新制

綜合數學

理學博士 林鶴一 著

文部省檢定濟
昭和六年八月十四日 中學校數學科用

新制
綜合數學
二學年用

東北帝國大學名譽教授
理學博士
林鶴一
著

東京開成館

目次

第一篇

直線圖形

第一章 幾何學ノ考究法

1. 定 義

スベテ物事ヲ正確ニ述ベル場合ニハ,先ヅ其ノ用語ノ意味ヲ嚴密ニ定メテ置イテ,誰ニデモ常ニ同一ノ意味ニ解釋サレルヤウニ言ヒ表ハサネバ種々ノ誤リヲ生ジ易イ。

一般ニ用語ノ意味ヲ嚴密ニ定メタモノヲ其ノ語ノ**定義**トイフ。

例ヘバ「二角ノ和ガ直角ニ等シイトキ,其ノ各ノ角ヲ他ノ餘角トイフ」トイフノハ餘角ノ定義デアル。

問 1. 次ノ定義ヲ述ベヨ。

銳角, 接角, 平角, 直角, 補角, 垂線

問 2. 次ノ定義ハ正シイカ。

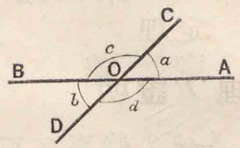
(1) 小刀ハ鉛筆ヲ削ルモノデアル。

(2) 曲線ハ直線デナイ線デアル。

2. 對頂角

定義 二ツノ直線ガ交ハツテ作ル角ノ中デ向ヒ合フ二ツノ角ヲ**對頂角**トイフ。

二直線 AB, CD ガ O デ交ハルトキハ,二組ノ對頂角(∠AOC ト ∠BOD 及ビ ∠BOC ト ∠AOD) ヲ作ル。分度器デ此等ノ角ノ大サヲ測レ。



對頂角ノ大サノ關係ハ次ノヤウニシテ知ルコトガデキル。

上ノ圖デ

$$\angle a + \angle c = 2\text{R}\llcorner$$

又 $$\angle c + \angle b = 2\text{R}\llcorner$$

故ニ $$\angle a + \angle c = \angle c + \angle b$$

兩邊カラ $\angle c$ ヲ引ケバ

$$\angle a = \angle b$$

同様ニシテ $$\angle c = \angle d$$

依ツテ次ノ事實ノ眞デアルコトガワカル。

對頂角ハ相等シイ.

問 二直線 AB, CD ガ O デ交ハツテ作ル角ノ中,一ツガ 60° ナラバ他ノ角ノ大サハ各,幾度カ.

3. 定理

前節ニ得タ事實ノヤウニ,定義及ビ既ニ眞デアルト確定シタ事實カラ推理ニヨツテ論定シタ事柄ヲ**定理**トイフ。

定理ノ眞デアルコトヲ論定スル方法ヲ定理ノ**證明**トイフ。

問 既ニ學ンダ事柄ノ中デ定理ト思ハレルモノヲ列擧セヨ。

4. 幾何學的證明法

幾何學ノ定理ヲ證明スルニハ,紙上ニ圖形ヲ書キ,實驗實測ニヨツテ之ヲ確メルコトモ出來ルガ,ソレダケデ定理ヲ斷定スルノハ正確デアルトハイヘヌ。何故ナレバ,實驗實測ハ如何ニ精密ニ行ツテモ觀測上及ビ實驗器械ニヨル多少ノ誤差ハ免レナイ。其ノ上,圖形ノ大小種類ハ無數ニアルカラ,之ヨリ一般ノ理法ヲ得ルタメニ一々實驗ヲスルコトハ到底ナシ得ナイコトデ,又少シ複雜ナ場合ニハ一ツノ圖形ニツイテサヘ實驗ヲ完成スルコトハ甚ダ困難デアルカラデアル。

ソコデ之ヲ斷定スルタメニハ,既ニ眞デアルト認メタ事柄ヨリ一歩一歩推論ヲ進メルノガヨイ。此ノヤウニシテ幾何學ノ定理ヲ證明スル方法ヲ**幾何學的證明法**トイフ。

幾何學ノ定理ヤ計算·作圖法ハ實ニ百般ノ科學·工業等ノ基礎トナルモノデ,且其ノ研究ノ方法ハ吾等ノ思考力ノ鍛錬ニ最モ効果アルモノデアル。

5. 公　理

定理ヲ證明スルノニ其ノ基礎トナル全部ノ事實ヲ證明ヲ經タモノトスルコトハ不可能デアル。ソレデ其ノ中何人ニモ眞デアルト認メラレル若干ハ證明ナシニ眞デアルモノトシテ,之ヲ推理ノ根源トスル。此ノ事實ヲ**公理**トイフ。卽チ

公理トハ何人モ眞デアルト認メル事實デ推理ノ基礎トスルモノデアル。

幾何學デ用ヒル公理ヲ次ニ掲ゲル。

公理一　定マツタ二點ヲ通ル直線ハ一ツアル,ソシテ唯一ツシカナイ。

此ノ事實ヲ二點ハ一直線ヲ決定スルトモイフ。

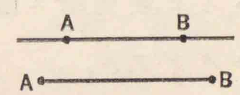
此ノ公理カラ直ニ次ノ事ガワカル。

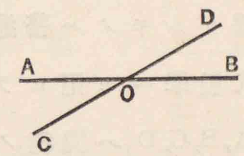
[1]　二點ヲ共有スル二ツノ直線ハ相合シテ同一ノ直線トナル。

從ツテ一部ヲ共有スル二直線ハ全ク相合スル。

[2]　相交ハル二直線ノ交點ハタヾ一ツシカナイ。

從ツテ相交ハル二直線ハ一點ヲ決定スル。





公理二　二點ヲ兩端トスル線分ハ其ノ二點間ノ最短通路デアル。

公理三　同一平面上ノ二點ヲ通ル直線ハ全ク其ノ平面上ニアル。

公理四　一ツノ平面上ニアル一ツノ直線ハ其ノ平面ヲ二ツノ部分ニ分ケル。ソシテ其ノ各部分ニ各〻一點ヲ取レバ,其ノ二點ヲ結ブ線分ハ必ズ初メノ直線ト交ハル。

公理五　平面ハ其ノ何レノ部分デモ任意ノ平面ニ重ネ合ハスコトガデキル。

公理六　圖形ハ其ノ形狀及ビ大サヲ變ヘ

ルコトナシニ,其ノ位置ダケヲ變ヘルコトガデキル。

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ置イテ,其ノ兩者ヲ全ク重ネ合ハセルコトガデキレバ,此ノ二ツノ圖形ハ**合同デアル**トイフ。

合同デアル圖形ノ大サハ相等シイ。

次ニ掲ゲルモノハ**普通公理**トイヒ,幾何學ニ限ラズ算術·代數學ニモ用ヒラレルモノデアル。

以下 A, B, C, D ハ同種ノ量ヲ表ハシ, m, n ハ任意ノ正數デアルトスル。

[1] $A=C,\ B=C$ デアレバ $A=B$

[2] $A>B,\ B>C$ デアレバ $A>C$

[3] $A=B$ デアレバ $mA=mB$

[4] $A>B$ デアレバ $nA>nB$

$mA=mB$ デアレバ $A=B$

$nA>nB$ デアレバ $A>B$

[5] $A=B,\ C=D$ デアレバ $A\pm C=B\pm D$

[6] $A>B,\ C=D$ デアレバ $A\pm C>B\pm D$

[7] $A>B,\ C>D$ デアレバ $A+C>B+D$

注意 此ノ時 $A-C>B-D$ トシテハイケナイ。

問題 1

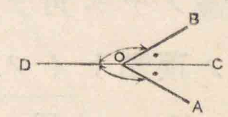
1. 次ノ二定理ヲ證明セヨ。(普通公理[5]ニヨレ)

(1) 同角又ハ等角ノ補角ハ相等シイ。

(2) 同角又ハ等角ノ餘角ハ相等シイ。

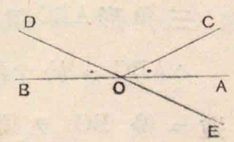
2. 前問題ヲ用ヒテ次ノ定理ヲ證明セヨ。

角ノ二邊ガ其ノ角ノ二等分線ノ延長ト作ル角ハ相等シイ。

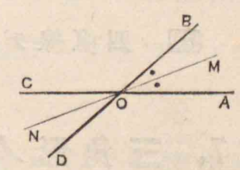


3. 第2節ノ定理ト普通公理[1]トニヨッテ次ノ定理ヲ證明セヨ。

(1) 一ツノ直線 AB ノ上ノ一點 O カラ AB ノ同ジ側ニ二ツノ直線 OC, OD ヲ $\angle AOC$ ト $\angle BOD$ トガ等シイヤウニ引キ, DO ノ延長ヲ OE トスレバ, OA ハ $\angle COE$ ヲ二等分スル。



(2) 角ノ二等分線ノ延長ハ其ノ角ノ對頂角ヲ二等分スル。

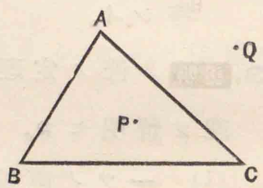


第二章 三角形ノ合同

6. 三角形

定義 三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ三角形トイヒ,其ノ三線分ヲ三角形ノ邊,二邊ノナス角ヲ三角形ノ角,其ノ頂點ヲ三角形ノ頂點トイフ。

例ヘバ右圖ノ三角形 ABC ニ於テ,線分 AB, BC, CA ハ其ノ邊, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ハ其ノ角, 點 A, B, C ハ其ノ頂點デアル。又點 P ハ此ノ三角形ノ內部ニアツテ,點 Q ハ外部ニアル。



三角形 ABC ヲ $\triangle ABC$ ト書ク。

$\triangle ABC$ ニ於テ,頂點 A ヲ邊 BC ニ對スル頂點トイヒ,逆ニ邊 BC ヲ頂點 A ニ對スル邊トイフ。其ノ他ノ頂點及ビ邊ニ就イテモ之ニ準ズル。

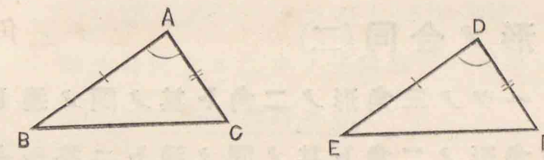
問 四直線デハ幾ツノ三角形ガ出來ルカ。

7. 三角形ノ合同(一)

定理一 **一ツノ三角形ノ二邊ト其ノ夾角トガ夫**

夫他ノ三角形ノ二邊ト夾角トニ等シイトキハ,此ノ兩三角形ハ合同デアル。

$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トヲ任意ノ二ツノ三角形トシ, $AB=DE$, $AC=DF$ デ且 $\angle A=\angle D$ デアルトスル。ソシテ此ノ兩三角形ガ合同デアルコトヲ證明スル。



證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ニ重ネルニ,先ヅ AB ヲ DE ニ重ネレバ $AB=DE$ デアルカラ頂點 A ト D トハ重ナリ,又 B ト E トハ重ナル。

次ニ頂點 C ト F トガ DE ノ同ジ側ニ來ルヤウニスレバ, $\angle A=\angle D$ デ且 $AC=DF$ デアルカラ頂點 C ト F トハ重ナリ,邊 BC ハ EF ニ重ナル。

從ツテ此ノ兩三角形ハ合同デアル。

注意 二ツノ圖形ノ合同デアルコトヲ表ハスニ記號≡ヲ用ヒル。例ヘバ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トノ合同デアルコトヲ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ ト書ク。

定理一ニ見ルヤウニ,定理ニハ常ニ二ツノ部分ガアル。即チ

「一ツノ三角形ノ二邊ト夾角トガ夫々他ノ三角形ノ二邊ト夾角トニ等シイトキハ」トイフヤウニ始メノ部分ハ假ニソウト定メタ事柄デ之ヲ**假設**トイヒ，後ノ部分ハ「此ノ兩三角形ハ合同デアル」トイフヤウニ假設ヨリ得ラレル結論デ之ヲ**終結**トイフ。

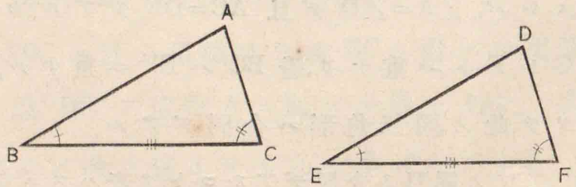
8. 三角形ノ合同(二)

定理二　**一ツノ三角形ノ二角ト其ノ間ノ邊トガ夫々他ノ三角形ノ二角ト其ノ間ノ邊トニ等シイトキハ,此ノ兩三角形ハ合同デアル.**

假設　$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$, $BC=EF$ トスル。

終結　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$



證明　$\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ニ重ネルニ,先ヅ BC ヲ EF ニ重ネレバ $BC=EF$ デアルカラ頂點 B ト E トハ重ナリ,又 C ト F トハ重ナル。

次ニ頂點 A ト D トガ EF ノ同ジ側ニ來ルヤウ

ニスレバ, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$ デアルカラ BA ハ ED ニ重ナリ,又 CA ハ FD ニ重ナル,從ッテ A ハ D ニ重ナル、故ニ此ノ兩三角形ハ合同デアル。

注意　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ ナルトキニ

$\angle A=\angle D$　ナラバ　$BC=EF$

$\angle B=\angle E$　ナラバ　$AC=DF$

$\angle C=\angle F$　ナラバ　$AB=DE$　デアル。

即チ合同ナル二ツノ三角形デハ相等シイ邊ト相等シイ角ハ夫々相對スル。

9. 三角形ノ中線

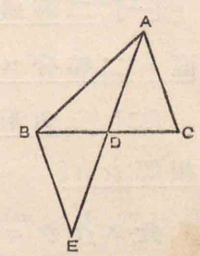
定義　線分ヲ二等分スル點ヲ其ノ線分ノ中點トイヒ,三角形ノ頂點ト其ノ對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ**中線**トイフ。

問　AD ヲ $\triangle ABC$ ノ一中線トシ,之ヲ延長シ,其ノ上ニ點 E ヲ取リ DE ヲ AD ニ等シクシテ, BE ヲ結べバ,

$\triangle BDE\equiv\triangle CDA$ デ $BE=CA$,

$\angle BED=\angle CAD$, $\angle DBE=\angle DCA$

デアル。之ヲ證明セヨ。*



* 以下幾何學ノ問題デハ「之ヲ證明セヨ」ヲ略スルコトガアル。

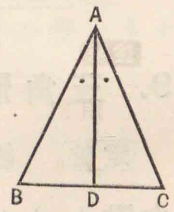
10. 二等邊三角形

定義 二邊ガ相等シイ三角形ヲ**二等邊三角形**又ハ**等脚三角形**トイフ。

二等邊三角形デハ,等邊ノ夾角ヲ特ニ**頂角**トイヒ,頂角ノ頂點ヲ其ノ**頂點**トイフ。

又頂角ノ對邊ヲ**底邊**トイヒ,底邊ノ兩端ニアル二ツノ角ヲ**底角**トイフ。

二等邊三角形ABCノ頂角ノ二等分線ヲADトスレバ,



$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (定理一)

故ニ $\angle B = \angle C$

之カラ次ノ定理ガ得ラレル。

定理三 **二等邊三角形ノ二ツノ底角ハ相等シイ.**

此ノ定理ヨリ容易ニ次ノ定理ガワカル。

[一] 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル。

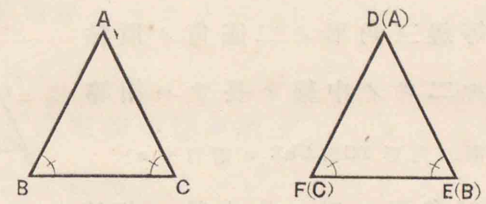
[二] 三角形ノ三邊ガ相等シイトキハ,其ノ三角ハ相等シイ。

此ノヤウニ或定理ヨリ容易ニ推定シ得ル定理ヲモトノ定理ノ**系**トイフ。

定理四 **三角形ノ二角ガ相等シイトキハ,此ノ三角形ハ二等邊三角形デアル.**

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B = \angle C$ トスル。

終結 $AC = AB$



證明 $\triangle ABC$ ヲ裏返シタモノヲ $\triangle DFE$ トシ,其ノ頂點 D, E, F ガ夫々 $\triangle ABC$ ノ頂點 A, B, C デアッタトスレバ, $\angle B = \angle C$ デ且 $\angle C = \angle F$ デアルカラ

$\angle B = \angle F$

同様ニ $\angle C = \angle E$

又 $BC = FE$

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DFE$ (定理二)

故ニ $AB = DF$

然ルニ $AC = DF$

故ニ $AB = AC$

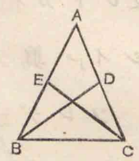
系 三角形ノ三角ガ相等シイトキハ,其ノ三邊ハ相等シイ。

定義 三角ガ相等シイ三角形ヲ**正三角形**トイフ。

従ッテ前頁ノ系ハ次ノヤウニ述ベテモヨイ。

正三角形ノ三邊ハ相等シイ。

問 1. 二等邊三角形ノ二底角ノ頂點カラ出ル二ツノ中線ノ長サハ相等シイ。（兩三角形 BCD, CBE ニ着目セヨ）



問 2. 正三角形ノ三ツノ中線ハ相等シイ。

11. 定理ノ逆

定理ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタモノヲモトノ定理ノ**逆**トイフ。

例ヘバ定理四ハ定理三ノ逆デアル。

一般ニ,

「A=B ナラバ C=D デアル」 (1)

トイフ定理ガアレバ

「C=D ナラバ A=B デアル」 (2)

トイフノハ前ノ定理ノ逆デアル。

注意 (2)ハ又(1)ノ逆デアルカラ(1)ト(2)トハ**互ニ逆デア****ル**トモイフ。

或定理ガ眞デアッテモ,其ノ逆ハ必ズシモ眞デアルトハイヘナイ。

例ヘバ「$\angle a$ ト $\angle b$ トガ各々直角ニ等シイナラバ $\angle a$ ト $\angle b$ トハ相等シイ」ハ眞デアルガ,其ノ逆ノ「$\angle a$ ト $\angle b$ トガ相等シイナラバ $\angle a$ ト $\angle b$ トハ各々直角ニ等シイ」ハ眞デナイ。

ソレデ或定理ノ逆ガ眞デアルコトヲ主張スルニハ,別ニ之ヲ證明シナケレバナラナイ。

問 次ノ事項ノ逆ハ眞デアルカ。

(1) 鋭角ハ直角ヨリモ小ナル角デアル。

(2) 鈍角ハ 2 直角ヨリモ小ナル角デアル。

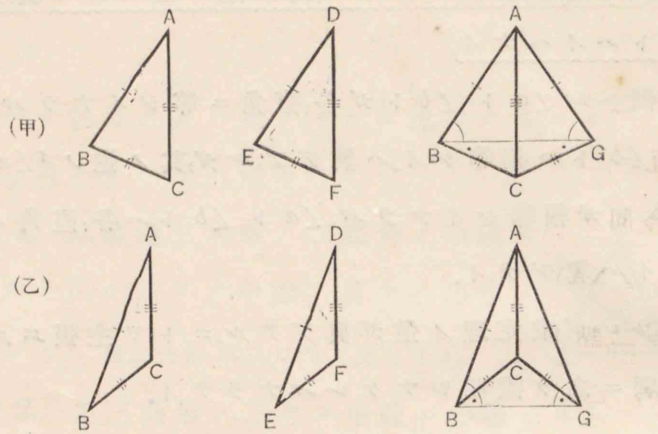
12. 三角形ノ合同(三)

定理五 **一ツノ三角形ノ三邊ガ夫々他ノ三角形ノ三邊ニ等シイトキハ,此ノ兩三角形ハ合同デアル.**

假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ
$AB=DE,\ BC=EF,\ CA=FD$ トスル。

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明 $\triangle DEF$ ノ邊 DF ヲ $\triangle ABC$ ノ邊 AC ニ重ネ,此ノ兩三角形ヲ AC ノ兩側ニ置イテ點 E ノ來



タ點ヲGトシテBGヲ結ベバ,

DE=AG

故ニ　AG=AB

依ツテ　∠ABG=∠AGB　(定理三)

又　EF=CG

故ニ　CG=CB

依ツテ　∠CBG=∠CGB　(同　上)

故ニ甲乙何レノ場合ニモ

∠ABC=∠AGC

故ニ　△ABC≡△DEF　(定理一)

問　二等邊三角形ノ頂點ヨリ出ル中線ハ底邊ニ垂直デ且頂角ヲ二等分スル。

問題 2

1. 二ツノ線分 AB, CD ガ點 O デ交ハリ,此ノ點デ互ニ二等分セラレルトキハ △OAC ト △OBD トハ合同デアル。

2. ∠XAY ノ邊 AX 上ニ二點 B, C ヲ取リ,又 AY 上ニ二點 D, E ヲ取リ AB=AD, AC=AE ナラシメレバ, △ABE≡△ADC デアル。

3. 二等邊三角形 ABC ノ兩底角 ABC, ACB ノ二等分線ノ其ノ對邊ニ終ル二ツノ線分ハ相等シイ。

4. 二等邊三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ノ上ニ夫々 D, E ヲ取リ, BD=CE トスルト

(1) BE=CD

(2) BE, CD ノ交點ヲ O トスルト, △OBC ト △ODE トハ二等邊三角形デアル。

5. 三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ下セル垂線ガ底邊ヲ二等分スルトキハ,其ノ三角形ハ如何ナル三角形デアルカ。

第三章 作圖題

13. 作圖題

定義 與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ書ク幾何學的方法ヲ**作圖**トイヒ,作圖ヲ求メル問題ヲ**作圖題**トイフ。

實用上,作圖ニハ物指・分度器・三角定木等ヲ使用スルガ,思考力ヲ練磨スル目的デ幾何學ノ作圖題ヲ解クニ使用スル器具ハ次ノ二種ニ限ルモノトスル。

[1] **目盛ノナイ定木.** [2] **兩脚器(こんぱす).**

前者ハ直線ヲ引キ又ハ線分ヲ延長スルニ用ヒ,後者ハ圓周或ハ弧ヲ畫クニ用ヒル。

故ニ次ノ二ツノ作圖ハ初メカラナシ得ルモノトスル。之ヲ作圖ノ**公法**トイフ。

[1] **任意ノ二點ヲ通過スル直線ヲ引クコト.**

之ニヨツテ**線分ヲ延長スルコト**ガデキル。

[2] **任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ有スル圓周或ハ弧ヲ畫クコト.**

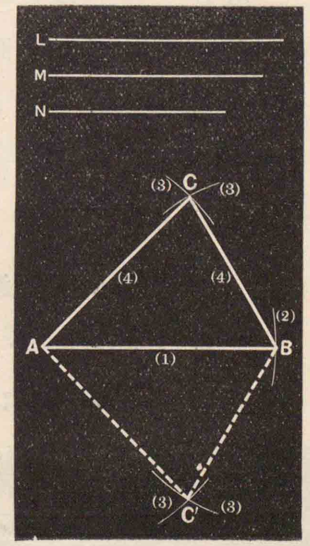
作圖題ノ解法ニハ,先ヅ作圖ヲ示シ,次ニ其ノ圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スルコトヲ證明セネバナラヌ,

14. 基本ノ作圖題

作圖題 一 **三邊ガ夫々與ヘラレタ三線分ニ等シイ三角形ヲ作レ.**

題意 L, M, N ヲ與ヘラレタ三線分トスル。

三邊ガ夫々L, M, Nニ等シイ三角形ヲ作ルコトヲ求メル。



作圖 ❶ 任意ノ直線ABヲ引ク。 (公法1)

❷ AB上ノ一點Aヲ中心トシLニ等シイ半徑ノ圓周ヲ畫キ,之トABトノ交點ヲBトスル。 (公法2)

❸ A及ビBヲ中心トシ夫々M及ビNニ等シイ半徑ノ圓周ヲ畫キ,其ノ交點ノ一ツヲCトスル。 (公法2)

❹ AC及ビBCヲ結ブ。 (公法1)

然ラバ△ABCハ求メル三角形デアル。

證明 △ABCノ三邊AB, AC, BCハ夫々與ヘラレ

タ三線分L, M, Nニ等シイ。 (作圖)

故ニ此ノ三角形ハ與ヘラレタ條件ニ適スル。

作圖❸ノ二ツノ圓周ハ點Cノ外ニ尚一ツノ點デ交ハル。此ノ交點ヲC′トスレバ△ABC′モ亦與ヘラレタ條件ニ適スルモノデアル。

ケレドモ△ABC′ト△ABCトハ合同デアルカラ解答ハ唯一種デアル。

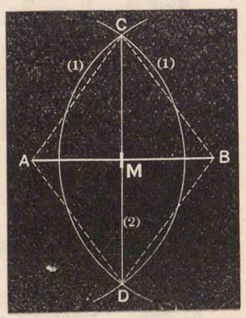
若シ上ノ二ツノ圓周ガ交ハラナケレバ解答ハナイ。此等ノコトニ就イテハ後ニ詳論スル。

問 1. 與ヘラレタ線分ニ等シイ邊ヲ有スル正三角形ヲ作レ。

問 2. 底邊ト他ノ邊トヲ與ヘラレタトキ二等邊三角形ヲ作レ。

作圖題 二　與ヘラレタ線分ヲ二等分セヨ.

題意　與ヘラレタ線分 ABヲ二等分スルコトヲ求メル。



作圖　❶ ABノ兩端ヲ中心トシ,等シイ半徑デ相交ハル二ツノ圓周ヲ畫キ,其ノ交點ヲC及ビDトスル。 (公法2)

❷ CDヲ結ビ,ABトノ交點ヲMトスル。(公法1)

然ラバCDハABヲ二等分スル。

證明　AC, BC, AD, BDヲ結ベバ

$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (定理五)

故ニ $\angle ACD = \angle BCD$

ソシテ△ACBハ二等邊三角形デ∠ACBハ其ノ頂角デアル。 (作圖)

故ニ $AM = MB$

故ニCDハABヲ二等分スル。 (定理三系一)

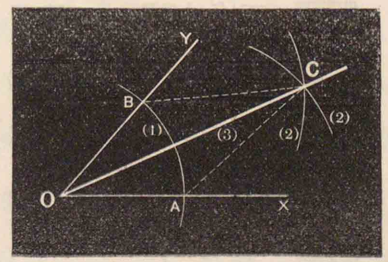
注意　CDヲABノ**垂直二等分線**トイフ。

問 3. 與ヘラレタ線分ヲ直徑トスル圓周ヲ畫ケ。

作圖題 三　與ヘラレタ角ノ二等分線ヲ引ケ.

題意　與ヘラレタ角ヲ∠XOYトスル。

∠XOYノ二等分線ヲ引クコトヲ求メル。



作圖　❶ 頂點Oヲ中心トシ任意ノ圓周ヲ畫キ,二邊ト夫々A及ビBデ交ハラシメル。 (公法2)

❷ A, Bヲ中心トシ,等シイ半徑デ相交ハル二

ツノ圓周ヲ畫キ,其ノ交點ヲCトスル。(公法 2)

❸ 直線OCヲ引ク。 (公法 1)

然ラバOCハ求メル二等分線デアル。

證明 兩三角形AOC,BOCノ三邊ハ夫々相等シイ。

故ニ $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$ (定理五)

故ニ $\angle AOC = \angle BOC$

故ニOCハ∠XOYヲ二等分スル。

注意 解答ハイツモ一ツアル,ソシテ唯一ツシカナイ。

問 4. 與ヘラレタ角ヲ四等分セヨ,又八等分セヨ。

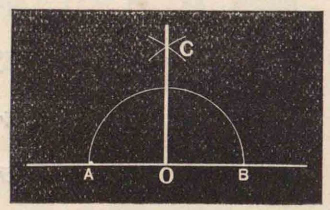
作圖題 四 與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ヲ通リ其ノ直線ニ垂線ヲ引ケ.

題意 ABヲ與ヘラレタ直線トシ,Oヲ其ノ上ノ與ヘラレタ點トスル。

Oヲ通リABニ垂線ヲ引クコトヲ求メル。

作圖 平角AOBノ二等分線OCヲ引ク。(作圖題三)

然ラバOCハ求メル垂線デアル。



證明 (略スル)

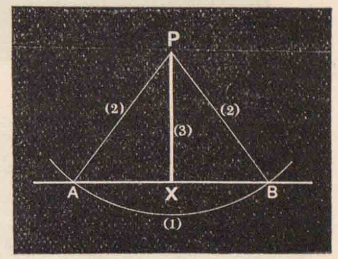
問 5. 45°及ビ135°ノ角ヲ作レ。

作圖題 五 與ヘラレタ直線外ノ與ヘラレタ點ヨリ其ノ直線ニ垂線ヲ引ケ.

題意 與ヘラレタ直線ヲAB,與ヘラレタ點ヲPトスル。

PヨリABヘ垂線ヲ引クコトヲ求メル。

作圖 ❶ Pヲ中心トシABニ交ハル任意ノ圓周ヲ畫キ,其ノ交點ヲA及ビBトスル。



❷ AP及ビBPヲ結ブ。

❸ ∠APBノ二等分線PXヲ引ク。 (作圖題三)

然ラバPXハ求メル垂線デアル。

證明 △PABハ二等邊三角形デ,Pハ其ノ頂點,PXハ其ノ頂角ノ二等分線デアル。(作圖)

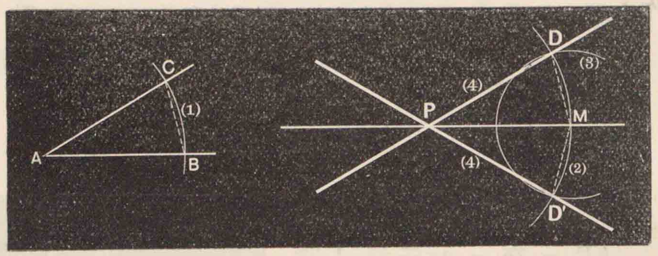
故ニPXハABニ垂直デアル。(定理三系一)

即チPXハPヲ通ルABノ垂線デアル。

作圖題 六 與ヘラレタ直線上ノ一點デ其ノ直線ト與ヘラレタ角ニ等シイ角ヲ作ル直線ヲ引ケ.

題意 與ヘラレタ直線ヲPM,其ノ直線上ノ一點ヲPトシ,與ヘラレタ角ヲ∠BACトスル。

Pヲ過ギ, PMト∠BACニ等シイ角ヲ作ル直線ヲ引クコトヲ求メル。



作圖 ❶ Aヲ中心トスル任意ノ圓周ヲ畫イテ, ∠BACノ二邊トB, Cデ交ハラシメル。(公法2)

❷ Pヲ中心トシ前ノ圓ノ半徑ニ等シイ半徑デ圓周ヲ畫キ, PMトMデ交ハラシメル。(公法2)

❸ Mヲ中心トシBCニ等シイ半徑デ圓周ヲ畫キ, ❷ノ圓周トD, D'デ交ハラシメル。(公法2)

❹ 直線PD及ビPD'ヲ引ク。(公法1)

然ラバPD及ビPD'ハ求メル直線デアル。

證明 △MPD, △MPD'及ビ△BACハ三邊ガ夫々相等シイカラ合同デアル。(定理五)

故ニ∠MPD及ビ∠MPD'ハ共ニ∠BACニ等シイ。

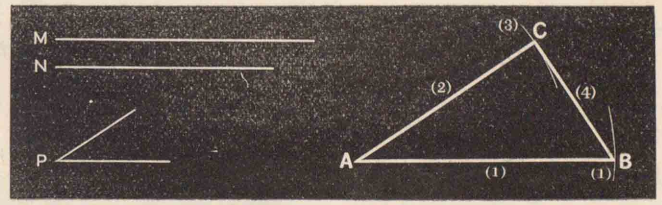
次ニ作圖❷ノ圓周ハPMトMノ外ニ尚一ツノ點デ交ハルカラ, Dノヤウナ點ガ尚二ツ出來ルガ, 其等ハ夫々直線DPトD'Pトノ延長上ニ

アルカラ, 解答ハ上ノPD, PD'ノ二ツデアル。

作圖題 七　二邊ト其ノ夾角トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

題意 M, Nヲ與ヘラレタ二邊トシ, ∠Pヲ與ヘラレタ其ノ夾角トスル。

二邊ガ夫々M, Nニ等シクテ其ノ夾角ガ∠Pニ等シイ三角形ヲ畫クコトヲ求メル。



作圖 ❶ Mニ等シイ線分ABヲ引ク。(公法1, 2)

❷ AヨリABト∠Pニ等シイ角ヲ作ル直線ACヲ引ク。(作圖題六)

❸ Aヲ中心トシNニ等シイ半徑デ圓周ヲ畫キ, ACトノ交點ヲCトスル。(公法2)

❹ BCヲ結ブ。(公法1)

然ラバ△ABCハ求メル三角形デアル。

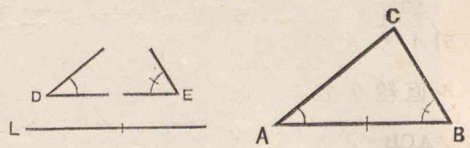
證明 (略スル)

注意 求メル三角形ハ唯一種ダケデアル。

問6. 頂角ト其ノ邊トヲ知ツテ二等邊三角形ヲ作レ。

問7. 二角ト其ノ頂點間ノ邊トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

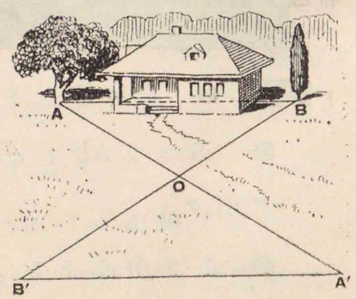
(右ノ圖ニヨツテ考ヘヨ)



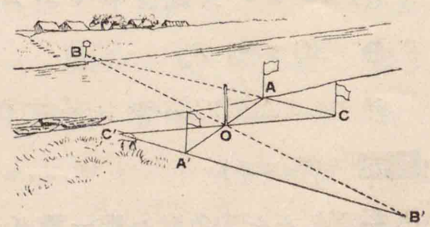
15. 距離ノ測定

A, B ハ中間ニ障害物ガアツテ其ノ距離ヲ直接ニハ測定デキナイ二點トシ,其ノ距離ヲ測定シヨウトスル。

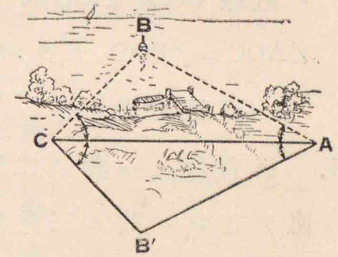
A及ビBマデ一直線ニ歩ミ得ル一點Oヲ定メ, AヨリOヲ經テ一直線ニ $OA'=OA$ デアルヤウニ點A'ヲ求メ,又BヨリOヲ經テ $OB'=OB$ デアルヤウニ點B'ヲ求メル。ソコデA', B'間ノ距離ヲ測レバ,之ガA, B間ノ距離ニ等シイ。



又 AB 上或ハ其ノ延長上ニ任意ノ一點Cヲ取リ,他ニ一點Oヲ定メ AO, CO ヲ測定シ,其ノ延長上ニA'及ビC'ヲ夫々 $OA'=OA$, $OC'=OC$ デアルヤウニ取リ,直線C'A'又ハ其ノ延長上ニOトBトヲ一直線ニ見通ス點B'ヲ取レバ,線分B'A'ノ長サガA, B間ノ距離ニ等シイ。(之ヲ證明セヨ)



若シ測角器ヲ用ヒルナラバ, Aヨリ適宜ニ一線分ACヲ引イテ, AヨリACト∠CABニ等シイ角ヲ其ノ反對ノ側ニ作ル直線ヲ引キ,又CヨリCAト∠ACBニ等シイ角ヲ其ノ反對ノ側ニ作ル直線CB'ヲ引イテ,此ノ兩直線ノ交點ヲB'トシA, B'ノ距離ヲ測レバヨイ。



今カラ約2500年前ニ有名ナ希臘ノ數學者たーれす (Thales) ハ此ノ方法デ海岸ヨリ或船マデノ距離ヲ測ツタトイフコトデアル。

問題 3

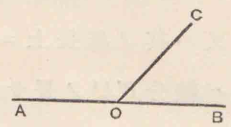
1. 或角ノ補角ト其ノ角ノ餘角トノ和ガ150°デアル,其ノ角ハ何度カ。

(求メル角ヲx度トシテ方程式ヲ作レ)

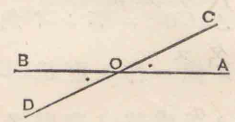
2. 一直線OCガ他ノ直線ABトO點デ出會ツテ作ル二ツノ接角∠AOCト∠BOCトニ於テ∠AOCガ

$\angle BOC$ ノ 3 倍ナラバ,此ノ二角ノ大サハ各〻幾ラカ。

又 $\angle BOC$ ガ $\angle AOC$ ノ $\frac{1}{5}$ ナラバ,此ノ二角ノ大サハ各〻幾ラカ。



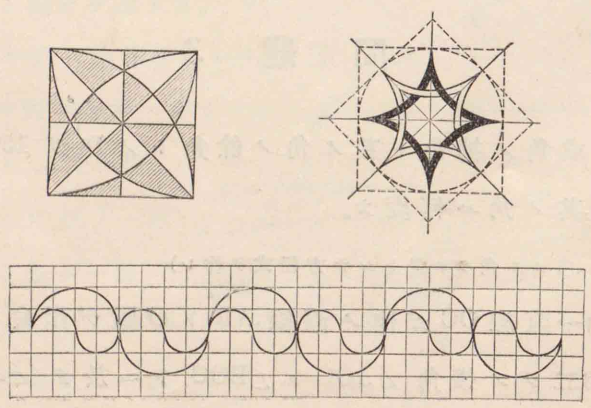
3. 一直線 AB 上ノ一點 O ヲ過ギ其ノ兩側ニ二ツノ直線 OC 及ビ OD ガアツテ $\angle AOC=\angle BOD$ ナラバ, COD ハ一直線デアル。



4. 三角形ノ一角ノ二等分線ガ其ノ角ノ對邊ニ垂直デアレバ,其ノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

5. 頂角ト頂點カラ底邊ニ引イタ垂線ノ長サトガ與ヘラレタトキ,二等邊三角形ヲ作レ。

6. 次ノ圖ヲ畫ク方法ハドウカ。



第四章 平行線

16. 平行線

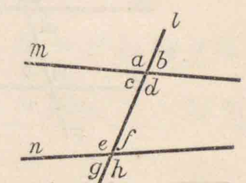
一直線ガ二直線ト交ハレバ其ノ交點ヲ頂點トスル八ツノ角ガ出來ル。此等ノ角ニ夫々次ノヤウニ命名スル。

$\left.\begin{array}{l}\angle a \text{ ト } \angle e,\ \angle b \text{ ト } \angle f \\ \angle c \text{ ト } \angle g,\ \angle d \text{ ト } \angle h\end{array}\right\}$ ヲ同位角,

$\angle c$ ト $\angle f$, $\angle d$ ト $\angle e$ ヲ錯角,

$\angle c$, $\angle d$, $\angle e$, $\angle f$ ヲ內角,

$\angle a$, $\angle b$, $\angle g$, $\angle h$ ヲ外角



トイヒ,特ニ

$\angle c$ ト $\angle e$, $\angle d$ ト $\angle f$ ヲ同側內角,

$\angle a$ ト $\angle g$, $\angle b$ ト $\angle h$ ヲ同側外角

トイフコトガアル。

問 1. 上圖ニ於テ,相等シイ角ヲ擧ゲヨ。

問 2. 上圖ニ於テ,次ノ場合ニ相等シクナル二角ヲスベテ擧ゲヨ。

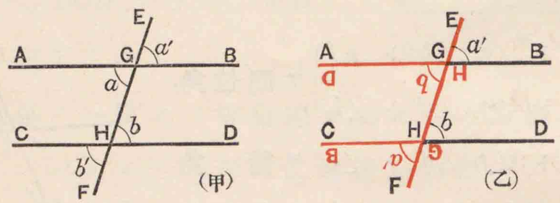
(1) $\angle a=\angle e$ ノトキ　(2) $\angle c=\angle f$ ノトキ

(3) $\angle d+\angle f=2\text{R}\llcorner$ ノトキ

定理六 **二直線ガ一直線ト交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ相等シイトキハ,此ノ二直線ハ相交ハラナイ.**

假設 二直線 AB, CD ガ一直線 EF ト夫々 G, H デ交ハリ,$\angle AGH(a)=\angle GHD(b)$ トスル。

終結 AB, CD ハ相交ハラナイ。



證明 今甲圖ノ圖形 EGBDHF ヲ廻轉シテ其ノ H, G ガ夫々モトノ圖形ノ G, H ニ重ナルヤウニ置ケバ,

$\angle a=\angle b$ (假設)

然ルニ $\angle a=\angle a',\quad \angle b=\angle b'$ (對頂角)

故ニ $\angle a'=\angle b'$

依ツテ兩圖形ハ乙圖ノヤウニ全ク重ナル。

故ニ若シ GA, HC ノ延長ガ相交ハルトスレバ HD, GB ノ延長モ亦相交ハルコトニナル。

故ニ二直線 AB, CD ガ半直線 GA, HC ノ方向デ

相交ハルトスレバ,又 GB, HD ノ方向デモ相交ハルコトニナル。卽チ二直線 AB, CD ガ二點デ相交ハルコトニナル。之ハ公理一ニ戻ル。

依ツテ AB, CD ハ相交ハラナイ。

上ノ定理ノ證明デハ假ニ其ノ終結ヲ否定シテ推論ヲ進メ公理ニ戻ル結論ヲ導キ,ソレデ其ノ終結ハ眞デナケレバナラヌト斷定シタ。

此ノヤウニ終結ヲ假ニ否定シテ既定ノ公理,定義,定理ニ戻ルカ,又ハ所定ノ假設ニ反スル結論ヲ導キ,ソレデ其ノ終結ノ眞デアルコトヲ斷定スル證明法ヲ**歸謬法**トイフ。

歸謬法ハ**間接證明法**デアル。之ニ對シテ,今マデニナシタ定理ノ證明ノヤウニ,假設ヨリ出發シテ終結ニ到達スルヤウナ證明法ヲ**直接證明法**トイフ。

定義 同一ノ平面上ニアツテ相交ハラナイ二直線ハ互ニ**平行デアル**トイヒ,平行デアル直線ヲ**平行線**トイフ。

同一ノ平面上ニアル二直線ハ互ニ平行デアルカ又ハ相交ハル。

相交ハル二直線ヲ**相交線**トイフ。

二直線AB,CDガ互ニ平行デアルコトヲ AB∥CD ノヤウニ書キ表ハス。

定理六ハ次ノヤウニ述ベルコトガ出來ル。

二直線ガ一直線ト交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ相等シイトキハ,此ノ二直線ハ互ニ平行デアル.

系一 二直線ガ一直線ト交ハツテ出來ル。

(1) 一組ノ同位角ガ相等シイトキ,

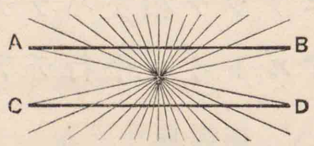
(2) 一組ノ同側内角ガ互ニ補角デアルトキ,

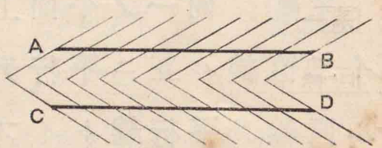
(3) 一組ノ同側外角ガ互ニ補角デアルトキ,

此ノ二直線ハ互ニ平行デアル。

系二 同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

問3. 圖ニ於テ直線AB,CDガ平行デアルコトヲ檢セヨ。(一組ノ錯角又ハ同位角ヲ測ツテ)





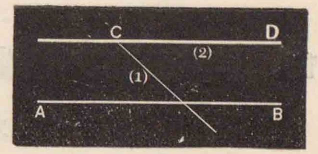
問4. 双方ニ如何ニ延長シテモ相交ハラズ且平行デモナイ二ツノ直線ガアルカ。

問5. 平行線ノ例ヲ擧ゲヨ。

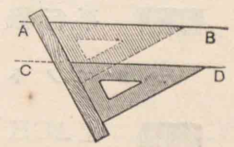
17. 平行線ノ公理

作圖題八 **與ヘラレタ點ヲ過ギ與ヘラレタ直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ.**

題意 與ヘラレタ點Cヲ過ギ,與ヘラレタ直線ABニ平行ナル直線ヲ引ク.*



問1. 二枚ノ三角定木又ハ一本ノ直線定木ト一枚ノ三角定木トヲ用ヒテ平行線ヲ書ク方法ハドウカ。

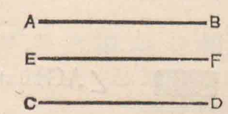


平行線ニ就イテ次ノ公理ガアル。

公理七 一直線外ノ一點ヲ過ギ此ノ直線ニ平行ナル直線ハタヾ一ツダケアル。

定理七 **平行線ノ一ツニ交ハル直線ハ亦他ノ一ツニモ交ハル.** (歸謬法ニヨツテ證明セヨ)

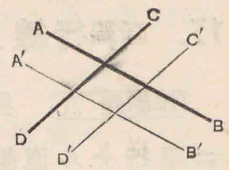
系一 平行線ノ一ツニ平行ナル直線ハ亦他ノ一ツニモ平行デアル。



系二 同ジ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

* 以下定理ノ證明ヤ作圖題ノ作圖證明ノ簡單ナモノハ省ク,學生自ラナセ。

問2. 相交ハル二直線 AB, CD ニ夫々平行ナル二直線 A'B', C'D' ハ相交ハル。

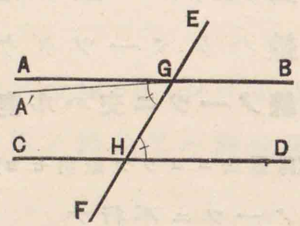


18. 平行線ノ性質

定理八 **平行線ガ一直線ト交ハッテ出來ル二組ノ錯角ハ夫々相等シイ。** (定理六ノ逆)

假設 平行線 AB, CD ガ一直線 EF ト夫々 G, H デ交ハルモノトスル。

終結 ∠AGH = ∠GHD,　∠BGH = ∠GHC



證明 ∠AGH ≠ ∠GHD トスレバ, G ヲ過ギ ∠GHD ニ等シク ∠A'GH ヲ作ル直線 GA' ガ引ケル。

然ルトキハ　A'G ∥ CD　(定理六)

然ルニ　AG ∥ CD　(假設)

故ニ A'G, AG ハ一點 G ヲ過ギ CD ニ平行ナル二

直線デアル。之ハ公理七ニ戻ル。

故ニ　∠AGH = ∠GHD

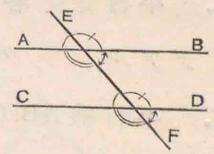
從ッテ　∠BGH = ∠GHC

系一 平行線ガ一直線ト交ハッテ出來ル。

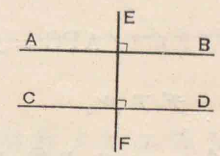
(1) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。

(2) 二組ノ同側內角ハ夫々互ニ補角デアル。

(3) 二組ノ同側外角ハ夫々互ニ補角デアル。



系二 平行線ノ一ツニ垂直デアル直線ハ亦他ノ一ツニモ垂直デアル。



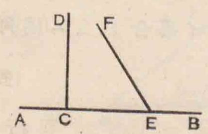
此ノ事ヲ平行線ハ**共通垂線**ヲ有スルトイフ。

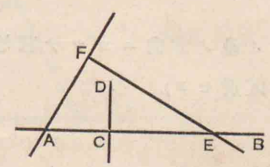
系三 同ジ直線ノ垂線ト斜線トハ相交ハル。

(歸謬法)

系四 相交線ノ各〻ニ夫々垂直デアル直線ハ相交ハル。

(歸謬法)





問題 4

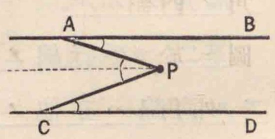
1. 若干ノ直線ガアツテ,其ノ何レノ二ツヲ取ツテモ互ニ平行デアレバ,其ノ何レカ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ總テニモ垂直デアル。

2. 平行線ノ各〻ニ夫々垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

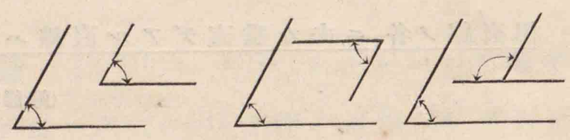
3. 平行線AB, CDノ間ニ圖ノヤウニ任意ノ一點Pヲ取ルトキハ

$$\angle APC = \angle BAP + \angle DCP$$

デアル。



4. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ平行デアレバ,此ノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角デアル。



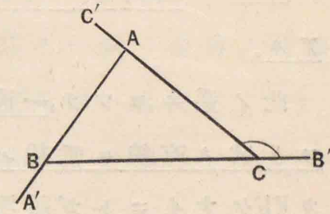
(兩角ノ邊ノ方向ニヨツテ相等シイ場合ト,互ニ補角デアル場合トヲ區別セヨ)

第五章 三角形

19. 三角形ノ內角・外角

[定義] 三角形ノ二邊ノナス角ヲ三角形ノ**內角**又ハ單ニ**角**トイヒ,一邊ト他ノ邊ノ延長トノナス角ヲ三角形ノ**外角**トイフ。

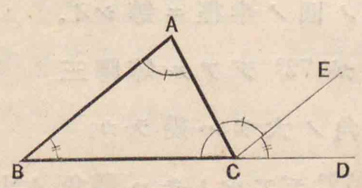
三角形ノ外角ニ隣接シナイ二ツノ內角ノ各〻ヲ其ノ外角ノ**內對角**トイフ。例ヘバ圖ニ於テ $\angle BAC$, $\angle ABC$ ハ共ニ外角 ACB' ノ內對角デアル。



[定理九] **三角形ノ外角ハ其ノ內對角ノ和ニ等シイ,ソシテ三ツノ內角ノ和ハ2直角ニ等シイ.**

假設 任意ノ三角形ABCノ一外角ヲ $\angle ACD$ トシ, A, B, Cニ於ケル三ツノ內角ヲ夫々 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ トスル。

終結 $\angle ACD = \angle A + \angle B$, $\angle A + \angle B + \angle C = 2R\llcorner$



證明 C ヲ過ギ BA ニ平行ニ CE ヲ引ケバ

$$\angle ACE = \angle A, \quad \angle ECD = \angle B$$

故ニ $\angle ACE + \angle ECD = \angle A + \angle B$

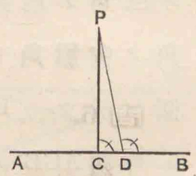
卽チ $\angle ACD = \angle A + \angle B$

又 $\angle ACD + \angle C = 2R\llcorner$

故ニ $\angle A + \angle B + \angle C = 2R\llcorner$

系一 三角形ノ外角ハ內對角ノ何レヨリモ大デアル。

此ノ系ニヨツテ,一直線外ノ一點ヨリ其ノ直線ニ垂線ハタヾ一ツシカ引ケナイコトガ證明サレル。

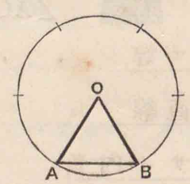


定義 一點ヨリ一直線マデ引イタ垂線ノ長サヲ其ノ**點ト直線トノ距離**トイフ。

系二 正三角形ノ一角ハ $\frac{2}{3}$ 直角(60°)ニ等シイ。

問 1. 60°, 30°, 15°, 75° 及ビ 105° ノ角ヲ作圖セヨ。

問 2. 圓周ノ六分ノ一デアル弧ノ弦ハ其ノ圓ノ半徑ニ等シイ。



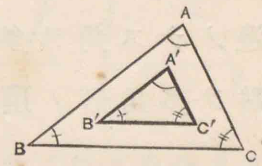
問 3. 頂角ガ 72° デアル等脚三角形ノ底角ノ大サハ幾ラカ。

又底角ガ 72° デアルトキハ頂角ノ大サハ幾ラカ。

問 4. 二等邊三角形ノ底角ハ銳角デアル。

系三 三角形ハ一ツヨリ多クノ直角又ハ鈍角ノ內角ヲ有スルコトハナイ。

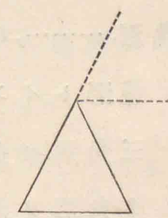
系四 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シイトキハ,第三角モ等シイ。



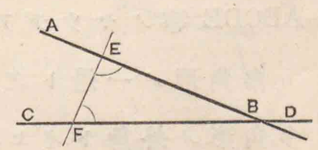
問 5. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シク且其ノ一組ノ等角ノ對邊ガ等シイトキハ,此ノ兩三角形ハ合同デアル。

問 6. 二等邊三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引イタ垂線ハ底邊ヲ二等分スル。

問 7. 二等邊三角形ノ頂點ヲ過ギ底邊ニ平行ナル直線ハ頂點ニ於ケル外角ヲ二等分スル。



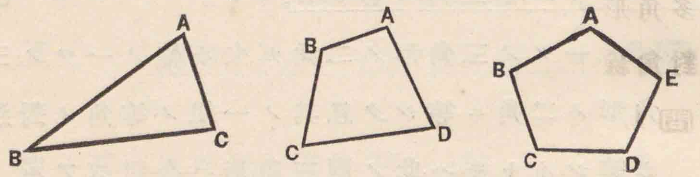
系五 二直線ガ之ニ交ハル一直線ト其ノ同ジ側ニ於テ作ル內角ノ和ガ2直角ニ等シクナイトキハ,此等ノ二直線ハ其ノ和ガ2直角ヨリ小サイ內角ノアル方デ相交ハル。



(歸謬法)

20. 多角形

定義　若干ノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**多角形**トイヒ,其ノ線分ヲ多角形ノ**邊**,二隣邊ノナス角ヲ多角形ノ**角**トイヒ,此ノ角ノ頂點ヲ多角形ノ**頂點**トイフ。



多角形ハ角又ハ邊ノ數ニヨツテ**三角形**,**四角形**,**五角形**,………,n **角形**又ハ**三邊形**,**四邊形**,**五邊形**,………,n **邊形**トイフ。

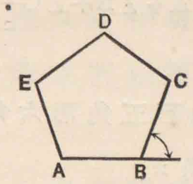
三角形ハ多角形ノ中邊數ノ最モ少イモノデアル。

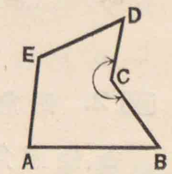
多角形ヲ書キ表ハスニハ其ノ頂點ヲ表ハス文字ヲ順ニ並記スル。例ヘバ四角形 ABCD 或ハ五角形 ABCDE 等ノヤウデアル。

多角形ノ一邊ト之ニ隣ル邊ノ延長トノナス角ヲ多角形ノ**外角**トイヒ,外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ其ノ**內角**トモイフ。

內角ガ何レモ2直角ヨリ小サイ多角形ヲ**凸多角形**トイヒ,內角ノ中少クトモ一ツガ2直角ヨリ大キイモノヲ**凹多角形**トイフ。

注意　爾後本書デ單ニ多角形トイフトキハ常ニ凸多角形ヲ指スモノトスル。





多角形ノ相隣ラナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ其ノ**對角線**トイフ。

問 1. 四角形,五角形ニハ各〻幾ツノ對角線ガ引ケルカ。

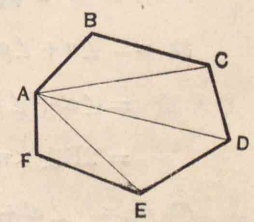
又 n 角形ノ對角線ノ總數ヲ求メル公式ヲ作レ.

定理十　**n 角形ノ內角ノ和ハ $(2n-4)$ 直角ニ等シイ.**

假設　ABCD……ヲ n 角形(圖デハ六角形)トスル.

終結　$\angle A+\angle B+\angle C+\cdots\cdots=(2n-4)R\llcorner$

證明　一頂點 A ヨリ對角線 AC, AD, …… ヲ引ケバ,此等 $(n-3)$ 箇ノ對角線ハ本形ヲ $(n-2)$ 箇ノ三角形ニ分ケル。此等ノ三角形ノ總テノ內角ノ和ガ此ノ多角形ノ內角ノ和デアル.



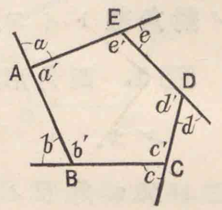
然ルニ三角形ノ内角ノ和ハ2直角ニ等シイ.

故ニ $\angle A+\angle B+\angle C+\cdots\cdots=2\mathrm{R}\llcorner\times(n-2)$

$=(2n-4)\mathrm{R}\llcorner$

問2. 四角形,五角形,六角形,八角形ノ内角ノ和ハ各々幾直角カ.

定理十一 **n角形ノ總テノ邊ヲ順次延長シテ作ツタ外角ノ和ハ4直角ニ等シイ.**



假設 ABCD……ヲn角形(圖デハ五角形)トシ,$\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, ……ヲ夫々頂點A, B, C,……ニ於ケル外角ノ一ツヲ表ハスモノトシ,$\angle a'$, $\angle b'$, $\angle c'$, ……ヲ夫々其ノ外角ニ隣ル内角ヲ表ハスモノトスル.

終結 $\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=4\mathrm{R}\llcorner$

證明 各頂點ニ於ケル一ツノ外角ト内角トノ和ハ明カニ2直角ニ等シイ.

故ニ $\angle a+\angle a'+\angle b+\angle b'+\angle c+\angle c'+\cdots\cdots$

$=\angle a'+\angle b'+\angle c'+\cdots\cdots+\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots$

$=2\mathrm{R}\llcorner\times n=2n\mathrm{R}\llcorner$

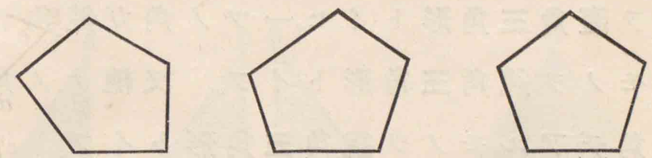
然ルニ $\angle a'+\angle b'+\angle c'+\cdots\cdots=(2n-4)\mathrm{R}\llcorner$

故ニ $\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=4\mathrm{R}\llcorner$

21. 正多角形

定義 多角形ノ各邊ガ皆相等シイモノヲ**等邊多角形**トイヒ,内角ガ皆相等シイモノヲ**等角多角形**トイフ.

等邊デ且等角デアル多角形ヲ**正多角形**トイフ.



等邊五角形　等角五角形　正五角形

三角形ノ場合ニハ等邊ナルモノハ必ズ等角デ,等角ナルモノハ必ズ等邊デアルガ,一般ノ多角形デハ必ズシモソウデナイ.

正多角形ハ其ノ角ノ邊數ニ從ツテ之ヲ**正三角形**,**正四角形**,**正五角形**等トイフ.

特ニ正四角形ヲ**正方形**トイフ.

問1. 正五角形,正六角形,正八角形ノ各角ノ大サヲ求メヨ.

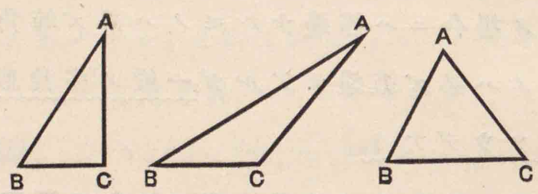
又正n角形ノ一角ノ大サヲ表ハス公式ヲ作レ.

問2. 正十五角形ノ一外角ノ大サヲ求メヨ.

22. 三角形ノ種類

三角形ハ之ヲ邊ニツイテ分類スレバ,三邊不等デアルモノ(不等邊三角形),二邊相等シイモノ(二等邊三角形)及ビ三邊皆相等シイモノ(正三角形)ガアルガ,又角ニツイテ之ヲ分類スルコトモデキル。

定義 三角形ノ一ツノ角ガ直角デアルモノヲ**直角三角形**トイヒ,一ツノ角ガ鈍角デアルモノヲ**鈍角三角形**トイフ。又總テノ角ガ鋭角デアルモノヲ**鋭角三角形**トイフ。



直角三角形デハ直角ノ對邊ヲ其ノ**斜邊**トイフ。

問 1. 直角三角形ノ斜邊ノ兩端ノ角ハ共ニ鋭角デ又互ニ餘角デアル。

問 2. 鈍角三角形ノ鈍角デナイ二角ハ共ニ鋭角デアル。

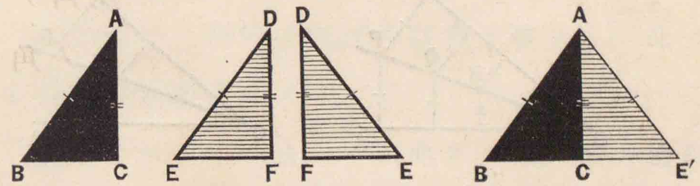
問 3. 直角二等邊三角形ノ各角ノ大サハ幾ラカ。

23. 直角三角形ノ合同

定理十二 **斜邊ト他ノ一邊トヲ夫々等シクスル兩直角三角形ハ合同デアル.**

假設 △ABC, △DEF ヲ兩直角三角形トシ, AB, DE ヲ夫々其ノ斜邊トシ,且 AB=DE, AC=DF トスル。

終結 △ABC≡△DEF



證明 △DEF ノ邊 DF ヲ之ニ等シイ AC ニ重ネ, △ABC ト △DEF トヲ各ゝ AC ノ兩側ニアルヤウニ置キ, △DEF ヲ圖ニ於ケル △AE'C ノ位置ヲ取ラシメルト, ∠ACB ト ∠ACE' トガ共ニ直角デアルカラ, BCE' ハ一直線トナル。

然ルニ △ABE' ニ於テ AB=AE' デアル。(假設)

故ニ ∠B=∠E' (定理三)

又 ∠E'=∠E 故ニ ∠B=∠E

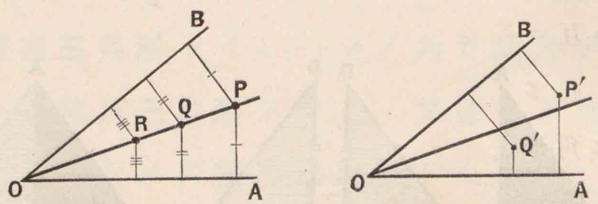
從ツテ ∠A=∠D (定理九系四)

故ニ △ABC≡△DEF (定理二)

逆　二等邊三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ下シタ垂線ハ頂角ヲ二等分スル。

系　角ノ二等分線上ノ各點ハ夫々其ノ角ノ二邊ヨリ等距離ニアル。

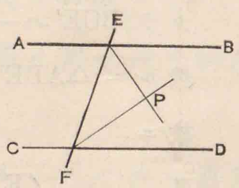
又　角ノ二邊ヨリ等距離ニアル點ハ皆其ノ角ノ二等分線ノ上ニアル。



從ッテ角ノ二等分線ノ上ニナイ點ハ其ノ角ノ二邊ヨリ不等距離ニアル。　(歸謬法)

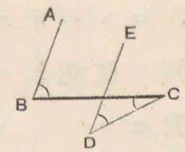
問　題　5

1. 二ツノ平行線AB, CDニ直線EFガ交ハッテ出來ル同側内角ノ二等分線ハ互ニ直交スル。

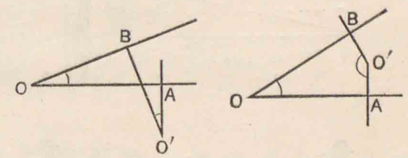


2. 二等邊三角形ノ一角ガ60°デアレバ此ノ三角形ハ正三角形デアル。

3. 圖ニ於テ $\angle B=74°$, $\angle C=36°$, $\angle D=38°$ デアルトキハBAトDEトハ平行デアル。



4. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ垂直デアルトキハ,此ノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角デアル。

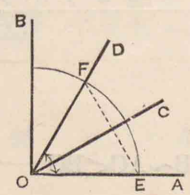


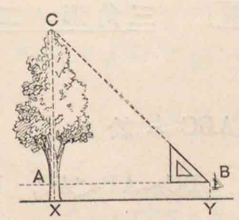
5. 或多角形ノ内角ノ和ガ16直角ニ等シイ。此ノ多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

6. 或正多角形ノ一角ガ $\frac{9}{5}$ 直角デアル。其ノ邊數ヲ求メヨ。

7. 凸多角形ハ三ツヨリ多ク鋭角ノ内角ヲ有スルコトハナイ。

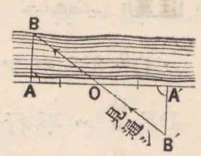
8. 直角ヲ三等分セヨ。

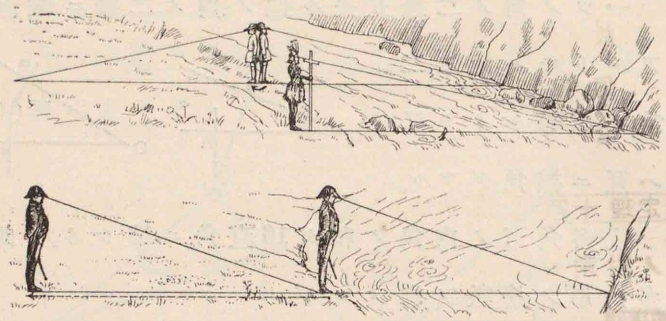




9. 直角二等邊三角形ノ定木ヲ用ヒテ木ノ高サヲ概測スル方法ヲ考案セヨ。

10. コヽニ示ス圖ニヨツテ河ノ幅ヲ概測スル種々ノ方法ヲ考案セヨ。





24. 三角形ノ邊及ビ角ノ不等

定理十三　三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大デアル.

公理二ニヨツテ本定理ハ明カデアル。

系　三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小デアル。

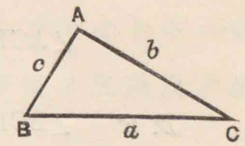
$\triangle ABC$ ニ於テ

$$BC \sim AB < AC, \quad BC \sim AC < AB, \quad AB \sim AC < BC$$

問 1. 多角形ノ一邊ハ他ノ邊ノ和ヨリ小デアル。

問 2. 圓ノ弧ハ之ニ對スル弦ヨリ大デアル。

注意　$\triangle ABC$ ニ於テハ一般ニ角 A, B, C ノ對邊ヲ夫々 a, b, c デ表ハス。



依ツテ　$b+c>a,\ c+a>b,\ a+b>c,$

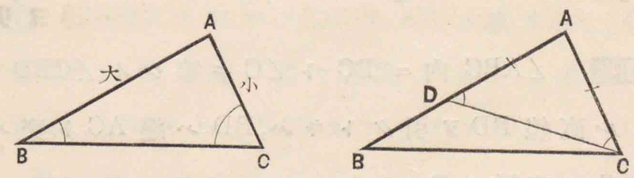
又　$b\sim c<a,\ c\sim a<b,\ a\sim b<c$

故ニ三ツノ線分ガ三角形ノ三邊トナルニハ,其ノ中何レノ二ツヲ取ツテモ其ノ和ハ他ノ一ツヨリ大デ,其ノ差ハ他ノ一ツヨリ小デナケレバナラナイ。

定理十四　三角形ノ二邊ガ等シクナイトキハ,大邊ノ對角ハ小邊ノ對角ヨリ大デアル.

假設　$\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ トスル。

終結　$\angle ACB > \angle ABC$



證明　AB 上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ,CD ヲ結ベバ

$\angle ACD = \angle ADC$　(定理三)

然ルニ D ハ AB ノ上ニアルカラ

$\angle ADC > \angle ABC$　(定理九系一)

又　$\angle ACB > \angle ACD$

故ニ　$\angle ACB > \angle ABC$

問3. 前ノ圖ニ於テ

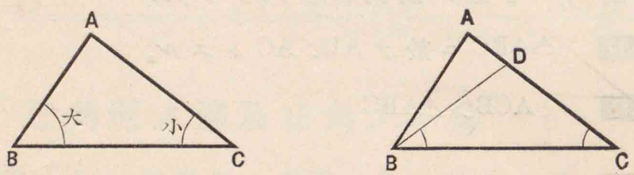
$$\angle ACD=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC)$$

及ビ $$\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle ABC)$$

定理十五 **三角形ノ二角ガ等シクナイトキハ大角ノ對邊ハ小角ノ對邊ヨリ大デアル.** (定理十四ノ逆)

假設 $\triangle ABC$ニ於テ $\angle ABC>\angle ACB$ トスル。

終結 $AC>AB$



證明 $\angle ABC$内ニBCト$\angle C$ニ等シイ$\angle CBD$ヲ作ル直線BDヲ引クトキハ,BDハ邊ACト交ハル。其ノ交點ヲDトスル。

然ラバ $DB=DC$ (定理四)

ソシテ $AD+DB>AB$ (定理十三)

故ニ $AD+DC>AB$

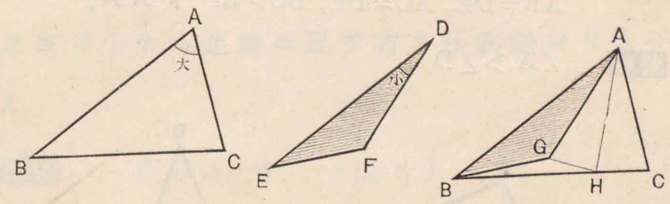
即チ $AC>AB$

問4. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリ大デアル。鈍角三角形ノ鈍角ノ對邊ハドウカ。

定理十六 **一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク,其ノ夾角ガ等シクナイトキハ,夾角ノ大キイ方ノ三角形ノ第三邊ガ他ノ三角形ノ第三邊ヨリ大デアル.**

假設 兩三角形ABC, DEFニ於テ $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle BAC>\angle EDF$ トスル。

終結 $BC>EF$



證明 $\triangle DEF$ヲ取ツテDEヲABニ重ネ,兩三角形ヲABノ同ジ側ニ置キ,頂點FガGニ來タトスレバ,$\angle EDF$ハ$\angle BAC$ヨリ小デアルカラ,AGハ$\angle BAC$内ニアル。$\angle GAC$ノ二等分線AHヲ引キBCトノ交點ヲHトシ,GHヲ結べバ,

$\triangle AGH\equiv\triangle ACH$ (定理一)

故ニ $HG=HC$

然ルニ $BH+HG>BG$ (定理十三)

故ニ $BH+HC>BG$ 即チ $BC>BG$

故ニ $BC>EF$

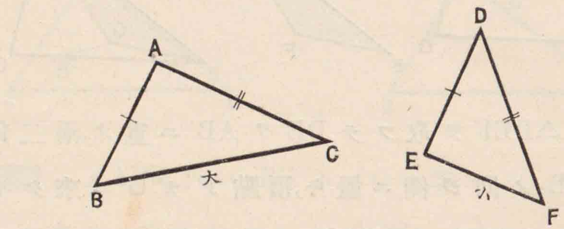
問 5. △ABCノ一邊BCノ中點ヲMトシ,∠AMBガ鈍角ナラバAB>ACデアル。

定理十七　**一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク第三邊ガ等シクナイトキハ大ナル第三邊ヲ有スル方ノ三角形ノ其ノ邊ニ對スル角ハ他ノ三角形ノ第三邊ニ對スル角ヨリ大デアル.**

假設　兩三角形ABC, DEFニ於テ

AB=DE, AC=DF, BC>EF トスル。

終結　$\angle A > \angle D$



證明　若シ∠A=∠DトスレバBC=EF　(定理一)

又若シ　∠A<∠DトスレバBC<EF　(定理十六)

然ルニ之ハ何レモ假設ニ戻ルカラ,∠Aハ∠Dニ等シクモナク又∠Dヨリ小サクモナイ。

故ニ　　$\angle A > \angle D$

問 6. △ABCニ於テAB>ACトシ,ADヲAヨリ出ル中線トスレバ,∠ADBハ鈍角デアル。

25. 垂線ト斜線

定理十八　**一直線外ノ一點ヨリ此ノ直線マデ垂線ト斜線トヲ引ケバ,**

[1]　垂線ガ最小(最短)デアル.

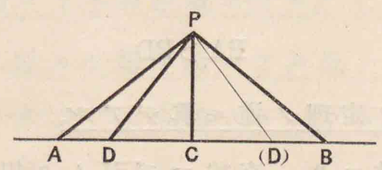
[2]　垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル兩斜線ハ相等シイ.

[3]　垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ,之ヨリ小ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ヨリ大デアル.

假設　一直線AB外ノ一點ヲPトシ,

PC⊥AB,　CA=CB,　CA>CD　トスル。

終結　[1] PCハ最小　[2] PA=PB　[3] PA>PD



證明　[1] PAヲPヨリABヘ引イタ任意ノ斜線トスレバ,直角三角形PACニ於テ

$\angle PAC < \angle PCA$　　(定理九系三)

故ニ　　PC<PA　　(定理十五)

[2] $\triangle PAC \equiv \triangle PBC$ (定理一)

故ニ $PA = PB$

[3] $CA > CD$ デアルカラ, D ハ線分 AC 又ハ BC ノ上ニアル。

今 D ガ AC ノ上ニアルトスレバ

$\angle PDA > \angle PCD$ (定理九系一)

故ニ $\angle PDA$ ハ鈍角デアル。

然ルニ $\angle PAD$ ハ鋭角デアル。 (定理九系三)

故ニ $\angle PDA > \angle PAD$

故ニ $PA > PD$ (定理十五)

又 D ガ BC ノ上ニアルトスレバ,

$PB > PD$

故ニ何レニシテモ

$PA > PD$

系一 此ノ定理ノ逆モ眞デアル。 (歸謬法)

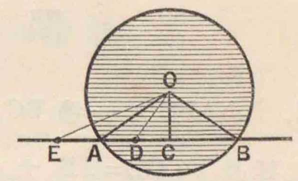
系二 一點ヨリ一直線マデ引イタ相等シイ斜線ハ,同ジ點ヨリ引イタ垂線ト等角ヲナス。

大ナル(長イ)斜線ハ小ナル(短イ)斜線ヨリ垂線ト大ナル角ヲナス。

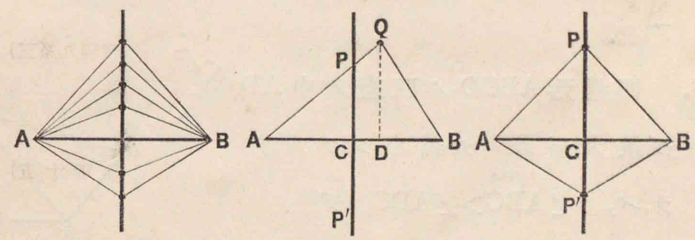
又 逆モ眞デアル。

系三 圓ノ弦ノ上ノ點ハ其ノ兩端ノ外皆圓内ニアル。

ソシテ弦ノ延長上ノ點ハ皆圓外ニアル。



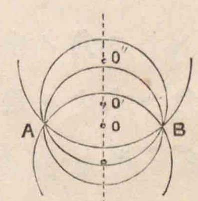
系四 線分ノ垂直二等分線ノ上ノ點ハ,皆其ノ線分ノ兩端ヨリ等距離ニアル。



ソシテ其ノ垂直二等分線ノ上ニナイ點ハ,皆其ノ線分ノ兩端ヨリ不等距離ニアル。

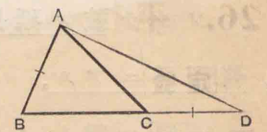
從ツテ二點ヨリ等距離ニアル點ハ,皆其ノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ノ上ニアル。

問 與ヘラレタ二點ヲ通ル圓周ノ中心ハ,皆其ノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ノ上ニアル。



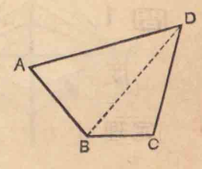
問 題 6

1. △ABC ノ一邊 BC ヲ D マデ延長シ CD=AB ナルヤウニスレバ BC<AD デアル。

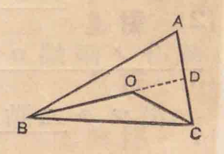


2. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ底邊 BC 上ノ任意ノ一點 D ニ結ブ線分 AD ハ AB,AC ノ各〻ヨリ小デアル。

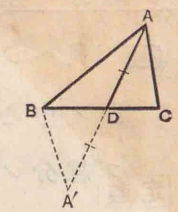
3. 四邊形ABCD ノ四邊ノ中 AD ガ最大デ BC ガ最小デアルナラバ, ∠ABC>∠ADC デ
且 ∠BCD>∠BAD デアル。



4. O ヲ △ABC 内ノ任意ノ一點トスレバ,
OB+OC<AB+AC デアル。



5. 三角形ノ中線ガ之ト隣ル邊トナス角ノ中,小ナル邊トナス角ハ大ナル邊トナス角ヨリ大デアル。

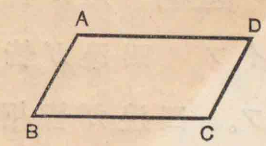


第六章 平行四邊形

26. 平行四邊形ノ性質

定義 對邊ガ各〻互ニ平行デアル四邊形ヲ**平行四邊形**トイフ。

平行四邊形ABCD ヲ ▱ABCD ト書キ,又 ▱AC 或ハ ▱BD トモ略記スル。



問 1. 平行四邊形ノ一角ガ 60° ナラバ他ノ角ハ幾度カ。

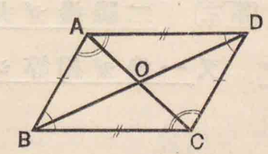
定理十九 **平行四邊形ニ於テ,**

[1] 對角線ハ之ヲ合同ナル二ツノ三角形ニ分ケル.

[2] 對邊ハ各〻相等シイ.

[3] 對角ハ各〻相等シイ.

[4] 對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル.



系一 平行線ニ共通垂線ヲ引イタトキ,其ノ平行線ノ間ニアル部分ハ相等シイ。

定義 平行線間ニアル其ノ共通垂線ノ部分ノ長サヲ**平行線ノ距離**トイフ。

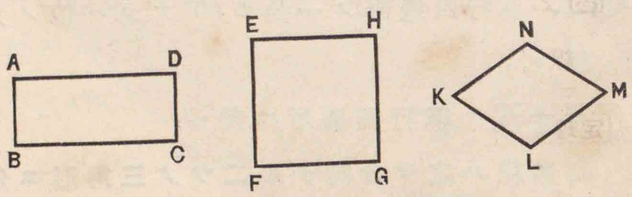
問2. 與ヘラレタ直線ヨリ與ヘラレタ距離ニアッテ之ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

系二 平行四邊形ニ於テ,

[1] 一角ガ直角デアレバ,他ノ角モ皆直角デアル。

[2] 一組ノ隣邊ガ相等シケレバ,四邊皆相等シイ。

定義 角ガ皆直角デアル四角形ヲ**矩形**トイフ。四邊ガ皆相等シイ矩形ヲ**正方形**トイフ。四邊ガ皆相等シイ四邊形ヲ**菱形**トイフ。



系三 二隣邊ガ夫々相等シイ矩形ハ皆合同デアル,又一邊ガ相等シイ正方形ハ皆合同デアル。

27. 平行四邊形デアルタメノ條件

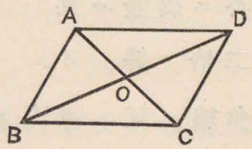
定理二十 **四邊形ハ次ノ場合ニ平行四邊形デアル.**

[1] **二組ノ對邊ガ各相等シイトキ.**

[2] **一組ノ對邊ガ相等シク且平行デアルトキ.**

[3] **二組ノ對角ガ各相等シイトキ.**

[4] **對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキ.**

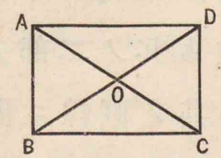


系 矩形,菱形,正方形ハ皆平行四邊形デアル。

問1. 平行四邊形ガ矩形,正方形,菱形トナル條件ハドウカ。(邊,角,對角線ニ關スル種々ナル條件ヲ研究セヨ)

問2. 平行四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ,他ノ邊ニ平行デ且對角線ヲ二等分スル。

定理二十一 **矩形ノ對角線ハ相等シイ.**

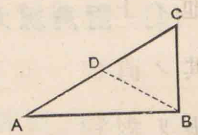


(ABCD ヲ矩形トスレバ △ABC ト △DCB トノ合同デアルコトカラ之ヲ證明セヨ)

系一 二ツノ對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。

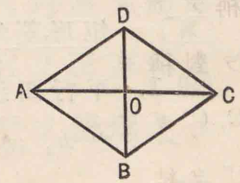
系二 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ,三ツノ頂點ヨリ等距離ニアル。(本定理ノ圖ヲ見ヨ)

問3. 直角三角形ノ一鋭角ガ他ノ鋭角ノ二倍ナラバ,三ツノ角ノ大サハ幾ラカ。又此ノ場合ニ斜邊ハ其ノ最小ノ邊ノ二倍ニ等シイ。



問4. 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ニ二等分スル。

ソレデ菱形ハ其ノ對角線ヲ折目トシテ,其ノ一部ヲ他ノ部分ノ上ニ全ク折重ネルコトガデキル。



28. 對稱

定義 一ツノ圖形ヲ其ノ平面上ノ一直線ヲ折目トシテ折重ネ,其ノ二部分ガ全ク相重ナレバ,此ノ圖形ハ其ノ直線ニ關シテ**對稱**デアルトイヒ,其ノ直線ヲ**對稱ノ軸**トイフ。

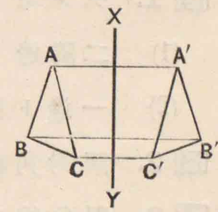
菱形ハ其ノ對角線ニ關シテ對稱デアル。

問1. 二等邊三角形及ビ圓ノ對稱ノ軸ハ何カ。

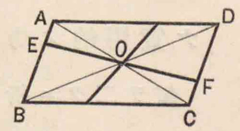
問2. 四邊形ノ一ツノ對角線 AC ガ他ノ對角線 BC ヲ垂直ニ二等分スレバ,此ノ四邊形ハ AC ニ關シテ對稱デアル。

二ツノ圖形ノ一ツヲ或一ツノ直線ヲ折目トシテ他ノ上ニ全ク折重ネ得ルトキハ,此ノ二ツノ圖形ハ其ノ直線ニ關シテ對稱デアルトイヒ,其ノ直線ヲ矢張リ對稱ノ軸トイフ。

二點ハ之ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ニ關シテ對稱デアル。又一直線 XY ニ關シテ對稱デアル三組ノ點 A, A′; B, B′; C, C′ ガアルトキ A, B, C 及ビ A′, B′, C′ ヲ結ンデ出來ル兩三角形ハ又 XY ニ關シテ對稱デアル。



問3. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ハ,之ヲ通リ一組ノ對邊ノ上ニ兩端ヲ有スル總テノ線分ノ中點デアル。



上ノ問ノヤウナ場合ニ此ノ圖形ハ對角線ノ交點ニ關シテ對稱デアルトイフ。**點ニ關シテ對稱デアル**圖形ハ,此ノ點ヲ通ル直線ガ其ノ圖形ヲ分ケタ片側ノ部分ヲ其ノ平面上デ 180° ダケ廻轉スレバ他ノ片側ノ部分ト全ク相重ナル。

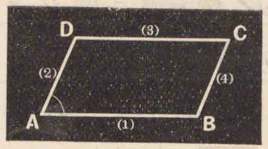
圓ハ其ノ中心ニ關シテ對稱デアル。

29. 平行四邊形ノ作圖

作圖題 九　二隣邊ト其ノ夾角トヲ知ツテ平行四邊形ヲ作レ.

二隣邊ヲ知ツテ矩形ヲ作レ.

一邊ヲ知ツテ正方形ヲ作レ.



問 1. 次ノモノヲ知ツテ平行四邊形ヲ作レ。

(1) 二隣邊ト一對角線。

(2) 一邊ト兩對角線。

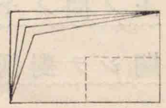
問 2. 兩對角線ヲ知ツテ菱形ヲ作レ。

問 3. 對角線ヲ知ツテ正方形ヲ作レ。

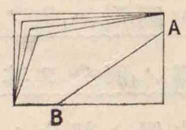
問 4. 對角線ト一邊トヲ知ツテ矩形ヲ作レ。

問 5. 紙上ニ矩形及ビ菱形ヲ畫クノニ次ノヤウナ實用的ノ方法ガアル,其ノ理ヲ説明セヨ。

紙ヲ二ツニ折リ,更ニ又之ヲ二ツニ折リ(折目ヲ折重ネ)其ノ上ニ針デ穴ヲ穿チ,之ヲ開イテ四ツノ穴ヲ連結スレバ矩形ガ出來ル。



又上ノヤウニ折ツタ紙ヲ AB 線ニ沿ウテ斷チ切ツテ開ケバ切口ABヲ邊トスル菱形ガ出來ル。



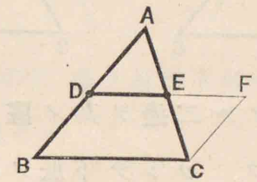
此ノヤウニシテ正方形ヲ切ルニハドウスレバヨイカ。

30. 平行線ニ關スル定理

定理 二十二　三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ其ノ邊ニ平行デ且其ノ半分ニ等シイ.

假設　$\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トスル。

終結　$DE \parallel BC$,　$DE = \frac{1}{2}BC$



證明　DE ヲ延長シテ EF ヲ DE ニ等シク取リ CF ヲ結ベバ*　$\triangle ADE \equiv \triangle CFE$　(定理一)

故ニ　$\angle ADE = \angle F$

故ニ　$AD \parallel CF$　從ツテ　$BD \parallel CF$

又　$AD = CF$　從ツテ　$BD = CF$

故ニ四邊形 $DBCF$ ハ平行四邊形デアル。

故ニ　$DE \parallel BC$

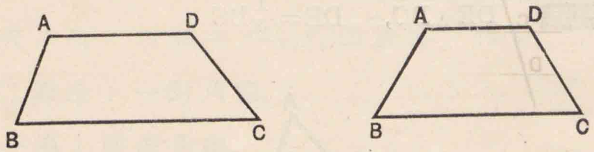
又　$DF = BC$　然ルニ　$DE = \frac{1}{2}DF$

故ニ　$DE = \frac{1}{2}BC$

* EF, CF ノヤウナ線ヲ補助線トイフ。補助線ヲ引クコトハ證明ヲナスニ極メテ重要ナコトデアル。

系一 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ他ノ邊ニ平行ニ引イタ直線ハ殘リノ邊ノ中點ヲ通ル。(歸謬法)

定義 一組ノ對邊ガ平行デアル四邊形ヲ**梯形**トイフ。

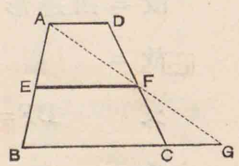


梯形デハ平行デアル二邊ヲ其ノ**底**トイヒ,一ツヲ**上底**,他ヲ**下底**トイフ。ソシテ下底ノ兩端ノ角ヲ其ノ**底角**トイフ。

梯形ノ底デナイ二邊ノ相等シイモノヲ**等脚梯形**又ハ**二等邊梯形**トイフ。

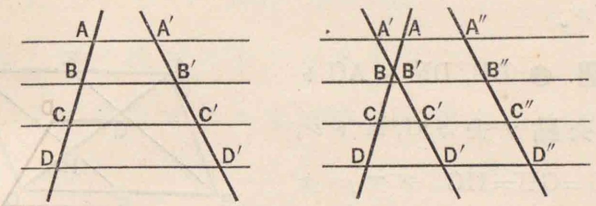
問1. 等脚梯形ノ兩底角ハ相等シク,對角ハ補角ヲナス。

系二 梯形ノ平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ,底ニ平行デ且兩底ノ和ノ半分ニ等シイ。



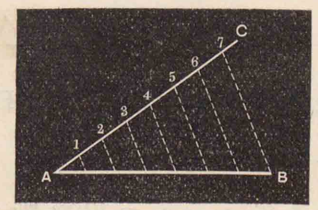
系三 梯形ノ平行デナイ二邊ノ一ツノ中點ヲ通リ底ニ平行ニ引イタ直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ通ル。

定理二十三 若干ノ平行線ガ之ニ交ハル一ツノ直線カラ等シイ線分ヲ截取ルナラバ,他ノ之ニ交ハル直線カラモ等シイ線分ヲ截取ル.



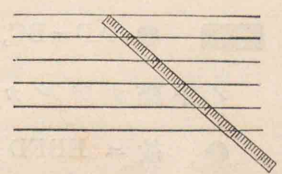
(ACC′A′, BDD′B′ 等ヲ梯形ト考ヘ,定理二十二ノ系三ヲ用ヒテ證明セヨ)

作圖題十 與ヘラレタ線分ヲn等分セヨ。



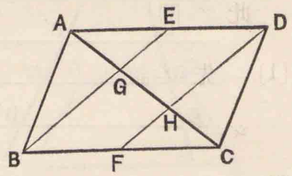
(圖ハ七等分スル場合デアル)

問2. 兩緣ノ平行ナ板ヲ五等分スル簡單ナ方法ヲ工夫セヨ。



31. 證明ノ解析

例 平行四邊形ABCDノ一組ノ對邊AD, BCノ中點ヲ夫々E, Fトスレバ, BE, DFハ對角線ACヲ三等分スル。



考へ方 ❶ BE, DFトACトノ交點ヲ夫々G, Hトシ, AG=GH=HCデアルタメニハAE=EDデアルカラGE∥HDデナケレバナラヌ。(定理二十二)

❷ 依ツテEBFDハ平行四邊形デナケレバナラヌ。

❸ 從ツテ定理二十ノ何レカ一ツノ條件ガワカレバヨイ。然ルニ ED=BF, ED∥BF ハ假設ヨリ直チニワカルコトデアル。

依ツテ此ノ最後ノコトヲ出發點トシテ上ノ推理ヲ逆ニ進メバ本問題ノ證明ガ得ラレル。

證明 ❶ AD=BC, AD∥BCデ, E, Fハ夫々AD, BCノ中點デアルカラED=BF且ED∥BFデアル。

❷ 故ニ EBFDハ平行四邊形デアル。

❸ 故ニ GE∥HD

❹ ソシテ△AHDニ於テAE=EDデアルカラ

AG=GH (定理二十二系一)

同様ニシテ GH=HC

故ニ AG=GH=HC

此ノ例ノ證明ヲ工夫シタヤウニ,

〔1〕 先ヅ證明スベキ事柄(終結)ガ成立ツモノト假定シ,

〔2〕 次ニ此ノ假定ガ成立ツタメニハドンナ條件ガ必要デアルカヲ次第ニ考へテ,

〔3〕 此等ノ必要ナ條件ト與へラレタ事柄(假設)又ハ既知ノ事柄トノ關係ヲ明カニスル

コトヲ證明ノ**解析**トイフ。

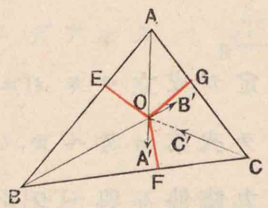
問題ヲ證明スルトキ假設ヨリ終結ガ容易ニ得ラレナイトキハ,上ノヤウニ解析ヲシテ假設又ハ既知ノ事柄カラ直チニ斷定シ得ル關係ヲ得テ,之ヲ出發點トシテ解析デトツタ推理ヲ逆ニ進メバ容易ニ證明ガ得ラレル。

注意 證明ノ解析ハ其ノ考へ方デアル。ソレ故證明ヲ要求スル問題ノ解答ニハ之ヲ記ス必要ハナイ。ケレドモ練習ノタメニ證明ノ前ニ書イテ見ルコトハ甚ダ有益デアル。

32. 三角形ノ内心・傍心・外心・重心・垂心

定理 二十四 **三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.**

解析 $\triangle ABC$ ノ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ヲ夫々 AA', BB', CC' トシテ,此ノ三直線ガ同一ノ點ヲ通ルナラバ,



❶ 先ヅ其ノ中ノ二ツ例ヘバ AA' ト BB' トハ必ズ相交ハラネバナラヌ,依ツテ其ノ交點ヲOトスレバ $\angle BAO+\angle ABO<2R\llcorner$ デナケレバナラヌ。

然ルニ之ハ假設ヨリ明カデアル。(何故カ)

❷ 次ニ AA', BB', CC' ガ同一ノ點デ相交ハルトスレバ CC' ハ點 O ヲ通ラネバナラヌ。

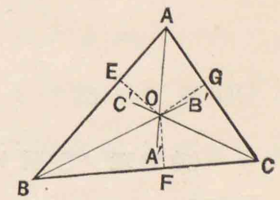
依ツテ OC ヲ結ブ直線ハ CC' ト一致シ $\angle C$ ノ二等分線デナケレバナラヌ。

依ツテOヨリ BC, CA ニ垂線 OF, OG ヲ引ケバ, $OF=OG$ デナケレバナラヌ。

然ルニ之ハOガ $\angle A$, $\angle B$ ノ二等分線ノ交點デアルコトカラ直チニワカルコトデアル。(何故カ)

證明 $\triangle ABC$ ノ $\angle A$, $\angle B$ ノ二等分線ヲ夫々 AA', BB' トスレバ

$$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B<2R\llcorner$$



デアルカラ AA' ト BB' トハ $\triangle ABC$ ノ内部デ相交ハル。

此ノ交點ヲOトシ,Oヨリ三邊 AB, BC, CA ニ夫々垂線 OE, OF, OG ヲ引ケバ

$$OE=OF,\qquad OE=OG$$

故ニ $\qquad OF=OG$

故ニOハ $\angle C$ ノ二等分線上ニアル。(定理十二系)

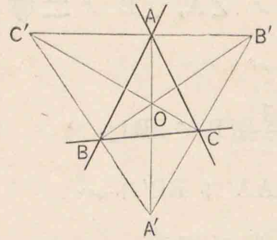
ソシテ角ノ二等分線ハタヾ一ツシカナイカラ OC ハ即チ $\angle C$ ノ二等分線デアル。故ニ三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル。

定義 三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ノ交點ヲ三角形ノ**内心**トイフ。

問 1. 三角形ノ内心ヲ中心トシ,之ヨリ一邊ニ至ル距離ヲ半徑トシテ圓ヲ畫イテ見ヨ。

三角形ノ内心ヨリ三邊マデノ距離ハ皆相等シイ。

定理二十五 **三角形ノ一ツノ内角ト他ノ二ツノ内角ニ隣レル外角トノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.**



(前定理ノ證明ト同ジヤウニシテ證明サレル)

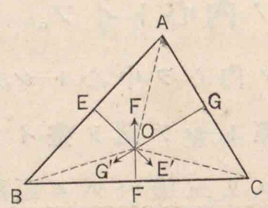
定義 三角形ノ一ツノ内角ト他ノ二ツノ内角ニ隣レル外角トノ二等分線ノ交點ヲ三角形ノ**傍心**トイフ。

三角形ノ傍心ヨリ三邊ニ至ル距離ハ皆相等シイ。

三角形ニハ三ツノ傍心ガアル。

定理二十六 **三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.**

解析 △ABC ノ三邊 AB, BC, CA ノ垂直二等分線 EE', FF', GG' ガ同一ノ點ヲ通ルトスレバ,



❶ 先ヅ其ノ中ノ二ツ例ヘバ EE', FF' ハ相交ハラネバナラヌ。之ハ假設ヨリ明カデアル。依ツテ其ノ交點ヲ O トスル。

❷ EE', FF', GG' ガ同一ノ點デ相交ハルトスレバ, GG' ハ點 O ヲ通ラネバナラヌ。

依ツテ AC ノ中點 G ト O トヲ結ブ直線 OG ハ GG' ト一致シ AC ノ垂直二等分線デナケレバナラヌ。

然ルニ OA=OC デアルカラ, OG ハ AC ノ垂直二等分線デアル。(何故カ)

證明 (略スル)

定義 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ノ交點ヲ三角形ノ**外心**トイフ。

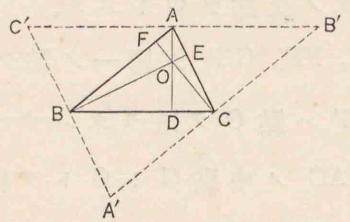
問 2. 三角形ノ外心ヲ中心トシ之ヨリ一頂點ニ至ル距離ヲ半徑トシテ圓ヲ畫イテ見ヨ。

三角形ノ外心ヨリ三頂點マデノ距離ハ相等シイ。

定理二十七 **三角形ノ三頂點ヨリ對邊ヘ引イタ三垂線ハ同一ノ點ヲ通ル.**

證明 △ABC ノ三頂點 A, B, C ヲ通リ夫々對邊ニ平行線ヲ引ケバ,次圖ノヤウニ △A'B'C' ヲ得ル。

然ルトキハ A, B, C ハ △A'B'C' ノ三邊ノ中點トナル。(何故カ)



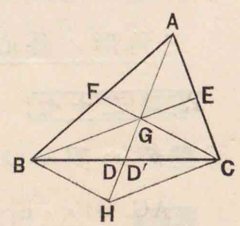
故ニ △ABC ノ三頂點ヨリ其ノ對邊ヘ引イタ垂線 AD, BE, CF ハ夫々 △A'B'C' ノ三邊 B'C', C'A', A'B' ノ垂直二等分線デアル。

故ニ此ノ三直線ハ同一ノ點ヲ通ル。(定理二十六)

定義 三角形ノ三頂點ヨリ對邊ヘ引イタ三垂線ノ交點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。

定理二十八 **三角形ノ三中線ハ同一ノ點ヲ通リ, 且其ノ點ハ各頂點ヨリ夫々各中線ノ $\frac{2}{3}$ ノ所ニアル.**

證明 △ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トシ, BE, CF ノ交點ヲ G トシ, AG ヲ結ビ, 其ノ延長ガ BC ト交ハル點ヲ D' トスル。



D ト D' トガ一致スルコトヲ證明スレバヨイ。

今 AD' ノ延長ト B ヨリ GC ニ平行ニ引イタ BH トノ交點ヲ H トシ, HC ヲ結ベバ, G ハ AH ノ中點デアル。(定理二十三系一)

故ニ GE ∥ HC 卽チ BG ∥ HC (定理二十二)

故ニ GBHC ハ平行四邊形デアル。

故ニ D' ハ BC ノ中點デ D ト一致スル。

從ツテ三中線 AD, BE, CF ハ同一ノ點 G ヲ通ル。

ソシテ $AG=GH=2GD$

故ニ $AG=\frac{2}{3}AD$

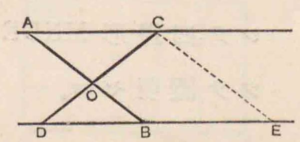
同樣ニ $BG=\frac{2}{3}BE,\quad CG=\frac{2}{3}CF$

定義 三角形ノ三中線ノ交點ヲ三角形ノ**重心**トイフ。

問題 7

1. 平行四邊形ノ一對角線ガ其ノ兩端ニアル角ヲ二等分スレバ, 其ノ平行四邊形ハ菱形デアル。

2. 相等シイ二線分 AB, CD ガ右ノ圖ノヤウニ平行線 AC, DB ノ間ニアッテ O ニ於テ交ハルトキハ, OA=OC 及ビ OB=OD デアル。



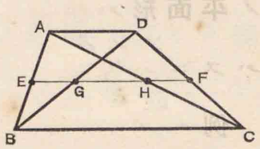
3. 四邊形 ABCD ノ四邊 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ,

(1) 四邊形 EFGH ハ平行四邊形デアル。

(2) 此ノ平行四邊形 EFGH ノ周ハ ABCD ノ兩對角線ノ和ニ等シイ。

(3) EG, FH ハ互ニ二等分スル。

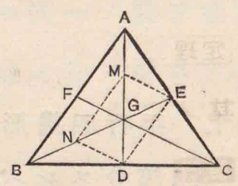
4. 梯形 ABCD ニ於テ AD, BC ヲ兩底トシ, AB, CD, BD, AC ノ中點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ,



(1) E ヲ過ギテ BC ニ平行デアル直線ハ G, H, F ヲ通ル。從ツテ四點 E, G, H, F ハ同ジ直線ノ上ニアル。

(2) $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$, $GH=\frac{1}{2}(AD\sim BC)$

5. 三角形ノ三ツノ中線ガ同一ノ點ヲ通ルコトヲ右ノ圖ノヤウニ BE, CF ノ交點ヲ G トシ, AG, BG ノ中點ヲ夫々 M, N トシテ, 四邊形 MNDE ガ平行四邊形デアルコトニヨツテ證明セヨ。



第七章　多角形ノ面積

33. 面　積

定義　平面形ノ内ニアル平面ノ大サ(廣サ)ヲ其ノ平面形ノ**面積**トイフ。

二ツノ平面形ノ面積ガ相等シイコトヲ其ノ二ツノ平面形ハ**相等シイ**又ハ**等積デアル**トイヒ,之ヲ表ハスニハ等號ニヲ用ヒル。

例ヘバ △ABC ト △DEF トガ等積デアルトキハ之ヲ　△ABC=△DEF　ノヤウニ書ク。

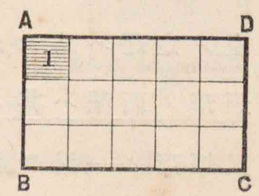
注意　合同デアル多角形ハ等積デアルガ,等積デアル多角形ハ必ズシモ合同デハナイ。

34. 矩形ノ面積

定理 二十九　**矩形(ABCD)ノ面積ヲ表ハス數値(S)ハ其ノ二隣邊ヲ表ハス數値(a, b)ノ積ニ等シイ。***

證明　(1) a, b ヲ共ニ整數トスル。

AB ヲ a 等分シ, AD ヲ b 等分シ,各分點ヨリ夫々二隣



* 以下一々圖ニ就イテ, 假設, 終結ヲ説明シナイデ, 定理ノ中ニ符號ヲ挿ミ之ヲ示スコトニスル。作圖題ニ就イテモ之ニ準ズル。

邊ニ平行ナ直線ヲ引ケバ,矩形ABCDハ明カニ ab 箇ノ單位面積ニ分ケラレル。

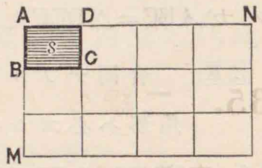
故ニ　$$S=ab$$

(2)　a, b ヲ分數トシ, $a=\frac{p}{m}$, $b=\frac{q}{n}$ トスル。但シ m, n, p, q ハ皆整數トスル。

AB, AD ヲ夫々 M, N マデ延長シ,

$$AM=m\,AB,$$
$$AN=n\,AD$$

ナルヤウナ矩形MNヲ作レバ二隣邊AM, ANヲ表ハス數値ハ夫々 p, q デ,



且此ノ矩形ハモトノ矩形ABCDノ mn 倍デアル。

故ニ　$$mn\cdot S=pq$$

故ニ　$$S=\frac{pq}{mn}=\frac{p}{m}\cdot\frac{q}{n}=ab$$

又 a, b ノ中何レカ一ツガ整數デ他ガ分數デアル場合ニモ本定理ハ成立ツ。

上ノ定理ハ略シテ次ノヤウニモイフ。

矩形ノ面積ハ其ノ二隣邊ノ積ニ等シイ。

又矩形ノ一邊ヲ**底**トイヘバ其ノ隣邊ヲ**高サ**トイヒ,或ハ二隣邊ヲ夫々**長サ**及ビ**幅**トモイフカラ,

矩形ノ面積ハ底ト高サ(又ハ長サト幅)トノ積ニ等シイ。

系　正方形ノ面積ハ,其ノ一邊ノ二乘冪(平方)ニ等シイ。

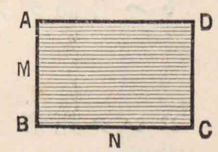
一邊ガABデアル正方形ヲ**ABノ上ノ正方形**トイヒ,其ノ面積ヲ $\overline{AB}^2$ デ表ハシ,之ヲ**ABノ平方**トイフ。

一邊ガ線分Aニ等シイ正方形ノ面積ヲ上ニ準ジテ A^2 デ表ハシ,之ヲ**Aノ平方**トイフコトガアル。

矩形ノ面積,正方形ノ面積トイフベキヲ紛レル虞ノナイ限リ單ニ矩形,正方形トイフコトガ多イ。

35.　二線分ノ矩形

定義　二隣邊ガ夫々二線分ニ等シイ矩形ヲ其ノ**二線分ノ矩形**トイフ。



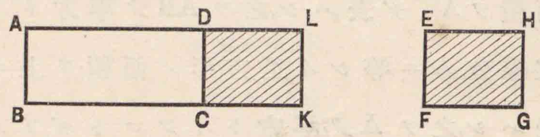
例ヘバ矩形ABCDノ二隣邊AB, BCガ夫々二線分M, Nニ等シイトキハ此ノ矩形ヲ**M, Nノ矩形**又ハ**M, Nノ包ム矩形**トイヒ,其ノ面積ヲ矩形M·N又ハ□M·Nノヤウニ書キ表ハス。

又此ノ矩形ヲAB, BCノ矩形トモイヒ,其ノ面積ヲ

矩形 AB・BC 又ハ $\square$AB・BC トモ書ク。但シ

$\square$AB・(BC+CD) ノヤウナ場合ハ・ヲ略スコトガ多イ。

定理 三十　**一邊ガ等シイ二ツノ矩形ノ和又ハ差ハ,其ノ等シイ邊ト兩矩形ノ他ノ邊ノ和又ハ差トノ矩形ニ等シイ.**



假設　矩形 ABCD, EFGH ニ於テ

$AB=EF,\quad BC>FG$　トスル。

終結　[1]　$\square AB\cdot BC+\square EF\cdot FG=\square AB(BC+FG)$

[2]　$\square AB\cdot BC-\square EF\cdot FG=\square AB(BC-FG)$

證明　[1]　BC ヲ延長シ CK=FG ナルヤウニ K ヲ取リ,矩形 ABKL ヲ作レバ,矩形 DK ト矩形 EG トハ合同デアルカラ,

$$\square AK=\square AC+\square EG$$

ソシテ矩形 ABKL ハ AB ト, BC+FG ニ等シイ BK トノ矩形デアルカラ,

$$\square AC+\square EG=\square AB(BC+FG)$$

故ニ　$\square AB\cdot BC+\square EF\cdot FG=\square AB(BC+FG)$

[2]　同樣ニ

$$\square AB\cdot BC-\square EF\cdot FG=\square AB(BC-FG)$$

注意　三線分 A, B, C ノ數値ヲ夫々 a, b, c トスレバ,

$$ab\pm ac=a(b\pm c)\quad\text{(複號同順)}$$

系　$\square A\cdot B+\square A\cdot C+\square A\cdot D=\square A(B+C+D)$

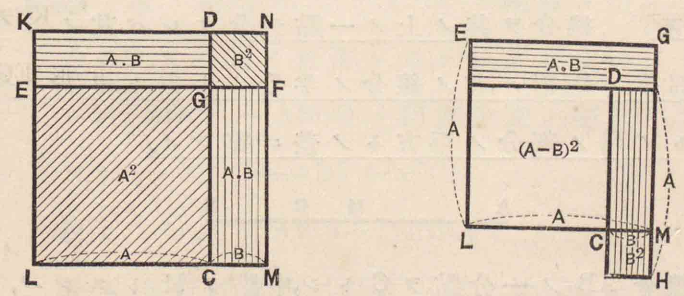
$\square A\cdot B-\square A\cdot C+\square A\cdot D=\square A(B-C+D)$

但シ A, B, C, D ヲ皆線分トシ, $B+D>C$ トスル。

定理 三十一　**二線分 (A, B) ノ和又ハ差ノ上ノ平方ハ,其ノ各線分ノ平方ノ和ニ其ノ二線分ノ矩形ノ二倍ヲ加ヘタモノ,又ハ其ノ兩平方ノ和カラ其ノ矩形ノ二倍ヲ引イタモノニ等シイ.**

[1]　$(A+B)^2=A^2+B^2+2\square A\cdot B$

[2]　$(A-B)^2=A^2+B^2-2\square A\cdot B$　(但シ $A>B$ トスル)



注意　二線分 A, B ノ數値ヲ夫々 a, b トスレバ,

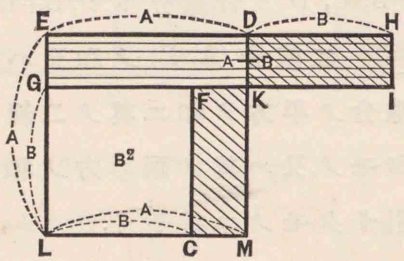
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab,\qquad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

系一　<u>或線分ノ平方ハ,其ノ半分ノ平方ノ四倍ニ等シイ。</u>

系二　<u>面積ノ等シイ兩正方形ノ邊ハ相等シイ。</u>

定理 三十二　**二線分 (A, B) ノ平方ノ差ハ,其ノ二線分ノ和ト差トノ矩形ニ等シイ.**

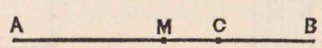
$$A^2-B^2=\square(A+B)(A-B)\quad(\text{但シ } A>B \text{ トスル})$$



注意　二線分 A, B ノ數値ヲ夫々 a, b トスレバ,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

系　<u>線分ヲ其ノ上ノ一點デ分ケレバ,其ノ二ツノ部分ノ矩形ハ,其ノ線分ノ半分ノ平方ト,中點ト分點トノ間ノ部分ノ平方トノ差ニ等シイ。</u>



線分 AB ノ一分點ヲ C トシ,中點ヲ M トスレバ,

$$AC\cdot CB=\overline{AM}^2-\overline{CM}^2$$

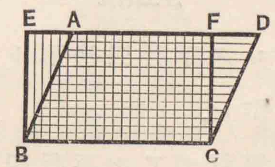
本節ノ定理ヲ等式デ書キ表ハシタモノハ全ク代

數學ノ乘法ニ符合シ,線分及ビ面積ヲ數値デ表ハシタモノハ次篇ニ述ベル乘法ノ公式トナル。

36. 平行四邊形ノ面積

平行四邊形ハ其ノ一邊ノ上ニ立ツト考ヘルコトガアル。此ノトキ其ノ邊ヲ**底**トイヒ,底ト對邊トノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。

定理 三十三　**平行四邊形 (ABCD) ハ之ト等底等高ノ矩形 (EBCF) ニ等シイ.**



證明　底ノ兩端 B, C ヨリ BC ニ垂線ヲ引イテ,對邊 AD 又ハ其ノ延長ト夫々 E, F デ交ハラシメレバ, EBCF ハ ABCD ト同底等高ノ矩形デアル。

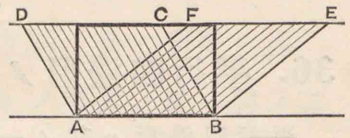
ソシテ　　$\triangle ABE\equiv\triangle DCF$

故ニ　　$\text{▱}ABCD=\square EBCF$

故ニ 平行四邊形 ABCD ハ其ノ底 BC ニ等シイ底ト,其ノ高サ BE ニ等シイ高サトヲモツ矩形ニ等シイ。

系一　等底等高ノ平行四邊形ハ等積デアル。

問 1.　同底又ハ等底ヲ有シ,同ジ平行線ノ間ニアル平行四邊形ハ皆相等シイ。



系二　平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等シイ。

平行四邊形ノ面積ヲS,其ノ底及ビ高サヲ夫々a,及ビhトスレバ,

$$S=ah$$

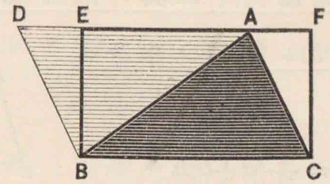
問 2.　與ヘラレタ平行四邊形ト等積デ高サガ二倍ノ矩形ヲ作レ。

系三　等底デ等積デアル平行四邊形ハ等高デアル。又等高デ等積デアル平行四邊形ハ等底デアル。

37. 三角形ノ面積

三角形ハ其ノ一邊ノ上ニ立ツト考ヘルトキ其ノ邊ヲ底トイヒ,底ト之ニ對スル頂點トノ距離ヲ其ノ高サトイフ。

定理 三十四　**三角形ハ等底等高ノ矩形ノ半分ニ等シイ。**（次ノ圖ニヨツテ之ヲ證明セヨ）



系一　等底等高ノ三角形ハ等積デアル。又等底(又ハ等高)等積ノ三角形ハ等高(又ハ等底)デアル。

系二　三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ。

三角形ノ面積ヲS,其ノ底ト高サトヲ夫々a, hトスレバ,

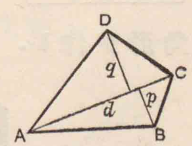
$$S=\frac{1}{2}ah$$

問 1.　三角形ノ中線ハ其ノ三角形ヲ二等分スル。

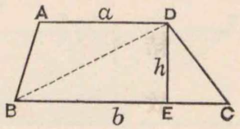
問 2.　同底等積ノ兩三角形ノ頂點ヲ結ブ直線ハ底ニ平行デアルカ,又ハ底デ二等分サレル。

問 3.　四邊形ABCDノ對角線ACガBDヲ二等分スルトキハACハ本形ヲ二等分スル。

問 4.　四邊形ABCDノ對角線ACノ長サヲdトシ,B及ビDヨリACヘ下シタ垂線ノ長サヲ夫々p及ビqトスレバ,此ノ四邊形ノ面積ハ$\frac{1}{2}(p+q)d$デアル。

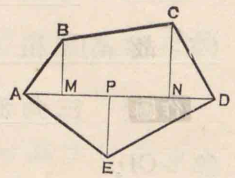


系三　梯形ノ面積(S)ハ其ノ兩底(a, b)ノ和ト高サ(兩底間ノ距離 h)トノ積ノ半分ニ等シイ。



卽チ　$S=\frac{1}{2}(a+b)h$

問 5. 右圖ノ多角形ABCDEノ面積ヲ計算セヨ。但シ AM, MN, ND, BM, CN, EP ヲ夫々 a, b, c, d, e, f トスル。

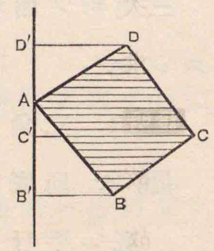


問 6. 右圖ノ四邊形 ABCD ノ面積ヲ計算セヨ。但シ

$AD'=6\,m$,　$AC'=3\,m$,

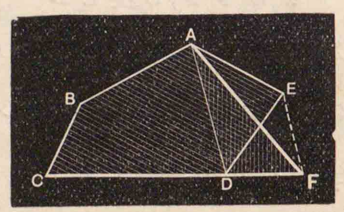
$C'B'=5\,m$,　$DD'=8\,m$,

$CC'=14\,m$,　$BB'=7\,m$　トスル。



38. 多角形ノ等積變形

作圖題 十一　**所設ノ多角形 (ABCDE) ト等積ナル三角形ヲ作レ。**



解析　先ヅ ABCDE ガ,之ヨリ邊數ガ一ツ少イ等積ノ ABCF ニ變形セラレタトシテ, AD, EF ヲ結ベバ,　△ADF=△ADE

故ニ此ノ兩三角形ハ AD ヲ底ト見レバ等高デナケレバナラナイ。

故ニ　　EF ∥ AD

作圖　對角線 AD ヲ引キ,之ニ平行ニ EF ヲ引キ CD ノ延長ト F デ交ハラシメ, AF ヲ結ブ。

次ニ又對角線 AC ヲ引イテ同ジ方法ヲ行ヘバ求メル三角形ヲ得ル。

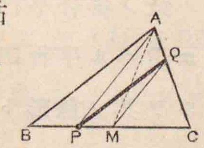
證明　　EF ∥ AD　　(作圖)

故ニ　　△ADF=△ADE

故ニ　　多角形ABCF=多角形ABCDE

故ニ此ノ方法ヲ續ケテ行ヘバ如何ナル多角形デモ一回ニ元ノ多角形ヨリ一邊少イ等積ノ多角形ニ變ヘラレ,終ニ一ツノ三角形トナル。

問　△ABC ノ一邊 BC 上ノ定點 P ヲ通リ,此ノ三角形ノ面積ヲ二等分スル直線ヲ引ケ。



又此ノ面積ヲ三等分スル直線ヲ引ケ。

問題 8

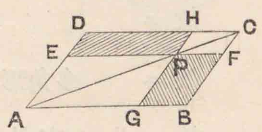
1. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル平行四邊形ハ原形ノ半分ニ等シイ。

2. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 又ハ其ノ延長上ニ任意ノ一點 P ヲ取ルトキハ,三角形 PCB, PCD ハ相等シイ。

3. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ハ原形ヲ二等分スル。

4. 與ヘラレタ點ヲ通ル直線ヲ以テ與ヘラレタ平行四邊形ヲ二等分セヨ。

5. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ノ一點 P ヲ通リ,二隣邊ニ平行ニ EF, GH ヲ引クトキ出來ル平行四邊形 PGBF, PHDE ハ等積デアル。



此ノ場合,平行四邊形 AGPE ト PFCH トヲ**對角線 AC ニ沿ヘル平行四邊形**トイヒ,平行四邊形 PGBF ト PHDE トヲ其ノ餘形トイフ。

雜題 1

1. 正三角形ノ兩底角ノ二等分線ノ交點ヲ過ギ,二邊ニ平行ニ引イタ二直線ハ底ヲ三等分スル。

2. 八角形ニハ幾ツノ對角線ガアルカ。

3. 三角形ノ二ツノ底角ノ外角ノ二等分線ハ必ズ相交ハル,ソシテ其ノ交角ハ兩底角ノ和ノ半分ニ等シイ。又頂角ノ半分ノ餘角ニ等シイ。

4. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ト A カラ BC ヘ下ス垂線トノ交角ハ $\angle B$ ト $\angle C$ トノ差ノ半分ニ等シイ。

5. 凸四角形デハ,

(1) 二隣角ノ二等分線ノ交角ハ他ノ二角ノ和ノ半分ニ等シイ。

(2) 二對角ノ二等分線ノ交角ハ他ノ二角ノ差ノ半分ニ等シイ。

6. $\triangle ABC$ ノ邊 AB ノ中點ヲ D トスル,邊 AC ノ上ニ AE ヲ AC ノ三分ノ二ニ等シク取ッテ CD ト BE トノ交點ヲ O トスレバ, OE ハ BE ノ四分ノ一デアル。

7. 等脚梯形ノ對角線ハ相等シイ。

8. 四邊形 ABCD ニ於テ $AB=CD$ 及ビ $\angle ABC=\angle BCD$

ナラバ,此ノ四邊形ハ梯形デアル。

9. A ヲ直角トスル三角形 ABC ノ ∠B ノ二等分線ト邊 AC トノ交點ヲ D トシ,又 A カラ斜邊 BC ヘ引イタ垂線ト BD トノ交點ヲ E トスレバ AD ハ AE ニ等シイ。

10. 次ノ關係ヲ證明セヨ。但シ A,B ハ二ツノ線分トスル。

(1) $(A+B)\cdot B=A\cdot B+B^2$

(2) $(A-B)\cdot B=A\cdot B-B^2$ (但シ $A>B$)

11. 二ツノ線分ノ和ノ平方ハ其ノ差ノ平方ヨリ其ノ二線分ノ矩形ノ四倍ダケ大キイ。

12. 平行四邊形ノ兩對角線ハ本形ヲ四等分スル。

13. 平行二邊ガ 15*cm* 及ビ 28*cm* デ,其ノ間ノ距離ガ 12*cm* デアル梯形ノ面積ヲ求メヨ。

14. △ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點 E, F ヲ結ブトキハ梯形ガデキル,ソシテ其ノ面積ハ △ABC ノ四分ノ三ニ等シイ。

15. △ABC ヲ邊 BC ノ中點 M カラ二ツノ直線ヲ引イテ三等分セヨ。

第二篇

整式(續キ)

第一章　乘法公式

39. 二項式ノ平方

同ジ形式ノ乘法ノ結果ハ一々乘法ヲ實行スルマデモナク,代表的ノ一ツヲ公式トシテ記憶スレバソレヲ應用シテ簡單ニ求メラレル。本章デハ其ノ公式ヲ列擧スル。此等ノ公式ハ何レモ既ニ實際ノ乘法及ビ圖形等ニツイテ確メラレタモノデアル。

公式 I. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (1)

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (2)

上ノ(1)ニ於テ b ヲ $-b$ ニ代ヘレバ(2)トナルカラ(2)ハ(1)ニ含マレルモノデアル。ソレデ此ノヤウナ二式ハ之ヲマトメテ

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

ト書クコトガアル。此ノ記號 ± ヲ複號トイヒ,此ノ公式デハ兩邊共ニ + 又ハ共ニ − ヲ取ルベキモノトスル。

例 1. $(7x-5y)^2=(7x)^2+2(7x)(-5y)+(-5y)^2$

$=49x^2-70xy+25y^2$

又ハ $(7x-5y)^2=(7x)^2-2(7x)(5y)+(5y)^2$

$=49x^2-70xy+25y^2$

問 1. 次ノ各式ノ平方ヲ作レ。

❶ $x+1$　❷ $x-2$　❸ $2x+3y$　❹ $2x-a$

❺ $2x-5y$　❻ $x-\dfrac{a}{2}$　❼ $-a+b$　❽ $-a-b$

問 2. $3(x+3)^2+5(x+5)^2-8(x+8)^2=0$ ヲ解ケ。

例 2. $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

問 3. $(a-b+c)^2$ ヲ求メヨ。

例 3. 本節ノ公式ヲ用ヒテ73ノ平方ヲ求メヨ。

$73^2=(70+3)^2=70^2+2\times70\times3+3^2$

$=4900+420+9$

$=5329$

例 4. $997^2=(1000-3)^2=1000^2-2\times1000\times3+9$

$=1000000-6000+9$

$=994009$

問 4. 305, 98, 1.002, 9.97 ノ平方ヲ求メヨ。

40. 二數ノ和ト差トノ積

公式 II. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

例 1. $(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-3^2$

$=4x^2-9$

問 1. 次ノ積ヲ求メヨ。

❶ $(4x-5)(4x+5)$　❷ $(3a+2b)(3a-2b)$

❸ $(7a+3b)(3b-7a)$　❹ $(-a+b)(-a-b)$

例 2. $(a+b-c)(a-b+c)=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-b^2+2bc-c^2$

問 2. 次ノ積ヲ求メヨ。

❶ $(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$

❷ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

❸ $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

例 3. $53\times47=(50+3)(50-3)$

$=50^2-3^2=2500-9$

$=2491$

問 3. 82×78, 1003×997 ヲ求メヨ。

41. 二ツノ二項式ノ積

公式III. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

此ノ公式ノ a, b ノ一方又ハ兩方ノ符號ヲ變ヘレバ

$$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$$

$$(x-a)(x+b)=x^2+(-a+b)x-ab$$

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$$

ノ三ツノ式ガ得ラレルガ,此等ハ總テ公式 III ニ含マレルモノデアル。

例 1. $(x+3)(x+5)=x^2+(3+5)x+3\times5$

$$=x^2+8x+15$$

例 2. $(x-3)(5-x)=-(x-3)(x-5)$

$$=-(x^2-8x+15)$$

$$=-x^2+8x-15$$

例 3. $(2x-3)(2x+4)=(2x)^2+(-3+4)(2x)+(-3)\times4$

$$=4x^2+2x-12$$

問 1. 次ノ積ヲ求メヨ。

❶ $(x+3)(x-5)$　❷ $(x+5)(x+6)$

❸ $(x+3)(x-2)$　❹ $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

❺ $(x-5)(x-6)$　❻ $(x+y)(x-2y)$

❼ $(x+5a)(2a-x)$　❽ $(3x+2)(3x-5)$

注意 公式 III デ $a=b$ トスレバ公式 I ヲ得ル。

又公式 III デ $a=-b$ トスレバ公式 II ヲ得ル。

依テ公式 I, II ハ共ニ公式 III ノ特別ナ場合ニ過ギナイ。

問 2. $(x-8)(x+12)=(x+1)(x-6)$ ヲ解ケ。

問題 9

公式ニヨツテ次ノ各式ヲ計算セヨ [1-12]

1. $(a+b)^2+(a-b)^2$　2. $(a+b)^2-(a-b)^2$

3. $(a+b-c+d)^2-(a-b+c-d)^2$

4. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$　5. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

6. $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$

7. $(m-n-p+q)(p-q+m-n)$

8. $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

9. $(ab-c)(2c+ab)$　10. $(a+b+3c)(a+b-5c)$

11. $(x+8)(x-3)-(x-4)^2$　12. $(1-2x)(1+2x)(1+5x^2)$

13. 乘法ニヨリ

$$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

ナルコトヲ確メ,次ノ各式ノ立方ヲ求メヨ。

❶ $x+a$　❷ $x-1$　❸ $x+y$

第二章　因數分解

42. 因數分解

一ツノ整式ガ幾ツカノ整式ノ積ニ等シイトキハ後ノ各整式ヲ前ノ因數トイフ。

或整式ヲ幾ツカノ因數ノ積ニ書キ直スコトヲ其ノ式ヲ**因數ニ分解スル**トイフ。

例ヘバ $ab+ac$ ヲ書キ直シテ $a(b+c)$ トスルコトハ $ab+ac$ ヲ因數ニ分解スルコトデアル。

幾ツカノ因數ノ積ヲ求メル計算ハ乘法デ，除法ハ積ト其ノ一ツノ因數トヲ知ツテ他ノ因數ヲ求メル計算デアル。ソシテ因數分解ハ積ダケヲ知ツテ其ノ總テノ因數ヲ求メルモノデアル。依テ除法ノヤウニ單一ナ計算ニヨルコトガ出來ナイ。

43. 公因數デ括ルコト

例 1. $ax+bx-cx=x(a+b-c)$

此ノヤウニスルコトヲ各項ヲ**公因數**(共通ノ因數)**デ括ル**トイフ。公因數ハ視察ニヨツテ求メラレル。

例 2. $ax+bx-ay-by=x(a+b)-y(a+b)$

$=(a+b)(x-y)$

問 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

❶ $2a-2b$　❷ $ax+bx$

❸ $-3x-3y+3z$　❹ $ab-a$

❺ $-3xy+y^2$　❻ $ax-bx+ay-by$

❼ $2a^2bc+4ab^2c+2b^3c$　❽ $7a(m-n)-m+n$

❾ $2ax+3bx+2ay+3by$

44. 公式 I ニヨル因數分解

例 1. $x^2+6x+9=x^2+2(x)(3)+3^2$

$=(x+3)^2$

例 2. $9a^2-12ab+4b^2$

$=(3a)^2-2(3a)(2b)+(2b)^2$

$=(3a-2b)^2$

例 3. $-x^2-y^2+2xy=-(x^2-2xy+y^2)$

$=-(x-y)^2$

問 1. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

❶ $x^2-12x+36$　❷ $4x^2-12xy+9y^2$

❸ $9-6a+a^2$　❹ $a^4+2a^2b^2+b^4$

❺ $2ab-b^2-a^2$　　❻ $-81x^2-180x-100$

例 4. $(m+5n)^2+2(m+5n)(3m-n)+(3m-n)^2$

$$=\{(m+5n)+(3m-n)\}^2$$
$$=(4m+4n)^2$$
$$=\{4(m+n)\}^2$$
$$=16(m+n)^2$$

問 2. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

❶ $(a-b)^2+2(a-b)c+c^2$

❷ $(x^2-5x+4)^2-4(x^2-5x+4)(5x-3)+4(5x-3)^2$

45. 公式 II ニヨル因數分解

例 1. $25x^2-16y^2=(5x)^2-(4y)^2$

$$=(5x+4y)(5x-4y)$$

例 2. $(a+b)^2-(a-c)^2$

$$=\{(a+b)+(a-c)\}\{(a+b)-(a-c)\}$$
$$=(2a+b-c)(b+c)$$

問 1. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

❶ $9a^2-25b^2$　　❷ $b^2c^2-4d^2$

❸ $\frac{1}{4}m^2-\frac{4}{9}$　　❹ $1-x^2$

❺ $3ab^3-27a^3b$　　❻ $(x+2y)^2-(2x-y)^2$

例 3. $a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2$

$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

問 2. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

❶ x^4-81　　❷ $1-x^4$

❸ x^8-y^8　　❹ $16a^8-b^4$

46. 公式 III ニヨル因數分解

公式 III ヲ逆ニ書ケバ

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

依テ $p=a+b,\ q=ab$ ナルヤウニ二數 a, b ヲ定メルコトガデキレバ，x^2+px+q ノ形ノ式ハ

$$x^2+px+q=(x+a)(x+b)$$

トシテ因數ニ分解サレル。

卽チ x^2+px+q ヲ因數分解スルニハ加ヘテ x ノ係數トナリ，掛ケテ絕對項トナルヤウナ二數ヲ求メレバヨイ。但シ此ノヤウナ式ハ常ニ因數ニ分解サレルトハ限ラナイカラ，上記ノヤウナ二數ハ存在シナイコトモアル。

例 1. $x^2+12x+35$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解　和ガ12デ積ガ35トナルヤウナ二數ヲ求メレバヨイ。

サテ積ガ35トナル二數ハ

$(1, 35), (5, 7), \cdots\cdots$

デ,此ノ中,和ガ12トナルモノハ5ト7デアル。

故ニ　$x^2+12x+35=(x+5)(x+7)$

例 2.　$x^2-9x+20$　ヲ因數ニ分解セヨ。

解　積ガ $+20$ デ和ガ -9 トナルヤウナ二數ハ共ニ負數デアルカラ,

$(-1,-20),\ (-2,-10),\ (-4,-5),\ \cdots\cdots$

ノ中カラ -4 ト -5 ヲ取ツテ

$x^2-9x+20=(x-4)(x-5)$

例 3.　$x^2+4x-21$　ヲ因數ニ分解セヨ。

解　積ガ -21 デ和ガ $+4$ トナルヤウナ二數ハ異符號デ且絶對値ノ差ガ4トナル數デ,其ノ絶對値ノ大ナル方ガ正デナケレバナラヌ。

サテ積ガ21トナル二數ノ絶對値ハ

$(1,\ 21),\ (3,\ 7),\ \cdots\cdots$

デ其ノ差ガ4トナルノハ3ト7デアル。

故ニ　$x^2+4x-21=(x-3)(x+7)$

例 4.　$x^2-5x-36$　ヲ因數ニ分解セヨ。

解　積ガ36トナル二數ノ絶對値ハ

$(1, 36),\ (2, 18),\ (3, 12),\ (4, 9),\ (6, 6),\ \cdots\cdots$

デ其ノ差ガ5トナルノハ4ト9デアル。

故ニ　$x^2-5x-36=(x+4)(x-9)$

問　次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

❶ $x^2+9x+20$　❷ $x^2-14x+40$

❸ x^2-x-6　❹ x^2+x-6

❺ $a^2-8ab+12b^2$　❻ $x^2-6x-91$

❼ $x^2-15xy+14y^2$　❽ $x^2-25x-116$

47. 二數ノ立方ノ和ト差

次ノ公式ハ右邊ノ乘法ヲ實行スレバ容易ニ知ラレルモノデ,因數分解ニ屢用ヒラレル。

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

例 1.　$x^3+1=x^3+1^3$

$=(x+1)(x^2-x+1)$

例 2.　$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$$

問 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

❶ x^3-1　❷ x^3+8y^3

❸ $27a^3+b^3$　❹ $3x^4y-81xy^4$

問題 10

次ノ諸式ヲ因數ニ分解セヨ。[1—20]

1. $x^2-7x-44$　2. $x^2+5x-24$
3. $7x-10-x^2$　4. x^4-13x^2+36
5. $x^2-13xy+42y^2$　6. $x^2+(a-c)x-ac$
7. $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$　8. x^4-10x^2+9
9. $98-7x-x^2$　10. $(a+b)^2-7(a+b)+12$
11. $(x+y-z)^2+15(x+y-z)+56$
12. $x^2+2xy+y^2-x-y-2$
13. $m^2y+6my-27y$　14. $(2x-a-3)^2-(3-2x)^2$
15. $1+2mn-(m^2+n^2)$　16. $(m+n)^3-(m-n)^3$
17. x^6+y^6　18. a^2-b^2-a-b
19. ax^3+bx^3+a+b　20. x^8+x^4-2

雜題 2

1. 次ノ各式ノ括弧ヲ外ヅセ。

$$(7m+5n)^2,\quad \left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n\right)^2,\quad (1-xy)^2$$

2. $327^2=106929$ ヲ用ヒテ 328^2 ト 326^2 トヲ求メヨ。
3. 次ノ各式ヲ平方ノ形ニ直セ。

❶ $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$　❷ $x^2+xy+\frac{y^2}{4}$

❸ $(a-b)^2-4(a-b)c+4c^2$

4. 次ノ各ゝデ其ノ二ツノ式ノ差異ヲ説明セヨ。

❶ a^2-b^2 ト b^2-a^2　❷ $(a-b)^2$ ト $(b-a)^2$

5. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

❶ $(x+y)(-x-y)$　❷ $(x+y)(-x+y)$

次ノ各式ヲ計算セヨ。[6—10]

6. $(x-y)(y-x)$　7. $(a-b-c)^2$
8. $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$
9. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
10. $(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$
11. 258^2-257^2 ヲ簡便ニ計算セヨ。
12. 次ノ各式ノ括弧ヲ外ヅシテ簡約セヨ。

❶ $(x-13)(x+12)$　❷ $(x+2m)(x+3m)$

❸ $(x+2)(x-3)-(x-5)(x+6)+(x-4)(x-7)$

13. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

❶ $x^2+2x-24$　❷ $x^2-2x-24$

❸ $x^2-10x-24$　❹ $a^2-14a+24$

❺ $a^2-a(b+c)+bc$　❻ $x(a-b)^2-x(c-d)^2$

❼ $(m+n)x^2-(m+n)y^2$

14. 長サ a 米,幅 b 米ノ矩形ノ花壇ノ周圍ノ外側ニ幅 c 米ノ芝生ガアル,此ノ芝生ノ面積ハ何程カ。

15. 二桁ノ數ト其ノ各桁ノ數字ヲ入レ換ヘテ出來ル數トノ和ト差トヲ表ハス式ヲ作リ,此ノ二數ノ和ハ11ノ倍數デ,此ノ二數ノ差ハ9ノ倍數デアルコトヲ說明セヨ。

16. 次ノ恒等式ノ眞ナルコトヲ示セ。(何レモ左邊ヲ變ジテ右邊ト同ジ式ニ直スヤウニセヨ)

❶ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

❷ $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$

❸ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$

❹ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

❺ $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1=(x^2-5x+5)^2$

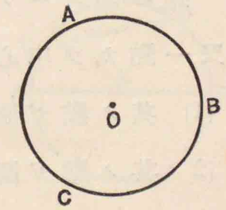
第三篇
圓

第一章　圓ノ基本性質

48. 圓・圓周

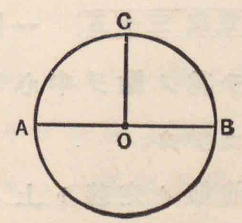
定義　圓トハ一ツノ曲線デ圍マレタ平面ノ一部分デ,此ノ曲線上ノスベテノ點ハ形內ノ一定點ヨリ等距離ニアル。其ノ曲線ヲ**圓周**トイヒ,其ノ定點ヲ圓ノ**中心**トイフ。

圓及ビ圓周ヲ表ハスニハ通例圓周上ノ三點ヲ表ハス文字ヲ並記スルカ,又ハ中心ヲ表ハス文字デ示ス。例ヘバ圓周ABC又ハ圓Oノヤウデアル。



注意　圓ヲ圓周ノ意ニ用ヒルコトガアル。

定義　圓ノ中心カラ圓周上ノ一點ニ引イタ線分ヲ圓ノ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ兩端ガ圓周上ニアル線分ヲ圓ノ**直徑**トイフ。



問 半徑 5cm ノ圓ヲ畫ケ。又前ノ圓ノ中心ヲ中心トシ半徑 3cm ノ圓ヲ畫ケ。

同ジ中心ヲ有スル圓ヲ**同心圓**トイフ。

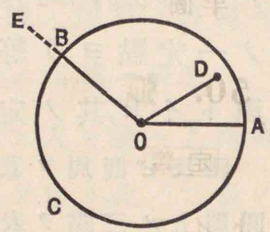
49. 圓ト點トノ位置ノ關係

圓ノ中心カラ一點マデノ距離ガ

(1) 半徑ヨリ小デアレバ其ノ點ハ圓內ニアッテ,

(2) 半徑ニ等シケレバ其ノ點ハ圓周上ニアッテ,

(3) 半徑ヨリ大デアレバ其ノ點ハ圓外ニアル。



又一點カラ中心マデノ距離ハ

(1) 其ノ點ガ圓內ニアレバ半徑ヨリ小デ,

(2) 其ノ點ガ圓周上ニアレバ半徑ニ等シク,

(3) 其ノ點ガ圓外ニアレバ半徑ヨリ大デアル。

此等ノコトカラ次ノ定理ヲ得ル。

定理三十五 **一點ヨリ等シイ距離ニアル點ハスベテ其ノ點ヲ中心トシ,其ノ距離ヲ半徑トスル圓周上ニアル.**

前節ノ定義ト上ノ定理トカラ容易ニ次ノ事柄ガワカル。

(1) 同ジ圓ノ半徑(從ッテ直徑)ハ相等シイ。

(2) 半徑ノ相等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

(3) 合同デアル二ツノ圓ノ半徑ハ相等シイ。

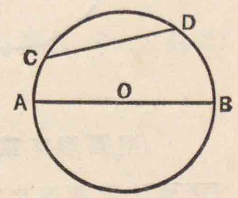
(4) 直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分スル。

定義 直徑デ分ケラレタ圓ノ二部分ヲ各,**半圓**トイフ。

半圓ノ相等シイコトヲ紙ヲ折ッテ驗セ。

50. 弧・弦

定義 圓周ノ一部分ヲ**弧**トイフ。



弧ヲ表ハスニ,例ヘバ弧 CD 又ハ $\overset{\frown}{CD}$ ト記ス。

同ジ圓或ハ等シイ圓(合同ナル圓)ニ於テ,二ツノ弧ノ大サハ線分ノ大サト同ジヤウニ之ヲ重ネ合ハセテ比較スルコトガデキル。

圓周ヲ二ツノ弧ニ分ケタトキ,此ノ二ツノ弧ヲ**共軛弧**トイヒ,其ノ大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**トイフ。ケレドモ單ニ弧トイフトキニハ通例劣弧ヲ指スモノトスル。

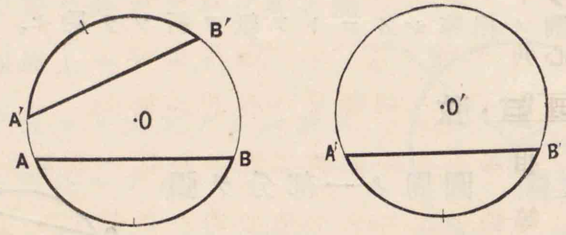
定義 同ジ圓周上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ**弦**トイフ。

直徑ハ中心ヲ通ル弦デアル。

定理 三十六 **同圓又ハ等圓ニ於テ,**

[1] **等弧ニ對スル弦ハ相等シイ.**

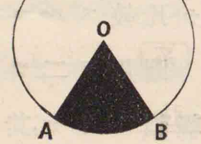
[2] **等弦ニ關スル弧ハ相等シイ.**



(兩圖形ヲ重ネ合ハセテ證明セヨ)

注意 兩圖形ヲ重ネ合ハセテ或事柄ヲ證明スル方法ヲ**重置法**トイフ。

定義 圓ノ二ツノ半徑ハ其ノ圓ヲ二ツノ部分ニ分ケル,其ノ中ノ一方ダケヲ考ヘルトキハ之ヲ**扇形**トイフ。



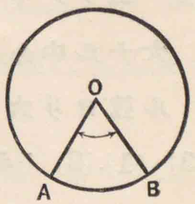
右ノ圖ニ於テ AOB ハ扇形デアル。

第二章 中心角·圓周角

51. 中心角

定義 圓ノ二ツノ半徑ノ夾ム角ヲ**中心角**トイフ。

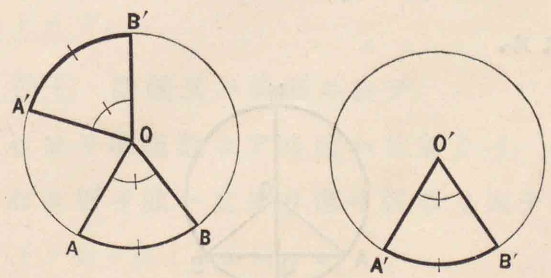
中心角ハ其ノ角内ニアル**弧ノ上ニ立ツ**トイフ。例ヘバ右ノ圖ニ於テ中心角 AOB ハ弧 AB ノ上ニ立ツ。



定理 三十七 **同圓又ハ等圓ニ於テ,**

[1] **相等シイ中心角ニ對スル弧ハ相等シイ.**

[2] **等弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シイ.**(重置法)



系 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ中心角ニ對スル弦ハ相等シイ。

問 圓ヲ畫イテ之ヲ切拔キ,之ヲ二ツニ折合ハセテ其ノ中心ヲ求メヨ。

前ノ定理ヲ擴張シテ更ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 三十八 同圓又ハ等圓ニ於テ,

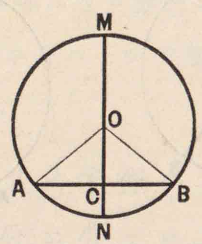
[1] 大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大デアル. (重置法)

[2] 二ツノ中心角ガ共ニ劣角デ不等デアルトキハ, 大ナル中心角ニ對スル弦ガ小ナル中心角ニ對スル弦ヨリ大デアル.

[3] [1],[2]ノ逆モ眞デアル.

52. 中心ヨリ弦ニ引イタ垂線

定理 三十九 弦(AB)ニ垂直デアル直徑(MN)ハ此ノ弦及ビ此ノ弦ニ對スル二ツノ弧(ANB, AMB)ヲ二等分スル.



證明 中心ヲOトシ, ABトMNトノ交點ヲCトスレバ, $\triangle ACO \equiv \triangle BCO$ (定理十二)

故ニ $AC=BC$

又 $\angle AON=\angle BON$

故ニ $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{BN}$ (定理三十七[1])

從ッテ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$

系一 弦ノ垂直二等分線ハ中心ト其ノ弦ニ對スル弧ノ中點トヲ通過スル。

此ノ系ヨリ所設ノ弧ヲ二等分スルコトガデキル。

系二 弦ノ中點ト中心トヲ通ル直線ハ此ノ弦ニ垂直デアル。

注意 定理三十九ノ弦ニ關スル定理ノ逆ハ系一,系二ノ二ツデアル。

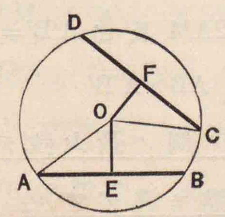
此ノヤウニ假設ガ二ツ以上ノ事柄ヲ含ムトキニハ其ノ一ツト終結トヲ交換シテ生ズル事柄ヲ原定理ノ逆トイフ。

定理 四十 同圓又ハ等圓ニ於テ,

[1] 中心ヨリ等距離ニアル弦ハ相等シイ.

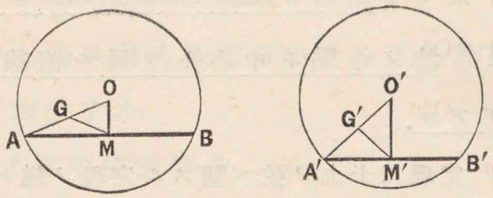
[2] 中心ニ近イ弦ハ之ヨリ遠イ弦ヨリ大デアル.

[1] (下ノ圖ニ就イテ證明セヨ)



[2] **假設** 等圓 O, O′ ノ二弦ヲ夫々 AB, A′B′ トシ,中心 O, O′ ヨリ此ノ二弦ヘ夫々垂線 OM, O′M′ ヲ下シ $OM<O'M'$ トスル。

終結 $AB>A'B'$



證明 OA, O′A′ ヲ引キ,其ノ中點ヲ夫々 G, G′ トシ, GM, G′M′ ヲ結ベバ,

$$AG=GO=GM=A'G'=G'O'=G'M'$$

故ニ　兩三角形 GOM, G′O′M′ ニ於テ

$$\angle OGM<\angle O'G'M' \quad \text{(定理十七)}$$

故ニ　$\angle AGM>\angle A'G'M'$

故ニ　兩三角形 GAM, G′A′M′ ニ於テ

$$AM>A'M' \quad \text{(定理十六)}$$

然ルニ　$AB=2AM$ 及ビ $A'B'=2A'M'$ (定理三十九)

故ニ　$AB>A'B'$

系一　直徑ハ其ノ圓ノ最大弦デアル。

系二　本定理ノ逆モ眞デアル。

系二ハ本定理ト同ジヤウニ證明スルコトガデキルガ,次ノヤウナ證明法ニヨルノガ更ニ便利デアル。

既ニ本定理ニヨッテ證明サレタ事柄ハ次ノ三ツデアル。

[1]　$OM<O'M'$ ナラバ　$AB>A'B'$

[2]　$OM=O'M'$ ナラバ　$AB=A'B'$

[3]　$OM>O'M'$ ナラバ　$AB<A'B'$

然ルニ系二デ證明スベキ事柄ハ次ノ三ツデアル。

[4]　$AB>A'B'$ ナラバ　$OM<O'M'$

[5]　$AB=A'B'$ ナラバ　$OM=O'M'$

[6]　$AB<A'B'$ ナラバ　$OM>O'M'$

先ヅ[4]ヲ證明スルニ,若シ假ニ OM ガ O′M′ ヨリ小デナイトスレバ,必ズ $OM=O'M'$ カ或ハ $OM>O'M'$ デアル。

然ルニ若シ $OM=O'M'$ トスレバ[2]カラ $AB=A'B'$ トナッテ之ハ假設ニ戻ル。

又若シ $OM>O'M'$ トスレバ[3]カラ $AB<A'B'$ トナッテ之モ假設ニ戻ル。

故ニ　$OM<O'M'$ デアル。

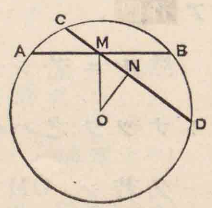
同様ニ[5]及ビ[6]ヲ證明スルコトガデキル。

此ノ證明法ハ與ヘラレタ定理ノ終結ト異ナツタ終結ヲ眞デアルト假定シ,ソレガ皆假設ニ戾ル結果ヲ生ズルコトヲ示シテ,其ノ定理ノ終結ダケガ眞デアルト結論スルモノデアル。(定理十七ノ證明參照)

既ニ證明セラレタ互ニ關聯スル一群ノ定理デ,其等ノ假設ガ或事柄ニ就イテ起ルベキ總テノ場合ヲ盡クシ(從ツテ其ノ中一ツハ必ズ成立ツ),終結ガ互ニ相容レナイモノデアル(卽チ同時ニ二ツ以上眞デアルコトガデキナイ)ナラバ,上ノ理論ハ必ズ成立ツカラ直チニ其ノ逆ハ眞デアルト斷定シテヨイ。此ノ證明法ヲ**轉換法**ト稱スル。

問 1. 第51節定理三十八[1]ノ逆ノ部分ハ轉換法デ直チニ眞デアルト斷定シテヨイカ。

問 2. 圓內ノ同ジ點ヲ通ル諸弦ノ中デ此ノ點デ二等分セラレルモノガ最短デアル。

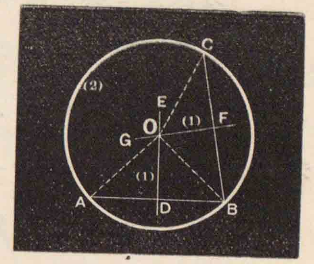


問 3. 圓內ノ同ジ點ヲ通ル諸弦ノ中デ最短ナルモノハ其ノ點ヲ通ル直徑ニ垂直ナル弦デアル。

53. 三點ヲ通ル圓

作圖題 十二 **與ヘラレタ三點ヲ通ル圓周ヲ畫ケ.**

題意 與ヘラレタ三點ヲA, B, Cトシ,此ノ三點ヲ通ル圓周ヲ求メル。



解析 (作圖法ノ解析) 求メル圓周ガ畫キ得ラレタト假定シ,其ノ中心ヲOトスレバOA, OB, OCハ半徑デアルカラ皆相等シクナケレバナラヌ。

ソレデOハABノ垂直二等分線上ニアリ,且BCノ垂直二等分線上ニナケレバナラヌ。

依ツテOハ此ノ兩垂直二等分線ノ交點デナケレバナラヌ。

作圖 ❶ AB, BCノ垂直二等分線ED, GFヲ引キ,其ノ交點ヲOトスル。

❷ Oヲ中心トシOAヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケバ之ガ求メル圓周デアル。

證明 OA, OB, OCヲ結ベバ OA=OB, OB=OC

故ニ OA=OB=OC

故ニ此ノ圓周ハ與ヘラレタ三點A, B, Cヲ通ル。

注意 作圖題ヲ解クニ當ツテ行フ解析ハ,既ニ述ベタ證明ノ解析ト異ナリ解法ノ一部デ,之ニヨツテ作圖ノ方法及ビ其ノ證明ヲ知ルバカリデナク,求メル圖形ヲ悉ク得ルコトガデキル。

上ノ問題デハOハAB, BCノ垂直二等分線ノ交點デアルカラ此ノ兩者ガ平行スルトキハ存在シナイ。

故ニ與ヘラレタ三點A, B, Cガ一直線上ニアレバ解答ハナイ。卽チ問題ハ**不可能**デアル。

又A, B, Cガ一直線上ニナイナラバ此ノ兩垂直二等分線ハ必ズ一點デ交ハルカラ解答ハ一ツアル。

此ノヤウニ問題ノ可能,不可能ニ關スル與ヘラレタ元素間ノ關係ヲ定メテ其ノ可能ノ場合ニ於ケル解答ノ數ヲ定メルコトヲ作圖題ノ**吟味**トイフ。

作圖題ノ完全ナル解法ハ上ノヤウニ先ヅ題意ヲ述べ,次ニ解析,作圖,證明,吟味ノ順ニナスベキデアル。然シ容易ナ問題デハ解析ヲ略スコトガアリ,又解析ヲ詳シク述ベテ作圖又ハ證明ヲ略スコトモアル。

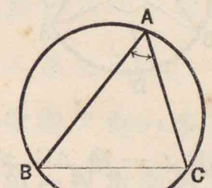
上ノ研究カラ次ノ定理ヲ得ル。

定理 四十一 **一直線上ニナイ三點ヲ通ル圓周ハ一ツアル,ソシテタヾ一ツニ限ル.**

系 三點ヲ共有スル圓周ハ皆相合スル。

54. 圓周角・弓形

定義 圓周上ノ一點ヨリ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲ**圓周角**又ハ**内接角**トイフ。

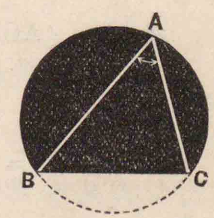


圓周角ハ其ノ二邊ノ間ニ夾マレタ**弧**(又ハ其ノ兩端ヲ結ブ**弦**)**ノ上ニ立ツ**トイフ。

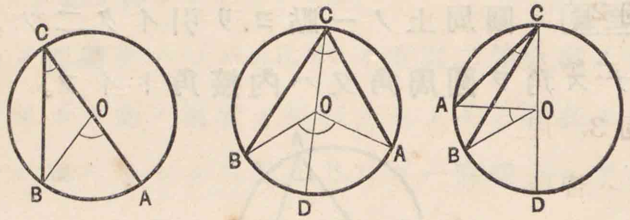
例ヘバ上圖デ圓周角BACハ弧BC又ハ弦BCノ上ニ立ツトイフ。

定義 一ツノ弦デ分ケラレタ圓ノ二ツノ部分ヲ各〻**弓形**トイフ。

弓形ノ弧ノ上ノ一點ト其ノ弦ノ兩端トヲ結ブ二ツノ弦ノナス圓周角ヲ**弓形ノ角**又ハ**弓形ノ含ム角**トイフ。



定理 四十二 一ツノ圓ニ於テ,圓周角(ACB)ハ之ニ對スル弧(AB)ノ上ニ立ツ中心角(AOB)ノ半分ニ等シイ.



證明 (1) ∠ACBノ一邊ACガ中心Oヲ通過スルトキハ, OB=OC デアルカラ

$$\angle OCB=\angle OBC$$

故ニ $\angle AOB=\angle OCB+\angle OBC=2\angle ACB$

(2) ACガ中心Oヲ通過シナイトキハ,直徑CODヲ引ケバ(1)ヨリ,

$$\angle AOD=2\angle ACD$$

及ビ $\angle BOD=2\angle BCD$

故ニ $\angle AOD\pm\angle BOD=2(\angle ACD\pm\angle BCD)$ (複號同順)

故ニ $\angle AOB=2\angle ACB$

故ニ一般ニ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$

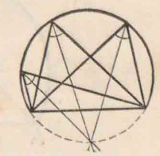
系一 同ジ弓形ノ角ハ皆相等シイ。

系二 同圓又ハ等圓ニ於テ,等弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ. 逆モ眞デアル。

問 1. 圓ノ平行二弦ノ間ニアル弧ハ相等シイ。

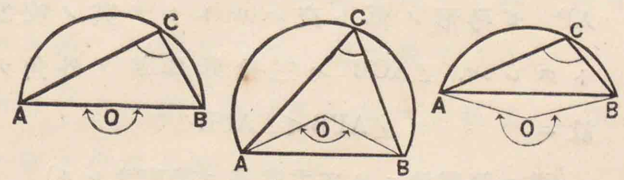
問 2. 圓ノ圓周角ノ二等分線ハ,之ニ對スル弧ヲ二等分スル。

問 3. 同ジ弓形ノ角ノ二等分線ハ皆同一點ニ集交スル。



定理 四十三 半圓ノ角ハ直角デアル.* 又半圓ヨリ大ナル弓形ノ角ハ鋭角デ,半圓ヨリ小ナル弓形ノ角ハ鈍角デアル.

逆モ眞デアル.



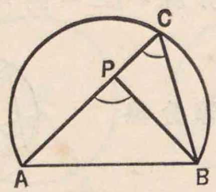
(前節ノ定理ニヨツテ證明セヨ)

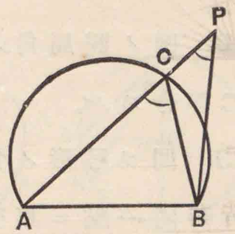
系 直徑ニ對スル內接角ハ直角デアル。

定理 四十四 弓形(ACB)ノ弦(AB)ノ兩端ヲ其ノ弦ノ弓形ノ方ノ側ニアル一點(P)ニ結ブトキ,其ノ二直

* 此ノ定理ハたーれすガ發見シタモノデアルトイフ。

線ノ夾角ハ,其ノ點ガ弓形内ニアレバ弓形ノ角ヨリ大デ,其ノ點ガ弓形外ニアレバ弓形ノ角ヨリ小デアル. 逆モ眞デアル.





證明 (1) 點PガC弓形ACBノ内ニアルトキハ, APノ延長ト弓形ノ弧トノ交點ヲCトスレバ, $\angle APB$ハ三角形BCPノ外角デアルカラ,

$$\angle APB > \angle ACB$$

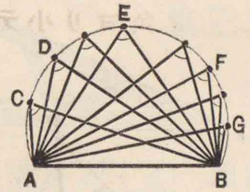
(2) 點Pガ弓形ACBノ外ニアルトキハ, APガ弓形ノ弧ト交ハルトシテ其ノ交點ヲCトスレバ, $\angle ACB$ハ三角形BCPノ外角デアル。

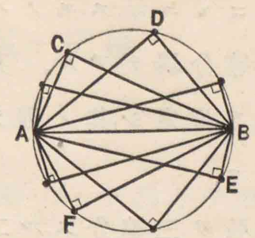
故ニ $\angle APB < \angle ACB$

(逆ハ歸謬法ニヨツテ容易ニ證明サレル)

系 同ジ底邊上ニ其ノ同ジ側ニ立ツ*三角形ノ中デ其ノ頂角ガ等シイモノヽ頂點ハ,皆其ノ底ヲ弦トスル同ジ弓形ノ弧ノ上ニアル。

* 三角形ハ其ノ一邊ノ上ニ立ツト考ヘルトキ其ノ邊ヲ底トイヒ,底ト之ニ對スル頂點トノ距離ヲ其ノ高サトイフ。



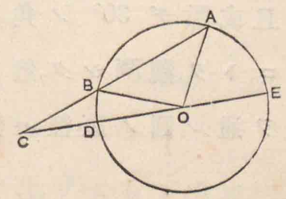


特ニ 同ジ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ直角ノ頂點ハ,皆其ノ斜邊ヲ直徑トスル圓ノ周上ニアル。

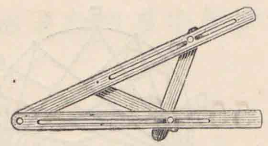
問題 11

1. 等圓又ハ同圓ニ於テ,一ツノ中心角ガ他ノ中心角ノn倍デアルトキハ,前者ニ對スル弧ハ後者ニ對スル弧ノn倍デアル. 逆モ眞デアル.

2. 中心Oナル圓ノ弦ABヲCマデ延長シ, BCヲ此ノ圓ノ半徑ニ等シクシ, CトOトヲ過ギル直線CDOEヲ引キ,圓周ト交ハル點ヲD, Eトスレバ,弧AEハ弧BDノ三倍ニ等シク, $\angle C$ハ$\angle AOE$ノ三分ノ一ニ等シイ。



3. コヽニ示スモノハ角ノ三等分器デアル。其ノ構造ヲ推定シ,其ノ理ヲ説明セヨ。

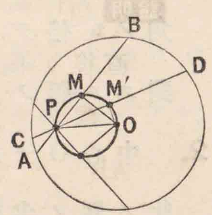


4. 弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ其ノ弧ヲ三等分スルカ。

5. 中心ヲ通ラナイ二ツノ弦ガ互ニ二等分スルコトガアルカ。

6. 圓ノ二ツノ弦AB, CD又ハ其ノ延長ノ交點ヲEトスレバ, ∠AECハ二ツノ弧AC及ビBDノ上ニ立ツ中心角ノ和又ハ差ノ半分ニ等シイ。

7. 同ジ點ヲ通ル弦ノ中點ハ皆其ノ點ト中心トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周上ニアル。

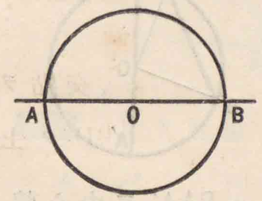


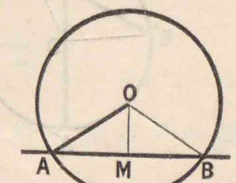
8. 學校ノ建物ノ長サガ20mデ且或點デ30°ノ角ニ含マレルコトヲ觀測シタ,然ラバ此ノ建物ノ兩端ト測點トヲ通ル圓ノ直徑ハ幾米カ。

第三章 割線・切線

55. 割線

定理 四十五 **圓周上ノ一點(A)ヲ過ギテ,此ノ點ニ引イタ半徑(OA)ニ垂直デナイ直線(AB)ハ圓周ト二ツノ點ヲ共有スル.**





證明 (1) ABガ中心Oヲ通ル場合ハ, ABハ卽チ直徑デ,圓周ト其ノ兩端ノ二點ヲ共有スル。

(2) ABガOヲ通過シナイ場合ハ, OヨリABヘ垂線OMヲ下シ, AMノ延長上ニMB=MAナルヤウニ點Bヲ取レバ,

OB=OA (定理十八[2])

故ニBハ圓周上ノ點デアル。

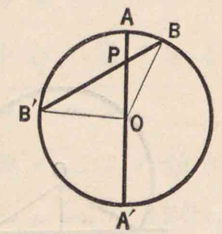
故ニABハ此ノ圓周ト二點ヲ共有シ,且此ノ二點ノ外ニハ共有點ハナイ。 (同上系三)

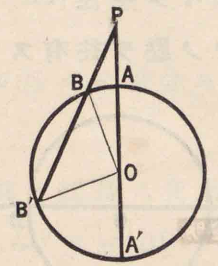
定義 一ツノ直線ガ圓周ト二點ヲ共有ス

ルトキハ,其ノ直線ハ其ノ圓ニ交ハルトイヒ,圓ニ交ハル直線ヲ圓ノ**割線**トイフ。

中心ヲ通ル割線ヲ特ニ**中心線**トイフ。

定理 四十六 **一點ヨリ圓周ニ至ル線分ノ中,其ノ點ヲ通ル中心線ニ合スルモノガ最短又ハ最長デアル.**





假設 Pヲ一點トシ, APA' 又ハ PAA' ヲ中心線トシ, BPB' 又ハ PBB' ヲ他ノ任意ノ割線トスル。ソシテ $PA<PA'$ 及ビ $PB<PB'$ トスル。

終結 [1] $PA<PB$ [2] $PA'>PB'$

證明 [1] $OB \sim OP<PB$ 及ビ $OB=OA$ デアルカラ

$PA<PB$

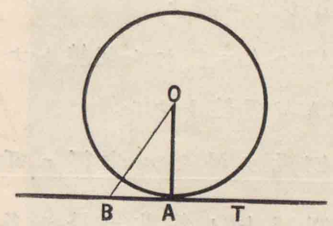
[2] $OP+OB'>PB'$ 及ビ $OB'=OA'$ デアルカラ

$PA'>PB'$

定義 一點ヨリ之ヲ通ル中心線ト圓周トノ交點ノ中ノ近イ方マデノ距離ヲ其ノ**點**ト**圓周**トノ**距離**トイフ。

56. 切線

定理 四十七 **圓周上ノ一點 (A) ヲ過ギテ,此ノ點ニ引イタ半徑 (OA) ニ垂直ナル直線 (BAT) ハ,圓周トタヾ此ノ一點ダケヲ共有スル.**



證明 Bヲ直線 AT 上ノAノ外ノ任意ノ一點トスレバ

$OB>OA$ (定理十八[1])

故ニBハ圓外ニアル。

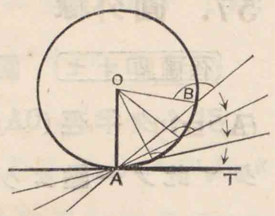
故ニ BAT ハ圓周ト點Aヲ共有スルダケデアル。

定義 圓周ト唯一點ヲ共有スル直線ヲ其ノ圓ノ**切線**トイヒ,其ノ點ヲ其ノ**切點**トイフ。

切線ハ切點ニ於テ其ノ圓ニ**切スル**トイフ。

定理四十五ト定理四十七トハ合ハセテ次ノヤウニ述ベテモヨイ。

圓周上ノ一點ヲ過ギテ,其ノ點ニ引イタ半徑ニ斜交スル直線ハ割線デ,直交スル直線ハ切線デアル。



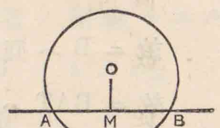
注意 圓ノ割線ABヲAヲ固定シテBガ次第ニAニ近ヅクヤウニ動カストキハ，割線ABハ次第ニ切線ATニ近ヅイテBガAニ重ナルトキニハABハAニ於ケル切線トナル。ソシテ此ノ時ABハOAノ垂線トナル。

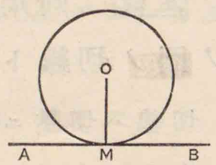
系一 切線ハ切點ヲ過ギル半徑ニ垂直デアル。

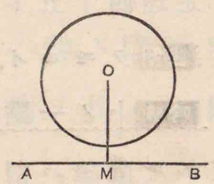
系二 切線ハ圓周上ノ各點ニ於テ各〻一ツアル，ソシテタヾ一ツシカナイ。

系三 切點ヲ過ギテ切線ニ垂直ナル直線ハ其ノ圓ノ中心ヲ通ル。

系四 直線ハ之ト圓ノ中心トノ距離ガ其ノ圓ノ半徑ヨリ小デアルカ，半徑ニ等シイカ，又ハ半徑ヨリ大デアルカニヨツテ，其ノ圓ニ交ハルカ，切スルカ又ハ全ク其ノ圓ニ出會ハナイ。





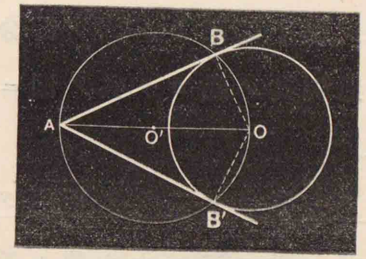


逆モ眞デアル。

問 圓周上ノ與ヘラレタ點ヲ通ル其ノ圓ノ切線ヲ引ケ。

57. 圓外ノ一點ヨリノ切線

作圖題十三 與ヘラレタ圓 (O) ノ外ニアル一點 (A) ヨリ其ノ圓ニ切線ヲ引ケ。



解析 求メル切線ガ引カレタトシテ，之ヲABトシ，又其ノ切點ヲBトシ，OBヲ結ベバ∠ABOハ直角デアル。 (定理四十七系一)

故ニBハAOヲ直徑トスル圓周上ニアル。

從ツテ切點Bハ與ヘラレタ圓周ト，AOヲ直徑トスル圓周トノ交點デナケレバナラヌ。

作圖 AOヲ結ビ，之ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ，此ノ圓周ト與ヘラレタ圓周トノ交點ヲB, B'トシ，AB, AB'ヲ引ケバ之ガ求メル切線デアル。

證明 (略スル)

吟味 圓O'ハ必ズ圓Oニ交ハルカラ，求メル切線ハ常ニ二ツアル。

注意 點 A ガ圓 O ノ周上ニアルトキハ切線ハ一ツダケアル,又 A ガ圓 O ノ内ニアレバ A ヲ通ル切線ハナイ。之ハ圓 O′ ハ圓 O ニ交ハラナイカラデアル。

定理 四十八 圓外ノ一點ヨリ其ノ圓ニ引イタ二ツノ切線デ其ノ點ト切點トノ間ノ部分ハ相等シイ.

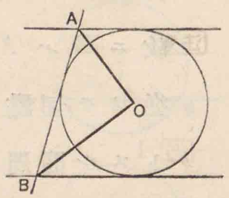
此ノ部分ヲ通例其ノ點ヨリ其ノ圓ニ引イタ**切線ノ長サ**トイフ。

系 圓外ノ一點ヨリ二ツノ切線ヲ引クトキハ,

[1] 二切線ハ其ノ點ヲ通ル中心線ト等角ヲナス。

[2] 其ノ點ヲ通ル中心線ハ二切點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル。

問 圓 O ノ一切線ガ他ノ平行ナル二切線ト夫々 A, B ニ於テ交ハレバ, $\angle AOB$ ハ直角デアル。

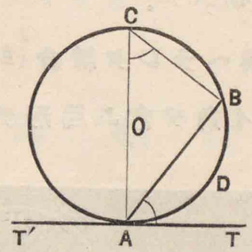


58. 切線ト弦トノナス角

定理 四十九 切線 (TAT′) ト其ノ切點 (A) ヲ通ル弦 (AB) トノナス角 ($\angle BAT$) ハ,其ノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角(其ノ角ニ隣ル弓形ノ角 C) ニ等シイ.

證明 直徑 AC ヲ引ケバ $\angle CAT$ ト $\angle B$ トハ共ニ直角デアルカラ, $\angle BAT$ ト $\angle C$ トハ共ニ $\angle BAC$ ノ餘角デアル。

故ニ
$$\angle BAT = \angle C$$



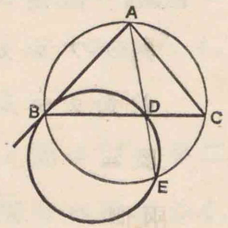
ソシテ $\angle C$ ハ $\angle BAT$ 内ニアル弧 ADB ノ上ニ立ツ圓周角デアル。

注意 同様ニ $\angle BAT'$ ハ弧 ACB ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ。

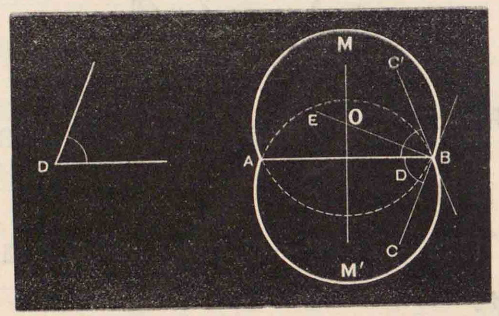
問 1. 圓内デ交ハル二弦 AB, CD ノ交點 P ニ於テ圓 APC ニ切スル直線ヲ引ケバ,此ノ切線ハ BD ニ平行デアル。

系 圓周上ノ一點ヲ通ル直線ト其ノ點ヨリ引イタ弦トノ作ル角ガ,其ノ角内ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイトキニハ,其ノ直線ハ其ノ點ニ於テ其ノ圓ニ切スル。

問2. 二等邊三角形ABCノ頂點Aヲ通ル直線ガ底トDデ,又A, B, Cヲ通ル圓周トEデ交ハルナラバ, ABハ圓BDEニ切スル。



作圖題 十四　與ヘラレタ線分(AB)ノ上ニ,與ヘラレタ角(D)ニ等シイ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ.



作圖 前節ノ定理ニヨッテ直ニ次ノ作圖ヲ得ル。

❶ ABト其ノ一端Bニ於テ與ヘラレタ角Dニ等シイ角ヲ作ル直線BCヲ引ク。

❷ BヨリBCニ垂線BEヲ引ク。

❸ ABノ垂直二等分線ヲ引キBEトノ交點ヲOトスル。

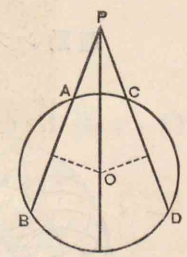
❹ Oヲ中心トシOBヲ半徑トスル圓周AMB

ヲ畫ケバ, ∠ABC外ニアル弓形AMBハ求メルモノデアル。

同様ニABノ上ト反對ノ側ニモ今一ツノ弓形AM'Bガ畫カレルカラ,求メル弓形ハABノ兩側ニ一ツヅヽ出來ル。

問題 12

1. 弧ノ中點ヲ通ル中心線ハ其ノ弧ノ弦ヲ垂直ニ二等分スル。
2. POヲ圓Oノ中心線トシ, PAB, PCDヲ之ト等角ヲナス二ツノ割線トスレバ PA=PC, PB=PD デアル。

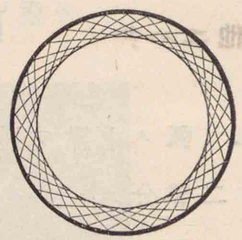


3. 圓周上ノ一點Aニ於ケル切線ニ平行ナル任意ノ弦ヲBCトスレバ,弧ABト弧ACトハ相等シイ。
4. 相交ハル二直線ノ各〻ニ切スル圓ノ中心ハ其ノ二直線ノナス角ノ二等分線ノ上ニアル。
5. 與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ニ於テ此ノ

直線ニ切シ,且與ヘラレタ長サノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。

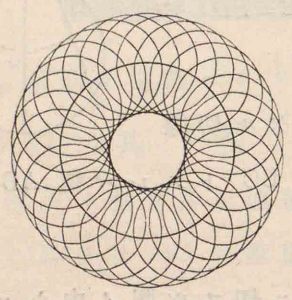
6. 同ジ中心ヲ有スル二ツノ圓ノ中,小圓ニ切スル大圓ノ弦ハ皆相等シク,且皆其ノ切點デ二等分セラレル。

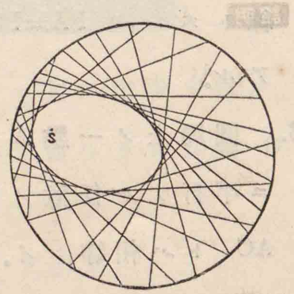
注意 此ノ弦ヲ無數ニ引クトキハ,內圓ハ丁度此等ノ弦デ作ラレタヤウニ見エル。



故ニ此ノ內圓ハ此等ノ弦ノ**包線**トイフ。

點ノ運動ニヨツテ線ノ生ズルコトハ前ニ述ベタガ,線モ運動シテ線ヲ作ルト考ヘラレル。尙次ニ例ヲ示ス。

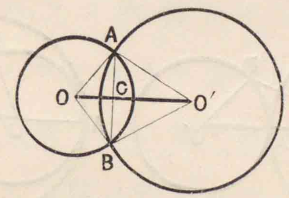




第四章　二ツノ圓

59. 二ツノ圓周ノ共有點

定理 五十 **二圓周ガ其ノ兩中心 (0, 0′) ヲ通ル直線ノ上ニナイ一點 (A) ヲ共有スルトキハ,又其ノ直線ニ關スル其ノ點ノ對稱點ヲ共有スル. ソシテ其ノ他ニハ共有點ハナイ.**



證明 A ヨリ OO′ へ垂線 AC ヲ下シテ延長シ, CB ガ AC ニ等シイヤウニ點 B ヲ取レバ,

$$OB=OA,\quad O'B=O'A$$

故ニ兩圓周 O, O′ ハ共ニ B ヲ通ル。

ソシテ B ハ OO′ ニ關スル A ノ對稱點デアル。

故ニ此ノ二圓周ハ A ノ他ニ OO′ ニ關スル A ノ對稱點 B ヲ共有スル。

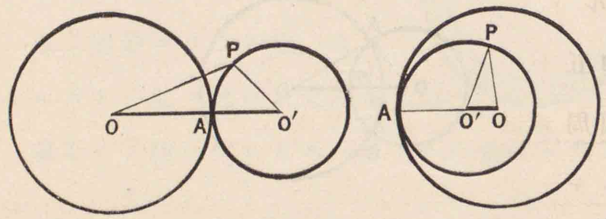
ソシテ此ノ他ニハ共有點ハナイ。(定理四十一系)

定義 二圓周ガ二點ヲ共有スルトキハ此ノ二圓ハ互ニ**相交ハル**トイフ。

系 相交ハル二圓ノ共通弦ハ,其ノ兩中心ヲ通ル直線デ垂直ニ二等分セラレル。

定理五十一 **二圓周ガ其ノ兩中心 (O, O') ヲ通ル直線上ノ一點 (A) ヲ共有スルトキハ,此ノ二圓周ニハ其ノ點ノ他ニ共有點ハナイ。**

(甲) (乙)



證明 A ガ線分 OO' ノ上ニ(甲),又ハ OO' ノ延長上ニ(乙)アルトシテ,圓 O' ノ圓周上ニ A ノ他ニ任意ノ點 P ヲ取レバ,

	(甲)	(乙)
	$OP>OO'-O'P$	$OP<OO'+O'P$
ソシテ	$O'P=O'A$	
故ニ	$OP>OA$	$OP<OA$

故ニ(甲)デハ P ハ圓 O ノ外ニアッテ,(乙)デハ P ハ

圓 O ノ内ニアル。

故ニ(甲)デハ二圓周ハ互ニ他ノ外ニアッテ,點 A ダケヲ共有シ,(乙)デハ圓 O' ガ全ク圓 O ノ内ニアッテ,兩圓周ハ點 A ダケヲ共有スル。

定義 二圓周ガタヾ一點ヲ共有スルトキ此ノ二圓ハ**相切スル**トイヒ,其ノ點ヲ其ノ**切點**トイフ。ソシテ各圓ガ互ニ他ノ外ニアルトキハ之ヲ**外切**トイヒ,小圓ガ全ク大圓ノ内ニアルトキハ,之ヲ**内切**トイフ。

定理五十一ハ次ノヤウニ述ベルコトガデキル。

二圓周ガ其ノ兩中心ヲ通ル直線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,此ノ二圓ハ相切スル。

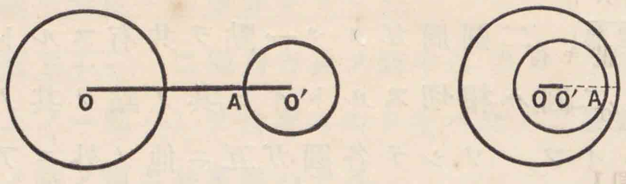
定理五十二 **二圓ガ相切スルトキハ,其ノ切點ハ兩中心ヲ通ル直線ノ上ニアル。** (歸謬法)

ソシテ其ノ中心間ノ距離ハ二圓ノ半徑ノ和(外切ノ場合)又ハ差(内切ノ場合)ニ等シイ。

又二圓ガ相交ハルトキハ,其ノ交點ハ兩中心ヲ通ル直線ノ上ニハナイ。

ソシテ其ノ中心間ノ距離ハ二圓ノ半徑ノ和ヨリ小デ其ノ差ヨリ大デアル。

定理五十三 二圓周ニ全ク共有點ガナイトキハ,其ノ中心間ノ距離ハ二圓ノ半徑ノ和ヨリ大デアルカ,又ハ其ノ差ヨリ小デアル.



60. 二圓ノ位置ト其ノ中心間ノ關係

定理五十四 二圓ノ半徑ヲ夫々r, r'トシ,其ノ中心間ノ距離ヲdトスレバ,

[1] 二圓ガ外方ニ離レルトキハ, $d>r+r'$

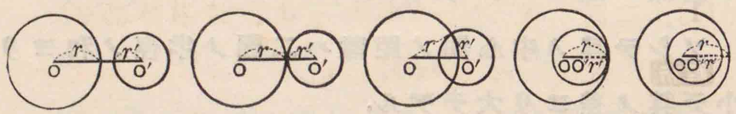
[2] 二圓ガ外切スルトキハ, $d=r+r'$

[3] 二圓ガ相交ハルトキハ, $r+r'>d>r\sim r'$

[4] 二圓ガ内切スルトキハ, $d=r\sim r'$

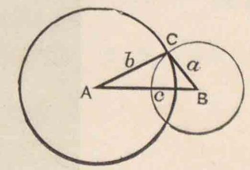
[5] 一圓ガ全ク他ノ内ニアツテ離レルトキハ, $d<r\sim r'$

[6] 逆ハ皆眞デアル. (轉換法)



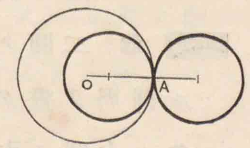
[3]ノ逆カラ $a+b>c>a\sim b$ ナル關係ニ適スル三線分a, b, cデハ必ズ三角形ヲ畫キ得ルコトガワカル。

即チ三線分a, b, cノ間ノ此ノ關係ハa, b, cヲ三邊トスル三角形ヲ畫キ得ルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件デアル。(作圖題一)



問1. 二圓ノ半徑ガ夫々3 cm, 5 cmデ,兩圓ノ中心間ノ距離ガ2 cmデアレバ,此ノ二圓ノ位置ハドウカ。若シ中心間ノ距離ガ8 cmデアレバドウカ。

問2. 所設ノ圓周ニ其ノ上ノ定點ニ於テ切シ,且所設ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。

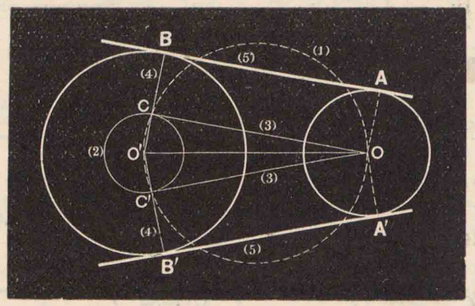


61. 二圓ノ共通切線

作圖題十五 與ヘラレタ二圓(O, O′)ニ共通切線ヲ引ケ.

[1] 二圓ヲ同ジ側ニ有スル切線(共通外切線).

解析 求メル切線ガ既ニ引カレタトシテ,其ノ二圓ノ切點ヲ夫々A及ビBトスル。



O ヨリ AB ニ平行ニ OC ヲ引キ O'B トノ交點ヲ C トスレバ, $\angle OCO'$ ハ直角デ, O'C ハ二圓ノ半徑ノ差ニ等シイ(但シ $O'B>OA$ トスル)。

故ニ OC ハ O ヨリ, O' ヲ中心トシテ O'C ヲ半徑トスル圓ニ引イタ切線デアル。

作圖 ❶ 二圓ノ中心 O, O' ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周ヲ畫ク。

❷ 大圓ノ中心 O' ヲ中心トシテ,二圓ノ半徑ノ差ニ等シイ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫キ❶ノ圓周トノ交點ヲ C 及ビ C' トスル。

❸ OC, OC' ヲ結ブ。

❹ O'C, O'C' ヲ引キ,與ヘラレタ圓 O' ノ周トノ交點ヲ B 及ビ B' トスル。

❺ B, B' ニ於テ夫々 CO, C'O ニ平行ニ BA, B'A' ヲ引ク。

AB ト A'B' トガ求メル共通切線デアル。

證明 O'C ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シイカラ, BC ハ圓 O ノ半徑ニ等シイ。今 O ヨリ AB ニ垂線 OA ヲ引ケバ ABCO ハ矩形デアルカラ, OA ハ BC ニ等シイ。

故ニ OA ハ圓 O ノ半徑ニ等シイ。

故ニ AB ハ圓 O ニモ切スル。 (定理四十七)

故ニ AB ハ兩圓 O 及ビ O' ニ切スル。

同様ニ A'B' モ兩圓 O 及ビ O' ニ切スル。

吟味 點 O ガ, O' ヲ中心トシ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シイ半徑ヲ有スル圓ノ外ニアルカ,其ノ圓ノ周上ニアルカ,又ハ其ノ圓ノ內ニアルカニヨツテ O ヨリ其ノ圓ニ引ク切線ハ二ツアルカ,一ツアルカ,又ハ一ツモナイ。

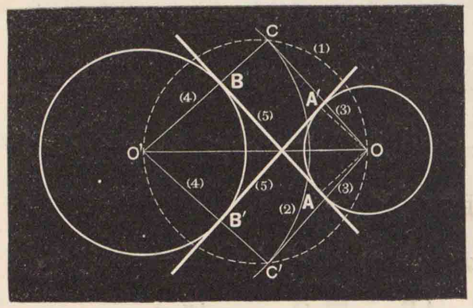
從ツテ其ノ各々ノ場合ニ就イテノ共通外切線ハ,兩圓ノ半徑ヲ夫々 R, r トシ,中心間ノ距離 (OO') ヲ d トスレバ,

$d>R\sim r$ ノトキハ二ツアツテ,

$d=R\sim r$ ノトキハ一ツアツテ,

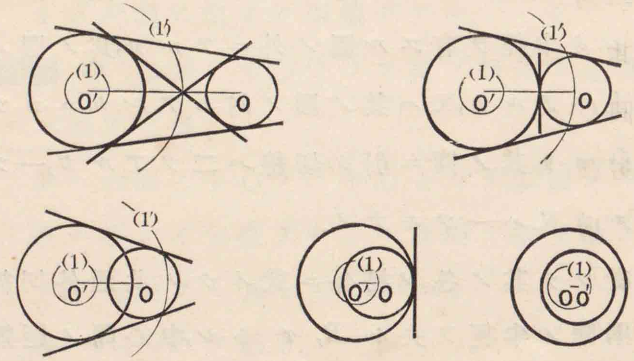
$d<R\sim r$ ノトキハ一ツモナイ。

[2] 二圓ヲ其ノ兩側ニ有スル切線(共通内切線).



(此ノ場合ハ圖ニツイテ研究セヨ)

問 二圓ノ位置ヲ色々ニ變ヘテ實際ニ共通切線ヲ畫イテ見ヨ。



問題 13

1. 三ツノ等圓ガ二ツヅヽ相切スルトキハ,

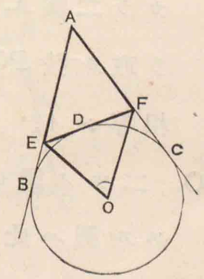
(1) 三ツノ中心及ビ三ツノ切點ハ各〻一ツノ正三角形ノ頂點トナル。

(2) 切點ニ於ケル共通切線ハ同一ノ點デ會スル。

2. 二ツノ等圓ガ二點A, Bデ交ハリ, Aヲ通ル一直線ガ更ニ此ノ二圓周ト交ハル二點ヲC, Dトスレバ, △BCDハ等脚三角形デアル。

3. 三角形ノ二邊ヲ直徑トスル二圓周ハ他ノ邊又ハ其ノ延長上デ相交ハル。

4. 圓O外ノ一點Aヨリ二ツノ切線AB, ACヲ引キ又劣弧BC上ノ一點Dニ於テ切線ヲ引キ, AB及ビACト夫々E及ビFニ於テ交ハラシメレバ, △AEFノ周及ビ∠EOFノ大サハ點Dノ位置ニ關ハラズ一定デアル。

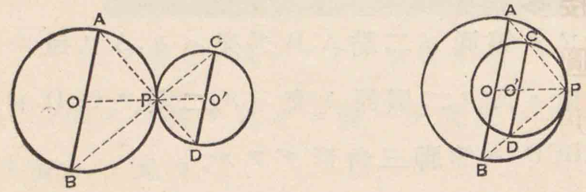


5. 二圓ガPデ内切シ, 一割線ガ其ノ二圓周ヲ夫々A, B, C, Dデ截ルトキハ, ∠APB=∠CPDデアル。

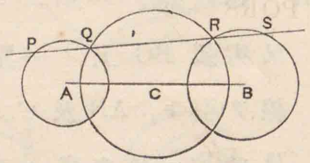
6.　相切スル二圓ノ切點ヲ通リ任意ノ割線ヲ引クトキハ,其ノ交點ニ至ル二圓ノ半徑ハ平行デアル。

7.　圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ハ其ノ圓ニ內切シ,其ノ周ハ切點ヲ通ル第一圓ノ弦ヲ二等分スル。

8.　相切スル二圓ノ平行ナル直徑ノ端ト切點トハ三點ヅツ同一ノ直線上ニアル。



9.　下圖ノヤウニ交ハル三ツノ圓ノ中心 A, C, B ガ一直線上ニアツテ AC=CB ナルトキハ,圓周ノ交點 Q 及ビ R ヲ通ル直線カラ二圓 A, B ノ周ガ截リ取ル弦 PQ ト RS トハ相等シイ。



10.　二ツノ圓 O, O′ ガ外切スルトキハ, OO′ ヲ直徑トスル圓ハ此ノ二圓ノ共通外切線ニ切スル。

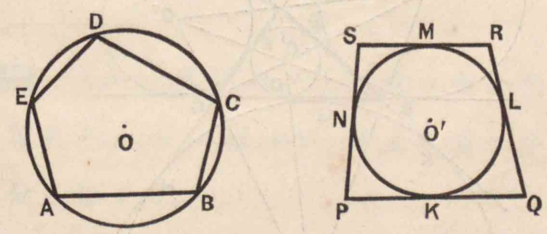
第五章　內接形・外接形

62. 內接・外接

定義　一ツノ多角形ノ頂點ガ悉ク一ツノ圓ノ周上ニアルトキハ,此ノ多角形ヲ其ノ圓ノ**內接多角形**トイヒ,其ノ圓ヲ此ノ多角形ノ**外接圓**トイフ。

多角形ノ邊ガ悉ク同一ノ圓ニ切スルトキハ,此ノ多角形ヲ其ノ圓ノ**外接多角形**トイヒ,其ノ圓ヲ此ノ多角形ノ**內接圓**トイフ。

次ノ圖ニ於テ ABCDE ハ圓 O ノ內接五角形デ, PQRS ハ圓 O′ ノ外接四角形デアル。



問 1.　圓ニ外接スル四角形ノ一組ノ對邊ノ和ハ,他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シイ。

問 2.　圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形デアル。

63. 三角形ノ內接圓·外接圓·傍接圓

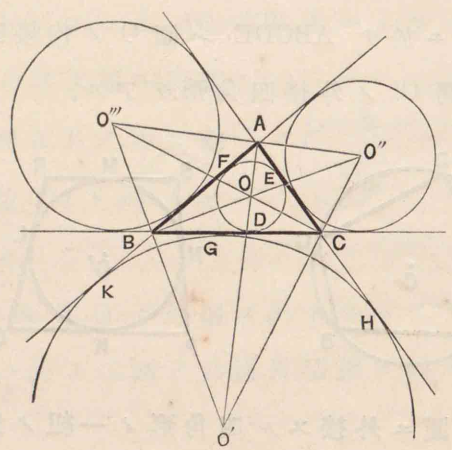
定理五十五 **三角形ノ內接圓及ビ外接圓ハ各ヽ一ツアツテタヾ一ツダケデアル,其ノ中心ハ夫々內心,外心デアル.** (定理二十四,二十六參照)

問 1. 三點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

問 2. 三直線ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ.

定義 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ此ノ三角形ノ**傍接圓**トイフ。

三角形ノ傍接圓ハ三ツアル。其ノ中心ハ卽チ傍心デアル。 (定理二十五參照)



問 3. 上ノ圖デ △ABC ノ邊 BC, CA, AB ヲ夫々

a, b, c デ表ハシ且 $a+b+c=2s$ トスレバ,

$AH=AK=s$ $BG=BK=s-c$

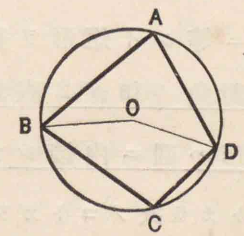
$AE=AF=s-a$ $BD=BF=s-b$

$FK=EH=a$ $DG=b\sim c$

$BG=CD$

64. 內接四角形

定理五十六 **圓ニ內接スル四角形(ABCD)ノ對角(AトC及ビBトD)ハ互ニ補角デアル.**

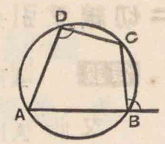


證明 ∠A ハ弧 BCD ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シク, ∠C ハ弧 BAD ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シイ。

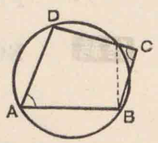
故ニ ∠A+∠C ハ中心 O ニ於ケル共軛ナル二角ノ和ノ半分卽チ 2 直角ニ等シイ。

同樣ニ ∠B+∠D モ 2 直角ニ等シイ.

系一 圓ニ内接スル四角形ノ外角ハ其ノ内對角(其ノ外角ニ隣ル内角ノ對角)ニ等シイ。

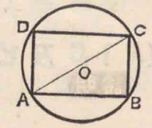


系二 圓ニ内接シナイ四角形ノ對角ノ和ハ2直角ニ等シクナイ。



系三 四角形ノ對角ノ和ガ2直角ニ等シイトキハ,此ノ四角形ハ圓ニ内接スル。

問 1. 矩形ハ圓ニ内接スル。ソシテ其ノ對角線ハ直徑デアル。



問 2. 所設ノ圓ニ内接シ,其ノ一邊ガ所設ノ線分ニ等シイ矩形ヲ畫ケ。

系四 四角形ノ對角ノ和ガ2直角ニ等シクナイトキニハ,此ノ四角形ハ圓ニ内接シナイ。 (歸謬法)

注意 系三ト系四トカラ次ノコトガワカル。

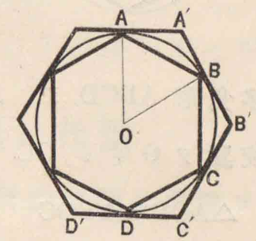
四角形ガ圓ニ内接スルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ,其ノ對角ガ互ニ補角デアルコトデアル。

65. 正多角形

定理五十七 **圓周ヲ若干ニ等分シテ,其ノ分點ヲ順次ニ結ベバ一ツノ正多角形ガ出來ル. 又各分點ニ切線ヲ引ケバ一ツノ正多角形ガ出來ル.**

假設 圓周ヲ n 等分シ,其ノ分點ヲ A, B, C 等トシ,又此等ノ分點ニ於ケル相隣ル切線ノ交點ヲ順次 A′, B′, C′ 等トスル。

終結 ABC... ト A′B′C′... トハ正多角形デアル。



證明 [1] 多角形 ABC...... ニ於テ,邊 AB, BC 等ハ等弧ノ弦デアルカラ皆等シイ。

又此ノ多角形ノ各〻ノ角ハ圓周ノ $\frac{n-2}{n}$ ニ當ル弧ノ上ニ立ツ圓周角デアルカラ皆等シイ。

故ニ ABC...... ハ正多角形デアル。

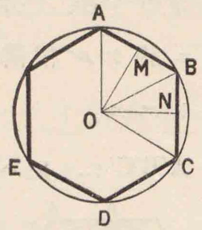
[2] △A′AB, △B′BC 等ニ於テ,邊 AB, BC 等ハ皆等シク,又 ∠A′AB, ∠B′BC 等ハ等弧 AB, BC 等ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイカラ皆等シイ。

故ニ此等ノ三角形ハ皆合同デアル。

故ニ多角形 A′B′C′...... ハ等角デ等邊デアル。

故ニ A′B′C′...... ハ正多角形デアル。

定理五十八 **正多角形ハ圓ニ内接シ,又外接スル.**



證明 [1] 正多角形 ABCD...... ノ二隣角 A, B ノ二等分線ノ交點ヲ O トシ, OC ヲ結ベバ

$\triangle AOB \equiv \triangle BOC$ (定理一)

故ニ $OA=OC$

ソシテ $\triangle AOB$ ハ等脚三角形デアル.

故ニ $OA=OB=OC$

故ニ又 $\angle OCB=\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle BCD$

ソレデ OC ハ $\angle BCD$ ノ二等分線デアルカラ,上ト同様ニ順ヲ追ッテ OD, OE 等モ皆 OA ニ等シイコトヲ證明スルコトガデキル.

故ニ ABCD... ハ O ヲ中心トスル圓ニ内接スル。

[2] OM, ON 等ヲ O ヨリ邊 AB, BC 等ヘ下シタ垂線トスレバ,

$OM=ON=\cdots\cdots$ (定理四十[1])

故ニ O ヲ中心トシ OM ヲ半徑トスル圓ハ ABCD...... ニ内接スル。

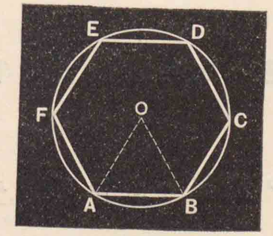
故ニ ABCD......ハ此ノ圓ニ外接スル。(定理四十七)

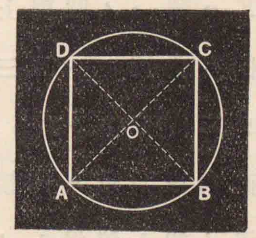
系 正多角形ノ内接圓ノ中心ト外接圓ノ中心トハ同ジ點デアル。

此ノ共通ノ中心ヲ正多角形ノ**中心**トイフ。

66. 正多角形ノ作圖

作圖題十六 **所設ノ圓ニ内接スル正六角形,正三角形,正十二角形等ヲ作レ.** (第19節問2ヲ參照セヨ)





作圖題十七 **圓ニ内接スル正方形,正八角形,正十六角形,正三十二角形等ヲ作レ.**

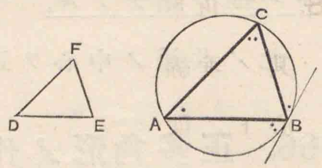
問 所設ノ線分ヲ一邊トスル正六角形ヲ作レ。

注意 正多角形ノ作圖法ハ圓周ノ等分法ニ歸着シ,圓周ノ等分法ハ4直角ノ等分法ニ歸着スル。ソシテ角ノ二等分ハ常ニナシ得ルカラ,或正多角形ヲ畫キ得

タナラバ,之ヲ基礎トシテ順次ニ其ノ二倍邊數ノ正多角形ヲ畫クコトガデキル。

問題 14

1. 所設ノ圓ニ內接スル三角形ヲ畫キ,其ノ三ツノ角ヲ夫々所設ノ三角形ノ三ツノ角ニ等シクセヨ。



2. 圓ノ弧ABノ中點Cヨリ二弦CD, CEヲ引キ,弦ABト夫々F, Gニ於テ交ハラシメレバ,四點D, F, G, Eハ同一ノ圓周上ニアル。

3. 圓ニ內接スル正三角形ノ邊ハ之ニ垂直ナル半徑ヲ二等分スル。

4. 直角三角形ニ內接スル圓ノ直徑ハ直角ヲ夾ム二邊ノ和ト斜邊トノ差ニ等シイ。

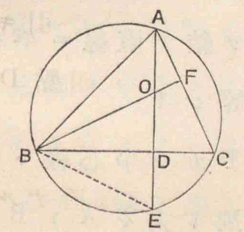
5. 二ツノ圓ノ交點A及ビBヲ通ル直線PAQ及ビRBSヲ引キ,圓周ト夫々P, Q及ビR, Sニ於テ交ハラシメレバ,弦PRトQSトハ平行デアル。

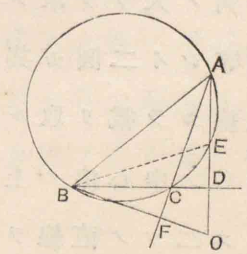
6. △ABCノ邊AB, ACノ上ニ夫々正方形ヲ三角形ノ外方ニ畫キ,之ニ外接スル圓ヲ畫クトキハ,其ノ

Aデナイ交點ハBCヲ直徑トスル圓周上ニアル。

7. 圓Oノ直徑ABノ兩端A, Bヲ任意ノ一點Cニ結ブ直線ガ圓周ト交ハル點ヲ夫々P, QトスレバOP, OQハ圓CPQニ切スル。

8. 三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ下シタ垂線ノ足ハ其ノ垂線又ハ其ノ延長ガ外接圓ニ會スル點ト垂心トノ間ノ線分ノ中點デアル。





9. 圓ニ內接スル四角形ABCDニ於テ∠A=2∠Cナルトキ,∠Aト∠Cトノ大サヲ求メヨ。

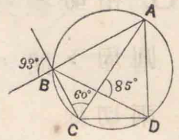
10. 正五角形ABCDEノ對角線AC, BEノ交點ヲPトスレバAC=AB+BPデアル。

雜題 3

1. 與ヘラレタ弧ヲ完全ナル圓周トセヨ。

2. $\triangle ABC$ ノ垂心ヲ P トスレバ,四點 A, B, C, P ハ其ノ何レヲ取ツテモ,他ノ三ツヲ頂點トスル三角形ノ垂心デアル。

3. 圖ニ示ス圓ノ內接四角形 ABCD ノ各角ノ大サヲ求メヨ。



4. 相等シイ二圓ガ其ノ中心ヲ結ブ直線ニ平行ナル直線カラ截リ取ル弦ハ相等シイ。

5. 圓 O ノ中心線ノ上ノ一點 P カラ中心線ト等角ヲナス二ツノ直線ヲ引キ,圓周ト夫々 A ト B 及ビ C ト D ニ於テ交ハラシメレバ, AD=BC 及ビ AC ∥ BD デアル。

6. 圓 O ノ平行ナル二ツノ切線ノ切點ヲ A ト B トスレバ A, O, B ハ一直線上ニアル三點デアル。

7. O ヲ中心トスル圓周上ノ一點 A ニ於ケル切線ト,任意ノ半徑 OB ノ延長トノ交點ヲ C トシ, OB ニ垂線 AD ヲ引クトキハ, AB ハ ∠DAC ヲ二等分スル。

8. 圓周上ノ與ヘラレタ點ヲ通リ其ノ圓ニ切線ヲ引ケ。但シ此ノ圓ノ中心ハ求メルコトガデキナイモノトスル。

9. 與ヘラレタ直線ニ平行ナルヤウニ與ヘラレタ圓ニ切線ヲ引ケ。

10. 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル一直線ガ,再ビ各〻ノ圓周ト交ハル點ニ於テ兩圓ノ切線ヲ引ケバ,此ノ兩切線ハ平行デアル。

11. 定マレル二圓ノ各〻ニ外切スル圓ノ中心ト,其ノ二定圓ノ中心トノ距離ノ差ハ常ニ等シイ。

12. 夫々定メラレタ長サノ半徑ヲ有シ,互ニ相切スル三ツノ圓ヲ畫ケ。

13. 平行ナル二弦ノ端ヲ結ブ線分ハ各〻相等シイ。

14. 四邊形ノ對角線ガ直交スルトキハ,其ノ四邊ヲ直徑トスル四ツノ圓周ハ同一ノ點ヲ通ル。

15. 相交ハル二圓ノ交點ヲ A ト B トシ, A ヲ通ル各圓ノ直徑ヲ夫々 AC, AD トスレバ, C, B, D ハ同一直線上ニアル。

16. $\triangle ABC$ ノ垂心ヲ S トスレバ, AS ハ外心 O カラ BC ヘ下ス垂線 OD ノ二倍ニ等シイ。

17. 平行四邊形 ABCD ノ三ツノ頂點 A, B, C ヲ通ル圓周ガ,邊 AD ニ交ハル點ヲ E トスレバ, CE ハ CD ニ等シイ。

18. 三角形ノ外心ト垂心トガ重ナルトキハ,此ノ三角形ハ正三角形デアル。

19. 圓ニ內接スル六角形ノ二組ノ對邊ガ各平行デアルトキハ,殘リノ一組ノ對邊モ亦平行デアル。

20. △ABC ノ邊 AC ニ切スル傍接圓ノ中心 O' カラ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,邊 AC, AB トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ, EF ハ BF ト CE トノ差ニ等シイ。

21. 一定點ヲ通リ,與ヘラレタ二直線ト等角ヲナス直線ヲ引ケ。

22. 定點ヲ通リ,與ヘラレタ平行線間ニ與ヘラレタ長サヲ夾ム直線ヲ引ケ。

23. 平行二直線ト之ニ交ハル一直線トヲ與ヘテ此ノ三直線ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

第四篇

二次方程式

第一章 平方根

67. 平方根

定義 或數又ハ式ノ平方ガ a ニ等シイトキハ,其ノ數又ハ式ヲ a ノ**平方根**トイフ。

例ヘバ $7^2=49$ 及ビ $(-7)^2=49$ デアルカラ, 7 ト -7 ハ共ニ 49 ノ平方根デアル。

又 a ト $-a$ ハ共ニ a^2 ノ平方根デ, $a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ハ $a+b$ ト $-(a+b)$ ノ二ツデアル。

故ニ一ツノ數及ビ一ツノ式ノ平方根ハ常ニ二ツアル。ソシテソレハタヾ其ノ符號ヲ異ニスルダケデアル。

數又ハ式ノ平方根ヲ表ハスニハ,其ノ數又ハ式ニ $\pm\sqrt{}$ ヲ冠ラセル。記號 $\sqrt{}$ ヲ根號トイヒ,之ヲるーとト讀ム。ソレデ例ヘバ

$$49 ノ平方根ハ \quad \pm\sqrt{49}=\pm 7$$

又 a^2 ノ平方根ハ $\pm\sqrt{a^2}=\pm a$

デ表ハス。

數ノ平方根デハ其ノ二ツノ中ノ正ナルモノヲ其ノ數ノ**算術的平方根**トイフ。之ニ對シテ,正負ノ二ツノ平方根ヲ總稱シテ**代數的平方根**トイフ。

根號ノ前ニ複號±ヲ附ケナイトキハ常ニ其ノ算術的平方根ヲ取ルモノトスル。

注意 1. $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=+2$ デアルカラ -2 トハナラナイ。

ソレデ一般ニ

a ガ正數デアレバ $\sqrt{a^2}=a$

a ガ負數デアレバ $\sqrt{a^2}=-a$ デアル。

本章デハ $\sqrt{a^2}$ ノ a ハ正數ヲ表ハスモノトスル。

注意 2. 負數ノ平方根ハナイ。何故ナレバ正數デモ負數デモ其ノ平方ハ正數デアルカラデアル。

定義 **數又ハ式ノ平方根ヲ求メルコトヲ平方ニ開ク**トイヒ,其ノ計算ヲ**開平方**トイフ。

問 1. 64, 81, 121, 169 ノ平方根ハ何カ。

問 2. 次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ。

❶ $a^2-2ab+b^2$　❷ a^2-2a+1

❸ $4a^2-8ab+4b^2$　❹ $9x^4+24x^2+16$

68. 單項式ノ開平方

例 1. $\sqrt{25x^2y^4}=\sqrt{5^2x^2(y^2)^2}=\sqrt{(5xy^2)^2}=5xy^2$

例 2. $\sqrt{\dfrac{49a^6x^{10}}{y^8z^2}}=\sqrt{\left(\dfrac{7a^3x^5}{y^4z}\right)^2}=\dfrac{7a^3x^5}{y^4z}$

法則 **單項式ノ平方根ヲ求メルニハ,數係數ノ平方根ニ其ノ各文字因數ノ指數ヲ夫々半分ニシタモノヲ連記スル。**

分數ノ平方根ヲ求メルニハ,分子ノ平方根ヲ分子トシ分母ノ平方根ヲ分母トスル分數ヲ作ル。

注意 此ノ法則ハ各因數ノ指數ガ悉ク2ノ倍數ノトキニ限ツテ用ヒラレル。ソウデナイ場合ハ平方ニ開キ切レヌトイフ。

問 1. 次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ。

❶ $49x^4y^8z^6$　❷ $64a^{12}b^4c^6$　❸ $3600(a+b)^4x^4y^{16}$

❹ $\dfrac{4a^6b^2}{9x^8y^4}$　❺ $\dfrac{16n^4z^8}{36m^6x^2y^{10}}$　❻ $\dfrac{32(a-b)^3(x+y)^6}{50(a-b)(x-y)^2}$

容易ニ因數ニ分解シ得ル整數ノ平方根ハ上ト同ジ方法ニヨツテ求メルコトガデキル。

例 3. $\sqrt{144}=\sqrt{3^2\times2^4}=3\times2^2=12$

問 2. 次ノ各數ノ平方根ヲ求メヨ。

256,　576,　1296,　$\dfrac{121}{196}$,　$\dfrac{361}{441}$,　$\dfrac{900}{5929}$

69. 多項式ノ開平方

三項式 $a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ノ一ツハ $a+b$ デアル。

此ノ平方根ヲ求メルニハ,次ノヤウナ運算ヲ用ヒル。

$$\begin{array}{r|l}
 & \boldsymbol{a+\ \ b}\ (\text{平方根}) \\ \hline
 & \boldsymbol{a}^2+2ab+b^2 \\
\text{和}\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{a}\\a\end{array}\right\}\text{積} & a^2 \\ \hline
\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{2a}+b\\+b\end{array}\right\}\text{積} & +\boldsymbol{2ab}+b^2 \\
 & +2ab+b^2 \\ \hline
 & \quad 0
\end{array}$$

先ヅ所設ノ式ヲ a ノ降冪ノ順ニ整頓シ,其ノ第一項ノ平方根 a ヲ求メ,之ヲ平方根ノ初項トスル。

次ニ a^2 ヲ所設ノ式カラ引キ,剩餘 $2ab+b^2$ ノ第一項ヲ a ノ二倍 $2a$ デ割ツテ商 b ヲ得,之ヲ平方根ノ第二項トスル。

$2a$ ニ b ヲ加ヘ,其ノ和ニ b ヲ掛ケタモノヲ上ノ剩餘カラ引ケバ剩餘ガナイ。

此ノ計算ハ所設ノ式カラ a^2 ト $(2a+b)b$ トノ和,卽チ $a^2+2ab+b^2$ ヲ引イタコトヽナリ剩餘ガナイカラ,所設ノ式ハ $a^2+2ab+b^2$ 卽チ $(a+b)^2$ ニ等シイ。

從ツテ $a+b$ ハ所設ノ式ノ平方根ノ一ツデ,他ハ其ノ符號ヲ變ヘタ $-(a+b)$ デアル。

又　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$　デアル。

依テ此ノ式ノ右邊ノ平方根ノ一ツハ $a+b+c$ デアル。

此ノ平方根ヲ求メルニハ,先ヅ右邊ノ式ヲ整頓シテ $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$ トシテ次ノヤウニ運算スル。

$$\begin{array}{r|l}
 & \boldsymbol{a+\ \ b+\ \ c}\ (\text{平方根}) \\ \hline
 & \boldsymbol{a}^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\
\text{和}\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{a}\\a\end{array}\right\}\text{積} & a^2 \\ \hline
\text{和}\left\{\begin{array}{r}\boldsymbol{2a}+b\\+b\end{array}\right\}\text{積} & +\boldsymbol{2ab}+2ac+b^2 \\
 & +2ab\qquad\quad +b^2 \\ \hline
\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{2a+2b}+c\\+c\end{array}\right\}\text{積} & \qquad+\boldsymbol{2ac}\qquad+\boldsymbol{2bc}+c^2 \\
 & \qquad+2ac\qquad+2bc+c^2 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

前ト同樣ニシテ,先ヅ平方根ノ初メノ二項 $a+b$ ヲ出セバ,第二ノ剩餘トシテ $2ac+2bc+c^2$ ヲ得ル。

$a+b$ ノ二倍卽チ $2a+2b$ デ此ノ剩餘ノ初メノ二項ヲ割リ(從ツテ $2a$ デ $2ac$ ヲ割リ)商 c ヲ得,之ヲ平方根ノ第三項トスル。

$2a+2b$ ニ c ヲ加ヘ,其ノ和ニ c ヲ掛ケタモノヲ上ノ剩餘カラ引ケバ剩餘ガナイ。

從ツテ所設ノ式ノ平方根ハ $a+b+c$ ト $-(a+b+c)$ ノ二ツデアル。コレ上ノ計算ハ所設ノ式カラ $(a+b)^2$ ト $(2a+2b+c)c$ トノ和,卽チ $(a+b+c)^2$ ヲ引イタコトヽナルカラデアル。

若シ第三ノ剩餘ガアルナラバ $2a+2b+c$ ト c トノ和 $2a+2b+2c$ ヲ作リ, $2a$ デ其ノ剩餘ノ初メノ項ヲ割ッテ平方根ノ第四項ヲ求メ,前ノ通リ計算ヲ續ケテ行ヘバヨイ。

例 **1.** $x^6+4x^5-10x^3+4x+1$ ノ平方根ヲ求メヨ。

所設ノ式ヲ x ノ降冪ノ順ニ整頓シテ,上ノ方法ヲ適用スル。

運算

	x^3+2x^2-2x-1 (平方根)
x^3	$x^6+4x^5-10x^3+4x+1$
x^3	x^6
$2x^3+2x^2$	$+4x^5-10x^3+4x+1$
$+2x^2$	$+4x^5+4x^4$
$2x^3+4x^2-2x$	$-4x^4-10x^3+4x+1$
$-2x$	$-4x^4-8x^3+4x^2$
$2x^3+4x^2-4x-1$	$-2x^3-4x^2+4x+1$
-1	$-2x^3-4x^2+4x+1$
	0

答 $\pm(x^3+2x^2-2x-1)$

驗算 $\{\pm(x^3+2x^2-2x-1)\}^2=x^6+4x^5-10x^3+4x+1$

問 **1.** 次ノ各式ノ平方根ヲ求メヨ。

❶ $4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$

❷ $x^6-4x^5+10x^4-12x^3+9x^2$

例 **2.** $4x^4-20x^3+37x^2-29x+5$ ヲ平方ニ開ケ。

運算

	$2x^2-5x+3$ (開平整商)
$2x^2$	$4x^4-20x^3+37x^2-29x+5$
$2x^2$	$4x^4$
$4x^2-5x$	$-20x^3+37x^2$
$-5x$	$-20x^3+25x^2$
$4x^2-10x+3$	$12x^2-29x+5$
3	$12x^2-30x+9$
	$x-4$ (開平剩餘)

答 開平整商 $\pm(2x^2-5x+3)$ 開平剩餘 $x-4$

本例ノヤウニ平方根ヲ x ヲ含マヌ項マデ立テ尙剩餘ヲ生ズル式ハ平方ニ開キ切レヌトイヒ,既ニ得タ平方根ヲ開平整商,最後ノ剩餘ヲ開平剩餘トイフ。

問 **2.** $x^6+4ax^5-10a^3x^3-3a^4x^2+4a^5x+4a^6$ ヲ平方ニ開ケ。

70. 整數ノ平方根ノ位

$1^2=1,\quad 10^2=100,\quad 100^2=10000,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$

デアルカラ,一桁ノ數ノ平方ハ 1 ト 100 トノ間ニアル。故ニ 1 ト 100 トノ間ニアル數卽チ一桁又ハ二桁ノ數ノ平方根ハ整數部分ガ一桁ノ數デアル。同樣ニ三桁又ハ四桁ノ數ノ平方根ハ整數部分ガ二桁ノ數デアル。以上之ニ準ズル。

故ニドンナ數デモ其ノ一ノ位カラ二桁毎ニ區分スレバ,其ノ平方根ノ整數部分ノ桁數ヲ知ルコトガデキル。

例ヘバ 732054 ヲ區分スレバ 73|20|54 デアルカラ,其ノ平方根ノ整數部分ハ三桁ノ數デアル。

ソシテ　$800^2 < 732054 < 900^2$　デアルカラ,此ノ平方根ノ最高位ノ數ハ,其ノ平方ガ73ニ近クテ之ヨリモ小サイ8デアルコトモ明カデアル。

71. 整數ノ開平方

以下本章デハ數ノ平方根ニハ其ノ算術的平方根ダケヲ考ヘル。

例 **1.** 1849 ノ平方根ヲ求メヨ。

運算		運算ノ理由		
				$a+b$
	4 3			40+3
和 4 積	18|49	a………	和 40 積	18 49
4	→16	a………	40	→16 00
→83	2 49	$2a+b$……	→83	2 49
3 積	→ 2 49	$+b$………	3 積	→ 2 49
	0			0

答　43

求メル所ノ平方根ハ二桁ノ數デ,其ノ十ノ位ノ數

ハ4デアル。今 $a=40$ トシ, b ヲ一ノ位ノ數ト考ヘレバ,

$$1849=(40+b)^2=40^2+2\times40b+b^2=1600+80b+b^2$$

故ニ　$$1849-1600=80b+b^2=(80+b)b$$

故ニ　$$249=(80+b)b$$

故ニ40ノ二倍卽チ80デ249ヲ割リ商3ヲ得,之ヲ平方根ノ一ノ位ノ數ト推定シ $(80+3)\times3$ 卽チ 83×3 ヲ作リ,之ヲ計算シテ 249 カラ引ケバ剩餘ガナイ。故ニ求メル所ノ平方根ハ43デアル。

例 **2.** 148225 ヲ平方ニ開ケ。

運算		運算ノ理由	
			$a+b+c$
	3 8 5		300+80+5
和 3 積	14|82|25	a……………300	14 | 82 | 25
3	→ 9	a……………300	9 00 00
→68	5 82	$2a+b$………680	5 82 25
和 8 積	→ 5 44	$+b$…………80	5 44 00
→765	38 25	$2a+2b+c$…765	38 25
5 積	→ 38 25	c……5	38 25
	0		0

答　385

(例1ノヤウニ說明ヲシテ其ノ結果ヲ驗セ)

問　次ノ各數ノ平方根ヲ求メヨ。(驗算セヨ)

961,　2025,　1764,　72361,　247009

例 3. 3640514ヲ平方ニ開ケ。

運算

	1 9 0 8
1	3|64|05|14
1	1
29	2 64
9	2 61
3808	3 05 14
8	3 04 64
	50

答 $\begin{cases}\text{開平整商 } 1908 \\ \text{開平剩餘 } 50\end{cases}$

平方根ノ十ノ位ノ數ヲ求メルタメ,既ニ知レタ平方根ノ部分19百ノ二倍ナル38百ノ38デ,第二剩餘中ノ今マデニ關係アル部分3萬ニ第三區分05百ヲ加ヘタ305百ノ末位5ヲ去ツタ30ヲ割ルニ,商ハ1ヨリ小サイ。故ニ平方根ノ十ノ位ハ0デアル。ソコデ直ニ第四區分14ヲ305百ニ附加シ30514トシテ,其ノ末位4ヲ去ツタ3051ヲ380デ割リ(從ツテ305ヲ38デ割リ)平方根ノ一ノ位ヲ見積リ8ヲ得ル。

然ルニ本例デハ尙剩餘50ヲ得ル。

此ノヤウニ平方根ヲ一ノ位マデ立テヽモ尙剩餘ヲ生ズル數ハ平方ニ**開キ切レヌ數**デ,既ニ得タ平方根ハ**開平整商**,最後ノ剩餘ハ**開平剩餘**デアル。

注意 1. 3640514ノ平方根ハ1908ト1909トノ間ノ數デ,次節ニ說ク方法ニヨツテ尙小數ノ部分ニマデ開キ

行ケバ,根ヲ小數幾位マデデモ求メラレル。此ノヤウナ數ヲ**不盡根數**トイフ。(74參照)

注意 2. 平方根ノ桁數ガ上ノ例ノ桁數ヨリ多イ場合モ,同樣ノ仕方ヲ續ケテ行ヘバヨイ。

72. 小數ノ開平方

$0.1^2=0.01$, $0.01^2=0.0001$, $0.001^2=0.000001$, ……デアルカラ,小數ノ平方ノ小數ノ桁數ハ,其ノ小數ノ桁數ノ二倍デアル。故ニ反對ニ或數ノ平方根ノ小數部分ノ桁數ハ,其ノ數ノ小數部分ノ桁數ヲ小數第一位カラ數ヘテ下ヘ二桁每ニ區分スレバ,之ヲ知ルコトガデキル。

問 1. 次ノ各數ノ平方根ヲ求メヨ(暗算)。

0.64, 0.0081, 0.000004, 0.0225, 1.69

例 1. 0.2809ヲ平方ニ開ケ。

運算

	0. 5 3
5	0.28|09
5	25
103	3 09
3	3 09
	0

答 0.53

驗算 $0.53^2=0.2809$

問 2. 次ノ各數ヲ平方ニ開ケ。

0.00654481,　　0.378225,　　144407.6001

例 2. $\sqrt{2}$ ヲ小數第三位マデ求メヨ。

運算

	1. 4 1 4
1	2.00|00|00
1	1
24	1 00
4	96
281	4 00
1	2 81
2824	1 19 00
4	1 12 96
	6 04

答　1.414强

驗算　$1.414^2+0.000604=2$

注意 1. 例2ニ示スヤウニ2ハ平方ニ開キ切レヌカラ$\sqrt{2}$ハ不盡根數デアル。コヽニハ其ノ平方根ヲ小數第三位マデ求メルタメ,2ニ小數第六位マデ0ヲ書キ添ヘテ開イタ。

問 3. $\sqrt{3}$ 及ビ $\sqrt{5}$ ヲ小數第三位マデ求メヨ。

注意 2. $\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$（ひとよひとよ）, $\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$（ひとなみに）ハ記憶シテ置クト便利デアル。

73. 分數ノ開平方

分數ノ開平方ハ分母ノ開キ切レルモノハ分母分子ヲ別々ニ開クガヨイ。分母ノ開キ切レナイモノハ其ノ分數ヲ小數ニ直シテ開クガ便利デアル。

例 1. $\dfrac{729}{1225}$ ヲ平方ニ開ケ。

解　$\sqrt{\dfrac{729}{1225}}=\dfrac{\sqrt{729}}{\sqrt{1225}}=\dfrac{27}{35}$　　答 $\dfrac{27}{35}$

問 1. $\dfrac{121}{196}$, $\dfrac{625}{5184}$, $\dfrac{931225}{583696}$ ヲ平方ニ開ケ。

例 2. $\dfrac{3}{5}$ ヲ平方ニ開ケ(小數第三位未滿切捨)。

解　$\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\sqrt{0.6}=0.774\cdots\cdots$　　答 0.774强

例 3. $\dfrac{2}{7}$ ノ平方根ヲ小數第三位マデ求メヨ。

解 $\dfrac{2}{7}$ ヲ小數ニ直シ其ノ第六位マデ求メテ開ク。

$$\sqrt{\frac{2}{7}}=\sqrt{0.285714}=0.534\cdots\cdots$$

或ハ $\dfrac{2}{7}$ ハ分母子ニ7ヲ掛ケレバ分母ガ開キ切レル分數ニ改メルコトガ出來ル。故ニ

$$\sqrt{\frac{2}{7}}=\sqrt{\frac{2\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}=\frac{3.741\cdots}{7}=0.534\cdots\cdots$$

答 0.534强

問 2. $1\dfrac{1}{2}$ 及ビ $\dfrac{7}{12}$ ヲ平方ニ開キ,小數第三位未滿ハ四捨五入セヨ。

問 題 15

次ノ各式及ビ各數ノ平方根ヲ求メヨ。[1—8]

1. $16a^2b^4x^6$, $4a^6(3x-y)^4$, $\dfrac{25a^2b^6}{49c^4}$

2. $4x^2-4x+1$, $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$

3. $16a^4-24a^3b+49a^2b^2-30ab^3+25b^4$

4. $1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-4x^5+3x^6-2x^7+x^8$

5. 1272384, 254076.4836

6. $\dfrac{799236}{1737124}$

7. $8\dfrac{19}{64}$ (小數第三位未滿四捨五入)

8. $\dfrac{22}{7}$ (小數第三位未滿四捨五入)

次ノ各式ニ如何ナル一次式ヲ加ヘレバ平方ニ開キ切レル式トナルカ。

9. $x^4+4x^3+x^2-10x+9$

10. $a^4+4a^3+6a^2+3$

第二章 無理數ノ計算

74. 無理數·無理式

2ヤ3ノヤウナ數ハ平方ニ開キ切レナイ。ソレデ$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ノヤウナ數ハ整數デナイノハ勿論,分數デモナイ。從ツテ有限ノ桁數ヲ有スル小數デハ精密ニ示スコトノデキナイ數デ,之ヲ**不盡根數***トイフ。

定義 不盡根數ノヤウニ,整數ヤ有限ノ桁數ヲ有スル小數デハ表ハスコトノデキナイ數ヲ一般ニ**無理數**トイフ。

無理數ハ不盡根數ニ限ルモノデナイ。例ヘバ圓周率 3.141592……ノヤウナ數ハ不盡根數デナイ無理數デアル。然シ本章デ取扱フ無理數ハ不盡根數ダケデアル。

定義 根號ヲ有スル文字ヲ含ム代數式ヲ**無理式**又ハ**根式**トイフ。

平方ニ開キ切レル數又ハ式ヲ**完全平方數**又ハ完

* 不盡根數ハ開キ切レナイ平方根ダケデハナイガ,コヽデハ此ノヤウナ不盡根數ダケヲ論ジ,其ノ一般ノ論究ハ後ニ讓ル。根式ニ就イテモ同樣デアル。

全平方式トイヒ,共ニ完全平方トイフ。

定義 無理數又ハ無理式ニ對シテ,根號ヲ有シナイ數又ハ式ヲ**有理數**又ハ**有理式**トイフ。

無理數ヤ無理式モ有理數ヤ有理式ト同ジ法則ニヨツテ計算スルコトヽスル。

75. 無理數·無理式ノ計算 (一)

$a, b, c, \cdots\cdots$ ヲ正數トスレバ

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\cdots\cdots=\sqrt{abc\cdots\cdots}$$

何故ナレバ此等ノ等式ノ兩邊ヲ平方スレバ,兩邊ガ同ジ式トナルカラデアル。

例 $\sqrt{12}\times\sqrt{48}=\sqrt{12\times48}=\sqrt{2^2\times3\times2^4\times3}=\sqrt{2^6\times3^2}$

$$=2^3\times3=24$$

$$\sqrt{8a^3b}=\sqrt{4a^2\times2ab}=\sqrt{4a^2}\sqrt{2ab}=2a\sqrt{2ab}$$

問 1. $\sqrt{2}\times\sqrt{32},\ \sqrt{15}\times\sqrt{60},\ \sqrt{125},\ 3\sqrt{8}\times\sqrt{6},$

$\sqrt{2xy}\sqrt{8xy^3},\ \sqrt{a^3b^3}\sqrt{a^2b},\ \sqrt{6ax^3}\sqrt{8ax^4}$

ヲ有理數又ハ有理數ト無理數トノ積ニ直セ。

問 2. 次ノ各數デ有理數ヲ根號ノ內ニ入レヨ。

$5\sqrt{4},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{13},\ 4ab^2\sqrt{ab},\ \dfrac{b}{2a^2}\sqrt{xy^3}$

又 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

何故ナレバ $\dfrac{a}{b}\times b=a$ デアルカラ,

$$\sqrt{\frac{a}{b}\times b}=\sqrt{a}$$

故ニ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\times\sqrt{b}=\sqrt{a}$

故ニ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

例 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{3\times2}{2\times2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

或ハ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3\times2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

問 3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\ \sqrt{\dfrac{2}{3}},\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{\dfrac{5}{2}},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\times\sqrt{\dfrac{7}{4}}$

ヲ有理數ヲ分母トスル分數ニ直セ。

76. 無理數·無理式ノ計算 (二)

例 1. $\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{12\times3}=\sqrt{36}=6$

問 1. $\sqrt{8}\times\sqrt{6}\times\sqrt{12},\ 2\sqrt{2}\times\sqrt{8}$ ヲ簡單ニセヨ。

例 2. $\sqrt{45}+\sqrt{20}=\sqrt{9\times5}+\sqrt{4\times5}=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$$=(3+2)\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

問 2. $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}$ ヲ簡單ニセヨ。

例 3. $\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})$

$$=\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{6}$$

$$=\sqrt{6}+3-\sqrt{18}=3+\sqrt{6}-3\sqrt{2}$$

例 4. $(2\sqrt{3}+5\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$$=6-2\sqrt{6}+5\sqrt{6}-10=3\sqrt{6}-4$$

問 3. 次ノ各式ノ計算ヲナセ。

$(\sqrt{11}+3)(\sqrt{11}-3)$,　$(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})$,

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$,　$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$,　$(3-\sqrt{5})^2$,

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, $(m-\sqrt{n})^2$, $(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2$

例 5. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}$$

問 4. 次ノ各分數ノ分母ヲ有理數ニ化セヨ。

❶ $\dfrac{20}{7+\sqrt{3}}$　❷ $\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

❸ $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

注意　最後ノ例ト問 4 ニ示スヤウナ,分母ニ無理數ヲ有スル分數ノ數値ヲ計算スルニハ,先ヅ其ノ分母ヲ有理數ニ化スル(之ヲ**分母ヲ有理化スル**トイフ)ノガ便利デアル。

問 5. 次ノ各數ヲ小數第二位マデ(第二位未滿四捨五入)計算セヨ。

$$\frac{14}{\sqrt{2}},\quad \frac{4}{\sqrt{3}},\quad \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}},\quad \frac{4}{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

問　題　16

1. 次ノ各數ヲ有理數ト無理數トノ積ニ直セ。

$\sqrt{50}$,　$\sqrt{96}$,　$\sqrt{847}$,　$\sqrt{36a^3b^2c^5}$

2. 次ノ各數ノ有理因數ヲ根號ノ内ニ入レヨ。

$3\sqrt{2}$,　$4\sqrt{3}$,　$5\sqrt{7}$,　$12\sqrt{5}$

3. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

❶ $3\sqrt{14}\times\sqrt{21}\times5\sqrt{6}$

❷ $\sqrt{x^2y^2}\times\sqrt{x^3y^3}\div\sqrt{xy^3}$

4. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

❶ $13\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{98}$

❷ $3\sqrt{45}-\sqrt{20}-7\sqrt{5}$

5. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

❶ $(2\sqrt{13}+5\sqrt{2})(\sqrt{13}-\sqrt{2})$

❷ $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})$

6. 次ノ各分數ノ分母ヲ有理化セヨ。

❶ $\dfrac{13\sqrt{125}}{5\sqrt{65}}$　　❷ $\dfrac{\sqrt{12}-1}{\sqrt{3}+1}$

❸ $\dfrac{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$　　❹ $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

7. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

❶ $5\sqrt{3}+3\sqrt{\dfrac{4}{3}}-\sqrt{27}$

❷ $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{\dfrac{5}{4}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\times\sqrt{10}$

❸ $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}\div\dfrac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

❹ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

8. $x=5$, $y=3$ トシテ $x\sqrt{x^2-8y}+y\sqrt{x^2+8y}$ ノ値ヲ求メヨ。

9. $x=1+\sqrt{3}$ ナレバ x^2-2x-2 ノ値ハ 0 デアルコトヲ示セ。

10. $x=2\pm\sqrt{2}$ ナルトキ x^2-4x+2 ノ値ヲ求メヨ。

第三章 一元二次方程式

77. 一元二次方程式

定義 一ツノ未知數ヲ有スル二次方程式ヲ**一元二次方程式**トイフ。

例ヘバ

$$2x^2=5 \tag{1}$$

$$3x^2-5x+2=0 \tag{2}$$

$$(x+1)(x-2)=10 \tag{3}$$

ノヤウナモノハ何レモ一元二次方程式デアル。

(1) ノヤウニ未知數ノ一次ノ項ノ缺ケテキルモノヲ**不完二次方程式**又ハ**純二次方程式**トイヒ, (2), (3) ノヤウニ未知數ノ二次ノ項ト一次ノ項ト既知項トヲ有スルモノヲ**完備二次方程式**トイフ。

注意 例ヘバ $(x-2)(x+3)=x^2-4$ ノヤウナ式ハ x ニ關スル二次方程式ノヤウニ見エルガ,其ノ總テノ項ヲ一邊ニ移シテ之ヲ簡約スレバ x^2 ノ項ガ消失スルカラ,實際ハ二次方程式デハナイ。

78. 不完二次方程式ノ解法

例 1. $x^2=9$ ヲ解ケ。

解 求メル根ハ其ノ平方ガ9トナル數卽チ9ノ平方根デアル。故ニ

$$x=\pm\sqrt{9}=\pm3$$

答 ±3

例 2. $5x^2-3=0$ ヲ解ケ。

解 -3 ヲ移項シテ兩邊ヲ5デ割レバ

$$x^2=\frac{3}{5}$$

故ニ $$x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

答 $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

注意 必要ノナイ限リ無理數ノ根ハ根號ヲ附ケタマヽニシテ置イテヨイ。

問 次ノ方程式ヲ解ケ。

❶ $4x^2=25$　❷ $64x^2-49=0$

❸ $9x^2-5=0$　❹ $(x-15)(x+15)=400$

❺ $2(x^2-7)+3(x^2-11)=33$

❻ $\frac{x^2-24}{5}+\frac{x^2-37}{4}=8$

❼ $\frac{1}{3}(x^2-13)+\frac{1}{10}(x^2-5)=6$

例ヘバ $x^2+2=0$

ノヤウナ方程式ヲ解クニ2ヲ移項スルト

$$x^2=-2$$

トナル。然ルニドンナ正數又ハ負數デモ之ヲ平方スレバ其ノ結果ハ必ズ正數トナルカラ（67注意2）,此ノ方程式ヲ滿足スル根ハナイ。

注意 任意ノ一元二次方程式ヲ解カウトスレバ,往々上ノヤウナ場合ニ遭遇スル。ソコデ此ノ時ニモ解法ヲ可能ナラシメルタメニ,便宜上負數ノ平方根ヲ**虛數**ト名ヅケ,一ツノ數ト見做シテ取扱フコトモアル。

79. 完備二次方程式ノ解法

(I) 因數分解ニヨル解法

例 1. $x^2-5x+6=0$ ヲ解ケ。

解 左邊ハ次ノヤウニ因數ニ分解サレル。

$$(x-2)(x-3)=0$$

然ルニ二ツノ因數ノ積ガ0トナルタメニハ少クトモ其ノ一ツノ因數ガ0トナラナケレバナラヌ。又逆ニ少クトモ一ツノ因數ガ0デアレバ其ノ積ハ0トナル。

依テ　$x-2=0$　又ハ　$x-3=0$

∴　$x=2$　又ハ　$x=3$

答　2又ハ3

例 2.　$2(x-2)^2=x^2-5x+18$　ヲ解ケ。

解　右邊ノ各項ヲ左邊ニ移シテ整頓スレバ

$$x^2-3x-10=0$$

依テ　$(x+2)(x-5)=0$

∴　$x+2=0$　又ハ　$x-5=0$

∴　$x=-2$　又ハ　$x=5$

答　−2又ハ5

問　次ノ方程式ヲ因數分解ニヨツテ解ケ。

❶ $x^2-9x+20=0$　❷ $x^2+4x-77=0$

❸ $x^2-15x+50=0$　❹ $2x^2-8x-42=0$

(II) 平方ニ完成シテ解クコト

例 1.　$x^2-6x-7=0$　ヲ解ケ。

解　-7ヲ右邊ニ移シテ

$$x^2-6x=7$$

xノ係數ノ半分卽チ3ノ平方9ヲ兩邊ニ加ヘ

$$x^2-6x+9=7+9$$

卽チ　$(x-3)^2=16$

∴　$x-3=\pm 4$

∴　$x=3\pm 4$

∴　$x=7$ 又ハ -1　　**答　7又ハ −1**

驗　$7^2-6\times 7-7=0$　$(-1)^2-6\times(-1)-7=0$

注意　此ノ例ノヤウニ x^2-6x ニxノ係數ノ半分ノ平方卽チ9ヲ加ヘテ之ヲ完全平方トスルコトヲ x^2-6x ヲ平方ニ完成スルトイフ。

問 1.　次ノ方程式ヲ解ケ。

❶ $x^2-4x-5=0$　❷ $x^2-3x-40=0$

例 2.　$3x^2-10x+3=0$　ヲ解ケ。

解　$+3$ヲ右邊ニ移シテ兩邊ヲx^2ノ係數3デ割リ

$$x^2-\frac{10}{3}x=-1$$

兩邊ニ$\left(\frac{5}{3}\right)^2$ヲ加ヘテ左邊ヲ平方ニ完成スレバ

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$$

∴　$x-\frac{5}{3}=\pm\frac{4}{3}$

∴　$x=\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}$

∴　$x=3$ 又ハ $\frac{1}{3}$　　**答　3又ハ $\frac{1}{3}$**

問 2. 次ノ方程式ヲ解ケ。

❶ $x^2-4x+3=0$ ❷ $x^2+5x-14=0$

❸ $6x^2-5x+1=0$ ❹ $3x^2-8x=10$

(III) 公式ニヨル解法

前節ノ解法ハ一般ノ一元二次方程式ニ通ズルモノデアルガ,問題毎ニ同ジ手續ヲ繰リ返ス代リニ一ツノ公式ヲ求メテ置クノガ便利デアル。サテ一元二次方程式ノ一般ノ形ハ次ノ通リデアル。

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0} \quad (a\neq 0)$$

此ノ左邊ノ c ヲ右邊ニ移シ兩邊ヲ a デ割レバ

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

左邊ヲ平方ニ完成スレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

依テ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

之カラ $$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad (1)$$

之ガ一元二次方程式ノ根ノ公式デアル。

若シ方程式ガ

$$x^2+px+q=0 \quad ナラバ \quad \boldsymbol{x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}} \qquad (2)$$

又 $$ax^2+2b'x+c=0 \quad ナラバ \quad \boldsymbol{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}} \qquad (3)$$

(2)ハ x^2 ノ係數ガ1デアルトキノ公式デアル。又(3)ハ x ノ係數ガ偶數デアルトキニ便利ナ公式デ,式中ノ b' ハ x ノ係數ノ半分ヲ表ハス。

例 1. $6x^2-13x+5=0$ ヲ解ケ。

解 方程式ヲ一般ノ形ト較ベレバ

$$a=6, \quad b=-13, \quad c=5$$

故ニ $$x=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\times6\times5}}{2\times6}$$

$$=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{12}=\frac{13\pm7}{12}$$

$$=\frac{5}{3} \text{ 又ハ } \frac{1}{2}$$

答 $\frac{5}{3}$ 又ハ $\frac{1}{2}$

例 2. $3(x^2-x+2)+x-1=2(x^2+x+3)$ ヲ解ケ。

解 括弧ヲ取ツテ整頓スレバ

$$x^2-4x-1=0$$

根ノ公式(3)ト較ベレバ

$$a=1, \quad b'=-2, \quad c=-1$$

故ニ $x=2\pm\sqrt{4+1}$

$=2+\sqrt{5}$ 又ハ $2-\sqrt{5}$

答 $2+\sqrt{5}$ 又ハ $2-\sqrt{5}$

問 1. 次ノ方程式ヲ根ノ公式ニヨツテ解ケ。

❶ $x^2+7x+12=0$ ❷ $2x^2+5x=18$

❸ $2x^2-6=-4x$ ❹ $(x-1)(x-2)=20$

❺ $x^2+10x+3=2x^2-5x+53$

例 3. $x^2-2\sqrt{2}x-30=0$ ヲ解ケ。

解 根ノ公式(3)ト較ベレバ

$a=1,\ b'=-\sqrt{2},\ c=-30$

故ニ $x=\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-(-30)}$

$=\sqrt{2}\pm\sqrt{32}$

$=\sqrt{2}\pm4\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}$ 又ハ $-3\sqrt{2}$

答 $5\sqrt{2}$ 又ハ $-3\sqrt{2}$

問 2. 次ノ方程式ヲ解ケ。

❶ $x^2-\sqrt{2}x+1=0$ ❷ $x^2-5\sqrt{3}x+18=0$

例 4. $x^2-2x+3=0$ ヲ解ケ。

解 根ノ公式(2)ニヨツテ解ケバ

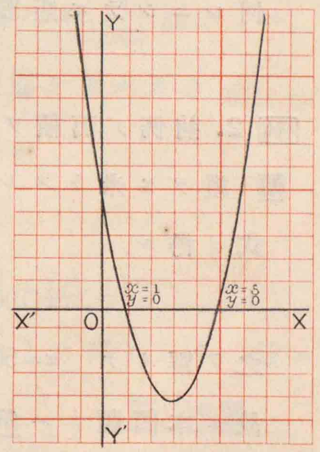
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-12}}{2}=1\pm\sqrt{-2}$$

卽チ此ノ方程式ニハ根ガナイ。(前節參照)

(IV) ぐらふニヨル解法

例 $x^2-6x+5=0$ ヲぐらふニヨツテ解ケ。

解 今 $y=x^2-6x+5$ ノぐらふヲ書クトキハ,下圖ノ通リデ,ぐらふガ横軸XOX′ヲ截ル點ノ座標ハ(1,0)ト(5,0)デアル,此ノ點ニ於ケル y ノ値ハ0デアルカラ,其ノ x ノ値1ト5ガ卽チ所設ノ方程式ノ根デアル。



問 次ノ方程式ヲぐらふニヨツテ解ケ。

❶ $4x^2-16x+7=0$ ❷ $2x+\frac{x^2}{4}=0$

80. 應用問題

例 1. 矩形ガアル,其ノ縦ト横ノ長サノ和ハ100米デ,面積ハ2400平方米デアル。縦横ハ各幾米カ。

解 縦ヲx米トスレバ横ハ$(100-x)$米デアル。

故ニ $x(100-x)=2400$

之ヲ解イテ $x=50\pm10$

$x=60$ 又ハ 40

依テ $x=60$ トスレバ $100-x=40$ デ

又 $x=40$ トスレバ $100-x=60$ デアル。

何レニシテモ矩形ノ二邊ハ60米ト40米デアル。

答 60米ト40米

例 2. 前例デ面積ヲ2700平方米トスレバドウカ。

解 縦ヲx米トスレバ前ト同樣ニシテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$x(100-x)=2700$$

之ヲ解イテ $x=50\pm10\sqrt{-2}$

故ニ本問題ニハ解答ハナイ。

例2ハ次ノヤウニ説明スレバ一層ヨクワカル。

矩形ノ一邊ヲ$(50+x)$米トスレバ,他ノ邊ハ$(50-x)$米デアルカラ

$$(50+x)(50-x)=2700$$

故ニ $2500-x^2=2700$

然ルニxハ正數デモ負數デモ $2500-x^2$ ハ決シテ2500ヨリ大キクナルコトハナイ。故ニソレガ2700ニ等シイヤウナxノ値ハ決シテナイ。

例 3. 或人若干圓デ買ツタ品物ヲ24圓デ賣レバ,其ノ利益ノ歩合ハ買價ノ圓數ノ百分ノ一ニ等シイトイフ。此ノ品物ノ買價ヲ求メヨ。

解 所要ノ買價ヲx圓トスレバ,利益ノ歩合ハ買價ノ$\frac{x}{100}$デアルカラ,利益ハ $x\times\frac{x}{100}$ 圓デアル。

ソシテ此ノ利益ハ$(24-x)$圓デアルカラ,

$$x\times\frac{x}{100}=24-x$$

之ヲ解イテ $x=-50\pm70$

$x=20$ 又ハ -120

買價ハ勿論負數デアルコトハデキナイ。故ニ-120ハ答數トナラナイ。 答 20圓

問 1. 例3ノ「利益ノ歩合」ヲ「損失ノ歩合」ニ改メレバドウカ。

問 2. 幅30cm, 長サ48cm ノ紙ノ周邊ヲ一樣ナ幅ニ黑ク塗ツテ其ノ枠ノ面積ヲ全紙面ノ$\frac{1}{5}$ニスルニハ塗ル幅ヲ幾糎ニスレバヨイカ。但シ1cm未滿ハ四捨五入スル。

81. 重二次方程式

定義 未知數ノ四次ノ項ト二次ノ項ト既知項トヲ有スル四次方程式ヲ**重二次方程式**又ハ**複二次方程式**トイフ。

例 $100x^4-229x^2+9=0$ ヲ解ケ。

解 $x^2=y$ トスレバ $x^4=y^2$ デアルカラ,所題ノ方程式ハ

$$100y^2-229y+9=0$$

故ニ
$$y=\frac{229\pm\sqrt{229^2-400\times 9}}{200}$$
$$=\frac{9}{4} \text{ 又ハ } \frac{1}{25}$$

故ニ
$$x^2=\frac{9}{4} \text{ 又ハ } \frac{1}{25}$$

故ニ此ノ方程式ノ根ハ $\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}$ ノ四ツデアル。

答 $\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}$

問 次ノ方程式ヲ解ケ。

❶ $x^4-10x^2+9=0$ ❷ $4x^4-13x^2+3=0$

❸ $a^2x^4-(a^4+1)x^2+a^2=0$

問題 17

次ノ方程式ヲ解ケ。[1—14]

1. $6x^2+6=13x$ 2. $4x^2-5x+6=0$

3. $x^2+3\sqrt{3}\,x=30$ 4. $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}=2(x+2)$

5. $x^2-3=\frac{1}{6}(x-3)$ 6. $110x^2-21x+1=0$

7. $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$

8. $\frac{7x^2-5x}{3}+\frac{x^2-5}{6}=\frac{7(x-1)}{12}$

9. $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)=2$

10. $(3x-5)^2-8(3x-5)+7=0$

11. $\left(\frac{7-r}{3}\right)^2+10\left(\frac{7-r}{3}\right)=24$

12. $4x(3x-5)=3x-5$

13. $x^2+(3-x)^2=(3-2x)^2$

14. $\frac{2-x^2}{5}-\frac{7x^2+9}{6}=-2\frac{7}{15}$

15. 次ノ方程式ノ根ヲ小數第三位マデ求メヨ。

❶ $5x^2+7x-3=0$ ❷ $x^2=\frac{10x-5}{3}$

16. $a=36,\ d=-6$ トシテ

$\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}=120$ ヲ n ニ就イテ解ケ。

17. $1+7x+2x^2$ ノ値ハ x ニドンナ値ヲ與ヘレバ10トナルカ。

18. 長サ80米ノ直線ヲ二分シテ,其ノ二部ヲ二邊トスル矩形ノ面積ガ1431平方米ナルヤウニスルニハ,如何ニ分ケレバヨイカ。

19. 方陣ニ列ベル一隊ノ兵士ガアル,若シ之ヲ各面四列ノ中空方陣ニ直セバ,其ノ外側ノ一邊ノ人數ハ16人多クナル。兵士ノ數ハ幾ラカ。

20. 或人金2000圓ヲ或利率デ預ケ,一ケ年後ニ元利合計ヲ受取リ,其ノ中カラ45圓ヲ費シ殘金ヲ前ト同利率デ預ケ,ソレカラ一ケ年ヲ經テ元利合計2252圓25錢ヲ得タ。年利率ハ何程カ。

第四章　聯立二次方程式

82. 聯立二元二次方程式ノ解法

聯立二次方程式ハ一般ニハ解クコトガデキナイガ,次ニ解クコトノデキル場合二三ヲ示ス。

例 1.
$$\begin{cases} 2x-y=1 & (1) \\ x^2+3xy-y^2-3y=4 & (2) \end{cases}$$

解 (1)カラ　$y=2x-1$　(3)

之ヲ(2)ニ代入スレバ

$$x^2+3x(2x-1)-(2x-1)^2-3(2x-1)=4$$

括弧ヲ取ツテ簡約スレバ

$$3x^2-5x-2=0$$

之ヲ解イテ　$x=2$　或ハ　$-\frac{1}{3}$

依テ　$x=2$　トシテ　(3)カラ　$y=3$

及ビ　$x=-\frac{1}{3}$　トシテ　$y=-\frac{5}{3}$

答 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 及ビ $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases}$

問 1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x-y=2,\quad 3x^2=2xy+5$$

例 2.
$$\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ xy=6 & (2) \end{cases}$$

解 例1ト同ジヤウナ方法デ解ケルガ,次ノヤウニスル方ガヨイ。

$(1)^2-(2)\times 4$　　$x^2-2xy+y^2=1$

$\therefore\quad (x-y)^2=1$

依テ　$x-y=1$　(3)　　或ハ　$x-y=-1$　(4)

故ニ(1)ト(3)カラ　$x=3,\quad y=2$

又　(1)ト(4)カラ　$x=2,\quad y=3$

或ハ x, y ノ値ハ,和ガ5デ積ガ6トナル數デアルカラ,夫々次ノ二次方程式ノ二根ニ等シイ。

$$z^2-5z+6=0$$

然ルニ此ノ方程式ヲ解ケバ,

$$z=2\quad 又ハ\quad 3$$

$$\therefore\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}\ 及ビ\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}\quad (答)$$

問 2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

❶ $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2+y^2-xy=21 \end{cases}$　　❷ $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=1 \end{cases}$

例 3.
$$\begin{cases} x+y=13 & (1) \\ x^3+y^3=559 & (2) \end{cases}$$

解 (2)カラ　$(x+y)(x^2-xy+y^2)=559$

(1)ヲ入レ　$x^2-xy+y^2=43$　(3)

$(1)^2-(3)$　　$3xy=126$

$\therefore$　　$xy=42$　(4)

ソコデ(1)ト(4)カラ

$$\begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases}\ 及ビ\ \begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases}\quad (答)$$

問 3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

❶ $\begin{cases} x^3+y^3=91 \\ x^2-xy+y^2=13 \end{cases}$　　❷ $\begin{cases} x^2+xy+2x=14 \\ y^2+xy+2y=21 \end{cases}$

83. 二元二次方程式ノぐらふ

例 1. $x^2+y^2=25$ ノぐらふヲ畫ケ。

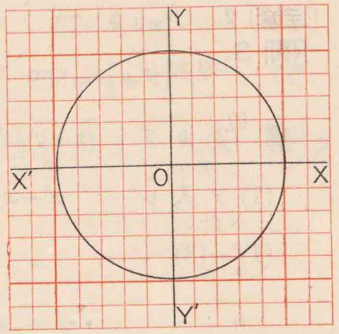
解 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$ カラ

$x=\pm 5,\ \pm 4,\ \pm 3,\ \pm 2,\ \pm 1,\ 0$ トスレバ,

夫々 $y=0,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 4.6,\ \pm 4.9,\ \pm 5$ デアル。

故ニ此等 x, y ノ各組ノ値ヲ座標トスル點ヲ連結スレバ,次頁ノ圖ノヤウニ原點ヲ中心トシ半

徑5ノ圓周ヲ得ル。之ガ所設ノ方程式ノぐらふデアル。



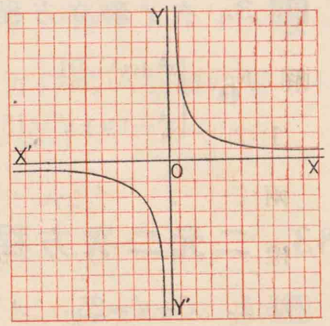
例 **2.** $xy=4$ ノぐらふヲ畫ケ。

解 $y=\frac{4}{x}$ カラ

$x=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\cdots$ トスレバ

夫々 $y=\cdots,\ -4,\ \ \ 4,\ 2,\ \frac{4}{3},\ 1,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{3},\cdots$ デアルカラ,所設ノ方程式ノぐらふハ下圖ノヤウデアル。

注意 1. xノ絶對値ガ非常ニ大キクナレバ,之ニ對應スルyノ絶對値ハ非常ニ小サクナリ,又xノ絶對値ガ非常ニ小サクナレバ,之ニ對應スルyノ値ハ非常ニ大キクナルカラ,此ノぐらふハ縦軸ノ上下デハ次第ニ軸ニ近ヅキ,終ニ限リナク之ニ近迫スル。又横軸ノ左右デモ終ニ限リナク之ニ近迫スル。



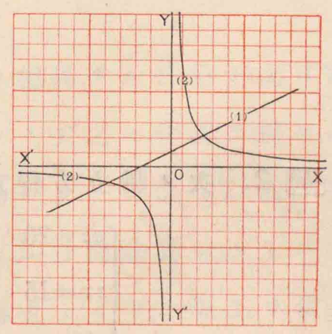
故ニ上ノ方程式ノぐらふハ二ツノ曲線デアツテ∠XOY内ト∠X'OY'内ダケニアル(xトyガ同符號デアルカラ)。此ノ曲線ヲ雙曲線トイフ。

注意 2. 上ニ述ベタヤウニ,分數$\frac{4}{x}$ノ分母xガ變數デ其ノ絶對値ガ次第ニ減小スルトキハ,此ノ分數ノ絶對値ハ次第ニ増大シ,xノ絶對値ガ愈々減小スレバ分數ノ絶對値ハ愈々増大シ,xノ絶對値ヲ微小ナラシメレバ此ノ分數ノ絶對値ヲドンナニ大キイ數ヨリ尙大キイヤウニデキル。此ノ事實ヲ簡略ノタメニaガ0デナイトキニxヲ0トスレバ$\frac{a}{x}$ノ値ハ無限大トナルトイヒ,之ヲ$\frac{a}{0}=\infty$ト記スコトガアル。

例 **3.** 次ノ聯立方程式ヲぐらふニヨツテ解ケ。

$$\begin{cases} x-2y+2=0 & (1)\\ xy=4 & (2)\end{cases}$$

解 所設ノ方程式ノ(1)(2)ノぐらふヲ畫ケバ,圖ノ(1)(2)ヲ得ルカラ此ノ兩ぐらふノ交點ノ座標ヲ取ツテ次ノ二組ノ根ヲ得ル。



答 $\begin{cases} x=2\\ y=2\end{cases}$ $\begin{cases} x=-4\\ y=-1\end{cases}$

問 **1.** $4x^2+9y^2=144$ ノぐらふヲ畫ケ。

問 **2.** $\begin{cases} x^2+y^2=17\\ xy=4\end{cases}$ ヲぐらふニヨツテ解ケ。

84. 聯立三元二次方程式ノ解法

例 **1.** 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x(x+y+z)=8 & (1) \\ y(x+y+z)=16 & (2) \\ z(x+y+z)=40 & (3) \end{cases}$$

解 $(1)+(2)+(3)$ $(x+y+z)^2=64$

$\therefore$ $x+y+z=\pm 8$

故ニ先ヅ $x+y+z=8$ トシテ

(1), (2), (3) カラ $x=1,\ y=2,\ z=5$

次ニ $x+y+z=-8$ トシテ

$x=-1,\ y=-2,\ z=-5$

答 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-5 \end{cases}$

例 **2.** 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} yz=20 & (1) \\ zx=15 & (2) \\ xy=12 & (3) \end{cases}$$

解 $(1)\times(2)\times(3)$ $x^2y^2z^2=20.15.12$

$\therefore$ $xyz=\pm(3.4.5)$

故ニ先ヅ $xyz=+(3.4.5)$ トシテ

(1), (2), (3) カラ $x=3,\ y=4,\ z=5$

次ニ $xyz=-(3.4.5)$ トシテ

$x=-3,\ y=-4,\ z=-5$

答 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=-5 \end{cases}$

問 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

❶ $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=12 \\ (z+x)(x+y+z)=24 \\ (x+y)(x+y+z)=36 \end{cases}$ ❷ $\begin{cases} (y+2)(z+3)=1 \\ (z+3)(x+1)=4 \\ (x+1)(y+2)=9 \end{cases}$

85. 應用問題

例 甲乙二人ノ職工ヲ相異ナル日給デ或日數間使ツタノニ,甲ハ皆勤シタノデ之ニ48圓ヲ拂ヒ,乙ハ其ノ日數ノ内5日間缺勤シタノデ之ニ27圓ヲ拂ツタ。若シ乙ガ皆勤シ甲ガ15日間缺勤シタトスレバ乙ハ甲ヨリモ24圓多ク得タトイフ。職工ヲ使ツタ日數竝ニ甲乙ノ日給ハ各ゝ幾ラカ。

解 所要ノ日數ヲ x トシ,甲乙ノ日給ヲ夫々 y 圓, z 圓トスレバ

$$\begin{cases} xy=48 & (1) \\ (x-5)z=27 & (2) \\ xz=y(x-15)+24 & (3) \end{cases}$$

(2)ノ27ノ代リニ(1)ヨリ得ル$\dfrac{27}{48}xy$ヲ, (3)ノ24ノ代リニ$\dfrac{xy}{2}$ヲ入レ,邊々相除シ整頓スレバ

$$3x^2=8(x-5)(x-10)$$

之ヨリ　$x=20$　或ハ　4

然ルニ題意ニヨリ $x>15$ デアルベキデアルカラ $x=20$ トシテ $y=2.4,\ z=1.8$

答　日數20日; 日給 甲2圓40錢, 乙1圓80錢

問　或人ガ上下二種ノ砂糖ヲ買ヒ,其ノ代金19圓ヲ支拂ツタ。ソシテ上種ハ下種ヨリ1kgニツキ5錢高ク,總代價ニ於テ1圓安イ。又買ヒ入レタ量ハ下種ハ上種ヨリ5kg多イトイフ。買ヒ入レタ各種ノ量及ビ1kgノ價ハ何程カ。

問　題　18

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。[1―14]

1. $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x^2-y^2=14 \end{cases}$　　**2.** $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$　　**4.** $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=2 \\ xy=15 \end{cases}$　　**6.** $\begin{cases} x^2-3xy=0 \\ 5x^2+3y^2=48 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2(x-y)+xy=7 \\ 3xy-(x-y)=7 \end{cases}$　　**8.** $\begin{cases} x^2+x+y^2=15 \\ 2xy+y=15 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=91 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$　　**10.** $\begin{cases} yz=y-2z \\ zx=6z-x \\ xy=x-y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x(y+z)=14 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=20 \end{cases}$　　**12.** $\begin{cases} x(y-z)+6=0 \\ y(z-2x)=5 \\ z(2x-3y)+63=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=12 \\ (y+z)(y+x)=15 \\ (z+x)(z+y)=20 \end{cases}$　　**14.** $\begin{cases} xy+x+y=19 \\ yz+y+z=29 \\ zx+z+x=23 \end{cases}$

15. 矩形ガアッテ,其ノ各邊ヲ何レモ1cmヅツ增セバ面積ハ48平方糎トナリ,1cmヅツ減ラセバ24平方糎トナルトイフ。二邊ノ長サヲ求メヨ。

16. 20tヨリ多イ石炭ヲ幾人カノ人夫デ,或場處カラ他ノ場處ニ運ブニ8時間カヽツタ,次ニ8人ノ

人夫ヲ增シ各人ノ每時間ノ運搬量ヲ 5 kg ヅツ減ラシタラ同量ノ石炭ヲ 7 時間デ運ンダ。若シ人夫ヲ 8 人減ラシ各人ノ每時間ノ運搬量ヲ 11 kg ヅツ增スナラバ 9 時間デ運搬スルトイフ。初メ幾人ノ人夫ヲ使用シタカ。

17. 6 平方糎, 8 平方糎及ビ 12 平方糎ノ板各二枚ヅツデ作ラレタ直六面體ノ箱ガアル。其ノ稜ノ長サハ各〻幾糎カ。

18. 直角三角形ノ直角ノ二邊ヲ a, b トシ斜邊ヲ c トスレバ, $c^2=a^2+b^2$ ノ關係ガアル(ぴたごらすノ定理)。今或直角三角形ノ斜邊ノ長サハ他ノ二邊ノ長サノ和ヨリモ 4 cm 短イ,ソシテ此ノ三角形ノ面積ハ 30 平方糎デアルトイフ。其ノ三邊ノ長サハ各〻幾ラカ。

19. 半徑 6 cm ノ圓ニ面積 64 平方糎ノ矩形ヲ內接セシメヤウトスル。此ノ矩形ノ各邊ノ長サヲ求メヨ。

雜 題 4

1. 次ノ數及ビ式ノ平方根ヲ求メヨ。

❶ 88209　　❷ 196540602241

❸ 10 (小數第四位マデ)

❹ $\dfrac{2}{3}$ (小數第三位マデ)

❺ $4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$　　❻ $1-2x+5x^2-4x^3+4x^4$

2. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

❶ $3\sqrt{8}\times\sqrt{6}$　　❷ $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

❸ $(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)$

❹ $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

3. $a=3,\ b=-3,\ c=4$ トシテ $\sqrt{a^3+b^3+c^3}-(a-b-c)^2$ ノ値ヲ求メヨ。

4. $a=4,\ b=3,\ c=-2$ トシテ次式ヲ計算セヨ。

$$\frac{\sqrt{a^2+2bc}}{a}+\frac{\sqrt{b^2+ca}}{b}+\frac{\sqrt{c^2+ab}}{c}$$

5. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

❶ $\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{24}\times\sqrt{50}$

❷ $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$

❸ $\left(\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\times\sqrt{3}$

❹ $(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

❺ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

6. $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$ ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ。

7. -24 ヲ二ツノ整數ノ因數ニ分解セヨ。幾通リノ分解法ガアルカ。

8. 二ツノ奇數ノ平方ノ差ハ必ズ8デ割リ切レル。之ヲ證明セヨ。

9. 次ノ方程式ヲ解ケ。

❶ $3x^2-10x+6=0$　❷ $15x^2+11x-12=0$

❸ $x^2+4.3x-27.3=0$

❹ $\sqrt{6}x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+1=0$

❺ $x(16x+5)-3=7x^2-(x-45)$

❻ $\frac{2+x^2}{3}-\frac{x-x^2}{2}=1-x+x^2$

10. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

❶ $\begin{cases}4x-3y=1\\12xy+13y^2=25\end{cases}$　❷ $\begin{cases}xy+x=25\\2xy-3y=28\end{cases}$

❸ $\begin{cases}x+y=8xy\\x^2+y^2=40x^2y^2\end{cases}$　❹ $\begin{cases}x(y+z)=6\\y(z+x)=12\\z(x+y)=10\end{cases}$

11. 面積ガ 16020.5 平方米ノ三角形ノ地所ガアル,其ノ底ト高サトハ相等シイ,然ラバ底ハ幾米カ。

12. 長サ $60m$, 幅 $40m$ ノ矩形ノ公園ヲ圍繞スル幅ノ一樣ナ通路ガアル,此ノ通路ダケノ面積ハ 1344 平方米デアル,此ノ通路ノ幅ヲ問フ。

13. 金 3000 圓ヲ一ケ年ノ定期預金トシテ預ケ入レ,其ノ期限ニ利息ノ中カラ 90 圓ダケ受取リ,其ノ殘リヲ元金ニ加ヘテ更ニ一ケ年ノ定期預金トナシ,期限ニナツテ元利合計 3402 圓ヲ受取ツタトイフ,年利率ハ幾ラカ。

14. 長椅子若干脚ヲ備ヘタ音樂堂ニ 800 人ノ聽衆ヲ收容シヨウトスルニ,若シ同ジ椅子ヲ 20 脚ダケ增ストキハ一脚ニ座スベキ人數ハ豫定ヨリモ 2 人少クスルコトガデキルトイフ,備ヘツケテアル椅子ノ數ヲ求メヨ。

15. 面積ノ等シイ矩形ト正方形トガアル,正方形ノ一邊ハ矩形ノ長邊ヨリモ 6cm 短イ,ソシテ此ノ矩形ハ短邊ヲ 1cm 增シ,長邊ヲ 2cm 短クシテモ面積ハ變ハラナイトイフ,此ノ矩形ノ二邊ヲ求メヨ。

補充問題

[I] 第一篇

1. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線上ノ各點ハ,夫夫其ノ底ノ兩端ヨリ等距離ニアル。

2. 等脚三角形ABCノ底BCヲ双方ニ延長シ,其ノ上ニ二點D及ビEヲ取リ, BD=CEナラシメレバ, △ADEハ等脚三角形デアル。

3. 合同ナル二ツノ三角形ニ於テハ,

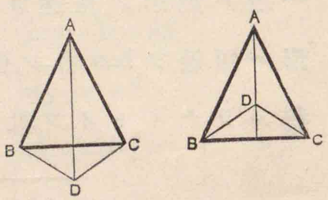
[1] 等邊ヘ引ケル中線ハ各相等シイ。

[2] 等角ノ二等分線(對邊マデノ部分)ハ各相等シイ。

[3] 各頂點ヨリ等邊ヘ下セル垂線ハ相等シイ。

4. 等脚三角形ABCノ底BC上ノ一點Mヲ過ギ,他ノ二邊AB, ACト夫々D, Eデ交ハル直線ヲ引キ, DM=EMナラシメレバ, AD+AE=AB+ACデアル。

5. 同ジ底邊上ニ立ツ二ツノ等脚三角形ノ頂點ヲ結ブ直線又ハ其ノ延長ハ其ノ共通ノ底ヲ垂

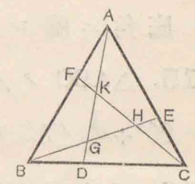


直ニ二等分スル。

6. 二等邊三角形ABCノ兩底角ABC, ACBノ二等分線ノ交點ヲOトスレバ, AOハ頂角BACヲ二等分スル。

7. 二角ト一邊トヲ夫々等シクスル兩三角形ハ合同デアルカ。

8. △ABCハ正三角形デアルトシ,其ノ三邊上ニ BD=CE=AF ナルヤウニD, E, Fヲ取ルトキハ, AD, BE, CFノ作ル三角形ハ正三角形デアル。



9. 所設ノ二點ヨリ夫々所設ノ距離ニアル點ヲ求メヨ。

10. 所設ノ線分ヲ四等分セヨ, 又八等分セヨ。

11. 二線分ノ和ト差トガ與ヘラレタトキ,其ノ二線分ノ長サヲ作圖ニヨツテ求メヨ。

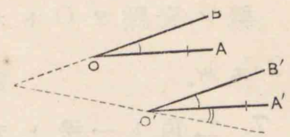
12. 歸謬法ニヨリ次ノ定理ヲ證明セヨ。

[1] 二ツノ隣接角ノ共通デナイ二邊ガ一直線ヲナサナケレバ,其ノ二角ノ和ハ2直角ニ等シクナイ。

[2] 隣接角ノ和ガ2直角ニ等シクナケレバ,其ノ

共通デナイ二邊ハ一直線トナラナイ。

13. 相等シイ二ツノ鋭角ガアツテ,其ノ一組ノ邊ハ平行デアル。然ラバ他ノ組ノ一邊ハ必ズ平行デアルカ。



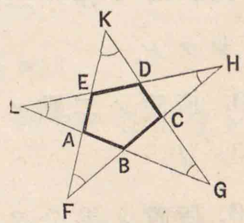
14. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ノナス角ハ底角ニ隣レル外角ニ等シイ。

15. $\triangle ABC$ ノ $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ノ作ル角ノ大サハ $90°+\frac{1}{2}\angle A$ 及ビ $90°-\frac{1}{2}\angle A$ デアル。

16. 五邊形 ABCDE ノ各邊ヲ延長シテ星形 FGHKL ヲ作ルトキハ,

$\angle F+\angle G+\angle H+\angle K+\angle L$

ハ 2 直角ニ等シイ。



17. 正多角形ノ一外角ガ 30° ナルトキハ其ノ邊數ハドウカ。

18. 三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ引イタ中線ノ 2 倍ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小サイ。

19. $\triangle ABC$ ニ於テ $AC>AB$ ナルトキ, A ヨリ BC ヘ垂線 AD ヲ引クトキハ, $\angle DAC>\angle DAB$ 及ビ $DC>DB$ デアル。

20. 二隣邊ガ夫々相等シク,一角ガ相等シイ二ツノ平行四邊形ハ合同デアル。

矩形及ビ正方形ノ合同ナル條件ハドウカ。

21. 平行四邊形ノ四ツノ角ノ二等分線ハ矩形ヲ作ル。

22. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ二ツヅツ結ブトキハ,四ツノ合同三角形ヲ生ズル。

23. 四邊形ノ兩對角線ノ中點ト相對スル二邊ノ中點トヲ結ンデ出來ル四邊形ハ平行四邊形デアル。

24. 或線分ヲ三分スレバ,全線分ノ平方ハ,各部分ノ平方ト各部分ヲ二ツヅツ取ツテ作ツタ矩形ノ二倍ヅツトノ和ニ等シイ。

25. ABCD, ABEF ヲ AB ノ同側ニ於ケル等積ナル兩平行四邊形トシ, AF ガ BC ノ中點ヲ通過スルトスレバ $\square ABCD=\square ABEF=\frac{1}{2}ABED$ デアル。

[II] 第二篇

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。[26—48]

26. (1) $ax^2-2a^2x+2a^3$ (2) $3x^2y-4xy^3+5xyz$

(3) $6px-3py+6pq$

27. (1) $8ab^2-10abc+12ba^2$ (2) $5x^2y-15xy+20y^2$

(3) $a^2xy+2abxy+xyb^2$

28. (1) $4(x-2)^2(x-3)-(x-2)^3$

(2) $x^2(a+b-c)-xy(a+b-c)-y^2(a+b-c)$

29. (1) $x(x-3)+y(x-3)-x+3$

(2) $7a^2(a-1)-3ab(a-1)+b^2(1-a)$

30. (1) $2ax+3bx-4ay-6by$ (2) $a^3-3a^2+y(a-3)-a+3$

31. (1) $a^2+10ab+25b^2$ (2) $4a^2-12ab+9b^2$

(3) $1-8x+16x^2$

32. (1) $2a^3b^2+4a^2b^3+2ab^4$ (2) $3x^3y^3-6x^2y^4+3xy^5$

33. (1) $9x^4-30x^2(y+z)+25(y+z)^2$

(2) $(x-y)^2-6(x-y)(y-z)+9(y-z)^2$

34. (1) $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$

(2) $4x^2+9y^2+z^2-12xy+4xz-6yz$

35. (1) $16p^2-25q^2$ (2) $64a^2-81x^2$

(3) p^2-121q^2 (4) $49x^2y^2-36a^2b^2$

36. (1) $10p^2-40x^2$ (2) $12a^2-75b^2$

(3) x^4-x^2 (4) x^3-4x

37. (1) $(x-y)^2-a^2$ (2) $(3x+4y)^2-16y^2$

(3) $(4x-5y)^2-9z^2$ (4) $(x^2+y^2)^4-x^4y^4$

38. (1) $(2a+3b)^2-(a-2b)^2$ (2) $(2x-3a)^2-(a-2x)^2$

(3) $(x+y+z)^2-(x-y+z)^2$

39. (1) $x^2+2xy+y^2-z^2$ (2) $x^2-2xy+y^2-1$

(3) $4a^2+4ab+b^2-9x^2$

40. (1) x^2+6x+8 (2) x^2+6x+5

(3) x^2+5x+6 (4) $p^2+9p+18$

41. (1) x^2-6x+8 (2) $y^2-7y+10$

(3) a^2-6a+5 (4) $m^2-12m+32$

42. (1) $x^2+6x-16$ (2) x^2+x-20

(3) $y^2+2y-15$ (4) $l^2+5l-14$

43. (1) $x^2-6x-16$ (2) z^2-z-42

(3) $x^2-7x-30$ (4) $k^2-35k-36$

44. (1) $x^2-10xy+16y^2$ (2) $y^2-7xy-18x^2$

(3) $a^2-5ax-36x^2$ (4) $x^2-13mx+36m^2$

45. (1) $8+64y^3$ (2) x^3-8

(3) $27x^3-64y^3$ (4) $27y^3+1000z^3$

46. (1) $24a^3-3b^3$ (2) $108a^3-500$

47. (1) $ax^2+2axy+ay^2-a^3$ (2) x^3-3x^2+2x

(3) $a^3x^3+64b^3x^3$

48. (1) $a^2-2ad-b^2+2bc-c^2+d^2$

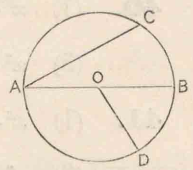
(2) $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

49. $2(x^2+y^2)$ デ $(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$ ヲ割レ。

50. $a+b=-p,\ ab=q$ ナルトキ a^3+b^3 ヲ p,q デ表ハセ。

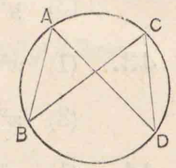
[III] 第三篇

51. 圖ニ於テABガ直徑,ODガ半徑,ACガ弦デ,$\angle BOD=2\angle A$ デアルトキハ $\widehat{BD}=\widehat{BC}$ デアル。



52. 同圓又ハ等圓ニ於テ,或弧ノ弦ハ其ノ二倍ノ弧ノ弦ノ半分ヨリモ大キイ。

53. 圖ニ於テ $AB=CD$ ナルトキハ $BC=AD$ デアル。



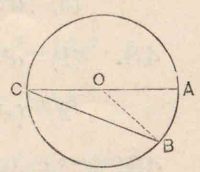
又此ノ逆ハ眞デアルカ。

54. 與ヘラレタ圓ノ與ヘラレタ弦ニ平行ニシテ且之ニ等シイ弦ヲ引ケ。

55. 與ヘラレタ圓ニ於テ與ヘラレタ弦ニ等シクテ且與ヘラレタ直線ニ平行ナ弦ヲ引ケ。

56. 一ツノ割線ガ二ツノ同心圓ヲ切ルトキ二圓周ノ間ニアル二ツノ部分ハ相等シイ。

57. 圖ニ於テ $\widehat{BC}=3\widehat{AB}$ ナルトキ $\angle C$ ヲ求メヨ。



58. 圓ノ平行ナル二切線ガ,他ノ一切線トA,Bニ於テ交ハルトキハ,線分ABハ其ノ圓ノ中心ニ於テ直角ヲ夾ム。

59. 弦ハ其ノ對スル弧ノ中點ヲ通ル切線ニ平行デアル。

60. $\triangle ABC$ ノ頂點B,Cヲ過ギ,夫々AC,ABニ平行ニBD,CEヲ引キ,外接圓トD,Eニ於テ交ハラシメレバ,DEハ其ノ外接圓ノAニ於ケル切線ニ平行デアル。

61. 圓ニ外接スル直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ和ハ斜邊ニ直徑ヲ加ヘタモノニ等シイ。

62. 切線ト弦トノナス角ノ二等分線ハ其ノ夾ム弧ヲ二等分スル。

63. $\triangle ABC$ ノ二頂點B,Cヨリ對邊ヘ下セル垂線ノ足ヲE,Fトシ,垂心ヲOトスレバ,A,E,O,F及ビB,C,E,Fハ各同一圓周上ノ四點デアル。

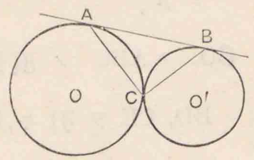
64. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點ニ於テ,此ノ交點ト二頂點トヲ通ル圓ニ切線ヲ引クトキハ,此ノ切線ハ此ノ四邊形ノ一邊ニ平行デアル。

65. 梯形ABCDノ平行ナル邊ヲAB,CDトシ,對角線ノ交點ヲEトスレバ,$\triangle ABE$, $\triangle CDE$ ノ外接圓ハEニ於テ相切スル。

66. 二圓ガ互ニ相切シ,切點ヲ通ル二直線ガ各圓周ニ於テ終ルトキ,コレ等ノ直線ノ端ヲ結ブ弦ハ平

行デアル。

67. 二圓ガCニ於テ外切シ,外共通切線ガA,Bニ於テ圓ニ切スルトキハ∠ACBハ直角デアル。



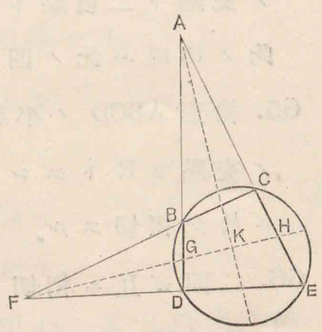
68. 圓周角ノ二等分線ガ圓周ニ交ハルマデ延長シ,此ノ交點ヲ通リ角ノ一邊ニ平行ナ弦ハ角ノ他ノ邊ニ等シイ。

69. 二等邊三角形ノ一邊ヲ直徑トシテ畫イタ圓ハ底ヲ二等分スル。

70. 二圓ガA,Bニ於テ相交ハリ,ACトADトヲ二圓ノ直徑トスルトキハC,Dヲ結ブ直線ハBヲ通ル。

71. 直徑ノ兩端ヨリ任意ノ弦ニ下セル垂線ノ足ハ中心ヨリ相等シイ距離ニアル。

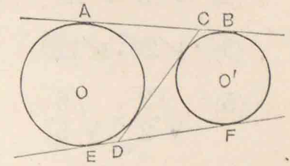
72. 圓ニ內接スル四邊形ノ對邊ヲA,Fニ於テ相會スルマデ延長スルトキハ,∠Aト∠Fトノ二等分線ハ垂直ニ交ハル。



注意 ∠BGK=∠CHKナルコトヲ證明セヨ。「圓ニ內接スル四邊形ノ對角ハ補角ヲナス」コトニヨル)

73. 圓ニ內接スル六邊形ノ一ツ置キニ取ツタ角ノ和ヲ求メヨ。

74. 二圓ノ外共通切線AB,EFガ內共通切線CDト交ハルトキ,CDハ外共通切線ABニ等シイ。



75. 三角形ノ底ト頂角ノ大サトガ一定ナルトキハ,底ノ兩端ヨリ對邊ヘ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ線分ノ長サハ一定デアル。

[IV] 第四篇

76. 次ノ數ノ平方根ヲ求メヨ。

(1) 6482116 (2) 1853.3025

(3) 0.00099225 (4) 3.141592

77. 次ノ式ノ平方根ヲ求メヨ。

(1) $9x^4-12x^3+10x^2-4x+1$

(2) $x^6-2x^5+3x^4-x^2+2x+1$

(3) $1-3x+\dfrac{13}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{1}{4}x^4$

78. 次ノ數ノ根號內ノ平方因數ヲ根號外ニ出セ。

(1) $\sqrt{12}$ (2) $\sqrt{20}$ (3) $\sqrt{98}$

(4) $\sqrt{50}$ (5) $3\sqrt{32}$ (6) $0.3\sqrt{75}$

79. 次ノ積ヲ一ツノ根號ヲ有スル數ニ直シ,根號內ニ平方因數アラバ之ヲ根號外ニ出セ。

(1) $\sqrt{3}\ \sqrt{15}$ (2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$

(3) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{120}$ (4) $2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}$

(5) $\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{6}{5}}$ (6) $\sqrt{\frac{21}{2}}\times\sqrt{\frac{7}{6}}$

80. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{5}$ (2) $(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+5)$

(3) $(2\sqrt{17}+5\sqrt{3})(\sqrt{17}-4\sqrt{3})$

(4) $\sqrt{15}\div\sqrt{\frac{3}{5}}$

81. 次ノ式ノ分母ヲ有理化セヨ。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ (5) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{m\sqrt{a}-n\sqrt{b}}$

(6) $\dfrac{a+b\sqrt{n}}{c+d\sqrt{n}}$

82. 次ノ式ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ。

(1) $\sqrt{\frac{1}{7}}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

(3) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$ (4) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

83. $3x=1$ ナルトキ

$\dfrac{1+2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ ノ値ヲ求メヨ。

84. $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ナルトキ

$x^2+2xy+y^2$ ノ値ヲ求メヨ。

85. $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ノトキ

x^2+x-1 ノ値ヲ求メヨ。

86. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ ノトキ

x^2+x+1 ノ値ヲ求メヨ。

87. $x=2-\sqrt{3}$ ナルトキ

x^2-4x+7 ノ値ヲ求メヨ。

88. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $3x^2=7x-2$ (2) $18x^2+27x=26$

(3) $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ (4) $x^2-10x+30=0$

(5) $(2x-5)^2-(x-6)^2=80$

89. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2y^2=10 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x^2+3y^2=10 \\ 6x^2+xy+9y^2=20 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2-xy+y^2=21 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y-3=-\frac{4}{3}(x-4) \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+y^2-13=0 \\ xy+y-x+1=0 \end{cases}$

90. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$(1)\ \begin{cases} xy=6 \\ yz=2 \\ zx=3 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} xy+xz=27 \\ yz+yx=32 \\ zx+zy=35 \end{cases}$$

91. 矩形ノ花壇ガアル,其ノ周圍ハ 64 m, 面積ハ 247 平方米デアル。其ノ縦横ヲ求メヨ。

92. 大小二ツノ整數ガアル,其ノ差ハ 3 デ平方ノ和ハ大數ヨリ 81 ダケ大デアル。此ノ二數ヲ求メヨ。

93. n 邊形ノ對角線ノ數ハ $\frac{1}{2}n(n-3)$ デアル。54 箇ノ對角線ヲ有スル多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

94. 周圍ガ 84m, 斜邊ガ 37 m アル直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ長サヲ求メヨ。

95. 或直角三角形ノ三邊カラ一様ニ一定ノ長サヲ引去ツタノニ殘リガ夫々 15cm, 16cm, 24cm デアルトイフ。モトノ三邊ノ長サヲ求メヨ。

96. 甲乙二數ガアル。甲ノ 3 倍ト乙ノ 5 倍トノ和ハ 76 デ,甲ノ平方ノ 3 倍ト乙ノ平方ノ 5 倍トノ和ハ 752 デアルトイフ。此ノ二數ヲ求メヨ。

97. 甲酒 8l 及ビ乙酒 6l ヲ買ツテ代金 16 圓ヲ拂ツタ。若シ甲酒 7 圓 50 錢ダケ買ヘバ乙酒 5 圓ダケ買フヨリ 1l 多ク得ラレルトイフ 各 1l ノ價ヲ求メヨ。

98. 木綿若干反ヲ仕入レ,之ヲ仕入値段ノ 5 歩増ニシテ賣リ,合計 30 圓ヲ利シタ。若シ 1 反ニツキ 30 錢ヅツ利シテ賣ツタナラ 1 反ノ仕入値段ニ相當スルダケノ 50 錢銀貨ノ箇數ト同ジ數ノ 10 圓紙幣ニ相當スル利益ヲ得ルトイフ。1 反ノ買ヒ値及ビ反數ヲ求メヨ。

99. 三數ガアル,何レノ二數ノ積モ殘リノ一數ニ等シイトイフ。各數ヲ求メヨ。

100. 甲ハ自動車デ,乙ハ徒歩デ同時ニ東地ヨリ西地ニ向ツテ出發シ,甲ハ途中デ下車シテ其ノ後徒歩デ西地ニ向ヒ,自動車ハ直ニ引返シテ乙ニ出會ヒ,乙ヲ乘セテ直ニ西地ニ向ヒ,出發後 10 時間デ甲乙同時ニ西地ニ到着シタトイフ。兩地間ノ距離ヲ求メヨ。但シ自動車ノ速サハ毎時 20km,甲乙ノ徒歩ノ速サハ相等シク毎時 4km デアル。

答

問 題 9 [93 頁]

1. $2a^2+2b^2$ **2.** $4ab$ **3.** $4ab-4ac+4ad$

4. a^4-b^4 **5.** x^8-1 **6.** x^4-5x^2+4

7. $m^2-2mn+n^2-p^2+2pq-q^2$ **8.** x^6-y^6

9. $a^2b^2+abc-2c^2$ **10.** $a^2+2ab-2ac+b^2-2bc-15c^2$

11. $13x-40$ **12.** $1+x^2-20x^4$

問 題 10 [100 頁]

1. $(x+4)(x-11)$ **2.** $(x+8)(x-3)$ **3.** $-(x-2)(x-5)$

4. $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$ **5.** $(x-6y)(x-7y)$

6. $(x+a)(x-c)$ **7.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

8. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$ **9.** $-(x-7)(x+14)$

10. $(a+b-3)(a+b-4)$ **11.** $(x+y-z+7)(x+y-z+8)$

12. $(x+y+1)(x+y-2)$ **13.** $y(m-3)(m+9)$

14. $-a(4x-a-6)$ **15.** $(1+m-n)(1-m+n)$

16. $2n(3m^2+n^2)$ **17.** $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

18. $(a+b)(a-b-1)$ **19.** $(a+b)(x+1)(x^2-x+1)$

20. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+2)$

雜 題 2 [101 頁—102 頁]

1. $49m^2+70mn+25n^2$, $\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{3}mn+\frac{1}{9}n^2$, $1-2xy+x^2y^2$

2. 107584, 106276

3. ❶ $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2$ ❷ $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2$ ❸ $(a-b-2c)^2$

5. ❶ $-x^2-2xy-y^2$ ❷ y^2-x^2

6. $-x^2+2xy-y^2$ **7.** $a^2-2ab-2ac+b^2+2bc+c^2$

8. $a^2-2ab+b^2-c^2+2cd-d^2$ **9.** a^8-b^8

10. a^6-b^6 **11.** 515

12. ❶ $x^2-x-156$ ❷ $x^2+5mx+6m^2$ ❸ $x^2-13x+52$

13. ❶ $(x-4)(x+6)$ ❷ $(x+4)(x-6)$ ❸ $(x+2)(x-12)$

❹ $(a-2)(a-12)$ ❺ $(a-b)(a-c)$

❻ $x(a-b+c-d)(a-b-c+d)$ ❼ $(m+n)(x+y)(x-y)$

14. $2c(a+b+2c)$ 平方米

問 題 15 [166 頁]

1. $4ab^2x^3$, $2a^3(3x-y)^2$, $\dfrac{5ab^3}{7c^2}$ **2.** $2x-1$, $a+b+c$

3. $4a^2-3ab+5b^2$ **4.** $1-x+x^2-x^3+x^4$

5. 1128, 504.06 **6.** $\dfrac{447}{659}$

7. 2.880 强 **8.** 1.773 弱

問 題 16 [171 頁—172 頁]

1. $5\sqrt{2}$, $4\sqrt{6}$, $11\sqrt{7}$, $6abc^2\sqrt{ac}$

2. $\sqrt{18}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{175}$, $\sqrt{720}$ **3.** ❶ 630 ❷ x^2y

4. ❶ $8\sqrt{2}$ ❷ 0 **5.** ❶ $16+3\sqrt{26}$ ❷ $6\sqrt{2}-7$

6. ❶ $\sqrt{13}$ ❷ $\dfrac{7-3\sqrt{3}}{2}$ ❸ $14+6\sqrt{6}$ ❹ $2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-1$

7. ❶ $4\sqrt{3}$ ❷ $\dfrac{31\sqrt{2}}{2}$ ❸ $2-\sqrt{3}$ ❹ $\dfrac{5\sqrt{3}-6}{3}$

8. 26 **10.** 0

問 題 17 [185 頁—186 頁]

1. $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{2}{3}$ **2.** 根ナシ **3.** $2\sqrt{3}$, $-5\sqrt{3}$

4. 6, $-\dfrac{4}{3}$ **5.** $\dfrac{5}{3}$, $-\dfrac{3}{2}$ **6.** $\dfrac{1}{10}$, $\dfrac{1}{11}$ **7.** ± 9

8. 1, $-\dfrac{1}{10}$ **9.** 1, 3 **10.** 2, 4 **11.** 1, 43

12. $1\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{4}$ **13.** 0, 3 **14.** ± 1

15. ❶ 0.344, -1.744 ❷ 2.720, 0.612 **16.** 5, 8

17. 1, $-\dfrac{9}{2}$ **18.** 53 米, 27 米 **19.** 576 人 **20.** 7 分 2 厘 5 毛

問 題 18 [194 頁—196 頁]

1. 3, 2; -5, 6 **2.** 5, 2; -2, -5 **3.** 3, 2; 2, 3; 5, 1; 1, 5

4. 3, 5; 5, 3 **5.** 3, 5 **6.** 3, 1; -3, -1; 0, 4; 0; -4

7. 3, 1; -1, -3 **8.** $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{5}{2}$; 2, 3; -3, -3; $-\dfrac{7}{2}$, $-\dfrac{5}{2}$

9. $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{5}$; $-\dfrac{1}{5}$, $-\dfrac{1}{6}$ **10.** 0, 0, 0; 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{5}$

11. 2, 3, 4; -2, -3, -4 **12.** 3, 5, 7; -3, -5, -7

13. 1, 2, 3, -1, -2, -3 **14.** 3, 4, 5; -5, -6, -7

15. 5*cm*, 7*cm* **16.** 36 人 **17.** 2*cm*, 3*cm*, 4*cm*

18. 5*cm*, 12*cm*, 13*cm* **19.** 10.25*cm*, 6.25*cm*

雜 題 4 [197 頁—199 頁]

1. ❶ ± 297 ❷ ± 443329 ❸ ± 3.1622 ❹ ± 0.816

❺ $\pm(2x^2-3x-1)$ ❻ $\pm(1-x+2x^2)$

2. ❶ $12\sqrt{3}$ ❷ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ❸ a^2-2b^2 ❹ x^4+1

3. 4 **4.** $-\dfrac{7}{6}$

5. ❶ 240 ❷ $7\sqrt{2}$ ❸ $\dfrac{13\sqrt{15}}{10}$

❹ $1+\sqrt{15}$ ❺ $2+\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

6. 1.236

7. $1\times(-24)$, $(-1)\times 24$, $2\times(-12)$, $(-2)\times 12$, $3\times(-8)$ $(-3)\times 8$,

$4\times(-6)$, $(-4)\times 6$

9. ❶ $\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$ ❷ $\dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{4}{3}$ ❸ 3.5, -7.8

❹ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ❺ 2, $-\dfrac{8}{3}$ ❻ 1, 2

10. ❶ 1, 1; $-\dfrac{53}{88}$, $-\dfrac{25}{22}$ ❷ 5, 4; $\dfrac{15}{2}$, $\dfrac{7}{3}$

❸ 0, 0; $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{2}$ ❹ ± 1, ± 4, ± 2 (複號同順)

11. 179 m　**12.** 6 m　**13.** 8 分

14. 80 脚　**15.** 18 cm, 8 cm

補充問題 [200頁—213頁]

[2] 第二篇

26. ❶ $a(x^2-2ax+2a^2)$　❷ $xy(3x-4y^2+5z)$
❸ $3p(2x-y+2q)$

27. ❶ $2ab(4b-5c+6a)$　❷ $5y(x^2-3x+4y)$
❸ $xy(a+b)^2$

28. ❶ $(x-2)^2(3x-10)$　❷ $(a+b-c)(x^2-xy-y^2)$

29. ❶ $(x-3)(x+y-1)$　❷ $(a-1)(7a^2-3ab-b^2)$

30. ❶ $(2a+3b)(x-2y)$　❷ $(a-3)(a^2+y-1)$

31. ❶ $(a+5b)^2$　❷ $(2a-3b)^2$　❸ $(1-4x)^2$

32. ❶ $2ab^2(a+b)^2$　❷ $3xy^3(x-y)^2$

33. ❶ $(3x^2-5y-5z)^2$　❷ $(x-4y+3z)^2$

34. ❶ $(a+b+c)^2$　❸ $(2x-3y+z)^2$

35. ❶ $(4p+5q)(4p-5q)$　❷ $(8a+9x)(8a-9x)$
❸ $(p+11q)(p-11q)$　❹ $(7xy+6ab)(7xy-6ab)$

36. ❶ $10(p+2x)(p-2x)$　❷ $3(2a+5b)(2a-5b)$
❸ $x^2(x+1)(x-1)$　❹ $x(x+2)(x-2)$

37. ❶ $(x-y+a)(x-y-a)$　❷ $3x(3x+8y)$
❸ $(4x-5y+3z)(4x-5y-3z)$　❹ $(x^4+3x^2y^2+y^4)(x^4+x^2y^2+y^4)$

38. ❶ $(3a+b)(a+5b)$　❷ $-8a(x-a)$
❸ $4y(x+z)$

39. ❶ $(x+y+z)(x+y-z)$　❷ $(x-y+1)(x-y-1)$
❸ $(2a+b+3x)(2a+b-3x)$

40. ❶ $(x+2)(x+4)$　❷ $(x+1)(x+5)$
❸ $(x+2)(x+3)$　❹ $(p+3)(p+6)$

41. ❶ $(x-2)(x-4)$　❷ $(y-2)(y-5)$
❸ $(a-1)(a-5)$　❹ $(m-4)(m-8)$

42. ❶ $(x-2)(x+8)$　❷ $(x-4)(x+5)$
❸ $(y-3)(y+5)$　❹ $(l-2)(l+7)$

43. ❶ $(x+2)(x-8)$　❷ $(z-7)(z+6)$
❸ $(x+3)(x-10)$　❹ $(k+1)(k-36)$

44. ❶ $(x-2y)(x-8y)$　❷ $(y+2x)(y-9x)$
❸ $(a+4x)(a-9x)$　❹ $(x-4m)(x-9m)$

45. ❶ $8(1+2y)(1-2y+4y^2)$　❷ $(x-2)(x^2+2x+4)$
❸ $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$　❹ $(3y+10z)(9y^2-30yz+100z^2)$

46. ❶ $3(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$　❷ $4(3a-5)(9a^2+15a+25)$

47. ❶ $a(x+y+a)(x+y-a)$　❷ $x(x-1)(x-2)$
❸ $x^3(a+4b)(a^2-4ab+16b^2)$

48. ❶ $(a-d+b-c)(a-d-b+c)$　❷ $(x+4)(x-3)(x+2)(x-1)$

49. $x^4+5x^2y^2+y^4$　**50.** $3pq-p^3$

[4] 第四篇

76. ❶ 2546　❷ 43.05　❸ 0.0315　❹ 1.7724…

77. ❶ $3x^2-2x+1$　❷ x^3-x^2+x+1　❸ $1-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2$

78. ❶ $2\sqrt{3}$　❷ $2\sqrt{5}$　❸ $7\sqrt{2}$　❹ $5\sqrt{2}$
❺ $12\sqrt{2}$　❻ $1.5\sqrt{3}$

79. ❶ $3\sqrt{5}$　❷ 4　❸ $20\sqrt{6}$　❹ 30
❺ $\frac{3}{\sqrt{5}}$　❻ $\frac{7}{2}$

80. ❶ $7\sqrt{2}-\sqrt{5}$　❷ $3\sqrt{10}$
❸ $-26-3\sqrt{51}$　❹ 5

81. ❶ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ ❷ $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

❸ 8 ❹ $\dfrac{7+3\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{11}$

❺ $\dfrac{ma-nb-(m-n)\sqrt{ab}}{m^2a-n^2b}$ ❻ $\dfrac{ac+(bc-ad)\sqrt{n}-bdn}{c^2-d^2n}$

82. ❶ 0.377 ❷ 1.366 ❸ 0.033 ❹ 16.905

83. $\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$ **84.** 36 **85.** 0

86. $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{2}$ **87.** 6

88. ❶ $2,\ \dfrac{1}{3}$ ❷ $\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{13}{6}$ ❸ $\sqrt{3}\pm1$

❹ 根ナシ ❺ $7,\ -\dfrac{13}{3}$

89. ❶ $x=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3},\ y=\dfrac{-3\pm2\sqrt{3}}{3}$

❷ $x=\pm\sqrt{\dfrac{15}{8}},\ y=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}};\quad x=\pm\sqrt{\dfrac{10}{7}},\ y=\mp\sqrt{\dfrac{10}{7}}$

❸ $x=4,\ y=5;\ x=5,\ y=4$

❹ $x=4,\ y=3$

❺ $x=-2,\ y=3;\ x=-3,\ y=2;\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

90. ❶ $x=3,\ y=2,\ z=1;\ x=-3,\ y=-2,\ z=-1$

❷ $x=3,\ y=4,\ z=5;\ x=-3,\ y=-4,\ z=-5$

91. 縱 13 m, 横 19 m **92.** 8, 5

93. 十二邊形 **94.** 35m, 12m

95. 20 cm, 21 cm, 29 cm **96.** 12, 8 或ハ 7, 11

97. 甲酒 1.25 圓, 乙酒 1 圓 **98.** 3 圓, 200 反

99. 1, 1, 1 **100.** 100 km

新制
綜合數學
[二學年用]
定價金九拾參錢

昭和六年五月廿七日初版印刷 昭和六年五月卅一日初版發行
昭和六年七月十日修正再版印刷 昭和六年七月十五日修正再版發行
昭和六年八月一日訂正三版印刷
昭和六年八月五日訂正三版發行

檢印

著作者 林鶴一
發行者 東京市小石川區小日向水道町84 株式會社東京開成館
代表者 松本繁吉
印刷者 東京市京橋區湊町三丁目12 1 高木鋒作

販賣所 東京市日本橋區吳服橋二丁目5 林平書店
販賣所 大阪市東區北久寶寺町心齋橋筋角 三木佐助

發行所
東京市小石川區小日向水道町八十四番地
株式會社東京開成館
振替口座東京五三二二番

株式會社大倉印刷所印刷