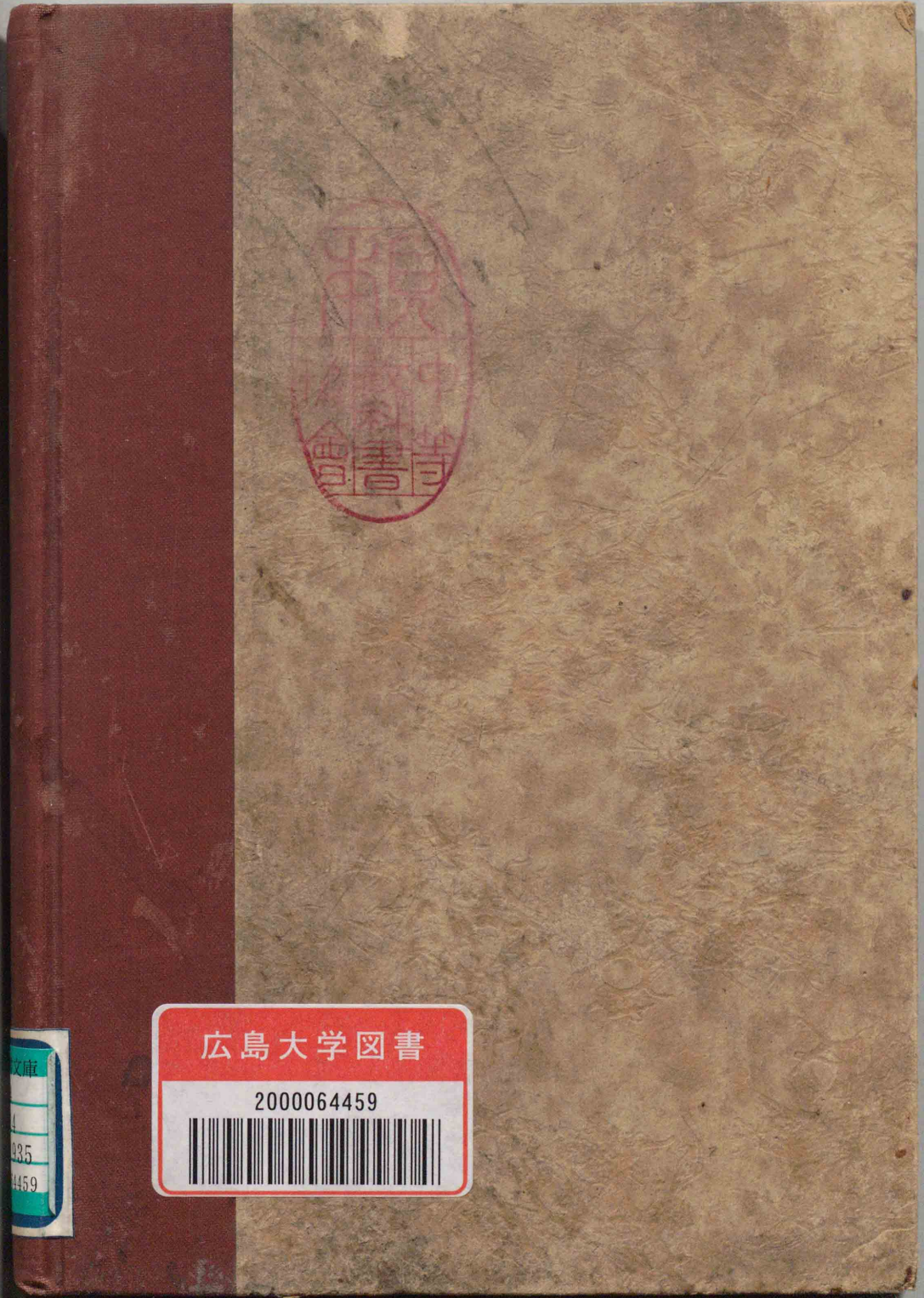
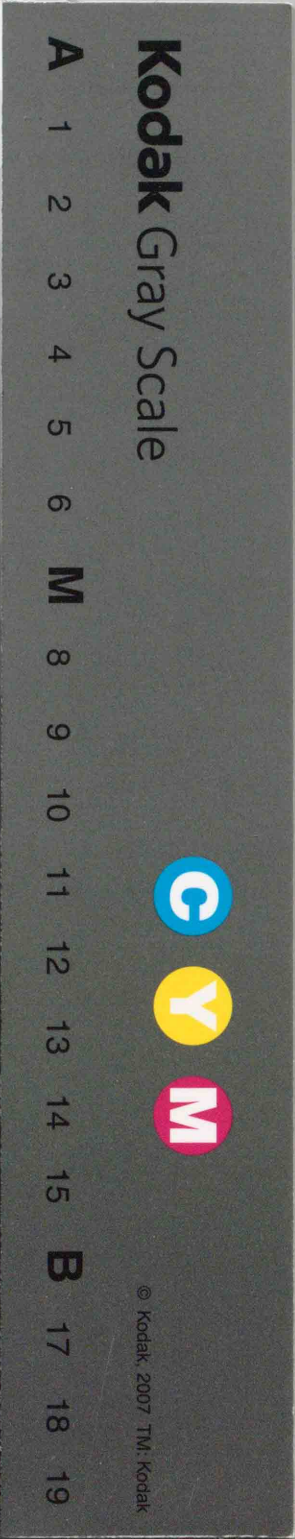
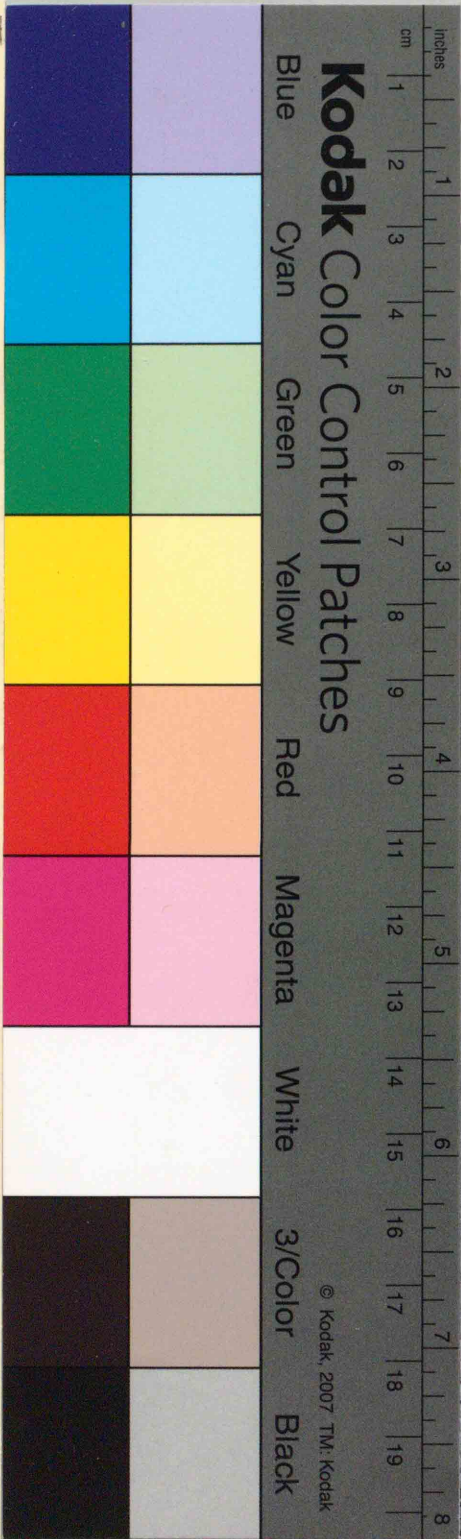


40182

教科書文庫

| |
|-----------------|
| 4 |
| 4/4 |
| 41-1935 |
| 2000.0 64459 |



広島大学図書

2000064459

教科書文庫

41-1935

64459



395.9

547

教科書文庫
4
414
41-1935
2000064459

資 料 室

昭和十年十二月五日
中學校數學科
文部省檢定濟

中等教育
幾何三角法
下

東京高等師範學校附屬中學校內
數學研究會編



東京目黒書店發行

広島大学図書

2000064459



110. 問題 ... 58
 雑問題 ... 63

第七章 立體幾何 直線ト平面 ... [65—99]

111. 平面トソノ決定 ... 65
 112. 直線及ビ平面相互ノ位置關係 ... 68
 113. 直線ト平面トノ平行ニ關スル性質 ... 71
 114. 平行平面ニ關スル性質 ... 75
 115. 平面ノ垂線(1) ... 78
 116. 平面ノ垂線(2) ... 82
 117. 直線ノ正射影 ... 84
 118. 二直線ノ共通垂線 ... 87
 119. 二面角 ... 89
 120. 多角形ノ正射影 ... 92
 121. 多面角 ... 94
 雑問題 ... 98

第八章 多面體 ... [100—122]

122. 多面體 角嚢 ... 100
 123. 平行六面體 直方體 立方體 ... 103
 124. 角錐 ... 104
 125. 正多面體 ... 108
 126. 直角嚢ノ體積 ... 111
 127. 斜角嚢ノ體積 ... 113
 128. 角錐ノ體積 ... 116
 129. 角錐臺ノ體積 ... 119
 雑問題 ... 121

第九章 曲面體 ... [123—144]

130. 直圓嚢 ... 123
 131. 直圓錐 ... 125
 132. 直圓錐臺 ... 128
 133. 球 球ト平面 ... 129
 134. 相切スル球ト相交ル球 ... 132
 135. 球ノ表面積 ... 135
 136. 球ノ體積 ... 139
 雑問題 ... 143

第十章 三角法 銳角及ビ鈍角ノ三角

函數 ... [145—160]

137. 三角法 銳角ノ三角函數 ... 145
 138. 鈍角ノ三角函數 ... 149
 139. 三角形ノ邊ト對角トノ關係 ... 152
 140. 二邊夾角ト第三邊トノ關係 ... 154
 141. 三角形ノ面積 ... 156
 雑問題 ... 159

第十一章 一般三角形ノ解法ト應用 ... [161—181]

142. 二角ト一邊ヲ知ル場合 ... 161
 143. 二邊ト夾角ヲ知ル場合 ... 162
 144. 三邊ヲ知ル場合 ... 163
 145. 問題 ... 164
 146. 三角函數ノ對數表 ... 166
 147. 對數計算ニヨル三角形ノ解法(1) ... 167
 148. 正切ニ關スル公式 ... 169

149. 對數計算ニヨル三角形ノ解法(2) ... 171
 150. 測量問題 ... 174
 151. 三角測量 ... 176
 雜問題 ... 180

第十二章 一般角ノ三角函數... [182—211]

152. 一般角 象限 ... 182
 153. 一般角ノ三角函數 ... 185
 154. 三角函數間ノ關係 ... 187
 155. 三角函數ノ値ノ變化 ... 189
 156. 三角函數ノぐらふ ... 193
 157. 負角ノ三角函數 角ノ化法 ... 196
 158. 正弦餘弦ノ加法公式 ... 199
 159. 正弦餘弦ノ減法公式 ... 201
 160. 正切ノ加法公式減法公式 ... 202
 161. 二倍角ノ公式 ... 203
 162. 半角ノ公式 ... 205
 163. 正弦餘弦ノ積ヲ和ニ變換 ... 206
 164. 正弦餘弦ノ和ヲ積ニ變換 ... 208
 雜問題 ... 210

第十三章 三角法ノ補充... [212—225]

165. 弧度 ... 212
 166. 三角方程式ノ一般的解法 ... 214
 總復習雜問題 ... 219

問題ノ答... (卷末)

諸表

[1] ぎりしや文字 ... (卷末)
 [2] 三角函數表 ... (卷末)
 [3] 正弦ノ表 ... (卷末)
 [4] 餘弦ノ表 ... (卷末)
 [5] 正切ノ表 ... (卷末)
 [6] 數ノ對數表 ... (卷末)
 [7] 正弦ノ對數表 ... (卷末)
 [8] 餘弦ノ對數表 ... (卷末)
 [9] 正切ノ對數表 ... (卷末)
 [10] 平方根ノ表 ... (卷末)
 [11] 平方平方根ノ表
 立方立方根ノ表 ... (卷末)

第六章

平面幾何ノ補充

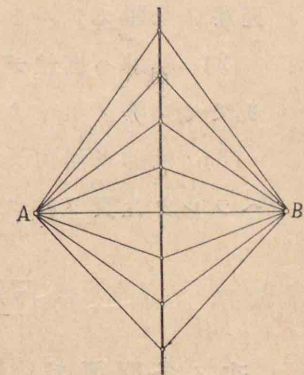
87. 軌跡

例へバ、二定點 A, B カラ相等シイ距離ニアル點ノ集
リニツイテ考ヘルト、既ニ學ンダヤウニ

- [i] A, B カラ相等シイ距離
ニアル點ハ總テ A, B ヲ結
ブ線分ノ垂直二等分線上
ニアル。

又

- [ii] A, B ヲ結ブ線分ノ垂直
二等分線上ノ點ハ、悉ク A,
B カラ相等シイ距離ニア
ル。



即チ A, B ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ハ、コノ二定點
A ト B トカラ相等シイ距離ニアルトイフ性質ヲ持ツ
總テノ點ヲ含ミ、ソレ以外ノ點ハ一ツモ含マナイ圖形
デアル。

カヤウナ場合ニハ特ニ軌跡トイフ言葉ヲ用ヒテ次
ノヤウナ述べ方ヲスル。

二定點 A, B カラ相等シイ距離ニアル點ノ軌跡ハ、
 A, B ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。

一般ニ軌跡ハ次ノヤウニ定義サレル。

定義 或性質ヲ持ツ點ハ皆或圖形ノ上ニアリ、逆ニコ
ノ圖形上ノ點ハ何レモソノ性質ヲ持ツトキ、コノ
圖形ヲソノ性質ヲ持ツ點ノ軌跡トイフ。

注意 (1) 軌跡ハ又或性質ヲ持ツ點ガ動クト考ヘタトキノ
通路ノ全體デアルトモ考ヘラレル。

(2) 軌跡ハ直線デアルコトモアリ、曲線デアルコトモアリ、
又ソレ等ノ集リカラナル圖形デアルコトモアル。

(3) 軌跡ガ如何ナル圖形デアルカ判ジ難イトキニハ、與
ヘラレタ性質ヲ持ツ幾ツカノ點ヲトツテ見ルガヨイ。

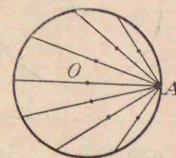
練習問題

次ノ各問題デ軌跡ハ如何ナル圖形ニナルカ。タ
ダソレヲ推定セヨ。

1. 東京驛ヲ一點ト見ナスト、コノ點カラ 5km ノ距離
ニアル點ノ軌跡
2. 運動場ニ引カレターツノ直線カラ 2m ノ距離ニ
アル點ノ軌跡
3. 二平行線ノ各ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡
4. 半徑 a ナル一ツノ圓ガ、 O ヲ中心トシ半徑 b ナル

他ノ定圓ニ外切シナガラ廻轉スルトキ、ソノ中心
ノ軌跡、又内切シナガラ動クトキ、ソノ中心ノ軌跡

5. O ヲ中心トスル定圓周上ノ一定
點 A カラ出ル弦ノ中點ノ軌跡
6. 直線 AB 外ノ一定點 C カラ AB
上ノ各點ニ至ル線分ノ中點ノ軌
跡



88. 基本軌跡 (1)

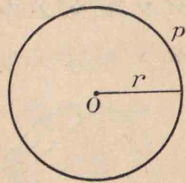
前節ノ定義ニヨツテ、或圖形ガ或性質ヲ持ツ點ノ軌
跡デアルコトヲ斷定スルニハ、次ノ二項ヲ證明スベキ
デアアル。

[i] 與ヘラレタ性質ヲ持ツ點ハ皆ソノ圖形
ノ上ニアル。

[ii] ソノ圖形ノ上ノ點ハ皆與ヘラレタ性質
ヲ持ツ。

次ノ定理ハ容易ニ知ラレル。

定理 一定點カラ與ヘラレタ距離ニアル點
ノ軌跡ハ、ソノ點ヲ中心トシ與ヘラレタ距離
ヲ半徑トスル圓周デアアル。

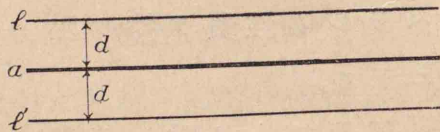


題意 一定點 O カラ r ノ距離ニアル
ル點ノ軌跡ハ、 O ヲ中心トシ r
ヲ半徑トスル圓周 p デアル。

證明 (各自ニ考ヘヨ)

定理 一定直線カラ與ヘラレタ距離ニアル
點ノ軌跡ハ、コノ直線ニ平行デ、與ヘラレタ距
離ニアル二ツノ直線デアル。

題意 定直線 a カラ d ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ、 a ニ
平行デアツテ a カラノ距離ガ d デアルトコロノ二
ツノ直線 l 及ビ l' デアル。



證明 (各自ニ考ヘヨ)

注意 (1) 與ヘラレタ性質ヲモツ點ガ皆ソノ圖形上ニアル
コトヲ證明スルニハ、ソノ性質ヲ持つ任意ノ點ガソノ圖形
上ニアルコトヲ證明スレバヨイ。又考ヘル圖形上ノ總テ
ノ點ガ與ヘラレタ性質ヲ持つコトヲ證明スルニハ、ソノ圖
形上ノ任意ノ點ヲトツテ、ソレガ與ヘラレタ性質ヲ持つコ
トヲ證明スレバヨイ。

(2) 或性質ヲ持つ點トイフ代リニ或條件ヲ持つ點或ハ
或條件ニ適スル點又ハ或條件ヲ満足スル點等トイフコト
モアル。

練習問題

次ノ各軌跡ヲ畫ケ。ソシテコノ軌跡ヲ言葉デ述
ベヨ。又ソレヲ證明スルニハ、ドウイフ事柄ヲ證
明スレバヨイカライヘ。

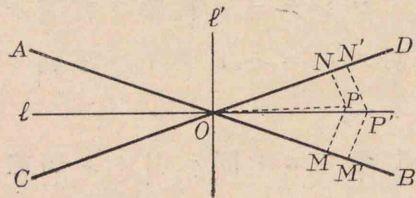
1. O ヲ中心トシ a ヲ半徑トスル圓ニ引イタ切線ノ
長サガ d デアル如キ點ノ軌跡
2. 位置ノ與ヘラレタ長サ a ナル線分ヲ底邊トシ、 b^2
ニ等シイ面積ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡
3. 與ヘラレタ二ツノ同心圓ノ各ニ切スル圓ノ中心
ノ軌跡
同心圓ノ中心ヲ O 、半徑ヲ r 及ビ r' トシテ考ヘヨ。

89. 基本軌跡 (2)

定理 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ、
ソノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアル。

題意ヲ述べ、各自ニ證明セヨ。

定理 相交ル二ツノ直線カラ等距離ニアル
 點ノ軌跡ハ、ソノ二直線ノナス角ヲ二等分ス
 ル二ツノ直線デアアル。



題意 相交ル二直線
 AB, CD カラ等距離
 ニアル點ノ軌跡ハ、
 ソノナス角ノ二等
 分線 l 及ビ l' デアル。

證明

[i] P ヲ與ヘラレタ性質ヲ持ツ任意ノ點トシ、コノ
 點カラ AB, CD ニ引イタ垂線ノ足ヲソレゾレ M,
 N トスレバ

$$PM = PN$$

ヨツテ P ト二直線 AB, CD ノ交點 O トヲ結ブト

$$\triangle POM \equiv \triangle PON$$

$$\therefore \angle POM = \angle PON$$

故ニ P ハ角ノ二等分線 l 或ハ l' ノ何レカノ上ニ
 アル。

即チ AB, CD カラ等距離ニアル點ハ皆 l 或ハ l'
 ノ上ニアル。

[ii] l 上ニ任意ノ一點 P' ヲトリ、コノ點カラ AB, CD
 ニ引イタ垂線ノ足ヲソレゾレ M', N' トスルト

$$\triangle P'OM' \equiv \triangle P'ON'$$

$$\therefore P'M' = P'N'$$

點ヲ l' 上ニトルモ同様デアアル。

故ニ l 及ビ l' 上ノ點ハ何レモ AB, CD カラ等距
 離ニアル。

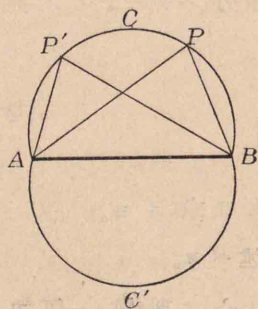
故ニ相交ル二直線 AB, CD カラ等距離ニアル點ノ
 軌跡ハ、AB, CD ノナス角ヲ二等分スル二ツノ直線
 l 及ビ l' デアル。

練習問題

- 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。
 カヤウナ問題デハ先ツ軌跡ヲ述ベヨ。
- 相交ル二直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ何カ。
- 圓周上ノ一定點ニ於テコレニ切スル圓ノ中心ノ
 軌跡ヲ求メヨ。
- 與ヘラレターツノ直線ニ平行ナ定圓ノ弦ノ中點
 ノ軌跡ヲ求メヨ。
- $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ニ平行ナ直線ガ他ノ二邊又ハソ
 ノ延長ニヨツテ截リ取ラレル線分ノ中點ノ軌跡
 ヲ求メヨ。

90. 基本軌跡 (3)

定理 位置及ビ大サノ與ヘラレタ線分ガ與ヘラレタ角ヲ以テ對スル點ノ軌跡ハ、ソノ線分ヲ弦トシソノ角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアアル。



題意 AB ヲ位置及ビ大サノ與ヘラレタ線分トシ、 α ヲ與ヘラレタ角トスレバ、AB ガ角 α ヲ以テ對スル點ノ軌跡ハ、AB ヲ弦トシ角 α ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧 ACB 及ビ AC'B デアル。

證明

[i] 弧 ACB 上ニ任意ノ一點ヲトリコレヲ P トスルト、同ジ弓形ノ角ハ皆相等シイカラ

$$\angle APB = \alpha$$

點ヲ弧 AC'B 上ニトルモ同様デアアル。

故ニ弧 ACB 及ビ弧 AC'B 上ノ點ハ何レモ與ヘラレタ條件ニ適スル。

[ii] P' ヲ條件ニ適スル任意ノ點トスルト

$$\angle AP'B = \alpha$$

今 P' ガ AB ニ關シテ弧 ACB ト同ジ側ニアルモノトシ、若シ P' ガ弧 ACB ノ上ニナイモノトスレバ、P' ハ弓形 ACB ノ内又ハ外ニアルコトニナル。然ルニ弓形ノ弦ガ弓形内ノ點又ハソノ弓形ト同ジ側ニアル弓形外ノ點ニ於テ對スル角ハ總テ弓形ノ角ニハ等シクナイ。故ニ $\angle AP'B = \alpha$ ナル限リハ P' ハ弧 ACB ノ上ニナクテハナラナイ。

P' ガ AB ニ關シテ弧 AC'B ノ側ニアルトシテモ同様ニシテ P' ハ弧 AC'B ノ上ニナクテハナラナイ。故ニ AB ガ角 α ヲ以テ對スル點ハ皆弧 ACB 或ハ弧 AC'B ノ何レカノ上ニアル。

故ニ AB ガ角 α ヲ以テ對スル點ノ軌跡ハ、AB ヲ弦トシ角 α ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧 ACB 及ビ AC'B デアル。

注意 コノ證明ノヤウニ順序ヲカヘテ先ヅ或圖形上ノ總テノ點ガ條件ニ適スルコトヲ證明シ次ニ條件ニ適スル點ガ總テソノ圖形上ニアルコトヲ證明シテモヨイ。

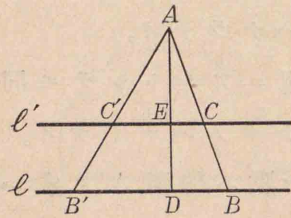
練習問題

1. 一ツノ定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 位置及ビ大サノ與ヘラレタ一線分ヲ底邊トシ與ヘラレタ頂角ヲ持ツ三角形ノ内心ノ軌跡ヲ求メヨ。

91. 問題

例1. 定點 A カラ定直線 l 上ノ任意ノ點 B マデ引イタ線分ヲ一點 C ニ於テ内分シ, $AC:CB$ ヲ一定ノ比 $m:n$ ニ等シクスルトキ, 點 C ノ軌跡ヲ求メヨ。



軌跡 求メル軌跡ハ A カラ l ニ下シタ垂線 AD ヲ $m:n$ ニ内分スル點 E ヲ通ツテ l ニ平行ナ直線 l' デアル。

證明

[i] 條件ニ適スル任意ノ點 C ト E トヲ結ブト

$$AC:CB = m:n, \quad AE:ED = m:n$$

$$\therefore AC:CB = AE:ED$$

$$\therefore CE \parallel BD$$

故ニ條件ニ適スル點ハ皆 E ヲ通ツテ l ニ平行ナ直線 l' ノ上ニアル。

[ii] 次ニ l' 上ノ任意ノ一點ヲ C' トシ, A ト C' トヲ通ル直線ヲ引イテ l トノ交點ヲ B' トスルト

$$AE:ED = m:n, \quad C'E \parallel B'D$$

$$\therefore AC':C'B' = AE:ED = m:n$$

故ニ l' 上ノ點ハ皆條件ニ適スル。

ヨツテ求メル軌跡ハ A カラ l ニ下シタ垂線 AD ヲ $m:n$ ニ内分スル點 E ヲ通ツテ l ニ平行ナ直線 l' デアル。

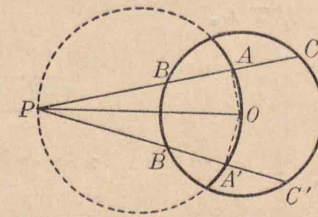
注意 (1) 上ノ證明ニ於ケル E ノヤウナ點ヲ軌跡ノ特殊點トイフコトガアル。條件ニ適スル點ノ中デ特殊ナ位置ニアルモノダカラデアル。軌跡ヲ求メルノニ特殊點ヲ利用シテ便利ナコトガアル。

(2) 與ヘラレタ性質ヲ持ツ點ノ軌跡デアル圖形ガ容易ニ判明シナイトキニハ, 先ヅ與ヘラレタ性質ヲ持ツ任意ノ點ヲ特殊點又ハ他ノ定點ト結ビツケテ, ソノ點ノモツ性質ヲ調べテ見ルガヨイ。

例2. 定圓 O 外ノ一點 P カラコノ圓ニ引イタ割線ニヨツテ生ズル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

軌跡 求メル軌跡ハ, P ト O

トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周ノ中, 圓 O 内ニアル部分デアル。



證明

[i] P ヲ通ル任意ノ割線ヲ PBC トシ, 弦 BC ノ中點ヲ A トスルト, A ハ條件ニ適スル點デアル。

A ト O トヲ結ベバ, $OA \perp BC$

$$\therefore \angle PAO = \angle R$$

故ニ A ハ PO ヲ直徑トスル圓周ニアル。

シカモ A ハ圓 O ノ弦ノ中點デアラカラ、コノ圓周ノ圓 O 内ニアル弧ノ上ニアル。

[ii] 次ニコノ弧ノ上ニ任意ノ一點 A' ヲトリ、P ト A' ヲ通ル割線ヲ作ツテ O 圓トノ交點ヲ B', C' トスル。

A' ト O トヲ結ブト

$$\angle PA'O = \angle R$$

$$\therefore OA' \perp B'C'$$

$$\therefore B'A' = A'C'$$

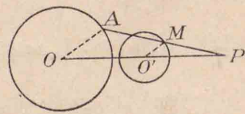
故ニコノ弧上ノ點ハ皆條件ヲ満足スル。

ヨツテ求メル軌跡ハ P, O ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周ノ、圓 O 内ニアル部分デアル。

注意 コノ例ニ示スヤウニ軌跡ガ限界ノアル線トナル場合ガアル。

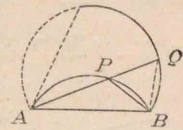
練習問題

1. 一定點カラ定直線ニ引イタ線分ヲ與ヘラレタ比ニ外分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。
2. 圓外ノ點カラ定圓周マデ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
3. 一定點カラ定圓周ニ引イタ線分ヲ與ヘラレタ比



ニ内分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。又外分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. P ハ與ヘラレタ弧 AB 上ノ動點デアル。弦 AP ノ延長上ニ弦 BP ニ等シク PQ ヲトルトキ、點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。



5. 二定點カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比(ソノ値ガ 1 デナイ)ニ等シイ點ノ軌跡ハ、ソノ二點ヲ結ブ線分ヲコノ比ニ内分及ビ外分スル二定點間ノ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。

コノ定理ハ古代ギリシヤ

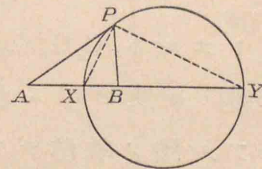
ノ數學者あぼるにうす

(Apollonius, 西洋紀元前 200

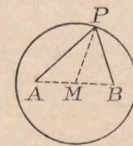
年頃)ニヨツテ初メテ考究

サレタモノデアル。ヨツ

テコノ軌跡ヲあぼるにうすノ圖トイフ。

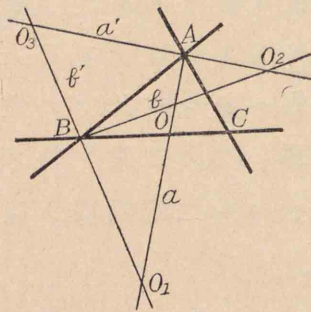


6. 定點 P カラ定直線 l ニ引イタ線分 PA 又ハ其ノ延長上ニ一點 B ヲトリ、PA · PB ヲ一定ナラシメルトキ、點 B ノ軌跡如何。
7. 一點 P カラ二定點 A, B ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナルトキ、コノ點ノ軌跡ヲ求メヨ。



92. 軌跡ノ交リ

図 ニツヅツ相交ル三直線 AB, BC, CA カラ等距離ニアル點ヲ求メヨ。



作圖 三直線 AB, BC, CA ガ作ル三角形 ABC ノ頂點 A 及ビ B ニ於ケル内角, 外角ノ二等分線 a, a' 及ビ b, b' ヲ引キ, a ト b, b' トノ交點及ビ a' ト b, b' トノ交點ヲソレゾレ O, O_1 及ビ O_2, O_3

トスルト, O, O_1, O_2, O_3 ガ求メル點デアアル。

證明 a 及ビ a' ハ相交ル二直線 AB, AC カラ等距離ニアル點ノ軌跡デアリ, b 及ビ b' ハ相交ル二直線 AB, BC カラ等距離ニアル點ノ軌跡デアアル。

故ニ a 及ビ a' 上ノ點ハ皆 AB, AC カラ等距離ニアリ, b 及ビ b' 上ノ點ハ皆 AB, BC カラ等距離ニアル。從ツテコレ等ノ交點 O, O_1, O_2, O_3 ハ三直線 AB, BC, CA カラ等距離ニアル。

又 AB, AC カラ等距離ニアル點ハ皆 a 或ハ a' 上ニアリ, AB, BC カラ等距離ニアル點ハ皆 b 或ハ b' 上ニアル。ヨツテ三直線 AB, BC, CA カラ等距離ニアル

點ハコレ等ノ交點デアアル O, O_1, O_2, O_3 ノ他ニハナイ。即チ O, O_1, O_2, O_3 ガ求メル點デアアル。

注意 (1) a 及ビ a' ハ何レモ b 及ビ b' ト平行デハナイカラ, コレ等ハ必ズ相交ル。故ニ常ニ四ツノ解ガアル。

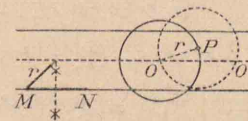
(2) 上ノ例ニ示サウニ, 或點ノ位置ヲ決定スルノニ二ツノ軌跡ノ交點ヲ考ヘルコトハ, 今後屢々有用トナル。カヤウナ仕方ヲ軌跡交截法トイフ。

(3) BC, CA ノナス角ノ二ツノ二等分線ハソレゾレ O, O_3 及ビ O_1, O_2 ヲ通ル。何故カ。

(4) O ハ $\triangle ABC$ ノ内心, O_1, O_2, O_3 ハ $\triangle ABC$ ノ傍心デアアル。

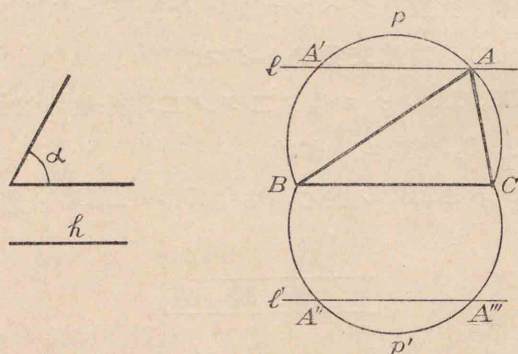
練習問題

1. 一直線上ニナイ三定點 A, B, C カラ等距離ニアル點ヲ求メヨ。
2. 二定點 A, B カラ等距離ニアリ, 一定點 C カラ d ノ距離ニアル點ヲ求メヨ。
3. 一定圓ト一直線ノ各ニ切シ且ツ與ヘラレタ半径ヲ有スル圓ノ中心ヲ求メヨ。
4. 二平行線ノ間ニアル定點 P ヲ通り, 平行線ノ各カラ與ヘラレタ長サノ弦ヲ切リ取ル圓ノ中心ヲ求メヨ。



93. 作圖題ノ吟味

作圖題 底邊ノ位置トソノ大サ,頂角及ビ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。



題意 位置ト大サノ與ヘラレタ線分 BC ヲ底邊トシ, 與ヘラレタ角 α ニ等シイ頂角ヲ持テ, 與ヘラレタ線分 h ニ等シイ高サヲ持ツ三角形ヲ作レ。

求メル三角形ノ頂點ハ

[i] BC カラ h ノ距離ニアル點ノ軌跡上ニアル。

[ii] BC ガ角 α ヲ以テ對スル點ノ軌跡上ニアル。

ヨツテコノ二ツノ軌跡ノ交點ガ求メル三角形ノ頂點デアル。故ニ次ノ作圖ガ得ラレル。

作圖 BC ニ平行デ, h ノ距離ニアル直線 l 及ビ l' ヲ引ク。

次ニ BC ヲ弦トシ α ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ弧 p 及ビ p' ヲ畫ク。

二ツノ平行線ト二ツノ弧トノ交リヲ A, A', A'', A''' トスレバ, コレ等ノ點ト B 及ビ C トヲ結ンデ得ル三角形 ABC, A'BC, A''BC, A'''BC ハ求メル三角形デアル。

證明 三角形 ABC ノ頂角 A ハ α ニ等シク, A ト BC トノ距離即チコノ三角形ノ高サハ h ニ等シイ。故ニ三角形 ABC ハ與ヘラレタ條件ヲ満足シテキル。同様ニ, 他ノ三ツノ三角形モ與ヘラレタ條件ヲ満足シテキル。(終リ)

作圖題ハ與ヘラレタ要素ノ位置ヤ大サノ關係ニヨツテ解ガ幾ツモ出來ルコトガアリ, 或ハ不可能トナルコトモアル。與ヘラレタ要素ノ變化ガ求メル圖形ニ及ボス影響ヲ論ズルコトヲ**作圖題ノ吟味**トイフ。今上ノ作圖題ニツイテ吟味ヲスルト次ノ通りニナル。

吟味 [i] 二ツノ軌跡ガ出會ハナイ場合

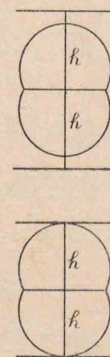
コノ場合ニハ作圖ハ不可能デアル。

[ii] 二ツノ軌跡ガ相切スル場合

コノ場合ニハ BC ノ兩側ニ合同ナ二ツノ三角形ガ得ラレル。

[iii] 二ツノ軌跡ガ相交ル場合

コノ場合ニハ BC ノ兩側ニ四ツノ合同



ナ三角形ガ得ラレル。

注意 (1) 作圖題ノ吟味ハ常ニ完全ニ出來ルモノデハナイガ、出來ル限リソレヲ考察シテ置ク必要ガアル。

(2) 上ノ問題デ底邊ノ位置ガ與ヘラレテキナイトキニハ、三角形ノ位置ニ關シテハ考ヘナイカラ、解ハ一ツカ若シクハ皆無デアル。

練習問題

1. 底邊ノ位置トソノ大サ、頂角及ビ頂點カラ底邊ヘ引イタ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。
2. 底邊ノ位置トソノ大サ、高サ及ビ頂點カラ底邊ヘ引イタ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。
3. 二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。
4. 與ヘラレタ二ツノ同心圓ノ各ニ切シ、且ツツノ二圓周ノ間ニアル一定點ヲ通ル圓ヲ作レ。

94. 解析

作圖題ノ解法ガ容易ニ發見サレナイ場合ニハ、解ガ得ラレタモノトシテ圖ヲ畫キ、ソレニ補助ノ線等ヲ加ヘテソノ圖形ノ性質ヲ研究シ、ヨツテソノ作圖ニ必要ナ條件ヲ見出スガヨイ。コレヲ解析トイフ。

作圖題 三角形ABCノ底邊BCニ平行ナ直線ヲ引キ、二邊AB, ACトソレゾレP, Qデ交ラシメ、 $PQ=BP+CQ$ ナラシメヨ。

解析 條件ニ適スルヤウニ作圖シ得タモノトシ、PQ上ニ一點Xヲ取リ

$$PX = BP$$

ナラシメルト

$PQ = BP + CQ$ デアルカラ

$$QX = CQ$$

ヨツテBX, CXヲ引クト、 $\triangle PBX, \triangle QCX$ ハ共ニ二等邊三角形デアル。

$$\therefore \angle PXB = \angle PBX, \quad \angle QXC = \angle QCX$$

然ルニ $PQ \parallel BC$ デアルカラ

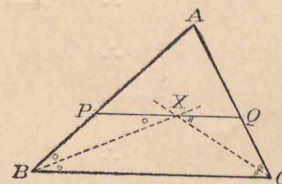
$$\angle PXB = \angle XBC, \quad \angle QXC = \angle XCB$$

$$\therefore \angle PBX = \angle XBC, \quad \angle QCX = \angle XCB$$

故ニPQハ $\angle B, \angle C$ ノ二等分線BX, CXノ交點(即チ $\triangle ABC$ ノ内心)Xヲ通ツテBCニ平行ナ直線デアルコトガ判ル。

コレニヨツテ次ノ作圖ガ得ラレル。

作圖 $\angle B, \angle C$ ノ二等分線ヲ引キソノ交點Xヲ求メ



Xヲ通ツテ BCニ平行ナ直線ヲ引キ, AB, ACトソ
レゾレ P, Qデ交ラセルト PQハ求メル直線デアアル。

証明 BXハ∠Bノ二等分線デアアルカラ

$$\angle PBX = \angle XBC$$

又 PQ∥BC デアルカラ

$$\angle PXB = \angle XBC$$

$$\therefore \angle PXB = \angle PBX$$

$$\therefore PX = BP$$

同様ニシテ QX = CQ

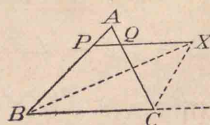
$$\therefore PQ = BP + CQ$$

吟味 ∠B, ∠Cノ二等分線ハ必ズ交ルカラ, Xハ常ニ
定メルコトガ出来ル。ソシテ Xヲ通り BCニ平行ナ
直線ハ唯一ツデアアルカラ, 解ハ唯一ツデアアル。

練習問題

次ノ各問題ニ對シテハ解析ト作圖ダケヲ答ヘヨ。

1. $AB > AC$ ナル三角形 ABCノ底
邊 BCニ平行ナ直線ヲ引キ, 二
邊 AB, ACトソレゾレ P, Qデ
交ラシメ, $PQ = BP - CQ$
ナラシメヨ。



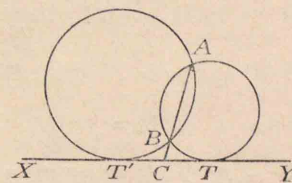
2. 一頂點カラ出ル二邊及ビ中線ガソレゾレ與ヘラ

レタ長サニ等シイ三角形ヲ作レ。

3. 定圓Oト二定點 P, Qガ與ヘラレタトキ, 圓Oノ直
徑 ABヲ引イテ, $PA = QB$ ナルヤウニセヨ。

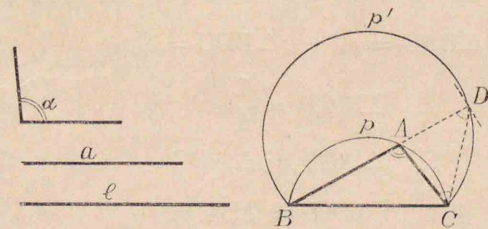
定圓ノ中心 Oニ關スル P(或ハ Q)ノ對稱點ヲトツテ
考ヘヨ。

4. 二定點 A, Bヲ通り且ツ一
ツノ定直線 XYニ切スル
圓ヲ畫ケ。



95. 三角形ノ作圖

作圖題 底邊 a , 頂角 α 及ビ他ノ二邊ノ和
 l ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。



解析 ABCヲ求メル三角形トシ, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, 及ビ
 $AB + AC = l$ トスルト, 頂點 Aハ BCヲ弦トシ角 α ヲ
含ム弓形ノ弧 BACノ上ニアル。
次ニ BAヲ延長シテ $BD = l$ ナラシメルト

$$AB + AC = l$$

デアルカラ,

$$AD = AC$$

ヨツテ C, D ヲ結ブト, $\triangle ACD$ ハ二等邊三角形デアル。

$$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}\alpha$$

ヨツテ D ハ BC ヲ弦トシ $\frac{1}{2}\alpha$ ヲ含ム弓形ノ弧ト, B ヲ中心トシ l ヲ半徑トスル圓弧トノ出會フ點デア
ルコトガ判ル。

故ニ次ノ作圖ガ得ラレル。

作圖 BC ヲ a ノ長サニ取リ, コレヲ弦トシ α 及ビ $\frac{1}{2}\alpha$

ヲ含ム弓形ノ弧 p, p' ヲ BC ノ同シ側ニ畫キ, 次ニ B ヲ中心トシ, l ヲ半徑トシテ圓ヲ畫イテ弧 p' ト出
會フ點 D ヲ求メ, D ト B トヲ結ブ線分ガ弧 p ト交ル
點ヲ A トスレバ, $\triangle ABC$ ハ求メル三角形デアル。

證明 $\angle BAC = \alpha, \quad \angle BDC = \frac{1}{2}\alpha$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ADC$$

$$\therefore AD = AC$$

然ルニ $BD = l$ デアルカラ

$$BA + AC = l$$

即チ ABC ハ a ヲ底邊トシ, 頂角ガ α , 他ノ二邊ノ和
ガ l ナル三角形デアル。

吟味 B ヲ中心トシ l ヲ半徑トシテ畫イタ圓周ヲ q
ト名ヅケルト

[i] 圓周 q ト弧 p' ガ出會ハナケレバ解ハナイ。

[ii] 圓周 q ト弧 p' ガ出會フトキ, ソノ出會フ點ト B
トヲ結ンダ線分ガ

(1) p ト出會ハナケレバ解ハナイ。

(2) p ト出會フ場合ニ

q ト p' ガ切シテアレバ解ハ一ツ,

q ト p' ガ交ツテアレバ二ツノ三角形ヲ得ル
ガ合同デアルカラ結局解ハ一ツ

デアル。

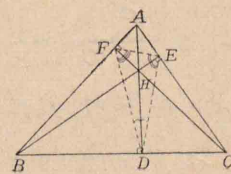
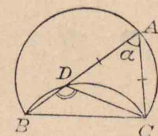
練習問題

1. 底邊, 頂角及ビ他ノ二邊ノ差ヲ
知ツテ三角形ヲ作レ。

2. 底邊ノ大サ, 他ノ二邊ノ比及ビ
高サヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

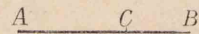
3. 一邊ト, ソノ一端ノ角及ビ他ノ二邊ノ差ヲ知ツテ
三角形ヲ作レ。

4. 鋭角三角形ノ三ツノ頂點カラ
各對邊ヘ下シタ垂線ノ足ノ位
置ヲ知ツテソノ三角形ヲ作レ。



96. 代數解析

作圖題 與ヘラレター線分 AB ヲ一點 C ニ於テ内分シ $AC^2 = AB \cdot CB$ ナラシメヨ。



解析 AB ノ數値ヲ a , AC ノ數値ヲ x トスルト, CB ノ數値ハ $a-x$ デアル。題意ニヨリ

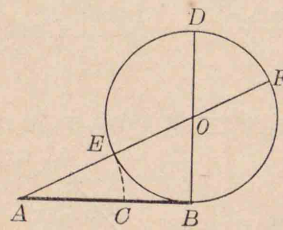
$$x^2 = a(a-x)$$

即チ $x^2 + ax - a^2 = 0$

故ニ $x(x+a) = a^2$

ヨツテ線分 AC ハ, 差ガ a デソノ包ム矩形ノ面積ガ a^2 デアル二線分ノ中ノ小ナル方デアルコトガ判ル。

作圖 線分 AB ノ一端 B ニ於テコレニ垂線ヲ引キ, コノ上ニ $AB =$ 等シク BD ヲト
ル。



次ニ BD ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, コノ圓ノ中心 O ト A トヲ結ブ線分 AO ガ圓周ト出會フ點ヲ E トシ, AB 上ニ $AE =$ 等シク AC ヲトレバ, C ガ求メル點デアル。

證明 AO ノ延長ト圓 O トノ出會フ點ヲ F トスルト

AB ハ圓 O ノ切線デアルカラ

$$AB^2 = AE \cdot AF$$

然ルニ作圖ニヨリ

$$AE = AC, \quad EF = AB$$

デアルカラ, $AB^2 = AC(AC + AB)$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + AC \cdot AB$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 - AC \cdot AB$$

$$= AB(AB - AC)$$

故ニ $AC^2 = AB \cdot CB$

吟味 コノ内分點ノ數ハ明カニ一ツデアル。

注意 (1) 上ノ作圖題ニ於テ示シタヤウナ解析ノ方法ヲ代數解析トイフコトガアル。

(2) 求メル線分ノ數値ヲ x トシタトキ代數解析ノ結果得ラレル二次方程式トシテ次ノ四種類ガ考ヘラレル。

$$x^2 + ax + b^2 = 0$$

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

$$x^2 + ax - b^2 = 0$$

$$x^2 - ax - b^2 = 0$$

但シ茲ニ a, b ハ既知線分ノ數値ヲ表ハスモノトスル。コノ各ノ x ノ表ハス線分ノ作圖方法ニツイテ考究セヨ。

練習問題

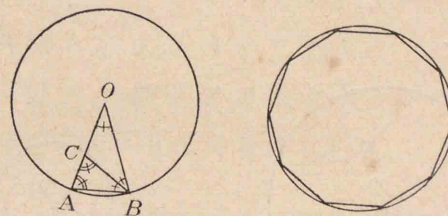
1. 與ヘラレター線分 AB ヲ一點 C ニ於テ外分シ $AC^2 = AB \cdot CB$ ナラシメヨ。
一線分ヲ二分シテ、ソノ一ツノ分ノ上ノ正方形ヲ他ノ分ト元線分トノ包ム矩形ニ等シカラシメルコトヲ、ソノ線分ヲ黄金分割スル或ハ中末比ニ分ツトイフ。
2. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ヲ引キ、コレト他ノ二邊トデ出來ル三角形ト元ノ三角形トノ比ヲ $1:2$ ニセヨ。又 $2:3$ ニセヨ。
3. 與ヘラレタ線分ヲ内分シ、各分ノ上ノ正方形ノ和又ハ差ヲ與ヘラレタ正方形ニ等シクセヨ。
4. 與ヘラレタ面積ヲ有シ、二隣邊ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シイ矩形ヲ作レ。

97. 正多角形ノ作圖

正多角形ノ中、邊數ガ 3, 4, 6, 8 ナル場合ノ作圖ハ既ニ知ツテキル。次ニ正十角形ノ作圖ニツイテ考究シヨウ。

作圖題 圓ニ内接スル正十角形ヲ作レ。

解析 圓 O ニ内接スル正十角形ガ作圖サレタトシテ、ソノ一邊ヲ AB トシ、 O, A 及ビ O, B ヲ結ブト



$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

又

$$\angle OAB = \angle OBA$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$$

故ニ今 $\angle OBA$ ノ二等分線ヲ引キ OA トノ交點ヲ C トスレバ

$$\angle ACB = 72^\circ$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle BAC$$

從ツテ

$$OA : AB = AB : AC$$

$$\therefore AB^2 = OA \cdot AC$$

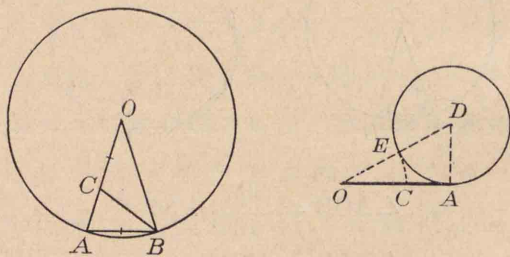
然ルニ

$$AB = BC = OC$$

$$\therefore OC^2 = OA \cdot AC$$

即チ OA ハ C ニ於テ中末比ニ内分サレルコトガ判ル。ヨツテ次ノ作圖ヲ得ル。

作圖 圓 O ノ半径 OA ヲ引キ、コレヲ C デ中末比ニ内分シ、(右ノ方ノ圖参照)ソノ大キナ部分 OC ニ等シイ弦 AB ヲ作レバ、AB ハ圓 O ニ内接スル正十角形ノ一邊デアアル



證明 作圖ニヨツテ

$$OC^2 = OA \cdot AC \quad (\text{證明ハ各自ニ試ミヨ})$$

然ルニ

$$OC = AB$$

$$\therefore AB^2 = OA \cdot AC$$

$$\therefore OA : AB = AB : AC$$

故ニ B, C ヲ結ブト $\triangle OAB$ ト $\triangle BAC$ トハ $\angle A$ ヲ共有シ、又 $\angle A$ ヲ夾ム二邊ガ比例スルカラ

$$\triangle OAB \sim \triangle BAC$$

$$\therefore AB = BC = OC$$

$$\therefore \angle AOB = \angle ABC = \angle CBO$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

故ニ AB ガ求メル正十角形ノ一邊デアアル。

練習問題

1. 圓ニ内接スル正五角形ヲ畫ケ。
2. 圓ニ内接スル正十五角形ヲ畫ケ。

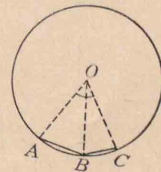
圓ニ内接スル正十角形、正十五角形ノ邊ヲ AB, BC トスレバ

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$$

$$\angle AOC = 36^\circ + 24^\circ = 60^\circ$$

ナルコトニ注意セヨ。



3. 圓ニ外接スル正十六角形ヲ畫ケ。
4. 與ヘラレタ長サノ一邊ヲモツ正六角形ヲ畫ケ。

注意 圓ニ内接スル正多角形ノ各邊ニ對スル弧ノ中點トソノ邊ノ兩端トヲ結ブト2倍邊數ノ正多角形トナル。ソシテ 3, 4, 5, 15 ヲ邊數トスル正多角形ハ作圖スルコトガ出來ルカラ

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

$$4, 8, 16, 32, \dots$$

$$5, 10, 20, 40, \dots$$

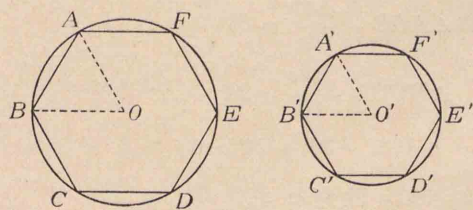
$$15, 30, 60, 120, \dots$$

ヲ邊數トスル正多角形ハ作圖スルコトガ出來ル。

尙近世ニ至ツテ 17, 257, 65537 ヲ邊數トスル正多角形ノ作圖法ガ發見サレタガ、コレ以外ノ素數ノ邊數ノ正多角形ノ作圖法ハ未ダ發見サレテキナイ。

98. 同邊數ノ正多角形

圓 O, O' ニ内接スル正六角形ヲ $ABCDEF, A'B'C'D'E'F'$ トシ、各圓ノ半徑ヲソレゾレ r, r' トスル。



同邊數ノ正多角形ハ相似デアルカラ

$$\triangle OAB \sim \triangle O'A'B'$$

故ニ $AB : A'B' = r : r'$

又 $\triangle OAB : \triangle O'A'B' = r^2 : r'^2$

ヨツテ次ノ定理ノ成立ツコトガ容易ニ知ラレル。

定理 二ツノ圓ニソレゾレ内接スル同邊數ノ正多角形ノ周ノ比ハ、ソノ外接圓ノ半徑ノ比ニ等シク、面積ノ比ハソノ外接圓ノ半徑ノ二乗比ニ等シイ。

練習問題

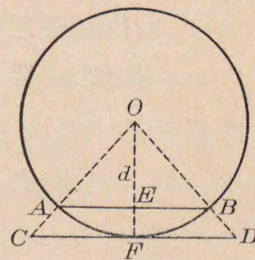
1. 二ツノ圓ニ外接スル同邊數ノ正多角形ノ周ノ比ト半徑ノ比トノ間ノ關係如何。
2. 二ツノ正六角形ガアル。コノ和ニ等シイ面積ヲモツ正六角形ヲ畫ケ。
3. 半徑 r ナル圓ニ内接スル正三角形ト、外接スル正三角形トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

99. 正多角形ノ周ト圓周

定理 圓ニ内接(或ハ外接)スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク増セバ、ソノ周ヲ限リナク圓周ニ接近サセルコトガ出來ル。

證明 圓 O ニ内接及ビ外接スル

同邊數ノ正多角形ハ相似デア
ルカラ、コレヲ相似ノ位置ニオ
クコトガ出來ル。カヤウニオ
イタトキ平行ナ二邊ヲ AB, CD
トスレバ C, A, O 、及ビ D, B, O ハ



ソレゾレ同一直線上ニアル。今 O カラ AB, CD ニ垂

線ヲ引キ、ソノ足ヲ E, F トシ、内接正多角形及ビ外接正多角形ノ周ヲソレゾレ p, p' トスレバ

$$\begin{aligned} p' : p &= CD : AB \\ &= OF : OE \end{aligned}$$

故ニ半徑 OF 及ビ OE ヲソレゾレ r, d トスレバ

$$\begin{aligned} p' : p &= r : d \\ p' : p' - p &= r : r - d \\ \therefore p' - p &= \frac{p'(r-d)}{r} \quad (1) \end{aligned}$$

コノ等式(1)ハ内接及ビ外接正多角形ノ邊數ガ如何ニ増シテモ同邊數ナル限リ常ニ成立ツ。

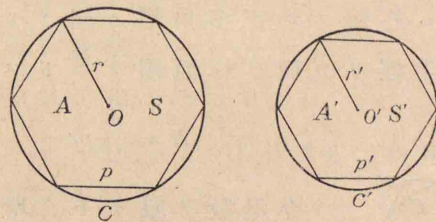
サテコノ式中ノ r ハ一定デ、 d 即チ圓ノ中心ト内接正多角形ノ邊トノ距離ハ、邊數ガ増スニ從ツテ半徑 r ニ限リナク近ヅキ、ヨツテ $r-d$ ハ又限リナク零ニ近ヅク。且ツ p' ハ邊數ノ増スト共ニ小サクナルカラ邊數ヲ限リナク増セバ $\frac{p'(r-d)}{r}$ 、從ツテ $p' - p$ ハ限リナク零ニ接近スル。

然ルニ圓周ハ常ニ外接正多角形ノ周ヨリハ小サク、内接正多角形ノ周ヨリハ大キイ。

故ニ圓ニ内接(或ハ外接)スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク増セバ、ソノ周ヲ限リナク圓周ニ近ヅカセルコトガ出來ル。

100. 圓周及ビ圓ノ面積

定理 二ツノ圓周ノ比ハソノ半徑ノ比ニ等シイ。又二ツノ圓ノ面積ノ比ハ半徑ノ二乗比ニ等シイ。



題意 二圓 O, O' ノ半徑ヲ r, r' 、周及ビ面積ヲソレゾレ $C, C'; S, S'$ トスレバ

$$C : C' = r : r', \quad S : S' = r^2 : r'^2$$

證明 二圓ニ内接スル同邊數ノ正多角形ヲ作り、ソノ周及ビ面積ヲソレゾレト $p, p'; A, A'$ トスルト

$$p : p' = r : r', \quad A : A' = r^2 : r'^2$$

コノ關係ハ邊數ガ如何ニ増シテモ常ニ成立ツ。然ルニ兩方ノ邊數ヲ同時ニ2倍又2倍ト限リナク増シテユケバ p, p' ハソレゾレ C, C' ニ、 A, A' ハソレゾレ S, S' ニ限リナク接近スル。故ニ

$$C : C' = r : r', \quad S : S' = r^2 : r'^2$$

系1. 一ツノ圓ノ周ト直徑トノ比ハ一定デアアル。

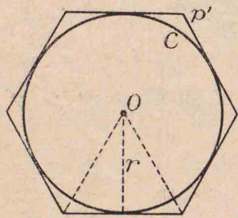
コノ一定比ヲ圓周率トイヒ、 π デ表ハス。

系2. 半徑ノ長サ r ナル圓周ハ $2\pi r$ デアアル。

定理 半徑ノ長サ r ナル圓ノ面積ハ πr^2 デアアル。

證明 圓 O ニ外接スル正多角形ノ周ヲ p 、面積ヲ A トシ、圓 O ノ半徑ヲ r 、周ヲ C 、面積ヲ S トスレバ

$$A = \frac{1}{2}pr$$



今邊數ヲ限リナク増ストキハ、 p ハ C ニ、 A ハ S ニ限リナク近ヅク。故ニ

$$S = \frac{1}{2}Cr$$

然ルニ $C = 2\pi r$ デアルカラ

$$S = \pi r^2$$

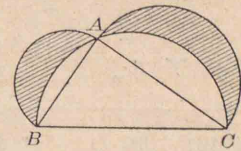
練習問題

1. 半徑5cmノ圓ニ於テ 35° ノ中心角ニ對スル弧ト、半徑4cmノ圓ニ於テ 40° ノ中心角ニ對スル弧ト何レガドレ程長イカ。

2. 半徑ガソレゾレ r, r' ナル二ツノ同心圓ノ間ノ面積ニ等シイ圓ヲ作レ。

3. 直角三角形ノ斜邊ヲ直徑トスル圓ハ他ノ二邊ヲ直徑トスル二ツノ圓ノ和ニ等シイ。

4. 三角形 ABC ニ於テ $\angle A$ ガ直角ナルトキ、各邊ヲ直徑トシテ圖ノヤウニ半圓ヲ畫ケバ、 $\triangle ABC$ ハ圖ニ於テ陰形ヲツケタ二ツノ三日月形ノ和ニ等シイ。



コノ定理ハギリシヤノ**ひぽくらてす**(Hippocrates, 西洋紀元前500年頃)ガ發見シタモノデアアル。

101. 正多角形ノ周ノ計算

圓ニ内接或ハ外接スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク増ストキハ、ソノ周ハ限リナク圓周ニ近ヅク。故ニ正多角形ノ周ヲ計算スルコトニヨツテ圓周ノ近似値ガ得ラレ、シカモ邊數ヲ適當ニ大キクスレバコレヲ如何ホドデモ圓周ノ眞ノ値ニ近ヅカシメルコトガ出來ル。

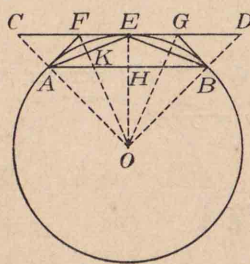
コノ計算法ニハ種々アルガ、ソノ一ツハ圓ニ内接及ビ外接スル同邊數ノ正多角形ノ周ヲモトニシテ、二倍邊數ノ内接及ビ外接正多角形ノ周ヲ計算スルコトニヨツテ達セラレルモノデアアル。

定理 一ツノ圓ノ内接及ビ外接正 n 角形ノ周ヲソレゾレ p, P トシ同ジ圓ノ内接及ビ外接正 $2n$ 角形ノ周ヲソレゾレ p', P' トスレバ

$$P' = \frac{2pP}{p+P}, \quad p' = \sqrt{pP'}$$

デアル。

證明 圓 O = 内接及ビ外接スル正 n 角形ノ一邊ヲ



AB, CD トシ, CD ガ弧 AB ノ中點 E = 於テ圓ニ切スルモノトスレバ, C, A, O 及ビ D, B, O ハソレゾレ同一直線上ニアリ, A, E 及ビ B, E ヲ結ブト AE, BE ハ内接正 $2n$ 角形ノ一邊トナル。

又 A, B = 於テ圓ニ切線ヲ引キ CD トノ交リヲ F, G トスレバ FG ハ外接正 $2n$ 角形ノ一邊トナル。

サテ AB, OE ノ交點ヲ H , AE, OF ノ交點ヲ K トスルト

$$FG = \frac{P'}{2n}, \quad CE = \frac{P}{2n}$$

デアルカラ

$$P' : P = FG : CE = 2FE : CE$$

$$\therefore P' : 2P = FE : CE = FE : CF + FE \quad (1)$$

然ルニ OF ハ $\angle COE$ ヲ二等分シテキルカラ

$$FE : CF = OE : OC = OA : OC = AH : CE$$

$$\therefore FE : CF = p : P$$

$$\text{從ツテ, } FE : CF + FE = p : p + P \quad (2)$$

(1) ト (2) トカラ

$$P' : 2P = p : p + P$$

$$\therefore P' = \frac{2pP}{p+P}$$

次ニ, $AE = \frac{p'}{2n}$, $AH = \frac{p}{2n}$ デアルカラ

$$p' : p = AE : AH$$

然ルニ $\triangle AHE$ ト $\triangle EKF$ ハ共ニ直角三角形デ, 且ツ $\angle EAH$ ハ $\angle FEK$ = 等シイカラ相似デアル。從ツテ

$$AE : AH = FE : EK$$

$$\therefore p' : p = FE : EK$$

然ルニ $FE = \frac{P'}{4n}$, $EK = \frac{p'}{4n}$ デアルカラ

$$p' : p = P' : p'$$

$$\therefore p' = \sqrt{pP'}$$

練習問題

1. 一ツノ圓ニ内接スル正 n 角形ノ周, 外接スル正 $2n$

角形ノ周及ビ外接スル正 n 角形ノ周ハ調和級數ヲナス。

2. 圓ニ内接スル $2n$ 邊ノ正多角形ハ、同ジ圓ニ内接及ビ外接スル n 邊ノ正多角形ノ比例中項デアル。

102. 圓周率ノ近似値

前節ノ定理ニヨリ、正多角形ノ周ヲ次第ニ計算スル方法ガ示サレタ。コレニヨツテ如何ホドデモ精密ナ圓周ノ近似値ガ得ラレ、從ツテ圓周率ノ近似値ガ得ラレル。即チ直徑ノ長サヲ 1 トシテ圓周ヲ計算スレバソレガ圓周率ヲ表ハス數トナル。

サテ直徑ガ 1 ナル圓ニ外接及ビ内接スル正四角形ノ周ハソレゾレ 4 及ビ $2\sqrt{2}$ デアルカラ前節ニ於テ得タ公式ニ於テ

$$p = 2\sqrt{2} = 2.8284271$$

$$P = 4$$

ト置イテ P', p' ヲ求メルト次ノヤウニナル。

$$P' = \frac{2pP}{p+P} = 3.3137085$$

$$p' = \sqrt{pP'} = 3.0614675$$

即チコレハ直徑 1 ナル圓ニ外接、内接スル正八角形ノ周デアル。(小數第七位未滿ハ四捨五入)

次ニハ、コノ結果ヲ P, p トシテ計算シ、更ニ同様ナ計算ヲ繰返シ行クコトニヨツテ、次ノヤウナ結果ガ得ラレル。

| 邊數 | 外接正多角形ノ周 | 内接正多角形ノ周 |
|------|-----------|-----------|
| 4 | 4.0000000 | 2.8284271 |
| 8 | 3.3137085 | 3.0614675 |
| 16 | 3.1825979 | 3.1214452 |
| 32 | 3.1517249 | 3.1365485 |
| 64 | 3.1441184 | 3.1403312 |
| 128 | 3.1422236 | 3.1412773 |
| 256 | 3.1417504 | 3.1415138 |
| 512 | 3.1416321 | 3.1415729 |
| 1024 | 3.1416025 | 3.1415877 |
| 2048 | 3.1415951 | 3.1415914 |
| 4096 | 3.1415933 | 3.1415923 |
| 8192 | 3.1415928 | 3.1415926 |

圓周ハ外接正多角形ノ周ト内接正多角形ノ周トノ間ニアルカラ、圓周ヲ表ハス數ヲ C トスレバ上ノ結果ニヨツテ

$$3.1415928 > C > 3.1415926$$

從ツテ

$$3.1415928 > \pi > 3.1415926$$

故ニ π ノ値トシテ

$$3.141592$$

ヲトレバ小數第六位マデハ正シイ。

尙コノ方法ヲ續ケレバ如何ホドデモ欲スルママニ精密ナ値ヲ求メルコトガ出來ル。

注意 π ノ計算法ハコノ外ニモ便利ナ方法ガアル。ソシテ精密ナ値ガ求メラレテキル。ソノ中デモシヤンクス(Shanks)ガ1873年ニ發表シタモノハ707桁マデアツテ、現在知ラレタモノデハ最モ精密ナモノトサレテキル。

π ハ一ツノ無理數デアルカラ、ソノ近似値トシテハ通常3.1416, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ 等ガ用ヒラレル。尙 π ノ値ヲ有効數字30桁マデ示スト次ノ通りデアル。

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327$$

練習問題

1. 半徑 r ナル圓ニ内接及ビ外接スル正 n 邊形ノ一邊ヲソレゾレ a, a' トスレバ

$$a' = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

デアル。

2. 半徑 r ナル圓ニ内接スル正 n 邊形ノ一邊ヲ a_n 、正 $2n$ 邊形ノ一邊ヲ a_{2n} トスレバ

$$a_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a_n^2}}$$

デアル。

103. 定理ノ形式

問 定義,公理,定理ヲ説明セヨ。

定義,公理,定理ノヤウニ或事項ヲ述ベタモノヲ命題トイフ。

一ツノ命題ノ假設ト終結トヲ取替ヘタ命題ヲ先ノ命題ノ逆トイフ。即チ一ツノ命題

[i] AガBナラバ, CハDデアル

ガアルトキ

[ii] CガDナラバ, AハBデアル

トイフ命題ハ[i]ノ逆デアル。又反對ニ[i]ハ[ii]ノ逆デアル。

又假設ガ多クノ條件カラ成立ツトキニハ、ソノ一部分又ハ全體ト終結トヲ取替ヘタ命題ヲモトノ命題ノ逆トイフ。

或命題ガ真デアツテモソノ逆ハ必ズシモ真デナイコトハ既ニ知ル通りデアル。

或命題ノ假設終結ヲ共ニ否定シテ取替ヘタ命題ヲ元ノ命題ノ對偶トイフ。即チ

[i] AガBナラバ, CハDデアル

[iii] CガDデナイナラバ, AハBデナイ

ノ二ツハ互ニ他ノ對偶デアル。若シ[i]ガ真デアルナ

ラバ、ソノ對偶 [iii] ハ當然眞デアアル。故ニ或命題トソノ對偶トハ同一ノ事柄ヲ二様ニ述ベタニ過ギナイ。

次ニ或命題ノ假設ト終結トヲ共ニ否定シタ命題ヲ元ノ命題ノ裏トイフ。

例ヘバ

[i] A ガ B ナラバ, C ハ D デアル

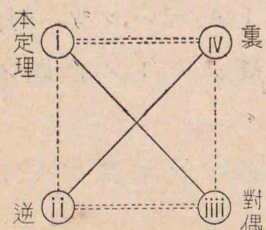
[iv] A ガ B デナイナラバ, C ハ D デナイ

ノ二ツハ互ニ他ノ裏デアアル。

命題 [i] ノ逆, 即チ

[ii] C ガ D ナラバ, A ハ B デアル

ト [i] ノ裏 [iv] トハ互ニ對偶關係ニ當ル。故ニ眞ナル命題ノ裏ハ逆ト同様ニ必ズシモ眞デハナイ。



今定理 [i] トソノ逆 [ii] 對偶 [iii] 裏 [iv] ノ關係ヲ圖示スルト左ノヤウニナル。

圖中實線ヲ以テ結バレタモノ同士ハ對偶關係ニアリ, 一重ノ點線デ結バレタモノ同士ハ逆ノ關係ニアリ, 二重ノ點線デ結バレタモノ同士ハ裏ノ關係ニアリ。故ニ實線デ結バレタ對角線ノ兩端ノ命題ハ互ニ兩立スベキコトヲ示シ點線ヲ以テ結バレタ命題ハ必ズシモ兩立シナイ關係ヲ示シタモノデアアル。

圖1. 圓ノ中心ニアラザル點ニ於テ相交ル二弦ハ互ニ他ヲ二等分スルコトガ出來ナイ。

コレヲ直接ニ證明シヨウトスルヨリハ, コノ對偶, 即チ「圓ノ二弦ガ互ニ他ヲ二等分スルトキハ, ソノ交點ハ中心デアアル」トイフ命題ヲ證明シタ方ガ容易デアアル。

證明 AB, CD ヲ互ニ他ヲ二等分

スル二ツノ弦, O ヲソノ交點トスルト, 假設ニヨリ

$$AO = BO, \quad CO = DO$$

故ニ四邊形 ADBC ヲ作ルト, ソ

レハ平行四邊形デアアル。

然ルニ圓ニ内接スル平行四邊形ハ矩形デアアルカラ

$$\angle CAD = \angle B$$

故ニ CD ハ直徑デ, ソノ中點 O ハ圓ノ中心デアアル。

即チ, 圓ノ二弦ガ互ニ他ヲ二等分スルトキハ, ソノ交點ハ中心デアアル。ヨツテコノ對偶デアアル本題ハ眞デアアル。

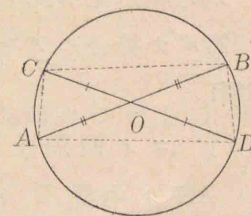
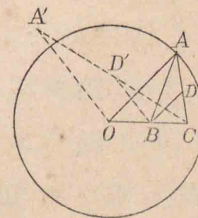


圖2. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ノ位置ト大サガ一定デ且ツ中線 BD ノ大サガ一定 (a) ナラバ頂點 A ノ軌跡ハ點 B ニ關スル O ノ對稱點 O' ヲ中心トシ $2a$ ヲ半徑トスル一ツノ圓周デアアル。



或圖形ガ或性質ヲ持ツ點ノ軌跡デアアルコトヲ斷定スル
ニハ既ニ學ンダヤウニ

[i] 與ヘラレタ性質ヲ持ツ點ハ皆ソノ圖形ノ上ニアル

[ii] ソノ圖形ノ上ノ點ハ皆與ヘラレタ性質ヲ持ツ
トイフ互ニ逆ナル二ツノ命題ヲ證明スルノガ一般デアアル
ガ時ニハ先ヅ(ii)ヲ證明シテ次ニ[i]ノ對偶ヲ證明スル方ガ
簡單ナ場合モアル。

證明

[i] コノ圓周上ノ一點ヲ A トシ A, B; A, C ヲ結ビ,

AC ノ中點 D ト B トヲ結ブト

$$BD = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

故ニ點 A ハ條件ニ適スル。

即チコノ圓周上ノ點ハスベテ條件ニ適スル。

[ii] 次ニコノ圓周上ニナイ一點ヲ A' トシ A', B; A', C

ヲ結ビ, A'C ノ中點 D' ト B トヲ結ブト

$$BD' = \frac{1}{2} A'O$$

然ルニ, $A'O \neq 2a$

$$\therefore BD' \neq a$$

故ニ點 A' ハ條件ニ適シナイ。即チコノ圓周上ニ
ナイ點ハスベテ條件ニ適シナイ。

故ニ求メル軌跡ハ O ヲ中心トシ 2a ヲ半徑トスル
一ツノ圓周デアアル。

練習問題

1. 「 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ ニ於テ $AB = DE, AC = DF$ 且ツ
 $\angle A = \angle D$ ナラバ, $BC = EF$ デアル」ノ逆, 對偶, 裏ヲ
作り, ソノ正否ヲ定メヨ。
2. [例2]ノ別證明法ヲ二通り舉ゲヨ。
3. 次ノ各題ニツイテ尠クトモ二通りノ證明方法ヲ
記セ。
 - ① 圓内ノ一定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ハ, ソノ
點ト中心トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周デア
ル。
 - ② 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ位置及ビ大サガ一
定ノトキ二邊 AB, AC ノ垂直二等分線ノ交點 O
ノ軌跡ヲ求メヨ。
 - ③ 定線分ヲ一邊トスル菱形ノ對角線ノ交點ノ
軌跡ヲ求メヨ。
4. 定圓 O ノ直交スル任意ノ二弦 AB, CD ノ平ラノ和
ガ一定 (k^2) ナルトキ, ソノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。
5. 相交ル二ツノ直線カラノ距離ノ比ガ一定ナル點
ノ軌跡ハ, コノ二直線ノ交點ヲ通ル二ツノ直線デ
アルコトヲ, 二通りノ方法デ證明セヨ。

104. 證明法ノ形式

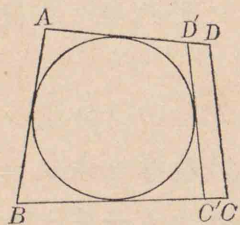
或定理ヲ證明スルニハ、既ニ真デアアルコトノ知ラレテキル命題(公理、定理等)ト假設トヲ基トシテ、順次ニ推論ヲ進メテ終結ニ到達スルノガ普通ノ形式デアアル。

又時ニハ例ヘバ第27節ニ於テ述ベタ定理

「同一ノ直線ニ平行ナニツノ直線ハ互ニ平行デアアル」ヲ證明シタトキノヤウニ「終結ガ真デナイモノト假定スレバ不合理ナ結果トナルカラ終結ハ真デナケレバナラナイ」ト斷定スル推理ノ仕方モアル。コノ方法ヲ歸謬法トイフコトハ既ニ學ンダ通りデアアル。

カヤウニ幾何ニ於ケル證明法ニハ大體二ツノ形式ガアル。ソノ手順カラシテ前者ヲ直接證明法、後者ヲ間接證明法ト呼ブコトガアル。

圖 四邊形ノ相對スル邊ノ和ガ相等シイトキハ、コ



ノ四邊形ハ圓ニ外接スル。

題意 四邊形 ABCD ニ於テ

$$AB + CD = AD + BC$$

ナラバ、コノ四邊形ハ圓ニ外接スル。

證明 邊 AD, AB, BC ニ切スル圓 O ヲ畫キ邊 CD ガコレニ切シナイモノト假定スル。

今 CD ニ平行ナ切線 C'D' ヲ引キ、圓 O ニ外接スル四邊形 ABC'D' ヲ作ル。然ルトキハ

$$AB + C'D' = AD' + BC'$$

然ルニ、 $AB + CD = AD + BC$

故ニ C' ガ BC 上ニアレバ

$$\begin{aligned} AB + CD &= AD' + D'D + BC' + C'C \\ &= (AD' + BC') + D'D + C'C \\ &= AB + C'D' + D'D + C'C \end{aligned}$$

ヨツテ、 $CD = C'D' + D'D + C'C$

デナケレバナラナイ。又 C' ガ BC ノ延長上ニアレバ、前ト同様ニ

$$C'D' = CD + DD' + CC'$$

デナケレバナラス。然ルニ何レモ不合理デアアル。

故ニ AECD ハ圓ニ外接スル。

注意 本題ハ又直接ニ證明スルコトモ出來ル。各自ニ試ミヨ。

練習問題

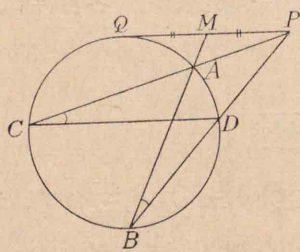
1. 圓ニ外接スル四邊形ヲ ABCD トスレバ、三角形 ABC, ADC ノ内接圓ガ AC ニ切スル點ハ相一致スル。
2. 歸謬法ニヨツテ證明シタ命題ヲ出來ルダケ多ク舉ゲヨ。

105. 解析法ト綜合法

既ニ知ル如ク、普通證明ノ順序ハ先ヅ假設カラ出發シテ種々ノ定理、公理ソノ他既知ノ命題ヲ媒介トシテ或一ツノ結論ニ達シ、又ソノ結論カラ同様ノ方法デ第二ノ結論ニ達シ、カクシテ終結ニ到達スル。然ルニ時ニハ反對ニ終結ガ成立スルタメノ條件ヲ求メテ假設ヘノ連絡ヲ發見スルコトガアル。コノ方法ヲ解析法トイヒ、解析法ノ推究ヲ逆ニシテ普通ニ證明スル方法ヲ、ソレニ對シテ綜合法トイフ。

圖 圓外ノ一點 P カラ引イタ切線 PQ ノ中點 M ヨリ割線 MAB ヲ引キ、次ニ P, A, P, B ヲ結ビコレガ圓周ト交ル點ヲ夫々 C, D トスレバ、CD ハ PQ ニ平行デアアル。

解析法 CD ∥ PQ ナルタメニハ



(1) $\angle MPA = \angle C$ デナケレバナラヌ。然ルニ

$\angle C = \angle B$ ナル故ニ

(2) $\angle MPA = \angle B$ デナケレバナラヌ。

(3) 從ツテ MP ハ P ニ於テ

圓 PAB ニ切シナケレバナラヌ。

(4) 故ニ $MP^2 = MA \cdot MB$ デナケレバナラヌ。

(5) 然ルニ MQ ハ切線デ $MQ = MP$ デアルカラ

$$MQ^2 = MP^2 = MA \cdot MB$$

ヨツテ (5), (4), (3), (2), (1) ト反對ノ順序ニ進ムコトニヨリ證明サレル。

綜合法 (各自ニ試ミヨ)

練習問題

- 半圓 ACB ノ弧 ACB 上ノ任意ノ點 C カラ直徑 AB へ引イタ垂線ノ足ヲ D トシ、圖形 BCD ニ内切スル圓ガ \widehat{BC} , CD ニ切スル點ヲソレゾレ G, F トスレバ、三點 A, F, G ハ同一直線上ニアル。
- 頂角 A ヲ共有シ、底邊 BC, DE ガ相等シイニツノ三角形ヲ ABC, ADE トス。コノ兩三角形ノ外接圓ノ共通切線ノ一ツヲ PQ トスレバ、PQ ハ共通弦 AF ニ垂直デアアル。
- C ハ半圓周 ACB 上ノ一ツノ點デ、D ハツノ直徑 AB 上ノ一點デアアル。D ニ於テ AB ニ垂直ニ引イタ直線ガ AC, BC 及ビ半圓周ト交ル點ヲソレゾレ E, F 及ビ G トスルト、 $DG^2 = DE \cdot DF$

106. 代數法

定理ノ假設終結中ニアル條件ガ、總テ角ノ關係或ハ

長サノ關係ノ如キ同一種類ノ量デアツテ、等式或ハ不等式關係デ示サレルトキニハ、代數計算ニヨツテ式ヲ變形シテ證明ノ出來ルコトガアル。トキニコノ方法ハ代數法ト呼バレル。

図 線分 AC ヲ B ニ於テ内分シ、 $AB:BC = m:n$ ナラシメ、A, B, C カラコレヲ截ラナイ一直線 XY ニ下シタ垂線ノ足ヲ A', B', C' トスレバ、次ノ等式ガ成立ツ。

$$nAA' + mCC' = (m+n)BB'$$

證明 C ト A' ヲ結ビ、A'D ト BB' トノ交點ヲ D トシ、

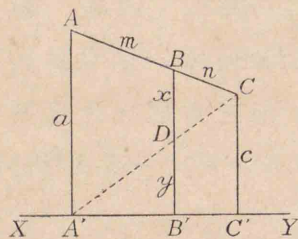
$$AA' = a, CC' = c, BD = x, DB' = y \text{ トオクト}$$

$$x:a = n:m+n$$

$$\therefore x = \frac{na}{m+n}$$

$$\text{又 } y:c = m:m+n$$

$$\therefore y = \frac{mc}{m+n}$$



$$\text{故 } x + y = \frac{na}{m+n} + \frac{mc}{m+n} = \frac{na+mc}{m+n}$$

$$\therefore (m+n)(x+y) = na+mc$$

$$\therefore (m+n)BB' = nAA' + mCC'$$

練習問題

1. $\triangle ABC$ ノ各頂點カラコノ三角形ヲ截ラナイ直線

XY マデノ距離ノ和ハ $\triangle ABC$ ノ重心カラ XY マデノ距離ノ3倍ニ等シイ。

2. $\angle B$ ガ 45° ナル三角形 ABC ニ於テ AB ノ中點ヲ M, C カラ AB ニ引イタ垂線ノ足ヲ D トスレバ

$$AC^2 = 2(AM^2 + MD^2)$$

3. 周圍ガ12米、面積ガ8平方米ヨリ大ナル矩形ガアル。ソノ大邊ノ長サハ如何ナル範圍ニアルカ。

107. 圖形變換法 (1)

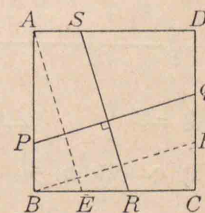
圖形ノ一部分又ハ全部ヲ適當ニ移動シテ證明或ハ作圖ヲ容易ナラシメルコトガアル。コノ方法ヲ圖形變換法トイフ。

基本的ナ變換トシテ平行變換、迴轉變換、反轉變換及ビ相似變換ガアル。

図 正方形ヲ ABCD トシ、コレニ直交スル二直線 PQ, RS ガ相交リ、相對スル邊 AB, CD; BC, AD トノ交點ヲソレゾレ P, Q 及ビ R, S トスレバ

$$PQ = RS$$

證明 A 及ビ B ヲ通り、SR, PQ ニ平行ニ AE, BF ヲ引キ、BC, CD ト交ル點ヲソレゾレ E, F トスレバ



PQ ⊥ RS デアルカラ

AE ⊥ BF

∴ ∠CBF = ∠BAE

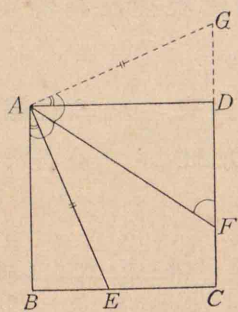
∴ △BCF ≅ △ABE

故ニ BF = AE, 從ツテ PQ = RS

注意 本例デハ RS, PQヲ夫々 AE 及ビ BF マデ平行變換シテ △BCF, △ABE ヲ作ツテ既知ノ定理ヲ應用シ易クシタノデアル。

例2. 正方形 ABCD ノ邊 BC 上ニ任意ノ點 E ヲ取リ, 又 DC 上ニ F ヲ取ツテ, DF = AE - BE ナラシメルト, AF ハ ∠DAE ヲ二等分スル。

證明 CD ヲ G マデ延長シテ DG = BE ナラシメ, A, G



ヲ結ベバ

△ABE ≅ △ADG

從ツテ, AE = AG

∠GAD = ∠EAB (1)

又假設ト作圖トニヨツテ

GF = AE

從ツテ, AG = GF

故ニ, ∠GAF = ∠GFA = ∠FAB (2)

(1) ト (2) カラ

∠DAF = ∠FAE

注意 コノ證明ノ要點ハ △ABE ヲ點 A ノ周リニ 90° ダケ廻轉變換シテ, △ADG = 重ネ, 三角形 ADG, ADF ヲ一個ノ三角形 AFG トシタコトニアル。

練習問題

1. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ他ノ一組ノ邊ノ和ノ半分ヨリモ大デナイ。
2. 梯形 ABCD ノ底 AD, BC 上ニソレゾレ E, F ヲ取リ, AE:ED = BF:FC = AB:DC ナラシメルト, EF ハ AB, DC ト等角ヲ作ル。
3. 正三角形 ABC 内ニ一點 P ヲ求メ, PA² = PB² + PC² ナラシメルト, P ハ定圓周上ニアル。

108. 圖形變換法 (2)

例1. AB > AC ナル三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線 AD 上ノ任意ノ一點ヲ E トスレバ

AB - AC > EB - EC

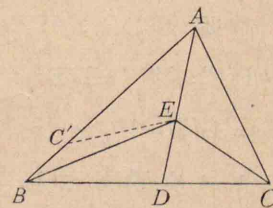
證明 AB 上ニ AC = 等シク AC'

ヲトリ E, C' ヲ結ブト

△AC'E ≅ △ACE

∴ EC' = EC

∴ EB - EC = EB - EC' < BC'



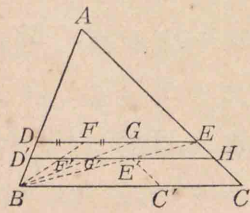
然ルニ、 $AB - AC = AB - AC' = BC'$

$\therefore AB - AC > EB - EC$

注意 コノ證明ノ要點ハ $\triangle ACE$ ヲ $\triangle AC'E$ ノ位置ニ反轉變換シタトコロニアル。

例2. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ、邊 AB , AC ト D, E ニ於テ交ラシメ、 $ED = 2BD + CE$ ナラシメヨ。

解析 所要ノ線分 DE ガ得ラレタトシ、 DE 上ニ F, G ヲ



取り、 $DF = FG = BD$ トスレバ、

$GE = EC$ トナル。次ニ BC ニ平

行ナル任意ノ直線ヲ引キ、 AB ,

BF, BG, BE ニソレゾレ D', F', G' ,

E' ニ於テ交ラシメ、又 E' ヲ通り

EC ニ平行ナル直線ヲ引キ BC ト交ル點ヲ C' トスルト

$$D'F' = F'G' = BD', \quad G'E' = E'C'$$

$$\therefore D'E' = 2BD' + E'C'$$

故ニ次ノヤウニシテ作圖スルコトガ出來ル。

作圖 AB 上ノ任意ノ一點 D' ヲ通り BC ニ平行ナル

直線ヲ引キ、 AC ト交ル點ヲ H トスル。 $D'H$ 上ニ

$D'F' = F'G' = D'B$ ナルヤウニ F', G' ヲトリ、次ニ $G'H$ 上

ニ $G'E' = HC$ ナルヤウニ點 E' ヲトル。直線 BE' ト AC

トノ交點 E ヲ通り、 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC トノ

交リヲ D トスレバ、 DE ハ求メル直線デアル。

證明吟味 (各自ニ試ミヨ)

注意 コノ作圖ノ要點ハ B ヲ相似ノ中心トシ $D'E'$ ヲ DE ノ位置ニ相似變換シタコトニアル。

練習問題

1. $AB > AC$ ナル三角形 ABC ノ A カラ對邊 BC へ引イタ垂線上ノ一點ヲ P トスルト $AB - AC < PB - PC$
2. O ハ定圓ニシテ A, B ハ O 圓外ノ二定點デアル。 O 圓ノ直徑 PQ ヲ引キ $AP = BQ$ ナラシメヨ。
3. 定角 XOY 内ノ一定點 P ヲ通り二邊 OX, OY ニ切スル圓ヲ作レ。相似法ニヨツテモ試ミヨ。

109. 同一法ト轉換法

例へバ「東京ハ日本ノ首府デアル」トイフ命題ニ就テ見ルニ東京モ日本ノ首府モ唯一ツニ限リ存在シ、同一物ヲ指シテキルカラ逆命題ノ「日本ノ首府ハ東京デアル」ハ當然真デアル。一般ニ A, B ナル二ツノモノガアツテ

(1) A ハ B デアル

(2) B ハ唯一ツ限リノ存在デアル

ノ二ツガ真ナラバ A ト B トハ同一物デアルカラ (1) ノ逆、即チ

BハAデアル

ハ當然真デアル。コノ論法ヲ同一法トイフ。例ヘバ「二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分ス」ノ逆モ真デアル。コレヲ證明セヨ。
ニ於テ、底邊ノ垂直二等分線ハ唯一ツ限り存在スルカラ、特別ニ證明セズトモ同一法ニヨリ「二等邊三角形ノ底邊ノ垂直二等分線ハ頂角ノ二等分線デアル」ノ真デアルコトヲ知ルコトガ出來ル。

次ニ或事柄ニ就テ互ニ關聯スル一群ノ定理ガ證明セラレ、ソレ等ノ定理ノ假設ハ起リ得ル總テノ場合ヲ盡シ、終結ハ互ニ相容レナイトキハ、コレ等ノ定理ノ逆モ亦真デアル。コレハ一群ノ定理ノ逆ヲ一括シテ證明スル論理的方法デ、コレヲ轉換法トイフ。

例ヘバ、相異ナル二圓ノ半徑ヲ夫々 $R, r (R > r)$ トシ、ソノ中心距離ヲ d トスルト、次ノ一群ノ定理ガ成立ツ。

二圓ガ夫々全ク他ノ外ニアレバ $d > R + r$

二圓ガ外切スレバ $d = R + r$

二圓ガ相交レバ $R - r < d < R + r$

二圓ガ内切スレバ $R - r = d$

一圓ガ全ク他ノ内ニアレバ $R - r > d$

コノ一群ノ定理ノ假設ハ相異ナル二圓ノ位置關係ニ就テ起リ得ベキ總テノ場合ヲ盡シテキル。又各終

結ハ互ニ相容レナイモ、デアル。

故ニ轉換法ニヨツテコノ一群ノ定理ノ逆ハ成立スル。

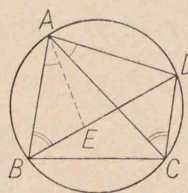
練習問題

- 「三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デア
ル」コトガ證明セラレタトキ、如何ナル命題ガ同一
法ニヨリ真デアルコトニナルカ。
- $\triangle ABC$ ニ於テ AD ヲ一ツノ中線トシ
[i] $AD > BD$ ナラバ $\angle BAC < 90^\circ$ デアル。
[ii] $AD = BD$ ナラバ $\angle BAC = 90^\circ$ デアル。
[iii] $AD < BD$ ナラバ $\angle BAC > 90^\circ$ デアル。
コレヲ證明シ、且ツコノ三定理ノ逆ヲ考ヘヨ。
- 直線外ノ一點カラコレニ引イタ線分ノ中デ
[i] 垂線ハ斜線ヨリモ小サイ。
[ii] 垂線ノ足カラ等距離ニアル點ヲ足トスル二
斜線ハ相等シイ。
[iii] 垂線ノ足カラ大ナル距離ニアル點ヲ足トス
ル斜線ハ、小ナル距離ニアル點ヲ足トスル斜線
ヨリモ大キイ
コトハ既ニ學ンダトコロデアル。コレヨリ如何
ナル定理ガ得ラレルカ。

110. 問題

例 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ、對角線ノ包ム矩形ニ等シイ。

[題意] $ABCD$ ヲ圓ニ内接スル四邊形トスレバ、
 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$



[證明] $\angle BAE = \angle CAD$ トナルヤ
 ウニ AE ヲ引キ BD トノ
 交點ヲ E トスル。

$$\angle BAE = \angle CAD$$

$$\angle ABE = \angle ACD$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD$$

$$\therefore AB : AC = BE : CD$$

$$\therefore AB \cdot CD = AC \cdot BE \quad (1)$$

又 $\angle BAC = \angle EAD$, $\angle ACB = \angle ADE$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$$

$$\therefore BC : ED = AC : AD$$

$$\therefore BC \cdot AD = AC \cdot ED \quad (2)$$

(1) ト (2) トカラ

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + BC \cdot AD &= AC \cdot BE + AC \cdot ED \\ &= AC (BE + ED) \\ &= AC \cdot BD \end{aligned}$$

練習問題

- 上ノ例ノ逆ヲ述ベ、コレヲ證明セヨ。
- 四邊形ノ各頂點ガ同一圓周上ニナイトキハ、相對スル二邊ノ包ム矩形ノ和ハ兩對角線ノ包ム矩形ヨリ大ナルコトヲ證明セヨ。
- 三角形ノ三ツノ角ヲ A, B, C トシ、コレラノ角内ノ傍接圓ノ半徑ヲソレゾレ r_a, r_b, r_c トスル。
 $\angle A > \angle B > \angle C$ ナルトキハ $r_a > r_b > r_c$ デアル。
- 相交ル二定圓 O 及ビ O' ガアル。 O 圓周上ノ定點 T ニ於テコレニ外切スル圓ガ O' 圓ヲ截ル點ヲソレゾレ C, D トスレバ、直線 CD ハ常ニ一定點ヲ通ルコトヲ證明セヨ。但シ T ハ二ツノ圓 O, O' ノ中心線上ニナイ點トス。
- 圓 O' ガ圓 O ノ中心ヲ通ルトキ、圓 O' ノ弦 AB ノ延長ガ圓 O ニ切スレバ、 $OA \cdot OB$ ハ一定デアアル。
- 正三角形 ABC ノ邊 AC, CB 上ニソレゾレ點 P, Q ヲ取リ $AP = CQ$ ナラシメルト AQ, BP ノナス角ハ一定デアアル。
- $\triangle ABC$ ノ中線 AD ヲ引キ、 $\angle ADB, \angle ADC$ ノ二等分線ヲ AB, AC ト交ル點ヲソレゾレ E, F トスレバ

$$EF < BE + CF$$

8. 四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ト對角線ノ中點ヲ結ブ線分トハ同一ノ點デ會シ、何レモソノ點デ二等分セラレル。
9. 何レノニツモ相交ル四直線ノ三ツヅツデ作ル四ツノ三角形ノ外接圓ハ一點ヲ通ル。
10. $\triangle ABO$ ノ内心 O ヲ通リ AO = 垂直ナル直線ガ AB , AC ト交ル點ヲソレゾレ D, E トスレバ

$$OD^2 = BD \cdot CE$$
11. 圓周上ノ任意ノ一點 P ヨリ弦 AB へ垂線 PC ヲ引キ、又 A, B ヨリ P = 於ケル切線へ垂線 AM, BN ヲ引クトキハ、 $AM \cdot BN = PC^2$
12. $\triangle ABC$ = 於テ $\angle B$ ノ二等分線ガ AC ト交ル點ヲ D , 又 $\angle C$ ノ二等分線ガ AB ト交ル點ヲ E トスルト $BE = CD$ ナラバ $\triangle ABC$ ハ二等邊三角形デアル。
13. 與ヘラレタ二直線 = 切シ且ツ與ヘラレタ一點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。
14. 二邊 a, b ト a = 對スル角 A トガ與ヘラレタトキ、三角形ヲ作圖シテ二ツノ三角形ヲ得タトスル。コノ二ツノ三角形ノ第三邊ヲ c_1, c_2 トスレバ

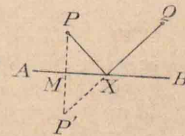
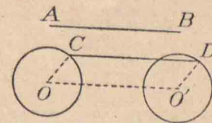
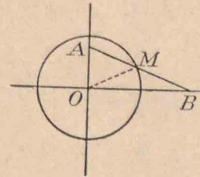
$$b^2 = a^2 + c_1 c_2$$
15. 三邊ノ長サガ $5\text{ cm}, 5\text{ cm}$ 及ビ 6 cm ナル三角形ガアル。コノ三角形ノ外接圓ノ面積ヲ求メヨ。

16. 三邊ノ長サガ $4\text{ cm}, 5\text{ cm}, 6\text{ cm}$ ナル三角形ノ角ノ二等分線ノ中デ最小ナルモノノ長サヲ求メヨ。
17. 垂直ニ相交ル二直線ノ交點 O ヨリ、ソノ一ツノ上ニ $OC = 1$ ナル様ニ點 C ヲトリ、 C ヲ中心トシテ半徑 3 ナル圓ヲ畫イタトキ、二直線及ビコノ圓ニ切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ。
18. 一角ガ 60° ナル直角三角形ノ内接圓ノ半徑ガ 1 cm ナルトキ、内心ヨリ三頂點ヘノ距離ノ和ヲ求メヨ。
19. 半徑 a ナル圓ニ三ツノ等圓ガ内接シ、且ツソレラノ三ツノ等圓ガ P, Q, R = 於テニツヅツ互ニ外切スルトキ、三ツノ劣弧 $\widehat{QR}, \widehat{RP}, \widehat{PQ}$ ニテ圍マレタ部分ノ面積ヲ求メヨ。
20. 中心 O ナル圓外ノ一點 A カラニツノ切線ヲ引キ切點ヲ B, C トスル。 BC 上ニ點 P ヲトリ OP ヲ半徑ノ $\frac{2}{3}$ トシ、 A ヨリ OP ノ延長ニ垂線 AQ ヲ下ストキ OQ ト圓 O ノ半徑ノ比ヲ求メヨ。
21. 三角形 AEC ノ形外ニ邊 AB, AC ヲソレゾレ一邊トスル正方形 $BADE, ACFG$ ヲ作り、線分 DG ヲ三邊ノ長サ a, b, c ニテ表ハセ。
22. OA, OB ハ點 O = 於テ垂直ニ交ル等長ノ線分デアル。角 AOB 内ニアツテ OA, OB ガ相等シイ角ヲ以テ對スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

123. 一定點カラ一定直線マデ引イタ諸線分ヲ一邊トスル正三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。
24. 定三角形ニ相似ナル三角形ABCノ一ツノ頂點Aハ定位置ニアリ,第二ノ頂點Bハ定直線上ヲ動クトキ,第三ノ頂點Cノ軌跡ハ何カ。
25. 正方形ABCDガアルトキ, $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$ ナル點Pノ軌跡ハ,外接圓ノ劣弧AD,對角線ノ延長ノ部分及ビ對角線ノ交點Oデアアル。
26. 互ニ直角ニ交ル二直線AB, CDトソレ等ニ交ル第三ノ直線EFトガアル。AB, CD上ニソレゾレ一邊ヲ置キ, EF上ニ一頂點ヲ置ク正方形ヲ作レ。
27. 與ヘラレタ四邊形ニ外接スル正方形ヲ作レ。
28. 直角三角形ノ直角ノ二邊ノ和ノ斜邊ニ對スル比ヲ $a:b$ トスレバ, a^2 ハ $2b^2$ ヨリモ大デナイ。
29. $\triangle ABC$ ノ三邊BC, CA, AB上ニソレゾレ三點D, E, Fヲトリ $\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{AF}{AB}$ ナラシメルトキ, $\triangle DEF$ ノ面積ガ最小ナラバD, E, Fハ三邊ノ中點デアアル。
30. 矩形ABCDニ於テ直線APQハ邊DCトPニ於テ, 邊BCノ延長トQニ於テ交ルモノトス。 $\triangle ADP$ ト $\triangle CPQ$ ノ面積ノ和ヲ最小ナラシメルタメニハDPノ長サヲ如何ニスベキカ。但シDCヲ20 cm, BCヲ5 cmトセヨ。

雜 問 題

1. 一定ノ長サノ棒ABガ, 互ニ垂直ニ交ル二本ノ棒ノ上ニソノ兩端ヲ觸レナガラ動クトキ, ソノ中點Mノ軌跡ヲ求メヨ。
2. 一ツノ圓ノ相等シイ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
3. 定線分ヲ一邊トスル菱形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。
4. 一ツノ線分ガソノ一端ヲ一ツノ圓周上ニ置キ, 且ツ與ヘラレタ直線ニ平行ノ位置ヲ保チナガラ動クトキ, 他ノ一端ノ軌跡ヲ求メヨ。
5. 一點Oカラ定多角形ノ邊ノ上ノ任意ノ點Aヘ引イタ線分上又ハソノ延長上ニ點A'ヲトリ, 比 $OA:OA'$ ヲ一定ノ比 $m:n$ ニ等シクスルトキ點A'ノ軌跡ヲ求メヨ。
6. 一ツノ直線ABノ同ジ側ニ二定點P, Qガアル。今AB上ニ一點Xヲ求メテ, $\angle PXA = \angle QXB$ ナルヤウニセヨ。
7. 直線ABノ同ジ側ニ二定點P, Qガアル。PカラAB上ノ一點ニ至リ, ソレカラQニ至ル最短ノ路ヲ定メヨ。
8. 一ツノ定點ヲ通り, 且ツ一ツノ圓周上ノ一定點ニ於テ, コ



レニ切スル圓ヲ作レ。

9. 圓外ノ一點 P ヲ通り割線 PAB ヲ引キ, $PA=AB$ ナラシメヨ。
10. 二角ト周トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。
11. 底邊ト内接圓ノ半徑トヲ與ヘテ二等邊三角形ヲ作レ。
12. 一點 P カラ二直線 OX, OY = 線分 PM, PN ヲ引キ
 $PM=PN, \quad \angle MPN = \angle R$
 ナラシメヨ。
13. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC = 平行ナル直線ヲ引キ, 二邊 AB, AC トノ交點ヲソレゾレ D, E トシタトキ, $AD^2 = AE \cdot EC$ ナルヤウニセヨ。
14. 底ニ平行ナ直線ヲ引イテ梯形ヲ二等分セヨ。
15. 定圓ニ矩形ヲ内接セシメテソノ面積ヲ與ヘラレタ正方形ニ等シクセヨ。
16. 與ヘラレタ圓ノ面積ヲ三等分スル同心圓ヲ畫ケ。
17. 直角三角形 ABC ノ頂點 A カラ斜邊 BC へ引イタ垂線 AD ニテ分タレタ兩三角形ノ内接圓ノ面積ノ比ハ斜邊ノ二部分ノ比ニ等シイ。
18. 正方形ノ一邊ト對角線トノ差ヲ知ツテ正方形ヲ作レ。
19. 一ツノ正方形ト等積ナ矩形ヲ作り, ソノ二隣邊ノ差ヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ。
20. 二ツノ同心圓ニ夾マレル部分ノ面積ハ内圓ニ切スル外圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シイ。

第七章

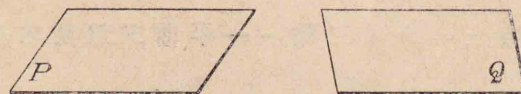
立體幾何

直線ト平面

111. 平面トソノ決定

定義 面上ノ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ常ニソノ上ニアル如キ面ヲ**平面**トイヒ, 何レノ部分モ平面デナイ面ヲ**曲面**トイフ。

平面ハソノ上ノ何レノ方向ニモ限リナク擴ツテキルモノトスル。シカシコレヲ圖示スルニハ通例ソノ上ニ畫カレタ平行四邊形ヲ以テシ, コレニ次ノ如ク P, Q 等ノ文字ヲ添ヘテ「平面 P」, 「平面 Q」等ト呼ブ。



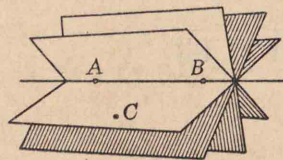
次ノ事實ハ平面ノ定義カラ明カデアアル。

平面上ノ二點ヲ通ル直線ハ全クソノ平面上ニアル。

定義 一點又ハ一直線ガ一平面上ニアルトキニハ, ソノ平面ハソノ點又ハソノ直線ヲ**含む**或ハ**通ル**ト

イフ。

平面上ノ二點ヲ固定シテモ、平面ハコノ二點ヲ通ル直線ヲ軸トシテ自由ニ廻轉



スルコトガ出來ルガ、更ニコノ直線外ニ平面上ノ一點ヲ固定スルト平面ハ全ク固定スル。即チ

公理 一直線上ニナイ三點ヲ通ル平面ハ唯一ツダケアル。

コノ事柄ヲ又

一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ定メル

或ハ

一直線上ニナイ三點ハ一平面ヲ決定スル

トモイフ。

平面ノ決定ニ關シテ次ノ定理ガアル。

定理 次ノ各ハイヅレモ一平面ヲ定メル。

[i] 一直線トソノ上ニナイ一點

[ii] 相交ル二直線

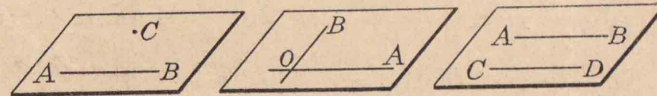
[iii] 平行ナ二直線

題意 [i] 一直線ABトソノ上ニナイ一點C

[ii] 相交ル二直線 AO, BO

[iii] 平行ナ二直線 AB, CD

ハ何レモ一平面ヲ決定スル。



[i]

[ii]

[iii]

證明 [i], [ii] (各自ニ試ミヨ)

[iii] AB, CDヲ平行線トスレバ、ソレガ一平面上ニア
ルコトハ平行線ノ定義ニヨツテ明カデアル。ソ
シテソノ平面ハ直線 AB トソノ上ニナイ一點 C
トヲ含ムカラ [i] ニヨリ唯一ツダケアル。故ニ
AB, CDハ一平面ヲ定メル。

練習問題

1. 相交ル二直線 OA, OB ノ各ニ交リナガラ動く直線ハ常ニ同一ノ平面上ニアル。
2. 平行線 AB, CD ノ各ニ交リナガラ動く直線ハ常ニ同一ノ平面上ニアル。
3. 四點 A, B, C, D ガ同一平面上ニナイトキハ、直線 AC, BD ハ交リ得ルカ。又平行トナリ得ルカ。

112. 直線及ビ平面相互ノ位置關係

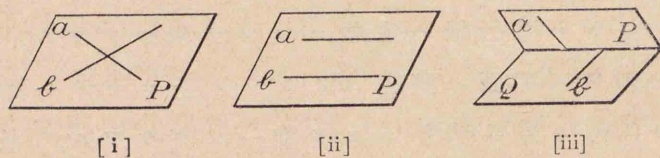
空間ニ於ケル二直線ノ位置關係ハ次ノ三ツノ場合ニ分ケラレル。

[i] 相交ル場合

[ii] 互ニ平行ナ場合

[iii] 相交ラズ又平行デナイ場合

コノ中[i], [ii]ノ場合ニハ二直線ハ同一平面上ニアリ, [iii]ノ場合ニハ同一平面上ニナイ。



注意 二直線ガ平行デアルコトヲ證明スルニハ, ソノ二直線ガ同一平面上ニアルコトト, ソレガ交ラナイコトトノ二ツノ事柄ヲ證明シナケレバナラス。

定義 一直線ト一平面トガ何レノ方向ニ何程延長シテモ出會ハナイトキニハ, ソノ直線ト平面トハ互ニ平行デアルトイフ。

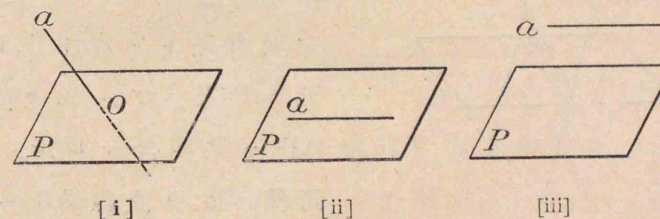
定義 直線ト平面トガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキニハ, ソノ直線ト平面トハ相交ルトイヒ, ソノ點ヲ交點トイフ。

從ツテ一直線ト一平面トノ位置關係ハ次ノ三ツノ場合ニ分ケラレル。

[i] 相交ル場合

[ii] 直線ガ平面ニ含マレル場合

[iii] 互ニ平行ナ場合



定義 二平面ガ共有點ヲ有スルトキニハコノ二平面ハ出會フトイヒ, 何レノ方向ニ何程延長シテモ共有點ヲ有シナイトキニハコノ二平面ハ互ニ平行デアルトイフ。

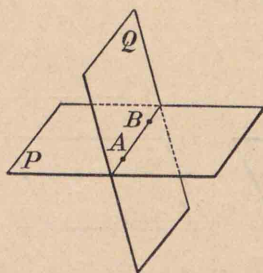
公理 二ツノ平面ハ唯一ツノ點ノミデ出會フコトハデキナイ。

コノ公理カラ容易ニ次ノ定理ガ證明デキル。

定理 相異ル二ツノ平面ガ出會フトキニハ, コレ等ノ平面ハ唯一ツノ直線ダケヲ共有スル。

題意 P, Q ヲ出會フニツノ相異ル平面トスレバ, P ト Q トハ唯一ツノ直線ダケヲ共有スル。

證明 P ト Q トハ出會フ平面デアルカラ, 公理ニヨリ



少クトモニツノ點ヲ共有スル。今 A, B ヲツノニツノ共有點トスルト A, B ハ共ニ P 上ニアルカラ直線 AB ハ P ニ含マレル。

同様ニシテ直線 AB ハ Q

ニモ含マレル。

故ニ P, Q ハ直線 AB ヲ共有スル。

次ニ P, Q ガ直線 AB ノ他ニ或一點ヲ共有スルトスレバ, コノ兩平面ハ全ク一致シナケレバナラナイコトニナリ假設ニ反スル。

故ニ P, Q ハ直線 AB ダケヲ共有スル。

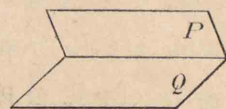
定義 ニツノ平面ガ唯一ツノ直線ダケヲ共有スルト

キハコノ二平面ハ相交ルトイヒ, ソノ直線ヲ二平面ノ交リ或ハ交線トイフ。

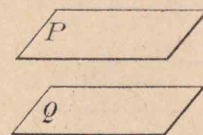
從ツテ二平面ノ位置關係ハ次ノニツノ場合ニ分ケラレル。

[i] 相交ル場合

[ii] 互ニ平行ナ場合



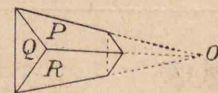
[i]



[ii]

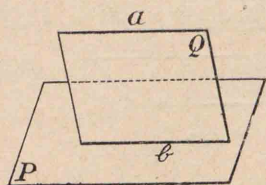
練習問題

- 三ツノ平面ガ二點ヲ共有スルトキハ, コノ三平面ハ唯一ツノ直線ニ於テ相交ル。
- 同一ノ平面上ニナイ二直線ノ双方ニ交ルニツノ直線ハ平行デナイ。又一般ニハ相交ラナイ。
- 互ニ平行ナ二平面ノ一方ノ上ニアル直線ハ他ノ方ノ平面ニ平行デアル。
- 三ツノ平面 P, Q, R ガニツヅツ相交リ, ソノニツノ交線ガ相交ルトキハ残りノ一ツノ交線モ亦ソノ交點ヲ通ル。



113. 直線ト平面トノ平行ニ關スル性質

定理 直線ト平面トガ互ニ平行ナルトキニハ, コノ直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交リハソノ直線ニ平行デアル。

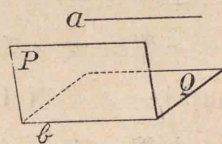


題意 平面 P ト直線 a トガ平行ナルトキハ、 a ヲ含ム任意ノ平面 Q ト P トノ交リ b ハ a ニ平行デアアル。

證明 (各自ニ試ミヨ)

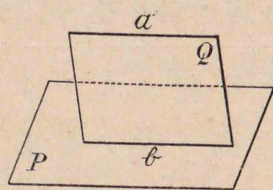
系1. 平面ト直線トガ互ニ平行ナルトキ、コノ平面上ノ一點ヲ通ツテソノ直線ニ平行ニ引イタ直線ハソノ平面ニ含マレル。

系2. 同一直線ニ平行ナ二平面ノ交リハソノ直線ニ平行デアアル。



定理 ニツノ平行線ノ一方ダケヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行デアアル。

題意 a, b ヲ平行ナ二直線トシ、 b ヲ含ミ a ヲ含マナイ平面ヲ P トスルト $a \parallel P$ デアル。



證明 平行線 a, b ノ定メル平面ヲ Q トスレバ b ハ P ト Q トノ交リデアアル。故ニ Q 上ノ直線 a ガ P ト交ルナラバ、

ソノ交點ハ b ノ上ニナラレバナラナイ。從ツテ a

ト b トハ相交ルコトトナツテ假設ニ反スル。

故ニ a ト P トハ相交ラナイ。又假設ニヨリ P ハ a ヲ含マナイ。

$\therefore a \parallel P$

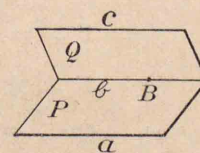
系1. 互ニ平行ナ二直線ノ各一方ヲ含ミ他ヲ含マナイ二平面ノ交リハ、ソノ二直線ノ各ニ平行デアアル。

系2. 同一直線 a ニ平行ナ二直線 b, c ハ互ニ平行デアアル。

コノ系ハ次ノヤウニ證明サレル。

證明 a, b, c ガ同一平面上ニアル場合ハ平面幾何デ證明シタカラ、今ハサウデナイ場合ニツイテ考ヘル。

a, b ノ定メル平面ヲ P 、 c ト b 上ノ任意ノ一點 B トノ定メル平面ヲ Q トスルト、 P ト Q トノ交リハ B ヲ通ツテ a ニ平行デアアル。然



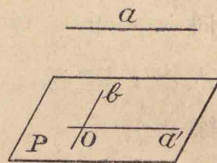
ルニ B ヲ通り a ニ平行ナ直線ハ唯一ツデアアルカラ、コノ交リハ b ト一致スル。即チ b ハ平行線 a, c ノ各一方ダケヲ含ム二平面ノ交リニアタルカラ b ト c トハ互ニ平行デアアル。

例 同一平面上ニナイ二直線 a, b ノ一方 b ヲ含ンデ a ニ平行ナ平面ヲ作レ。

求メル平面 P ガ得ラレトト假定スレバ、 $a \parallel P$ デアルカ

ラ、 b 上ノ一點 O ヲ通り a ニ平行ナ直線 a' ヲ引ケバ a' ハ P ニ含マレル。
故ニ次ノ作圖ガ得ラレル。

作圖 b 上ノ一點 O ヲ通り a ニ平行ナ直線 a' ヲ引キ、 b ト a' トノ定メル平面 P ヲ作レバコレガ求メルモノデアル。



證明 a, b ハ一平面上ニナイ直線デアルカラ a ハ P ニハ含マレナイ。依ツテ P ハ平行線 a, a' ノ一方 a' ダケヲ含ム平面デアル。

故ニ P ハ a ニ平行デアリ且ツ b ヲ含ム。

故ニ P ハ求メルモノデアル。

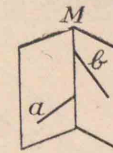
吟味 解ハ常ニ一ツダケアル。

注意 立體幾何ノ作圖題ハ、平面幾何ノ作圖題ノヤウニ實際ノ圖形ヲ紙面ニ畫クコトハデキナイカラ、唯求メル圖形ノ位置ノ決定ノ仕方ヲ論ズルニ止メル。コノ場合次ノ作圖ハ初メカラ可能ナモノト規約スル。

- (1) 同一直線上ニナイ三點ヲ通り平面ノ作圖
- (2) 任意ノ點ヲ中心トシ、任意ノ半徑ヲ有スル球ノ作圖
- (3) 定メラレタ平面上ニ於ケル平面幾何學的作圖

練習問題

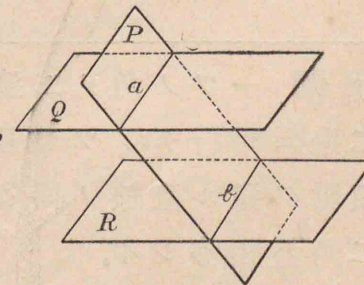
1. 同一平面上ニナイ四點 A, B, C, D ヲ順ニ結ンデ得ラレル四邊形ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲソレゾレ K, L, M, N トスレバ $KLMN$ ハ平行四邊形デアル。
2. 同一ノ平面上ニナイ二直線 a, b 外ノ一定點 M ヲ通りソノ各ニ交ル直線ヲ引ケ。
3. 直線 a ガ平面 P ニ交ルトキハ、 P 上ニ於テハ a ニ平行ナル直線ハ一ツモ引クコトハ出來ナイ。



114. 平行平面ニ關スル性質

定理 一ツノ平面ガ平行ナ二平面ト交ルトキハ、ソノ交リハ互ニ平行デアル。

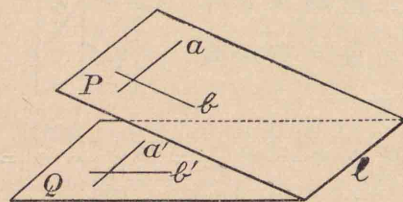
題意 平面 P ガ平行ナ二平面 Q, R ト夫々 a, b ニ於テ交ルモノトスルト、
 $a \parallel b$
デアル。



證明 (各自ニ試ミヨ)

定理 一ツノ平面上ノ相交ル二直線ガ他ノ平面上ノ相交ル二直線ニソレゾレ平行ナルトキハ、コノ二平面ハ平行デアアル。

題意 平面P上ノ相交ル二直線ヲ a, b , 平面Q上ノ相交ル二直線ヲ a', b' ト



シ

$$a \parallel a', \quad b \parallel b'$$

トスレバ

$$P \parallel Q$$

證明 若シP, Qガ相交ルモノト假定シ、ソノ交リヲ l トスルト、平行ナ二直線ノ各一方ヲ含ム二平面ノ交リハソノ各ニ平行デアアルカラ

$$l \parallel a, \quad l \parallel b \quad \therefore a \parallel b$$

トナリ假设ニ反スル。

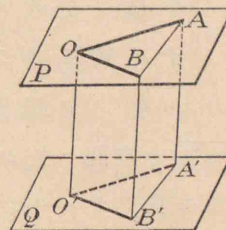
$$\therefore P \parallel Q$$

定理 一ツノ角ノ二邊ガソレゾレ他ノ角ノ二邊ニ平行デアツテ、且ツソノ對應スル邊ガ頂點ヲ通ル直線ノ同ジ側ニアルトキハ、コノ二角ハ相等シイ。

題意 $\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トニ於テ

$$OA \parallel O'A', \quad OB \parallel O'B'$$

デアツテ、且ツ OA ト $O'A'$, OB ト $O'B'$ トガ OO' ノ同ジ側ニアルモノトスルト



$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

證明 對應邊ノ上ニ

$$OA = O'A', \quad OB = O'B'$$

ナルヤウニ點 A, A', B, B' ヲ取リ、 AA', BB' ヲ引ケバ、 $AOO'A', BOO'B'$ ハイヅレモ平行四邊形トナル。

$$\therefore OO' \parallel AA', \quad OO' = AA'$$

$$OO' \parallel BB', \quad OO' = BB'$$

從ツテ、 $AA' \parallel BB', AA' = BB'$

故ニ $AB, A'B'$ ヲ引ケバ $ABB'A'$ モ亦平行四邊形トナル。

$$\therefore AB = A'B'$$

從ツテ、 $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$

$$\therefore \angle AOB = \angle A'O'B'$$

系 任意ノ點カラ同一平面上ニナイ二定直線ノ各ニソレゾレ平行ニ引イタ二直線ノナス角ハ一定デアアル。

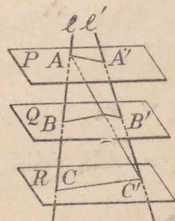
定義 一點カラ同一平面上ニナイ二直線ニソレゾレ

平行ニ引イタ二直線ノナス角ヲ初メノ二直線ノナス角トイフ。ソシテ若シコノ角ガ直角デアレバ初メノ二直線ハ互ニ垂直デアルトイフ。

注意 空間ニ於ケル二直線ハ垂直デアルトイツテモ必ずシモ交ツテハキナイ。

練習問題

1. 同一ノ平面ニ平行ナ二ツノ平面ハ互ニ平行デアル。
2. 平行ナ二平面ノ間ニ夾マレル平行直線ノ部分ハ相等シイ。
3. ニツノ直線 l, l' ガ三ツノ平行ナ平面 P, Q, R ト交ル點ヲソレゾレ $A, B, C; A', B', C'$ トスレバ
 $AB:BC = A'B':B'C'$
4. 同一ノ平面上ニナイ二直線 a, b ヲ一ツツツ含ンデ互ニ平行ナ二平面ヲ作レ。



115. 平面ノ垂線 (1)

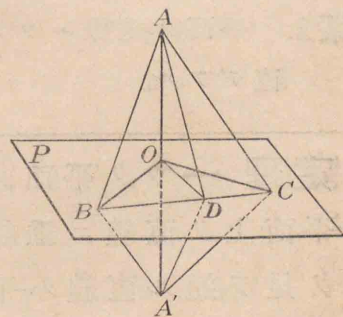
定義 一直線ガ一平面ト交ツテ、ソノ交點ヲ通りソノ平面上ニ引イタスベテノ直線ニ垂直ナルトキニハ、ソノ直線ト平面トハ互ニ垂直デアルトイヒ、ソ

ノ直線ヲ平面ノ垂線、ソノ交點ヲ垂線ノ足トイフ。又平面ニ交ル直線ノ中デ平面ニ垂直デナイモノヲ平面ノ斜線トイヒ、ソノ交點ヲ斜線ノ足トイフ。

定理 相交ル二直線ノ交點ヲ通りソノ各ニ垂直ナ直線ハ、ソノ二直線ノ定メル平面ニ垂直デアル。

題意 相交ル二直線 OB, OC ノ交點 O ヲ通り、ソノ各ニ垂直ナ直線ヲ AA' トスルト、 AA' ハ OB, OC ノ定メル平面 P ニ垂直デアル。

證明 O ヲ通り平面 P 上ニ任意ノ直線 OD ヲ引キ、 OD 上ノ一點 D ヲ通り OB, OC ト交ル直線ヲ引キ、ソノ交點ヲソレゾレ B, C トスル。次ニ OA, OA' 上ニ $OA=OA'$ ナルヤウニ點 A, A' ヲ取り、 A, A' ヲソレゾレ B, C ト結ブト



$$AB = A'B, \quad AC = A'C$$

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'BC$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A'BD$$

從ツテ

$$\triangle ABD \equiv \triangle A'BD$$

$$\therefore AD = A'D$$

然ルニ $\triangle DAA'$ ニ於テ

$$AO = A'O$$

$$\therefore DO \perp AA'$$

即チ AA' ハ O ヲ通ツテ P 上ニ引イタスベテノ直線ニ垂直ニナル。

$$\therefore AA' \perp P$$

系1. 相交ル二直線ノ各ニ垂直ナ直線ハソノ二直線ノ定メル平面ニ垂直デアアル。

系2. 平面ノ垂線ハソノ平面上ノスベテノ直線ニ垂直デアアル。

定理 一ツノ平面ノ垂線上ノ一點カラソノ平面上ノ直線ニ垂線ヲ引クトキ, 二ツノ垂線ノ足ヲ通ル直線ハ平面上ノソノ直線ニ垂直デアアル。

題意 平面 P ノ垂線 AB ノ足 B ト, AB 上ノ任意ノ點 A カラ P 上ノ直線 XY ニ下シタ垂線 AC ノ足 C トヲ通ル直線 BC ハ XY ニ垂直デアアル。

證明

$$AB \perp P$$

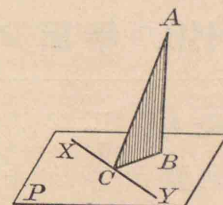
$$\therefore AB \perp XY$$

$$\text{又} \quad AC \perp XY$$

故ニ AB ト AC トノ定メル平面

ハ XY ニ垂直デアアル。

$$\therefore BC \perp XY$$



注意 上ノ定理ヲ三垂線ノ定理トイフ。

練習問題

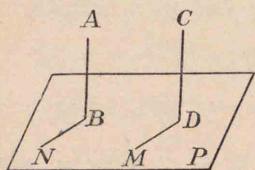
1. 平面外ノ一點カラコノ平面ニ垂線ト斜線ヲ引クトキハ, 垂線ハ斜線ヨリ短イ。
2. 一直線上ノ一定點ヲ通リコノ直線ニ垂直ナ平面ヲ作レ。又カヤウナ平面ハ唯一ツナルコトヲ證明セヨ。
3. 一直線上ノ一點ニ於テコレニ垂直ナ直線ハ皆コノ點ヲ通ル元ノ直線ノ垂直平面上ニアル。
4. 相交ル二平面ノ間ノ一點カラ二平面ノ各ニ下シタ垂線ト, 二平面ノ交リニ下シタ垂線トハコノ交リニ垂直ナ同一平面上ニアル。
5. 一ツノ平面ノ垂線上ノ一點ト, ソノ垂線ノ足カラソノ平面上ノ直線ニ引イタ垂線ノ足トヲ結ブ直線ハ平面上ノ直線ニ垂直デアアル。

116. 平面ノ垂線(2)

定理 ニツノ平行線ノ一ツガ一ツノ平面ニ垂直ナルトキハ、他ノ直線モ亦コレニ垂直デアアル。

題意 二直線 AB, CD ガ平行デ AB ガ平面 P ニ垂直ナルトキハ、 CD モ亦 P ニ垂直デアアル。

證明 AB, CD ト P トノ交リヲ B, D トスル。 D ヲ通ツテ P 上ニ任意ノ直線 DM ヲ引キ、コレニ平行ニ B ヲ通ツテ直線 BN ヲ引ケバ BN ハ P 上ニアル。 ツシテ $AB \perp P$ デアルカラ



$$\angle ABN = \angle R$$

然ルニ、 $AB \parallel CD, BN \parallel DM$

$$\therefore \angle CDM = \angle R$$

即チ CD ハ P 平面上ノ任意ノ直線ニ垂直デアアルカラ

$$CD \perp P$$

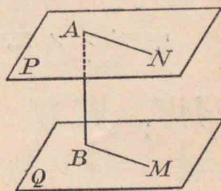
デアアル。

系 同一ノ平面ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアアル。

定理 ニツノ平行ナ平面ノ一ツニ垂直ナ直線ハ他ニモ亦垂直デアアル。

題意 直線 AB ガニツノ平行平面 P, Q トツレゾレ A, B デ交リ AB ガ P ニ垂直ナルトキハ、 AB ハ又 Q ニモ垂直デアアル。

證明 B ヲ通リ Q 上ニ任意ノ直線 BM ヲ引キ、コレニ平行ニ A ヲ通ツテ AN ヲ引ケバ、 BM ハ P ニ平行デアアルカラ AN ハ P ニ含マレル。



然ルニ、

$$AB \perp P$$

$$\therefore AB \perp AN$$

$$\therefore AB \perp BM$$

ヨツテ

$$AB \perp Q$$

系1. 同一直線ニ垂直ナニツノ平面ハ互ニ平行デアアル。

系2. 互ニ平行ナニツノ平面ノ間ニ夾マレル共通垂線ノ部分ノ長サハ一定デアアル。

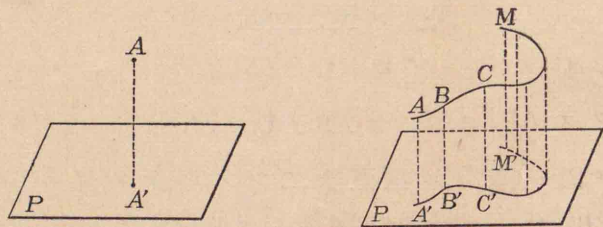
定義 平行ナニツノ平面ノ間ニ夾マレル共通垂線ノ部分ノ長サヲソノ二平面ノ距離トイフ。

練習問題

1. 平行ナ二直線ニソレゾレ垂直ナ二平面ハ互ニ平行デアアル。
2. 平行ナ二平面ニソレゾレ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアアル。
3. 平行ナ二ツノ平面ノ各ノ上ノ二點ヲ結ブ線分ノ中デソノ二平面ノ距離ハ最小ナルモノデアアル。

117. 直線ノ正射影

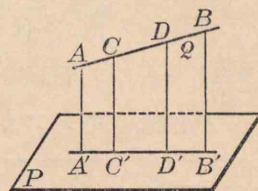
定義 一ツノ點カラ一ツノ平面ニ引イタ垂線ノ足ヲ、ソノ點ノコノ平面上ニ投ズル正射影トイヒ、一ツノ線上ノ點ノ、コノ平面上ニ投ズル正射影ノ軌跡ヲ、ソノ線ノコノ平面上ニ投ズル正射影トイフ。



定理 一ツノ平面ニ垂直デナイ直線ノコノ平面上ニ投ズル正射影ハ、ソノ直線上ノ二點ノ正射影ヲ通ル直線デアアル。

題意 平面 P ニ垂直デナイ直線ヲ AB トシ、 AB 上ノ任意ノ二點 A, B ノ P 上ニ投ズル正射影ヲソレゾレ A', B' トスレバ、直線 $A'B'$ ハ直線 AB ノ P 上ニ投ズル正射影デアアル。

證明 $AA' \perp P, BB' \perp P$ デアアルカラ $AA' \parallel BB'$ 。故ニ AA', BB' ノ定メル平面ヲ Q トスルト $AB, A'B'$ ハ共ニ Q ニ含マレル。



[i] AB 上ノ任意ノ一ツノ點ヲ C トスル。 C カラ AA' ニ平行線ヲ引ケバ、コノ直線ハ $A'B'$ ト交ハル。ソノ交點ヲ C' トスレバ

$$AA' \perp P, CC' \parallel AA'$$

$$\therefore CC' \perp P$$

故ニ C ノ P 上ニ投ズル正射影ハ C' デアアル。

從ツテ AB 上ノスベテノ點ノ正射影ハ $A'B'$ 上ニアル。

[ii] $A'B'$ 上ニ任意ノ一ツノ點 D' ヲ取り、 D' ヲ通リ AA' ニ平行線 $D'D$ ヲ引クト前ト同様ニ $D'D$ ハ AB ニ交リ、且ツ P ニ垂直デアアル。ヨツテ $D'D$ ガ AB ト交ル點ヲ D トスレバ、 D' ハ D ノ正射影デアアル。從ツテ $A'B'$ 上ノ點ハ皆 AB 上ノ或點ノ P 上ニ投

ズル正射影デアアル。

故ニ A'B' ハ AB ノ P 上ニ投ズル正射影デアアル。

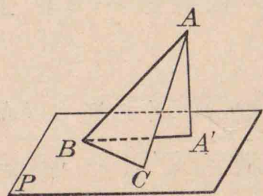
系 一ツノ平面ノ斜線ガソノ平面上ニ投ズル正射影ハ、ソノ斜線ノ足ト、ソノ直線上ノ他ノ一點ノ正射影トヲ通ル直線デアアル。

注意 一ツノ平面ノ垂線ノ、ソノ平面上ニ投ズル正射影ハ、ソノ垂線ノ足デアアル。

定理 平面ノ斜線ガ、ソノ足ヲ通ル平面上ノ直線トナス角ノ中デ、ソノ正射影トナス鋭角ガ最小デアアル。

題意 AB ヲ平面 P ノ斜線トシ、B ヲソノ足、A'B' ヲ AB ノ P 上ニ投ズル正射影トシ、B ヲ通り P 上ニ A'B' ノ他ニ任意ノ直線 BC ヲ引ト、 $\angle ABA' < \angle ABC$

證明 今 A ノ P 上ニ投ズル正射影ヲ A' トシ、BC 上



ニ BA' ニ等シク BC ヲトリ A, C ヲ結ベバ、 $\triangle ABA'$ ト $\triangle ABC$ トニ於テ

AB ハ共通、 $BA' = BC$

又 AA' ハ垂線、AC ハ斜線デア

アルカラ

$AA' < AC$

$\therefore \angle ABA' < \angle ABC$

故ニ角 ABA' ハ、AB ガ B ヲ通ル P 平面上ノ直線トナス角ノ中最小ノモノデアアル。

定義 平面ノ斜線ト、ソノ平面上ニ投ズル正射影トノナス角ヲソノ斜線ト平面トノナス角トイフ。

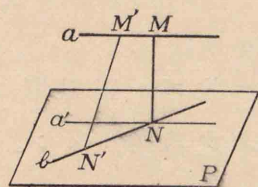
練習問題

1. 一ツノ直線ハソレト交ル二ツノ平行平面ト相等シイ角ヲナス。
2. 互ニ平行ナ二直線ガ同一ノ平面トナス角ハ相等シイ。
3. 長サ l ナル線分ガ一ツノ平面トナス角ガ α デアルトスレバ、ソノ線分ノソノ平面上ニ投ズル正射影ノ長サハ $l \cos \alpha$ デアル。
4. 平行四邊形ノ各邊ノ同一平面上ニ投ズル正射影ヲ邊トスル四邊形ハ又平行四邊形デアアル。

118. 二直線ノ共通垂線

定理 同一ノ平面上ニナイ二直線ニ共通ナ垂線ハ唯一ツダケアル。

証明 a, b ヲ同一平面上ニナイ二直線トスル。先ヅ



b ヲ含ンデ a ニ平行ナ平面 P ヲ作り, a ノ P 上ニ投ズル正射影 a' ヲ作レバ a' ハ b ト必ズ交ル。ソノ交點ヲ N トスル。

サテ a' 上ノ點ハスベテ a 上ノ或點ノ正射影デアルカラ N ヲ a 上ノ點 M ノ正射影トスルト

$$MN \perp P$$

$$\therefore MN \perp b$$

又 $MN \perp a', a' \parallel a$

$$\therefore MN \perp a$$

故ニ MN ハ a, b ノ共通垂線デアル。

次ニ MN ノ他ニ共通垂線 $M'N'$ ガアルト假定シ, a, b トノ交點ヲ M', N' トスレバ

$$M'N' \perp a, a \parallel a'$$

$$\therefore M'N' \perp a'$$

又 $M'N' \perp b$

故ニ $M'N'$ ハ P 平面ニ垂直トナツテ MN ト平行デナケレバナラヌ。故ニ a, b ハ同一平面上ニアルコトニナツテ假設ニ反スル。

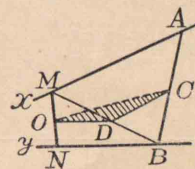
故ニ MN ノ他ニハ a, b ノ共通垂線ハ存在シナイ。

系 同一ノ平面上ニナイ二直線上ニ兩端ヲ有スル線分ノ中デソノ共通垂線ガ最小デアル。

注意 コノ共通垂線ノ長サヲ同一ノ平面上ニナイ二直線ノ距離トイフ。

練習問題

1. 同一ノ平面上ニナイ二直線 x, y 上ニ兩端ヲ有スル任意ノ線分 AB ノ中點 C ハ x, y ノ共通垂線 MN ノ中點 O ヲ通リコレニ垂直ナ平面上ニアル。



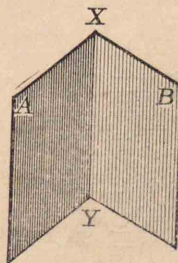
2. 同一ノ平面上ニナイ二直線上ニ兩端ヲ有スル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

119. 二面角

定義 同一ノ直線デ終ルニツノ平面ノナス圖形ヲ二

面角トイヒ, ソノ直線ヲ二面角ノ稜, ソノ平面ヲ二面角ノ面トイフ。

二面角ヲ呼ブニハ各面上ノ一點ヲ表ハス二文字ノ間ニ稜上ノ二點ヲ表ハス文字ヲ夾ンデ, 例ヘバ圖ノ



ヤウナ二面角ナラバ

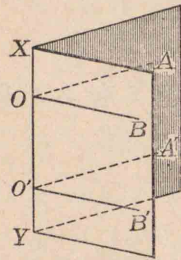
二面角 $AXYB$

ヲ以テスル。併シマギレル恐レノナイトキニハ單ニ

二面角 XY

トモ呼ブ。

定理 二面角ノ稜上ノ任意ノ一點カラソノ稜ニ垂直ニ各面内ニ引イタ二直線ノナス角ハ一定デアアル。



題意 二面角 $AXYB$ ノ稜 XY 上ノ二點 O, O' カラソノ稜ニ垂直ニ $OA, OB, O'A', O'B'$ ヲソノ各面内ニ引ケバ、 $\angle AOB = \angle A'O'B'$

證明 $OA \parallel O'A', OB \parallel O'B'$

且ツ $OA \perp O'A', OB \perp O'B'$ ハ共

ニ OO' ノ同ジ側ニアルカラ

$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

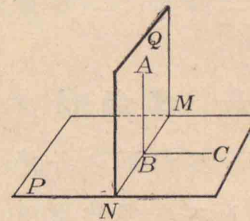
定義 二面角ノ稜上ノ一點カラソノ稜ニ垂直ニ各面内ニ引イタ二直線ノナス角ヲ二面角ノ平面角トイヒ、コノ大サヲ二面角ノ大サトイフ。

定義 ニツノ平面ノナス二面角ガ直角ナルトキニハ、コノ二平面ハ互ニ垂直デアアルトイフ。

定理 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ前ノ平面ニ垂直デアアル。

題意 P 平面ノ垂線ヲ AB トシ、 AB ヲ含ム平面ヲ Q トスレバ

$$Q \perp P$$

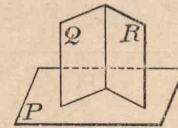


證明 (各自ニ試ミヨ)

系1. ニツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ、ソノ一方ノ平面上ノ點カラソノ交リニ引イタ垂線ハ他ノ平面ニ垂直デアアル。

系2. ニツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ、ソノ一方ノ平面上ノ點カラ他ノ平面ニ引イタ垂直ハ前ノ平面ニ含マレル。

系3. 同一ノ平面ニ垂直ナ二平面ノ交リハ前ノ平面ニ垂直デアアル。



練習問題

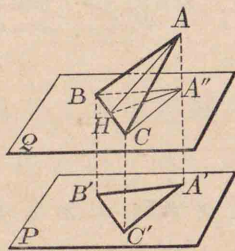
1. 一點ヲ通ル三直線ガ何レノ二ツヲ取ツテモ垂直デアレバ、コノ三直線ヲニツツ含ム三平面ハ又何レノ二ツヲ取ツテモ垂直デアアル。

2. 平行ナ二平面ノ一ツニ垂直ナ平面ハ他ニモ亦垂直デアアル。
3. 二面角ノ二面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハソノ二面角ヲ二等分スル平面デアアル。

120. 多角形ノ正射影

定義 多角形ノ各邊ノ、一平面上ニ投ズル正射影ヲ邊トスル多角形ヲ、元ノ多角形ノソノ平面上ニ投ズル正射影トイフ。

定理 三角形ノ一ツノ平面上ニ投ズル正射影ノ面積ハ、元ノ三角形ノ面積ニ三角形ノ平面ト與ヘラレタ平面トノナス二面角ノ餘弦ヲ掛ケタモノニ等シイ。



題意 $\triangle ABC$ ノ平面 P 上ニ投ズル正射影ヲ $\triangle A'B'C'$ トシ、 $\triangle ABC$ ノ平面ト P 平面トノナス二面角ノ大サヲ α トスレバ

$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC \cdot \cos \alpha$$

證明 [i] BC ガ P ニ平行ナ場合

BC ヲ含ミ P ニ平行ナ平面 Q ヲ作り、AA' ガ Q ト交ル點ヲ A'' トスレバ明カニ

$$\triangle A''BC \equiv \triangle A'B'C'$$

今 A カラ BC ニ垂線 AH ヲ引キ、A'', H ヲ結ベバ

$$A''H \perp BC \quad \text{[三垂線ノ定理]}$$

$$\therefore \triangle A''BC = \frac{1}{2} BC \cdot A''H$$

然ルニ $\angle AHA''$ ハ $\triangle ABC$ ノ平面ト Q トノナス二面角ノ平面角デアツテ、Q ハ P ト平行デアアルカラ

$$\angle AHA'' = \alpha$$

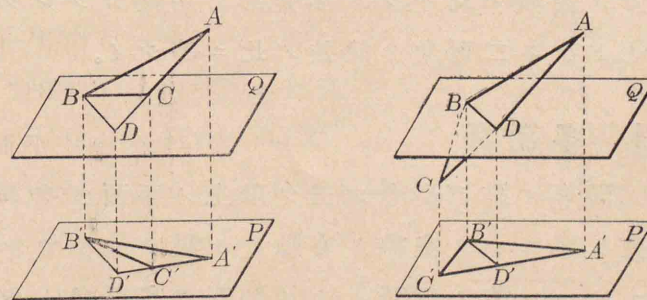
$$\therefore A''H = AH \cos \alpha$$

$$\therefore \triangle A''BC = \frac{1}{2} BC \cdot AH \cos \alpha$$

$$\therefore \triangle A'B'C' = \triangle ABC \cdot \cos \alpha$$

[ii] BC ガ P ニ平行デナイ場合

B ヲ通リ P ニ平行ナ平面 Q ヲ作り、コレガ邊 AC 又



ハソノ延長トノ交點ヲ D トシ、D ノ P 上ニ投ズル

正射影ヲ D' トスレバ [i] ノ證明ニヨリ

$$\triangle A'B'D' = \triangle ABD \cos \alpha$$

$$\triangle B'C'D' = \triangle BCD \cos \alpha$$

コノ二式カラ

$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC \cdot \cos \alpha$$

系 多角形ノ一平面上ニ投ズル正射影ノ面積ハ元ノ多角形ノ面積ニ、多角形ノ平面トソノ平面トノナス二面角ノ餘弦ヲ掛ケタモノニ等シイ。

練習問題

1. 一邊ガ a cm ナル正方形ガアル。コノ正方形ノ平面ト他ノ平面 P トノナス角ガ 60° ナルトキ、元ノ正方形ノ P 上ニ投ズル正射影ノ面積ヲ求メヨ。
2. 一ツノ多角形ノ二ツノ平面 P, Q 上ニ投ズル正射影ノ面積ノ比ハ、ソノ多角形ノ平面ガソレゾレ P, Q トナス二面角ノ餘弦ノ比ニ等シイ。

121. 多面角

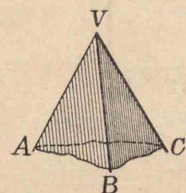
定義 同一ノ點デ出會フ三ツ以上ノ平面ガ次々ニ相交リ、而モソノ交線ト交點トデ限ラレテキルトキニハ、コレ等ノ平面ノナス圖形ヲ**多面角**トイヒ、ソノ點ヲ多面角ノ**頂點**、各ノ平面ヲ多面角ノ**面**、相隣

ル二面ノ交リヲ多面角ノ**稜**トイフ。又相隣ル二稜ノナス角ヲ多面角ノ**面角**トイフ。

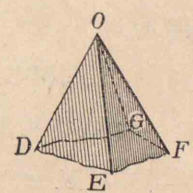
多面角ハソノ面ノ數ニヨリ**三面角**、**四面角**、**五面角**等トイフ。次ノ圖ニ示シタ三面角、四面角ヲソレゾレ

三面角 V-ABC, 四面角 O-DEFG

トイフヤウニ呼ブ。



三面角



四面角

定理 三面角ノ二ツノ面角ノ和ハ他ノ一ツノ面角ヨリモ大キイ。

題意 三面角 V-ABC ニ於テ

$$\angle AVB + \angle BVC > \angle AVC$$

$$\angle BVC + \angle AVC > \angle AVB$$

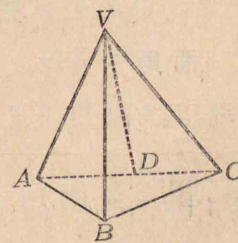
$$\angle AVC + \angle AVB > \angle BVC$$

證明 $\angle AVC > \angle AVB$ トシ $\angle AVC$

内ニ VD ヲ

$$\angle AVD = \angle AVB$$

ナルヤウニ引キ、VA, VD, VC ニ交ル直線 ADC ヲ引ク。



次ニ VB 上ニ VD = 等シク VB ヲトリ, A, B; B, C ヲ結
 ブト,

$$\triangle AVB \equiv \triangle AVD$$

$$\therefore AB = AD$$

然ルニ $AB + BC > AD + DC$

$$\therefore BC > DC$$

ヨツテ, $\triangle BVC$ ト $\triangle DVC$ ヲ比較スルコトニヨリ, 次
 ノ結果ヲ得ル。

$$\angle BVC > \angle DVC$$

$$\therefore \angle AVB + \angle BVC > \angle AVC \quad (1)$$

$\angle AVC = \angle AVB$ 及ビ $\angle AVC < \angle AVB$ ノトキ (1) ノ成

立スルコトハ明カデアル。

同様ニ, $\angle BVC + \angle AVC > \angle AVB$

$$\angle AVC + \angle AVB > \angle BVC$$

定義 多面角ヲソノスベテノ稜ト交ル一平面デ截ツ
 タトキ, ソノ截リ口ガ凸多角形ニナルモノヲ**凸多
 面角**トイフ。

以下多面角トイフノハ凸多面角ノコトデアル。

定理 多面角ノスベテノ面角ノ和ハ四直角
 ヨリモ小サイ。

證明 多面角 $V-ABCD\dots$ ヲソノ各稜ト交ル平面デ截
 リ, ソノ截リ口ヲ $ABCD\dots$ トスル。

今 $ABCD\dots$ 内ニ一點 O ヲ取リ,

O ト A, B, C, D, \dots ヲ結ビ付ケ

ルト, O ヲ共通ノ頂點トシ截リ

口ノ各邊ヲ底邊トスル三角形

ガ出來ルガ, コノ三角形ノ數ト

V ヲ共通ノ頂點トシ, 截リ口ノ

各邊ヲ底邊トスル三角形ノ數トハ相等シイカラ, ソ

ノ内角ノ和モ亦相等シイ。然ルニ

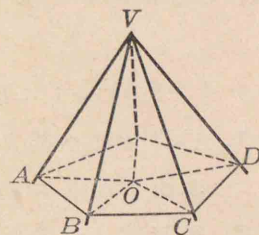
$$\angle VBA + \angle VBC > \angle ABO + \angle OBC$$

$$\angle VCB + \angle VCD > \angle BCO + \angle OCD$$

.....

故ニ V ヲ頂點トスル三角形ノ底角ノ和ハ O ヲ頂點
 トスル三角形ノ底角ノ和ヨリモ大キイ。

故ニ V ヲ頂點トスル三角形ノ頂角ノ和, 即チ多面角
 ノ面角ノ和ハ, O ヲ頂點トスル三角形ノ頂角ノ和, 即
 チ四直角ヨリモ小サイ。



練習問題

1. 三面角ノ一ツノ面角ハ他ノ二ツノ面角ノ差ヨリ
 モ大キイ。
2. 三面角ノ三ツノ二面角ノ二等分面ハ同一ノ直線
 ニ於テ交ル。

雑 問 題

1. 三脚ノ机ハ据リガヨイガ四脚ノ机ハ据リガ悪イ。コノ理由ヲ説明セヨ。
2. 平行線ノ一ツガ一平面ニ交レバ他ノ直線モ亦ソノ平面ニ交ル。
3. 平行ナ二平面ノ一ツニ交ル第三平面ハ又他ノ平面ニモ交ル。
4. 互ニ平行ナ二平面 P, Q ノ各ノ上ニアル二直線 a, b ハ互ニ平行デアルトイヘルカ。
5. 平面外ノ一定點ヲ通りコレニ平行ナ平面ハ唯一ツデアアル。
6. 平面外ノ一定點ヲ通りコレニ平行ナ直線ハ皆同一ノ平面上ニアル。
7. $\triangle ABC$ ノ三ツノ高サヲ AD, BE, CF トシ、垂心 H ニ於テ三角形ノ平面ニ立テタ垂線ヲ HO トスレバ、 OD, OE, OF ハソレゾレ BC, CA, AB ニ垂直デアアル。
8. 直角三角形ノ直角ノ一邊ガ或平面ニ平行デアアルナラバコノ三角形ノ三頂點ノコノ平面上ニ投ズル正射影ヲ三頂點トスル三角形ハ又直角三角形デアアル。
9. 圓ノ直徑 AB ノ一端ヲ通り圓ノ平面ニ垂線ヲ引キ、ソノ上ノ任意ノ一點ヲ M 、圓周上ノ任意ノ一點ヲ C トスルト、平面 MAC ト平面 MBC トハ互ニ垂直デアアル。

10. 一平面上ニナイ四點ヲ順ニ結ンデ得ラレル四邊形ノ四ツノ内角ノ和ハ $4\angle R$ ヨリ小サイ。
11. 三面角 $O-ABC$ ノ三ツノ面角ガイツレモ直角ナルトキニハ、ソノ三面角ノ内側ノ一點 P カラソノ三ツノ面ニ垂線 PX, PY, PZ ヲ引ケバ

$$PO^2 = PX^2 + PY^2 + PZ^2$$
 デアル。
12. 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ、コノ二點ヲ結ブ線分ノ中點ヲ通りコレニ垂直ナ平面デアアル。
13. 一ツノ平面上ニ於テ平面外ノ二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。
14. 平面 P ヨリ 4cm ノ距離ニアル一定點ヲ O トシ、 O ヨリ P ニ長サ 5cm ノ斜線 OA ヲ引クトキ A ノ軌跡如何。
15. 同一ノ平面上ニナイ二直線外ノ一定點ヲ通りソノ各ニ平行ナ平面ヲ作レ。
16. 同一ノ平面上ニナイ二定直線ノ双方ニ交リ且ツ他ノ定直線ニ平行ナ直線ヲ作レ。
17. 與ヘラレター一平面ノ斜線ノ足ヲ通り、ソノ斜線ニ垂直ナ直線ヲソノ平面上ニ作レ。
18. 三面角 $V-ABC$ ノ内部ニ直線 VO ヲ引ケバ

$$\angle AVO + \angle BVO + \angle CVO > \frac{1}{2}(\angle AVB + \angle BVC + \angle CVA)$$
 デアル。

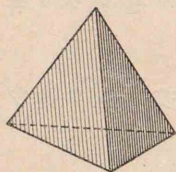
第八章 多面體

122. 多面體 角嚮

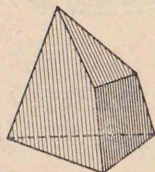
定義 平面で圍マレタ立體ヲ多面體トイヒ、ソノ境界ヲナシテキル平面ノ部分ヲ多面體ノ面、面ト面トノ交線ヲ多面體ノ稜、稜ト稜トノ交點ヲ多面體ノ頂點トイフ。

多面體ノ面ノ數ハ三ツヨリ多イ。

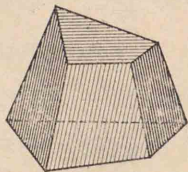
多面體ハソノ面ノ數ニ應ジテ四面體、五面體、六面體等ト名ヅケル。



四面體



五面體



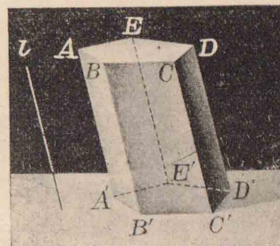
六面體

多面體ノイヅレノ面ヲ延長シテモソノ平面ガ多面體ヲ截ラナイモノヲ凸多面體トイフ。以後本書デ多面體トイフノハ凸多面體ノコトデアル。

定義 多面體ノ二ツノ面ガ平行デ他ノ面ハスベテ同一ノ直線ニ平行ナルトキニハコレヲ角嚮トイヒ、

ソノ平行ナ二面ヲ角嚮ノ底面、他ノ面ヲ角嚮ノ側面トイフ。又相隣ル二ツノ側面ノ交リヲ角嚮ノ側稜トイヒ、兩底面ノ距離ヲ高サトイフ。

圖ニ示スノハ底面ガ五角形ナル角嚮デ、コレヲ



角嚮 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ ト呼ブ。

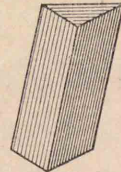
角嚮ハ底面ノ邊數ニ應ジテ

三角嚮、四角嚮、五角嚮トイフヤウニ呼ブ。

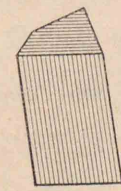
又側稜ガ底面ニ垂直ナモノヲ直角嚮トイヒ、サウデナイモノヲ斜角嚮トイフ。特ニ底面ガ正多角形ナル直角嚮ヲ正角嚮トイフ。



直角嚮



斜三角嚮



斜四角嚮



正五角嚮

角嚮ノ定義カラ容易ニ次ノ定理ガ得ラレル。各自ニ證明ヲ試ミヨ。

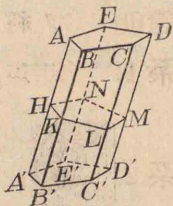
定理 角嚮ノ側面ハ皆平行四邊形デアル。

系1. 直角嚮ノ側面ハ皆矩形デアル。

- 系2. 角嚮ノ側稜ハ互ニ平行デアツテ相等シイ。
- 系3. 角嚮ノ兩底面ハ合同ナ多角形デアアル。
- 系4. 角嚮ヲソノスベテノ側稜ニ交ルニ平行平面デ截レバソノ截リ口ハ合同ナ多角形デアアル。

練習問題

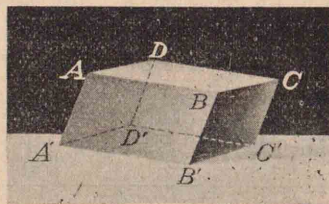
1. 直三角嚮ガアル。底面ノ三邊ハ4cm, 5cm, 6cmデ高サハ12cmデアアル。ソノ側面積ヲ求メヨ。
2. 直角嚮ノ側稜ノ長サヲ表ハス數ヲ l , 底面ノ周ヲ表ハス數ヲ p , 側面積ヲ表ハス數ヲ S トスレバ,
 $S=lp$ デアアル。
3. 斜角嚮ノ側稜ヲ l , スベテノ側稜ト垂直ニ交ル平面デ截ツタトキノ截リ口(直截面)ノ周ヲ p , 側面積ヲ S トスレバ,
 $S=lp$ デアアル。



123. 平行六面體 直方體 立方體

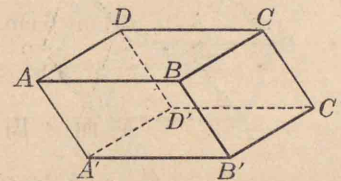
角嚮ノ中デ特ニ主要ナモノハ平行六面體デアアル。

定義 平行六面體トハ底面ガ平行四邊形ナル角嚮デアアル。



定理 平行六面體ノ三双ノ相對スル面ハソレゾレ互ニ平行デアツテ且ツ合同ナ平行四邊形デアアル。

題意 $ABCD-A'B'C'D'$ ヲ平行六面體トスレバ

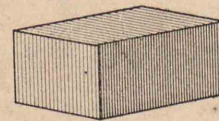


$ABCD$ ト $A'B'C'D'$
 $AA'B'B$ ト $DD'C'C$
 $AA'D'D$ ト $BB'C'C$
 トハ互ニ平行デ且ツ合同ナ平行四邊形デアアル。

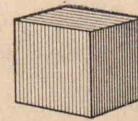
證明 (省ク。各自ニ試ミヨ)

- 系1. 平行六面體ノ稜ハ四ツヅツ平行デアツテ且ツ相等シイ。
- 系2. 平行六面體ハソノイヅレノ相對スル二面ヲ底面トスル角嚮トモ見ルコトガデキル。

定義 平行六面體ノ各ノ面ガ矩形ナルトキニハコレヲ直六面體又ハ直方體トイヒ, 各ノ面ガ正方形ナルトキニハコレヲ立方體トイフ。



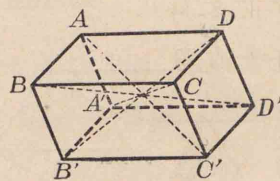
直六面體



立方體

練習問題

1. 直六面體ノ稜ハコレト交ル面ニ垂直デアル。
2. 直六面體ノ一頂點カラ出ル三稜ガソレゾレ5cm, 8cm, 10cm ナルトキ, ソノ表面積ヲ求メヨ。
3. 平行六面體ノ四ツノ對角線(同ジ面上ニナイ二頂點ヲ結ブ線分)ハ皆ソノ中點ニ於テ相交ル。
4. 直方體ノ對角線ハ相等シイ。
5. 三稜ノ長サヲ表ハス數ガ a, b, c ナル直方體ノ對角線ノ長サヲ求メヨ。



124. 角錐

定義 一ツノ多角形ト, ソノ各邊ヲ底邊トシ, ソノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トニヨツテ圍マレタ多面體ヲ角錐トイヒ, ソノ多角形ヲ角錐ノ底面, 各三角形ヲ角錐ノ側面, ソノ共通ノ頂點ヲ角錐ノ頂點トイフ。又相隣ル側面ノ交リヲ角錐ノ側稜トイヒ, 頂點ト底面トノ距離ヲ角錐ノ高サトイフ。

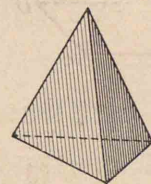
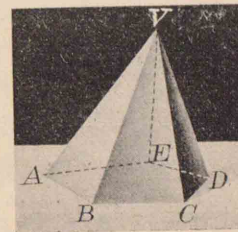
次ノ圖ニ示シタノハ底面ガ五角形ナル角錐デアル。

コレヲ

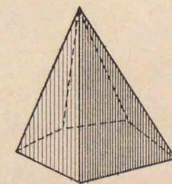
角錐 $V-ABCDE$

トイフヤウニ呼ブ。

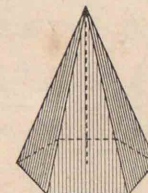
角錐ハ底面ノ邊數ニヨツテ三角錐, 四角錐, 五角錐等ト呼ビ, 又底面ガ正多角形デアツテ, 頂點ガ底ノ中心ヲ通り底面ニ垂直ナ直線上ニアルモノヲ直角錐又ハ正角錐ト呼ブ。



三角錐



五角錐



正六角錐

正角錐ノ側面ハ合同ナ二等邊三角形デアル。コノ二等邊三角形ノ高サヲ正角錐ノ斜高トイフ。

定理 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截レバ

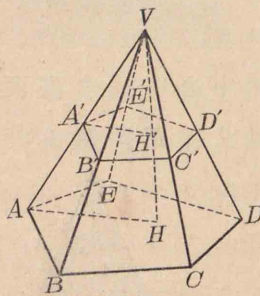
- [i] 側稜ト高サトハ同ジ比ニ分タレル。
- [ii] 截面ハ底面ト相似デアル。

題意 角錐 $V-ABCD\dots$ ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ツタトキノ截面ヲ $A'B'C'D'\dots$ トシ, コレト高サ VH トノ交リヲ H' トスレバ

[i] $VA' : A'A = VB' : B'B = \dots = VH' : H'H$

[ii] $A'B'C'D' \dots \infty ABCD \dots$

證明 [i] A', H' 及 A, H を結べば, $A'H', AH$ は平行ナ二平面ト平面 VAH トノ交リデアルカラ平行デアル。



$\therefore VA' : A'A = VH' : H'H$

同理ニヨリ

$VB' : B'B = VH' : H'H$

$\dots \dots \dots$

$\therefore VA' : A'A = VB' : B'B = \dots = VH' : H'H$

[ii] $A'B'C'D' \dots$ ト $ABCD \dots$ トノ邊ハニツツツ順

次同方向ニ平行デアル。

$\therefore \angle A' = \angle A, \angle B' = \angle B, \dots$

又 $A'B' : AB = B'C' : BC = \dots$

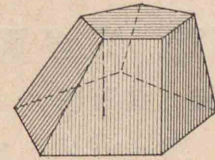
$\therefore A'B'C'D' \dots \infty ABCD \dots$

系1. 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ, 截面ト底面トノ面積ノ比ハ, 頂點カラコレ等ノ二平面ニ至ル距離ノ二乗比ニ等シイ。

系2. 高サト底面トガソレゾレ相等シイニツノ角錐ヲ, 頂點カラ等距離ニアリ且ツ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ, ソノ截面ノ面積ハ相等シイ。

定義 角錐ヲ底面ニ平行ナ平面デ

截ルトキ, ソノ截面ト底面トノ間ニアル部分ヲ角錐臺トイフ。



ソシテ截面ト底面トヲ共ニ角

錐臺ノ底面トイヒ, 他ノ面ヲ側面トイフ。又相隣

ル側面ノ交リヲソノ側稜トイヒ, 兩底面ノ距離ヲ

ソノ高サトイフ。

角錐臺ノ中デ, 正角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ツタトキニ生ズルモノハ特ニ正角錐臺トイフ。

正角錐臺ノ側面ハ合同ナ梯形デアル。コノ梯形ノ高サヲ正角錐臺ノ斜高トイフ。

練習問題

1. 高サガ 4 cm, 底面ノ一邊ガ 2 cm ナル正六角錐ノ側面積ヲ求メヨ。

2. 正角錐ノ底面ノ周ヲ p , 斜高ヲ l , 側面積ヲ S トスレバ,

$$S = \frac{lp}{2} \text{ デアル。}$$

3. 正角錐臺ノ兩底面ノ周ヲ p, p' 斜高ヲ l , 側面積ヲ S トスレバ

$$S = \frac{1}{2}l(p+p')$$

デアル。

125. 正多面體

定義 多面體ノスベテノ面ガ合同ナ正多角形デ、各頂點ニ於ケル多面角ガ合同ナルトキニハコレヲ**正多面體**トイフ。

例ヘバ立方體ハ正多面體デアアル。

定理 正多面體ハ五種ヨリ多クハナイ。

證明 正多面體ノ各面ハイヅレモ合同ナ正多角形デアアル。故ニソノ各頂點ニ於ケル多面角ノ面角ハ相等シク、且ツソノ和ハ4直角ヨリ小デアアル。ソシテソノ多面角ハ三ツ以上ノ面ヲ有スルカラ、正多面體ノ面ハ、一角ガ $\frac{4}{3}$ 直角ヨリ小ナル正多面角デアアルコトヲ要スル。

サテ正三角形ノ一角ハ 60° 即チ $\frac{2}{3}$ 直角デアツテ $\frac{2}{3}$ 直角ノ5倍マデハ4直角ヨリ小デアアル。故ニ正三角形ノミヲ面トシテ作り得ル多面角ハ三面角、四面角、五面角ノ三種デアアル。

又正方形ノ一角ハ直角、正五角形ノ一角ハ 108° 即チ $\frac{6}{5}$ 直角デアツテ何レモ3倍マデガ4直角ヨリ小デアアル。故ニ正方形又ハ正五角形ノミヲ面トシテ作り得ル多面角ハ三面角ノミデアアル。

次ニ邊數ガ6以上ノ正多角形ノ一角ハ $\frac{4}{3}$ 直角以上デアアルカラ最早コレノミヲ面トスル多面角ハ作り得ナイ。

故ニ正多面體ノ多面角ハ

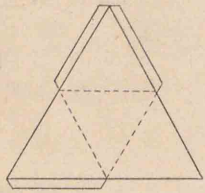
- (1) 三ツノ正三角形
- (2) 四ツノ正三角形
- (3) 五ツノ正三角形
- (4) 三ツノ正方形
- (5) 三ツノ正五角形

カラナルモノノ他ニハナイ。即チ正多面體ハ五種ヨリ多クナイ。

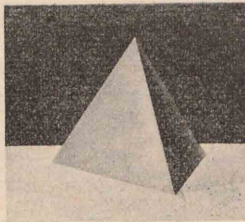
注意 上ノ五種ノ正多面體ノ模型ハ次ノ頁ノ圖ノヤウニ、紙ヲ切り點線ニ沿ツテ折り曲ゲテ作ルコトガ出來ル。

練習問題

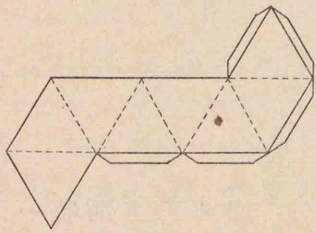
1. 一稜ガ $2a$ cmナル正四面體ノ表面積ヲ求メヨ。
2. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ハ同一ノ點ヲ通り、ソノ點ニヨツテ互ニ他ヲ二等分スル。
3. 正四面體ノ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ハ、ソノ足カラ一ツノ面ニ引イタ垂線ノ3倍ニ等シイ。



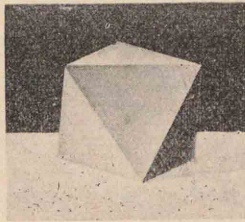
正四面體ノ展開圖



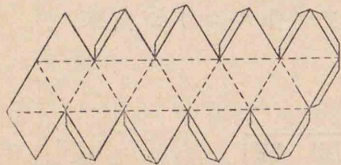
正四面體



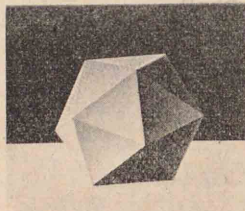
正八面體ノ展開圖



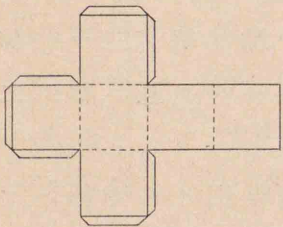
正八面體



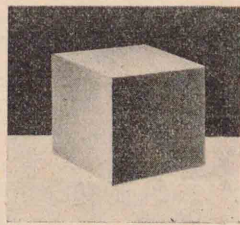
正二十面體ノ展開圖



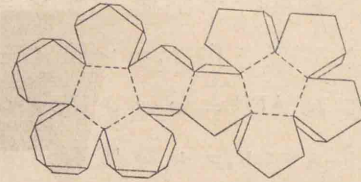
正二十面體



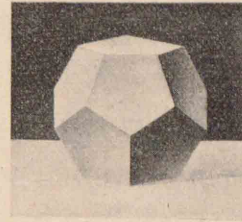
正六面體ノ展開圖



正六面體(立方體)



正十二面體ノ展開圖



正十二面體

126. 直角罫ノ體積

定義 立體ノ表面ニヨツテ圍マレタ空間ノ部分ヲソノ體積トイフ。

體積ノ等シイニツノ立體ハ相等シイ又ハ等積デア
ルトイヒ、コレヲ表ハスニ等號ニ用ヒルコト面積ノ
場合ト同様デアル。

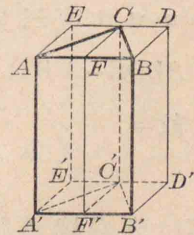
定理 直三角罫ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

題意 直三角罫 $ABC-A'B'C'$ ノ底面積ヲ b 、高サヲ h 、
體積ヲ V トスルト

$$V = bh$$

デア
ル。

證明 底面 $A'B'C'$ ノ最大角ヲ $\angle C'$
トスレバ $\angle A'$ 、 $\angle B'$ ハ共ニ銳角デア
ル。



今稜 CC' ヲ含ミ側面 AB' ニ平行ナ平面ト、コレニ垂直デ稜 AA' , BB' ヲ含ム二平面ヲ作り、コレ等ノ三平面ト角嚮ノ兩底面及ビ側面 AB' ニヨツテ圍マレル角嚮ヲ $ABDE-A'B'D'E'$ トスルト、コレハ底面ガ矩形ノ直角嚮デアラカラ直六面體デアアル。ソシテソノ底面 $A'B'D'E'$ ノ面積ハ $\triangle A'B'C'$ ノ二倍ニ等シク、體積ハ $2bh$ デアアル。

次ニコノ直六面體ヲ、側稜 CC' ヲ含ミ側面 AB' ニ垂直ナ平面ヲ作ツテ二ツノ直六面體 $AECF-A'E'C'F'$ $BDCF-B'D'C'F'$ ニ分ケルト、三角嚮 $AFC-A'F'C'$ ト $CEA-C'E'A'$ トハ底面ガ合同デ等高ナル直角嚮デアラカラ全ク重ネ合スコトガ出來ル。

從ツテ

$$\text{直角嚮 } AFC-A'F'C' = \text{直角嚮 } CEA-C'E'A'$$

同様ニ

$$\text{直角嚮 } BDC-B'D'C' = \text{直角嚮 } CFB-C'F'B'$$

ヨツテ直三角嚮 $ABC-A'B'C'$ ノ體積ハ直六面體 $ABDE-A'B'D'E'$ ノ體積 $2bh$ ノ半分デアアル。

故ニ

$$V = bh$$

系 直角嚮ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

練習問題

1. 底面ガ一邊 6 cm ナル正三角形デ、高サガ 10 cm アレル直角嚮ノ體積ヲ求メヨ。
2. 底面ガ一邊 6 cm ナル正六角形デ、高サガ 10 cm アレル直角嚮ノ體積ヲ求メヨ。又コノ角嚮ノ側面積ヲ求メヨ。

127. 斜角嚮ノ體積

定理 斜角嚮ノ體積ハソノ直截面ノ面積ト側稜トノ積ニ等シイ。

題意 斜角嚮 $ABCD-A'B'C'D'$ ノ

直截面ノ面積ヲ b' , 側稜 AA' ヲ l , 體積ヲ V トスレバ

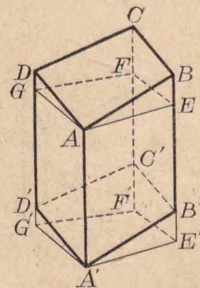
$$V = b'l$$

デアアル。

證明 頂點 A 及ビ A' ヲ通ル直

截面 $A'EFG$, $A'E'F'G'$ ヲ作ルトキ $A'EFG-A'E'F'G'$ ハ直角嚮デアツテ、ソノ底面ノ面積ハ b' , 高サハ l デアラルカラ體積ハ $b'l$ デアアル。

サテ立體 $ABCDEF$ ト $A'B'C'D'E'F'G'$ トニ於テ面



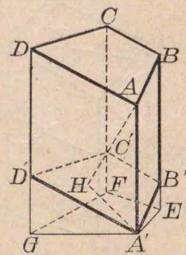
AEFG ト A'E'F'G' トハ共ニ角嚮ノ直截面デアルカラ、コノ二面ノ一方ヲ側稜ニ沿ッテ移動サセテ全ク他面ニ一致サセルコトガ出來ル。ソシテコノ場合 BB'=AA'=EE' デアルカラ BE=B'E' トナリ頂點 B ハ B' ニ重ナル。

同様ニ頂點 C, D ハソレゾレ頂點 C', D' ニ重ナル。ヨッテコノ二ツノ立體ハ合同デアル。故ニ

斜角嚮 ABCD-A'B'C'D' = 直角嚮 AEFG-A'E'F'G'

$$\therefore V = b'l$$

定理 斜角嚮ノ體積ハソノ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。



題意 斜角嚮 ABCD-A'B'C'D' ノ底面積ヲ b , 高サ AH ノ長サヲ h , 體積ヲ V トスルト

$$V = bh$$

デアル。

證明 頂點 A' ヲ通ル直截面 A'EFG ヲ作り、コノ直截面ノ面積ヲ b' , 側稜 AA' ノ長サヲ l トスルト

$$V = b'l \tag{1}$$

然ルニ直截面 A'EFG ハ底面 A'B'C'D' ノ直截面上ニ投

ズル正射影デアルカラ、コノ兩多角形ノ平面ガナス角ヲ α トスレバ

$$b' = b \cos \alpha \tag{2}$$

又 $\triangle AA'H$ ニ於テ $\angle H$ ハ直角デアツテ、 $\angle A'AH$ ハ A カラ二平面 A'EFG, A'B'C'D' ニ引イタ垂線ノ夾ム角デアルカラ、コノ二平面ノナス角 α ニ等シイ。故ニ

$$\frac{h}{l} = \cos \alpha$$

$$\therefore l = \frac{h}{\cos \alpha} \tag{3}$$

(2) 及ビ (3) ヲ (1) ニ代入スルト

$$V = b \cos \alpha \times \frac{h}{\cos \alpha} = bh$$

即チ證明サレタ。

系1. 等底等高ノ角嚮ハ等積デアル。

系2. 等底(等高)ナル二ツ角嚮ノ體積ノ比ハ高サ(底面)ノ比ニ等シイ。

練習問題

1. 底面積ガ25平方糎ナル斜角嚮ガアル。ソノ側稜ノ長サハ15糎側稜ノ底面トナス角ガ 60° ナルトキハ、ソノ體積ハ何程カ。
2. 平行六面體ハ、ソノ相對スル二ツノ側稜ヲ通ル平面デ二ツノ等積ナ三角嚮ニ分カタレル。

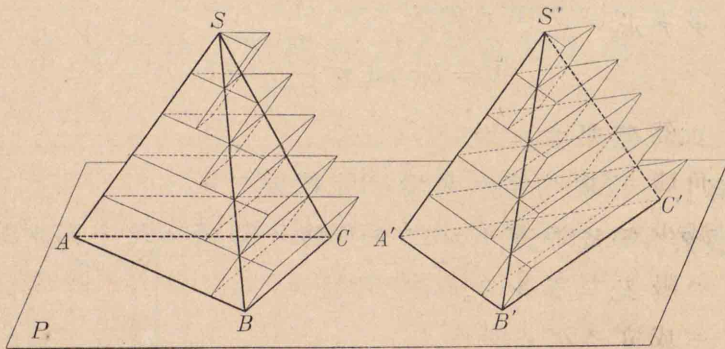
128. 角錐ノ體積

定理 底面積ト高サノ相等シイニツノ三角錐ハ等積デアアル。

題意 底面積ト高サノ相等シイ三角錐 $S-ABC$ 及ビ $S'-A'B'C'$ ノ體積ヲソレゾレ V, V' トスルト

$$V = V'$$

デアアル。



證明 兩三角錐ヲ同一平面 P 上ニオキ, SA ヲ n 等分シテソノ各分點ヲ通り P ニ平行ナ平面ヲ作ルト, コレ等ハ $S'A'$ ヲモ n 等分シ且ツ同ジ平面ニヨル截面ハ等積デアアル。

各底面及ビ截面ヲ下底トシ, SA 及ビ $S'A'$ ノ各部分ヲ一稜トスル三角錐ヲ各ニ n 個作ルトキハ同ジ

平行平面ノ間ニアル三角錐ハ等積デアアル。故ニ各角錐ニデキタ角錐ノ體積ノ和ハ相等シイカラコレヲ Q トスレバ, 明カニ

$$Q > V, Q > V'$$

デアアル。

次ニ前ノ截面ヲ上底トシ $SA, S'A'$ ノ各部分ヲ一稜ニスル三角錐ヲ各ニ $(n-1)$ 個作り, コレ等ノ體積ノ和ヲ R トスレバ

$$R < V, R < V'$$

デアアル。故ニ

$$R < V < Q, R < V' < Q \quad (1)$$

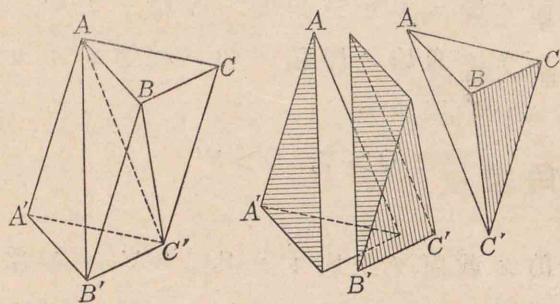
然ルニ差 $Q-R$ ハ底 ABC ヲ下底トシテデキタ三角錐ニ等シイカラ n ヲ限リナク増セバドコマデモ減少セシメラレル。即チ n ヲ限リナク増セバ $Q-R$ ハ限リナク零ニ接近スル。シカモ尙(1)ノ關係ハ常ニ成立スルカラ

$$V = V'$$

デナケレバナラス。

系 底面積ト高サノ相等シイ角錐ハ等積デアアル。

上ノ定理カラ三角錐 $ABC-A'B'C'$ ニ就テ考ヘルト, 三角錐 $C'-ABB', C'-AA'B'$ 及ビ三角錐 $A-BCC', A-BB'C'$ ハ夫々等積デアアルコトハ容易ニ言ハレル。然ルニ三



角錐 $C'-ABB'$ ト $A-BB'C'$ トハ同一デアルカラ
 三角錐 $C'-ABB' = C'-AA'B' = A-BCC'$
 故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 三角錐ノ體積ハコレト底面積及ビ高サヲ等シクスル三角錐ノ體積ノ三分ノ一ニ等シイ。

- 系1.** 三角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。
系2. 角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

練習問題

1. 底面積ト高サヲ知ツテ三角錐ノ體積ヲ求メル公式ヲ作レ。

2. 底面ガ一邊6種アル正方形デ側稜ガ10種アル正四角錐ノ體積ヲ計算セヨ。

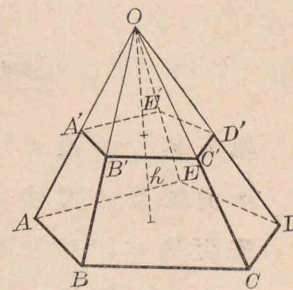
129. 角錐臺ノ體積

定理 角錐臺ノ兩底面ノ面積ヲ b, b' , 高サヲ h , 體積ヲ V トスレバ

$$V = \frac{1}{3}h(b + \sqrt{bb'} + b')$$

デアル。

證明 角錐臺ノ下底面ヲ b , 上底面ヲ b' トシ、截リトラレタ小角錐ノ高サヲ x トスルト元ノ角錐ノ高サハ $x+h$ デアル。ソシテ角錐臺ノ體積ハ元ノ角錐ノ體積ト截リ取ツタ角錐ノ體積トノ差ニ等シイカラ



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}b(x+h) - \frac{1}{3}b'x \\ &= \frac{1}{3}\{bh + (b-b')x\} \end{aligned} \tag{I}$$

然ルニ

$$\frac{b'}{b} = \frac{x^2}{(x+h)^2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{b}} = \frac{x}{x+h}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} = \frac{x}{h}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{b'}h}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}$$

コレヲ(1)式ニ代入スルト

$$V = \frac{1}{3}h \left\{ b + \frac{\sqrt{b}(b-b')}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} \right\}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}h(b + \sqrt{bb'} + b')$$

ヨツテ證明サレタ。

練習問題

1. 兩底面ノ面積ガ15平方糎, 5平方糎, 高サガ8糎ナル角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。
2. 底面積ガ10平方糎, 高サガ25糎ナル角錐ヲ底面カラ9糎ノ距離ニアル平行平面デ截ルトキ生ズル角錐臺ノ體積ハ何程カ。
3. 底面積ガ b 平方糎, 高サガ h 糎ナル角錐ヲ底面ニ平行ニ頂點カラ h' 糎ナル距離ノ平面デ截ルトキ二ツノ部分ノ體積ハ各何程カ。

雜問題

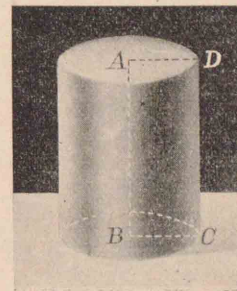
1. 直角臺ト正角臺トノ差異ヲ述ベヨ。
2. 直六面體ノ體積ヲ求メル公式ヲ述ベ, 三稜ノ數値ガ整數ノ場合, 及ビ小數第一位マデアルトキニツイテ例ヲアゲテ説明セヨ。
3. 四面體ノ二組ノ相對スル稜ノ中點ハ一ツノ平行四邊形ノ頂點トナル。
4. 立方體 $ABCD-A'B'C'D'$ ノ三頂點 B, A', C' ヲ含ム平面ハ對角線 DB' ニ垂直デアアル。
5. 四面體 $ABCD$ ノ稜 AB ヲ延長シテコノ直線上ニ二點 A', B' ヲ取リ $AB=A'B'$ ナラシメルト, 四面體 $A'B'CD$ ノ體積ハ $ABCD$ ノ體積ニ等シイ。
6. 稜ノ長サガ a ナル正四面體ノ一頂點ヨリ對面ヘ下シタ垂線ノ長サハ $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ デアル。
7. 一稜ノ長サガ a ナル正四面體ノ體積 V ヲ求メル公式ヲ作レ。
8. 二ツノ正四面體ノ體積ノ比ハソノ一稜ノ三乗比ニ等シイ。
9. 正四面體內ノ任意ノ一點カラ四ツノ面ニ引イタ垂線ノ和ハ一定デアアル。
10. 底面積ガ50平方糎, 側稜ガ20糎ナル四角臺ノ側稜ガ底面ト 60° ノ角ヲナシテキルトキ, ソノ體積ヲ求メヨ。

11. 體積ガ 2430 立方糎アツテ、一頂點ニ集マル三稜ノ比ガ 3:5:6 ナルヤウナ直六面體ヲ作ルニハ各稜ヲ何程ヅツトスレバヨイカ。
12. ニツノ立方體ノ體積ノ比ハソノ一稜ノ三乗比ニ等シイ。
13. 同一平面上ニナイ三ツノ平行線ガアル。コノ三直線カラ定長ノ三線分ヲ截リ取ル任意ノ平行二平面ヲ作ルトキニ生ズル三角嚢ノ體積ハ皆相等シイ。
14. 稜ノ長サガ 12cm アル立方體ノ相隣ル各面ノ中心ヲ結ブ 12 個ノ線分ヲ稜トスル多面體ノ體積ヲ求メヨ。
15. 正六角嚢ガアル。ソノ底面ノ一邊ハ 4cm デ高サガ 6cm ナルトキ、コノ體積ヲ求メヨ。
16. 四面體 ABCD ノ稜 AC, BD ノ中點ヲ夫々 E, G トスルトキハ四ツノ四面體 EGBC, EGCA, EGAD, EGCD ノ體積ハ互ニ相等シイ。
17. 正四面體ヲ一ツノ平面デ截リソノ截リ口ヲ正方形ナラシメヨ。
18. 四面體ノ二組ノ相對スル稜ガ互ニ垂直ナルトキハ、残りノ一組ノ相對スル稜モ亦互ニ垂直デアアル。

第九章 曲面體

130. 直圓嚢

定義 矩形ガソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉シタトキニ生ズル立體ヲ直圓嚢トイフ。コノ廻轉ノ軸トシタ邊ヲ直圓嚢ノ軸、コレニ對スル邊ヲ母線トイフ。廻轉ニヨツテ母線ノ畫ク曲面ヲ側面、軸ニ隣ル二邊ノ畫ク合同ナ圓ヲ底面トイフ。又コノ底面ノ半徑ヲ直圓嚢ノ半徑トイヒ、コノ兩底面ハ平行デアアルカラソノ距離ヲ直圓嚢ノ高サトイフ。

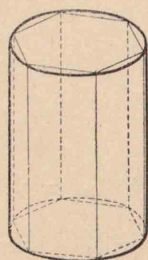


定理 直圓嚢ニ於テハ

- [i] 側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。
- [ii] 體積ハ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ。

題意 直圓嚢ノ底面ノ周ヲ p , 底面積ヲ b , 高サヲ h , 側

面積ヲ S , 體積ヲ V トスルト



$$[i] S = ph$$

$$[ii] V = bh$$

證明 [i] 直圓壺ノ下底ニ正 n 角形ヲ内接サセ, コレヲ下底トシ直圓壺ト等高ナ直角壺ヲ作ルト, コノ側稜ハ皆直圓壺ノ側面ニ含まレ直角壺ノ上底ハ直圓壺ノ上底ニ内接スル。

今コノ直角壺ノ底面ノ周ヲ p' , 側面ノ面積ヲ S' トスレバ

$$S' = p'h$$

今直角壺ノ底面ノ邊數 n ヲ無限ニ増加セシメルト p' ハ直圓壺ノ底面ノ周 p ニ限りナク近ヅクカラ $p'h$ ハ ph ニ限りナク接近スル。コレト同時ニ明カニ S' ハ S ニ限りナク接近シ, シカモ n ガドレ程増加シテモ

$$S' = p'h$$

ハ成立スルカラ

$$S = ph$$

デナケレバナラス。

[ii] ([i]ニナラツテ各自ニ試ミヨ)

注意 上ノヤウナ直角壺ハ直圓壺ニ内接スルトイフ。

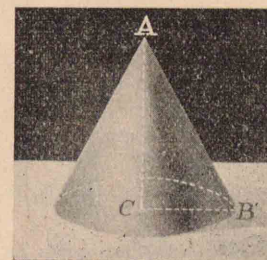
系 半徑ガ r , 高サガ h ナル直圓壺ノ側面積ヲ S , 體積ヲ V トスルト, $S = 2\pi rh$, $V = \pi r^2 h$ デアル。

練習問題

1. 直圓壺ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキハソノ截面ハ底面ニ合同ナ圓デアル。
2. 半徑ガ 5 cm, 高サガ 10 cm ナル直圓壺ノ體積及ビ側面積及ビ全表面積ヲ求メヨ。
3. 長サ l , 外半徑 r , 内半徑 r' ナル鐵管ノ體積 V ヲ求メル公式ヲ作レ。

131. 直圓錐

定義 直角三角形ヲ, 直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一廻轉シタトキニ, 他ノ二邊ニヨツテ生ズル面デ圍マレタ立體ヲ直圓錐トイフ。コノ場合廻轉ノ軸トシタ邊ヲ直圓錐ノ軸トイヒ, 斜邊ヲ母線トイフ。廻轉ニヨツテ母線ノ畫ク曲面ハ直圓錐ノ側面, 直角ヲ夾ム他ノ邊ガ畫ク圓ノ平面ヲ底面トイフ。又ソノ半徑ヲ直圓錐ノ半徑トイフ。

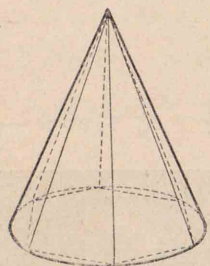


直圓錐ノ軸ハ底面ニ垂直デアルカラ、コノ長サハ頂點ト底面トノ距離デアル。コレヲ直圓錐ノ高サトイフ。又母線ノ長サヲ斜高トイフ。

定理 直圓錐ニ於テハ

[i] 側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ二分ノ一ニ等シイ。

[ii] 體積ハ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。



題意 直圓錐ノ底面ノ周ヲ p 、底面積ヲ b 、斜高ヲ l 、高サヲ h 、側面積ヲ S 、體積ヲ V トスレバ

$$[i] \quad S = \frac{1}{2}pl$$

$$[ii] \quad V = \frac{1}{3}bh$$

證明 [i] 直圓錐ノ底面ニ正 n 邊形ヲ内接サセ、コレヲ底面トシ直圓錐ノ頂點ヲ頂點トスル直角錐ヲ作り、ソノ斜高ヲ l' 、底面ノ周ヲ p' 、側面積ヲ S' トスレバ

$$S' = \frac{1}{2}p'l'$$

今直角錐ノ底面ノ邊數 n ヲ限リナク増ストキハ p' ハ直圓錐ノ底面ノ周 p ニ限リナク近ヅキ、 l' ハ l

ニ限リナク近ヅク。即チ $\frac{1}{2}p'l'$ ハ $\frac{1}{2}pl$ ニ限リナク近ヅク。同時ニ明カニ S' ハ S ニ限リナク接近シ、シカモ n ガドレホド大ニナツテモ

$$S' = \frac{1}{2}p'l'$$

ハ常ニ成立スル。

$$\therefore S = \frac{1}{2}pl$$

[ii] (上ニナラツテ各自ニ試ミヨ)

注意 上ノヤウナ直角錐ハ直圓錐ニ内接スルトイフ。

系 半徑ガ r 、高サガ h ナル直圓錐ノ側面積ヲ S 、體積ヲ V トスルト

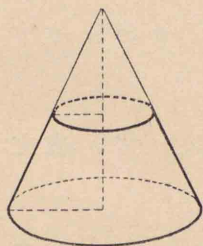
$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}, \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

練習問題

1. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム邊ガ 3 cm ト 4 cm デアルトキ 3 cm ノ邊及ビ 4 cm ノ邊ヲ軸トシテ一廻轉シタトキニ生ズル二ツノ直圓錐ハ、ドチラガ何程大ナル體積ヲ有スルカ。
2. 一邊ガ 8 糎ノ正三角形ヲ、ソノ一邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。
3. 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ツタトキノ截面ハ圓デアル。

132. 直圓錐臺

定義 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ、コノ截面ト底面トノ間ニアル直圓錐ノ部分ヲ直圓錐臺トイフ。ソシテコノ截面及ビ底面ヲ直圓錐臺ノ底面トイヒ、兩底面ノ距離ヲ直圓錐臺ノ高サトイフ。又元ノ直圓錐ノ母線ガ兩底面ニテ截リ取ラレル部分ノ長サヲソノ斜高トイフ。



直圓錐ニ内接スル直角錐ヲ作り、コレヲ底面ニ平行ナ平面デ截ツテ得ラレル正角錐臺ニ於テ、側面積及ビ體積ヲ求メル公式ヲ用ヒテ、次ノ定理ハ容易ニ證明スルコトガデキル。

定理 直圓錐臺ノ兩底面ノ周ヲ p, p' 、面積ヲ b, b' 、斜高ヲ l 、高サヲ h 、側面積ヲ S 、體積ヲ V トスレバ

$$[i] \quad S = \frac{1}{2}l(p+p')$$

$$[ii] \quad V = \frac{1}{3}h(b+\sqrt{bb'}+b')$$

系 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ r, r' 、斜高ヲ l 、高サヲ h 、側面積ヲ S 、體積ヲ V トスレバ

$$S = \pi l(r+r')$$

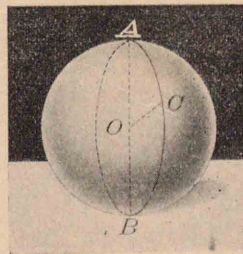
$$V = \frac{1}{3} \pi h(r^2 + rr' + r'^2)$$

練習問題

1. 口径 30 cm, 底径 22 cm, 高サ 18 cm アルばけつノ容積ヲ求メヨ。又コノばけつヲ作ルニハ約幾平方糎ノぶりきヲ要スルカ。
2. 0.5 立入ノこつぷヲ作ルニ底ノ半徑ヲ 3 cm, 口ノ半徑ヲ 5 cm トスレバ高サハ何程トナルカ。

133. 球 球ト平面

定義 一ツノ半圓ガソノ直徑ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル立體ヲ球トイヒ、球ヲ圍ム曲面ヲ球面トイフ。又廻轉シタ半圓ノ中心ヲ球ノ



中心トイヒ、球ノ中心ト球面上ノ一點トヲ結ブ線分ヲ球ノ半徑、中心ヲ通り球面上ノ二點ニ終ル線分ヲ球ノ直徑トイフ。

次ノ定理ハ球ノ定義カラ容易ニ證明ガ出來ル。

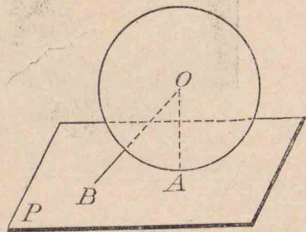
定理 [i] 球面ハ中心カラノ距離ガ半徑ノ長サニ等シイ點ノ軌跡デアアル。

[ii] 球内ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ小サク、球外ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ大キイ。逆モ亦眞デアアル。

[iii] 半徑ノ等シイ二ツノ球ハ合同デアアル。

球ト平面トノ位置ニ關シテ次ノ二ツノ定理ガアル。

定理 球面上ノ一點ヲ通りコノ點ニ引イタ半徑ニ垂直ナ平面ハ、コノ點以外ノ點ニ於テハ球面ト出會ハナイ。



證明 平面 P 上ニ A 以外ニ任意ノ一點 B ヲ取り、O ト B トヲ結ブトキ、OA ガ P ノ垂線デアアルカラ OB ハ P

題意 球 O ノ球面上ノ一點ヲ A トシ、A ヲ通り半徑 OA ニ垂直ナ平面ヲ P トスレバ、P ハ A 以外ノ點ニ於テハコノ球面ト出會ハナイ。

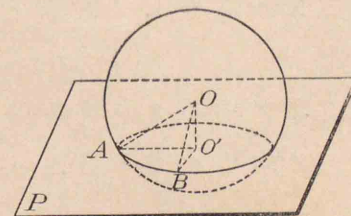
ノ斜線デアアル。故ニ OB ハ OA ヨリ大デアアル。ヨツテ B ハ球ノ外ニアル。

故ニ P ハ A 以外ノ點ニ於テハ球面ト出會ハナイ。

定理 球面上ノ一點ヲ通りコノ點ニ引イタ半徑ニ垂直デナイ平面ハ球面ト一圓周ニ於テ出會フ。

題意 球 O ノ球面上ノ一點 A ヲ通り半徑 OA ニ垂直デナイ平面ヲ P トスレバ、P ハ球面ト一圓周ニ於テ出會フ。

證明 O ヲ P ニ垂線 OO' ヲ引キ、O' ヲ中心トシ O'A ヲ半徑トスル圓ヲ P 上ニ畫キ、コノ圓周上ニ A 以外ニ任意ニ一點 B ヲ取ルトキハ



$$OO' \perp P$$

$$O'A = O'B$$

$$\therefore OB = OA$$

ヨツテ B ハ球 O ノ面上ニアル。

故ニ圓 O' ハ球 O ノ面上ニアル。即チ P ト球面トハ一圓周ニ於テ出會フ。

定義 球面ト唯一點ニ於テ出會フ平面ハ球ニ切スルトイヒ、ソノ平面ヲ球ノ切平面、ソノ點ヲ切點トイフ。又球面ト平面トガ一ツノ圓周ニ於テ出會フトキハ、兩者ハ相交ルトイヒ、ソノ圓ヲ截面トイフ。

系 球ノ切平面ハソノ切點ニ引イタ半徑ニ垂直デア

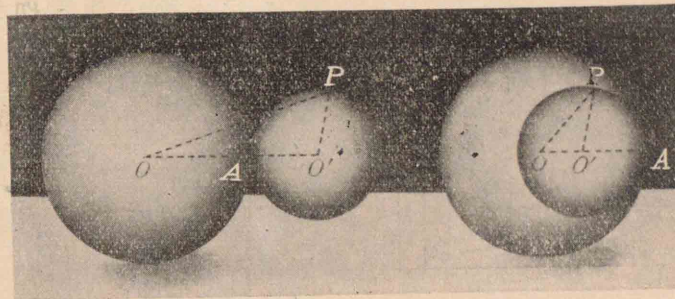
練習問題

1. 半徑 R ナル球ニ、中心カラノ距離ガ d ナル平面ガ交ルトキ、ソノ截面ノ半徑ヲ r トスレバ

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$
2. 球ノ中心カラ等距離ニアル截面ハ相等シク、距離ノ大ナル方ノ截面ハ距離ノ小ナル方ノ截面ヨリハ小サイ。
3. 球ノ中心ヲ通ル截面ハ最大デアツテ、其ノ半徑ハ球ノ半徑ニ等シイ。

134. 相切スル球ト相交ル球

定理 ニツノ球面ガ中心線上ノ一點デ出會フトキハ、ソノ他ノ點デハ出會ハナイ。



證明 ニツノ球 O, O' ガソノ中心線 OO' 上ノ一點 A ニ於テ出會フモノトシ、球 O' ノ面上ニ A 點以外ノ任意ノ一點 P ヲ取リ、 O, P 及ビ O', P ヲ結ブト

[i] A 點ガ線分 OO' 上ニアルトキ

$$OP > OO' - O'P = OA$$

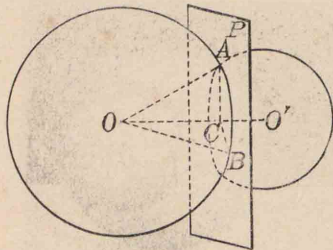
[ii] A 點ガ線分 OO' ノ延長上ニアルトキ

$$OP < OO' + O'P = OA$$

トナリ、何レニシテモ P 點ハ球 O ノ面上ニハナイ。
 故ニコノ二球面ハ A 點以外デハ出會ハナイ。

定理 ニツノ球面ガソノ中心線上ニナイ一點ニ於テ出會フトキニハ、コノ兩球面ハ一圓周デ出會フ。

證明 ニツノ球 O, O' ノ面ガソノ中心線 OO' 上ニナイ一點 A ニ於テ出會フモノトシ、 A ヲ通り直線 OO' ニ



Cニ於テ垂直ニ交ル平面
Pヲ作ル。P上ニCヲ中
心トシテACヲ半径トス
ル圓ヲ畫ク。今コノ圓周
上ノ任意ノ一點ヲBトス
ルト

$$OC \perp P$$

$$AC = BC$$

$$\therefore OA = OB$$

從ツテB點ハ球Oノ面上ニアル。

同様ニB點ハ又球O'ノ面上ニモアル。

ヨツテC圓周上ノ點ハ皆兩球面ノ上ニアルカラ、二
ツノ球面ハコノ一圓周デ出會フ。

定義 二ツノ球面ガ唯一點ニ於テ出會フトキハコノ
二ツノ球ハ**相切スル**トイヒ、ソノ點ヲ**切點**トイフ。
又二ツノ球面ガ一圓周ニ於テ出會フトキハコノ
二ツノ球ハ**相交ル**トイヒ、ソノ圓周ヲソノ**交リ**ト
イフ。

系1. 二ツノ球ガ相交ルトキハ、ソノ中心線ハ球ノ交
リナル圓ノ中心ヲ通リソノ平面ニ垂直デアル。

系2. 二ツノ球ガ相切スルトキハ其ノ中心線ハ切點
ヲ通ル。

練習問題

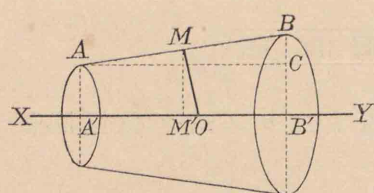
- 二ツノ圓ノ位置關係ト二ツノ球ノ位置關係トヲ
比較セヨ。
- 二ツノ球ガ相切スルトキハ、ソノ切點ニ於テ共通
ノ切平面ガ作レルコトヲ説明セヨ。
- 相交ル二球ノ半径ガ6 cm, 8 cmデ、ソノ中心ノ距離
ガ10 cm ナルトキ、ソノ交リナル圓ノ面積ヲ求メ
ヨ。

135. 球ノ表面積

球ノ表面積ヲ求メルタメニ、先ヅ次ノ豫備定理ヲ考
ヘル。

定理 一ツノ線分ヲ、コレト同一ノ平面上ニ
アツテ、コレヲ截ラナイ一ツノ直線ヲ軸トシ
テ一廻轉スルトキニ生ズル曲面ノ面積ハ、ソ
ノ線分ノ中點ニ於テコレニ垂直ニ軸マデ引
イタ線分ヲ半径トスル圓周ト、ソノ線分ガ軸
ノ上ニ投ズル正射影トノ積ニ等シイ。

題意 線分ABガコレト同一ノ平面上ニアツテコレヲ



截ラナイ直線 XY ヲ
軸トシテ廻轉スルト
キニ生ズル曲面ノ面
積ヲ S トスル。

今 AB ノ XY 上ニ投ズ正射影ヲ A'B', AB ノ中點 M
ニ於テ AB ニ引イタ垂線ガ XY ト交ル點ヲ O トス
レバ

$$S = 2\pi MO \cdot A'B'$$

證明 AB ガ一廻轉スルトキニ生ズル曲面ハ AB ヲ斜
高トシ, AA', BB' ヲ兩底面ノ半徑トスル直圓錐臺ノ
側面デアアルカラ, M カラ XY ニ引イタ垂線ヲ MM' ト
スルト

$$\begin{aligned} S &= \pi AB(AA' + BB') = \pi AB \cdot 2MM' \\ &= 2\pi AB \cdot MM' \end{aligned}$$

然ルニ A ヲ通ル XY ノ平行線ガ BB' ト C デ交ルト
スルト

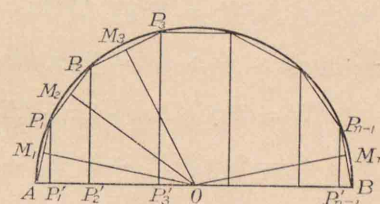
$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle MOM' \\ \therefore AB : MO &= AC : MM' \\ \therefore AB \cdot MM' &= MO \cdot AC \\ \therefore S &= 2\pi MO \cdot AC \end{aligned}$$

即チ

$$S = 2\pi MO \cdot A'B'$$

定理 半徑 r ナル球ノ表面積ヲ S トスレバ
 $S = 4\pi r^2$ デアル。

題意 半徑ガ r ナル半
圓ガソノ直徑 AB ヲ
軸トシテ一廻轉スル
トキニ生ズル球面ノ
面積ヲ S トスレバ



$$S = 4\pi r^2$$

デアアル。

證明 半圓ノ周 AB ヲ n 等分シ, ソノ分點ヲ順次ニ

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$$

トシ弦 $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$ ヲ引ケバ n 個ノ等弦ヲ
得ル。コノ各弦ノ中點ヲ順ニ $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ ト
シ, コレ等ノ點ヲ半圓ノ中心 O ト結ベバ

$$OM_1 = OM_2 = \dots = OM_n$$

トナルカラ, コノ長サヲ r' トスル。

次ニ P_1, P_2, \dots, P_{n-1} カラ AB ニ垂線ヲ引キソノ
足ヲ順ニ $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}$ トスレバ, $AP_1, P_1P_2, \dots,$
 $P_{n-1}B$ ガ AB ヲ軸トシテ一廻轉スルトキニ生ズル表
面積ハソレゾレ

$$2\pi M_1 O \cdot AP'_1$$

$$2\pi M_2 O \cdot P_1' P_2'$$

.....

$$2\pi M_n O \cdot P_{n-1}' B$$

トナル。故ニ折線 $AP_1' P_2' \dots P_{n-1}' B$ ガ AB ヲ軸トシテ
一廻轉スルトキニ生ズル表面積ヲ S' トスレバ

$$\begin{aligned} S' &= 2\pi r' \cdot AP_1' + 2\pi r' \cdot P_1' P_2' + \dots + 2\pi r' \cdot P_{n-1}' B \\ &= 2\pi r' (AP_1' + P_1' P_2' + \dots + P_{n-1}' B) \\ &= 2\pi r' AB \\ &= 2\pi r' \cdot 2r \\ &= 4\pi r r' \end{aligned}$$

然ルニ半圓周ノ分點ノ數ヲ限リ無ク増ストキハ、 S'
ハ限リ無ク S ニ近ヅキ、 $4\pi r r'$ ハ限リ無ク $4\pi r^2$ ニ近
ヅク。ソシテ半圓周ノ分點ノ數ハ如何程増シテモ
常ニ

$$S = 4\pi r r'$$

デアルカラ、 S' ト $4\pi r r'$ トガ限リ無ク近ヅクコトヲ
得ル S ト $4\pi r^2$ トモ亦相等シクナケレバナラナイ。

$$\therefore S = 4\pi r^2$$

系1. 球ノ表面積ハソノ中心ヲ通ル截面(コレヲソノ
球ノ大圓トイフ)ノ面積ノ4倍ニ等シイ。

系2. ニツノ球ノ表面積ノ比ハソノ半徑ノ二乗比ニ
等シイ。

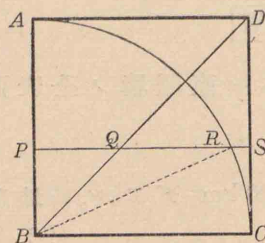
練習問題

1. 球ノ表面積ハコレニ外接スル直圓壺ノ全表面積
ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイ。
2. 地球ノ赤道ノ長サハ約 40000 km デアル。地球ノ
表面積ハ凡ソ何程カ計算セヨ。但シ $\pi = \frac{22}{7}$ トセ
ヨ。
3. 球ノ直徑ヲ n 等分シ、ソノ分點ヲ通ツテ、ソノ直徑
ニ垂直ナ平面ヲ作ルトキハ、コレ等ノ平面ハ球面
ヲ n 等分スル。

136. 球ノ體積

球ノ體積ヲ求メルタメニ、先ヅ次ノ豫備定理ヲ考ヘ
ル。

定理 四分圓ノ直交スル半徑 AB, BC ヲ二隣
邊トスル正方形 $ABCD$ ノ邊 AB 上ノ點 P ヲ
通ル BC ノ平行線ガ BD, \widehat{AC} 及ビ DC ト交ル點
ヲ Q, R, S トスル。コノ圖形ガ AB ヲ軸トシ
テ一廻轉スルトキ PR ニヨツテ生ズル圓ノ
面積ハ QS ニヨツテ生ズル圖形ノ面積ニ等
シイ。



證明 $\angle BPR = \angle R$

$$\therefore PR^2 = BR^2 - PB^2$$

然ルニ

$$BR = PS, \quad PB = PQ$$

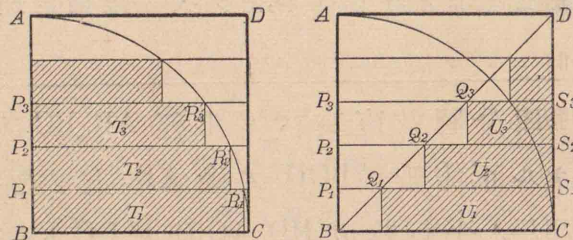
$$\therefore PR^2 = PS^2 - PQ^2$$

$$\therefore \pi \cdot PR^2 = \pi \cdot PS^2 - \pi \cdot PQ^2$$

然ルニ又 $\pi \cdot PR^2$ 及 $\pi \cdot PS^2 - \pi \cdot PQ^2$ ハソレゾレ PB, QS
ノ廻轉ニヨツテ生ズル圖形ノ面積ニ等シイ。故ニ
證明サレタ。

定理 半徑 r ノ球ノ體積ヲ V トスルト

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ デアル。}$$



證明 半徑ガ r デアル四分圓ノ半徑 AB, BC ヲ二邊ト
スル正方形ヲ ABCD トスル。BA ヲ n 等分シソノ分
點ヲ順ニ P_1, P_2, \dots トシ、コノ各分點ヲ通ル BC ノ平
行線ガ BD, CA 及ビ CD ト交ル點ヲ順次ニ Q_1, Q_2, \dots
 $\dots; R_1, R_2, \dots; S_1, S_2, \dots$ トシ、 P_1R_1, P_2R_2, \dots ヲ

一邊トシテスグ前ノ平行線上ニ對邊ヲ有スル矩形
 T_1, T_2, \dots ヲ作ル。又 Q_1S_1, Q_2S_2, \dots ヲ一邊トシ、ス
グ前ノ平行線上ニ對邊ヲ有スル矩形 U_1, U_2, \dots ヲ
作ル。

今コノ圖形ヲ AB ヲ軸トシテ一廻轉スルト、 T_1 ト
 U_1 ニヨツテ生ズル立體ハ底面積ガ等シク、高サモ相
等シイカラ等積デアル。同様ニ $T_2, U_2; T_3, U_3; \dots$ ニ
就テモ同ジコトガ言ハレルカラ T_1, T_2, \dots 等ニヨツ
テ生ズル立體ノ體積ノ合計ヲ V' ; U_1, U_2, \dots 等ニヨ
ツテ生ズル立體ノ體積ノ合計ヲ V'' トスルト

$$V' = V''$$

次ニ n ヲ限リナク大ニスルト V' ハ四分圓 ABC
ノ廻轉ニヨツテ生ズル立體ノ體積ニ限リナク近ヅ
キ、同時ニ V'' ハ三角形 BCD ノ廻轉ニヨツテ生ズル立
體ノ體積ニ限リナク近ヅク。然ルニ前者ハ $\frac{V}{2}$ デア
リ、後者ハ半徑 r 、高サ r ナル直圓臺ト直圓錐ノ體積
ノ差

$$\pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

デアル。又 n ノ大キサニ拘ラズ

$$V' = V''$$

デアルカラ V' ト V'' ガ共ニ近ヅク $\frac{V}{2}$ ト $\frac{2}{3} \pi r^3$ トハ

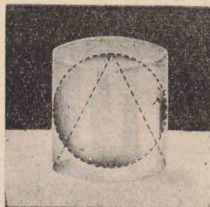
又相等シクナケレバナラナイ。即チ

$$\frac{V}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

練習問題

1. 球ノ體積ハソノ大圓ヲ底面トシ、ソノ直徑ヲ高サトスル直圓錐ノ體積ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイ。
2. 内法ノ半徑ガ5cmノ直圓錐ニ水ガ入レテアル。コレニ半徑3cmノ鐵球ヲ全ク沈メルト水面ハ何程昇ルカ。但シ水ハ溢レ出ナイヤウニスル。
3. 表面積ガ154平方糎ナル球ノ體積ヲ求メヨ。
4. 球ニ外接スル直圓錐ト、球ト、ソノ直圓錐ニ内接スル直圓錐トノ體積ノ比ハ3:2:1ニ等シイ。



雜問題

1. 線分 AB ガ直角ヲモツテ對スル點ノ軌跡ハ AB ヲ直徑トスル球面デアル。
2. 直圓錐ノ高サノ中點ヲ通り底面ニ平行ナ平面デ直圓錐ヲ截ルトキ生ズル直圓錐ト直圓錐臺トノ體積ノ比ハ1:7デアル。
3. 球ノ直徑ノ兩端ヲ球ノ對點トイフコトガアル。對點デナイ球面上ノ二點ヲ通ル大圓ハ唯一ツデアルコトヲ證明セヨ。
4. 同ジ球ノ二ツノ大圓ハ互ニ他ヲ二等分スル。
5. 直圓錐ノ全表面積ヲ Δ 、側面積ヲ S トスレバコノ直圓錐ノ體積ハ如何ナル式デ表ハサレルカ。
6. 直徑30cmアル鉛球ヲ打チ延シテ厚サ1cmナル平板ヲ作ルトキハ直徑幾糎ノ圓板ガデキルカ。
7. 直圓錐狀ノ木材ガ軸ヲ水平ニシテ水ニ浮ンデキル。ソノ切口ノ直徑1m、長サ5mデ、最高ナル高サガ水面上25cmナルトキハ、コノ木材ノ重サハ何程アルカ。
8. 底部ハ半球デ上部ハ直圓錐狀ヲシテキル試験管ガアル。圓錐部ノ長サハ15cm、内法ハ6cmアルトキ、ソノ容量ヲ求メヨ。
9. 球外ノ一定點ヨリ引イタ任意ノ直線ト球面トノ交點ヲ P, Q トスルト $AP \cdot AQ$ ハ一定デアル。

10. 四面體ノ四ツノ頂點ヲ通ル球面ハ一ツアツテ唯一ツニ限ル。

四面體ノ各頂點ガ一ツノ球面上ニアルトキハコノ四面體ハ球ニ内接スルトイヒ、球ハ四面體ニ外接スルトイフ。

11. 四面體ノ各面ノ外心ヲ通ルソノ面ノ垂線ハ皆同一ノ點デ交ル。

12. 四面體ノ各面ニ切スル球ハ一ツアツテ唯一ツニ限ル。

四面體ノ各面ニ切スル球ハコノ四面體ニ内接スルトイヒ、四面體ハ球ニ外接スルトイフ。

13. 球ニ交ル二ツノ平行平面ノ間ニアル球面ノ部分ヲ球帶トイヒ、ソノ二平面ノ距離ヲ球帶ノ高サトイフ。球帶ノ面積ハソノ高サトソノ球ノ大圓ノ周トノ積ニ等シイコトヲ證明セヨ。

14. 半徑 8 cm ノ球ト等積デ底半徑ガ 7 cm アル直圓錐ノ高サヲ求メヨ。

16. 球ヲ一ツノ平面デ截リ、ソノ分タレタ二ツノ曲面ノ面積ノ差ト截リ口ノ面積トヲ等シクスルニハ如何ニスレバヨイカ。

第十章

三角法

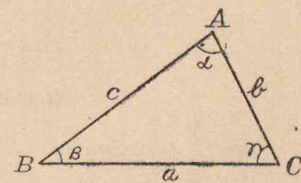
銳角及ビ鈍角ノ三角函數

137. 三角法 銳角ノ三角函數

三角形ハ平面形ノ基礎ヲナス圖形デアツテ、三ツノ角ト三ツノ邊トカラ成ル。コレヲソノ六要素トイフ。六要素ノ中、或三ツガ與ヘラレレバ、残りノ要素ハ求メルコトガ出來ル。カヤウニスルコトヲ三角形ヲ解ツトイヒ、ソノ方法ヲ三角形ノ解法トイフ。

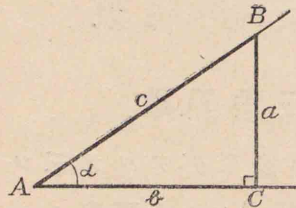
三角法ハ計算ニヨル三角形ノ解法及ビソノ應用ヲ考究シ、併セテ三角函數ノ性質ヲ明カニスル學科デアル。

三角法デハ便宜ノタメ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 等ヲ單ニ **A, B, C** 等ノ大文字デ記シ、ソノ對邊ノ數値ヲソレゾレ *a, b, c* 等ノ小文字



デ記ス。又 A, B, C ヲ角ノ單位ナル度分秒ノ同ジ單位デ測ツタ數値ヲソレゾレ單位ヲ含メテ α, β, γ 等デ表ハスコトガ多イ。

三角法ノ方法上ノ基本トナルモノハ鋭角ノ三角函數デアアル。既ニ學ンダトコロニヨリ、鋭角ノ三角函數ノ定義及ビソノ主要ナ性質ハ次ノ通りデアアル。



鋭角 α ノ一邊上ノ任意ノ點 B カラ他ノ邊ヘ垂線 BC ヲ下シテ、 α ヲ一内角トスル直角三角形 ABC ヲ作ルトキ

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{高サ}}{\text{斜邊}}, \quad \text{cosec } \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{斜邊}}{\text{高サ}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}, \quad \sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{高サ}}{\text{底邊}}, \quad \cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{底邊}}{\text{高サ}}$$

[i] 函數間ノ關係

(1) 逆數關係

$$\sin \alpha \text{ cosec } \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \sec \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1$$

(2) 相除關係

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

函數(3) 平方關係

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \text{cosec}^2 \alpha$$

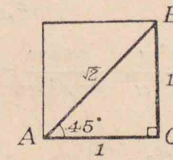
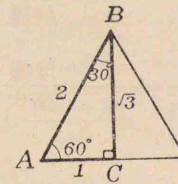
(4) 餘角關係

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \text{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sec(90^\circ - \alpha) = \text{cosec } \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

[ii] 特別ナ鋭角ノ函數値



| α | 30° | 45° | 60° |
|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\tan \alpha$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| $\cot \alpha$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\sec \alpha$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 |
| $\text{cosec } \alpha$ | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ |

例 1. 次ノ三角方程式ヲ解ケ。

$$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$$

解 左邊ヲ因數ニ分解スルト

$$(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \tan x = 1 \text{ 或ハ } \tan x = \sqrt{3}$$

$$\text{然ルニ } \tan 45^\circ = 1 \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\therefore x = 45^\circ \quad x = 60^\circ$$

答 $x = 45^\circ, 60^\circ$

例 2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cot^2 \alpha}$$

$$\text{解 } \frac{\sin^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2}$$

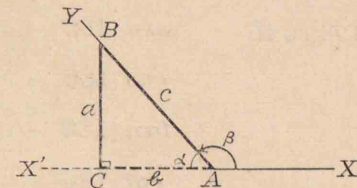
$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \text{答}$$

練習問題

1. 直角三角形 ABC に於テ、鋭角 A, B ヲ夫々 α, β トシ、各邊ヲバ他ノ邊ト角ノ函數トニテ表ハセ。
2. $4 \sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1) \sin x + \sqrt{3} = 0$ ヲ解ケ。
3. $\frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ ヲ簡單ニセヨ。

138. 鈍角ノ三角函數

一ツノ鈍角 XAY ヲ β トシ、ソノ一邊上ノ任意ノ一點 B カラ他ノ邊へ垂線 BC ヲ下シテ、 β ヲ一外角トスル直角三角形 ABC ヲ作ルトキ、ソノ三邊ノ間ノニツツツノ比ノ値ヲ以テ鈍角 β ノ三角函數トスル。但シ AC ハ邊 AX ノ延長上ニアルカラ、ソノ數値ニハ負號ヲ與ヘルコトトスル。即チ



$$\sin \beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{cosec} \beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos \beta = -\frac{b}{c}, \quad \sec \beta = -\frac{c}{b}$$

$$\tan \beta = -\frac{a}{b}, \quad \cot \beta = -\frac{b}{a}$$

然ルニ β ノ補角デアル鋭角 α ノ三角函數ハ

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sec \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

デアルカラ、コレヲ置キ換ヘルト

$$\sin \beta = \sin \alpha, \quad \operatorname{cosec} \beta = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha, \quad \sec \beta = -\sec \alpha$$

$$\tan \beta = -\tan \alpha, \quad \cot \beta = -\cot \alpha$$

$\beta = 180^\circ - \alpha$ ト置ケバ、次ノ公式ガ得ラレル。

補角關係 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sec(180^\circ - \alpha) = -\sec \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha$$

ヨツテ次ノコトガイハレル。

鈍角ノ三角函數ニ於テハ

[i] 正弦ト餘割ノ値ハ正、餘弦、正切、餘切、正割ノ値ハ負デアル。

[ii] 各ノ絶對値ハソノ補角ナル鋭角ノ同ジ函數ノ値ニ等シイ。

從ツテ總テノ鈍角ノ三角函數ハ、コレヲ鋭角ノ三角函數ニ直シテソノ値ヲ求メルコトガ出來ル。

又鋭角ト鈍角ノ境ノ直角デハ $a=c, b=0$ トナルモノト考ヘラレルカラ、直角ノ三角函數ニ於テハ正切ト正

割トハ意味ヲ失ヒ、他ノ函數ノ値ハ次ノヤウニナル

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1$$

$$\cos 90^\circ = 0, \quad \cot 90^\circ = 0$$

例 1. $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

例 2. $\cos 132^\circ 30' = \cos(180^\circ - 47^\circ 30') = -\cos 47^\circ 30'$
 $= -0.6756$ (附録ノ表ニヨル)

例 3. $\cot 158^\circ = \cot(180^\circ - 22^\circ) = -\cot 22^\circ = -2.4751$

例 4. $\sin x = \frac{1}{2}$ ニ適スル角 x ヲ求メヨ。

解 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \therefore x = 30^\circ$

或ハ $x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ 答 $x = 30^\circ, 150^\circ$

例 5. $\tan x = -0.7898$ ニ適スル角 x ヲ求メヨ。

解 $\tan 38^\circ 18' = 0.7898$ (表ニヨル)

$\therefore x = 180^\circ - 38^\circ 18' = 141^\circ 42'$ 答

注意 前節ニ於ケル函數間ノ關係

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha &= 1 \\ \cos \alpha \sec \alpha &= 1 \\ \tan \alpha \cot \alpha &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

ハ α ノ鈍角ナル場合ニモ成リ立ツコトハ定義カラ明カデアリ、又直角三角形ノ邊ノ値ノ符號ニ拘ラズびたごらすノ定理ハ成リ立ツカラ、次ノ公式モ α ノ鋭角鈍角ニ拘ラズ成リ立ツコトガワカル。直角ノ場合ニハ何レガ成立ツカ。

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

練習問題

1. 次ノ各三角函數ノ値ヲ求メヨ。

- ① $\sin 135^\circ$ ② $\tan 150^\circ$ ③ $\cos 120^\circ$
 ④ $\cot 160^\circ$ ⑤ $\sec 105^\circ$ ⑥ $\sin 152^\circ 36'$

2. 次ノ各式ニ適スル角 x ヲ求メヨ。

- ① $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\cos x = -\frac{1}{2}$
 ③ $\tan x = -\sqrt{3}$ ④ $\sin x = 0.2689$

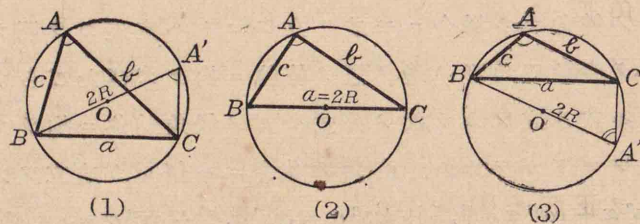
3. $\sin \alpha = \frac{4}{7}$ 及ビ $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ニ適スル角 α ヲ作圖セヨ。

4. A, B, C ヲ三角形ノ三ツノ内角トスレバ, 次ノ等式ノ成リ立ツコトヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned} \sin(B+C) &= \sin A, & \cos(B+C) &= -\cos A \\ \tan A &= -\tan(B+C), & \operatorname{cosec} C &= \operatorname{cosec}(A+B) \end{aligned}$$

139. 三角形ノ邊ト對角トノ關係

三角形 ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ R トスル。



[i] A ガ鋭角ノトキハ, 直徑 BA' ヲ引キ A', C ヲ結ブト, $A=A'$ デアルカラ

$$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}$$

[ii] A ガ直角ノトキハ, $a=2R$ デアルカラ

$$\sin A = 1 = \frac{a}{2R}$$

[iii] A ガ鈍角ノトキハ, 直徑 BA' ヲ引キ A', C ヲ結ブト, $A=180^\circ-A'$ デアルカラ

$$\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A' = \frac{a}{2R}$$

ヨツテ角 A ノ大サニ拘ラズ

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

同様ニシテ, $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

コノ法則ハ次ノ如ク述ベルコトガ出來ル。

三角形ノ邊トソノ對角ノ正弦トノ比ハ一定デアツテ, ソノ値ハ外接圓ノ直徑ノ數値ニ等シイ。

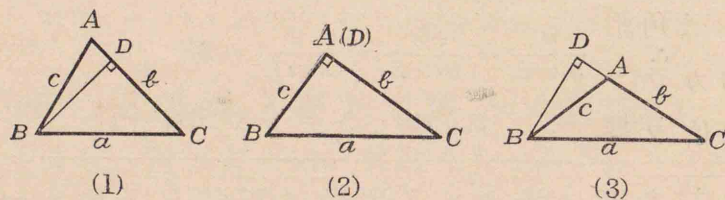
コレヲ正弦法則トイフ。

練習問題

1. 三角形ノ頂點カラ對邊ヘ垂線ヲ引イテニツノ直角三角形ヲ作り正弦法則ヲ證明セヨ。
2. 三角形ABCニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。
 - ① $\sin B + \sin C > \sin A$
 - ② $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ ナラバ $C = 90^\circ$
3. $\triangle ABC$ ニ於テ $A=78^\circ, B=72^\circ, c=4$ ノトキ外接圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

140. 二邊夾角ト第三邊トノ關係

三角形ABCニ於テ頂點Bカラ對邊ヘ垂線BDヲ引ケバ



幾何學ノ定理ニヨリ

[i] Aガ鋭角ノトキハ

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AD$$

即チ, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

[ii] Aガ直角ノトキハ

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$\cos A = \cos 90^\circ = 0$ ナル故

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

[iii] Aガ鈍角ノトキハ

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AC \cdot AD$$

即チ, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(180^\circ - A)$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

ヨツテ角Aノ大サニ拘ラズ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

同様ニシテ, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

コノ法則ハ次ノ如クニ述ベルコトガ出來ル。

三角形ノ一邊ノ平方ハ、他ノ二邊ノ平方ノ和カラ、ソノ二邊ト夾角ノ餘弦トノ連乘積ノ二倍ヲ減ジタモノニ等シイ。

コレヲ餘弦法則トイフ。

又上ノ等式カラ直ニ次ノ等式ガ得ラレル。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

練習問題

1. 三角形ABCニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$\textcircled{1} \quad \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

$$\textcircled{2} \quad a \cos C - c \cos A = \frac{a^2 - c^2}{b}$$

2. 三角形ABCノ頂點カラ對邊ヘ垂線ヲ引イテ次ノ公式ノ成リ立ツコトヲ證明セヨ。

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

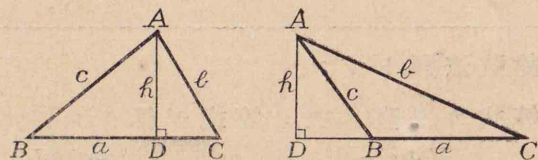
$$c = a \cos B + b \cos A$$

3. 2.ノ公式ヲ用ヒテ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$a + b + c = (b + c) \cos A + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C$$

141. 三角形ノ面積

[i] 二邊トツノ夾角ヲ知ル場合



三角形ABCノ高サヲ h トスレバ面積 Δ ハ

$$\Delta = \frac{1}{2} ah$$

然ルニ、 $h = c \sin B$ 或ハ $h = c \sin(180^\circ - B) = c \sin B$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2} ca \sin B \quad (1)$$

同様ニシテ

$$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$$

[ii] 二角ト一邊ヲ知ル場合

正弦法則 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ カラ

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

コレヲ(1)ニ代入スルト

$$\Delta = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$$

他モ同様デアル。

[iii] 三邊ヲ知ル場合

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$$

$$= \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

$a+b+c=2s$ ト置ケバ

$$b+c-a=2(s-a), \quad c+a-b=2(s-b), \quad a+b-c=2(s-c)$$

$$\therefore \sin^2 A = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

角ノ大サニ拘ラズ正弦ノ値ハ常ニ正デアルカラ

$$\sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

$$\text{コレヲ } \Delta = \frac{1}{2}bc \sin A \text{ ニ代入スレバ}$$

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

コレヲヘロンノ公式トイフ。

注意 ヘロン(Heron)ハ西洋紀元50年頃ノあれきさんどりヤノ數學者デ、測量ノ術ニモ長ジ、又ソレニ必要ナ諸種ノ機械ノ發明ヲモンテキル。

練習問題

1. 二邊ノ長サガ 18 m 及ビ 24 m デ夾角ガ 60° ノ三角形ノ地所ノ面積ヲ求メヨ。
2. 底邊ガ 120 m, 兩底角ガソレゾレ 120° 及ビ 30° ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。
3. 三邊ノ長サガソレゾレ 26 m, 35 m, 51 m ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。
4. 三角形 ABC ノ面積ヲ Δ , 外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ, $R = \frac{abc}{4\Delta}$ ナルコトヲ證明セヨ。
5. 三角形 ABC ノ周ノ半ヲ s , 内接圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

雜問題

1. 四邊形ノ對角線ノ長サヲ k, l トシ、ソノ夾角ヲ θ トスレバ、面積 A ハ次ノ式デ表ハサレルコトヲ證明セヨ。

$$A = \frac{1}{2}kl \sin \theta$$

2. 三角形 ABC ノ面積ヲ Δ , 傍接圓ノ半徑ヲソレゾレ r_a, r_b, r_c トスレバ、次ノ公式ノ成立ツコトヲ證明セヨ。

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

$$r_b = \frac{\Delta}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}$$

$$r_c = \frac{\Delta}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$$

3. 邊ノ長サガソレゾレ 12 cm, 16 cm, 20 cm ナル直角三角形ニ於テ内接圓、三ツノ傍接圓及ビ外接圓ノ半徑 r, r_a, r_b, r_c, R ヲ計算セヨ。
4. 2. ノ公式ヲ用ヒテ次ノ關係ヲ證明セヨ。
 - ① $r_a + r_b + r_c - r = 4R$
 - ② $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$
5. 邊ガソレゾレ $2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ナル三角形ノ角ハ $120^\circ, 45^\circ, 15^\circ$ ナルコトヲ示シ、ソレニヨツテ $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ, \sin 75^\circ, \tan 75^\circ$ ヲ不盡根數ノ形ニテ表ハセ。
6. 三角形 ABC ノ周ノ半分ヲ s , 内接圓ノ半徑ヲ r トスルトキ、次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}$$

7. 三角形 ABC = 於テ $\cot \frac{A}{2}$, $\cot \frac{B}{2}$, $\cot \frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ a , b , c モ亦等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

8. 三角形 ABC = 於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$(b-c) \cot \frac{A}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} + (a-b) \cot \frac{C}{2} = 0$$

9. 三角形 ABC = 於テ正弦法則及ビ餘弦法則ヲ用ヒテ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\cot A = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$$

10. 三角形 ABC = 於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$(b^2-c^2) \cot A + (c^2-a^2) \cot B + (a^2-b^2) \cot C = 0$$

11. 三角形 ABC = 於テ $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ ガ等差級數ヲナストキハ, a^2 , b^2 , c^2 モ亦等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

12. 三角形 ABC = 於テ BC へノ中線ノ長サヲ m_a トスレバ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

第十一章

一般三角形ノ解法ト應用

142. 二角ト一邊ヲ知ル場合

三角形 ABC = 於テ, 例へバ B,

C ト b ヲ知ル場合ニハ

$$A = 180^\circ - (B+C)$$

ニヨツテ A ヲ求メ,

正弦法則

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

カラ,

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

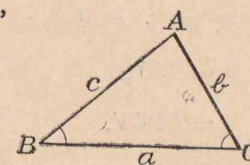
ヲ得, コレニヨツテ a, c ヲ求メル。

例 $B=30^\circ$, $C=70^\circ$, $b=100$ ノトキ, 三角形 ABC ヲ解ケ。

$$\text{解} \quad A = 180^\circ - (B+C) = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 80^\circ$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{100 \sin 80^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{100 \times 0.9848}{0.5}$$

$$= 197.0$$



$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{100 \sin 70^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{100 \times 0.9397}{0.5}$$

$$= 187.9$$

答 $A = 80^\circ$, $a = 197$, $c = 187.9$

練習問題

次ノ各ノ場合ニ三角形ABCヲ解ケ。

- $A = 130^\circ$, $B = 20^\circ$, $c = 40$
- $B = 41^\circ 48'$, $C = 53^\circ 18'$, $b = 120$

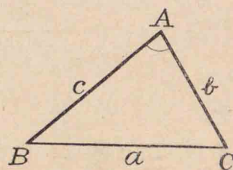
143. 二邊ト夾角ヲ知ル場合

三角形ABCニ於テ、例ヘバ b, c

トAヲ知ル場合ニハ、餘弦法則

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

カラ



$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

ヲ得、コレニヨツテ a ヲ求メ

正弦法則カラ

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

ヲ得、コレニヨツテ B ヲ求メル。ソシテ

$$C = 180^\circ - (A+B)$$

ニヨツテ C ヲ求メル。

例 $b=11$, $c=24$, $A=120^\circ$ ノトキ、三角形ABCヲ解ケ。

$$\text{解} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{11^2 + 24^2 - 2 \times 11 \times 24 \times \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{121 + 576 + 264} = \sqrt{961} = 31$$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{11 \sin 120^\circ}{31} = \frac{11 \times 0.8660}{31} = 0.3073$$

$\therefore B = 17^\circ 54'$ 或ハ $162^\circ 6'$ (コレハ適シナイ)

$\therefore C = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (120^\circ + 17^\circ 54') = 42^\circ 6'$

答 $a = 31$, $B = 17^\circ 54'$, $C = 42^\circ 6'$

練習問題

次ノ各ノ場合ニ三角形ABCヲ解ケ。

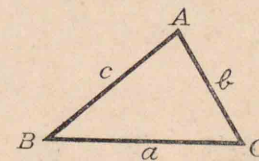
- $a = 7$, $b = 15$, $C = 60^\circ$
- $a = 5$, $c = 6$, $B = 126^\circ 52'$

144. 三邊ヲ知ル場合

三角形ABCニ於テ、 a, b, c ヲ

知ツテ A, B, C ヲ求メル場合デ

アル。



餘弦法則

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ニヨツテ A, B, C ヲ求メル。

例 $a = 2, b = 3, c = 4$ ノトキ, 三角形 ABC ヲ解ケ。

$$\text{解} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 16 - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0.8750$$

$$\therefore A = 28^\circ 57'$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{16 + 4 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 2} = 0.6875$$

$$\therefore B = 46^\circ 34'$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 9 - 16}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -0.2500$$

$$\therefore C = 104^\circ 29'$$

$$\text{[驗]} \quad A + B + C = 28^\circ 57' + 46^\circ 34' + 104^\circ 29' = 180^\circ$$

$$\text{答} \quad A = 28^\circ 57', \quad B = 46^\circ 34', \quad C = 104^\circ 29'$$

練習問題

次ノ各ノ場合ニ三角形 ABC ヲ解ケ。

$$1. \quad a = 7, \quad b = 13, \quad c = 15$$

$$2. \quad a = 4, \quad b = 5, \quad c = 6$$

145. 問題

例 C ハ A カラ北 40° 東ノ方角ニ 60m ノ距離ニアリ, B ハ A カラ南 20° 東ノ方角ニ 100m ノ距離ニアルトイフ。C ハ B カラトノ方角ニ何程ノ距離ニアルカ。

解 A ヲ通ル南北ノ線ヲ NS トスレバ,
 $\angle NAC = 40^\circ, \angle SAB = 20^\circ \therefore \angle BAC = 120^\circ$

BC ヲ $a\text{m}$ トスルト, $\triangle ABC$ ニ於テ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= 3600 + 10000$$

$$- 2 \cdot 60 \cdot 100 \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$= 19600$$

$$\therefore a = 140$$

$$\text{又} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{カラ}$$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{60 \sin 120^\circ}{140} = \frac{3 \times 0.8660}{7}$$

$$= 0.3711$$

$$\therefore B = 21^\circ 47' \quad (\text{鋭角ノミヲ取ル})$$

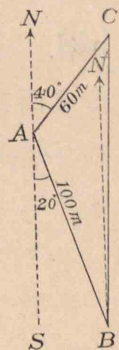
$$N'B \parallel NS \quad \text{トスレバ} \quad \angle N'BA = 20^\circ$$

$$\therefore \angle N'BC = 21^\circ 47' - 20^\circ = 1^\circ 47'$$

答 C ハ B カラ北 $1^\circ 47'$ 東ニ 140m ノ所

練習問題

1. 水平面ト 5° ノ傾斜ヲシテキル道路ノツキ當リニ一ツノ塔ガ立ツテキル。塔ノ基底カラ道路上 100m ノ所ニ於テツノ頂ノ仰角 22° ヲ得タトスレバ塔ノ高サハ何程カ。
2. 7kg 及ビ 18kg ノ二力ガ一ツノ點ニ 43° ノ角度ヲナシテ働イテキルトキ, ソノ合力ハ何程カ。



146. 三角函數ノ對數表

三角函數ヲ含ム複雑ナ計算ニ於テハ對數ヲ使用スルノガ便利デアアル。即チ先ヅ「三角函數表」ニヨツテソノ値ヲ求め、次ニ「數ノ對數表」ニヨツテ計算スレバヨイ。併シカヤウニ二回表ヲ用フルコトハ不便デアアルカラコノ手數ヲ省クタメニ、三角函數ノ對數ヲ角ノ大サノ順ニ排列シタ表ヲ用ヒル。コレガ三角函數ノ對數表デアアル(附録ノ表ヲ見ヨ)。三角函數ノ對數表ニ對シテ三角函數表ヲ三角函數ノ眞數表トイフコトガアル。

例1. $\log \sin 34^\circ 30' = \bar{1}.7531$

例2. $\log \cos 48^\circ 20' = \bar{1}.8230 - 0.0003 = \bar{1}.8227$

例3. $\log \tan x = 0.2328$ ニ適スル角 x ヲ求めヨ。

解 $\log \tan 59^\circ 40' = 0.2328$

$$\therefore x = 59^\circ 40'$$

注意 正弦、餘弦及ビ 45° ヨリ小サイ角ノ正切ノ値ハ1ヨリ小デアアルカラ、ソノ對數ノ指標ハ負デアアル。コノ負號ヲ附シテ表ヲ作ル印刷上ノ不便ヲ避ケルタメニ總テノ對數ノ眞ノ値ニ10ヲ加ヘタモノヲ以テ表ヲ作ルコトガアル。カヤウナ場合ニハコレヲ表對數トイツテ $\log \sin \alpha$ 等ノ代リニ $L \sin \alpha$ 等ノ記號ヲ用ヒル。即チ

$$L \sin \alpha = \log \sin \alpha + 10$$

練習問題

1. 表ニヨツテ次ノ値ヲ求めヨ。

① $\log \sin 63^\circ 12'$ ② $\log \cos 24^\circ 50'$

③ $\log \tan 42^\circ 50'$ ④ $\log \sin 10^\circ 30'$

2. 次ノ式ヲ満足スル銳角 x ヲ求めヨ。

① $\log \tan x = \bar{1}.6567$ ② $\log \sin x = \bar{1}.9925$

③ $\log \cos x = \bar{1}.7846$ ④ $\log \sin x = \bar{1}.1790$

147. 對數計算ニヨル三角形ノ解法(1)

正弦法則ハ對數計算ニモ便利デアアル。ヨツテ先ヅコノ法則ノミヲ用ヒル計算例ヲ示スコトトスル。

二邊ト一對角ヲ知ル場合

三角形 ABC ニ於テ、例ヘバ b, c ト B ヲ知ル場合ニハ、正弦法則カラ

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b}$$

ヲ得、コレニヨツテ C ヲ求め

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

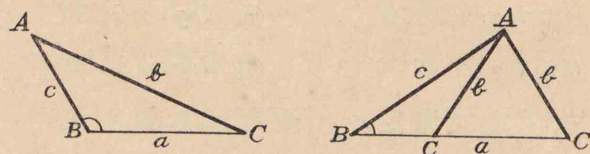
ニヨツテ A ヲ求め、再ビ正弦法則カラ

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

ヲ得、コレニヨツテ a ヲ求めル。

コノ場合ハ幾何學デ學ンデキルヤウニ、

$b \geq c$ ノトキハ C ハ 鋭角デ、解ハ一ツ、
 $b < c$ ノトキハ C ハ 鋭角及ビ鈍角何レヲモ取
 リ得ルカラ解ハ二ツデアル。



例1. $b = 1026, c = 1807, B = 33^\circ 30'$ ノトキ、三角形
 ABC ヲ解ケ。

解 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{1807 \sin 33^\circ 30'}{1026}$

$$\begin{aligned} \therefore \log \sin C &= \log 1807 + \log \sin 33^\circ 30' - \log 1026 \\ &= 3.2569 + \bar{1}.7419 - 3.0111 \\ &= \bar{1}.9877 \end{aligned}$$

$$\therefore C = 76^\circ 27'$$

$b < c$ デアルカラ、 $B < C$ 従ツテ、或ハ

$$C = 180^\circ - 76^\circ 27' = 103^\circ 33'$$

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (33^\circ 30' + 76^\circ 27') \\ &= 70^\circ 3' \end{aligned}$$

或ハ $A = 180^\circ - (33^\circ 30' + 103^\circ 33')$
 $= 42^\circ 57'$

又 $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{1026 \sin 70^\circ 3'}{\sin 33^\circ 30'}$

$$\therefore \log a = \log 1026 + \log \sin 70^\circ 3' - \log \sin 33^\circ 30'$$

$$= 3.0111 + \bar{1}.9731 - \bar{1}.7419$$

$$= 3.2423$$

$$\therefore a = 1747$$

或ハ $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{1026 \sin 42^\circ 57'}{\sin 33^\circ 30'}$

$$\begin{aligned} \therefore \log a &= \log 1026 + \log \sin 42^\circ 57' - \log \sin 33^\circ 30' \\ &= 3.0111 + \bar{1}.8334 - \bar{1}.7419 \\ &= 3.1026 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1266$$

答 $\begin{cases} C = 76^\circ 27' \\ A = 70^\circ 3' \\ a = 1747 \end{cases}$ 或ハ $\begin{cases} C = 103^\circ 33' \\ A = 42^\circ 57' \\ a = 1266 \end{cases}$

練習問題

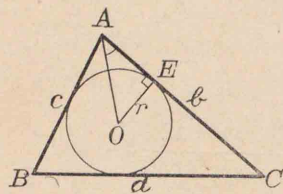
次ノ各ノ場合ニ 三角形 ABC ヲ解ケ。

- $a = 198, B = 65^\circ 10', C = 86^\circ 20'$
- $a = 198, b = 376, B = 65^\circ 12'$

148. 正切ニ關スル公式

餘弦法則ハ對數計算ニハ適シナイ。ヨツテコレニ
 代ル公式ヲ必要トスル。

[i] 三角形 ABC ノ内接圓ノ半徑 r ハ 第141節ノ練習
 問題 5.ニヨリ



$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

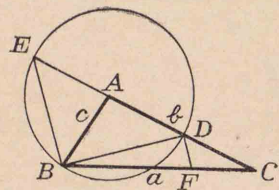
今 AC ノ切點ヲ E トシ A, O, E, O ヲ結ブト, 直角三角形 AOE
ニ於テ $AE = s - a$, $\angle OAE = \frac{A}{2}$

故ニ $\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

同様ニシテ

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$



[ii] 三角形 ABC ニ於テ
 $B > C$ トシ, 頂點 A ヲ中心トシ
AB ヲ半徑トスル圓ガ CA 及ビ
ソノ延長ト交ル點ヲ D, E トシ,
D カラ EB へノ平行線ヲ引キ

BC ト交ル點ヲ F トスレバ

$$\angle ABD = \angle ADB = 90^\circ - \frac{A}{2} = \frac{B+C}{2}$$

$$\angle CBD = B - \frac{B+C}{2} = \frac{B-C}{2}$$

$\triangle EBC$ ニ於テ正弦法則

$$\frac{EC}{\sin EBC} = \frac{BC}{\sin E} \quad \text{カラ}$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin EBC}{\sin E} = \frac{\sin DFB}{\sin E} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{B-C}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}}$$

又 $\triangle DBC$ ニ於テ同様ニシテ

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin CBD}{\sin BDC} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin ADB} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}$$

上ノ兩式ヲ邊々相除スルト

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

他ノ邊及ビ角ニツイテモ同様ノ公式ガ得ラレル。
コレヲ正切法則トイフコトガアル。

練習問題

1. $a=198, b=377, c=413$ ノトキ A ヲ計算セヨ。
2. $b=413, c=377, A=28^\circ 30'$ ノトキ, $b+c, b-c, \frac{B+C}{2}$ ヲ計算セヨ。

149. 對數計算ニヨル三角形ノ解法(2)

[i] 二邊ト夾角ヲ知ル場合

三角形 ABC ニ於テ, 例ヘバ b, c 及ビ A ガ與ヘラレタ
モノトシ, $b > c$ トスレバ

$$B+C = 180^\circ - A \quad \text{デアルカラ}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \quad \text{ニヨツテ } \frac{B+C}{2} \quad \text{ヲ求メ,}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

$$\text{カラ, } \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \tan \frac{B+C}{2} \quad \text{ニヨツテ } \frac{B-C}{2} \quad \text{ヲ求}$$

$$\text{メルト, } B = \frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2} \quad \text{カラ B ガ求メラレ,}$$

$$C = \frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2} \quad \text{カラ C ガ求メラレル。}$$

次ニ a ハ正弦法則ニヨツテ求メル。

[ii] 三邊ヲ知ル場合

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ニヨツテ A, B, C} \\ \text{ヲ求メル。} \end{array}$$

例 $a = 198, b = 377, c = 413$ ノトキ, 三角形 ABC ヲ解ケ。

$$\begin{array}{rcl} \text{解} & a = 198 & \therefore s = 494 \\ & b = 377 & s - a = 296 \\ & c = 413 & s - b = 117 \\ & \hline & 2s = 988 & s - c = 81 \end{array} \quad (+)$$

$$\begin{aligned} \log \tan \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} \{ \log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \log 117 + \log 81 - \log 494 - \log 296 \} \\ &= \frac{1}{2} (2.0682 + 1.9085 - 2.6937 - 2.4713) \\ &= \frac{2.8117}{2} = 1.4059 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{A}{2} = 14^\circ 17' \quad \therefore A = 28^\circ 34'$$

$$\begin{aligned} \log \tan \frac{B}{2} &= \frac{1}{2} (\log 81 + \log 296 - \log 494 - \log 117) \\ &= 1.8089 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{B}{2} = 32^\circ 47' \quad \therefore B = 65^\circ 34'$$

$$\begin{aligned} \log \tan \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} (\log 296 + \log 117 - \log 494 - \log 81) \\ &= 1.9687 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{C}{2} = 42^\circ 56' \quad \therefore C = 85^\circ 52'$$

$$\text{[驗]} \quad A+B+C = 28^\circ 34' + 65^\circ 34' + 85^\circ 52' = 180^\circ$$

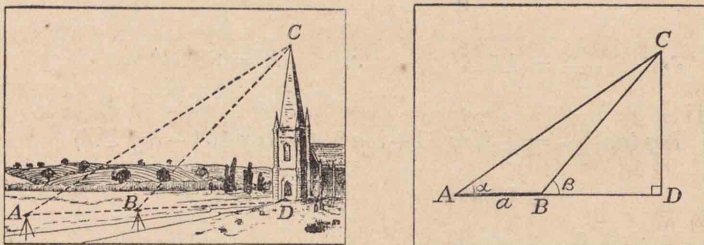
$$\text{答} \quad A = 28^\circ 34', \quad B = 65^\circ 34', \quad C = 85^\circ 52'$$

練習問題

- $b = 413, c = 377, A = 28^\circ 30'$ ナルトキ, 三角形 ABC ヲ解ケ。
- 三邊ガソレゾレ 385 m, 564 m, 663 m ナル三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

150. 測量問題

[i] 地上ニ直立シタ物體ノ基底ニ達シ得ナイトキ、
地上ノ二點ニ於テコレヲ觀測シテ、ソノ高サ及ビ距離
ヲ求メルコト



二ツノ觀測點ノ位置ヲ A, B トスルトキ、AB ガ物體
ノ高サ CD ト同一鉛直面内ニアルトキハ、A 及ビ B ニ
於テ物體ノ頂ノ仰角 α 及ビ β ヲ測リ、又 AB ノ距離
 a m ヲ測ル。サウスルト

$\triangle ABC$ ニ於テ正弦法則ニヨリ

$$BC = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} \text{ m}$$

$$\therefore \text{高サ } CD = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \text{ m}$$

$$\text{距離 } BD = \frac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \text{ m}$$

若シ AB ガ高サ CD ト同一鉛直面内ニナイトキニ
ハ、B ニ於ケル仰角 β ト、 $\angle CAB = \alpha$ 、 $\angle CBA = \gamma$ ヲ測

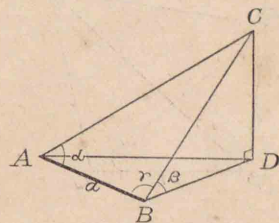
定スル。サウスルト

$\triangle ABC$ ニ於テ

$$BC = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \gamma)} \text{ m}$$

$$\therefore \text{高サ } CD = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \gamma)} \text{ m}$$

$$\text{距離 } BD = \frac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \gamma)} \text{ m}$$



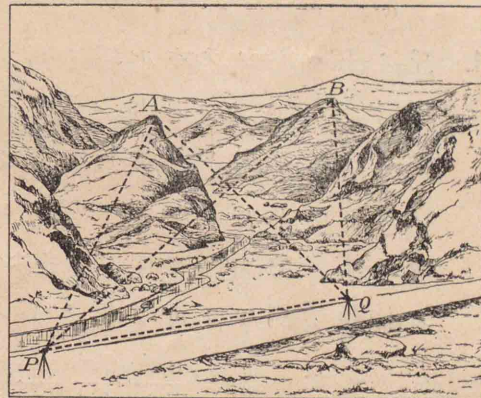
[ii] 共ニ近ヅキ得ナイ二地點ノ距離ヲ求メルコト

二地點ヲ A, B ト

シ、適當ノ場所ニ二
點 P, Q ヲ取ツテソ
ノ長サヲ測リコレ
ヲ a m トスル。P
ニ於テ、 $\angle APB = \alpha$

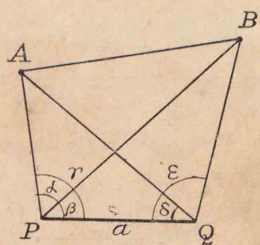
$$\angle BPQ = \beta$$

$$\angle APQ = \gamma$$



ヲ測ル。若シ四點 A, B, P, Q ガ同一平面上ニアレバ
 $\gamma = \alpha + \beta$ デアルカラ γ ハ特ニ測ルコトヲ要シナイガ、
一般ニ四點ハ同一平面上ニナイカラ γ ハ別ニ測ル必
要ガアル。

次ニ Q ニ於テ $\angle AQP = \delta$ 、 $\angle BQP = \epsilon$ ヲ測ル。サウ
スルト、 $\triangle APQ$ 、 $\triangle BPQ$ ニ於テ



$$AP = \frac{a \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \text{ m}$$

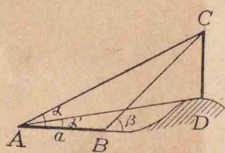
$$BP = \frac{a \sin \epsilon}{\sin(\beta + \epsilon)} \text{ m}$$

故ニ AP, BP ガ計算サレル。

ヨツテ $\triangle PAB$ ニ於テ二邊ト夾角トヲ知ルコトニナルカラ AB ガ計算サレル。

練習問題

1. 丘ノ上ニ立ツテキル塔ノ高サ CD ヲ測ルタメニ平地ノ點 A デ塔ノ頂ト基底トノ仰角ヲ測ツテソレゾレ α 及ビ α' ヲ得,ソレ



カラ塔ニ向ツテ a m ダケ進ンデ B ニ達シ再ビ頂ノ仰角ヲ測ツテ β ヲ得タトスレバ,

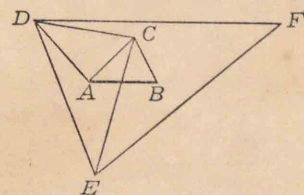
$$CD = \frac{a \sin \beta \sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\beta - \alpha) \cos \alpha'} \text{ m}$$

2. 前題ニ於テ $a=45$ (m), $\alpha=30^\circ$, $\alpha'=20^\circ$, $\beta=42^\circ$ トシテ CD ヲ求メヨ。

151. 三角測量

地上ニ於ケル二地點 A, B ノ距離ヲ實測シ, A 及ビ B ニ於テ第三ノ地點 C ヲ觀望シテ $\angle CAB$ 及ビ $\angle CBA$ ヲ

測ルトキハ正弦法則ニヨリ, AC 及ビ BC ヲ知ルコトガ出來ル。次ニ AC ヲ基準トシテ同ジ方法デ AD, CD ヲ知リ,更ニ CD ヲ基準トシテ DE, CE ヲ知ル。順次カヤウニシテ小ナル三角形カラ大



ナル三角形ニ及ボシ,且ツ一所カラ各所ニ擴ゲテ行ツテ各地點間ノ距離ヲ測定シ,從ツテ又ソノ面積ヲモ測定スルコトガ出來ル。コレヲ三角測量トイフ。

三角測量デハ最初ニ實測スル距離 AB ヲ基線トイヒ,コレヲ最モ精密ニ測定スル。我參謀本部ノ陸地測量部デハ全國ニ十三ヶ所ノ基線ヲ設ケテキル。

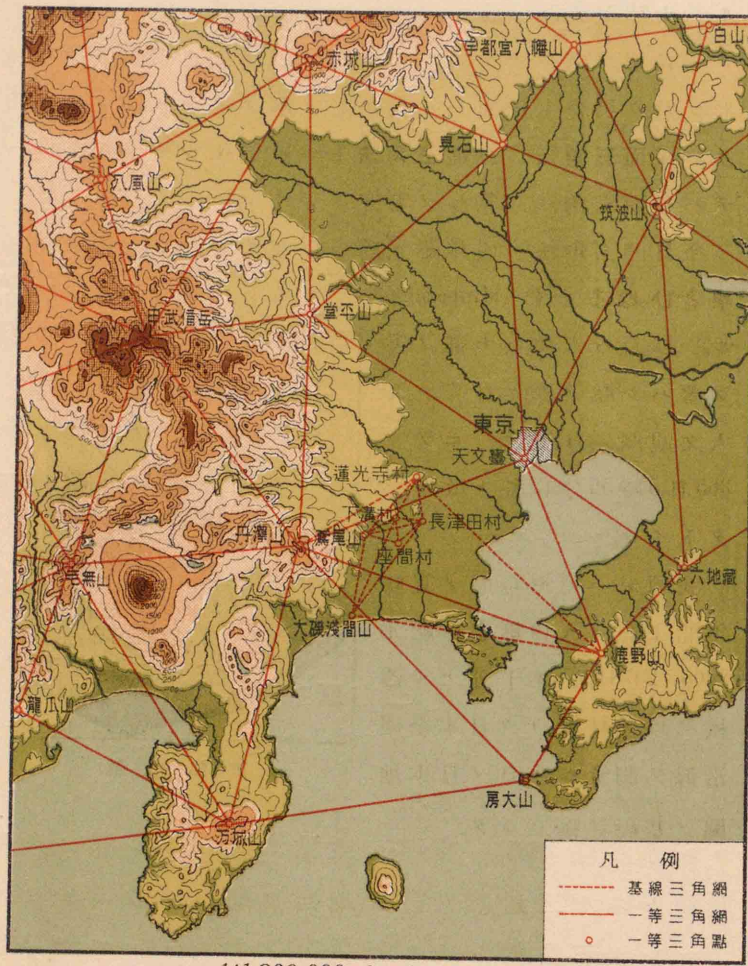
例ヘバ

| | | | |
|-----|------|-------|-------------|
| 相模國 | 高座郡 | 相模野基線 | 5209.970 m |
| 遠江國 | 濱名郡 | 三方原基線 | 10839.958 m |
| 筑後國 | 久留米市 | 久留米基線 | 3161.007 m |

ノヤウナノガソレデアル。

コレ等基線ノ外ニ重要ナ地點ヲ選ビ,ソレ等ノ地點ヲ頂點トスル三角形ヲ以テ地面ヲ蔽フヤウニシテキル。コレヲ三角網トイヒ,三角形ノ大サニヨツテ一等,二等,三等ニ分ケテアル。

東京附近基線三角網及ビ一等三角網ノ圖



注意 三角法ハ陸地測量ノ外航海術,天文學等ニモ應用サレル。大陸ヤ大洋ノ廣イ表面又ハ天體觀測ニ於テハ球面上ニ三角形ヲ考ヘナケレバナラナイ。從ツテ平面上ノ三角形ヲ解ク場合ト,球面上ノ三角形ヲ解ク場合トニヨリ,三角法ハ平面三角法ト球面三角法トニ區別サレテキル。ココデハ平面三角法ノ初步ヲ考究シテキル。

今日ノ三角法ハ西洋紀元前 150 年頃ノギリシヤノ天文學者**ヒッパルクス** (Hipparchus) ノ創案ニ由來スルモノデアル。ヒッパルクスハ大部ノ書ヲ著ハン「弦ノ表」ヲ計算シ,又天文觀測ニヨツテ一年ヲ 365 日 5 時 55 分 12 秒ト改定シタトイフ。



伊能忠敬

我國デハ徳川幕府ノ寛政年間,下總ノ人**伊能忠敬**紀元 2405—2478 年), 不十分ナル器械ヲ以テ精勵ヨク日本全國沿海ヲ測量シ,今日ノ日本地圖ノ基礎ヲ確立シタ。

雜 問 題

1. 次ノ各ノ場合ニ三角形 ABC ヲ解ケ。

① $A = 119^{\circ}52'$, $B = 48^{\circ}36'$, $b = 300$

② $C = 126^{\circ}30'$, $A = 35^{\circ}$, $c = 80$

③ $A = 150^{\circ}$, $B = 15^{\circ}30'$, $c = 32$

④ $b = 24$, $c = 35$, $A = 120^{\circ}$

⑤ $b = 3$, $c = 1$, $A = 70^{\circ}32'$

⑥ $c = 11$, $a = 15$, $B = 36^{\circ}52'$

⑦ $b = 8$, $c = 10$, $B = 48^{\circ}12'$

⑧ $a = 15$, $b = 25$, $c = 35$

⑨ $a = 20$, $b = 32$, $c = 40$

⑩ $2a = 3b = 4c$

2. 三角形 ABC ニ於テ次ノ問ニ答ヘヨ。

① $a = 5$, $b = 4$, $B = 37^{\circ}$ ノトキ A ヲ求ム。

② $b = 9$, $c = 15$, $C = 36^{\circ}52'$ ノトキ B ヲ求ム。

③ $a = 5$, $b = 7$, $B = 60^{\circ}$ ノトキ c ヲ求ム。

3. 或汽船初メニ南 36° 東ニ 10 哩ヲ航シ、次ニ南 84° 西ニ 8 哩ヲ航シテ一地點ニ達シタトイフ。ソノ地點ハ出發點カラ如何ナル方向ニ何程ノ距離ニアルカ。

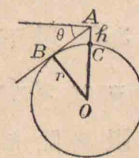
4. 軍艦ノ前後ノ兩主砲カラ右方前方ノ海上ニ浮ンデキル一ツノぼーとヲ望ンダトキ舳艫ヲ通ル直線ニ對シテソレゾレ $26^{\circ}20'$ 及ビ $23^{\circ}50'$ ノ角度ヲ得タトイフ。兩主砲ノ

距離ヲ 80 m トスレバ、兩主砲カラぼーとマデノ距離ハ何程カ。

5. 地上ニ直立シテキタ旗竿ガ北ニ傾キ鉛直線ト $8^{\circ}8'$ ノ角度ヲナシテキル。正午太陽ノ高度 45° ノトキ、ソノ影ノ長サ 12 m デアルトスレバ旗竿ノ長サハ何程カ。

6. 500 m ノ長サノ水平ナル基線ノ兩端ニ於テ前方ノ小山ノ仰角ヲ測ツテ 35° 及ビ 37° ヲ得、又基線ノ中點ニ於テ仰角 $36^{\circ}20'$ ヲ得タトイフ。小山ノ高サヲ計算セヨ。

7. O ヲ地球ノ中心トシ海面上ノ高サ h ナル點 A ニ於ケル視水平ノ俯角ヲ θ トスレバ、地球ノ半徑 r ハ次ノ式デ表ハサレルコトヲ示セ。



$$r = \frac{h \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

8. 3740 m 距ル兩港 A, B カラ海上ノ船 C ガ望マレル。 $\angle BAC$, $\angle ABC$ ハソレゾレ $72^{\circ}30'$, $81^{\circ}40'$ ナルコトガ觀測サレタトスレバ、A 港カラ船マデノ距離ハ何程カ。

9. 河ノ一岸ニ直立スル高サ 100 m ノ崖ノ頂カラ對岸ニ直立スル崖ヲ望ンダトキ、ソノ頂ト麓トノ俯角ハソレゾレ $28^{\circ}40'$ 及ビ $64^{\circ}30'$ デアツタトイフ。對岸ノ崖ノ高サ及ビ河ノ幅ヲ求メヨ。

第十二章 一般角ノ三角函數

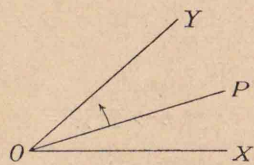
152. 一般角 象限

幾何學ニテ學ンダヤウニ、角ヲ一點カラ出ルニツノ半直線ノ成ス圖形デアルト定義スルナラバ、ソノ度數ハ 360° 以下ニ制限セラレル。實用上ノ目的ノタメニハコレデ十分デアルガ、理論上ノ目的ノタメニハコノ制限ヲ除キ、次ニ述ベル如ク、角ヲ直線ノ廻轉ニヨツテ生ジタモノト見ルノガ適當デアル。

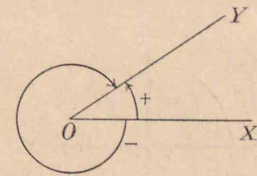
一ツノ平面上ニ於テ半直線 OP ガソノ端 O ヲ中心トシ、 OX ノ位置カラ OY ノ位置マデ廻轉スルトキ、 OP ハ角 XOY ヲ畫クトイヒ、ソノ廻轉ノ大サヲ以テ**角ノ大サ**トスル。

ソシテ OX ヲ角ノ**原線**トイヒ、廻轉スル邊 OP ヲソノ**動徑**トイフ。

角ノ意義ヲ上ノ如ク定メルト角ノ大サニハ限リガナイ。即チ動徑ガ O ノ周リヲ一廻轉シテナホ廻轉シタトスレバ 360° 以上ノ角ニモナル。



又動徑ガ OX ノ位置カラ直チニ OY ノ位置ニ達シタトシテモソノ廻轉ニハ二ツノ向キガアル。ソレヲ區別スルタメ



ニ、通常時計ノ針ノ廻轉ト反對ノ向キニ廻轉シテ生ジタ角ヲ**正ノ角**、時計ノ針ノ廻轉ト同ジ向キニ廻轉シテ生ジタ角ヲ**負ノ角**トスル。

コレニヨリ角ノ數値ハ任意ノ正數、負數及ビ零ノ値ヲトルコトガ出來ル。コレヲ**一般角**トイフ。

一般角ニ於テハ、二邊ヲ共有スル角ハ限リナク多ク存在スル。ソノ一ツヲ α トスレバ、ソノ總テノ角ハ

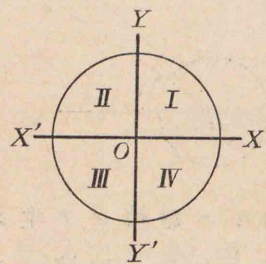
$$n \cdot 360^\circ + \alpha$$

デ表ハサレル。茲ニ n ハ任意ノ整數(正負ノ整數又ハ零)ヲ表ハス。又計算ノ場合ニハ α ハ正ノ最小角又ハ 0° トスルノガ便利デアル。

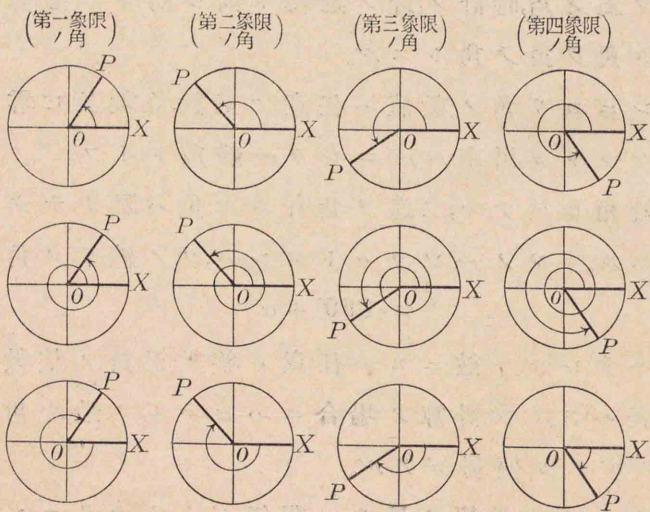
角ノ大サハ動徑ノ長サニ關係ガナイカラ、コレヲ一定ノ線分トスルト、ソノ廻轉ニヨツテ圓ガ畫カレル。

一般角ノ大サノ大體ノ區分ヲスルニハ、ソノ動徑ノ位置ヲ以テスル。

點 O ニ於テ直交スル二直線ヲ XX' , YY' トスレバ、コレ等ノ二直線ハ平面ヲ四ツノ部分ニ分ツ。ソノ各ヲ**象限**トイヒ、 OX ヲ原線ト見做ストキ圖ニ示ス番號順



ニ第一象限,第二象限,第三象限,第四象限トイフ。ソシテ次ノ圖ニ示ス如ク,角XOPヲ呼ブノニソノ動徑OPガ存在スル象限ヲ以テスル。



練習問題

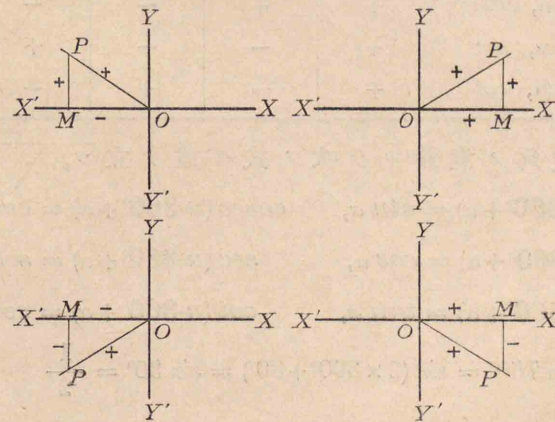
次ノ角ノ動徑ノ位置ヲ圖示シ,象限ヲイへ。但シ n ハ任意ノ整數ヲ表ハス。

1. 390°
2. 560°
3. -45°
4. -225°
5. $n \cdot 360^\circ + 35^\circ$
6. $n \cdot 360^\circ - 50^\circ$

153. 一般角ノ三角函數

OXヲ原線トスル任意ノ角 α ヲトリ,ソノ動徑上ノ任意ノ點Pカラ直線XX'ヘ垂線PMヲ引キ,動徑OP並ビニ點Pノ座標ナル横線OM,縦線PMニ次ノ如ク正負ノ符號ヲ附ケル。

- [i] 動徑OPハ常ニ正トスル。
- [ii] 横線OMハOXノ上ニアルトキハ正トシ,OX'ノ上ニアルトキハ負トスル。
- [iii] 縦線PMハXX'ニ對シテOYト同ジ側ニアルトキハ正,OY'ト同ジ側ニアルトキハ負トスル。



コノ規約ノ下ニ於テ,角 α ノ三角函數ハ一般ニ次ノヤウニ定義スル。

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{PM}{OP} = \frac{\text{縦線}}{\text{動徑}}, & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{OP}{PM} = \frac{\text{動徑}}{\text{縦線}} \\ \cos \alpha &= \frac{OM}{OP} = \frac{\text{横線}}{\text{動徑}}, & \sec \alpha &= \frac{OP}{OM} = \frac{\text{動徑}}{\text{横線}} \\ \tan \alpha &= \frac{PM}{OM} = \frac{\text{縦線}}{\text{横線}}, & \cot \alpha &= \frac{OM}{PM} = \frac{\text{横線}}{\text{縦線}} \end{aligned}$$

コノ定義ハ既ニ述ベタ鋭角及ビ鈍角ノ三角函數ノ定義ヲモ包括スルコトガ明カデアアル。各象限ニ於ケル角ノ三角函數ノ符號ハ定義カラ直ニ次ノ通りニ定マル。

| 象限 函數 | I | II | III | IV |
|------------------------------|---|----|-----|----|
| $\sin, \operatorname{cosec}$ | + | + | - | - |
| \cos, \sec | + | - | - | + |
| \tan, \cot | + | - | + | - |

又一般角ノ意義カラ次ノ式ガ成リ立ツ。

$$\sin(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha, \quad \operatorname{cosec}(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\cos(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha, \quad \sec(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \sec \alpha$$

$$\tan(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\text{例} \quad \sin 750^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

練習問題

1. 次ノ各三角函數ノ値ヲ求メヨ。

$$\text{① } \sin 390^\circ \quad \text{② } \cos 765^\circ \quad \text{③ } \tan 1860^\circ$$

2. 次ノ角ノ各三角函數ノ符號ヲイヘ。

$$239^\circ, 400^\circ, 700^\circ, 1200^\circ$$

154. 三角函數間ノ關係

三角函數相互ノ關係ヲ示ス公式

$$\sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1 \quad (1)$$

$$\cos \alpha \sec \alpha = 1 \quad (2)$$

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1 \quad (3)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \sec^2 \alpha \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{aligned} \right\} (5)$$

等ハ一般ノ角ニツイテモ、鋭角、鈍角ノ場合ト同時ニ常ニ成リ立ツ。ヨツテコレ等ノ獨立シタ五ツノ關係ニヨリ、或角ノ三角函數ノ中ノ一ツノ値ガ與ヘラレレバ、殘リノ五函數ノ値ハコレヲ求メルコトガ出來ル。

例 α ガ第三象限ノ角デアツテ $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ナルトキ、 α ノ他ノ函數値ヲ求メヨ。

解 α ハ第三象限ノ角ダカラ $\cos \alpha < 0$ 、故ニ

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{5}{4}$$

練習問題

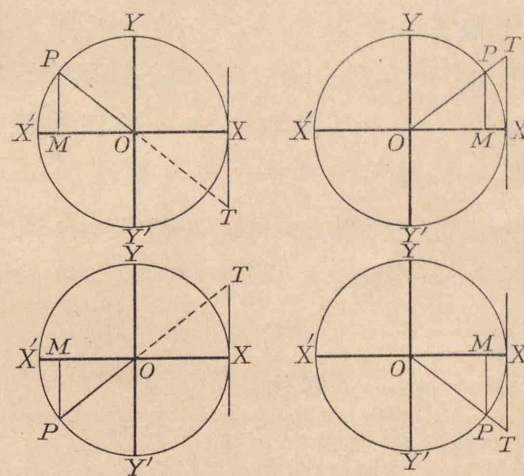
1. 公式 $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ヲ用ヒテ $\cos \alpha$ ヲ求メルトキ、正號負號ハ如何ニ選ブベキカ。
2. α ガ第三象限ノ角デアツテ $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ ナルトキ、 α ノ他ノ函數値ヲ求メヨ。
3. $\sec \alpha = 7$ デアツテ $\tan \alpha$ ガ負數ナルトキ、 α ノ他ノ函數値ヲ求メヨ。
4. α ガ第二象限ノ角ナルトキ、 $\sin \alpha$ ヲ用ヒテ他ノ函數ヲ表ハセ。
5. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ナルトキ、公式ニヨラズ圖解ニヨツテ他ノ函數値ヲ求メヨ。
6. $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ナルトキ、圖解ニヨツテ他ノ函數値ヲ求メヨ。

155. 三角函數ノ値ノ變化

三角函數ノ値ノ變化ヲ見ルニハ函數ノ値ヲ線分デ表ハシ、ソノ變化ヲ見ルノガ便利デアル。

圓Oヲ單位圓トシ、中心Oニ於テ直交スル直徑ヲXX', YY'トスル。

今OXヲ原線トスル角 α ヲトリ、ソノ動徑ガ單位圓ト交ル點ヲP, OP



ノ延長ガXニ於ケル切線ト交ル點ヲTトシ、又PカラXX'ニ引イタ垂線ヲPMトスレバ、一般角ノ三角函數ハ銳角ノ場合ト同様ニ次ノ如ク線分ヲ以テ表ハサレル。

$$\sin \alpha = PM, \quad \cos \alpha = OM, \quad \tan \alpha = TX$$

但シ線分PM及ビOMノ符號ハ第153節ニ於テ定メタト同ジク、線分TXハ直線XX'ニ對シテOYト同ジ側ニアルトキハ正トシ、OY'ト同ジ側ニアルトキハ負トスル。

[i] $\sin \alpha$ ノ變化

角 α ノ變化ニ伴フ $\sin \alpha$ ノ變化ヲ見ルニハ線分 PM ノ變化ヲ見レバヨイ。

先ヅ α ガ 0° カラ漸次増大スルトキ、 $\sin \alpha$ ノ値ハ第一象限ニ於テハ 0 カラ $+1$ マデ増大シ、第二象限ニ於テハ却テ $+1$ カラ 0 マデ減少シ、第三象限ニ於テハ益々減少シテ終ニ -1 トナリ、第四象限ニ於テハ又増大シテ 0 トナル。

更ニ α ガ 360° ヲ超エテ増大スレバ $\sin \alpha$ ハ前ト同ジ變化ヲ繰リ返ス。即チ $\sin \alpha$ ハ 360° ヲ週期トスル週期函數デアアル。

[ii] $\cos \alpha$ ノ變化

$\cos \alpha$ ノ變化ヲ見ルニハ線分 OM ノ變化ヲ見レバヨイ。即チ α ガ 0° カラ漸次増大スルトキ $\cos \alpha$ ノ値ハ、第一象限ニ於テハ却テ $+1$ カラ 0 マデ減少シ、第二象限ニ於テハ益々減少シテ終ニ -1 トナリ、第三象限ニ於テハ -1 カラ 0 マデ増大シ、第四象限ニ於テハ益々増大シテ再ビ $+1$ トナル。

$\cos \alpha$ モ亦 $\sin \alpha$ ト同ジク 360° ヲ週期トスル週期函數デアアル。

[iii] $\tan \alpha$ ノ變化

$\tan \alpha$ ノ變化ヲ見ルニハ線分 TX ノ變化ヲ見レバヨ

イ。即チ α ガ 0° カラ漸次増大スルトキ $\tan \alpha$ ノ値ハ、第一象限ニ於テハ 0 カラ漸次増シテ終ニハ絶對値ノ限リナク大キナ正ノ値、即チ $+\infty$ (無限大) トナリ、第二象限ニ於テハ絶對値ノ限リナク大キナ負ノ値、即チ $-\infty$ カラ漸次増大シテ終ニ 0 トナル。 α ガ増大シツツ 90° ヲ通過スルトキハ $\tan \alpha$ ノ値ハ $+\infty$ カラ $-\infty$ ニ跳ブノデアツテ、コノ場合ノ變化ハ不連続デアアル。

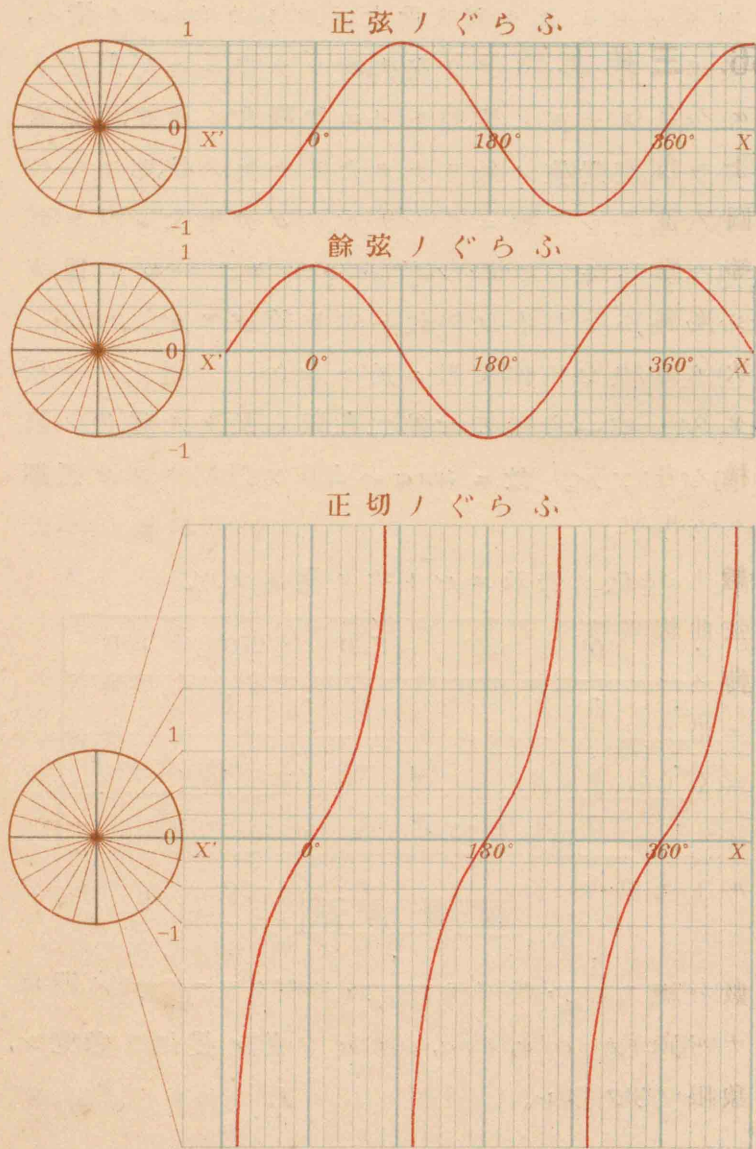
第三象限及ビ第四象限ニ於ケル $\tan \alpha$ ノ變化ノ模様ハソレゾレ第一象限及ビ第二象限ニ於ケル變化ノ模様ト同ジデアアル。故ニ $\tan \alpha$ ハ 180° ヲ週期トスル週期函數デアアル。

以上ノ變化ヲ表示スルト次ノ様ニナル。

| α | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---------------|---------------|-------------|---------------|-------------|-------------|
| $\sin \alpha$ | 0 ↗ | 1 ↘ | 0 ↘ | -1 ↗ | 0 |
| $\cos \alpha$ | 1 ↘ | 0 ↘ | -1 ↗ | 0 ↗ | 1 |
| $\tan \alpha$ | 0 ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ | 0 ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ | 0 |

練習問題

1. $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ ノ關係ヲ用ヒテ $\cot \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ ノ値ノ變化ヲ考究シ、且ツ表ヲ作レ。



156. 三角函數ノぐらふ

$\sin \alpha$ ノぐらふヲ畫クニハ前頁ノ圖ニ示ス如ク、横軸 XX' 上ニ角ノ目盛ヲトリ、次ニ XX' 上ニ中心ヲ有スル單位圓ヲ畫キ、ソノ圓周上ニ例ヘバ 15° オキニ點ヲトリ、ソレ等ノ點ヲ通ツテ横軸ニ平行ニ引イタ直線ト横軸上同ジ度數ノ處ニ立テタ垂線トノ交點ヲ求メテ、各點ヲ順次ニ連結スレバヨイ。

カヤウニシテ出來タ波狀ノ曲線ヲ**正弦曲線**トイフ。

同様ノ考ヘニヨツテ $\cos \alpha$ 及ビ $\tan \alpha$ ノぐらふヲ畫クコトガ出來ル。コレ等ヲソレゾレ**餘弦曲線**及ビ**正切曲線**トイフ。

餘弦曲線ヲ畫ク場合ニハ單位圓ヲ正ノ方向ニ 90° ダケ廻轉スルノガ便利デアアル。餘弦曲線ハ正弦曲線ヲ横軸ニ沿ウテ 90° ダケ左ヘ移動サセタモノデアアル。

次ニぐらふヲ見テ一般角ノ函數値ノ性質ヲ考ヘル。

$$0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$$

トスルトキ、第153節ノ公式ニヨリ

$$n \cdot 360^\circ + \alpha$$

ノ函數ハ總テ α ノ同ジ函數ニ等シイ。ソレ故 360° ヨリ小ナル正角ノ函數ト正ノ銳角ノ函數トヲ比較スル。

各象限ノ角ノ函數ノ符號ハ既ニ判ツテキルカラ、絶

對値ノミヲ考ヘレバヨイ。

正弦ノぐらふハ 90° ノ所ノ縦線ヲ軸トシテ對稱デアリ、又 180° ノ所ノ點ヲ中心トシテ對稱デアル。ヨツテ正ノ銳角 α ノ縦線ト等シイ縦線ノ長サヲ持つ角ハ

$$180^\circ - \alpha, \quad 180^\circ + \alpha, \quad 360^\circ - \alpha$$

デアル。從ツテ $\sin(180^\circ - \alpha)$, $\sin(180^\circ + \alpha)$, $\sin(360^\circ - \alpha)$ ノ絶對値ハ $\sin \alpha$ ノ値ニ等シイ。角ノ象限ニヨリ符號ヲ考ヘルト、

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

餘弦ノぐらふハ 90° ノ所ノ點ヲ中心トシ、 180° ノ所ノ縦線ヲ軸トシテ、又正切ノぐらふハ 90° , 180° ノ所ノ點ヲ中心トシテ何レモ對稱デアルカラ、函數ノ絶對値ニ於テハ正弦ト同ジコトガイハレル。ヨツテ符號ヲ考ヘテ

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

次ニ α ノ餘角 $90^\circ - \alpha$ ノ函數ト絶對値ヲ等シクスル

モノハ同様ノ觀察ニヨリ

$90^\circ + \alpha$, $270^\circ - \alpha$, $270^\circ + \alpha$ デアル。ヨツテコレ等ノ角ノ函數ハ總テ $90^\circ - \alpha$ ノ函數ニ直サレ、從ツテ又 α ノ函數ニ直サレル。カクテ次ノ結果ヲ得ル。

$$\begin{array}{ll} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha & \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha & \tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha \\ \sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha & \sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \\ \cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha & \cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha \\ \tan(270^\circ - \alpha) = \cot \alpha & \tan(270^\circ + \alpha) = -\cot \alpha \end{array}$$

今正弦ニ對シテ餘弦、餘弦ニ對シテ正弦ノ如キヲ一方ノ函數ノ餘函數ト呼ブコトトスルト、上ノ事實並ニ第153節ノ公式ヲ綜合シテ次ノ結果ヲ得ル。

一般角ヲ $n \cdot 90^\circ \pm \alpha$, α ハ正ノ銳角トスルトキ、 $n \cdot 90^\circ \pm \alpha$ ノ函數ノ絶對値ハ

[i] n ガ正負ノ偶數又ハ0ノトキハ α ノ同函數

[ii] n ガ正負ノ奇數ノトキハ α ノ餘函數デアル。

餘切,正割,餘割ハ夫々正切,餘弦,正弦ノ逆數デアルカラ,コレ等ニツイテモ上ノ結果ハツノママ適用サレル。

練習問題

- 各自方眼紙ニ -360° カラ $+360^\circ$ マデノ角ニ對シ正弦,餘弦,正切ノぐらふヲ畫キ,又ソレヲ元トシ,逆數關係ヲ利用シテ餘割,正割,餘切ノぐらふノ大様ヲモ同時ニ畫ケ。
- ぐらふニヨリ餘切,正割,餘割ノ性質ヲ考究セヨ。

157. 負角ノ三角函數 角ノ化法

餘弦及ビ正割ノぐらふハ 0° ノ縦線ニ關シテ對稱デアル。從ツテ α ト $-\alpha$ ノ餘弦及ビ正割ハ夫々全ク相等シイ。

正弦,餘割及ビ正切,餘切ノぐらふハ 0° ノ點ニ關シテ對稱デアル。ヨツテ α ト $-\alpha$ ノ正弦,餘割及ビ正切,餘切ハ夫々絶對值相等シク符號ヲ異ニスル。

以上ニヨリ次ノ公式ヲ得ル。

$$\begin{array}{ll} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha & \sec(-\alpha) = \sec \alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha & \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{array}$$

前節ノ結果ト上ノ公式トニヨリ,一般角ノ函數ヲ正ノ銳角ノ函數ニ直スニハ,次ノ順序ニヨルノガ便利デアル。

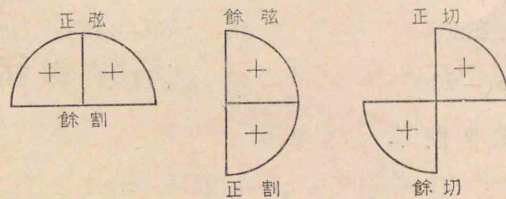
[i] 負角ナラバ先ヅコレヲ正角ニ直ス。

餘弦ト正割ダケガ全ク變ラナイ。他ハ符號ガ變ル。

[ii] 正角ヲ次ノ形ニ直シ

$$n \cdot 90^\circ \pm \alpha, \quad \alpha \text{ ハ正ノ銳角}$$

(1) 角ノ象限ヲ見テ符號ヲ定メル。



(2) 絶對值ハ

n ガ偶數ノトキ 同函數

n ガ奇數ノトキ 餘函數

デアル。

例 $\sin(-1408^\circ)$ ノ値ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sin(-1408^\circ) &= -\sin 1408^\circ \\ &= -\sin(15 \cdot 90^\circ + 58^\circ) \quad (\text{第四象限}) \\ &= \cos 58^\circ \\ &= 0.5299 \end{aligned}$$

注意 α ガ正ノ鋭角デナク任意ノ角ノ場合ニハ、コレヲ正ノ鋭角ノヤウニ見做シテ上ノ方法ヲ適用スレバヨイ。

練習問題

1. 次ノ各函数ノ値ヲ求メヨ。

- | | |
|-----------------------|------------------------------------|
| ① $\sin 225^\circ$ | ② $\cos 240^\circ$ |
| ③ $\tan 300^\circ$ | ④ $\cot 315^\circ$ |
| ⑤ $\sec 330^\circ$ | ⑥ $\operatorname{cosec} 210^\circ$ |
| ⑦ $\cos(-420^\circ)$ | ⑧ $\tan 590^\circ$ |
| ⑨ $\sin 1220^\circ$ | ⑩ $\cot(-840^\circ)$ |
| ⑪ $\cos(-2000^\circ)$ | ⑫ $\sin 1740^\circ$ |

2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha) \cos(270^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha) \cos(270^\circ + \alpha)}$$

3. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\cos(90^\circ + A) + \cos(90^\circ - A) + \sin(180^\circ + A) + \sin A = 0$$

4. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

但シ $0^\circ \leq x < 360^\circ$ トスル。

- ① $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$
- ② $2 \cos^2 x + \sin x = 1$
- ③ $\sec^2 x = 2 \tan x$
- ④ $\sin x + \cos x = 0$

158. 正弦餘弦ノ加法公式

α, β ヲ任意ノ角トスルトキ、 $\alpha + \beta$ ノ正弦及ビ餘弦ニ關シテ次ノ等式ガ成リ立ツ。

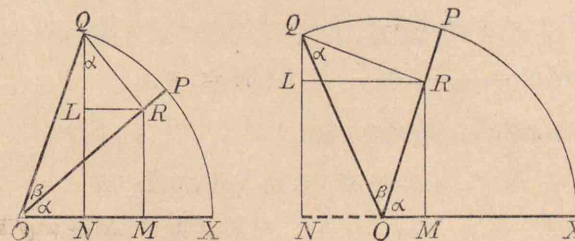
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

コレヲ正弦及ビ餘弦ノ加法公式トイフ。

證明 $\angle XOP = \alpha$, $\angle POQ = \beta$ トスレバ

$$\angle XOQ = \alpha + \beta$$



今 $OX = OP = OQ = 1$ トシ

$QN \perp OX$, $QR \perp OP$, $RM \perp OX$, $RL \perp QN$

トスレバ、 $\angle RQL = \alpha$

又 $QR = \sin \beta$, $OR = \cos \beta$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(\alpha + \beta) &= QN \\ &= RM + QL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= OR \sin \alpha + QR \cos \alpha \\
 &= \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \\
 \therefore \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha + \beta) &= ON \\
 &= OM - LR \\
 &= OR \cos \alpha - QR \sin \alpha \\
 &= \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \\
 \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$

注意 上ノ證明デハ α, β ガ共ニ正ノ鋭角デアルト假定シ、 $\alpha + \beta$ ガ鋭角ナル場合ト鈍角ナル場合トノ二圖ヲ掲ゲタ。シカシ α, β ガ正負ノドシテ角デアツテモ同様ノ方法デ證明スルコトガ出來ル。

例 $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\
 &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

練習問題

- $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ヲ證明セヨ。
- A, B ガ共ニ鋭角デアツテ、 $\sin A = \frac{3}{5}$ 、 $\cos B = \frac{12}{13}$ ナルトキ、 $\sin(A+B)$ 、 $\cos(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ。

3. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\text{①} \quad \sin(45^\circ + A) = \frac{\cos A + \sin A}{\sqrt{2}}$$

$$\text{②} \quad \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

159. 正弦餘弦ノ減法公式

α, β ヲ任意ノ角トスルトキ、 $\alpha - \beta$ ノ正弦及ビ餘弦ニ關シテ次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$

コレヲ正弦及ビ餘弦ノ減法公式トイフ。

證明 公式 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

ハ α, β ガ正負ノ任意ノ角デアルトキニモ成リ立ツカラ、 β ノ代リニ $-\beta$ トオキ

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta$$

$$\cos(-\beta) = \cos \beta$$

ニ注意スルト

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha - \beta) &= \sin\{\alpha + (-\beta)\} \\
 &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\
 &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\{\alpha+(-\beta)\} \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

練習問題

- $15^\circ=45^\circ-30^\circ$ 或ハ $60^\circ-45^\circ$ ナルコトニ注意シテ $\sin 15^\circ$ 及ビ $\cos 15^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。
- A, B ガ共ニ鋭角デアツテ, $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$ ナルトキ, $\sin(A-B)$, $\cos(A-B)$ ノ値ヲ求メヨ。
- 次ノ等式ヲ證明セヨ。
 - $\sin(30^\circ-A) + \sin(30^\circ+A) = \cos A$
 - $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$
 - $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

160. 正切ノ加法公式減法公式

α, β ヲ任意ノ角トスルトキ, $\alpha+\beta$ 及ビ $\alpha-\beta$ ノ正切ニ關シテ次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

コレヲ正切ノ加法公式及ビ減法公式トイフ。

$$\begin{aligned}\text{證明} \quad \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\end{aligned}$$

コノ右邊ノ分母分子ヲ $\cos\alpha\cos\beta$ デ割ルト

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

同様ニシテ減法公式ヲ證明スルコトガ出來ル。

練習問題

- $75^\circ=45^\circ+30^\circ$, $15^\circ=45^\circ-30^\circ$ ナルコトニ注意シテ $\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$, $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$ ヲ證明セヨ。
- $\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$ ヲ證明セヨ。
- A, B ガ鋭角デアツテ $\tan A = \frac{13}{27}$, $\tan B = \frac{7}{20}$ ナラバ, $A+B=45^\circ$ ナルコトヲ證明セヨ。

161. 二倍角ノ公式

$$\text{公式} \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

ニ於テ $\beta=\alpha$ トオケバ次ノ公式ガ得ラレル。

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

コレヲ二倍角ノ公式トイフ。

練習問題

1. $\sin x = \frac{2}{3}$ ナルトキ $\sin 2x$ 及ビ $\cos 2x$ ヲ求メ

ヨ。但シ x ハ鈍角デアルトスル。

2. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\textcircled{1} (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

$$\textcircled{2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x \quad \textcircled{3} \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\textcircled{4} \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

3. 次ノ公式(三倍角ノ公式トイフ)ヲ證明セヨ。

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

4. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

但シ $0^\circ < x < 360^\circ$ トスル。

$$\textcircled{1} \sin 2x + \sin x = 0 \quad \textcircled{2} \cos 2x = \sin x$$

162. 半角ノ公式

二倍角ノ公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$. 於
テ α ノ代リ $= \frac{\alpha}{2}$ トオケバ

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\therefore \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

コレ等ノ等式カラ次ノ公式ガ得ラレル。

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

コレヲ半角ノ公式トイフ。

公式ノ右邊ニ於ケル符號士ハ、 $\frac{\alpha}{2}$ ガ何象限ノ角デア
ルカヲ考ヘテ適當ニ定メルコトヲ要スル。

例 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ用ヒテ $\sin 15^\circ$ ヲ求メヨ。

解 $\sin 15^\circ$ ハ正數デアルカラ正號ヲトリ

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{答}$$

練習問題

- $\sin 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$ ヲ證明セヨ。
- $\cos x = \frac{2}{3}$ ナルトキ $\sin \frac{x}{2}$ 及ビ $\cos \frac{x}{2}$ ノ値ヲ求めヨ。但シ x ハ鋭角トスル。
- 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

163. 正弦餘弦ノ積ヲ和ニ變換

$\alpha + \beta$ ト $\alpha - \beta$ ノ正弦及ビ餘弦ノ公式ヲ邊々相加へ又ハ相引ケバ次ノ等式ヲ得ル。

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$\sin(\alpha - \beta) = -\sin(\beta - \alpha)$ ニ着目スレバ第二等式ハ

$$\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

トナリ、コレハ第一等式ニ於テ α, β ヲ入レ替ヘタモノニ等シイ。

ヨツテ結局次ノ三等式ガ得ラレル。

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

コレハ二角ノ正弦餘弦ノ積ヲ和又ハ差ノ形ニ直スタメノ公式デアル。

$$\begin{aligned} \text{例 1. } 2 \sin 40^\circ \cos 68^\circ &= \sin(40^\circ + 68^\circ) + \sin(40^\circ - 68^\circ) \\ &= \sin 108^\circ + \sin(-28^\circ) \\ &= \sin 108^\circ - \sin 28^\circ \end{aligned}$$

例 2. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$2 \cos 50^\circ \cos 10^\circ + 2 \sin 35^\circ \sin 5^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{解} \quad \text{左邊} = \cos 60^\circ + \cos 40^\circ + \cos 30^\circ - \cos 40^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

= 右邊

練習問題

次ノ各式ヲ和又ハ差ノ形ニ直セ。

- $2 \sin 36^\circ \cos 10^\circ$
- $2 \cos 36^\circ \sin 10^\circ$
- $2 \cos 3\theta \cos 5\theta$
- $2 \sin \theta \sin 3\theta$
- $2 \sin^2 \theta$
- $2 \cos^2 \theta$
- $\sin 2\theta \sin 3\theta$
- $\cos(A + 2B) \cos(A - 2B)$

次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$9. \sin(A+45^\circ)\sin(A-45^\circ) = -\frac{1}{2}\cos 2A$$

$$10. 4\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$11. \cos(35^\circ+A)\cos(35^\circ-A) + \cos(55^\circ+A)\cos(55^\circ-A) = \cos 2A$$

164. 正弦餘弦ノ和ヲ積ニ變換

前節ノ初メノ四等式ニ於テ、 $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ トオクト、 $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$ ナル故、次ノ等式ガ得ラレル。

$$\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

コレハ二角ノ正弦、餘弦ノ和又ハ差ヲ積ノ形ニ直スマメノ公式デアル。

例 次ノ各式ヲ積ノ形ニ直セ。

$$\sin 10^\circ + \sin 4^\circ, \quad \sin 9^\circ - \sin 3^\circ$$

$$\cos \theta + \cos 7\theta, \quad \cos 5\theta - \cos 3\theta$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sin 10^\circ + \sin 4^\circ &= 2\sin \frac{10^\circ+4^\circ}{2} \cos \frac{10^\circ-4^\circ}{2} \\ &= 2\sin 7^\circ \cos 3^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 9^\circ - \sin 3^\circ &= 2\cos \frac{9^\circ+3^\circ}{2} \sin \frac{9^\circ-3^\circ}{2} \\ &= 2\cos 6^\circ \sin 3^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta + \cos 7\theta &= 2\cos \frac{\theta+7\theta}{2} \cos \frac{\theta-7\theta}{2} \\ &= 2\cos 4\theta \cos(-3\theta) = 2\cos 4\theta \cos 3\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 5\theta - \cos 3\theta &= -2\sin \frac{5\theta+3\theta}{2} \sin \frac{5\theta-3\theta}{2} \\ &= -2\sin 4\theta \sin \theta \end{aligned}$$

練習問題

次ノ各式ヲ積ノ形ニ直セ。

1. $\sin 68^\circ + \sin 72^\circ$ 2. $\sin 84^\circ - \sin 48^\circ$ 3. $\cos 76^\circ + \cos 64^\circ$
4. $\cos 31^\circ - \cos 23^\circ$ 5. $\sin 46^\circ + \cos 32^\circ$ 6. $\cos 25^\circ - \sin 85^\circ$

次ノ各等式ヲ證明セヨ。

$$7. \frac{\sin 80^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 80^\circ + \cos 70^\circ} = \tan 75^\circ \quad 8. \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

$$9. \frac{\sin A + \sin 2A + \sin 3A}{\cos A + \cos 2A + \cos 3A} = \tan 2A$$

次ノ各方程式ヲ解ケ。但シ $0^\circ \leq x < 360^\circ$ トスル。

$$10. \cos x + \cos 3x = \cos 2x \quad 11. \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

雜 問 題

1. α, β ガ正ノ銳角デアツテ $\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = \frac{1}{3}$ ナラバ $\alpha + \beta$ ノ大サハ何程カ。
2. $\sin A = \frac{12}{13}, \cos B = \frac{7}{25}$ ナルトキ, $\sin(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ。但シ A, B ハ共ニ正ノ銳角トスル。
3. 方程式 $x^2 + 6x + 7 = 0$ ノ二根ヲ $\tan \alpha, \tan \beta$ トスレバ, $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$ ナルコトヲ證明セヨ。
4. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。
- ① $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$
- ② $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$
5. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$ ヲ證明セヨ。
6. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。
- ① $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
- ② $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$
- ③ $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma - \tan \gamma \tan \alpha}$
7. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。
- ① $\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$
- ② $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$
8. $\theta = 18^\circ$ ナラバ $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ ナルコトヲ證明シ, コレカラ $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ナルコトヲ證明セヨ。

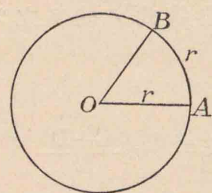
9. $A + B + C = 180^\circ$ ナルトキ, 次ノ各等式ガ成リ立ツコトヲ證明セヨ。
- ① $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- ② $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- ③ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
10. $A + B + C + D = 360^\circ$ ナルトキ, 次ノ各等式ノ成リ立ツコトヲ證明セヨ。
- ① $\sin A + \sin B + \sin C + \sin D = 4 \sin \frac{A+D}{2} \sin \frac{B+D}{2} \sin \frac{C+D}{2}$
- ② $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = -4 \cos \frac{A+D}{2} \cos \frac{B+D}{2} \cos \frac{C+D}{2}$
11. 三角形 ABC ノ三邊ヲ a, b, c , ソノ周ヲ $2s$ トスレバ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。
- $$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
12. 次ノ各方程式ヲ解ケ。
- ① $\cot x \tan 2x = 3$ ② $\cos x \sin 2x \operatorname{cosec} x = 1$
- ③ $\sin x + \cos 2x = 4 \sin^2 x$ ④ $\sec 2x + 1 = 2 \cos x$
13. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。
- $$\sin x + \sin y = 1.2, \quad \cos x + \cos y = 1.5$$
14. 次ノ等式ヲ證明セヨ。
- $$\frac{\sin A \sin 2A + \sin 3A \sin 6A}{\sin A \cos 2A + \sin 3A \cos 6A} = \tan 5A$$

第十三章

三角法ノ補充

165. 弧度

圓 O ノ半徑ヲ r トシ、弧 AB ヲ半徑 r ニ等シクトル



ト、弧トソレニ對スル中心角トハ互ニ正比例スルカラ

$$\angle AOB : 360^\circ = r : 2\pi r$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{180^\circ}{\pi}$$

トナリ、コノ角ノ大サハ半徑 r ニ關ラズ一定デアアル。

コノ一定ノ角ヲ **れーぢあん** (Radian) トイフ。

れーぢあんヲ單位トシテ角ヲ測ル方法ヲ **弧度法** トイヒ、コノ場合ノ角ノ數値ヲ **弧度** トイフ。

理論上ノ研究ニハ六十分法ノ代リニ弧度法ガ多用ヒラレル。六十分法ト弧度法トノ單位關係ハ次ノ通りデアアル。

$$1 \text{ れーぢあん} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.295779 \dots$$

$$2 \text{ 直角} = \pi \text{ れーぢあん} = 3.141592 \dots \text{ れーぢあん}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ れーぢあん} = 0.017453 \dots \text{ れーぢあん}$$

今 $\angle XOY$ ヲ一ツノ與ヘラレタ角トシ、O ヲ中心トシテ半徑 r ノ圓ヲ畫キ、角ノ二邊ト A, C デ交ラシメ

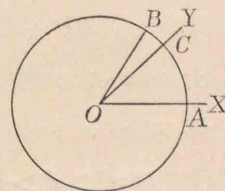
$$\widehat{AC} = l, \quad \widehat{AB} = r$$

トスレバ

$$\angle XOY : \angle AOB = \widehat{AC} : \widehat{AB} = l : r$$

然ルニ $\angle AOB = 1 \text{ れーぢあん}$

$$\therefore \angle XOY = \frac{l}{r} \text{ れーぢあん}$$



ヨツテ與ヘラレタ角ヲ弧度デ表ハスニハ、ソノ頂點ヲ中心トシテ任意ノ半徑ノ圓ヲ畫イタトキ、ソノ角内ノ弧ノ半徑ニ對スル比ヲ求メレ。

特ニ半徑ノ長サヲ單位 1 ニトレバ弧ノ數値ガ即チ弧度トナル。

練習問題

1. 次ノ度數ヲ弧度ニ直セ。

① 60° ② 30° ③ 135°

④ 100° ⑤ 300° ⑥ 500°

2. 次ノ弧度ヲ度數ニ直セ。

① 2π ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{2\pi}{3}$

④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{11\pi}{6}$ ⑥ $\frac{7}{3}\pi$

3. 半徑ガ r , 中心角ノ弧度ガ θ ナル扇形ノ面積ハ $\frac{1}{2}r^2\theta$ ナルコトヲ證明セヨ。

4. 圓 O ノ一ツノ弧 BC ノ兩端ニ於ケル切線 BP, CP

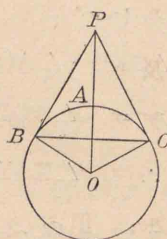
ノ交リヲ P, 角 POB ノ弧度ヲ θ トシ

$$BP + CP > \widehat{BC} > BC$$

ナルコトヲ既知トスレバ, 次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

① $\tan \theta > \theta > \sin \theta$

② $\frac{1}{\cos \theta} > \frac{\theta}{\sin \theta} > 1$



5. 前問②ヲ用ヒテ, 微小ナル角デハソノ正弦ト弧度トハ殆ンド相等シイコトヲ證明セヨ。

166. 三角方程式ノ一般的解法

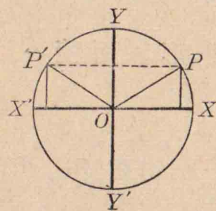
或種ノ簡單ナ三角方程式ヲ解イテ銳角或ハ 360° 以下ノ未知角ヲ求メルコトハ既ニ練習シタ。次ニソノ一般ノ値ヲ求メルコトヲ考ヘヨウ。

$$\sin x = a$$

ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ α トスレバ,

一般解ハ $x = n\pi + (-1)^n \alpha$

デアアル。但シ n ハ整数ヲ表ハス。



證明 $\sin x = a$ ニ適スル一ツノ解ヲ α トスレバ $\pi - \alpha$ モ亦一ツノ解デアアル。ソシテ正弦ハ 2π ヲ週期トスル週期函数デアアルカラ, 一般ノ解ハ

ソレ等ニ 2π ノ倍数ヲ加ヘタモノ, 即チ

$$x = 2n\pi + \alpha$$

及ビ $x = 2n\pi + (\pi - \alpha) = (2n+1)\pi - \alpha$

デアツテ, コノ外ニハナイ。

コノ二種類ノ解ヲマトメテ書クト次ノヤウニナル。但シ n ハ整数ヲ表ハス。(以下同様トスル)

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha$$

例 1. $\sin x = \frac{1}{2}$ ヲ解ケ。

解 $\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ 答

$$\cos x = a$$

ニ適スル一ツノ解ヲ α トスレバ

一般解ハ $x = 2n\pi \pm \alpha$

デアアル。

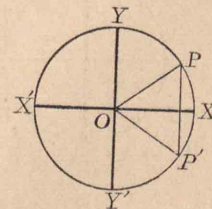
證明 $\cos x = a$ ニ適スル一ツノ解ヲ

α トスレバ $-\alpha$ モ亦一ツノ解デア

アル。ソシテ餘弦ハ 2π ヲ週期トス

ル週期函数デアアルカラ, 一般ノ解ハ

ソレ等ニ 2π ノ倍数ヲ加ヘタモノ,



即チ $x = 2n\pi \pm \alpha$

デアツテコノ外ニハナイ。

例 2. $2 \cos 3x = -1$ ヲ解ケ。

解 $2 \cos 3x = -1$

$$\cos 3x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore 3x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}n\pi \pm \frac{2}{9}\pi \quad \text{答}$$

$$\tan x = a$$

ニ適スル一ツノ解ヲ α トスレバ

一般解ハ $x = n\pi + \alpha$

デアル。

證明 $\tan x = a$ ニ適スル一ツノ解ヲ α トスレバ正切

ハ π ヲ週期トスル週期函数デアルカラ、一般ノ解ハ

α ニ π ノ倍数ヲ加ヘタモノ、即

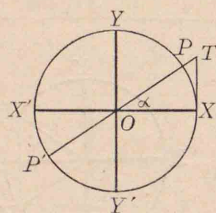
チ

$$x = n\pi + \alpha$$

デアツテコノ外ニハナイ。

例 3. $\tan 2x = \cot 3x$ ヲ解ケ。

解 $\tan 2x = \cot 3x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right)$



$$\therefore 2x = n\pi + \frac{\pi}{2} - 3x$$

$$5x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{10} \quad \text{答}$$

例 4. $\sin 5\theta + \sin 3\theta + \cos \theta = 0$ ヲ解ケ。

解 $\sin 5\theta + \sin 3\theta + \cos \theta = 0$

$$2 \sin 4\theta \cos \theta + \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (2 \sin 4\theta + 1) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = 0 \quad \text{或ハ} \quad \sin 4\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = 0 \quad \text{ヲ解キ}$$

$$\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$[(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{トモ書}$$

ケル]

$$\sin 4\theta = -\frac{1}{2} \quad \text{ヲ解キ}$$

$$4\theta = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{7\pi}{24}$$

$$\text{答} \quad (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{7\pi}{24}$$

練習問題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\tan \theta = 1$

4. $2 \sin 4\theta = \sqrt{3}$

5. $\sec 2\theta + \sqrt{2} = 0$

6. $\tan^2 \theta = 3$

7. $\sin 5\theta = \sin 3\theta$ ヲ解ケ。

先ツ公式ヲ用ヒテ $5\theta = n\pi + (-1)^n 3\theta$ トシテ解キ、次ニ $\sin 5\theta - \sin 3\theta = 0$ ノ左邊ヲ積ノ形ニ變形シテ解クコトヲ試ミヨ。

8. $2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1 = 0$

9. $\cot \theta + 3 \tan \theta = 5 \operatorname{cosec} \theta$

10. $\sec^2 x - \tan x = 1$

11. $\tan 2x = \sin 4x$

12. $\sin 8\theta = \cos 4\theta$

13. $2 \sin x \sin 3x = 1$

14. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

次ノ各方程式ニ適合スル 360° 以内ノ正角及 π° ノ角ヲ求メヨ。

15. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$

16. $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

17. $\sin \theta - \cos \theta = 1$

18. $\sin \theta + \sin 2\theta = 1 + \cos \theta$

總復習雜問題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。(1-8)

1. $\sin^8 A + \cos^8 A - 2(1 - \sin^2 A \cos^2 A)^2$

2. $3(\sin \theta - \cos \theta)^4 + 6(\sin \theta + \cos \theta)^2 + 4(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta)$

3. $\sec(270^\circ - A)\sec(90^\circ - A) - \tan(270^\circ - A)\tan(90^\circ + A)$

4. $\frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} + \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$

5. $\tan A + \tan(45^\circ - A) + \tan A \tan(45^\circ - A)$

6. $\cos 108^\circ \cos 132^\circ + \cos 132^\circ \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \cos 108^\circ$

7. $\frac{\sin(x+2y) - 2\sin(x+y) + \sin x}{\cos(x+2y) - 2\cos(x+y) + \cos x}$

8. $\frac{1}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 x}$

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ。(9-16)

9. $(\sin 2x - \sin 2y)\tan(x+y) = 2(\sin^2 x - \sin^2 y)$

10. $\sin 3A = 4\sin A \sin(60^\circ + A)\sin(60^\circ - A)$

11. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = 2\tan 2A$

12. $\tan^2\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

13. $\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A$

14. $\cos(x+y+z) + \cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(y+z-x) = 4\cos x \cos y \cos z$

15. $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y+z}{2} \sin \frac{z+x}{2}$
16. $\sin(x+y)\cos(x-y) + \sin(y+z)\cos(y-z) + \sin(z+x)\cos(z-x)$
 $= \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$
17. $\sin A = -\frac{m}{n}$ ナルトキ $\cos A, \cot A, \operatorname{cosec} A$ ノ値ヲ求メヨ。
 但シ A ヲ第三象限ノ角トスル。
18. A ハ鋭角デアツテ $\sec A - \tan A = \frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin A$ ノ値ヲ求メヨ。
19. $\cos \alpha = \frac{840}{841}, \cos \beta = \frac{41}{841}$ = シテ α, β ガ何レモ 90° ヨリ小サ
 イ正角ナルトキ, $\alpha + \beta$ ノ値ヲ求メヨ。
20. $\sin \theta$ ト $\sin \frac{\theta}{2}$ トノ比ガ $8:5$ ナルトキ, $\cos \theta$ ノ値ヲ求メヨ。
21. x ハ鋭角デアツテ, $\sin x = \frac{3}{5}$ ナルトキ, $\frac{\tan x + \cos 2x}{\cot x + \sin 2x}$ ノ値ヲ求メヨ。
22. $\tan A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan B = \sqrt{2} - 1$ ナルトキ, $\frac{\tan(A+B) - \tan(A-B)}{\cot(A+B) + \cot(A-B)}$ ノ値ヲ計算セヨ。
23. $6\sin(A+B) = 5\cos A \cos B = 30\sin A \sin B$ ナルトキ, $A+B$ ノ値ヲ求メヨ。但シ $0^\circ \leq A+B < 360^\circ$ ナリトスル。
24. $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ ナルトキ, $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots + \sin 8\theta$ ノ値ヲ求メヨ。但シ θ ヲ正ノ最小角トスル。
25. $\tan x + \cot x = 2$ ナルトキ, $\sin x + \cos x$ ノ値ヲ求メヨ。
26. $7x^2 - 8x + 1 = 0$ ノ二根ヲ $\tan \alpha$ 及ビ $\tan \beta$ トスレバ, $\tan \frac{\alpha + \beta}{2}$ ノ値如何。
 次ノ各三角方程式 = 適合スル 360° 以下ノ正角ヲ求メヨ。

- (27-30)
27. $5\sin x + \cos 2x = 3$
28. $\sin 3\theta + \sin 2\theta = 2\sin 2\theta \cos \theta$
29. $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta$
30. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$
 次ノ各三角方程式ヲ解ケ。(31-36)
31. $\sin A - \cos A = 4\sin A \cos^2 A$
32. $\sec x = 2(\sin x + \cos x)$
33. $6\cot^2 x - 4\cos^2 x - 1 = 0$
34. $\frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} = \frac{3}{2} \sec 2A$
35. $\cos 3\theta + \sin 3\theta + 2\cos \theta - 2\sin \theta = 0$
36. $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$
37. $\log \sin x - \log \cos x = 0$ ヲ解ケ。但シ $0^\circ < x < 360^\circ$ トスル。
38. 次ノ聯立方程式 = 適合スル鋭角 x 及ビ y ヲ求メヨ。
 ① $\sqrt{2} \sin(x-y) = 1, 4\cos^2(x+y) = 1$
 ② $\sin x + \cos y = \sqrt{2}, \sin^2 x + \cos^2 y = 1$
39. 次ノ方程式カラ x 及ビ y ヲ消去セヨ。
 $\tan x + \tan y = a, \cot x + \cot y = b, x + y = C$
40. $\sin x + \cos x$ ノ最大値ヲ求メヨ。
41. $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$ ハ 4 ヨリ大ナルコトハナイ。
 コレヲ證明セヨ。
42. 角 θ ノ絶對値ガ極メテ小ナルトキ, $\sin \theta, 1 - \cos \theta, \tan \theta$ ノ大小ヲ判定セヨ。

43. $2\cos\theta = m + \frac{1}{m}$ ナルトキハ, $2\cos 2\theta = m^2 + \frac{1}{m^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

44. A, B ガ 0° ト 90° トノ間ノ角デアツテ

$$\tan A = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}, \quad \sin B = \sqrt{\frac{a-b}{2a}}$$

ナルトキハ, $A=B$ ナルコトヲ證明セヨ。

45. $\cos A = \cos x \sin C$, $\cos B = \sin x \sin C$ ナルトキ

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

46. $\sin B$, $\sin A$, $\cos B$ ガ等差級數ヲナストキハ

$$\cos 2A = \cos^2(45^\circ + B)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

47. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ, 次ノ各等式ヲ證明セヨ。

$$\textcircled{1} \quad \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$= 4 \cos \left(45^\circ - \frac{A}{4}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{B}{4}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{C}{4}\right)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$$

48. 三角形 ABC = 於テ次ノ各等式ガ成リ立ツコトヲ證明セヨ。

$$\textcircled{1} \quad \frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a \sin(B-C)}{b^2 - c^2} = \frac{b \sin(C-A)}{c^2 - a^2} = \frac{c \sin(A-B)}{a^2 - b^2}$$

49. 三角形 ABC = 於テ $\cos(B-C) = 1 - \cos A - \cos 2A$ ナラバ, a ハ b, c ノ等比中項ナルコトヲ證明セヨ。

50. 三角形 ABC = 於テ $\frac{a^2 - c^2}{b} = b + c$ ナルトキハ, A ハ 120° ナルコトヲ證明セヨ。

51. 三角形 ABC = 於テ $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ ナルトキハ, コノ三角形ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ。

52. 三角形 ABC = 於テ $b \cos A = a \cos B$ ナルトキハ, コノ三角形ハ二等邊ナルコトヲ證明セヨ。

53. 三角形 ABC = 於テ $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ ナル關係アルトキハ, コノ三角形ハ二等邊三角形ナルカ或ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ。

54. 三角形 ABC ノ面積ハ $\frac{1}{2} a^2 \sin B \sin C \operatorname{cosec} A$ ニテ表ハサレルコトヲ證明セヨ。

55. 三角形 ABC ノ面積ハ $\frac{1}{4}(b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B)$ = 等シキコトヲ證明セヨ。

56. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ D = 於テ二等分スル中線 AD ヲ引クトキハ, $\tan ADB = \frac{2bc \sin A}{b^2 - c^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

57. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ヲ AD トスレバ,

$$AD = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \quad \text{ナルコトヲ證明セヨ。}$$

58. 三角形 ABC = 於テ $C=2B$ トスレバ, $c^2 - b^2 = ab$ ナルコトヲ證明セヨ。

59. 圓 = 内接スル四邊形 ABCD = 於テ, 相隣ル角 A, B ノ正弦ノ比ハ, ニツノ對角線 BD ト AC トノ比 = 等シキコトヲ證明セヨ。

60. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ邊ヲ a, b, c, d , 面積ヲ Q トスレバ, $Q = \frac{1}{2}(ad+bc)\sin A$ ナルコトヲ證明セヨ。
61. 某地ニ於テソノ正西ニアル山ノ頂ノ仰角ヲ測ツテ α ヲ得, 更ニ正南ヘ水平ニ a m 進ミ又仰角ヲ測ツテ β ヲ得タ。山頂ノ高ヲ求メル式ヲ作レ。
62. 同一ノ水面上ニ 120 m ヲ隔テテ甲乙兩塔ガアル。甲ノ基礎カラ乙ノ頂ヲ望ンダトキノ仰角ハ乙ノ基礎カラ甲ノ頂ヲ望ンダトキノ仰角ノ 2 倍ニ等シク, 又兩塔ノ基礎ヲ結ブ直線ノ中點カラ兩塔ノ頂ヲ望ムト仰角ハ互ニ餘角ヲナストイフ。兩塔ノ高ヲ求メヨ。
63. 或塔ノ基點ト共ニ同一水平面上ニアツテ且ツコレカラ等距離ニアル三地點 A, B, C ガアル。距離 BC ハ 10 m, 角 BAC ハ 45° , コノ三地點ニ於ケル塔頂ノ仰角ハ各 60° ダトイフ。塔ノ高ヲ求メヨ。
64. 池ノ岸ニ立ツテ雲ノ仰角及ビソノ水ニ投ズル影ノ俯角ヲ測ツテソレゾレ α, β ヲ得タトイフ。コノ人ノ眼ノ水面ヨリノ高ヲ h トスレバ雲ノ高サハ何程カ。
65. 二直線 OX, OY ノ交點ヲ O トシ, ソノ夾角ヲ θ トスル。(但シ $\theta < 90^\circ$) 今 OY 上ニ一點 A ヲトリ OA = l トシ, A カラ OX 上ニ垂線 AB ヲ下シ, ソノ足ヲ B トシ, 更ニ B カラ OY 上ニ垂線 BC, 更ニ C カラ OX 上ニ垂線 CD ヲ引ク。斯ノ如クシテ出來ル垂線ノ無限項ノ和ハ $l \cot \frac{\theta}{2}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

66. ニツツツ直角ニ相交ル三ツノ直線 l, m, n ガアル。一ツノ直線 AB ガ是等ノ三ツノ直線トナス角ノ餘弦ノ平方ノ和ハ 1 ニ等シイコトヲ證明セヨ。
67. 1000 m ノ高度ヲ保ツテ一定ノ方向ニ進ム飛行機ガアル。某地點カラコレヲ觀測シタトコロガ初メ正北ニ見エ, 2 分間ノ後ニハ東北ニ見エタ。ソノ仰角ヲソレゾレ α, β トスルトキ $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ デアルトシテコノ飛行機ノ速ヲ計算セヨ。
68. 平地上ニ長サ $2a$ ノ一基線ヲトリ, 一ツノ小山ノ頂上ヲ觀測シタトコロガ, 基線ノ兩端ニ於ケル頂上ノ仰角ハ共ニ θ デアツテ, 基線ノ中點カラ測ツタ頂上ノ仰角ハ φ デアルトイフ。コノ山ノ高サハ

$$\frac{a \sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{\sin(\varphi + \theta) \sin(\varphi - \theta)}}$$

ニテ與ヘラレルコトヲ證明セヨ。但シ平地ハ一水平面ト見做シ得ルモノトスル。

問題ノ答

[簡易ナモノハ省ク]

- 148頁 2. $x=30^\circ, 60^\circ$ 3. $\tan \alpha$
- 154頁 3. 4
- 158頁 1. 187 平方米 2. 6235 平方米 3. 420 平方米
- 159頁 3. $r=4, r_a=8, r_b=12, r_c=24, R=10$
5. $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
 $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}, \tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$
- 162頁 1. $C=30^\circ, a=61.28, b=27.36$
 2. $A=84^\circ 54', a=179.3, c=144.4$
- 163頁 1. $c=13, A=27^\circ 48', B=92^\circ 12'$
 2. $b=9.85, A=23^\circ 58', C=29^\circ 10'$
- 164頁 1. $A=27^\circ 48', B=60^\circ, C=92^\circ 12'$
 2. $A=41^\circ 24', B=55^\circ 46', C=82^\circ 49'$
- 165頁 1. 31.53m 2. 23.7 kg
- 169頁 1. $A=28^\circ 30', b=376.5, c=414.1$
 2. $A=28^\circ 34', C=86^\circ 14', c=413.2$
- 171頁 1. $A=28^\circ 34'$
- 173頁 1. $B=86^\circ 13', C=65^\circ 17', a=197.5$
 2. 108100 平方米
- 176頁 2. 26.76 m
- 180頁 1. ① $C=11^\circ 32', a=346.8, c=80.0$
 ② $B=18^\circ 30', a=57.08, b=31.58$
 ③ $C=14^\circ 30', a=63.89, b=34.15$
 ④ $a=51.39, B=23^\circ 51', C=36^\circ 9'$
 ⑤ $a=2.828, B=90^\circ, C=19^\circ 28'$
 ⑥ $b=9.055, A=96^\circ 20', C=46^\circ 48'$

- 180頁 ⑦ $A=63^{\circ}6'$, $C=68^{\circ}42'$, $a=9.573$
 或ハ $A=20^{\circ}30'$, $C=111^{\circ}18'$, $a=3.759$
 ⑧ $A=21^{\circ}47'$, $B=38^{\circ}13'$, $C=120^{\circ}$
 ⑨ $A=29^{\circ}41'$, $B=52^{\circ}24'$, $C=97^{\circ}54'$
 ⑩ $A=117^{\circ}17'$, $B=36^{\circ}20'$, $C=26^{\circ}25'$

2. ① $48^{\circ}47'$ 或ハ $131^{\circ}13'$ ② $21^{\circ}6'$ ③ 8

3. 南 $13^{\circ}7'$ 西 = 9.165 哩 4. 741 m, 814 m

181頁 5. 10.6 m 6. 1102 m

8. 8494 m 9. 73.9 m, 47.7 m

188頁 1. $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \alpha = 1$, $\cot \alpha = 1$,

$\sec \alpha = -\sqrt{2}$, $\operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{2}$

2. $\sin \alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \alpha = -4\sqrt{3}$,

$\cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{12}$, $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$

3. $\cos \alpha = -\sqrt{1-\sin^2 \alpha}$, $\tan \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}$,

$\cot \alpha = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$, $\sec \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}$,

$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

4. (α が第三象限ノトキ) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\cot \alpha = \frac{3}{4}$,

$\sec \alpha = -\frac{5}{3}$, $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{4}$

(α が第四象限ノトキ) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$,

$\sec \alpha = \frac{5}{3}$, $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{4}$

5. (α が第一象限ノトキ) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\tan \alpha = \frac{5}{12}$,

188頁 $\cot \alpha = \frac{12}{5}$, $\sec \alpha = \frac{13}{12}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{13}{5}$

(α が第四象限ノトキ) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$,

$\cot \alpha = -\frac{12}{5}$, $\sec \alpha = \frac{13}{12}$, $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{13}{5}$

198頁 1. ① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ -1

⑤ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ⑥ -2 ⑦ $\frac{1}{2}$ ⑧ 1.1918

⑨ 0.6428 ⑩ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑪ -0.9397 ⑫ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 1

4. ① 135° , 225° ② 90° , 210° , 330°

③ 45° , 225° ④ 135° , 315°

200頁 2. $\frac{56}{65}$, $\frac{33}{65}$

202頁 2. $\frac{16}{65}$, $\frac{63}{65}$

204頁 1. $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\frac{1}{9}$

4. ① 0° , 120° , 180° , 240°

② 30° , 150° , 270°

206頁 2. $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\frac{\sqrt{30}}{6}$

207頁 1. $\sin 46^{\circ} + \sin 26^{\circ}$

2. $\sin 46^{\circ} - \sin 26^{\circ}$

3. $\cos 8\theta + \cos 2\theta$

4. $\cos 2\theta - \cos 4\theta$

5. $1 - \cos 2\theta$

6. $1 + \cos 2\theta$

7. $\frac{\cos \theta - \cos 5\theta}{2}$

8. $\frac{\cos 2A + \cos 4B}{2}$

209頁 1. $2 \sin 70^{\circ} \cos 2^{\circ}$

2. $2 \cos 66^{\circ} \sin 18^{\circ}$

3. $2 \sin 70^{\circ} \cos 6^{\circ}$

4. $-2 \sin 27^{\circ} \sin 4^{\circ}$

5. $2 \sin 52^{\circ} \cos 6^{\circ}$

6. $-2 \sin 15^{\circ} \sin 10^{\circ}$

209頁 10. $45^\circ, 60^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 300^\circ, 315^\circ$ 11. $0^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ$ 210頁 1. 45° 2. $\frac{204}{325}$ 211頁 12. ① $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ + n \cdot 360^\circ$ ② $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ + n \cdot 360^\circ$ ③ $30^\circ, 150^\circ, 199^\circ 28', 340^\circ 32' + n \cdot 360^\circ$ ④ $0^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 270^\circ + n \cdot 360^\circ$ 13. $x=54^\circ 49', y=22^\circ 30'; x=22^\circ 30', y=54^\circ 49' + n \cdot 360^\circ$ 213頁 1. ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{3\pi}{4}$ ④ $\frac{5\pi}{9}$ ⑤ $\frac{5\pi}{3}$ ⑥ $\frac{25\pi}{9}$ 2. ① 360° ② 90° ③ 120° ④ 225° ⑤ 330° ⑥ 420° 217頁 1. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ 2. $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 3. $n\pi + \frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$ 5. $n\pi \pm \frac{3\pi}{8}$ 6. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 218頁 7. $\frac{n\pi}{5 - (-1)^n 3}; n\pi, (2n+1)\frac{\pi}{8}$ 8. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 9. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 10. $n\pi, n\pi + \frac{\pi}{4}$ 11. $\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$ 12. $(2n+1)\frac{\pi}{8}, \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24}$ 13. $(2n+1)\frac{\pi}{4}, n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 14. $\frac{n\pi}{2}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ 218頁 15. $(2n+1)\frac{\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 16. $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ 17. $(2n+1)\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 18. $45^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 225^\circ$

219頁 1. -1 2. 13 3. -1 4. 0

5. 1 6. $-\frac{3}{4}$ 7. $\tan(x+y)$ 8. 2220頁 17. $\cos A = -\frac{1}{n}\sqrt{n^2 - m^2}, \cot A = \frac{1}{m}\sqrt{n^2 - m^2}$ $\operatorname{cosec} A = -\frac{n}{m}$ 18. $\frac{8}{17}$ 19. 90° 20. $\frac{7}{25}$ 21. $\frac{309}{688}$ 22. 0.2694 23. $45^\circ, 225^\circ$ 24. 0 25. $\pm\sqrt{2}$ 26. $\frac{1}{2}, -2$ 221頁 27. $30^\circ, 150^\circ$ 28. $60^\circ, 360^\circ$ 29. $30^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 240^\circ, 270^\circ$ 30. 202.5 31. $n\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ 32. $\frac{n}{2}\pi - \frac{\pi}{8}$ 33. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 34. $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$ 35. $n\pi + \frac{\pi}{4}$ 36. $n\pi, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 37. $45^\circ, 225^\circ$ 38. (1) $x=52^\circ 30', y=7^\circ 30'; x=82^\circ 30', y=37^\circ 30'$
(2) $x=y=45^\circ$ 39. $(b-a)\tan C = ab$ 40. $\sqrt{2}$ 222頁 42. $\theta > 0$ ナラバ $\tan \theta > \sin \theta > 1 - \cos \theta$
 $\theta < 0$ ナラバ $\tan \theta < \sin \theta < 1 - \cos \theta$ 224頁 61. $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)}} m$ 62. 甲 40 m, 乙 90 m

224頁 63. 12.24 m

225頁 67. 毎分 2500 m

64. $\frac{h \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$



諸 表

- [1] ざりしや文字
- [2] 三角函数表
- [3] 正弦ノ表
- [4] 餘弦ノ表
- [5] 正切ノ表
- [6] 數ノ對數表
- [7] 正弦ノ對數表
- [8] 餘弦ノ對數表
- [9] 正切ノ對數表
- [10] 平方根ノ表
- [11]

| | | |
|----|-----|----|
| 平方 | 平方根 | ノ表 |
| 立方 | 立方根 | |

ギリシヤ文字

| | | | | | |
|-----------|------------|---------|------------|------------|----------|
| A | α | Alpha | N | ν | Nu |
| B | β | Beta | Ξ | ξ | Xi |
| Γ | γ | Gamma | O | o | Omicron |
| Δ | δ | Delta | Π | π | Pi |
| E | ϵ | Epsilon | P | ρ | Rho |
| Z | ζ | Zeta | Σ | σ | Sigma |
| H | η | Eta | T | τ | Tau |
| Θ | θ | Theta | Υ | υ | Upsilon |
| I | ι | Iota | Φ | φ | Phi |
| K | κ | Kappa | X | χ | Chi (Ki) |
| Λ | λ | Lambda | Ψ | ψ | Psi |
| M | μ | Mu | Ω | ω | Omega |

三角函数表

| 角 | 正弦 | 餘弦 | 正切 | 餘切 | 正割 | 餘割 | |
|-----|--------|--------|--------|----------|--------|----------|-----|
| 0° | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | ∞ | 1.0000 | ∞ | 90° |
| 1° | 0.0175 | 0.9998 | 0.0175 | 57.290 | 1.0002 | 57.299 | 89° |
| 2° | 0.0349 | 0.9994 | 0.0349 | 28.636 | 1.0006 | 28.654 | 88° |
| 3° | 0.0523 | 0.9986 | 0.0524 | 19.081 | 1.0014 | 19.107 | 87° |
| 4° | 0.0698 | 0.9976 | 0.0699 | 14.301 | 1.0024 | 14.336 | 86° |
| 5° | 0.0872 | 0.9962 | 0.0875 | 11.430 | 1.0038 | 11.474 | 85° |
| 6° | 0.1045 | 0.9945 | 0.1051 | 9.5144 | 1.0055 | 9.5668 | 84° |
| 7° | 0.1219 | 0.9925 | 0.1228 | 8.1443 | 1.0075 | 8.2055 | 83° |
| 8° | 0.1392 | 0.9903 | 0.1405 | 7.1154 | 1.0098 | 7.1853 | 82° |
| 9° | 0.1564 | 0.9877 | 0.1584 | 6.3138 | 1.0125 | 6.3925 | 81° |
| 10° | 0.1736 | 0.9848 | 0.1763 | 5.6713 | 1.0154 | 5.7588 | 80° |
| 11° | 0.1908 | 0.9816 | 0.1944 | 5.1446 | 1.0187 | 5.2408 | 79° |
| 12° | 0.2079 | 0.9781 | 0.2126 | 4.7046 | 1.0223 | 4.8097 | 78° |
| 13° | 0.2250 | 0.9744 | 0.2309 | 4.3315 | 1.0263 | 4.4454 | 77° |
| 14° | 0.2419 | 0.9703 | 0.2493 | 4.0108 | 1.0306 | 4.1336 | 76° |
| 15° | 0.2588 | 0.9659 | 0.2679 | 3.7321 | 1.0353 | 3.8637 | 75° |
| 16° | 0.2756 | 0.9613 | 0.2867 | 3.4874 | 1.0403 | 3.6280 | 74° |
| 17° | 0.2924 | 0.9563 | 0.3057 | 3.2709 | 1.0457 | 3.4203 | 73° |
| 18° | 0.3090 | 0.9511 | 0.3249 | 3.0777 | 1.0515 | 3.2361 | 72° |
| 19° | 0.3256 | 0.9455 | 0.3443 | 2.9042 | 1.0576 | 3.0716 | 71° |
| 20° | 0.3420 | 0.9397 | 0.3640 | 2.7475 | 1.0642 | 2.9238 | 70° |
| 21° | 0.3584 | 0.9336 | 0.3839 | 2.6051 | 1.0711 | 2.7904 | 69° |
| 22° | 0.3746 | 0.9272 | 0.4040 | 2.4751 | 1.0785 | 2.6695 | 68° |
| 23° | 0.3907 | 0.9205 | 0.4245 | 2.3559 | 1.0864 | 2.5593 | 67° |
| 24° | 0.4067 | 0.9135 | 0.4452 | 2.2460 | 1.0946 | 2.4586 | 66° |
| 25° | 0.4226 | 0.9063 | 0.4663 | 2.1445 | 1.1034 | 2.3662 | 65° |
| 26° | 0.4384 | 0.8988 | 0.4877 | 2.0503 | 1.1126 | 2.2812 | 64° |
| 27° | 0.4540 | 0.8910 | 0.5095 | 1.9626 | 1.1223 | 2.2027 | 63° |
| 28° | 0.4695 | 0.8829 | 0.5317 | 1.8807 | 1.1326 | 2.1301 | 62° |
| 29° | 0.4848 | 0.8746 | 0.5543 | 1.8040 | 1.1434 | 2.0627 | 61° |
| 30° | 0.5000 | 0.8660 | 0.5774 | 1.7321 | 1.1547 | 2.0000 | 60° |
| 31° | 0.5150 | 0.8572 | 0.6009 | 1.6643 | 1.1666 | 1.9416 | 59° |
| 32° | 0.5299 | 0.8480 | 0.6249 | 1.6003 | 1.1792 | 1.8871 | 58° |
| 33° | 0.5446 | 0.8387 | 0.6494 | 1.5399 | 1.1924 | 1.8361 | 57° |
| 34° | 0.5592 | 0.8290 | 0.6745 | 1.4826 | 1.2062 | 1.7883 | 56° |
| 35° | 0.5736 | 0.8192 | 0.7002 | 1.4281 | 1.2208 | 1.7434 | 55° |
| 36° | 0.5878 | 0.8090 | 0.7265 | 1.3764 | 1.2361 | 1.7013 | 54° |
| 37° | 0.6018 | 0.7986 | 0.7536 | 1.3270 | 1.2521 | 1.6616 | 53° |
| 38° | 0.6157 | 0.7880 | 0.7813 | 1.2799 | 1.2690 | 1.6243 | 52° |
| 39° | 0.6293 | 0.7771 | 0.8098 | 1.2349 | 1.2868 | 1.5890 | 51° |
| 40° | 0.6428 | 0.7660 | 0.8391 | 1.1918 | 1.3054 | 1.5557 | 50° |
| 41° | 0.6561 | 0.7547 | 0.8693 | 1.1504 | 1.3250 | 1.5243 | 49° |
| 42° | 0.6691 | 0.7431 | 0.9004 | 1.1106 | 1.3456 | 1.4945 | 48° |
| 43° | 0.6820 | 0.7314 | 0.9325 | 1.0724 | 1.3673 | 1.4663 | 47° |
| 44° | 0.6947 | 0.7193 | 0.9657 | 1.0355 | 1.3902 | 1.4396 | 46° |
| 45° | 0.7071 | 0.7071 | 1.0000 | 1.0000 | 1.4142 | 1.4142 | 45° |
| | 餘弦 | 正弦 | 餘切 | 正切 | 餘割 | 正割 | 角 |

| ° | 0.0° | 0.1° | 0.2° | 0.3° | 0.4° | 0.5° | 0.6° | 0.7° | 0.8° | 0.9° | — 差 | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----|----|----|----|
| | 0' | 6' | 12' | 18' | 24' | 30' | 36' | 42' | 48' | 54' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
| 0 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | .9998 | .9998 | .9998 | .9997 | .9997 | .9997 | .9996 | .9996 | .9995 | .9995 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | .9994 | .9993 | .9993 | .9992 | .9991 | .9990 | .9990 | .9989 | .9988 | .9987 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | .9986 | .9985 | .9984 | .9983 | .9982 | .9981 | .9980 | .9979 | .9978 | .9977 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | .9976 | .9974 | .9973 | .9972 | .9971 | .9969 | .9968 | .9966 | .9965 | .9963 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | .9962 | .9960 | .9959 | .9957 | .9956 | .9954 | .9952 | .9951 | .9949 | .9947 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | .9945 | .9943 | .9942 | .9940 | .9938 | .9936 | .9934 | .9932 | .9930 | .9928 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 7 | .9925 | .9923 | .9921 | .9919 | .9917 | .9914 | .9912 | .9910 | .9907 | .9905 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 8 | .9903 | .9900 | .9898 | .9895 | .9893 | .9890 | .9888 | .9885 | .9882 | .9880 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 9 | .9877 | .9874 | .9871 | .9869 | .9866 | .9863 | .9860 | .9857 | .9854 | .9851 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 10 | .9848 | .9845 | .9842 | .9839 | .9836 | .9833 | .9829 | .9826 | .9823 | .9820 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 11 | .9816 | .9813 | .9810 | .9806 | .9803 | .9799 | .9796 | .9792 | .9789 | .9785 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 12 | .9781 | .9778 | .9774 | .9770 | .9767 | .9763 | .9759 | .9755 | .9751 | .9748 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 13 | .9744 | .9740 | .9736 | .9732 | .9728 | .9724 | .9720 | .9715 | .9711 | .9707 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 14 | .9703 | .9699 | .9694 | .9690 | .9686 | .9681 | .9677 | .9673 | .9668 | .9664 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 15 | .9659 | .9655 | .9650 | .9646 | .9641 | .9636 | .9632 | .9627 | .9622 | .9617 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 16 | .9613 | .9608 | .9603 | .9598 | .9593 | .9588 | .9583 | .9578 | .9573 | .9568 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 17 | .9563 | .9558 | .9553 | .9548 | .9542 | .9537 | .9532 | .9527 | .9521 | .9516 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 18 | .9511 | .9505 | .9500 | .9494 | .9489 | .9483 | .9478 | .9472 | .9466 | .9461 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 19 | .9455 | .9449 | .9444 | .9438 | .9432 | .9426 | .9421 | .9415 | .9409 | .9403 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 20 | .9397 | .9391 | .9385 | .9379 | .9373 | .9367 | .9361 | .9354 | .9348 | .9342 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 21 | .9336 | .9330 | .9323 | .9317 | .9311 | .9304 | .9298 | .9291 | .9285 | .9278 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 22 | .9272 | .9265 | .9259 | .9252 | .9245 | .9239 | .9232 | .9225 | .9219 | .9212 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 23 | .9205 | .9198 | .9191 | .9184 | .9178 | .9171 | .9164 | .9157 | .9150 | .9143 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| 24 | .9135 | .9128 | .9121 | .9114 | .9107 | .9100 | .9092 | .9085 | .9078 | .9070 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 25 | .9063 | .9056 | .9048 | .9041 | .9033 | .9026 | .9018 | .9011 | .9003 | .8996 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 26 | .8988 | .8980 | .8973 | .8965 | .8957 | .8949 | .8942 | .8934 | .8926 | .8918 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 27 | .8910 | .8902 | .8894 | .8886 | .8878 | .8870 | .8862 | .8854 | .8846 | .8838 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| 28 | .8829 | .8821 | .8813 | .8805 | .8796 | .8788 | .8780 | .8771 | .8763 | .8755 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 29 | .8746 | .8738 | .8729 | .8721 | .8712 | .8704 | .8695 | .8686 | .8678 | .8669 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 30 | .8660 | .8652 | .8643 | .8634 | .8625 | .8616 | .8607 | .8599 | .8590 | .8581 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 31 | .8572 | .8563 | .8554 | .8545 | .8536 | .8526 | .8517 | .8508 | .8499 | .8490 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| 32 | .8480 | .8471 | .8462 | .8453 | .8443 | .8434 | .8425 | .8415 | .8406 | .8396 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| 33 | .8387 | .8377 | .8368 | .8358 | .8348 | .8339 | .8329 | .8320 | .8310 | .8300 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| 34 | .8290 | .8281 | .8271 | .8261 | .8251 | .8241 | .8231 | .8221 | .8211 | .8202 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 |
| 35 | .8192 | .8181 | .8171 | .8161 | .8151 | .8141 | .8131 | .8121 | .8111 | .8100 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 |
| 36 | .8090 | .8080 | .8070 | .8059 | .8049 | .8039 | .8028 | .8018 | .8007 | .7997 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 37 | .7986 | .7976 | .7965 | .7955 | .7944 | .7934 | .7923 | .7912 | .7902 | .7891 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 |
| 38 | .7880 | .7869 | .7859 | .7848 | .7837 | .7826 | .7815 | .7804 | .7793 | .7782 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 |
| 39 | .7771 | .7760 | .7749 | .7738 | .7727 | .7716 | .7705 | .7694 | .7683 | .7672 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 |
| 40 | .7660 | .7649 | .7638 | .7627 | .7615 | .7604 | .7593 | .7581 | .7570 | .7559 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 |
| 41 | .7547 | .7536 | .7524 | .7513 | .7501 | .7490 | .7478 | .7466 | .7455 | .7443 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 42 | .7431 | .7420 | .7408 | .7396 | .7385 | .7373 | .7361 | .7349 | .7337 | .7325 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 43 | .7314 | .7302 | .7290 | .7278 | .7266 | .7254 | .7242 | .7230 | .7218 | .7206 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 44 | .7193 | .7181 | .7169 | .7157 | .7145 | .7133 | .7120 | .7108 | .7096 | .7083 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

| ° | 0.0° | 0.1° | 0.2° | 0.3° | 0.4° | 0.5° | 0.6° | 0.7° | 0.8° | 0.9° | — 差 | | | | |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----|----|----|----|
| | 0' | 6' | 12' | 18' | 24' | 30' | 36' | 42' | 48' | 54' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
| 45 | .7071 | .7059 | .7046 | .7034 | .7022 | .7009 | .6997 | .6984 | .6972 | .6959 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 46 | .6947 | .6934 | .6921 | .6909 | .6896 | .6884 | .6871 | .6858 | .6845 | .6833 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 |
| 47 | .6820 | .6807 | .6794 | .6782 | .6769 | .6756 | .6743 | .6730 | .6717 | .6704 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 |
| 48 | .6691 | .6678 | .6665 | .6652 | .6639 | .6626 | .6613 | .6600 | .6587 | .6574 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 |
| 49 | .6561 | .6547 | .6534 | .6521 | .6508 | .6494 | .6481 | .6468 | .6455 | .6441 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 |
| 50 | .6428 | .6414 | .6401 | .6388 | .6374 | .6361 | .6347 | .6334 | .6320 | .6307 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 |
| 51 | .6293 | .6280 | .6266 | .6252 | .6239 | .6225 | .6211 | .6198 | .6184 | .6170 | 2 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 52 | .6157 | .6143 | .6129 | .6115 | .6101 | .6088 | .6074 | .6060 | .6046 | .6032 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 |
| 53 | .6018 | .6004 | .5990 | .5976 | .5962 | .5948 | .5934 | .5920 | .5906 | .5892 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 |
| 54 | .5878 | .5864 | .5850 | .5835 | .5821 | .5807 | .5793 | .5779 | .5764 | .5750 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 |
| 55 | .5736 | .5721 | .5707 | .5693 | .5678 | .5664 | .5650 | .5635 | .5621 | .5606 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 |
| 56 | .5592 | .5577 | .5563 | .5548 | .5534 | .5519 | .5505 | .5490 | .5476 | .5461 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 |
| 57 | .5446 | .5432 | .5417 | .5402 | .5388 | .5373 | .5358 | .5344 | .5329 | .5314 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 |
| 58 | .5299 | .5284 | .5270 | .5255 | .5240 | .5225 | .5210 | .5195 | .5180 | .5165 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 |
| 59 | .5150 | .5135 | .5120 | .5105 | .5090 | .5075 | .5060 | .5045 | .5030 | .5015 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 60 | .5000 | .4985 | .4970 | .4955 | .4939 | .4924 | .4909 | .4894 | .4879 | .4863 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 61 | .4848 | .4833 | .4818 | .4802 | .4787 | .4772 | .4756 | .4741 | .4726 | .4710 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 62 | .4695 | .4679 | .4664 | .4648 | .4633 | .4617 | .4602 | .4586 | .4571 | .4555 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 63 | .4540 | .4524 | .4509 | .4493 | .4478 | .4462 | .4446 | .4431 | .4415 | .4399 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 64 | .4384 | .4368 | .4352 | .4337 | .4321 | .4305 | .4289 | .4274 | .4258 | .4242 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 65 | .4226 | .4210 | .4195 | .4179 | .4163 | .4147 | .4131 | .4115 | .4099 | .4083 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 66 | .4067 | .4051 | .4035 | .4019 | .4003 | .3987 | .3971 | .3955 | .3939 | .3923 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 67 | .3907 | .3891 | .3875 | .3859 | .3843 | .3827 | .3811 | .3795 | .3778 | .3762 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 68 | .3746 | .3730 | .3714 | .3697 | .3681 | .3665 | .3649 | .3633 | .3616 | .3600 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| 69 | .3584 | .3567 | .3551 | .3535 | .3518 | .3502 | .3486 | .3469 | .3453 | .3437 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| 70 | .3420 | .3404 | .3387 | .3371 | .3355 | .3338 | .3322 | .3305 | .3289 | .3272 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| 71 | .3256 | .3239 | .3223 | .3206 | .3190 | .3173 | .3156 | .3140 | .3123 | .3107 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 72 | .3090 | .3074 | .3057 | .3040 | .3024 | .3007 | .2990 | .2974 | .2957 | .2940 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 73 | .2924 | .2907 | .2890 | .2874 | .2857 | .2840 | .2823 | .2807 | .2790 | .2773 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 74 | .2756 | .2740 | .2723 | .2706 | .2689 | .2672 | .2656 | .2639 | .2622 | .2605 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 75 | .2588 | .2571 | .2554 | .2538 | .2521 | .2504 | .2487 | .2470 | .2453 | .2436 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 76 | .2419 | .2402 | .2385 | .2368 | .2351 | .2334 | .2317 | .2300 | .2284 | .2267 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 77 | .2250 | .2233 | .2215 | .2198 | .2181 | .2164 | .2147 | .2130 | .2113 | .2096 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 |
| 78 | .2079 | .2062 | .2045 | .2028 | .2011 | .1994 | .1977 | .1959 | .1942 | .1925 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 |
| 79 | .1908 | .1891 | .1874 | .1857 | .1840 | .1822 | .1805 | .1788 | .1771 | .1754 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 |
| 80 | .1736 | .1719 | .1702 | .1685 | .1668 | .1650 | .1633 | .1616 | .1599 | .1582 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 |
| 81 | .1564 | .1547 | .1530 | .1513 | .1495 | .1478 | .1461 | .1444 | .1426 | .1409 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 |
| 82 | .1392 | .1374 | .1357 | .1340 | .1323 | .1305 | .1288 | .1271 | .1253 | .1236 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 |
| 83 | .1219 | .1201 | .1184 | .1167 | .1149 | .1132 | .1115 | .1097 | .1080 | .1063 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 |
| 84 | .1045 | .1028 | .1011 | .0993 | .0976 | .0958 | .0941 | .0924 | .0906 | .0889 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 |
| 85 | .0872 | .0854 | .0837 | .0819 | .0802 | .0785 | .0767 | .0750 | .0732 | .0715 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 |
| 86 | .0698 | .0680 | .0663 | .0645 | .0628 | .0610 | .0593 | .0576 | .0558 | .0541 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 87 | .0523 | .0506 | .0488 | .0471 | .0454 | .0436 | .0419 | .0401 | .0384 | .0366 | 3 | 6 | 9 | | |

| ° | 0.0° to 0.9° | | | | | | | | | | 十 差 | | | | |
|----|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----|----|----|----|
| | 0' | 6' | 12' | 18' | 24' | 30' | 36' | 42' | 48' | 54' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
| 0 | 0.0000 | .0017 | .0035 | .0052 | .0070 | .0087 | .0105 | .0122 | .0140 | .0157 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 1 | 0.0175 | .0192 | .0209 | .0227 | .0244 | .0262 | .0279 | .0297 | .0314 | .0332 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 2 | 0.0349 | .0367 | .0384 | .0402 | .0419 | .0437 | .0454 | .0472 | .0489 | .0507 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 3 | 0.0524 | .0542 | .0559 | .0577 | .0594 | .0612 | .0629 | .0647 | .0664 | .0682 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 4 | 0.0699 | .0717 | .0734 | .0752 | .0769 | .0787 | .0805 | .0822 | .0840 | .0857 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 5 | 0.0875 | .0892 | .0910 | .0928 | .0945 | .0963 | .0981 | .0998 | .1016 | .1033 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 6 | 0.1051 | .1069 | .1086 | .1104 | .1122 | .1139 | .1157 | .1175 | .1192 | .1210 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 7 | 0.1228 | .1246 | .1263 | .1281 | .1299 | .1317 | .1334 | .1352 | .1370 | .1388 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 8 | 0.1405 | .1423 | .1441 | .1459 | .1477 | .1495 | .1512 | .1530 | .1548 | .1566 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 9 | 0.1584 | .1602 | .1620 | .1638 | .1655 | .1673 | .1691 | .1709 | .1727 | .1745 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 10 | 0.1763 | .1781 | .1799 | .1817 | .1835 | .1853 | .1871 | .1889 | .1908 | .1926 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 11 | 0.1944 | .1962 | .1980 | .1998 | .2016 | .2035 | .2053 | .2071 | .2089 | .2107 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 12 | 0.2126 | .2144 | .2162 | .2180 | .2199 | .2217 | .2235 | .2254 | .2272 | .2290 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 13 | 0.2309 | .2327 | .2345 | .2364 | .2382 | .2401 | .2419 | .2438 | .2456 | .2475 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 14 | 0.2493 | .2512 | .2530 | .2549 | .2568 | .2586 | .2605 | .2623 | .2642 | .2661 | 3 | 6 | 9 | 12 | 16 |
| 15 | 0.2679 | .2698 | .2717 | .2736 | .2754 | .2773 | .2792 | .2811 | .2830 | .2849 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 |
| 16 | 0.2867 | .2886 | .2905 | .2924 | .2943 | .2962 | .2981 | .3000 | .3019 | .3038 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 |
| 17 | 0.3057 | .3076 | .3096 | .3115 | .3134 | .3153 | .3172 | .3191 | .3211 | .3230 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 |
| 18 | 0.3249 | .3269 | .3288 | .3307 | .3327 | .3346 | .3365 | .3385 | .3404 | .3424 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 |
| 19 | 0.3443 | .3463 | .3482 | .3502 | .3522 | .3541 | .3561 | .3581 | .3600 | .3620 | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 |
| 20 | 0.3640 | .3659 | .3679 | .3699 | .3719 | .3739 | .3759 | .3779 | .3799 | .3819 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 |
| 21 | 0.3839 | .3859 | .3879 | .3899 | .3919 | .3939 | .3959 | .3979 | .4000 | .4020 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 |
| 22 | 0.4040 | .4061 | .4081 | .4101 | .4122 | .4142 | .4163 | .4183 | .4204 | .4224 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 |
| 23 | 0.4245 | .4265 | .4286 | .4307 | .4327 | .4348 | .4369 | .4390 | .4411 | .4431 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 |
| 24 | 0.4452 | .4473 | .4494 | .4515 | .4536 | .4557 | .4578 | .4599 | .4621 | .4642 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 |
| 25 | 0.4663 | .4684 | .4706 | .4727 | .4748 | .4770 | .4791 | .4813 | .4834 | .4856 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 |
| 26 | 0.4877 | .4899 | .4921 | .4942 | .4964 | .4986 | .5008 | .5029 | .5051 | .5073 | 4 | 7 | 11 | 15 | 18 |
| 27 | 0.5095 | .5117 | .5139 | .5161 | .5184 | .5206 | .5228 | .5250 | .5272 | .5295 | 4 | 7 | 11 | 15 | 18 |
| 28 | 0.5317 | .5340 | .5362 | .5384 | .5407 | .5430 | .5452 | .5475 | .5498 | .5520 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 |
| 29 | 0.5543 | .5566 | .5589 | .5612 | .5635 | .5658 | .5681 | .5704 | .5727 | .5750 | 4 | 8 | 12 | 15 | 19 |
| 30 | 0.5774 | .5797 | .5820 | .5844 | .5867 | .5890 | .5914 | .5938 | .5961 | .5985 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 31 | 0.6009 | .6032 | .6056 | .6080 | .6104 | .6128 | .6152 | .6176 | .6200 | .6224 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 32 | 0.6249 | .6273 | .6297 | .6322 | .6346 | .6371 | .6395 | .6420 | .6445 | .6469 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 33 | 0.6494 | .6519 | .6544 | .6569 | .6594 | .6619 | .6644 | .6669 | .6694 | .6720 | 4 | 8 | 13 | 17 | 21 |
| 34 | 0.6745 | .6771 | .6796 | .6822 | .6847 | .6873 | .6899 | .6924 | .6950 | .6976 | 4 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| 35 | 0.7002 | .7028 | .7054 | .7080 | .7107 | .7133 | .7159 | .7186 | .7212 | .7239 | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 |
| 36 | 0.7265 | .7292 | .7319 | .7346 | .7373 | .7400 | .7427 | .7454 | .7481 | .7508 | 5 | 9 | 14 | 18 | 23 |
| 37 | 0.7536 | .7563 | .7590 | .7618 | .7646 | .7673 | .7701 | .7729 | .7757 | .7785 | 5 | 9 | 14 | 18 | 23 |
| 38 | 0.7813 | .7841 | .7869 | .7898 | .7926 | .7954 | .7983 | .8012 | .8040 | .8069 | 5 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 39 | 0.8098 | .8127 | .8156 | .8185 | .8214 | .8243 | .8273 | .8302 | .8332 | .8361 | 5 | 10 | 15 | 20 | 24 |
| 40 | 0.8391 | .8421 | .8451 | .8481 | .8511 | .8541 | .8571 | .8601 | .8632 | .8662 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 41 | 0.8693 | .8724 | .8754 | .8785 | .8816 | .8847 | .8878 | .8910 | .8941 | .8972 | 5 | 10 | 16 | 21 | 26 |
| 42 | 0.9004 | .9036 | .9067 | .9099 | .9131 | .9163 | .9195 | .9228 | .9260 | .9293 | 5 | 11 | 16 | 21 | 27 |
| 43 | 0.9325 | .9358 | .9391 | .9424 | .9457 | .9490 | .9523 | .9556 | .9590 | .9623 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 |
| 44 | 0.9657 | .9691 | .9725 | .9759 | .9793 | .9827 | .9861 | .9896 | .9930 | .9965 | 6 | 11 | 17 | 23 | 29 |

| ° | 0.0° to 0.9° | | | | | | | | | | 十 差 | | | | |
|----|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0' | 6' | 12' | 18' | 24' | 30' | 36' | 42' | 48' | 54' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
| 45 | 1.0000 | .0035 | .0070 | .0105 | .0141 | .0176 | .0212 | .0247 | .0283 | .0319 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 |
| 46 | 1.0355 | .0392 | .0428 | .0464 | .0501 | .0538 | .0575 | .0612 | .0649 | .0686 | 6 | 12 | 18 | 25 | 31 |
| 47 | 1.0724 | .0761 | .0799 | .0837 | .0875 | .0913 | .0951 | .0990 | .1028 | .1067 | 6 | 13 | 19 | 25 | 32 |
| 48 | 1.1106 | .1145 | .1184 | .1224 | .1263 | .1303 | .1343 | .1383 | .1423 | .1463 | 7 | 13 | 20 | 26 | 33 |
| 49 | 1.1504 | .1544 | .1585 | .1626 | .1667 | .1708 | .1750 | .1792 | .1833 | .1875 | 7 | 14 | 21 | 28 | 34 |
| 50 | 1.1918 | .1960 | .2002 | .2045 | .2088 | .2131 | .2174 | .2218 | .2261 | .2305 | 7 | 14 | 22 | 29 | 36 |
| 51 | 1.2349 | .2393 | .2437 | .2482 | .2527 | .2572 | .2617 | .2662 | .2708 | .2753 | 8 | 15 | 23 | 30 | 38 |
| 52 | 1.2799 | .2846 | .2892 | .2938 | .2985 | .3032 | .3079 | .3127 | .3175 | .3222 | 8 | 16 | 24 | 31 | 39 |
| 53 | 1.3270 | .3319 | .3367 | .3416 | .3465 | .3514 | .3564 | .3613 | .3663 | .3713 | 8 | 16 | 25 | 33 | 41 |
| 54 | 1.3764 | .3814 | .3865 | .3916 | .3968 | .4019 | .4071 | .4124 | .4176 | .4229 | 9 | 17 | 26 | 34 | 43 |
| 55 | 1.4281 | .4335 | .4388 | .4442 | .4496 | .4550 | .4605 | .4659 | .4715 | .4770 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 |
| 56 | 1.4826 | .4882 | .4938 | .4994 | .5051 | .5108 | .5166 | .5224 | .5282 | .5340 | 10 | 19 | 29 | 38 | 48 |
| 57 | 1.5399 | .5458 | .5517 | .5577 | .5637 | .5697 | .5757 | .5818 | .5880 | .5941 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| 58 | 1.6003 | .6066 | .6128 | .6191 | .6255 | .6319 | .6383 | .6447 | .6512 | .6577 | 11 | 21 | 32 | 43 | 53 |
| 59 | 1.6643 | .6709 | .6775 | .6842 | .6909 | .6977 | .7045 | .7113 | .7182 | .7251 | 11 | 23 | 34 | 45 | 56 |
| 60 | 1.7321 | .7391 | .7461 | .7532 | .7603 | .7675 | .7747 | .7820 | .7893 | .7966 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 |
| 61 | 1.8040 | .8115 | .8190 | .8265 | .8341 | .8418 | .8495 | .8572 | .8650 | .8728 | 13 | 26 | 38 | 51 | 64 |
| 62 | 1.8807 | .8887 | .8967 | .9047 | .9128 | .9210 | .9292 | .9375 | .9458 | .9542 | 14 | 27 | 41 | 55 | 68 |
| 63 | 1.9626 | .9711 | .9797 | .9883 | .9970 | .0057 | .0145 | .0233 | .0323 | .0413 | 15 | 29 | 44 | 58 | 73 |
| 64 | 2.0503 | .0594 | .0686 | .0778 | .0872 | .0965 | .1060 | .1155 | .1251 | .1348 | 16 | 31 | 47 | 63 | 78 |
| 65 | 2.1445 | .1543 | .1642 | .1742 | .1842 | .1943 | .2045 | .2148 | .2251 | .2355 | 17 | 34 | 51 | 68 | 85 |
| 66 | 2.2460 | .2566 | .2673 | .2781 | .2889 | .2998 | .3109 | .3220 | .3332 | .3445 | 18 | 37 | 55 | 73 | 92 |
| 67 | 2.3559 | .3673 | .3789 | .3906 | .4023 | .4142 | .4262 | .4383 | .4504 | .4627 | 20 | 40 | 60 | 79 | 99 |
| 68 | 2.4751 | .4876 | .5002 | .5129 | .5257 | .5386 | .5517 | .5649 | .5782 | .5916 | 22 | 43 | 65 | 87 | 108 |
| 69 | 2.6051 | .6187 | .6325 | .6464 | .6605 | .6746 | .6889 | .7034 | .7179 | .7326 | 24 | 47 | 71 | 95 | 119 |
| 70 | 2.7475 | .7625 | .7776 | .7929 | .8083 | .8239 | .8397 | .8556 | .8716 | .8878 | 26 | 52 | 78 | 104 | 130 |
| 71 | 2.9042 | .9208 | .9375 | .9544 | .9714 | .9887 | .0061 | .0237 | .0415 | .0595 | 29 | 58 | 87 | 116 | 144 |
| 72 | 3.0777 | .0961 | .1146 | .1334 | .1524 | .1716 | .1910 | .2106 | .2305 | .2506 | 32 | 64 | 96 | 129 | 161 |
| 73 | 3.2709 | .2914 | .3122 | .3332 | .3544 | .3759 | .3977 | .4197 | .4420 | .4646 | 36 | 72 | 108 | 144 | 180 |
| 74 | 3.4874 | .5105 | .5339 | .5576 | .5816 | .6059 | .6305 | .6554 | .6806 | .7062 | 41 | 81 | 122 | 163 | 204 |
| 75 | 3.7321 | .7583 | .7848 | .8118 | .8391 | .8667 | .8947 | .9232 | .9520 | .9812 | 47 | 94 | 141 | 188 | 235 |
| 76 | 4.0108 | .0408 | .0713 | .1022 | .1335 | .1653 | .1976 | .2303 | .2635 | .2972 | 54 | 108 | 162 | 216 | 270 |
| 77 | 4.3315 | .3662 | .4015 | .4373 | .4737 | .5107 | .5483 | .5864 | .6252 | .6646 | 62 | 124 | 187 | 250 | 313 |
| 78 | 4.7046 | .7453 | .7867 | .8288 | .8716 | .9152 | .9594 | .0045 | .0504 | .0970 | 71 | 142 | 213 | 284 | 355 |
| 79 | 5.1446 | .1929 | .2422 | .2924 | .3435 | .3955 | .4486 | .5026 | .5578 | .6140 | 81 | 162 | 243 | 324 | 405 |
| 80 | 5.6713 | .7297 | .7894 | .8502 | .9124 | .9758 | .0405 | .1066 | .1742 | .2432 | 92 | 184 | 276 | 368 | 460 |
| 81 | 6.3138 | .3859 | .4596 | .5350 | .6122 | .6912 | .7720 | .8548 | .9395 | .0264 | 104 | 208 | 312 | 416 | 520 |
| 82 | 7.1154 | .2066 | .3002 | .3962 | .4947 | .5958 | .6996 | .8062 | .9158 | .0285 | 117 | 234 | 351 | 468 | 585 |
| 83 | 8.1443 | .2636 | .3663 | .4716 | .5802 | .6917 | .8061 | .9234 | .0437 | .1668 | 131 | 262 | 393 | 524 | 655 |
| 84 | 9.5144 | .6768 | .8448 | .0187 | .1988 | .3854 | .5789 | .7797 | .9882 | .2048 | 146 | 292 | 438 | 584 | 730 |
| 85 | 11.430 | .1166 | .1191 | . | | | | | | | | | | | |

數ノ對數表

| 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 123 | 456 | 789 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|----------|----------|
| 1.0 | .0000 | .0043 | .0086 | .0128 | .0170 | .0212 | .0253 | .0294 | .0334 | .0374 | 4 8 12 | 17 21 25 | 29 33 37 |
| 1.1 | .0414 | .0453 | .0492 | .0531 | .0569 | .0607 | .0645 | .0682 | .0719 | .0755 | 4 8 11 | 15 19 23 | 26 30 34 |
| 1.2 | .0792 | .0828 | .0864 | .0899 | .0934 | .0969 | .1004 | .1038 | .1072 | .1106 | 3 7 10 | 14 17 21 | 24 28 31 |
| 1.3 | .1139 | .1173 | .1206 | .1239 | .1271 | .1303 | .1335 | .1367 | .1399 | .1430 | 3 6 10 | 13 16 19 | 23 26 29 |
| 1.4 | .1461 | .1492 | .1523 | .1553 | .1584 | .1614 | .1644 | .1673 | .1703 | .1732 | 3 6 9 | 12 15 18 | 21 24 27 |
| 1.5 | .1761 | .1790 | .1818 | .1847 | .1875 | .1903 | .1931 | .1959 | .1987 | .2014 | 3 6 8 | 11 14 17 | 20 22 25 |
| 1.6 | .2041 | .2068 | .2095 | .2122 | .2148 | .2175 | .2201 | .2227 | .2253 | .2279 | 3 5 8 | 11 13 16 | 18 21 24 |
| 1.7 | .2304 | .2330 | .2355 | .2380 | .2405 | .2430 | .2455 | .2480 | .2504 | .2529 | 2 5 7 | 10 12 15 | 17 20 22 |
| 1.8 | .2553 | .2577 | .2601 | .2625 | .2648 | .2672 | .2695 | .2718 | .2742 | .2765 | 2 5 7 | 9 12 14 | 16 19 21 |
| 1.9 | .2788 | .2810 | .2833 | .2856 | .2878 | .2900 | .2923 | .2945 | .2967 | .2989 | 2 4 7 | 9 11 13 | 16 18 20 |
| 2.0 | .3010 | .3032 | .3054 | .3075 | .3096 | .3118 | .3139 | .3160 | .3181 | .3201 | 2 4 6 | 8 11 13 | 15 17 19 |
| 2.1 | .3222 | .3243 | .3263 | .3284 | .3304 | .3324 | .3345 | .3365 | .3385 | .3404 | 2 4 6 | 8 10 12 | 14 16 18 |
| 2.2 | .3424 | .3444 | .3464 | .3483 | .3502 | .3522 | .3541 | .3560 | .3579 | .3598 | 2 4 6 | 8 10 12 | 14 15 17 |
| 2.3 | .3617 | .3636 | .3655 | .3674 | .3692 | .3711 | .3729 | .3747 | .3766 | .3784 | 2 4 6 | 7 9 11 | 13 15 17 |
| 2.4 | .3802 | .3820 | .3838 | .3856 | .3874 | .3892 | .3909 | .3927 | .3945 | .3962 | 2 4 5 | 7 9 11 | 12 14 16 |
| 2.5 | .3979 | .3997 | .4014 | .4031 | .4048 | .4065 | .4082 | .4099 | .4116 | .4133 | 2 3 5 | 7 9 10 | 12 14 15 |
| 2.6 | .4150 | .4166 | .4183 | .4200 | .4216 | .4232 | .4249 | .4265 | .4281 | .4298 | 2 3 5 | 7 8 10 | 11 13 15 |
| 2.7 | .4313 | .4330 | .4346 | .4362 | .4378 | .4393 | .4409 | .4425 | .4440 | .4456 | 2 3 5 | 6 8 9 | 11 13 14 |
| 2.8 | .4472 | .4487 | .4502 | .4518 | .4533 | .4548 | .4564 | .4579 | .4594 | .4609 | 2 3 5 | 6 8 9 | 11 12 14 |
| 2.9 | .4624 | .4639 | .4654 | .4669 | .4683 | .4698 | .4713 | .4728 | .4742 | .4757 | 1 3 4 | 6 7 9 | 10 12 13 |
| 3.0 | .4771 | .4786 | .4800 | .4814 | .4829 | .4843 | .4857 | .4871 | .4886 | .4900 | 1 3 4 | 6 7 9 | 10 11 13 |
| 3.1 | .4914 | .4928 | .4942 | .4955 | .4969 | .4983 | .4997 | .5011 | .5024 | .5038 | 1 3 4 | 6 7 8 | 10 11 12 |
| 3.2 | .5051 | .5065 | .5079 | .5092 | .5105 | .5119 | .5132 | .5145 | .5159 | .5172 | 1 3 4 | 5 7 8 | 9 11 12 |
| 3.3 | .5185 | .5198 | .5211 | .5224 | .5237 | .5250 | .5263 | .5276 | .5289 | .5302 | 1 3 4 | 5 6 8 | 9 10 12 |
| 3.4 | .5315 | .5328 | .5340 | .5353 | .5366 | .5378 | .5391 | .5403 | .5416 | .5428 | 1 3 4 | 5 6 8 | 9 10 11 |
| 3.5 | .5441 | .5453 | .5465 | .5478 | .5490 | .5502 | .5514 | .5527 | .5539 | .5551 | 1 2 4 | 5 6 7 | 9 10 11 |
| 3.6 | .5563 | .5575 | .5587 | .5599 | .5611 | .5623 | .5635 | .5647 | .5658 | .5670 | 1 2 4 | 5 6 7 | 8 10 11 |
| 3.7 | .5682 | .5694 | .5705 | .5717 | .5729 | .5740 | .5752 | .5763 | .5775 | .5786 | 1 2 3 | 5 6 7 | 8 9 10 |
| 3.8 | .5798 | .5809 | .5821 | .5832 | .5843 | .5855 | .5866 | .5877 | .5888 | .5899 | 1 2 3 | 5 6 7 | 8 9 10 |
| 3.9 | .5911 | .5922 | .5933 | .5944 | .5955 | .5966 | .5977 | .5988 | .5999 | .6010 | 1 2 3 | 4 5 7 | 8 9 10 |
| 4.0 | .6021 | .6031 | .6042 | .6053 | .6064 | .6075 | .6085 | .6096 | .6107 | .6117 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 10 |
| 4.1 | .6128 | .6138 | .6149 | .6160 | .6170 | .6180 | .6191 | .6201 | .6212 | .6222 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 4.2 | .6232 | .6242 | .6253 | .6263 | .6274 | .6284 | .6294 | .6304 | .6314 | .6325 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 4.3 | .6335 | .6345 | .6355 | .6365 | .6375 | .6385 | .6395 | .6405 | .6415 | .6425 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 4.4 | .6435 | .6444 | .6454 | .6464 | .6474 | .6484 | .6493 | .6503 | .6513 | .6522 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 4.5 | .6532 | .6542 | .6551 | .6561 | .6571 | .6580 | .6590 | .6599 | .6609 | .6618 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 4.6 | .6628 | .6637 | .6646 | .6656 | .6665 | .6675 | .6684 | .6693 | .6702 | .6712 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 4.7 | .6721 | .6730 | .6739 | .6749 | .6758 | .6767 | .6776 | .6785 | .6794 | .6803 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 4.8 | .6812 | .6821 | .6830 | .6839 | .6848 | .6857 | .6866 | .6875 | .6884 | .6893 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 4.9 | .6902 | .6911 | .6920 | .6929 | .6937 | .6946 | .6955 | .6964 | .6972 | .6981 | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 |
| 5.0 | .6990 | .6998 | .7007 | .7016 | .7024 | .7033 | .7042 | .7050 | .7059 | .7067 | 1 2 3 | 3 4 5 | 6 7 8 |
| 5.1 | .7076 | .7084 | .7093 | .7101 | .7110 | .7118 | .7126 | .7135 | .7143 | .7152 | 1 2 3 | 3 4 5 | 6 7 8 |
| 5.2 | .7160 | .7168 | .7177 | .7185 | .7193 | .7202 | .7210 | .7218 | .7226 | .7235 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 7 7 |
| 5.3 | .7243 | .7251 | .7259 | .7267 | .7275 | .7284 | .7292 | .7300 | .7308 | .7316 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 6 7 |
| 5.4 | .7324 | .7332 | .7340 | .7348 | .7356 | .7364 | .7372 | .7380 | .7388 | .7396 | 1 2 2 | 3 4 5 | 6 6 7 |

數ノ對數表

| 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 123 | 456 | 789 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5.5 | .7404 | .7412 | .7419 | .7427 | .7435 | .7443 | .7451 | .7459 | .7466 | .7474 | 1 2 2 | 3 4 5 | 5 6 7 |
| 5.6 | .7482 | .7490 | .7497 | .7505 | .7513 | .7520 | .7528 | .7536 | .7543 | .7551 | 1 2 2 | 3 4 5 | 5 6 7 |
| 5.7 | .7559 | .7566 | .7574 | .7582 | .7589 | .7597 | .7604 | .7612 | .7619 | .7627 | 1 2 2 | 3 4 5 | 5 6 7 |
| 5.8 | .7634 | .7642 | .7649 | .7657 | .7664 | .7672 | .7679 | .7686 | .7694 | .7701 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 7 |
| 5.9 | .7709 | .7716 | .7723 | .7731 | .7738 | .7745 | .7752 | .7760 | .7767 | .7774 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 7 |
| 6.0 | .7782 | .7789 | .7796 | .7803 | .7810 | .7818 | .7825 | .7832 | .7839 | .7846 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 6 |
| 6.1 | .7853 | .7860 | .7868 | .7875 | .7882 | .7889 | .7896 | .7903 | .7910 | .7917 | 1 1 2 | 3 4 4 | 5 6 6 |
| 6.2 | .7924 | .7931 | .7938 | .7945 | .7952 | .7959 | .7966 | .7973 | .7980 | .7987 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 6 6 |
| 6.3 | .7993 | .8000 | .8007 | .8014 | .8021 | .8028 | .8035 | .8041 | .8048 | .8055 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 6 6 |
| 6.4 | .8062 | .8069 | .8075 | .8082 | .8089 | .8096 | .8102 | .8109 | .8116 | .8122 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 6 6 |
| 6.5 | .8129 | .8136 | .8142 | .8149 | .8156 | .8162 | .8169 | .8176 | .8182 | .8189 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 6 6 |
| 6.6 | .8195 | .8202 | .8209 | .8215 | .8222 | .8228 | .8235 | .8241 | .8248 | .8254 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 6 6 |
| 6.7 | .8261 | .8267 | .8274 | .8280 | .8287 | .8293 | .8299 | .8306 | .8312 | .8319 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 6 6 |
| 6.8 | .8325 | .8331 | .8338 | .8344 | .8351 | .8357 | .8363 | .8370 | .8376 | .8382 | 1 1 2 | 3 3 4 | 5 6 6 |
| 6.9 | .8388 | .8395 | .8401 | .8407 | .8414 | .8420 | .8426 | .8432 | .8439 | .8445 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 6 |
| 7.0 | .8451 | .8457 | .8463 | .8470 | .8476 | .8482 | .8488 | .8494 | .8500 | .8506 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 6 |
| 7.1 | .8513 | .8519 | .8525 | .8531 | .8537 | .8543 | .8549 | .8555 | .8561 | .8567 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| 7.2 | .8573 | .8579 | .8585 | .8591 | .8597 | .8603 | .8609 | .8615 | .8621 | .8627 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| 7.3 | .8633 | .8639 | .8645 | .8651 | .8657 | .8663 | .8669 | .8675 | .8681 | .8686 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| 7.4 | .8692 | .8698 | .8704 | .8710 | .8716 | .8722 | .8727 | .8733 | .8739 | .8745 | 1 1 2 | 2 3 4 | 4 5 5 |
| 7.5 | .8751 | .8756 | .8762 | .8768 | .8774 | .8779 | .8785 | .8791 | .8797 | .8802 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 7.6 | .8808 | .8814 | .8820 | .8825 | .8831 | .8837 | .8842 | .8848 | .8854 | .8859 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 7.7 | .8865 | .8871 | .8876 | .8882 | .8887 | .8893 | .8899 | .8904 | .8910 | .8915 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 7.8 | .8921 | .8927 | .8932 | .8938 | .8943 | .8949 | .8954 | .8960 | .8965 | .8971 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 7.9 | .8976 | .8982 | .8987 | .8993 | .8998 | .9004 | .9009 | .9015 | .9020 | .9025 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 8.0 | .9031 | .9036 | .9042 | .9047 | .9053 | .9058 | .9063 | .9069 | .9074 | .9079 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 8.1 | .9085 | .9090 | .9096 | .9101 | .9106 | .9112 | .9117 | .9122 | .9128 | .9133 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 8.2 | .9138 | .9143 | .9149 | .9154 | .9159 | .9165 | .9170 | .9175 | .9180 | .9186 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 8.3 | .9191 | .9196 | .9201 | .9206 | .9212 | .9217 | .9222 | .9227 | .9232 | .9238 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 8.4 | .9243 | .9248 | .9253 | .9258 | .9263 | .9269 | .9274 | .9279 | .9284 | .9289 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 8.5 | .9294 | .9299 | .9304 | .9309 | .9315 | .9320 | .9325 | .9330 | .9335 | .9340 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 8.6 | .9345 | .9350 | .9355 | .9360 | .9365 | .9370 | .9375 | .9380 | .9385 | .9390 | 1 1 2 | 2 3 3 | 4 5 5 |
| 8.7 | .9395 | .9400 | .9405 | .9410 | .9415 | .9420 | .9425 | .9430 | .9435 | .9440 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 8.8 | .9445 | .9450 | .9455 | .9460 | .9465 | .9469 | .9474 | .9479 | .9484 | .9489 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 8.9 | .9494 | .9499 | .9504 | .9509 | .9513 | .9518 | .9523 | .9528 | .9533 | .9538 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.0 | .9542 | .9547 | .9552 | .9557 | .9562 | .9566 | .9571 | .9576 | .9581 | .9586 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.1 | .9590 | .9595 | .9600 | .9605 | .9609 | .9614 | .9619 | .9624 | .9628 | .9633 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.2 | .9638 | .9643 | .9647 | .9652 | .9657 | .9661 | .9666 | .9671 | .9675 | .9680 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.3 | .9685 | .9689 | .9694 | .9699 | .9703 | .9708 | .9713 | .9717 | .9722 | .9727 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.4 | .9731 | .9736 | .9741 | .9745 | .9750 | .9754 | .9759 | .9763 | .9768 | .9773 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.5 | .9777 | .9782 | .9786 | .9791 | .9795 | .9800 | .9805 | .9809 | .9814 | .9818 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.6 | .9823 | .9827 | .9832 | .9836 | .9841 | .9845 | .9850 | .9854 | .9859 | .9863 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.7 | .9868 | .9872 | .9877 | .9881 | .9886 | .9890 | .9894 | .9899 | .9903 | .9908 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 4 4 |
| 9.8 | .9912 | .9917 | .9921 | .9926 | .9930 | .9934 | .9939 | .9943 | .9948 | .995 | | | |

餘弦ノ對數表

| ° | 0.0° 0.1° 0.2° 0.3° 0.4° 0.5° 0.6° 0.7° 0.8° 0.9° | | | | | | | | | 一 差 | | | | | |
|----|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|----|----|----|----|
| | 0' | 6' | 12' | 18' | 24' | 30' | 36' | 42' | 48' | 54' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
| 0 | 0.0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .9999 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9998 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9996 | .9996 | .9996 | .9995 | .9995 | .9994 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | .9994 | .9994 | .9993 | .9993 | .9992 | .9992 | .9991 | .9991 | .9990 | .9990 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | .9989 | .9989 | .9988 | .9988 | .9987 | .9987 | .9986 | .9985 | .9985 | .9984 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | .9983 | .9983 | .9982 | .9981 | .9981 | .9980 | .9979 | .9978 | .9978 | .9977 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | .9976 | .9975 | .9975 | .9974 | .9973 | .9972 | .9971 | .9970 | .9969 | .9968 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | .9968 | .9967 | .9966 | .9965 | .9964 | .9963 | .9962 | .9961 | .9960 | .9959 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | .9958 | .9956 | .9955 | .9954 | .9953 | .9952 | .9951 | .9950 | .9949 | .9947 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | .9946 | .9945 | .9944 | .9943 | .9941 | .9940 | .9939 | .9937 | .9936 | .9935 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | .9934 | .9932 | .9931 | .9929 | .9928 | .9927 | .9925 | .9924 | .9922 | .9921 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | .9919 | .9918 | .9916 | .9915 | .9913 | .9912 | .9910 | .9909 | .9907 | .9906 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | .9904 | .9902 | .9901 | .9899 | .9897 | .9896 | .9894 | .9892 | .9891 | .9889 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | .9887 | .9885 | .9884 | .9882 | .9880 | .9878 | .9876 | .9875 | .9873 | .9871 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 14 | .9869 | .9867 | .9865 | .9863 | .9861 | .9859 | .9857 | .9855 | .9853 | .9851 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 15 | .9849 | .9847 | .9845 | .9843 | .9841 | .9839 | .9837 | .9835 | .9833 | .9831 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 16 | .9828 | .9826 | .9824 | .9822 | .9820 | .9817 | .9815 | .9813 | .9811 | .9808 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 17 | .9806 | .9804 | .9801 | .9799 | .9797 | .9794 | .9792 | .9789 | .9787 | .9785 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 18 | .9782 | .9780 | .9777 | .9775 | .9772 | .9770 | .9767 | .9764 | .9762 | .9759 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 19 | .9757 | .9754 | .9751 | .9749 | .9746 | .9743 | .9741 | .9738 | .9735 | .9733 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 20 | .9730 | .9727 | .9724 | .9722 | .9719 | .9716 | .9713 | .9710 | .9707 | .9704 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 21 | .9702 | .9699 | .9696 | .9693 | .9690 | .9687 | .9684 | .9681 | .9678 | .9675 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 22 | .9672 | .9669 | .9666 | .9662 | .9659 | .9656 | .9653 | .9650 | .9647 | .9643 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 23 | .9640 | .9637 | .9634 | .9631 | .9627 | .9624 | .9621 | .9617 | .9614 | .9611 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 24 | .9607 | .9604 | .9601 | .9597 | .9594 | .9590 | .9587 | .9583 | .9580 | .9576 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 25 | .9573 | .9569 | .9566 | .9562 | .9558 | .9555 | .9551 | .9548 | .9544 | .9540 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 26 | .9537 | .9533 | .9529 | .9525 | .9522 | .9518 | .9514 | .9510 | .9507 | .9503 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 27 | .9499 | .9495 | .9491 | .9487 | .9483 | .9479 | .9475 | .9471 | .9467 | .9463 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 28 | .9459 | .9455 | .9451 | .9447 | .9443 | .9439 | .9435 | .9431 | .9427 | .9422 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 29 | .9418 | .9414 | .9410 | .9406 | .9401 | .9397 | .9393 | .9388 | .9384 | .9380 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 30 | .9375 | .9371 | .9367 | .9362 | .9358 | .9353 | .9349 | .9344 | .9340 | .9335 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 31 | .9331 | .9326 | .9322 | .9317 | .9312 | .9308 | .9303 | .9298 | .9294 | .9289 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 32 | .9284 | .9279 | .9275 | .9270 | .9265 | .9260 | .9255 | .9251 | .9246 | .9241 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 33 | .9236 | .9231 | .9226 | .9221 | .9216 | .9211 | .9206 | .9201 | .9196 | .9191 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 34 | .9186 | .9181 | .9175 | .9170 | .9165 | .9160 | .9155 | .9149 | .9144 | .9139 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 35 | .9134 | .9128 | .9123 | .9118 | .9112 | .9107 | .9101 | .9096 | .9091 | .9085 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 36 | .9080 | .9074 | .9069 | .9063 | .9057 | .9052 | .9046 | .9041 | .9035 | .9029 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 37 | .9023 | .9018 | .9012 | .9006 | .9000 | .8995 | .8989 | .8983 | .8977 | .8971 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 38 | .8965 | .8959 | .8953 | .8947 | .8941 | .8935 | .8929 | .8923 | .8917 | .8911 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 39 | .8905 | .8899 | .8893 | .8887 | .8880 | .8874 | .8868 | .8862 | .8855 | .8849 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 40 | .8843 | .8836 | .8830 | .8823 | .8817 | .8810 | .8804 | .8797 | .8791 | .8784 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 41 | .8778 | .8771 | .8765 | .8758 | .8751 | .8745 | .8738 | .8731 | .8724 | .8718 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 42 | .8711 | .8704 | .8697 | .8690 | .8683 | .8676 | .8669 | .8662 | .8655 | .8648 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 43 | .8641 | .8634 | .8627 | .8620 | .8613 | .8606 | .8598 | .8591 | .8584 | .8577 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 44 | .8569 | .8562 | .8555 | .8547 | .8540 | .8532 | .8525 | .8517 | .8510 | .8502 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |

太字ノ指標ニハエヲ加ヘヨ

餘弦ノ對數表

| ° | 0.0° 0.1° 0.2° 0.3° 0.4° 0.5° 0.6° 0.7° 0.8° 0.9° | | | | | | | | | 一 差 | | | | | |
|----|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|----|----|----|----|
| | 0' | 6' | 12' | 18' | 24' | 30' | 36' | 42' | 48' | 54' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
| 45 | .8495 | .8487 | .8480 | .8472 | .8464 | .8457 | .8449 | .8441 | .8433 | .8426 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 46 | .8418 | .8410 | .8402 | .8394 | .8386 | .8378 | .8370 | .8362 | .8354 | .8346 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| 47 | .8338 | .8330 | .8322 | .8313 | .8305 | .8297 | .8289 | .8280 | .8272 | .8264 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 48 | .8255 | .8247 | .8238 | .8230 | .8221 | .8213 | .8204 | .8195 | .8187 | .8178 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 49 | .8169 | .8161 | .8152 | .8143 | .8134 | .8125 | .8117 | .8108 | .8099 | .8090 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 50 | .8081 | .8072 | .8063 | .8053 | .8044 | .8035 | .8026 | .8017 | .8007 | .7998 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| 51 | .7989 | .7979 | .7970 | .7960 | .7951 | .7941 | .7932 | .7922 | .7913 | .7903 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| 52 | .7893 | .7884 | .7874 | .7864 | .7854 | .7844 | .7835 | .7825 | .7815 | .7805 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 |
| 53 | .7795 | .7785 | .7774 | .7764 | .7754 | .7744 | .7734 | .7723 | .7713 | .7703 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 54 | .7692 | .7682 | .7671 | .7661 | .7650 | .7640 | .7629 | .7618 | .7607 | .7597 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 |
| 55 | .7586 | .7575 | .7564 | .7553 | .7542 | .7531 | .7520 | .7509 | .7498 | .7487 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 |
| 56 | .7476 | .7464 | .7453 | .7442 | .7430 | .7419 | .7407 | .7396 | .7384 | .7373 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 57 | .7361 | .7349 | .7338 | .7326 | .7314 | .7302 | .7290 | .7278 | .7266 | .7254 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 58 | .7242 | .7230 | .7218 | .7205 | .7193 | .7181 | .7168 | .7156 | .7144 | .7131 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 59 | .7118 | .7106 | .7093 | .7080 | .7068 | .7055 | .7042 | .7029 | .7016 | .7003 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 |
| 60 | .6990 | .6977 | .6963 | .6950 | .6937 | .6923 | .6910 | .6896 | .6883 | .6869 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 |
| 61 | .6856 | .6842 | .6828 | .6814 | .6801 | .6787 | .6773 | .6759 | .6744 | .6730 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 |
| 62 | .6716 | .6702 | .6687 | .6673 | .6659 | .6644 | .6629 | .6615 | .6600 | .6585 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 |
| 63 | .6570 | .6555 | .6541 | .6526 | .6510 | .6495 | .6480 | .6465 | .6449 | .6434 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 64 | .6418 | .6403 | .6387 | .6371 | .6356 | .6340 | .6324 | .6308 | .6292 | .6276 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 65 | .6259 | .6243 | .6227 | .6210 | .6194 | .6177 | .6161 | .6144 | .6127 | .6110 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 66 | .6093 | .6076 | .6059 | .6042 | .6024 | .6007 | .5990 | .5972 | .5954 | .5937 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 67 | .5919 | .5901 | .5883 | .5865 | .5847 | .5828 | .5810 | .5792 | .5773 | .5754 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 68 | .5736 | .5717 | .5698 | .5679 | .5660 | .5641 | .5621 | .5602 | .5583 | .5563 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 |
| 69 | .5543 | .5523 | .5504 | .5484 | .5463 | .5443 | .5423 | .5402 | .5382 | .5361 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 |
| 70 | .5341 | .5320 | .5299 | .5278 | .5256 | .5235 | .5213 | .5192 | .5170 | .5148 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 |
| 71 | .5126 | .5104 | .5082 | .5060 | .5037 | .5015 | .4992 | .4969 | .4946 | .4923 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 |
| 72 | .4900 | .4876 | .4853 | .4829 | .4805 | .4781 | .4757 | .4733 | .4709 | .4684 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 73 | .4659 | .4634 | .4609 | .4584 | .4559 | .4533 | .4508 | .4482 | .4456 | .4430 | 4 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| 74 | .4403 | .4377 | .4350 | .4323 | .4296 | .4269 | .4242 | .4214 | .4186 | .4158 | 5 | 9 | 14 | 18 | 23 |
| 75 | .4130 | .4102 | .4073 | .4044 | .4015 | .3986 | .3957 | .3927 | .3897 | .3867 | 5 | 10 | 15 | 20 | 24 |
| 76 | .3837 | .3806 | .3775 | .3745 | .3713 | .3682 | .3650 | .3618 | .3586 | .3554 | 5 | 11 | 16 | 21 | 26 |
| 77 | .3521 | .3488 | .3455 | .3421 | .3387 | .3353 | .3319 | .3284 | .3250 | .3214 | 6 | 11 | 17 | 23 | 28 |
| 78 | .3179 | .3143 | .3107 | .3070 | .3034 | .2997 | .2959 | .2921 | .2883 | .2845 | 6 | 12 | 19 | 25 | 31 |
| 79 | .2806 | .2767 | .2727 | .2687 | .2647 | .2606 | .2565 | .2524 | .2482 | .2439 | 7 | 14 | 20 | 27 | 34 |
| 80 | .2397 | .2353 | .2310 | .2266 | .2221 | .2176 | .2131 | .2085 | .2038 | .1991 | 8 | 15 | 23 | 30 | 38 |
| 81 | .1943 | .1895 | .1847 | .1797 | .1747 | .1697 | .1646 | .1594 | .1542 | .1489 | 8 | 17 | 25 | 34 | 42 |
| 82 | .1436 | .1381 | .1326 | .1271 | .1214 | .1157 | .1099 | .1040 | .0981 | .0920 | 10 | 19 | 29 | 38 | 48 |
| 83 | .0859 | .0797 | .0734 | .0670 | .0605 | .0539 | .0472 | .0403 | .0334 | .0264 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 |
| 84 | .0192 | .0120 | .0046 | .9970 | .9894 | .9816 | .9736 | .9655 | .9573 | .9489 | 13 | 26 | 39 | 52 | 66 |
| 85 | .9403 | .9315 | .9226 | .9135 | .9042 | .8946 | .8849 | .8749 | .8647 | .8543 | 16 | 32 | 48 | 64 | 80 |
| 86 | .8436 | .8326 | .8213 | .8098 | .7979 | .7857 | .7731 | .7602 | .7468 | .7330 | | | | | |
| 87 | .7188 | .7041 | .6889 | .6731 | .6567 | .6397 | .6220 | .6035 | .5842 | .5640 | | | | | |

| ° | 0.0° | 0.1° | 0.2° | 0.3° | 0.4° | 0.5° | 0.6° | 0.7° | 0.8° | 0.9° | 十 差 | | | | |
|----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----|----|----|----|
| | 0' | 6' | 12' | 18' | 24' | 30' | 36' | 42' | 48' | 54' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
| 0 | -∞ | 3.242 | .5429 | .7190 | .8439 | .9408 | .0200 | .0870 | .1450 | .1962 | | | | | |
| 1 | 2.2419 | .2833 | .3211 | .3559 | .3881 | .4181 | .4461 | .4725 | .4973 | .5208 | | | | | |
| 2 | 2.5431 | .5643 | .5845 | .6038 | .6223 | .6401 | .6571 | .6736 | .6894 | .7046 | | | | | |
| 3 | 2.7194 | .7337 | .7475 | .7609 | .7739 | .7865 | .7988 | .8107 | .8223 | .8336 | | | | | |
| 4 | 2.8446 | .8554 | .8659 | .8762 | .8862 | .8960 | .9056 | .9150 | .9241 | .9331 | 16 | 32 | 48 | 64 | 81 |
| 5 | 2.9420 | .9506 | .9591 | .9674 | .9756 | .9836 | .9915 | .9992 | .0068 | .0143 | 13 | 26 | 40 | 53 | 66 |
| 6 | 3.0216 | .0289 | .0360 | .0430 | .0499 | .0567 | .0633 | .0699 | .0764 | .0828 | 11 | 22 | 34 | 45 | 56 |
| 7 | 3.0891 | .0954 | .1015 | .1076 | .1135 | .1194 | .1252 | .1310 | .1367 | .1423 | 10 | 20 | 29 | 39 | 49 |
| 8 | 3.1478 | .1533 | .1587 | .1640 | .1693 | .1745 | .1797 | .1848 | .1898 | .1948 | 9 | 17 | 26 | 35 | 43 |
| 9 | 3.1997 | .2046 | .2094 | .2142 | .2189 | .2236 | .2282 | .2328 | .2374 | .2419 | 8 | 16 | 23 | 31 | 39 |
| 10 | 3.2463 | .2507 | .2551 | .2594 | .2637 | .2680 | .2722 | .2764 | .2805 | .2846 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 |
| 11 | 3.2887 | .2927 | .2967 | .3006 | .3046 | .3085 | .3123 | .3162 | .3200 | .3237 | 6 | 13 | 19 | 26 | 32 |
| 12 | 3.3275 | .3312 | .3349 | .3385 | .3422 | .3458 | .3493 | .3529 | .3564 | .3599 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 |
| 13 | 3.3634 | .3668 | .3702 | .3736 | .3770 | .3804 | .3837 | .3870 | .3903 | .3935 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 |
| 14 | 3.3968 | .4000 | .4032 | .4064 | .4095 | .4127 | .4158 | .4189 | .4220 | .4250 | 5 | 10 | 16 | 21 | 26 |
| 15 | 3.4281 | .4311 | .4341 | .4371 | .4400 | .4430 | .4459 | .4488 | .4517 | .4546 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 16 | 3.4575 | .4603 | .4632 | .4660 | .4688 | .4716 | .4744 | .4771 | .4799 | .4826 | 5 | 9 | 14 | 19 | 23 |
| 17 | 3.4853 | .4880 | .4907 | .4934 | .4961 | .4987 | .5014 | .5040 | .5066 | .5092 | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 |
| 18 | 3.5118 | .5143 | .5169 | .5195 | .5220 | .5245 | .5270 | .5295 | .5320 | .5345 | 4 | 8 | 13 | 17 | 21 |
| 19 | 3.5370 | .5394 | .5419 | .5443 | .5467 | .5491 | .5516 | .5539 | .5563 | .5587 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 20 | 3.5611 | .5634 | .5658 | .5681 | .5704 | .5727 | .5750 | .5773 | .5796 | .5819 | 4 | 8 | 12 | 15 | 19 |
| 21 | 3.5842 | .5864 | .5887 | .5909 | .5932 | .5954 | .5976 | .5998 | .6020 | .6042 | 4 | 7 | 11 | 15 | 19 |
| 22 | 3.6064 | .6086 | .6108 | .6129 | .6151 | .6172 | .6194 | .6215 | .6236 | .6257 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 |
| 23 | 3.6279 | .6300 | .6321 | .6341 | .6362 | .6383 | .6404 | .6424 | .6445 | .6465 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 |
| 24 | 3.6486 | .6506 | .6527 | .6547 | .6567 | .6587 | .6607 | .6627 | .6647 | .6667 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 |
| 25 | 3.6687 | .6706 | .6726 | .6746 | .6765 | .6785 | .6804 | .6824 | .6843 | .6863 | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 |
| 26 | 3.6882 | .6901 | .6920 | .6939 | .6958 | .6977 | .6996 | .7015 | .7034 | .7053 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 |
| 27 | 3.7072 | .7090 | .7109 | .7128 | .7146 | .7165 | .7183 | .7202 | .7220 | .7238 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 28 | 3.7257 | .7275 | .7293 | .7311 | .7330 | .7348 | .7366 | .7384 | .7402 | .7420 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 29 | 3.7438 | .7455 | .7473 | .7491 | .7509 | .7526 | .7544 | .7562 | .7579 | .7597 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 30 | 3.7614 | .7632 | .7649 | .7667 | .7684 | .7701 | .7719 | .7736 | .7753 | .7771 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 |
| 31 | 3.7788 | .7805 | .7822 | .7839 | .7856 | .7873 | .7890 | .7907 | .7924 | .7941 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 |
| 32 | 3.7958 | .7975 | .7992 | .8008 | .8025 | .8042 | .8059 | .8075 | .8092 | .8109 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 33 | 3.8125 | .8142 | .8158 | .8175 | .8191 | .8208 | .8224 | .8241 | .8257 | .8274 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| 34 | 3.8290 | .8306 | .8323 | .8339 | .8355 | .8371 | .8388 | .8404 | .8420 | .8436 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| 35 | 3.8452 | .8468 | .8484 | .8501 | .8517 | .8533 | .8549 | .8565 | .8581 | .8597 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 36 | 3.8613 | .8629 | .8644 | .8660 | .8676 | .8692 | .8708 | .8724 | .8740 | .8755 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 37 | 3.8771 | .8787 | .8803 | .8818 | .8834 | .8850 | .8865 | .8881 | .8897 | .8912 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 38 | 3.8928 | .8944 | .8959 | .8975 | .8990 | .9006 | .9022 | .9037 | .9053 | .9068 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 39 | 3.9084 | .9099 | .9115 | .9130 | .9146 | .9161 | .9176 | .9192 | .9207 | .9223 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 40 | 3.9238 | .9254 | .9269 | .9284 | .9300 | .9315 | .9330 | .9346 | .9361 | .9376 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 41 | 3.9392 | .9407 | .9422 | .9438 | .9453 | .9468 | .9483 | .9499 | .9514 | .9529 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 42 | 3.9544 | .9560 | .9575 | .9590 | .9605 | .9621 | .9636 | .9651 | .9666 | .9681 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 43 | 3.9697 | .9712 | .9727 | .9742 | .9757 | .9773 | .9788 | .9803 | .9818 | .9833 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 44 | 3.9848 | .9864 | .9879 | .9894 | .9909 | .9924 | .9939 | .9955 | .9970 | .9985 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |

大宇及ビソレヨリ右ニアル値ノ指標ニハ十一ヲ加ヘヨ

| ° | 0.0° | 0.1° | 0.2° | 0.3° | 0.4° | 0.5° | 0.6° | 0.7° | 0.8° | 0.9° | 十 差 | | | | |
|----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----|----|----|----|
| | 0' | 6' | 12' | 18' | 24' | 30' | 36' | 42' | 48' | 54' | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
| 45 | 0.0000 | .0015 | .0030 | .0045 | .0061 | .0076 | .0091 | .0106 | .0121 | .0136 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 46 | 0.0152 | .0167 | .0182 | .0197 | .0212 | .0228 | .0243 | .0258 | .0273 | .0288 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 47 | 0.0303 | .0319 | .0334 | .0349 | .0364 | .0379 | .0395 | .0410 | .0425 | .0440 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 48 | 0.0456 | .0471 | .0486 | .0501 | .0517 | .0532 | .0547 | .0562 | .0578 | .0593 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 49 | 0.0608 | .0624 | .0639 | .0654 | .0670 | .0685 | .0700 | .0716 | .0731 | .0746 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 50 | 0.0762 | .0777 | .0793 | .0808 | .0824 | .0839 | .0854 | .0870 | .0885 | .0901 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 51 | 0.0916 | .0932 | .0947 | .0963 | .0978 | .0994 | .1010 | .1025 | .1041 | .1056 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 52 | 0.1072 | .1088 | .1103 | .1119 | .1135 | .1150 | .1166 | .1182 | .1197 | .1213 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 |
| 53 | 0.1229 | .1245 | .1260 | .1276 | .1292 | .1308 | .1324 | .1340 | .1356 | .1371 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 54 | 0.1387 | .1403 | .1419 | .1435 | .1451 | .1467 | .1483 | .1499 | .1515 | .1532 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 |
| 55 | 0.1548 | .1564 | .1580 | .1596 | .1612 | .1629 | .1645 | .1661 | .1677 | .1694 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| 56 | 0.1710 | .1726 | .1743 | .1759 | .1776 | .1792 | .1809 | .1825 | .1842 | .1858 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| 57 | 0.1875 | .1891 | .1908 | .1925 | .1941 | .1958 | .1975 | .1992 | .2008 | .2025 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |
| 58 | 0.2042 | .2059 | .2076 | .2093 | .2110 | .2127 | .2144 | .2161 | .2178 | .2195 | 3 | 6 | 9 | 11 | 14 |
| 59 | 0.2212 | .2229 | .2247 | .2264 | .2281 | .2299 | .2316 | .2333 | .2351 | .2368 | 3 | 6 | 9 | 12 | 14 |
| 60 | 0.2386 | .2403 | .2421 | .2438 | .2456 | .2474 | .2491 | .2509 | .2527 | .2545 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 61 | 0.2562 | .2580 | .2598 | .2616 | .2634 | .2652 | .2670 | .2689 | .2707 | .2725 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 62 | 0.2743 | .2762 | .2780 | .2798 | .2817 | .2835 | .2854 | .2872 | .2891 | .2910 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 63 | 0.2928 | .2947 | .2966 | .2985 | .3004 | .3023 | .3042 | .3061 | .3080 | .3099 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 |
| 64 | 0.3118 | .3137 | .3157 | .3176 | .3196 | .3215 | .3235 | .3254 | .3274 | .3294 | 3 | 7 | 10 | 13 | 16 |
| 65 | 0.3313 | .3333 | .3353 | .3373 | .3393 | .3413 | .3433 | .3453 | .3473 | .3494 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 |
| 66 | 0.3514 | .3535 | .3555 | .3576 | .3596 | .3617 | .3638 | .3659 | .3679 | .3700 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 |
| 67 | 0.3721 | .3743 | .3764 | .3785 | .3806 | .3828 | .3849 | .3871 | .3892 | .3914 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 |
| 68 | 0.3936 | .3958 | .3980 | .4002 | .4024 | .4046 | .4068 | .4091 | .4113 | .4136 | 4 | 7 | 11 | 15 | 19 |
| 69 | 0.4158 | .4181 | .4204 | .4227 | .4250 | .4273 | .4296 | .4319 | .4342 | .4366 | 4 | 8 | 12 | 15 | 19 |
| 70 | 0.4389 | .4413 | .4437 | .4461 | .4484 | .4509 | .4533 | .4557 | .4581 | .4606 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 71 | 0.4630 | .4655 | .4680 | .4705 | .4730 | .4755 | .4780 | .4805 | .4831 | .4857 | 4 | 8 | 13 | 17 | 21 |
| 72 | 0.4882 | .4908 | .4934 | .4960 | .4986 | .5013 | .5039 | .5066 | .5093 | .5120 | 4 | 9 | 13 | 18 | 22 |
| 73 | 0.5147 | .5174 | .5201 | .5229 | .5256 | .5284 | .5312 | .5340 | .5368 | .5397 | 5 | 9 | 14 | 19 | 23 |
| 74 | 0.5425 | .5454 | .5483 | .5512 | .5541 | .5570 | .5600 | .5629 | .5659 | .5689 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 75 | 0.5719 | .5750 | .5780 | .5811 | .5842 | .5873 | .5905 | .5936 | .5968 | .6000 | 5 | 10 | 16 | 21 | 26 |
| 76 | 0.6032 | .6065 | .6097 | .6130 | .6163 | .6196 | .6230 | .6264 | .6298 | .6332 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 |
| 77 | 0.6366 | .6401 | .6436 | .6471 | .6507 | .6542 | .6578 | .6615 | .6651 | .6688 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 |
| 78 | 0.6725 | .6763 | .6800 | .6838 | .6877 | .6915 | .6954 | .6994 | .7033 | .7073 | 6 | 13 | 19 | 26 | 32 |
| 79 | 0.7113 | .7154 | .7195 | .7236 | .7278 | .7320 | .7363 | .7406 | .7449 | .7493 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 |
| 80 | 0.7537 | .7581 | .7626 | .7672 | .7718 | .7764 | .7811 | .7858 | .7906 | .7954 | 8 | 16 | 21 | 31 | 39 |
| 81 | 0.8003 | .8052 | .8102 | .8152 | .8203 | .8255 | .8307 | .8360 | .8413 | .8467 | 9 | 17 | 26 | 35 | 43 |
| 82 | 0.8522 | .8577 | .8633 | .8690 | .8748 | .8806 | .8865 | .8924 | .8985 | .9046 | 10 | 20 | 29 | 39 | 49 |
| 83 | 0.9109 | .9172 | .9236 | .9301 | .9367 | .9433 | .9501 | .9570 | .9640 | .9711 | 11 | 22 | 34 | 45 | 56 |
| 84 | 0.9784 | .9857 | .9932 | .0008 | .0085 | .0164 | .0244 | .0326 | .0409 | .0494 | 13 | 26 | 40 | 53 | 66 |
| 85 | 1.0580 | .0669 | .0759 | .0 | | | | | | | | | | | |

平方根ノ表

| 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 123 | 456 | 789 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 1.0 | 1.000 | 1.005 | 1.010 | 1.015 | 1.020 | 1.025 | 1.030 | 1.034 | 1.039 | 1.044 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 3 4 4 |
| 1.1 | 1.049 | 1.054 | 1.058 | 1.063 | 1.068 | 1.072 | 1.077 | 1.082 | 1.086 | 1.091 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 3 4 4 |
| 1.2 | 1.095 | 1.100 | 1.105 | 1.109 | 1.114 | 1.118 | 1.122 | 1.127 | 1.131 | 1.136 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 3 4 4 |
| 1.3 | 1.140 | 1.145 | 1.149 | 1.153 | 1.158 | 1.162 | 1.166 | 1.170 | 1.175 | 1.179 | 0 1 1 | 2 2 3 | 3 3 4 4 |
| 1.4 | 1.183 | 1.187 | 1.192 | 1.196 | 1.200 | 1.204 | 1.208 | 1.212 | 1.217 | 1.221 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 3 4 |
| 1.5 | 1.225 | 1.229 | 1.233 | 1.237 | 1.241 | 1.245 | 1.249 | 1.253 | 1.257 | 1.261 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 3 4 |
| 1.6 | 1.265 | 1.269 | 1.273 | 1.277 | 1.281 | 1.285 | 1.288 | 1.292 | 1.296 | 1.300 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 3 4 |
| 1.7 | 1.304 | 1.308 | 1.311 | 1.315 | 1.319 | 1.323 | 1.327 | 1.330 | 1.334 | 1.338 | 0 1 1 | 2 2 2 | 3 3 3 3 |
| 1.8 | 1.342 | 1.345 | 1.349 | 1.353 | 1.356 | 1.360 | 1.364 | 1.367 | 1.371 | 1.375 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 3 3 3 |
| 1.9 | 1.378 | 1.382 | 1.386 | 1.389 | 1.393 | 1.396 | 1.400 | 1.404 | 1.407 | 1.411 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 3 3 3 |
| 2.0 | 1.414 | 1.418 | 1.421 | 1.425 | 1.428 | 1.432 | 1.435 | 1.439 | 1.442 | 1.446 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 3 |
| 2.1 | 1.449 | 1.453 | 1.456 | 1.459 | 1.463 | 1.466 | 1.470 | 1.473 | 1.476 | 1.480 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 3 |
| 2.2 | 1.483 | 1.487 | 1.490 | 1.493 | 1.497 | 1.500 | 1.503 | 1.507 | 1.510 | 1.513 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 3 |
| 2.3 | 1.517 | 1.520 | 1.523 | 1.526 | 1.530 | 1.533 | 1.536 | 1.539 | 1.543 | 1.546 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 3 |
| 2.4 | 1.549 | 1.552 | 1.556 | 1.559 | 1.562 | 1.565 | 1.568 | 1.572 | 1.575 | 1.579 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 3 |
| 2.5 | 1.581 | 1.584 | 1.587 | 1.591 | 1.594 | 1.597 | 1.600 | 1.603 | 1.606 | 1.609 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 3 3 |
| 2.6 | 1.612 | 1.616 | 1.619 | 1.622 | 1.625 | 1.628 | 1.631 | 1.634 | 1.637 | 1.640 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 3 |
| 2.7 | 1.643 | 1.646 | 1.649 | 1.652 | 1.655 | 1.658 | 1.661 | 1.664 | 1.667 | 1.670 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 3 |
| 2.8 | 1.673 | 1.676 | 1.679 | 1.682 | 1.685 | 1.688 | 1.691 | 1.694 | 1.697 | 1.700 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 3 |
| 2.9 | 1.703 | 1.706 | 1.709 | 1.712 | 1.715 | 1.718 | 1.720 | 1.723 | 1.726 | 1.729 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 3 |
| 3.0 | 1.732 | 1.735 | 1.738 | 1.741 | 1.744 | 1.746 | 1.749 | 1.752 | 1.755 | 1.758 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 3 |
| 3.1 | 1.761 | 1.764 | 1.766 | 1.769 | 1.772 | 1.775 | 1.778 | 1.780 | 1.783 | 1.786 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 3 |
| 3.2 | 1.789 | 1.792 | 1.794 | 1.797 | 1.800 | 1.803 | 1.806 | 1.808 | 1.811 | 1.814 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 2 |
| 3.3 | 1.817 | 1.819 | 1.822 | 1.825 | 1.828 | 1.830 | 1.833 | 1.836 | 1.838 | 1.841 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 2 |
| 3.4 | 1.844 | 1.847 | 1.849 | 1.852 | 1.855 | 1.857 | 1.860 | 1.863 | 1.865 | 1.868 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 2 |
| 3.5 | 1.871 | 1.873 | 1.876 | 1.879 | 1.881 | 1.884 | 1.887 | 1.889 | 1.892 | 1.895 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 2 |
| 3.6 | 1.897 | 1.900 | 1.903 | 1.905 | 1.908 | 1.910 | 1.913 | 1.916 | 1.918 | 1.921 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 2 |
| 3.7 | 1.924 | 1.926 | 1.929 | 1.931 | 1.934 | 1.936 | 1.939 | 1.942 | 1.944 | 1.947 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 2 |
| 3.8 | 1.949 | 1.952 | 1.954 | 1.957 | 1.960 | 1.962 | 1.965 | 1.967 | 1.970 | 1.972 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 2 |
| 3.9 | 1.975 | 1.977 | 1.980 | 1.982 | 1.985 | 1.987 | 1.990 | 1.992 | 1.995 | 1.997 | 0 1 1 | 1 1 2 | 2 2 2 2 |
| 4.0 | 2.000 | 2.002 | 2.005 | 2.007 | 2.010 | 2.012 | 2.015 | 2.017 | 2.020 | 2.022 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.1 | 2.025 | 2.027 | 2.030 | 2.032 | 2.035 | 2.037 | 2.040 | 2.042 | 2.045 | 2.047 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.2 | 2.049 | 2.052 | 2.054 | 2.057 | 2.059 | 2.062 | 2.064 | 2.066 | 2.069 | 2.071 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.3 | 2.074 | 2.076 | 2.078 | 2.081 | 2.083 | 2.086 | 2.088 | 2.090 | 2.093 | 2.095 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.4 | 2.098 | 2.100 | 2.102 | 2.105 | 2.107 | 2.110 | 2.112 | 2.114 | 2.117 | 2.119 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.5 | 2.121 | 2.124 | 2.126 | 2.128 | 2.131 | 2.133 | 2.135 | 2.138 | 2.140 | 2.142 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.6 | 2.145 | 2.147 | 2.149 | 2.152 | 2.154 | 2.156 | 2.159 | 2.161 | 2.163 | 2.166 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.7 | 2.168 | 2.170 | 2.173 | 2.175 | 2.177 | 2.179 | 2.182 | 2.184 | 2.186 | 2.189 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.8 | 2.191 | 2.193 | 2.195 | 2.198 | 2.200 | 2.202 | 2.205 | 2.207 | 2.209 | 2.211 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 4.9 | 2.214 | 2.216 | 2.218 | 2.220 | 2.223 | 2.225 | 2.227 | 2.229 | 2.232 | 2.234 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 5.0 | 2.236 | 2.238 | 2.241 | 2.243 | 2.245 | 2.247 | 2.249 | 2.252 | 2.254 | 2.256 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 5.1 | 2.258 | 2.261 | 2.263 | 2.265 | 2.267 | 2.269 | 2.272 | 2.274 | 2.276 | 2.278 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 5.2 | 2.280 | 2.283 | 2.285 | 2.287 | 2.289 | 2.291 | 2.293 | 2.296 | 2.298 | 2.300 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 5.3 | 2.302 | 2.304 | 2.307 | 2.309 | 2.311 | 2.313 | 2.315 | 2.317 | 2.319 | 2.322 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |
| 5.4 | 2.324 | 2.326 | 2.328 | 2.330 | 2.332 | 2.335 | 2.337 | 2.339 | 2.341 | 2.343 | 0 0 1 | 1 1 1 | 2 2 2 2 |

平方根ノ表

| 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 123 | 456 | 789 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5.5 | 2.345 | 2.347 | 2.349 | 2.352 | 2.354 | 2.356 | 2.358 | 2.360 | 2.362 | 2.364 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 5.6 | 2.366 | 2.369 | 2.371 | 2.373 | 2.375 | 2.377 | 2.379 | 2.381 | 2.383 | 2.385 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 5.7 | 2.387 | 2.390 | 2.392 | 2.394 | 2.396 | 2.398 | 2.400 | 2.402 | 2.404 | 2.406 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 5.8 | 2.408 | 2.410 | 2.412 | 2.415 | 2.417 | 2.419 | 2.421 | 2.423 | 2.425 | 2.427 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 5.9 | 2.429 | 2.431 | 2.433 | 2.435 | 2.437 | 2.439 | 2.441 | 2.443 | 2.445 | 2.447 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.0 | 2.449 | 2.452 | 2.454 | 2.056 | 2.458 | 2.460 | 2.462 | 2.464 | 2.466 | 2.468 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.1 | 2.470 | 2.472 | 2.474 | 2.476 | 2.478 | 2.480 | 2.482 | 2.484 | 2.486 | 2.488 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.2 | 2.490 | 2.492 | 2.494 | 2.496 | 2.498 | 2.500 | 2.502 | 2.504 | 2.506 | 2.508 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.3 | 2.510 | 2.512 | 2.514 | 2.516 | 2.518 | 2.520 | 2.522 | 2.524 | 2.526 | 2.528 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.4 | 2.530 | 2.532 | 2.534 | 2.536 | 2.538 | 2.540 | 2.542 | 2.544 | 2.546 | 2.548 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.5 | 2.550 | 2.551 | 2.553 | 2.555 | 2.557 | 2.559 | 2.561 | 2.563 | 2.565 | 2.567 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.6 | 2.569 | 2.571 | 2.573 | 2.575 | 2.577 | 2.579 | 2.581 | 2.583 | 2.585 | 2.587 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.7 | 2.588 | 2.590 | 2.592 | 2.594 | 2.596 | 2.598 | 2.600 | 2.602 | 2.604 | 2.606 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.8 | 2.608 | 2.610 | 2.612 | 2.613 | 2.615 | 2.617 | 2.619 | 2.621 | 2.623 | 2.625 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 6.9 | 2.627 | 2.629 | 2.631 | 2.632 | 2.634 | 2.636 | 2.638 | 2.640 | 2.642 | 2.644 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 7.0 | 2.646 | 2.648 | 2.650 | 2.651 | 2.653 | 2.655 | 2.657 | 2.659 | 2.661 | 2.663 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 2 2 |
| 7.1 | 2.665 | 2.666 | 2.668 | 2.670 | 2.672 | 2.674 | 2.676 | 2.678 | 2.680 | 2.681 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 7.2 | 2.683 | 2.685 | 2.687 | 2.689 | 2.691 | 2.693 | 2.694 | 2.696 | 2.698 | 2.700 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 7.3 | 2.702 | 2.704 | 2.706 | 2.707 | 2.709 | 2.711 | 2.713 | 2.715 | 2.717 | 2.718 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 7.4 | 2.720 | 2.722 | 2.724 | 2.725 | 2.728 | 2.729 | 2.731 | 2.733 | 2.735 | 2.737 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 7.5 | 2.739 | 2.740 | 2.742 | 2.744 | 2.746 | 2.748 | 2.750 | 2.751 | 2.753 | 2.755 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 7.6 | 2.757 | 2.759 | 2.760 | 2.762 | 2.764 | 2.766 | 2.768 | 2.769 | 2.771 | 2.773 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 7.7 | 2.775 | 2.777 | 2.778 | 2.780 | 2.782 | 2.784 | 2.786 | 2.787 | 2.789 | 2.791 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 7.8 | 2.793 | 2.795 | 2.796 | 2.798 | 2.800 | 2.802 | 2.804 | 2.805 | 2.807 | 2.809 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 7.9 | 2.811 | 2.812 | 2.814 | 2.816 | 2.818 | 2.820 | 2.821 | 2.823 | 2.825 | 2.827 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.0 | 2.828 | 2.830 | 2.832 | 2.834 | 2.835 | 2.837 | 2.839 | 2.841 | 2.843 | 2.844 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.1 | 2.846 | 2.848 | 2.850 | 2.851 | 2.853 | 2.855 | 2.857 | 2.858 | 2.860 | 2.862 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.2 | 2.864 | 2.865 | 2.867 | 2.869 | 2.871 | 2.872 | 2.874 | 2.876 | 2.877 | 2.879 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.3 | 2.881 | 2.883 | 2.884 | 2.886 | 2.888 | 2.890 | 2.891 | 2.893 | 2.895 | 2.897 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.4 | 2.898 | 2.900 | 2.902 | 2.903 | 2.905 | 2.907 | 2.909 | 2.910 | 2.912 | 2.914 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.5 | 2.915 | 2.917 | 2.919 | 2.921 | 2.922 | 2.924 | 2.926 | 2.927 | 2.929 | 2.931 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.6 | 2.933 | 2.934 | 2.936 | 2.938 | 2.939 | 2.941 | 2.943 | 2.944 | 2.946 | 2.948 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.7 | 2.950 | 2.951 | 2.953 | 2.955 | 2.956 | 2.958 | 2.960 | 2.961 | 2.963 | 2.965 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.8 | 2.966 | 2.968 | 2.970 | 2.972 | 2.973 | 2.975 | 2.977 | 2.978 | 2.980 | 2.982 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 8.9 | 2.983 | 2.985 | 2.987 | 2.988 | 2.990 | 2.992 | 2.993 | 2.995 | 2.997 | 2.998 | 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1 2 |
| 9.0 | 3.000 | 3.002 | 3.003 | 3.005 | 3.007 | 3.008 | 3.010 | 3.012 | 3.013 | 3.015 | 0 0 0 | 1 1 1 | 1 1 1 |
| 9.1 | 3.017 | 3.018 | 3.020 | 3.022 | 3.023 | 3.025 | 3.027 | 3.028 | 3.030 | 3.032 | 0 0 0 | 1 1 1 | 1 1 1 |
| 9.2 | 3.033 | 3.035 | 3.036 | 3.038 | 3.040 | 3.041 | 3.043 | 3.045</ | | | | | |

| 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 123 | 456 | 789 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|--------|
| 10 | 3.162 | 3.178 | 3.194 | 3.209 | 3.225 | 3.240 | 3.256 | 3.271 | 3.286 | 3.302 | 235 | 689 | 111214 |
| 11 | 3.317 | 3.332 | 3.347 | 3.362 | 3.376 | 3.391 | 3.406 | 3.421 | 3.435 | 3.450 | 134 | 679 | 101213 |
| 12 | 3.464 | 3.479 | 3.493 | 3.507 | 3.521 | 3.536 | 3.550 | 3.564 | 3.578 | 3.592 | 134 | 678 | 101113 |
| 13 | 3.606 | 3.619 | 3.633 | 3.647 | 3.661 | 3.674 | 3.688 | 3.701 | 3.715 | 3.728 | 134 | 578 | 101112 |
| 14 | 3.742 | 3.755 | 3.768 | 3.782 | 3.795 | 3.808 | 3.821 | 3.834 | 3.847 | 3.860 | 134 | 578 | 91112 |
| 15 | 3.873 | 3.886 | 3.899 | 3.912 | 3.924 | 3.937 | 3.950 | 3.962 | 3.975 | 3.987 | 134 | 568 | 91011 |
| 16 | 4.000 | 4.012 | 4.025 | 4.037 | 4.050 | 4.062 | 4.074 | 4.087 | 4.099 | 4.111 | 124 | 567 | 91011 |
| 17 | 4.123 | 4.135 | 4.147 | 4.159 | 4.171 | 4.183 | 4.195 | 4.207 | 4.219 | 4.231 | 124 | 567 | 81011 |
| 18 | 4.243 | 4.254 | 4.266 | 4.278 | 4.290 | 4.301 | 4.313 | 4.324 | 4.336 | 4.347 | 123 | 567 | 8910 |
| 19 | 4.359 | 4.370 | 4.382 | 4.393 | 4.405 | 4.416 | 4.427 | 4.438 | 4.450 | 4.461 | 123 | 567 | 8910 |
| 20 | 4.472 | 4.483 | 4.494 | 4.506 | 4.517 | 4.528 | 4.539 | 4.550 | 4.561 | 4.572 | 123 | 467 | 8910 |
| 21 | 4.583 | 4.593 | 4.604 | 4.615 | 4.626 | 4.637 | 4.648 | 4.658 | 4.669 | 4.680 | 123 | 456 | 8910 |
| 22 | 4.690 | 4.701 | 4.712 | 4.722 | 4.733 | 4.743 | 4.754 | 4.764 | 4.775 | 4.785 | 123 | 456 | 789 |
| 23 | 4.796 | 4.806 | 4.817 | 4.827 | 4.837 | 4.848 | 4.858 | 4.868 | 4.879 | 4.889 | 123 | 456 | 789 |
| 24 | 4.899 | 4.909 | 4.919 | 4.930 | 4.940 | 4.950 | 4.960 | 4.970 | 4.980 | 4.990 | 123 | 456 | 789 |
| 25 | 5.000 | 5.010 | 5.020 | 5.030 | 5.040 | 5.050 | 5.060 | 5.070 | 5.079 | 5.089 | 123 | 456 | 789 |
| 26 | 5.099 | 5.109 | 5.119 | 5.128 | 5.138 | 5.148 | 5.158 | 5.167 | 5.177 | 5.187 | 123 | 456 | 789 |
| 27 | 5.196 | 5.206 | 5.215 | 5.225 | 5.235 | 5.244 | 5.254 | 5.263 | 5.273 | 5.282 | 123 | 456 | 789 |
| 28 | 5.292 | 5.301 | 5.310 | 5.320 | 5.329 | 5.339 | 5.348 | 5.357 | 5.367 | 5.376 | 123 | 456 | 789 |
| 29 | 5.385 | 5.394 | 5.404 | 5.413 | 5.422 | 5.431 | 5.441 | 5.450 | 5.459 | 5.468 | 123 | 455 | 678 |
| 30 | 5.477 | 5.486 | 5.495 | 5.505 | 5.514 | 5.523 | 5.532 | 5.541 | 5.550 | 5.559 | 123 | 445 | 678 |
| 31 | 5.568 | 5.577 | 5.586 | 5.595 | 5.604 | 5.612 | 5.621 | 5.630 | 5.639 | 5.648 | 123 | 345 | 678 |
| 32 | 5.657 | 5.666 | 5.675 | 5.683 | 5.692 | 5.701 | 5.710 | 5.718 | 5.727 | 5.736 | 123 | 345 | 678 |
| 33 | 5.745 | 5.753 | 5.762 | 5.771 | 5.779 | 5.788 | 5.797 | 5.805 | 5.814 | 5.822 | 123 | 345 | 678 |
| 34 | 5.831 | 5.840 | 5.848 | 5.857 | 5.865 | 5.874 | 5.882 | 5.891 | 5.899 | 5.908 | 123 | 345 | 678 |
| 35 | 5.916 | 5.925 | 5.933 | 5.941 | 5.950 | 5.958 | 5.967 | 5.975 | 5.983 | 5.992 | 122 | 345 | 678 |
| 36 | 6.000 | 6.008 | 6.017 | 6.025 | 6.033 | 6.042 | 6.050 | 6.058 | 6.066 | 6.075 | 122 | 345 | 677 |
| 37 | 6.083 | 6.091 | 6.099 | 6.107 | 6.116 | 6.124 | 6.132 | 6.140 | 6.148 | 6.156 | 122 | 345 | 677 |
| 38 | 6.164 | 6.173 | 6.181 | 6.189 | 6.197 | 6.205 | 6.213 | 6.221 | 6.229 | 6.237 | 122 | 345 | 667 |
| 39 | 6.245 | 6.253 | 6.261 | 6.269 | 6.277 | 6.285 | 6.293 | 6.301 | 6.309 | 6.317 | 122 | 345 | 667 |
| 40 | 6.325 | 6.332 | 6.340 | 6.348 | 6.356 | 6.364 | 6.372 | 6.380 | 6.387 | 6.395 | 122 | 345 | 667 |
| 41 | 6.403 | 6.411 | 6.419 | 6.427 | 6.434 | 6.442 | 6.450 | 6.458 | 6.465 | 6.473 | 122 | 345 | 567 |
| 42 | 6.481 | 6.488 | 6.496 | 6.504 | 6.512 | 6.519 | 6.527 | 6.535 | 6.542 | 6.550 | 122 | 345 | 567 |
| 43 | 6.557 | 6.565 | 6.573 | 6.580 | 6.588 | 6.595 | 6.603 | 6.611 | 6.618 | 6.626 | 122 | 345 | 567 |
| 44 | 6.633 | 6.641 | 6.648 | 6.656 | 6.663 | 6.671 | 6.678 | 6.686 | 6.693 | 6.701 | 122 | 345 | 567 |
| 45 | 6.708 | 6.716 | 6.723 | 6.731 | 6.738 | 6.745 | 6.753 | 6.760 | 6.768 | 6.775 | 112 | 344 | 567 |
| 46 | 6.782 | 6.790 | 6.797 | 6.804 | 6.812 | 6.819 | 6.826 | 6.834 | 6.841 | 6.848 | 112 | 344 | 567 |
| 47 | 6.856 | 6.863 | 6.870 | 6.877 | 6.885 | 6.892 | 6.899 | 6.907 | 6.914 | 6.921 | 112 | 344 | 567 |
| 48 | 6.928 | 6.935 | 6.943 | 6.950 | 6.957 | 6.964 | 6.971 | 6.979 | 6.986 | 6.993 | 112 | 344 | 566 |
| 49 | 7.000 | 7.007 | 7.014 | 7.021 | 7.029 | 7.036 | 7.043 | 7.050 | 7.057 | 7.064 | 112 | 344 | 566 |
| 50 | 7.071 | 7.078 | 7.085 | 7.092 | 7.099 | 7.106 | 7.113 | 7.120 | 7.127 | 7.134 | 112 | 344 | 566 |
| 51 | 7.141 | 7.148 | 7.155 | 7.162 | 7.169 | 7.176 | 7.183 | 7.190 | 7.197 | 7.204 | 112 | 344 | 566 |
| 52 | 7.211 | 7.218 | 7.225 | 7.232 | 7.239 | 7.246 | 7.253 | 7.259 | 7.266 | 7.273 | 112 | 344 | 566 |
| 53 | 7.280 | 7.287 | 7.294 | 7.301 | 7.308 | 7.314 | 7.321 | 7.328 | 7.335 | 7.342 | 112 | 344 | 566 |
| 54 | 7.348 | 7.355 | 7.362 | 7.369 | 7.376 | 7.382 | 7.389 | 7.396 | 7.403 | 7.409 | 112 | 344 | 566 |

| 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 123 | 456 | 789 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|
| 55 | 7.416 | 7.423 | 7.430 | 7.436 | 7.443 | 7.450 | 7.457 | 7.463 | 7.470 | 7.477 | 112 | 334 | 556 |
| 56 | 7.483 | 7.490 | 7.497 | 7.503 | 7.510 | 7.517 | 7.523 | 7.530 | 7.537 | 7.543 | 112 | 334 | 556 |
| 57 | 7.550 | 7.556 | 7.563 | 7.570 | 7.576 | 7.583 | 7.589 | 7.596 | 7.603 | 7.609 | 112 | 334 | 556 |
| 58 | 7.616 | 7.622 | 7.629 | 7.635 | 7.642 | 7.649 | 7.655 | 7.662 | 7.668 | 7.675 | 112 | 334 | 556 |
| 59 | 7.681 | 7.688 | 7.694 | 7.701 | 7.707 | 7.714 | 7.720 | 7.727 | 7.733 | 7.740 | 112 | 334 | 556 |
| 60 | 7.746 | 7.752 | 7.759 | 7.765 | 7.772 | 7.778 | 7.785 | 7.791 | 7.797 | 7.804 | 112 | 334 | 556 |
| 61 | 7.810 | 7.817 | 7.823 | 7.829 | 7.836 | 7.842 | 7.849 | 7.855 | 7.861 | 7.868 | 112 | 334 | 556 |
| 62 | 7.874 | 7.880 | 7.887 | 7.893 | 7.899 | 7.906 | 7.912 | 7.918 | 7.925 | 7.931 | 112 | 334 | 556 |
| 63 | 7.937 | 7.944 | 7.950 | 7.956 | 7.962 | 7.969 | 7.975 | 7.981 | 7.987 | 7.994 | 112 | 334 | 556 |
| 64 | 8.000 | 8.006 | 8.012 | 8.019 | 8.025 | 8.031 | 8.037 | 8.044 | 8.050 | 8.056 | 112 | 334 | 556 |
| 65 | 8.062 | 8.068 | 8.075 | 8.081 | 8.087 | 8.093 | 8.099 | 8.106 | 8.112 | 8.118 | 112 | 234 | 455 |
| 66 | 8.124 | 8.130 | 8.136 | 8.142 | 8.149 | 8.155 | 8.161 | 8.167 | 8.173 | 8.179 | 112 | 234 | 455 |
| 67 | 8.185 | 8.191 | 8.198 | 8.204 | 8.210 | 8.216 | 8.222 | 8.228 | 8.234 | 8.240 | 112 | 234 | 455 |
| 68 | 8.246 | 8.252 | 8.258 | 8.264 | 8.270 | 8.276 | 8.283 | 8.289 | 8.295 | 8.301 | 112 | 234 | 455 |
| 69 | 8.307 | 8.313 | 8.319 | 8.325 | 8.331 | 8.337 | 8.343 | 8.349 | 8.355 | 8.361 | 112 | 234 | 455 |
| 70 | 8.367 | 8.373 | 8.379 | 8.385 | 8.390 | 8.396 | 8.402 | 8.408 | 8.414 | 8.420 | 112 | 234 | 455 |
| 71 | 8.426 | 8.432 | 8.438 | 8.444 | 8.450 | 8.456 | 8.462 | 8.468 | 8.473 | 8.479 | 112 | 234 | 455 |
| 72 | 8.485 | 8.491 | 8.497 | 8.503 | 8.509 | 8.515 | 8.521 | 8.526 | 8.532 | 8.538 | 112 | 234 | 455 |
| 73 | 8.544 | 8.550 | 8.556 | 8.562 | 8.567 | 8.573 | 8.579 | 8.585 | 8.591 | 8.597 | 112 | 234 | 455 |
| 74 | 8.602 | 8.608 | 8.614 | 8.620 | 8.626 | 8.631 | 8.637 | 8.643 | 8.649 | 8.654 | 112 | 234 | 455 |
| 75 | 8.660 | 8.666 | 8.672 | 8.678 | 8.683 | 8.689 | 8.695 | 8.701 | 8.706 | 8.712 | 112 | 233 | 455 |
| 76 | 8.718 | 8.724 | 8.729 | 8.735 | 8.741 | 8.746 | 8.752 | 8.758 | 8.764 | 8.769 | 112 | 233 | 455 |
| 77 | 8.775 | 8.781 | 8.786 | 8.792 | 8.798 | 8.803 | 8.809 | 8.815 | 8.820 | 8.826 | 112 | 233 | 445 |
| 78 | 8.832 | 8.837 | 8.843 | 8.849 | 8.854 | 8.860 | 8.866 | 8.871 | 8.877 | 8.883 | 112 | 233 | 445 |
| 79 | 8.888 | 8.894 | 8.899 | 8.905 | 8.911 | 8.916 | 8.922 | 8.927 | 8.933 | 8.939 | 112 | 233 | 445 |
| 80 | 8.944 | 8.950 | 8.955 | 8.961 | 8.967 | 8.972 | 8.978 | 8.983 | 8.989 | 8.994 | 112 | 233 | 445 |
| 81 | 9.000 | 9.006 | 9.011 | 9.017 | 9.022 | 9.028 | 9.033 | 9.039 | 9.044 | 9.050 | 112 | 233 | 445 |
| 82 | 9.055 | 9.061 | 9.066 | 9.072 | 9.077 | 9.083 | 9.088 | 9.094 | 9.099 | 9.105 | 112 | 233 | 445 |
| 83 | 9.110 | 9.116 | 9.121 | 9.127 | 9.132 | 9.138 | 9.143 | 9.149 | 9.154 | 9.160 | 112 | 233 | 445 |
| 84 | 9.165 | 9.171 | 9.176 | 9.182 | 9.187 | 9.192 | 9.198 | 9.203 | 9.209 | 9.214 | 112 | 233 | 445 |
| 85 | 9.220 | 9.225 | 9.230 | 9.236 | 9.241 | 9.247 | 9.252 | 9.257 | 9.263 | 9.268 | 112 | 233 | 445 |
| 86 | 9.274 | 9.279 | 9.284 | 9.290 | 9.295 | 9.301 | 9.306 | 9.311 | 9.317 | 9.322 | 112 | 233 | 445 |
| 87 | 9.327 | 9.333 | 9.338 | 9.343 | 9.349 | 9.354 | 9.359 | 9.365 | 9.370 | 9.375 | 112 | 233 | 445 |
| 88 | 9.381 | 9.386 | 9.391 | 9.397 | 9.402 | 9.407 | 9.413 | 9.418 | 9.423 | 9.429 | 112 | 233 | 445 |
| 89 | 9.434 | 9.439 | 9.445 | 9.450 | 9.455 | 9.460 | 9.466 | 9.471 | 9.476 | 9.482 | 112 | 233 | 445 |
| 90 | 9.487 | 9.492 | 9.497 | 9.503 | 9.508 | 9.513 | 9.518 | 9.524 | 9.529 | 9.534 | 112 | 233 | 445 |
| 91 | 9.539 | 9.545 | 9.550 | 9.555 | 9.560 | 9.566 | 9.571 | 9.576 | 9.581 | 9.586 | 112 | 233 | 445 |
| 92 | 9.592 | 9.597 | 9.602 | 9.607 | 9.612 | 9.618 | 9.623 | 9.628 | 9.633 | 9.638 | 112 | 233 | 445 |
| 93 | 9.644 | 9.649 | 9.654 | 9.659 | 9.664 | 9.670 | 9.675 | 9.680 | 9.685 | 9.690 | 112 | 233 | 445 |
| 94 | 9.695 | 9.701 | 9.706 | 9.711 | 9.716 | 9.721 | 9.726 | 9.731 | 9.737 | 9.742 | 112 | 233 | 445 |
| 95 | 9.747 | 9.752 | 9.757 | 9.762 | 9.767 | 9.772 | 9.778 | 9.783 | 9.788 | 9.793 | 112 | 233 | 445 |
| 96 | 9.798 | 9.803 | 9.808 | 9.813 | 9.818 | 9.823 | 9.829 | 9.834 | 9.839 | 9.844 | 112 | 233 | 445 |
| 97 | 9.849 | 9.854 | 9.859 | 9.864 | 9.869 | 9.874 | | | | | | | |

平方平方根ノ表

| 數 | 平方 | 立方 | 平方根 | 立方根 | 數 | 平方 | 立方 | 平方根 | 立方根 |
|----|-------|---------|-------|-------|-----|--------|-----------|--------|-------|
| 1 | 1 | 1 | 1.000 | 1.000 | 51 | 2 601 | 132 651 | 7.141 | 3.708 |
| 2 | 4 | 8 | 1.414 | 1.260 | 52 | 2 704 | 140 608 | 7.211 | 3.733 |
| 3 | 9 | 27 | 1.732 | 1.442 | 53 | 2 809 | 148 877 | 7.280 | 3.756 |
| 4 | 16 | 64 | 2.000 | 1.587 | 54 | 2 916 | 157 464 | 7.348 | 3.780 |
| 5 | 25 | 125 | 2.236 | 1.710 | 55 | 3 025 | 166 375 | 7.416 | 3.803 |
| 6 | 36 | 216 | 2.449 | 1.817 | 56 | 3 136 | 175 616 | 7.483 | 3.826 |
| 7 | 49 | 343 | 2.646 | 1.913 | 57 | 3 249 | 185 193 | 7.550 | 3.849 |
| 8 | 64 | 512 | 2.828 | 2.000 | 58 | 3 364 | 195 112 | 7.616 | 3.871 |
| 9 | 81 | 729 | 3.000 | 2.080 | 59 | 3 481 | 205 379 | 7.681 | 3.893 |
| 10 | 100 | 1 000 | 3.162 | 2.154 | 60 | 3 600 | 216 000 | 7.746 | 3.915 |
| 11 | 121 | 1 331 | 3.317 | 2.224 | 61 | 3 721 | 226 981 | 7.810 | 3.936 |
| 12 | 144 | 1 728 | 3.464 | 2.289 | 62 | 3 844 | 238 328 | 7.874 | 3.958 |
| 13 | 169 | 2 197 | 3.606 | 2.351 | 63 | 3 969 | 250 047 | 7.937 | 3.979 |
| 14 | 196 | 2 744 | 3.742 | 2.410 | 64 | 4 096 | 262 144 | 8.000 | 4.000 |
| 15 | 225 | 3 375 | 3.873 | 2.466 | 65 | 4 225 | 274 625 | 8.062 | 4.021 |
| 16 | 256 | 4 096 | 4.000 | 2.520 | 66 | 4 356 | 287 496 | 8.124 | 4.041 |
| 17 | 289 | 4 913 | 4.123 | 2.571 | 67 | 4 489 | 300 763 | 8.185 | 4.062 |
| 18 | 324 | 5 832 | 4.243 | 2.621 | 68 | 4 624 | 314 432 | 8.246 | 4.082 |
| 19 | 361 | 6 859 | 4.359 | 2.668 | 69 | 4 761 | 328 509 | 8.307 | 4.102 |
| 20 | 400 | 8 000 | 4.472 | 2.714 | 70 | 4 900 | 343 000 | 8.367 | 4.121 |
| 21 | 441 | 9 261 | 4.583 | 2.759 | 71 | 5 041 | 357 911 | 8.426 | 4.141 |
| 22 | 484 | 10 648 | 4.690 | 2.802 | 72 | 5 184 | 373 248 | 8.485 | 4.160 |
| 23 | 529 | 12 167 | 4.796 | 2.844 | 73 | 5 329 | 389 017 | 8.544 | 4.179 |
| 24 | 576 | 13 824 | 4.899 | 2.884 | 74 | 5 476 | 405 224 | 8.602 | 4.198 |
| 25 | 625 | 15 625 | 5.000 | 2.924 | 75 | 5 625 | 421 875 | 8.660 | 4.217 |
| 26 | 676 | 17 576 | 5.099 | 2.962 | 76 | 5 776 | 438 976 | 8.718 | 4.236 |
| 27 | 729 | 19 683 | 5.196 | 3.000 | 77 | 5 929 | 456 533 | 8.775 | 4.254 |
| 28 | 784 | 21 952 | 5.292 | 3.037 | 78 | 6 084 | 474 552 | 8.832 | 4.273 |
| 29 | 841 | 24 389 | 5.385 | 3.072 | 79 | 6 241 | 493 039 | 8.888 | 4.291 |
| 30 | 900 | 27 000 | 5.477 | 3.107 | 80 | 6 400 | 512 000 | 8.944 | 4.309 |
| 31 | 961 | 29 791 | 5.568 | 3.141 | 81 | 6 561 | 531 441 | 9.000 | 4.327 |
| 32 | 1 024 | 32 768 | 5.657 | 3.175 | 82 | 6 724 | 551 368 | 9.055 | 4.344 |
| 33 | 1 089 | 35 937 | 5.745 | 3.208 | 83 | 6 889 | 571 787 | 9.110 | 4.362 |
| 34 | 1 156 | 39 304 | 5.831 | 3.240 | 84 | 7 056 | 592 704 | 9.165 | 4.380 |
| 35 | 1 225 | 42 875 | 5.916 | 3.271 | 85 | 7 225 | 614 125 | 9.220 | 4.397 |
| 36 | 1 296 | 46 656 | 6.000 | 3.302 | 86 | 7 396 | 636 056 | 9.274 | 4.414 |
| 37 | 1 369 | 50 653 | 6.083 | 3.332 | 87 | 7 569 | 658 503 | 9.327 | 4.431 |
| 38 | 1 444 | 54 872 | 6.164 | 3.362 | 88 | 7 744 | 681 472 | 9.381 | 4.448 |
| 39 | 1 521 | 59 319 | 6.245 | 3.391 | 89 | 7 921 | 704 969 | 9.434 | 4.465 |
| 40 | 1 600 | 64 000 | 6.325 | 3.420 | 90 | 8 100 | 729 000 | 9.487 | 4.481 |
| 41 | 1 681 | 68 921 | 6.403 | 3.448 | 91 | 8 281 | 753 571 | 9.539 | 4.498 |
| 42 | 1 764 | 74 088 | 6.481 | 3.476 | 92 | 8 464 | 778 688 | 9.592 | 4.514 |
| 43 | 1 849 | 79 507 | 6.557 | 3.503 | 93 | 8 649 | 804 357 | 9.644 | 4.531 |
| 44 | 1 936 | 85 184 | 6.633 | 3.530 | 94 | 8 836 | 830 584 | 9.695 | 4.547 |
| 45 | 2 025 | 91 125 | 6.708 | 3.557 | 95 | 9 025 | 857 375 | 9.747 | 4.563 |
| 46 | 2 116 | 97 336 | 6.782 | 3.583 | 96 | 9 216 | 884 736 | 9.798 | 4.579 |
| 47 | 2 209 | 103 823 | 6.856 | 3.609 | 97 | 9 409 | 912 673 | 9.849 | 4.595 |
| 48 | 2 304 | 110 592 | 6.928 | 3.634 | 98 | 9 604 | 941 192 | 9.899 | 4.610 |
| 49 | 2 401 | 117 649 | 7.000 | 3.659 | 99 | 9 801 | 970 299 | 9.950 | 4.626 |
| 50 | 2 500 | 125 000 | 7.071 | 3.684 | 100 | 10 000 | 1 000 000 | 10.000 | 4.642 |

昭和十年十月五日印刷
 昭和十年十月十日發行
 昭和十年十一月二十五日訂正再版印刷
 昭和十年十一月三十日訂正再版發行

著作權所有

定價

中等幾何三角法 上 金九十五錢
 下 金一圓五錢

著者

東京高等師範學校附屬中學校內
 數學研究會
 代表者 鍋島信太郎

發行者

東京市神田區駿河臺三丁目一番地
 目黑甚七

印刷者

東京市京橋區銀座四丁目三番地
 高橋郁

印刷所

東京市京橋區銀座四丁目三番地
 三協印刷株式會社

發行所

東京市神田區駿河臺三丁目一番地 振替口座東京二八〇九番
 新潟縣長岡市表町四丁目(本店) 振替口座東京三六一九番
 新潟市古町通七番町(支店) 振替口座長野四〇九〇番

目黑書店

中華民國二十一年一月一日
國民政府秘書處
第一一〇號

會 則 簡 章

第 一 章

第 一 條 本會定名為
第 二 條 本會之宗旨

第 三 條 本會之組織
第 四 條 本會之經費
第 五 條 本會之辦事處
第 六 條 本會之附屬機關
第 七 條 本會之職員
第 八 條 本會之懲戒

附 則

第 九 條 本會之施行細則
第 十 條 本會之附屬機關
第 十一 條 本會之職員
第 十二 條 本會之懲戒

附 錄



東
山

20