新制

立體幾何學教科書

（增　課）

理學博士　竹中曉著

精華房

昭和十年一月十四日
文部省檢定濟
中學校數學科用

新制

立體幾何學教科書

(增課)

理學博士 竹中曉著

精華房藏版

序

本書ハ新中學校令教授要目ニ準據シ,拙著新制平面幾何學教科書ノ續編トシテ,中學五年増課用ノ教科書ニ充テルガ爲ニ編纂シタモノデアリマス。

從ツテ編纂ノ趣旨モ平面ノ部ト同ジク,定理並ニ問題ノ配列ニ周到ノ注意ヲ拂ツタ積リデアリマス。殊ニ初メテ立體幾何學ヲ學ブ生徒ニ取ツテ最モ困難ヲ感ズルノハ,平面上ニ描カレタ立體圖形ノ理解ト想像トデアリマス。依ツテ定理ノ系ノ證明ノ如キ,或ハ稍〻困難デアルト思ハレル問題ノ如キニハ,解又ハ註ヲ附シテ理解ノ一助トイタシマシタ。

尙本文中ニ採用シタ問題ハ基礎的平易ナ問題ヲ取リ入レルコトトシ,稍〻困難ナ問題ハ卷末ノ補充問題ニ加ヘルコトトイタシマシタ。而モ補充問題ノ活用ヲ全カラシメル爲ニ,コレ等ヲ本文ノ編,章ノ順序ニ排列シテ教授者ノ任意選擇ノ便ニ供スルト共ニ,生徒ノ自學自習ニ利シ,以テ實力ノ

向上ヲ圖リ得ルヤウ細心ノ注意ヲ拂ヒマシタ。

本書ハ教育實際家ノ意見ヲ參酌シテ編述シタノデアリマスケレドモ,尚改善ヲ要スル點モアルコトト存ジマス。大方ノ御批正ヲ得マスレバ著者ノ欣幸トスルトコロデアリマス。

昭和九年十月

著者識ス

目次

第一編 直線及ビ平面

第一章 緒論

第二章 平行ナ平面及ビ直線

第三章 垂直ナ直線及ビ平面

第四章 二面角及ビ多面角

第二編 多面體

第一章 角壔

第二章 角錐

第三章 正多面體

第三編 廻轉體

第一章 直圓壔及ビ直圓錐

補充問題

新制
立體幾何學教科書
(増　課)

第一編
直線及ビ平面

第一章　緒　　論

1. 立體幾何學

平面幾何學ニ於テハ,同一平面上ニアルトキノ圖形ノ性質ヲ研究シタノデアルガ,**立體幾何學**ニ於テハ,全部ガ同一平面上ニナイ圖形ノ性質ヲ攻究スルノガ目的デアル。立體幾何學ノコトヲ**空間幾何學**トモイフ。

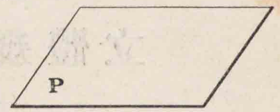
2. 平　面

定義　一ツノ面上ニアル任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全ク其ノ面上ニ在ルトキ,其ノ面ヲ**平面**トイフ。

平面ハ如何ナル方向ニモ限リナク廣ガツテヰルモノ考ヘル。然シコレヲ書キ表ハスニハ通常

平行四邊形*ヲ以テスル。

例ヘバ,右圖ノ様ニ平行四邊形ヲ書キ,コレヲ**P平面**又ハ**平面P**ト呼ブ。



一點又ハ一直線ガ一平面上ニアルトキハ,此ノ平面ハ其ノ點又ハ其ノ直線ヲ**含ム**,**過ル**,又ハ**通ル**トイフ。

一直線ト一平面トガ唯一ツノ點ノミヲ共有スルトキハ其ノ直線ト其ノ平面トハ**相交ル**トイフ。

3. 平行線

定義 同一平面上ニアッテ相交ラナイ二直線ヲ**平行線**トイフ。

注意 平行線デナクテモ相交ラナイ二直線ガアル。例ヘバ天井ヲ南北ニ走ル直線ト,床ノ上ヲ東西ニ走ル直線トハ相交ラナイガ平行デハナイ。ソレハ同一平面上ニナイカラデアル。故ニ立體幾何學デ平行線ヲ考ヘル場合ニハ必ズ同一平面上ニアルトイフコトヲ忘レテハ

* 註 平行四邊形ノ實際ノ形ハ矩形デアルガコレヲ遙カ遠方カラ見レバ平行四邊形トナルノデ平面ノ代リニ平行四邊形ヲ畫クノデアル。近クカラ矩形ヲ見レバ梯形トナルノデ平面ノ代リニ梯形ヲ畫イテモ差支ハナイ。

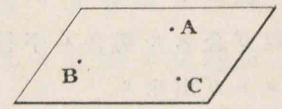
ナラナイ。

4. 平面ノ決定

問 二點ヲ通ル平面ハ幾ツアルカ。三點ハ如何。

公理 1. 同一直線上ニナイ三點 (A, B, C) ヲ通ル平面ハ一ツアッテ唯一ツデアル。

注意 一直線上ニナイ三點 A, B, C ヲ含ム平面ヲ **A, B, C ノ定メル平面**又ハ**三點 A, B, C ノ決定スル平面**トイフ。



上ノ公理カラ直チニ次ノ各系ヲ得ル.

系 1. 一直線ト其ノ上ニナイ一點トヲ含ム平面ハ一ツアッテ唯一ツデアル。

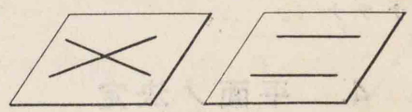
系 2. 相交ル二直線ニヨッテ定メル平面ハ一ツアッテ唯一ツデアル。

系 3. 平行ナ二直線ニヨッテ定メル平面ハ一ツアッテ唯一ツデアル。

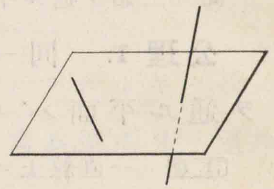
5. 二直線ノ位置

空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ハ次ノ二種ニ限ル。

1. 同一平面上ニアツテ相交ル場合ト平行ナ場合。



2. 同一平面上ニナイ場合。

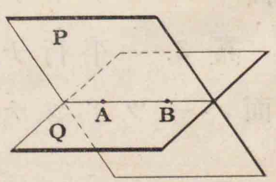


注意　同一平面上ニナイ二直線ノコトヲ相交リモセズ平行デモナイ直線トイフコトガアル。又二直線ガ合スル場合ハ平行ナルトキノ特別ナ場合ト考ヘルコトガ出來ル。

6. 二平面ノ位置

公理 2.　二平面ガ一ツノ點ヲ共有スルトキハ,其ノ點ヲ通ル一ツノ線ヲ共有スル。

定理　二平面P,Qガ一點Aヲ共有スルトキハ此ノ點ヲ通ル一直線ヲ共有スル。ソシテ此ノ直線以外ノ點ヲ共有シナイ。



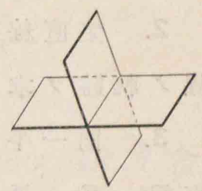
證明　二平面P,Qハ點Aヲ共有スルカラ,Aヲ通ル一ツノ線ヲ共有スル。今其ノ線上ニA以外ノ點ヲトリ,コレヲBトスレバ,二點A,Bハ平面P上ニモ

又平面Q上ニモアルカラ,A,Bヲ通ル直線ABハ此ノ二平面ノ兩方ニ含マレル。即チ此ノ二平面ハ,直線ABヲ共有スル。而モ此ノ直線外ノ點ハ共有シナイ。何トナレバ,若シ此ノ二平面ガAB直線外ノ點ヲ共有スルナラバ,此ノ兩平面ハ一致シナケレバナラナイカラデアル。

定義　二平面ガ唯一ツノ直線ヲ共有スルトキハ其ノ二平面ハ**相交ル**トイヒ,其ノ直線ヲ**交線**或ハ**交リ**トイフ。

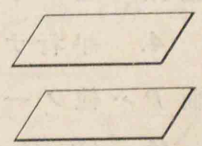
定義　二平面ガ相交ラナイトキハ,其ノ二平面ハ**互ニ平行**デアルトイフ。

二平面ノ位置ノ關係ハ次ノ二種ニ限ル。



1. 相交ル場合。

2. 互ニ平行ナル場合。



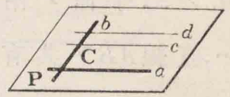
注意　二平面ガ全ク一致スル場合ハ互ニ平行ナ場合ノ特別ノ場合ト考ヘルコトガ出來ル。

問　題

1. 相交ル二定直線ノ一ツニ平行デ他ニ交ル

直線ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　相交ル二定直線ヲ a, b トシ, a ニ平行デ b ト C ニ於テ交ル任意ノ直線ヲ c トスル。



a ト b トノ決定スル平面ヲ P トスル。

$a /\!/ c$ デアルカラ, a ト c トハ一ツノ平面ヲ決定スル, コレヲ P' トスレバ, P ト P' トハ直線 a ト一點 C トヲ共有スルカラ相合スル。従ツテ直線 c ハ P 平面上ニアル。

逆ニ P 平面上ニ a ニ平行ナ直線 d ヲ引ケバ a ト b トハ相交ル,故ニ d ト b トモ相交ル。

故ニ平面 P ハ求メル軌跡デアル。

2.　定直線外ノ定點ヲ通リ此ノ直線ト交ル直線ノ軌跡ヲ求メヨ。

3.　同一平面上ニナイ二直線ノ双方ニ交ル二直線ハ互ニ平行トナルコトハデキナイ。

4.　平行ナ二直線 AB, CD ノ一ツ AB ト交ル平面 P ハ他ノ一ツ CD トモ交ル。

註　AB, CD ノ定メル平面ト P 平面トノ交線ヲ考ヘヨ。

5.　矩形 $ABCD$ ノ對角線ノ交點ヲ K トシ,矩形

外ノ任意ノ點ヲ P トスレバ,

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4PK^2+AC^2$$

第二章　平行ナ平面及ビ直線

7.　直線ト平面トノ位置

定義　一直線ト一平面トガ相交ラナイトキハ**互ニ平行デアル**トイフ。

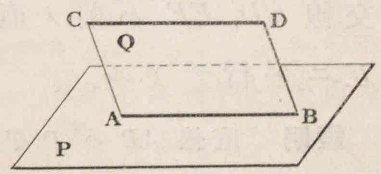
一直線ト一平面トノ位置ノ關係ハ次ノ三種ニ限ル。

1. **相交ル場合。**
2. **直線ガ平面ニ含マレル場合。**
3. **互ニ平行ナル場合。**

注意　2ハ3ノ特別ナ場合ト考ヘルコトガ出來ル。

8.　直線ト平面トノ平行

定理 1.　平行線 AB, CD ノ一ツ AB ヲ含ミ他ヲ含マナイ平面 P ハ後ノ直線 CD ニ平行デアル。



證明　AB, CD ハ平行デアルカラ一平面ヲ決定スル。コレヲ Q トス

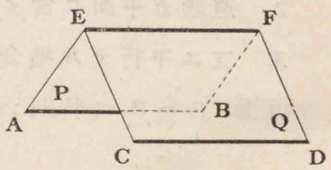
レバ, AB ハ P ト Q トノ交線トナル。

今若シ CD ト P トガ交ルトスレバ,其ノ交點ハ AB 上ニナケレバナラナイ。即チ AB ト CD トハ相交ルコトトナツテ假設ニ反スル。

系 平行線 AB, CD ヲ一ツヅツヲ含ム二平面 P, Q ノ交線 EF ハ此ノ平行線ノ各ニ平行デアル。

證明 平面 Q ハ AB ニ平行ナ直線 CD ヲ含ムカラ, $Q \parallel AB$

故ニ AB ト EF トハ交ラズ且ツ同一平面上ニアル。



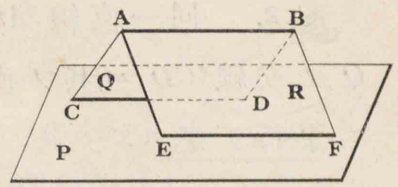
$\therefore\ EF \parallel AB$

同様ニシテ $EF \parallel CD$

定理 2. 一平面 P ニ平行ナ一直線 AB ヲ含ム任意ノ二平面 Q, R ト此ノ平面トノ交線 CD, EF ハ前ノ直線 AB ニ平行デ且ツ互ニ平行デアル。

證明 直線 AB ハ P 平面ニ平行デアルカラ,其ノ平面上ノ直線 CD トハ交ラナイ,而モ AB, CD ハ

同一平面 Q 上ニアル。



$\therefore\ AB \parallel CD$

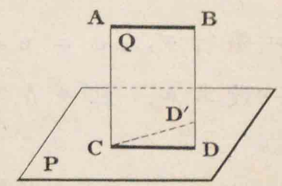
同様ニシテ $AB \parallel EF$

次ニ CD ト EF トガ平行デナイトスレバ,兩直線ハ同一平面 P 上ニアルカラ相交ル。然ルトキハ其ノ交點ト直線 AB トハ二ツノ平面 Q, R ヲ決定スルコトトナツテ不合理トナル。

$\therefore\ CD \parallel EF$

系 1. 一直線 AB ニ平行ナ平面 P 上ノ一點 C ヲ過ギ此ノ直線ニ平行ナ直線 CD ハ全ク此ノ平面ノ上ニアル。

證明 AB ト CD トノ決定スル平面ヲ Q トシ, Q ト P トノ交リヲ CD' トスレバ,

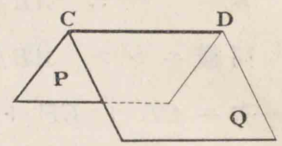


$CD' \parallel AB$

又 $CD \parallel AB$

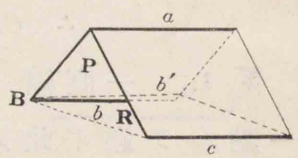
然ルニ CD ト CD' トハ AB ト共ニ同一平面 Q 上ニアルカラ一致シナケレバナラナイ。故ニ CD ハ平面 P ノ上ニアル。

系 2. 同一直線 AB ニ平行ナ二平面 P, Q ノ交線 CD ハ,其ノ直線ニ平行デアル.



証 CD 上ノ一點 C ヲ通リ AB ニ平行線ヲ引キ系1ヲ利用セヨ。

系 3. 同一直線 a ニ平行ナ二直線 b, c ハ互ニ平行デアル。



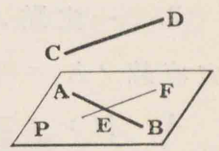
證明 平行線 a, b ノ決定スル平面ヲ P トシ, b 上ノ一點 B ト c トノ決定スル平面ヲ R トスレバ,兩平面ノ交リ(コレヲ b' トスル)ハ c ニ平行デ,又 a ニモ平行デアル。故ニ b ト b' トハ一致スル。即チ b ト c トハ平行デアル。

問　題

1. 同一平面上ニナイ二定直線 AB, CD ガアル。AB ヲ含ミ, CD ニ平行ナ平面ヲ作レ。

作圖 直線 AB 上ノ任意ノ一點 E ヲ通リ CD ニ平行ナ直線 EF ヲ作リ, AB ト EF トノ決定スル平面 P ヲ作

レバヨイ。



證明 AB ト CD トハ同一平面上ニナイカラ, EF ト AB トハ一致シナイ。 且ツ $CD \parallel EF$ $\therefore$ $P \parallel CD$

吟味 條件ニ適スル平面ハ唯一ツデアル。

何トナレバ,若シ P 以外ニ條件ニ適スル平面 Q ガアルトスレバ, AB ハ平面 P 及ビ Q ノ交線トナルカラ, $AB \parallel CD$ トナルノデ假設ニ反スル。

故ニ平面P以外ニ條件ニ適スル平面ハ存在シナイ。

注意　立體幾何學デハ平面幾何學ニ於ケル作圖ノ公法ノ外ニ更ニ次ノ二ツノ公法ガアル。

1. 平面ハコレヲ畫クコトガ出來ル。

2. 二平面ノ交線又ハ一直線ト一平面トノ交點ハコレヲ畫クコトガ出來ル。

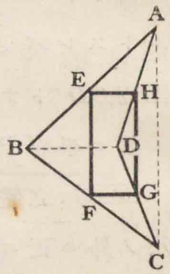
然シコレ等平面,直線及ビ點ハ畫クコトガ出來ルトイフダケノ話デ實際ノ圖ヲ畫クワケノモノデハナイ。從ツテ立體幾何學ニ於ケル作圖題ハ與條件ニ適スル實際ノ圖形ヲ求メルモノデハナク,唯ソノ方法ヲ推理ノ上デ決定スルダケノモノデアル。

2. 定平面 P 外ノ與點 A ヲ通ル直線ヲ作リ,平面 P 上ノ定直線ニ平行トナル樣ニセヨ。

3. 一定點Aヲ通リ且ツ同一平面上ニナイ二定直線ノ各〻ニ平行ナ平面ヲ作レ。

4. 何レノ二ツモ平行デナイ三ツノ平面ガ一點ヲモ又一直線ヲモ共有シナイトキハ,コレ等ノ交線ハ互ニ平行デアル。

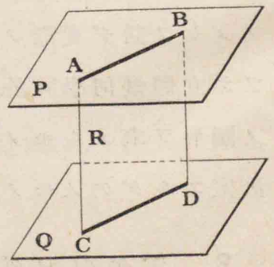
5. 四邊ガ同一平面上ニナイ四邊形(コノ様ナ四邊形ヲ折面四邊形又ハごーし四邊形トイフ) ニ於テ其ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブ四線分ハ平行四邊形ヲ作ル。



9. 平行ナ二平面

[定理] 3. 二ツノ平行平面P,Qト他ノ平面Rトノ交線AB, CDハ互ニ平行デアル。

證明 平面Pト平面Qトハ平行デアルカラ,其ノ各〻ノ上ノ二直線AB, CDハ交ラナイ,且ツ同一平面R上ニアル。



∴ $AB \parallel CD$

[定理] 4. 一組ノ相交ル直線AOB, CODガ

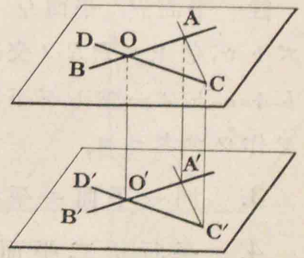
夫々他ノ一組ノ相交ル直線$A'O'B'$, $C'O'D'$ニ平行デアルトキハ,

I 前者ノ定メル平面ハ後者ノ定メル平面ニ平行デアル。

II 前者ノ夾ム角ハ後者ノ夾ム角ニ等シイカ,又ハ互ニ補角ヲナス。

證明

I. AB, CDノ定メル平面ト$A'B', C'D'$ノ定メル平面トガ平行デナイトスレバ,AB, CDハ何レモソノ二平面ノ交線ニ平行トナル(8頁系)。是レ不合理デアル。故ニAB, CDノ定メル平面ト$A'B', C'D'$ノ定メル平面トハ互ニ平行デアル。



II. O,O'カラ$AB, A'B'$上ニ,$CD, C'D'$ノ決定スル平面ノ同ジ側ニ

$$OA=O'A'$$

ナル様A及ビA'ヲトリ,同様ニ$CD, C'D'$上ニC, C'ヲトリ,O,O'; A,A'; C,C'; A,C; A',C'ヲ結べバ,四邊

形 $AOO'A'$, $COO'C'$ ハ共ニ平行四邊形デアル。從ツテ $ACC'A'$ ハ平行四邊形トナル。

$$\therefore\ AC=A'C' \qquad \therefore\ \triangle AOC\equiv\triangle A'O'C'$$

$$\therefore\ \angle AOC=\angle A'O'C'$$

同樣ニシテ　$\angle AOD=\angle A'O'D'$

依ツテ角 AOC ト $A'O'D'$ ノ如キハ互ハ補角ヲナス。

問　題

1. 平面 P 外ノ一點 A ヲ通リコノ平面ニ平行ナ平面ハ一ツアツテ唯一ツデアル。

2. 平行ナ二平面ノ一ツニ交ル平面ハ他ニモ交ル。

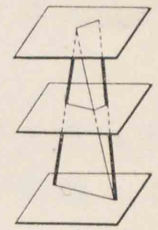
註 平面 $P /\!/$ 平面 Q トシ,平面 R ガ P ト交リ Q ト交ラズトシ, Q 上ニ P, R ノ交線 a ニ平行デナイ直線 b ヲ引キ, b ト a 上ノ一點トデ平面 S ヲ決定シ, S ト P, R トノ交線ヲ作ツテ考ヘヨ。

3. 同一平面ニ平行ナ二平面ハ互ニ平行デアル。

4. 平行ナ二平面ノ一ツト交ル直線ハ他ノ一ツトモ交ル。

5. 相交ル二直線ノ各々ガ一平面ニ平行ナラバ其ノ二直線ノ決定スル平面ハモトノ平面ニ平行

デアル。

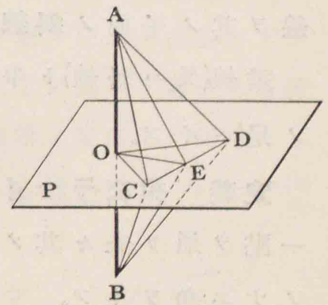


6. 二直線ガ三ツノ平行ナ平面ト交ツテ截リ取ラレル線分ハ比例ヲナス。

第三章　垂直ナ直線及ビ平面

10. 平面ニ垂直ナ直線

定理 1. 相交ル二直線 OC, OD ノ交點 O ヲ通リ,各直線ニ垂直ナ直線 OA ハ,其ノ二直線ノ定メル平面 P 上ニアツテ其ノ交點ヲ通ル任意ノ直線 OE ニ垂直デアル。



證明 OC, OE, OD ト夫々 C, E, D デ交ル任意ノ直線ヲ引キ,又 AO ヲ B マデ延長シ, $OA=OB$ ナラシメ,二點 A, B ヲ C, D, E ト結ベバ, O ハ AB ノ中點デアルカラ, $AC=BC$

$$AD=BD$$

$$\therefore\ \triangle ACD\equiv\triangle BCD$$

$\therefore \quad \angle ACE = \angle BCE$

$\therefore \quad \triangle ACE \equiv \triangle BCE$

$\therefore \quad AE = BE$

$\therefore \quad OA \perp OE$

定義 一直線ガ一平面ト交リ,其ノ交點ヲ通ル其ノ平面上ノ凡テノ直線ニ垂直ナラバ,ソノ直線ト平面トハ**互ニ垂直デアル**トイフ。

前定理1ニヨリ,一直線ガ一平面ニ垂直デアルタメニハ,其ノ交點ヲ通リ其ノ平面ニ引イタ任意ノ二直線ニ垂直デアレバヨイ。

直線ト平面トガ垂直デアルトキハ,其ノ直線ヲ其ノ平面ノ**垂線**トイヒ,平面ニ垂直デナク交ル直線ヲ其ノ平面ノ**斜線**トイフ。

垂線(又ハ斜線)ト平面トノ交點ヲ垂線(又ハ斜線)ノ足トイフ。

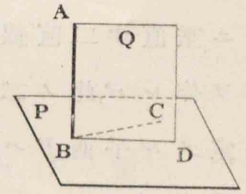
定義 **相交ラナイ二直線ノナス角**トハ任意ノ一點ヲ通リ夫々其ノ直線ニ平行ニ引イタ二直線ノナス角ヲイフ。

此ノ定義ニヨリ前定理カラ次ノ系ヲ得ル。

系 1. 一直線ガ一平面上ノ平行デナイ

任意ノ二直線ニ夫々垂直ナラバ其ノ直線ハ其ノ平面ニ垂直デアル。

系 **2**. 一直線 AB ガ一平面 P ニ垂直デアルトキハ,其ノ足 B ヲ過リ其ノ直線ニ垂直ナ直線 BC ハ其ノ平面上ニアル。



註 BC ガ平面 P 上ニナイトシテ AB, BC ノ決定スル平面 Q ト P トノ交リヲ作ツテ考ヘヨ。

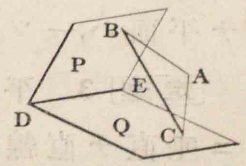
問　　題

1. 二平行直線ノ一ツガ一平面ニ垂直デアレバ他ノ一ツモ亦此ノ平面ニ垂直デアル。

註 二平行線ヲ a, b トシ, a ニ垂直ナ平面ヲ P トスレバ, P ト b トハ交ル。ソノ交リヲ通ル任意ノ直線ヲ P 平面上ニ引キ,コレニ平行ニ a ト P トノ交リヲ通ツテ直線ヲ引キ以テ前章ノ定理4並ニ本章ノ定理1ヲ利用セヨ。

2. 同一平面ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアル。

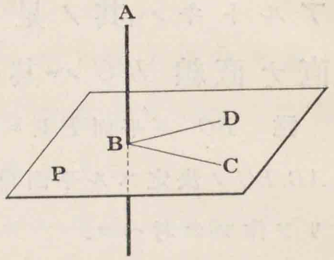
3. 相交ル二平面ノ間ニアル一點カラ此ノ二平面ニ下シタ垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ其ノ



二平面ノ交線ニ垂直デアル。

定理 2. 一直線 AB 上ノ一點 B ヲ通リ，コレニ垂直ナ平面ハ，一ツアツテ唯一ツデアル。

證明 B ヲ通リ AB ニ垂直ナ二直線 BC, BD ヲ作レバ，此ノ二直線ノ定メル平面 P ハ AB ニ垂直デアル。

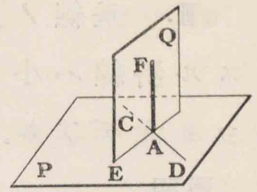


次ニ P ノ他ニ B ヲ通リ AB ニ垂直ナ平面 Q ガアルトスレバ，AB ヲ含ミ P, Q ノ交線ヲ含マナイ一平面 R ヲ作リ，P ト R トノ交線ヲ BE トシ，Q ト R トノ交線ヲ BF トスレバ，BE, BF ハ AB ト共ニ R 上ニアツテ一點 B ヲ過ギ同一直線 AB ニ垂直トナラネバナラナイ。是レ不合理デアル。故ニ此ノ樣ナ平面ハ P 以外ニハナイ。

系 一直線外ノ一點ヲ通リ，コレニ垂直ナ平面ハ，一ツアツテ唯一ツデアル。

定理 3. 平面 P 上ノ一點 A ヲ通リ，コレニ垂直ナ直線ハ，一ツアツテ唯一ツデアル。

證明 平面 P 上ニ A ヲ通ル任意ノ一直線 CD ヲ引キ，A ニ於テ CD ニ垂直ナ平面 Q ヲ作リ，P, Q ノ交リヲ AE トスル。



A ヲ通リ Q 平面上ニ於テ AE ニ垂線 AF ヲ作レバ

$$AF \perp AE, \quad AF \perp AD$$
$$\therefore \quad AF \perp P$$

次ニ A ヲ通リ P ニ垂直ナ直線ガ AF ノ他ニ AF' ガアルトシ，AF, AF' ノ定メル平面ト P トノ交リヲ AK トスレバ，AF, AF' ハ AK ト同一平面上ニアツテ共ニ AK ニ垂直トナル。コレ不合理デアル。故ニ A ヲ通リ P ニ垂直ナ直線ハ AF ノ他ニハナイ。

定理 4. 平面 P 外ノ一點 A カラ其ノ平面ニ垂線 AB 及ビ斜線 AC, AD, AE ヲ引クトキハ

I. 垂線ガ最モ短イ。

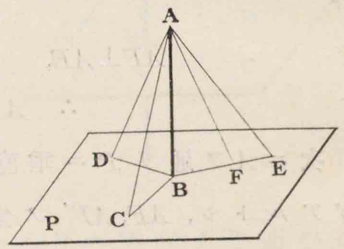
II. 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲ有スル斜線ハ相等シイ。

Ⅲ. 垂線ノ足カラ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ小ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ヨリ大デアル。

證明

Ⅰ. AB ガ垂線デ,任意ノ斜線ヲ AC トスレバ,

$AB \perp P$



∴ $\triangle ABC$ ハ直角三角形トナル。

∴ $AC > AB$

故ニ AB ハ最短デアル。

Ⅱ. AB ガ垂線, AC, AD ガ斜線デ $BC = BD$ トスレバ, $AB \perp P$

∴ $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$

∴ $AC = AD$

Ⅲ. AC, AE ナル斜線ニ於テ, $BE > BC$ トスル。$BE > BC$ デアルカラ BE ノ上ニ $BF = BC$ トナル様ニ一點 F ヲトレバ,

$AC = AF$

又 $\triangle AEF$ ニ於テ明カニ,

$AE > AF$

∴ $AE > AC$

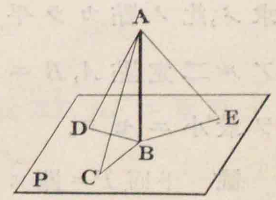
系 本定理ノ逆モ亦眞デアル。即チ,一平面 P 外ノ一點 A カラ此ノ平面ニ垂線 AB, 斜線 AC, AD, AE ヲ引ケバ,

Ⅰ. 最モ短イモノハ垂線デアル。

Ⅱ. 等長ノ斜線ノ足ハ垂線ノ足カラ等距離ニアル。

Ⅲ. 大ナル斜線ノ足ハ小ナル斜線ノ足ヨリ垂線ノ足カラ大ナル距離ニアル。

證明



Ⅰ. 最モ短イモノガ或斜線 AC ダトスレバ,コレヨリモ短イ垂線 AB ガ引ケテ,不合理トナルカラ最短ノモノハ垂線デアル。

Ⅱ. $AC = AD$ トスレバ, $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$

∴ $BC = BD$

Ⅲ. $AE > AC$ トスレバ $AE^2 > AC^2$ (1)

(1)ノ兩邊カラAB^2ヲ減ズレバ,

$$AE^2-AB^2>AC^2-AB^2 \qquad (2)$$

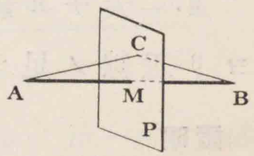
$\triangle ABE$, $\triangle ABC$ハ何レモ直角三角形デアルカラ,

(2)カラ, $BE^2>BC^2$ $\therefore$ $BE>BC$

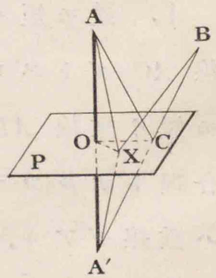
尙 III ハ歸謬法ニヨツテ證明スルコトガ出來ル。學生試ミヨ。

問 題

1. 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。



2. 定平面P上ニ一點Cヲ求メ,此ノ點カラ平面Pノ同側ニアル二定點A, Bニ至ル距離ノ和ヲ最小ニセヨ。

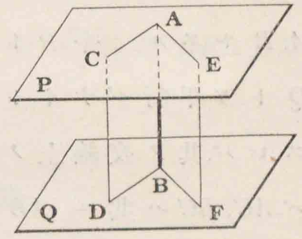


註 平面Pニ關スルAノ對稱點A'ヲ取ツテ考ヘヨ。

3. 與ヘラレタ平面上ニ於テ此ノ平面外ノ與ヘラレター點カラノ距離ガ一定ナ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

11. 二平面ノ共通垂線

定理 5. 平行ナ二平面ノ一ツPニ垂直ナ直線ABハ又他ノ平面Qニモ垂直デアル。



證明 ABヲ含ム一平面トP, Qトノ交線ヲ夫々AC, BDトスレバ, $AC \parallel BD$

然シテ $AB \perp P$

$\therefore$ $\angle BAC=\angle R$

$\therefore$ $\angle ABD=\angle R$

又ABヲ含ム他ノ平面トP, Qトノ交線ヲ夫々AE, BFトスレバ,前ト同様ニ,

$$\angle ABF=\angle R$$

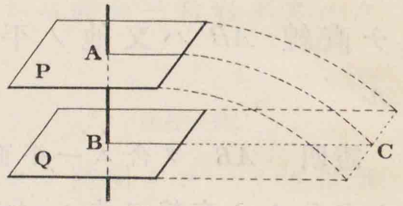
故ニABハQ平面上ノ二直線BD, BFニ垂直デアル。

$\therefore$ $AB \perp Q$

定義 二ツノ平行ナ平面ノ間ニアル共通垂線ノ部分ノ長サヲソノ平行二平面ノ**距離**トイフ。

定理 **6.** 同一直線 AB ニ垂直ナ二平面 P, Q ハ互ニ平行デアル。

證明 AB ト P 及ビ Q トノ交リヲ夫々 A, B トスル。今 P ト Q トガ平行デナイトスレバ,其ノ交線上ノ一點 C ヲトリ,$A,C; B,C$ ヲ結ベバ,AC, BC ハ共ニ AB ニ垂直トナル。コレ不合理デアル。 $\therefore\ P \parallel Q$



12. 三垂線ノ定理

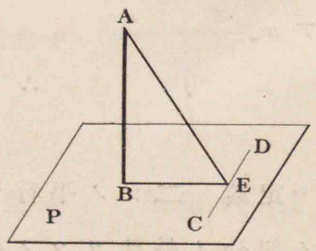
定理 **7.** 一平面 P ノ垂線 AB ノ足 B カラ,此ノ平面上ノ任意ノ直線 CD ヘ垂線 BE ヲ引クトキハ,其ノ足 E ト前ノ垂線上ノ任意ノ一點 A トヲ結ブ直線 AE ハ,直線 CD ニ垂直デアル。

證明 $AB \perp P$

$\therefore\ AB \perp CD$

又 $BE \perp CD$

故ニ CD ハ AB, BE ノ定



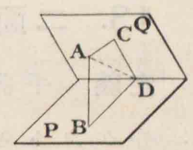
メル平面ニ垂直デアル。故ニ CD ハ此ノ平面上ノ直線 AE ニモ垂直デアル。

系 **1.** 本問ニ於テ $AB \perp P, AE \perp CD$ ナラバ $BE \perp CD$ デアル。

系 **2.** 又 $AE \perp CD, BE \perp CD$ デ且ツ $AB \perp BE$ ナラバ $AB \perp P$ デアル。

問題

1. 一點カラ相交ル二平面ノ各々ニ垂線ヲ下シ,ソノ足カラ更ニ夫々其ノ二平面ノ交線ニ垂線ヲ引ケバ後ノ兩垂線ハ二平面ノ交線上ノ一點デ交ル。



2. 平面外ノ一點カラ其ノ平面ニ垂線ヲ引ケ。

註 前系2ヲ利用セヨ。

定義 **平面外ノ一點ト此ノ平面トノ距離**トハ此ノ點カラ此ノ平面ヘノ垂線ノ長サヲイフ。

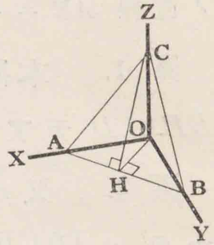
3. 所設ノ平面ニ交ル一斜線ガアル。其ノ足ヲ過ギ其ノ斜線ニ垂直ナ直線ヲ其ノ平面上ニ引ケ。

4. 定直線外ノ一定點カラ其ノ定直線ヲ含ム

任意ノ平面ニ下シタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 一點 O デ互ニ直交シテキル三ツノ半直線 OX, OY, OZ ガアル。OX, OY, OZ 上ニ夫々 A,B,C ヲトリ, $OA=a, OB=b, OC=c$ トスレバ,

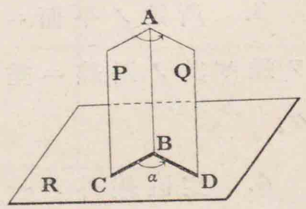
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$



第四章 二面角及ビ多面角

13. 二面角

定義 平面ヲ一ツノ直線ニ依ッテ二ツノ部分ニ分ケタトキ,其ノ一方ヲ**半平面**トイフ。二ツノ半平面ガ其ノ境ヲナス直線ヲ共有スルトキ,コレガ圍ミ取ル空間ノ部分ヲ**二面角**トイヒ,共有スル直線ヲ其ノ**稜**,半平面ノ双方ヲ其ノ**面**トイフ。二面角ニ對シテ在來ノ角ヲ**平面角**トイフ。



右圖ニ於テ直線 AB ヲ共有スル二ツノ半平面 P, Q ハ二面角ヲナシテ居ル。AB ガ其ノ稜デ, P, Q ガ其

ノ面デアル。今稜 AB ニ垂直ナ任意ノ平面 R ヲ作リ,二ツノ半平面 P, Q トノ交リヲ夫々 BC, BD トスレバ, $\angle CBD$ ハ平面角デアル。今此ノ角ヲ α ト名ヲツケル。サテ半平面 P ヲ AB ヲ軸トシテ矢ノ向キニ Q ニ重ナル迄廻轉サセルト, BC ハ B ノ周リニ $\angle\alpha$ 廻轉シテ BD ニ重ナル。故ニ二面角ノ大イサハ平面角 α ノ大イサニヨッテ測ルコトガデキル。此ノ平面角ヲ**二面ノ平面角**トイフ。

二面角ヲ表スニハ,**二面角 $P-AB-Q$** 又ハ**二面角 AB** ナル記號ヲ用ヒル。

定理 1. 二面角ノ平面角ハ其ノ頂點ノ位置如何ニ關セズ一定デアル。

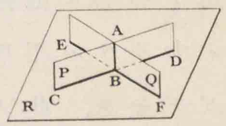
證明 第三章ノ定理 6 及ビ第二章 9 節ノ定理 4 ヲ參照シテ學生自ラコレヲ試ミヨ。

又以上ノ事實ニ依ッテ次ノ定理ガ眞デアルコトハ容易ニ知ラレル。重置法ニ依ッテ學生自ラコレヲ試ミヨ。

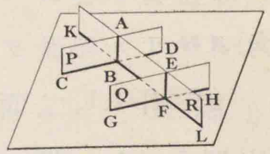
定理 2. 二ツノ二面角ガ相等シイトキハ其ノ平面角モ亦相等シク,逆ニ平面角ガ相等シイ二ツノ二面角ハ相等シイ。

注意 二面角ノ平面角ガ鋭角カ,直角カ,鈍角カニ從ッテ其ノ二面角ヲ**鋭二面角**,**直二面角**,**鈍二面角**等ト呼ブ。マタ平面幾何學ニ於ケル接角,對頂角,錯角,同位角等ノ意義ニ準ジテ**接二面角**,**對稜二面角**,**錯二面角**,**同位二面角**等ノ名稱ヲ附シテ居ル。

問　題



1. 對稜二面角ハ相等シイ。



2. 平行二平面ヲ第三ノ平面デ截レバ,

Ⅰ. 錯二面角ハ相等シイ。

Ⅱ. 同位二面角ハ相等シイ。

Ⅲ. 同側內二面角ハ補角ヲナス.

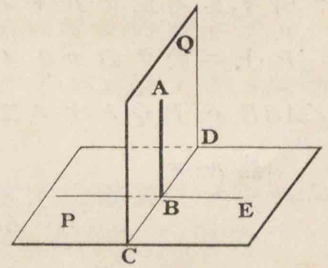
3. 二面角ノ二等分面(二面角ノ稜ヲ含ミ此ノ二面角ヲ相等シイ二ツノ接二面角ニ分ケル平面)ハ一ツアッテ唯一ツデアル。

14. 直二面角

定義 二平面ノナス二面角ガ直二面角デアルトキハ,其ノ二平面ハ**直交スル**又ハ**互ニ垂直デア**

ルトイフ。

定理 3. 一平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ前ノ平面ニ垂直デアル。



證明 AB ヲ平面 P ノ垂線,Q ヲ AB ヲ含ム任意ノ平面トスレバ,

P, Q ハ垂線ノ足 B ヲ共有スル、故 B ヲ通ル直線 CD ヲ共有スル。

$$AB\perp P \quad \therefore \quad AB\perp CD$$

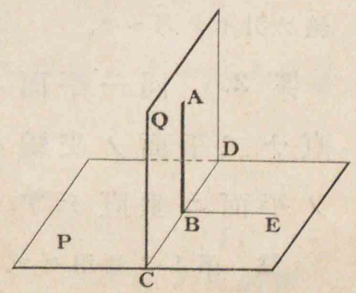
又 P 上ニ B カラ CD ニ垂線 BE ヲ引ケバ,

$$\angle ABE=\angle \mathrm{R}$$

故ニ $\angle ABE$ ハ此ノ二面角ノ平面角デアル。

$$\therefore \quad Q\perp P$$

定理 4. 二平面ガ互ニ垂直デアレバ,其ノ交線ニ垂直ニ其ノ一方ノ平面上ニ引イタ直線ハ他ノ平面ニ垂直デアル。



證明 右圖ニ於テ P, Q

ヲ互ニ垂直ナ二平面トスル。

Q上ニ於テ二平面ノ交線CDニ垂直ナ直線ABヲ引キ,其ノ足ヲBトスル。

P上ニ於テBカラCDニ垂線BEヲ引ケバ,$\angle ABE$ハP, Qノナス二面角ノ平面角デアル。

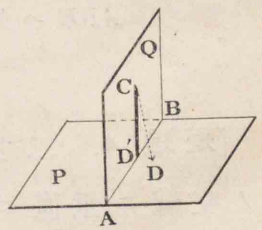
然ルニ $P \perp Q$

$\therefore\ AB \perp BE$

且ツ $AB \perp CD$

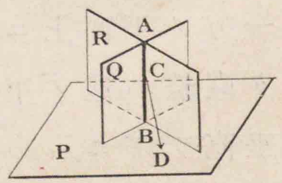
$\therefore\ AB \perp P$

系 1. 二平面ガ互ニ垂直ナラバ其ノ一方ノ平面上ノ一點カラ他ノ平面ニ引イタ垂線ハ前ノ平面ノ上ニアル。



註 圖ノ様ニCカラABニ垂線ヲ引イテ考ヘヨ。

系 2. 同一平面ニ垂直ナ二平面ノ交線ハ其ノ平面ニ垂直デアル。



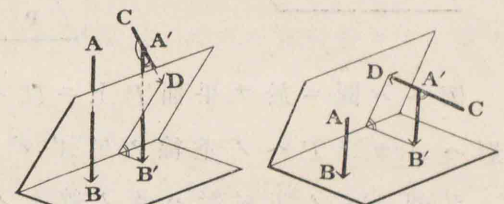
註 系1ヲ利用セヨ。

問 題

1. 一點ニ會スル三直線ガ互ニ垂直デアレバ,コレ等二ツ宛ヲ含ム三平面ハ互ニ垂直デアル。

2. 三平面ガ互ニ垂直デアレバ其ノ交リモ亦互ニ垂直デアル。

3. 二面角ノ各面ニ垂直ナ二直線ノナス角ハ,其ノ二面角ノ平面角ニ等シイカ,又ハ互ニ補角ヲナス。



4. 與ヘラレタ一直線ヲ含ミ,與ヘラレタ平面ニ垂直ナ平面ヲ作レ。

5. 相交ル二直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

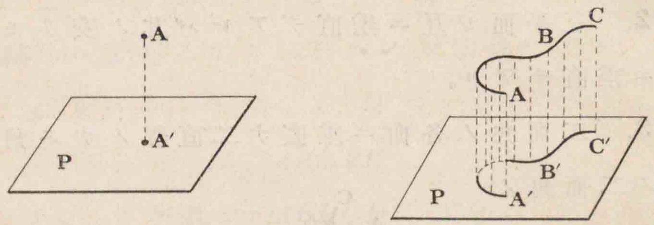
6. 相交ル二平面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

15. 正射影

定義 一平面上ニ投ズル一ツノ**點ノ正射影**ト

ハ其ノ點カラ其ノ平面ニ下シタ垂線ノ足ヲイフ。

又一平面上ニ投ズル一ツノ**線ノ正射影**トハ其ノ線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ヲイフ。

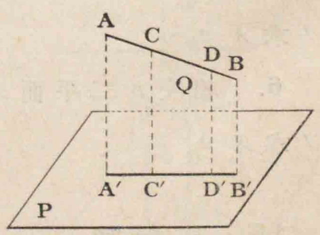


例ヘバ圖ニ於テ平面 P 上ニ投ズル點 A ノ正射影ハ A カラ P ヘノ垂線ノ足 A' デアル。

又線 ABC ノ正射影ハ此ノ線上ノ點ノ正射影ノ軌跡 $A'B'C'$ デアル。

[定理] 5. 平面ニ垂直デナイ直線ノ其ノ平面ニ投ズル正射影ハ一ツノ直線デアル。

證明 直線 AB ヲ含ミ平面 P ニ垂直ナ平面ヲ Q トシ, P, Q ノ交線ヲ $A'B'$ トスル。AB 上ノ任意ノ點 C カラ P ニ引イタ垂線 CC' ハ Q 上ニアル。故ニ其ノ足 C' ハ直線 $A'B'$ 上



ニアル。依ツテ AB 上ノスベテノ點ノ正射影ハ $A'B'$ ノ上ニアル。

又 $A'B'$ 上ノ任意ノ一點 D' カラ P ニ引イタ垂線モ, Q ノ上ニアツテ AB ニ交ル。依ツテ $A'B'$ 上ノスベテノ點ハ AB 上ノ點ノ正射影デアル。

故ニ AB ノ P 上ニ投ズル正射影ハ直線 $A'B'$ デアル。

研究 或圖形ノ一平面上ニ投ズル正射影ガ次ノ様ナ場合ヲ研究セヨ。

(1) 點以外ノ圖形デ正射影ガ點トナル場合。

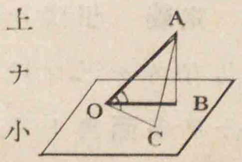
(2) 直線以外ノ圖形デ正射影ガ直線トナル場合。

問題

1. 一線分 l ガ一平面ト $\angle\theta$ ヲナストキ,其ノ線分ガ其ノ平面上ニ投ズル正射影ハ $l\cos\theta$ デアル。

定義 直線ト平面トノナス角トハ,其ノ直線ト其ノ直線ガ其ノ平面上ニ投ズル正射影トノナス鋭角ヲイフ。

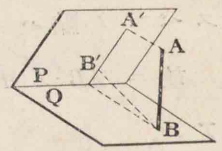
2. 一平面ノ一斜線ガ此ノ面上ニアツテ其ノ足ヲ通ル諸直線トナス角ノ中,正射影トナス鋭角ガ最小デアル。



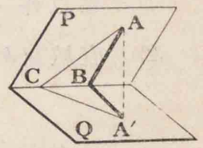
3. 相等シク且ツ平行ナ二線分ハ任意ノ平面上ニ相等シク且ツ平行ナ射影ヲ投ズル。

4. 直角三角形ノ直角ノ一邊ヲ含ム平面上ニ於ケル此ノ三角形ノ正射影ハ直角三角形デアル。

5. 一直線ニ垂直ナ平面ト他ノ平面トノ交線ハ其ノ直線ガ後ノ平面ニ投ズル正射影ニ垂直デアル。



6. 平面 P 上ノ任意ノ直線ガ此ノ平面ト交ル他ノ平面 Q トナス鋭角ノ中,此ノ二平面ノ交線ニ垂直ナ直線トナスモノガ最大デアル。



註 斜線 AC ヲ引キ,P, Q ノ交線ニ垂線 AB, A ノ Q 平面ヘノ正射影ヲ A' トスレバ, $A'C > A'B$ トナルカラ, $A'C$ ノ上ニ $A'B$ ニ等シク $A'B'$ ヲトツテ考ヘヨ。

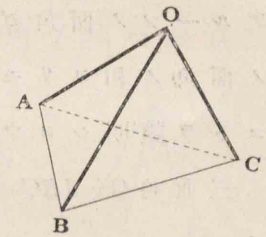
16. 多面角

定義 相隣ル二ツ宛ガ一邊ヲ(從ツテ頂點ヲモ)共有スル三ツ以上ノ角(劣角)ガ圍ミ取ル空間ノ部分ヲ**多面角**トイフ。

其ノ點ヲ多面角ノ**頂點**,此ノ角ヲ其ノ**面角**,面角

ノ平面ヲ**面**,角ノ邊ヲ**稜**トイフ。 相隣ル二面ノナス二面角ヲ**二面角**又ハ**稜角**トイフ。

多面角ハ其ノ面ノ數ニ依ツテ**三面角**,**四面角**,**五面角**等ト呼ブ。



右ニ示シタ三面角ノ圖ニ於テ,O ハ頂點, OA, OB, OC ハ稜, $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ ハ面角デアル。

多面角ヲ書キ表ハスニハ例ヘバ $O—ABC$ ノ樣ニ書ク。

注意 三ツヨリ少イ平面デハ多面角ヲ作ルコトガ出來ナイ。

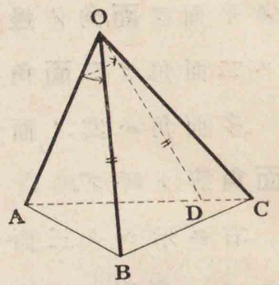
多面角ノ總テノ稜ヲ截ル平面ト其ノ各面トノ交線ハ一ツノ多角形ヲ作ル。 コレヲ多面角ノ**截面**トイフ。

截面ガ凸多角形トナル多面角ヲ**凸多面角**トイフ。

定理 6. 三面角ノ一ツノ面角ハ他ノ二ツノ面角ノ和ヨリモ小デアル。

證明 三面角ニ於テ,一ツノ面角ガ他ノ面角ノ

各〻ニ等シイトキ,又ハ各〻ヨリモ小デアルトキハ勿論本定理ハ眞デアルカラ,今最大デアル一ツノ面角ガ他ノ二ツノ面角ノ和ヨリモ小デアルコトヲ證明シヨウ。



三面角 O—ABC ニ於テ最大デアル面角ヲ AOC トスル。

二稜 OA, OC ト夫々 A, C ニ於テ交ル任意ノ直線ヲ AC トシ, $\angle AOC$ ノ内ニ OA ト $\angle AOB$ ニ等シイ角ヲナス直線 OD ヲ引キ, AC トノ交點ヲ D トスル。

OB 上ニ OD ニ等シク B ヲトリ, A, B 及ビ B, C ヲ結ベバ, $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$

$\therefore \quad AB = AD$

然ルニ $\triangle ABC$ ニ於テ

$AC < AB + BC$

$\therefore \quad CD < BC$

依ツテ $\triangle ODC$, $\triangle OBC$ カラ

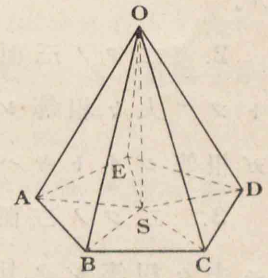
$\angle DOC < \angle BOC$

兩邊ニ夫々等シイ $\angle AOD$, $\angle AOB$ ヲ加ヘレバ,

$\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$

系 三面角ノ二ツノ面角ノ差ハ他ノ一ツノ面角ヨリモ小デアル。

定理 7. 凸多面角ノ面角ノ和ハ四直角ヨリモ小デアル。



證明 O—$ABCDE$ ヲ O ヲ頂點トスル凸多面角トスル。

任意ノ截面 $ABCDE$ 内ノ任意ノ一點 S ヲ截面ノ各頂點ニ結ンデ生ズル三角形ト, O ヲ共通ノ頂點トシ截面ノ邊ヲ底トスル三角形トハ同數デアル。

此ノ二組ノ三角形ノ内角ノ總和ハ相等シイ。

然ルニ $\angle ABC < \angle OBA + \angle OBC$

$\angle BCD < \angle OCB + \angle OCD$

$\angle CDE < \angle ODC + \angle ODE$

……………………

邊々相加ヘレバ, S ヲ共通ノ頂點トスル三角形ノ底角ノ總和ハ O ヲ共通ノ頂點トスル三角形ノ底角ノ總和ヨリモ小デアルコトヲ知ル。

依ツテ面角 AOB, BOC, COD 等ノ和ハ, S 點ノ周

リニアル角ノ和卽チ $4\angle R$ ヨリモ小デアル。

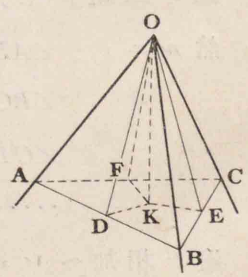
問　　題

1. 折面四邊形ノ角ノ和ハ四直角ヨリ小デアル。

2. 二ツノ三面角ニ於テ,二ツノ面角ガ同順ニトツテ夫々相等シク,且ツ夫等ノ面ノ夾ム二面角ガ相等シイトキハ,兩三面角ハ合同[*]デアル。

3. 二ツノ三面角ニ於テ,二ツノ二面角ガ同順ニ夫々相等シク,且ツ此ノ二ツノ二面角ノ稜ノナス角ガ相等シイトキハ,兩三面角ハ合同デアル。

4. 三面角ノ面角ノ二等分線ヲ含ンデ,此ノ面ニ垂直ナ三ツノ平面ハ同一直線デ交ル。



證明　三面角ヲ $O—ABC$ トスル。今 OA, OB, OC 上ニ夫々 A, B, C ヲトリ, $OA=OB=OC$ トスレバ, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ ハ二等邊三角形トナルカラ,各頂角ノ二等分線ハ底ノ垂直二等分線トナル。

[*] 全ク重ネ合セルコトガデキル二ツノ圖形ハ合同デアルトイフ。

之等ノ二等分線ト底 AB, BC, CA トノ交點ヲ夫々 D, E, F トスレバ, OD, OE, OF ヲ含ミ,共ノ面ニ垂直ナ平面ハ $\triangle ABC$ ノ邊ニ垂直トナル。

故ニコレ等ノ平面ト $\triangle ABC$ ノ平面トノ交線ハ $\triangle ABC$ ノ邊ニ垂直デ,從ツテ此ノ交線ハ $\triangle ABC$ ノ外心 K デ交ル。

故ニ三ツノ平面ハ此ノ K ト頂點 O トヲ通ル直線 OK デ交ル。

5. 三面角ノ面角ノ二等分線ト此ノ面ニ對スル稜トヲ含ム三ツノ平面ハ同一直線デ交ル。

6. 三面角ノ三ツノ稜ト等角ヲナス直線ヲ引ケ。

7. 三面角ノ各稜角ヲ二等分スル三ツノ平面ハ同一ノ直線ヲ共有スル。(P. 31, 問題 6 參照)

第二編

多面體

第一章 角壔

17. 多面體

定義 四ツ以上ノ平面デ圍マレタ立體ヲ**多面體**トイフ。

多面體ノ限界ハ若干ノ多角形デアル。ソレ等ヲ多面體ノ**面**,面ノ交線ヲ**稜**,稜ノ交リヲ**頂點**トイフ。

同一面上ニナイ二頂點ヲ結ブ直線ヲ多面體ノ**對角線**トイフ。

多面體ハ面ノ數ニ從ツテ**四面體**,**五面體**等ト呼ブ。

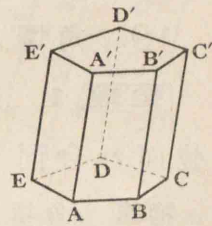
定義 多面體ヲ一ツノ平面デ截ルトキ其ノ截口ノ多角形ヲ多面體ノ**截面**トイフ。

截面ガ凸多角形デアル多面體ヲ**凸多面體**トイフ。本書ハ凸多面體ダケヲ論ズル。

18. 角壔

定義 **角壔**トハ二面ガ平行デ且ツ合同ナ多角

形ヲナシ,他ノ面ハ頂點ガ皆此ノ二平行平面內ニアル平行四邊形ヲナス多面體ヲイフ。



ソシテ此ノ平行ナ多角形ヲ角壔ノ**底面**,他ノ面ヲ**側面**,側面ノ交線ヲ**側稜**,又兩底面間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

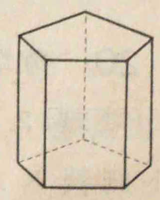
側面ノ面積ノ總和ヲ角壔ノ**側面積**トイヒ,側面積ト兩底ノ面積トノ和ヲ**全面積**トイフ。

角壔ハ其ノ底面ノ邊數ニ從ヒ,コレヲ**三角壔**,**四角壔**,**五角壔**等ト呼ブ。

上圖ハ五角壔デコレヲ $ABCDE—A'B'C'D'E'$, 或ハ $ABCDE—A'$ ト記ス。

問 角壔ノ側稜ニ平行ナ截面ハ平行四邊形デアル。

定義 側稜ガ底面ニ垂直ナ角壔ヲ**直角壔**トイヒ,然ラザル角壔ヲ**斜角壔**トイフ。



底面ガ正多角形デアル直角壔ヲ**正角壔**トイフ。

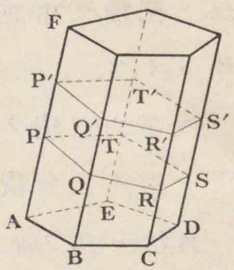
定義 角壔ノスベテノ側稜ニ垂

直ニ交ル截面ヲ**直截面**トイフ。

19. 角壔ノ平行截面

定理 **1.** 角壔ノ總テノ側稜ニ交ル平行截面ハ合同ナ多角形デアル。

特述 角壔 $ABCDE\text{—}F$ ノ平行截面ヲ夫々 $PQRST$, $P'Q'R'S'T'$ トスレバ, $PQRST \equiv P'Q'R'S'T'$



證明 多角形 $PQRST$ ノ各邊ハ $P'Q'R'S'T'$ ノ各邊ニ平行デアル。シカモ角壔ノ各稜ハ互ニ平行デアルカラ,此ノ二ツノ多角形ノ各邊ハ相等シク,且ツ各角ハ互ニ相等シイ。

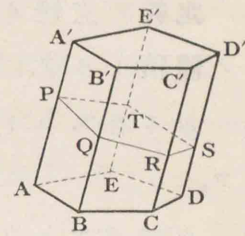
$$\therefore\ PQRST \equiv P'Q'R'S'T'$$

系 直角壔ノ直截面ハ底面ト合同デアル。

20. 角壔ノ面積

定理 **2.** 斜角壔ノ側面積ハ直截面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ。

特述 斜角壔 $ABCDE\text{—}A'$ ノ直截面ヲ $PQRST$, 側稜ノ一ツヲ AA' トスレバ,



$$側面積=(PQ+QR+RS+ST+TP)\cdot AA'$$

證明 角壔ノ側稜ハ皆相等シク,直截面デアル多角形ノ邊ハ側稜ニ垂直デアルカラ,

$$\begin{aligned}側面積&=\text{▱}A'B+\text{▱}B'C+\text{▱}C'D+\text{▱}D'E+\text{▱}E'A\\&=AA'\cdot PQ+AA'\cdot QR+AA'\cdot RS+AA'\cdot ST+AA'\cdot TP\\&=AA'\cdot(PQ+QR+RS+ST+TP)\end{aligned}$$

$$\therefore\ 側面積=(PQ+QR+RS+ST+TP)\cdot AA'$$

系 直角壔ノ側面積ハ底面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ。

問 1. 直角壔ノ側稜ノ長サヲ h,側面積ヲ S,底面ノ周ノ長サヲ p トスレバ,

$$S=ph$$

問 2. 正六角壔ノ高サヲ h トシ,底ノ中心カラ底ノ一邊ニ至ル距離ヲ a トスレバ,其ノ全面積ハ何程カ。

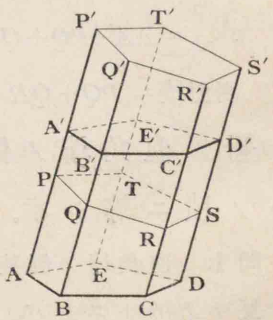
21. 側稜ヲ等シクスル斜角壔ト直角壔トノ相等

定義　立體ノ面デ圍マレタ空間ノ部分ヲ立體ノ體積トイフ。

重ネ合スコトノ出來ル立體ハ**合同デアル**トイフ。

合同デアル立體ノ體積ハ相等シイ。體積ガ相等シクトモ合同トハ限ラナイ。

定理 3.　斜角壔ノ體積ハ其ノ直截面ヲ底面トシ,其ノ側稜ニ等シイ側稜ヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シイ。



特述　斜角壔ヲ $ABCDE-A'$ トシ,直角壔 $PQRST-P'$ ニ於テ底 $PQRST$ ハ斜角壔ノ直截面デ $PP'=AA'$ トスルレバ,

斜角壔 $ABCDE-A'$

$=$ 直角壔 $PQRST-P'$

證明　多面體 $PQRST-A$ ト多面體 $P'Q'R'S'T'-A'$ トニ於テ,面 $PQRST\equiv$ 面 $P'Q'R'S'T'$　(定理 1)

$AP=A'P',\quad BQ=B'Q',\cdots\cdots\cdots\cdots$

且ツ $AP, BQ\cdots\cdots\cdots$ 等ハ面 $PQRST$ ニ垂直,

$A'P', B'Q'\cdots\cdots$ 等ハ面 $P'Q'R'S'T'$ ニ垂直,

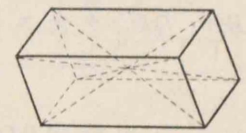
故ニ多面體 $PQRST-A\equiv$ 多面體 $P'Q'R'S'T'-A'$

故ニ此ノ兩者ニ多面體 $PQRST-A'$ ヲ加ヘレバ,

斜角壔 $ABCDE-A'=$ 直角壔 $PQRST-P'$

22. 平行六面體

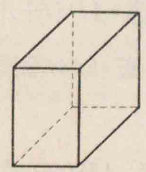
定義　底面ガ平行四邊形デアル角壔ヲ平行六面體トイフ。

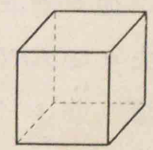


問 1.　平行六面體ノ對面(相隣ラナイ面)ハ平行デ且ツ合同ナ平行四邊形デアル。

問 2.　平行六面體ノ四ツノ對角線ハ一點ニ交ル。(此ノ交點ヲ**平行六面體ノ中心**トイフ。)

定義　各面ガ矩形デアル平行六面體ヲ**直六面體**又ハ**直方體**トイヒ,各面ガ正方形デアル直六面體ヲ**立方體**トイフ。





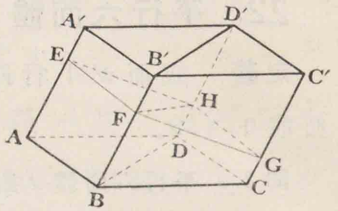
問 1.　直六面體ノ四ツノ對角線ハ相等シイ。

問 2.　直六面體ノ一頂點ニ集マル三稜ヲ表ハス數ヲ a, b, c;對角線ヲ表ハス數ヲ l トスレバ,

$$l^2=a^2+b^2+c^2$$

デアルコトヲ示セ。

定理 4. 平行六面體ヲ平行ナ二稜ヲ含ム平面デ截ルトキ生ズル二ツノ三角壔ハ等積デアル。



特述　平行六面體 $ABCD-A'$ ヲ平行ナ二稜 BB', DD' ヲ含ム平面デ截レバ,

三角壔 $ABD-A'$＝三角壔 $BCD-B'$

證明　直截面 $EFGH$ ヲ作ルトキハ, $EFGH$ ハ平行四邊形デアル。

$$\therefore\quad \triangle EFH \equiv \triangle FGH$$

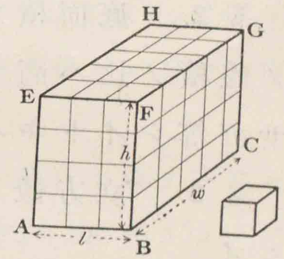
從ツテ,三角壔 $ABD-A'$ 及ビ三角壔 $BCD-B'$ ハ夫々 $\triangle EFH$ ヲ底トシ,側稜 AA' ヲ側稜トスル直角壔ニ等シイ。

∴　三角壔 $ABD-A'$＝三角壔 $BCD-B'$

23. 直六面體ノ體積

體積ヲ測ルニハ各稜ガ單位ノ長サニ等シイ立方體ヲ體積ノ單位トシテ用ヒル。立方米ノ如キハ其ノ一例デアル。

定理 5. 直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ一頂點ニ集ル三稜ノ長サヲ表ハス數ノ連乘積ニ等シイ。



特述　直六面體ヲ $ABCD-E$ トシ, AB, BC 及ビ BF ヲ同一單位デ測ツテ得ル數ヲ夫々 l, w, h トシ,且ツ上ノ單位ニ依ル直六面體ノ體積ヲ V トスレバ,

$$V=lwh$$

證明　l, w, h ヲ整數トスル。

AB, BC, BF ヲ夫々 l, w, h 等分シ各等分點ヲ通リ夫々ノ側稜ニ垂直ナ平面ヲ作レバ,直六面體ハ $l\times w\times h$ 個ノ立方體ニ分ケラレ,而モコレ等ノ立方體ハ體積ノ單位ニ等シイカラ,

$$V=lwh$$

l, w, h ガ分數及ビ無理數ノ場合ノ證明ハコレヲ省ク。

注意　用語ヲ簡單ニスルタメニ,長サヲ表ハス數 l, 體

積ヲ表ハス數V等トイフベキヲ略シテ單ニ長サl,體積V等ト呼ブコトガアル。

系 1. 直六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

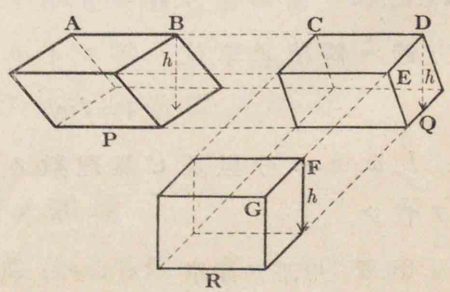
系 2. 底面積ガ等シイ二ツノ直六面體ノ體積ノ比ハ高サノ比ニ等シイ。逆ニ高サガ等シイトキハ底面積ノ比ニ等シイ。

系 3. 立方體ノ體積ハ一稜ノ立方ニ等シイ。

問 直六面體ガアル。對角線ノ長サガ14cmデ,稜ノ長サノ比ハ2:3:6デアルトキ,コノ直六面體ノ體積ヲ求メヨ。

24. 平行六面體ノ體積

定理 6. 平行六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。



特述 Pヲ平行六面體トシ,而モ何レノ二面モ互ニ垂直デナイモノトスル。

其ノ體積ヲV,底面積ヲb,高サヲhトスレバ,

$$V=bh$$

證明 今Pノ稜AB及ビ之ニ平行ナ各稜ヲ延長シ,ABノ延長上ニABニ等シクCDヲ取リ,C,Dヲ過リCDニ垂直ナ平面デ各稜ヲ截レバ,Qナル直角壔ヲ得ル。

次ニQニ於テDE及ビ之ニ平行ナ稜ヲ延長シDEノ延長上ニF,Gヲ取リ$FG=DE$ナラシメ,F,Gヲ過リ,FGニ垂直ナ平面デ各稜ヲ截ルトキハ直六面體Rヲ得ル。

然ルトキハ, $P=Q$及ビ$Q=R$ (定理 3)

$$\therefore\ P=R$$

P,Q,Rノ高サハ何レモhデアル。

Qノ底ヲb',Rノ底ヲb''トスレバ,

$$b=b' \qquad b'=b''$$

$$\therefore\ b=b''$$

Rノ體積$=b''h$

$$\therefore\ V=bh$$

系 1. 三角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ

積ニ等シイ。

系 2. 角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シイ。

問 底面積 S, 側稜 l ト底面トノナス角ガ α デアル角壔ノ體積ヲ求メヨ。

問題

1. 三角壔ノ二ツノ側面ノ面積ノ和ハ他ノ一ツノ側面ノ面積ヨリモ大デアル。

2. 立方體ノ一稜ノ中點ト中心トヲ結ブ直線ハ,此ノ稜ノ上ニナイ頂點ヲ通ル對角線ニ垂直デアル。

3. 平行六面體ノ二雙ノ相對スル面ニ交リ,他ノ一雙ノ面ニ交ラナイ平面デ之ヲ截レバ,其ノ截口ハ平行四邊形デアル。

4. 斜角壔ノ直截面ハ底面ヨリモ小デアル。

註 斜角壔ノ直截面ヲ P, 底面積ヲ A, 側稜ヲ l, 傾キ(側稜ト高サトノナス角)ヲ α トスレバ,

斜角壔 $=Pl$ 或ハ斜角壔 $=Al\cos\alpha$

$\therefore\ Pl=Al\cos\alpha$ $\qquad\therefore\ P=A\cos\alpha$

然ルニ $\cos\alpha<1$ $\qquad\therefore\ P<A$

注意 α ハ亦底面ト直截面トノナス角デアルカラ,

$P=A\cos\alpha$ カラ次ノ定理ガ得ラレル。

定理 一ツノ平面形ノ他ノ平面ニ投ズル正射影ノ面積ハ初メノ平面形ニ二平面ノナス角ノ餘弦ヲ乘ジタモノニ等シイ。

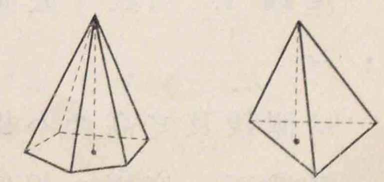
第二章 角錐

25. 角錐

定義 **角錐**トハ一ツノ多角形ト其ノ邊ヲ夫々底邊トシ,其ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トノ圍ム多面體デアル。

此ノ多角形ヲ角錐ノ**底面**,三角形ヲ**側面**,共通ノ頂點ヲ角錐ノ**頂點**,頂點カラ底面ニ下シタ垂線ノ長サヲ角錐ノ**高サ**,頂點ニ集マル稜ヲ**側稜**トイフ。

角錐ハ底面ノ邊數ニ從ッテ**三角錐**,**四角錐**,**五角錐**等ト呼ブ。四面體ハ三角錐デアル。

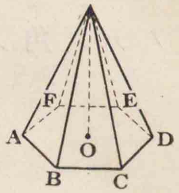


角錐ノ底面ガ正多角形デ頂點カラ底面ニ下

シタ垂線ノ足ガ底面ノ中心ヲ通ルトキ,之ヲ**正角錐**ト云フ。

正角錐ノ頂點カラ底面ノ一邊ニ下シタ垂線ノ長サヲ**斜高**トイフ。

右圖ハ正六角錐デアル。



角錐ハ一般ニ $V—ABCDEF$ ノ形式デ書キ表ハス。

問 1. 正角錐ノ側面ハ皆合同ナ二等邊三角形デアル。

問 2. 正角錐ノ側面積 A ハ底面ノ周 p ト斜高 l トノ乘積ノ半ニ等シイ。卽チ

$$A=\frac{1}{2}pl$$

問 3. 正四角錐ノ高サガ $4\,cm$,底面ノ一邊ガ $6\,cm$ デアルトキ,此ノ全面積ヲ求メヨ。

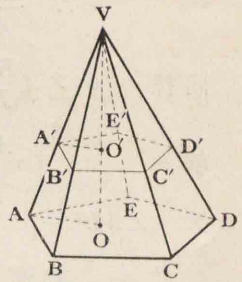
26. 角錐ノ底面ニ平行ナ截面

定理 1. 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デ截レバ,

(a) 側稜及ビ高サハ相似ニ分タレル。

(b) 截面ハ底面ニ相似デアル。

特述 角錐 $V—ABCDE$ ノ底ニ平行ナ截面ヲ $A'B'C'D'E'$ トシ,頂點カラ底ニ下シタ垂線ノ足ヲ O,截面トノ交リヲ O' トスレバ,



(a) $\dfrac{VO'}{VO}=\dfrac{VA'}{VA}=\dfrac{VB'}{VB}=\cdots\cdot$

(b) 截面 $A'B'C'D'E' \backsim$ 底面 $ABCDE$

證明

(a) $A'O' \parallel AO$

$$\therefore \quad \frac{VO'}{VO}=\frac{VA'}{VA} \qquad (1)$$

又 $A'B' \parallel AB,\quad B'C' \parallel BC,\ \cdots\cdot$

$$\therefore \quad \frac{VA'}{VA}=\frac{VB'}{VB}=\frac{VC'}{VC}=\cdots\cdots \qquad (2)$$

(1) ト (2) トカラ,

$$\frac{VO'}{VO}=\frac{VA'}{VA}=\frac{VB'}{VB}=\cdots\cdots$$

(b) 截面ト底面トハ平行デコレニ側面ガ交ツテキルカラ,

$$A'B' \parallel AB,\ B'C' \parallel BC,\ C'D' \parallel CD\cdots\cdot$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{VB'}{VB}=\frac{B'C'}{BC}$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$$

同樣ニシテ $\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}$............

故ニ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}=$......

又 $\angle ABC=\angle A'B'C'$, $\angle BCD=\angle B'C'D'$....

故ニ 截面 $A'B'C'D'E' \backsim$ 底面 $ABCDE$

系 1. 角錐ノ底面ト之ニ平行ナ截面トノ比ハ頂點カラ各面ニ至ル距離ノ二乘比ニ等シイ。

系 2. 等高ナ二ツノ角錐ヲ底面ニ平行デ頂點カラ等距離ニアル平面デ截レバ,二ツノ截面ノ比ハ底面ノ比ニ等シイ。

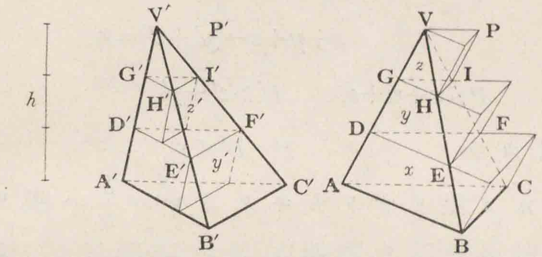
底面ガ相等シイトキハ上ノ兩截面ハ相等シイ。

問 四面體 $O-ABC$ ノ底 ABC ニ平行ナ平面デノ截ロヲ $A'B'C'$ トシ, 今 $OA=12\,cm$, $OA'=6\,cm$, 底面 $ABC=40\,cm^2$ ナラバ截ロ $A'B'C'$ ノ面積如何。

27. 等底等高ノ三角錐

定理 2. 等底等高ノ二ツノ三角錐ハ等

積デアル。



特述 二ツノ三角錐 $V-ABC$, $V'-A'B'C'$ ニ於テ, 底 ABC=底$A'B'C'$, 高サガ何レモ h ナラバ,

三角錐 $V-ABC$=三角錐 $V'-A'B'C'$

證明 三角錐 $V-ABC$ ヲ P, $V'-A'B'C'$ ヲ P' トシ $P>P'$ トスル。

今兩三角錐ノ底ヲ同一平面上ニ置キ,高サ h ヲ n 等分シ,各分點ヲ通リ底面ニ平行ナ平面デ角錐ヲ截レバ,對應スル截面ハ二ツヅツ互ニ等積デアル。圖ニ於テハ簡單ノタメニ三等分ノ場合ヲ揭ゲタ。

サテ,

P デハ截面 ABC, DEF, GHI ヲ下底トシテ三角壔 x, y, z ヲ作リ,

P' デハ,截面 $D'E'F'$, $G'H'I'$ ヲ上底トシテ三角壔 y' z' ヲ作レバ, $y=y'$, $z=z'$ ヲ得ル。

故ニ $$x+y+z-(y'+z')=x \quad (1)$$

又 $$P<x+y+z, \quad P'>z'+y' \quad (2)$$

(1), (2) カラ $$P-P'<x \quad (3)$$

偖テ n ヲ限リナリ大キクスレバ $\frac{h}{n}$ ハ限リナク小トナリ,從ツテ x ヲ限ナク小サクスルコトガ出來ル。$P-P'$ ハ或ル有限ノ大イサヲ有スル。

然ルニ(3)ノ式ハ有限ノ大イサノモノガ無限ニ小サクナシ得ル x ヨリ小トナシ得ルコトヲ示スモノデ,コレ不合理デアル。故ニ $P>P'$ デハナイ。

$P<P'$ ノ場合モ同樣デアル。

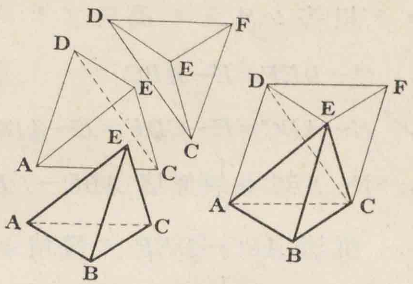
$$\therefore \quad P=P'$$

問 1. 底面ガ合同デ等高ナ二ツノ角錐ハ相等シイ。

問 2. 四角錐ノ底面ガ平行四邊形デアルトキ,頂點ト底ノ一對角線トヲ含ム平面ハ此ノ角錐ヲ二等分スル。

28. 三角錐ノ體積

定理 **3.** 三角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。



特述 三角錐 $E-ABC$ ノ體積ヲ V, 底面積ヲ b, 高サヲ h トスレバ,

$$V=\frac{1}{3}bh$$

證明 $\triangle ABC$ ヲ底面トシ, BE ニ平行デ且ツコレニ等シイ側稜ヲ有スル三角壔ヲ作リ,コレヲ $ABC-DEF$ トスル。

然ルトキハ,此ノ三角壔ハ三ツノ三角錐 $E-ABC$, $E-ADC$, $E-CDF$ ニ分ケルコトガ出來ル。

サテ $E-ADC$ ト $E-CDF$ トニ於テ,

底 ADC=底 CDF デ,高サガ相等シイカラ,

$$E-ADC=E-CDF$$

然ルニ $E-CDF$ ハ $C-DEF$ トモ考ヘラレルカラ, $C-DEF$ ト $E-ABC$ トヲ比較スレバ,

底 DEF=底 ABC, 且ツ高サハ角壔ノ兩底間ノ距

離デアルカラ相等シイ。

$$\therefore\ C-DEF=E-ABC$$

$$\therefore\ E-ADC=E-CDF=E-ABC$$

$$\therefore\ E-ABC=\frac{1}{3}(\text{角壔 } ABC-DEF)$$

然ルニ, 角壔 $ABC-DEF$ ノ體積 $=bh$

$$\therefore\ E-ABC=\frac{1}{3}bh$$

系 **1.** 角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

系 **2.** 等高ナ二ツノ角錐ノ體積ノ比ハ底ノ比ニ等シイ。

問 底面ガ正三角形デアル三角錐ガアル。其ノ體積ハ1立方米デ,高サハ2.4米デアル。其ノ底面ノ一邊ノ長サヲ糎マデ求メヨ。

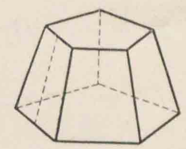
29. 角錐臺

定義 **角錐臺***トハ角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ生ジタ截面ト底面トノ間ノ部分ヲイフ。

此ノ截面ト底面トヲ角錐臺ノ**底面**トイヒ,其ノ底面間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。側面ハ皆梯形デ此

* 角錐臺ノコトヲ**截頭角錐**,或ハ**平截頭角錐**トモイフ。

ノ梯形ノ高サヲ**斜高**ト云フ。



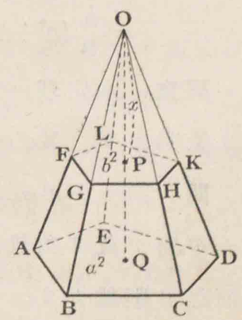
正角錐臺トハ正角錐カラ截リ取ッタ角錐臺デアル。

其ノ側面ハ合同ナ等脚梯形デアル。

定理 **4.** 正角錐臺ノ側面積ハ兩底面ノ周ノ和ト斜高トノ積ノ半バニ等シイ。

證明 學生自ラ之ヲ試ミヨ。

定理 **5.** 角錐臺ノ體積ハ兩底面ト其ノ比例中項トノ和ニ高サヲ乘ジタ積ノ三分ノ一ニ等シイ。



特述 角錐臺 $ABCDE-FGHKL$ ノ體積ヲ V, 兩底ノ面積ヲ夫々 a^2, b^2, 高サヲ h トスレバ,

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

證明 今角錐臺ノ側面ヲ延長シテ $O-ABCDE$ ナル角錐ヲ完成シ,其ノ頂點 O カラ底面ニ垂線ヲ下シ,兩底トノ交リヲ夫々 P, Q トシ, OP ノ長サヲ x トスル。

サテ $V=(O-ABCDE)-(O-FGHKL)$

然ルニ,
$$O-ABCDE=\frac{a^2(x+h)}{3}$$
$$O-FGHKL=\frac{b^2x}{3}$$
$$\therefore \quad V=\frac{a^2(x+h)-b^2x}{3} \tag{1}$$

然ルニ
$$\frac{a^2}{(x+h)^2}=\frac{b^2}{x^2}$$
$$\therefore \quad \frac{a}{x+h}=\frac{b}{x}=\frac{a-b}{h}$$
$$\therefore \quad x+h=\frac{ah}{a-b}, \quad x=\frac{bh}{a-b} \tag{2}$$

(2) ヲ (1) ニ代入シテ,
$$V=\frac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)}=\frac{h(a-b)(a^2+ab+b^2)}{3(a-b)}$$
$$=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

研究 本定理ニ於テ $b=0$ ナル場合ヲ考ヘ,其ノ意味ヲ說明セヨ。又 $a=b$ ナル場合ヲモ考ヘヨ。

問 高サハ $6\,cm$, 底面積 $324\,cm^2$ デアル角錐ヲ底ニ平行ナ平面デ截リ角錐臺ヲ作ルトキ,若シ角錐ノ頂點カラ截面迄ノ距離ガ $2\,cm$ トスレバ,角錐臺ノ體積如何。

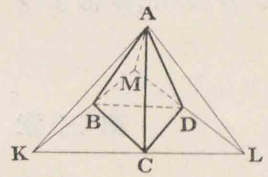
問　題

1. 對角線ノ長サガ a ナル正方形 $ABCD$ ヲ底面トスル正四角錐 $V-ABCD$ ニ於テ,側稜 VA ト底ノ一邊 AB トノ比ガ 3:2 デアルトキ, $V-ABCD$ ノ側面積ヲ求メヨ。

2. 四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ一點デ相交ハル。

3. 四面體ニ於テ二組ノ對稜ガ互ニ垂直ナラバ,殘リノ一組モ亦互ニ垂直デアル。

註 四面體 $A-BCD$ ノ底 BCD ノ平面ニ於テ,$\triangle BCD$ ノ各頂點ヲ通リ,其ノ對邊ニ平行線ヲ引キ,右圖ノ樣ニ $\triangle KLM$ ヲ作レバ, B, C, D ハ夫々ノ邊ノ中點トナル。



今 $AB\perp CD$, $AD\perp BC$ トスレバ, AB, AD ハ夫々 MK, ML ノ垂直二等分線トナルコトカラ, $AC\perp BD$ ヲ證明セヨ。

或ハ B, D カラ對邊 DC, BC ニ垂線ヲ引イテ其ノ交點ヲ H トシ, $AH\perp\triangle BCD$ デアルコトカラ考ヘテモヨイ.

4. 四面體 $ABCD$ ノ三ツノ面角 ABC, CBD, CDA ガ皆直角ナラバ,面角 ADB モ亦直角デアル。

註 三垂線ノ定理系 1 ヲ用ヒヨ。

5. 四面體ノ一ツノ稜ヲ含ミ對稜ニ交ル平面ハ此ノ稜ニ對スル稜ト四面體ノ體積トヲ相等シ

イ比ニ分ケル。

6. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ其ノ對稜ヲ此ノ二面角ヲ夾ム面ノ面積ノ比ニ分ケル。

7. 底面積 225 cm^2, 高サ 16 cm ノ角錐ガアル。今側稜ノ中點ヲ通リ,底ニ平行ナ平面デ之ヲ二分シタトキ,各部分ノ體積ヲ求メヨ。

第三章　正多面體

30. 正多面體

定義　**正多面體**トハ面ガ皆合同ナ正多角形カラ成リ,且ツ多面角ガ皆相等シイ多面體ヲイフ。

定理 **1.** 正多面體ハ唯五種ノミデアル。

證明　多面角ノ面角ハ少ナクトモ三ツデ,其ノ面角ノ和ハ $4\angle R$ ヨリ小デアル。

(1)　正三角形ノ各角ハ $60°$ デアルカラ,多面角ノ面角ノ數ハ3個カ,4個カ,5個カデコレ以上ハナイ。

故ニ,正多面體ニ於テ各面ガ正三角形ノトキハ三種デアル。

(2)　正方形ノ各角ハ $90°$ デアルカラ,多面角ノ面角ノ數ハ3個デコレ以上ハナイ。

故ニ,正多面體ニ於テ各面ガ正方形ノトキハ一種デアル。

(3)　正五角形ノ各角ハ $108°$ デアルカラ,多面角ノ面角ノ數ハ3個デ,コレ以上ハナイ。

故ニ正多面體ニ於テ各面ガ正五角形ノトキハ一種デアル。

正六角形ノ各角ハ $120°$ デアルカラ,

$120° \times 3 = 360°$　即チ $4\angle R$　ニ等シイ。

故ニ正六角形ナル面ヲ有スル正多面體ハ存在シナイ。以下同ジ。

$\therefore$　正多面體ノ數ハ都合五種ノミデアル。

注意　果シテ此ノ五種ガ正多面體ヲ作ルヤ否ヤノ證明ハ初等幾何學ノ範圍外デアル。

31. 正多面體ノ種類

前定理ニヨリ五種ノ正多面體ノ定義ヲ示セバ次ノ通リデアル。

(1)　**正四面體**トハ四ツノ等邊三角形ヲ面トス

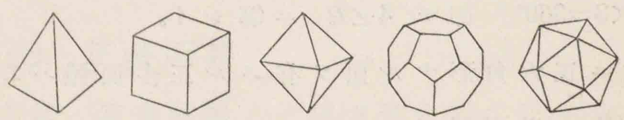
ル多面體ヲ云フ。

(2)　**正六面體(立方體)**トハ六ツノ正方形ヲ面トスル多面體ヲ云フ。

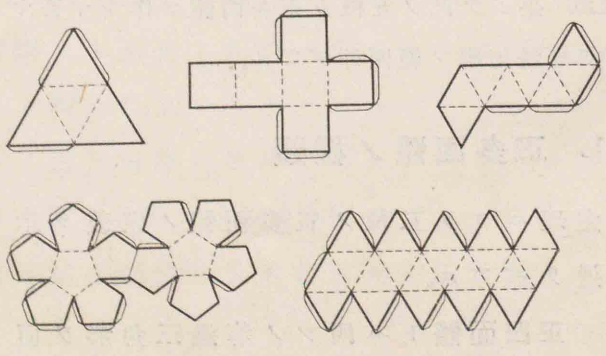
(3)　**正八面體**トハ八ツノ等邊三角形ヲ面トスル多面體ヲ云フ。

(4)　**正十二面體**トハ十二ノ正五角形ヲ面トスル多面體ヲイフ。

(5)　**正二十面體**トハ二十ノ等邊三角形ヲ面トスル多面體ヲイフ。



以上五種ノ正多面體ハ次ニ示ス様ナ形ヲ厚紙



デ作リ,點線ニ沿ツテ折レバ,之ヲ作ルコトガ出來ル。

問　　題

1.　一稜ガaデアル正四面體ノ體積ハ$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$デアル。

2.　各稜ノ長サaナル正四面體ノ六ツノ稜ノ中點ヲ結ンデ出來ル正八面體ノ體積ト原正四面體ノ體積トノ比如何。又,此ノ各體ノ總ベテノ稜ノ長サノ和ヲ求メヨ。

3.　正四面體ニ於テ相對スル稜ノナス角ハ直角デアルコトヲ證セヨ。

4.　正四面體内ノ任意ノ一點カラ各面ニ下シタ垂線ノ和ハ其ノ高サニ等シイ。

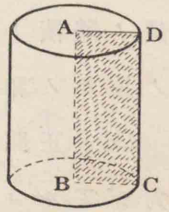
第三編

迴轉體

第一章　直圓壔及ビ直圓錐

32. 直圓壔

定義　矩形ノ一邊ヲ軸トシテ之ヲ一廻轉サセテ生ズル立體ヲ**直圓壔**トイフ。



其ノ廻轉ノ軸ヲ直圓壔ノ**軸**トイヒ,軸ニ垂直ナ二ツノ對邊ニヨツテ生ズル二ツノ等圓ヲ其ノ**底面**トイフ。又軸ニ平行ナ邊ヲ直圓壔ノ**母線**トイヒ,母線ニヨツテ生ズル曲面ヲソノ**側面**トイフ。

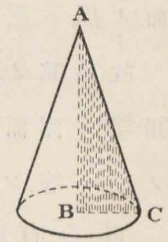
軸ノ長サヲ直圓壔ノ**高サ**トイフ。

問　直圓壔ノ軸ニ垂直ナ平面ニヨル截面ハ圓デ,マタ軸ニ平行ナ平面ニヨル截面ハ矩形デアル。

33. 直圓錐

定義　直角三角形ヲ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシ

テ一廻轉サセテ生ズル立體ヲ**直圓錐**トイフ。



其ノ廻轉ノ軸ヲ直圓錐ノ**軸**,軸ニ垂直ナ邊ニヨツテ生ズル圓ヲ其ノ**底面**トイヒ,軸ノ長サヲ**高サ**トイフ。

又斜邊ヲ直圓錐ノ**母線**,母線ノ長サヲ**斜高**,斜邊ノ廻轉ニヨツテ生ズル曲面ヲ**側面**トイヒ,母線ノ交點ヲ直圓錐ノ**頂點**トイフ。

問　直圓錐ノ軸ニ垂直ナ平面ニヨル截面ハ圓デ頂點ヲ通ル平面ニヨル截面ハ二等邊三角形デアル。

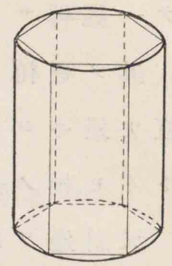
34. 直圓壔及ビ直圓錐ノ側面積

定義　角壔ノ側稜ガ圓壔ノ母線ト一致シ,且ツ角壔ノ兩底面ガ圓壔ノ兩底面ニ內接スルトキ,其ノ角壔ハ其ノ圓壔ニ**內接スル**トイフ。

定理 1. 直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

證明　直圓壔ニ內接スル正角壔ヲ作レバ,其ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

今此ノ正角壔ノ底面ノ邊數ヲ限リナク增スト



キハ,其ノ周ハ限リナク直圓壔ノ底面ノ周ニ近ヅクデアラウ。

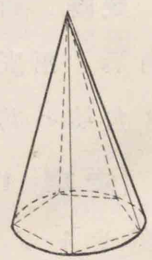
故ニ其ノ極限トシテ得ラレル直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

[系] 直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ r, 高サヲ h トスレバ,

$$側面積=2\pi rh$$

定義 圓錐ノ底面ニ內接スル底面ヲ有シ,圓錐ト頂點ヲ共有スル角錐ハ其ノ圓錐ニ**內接スル**トイフ。

[定理] **2.** 直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シイ。

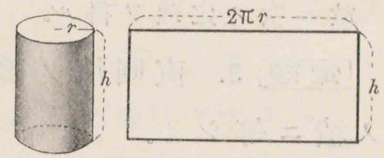


證明 前定理ノ證明ニ倣ツテ學生自ラ之ヲ試ミヨ。

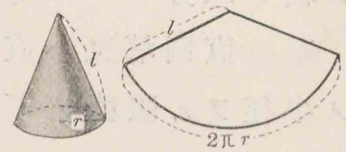
[系] 直圓錐ノ底面ノ半徑ヲ r, 斜高ヲ l トスレバ,

$$側面積=\pi rl$$

[注意] 直圓壔ハ其ノ兩底面ヲ省キ,側面ヲ一母線ニ沿



ツテ切リ開キ,コレヲ平面上ニ展開シタト考ヘレバ,底邊ガ $2\pi r$ デ高サガ h デアル矩形ガ出來ル。故ニ其ノ側面積ハ $\boldsymbol{2\pi rh}$ デアル。



直圓錐モ上ト同樣ニ側面ヲ母線ニ沿ツテ切リ開イテ右圖ノ樣ニスレバ $\boldsymbol{\pi rl}$ ノ値ガ得ラレル。

35. 直圓壔及ビ直圓錐ノ體積

直圓壔ニ內接スル正 n 角壔ヲ考ヘレバ,前節ノ圖ニ依ツテモ明カナ通リ,內接正 n 角壔ノ體積ハ直圓壔ノ體積ヨリモ小デアル。今此ノ角壔ノ底ノ邊數 n ヲ限リナク增大サセレバ角壔ノ體積ハ限リナク增大シテ圓壔トノ體積ノ差ハ零ニ近ヅク。

故ニ直圓壔ノ體積ハコレニ內接スル正 n 角壔ノ底ノ邊數 n ヲ限リナク增シタトキノ角壔ノ體積ノ極限値デアルトイヘル。

直圓錐ノ場合モ上ト同樣デアル。

故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 3. 直圓壔ノ體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シイ。

定理 4. 直圓錐ノ體積ハ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

系 直圓壔又ハ直圓錐ノ高サヲ h,底面ノ半徑ヲ r,體積ヲ V トスレバ,

$$V=\pi r^2 h \quad \text{(直圓壔ノ體積)}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \text{(直圓錐ノ體積)}$$

問題

1. 等高ナ二ツノ直圓壔ノ側面積ハ其ノ半徑ニ比例シ,體積ハ其ノ半徑ノ平方ニ比例スル。

2. 直圓錐ヲ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ,其ノ截面ト底面トノ比ハ頂點カラ其ノ截面ニ至ル距離ト其ノ直圓錐ノ高サトノ比ノ二乘比ニ等シイ。

3. a, b ヲ二隣邊トスル矩形ガ,其ノ各邊ヲ軸トシテ廻轉シタトキ生ズル二ツノ直圓壔ノ體積

ノ比ハ何程カ。

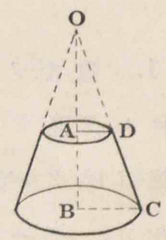
4. 一邊ガ a デアル正三角形ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉シタトキ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。

5. 直圓錐ノ高サハ $12cm$ デ側面積ハ底面積ノ11倍デアルトキ體積ハイクラカ。但シ圓周率ヲ3.14トシテ計算セヨ。

36. 直圓錐臺

定義 直圓錐ノ底面ト之ニ平行ナ截面トノ間ニアル其ノ圓錐ノ部分ヲ*直圓錐臺トイフ。

此ノ截面ト底面トヲ何レモ直圓錐臺ノ**底面**トイヒ,直圓錐ノ側面,斜高及ビ高サガ截面ニヨツテ限ラレタ部分ヲ夫々此ノ直圓錐臺ノ**側面**,**斜高**及ビ**高サ**トイフ。



注意 直圓錐臺ハ梯形ノ一邊ガ其ノ兩底ニ垂直ナトキ此ノ邊ヲ軸トシテ一廻轉サセテ生ジタモノト考ヘラレル。

*註 直圓錐臺ノコトヲ截頭直圓錐トモイフ。

37. 直圓錐臺ノ側面積及ビ體積

$\boxed{\text{定理}}$ **5.** 直圓錐臺ノ兩底ノ半徑ヲ夫々 R, r トシ,斜高ヲ l, 高サヲ h トスレバ,

$$側面積=\pi(R+r)l$$

$$體積=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$$

證明 學生自ラ之ヲ試ミヨ。

$\boxed{\text{系}}$ 直圓錐臺ノ側面積ハ兩底カラ等距離ニアル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シイ。

問題

1. 底面ノ半徑 $a\,cm$, 高サ $h\,cm$ ノ直圓錐ガアル。コレヲ高サノ垂直二等分面ニヨッテ截リ,小直圓錐ヲ除ケバ,殘リノ直圓錐臺ノ體積 V ハ何程トナルカ。次ニ $a=6\,cm$, $h=18\,cm$ トシテ V ヲ算出セヨ。

2. 高サガ h デアル直圓錐臺ノ兩底ノ半徑ヲ夫々 r_1, r_2 トスレバ,其ノ體積ハ高サガ共ニ h デ半徑ガ $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$ デアル直圓壔ト,$\frac{1}{2}(r_1\sim r_2)$ デアル直圓錐トノ體積ノ和ニ等シイ。

3. 直角ヲ夾ム二邊ガ $6\,cm$, $8\,cm$ デアル直角三角形ノ斜邊ヲ軸トシテ,此ノ三角形ヲ一廻轉サセテ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。

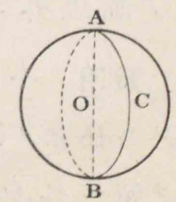
4. 高サガ $n\,cm$ デアル直圓錐ヲ底面カラ $1\,cm$ ノ距離ニアル之ニ平行ナ平面デ截ッタ時ニ生ズル直圓錐臺ノ體積ハ原形ノ體積ノ何程デアルカ。

第二章 球

38. 球

定義 半圓ヲ其ノ直徑ヲ軸トシテ一廻轉サセルトキニ生ズル立體ヲ**球**トイフ。

此ノトキ半圓ノ作ル曲面ヲ**球面**,半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**,中心カラ球面マデ引イタ線分ヲ球ノ**半徑**,中心ヲ通ッテ其ノ兩端ガ球面ニ限ラレル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ。



球面ノコトヲ又**球**トモ呼ブコトガアル。

以上ノ定義カラ次ノ定理ハ容易ニ知ラレル。

$\boxed{\text{定理}}$ **1.** I. 同ジ球ノ直徑ハ皆相等シ

ク,直徑ハ半徑ノ二倍デアル。

Ⅱ. 球面ハ中心カラ等距離ニアル點ノ軌跡デアル。

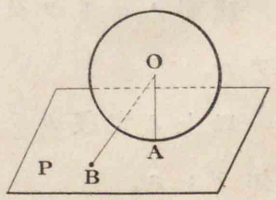
Ⅲ. 中心カラノ距離ガ半徑ヨリ小デアル點ハ,球ノ内ニアリ,半徑ニ等シイ點ハ球面上ニアリ,半徑ヨリ大デアル點ハ球ノ外ニアル。又コノ逆モ眞デアル。

Ⅳ. 半徑ガ相等シイ二ツノ球ハ合同デアル。又此ノ逆モ眞デアル。

39. 平面ト球面

定理 2. 球 O ノ球面上ノ一點 A ヲ通リコノ點ニ引イタ半徑ニ垂直ナ平面 P ハ,コノ點以外ニ球面ト共有點ヲ有シナイ。

證明 今 P 平面上ニ A 以外ニ任意ノ點 B ヲトリ, OB ヲ結ベバ, OA ハ平面 P ノ垂線デアルカラ OB ハ斜線デアル。



故ニ OB ハ球ノ半徑 OA ヨリ大デアル,依ツテ B ハ球 O ノ外ニアル。

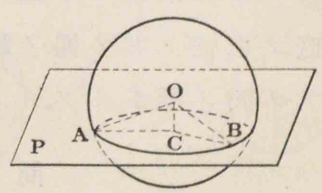
故ニ平面ト球面トハ A 以外ノ點ヲ共有シナイ。

定義 平面ト球面トガ唯一點ノミヲ共有スルトキハ,コノ平面ト球面トハ**相切スル**トイヒ,ソノ平面ヲ球ノ**切平面**,ソノ點ヲ**切點**トイフ。

問 切平面ノ上デ切點ヲ通ル任意ノ直線ハ球ノ**切線**(球面ト一點ノミヲ共有スル直線)デアル。

定理 3. 球 O ノ球面上ノ一點 A ニ於テコノ點ニ引イタ半徑ニ斜交スル平面 P ハ球面ト一圓周ヲ共有スル。

證明 球ノ中心 O カラ平面 P ニ垂線 OC ヲ引キ, C ヲ中心トシ, CA ヲ半徑トスル圓ヲ平面 P 上ニ畫キ,コノ圓周上ニ A 以外ノ任意ノ一點 B ト O ト ヲ結ベバ,



$$OC \perp P$$

且ツ $AC=CB$

$\therefore$ $OB=OA=$ 球ノ半徑

故ニ B ハ球 O ノ球面ノ上ニアル。

依ツテ圓Cハ球面ノ上ニアル。卽チ球面ト平面トハ一圓周ヲ共有スル。

定義 球面ト平面トガ一ツノ圓周ヲ共有スルトキハ兩者ハ**相交ル**トイヒ,ソノ圓ヲ**截面**トイフ。

系 1. 球ノ切平面ハソノ切點ニ引イタ半徑ニ垂直デアル。

系 2. 球ノ截面ノ中心ト球ノ中心トヲ結ブ直線ハ其ノ截面ニ垂直デアル。

系 3. 球ノ中心カラ等距離ニアル截面ハ相等シク,中心カラ大ナル距離ニアル截面ハ小ナル距離ニアル截面ヨリ小デアル。

定義 球ノ中心ヲ通ル截面ヲ球ノ**大圓**トイヒ,其ノ他ノ截面ヲ**小圓**トイフ。大圓又ハ小圓ニ垂直ナ直徑ヲ其ノ圓ノ**軸**トイヒ,其ノ直徑ノ兩端ヲ其ノ圓ノ**極**トイフ。

問題

1. 球面上ニアル一圓周上ノ總テノ點ハ其ノ二ツノ極ノ各〻カラ等距離ニアル。

2. 大圓ハ球及ビ球面ヲ二等分スル。

定義 大圓デ分タレタ球ノ二部分ヲ各**半球**トイヒ,此ノ大圓ヲ半球ノ**底面**トイフ。

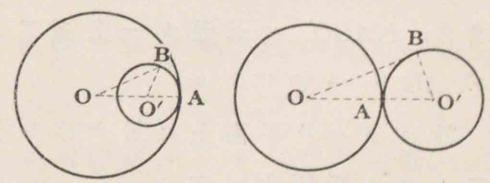
3. 球面上ノ二定點ヲ通ル平面デ此球ヲ截リ其ノ截リ口ヲ最大ナラシメヨ。

4. 同一ノ點ニ於テ球ニ切スル二直線ノ定メル平面ハ切平面デアル。

5. 半徑Rナル球ニ內接スル直圓錐ノ側面積ヲ底面積ノ二倍ニスルニハ,其ノ高サヲ何程トスレバヨイカ。

40. 二ツノ球ノ相交相切

定理 4. 二ツノ球O, O'ガ其ノ中心線OO'ノ上ノ一點ヲ共有スルトキハ,共他ノ點ハ共有シナイ。

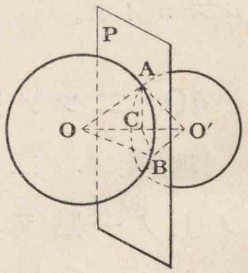


證明 今球O'ノ面上ニA以外ニ一點Bヲトリ,$O, B; O', B$ヲ結ベバ,$\triangle OO'B$ニ於テ,OBハOO'ト$O'B$トノ和ヨリモ小デアルカ(左圖)又ハ差ヨリモ大デアルカ(右圖)デアル。

換言スレバ OB ハ球 O ノ半徑 OA ヨリモ小デアルカ又ハ大デアルカデアル。故ニ B ハ球 O ノ内ニアルカ又ハ外ニアルカデ,球 O ノ面上ニハナイ。故ニ球 O, O' ハ A 以外ニ共有點ヲ有シナイ。

定義 唯一點ノミヲ共有スル二ツノ球ハ**相切スル**トイヒ,其ノ點ヲ**切點**トイフ。

定理 5. 二ツノ球 O, O' ガソノ中心線 OO' 上ニナイ一點 A ヲ共有スルトキハ,一ツノ圓周ヲ共有スル。



證明 A ト O, O' ヲ結ビ,A ヲ通リ中心線 OO' ニ垂直ナ平面 P ヲ作リ,コレト OO' トノ交リヲ C トスル。A, C ヲ結ベバ, $AC \perp OO'$

サテ, $\triangle AOO'$ ハ三邊ガ一定デアルカラ C ハ定點デ, AC ハ一定デアル。

故ニ A ハ P 平面上ニ於テ C ヲ中心トシ CA ヲ半徑トスル圓周上ニアル。

次ニ此ノ圓周上ニ一點 B ヲトリ O, B; O', B ヲ結ビ又 B, C ヲ結ベバ, $CB \perp OO'$ 且ツ $CB = AC$ デアルカラ, $\triangle OAO' \equiv \triangle OBO'$ $\therefore$ $OB = OA, O'B = O'A$

故ニ B ハ兩球面上ニアル。

依テ此ノ二ツノ球面ハ一ツノ圓 C ヲ共有スル。

定義 二ツノ球面ガ一圓周ヲ共有スル時ハ,此ノ二ツノ球ハ**相交ル**トイヒ,其ノ圓ヲ**交リ**トイフ。

系 1. 二ツノ球ガ相交ハレバソノ中心線ハ球ノ交リデアル圓ノ中心ヲ通リ且ツ其ノ平面ニ垂直デアル。

系 2. 二ツノ球ガ相切スルトキハ中心線ハ切點ヲ通ル。

注意 中心間ノ距離ト二ツノ球ノ相對的位置ニツイテハ平面幾何學ニ準ズル。

問題

1. 半徑ガ夫々 $6\,cm$, $8\,cm$ デアル二球ガ相交ルトキ,其ノ交リノ面積ヲ求メヨ。但シソノ中心距離ヲ $10\,cm$ トスル。

2. 二ツノ球ガ相切スルトキハ,其ノ切點ニ於テ共通ノ切平面ヲ作リ得ルコトヲ證明セヨ。

3. 球外ノ一定點カラ引イタ切線ハ相等シイ。ソシテ切點ノ軌跡ハ球ノ小圓デアル。

4.　一邊ガ $2a$ デアル正四面體ニ外接及ビ內切スル球ノ半徑ヲ R 及ビ r トスレバ,

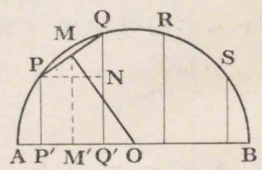
$$R=3r=\frac{a}{2}\sqrt{6}$$

41. 球面ノ面積

定理 6.　球面ノ面積ハ其ノ大圓ノ面積ノ四倍ニ等シイ。卽チ球ノ半徑ヲ r, 面積ヲ S トスレバ,

$$S=4\pi r^2$$

證明　P, Q ハ半圓 APB ヲ n 等分シタトキノ相隣レル二點デアル。弦 PQ ヲ作リ, O カラ PQ ニ垂線 OM ヲ下セバ, $PM=MQ$



PP', MM', QQ' ヲ AB ヘノ垂線トスル。今半圓ガ一廻轉スルトキ,弦 PQ ハ直圓錐臺ノ側面ヲ畫ク。

此ノ直圓錐臺ノ側面積 $=2\pi MM'\cdot PQ$

$PN \parallel P'Q'$　トスレバ,

$$\triangle PQN \backsim \triangle MOM'$$

$$\therefore\ \frac{PQ}{MO}=\frac{PN}{MM'}$$

$$\therefore\ MM'\cdot PQ=MO\cdot PN \qquad PN=P'Q'$$

故ニ直圓錐臺ノ側面積 $=2\pi MO\cdot P'Q'$

然ルニ　$AP=PQ=QR=\cdots\cdots$ デアルカラ, O カラ此等ノ弦ニ引イタ垂線ノ長サハ皆相等シイ。

故ニ　AP ガ描ク側面積 $=2\pi MO\cdot AP'$

從ツテ之等ノ直圓錐臺ノ側面積ノ和ハ,

$$2\pi\cdot MO(AP'+P'Q'+\cdots\cdots\cdots\cdots)$$
$$=2\pi MO\cdot AB$$

今 n ヲ限リナク大トスレバ各直圓錐臺ノ側面積ノ和ハ限リナク球ノ面積 S ニ接近シ, PQ, QR 等ハ限リナク小トナルカラ, MO ハ限リナク球ノ半徑 r ニ接近スル。

$$\therefore\ S=2\pi r\cdot 2r=4\pi r^2$$

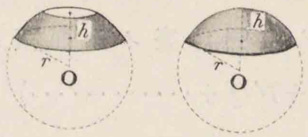
系　二ツノ球ノ面積ノ比ハ其ノ半徑ノ二乘比ニ等シイ。

定義　球ヲ平行ナ二平面デ截ルトキ,其ノ兩截面間ニアル球ノ部分ヲ**球分**トイヒ,**球分**ノ側面ヲ**球帶**トイフ。截面ノ一ツガ切平面トナツタトキ

ノ球分ヲ特ニ**缺球**トイヒ,其ノ側面ヲ**缺球面**トイフ。ソシテ兩截面間ノ距離ヲ**球分ノ高サ**トイフ。

系 球帶又ハ缺球面ノ面積ヲ S, 高サヲ h, 球ノ半徑ヲ r トスレバ,

$$S=2\pi rh$$

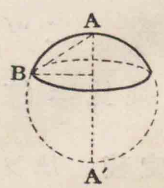


問題

1. 半徑ガ 9 cm, 12 cm デアル二球ノ表面積ノ和ニ等シイ表面積ヲ有スル球ノ半徑ヲ計算セヨ。

2. 球ノ表面積ガ直徑28糎デアル圓ノ面積ニ等シイトキ,球ノ半徑ヲ求メヨ。

3. 圓弧 AB ガ直徑 AA' ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル缺球面ノ面積ハ弦 AB ヲ半徑トスル圓ノ面積ニ等シイコトヲ證明セヨ。

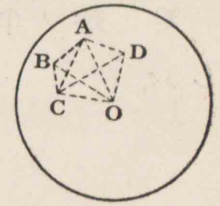


4. 球ノ表面積ハ之ニ外切*スル直圓壔ノ側面積ニ等シイ。

5. 半徑ガ 50 cm デアル球ニ於テ,高サ 10 cm ノ缺球ノ半徑及ビ缺球面ノ面積ヲ求メヨ。

42. 球ノ體積

定理 7. 球ノ體積ハ其ノ表面積ト半徑トノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。



證明 球面上ニ n 個ノ點ヲ取リ,之ヲ順次ニ結ンデ遂ニ各面ガ三角形ヲナス多面體ヲ此ノ球ニ内接サセ得タト考ヘレバ,此ノ多面體ノ體積ハ球ノ中心 O ヲ頂點トシ,各面(三角形)ヲ底面トスル三角錐ノ和ト見ラレル。今 n ヲ限リナク增ストキハ,此ノ多面體ノ體積ハ限リナク球ノ體積ニ接近シ,多面體ノ表面積ハ又限リナク

*註 直圓壔又ハ直圓錐ノ底面ハ球面ニ切シ,且其ノ側面ハ球面ト唯一ツノ圓周ニ於テ出會フトキハ直圓壔又ハ直圓錐ハ其ノ球ニ**外切スル**トイヒ,球ハ直圓壔又ハ直圓錐ニ**内切スル**トイフ。

球ノ表面積ニ接近スル。

此ノ場合ニハ各三角錐ノ高サモ限リナク球ノ半徑ニ接近スル。然ルニ三角錐ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times(\text{底面ノ面積})\times(\text{高サ})$$

依ツテ,コノ様ナ三角錐ノ和ノ極限ト見ラレル球ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times(\text{球ノ表面積})\times(\text{半徑})$$

系　球ノ半徑ヲrトシ,其ノ體積ヲVトレバ,

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

問　題

1. 球ノ表面積,體積ハ夫々之ニ外切スル直圓壔ノ全面積,體積ノ三分ノ二ニ等シイ。

2. 一邊ノ長サガa cmデアル立方體ニ外接スル球ノ體積ヲ求メヨ。

3. 球ノ外切圓錐ノ高サガ球ノ直徑ノ二倍デアルトキ,圓錐ノ體積モ亦球ノ體積ノ二倍ニ等シイコトヲ證明セヨ。

4. 球ノ體積ト之ニ內接スル立方體ノ體積トノ比ヲ求メヨ。

5. 一邊ノ長サガaデアル正三角形ABCヲ,其ノ頂點Aヲ通リ,ABニ垂直ナ直線ヲ軸トシテ一廻轉シタトキノ立體ノ體積ヲ求メヨ。

—— 終 ——

補充問題

第一編ノ部

第一章及ビ第二章ノ問題

1. G ハ三角形 ABC ノ重心デ, V ハ空間ノ任意ノ點デアルトキ, 常ニ $VA+VB+VC>3VG$ デアルコトヲ證明セヨ。

2. 空間ニ相異ナル二直線 l, m ガアル。此ノ二直線上ニナイ點 P ヲ通ツテ, l, m ノドチラニモ交ル直線ヲ引キ得ルカ否カヲ調ベヨ。

3. 一平面ヲ P トシ, AB, CD ヲ互ニ平行デナク, 且ツ P ニモ平行デナイ空間ノ定直線トスル。今二ツノ平面 Q, R ヲ作リ, Q ハ AB ヲ含ミ, R ハ CD ヲ含ミ, 且ツ Q, R ノ交線ガ P ニ含マレルヤウニセヨ。

4. 定直線 AB ヲ含ミ, 之ト同一平面上ニナイ二定點 P, Q カラ等距離ニアル平面ヲ求メヨ。

【註】 線分 PQ ノ中點 M ト AB トニヨツテ決定スル平面ト, AB ヲ含ミ PQ ニ平行ナ平面トヲ考ヘヨ。

5. 空間ニ一定點, 一直線及ビ一平面ガアル。此點ヲ

通リ,コノ直線ニ交リ,且ツコノ平面ニ平行ナ直線ヲ引ケ。

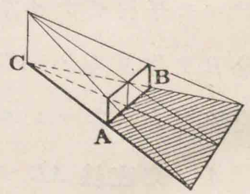
6. 一定圓周上ノ任意ノ點ヲPトシ,圓外ノ空間ノ定點ヲOトスルトキ,OPヲ定比ニ分ケル點Qノ軌跡ハ圓デアルコトヲ證セヨ。

7. 線分AB上ニ二點M,Nヲトリ,$AM=BN$トスル。Mヲ通ル平面PトNヲ通ル平面Qトハ平行デアル。Aヲ通ル任意ノ直線ガ平面P,Qト夫々C,Dデ交リ又Bヲ通ル任意ノ直線ガ平面P,Qト夫々E,Fデ交レバ,$\triangle MEC=\triangle NDF$

【註】$\angle EMC=\angle FND$, 且ツ $MC\cdot ME=ND\cdot NF$

第三章ノ問題

1. 長サ5米,高サ3米ノ板ノ底邊ABヲ地面ニ接シテ垂直ニ立テ,ABカラ5米離レタ點Cニ高サ5米ノ電球ヲ點ジタ時,板ノ蔭ノ面積ハイクラカ。



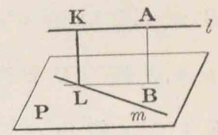
2. Oニ於テ互ニ直交スル三ツノ半直線OX,OY,OZ上ニ夫々點A,B,Cヲトレバ,$\triangle ABC$ハ鋭角三角形デアル。

3. 直角三角形ABC,ABDハABヲ共有シ,夫々$\angle B$ト$\angle A$トガ直角デアル。然ルトキABノ中點トCDノ

中點トヲ結ブ直線ハABニ垂直デアルコトヲ證明セヨ。

4. 同一平面上ニナイ二直線ノ共通垂線ヲ求メヨ。

【註】mヲ含ミ,lニ平行ナ平面Pヲ作ル。

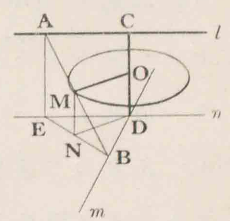


l上ノ任意ノ點AカラP平面ニ垂線ヲ下シソノ足ヲBトスル。

P上ニ於テ$BL/\!/l$トシ,mトノ交點ヲL.

BAニ平行ニLKヲ引キ,lトノ交點ヲKトスレバ,KLハ求メル共通垂線デアル。

5. 互ニ垂直デアツテ相交ラナイ空間ノ二直線ガアル。各〻ノ上ニ其ノ端ヲ有シ且ツ一定ノ長サヲ有スル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

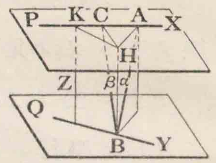


【註】二直線l,mノ共通垂線CDヲ作リ,Dヲ通リlニ平行線nヲ引ク。m,nノ決定スル平面ハlニ平行,ABノコノ平面上ニ投ズル正射影BEハ一定。CDノ中點ヲO,ABノ中點ヲMトスレバ,

$$OM=\frac{1}{2}BE$$

6. 二直線ノ共通垂線ノ中點ヲ過ギ兩直線ニ平行ナ平面ヲ作レバ,其兩直線上ニ兩端ヲ有スル線分ハ此ノ平面ニヨツテ恒ニ二等分セラレル。

7. 同一平面上＝ナイ二直線X, Yノ共通垂線ヲZトスル。直線X上ノ一點Aカラ直線Y＝下シタ垂線ノ足Bカラ,直線X＝下シタ垂線ノ足Cハ點Aト一致シナイトキ,直線ABガ直線Zトナス鋭角αト,直線BCガ直線Zトナス鋭角βトノ大小ヲ比較セヨ。



【註】 Xヲ含ミZ＝垂直ナ平面P, Yヲ含ミZ＝垂直ナ平面Qヲ作レバ,

$$P /\!/ Q$$

$BH \perp$ 平面P トスレバ, $HC \perp X$

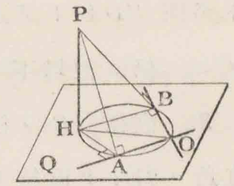
$\triangle ABH, \triangle CBH$＝於テ, $\angle ABH$ト$\angle CBH$トヲ比較セヨ。

8. 三角形ABCノ垂心＝於テ其ノ平面＝立テタ垂線上ノ一點トAトヲ結ブ直線ハBC＝垂直デアル。

9. 直線Lト,コレト同一平面上＝ナイ線分ABトガアル。A, Bカラ直線L＝下シタ垂線ノ足ヲ夫々A', B'トスル。Aヲ通リL＝平行線AKヲ引キ,B'ヲ通リAA'＝平行線$B'E$ヲ引クトキハ,此ノ二直線$AK, B'E$ハ交ル。又其ノ交點ヲEトスレバ, $\angle AEB = \angle R$デアルコトヲ證明セヨ。

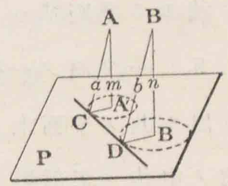
10. 正三角形ABCノ垂心Oヲ通ツテ其ノ三角形ノ平面＝垂直ナ直線OPヲ引キ, $OP = AB$トスルトキ,平面

ABCガ平面ABPトナス角ノ餘弦ヲ求メヨ。



11. 一平面上＝於テ,其ノ平面上ノ一定點ヲ通ル任意ノ直線＝其ノ平面外ノ定點カラ下シタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

12. 一平面Pト其ノ面上＝ナイ二點A, Bガアル。今P平面上＝アル直線ヲ引キ,二定點A, Bカラ此ノ直線＝下シタ二ツノ垂線ヲ夫々與ヘラレタ二線分a, b＝等シクナルヤウ＝セヨ。



【註】 $AA' \perp$ 平面P, $BB' \perp$ 平面P, AA', BB'ハ一定デアルカラ,コレヲ夫々, m, nトスレバ

$$A'C = \sqrt{a^2 - m^2}, \qquad B'D = \sqrt{b^2 - n^2}$$

第四章ノ問題

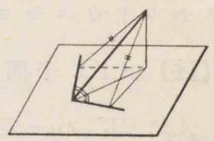
1. Pハ一ツノ平面, OA, OBハ之＝平行ナ二ツノ直線デアルトキ, OA, OBノ各〻＝垂直デアル平面ノ交リハP＝垂直デアル。

2. 矩形ノ紙片$ABCD$ガアル。ABハ4米, BCハ3米デアル。此ノ矩形ヲ對角線AC＝沿ウテ折リ,平面ABC

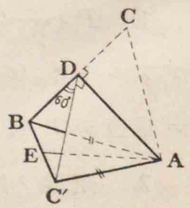
ト,平面 CDA トヲ互ニ垂直ニスルトキ, BD ノ距離ヲ求メヨ。但シ糎以下ヲ四捨五入セヨ。

3. 直徑 AB ノ圓ガアル。ソノ端 A カラ圓ノ平面ニ直角ニ引イタ直線上ニ一點 P ヲ定メ,圓周上ノ任意ノ點ヲ Q トスルトキハ,平面 PAQ ト平面 PBQ トノナス角ハ何程カ。

4. 二面角ノ二ツノ面 P, Q ト夫々 A, B デ交ハル直線 AB ガ各〻ノ面トナス角ガ等シイトキハ,二點 A, B ハ二面角ノ稜カラ等距離ニアル。



5. 一平面ノ一斜線ガ其ノ足カラ出ル其ノ平面上ノ諸直線トナス角ノ中,其ノ正射影ト等角ヲナス直線トナス角ハ相等シク,正射影ト大ナル角ヲナス直線ト此ノ斜線トガナス角ハ,正射影ト小ナル角ヲナス直線ト此ノ斜線トガナス角ヨリモ大デアル。

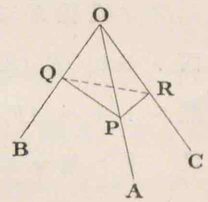


6. 三角形ノ三邊ト等角ヲナス直線ハ其ノ三角形ノ平面ニ垂直デアル。

7. 一邊ガ a デアル正三角形 ABC ヲ A カラ BC ヘノ垂線ニ沿ウテ折リ $60°$ ノ二面角ヲ作ルトキ,直線 BC ト頂點 A トノ距離ヲ求メ

ヨ。

8. 三面角 $O—ABC$ ノ稜 OA ニ於ケル二面角ガ直角ナラバ,OB 又ハ OC ニ垂直ナ平面ニヨル截面ハ直角三角形デアル。



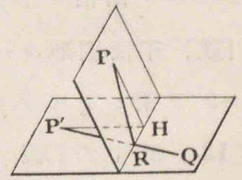
【註】 平面 $PQR \perp$ 稜 OC トスレバ,

平面 $PQR \perp$ 平面 OPR

又 平面 $OPQ \perp$ 平面 OPR

$\therefore$ $PQ \perp$ 平面 ORP $\qquad \therefore$ $PQ \perp PR$

9. 相交ル二平面上ニ各〻定點 P, Q ガアル。二平面ノ交リノ上ニ一點 R ヲトリ $PR+QR$ ヲ最小ニセヨ。



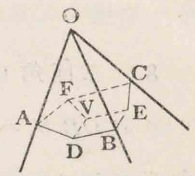
【註】 點 P カラ二平面ノ交リヘノ垂線ヲ PH, Q ヲ含ム平面上ニコノ交リニ關シ Q ト反對ノ側ニソノ交ハリニ垂線 HP' ヲ作リ,$HP'=HP$ ナラシメ,

P', Q ヲ結ビ二平面ノ交リトノ交點ヲ作レバヨイ。

10. 同一平面上ニナイ直線 l ト二點 A, B トガ與ヘラレテヰルトキ,二點 A, B カラ l 上ノ點ニ至ル距離ノ和ヲ最小ニセヨ。

11. 三面角ノ三ツノ稜角ノ和ハ二直角ヨリ大デ,六直

角ヨリモ小デアル。



【註】三面角 O—ABC 内ノ一點 V カラ各面ニ垂線 VD, VE, VF ヲ下シ,コノ三ツノ垂線ガ二ツヅツデ決定スル平面ト OA, OB, OC トノ交リヲ夫々 A, B, C トスル.

然ルトキハ AF, AD ハ OA ニ垂直デアル。他モ同樣。

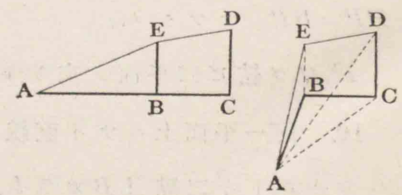
又, V ニ集マル三ツノ面角ノ和ハ $4\angle R$ ヨリ小。

12. 相交ル二平面 P,Q ガアツテ,此ノ二平面ノナス角ハ $45°$ デアルトスル。平面 P,Q ノ交線上ニ AB ヲ $4cm$ ニ等シクトリ,平面 P 上ニ正三角形 ABC ヲ作リ, C ニ於テ平面 P ニ垂線ヲ立テ平面 Q トノ交點ヲ D トスルトキ, $\triangle ABD$ ノ面積ヲ小數第二位迄求メヨ。

【註】平面圖形ノ一平面ヘノ正射影ハ其ノ平面圖形ニ $\cos\theta$ ヲ乘ジタモノニ等シイ。但シ θ ハ二平面ノナス角。

13. 紙片ヲ(I)圖ノヤウニ切リ, $\triangle ABE$ ヲ BC ニ垂直ニ折ツテ水平ニオキ(II)圖ノヤウニスル。

(I)　(II)



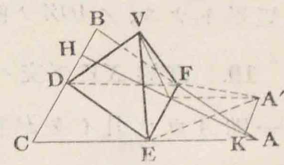
今 AED ヲ山路ト考ヘル。AE ハ水平ニ5呎毎ニ1呎高マル。ED ハ同ジク12呎毎ニ1呎高クナル。AB=1哩, $BC=\frac{3}{4}$哩 デアルトキ,

E ハ A ヨリモ何程高イカ。D ハ E ヨリドレダケ高イカ。又 AC ノ長サヲ求メヨ。

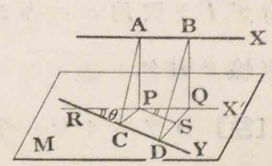
D ガ A ヨリモ 1500呎高イトシ, AD ノ勾配ヲ水平ニ x 呎毎ニ1呎高クナルト云フ樣式デ表ハセ。

14. 三角形 ABC ヲ含ム平面 P ト,邊 BC ヲ含ミ平面 P ト $30°$ ノ二面角ヲナス平面 Q トガアル。點 A ノ Q 平面上ヘノ正射影ヲ A' トシ,且ツ $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ トスルトキ $A'B$, $A'C$ ノ長サヲ求メヨ。

15. 鋭角三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスル。$\triangle AEF$ ヲ EF ヲ軸トシテ折ルトキ, A ノ平面 ABC 上ニ投ズル正射影ハ A カラ BC ヘノ垂線 AH ニ沿ツテ移動スルコトヲ證明セヨ。又 $\triangle DEF$ ヲ底トシ, A, B, C ヲ V デ合シタ四面體ノ頂點 V ノ正射影ハ何カ。



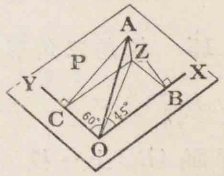
16. 同一平面上ニナイ二直線 X,Y ノ中ノ X 上ノ二點 A,B カラ直線 Y ニ夫々垂線ヲ下シ,ソノ足ヲ夫々 C,D トスルトキ, $CD=AB\cos\theta$ ノ關係ガアルコトヲ證明セヨ。但シ θ ハ



二直線 X,Y ノナス角ヲ表ハス。

17. 直角三角形ノ直角ノ一邊ガ一ツノ平面ニ平行デアルトキハ,此ノ三角形ノ此ノ平面ヘノ正射影モ亦直角三角形デアル。

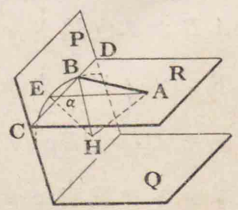
18. 三ツノ編針ガソノ中ノ二ツハ直交シ,第三ノ針ガ直交スル二針ノ一ツニ45°,他ニ60°ヲナスヤウニ傾斜シテ突入レラレタ。第三ノ針ハ其平面ニ對シテ如何ナル角ヲナスカ。



【註】 $AZ\perp$平面 XOY トセヨ。$ZB\perp OX$, $ZC\perp OY$ トスレバ, $OBZC$ ハ矩形トナル。$\angle AOZ$ ノ餘弦ヲ求メヨ。

19. 直線 XY デ交ハル二平面 P,Q ガアル。XY 上ノ一點 A カラ引イタ P平面上ノ半直線 AB ト,AB ノ Q平面上ヘノ正射影トノナス角ハ,AB ガ XY ニ垂直デアルトキ最大デアルコトヲ證明セヨ。

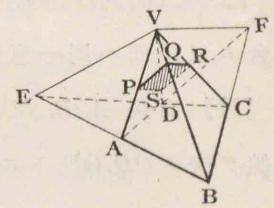
20. 二平面 P,Q ヲ與ヘ,與ヘラレタ點 A ヲ通リ Q ニ平行デ,P ト與角 α ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引ケ。



【註】 A ヲ含ミ Q ニ平行ナ平面 R ト P トノ交ハリヲ DC トスル。

$AH\perp P$ トシ,AH ヲ含ム任意ノ平面上ニ於テ,AH ト $\angle R-\alpha$ ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引キ,P トノ交點ヲ E トシ,H ヲ中心トシ HE ヲ半徑トスル圓周ト DC トノ交點ヲ B トスレバ,AB ハ求メルモノデアル。

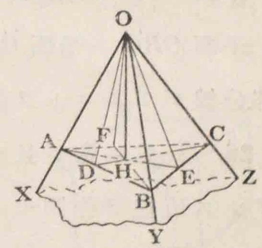
21. 平面デ四面角ヲ截リ,其ノ截面ヲ平行四邊形ニセヨ。



【註】 二組ノ對面ノ交線ニ平行ナ平面ヲ作レ。

22. 三面角ノ各稜ヲ含ンデ之ニ對スル面ニ垂直ナ平面ハ同一直線デ交ル。

【註】 平面 $OBH\perp$平面 OAC, 平面 $OCH\perp$平面 OAB トシ,ソノ交線ヲ OH, H ヲ通リ OH ニ垂直ナ平面デ三面角ヲ截リ,各稜トノ交リヲ夫々 A,B,C トスレバ,H ハ $\triangle ABC$ ノ垂心



$\therefore$ $AH\perp BC$ 又 $OH\perp BC$

$\therefore$ 平面 $OAH\perp$ 平面 OBC

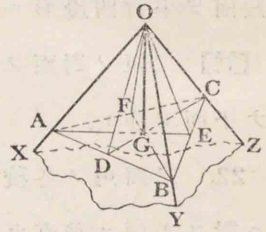
23. 三面角ノ三面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

【註】 各二面角ノ二等分面ヲ考ヘヨ。

24. 三面角ノ三稜カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

【註】各面角ノ二等分線ヲ含ンデコノ面ニ垂直ナ平面ヲ考ヘヨ。

25. 三面角ノ各稜ト之ニ對スル面角ノ二等分線トヲ含ム三平面ハ同一直線ヲ通ル。



【註】面角 AOB, BOC ノ二等分線ヲ夫々OD, OE トスル。各稜ノ上ニ $OA=OB=OC$ ナル様ニ夫々 A, B, C ヲトリ,平面ABC トOD, OE トノ交點ヲD, E トスル。

平面 COD ト AOE トノ交線ヲ OG トスル。

平面 OBG ト平面 OAC トノ交線 OF ガ面角 AOC ノ二等分線デアルコトヲ證明スレバヨイ。

26. 一點ニ會シ且ツ同一平面上ニナイ三直線ト等角ヲナス直線ヲ作圖セヨ。

【註】一點ニ會スル三直線OX, OY, OZ上ニ夫々 $OA=OB=OC$ ナル様ニ A, B, C ヲトル。

$\triangle ABC$ ノ外心トOトヲ通ル直線ヲ考ヘヨ。

第二編ノ部

第一章ノ問題

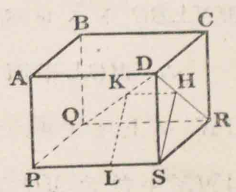
1. 平行六面體 $ABCD-PQRS$ ノ對角線 DQ上ニZ, X ヲ $DZ=QX$ ナル様ニ,他ノ對角線BS上ニY, W ヲ $SY=BW$ ナル様ニトルトキハ,$WXYZ$ ハ平行四邊形デアルコトヲ證明セヨ。

2. 何レノ二ツモ互ニ平行デナク又,相交ラナイ三定直線ノ上ニ稜ヲオク平行六面體ヲ作レ。

3. 直方體ガアル。其ノ體積ハ V デ,其ノ三稜ハ三數 a, b, c ニ比例スルトイフ。三稜ノ長サヲ求メヨ。

4. 直方體 $ABCD-PQRS$ ノ對角線 QD ト,ソレト交ラナイ稜 PS トノ共通垂線ヲ KL トシ,L ヲ SP 上ノ垂足トスレバ, SL ノ長サハ何程カ。

但シ, $AB=b$, $BC=a$, $CR=c$ トスル。



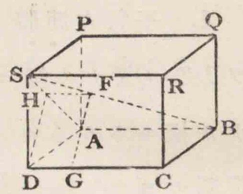
【註】$SH \perp DR$ トスレバ,

$SH \mathrel{\underline{\parallel}} KL \quad \therefore \; LS=KH$

$$\therefore \; \frac{KH}{QR}=\frac{DH}{DR}$$

5. 一ツノ部屋 $PQRS-ABCD$ ガアル。SB ハ天井ノ隅トソレニ對スル床ノ一隅トヲ結ビツケル直線デアル。

SB 上ニ $SF=\frac{1}{3}SB$, DC 上ニ $DG=\frac{1}{3}DC$ ナル様ニ夫々 F, G ヲトルトキ, FG ノ長サハ何程カ。但シ此ノ部屋ノ長サヲ a, 幅ヲ b, 高サヲ c トスル。



【註】 $HF \parallel AB$ トスレバ

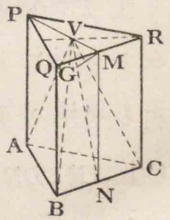
$HF=\frac{1}{3}AB=DG$

∴ $FG \mathrel{\underline{\parallel}} HD$

$\triangle DAS$ ニ於テ $SH:HA=1:2$

∴ $3DH^2=AD^2+2SD^2-(HA^2+2SH^2)$

6. 三角錐 $V-ABC$ ガアル。底 ABC ハ正三角形デ一邊ノ長サ a, $VA=VB=VC=l$ デアル。$\triangle ABC$ ヲ底トスル正三角壔 $PQR-ABC$ ヲ作リ, ソノ高サヲ等シクスルトキ, QR ノ中點 M ト平面 VBC トノ距離ハ何程カ。



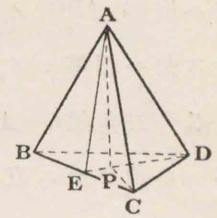
【註】 V ハ $\triangle PQR$ ノ重心トナル。

$MN \perp BC$ トスレバ, $VN \perp BC$

∴ $MG \perp$ 平面 VBC トスレバ, G ハ VN ノ上ニアル。ソコデ直角三角形 VMN ニ於テ MG ヲ考ヘヨ。

第二章ノ問題

1. 四面體 $ABCD$ ニ於テ, $\triangle ACD$ 内ニ一點 P ヲトルトキハ, $\angle BAC+\angle BAD>\angle PAC+\angle PAD$ デアルコトヲ證明セヨ。



【註】 DP ノ延長ガ BC ト交ル點ヲ E, 三面角 $A-BED$ ニ於テ,

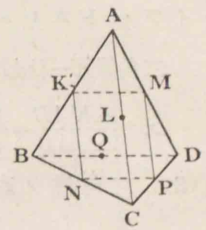
$\angle BAD+\angle BAE>\angle EAD$

同様 $\angle EAC+\angle EAP>\angle PAC$

∴ $\angle BAD+\angle BAE+\angle EAC<\angle PAC+\angle EAD-\angle EAP$

2. 四面體 $ABCD$ ノ稜 AB, AC, AD, BC, CD, DB ノ中點ヲ夫々 K, L, M, N, P, Q トスレバ,

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+CD^2+DB^2=4(KP^2+MN^2+LQ^2)$$



【註】 平行四邊形 $KMPN$ ニ於テ,

$KM^2+MP^2+PN^2+NK^2=MN^2+PK^2$

ヲ利用セヨ。

3. 四面體 $ABCD$ ノ相對スル稜 AB, CD ノ中點 E, F ヲ過ギル直線ト他ノ相對スル稜 BC, AD ノ中點 G, H ヲ過ギル直線トガ互ニ垂直ナラバ, 稜 AC ト稜 BD トハ相等シイコトヲ證明セヨ。

【註】 $EGFH$ ハ菱形トナル。

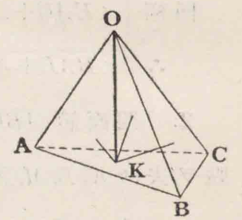
4. 四面體 $O-ABC$ ニ於テ三ツノ稜 OA, OB, OC ガ相

等シク,Oカラ底面 ABC ニ引イタ垂線ヲ OH トスレバ,H ハ底面 ABC ノ外接圓ノ中心デ,OH ト OA, OB, OC トノナス角ハ相等シイ。

5. 三角錐 $O—ABC$ ノ三ツノ斜面 OBC, OCA, OAB ト相等シイ角ヲナス直線 OK ト底面 ABC トノ交點ヲ K トスレバ,

$$\frac{\triangle KBC}{\triangle OBC}=\frac{\triangle KCA}{\triangle OCA}=\frac{\triangle KAB}{\triangle OAB}$$

デアルコトヲ證明セヨ。



【註】三角錐 $O—ABC$ ノ高サヲ h, K カラ各面ヘノ垂線(之レラハ相等シイ)ヲ p トスレバ,

$$三角錐K-OAB=\frac{1}{3}h\cdot\triangle KAB=\frac{1}{3}p\cdot\triangle OAB$$

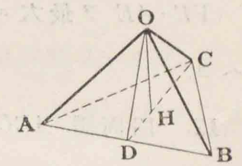
$$\therefore\ \frac{\triangle KAB}{\triangle OAB}=\frac{p}{h},\ 同様ニ,\ \frac{\triangle KCA}{\triangle OCA}=\frac{\triangle KBC}{\triangle OBC}=\frac{p}{h}$$

6. 三角錐ノ底面ガ正三角形デ,頂點ニ於ケル各面角ガ何レモ直角デアルトキ,三側稜ハ皆相等シク,高サノ平方ハ側稜ノ平方ノ三分ノ一ニ等シイ。

7. 與ヘラレタ角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナ平面デ截リ,其ノ截面積ヲ底面積ノ三分ノ一ニシヨウトスル。此ノ截面ガ側稜ト交ル點ヲ作圖ニヨツテ求メヨ。

8. 三角錐 $O—ABC$ ノ頂點 O ニ於ケル面角ガ何レモ

直角デアルトキ,H ヲ頂點 O ノ底面 ABC 上ニ投ズル正射影デアルトスレバ,$\triangle AOB$ ハ $\triangle ABC$ ト $\triangle HAB$ トノ比例中項デアル。



【註】$OC\perp OB,\ \ OC\perp OA$

$\therefore\ OC\perp 平面OAB$

$\therefore\ OD^2=CD\cdot HD$

9. 與ヘラレタ四面體ノ二ツノ相對スル稜ガ相等シイトキ,ソノ二ツノ對稜ニ平行ナ任意ノ平面デコノ四面體ヲ截ルトキハ,周ノ一定ナ平行四邊形ヲ生ズル。

10. 四面體ヲ一平面デ截リ,其ノ截口ヲ菱形ニセヨ。

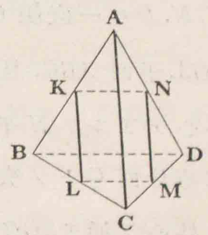
【註】$KN/\!/BD,\ \ KL/\!/AC$

$$\therefore\ \frac{KN}{BD}=\frac{AK}{AB},\quad \frac{KL}{AC}=\frac{BK}{AB}$$

$KN=KL$

$$\therefore\ \frac{AK}{KB}=\frac{AC}{BD}$$

故ニ K ハ定ル。



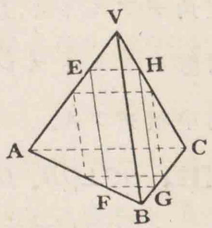
11. 四面體 $V—ABC$ ヲ其ノ相對スル稜 VB, AC ニ平行ナ平面デ截リ,其ノ四稜 VA, AB, BC, CV ト此ノ平面トノ交點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ,四邊形 $EFGH$ ノ面積ガ最大デアルタメニハ E 點ノ位置ハドウカ。

【註】四邊形 $EFGH$ ノ面積 $EH\cdot EF\cdot \sin\alpha$

(α ハ VB ト AC トノナス角)。

故ニ面積ハ $VE \cdot AE$ ニ比例スル。

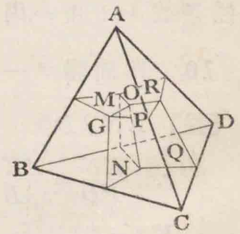
$VE \cdot AE$ ヲ最大ニスル E 點ヲ考ヘヨ。



12. 四面體 $ABCD$ ノ六ツノ二面角ノ二等分面ハ一點ヲ通ルコトヲ證明セヨ。

【註】各面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ノ交リヲ考ヘヨ。

13. 四面體ノ各面ノ外心ヲ通リ,各面ニ垂直ナ四直線ハ同一ノ點ヲ通ル。



【註】AB, BC, CA ノ垂直二等分面 M, N, P ハ一直線 OG ヲ通ル。$OG \perp$ 平面 ABC, 且ツ G ハ $\triangle ABC$ ノ外心デアル。N 平面ト CD ノ垂直二等分面 Q トノ交線ハ平面 BCD ニ垂直デ且ツ, $\triangle BCD$ ノ外心ヲ通リ, OG ト交ル。ソノ交點ヲ O トスレバ O ハ A, B, C, D カラ等距離ニアル。

14. 三組ノ對稜ガ垂直ナル四面體ノ各稜ヲ含ミ對稜ニ垂直ナ六平面ハ同一ノ點ヲ通リ,三双ノ對稜ノ共通垂線モ亦同一ノ點ヲ通ル。

【註】三面角ノ各稜ヲ含ミ對面ニ垂直ナ平面ハ同一直線ヲ通ル。

15. 四面體ノ各頂點ヲ之ニ對スル面ノ重心ニ結ブ四ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

16. 平面 P 上ニ頂點 D ヲ有スル四面體 $D—ABC$ ガアル。$AD^2+BD^2+CD^2$ ヲ最小ニスルニハ,D 點ノ P 平面上ニ於ケル位置如何。

17. 四面體 $ABCD$ ト其ノ底面 BCD ニ平行ナ一平面トノ交リヲ PQR トスル。頂點 A ヲ底ノ重心ニ結ビツケル直線ハ截口 PQR ノ重心ヲ通ル。

18. 四面體 $O—ABC$ ノ稜 OA, OB ヲ C ヲ通ル平面 CED デ夫々 D, E ニ於テ截ルトキハ,兩四面體 $O—ABC, O—DEC$ ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

19. 四面體 $V—ABC$ ノ一頂點 V ニ於ケル平面角ガ皆直角デ,ソノ三稜 VA, VB, VC ガ相等シイトキハ,底面上ノ任意ノ一點 P カラ他ノ三面ニ下シタ垂線 PL, PM, PN ノ和ハ一定デアル。

20. エヂプトノ「ギゼイ」ノ「ピラミッド」ハ正四角錐デ,底面ノ一邊 233 m,高サ 146 m デアル。其ノ體積及ビ側面積ヲ計算セヨ。但シ 1 立方米及ビ一平方米未滿ハ四捨五入セヨ。

21. 側面ガ a cm ナル邊ヲ有スル正三角形カラナル角錐中最大側面積ヲ有スルモノヲ求メ,且ツソノ側面積ヲ計算セヨ。

22. 正六角錐ノ底面ノ一邊ノ長サガ r デ,ソノ側稜ト高サトノ間ノ角ハ $30°$ デアル。此ノ角錐ノ側面積ト體積トヲ計算セヨ。

23. 角錐臺ノ高サガ元ノ角錐ノ高サノ五分ノ二デアルトキ,兩者ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

第三章ノ問題

1. 正四面體ヲ相對スル一組ノ稜ニ平行ナ任意ノ平面デ截ルトキ,其ノ截口ハ周ノ一定ナ矩形デアル。

2. 一稜ノ長サガ a デアル正四面體ノ高サ及ビ對稜ノ共通垂線ノ長サヲ求メヨ。

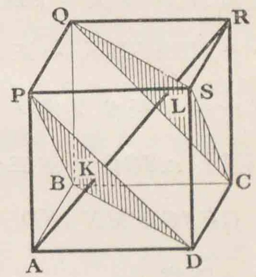
3. 稜ノ長サ a cm ノ正四面體 $ABCD$ ガアル。三角形 BCD, CDA, DAB, ABC ノ重心ヲ夫々 E, F, G, H トスルトキ,正四面體 $EFGH$ ノ體積ヲ求メヨ。

4. 正四面體 $ABCD$ ノ稜 BC ノ中點ヲ E トスルトキハ,平面 AED ハ平面 BCD ニ垂直デアル。

5. 「總テノ面ガ互ニ合同デアル四面體ハ正四面體デアル」トイフ命題ハ正シイカ。

6. 立方體ノ一稜ノ中點トソノ中心トヲ結ブ直線ハ此ノ稜ノ上ニナイ頂點ヲ通ル對角線ニ垂直デアル。

7. 立方體 $PQRS-ABCD$ ノ對角線 AR ハ平面 PBD, CQS ニヨツテ三等分セラレル。



【註】 平面 $PBD \parallel$ 平面 CQS ニ注意セヨ。

8. 立方體 $PQRS-ABCD$ ノ頂點 P, B, D, R ヲ結ンデ三角錐ヲ作ルトキ,各稜ハ相等シイ。コノ四稜ノ中點ヲ結ベバ正方形ガ生ズルコトヲ證明シ,立方體ノ一稜ヲ a トシテコノ正方形ノ面積ヲ求メヨ。

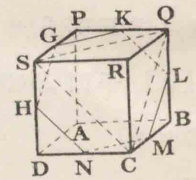
9. 立方體 $ABCD-EFGH$ ノ稜ノ長サ a デ, M, N ハ夫夫一双ノ對稜 AB, GH ノ中點デアルトキ $EMCN$ ハ菱形デアルコトヲ證シ,且ツソノ對角線ト面積トヲ求メヨ。

10. 一稜ガ a デアル立方體ト正四面體トガアルトキ,立方體ノ對角線ノナス角ト正四面體ノ面ノナス二面角ノ平面角トハ相等シク,立方體ノ對角線ガ一面トナス角ハ正四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ直線ガソノ一面トナス

角ニ相等シイコトヲ證明セヨ。

【註】各角ノ正弦ヲ求メテ比較セヨ。

11. 立方體 $PQRS-ABCD$ ノ稜ノ長サヲ a トシ, H, G, K, L, M, N ヲ夫々 SD, SP, PQ, QB, BC, CD ノ中點トスルトキ, $HGKLMN$ ハ正六邊形デアルコトヲ證明シ且ツ,ソノ一邊ノ長サヲ求メヨ。



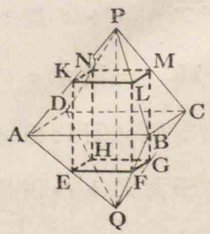
【註】$\triangle SCQ$ ハ正三角形

$GK \parallel SD, MN \parallel SD, \cdots\cdots$ デアルコトニ注意。

12. P, Q ハ正八面體ノ二ツノ相對スル頂點デ, $ABCD$ ハ P ト Q トノ間ニアル正方形デアルトキ, PA ト QD トノ間ノ傾角ハ何度カ。

13. 立方體ノ稜ノ長サハ 12cm デアル。ソノ各面ノ中心ヲ結ンデ生ズル立體ハ何カ。ソノ體積ヲ立方米ヲ單位トシテ計算セヨ。

14. 正八面體ノ十二稜ノ中八稜ノ中點ヲ結ンデ生ズル圖形ハ正四角壔デアルコトヲ證明シ,正八面體ノ各稜ノ長サヲ a トスルトキ,正四角壔ノ稜ノ長サヲ求メヨ。



第三編ノ部

第一章ノ問題

1. 高サ h, 底ノ半徑ガ a デアル直圓錐ヲ底ニ平行ナ $(n-1)$ 個ノ平面デ截リ體積ヲ n 等分スルトキ, $(n-1)$ 個ノ平面ノ中デ,底ニ最モ近イ平面ト直圓錐ノ軸トノ交點ハ底面カラ何程ノ距離ニアルカ。

2. 高サ 20cm ノ直圓錐及ビ底面ノ半徑ガ 10cm ノ直圓壔ガアル。此ノ二ツノ立體ハ相等シイ側面積及ビ體積ヲ有スルトキ此ノ直圓錐ノ底面ノ半徑及ビ直圓壔ノ高サヲ求メヨ。「ミリメートル」未滿ハ四捨五入セヨ。

3. 一稜ガ 12.3cm デアル立方體ト等積デ高サガ 14cm ノ直圓錐ノ底ノ半徑 (r cm) ハ次式デ求メラレルコトヲ示セ。

$$r=\sqrt{\frac{12.3^3\times3}{14\times3.1416}}$$

次ニ對數ニヨツテコノ r ヲ求メヨ。

4. 兩底面ノ半徑ノ長サガ夫々 a, b デアル直圓錐臺ガアル。今,底面ニ平行ナ平面デ體積ヲ二等分スルトキ,截面ノ半徑ノ長サヲ a, b デ表ハセ。

5. 驟雨ノ時,戸外ニ置カレタ「バケツ」ノ中ニ溜ツタ雨水ノ深サハ 18 mm アツタ。「バケツ」ハ上面ノ直徑 30 cm,下面ノ半徑 20 cm,深サ 30 cm ノ截頭直圓錐デアツタ。モシ「バケツ」ガ底面ノ直徑 30 cm ノ直圓壔デアツタトシタラ深サハ何 mm カ。

6. 三邊ノ長サガ夫々 13 cm, 14 cm, 15 cm ノ三角形ガアル。之ヲ 15 cm ノ邊ノ周リニ一廻轉サセテ得ル立體ノ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トセヨ。

7. 三角形ノ三邊ノ長サヲ夫々 a, b c トスレバ,各一邊ヲ軸トシテ此ノ三角形ヲ一廻轉シタトキ生ズル三ツノ立體ノ體積ノ比ハ $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$ デアル。

8. 相似直角三角形ノ對應邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル直圓錐ノ側面積及ビ體積ハ夫々底面ノ半徑ノ平方及ビ立方ニ比例スル。

第二章ノ問題

1. 一邊ガ a ノ正三角形ヲ底トシ,高サ h ノ正三角錐ニ外接スル球ノ半徑ハイクラカ。

2. 頂角ガ α デアル直圓錐ト其ノ外接球トノ體積ノ比ヲ求メヨ。

3. 半徑 R 中心 O デアル球ニ內接スル直圓錐ガアル。直圓錐ノ底ノ小圓ノ周上ノ點 B ト,其ノ小圓ノ二極ノ中,頂點 V ト一致シナイ極 P トヲ結ビツケル大圓ノ弧ガ大圓周ノ $\frac{1}{12}$ ニ等シイトキ,コノ內接圓錐ノ體積ヲ求メヨ。

4. 中心 O デアル球面上ニ三頂點ヲ有スル正三角形 ABC ノ平面ヘ O カラ垂線 OH ヲ引キ, OH ノ H ヲコエテノ延長ト球面トノ交點ヲ M トスル。

今 $\triangle ABC$ ノ一邊ノ長サガ a cm デ,線分 MH ノ長サガ h cm デアレバ球ノ半徑ハ何糎カ。

5. 球外ノ一直線ヲ含ミ,ソノ球ヘノ切平面ヲ作レ。

6. 球面上ノ二點 A, B ニ於テノ切平面ガ交ルトキハ,ソノ直線ハ直線 AB ト交ラナイ。

【註】 球ノ中心ヲ O トスレバ, OA, OB ノ決定スル平面ハ切平面ノ交線ニ垂直デアル。

7. 定直線ヲ含ム平面デ定球ヲ截ルトキ,其ノ截口ノ圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

8. 底面ノ半徑 6 cm, 高サ 3 cm ノ缺球ノ側面積ヲ求メヨ。

9. 直徑 3 cm, 4 cm, 5 cm ノ三球ヲ熔解シテ一球トスルトキノ其直徑ハ幾ラカ。

10. 球ノ面積ヲS,體積ヲVトシ,此ノ球ニ外切スル直圓壔ノ全表面積ヲS',體積ヲV'トスルトキハ$S:S'=V:V'$デアルコトヲ證明セヨ。

11. 半徑rノ球ノ大圓ヲ底面トシ,此ノ球ト等積デアル直圓錐ヲ作ルトキハ,コノ直圓錐ノ全表面積ハ球ノ全表面積ノ幾倍トナルカ。小數第二位マデ正シク求メヨ。

12. 頂角$60°$ノ直圓錐ニ內切スル半徑$2\,cm$ノ球ガアル。此ノ球ト直圓錐トニヨツテ圍マレタ立體ノ體積ヲ求メヨ。

13. 一平面M外ノ一定點Aヲ其ノ平面上ノ任意ノ點Pニ結ブ直線上ニ一點Qヲ取リ,APトAQトノ積ヲ與ヘラレタ正方形a^2ニ等シクスルトキ,Qノ軌跡ヲ求メヨ。

14. 空間ニ一ツノ圓ガアル。コノ圓ノ平面外ノ一點Aカラ圓周上ノ任意ノ點Pニ結ビツケル直線上デ$AP \cdot AP'=1$ナルヤウニ取ラレタ點P'ノ軌跡ハ亦一ツノ圓デアルコトヲ證セヨ。

【註】 點Aカラ圓ノ平面ニ垂線AHヲ下シ,$AH' \cdot AH=1$ニナル點H'ヲ定メテ考ヘヨ。

15. 與ヘラレタ二ツノ球ヲ等角ニ見ル點ノ跡跡ヲ求メヨ。

解　　答

第　二　編

P. 43　問 **2.**　$4\sqrt{3}\,a\,(a+h)$

P. 48　問　$288\,cm^3$

P. 49　問　$Sl\sin\alpha$

P. 52　問 **3.**　$96\,cm^2$

P. 54　問　$10\,cm^2$

P. 58　問　$1.69\,m$

P. 60　問　$624\,cm^3$

問題 (**1**) $\sqrt{2}\,a^2$　(**7**) $150\,cm^3$, $1050\,cm^3$

P. 65　問題 (**2**) $1:2$, $12a$

第　三　編

P. 70　問題 (**3**) $a:b$,　(**4**) $\frac{a^3\pi}{4}$,　(**5**) $15.072\,cm^3$

P. 72　問題 (**1**) $\frac{7}{24}\pi a^2h$,　$594\,cm^3$　$\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$

(**3**) $241\,cm^3$　(**4**) $\frac{3n^2-3n+1}{n^3}$倍

P. 77　問題 (**5**) $\frac{3}{2}R$

P. 79　問題 (**1**) $72.4\,cm^2$

P. 82　問題 (**1**) $15\,cm$,　(**2**) $7\,cm$,　(**5**) $30\,cm$,　$3141.6\,cm^2$

P. 84　問題 (**2**) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3 cm^3$　(**4**) $\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}$　(**5**) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3\pi$

補充問題解答

第　一　編

第三章　(1)　$65\frac{5}{8}m^2$　(10)　$\frac{1}{\sqrt{13}}$

第四章　(2)　3.67 m　(3)　直角　(7)　$\frac{\sqrt{15}}{4}a$

(12)　9.80 cm^2　(13)　1056呎, 330呎, 6600呎, 4.4呎＝ツキ1呎

(14)　$\frac{1}{a}\sqrt{c^2a^2-p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $\frac{1}{a}\sqrt{a^2b^2-p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(18)　30°

第　二　編

第一章　(3)　$\sqrt[3]{\frac{a^2V}{bc}}$, $\sqrt[3]{\frac{b^2V}{ca}}$, $\sqrt[3]{\frac{c^2V}{ab}}$,　(4)　$\frac{ac^2}{b^2+c^2}$

(5)　$\frac{1}{3}\sqrt{b^2+4c^2}$　(6)　$\frac{a}{3}\sqrt{\frac{3l^2-a^2}{4l^2-a^2}}$

第二章　(18)　$\frac{OA\cdot OB}{OD\cdot OE}$　(20)　2642065 m^3,　87041 m^2

(21)　5角錐,　$\frac{5\sqrt{3}}{4}a^2cm^2$　(22)　$\frac{3}{2}\sqrt{15}r^2$,　$\frac{3}{2}r^3$,

(23)　125 : 98

第三章　(2)　$\sqrt{\frac{2}{3}}a$,　$\frac{\sqrt{2}}{2}a$　(3)　$\frac{\sqrt{2}}{324}a^3cm^3$　(5)　正シクナイ

(8)　$\frac{1}{2}a^2$　(9)　$\sqrt{2}\,a$,　$\sqrt{3}\,a$,　$\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$,　(11)　$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

(12)　60°,　(13)　0.000288 m^3,　(14)　$\frac{1}{2}a$,　$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

第　三

第一章　(1)　$h\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\right)$,　(2)　22.7 cm, 34.3 cm　(3)　11.26cm

(4)　$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$,　(5)　8.2 mm　(6)　1971.2 cm^3

第二章　(1)　$\frac{h}{2}+\frac{a^2}{6h}$

(2)　$2\cot^4\frac{a}{2} : \left(\cot^2\frac{a}{2}+1\right)^3$　(3)　$\frac{2+\sqrt{3}}{24}\pi R^3$

(4)　$\left(\frac{h}{2}+\frac{a^2}{6h}\right)cm$,　(8)　$45\pi\ cm$　(9)　6 cm,

(11)　1.27倍　(12)　$\frac{4}{9}\pi\ cm^3$

昭和九年十一月　一　日印　　刷
昭和九年十一月　五　日發　　行
昭和十年　一　月　三　日訂正再版印刷
昭和十年　一　月　七　日訂正再版發行

新　制
立體幾何學教科書
（增　課）

不許	定價金四拾五錢	複製

著作者　竹　中　曉

發行兼印刷者　田　口　繁　藏
大阪市西區京町堀上通一丁目十六番地

發行所
大阪市西區京町堀上通一丁目
精　華　房
電話土佐堀二八七八番
振替大阪二一九四五番