, B 間ノ距離ヲ求メヨ.

7. 海濱デ $2\,km$ 離レタ二點 A, B ヲ選ビ, ソコニ一人ヅヽ觀測者ガアツテ同時ニ或方向ニ直

航シツヽアル汽船ノ水際ノ一點 C ヲ目標トシ ∠CAB ト ∠CBA トヲ測ツテ夫々 $27°8'$, $32°22'$ ヲ得タ. ソレカラ 3 分ノ後ニ前ト同ジ目標ニ對シテ同樣ノ角ヲ測ツテ夫々 $55°35'$, $62°22'$ ヲ得タ. 此汽船ノ速サハ毎時大約幾 km カ.

8. 煙突ノ基底ヲ C, 頂點ヲ D トシ A, B ヲ C ト同水平面上ノ二點トスル, 而シテ觀測ニヨツテ ∠CAB$=105°$, ∠CBA$=30°$, ∠DAC$=60°$, AB$=60\,m$ ヲ知ツタ. 煙突ノ高サヲ求メヨ.

9. 或人高サ h 米ノ山ノ上デ其ノ正西ニ當ル一船ヲ發見シ其俯角ヲ測ツテ α ヲ得タガ, 或時間ノ後再ビ之ヲ見タラ船ノ方位ハ S 30°W ニ當リ其俯角ハ β トナツタ. 此船ノ前後兩位置ノ間ノ距離ヲ求メヨ.

10. $500\,m$ 隔ツタ甲乙兩地ニ一人ヅヽ觀測者ガアツテ, 同時ニ一飛行船ノ方位及其高度ヲ測ツタトコロガ, 甲デハ方位北 $135°$ 西, 高度 $60°$ ヲ得, 乙デハ方位西, 高度 $45°$ ヲ得タトイフ. 飛行船ノ地面上カラノ高サハ幾ラカ.

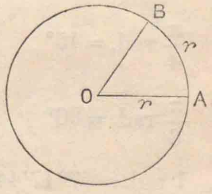
南45°西

附　録

I 弧度法

定理　任意ノ圓ニ於テ半徑ト等長ナル弧ニ對スル中心角ノ大イサハ一定デアル.

證明　圓Oノ半徑ヲrトシ, $\widehat{AB}=r$トスレバ



$$\angle AOB : 360^\circ = \widehat{AB} : 全圓周$$

$$= r : 2\pi r = 1 : 2\pi$$

$$\therefore \quad \angle AOB = \frac{180^\circ}{\pi}$$

卽チ半徑ト等長ナル弧ニ對スル中心角ノ大イサハ半徑ノ長サニ拘ラズ恒ニ$\dfrac{180^\circ}{\pi}$ニ等シクテ一定デアル.

コノ一定ノ角ヲ**Radian**トイフ. Radianヲ單位トシテ角ヲ測ル仕方ヲ**弧度法**トイヒ,理論ヲ主トスル場合ニハ常ニコノ測リ方ヲ用ヒル.

或角ノ大イサガθ rad.ナルコトヲ通例此角ノ弧度ガθデアルトイフ.

サテ $$1\text{ rad.}=\frac{180^\circ}{\pi}$$
$$\therefore\quad \pi\text{ rad.}=180^\circ$$

此關係式ニヨツテ,スベテ六十分法(度,分,秒)デ表サレタ角ヲ弧度法ニ,又弧度法デ表サレタ角ヲ六十分法ニ換算スルコトガ出來ル. 例ヘバ

$2\pi\text{ rad.}=360^\circ$	$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ rad.}=0.01745329\text{ rad.}$强
$\frac{\pi}{2}\text{ rad.}=90^\circ$	$1'=0.0002908882\text{ rad.}$强
$\frac{\pi}{4}\text{ rad.}=45^\circ$	$1''=0.0000048481\text{ rad.}$强
$\frac{\pi}{6}\text{ rad.}=30^\circ$	

$1\text{ rad.}=57^\circ 17' 44''.8$强

例題

1. n邊ノ正多角形ノ一角ノ弧度ハ幾ラカ.
2. 半徑5 cmノ圓ニ於テ長サ3 cmノ弧ニ對スル中心角ノ大イサヲ弧度法及六十分法デ表セ.

II 三角方程式

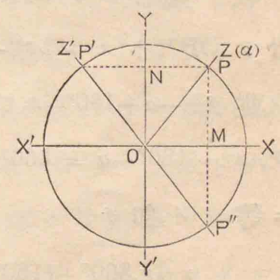
未知角ノ三角函數ヲ含ム方程式ヲ**三角方程式**トイフ. ソノ未知角ノ値ヲ其方程式ノ根又ハ解トイヒ,之ヲ求メルコトヲ其方程式ヲ**解ク**トイフ.

三角方程式ノ標準ノ形ハ次ノ三ツデアル.

$$\sin x=\sin\alpha,\qquad \cos x=\cos\alpha,\qquad \tan x=\tan\alpha$$

(第一) $\sin x=\sin\alpha$

解 所要ノ角xハ既知角αノ正弦ニ等シイ正弦ヲ有スル角デアル.



サテ半直線OXヲ第一邊トスルトキαノ第二邊ノ位置ヲOZトシ,Oヲ中心トスル任意ノ圓トOZトノ交點PカラOX及之ト$+90^\circ$ノ角ヲナス半直線OYニ夫夫垂線PM, PNヲ引ケバ

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{ON}{OP}$$

此式ニ於テ OP ハ一定ダカラ,第一邊ヲ共有シテ α ト同ジ正弦ヲ有スル角 x ニ就テハ ON ガ絶對値ニ於テモ符號ニ於テモ α ノソレニ等シイコトガ必要デアリ且ツ十分デアル. 故ニ x ノ第二邊ハ OP ニ一致スルカ或ハ OY ニ關スル OP ノ對稱ノ位置 OP′ ニ一致スル.

前ノ場合ニハ x ハ α ニ 360° ノ幾倍カヲ加減シタモノニ等シイ,卽チ

$$x=n.360^\circ+\alpha=2n.180^\circ+\alpha$$

但シ n ハ任意ノ整數

後ノ場合ニハ OX ニ關スル OP ノ對稱ノ位置ヲ OP″ トスレバ $-\alpha$ ノ第二邊ハ OP″ ニ一致シ,從テ $-\alpha+180^\circ$ ノ第二邊ハ OP′ ニ一致スルカラ, x ハ $180^\circ-\alpha$ ニ 360° ノ幾倍カヲ加減シタモノニ等シイ,卽チ

$$x=n.360^\circ+(180^\circ-\alpha)=(2n+1).180^\circ-\alpha$$

但シ n ハ任意ノ整數

結局與ヘラレタ方程式ノ總テノ解ハ次ノ通リデアル.

$$\boldsymbol{x=2n.180^\circ+\alpha} \quad \text{及} \quad \boldsymbol{x=(2n+1).180^\circ-\alpha}$$

[例] $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ ヲ解ケ.

$$\sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-30^\circ)$$

$$\therefore \begin{cases} x=2n.180^\circ-30^\circ \\ x=(2n+1).180^\circ+30^\circ \end{cases}$$

(第二)　$\boldsymbol{\cos x=\cos\alpha}$

解　前々頁ノ圖デ

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}}$$

故ニ第一邊ヲ共有シテ α ト同ジ餘弦ヲ有スル角 x ニ就テハ OM ガ絶對値及符號ニ於テ α ノソレニ等シイコトガ必要且ツ十分デアル. 故ニ x ノ第二邊ハ OP ニ一致スルカ或ハ OX ニ關スル OP ノ對稱ノ位置 OP″ ニ一致スル.

因テ x ハ α ニ 360° ノ幾倍カヲ加減シタモノカ,若クハ $-\alpha$ ニ 360° ノ幾倍カヲ加減シタモノニ等シイ.

故ニ與ヘラレタ方程式ノ總テノ解ハ

$$\boldsymbol{x=n.360^\circ\pm\alpha}$$

デアル.

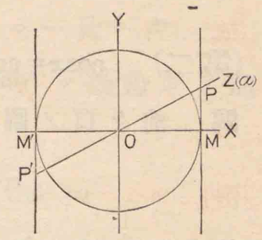
[例] $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ.

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 135^\circ$$

$$\therefore \quad x = n.360^\circ \pm 135^\circ$$

(第三) $\tan x = \tan\alpha$

半直線OXヲ第一邊トスルトキαノ第二邊ノ位置ヲOZトシ,Oヲ中心トスル任意ノ圓ガOXト交ル點Mニ於テ此圓ニ切線ヲ引イテ角ノ第二邊OZト交ル點ヲPトスレバ



$$\tan\alpha = \frac{MP}{OM}$$

此式ニ於テOMノ絶對値ハ一定ダカラ,第一邊ヲ共有シテαト同ジ正切ヲ有スル角xニ就テハOM及MPガ共ニαノソレニ合スルカ,若クハOMガαノソレト正反對ノ位置OM$'$ニアッテMPガαノソレト絶對値ガ等シクテ符號ガ反對デアルコトガ必要且ツ十分デアル. 故ニxノ第二邊ハOPニ一致スルカ或ハOPノ

正反對ノ位置OP$'$即チ$\alpha+180^\circ$ノ第二邊ノ位置ニ一致スル.

因テxハα又ハ$\alpha+180^\circ$ニ360°ノ幾倍カヲ加減シタモノニ等シイ. 故ニ結局αニ180°ノ幾倍カヲ加減シタモノニ等シイ.

故ニ與ヘラレタ方程式ノ總テノ解ハ

$$x = n.180^\circ + \alpha$$

デアル.

[例] $\tan x = \sqrt{3}$ ヲ解ケ.

解 $\tan x = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$

$$\therefore \quad x = n.180^\circ + 60^\circ$$

雜例

[例 1] $2\sin^2 x + \cos x = 1$ ヲ解ケ.

解 $2(1-\cos^2 x) + \cos x = 1$

$\therefore \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\therefore \quad \cos x = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ$

又ハ $\cos x = 1 = \cos 0^\circ$

$\therefore \quad x = n.360^\circ \pm 120^\circ$ 及 $x = n.360^\circ$

注意 此答ハ纒メテ次ノヤウニ書クコトガ出來ル.

$x=k.120°$　(但シ k ハ任意ノ整數)

如何ニモ,上ノ答ハ $x=n.360°\pm120°=(3n\pm1).120°$ 及 $x=n.360°=(3n).120°$ ト書クコトガ出來ルシ, n ガ任意ノ整數ナルトキ $3n$ ト $3n\pm1$ トヲ纏メタモノハ結局任意ノ整數ニ歸スルカラデアル.

[例 2]　$\tan x+\cot x=2$ ヲ解ケ.

解
$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$$
$$\therefore\quad \tan^2x-2\tan x+1=0$$
$$\therefore\quad \tan x=1=\tan45°$$
$$\therefore\quad x=n.180°+45°$$

例　題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

1. $\sin x=0$　　2. $\sin x=1$
3. $\sin x=-1$　　4. $\cos x=0$
5. $\cos x=1$　　6. $\cos x=-1$
7. $\tan x=0$　　8. $\cot x=0$
9. $\sin^2x=1$　　10. $\sin x=\dfrac{\sqrt3}{2}$
11. $\cot x=2\cos x$　　12. $2\sin^2x+2\sqrt2\sin x+1=0$
13. $\sin(x+30°)=\sin(90°-x)$

14. $\sin x+\sin4x=0$　$(0°<x<360°)$
15. $\sin^3x+\cos^3x=0$　$(-180°<x<180°)$
16. $2\sin x\tan x+1=\tan x+2\sin x$
17. $\cos x-\cos2x=\sin3x$
18. $\sin x+\cos x=\sqrt2$
19. $\tan x-\tan2x=\sin x$
20. $\sin x+\cos x=\cos2x$
21. $3\cos^2x-\sin^2x+(\sqrt3+1)(1-2\cos x)=0$
22. $\tan x+2\cos x=2\sec x$
23. $\sin x+\sin2x+\sin3x=1+\cos x+\cos2x$
24. $4\sin\alpha\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)=\sin3\alpha$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

25. $x+y=90°$, $\sin x+\sin y=1$
26. $x+y=90°$, $\tan x+\tan y=2\sqrt2$　$(0<y<x<90°)$

III 對數表ニ於テ比例挿入法ヲ用ヒラレナイ場合

0° ニ近イ角(四桁ノ對數表ヲ用ヒル場合ニハ6°30′未滿ノ角)ノ正弦,正切及餘切,從テ90°ニ近イ角(四桁ノ對數表ヲ用ヒル場合ニハ $90°-6°30'$ 即チ83°30′ヨリ大キイ角)ノ餘弦,餘切及正切ノ對數ハソノ變化ガ劇シイタメ比例挿入法ヲ用ヒラレナイモノデアル. サテ

(第一) 6°30′未滿ノ角ニ於テハ,分ヲ單位トシテ其角ヲ表シタ數ノ對數ヲソノ正弦又ハ正切ノ對數カラ引イタモノハ其變化ガ緩漫デアッテ其指標ト其假數ノ小數第二位マデノ部分ハ恒ニ **$\bar{4}.46$** デアル,而シテ其下ノ二桁(小數第三位及第四位)ヲ小數第四位ヲ單位トシテ書イタモノヲ log sin ニ就テハ **s**, log tan ニ就テハ **t** ト名ヅケテ之ヲ表ノ中ニ揭ゲテアル.

ダカラ與ヘラレタ角(勿論6°30′未滿ノ角)ノ log sin 又ハ log tan ヲ求メルニハ,其角ニ最モ近イ角ノ處ノ s 又ハ t ヲ $\bar{4}.46$ ノ後ニ書添ヘタモノヲ分

ヲ單位トシテ角ヲ表シタ數ノ對數ニ加ヘレバ所要ノ對數ヲ得ル.

[例] log sin4°27′.8 ヲ求メヨ.

分ヲ單位トスレバ此角ハ $4°27'.8=267'.8$ トナル. ソコデ數ノ對數表カラ $\log 267.8=2.4278$ ヲ求メ,次ニ三角函數ノ對數表カラ 4°27′.8 ニ最モ近イ角4°30′ノ右ニ書イテアル s ノ値33ヲ求メ,之ヲ $\bar{4}.46$ ニ書添ヘテ $\bar{4}.4633$ トシ,之ヲ上ノ對數2.4278ニ加ヘテ

$$\log\sin 4°27'.8=\bar{2}.8911$$

ヲ得ル.

計算ハ次ノヤウニ排列スル

$$\begin{array}{ll} 4°27'.8=267'.8 & \log 267.8=2.4278 \\ & s=\bar{4}.4633 \\ \hline & \log\sin 4°27'.8=\bar{2}.8911 \end{array}$$

(第二) 6°30′未滿ノ角ニ於テハ,分ヲ單位トシテ其角ヲ表シタ數ノ對數カラソノ正弦又ハ正切ノ對數引イタモノハ $-(\bar{4}.46**)=3.53**$ デアッテソノ小數第二位マデノ部分ハ恒ニ **3.53** デアル,而シテ其下ノ二桁ヲ小數第四位ヲ單位ト

シテ書イタモノヲ log sin ニ就テハ $\overline{s}$, log tan ニ就テハ $\overline{t}$ ト名ヅケテ之ヲ表ノ中ニ揭ゲテアル.

ダカラ與ヘラレタ log sin 又ハ log tan カラソノ角(勿論6°30′未滿ノ角)ヲ求メルニハ,此對數ニ最モ近イ對數ノ處ニアル $\overline{s}$ 又ハ $\overline{t}$ ヲ 3.53 ノ後ニ書添ヘ,之ヲ與ヘラレタ對數ニ加ヘレバ所要ノ角ヲ分ヲ單位トシテ表シタ數ノ對數ヲ得ル.

[例]　$\log\tan x=\bar{2}.4234$ カラ x ヲ求メヨ.

表ヲ見テ,與ヘラレタ對數ニ最モ近イ log tan $\bar{2}.4181$ ノ右ニ書イテアル $\overline{t}$ ノ値62ヲ求メ,之ヲ 3.53 ニ書添ヘテ 3.5362 トシ,之ヲ與ヘラレタ對數ニ加ヘテ $\log x=1.9596$ ヲ得ル. ソコデ數ノ對數表ニヨツテ

$$x=91'.1=1°31'.1$$

ヲ得ル.

計算ハ次ノヤウニ排列スル.

$$\begin{array}{r}
\log\tan x=\bar{2}.4234\\
\overline{t}=3.5362\\
\hline
\log x=1.9596\\
5\cdots\cdots 91.1\\
1\cdots\cdots\cdots 2\\
\hline
x=\quad 91'.1\\
=1°31'.1
\end{array}\quad \text{〔四捨五入〕}$$

注意　6°30′ 未滿ノ角ノ cot ハ之ヲ tan ニ直シ,又 83°30′ ヨリ大キイ角ノ cos ハ 6°30′ 未滿ノ角ノ sin ニ, 83°30′ ヨリ大キイ角ノ cot 及 tan ハ何レモ 6°30′ 未滿ノ角ノ tan ニ直シテ對數表ヲ用ヒル. 卽チ

$\alpha<6°30'$ ナラバ

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}\quad \text{カラ}\quad \log\cot\alpha=-\log\tan\alpha$$

又　$\alpha>83°30'$ ナラバ

$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ カラ

$$\log\cos\alpha=\log\sin(90°-\alpha)\qquad〔90°-\alpha<6°30'〕$$

$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$ カラ

$$\log\cot\alpha=\log\tan(90°-\alpha)$$

$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)=\dfrac{1}{\tan(90°-\alpha)}$ カラ

$$\log\tan\alpha=-\log\tan(90°-\alpha)$$

例　題

次ノ各數ノ値ヲ求メヨ.

1. $\log\sin 2°18'.3$　　**2.** $\log\tan 5°19'.4$

3. $\log\cot 4°36'$　　**4.** $\log\cos 85°23'$

5. $\log\cot 84°30'.6$　　**6.** $\log\tan 87°42'$

次ノ各式カラ x ヲ求メヨ.

7. $\log \sin x = \bar{2}.9439$　　**8.** $\log \tan x = \bar{3}.9451$

9. $\log \cot x = 0.9957$　　**10.** $\log \cos x = \bar{2}.7640$

11. $\log \cot x = \bar{2}.8550$　　**12.** $\log \tan x = 1.5151$

IV 補充問題

平面幾何學補充

直線形ノ部

1. 直角三角形ABCノ一鋭角Bノ二等分線ト其對邊トノ交點ヲDトシ,又直角ノ頂點Aカラ斜邊BCへ引イタ垂線トBDトノ交點ヲEトスレバ　AD=AE

2. 正方形ABCDノ邊BC上ノ任意ノ點ヲEトシ, $\angle$EADノ二等分線ト邊CDトノ交點ヲFトシ, FDヲ延長シ其上ニDGヲBEニ等シク取レバ　GA=GF

3. △ABCニ於テ邊ACノ中點ヲDトシ,邊BC上ニ一點Eヲ $BE=\frac{1}{3}BC$ ナルヤウニ取リ,二直線BD, AEノ交點ヲFトスレバ　AF=3.EF　DF=DF ヲ證明セヨ

4. 平行四邊形ノ一組ノ對角ノ頂點カラ此平行四邊形ヲ截ラナイ或直線ニ引イタ垂線ノ和ハ,他ノ一組ノ對角ノ頂點カラ引イタ垂線ノ和ニ等シイ.

5. 正方形ABCDノ頂點Bヲ通ツテ對角線ACニ平行線ヲ引キ,其上ニ點EヲAE=ACナルヤウニ取レバ　$\angle CAE=30°$

6. 平行四邊形ABCDノ內側ノ方へ正三角形BCE, CDFヲ作レバ△AEFハマタ正三角形デアル.

7. 二定平行線上ニ兩端ガアルスベテノ線分ノ中點ハ一定直線上ニアル.

8. 一直線上ニ四點 A, B, C, D ガアツテ $AB=BC=CD$ デアル. 又此直線外ノ一點ヲPトシ,線分 PC ヲ三等分スル點ヲ(P カラノ順ニ) E, F トスレバ,三直線 AE, PB, DF ハ一點デ出會フ.

9. 二等邊三角形 ABC (頂點A) ニ於テ,邊 AB 上ニ任意ノ一點Dヲ取リ,又 AC ノ延長上ニ點 E ヲ $CE=BD$ ナルヤウニ取レバ,線分 DE ハ BC ニヨツテ二等分サレ,且ツ $DE>BC$

10. 梯形 ABCD ニ於テ, $AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$ ナルトキ,此梯形ノ各角ノ大イサハ幾ラカ.

11. 三角形ノ三邊ノ長サヲ a, b, c トスレバ, a ナル邊ノ中點ヲ通ル中線ノ長サハ $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$ デアル.

12. 直角三角形 ABC ノ直角ヲ夾ム二邊 AB, AC ノ各ノ上ニ夫々點 D 及 E ヲ取レバ

$$CD^2+BE^2=DE^2+BC^2$$

13. ABCD ヲ矩形, P ヲ任意ノ一點トスレバ

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$

14. △ABC ニ於テ $\angle B=45°$ ノトキ,邊 AB ノ中點ヲ D トシ,頂點 C カラ AB ニ引イタ垂線ノ足ヲ E トスレバ

$$AC^2=2(AD^2+DE^2)$$

15. 直角二等邊三角形 ABC ノ斜邊 BC 上ノ任意ノ一點ヲ D トスレバ

$$2.AD^2=BD^2+DC^2$$

16. ABCD ヲ平行四邊形, O ヲ任意ノ一點トスレバ, △OAB ト △OBC トノ面積ノ和或ハ差ハ △OBD ノ面積ニ等シイ.

17. △ABC ノ邊 BC ヲ D 及 E デ三等分スレバ

$$AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+BE^2$$

18. △ABC ノ各邊上ニ其外側ニ正方形 BCDE, CAFG, ABHK ヲ畫ケバ

$$BC^2+FK^2=2(AB^2+AC^2)$$
$$CA^2+HE^2=2(BC^2+AB^2)$$
$$AB^2+DG^2=2(BC^2+AC^2)$$

19. 前題ニ於テ,六邊形 FKHEDG ノ各邊ノ平方ノ和ハ △ABC ノ各邊ノ平方ノ和ノ 4 倍ニ等シイ.

20. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ延長ノ交點ト兩對角線ノ中點トヲ三頂點トスル三角形ノ面積ハ原四邊形ノ面積ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シイ.

21. 三角形内ノ一點ヲ各頂點ニ結ビツケル三直線デ此三角形ノ面積ガ三等分サレヽバ,其點ハ此三角形ノ重心デアル.

22. 四邊形内ノ一點ヲ各頂點ニ結ビツケル四直線

デ此四邊形ノ面積ガ四等分サレヽバ,此四邊形ノ一對角線ハ他ノ對角線ヲ二等分シ,此點ハ前ノ對角線ノ中點デアル.

23. 三角形ノ面積ヲ,其ノ底邊上ノ一定點カラ引イタ二直線デ三等分セヨ.

24. 四邊形ノ面積ヲ,其ノ一頂點カラ引イタ二直線デ三等分セヨ.

25. 四邊形ノ面積ヲ,其ノ一邊上ノ定點カラ引イタ直線デ二等分セヨ.

26. 定矩形 ABCD ノ邊 AB 上ニ定點 K ガアル. K ヲ一頂點トスル平行四邊形 KLMN ヲ畫キ, L, M, N ガ夫々邊 BC, CD, DA ノ上ニアツテ且ツ其平行四邊形ノ周ガ最小ナルヤウニセヨ.

27. 頂角ト高サトガ與ヘラレタ三角形ノ中デ底邊ノ最小ナモノヲ求メヨ.

28. 河岸ヲ離レタ或點ニ家 A ガアリ,其川ヲ隔テヽ對岸ヲ離レタ或點ニ家 B ガアル. 今 A, B 兩家ノ間ヲ最短距離デ達スルヤウニ川ニ橋ヲカケルニハ何處ニカケタラヨイカ. 但シ川ノ兩岸ハ平行シ橋ハ河岸ニ直角ニカケルモノトスル.

圓ノ部

1. 點 A デ外切スル二圓ノ外共通切線ヲ引キ,其切點ヲ B, C トスレバ ∠BAC＝R∟

2. 平行四邊形 ABCD 內ニ一點 P ヲ取ルトキ △PAB, △PDA ノ外接圓ガ相等シケレバ △PBC, △PCD ノ外接圓モマタ相等シイ.

3. A ニ於テ外切スル二圓ガアル. 此二圓ト夫々 B, C デ切スル任意ノ圓 O ヲ畫キ,直線 AB, AC ガ圓 O ト再ビ交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ三點 D, O, E ハ一直線上ニアル.

4. 三角形ノ各邊上ニ其外側ニ正三角形ヲ畫ケバ此三ツノ正三角形ノ外接圓ハ一點ニ會スル.

又此點ト三角形ノ一頂點ト其對邊上ノ正三角形ノ頂點トハ一直線上ニアル.

5. A, B, C ハ一圓周上ノ三點, D, E ハ夫々弧 AB, AC ノ中點デアル. 直線 DE ガ AB, AC 又ハ其延長ト交ル點ヲ M, N トスレバ AM＝AN

6. 三角形ノ頂點カラ引イタ外接圓ノ直徑ハ底邊ノ兩端カラ夫々其對邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ直線ニ垂直デアル.

7. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ二邊 AB, DC ノ

延長ノ交點ヲEトシ, AD, BCノ延長ノ交點ヲFトスレバ, $\angle E$, $\angle F$ノ二等分線ハ直交スル.

又是等ノ二等分線ガ四邊形ノ各邊ト交ル四點ハ一ツノ菱形ノ頂點ニナル.

8. 圓ニ內接スル四邊形ノ一角ノ二等分線トソレニ對スル角ノ外角ノ二等分線トハ此圓ノ周上デ交ル.

9. 圓外ノ點Pカラ圓ニ二切線PA, PB及割線PCDヲ引キ,弦CDノ中點ヲEトスレバ $\angle AEP=\angle BEP$

10. 圓Oノ周上ノ一點Aニ於ケル切線ガ任意ノ半徑OBノ延長ト交ル點ヲCトシ, AカラOBニ垂線ADヲ引ケバ, ABハ $\angle CAD$ヲ二等分スル.

11. 二等邊三角形ABCノ頂點Aト底邊ノ一端Bトカラ互ニ平行ナル任意ノ二直線ヲ引キ,外接圓ノ周ト夫々P, Qデ交ラセレバ $AQ /\!/ PC$

12. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スレバ,其交點カラ各邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ頂點トスル四邊形ニハ外接圓及內接圓ヲ畫クコトガ出來ル.

13. $\triangle ABC$ニ於テ $\angle A=60^\circ$ ナルトキ二角B, Cノ二等分線ガ對邊ト交ル點ヲ夫々D, Eトシ,外接圓ノ周ト交ル點ヲ夫々D′, E′トシ,內心ヲOトスレバ

$$OD=OE, \quad BD'=CE'$$

14. 定角XOYノ二等分線上ノ一點ヲPトスル. 二

點O, Pヲ通ル任意ノ圓ガ角ノ二邊OX, OYト交ル點ヲA, BトスレバOA+OBハ不易デアル.

15. 二ツノ同心圓APB, CQDノ直徑ヲ夫々AB, CDトシ, P及Qヲ夫々圓周上ノ任意ノ點トスレバ

$$PC^2+PD^2=QA^2+QB^2$$

16. ABハ圓ノ直徑, CDハABニ平行ナル弦, PハAB上ノ任意ノ點トスレバ

$$CP^2+DP^2=AP^2+BP^2$$

17. 圓ノ互ニ垂直ナル二弦AB, CD又ハ其延長ノ交點ヲPトスレバ

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=(\text{直徑})^2$$

18. 定圓弧AB上ニ定長ノ弧PQヲ(四點A, P, Q, Bガ此順ニアルヤウニ)取ルトキ,二直線AP, BQノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

接カラ

no

19. 定圓外ノ一定點Pカラ引イタ二切線ノ切點ヲA及Bトシ, Aヲ通ル任意ノ弦AQニ平行ニPカラ引イタ直線トQB又ハ其延長トノ交點ヲRトスル. Rノ軌跡ヲ求メヨ.

20. 定圓ノ定直徑ABノ一端Bカラ任意ノ弦BPヲ引キ, Aニ於ケル此圓ノ切線上ニAPニ等シクARヲ取リ, RカラABニ平行ニ引イタ直線ト直線BPノ延長トノ交點ヲQトスル. Qノ軌跡ヲ求メヨ.

21. 定圓ノ定直徑ABノ一端Aカラ任意ノ弦ACヲ引キ, Cニ於テ此圓ニ切線ヲ引キ, Bカラ之ニ垂線BDヲ引クトキ, BD, ACノ延長ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

22. 定弧AB上ノ任意ノ點PトAトヲ結ビツケ, PA又ハ其延長上ニPBニ等シクPQヲ取ルトキ,點Qノ軌跡ヲ求メヨ.

23. 相交ル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ定長ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

24. 前題ニ於テ,和ヲ差ニ代ヘレバドウカ.

25. 定線分AB上ノ任意ノ點ヲPトシ, AP, BPノ上ニ其各々ヲ底邊トスル二ツノ正三角形ヲ其ノ同ジ側ニ畫クトキ,其頂點ヲ結ビツケル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

26. 定圓O内ノ定點Aヲ通ツテ直交スル任意ノ二弦ヲ引クトキ,此二弦ノ端ヲ結ビツケテ得ル弦ノ中點ノ軌跡ハOAノ中點ヲ中心トスル一ツノ圓周ナルコトヲ示セ.

27. 四定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

28. 一定點ヲ通ツテ二定直線ト等角ヲナス直線ヲ引ケ.

29. 定點ヲ通ツテ定直線若クハ定圓ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

30. 二定直線ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

31. 二定圓ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

32. 定直線若クハ定圓周上ニ中心ガアツテ他ノ定直線若クハ定圓ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

33. 定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ他ノ定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ.

34. 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ他ノ定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

35. 正三角形ニ,其二邊ニ切シ且ツ二ツヅヽ相切スル三ツノ等圓ヲ内接セヨ.

36. 頂角ヲ夾ム二邊及兩底角ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

37. 頂角ノ位置,周圍,及底邊上ノ一點ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

38. 二定圓ニ一割線ヲ引キ,此割線ガ各圓デ截取ラレル弦ノ長サガ夫々二定長ニ等シイヤウニセヨ.

39. 相切スル二圓ノ切點ヲ通ツテ割線ヲ引キ,兩圓周ノ間ニ夾マレル部分ガ定線分ニ等シイヤウニセヨ.

40. 二圓ノ一交點Aヲ通ツテ各圓周ニ終ル線分PAQヲ引キPA=AQナルヤウニセヨ.

41. 定圓周上ニ於テ,其上ニナイ二定點カラノ距離

ノ平方ノ和ガ最大又ハ最小ナル點ヲ求メヨ.

42. 定圓弧 AB 上ニ一點 P ヲ求メ, AP+BP ヲ最大ニセヨ.

43. B, C ハ定圓周上ノ二定點デアル. 今此圓周上ニ一點 A ヲ取リ,弦 AB 及 AC ヲ二邊トスル平行四邊形ABDC ヲ作リ,對角線 AD ヲ最大又ハ最小ニセヨ.

44. 前題ニ於テ AB, BC ヲ二邊トスル平行四邊形 ABCE ヲ作リ,對角線 BE ヲ最大又ハ最小ニセヨ.

45. 鋭角 XOY 内ノ一定點ヲ A トスル. 角ノ一邊 OX 上ニ一點 B ヲ取リ, B カラ邊 OY ニ至ル距離ト AB トノ和ヲ最小ニセヨ.

比例ノ部

1. 二定點 A, B ヲ通ル任意ノ圓ト他ノ定圓トノ交點ヲ C, D トスレバ, CD ト AB トハ常ニ平行デアルカ又ハ常ニ一定ノ點デ交ル.

2. 三角形ノ各頂點カラ之ニ對スル邊ニ引イタ三線分(又ハ其延長)ガ一點デ出會ヒ,此點デ各線分ガ分タレタ二ツノ分ノ積ガ皆相等シケレバ此點ハ其三角形ノ垂心デアル.

3. 定圓弧 AB ノ中點ヲ C トシ,其ノ共軛弧ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ (PA+PB):PC ハ一定デアル.

4. 正方形 ABCD ノ外接圓ノ弧 AD 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ (PC+PA):PB 及 (PC−PA):PB ハ夫々一定デアル.

5. 圓周上ノ一點 A ニ於ケル切線ヘ任意ノ弦 BC ノ兩端カラ垂線 BB′, CC′ ヲ引キ,又 A カラ BC ニ垂線 AA′ ヲ引ケバ $AA'^2=BB'.CC'$

6. 圓外ノ一點 P カラ此圓ニ切線 PA, PB 及割線 PCD ヲ引ケバ,四邊形 ACBD ノ對邊ノ積ハ相等シイ.

7. △ABC ノ頂角 A ノ二等分線ヲ AD トシ,内心ヲ O トスレバ AO:OD=(AB+AC):BC

8. 二定圓ニ切スル任意ノ圓ノ二切點ヲ通ル直線ハ恒ニ初ノ二定圓ノ相似ノ中心ヲ通ル.

9. 二定圓ノ相似ノ中心ヲ O トスル. O カラ任意ノ割線ヲ引イテ第一ノ圓周ト A, A′, 第二ノ圓周ト B, B′ デ交ラセレバ, OA.OB′ 及 OA′.OB ハ相等シクテ且ツ一定デアル.

10. 正五邊形ニ於テ,同ジ頂點ヲ通ラナイ二ツノ對角線ハ互ニ中末比ニ内分サレル.

11. 二線分ノ積ガ一定ノトキ,和ノ最小ナル場合ヲ求メヨ.

12. 長サガ a ナル線分ヲ $m:n$ ニ内分及外分スルトキ其ノ兩分點間ノ距離ヲ求メヨ.

13. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスル. △ABC, △BCD, △CDA ノ面積ガ夫々 5, 9, 10 ナルトキ △AOB ノ面積ハ幾ラカ.

14. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ夫々點 D, E, F ヲ, BC=3.BD, CA=3.CE, AB=3.AF ナルヤウニ取レバ, 三直線 AD, BE, CF デ出來ル三角形ノ面積ハ元ノ三角形ノ面積ノ$\frac{1}{7}$ニ等シイ.

15. 三邊ガ夫々 $4m$, $5m$, $7m$ ナル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ計算セヨ.

16. 半徑 r ナル三圓ガ二ツヅヽ相切スルトキ其間ニ出來ル弧三角形ノ面積ヲ計算セヨ.

17. 定點 O カラ引イタ二線分 OP, OQ ノ比ガ一定デ且ツ此二線分ガ常ニ定角ヲナストキ,點 P ノ軌跡ガ直線(又ハ圓周)ナラバ點 Q ノ軌跡ハ何カ.

18. 定直線外ノ定點 O ト此直線上ノ任意ノ點 P トヲ結ビツケル線分 OP 又ハ其延長上ニ一點 M ヲ OP.OM=k^2 (k ハ定長) ナルヤウニ取ルトキ, M ノ軌跡ヲ求メヨ.

19. 二圓ノ一交點 A ヲ通ツテ任意ノ直線ヲ引キ,各圓ノ周ト夫々 C, D デ交ラセルトキ,線分 CD ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

20. 定圓 O ノ定直徑ヲ AB トシ周上ノ任意ノ點ヲ C トスル. BC ヲ延長シ其上ニ BC ニ等シク CD ヲ取ルトキ, AC ト OD トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

21. 定點 O ト定圓周上ノ任意ノ點 P トヲ結ブ線分 OP 又ハ其延長上ニ一點 M ヲ OP.OM=k^2 (k ハ定長) ナルヤウニ取ルトキ, M ノ軌跡ヲ求メヨ. 〔問題9參照〕

22. 底邊,高サ及他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

23. 底邊,底ヘノ中線及他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

24. 頂角,高サ及頂角ヲ夾ム二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

25. 頂角,頂點カラノ中線及頂角ヲ夾ム二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

26. 一邊ノ長サヲ知ツテ正五邊形ヲ畫ケ.

27. 定多角形ニ相似デアツテ,其ノ面積ノ比ガ二定線分ノ比ニ等シイ多角形ヲ作レ.

28. 定圓外ノ定點 P カラ此圓ニ割線ヲ引キ,之ニヨツテ出來ル弦 AB ガ PA ト PB トノ比例中項ニ等シクナルヤウニセヨ.

29. 圓外ノ一點カラ此圓ニ引イタ二切線ノ長サノ和ガ此點カラ圓ノ周ニ至ル最大距離ニ等シクナルヤウニ此點ノ位置ヲ求メヨ.

30. 三定點カラノ距離ガ三定線分ニ比例スル點ヲ求メヨ.

31. 定圓內ノ定點Pヲ通ツテ弦ABヲ引キAP:PBガ定比ニ等シクナルヤウニセヨ.

32. 相交ル二圓ノ一交點Aヲ通ツテ其兩端ガ各圓周上ニアル線分PQヲ引キPA:AQガ定比ニ等シクナルヤウニセヨ.

33. △ABCノ邊BC上ニ一點Dヲ求メ$AD^2=BD.DC$ナルヤウニセヨ.

34. 前題ニ於テBCノ延長上ニDヲ求メヨ.

35. 定三角形ヲ其一邊ニ平行ナル直線デ二ツノ部分ニ分ケ,其面積ノ比ガ定比ニ等シイヤウニセヨ.

36. 三角形ノ面積ヲ其一邊ニ垂直ナル直線デ二等分セヨ.

37. 定三角形ニ定矩形ト相似ナル矩形ヲ內接セシメヨ. 但シ此矩形ノ一邊ハ定三角形ノ最大角ニ對スル邊ノ上ニアルモノトスル.

38. 二定直線ニ切シ,且ツ一定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ.

雜題

1. △ABCノ二頂點A, Bカラ其對邊ニ夫々垂線AD, BEヲ引キ, Bカラ直線DEニ垂線BFヲ引ケバ

$\angle FBD=\angle EBA$

2. 正三角形內ノ任意ノ點カラ三邊マデノ距離ノ和ハ不易デアル.

正三角形外ノ點カラナラバドウイフ關係ガアルカ.

3. 二ツノ中線ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル.

4. 三角形ノ頂角ノ二等分線ハ,頂點ヲ通ル中線ト頂點カラ底邊ヘ引イタ垂線トノ間ニアル.

5. 三角形ノ大キイ角ノ頂點カラノ高サハ小サイ角ノ頂點カラノ高サヨリ小サイ.

6. 三角形ノ大キイ角ノ頂點カラノ中線ハ小サイ角ノ頂點カラノ中線ヨリ小サイ.

7. 直角三角形ABCノ直角ノ頂點Aカラ斜邊ニ引イタ垂線ノ足ヲDトスレバ $AB+AC<BC+AD$

8. 對角線ノ數ガ90アル多角形ノ邊數ヲ求メヨ.

9. 三邊ノ長サガ夫々 $6\,cm$, $5\,cm$, $4\,cm$ナル三角形ノ內接圓及傍接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

10. 三角形ノ外心カラ一邊マデノ距離ハ其邊ニ對スル頂點ト垂心トノ距離ノ半分ニ等シイ.

11. 三角形ノ重心ヲ通ル直線ニ對シ,其直線ノ同ジ側ニアル二頂點カラ其直線ヘノ距離ノ和ハ,反對ノ側ニアル一頂點カラノ距離ニ等シイ.

12. 三角形ノ各頂點カラ此三角形ヲ截ラナイ直線マデノ距離ノ和ハ,其重心カラ其直線マデノ距離ノ3倍ニ等シイ.

直線ガ三角形ヲ截ルトキハドウカ.

又特ニ直線ガ重心ヲ通ル場合ヲ吟味シテ前題ノ結果ヲ導ケ.

13. △ABCノ二邊AB, AC上ニ其外側ニ正方形ABDE, ACFGヲ畫ケバBC, EGノ中點及二ツノ正方形ノ對角線ノ交點ハ一ツノ正方形ノ四頂點ニナル.

14. XX′, YY′ハOニ於テ互ニ直交スル二定直線, Aハ其外ニアル一定點デアル. Aカラ互ニ直交スル任意ノ二直線ヲ引イテXX′, YY′トB, Cデ交ラセレバ,線分BCノ中點Mハ恒ニ定直線上ニアル.

15. 直交スル二定直線上ニ夫々相對スル二頂點ヲ有スル正方形ノ他ノ二頂點ハ常ニ他ノ二定直線上ニアル.

16. 定角XOYノ二邊OX, OY上ニ夫々點A, BヲOA+OBガ一定ナルヤウニ取レバ,圓OABハ恒ニ定點ヲ通ル.

又此圓ノ最小ナル場合ヲ求メヨ.

17. 内切スル二圓ノ切點ヲAトシ, Bニ於テ内圓ニ切スル外圓ノ弦CDヲ作レバ, ABハ∠CADヲ二等分

スル.

18. 三角形ノ外心,垂心及重心ハ一直線上ニアル,而シテ垂心ト重心トノ距離ハ外心ト重心トノ距離ノ2倍ニ等シイ.

19. △ABCノ三邊上ニ其外側ニ正三角形BCD, CAE, ABFヲ畫クトキ,此ノ三ツノ正三角形ノ外接圓ガ三角形内ノ點Oデ交レバ

$$AD=BE=CF=OA+OB+OC$$

20. 定圓周上ノ一定點ヲAトシ,定直線上ノ一定點ヲBトスル. A, Bヲ通ル任意ノ圓ヲ畫イテ此ノ定圓ト定直線トニ再ビ交ル點ヲC, Dトスレバ,直線CDハ常ニ一定點ヲ通ル.

21. 底邊ト頂角ノ大イサトガ一定ナル任意ノ三角形ニ於テ,底邊ノ兩端カラ夫々其對邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ結ビツケル線分ノ長サハ不易デアル.

22. 或點カラ三角形ノ三邊又ハ其延長ニ下シタ三ツノ垂線ノ足ガ一直線上ニアラバ,此點ハ此三角形ノ外接圓ノ周上ニアル.(基, p. 196 Simsonノ定理ノ逆)

23. 四邊形ABCDノ二邊AB, DCノ延長ノ交點ヲEトシ,他ノ二邊ノ延長ノ交點ヲFトスレバ,四ツノ三角形BCE, CDF, ADE, ABFノ外接圓ノ周ハ一點ニ會スル.

24. 三角形ノ重心カラ各頂點ニ至ル距離ノ平方ノ

和ノ 3 倍ハ三邊ノ平方ノ和ニ等シイ.

25. △ABC ノ重心ヲ G トシ,任意ノ一點ヲ P トスレバ　$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3.GP^2$

26. 直角三角形ノ面積ハ斜邊ガ內接圓ノ切點デ分タレル二ツノ部分ノ積ニ等シイ.

27. ∠B, ∠C ガ何レモ銳角ナル △ABC ニ於テ, B, C カラ其對邊ニ引イタ垂線ヲ夫々 BP, CQ トスレバ

$$BC^2=AB.BQ+AC.CP$$

∠B 又ハ ∠C ガ鈍角ナラバ

$$BC^2=AB.BQ\sim AC.CP$$

28. 二ツノ同心圓ガアル,內圓ノ周上ノ任意ノ點 P ヲ通ツテ此圓ニ任意ノ弦 PA ヲ引キ,又 PA ニ垂直ニ外圓ノ弦 BPC ヲ引ケバ $PA^2+PB^2+PC^2$ 及 $BC^2+CA^2+AB^2$ ハ夫々一定デアル.

又 △ABC ノ重心ヲ G トスレバ線分 GP ノ長サモ亦一定デアル.

29. 圓周上ノ一點 A カラ直徑 AB 及切線 AC ヲ引キ,切線上ノ一點 C カラ第二ノ切線ヲ引イテ其切點ヲ D トシ, D カラ AB ニ垂線 DE ヲ下セバ, DE ハ BC ノタメニ二等分サレル.

又 B カラ切線ヲ引イテ CD ノ延長ト F デ交ラセレバ AF, BC, DE ハ一點ニ會スル.

30. 圓周上ノ一點カラ之ニ內接スル四邊形ノ對邊ニ引イタ垂線ノ積ハ相等シイ.

31. 圓ニ內接スル四邊形外ノ(四邊形ノ角ノ對頂角內デナイ)點カラ對邊ニ引イタ垂線ノ積ガ相等シケレバ,此點ハ此圓周上ニアル.

32. △ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トシ ∠A ノ二等分線ガ BC ニ交ル點ヲ E トスル. 圓 ADE ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 F, G トスレバ　BF=CG

33. 線分 AB ノ兩端カラ之ニ垂直ナル二線分 AC, BD ヲ同ジ向キニ引キ, AD, BC ノ交點 E カラ AB ニ垂線 EF ヲ引ケバ, EF ハ ∠CFD ヲ二等分スル.

34. △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル任意ノ直線ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 D, E トシ, BE, CD ノ交點ヲ F トスレバ,直線 AF ハ BC ヲ二等分スル.

35. 三角形ノ二角ノ二等分線及第三ノ角ノ外角ノ二等分線ガ夫々其對邊又ハ其延長ト交ル三點ハ一直線上ニアル.

36. 圓 O ノ周上ノ一點 P ヲ中心トスル圓ガアル. 圓 P ノ任意ノ切線ガ圓 O ト交ル點ヲ A, B トスレバ PA.PB ハ切線ノ位置ニ關セズ一定デアル.

37. 直角三角形ノ直角頂カラ斜邊ニ引イタ垂線ガ斜邊ヲ中末比ニ分テバ,此三角形ノ最小邊ハ斜邊ガ分

タレタ一ツノ部分ニ等シイ.

定義 線分ABガCトDトデ同ジ比ニ内分及外分サレルトキハ,四點A, B, C, Dガ**調和列點**ヲナストイヒ,之ヲ調和列點(A,B,C,D)ト書クコトトスル.

38. 調和列點(A,B,C,D)ガアル. ABノ中點ヲOトスレバ $OA^2=OC.OD$ $\frac{OC}{OD}=\left(\frac{AC}{AD}\right)^2$

39. 調和列點(A,B,C,D)ガアル. 直線AB外ノ一點ヲSトシ, Bヲ通ツテSAニ平行ニ引イタ直線ガ二直線SC, SDト交ル點ヲE,Fトスレバ, BハEFノ中點デアル.

40. 梯形ノ兩底邊ノ中點,對角線ノ交點,及兩斜邊ノ延長ノ交點ハ調和列點ヲナス.

41. 四邊形ABCDニ於テ, BC, ADノ延長ノ交點ヲEトシ, BA, CDノ延長ノ交點ヲFトシ, EFガAC及BDノ延長ト交ル點ヲ夫々M, Nトスレバ,四點E, F, M, Nハ調和列點ヲナス.

又AC, BDノ交點ヲPトスレバ四點A, C, P, M及四點B, D, P, Nモ調和列點ヲナス.

42. 圓O外ノ一點Pカラ此圓ニ二切線PA, PB及割線PCDヲ引キ,弦ABトOPトノ交點ヲMトスレバ, ABハ∠CMDヲ二等分スル.

43. △ABCノ二邊AB, AC上ニ夫々二點E, Fヲ, BE=2.EA, AF=2.FCナルヤウニ取リ, EFトBCトノ

交點ヲHトスルトキBH:CHヲ求メヨ.

44. 二ツノ同心圓ガアル,外圓周上ノ一點Aカラ内圓ニ切線AP, AQヲ引キ切點P, Qヲ通ル直線ガ外圓ト交ル二點ノ内Pニ近イ方ヲRトシ, APノ延長ト外圓トノ交點ヲBトスレバ $RA^2:RB^2=QR:PR$

45. 半徑1ナル圓ニ内接スル正十二邊形ト外接スル正十二邊形トノ一邊ノ長サヲ各小數第二位マデ算出セヨ.

46. 直角三角形ABC(∠A=R∟)ノ一鋭角Bノ二等分線ガACト交ル點ヲDトスルトキAB=2.ADデアルトイフ. 三邊ノ比ヲ求メヨ.

47. 直徑15*cm*ノ圓ニ内接スル三角形ノ二邊ガ12*cm*及10*cm*ナルトキ第三邊ノ長サヲ求メヨ,

48. 半徑r,中心角60°ナル扇形ニ内接スル(其弧ノ上ニ二頂點ガアル)正方形ノ邊ノ長サヲ求メヨ.

49. 二角ガ60°, 75°ナル三角形ノ最小邊ノ長サヲaトシテ此三角形ノ内接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

50. △ABCノ底邊BCニ平行ニ任意ノ直線ヲ引キ, AB, AC又ハ其延長ト夫々D, Eデ交ラセル. 二直線BE, CDノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

51. 定三角形ニ内接スル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

52. 定三角形ニ相似ナル三角形ノ一頂點ハ定點デアッテ,第二ノ頂點ハ定直線上ヲ動クトキ,第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.

53. 定圓內ノ定點 A ヲ通ッテ此圓ニ任意ノ弦 BC ヲ引キ,次ニ A ヲ通リ夫々 B, C ニ於テ此定圓ニ切スル二ツノ圓ヲ畫クトキ,此二圓ノ第二ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

54. ABCD ハ平行四邊形デアッテ,其一邊 AB ハ位置ガ與ヘラレ, BC ハ長サダケガ與ヘラレテアルトスル. ∠C 及 ∠D ノ二等分線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

55. 相交ル二定直線ニ下ス垂線ノ足ノ間ノ距離ガ定長ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

56. 三定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

57. 二定圓ニ引イタ切線ノ長サガ相等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

58. 正三角形ニ於テ,其ノ二頂點ニ至ル距離ノ和ガ第三ノ頂點ニ至ル距離ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

59. 頂角,周圍及底邊ノ一端カラノ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

60. 二邊及一中線ヲ知ッテ三角形ヲ作レ.

61. 一邊ト二中線トヲ知ッテ三角形ヲ作レ.

62. 三中線ヲ知ッテ三角形ヲ作レ.

63. 頂角,高サ及頂點カラノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

64. 頂角ノ二等分線ノ長サ,其頂點カラノ中線及其頂點カラノ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

65. 定線分ヲ二ツノ分ニ內分又ハ外分シ,其ノ各分ノ平方ノ和(或ハ差)ガ定面積 k^2 ニ等シイヤウニセヨ.

66. 正方形 ABCD ノ頂點 A ト BC 上ノ一點 P ト CD 上ノ一點 Q トヲ知ッテ元ノ正方形 ABCD ヲ作レ.

67. 二點 P, Q ト一圓トガ與ヘラレタトキ此圓ノ直徑 AB ヲ引キ AP=BQ ナルヤウニセヨ.

68. 二邊ガ夫々定長ナル三角形ノ中,面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ.

69. 圓 O 外ノ點 A カラ此圓ニ割線 ABC ヲ引イテ △BOC ノ面積ヲ最大ニセヨ.

70. 銳角 BAC 內ノ一定點 O ヲ一頂點トシ,他ノ二頂點ガ一ツヅヽ此角ノ二邊上ニアル最小周圍ノ三角形ヲ求メヨ.

71. 定三角形ニ最大面積ノ矩形ヲ內接サセヨ.

72. 定角內ノ定點 P ヲ通ッテ二邊ト Q, R デ交ル直線ヲ引キ PQ.PR ヲ最小ニセヨ.

73. 定點ヲ通ッテ定直線及定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

第二篇　平面及直線

第一章　緒　論

1. 一ツノ直線ガ定點ヲ通ツテ且ツ此點ヲ通ラナイ他ノ直線ニ交リツヽ動ケバ一ツノ平面ヲ畫ク.

2. 一ツノ直線ガ他ノ定直線ニ交リツヽ最初ノ位置ニ平行ニ動ケバ一ツノ平面ヲ畫ク.

3. 同一平面上ニナイ二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ガアツテ其對應邊 BC ト B′C′, CA ト C′A′, AB ト A′B′ トガ夫々相交レバ,コノ三ツノ交點ハ一直線上ニアル. 而シテ三直線 AA′, BB′, CC′ ハ皆平行デアルカ若クハ一點ニ會スル.

第二章　平行ナル平面及直線

1. 三ツノ平面ハ空間ヲ幾ツノ部分ニ分ツカ,總テノ場合ヲ吟味セヨ.

2. A, B, C, D ガ同一平面ノ上ニナイ四點デアルトキ,二直線 AB, AC ニ交ル一直線ト二直線 BD, CD ニ交ル一直線トガ平行ナラバ,此二直線ハ何レモ BC ニ平行デアル.

3. 二ツノ平行平面間ニ夾マレル任意ノ線分ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ハ何カ.

4. 同一平面上ニナイ二定直線間ニ夾マレル任意ノ線分ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ハ何カ.

5. 二定直線ニ交ツテ且ツ他ノ定直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ.

6. 二定直線ヲ一ツヅヽ含ム二平面ヲ作ツテ,其交線ガ定平面ニ含マレルヤウニセヨ.

第三章　垂　線

1. 直線上ノ一點ヲ通ツテ之ニ垂直ナル任意ノ直線ハ皆其點ヲ通ツテ初ノ直線ニ垂直ナル平面ノ上ニアル.

2. 直角ノ一邊ヲ軸トシテ之ヲ廻轉スレバ他ノ邊ハ初ノ邊ニ垂直ナル平面ヲ畫ク.

3. 一平面上ノ平行デナイ三直線ト等角ヲナス直線ハ其平面ノ垂線デアル.

4. 定直線ヲ含ンデ他ノ定直線ニ垂直ナル平面ヲ作ルコトガ出來ルカ.

5. 一點 O カラ引イタ六ツノ直線 OA, OB, OC, OA′, OB′, OC′ ガアツテ,三平面 (OB, OC), (OC, OA), (OA, OB) ガ夫々 OA′, OB′, OC′ ニ垂直ナラバ三平面 (OB′, OC′), (OC′, OA′), (OA′, OB′) ハマタ夫々 OA, OB, OC ニ垂直デアル.

6. 數多ノ平面ノ交リガ悉ク平行ナラバ,任意ノ一點カラ此等ノ平面ヘ引イタ垂線ハスベテ同一ノ平面上ニアル.

7. 平面ニ平行ナル二直線ニ夫々垂直ナル二平面ノ交リハ初ノ平面ニ垂直デアル.

8. 一點 A カラ相交ル二平面 P, Q ヘ夫々垂線 AB, AC ヲ引キ, C カラ P ヘ垂線 CD ヲ引ケバ, BD ハ P, Q ノ交リニ垂直デアル.

9. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ガ或平面ニ平行ナラバ,此三角形ノ各頂點ノ其平面上ニ於ケル直射影ヲ頂點トスル三角形ハマタ直角三角形デアル.

10. 圓ノ直徑 AB ノ一端 A カラ此圓ノ平面ニ垂線ヲ引キ,其上ノ一點 P ヲ圓周上ノ任意ノ點 C ニ結ベバ二平面 PAC, PBC ハ互ニ垂直デアル.

11. 二點 A, B カラ一平面 P ヘ垂線 AC, BD ヲ引キ,又 AB ニ垂直ナル任意ノ平面ト P トノ交線ヲ MN トスレバ $MN \perp CD$

12. 同一ノ平面上ニアル二直線ガ他ノ平面ト等角ヲナストキハ,此二直線ガ其二平面ノ交線トナス角ハマタ相等シイ.

13. 一平面上ノ任意ノ直線ガ他ノ平面上ニ於ケル其直射影トナス鋭角ノ中デ,二平面ノ交線ニ垂直ナル

直線ノナス角(卽チ此二平面ノナス角)ガ最大デアル.

14. 平面外ノ一定點カラ此平面ヘ引イタ定長ノ斜線ノ足ノ軌跡ハ何カ.

15. 水平面上ニ垂直ニ二本ノ棒ガ立ツテヰル,此平面上デ各棒ヲ見ル角ガ相等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

16. 定點ヲ通リ定直線ニ平行デ,且ツ定平面ニ垂直ナル平面ヲ作レ.

17. 二定直線ニ交ツテ定平面ニ垂直ナル直線ヲ引ケ.

18. 正三角形 ABC ノ垂心 O ヲ通ツテ此三角形ノ平面ニ垂線ヲ引キ,其上ニ AB ニ等シク OP ヲ取ルトキ,二平面 ABC, ABP ノナス角ノ餘弦ノ値ヲ求メヨ.

19. 矩形 ABCD ノ對角線 AC ヲ折目トシテ之ヲ折リ,二平面 ABC, ADC ガ垂直ナルヤウニシタトキ, B, D 間ノ距離ヲ求メヨ. 但シ $AB=a$, $BC=b$ トスル.

第四章 多面角

1. 三面角ノ稜ト之ニ對スル平面角ノ二等分線トヲ含ム三ツノ平面ハ同一ノ直線ヲ含ム.

2. 三面角 O−ABC ノ内部ニ直線 OP ヲ引ケバ

$$\angle AOB + \angle AOC > \angle POB + \angle POC$$

3. 四面角ヲ其二組ノ相對スル面ノ交線ニ平行ナル任意ノ平面デ截レバ,其截口ハ平行四邊形デアル.

第三篇　多面體

第一章　角壔及角錐

1. 角壔ヲ側稜ニ平行ナル任意ノ平面デ截レバ,其截口ハ平行四邊形デアル.

2. 平行六面體ハドノ面ヲ底面トシテモイヽ. 直六面體モ同樣デアル.

3. 直六面體ノ對角線ノ平方ハ一頂點デ出會フ三稜ノ平方ノ和ニ等シイ.

4. 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ平方ノ和ハ十二ノ稜ノ平方ノ和ニ等シイ.

5. 平行六面體ヲ二組ノ相對スル面ニ交ル任意ノ平面デ截レバ,其截口ハ平行四邊形デアル.

6. 立方體ノ對角線ハ其一端デ出會フ三稜ノ他ノ端ナル三點ヲ通ル平面ニ垂直デアル.

7. 角錐ノ側面積ハ底面積ヨリ大キイ.

8. 四面體ノ各雙ノ對稜ガ夫々相等シケレバ,各面ハ合同ナル鋭角三角形デアル.

9. 四面體ノ各雙ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ガ,ドノ二ツヲ取ツテモ垂直ナラバ,對稜ハ夫々相等シイ.

10 四面體ノ各雙ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ガ皆相等シケレバ,對稜ハ夫々垂直デアル.

11. 四面體ノ二雙ノ對稜ガ夫々垂直ナラバ殘リノ一雙モマタ垂直デアル.

12. 立方體ノ二ツノ對角線ノナス角ハ正四面體ノ二ツノ面ノナス角ニ等シイ.

13. 同一平面ノ上ニナイ二ツノ定線分ヲ稜トスル平行六面體ヲ作レ.

14. 三ツノ定直線上ニ夫々三稜ヲ有スル平行六面體ヲ作レ.

第二章　求積

1. 四面體ノ一稜ト之ニ對スル稜ノ中點トヲ含ム平面ハ之ヲ等積ナル二ツノ四面體ニ分ケル.

2. 四面體ノ一組ノ對稜ガ夫々二ツノ定直線上ニアツテ,且ツ其長サガ一定ナラバ,此等ノ稜ノ位置ニ拘ラズ此四面體ノ體積ハ不易デアル.

3. 全表面積ガ一定ナル直六面體ノ中デ,體積ノ最大ナルモノハ立方體デアル.

4. 角錐ヲ底ニ平行ナル平面デ截ツテ其體積ヲ三等分セヨ.

5. 角錐臺ノ體積ヲ V, 兩底面積ヲ a, b, 側稜ノ中點ヲ通ツテ底ニ平行ナル平面デノ截口ノ面積ヲ c,

ヲhトスレバ

$$V=\frac{1}{6}.(a+b+4c).h$$

6. 底面積ガ $960\,cm^2$, 高サガ $24\,cm$ ナル角錐ヲ,高サ $15\,cm$ ノ所デ底ニ平行ナ平面デ截レバ,兩部分ノ體積ハ各、幾ラカ.

7. 四面體內ニ一點ヲ求メ,此點ヲ頂點トシ四面體ノ各面ヲ底面トスル四ツノ三角錐ガ等積ナルヤウニセヨ.

第四篇 曲面體

第一章 直圓壔及直圓錐

1. 直圓壔ヲ其軸ニ平行ナル平面デ截レバ其截口ハ矩形デアル.

2. 直圓錐ヲ其頂點ヲ通ル平面デ截レバ其截口ハ二等邊三角形デアル.

3. 直圓壔又ハ直圓錐ノ底面ノ一切線ト其切點ヲ通ル母線トヲ含ム平面ハ其母線外ノ點デハ其直圓壔又ハ直圓錐ノ側面ニ出會ハナイ.

定義 此平面(卽チ直圓壔又ハ直圓錐ノ側面ト唯一直線デ出會フ平面)ヲ其直圓壔又ハ直圓錐ノ**切平面**トイフ.

切平面上ニアツテ母線ニ交ル任意ノ直線ハ其直圓壔又ハ直圓錐ノ側面ト他ノ點デハ出會ハナイ. 此直線(卽チ直圓壔又ハ直圓錐ノ側面ト唯一點デ出會フ直線)ヲ其直圓壔又ハ直圓錐ノ**切線**トイフ.

4. 矩形ノ二邊ヲ夫々軸トシテ廻轉シテ出來ル二ツノ直圓壔ノ體積ノ比ハ其二邊ノ比ノ反比ニ等シイ.

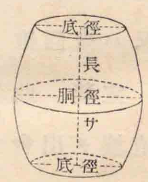
5. 直圓錐臺ノ斜高ガ兩底面ノ半徑ノ和ニ等シイトキハ,此圓錐臺ノ高サハ兩底ノ半徑ノ比例中項ノ2

倍ニ等シク,體積ハ其側面積ト高サトノ積ノ$\frac{1}{6}$ニ等シイ.

6. 邊ノ長サガaナル正方形ABCDガAヲ通ツテBDニ平行ナル直線ノ周リヲ廻ツテ出來ル立體ノ全表面積及體積ヲ求メヨ.

又此旋轉體ノ全表面積ハ此正方形ノ周ト正方形ノ重心(對角線ノ交點)ガ廻轉シテ出來ル圓ノ周トノ積ニ等シク,其體積ハ正方形ノ面積ト重心ガ畫ク圓周トノ積ニ等シイコトヲ示セ.

7. 底徑a吋,胴徑b吋,長サl吋ナル西洋樽(兩端ハ同形デ中央ガ膨レテヰルモノ)ノ容量ハ大約



$$0.0034l\left(\frac{a^2+2b^2}{3}\right)\text{がろん}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

但シ $\pi=3.1416$ トスル. 1がろん=231立方吋

註 上半部及下半部ヲ夫々直圓錐臺ト見做セバソノ容量ハ $0.0034l\left(\frac{a^2+b^2+ab}{3}\right)$ トナル. 此結果ハ明カニ小サ過ギルカラabノ代リニb^2ヲ置ケバ略〻眞ノ値ニ近イモノトシテ上ノ結果ヲ得ル.

第二章 球

1. 一直線ヲ含ンデ一球ニ切スル二平面ヲ作レバソノ二切點ヲ結ブ直線ハ初ノ直線ニ垂直デアル.

2. 定球ヲ相等シイ小圓デ截ル任意ノ平面ハ此球ト同心ナル他ノ定球ニ切スル.

3. 同一平面上ニナイ二圓周ガ二點デ出會フトキハ,此二圓周ヲ含ム球面ガ存在スル.

4. 定點カラ定球ヘ引イタ任意ノ切線ノ切點ノ軌跡ハ何カ.

5. 二定點カラノ距離ガ夫々定長ニ等シイ點ノ軌跡ハ何カ.

6. 一定點ヲ通ル任意ノ平面ヘ他ノ一定點カラ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ハ何カ.

7. 定點ヲ含ム任意ノ平面デ定球ヲ截ツテ出來ル圓ノ中心ノ軌跡ハ何カ.

8. 高サト底ノ直徑トガ相等シイ直圓錐ノ體積ハソノ底ノ半徑ヲ半徑トスル半球ノ體積ニ等シイ.

9. 半圓周ヲ三等分シ,其直徑ヲ軸トシテ之ヲ廻轉スルトキ,中央ノ弧ガ作ル球帶ノ面積ハ他ノ二弧ガ作ル球帶ノ面積ノ和ニ等シイ.

10. 同一ノ圓ニ外接スル正三角形及正方形ノ一邊ガ同一直線ノ上ニアルトキ,此直線ニ垂直ナル直徑ヲ軸トシテ全圖形ヲ廻轉スレバ,正方形ガ作ル直圓壔ノ全表面積(或ハ體積)ハ正三角形ガ作ル直圓錐ノ全表面積(或ハ體積)ト圓ガ作ル球ノ表面積(或ハ體積)トノ比例

中項デアル.

11. 定直線ヲ含ンデ定球ニ切スル平面ヲ作レ.

12. 一稜ガaナル立方體ニ外接スル球ノ半徑ヲ求メヨ.

13. 半徑rナル球ニ内接スル直圓錐ノ底ノ直徑ト側高トガ相等シイトキ,此直圓錐ノ側面積ヲ求メヨ.

14. 半徑rナル球ニ内接スル直圓錐ノ側面積ガ底面積ノ2倍ナルトキ,其高サヲ求メヨ.

15. 直徑4cmノ球ヲ一邊ノ長サ6cmノ正三角形ノ三邊デ支ヘルトキ其正三角形ノ平面カラ球ノ頂點マデノ高サハ幾ラカ.

雜題

1. 四ツノ平面ハ一般ニハ空間ヲ15ノ部分ニ分ケル.

2. 一平面ノ同ジ側ニアル二定點カラノ距離ノ和ガ最小ナル點ヲ此平面上ニ求メヨ.

3. 平面ノ兩側ニ一ツヅヽアル二定點カラノ距離ノ差ガ最大ナル點ヲ此平面上ニ求メヨ.

4. 或線ノ相交ル二平面ノ各ゝノ上ニ於ケル直射影ガ何レモ直線ナラバ,其線ハ一般ニハ直線デアル.

5. 捩四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ他ノ二邊

ノ和ノ半分ヨリ小サイ.

6. 捩四邊形ノ四ツノ劣角ノ和ハ4R∟ヨリ小サイ. 從テ各角ガ直角ナル四邊形ハ矩形デアル.

7. OA, OB, OC ヲ平行六面體ノ三稜, OP ヲソノ對角線トスレバ

$$OP^2+OA^2+OB^2+OC^2=PA^2+PB^2+PC^2$$

8. 四面體ノ六ツノ稜ノ平方ノ和ハ對稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ノ平方ノ和ノ4倍デアル.

9. 三面角 O-ABC ノ各平面角ガ皆直角ナルトキ其内部ノ一點Pカラ各面ニ垂線PX, PY, PZヲ引ケバ

$$OP^2=PX^2+PY^2+PZ^2$$

10. 四面體ABCDノ頂點Aニ於ケル平面角ガ皆直角デ且ツ三稜AB, AC, ADガ皆相等シケレバ,底面BCD上ノ任意ノ點カラ他ノ三面ニ引イタ垂線ノ和ハ一定デアル.

11. 四面體ノ三ツノ頂點ニ於ケル平面角ノ和ガ何レモ2R∟ナラバ,殘リノ頂點ニ於ケル平面角ノ和モ亦2R∟デアッテ,各面ハ皆合同デアル.

12. 四面體ノ一雙ノ對稜ガ相等シケレバ,此等ノ稜ニ平行ナル任意ノ平面デノ截口ハ一定ノ周圍ヲ有スル.

13. 四面體ヲ一雙ノ對稜ニ平行ナル平面デ截リ,其

截口ノ面積ヲ最大ニセヨ.

14. 正四面體內ノ任意ノ一點カラ各面マデノ距離ノ和ハ四面體ノ高サニ等シイ.

15. 四面體ノ體積ハソノ一雙ノ對稜ノ中點ヲ通ル任意ノ平面デ二等分サレル.

16. 四面體ノ二面ノナス角ヲ二等分スル平面ハ相對スル稜ヲ其二面ノ面積ニ比例スル二部ニ分ケル.

17. 各雙ノ對稜ガ皆垂直ナル四面體ニ於テハ

(1) 頂點カラ對面ニ引イタ垂線ノ足ハ其面ノ垂心デアル.

(2) 頂點カラ對面ヘ引イタ四ツノ垂線ハ一點デ出會フ.

(3) 對稜ノ共通垂線ハ一點デ出會フ. 此點ハ(2)ノ會點ト同一ノ點デアル.

(4) 對稜ノ平方ノ和ハ皆相等シイ.

(5) 各稜ノ中點ハ同一球面ノ上ニアル.

18. 三面角ノ一組ノ二面ガ垂直ナラバ,此三面角ヲツノ任意ノ稜ニ垂直ナル平面デ截ツタ截口ハ直角三角形デアル.

19. 三面角ノ各平面角ガ皆直角ナラバ,此三面角ヲ任意ノ平面デ截ツタ截口ハ鋭角三角形デアツテ,其垂心ハ三面角ノ頂點カラ其截口ノ面ニ引イタ垂線ノ足デアル.

20. 四面體ヲ平面デ截ツテ其截口ガ菱形ニナルヤウニセヨ.

21. 立方體ヲ平面デ截ツテ其截口ガ正六邊形ニナルヤウニセヨ.

22. 正八面體ヲ平面デ截ツテ其截口ガ正六邊形ニナルヤウニセヨ.

23. 相交ル二定直線カラ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

24. 同一直線ノ上ニアル引續イタ三ツノ線分 AB, BC, CD ノ各〻ヲ等角ニ見ル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

25. 互ニ垂直ナル二定直線ノ間ニ夾マレル定長ノ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

26. 二ツノ定直線間ニ夾マツテ且ツ定平面ニ平行ナル定長ノ線分ヲ引ケ.

27. 定直線上ニ一點ヲ求メ,之カラ垂直ナル二ツノ定平面ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ最小ナルヤウニセヨ.

28. 定直線上ニ一點ヲ求メ,之カラ他ノ定直線ニ至ル距離ヲ定長ニ等シクセヨ.

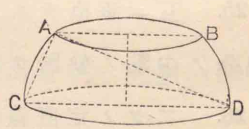
29. 正角錐ノ底面上ノ任意ノ點カラ之ニ引イタ垂線ガ各側面又ハ其延長ト出會フ點マデノ距離ノ和ハ一定デアル.

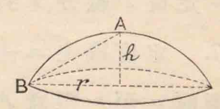
30. 三角壔ヲソノ底ニ平行デナイ平面デ截ツテ出來ル立體ノ體積ハ,元ノ底面ヲ底面トシ截口ナル三角形ノ各頂點ヲ頂點トスル三ツノ三角錐ノ體積ノ和ニ等シイ.

31. 半圓ヨリ小サイ扇形ガソノ屬スル圓ノ中心ヲ通ツテ此扇形ニ交ラナイ直徑ヲ軸トシテ一廻轉シテ出來ル立體ノ體積ハ,扇形ノ弧ガ畫ク球帶ノ面積ト扇形ノ半徑トノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ.

32. 球分ノ體積ハ其各底面ノ半徑ヲ半徑トシ,ソノ高サヲ高サトスル二ツノ直圓壔ノ體積ノ和ノ半分トソノ高サニ等シイ直徑ノ球ノ體積トノ和ニ等シイ.

33. 右圖ノ球帶ノ面積ハ$\pi.AC.AD$ニ等シイコトヲ證明セヨ. 之ニヨツテ下ノ圖ノ球分ノ曲面積ハ$\pi(r^2+h^2)$ニ等シク,又ハ AB ヲ半徑トスル圓ノ面積ニ等シイコトヲ示セ.





34. 一稜ガaナル正四面體ニ內接スル球ノ半徑ヲ求メヨ.

35. 一稜ガaナル正八面體ニ內接スル球ノ半徑ヲ求メヨ.

36. 一稜ガaナル正四面體ノ對稜間ノ最短距離ヲ求メヨ.

37. 一稜ガaナル立方體ノ對角線ト稜トノ間ノ最短距離ヲ求メヨ.

第五篇　三角函數

第一章　一般角ノ三角函數

x ガ $0°$ カラ $360°$ マデ增ストキ次ノ各式ノ變化ヲ追跡シ,ソノぐらふヲ畫ケ.

1. $\cot x$　　2. $\sec x$　　3. $\operatorname{cosec} x$

4. $1-\sin x$　　5. $\sin^2 x$

第二章　三角函數間ノ關係

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

1. $\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A\cos^2 A$

2. $\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A$

3. $\sin^3 A+\cos^3 A=(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)$

4. $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$

5. $\cos(90°-A)\operatorname{cosec}(90°-A)=\tan A$

6. $(1+\sin A-\cos A)^2+(1+\cos A-\sin A)^2=4(1-\sin A\cos A)$

7. $(1+\sin A+\cos A)^2(1-\sin A-\cos A)^2=4\sin^2 A\cos^2 A$

8. $\sin A=\dfrac{4}{5}$ ナルトキ $\dfrac{2\sin A-3\cos A}{4\sin A-9\cos A}$ ノ値ヲ求メヨ.
但シ $90°<A<180°$ トスル.

9. $0°<B<A<90°$ ナルトキハ $\dfrac{\tan A}{\tan B}>\dfrac{\sin A}{\sin B}$ ナルコトヲ證明セヨ.

10. $\cos A=\cos x\sin C,\ \cos B=\sin x\sin C$ ナルトキハ

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$ ナルコトヲ證明セヨ.

11. 方程式 $2\sin^2 x+3\cos x-3=0$ ニ適合スル $360°$ 以內ノ正角ヲ求メヨ.

第三章　二角ノ和及差ノ三角函數

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

1. $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$

2. $\tan A+\cot B=\dfrac{\cos(A-B)}{\cos A\sin B}$

3. $2\sin(45°+A)\sin(45°-A)=\cos 2A$

4. $\cos(A+B)\cos B+\sin(A+B)\sin B=\cos A$

5. $\sin(60°-\alpha)\cos(30°+\alpha)+\cos(60°-\alpha)\sin(30°+\alpha)=1$

6. $\tan A+\cot A=2\operatorname{cosec} 2A$

7. $\cos A+\cos(120°+A)+\cos(120°-A)=0$

8. $\sin^2 A+\sin^2(A+60°)+\sin^2(A-60°)=\dfrac{3}{2}$

9. $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$
$\qquad+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C$

10. $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$\qquad-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B$

11. $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$

12. $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

$A+B+C=180°$ ナルトキ次ノ各等式ヲ證明セヨ.

13. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

14. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

15. $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

---

16. 二次方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トシテ $\tan(\alpha+\beta)$ ヲ p, q デ表セ.

又 $\dfrac{1+q}{p}=-\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ ナルコトヲ示セ.

17. $0°<A<45°$ ナルトキ次ノ不等式ヲ證明セヨ.

$$0<\frac{\sin(A+B)-4\sin A+\sin(A-B)}{\cos(A+B)-4\cos A+\cos(A-B)}<1$$

18. $\alpha+\beta$ ガ一定ナルトキハ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

ハマタ一定ナルコトヲ證明セヨ.

19. $\cos(\theta-\alpha)$, $\cos\theta$, $\cos(\theta+\alpha)$ ガ調和級數ヲナストキハ $\cos\theta=\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ. 但シ α, θ ハ何レモ正ノ鋭角デアル.

20. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$, $\cos^2 A'+\cos^2 B'+\cos^2 C'=1$ ナルトキ次ノ關係式ヲ證明セヨ.

$$\cos A\cos A'+\cos B\cos B'+\cos C\cos C'\leqq 1$$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

第六篇 三角函數ノ應用

第一章 三角形ノ性質

次ノ各等式ヲ證明セヨ.

1. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

2. $s\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\right)=c\cot\dfrac{C}{2}$

3. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$

4. $\cos A+\cos B=\sin C$ ナルトキハ此三角形ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ.

5. $\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}$ ナラバ此三角形ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ.

6. $2\sin C\cos B=\sin A$ ナラバ此三角形ハ二等邊ナルコトヲ證明セヨ.

7. $a\cos A=b\cos B$ ナラバ此三角形ハ二等邊カ又ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ.

8. $\tan A\sin^2 B=\tan B\sin^2 A$ ナラバ此三角形ハ二等邊カ又ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ.

9. a, b, c ガ等差級數ヲナサバ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ ナルコトヲ證明セヨ.

10. A, B, C ガ等差級數ヲナサバ

$(a+b+c)(a-b+c)=3ca$ ナルコトヲ示セ.

11. A, B, C ガ等差級數ヲナサバ $\cos(A-B)=\frac{a+c}{2b}$ ナルコトヲ示セ.

12. 頂點Aニ於ケル內角及外角ノ二等分線ガ相等シイトキハ $a\cos\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)=b\sin A$ ナルコトヲ示セ.

13. $a:b:c=\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$ ナルトキ $A=30^\circ$ ナルコトヲ示セ.

直角三角形ABCニ於テ次ノ各等式ヲ證明セヨ. 但シAヲ直角トスル.

14. $\tan^2\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\frac{a+b}{a-b}$　　15. $\sin 3B=\frac{3bc^2-b^3}{a^3}$

第四章　測量上ノ應用

1. 海上ニ碇泊シテヰル二船A, Bノ間ノ距離ヲ測ルタメ海岸ノ平地ニ長サ $100\,m$ ノ基線PQヲ設ケテ測量シ $\angle APQ=110^\circ.5$, $\angle AQP=40^\circ.2$, $\angle BPQ=30^\circ$, $\angle BQP=120^\circ$ ヲ得タ. 二船間ノ距離ヲ求メヨ.

2. 東西ノ方向ニ並ンデヰル二ツノ小島A, Bガアッテ其間ノ距離ハ $2\sqrt{3}\,km$ デアル,而シテBハ燈臺Cカラ南西ノ方向ニ, AハCカラ南東ノ方向ニアル. ABノ上デAカラ $(\sqrt{3}-1)\,km$ ノ位置ニアル暗礁Dハ燈臺カラドノ方位ニ當ルカ.

3. 高サ a 米ノ塔ノ上ニ b 米ノ竿ガ立ッテヰル,其塔ノ基點ヲ含ム水平面ニ觀測者ガアッテ先ヅ竿ヲ見

ル角ヲ測リ,次ニ塔ノ基底カラ c 米上ニアル目標ノ高度ヲ測ッタラ同ジ角ヲ得タトイフ. 塔ノ基底ト觀測者トノ間ノ距離ヲ求メヨ.

4. 臺ノ上ニ竿ガ立テヽアル,之カラ a ナル距離ノ場所デ竿ノ兩端ノ仰角ヲ測ッテ θ, 2θ ヲ得タ. 之ニヨッテ臺ノ高サ及竿ノ長サヲ求メヨ.

5. 山ノ麓デ頂ノ仰角ヲ測リ α ヲ得,ソレカラ β ノ傾斜角ヲナス直線狀ノ坂路ヲ山頂ニ向ッテ l 米ダケ上リ,此所デ再ビ山頂ノ仰角ヲ測ッテ γ ヲ得タトイフ. 山ノ高サヲ求メヨ.

6. $2\,km$ 隔タル甲乙二地點デ同時ニ一ツノ飛行機ノ方位及仰角ヲ測ッタノニ,甲デハ方位北仰角 30°, 乙デハ方位東仰角 60° ヲ得タ. コノ飛行機ノ高サハ約何 m カ.

7. 塔CDノ基底Cト同一水平面上ニ二點A, Bガアッテ $\angle CAB=105^\circ$, $\angle CBA=30^\circ$, $\angle DAC=60^\circ$, $AB=50\,m$ ナルトキ,塔ノ高サヲ cm ノ位マデ求メヨ.

8. 水平面上ニ,一點Oデ交ル二ツノ直線道路OX, OYガアル. 此水平面上ニ直立スル一ツノ塔ノ頂ノ仰角ヲOX上デ測リ最大仰角 α ヲ得ル點ヲAトシ,マタOY上デ測リ最大仰角 β ヲ得ル點ヲBトシ, $OA=a$, $OB=b$ トスレバ塔ノ高サハ次ノ式デ表ハサレルコトヲ示セ.

$$\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$$

雜　　題

1. $\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ナルトキ $\sin A$ ヲ求メヨ．但シ A ハ鋭角デアル．

2. $1+\sin A=2\cos A$ ナルトキ $\sin A$ ノ値ヲ求メヨ．

3. $\sin\theta+\sin\phi=a,\ \cos\theta+\cos\phi=b$ ナルトキ $\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ ノ値ヲ a, b デ表セ．

次ノ各等式ヲ證明セヨ．

4. $\cos A\cos(B+C)-\cos B\cos(A+C)=\sin C\,\mathrm{siu}(A-B)$

5. $2(\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta\cos^2\phi)=1+\cos2\theta\cos2\phi$

6. $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

7. $\dfrac{\sin A+\sin3A+\sin5A+\sin7A}{\cos A+\cos3A+\cos5A+\cos7A}=\tan4A$

8. $\sin(36^\circ+A)-\sin(36^\circ-A)+\sin(72^\circ-A)-\sin(72^\circ+A)$
$=\sin A$

9. $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin60^\circ\sin80^\circ=\dfrac{3}{16}$

10. $A\cos\theta+B\sin\theta=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta-\alpha)$

但シ α ハ $\tan\alpha=\frac{B}{A}$ ニ適スル或角デアル．

11. $\cos\theta=\dfrac{\cos\phi-e}{1-e\cos\phi}$ ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ．

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{\phi}{2}$$

12. $\sin A=\sin B,\ \cos A=\cos B$ ナルトキハ $A-B$ ハ 360° ノ整數倍ナルコトヲ示セ．

13. $\cos(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)=k\sin(45^\circ-\alpha)$ ナルトキ k ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ．

14. $\tan^2A=1+2\tan^2B$ ナルトキハ $\cos^2B=1+\cos2A$ ナルコトヲ證明セヨ．

15. x ガ 0° カラ 360° マデ變ル間ニ次ノ各式ノ値ノ變化ヲ研究セヨ．

(1) $\sin x+\cos x$　　(2) $\tan x+\cot x$

16. $\sin x+\cos x$ ノ最大値ヲ求メヨ．

17. $x+y$ ガ一定ナルトキ $\sin x\sin y$ ノ最大値ヲ求メヨ．

18. $\sin x+\cos x=a$ ナルトキ次ノ各式ヲ a デ表セ．

(1) $\sin2x$　　(2) $\sin^3x+\cos^3x$

19. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ $\tan A, \tan B, \tan C$ ガ等差級數ヲナサバ $\sin2A, \sin2B, \sin2C$ モ亦等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ．

20. 斜邊 a 及他ノ二邊ノ和 $b+c$ ヲ知ツテ直角三角形ヲ解ケ．

21. 一鋭角 B 及直角ヲ夾ム二邊ノ和 $b+c$ ヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ．

22. 一邊 a, 其對角 A 及他ノ二邊ノ和 $b+c$ ヲ知ツテ三角形ヲ解ケ．

23. 周ト角トヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

24. x ガ限リナク 45° ニ近ヅクトキ $\frac{\cos(x+45^\circ)}{1-\tan x}$ ノ極限ノ値ヲ求メヨ

25. x ガ限リナク 90° ニ近ヅクトキ $(1-\sin x)\tan^2 x$ ノ極限ノ値ヲ求メヨ.

26. $\sin A$ ガ $\sin B$ ト $\cos B$ トノ等差中項ナラバ $\cos 2A=\cos^2(B+45^\circ)$ ナルコトヲ證明セヨ.

27. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ.

$$\sin(60^\circ+x)+2\sin(x-60^\circ)-\sqrt{3}\cos(120^\circ-x)$$

28. n ハ正ノ整數デ nx ハ正ノ鋭角ナルトキ次ノ不等式ヲ證明セヨ.

$$\tan nx+\tan(n-2)x>2\tan(n-1)x$$

29. $\triangle ABC$ ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$$

30. 等シクナイ二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ガアッテ,

$$AB=A'B'=1\,m,\quad AC=A'C'=\sqrt{2}\,m,\quad \angle C=\angle C'=30^\circ$$

デアルトイフ,各〻ノ他ノ二角ヲ求メヨ. 且ツコノ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ $(\sqrt{3}+1):(\sqrt{3}-1)$ ナルコトヲ證明セヨ.

31. 四邊形ノ兩對角線ノ長サヲ a, b, 其夾角ヲ θ ト

スレバ,此四邊形ノ面積ハ $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ ニ等シイコトヲ證明セヨ.

32. 1 km 離レタ甲乙二箇處ト其眞中ニ當ル丙トニ於テ或點ノ高度ヲ測リ夫々 60°, 30°, 45° ヲ得タトイフ. 此點ハ地面上ドレダケノ高サニアルカ.

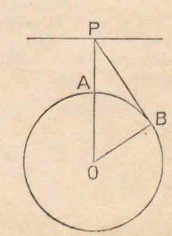
33. 平野ヲ東西ニ貫ク眞直ナ道路 ABC ガアル, A ノ正北ニ立ツテヰル塔ノ頂ノ仰角ヲ A, B, C ノ三點デ測ツテ夫々 60°, 30°, 45° ヲ得タトスレバ, B ハ AC ノ中點ナルコトヲ示セ.

34. 或傾斜地ヲ正北ニ向ツテ登ルトキ其勾配ガ最大デアッテ $\frac{1}{5}$ デアルトイフ. 之ヲ北東ニ向テ登レバ其勾配ハ幾ラカ.

註 道路ノ勾配トハ之ト水平面トナス角ノ正弦ノコトデアル.

35. 東西ニ走ル或堤防ノ斜面ヲ正北ニ向ツテ登レバ其勾配ガ $\frac{8}{13}$ デアルトイフ. 北カラ東ノ方ヘドレダケ偏ツタ方向ニ登ツタラ其勾配ガ $\frac{4}{11}$ ニナルカ.

36. 圖デ, O ヲ地球ノ中心, PB ヲ切線トスルトキ, PB ヲ P ニ於ケル視半徑トイヒ, P ヲ通ル水平面ト PB トノナス角ヲ P ニ於ケル地平ノ俯角トイフ.



今地面上P點ノ高サヲh,視半徑ヲl,地平ノ俯角ヲα,地球ノ半徑ヲrトスレバ,次ノ關係式ガアルコトヲ證明セヨ.

$$r=\frac{h\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}},\qquad h=l\tan\frac{\alpha}{2},\qquad l\fallingdotseq\sqrt{2rh}$$

($\fallingdotseq$ハ殆ド等シイコトヲ示ス符號)

中學教科 新平面幾何
昭和三年十月廿六日印刷　昭和三年十月廿八日發行
昭和三年十二月十五日訂正再版印刷　昭和三年十二月十八日訂正再版發行

中學教科 新立體幾何
大正十四年十一月廿七日印刷　大正十四年十一月三十日發行
昭和四年八月三十日訂正三版印刷　昭和四年九月二日訂正三版發行

中學教科 新平面三角法
大正十四年十一月十八日印刷　大正十四年十一月廿一日發行
昭和四年十一月十六日訂正四版印刷　昭和四年十一月十九日訂正四版發行

昭和八年七月二十日訂正新制版印刷
昭和八年七月二十四日訂正新制版發行

新制幾何學及三角法（增課課程用）定價金九拾四錢

著作者	寺尾壽
	藤野了祐
發行者	合資會社 冨山房 東京市神田區神保町一丁目三番地
代表者	坂本嘉治馬
印刷所	合資會社 英文通信社印刷所 東京市京橋區銀座西五丁目二番地

發行所　合資會社 冨山房
東京市神田區神保町一丁目三
電話神田二一七一～二一七八番
振替口座東京五〇一番

大津製

Sotoku Middle School

安佐郡三川村字中筋

中川

Nakagawa

第五學年

四月検査

身長 一六九、八

体重 六四kg六

胸囲 九一、一

座高 九五、七

安佐郡三川村字中筋

中川


出羽の花