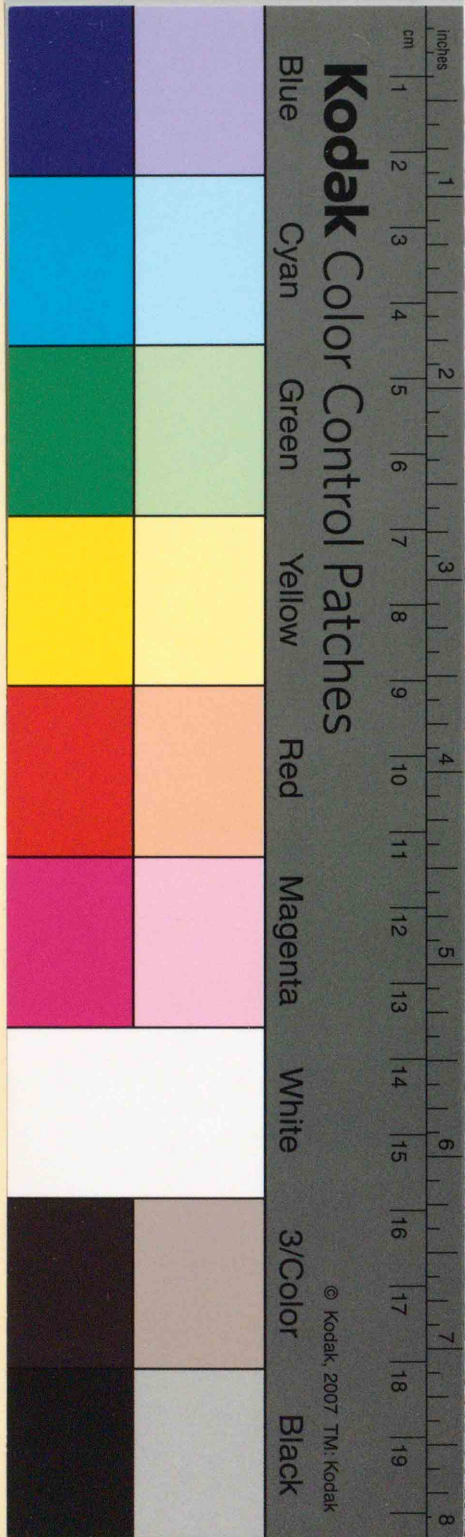


40190

教科書文庫

4
410
41-1933
01304 49550



Kodak Gray Scale

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19



© Kodak, 2007 TM: Kodak



教科書文庫
4
410
41-1933
0130449550

中等教育
新制數學教科書

第四學年用



東京
修文館



中央図書館

教科書文庫

4

410

41-1933

0130449550

広島大学図書

0130449550



文 部 省 檢 定 濟
昭和八年拾貳月拾參日 中學校數學科用

中等教育
新制數學教科書
第四學年用

廣島高等師範學校附屬中學校
數學研究會著



東 京
修 文 館

新編 算術 第四學年用
廣島大學附屬
中等學校

原簿

昭和二十一年三月

廣島大學附屬



広島大学図書

0130449550



給文社

緒 言

本書ハ新制數學教科書第四學年用トシテ著作シタモノデアル。本學年ニ於テハ代數的事項トシテ級數及ビ對數ヲ授ケル他ニ尙基本教材ノ復習ト補充トヲ行ハナクテハナラナイ。基本教材ノ復習ト補充ノ方法トシテ本書デハ代數ト幾何トヲ平行シテ教授スルニ便利ナヤウニシタ。コレ復習ト補充ハ綜合的ニスルヨリモ平行シテ教授スル方ガ徹底スルト考ヘラレルカラデアル。併シ乍ラ徒ラニ孤立のナ立場ニ立ツノデハナク、代數的事項ノ教材ノ中ニモ多クノ幾何的ナ材料ヲ取入レ又幾何的事項ノ教材ノ中ニモ多クノ代數的ナ材料ヲ取入レテ、代數ト幾何ト密接ナ關係ヲ保タシメタ。

本教科書編纂ノ趣旨ハ大體第一學年教科書ニ述ベタノデアルガ、特ニ本書デ留意シタ諸點ヲ舉ゲルト次ノヤウデアル。

1. 級數ハ等差級數及ビ等比級數ヲ中心トシテ取扱ツタ。級數ハ適當ナ教材ト適當ナ方法トヲ以テスルトキハ、唯單ニ容易ニ教授スルコトガ出來ルバカリデナク愉快ニ學習スルコトガ出來ル。故ニ本書ハ其ノ教材ハ眞ニ生徒ノ心理過程ヲ考慮シテ選擇シタ。
2. 對數ハ應用ノ極メテ廣イモノデアツテ、對數ノ理解ナクシテハ文化ノ建設ハ勿論、文化ノ眞

ノ理解ハ出來ナイ。併シ普通教育トシテハ對數ノ高遠ナ理論ハ必要デハナクテ、必要ナノハ對數ノ計算デアル。故ニ本書デハ對數ハ計算ヲ主トシテコレヲ導入シ、其ノ理論ハ計算ニ必要ナ程度ニ止メタ。

3. 代數的事項ノ復習及ビ補充ニ於テハ整式ノ性質ヲ中心トシテコレニ無理式ノ若干ノ計算ヲ取扱ツタ。整式ノ部ニ於テハ乘法除法ノ基礎カラ始メテ因數分解法ヲ總括シ、最大公約數最小公倍數ヲ求メル一般ノ方法ヲ述べ、更ニ剩餘定理、二次方程式ノ復習ト補充トヲ行ツタ。無理式ノ部ニ於テハ簡單ニ根式ノ計算法ヲ取扱ツタ上無理方程式ノ解法ニ及シタ。
4. 幾何的事項ノ復習及ビ補充ニ於テハ面積軌跡、作圖、比例及ビ最大最小ヲ主トシテ取扱ヒ、代數學ト幾何學トノ密接ナ關係ヲ保タシメ、圖形ノ函數的變化ヲ知ラシメタ外、尙軌跡及ビ作圖問題ノ解法ノ徹底ヲ期シタ。
5. 時代ノ趨勢ニ鑑ミテ「ノモグラフ」及ビ計算尺ナル一項ヲ掲ゲテ、數學ノ實用化ノ一面ヲ知ラシメ且新時代ノ學校數學ノ向フ一端ヲ示シタ。

昭和八年九月

著者識

目次

第一篇

級數

第一章 等差級數

- | | |
|---------------|-----|
| 1 等差級數(A. P.) | 頁 1 |
|---------------|-----|

第二章 等比級數

- | | |
|---------------|----|
| 2 等比級數(G. P.) | 11 |
| 3 等比級數ノ總和 | 15 |
| 4 無限等比級數及循環小數 | 19 |
| 5 其ノ他ノ級數 | 27 |
| 摘要 | 30 |
| 雜題 | 30 |

第二篇

對數

第一章 一般ノ指數

- | | |
|---------|----|
| 6 指數ノ法則 | 36 |
|---------|----|

7 零及負ノ指數	39
8 根指數	41
9 分數指數	43

第二章 對 數

10 指數ト乘除計算	46
11 對數ノ意義	48
12 10ノ冪數及常用對數	50
13 對數ノ性質	52
14 常用對數ニヨル計算	56

第三章 對數表ノ使用

15 對數表	60
16 比例部分ノ理	62
17 對數ニヨル計算	66
18 指數方程式	68
19 對數ノ應用諸算	70
摘 要	80
雜 題	81

第 三 篇

復 習 及 補 充

第一章 整式ノ性質

20 代數的ノ數及代數式	85
21 整式ノ乘法	86
22 整式ノ除法	89
23 一元二次方程式ノ根ノ性質	93
24 根ノ公式ニヨル因數分解	99
25 剩餘定理及因數定理	101
26 因數定理	107
27 最大公約數ヲ求メル一般ノ方法	113
28 最小公倍數ヲ求メル一般ノ方法	119
29 聯立方程式	121

第二章 根 數・根 式

30 根數及根式ノ四則	128
31 分母ノ有理化	131
32 $a \pm 2\sqrt{b}$ ナル形ノ式ノ平方根	133
33 無理方程式	135

摘要143
 雜題145

第三章 幾何學ト代數學

34 幾何學ト文化151
 35 射影154
 36 三角形ノ面積160
 37 三角形ノ二邊ノ上ノ正方形164
 38 面積ニ關スル雜題166
 39 代數式ノ作圖173
 40 正多角形ノ作圖177
 41 正多角形ノ近似的作圖181

第四章 軌跡

42 軌跡ノ意義186
 43 基本ノ軌跡及軌跡ノ證明法188
 44 軌跡ノ他ノ證明法199

第五章 作圖題

45 作圖ノ解析及吟味205

46 アポロニアスノ圓217

第六章 比例

47 線分ノ比例224
 48 比例中項228
 49 相似及相似ノ中心230
 50 面積ノ比234

第七章 量ノ大小ト最大最小

51 線分及角ノ大小239
 52 最大最小242

附 錄

計算尺及「ノモグラフ」

1 計算ヲ簡便ニスル種々ノ工夫1
 2 計算尺ノ構造2
 3 計算尺ニヨル計算5
 4 「ノモグラフ」10

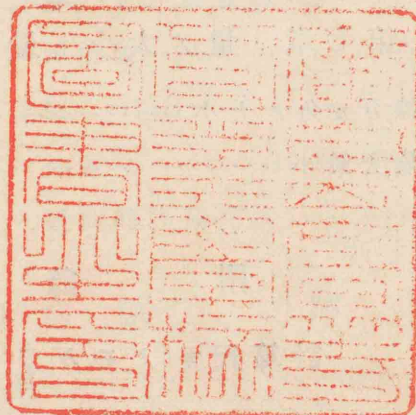
平方,立方,平方根,立方根ノ表

平方根表

對數表

 $y=10^x$ のグラフと計算尺

——〔第四學年目次終り〕——



第一篇

級數

第一章 等差級數*

1. 等差級數(A. P.)

問1 次ノ數列ノ缺ケタ所ヲ補ヒ、ソノ數列ノ中カラ等差級數ヲ選ビ出セ。

- (1) 2, 4, 6, ..., 10, ..., , 16, 18.
 (2) 1, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, ..., , $\frac{1}{17}$.
 (3) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, ..., , $\frac{1}{64}$.
 (4) -10, -5, 0, ..., 10, ..., , 25, 30.
 (5) 30, 27, 24, 21, ..., , 12, ..., 6.

問2 初項50, 公差-4ノ等差級數ヲ初項カラ第10項マデイヘ。

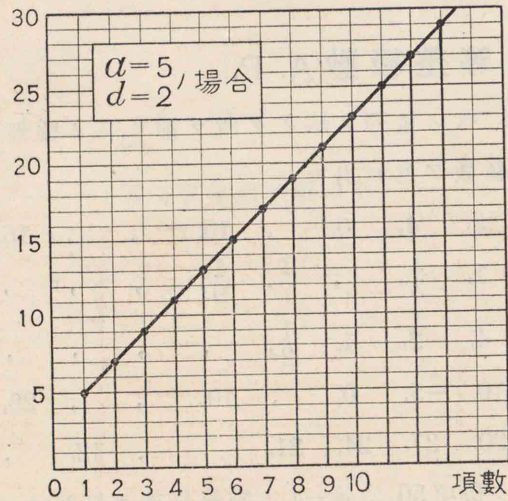
問3 初項 a , 公差 d ノ等差級數ヲ書キ下シテ、ソノ一般項ヲ示セ。

一定ノ規則ニ從ツテ並ンダ數ノ列ヲ一般ニ級數トイフ。

本書デハ實數ノ級數ノミヲ取扱フ。

* 第二學年用新制數學教科書ヲ參照セヨ。

等差級數ノ初項ヲ a , 公差ヲ d トシ, a モ d モ共ニ正ノ數デアルトキ, ソノ各項ト項數トノ間ニハ次ノ圖ノヤウナ關係ガアル.



而シテ此等ノ各項ハ圖ノヤウナ一直線上ニアツテ, ソノ直線ハ

$$y = (n-1)d + a \dots\dots\dots (n \text{ ガ 變 數})$$

ノグラフデアル.

問 4 d ガ負數ナラバ上ノグラフハ如何ナル直線トナルカ.

例一 或ル等差級數ノ第 8 項ガ 31, 第 11 項ガ 40 デアル. ソノ初項及ビ第 20 項ヲ求メヨ.

解 初項ヲ a , 公差ヲ d トスレバ

$$a + (8-1)d = 31 \dots\dots\dots (1)$$

$$a + (11-1)d = 40 \dots\dots\dots (2)$$

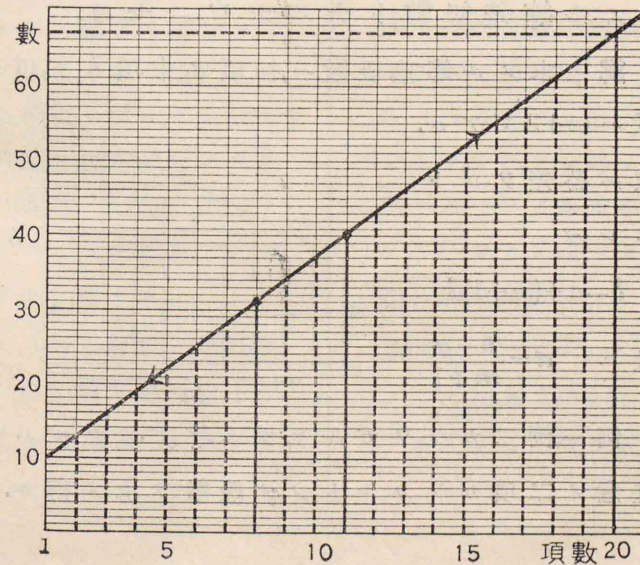
之ヲ解イテ $d=3, a=10$ ヲ得ル.

故ニ第 20 項ハ

$$10 + (20-1) \times 3 = 67$$

答	初項 10
	第20項 67

之ヲ圖ニヨツテ示スト次ノ通りニナル.



問題

1 一般項(第 n 項)が次のヤウナ級數ヲ書ケ.

$$-3n = \frac{n}{n+1}$$

$$2n-1 \quad \text{四} \quad na$$

2 A.P.ノ第16項ハ31デ、ソノ第25項ハ37デア。初項及ビ公差如何。

(1) 次ノ級數ノ一般項ヲ求メヨ。

$$(一) 2, 5, 8, 11, \dots$$

$$(二) 7, 2, -3, -8, \dots$$

(2) A.P.ノ第15項及ビ第31項ガ夫々 $-40, 40$ デア。第23項ヲ求メヨ。

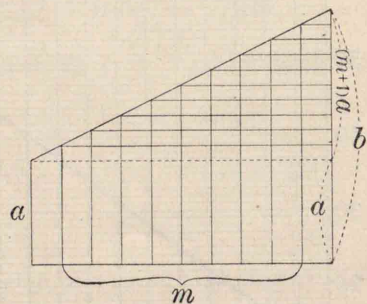
例二 二數 a, b ノ間ニ m 個ノ數ヲ入レテ、ソレ等ノ全體ガ a ヲ初項、 b ヲ末項トスル等差級數トナルヤウニセヨ。

解 求メル等差級數ハ初項 a 、末項 b デ、項數ハ $m+2$ デア。ル。

故ニ公差ヲ d トスレバ

$$b = a + (m+1)d$$

$$\text{故ニ} \quad d = \frac{b-a}{m+1}$$



例一、例二カラワカルヤウニ、等差級數デハ任意ノ二項ガワカルトソノ級數ヲ求メ得ル。

例二ノヤウニ、初項ト末項トノ間ニ在ル幾ツカノ項ヲソノ二數ノ等差中項トイフ。

唯單ニ二數 a, b ノ等差中項トイフトキハ通常 a, b ノ間ノ唯一ツノ中項ノコトヲイフノデア。此ノ中項ハ二數ノ(算術)平均デア。

問題

3 4ト13トノ間ニ5個ノ等差中項ヲ入レヨ。

4 梯形ノ平行デナイ一ツノ邊ヲ n 等分シテ、ソノ各分點ヲ通ツテ底ニ平行ニ引イタ直線ガ對邊ニ終ル線分ノ長サハ、兩底ヲ初項ト末項トニスル等差級數ヲナスコトヲ證セヨ。

5 等差級數ノ第15項ト第45項ト第 n 項トガ夫々33, 153, 217デア。ル。 n ハ何カ。

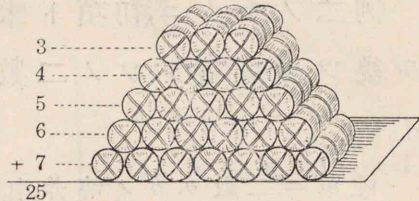
(3) 25ト -11 トノ間ニ11個ノ等差中項ヲ入レヨ。

(4) 等差級數ノ相隣ツタ二ツノ項ノ間ニ一ツ宛ノ等差中項ヲ悉ク入レルトキハ、ソレ等ノ中項ハ又一ツノ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ。

(5) 等差級數

$3b+2c, 5b+c, 7b, \dots$
ノ第 n 項ガ $17b-5c$ デア。ルトキ、 n ノ値ヲ求メヨ。

問5 圖ノ依ノ
總數ヲ知ル簡單ナ
方法ハドウカ.

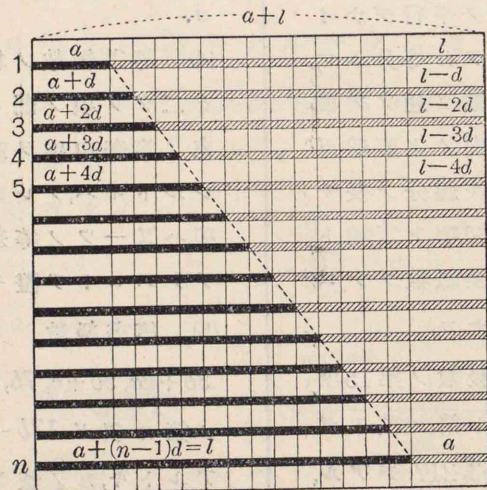


問6 次ノ圖ヲ見テ,初項 a , 公差 d , 項數 n , 末項 l ノ
等差級數ノ和 S ハ

$$S = \frac{n(a+l)}{2} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{又ハ } S = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} \dots\dots\dots(2)$$

デアアルコトヲ導ケ.



問7 上ノ公式(1), (2)ヲ式ノ上カラ出セ.

問8 柱時計ハ12時間ニ何個打ツカ. 前頁公式(1)
及ビ公式(2)ノニツカラ別々ニ出シテ見ヨ.

等差級數ノ和ヲ求メルニハ, ソノ初項, 末項,
項數ヲ知ルトキハ(1)ニヨリ, 初項, 公差, 項數ヲ
知ルトキハ(2)ニヨルガ便利デアアル.

又(1)デハ s, n, a, l , (2)デハ s, n, a, d ノ四ツ
ノ數ノ中, 何レカ三ツヲ知レバ他ノ一ツヲ求
メルコトガ出來ル.

例三 1カラ始マル n 個ノ奇數ノ和
及ビ2カラ始マル n 個ノ偶數ノ和ヲ求
メヨ.

解 1カラ始マル n 個ノ奇數ハ初項ハ1,
末項ハ $2n-1$ デアル. 故ニ前頁ノ公式(1)ニ
ヨツテ, ソノ總和ハ

$$S = \frac{n\{1+(2n-1)\}}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

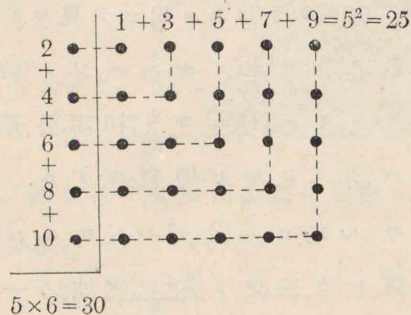
即チコノ和ハソノ項數ノ二乗ニ等シイ.

又2カラ始マル n 個ノ偶數ノ和ハ

$$S = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1)$$

デアアル.

尙之ヲ次ノヤウニ圖デ示スコトガ出來ル。



問9 6頁公式(2)ニヨツテ例三ヲ解ケ。

例四 等差級數 $-7, -5, -3, \dots$ ノ何項ノ和ガ65トナルカ。

解 初項 $a = -7$, 公差 $d = -5 - (-7) = 2$

總和 $S = 65$ デアルカラ, 項數 n ヲ求メルニ

ハ6頁公式(2)ニヨツテ,

$$65 = \frac{n\{-14 + (n-1) \times 2\}}{2}$$

$$= n\{-7 + (n-1)\}$$

$$= n(n-8)$$

故ニ $n^2 - 8n - 65 = 0$

之ヲ解イテ $n = 13$ 又ハ -5

然ルニ n ハ正ノ整數デナケレバナラナイ。

答 13項

問題

6 初項7, 末項73, 項數

ガ13デアアル等差級數ノ

總和ヲ求メヨ。

7 等差級數

11, 15, 19, \dots ノ第10項

マデノ和ヲ求メヨ。

8 月給100圓ノ收入

アル人ガアル。コノ人

ガ1ケ年置 = 10圓宛昇

給スルモノトスレバ, 30

年間ノ收入ノ總和ハ何

程カ。(利子ハ計算ニ入

レナイ。)

9 等差級數

$\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \dots$

ノ何項ノ和ガ-51トナ

ルカ。

答 13項

(6) 或ル等差級數ノ初

項5, 末項-2, 項數24デ

アル。ソノ總和如何。

(7) 等差級數

$(p+1), (p+3), (p+5), \dots$

ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

(8) 月給100圓ノ收入

アル人ガ毎年5圓宛昇

給スルモノトシ, 30年間

= 得ル收入ノ總和ヲ計

算セヨ。(利子ヲ省ク。)

(9) 次ノ級數(1)ノ和ヲ

級數(2)ノ和デ割ツタ値

ガ0.95デアルトイフ。

n ノ値如何。

(1) $1+3+5+\dots$ 第 n 項迄

(2) $2+4+6+\dots$ 第 n 項迄

10 差等級數ヲナス三ツノ數ノ和ハ57デ、ソノ小サイ數ノ3倍ト、中ノ數ノ2倍ト、大キイ數トノ和ハ106デアルトイフ。コノ三數ヲ求メヨ。

注意 中ノ數ヲ x トシ、小サイ數ヲ $x-d$ 、大キイ數ヲ $x+d$ トスレバ便利デアル。

11 直角三角形ガアル。ソノ面積ハ24平方糎デ、三邊ハ等差級數ヲナストイフ。各邊ノ長サヲ求メヨ。

12 三桁ノ整數ノウチデ17ノ倍數ハ幾ツアルカ。又此等ノ數ノ和ハ何程デアアルカ。

(10) 等差級數ヲナス四數ノ和ハ40デ、ソノ二ツノ中項ノ積ハ第1項ト第4項トノ積ヨリモ8多イトイフ。四數各如何。

注意 二ツノ中項ヲ $x-d, x+d$ トシテ表ハスト便利デアル。

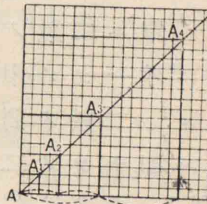
(11) 或ル多角形ノ内角ガ等差級數ヲナシ、ソノ公差ハ 4° デ、ソノ最大角ハ 172° デアアル。ソノ邊數ヲ求メヨ。

(12) 1000ヨリ小サイ奇數ノウチ、11ノ倍數デナイ數ノ和如何。

第二章 等比級數

2. 等比級數 (G.P.*)

問1 圖ニ於ケル正方形 AA_1 ノ周ヲ S トスレバ、正方形 AA_2, AA_3 等ノ周ハドウナルカ。



問2 次ノ各數列ノ缺ケタ所ヲ補ヒ、各項ノ間ニドンナ關係ガアルカラ見ヨ。

$$(1) 1, 2, 4, \quad, \quad, 32, 64$$

$$(2) 4, -2, \quad, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \quad, \frac{1}{16}$$

$$(3) a, ar, ar^2, \quad, ar^4, \dots, ar^{n-1}$$

上ノ問1ノヤウニ、第1項以外ノ各項ガ何レモソノ前ノ項ニ或ル一定ノ數ヲ掛ケタヤウナ級數ヲ等比級數トイヒ、ソノ一定ノ數ヲ公比トイフ。

上ノ(3)ハ等比級數ノ一般ノ形デ初項ハ a 、公比ハ r 、項數ハ n デアアル。今ソノ末項ヲ l トスレバ

$$l = ar^{n-1}$$

*等比級數ノ略號トシテG.P.ヲ用ヒル。之ハGeometric Progressionノ頭字ヲ取ツタモノデアアル。

デアツテ、之ハ又等比級數ノ一般項デアアル。

等比級數ノ初項ト末項トノ間ニアル幾ツカノ項ヲ等比中項トイフ。

單ニ二數ノ間ノ等比中項トイヘバ、ソノ間ニ唯一ツノ中項ノアル場合ヲ指スモノデアアル。二數ノ間ノ唯一ツノ等比中項(幾何平均)ハ即チソノ二數ノ比例中項デアアル。

問3 次ノ二數ノ比例中項ヲ求メヨ。

(1) 1, 9 (2) -4, -1 (3) 3, 12

一般ニ二數 a, b ノ比例中項ヲ x トスレバ

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{故ニ} \quad x = \pm \sqrt{ab}$$

茲ニ a, b ハ同符號ノ實數デナケレバナラナイ。何トナレバ本篇デ取扱フ數ハ之ヲ實數ノ範圍ニ限ツテキルノデ、若シ a, b ガ異符號ナラバ \sqrt{ab} ハ虚數トナルカラデアアル。

a ヲ初項、 b ヲ末項トシ、ソノ間ニ m 個ノ等比中項ヲ入レタトキノ公比ヲ r トスレバ

$$b = ar^{m+1} \quad \text{從ツテ} \quad r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

$m+1$ ガ奇數ナラバ、 a, b ノ符號ニ關係ナク r ニハ唯一ツノ値ガアル。

$m+1$ ガ偶數ノトキハ、 a, b ガ同符號ノトキニダケ m 個ノ等比中項ヲ入レルコトガ出來、而モ r ニハ正負二ツノ値ガアル。

問題

1 初項ガ5デアアル

G.P. ノ第4項ガ625ナ
ラバソノ公比如何。

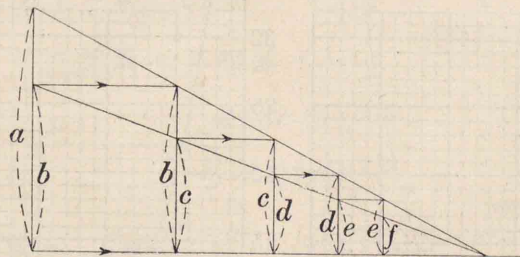
2 a, b, c, d, \dots ガ連比

例ヲナストキハ、此等ノ
數ハ等比級數ヲナスコ
トヲ證明セヨ。

(1) 等比級數

625, 125, 25, \dots ノ第何
項ガ $\frac{1}{625}$ トナルカ。

(2) 下ノ圖ヲ見テ線分
 a, b, c, d, e, \dots ハ等比
級數ヲナス理由ヲイヘ。



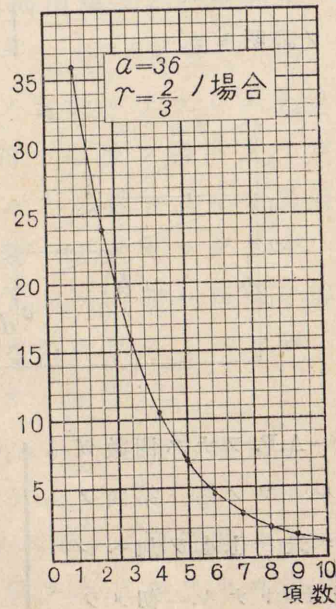
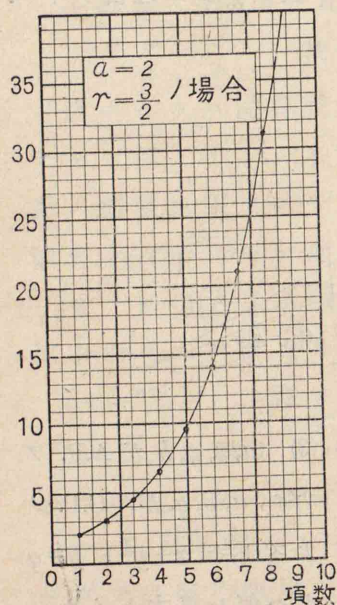
3 A.P. ヲナス四數ガ
アル。ソノ第三第四ノ
數ニ夫々1, 4ヲ加ヘレ
バG.P. トナル。初メノ
四數如何。

(3) a, x, y, b ガ A.P. ヲ
ナシ、 a, p, q, b ガ G.P. ヲ
ナストキ、 $x+y$ ト $p+q$
トハ何レガ大キイカ。
但シ a, b ハ正數トスル。

等比級數ノ初項ヲ a , 公比ヲ r トシタトキ,
第 n 項ヲ y トスルトキハ

$$y = ar^{n-1}$$

トナル。コノ式ノ y ヲ n ヲ變數トスル函數
ト考へ、 $a=2, r=\frac{3}{2}$ ノ場合、及ビ $a=36, r=\frac{2}{3}$
ノ場合ノグラフヲ描ケバ圖ノヤウニナル。
コノグラフハ第八篇ニ示ス指數曲線ノ一種
デアアル。



問4 a, r ノ一方ガ負數トナツタトキハグラフハ
如何ニナルカ。

3. 等比級數ノ總和

等比級數ノ初項ヲ a , 公比ヲ r , ソノ初メカ
ラ n 項迄ノ和ヲ S トスレバ

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

コノ兩邊ニ公比 r ヲ掛ケルト

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

トナリ、第一式ノ右邊ノ第2, 第3, ... 項ハ夫
夫第二式ノ右邊ノ第1, 第2, ... 項ト同一ノ
モノトナル。

ソコテ邊々ヲ相減スレバ

$$S - Sr = a - ar^n$$

$$S(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\text{故ニ } S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ 又ハ } S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

從ツテ a, r, n, S ノ四ツノ中何レカ三ツヲ知
ルトキハ、上ノ式ニヨツテ他ノ一ツヲ知ルコ
トガ出來ル。但シ n ヲ求メルニハ視察ニヨ
ル場合ノ外ハ後ニ學ブトコロノ對數ヲ要ス
ルカラ、今ノトコロ求メ難イ。

問 初項 a , 公比 r , 項数 n の G.P. の末項 l とし, 前項ノ公式ニヨツテ總和 S ラ求メル次ノ公式

$$S = \frac{lr - a}{r - 1} \quad \text{又ハ} \quad S = \frac{a - lr}{1 - r}$$

ヲ導ケ.

問題

4 等比級数

2, 6, 18, ……ノ第6項マデノ和ヲ求メヨ.

5 次ノ級数ノ初項カラ第10項マデノ和ヲ求メヨ.

$$a^3 - a^2b + a^2b^2 - \dots$$

6 等比級数ニ於テ初項ガ8, 公比ガ2, 總和ガ248 ナラバ, ソノ末項如何.

(4) 等比級数

729, -243, 81, ……ノ第5項マデノ和ヲ求メヨ.

(5) 次ノ級数ノ初メカラ第 n 項マデノ和ヲ求メヨ.

$$\frac{a^2}{b} + a^3 + a^4b + \dots$$

(6) 總和ガ $7\frac{3}{4}$ ノ等比級数ガアル. 初項ト末項トガ互ニ逆數デアツテ, ソノ和ハ $4\frac{1}{4}$ デアルトイフ. ソノ項數ヲ求メヨ.

例 直徑 32 cm ノ圓ト

4 cm ノ距離ニ在ル圓外ノ

點カラ此ノ圓ニ引イタ

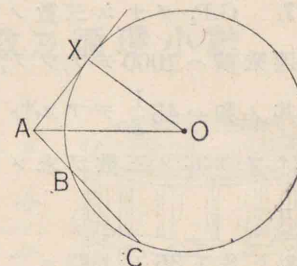
切線ノ長サハ何 cm カ.

又此ノ點カラ割線ヲ引

イテ割線ノ切取ル弦ヲ

10 cm ニシヨウト思フ. 割線ノ圓外ノ部分

ノ長サ如何.



解 Aヲ圓外ノ點トシ, AXヲ切線, ABCヲ其ノ割線トスレバ,

AO, OXノ長サ如何.

AXノ長サヲ x cm トスレバ

$$x^2 = 20^2 - 16^2$$

コレカラ $x = 12$ (負ハ捨テル.)

又 ABノ長サヲ y cm トスレバ,

$$x^2 = y(y + 10)$$

故ニ $y^2 + 10y - 144 = 0. \quad (y - 8)(y + 18) = 0$

コレカラ $y = 8$ (負ハ捨テル.)

答 | $AX = 12$ cm
| $AB = 8$ cm

7 G.P. フナス三數ノ連乘積ハ1000デアツテ、其ノ和ハ $43\frac{1}{3}$ デアルトイフ。其ノ三數ヲ求メヨ。

8 8ト36トノ間ニ二數ヲ挿入シ、初メノ三數ガA.P. フナシ、終リノ三數ガG.P. フナスヤウニセヨ。

9 初項ガ3、第 n 項ガ12288デアアルG.P. ノ n 項迄ノ和ガ9831デアルトキハソノ公比ハ如何。

10 等比級數ガアル。其ノ最初ノ4項ノ和ハ40デ、最初ノ8項ノ和ハ3280デアアル。此ノ等比級數ノ初項及ビ公比ヲ求メヨ。

(7) G.P. フナス三數ガアル。其ノ積ハ27デ、第三項ハ第二項ノ平方ニ等シトイフ。各數如何。

(8) A.P. フナス三數ガアル。其ノ和ハ24デ、此ノ三數ニ夫々1 2 12ヲ加ヘレバG.P. フナストイフ。此ノ三數ヲ求メヨ。

(9) $s=1+r+r^2+\dots+r^{2n}$ トシ、

$$s'=1-r+r^2-\dots+r^{2n}$$

トスルトキハ

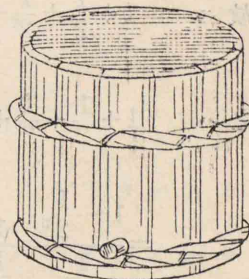
$$ss'=1+r^2+r^4+\dots+r^{4n}$$

デアアルコトヲ證セヨ。

(10) $(1.05)^{12}$ ハ約1.79556デアアルコトヲ知ツテ、初項及ビ公比ガ共ニ1.05デアアル等比級數ノ第11項マデノ和ヲ求メヨ。

4. 無限等比級數及循環小數

圖ノヤウナ圓筒狀ノ水桶ガアツテ、丁度滿水シテ、キテ深サガ2 mアル。今此ノ桶ノ水ヲ汲出スノニ第1回ニハ深サ1 mダケノ水ヲ汲出シ、第2回ニハソノ半分、又第3回ニハ更ニ其ノ半分トイフヤウニ汲出シテ行クコトニスル。



今各回ノ終リニ於ケル汲出サレタ水ノ量ト、桶ノ中ニ殘ル水ノ量トヲ、桶ノ深サ(單位ハ米)デ次ノヤウニ表ニ示サウ。

	汲出サレタ水ノ量	殘リノ水ノ量
1回後	1	1
2回後	$1 + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3回後	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$
4回後	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$
.....
10回後	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^9}$

即チ10回ノ後ニハ水桶ノ中ニハ $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$
ノ深サノ水シカ残ツテキナイ。

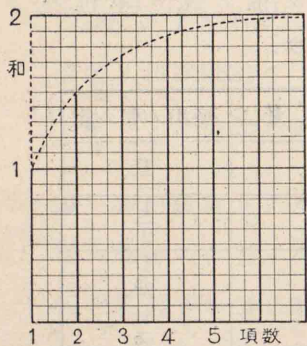
故ニ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} = 2 - \frac{1}{2^9}$ デアツテ、

之ハ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} = \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^9}$$

ト一致シテキル。一般ニ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$



デアルガ、 n ガ次第ニ大
キクナルト $\frac{1}{2^n}$ ハ次第ニ
減少スル。故ニ n ガ如
何程デモ大キクナルト
 $\frac{1}{2^n}$ ハ又如何程デモ減少
シ、其ノ極限ニ於テハ0
トナル。コノトキ此ノ
級數ノ和ヲ S_∞ ト書クト、

$$S_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2$$

尙之ヲ圖デ示スト上ノヤウニ2ニ接近スル。

問1 $(0.9)^3, (0.9)^4, (0.9)^5, \dots$

及ビ $(1.5)^2, (1.5)^3, (1.5)^4, \dots$ ヲ計算セヨ。

今等比級數 $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$ ノ和ヲ S
トスレバ、

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n$$

$\frac{a}{1-r}r^n$ ハ a ト r トガ一定デアルトキハ n ノ
函數デ、 $\frac{a}{1-r}$ ノ値ハ一定デアルガ r^n ノ値ハ
 n ト共ニ變化スル。

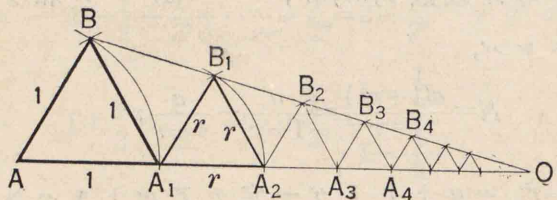
r ノ絶対値*ガ1ヨリ小サイトキハ r^n ノ絶
對値ハ n ガ大キクナルニツレテ小サクナリ、
 n ガ無限ニ大キクナツタ極限デハ零ニ等シ
イト考ヘルコトガ出來ル。

故ニソノトキノ無限等比級數ノ總和ヲ
 S_∞ トスレバ

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \text{ デアル。}$$

* r ノ絶対値ヲ表ハスニ $|r|$ ヲ以テスルコトガアル。
コノ記號ヲ用ヒテ $|r| < 1$ ノヤウニ書イタトキニハ
 $-1 < r < 1$ ノ意味デアル。

又等比級數 $1+r+r^2+r^3+\dots$ ノ無限項ノ和ハ次ノヤウニ幾何的ニ考ヘテ求メルコトガ出來ル。茲ニ $0 < r < 1$ トスル。



即チ AA_1 ヲ單位ノ長サトシ、 AA_1 ノ上ニ正三角形 AA_1B ヲ描ク。次ニ AA_1 ヲ延長シテ $A_1A_2=r$ トシ、 A_1A_2 ヲ一邊トシテ圖ノヤウニ正三角形 $A_1A_2B_1$ ヲ描ク。 BB_1 ノ延長ト AA_1 ノ延長トノ交點ヲ O トスル。

次ニ $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ 、 $B_2A_3 \parallel B_1A_2$ ノヤウニシテ、 B_2 、 A_3 等ヲ定メルト、 $\triangle A_2B_2A_3$ 等ハ悉ク正三角形デ、且 $\triangle A_1BB_1 \sim \triangle A_2B_1B_2 \dots$ 何故カ。

故ニ $\frac{A_1B}{A_1B_1} = \frac{A_2B_1}{A_2B_2}$ 即チ $\frac{1}{r} = \frac{r}{A_2B_2}$

故ニ $A_2B_2 = A_2A_3 = r^2$ 同様ニ $A_3A_4 = r^3$

故ニ $AO = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$

然ルニ $AO = x$ トスレバ $\triangle ABO$ ト $\triangle A_1B_1O$ トニ於テ

$\frac{1}{r} = \frac{x}{x-1}$ コレカラ $x = \frac{1}{1-r}$

故ニ $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$

例一 $6, -4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \dots$ ナル無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。

解 此ノ等比級數ノ公比ハ

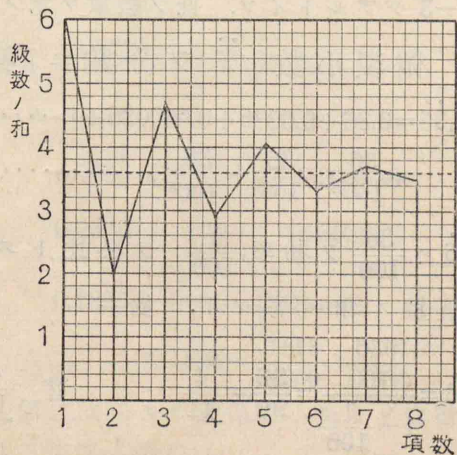
$(-4) \div 6 = -\frac{2}{3}$

デ其ノ絶對値ハ 1 ヨリ小サイカラ和ヲ求メルコトガ出來ル。即チ

$S_\infty = \frac{6}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{6}{\frac{5}{3}} = \frac{18}{5}$
 $= 3\frac{3}{5}$

答 $3\frac{3}{5}$

尙此ノ級數ノ項數トソレニ對スル和トノ關係ヲグラフデ示スト次ノ通りニナル。



注意 無限等比級數ノ和ノ公式ハ公比ノ絶對値ガ 1ヨリ小サイトキニ限ルコトヲ忘レテハナラナイ。

問題

次ノ無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。 11-(12)

11 8+4+2+..... (11) 8-2+1/2-1/8+.....

12 2+sqrt(2)+1+..... (12) 0.1+0.01+0.001+.....

次ノ方程式ヲ解ケ。但シ|x|<1トスル。

13 3=1+x+x^2+x^3+.....無限項ニ至ル。

(13) 4=1-x+x^2-x^3+.....無限項ニ至ル。

14 等比級數ガアル。其ノ無限項ニ至ル總和ハ4デ、第二項ハ-3デアルトイフ。此ノ級數ヲ求メヨ。

例二 循環小數0.36ヲ分數ニ直セ。

解 0.36=0.36+0.0036+0.000036+..... = 36/100 + 36/100^2 + 36/100^3 +

即チ0.36ハ36/100ヲ初項、1/100ヲ公比トスル無限等比級數ノ和ニ等シイ。故ニ

0.36 = (36/100) / (1 - 1/100) = 36/99 = 4/11 答 4/11

例三 0.1836ヲ分數ニ直セ。

解 0.1836=0.18+0.0036+0.000036+..... = 18/100 + 36/100^2 + 36/100^3 +

別解 0.1836=0.1836363636.....

デアルカラ

0.1836 x 10000 = 1836.363636.....

又 0.1836 x 100 = 18.363636.....

0.1836 x 9900 = 1836 - 18

∴ 0.1836 = (1836 - 18) / 9900 = 1818 / 9900 = 101 / 550

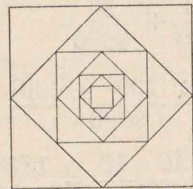
問2 例二、例三カラ純循環小數及ビ混循環小數ヲ分數ニ直ス法則ヲ述ベヨ。

問題

次ノ循環小數ヲ分數ニ直セ. 15-17)

- | | | | |
|----|------------|------|---------------|
| 15 | 0.777..... | (15) | 0.234234..... |
| 16 | 0.90318 | (16) | 0.327 |
| 17 | 0.0626 | (17) | 0.0048i |

18 一邊 a cm ノ正方形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ第二ノ正方



(18) 問題18ノヤウナスベテノ正方形ノ周ノ和ヲ求メヨ.

形ヲ作り,第二ノ正方形ノ各邊ノ中點ヲ結ンデ第三ノ正方形ヲ作ル. 斯様ニシテ限リナク正方形ヲ作ルトキ,コレラノスベテノ正方形ノ面積ノ和ハ何程ニナルカ.

次ノ級數ノ無限項ノ和ヲ求メヨ. 19-21)

- | | | | |
|----|-----------------------------------|------|-------------------------|
| 19 | $4-2+1-\frac{1}{2}+\dots$ | (19) | $3+1+\frac{1}{3}+\dots$ |
| 20 | $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\dots$ | (20) | $8-4+2-\dots$ |
| 21 | $5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\dots$ | (21) | $4+1.2+0.36+\dots$ |

5. 其ノ他ノ級數

問1 次ノ級數ノ各項ニハドンナ關係ガアルカ.

- (1) $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$
- (2) $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \dots, \frac{1}{a+(n-1)d}, \dots$

級數ノ各項ノ逆數ガ等差級數ヲナストキハ此ノ級數ヲ調和級數(H.P.)*トイフ.

調和級數ノ問題ニ於テハ各項ノ逆數ヲ作ツテソレラノ數ヲ等差級數トシテ取扱ヘバヨイ.

例一 二數 a, b ノ間ニ一ツノ數 h ヲ入レテ,ソレラガH.P.ヲナスヤウニセヨ.

解 a, h, b ガ調和級數ヲナスヤウニスルニハ, $\frac{1}{a}, \frac{1}{h}, \frac{1}{b}$ ガ等差級數ヲナスヤウニスレバヨイ.

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{h}$$

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

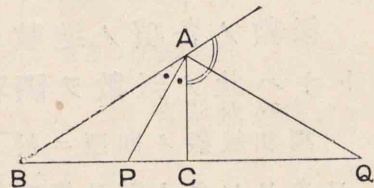
$$h = \frac{2ab}{a+b}$$

*調和級數ノ略號トシテH.P.ヲ用ヒル. 之ハHarmonic Progression ノ頭字ヲトツタモノデアル.

調和級數ノ初項ト末項トノ間ニアル諸項ヲ調和中項トイフ。

例一ノ h ハ a, b 間ノ唯一ツノ調和中項デアアル。

例二 $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ内角及ビ外角ノ二等分線ガ底又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P, Q トスレバ、線分 BP, BC, BQ ハ調和級數ヲナス。



解 BP, BC, BQ ヲ夫々 x, y, z トスレバ

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC} \quad \text{ナル故} \quad \frac{x}{y-x} = \frac{z}{z-y}$$

コレカラ $xz - xy = yz - xz$

故ニ $2xz = y(x+z)$

即チ $\frac{2}{y} = \frac{x+z}{xz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

故ニ BP, BC, BQ ハ調和級數ヲナス。

問2 調和級數ハ昔ピタゴラスニヨツテ、同ジ太サノ絃ガ1ノ長サノトキ、 $\frac{2}{3}$ ノ長サノトキ及ビ $\frac{1}{2}$ ノ長サノトキニ出ス音ガ調和音デアアルコトカラ、名附ケラレタトイフ。1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ ハ果シテ調和級數デアアルカ。

* B, P, C, Q ガ同一直線上ニアツテ $\frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC}$ デアルトキハ B, P, C, Q ハ調和列點デアルトイフ。

例三 次ノ無限級數ノ總和ヲ求メヨ。

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$$

但シ x ノ絶對値ハ1ヨリ小サイ。

解 $s = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$

$$sx = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots$$

$$s(1-x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

x ノ絶對値ガ1ヨリ小サイカラ

$$s(1-x) = \frac{x}{1-x}$$

$\therefore s = \frac{x}{(1-x)^2}$ 答 $\frac{x}{(1-x)^2}$

問3 ニツノ正數 a, b ノ等差中項、等比中項及ビ調和中項ハ等比級數ヲナスコトヲ證セヨ。

問題

22 H.P.ノ初メノ3項ガ6, 3, 2ナラバ、次ノ3

項如何。

23 $2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \dots$

ノ無限項ノ和ヲ求メヨ。

但シ x ノ絶對値ハ1ヨリ小サイモノトスル。

(22) 24ト6トノ間ニ二個ノ調和中項ヲ入レヨ。

(23) $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$ ナル級數ノ n 項マデノ和ヲ求メヨ。

摘要

◎ 等差級數 (A. P.)

$$1 \quad l = a + (n-1)d \quad 2 \quad d = \frac{b-a}{m+1}$$

$$3 \quad S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

◎ 等比級數 (G. P.)

$$1 \quad l = ar^{n-1} \quad 2 \quad r = \sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}$$

$$3 \quad S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$\text{又ハ} \quad \frac{lr-a}{r-1} = \frac{a-lr}{1-r}$$

$$4 \quad S_\infty = \frac{a}{1-r} \quad (r \text{ノ絶対値ハ} 1 \text{ヨリ小})$$

雜題

1 次ノ級數ノ第10項
マデノ和ヲ求メヨ。

$$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{8}, \dots$$

(1) 次ノ級數ノ第 n 項
マデノ和ヲ求メヨ。

$$3\frac{1}{3}, 9\frac{1}{9}, 27\frac{1}{27}, \dots$$

$$2 \quad \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + \frac{a}{r^4}$$

$$+ \frac{b}{r^5} + \frac{c}{r^6} + \frac{a}{r^7} + \dots$$

ノ $3n$ 項ノ和如何。

但シ分子ハ a, b, c ヲ
繰返スモノトスル。

$$3 \quad x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

ヲ簡單ニセヨ。

4 物體ハ初メノ1秒
間ニ約 $5m$ 落ち、次ノ1
秒間ニハソノ3倍、其ノ
次ノ1秒間ニハ5倍、其
ノ次ノ1秒間ニハ7倍
ノヤウニ初メ落下シタ
距離ノ奇數倍宛落ちル。
然ラバ初メカラ10秒間
ニハ全體デ何 m 落ちル
カ。

(2) 無限級數

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \dots$$

ノ和ヲ求メヨ。

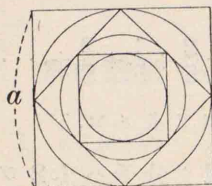
但シ分子ハ1, 2ヲ繰
返スモノトスル。

$$(3) \quad ab^{n-1} + ab^{n-2}(a+b) + \dots + a(a+b)^{n-1}$$

ハ $(a+b)^n - b^n$ ニ等シイ
コトヲ證セヨ。

(4) 或ルゴム毬ガ床上
ニ落ちルト、其ノ落下ノ
高サノ8割マデ跳反ヘ
ルトイフ。今此ノ毬ヲ
高サ a m ノ所カラ落セ
バ、其ノ床上ニ静止スル
ニ至ル迄ニ運動スベキ
距離ノ延長ハ幾許トナ
ルカ。

5

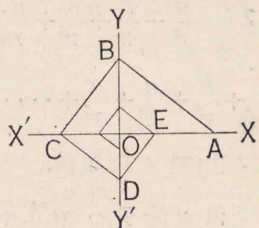


圖ノヤウニ一邊ガ $a\text{ cm}$ ノ正方形ニ内接スル圓ヲ描キ、次ニソノ圓ニ内接スル正方形ヲ描キ、カヤウニ次第ニ圓ト正方形トヲ限リナク描イテ行クト、ソレ等ノスペテノ圓ノ周ノ和及ビ面積ノ和ハイクラニナルカ。

6 昔會呂利新左衛門ハ太閤秀吉ニ乞ウテ言フノ「私ニ今日米 1 粒、明日米 2 粒、明後日米 4 粒、……ノ如ク日々倍加シテ 1 年ノ間賜ヘ」ト。秀吉ハ其ノ慾望ノ小サイノヲ笑ツテ即座ニ之

ヲ承諾シタトイフ。總高何立カ。但シ米 1 立ハ約 4 萬粒アルトシ $2^{365} = 8 \times 10^{109}$ トシテ概算セヨ。

(5)



直交スル座標軸 XX' , YY' ガアル。
 OX 上 $= OA = a\text{ cm}$ トリ、
 OY 上 $= OB = \frac{4}{5} OA$,
 OX' 上 $= OC = \frac{4}{5} OB$,
 OY' 上 $= OD = \frac{4}{5} OC$,
 OX 上 $= OE = \frac{4}{5} OD$ ノ如ク限リナク進ムトキ AB, BC, CD, DE, \dots ノスペテノ和ハ何程トナルカ。

(6) 土藏一棟 = 80 立入リノ俵ガ 100 俵入ルトスレバ問題 6 = 於テ會呂利ハ土藏幾棟分ノ米ヲモラフコトニナルカ。

7 $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ デアルコトヲ知ツテ $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ ヲ求メヨ。

解 $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ デアルカラ
 $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ デアル。

上式ハ恒等式デアルカラ $n = 1$ ハドンナ値ヲ與ヘテモ兩邊ハ恒ニ等シイ。故ニ $n = 1, 2, 3, \dots, n$ ヲ此ノ順序ニ代入スレバ

$$1^3 - 0^3 = 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \times 4^2 - 3 \times 4 + 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

$$\begin{aligned} n^3 &= 3 \cdot 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 - 3(1+2+3+\dots+n) + n \\ &= 3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) - \frac{3n(n+1)}{2} + n \end{aligned}$$

$$\text{故ニ } *1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{2n^3+3n(n+1)-2n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

答 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* 正四角錐 = 積ミ上ゲタ彈丸(積彈)ノ數ノ計算モ全クコレニヨル。

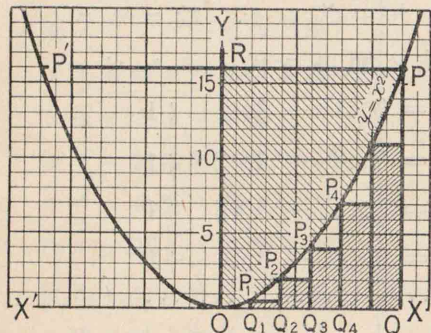
(7) 次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ.

(一) $2+6+12+\dots+n(n+1)$

(二) $3+8+15+\dots+r(r+2)+\dots$

(三) $8+20+36+\dots+2n(n+3)$

(参考) 問題 7 ノ級數ヲ用ヒルト抛物線 $y=x^2$



ト X 軸ト PQ ト
 デ圍マレタ平面
 形 OPQ ノ面積ヲ
 求メルコトガ出
 來ル.

即チ OQ ヲ n
 等分シテ各分點カラ Y 軸ニ平行線ヲ引イテ
 $y=x^2$ トノ交點ヲ夫々 P_1, P_2, P_3, \dots トスル.

$OQ=x$ トスレバ

$PQ=x^2$ テ $OQ_1=\frac{x}{n}, OQ_2=\frac{2x}{n}, OQ_3=\frac{3x}{n}, \dots$

從ツテ $P_1Q_1=(\frac{x}{n})^2, P_2Q_2=(\frac{2x}{n})^2, P_3Q_3=(\frac{3x}{n})^2, \dots$

故ニ $\square P_1Q_2 + \square P_2Q_3 + \square P_3Q_4 + \dots$
 $= \frac{x}{n} \left[(\frac{x}{n})^2 + (\frac{2x}{n})^2 + (\frac{3x}{n})^2 + \dots \right]$
 $= \frac{x^3}{n} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \dots (A)$

然ルニ $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

故ニ $\frac{x^3}{n^3} (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)$

$= \frac{x^3}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= x^3 \times \frac{1 \times (1 + \frac{1}{n}) \times (2 + \frac{1}{n})}{6} \dots (B)$

コノ式ハ $\square P_1Q_2 + \square P_2Q_3 + \square P_3Q_4 + \dots$ ノ和
 ヲ示スノデアルガ, OQ ヲ細カク等分スレバ
 スル程, ソレヲノ矩形ノ面積ノ和ハ圖形 OPQ
 ノ面積ニ近ヅク. 即チ (B) ニ於テ n ヲ大キ
 クスレバスル程, $\frac{1}{n}$ ハ小サクナリ, n ガ無限ニ
 大キクナツタ極限ニ於テハ $\frac{1}{n} = 0$ デアル.

故ニ (B) ハ $x^3 \times \frac{1 \times 1 \times 2}{6} = \frac{x^3}{3} = \frac{xy}{3}$

トナリ, 圖形 OPQ ノ面積ヲ表ハス.

即チ求メル面積ハ $\frac{1}{3} OQ \cdot PQ$ デアル.

從ツテ P ヲ通リ Y 軸ニ垂直ナ線分 PRP' ト抛
 物線 POP' トデ圍マレタ面積

$POP' = 2 \left(\square PQOR - \frac{1}{3} OQ \cdot PQ \right)$

$= 2 \times \frac{2}{3} OQ \cdot PQ$

$= \frac{4}{3} OQ \cdot PQ = \frac{2}{3} PP' \cdot OR$

第二篇
對 數

第一章 一般ノ指數

6. 指數ノ法則

問1 $a^5 \times a^3 = a^8$ ヲ説明セヨ.

問2 $(a^5)^3 = a^{15}$ ヲ説明セヨ.

問3 $(abc)^5 = a^5 b^5 c^5$ ヲ説明セヨ.

問4 $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$ ヲ説明セヨ.

問5 次ノ商ヲ求メヨ.

$$a^2 \div a = \frac{aa}{a} = ?$$

$$a^5 \div a^2 = \frac{aaaaa}{aa} = ?$$

$$2^3 a^5 \div 2^2 a^2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times a^5}{2 \times 2 \times a^2} = ?$$

暗算 次ノ計算ヲセヨ.

$$(a^3 b^2 c)^3, \quad (a^2)^3 \times (a^4)^2, \quad \left(\frac{bc}{a}\right)^4$$

$$(-a)^6 \div a^5, \quad (-3xy^2)^2, \quad 3a \times 2a^3$$

$$a^{15} \div a^9 \div a^6, \quad 5x \times 6x^2 \div 10x^3, \quad \left(-\frac{1}{2} p^2 q\right)^2$$

m, n ガ正ノ整數デアラナラバ, 冪ニ關シテハ次ノ諸公式ガ成立スル.

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(abc)^m = a^m b^m c^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (m > n)$$

此等ハ指數ノ法則ヲ示ス公式デアル.

問 題

次ノ式ヲ計算セヨ. 1—(8)

1	$-a^5 \times (-a)^{10}$	(1)	$\frac{1}{3} a \times \left(-\frac{3}{4} a\right)^3$
2	$(-4x^5 y^3)^3 \times \frac{5}{8} x^3 y$	(2)	$a \times \frac{a}{2} \times (ab^3)^3$
3	$3^{3n+1} \div 27^n$	(3)	$-2^{12} \div (-2)^9$
4	$\{(-a)^5\}^4$	(4)	$(r^m s)^3$
5	$(-a)^{2n}$	(5)	$(-a)^{2n+1}$

$$6 \quad \left(\frac{1}{a}\right)^2 \times \left(\frac{1}{b}\right)^3 \times \left(\frac{1}{c}\right)^4 \quad \Bigg| \quad (6) \quad \left(-\frac{a}{2}\right)^2 \times \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

$$7 \quad 7a^3b^2(abc)^2 - 4(ab)^4ac^2$$

$$(7) \quad (abc)^2 - (cba)^2 + (cab)^2 + 7a^2b^2c^2$$

$$8 \quad 12abc \times acd \div (-2abcd) \times \left(-\frac{1}{6}ad\right)$$

$$(8) \quad (x-y)^2(y-z)^3(z-x)^4 \div (y-z)^2(z-x)^3$$

9 100 項カラナル等
比級數ガアル。其ノ公
比ヲ r トスルトキ、此ノ
等比級數ノ偶數項ノ和
ハ奇數項ノ和ノ何倍デ
アルカ。

(9) n 項カラナル次ノ
等比級數

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$$

ノスペテノ項ノ連乘積
ヲ C 、此ノ級數ノ和ヲ A 、
又此ノ級數ノ各項ノ逆
數ノ和ヲ B トスレバ、

$$C^2 = \left(\frac{A}{B}\right)^n$$

デアアルコトヲ證明セヨ。

注意 等比級數ノ各
項ノ逆數ハ又等比級數
デアアルコトヲ考ヘヨ。

7. 零及負ノ指數

問1 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($m > n$) ノ理由ヲ説明セヨ。

問2 次ノ表ヲ見テ零及ビ負ノ指數ノ意味ヲ定メ
ヨ。

單項式ノ除法		指數ノ法則	
$a^4 \div a$	$= \frac{aaaa}{a} = a^3$	$a^4 \div a$	$= a^{4-1} = a^3$
$a^3 \div a$	$= \frac{aaa}{a} = a^2$	$a^3 \div a$	$= a^{3-1} = a^2$
$a^2 \div a$	$= \frac{aa}{a} = a^1$	$a^2 \div a$	$= a^{2-1} = a^1$
$a^1 \div a$	$= \frac{a}{a} = 1$	$a^1 \div a$	$= a^{1-1} = a^0$
$1 \div a$	$= \frac{1}{a}$	$a^0 \div a$	$= a^{0-1} = a^{-1}$
$\frac{1}{a} \div a$	$= \frac{1}{a \times a} = \frac{1}{a^2}$	$a^{-1} \div a$	$= a^{-1-1} = a^{-2}$

a^m ヲ a^m デ割レバ 1 デアルガ、此ノ場合ニ
モ尙指數ノ法則ガ適用サレルモノト假定ス
レバ

$$a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$$

トナルカラ $a^0 = 1$

ト定メルト都合ガヨイ。

即チ或ル數(零デナイ)ノ零乗ハ 1 デア
ルトノ意味ヲ附ケル。

次 m, n, p が何レモ正ノ整數デ、且 $n = m + p$ デアルトキハ

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m a^p} = \frac{1}{a^p}$$

デアルガ、此ノ場合ニモ指數ノ法則ガ適用サレルモノトスレバ $a^m \div a^n = a^{m-n} = a^{m-(m+p)} = a^{-p}$

故ニ
$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

ト考ヘルコトガ出來ル。

即チ負ノ指數ノ冪ハソノ冪指數ト絶對値ノ等シイ正ノ指數ノ冪ノ逆數デアルト定メル。

問題

次ノ式ヲ負ノ指數ヲ含マナイ式ニ改メヨ。 10—11)

<p>10 $x^2 y^{-3}, 5a^{-4} c^{-1}$</p> <p>11 $\frac{4a^{-5}}{b^{-1}c}, \frac{b^{-2}c^{-2}}{2^{-1}a^{-m}}$</p>	<p>(10) $m^{-3} n^{-5}, 7ax^{-4}$</p> <p>(11) $\frac{3}{8a^{-2}b^{-2}}, \frac{(x+y)^{-2}}{(a-b)^{-8}}$</p>
---	--

次ノ式ヲ計算セヨ。 12—13)

<p>12 $2^{-3}, 27 \times 3^{-2}$</p> <p>13 $\frac{1}{15^0}, \frac{9}{3^{-2}}$</p>	<p>(12) $3^{-2}, 32 \times 8^{-2}$</p> <p>(13) $(29^0)^{-7}, \frac{24}{2^3}$</p>
---	--

8. 根 指 數

問1 $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{a}$ ノ意味如何。

問2 $(\sqrt{5})^2, (\sqrt{7})^2, (\sqrt{8})^2$ ノ値各如何。

或ル數ヲ n 乗スレバ a トナルヤウナ數ヲ $\sqrt[n]{a}$ デ表ハス。

即チ $\sqrt[n]{a}$ ハ a ノ n 乗根ヲ表ハシ、 $[n$ 乗根 $a]$ ト讀ム。此ノ n ハ何乗根カヲ表ハス數デ、之ヲ根指數トイフ。

故ニ
$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

問3 25ノ平方根、 $\sqrt[3]{-125}$ ノ値ヲ求メヨ。

問4 16ノ四乗根ハ何カ。

問5 正ノ數 a ノ偶數乗根ノ符號如何。

正數ノ偶數乗根ニハ絶對値相等シク、符號ノ反對ナニツノ實數ガアル。

例ヘバ、9ノ平方根ハ $\sqrt{9} = 3$ 、及 $\sqrt[2]{9} = -3$ デ、 a^4 ノ四乗根ハ $\sqrt[4]{a^4} = a$ 、及 $\sqrt[4]{a^4} = -a$ デアル。

注意 本節ニ於テハ文字ハ正ノ數ヲ表ハシ、根指數ハ正ノ整數ヲ表ハスモノトスル。

問6 $+a, -a$ ノ奇數乘冪ノ符號ヲ言ヘ.

又奇數乘根ノ符號ハ何カ.

或ル數ノ奇數乘根ノ中ノ實數ハ之ト
同符號ノ實數デアル.

暗算 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$$\sqrt[3]{125}, \sqrt{a^6}, \sqrt[3]{-1000}, \sqrt{a^4b^4}$$

$$(\sqrt[5]{-x^2})^5, \sqrt[2]{a^{3n}}, \sqrt{a^2b^2c^2}, \sqrt[3]{64x^{9n}}$$

例 $\sqrt[3]{7} \times (\sqrt[3]{7}a)^2$ ヲ計算セヨ.

$$\begin{aligned} \text{解 } \sqrt[3]{7} \times (\sqrt[3]{7}a)^2 &= \sqrt[3]{7} \times (\sqrt[3]{7})^2 a^2 = (\sqrt[3]{7})^3 a^2 \\ &= 7a^2 \qquad \qquad \qquad \text{答 } \underline{7a^2} \end{aligned}$$

問題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ. 14-(19)

$$14 \quad \sqrt[3]{-512a^9b^{15}}$$

$$15 \quad \sqrt[3]{27^4}$$

$$16 \quad \sqrt{\frac{25}{4}a^6b^{4n}}$$

$$17 \quad \sqrt{(\sqrt{a^{12}})}$$

$$18 \quad \sqrt{\{1\sqrt{9} \times \sqrt[3]{729m^{12}}\}}$$

$$19 \quad \frac{\sqrt[5]{-32(m+n)^5} \times \sqrt[2]{(m-n)^n}}{2} \times \frac{\sqrt[2]{(m-n)^n}}{m^2-n^2} \quad \text{但シ } m > n$$

$$(19) \quad \sqrt[4]{\frac{48x^2y^4z \times xy^5z^2 \times x^2z^5}{3xyz}}$$

$$(14) \quad \sqrt[5]{243a^5b^{15}c^{25}}$$

$$(15) \quad \sqrt{0.25^3}$$

$$(16) \quad \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}a^6}$$

$$(17) \quad \sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^{17}})}$$

$$(18) \quad (\sqrt[3]{0.008p^6})^5$$

9. 分數指數

問1 $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}$ ハ如何ナル意味ノ數カ.

問2 $\sqrt[n]{a^m}$ ヲ n 乗スレバ如何ナル數トナルカ.

指數ガ分數ニナツタトキニモ其ノ意義ヲ
擴張シテ, 指數ノ法則ガ成立スルモノトスレ
バ,

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a$$

即チ $a^{\frac{1}{2}}$ ハ二乗スレバ a トナル數デアル. ト

コロガ \sqrt{a} モ亦二乗スレバ a トナル數デア
ル. 故ニ

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

ト定メル.

$$\text{一般ニ } (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \times n} = a$$

$$\text{又 } (\sqrt[n]{a})^n = a \quad \text{デアルカラ}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{ト定メル.}$$

問3 $a^{\frac{3}{4}}$ ノ四乗ト $\sqrt[4]{a^3}$ ノ四乗トヲ比較セヨ. 又
 $a^{\frac{3}{4}}$ ト $a^{\frac{1}{4}}$ 從ツテ $\sqrt[4]{a}$ トノ關係如何.

$$\text{問3 デ明ラカナヤウニ } a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} = (\sqrt[4]{a})^3$$

$$\text{一般ニ } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{デアル.}$$

$a^{\frac{m}{n}}$ ハ a ノ m 乗ノ n 乗根又ハ a ノ n 乗根
ノ m 乗デアルト規約スル.

注意 a ガ負數ノ場合、例へバ $\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[6]{64} = 8$

ニ於テ、 $\sqrt[6]{(-2)^6} = (-2)^{\frac{6}{6}} = (-2)^1 = -2$ ノヤウニスルト
不合理ナ結果トナル。斯様ナトキハ根數ノ規約ニヨ
ツテ常ニ正ヲトルコトトスル。

問4 次ノ各式ヲ根號デ表ハセ。

$$a^{\frac{1}{4}}, \quad a^{\frac{1}{5}}, \quad m^{\frac{3}{2}}, \quad m^{\frac{5}{6}},$$

$$y^{\frac{5}{2}}, \quad y^{\frac{5}{6}}, \quad x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}}, \quad a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}},$$

問5 次ノ各根式ヲ分數指數デ示セ。

$$\sqrt[3]{a}, \quad \sqrt[3]{a^2}, \quad \sqrt[5]{a^3}, \quad \sqrt[7]{x^4},$$

$$\sqrt[4]{x^5}, \quad x\sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x^2y}, \quad \sqrt[5]{a^4b^3}$$

問題

次ノ冪ヲ計算セヨ。 20—(22)

20	$4^{\frac{1}{2}}, 8^{\frac{2}{3}}$	20	$9^{\frac{1}{2}}, (-27)^{\frac{2}{3}}$
21	$1000^{\frac{4}{3}}, (0.25)^{\frac{3}{2}}$	21	$10000^{\frac{3}{4}}, (0.001)^{\frac{5}{3}}$
22	$49^{0.5}, \left(\frac{4}{9}\right)^{1.5}$	22	$(-32)^{0.2}, \left(\frac{16}{81}\right)^{0.75}$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。 23—(25)

23	$\sqrt[5]{a^4}$	23	$\sqrt[12]{x^4}$
24	$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a}$	24	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a}$
25	$x^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} \times \sqrt{x^3}$	25	$b^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} \sqrt[6]{b^5}$

ジョン・ワリス John Wallis

ワリス (1616—1703) ハ獨
創力ニ富シテ英國ノ數學
者デアアル。

英國ニハ有名ナ大數學
者デ、大物理學者ノニュート
ンガアルガ、ワリスハ英國
デハニュートンニ次グ大數
學者トイハレテキル。



彼ハケンブリッヂデ宗教

ノ教育ヲ受ケテ牧師トナツタガ、1649年ニオックスフォ
ード大學ノ幾何ノ教授トナツタ。

ワリスノ功績中第一ニ數ヘネバナラナイモノハ負
數指數ヲ用ヒタコトデアラウ。 $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ 等ヲ表ハスニ
 x^{-1}, x^{-2} 等ヲ以テシタノデアアル。 彼ハ又分數指數ヲ
モ使用シテ其ノ便利ナコトヲ知ラシメタノデ、漸ク一
般ニ普及スルヤウニナツタ。

尙無限大ヲ表ハス記號 ∞ モ亦ワリスノ發明デアアル
トイフ。

第二章 對 數

10. 指數ト乗除計算

問 $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ ヲ計算セヨ。

上ノ問ニ從ツテ計算シタ結果ヲ次ノヤウ
ナ表ニスル。

此ノ表ハ 2ノ冪數(2ヲ
底トスル冪數トモイフ)
デアルカラ此ノ表ニヨツ
テ 2ノ冪數ノ乘法及ビ除
法ハ非常ニ簡單ニ行フコ
トガ出來ル。

例ヘバ 16×64 ヲ計
算スルニハ、此ノ表ノ IIノ
列ノ 16及ビ 64ニ對應スル
IIIノ列ノ數 4及ビ 6ヲ加
ヘテ 10ヲ得ル。サウシテ IIIノ列ノ 10ノ左ノ
IIノ列ノ數 **1024**ヲ得レバヨイ。何トナレバ

$$16 \times 64 = 2^4 \times 2^6$$

$$= 2^{10} = 1024 \quad \text{デアルカラ。}$$

I 冪	II 數	III 指數
2^1	2	1
2^2	4	2
2^3	8	3
2^4	16	4
2^5	32	5
2^6	64	6
2^7	128	7
2^8	256	8
2^9	512	9
2^{10}	1024	10
2^{11}	2048	11
2^{12}	4096	12

又例ヘバ $4096 \div 256$ ノ計算ニ於テハ

$$4096 = 2^{12}, \quad 256 = 2^8$$

$$2^{12} \div 2^8 = 2^{12-8} = 2^4$$

デアルカラ、IIノ列ノ中ニ 4096及ビ 256ヲ求
メ、ソレニ應ズル IIIノ列ノ數 12ト 8トノ差 4
ヲ暗算デ求メル。最後ニ IIIノ列ノ 4ニ應ズ
ル IIノ列ノ數 **16**ヲ以テ答トスル。

問 題

前頁ノ表ニヨツテ次ノ計算ヲナセ。 1—(3)

- | | |
|---|---|
| <p>1 32×128
16×256
4×1024</p> <p>2 $4096 \div 64$
$128 \div 32$
$512 \div 128$</p> <p>3 $4 \times 512 \div 64$
$2048 \div 128 \times 8$
$4096 \div 32 \div 8$</p> | <p>(1) 128×8
512×4
16×32</p> <p>(2) $256 \div 64$
$2048 \div 32$
$1024 \div 256$</p> <p>(3) $2 \times 8 \times 32$
$64^2 \div 128$
$512 \div 32 \times 128$</p> |
|---|---|

11. 對數ノ意義

46頁ニ舉ゲタ表ニ於テⅢノ列ノ數ハ何レモ夫々Ⅱノ列ノ數ノ對數トイフ。即チ

3ハ8(=2³)ノ對數デアリ、

5ハ32(=2⁵)ノ對數デアリ、

12ハ4096(=2¹²)ノ對數デアアル。

トコロガ46頁ノ表ハ2ヲ底トシタ表デア
ルカラ、對數ニ於テモ底トイフ言葉ヲ用ヒル
ト、3ハ2ヲ底トスル8ノ對數デアリ、

5ハ " 32ノ對數デアアル。

故ニ46頁ノ表ハ又2ヲ底トスル對數表ト
モ考ヘルコトガ出來ル。

即チ2ヲ底トスル或ル數 N ノ對數トハ、 N
ヲ得ルタメノ2ノ冪指數ノコトデアアル。

問1 $3^2=9$ ヲ知ツテ、3ヲ底トスル9ノ對數ハ何
カライヘ。

一般ニ $a^x=n$
ニ於テ、 x ハ a ヲ底トスル n ノ對數デアツテ、
之ヲ $\log_a n=x$ ト書ク。

*對數ヲ英語デ Logarithm ト書ク。logハ此ノ頭ノ三
字ヲトツタモノデアアル。

對數ト指數トハ同一ノモノヲ見方ヲカヘ

テイヒ表ハシタニ過ギナイ。

問2 $2^5=32$, $3^4=81$, $5^2=25$, $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

ノ各ヲ對數式デ書キ表ハセ。

問3 10ヲ底トスル100及ビ0.1ノ對數各如何。

注意 $\log_a n$ ニ於テ a モ n モ共ニ正ノ數デ、特ニ $a \neq 1$
トスル。

問 題

次ノ式ヲ計算セヨ。4-(5)

4	$\log_2 256$	(4)	$\log_2 16$
	$\log_2 1024$		$\log_2 4096$
	$\log_2 512$		$\log_2 64$

注意 46頁ノ表ニヨレ。

5	$\log_3 27 + 4 \log_5 125$	(5)	$\frac{1}{2} \log_4 64 + \log_7 1$
---	----------------------------	-----	------------------------------------

次ノ指數式ヲ對數式ニ、對數式ヲ指數式ニ直セ。

6-(9)

6	$\log_{81} 729 = 1.5$	(6)	$81^{0.25} = 3$
7	$10^{-2} = 0.01$	(7)	$\log_{1000} 0.1 = -\frac{1}{3}$
8	$\log_{27} 3 = x$	(8)	$\log_a a = 1$
9	$7^3 = 343$	(9)	$\log_a a^n = n$

12. 10ノ冪數及常用對數

問1 $10^{\frac{1}{2}}$ ノ値如何.
 $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{8}}$ 等ノ値ハド
 ウシテ求メルカ.

上ノ問ノヤウナ
 計算ニヨツテ,小數
 第四位未滿ヲ四捨
 五入シテ,右ノヤウ
 ナ 10^x ノ表ヲ作ル.

問2 右ノ表カラ

$$\log_{10} 3.1623$$

$$\log_{10} 1.3335$$

$$\log_{10} 6.4938$$

$$\log_{10} 8.6596$$

ヲ求メヨ.

10ヲ底トスル對
 數ヲ常用對數トイ
 フ.

常用對數ノ底10
 ハ通常之ヲ書カナ
 イ.

I. 冪	II. 數	III. 指數
10^1	10.0000	1
$10^{\frac{15}{16}}$	8.6596	$\frac{15}{16}$
$10^{\frac{14}{16}}$	7.4989	$\frac{14}{16}$
$10^{\frac{13}{16}}$	6.4938	$\frac{13}{16}$
$10^{\frac{12}{16}}$	5.6234	$\frac{12}{16}$
$10^{\frac{11}{16}}$	4.8697	$\frac{11}{16}$
$10^{\frac{10}{16}}$	4.2170	$\frac{10}{16}$
$10^{\frac{9}{16}}$	3.6517	$\frac{9}{16}$
$10^{\frac{8}{16}}$	3.1623	$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
$10^{\frac{7}{16}}$	2.7384	$\frac{7}{16}$
$10^{\frac{6}{16}}$	2.3714	$\frac{6}{16}$
$10^{\frac{5}{16}}$	2.0535	$\frac{5}{16}$
$10^{\frac{4}{16}}$	1.7783	$\frac{4}{16}$
$10^{\frac{3}{16}}$	1.5399	$\frac{3}{16}$
$10^{\frac{2}{16}}$	1.3335	$\frac{2}{16}$
$10^{\frac{1}{16}}$	1.1548	$\frac{1}{16}$
10^0	1.0000	0

例 前頁ノ表ニヨツテ 2.3714×3.1623

ヲ計算セヨ.

$$\begin{aligned} \text{解 } 2.3714 \times 3.1623 &= 10^{\frac{6}{16}} \times 10^{\frac{8}{16}} = 10^{\frac{6+8}{16}} = 10^{\frac{14}{16}} \\ &= 7.4989 \qquad \qquad \qquad \text{答 } \underline{7.4989} \end{aligned}$$

此ノ原理ニヨツテ實際ニハ IIノ列ニ

2.3714 及ビ 3.1623 ヲ求メ,其ノ各數ニ應ズル
 IIIノ列ノ數 $\frac{6}{16}$ 及ビ $\frac{8}{16}$ ヲ求メル. 次ニ $\frac{6}{16} + \frac{8}{16}$
 $= \frac{14}{16}$ ヲ暗算デ行ヒ, IIIノ列ノ $\frac{14}{16}$ ニ應ズル IIノ
 列ノ數 7.4989 ヲ讀メバヨイ.

又實際ニ 2.3714×3.1623 ヲ計算シテ見ルト
 7.49907822 トナル.

問 題

前頁ノ表ヲ用ヒテ次ノ計算ヲナセ. 10—(11)

$$10 \quad 1.3335 \times 2.7384 \qquad | \qquad (10) \quad 1.5399 \times 2.0535$$

$$11 \quad 10 \div 4.2170 \qquad | \qquad (11) \quad 7.4989 \div 4.8697$$

$$12 \quad \log 2.3714 + \log 1.7783 \quad \text{ヲ求メテ, } \log 4.2170 \quad \text{トノ}$$

比較ヲナセ.

$$(12) \quad 2.3714 \times 1.7783 = 4.2170 \quad \text{デアアルコトヲ示セ.}$$

$$13 \quad \log 8.6596 \div \log 4.8697 \quad \text{ヲ求メ, } \log 1.7783 \quad \text{トノ}$$

比較ヲナセ.

$$(13) \quad 8.6596 \div 4.8697 = 1.7783 \quad \text{ヲ示セ.}$$

13. 對數ノ性質

問1 $\log_2 2, \log_{10} 10$ ノ值各如何.

$$\text{一般} = a^1 = a \quad \therefore \log_a a = 1$$

定理 底ノ對數ハ1デアル.

問2 $2^0, 10^0, a^0$ ノ值如何. 從ツテ $\log_2 1, \log_{10} 1, \log_a 1$ ノ值各如何.

定理 1ノ對數ハ, 底ノ如何ニ拘ラズ常ニ0デアル.

定理 積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シク, 商ノ對數ハ被除數ノ對數カラ除數ノ對數ヲ引イタモノニ等シイ.

證明 ニツノ正ノ數ヲ m, n トシ

$$\begin{array}{l} \log_a m = x, \quad \log_a n = y \quad \text{トスレバ} \\ m = a^x, \quad n = a^y \quad \text{デアル.} \end{array}$$

$$\text{故ニ} \quad mn = a^{x+y}$$

$$\text{故ニ} \quad \log_a (mn) = x+y$$

即チ

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n \quad \left| \quad \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

$$\frac{m}{n} = a^{x-y}$$

$$\log_a \frac{m}{n} = x-y$$

注意 $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$ トハナラナイ.

暗算 次ノ積及ビ商ノ對數ヲ對數ノ和又ハ差デ表ハセ.

1 $\log abc$

2 $\log 5ax$

3 $\log \frac{xy}{z}$

4 $\log \frac{a(b-x)}{cd}$

次ノ對數ノ和及ビ差ヲ積及ビ商ノ對數トシテ表ハセ.

5 $\log a + \log b - \log c$

6 $\log a - (\log b - \log c) + \log d$

7 $\log x - \log (y+z) - \log y + \log (y-z)$

例一 $\log 2 = 0.30103, \log 3 = 0.47712$ ヲ知ツテ $\log 6$ ヲ求メヨ.

解 $\log 6 = \log 2 + \log 3$

$$= 0.30103 + 0.47712 = \underline{0.77815} \dots \text{答}$$

問 題

$\log 2, \log 3$ ノ值ヲ知ツテ, 次ノ數ノ對數ヲ計算セヨ.

14 4 15 18 | (14) 9 (15) 12

16 $\frac{2}{3}$ 17 $\frac{2}{9}$ | (16) 1.5 (17) $\frac{3}{4}$

定理 或ル數ノ冪ノ對數ハ、其ノ數ノ對數ニ其ノ冪指數ヲ乘ジタモノニ等シイ。即チ $\log_a m^p = p \log_a m$

證明 $\log_a m = x$ トスレバ $m = a^x$ デアル。

故ニ $m^p = a^{px}$

$\therefore \log_a m^p = px = p \log_a m$

即チ $\log_a m^p = p \log_a m$

暗算 次ノ冪ノ對數ヲ冪ヲ含マナイ對數式ヲ表ハセ。

1	$\log x^3$	2	$\log b^{\frac{3}{4}}$	3	$\log \frac{1}{c^5}$
4	$\log a^2 b^3$	5	$\log \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}$	6	$\log (a-b)^7$

例二 $3 \log x = 2 \log 8 - \log 27$ カラ x ヲ求メヨ。

解 $3 \log x = 2 \log 8 - \log 27$

$$\log x^3 = \log \frac{8^2}{27}$$

$$\therefore x^3 = \frac{8^2}{27}$$

之カラ $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ 答 $1\frac{1}{3}$



ネビーア John Napier

ネビーアハ 1550年エヂンバラカラ程近イマーキストンノ男爵ノ家ニ生レ、1617年4月4日ニ死ンダ。彼ハ數學、神學及ビ占星學ノ熱心ナ研究者デアツタ。

當時ノ歐洲デハ計算ニ多大ノ時日ト精力トヲ要スル状態デアツタ。例ヘバπノ研究者トシテ有名ナルドルフ・フォン・シウレン

Ludolf von Ceulen ハπノ値ヲ35桁計算スルノニ生涯ノ大半ヲ費シタトイフ。

ネビーアハ此ノ計算ノタメノ精力ノ徒費ヲ救済シヨウトシテ 1594年カラ其ノ研究ニ着手シ、20年間苦心ノ結果 1614年ニ一書ヲ表ハンテ對數ノ理論ヲ發表シタ。併シコノ對數ハ今日ノ自然對數トハ幾分異ナツタモノデアツタ。後ロンドンノグレシャム大學ノ幾何學教授 (後ニオックスフォード大學ノ教授)ブリッグス Briggs (1556?—1630)ガネビーアノ風采ニ接シヨウトシテ遙々スコットランドヲ訪レテ劇的ナ會見ヲシタ時、常用對數ノ誕生ヲ見タノデアアル。ネビーアハ又「ネビーアノボーン」トイハレル一種ノ計算棒ヲ發明シタリ、又球面三角法デハ有名ナ環狀法則ヲ發見シタリ、要スルニ數學各科ノ單純化ト系統化ノタメニ貢獻シタノデアアル。

問4 次ノ圖ニ於テ、 $\log 7$, $\log 43$, $\log 692$, $\log 0.8$, $\log 0.775$, $\log 0.00682$ 等ハ夫々トノ間ニアルカ。從ツテ各對數ノ指標如何。

$$\frac{\log 10^{-3} \log 10^{-2} \log 10^{-1} \log 1 \log 10 \log 10^2 \log 10^3 \log 10^4 \log 10^5}{-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5}$$

或ル數ト其ノ對數ノ指標トノ關係ヲ表示スレバ次ノ通りニナル。

數	指標	數	指標
$1-10^*$	0	$*1-0.1$	-1
$10-100^*$	1	$*0.1-0.01$	-2
$100-1000^*$	2	$*0.01-0.001$	-3
$1000-10000^*$	3	$*0.001-0.0001$	-4

定理 1 ヨリ大キイ數ノ對數ノ指標ハ0又ハ正數デ、其ノ値ハ其ノ數ノ整數部ノ桁數ヨリ1ダケ小サイ。

定理 1 ト0トノ間ノ數ノ對數ノ指標ハ負數デ、其ノ絶對値ハ其ノ數ノ小數點ト最初ノ有效數字トノ間ノ0ノ數ヨリ1ダケ大キイ。

$1-10^*$ ハ1カラ10マデノ數ノ中10ヲ除ク總テノ數ヲアラハスモノトスル。他モ之ニ準ズル。

暗算1 次ノ數ノ對數ノ指標如何。

$$\begin{array}{cccc} 125, & 1500, & 123456, & 1.5 \\ 0.004, & 1.0009, & 0.10009, & 0.003007 \end{array}$$

暗算2 $\log 9654=3.9847$, $\log 25=1.3979$ ナラバ次ノ數ノ對數如何。

$$\begin{array}{cccc} 965.4, & 96540, & 0.0009654, & 0.9654, \\ 2.5, & \frac{1}{40}, & 2.5 \times 10^{-7}, & \frac{4827}{50000} \end{array}$$

問 題

次ノ計算ヲナセ。18-(21)

$$\begin{array}{ll} 18 & \bar{2}4320 + \bar{1}.3971 \\ 19 & \bar{2}.3245 - \bar{1}.4933 \\ 20 & \bar{4}5639 \times 5 \\ 21 & \bar{4}.5705 \div 5 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ll} (18) & \bar{5}6723 + 3.4125 \\ (19) & \bar{3}.6583 - \bar{4}.7241 \\ (20) & \bar{1}.3681 \times 3 \\ (21) & \frac{1}{6} \times \bar{3}8124 \end{array} \right.$$

$\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$ ナラバ次ノ數ノ整數部ハ幾桁カ。又小數部ハ第何位カラ有效數字ガ始マルカ。

$$\begin{array}{ll} 22 & 2^{15}, \quad \frac{1}{2^{11}} \\ 23 & 2^1, 2^3, 2^5, 2^7, \dots \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ll} (22) & 3^{18}, \quad \frac{1}{3^5 \times 2^{13}} \\ (23) & 4 \times 4^2 \times 4^3 \times \dots \text{ガ} 10^6 \end{array} \right.$$

ナル級數ノ第13項ハ幾
ヲ超エルニハ幾ツノ項
マデ取レバヨイカ。

第三章 對數表ノ使用

15. 對數表

複雑ナ數計算ヲスルニハ對數表ヲ用ヒル。卷末ニアル對數表ハ三桁ノ數列ヲ有スル數(眞數)ニ對スル對數ノ假數ノミヲ小數第四位(四位未滿四捨五入)迄宛列記シタモノデアアル。カヤウナ表ヲ四桁ノ對數表トイフ。コレニヨレバ有效數字三桁マデノ數ノ對數ハ直チニ求メラレル。

今例ニヨツテ表ノ使用法ヲ示サウ。

例一 $\log 325$ ヲ求メヨ。

指標 $3-1=2$

假數 表ニ於テ數ト記シテアル行ニ32ヲ又上下ニ0,1,2, ..., 9ト記シテアル列ニ5ヲ求メ、此ノ兩數ノ行ト列トノ交叉スル處ニ119ヲ得、其ノ左端ノ5ヲ附ケテ5119ヲ得ル。之ヲ求メル假數トスル。 答 2.5119

注意 假數ノ小數第一位ノ共通ナ部分(例一ノ假數ノ左端ノ5)ハ取出シテ左ノ列ノ或ル部分ニ掲ゲテアル。表中ノ他ノ數ハ夫々小數第二,第三,第四位デアアル。

又表中ニ於テ星*ヲ附ケテアル數ニハソレヨリ下ノ行ニアル小數第一位ノ數ヲ附ケルモノトスル。

問 題

對數表ニヨツテ次ノ數ノ對數ヲ求メヨ。 1-(7)

1	123	2	34.9	(1)	127	(2)	2750
3	0.5	4	0.45	(3)	7	(4)	3.14
5	999000			(5)	0.0000744		
6	625 ⁴			(6)	$\sqrt[3]{0.234}$		
7	$\frac{47.3}{623}$			(7)	14.2 × 0.0423		

例二 對數ガ 3.6749 ナル數ヲ求メヨ。

數列 假數ニ相當スル數列ハ 473 デアル。

位取 指標ノ法則ニヨツテ整數部ハ(3+1)桁デアアルコトガワカル。

故ニ $3.6749 = \log 4730$ 答 4730

次ノ對數ヲ有スル眞數ヲ求メヨ。 8-(11)

8	3.3222	(8)	2.3747
9	1.5647	(9)	2.6981
10	4.8407	(10)	3.8048
11	0.7945	(11)	0.4099

16. 比例部分ノ理

表中ニ見出シ得ナイ數ノ對數ヲ求メルコト、及ビ逆ニ表中ニ見出シ得ナイ對數ニ相當スル眞數ヲ求メル方法ヲ示サウ。

例一 $\log 5965$ ヲ求メヨ。

指標 3

假數 四桁ノ眞數ノ對數ハ表中ニ見出シ得ナイ。之ヲ次ノヤウニシテ算出スル。

$\log 5970$ ノ假數 = 7760 (小數點ヲ省ク)

$\log 5960$ " = 7752

10 8

$\log 5965$ ハ $\log 5960$ ト $\log 5970$ トノ間ニ在ル。而シテ眞數ガ10増スト其ノ對數ハ0.0008増スコトガワカル。此ノ對數ノ差ヲ表差トイフ。今 x ヲ $\log 5965$ ノ値ヲ得ルタメニ $\log 5960$ ノ値ニ加フベキ數トシ、而シテ眞數ノ僅少ナ増加ハ其ノ對數ノ増加ニ比例スルモノト見做セバ

$$10 : 5 = 0.0008 : x \quad x = 0.0004$$

故ニ $\log 5965 = 3.7752 + 0.0004 = 3.7756$ 答 3.7756

二ツノ眞數ノ差ガツノ眞數ニ對シテ甚ダ小サイトキハ、ソノ對數ノ差ハ二ツノ眞數ノ差ニ比例スルト見做スコトガ出來ル。コレヲ比例部分ノ理トイフ。

例二 $\log 23.67$ ヲ求メヨ。

指標 1

$\log 23.6 = 1.3729$ 表差 18

0.7

7.....1312.6

$\log 23.67 = 1.3742$ 答 1.3742

注意 表差 18 = 乘ジタ 0.7 ハ眞數ノ左端カラ右ヘ數ヘテ第三番目ヲ一ノ位ト見タノデアアル。故ニ眞數ノ位ノ通りニシテ比例部分ノ理ヲ用ヒルト

$$0.1 : 0.07 = 18 : x$$

此ノ結果ハ矢張り 12.6 デアル。

對數表ニ於ケル假數ハ小數第四位マデノ近似値デアルカラ、比例部分ノ理ニヨル場合ニ數ノ桁數ヲ多クトツタカラトテ正確ダトハ言ヘナイ。故ニ小數第四位未滿ハ四捨五入スルガヨイ。

*第二學年用 65 頁參照

17. 對數ニヨル計算

例一 7.298×1.654 ヲ計算セヨ.解 $x = 7.298 \times 1.654$

$$\log x = \log 7.298 + \log 1.654$$

$$\log 7.298 = 0.8632$$

實際 = 掛算ヲ

$$\log 1.654 = 0.2185$$

スルト

$$\log x = 1.0817$$

$$7.298 \times 1.654$$

$$120 \dots 0792$$

$$= 12.070892$$

$$\begin{array}{r} 36 \overline{) 25} \\ 7 \dots \dots 0.7 \end{array}$$

$$x = 12.07$$

答 12.07例二 $547 \div 8568$ ヲ計算セヨ.解 $x = 547 \div 8568$

$$\log x = \log 547 - \log 8568$$

$$\log 547 = 2.7380$$

實際 = 割算ヲ

$$\log 8568 = 3.9329$$

スルト

$$\log x = \bar{2}.8051$$

$$547 \div 8568$$

$$638 \dots 8048$$

$$= 0.06384220 \dots$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 3} \\ 4 \dots \dots 0.4 \end{array}$$

$$x = 0.06384$$

答 0.06384

問題

對數表ヲ用ヒテ次ノ計算ヲナセ. 20-(23)

20 8.004×0.5319

(20) 381.5×16.92

21 $0.7088 \div 54.54$

(21) $4734 \div 623$

22 $\frac{380.1 \times 0.0576}{7.377}$

(22) $\frac{5801}{894.5 \times 73.84}$

23 $\sqrt[4]{\frac{11}{17}}$

(23) $\sqrt[3]{0.002948}$

24 初項 1 デ公比ガ 9

(24) 初項 100 デ公比ガ

デアアル G.P. ノ第 20 項迄

 $\frac{4}{5}$ デアル G.P. ノ第 31 項

ノ總和ヲ求メヨ.

迄ノ總和ヲ求メヨ.

三角形ノ三邊ノ長サヲ a, b, c , 三邊ノ和ノ半分ヲ s デ表ハセバ, ソノ面積ハ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ デ表ハサレル. 三邊ガ次ノヤウナ三角形ノ面積ヲ求メヨ.

25 $a = 5.4 \text{ cm}$

(25) $a = 136.6 \text{ m}$

$b = 3.8 \text{ cm}$

$b = 254.2 \text{ m}$

$c = 4.2 \text{ cm}$

$c = 298.5 \text{ m}$

半徑 r ノ球ノ表面積ハ $4\pi r^2$, 體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ デアル. $\pi = 3.14$ トシテ, 半徑ガ 13.7 cm ノトキノ

26 球ノ表面積如何. | (26) 球ノ體積如何.

18. 指數方程式

問 $3^x=27$, $2^x=16$ ノ x ノ値各如何.

例一 $7^x=100$ ノ x ヲ求メヨ.

解 兩邊ノ對數ヲトレバ

$$x \log 7 = 2$$

$$\text{故ニ} \quad x = \frac{2}{\log 7} = \frac{2}{0.8451}$$

更ニ x ヲ對數ニヨツテ求メルト

$$\log x = \log 2 - \log 0.8451$$

$$\log 2 = 0.3010$$

$$\log 0.8451 = \bar{1}.9270$$

$$\hline 0.3740$$

$$236 \dots \dots 3729$$

$$\hline 18 \overline{) 11}$$

$$6 \dots \dots \dots 0.6$$

$$x = 2.366$$

答 2.366

指數ニ未知數ヲ含ム方程式ヲ指數方程式トイフ. 指數方程式ヲ解ク一般ノ方法トシテハ對數計算ニヨルノデアルガ, 上ノ問1ノヤウニ特別ナ數ノトキハ視察ニヨツテモ解ケル.

例二 $\log_a n = x$ カラ x ヲ求メヨ.

解 $\log_a n = x$ トスレバ $a^x = n$

$$\text{故ニ} \quad x \log_{10} a = \log_{10} n$$

$$x = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} a}$$

$$\text{故ニ} \quad \log_a n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} a}$$

$$\text{從ツテ} \quad \log_{10} n = \log_{10} a \log_a n$$

之ニヨツテ a ヲ底トスル n ノ對數ヲ, 10 ヲ底トスルモノニ, 又 10 ヲ底トスル n ノ對數ヲ a ヲ底トスルモノニ變ヘルコトガ出來ル.

注意 ココニハ特ニ底10ヲ記入シタ.

問題

次ノ指數方程式ヲ解ケ. 27—(28)

$$\begin{array}{l|l} 27 & 7^x = 370 & (27) & \frac{1}{2^x} = 0.539 \\ 28 & 4^x \times 5^x = 1700 & (28) & 5^{x-1} \times 4^{x+1} = 100 \end{array}$$

次ノ對數ヲ計算セヨ. 29—(30)

$$\begin{array}{l|l} 29 & \log_7 8 & (29) & \log_2 9 \\ 30 & \log_{2.718} 10 & (30) & \log_{2.718} 3 \end{array}$$

19. 對數ノ應用諸算

問1 利息ノ計算ニ於テ單利法複利法トハ如何ナルモノカ.

例一 金 1230 圓ヲ 年利 5 分 4 厘ノ複利デ、5 年間預ケルト元利合計ハ何程トナルカ.

解 1 年末ノ元利合計ハ {1230 × (1 + 0.054)} 圓デ、コレガ第 2 年ノ元金デアアル。故ニ 2 年末ノ元利合計ハ {1230 × (1 + 0.054)²} 圓デアアル。故ニ 5 年間ノ元利合計ヲ s 圓トスレバ $s = 1230 \times (1 + 0.054)^5$ トコロガ (1 + 0.054)⁵ ノ計算ガ困難デアアルカラ、對數計算ヲ行フ。即チ

$$\begin{aligned} \log s &= \log 1230 + 5 \log 1.054 \\ \log 1230 &= 3.0899 \\ 5 \log 1.054 &= 5 \times 0.0228 = 0.1140 \\ \hline &3.2039 \\ 159 \cdot &\dots\dots\dots 2014 \\ 9 \cdot &\dots\dots\dots 25 \\ \hline x &= 1599 \quad \text{答 } \underline{\text{約 } 1599 \text{ 圓}} \end{aligned}$$

例二 例一ノ 5 年間ノ代リニ 5 年 8 ケ月トスレバ如何.

解 5 年間ノ元利合計ハ例一カラ約 1599 圓デアアル。之ニ後ノ 8 ケ月間ノ利子ヲ算入スルト

$$\begin{aligned} s &= 1230 \times (1.054)^5 \times (1 + 0.054 \times \frac{8}{12}) \\ &= 1599 \times (1 + 0.054 \times \frac{8}{12}) \\ &= 1599 \times 1.036 \\ &= 1656.5 \quad \text{答 } \underline{\text{約 } 1656.5 \text{ 圓}} \end{aligned}$$

注意 1 例二ヲ

$$\begin{aligned} s &= 1230 \times 1.054^{\frac{58}{12}} \quad \text{トスルト} \\ \log 1230 &= 3.0899 \\ 5 \frac{8}{12} \log 1.054 &= 5 \frac{2}{3} \times 0.0228 = 0.1292 \\ \hline &3.2191 \\ 165 \cdot &\dots\dots\dots 2175 \\ 6 \cdot &\dots\dots\dots 16 \\ \hline &1656 \end{aligned}$$

約 1656 圓トナツテ大差ハナイ。併シ 1 年毎ノ複利トイヘバ、残りノ 8 ケ月ニ就イテハ單利法ヲ適用スベキデアアルカラ、斯様ナ計算ヲスルノハ不合理デアアル。

注意 2 銀行デハ預金ノ計算ニハ複利法ヲ用ヒルケレドモ、實際ハ元金ノ10圓未滿ニハ利息ヲ附ケナイ。又利息ノ1錢未滿ハ毎期末ニ之ヲ切捨テルカラ、例一、例二ノヤウナ計算デハナクテ一期毎ニ計算スル。郵便貯金ノ利息ノ計算ニ於テハ元金ノ10錢未滿ニハ利息ヲ附ケナイ。

元金ヲ A 圓、一期間ノ利率ヲ r 、期間數ヲ n 、元利合計ヲ S 圓トスレバ

$$\text{單利法} \quad S = A(1+nr)$$

$$\text{複利法} \quad S = A(1+r)^n$$

算術ナドデ用ヒル複利表ハ $(1+r)^n$ ヲ精密ナ對數表ニヨツテ計算シ、ソレヲ表ニシタモノデアル。

問 題

31 金 350 圓ヲ年利率 5 分 2 厘デ 5 ケ年間預ケテオクト、元利合計ハ何程トナルカ。單利ト複利トノ兩方ヲ求メヨ。

(31) 年 6 分 2 厘ノ複利ト、一期ノ利率 3 分デ半年毎ノ複利トデハ元金 2000 圓ニ對シテ 15 ケ年間ノ利子ノ差ハ何程トナルカ。

例三 今カラ 8 年後ニ金 4000 圓ヲ受ケル權利ヲ持ツテキル人ガアル。今直チニ金ヲ受取ルニハ何程ノ金ヲ受取ルベキカ。但シ年利率ヲ 5 分 5 厘ノ複利トシテ計算セヨ。

解 受取ルベキ金ヲ A 圓トスレバ

$$4000 = A(1+0.055)^8$$

$$\text{故ニ} \quad \log 4000 = \log A + 8 \log 1.055$$

$$\log A = \log 4000 - 8 \log 1.055$$

$$\log 4000 \quad \quad \quad = 3.6021$$

$$8 \log 1.055 = 8 \times 0.0233 = 0.1864$$

$$3.4157$$

$$260 \dots \dots 4150$$

$$4 \dots \dots 7$$

$$A = 2604 \quad \text{答 約 } 2604 \text{ 圓}$$

ココニ求メ得タ A 圓即チ 2604 圓ヲ 8 年後ニ受クベキ 4000 圓ノ現價トイフ。

注意 複利及ビ後ニ述ベル年金ノ計算ニハ年數ノ永イ場合ガ多ク、從ツテ四桁ノ對數表デハ誤差ガ大キクナル。ソコデソノ誤差ヲ少クスルタメニハ桁數ノ多イ對數表ヲ用ヒナケレバナラナイ。今試ミニ 7 桁ノ對數表ニヨツテ例三ヲ計算シテ見ヨウ。

log 4000 = 3.6020600

8log 1.055 = 8 x 0.0232525 = 0.1860200

3.4160400

26063.....4160244

9.....156

A = 2606.39 答 約 2606.4圓

約2.4圓ノ差ヲ生ズルコトトナル.

32 元金若干圓ヲ年利 率 5 分ノ複利デ12年 3 ケ月間預ケテ置イタト コロガ、元利合計 2400圓 トナツタ。此ノ元金ヲ 求メヨ。

33 年利 5 分、1 年毎ノ 複利デ金 100 圓ヲ預ケ、 元利合計ガ 1050圓トナ ルニハ約何年ヲ要スベ キカ。

(32) 或ル人ガ其ノ子ノ 5 歳ノ初メニ或ル金額 ヲ複利デ預入レテ、此ノ 子ガ21歳ノ初メ迄ニ得 ル元利合計カラ毎年末 ニ利子 300 圓ヲ得ヨウ トスレバ何程預金スベ キカ。但シ年利率ハ常 ニ 5 分 5 厘トスル。

(33) 元金 400 圓ヲ 1 年 毎ノ複利デ 16ケ年間預 ケ、元利合計 1000圓ヲ得 ルタメニハ、年利率何程 トスレバヨイカ。

例四 毎年、年ノ初メニ金 700 圓宛ノ 定期收入ノアル人ガアル。今此ノ金ヲ 直チニ銀行ニ預ケルト 10 年末ニハ總額 何程トナルカ。但シ年 5 分 5 厘ノ複利 トシテ計算セヨ。

解 金 700 圓ヲ毎年初メニ積ミ立テタルカラ

第 1 年末ニハ 700 x (1 + 0.055)

第 2 年末ニハ 700 x (1 + 0.055)^2 + 700 x (1 + 0.055)

第 3 年末ニハ

700 x (1 + 0.055)^3 + 700 x (1 + 0.055)^2 + 700 x (1 + 0.055)

.....

第 10 年末ニハ

700 x (1 + 0.055)^10 + 700 x (1 + 0.055)^9 + + 700 x (1 + 0.055)

故ニ此ノ總和ヲ S トスレバ

S = 700 x [1.055 + (1.055)^2 + + (1.055)^9 + (1.055)^10]

= 700 x (1.055 x [(1.055)^10 - 1] / 0.055)

[10 log 1.055 = 0.233 = log 1.71]

= (700 x 1.055 x 0.71) / 0.055

= 9533

答 約 9533 圓

問2 此ノ人ガ若シ700圓ヲ毎年末ニ得ルモノトスレバ、 S ハ如何ナル式デ表ハサレルカ。

一般ニ金 a 圓宛年利率 r デ毎年末ニ積立テルモノトスレバ、 n 年經テバ

$$S = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r} \dots\dots\dots (1)$$

毎年初メニ積立テルモノトスレバ

$$S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \dots\dots\dots (2)$$

一年又ハ半年等一定ノ期間毎ニ支拂ハレル一定ノ金額ヲ年金トイフ。

又上ノ公式ハ毎年 a 圓宛貯蓄スル年賦積立金ヲ求メルモノト考ヘラレル。

34 或ル人ガ本年一月初メニ生マレタ男子ノ學資金トシテ毎年末ニ150圓宛ヲ貯金シ、19歳末ニ到ルマデ繼續シタ。年4分2厘トシテ計算スレバ20歳末カラ何程宛ノ利子ガ得ラレルカ。

(34) 問題34ニ於テ、毎年末ニ150圓ヲ貯金スル代リニ毎月初メニ10圓宛貯金シ、利子ハ毎年末ニ元金ニ繰入レルモノトスレバ如何。

注意 先ヅ1年間ノ貯金額ヲ利子ト共ニ計算セヨ。

35 或ル人保險金2000圓、15ケ年滿期ノ養老保險ニ入り、保險金100圓ニツイテ年6圓50錢ノ掛金ヲスル約束ヲシタ。モシ此ノ人ガ保險滿期マデ無事ダトシテ毎年初メニ保險掛金ダケ積立テルモノトスレバ、滿期ニ得ル保險金トソノ積立金トハ何レガ何程多イカ。

但シ年5分ノ複利トシテ計算セヨ。

36 年利率4分5厘、1年毎ノ複利デ20年後ニ元利合計10000圓ノ總額トナラシメルニハ、毎年末ニ金何程ヅツヲ預ケテ行ケバヨイカ。

(35) 今年38歳ノ人ガ保險金6000圓、30年滿期、掛金1000圓ニツイテ年28.8圓ノ養老保險ニ加入シタ。此ノ人ガモシ此ノ掛金ト同額ノ金ヲ毎年末銀行ニ預ケ入レ、不幸ニシテ預ケ入レテカラ19年後ニ死シタモノトスレバ、保險金ト積立金トハ何レガ何程多イカ。又滿期ノ時ハ如何。年6分ノ複利トシテ計算セヨ。

(36) 2000圓ノ貯蓄ヲ有スル人ガ、毎年四月一日ニ250圓宛積立テテ8回デ滿7ケ年ニ及シタ。貯金總額ハ何程カ。年5分ノ複利トセヨ。

例五 毎年末ニ 365 圓宛 15年間得ル
年金ノ現價如何. 年 5 分 4 厘トシテ計
算セヨ.

解 年金ノ現價ヲ A 圓トスレバ, 元金 A 圓
ニ對スル 15年間ノ元利合計ハ

$$A(1+0.054)^{15} \text{ 圓}$$

又毎年末 365 圓宛受ケル 15年後ノ年金ノ總
和ハ $\frac{365\{(1+0.054)^{15}-1\}}{0.054}$ 圓

デ, 此ノ兩者ハ相等シクナケレバナラナイ.

$$\text{故ニ} \quad A(1.054)^{15} = \frac{365\{(1.054)^{15}-1\}}{0.054}$$

$$\text{コレカラ} \quad A = \frac{365}{0.054} \times \left\{ 1 - \frac{1}{1.054^{15}} \right\}$$

$$15 \log 1.054 = 0.3420$$

$$\therefore -15 \log 1.054 = \bar{1}.6580$$

$$= \log 0.455$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{1}{1.054^{15}} = 0.455$$

$$\text{故ニ} \quad A = \frac{365}{0.054} \times (1 - 0.455) = \frac{365 \times 0.545}{0.054}$$

$$= 3684$$

答 約 3684 圓

例五カラモ明ラカナヤウニ毎年末ニ a 圓
宛 n 年間受ケル年金ノ現價ハ, 年利率ヲ r ト
スレバ

$$A = \frac{a}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} \dots \dots (3)$$

此ノ A 圓ハ即チ a 圓宛 n 年間繼續スル年
金ノ現價デアル.

37 毎年末 = 300 圓ヲ

30ヶ年得ル年金ノ現價

ヲ求メヨ. 但シ年 6 分

ノ複利トシテ計算セヨ.

38 或ル會社ガ金 5 萬

圓ヲ年利 6 分デ借リ入

レ, 滿 1 年毎 = 同額ノ年

賦金デ 10ヶ年間 = 全部

ヲ償還スルニハ, 毎年ノ

年賦償還金何程カ.

(37) 毎年末 = 400 圓ヲ

15ヶ年間得ル年金ノ現

價ヲ年 5.5% ノ複利ト

シテ計算セヨ.

(38) 或ル人ガ家ヲ建テ

ルタメ = 5000 圓ヲ借リ

入レ, ソノ返済ノ方法ト

シテ毎年末 = 500 圓宛

支拂フコトヲ契約シタ

何年デ返済シ終ルカ.

但シ年利率ヲ 6% トス

ル.

摘要

◎ 負數, 零, 分數ノ指數ノ意義

$$a^0=1 \quad a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a} \quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

◎ 冪指數ノ法則ト根指數ノ法則

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a}$$

$$(abc)^n = a^n b^n c^n \quad \sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad \sqrt[n]{a} \div \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a}$$

◎ 指數ト對數

$$a^x=n \quad \log_a n=x$$

◎ 對數ノ性質

$$\log_a 1=0 \quad \log_a a=1$$

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n \quad \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a m^n = n \log_a m \quad \log_a n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} a}$$

◎ 指標ノ定メ方

整數部 n 桁ノ正ノ數..... $+(n-1)$

小數點ノ次 = n 個ノ 0 ガアル正ノ小數..... $-(n+1)$

◎ 年金

$$\text{總和 } s = \frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}, \quad s = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

$$\text{現價 } A = \frac{a}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\}$$

雜題

1 $9 \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[9]{9} \times \sqrt[27]{9} \times \dots$

ノ無限連乘積ヲ求メヨ.

2 $x=2$ ノトキ

$$\frac{1+8^{-\frac{x}{3}}}{(8x)^{\frac{1}{2}}+10^{x-2}}$$
ノ値如何.

3 a, b ガ正ノ數デアル

$$\text{トキ } \log_a b \times \log_b a = 1$$

ヲ證明セヨ.

(1) 正數 a, b, c, d, \dots

ガ G.P. ヲナストキハ,

$$\log a, \log b, \log c, \log d,$$

.....ハ A.P. ヲナス.

(2) $x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}$ ノト

$$\text{キ, } \frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$$
ノ

値如何.

(3) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a$

ノ値ハ 1 = 等シイコト

ヲ證明セヨ.

4 $\log_2 4 + \log_3 27 - \log_5 125$

ノ値ヲ求メヨ.

5 $2^x = 5^y = 10^z$ デアル

トキ,

$$z = \frac{xy}{x+y}$$

ヲ證明セヨ.

6 1, 3, 9, 27, ……

ナル G.P. ノ第何項ガ 10^4

ト 10^3 トノ間ニ在ルカ.

7 $9 \cdot 9^{x-1} + 3 = 28 \times 3^x$

ヲ解ケ.

注意 $9^x = 3^{2x}$

8 $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \dots (1) \\ x + y = 25 \dots (2) \end{cases}$

ヲ解ケ.

注意 (1) カラ $\log(xy) = 2$

故ニ $xy = 100$

9 $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} - 1)(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} + 1)$

ヲ簡單ニセヨ.

(4) 次ノ式ノ値如何.

$6 \log \frac{2}{3} - 4 \log \frac{10}{9} + 2 \log \frac{25}{6}$

(5) $2^x, 5^y, 10^z$ ガ公比

$\frac{1}{2}$ ナル G.P. ヲナストキ,

$$z = \frac{xy - 2y}{x + y - 1}$$

ヲ證明セヨ.

(6) $1 + 0.9 + 0.81 + \dots$

ナル G.P. ノ第何項迄ノ

和ガ初メテ 8 ヲ超過スルカ.

(7) $4^x - 6 \times 2^x + 8 = 0$

ヲ解ケ.

(8) $\begin{cases} \log\left(\frac{x}{y} + xy\right) = 0 \dots (1) \\ \log\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{xy}\right) = 1 \dots (2) \end{cases}$

ヲ解ケ.

注意 (1) カラ $\frac{x}{y} + xy = 1$

又 (2) カラ $\frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = 4$

(9) $\frac{x^{0.5} + 1}{x + x^{0.5} + 1} \div \frac{1}{x^{0.5} - 1}$

ヲ計算セヨ.

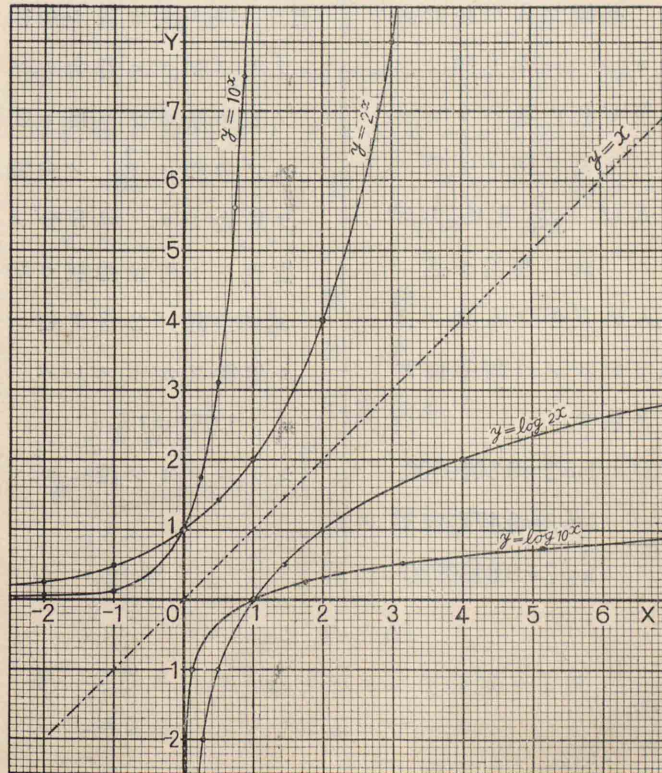
次ノ圖ハ 指數曲線(指數ヲ變數トスル函數ノグラフ) $y=10^x, y=2^x$ 及ビ對數曲線(眞數ヲ變數トスル對數ノグラフ) $y=\log_{10} x, y=\log_2 x$ ノ變化ヲ示スモノデアアル.

10 指數曲線ハ常 = 0.1

ナル點ヲ通ル. 何故カ.

(10) 對數曲線ハ常 = 1.0

ナル點ヲ通ル. 何故カ.



$\log x$	0.0864	0.0899	0.6990	0.8274
x	1.22	1.23	5.00	6.72

11 上ノ表ニヨツテ,
 $\frac{0.0672 \times \sqrt[3]{5}}{0.123}$ ヲ小數第
 3位マデ計算セヨ.

12 某國ノ人口統計表
 ニヨレバ、一ヶ月間ノ出
 生及ビ死亡數ハソレゾ
 レソノ月ノ初メニ於ケ
 ル人口ノ $\frac{1}{480}$ 及ビ $\frac{1}{600}$ デ
 アル。此ノ情況デ進ム
 ト、人口ガ今ノ人口ノ2
 倍トナルノハ何年何ケ
 月ノ後カ。

但シ $\log 2 = 0.3010300$
 $\log 3 = 0.4771213$
 $\log 7 = 0.8450980$

(11) 上ノ表ニヨツテ,
 $\frac{0.122 \times \sqrt[3]{123}}{5^4}$ ノ對數ヲ
 求メヨ。

(12) 或ル人ガ或ル金額
 フ年ノ初メニ貯金シ、ソ
 ノ翌年始カラハ更ニ初
 メノ金額ノ $\frac{1}{20}$ ノ金額
 フ貯金シタ。年5分ノ
 複利トシ、貯金總額ガ初
 メノ金額ノ2倍ヲ超エ
 ル年數ヲ n トスレバ

$$1.05^n = 1.5$$

デアアルコトヲ證セヨ。

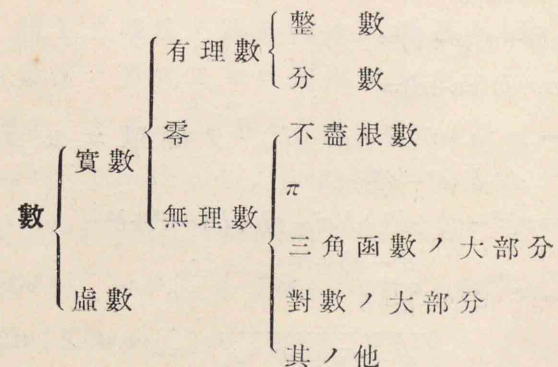
第三章

復習及補充

第一章 整式ノ性質

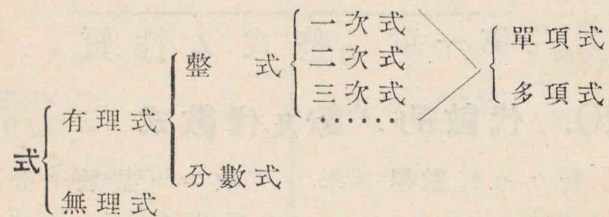
20. 代數的ノ數及代數式

吾々ハ代數學ヲ學ンデ數ニハ整數ヤ分數
 ノ他ニモ尙種々ノ數ガアルコトヲ知ツタ。
 而モソレラノ數ハ何レモ吾々ノ生活ト極メ
 テ密接ナ關係ガアルトイフコトモ知ツタノ
 デアル。今コレラノ數ヲ一括シテ分類スレ
 バ次ノヤウニナル。



問 分數ヲ小數ニ直セバドンナ種類ノ小數トナル
 カ。又無理數ハドンナ小數トナルカ。

吾々が取扱つて來た代數式モマタ次ノヤ
ウニ分類スルコトガ出來ル。



21. 整式ノ乘法

問1 次ノ乘法公式ヲ完成セヨ。

$$(a+b)^2 =$$

$$(a-b)^2 =$$

$$(a+b)(a-b) =$$

$$(x+a)(x+b) =$$

$$(ax+b)(cx+d) =$$

例一 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ヲ簡單ニセヨ。

解 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

又ハ a^2-ab+b^2

$$a+b$$

$$\hline a^3 - a^2b + ab^2$$

$$a^2b - ab^2 + b^3$$

$$\hline a^3 \qquad + b^3$$

即チ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$
同様に $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ }(A)

例二 (x^2+xy+y^2) ト (x^2-xy+y^2) トノ積

ヲ求メヨ。

解1

$$x^2+xy+y^2$$

$$x^2-xy+y^2$$

$$\hline x^4+x^3y+x^2y^2$$

$$-x^3y-x^2y^2-xy^3$$

$$x^2y^2+xy^3+y^4$$

$$\hline x^4 \qquad +x^2y^2 \qquad +y^4$$

解2

$$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

$$= \{(x^2+y^2)+xy\} \{(x^2+y^2)-xy\}$$

$$= (x^2+y^2)^2 - x^2y^2$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$$

$$= x^4 + x^2y^2 + y^4$$

即チ $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = x^4+x^2y^2+y^4$..(B)

問1ノ乘法ノ諸公式ノ外尙上ノ(A),(B)モ亦乘法ノ公式トシテ使用サレル。

問2 次ノ各式ノ空イタ所ヲ補ヘ。

1 $(x + \square)(x^2 - \square + \square) = x^3 + 8a^3$

2 $(\square - \square)(\square + 6xy + 4y^2) = 27x^3 - 8y^3$

3 $(4a^2 + \square + b^2)(\square - 2ab + b^2) = 16a^4 + 4a^2b^2 + \square$

4 $(2x+5)(3x + \square) = \square x^2 + \square x + 20$

5 $(\square x + \square)(4x - 6y) = 12x^2 + \square xy - 30y^2$

6 $(x^2 - 3xy + \square y^2)(x^2 + 3xy + \square y^2) = x^4 + \square x^2y^2 + \square y^4$

問題

次ノ式ヲ計算セヨ. 1-(7)

1 $\{(a+c)+(b-d)\} \times \{(a+c)-(b-d)\}$

(1) $(a-b-c+d) \times (a+b+c+d)$

2 $(a-b+c)^2$ | (2) $(x+2y-3)^2$

3 $(a+b)^3$ | (3) $(a-b)^3$

4 $(x^2-3x-2)(x^2-3x+3)$ | (4) $(x^2-4x+4)(x^2-4x-3)$

5 $\{(x-1)(x+7)\} \times \{(x+2)(x+4)\}$

(5) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

6 $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)$

(6) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

7 $(a+1)^2-(a+2)^2+(a+3)^2$

(7) $(2x-3a)^2-(a-2x)^2+(2x+a)(2x-a)$

8 $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$

デアルコトヲ證明セヨ.

(8) $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$

$$=2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$$

デアルコトヲ證セヨ.

22. 整式ノ除法

例一 $2x^2+5x+2$ ヲ $2x+1$ デ割レ.

解 $2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)$

デアルカラ $2x^2+5x+2$ ヲ $2x+1$ デ割レバ商ハ $x+2$ デアルコトハ明ラカデアルガ、尙コレヲ次ノヤウニシテ求メルコトガ出來ル.

$$\begin{array}{r} x+2 \\ 2x+1 \overline{) 2x^2+5x+2} \\ \underline{2x^2+x \dots\dots\dots (2x+1) \times x} \\ 4x+2 \\ \underline{4x+2 \dots\dots\dots (2x+1) \times 2} \\ 0 \end{array}$$

答 $x+2$

例二 $2a^4-12b^4+10ab^3-3a^3b+3a^2b^2$ ヲ $2a^2+ab-3b^2$ デ割レ.

解 先ツ兩式ヲ a ノ降冪順ニ並ベヨ.

$$\begin{array}{r} a^2-2ab+4b^2 \\ 2a^2+ab-3b^2 \overline{) 2a^4-3a^3b+3a^2b^2+10ab^3-12b^4} \\ \underline{2a^4+a^3b-3a^2b^2} \\ -4a^3b+6a^2b^2+10ab^3 \\ \underline{-4a^3b-2a^2b^2+6ab^3} \\ 8a^2b^2+4ab^3-12b^4 \\ \underline{8a^2b^2+4ab^3-12b^4} \\ 0 \end{array}$$

答 $a^2-2ab+4b^2$

問題

次ノ第一式ヲ第二式デ割レ. 9-(12)

- | | | | |
|----|--|------|---------------------------------------|
| 9 | $a^2+5a+6, a+3$ | (9) | $x^2-12x+36, x-6$ |
| 10 | $6x^2-23xy+20y^2,$
$2x-5y$ | (10) | $x^3-4x^2+3-20x,$
$x+3$ |
| 11 | $35x^2-88y^2+xy,$
$7x-11y$ | (11) | $8x^2y^2-63z^4-65xyz^2,$
$xy-9z^2$ |
| 12 | $8a^4-22a^3b+43a^2b^2-38ab^3+24b^4, 4b^2-3ab+2a^2$ | | |

$$(12) \quad x^4+5x-4x^2+x^3-3, x^2+2x-3$$

次ノ式ヲ計算セヨ. 13-(14)

$$13 \quad (x^3-1) \div (x^2+x+1) \quad | \quad (13) \quad (a^3+8) \div (a+2)$$

$$14 \quad (x^4+1+x^2) \div (x^2-x+1)$$

$$(14) \quad (a^3x^4+64x) \div (4ax+a^2x^2+16)$$

15 $x=\sqrt{2}$ トシテ次式ノ値ヲ計算セヨ.

$$\frac{2(-x^2)^3 \times 5(-x)^4 \times 6x^3 \times 5(-x)}{12(-x^3)^2 \times 5(-x)^3}$$

$$(15) \quad n=5, a=3, b=-\frac{2}{3} \text{ デアルトキ}$$

$$\left(\frac{1}{3}a+3b\right)^{n+3} \times (9b-a)^{n-4} \div (a+5b)^{n-2}$$

ヲ計算セヨ.

例三 x^3+x+x^2+1 ヲ $1-x^2$ デ割レ.

$$\begin{array}{r} \text{解} \quad -x-1 \\ -x^2+1 \overline{) x^3+x^2+x+1} \\ \underline{x^3 \quad -x} \\ x^2+2x+1 \\ \underline{x^2 \quad -1} \\ 2x+2 \end{array}$$

答 商 $-x-1$ 剰餘 $2x+2$

剰餘 $2x+2$ ノ第一項 $2x$ ガ除數 $-x^2+1$ ノ第一項 $-x^2$ ヨリ低次デアルカラ、運算ハ之デ止メル.

次ニ此ノ兩式ヲ x ノ昇冪順ニ並ベテ計算ヲ行ヘバ次ノヤウニナル. 但シ此ノ場合ニ

$$\begin{array}{r} 1+x+2x^2 \\ 1-x^2 \overline{) 1+x+x^2+x^3} \\ \underline{1 \quad -x^2} \\ x+2x^2+x^3 \\ \underline{x \quad -x^3} \\ 2x^2+2x^3 \\ \underline{2x^2+2x^3} \\ -2x^4 \\ \underline{-2x^4} \\ 2x^3+2x^4 \end{array}$$

ハ剰餘ハ除數ヨリモ低次トナラナイカラ、被除數ノ項ヲ全部取り盡シタトコロデ割算ヲ止メルコトニスルト、

答 商 $1+x+2x^2$ 剰餘 $2x^3+2x^4$

$$\text{驗} \quad (-x-1)(-x^2+1)+2x+2$$

$$(1+x+2x^2)(1-x^2)+2x^3+2x^4$$

ノ兩方ヲ計算シテ見ヨ.

例三ノヤウニ、多項式ノ除法ニ於テ割リ切レナイトキハ、被除數及ビ除數ノ項ノ並ベ方ニヨツテ其ノ商及ビ剩餘ガ異ナル。

ケレドモ其ノ何レノ場合ニ於テモ

(被除數)=(除數)×商+(剩餘)

デアル。今被除數ヲA,除數ヲB,商ヲQ,剩餘ヲRトスレバ

A=B·Q+R

注意 多項式ノ除法ニ於テハ、以後特別ナ場合ノ外ハ常ニ或ルーツノ文字ノ降冪ノ順ニ並ベテ計算スルコトニスル。

問題

次ノ計算ヲセヨ。 16-(17)

16 (x^2-7x+11)÷(x-2) | (16) (3x^2+5x-9)÷(x-4)

17 (x^4+1)÷(x+1) | (17) (64x^3+y^3)÷(4x-y)

18 4x^4-7x^3+12x-30 | (18) 2x^3-11x^2+20x

ヲ(x+3)^2-5デ割レ。 | ヲ(x-2)^2デ割レ。

次ノ式ノ商ヲxノ昇冪順ニ第5項マデ求メヨ。

19 1÷(1-x) | (19) (1-x)÷(1+x^2)

23. 一元二次方程式ノ根ノ性質

問1 ax^2+bx+c=0 ノ根ノ公式如何。

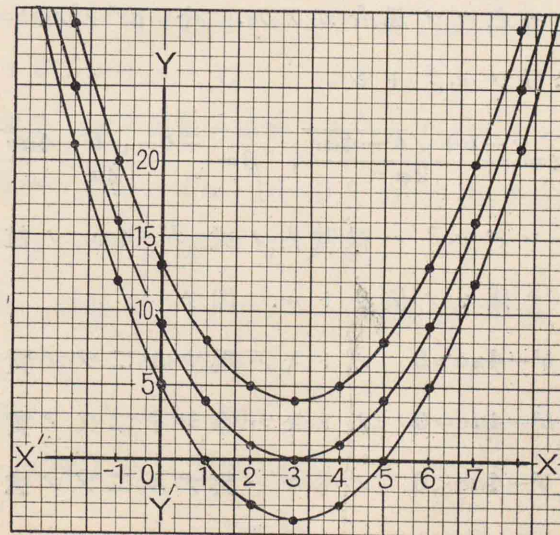
問2 下ノ圖ハ

y=x^2-6x+5(1)

y=x^2-6x+9(2)

y=x^2-6x+13(3)

ノグラフデアル。ドレガドノ方程式ノグラフカヲ示セ。又 x^2-6x+5=0, x^2-6x+9=0 ノ根ヲ讀メ。



トコロガ(3)ノグラフハX軸ニ交ハラナイ。
即チ $x^2-6x+13$ ヲ零トスルヤウナ x ノ値ハ
實數ノ範圍内ニハ存在シナイコトガワカル。

換言スレバ $x^2-6x+13=0$ ノ根ハ虚數トナ
ルノデアアル。又實際ニ根ノ公式ヲ用ヒルト

$$x=3\pm\sqrt{-4}$$

ヲ得ル。

カヤウニ一元二次方程式ニハ其ノ根ニツ
イテハ色々ノ場合ガアル。今 $ax^2+bx+c=0$
ノ二根ヲ α, β トシ

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

トスレバ α, β ハ根號内ノ式 b^2-4ac ノ値ニ
ヨツテ種々ノ値ヲトル。即チ

- (1) $b^2-4ac > 0$ ノトキハ異ナルニツノ實根
- (2) $b^2-4ac = 0$ ノトキハ等シイニツノ實根
- (3) $b^2-4ac < 0$ ノトキハ異ナルニツノ虚根
デアアル。

カヤウニシテ b^2-4ac ハ一元二次方
程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ性質ヲ判別スル
コトガ出來ルカラ、コレヲ其ノ判別式ト
イフ。

暗算 次ノ方程式ノ根ノ性質ヲ判別セヨ。

$$x^2-6x+4=0$$

$$3x^2-9x+8=0$$

$$3x^2+2=6x$$

$$x^2+3=\sqrt{12}x$$

$$9x^2-6x+1=0$$

$$2x^2-3x+9=0$$

注意1 一元二次方程式ノ根ヲ判別スルニハ先ヅ
與式ノ總テノ項ヲ左邊ニ移シテ $ax^2+bx+c=0$ ノ形
ニシナケレバナラナイ。

注意2 文字係數ハ虚數ヲ表ハサナイコトトスル。

例一 $mx^2+40x+16=0$ ガ等根ヲ有ス
ルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ。

解 等根デアアルタメニハ判別式 b^2-4ac ガ
0 デナケレバナラナイ。

$$\text{即チ } b^2-4ac = (40)^2 - 4m \times 16 = 0$$

$$\text{コレヲ解イテ } 64m = 1600$$

$$\therefore m = 25$$

答 25

例二 $x^2-4x+c=0$ ガ實根ヲ有スルヤ
 ウニ c ノ値ノ限界ヲ定メヨ.

解 實根ヲ有スルタメニハ判別式 b^2-4ac
 ガ 0 = 等シイカ、 0 ヨリ大デナケレバナラナイ.

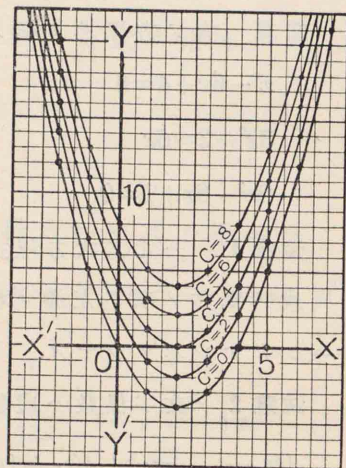
即チ $16-4c \geq 0$

之ヲ解ケバ $4c \leq 16$

$\therefore c \leq 4$

圖ハ $y=x^2-4x+c$

ニ於テ c ガ種々ノ値
 ヲトルトキノグラフ
 デアル. $x^2-4x+c=0$
 ハ $c \leq 4$ ノトキニ實根
 ヲ有スルコトヲ見ヨ.



問題

等根ヲ有スルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ. **20-21)**

- | | |
|----------------------------|----------------------------------|
| 20 $2x^2+mx+1=0$ | (20) $x^2-(m+3)x+3m=0$ |
| 21 $mx^2+mx+1=0$ | (21) $(1-2m)x^2=(1+m)x+1$ |
| 次ノ方程式ガ實根ヲ有スルタメノ p ノ限界如何. | |
| 22 $px^2+4x+1=0$ | (22) $x^2+p^2=(2p-1)x$ |
| 23 $2x^2+p=4x$ | (23) $(p+5)x^2-2=2px-p$ |

問3 次ノ方程式ノ二根ノ和及ビ積ヲ求メヨ.

- (1) $x^2-5x+4=0$ (2) $3x^2+5x+3=0$
 (3) $-x^2+4x+2=0$ (4) $x^2-(a+b)x+ab=0$

$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスレバ、既ニ
 知ツテキルヤウニ、一般ニ

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$ デアル.

$ax^2+bx+c=0$ ハ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

トナル. 故ニ $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ ヲ α, β デ示スト

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

故ニ二ツノ與ヘラレタ數ヲ二根トスル一元二次方程式ヲ作ルコトガ出來ル.

例三 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ヲ二根トスル一元二次方程式ヲ作レ.

解 α, β ヲ二根トスル一元二次方程式ハ

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ デアル.

然ルニ $\alpha+\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\alpha\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

故ニ求メル方程式ハ $x^2-x-\frac{1}{2}=0$

即チ $2x^2-2x-1=0$答

問題

次ノ方程式ノ他ノ一ノ根及ビ m ノ値如何.

24 $x^2+mx+4=0$ ノ一ノ根ハ 4

(24) $x^2+62x+m=0$ ノ一ノ根ハ -2

25 $x^2+22x+m=0$ ノ一ノ根ハ -15

(25) $x^2+mx-32=0$ ノ一ノ根ハ -8

次ノ數ヲ二根トスル方程式ヲ作レ. 26-28)

26 -3, -4

27 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

28 $3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}$

29 $x^2-6x+6=0$ ノ二

根ヲ a, β トシテ $a^2+\beta^2$

及ビ $a^3+\beta^3$ ノ數値ヲ根

ヲ求メナイデ計算セヨ.

注意 $a^2+\beta^2=(a+\beta)^2-2a\beta$

30 $3x^2-4x+2=0$ ノ二

根ヲ a, β トスルトキ

$a+\beta, \frac{a\beta}{a+\beta}$ ヲ二根トス

ル方程式ヲ作レ.

(26) 5, -3

(27) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (等根)

(28) $-\frac{q}{p}, -\frac{p}{q}$

(29) $x^2+(k-9)x+3k=0$

ノ二根ガ實數デ、且ソノ平方ノ和ガ 37 デアルトキ、ソノ二根ヲ求メヨ.

(30) $a^2+\beta^2=\frac{25}{36}$

$(1-a)(1-\beta)=\frac{1}{6}$

ナル關係ヲ満足スル正數 a, β ヲ二根トスル方程式ヲ作レ.

24. 根ノ公式ニヨル因數分解

問 $20x^2+23x-21$ ヲ因數分解セヨ.

今 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ a, β トスレバ

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\{x^2-(a+\beta)x+a\beta\}$$

故ニ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ デアル.

一般ニ二次三項式 ax^2+bx+c ハ、

ax^2+bx+c ヲ 0 ニ等シイト置イタ方程式ノ二根 a, β ヲ求メルコトニヨツテ、容易ニ之ヲ因數ニ分解スルコトガ出來ル.

例 $12x^2-17x+6$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解 $12x^2-17x+6=0$ ノ二根ヲ a, β トスレバ、

$$a=\frac{17+\sqrt{289-288}}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

$$\beta=\frac{17-\sqrt{289-288}}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

$$\text{故ニ } 12x^2-17x+6=12\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$$=12 \times \frac{4x-3}{4} \times \frac{3x-2}{3}$$

$$=4x-3)(3x-2)\dots\dots\dots\text{答}$$

注意 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ト $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ ト
ハ同一ノ根ヲ持ツガ二次三項式 ax^2+bx+c ハ
 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ ノ a 倍デアアルコトヲ注意セヨ.

問題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ. 31-(35)

- | | | | |
|----|-----------------------|------|------------------------------------|
| 31 | $3x^2-14x+8$ | (31) | $x^2-60x+899$ |
| 32 | $3x^2-4x+\frac{4}{3}$ | (32) | $10x^2-15\frac{2}{3}x+1$ |
| 33 | $2-x-2x^2$ | (33) | $\frac{12}{5}-3\frac{4}{5}x-14x^2$ |
| 34 | $ax^2+(a^2+1)x+a$ | (34) | $40x^2-53xy+6y^2$ |
| 35 | $300a^2+811ab-630b^2$ | (35) | $x^2+214xy+11448y^2$ |

次ノ式ヲ一ツノ文字ノ二次三項式ト考ヘテ因數ニ
分解セヨ. 36-(37)

36 $a^2-2ab-c^2+2bc$

注意 $a^2-2ab-(c^2-2bc)=0$ トオケバ
$$a=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2+4c^2-2bc}}{2}=b\pm(b-c)$$

 $a=2b-c$ 又ハ $a=c$

(36) $a^2-2b^2-2c^2-ab-ac+5bc$

37 $x^2-xy+5x-2y+6$

(37) $x^2-2y^2-xy+2x+5y-3$

25. 剰餘定理及因數定理

問1 x^2+2x-3 ヲ $x-2$ デ割リ,ソノ剰餘ト
 x^2+2x-3 ノ x ノ代リ = 2 ヲ代入シタトキノ數値ト
ヲ比較セヨ.

問2 $x^2-7x+12$ ヲ $x-m$ デ割ツタトキノ剰餘ヲ求
メヨ. 又ソノ剰餘ト $x^2-7x+12$ ノ $x=m$ ヲ代入シタ
モノトヲ比較セヨ.

解
$$x-m \overline{) \begin{array}{r} x^2-7x+12 \\ x^2-mx \\ \hline (m-7)x+12 \\ (m-7)x-m^2+m-7 \\ \hline m^2-7m+12 \end{array}}$$

上ノ問ニ見ルヤウニ,或ル文字ニツイテ
ノ整式ヲソノ文字ノ一次式デ割ツタト
キノ剰餘ハ,實際ニ割算ヲ行ハナクテモ
之ヲ求メルコトガ出來ル.

例ヘバ上ノ問1ニツイテ考ヘルニ, x^2+2x-3
ヲ $x-2$ デ割ルト商 $(x+4)$, 剰餘 5 ヲ得ルカラ

$$x^2+2x-3=(x-2)(x+4)+5$$

デアアル.

今此ノ式ニ於テ商ヲ Q , 剰餘ヲ R トスレバ,
 R ハ x ヲ含マナイ。而シテ

$$x^2+2x-3=(x-2)Q+R\cdots\cdots(A)$$

ハ恒等式デアルカラ x ニドシテ値ヲ代入シ
 テモ兩邊ノ値ハ常ニ等シイ。

故ニ $x=2$ ヲ 0 トスル x ノ値, 即チ 2 ヲ代入
 スルト

$$2^2+2\times 2-3=(2-2)Q+R$$

$$5=0+R$$

$$\text{故ニ} \quad R=5$$

即チ求メル剰餘ハ 5 デアル。

カヤウニ, x ニ關スル整式ヲ $\begin{cases} x-m \\ ax+b \end{cases}$ デ割
 ツタトキノ剰餘ハ, 其ノ式ノ $x = \begin{cases} x-m=0 \\ ax+b=0 \end{cases}$
 ノ根ヲ代入シタトキノ數値ニ等シイ。

之ヲ剰餘定理トイフ。

又 x ニ關スル整式ノ $x = \begin{cases} x-m=0 \\ ax+b=0 \end{cases}$ ノ根
 ヲ代入シタトキノ數値ガ零デアルトキ
 ニハ, 其ノ整式ハ $\begin{cases} x-m \\ ax+b \end{cases}$ デ割リ切レル。之
 ヲ因數定理トイフ。

例一 $2x^4-3x^3-9x^2+10x$ ヲ $2x+3$ デ割
 ツタ剰餘ヲ求メヨ。

$$\text{解} \quad 2x+3=0 \quad \text{ヲ解ケバ} \quad x=-\frac{3}{2}$$

之ヲ $2x^4-3x^3-9x^2+10x$ ニ代入スレバ

$$\begin{aligned} 2\times\left(-\frac{3}{2}\right)^4-3\times\left(-\frac{3}{2}\right)^3-9\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2+10\times\left(-\frac{3}{2}\right) \\ =\frac{81}{8}+\frac{81}{8}-\frac{81}{4}-15 \\ =-15 \end{aligned}$$

答 -15

例二 $x-1, x-2$ 及ビ $x+3$ ハ總テ
 x^3-7x+6 ノ因數デアルコトヲ證セヨ。

解 x^3-7x+6 ノ $x = x=1$ ヲ代入スレバ

$$1-7+6=0$$

即チ x^3-7x+6 ハ $x-1$ デ割切レル。

換言スレバ $x-1$ ハ x^3-7x+6 ノ因數デアル。

又 $x=2$ ヲ代入スレバ

$$2^3-7\times 2+6=8-14+6=0$$

$x=-3$ ヲ代入スレバ

$$(-3)^3-7\times(-3)+6=-27+21+6=0$$

トナツテ $x-2, x+3$ ハ共ニ x^3-7x+6 ノ因數
 デアルコトガワカル。

問題

次ノ第一式ヲ第二式デ割ツタ剩餘ヲ求メヨ. 38-(40)

38 $x^2+4x+5,$

$x-1$

39 $x^5-32,$

$x+2$

40 $x^3-6x^2-8x-9,$

$2x+3$

41 x^2+ax-4 ガ $x-1$

デ割切レルヤウニ a ノ
値ヲ定メヨ.

42 $2x^3-x^2+mx+n$ ガ

$x+2$ デ割ツテモ, $2x+3$
デ割ツテモ共ニソノ剩
餘ガ 5 トナルヤウニ $m,$
 n ノ値ヲ定メヨ.

43 次ノ式ハ $(a-b)$ デ割
切レルコトヲ證セヨ.

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

(38) $x^3+3x^2-3x+2,$

$x-4$

(39) $x^{12}-y^{12}$

$x+y$

(40) $32x^4-46x^2+9x+15$

$2x-1$

(41) x^3+mx^2+nx-6 ガ

$x-2$ デモ $x-3$ デモ割
切レルヤウニ m, n ノ値
ヲ定メヨ.

(42) x^3+ax^2+bx-2 ハ

$x-2$ デハ割切レ, $x-3$
デ割レバ 4 餘ルトイフ.
 a, b ノ値如何.

(43) $x-a, x-b$ ハ何レモ

$x^2(a-b)+a^2(b-x)+b^2(x-a)$
ノ因數デアアルコトヲ證
明セヨ.

例三 x ノ一整式ガアル. 之ヲ $x-2$
デ割レバ 5 ガ残り, $x-3$ デ割レバ 9 ガ残
ルトイフ. 此ノ式ヲ $(x-2)(x-3)$ デ割レ
バ其ノ剩餘如何.

解 此ノ整式ヲ P トシ, P ヲ $(x-2)(x-3)$ デ
割ツタトキノ商ヲ Q , 剩餘ヲ $Rx+S$ トスルト

$P=(x-2)(x-3)Q+(Rx+S)$

此ノ式ニ於テ $x=2$ トスレバ

$5=2R+S \dots \dots \dots (1)$

又 $x=3$ トスレバ

$9=3R+S \dots \dots \dots (2)$

(1), (2) カラ $R=4, S=-3$ 答 $4x-3$

定理 x ニ關スル整式ガアル. 此ノ
式ガ $x-a$ デモ, $x-b$ デモ整除サレルト
キハ此ノ式ハ又 $(x-a)(x-b)$ ニヨツテモ
整除サレル. 但シ $a \neq b$ トスル.

注意 例三ニ倣ヒ $P=(x-a)(x-b)Q+Rx+S$ トオ
イテ, 假設ノ條件カラ $R=S=0$ ヲ得ヨ.

*例三ノ Q, R 及ビ S ハ未定係數デアアル.

問題

44 $2x^3+mx^2+nx+2$ が $(x-2)(x-1)$ デ整除サレルヤウニ m, n ノ値ヲ定メヨ.

45 x ニツイテノ一ツノ整式ヲ $x-1$ デ割ツタ剩餘ハ 4, ソノ商ヲ更ニ $x-2$ デ割ツテ得ベキ剩餘ハ 3 デアルトイフ. モトノ整式ヲ $x-2$ 及ビ $(x-1)(x-2)$ デ割ツテ得ベキ剩餘ヲ求メヨ.

注意 與ヘラレタ整式ヲ P トスルト

$$P=(x-1)Q+4 \\ = (x-1)\{(x-2)Q'+3\}+4$$

46 $x^{2n+1}+y^{2n+1}$ ハ $x+y$ デ整除サレルコトヲ示セ.

(44) x^3+ax+b ガ x^2+4x+3 デ整除サレルヤウニ a, b ノ値ヲ定メヨ.

(45) 三次式

x^3+ax^2+bx+c ヲ $x-a$ デ割ツタ剩餘ヲ R , $x-\beta$ デ割ツタ剩餘ヲ R' トスレバ, $R-R'$ ハ $a-\beta$ デ整除サレルコトヲ示セ.

注意 R ノ値及ビ R' ノ値ヲ出シテ $R-R'$ ヲ作ツテ後因數ニ分解セヨ.

(46) $7^{2n+1}+1$ ハ 8 デ整除サレル. ソノ理由ヲ説明セヨ.

26. 因數分解

因數分解ノ三方法

- (1) 因數分解ノ公式ニヨル場合.
- (2) 一元二次方程式ノ根ノ公式ニヨル場合.
- (3) 因數定理ニヨル場合.

因數分解ノ主ナ公式

- (1) 共通因數 $ax+bx-cx=(a+b-c)x$
- (2) 二項式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
- (3) 三項式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$
 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
 $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

因數分解ノ考ヘ方

- (1) 先ヅ共通因數ヲ括リ出スコト.
- (2) 共通因數ヲ括リ出シタ式ガ二項式又ハ三項式デアルトキハ, ソレニ相當スル公式ヲ適用スルコト.
- (3) 直チニ公式ヲ適用シ難イ三項式又ハ三項以上ノ式ハ

(一) 適當ニ或ル項ヲ括ルカ、又ハ或ル項ヲ分割若シクハ加減スルコトニヨツテ公式ヲ適用シ得ル形トスルコト。

(二) 與式ガ或ル文字ニ關スル二次三項式ト見ラレル多項式デアルトキハ、一元二次方程式ノ根ノ公式ニヨルコト。

(三) 與式ガ高次ノ多項式デアルトキハ、因數定理ニヨツテ一ツ以上ノ因數ヲ見出し、除法ニヨツテ他ノ因數ヲ定メルコト。

注意 $pq^2r + rs^2t + qr^2s + pqst$ ハ適當ニ項ヲ括ルコトニヨツテモ解ケルシ、又 $q = ts$ イツテノ二次式ト考ヘテモ解ケルガ、之ヲ t ニ關スル一次式ト見ルト、容易ニ其ノ共通因數ヲ見出スコトガ出來ル。

$$\begin{aligned} \text{即チ} \quad & pq^2r + rs^2t + qr^2s + pqst \\ & = s(rs + pq)t + qr(rs + pq) \\ & = (rs + pq)(st + qr) \end{aligned}$$

$$\text{答} \quad (rs + pq)(st + qr)$$

例一 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ヲ因數ニ分解セヨ。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - 6x^2 + 9x + 2x - 6 \\ & = x(x^2 - 6x + 9) + 2(x - 3) \\ & = x(x - 3)^2 + 2(x - 3) \\ & = (x - 3)(x^2 - 3x + 2) \\ & = (x - 3)(x - 2)(x - 1) \cdots \cdots \text{答} \end{aligned}$$

此ノ問題ヲ因數定理ニヨツテ因數ニ分解スルト、次ノ通りデアル。即チ

與式ガ因數ニ分解サレルナラバ、其ノ因數ノ既知項ハ -6 ノ因數デナケレバナラナイ。即チ因數ノ既知項ハ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ ノ中ニ含マレテキル筈デアル。トコロガ $x=1$ トスレバ

$$1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

故ニ $x-1$ ハ與式ノ一因數デアル。

$$\text{然ルニ} \quad (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \div (x - 1) = x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) \\ & = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\text{答} \quad (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

例二 $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解 24ノ一因數2ヲトリ, $x=2$ トスレバ

$$2^3 - 9 \times 2^2 + 26 \times 2 - 24 = 8 - 36 + 52 - 24 = 0$$

故ニ $x-2$ ハ與式ノ一因數デアル。

次ニ共通因數 $x-2$ ヲ得ルヤウニ各項ヲ適當ニ分割シテ組合ハセルト

$$\begin{aligned} & x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ &= x^3 - 2x^2 - 7x^2 + 14x + 12x - 24 \\ &= x^2(x-2) - 7x(x-2) + 12(x-2) \\ &= (x-2)(x^2 - 7x + 12) \\ &= \underline{(x-2)(x-3)(x-4)} \cdots \cdots \text{答} \end{aligned}$$

本題モ亦適當ノ項ヲ組合ハセルコトニヨツテ因數ニ分解スルコトガ出來ル。即チ

$$\begin{aligned} & x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ &= x^3 - 9x^2 + 20x + 6x - 24 \\ &= x(x^2 - 9x + 20) + 6(x-4) \\ &= x(x-4)(x-5) + 6(x-4) \\ &= (x-4)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x-4)(x-3)(x-2) \end{aligned}$$

$$\text{答 } \underline{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

問 題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。 47—(56)

- | | | | |
|----|---|------|--|
| 47 | $x^4 + 2x^3 - 3x^2$ | (47) | $32a^3b^3 - 4b^9$ |
| 48 | $24x^2 - 30x - 75$ | (48) | $5x^2 + 32xy - 21y^2$ |
| 49 | $x^4 - 29x^2 + 100$ | (49) | $4x^4 - 25x^2 + 36$ |
| 50 | $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ | (50) | $(2x^2 + x - 1)^2 - (x^2 - 3x - 4)^2$ |
| 51 | $x^3 - 2x^2 + 7x - 14$ | (51) | $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ |
| 52 | $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ | (52) | $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ |
| 53 | $2x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - z(x^2 - 2xy + y^2)$ | (53) | $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + x^2 + 3xy + 2y^2$ |
| | | 注意 | $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 (=x+y)^3$ |
| 54 | $3x^3 + 7x^2 - 4$ | (54) | $x^4 - 12x^2y^2 + 4y^4$ |
| 55 | $a^2 + b^2 + 2c^2 - 3bc + 3ca - 2ab$ | (55) | $(x+1)^4 + (x^2-1)^2 + (x-1)^4$ |
| | | 注意 | $(x^2-1)^2$ ノ項ヲ加減セヨ。 |
| 56 | $(4x^2 + 5x)^2 - 8(4x^2 + 5x) - 9$ | (56) | $(x^2 + 6x + 6)^2 + x^2 + 6x + 4$ |
| | | 注意 | 前問ノヤウナ形ノ三項式ヲ作レ。 |

次ノ式ヲ四ツノ因數ニ分ケヨ. 57-(57)

57 $x^4 - 5x^2 + 4$

(57) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

次ノ多項式ヲ或ル文字ニ關スル一次式又ハ二次三項式ト見做スコトニヨツテ之ヲ因數ニ分解セヨ.

58 $2pq + 12rs + 4ps + 6qr$

(58) $xy - 3y^2 - 2ax + 6ay$

59 $4p^2q^2 + 9xy - 6p^2y - 6q^2x$

(59) $x^3 + px^2 + px + p - 1$

60 $1 - 2ax - (c - a^2)x^2 + acx^3$

(60) $x^2 - 2ax - b^2 + 2ab$

61 $by(ay + bx) + xy^3 + ab^3$

(61) $x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xz + 4yz$

62 $a^2 - 3b^2 - 3c^2 + 10bc - 2ca - 2ab$

(62) $6x^2 - 13xy + 6y^2 + 22x - 23y + 20$

63 $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2$

注意 $x^2 = \text{ツイテノ二次三項式ト考ヘヨ.}$

又 $(a^2 - b^2)^2 = (a+b)^2(a-b)^2$

(63) $x^2y^2z^4 - x^2z^2 - y^2z^2 + 1$

注意 $z^2 = \text{ツイテノ二次三項式ト考ヘヨ.}$

27. 最大公約數ヲ求メル一般ノ方法

問1 110, 66, 165 ノ G.C.M. 及ビ L.C.M. ヲ求メヨ.

問2 $x^2 - 4, x^2 + 4x + 4$ ノ G.C.M. 及ビ L.C.M. ヲ求メヨ.

例一 $x^2 - 3x + 2$ ト $4x^3 - 11x^2 + 6x$ トノ G.C.M. ヲ求メヨ.

解 因數分解ニヨレバ

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$4x^3 - 11x^2 + 6x = x(4x-3)(x-2)$$

故ニ與式ノ G.C.M. ハ $x-2$ デアル.

併シ高次ノ多項式ノ因數分解ハ一般ニ困難デアルカラ, 因數分解ニヨラナイ一般ノ方法ヲ示サウ.

$$\begin{array}{r}
 4x+1 \\
 x^2-3x+2 \overline{) 4x^3-11x^2+6x} \\
 \underline{4x^3-12x^2+8x} \\
 x^2-2x \\
 \underline{x^2-3x+2} \quad x-1 \\
 \text{第一剩餘} \dots \dots \dots \underline{x-2} \overline{) x^2-3x+2} \\
 \underline{x^2-2x} \\
 -x+2 \\
 \underline{-x+2} \\
 0
 \end{array}$$

答 $x-2$

此ノ一般ノ方法ヲ互除法トイフ。
 互除法ニヨツテ二式ノ G.C.M. ヲ求メ
 ルニハ、

1 先ヅ二式ヲ或ル文字ノ降冪ノ順ニ並
 べテ次數ノ低イ式ヲ高イ式ヲ割レ。

2 剰餘ガ出テ來ルトキハ、其ノ剰餘デ前
 ノ除數ヲ割リ、更ニ剰餘ガ出テ來ルトキハ又
 此ノ剰餘デ第一剰餘ヲ割ル。カヤウニ剰餘
 ノアル間ハ此ノ方法ヲ續ケテ行へ。

3 剰餘ガナクナツタトキノ最後ノ除數
 ガ求メル G.C.M. デアル。但シ剰餘ガ文字ヲ
 含マナイ式トナツタトキハ、ソレヲノ式ハ
 G.C.M. ヲ持タナイ。

問題

互除法デ次ノ數又ハ式ノ G.C.M. ヲ求メヨ。64—(66)

- | | | | |
|----|-----------------------------------|------|------------------------------------|
| 64 | 559, 817 | (64) | 943, 851 |
| 65 | $x^2+3x+2,$
x^3+4x^2+5x+2 | (65) | $a^2+5a+6,$
a^3+5a^2+7a+2 |
| 66 | $x^2-4x+3,$
$4x^3-9x^2-15x+18$ | (66) | x^3+2x^2+2x+1
x^3+3x^2+3x+2 |

次ノ例デ互除法ニヨツテ二式ノ G.C.M. ヲ
 求メ得ル理由ヲ述ベヨウ。

例二 x^2+x-12 ト $2x^3+3x^2-22x-15$ トノ
 G.C.M. ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{B} \\
 x^2+x-12
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \text{A} \\
 2x^3+3x^2-22x-15
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2x+1 \\
 \dots\dots\dots 2xB \\
 \dots\dots\dots B
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \right\} (2x+1)B \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^2+2x-15 \\
 x^2+x-12
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \dots\dots\dots B \\
 \dots\dots\dots B
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \end{array} \right\} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x-3 \\
 x^2+x-12
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x+4 \\
 x^2-3x
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \end{array} \right\} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 4x-12 \\
 4x-12
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \end{array} \right\} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

上ノ計算カラ

$$A = (2x+1)B + C \dots\dots\dots (1)$$

$$C = A - (2x+1)B \dots\dots\dots (2)$$

故ニ A ト B トノ公約數ハ (2) カラ C ノ約數
 デアル。即チ A, B ヲ割切ル數ハ悉ク B, C ヲ
 モ割切ル。

又 (1) カラ B, C ノ公約數ハ A ノ約數デアル。
 即チ B, C ヲ割切ル數ハ悉ク A, B ヲ割切ル。

故ニ A, B ノ最大公約數ハ B, C ノ最大公約
 數デアル。即チ A, B ノ最大公約數ヲ求メル
 代リニ B, C ノ最大公約數ヲ求メレバヨイ。

然ルニ上ノ例デハ B, C ノ G.C.M. ハ C デア

ルカラ求メル A, B ノ G.C.M. ハ又 C デアル.

例三 $8x^4 - 20x^3 + 8x^2$ ト $2x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x$
トノ G.C.M. ヲ求メヨ.

$$\text{解 } 8x^4 - 20x^3 + 8x^2 = 4x^2(2x^2 - 5x + 2)$$

$$2x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x = 2x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

故ニ與式ノ G.C.M. ヲ求メルニハ $2x^2 - 5x + 2$ ト
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ トノ G.C.M. ヲ求メ, ソレト $4x^2$ ト
 $2x$ トノ G.C.M. $2x$ トノ積ヲ求メレバヨイ.

故ニ與式ノ G.C.M. ヲ求メルニハ次ノヤウ
ナ形式ニヨルノガヨイ.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 \frac{4x^2}{7} \overline{) 8x^4 - 20x^3 + 8x^2} \\
 \underline{14x^2 - 35x + 14} \\
 14x^2 - 40x + 24 \\
 \underline{5) 5x - 10} \\
 \underline{x - 2}
 \end{array} & \begin{array}{r}
 \frac{2x}{2} \overline{) 2x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x} \\
 \underline{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \\
 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 \\
 \underline{2x^3 - 5x^2 + 2x} \\
 -7x^2 + 20x - 12 \\
 \underline{-7x^2 + 14x} \\
 6x - 12 \\
 \underline{6x - 12} \\
 0
 \end{array} & \begin{array}{l}
 x \\
 -7x \\
 6
 \end{array}
 \end{array}$$

$$4x^2 \text{ ト } 2x \text{ トノ G.C.M. ハ } 2x$$

故ニ求メル G.C.M. ハ $2x(x-2)$ デアル.

$$\text{答 } \underline{2x(x-2)}$$

互除法ニヨツテ G.C.M. ヲ求メルニハ始メ
ニ擧ゲタ諸注意ノ外尙次ノ事項ニ注意セネ
バナラス.

(1) 先ヅ各式ノ共通因數ヲ括リ出シテ後互
除法ニ着手セヨ.

(2) 互除法ノ途中ニ於テハ剩餘ノ共通因數
ヲ取除ケ.

(3) 被除數ノ第一項ヲ除數ノ第一項デ割ル
トキ, 商ノ係數ガ分數トナル場合ニハ被除
數ニ適當ナ數ヲ掛ケテ整除シ得ルヤウニ
セヨ.

(4) 答ハ最初ノ各式ノ共通因數ノ G.C.M. ト
互除法ニヨツテ得タ G.C.M. トノ積ヲトレ.
互除法ノ途中ニ於テ取除ク共通因數又ハ
乗ジタ數ハ兩式ニ共通デナイ數デアルカラ
求メル G.C.M. ニハ變化ヲ及ボスコトハナイ.

三式ノ最大公約數ヲ求メルニハ, 先ヅ
其ノ中ノ任意ノ二式ノ最大公約數ヲ求
メ, 之ト残りノ一式トノ最大公約數ヲ求
メレバヨイ.

問題

次ノ式ノ G.C.M.ヲ求メヨ. 67-(69)

67 $x^4+3x^3+2x^2,$
 $5x^3+20x^2+35x+20$

68 $7x^3-4x^2y-2xy^2-y^3,$
 $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$

69 $x^3+2x^2-x-2,$
 $x^3+5x^2+8x+4,$
 x^3+3x^2-2x-8

70 $x^3+3x^2-3x-5=0$
 ト $x^3-3x^2+2x+6=0$ ト
 ノ二ツノ方程式ノ何レ
 フモ満足サセル x ノ値
 フ求メヨ.

71 兵卒 45955 人ヲ等
 分シテ若干部隊ヲ編成
 シ、各部隊 = 下士 637 人
 ト機關銃 546 個ヲ夫々
 等分シテ配屬サセ、最モ
 多クノ部隊ヲ編成スル
 =ハ如何ニスレバヨイ
 カ.

(67) $a^3+5a^2+5a-3,$
 $a^3+7a^2+17a+15$

(68) $a^3+3a^2b-5ab^2+b^3,$
 $4a^5+2a^4b-8a^3b^2+2a^2b^3$

(69) $x^3+2x^2-x-2,$
 $x^3-3x^2-x+3,$
 $2x^3-x^2-2x+1$

(70) $x^3-x^2-12x+35$ ヲ
 3 ナラシメ、同時ニ
 $x^3+3x^2-11x-20$ ヲ 8
 ナラシメル x ノ値ヲ求
 メヨ.

(71) 492, 2241, 3195
 ノ何レヲ割ツテモ常ニ
 剰餘ガ 15 トナルヤウナ
 整数ノ中デ最大ノナモ
 ノ求メヨ.

28. 最小公倍数ヲ求メル一般ノ方法

例一 x^3+4x-5 ト $x^3-2x+6x-5$ トノ最
 小公倍数ヲ求メヨ.

解 $x^3+4x-5 \dots\dots\dots A$ ト
 $x^3-2x^2+6x-5 \dots\dots\dots B$ トノ

G.C.M.ヲ求メルト $x-1$ デアル. コレヲ

G トシ,

$$(x^3+4x-5) \div (x-1) = x^2+x+5 \dots\dots\dots m$$

$$(x^3-2x^2+6x-5) \div (x-1) = x^2-x+5 \dots\dots n$$

トスレバ

$$A = mG$$

$$B = nG \quad \text{デアアル.}$$

故ニ A, B 二式ノ L.C.M. ハ mnG デアル.

然ルニ $mnG = nA = mB$

即チ求メル L.C.M. ハ

$$\frac{m}{(x^2+x+5)} \frac{n}{(x^2-x+5)} G$$

$$= \frac{n}{(x^2-x+5)} A$$

$$= \frac{m}{(x^2+x+5)} B$$

依ツテ次ノ法則ガ得ラレル.

二式ノ最小公倍數ヲ求メルニハ

1 先ツ二式ノ G.C.M. ヲ求メ、其ノ G.C.M. デー式ヲ割リ、得タ商ヲ他ノ一式ニ掛ケヨ。

2 若シ二式ガ公約數ヲ持タナイトキハ 其ノ二式ノ積ヲ求メヨ。

問 二ツノ整式 A, B ノ G.C.M. ト L.C.M. トノ積ハ A, B ノ積ニ等シイコトヲ示セ。

問題

次ノ數又ハ式ノ L.C.M. ヲ求メヨ。 72-(74)

- 72 2684, 6028
- 73 $x^2+x-12,$
 x^3-5x^2+7x-3
- 74 $x^3-6x^2+11x-6,$
 $x^3-9x^2+26x-24$
- 75 G.C.M. ガ 12, L.C.M. ガ 420 デアルヤウナ二數ヲ求メヨ。
- 76 二ツノ二次式ノ G.C.M 及ビ L.C.M. ガ夫夫 $x-1, x^3-7x+6$ デアル。ソノ二式如何。
- (72) 1955, 6003
- (73) $a^2+6a+8,$
 a^3+5a^2+7a+2
- (74) $a^3+ab^2-2b^3,$
 $a^4+a^3b-2ab^3+4b^4$
- (75) G.C.M. ト L.C.M. トノ和ガ 56 デ、積ガ 384 デアルヤウナ二數如何。
- (76) G.C.M., L.C.M. ガ夫々 $x-2,$
 $x^3-9x^2+26x-24$ デアル二式ヲ求メヨ。

29. 聯立方程式

問 1 二元一次聯立方程式ノ例ヲ擧ゲテ、ソノ解法ヲ云ヘ。

問 2 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ ノ解法如何。

例一 $\begin{cases} 2xy-13x-8y+49=0 \dots\dots(1) \\ 3xy-9x-19y+77=0 \dots\dots(2) \end{cases}$

ヲ解ケ。

解 (1),(2) 共ニ二次方程式デアルカラ、一次方程式ヲ得ルヤウニ考ヘネバナラナイ。

$$\begin{array}{r} (1) \times 3 \quad 6xy - 39x - 24y + 147 = 0 \\ (2) \times 2 \quad 6xy - 18x - 38y + 154 = 0 \\ \hline \quad \quad \quad -21x + 14y - 7 = 0 \end{array}$$

即チ $3x - 2y + 1 = 0 \dots\dots(3)$

此ノ式ノ y ヲ (1) ニ代入シテ

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

コレカラ $x=3 \quad | \quad x=5$

(3)ニ代入シテ $y=5 \quad | \quad y=8$

答

x	3	5
y	5	8

例二 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 4xy + 2y^2 = 17 \end{cases}$ ヲ解ケ.

解 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ x^2 + 4xy + 2y^2 = 17 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

(1) カラ $(x-y)(2x-y) = 0$
 コレカラ $x-y=0, 2x-y=0$
 コレト(2)トヲ組合ハセテ解ケバヨイ.

$\begin{cases} y=x \\ x^2 + 4xy + 2y^2 = 17 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} y=2x \\ x^2 + 4xy + 2y^2 = 17 \end{cases}$

コレカラ $\begin{matrix} 7x^2 = 17 & | & 17x^2 = 17 \\ \therefore x = \pm \frac{\sqrt{119}}{7} \approx \pm 1.558 & | & \therefore x = \pm 1 \end{matrix}$

yノ値ハドウシテ求メルカ.

答

x	1	-1	1.558	-1.558
y	2	-2	1.558	-1.558

二式ガ共ニ二次デアル二元二次聯立方程式ニハ一般ノ解法ハナイガ,例一ノヤウニ直チニ二次ノ項ヲ消去スルコトガ出来ルカ,例二ノヤウニ一ツノ方ヲ因数ニ分解スルコトガ出来ルナラバ,一次ト二次トノ組合セニ

*ニハ略等シイノ符號デアル.

導イテコレヲ解クコトガ出来ル.

問題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ, 77-(80)

77 $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - x - 3y = 42 \\ x^2 + y^2 - 3x + y = 6 \end{cases} \quad (77) \begin{cases} x + y + 2y^2 = 11 \\ 3x - 2y - 2y^2 = -9 \end{cases}$

78 $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ 4x - 4y = xy \end{cases} \quad (78) \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$

79 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + x - y - 7 = 0 \\ 4x^2 + 6y^2 - 3x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$

(79) $\begin{cases} \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} = 3 \\ x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$

80 $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

(80) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)(3x+1) \\ x^2 - y^2 + 2xy + 1 = 0 \end{cases}$

例三 $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=4 \\ 2x^2-xy+y^2=11 \end{cases}$ ヲ解ケ.

解 $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=4 \dots\dots\dots(1) \\ 2x^2-xy+y^2=11\dots\dots\dots(2) \end{cases}$

既知項ヲ消去スルト

(1)×11 $11x^2+11xy+22y^2=44$

(2)×4 $8x^2-4xy+4y^2=44$

$3x^2+15xy+18y^2=0$

∴ $x^2+5xy+6y^2=0\dots\dots\dots(3)$

(3) カラ $(x+2y)(x+3y)=0$

$x=-2y\dots\dots\dots(4)$ | $x=-3y\dots\dots\dots(5)$

コレト(1)トヲ組合セテ

$y^2=1$

$y=±1$

(4)ニ代入シテxヲ求

メヨ.

$y^2=\frac{1}{2}$

$y=±\frac{\sqrt{2}}{2}=±0.707$

(5)ニ $y=±\frac{\sqrt{2}}{2}$ ヲ代入

シテxヲ求メヨ.

答

x	2	-2	2.121	-2.121
y	-1	1	-0.707	0.707

例三ハ二ツノ方程式カラ因数分解ノ出來ル式ヲ導キ得ル場合デアアル. 此ノ場合ハ多クハ

(1) 未知數ノ一次ノ項ヲ缺クカ,

(2) 既知項ヲ缺キ且二次ノ項ノ外ニハ同ジ未知數ノ一次ノ項ノミヲ有スルカデアアツテ何レノ場合モ加減法ニヨツテ因数ニ分解シ得ル式ヲ導キ出スコトガ出來ル.

問題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ. 81—(84)

81 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \\ x^2+2y^2-6=0 \end{cases}$

82 $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9y \\ 2x^2-3xy+2y^2=4y \end{cases}$

83 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$

84 $\begin{cases} x^2+xy=4x-2 \\ y^2+xy=4y-1 \end{cases}$

(81) $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=33 \\ 2x^2+2xy-y^2=66 \end{cases}$

(82) $\begin{cases} 3x^2-3xy+2y^2=2x \\ 2x^2+3y^2-4x=xy \end{cases}$

(83) $\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ xy=12 \end{cases}$

(84) $\begin{cases} x^2+x+y^2=15 \\ 2xy+y=15 \end{cases}$

注意 二ツノ方程式ヲ邊々加ヘテ見ヨ.

注意 邊々ヲ相減ジテ見ヨ. 又ハ邊々ヲ加ヘテ見ヨ.

例四 $x+xy+y=29 \dots\dots\dots (1)$
 $x^2+xy+y^2=61 \dots\dots\dots (2)$

解 $x+y=s, xy=t$ トスレバ

(1)ハ $s+t=29 \dots\dots\dots (3)$
 (2)ハ $s^2-t=61 \dots\dots\dots (4)$
 (3)+(4) $s^2+s-90=0 \quad \therefore (s-9)(s+10)=0$

故ニ	$s=9$	$s=-10$
從ツテ	$t=20$	$t=39$
即チ	$x+y=9$	$x+y=-10$
	$xy=20$	$xy=39$
コレヲ解クト		
	$x(9-x)=20$	$x(-x-10)=39$
	$x^2-9x+20=0$	$x^2+10x+39=0$
	$(x-4)(x-5)=0$	$x=-5 \pm \sqrt{-14}$
故ニ	$x=4$	$x=5$
	$y=5$	$y=4$
		$y=-5 \mp \sqrt{-14}$

答

x	4	5	$-5+\sqrt{-14}$	$-5-\sqrt{-14}$
y	5	4	$-5-\sqrt{-14}$	$-5+\sqrt{-14}$

例四ハ $x+y$ ヲ s ニ, xy ヲ t ニ置換ヘテ解イ
 タカラ, 此ノ方法ヲ置換法トイフ.

聯立方程式ノ解法ニハ今迄ノ多クノ例ノ
 ヤウニ種々ノ場合ガアルガ, 又置換法ナドノ
 ヤウナ特殊ナ方法モアル.

問題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ. 85-(88)

85	$x^2+y^2+3xy=5$	(85)	$xy+x+y=11$
	$x+y+2xy=-5$		$x^2y+xy^2=30$
86	$x^2+xy+y^2=49$	(86)	$x^2-xy+y^2=39$
	$x^2-xy+y^2=19$		$2x^2-3xy+2y^2=43$
87	$(x+y)^2+4(x-y)=37$	(87)	$x^2+y^2-(x-y)=20$
	$xy+4(x-y)=16$		$xy+(x-y)=1$

注意 問題87及ビ(87)ハ共ニ $(x-y)$, xy ヲ夫々 s, t ト
 オイテ考ヘヨ.

88	$x^2y^2-14xy+45=0$	(88)	$x^2y^2+24xy-180=0$
	$x+y=6$		$x+y=7$

第二章 根数・根式

30. 根数及根式ノ四則

問1 $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt{\frac{8}{25}}$, $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$ ノ値ヲ求メヨ.
但シ開キ切レナイモノハ小數第3位マデ取レ.

問2 $5\sqrt[3]{3}$ ト $2\sqrt[3]{3}$ トノ和及ビ差ヲ求メヨ.

最モ簡單ナ形ニ改メタトキ同一ノ根数ヲ因数トスル根数ヲ同類根数トイヒ、同一ノ根数以外ノ因数ヲ其ノ根数ノ係數トイフ。(第二學年用67頁参照)

上ノ問2デハ $5\sqrt[3]{3}$ ト $2\sqrt[3]{3}$ トハ同類根数デ、5ト2トハ各、其ノ根数ノ係數デアル.

例一 $a^{\sqrt{x}} - b^{\sqrt{x}} + c^{\sqrt{x}} = (a-b+c)^{\sqrt{x}}$ 答

例二 $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \frac{2\sqrt[3]{6}}{3} - 2\sqrt[3]{48}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \frac{2\sqrt[3]{6}}{3} - 2\sqrt[3]{48} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2 \times 3}{9 \times 3}} + \frac{2\sqrt[3]{6}}{3} - 2\sqrt[3]{2^3 \times 6} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{6} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[3]{6} \\ &= -3\sqrt[3]{6} \qquad \text{答} \quad \underline{-3\sqrt[3]{6}} \end{aligned}$$

同類根数(根式)ノ代数和ヲ求メルニハ、其ノ共通根数(根式)ニ係數ノ代数和ヲ掛ケレバヨイ。(第二學年用67頁参照)

例三 $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \times a^2} \\ &= \sqrt[3]{a^3} = a \qquad \text{答} \quad \underline{a} \end{aligned}$$

例四 $2\sqrt[3]{a} \times 7\sqrt[3]{a^2}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 2\sqrt[3]{a} \times 7\sqrt[3]{a^2} = 14\sqrt[3]{a^3} = 14a \\ &= 14\sqrt[3]{a^3} = 14a \qquad \text{答} \quad \underline{14a} \end{aligned}$$

例五 $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$\text{解} \quad \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \text{答} \quad \underline{2}$$

例六 $5\sqrt[6]{2}$ ヲ $\sqrt[3]{2}$ デ割レ.

$$\text{解} \quad \frac{5\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[6]{8}}{\sqrt[6]{4}} = 5\sqrt[6]{2} \qquad \text{答} \quad \underline{5\sqrt[6]{2}}$$

次數ノ異ナル根数又ハ根式ノ積又ハ商ハ先ヅ之ヲ同次ノ根数又ハ根式ニ直シタ後コレヲ求メレバヨイ.

問3 上ノ例三カラ例六マデヲ分數指數及ビ負ノ指數ヲ用ヒテ計算シテ見ヨ.

問題

次ノ式ヲ計算セヨ. 1-8)

1 $\sqrt{8}-\sqrt{32}-\sqrt{72}$

2 $\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{1}{10}}+\sqrt{\frac{18}{5}}$

3 $\sqrt{7}\times\sqrt{14}$

4 $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\times\sqrt{3}$

5 $\sqrt{a}\div\sqrt[3]{a}$

6 $\sqrt{\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{3}{5}}$

7 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

8 $\sqrt{7+\sqrt{18}}\times\sqrt{7-\sqrt{18}}$

9 $x=2+\sqrt{5}$ デアル

トキ x^2-2x-3 ノ値ヲ

小數第3位マデ求メヨ.

10 $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ト $\sqrt{5+2}$

トハ等シイカ.

注意 兩方ヲ二乗シ

テ比較セヨ.

(1) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{32}$

(2) $2\sqrt{\frac{5}{9}}-\frac{3}{2}\sqrt{45}+2\sqrt{20}$

(3) $\sqrt{20}\times\sqrt{30}$

(4) $\sqrt{\frac{a}{b}}\times\sqrt[4]{\frac{b^3}{a}}$

(5) $\sqrt{a^3}\div\sqrt[3]{a^2}$

(6) $\sqrt{15}\div\sqrt{\frac{3}{5}}$

(7) $(\sqrt{6}-4\sqrt{5})^2$

(8) $\sqrt{3\sqrt{2}-3}\times\sqrt{3\sqrt{2}+3}$

(9) $x=-2+\sqrt{3}$ デアル

トキ x^2+4x+1 ノ値

ヲ求メヨ.

(10) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ト $\sqrt{x-y}$

トハ等シイカ.

但シ $x>y$ トスル.

31. 分母ノ有理化

問1 $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ヲ簡單ニセヨ.例一 $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ヲ小數第3位マデ求メヨ.但シ $\sqrt{3}=1.732$ トセヨ.

解 $\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\times 1.732=3.464$ 答

注意 $\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6}{1.732}$ トシテ割算ヲスルヨリモハル

カニ簡單デアル.

上ノ問1デハ $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ トシテモ

ヨイガ,一般ニハ例一ノヤウニスル. 即チ

與式ノ値ヲカヘナイデ其ノ分母ヲ根數

(根式)ヲ含マナイ式ニ直シテ計算スルノ

デアル. カヤウニスルコトヲ分母ヲ有

理化スルトイフ.

問2 $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt[3]{3}}$ ノ分母ヲ有理化セヨ.問3 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 及ビ $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$ ヲ計算セヨ.

例二 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ノ分母ヲ有理化セヨ.

解 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$
 $= \frac{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}$
 $= 4+\sqrt{15}$ 答 $4+\sqrt{15}$

問題

卷末ノ表ヲ用ヒテ、次ノ式ヲ小數第3位マデ計算セ

ヨ. 11-(13)

11 $\frac{3}{\sqrt{3}}$ 12 $\sqrt{\frac{2}{5}} \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}$ (11) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (12) $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{50}}$
 13 $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (13) $\frac{7\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

次ノ式ノ分母ヲ有理化セヨ.

14 $\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$ (14) $\frac{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$
 15 $x=7^{\frac{1}{2}}$ デアルトキ (15) $x=3+2\sqrt{2}$ デアル
 $\frac{1}{x^2+2x+3}$ ノ値ヲ小數 トキ $\frac{1}{x^3-6x^2+8}$ ノ値ヲ
 第3位マデ求メヨ. 小數第3位マデ求メヨ.

32. $a \pm 2\sqrt{b}$ ナル形ノ式ノ平方根

a, b ハ共ニ正ノ有理數デ、 \sqrt{b} ハ不盡根數
 デアルトスル.

$\sqrt{3}$	$\sqrt{15}$	3
$\sqrt{5}$	5	$\sqrt{15}$
	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$
 $= 5+2\sqrt{15}+3$
 $= 8+2\sqrt{15}$
 逆ニ考ヘテ $8+2\sqrt{15}$
 ノ平方根ヲ求メルニ
 ハ、和ガ8、積ガ15ト

ナル數ハ5ト3トデアルカラ、

$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

$a+2\sqrt{b}$ ニ於テ、 a ガ二數 x, y ノ和、 b ガ
 其ノ積デアルトキハ $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$ ハ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$
 デ表ハスコトガ出來ル.

例 $\sqrt{3}=1.732$ トシテ $\sqrt{52-14\sqrt{3}}$ ノ小數
 第3位マデ計算セヨ.

$\sqrt{52-14\sqrt{3}} = \sqrt{52-2\sqrt{7^2 \times 3}}$
 $= \sqrt{49-2\sqrt{49 \times 3}+3} = \sqrt{(7-\sqrt{3})^2}$
 $= 7-1.732 = \underline{5.268}$ 答

注意 $\sqrt{52-14\sqrt{3}} = \sqrt{52-14 \times 1.732}$ トシテ開平
ヲ行フヨリモ簡單デアル。又 $\sqrt{52-14\sqrt{3}}$ ヲ
 $\sqrt{7^2-2 \times 7\sqrt{3}+3} = \sqrt{(7-\sqrt{3})^2}$ トシテ求メテモヨイ。
尙 $\sqrt{52-14\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-7)^2}$ デアルカラ $\sqrt{3}-7$ ト
シテハイケナイ。 $\sqrt{(\sqrt{3}-7)^2}$ モ $7-\sqrt{3}$ デアル。

問題

$$\sqrt{2}=1.4142, \sqrt{3}=1.7321, \sqrt{5}=2.2361, \sqrt{6}=2.4495$$

トシテ次ノ式ノ値ヲ求メヨ。 16--(19)

$16 \quad \sqrt{5+2\sqrt{6}}$ $17 \quad \sqrt{7-2\sqrt{10}}$ $18 \quad \sqrt{30+12\sqrt{6}}$ $19 \quad \frac{1}{\sqrt{15+2\sqrt{54}}}$		$(16) \quad \sqrt{8+2\sqrt{15}}$ $(17) \quad \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $(18) \quad \sqrt{46-3\sqrt{20}}$ $(19) \quad \frac{1}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}$
--	--	--

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。 20--(22)

$20 \quad \sqrt{2m+2\sqrt{m^2-9n^2}}$ $(20) \quad \sqrt{9m+8n+12\sqrt{2mn}}$ $21 \quad \sqrt{11+2\sqrt{10}} - \sqrt{11-2\sqrt{10}}$ $(21) \quad \sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ $22 \quad \sqrt{1+\frac{2\sqrt{6}}{5}}$		$(22) \quad \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$
---	--	--

33. 無理方程式

問1 $\sqrt{x}=2$ ノ意味如何。又此ノ x ノ値ハ何デアレバヨイカ。

根號ノ中ニ未知數ヲ含ム方程式ヲ無理方程式トイフ。

無理方程式ニ對シテ整方程式及ビ分數方程式ヲ有理方程式トイフ。

例一 $\sqrt{x+2}=5$ ヲ解ケ。

解 $\sqrt{x+2}=5$

兩邊ヲ二乗シテ整方程式トスレバ

$$x+2=25$$

$$x=23$$

$x=23$ ナラバ左邊ハ $\sqrt{23+2}$ 即チ 5 トナリ、右邊ト等シクナルカラ 23ハ原方程式ヲ満足スル。

答 23

問題

次ノ無理方程式ニ適スル x ノ値ヲ見出セ。 23--(25)

$23 \quad \sqrt{x+5}=4$ $24 \quad 5+\sqrt{x}=7$ $25 \quad \sqrt[3]{x-1}=1$		$(23) \quad \sqrt{10-x}=3$ $(24) \quad \sqrt{x+5}=2\sqrt{x-7}$ $(25) \quad \sqrt[3]{3x-1}=2$
--	--	--

例二 $\sqrt{7+3x}=x+1$ ヲ解ケ.

解 $\sqrt{7+3x}=x+1$ 兩邊ヲ二乗スレバ

$$7+3x=x^2+2x+1 \dots\dots\dots (A)$$

$$x^2-x-6=0$$

$$(x-3)(x+2)=0$$

$x-3=0$		$x+2=0$
$x=3$		$x=-2$

$x=3$ トスルト

左邊 $\sqrt{7+3x}=\sqrt{7+9}=4$	} $x=3$	ハ原方程式ヲ 満足スル.
右邊 $x+1=3+1=4$		

$x=-2$ トスルト

左邊 $\sqrt{7+3x}=\sqrt{7-6}=1$	} $x=-2$	ハ原方程式ヲ 満足シナイ.
右邊 $x+1=-2+1=-1$		

故ニ -2 ハ根デハナイ. ∴ 答 3

此ノ例ノヤウニ無理方程式ヲ解クト、其ノ得タ未知數ノ値ガ原方程式ヲ満足シナイコトガアル。即チ無縁根デアル場合ガアル。故ニ無理方程式ヲ解クトキハ、必ズツノ出タ未知數ノ値ニツイテ検査ヲシテ根トシテ探ルベキ値ト無縁根トヲ判定セネバナラス。

例三 $\sqrt{7+3x}=-(x+1)$ ヲ解ケ.

解 $\sqrt{7+3x}=-(x+1)$ 兩邊ヲ二乗スレバ

$7+3x=x^2+2x+1$ トナリ例二ノ(A)ト同ジデアル。故ニ之ヲ解ケバ $x=3$ ト $x=-2$ トヲ得ル。

検査 $x=3$ トスルト

左邊 $\sqrt{7+3x}=\sqrt{7+9}=4$	} $x=3$	ハ無縁根 デアル.
右邊 $-(x+1)=-(3+1)=-4$		

$x=-2$ トスルト

左邊 $\sqrt{7+3x}=\sqrt{7-6}=1$	} $x=-2$	ハ原方程 式ニ適スル.
右邊 $-(x+1)=-(-2+1)=1$		

今例二、例三ヲ比較シテ無縁根ノ出來ル理由ヲ考ヘテ見ルニ、兩邊ヲ二乗スルコトニ依ツテ

例二 $\sqrt{7+3x}=x+1$	} カラ $7+3x=x^2+2x+1$
例三 $\sqrt{7+3x}=-(x+1)$	

ヲ得タノデアルガ、茲ニ $7+3x=x^2+2x+1$ 即チ $(7+3x)-(x+1)^2=0 \dots\dots\dots (A)$ カラ

$$\{\sqrt{7+3x}-(x+1)\}\{\sqrt{7+3x}+(x+1)\}=0$$

従ツテ $\sqrt{7+3x}-(x+1)=0$ }ニ分ケルコトガ出
 $\sqrt{7+3x}+(x+1)=0$ }來ル.

故ニ方程式(4)ノ根ハ例二ノ根デアルカ、例三ノ根デアルカハ検査シナケレバワカラナイ。

又實際ニ方程式(4)ヲ解イテ得タ根3及ビ-2ニツイテハ

3ハ例二ノ根デ例三ノ無縁根、

-2ハ例三ノ根デ例二ノ無縁根デアル。

無理方程式ヲ解クニハ兩邊ヲ或ル冪ニ高メ、之ヲ有理方程式ニ化シテ根ヲ求めルヨリ他ニ方法ガナイカラ、無縁根ノ入り來ルコトハ免レ難イ。從ツテ無理方程式ヲ解イテ得タ値ニツイテハ必ズ検査ヲシナケレバナラナイ。

問題

次ノ無理方程式ヲ解ケ。 26-(28)

$$26 \quad \sqrt{3x-2}=2-x$$

$$(26) \quad \sqrt{4x}=3-x$$

$$27 \quad 13-2x=\sqrt{4x^2+7x-8}$$

$$(27) \quad \sqrt{(x-5)(4x+4)}=2x-6$$

$$28 \quad \sqrt{\{\sqrt{7+\sqrt{x}}+1\}}=2$$

$$(28) \quad \sqrt{6+\sqrt{(3\sqrt{x}+2)}}=3$$

例四 $\sqrt{x+8}=2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ ヲ解ケ。

$$\text{解} \quad \sqrt{x+8}=2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

兩邊ヲ二乗シテ

$$x+8=4(x+1)+4\sqrt{x+1}\sqrt{x}+x$$

$$-4x+4=4\sqrt{x^2+x}$$

$$-x+1=\sqrt{x^2+x}$$

更ニ兩邊ヲ二乗シテ

$$x^2-2x+1=x^2+x$$

$$-3x=-1$$

$$x=\frac{1}{3}$$

検査

$$x=\frac{1}{3} \quad \text{ナラバ}$$

$$\text{左邊} \quad \sqrt{x+8}=\sqrt{\frac{1}{3}+8}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{右邊} \quad 2\sqrt{x+1}+\sqrt{x} &= 2\sqrt{\frac{1}{3}+1}+\sqrt{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

兩邊共ニ相等シイ。

答 $\frac{1}{3}$

問題

次ノ無理方程式ヲ解ケ。 29-(34)

$$29 \quad \sqrt{x+8} = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$(29) \quad \sqrt{x+7} + \sqrt{x+6} = 1$$

$$30 \quad \sqrt{9x-2} = \sqrt{25x-11} - \sqrt{4x-3}$$

$$(30) \quad \sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x-27}$$

$$31 \quad \sqrt{9x+10} = \frac{6x+10}{\sqrt{4x+9}} \quad \left| \quad (31) \quad \sqrt{x+4} = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \right.$$

$$32 \quad \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}$$

$$(32) \quad \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{a+b}$$

$$33 \quad \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-7}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x-7}} = 2 \quad \left| \quad (33) \quad \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} = 1 \right.$$

$$34 \quad \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = \frac{3\sqrt{x-5}}{3\sqrt{x-13}} \quad \left| \quad (34) \quad \frac{6\sqrt{x-11}}{3\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}} \right.$$

$$35 \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x+y=10 \end{cases} \quad \left| \quad (35) \quad \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases} \right.$$

ヲ解ケ。

ヲ解ケ。但シ x, y ハ實數トスル。

例五 $x^2 - 7x + \sqrt{x^2 - 7x + 18} = 24$ ヲ解ケ。

$$\text{解} \quad x^2 - 7x + \sqrt{x^2 - 7x + 18} = 24$$

$$\underline{x^2 - 7x + 18} + \sqrt{x^2 - 7x + 18} - \underline{42} = 0 \quad \text{トナル故、}$$

$$\sqrt{x^2 - 7x + 18} = y \quad \text{トオケバ}$$

$$y^2 + y - 42 = 0$$

$$(y-6)(y+7) = 0$$

$$y-6=0$$

$$\therefore y=6$$

$$\text{即チ} \quad \sqrt{x^2 - 7x + 18} = 6$$

コレカラ

$$x^2 - 7x + 18 = 36$$

$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

$$(x-9)(x+2) = 0$$

$$\text{故ニ} \quad x=9, \quad x=-2$$

検査 $x=9$ ノトキ

$$\text{左邊} \quad 81 - 63 + \sqrt{81 - 63 + 18} = 18 + \sqrt{36} = 24$$

$$x=-2 \quad \text{ノトキ}$$

$$\text{左邊} \quad 4 + 14 + \sqrt{4 + 14 + 18} = 18 + \sqrt{36} = 24$$

故ニ $9, -2$ ハ共ニ所要ノ根デアル。答 9, -2

注意 $\sqrt{a^2}$ ハ負ヲ表ハサナイコトヲ忘レルナ。

*又實際ニ解イテ如何ニナルカラ見ヨ。

$$y+7=0$$

$$\therefore y=-7$$

$$\text{即チ} \quad \sqrt{x^2 - 7x + 18} = -7$$

然ルニ左邊ハ正ノ値

ヲ表ハスカラ

$$\sqrt{x^2 - 7x + 18} = -7 \quad \text{トナ$$

ルコトハナイ。

故ニ之ハ採用シナイ。

問題

次ノ方程式ヲ解ケ. 36-(39)

$$36 \quad 2\sqrt{x^2-2x+6}+x^2=2x+29$$

$$(36) \quad 2\sqrt{x^2-2x+5}+3x^2=6x+1$$

$$37 \quad 9x-3x^2+4\sqrt{x^2-3x+5}=11$$

$$(37) \quad \sqrt{x^2-5x+1}-4-\frac{5}{\sqrt{x^2-5x+1}}=0$$

$$38 \quad x^2-3x+1=\sqrt{(x-2)^2}$$

注意 $x \geq 2$ ナラバ $x^2-3x+1=x-2$

$x < 2$ ナラバ如何.

$$(38) \quad \sqrt{\frac{3x-2}{x-3}}+\sqrt{\frac{x-3}{3x-2}}=\frac{10}{3}$$

注意 此ノママ兩邊ヲ二乗セヨ.

又ハ $\sqrt{\frac{3x-2}{x-3}}=t$ トオイテミヨ.

$$39 \quad \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-2=0 \\ x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{3}}-1=0 \end{cases}$$

注意 $x^{\frac{1}{3}}, y^{\frac{1}{3}}$ ヲ夫

夫未知數ト考ヘヨ.

$$(39) \quad \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$$

注意 第二ノ方程式
カラ xy ノ値ハ如何ニ
ナルカラ考ヘヨ.

摘要

◎整式ノ乗法及除法

乗法→一ツノ文字ノ昇冪順,降冪順ノ何レ
カラ取レ.

除法→一ツノ文字ノ降冪順ニ排列セヨ.

◎乗法及因数分解ニ用ヒラレル公式

$$1 \quad \text{共通因数} \quad ax+bx-cx=(a+b-c)x$$

$$2 \quad \text{二項式} \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$3 \quad \text{三項式} \quad a^2 \pm 2ab + b^2=(a \pm b)^2$$

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

◎互除法ニヨルG.C.M.及L.C.M.ノ求メ方

G.C.M. 最初ニ括リ出サレタ二式ノ共通
因数ノG.C.M.ト,共通因数ヲ除イタ兩式カラ
互除法ニヨツテ得タG.C.M.トノ積.

L.C.M. 二式ノG.C.M.デー式ヲ割ツテ得
タ商ト他ノ一式トノ積.

◎ 剰餘定理及 因數定理

1 x = 關スル或ル有理整式ヲ $ax+b$ デ割ツタトキノ剰餘ハ、其ノ式ノ $x = ax+b=0$ ノ根ヲ代入シタトキノ數値ニ等シイ。

2 x = 關スル或ル有理整式ニ於テ $x=m$ トシタトキ、其ノ式ノ數値ガ 0 トナルトキハ其ノ式ニハ $(x-m)$ ナル因數ガアル。

◎ 根数及 根式ノ四則

加法及 減法 同類根数(根式)ノ代數和ハ共通ノ根数(根式)ニ其ノ係數ノ代數和ヲ掛ケヨ。

乘法及 除法 同次ノ根数(根式)ニ直シテ後ニ行ヘ。

◎ 分母ヲ有理化スルコト

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b}$$

◎ 無理方程式ノ解キ方

無理方程式 → 整方程式 → 根ノ檢査

$$\sqrt[n]{x} = A \rightarrow x = A^n \rightarrow \text{根ノ檢査}$$

雜 題

1 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=4$ ヲ解ケ。

(1) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$ ヲ解ケ。

2 $(x+a)(x+b)(x+c)$

ノ積ヲ求メ、且ツノ結果ヲ用ヒテ

$$(1-a)(1+2a)(1-2a)$$

ヲ展開セヨ。

(2) $ax^2+2bxy+cy^2$

ノ x, y ノ代リニ夫々

$$3X+2Y, 4X+3Y$$

ヲ代入シテ得ベキ式ヲ

$$AX^2+2BXY+CY^2$$

トスルトキ、 $AC-B^2$ ヲ

a, b, c デ表ハセ。

3 x^2+px+q ヲ $x-1$

デ割レバ剰餘ガ 6 トナ

リ、 $x+1$ デ割レバ剰餘ガ

2 トナルトキ、 p 及 q

ノ値ヲ求メヨ。

(3) $x-3$ ガ

$$2x^3+ax^2+bx+7$$

及 x^3-bx^2+ax+5 ナル二

式ヲ夫々割切ルタメニ

ハ a 及 b ノ値如何。

4 $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+R$

デアルトキ、 R ノ値如何。但シ x ノ絶對値ハ 1 ヨリ小サイモノトスル。

(4) x^4+1 ヲ x^2+ax+b デ割ツタトキノ商及 b 剰餘ヲ求メヨ。

5 或ル三角形ノ周ト
ソノニツノ邊トノ比ガ
夫々

$$10: \sqrt{12+6\sqrt{3}}$$

$$10: \sqrt{12-6\sqrt{3}}$$

デアル。コノ三角形ノ
周ト第三邊トノ比ヲ求
メヨ。

(5) 獵師ノ發火シタ光
ガ見エテカラ 3.5 秒ノ
後、其ノ銃聲ガ聞エタ。
其ノトキ空氣ノ溫度ハ
1.2 度デアツタトイフ。
獵師ト觀測者トノ距離
ヲ求メヨ。但シ
 $V_t = V_0\sqrt{1+at}$ トスル。
茲ニ

V_t ハ溫度 t° = 於ケル空中ニ傳ハル音波ノ速サ

V_0 = 溫度 0° = 於テ空中ヲ傳ハル音波ノ速サ
= 331.36 秒米

a = 氣體ノ膨脹係數 = 溫度 1° = ツキ $\frac{1}{273}$

t = 觀測時ノ溫度

(答ハ m ノ小數第 1 位迄求メヨ。)

6 $\sqrt{x+5} + \sqrt{3x-4} - \sqrt{8x+1} = 0$ ヲ解ケ。

(6) $\sqrt{3x^2-4x+34} + \sqrt{3x^2-4x-11} = 9$ ヲ解ケ。

7 $x = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$ ノト

キ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

ノ値ヲ小數第 3 位マデ
求メヨ。

(7) $x = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ノ

トキ $\frac{x\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ ノ

値ヲ小數第 3 位マデ算
出セヨ。

8 x^2+lx+1 ト

x^3+lx^2+mx+1 ガ一次
ノ公約數ヲ有スルトキ、
 $l(m-1) = (m-1)^2 + 1$ デ
アルコトヲ證セヨ。

注意 $x^2+lx+1 \cdot (1)$

$x^3+lx^2+mx+1 \cdot (2)$

(1) ト (2) トノ公約數ハ

(2)-(1) ノ約數デ

モアリ、(2)-(1) $\times x$ ノ約
數デモアルコトカラ考
ヘヨ。

9 五位ノ整數ガアル。
コレヲ 9 デ割ツテ得ベ
キ剩餘ハ、其ノ數字ノ和
ヲ 9 デ割ツテ得ベキ剩
餘ニ等シイコトヲ證明
セヨ。

10 和ガ 128400, G.C.M.
ガ 8025 ナルニツノ正ノ
整數ハ幾通リアルカ。

(8) x^3+px^2+qx+1 ト

x^3+qx^2+px+1 トハ、 $p \neq q$
ナラバ $p+q = -2$ デナ
ケレバ公約數ヲ有シナ
イコトヲ證セヨ。

注意 問題 8 ト同様
ニ考ヘヨ。

(9) 或ル整數ノ右端ノ
二桁ガ 4 デ割り切レル
トキハ、其ノ數ハ 4 デ整
除サレルコトヲ證明シ、
次ノ數ガ 4 デ割り切レ
ルヤウニ \square 内ノ數ヲ補
ヘ。

57□6, 322□,

160□, 78□2,

(10) 和ガ 168, L.C.M. ガ
1001 ナルニツノ正ノ整
數ハ幾通リアルカ。

11 $4x^2+12x+d=0$

ノ二根ノ差ガ2ナラバ
 d ノ値如何.

12 $(x-a)(x-b)-k=0$

ノ二根ガ c, d ナラバ,
 $(x-c)(x-d)+k=0$
ノ二根ハ a, b デアルコ
トヲ證明セヨ.

13 次ノ方程式ガ等根
ヲ有スルトキハ, a, b, c
ハ等差級數ヲナスコト
ヲ證セヨ.

$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$

14 $x^2+px+q=0$

ノ根ハ3及ビ-6,

$x^2+p'x+q=0$

ノ根ハ7及ビ-3デア
ルトキ,

$x^2+px+q=0$

ノ根ヲ求メヨ.

(11) $x^2-2x+\log n=0$

ハ n ノ如何ナル値ニ對
シテ相異ナル二ツノ正
根ヲ有スルカ.

(12) $x^2+mx+2=0$ ノ二

根ガ整數デアルトキ,
 $mx^2+3x+1=0$

ガ實根ヲ有スルヤウニ
 m ノ値ヲ定メヨ.

(13) x ニ關スル二次三
項式ガアル. x ヲ

$3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$ トス
ルト其ノ式ハ零トナリ,
 x ヲ零トスルト $\sqrt{2}$ ト
ナルトイフ. 其ノ式ヲ
求メヨ.

(14)
$$\begin{cases} y=3x+b \\ 3x^2+2xy+y^2=4 \end{cases}$$

ノ二組ノ根ガ一致スル
ヤウニ b ノ値ヲ定メヨ.

次ノ聯立方程式ヲ解ケ. 15-(18)

15
$$\begin{cases} \frac{x}{y}+xy=1 \\ \frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=1 \end{cases} \quad (15) \quad \begin{cases} x+\frac{4}{y}=1 \\ y+\frac{4}{x}=18 \end{cases}$$

16
$$\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases} \quad (16) \quad \begin{cases} x^3-y^3=26 \\ x-y=2 \end{cases}$$

注意 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ トシテ見ヨ.

17
$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-y^2}=8 \\ x-y=1 \end{cases} \quad (17) \quad \begin{cases} x+y=10 \\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2} \end{cases}$$

18
$$\begin{cases} x^2-xy=2x+5 \\ xy-y^2=2y+2 \end{cases} \quad (18) \quad \begin{cases} x^2+y^2-13=0 \\ xy+y^2-x+1=0 \end{cases}$$

注意 問題18ハ加減法ニヨツテ解ケ.

19 $(x^2+y^2-3xy-3)^2+(2x^2+y^2-6)^2=0$ ニ適スル
 x, y ノ實數値ヲ求メヨ.

注意 與ヘラレタ方程式ノ x, y ガ實數デアルコト

カラ
$$\begin{cases} x^2+y^2-3xy-3=0 \\ 2x^2+y^2-6=0 \end{cases}$$

ノ聯立方程式ヲ得ヨ.

(19)
$$\left(x^2+\frac{1}{y^2}-10\right)^2+\left(x+\frac{1}{y}-4\right)^2=0$$
ヲ満足スル x, y ノ實數値ヲ求メヨ.

20 自轉車デ甲地カラ乙地ニ行ク人ガアル。途中デ自轉車ニ故障ガ生ジタノデ、修繕ニ30分間費シタ。ソノ後ハ速度ヲ半分ニシテ最初カラ6時間シテ乙地ニ着イタ。若シ此ノ故障ガ尙24km進ンデ生ジタトスレバ、45時間デ乙ニ着クトイフ。甲乙兩地ノ距離ハ60kmトシテ、自轉車ノ初メノ速度ヲ求メヨ。

21 周ノ長サ68cm、對角線ノ長サハ26cmノ矩形ガアル。二隣邊ノ長サヲ求メヨ。

(20) 或ル人ガ7500圓ヲ甲乙二部ニ分ケ、コレヲ異ナル利率デ1年間貸シ付ケタ。トコロガ双方カラ得タ利息ハ相等シイトイフ。今若シ甲ヲ乙ノ利率デ貸スト利息245圓ヲ得、乙ヲ甲ノ利率デ貸スト利息320圓ヲ得ルトイフ。各々ノ年利率ヲ求メヨ。

(21) ニツノ同心圓ノ半徑ノ差ハ3cmデ其ノ内圓ノ面積ハ外圓ト内圓トノ間ノ部分ノ面積ニ等シイトイフ。然ラバ外圓ノ半徑ハ何cmデア
ルカ。

第三章 幾何學ト代數學

34. 幾何學ト文化

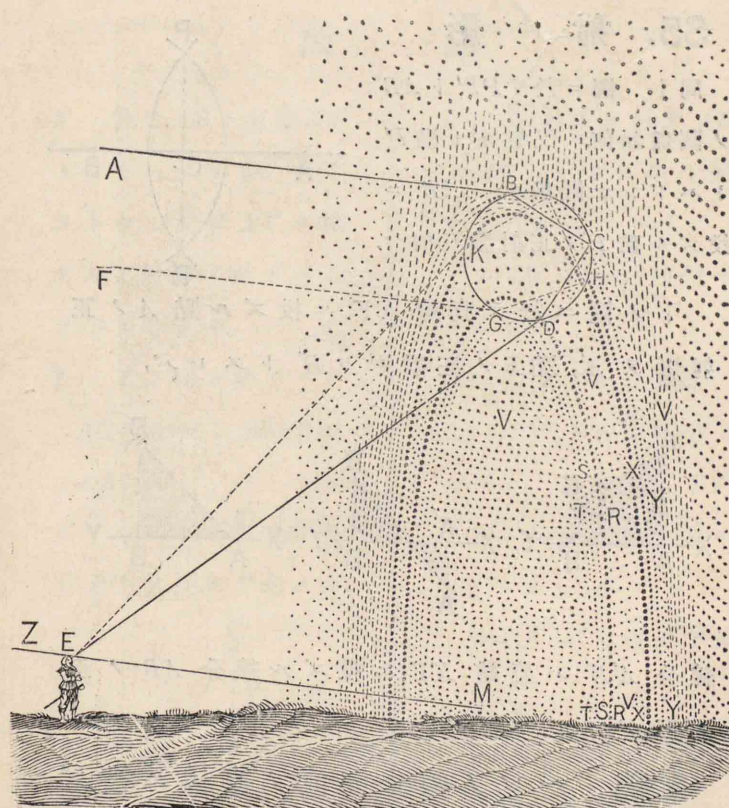
諸子ハ既ニ一通リ幾何學ヲ修メテ幾何學トハドンナモノデア
ルカトイフコトガワカツタ。太古エヂプトデハナイル河ノ氾濫ノタメニ惱マサレ、ソシテ其ノ氾濫ノ後ニ各人所有ノ土地ヲ整理スル必要カラ生レタノガ幾何學デア
ル。ソレデア
ルカラ幾何學トハモト[土地ヲ測量スル]トイフコトデア
ツタ。即チ幾何學モ人間生活ノ必要カラ生レタモノデア
ル。西曆紀元前3000年カラ2400年頃マデノ間ニ建設サレタトイハレル、千古ニ誇ル彼ノ[ピラミッド]ガ整然トシタ正四角錐デ、底面ガ正シク東西南北ヲ指シテアリ、其ノ底面ト側面トガ一定ノ傾ヲナシテキル等ノコトカラ見テ、古代ノエヂプト人ノ間ニハ餘程幾何學ガ進ンデキタト考ヘラレテキル。

此ノ幾何學ガエヂプトカラギリシヤニ傳ハリ、ギリシヤデ種々ノ人々ノ手ニヨツテ、所謂學問ノ形トシテ、立派ナ幾何學トナツタ。



「ピラミッド」ノ建設サレタエヂプトノ古
代カラ、其ノ「ピラミッド」ノ上ヲ横ギツテ
飛行機ノ群レ飛ブ五千年後ノ今日マデ、
幾何學ハ人ノ思考ヲ練リ、人ノ思考ヲ指
導シテ人文開化ノ魁ヲシテ來タ。

ソシテ此ノギリシヤノ幾何學ハ世界各地
ニ擴マツテ、世界ノ文化ニ貢獻シタコトガ頗
ル多イ。我等ノ住ンデキル建築物ハ勿論、測
量學、天文學乃至物理學等ニ到ルマデ、皆幾何
學ガ基礎ニナツテキル。

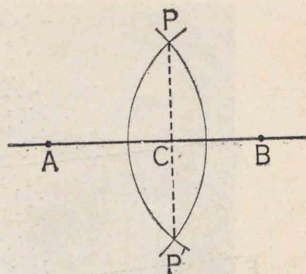


デカルトノ虹ノ説明

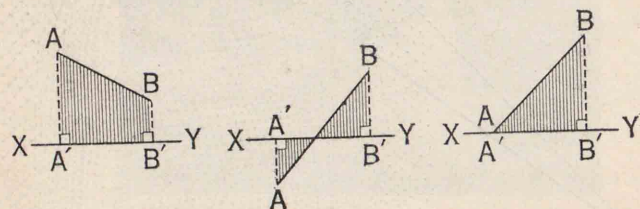
斯様ニ幾何學ハ我々文化ノ建設ノ上ニモ、
又文化ノ理解ノ上ニモ必要ナモノデアルカ
ラ、更ニ幾何學全般ノ復習ト補充トヲ行ハウ。

35. 射影

問1 圖ニ於テ PP' ト AB ノ關係如何. 又點 P ト點 P' トハドンナ關係カ. AB = 投ズル點 P ノ正射影ハ何カ.



下ノ圖ニ於テ直線 XY = 投ズル點 A ノ正射影ヲ A' , 點 B ノ正射影ヲ B' トスレバ,



線分 $A'B'$ ハ直線 XY = 投ズル線分 AB ノ正射影デアアル. 即チ

定義 一ツノ線分ガ他ノ直線ニ投ズル正射影トハ, 線分ノ兩端ガ其ノ直線ニ投ズル正射影ノ間ノ線分ノコトデアアル.

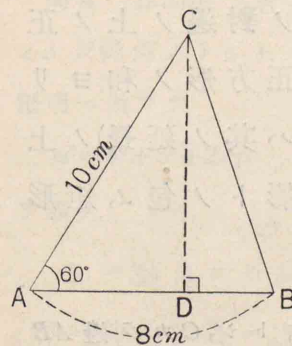
問2 上ノ圖ニ於テ AB ト XY トノナス銳角ヲ θ トスレバ, 何レノ場合デモ

$$A'B' = AB \cos \theta \quad \text{デアアル.}$$

問題

1 線分 AB ト直線 XY トノナス角ガ 60° デアルトキ, AB ガ XY = 投ズル正射影ノ長サハ AB ノ半ニ等シイ.

2 下ノ圖ニ於テ
 $AC = 10 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$
 $\angle A = 60^\circ$
 デアルトキ, CD , BD 及ビ BC ノ長サヲ求メヨ.

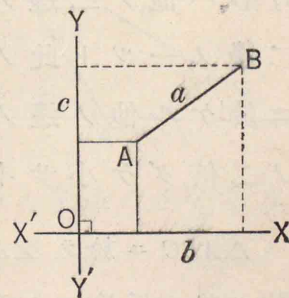


(1) 問題1ニ於テ AB ト XY トノナス角ガ 30° ナラバ如何.

又 45° ナラバ如何ニナルカ.

(2) 直交スル二直線 XX' , YY' ト定長線分 a ガアル. a ガ XX' , YY' = 投ズル正射影ヲ夫々 b, c トスレバ,

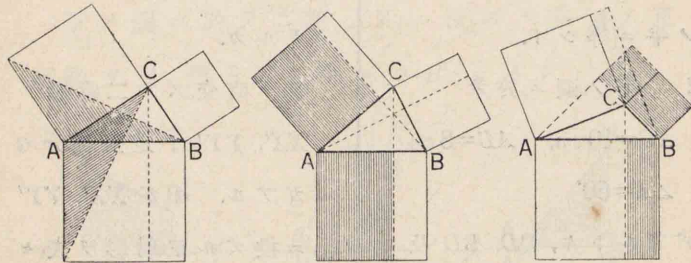
$$b^2 + c^2 \quad \text{ハ一定デアアル.}$$



問3 下ノ圖デハ $\angle C$ ガ直角, 銳角及ビ鈍角ノ各場合ニ於ケル三角形ノ各邊ノ上ノ正方形ヲ示シタモノデアル. 各場合ニ於テ

$$AB^2 \text{ ト } BC^2 + AC^2$$

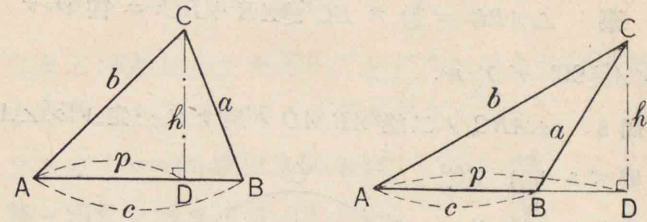
トノ大キサヲ比較セヨ.



定理 三角形ノ銳角ノ對邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ二邊ノ一ツト此ノ邊(又ハ其ノ延長)ノ上ニ於ケル他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ダケ小サイ.

$\triangle ABC$ = 於テ $\angle A$ ヲ銳角トシ, C カラ邊 AB 又ハ其ノ延長ヘノ垂線ヲ CD トスレバ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD$$



證明 $\triangle ABC$ ノ三邊ヲ a, b, c トシ, 各部分ヲ圖ノヤウニ表ハセバ, $\triangle CBD$ = 於テ

$$a^2 = h^2 + (c - p)^2$$

又 $\triangle ACD$ = 於テ $h^2 = b^2 - p^2$

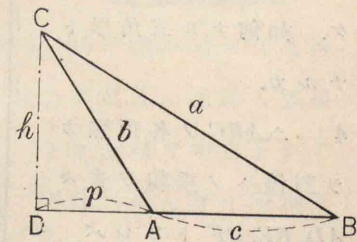
故ニ $a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$

即チ $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD$

問4 $\triangle ABC$ = 於テ $\angle A$ ガ鈍角ノトキ, 上ノ證明ニ倣ツテ

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cp$$

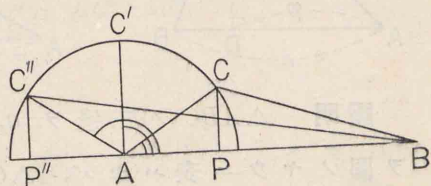
ヲ導ケ.



即チ鈍角三角形ノ鈍角ノ對邊ノ上ノ正方形ハ, 他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ二邊ノ一ツト此ノ邊ノ延長ニ投ズル他ノ邊ノ正射影ノ包ム矩形ノ二倍ダケ大キイ.

系 $\triangle ABC$ = 於テ $BC^2 \cong AB^2 + AC^2$ = 從ツテ $\angle A \cong 90^\circ$ デアル.

問5 $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ長サヲ一定トシ $\angle A$ ヲ變ズルトキ BC^2 ノ變化ト, AC ガ AB 又ハソノ延長上ニ投ズル正射影トノ關係ヲ研究セヨ.



問題

3 3cm, 4cm, 6cm ヲ三邊トスル三角形ヲ描ケ. 如何ナル三角形トナルカ.

4 $\triangle ABC$ ノ各頂點カラ對邊ヘノ垂線ヲ夫々 AD, BE, CF トスレバ $AB \cdot AF = AC \cdot AE$

(3) 5cm, 12cm, 13cm ヲ三邊トスル三角形ハ如何ナル三角形カ.

(4) $\triangle ABC$ ノ三邊ヲ a, b, c トシ $\angle A = 60^\circ$ ナルトキハ

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

又 $\angle A = 120^\circ$ ナラバ

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

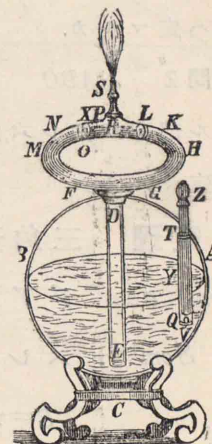
デアルコトヲ證セヨ.

ヘロントトレミー

ヘロンモトレミーモ共ニアレクサンドリヤデ活動シタ古代ギリツヤ末期ノ數學者デアル.

ヘロン Heron (西曆紀元50年頃)

ハ特ニ測量ニ秀デ、次頁ノヤウナ三角形ノ面積ニ關スル公式ヲ作ツタ. 又一元二次方程式ノ公式ヲ作ルナド數學上ニ殘シタ功績ハ大キイガ、彼ハ又物理學ヤ器械學ニモ造詣深ク、圖ノヤウナヘロンの噴水ト稱セラレル噴水寒暖計ヲ發明シタ.



トレミー Ptolemy (西曆紀元150年頃)ハ特ニ天文學及ビ三角法ノ研究ガ深イ. 彼ノ天文學ハ太陽ト惑星

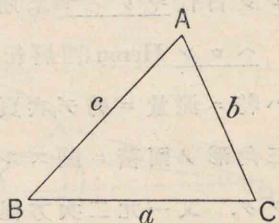


トガ地球ヲ中心トシテ回轉スルト説ク所謂天動説デ、コペルニカス (1473-1543) ガ出テ地動説ヲ唱ヘルマデ1000年餘リノ長イ間人々ニ信ジラレテキタモノデアル.

36. 三角形ノ面積

問1 底邊 5cm, 高サ 4cm ノ三角形ヲ描イテ其ノ面積ヲ求メヨ. 此ノ三角形ノ形ハ定マルカ.

問2* $\triangle ABC$ = 於テ如何ナル部分ヲ知レバ, 此ノ三角形ハ定マルカ.

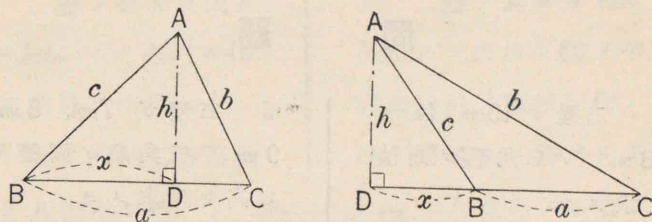


定理 三角形ノ三ツノ邊ガ夫々 a cm, b cm, c cm デアルトキ, 其ノ三角形ノ面積ヲ S cm² トスレバ

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

デアル. 但シ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ トスル.

*二邊ト夾角, 或ハ一邊ト其ノ兩端ノ二角ヲ與ヘテモ亦三角形ハ定マリ, 從ツテ其ノ面積モ求メラレル. 即チ上ノ圖 = 於テ二邊 b, c 及ビ夾角 A ガ定マツテキルト其ノ面積ハ $\frac{1}{2}bc \sin A$ デアリ, 一邊 a ト其ノ兩端ノ二角 B, C ガ定マツテキルト, 他ノ邊 b 及ビ c ハ決定サレルカラ又三角形ノ面積ハ求メラレル. 併シ此等ハ第五學年デ研究スルコトニスル.



證明 $AD = h$ cm, $BD = x$ cm トスレバ

$$S = \frac{1}{2}ah, \quad h^2 = c^2 - x^2$$

然ルニ $\triangle ABC$ = 於テ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ax$

$$\therefore x = \pm \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$\text{故ニ } h^2 = c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{1}{4a^2} [4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2]$$

$$= \frac{1}{4a^2} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$= \frac{4}{a^2} s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\therefore h = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{正ダケヲトル})$$

$$\text{故ニ } S = \frac{1}{2}ah$$

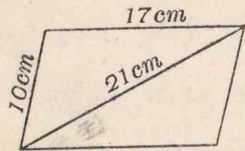
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

問3 上ノ圖ノ $\triangle ABC$ = 於テ B カラノ高サ及ビ C カラノ高サ如何.

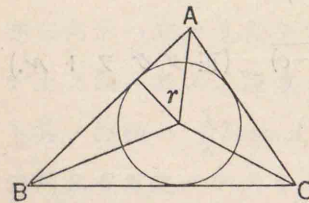
問

5 三邊ガ 15cm , 14cm , 13cm ノ三角形ノ面積ヲ求メヨ.

6 二隣邊ガ 17cm , 10cm , 對角線ガ 21cm ノ平行四邊形ノ面積ヲ求メヨ.



7 三邊ガ 4cm , 5cm , 6cm ノ三角形ノ内接圓ノ半徑ハ何 cm カ. (小數第3位マデ)

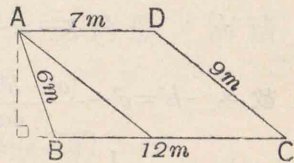


注意 三角形ノ面積ヲ内接圓ノ半徑ヲ用ヒテ出セ.

題

(5) 三邊ガ 7cm , 8cm , 9cm ノ三角形ノ面積及ビ高サヲ求メヨ.

(6) 兩底ガ 7m , 12m デ, 兩脚ガ 6m , 9m ナル梯形状ノ土地ガアル. ソノ面積ハ何程カ.



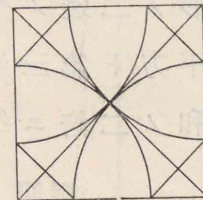
注意 梯形ノ高サヲ考ヘヨ.

(7) 三邊ガ 3cm , 4cm , 5cm ノ三角形ノ内接圓ノ半徑ハ何 cm カ.

注意 此ノ三角形ハ直角三角形デアリコトヲ考ヘヨ.

8 二邊ノ長サガ夫々 $a\text{cm}$, $b\text{cm}$, ソノ夾角ガ 45° ノ三角形ノ面積如何.

9 次ノ圖ハ正方形内ニ正八邊形ヲ作圖スルコトヲ示ス. 果シテ正八邊形デアルカ.



正方形ノ一邊ノ長サヲ $2a\text{cm}$ トシテ正八邊形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ.

10 梯形 $ABCD$ ノ平行デナイ邊 CD ノ中點ヲ E トスレバ $\triangle AEB$ ハ梯形ノ半ニ等シイ.

注意 $\triangle AEB$ ガ平行四邊形又ハ三角形ノ半分ニナルヤウニ補助線ヲ引ケ.

(8) 二邊ノ長サガ $a\text{cm}$, $b\text{cm}$, ソノ夾角ガ 60° ノ平行四邊形ノ面積如何.

(9) 問題9ニ於ケル正八邊形ノ面積ヲ計算セヨ.

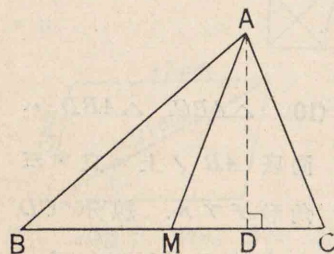
(10) $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ ハ同底 AB ノ上ニ立ツ三角形デアリ. 線分 CD ノ中點ヲ E トスレバ $\triangle ABE$ ハ $\triangle ABC$ ト $\triangle ABD$ トノ和又ハ差ノ半ニ等シイ.

注意 先ヅ C, D ガ AB ノ同側ニアル場合, 次ニ AB ノ反對側ニアル場合ヲ考ヘヨ. 又計算ニヨル證明ヲ試ミヨ.

37. 三角形ノ二邊ノ上ノ正方形

問 $\triangle ABC$ ノ三邊ヲ a, b, c トスレバ, b^2+c^2 ト a^2 トノ大小如何.

定理 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ, 第三邊ノ半分ノ平方ト第三邊ニ引イタ中線ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シイ.



證明 AM ヲ $\triangle ABC$ ノ中線, 垂線 AD ガ AM ト重ナラナイトシ, $\angle AMB$ ヲ鈍角トスル.

$$\triangle ABM \text{ニ於テ} \quad AB^2 = AM^2 + BM^2 + 2BM \cdot MD$$

$$\triangle ACM \text{ニ於テ} \quad AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2CM \cdot MD$$

$$\text{故ニ} \quad AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

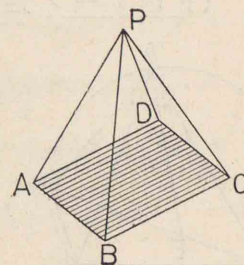
D ト M トガ重ナレバ如何.

此ノ定理ヲ**パップス**ノ定理トイフ. **パップス** Pappus ハ紀元 300 年頃活動シタギリシヤ末期ノ偉大ナ數學者デ, 彼ノ書イタ「數學論集」ハ古代ギリシヤノ數學研究上極メテ貴重ナ文獻デアアル.

問題

11 平行四邊形ノ各邊ノ上ノ正方形ノ和ハ其對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ.

(11) $ABCD$ ヲ矩形トシ P ヲ任意ノ一點トスレバ $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$



12 三邊ガ a, b, c ナル三角形ノ三中線ノ長サヲ a, b, c デ表ハセ.

(12) 三邊ガ 4cm , 6cm , 7cm ナル三角形ノ三中線ノ長サ如何.

13 三邊ガ a, b, c ナル三角形ノ三邊ニ至ル中線ヲ夫々 m_a, m_b, m_c トスレバ

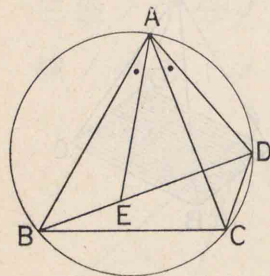
(13) 三角形ノ三中線ガ夫々 l, m, n ナルトキ, 其ノ三角形ノ三邊ノ長サヲ l, m, n デ表ハセ.

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

デアアルコトヲ證セヨ.

38. 面積ニ關スル雜題

例 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ハ對邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シイ。(トレミーノ定理)



ABCD ガ圓ニ内接スル四邊形デアルトキ

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

考へ方 BDヲ點Eデ二ツニ分ケ

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC(BE + ED) = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

且 $AB \cdot CD = AC \cdot BE, \quad BC \cdot AD = AC \cdot ED$

トスレバ

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{ED}{AD}$$

デナケレバナラナイ。

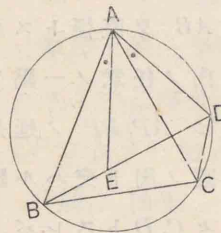
然ルニ $\angle ABE = \angle ACD, \quad \angle ACB = \angle ADE$

デアルカラ AEヲ結ベバ

$\triangle ABE \sim \triangle ACD$ 及ビ $\triangle ABC \sim \triangle AED$

故ニ $\angle BAE = \angle CAD$

證明 $\angle DAC = \angle BAE$ ノヤウニ AEヲ



$\angle BAD$ 内ニ引イテ BDト

ノ交點ヲ Eトセヨ。然

ルトキハ $\angle ABE = \angle ACD,$

$\angle BAE = \angle CAD$ デアルカ

ラ $\triangle ABE \sim \triangle ACD \dots (1)$

又 $\angle BAC = \angle EAD, \quad \angle ACB = \angle ADE$ デアルカ

ラ $\triangle ABC \sim \triangle AED \dots (2)$

故ニ (1) カラ $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD}$

即チ $AB \cdot CD = AC \cdot BE$

(2) カラ $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DE}$

即チ $BC \cdot AD = AC \cdot DE$

故ニ $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BE + AC \cdot DE$

$= AC(BE + DE)$

$= AC \cdot BD$

即チ $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

問題

14 $\triangle ABC$ ノ外接圓ヲ描キ $\angle A$ ノ内角ノ二等分線ガ邊 BC 及ビ外接圓ノ周ト交ハル點ヲ夫夫 D, E トスレバ

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

注意 $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

15 問題 14 ヲ用ヒテ三邊ガ $a\text{ cm}, b\text{ cm}, c\text{ cm}$ ナル三角形ノ二等分線ノ長サヲ求メヨ.

16 圓ニ内接スル四邊形 $ABCD$ ノ邊 BC ト CD トガ相等シイトキハ

$$AB \cdot AD + BC^2 = AC^2$$

注意 對角線 BD ヲ結ンデ AC トノ交點ヲ E トシテ考ヘヨ.

(14) AB ヲ直徑トスル半圓内ノ任意ノ一點ヲ P トシ AP, BP ノ延長ガ半圓ノ周ト交ハル點ヲ夫々 C, D トスレバ

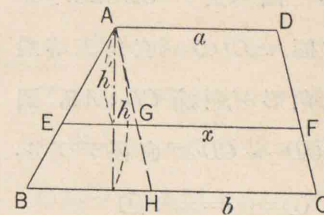
$$AB^2 = AC \cdot AP + BP \cdot BD$$

注意 P カラ AB へ垂線ヲ引ケ.

(15) 三邊ガ $84\text{ cm}, 65\text{ cm}, 55\text{ cm}$ ノ三角形ノ最大角ノ二等分線ノ長サヲ cm ノ小數第 1 位マデ求メヨ.

(16) 三角形 ABC = 於テ $AB = BC = 25\text{ cm}, AC = 30\text{ cm}, AB$ 上ニ $AD = 8\text{ cm}$ ニトルトキ CD ノ長サヲ求メヨ.

17 上底 $a\text{ cm}$, 下底 $b\text{ cm}$ ナル圖ノヤウナ梯形 $ABCD$ ノ面積ヲ底ニ平行ナ直線ニヨツテ二等分スレバ, EF ノ長サハ何 cm カ.



解 梯形 $ABCD$, 梯形 $A E F D$ ノ高サヲ夫々 $h\text{ cm}, h'\text{ cm}$, EF ノ長サヲ $x\text{ cm}$ トスレバ,

$$\frac{1}{2}(\text{梯形 } ABCD) = \text{梯形 } A E F D \quad \text{デアルカラ}$$

$$\frac{1}{2}(a+b)h = (a+x)h' \dots\dots\dots (1)$$

又 $AH \parallel CD$ トスレバ $\triangle AEG \sim \triangle ABH$

デアルカラ $\frac{h'}{h} = \frac{x-a}{b-a} \dots\dots\dots (2)$

(1) ト (2) トカラ $(a+b)(b-a) = 2(a+x)(x-a)$

即チ $b^2 - a^2 = 2x^2 - 2ax$

故ニ $2x^2 = a^2 + b^2$

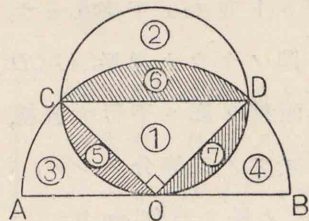
$$x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

正ノ値ヲトツテ $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2}$

答 $\frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2} \text{ cm}$

18 圖ニ於テ $OACDB$ ハ半圓, $\triangle COD$ ハ直角二等邊三角形デ, 斜邊 $CD \parallel AB$, 圓 OCD ハ CD ガ直徑デアル.

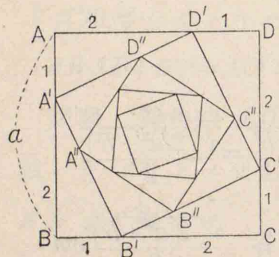
$① = ② = ③ + ④$



19 一邊ノ長サ a cm ナル正方形 $ABCD$ ノ各邊ノ上ニ夫々 A', B', C', D' ヲトリ

$AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{1}{3} AB$

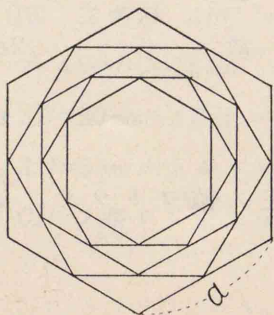
トシテ第二ノ正方形 $A'B'C'D'$ ヲ作ル. 此ノヤウニシテ無限ニ正方形ヲ作り夫等總テノ正方形ノ面積ノ和ヲ求ム.



(18) 問題18ニ於テ

$⑥ = ⑤ + ⑦$

(19) 一邊ノ長サ a cm ナル正六邊形ノ中點ヲ順次ニ結ンデ第二ノ正六邊形ヲ作ル. 第三, 第四, ...ノ正六邊形モ同様ニシテ作ルトキ此等ノ正六邊形ノ面積ノ總和ヲ求メヨ.

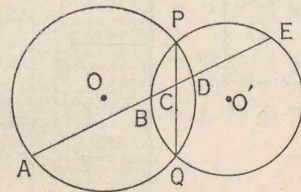


20 圓 O ノ直徑ヲ AB トシ, AB ニ平行ナ任意ノ弦ヲ PQ トスル. AB 上ノ定點 C ト P, Q ヲ結ベバ $CP^2 + CQ^2$ ハ一定デアアルコトヲ證明セヨ.

21 正方形 $ABCD$ ノ對角線 AC ヲ描キ, $\triangle ABC$ ノ内心ヲ O トシ, O カラ AD, CD へ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 E, F トスレバ $AB^2 = 2OE^2$

22 二圓ガ P, Q デ交ハル. 任意ノ割線ヲ引イテ圓周及ビ共通弦ト交ハル點ヲ圖ノヤウニ順次 A, B, C, D, E トスレバ

$AB \cdot CD = BC \cdot DE$



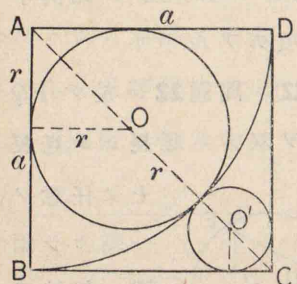
(20) $\triangle ABC$ ノ三邊ガ各々 17 cm, 8 cm, 15 cm デアルトキ, 高サノ中デ最も短イモノ及ビ此ノ三角形ノ外接圓ノ半徑ノ長サヲ計算セヨ.

(21) $\triangle ABC$ ハ A ヲ頂點トスル二等邊三角形デアル. B ヲ中心, BC ヲ半徑トシテ圓ヲ描キ AC トノ交點ヲ D トスレバ BC ハ AC, CD ノ比例中項デアル.

(22) 問題22ニ於テ PQ ヲ双方ニ延長シテ, 延長上ノ任意ノ一點カラ兩圓ヘ切線ヲ引ケバ其ノ切線ハ等長デアル.

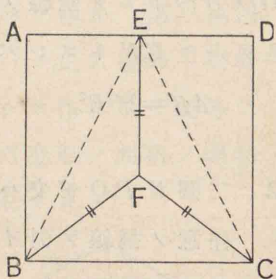
23 中心距離ガ $\sqrt{3}a$, 半径ガ共ニ a ノ等圓ガアル. 此ノ等圓ノ共通部分ノ面積ヲ求メヨ.

24 圖ニ於テ $ABCD$ ハ一邊ガ a cm ノ正方形デ \widehat{BD} ハ A ヲ中心, a cm ヲ半径トシタモノデアアル. 扇形 ABD 及ビ圖形 CBD ニ内接スル圓ヲ夫々 O, O' トスルトキ, 圓 $O, 圓 O'$ ノ半径ヲ求メヨ.



(23) 三角形ノ三ツノ邊ガ夫々 $20cm, 13cm, 21cm$ ノ内接圓ノ面積ヲ求メヨ.

(24) 圖ニ於テ $ABCD$ ハ一邊ガ a cm ノ正方形デ, E ハ AD ノ中點, $EF \perp AD$ 且 $EF=BF=CF$ デアルトキ $\triangle BFC$ ノ内接圓ノ半径ヲ求メヨ.



注意 BF ハ $\triangle BCE$ ノ外接圓ノ半径デアアルコトヲ考ヘヨ.

39. 代數式ノ作圖

問1 a, b, c ヲ線分トスレバ ($a > b$ トスル.)

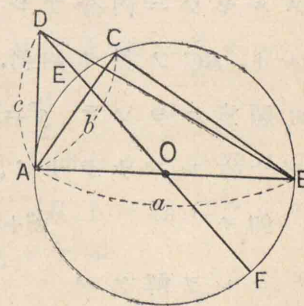
$$x = a + b, \quad x = a - b$$

$$x = na, \quad x = \frac{a}{n}$$

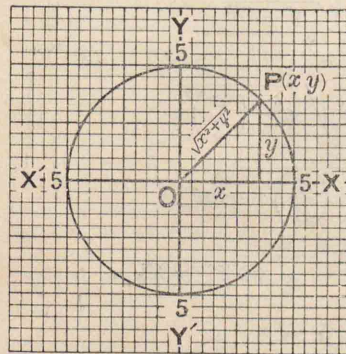
$$x = \frac{bc}{a}, \quad x = \sqrt{ab}$$

等ヲ夫々満足スル x ノ作圖法ヲ述ベヨ.

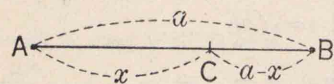
問2 圓 O ノ直径 AB ノ一端カラ弦 AC , 切線 AD ヲ引キ, D カラ中心ヲ通ル割線 DEF ヲ引キ圓ト E, F デ交ハラストキ, AB, AC, AD ヲ夫々 a, b, c トシテ, 線分 CB, DB, DE ヲ a, b, c デ表ハセ.



問3 $x^2 + y^2 = 25$ ノグラフヲ描ケ. 此ノグラフガ原点ヲ中心トスル圓トナル理由ヲ述ベヨ.



作圖題 定線分ヲ内分シテ其ノ一ツノ分ノ上ノ正方形ガ残りノ分ト全線トノ包ム矩形ニ等シクナルヤウニセヨ。



解析 定線分 AB ノ

長サヲ a cm トシ、點

C = 於テ條件ニ適

スルヤウニ内分サレタトシテ、 $AC = x$ cm トスルト、 BC ノ長サ如何。

題意ニヨツテ $x^2 = a(a-x)$

デナケレバナラナイ。

即チ $x^2 + ax - a^2 = 0$

コレヲ解ケバ

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$$

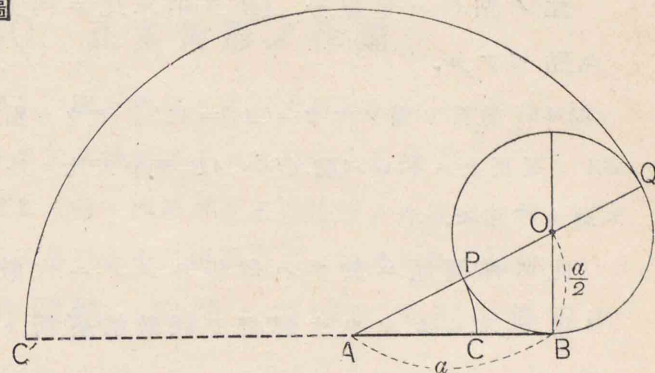
負ヲ捨テテ $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

トコロガ $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ ハ作圖シ得ルカラ

線分 x 從ツテ點 C ハ求メラレル。

作圖



B = 於テ AB = 垂線ヲ立テ $BO = \frac{a}{2}$ ノヤウニ O ヲトル。 O ヲ中心、 $\frac{a}{2}$ ヲ半徑トスル圓ヲ描キ、 AO ヲ結ベ。 AO ト圓 O トノ交點ヲ P トシ、 $AP = AC$ ノヤウニ AB 上ニ點 C ヲトレバ、點 C ハ求メル内分點デアル。

證明 $AO = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, $PO = \frac{a}{2}$

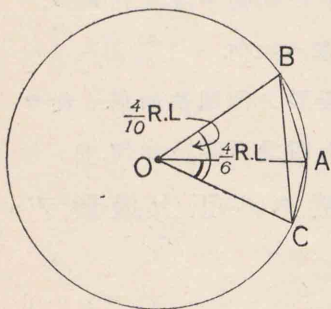
故ニ $AC = AP = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$
 $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$

$$BC = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$$

$$AC^2 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}a^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2$$

$$= AB \cdot BC$$

作圖題 定圓ニ内接スル正十五邊形ヲ作レ.



解析 ACヲ正十五邊形ノ一邊トスレバ
 $\angle AOC = \frac{4}{15} R.L.$
 $= \frac{4}{6} R.L. - \frac{4}{10} R.L.$
 故ニ $\angle AOC$ ハ正六邊形ト正十邊形トノ各邊ガ

中心ニ對スル角ノ差デアル.

作圖,證明 生徒各自之ヲ試ミヨ.

問4 コレマデニ學ンダコトデ作圖シ得ル圓ノ内接正多角形ハ何々カ.

或ルーツノ内接正多角形ヲ作圖スルコトが出来レバ角ヲ二等分スルコトニヨツテ邊數ガ二倍ノ内接正多角形ヲ描クコトが出来ル. 故ニ今マデニ學ンデ來タ所ニヨツテ作圖シ得ル正多角形ヲ擧ゲルト 3×2^n , 4×2^n , 5×2^n , 15×2^n ノ邊數ヲ有スル正多角形トナル. 但シ n ハ1カラ始マル正ノ整數又ハ0デア

問題

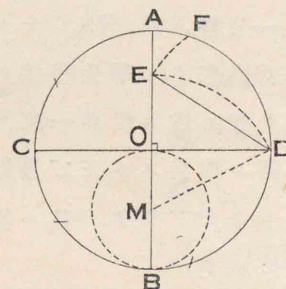
27 半徑 r ノ圓ニ内接スル正十邊形ノ一邊ハ

$$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$$

デアルコトヲ示セ.

圖ニ於テハ AOB ト COD トハ互ニ垂直ナ直徑デ M ハ OB ノ中點又 ME ハ MD ニ等シイ.

28 OE ハ圓 O ニ内接スル正十邊形ノ一邊ニ等シイコトヲ證明セヨ.



(28) DE ハ圓 O ニ内接スル正五邊形ノ一邊ニ等シイコトヲ證明セヨ.

注意 $OE = ME + MO$
 $= MD + MO$

又上ノ圖ニヨツテ内接正五邊形ヲ描ケ.

故ニ直角三角形 MOD ニツイテ考ヘヨ.

29 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ヲ導ケ.

注意 問題27参照.

(29) 問題29ヲ用ヒテ $\cos 18^\circ$ ハ約0.951デア

注意 $\sin \theta + \cos^2 \theta = 1$



ガウス (Karl Friedrich Gauss)

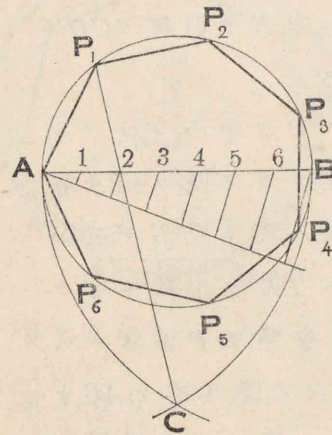
ガウスハ西曆 1777年 4月 30日獨逸ノブラウンシュワイヒニ生マレ、1855年 2月 23日ゲッチンゲンデ死ンダ。彼ノ父ハ貧シイ煉瓦職工デアツタメ彼ハ大學教育ヲ受ケルコトナド

ハ及ビモツカナカツタ。併シ幼時カラ計算ニ明敏デアツタメ遂ニ一公爵ニ認メラレテゲッチンゲン大學ニ入學スルコトガ出來タ。學生時代カラ群ヲ抜イテ成績優秀デアツタ彼ハ遂ニ世界一流ノ大數學者トナツタノデアル。圓ニ内接スル正17邊形ヲ描イタノモ年僅カニ19才ノトキデアツタ。彼ハ算術特ニ整數ノ性質ニツイテ研究深ク、

「數學ハ科學ノ女王デアリ整數論ハ數學ノ女王デアアル」トイツタ程デアル。彼ハゲッチンゲン大學ノ數學ノ教授トナツタ後ゲッチンゲン天文臺長ノ要職ニツイタガ其ノ時年僅カニ30才デアツタトイフ。彼ハ非常ナ天才ニハ相違ナカツタガ又極メテ勤勉家デ科學會ノタメニベルリンヘ行キ、又ゲッチンゲントハノーヴァーノ間ニ鐵道ガ開通シタトキハノーヴァーマデ行ツタ以外ニハ決シテゲッチンゲンカラ外ニ出ナカツタトイフ。

41. 正多角形ノ近似的作圖

例一 與圓ニ内接スル正七邊形ノ近似作圖ヲ求メヨ。



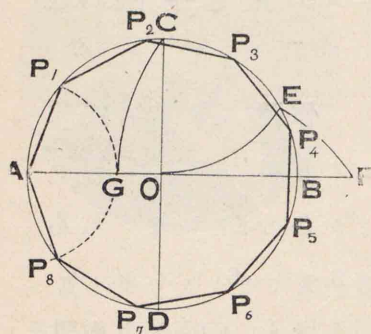
作圖 與圓ノ任意ノ直徑 AB ヲ7等分シ各分點ヲ夫々 1, 2, 3, ……6 トスル。

次ニ A, B ヲ中心、共ニ AB ヲ半徑トシテ圓ヲ描キソノ交點ヲ C トスル。 C ト2トヲ結ンデコレヲ延長

シテ圓周トノ交點ヲ P_1 トスルト弦 AP_1 ハ求メル七邊形ノ一邊トナルモノデアアル。

注意 此ノ方法ニヨルトキハ如何ナル邊數ノ正多角形デモ近似的ニ作圖スルコトガデキル。例ヘバ近似的正九邊形ヲ描クニハ直徑ヲ9等分シテ其ノ第二分點ト C トヲ結ンデ、ソノ延長ガ圓周ト交ハル點ヲ正多角形ノ第二頂點ト考ヘレバヨイ。勿論第一頂點ハ A ノコトデアアル。

例二 圓ニ内接スル正九邊形ヲ近似
的ニ描ケ.



作圖 與圓ノ任意
ノ直徑ヲ AB トシ, AB
ニ垂直ナ直徑ヲ CD ト
スル.

C ヲ中心, CO ヲ半
徑トシテ圓ヲ描キ, 與
圓ノ周ト點 E デ交ハ

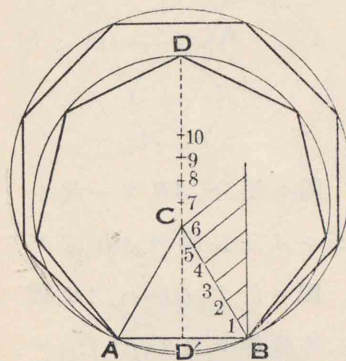
ラセル. 次ニ點 D ヲ中心 DE ヲ半徑トシテ
圓ヲ描キ, AB ノ延長トノ交點ヲ F トスル.

F ヲ中心 FC ヲ半徑トシテ圓ヲ描キ AB ト
ノ交點ヲ G トスルト AG ハ求メル九邊形ノ
一邊デアル.

注意 $AG=AF-FG=AF-FC$
然ルニ $CE=r$ (與圓ノ半徑)
故ニ $DE=DF=FC=\sqrt{4r^2-r^2}=\sqrt{3}r$
從ツテ $OF=\sqrt{3r^2-r^2}=\sqrt{2}r$
故ニ $AF=(\sqrt{2}+1)r \therefore AG=(\sqrt{2}+1-\sqrt{3})r$
コレト眞ノ正九邊形ノ一邊

$$2r \sin \frac{360^\circ}{9 \times 2} = 2r \sin 20^\circ = 0.6840r \text{ トヲ比較セヨ.}$$

例三 與線分 AB ヲ一邊トスル正多
角形ヲ近似的ニ描ケ.



作圖 AB ヲ一邊
トスル正三角形 ABC
ヲ畫キ BC ヲ六等分
セヨ.

C カラ AB ヘ垂線
 DD' (AB ノ垂直二等分
線)ヲ下シ, $D'D$ ヲ C カ

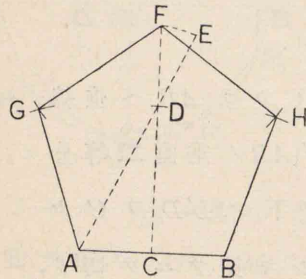
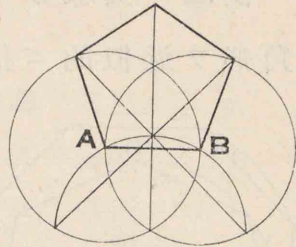
ラ D ノ方向ニ BC ノ $\frac{1}{6}$ ニ等シキ長サニテ切り,
其ノ各分點ヲ圖ノヤウニ $7, 8, 9, \dots$ トスル.

今正七邊形ヲ描クニハ 7 ヲ中心 $A7$ ヲ半
徑トシテ圓ヲ描キノ圓周ヲ AB デ切ツテ
行ケバヨイ. 又正八邊形ヲ描クニハ 8 ヲ中
心, $A8$ ヲ半徑トシテ圓ヲ描キノ圓周ヲ AB
ノ長サデ切レバヨイ.

斯様ニシテ一般ニ與ヘラレタ線ヲ一邊ト
スル正 n 邊形ノ近似的作圖ヲ行フコトガ出
來ルノデアル.

問題

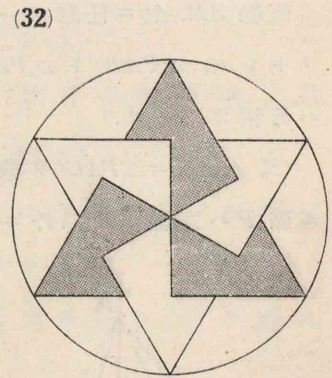
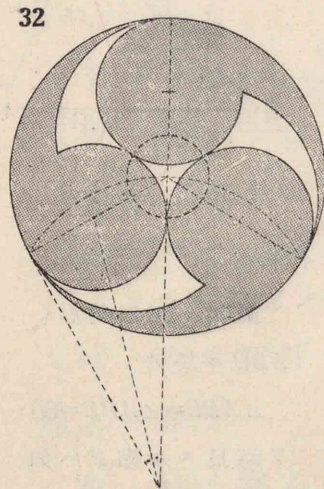
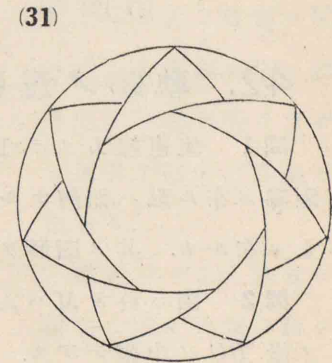
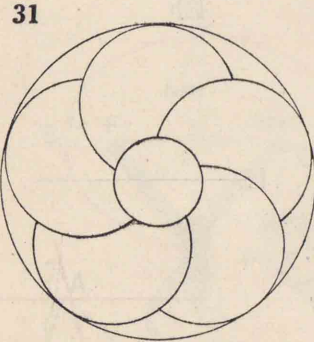
30 右ノ圖ハ定線分 AB ヲ一
邊トスル正五邊形ノ近似
的作圖デアル。圖ヲ見テソ
ノ方法ヲ述ベヨ。



(30) 圖ハ線分 AB ヲ一
邊トスル正シイ正五邊形ノ作圖デ
アル。圖ニ於テ CD ハ AB ノ
垂直二等分線デ且 $CD=AB$ デ
アル。又 $DE=AC$, $AE=AF$ デ
アル。 $AB=acm$ トシテ AF ノ長サヲ計算セヨ。

上ノ問題30ハ半徑ヲ變ヘナクテ作圖シ得ラレルノ
デ、ソノ近似作圖デハアルガ極メテ面白イモノデア
ル。斯様ニコンパスノーツノ開キデ作圖スルコトハパ
プス (Pappus) (紀元300年頃) ナドモ研究シタヤウデア
ルガ、コレガ有名ニナツタノハ伊太利ノ畫家ニシテ科學
者レオナルド・ダ・ヴィンチ Leonard da Vinci (1452—1519) 及
ビ獨逸ノ有名ナ畫家デュレル Dürer (1471—1528) 等ノ研
究カラデ二人トモ近似的正多角形ノ作圖及ビ透視圖
投影畫等ノ研究ガ深い。

次ノヤウナ圖ヲ描ケ。 31—(32)



33 分度器ヲ以テ圓ニ
内接スル正九邊形ヲ描
ケ。

(33) 分度器ヲ以テ圓ニ
内接スル正十邊形ヲ描
ケ。

第四章 軌 跡

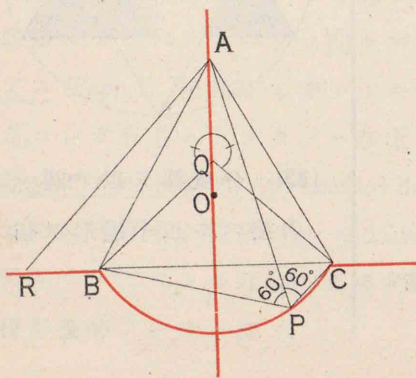
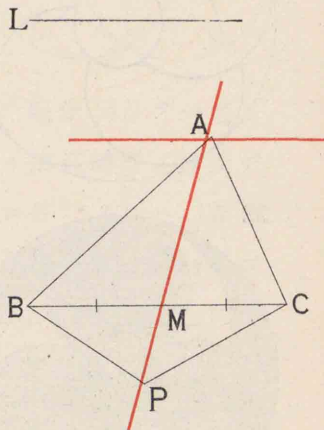
42. 軌跡ノ意義

問1 定直線 L カラ 1cm ノ距離ニ在ル點ハ、如何ナル圖形上ニ在ルカ。其ノ圖形ヲ描ケ。

問2 圖ニ於テ M ハ $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點デアル。

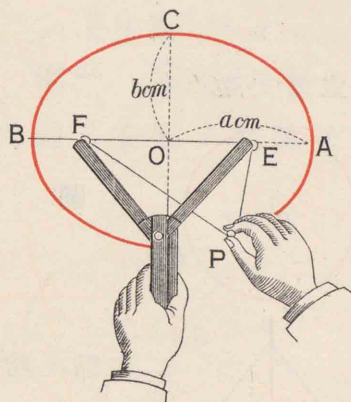
直線 AM 上ニ任意ノ一點 P フトレバ、 $\triangle PAB$ ト $\triangle PAC$ トハ等積カドウカ。

又 $\triangle PAB = \triangle PAC$ フ満足スル點 P ハ直線 AM 以外ニハナイカ。



問3 正三角形 ABC = 於テ $\angle APB = \angle APC = 60^\circ$ フ満足スル點 P ハ如何ナル圖形上ニ在ルカ。又 $\angle APB = \angle APC$ ナラバ如何。

問4 次ノ圖ハ橢圓製圖器デアル。即チ開閉自在



ノ二本ノ股ヲ任意ニ開イテ之ヲ固定シ、之ニ絲ヲ懸ケテ、絲ヲ張リナガラ鉛筆ヲ描ケバ橢圓ガ出來ル。

橢圓ハドンナ條件ニ從ツテ動イタ點ノ跡デアルカ。

諸子ハ既ニ習ツタヤウニ、或ル條件ニ從ツテ動イタ點ノ跡ヲ其ノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。

而シテ或ル圖形ガ與ヘラレタ點ノ軌跡デアルコトヲ斷定スルニハ

(a) 或ル條件ニ適スル點ハ悉ク或ル線上ニ在ル。

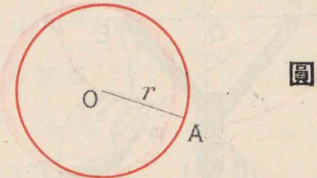
(b) 此ノ線上ノ點ハ悉ク其ノ條件ニ適スル。

トイフ本逆ノ二定理ヲ證明シナケレバナラナイノデアル。(第三學年用38頁參照)

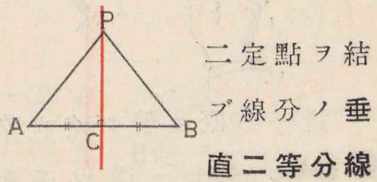
43. 基本ノ軌跡及軌跡ノ證明法

次ニ軌跡中ノ重要ナルモノヲ擧ゲヨウ。
各ニツイテ本逆ノ二定理ヲ述ベヨ。

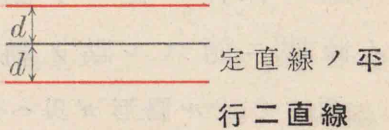
- 1 一定點カラ
等距離ニ在ル
點ノ軌跡。



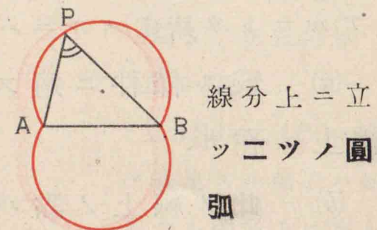
- 2 二定點カラ
等距離ニ在ル
點ノ軌跡。



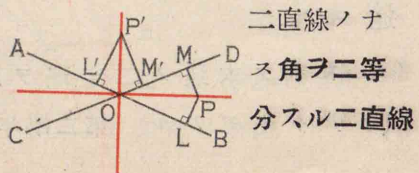
- 3 定直線カラ
一定距離ニ在
ル點ノ軌跡。



- 4 一與線分ニ
一定角ヲ張ル
點ノ軌跡。

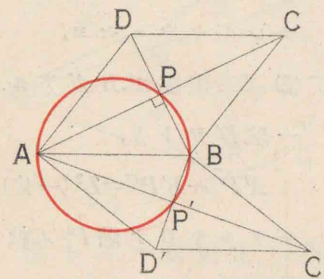


- 5 相交ル二直
線カラ等距離
ニ在ル點ノ軌跡。



注意 本書デ取扱フ軌跡ハ直線及ビ圓周又ハソレ
ラノ一部分デアル。

例一 定線分ヲ一邊トスル菱形ノ對
角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。



證明1 ABヲ定
線分トシ, ABヲ一
邊トスル菱形ノ對
角線ノ交點ヲPト
スレバ,
 $\angle APB = R.L.$
故ニ點PハABヲ直

徑トスル圓周上ニ在ル。

證明2 ABヲ直徑トスル圓周上ノ任意ノ
一點ヲP'トシ, AP', BP'ヲ結ンデ各、コレヲ延
長シテ, AP' = C'P', BP' = D'P'ナルC', D'ヲトレ
バ, ABC'D'ハ平行四邊形デアル。……何故カ。
 $\angle AP'B = R.L.$ デアルカラ $\square ABC'D'$ ハ菱形
トナル。……何故カ。

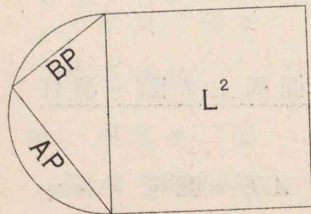
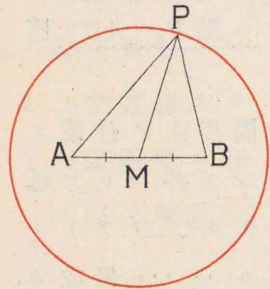
故ニABヲ直徑トスル圓周上ノ點ハ與條
件ニ適スル。

故ニ求メル點ノ軌跡ハABヲ直徑トスル
圓周デアル。

問 題

1 與圓内ノ與點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2 二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ一定 L^2 ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

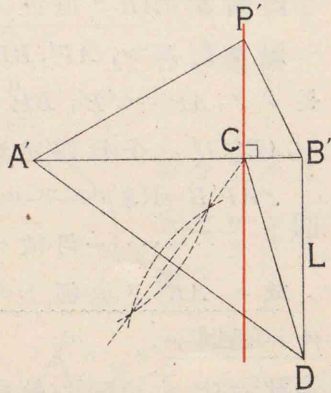


(1) 與圓 O ノ周上ノ與點 A カラ弦ヲ引イテ定弦 $BC = \text{ヨツテ二等分}$ サレルヤウニセヨ。

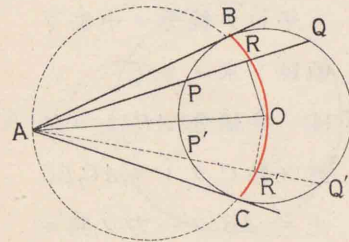
(2) 二定點 A', B' ガアル。一點 P' フトリ、

$$A'P'^2 - B'P'^2 = L^2 \text{ (一定)}$$

デアルヤウナ點 P' ノ軌跡ヲ求メヨ。



例二 定點外ノ一定點カラ此ノ圓ニ引イタ割線ニヨツテ生ズル弦ノ中點ノ軌跡如何。



證明1 點 A カラ引イタ割線ニヨツテ出來ル弦ノ中點ヲ R トシ、 OR フ結ベバ

$$\angle ARO = R.L$$

故ニ R ハ AO フ直

徑トスル圓周上ニ在ル。

限界 A カラ引イタ割線ニヨツテ出來ル弦ノ中點ハ與圓外ニハナイ。即チ求メル點 R ハ AO フ直徑トスル圓ノ弧 BC 上ニ在ル。

證明2 AO フ直徑トスル圓ノ弧 BC 上ノ任意ノ一點 R' フトレバ、 R' ハ與條件ヲ満足スル.....何故カ。

故ニ定點 A カラ定圓 O ニ引イタ割線ニヨツテ生ズル弦ノ中點ノ軌跡ハ AO フ直徑トスル圓弧ノ中、定圓 O 内ニ在ル部分デアル。

例二ノヤウニ軌跡ガ直線ノ一部分又ハ圓周ノ一部分ノトキハ其ノ限界ヲ明ラカニシナケレバナラナイ。

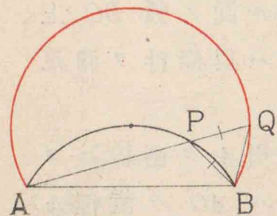
問 題

3 定直線 = 平行ナ定
圓ノ弦ノ中點ノ軌跡ヲ
求メヨ.

4 與ヘラレタ弓形ノ
弧 APB 上ノ任意ノ點
ヲ P トシ, 弦 AP ヲ延長
シテ

$$PQ = PB$$

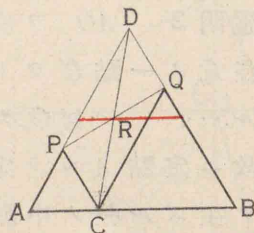
ナルヤウニ Q ヲトルト
キ點 Q ノ軌跡如何.



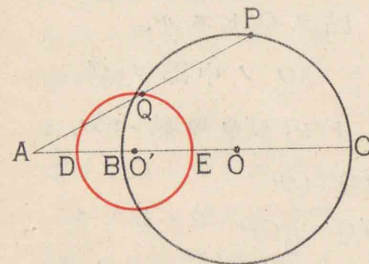
(限界 = 注意セヨ)

(3) $\triangle ABC$ 内ニ於テ
 AB, AC = 夾マレ, 邊 BC
= 平行ナ線分ノ中點ノ
軌跡ヲ求メヨ.

(4) 定線分 AB 上ニ任
意ノ點 C ヲトリ, AC, BC
上ニ AB ノ一方ノ側ニ
正三角形 ACP, BCQ ヲ
作ルトキ線分 PQ ノ中
點 R ノ軌跡如何.

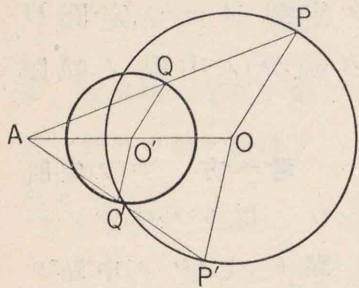


例三 定圓 O 外ノ定點 A カラ, 定圓 O
ノ周上ノ點ニ引イタ線分ノ中點ノ軌跡
ヲ求メヨ.



考ヘ方 P ヲ定圓
 O ノ周上ノ任意ノ一
點トシ, AP ノ中點ヲ
 Q トスレバ, Q ハ與ヘ
ラレタ條件ニ適スル
一般點デアアル. 求メ

ル點ノ軌跡ハ此ノ一般點ノ連續的變化ニヨ
ツテ生ズル圖形デアアルカラ, 軌跡ガ何デアアル
カトイフコトヲ知ラウトスルニハ, 點 P ヲ圓
 O ノ周上ニ沿ウテ動カスコトニヨツテ出來
ル點 Q ノ位置ノ變化ヲ見レバヨイ. トコロ
ガ A ヲ通ル中心線ガ圓ト交ハル點即チ B ト
 C トニ點 P ガ來タトキノ Q ノ位置ヲ夫々 D ,
 E トスレバ, D 及ビ E ハ條件ニ適スル特殊點
デアアル. 點 P ガ B カラ出テ P, C ヲ經テ再ビ
 B ニ歸ルトキ, 點 Q モ亦 Q, E ヲ經テ再ビモト
ノ D ニ歸リ, 且 $DE = \frac{1}{2}BC$ デアルカラ求メル軌
跡ハ DE ヲ直徑トスル圓, 即チ AO ノ中點ヲ
中心, 與圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓デア
アルコトガ考ヘラレル.



證明 1 定圓 O ノ
周上ノ任意ノ一點
ヲ P トシ AP ノ中
點ヲ Q トスル。
 AO ノ中點ヲ O'
トシ、 $O'Q$ ヲ結ベバ、

$$\triangle AOP \text{ニ於テ} \quad O'Q \parallel OP$$

$$O'Q = \frac{1}{2}OP$$

故ニ點 Q ハ O' ノ中心、與圓ノ半徑ノ半分ヲ
半徑トスル圓周上ニ在ル。

證明 2 圓 O' ノ周上ニ任意ノ一點 Q' ヲト
リ、 AQ' ヲ結ビ、コレヲ延長シテ $AQ' = Q'P'$ ノ
ヤウニ P' ヲトツテ OP' ヲ結ブト、 $\triangle AOP'$ ニ於
テ

$$O'Q' \parallel OP', \quad O'Q' = \frac{1}{2}OP'$$

トコロガ $O'Q' = OQ = \frac{1}{2}OP$

デアルカラ $OP' = OP$

故ニ P' ハ與圓 O ノ周上ニ在ル。即チ圓 O'
上ノ點ハ與ヘラレタ條件ニ適スル。

故ニ求メル點ノ軌跡ハ AO ノ中點ヲ中心、
與圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓デアル。

問 題

5 定點 A カラ定直線
 L ニ引イタ線分ヲ
 $m:n$ = 内分スル點ノ軌
跡如何。

6 圓 O ニ於テ、 BC ハ
定弦デ、 A ハ定點デア
ル。
 A ヲ通ル弦ヲ引イテ、
 BC ニヨツテ $m:n$ ノ
比ニ内分センメヨ。

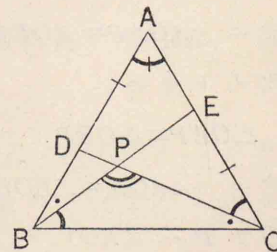
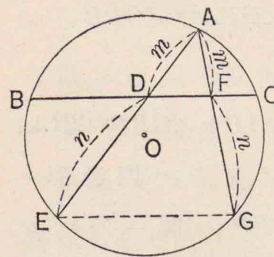
(5) 問題 5 ニ於テ外分
ノ場分ヲ考ヘヨ。

但シ $m > n$ トスル。
若シ $m < n$ ナラバ如何。

(6) 正三角形 ABC ニ
於テ邊 AB, AC 上ニ夫
夫點 D, E ヲトリ、

$$AD = CE$$

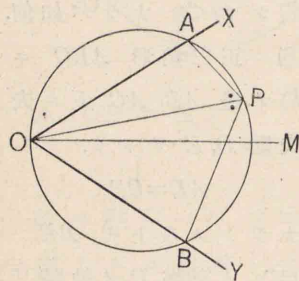
ナラシメルトキ、 $BE,$
 CD ノ交點 P ノ軌跡ヲ
求メヨ。



注意 $\angle CBE = \angle ACD$
 $\angle ABE = \angle BCD$

デアルコトカラ $\angle BPC$
ガ一定デアルコトヲ考
ヘヨ。

例四 一定ノ鋭角 $\angle XOY$ ノ二邊 OX, OY 上ニ夫々定點 A, B ガアツテ且 $OA=OB$ デアル。此ノ角ノ内部ニ在ツテ $\angle OPA=\angle OPB$ デアルヤウナ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。



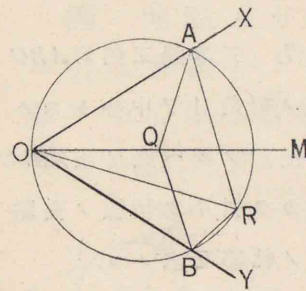
證明1 點 P ノ條件ニ適スル點トシテ OP, AP, BP ヲ結ベバ $\triangle OAP$ ト $\triangle OBP$ トニ於テ $OA=OB, OP$ ハ共通 $\angle OPA=\angle OPB$

故ニ $\angle OAP=\angle OBP$
 此ノトキハ $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$
 故ニ $\angle AOP=\angle BOP$
 即チ P ハ $\angle XOY$ ノ二等分線 OM 上ニ在ル。

又ハ $\angle OAP + \angle OBP = 2R.$
 此ノトキハ四邊形 $AOBP$ ハ圓ニ内接シ、
 P ハ $\triangle AOB$ ノ外接圓周上デ $\angle XOY$ 内ノ弧上ニ在ル。

故ニ點 P ハ $\angle XOY$ ノ二等分線 OM 上又ハ、 $\triangle AOB$ ノ外接圓周上デ $\angle XOY$ 内ノ弧上ニ在ル。

證明2



$\angle XOY$ ノ二等分線 OM 上ノ任意ノ一點ヲ Q トシ、 AQ, BQ ヲ結ベバ、
 $\triangle OAQ \equiv \triangle OBQ$
 ……何故カ。
 故ニ $\angle OQA = \angle OQB$

又 $\angle XOY$ 内ノ弧 AB 上ニ任意ノ一點 R ヲトリ、 RA, RB, RO ヲ結ベ、

$\angle ORA = \angle ORB$ ……何故カ。

故ニ直線 OM 及ビ $\angle XOY$ 内ノ弧 AB ハ與ヘラレタ條件ニ適スル。

故ニ求メル點ノ軌跡ハ、 $\angle XOY$ ノ二等分線 OM 及ビ $\triangle AOB$ ノ外接圓ノ $\angle XOY$ 内ニ在ル弧 AB トカラナル圖形デアル。

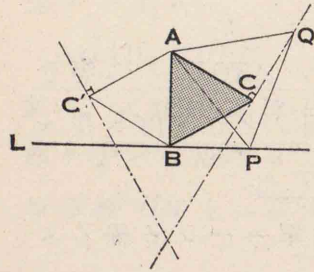
斯様ニ軌跡ノ中ニハ唯單ニ一ツノ線ノミデナク、二ツ以上ノ線カラナルコトガアツテ、其ノ證明方法ハ從ツテ複雑デアル。

問 題

7 底邊ノ位置及ビ大サト頂角ノ大サトガ一定ナル三角形ノ重心ノ軌跡ヲ求メヨ.

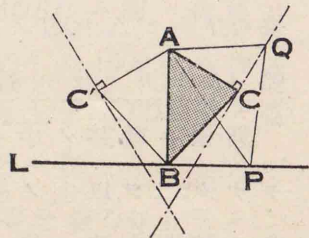
又コノ外ニ頂點ヨリノ中線ノ長サヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

8 定直線 L 外ノ定點 A カラ定直線 L ニ到ル線分ノ上ニ立ツ正三角形ノ頂點ノ軌跡如何.



(7) 二等邊三角形 ABC ノ頂角 A ヲ中心トスル任意ノ圓ヘ底ノ兩端 B, C カラ引イタ切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

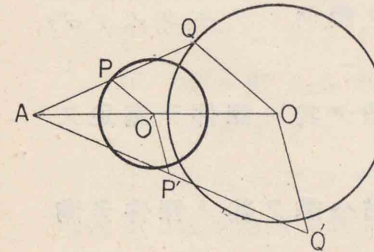
(8) 定直線 L 外ノ定點 A カラ定直線 L ニ到ル線分ヲ一邊トシテ與三角形ニ相似ナ三角形ヲ作ルトキソノ頂點ノ軌跡如何.



注意 解ノ數ヲ考ヘヨ.

44. 軌跡ノ他ノ證明法

例 定點 A カラ定圓 O ノ圓周上ノ點ニ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ハ AO ノ中點ヲ中心トシ定圓ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓デアル. (193頁参照)



證明1 軌跡トナルベキ圓 O' ノ周上ニ任意ノ點 P ヲトリ AP ヲ結ビ之ヲ延長シテ $PQ=AP$ トセヨ.

$QO, O'P$ ヲ結ベバ $\triangle AOQ$ ニ於テ O', P ハ AO, AQ ノ中點デアルカラ $OQ=2O'P$

故ニ OQ ハ定圓 O ノ半徑ニ等シイ.

從ツテ Q ハ圓 O ノ圓周上ニ在ル. 故ニ圓 O' ノ周上ノ點ハ悉ク與條件ヲ満足スル.

證明2 次ニ圓 O' ノ圓周上ニナイ任意ノ點 P' ヲトリ, AP' ヲ結ビ之ヲ延長シテ $AP'=P'Q'$ ノヤウニ Q' ヲトル. $OQ'=2O'P' \neq OQ$

從ツテ點 Q' ハ圓 O ノ圓周上ニハナイ.

故ニ圓 O' ノ周外ノ點ハ與條件ヲ満足シナイ. 即チ求メル點ノ軌跡ハ AO ノ中點 O' ヲ中心トシ, 圓 O ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓ノ周デアル.

今マデノ軌跡ノ證明法トシテ

(a) 或ル條件ニ適スル點ハ悉ク或ル線上ニ在ル.

(b) 此ノ線上ノ點ハ悉ク其ノ條件ヲ満足スル.

トイフ本逆ノ二定理ヲ證明シテキタノデア
ルガ、本例ニ於テハ

(b) 或ル線上ノ點ハ悉ク其ノ條件ヲ満足ス
ル.

(c) 此ノ線上ニナイ點ハ悉ク其ノ條件ヲ満
足シナイ.

トイフ二定理ヲ證明シタノデア。軌跡ノ
證明ニ於テ其ノ軌跡ガ示サレテキルトキハ、
此ノ例ノヤウニ(b)ト(c)トヲ證明スル方法ヲ
用ヒルコトモアル。

前頁ノ例ニ倣ツテ次ノ軌跡ヲ證明セヨ。

9 ABヲ直徑トスル
定半圓上ヲ半徑ニ等シ
イ長サノ弦PQガ動ク
トキAPBQノ延長ノ交
點Rノ軌跡ハABノ上
ニ立チ60°ノ角ヲ含ム圓
周ノ一部分デア。ル。

(9) 直角ニ交ハル二直
線ニ兩端ヲ有シテ動ク
定長線分ノ中點ノ軌跡
ハ二直線ノ交點ヲ中心
トシ定長線分ノ半ヲ半
徑トスル圓周デア。ル。

注意 此ノ例ノヤウナ證明法ニ於テハ限界ハ最初ニ明示セヨ。

前頁ニ於テ(b)ト(c)トノヤウナ形ノ定理ヲ互
ニ裏トイヒ、(a)ト(c)トノヤウナ形ノ定理ヲ互
ニ對偶トイフ。

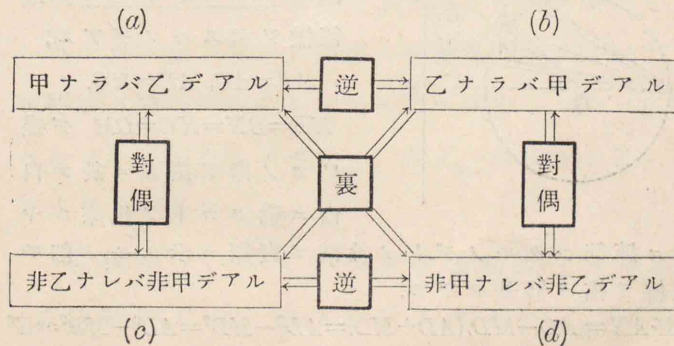
問1 次ノ事柄ノ逆、裏及ビ對偶ヲイヘ。

- (1) 平行四邊形ノ對角ハ相等シイ。
- (2) 予ヲ天才トイフ人ハ予ヲ知ラナイ。
- (3) 或ル數ガ6ノ倍數ナラバ、ソノ數ハ3
ノ倍數デア。ル。
- (4) 平家ニアラザレバ人ニアラズ。

問2 或ル定理ノ逆ト裏及ビ對偶ト裏トノ關係如
何。

或ル定理ガ眞ナラバソノ對偶ハ必ズ眞デ
アルガ、裏ハ必ズシモ眞デハナイ。

今定理ノ假設ヲ甲、終結ヲ乙デ表ハシテ定
理ノ關係ヲ示セバ次ノヤウニナル。

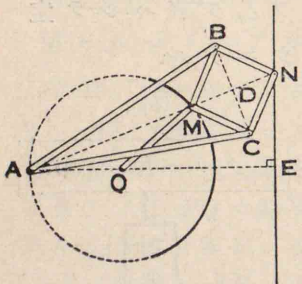


或ル線ガ或ル條件ニ適スル點ノ軌跡デア
ルコトヲ證明スルニハ、一定理ト其ノ逆又ハ
裏ヲトツテ證明シナケレバナラナイ。

問 題

10 三角形ノ底邊ノ位
置及ビ大サト頂角ノ大
サトガ與ヘラレタトキ、
ソノ内心ノ軌跡ヲ求メ
ヨ。

11 與點Aカラ與直線
Lニ引イタ任意ノ線分AN
ヲ $AM \cdot AN = K^2$ ノヤウ
ニ分ツ點Mノ軌跡如何。



ウニ連節シタモノデ、上ノ軌跡ヲ實際ニ示スモノ即チ
直線ヲ描ク器具デアル。
 $AM \cdot AN = (AD - MD)(AD + MD) = AD^2 - MD^2 = AB^2 - MB^2 = K^2$

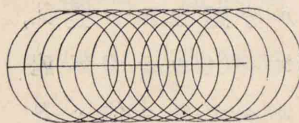
(10) 問題10ニ於テ更ニ
内接圓ノ半徑ガ與ハラ
レタトキ、ソノ三角形ヲ
描ケ。

(11) 一直線上ニ三點A,
B, Cガ此ノ順序ニ在ル。
A, Bヲ通ル圓ニCカラ
引イタ切線ノ切點ノ軌
跡如何。

圖ハポーシェリエーノ連
節機ヲ示スモノデアル。

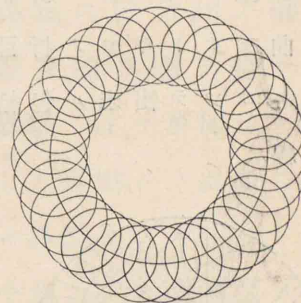
$AB = AC, AO = MO,$
 $MB = BN = NC = CM$ デ幾
ツカノ棒ヲ頂點ニ於テ自
由ニ動クコトノ出來ルヤ

12 與直線上ニ中心ヲ
オイテ同ジ半徑ノ圓ヲ
數多ク描ケ。如何ナル
線ガ現ハレルカ見ヨ。



13 相交ハル二直線ニ
兩端ヲ有スル與長線分
ガ動ケバドンナ圖形ガ
出來ルカ。實際ニ描イ
テ見ヨ。

(12) 與圓ノ周上ニ中心
ヲオキ且ソノ圓ノ半徑
ヨリ小サイ半徑デ多ク
ノ圓ヲ描ケ。



若シ後ノ圓ガ與圓ノ
半徑ヨリ大ナラバ如何。

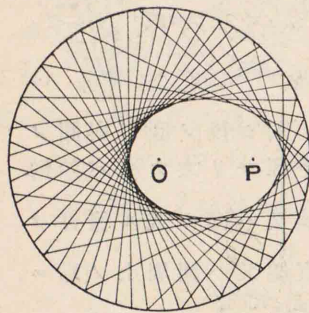
注意 問題 12, (12), 13 ハ直線又ハ圓ガ或ル條件ヲ
満足シナガラ動イテ、ソレラノ直線又ハ圓周上ノ點ニ
ヨツテ一ツノ圖形ヲ得ルコトヲ示シタモノデアル。

カヤウニシテ出來タ圖形ヲ包絡線トイフノデアル。
包絡線ハ頗ル興味アルモノデアルガ、併シコレヲ研究
スルコトハ却タムツカシイ。茲デハ唯描イテ見レバ
ヨイコトニスル。

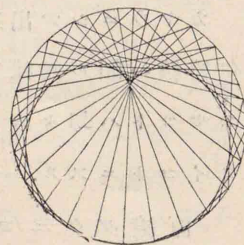
直線ダケニヨツテ出來ル包絡線ニモ種々
ノ曲線ガアル。次ニ參考ノタメニソノ二三

ヲ示ス。

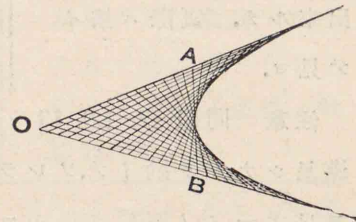
1. 圓周上ノ任意ノ
 一點ガ圓内ノ一點 P
 ニ重ナルヤウニ折リ
 曲ゲタトキソノ折目
 ニヨツテ出來ル包絡
 線。



3. 圓周ヲ n 等分シテ或ル
 一ツノ直徑ノ一端カラハ一
 ツ宛他端カラハニツ宛順次
 ニ同ジ方向ニヅラシタ點ヲ
 結ブ直線ノ包絡線。



2. 相交ハル直線ノ
 交點 O カラ等シク切
 ツテ O カラ等距離ニ
 アル分點 A, B ヲ定メ,
 一ツハ A カラ O ニ遠
 ザカルヤウニ他ハ B
 カラ O ニ近ヅクヤウ
 ニトツタ點ヲ結ブ直
 線ノ包絡線。

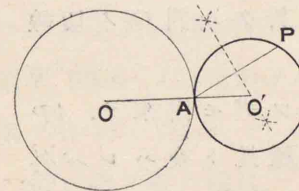


第五章 作 圖 題

45. 作圖ノ解析及吟味

例一 與圓周上ノ與點ニ於テ此ノ圓
 ニ切シ、且與圓外ノ與點ヲ通ル圓ヲ描ケ。

解析 A ヲ與圓 O ノ
 周上ノ與點, P ヲ與圓 O
 外ノ與點トスル。



今假リニ點 P ヲ通ツ
 テ A ニ於テ圓 O ニ切ス

ル圓 O' ヲ描クコトガ出來タトスレバ、

- 1 O' ハ直線 OA 上ニナケレバレラナイ。
- 2 又 O' ハ A ト P カラ等距離デナケレバ
 ナラナイ。即チ AP ノ垂直二等分線上ニア
 ル。

作圖 OA ヲ結ビ之ヲ延長シ, AP ノ垂直二
 等分線トノ交點ヲ O' トスル。 O' ヲ中心, $O'A$
 ヲ半徑トシテ圓ヲ描ケバ圓 O' ハ求メル圓デ
 アル。

證明 O, A, O' ハドンナ關係ニアルカ。故ニ圓 O' ト圓 O トハ相切スルカ。又點 O' ト AP トノ關係ハドウカ。 O' ヲ中心, $O'A$ ヲ半徑トシタ圓周ハ P ヲ通ルカ。故ニ O' ハ求メルモノデアル。

吟味 AP ノ垂直二等分線ガ直線 OA ト交ハラナケレバ解ハナイ。

(此ノトキハ AP ハ A ニ於ケル圓 O ノ切線デアル。)

ソレ以外ニハ作圖ハイツデモ出来テ, AP ノ垂直二等分線ガ OA ノ延長ト交ハレバ外切, AO ノ方向デ交ハレバ内切シテ, 解ハ共ニ1デアル。

此ノヤウニ作圖題ノ吟味デハ與ヘラレタ條件ニヨツテ作圖ノ能不能及ビ解ノ數等ヲ研究スルモノデアル。

上ノ例デハ求メル圓ノ中心ヲ決定スルコトニ導イタノデアツテソノ中心ノ軌跡ハ

(i) A, O ヲ通ル直線

(ii) 線分 AP ノ垂直二等分線トデアル。斯様ニ作圖題デハ

軌跡ヲ用ヒルト簡單ニ其ノ解ヲ得ラレルコトガ多イ。

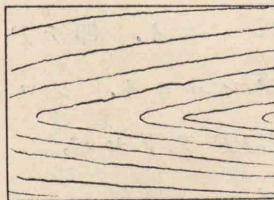
問 題

1 與ヘラレタ半徑ヲ有シ, 與圓外ノ與點ヲ通り此ノ圓ニ切スル圓ヲ描ケ。

2 次ノ圖ノヤウナ板カラ底邊 30cm , 頂角 60° , 高サ 20cm ノ三角形ノ板ヲ作レ。

但シ圖ノ板ハ縮尺

$\frac{1}{10}$ トスル。



3 二ツノ平行線ノ各ニ切シ, 且此ノ平行線間ニ在ル一定點ヲ通ル圓ヲ描ケ。

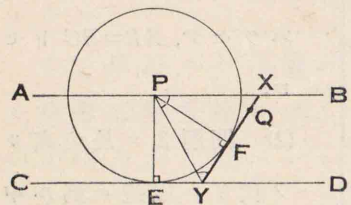
(1) 定圓 O ト之ニ交ハラナイ定直線 CD トガアル。定圓周上ノ定點 A カラ弦 AB ヲ引イテ, コレヲ AB ノ方ニ延長シ定直線 CD ト C デ交ハラセテ, $AB=BC$ トセヨ。

(2) 問題 2 ニ於テ, 高サノ代リニ, 底邊ニ到ル中線ガ 25cm ナラバ如何。

(3) 同心ナル二定圓ノ各ニ切シ, 且此ノ同心圓ノ間ニ在ル一定點ヲ通ル圓ヲ描ケ。

例二 與ヘラレタ平行二直線 AB, CD ノ AB 上ノ定點ヲ P トシ, 他ノ與ヘラレタ一點 Q ヲ通ル直線ヲ引イテ AB, CD ト夫々 X, Y デ交ハラセテ, $XY=XP$ ノヤウニセヨ.

解析 1 $XY=XP$ デアルタメニハ



$$\angle XPY = \angle XYP$$

デアレバヨイ.

然ルニ

$$\angle XPY = \angle CYP$$

デアルカラ

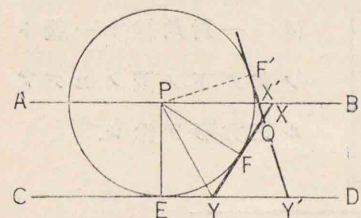
2 $\angle XYP = \angle CYP$ デアレバヨイ. 即チ P ハ $\angle CYX$ ノ二等分線上ニアレバヨイ. ソコデ P カラ CD, XY へ垂線 PE, PF ヲ下セバ,

3 $PE = PF$ デアレバヨイ.

4 ソノタメニハ QY ガ P ヲ中心, PE ヲ半径トシタ圓ニ切スレバヨイ.

トコロガコレハ極メテ容易ニ求メ得ルコトデアル.

作圖 P カラ CD へ下シタ垂線ヲ PE トシ,



P ヲ中心, PE ヲ半径

トシテ圓ヲ描ク. 點

Q カラ圓 P へ切線

QE, QF' ヲ引キノ各

ガ二平行線ト交ハル

點ヲ夫々 X, Y 及ビ X', Y' トスル.

XY 及ビ $X'Y'$ ハ求メル直線デアル.

證明 XY 及ビ $X'Y'$ ガ Q ヲ通ルコトハ明ラカデアル.

$$\triangle PYE \cong \triangle PYF \dots\dots\dots \text{何故カ.}$$

$$\therefore \angle PYC = \angle PYX$$

又 $\angle PYC = \angle BPY$

故ニ $XP = XY$

即チ XY ハ求メル直線デアル.

同様ニ $X'Y'$ モ亦求メル直線デアル.

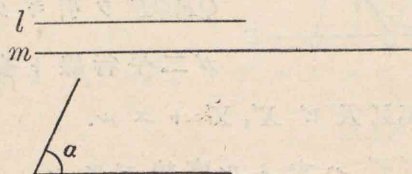
吟味 點 Q ガ圓 P 外ニアレバ解 2,

圓 P ノ周上ニアレバ 解 1,

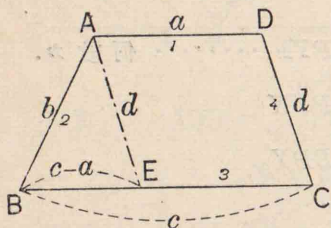
全ク圓内ニアレバ 解ハナイ.

問 題

4 底邊 l , 他ノ二邊ノ和 m 及ビ頂角 a ノ大サヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.



5 四邊ト其ノ順序トヲ知ツテ梯形ヲ作レ.

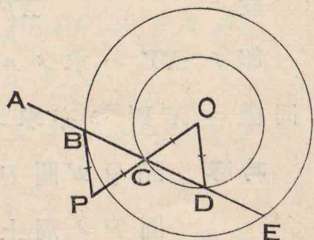


6 定圓外ノ定點カラ此ノ圓ニ割線 ABC ヲ引キ, 圓ト B, C デ交ハラシメ, $AB=BC$ ノヤウニセヨ.

(4) 一對角線ト一邊トノ和ガ下ノ圖ノ m デアル正方形ヲ作レ.

(5) 二平行邊ノ和, 二對角線他ノ一邊ヲ知ツテ梯形ヲ作レ.

(6) 二ツノ同心圓ヲ一定點ヲ通ル一直線デ截リ, 外圓ノ弦ヲ内圓ノ弦ノ3倍ナラシメヨ.

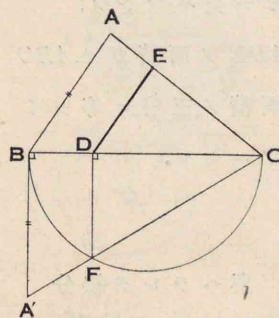


注意 (一)問題6ニヨレ. (二)又ハ圖ヲ見ヨ.

例三 與ヘラレタ三角形 ABC ノ邊 AB ニ平行ナ直線ヲ引イテ他ノ二邊 BC, CA トノ交點ヲ夫々 D, E トシ,

$DE^2 = BD \cdot CD$ トナルヤウニセヨ.

解析 $DE^2 = BD \cdot CD$



トナル點 D ヲ求メ得タトセヨ. DE ハ BD ト CD トノ比例中項デナケレバナラナイ. 故ニ BC ヲ直徑トシテ半圓ヲ描キ, D ニ於テ BC ノ垂線ヲ立テテ半

圓トノ交點ヲ F トセヨ. DF ハ BD ト CD トノ比例中項デアル. 故ニ

$DE = DF$

CF ヲ延長シテ, B カラ BC ニ垂直ニ立テタ直線トノ交線ヲ A' トスレバ,

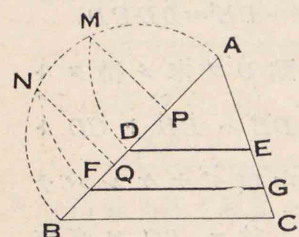
$\frac{DF}{BA'} = \frac{CD}{CB} = \frac{DE}{AB}$

故ニ $A'B = AB$

故ニ點 A' 及ビ F 從ツテ點 D ハ求メ得ラレル. 作圖, 證明及ビ吟味ハ生徒諸子之ヲナセ.

問 題

7 與三角形ノ面積ヲ
底ニ平行ナ直線ニヨツ
テ三等分セヨ。



8 與三角形ノ面積ヲ
底ノ垂線ニヨツテ二等
分セヨ。

9 定角 XOY 内ノ定
點 P ヲ通ツテ直線ヲ引
キ、角ノ二邊ト夫々 A, B
デ交ハラシメ、

$$PA \cdot PB = k^2$$

ノヤウニセヨ。

(7) $\triangle ABC$ ノ邊 BC =
平行ナ直線ヲ引キ、二邊
 AB, AC ノ延長ト夫々
 D, E デ交ハラシメ、
 $\triangle ADE$ ノ面積ガ $\triangle ABC$
ノ面積ノ三倍ニ等シイ
ヤウニセヨ。

(8) 與ヘラレタ線分
 AB ヲ C デ二分シテ
 $AC^2 : AB^2 = 2 : 3$
ナラシメヨ。

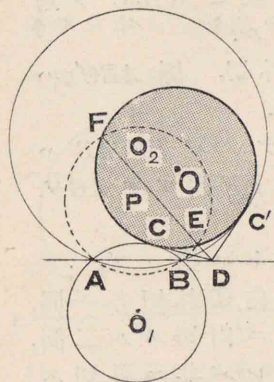
(9) 二定圓 O, O' ノ交點
ノ一ツ P ヲ通ル直線ヲ
引イテ、各圓ト交ハル點
ヲ夫々 A, B トシテ、

$$PA \cdot PB = k^2$$

トナルヤウニセヨ。

例四 與圓ニ切シ、與圓外ノ二點ヲ通
ル圓ヲ描ケ。

解析 與圓ヲ O 、二與點
ヲ A, B トシ、假リニ解キ得
タトスル。其ノ圓ヲ O_1, O_2
トシ切點ヲ C, C' トスル。



1 圓 O_1 ハ三點 A, B, C
ヲ通ツテキルカラ、點 C ガ
定マレバ作圖スルコトガ
出來ル。

點 C ハ圓 O ト圓 O_1 トノ切點デアルカラ C
ニ於テ兩圓ノ共通切線ヲ引クコトガ出來ル、
コレト AB ノ延長トノ交點ヲ D トスル。

2 點 D ヲ知レバ點 C ハ定メラレル。 D
カラ圓 O ノ任意ノ割線 DEF ヲ引ケバ

$$DC^2 = DA \cdot DB = DE \cdot DF$$

故ニ四點 A, B, E, F ハ同一圓周上ニ在ル。

3 A, B ヲ通ツテ與圓 O ト交ハル圓ヲ描
クコトガ出來レバ點 D 從ツテ點 C ヲ求メル
コトガ出來ル。

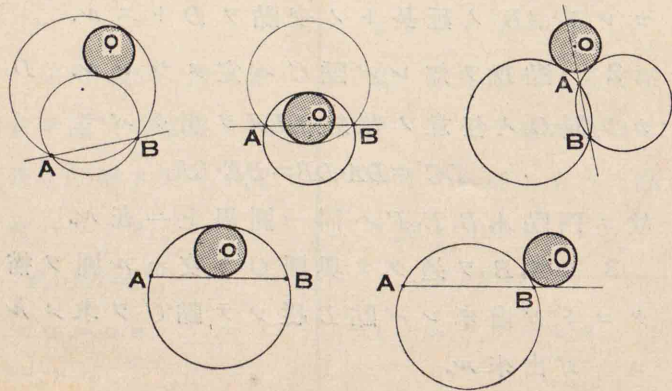
作圖 A, B 二點ヲ通り圓 O ト E, F デ交ハル任意ノ圓ヲ描キ, FE ノ延長ト AB トノ交點ヲ D トスル. D カラ圓 O ニ切線ヲ引キノ切點ヲ C, C' トスル. A, B, C 及ビ A, B, C' ヲ通ル二ツノ圓ハ求メル圓デアアル.

證明 圓 ABC ハ圓 O ト外切, 圓 ABC' ハ圓 O ト内切スルコトヲイヘ.

吟味 EF ガ AB ト平行ナラバ EF, AB ハ共ニ圓 P ノ平行弦デ, C, C' ハ EF 從ツテ AB ノ垂直二等分線上ニ在ル.

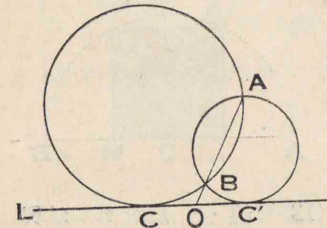
故ニ AB, EF ガ交ハルト否トニ拘ラズ,

- (i) AB ガ圓 O ニ交ハラネバ内切外切各一圓,
- (ii) AB ガ圓 O ニ交ハレバ共ニ内切スル二圓,
- (iii) AB ノ延長ガ圓 O ト交ハレバ共ニ外切スル二圓,
- (iv) AB ガ圓 O ニ切スレバ内切スル一圓,
- (v) AB ノ延長ガ圓 O ニ切スレバ外切スル一圓.

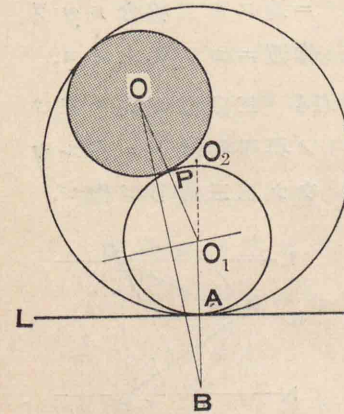


問 題

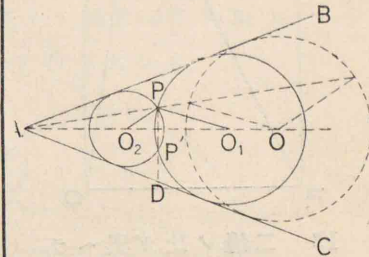
10 與直線ニ切シツノ同側ニ在ル二與點ヲ通ル圓ヲ描ケ.



11 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ他ノ定圓ニ切スル圓ヲ描ケ.

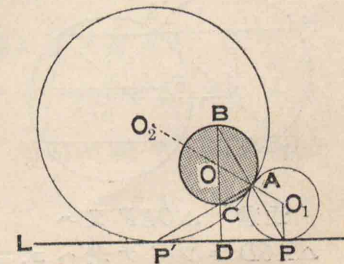


(10) 與角内ノ與點ヲ通リツノ角ノ二邊ニ切スル圓ヲ描ケ.

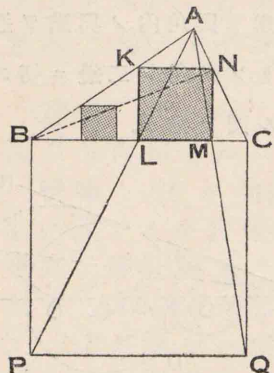


注意 圖ハ二様ノ解法ヲ示ス.

(11) 與圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切シ他ノ與直線ニ切スル圓ヲ描ケ.

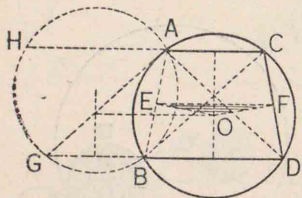


12 與三角形 = 正方形
ヲ内接セシメヨ.



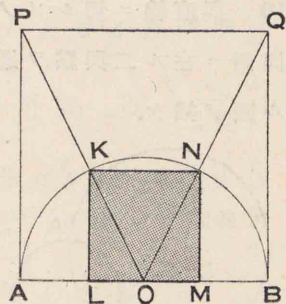
13 二邊ノ比ガ與ヘラ
レタ比 = 等シイ矩形ヲ
定三角形 = 内接セヨ.

14 定圓周上ノ二定點
カラ同ジ方向 = 平行ナ
二弦ヲ引キ, ソノ和ヲ與
長ニセヨ.



注意 $\triangle OEF$ 又ハ
 $\triangle AGD$ = ツイテ考ヘヨ.

(12) 與ヘラレタ半圓ニ
内接スル正方形ヲ作レ.

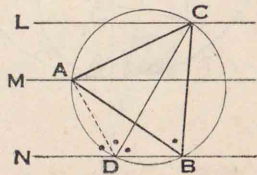


(13) 線分 l, m, n ガ與
ヘラレタトキ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = l^2 \\ x^2 : y^2 = m : n \end{cases}$$

= 適スル二線分 x, y ヲ
作圖 = ヨツテ求メヨ.

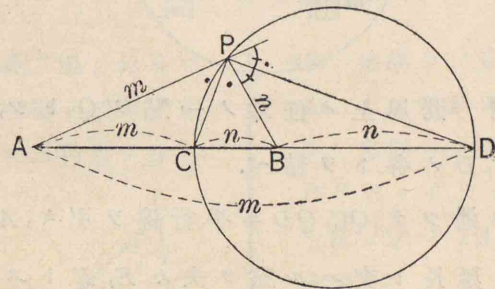
(14) 三頂點ガ夫々三ツ
ノ與平行線上 = 在ルヤ
ウナ正三角形ヲ作レ.



46. アポロニアスノ圓

問1 二定點 A, B カラ等距離 = アル(距離ノ比ガ1
トナル)點ノ軌跡ハ何カ.

問2 二定點 A, B カラノ距離ノ比ガ $m:n$ ($m > n$ ト
スル) デアル任意ノ點ヲ P トシ, 線分 AB ヲ $m:n$ = 内
分スル點ヲ C , 外分スル點ヲ D トスレバ,



PC ハ如何ナル直線トナルカ.

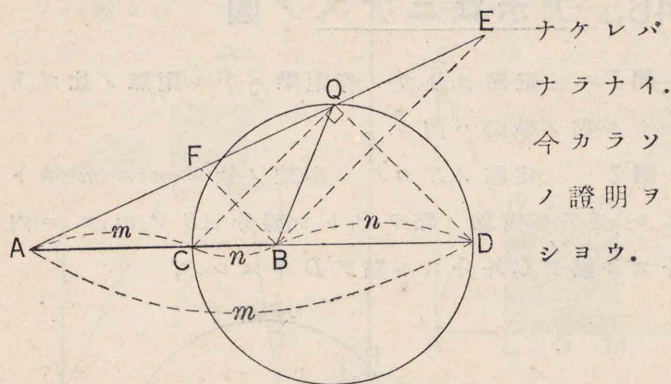
PD ハ如何ナル直線トナルカ.

又 $\angle CPD$ ノ大サ如何.

從ツテ點 P ハ如何ナル圖形上 = 在ルカ.

問2 カラ明ラカナヤウニ, 二定點 A, B カラ
ノ距離ノ比ガ $m:n$ デアル點ハ總テ AB ヲ $m:n$
= 内分シタ點ト外分シタ點トヲ結ブ線分ヲ
直徑トスル圓周上 = 在ル.

此ノ逆ハ眞デアルクドウカハ別ニ證明シ



ナケレバ
ナラナイ。
今カラソ
ノ證明ヲ
シヨウ。

證明 圓周上ノ任意ノ一點ヲ Q トシ、 Q ト A, B, C, D ノ各トヲ結ベ。

B ヲ通ツテ QC, QD = 平行線ヲ引キ、 AQ 又ハソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ、

$$\frac{AQ}{QE} = \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$$

又 $\frac{AQ}{QF} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$

故ニ $\frac{AQ}{QE} = \frac{AQ}{QF} = \frac{m}{n}$

$\therefore QE = QF = BQ \dots \dots$ 何故カ。

故ニ $\frac{AQ}{BQ} = \frac{m}{n}$

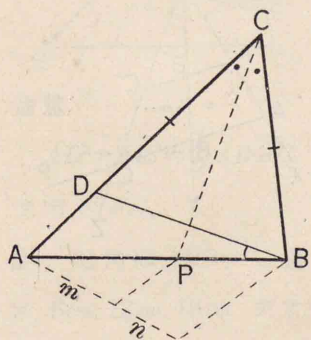
即チ圓周上ノ點ハ悉ク與條件ニ適スル。

ソコデ二定點 A, B カラノ距離ノ比ガ $m:n$ デアル點ノ軌跡ハ、線分 AB ヲ $m:n$ ニ内分及ビ外分スル點ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周デアルト斷定サレル。

此ノ圓ガ即チ第三學年ノ時ニ習ツタコトノアルアポロニアスノ圓デアル。

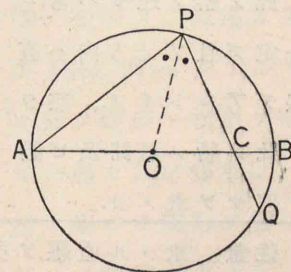
問 題

15 底邊、二邊ノ比及ビ底邊ノ兩端ノ二角ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。



注意 $\angle ABD$ ノ大サヲ考ヘヨ。又 $\angle C$ ノ二等分線 CP ト BD トノ關係如何。

(15) 定圓 O ノ定直徑 AB 上ノ定點ヲ C トスル。定圓 O ノ周上ニ點 P ヲ求メ、 P 及ビ C ヲ通ル弦 PQ ヲ PA = 等シクセヨ。



注意 PO ヲ結ベ。
 $AP:PC = AO:OC$
デアルコトヲ考ヘヨ。

雑 題

1 或ル人ガ海岸ニアツテ丁度眞東9 湮ノ所ヲ航海シテキル船ヲ見タ。30分ヲ經テ再ビソノ船ヲ見タトコロガ眞東ヨリ稍南ニアタツテ13湮ノ所ヲ航行シテキタ。又30分ノ後ニハソノ船ハ更ニ南ニ偏シテ20湮ノ所ヲ航行シテキタ。

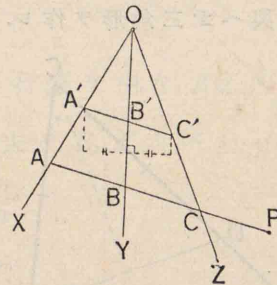
此ノ船ノ速サハ常ニ一定デ且ソノ方向ハ直線デアルトイフ。然ラバ此ノ船ノ航路及ビ船ノ速サヲ求メヨ。

注意 求メル直線ヲ引クコトガ出来タトシ OY 上ニ任意ノ一點 B' ヲトリ、 B' ヲ通ツテ求メル直線 AC ニ平行ナ直線 $A'C'$ ヲ引イテ見ヨ。 $A'B' = B'C'$ ノヤウニ $A'C'$ ヲ引クニハドウスルカラ考ヘヨ。

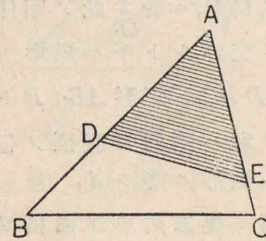
(1) 圖ニ於テ OX, OY, OZ ハ O カラ出ル三ツノ直線デ、點 P ハ定點デアル。點 P ヲ通ツテ三直線ト夫々 A, B, C デ交ハル直線ヲ引キ、

$$AB = BC$$

ノヤウニセヨ。



2 與三角形 ABC ニ於テ、圖ノヤウニ A ヲ頂點トスル二等邊三角形 ADE ヲ作り、 DE デ三角形ノ面積ヲ二等分シヨウト思フ。ドウスレバヨイカ。



注意

$$AD^2 = AE^2 = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

ヲ考ヘヨ。

3 三角形 ABC ノ三邊ガ $8cm, 12cm, 18cm$ デアルトキ、 $\triangle ABC$ ト相似デ而モ之ト二邊ヲ等シクスル三角形ヲ作レ。

(三通リアル)

(2) 半徑ガ夫々 $3cm, 4cm, 6cm$ ノ三ツノ圓ガアル。コレラノ三ツノ圓ノ面積ノ和ニ等シイ一ツノ圓ヲ描ケ。又ソノ圓ノ半徑ハ何程カ。

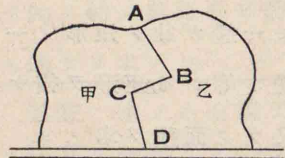
(3) 矩形ノ二隣邊ガ夫々 $18cm, 27cm$ デアルトキ、此ノ矩形ト相似デ而モ一邊ガ此ノ矩形ノ一邊ト等シイ矩形ヲ描ケ。又ソノ面積ヲ求メヨ。

注意 求メル矩形ハ幾通リアルカラ考ヘヨ。

4 矩形 $ABCD$ ノ邊 BC, CD 上ニ夫々任意ノ點 X, Y ヲトルトキハ $2\triangle AXY + BX \cdot DY = \square AC$
 注意 X, Y ヲ通り矩形ノ二邊ニ平行ナ直線ヲ引ケ.

5 梯形ニ於テ兩對角線上ノ正方形ノ和ハ平行デナイ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ平行邊ノ包ム矩形ノ二倍ヲ加ヘタモノニ等シイ.

6 甲乙兩地ヲ $ABCD$ ノ線デ境シテキル. 之ヲ A カラ出ル一直線デ分ケ, 兩地ノ面積ガ變ラナイヤウニセヨ.



(4) 平行四邊形 $ABCD$ 内ノ一點 P ヲ通り二邊ニ平行ナ直線ヲ引イテ生ズル平行四邊形 PB, PD ノ差ハ $\triangle PAC$ ノ二倍デアル.

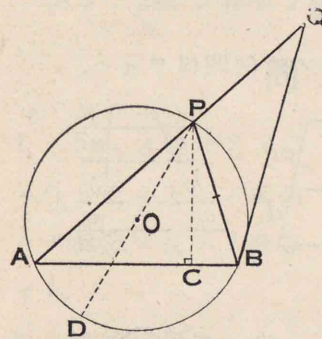
(5) 相交ハル二圓ノ中心線ガ二圓周ト四點 A, B, C, D ニ於テ此ノ順序ニ交ハルトキハ矩形 $AD \cdot BC$ ト矩形 $AB \cdot CD$ トノ和ハ兩圓ノ直徑ノ包ム矩形ニ等シイ.

(6) 與三角形ノ面積ヲ邊上ノ一定點ヲ通ル二直線ニヨツテ三等分セヨ.

注意

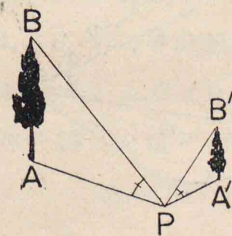
- (一) 一定點ガ邊ヲ三等分シタ兩端ノ分ノ上ニアル場合,
- (二) 定點ガ三等分點ノ一ツニ重ナツタ場合,
- (三) 定點ガ中間ノ分ノ上ニアル場合ヲ區別シテ解ケ.

7 AB ヲ弦トスル與圓周上ニ點 P ヲ求メ, AP, BP ノ包ム矩形ヲ與面積 L^2 ニ等シクセヨ.



注意 $AP \cdot LP = PC \cdot PD$

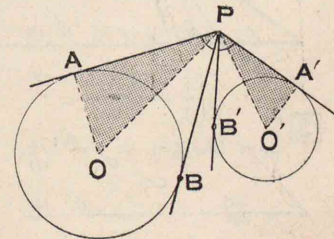
8 平地上ニ直立シテキル二本ノ樹木ガアル. 此ノ平地上ニ於テ二本ノ樹木ノ尖端ヲ相等シイ仰角ニ望ミナガラ歩行スルトキ其ノ行路ハ如何ナル形ヲナスカ.



(7) 問題 7 ニ於テ, $AP + PB$ ヲ最大ニスル點 P ノ位置ヲ求メヨ.

注意 AP ヲ延長シテ $PQ = PB$ ナルヤウニ點 Q ヲトレバ, 點 Q ノ軌跡ハ何トナルカラ考ヘヨ.

(8) 相交ハラナイ大小二圓ガアル. 此ノ二圓ヲ等角ニ見込ム點ノ軌跡如何.



注意 P ヲ與條件ヲ満足スル一點トスレバ

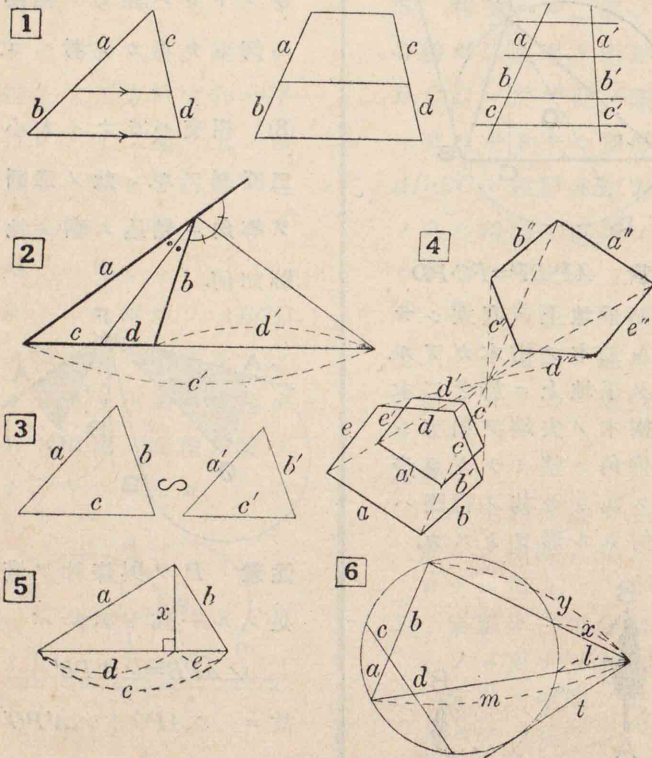
$$\angle APB = \angle A'PB'$$

故ニ $\triangle APO$ ト $\triangle A'PO'$ ニツイテ考ヘヨ.

第六章 比 例

47. 線分ノ比例

問1 次ノ圖ヲ見テ線分間ノ比例關係ヲイヘ。



問2 三角形ノ頂角ノ内角及ビ外角ノ二等分線ハ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ調和ニ分ツ(前頁問1ノ2)コトヲ證明セヨ。

問3 2cmノ長サノ線分ヲ5:3ニ分ケヨ。

問 題

1 5cmノ線分ヲ4:3ニ外分シタトキノ延長シタ部分ノ長サヲ計算セヨ。

2 二圓ガ外切スルトキ切點ヲ通ツテ二圓デ截リ取ラレル二ツノ直線ヲ引ケバ、ソノ四ツノ線分ハ比例ヲナス。

3 ABCDハBC,ADヲ兩底トスル梯形デアル。∠A,∠Bノ二等分線ノ交點ヲE, ∠C,∠Dノ二等分線ノ交點ヲFトスレバ、EF∥BC

(1) 上ノ問2ノ逆ヲ述ベテ且之ヲ證明セヨ。

(2) AD, BEヲ△ABCノ二ツノ高サトシ、其ノ交點ヲFトスレバ、 $\frac{AE}{AD} = \frac{FE}{DC}$ デアルコトヲ證セヨ。

(3) □ABCDノ邊ADニ平行ナ直線上ニ二點E, Eヲトリ、BE, CFノ交點ヲG, AE, DFノ交點ヲHトスレバ、GH∥AB

4 $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ延長シテ $BC =$ 等シク CD ヲトリ、點 D ト AC ノ中點 E トヲ結ンデ延長シ AB トノ交點ヲ F トスルトキ

$$EF:ED$$

ヲ求メヨ。

5 $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點 D ヲ過ギル任意ノ直線ガ、 AB, AC 又ハ其ノ延長及ビ A ヲ通ル BC ノ平行線ト交ハル點ヲ夫々 E, F 及ビ G トスレバ

$$EG \cdot FD = ED \cdot FG$$

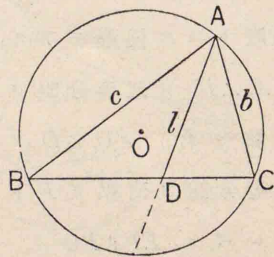
注意 $\frac{EG}{ED} = \frac{FG}{FD}$ ヲ證明セヨ。

(4) $\triangle ABC$ = 於テ D ハ邊 AB ノ中點、 E ハ邊 AC 上ノ點デ

$$EC = \frac{1}{5} AC$$

デアル。 D ヲ通ツテ BC = 平行線ヲ引イテ、 BE ノ延長ト P デ交ハラセルトキ $BE:EP$ ノ値ヲ求メヨ。

(5) 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ノ長サガ夫々 c, b デ、 $\angle A$ ノ二等分線 AD ノ長サガ l デアルトキ、第三邊 BC ノ長サヲ計算セヨ。



6 直角三角形 ABC ノ直角頂 A カラ斜邊 BC = 下シタ垂線 AD ト、 $\angle B$ ノ二等分線 BE トノ交點ヲ F トスレバ

$$AF \cdot AE = FD \cdot CE$$

7 圆周上ノ一點カラ此ノ圓 = 内接スル四邊形ノ相對スル二邊 = 下ス垂線ノ包ム矩形ハ、他ノ相對スル二邊 = 下ス垂線ノ包ム矩形ト等積デアル。

8 圓 O ノ直徑 AB ノ延長上ノ任意ノ一點ヲ Q カラ此ノ圓 = 引イタ切線ヲ QT トシ、 $TP \perp AB$ トスレバ A, P, B, Q ハ調和列點デアル。

(6) A = 於テ内切スル二ツノ圓ガアル。小圓周上ノ點 D = 於テコレ = 切スル大圓ノ弦 BC ヲ引キ、 AB, AC ガ小圓ト交ハル點ヲ夫々 P, Q トスレバ

$$AP:AQ = BD:CD$$

(7) 與圓ノ弦 AB ノ中點 M ヲ通り任意ノ弦 CD ヲ引ケバ

$$AC \cdot AD = BC \cdot BD$$

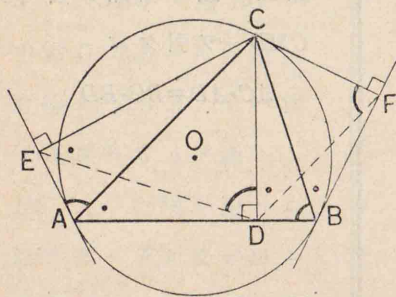
(8) 直角ヲ夾ム二邊ガ $5\text{cm}, 12\text{cm}$ ノ直角三角形ノ直角ノ二等分線ノ長サヲ求メヨ。

48. 比例中項

問1 二線分 a, b の比例 a _____
 中項ノ作圖如何. b _____

問2 $\sqrt{6}$ cm, $\sqrt{15}$ cm ノ長ヲ作レ.

例 圓ニ内接スル三角形 ABC ニ於テ, C カラ AB ニ下シタ垂線ヲ CD トシ, C カラ A 及ビ B ニ於ケル此ノ圓ノ切線ニ下シタ垂線ヲ夫夫 CE 及ビ CF トスレバ, CD ハ CE, CF ノ比例中項デアアル.



考へ方 CD ガ CE ト CF トノ比例中項デアアルタメニハ

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CF}$$

デアレバヨイ.

此ノ比例式ガ成立スルタメニハ

$$\triangle CED \sim \triangle CDF \text{ デアレバヨイ.}$$

$$\text{即チ } \angle CED = \angle CDF, \quad \angle CDE = \angle CDF$$

デアレバヨイ.

トコロガ四邊形 $CEAD$ 及ビ $CDBF$ ハ圓ニ

内接シ, 且 AE, BF ハ共ニ圓ノ切線デアアルカラ, 上ノ角ノ等シイコトハ容易ニワカルコトデアアル.

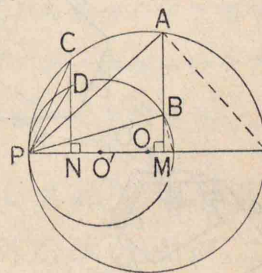
問 題

9 $\square ABCD$ ノ頂點 A ヲ通ル直線ガ對角線 BD 及ビ二邊 BC, CD 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P, E, F トスレバ, AP ハ PE, PF ノ比例中項デアアル.

(9) 四邊形 $ABCD$ ノ對角線ノ交點 O ヲ通り邊 AB ニ平行ナ直線ガ BC, AD 及ビ CD ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 E, F 及ビ G トスレバ GO ハ GE, GF ノ比例中項デアアル.

(10) 二圓 O, O' ハ P デ内切シ, $AM \perp OO'$, $CN \perp OO'$ トスレバ $PA : PB = PC : PD$

10 圓 O ノ弦 AB ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ヲ C トスル. AB 上ノ任意ノ一點 P ト O トヲ結ビ, C カラ OP ニ下シタ垂線ノ足ヲ H トスレバ, OA ハ OP, OH ノ比例中項デアアル.



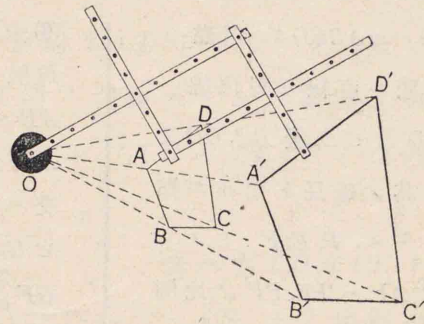
注意 二乗比ヲ考へヨ.

49. 相似及相似ノ中心

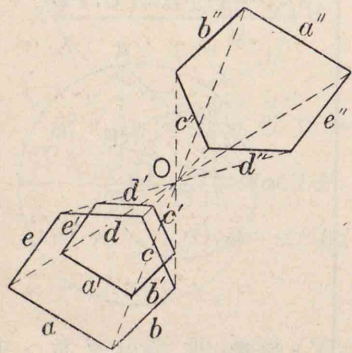
問1 多角形ガ相似デアルトハ如何ナルコトカ。

問2 ニツノ三角形ハドンナ場合ニ相似トナルカ。

問3 次ノ圖ノヤウナ「パントグラフ」デ描イタ四邊形 $A'B'C'D'$ ト原ノ四邊形 $ABCD$ ハ果シテ相似デアルカ。又四邊形 $A'B'C'D'$ ノ面積ハ $ABCD$ ノ面積ノ何倍カ。

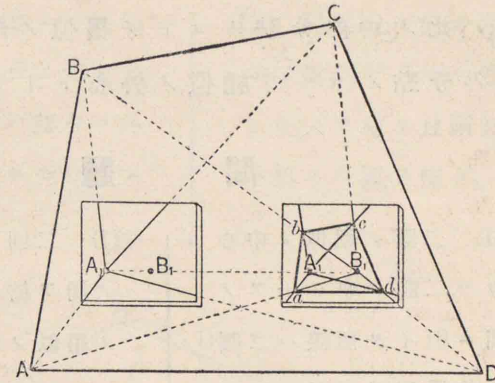


問4 ニツノ相似多角形ノ對應邊ヲ平行ニオケバ對應頂點ヲ結ブ直線ハ一點ヲ通ルコトヲ説明セヨ。



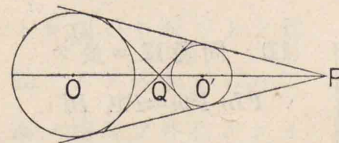
問4ノヤウナニツノ相似多角形ハ相似デ且相似ノ位置ニ在ルトイヒ點 O ヲ相似ノ中心トイフ。

又平板測量ハ測ラウトスルモノト相似デアツテ且相似ノ位置



ニアル圖形ヲ平板ノ上ニ作ルコトニヨツテ測量スルモノデアル。(第三學年用参照)

問5 互ニ外方ニアル二圓ノ外共通切線ヲ引イテ、其ノ交點ハ二圓ノ中心線上ニ在ルコトヲ證セヨ。又内共通切線ノ場合ハ如何。



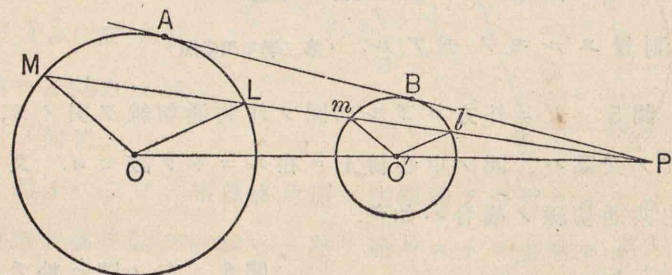
問6 左ノ圖ニ於テ、 Q, P ハ線分 OO' ヲ兩半徑ノ比ニ調和ニ分ケテキルコトヲ證セヨ。

一般ニ二ツノ圓ノ中心ヲ結ブ線分ヲ兩半徑ノ比ニ内分及ビ外分スル點ヲ、二圓ノ相似ノ中心トイフ。

此ノ中内分點ノコトヲ相似ノ内心トイヒ、
外分點ノコトヲ相似ノ外心トイフ。

問 題

11 二圓ノ相似ノ中心
カラ、二圓ノ中ノ一ツノ
圓ニ引イタ切線ハ二圓
ノ共通切線デアル。



12 上ノ圖ニ於テ P ハ
二圓 O, O' ノ相似ノ外心
デアル。 P ヲ通ル直線
ガ二圓ト交ハル點ヲ夫
夫 L, M; l, m トスレバ

$$OL \parallel O'l,$$

$$OM \parallel O'm$$

(11) 二圓ノ平行ナ半徑
ノ端ヲ結ブ直線ハ二圓
ノ相似ノ中心ヲ通ル。

(12) 問題 12 ニ於テ

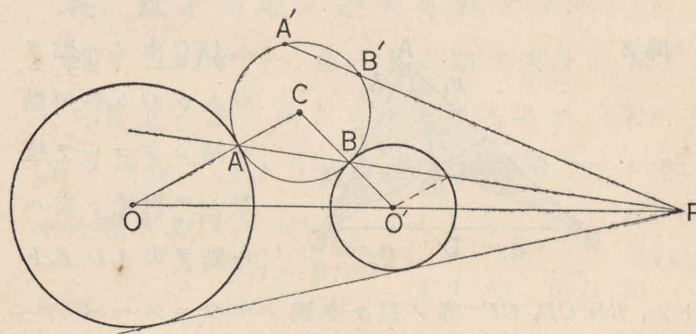
$$PL \cdot Pm = PM \cdot Pl$$

デ而モ此ノ矩形ノ面積
ハ一定デアルコトヲ證
明セヨ。

注意 一定量ガ何デア
ルカラ考ヘヨ。

13 五ニ外方ニアル二
圓 O, O' ノ圓 O ノ周上ノ
定點 A ニ於テ圓 O' ニ外
切シ、且圓 O' ニモ外切ス
ル圓ヲ描ケ。

(13) 問題 13 ニ於テ點 A'
ガ二圓 O, O' ノ外ニ在ル
トキ、A' ヲ通り且兩圓ニ
外切スル圓ヲ描ケ。



注意 圓 C ヲ求メル圓
トシ、圓 C ト圓 O トノ切
點ヲ B トスレバ、B ハ二
圓ノ相似ノ外心 P ト A
トヲ結ブ直線上ニ在ル
コトヲ考ヘヨ。

注意 圓 C ヲ求メル圓
トシ、PA' ト圓 C トノ交
點ヲ B'、切點ヲ夫々 A, B
トセヨ。

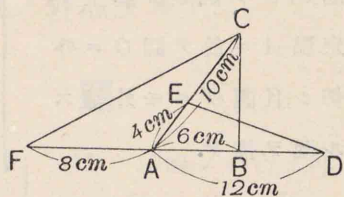
$$PA' \cdot PB' = PA \cdot PB$$

= 一定

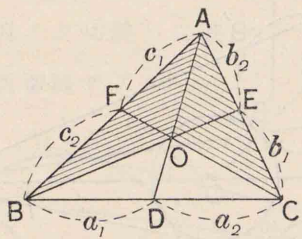
問題(12)カラ考ヘヨ。

50. 面積ノ比

問1 右ノ圖ニ於テ
 $\triangle ABC$ ト $\triangle ADE$ 及ビ
 $\triangle ACF$ ノ連比ヲ求メヨ.



問2



$\triangle ABC$ 内ノ一點ヲ
 O トシ、 O ト各頂點
 ヲ結ンデコレヲ延
 長シテ對邊ト交ハ
 ル點ヲ夫々 D, E, F

トシ、 BD, CD, CE 等ノ長サヲ圖ノヤウニスレバ

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}, \quad \frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}, \quad \frac{\triangle BOC}{\triangle AOB}$$

ノ比ハ夫々如何.

上ノ問2ニ於テハ

$$\frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} \times \frac{c_1}{c_2} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC} \times \frac{\triangle BOC}{\triangle AOB} \times \frac{\triangle AOC}{\triangle BOC} = 1$$

デアルカラ、次ノ定理ヲ得ル.

定理* $\triangle ABC$ 内ノ一點ヲ O トシ、 AO
 BO, CO ガ對邊ト交ハル點ヲ夫々 $D, E,$
 F トスレバ

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

系 此ノ定理ノ逆モ亦眞デアル.

即チ $\triangle ABC$ ノ三邊ノ上ノ點ヲ夫々 D, E, F
 トシ、且上ノ式ガ成立スルモノトスル。 $BE,$
 CF ノ交點ト A トヲ結ビ、其ノ延長ガ BC ト交
 ハル點ヲ D' トスレバ、

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BD'}{CD'} \quad \text{トナル。 何故カ。}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{BD+CD}{CD} = \frac{BD'+CD'}{CD'} \quad \therefore \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{CD'}$$

コレカラ D ト D' トハ如何ニナルカラ考ヘヨ.

問 題

14 上ノ系ヲ用ヒテ、三
 角形ノ三ツノ中線ハ一
 點デ交ハルコトヲ證セ
 ヨ.

(14) 上ノ系ヲ用ヒテ、三
 角形ノ三内角ノ二等分
 線ハ一點デ交ハルコト
 ヲ證セヨ.

*此ノ定理ヲチェバノ定理トイフ。チェバ Ceva (1647—1734)
 ハ伊太利ノ幾何學者デアリ、又經濟學者デアル.

15 $\triangle ABC$ ノ形内ノ一
 點 O ヲ各頂點ニ結ビ其
 ノ延長ガ對邊ト交ハル
 點ヲ夫々 D, E, F トシ、

$$BD:CD=CE:AE$$

$$=2:1$$

デアルトキ

$AF:BF$ ノ値如何.

16 正方形 $ABCD$ ノ一
 邊 AD ノ中點ヲ E トシ、
 對角線 AC ト BE トノ交
 點ヲ F トスレバ、

$\triangle AEF, \triangle EFC$ 及ビ
 $\triangle BCF$ ノ連比ハ

$$1:2:4$$

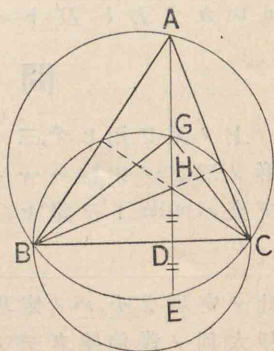
ニ等シイ.

(15) AD ヲ $\triangle ABC$ ノ中
 線トシ、 AD 上ノ任意ノ
 一點 O ヲトリ、 BO, CO
 ヲ結ビ、コレヲ延長シテ
 對邊ト交ハル點ヲ夫々
 E, F トスレバ

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AF}{BF}$$

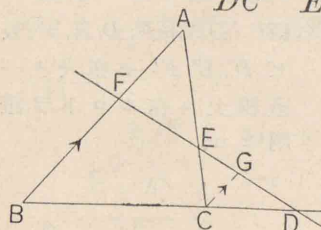
(16) 鋭角三角形 ABC ノ
 垂心ヲ H, AH 上ニ直角
 ノ頂點ヲ有スル直角三
 角形 GBC ヲ作レバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle GBC} = \frac{\triangle GBC}{\triangle HBC}$$



定理* $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB 又ハ其
 ノ延長ト一直線トノ交點ヲ夫々 D, E, F
 トスレバ

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$$



證明 $CG \parallel AB$

トセヨ.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{CG}$$

又 $\frac{CE}{EA} = \frac{CG}{AF}$, $\frac{AF}{FB}$ ハ其ノママニスレバ

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = \frac{BF}{CG} \times \frac{CG}{AF} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

系 本定理ノ逆モ亦眞デアル.

チェバノ定理ノ逆ノ證明ニ倣ツテ、コレヲ
 證明セヨ.

*此ノ定理ヲメネラウスノ定理トイフ. メネラウス
Menelaus ハ紀元98年頃生存シテキタアレクサンドリ
 ヤノ數學者デ、就中球面幾何學ニ秀デ、球面三角法ノ基
 礎ヲ與ヘタ. 此ノ定理ハ後世カルノー (1753—1823) ノ
 「割線論」ノ基礎ヲナスモノデアル.

メネラウスノ定理ハ方向ニヨツテ線分ノ正負ヲ考ヘ

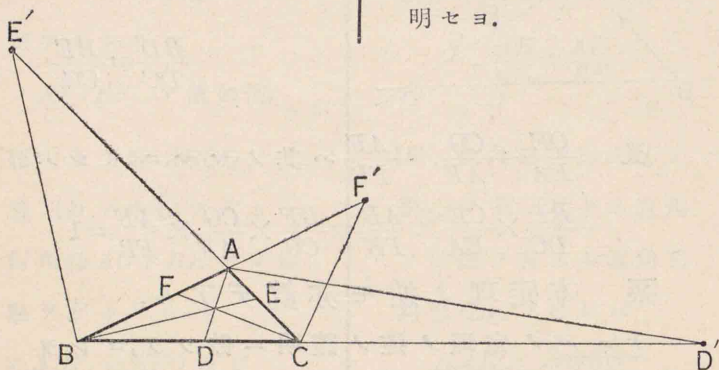
$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = -1$$

トシテチェバノ定理ト區別スルコトガアル. 之ハ此
 等ノ定理ノ逆ヲ使フトキ必要トナル.

問 題

$\triangle ABC$ ノ各角ノ内角及ビ外角ノ二等分線ガ對邊ト交ハル點ヲ圖ノヤウニ夫々 $D, D'; E, E'; F, F'$ トスル。

17 D', E, F ハ一直線上ニ在ルコトヲ證明セヨ。

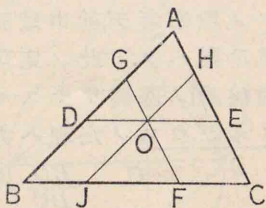


18 $\triangle ABC$ 内ノ一點ヲ O トシ、 AO, BO, CO ガ邊 BC, CA, AB ト交ハル點ヲ夫々 A', B', C' トスレバ

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

(17) $D, E', F; D, E, F';$ 及ビ D', E', F' モ亦夫々一直線上ニ在ルコトヲ證明セヨ。

(18) $\triangle ABC$ 内ノ一點 O ヲ通ツテ圖ノヤウニ各邊ニ平行線ヲ引ケバ

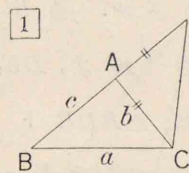


$$\frac{DO}{BC} + \frac{FO}{CA} + \frac{HO}{AB} = 1$$

第七章 量ノ大小ト最大最小

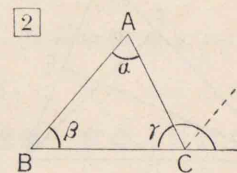
51. 線分及角ノ大小

問 1 次ノ圖ヲ見テニツノ線分ノ大小及ビニツノ角ノ大小ヲ證明スル定理ヲイヘ。

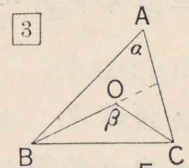


$$b+c > a$$

$$b > c > a$$

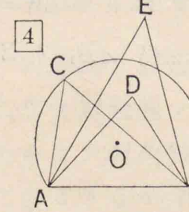


$$\angle \alpha + \angle \beta > \angle \gamma$$

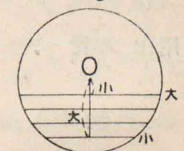
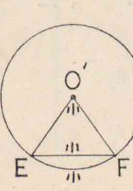
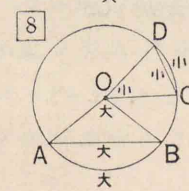
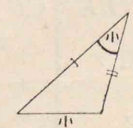
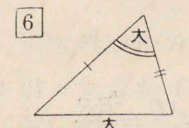
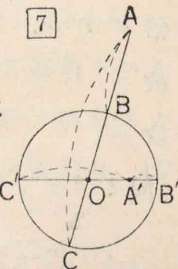
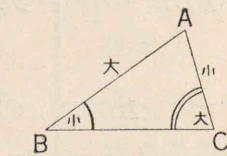


$$AB+AC > BO+CO$$

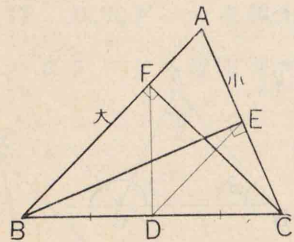
$$\angle \alpha > \angle \beta$$



5



例 三角形ノ二邊ガ不等デアルトキ、大キイ邊ニ到ル高サハ小サイ邊ニ到ル高サヨリハ小サイ。



證明 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB > AC$ トスル。邊 BC ノ中點ヲ D トシテ、 DE 、 DF ヲ結ビ、 $\triangle BDE$ ト $\triangle CDF$ トニツイテ考ヘ

ヨ。

$$DE = DF = BD = CD \dots\dots\dots \text{何故カ。}$$

故ニ $\triangle BDE$ ト $\triangle CDF$ トハ二邊ガ夫々相等シク、其ノ夾角 BDE 、 CDF ハ夫々 $\angle C$ 、 $\angle B$ 、ノ2倍デアル。

故ニ $\angle BDE > \angle CDF$

故ニ $BE > CF$

問2 上ノ例ノ證明ヲ

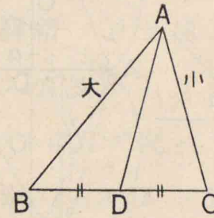
$$AB \cdot CF = AC \cdot BE \quad \text{從ツテ} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$$

ヲ用ヒテ行ヘ。

問題

1 $\triangle ABC$ ニ於テ AB ハ AC ヨリ大キク、 D ハ BC

ノ中點デアルトキ



ハ $\angle BAD < \angle CAD$

注意 AD ノ延長上ニ $AD = DA'$ ナル A' ヲトレ。

2 四邊形ノ四邊ノ和ハ二ツノ對角線ノ和ヨリ大キクテ、對角線ノ和ノ二倍ヨリ小サイ。

3 正方形 $ABCD$ ノ A カラ引イタ直線ガ BC 、 CD 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P 、 Q トスレバ $AP + AQ$ ハ二對角線ノ和ヨリ大キイ。

(1) 三角形ノ二邊ガ不等デアルトキ、大キイ邊ニ到ル中線ハ小サイ邊ニ到ル中線ヨリハ小サイ。

注意 重心ノ性質ヲ考ヘヨ。

(2) 四邊形 $ABCD$ ニ於テ AD ハ最大ノ邊デ、

BC ガ最小ノ邊デアルトキハ $\angle B > \angle D$

及ビ $\angle C > \angle A$

(3) $\angle A$ ヲ直角トスル直角三角形ノ頂點 A カラ斜邊ヘノ垂線ヲ AD トスレバ

$$AB + AC < AD + BC$$

注意 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB - AD}{BC - AC}$

ノ比ノ値カラ考ヘヨ。

52. 最大最小

問1 底邊 a cm, 頂角 a の三角形ノ頂點ノ軌跡ハ何カ.

問1 デハ 三角形ノ頂點ハ 弧ノ上ヲ動クノデ 三角形ハ 定マラナイ.

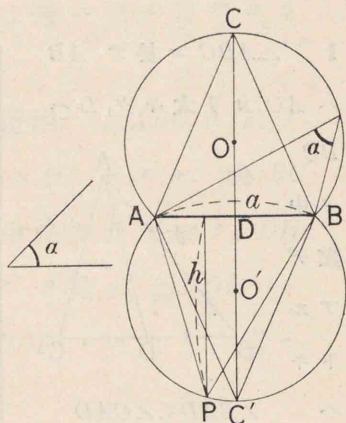
併シナガラ 其ノ 三角形ノ 高サヲ h トス

レバ, 三角形ノ 面積 S ハ $S = \frac{1}{2}ah$

デ, a ハ 與ヘラレタ長サデ 定マツテキルカラ, 三角形ノ 面積 S ハ 其ノ 高サ h ノ 函數デアル.

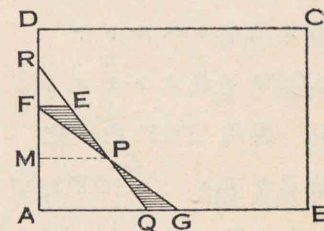
故ニ 與ヘラレタ條件ヲ 満足スル 三角形ノ 中デ, 面積ヲ 最大ナラシメルモノハ, h ガ 最大トナツタトキデアル. 即チ上ノ圖ノ $\triangle ABC$ ト $\triangle ABC'$ トデアル.

カヤウニ 幾何圖形ガ 或ル條件ニ 從ツテ 連續的ニ 變化スルトキハ, ソレニ 關聯シテ 一般ニ 其ノ 幾何學的 量モ 變化シテ, 最大又ハ 最小ノ 場合ヲ 伴フ. 今カラ 此ノ 最大, 最小ヲ 研究スルコトニスル.



例一 矩形 $ABCD$ 内ニ 一點 P ガ 圖ノ ヤウナ 位置ニ アルトキ P ヲ 通ル 直線 デソノ 一角カラ 最モ 小サイ 三角形ヲ 截リ 落スタメニ ハドウスレバヨイカ.

解析 P ヲ 通ル 任意ノ 直線ヲ 引キ AB , AD ト Q, R デ 交ハラシメル. $\triangle AQR$ ヲ 最小ニ シヨウ.



$PR > PQ$ トセヨ.

PR 上ニ PQ ニ 等シク PE ヲ トレ.

E ヲ 通リ BA ニ 平行ナ 直線ト AD トノ 交點ヲ F トシ, FP ヲ 結ビ, 之ヲ 延長シテ AB ト G ニ 於テ 交ハラシメル.

$$\triangle PEF \equiv \triangle PQG$$

故ニ $\triangle AFG < \triangle AQR$

PQ, PR ガ 不等ナラバ 常ニ FG ノ ヤウナ 線分ヲ 引キ AQR ヨリ 小サイ 三角形ヲ 得ル.

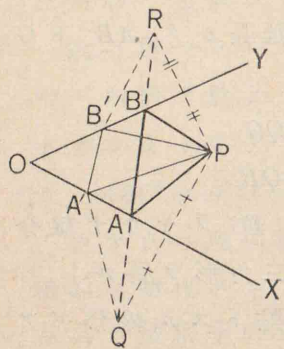
故ニ 求メル 直線ハ P ヲ 中點トスル 線分デアル.

作圖及ビ 證明ハ 上ノ 解析カラ 考ヘヨ.

問題

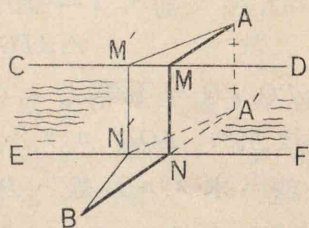
4 中心 O ナル圓外ノ定點 A ヲ通ツテ與圓ニ割線ヲ引キ與圓トノ交點ヲ P, Q トスルトキ $\triangle OPQ$ ヲ最大トセヨ.

5 與角 XOY 内ニ定點 P ガアル. OX, OY 上ニ夫々點 A, B ヲ求メ $PA+AB+BP$ ヲ最小ナラシメヨ.



(4) 與圓ニ内接スル矩形ノ中デ面積ノ最大ナモノヲ求メヨ.

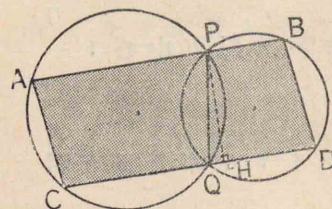
(5) 圖ノヤウニ兩岸ガ平行シテキル川ガアル. 此ノ川ヲ隔テテ A, B 二點ガアル. 今此ノ河岸ニ直角ニ橋 MN ヲ架ケテ橋ヲ渡ツテ A カラ B ニ至ル距離ヲ最小ニセヨ.



6 與角内ノ與點ヲ通り與角ノ二邊ニ終ル線分ヲ一對角線トシ與角ノ頂點ヲ一頂點トスル平行四邊形ノ面積ガ最小トナルヤウニセヨ.

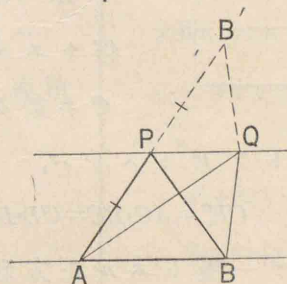
7 定線分 AB 上ニ立ツ等積ノ三角形ノ中デ二等邊三角形ノ周ガ最モ小サイ.

8 二圓ノ交點 P, Q ヲ通ル平行ナ二直線ヲ APB, CQD トスル. 四邊形 $ABDC$ ノ中デ面積ノ最大ナモノヲ求メヨ.



(6) 與ヘラレタ二隣邊ヲ有スル平行四邊形ノ中デ面積ノ最大ナモノハ何カ.

(7) AB ハ與直線 L 上ヲ動ク與長ノ線分デ P ハ直線 L 外ノ與點デア

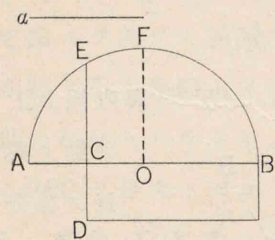


($PA+AB+PB$) ヲ最小ナラシメル AB ノ位置如何.

(8) 與ヘラレタ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ中デ内接圓ノ最大ナモノヲ求メヨ.

注意 内心ノ軌跡ヲ考ヘヨ.

例二 與ヘラレタ周ヲ有スル矩形ノ
中デ面積ノ最大ナモノヲ求メヨ.



解 $\square BD$ ヲ周ガ $4a \text{ cm}$

ノ矩形トスル.

今 $AC=CD$ トシ, AB ヲ直
徑トスル半圓ヲ描イテ

C ニ於ケル AB ノ垂線

トノ交點トヲ E トスレバ,

$$CE^2 = AC \cdot BC = CD \cdot BC$$

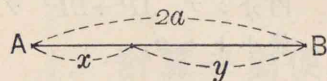
即チ CE ヲ一邊トスル正方形ハ $\square BD$ ト等
積デアル. 矩形ノ周ガ一定デアルカラ二邊
ノ和ハ常ニ AB ニ等シイ.

故ニ AB ヲ二部分ニ分ケテ, ソノ比例中項
ガ最大ノトキ, ソノ二部分ノ包ム矩形ノ面積
ガ最大デアル.

比例中項ノ最大ナトキハ分點ガ中心ト一
致シタトキデアル.

故ニ相隣ル二邊ノ等シイトキ即チ正方形
ノトキ最大ナ面積ヲ有スル.

代數的解法



矩形ノ周ヲ $4a \text{ cm}$ トス
レバ, ソノ半分即チ矩

形ノ相隣ル二邊ノ和ハ $2a \text{ cm}$ デアル.

今矩形ノ一邊ヲ $x \text{ cm}$

トスレバ他ノ邊ハ

$(2a-x) \text{ cm}$ デソノ面積

ヲ $l^2 \text{ cm}^2$ トスルト

$$l^2 = (2a-x)x$$

$$x^2 - 2ax + l^2 = 0$$

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4l^2}}{2}$$

x ハ實數デナケレバ

ナラナイカラ

$$4a^2 - 4l^2 \geq 0 \quad a^2 \geq l^2$$

l^2 即チ面積ハ正方形

a^2 ノトキガ最大デア

ル.

今矩形ノ二邊ヲ夫々

$x \text{ cm}, y \text{ cm}$ トスレバ

$$x + y = 2a$$

故ニ

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4a^2$$

$$\therefore 2xy = 4a^2 - (x^2 + y^2)$$

$$4xy = 4a^2 - (x-y)^2$$

$(x-y)^2$ ハ決シテ負ニ

ナルコトハナイカラ

$$(x-y)^2 = 0$$

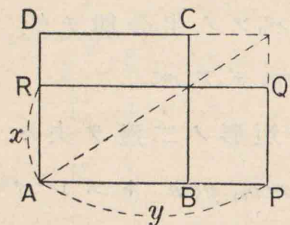
即チ $x=y$ ノトキ

$4xy$ 從ツテ xy (面積)ハ

最大トナル.

即チ正方形ノトキガ最大デアル.

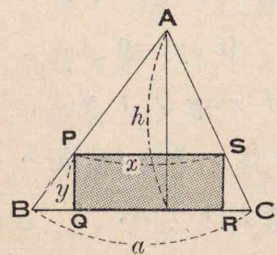
9 一定面積ノ矩形ノ中デ周圍ノ最小ナモノハ正方形デアル。



注意 1 矩形 AQ ト正方形 AC トノ周ヲ比較セヨ。

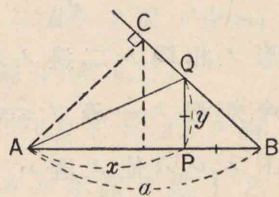
2 $\begin{cases} xy=l^2 \dots\dots \text{與面積} \\ x+y=2p \dots\dots \text{周ノ半} \end{cases}$ カラ p ノ最小ヲ考ヘヨ。

10 與三角形ニ内接スル矩形ノ中デ面積ノ最大ナモノヲ求メヨ。



注意 $\frac{h-y}{h} = \frac{x}{a}$ カラ xy ノ最大ヲ考ヘヨ。

(9) 與線分 AB ヲ P デ内分シテ AP^2+BP^2 ヲ最小トセヨ。

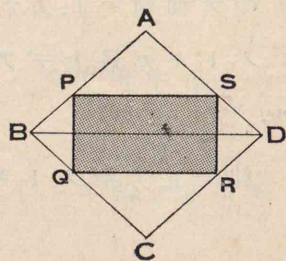


注意

1 $PQ \perp AB, PQ=BP$ トスレバ $AP^2+BP^2=AQ^2$ ノ最小如何。

2 $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=k^2 \end{cases}$ カラ k ノ最小ヲ考ヘヨ。

(10) 菱形 $ABCD$ = 内接スル矩形ヲ $PQRS$ トスレバ $\frac{1}{2}$ (菱形 AC) \leq $\square PR$



附録 計算尺及「ノモグラフ」

1. 計算ヲ簡便ニスル種々ノ工夫

吾々ハ普通數ノ計算ニハ暗算ト筆算トヲ用ヒル。ソシテ唯單ニ整數小數ノ加減乗除、特ニ加減ナラバ算盤ヲ用ヒレバ至極簡便且迅速デアルコトハ世人ノヨク知ツテキルトコロデアル。抑、計算ヲ簡便ニシヨウトスルコトノ工夫ハ人類ノ生活上必然的ニ起ルコトデ、埃及ヤ希臘デハ數ノ計算ヲ容易ニスル爲ニ小石ヲ以テシタトイフコトデアル。カクテ算盤ハ古クカラ全世界ニ擴マツタガ、現時ハ唯東洋ニバカリ用ヒラレ、特ニ日本デハ我が國人ノ手先ノ巧妙ト相俟ツテ非常ナ發達ヲ遂ゲ、實社會ニ必要缺クベカラザル器具トナツタノデアル。

併シナガラ利息算ニ於ケル複利ノ計算トカ、測量ニ於ケル諸計算トカ、更ニ又天體觀測ノ處分法等、世ノ進運ニツレテ算盤ノミデハ計算シキレナイ種々ノ計算ガ起ツテ來タノデアル。對數ノ發見モ實ハ全ク簡便ナ計算ノ工夫ノタメニ外ナラナイ。

現在デハ計算ヲ簡便ニ且迅速ニ行フタメニ、既ニ諸子ガ知ツテキル通り複利表、對數表ヲ始メトシテ、乗除ニ用ヒル乗除表、二乗、三乗、平方根、立方根ヲ求メルタメノ二乗、三乗、平方根、立方根ノ表ナドガアリ、逆數ヲ求メルニハ逆數表モアル。又グラフニヨル換算モ亦計算ヲ簡便ナラシメル一方法デアアル。

計算器トシテハ加算器、金錢登録器ヲ始メ、計算ノ器械モ種々アルケレドモ、使用法モ簡便デ且實用的ナ點ニ於テハ計算尺ニ及ブモノハナイ。實ニ加減ノタメノ算盤ト乗除ノタメノ計算尺トハ活社會ニ必須ナ文明ノ利器トモイフベキモノデアアル。

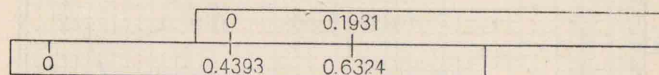
2. 計算尺ノ構造

今 2.75×1.56 ノ計算ヲ對數表ニヨツテ行ヘバ

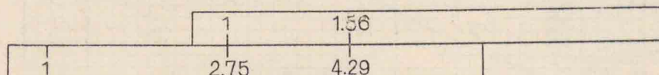
$$\begin{array}{r} \log 2.75 = 0.4393 \\ \log 1.56 = 0.1931 \\ \hline \text{加ヘテ } 0.6324 = \log 4.29 \end{array}$$

トナツテ、求メル答 4.29 ヲ得ルノデアアル。

併シ $0.4393 + 0.1931$ ノ計算ハ筆算ヤ暗算デ求メナクテモ圖ノヤウニスレバ尺度デ簡單ニ求メルコトガ出來ル。



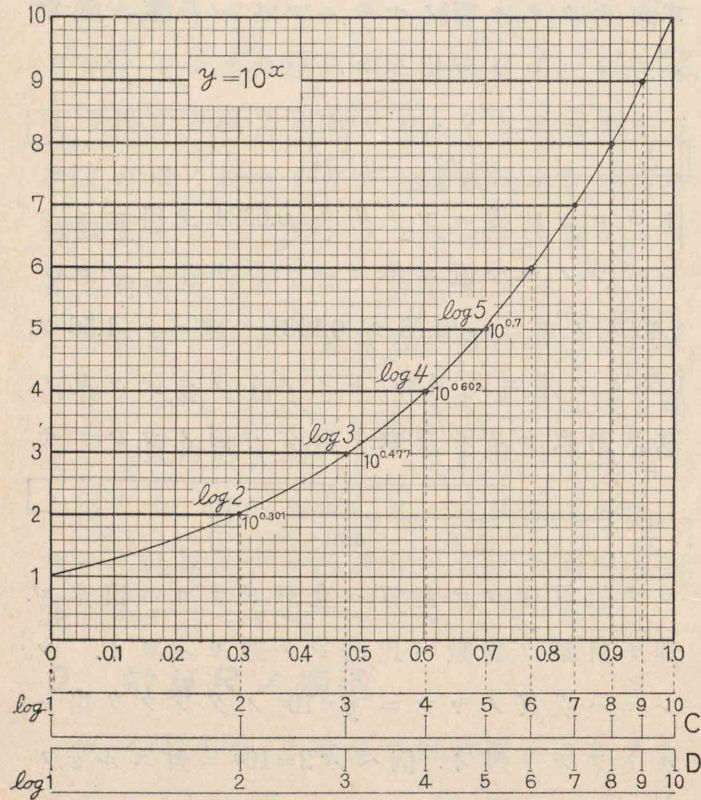
トコロガ斯様ニシテ折角 0.6324 ヲ得テモソレガソノママ直ニ答ニハナラナイ。ソコデ 0.4393 ノ處ニハ 2.75 ヲ、0.1931 ノ處ニハ 1.56 ヲ、0.6324 ノ處ニハ 4.29 トイフヤウニ夫々其ノ數ヲ對數トスル眞數ヲ書ケバ圖ノヤウニナ



ツテ掛算(從ツテ割算)ハ立チドコロニ出來ル。即チ目盛ヲ對數ニ比例シテ施セバヨイ。ソレニハ次頁ノヤウニ $y=10^x$ ノグラフヲ用ヒルトワカリ易イ。例ヘバ $2=10^x$ ニ對スル x ノ値 0.301 ヲ以テ計算尺ノ 2 トスルノデアアル。

斯クシテ出來タモノガ計算尺デアアル。故ニ計算尺デハ對數表ニヨル計算ハ何デモ容易ニ行フコトガ出來ル。

$y=10^x$ ノグラフト計算尺ノ目盛トノ關係.



計算尺ハ前頁ニ述ベタヤウナ目盛ヲ施シ
 タ二ツノ尺度ト目盛ヲ讀ム[カーソル]トイフ
 遊標トカラナル。臺ニナル尺度ヲ臺尺トイ
 ヒ、滑リ動く尺度ヲ滑尺トイフ。目盛ニハ上
 方ノ A, B 尺ト下方ノ C, D 尺ノ二種類ガアル。

問 次ノ表ヲ完成セヨ.

計算尺 上ノ數	1 ノ 點 カ ラ ノ 距 離	左ノ二ツノ欄 ノ數ノ關係
1		
2	0.3010	$\log 2 = 0.3010$
3		
4		
5		

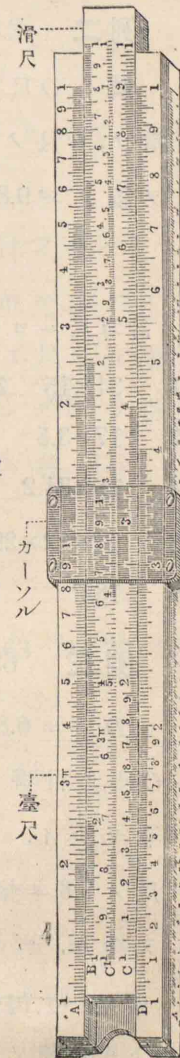
注意 計算尺ノ目盛ヲスルノニ
 $y=10^x$ ノグラフニヨラナイデモ、上ノ
 間カラワカルヤウニ物指ニヨツテ對數
 ノ長サヲトツテモヨイ。

3. 計算尺ニヨル計算

例一 25×36 ヲ計算セヨ.

解 D 尺ノ 2.5 ノ目盛へ、C 尺
 ノ左端ノ 1 ヲ當テ、C 尺ノ目盛ノ
 3.6 ト一致スル D 尺ノ目盛ヲ讀メ
 バ 9 ヲ得ル。 答 900

注意 積ノ位取りハ各因數ノ整數ノ
 桁數ヲ考慮シテ定メルノデアアルガ、又目
 算ニヨツテ定メテモヨイ。



例二 2.45×3.96 ヲ計算セヨ.

解 D尺ノ目盛 2.45 へ, C尺ノ左端ノ 1 ヲ當テ, C尺ノ目盛 3.96 ト一致スル D尺ノ目盛ヲ讀メバ 9.8 ヲ得ル. 答 9.8

問 題

計算尺ニヨツテ次ノ計算ヲナセ. 1-(7)

- | | | | | | | | |
|---|------------------|---|-----------------|-----|------------------|-----|-----------------|
| 1 | 34×15 | 2 | 29×31 | (1) | 21×23 | (2) | 19×34 |
| 3 | 17×3.5 | | | (3) | 180×52 | | |
| 4 | 18×34.2 | | | (4) | 0.18×3.42 | | |
| 5 | 14×22×29 | | | (5) | 17.5×16×34 | | |
| 6 | 182 ² | 7 | 16 ³ | (6) | 234 ² | (7) | 19 ³ |

例三 68×35 ヲ計算セヨ.

D尺ニ6.8ヲトリ, C尺ノ左端ノ 1 ヲ當テテ, C尺ノ目盛 3.5ノ下ヲ見ルト D尺ノ目盛ハ最早ヤナイ. 此ノトキハ C尺ノ右端ノ 10ヲ D尺ノ 6.8ニ揃ヘテ, C尺ノ 3.5ノ下ヲ讀ンデ 2.340 ヲ得ル. 答 2340

注意 二因数ノ積ガ, C尺ヲ左ニ抜キ出シテ讀マレルトキハ積ノ整数部ノ桁數ハ二因数ノ整数部ノ桁數

ノ和ニ等シイ.

例四 8.25:5.5 ヲ計算セヨ.

解 $x = \frac{8.25}{5.5}$ トシ兩邊ノ對數ヲトレバ
 $\log x = \log 8.25 - \log 5.5$

デアルカラ, 8.25÷5.5 ヲ計算尺で行フニハ $\log 8.25 - \log 5.5$ ヲ作レバヨイ. 故ニ D尺ノ 8.25 ト C尺ノ 5.5 トヲ一致サセテ, C尺ノ左端ノ 1ニ相當スル D尺ノ目盛ヲ讀ンデ 1.5 ヲ得ル. 即チ $8.25 \div 5.5 = 1.5$ 答 1.5

問 題

次ノ計算ヲナセ. 8-(19)

- | | | | | | | | |
|----|----------------------------|---|-------|------|----------------------------|-----|-------|
| 8 | 34×54 | 9 | 83×69 | (8) | 44×63 | (9) | 29×87 |
| 10 | 19
24
45
57
85 | | ×26 | (10) | 25
27
41
48
84 | | ×28 |
| 11 | 75÷15 | | | (11) | 104÷13 | | |
| 12 | 550÷22 | | | (12) | 190÷76 | | |
| 13 | 2.85÷86.2 | | | (13) | 39.6÷0.78 | | |
| 14 | 0.328÷17.4 | | | (14) | 9.46÷0.575 | | |

15 $\frac{17 \times 49}{36}$

(15) $\frac{41 \times 85}{53}$

注意 コノ計算ハ(17×49)ヲ計算シテ後36デ割ルノ
ハ手數ヲ多ク要スル。(17÷36)×49 トスルガヨイ。
D尺ノ17トC尺ノ36ト合ハセ、直チニC尺ノ49ノ下ノ
D尺ヲ讀メバヨイ。

16 $\frac{165 \times 23}{72}$

(16) $\frac{123 \times 37}{65}$

17 $\frac{0.105 \times 9300}{8.7}$

(17) $\frac{3400}{1.05 \times 0.093}$

18 $\frac{0.34 \times 0.0093}{0.087}$

(18) $\frac{34 \times 47 \times 68}{95 \times 23}$

19 $\left. \begin{array}{l} 123 \\ 125 \\ 130 \\ 135 \\ 140 \\ 142 \\ 145 \\ 150 \\ 156 \\ 160 \end{array} \right\} \div 18$

(19) $\left. \begin{array}{l} 320 \\ 304 \\ 315 \\ 317 \\ 333 \\ 295 \\ 300 \\ 310 \\ 330 \\ 335 \end{array} \right\} \div 41$

例五 $\sqrt{7}, \sqrt{70}$ ノ近似値ヲ求メヨ。

計算尺ニヨル平方根ノ求メ方ハ最モ簡單
デアツテ、A尺ノ目盛ト一致スルD尺ノ目盛
ヲ讀メバソレガ其ノ數ノ平方根デアル。例
ヘバA尺ノ7ノ目盛ニ[カーソル]ノ線ヲ合ハ
セ、其ノ線ト一致スルD尺ノ目盛ヲ見レバソ
ノ目盛ノ2.64ガ7ノ平方根(正)デアル。

唯ココニ注意スベキハ位取りデアル。

第二學年用開平ノ部デモ述ベタヤウニ、タ
トヒ列數字ハ同一デモ位ガ2桁又ハ2桁ノ
倍數ダケ違フモノデナイト平方根ノ列數字
ハ同一デナイ。ソレ故 $\sqrt{7}$ ト同一ノ列數字
ヲ持ツテキルノハ

$\sqrt{700}, \sqrt{70000}, \sqrt{0.07}, \sqrt{0.0007}$ 等デアルカラ
 $\sqrt{70}, \sqrt{7000}, \sqrt{0.7}, \sqrt{0.007}$ 等ハ計算尺上
 $\sqrt{7}$ ト同一點デハ求メラレナイ。

70ハ7ノ10倍デアルカラA尺ノ右ノ方ノ
7ニ對應スルD尺上ノ點8.37ヲ取ルベキデ
アル。 $\sqrt{70} = 8.37 \dots \dots$ 答

20 $\sqrt{5}, \sqrt{69}$

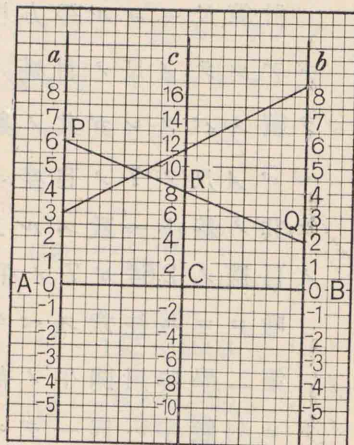
(20) $\sqrt{50}, \sqrt{350}$

21 $\sqrt{6.25}, \sqrt{62.5}$

(21) $\sqrt{0.5}, \sqrt{1000}$

4. 「ノモグラフ」

問1 右ノ圖ニ於テ、
 a, b, c ハ皆平行線デ、 C ハ
 AB ノ中點デアアル。今、
 a, b, c ノ目盛ヲ圖ノヤウニ
 スルト、二數ノ和 $6+2$ 、
 $3+8$ 等ハ常ニ c 上ニ求
 メラレル。其ノ理由ヲ考
 ヘヨ。



問2 圖ニ於テ $c=a-b$
 ヲ求メル方法如何。

二ツノ實數ノ加法及ビ減法ハ上ノヤ
 ウニシテ簡單ニ圖上デ求メラレル。上
 ノ圖デ AB ヲ基線、 A, B, C ヲ基點ト呼ブ。

此ノ圖ニ依ツテ實際ニ二數ノ和ヲ求メル
 ニハ、一々 PQ ノヤウナ直線ヲ引カナイデ、定
 規ヲ置イテ c 上ノ値ヲ讀ミトルダケデヨイ。

斯様ニ一ツノ圖ヲ描イタダケデ同種
 ノ計算ノ答ヲ讀ミ得ルヤウナグラフヲ
 「ノモグラフ」トイフ。

「ノモグラフ」ハ其ノ應用頗ル廣ク、實用數學

ニハ必要缺クベカラザルモノデアアル。

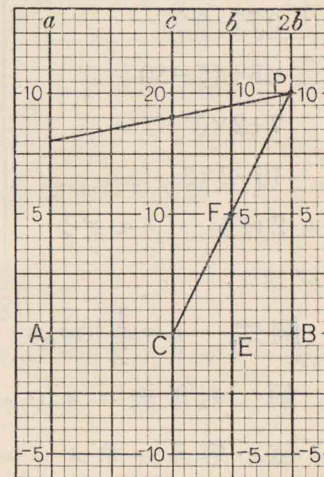
例一 $a+2b=c$ ノ「ノモグラフ」ヲ作レ。

解 前頁ト異ナル所ハ唯 $2b$ ダケデアアル。

$2b$ ヲドウシテ取ルカ

ヲ考ヘネバナラナイ。

其ノ爲ニ a, c 及ビ
 b ツレヲノ目盛ハ前頁
 ノ圖ト同様ニシ唯 E
 ヲ BC ノ中點トシ軸 b
 ヲ點 E ヲ通ツテ a, c
 ニ平行ニ作り、前頁ノ
 b ハ之ヲ $2b$ トスル。



但シ b 及ビ $2b$ ノ目盛ハ a ノ目盛ト同一ニスル。
 軸 b 上ノ任意ノ一點ヲ F トシ、 CF ヲ結ンデ
 CF ノ延長ガ軸 $2b$ ト交ハル點ヲ P トスレバ

$$EF = \frac{1}{2} \times PB \quad \text{デアアルカラ、軸 } b \text{ 上ニ點 } E \text{ カ}$$

ラ或ル數ダケ取レバ、 $2b$ 軸上ニハ其ノ2倍ガ
 直チニ取ラレル。故ニ $a+2b$ ハ軸 c 上デ容
 易ニ求メ得ラレル。

問 題

「ノモグラフ」ニヨツテ次ノ計算ヲナセ. 1—(5)

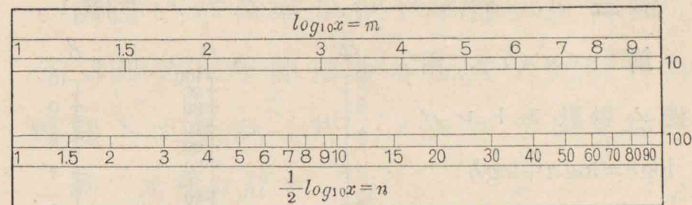
- | | | | |
|---|----------------------|-----|----------------------|
| 1 | 0.5+0.2 | (1) | 55+75 |
| 2 | 0.75-0.25 | (2) | 60-20 |
| 3 | (15+45)-30 | (3) | (0.65-0.25)+0.3 |
| 4 | 7+2×6 | (4) | 100+2×30 |
| 5 | 16-2×3 | (5) | 0.1-0.02×2 |
| 6 | 2a+3b ノノモグラ
フヲ描ケ. | (6) | 2a-3b ノノモグラ
フヲ描ケ. |

例二 $n = \frac{1}{2} \log_{10} x$ ナル目盛ヲ作レ.

解 對數表ニヨレバ x ノ値ニ應ズル $\log x$ ノ値ハ容易ニ求メラレル. 從ツテ $\frac{1}{2} \log x$ モソレカラ簡單ニ求メ得ラレル. 即チ

x	1	1.5	2	3	4
$\log x$	0	0.176	0.301	0.477	0.602
$\frac{1}{2} \log x$	0	0.088	0.151	0.239	0.301

今眞數 x = 對スル $\log x$ 及ビ $\frac{1}{2} \log x$ ノ値ヲ直線上ニ定メ, 其ノ目盛ニハ其ノ眞數ヲ記入スルト,



注意 上ノ圖デ n = 對スル眞數ハ其ノ上ニアル m = 對スル眞數ノ二乗ニ等シイ. 何トナレバ

$m = \log x$ ト等シイ n ヲ對數トスル眞數ヲ x' トスレバ

$$\log x = \frac{1}{2} \log x' \dots\dots\dots(1)$$

茲ニ m ノ目盛ノ數ハ眞數 x ノ値デアリ, n ハ眞數 x' ノ値ガ記シテアル. 故ニ $x^2 = x'$ ヲ得レバヨイノデアル. 然ルニ(1)式カラ

$$\log x = \log \sqrt{x'}$$

故ニ $x = \sqrt{x'}$

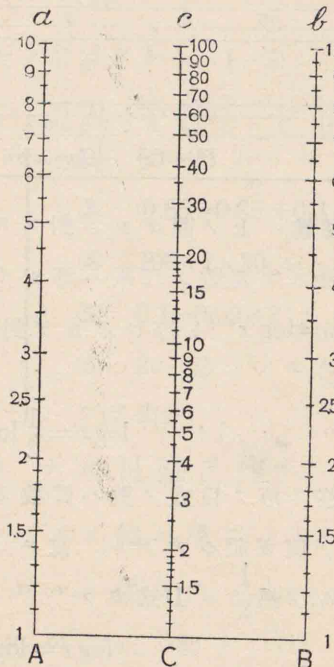
即チ $x^2 = x'$

問3 n ノ目盛デハ10ガ中點デ而モ10カラ右ハ全ク今マデノ目盛ヲ繰返シテアル理由ヲ考ヘヨ.

問4 上ノ圖ニ於テ, $\sqrt{50}, \sqrt{80}$ ノ近似値ヲ讀メ. (整數部分ノミデヨイ)

例三 $c=a \times b$ ナル「ノモグラフ」ヲ作レ.

解 $c=a \times b$ ノ兩邊ノ對數ヲトレバ
 $\log c = \log a + \log b$
 故ニ計算尺ノヤウニ、目盛ヲ對數ニヨツテ行ヒ、而モ記入スル數ハ其ノ眞數ヲ以テスレバ、乘法ハ加法デ行フコトガ出來ル。從ツテ除法ハ減法ニヨツテ求メラレル。



茲ニ c ノ目盛ハ $\log c = \frac{1}{2} \log a$ デナケレバナラナイ。

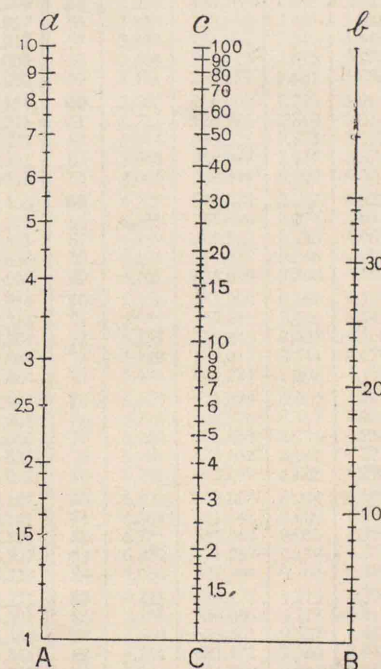
斯様ニシテ上ノヤウナ「ノモグラフ」ヲ得ル。

備考 對數ニ比例スル目盛ヲ作ルニハ對數方眼紙或ハ卷末ニアル半對數方眼紙ヲ用ヒルト便利デアル。

問5 圖ヲ用ヒテ 1.5×4 , 2.5×8 , 3.5×6 , $550 \div 25$, $70 \div 40$, $\sqrt{50}$ 等ヲ求メヨ。

例四 年利率5分、1年毎ノ複利デ、元金 A 圓ヲ n 年間預ケルト、其ノ元利合計幾圓トナルカ。其ノ「ノモグラフ」ヲ描ケ。

解 元利合計ヲ C 圓トスレバ
 $C = A(1 + 0.05)^n$
 兩邊ノ對數ヲ取レバ
 $\log C = \log A + n \log 1.05$
 故ニ右ノヤウナ「ノモグラフ」ヲ得ル。



問題

7 右ノ圖ニ於テ元金10圓、20ケ年ノ元利合計ヲ求メヨ。

(7) 10ケ年ノ元利合計金40圓ヲ得ルタメノ元金ハ何程デアレバヨイカ。

8 元利合計ガ元金ノ2倍トナルニハ凡ソ何ケ年カカルカ。

平方、立方、平方根、立方根ノ表

数	平方	立方	平方根	立方根	数	平方	立方	平方根	立方根
1	1	1	1.000	1.000	51	2,601	132,651	7.141	3.708
2	4	8	1.414	1.259	52	2,704	140,608	7.211	3.732
3	9	27	1.732	1.442	53	2,809	148,877	7.280	3.756
4	16	64	2.000	1.587	54	2,916	157,464	7.348	3.779
5	25	125	2.236	1.709	55	3,025	166,375	7.416	3.802
6	36	216	2.449	1.817	56	3,136	175,616	7.483	3.825
7	49	343	2.645	1.912	57	3,249	185,193	7.549	3.848
8	64	512	2.828	2.000	58	3,364	195,112	7.615	3.870
9	81	729	3.000	2.080	59	3,481	205,379	7.681	3.892
10	100	1,000	3.162	2.154	60	3,600	216,000	7.745	3.914
11	121	1,331	3.316	2.223	61	3,721	226,981	7.810	3.936
12	144	1,728	3.464	2.289	62	3,844	238,328	7.874	3.957
13	169	2,197	3.605	2.351	63	3,969	250,047	7.937	3.979
14	196	2,744	3.741	2.410	64	4,096	262,144	8.000	4.000
15	225	3,375	3.872	2.466	65	4,225	274,625	8.062	4.020
16	256	4,096	4.000	2.519	66	4,356	287,496	8.124	4.041
17	289	4,913	4.123	2.571	67	4,489	300,763	8.185	4.061
18	324	5,832	4.242	2.620	68	4,624	314,432	8.246	4.081
19	361	6,859	4.358	2.668	69	4,761	328,509	8.306	4.101
20	400	8,000	4.472	2.714	70	4,900	343,000	8.366	4.121
21	441	9,261	4.582	2.758	71	5,041	357,911	8.426	4.140
22	484	10,648	4.690	2.802	72	5,184	373,248	8.485	4.160
23	529	12,167	4.795	2.843	73	5,329	389,017	8.544	4.179
24	576	13,824	4.898	2.884	74	5,476	405,224	8.602	4.198
25	625	15,625	5.000	2.924	75	5,625	421,875	8.660	4.217
26	676	17,576	5.099	2.962	76	5,776	438,976	8.717	4.235
27	729	19,683	5.196	3.000	77	5,929	456,533	8.774	4.254
28	784	21,952	5.291	3.036	78	6,084	474,552	8.831	4.272
29	841	24,389	5.385	3.072	79	6,241	493,039	8.888	4.290
30	900	27,000	5.477	3.107	80	6,400	512,000	8.944	4.308
31	961	29,791	5.567	3.141	81	6,561	531,441	9.000	4.326
32	1,024	32,768	5.656	3.174	82	6,724	551,368	9.055	4.344
33	1,089	35,937	5.744	3.207	83	6,889	571,787	9.110	4.362
34	1,156	39,304	5.830	3.239	84	7,056	592,704	9.165	4.379
35	1,225	42,875	5.916	3.271	85	7,225	614,125	9.219	4.396
36	1,296	46,656	6.000	3.301	86	7,396	636,056	9.273	4.414
37	1,369	50,653	6.082	3.332	87	7,569	658,503	9.327	4.431
38	1,444	54,872	6.164	3.361	88	7,744	681,472	9.380	4.447
39	1,521	59,319	6.244	3.391	89	7,921	704,969	9.433	4.464
40	1,600	64,000	6.324	3.419	90	8,100	729,000	9.486	4.481
41	1,681	68,921	6.403	3.448	91	8,281	753,571	9.539	4.497
42	1,764	74,088	6.480	3.476	92	8,464	778,688	9.591	4.514
43	1,849	79,507	6.557	3.503	93	8,649	804,357	9.643	4.530
44	1,936	85,184	6.633	3.530	94	8,836	830,584	9.695	4.546
45	2,025	91,125	6.708	3.556	95	9,025	857,375	9.746	4.562
46	2,116	97,336	6.782	3.583	96	9,216	884,736	9.797	4.578
47	2,209	103,823	6.855	3.608	97	9,409	912,673	9.848	4.594
48	2,304	110,592	6.928	3.634	98	9,604	941,192	9.899	4.610
49	2,401	117,649	7.000	3.659	99	9,801	970,299	9.949	4.626
50	2,500	125,000	7.071	3.684	100	10,000	1,000,000	10.000	4.641

平方根表

數	平方根	數	平方根	數	平方根	數	平方根	數	平方根
101	10.050	151	12.288	201	14.177	251	15.843	301	17.349
102	10.100	152	12.329	202	14.213	252	15.875	302	17.378
103	10.149	153	12.369	203	14.248	253	15.906	303	17.407
104	10.193	154	12.410	204	14.283	254	15.937	304	17.436
105	10.247	155	12.450	205	14.318	255	15.969	305	17.464
106	10.296	156	12.490	206	14.353	256	16.000	306	17.493
107	10.344	157	12.530	207	14.387	257	16.031	307	17.521
108	10.392	158	12.570	208	14.422	258	16.062	308	17.550
109	10.440	159	12.610	209	14.457	259	16.093	309	17.578
110	10.488	160	12.649	210	14.491	260	16.125	310	17.607
111	10.536	161	12.689	211	14.526	261	16.155	311	17.635
112	10.583	162	12.728	212	14.560	262	16.186	312	17.664
113	10.630	163	12.767	213	14.595	263	16.217	313	17.692
114	10.677	164	12.806	214	14.629	264	16.248	314	17.720
115	10.724	165	12.845	215	14.663	265	16.279	315	17.748
116	10.770	166	12.884	216	14.697	266	16.310	316	17.776
117	10.817	167	12.923	217	14.731	267	16.340	317	17.804
118	10.863	168	12.961	218	14.765	268	16.371	318	17.833
119	10.909	169	13.000	219	14.799	269	16.401	319	17.861
120	10.954	170	13.038	220	14.832	270	16.432	320	17.889
121	11.000	171	13.077	221	14.866	271	16.462	321	17.916
122	11.045	172	13.115	222	14.900	272	16.492	322	17.944
123	11.091	173	13.153	223	14.933	273	16.523	323	17.972
124	11.136	174	13.191	224	14.967	274	16.553	324	18.000
125	11.180	175	13.229	225	15.000	275	16.583	325	18.028
126	11.225	176	13.266	226	15.033	276	16.613	326	18.055
127	11.269	177	13.304	227	15.067	277	16.643	327	18.083
128	11.314	178	13.342	228	15.100	278	16.673	328	18.111
129	11.358	179	13.379	229	15.133	279	16.703	329	18.138
130	11.402	180	13.416	230	15.166	280	16.733	330	18.166
131	11.446	181	13.454	231	15.199	281	16.763	331	18.193
132	11.489	182	13.491	232	15.232	282	16.793	332	18.221
133	11.533	183	13.528	233	15.264	283	16.823	333	18.248
134	11.576	184	13.565	234	15.297	284	16.852	334	18.276
135	11.619	185	13.601	235	15.330	285	16.882	335	18.303
136	11.662	186	13.638	236	15.362	286	16.912	336	18.330
137	11.705	187	13.675	237	15.395	287	16.941	337	18.358
138	11.747	188	13.711	238	15.427	288	16.971	338	18.385
139	11.790	189	13.748	239	15.460	289	17.000	339	18.412
140	11.832	190	13.784	240	15.492	290	17.029	340	18.439
141	11.874	191	13.820	241	15.524	291	17.059	341	18.466
142	11.916	192	13.856	242	15.556	292	17.088	342	18.493
143	11.958	193	13.892	243	15.588	293	17.117	343	18.520
144	12.000	194	13.928	244	15.620	294	17.146	344	18.547
145	12.042	195	13.964	245	15.652	295	17.176	345	18.574
146	12.083	196	14.000	246	15.684	296	17.205	346	18.601
147	12.124	197	14.036	247	15.716	297	17.234	347	18.628
148	12.166	198	14.071	248	15.748	298	17.263	348	18.655
149	12.207	199	14.107	249	15.780	299	17.292	349	18.682
150	12.247	200	14.142	250	15.811	300	17.321	350	18.708

平方根表

數	平方根	數	平方根	數	平方根	數	平方根	數	平方根
351	18.735	401	20.025	451	21.237	501	22.383	551	23.473
352	18.762	402	20.050	452	21.260	502	22.405	552	23.495
353	18.788	403	20.075	453	21.284	503	22.428	553	23.516
354	18.815	404	20.100	454	21.307	504	22.450	554	23.537
355	18.841	405	20.125	455	21.331	505	22.472	555	23.558
356	18.868	406	20.149	456	21.354	506	22.494	556	23.580
357	18.894	407	20.174	457	21.378	507	22.517	557	23.601
358	18.921	408	20.199	458	21.401	508	22.539	558	23.622
359	18.947	409	20.224	459	21.424	509	22.561	559	23.643
360	18.974	410	20.248	460	21.448	510	22.583	560	23.664
361	19.000	411	20.273	461	21.471	511	22.605	561	23.685
362	19.026	412	20.298	462	21.494	512	22.627	562	23.707
363	19.053	413	20.322	463	21.517	513	22.650	563	23.728
364	19.079	414	20.347	464	21.541	514	22.672	564	23.749
365	19.105	415	20.372	465	21.564	515	22.694	565	23.770
366	19.131	416	20.396	466	21.587	516	22.716	566	23.791
367	19.157	417	20.421	467	21.610	517	22.738	567	23.812
368	19.183	418	20.445	468	21.633	518	22.760	568	23.833
369	19.209	419	20.469	469	21.656	519	22.782	569	23.854
370	19.235	420	20.494	470	21.679	520	22.804	570	23.875
371	19.261	421	20.518	471	21.703	521	22.825	571	23.896
372	19.287	422	20.543	472	21.726	522	22.847	572	23.917
373	19.313	423	20.567	473	21.749	523	22.869	573	23.937
374	19.339	424	20.591	474	21.772	524	22.891	574	23.958
375	19.365	425	20.616	475	21.794	525	22.913	575	23.979
376	19.391	426	20.640	476	21.817	526	22.935	576	24.000
377	19.416	427	20.664	477	21.840	527	22.956	577	24.021
378	19.442	428	20.688	478	21.863	528	22.978	578	24.042
379	19.468	429	20.712	479	21.886	529	23.000	579	24.062
380	19.494	430	20.736	480	21.909	530	23.022	580	24.083
381	19.519	431	20.761	481	21.932	531	23.043	581	24.104
382	19.545	432	20.785	482	21.954	532	23.065	582	24.125
383	19.570	433	20.809	483	21.977	533	23.087	583	24.145
384	19.596	434	20.833	484	22.000	534	23.108	584	24.166
385	19.621	435	20.857	485	22.023	535	23.130	585	24.187
386	19.647	436	20.881	486	22.045	536	23.152	586	24.207
387	19.672	437	20.905	487	22.068	537	23.173	587	24.228
388	19.698	438	20.928	488	22.091	538	23.195	588	24.249
389	19.723	439	20.952	489	22.113	539	23.216	589	24.269
390	19.748	440	20.976	490	22.136	540	23.238	590	24.290
391	19.774	441	21.000	491	22.159	541	23.259	591	24.310
392	19.799	442	21.024	492	22.181	542	23.281	592	24.331
393	19.824	443	21.048	493	22.204	543	23.302	593	24.352
394	19.849	444	21.071	494	22.226	544	23.324	594	24.372
395	19.875	445	21.095	495	22.249	545	23.345	595	24.393
396	19.900	446	21.119	496	22.271	546	23.367	596	24.413
397	19.925	447	21.142	497	22.293	547	23.388	597	24.434
398	19.950	448	21.166	498	22.316	548	23.409	598	24.454
399	19.975	449	21.190	499	22.338	549	23.431	599	24.474
400	20.000	450	21.213	500	22.361	550	23.452	600	24.495

平方根表

數	平方根	數	平方根	數	平方根	數	平方根	數	平方根
601	24.515	651	25.515	701	26.476	751	27.404	801	28.302
602	24.536	652	25.534	702	26.495	752	27.423	802	28.320
603	24.556	653	25.554	703	26.514	753	27.441	803	28.337
604	24.576	654	25.573	704	26.533	754	27.459	804	28.355
605	24.597	655	25.593	705	26.552	755	27.477	805	28.373
606	24.617	656	25.612	706	26.571	756	27.495	806	28.390
607	24.637	657	25.632	707	26.589	757	27.514	807	28.408
608	24.658	658	25.652	708	26.608	758	27.532	808	28.425
609	24.678	659	25.671	709	26.627	759	27.550	809	28.443
610	24.698	660	25.690	710	26.646	760	27.568	810	28.460
611	24.718	661	25.710	711	26.665	761	27.586	811	28.478
612	24.739	662	25.729	712	26.683	762	27.604	812	28.496
613	24.759	663	25.749	713	26.702	763	27.622	813	28.513
614	24.779	664	25.768	714	26.721	764	27.641	814	28.531
615	24.799	665	25.788	715	26.739	765	27.659	815	28.548
616	24.819	666	25.807	716	26.758	766	27.677	816	28.566
617	24.839	667	25.826	717	26.777	767	27.695	817	28.583
618	24.860	668	25.846	718	26.796	768	27.713	818	28.601
619	24.880	669	25.865	719	26.814	769	27.731	819	28.618
620	24.900	670	25.884	720	26.833	770	27.749	820	28.636
621	24.920	671	25.904	721	26.851	771	27.767	821	28.653
622	24.940	672	25.923	722	26.870	772	27.785	822	28.671
623	24.960	673	25.942	723	26.889	773	27.803	823	28.688
624	24.980	674	25.962	724	26.907	774	27.821	824	28.705
625	25.000	675	25.981	725	26.926	775	27.839	825	28.723
626	25.020	676	26.000	726	26.944	776	27.857	826	28.740
627	25.040	677	26.019	727	26.963	777	27.875	827	28.758
628	25.060	678	26.038	728	26.981	778	27.893	828	28.775
629	25.080	679	26.058	729	27.000	779	27.911	829	28.792
630	25.100	680	26.077	730	27.019	780	27.928	830	28.810
631	25.120	681	26.096	731	27.037	781	27.946	831	28.827
632	25.140	682	26.115	732	27.055	782	27.964	832	28.844
633	25.159	683	26.134	733	27.074	783	27.982	833	28.862
634	25.179	684	26.153	734	27.092	784	28.000	834	28.879
635	25.199	685	26.173	735	27.111	785	28.018	835	28.896
636	25.219	686	26.192	736	27.129	786	28.036	836	28.914
637	25.239	687	26.211	737	27.148	787	28.054	837	28.931
638	25.259	688	26.230	738	27.166	788	28.071	838	28.948
639	25.278	689	26.249	739	27.185	789	28.089	839	28.965
640	25.298	690	26.268	740	27.203	790	28.107	840	28.983
641	25.318	691	26.287	741	27.221	791	28.125	841	29.000
642	25.338	692	26.306	742	27.240	792	28.142	842	29.017
643	25.357	693	26.325	743	27.258	793	28.160	843	29.034
644	25.377	694	26.344	744	27.276	794	28.178	844	29.052
645	25.397	695	26.363	745	27.295	795	28.196	845	29.069
646	25.41	696	26.382	746	27.313	796	28.213	846	29.086
647	25.436	697	26.401	747	27.331	797	28.231	847	29.103
648	25.456	698	26.420	748	27.350	798	28.249	848	29.120
649	25.475	699	26.439	749	27.368	799	28.267	849	29.138
650	25.495	700	26.458	750	27.386	800	28.284	850	29.155

平方根表

數	平方根	數	平方根	數	平方根	數	平方根	數	平方根
851	29.172	901	30.017	951	30.838	1001	31.639	1051	32.419
852	29.189	902	30.033	952	30.854	1002	31.654	1052	32.435
853	29.206	903	30.050	953	30.871	1003	31.670	1053	32.450
854	29.223	904	30.067	954	30.887	1004	31.686	1054	32.465
855	29.240	905	30.083	955	30.903	1005	31.702	1055	32.481
856	29.257	906	30.100	956	30.919	1006	31.718	1056	32.496
857	29.275	907	30.116	957	30.935	1007	31.733	1057	32.512
858	29.292	908	30.133	958	30.952	1008	31.749	1058	32.527
859	29.309	909	30.150	959	30.968	1009	31.765	1059	32.542
860	29.326	910	30.166	960	30.984	1010	31.780	1060	32.558
861	29.343	911	30.183	961	31.000	1011	31.796	1061	32.573
862	29.360	912	30.199	962	31.016	1012	31.812	1062	32.588
863	29.377	913	30.216	963	31.032	1013	31.828	1063	32.604
864	29.394	914	30.232	964	31.048	1014	31.843	1064	32.619
865	29.411	915	30.249	965	31.064	1015	31.859	1065	32.634
866	29.428	916	30.265	966	31.081	1016	31.875	1066	32.650
867	29.445	917	30.282	967	31.097	1017	31.890	1067	32.665
868	29.462	918	30.299	968	31.113	1018	31.906	1068	32.680
869	29.479	919	30.315	969	31.129	1019	31.922	1069	32.696
870	29.496	920	30.332	970	31.145	1020	31.937	1070	32.711
871	29.513	921	30.348	971	31.161	1021	31.953	1071	32.726
872	29.530	922	30.364	972	31.177	1022	31.969	1072	32.741
873	29.547	923	30.381	973	31.193	1023	31.984	1073	32.757
874	29.563	924	30.397	974	31.209	1024	32.000	1074	32.772
875	29.580	925	30.414	975	31.225	1025	32.016	1075	32.787
876	29.597	926	30.430	976	31.241	1026	32.031	1076	32.802
877	29.614	927	30.447	977	31.257	1027	32.047	1077	32.818
878	29.631	928	30.463	978	31.273	1028	32.062	1078	32.833
879	29.648	929	30.480	979	31.289	1029	32.078	1079	32.848
880	29.665	930	30.496	980	31.305	1030	32.094	1080	32.863
881	29.682	931	30.512	981	31.321	1031	32.109	1081	32.879
882	29.698	932	30.529	982	31.337	1032	32.125	1082	32.894
883	29.715	933	30.545	983	31.353	1033	32.140	1083	32.909
884	29.732	934	30.561	984	31.369	1034	32.156	1084	32.924
885	29.749	935	30.578	985	31.385	1035	32.171	1085	32.939
886	29.766	936	30.594	986	31.401	1036	32.187	1086	32.955
887	29.783	937	30.610	987	31.417	1037	32.202	1087	32.970
888	29.799	938	30.627	988	31.432	1038	32.218	1088	32.985
889	29.816	939	30.643	989	31.448	1039	32.234	1089	33.000
890	29.833	940	30.659	990	31.464	1040	32.249	1090	33.015
891	29.850	941	30.676	991	31.480	1041	32.265	1091	33.030
892	29.866	942	30.692	992	31.496	1042	32.280	1092	33.045
893	29.883	943	30.708	993	31.512	1043	32.296	1093	33.061
894	29.900	944	30.725	994	31.528	1044	32.311	1094	33.076
895	29.917	945	30.741	995	31.544	1045	32.326	1095	33.091
896	29.933	946	30.757	996	31.559	1046	32.342	1096	33.106
897	29.950	947	30.773	997	31.575	1047	32.357	1097	33.121
898	29.967	948	30.790	998	31.591	1048	32.373	1098	33.136
899	29.983	949	30.806	999	31.607	1049	32.388	1099	33.151
900	30.000	950	30.822	1000	31.623	1050	32.404	1100	33.166

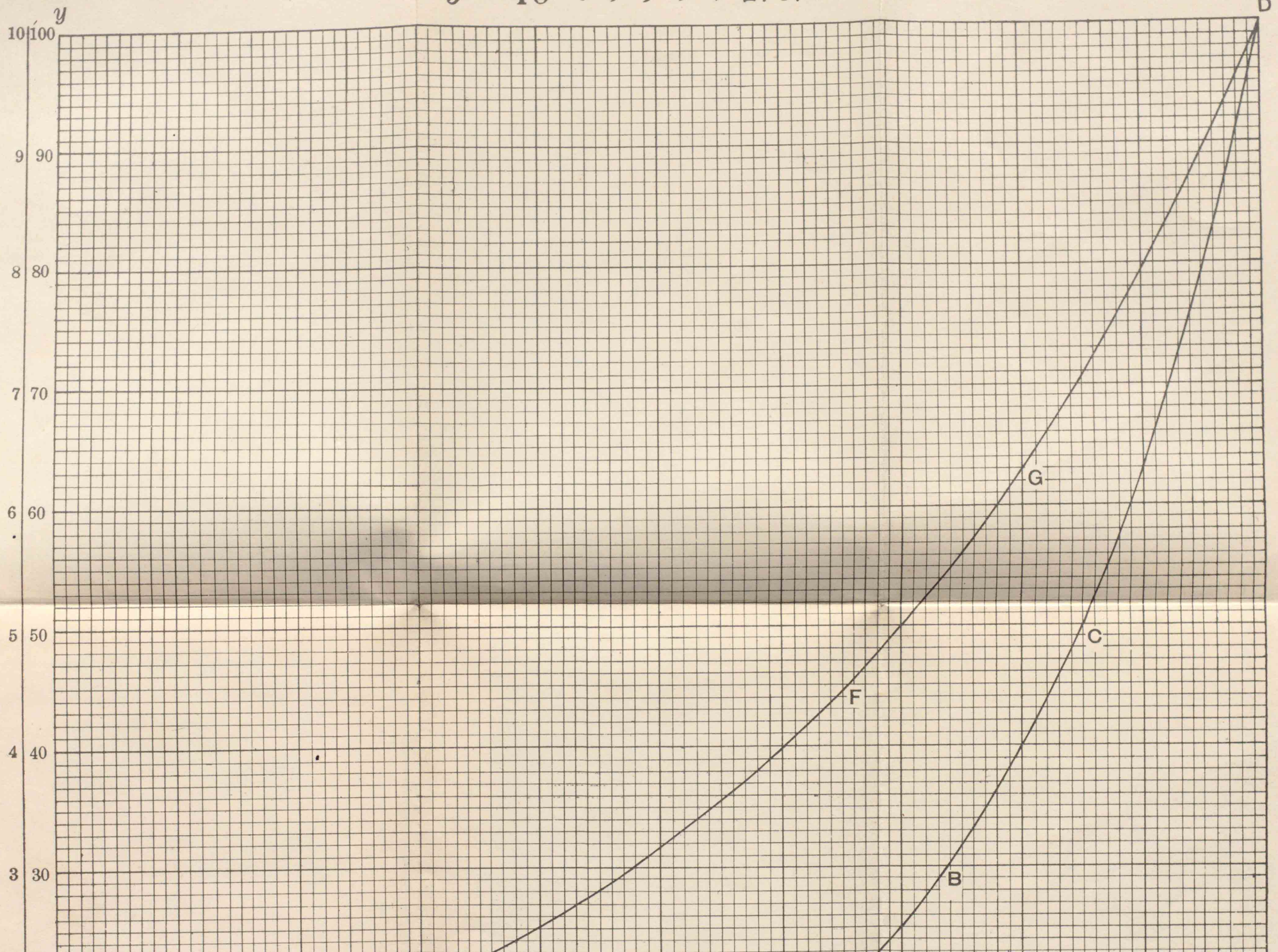
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
9 2.8	50	6990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067
9 2.8	51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
3 5.6	52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
7 8.4	53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
3 11.2	54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
5 14.0	55	404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
4 16.8	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
3 19.6	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
2 22.4	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
1 25.2	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
5 2.4	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
5 2.4	61	852	860	868	875	882	889	896	903	910	917
0 4.8	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
5 7.2	63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
0 9.6	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
5 12.0	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
0 14.4	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
5 16.8	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
0 19.2	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
5 21.6	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
1 1.9	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
1 1.9	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
2 3.8	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
3 5.7	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
4 7.6	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
5 9.5	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
3 11.4	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
7 13.3	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
3 15.2	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
0 17.1	79	976	982	987	993	998	*004	*009	*015	*020	*025
5 1.5	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
5 1.5	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
2 3.0	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
3 4.5	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
4 6.0	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
5 7.5	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
0 9.0	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
3 10.5	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
2 12.0	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
3 13.5	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
1 15.0	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
2 11.1	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
2 11.1	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
1 2.2	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
3 3.3	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
3 4.4	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
0 5.5	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
2 6.6	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
1 7.7	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
3 8.8	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996
3 9.9	數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

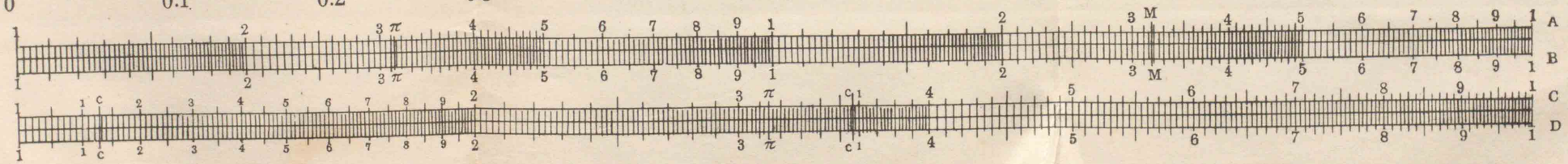
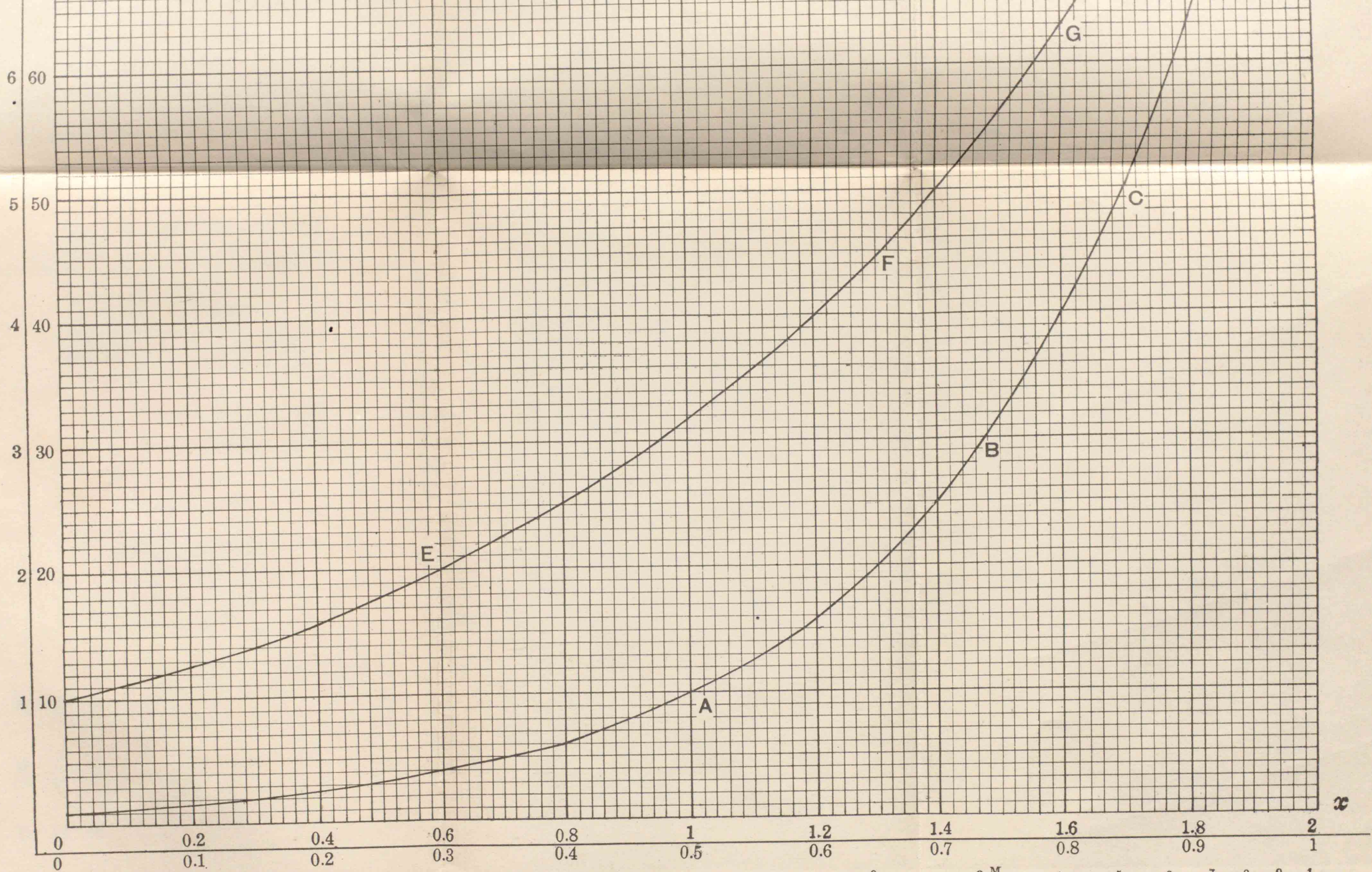
數ノ對數表

比 例 部 分	數										數	數														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
1	4.3	4.2	4.1	3.9	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.1	2.9	2.8	50	6990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067	
2	8.6	8.4	8.2	7.8	7.6	7.4	7.2	7.0	6.8	6.6	6.4	6.2	5.8	5.6	51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	
3	12.9	12.6	12.3	11.7	11.4	11.1	10.8	10.5	10.2	9.9	9.6	9.3	8.7	8.4	52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	
4	17.2	16.8	16.4	15.6	15.2	14.8	14.4	14.0	13.6	13.2	12.8	12.4	11.6	11.2	53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	
5	21.5	21.0	20.5	19.5	19.0	18.5	18.0	17.5	17.0	16.5	16.0	15.5	14.5	14.0	54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	
6	25.8	25.2	24.6	23.4	22.8	22.2	21.6	21.0	20.4	19.8	19.2	18.6	17.4	16.8	55	404	412	419	427	435	443	451	459	466	474	
7	30.1	29.4	28.7	27.3	26.6	25.9	25.2	24.5	23.8	23.1	22.4	21.7	20.3	19.6	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551	
8	34.4	33.6	32.8	31.2	30.4	29.6	28.8	28.0	27.2	26.4	25.6	24.8	23.2	22.4	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627	
9	38.7	37.8	36.9	35.1	34.2	33.3	32.4	31.5	30.6	29.7	28.8	27.9	26.1	25.2	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701	
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	1	2.7	2.6	2.5	2.4	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	2	5.4	5.2	5.0	4.8	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106	3	8.1	7.8	7.5	7.2	61	854	860	868	875	882	889	896	903	910	917
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	4	10.8	10.4	10.0	9.6	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	5	13.5	13.0	12.5	12.0	63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014	6	16.2	15.6	15.0	14.4	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	7	18.9	18.2	17.5	16.8	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	8	21.6	20.8	20.0	19.2	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	9	24.3	23.4	22.5	21.6	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	1	2.3	2.2	2.1	1.9	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	2	4.6	4.4	4.2	3.8	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	3	6.9	6.6	6.3	5.7	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	4	9.2	8.8	8.4	7.6	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	5	11.5	11.0	10.5	9.5	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	6	13.8	13.2	12.6	11.4	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
25	979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133	7	16.1	15.4	14.7	13.3	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	8	18.4	17.6	16.8	15.2	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	9	20.7	19.8	18.9	17.1	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	1	1.8	1.7	1.6	1.5	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	2	3.6	3.4	3.2	3.0	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	3	5.4	5.1	4.8	4.5	79	976	982	987	993	998	*004	*009	*015	*020	*025
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038	4	7.2	6.8	6.4	6.0	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	1	1.4	1.3	1.2	1.1	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	2	2.8	2.6	2.4	2.2	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	3	4.2	3.9	3.6	3.3	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	4	5.6	5.2	4.8	4.4	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	5	9.0	8.5	8.0	7.5	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	6	10.8	10.2	9.6	9.0	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	7	12.6	11.9	11.2	10.5	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010	8	14.4	13.6	12.8	12.0	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	9	16.2	15.3	14.4	13.5	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	1	1.4	1.3	1.2	1.1	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	2	2.8	2.6	2.4	2.2	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	3	4.2	3.9	3.6	3.3	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	4	5.6	5.2	4.8	4.4	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	5	7.0	6.5	6.0	5.5	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	6	8.4	7.8	7.2	6.6	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	7	9.8	9.1	8.4	7.7	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	8	11.2	10.4	9.6	8.8	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	9	12.6	11.7	10.8	9.9	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					

數對數表

$y = 10^x$ ノグラフト計算尺





文 部 省 檢 定 済

昭和八年十二月十三日 中學校數學科用

昭和八年 九 月 廿 五 日 印 刷
昭和八年 九 月 三 十 日 發 行
昭和八年 十 二 月 五 日 訂 正 再 版 印 刷
昭和八年 十 二 月 十 日 訂 正 再 版 發 行

作 者 本 書 ノ 插 繪 フ 無 斷 轉 載 ス ル
者 ハ 著 作 權 法 ニ 依 リ 處 斷 セ

有 力 協 助 會

中 等 教 育 新 制 數 學 教 科 書
第 四 學 年 用

定 價 金 壹 圓

著 作 者 廣 島 高 等 師 範 學 校 附 屬 中 學 校
數 學 研 究 會
代 表 者 會 田 梅 太 郎

發 行 兼 者 鈴 木 政 雄
印 刷 者 東 京 市 神 田 區 神 保 町 二 五 ノ 一

發 行 者 鈴 木 常 松
大 阪 市 東 區 博 勞 町 五 丁 目 五 十 六 番 地

發 行 所	東 京 市 神 田 區 神 保 町 二 五 ノ 一 振 替 口 座 東 京 二 六 四 四 番	修 文 館
	大 阪 市 東 區 博 勞 町 五 丁 目 五 十 六 振 替 口 座 大 阪 四 七 一 番	

交 進 社 印 行

漢文書寫法

中華書局發行

	姓名	年	月	日
學號	班級	科別	姓名	年
月	日	姓名	年	月
日	姓名	年	月	日
姓名	年	月	日	姓名
年	月	日	姓名	年
月	日	姓名	年	月
日	姓名	年	月	日



漢文書

法

中華書局





広島大学図書

0130449550

