新選國文讀本

文部省檢定濟

昭和十年二月七日　中學校數學科用

新式

幾何教科書

東京帝國大學名譽教授　理學博士

高木貞治

著

（二·三學年用）

東京開成館

緒　言

本書ハ改正數學教授要目ニ準據シテ,中學校ニ於ケル基本課程用幾何及ビ三角法ノ教科書トシテ編纂シタモノデアル。本書ヲ編纂スルニ當リ著者ハ改正教授要目ノ精神ト數學教育ノ理想トニヨリ,教育ノ實際ヲ參酌シ特ニ次ノ方針ニヨツタ。

1. 記述ハ出來ルダケ平易ニシ生徒ノ理解シ易イヤウニシタ。
2. 從來ノ數學的系統ニ捉ハレズ"易ヨリ難ヘ"ノ鐵則ニ從ツテ教材ヲ配列シタ。
3. 生徒ヲシテ證明ノ必要ヲ感ゼシメ得ナイ事項ハコレヲ公理的ニ取扱フコトニシタ。

以上ノ方針ニヨリ,多數ノ圖ヲ挿入シテ理解ニ便ナルヤウニシ,又幾何學上ノ用語ハ必要ニ應ジテ教授スルヤウニシ,平易ナ練習問題ヲ比較的多クシテ定理ノ理解ト應用トヲ完カラシメルヤウニシタ。

尙全篇ヲ一學年用及ビ二·三學年用ニ分チ,一學年用ニ於テハ圖形ノ直觀認識ヲ主トシ,小學校ニ於ケル既習ノ知識ヲ整理シ,進ンデ公理的ナル諸定理ヲ實驗·實測ニヨツテ明確ニシ,且ツソレヨリ類推サレ

ル若干ノ證明問題ヲ提出シテ,論證幾何ニ入ル準備ヲナサシメルヤウニシタ。又作圖題及ビ求積ハソノ完全ナ證明ヲ後學年ニ讓ツタガ,自然ニ取扱ヒ得ル限リ隨所ニコレヲ編入シタ。

二·三學年用ニ於テハ一學年用ニ於テ授ケタ公理的諸定理ヲ基礎トシテ論證幾何ニ進ミ,常ニ直觀幾何ト緊密ナ連絡ヲ保ツヤウニシタ。尙,幾何學ノ本質タル論理的構成ニハ細心ノ注意ヲ拂ツタガ,生徒ノ心理發達ノ程度ニ適應セシメ,且ツ代數トノ連絡ヲ考慮シ,例へばぴたごらすノ定理ノ擴張ヤ作圖題ノ吟味等ハ深入セズ增課教材ニヨツテ完成スルコトトシタ。又軌跡ノ觀念ハ極メテ必要デアルカラ一學年用ニコレヲ授ケ基礎的定理ヲ提出シタガ,ソノ證明ハ又增課教材ニ讓ツタ。

上記本書編纂ノ趣旨ハ實際教授者諸賢ノ同意ヲ得ルモノト信ズルガ,更ニ使用上ノ忠言ニヨリ版ヲ重ネテ完璧タラシメタイト思フ。

昭和九年十二月

著者識ス

目　次

第 1 章　幾何學的證明

第 2 章　三角形ノ合同

第 3 章　作圖題

第 4 章　平行線

第 5 章　三角形ノ內角ノ和

第 16 章 三角形ノ邊上ノ比例線

第 17 章 相 似 形

第 18 章 面 積 ノ 比

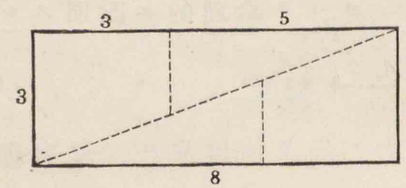
第 19 章 鋭角ノ三角函數

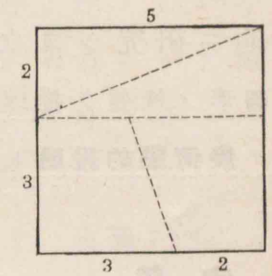
第 20 章 圓ノ周及ビ面積

第 1 章　幾何學的證明

1. 幾何學ノ研究法

次ノ圖ヲ觀察スルト, 3×8 ト 5×5 トガ等シイヤウニ思ハレル。(ドコニ誤リガアルカヲ考ヘヨ)





又分度器ヲ用ヒテ三角形ノ三ツノ內角ヲ測リ,ソノ和ヲ求メレバ $180°$ ニ近イ値ヲ得ルガ,正シク $180°$ ニナルコトハ稀デアル。

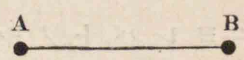
カヤウニ圖形ノ性質ヲ研究スルノニ觀察ニヨレバ,上ノヤウナ誤リニ陷ルコトガアリ,又器具ヲ用ヒテ實驗スレバ,精密ニ行ツテモ多少ノ誤差ノ生ズルコトハ免レナイ。ソノ上實驗觀察ハ箇々ノ圖形ニツイテ行フモノデアルカラ,ソノ結果ヲ直ニ一般ノ場合ニ當テハメルコトハ出來ナイ。然ルニ圖形ニハ

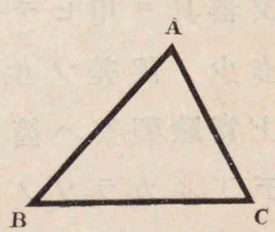
種々様々ノモノガアリ,又同一ノ形デモ大小無數ニアルカラ,スベテノ場合ニツイテ悉ク實驗觀察スルコトハ到底ナシ得ナイコトデアル。ソレデコレカラハ幾何學ヲ研究スルニハ實驗觀察ノミニヨラズ推理ニヨツテ論理的ニ研究シヨウトスル。

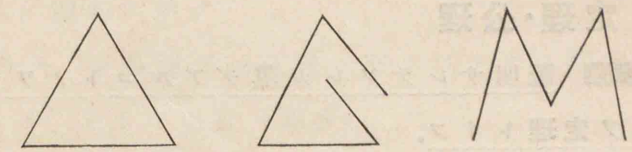
圖形ノ性質ヲ推理ニヨツテ論理的ニ說明スルコトヲ**幾何學的證明**トイフ。

2. 定義

例ヘバ"二點ABノ距離"トイフ場合ニ,點ニ大キサガアルト,A點トB點トノドノ部分カラノ距離ヲ考ヘレバヨイカ曖昧トナル。又線ニツイテモ同樣デ,三角形ABCノ面積トイツテモ線ニ幅ガアレバソノ大キサハ判然シナイ。又"三角形トイフノハ三ツノ角ヲ有スル形デアル"トイヘバ次ノヤウナ形ハイヅレモ三角形デアルトイハネバナラヌ。







幾何學的證明デハ記述ヲ嚴密ニシナケレバ,事柄ガ曖昧ニナリ又誤解ヲ招ク恐レガアル。ソレニハ用語ノ意味ヲ明カニシテ置カナケレバナラナイ。用語ノ意味ヲ正シク定メタモノヲソノ**定義**トイフ。

幾何學デハ點·線·面ヲ次ノヤウニ定義スル。

點トハ位置ダケアツテ大キサノナイモノデアル。

線トハ長サダケアツテ太サノナイモノデアル。

面トハ廣サダケアツテ厚サノナイモノデアル。

コレマデ新シイ用語ハイツモソノ意味ヲ說明シテカラ用ヒルヤウニシタガ,ソノ說明ガ定義デアル。ソレデ今後ハ特ニ必要ノナイ限リハ既ニ學ンダモノハ別ニ定義ヲ掲ゲナイデ用ヒルコトニスル。

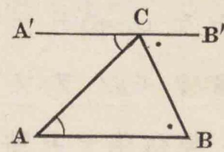
問　次ノ定義ヲ述ベヨ。

[1] 角	[2] 對頂角	[3] 鋭角
[4] 直角	[5] 鈍角	[6] 平面
[7] 餘角	[8] 補角	

3. 定理・公理

定義 證明サレテソレガ眞デアルコトノワカル事柄ヲ**定理**トイフ。

既ニ學ンダヤウニ“**三角形ノ三ツノ內角ノ和ハ2直角ニ等シイ**”ハ定理デアル。コレガ眞デアルコトヲ知ル方法ハ色々アルガ,次ノヤウニ推論スレバ一般ニ眞デアルコトガワカル。



任意ノ三角形ABCヲ畫キ,ソノ頂點Cヲ通リ,對邊ABニ平行線A'CB'ヲ引クト

$$\left.\begin{array}{l}\angle A'CA \text{ ト } \angle A\\ \angle B'CB \text{ ト } \angle B\end{array}\right\}\text{ トハ錯角デアルカラ}$$

$$\angle A'CA=\angle A,\qquad \angle B'CB=\angle B \qquad (1)$$

$$\therefore\quad \angle A'CA+\angle B'CB=\angle A+\angle B \qquad (2)$$

從ツテ上ノ式ノ兩邊ニ $\angle C$ ヲ加ヘレバ

$$\angle A'CA+\angle B'CB+\angle ACB=\angle A+\angle B+\angle C$$

卽チ $\angle A'CB'=\angle A+\angle B+\angle C \qquad (3)$

トコロガA'CB'ハ一直線デアルカラ $\angle A'CB'$ ハ平角デアル。

$$\therefore\quad \angle A'CB'=2R\llcorner \qquad (4)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\angle A+\angle B+\angle C=2R\llcorner} \qquad (5)$$

コノヤウニ定理ガ眞デアル理由ヲ述ベタモノヲソノ**證明**トイフ。

上ノ證明ニ於テ

(1)ハ“平行線ガ一直線ト交ハッテナス錯角ハ相等シイ”トイフ事實ニ基キ,

(2),(3)ハ“等シイ量ニ等シイ量ヲ加ヘタ量ハ又等シイ”トイフ事實ニ基キ,

(4)ハ“平角ハ2直角ニ等シイ”トイフ事實ニ基キ,

(5)ハ“同ジ量ニ等シイ二ツノ量ハ等シイ”トイフ事實ニ基イタノデアル。

カヤウニ定理ヲ證明スルニハ,既ニ眞デアルト認メラレタ事實ヲ基礎トシテ推理スルノデアルガ,ソノ基礎トナル事實モ亦他ノ眞デアルト認メラレタ事實ニヨッテ認メルノデアル。然シカヤウニシテ根本ノ事柄マデ悉ク證明スルコトハ出來ナイ。ソコデ若干ノ事柄ハ證明ナシニ認メル外ハナイ。

定義 證明シナイデ眞デアルト認メラレル事柄ヲ**公理**トイフ。

例ヘバ上ノ證明ノ(2),(3)及ビ(5)ノ推理ニ用ヒタ事柄ハコレマデ算術ヤ代數デヨク用ヒタ公理デアル。コノヤウナ公理ヲ**普通公理**トイフ。

問 上ニ述ベタ以外ノ普通公理ヲ述ベヨ。

4. 幾何學公理

圖形ニ關スル公理ヲ特ニ**幾何學公理**トイフ．例ヘバ次ノヤウナモノデアル。

[1] **圖形ハソノ形大キサヲ變ヘナイデソノ位置ヲ變ヘルコトガ出來ル。**

[2] **全ク重ネ合ハスコトノ出來ル圖形ハ大キサガ相等シイ。**

[3] **二點ヲ通ル直線ハ唯一ツダケアル。**

[4] **二點ヲ兩端トスル最モ短イ線ハ線分デアル。**

[5] **線分ノ中點ハ唯一ツダケアル。**

[6] **角ノ二等分線ハ唯一ツダケアル。**

[7] **一點ヲ通リ一直線ニ垂直ナ直線ハ唯一ツダケアル。**

[8] **一直線外ノ一點ヲ通リソノ直線ニ平行ナ直線ハ唯一ツダケアル。**

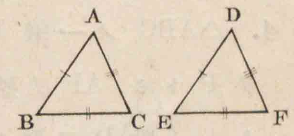
第2章　三角形ノ合同

5. 三角形ノ合同

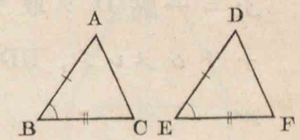
問　合同ノ定義ヲ述ベヨ。

三角形ノ合同ニ關スル基本ノ定理ハ次ノ三ツデ，コレ等ハ既ニ學ベル所デアル。

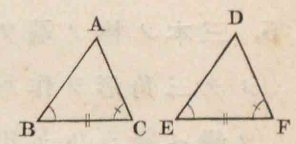
定理 1. **三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。**



定理 2. **二邊トソノ夾角トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。**

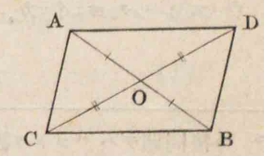


定理 3. **一邊トソノ兩端ノ角トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。**

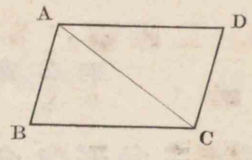


問題 (1)

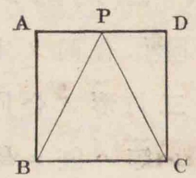
1. 右ノ圖ニ於テ，AO=OB, CO=OD デアレバ，AD=CB, AC=DB デアルコトヲ證明セヨ。



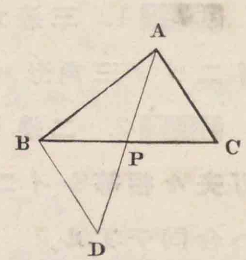
2. 右ノ圖ニ於テ, AB＝DC, AD＝BC デアレバ ∠B＝∠D デアルコトヲ證明セヨ。*



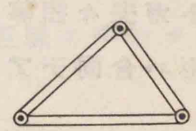
3. 四角形 ABCD ガ正方形デアッテ, P ガ AD ノ中點デアルトスレバ PB＝PC デアルコトヲ證セヨ。*

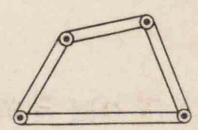


4. △ABC ノ一邊 BC ノ中點ヲ P トシ, AP ヲ延長シソノ上ニ一點 D ヲ取リ, DP＝AP ナラシメレバ, BD＝CA デアル。



5. 三本ノ棒ノ端ヲ次ノ圖ニ示スヤウニ目釘デ止メテ三角形ヲ作ルトキ, ソノ形ヲ變ヘルコトガ出來ルカ。四角形デハドウカ。又コノ四角形ノ形ヲ不變ニ保ツニハドウスレバヨイカ。





* 今後問題デハ "コトヲ證明セヨ" "コトヲ證セヨ" 等ノ語ヲ省クコトガ多イ。

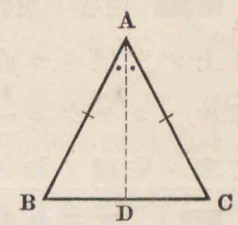
6. 二等邊三角形

問 1. 二等邊三角形·正三角形ノ定義ヲ述ベヨ。

定義 二等邊三角形ノ等邊デナイ邊ヲソノ**底邊**又ハ**底**トイヒ, コレニ對スル角ヲソノ**頂角**, 頂角ノ頂點ヲソノ**頂點**, 底邊ノ兩端ニアル角ヲソノ**底角**トイフ。

定理 4. **二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ.**

題意 △ABC ニ於テ
AB＝AC　デアレバ
∠B＝∠C　デアル。



證明 頂角 A ノ二等分線ヲ引キ, 底邊 BC トノ交點ヲ D トスル。

△ABD ト △ACD トニ於テ

AB＝AC,　∠BAD＝∠CAD,　AD ハ共通

∴　△ABD≡△ACD

∴　∠B＝∠C

上ノ定理ノ題意ヲ見ルト, 次ノ三部分カラ成ル。

△ABC	ニ於テ	……………………………(1)
AB＝AC	デアレバ	……………………………(2)
∠B＝∠C	デアル	……………………………(3)

(1) ハ**前書**デ, (2) ハ前書ニ示ス圖形ニ於テモシサウデアレバトイフ條件デ,コレヲ**假設**トイヒ, (3) ハ前ノ條件カラ得ラレル結論デ,コレヲ**終結**トイフ。

スベテ定理ハ前書・假設・終結ノ三ツノ部分カラ成ル。ソレデ定理ヲ證明スル場合ニハ適當ナ圖形ヲ書キ,題意ヲ述ベテコノ三ツノ部分ヲ明カニスルノデアル。

注意　前書ハ假設ノ中ニ入レテ述ベテモヨイ。

上ノ定理カラ直ニ次ノ定理ヲ導キ出スコトガ出來ル。カヤウニ一ツノ定理カラ容易ニ知ルコトノ出來ル定理ヲ初メノ定理ノ**系**トイフ。

系 1.　**正三角形ノ三ツノ角ハ相等シイ。**

系 2.　**二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ニ垂直デ,且ツコレヲ二等分スル。**

定理 5.　**二角ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル。**

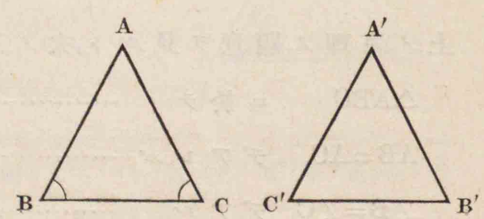
題意　$\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle B=\angle C$

デアレバ

$AB=AC$

デアル。



證明　$\triangle ABC$ ヲ裏返シタ圖形ヲ $\triangle A'C'B'$ トスル。

即チ　$\angle A=\angle A'$,　$\angle B=\angle B'$,　$\angle C=\angle C'$ トスル。

サウスルト　$\angle B=\angle C$ デアルカラ

$$\angle B=\angle C', \qquad \angle C=\angle B'$$

故ニ $C'B'$ ヲ BC 上ニ重ネ, A' ト A トガ BC ノ同ジ側ニ來ルヤウニスレバ, $C'A'$ ハ BA 上ニ, $B'A'$ ハ CA 上ニ重ナリ, $\triangle A'C'B'$ ハ $\triangle ABC$ 上ニ全ク重ナル。

$$\therefore \quad AB=A'C'$$

トコロガ　$A'C'=AC$

$$\therefore \quad AB=AC$$

系　**三ツノ角ガ相等シイ三角形ハ正三角形デアル。**

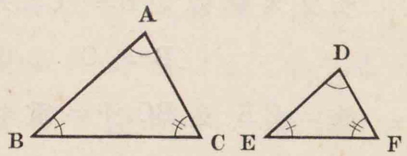
定理4ト定理5トヲ比較スルニ,一ツノ定理ハ他ノ定理ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタモノデアル。カヤウナ定理ヲ互ニ**逆**デアルトイフ。

或定理ノ逆ハ眞デアルコトト眞デナイコトトガアルカラ,或定理ガ成立ツカラトイツテ直ニソノ逆モ眞デアルト斷定スルコトハ出來ナイ。例ヘバ

「二ツノ三角形ガ合同デアレバ,ソノ一ツノ三角形ノ三ツノ角ハ夫々他ノ三角形ノ三ツノ角ニ等シイ」

トイフ定理ハ正シイ。然シソノ逆,即チ

「一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ夫々他ノ三角形ノ三ツノ角ニ等シケレバ,コノ二ツノ三角形ハ合同デアル」



トイフノハ常ニ眞デアルトイフコトハ出來ナイ。故ニ或定理ノ逆ガ眞デアルコトヲ主張スルニハ,別ニコレヲ證明セネバナラヌ。

問 2. 次ノ逆ヲ述べ,ソノ眞否ヲイヘ。

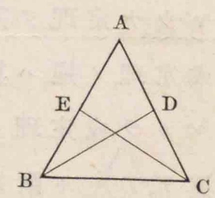
[1] 二月十一日ハ紀元節デアル。

[2] 日曜日ハ休日デアル。

問題 (2)

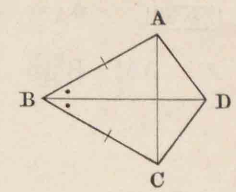
1. 二等邊三角形ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結ブ線分ハ底邊ニ垂直デ且ツ頂角ヲ二等分スル。

2. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端カラ對邊へ引イタ二ツノ中線ハ相等シイ。



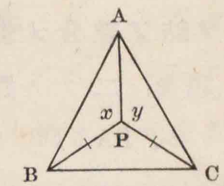
定義 三角形ノ頂點トソノ對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲソノ邊ニ對スル**中線**トイフ。

3. 次ノ圖ニ於テ, BA=BC 及ビ ∠DBA=∠DBC デアレバ, △DAC ハ二等邊三角形デアル。



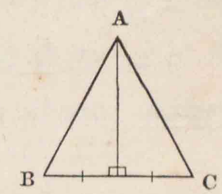
4. 前問3ニ於テ, AC ト BD トハ如何ニ交ハルカ。

5. 圖ニ於テ PB=PC, $\angle x=\angle y$ デアル。コノ圖ニ於テ相等シイ角ヲ列擧シ,ソノ等シイコトヲ證明セヨ。



6. 前問5ニ於テ, △ABC ハ二等邊三角形デアル。

7. 三角形ノ一ツノ中線ガソレニ對スル邊ニ垂直ナラバ,ソノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

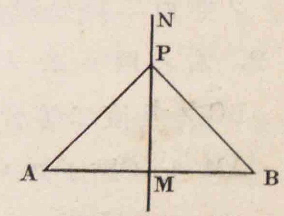


7. 垂直二等分線

問 垂直二等分線ノ定義ヲ述べヨ。

定理 6. 一ツノ線分ノ垂直二等分線上ノ點ハ,ソノ兩端カラ等距離ニアル。

題意 線分 AB ノ中點ヲ M トシ, P ヲ AB ノ垂直二等分線 NM 上ノ點トスレバ, PA=PB デアル。



證明 $\triangle PAM$ ト $\triangle PBM$ トニ於テ

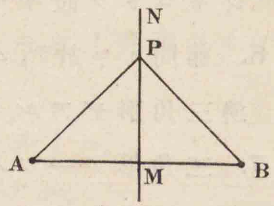
$AM=BM$, $\angle PMA=\angle PMB$, PM ハ共通

$\therefore\ \triangle PAM\equiv\triangle PBM$

$\therefore\ PA=PB$

定理 7. 二ツノ點カラ等距離ニアル點ハ,ソノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ニアル。

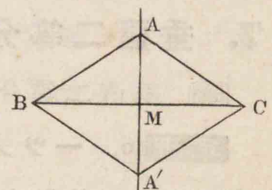
題意 二ツノ點ヲ A, B トシ, $PA=PB$ トスレバ, P ハ線分 AB ノ垂直二等分線 NM 上ニアル。



證明 (生徒各自ニ試ミヨ)

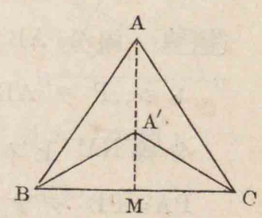
問題 (3)

1. 底邊 BC ヲ共有スル二ツノ二等邊三角形 ABC ト $A'BC$ トノ頂點 A, A' ヲ通ル直線ハ BC ノ垂直二等分線デアル。



2. 右ノ圖ニ於テ, AM ヲ線分 BC ノ垂直二等分線トシ, A' ヲ AM 上ノ點トスレバ

$\angle ABA'=\angle ACA'$



第 3 章 作圖題

8. 作圖ノ公準

定義 與ヘラレタ條件ニ適合スル圖形ヲ畫ク幾何學的方法ヲ求メル問題ヲ**作圖題**トイヒ,コレヲ實際ニ畫クコトヲ**作圖**トイフ。

コレマデハ作圖ニ色々ノ器具ヲ用ヒタガ,今後ハ定木トこんぱすトダケヲ用ヒルモノトスル。定木ハ線分ヲ引クタメ,こんぱすハ圓ヲ畫クタメニ用ヒルモノデ,諸種ノ作圖ハ次ノ二ツノ方法ヲ反復シテ行フモノデアル。

[1] **二定點ヲ通ル直線ヲ引クコト。**

從ッテ**線分ヲ任意ノ長サニ延長スルコト。**(定木)

[2] **一定點ヲ中心トシ與ヘラレタ長サノ半徑ノ圓ヲ畫クコト。**

從ッテ**與ヘラレタ長サヲ他ニ移スコト。**(こんぱす)

コレヲ**作圖ノ公準**トイフ。

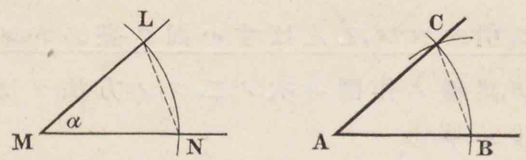
注意 作圖ニカヤウナ制限ヲツケルノハ,作圖題ハ製圖スルトイフヨリモ寧ロ作圖法ヲ案出スルタメノ思考力ヲ練ルコトヲ主眼トスルカラデアル。

9. 基本ノ作圖題

作圖題ヲ解クニハ,先ヅソノ題意ヲ考ヘ,次ニ作圖法ヲ述ベ,最後ニソノ作圖ノ正シイコトヲ證明スルノデアル。

次ニ示ス五ツノ作圖題ハ既ニ學ンダモノデアルガ,基本ノ作圖デ將來屢〻應用サレルモノデアルカラ,ソノ幾何學的解法ヲ研究ショウ。

作圖題 1. **與ヘラレタ角ニ等シイ角ヲ畫ケ。**



題意 $\angle\alpha$ ヲ與ヘラレタ角トシ,コレニ等シイ角ヲ畫ク。

作圖 與ヘラレタ $\angle\alpha$ ノ頂點ヲ中心トシ任意ノ半徑ノ圓弧デソノ二邊ヲ夫々 N, L デ切ル。

次ニ線分 AB ヲ引キ,ソノ一端 A ヲ中心トシ前ト同ジ半徑デ弧 CB ヲ畫ク。

NL ニ等シク BC ヲ取リ, AC ヲ結ブ。

然ラバ $\angle$CAB ハ求メル角デアル。

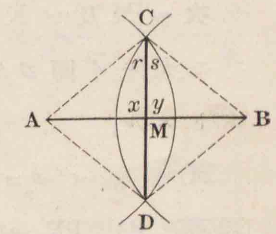
證明 NL, BC ヲ結ベバ, $\triangle$MNL, $\triangle$ABC ニ於テ

$$ML=AC, \quad MN=AB, \quad NL=BC$$

$$\therefore \quad \triangle MNL \equiv \triangle ABC$$

$$\therefore \quad \angle LMN=\angle CAB=\angle\alpha$$

作圖題 2. **與ヘラレタ線分ノ垂直二等分線ヲ畫ケ。**



題意 線分 AB ヲ與ヘラレタ線分トシ,コノ垂直二等分線ヲ求メル。

作圖 A, B ヲ中心トシ, AB ノ半分ヨリモ大キイ同ジ半徑ノ圓弧ヲ畫キ,ソノ交點ヲ C, D トシ, C, D ヲ通ル直線ヲ引ケバ, CD ハ求メル垂直二等分線デアル。

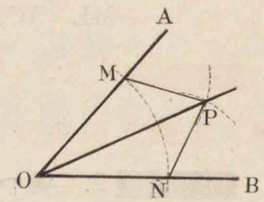
證明 CA, CB; DA, DB ヲ結ベバ

$$CA=CB, \quad DA=DB$$

故ニ $\triangle$CAB, $\triangle$DAB ハ底邊 AB ヲ共有スル二等邊三角形デアルカラ, CD ハ AB ノ垂直二等分線デアル。 [14 頁問題 (3) ノ 1]

注意 本題ハ與ヘラレタ線分ノ中點ヲ求メル作圖ト見ルコトモ出來ル。

作圖題 3. 與ヘラレタ角ノ二等分線ヲ引ケ。



題意 ∠AOB ヲ與ヘラレタ角トシ,ソノ二等分線ヲ引ク。

作圖 O ヲ中心トシ,任意ノ半徑デ弧 MN ヲ書キ, ∠AOB ノ二邊 OA, OB ト夫々 M, N デ交ハラシメル。次ニ M 及ビ N ヲ中心トシ,線分 MN ノ半分ヨリモ大キイ同ジ半徑ノ圓弧ヲ書キ,ソノ交點ヲ P トスル。

PO ヲ結ベバ,コレガ求メル二等分線デアル。

證明 PM, PN ヲ結ベバ, △MOP, △NOP ニ於テ

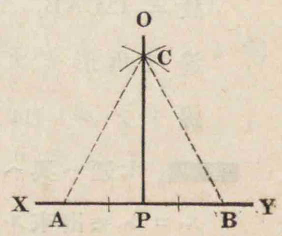
MO=NO, PM=PN, PO ハ共通

∴ △MOP≡△NOP

∴ ∠MOP=∠NOP

即チ PO ハ ∠AOB ノ二等分線デアル。

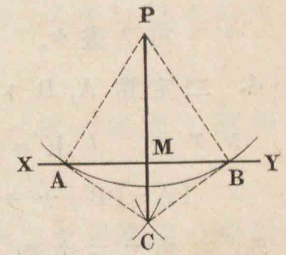
作圖題 4. 與ヘラレタ直線上ノ一點ニ於テ,ソノ直線ニ垂線ヲ引ケ。



題意 直線 XY ヲ與ヘラレタ直線トシ, XY 上ノ一點 P ニ於テ XY ニ垂線 OP ヲ引ク。

注意 XPY ヲ P ヲ頂點トスル平角ト考ヘ作圖題3ニ準ジテ作圖シ,ソレヲ證明セヨ。

作圖題 5. 與ヘラレタ直線外ノ一點カラコノ直線ニ垂線ヲ引ケ。



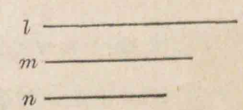
題意 直線 XY ヲ與ヘラレタ直線トシ,ソノ外ノ一點 P カラコノ直線ニ垂線 PM ヲ引ク。

作圖 P ヲ中心トシ,直線 XY ト交ハルヤウナ圓弧ヲ書キ, XY トノ交點ヲ A, B トスル。A ヲ中心トシ AB ノ半分ヨリモ大キイ半徑ノ圓弧ヲ書キ,同ジ半徑デ B ヲ中心トシテ書イタ圓弧ト C デ交ハラシメル。PC ヲ結ブ線分ト XY トノ交點ヲ M トスレバ, PM ハ求メル垂線デアル。

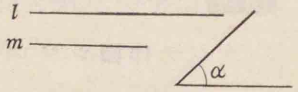
證明 (生徒各自ニ試ミヨ)

問題 (4)

1. 右ノ圖ノヤウナ三ツノ線分 l, m, n ヲ三邊トスル三角形ヲ作レ。

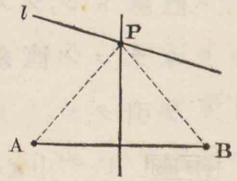


2. 右ノ圖ノヤウナ二邊ト夾角トヲ有スル三角形ヲ畫ケ。



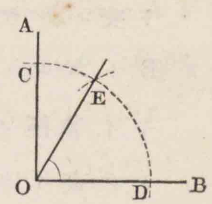
3. 二ツノ角α, βヲ與ヘテ,ソノ和又ハソノ差ニ等シイ角ヲ畫ケ。

4. 二定點A, Bト定直線lトガアル。l上ニ一點Pヲ求メ PA=PB ナラシメヨ。



5. 直角ヲ三等分セヨ。

注意 ∠AOBヲ直角トシ, Oヲ中心トシテ任意ノ半徑デ弧CDヲ畫キ二邊OA, OBト夫々C, Dデ交ハラシメル。Dヲ中心トシテ前ト同ジ半徑デ弧ヲ畫キ,弧CDトEデ交ハラシメ, EOヲ結ベバ ∠EOD=60° デアルコトニ注意セヨ。



6. 與ヘラレタ線分ABヲ一邊トシテ,ソノ上ニ正方形ヲ畫ケ。

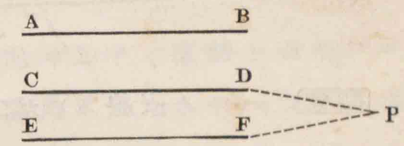
第4章 平行線

10. 平行線

問 1. 平行線ノ定義ヲ述ベヨ。又平行線ノ引キ方ニツイテ述ベヨ。

平行線ノ公理(6頁[8])ヲ用ヒレバ,次ノ定理ガ證明出來ル。

定理 8. **同一ノ直線ニ平行ナ二ツノ直線ハ平行デアル。**



題意 AB∥CD, AB∥EF デアレバ CD∥EF デアル。

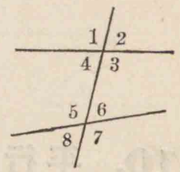
證明 CDトEFトガ平行デナクテ,一點Pデ交ハルトスレバ,一點Pヲ通リ直線ABニ平行ナ二ツノ直線ガ引ケルコトニナツテ平行線ノ公理ニ背クコトニナル。依ツテCDトEFトハ交ハラナイ。故ニ

CD∥EF

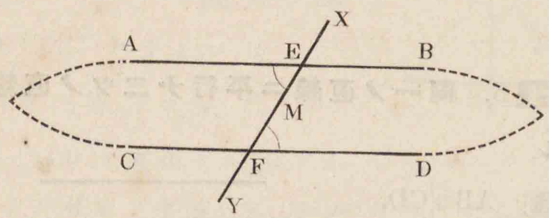
注意 コノ證明ノヤウニ終結ガ眞デナイト假定スレバ,不合理ナ結果トナルカラ,終結ハ眞デナケレバナラナイト

断定スル推論ノ仕方ヲ歸謬法(キビウ)トイフ。

問 2. 右ノ圖ニ於ケル八ツノ角ノ中,ドノ二ツノ角ガ同位角,錯角,同傍内角ノ關係ニアルカ。



定理 9. 一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交ハッテ作ル一組ノ錯角ガ等シケレバ,コノ二直線ハ平行デアル。



題意 一ツノ直線 XY ガ二直線 AB, CD ト夫々 E, F デ交ハルトキ

$\angle AEF = \angle EFD$ デアレバ

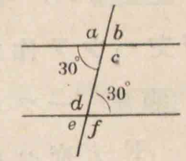
$AB \parallel CD$ デアル。

證明 線分 EF ノ中點 M ヲ中心トシ,コノ圖形ヲ半廻轉シ E ガ F ノモトノ位置ニ來ルヤウニスレバ F ハ E ノモトノ位置ニ來ル。ソシテ $\angle AEF = \angle EFD$ デアルカラ AB ハ CD ノモトノ位置ニ,CD ハ AB ノモトノ位置ニ來ル。依ッテモシ AB, CD ガ平行デナク例ヘバ EB, FD ノ延

長ガ交ハルトスレバ,又 EA, FC ノ延長モ交ハラネバナラナイ。卽チ二ツノ直線ガ二點デ交ハルコトニナル。コレハ不合理デアル。

故ニ $AB \parallel CD$

問 3. 右ノ圖ノヤウニ一組ノ錯角ガ 30° デアルトキ,他ノ六ツノ角ハ各何度カ。



系 1. 一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交ハッテ作ル一組ノ同位角ガ等シケレバ,コノ二直線ハ平行デアル。

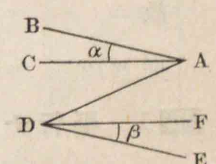
系 2. 一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交ハッテ作ル一組ノ同傍内角ガ補角ヲナストキハ,コノ二直線ハ平行デアル。

問題 (5)

1. 平行線ノ一ツニ交ハル直線ハ必ズ他ニモ交ハル。(歸謬法ニヨッテ證明セヨ)

2. 同一ノ直線ニ垂直ナ二ツノ直線ハ平行デアル。

3. 右ノ圖ニ於テ $\angle BAD = \angle ADE$, $\angle\alpha = \angle\beta$ デアレバ, $CA \parallel DF$



4. 與ヘラレタ直線外ノ一點ヲ通リ,コノ直線ニ平行線ヲ引ケ。

11. 平行線ノ性質

定理 10. 平行ナニツノ直線ニ他ノ一ツノ直線ガ交ハツテ作ル錯角ハ相等シイ。 [定理9ノ逆]

題意 一ツノ直線XYガ二直線AB, CDト夫々E, Fデ交ハルトキ

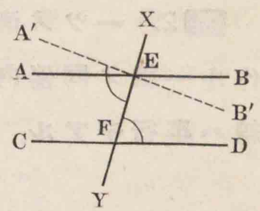
AB∥CD デアレバ

$\angle AEF=\angle EFD$, $\angle BEF=\angle EFC$ デアル。

證明 今假リニ $\angle AEF=\angle EFD$ デナイトシ

$\angle A'EF=\angle EFD$

トナルヤウナ直線A'EB'ヲ引ケバ



A'B'∥CD [定理9]

サウスルト假設ニヨリ AB∥CD デアルカラ, 一點Eヲ通ツテ直線CDニ平行ナ二ツノ直線ガ引ケルコトニナル。コレハ公理ニ背ク。

故ニ $\angle AEF=\angle EFD$

從ツテ $\angle BEF=\angle EFC$

系 1. 平行ナニツノ直線ニ他ノ一ツノ直線ガ交ハツテ作ル同位角ハ相等シイ。

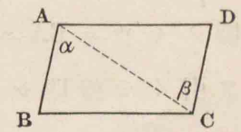
系 2. 平行ナニツノ直線ニ他ノ一ツノ直線ガ交ハツテ作ル同傍内角ハ補角ヲナス。

注意 コノ系1, 系2ハ夫々定理9ノ系1, 系2ノ逆デアル。

問題 (6)

1. 平行線ノ一ツニ垂直ニ交ハル直線ハ他ニモ垂直ニ交ハル。

2. 圖ニ於テ, AB=DC デ $\angle\alpha$ ガ $\angle\beta$ ニ等シケレバ AD∥BC デアル。

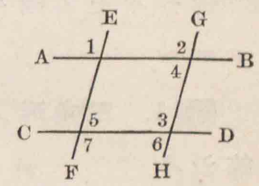


3. 前問2ノ圖ニ於テ, AB=DC, AD=BC デアレバ AB∥DC, AD∥BC デアル。

4. 圖ニ於テ, AB∥CD, EF∥GH デアレバ

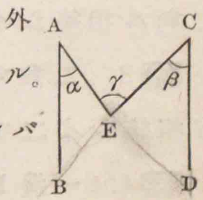
[1] $\angle 1=\angle 3$ [2] $\angle 4=\angle 5$

[3] $\angle 2=\angle 7$



5. 二等邊三角形ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行デアル。

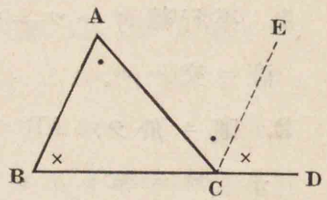
6. 右ノ圖ニ於テ, AB∥CD デアレバ $\angle\gamma=\angle\alpha+\angle\beta$ デアル。



第 5 章　三角形ノ内角ノ和

12. 三角形ノ内角ノ和

定理 11. **三角形ノ三ツノ内角ノ和ハ 2 直角ニ等シイ。**



コレハ4頁デ證明シタガ, 圖ノヤウニ BA ニ平行ニ CE ヲ引イテ證明シテ見ヨ。

定義 三角形ノ一ツノ外角ニ隣ラナイ二ツノ内角ヲ各ソノ外角ノ**内對角**トイフ。

例ヘバ上ノ圖ニ於テ $\angle A$, $\angle B$ ハ $\angle ACD$ ノ内對角デアル。

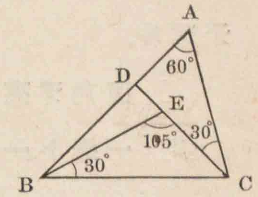
系 1. **三角形ノ一ツノ外角ハソノ内對角ノ和ニ等シイ。**

系 2. **一ツノ三角形ノ二角ガ,夫々他ノ三角形ノ二角ニ相等シイトキハ,第三角モ亦相等シイ。**

系 3. **二角ガ夫々相等シク,且ツソノ一角ノ對邊ガ相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。**

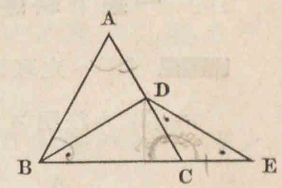
系 4. **一邊ト一鋭角トガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。**

問題 (7)



1. 右ノ圖ニ於テ, $\angle ADC$, $\angle BDE$, $\angle DEB$, $\angle DBE$ 及ビ $\angle BCE$ ハ各何度カ。

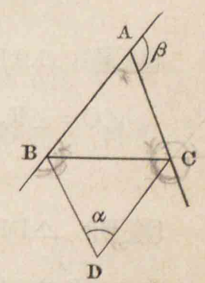
2. $\triangle ABC$ 内ニ一點 O ヲ取リ, BO, CO ヲ結ベバ　$\angle BOC > \angle BAC$



3. 正三角形 ABC ノ邊 AC ノ中點ヲ D トシ, BC ノ延長上ニ DC ニ等シク CE ヲ取レバ DB＝DE　デアル。

4. 一直線ガ平行ナ二ツノ直線ニ交ハルトキ,同傍内角ノ二等分線ハ互ニ垂直ニ交ハル。

5. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ノナス角ハ底ニ於ケル外角ニ等シイ。



6. $\triangle ABC$ ノ B, C ニ於ケル外角ノ二等分線ノナス角 α ハ A ニ於ケル外角 β ノ半分ニ等シイ。

7. 直角三角形ノ一鋭角ガ他ノ鋭角ノ 2 倍デアレバ,斜邊ハ直角ヲ夾ム二邊ノ内ノ短イモノノ 2 倍デアル。

13. 直角三角形ノ合同

定理 12. 二ツノ直角三角形ハ次ノ場合ニ合同デアル。

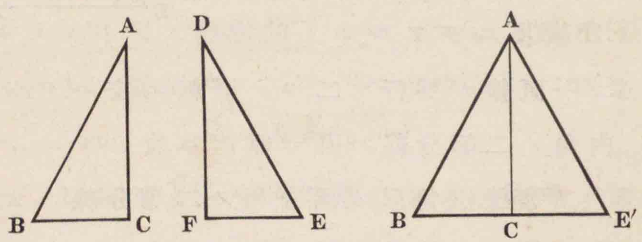
[1] **直角ヲ夾ム二邊ガ夫々相等シイトキ。**

[2] **一邊ト一鋭角トガ夫々相等シイトキ。**

[定理 11 系 4]

[3] **一邊ト斜邊トガ夫々相等シイトキ。**

注意 [1] ハ定理 2 カラ，[2] ハ定理 3 カラ明カデアル。次ニ [3] ヲ證明スル。



題意 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$\angle C=\angle F=R\llcorner$, $AC=DF$, $AB=DE$ デアレバ

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ デアル。

證明 $\triangle DEF$ ヲ移シ，ソノ邊 DF ヲ $\triangle ABC$ ノ AC 上ニ重ネ，B ト E トガ AC ニ對シテ反對ノ側ニアルヤウニシ，E ノ落チル點ヲ E′ トスル。

サウスルト $\angle C$ ト $\angle F$ トハ共ニ直角デアルカラ BCE′ ハ一直線ヲナス。

$\triangle ABE'$ ニ於テ　$AB=AE'$

$\therefore$　$\angle B=\angle E'$　　[定理 4]

然ルニ　$\angle E'=\angle E$ デアルカラ

$\angle B=\angle E$

$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$　　[定理 11 系 4]

系 1. 角ノ二等分線上ノ點ハソノ角ノ二邊カラ等距離ニアル。

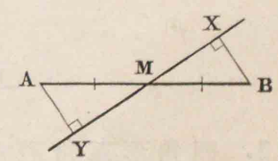
系 2. 角ノ二邊カラ等距離ニアル點ハソノ角ノ二等分線上ニアル。 [系 1 ノ逆]

問題 (8)

1. 二等邊三角形ノ頂點カラ底邊ニ下シタ垂線ノ足ハ底邊ノ中點デアル。

2. $\triangle ABC$ ニ於テ邊 BC ノ中點 M カラ AB, AC ニ至ル距離ガ等シイトキハ，$\triangle ABC$ ハ二等邊三角形デアル。

3. 一ツノ線分 AB ノ中點 M ヲ通ル他ノ直線 XY ニ，A, B カラ引イタ垂線ノ長サハ相等シイ。



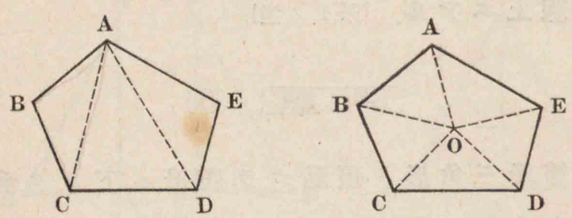
14. 多角形ノ内角及ビ外角ノ和

問 多角形ノ定義ヲ述ベヨ。又多角形ノ内角,外角,對角線ノ定義ヲ述ベヨ。

定義 イヅレノ邊ヲ延長シテモ形内ニハイラナイ多角形ヲ**凸多角形**トイヒ,サウデナイ多角形ヲ**凹多角形**トイフ。

今後單ニ多角形トイヘバ凸多角形ヲ指スモノトスル。

定理 13. n 角形ノ内角ノ和ハ $2(n-2)$ 直角ニ等シイ。



注意 上ノ圖ノイヅレカニヨツテ證明セヨ。

系 n 角形ノスベテノ邊ヲ順々ニ延長シテ作ツタ外角ノ和ハ 4 直角ニ等シイ。

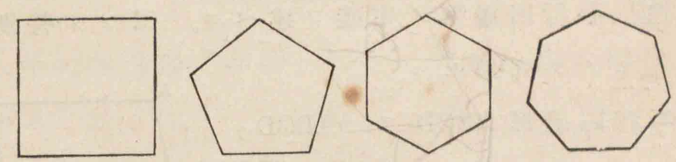
問題 (9)

1. 四角形,五角形,六角形,七角形ノ内角ノ總和ハ各

何度カ

2. [1] 正多角形ノ定義ヲイヘ。

[2] 正四角形,正五角形,正六角形,正七角形ノ一内角ハ各何度カ。



3. 正三角形,正五角形,正十角形ノ一ツノ外角ノ大キサハ何程カ。

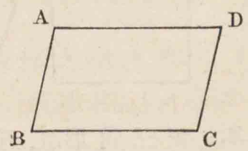
4. 或多角形ノ内角ノ總和ハ 16 直角ニ等シイトイフ。ソノ邊數ヲ求メヨ。

5. 正多角形ノ一ツノ内角ノ大キサガ 135° デアルトキ,ソノ邊數ハ何程カ。

第 6 章　平行四邊形

15. 平行四邊形ノ性質

問　平行四邊形ノ定義ヲ述ベヨ。又ソノ特別ナモノヲ列擧セヨ。



平行四邊形 ABCD ヲ ▱ABCD 又ハ ▱AC, ▱BD 等ト書クコトガアル。

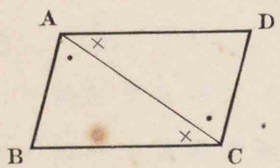
定理 14. 平行四邊形ニ於テハ

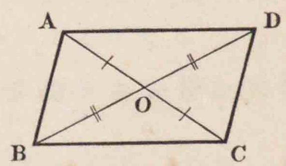
[1] **對角線ハコレヲ合同ナ二ツノ三角形ニ分ケル。**

[2] **二双ノ相對スル邊ハ夫々相等シイ。**

[3] **二双ノ相對スル角ハ夫々相等シイ。**

[4] **對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。**





注意　平行四邊形ノ定義カラ四邊形 ABCD ニ於テ AB∥DC, AD∥BC デアルコトニ着目シテ證明セヨ。

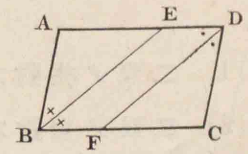
定義　二ツノ平行線間ニ夾マレタ共通垂線ノ長サヲコノ平行線間ノ距離トイフ。

系 1. 二ツノ平行線間ノ距離ハ一定デアル。

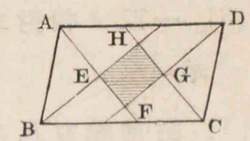
系 2. 矩形ノ對角線ハ相等シイ。

問題 (10)

1. 平行四邊形ノ相隣ル二ツノ内角ハ互ニ補角ヲナス。



2. 平行四邊形ノ相對スル二角ノ二等分線ハ平行デアル。

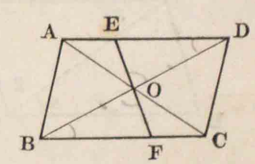


3. 平行四邊形ノ各角ノ二等分線ニヨッテ作ラレル圖形ハ矩形デアル。

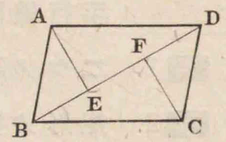
4. 對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。　[定理 14 系 2 ノ逆]

5. 對角線ガ互ニ他ヲ垂直ニ二等分スル四邊形ハ菱形デアル。

6. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ッテ引イタ直線ノコノ四邊形内ニアル部分ハ對角線ノ交點ニ於テ二等分サレル。



7. 平行四邊形ノ一ツノ對角線ノ兩端カラ,他ノ對角線ニ至ル距離ハ相等シイ。



16. 平行四邊形トナルタメノ條件

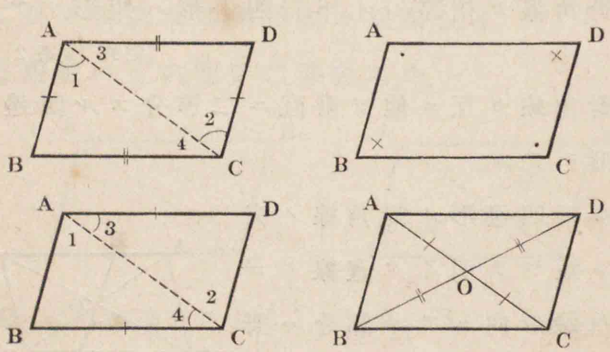
定理 15. **四邊形ハ次ノ場合ニ平行四邊形デアル。**

[1] **二双ノ相對スル邊ガ夫々相等シイトキ,**

[2] **二双ノ相對スル角ガ夫々相等シイトキ,**

[3] **一双ノ相對スル邊ガ平行デ,且ツ相等シイトキ,**

[4] **對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキ。**



(生徒各自ニ證明セヨ)

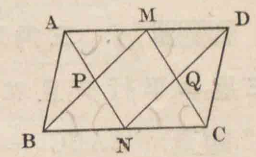
2.8

問題 (11)

1. 四邊形 ABCD ニ於テ $\angle A=140°=\angle C$, $\angle B=40°$ デアルトキ,コノ四邊形ハ平行四邊形デアル。

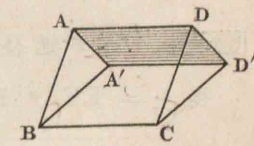
2. 四邊形 ABCD ニ於テ $AB \parallel DC$, $\angle A=\angle C$ デアルトキ,コノ四邊形ハ平行四邊形デアル。

3. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル二邊 AD, BC ノ中點 M, N ヲ對邊ノ兩端ニ結ビツケテ得ル四邊形ハ平行四邊形デアル。



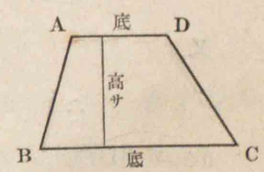
4. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 BD 上ニ二點 E, F ヲ BE=DF トナルヤウニ取ルトキハ, AECF ハ平行四邊形デアル。

5. 一邊 BC ヲ共有スル ▱ABCD ト ▱A'BCD' トノ AA', DD' ヲ結ベバ, AA'D'D ハ平行四邊形デアル。



6. 等脚梯形ノ對角線ハ相等シイ。逆ニ對角線ノ相等シイ梯形ハ等脚デアル。

定義 一双ノ對邊ダケガ平行デアル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,平行ナ二ツノ邊ヲソノ**底**トイ

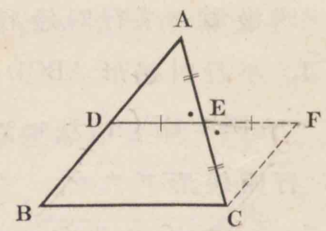


フ。兩底間ノ距離ヲソノ梯形ノ**高サ**トイフ。梯形ニ於テ平行デナイ二邊ノ相等シイモノヲ**等脚梯形**トイフ。

7. 四邊形ノ對角線ガ相等シク,且ツ一双ノ對邊ガ相等シイトキハ,コノ四邊形ハ梯形デアル。

17. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分

定理 16. **三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行デ,且ツソノ半分ニ等シイ。**



題意 △ABC ニ於テ AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トシ, 線分 DE ヲ引ケバ

$$DE \parallel BC, \quad DE=\frac{1}{2}BC$$

證明 DE ヲ延長シ,ソノ延長上ニ EF ヲ DE ニ等シク取リ, CF ヲ結ブト

$$\triangle ADE \equiv \triangle CFE$$ [定理 2]

$$\therefore \quad \angle ADE = \angle CFE$$

$$\therefore \quad AB \parallel FC$$

又 $$AD=CF$$

$$\therefore \quad BD=CF$$ (何故カ)

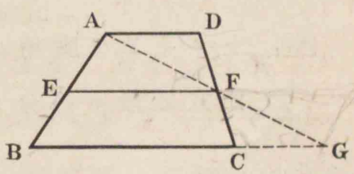
故ニ BDFC ハ平行四邊形デアル。

故ニ $DF \parallel BC, \quad BC=DF=2DE$

$$\therefore \quad DE \parallel BC, \quad DE=\frac{1}{2}BC$$

系 **三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ他ノ邊ニ平行ナ直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル。**

定理 17. **梯形ノ平行デナイ邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ,且ツ兩底ノ和ノ半分ニ等シイ。**



題意 梯形 ABCD ニ於テ AD∥BC, AB, DC ノ中點ヲ夫々 E, F トシ,線分 EF ヲ引ケバ

$$EF \parallel BC, \quad EF=\frac{1}{2}(BC+AD)$$

證明 A, F ヲ通ル直線ヲ引キ, BC ノ延長トノ交點ヲ G トスル。然ラバ

$$\triangle ADF \equiv \triangle GCF$$ (何故カ)

$$\therefore \quad AF=FG, \quad AD=CG$$

△ABG ニ於テ

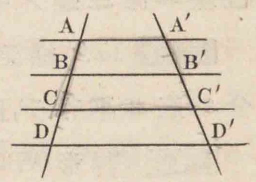
$$EF \parallel BG, \quad EF=\frac{1}{2}BG$$

然ルニ $$BG=BC+CG=BC+AD$$

$$\therefore \quad EF \parallel BC, \quad EF=\frac{1}{2}(BC+AD)$$

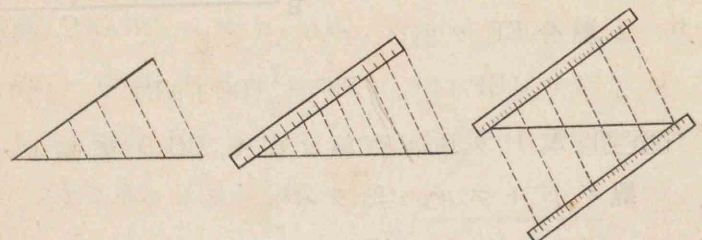
系 1. **梯形ノ平行デナイ邊ノ中,ソノ一邊ノ中點ヲ通リ底ニ平行ナ直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ通ル。**

系 2. 多クノ平行線ガコレト交ハル一ツノ直線カラ截取ル線分ガ相等シイトキハ,コレ等ノ平行線ニ交ハル他ノ直線カラモ相等シイ線分ヲ截取ル。



注意 梯形 ACC′A′ ニ於テ, BB′∥AA′ カラ A′B′=B′C′ ヲ證明シ,次ニ梯形 BDD′B′ ニ於テ, CC′∥BB′ カラ B′C′=C′D′ ヲ證明スルヤウニセヨ。

問 上ノ系2ヲ應用シテ,線分ヲ任意ノ數ニ等分スル方法ヲ考ヘヨ。

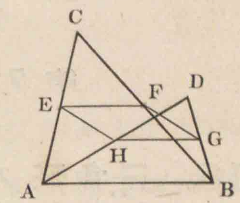


問題 (12)

1. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビツケテ得ル四邊形ハ平行四邊形デアル。

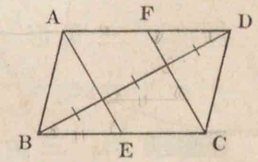
2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ一ツ置キニ結ビツケル線分ハ互ニ他ヲ二等分スル。

3. 一ツノ線分 AB ヲ底邊トシ,ソノ上ニ二ツノ三角形 ACB, ADB ヲ畫キ,邊 AC, BC, AD, BD ノ中點ヲ夫々 E, F, H, G トスレバ, EFGH ハ平行四邊形デアル。



4. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點カラ等距離ニアル。

5. 平行四邊形 ABCD ノ邊 BC, DA ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ, AE, CF ハ BD ヲ三等分スル。



6. 梯形ノ下底ハ 15 cm デ,平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ノ長サガ 11 cm デアレバ上底ハ幾 cm カ。

7. 三角形ノ三頂點カラ三角形ヲ截ラナイ一ツノ直線ニ下シタ垂線ノ和ハ,各邊ノ中點カラコノ直線ニ下シタ垂線ノ和ニ等シイ。

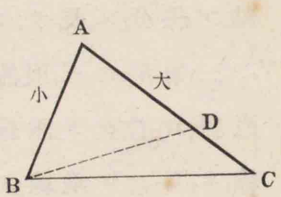
第 7 章 三角形ノ邊ト角

18. 三角形ノ邊ト角トノ大小關係

問 1. 三角形ノ二ツノ邊ガ等シイトキ,ソノ對角ハドウカ。

問 2. 三角形ノ二ツノ角ガ等シイトキ,ソノ對邊ハドウカ。

定理 18. 三角形ノ二邊ガ相等シクナイトキハ,大キイ邊ニ對スル角ハ小サイ邊ニ對スル角ヨリモ大キイ。



題意 $\triangle ABC$ ニ於テ

$AC>AB$ デアレバ

$\angle B>\angle C$ デアル。

證明 AC 上ニ AB ニ等シク AD ヲ取リ, BD ヲ結ブト, $AC>AB$ デアルカラ D ハ A ト C トノ間ニアッテ,直線 BD ハ $\angle ABC$ 内ニアル。

$\triangle ABD$ ニ於テ

$AB=AD \quad \therefore \quad \angle ABD=\angle ADB$

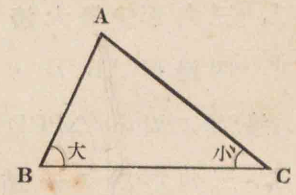
トコロガ $\quad \angle ADB>\angle C \quad$ (何故カ)

$\therefore \quad \angle ABD>\angle C$

又 $\quad \angle B=\angle ABD+\angle DBC$

$\therefore \quad \angle B>\angle C$

定理 19. 三角形ノ二角ガ相等シクナイトキハ,大キイ角ニ對スル邊ハ小サイ角ニ對スル邊ヨリモ大キイ。



題意 $\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle B>\angle C$ デアレバ

$AC>AB$ デアル。

證明 AB ト AC トヲ比較スルニ

$AB>AC, \quad AB=AC, \quad AB<AC$

ノイヅレカデアル。今

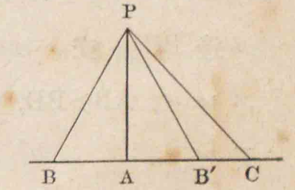
$AB>AC$ トスレバ $\angle B<\angle C$ [定理 18]

$AB=AC$ トスレバ $\angle B=\angle C$ [定理 4]

トナリ,イヅレモ假設ニ反スル。

$\therefore \quad AB<AC$

系 一直線外ノ一點カラコノ直線ニ引イタ線分ノ内デ



[1] 垂線ハ最モ短イ。

[2] 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ二ツノ斜線ノ長サハ相等シイ。

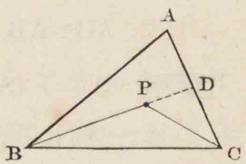
[3] **斜線ノ足ト垂線ノ足トノ距離ガ大キクナルニ従ッテ,斜線ノ長サモ大キクナル.**

問題 (13)

1. 三角形ノ最大邊ニ對スル角ハ 60° ヨリモ大キイ。

2. 四邊形 ABCD ノ邊 AB 上ニ一點 P ヲ取レバ,四邊形ノ周ハ $\triangle PCD$ ノ周ヨリモ大キイ。

3. 三角形内ノ一點ヲ一邊ノ兩端ニ結ブ二線分ノ和ハ他ノ二邊ノ和ヨリモ小デアル。

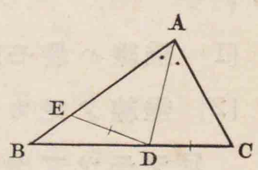


4. $\triangle ABC$ ニ於テ A カラ對邊 BC ニ垂線 AH ヲ引ケバ $AB+AC>2AH$ デアル。

5. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB=AC$ デアレバ, BC 上ニ一點 D ヲ取リ, AD ヲ結ブトキ, $AD<AB$ デアル。

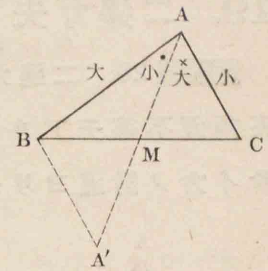
6. $\triangle ABC$ ノ $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ノ交點ヲ O トスル。モシ $AB>AC$ デアレバ, $BO>CO$ デアル。

7. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ガ邊 BC ト交ハル點ヲ D トスレバ, $AB>BD$, $AC>CD$ デアル。



8. 前問7ニ於テ $AB>AC$ デアレバ $BD>CD$ デアル。

9. 三角形ノ中線ガコレト隣ル邊トナス角ノ中,小サイ邊トナス角ハ大キイ邊トナス角ヨリモ大キイ。



10. 前問ノ圖ニ於テ

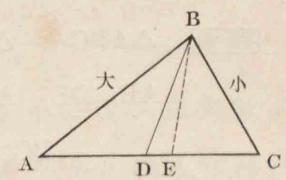
$$AB+AC>2AM$$

11. 三角形ノ三中線ノ和ハ周ヨリモ小サクテ,周ノ半分ヨリモ大キイ。

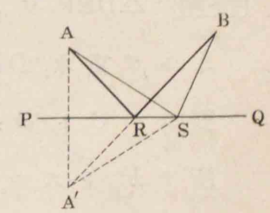
12. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>BC$ トシ, BD ハ邊 AC ヲ二等分シ, BE ハ $\angle ABC$ ヲ二等分スルトスレバ

[1] $\angle ABD<\angle DBC$

[2] $BD>BE$



13. 直線 PQ ノ同ジ側ニアル二定點 A, B トソノ直線上ノ點ヲ結ブ二線分ノ和ノ最小トナル點ヲ求メヨ。

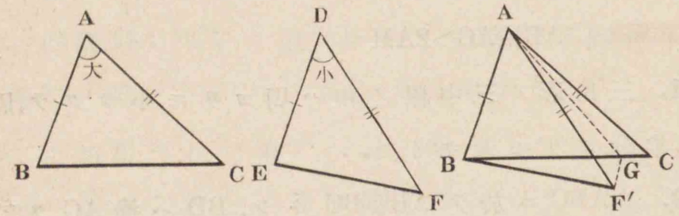


14. $\triangle ABC$ ノ外角 A ヲ二等分スル直線上ノ一點ヲ P トスレバ

$$BP+CP>AB+AC$$

19. 二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形

定理 20.　二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ノ夾角ガ不等デアルトキハ,ソノ大キイ方ノ對邊ハ小サイ方ノ對邊ヨリモ大キイ。



題意　$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$AB=DE,\ AC=DF,\ \angle A>\angle D$ デアレバ

$BC>EF$ デアル。

證明　$\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネルニ,頂點 D ト A トヲ重ネ, DE ヲ AB ノ上ニ重ネ, F ガ AB ニ對シテ C ト同ジ側ニアルヤウニシ,ソノ落チル所ヲ F′ トスル。サウスルト $\angle A>\angle D$ デアルカラ AF′ ハ $\angle BAC$ 内ニアル。$\angle F'AC$ ノ二等分線ヲ引キ, BC トノ交點ヲ G トシ, F′G ヲ結ベバ

$\triangle AF'G\equiv\triangle ACG$ (何故カ)

$\therefore\quad GF'=GC$

$\triangle BGF'$ ニ於テ　$BG+GF'>BF'$

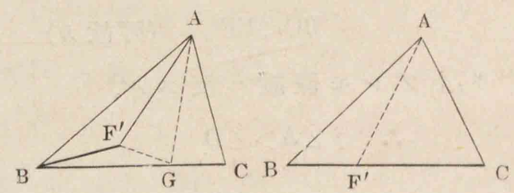
$\therefore\quad BG+GC>BF'$

$\therefore\quad BC>BF'$

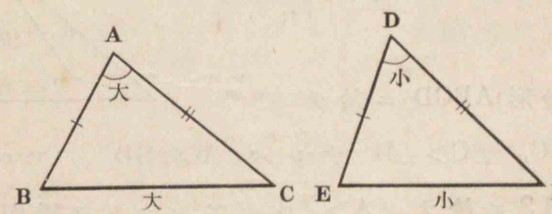
トコロガ　$BF'=EF$

$\therefore\quad BC>EF$

注意　二ツノ三角形ヲ重ネクトキニハ次ノヤウニナルコトモアルガ,イヅレノトキデモ同様ニイヘル。



定理 21.　二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ノ第三邊ガ不等デアルトキハ,ソノ大キイ方ノ對角ハ小サイ方ノ對角ヨリモ大キイ。



題意　$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$AB=DE,\ AC=DF,\ BC>EF$ デアレバ

$\angle A>\angle D$ デアル。

證明 今假ニ $\angle A > \angle D$ デナイトスレバ $\angle A$ ト $\angle D$ トノ間ニハ, $\angle A = \angle D$ トイフ關係カ $\angle A < \angle D$ トイフ關係ノイヅレカガ成立スベキデアル。

モシ $\angle A = \angle D$ トスレバ

$BC = EF$ (何故カ)

又 $\angle A < \angle D$ トスレバ

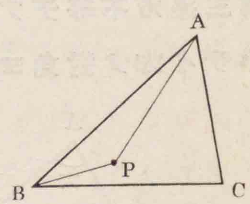
$BC < EF$ (何故カ)

トナリ,イヅレモ假設ニ反スル。

$\therefore \angle A > \angle D$

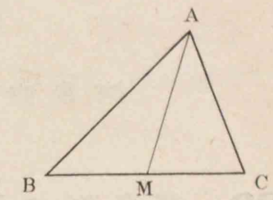
問題 (14)

1. P ヲ $\triangle ABC$ 内ノ一點トシ, $AP = AC$ トスレバ, $BC > BP$ デアル。



2. 四邊形 ABCD ニ於テ $AD = BC$, $\angle C > \angle D$ ナレバ $AC < BD$ デアル。
3. 前問2ニ於テ $\angle A > \angle B$ デアルコトヲ證明セヨ。
4. $\triangle ABC$ ニ於テ, $BC > BA$ デ, BC, BA 上ニ夫々 $CP = AQ$ トナルヤウニ點 P, Q ヲ取レバ $CQ > AP$ デアル。

5. 圖ニ於テ M ヲ BC ノ中點トシ, $\angle AMB$ ガ鈍角デアルトスレバ $AB > AC$ デアル。

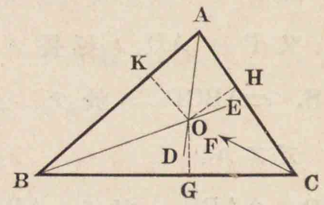


6. 不等邊三角形ノ頂點ト對邊ノ中點トヲ通ル直線ハソノ對邊ニ垂直デナイ。
7. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB > AC$ デ,中線 AD 上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ $BP > CP$ デアル。又 P ガ AD ノ延長ノ上ニアレバドウカ。
8. ▱ABCD ニ於テ $\angle A > \angle B$ デアレバ, $AC < BD$ デアル。
9. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB > BC > CA$ デ, P ハ A, B, C カラ等距離ニアルトスレバ $\angle APB > \angle BPC > \angle CPA$ デアル。
10. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ C ノ方ヘ延長シ,ソノ上ニ AB ニ等シク CD ヲ取リ, A ト D トヲ結ベバ $AD > BC$ デアル。

第 8 章　三角形ノ諸心

20. 三角形ノ內心・傍心

定理 22. 三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ一點デ交ハリ,ソノ交點ハ各邊カラ等距離ニアル。



題意　△ABC ニ於テ ∠A, ∠B, ∠C ノ二等分線ヲ夫々 AD, BE, CF トスレバ, AD, BE, CF ハ一點 O ニ於テ交ハリ, O ハ BC, CA, AB カラ等距離ニアル。

注意 1. コノ定理ヲ證明スルニハ ① ∠A, ∠B ノ二等分線ヲ引イテ,ソノ交點ヲ O トシ, ∠C ノ二等分線ガ O ヲ通ルコトヲ證明スレバヨイ。 ② ソレニハ O ハ ∠C ノ二邊 CA, CB カラ等距離ニアルコトガワカレバヨイ。ソレデ次ノヤウナ證明ヲ得ル。

證明　AD, BE ハ形內ノ一點 O デ交ハル。

O カラ BC, CA, AB ニ夫々垂線 OG, OH, OK ヲ引クト, O ハ ∠A ノ二等分線上ノ一點デアルカラ

OH=OK

又 O ハ ∠B ノ二等分線上ノ一點デアルカラ

OK=OG

∴　OG=OH

卽チ O ハ ∠C ノ二邊カラ等距離ニアル。

故ニ CF ハ O ヲ通ル。[定理 12 系 2]

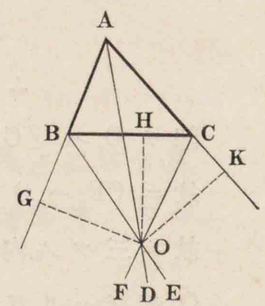
故ニ三ツノ內角ノ二等分線 AD, BE, CF ハ一點 O デ交ハリ,且ツ O ハ BC, CA, AB カラ等距離ニアル。

上ノ注意ニ述ベタヤウニコノ定理ガ成立ツタメニハ ① ガ證明サレレバヨク,又 ① ガ證明サレルタメニハ ② ガ證明サレレバヨイトイフヤウニ,終結ガ眞デアルトイフ假定カラ出發シテ,順次ニソレガ證明サレルタメニ必要ナ條件ヲ求メ遂ニ既知ノ假設・定義・公理又ハ定理ニ導イテ,證明ノ端緒ヲ發見スル方法ヲ**解析**トイフ。

定義　三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ノ交點ヲソノ三角形ノ**內心**トイフ。

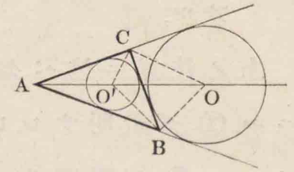
注意 2. 內心ヲ中心トシ,內心カラ一邊ニ至ル距離ヲ半徑トスル圓ヲ畫イテミヨ。コノヤウナ圓ヲ三角形ノ**內接圓**トイフ。

系 **三角形ノ一ツノ内角ノ二等分線ト,他ノ二角ノ外角ノ二等分線トハ一點デ交ハリ,ソノ交點ハ各邊カラ等距離ニアル。**



定義 三角形ノ一ツノ内角ノ二等分線ト,他ノ二角ノ外角ノ二等分線トノ交點ヲ,ソノ三角形ノ**傍心**トイフ。

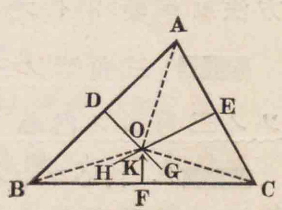
注意 3. 傍心ヲ中心トシ,傍心カラ一邊ニ至ル距離ヲ半徑トスル圓ヲ書イテミヨ。コノヤウナ圓ヲ三角形ノ**傍接圓**トイフ。



21. 三角形ノ外心・垂心

定理 23. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ一點デ交ハリ,ソノ交點ハ各頂點カラ等距離ニアル。

題意 △ABC ニ於テ DG, EH, FK ヲ夫々 AB, AC, BC ノ垂直二等分線トスレバ DG, EH, FK ハ一點 O デ交ハリ, OA=OB=OC



解析 DG, EH ノ交點ヲ O トシ, FK ガ O ヲ通ルトスレバ

OB=OC デナケレバナラナイ(何故カ)。然ルニ

OA=OB, OA=OC

∴ OB=OC

證明 DG, EH ノ交點ヲ O トスル。

OA, OB, OC ヲ結ベバ, O ハ AB ノ垂直二等分線上ノ一點デアルカラ

OA=OB

同様ニシテ OA=OC

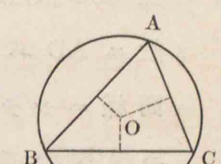
∴ OB=OC

故ニ FK ハ O ヲ通ル。[定理7]

故ニ DG, EH, FK ハ一點 O デ交ハリ,且ツ

OA=OB=OC

定義 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ノ交點ヲ,ソノ三角形ノ**外心**トイフ。

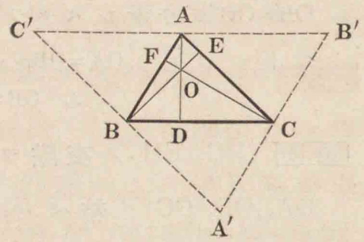


注意 外心ヲ中心トシ,外心カラ一頂點ニ至ル距離ヲ半徑トスル圓ヲ書ケバ,ソノ圓ハ三角形ノ各頂點ヲ通ル。即チコノ圓ハソノ三角形ノ**外接圓**デアル。外心トハ外接圓ノ中心ノ意味デアル。

定理 24. 三角形ノ各頂點カラ對邊ニ下シタ垂線ハ一點デ交ハル。

題意 △ABC ニ於テ AD⊥BC, BE⊥CA, CF⊥AB

トスレバ, AD, BE, CF ハ一點 O デ交ハル。



證明 A, B, C ヲ通リ夫々各對邊ニ平行線ヲ引キ,ソレ等ノ交點ヲ A′, B′, C′ トスル。

四邊形 ABCB′ ハ平行四邊形デアル。(何故カ)

$$\therefore \quad BC=AB'$$

同様ニ四邊形 C′BCA モ平行四邊形デアルカラ

$$BC=AC'$$

$$\therefore \quad AB'=AC'$$

又 $BC \parallel C'B'$ デ $AD \perp BC$ デアルカラ $DA \perp B'C'$

故ニ AD ハ B′C′ ノ垂直二等分線デアル。

同様ニシテ BE ハ C′A′ ノ垂直二等分線デ, CF ハ A′B′ ノ垂直二等分線デアル。

△A′B′C′ ニ於テ CF, AD, BE ハ夫々 A′B′, B′C′, C′A′ ノ垂直二等分線デアルカラ一點 O デ交ハル。

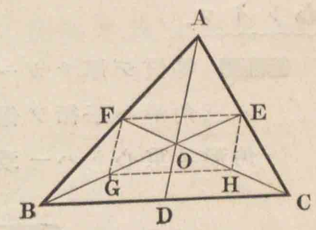
故ニ △ABC ノ各頂點カラ對邊ニ下シタ垂線ハ一點 O デ交ハル。

定義 三角形ノ各頂點カラ對邊ニ下シタ垂線ノ交點ヲ,ソノ三角形ノ**垂心**トイフ。

22. 三角形ノ重心

定理 25. 三角形ノ三中線ハ一點デ交ハリ,ソノ交點ハ各頂點カラソノ頂點ヲ通ル中線ノ長サノ $\frac{2}{3}$ ノ距離ニアル。

題意 △ABC ニ於テ AD, BE, CF ヲ三ツノ中線トスレバ AD, BE, CF ハ一點 O デ交ハリ,且ツ $AO=\frac{2}{3}AD$, $BO=\frac{2}{3}BE$, $CO=\frac{2}{3}CF$



證明 BE, CF ハ夫々 ∠B, ∠C 內ノ直線デアルカラ,形內ノ一點 O デ交ハル。BO, CO ノ中點ヲ夫々 G, H トスレバ,四邊形 FGHE ハ平行四邊形デアル。(何故カ)

$$\therefore \quad GO=OE, \qquad HO=OF$$

然ルニ G, H ハ夫々 BO, CO ノ中點デアルカラ

$$BG=GO=OE, \qquad CH=HO=OF$$

$$\therefore \quad BO=\frac{2}{3}BE, \qquad CO=\frac{2}{3}CF$$

同様ニシテ AD ト CF トニツイテモソノ交點ヲ O′ トスレバ

$$CO'=\frac{2}{3}CF, \qquad AO'=\frac{2}{3}AD$$

然ルニ $CO=\frac{2}{3}CF$ デアルカラ O ト O′ トハ一

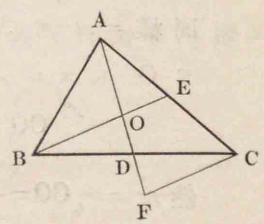
致スル。即チ AD, BE, CF ハ一點 O デ交ハリ, ソノ交點ハ各頂點カラソノ頂點ヲ通ル中線ノ長サノ $\frac{2}{3}$ ノ距離ニアル。

定義 三角形ノ三中線ノ交點ヲソノ三角形ノ重心トイフ。

注意 等質デ厚サガ一様ナ三角形ノ板ノ重心ヲ支ヘレバ,三角形ハ平衡ヲ保ツ。即チ物理學デイフ重心ト三角形ノ重心トハ一致スル。

問題 (15)

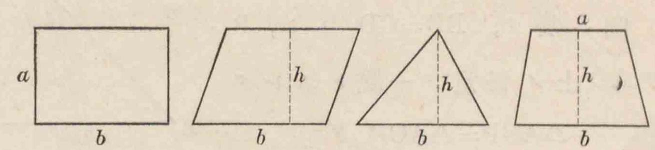
1. 直角三角形ノ外心ハドコニアルカ。
2. 鈍角三角形ノ外心ハ形外ニアル。(歸謬法)
3. H ヲ △ABC ノ垂心トスレバ A, B, C, H ノ四ツノ點ノ內,任意ノ一ツハ他ノ三點ヲ頂點トスル三角形ノ垂心デアル。
4. 二ツノ中線ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル。
5. 內心,外心,垂心,重心ノ中ノ二ツガ一致スル三角形ハドンナ三角形カ。
6. 定理25ヲ右ノ圖ニヨツテ證明セヨ。(FC ∥ BE, AO, OF 及ビ OD, DF ヲ比較セヨ。)



第9章 多角形ノ面積

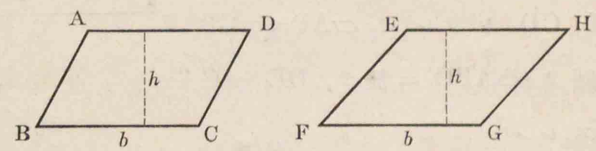
23. 多角形ノ面積

問 次ノ圖ニ示ス各圖形ノ面積ヲ求メル公式ヲ書ケ。

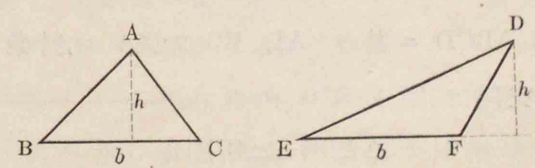


次ノ定理ハ面積ノ公式ヲ用ヒテ容易ニ證明スルコトガ出來ル。

定理 26. 底ト高サトガ夫々相等シイ二ツノ平行四邊形ハ等積デアル。



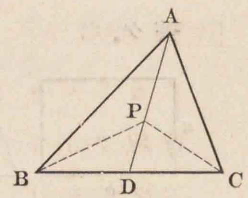
定理 27. 底ト高サトガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ等積デアル。



系 **等積デ等底(又ハ等高)ナル平行四邊形又ハ三角形ハ等高(又ハ等底)デアル。**

問題 (16)

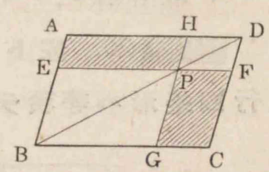
1. 三角形ノ一ツノ中線ハソノ三角形ノ面積ヲ二等分スル。



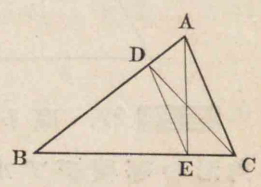
2. 圖ニ於テ, BD=CD トシ, P ヲ AD 上ノ任意ノ一點トスレバ

$$\triangle ABP=\triangle ACP$$

3. G ヲ △ABC ノ重心トスレバ GA, GB, GC ハコノ三角形ノ面積ヲ三等分スル。



4. ▱ABCD ニ於テ, P ヲ BD 上ノ任意ノ一點トシ, EF∥AD, GH∥CD トスレバ ▱AP=▱CP



5. 圖ノ △ABC ニ於テ, DE∥AC トスレバ

$$\triangle AEC=\triangle CDA$$

$$\triangle ABE=\triangle DBC$$

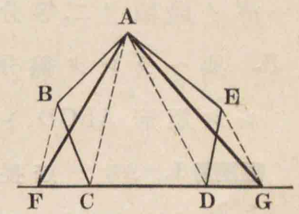
6. 梯形 ABCD ニ於テ, AD, BC ヲ底トシ,對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスレバ

$$\triangle ABO=\triangle CDO$$

24. 多角形ノ等積變形

作圖題 6. 與ヘラレタ五角形ト等積ナ三角形ヲ作レ。

題意 與ヘラレタ五角形 ABCDE ト等積ナ三角形ヲ作ル。



作圖 AC, AD ヲ結ブ。B, E ヲ通リ夫々 AC, AD ニ平行線ヲ引キ, CD ノ延長トノ交點ヲ F, G トシ, AF, AG ヲ結べバ, △AFG ハ求メル三角形デアル。

證明 △ABC ト △AFC トニ於テ,底 AC ハ共通,高サハ相等シイカラ

$$\triangle ABC=\triangle AFC$$

同様ニシテ　$\triangle AED=\triangle AGD$

然ルニ,　五角形ABCDE $=\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle AED$

$\triangle AFG=\triangle AFC+\triangle ACD+\triangle ADG$

∴　五角形ABCDE $=\triangle AFG$

注意 上ノ作圖ハ五角形ニ限ラナイ。一般ニ,與ヘラレタ多角形ト等積ナ三角形ヲ作圖スルコトガ出來ル。

問 與ヘラレタ六角形ト等積ナ三角形ヲ作レ。

系 **與ヘラレタ多角形ト等積ナ矩形ヲ作レ。**

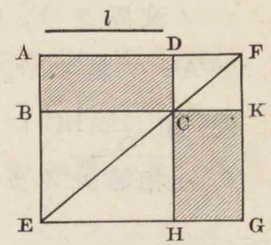
問題 (17)

1. 一ツノ三角形ト底ヲ共有シテ面積ノ等シイ矩形ヲ作レ。

2. 三角形ノ一邊上ノ定點ヲ通ル直線デコノ三角形ノ面積ヲ二等分セヨ。

3. 與ヘラレタ線分 l ニ等シイ一邊ヲモチ,與ヘラレタ矩形 ABCD ト等積ナ矩形ヲ作レ。

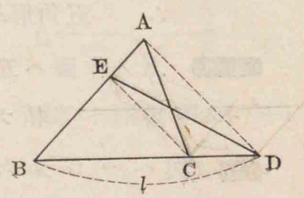
注意 1. AB ヲ延長シ BE$=l$ トシ, EC ヲ延長シ, AD ノ延長トFデ交ハラセル。次ニ EF ヲ對角線トスル圖ノヤウナ矩形 AEGF ヲ畫キ, □AC=□CG カラ考ヘヨ。(□ ハ矩形ノ略記號デアル)



注意 2. 上ノ方法デ, AB$=a$, BC$=b$ 及ビ BE$=l$ ヲ知ツテ, $\frac{ab}{l}$ ナル長サノ線分ノ作圖ガ出來ル。

4. 與ヘラレタ △ABC ト等積デ一邊ガ l ニ等シイ矩形ヲ作レ。

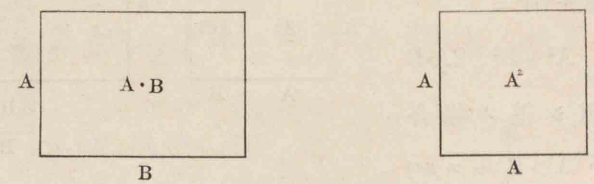
注意 マヅ △ABC ト等積デ一邊ガ l ニ等シイ △EBD ヲ作ルコトカラ考ヘヨ。



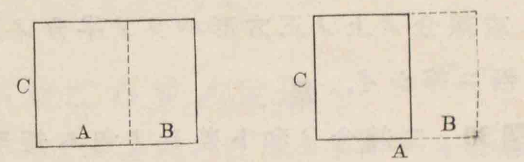
25. 二線分ノ包ム矩形

二ツノ線分 A, B ヲ二隣邊トスル矩形ヲ“**二線分 A, B ノ包ム矩形**”トイヒ,ソノ面積ヲ **A·B** ト記ス。

又線分 A ヲ一邊トスル正方形ヲ“**A ノ上ノ正方形**”又ハ“**A ノ平方**”トイヒ,ソノ面積ヲ **A^2** ト記ス。



定理 28. **二線分ノ和(又ハ差)ト他ノ一線分トノ包ム矩形ハ,ソノ二線分ノ各ト後ノ線分トノ包ム矩形ノ和(又ハ差)ニ等シイ。**



題意 二線分ヲ A, B トシ,他ノ一線分ヲ C トスレバ(但シ差ノ場合ハ A>B トスル)

$$(A \pm B)C = A \cdot C \pm B \cdot C$$

證明 各自ニ證明セヨ。

注意 線分 A, B, C ノ長サヲ夫々 a, b, c トスレバ,上ノ結果ハ $(a \pm b)c = ac \pm bc$ トナリ,代數ノ公式ト一致スル。

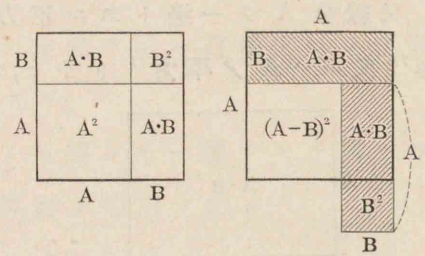
定理 29. 二線分ノ和(又ハ差)ノ上ノ正方形ハ,各線分ノ上ノ正方形ノ和ニ二線分ノ包ム矩形ノ2倍ヲ加ヘ(又ハ引イ)タモノニ等シイ.

題意 二線分ヲ A, B トスレバ

$(A\pm B)^2=$

$A^2+B^2\pm 2A\cdot B$

(但シ差ノ場合ハ A>B トスル)



證明 圖ニヨツテ各自ニ試ミヨ。

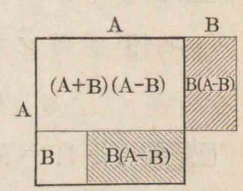
注意 線分 A, B ノ長サヲ夫々 a, b トスレバ,上ノ結果ハ $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$ トナリ,代數ノ公式ト一致スル。

系 或線分ノ上ノ正方形ハソノ半分ノ上ノ正方形ノ4倍ニ等シイ。

定理 30. 二線分ノ和ト差トノ包ム矩形ハ各線分ノ上ノ正方形ノ差ニ等シイ。

題意 二線分ヲ A, B トスレバ

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$



證明 右ノ圖ニヨツテ各自ニ試ミヨ。

注意 線分 A, B ノ長サヲ夫々 a, b トスレバ,上ノ結果ハ

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ トナリ,代數ノ公式ト一致スル。

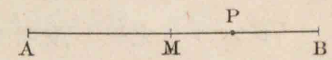
問題 (18)

1. 次ノ式ノ成立ツコトヲ圖ニヨツテ證明セヨ。

$(A+B)(C+D)=A\cdot C+A\cdot D+B\cdot C+B\cdot D$

2. 線分 AB ノ中點ヲ M トシ, AB 上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ

$PA\cdot PB=AM^2-MP^2$



3. A, B, C, D ヲ順次ニ同一直線上ニアル四點トスレバ

$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

(代數式ヲ用ヒテ證明セヨ。)

26. ぴたごらすノ定理

ぴたごらすノ定理ハ既ニ一學年デ實驗的ニ證明シタノデアルガ,次ニコレヲ幾何學的ニ證明スル。

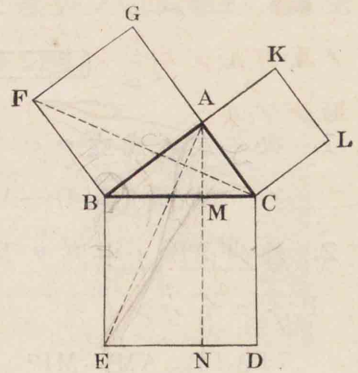
定理 31. 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。

題意 △ABC ニ於テ ∠A ヲ直角トスレバ

$BC^2=AB^2+AC^2$

注意 1. AB, BC, CA ノ上ニ次ノ圖ノヤウニ正方形ヲ畫

キ, A カラ BC ニ垂線ヲ引イテ BC, ED トノ交點ヲ夫夫 M, N トスレバ, BC^2 ハ $\square BN$, $\square CN$ ニ分ケラレル。即チ



$$BC^2=\square BN+\square CN$$

ソコデ $\square BN=AB^2$

$$\square CN=AC^2$$

デアルコトガ證明サレレバ,コノ定理ハ證明サレタコトニナル。

證明 AE, FC ヲ結ベバ

$$\triangle ABE=\frac{1}{2}\square BN \qquad \text{(何故カ)}$$

$$\triangle FBC=\frac{1}{2}\square FA=\frac{1}{2}AB^2 \qquad (\ \ 〃\ \ )$$

然ルニ $\triangle ABE\equiv\triangle FBC$ 〔定理 2〕

$$\therefore\ \square BN=AB^2$$

同ジヤウニ

$$\square CN=AC^2$$

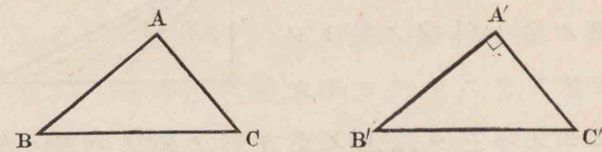
$$\therefore\ BC^2=AB^2+AC^2$$

注意 2. 上ノ直角三角形ニ於テ,頂點 A, B, C ニ對スル邊ノ長サヲ夫々 a, b, c トスレバ

$$a^2=b^2+c^2$$

従ッテ $b^2=a^2-c^2,\quad c^2=a^2-b^2$

系 **三角形ノ一邊ノ上ノ正方形ガ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シケレバ,コノ三角形ハ直角三角形デアル。**



證明 $\triangle A'B'C'$ ヲ作リ, $A'B'=AB$, $A'C'=AC$, $\angle A'=\mathrm{R}\llcorner$ ナラシメレバ

$$B'C'^2=A'B'^2+A'C'^2$$

然ルニ $BC^2=AB^2+AC^2$

$$\therefore\ B'C'=BC$$

$$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C' \qquad \text{〔定理 1〕}$$

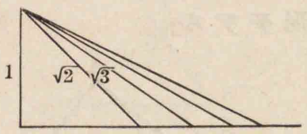
$$\therefore\ \angle A=\angle A'=\mathrm{R}\llcorner$$

問題 (19)

1. 一邊ガ a ナル正方形ノ對角線ノ長サハ $\sqrt{2}\,a$ デアル。
2. 一邊ガ a ナル正三角形ノ高サハ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ デアル。
3. 三邊ノ長サガ m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$ $(m>n)$ ナル三角形ハ直角三角形デアル。m, n ヲ 5 ヨリモ小サ

イ整數トシテ三邊ガ整數デ表ハサレル直角三角形ヲ求メヨ。

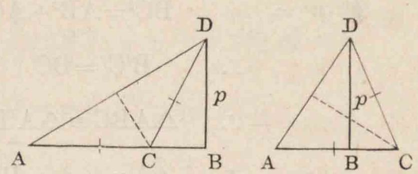
4. 次ノ圖デ垂線ノ長サヲ1, 次々ノ斜線ノ長サヲ$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, …… ニスルニハ垂線ノ足ト斜線ノ足トノ距離ヲドウスレバヨイカ。



5. 二ツ(又ハ三ツ以上)ノ正方形ノ和(又ハ差)ニ等シイ正方形ヲ作レ。

6. 四邊形ABCDノ對角線ガ互ニ直交スルトキハ $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ デアル。

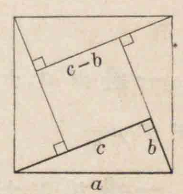
7. 線分AB又ハソノ延長上デ AC^2-BC^2 ガ線分pノ上ノ平方ニ等シクナルヤウニ點Cヲ求メヨ。



8. 右ノ圖ニヨッテ

$$a^2=(c-b)^2+2bc$$

ヲ證明シ,ソレカラぴたごらすノ定理ヲ出セ。



雜　題 (1)

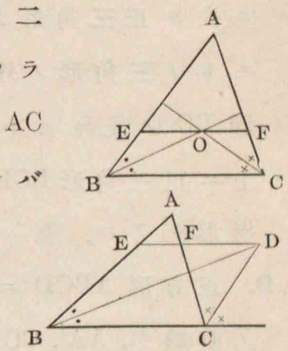
注意 雜題デハ殊更ニ問題ノ種類難易ヲ不同ニシテアル。生徒ハ各自既習ノ定理ヲ自由ニ活用セヨ。

1. 二ツノ三角形ハドンナ場合ニ合同トナルカ。スベテノ場合ヲ列擧セヨ。

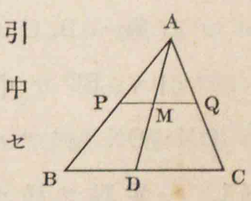
2. 四邊形ノ周ハ二ツノ對角線ノ和ヨリモ大キクテ,和ノ2倍ヨリモ小サイ。

3. △ABCノ底角∠B, ∠Cノ二等分線ノ交點ヲOトシ, Oカラ底邊BCニ平行線ヲ引キ, AB, ACトノ交點ヲ夫々E, FトスレバEF=EB+FC デアル。

又∠Bノ二等分線ト∠Cノ外角ノ二等分線トノ交點カラ底邊BCニ平行線ヲ引イタトキニEFノ長サハ如何ニナルカ。



4. 三角形ノ一頂點カラ對邊ヘ引イタ任意ノ線分ハ他ノ二邊ノ中點ヲ結ビツケル直線ニ二等分セラレル。

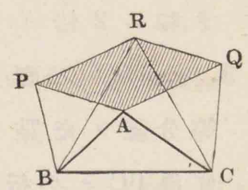


5. 四邊形 ABCD ニ於テ $AB=AD$, $\angle B=\angle D$ ナラバ $BC=CD$ デアル。

6. 四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ト對角線ノ中點ヲ結ブ線分トハ互ニ他ヲ二等分スル。

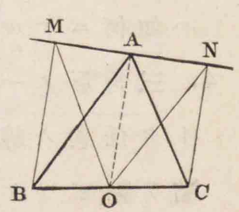
7. $\triangle ABC$ ノ邊 AC 上ニ一點 D ヲ求メ, D ヲ通リ, AB, BC ニ平行線ヲ引キ, BC, AB ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシメ $DE=DF$ ナラシメヨ。

8. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ上ニ夫々正三角形 ABP, ACQ ヲモトノ三角形ノ外側ニ作リ,又邊 BC ノ上ニモトノ三角形ノ上ニ正三角形 BCR ヲ作ルトキハ, PAQR ハ平行四邊形デアル。



9. 正方形 ABCD ニ於テ BE ハ頂點 B ヲ通ル任意ノ直線デ, AA′, CC′ ハ相對スル頂點 A, C カラ BE ニ下シタ垂線デアルトスレバ $AA'=BC'$ デアル。

10. $\triangle ABC$ ノ頂點 A ヲ通ル任意ノ直線ヘ B, C カラ垂線 BM, CN ヲ引キ, BC ノ中點ヲ O トスレバ $OM=ON$ デアル。

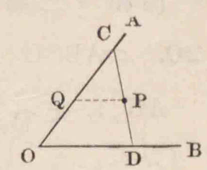


11. 一定點ヲ通ッテ一直線ヲ引キ與ヘラレタ一双

ノ平行線間ノ部分ヲ定長ナラシメヨ。

12. $\triangle ABC$ ノ邊 AB ヲ D, E デ三等分シ, AC ヲ F, G デ三等分スレバ $DF \parallel EG \parallel BC$ トナル。又 DF ト BC トノ長サノ關係ハドンナニナルカ。

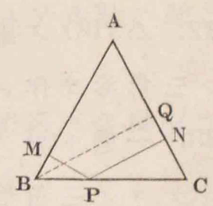
13. $\angle AOB$ 内ニアル一點 P ヲ通ル直線 CPD ヲ引キ, OA ト C デ, OB ト D デ交ハラシメ, $PC=PD$ ナラシメヨ。



注意 CD ガ引カレタモノトシ $\triangle COD$ ニ於テ, $QP \parallel OD$ トスレバ OQ, QC ハドンナ關係ニナルカヲ考ヘヨ。

14. $\triangle ABC$ ノ各邊上ノ外側ニ正三角形 BCP, CAQ, ABR ヲ畫ケバ $AP=BQ=CR$ トナル。

15. 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點カラ他ノ二邊ヘ下シタ垂線ノ和ハ一定デアル。底邊ノ延長上ノ點カラノ垂線ハドウカ。



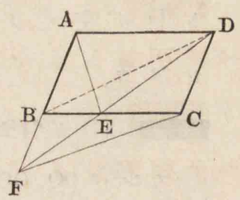
16. 正三角形ノ形内ノ一點カラ三邊ヘ下シタ垂線ノ和ハ一定デアル。點ガ形外ニアルトキハドウカ。

17. 同ジ底ノ上ニ等積ナ二ツノ三角形ガソノ底ノ同ジ側ニアレバ,ソノ頂點ヲ結ブ直線ハ底ニ平行デアル。

18. 同ジ底ノ上ニ等積ナ二ツノ三角形ガソノ底ノ反對ノ側ニアルトキハ,ソノ頂點ヲ結ブ線分ハ底ニヨッテ二等分セラレル。

19. 一定點ヲ通ル直線デ與ヘラレタ平行四邊形ノ面積ヲ二等分セヨ。

20. ▱ABCD ノ邊 BC 上ニ點 E ヲ取リ, DE ガ直線 AB ト交ハル點ヲ F トスレバ



[1] $\triangle AED = \frac{1}{2}$▱AC

[2] $\triangle ABE = \triangle CEF$

21. △ABC ノ中線 BE ノ中點ヲ O トシ, AO ノ延長ト BC トノ交點ヲ M トスレバ $BM = \frac{1}{3}BC$ デアル。

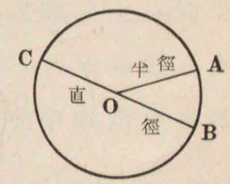
22. △ABC ノ邊 AB, AC ト中線 BM トヲ知ッテ,コノ三角形ヲ作レ。

23. 一邊トソノ一端ノ角ト他ノ二邊ノ和トヲ知ッテ,コノ三角形ヲ作レ。

第 10 章 中心角・弧・弦

27. 圓ノ基本性質

既ニ學ベル事カラワカル圓ノ基本定理ハ次ノ通リデアル。



定理 32. 一ツノ圓ノ半徑ハスベテ相等シイ。

定理 33. 一ツノ圓ノ直徑ハスベテ相等シイ。

定理 34. 中心カラ,半徑ヨリモ大ナル距離ニアル點ハ圓外ニアリ,半徑ニ等シイ距離ニアル點ハ圓周上ニアリ,半徑ヨリモ小ナル距離ニアル點ハ圓内ニアル。

定理 35. 半徑ノ相等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

問 1. 半徑ノ相等シイ二圓ヲ何トイフカ。

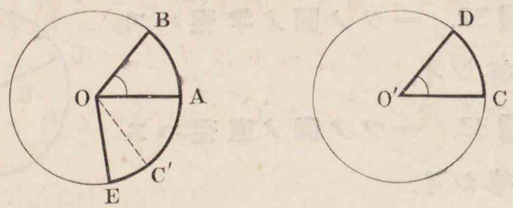
定理 36. 直徑ハソノ圓ヲ合同ナ二ツノ部分ニ分ケル。

問 2. 直徑ニヨッテ分ケラレタ圓ノ部分ヲ何トイフカ。

28. 中心角・弧・弦ノ關係

問 中心角・弧・弦ノ定義ヲ述ベヨ。

定理 37. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ中心角ニ對スル弧ハ相等シク,中心角ガ不等デアレバ,大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリモ大デアル。



題意 等圓 O, O′ ニ於テ

[1] $\angle AOB=\angle CO'D$ デアレバ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

[2] $\angle AOE>\angle CO'D$ デアレバ $\overset{\frown}{AE}>\overset{\frown}{CD}$

證明 [1] 圓 O′ ノ中心 O′ ヲ圓 O ノ中心 O ノ上ニ重ネ, $\angle CO'D$ ガ $\angle AOB$ ノ上ニ重ナルヤウニスレバ, C ハ A ノ上ニ, D ハ B ノ上ニ重ナル。故ニ

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$

[2] 又モシ $\angle AOE>\angle CO'D$ デアレバ上ト同様ニシテ重ネ, O′D ヲ OA ノ上ニ重ネ, O′C ガ OA ニ對シテ OE ト同ジ側ニアルヤウニスレバ, $\angle AOE>\angle CO'D$ デアルカラ, C ハ $\overset{\frown}{AE}$ ノ上ニ於テ

A, E ノ間ニ入ル。故ニ

$$\overset{\frown}{AE}>\overset{\frown}{CD}$$

注意 モシ同圓デアレバ中心ノ周リニ一方ノ扇形ヲ廻轉シテ,上ノヤウニ重ネ同様ニ證明スルコトガ出來ル。以下同圓及ビ等圓ニツイテ同一ノコトガイヘル場合ハイヅレカ一方ダケヲ述ベル。他ハ生徒自ラ試ミヨ。

系 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シク,弧ガ不等デアレバ,大ナル弧ノ上ニ立ツ中心角ハ小ナル弧ノ上ニ立ツ中心角ヨリモ大デアル。

定義 圓ノ一ツノ弧トソノ殘リノ弧トハ互ニ共軛デアルトイヒ,ソノ中大キイ方ヲ**優弧**,小サイ方ヲ**劣弧**トイフ。

定理 38. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弧ニ對スル弦ハ相等シク,弧ガ不等デアレバ,大ナル劣弧ニ對スル弦ハ小ナル劣弧ニ對スル弦ヨリモ大デアル。

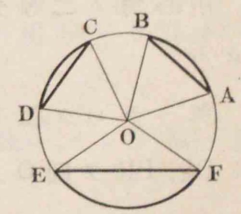
題意 圓 O ニ於テ

[1] $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ デアレバ

$AB=CD$

[2] $\overset{\frown}{EF}>\overset{\frown}{AB}$ デアレバ

$EF>AB$



證明 [1] OA, OB, OC, OD ヲ結ベバ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ デアルカラ

$$\angle AOB=\angle COD$$

$$\therefore\ \triangle OAB\equiv\triangle OCD$$

$$\therefore\ AB=CD$$

[2] OE, OF ヲ結ベバ, $\triangle OAB$, $\triangle OEF$ ニ於テ二邊ガ夫々相等シイガ,劣弧 $\overset{\frown}{EF}>\overset{\frown}{AB}$ デアルカラ,夾角ハ

$$\angle EOF>\angle AOB$$

$$\therefore\ EF>AB \qquad \text{[定理 20]}$$

系 **同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弦ニ對スル弧ハ相等シク,弦ガ不等デアレバ,大ナル弦ニ對スル劣弧ハ小ナル弦ニ對スル劣弧ヨリモ大デアル。**

問題 (20)

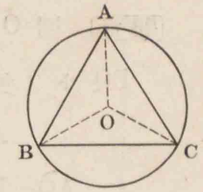
1. 中心角ノ二等分線ハソレニ對スル弧ヲ二等分スル。

2. 與ヘラレタ弧ヲ二等分セヨ。

3. PQ, PR ヲ圓Oノ周上ノ一點Pヲ通ル直徑及ビ弦トシ, PR ニ平行ナ半徑 OS ヲ引ケバ, OS ハ $\overset{\frown}{QR}$ ヲ二等分スル。

4. AB ヲ圓 O ノ弦トシ, $\overset{\frown}{AB}$ ノ二等分點ヲ C トスレバ $\angle CAB=\angle CBA$ デアル。

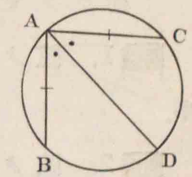
5. 圖ニ於テ $\triangle ABC$ ガ正三角形デアルトキ,各頂點ヲ圓ノ中心Oニ結ンデ出來ル中心角 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ ハ各何度トナルカ。



6. 圓周ノ六分ノ一ニ當ル弧ニ對スル弦ハソノ圓ノ半徑ニ等シイ。

7. 二ツノ等圓ガ A,B ニ於テ交ハルトキ優弧 AB, 劣弧 AB ハ夫々相等シイ。又二ツノ等圓ガ互ニ他ノ中心ヲ通リ, A,B ニ於テ交ハレバ,優弧 AB ハ劣弧 AB ノ何倍デアルカ。

8. AB, AC ヲ一ツノ圓ノ相等シイ二ツノ弦トスレバ,コレ等ハ A ヲ通ル直徑ト相等シイ角ヲナス。



9. PQ, QR, RS, ST ハ一ツノ圓ノ相等シイ弦トスレバ $PR=QS=RT$

10. 一ツノ劣弧ノ半分ニ對スル弦ハ,モトノ弧ニ對スル弦ノ半分ヨリモ大キイ。

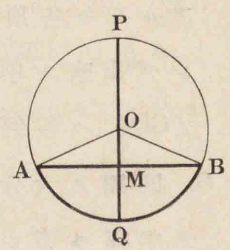
29. 弦ニ垂直ナ直徑

定理 39. 弦ニ垂直ナ直徑ハ弦及ビコレニ對スル弧ヲ二等分スル。

題意　圓 O ニ於テ, 弦 AB トコレニ垂直ナ直徑 PQ トノ交點ヲ M トスレバ

$AM=BM$

$\widehat{AQ}=\widehat{BQ},\quad \widehat{AP}=\widehat{BP}$



證明　OA, OB ヲ結ベバ

$\triangle AOM \equiv \triangle BOM$

$\therefore\quad AM=BM$

又　$\angle AOM=\angle BOM$

$\therefore\quad \widehat{AQ}=\widehat{BQ}$

從ツテ又　$\widehat{AP}=\widehat{BP}$

系 1. 弦ノ中點ヲ通ル直徑ハソノ弦ニ垂直デアル。

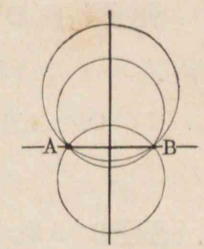
系 2. 弦ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ通リ, 且ツソノ弦ニ對スル弧ヲ二等分スル。

問題 (21)

1. 一ツノ直線ガ二ツノ同心圓ト交ハル點ヲ順次ニ A, B, C, D トスレバ AB=CD

2. 圓ノ直徑 AB ガ中心ヲ通ラナイ一ツノ弦 CD ヲ二等分スレバ, CD ニ平行ナ任意ノ弦 EF ヲモ二等分スル。

3. 二定點 A, B ヲ通ルスベテノ圓ノ中心ハ線分 AB ノ垂直二等分線上ニアル。



4. 圓ノ二ツノ弦ノ垂直二等分線ノ交點ハドコニアルカ。

5. 同一直線上ニナイ三點 A, B, C ヲ通ル圓ヲ畫ケ。

30. 弦ト中心トノ距離

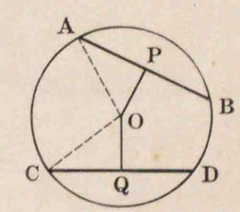
定理 40. 同圓又ハ等圓ニ於テ, 相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル。

題意　圓 O ニ於テ

$AB=CD,$

$OP \perp AB,\quad OQ \perp CD$　ナラバ

$OP=OQ$



證明　OA, OC ヲ結ベバ

$\triangle OAP \equiv \triangle OCQ$　[定理 12]

$\therefore\quad OP=OQ$

系 同圓又ハ等圓ニ於テ, 中心カラノ距離ノ相

等シイ弦ハ相等シイ。

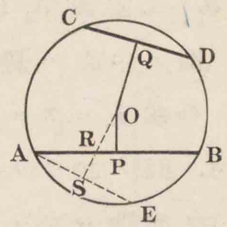
定理 41.　同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル弦ハ小ナル弦ヨリモ中心ニ近イ。

題意　圓 O ニ於テ

$AB>CD$

$OP\perp AB$,　$OQ\perp CD$　ナラバ

$OP<OQ$



證明　$AB>CD$　デアルカラ

$\widehat{AB}>\widehat{CD}$　デアル。今 $\widehat{AB}$ 上ニ $\widehat{CD}$ ニ等シク $\widehat{AE}$ ヲ取リ AE ヲ結ベバ, $AE=CD$ デ, O カラ AE ヘノ垂線ヲ OS トスレバ

$OS=OQ$

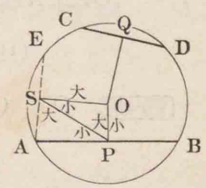
OS ト AB トノ交點ヲ R トスレバ

$OR>OP$　(定理 19 系)

トコロガ　　$OS>OR$

$\therefore\ OS>OP$

$\therefore\ OQ>OP$



注意　右ノ圖ニヨツテ上ノ定理ヲ證明シテ見ヨ。

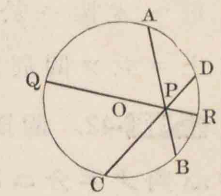
系 1.　同圓又ハ等圓ニ於テ,中心カラノ距離ノ小ナル弦ハ中心カラノ距離ノ大ナル弦ヨリモ大デアル。

系 2.　直徑ハ圓ノ最モ大ナル弦デアル。

問題　(22)

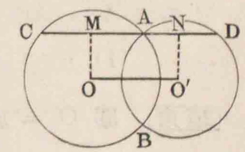
1.　一ツノ圓ニ於テ二ツノ相等シイ弦ガ交ハレバ各弦ハソノ交點ニ於テ夫々相等シイ二ツノ部分ニ分ケラレル。

2.　P ヲ圓 O ノ中心デナイ一點トシ, P ヲ通ツテ P ヲ通ル直徑ト相等シイ角ヲナス二ツノ弦ヲ引ケバ,コノ二ツノ弦ノ長サハ相等シイ。



3.　圓 O ノ直徑 AB ノ兩端カラ一ツノ弦 CD (又ハソノ延長) ニ下シタ垂線 AE, BF ノ足ヲ夫々 E, F トスレバ　$\triangle OCE=\triangle ODF$　デアル。

4.　A, B ニ於テ交ハル二ツノ圓 O, O′ ガアル。A ヲ通ツテ OO′ ニ平行ナ直線ヲ引キ,各圓ト夫々 C, D デ交ハラシメレバ　$CD=2OO'$　デアル。

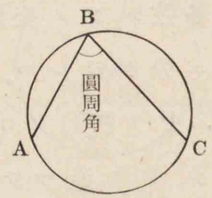


5.　直徑上ノ一點ヲ通ル弦ノ中デ,直徑ニ垂直ナ弦ガ最小デアル。

第11章　圓周角・弓形角

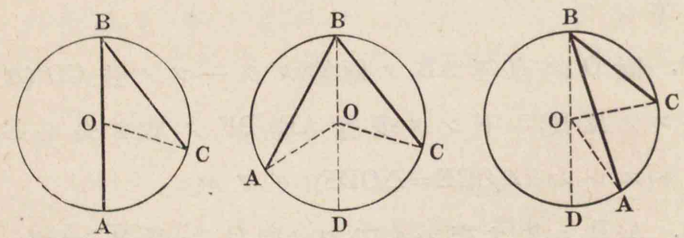
31. 圓周角

定義 圓周上ノ一點ヲ通ル二ツノ弦ノ夾ム角ヲソレ等ノ二弦ノ夾ム弧ノ上ニ立ツ圓周角トイフ。



例ヘバ圖ニ於テ $\angle ABC$ ハ $\overset{\frown}{AC}$ ノ上ニ立ツ圓周角デアル。

定理 42. 圓周角ハコレニ對スル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シイ。



(1)　　(2)　　(3)

題意 圓 O ニ於テ, $\angle ABC$ ヲ $\overset{\frown}{AC}$ ノ上ニ立ツ圓周角トシ, $\angle AOC$ ヲ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角トスレバ

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

證明 圖ニ示スヤウニ三ツノ場合ガアル。

(1) 中心 O ガ AB 上ニアルトキ。

OC ヲ結ベバ, $\triangle OBC$ ニ於テ

$$OB=OC$$

$$\therefore\quad \angle B=\angle C$$

然ルニ

$$\angle AOC=\angle B+\angle C$$

$$\therefore\quad \angle B=\frac{1}{2}\angle AOC$$

(2) 中心 O ガ $\angle ABC$ 內ニアルトキ。

B ヲ通ル直徑 BD ヲ引キ, OA, OC ヲ結ベバ, 上ト同樣ニ

$$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD$$

$$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle COD$$

$$\therefore\quad \angle ABD+\angle CBD=\frac{1}{2}(\angle AOD+\angle COD)$$

$$\therefore\quad \angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

(3) 中心 O ガ $\angle ABC$ 外ニアルトキ。

(2) ト同樣ニ直徑 BD ヲ引キ, OA, OC ヲ結ベバ

$$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle COD$$

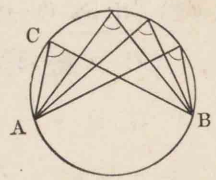
又

$$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD$$

$$\therefore\quad \angle CBD-\angle ABD=\frac{1}{2}(\angle COD-\angle AOD)$$

$$\therefore\quad \angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

系 1. 同一ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。

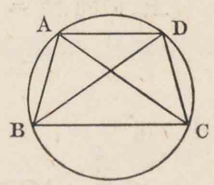


系2.　同圓又ハ等圓ニ於テ,等弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。

系3.　同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ圓周角ニ對スル弧ハ相等シイ。

問題　(23)

1. 圓ノ相交ハル二弦 AB, CD ノ交點ヲ E トスレバ △AEC, △BED ノ三ツノ角ハ夫々相等シイ。



2. 圖ニ於テ, AD∥BC トスレバ AC=BD デアル。

3. 圓ノ平行ナ弦 AB, CD ガ周カラ截リ取ル弧ハ相等シイ。

4. 120° ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ何度カ。75° ノ圓周角ニ對スル弧ハ何度ノ弧デアルカ。半圓周ハ何度ノ弧デアルカ。又 90°ノ圓周角ニ對スル弧ハ何カ。

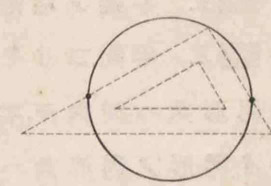
定義　一ツノ圓ニ於テ, a 度ノ中心角ニ對スル弧ヲ **“a 度ノ弧”** トイフ。

5. A, B, C ハ圓周上ノ三點デアッテ, △ABC ニ於テ ∠A=30°, ∠B=45° ナラバ $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ ハ夫々何度ノ弧デアルカ。

6. △ABC ニ於テ ∠A, ∠B, ∠C ヲ夫々 $a°$, $b°$, $c°$ トシ,ソレ等ノ二等分線ガ外接圓ニ交ハル點ヲ夫々 P, Q, R トスレバ △PQR ノ三ツノ角ノ大キサハ夫々何程カ。

定義　頂點ガスベテ圓周上ニアル多角形ハ圓ニ**內接**スルトイヒ,ソノ圓ハ多角形ニ**外接**スルトイフ。

7. 一ツノ圓ガ畫カレテアルトキ,三角定木ダケヲ用ヒテ,直徑ガ引ケル,又中心ガ求メラレル。ドウスレバヨイカ。

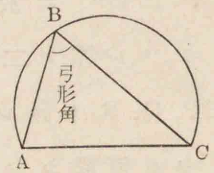


8. 圓 O ノ二ツノ弦 AB, CD ガ圓內ノ點 P ニ於テ交ハルトキハ, ∠APC ハ ∠AOC ト ∠BOD トノ和ノ半分ニ等シイ。

9. 圓 O ノ二ツノ弦 AB, CD ノ延長ガ圓外ノ點 P ニ於テ交ハルトキハ ∠APC ハ ∠AOC ト ∠BOD トノ差ノ半分ニ等シイ。

32. 弓形角

定義　弧トソノ兩端ヲ結ブ弦トニヨツテ圍マレル圓ノ一部分ヲ**弓形**トイフ。

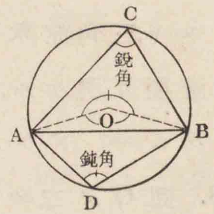


定義 弓形ノ弧ノ上ノ一點トソノ弦ノ兩端トヲ結ブ弦ノ夾ム角ヲ**弓形角**トイフ。

注意 圓ニ於テ一ツノ弦ヲ引ケバ，ソノ兩側ニ二ツノ弓形ガ生ズル。

定理 43. **同一弓形ノ角ハ一定ノ大キサヲ有スル。**

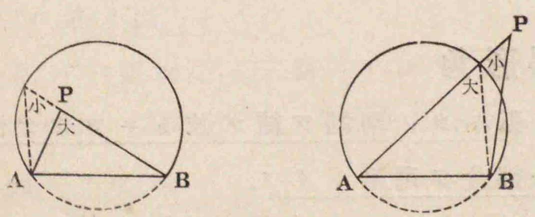
系 1. **半圓ノ弓形角ハ直角ニ等シイ。**



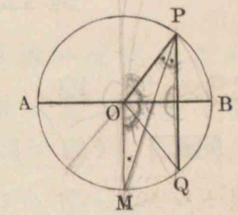
系 2. **半圓ヨリモ大キイ弓形ノ弓形角ハ鋭角デ，半圓ヨリモ小サイ弓形ノ弓形角ハ鈍角デアル。**

注意 一點ヲ線分ノ兩端ニ結ビツケテ出來ル二線分ノ夾ム角ヲソノ點ニ於テ"**線分ヲ見込ム角**"又ハソノ點ニ於ケル"**線分ニ對スル角**"トイフ。

系 3. **弓形ノ弦ABニ關シテ弓形ト同ジ側ニアル任意ノ點ヲPトスル。然ラバPニ於テ弦ABニ對スル角APBハ，Pガ弓形ノ内ニアレバ弓形角ヨリモ大キク，Pガ弓形ノ外ニアレバ，弓形角ヨリモ小サイ。逆モ眞デアル。**



問題 (24)



1. 圓Oノ弦PQガ直徑ABニヨツテ二等分セラレルナラバ，∠OPQノ二等分線PMハ半圓周AQBヲ二等分スル。

2. 線分ABノ中點ヲOトシ，ABヲ直徑トスル圓トOAヲ直徑トスル圓トヲ作リ，Aカラ任意ノ直線ヲ引イテ，ソレガ第一ノ圓周トPデ，第二ノ圓周トQデ交ハルトスレバ，QハAPノ中點デアル。

3. 二等邊三角形ABCノ相等シイ邊AB, ACヲ直徑トスル圓周ハ底邊BCノ上デ交ハル。

4. 同ジ底ヲモチ，ソノ底ニ對シテ同ジ側ニアツテ頂角ガ一定ナル三角形ノ頂點ハ皆同一ノ圓周上ニアル。

5. △ABCノ垂心ヲHトシ，頂點Aカラ邊BCニ引イタ垂線ガBCト交ハル點ヲD，外接圓ト交ハル點ヲEトスレバ DH=DE デアル。

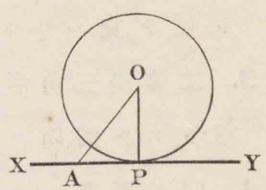
注意 鈍角三角形ノ場合ヲ忘レナイヤウニセヨ。

第12章 切線・割線

33. 切線

定義 直線ガ圓ト二點ヲ共有スルトキ,コレヲ割線トイヒ,一點ノミヲ共有スルトキ,コレヲ**切線**トイフ。切線ト圓トノ共有點ヲ**切點**トイフ。

定理 **44. 圓周上ノ一點ニ於テソノ點ヘ引イタ半徑ニ垂直ナ直線ハ切線デアル。**



題意 圓 O ノ周上ノ一點ヲ P トシ $OP \perp XY$ トスレバ XY ハ P ニ於テコノ圓ニ切スル。

證明 XY 上ニ於テ P 以外ノ點 A ヲ取リ, OA ヲ結ブ。サウスルト $OA > OP$ (何故カ)

故ニ A ハ圓 O ノ外ニアル。

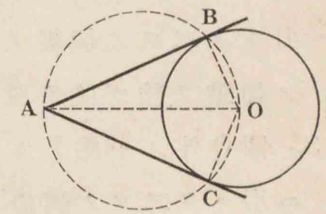
然ルニ A ハ XY 上ニ於テ P 以外ニ任意ニ取ッタ點デアルカラ, XY 上 P 以外ノ點ハスベテ圓外ニアル。故ニ XY ハ P ニ於テコノ圓ニ切スル。

系 **1. 圓ノ切線ハソノ切點ヘ引イタ半徑ニ垂直デアル。**

系 **2. 切點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル。**

系 **3. 圓ノ中心カラ切線ヘノ垂線ハ切點ヲ通ル。**

作圖題 **7. 圓外ノ一點カラコノ圓ニ切線ヲ引ケ。**



題意 O ヲ與ヘラレタ圓, A ヲソノ外ニアル與ヘラレタ點トシ, A カラ圓 O ノ切線ヲ引ク。

作圖 AO ヲ結ビ,ソレヲ直徑トスル圓ヲ畫キ, B 及ビ C ニ於テ圓 O ト交ハラシメル。

AB, AC ヲ結ベバ,ソレ等ガ求メル切線デアル。

證明 $\angle ABO$, $\angle ACO$ ハ共ニ半圓ノ弓形角デアルカラ直角デアル。

$$\therefore\ AB \perp OB,\quad AC \perp OC$$

故ニ AB, AC ハ圓 O ノ切線デアル。

定義 圓外ノ一點カラ,ソノ圓ニ引イタ切線ノ切點マデノ長サヲソノ**切線ノ長サ**トイフ。

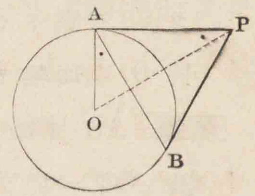
上ノ圖デ AB, AC ノ長サガ A カラ圓 O ヘノ切線ノ長サデアル。

系 **4. 圓外ノ一點カラコノ圓ヘノ二ツノ切線ノ**

長サハ相等シイ。

問題 (25)

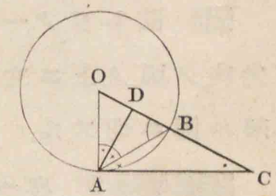
1. 圓周上ノ一點ニ於テコノ圓ニ切線ヲ引ケ。
2. 圓外ノ一點ト中心トヲ結ブ直線ハ,ソノ點カラ引イタ二ツノ切線ノナス角ヲ二等分シ,且ツ二ツノ切點ヲ結ブ弦ヲ垂直ニ二等分スル。
3. 圓O外ノ一點Pカラコノ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ切點ヲ夫々A, Bトスレバ, $\angle APB$ ハ $\angle OAB$ ノ2倍デアル。



4. 二ツノ同心圓ノ小サイ圓ニ切スル大キイ圓ノ弦ハスベテ長サ相等シク,且ツソノ切點ニ於テ二等分セラレル。
5. 圓ノ直徑ヲABトシ,圓周上ノ任意ノ一點ニ於ケル切線トA及ビBニ於ケル切線トノ交點ヲ夫々C, Dトスレバ $AC+BD=CD$ デアル。
6. 直角三角形ニ内接スル圓ノ直徑ハ斜邊ト,他ノ二邊ノ和トノ差ニ等シイ。
7. 圓O外ノ定點Aカラ二ツノ切線AB, ACヲ引キ,劣弧BC上ノ任意ノ點Dニ於ケル切線ガAB,

ACト交ハル點ヲE, Fトスレバ, △AEFノ周ハ一定デアル。

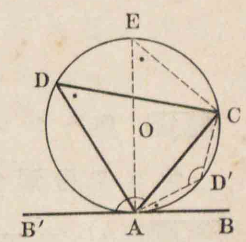
8. 圓Oノ周上ノ一點Aニ於ケル切線ト任意ノ半徑OBノ延長トノ交點ヲCトシ, AカラOCニ垂線ADヲ下シ, ABヲ結ベバ, ABハ $\angle DAC$ ヲ二等分スル。



34. 切線ト弦トノナス角

定理 45. 圓ノ切線ト切點ヲ通ル弦トノナス角ハ,ソノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ.

題意 ABヲ圓Oノ周上ノ一點Aニ於ケル切線, ACヲ切點ヲ通ル任意ノ弦トシ, Dヲ $\overset{\frown}{ADC}$ 上ノ任意ノ一點トスレバ



$$\angle BAC=\angle ADC$$

證明 Aヲ通ル直徑AEヲ引キ, ECヲ結ベバ

$$\angle BAC+\angle CAE=R\llcorner$$

$$\angle AEC+\angle CAE=R\llcorner \quad (何故カ)$$

$$\therefore \quad \angle BAC=\angle AEC$$

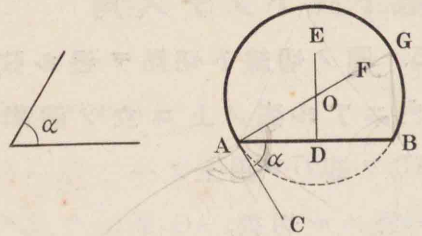
又　　$\angle AEC = \angle ADC$　　(何故カ)

$\therefore$　　$\angle BAC = \angle ADC$

注意　$\angle CAB' = \angle D'$ ナルコトヲモ考ヘテ見ヨ。

系　弦トソノ一端ヲ通ル直線トノナス角ガコノ角内ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイトキハ,ソノ直線ハ圓ニ切スル。

作圖題 8.　與ヘラレタ線分ヲ弦トシ,與ヘラレタ角ヲ弓形角トスル弓形ヲ畫ケ。



題意　與ヘラレタ線分 AB ヲ弦トシ,與ヘラレタ角 α ヲ弓形角トスル弓形ヲ作ル。

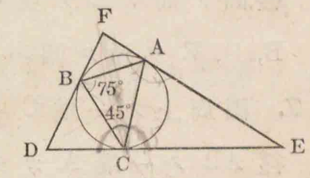
作圖　AB ノ一端 A ニ於テ $\angle\alpha$ ニ等シク $\angle BAC$ ヲ畫キ, A ニ於テ AC ニ垂線 AF ヲ引キ, AB ノ垂直二等分線 ED ト O ニ於テ交ハラシメル。 O ヲ中心トシ, OA ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ,弓形 AGB ハ求メル弓形デアル。

證明　生徒各自ニ試ミヨ。

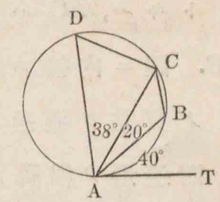
45
75
120
60

問題 (26)

1. 圖ニ於テ $\triangle DEF$ ノ各邊ハ圓 ABC ニ切スル。今切點 A, B, C ヲ結ビツケテ得ル三角形ニ於テ $\angle ABC = 75°$, $\angle ACB = 45°$ ナレバ $\triangle DEF$ ノ各角ノ大キサハ何度カ。



2. 圖ニ於テ $\angle D$, $\angle DCA$, $\angle ACB$, $\angle B$ ノ大キサヲ計算セヨ。但シ AT ハ切線, $\angle TAB = 40°$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 38°$ トスル。

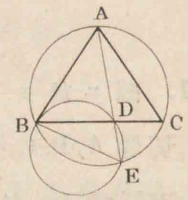


3. AB ヲ一ツノ圓ノ直徑トシ, AB ノ延長上ニ一點 C ヲ取リ, BC ヲコノ圓ノ半徑ニ等シク取ル。C カラコノ圓ヘノ切線ノ切點ヲ D トスレバ,三角形 ACD ハ二等邊三角形デアル。

4. 圓周上ノ一點カラソノ圓ニ切線ト弦トヲ引ケバ,ソノ弦ニ對スル弧ノ中點ハ切線及ビ弦カラ等距離ニアル。

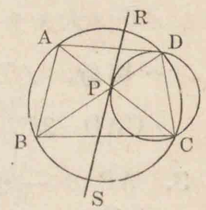
5. AB ヲ一ツノ圓ノ直徑トシ A カラ圓周上ノ一點 C ニ於ケル切線ニ垂線 AD ヲ引キ,コレヲ延長シテ BC ノ延長ト E ニ於テ交ハラシメレバ AE=AB デアル。

6. 二等邊三角形ノ頂點Aカラ一ツノ直線ヲ引キ底邊BCトD,外接圓ノ周トEデ交ハラシメレバB, D, Eヲ通ル圓ハABニ切スル。



7. 圓周上ノ一點Cニ於テソノ圓ニ切線ヲ引キ,直徑ABノ一端Aカラコノ切線ニ垂線ADヲ引クトキハ,ACハ∠BADヲ二等分スル。

8. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通過シテ,コノ點トコノ四邊形ノ相隣ル二頂點トヲ通過スル圓ニ引イタ切線ハ四邊形ノ一邊ニ平行デアル。



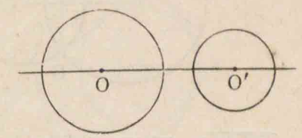
注意 多角形ノ各頂點ガ皆同一ノ圓周上ニアルトキハ,ソノ多角形ヲコノ圓ノ**内接多角形**トイヒ,コノ圓ヲソノ多角形ノ**外接圓**トイフ。

又多角形ノ各邊ガ皆同一ノ圓ニ切スルトキハ,ソノ多角形ヲコノ圓ノ**外接多角形**トイヒ,コノ圓ヲソノ多角形ノ**内接圓**トイフ。

第13章 二圓ノ關係

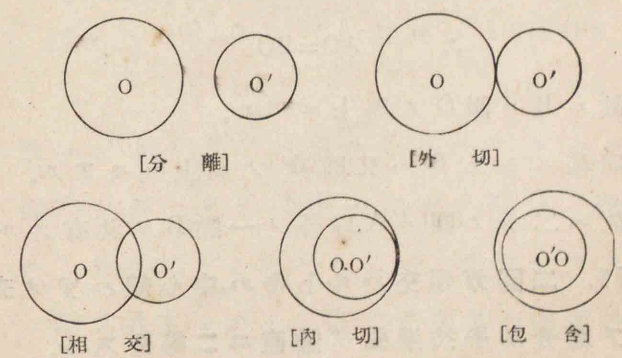
35. 二ツノ圓

定義 二ツノ圓ノ中心ヲ通ル直線ヲ**中心線**トイヒ,中心間ノ距離ヲ**中心距離**トイフ。

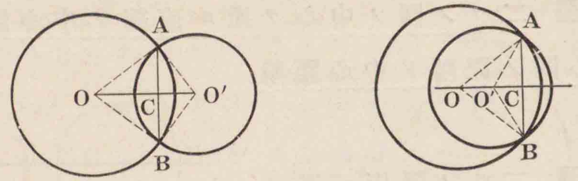


定義 二ツノ圓周ガ唯一點デ出會フトキ,コノ二ツノ圓ハ**相切**スルトイヒ,ソノ一點ヲ二ツノ圓ノ**切點**トイフ。二ツノ圓ガ相切スルトキ,各ノ圓ガ他ノ圓ノ外ニアルトキニハ,コノ二圓ハ**外切**スルトイヒ,一ツノ圓ガ他ノ圓ノ内ニアルトキハ二ツノ圓ハ**内切**スルトイフ。

二ツノ圓ノ關係ヲ圖示スレバ次ノヤウニナル。



定理 46. 二ツノ圓周ガ中心線上ニナイ點ヲ共有スルトキハ,ソノ二ツノ圓周ハ又他ノ一ツノ點ヲ共有スル。



題意 二ツノ圓 O, O′ ガソノ中心線 OO′ ノ上ニナイ一點 A ヲ共有スレバ,コノ二圓ハ又他ノ一ツノ點ヲ共有スル。

證明 A カラ OO′ (又ハソノ延長上)ニ垂線 AC ヲ引キ,コレヲ延長シテ AC ニ等シク CB ヲ取リ, AO, BO, AO′, BO′ ヲ結ブ。サウスルト

$\triangle AOC \equiv \triangle BOC$ (何故カ)

$\therefore \quad AO = BO$

故ニ B ハ圓 O ノ周上ニアル。

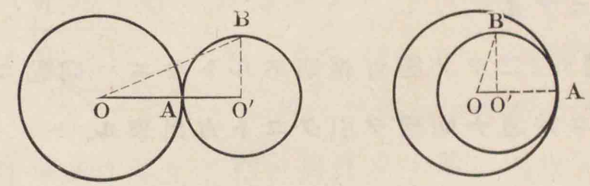
同様ニシテ B ハ又圓 O′ ノ周上ニモアル。

故ニ二ツノ圓ハ A 以外ノ一點 B ヲ共有スル。

系 1. 二圓ガ相交ハルトキハ,中心線ハソノ交點ヲ結ブ線分卽チ共通弦ヲ垂直ニ二等分スル。

系 2. 相交ハル二圓ノ中心距離ハ半徑ノ和ヨリモ小サクテ,ソノ差ヨリモ大キイ。

定理 47. 二ツノ圓周ガ中心線上ノ一ツノ點ヲ共有スレバ,コノ二ツノ圓ハ外切又ハ内切スル。



(1) (2)

題意 二ツノ圓 O, O′ ガソノ中心線上ノ一點 A ヲ共有スレバ,コノ二圓ハ外切又ハ内切スル。

證明 圓 O′ ノ周上ニ一點 B ヲ取リ, OB, O′B ヲ結ブ。

(1) $OB + O'B > OO'$	(2) $OB < OO' + O'B$
然ルニ $O'B = O'A$	然ルニ $O'B = O'A$
$\therefore \quad OB > OA$	$\therefore \quad OB < OA$

故ニ O′ 圓周上ノ A 以外ノ點ハ (1) デハスベテ圓 O ノ外ニアリ,(2) デハスベテ圓 O ノ内ニアル。故ニ二ツノ圓ハイヅレノ場合デモ A 以外ノ點ヲ共有シナイ。卽チ外切又ハ内切スル。

系1. 外切スル二圓ノ中心ノ距離ハ半徑ノ和ニ等シク,內切スル二圓ノ中心ノ距離ハ半徑ノ差ニ等シイ。

系2. 二ツノ圓ガ相切スルトキニハ,切點ハ中心線上ニアル。

系3. 二ツノ圓ガ相切スルトキニハ,切點ニ於テ兩圓ニ共通ナ切線ヲ引クコトガ出來ル。

問題 (27)

1. 二ツノ圓ノ中心距離ヲ d トシ,二ツノ圓ノ半徑ヲ夫々 r, r' $(r>r')$ トスレバ

[1] 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ外ニアレバ　$d>r+r'$

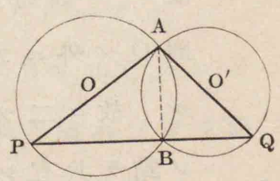
[2] 兩圓ガ外切スルトキハ　$d=r+r'$

[3] 兩圓ガ相交ハルトキハ　$r-r'<d<r+r'$

[4] 兩圓ガ內切スルトキハ　$d=r-r'$

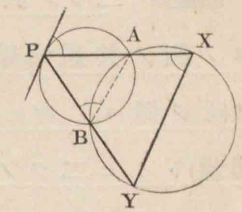
[5] 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ內ニアレバ　$d<r-r'$

2. 相交ハル二ツノ圓ノ一ツノ交點ヲ通ル各圓ノ直徑ノ他ノ端ヲ結ビツケル直線ハ他ノ交點ヲ通ル。



3. 三角形ノ二邊ヲ直徑トスル圓ハ第三邊又ハソノ延長上ノ一點ニ於テ交ハル。

4. 相交ハル二ツノ圓ノ一ツノ圓ノ周上ノ任意ノ一點Pカラ各ノ交點ヲ通ル直線ヲ引キ,他ノ圓ノ周トX, Yデ交ハラシメレバ, XYハPニ於ケル切線ニ平行デアル。



5. 內切スル二ツノ圓ノ切點Cヲ通ル任意ノ直線ハコレ等ノ圓カラ相等シイ弓形角ヲ有スル弓形ヲ截リ取ル。

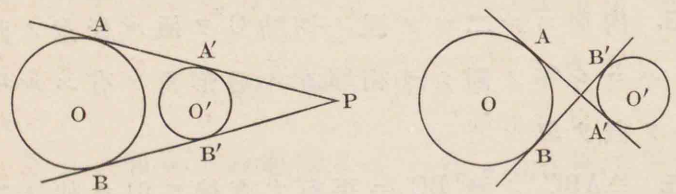
6. △ABCノ邊BCニ平行ナ直線ヲ引キ,他ノ二邊トノ交點ヲD, Eトスレバ△ABC, △ADEニ外接スル圓ハA點デ切スル。

7. 圓O, O′ガA, A′ニ於テ同一ノ直線ニ切スルナラバ, OO′ノ中點カラソノ直線ヘノ垂線ハAA′ヲ二等分スル。

8. 二ツノ圓ガA, Bデ交ハリ, Aヲ通ル割線CADヲ引キ二ツノ圓トC, Dデ交ハラシメル。今C, Dニ於テ各圓ニ切線ヲ引キ,ソノ交點ヲEトスレバ∠CEDハ∠CBDノ補角デアル。

36. 二ツノ圓ノ共通切線

定義 二ツノ圓ノイヅレニモ切スル直線ヲソノ二ツノ圓ノ**共通切線**トイヒ,二ツノ圓ガソノ共通切線ノ同ジ側ニアルトキハコレヲ**共通外切線(又ハ外共通切線)**トイヒ,二ツノ圓ガソノ共通切線ノ反對側ニアルトキハコレヲ**共通內切線(又ハ內共通切線)**トイフ。

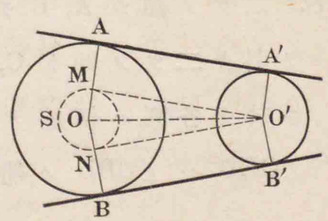


作圖題 9. 與ヘラレタ二ツノ圓ニ共通切線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ二ツノ圓O, O′ノ共通切線ヲ引ク。

(1) 共通外切線ノ場合

解析 二圓O, O′ノ半徑ヲ夫々r, r'トスル。



假ニ共通切線AA′ヲ引キ得タトシ, A, A′ヲソノ切點トスル。

$r>r'$ト假定シ, O′カラAA′ニ平行ナ直線ヲ引

イテ,ソレガOAト交ハル點ヲMトスレバO′A′AMハ矩形デ

$$OM=OA-O'A'=r-r'$$

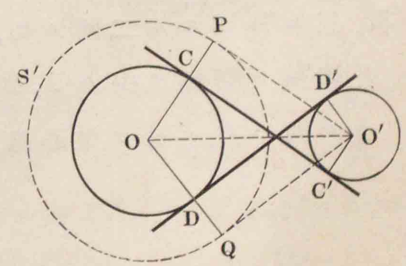
故ニO′MハMニ於テ,Oヲ中心トシ$r-r'$ヲ半徑トスル圓(コノ圓ヲSト名ヅケル)ニ切スル。依ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 Oヲ中心トシ,$r-r'$ニ等シイ半徑ノ圓Sヲ作リ,O′カラコノ圓Cニ切線O′M, O′Nヲ引キ,M, Nヲ切點トスル。OM, ONノ延長ガO圓周ト交ハル點A, Bカラ夫々MO′, NO′ニ平行線AA′, BB′ヲ引ケバ,AA′, BB′ハ圓O, O′ノ共通外切線デアル。

(2) 共通內切線ノ場合

前ト同樣ノ解析ニヨツテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 Oヲ中心トシ,$r+r'$ニ等シイ半徑ノ圓S′ヲ作リ,O′カラコノ圓S′ニ切線O′P, O′Qヲ引ク。線分OP, OQガO圓周ト交ハル點C, Dカラ夫々PO′, QO′ニ平行ナ直線CC′及ビDD′



ヲ引ケバ, CC′, DD′ ハ共通内切線デアル。

[證明] 生徒各自ニナセ。

[問] 共通切線ノ數ハ二圓ノ位置ニヨツテ異ナル。次表ニ夫々ノ場合ノ共通切線ノ數ヲ記入セヨ。

二圓ノ位置	分離	外切	相交	内切	包含
外切線ノ數					
内切線ノ數					

[問題] (28)

1. 二ツノ圓ノ共通外切線(又ハ共通内切線)ノ交點ハ中心線上ニアル。

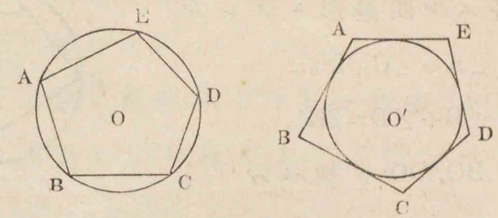
2. 二ツノ圓ノ共通外切線(又ハ共通内切線)ノ切點間ノ部分ハ相等シイ。

3. 互ニ外切スル二圓ノ切點ヲ C トシ,一ツノ共通外切線ノ切點ヲ夫々 A, B トスレバ, AB ヲ直徑トスル圓ハ C ニ於テ中心線ニ切スル。

第14章 内接形·外接形

37. 三角形ノ内接圓·傍接圓

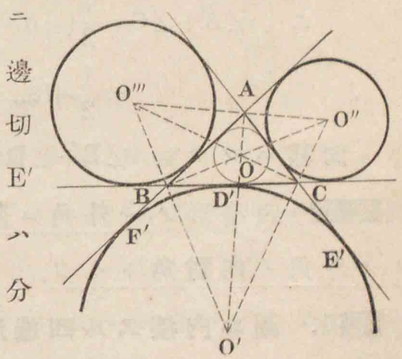
[問] 1. 内接多角形·外接多角形ノ定義ヲ述ベヨ。



作圖題 10. 與ヘラレタ三角形ノ内接圓及ビ傍接圓ヲ畫ケ。

定理 22 及ビソノ系ヲ參照シテ各自ニ試ミヨ。

[問] 2. △ABC ノ ∠A ニ對スル傍接圓ガ邊 AB, AC ノ延長ニ切スル點ヲ夫々 F′, E′ トスレバ AE′, AF′ ハ三角形ノ周ノ半分 (s) ニ等シイ。



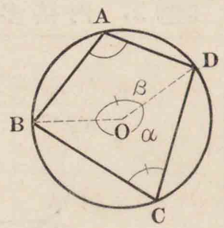
[問] 3. 前問ノ傍接圓ガ邊 BC ト切スル點ヲ D′ トシ, $AB=c$, $AC=b$ トスレバ

$$BD'=BF'=s-c, \quad CD'=CE'=s-b$$

38. 圓ニ内接スル四邊形

定理 48. 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ補角ヲナス。

題意　四邊形 ABCD ヲ圓 O ニ内接スル四邊形トスレバ



$\angle A+\angle C=2\text{R}\llcorner$

$\angle B+\angle D=2\text{R}\llcorner$

證明　BO, DO ヲ結ベバ

$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOD$　(圖ノ $\angle\alpha$)

$\angle C=\frac{1}{2}\angle BOD$　(圖ノ $\angle\beta$)

$$\therefore\ \angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)=\frac{1}{2}\cdot 4\text{R}\llcorner=2\text{R}\llcorner$$

同様ニシテ　$\angle B+\angle D=2\text{R}\llcorner$

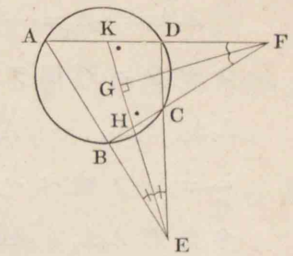
定義　四邊形ノ一外角ニ隣ル内角ニ對スル角ヲソノ外角ノ**内對角**トイフ。

系 1. 圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハソノ内對角ニ等シイ。

系 2. 四邊形ノ相對スル角ガ補角ヲナストキハ，コレニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

問題 (29)

1. 圓ニ内接スル平行四邊形ハ矩形デアル。
2. AB ヲ弦トスル弓形ノ弧ノ中點ヲ C トシ, ソノ弧ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ, PC ハ ∠APB ノ外角ヲ二等分スル。
3. 二ツノ圓ノ交點 A, B ヲ通ル直線 PAQ, RBS ヲ引イテ, 圓周ト P, Q 及ビ R, S デ出會ハシメレバ, 弦 PR, QS ハ平行デアル。
4. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ二双ノ對邊ノ交點ヲ E, F トスレバ, ∠E, ∠F ノ二等分線ハ互ニ垂直デアル。



5. 二等邊三角形ノ底邊 BC ニ平行ナ直線 DE ガ邊 AB, AC 或ハソノ延長ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ D, E, C, B ハ同一圓周上ニアル。
6. 三角形 ABC ノ頂點 A カラ對邊 BC ヘ垂線 AD ヲ引キ, D カラ邊 AB, AC ヘ夫々垂線 DE, DF ヲ引クトキハ, 四邊形 AEDF モ BEFC モ圓ニ内接シ得ベキ四邊形デアル。

7. 直角三角形ノ直角ノ二等分線ハ斜邊ノ上ニソノ外側ニ畫イタ正方形ノ對角線ノ交點ヲ通ル。

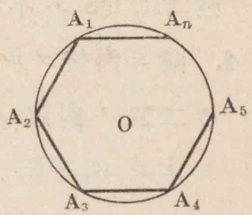
39. 圓ト正多角形

問　正多角形ノ定義ヲ述べ,且ツソノ畫キ方ヲイヘ。

定理 49. 圓周ヲ三ツ以上ノ相等シイ弧ニ分ケ,ソノ等分點ヲ順次ニ結ビツケテ出來ル內接多角形ハ正多角形デアル。

題意　圓 O ニ於テ

$\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{A_nA_1}$



ノヤウニ圓周ヲ n 等分シ,

A_1A_2, A_2A_3, ……, A_nA_1 ノヤウニコレヲ結ベバ,

多角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ ハ正多角形デアル。

證明　$\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{A_nA_1}$　デアルカラ

$$A_1A_2=A_2A_3=\cdots\cdots=A_nA_1$$

又　$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=\cdots\cdots=\angle A_n$

(コレ等ノ角ハ圓周ノ $\dfrac{1}{n-2}$ ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角デアルカラ)

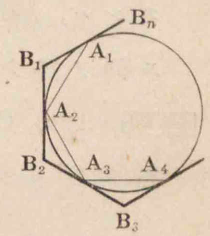
故ニ各邊ガ相等シクテ各角ガ相等シイカラ

$A_1A_2\cdots\cdots A_n$ ハ正多角形デアル。

定理 50. 圓周ヲ三ツ以上ノ相等シイ弧ニ分ケ,ソレ等分點ニ於テ圓ニ切スル直線ヲ引ケバ,ソレ等ノ直線ハ正多角形ヲ作ル。

題意　圓 O ニ於テ

$\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{A_nA_1}$



ノヤウニ圓周ヲ n 等分シ, A_1, A_2, ……, A_n ニ於テコノ圓ヘ切線ヲ引キ,相隣ル切線ノ交點ヲ順次ニ B_1, B_2, ……, B_n トスレバ,多角形 $B_1B_2\cdots B_n$ ハ正多角形デアル。

證明　$\triangle B_1A_1A_2$, $\triangle B_2A_2A_3$, …… ハ二等邊三角形デアル。

ソレ等ノ底邊 A_1A_2, A_2A_3, …… ハ圓周ノ $\dfrac{1}{n}$ ノ弧ニ對スル弦デアルカラ相等シイ。

又底角 $\angle B_1A_1A_2$, $\angle B_2A_2A_3$, …… ハ圓周ノ $\dfrac{1}{n}$ ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイカラ,相等シイ。

故ニコレ等ノ二等邊三角形ハ皆合同デアル。

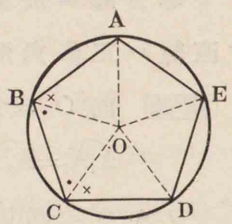
$$\therefore\ \angle B_1=\angle B_2=\cdots\cdots=\angle B_n$$

又　$B_1A_1=B_1A_2=B_2A_2=B_2A_3=\cdots\cdots=B_nA_1$

從ツテ　$B_1B_2=B_2B_3=\cdots\cdots=B_nB_1$

故ニ $B_1B_2\cdots\cdots B_n$ ハ正多角形デアル。

定理 51.　正多角形ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。



題意　ABCDE ヲ正多角形トスレバ, ABCDE ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

證明　A, B, C ヲ通ル圓ノ中心ヲ O トシ, OA, OB, OC, OD, OE ヲ結ブトキハ

OB＝OC

∴　∠OBC＝∠OCB

又假設ニヨリ　∠ABC＝∠BCD

∴　∠OBA＝∠OCD

故ニ　△OBA≡△OCD

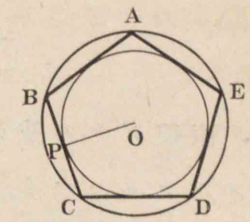
∴　OA＝OD

故ニ圓 O ハ D 點ヲ通ル。同樣ニシテ E,…… モ圓 O ノ周上ニアル。卽チ圓 O ガ正多角形ニ外接スル。

定理 52.　正多角形ニ內接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

題意　ABCDE ヲ正多角形トスレバ, ABCDE ニ內接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル。

證明　O ヲコノ正多角形ノ外接圓ノ中心トスル。



サウスルト AB, BC,…… 等ハコノ圓ノ弦トナリ, 而モ長サガ相等シイカラ中心カラ等距離ニアル。故ニ O カラ一邊 BC ニ下シタ垂線ヲ OP トシテ, O ヲ中心トシ OP ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ, コノ圓ハ正多角形ノ各邊ニ切スル。卽チ正多角形ノ內接圓デアル。

系　正多角形ノ外接圓ノ中心ト內接圓ノ中心トハ一致スル。

コノ共通ノ中心ヲ**正多角形ノ中心**トイフ。

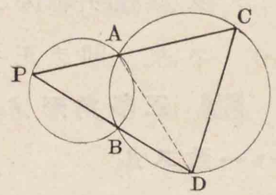
問題　(30)

1. 圓ニ內接スル等邊多角形ハ正多角形デアル。
2. 圓ニ外接スル正五角形 ABCDE ノ各頂點ヲ中心ニ結ビツケル直線ガ再ビ圓周ト交ハル點ヲ A′, B′, C′, D′, E′ トスレバ, A′B′C′D′E′ ハ正五角形デアル。
3. 圓ニ內接スル等角多角形ハ頂點ノ數ガ奇數デアレバ正多角形デアル。(偶數ナラバ如何)
4. 圓ニ外接スル等角多角形ハ正多角形デアル。
5. 圓ニ外接スル等邊多角形ハ邊ノ數ガ奇數デアレバ正多角形デアル。(偶數ナラバ如何)

雜題 (2)

1. 直徑デナイ弦ガ交ハルトキハ,互ニ他ヲ二等分スルコトハナイ。

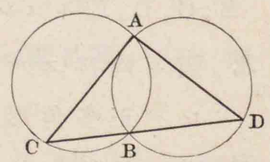
2. 二點 A, B デ交ハル二ツノ圓ガアル。一ツノ圓ノ周上ノ任意ノ點 P カラ A ヲ通ル直線及ビ B ヲ通ル直線ガ再ビ他ノ圓周ト出會フ點ヲ夫々 C, D トスレバ,弦 CD ノ長サハ一定デアル。



3. 二點 A, B デ交ハル二ツノ圓ガアル。A ヲ通ル任意ノ直線 MAN ガ各ノ圓周ト夫々 M, N デ交ハレバ ∠MBN ハ一定デアル。

4. 二點 A, B デ交ハル二ツノ圓ガアル。A ヲ通リ直線 CAD, EAF ヲ引ケバ, ∠CBE=∠FBD

5. 二ツノ等圓ノ交ハリヲ A, B トシ, B ヲ通ル任意ノ直線ト各ノ圓周トノ交點ヲ夫々 C, D トスレバ, AC=AD

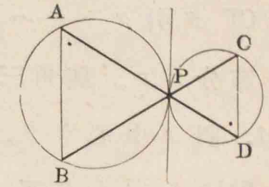


6. 圓ニ外接スル四邊形ノ對邊ノ和ハ相等シイ。

7. △ABC ノ邊 BA ヲ A ノ方ニ延長シテ, AC ニ等

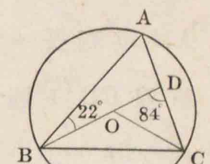
シク AD ヲ取ルトキハ, ∠BAC ノ二等分線ハ三點 A, C, D ヲ通ル圓ニ切スル。

8. 二ツノ圓ガ外切スルトキ,ソノ切點 P ヲ通ル二ツノ割線ガ一ツノ圓ト A, B デ,他ノ圓ト D, C デ交ハレバ,直線 AB ハ直線 CD ニ平行デアル。二圓ガ內切スルトキハドウカ。



9. 外切スル二ツノ圓ノ切點ヲ P トシ,ソレ等ノ圓ノ直徑 AB, CD ガ同ジ方向ニ平行デアルトスレバ AP, PD 及ビ BP, PC ハ一直線ヲナス。內切ノ場合ハ如何。

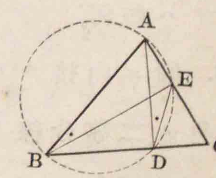
10. 右ノ圖ニ於テ O ハ圓 ABC ノ中心デアル。∠A, ∠BOC, ∠OCB, ∠ABC, ∠ACB ノ大キサヲ求メヨ。



11. C ニ於テ切スル二ツノ圓ノ中心ヲ夫々 A, B トシ,又 C ヲ通ル任意ノ直線ガ圓周ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ, AD ∥ BE

12. 銳角三角形 ABC ノ頂點 A, B カラ對邊ヘ垂線 AD, BE ヲ引キ DE ヲ結ビツケレバ

∠ABE=∠ADE



13. △ABC ノ各角ノ頂點カラ對邊ヘ垂線 AD, BE CF ヲ引クトキハ AD, BE, CF ハ △DEF ノ角ヲ二等分スル。鈍角三角形ノ場合ヲモ考ヘヨ。

14. 圓ノ中心カラ,ソノ直徑ニ等シイ距離ニアル點カラ引イタ二ツノ切線ノナス角ハ 60° デアル。

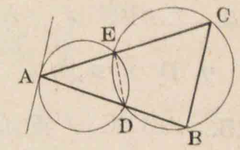
15. 圓ノ二ツノ切線ノ交角ハコノ二ツノ切線ノ間ニ夾マレル共軛弧ノ差ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ。

16. 與ヘラレタ圓ノ弧 AB ノ中點ヲ M トスル。弦 AM ヲ延長シテ MC=AM トナルヤウニ C ヲ取リ,直線 CB ト圓周トノ交點ヲ D トスレバ, AD ハ直徑デアル。

17. 圓ニ外接スル四邊形ノ各邊ノ切點ヲ頂點トスル內接四邊形ヲ作ルトキ,外接四邊形ノ三ツノ角ガ 70°, 100°, 130° ナラバ,內接四邊形ノ各角ノ大キサハ如何。

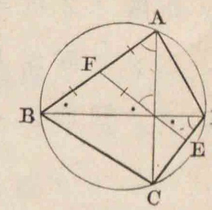
18. 圓ニ內接スル四邊形ノ外角ノ二等分線ト內對角ノ二等分線トハ同ジ圓ノ周上デ出會フ。

19. △ABC ノ邊 BC ヲ弦トスル圓周ガ AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ハルトキ A ニ於テ圓 ADE ニ切スル切線ハ BC ニ平行デアル。



20. 圓ノ二ツノ弦ヲ AB, AC トシ, B ヲ通ッテ A ニ於ケル切線ニ平行ナ直線ガ AC 又ハソノ延長ト D ニ於テ交ハルトスレバ,三點 B, C, D ヲ通ル圓ハ AB ニ切スル。

21. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ直角ニ交ハルトキハ,ソノ交點カラ一邊ニ引イタ垂線ノ延長ハコレニ對スル邊ヲ二等分スル。



22. 直角三角形 ABC ニ於テ A ヲ直角トシ,邊 AB ヲ直徑トスル圓ガ斜邊 BC ト交ハル點ヲ D トスレバ, D ニ於テコノ圓ニ切スル直線ハ AC ヲ二等分スル。

23. △ABC ノ頂點 A, B, C カラ邊 BC, CA, AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トシ垂心ヲ H トスル。サウスルト次ノ四點ヲ通ル圓ガアル。

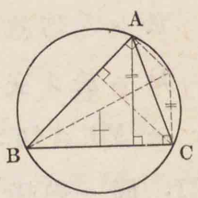
[1] H, E, A, F　[2] H, F, B, D　[3] H, D, C, E

[4] D, C, A, F　[5] E, A, B, D　[6] F, B, C, E

24. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ガ外接圓ト交ハル點ヲ D トシ,内心ヲ O トスレバ, BD=OD=CD

25. $\triangle ABC$ ノ垂心ヲ H トシ, AH ガ邊 BC 及ビ外接圓ノ周ト交ハル點ヲ D, E トスレバ

$$HD=DE$$



26. 三角形ノ垂心ト頂點トノ距離ハ外心トソノ頂點ニ對スル邊トノ距離ノ 2 倍ニ等シイ。

27. 二ツノ圓ガ P ニ於テ内切シ,一ツノ割線ガソノ二ツノ圓周ヲ A, B, C, D ニ於テ截ルトキハ

$$\angle APB=\angle CPD$$

28. 圓 O ノ半徑 OA ヲ任意ノ長サニ延長シ,ソノ端 B カラ切線 BC ヲ引キ切點ヲ C トスル。今三點 B, A, C ヲ通ル圓ヲ畫キ直徑 BD ヲ引クトキハ, BD ハ AC ニ平行デアル。

第 15 章 比及ビ比例

40. 比及ビ比例

定義 或量 A ガコレト同種類ノ他ノ量 B ノ幾倍デアルカ又ハ幾分ノ幾ツデアルカトイフ關係ヲ **“A ノ B ニ對スル比”** トイフ。

A ノ B ニ對スル比ヲ

$$A:B \quad 又ハ \quad \frac{A}{B}$$

ト書キ, A ヲ比ノ**前項**, B ヲ比ノ**後項**トイフ。

A ガ B ノ幾倍又ハ幾分ノ幾ツデアルカヲ示スニハ B ヲ單位トシテ A ヲ測ツタ數値ヲイヘバヨイ。コノ數値ヲ A ノ B ニ對スル**比ノ値**トイフ。比ノ値ヲ略シテ單ニ**比**トイフコトモアル。

同種ノ量 A, B ヲ同ジ單位デ測ツタトキノ數値ヲ a, b トスレバ A:B ノ値ハ $\frac{a}{b}$ ニ等シイ。卽チ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

同種類ノ量 A, B ト他ノ同種類ノ量 C, D トニ於テ

$$A:B=C:D$$

ナルトキ,コノ四ツノ量 A, B, C, D ハ比例ヲナストイヒ,上ノ等式ヲ**比例式**トイフ。

上ノ比例式ニ於テ A, D ヲ**外項**, B, C ヲ**內項**トイヒ,又 D ヲ A, B, C ノ**第四比例項**トイフ。

注意 上ノ關係デ A, B, C, D ガ皆同種類デアツテモヨイコトハ勿論デアル。

又同種類ノ三ツノ量 A, B, C ノ間ニ比例式

$$A:B=B:C$$

ガ成立ツトキ,コノ三ツノ量 A, B, C ハ比例ヲナストイヒ, B ヲ A, C ノ**比例中項**, C ヲ A, B ノ**第三比例項**トイフ。

上ニ述ベタヤウニ,量ノ比ヲ數ノ比デ表ハセバ,代數學デ學ンダ次ノヤウナ關係式ヲ應用スルコトガ出來ル。即チ

[I] $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナラバ

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

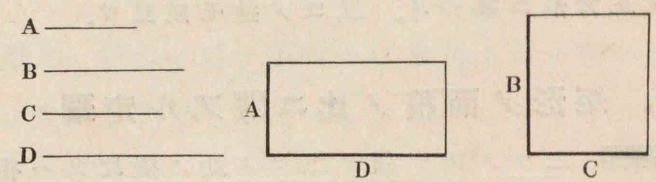
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

[II] $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ナルトキハ,コレ等ノ比ハ

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} \quad 又ハ \quad \frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$$

ニ等シイ。(但シ p, q, r ハ,任意ノ數)

定理 53. 四ツノ線分ガ比例ヲナストキハ,ソノ外項ノ包ム矩形ハ內項ノ包ム矩形ニ等シイ.



題意 A, B, C, D ヲ四ツノ線分トシ A : B=C : D トスレバ A·D=B·C デアル。

證明 A, B, C, D ノ數值ヲ夫々 a, b, c, d トスレバ

$$A:B=a:b, \quad C:D=c:d$$

然ルニ假設ニヨツテ

$$A:B=C:D$$

$$\therefore \quad a:b=c:d$$

$$\therefore \quad ad=bc$$

然ルニ ad, bc ハ夫々矩形 A·D, B·C ノ面積ヲ表ハス數值デアル。

$$\therefore \quad A\cdot D=B\cdot C$$

注意 "比例スル線分"トイフノヲ略シテ**比例線**トモイフ。

系 1. 二ツノ矩形ガ相等シイトキハ,一ツノ矩形ノ相隣ル二邊ヲ外項トシ,他ノ矩形ノ相隣ル二邊ヲ

内項トスルヤウナ比例式ガ成立ツ。

系 2. **二ツノ線分ノ包ム矩形ハ,ソノ比例中項ノ上ノ正方形ニ等シイ。又コノ逆モ成立ツ。**

41. 矩形ノ面積ノ比ニ關スル定理

定義 二ツノ比ノ積ヲ二ツノ比ノ**複比**又ハ**相乘比**トイフ。三ツ以上ノ比ニ關シテモ同樣デアル。

相等シイ二ツノ比ノ複比ヲ各ノ**二乘比**トイヒ, 相等シイ三ツノ比ノ複比ヲソノ**三乘比**トイフ。

A : B ト C : D トノ複比ヲ表ハスニハ

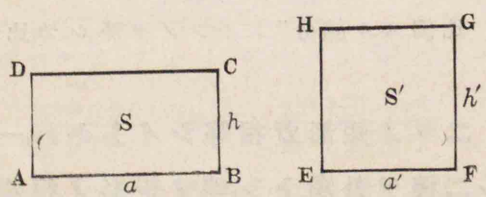
$$\begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases} \quad 又ハ \quad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}$$

ト書ク。又 A : B ノ二乘比, 三乘比ヲ表ハスニハ夫々

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2, \quad \left(\frac{A}{B}\right)^3$$

ト書ク。

定理 54. **二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。**



題意 ABCD, EFGH ヲ二ツノ矩形トスレバ

$$\square ABCD : \square EFGH = \frac{AB}{EF}\cdot\frac{BC}{FG}$$

證明 矩形ノ邊ト面積トノ數值ヲ前ノ圖ノヤウニ表ハセバ

$$S = ah, \qquad S' = a'h'$$

$$\therefore \quad \frac{S}{S'} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'}\cdot\frac{h}{h'}$$

$$\therefore \quad \square ABCD : \square EFGH = \frac{AB}{EF}\cdot\frac{BC}{FG}$$

系 1. **二ツノ正方形ノ面積ノ比ハ,一邊ノ比ノ二乘比ニ等シイ。**

系 2. **二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。**

系 3. **二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。**

系 4. **一邊ノ相等シイ矩形ノ面積ノ比ハ,コレニ隣ル邊ノ比ニ等シイ。**

系 5. **底邊(又ハ高サ)ノ相等シイ三角形又ハ平行四邊形ノ比ハ高サ(又ハ底邊)ノ比ニ等シイ。**

問 題 (31)

1. 甲乙二ツノ矩形ニ於テ,底邊ノ比ガ 5:6, 高サノ比ガ 8:4 トスレバ,二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ何程カ。

2. △ABC ノ邊 BC 上ノ一點ヲ D トスレバ

△ABD : △ACD＝BD : CD

3. △ABC ノ邊 BC 上ノ一點ヲ D, 直線 AD 上ノ任意ノ點ヲ E トスレバ

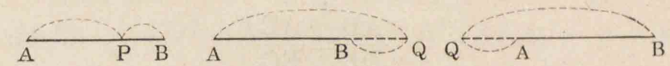
△ABE : △ACE＝BD : CD

4. 四邊形ヲ二ツノ對角線ニヨツテ四ツノ三角形ニ分ケレバ,コレ等ノ三角形ノ面積ハ比例ヲナス。

第 16 章 三角形ノ邊上ノ比例線

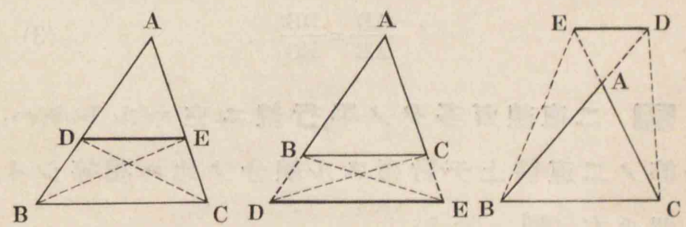
42. 三角形ノ一邊ニ平行ナ比例線

定義 線分上ノ一點ハソノ線分ヲ**内分**スルトイヒ,ソノ延長上ノ點ハコレヲ**外分**スルトイフ。



上ノ圖ニ於テ P ハ AB ヲ内分シ, Q ハ AB ヲ外分スル。

定理 55. **三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ハ他ノ二邊ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル。**



題意 △ABC ニ於テ, DE ∥ BC トシ, DE ト AB, AC 又ハ延長トノ交點ヲ D, E トスレバ

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

證明 BE, CD ヲ結ベバ, △EAD ト △EBD トニ於テ頂點 E ニ對スル高サガ等シイカラ

$$\frac{\triangle EAD}{\triangle EBD}=\frac{AD}{DB}$$

同様ニシテ

$$\frac{\triangle DAE}{\triangle DEC}=\frac{AE}{EC}$$

然ルニ

$$\triangle EBD=\triangle DEC \quad (DE \parallel BC)$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

注意 圖ニ於テ次ノ比例式ガ成立ツ。

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC} \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \qquad (2)$$

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC} \qquad (3)$$

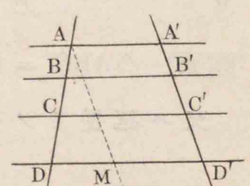
系 二直線ガ多クノ平行線ニ交ハルトキハ, コレ等ノ二直線上デ對應スル線分ノ比ハ相等シイ。

即チ右ノ圖ニ於テ

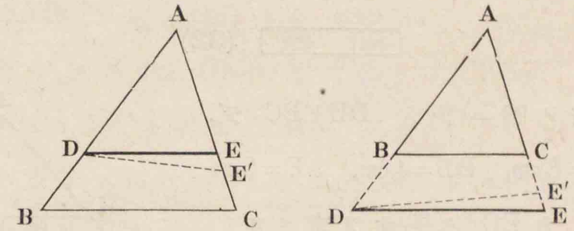
$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$$

ナルトキハ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$$



定理 56. 三角形ノ二邊ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ通ル直線ハ第三邊ニ平行デアル。



題意 △ABC ニ於テ D, E ヲ AB, AC 又ハソノ延長上ノ點トシ, AD : DB=AE : EC トスレバ

$$DE \parallel BC$$

證明 今假ニ DE ト BC トガ平行デナイトシ, D ヲ通ッテ BC ニ平行ナ直線ガ, AC 又ハソノ延長ト E′ ニ於テ交ハッタトスル。サウスルト

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$$

然ルニ假設カラ

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

$$\therefore \quad \frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$$

$$\therefore \quad \frac{AE'\pm E'C}{E'C}=\frac{AE\pm EC}{EC}$$

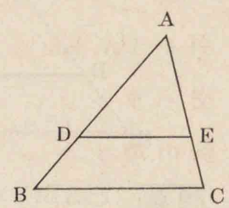
$$\therefore \quad \frac{AC}{E'C}=\frac{AC}{EC}$$

$$\therefore \quad E'C=EC$$

卽チ E′ ト E トハ同一ノ點デナケレバナラヌ。

故ニ DE ハ BC ニ平行デアル。

問　題 (32)



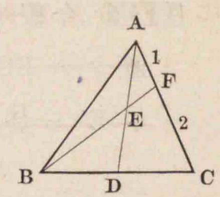
1. 右ノ圖ニ於テ DE ∥ BC デ,

AD＝8 cm, DB＝4 cm, AE＝6 cm

トシテ EC ノ長サヲ求メヨ。

2. △ABC ニ於テ, BC ニ平行ニ DE ヲ引キ AB, AC トノ交點ヲ夫々 D, E トスレバ

AD : AB＝DE : BC

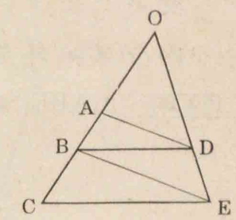


3. △ABC ニ於テ D ハ BC ノ中點, E ハ AD ノ中點デアル。 BE ヲ延長シテ F デ AC ニ交ハラシメレバ

CF : FA＝2 : 1

4. 一點 P カラ △ABC ノ各頂點ニ至ル線分 PA, PB, PC ヲ引キ, コレ等ノ線分ヲ A′, B′, C′ ニ於テ相等シイ比ニ內分スレバ, ∠CBA＝∠C′B′A′

5. 四角形 ABCD ノ邊 AB, CD 上ニ AP : PB＝DQ : QC トナルヤウニ點 P, Q ヲ取リ, 又 O ヲ AD 上ノ任意ノ一點トシ, P, Q カラ AD ニ平行線ヲ引キ BO, CO ト夫々 M, N ニ於テ交ハラシメレバ, MN ∥ BC

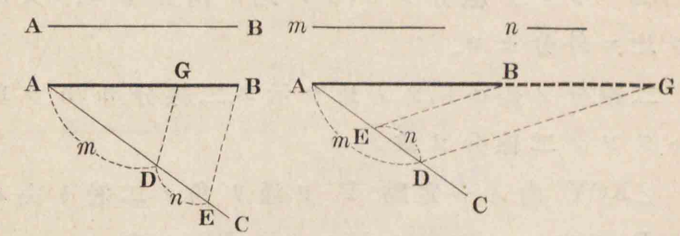


6. 圖ニ於テ BD ∥ CE, AD ∥ BE デアレバ　OA : OB＝OB : OC

7. △ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ一點 P カラ BA, CA ニ平行線ヲ引キ CA, BA ト夫々 L, M ニ於テ交ハラシメレバ, △PLM ハ △BMP ト △PLC トノ比例中項デアル。

43. 比例スル線分ノ作圖

作圖題 11. **一ツノ線分ヲ與ヘラレタ二線分ノ比ニ內分及ビ外分セヨ。**



題意　線分 AB ヲ與ヘラレタ二線分 m, n ノ比ニ內分及ビ外分セヨ。

作圖　A ヲ通リ任意ノ直線 AC ヲ引キ, ソノ上ニ m, n ニ等シク AD, DE ヲ取ル (外分ノトキハ DE ヲ n ニ等シク DA ノ方向ニ取ル)。 BE ヲ結ビ, D カラ EB ニ平行線ヲ引キ AB ト G ニ於テ

交ハラシメレバ, G ハ線分 AB ヲ $m:n$ ノ比ニ内分(又ハ外分)スル點デアル.

證明 △ABE ニ於テ

$$GD \parallel BE$$

$$\therefore \frac{AG}{GB}=\frac{AD}{DE}$$

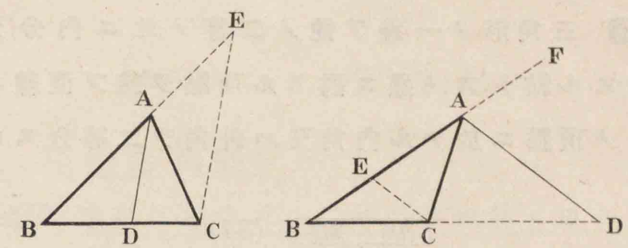
$$\therefore \frac{AG}{GB}=\frac{m}{n}$$

問 題 (33)

1. 與ヘラレタ三ツノ線分ノ第四比例項ヲ作圖セヨ。
2. 與ヘラレタ線分ヲ 3:2 ノ比ニ内分セヨ。又同ジ比ニ外分セヨ。
3. 二線分ノ差 a ト,ソノ比ヲ示ス二線分 $m:n$ ヲ與ヘテソノ二線分ヲ求メヨ。
4. ∠XOY 内ノ一定點 P ヲ通リ角ノ二邊ト夫々 A, B デ交ハル直線ヲ引キ AP:BP ヲ與ヘラレタ比ニ等シクセヨ。

44. 三角形ノ内角及ビ外角ノ二等分線

定理 57. **三角形ノ一内角(又ハ一外角)ノ二等分線ハ對邊ヲコノ角ヲ夾ム二邊(又ハソノ外角ニ隣ル内角ヲ夾ム二邊)ノ比ニ内分(又ハ外分)スル.**



題意 △ABC ニ於テ AD ヲ ∠A (又ハ ∠A ノ外角) ノ二等分線トシ,ソレガ邊 BC (又ハソノ延長)ト D ニ於テ交ハルトスレバ

$$BD:DC=AB:AC$$

證明 今内分ノ場合ヲ證明スル。C カラ DA ニ平行線ヲ引キ BA ノ延長ト E ニ於テ交ハラシメル。サウスルト

$$BD:DC=BA:AE$$

然ルニ $DA \parallel CE$ デアルカラ

$$\angle AEC=\angle BAD$$

$$\angle ACE=\angle DAC$$

又假設ニヨリ

$$\angle BAD=\angle DAC$$

$$\therefore \angle AEC=\angle ACE$$

$$\therefore AE=AC$$

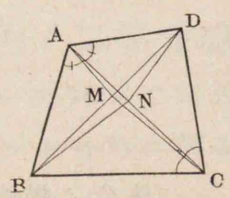
$$\therefore BD:DC=AB:AE$$

(外分ノ場合ハ各自ニ證明セヨ)

系 三角形ノ一邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分(又ハ外分)スル點ト,コノ邊ニ對スル頂點ヲ結ブ直線ハ夫夫ソノ頂點ニ於ケル內角(又ハ外角)ヲ二等分スル。

問題 (34)

1. 定理 57 ノ內分ノ圖ニ於テ AB=6 cm, AC=4 cm, BC=5 cm デアレバ BD, CD ハ何程カ。
2. △ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トシ, ∠ADB, ∠ADC ノ二等分線ガ AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 M, N トスレバ MN ∥ BC
3. △ABC ニ於テ ∠A ガ直角デアリ, A カラ邊 AB ノ兩側ニ AB ト相等シイ角ヲナス二直線 AX, AY ヲ引キ, BC 及ビソノ延長ト夫々 X, Y デ交ハラシメレバ BX : BY=CX : CY
4. △ABC ニ於テ ∠C ノ二等分線ガ邊 AB ト交ハル點ヲ F トシ, ∠B ノ二等分線ガ CF ト交ハル點ヲ G トスレバ AF : FG=AC : CG
5. 四邊形 ABCD ニ於テ ∠A, ∠C ノ二等分線ガ對角線 BD 上デ交ハレバ, ∠B, ∠D ノ二等分線モ亦對角線上デ交ハル。

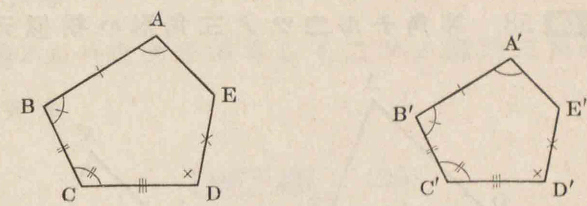


第17章 相似形

45. 相似多角形

定義 邊數ノ相等シイ二ツノ多角形ニ於テ,次々ノ角ガ夫々相等シイトキハ,コノ兩多角形ヲ互ニ等角デアルトイヒ,ソノ相等シイ角ヲ**對應角**,對應角ノ頂點間ノ邊ヲ**對應邊**トイフ。

定義 等角ナ二ツノ多角形ノ對應邊ノ比ガスベテ相等シイトキハコノ兩多角形ハ互ニ**相似**デアルトイヒ,ソノ對應邊ノ比ヲソノ**相似比**トイフ。



例ヘバ上ノ圖デ五角形 ABCDE, 五角形 A′B′C′D′E′ ニ於テ

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D',\ \angle E=\angle E'$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}=\frac{3}{2}$$

故ニ五角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ハ相似デ,ソノ相似比ハ 3:2 デアル。

相似ノ記號トシテ∽ヲ用ヒル。例ヘバ

$$ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$$

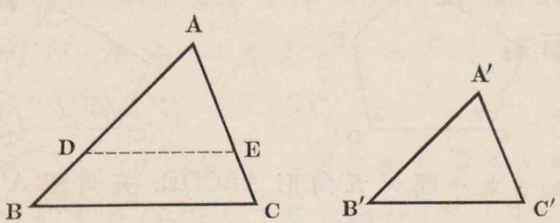
但シ對應角ノ記號ガ對應スルヤウニ書ク。

問題 (35)

1. 等角ナル二ツノ平行四邊形ハ相似デアルカ。
2. 邊數ノ等シイ正多角形ハ互ニ相似デアル。
3. 底ト高サトノ比ガ一定ナル矩形ハ相似デアル。
4. 二ツノ相似多角形ノ周ノ比ハ相似比ニ等シイ。

46. 相似三角形(一)

定理 58. 等角ナル二ツノ三角形ハ相似デアル。



題意 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ デアレバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

證明 $\triangle A'B'C'$ ノ頂角 A' ヲ $\triangle ABC$ ノ頂角 A ノ上ニ重ネ, B', C' ガ夫々 D, E ニ位置ヲ占メタトスル。サウスルト

$\angle D=\angle B$ デアルカラ $DE \parallel BC$

$$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DC}$$

[定理 55 及ビ 120 頁問題 (32) ノ 2]

然ルニ $AD=A'B'$, $DE=B'C'$, $AE=A'C'$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

又假設ニヨリ二ツノ三角形ハ等角デアル。

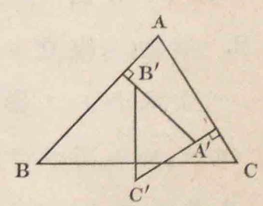
$$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

系 1. 二内角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル。

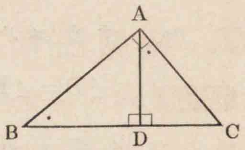
系 2. 一鋭角ガ相等シイ二ツノ直角三角形ハ相似デアル。

問題 (36)

1. 頂角ノ相等シイ二ツノ二等邊三角形ハ相似デアル。
2. 三邊ガ夫々平行デアル二ツノ三角形ハ相似デアル。
3. 三邊ガ夫々互ニ垂直ナ二ツノ三角形ハ相似デアル。



4. 直角三角形ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ニ引イタ垂線ヲ AD トスレバ



$$\triangle ABC \backsim \triangle DBA \backsim \triangle DAC$$

5. 直角三角形ニ於テ

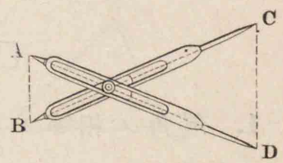
[1] 直角ヲ夾ム一邊ハ斜邊ト,斜邊上ニ於ケルソノ邊ノ正射影トノ比例中項デアル。

[2] 直角ノ頂點カラ斜邊ヘ引イタ垂線ハコレニヨツテ分ケラレタ斜邊ノ分ノ比例中項デアル。

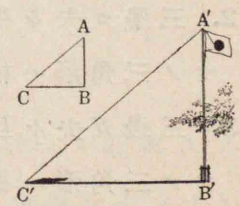
定義 一ツノ線分ノ兩端カラ他ノ直線ニ下シタ垂線ノ足ノ間ノ線分ヲ,コノ直線上ニ投ズル,ソノ線分ノ**正射影**トイフ。

6. 與ヘラレタ二線分ノ比例中項ヲ求メヨ。

7. 右ノ圖ニ示スヤウナ比例こんぱすニヨツテ任意ノ長サヲ一定ノ率ニ縮小(又ハ擴大)スル方法ヲ説明セヨ。

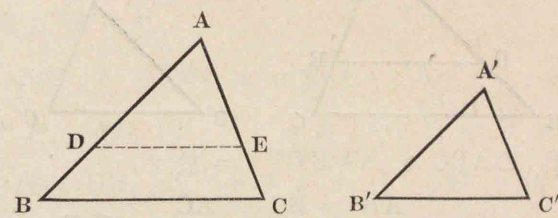


8. 平地ニ直立シテキル旗竿ヤ立木ナドノ影ノ長サヲ測ツテ,ソノ高サヲ求メル方法ヲ考ヘヨ。



47. 相似三角形(二)

定理 59. **一角トコレヲ夾ム二邊ノ比トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル。**



題意 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$$\angle A=\angle A',\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$ デアレバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

證明 $\triangle A'B'C'$ ノ頂角 A' ヲ $\triangle ABC$ ノ頂角 A ノ上ニ重ネ, B', C' ガ夫々 D, E ニ位置ヲ占メタトスル。サウスルト假設ニヨリ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$

從ツテ

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

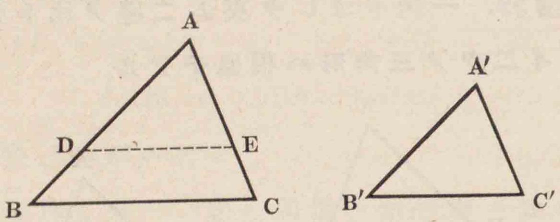
$\therefore$ $DE \parallel BC$ [定理 56]

$\therefore$ $\angle B=\angle D,\quad \angle C=\angle E$

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ [定理 58]

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

定理 60. **三邊ノ比ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ相似デアル。**



題意 $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トニ於テ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$ デアレバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

證明 AB, AC ノ上ニ夫々 $A'B'$, $A'C'$ ニ等シク AD, AE ヲ取リ, DE ヲ結ブトキハ,假設ニヨリ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

$$\therefore \quad DE \parallel BC \qquad \text{[定理 56]}$$

依ツテ $$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{A'B'}$$

然ルニ假設ニヨリ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{DE}=\frac{BC}{B'C'} \qquad \therefore \quad DE=B'C'$$

$$\therefore \quad \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

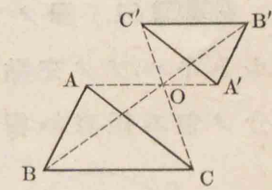
$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

問 題 (37)

1. 二ツノ相似三角形ノ相對應スル中線ノ比ハ相似比ニ等シイ。

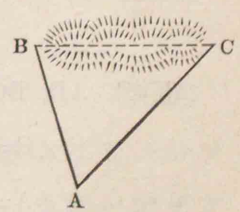
2. $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$ デアル。AB, DE ノ上ニ夫々 G 及ビ H ヲ取ツテ $AG:GB=DH:HE$ ナラシメ, CG, FH ヲ結ベバ $\angle GCB=\angle HFE$ デアル。

3. $\triangle ABC$ ノ各頂點ヲ任意ノ點 O ニ結ビ, AO, BO, CO ヲ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ A', B', C' トスレバ $\triangle A'B'C'$ ト $\triangle ABC$ トハ相似デアル。



4. 二ツノ四邊形ニ於テ,次々ノ四邊ノ比ト一ツノ對應スル對角線ノ比トガ相等シイトキハ,ソノ二ツノ四邊形ハ相似デアル。

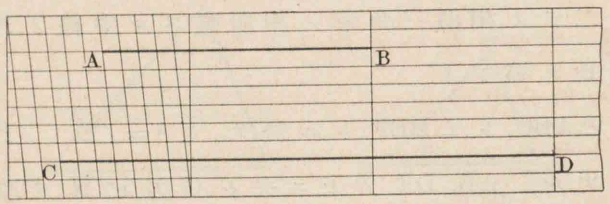
5. 野外ニ於テ $AB=240$ m, $AC=360$ m, $\angle A=60°$ ヲ實測シタ製圖ニヨツテ BC ノ距離ヲ求メヨ。



6. 次ノ圖ニ示ス斜線尺ヲ用ヒテ或長サノ百分ノ

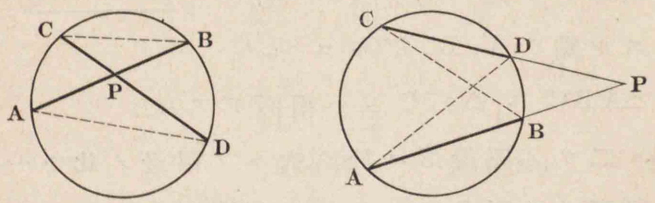
一マデヲ測ルコトガ出來ルコトヲ説明セヨ。

(例ヘバ $AB=1.48$, $CD=2.72$)



48. 相交ハル弦ノ比

定理 61. **圓ノ二ツノ弦又ハソノ延長ガ相交ハルトキハ,ソノ交點デ内分又ハ外分セラレタ各弦ノ分ノ包ム矩形ハ相等シイ。**



(I) (II)

題意 弦 AB, CD ガ P ニ於テ交ハレバ

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

證明 AD, BC ヲ結ブ。△PAD ト △PCB トニ於テ

$$\left.\begin{array}{l}\angle P=\angle P\\ \angle A=\angle C\\ \angle D=\angle B\end{array}\right\} \quad \therefore \quad \triangle PAD \backsim \triangle PCB$$

$$\therefore \quad \frac{AP}{CP}=\frac{DP}{BP}$$

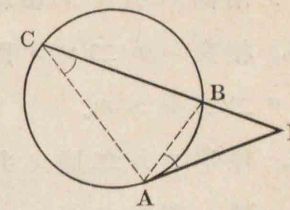
$$\therefore \quad AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

系 **二ツノ線分ガ同一ノ點ニ於テ双方共ニ内分(又ハ外分)セラレテ,ソノ兩部分ノ包ム矩形ガ相等シイナラバ,コレ等ノ二ツノ線分ノ兩端ナル四ツノ點ハ,同一ノ圓周上ニアル。**

定理 62. **圓外ノ一點カラコノ圓ニ引イタ割線ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハソノ點カラ引イタ切線ノ上ノ正方形ニ等シイ。**

題意 PA 及ビ PBC ヲ夫々 P 點カラ圓 ABC ニ引イタ切線及ビ割線トスレバ

$$PB \cdot PC = PA^2$$



證明 生徒自ラ試ミヨ。

系 1. **PA ト PBC トハ P カラ圓 ABC ニ引イタ線分デ,**

$$PB \cdot PC = PA^2$$

ナラバ, PA ハ圓 ABC ニ切スル。

系 2. **圓外ノ一點カラ引イタ割線ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ割線ノ方向ノ如何ニ拘ハラズ一定デアル。**

問　題 (38)

1. 定理 61 ノ右圖ニ於テ CD=16 cm, DP=2 cm 及ビ BA=5 cm デアレバ AP ハ幾 cm カ。

2. 定理 61 ノ右圖ニ於テ PA=PC デアレバ ABDC ハ等脚梯形デアル。

3. 定理 62 ノ圖ニ於テ CB=5 cm, PB=4 cm デアレバ PA ハ幾 cm カ。

4. 相交ハル二ツノ圓ノ共通弦ノ延長上ノ一點カラ兩圓ニ引イタ切線ハ相等シイ。

5. 相交ハル二ツノ圓ノ共通弦ノ延長ハ共通切線ヲ二等分スル。

6. 外切スル二圓ノ共通內切線上ノ一點カラ二ツノ圓ニ割線ヲ引ケバ,兩割線ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ相等シイ。

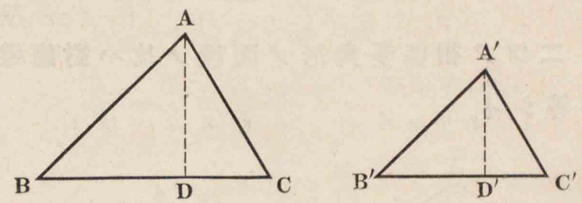
7. 相交ハル二ツノ圓ノ共通弦ノ延長上ノ任意ノ點 P カラ,各圓ヘ割線 PAB, PCD ヲ引ケバ A, B, C, D ハ同一圓周上ニアル。

8. 定理62ヲ用ヒテ與ヘラレタ二線分ノ比例中項ヲ求メヨ。

第 18 章　面 積 ノ 比

49. 相似三角形ノ面積ノ比

定理 63. **二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ比ノ二乘比ニ等シイ。**



題意　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ デ, AB, A′B′; BC, B′C′; CA, C′A′ ガ夫々對應邊デアレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}=\frac{BC^2}{B'C'^2}=\frac{CA^2}{C'A'^2}$$

證明　A, A′ カラ夫々對邊ヘ垂線 AD, A′D′ ヲ下スト

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AD \cdot BC$$

$$\triangle A'B'C'=\frac{1}{2}A'D' \cdot B'C'$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AD \cdot BC}{A'D' \cdot B'C'}$$

又　$\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$　(何故カ)

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}$$

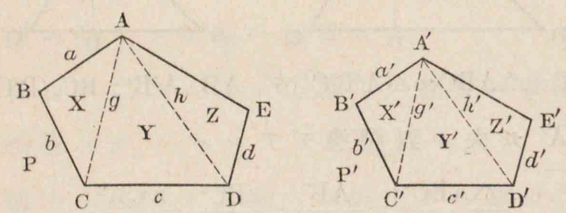
又假設ニヨリ　$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$

$$\therefore\quad \frac{AD}{A'D'}=\frac{BC}{B'C'}$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC^2}{B'C'^2}$$

同様ニシテ　$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}=\frac{CA^2}{C'A'^2}$　モイヘル。

系　**ニツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シイ。**



題意　多角形 P∽多角形 P′ デ, a, a'; b, b'; …… ヲ夫々對應スル邊トスレバ

$$\frac{P}{P'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{b^2}{b'^2}=\cdots\cdots$$

證明　對應スル一頂點カラ對角線 $g, h, \cdots\cdots$; g', h' …… ヲ引キ, P, P′ ヲ對應スル三角形 X, X′; Y, Y′; Z, Z′…… ニ分ケル。サウスルト

$$X\backsim X',\quad Y\backsim Y',\quad Z\backsim Z',\quad \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{X}{X'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{b^2}{b'^2}$$

$$\frac{Y}{Y'}=\frac{c^2}{c'^2}$$

$$\frac{Z}{Z'}=\frac{d^2}{d'^2}$$

…………

然ルニ　$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\cdots\cdots$

$$\therefore\quad \frac{X}{X'}=\frac{Y}{Y'}=\frac{Z}{Z'}=\cdots\cdots=\frac{X+Y+Z+\cdots\cdots}{X'+Y'+Z'+\cdots\cdots}=\frac{P}{P'}$$

$$\therefore\quad \frac{P}{P'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{b^2}{b'^2}\cdots\cdots$$

問題　(39)

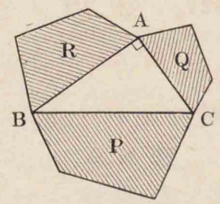
1.　一ツノ三角形ノ三邊ガ 4 cm, 7 cm, 8 cm デアル. コノ三角形ト相似デ面積ガソノ 4 倍ナル三角形ノ各邊ハ夫々何程カ。

2.　三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ニヨッテ出來ル三角形ハモトノ三角形ノ幾分ニ當ルカ。

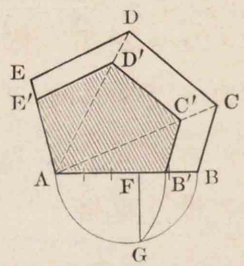
3.　梯形ノ平行デナイ二邊ヲ延長シテ交ハラシメルトキ出來ルニツノ三角形ノ面積ノ比ヲ求メヨ。但シ兩底ノ長サヲ夫々 20 cm, 12 cm トスル。

4. 相似三角形ノ面積ノ比ハ對應スル中線又ハ内角ノ二等分線ノ比ノ二乘比ニ等シイ。

5. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線デソノ面積ヲ二等分セヨ。



6. 直角三角形ノ三邊ノ上ニソノ三邊ガ對應邊トナツテキルヤウニ相似多角形ヲ作レバ,斜邊ノ上ノ多角形Pノ面積ハ他ノ二邊ノ上ノ多角形Q, Rノ面積ノ和ニ等シイ。

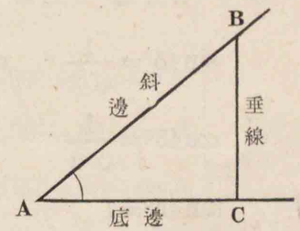


7. 與ヘラレタ五角形ト相似デ,面積ハソノ $\frac{3}{5}$ デアル五角形ヲ作レ。

8. 同ジ圓ニ外接スル正六角形ト内接スル正六角形トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

第19章 鋭角ノ三角函數

50. 鋭角ノ三角函數



鋭角Aノ一邊上ノ任意ノ點Bカラ他ノ邊ヘ垂線BCヲ下セバ,直角三角形ABCノ角Aガ一定デアルカラ,垂線BC, 底邊AC, 斜邊ABノ相互ノ比ハ,點Bノ位置ノ如何ニ拘ハラズ,一定ノ値ヲ有スル。

コレ等ノ比ヲ示スノニ次ノヤウナ名稱ト記號トヲ用ヒ,總稱シテ角Aノ**三角函數**トイフ。

正弦 (sine)	$=\dfrac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$	$\sin A=\dfrac{BC}{AB}$
餘弦 (cosine)	$=\dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$	$\cos A=\dfrac{AC}{AB}$
正切 (tangent)	$=\dfrac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$	$\tan A=\dfrac{BC}{AC}$
餘切 (cotangent)	$=\dfrac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$	$\cot A=\dfrac{AC}{BC}$
正割 (secant)	$=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$	$\sec A=\dfrac{AB}{AC}$
餘割 (cosecant)	$=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$	$\mathrm{cosec}\, A=\dfrac{AB}{BC}$

即チ $\cot A$ ハ $\tan A$ ノ逆數，$\sec A$ ハ $\cos A$ ノ逆數，$\operatorname{cosec} A$ ハ $\sin A$ ノ逆數デアル。

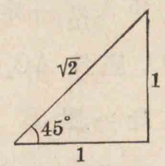
注意 三角函數ノ値ハ上ニ述ベタコトカラワカルヤウニイヅレモ不名數デアル。

前頁ノ圖デ角 A ガ $45°$ ノトキニハ，垂線ト底邊トハ等シク，斜邊ハ垂線ノ $\sqrt{2}$ 倍デアル。故ニ

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45° = \sqrt{2}$$

$$\tan 45° = 1 \qquad \cot 45° = 1$$



問 1. 前頁ノ圖デ $AB=5$，$BC=3$ ナラバ，角 A ノ三角函數ノ値ハドウカ。

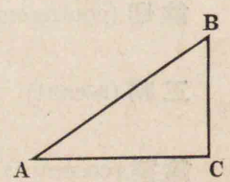
問 2. 前頁ノ圖デ $AC:BC=12:5$ ナラバ，角 A ト角 B トノ三角函數ノ値ハドウカ。

51. 餘角ノ三角函數

直角三角形 ABC ニ於ケル $\angle C$ ヲ直角トスレバ

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \cos A$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \sin A$$



$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \cot A \qquad \cot B = \frac{BC}{AC} = \tan A$$

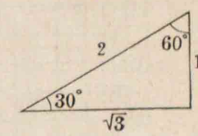
$$\sec B = \frac{AB}{BC} = \operatorname{cosec} A \qquad \operatorname{cosec} B = \frac{AB}{AC} = \sec A$$

サテ $\angle B = 90° - \angle A$ デアルカラ

或角ノ餘弦，餘切，餘割ハ夫々ソノ角ノ餘角ノ正弦，正切，正割ニ等シイ。

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(90°-A) = \cos A & \cos(90°-A) = \sin A \\ \tan(90°-A) = \cot A & \cot(90°-A) = \tan A \\ \sec(90°-A) = \operatorname{cosec} A & \operatorname{cosec}(90°-A) = \sec A \end{array}\right\} \quad (1)$$

前ノ圖デ $\angle A = 30°$ ナラバ $\angle B = 60°$ デ，$AB:BC:AC = 2:1:\sqrt{3}$ デアル。



故ニ

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{cosec} 30° = \sec 60° = 2$$

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30° = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}$$

問 1. $\angle A = 18°$ ナラバ $\sin 2A = \cos 3A$

問 2. $\tan A = \cot A$ ナル鋭角 A ノ値ヲ求メヨ。

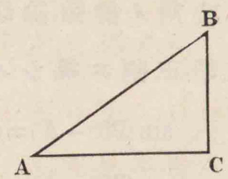
問 3. $\cos x = \sin \frac{x}{2}$ カラ鋭角 x ノ値ヲ求メヨ。

52. 三角函數ノ變動

鋭角 A ノ大キサガ變ハレバ,ソレニ伴ツテソノ三角函數ノ値モ變ハル。

(一) sinA 及ビ cosA ノ變動

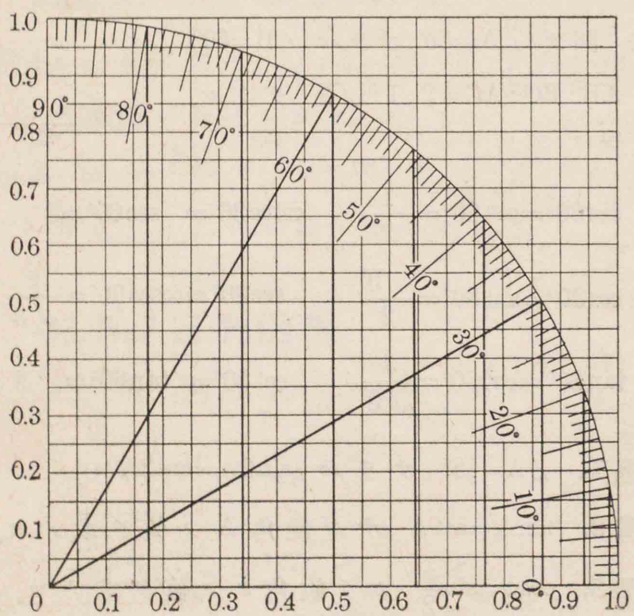
右ノ圖ニ於テ



$$\sin A=\frac{BC}{AB}$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}$$

デアルカラ,斜邊 AB ノ長サヲ一定ニ保チツツ角 A



ノ大キサヲ變ヘルトキニ,垂線 BC ト底邊 AC トガドノヤウニ變ハルカヲ見レバ, sinA ト cosA トノ變動スル狀況ヲ知ルコトガ出來ル。 即チ

角 A ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ増大スルトキニ,

sinA ハ 0 カラ 1 マデ次第ニ増大シ,

cosA ハ 1 カラ 0 マデ次第ニ減小スル。

前頁ノぐらふカラ任意ノ鋭角ノ sin ト cos トノ概略ノ値ヲ見ルコトガ出來ル。

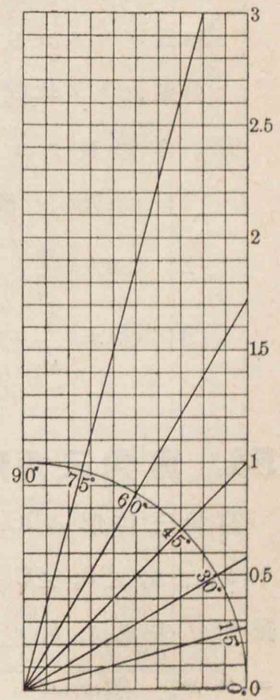
(二) tanA ノ變動

又 $$\tan A=\frac{BC}{AC}$$

デアルカラ,底邊 AC ノ長サヲ一定ニ保チツツ A ノ大キサヲ變ヘルトキハ,垂線 BC ガドノヤウニ變ハルカヲ見レバ, tanA ノ變動スル狀況ヲ知ルコトガ出來ル(右ノぐらふ參照)。 即チ

角 A ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ増大スルトキニ,

tanA ハ 0 カラ ∞ マデ次第ニ増大スル。



注意 ∞ ハ無限大ノ記號デ,限リナク增大シテ遂ニハ如何程デモ大キクナルコトヲ示スノデアル。

53. 三角函數ノ眞數表

次頁ニ 0° カラ 90° マデノ角ノ三角函數ノ 1° 刻ミノ表(小數第四位未滿四捨五入)ヲ揭ゲル。コノヤウナ表ヲ**眞數表**トイフ。

注意 眞數表ノ計算法ハ高等數學ニ屬スルカラ,ココデハ說明スルコトガ出來ナイ。然シ 142 頁ノぐらふト眞數表トヲ比較シテ見ルガヨイ。

問 眞數表ヲヨク見テ次ノ問ニ答ヘヨ。

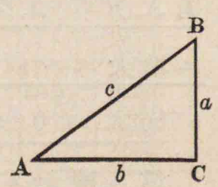
[1] $\sin 75°$ ノ値ハドウカ。

[2] $\tan A=\dfrac{1}{2}$ ナラバ,角 A ハ約幾度デアルカ。

[3] $\cos x=\dfrac{1}{3}$ ナラバ x ノ値ハ約幾度カ。

54. 直角三角形ノ邊ト角トノ關係

直角三角形 ABC デ ∠C ヲ直角トシ, ∠A, ∠B, ∠C ニ對スル邊ノ長サヲ夫々 a, b, c デ表ハスコトニスル。然ラバ



三角函數ノ眞數表

	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0°	0.0000	0.0000	1.0000	∞	∞	1.0000	90°
1°	0.0175	0.0175	1.0002	57.2987	57.2900	0.9998	89°
2°	0.0349	0.0349	1.0006	28.6537	28.6363	0.9994	88°
3°	0.0523	0.0524	1.0014	19.1073	19.0811	0.9986	87°
4°	0.0698	0.0699	1.0024	14.3356	14.3007	0.9976	86°
5°	0.0872	0.0875	1.0038	11.4737	11.4301	0.9962	85°
6°	0.1045	0.1051	1.0055	9.5668	9.5144	0.9945	84°
7°	0.1219	0.1228	1.0075	8.2055	8.1443	0.9925	83°
8°	0.1392	0.1405	1.0098	7.1853	7.1154	0.9903	82°
9°	0.1564	0.1584	1.0125	6.3925	6.3138	0.9877	81°
10°	0.1736	0.1763	1.0154	5.7588	5.6713	0.9848	80°
11°	0.1908	0.1944	1.0187	5.2408	5.1446	0.9816	79°
12°	0.2079	0.2126	1.0223	4.8097	4.7046	0.9781	78°
13°	0.2250	0.2309	1.0263	4.4454	4.3315	0.9744	77°
14°	0.2419	0.2493	1.0306	4.1336	4.0108	0.9703	76°
15°	0.2588	0.2679	1.0353	3.8637	3.7321	0.9659	75°
16°	0.2756	0.2867	1.0403	3.6280	3.4874	0.9613	74°
17°	0.2924	0.3057	1.0457	3.4203	3.2709	0.9563	73°
18°	0.3090	0.3249	1.0515	3.2361	3.0777	0.9511	72°
19°	0.3256	0.3443	1.0576	3.0716	2.9042	0.9455	71°
20°	0.3420	0.3640	1.0642	2.9238	2.7475	0.9397	70°
21°	0.3584	0.3839	1.0711	2.7904	2.6051	0.9336	69°
22°	0.3746	0.4040	1.0785	2.6695	2.4751	0.9272	68°
23°	0.3907	0.4245	1.0864	2.5593	2.3559	0.9205	67°
24°	0.4067	0.4452	1.0946	2.4586	2.2460	0.9135	66°
25°	0.4226	0.4663	1.1034	2.3662	2.1445	0.9063	65°
26°	0.4384	0.4877	1.1126	2.2812	2.0503	0.8988	64°
27°	0.4540	0.5095	1.1223	2.2027	1.9626	0.8910	63°
28°	0.4695	0.5317	1.1326	2.1301	1.8807	0.8829	62°
29°	0.4848	0.5543	1.1434	2.0627	1.8040	0.8746	61°
30°	0.5000	0.5774	1.1547	2.0000	1.7321	0.8660	60°
31°	0.5150	0.6009	1.1666	1.9416	1.6643	0.8572	59°
32°	0.5299	0.6249	1.1792	1.8871	1.6003	0.8480	58°
33°	0.5446	0.6494	1.1924	1.8361	1.5399	0.8387	57°
34°	0.5592	0.6745	1.2062	1.7883	1.4826	0.8290	56°
35°	0.5736	0.7002	1.2208	1.7434	1.4281	0.8192	55°
36°	0.5878	0.7265	1.2361	1.7013	1.3764	0.8090	54°
37°	0.6018	0.7536	1.2521	1.6616	1.3270	0.7986	53°
38°	0.6157	0.7813	1.2690	1.6243	1.2799	0.7880	52°
39°	0.6293	0.8098	1.2868	1.5890	1.2349	0.7771	51°
40°	0.6428	0.8391	1.3054	1.5557	1.1918	0.7660	50°
41°	0.6561	0.8693	1.3250	1.5243	1.1504	0.7547	49°
42°	0.6691	0.9004	1.3456	1.4945	1.1106	0.7431	48°
43°	0.6820	0.9325	1.3673	1.4663	1.0724	0.7314	47°
44°	0.6947	0.9657	1.3902	1.4396	1.0355	0.7193	46°
45°	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	0.7071	45°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \cos A=\frac{b}{c}$$

$$\tan A=\frac{a}{b},\qquad \cot A=\frac{b}{a}$$

カラ次ノコトガワカル。

[1] 斜邊ニ一ツノ鋭角ノ sin ヲ掛ケレバ,ソノ角ニ對スル邊ヲ得ル。

$$c\sin A=a\qquad c\sin B=b$$

[2] 斜邊ニ一ツノ鋭角ノ cos ヲ掛ケレバ,ソノ角ニ接スル他ノ邊ヲ得ル。

$$c\cos A=b\qquad c\cos B=a$$

[3] 直角ノ一邊ニソレニ接スル鋭角ノ tan (又ハソレニ對スル角ノ cot) ヲ掛ケレバ,直角ニ接スル他ノ一邊ヲ得ル。

$$b\tan A=a\qquad a\tan B=b$$

$$(a\cot A=b\qquad b\cot B=a)$$

問 **1.** 144 頁ノ圖デ $c=250$ (m), $\angle A=40^\circ$ ナルトキ a, b ノ長サヲ求メヨ。(眞數表ヲ用ヒヨ)

注意 三角形ノ既知ノ邊又ハ角ノ値カラ未知ノ邊又ハ角ノ値ヲ計算スルコトヲ**三角形ヲ解ク**トイフ。

問 **2.** $a=12$ (cm), $\angle B=30^\circ$ ナル直角三角形ヲ解ケ。

問 **3.** 邊ガ 3, 4, 5 ナル三角形ノ角ハ約幾度カ。

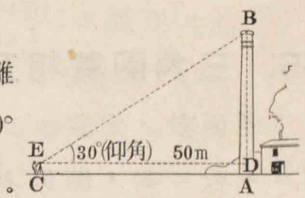
問　題　(40)

1. 長サ a ナル直線ガソレト θ ナル角ヲナス直線ノ上ニ投ズル正射影ノ長サヲ求メヨ。

2. 半徑 r ナル圓ニ於テ,中心角 A ニ對スル弦ノ長サハ $2r\sin\frac{A}{2}$ デ,又中心カラソノ弦マデノ距離ハ $r\cos\frac{A}{2}$ デアル。

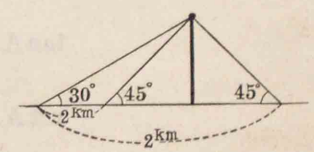
3. 底邊ガ 12 cm, 頂角ガ 80° ナル二等邊三角形ノ高サハ幾ラカ。

4. 煙突ノ基底カラ 50 m ノ距離ノ處デソノ頂上ノ**仰角**ガ 30° ナラバ,煙突ノ高サハ幾ラカ。

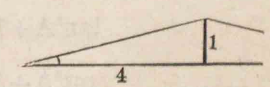


但シ地面カラ觀測者ノ眼マデノ高サハ 1.6 m トスル。

5. 一直線ノ道路ヲ進行スルトキニ,ソノ道路ト 30° ノ角ヲナス方向ニ見エタ塔ガ 2 km 進ンダトキ道路ト 45° ノ角ヲナス方向ニ見エタトスレバ,コノ塔カラ道路マデノ距離ハ幾ラカ。(二ツノ場合ガアルコトニ注意セヨ)

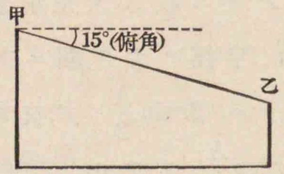


6. 屋根ノ勾配ガ $\frac{1}{4}$ ナラバ,ソノ傾斜ハ約幾度カ。



7. 傾斜 25° ノ坂路ヲ改修シテ傾斜ヲ 12° ニスレバ,ソノ長サハ約幾倍ニナルカ。

8. 標高 1075 m ナル甲ノ山ノ頂上カラ乙ノ山ノ頂上ノ**俯角**ガ 15° デアツテ, 五萬分ノ一ノ地圖デハコノ二ツノ山頂ノ間ノ距離ガ 3.8 cm デアツタトスレバ,乙ノ山ノ高サハ幾 m カ。



55. 三角函數相互ノ關係

三角函數ノ定義カラ同ジ角 A ノ三角函數相互ノ間ニハ恆ニ次ノ關係ノアルコトガワカル。

$$\left.\begin{array}{r}\sin A\cdot\operatorname{cosec} A=1\\ \cos A\cdot\sec A=1\\ \tan A\cdot\cot A=1\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\left.\begin{array}{r}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{array}{r}\tan^2 A+1=\sec^2 A\\ \cot^2 A+1=\operatorname{cosec}^2 A\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

注意 1. $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ ナドヲ略シテ $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ナドト記ス。

注意 2. 公式 (4) ハ直角三角形 ABC デ $a^2+b^2=c^2$ ノ兩邊ヲ c^2 デ割ツテ導クコトガ出來ル。又公式 (5) ハ (4) ノ兩邊ヲ $\cos^2 A$ 又ハ $\sin^2 A$ デ割ツテ (2), (3) ヲ用ヒテ導クコトガ出來ル。

問題 (41)

1. $\sin A=\tan A\cdot\cos A$, $\cos A=\dfrac{\sin A}{\tan A}$ ヲ證明セヨ。

2. $\sin A\cdot\sec A\cdot\cot A$ ハ 1 ニ等シイコトヲ示セ。

3. $\tan A+\cot A=2$ ナラバ A ノ値ハドウカ。

次ノ等式ヲ證明セヨ。(4—8)

4. $\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$

5. $\sin^2 A-\sin^4 A=\cos^2 A-\cos^4 A$

6. $\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta=(\tan\theta+\cot\theta)^2$

7. $\sec A-\cos A=\sin A\cdot\tan A$

8. $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\cdot\sin^2 A$

次式ヲ簡單ニセヨ。(9—10)

9. $(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2$

10. $(\tan A-1)^2+(\cot A-1)^2-(\sec A-\operatorname{cosec} A)^2$

56. 一ツノ三角函數ヲ知ツテ他ヲ求メルコト

銳角 A ノ三角函數ノ中ノ一ツノ値ヲ知レバ,公式 (2), (3), (4) ニヨツテ,他ノ三角函數ノ値ヲ求メルコトガ出來ル。

例 1. $\sin A$ ヲ知ツテ他ノ三角函數ヲ求メルコト。

解 公式 (4) ニヨツテ

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$$

公式 (3), (2) カラ

$$\tan A=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} \qquad \cot A=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$$

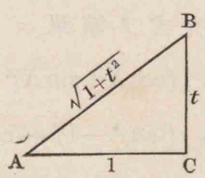
$$\sec A=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}} \qquad \operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$$

又ハ次ノ例ノヤウニ幾何學的ノ方法ニヨルコトモ出來ル。

例 2. $\tan A$ ヲ知ツテ $\sin A$, $\cos A$ ヲ求メルコト。

解 $\tan A=t$ ト置ケバ

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=t$$



故ニ $AC=1$ トスレバ $BC=t$

從ツテ $AB=\sqrt{1+t^2}$

故ニ $\sin A=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos A=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

即チ $\sin A=\dfrac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} \qquad \cos A=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$

注意 六ツノ三角函數ヲ併用スルノハ分數式又ハ根式ヲ避ケルノガ主ナル目的デアル。

問題 (42)

1. $\sin A=\dfrac{2}{3}$ ナルトキ,他ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。
2. $\cos A=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ ナルトキ, $\sin A$, $\tan A$ ヲ求メヨ。
3. $\cot A=\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}$ ナルトキ, $\sin A$, $\cos A$ ヲ求メヨ。
4. $(\sec\theta-\tan\theta)^2$ ヲ $\sin\theta$ デ表ハセ。
5. $\tan\theta=\sqrt{2}$ ナルトキ $\dfrac{\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta}{\sec\theta-\cos\theta}$ ノ値ヲ求メヨ。

第20章 圓ノ周及ビ面積

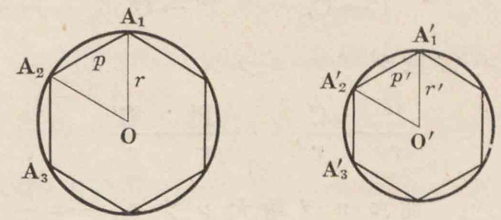
57. 圓周ノ長サ

問 圓ニ內接又ハ外接スル正多角形ノ邊數ヲ次第ニ增加シテ行ケバ,ソレ等ノ正多角形ノ形ハドンナニ變ツテ行キ,邊ノ數ヲ限リナク增セバ,遂ニハドノヤウニナルト思フカ。

圓ノ周ハソノ內接正多角形又ハ外接正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クスルトキノ,コノ多角形ノ周ノ極限デアル。

注意 一般ニ變數 x ガ常數 a ニ限リナク接近シ,ソノ差ヲ如何程デモ小サクスルコトガ出來ルトキ, a ハ x ノ極限デアルトイフ。上ノ場合ニ於テ周ノ長サCナル圓ニ內接(又ハ外接)スル正 n 角形ノ周ヲPトスレバ邊數 n ヲ限リナク多クスレバ多角形ノ周ハ限リナクCニ接近シ,如何程デモソノ差ヲ小サクスルコトガ出來ル。即チ n ヲ限リナク多クスルトキノPノ極限ハCデアル。コレヲ $n\to\infty$ ノトキ $\mathrm{P}\to\mathrm{C}$ ト略記スル。

定理 64. 二ツノ圓ノ周ノ比ハ半徑ノ比ニ等シイ。



題意 圓 O, O′ ノ半徑及ビ周ヲ夫々 r, r'; C, C′ トスレバ $\mathrm{C}:\mathrm{C}'=r:r'$

證明 圓 O, O′ ニ夫々內接正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_n$, $\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'\cdots\cdots\mathrm{A}_n'$ ヲ畫イタトシ,ソレ等ノ一邊ヲ p, p', 周ヲ P, P′ トスル。

中心 O, O′ ト各頂點トヲ結ベバ,各正多角形ハ夫々 n 箇ノ合同ナ三角形ニ分ケラレル。今カヤウナ三角形ノ一ツヅツヲ兩方ノ正多角形カラ取ツテ考ヘテミルト,兩三角形ハ相似三角形デアル。(何故カ)

$$\therefore \quad \frac{p}{r}=\frac{p'}{r'}$$

$$\therefore \quad \frac{np}{r}=\frac{np'}{r'}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{P}}{r}=\frac{\mathrm{P}'}{r'}$$

然ルニ n ヲ限リナク增セバ

$$\mathrm{P}\to\mathrm{C},\qquad \mathrm{P}'\to\mathrm{C}'$$

$r,\ r'$ ハ常數デアルカラ又

$$\frac{\mathrm{P}}{r}\to\frac{\mathrm{C}}{r},\qquad \frac{\mathrm{P}'}{r}\to\frac{\mathrm{C}'}{r'}$$

デアル。而モ n ヲ增大シテモ $\dfrac{\mathrm{P}}{r}=\dfrac{\mathrm{P}'}{r'}$ ノ關係ハ恆ニ成立ツカラ,極限ニ於テモ

$$\frac{\mathrm{C}}{r}=\frac{\mathrm{C}'}{r'}\qquad \therefore\quad \mathrm{C}:\mathrm{C}'=r:r'$$

系　二ツノ圓ノ周ノ比ハ直徑ノ比ニ等シイ.

$$\mathrm{C}:\mathrm{C}'=2r:2r'$$
$$=d:d'\qquad (d,\ d'\ \text{ハ直徑})$$

故ニ　$\mathrm{C}:d=\mathrm{C}':d'$

卽チ圓ノ周ガソノ直徑ニ對スル比ハ,スベテノ圓ニ於テ同一デアル。コノ比ヲ圓周率ト名ヅケテ,ソレヲ π デ表ハスコトハ諸子ノ旣ニ知ツテヰルコトデアル。

卽チ　$\dfrac{\mathrm{C}}{2r}=\dfrac{\mathrm{C}}{d}=\pi$　又ハ　$\mathrm{C}=2\pi r=\pi d$

定理 65. 圓ノ周ハソノ直徑ニ圓周率ヲ掛ケタモノニ等シイ。

圓周率 π ハ循環シナイ無限小數卽チ無理數デ小數點以下幾桁求メテモ眞ノ値ハ得ラレナイ。今ソノ小數點以下 30 桁マデ示セバ

$$\pi=3.14159\ 26535\ 897932\ 3846\ 264338\ 3279\cdots\cdots$$

デアルガ,實用上デハ 3.1416 又ハ $\dfrac{355}{113}$ $(=3.1415929\cdots\cdots)$ ヲ用ヒ,大略ノ計算ニハ $\dfrac{22}{7}$ $(=3.1428\cdots\cdots)$ 又ハ 3.14 ヲ用ヒル。

問　題　(43)

1. 二圓ノ周ノ和ニ等シイ周ヲモツ圓ヲ畫ケ。
2. 一ツノ圓ノ周ノ半分ニ等シイ周ヲモツ圓ヲ畫ケ。

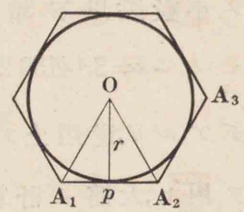
58. 圓ノ面積

前ノ節デ圓ノ周トコノ圓ニ內接又ハ外接スル正多角形ノ周トニ關シテ述ベタコトハ,圓ノ面積トコノ圓ニ內接又ハ外接スル正多角形ノ面積トニ關シテモ成立ツ。卽チ圓ノ面積ハソノ內接正多角形又ハ外接正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クスルトキノ,多角形ノ面積ノ極限デアル。

定理 66. 圓ノ面積ハ半徑ト周トノ積ノ半分ニ等シイ。

題意 圓 O ノ半徑ヲ r, 周ヲ C, 面積ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}Cr$$



證明 圓 O ニ外接スル正 n 角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ ヲ考ヘ,一邊ヲ p, 周ヲ P, 面積ヲ A トスル。中心ト各頂點トヲ結ベバ,コノ正多角形ハ n 箇ノ合同ナ三角形ニ分ケラレル。今カヤウナ三角形ノ面積ヲ s トスレバ

$$s=\frac{1}{2}pr$$

$$\therefore\quad ns=\frac{1}{2}npr$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{2}Pr$$

然ルニ n ヲ限リナク增セバ

$$P\to C$$

r ハ常數デアルカラ,又

$$\frac{1}{2}Pr\to\frac{1}{2}Cr$$

同樣ニ又 A→S デアリ, n ヲ限リナク增シテモ恆ニ　$s=\frac{1}{2}pr$　ノ關係ガ成立ツカラ,極限ニ於テ

$$S=\frac{1}{2}Cr$$

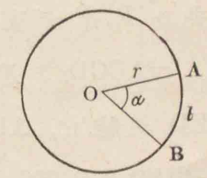
デアル。

系 1. 圓ノ面積ハ半徑ノ二乘ニ圓周率ヲ掛ケタモノニ等シイ。

$$S=\frac{1}{2}Cr=\frac{1}{2}2\pi r\cdot r=\pi r^2$$

系 2. 扇形ノ面積ハソノ弧ト半徑トノ積ノ半分デアル。

右ノ圖ニ於テ



$$\frac{\text{扇形 AOB}}{\text{圓 O}}=\frac{\angle\alpha}{360^\circ}=\frac{\widehat{AB}}{2\pi r}=\frac{l}{2\pi r}$$

$$\therefore\quad \text{扇形 AOB}=\frac{l}{2\pi r}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}lr$$

問題 (44)

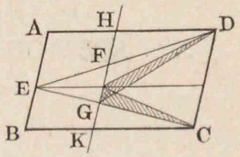
1. 周ガ 30 cm, 40 cm デアル二ツノ同心圓ガアル。ソノ間ニ夾マレタ圓環ノ面積ヲ求メヨ。
2. 二ツノ圓ノ面積ノ和ニ等シイ面積ヲモツ圓ヲ作レ。又ソノ差ニ等シイ面積ヲモツ圓ヲ作レ。
3. 二ツノ圓ノ面積ノ比ガ 9:4 デ,大圓ノ半徑ガ 6 cm ナラバ,小圓ノ周ハ何程カ。
4. 半徑ノ上ノ正方形ニ等シイ面積ヲモツ扇形ノ中心角ヲ求メヨ。
5. 半徑ト等長ナル弧ニ對スル中心角ハ幾度ノ角デアルカ。

雑題 (3)

1. 二ツノ三角形ハ如何ナル場合ニ相似デアルカ。

2. AB, AC ヲ圓ノ任意ノ弦トシ, AD ヲ直徑トスル。
D ニ於テコノ圓ニ切線ヲ引キ, AB, AC ノ延長ト
夫々 E, F デ交ハラセレバ　$\triangle ABC \backsim \triangle AEF$

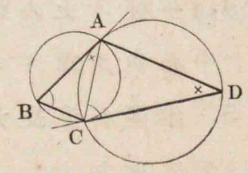
3. ▱ABCD ノ邊 AB 上ニ任意ノ一點 E ヲ取リ, EC,
ED ヲ結ビ, AB ニ平行ナ直線
ガ AD, ED, EC, BC ト夫々 H, F,
G, K デ交ハルトスレバ △EGD
又ハ △EFC ハ ▱ABKH ノ半分
デアル。



4. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ハ二
双ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ面積ノ和ニ等シイ。

5. 梯形 ABCD ニ於テ AB∥DC トシ, AD, BC ノ延
長ノ交點ヲ E トシ, 又 AC, BD ノ交點ヲ F トスレ
バ, 直線 EF ハ AB 及ビ CD ヲ二等分スル。

6. 四邊形 ABCD ニ於テ, CD ガ
A, B, C ヲ通ル圓ニ切シ,
$AB \cdot AC = BC \cdot CD$ デアレバ, AB ハ
A, C, D ヲ通ル圓ニ切スル。



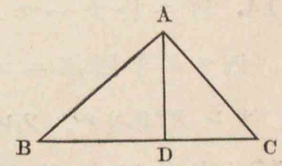
7. △ABC ノ A カラ BC ニ下シタ垂線ヲ AD トス
レバ, AB ト AC トノ包ム矩形ハ AD トコノ三角形
ノ外接圓ノ直徑トノ包ム矩形ニ等シイ。

8. △ABC ニ於テ ∠A ヲ直角トシ, A カラ BC ニ下
シタ垂線ヲ AD トスレバ

$AB^2 = BD \cdot BC$

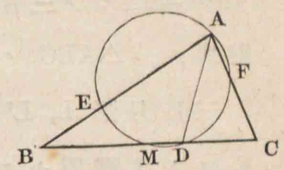
$AC^2 = DC \cdot BC$

$AD^2 = BD \cdot DC$



9. △ABC ノ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D
トシ, A ト D ト BC ノ中點 M
ヲ通ル圓ガ AB, AC ニ夫々
E, F デ交ハルトスレバ

BE=CF



10. △ABC ノ ∠A ノ二等分線ガ底邊ト X ニ於テ交
ハルトキハ　$AB \cdot AC = BX \cdot XC + AX^2$

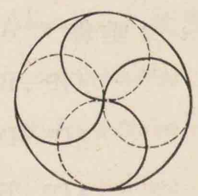
注意 先ヅ AX ノ延長ト外接圓トノ交點ヲ L トシ,
$\triangle ACX \backsim \triangle ALB$ カラ $AB \cdot AC = AX \cdot AL$ ヲ導ケ。

11. 圓 O ノ直徑ヲ AB トシ AO ヲ直徑トスル圓ヲ
畫ケ。第二ノ圓周上ニ一點 P ヲ取リ, P ヲ通ル直
線ヲ引イテ, 第一ノ圓ト夫々 Q, R デ交ハラシメヨ。
然ラバ　$PQ \cdot PR = AP^2$

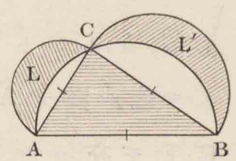
12. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線デコノ三角形ヲ三等分セヨ。

13. 與ヘラレタ正三角形ノ 3 倍ノ面積ヲ有スル正三角形ヲ作レ。

14. 圖ニ於テ一ツノ圓ノ面積ガ四ツノ半圓周ニヨツテ四等分サレテイキル。ソレヲ説明セヨ



15. 直角三角形 ABC ノ各邊ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫ケバ圖ノヤウニ二ツノ三日月形 L, L′ ガ出來ル。△ABC ノ面積ハ二ツノ三日月形 L, L′ ノ和ニ等シイコトヲ證明セヨ。



注意　コノ定理ハぎりしや人ひぽくらてすガ發見シタモノデアルトイフ。

次ノ等式ヲ證明セヨ。16—21)

16. $(1+\cos\theta+\sin\theta)^2=2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$

17. $\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

18. $\dfrac{\tan A-\cot B}{\tan B-\cot A}=\dfrac{\tan A}{\tan B}$

19. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A$

20. $(3-4\sin^2 A)(1-3\tan^2 A)=(3-\tan^2 A)(4\cos^2 A-3)$

21. $\dfrac{1+\tan A+\sec A}{1-\tan A+\sec A}=\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。(22—26)

22. $\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

23. $(\sin A-\operatorname{cosec} A)(\cos A-\sec A)(\tan A+\cot A)$

24. $(\sin A-\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A-\sec A)^2-(\tan A-\cot A)^2$

25. $(\sec\theta\cdot\sec\varphi+\tan\theta\cdot\tan\varphi)^2-(\tan\theta\cdot\sec\varphi+\sec\theta\cdot\tan\varphi)^2$

26. $(\tan A+\tan B)(\cot A-\cot B)+(\tan A-\tan B)(\cot A+\cot B)$

27. x ガ 30°, 45° 又ハ 60° ナルトキ, $\cos x+\sin x$ 及ビ $\cot x-\tan x$ ノ値ヲ求メヨ。

28. $\cos A+\sec A=\dfrac{5}{2}$ ナルトキ,鋭角 A ノ値ヲ求メヨ。

29. $A+B=90°$ ナルトキ, $\tan A\cdot\tan B$ ノ値ヲ求メヨ。

30. 直角三角形 ABC ニ於テ ∠C ヲ直角, C カラ斜邊ヘノ垂線ヲ CD トスル。斜邊 c ト角 A ノ三角函數トデ, AD, BD, CD ノ長サヲ表ハセ。

31. 300 m ノ高サニ繋留シテアル氣球カラ塹壕ヲ望ムニ俯角 25° デアル。氣球ノ直下カラコノ塹壕ニ至ル距離ハ約幾 m カ。(眞數表ヲ用ヒヨ)

32. 毎時 a 浬ノ速サデ南 $\alpha°$ 西ニ向ツテ航スル船ハ,毎時幾浬ヅツ正南及ビ正西ニ移動スルカ。

33. 高サ 100 m 及ビ 80 m ナル二ツノ煙突ノ頂上ヲ連ネル直線ガ水平面ニ 10° ノ傾斜ヲナストキ,二ツノ煙突ノ基底ノ距離ハ約幾 m カ。

34. 現在或燈臺カラ東北 20 浬ノ距離ニアル船ガ, 10 節ノ速サデ南 30° 西ニ進航スルト,燈臺カラコノ船ヘノ距離ガ最モ近クナルノハ約何時カ。

35. 甲乙ノ觀望所デ同時ニ或飛行機ヲ見タノニ,甲カラハ方位正北,仰角 30°, 乙カラハ方位正東,仰角 45° デアツタトイフ。兩觀望所ハ同一水平面上ニアツテソノ間ノ距離ガ 1.5 km デアレバ,飛行機ノ高サハ幾 m カ。

附　錄
復 習 問 題

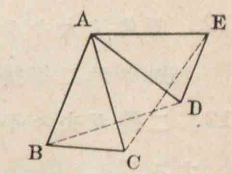
I. (第1章——第9章分)

1. 二ツノ直角 AOB, COD ガ頂點 O ヲ共有スルナラバ, ∠AOD ト ∠BOC トハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。

2. 二等邊三角形 ABC ニ於テ,頂點 A カラ AB, AC 上ニ相等シイ距離ニアル點ヲ夫々 D, E トスレバ, BE=CD

3. △ABC ニ於テ AB=AC ナルトキ, BA ノ延長上ノ任意ノ點ヲ D トスレバ, BD>CD

4. 右ノ圖ニ於テ, △ABC≡△ADE デ AB=AC ナラバ, BD=CE

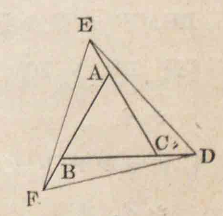


5. 二ツノ線分 AB, CD ガ O デ交ハリ OA=OB, OC=OD ナルトキ, O ヲ通ル任意ノ直線ガ AD, BC ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ

OE=OF

6. 正三角形 ABC ノ各邊ノ上ニ AD=BE=CF ヲ取レバ △DEF モ亦正三角形デアル。

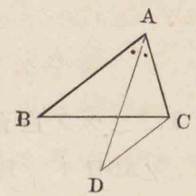
7. 正三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ヲ順次ニ延長シテソノ上ニ夫々 CD, AE, BF ヲ等シク取レバ △DEF ハドウカ。



8. 二等邊三角形ABCノ兩底角ノ二等分線ノ交點ヲPトスレバ, △BPCハ二等邊三角形デアル。

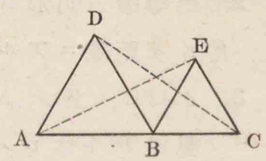
9. 二等邊三角形ノ兩底角ノ外角ノ二等分線ト底邊トハ二等邊三角形ヲ作ル。

10. △ABCノ頂點Cヲ通リABニ平行線ヲ引キ,頂角Aノ二等分線トDデ交ハラシメレバ, △ADCハ二等邊三角形デアル。モシ頂角Aノ外角ノ二等分線ヲ引ケバドウカ。



11. 右ノ圖ニ於テ△ABD及ビ△BCEガ共ニ正三角形ナラバ

AE=CD



12. 頂角ノ大キサト頂點カラ底邊ニ引イタ垂線ノ長サトヲ知ッテ二等邊三角形ヲ作レ。

13. 二邊ガ夫々平行ナ二ツノ角ハ相等シイカ,又ハ補角ヲナス。

14. 二邊ガ夫々平行ナ二ツノ角ノ二等分線ハ互ニ平行デアルカ,或ハ垂直デアル。

15. △ABCノ頂角Aノ二等分線ヘ邊BCノ兩端カラ垂線BE, CFヲ引キ邊BCノ中點ヲDトスレバ

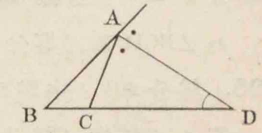
[1] DEトDFトハ二ツノ邊AB, ACノ差ノ半分ニ等シイ。

[2] ∠BCFト∠CBEトハ二ツノ角B, Cノ差ノ半分ニ等シイ。

[3] ∠ABEト∠ACFトハ二ツノ角B, Cノ和ノ半分ニ等シイ。

16. 前問デ,頂角Aノ代リニAニ於ケル外角ノ二等分線ヲ取レバ, [1]ハドウナルカ。

17. △ABCノ頂點Aニ於ケル外角ノ二等分線ト邊BCノ延長トノ間ノ角ハ二ツノ角B, Cノ差ノ半分ニ等シイ。



18. 四角形ノ一ツノ邊ニ接スル二ツノ內角ノ二等分線ガソノ邊ニ對シテ作ル角ハ他ノ二ツノ角ノ和ノ半分ニ等シイ。

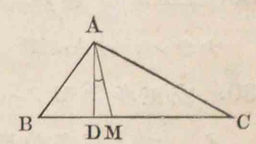
19. 四角形ノ相對スル二ツノ角ノ二等分線ノナス角ハ他ノ二ツノ角ノ差ノ半分ニ等シイ。

モシ後ノ二ツノ角ガ相等シケレバ,二ツノ二等分線ノ位置ノ關係ハドウカ。

20. 邊ガ夫々互ニ平行デアル二ツノ三角形ノ角ハ夫々相等シイ。

邊ガ夫々互ニ垂直デアル場合モ同様デアル。

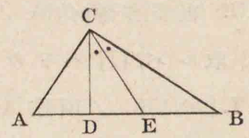
21. 三角形ノ一ツノ內角ノ二等分線トソノ頂點カラコレニ對スル邊ヘノ垂線トノ間ノ角ハ他ノ二ツノ內角ノ差ノ半分ニ等シイ。



22. 三角形ノ一ツノ內角ノ二等分線ハコノ角ノ頂點カラ出ル中線ト對邊ヘノ垂線トノ間ノ角ノ內部ニアル。

23. 直角三角形ノ直角ノ二等分線ハソノ頂點カラノ中線ト對邊ヘノ垂線トノナス角ヲ二等分スル。

24. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ノ上ニ AC ニ等シク AE ヲ取リ,又 C カラ AB ヘ垂線 CD ヲ引ケバ, CE ハ $\angle BCD$ ヲ二等分スル。



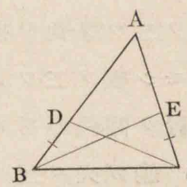
25. 線分 AB ノ中點ヲ C, AC ノ中點ヲ D トシ, A カラ AC ニ等シイ任意ノ線分 AP ヲ引ケバ, PB ハ PD ノ 2 倍ニ等シイ。

26. 點 P ハ $\triangle ABC$ ノ三頂點カラ等距離ニアル點デ且ツ $AB>BC>CA$ ナラバ

$$\angle APB>\angle BPC>\angle CPA$$

27. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ナルトキ邊 AB, AC 上ニ相等シイ線分 BD, CE ヲ取レバ

$$BE>CD$$



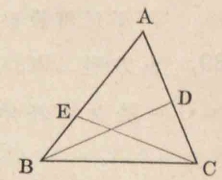
28. 正三角形 ABC ノ一邊 AC ノ延長上ニ一點 D ヲ取リ B, D ヲ結ベバ,　$AD>BD>AB$

29. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點ヲ M トスルトキ,モシ $AM>\frac{1}{2}BC$ ナラバ,　$\angle A<90^\circ$

30. 或正多角形ノ一ツノ内角ガ一ツノ外角ノ 3 倍ニ等シイ。コノ正多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

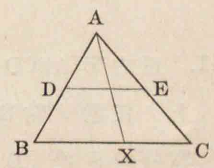
31. 多角形ノ邊ノ數ガ一ツ增ストキソノ内角ノ和ハ何程增スカ。

32. 三角形ノ二ツノ頂點カラ夫々ソノ對邊ニ引イタ二ツノ線分ハ互ニ他ヲ二等分スルコトハ出來ナイ。



33. 平行四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, BO, DO ノ中點ヲ夫々 M, N トスレバ,四邊形 AMCN ハ平行四邊形デアル。

34. $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トシ, BC 上ノ任意ノ點ヲ X トスレバ, AX ハ DE ニヨツテ二等分セラレル。



35. $\triangle ABC$ ノ内心ヲ通ツテ邊 BC ニ平行ナ直線ヲ引キ, AB 及ビ AC トノ交點ヲ夫々 X, Y トスレバ

$$BX+CY=XY$$

36. 銳角三角形 ABC ノ外心ヲ O トスレバ

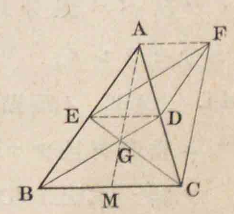
$$\angle BOC=2\angle BAC$$

37. 四角形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$ ノ外心ヲ夫々 P, Q, R, S トスレバ

$$PQ \parallel RS$$

38. $\triangle ABC$ ニ於テ BD, CE ヲ二中線トシ, E ヲ通リ BD ニ平行ナ直線ト D ヲ通リ AB ニ平行ナ直線トノ交點ヲ F トスレバ, $\triangle CEF$ ノ三邊ハ夫々 $\triangle ABC$ ノ三中線ニ等シク, D ハ $\triangle CEF$ ノ重心デアル。

[注意] 圖ニ於テ四邊形 AEDF, AMCF



ハ平行四邊形トナルコトニ注意セヨ。

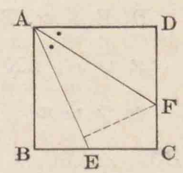
39. 正方形 ABCD ノ邊 BC 上ノ點 E カラ AE ニ垂線ヲ引キ, C ニ於ケル外角ノ二等分線トＦニ於テ交ハラシメレバ

$$AE=FE$$

40. 矩形 ABCD ノ頂點 C カラ對角線 BD ニ垂直ナ直線ヲ引キ $\angle BAD$ ノ二等分線ト E ニ於テ交ハラシメレバ

$$AC=CE$$

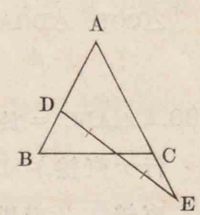
41. 正方形 ABCD ノ頂點 A ト邊 BC ノ上ノ任意ノ點 E トヲ結ビ, $\angle EAD$ ノ二等分線ガ邊 CD ト交ハル點ヲ F トスレバ, DF ハ AE ト BE トノ差ニ等シイ。



[注意]　△ADF ト合同ナ三角形ヲ導ケ。

42. 三角形ノ一ツノ頂點カラ他ノ二ツノ頂點ニ於ケル內角ト外角トノ二等分線ヘノ垂線ノ足ハ一直線上ノ四點デアル。

43. 二等邊三角形 ABC ノ頂點ヲ A, 邊 AB ノ上ノ任意ノ點ヲ D トシ邊 AC ノ延長ノ上ニ於テ CE=BD ヲ取リ, D, E ヲ結ベバ,線分 DE ハ底邊 BC ニ二等分セラレル。



44. △ABC ノ頂點 A ニ於テ三角形ノ外部ヘ夫々 AB, AC ニ垂直デ且ツコレト等長ナル線分 AB′, AC′ ヲ引キ B′C′ ヲ結ンデ △AB′C′ ヲ作レバ

[1]　B′C′ ハ △ABC ノ A カラノ中線ノ 2 倍デアル。

[2]　B′C′ ハコノ中線ニ垂直デアル。

[3]　BC′ ト B′C トハ等長デ且ツ互ニ垂直デアル。

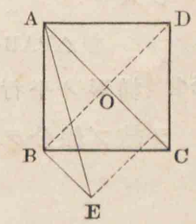
[注意]　△AB′C′ ヲ A ノ周リニ 90° ダケ廻轉スレバ,ドウナルカ。

45. 正方形 ABCD ノ對角線 AC 上ニ點 E ヲ取リ, AE=AB ナラシメ, E カラ AB ニ垂線 EF ヲ引ケバ

$$EF=\frac{1}{2}AC$$

46. 正方形 ABCD ノ對角線 AC ニ平行ニ B カラ BE ヲ引キ,ソノ上ニ E ヲ取リ, AE=AC ナラシメレバ

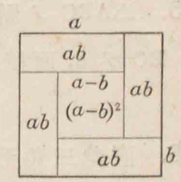
$$\angle BAE=\frac{1}{3}\angle BAC$$



47. 代數學ノ公式

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

ニ對應スル幾何學ノ定理ヲ右ノ圖ニヨツテ求メヨ。



48. A, B, C, D ヲ順次ニ同一ノ直線上ニアル四點トスレバ

[1]　$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2AD\cdot BC$

[2]　$AD^2+BC^2=AC^2+BD^2+2AB\cdot CD$

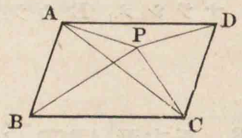
49. 與ヘラレタ線分ヲ二ツノ部分ニ分ケテ,ソノ各ノ上ノ正方形ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

50. △ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トスレバ, △DBC ハ △DEC ノ 2 倍デ,梯形 DBCE ハ △ADE ノ 3 倍デアル。

51. 菱形 ABCD ノ二邊 BC, CD ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ, △AEF ハ本形ノ $\frac{3}{8}$ デアル。

52. 二ツノ平行四邊形 ABCD ト AEFG トガ頂點 A ヲ共有シ,頂點 E ハ BC 上ニ, D ハ FG 上ニアルトキハ,兩平行四邊形ハ等積デアル。

53. 平行四邊形 ABCD ニ於テ △ACD 內ニ任意ノ一點 P ヲ取レバ



$$\triangle PAB - \triangle PAD = \triangle PAC$$

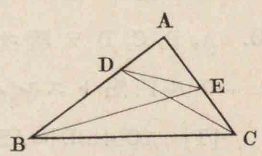
54. 梯形ノ平行ナ二邊ヲ a, b トシ,平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ヲ c, 高サヲ h, 面積ヲ S トスレバ

$$S = \frac{1}{6}h(a+b+4c)$$

55. △ABC ノ周ノ半分ヲ s, ∠A 內ノ傍接圓ノ半徑ヲ r_1, 邊 BC ヲ a, 面積ヲ S トスレバ

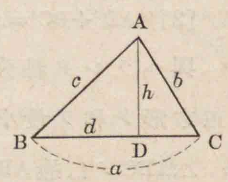
$$S = r_1(s-a)$$

56. 直角三角形 ABC ニ於テ直角ヲ夾ム二邊 AB, AC 上ノ任意ノ點ヲ夫々 D, E トスレバ



$$CD^2 + BE^2 = DE^2 + BC^2$$

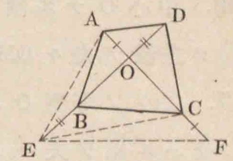
57. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トシ, $a+b+c=2s$ ト置ケバ,ソノ面積ハ次ノ式デ表ハサレル。



$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

58. 梯形ノ面積ハ平行デナイ二邊ノ中ノ一ツト他ノ一ツノ中點カラコレニ下シタ垂線トノ積ニ等シイ。

59. 四角形 ABCD ノ面積ハソノ對角線 AC, BD 及ビソノ夾角 BOC ニ等シイ二邊及ビ夾角ヲ有スル三角形ノ面積ニ等シイ。



60. 一ツノ邊,ソノ邊ノ一端ノ角及ビソノ邊ヘノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

61. 底邊,底邊ノ一端カラノ中線ヲ與ヘテ二等邊三角形ヲ作レ。

62. 周ト二角トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

63. 共通ノ底ノ同ジ側ニアル二ツノ △ABC, △A'BC ノ邊 AB, AC, A'B, A'C ノ中點ヲ夫々 D, E, D', E' トスルトキ,コレヲ順ニ結ンデ出來ル平行四邊形 DED'E' ノ面積ハ二ツノ三角形ノ面積ノ差ノ半分ニ等シイ。

二ツノ三角形ガ共通ノ底邊ノ反對ノ側ニアルトキハドウカ。

64. 一ツノ頂點ヲ通ル直線デ四角形ノ面積ヲ二等分セヨ。又三等分セヨ。

65. 四邊形ノ面積ヲソノ一邊上ノ定點ヲ通ル直線デ二等分セヨ。

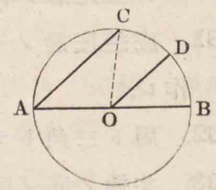
II. (第10章—第14章分)

66. 中心 O ナル圓ノ弦ヲ PQ, PR トシ, O ヨリコレニ引イタ垂線ヲ夫々 OM, ON トスレバ, $MN \parallel QR$

67. 二ツノ等圓 O, O′ ノ中心線ニ平行ナ直線ガ兩圓周ト交ハル點ヲ夫々 A, B, C, D トスレバ, $AB=CD$

68. 圓ノ相等シイ二弦ノ延長ノ交點ヨリソレ等ノ弦ノ兩端マデノ距離ハ二ツヅツ相等シイ。

69. AB ハ圓 O ノ直徑デ, AC ハ任意ノ弦デアルトスレバ, AC ニ平行ナ半徑ハ弧 BC ヲ二等分スル。



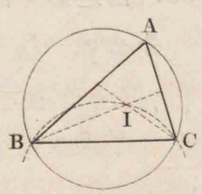
70. 圓周上ニ A, B, C, D, E ノ順序ニ $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}$ ナラシメレバ, $AD=BE$

71. 相交ハル二ツノ等圓ノ共通弦ノ中點ヲ通ル直線ガ二圓周デ夾マレタ線分ハソノ點デ二等分セラレル。

72. 同一圓周上ニ三頂點ヲ有スル二ツノ三角形ガ互ニ等角ナルトキハ,コノ二ツノ三角形ハ合同デアル。

73. A ヲ頂點トスル二等邊三角形 ABC ニ於テ, $\angle B=2\angle A$ ナラバ, A ヲ通リ B ニ於テ BC ニ切スル圓ト AC トノ交點ヲ D トスレバ, $AD=BD=BC$

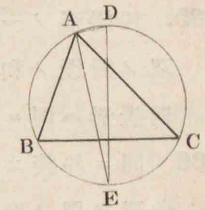
74. 底邊ノ位置ト大キサ及ビ頂角ノ大キサノ定マツタ三角形ヲ底邊ノ同ジ側ニ畫クトキ,ソノ内心ハ頂點ノ位置ノ如何ニ拘ハラズ常ニ底邊ノ兩端ヲ通ル同一ノ圓周上ニアル。



［注意］ 任意ノ三角形ノ位置ヲ ABC トシ, 内心ヲ I トスレバ $\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle A=$一定 ナルコトヨリ考ヘヨ。

75. △ABC ノ外接圓ノ弧 AB, AC ノ中點ヲ結ビツケル直線ハ内角 A ノ二等分線ニ垂直デアル。

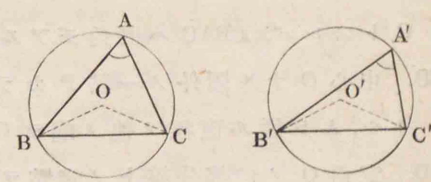
76. △ABC ノ邊 BC ニ垂直ナ外接圓ノ直徑ヲ DE トスルトキハ,弦 AD, AE ハ A ニ於ケル内角及ビ外角ヲ二等分スル。



77. △ABC ノ二角 B, C ノ二等分線ノ交點 O ヲ中心トスル圓ハ三角形ノ三邊カラ等長ノ弦ヲ切取ル。

78. 一直線上ニ三點 A, B, C ガアル。一點 P ヲ求メ $\angle APB$, $\angle BPC$ ヲイヅレモ $30°$ ナラシメヨ。

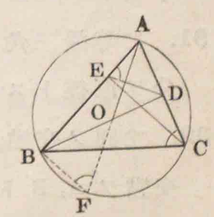
79. 底邊ト頂角トガ相等シイ二ツノ三角形ノ外接圓ノ半徑ハ相等シイ。



80. AB, AC ハ等長ノ弦デ, D ハ C ニ於ケル切線ト BA トノ交點, E ハ D カラ AC ヘノ垂線ノ足トスレバ, $BD=2CE$

81. 三角形ノ二ツノ傍心及ビ二ツノ頂點ハ同一圓周上ニアル。

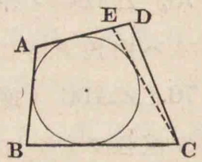
82. △ABC ノ外心ヲ O トシ,頂點 B, C カラ對邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々 D, E トスレバ, $AO\perp DE$



83. 正五角形 ABCDE ノ對角線 AC ハ邊 DE ニ平行デアル。

84. △ABC ノ外心ヲ O トスレバ, OA ニ垂直ナ任意ノ直線ガ AB, AC ニ交ハル點 E, F ハ B, C ト共ニ同一圓周上ニアル。

85. 四邊形ノ一双ノ對邊ノ和ガ他ノ一双ノ對邊ノ和ニ相等シイトキハコノ四邊形ハ圓ニ外接スル。



86. 圓ニ外接スル正三角形ノ周ハ同ジ圓ニ內接スル正三角形ノ周ノ 2 倍ニ等シイ。

87. 直徑 AB ニ垂直ナ弦 CD ノ交點 M ヲ通ル任意ノ弦ヲ PQ トシ, 弦 AQ, BP ガ CD ニ交ハル點ヲ夫々 R, S トスレバ, CR=DS

88. A ニ於テ外切スル二ツノ圓ノ共通外切線ノ切點ヲ B, C トスレバ, ∠BAC ハ直角デアル。

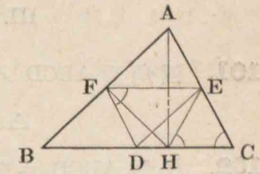
89. 中心 O ナル圓外ノ一點 P カラノ切線ノ切點ヲ A, B トシ, A ヲ通ル直徑ノ他ノ端ヲ C トスレバ, BC∥OP

90. 定角 O ノ二等分線上ノ定點ヲ A トシ, O, A ヲ通ル任意ノ圓ガソノ角ノ二邊(又ハソノ延長)ト交ハル點ヲ P, Q トスレバ, OP, OQ ノ和(又ハ差)ハ一定デアル。

91. 二等邊三角形ノ內心ト底邊ニ對スル傍心トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓ハ他ノ二邊ニ切スル。

92. 二圓ノ交點ノ一ツ P ヲ通リ割線 APB ヲ引キ各圓トノ交點ヲ A, B トスレバ, A, B ニ於ケル各圓ノ切線ノ交角ハ一定デアル。

93. △ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トシ, A カラ BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ H トスレバ,四點 D, H, E, F ハ同一圓周上ニアル。



94. 二ツノ圓 O, O′ ガ外切スルトキハ, OO′ ヲ直徑トスル圓ハコノ二圓ノ共通外切線ニ切スル。

95. △ABC ノ垂心ヲ H トスレバ △ABC, △HAB, △HBC, △HCA ノ外接圓ハイヅレモ相等シイ。

96. 正三角形 ABC 外ノ一點 P ガ角 A 內ニアツテ且ツ PB+PC=PA ナルトキハ, P 點ハコノ三角形ノ外接圓周上ニアル。

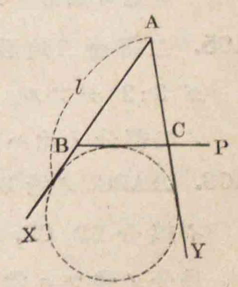
97. 相交ハル二圓ノ一方ノ中心カラ一ツノ交點ニ引イタ半徑ガ他方ニ切スルトキハコノ二圓ハ直交スル。

[注意] 二ツノ圓ノ交點ニ於ケル兩圓ノ切線ノ夾ム角ガ直角デアルトキハ,コノ二圓ハ**直交**スルトイフ。

98. 圓 O ノ直徑ヲ AB, 弦 AC, BD (又ハソノ延長)ノ交點ヲ M トスレバ, 圓 CDM ハ圓 O ニ直交スル。

99. 內接圓ノ半徑 (r) ト一鋭角 (α) トヲ知ツテ直角三角形ヲ作レ。

100. 一定點 P ヲ通ツテ一直線 PCB ヲ引キ,定角 XAY ノ二邊 AX, AY ト夫々點 B, C デ交ハラシメ, △ABC ノ周ヲ與ヘラレタ長サ $2l$ ニ等シクセヨ。



III. (第15章——第20章分)

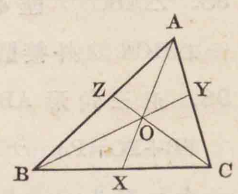
101. 四角形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ E トスレバ

$$\triangle ABC : \triangle ADC = BE : DE$$

102. 梯形 ABCD ニ於テ AD∥BC, 對角線 AC, BD ノ交點ヲ E トスレバ

$$\triangle AED : \triangle AEB = \triangle AEB : \triangle EBC$$

103. △ABC 内ニ一點 O ヲ取リ, AO, BO, CO ガソノ對邊ト交ハル點ヲ夫々 X, Y, Z トスレバ



$$\frac{BX}{CX}\times\frac{CY}{AY}\times\frac{AZ}{BZ}=1$$

[注意] $\frac{BX}{CX}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}$, $\frac{CY}{AY}=\frac{\triangle BOC}{\triangle AOB}$, $\frac{AZ}{BZ}=\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}$

104. 與ヘラレタ圓ノ弦 AB ノ中點 M ヲ通リ,任意ノ弦 CMD ヲ引クトキハ

$$AC \cdot AD = BC \cdot BD$$

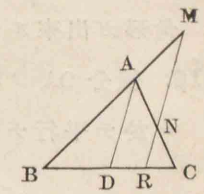
[注意] ∠CAD ト ∠CBD トハ補角デ, △ACD=△CBD 一組ノ角ガ補角ヲナス二ツノ三角形ノ比ハソノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シイ。

105. 二等邊三角形ガアツテソノ底邊ノ高サニ對スル比ガ 3:2 デアル。然ラバ内心ニヨツテ分ケラレタ高サノ二部分ノ比ハ如何。

106. △ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々各邊ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ線分 BD, CE, AF ヲ取レバ, △DEF ハモトノ三角形ノ幾分ノ幾ツニ當ルカ。

107. △ABC ノ邊 AB 上ニ AE, BF ヲ等シク取リ, E, F カラ AC, BC ニ夫々平行線ヲ引キ BC, AC トノ交點ヲ夫々 G, H トスレバ, GH∥AB

108. △ABC ニ於テ直線 MN ヲ中線 AD ニ平行ニ引キ, AB, AC 或ハソノ延長トノ交點ヲ夫々 M, N トスレバ



$$AM : AN = AB : AC$$

109. 二ツノ圓ガ内切スルトキソノ切點ヲ通ル外圓ノ弦ガ内圓ノ周デ分ケラレル部分ノ比ハ一定デアル。

110. △ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D, 重心ヲ G, AG ノ中點ヲ E トシ, BE ノ延長ガ AC ト交ハル點ヲ F トスレバ AF ハ AC ノ幾分ノ幾ツカ。

111. 周ガ與ヘラレタル線分ニ等シク,且ツ三邊ノ比ガ 2:3:4 ニ等シイ三角形ヲ作レ。

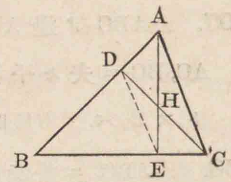
112. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ヲ引キ,各圓デ切取ラレル弦ノ比ヲ $m:n$ ナラシメヨ。

113. △ABC ノ内心ヲ I トシ, 角 A 内ニ於ケル傍心ヲ O トスレバ

$$AB \cdot AC = AI \cdot AO$$

114. 二ツノ鈍角三角形ニ於テ,鈍角ガ相等シク,鈍角ニ對スル邊ト他ノ一ツノ邊トガ比例ヲナストキハ,兩形ハ互ニ相似デアル。

115. $\angle A$ ガ鋭角ナル $\triangle ABC$ ニ於テ $AE \perp BC$, $CD \perp AB$ トシ, AE, CD ノ交點ヲ H トスレバ幾組ノ相似三角形ガ出來ルカ。



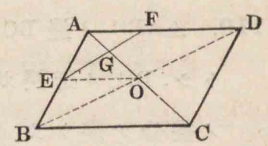
116. 線分 OA ノ延長上ニ一點 B ヲ取リ,コノ直線ノ同ジ側ニ於テ平行ナ線分 AC, BD ヲ引キ

$$AC : BD = OA : OB$$

ナラシメレバ三點 O, C, D ハ一直線上ニアル。

117. 平行四邊形 ABCD ノ二邊 AB, AD 上ニ夫々點 E, F ヲ取リ, $AE=EB$, $AF=\frac{1}{2}FD$ ナルヤウニシ,直線 EF ト對角線 AC トノ交點ヲ G トスレバ

$$AG=\frac{1}{5}AC$$



118. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 A ヲ通ル直線ガ對角線 BD ト邊 BC, CD トニ夫々 E, F, G デ交ハルトスレバ, AE ハ EF ト EG トノ比例中項デアル。

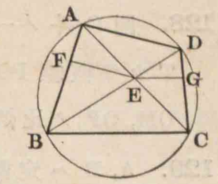
119. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ト相等シイ角ヲナス直線ガ邊 BC, CA, AB 又ハソノ延長ト夫々 D, E, F ニ於テ交ハルトキハ

$$BD : CD = BF : CE$$

120. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ延長ノ上ノ點 D ヲ通ル直線ガ AB, AC ト夫々 F, E デ交ハルトキ, $DF : DE = AC : AB$ ナラバ

$$BF = CE$$

121. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點ヨリ相對スル二邊ニ引イタ垂線ノ比ハソノ二邊ノ比ニ等シイ。



122. 圓外ノ點 P カラ切線 PT ト割線 PAB トヲ引キ, P カラ PT ニ等シイ線分 PT′ ヲ引キ, AT′, BT′ ガ圓周ニ交ハル點ヲ A′, B′ トスレバ

$$A'B' \parallel PT'$$

123. $\triangle ABC$ ノ邊 AB ト中線 AM トガ C ヲ通ル一直線ト夫夫 E, F ニ於テ交ハルトキハ

$$\frac{AF}{FM}=2\frac{AE}{EB}$$

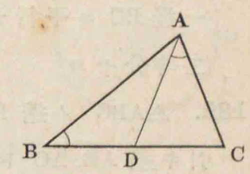
124. $\triangle ABC$ ノ各頂點カラ對邊ヘノ垂線ヲ AD, BE, CF トスルトキハ, BC^2 ハ $BA \cdot BF$ ト $CA \cdot CE$ トノ和又ハ差ニ等シイ。

125. AD ハ $\triangle ABC$ ノ中線デアツテ

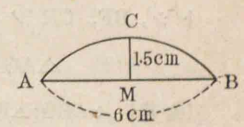
$$\angle CAD = \angle ABC$$

ナラバ

$$AB^2 = 2AD^2$$



126. 弦ガ 6cm デアル圓弧ノ中點ト弦ノ中點トノ距離ガ 1.5cm ナラバソノ圓ノ半徑ハ何程カ。



[注意] 弦 AB ノ中點ヲ M トシ $\overset{\frown}{AB}$ ノ中點 C ヲ通ル直徑ノ他端ヲ D トスレバ $AM^2 = CM \cdot MD$

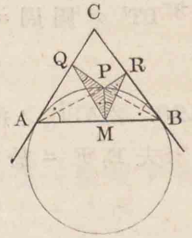
127. 直角三角形 ABC ノ直角 A ノ二等分線ト斜邊及ビ外接圓周トノ交點ヲ夫々 D, E トスレバ

$$AD \cdot AE = 2\triangle ABC$$

128. 圓 O 外ノ一點 P カラコノ圓ニ切線 PT ヲ引キ, 切點 T カラ直線 PO ニ垂線 TM ヲ引クトキハ,コノ圓ノ半徑ハ OM, OP ノ比例中項デアル。

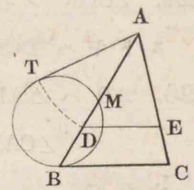
129. A, B ハ定圓周ノ上ノ二定點, AC, AD ハ定弦デアル。A, B ヲ通ル任意ノ圓ガコレ等ノ弦ト夫々 P, Q ニ於テ交ハルトキハ, CP : DQ ハ一定デアル。

130. 圓周上ノ一點 P ヨリ弦 AB ニ垂線 PM ヲ引キ,又 A, B ニ於ケル切線ヘ P ヨリ引イタ垂線ヲ夫々 PQ, 及ビ PR トスルトキハ



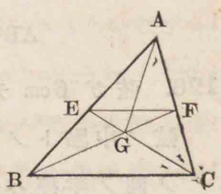
$$PM^2=PQ\cdot PR$$

131. 與ヘラレタ三角形 ABC ヲソノ一邊 BC ニ平行ナ直線 DE ヲ引イテ二等分セヨ。



132. △ABC ノ邊 BC ニ平行ニ EF ヲ引キ,邊 AB, AC トノ交點ヲ夫々 E, F トシ, BF, CE ノ交點ヲ G トスレバ

$$\triangle AGE=\triangle AGF$$



[注意] △AEG : △EBG = △AFG : △FCG, △EBG = △FCG デアル。

133. AB, AD ト AC ハ平行四邊形ノ二邊ト對角線デ, A ヲ通ル圓周ハコレ等ノ直線ト夫々 P, Q, R デ交ハルトスレバ

$$AB\cdot AP+AD\cdot AQ=AC\cdot AR$$

[注意] PR ト CD トノ交點ヲ E, QR ト BC トノ交點ヲ F トシテ BPRF ト DQRE トニ外接スル圓ヲ畫ケ。

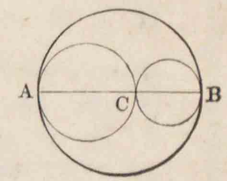
134. △ABC ノ外接圓ノ弦 AE ト頂點 A カラ邊 BC 又ハソノ延長ノ上ノ一點 D ニ至ル直線トガ內角 A ノ二等分線ト相等シイ角ヲ作ルトキハ

$$AB\cdot AC=AD\cdot AE$$

135. △ABC ノ邊 BC ノ上ノ點 P カラ AC, AB ニ平行ナ直線ヲ引キ,コレト B, C ヲ通ル互ニ平行ナ二直線ト夫々 Q, R ニ於テ交ハラシメレバ, QR ハ A ヲ通ル。

136. 平行四邊形 ABCD ノ邊 AD ニ平行ナ直線ノ上ニ二ツノ點 E, F ヲ取リ, AE, DF ノ交點ヲ G トシ, BE, CF ノ交點ヲ H トスレバ, $GH \parallel AB$

137. 直徑 AB 上ノ任意ノ點ヲ C トシ, AC, BC ヲ直徑トシテ二圓ヲ畫ケバ大ナル圓ノ周ハ小ナル二圓ノ周ノ和ニ等シイ。



138. $(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A$ ヲ證明セヨ。

139. $\cos^4 A-\sin^4 A=2\cos^2 A-1$ ヲ證明セヨ。

140. $(1+\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2=3+2(\sin\theta+\cos\theta)$ ヲ證明セヨ。

141. $(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^2=1-4\sin^2\theta\cos^2\theta$ ヲ證明セヨ。

142. $\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta=1-\sin^4\theta$ ヲ證明セヨ。

143. $\dfrac{\sin^2 A}{1+\cos A}=1-\cos A$ ヲ證明セヨ。

144. $\cos A\tan A=\sin A$ ヲ證明セヨ。

145. $\dfrac{\tan A}{1-\tan^2 A}=\dfrac{\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$ ヲ證明セヨ。

146. $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x$　ヲ證明セヨ。

147. 半徑 7 cm ナル圓ノ中心カラ 4 m ナル距離ニアル點ニ於ケルコノ圓ノ視角ハ約幾度カ。

148. 半徑 r ナル圓ノ視角ガ 2α ナル點カラ圓周ニ至ル最近距離ハ幾ラカ。

149. 垂直ノトキニ長サ 25 m ノ帆柱ノ影ガ 3 m デアツタノニ船ガ傾イテソノ影ガナクナツタトスレバ,船ハ約幾度傾イタカ。

150. 直徑 10 m ナル球狀ノ氣球ノ視角 2° デ,ソノ中心ノ仰角 75° デアル。氣球ノ高サハ幾ラカ。

新　式
幾何教科書
[二・三學年用]

定價　金七十五錢

昭和九年十二月二十六日初版印刷
昭和九年十二月三十日初版發行
昭和十年一月三十一日訂正再版印刷
昭和十年二月四日訂正再版發行

檢印

著作者　**高木貞治**

東京市小石川區小日向水道町八十四番地
發行者　株式會社**東京開成館**
代表者　松本繁吉

東京市牛込區市谷加賀町一丁目十二番地
印刷者　寺井藤左工門

東京市日本橋區吳服橋二丁目五番地
販賣所　林平書店

大阪市東區北久寶寺町心齋橋筋角
販賣所　三木佐助

發行所　株式會社**東京開成館**
[振替口座] 東京五三二二番

大日本印刷株式會社　印刷