昭和六年十二月二十一日
文部省檢定濟
中學校數學科用

中等幾何三角法教科書

理學博士
竹内端三著

卷四

株式會社
三省堂

目　次

中等幾何三角法教科書
巻四

第十篇
直線及ビ平面
第一章 緒論

123. 立體幾何學

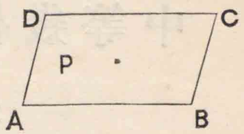
第二卷及ビ第三卷ニ於テハ平面幾何學ヲ述ベタ。之カラ立體幾何學ヲ述ベル,ヨッテ先ヅソノ定義ヲ掲ゲル。

定義 **立體幾何學**ハオモニ同一ノ平面上ニナイ圖形ノ形,大サ及ビ位置ニ關スル性質ヲ研究スル學科デアル。

公理 一. 一平面上ノ二點ヲ過ギル直線ハ全クソノ平面上ニアル。(第二卷ノ公理三)

平面ハソノ上ノ何レノ方向ニモ限リナク擴ガ

ツテヰルモノデアル。ケレドモ之ヲ圖ニ表ハスニハソノ上ニ畫イタ一ツノ平行四邊形ヲ以テスルノガ常デアル。



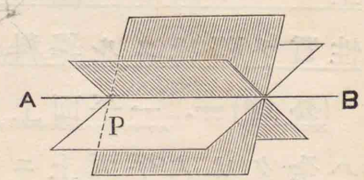
一點マタハ一直線ガ一平面上ニアルトキハ,コノ平面ハソノ點マタハソノ直線ヲ**過ギル**或ハ**含ム**トイフ。

一直線ト一平面トガ少クトモ一點ヲ共有スルトキハ,ソノ直線トソノ平面トハ**出會フ**トイフ。(直線ガ全ク平面上ニアル場合ヲモ含ム)

又一直線ト一平面トガタヾ一點ノミヲ共有スルトキハ,ソノ直線トソノ平面トハ**相交ハル**トイフ。

124. 平面ノ基本性質

公理二. 二點ヲ過ギル平面ハ無數ニ多クアル。



故ニ一直線上ニ任意ノ二點ヲトレバ之ヲ過ギル平面ハ無數ニ多クアル。而シテソレラノ平面ハ何レモモトノ一直線ヲ含ンデヰル(公理一)。

ヨツテ公理二ノ代リニ次ノ如クイフコトモ出來ル。

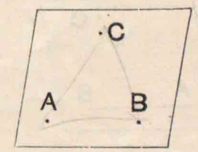
一直線ヲ含ム平面ハ無數ニ多クアル。

公理三. 一直線上ニナイ任意ノ三點ヲ過ギル平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル。

(第二卷ノ公理二)。

コノコトヲ次ノ如クニイフコトガアル。

一直線上ニナイ三點ハ唯一ツノ平面ヲ決定スル。

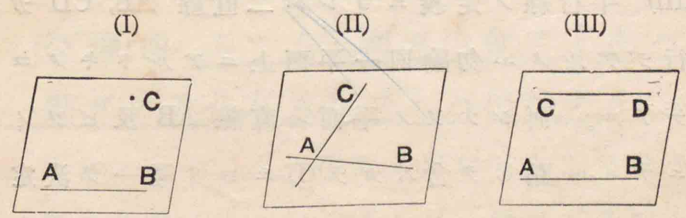


定理一. 次ノ各ノ條件ハ唯一ツノ平面ヲ決定スル。

(I) 一直線トソノ上ニナイ一點トヲ含ムコト。

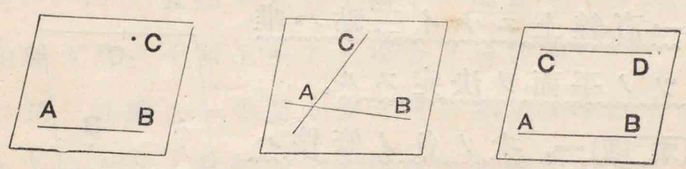
(II) 相交ハル二直線ヲ含ムコト。

(III) 平行ナ二直線ヲ含ムコト。



證明 (I) 直線AB上ニ任意ノ二點A,Bヲトレバ,コノ二點ヲ含ム平面ハ直線ABヲ含ミ,又逆ニ直線ABヲ含ム平面ハ勿論二點A,Bヲ含ム。故ニ直線ABトソノ上ニナイ一點Cトヲ含ム平面トハ,一直線上ニナイ三點A,B,Cヲ含ム平面デアル。ヨツテ公理三ニヨリ,一直線AB及ビソノ上ニナイ一點Cハ唯一ツノ平面ヲ決定スル。

(I) (II) (III)



(II) 相交ハル二直線AB, ACヲ含ム平面ハ直線AB及ビソノ上ニナイ一點Cヲ含ム平面デアル。故ニ(I)ニヨリAB, ACハ唯一ツノ平面ヲ決定スル。

(III) 平行線ノ定義ニヨレバ二直線AB, CDガ平行デアルノハ勿論同一平面上ニアルトキノコトデアル。而シテソノ平面ハ直線AB及ビソノ上ニナイ一點Cヲ含ムカラ(I)ニヨリ唯一ツ決定サレル。

125. 二直線ノ位置

空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ハ次ノ四種ダケデアル。

モシ同一平面上ニアレバ

(1) 相交ハルカ, (2) 互ニ平行ナルカ,

又ハ (3) 全ク相一致スル。

同一平面上ニナイトキハ

(4) 相交ハラズ,又互ニ平行デモナク,又全ク相一致モシナイ。

126. 二平面ノ位置

定義 二ツノ平面ガ少クモ一點ヲ共有スルトキハソノ二平面ハ**出會フ**トイフ。(二平面ガ相一致スル場合ヲモ含ム。)

モシ二平面ガ出會ハナイトキハ,ソノ二平面ハ互ニ**平行デアル**トイフ。

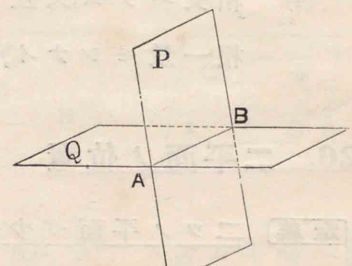
公理 四. 二ツノ平面ガ出會フトキハ唯一點ダケヲ共有スルコトハ出來ナイ。

換言スレバ,二ツノ平面ガ出會フトキハ少クモ二點ヲ共有シナケレバナラヌ。從ツテ公理一ニ

ヨリソノ二點ヲ過ギル直線ヲモ共有スルコトトナル。

定理 二. 二ツノ平面ガ出會フトキハ,全ク相一致スル場合ヲ除クノ他,コレラノ二平面ハ一ツノ直線ヲ共有シ,ソノ直線以外ノ點ヲ共有シナイ。

P, Q ハ二ツノ出會フ平面デ,全ク相一致シナイモノトスル。然ルトキハ P ト Q トハタダ一直線ノミヲ共有スル。



證明 A, B ヲ兩平面ニ共通ナ二ツノ點トスル(公理四)。

二點 A, B ハ平面 P 上ニアルカラ,直線 AB ヲ引ケバ平面 P ハ之ヲ含ム。

同樣ニ平面 Q モ亦直線 AB ヲ含ム。

故ニ兩平面 P, Q ハ一直線 AB ヲ共有スル。

若シ兩平面 P, Q ガ直線 AB 外ノ一點ヲモ共有スルモノトスレバ,コノ兩平面ハ全ク相一致シナケレバナラヌ(定理一)。コレ假設ニ反スル。

故ニ兩平面ハ一直線ヲ共有シ,ソノ直線以外ノ點ヲ共有シナイ。

定義 二ツノ平面ガ唯一ツノ直線ヲ共有スルトキハソノ二平面ハ**相交ハル**トイヒ,ソノ直線ヲ二平面ノ**交ハリ**又ハ**交線**トイフ。

二平面ノ位置ノ關係ハ次ノ三ツノ場合ニ限ル。

モシ二平面ガ出會フナラバ

(1) 相交ハルカ, 又ハ (2) 全ク相一致スル。

二平面ガ出會ハナイトキハ

(3) 互ニ平行デアル。

例題

1. 三點 A, B, C ヲ順次ニ結ブ三ツノ線分 AB, BC, CA ハ皆同一平面上ニアル。

2. 四點 A, B, C, D ヲ順次ニ結ブ四ツノ線分ノ中, AB ト CD トガ平行ナラバ,コレラノ四ツハ皆同一平面上ニアル。

3. 同一平面上ニナイ三直線ガ同一點ヲ過ギルトキ,コレラノ直線デ決定サレル平面ノ數ハ何程アルカ。

4. 同一平面上ニナイ四ツノ點ガアル,コレラノ點デ決定サレル平面ノ數ハ何程アルカ。

第二章 平行ナル平面及ビ直線

127. 直線ト平面トノ位置

定義 一直線ト一平面トガ出會ハナイトキハ,コノ一直線ト一平面トハ互ニ**平行デアル**トイフ。

一直線ト一平面トノ位置ノ關係ハ次ノ三種ニ限ル。

モシ直線ト平面トガ出會フナラバ

(1) 相交ハルカ,又ハ (2)直線ガ平面ニ含マレル。

又直線ト平面トガ出會ハナイトキハ

(3) 互ニ平行デアル。

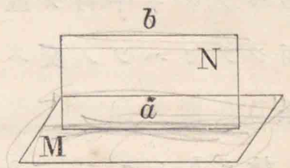
128. 平行直線ニ關スル定理

定理三. 二直線ガ平行ナルトキ,ソノ一直線ヲ含ミ他ノ一直線ヲ含マナイ平面ハ後ノ一直線ニ平行デアル。

二ツノ平行ナ直線ヲa,bトシ,aヲ含ミbヲ含マナイ一ツノ平面ヲMトスレバ,Mハbニ平行デアル。

證明 a, bハ平行デアルカラ一ツノ平面ヲ決定スル。之ヲNトスレバ,aハ卽チ二平面MトN

トノ交ハリデアル。



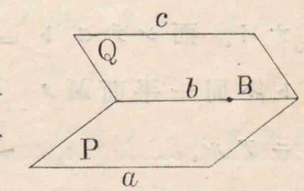
故ニ假リニbガ平面Mト出會フコトガアルトスレバ,ソノ交點ハa上ニナケレバナラヌ。從ツテa, bハ相交ハルコトトナル(定理二)。

然ルニbトaトハ假設ニヨリ平行デアルカラ相交ハルコトハナイ。

故ニbトMトハ出會ハナイ,卽チ互ニ平行デアル。

系 1. 二直線ガ平行ナルトキ,夫々ソノ一ツヅツヲ含ム二ツノ平面ノ交ハリハソレラノ二直線ノ各ニ平行デアル。

系 2. 同一直線aニ平行ナ二直線b, cハ互ニ平行デアル。



證明 aトbトニヨツテ決定サレル平面ヲPトシ,又b上ノ一點Bト直線cトデ決定サレル平面ヲQトスル。

然ルトキハPトQトノ交ハリハaニ平行デアル(系1)。故ニソノ交ハリハP上ニアツテ,點Bヲ

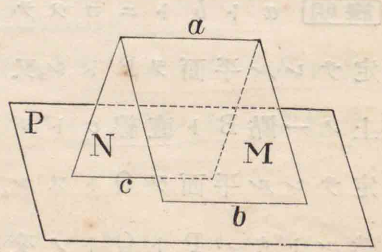
過ギリaニ平行ナ直線デアル,即チ直線bデアル。而シテcハソノ交ハリニ平行デナケレバナラヌ。(系1)。

故ニbトcトハ互ニ平行デアル。

定理 四. 一直線ト一平面トガ平行ナルトキハ,ソノ直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交ハリハ前ノ直線ニ平行デアル,而シテソレラノ交ハリハマタ互ニ平行デアル。

直線aト平面Pトヲ互ニ平行デアルトシ,aヲ含ム平面M及ビNト,平面Pトノ交ハリヲ夫々b, cトスレバ,b, cハ何レモaニ平行デ,且ツマタ互ニ平行デアル。

證明 aトPトハ互ニ平行デアルカラ出會ハナイ。故ニaハP上ノ直線bト出會フコトハナイ。而シテaトbトハ同一平面M上ニアル。



故ニaトbトハ互ニ平行デアル。

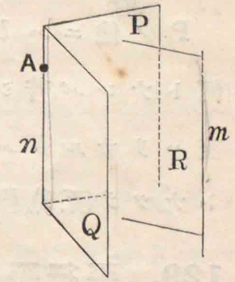
同様ニaトcトモ亦互ニ平行デアル。

従ツテマタbトcトモ互ニ平行デアル(定理三系2)。

系 1. 同一ノ直線ニ平行ナ二平面ノ交ハリハソノ直線ニ平行デアル。

同一ノ直線mニ平行ナ二平面P, Qノ交ハリヲnトスレバ,nトmトハ互ニ平行デアル。

證明 交線n上ノ任意ノ一點Aトmトヲ含ム平面ヲRトスレバ,Rト平面Pトノ交ハリハAヲ過ギリmニ平行ナ直線デアル。



同様ニRトQトノ交ハリモAヲ過ギリmニ平行ナ直線デアル。

然ルニ一點Aヲ過ギツテmニ平行ナ直線ハ唯一ツダケデアル。

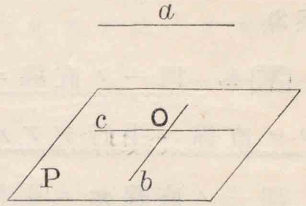
故ニPトRトノ交ハリモ,QトRトノ交ハリモ同一直線デ,ツマリPトQトノ交ハリnデアル。

故ニnトmトハ互ニ平行デアル。

系 2. 同一平面上ニナイ二直線ノ一ツヲ含ンデ,他ノ一ツニ平行ナ平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル。

a, bヲ同一平面上ニナイ二直線トスレバ,bヲ

含ンデaニ平行ナ平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツダケデアル。

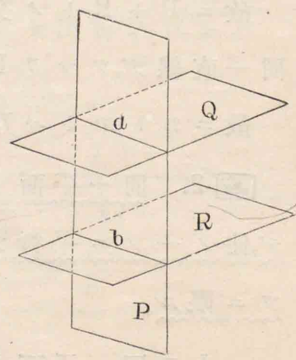


證明 b上ノ一點Oト直線aトノ定メル平面ニ於テ,Oヲ過ギリaニ平行ナ直線cヲ引ケバ,二直線b, cノ定メル平面Pハbヲ含ミaニ平行デアル(定理三)。

Pノ他ニハbヲ含ミaニ平行ナ平面ハナイ。何トナレバ,若シアルトスレバ,ソノ平面トPトノ交ハリナルbハaニ平行デナケレバナラヌコトトナッテ(系1),假設ニ反スルカラデアル。

129. 平行平面ニ關スル定理

定理 五. 互ニ平行ナ二平面ガ一ツノ平面ト交ハルトキハソノ交ハリハ互ニ平行デアル。



互ニ平行ナ二平面Q, Rノ何レトモ交ハル平面ハ常ニアル。何トナレバQ及ビR上ニ夫々任意ノ一點ヲトリソレラノ二點ヲ過ギル平面Pヲ作レバ公

理四ニヨリPハQ及ビRト交ハルカラデアル。

今PトQ及ビPトRトノ交ハリヲ夫々a, bトスル。

然ルトキハa, bハ互ニ平行デアル。

證明 QトRトハ平行デアルカラ出會ハナイ。故ニaトbトハ相交ハラナイ。

而シテaトbトハ同一ノ平面Pノ上ニアル。

故ニaトbトハ互ニ平行デアル。

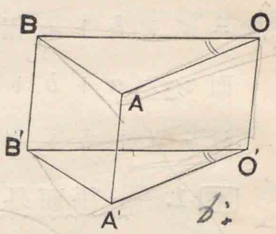
系 1. 一平面外ノ一點ヲ過ギリ,ソノ平面ニ平行ナ平面ハ唯一ツ存在スル。

平面P外ノ一點ヲAトスル。モシAヲ過ギリPニ平行ナ平面ガ二ツアルナラバ,之ヲQ, Rトスル。Aヲ過ギリPト交ハル平面ノ中デQ, Rノ交ハリヲ含マナイ一平面ヲトリ,之トP, Q, Rトノ交ハリヲ夫々p, q, rトスレバ,一點Aヲ過ギリ一直線pニ平行ナ二ツノ直線q, rガアルコトトナル,コレ不合理デアル。

系 2. 互ニ平行ナ二平面ノ一ツト相交ハル平面ハ他ノ一ツトモ相交ハル。

何トナレバ,モシ相交ハラナケレバ一點ヲ過ギリ一平面ニ平行ナ平面ガ二ツアルコトトナルカラデアル。

定理 六. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ一ツノ角ノ二邊ニ夫々平行デ,且ツソノ相對應スル邊ガ二角ノ頂點ヲ過ギル直線ニ關シテ夫々同ジ側ニアルトキハ,ソノ二ツノ角ハ相等シイ。



$\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トニ於テ, OA ハ O'A' ニ平行, OB ハ O'B' ニ平行デ,且ツ夫々 OO' ニ關シテ同ジ側ニアルトキハ, $\angle AOB=\angle A'O'B'$ デアル。

OB ∥ O'B'
OA ∥ O'A'
∠BOA = ∠B'O'A'

證明 OA=O'A', OB=O'B' ナラシメレバ, OAA'O' 及ビ OBB'O' ハ何レモ平行四邊形デアル。

故ニ AA', BB' ハ共ニ OO' ト相等シク且ツ平行デアル,從ツテマタ互ニ相等シク且ツ平行デアル。

故ニ ABB'A' ハ平行四邊形デ, AB=A'B'.

從ツテ $\triangle OAB$ ト $\triangle O'A'B'$ トハ三邊ガ夫々相等シイカラ合同デアル。

故ニ $\angle AOB=\angle A'O'B'$.

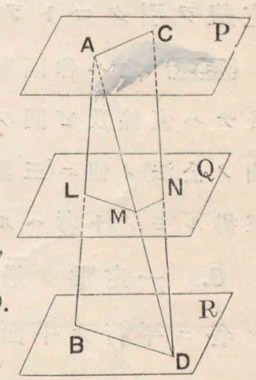
定理 七. 二直線ガ三ツノ互ニ平行ナ平面ト相交ハツテ截リ取ラレル線分ハ比例ヲナス。

二直線 AB, CD ガ互ニ平行ナ三平面 P, Q, R ト交ハル點ヲ夫々 A, L, B 及ビ C, N, D トスレバ,

$$AL:LB=CN:ND$$

デアル。

證明 A, D ヲ結ビ,之ト平面Qトノ交ハリヲ M トスレバ, AB ト AD トガ定メル平面トQ及ビRトノ交ハリナル LM ト BD トハ互ニ平行デアル(定理五)。



同様ニ MN ト AC トモ互ニ平行デアル。

故ニ $AL:LB=AM:MD,$
$AM:MD=CN:ND.$

從ツテ $AL:LB=CN:ND.$

例題

1. 平行ナ二平面ノ間ニ夾マレル平行ナ二線分ハ相等シイ。

2. 四邊形ノ四邊ガ必ズシモ悉ク同一平面上ニナイ場合デモ,ソノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブ四ツノ線分ハ一ツノ平行四邊形ヲ作ル。

定義 四邊ガ同一平面上ニナイ四邊形ヲ

しゆ四邊形(又ハ捩四邊形)トイフ。

3. 互ニ平行ナ二直線ノ一ツガ一平面ト交ハルトキハ,他ノ一ツモ亦コノ平面ト交ハル。

4. 互ニ平行ナ二平面ノ一ツト交ハル直線ハ他ノ一ツトモ交ハル。

5. 一定點ヲ過ギリ,二定直線ノ各ト出會フ一直線ヲ引クコトヲ求ム。

注意 之ハ作圖題デアル。立體幾何學ノ作圖題ニ於テハ直線及ビ圓ヲ畫クコト(平面幾何學ニ於ケル作圖ノ公法)ノ他ニ「三點ヲ過ギル平面ヲ作ルコト」モ亦出來得ルモノト考ヘル。

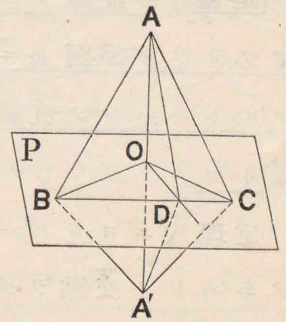
6. 一定點ヲ過ギリ同一平面上ニナイ二直線ノ各ニ平行ナ平面ヲ作ルコトヲ求ム。

第三章 垂直ナル平面及ビ直線

130. 一平面ノ垂線

定理八. 相交ハル二直線ノ交點ヲ過ギリ且ツソノ各ニ垂直ナ直線ハ,ソノ二直線ヲ含ム平面上ニアツテソノ交點ヲ過ギル任意ノ直線ニ垂直デアル。

此定理ハ出発点、又立体幾何ヲ支ヘ



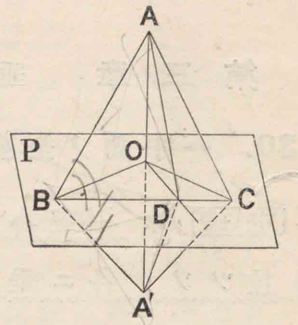
二直線 OB, OC ノ交點 O ヲ過ギツテコノ二直線ニ垂直ナ直線ヲ OA トシ, OB, OC ヲ含ム平面 P 上ニアツテ O ヲ過ギル任意ノ直線ヲ OD トスレバ, OA ト OD トハ互ニ垂直デアル。

假定 OB OC ⊥ OA

證明 平面 P 上デ OB, OD, OC ト相交ハル直線ヲ引キ,ソノ交點ヲ夫々 B, D, C トスル。

AO ヲ延長シテ $OA'=OA$ ナラシメ, A, A′ ヲ各 B, D, C ト結ベバ OB, OC ハ何レモ AA′ ノ垂直二等分線デアルカラ,

$$AB=A'B, \quad AC=A'C.$$



故ニ　$\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$.

従ツテ　$\angle ABD = \angle A'BD$.

故ニ　$\triangle ABD \equiv \triangle A'BD$.

従ツテ　$AD = A'D$.

故ニ　$\triangle AOD \equiv \triangle A'OD$.

故ニ　$\angle AOD = \angle A'OD$.

即チ OA ト OD トハ互ニ垂直デアル。

定義　一直線ガ一平面ト交ハリ,ソノ交點ヲ過ギツテソノ平面上ニ引イタ總ベテノ直線ニ垂直ナルトキハ,ソノ直線ト平面トハ互ニ**垂直デアル**トイフ。

定理八ニヨレバ,一直線ガ一平面ニ垂直ナルタメニハ,ソノ交點ヲ過ギリソノ平面上ニ引イタ任意ノ二直線ノ各ニ垂直デアレバ宜イコトガ知ラレル。

一直線ト一平面トガ互ニ垂直ナルトキ,ソノ直線ヲソノ平面ノ**垂線**トイヒ,垂直デナク相交ハルトキハ,ソノ直線ヲソノ平面ノ**斜線**トイフ。

垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲソノ垂線又ハ斜線ノ足トイフ。

系 1.　一直線ガ一平面ニ垂直ナルトキハ,ソノ

足ヲ過ギリソノ直線ニ垂直ナ直線ハソノ平面上ニアル。

系 2.　互ニ平行ナ二直線ノ一ツガ一平面ニ垂直ナトキハ,他ノ一ツモ亦ソノ平面ニ垂直デアル。

定義　**同一平面上ニナイ二直線ノナス角**トハ任意ノ一點ヲ過ギリ夫々之ニ平行ニ引イタ二直線ノナス角ノコトデアル。

ソノ角ノ大サガ上ニイフ所ノ任意ニ取ッタ一點ノ位置ニ無關係ナルコトハ定理六ニヨツテ明カデアル。

コノ定義ヲ用ヰレバ定理八カラ直チニ次ノ系3ヲ得ル。

系 3.　一直線ガ一平面上ノ平行デナイ任意ノ二直線ニ夫々垂直ナルトキハ,ソノ平面ニ垂直デアル。

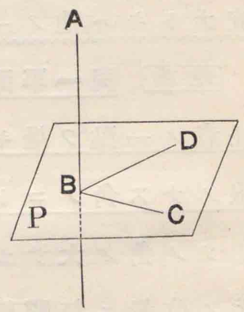
系 4.　平面外ノ一點カラソノ平面ニ垂線及ビ斜線ヲ引ケバ,垂線ハ斜線ヨリモ短カイ。

定理 九.　一直線上ノ一點ヲ過ギリ之ニ垂直ナ平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル。

直線 AB 上ノ一點 B ヲ過ギッテ AB ニ垂直ナ

平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツダケデアル。

證明　Bヲ過ギッテABニ任意ノ二ツノ垂線BC, BDヲ引キ, BC, BDノ定メル平面ヲPトスレバ,PハABニ垂直ナ平面デアル(定理八)。

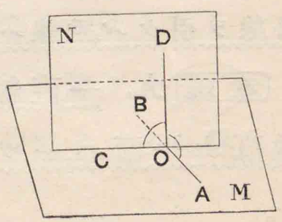


モシ平面Pノ外ニBヲ過ギッテABニ垂直ナ平面Qガアルトシ, AB, BCノ定メル平面RトQトノ交ハリヲBEトスレバ, BC, BEハABト共ニR上ニアリ,且ツ一點Bヲ過ギッテ同一ノ直線ABニ垂直ナルコトトナル,コレ不合理デアル。

故ニ斯クノ如キ平面ハPノ他ニハナイ。

系　一直線外ノ一點ヲ過ギリ之ニ垂直ナ平面ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル。

定理十.　平面上ノ一點ヲ過ギリ之ニ垂直ナ直線ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル。



平面M上ノ一點Oヲ過ギッテ平面Mニ垂直ナ直線ハ一ツアル,而シテ唯一ツダケデアル。

證明　平面M上ニOヲ過ギル任意ノ一直線ABヲ引キ, Oヲ過ギッテABニ垂直ナ平面Nヲ作リ, MトNトノ交ハリヲOCトスル。

Oヲ過ギリ平面N上デOCニ垂直ニODヲ引ケバ, ODハOヲ過ギッテMニ垂直ナ直線デアル。

何トナレバNハABニ垂直デアルカラ,

$\angle AOD=$直角.

又假定ニヨリ　$\angle COD=$直角.

故ニODハMニ垂直デアル(定理八)。

モシOヲ過ギッテMニ垂直ナ直線ガODノ他ニモアレバ,之ヲOHトスル。OHトODトデ決定サレル平面トMトノ交ハリヲOKトスレバ, OH, ODハOKト同一平面上ニアッテ共ニOKニ垂直トナル,コレ不合理デアル。

故ニOヲ過ギッテMニ垂直ナ直線ハODノ他ニハナイ。

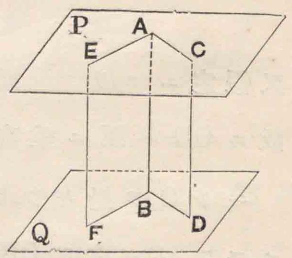
系　同一ノ平面ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアル。

證明　一方ノ垂線ノ足ヲ過ギリ他ノ垂線ニ平行ナ直線ヲ引キ,定理八系2, 及ビ定理十ヲ用ヰテ同一法ニヨリ證明スルコトガ出來ル。

131. 二平面ノ共通垂線

定理 十一. 互ニ平行ナ二平面ノ一ツニ垂直ナ直線ハ他ノ一ツニモ亦垂直デアル。

平面PトQトハ互ニ平行デ,一直線ABガ平面PトAニ於テ垂直ニ交ハルトキハ,ABハ亦Qトモ垂直ニ交ハル。



證明 PトQトハ互ニ平行デABハPト交ハルカラ,Qトモ亦交ハル(16頁例題4)。ソノ交點ヲBトスル。

ABヲ含ム一平面トP及ビQトノ交ハリヲ夫夫AC, BDトスレバ,ACトBDトハ互ニ平行デアル。

然ルニABハPノ垂線デアルカラ,

$\angle BAC=$直角.

故ニ $\angle ABD=$直角.

又ABヲ含ム他ノ一平面トP及ビQトノ交ハリヲ夫々AE, BFトスレバ,同様ニシテ

$\angle ABF=$直角.

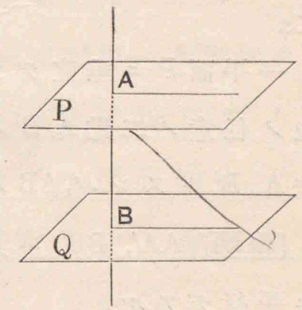
即チABハ平面Q上ノ二直線BD, BFノ各ニ垂直デアル。

故ニABハ平面Qニ垂直デアル。

定義 平行ナ二平面ノ間ニアル共通垂線ノ線分ノ長サヲソノ二平面ノ間ノ**距離**トイフ。

定理 十二. 同一直線ニ垂直ナ二ツノ平面ハ互ニ平行デアル。

二平面P,Qガ同一直線ABニ垂直ナラバ,P,Qハ互ニ平行デアル。



證明 PトQトガ互ニ平行デナイトスレバ,ソノ交ハリノ上ニ一點Mヲ取リ,MA,MBヲ結ブ。

然ルトキハMA,MBハ共ニABニ垂直デアル。

即チ一點MカラABニ二ツノ垂線ガ引カレルコトトナル,コレ不合理デアル。

故ニPトQトハ互ニ平行デナケレバナラヌ。

132. 正射影

定義 一點ノ一平面上ニ投ズル**正射影**トハソノ點カラソノ平面ニ引イタ垂線ノ足ノコトデアル。

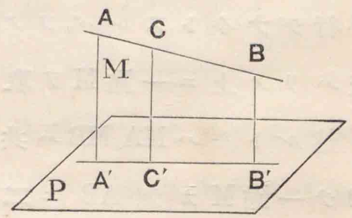
一直線ノ一平面上ニ投ズル**正射影**トハソノ直

線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ノコトデアル。

定理 十三. 一平面ニ垂直デナイ一直線ノソノ平面上ニ投ズル正射影ハ,ソノ一直線上ノ二點ノ正射影ヲ過ギル一直線デアル。

一平面 P ニ垂直デナイ一直線ヲ AB トシ, AB 上ノ任意ノ二點 A, B ノ P 上ニ投ズル正射影ヲ夫夫 A', B' トスレバ, AB ノ正射影ハ直線 $A'B'$ デアル。

證明 AA', BB' ハ共ニ P ニ垂直デアルカラ,互ニ平行デアル。



AA' 及ビ BB' ノ定メル平面ヲ M トスル。

AB 上ノ任意ノ一點 C カラ AA' ニ平行ニ CC' ヲ引ケバ, CC' ハ M 上ニアル。而シテ $A'B'$ ハ AA' ト交ハルカラ,之ト平行ナ CC' トモ交ハル,ソノ交點ヲ C' トスル。然ルトキハ CC' ハ平面 P ニ垂直デ(定理八,系2), C ノ正射影ハ C' デアル。

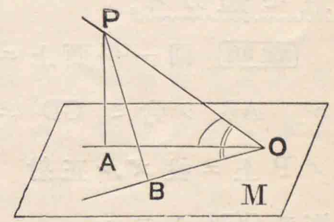
故ニ AB 上ノ總テノ點ノ正射影ハ直線 $A'B'$ ノ上ニアル。

又逆ニ $A'B'$ 上ノ任意ノ點 C' カラ平面 M 上ニ

於テ $A'A$ ニ平行ナ直線 $C'C$ ヲ引ケバ, AB ハ $A'A$ ト交ハルカラ之ト平行ナ $C'C$ トモ交ハル,ソノ交點ヲ C トスル。然ルトキハ CC' ハ平面 P ニ垂直デ, C' ハ C ノ正射影デアル。故ニ $A'B'$ 上ノ總ベテノ點ハ AB 上ノ點ノ正射影デアル。

故ニ AB ノ P 上ニ投ズル正射影ハ $A'B'$ デアル。

定理 十四. 一ツノ平面ノ斜線ガソノ平面上ニ於テソノ足ヲ過ギル諸直線トナス角ノ中,ソノ斜線ノ正射影トナス鋭角ガ最小デアル。



OP ヲ平面 M ノ斜線, O ヲソノ足トスル。又 M 上ニ投ズル OP ノ正射影ヲ OA トシ, M 上ニ於テ O ヲ過ギル他ノ任意ノ直線ヲ OB トスルトキハ, $\angle POA$ ハ $\angle POB$ ヨリモ小デアル。

證明 點 P ノ正射影ヲ A トシ, $OA=OB$ ナラシメレバ $\triangle AOP$ ト $\triangle BOP$ トニ於テ,

$OA=OB$,　OP ハ共通,

而シテ　$PA<PB$.

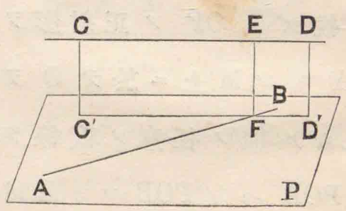
故ニ　$\angle AOP<\angle BOP$.

定義 **一直線ト一平面トノナス角**トハ,ソノ平面上ニ投ズルソノ直線ノ正射影ト,モトノ直線トノナス角ヲイフ。

133. 二直線ノ共通垂線

定理 十五. 同一平面上ニナイ二直線ノ各ト垂直ニ相交ハル直線ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル。兩直線上ニ夫々一端ヲモツ線分ノ中デソノ共通垂線ナルモノガ最モ短カイ。

證明 同一平面上ニナイ二直線ヲ AB, CD トスル。AB ヲ含ミ CD ニ平行ナ平面 P ヲ作リ, CD ノ P 上ニ投ズル正射影ヲ C′D′ トスル。

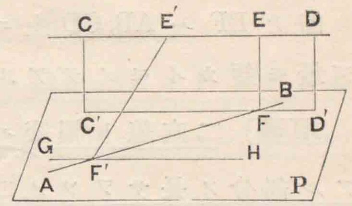


C′D′ ハ CD ニ平行デアルカラ, AB ニ平行デハナイ。故ニ C′D′ ハ AB ト一ツノ點 F ニ於テ交ハル。

サテ定理十三ニヨレバ, C′D′ 上ノ點ハスベテ CD 上ノ或ル點ノ正射影デアル。ヨツテ今 F ヲ CD 上ノ一點 E ノ正射影トスレバ, EF ハ平面 P ニ垂

直デアルカラ, AB 及ビ C′D′ ニ垂直デアル。

從ツテ EF ハ AB 及ビ CD ニ垂直デ,而シテコレラト相交ハル。



モシ EF ノ他ニ AB, CD ト相交ハル共通垂線 E′F′ ガアルトスレバ,ソレト AB, CD トノ交點ヲ夫々 F′, E′ トスル。

F′ 及ビ CD ヲ含ム平面ト P トノ交ハリヲ GH トスレバ, GH ハ CD ニ平行デアル(定理四)。

從ツテ E′F′ ハ AB ト GH トニ垂直デアルカラ平面 P ノ垂線デアル。

然ラバ F′ ハ E′ ノ M 上ニ投ズル正射影デアルカラ C′D′ ノ上ニナケレバナラヌ。從ツテ F′ ハ F ト同ジ點デ,ツマリ E′F′ ハ EF ト相一致スル。

故ニ EF ノ他ニハ AB, CD ト相交ハル共通垂線ハナイ。

次ニ同ジ圖ニ於テ E′, F′ ヲ夫々 CD, AB 上ノ任意ノ二點トスレバ E′F′ ガ全ク EF ト相合シナイ限リ,上述ノ理ニヨリ E′F′ ハ平面 P ニ垂直デナイカラ, E′F′ ハ E′ カラ平面 P ニ引イタ垂線ヨリモ大デアル。

而シテ E′ カラ P ニ引イタ垂線ハ EF ニ等シイ。

故ニ EF ハ E′F′ ヨリ小デアル。

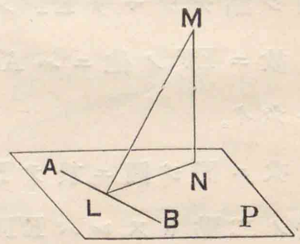
即チ EF ハ AB, CD 上ニ夫々一端ヲモツ線分中デ最モ短カイモノデアル。

定義 二直線ト相交ハル共通垂線ノソノ間ニアル部分ノ長サヲソノ二直線ノ間ノ**距離**トイフ。

134. 三垂線ノ定理

定理 **十六.** 一點カラ一平面及ビソノ平面上ニアル一直線ニ夫々垂線ヲ引クトキハ,ソノ兩垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ前ノ直線ニ垂直デアル。

一點 M カラ平面 P ニ引イタ垂線ノ足ヲ N トシ,又 M カラ P 上ノ一直線 AB ニ引イタ垂線ノ足ヲ L トスル。然ルトキハ直線 NL ハ AB ニ垂直デアル。



證明 AB ハ相交ハル二直線 MN 及ビ ML ニ共ニ垂直デアル。故ニ AB ハ MN, ML ノ定メル平面 LMN ニ垂直デアル。從ッテ AB ハ平面 LMN 上ノ直線 NL ニ垂直デアル。

同ジ圖ヲ用キテ,同樣ノ論法ニヨリ次ノ系ヲ得ル。

系 1. MN ガ平面 P ニ垂直, NL ガ直線 AB ニ垂直ナラバ, ML ハ直線 AB ニ垂直デアル。

系 2. ML ガ直線 AB ニ垂直, NL ガ P 上デ直線 AB ニ垂直デ, MN ガ直線 LN ニ垂直ナラバ, MN ハ平面 P ニ垂直デアル。

系 3. 平面外ノ一點ヲ過ギリソノ平面ニ垂直ナ直線ハ一ツアル,而シテ唯一ツニ限ル。

注意 定理十六及ビ系1,系2ヲ**三垂線ノ定理**トイフ。

例題

1. 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。又三定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 相交ハル二平面ノ間ニアル一點カラコノ二平面ノ各ニ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ直線ハソノ二平面ノ交線ニ垂直デアル。

3. 一定點カラ相交ハル二平面ノ各ニ垂線ヲ引キ,ソノ足カラ更ニ夫々ソノ二平面ノ交線ニ垂線ヲ引クトキハ,後ノ兩垂線ハ二平面ノ交線上ノ一點ニ於テ出會フ。

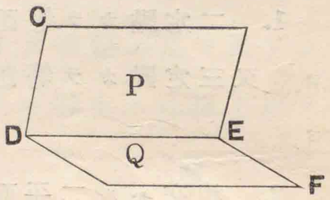
4. 一點カラ一平面ニ引イタ二ツノ斜線ノ中

ソノ正射影ノ大ナルモノガ他ヨリ大デアル。ソノ正射影ガ相等シケレバソノ二ツノ斜線モ相等シイ。

第四章 二面角及ビ多面角

135. 二面角

定義 相交ハル二平面ハ**二面角**ヲ作ルトイヒ，ソノ各ノ平面ヲ二面角ノ**面**トイヒ，ソノ交線ヲ二面角ノ**稜**トイフ。

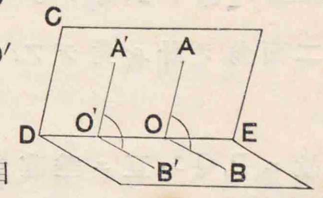


二面角ヲ表ハスニハソノ二面ノ上ニ夫々一點ヅツヲトリ，ソノ記號ノ間ニ稜上ノ二點ノ記號ヲ挾ンデ之ヲ呼ブ。例ヘバ二面角 CDEF トイフガ如クデアル。

シカシ唯一ツノ二面角ノミガ存在スルトキハソノ稜ノ上ノ任意ノ二點デ之ヲ呼ブコトモアル。例ヘバ二面角 DE トイフガ如クデアル。

定理 十七. 一ツノ二面角ニ於テ，ソノ稜上ノ任意ノ一點カラ各面上ニ於テ夫々ソノ

稜ニ垂直ニ引イタ直線ノナス角ハ一定デアル。



二面角 CDEF ニ於テ，稜 DE 上ノ任意ノ二點 O, O′ カラ DE ニ垂直ニ AO, A′O′ ヲ面 CDE 上ニ; BO, B′O′ ヲ面 FED 上ニ引ケバ，∠AOB ト ∠A′O′B′ トハ相等シイ。

證明 ∠AOB, ∠A′O′B′ ニ於テ，AO, A′O′ 及ビ BO, B′O′ ハ夫々平行デ，且ツ稜 DE ノ同ジ側ニアル。

故ニ ∠AOB=∠A′O′B′. (定理六)

定義 二面角ノ大サトイフノハソノ稜上ノ一點カラ各面上ニ於テ夫々ソノ稜ニ引イタ二ツノ垂線ノナス角ノ大サノコトデアル。

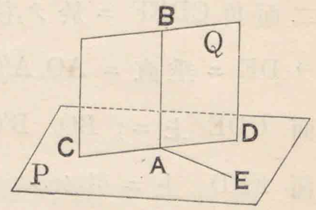
定義 二ツノ平面ノナス二面角ガ直角ナルトキハ，ソノ二ツノ平面ハ互ニ**垂直デアル**トイフ。

定理 十八. 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ前ノ平面ニ垂直デアル。

AB ヲ點 A ニ於ケル平面 P ノ垂線トシ，AB ヲ含ム任意ノ平面ヲ Q トスレバ，Q ハ P ニ垂直デアル。

證明 P ト Q トノ交ハリヲ CD トスル。P上デ

A ヲ過ギッテ CD ニ垂直ナ直線 AE ヲ引クトキハ，假定ニヨリ AB ガ平面 P ニ垂直デアルカラ ∠BAE ハ直角デアル。然ルニ ∠BAE ハ即チ P, Q ノナス二面角ヲ計ル角デアル。



故ニ P, Q ハ互ニ垂直デアル。

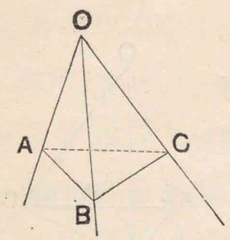
系 1. 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ，ソノ交ハリノ上ノ一點ヲ過ギリ一方ノ平面ニ垂直ナ直線ハ他ノ平面ニ含マレル。

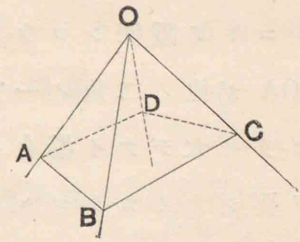
系 2. 相交ハル二平面ガ各第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ，前ノ二平面ノ交線ハ第三ノ平面ニ垂直デアル。

136. 多面角

定義 三ツ以上ノ平面ガ同一ノ點ヲ過ギリ，且ツ二ツヅヽ順次ニ相異ナル直線ニ於テ交ハルトキハ，ソレラノ平面ハ**多面角**又ハ**立體角**ヲ作ルトイフ。

ソノ同一ノ點ヲ多面角ノ**頂點**トイヒ，ソノ平面ノ順次ニ相交ハル交線ヲ多面角ノ**稜**トイフ。又





相隣レル二稜ノナス角ヲソノ多面角ニ於ケル**平面角**トイフ。

多面角ハ之ヲ作ル平面ノ數ニ從ッテ**三面角，四面角**等ト稱ヘル。

上ノ圖ニ於ケル多面角ヲ表ハスニハ夫々

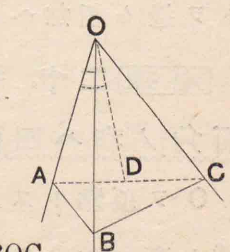
O−ABC,　　O−ABCD

等トスル。

多面角ノ總テノ稜ガ一平面ト交ハリ，之ニヨッテ出來ル截リ口ガ凸多角形ナルトキハ，ソノ多面角ヲ**凸多面角**トイフ。

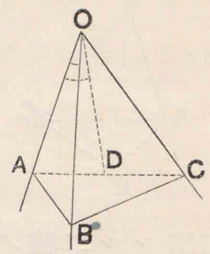
定理 **十九.** 三面角ニ於ケル一ツノ平面角ハ他ノ二ツノ平面角ノ和ヨリ小デアル。

三面角 O−ABC ニ於テ，平面角 AOB, BOC, COA ノ中何レノ一ツヲ取ルモ殘リノ二ツノ和ヨリ小デアル。



證明 今 ∠COA＜∠AOB＋∠BOC

ナルコトヲ證明シヨウトスルニ,
∠COA ガ他ノ二角ノ一方又ハ兩方ヨリモ大デナイ場合ハ特ニ證明ヲ要シナイカラ,コヽニハ
COA ガ他ノ二角ノ何レヨリモ大ナルモノトシテ證明スル。



∠AOC 内ニ ∠AOD ヲ ∠AOB ニ等シクトリ,一直線ト OA, OD, OC トノ交點ヲ夫々 A, D, C トスル。
OB ヲ OD ニ等シク取リ, AB, BC ヲ結ベバ,

$$\triangle AOB \equiv \triangle AOD.$$

故ニ　$AB=AD.$

然ルニ　$AB+BC>AC.$　從ツテ　$BC>DC.$

ヨツテ二ツノ三角形 BOC, DOC ニ於テ

$$\angle DOC<\angle BOC.$$

コノ不等式ト

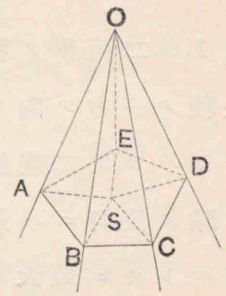
$$\angle AOD=\angle AOB$$

トヲ邊々相加ヘレバ今證明シヨウトスル式ヲ得。

定理二十. 一ツノ凸多面角ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリ小デアル。

O ヲ頂點トスル凸多面角ニ於テ,ソノスベテノ稜ト交ハル一ツノ平面ニヨツテノ截リ口ヲ凸多

角形 ABCDE トスル。然ルトキハ平面角 ∠AOB, ∠BOC 等ノスベテノ和ハ四直角ヨリ小デアル。



證明 多角形ABCDE内ニ任意ノ一點Sヲトリ,Sヲ頂點A, B, C, D, E ト夫々結ブ。然ルトキハSヲ共通ノ頂點トシ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トスル三角形ノ數ト,Oヲ共通ノ頂點トシ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トスル三角形ノ數トハ相等シイカラ,コノ二組ノ三角形ノ内角ノ和ハ相等シイ。

然ルニ　$\angle OAB+\angle OAE>\angle BAE$　(定理十九)

卽チ　$\angle OAB+\angle OAE>\angle SAB+\angle SAE.$

B, C, D, E 等ノ點ニ於テモ夫々同樣ノ關係ガアル。

故ニOヲ頂點トスル總ベテノ三角形ノ底角ノ和ハ,Sヲ頂點トスル總ベテノ三角形ノ底角ノ和ヨリ大デアル。

故ニOニ於ケル總ベテノ平面角ノ和ハ,Sニ於ケル總ベテノ角ノ和ヨリ小デアル,卽チ四直角ヨリ小デアル。

例題

1. 二面角ノ稜上ノ一點ヲ過ギリ各面上デ夫夫稜ノ一方ノ向キトαナル角ヲナス直線ヲ引クトキハ,ソノ二直線ノナス角ハ稜上ニトツタ最初ノ點ノ位置ニハ無關係デアル,又ソノ角ハαガ90°ナルトキニ最大トナル。

2. A, B ヲ二面角ノ二ツノ面ノ各ノ上ニ夫々一ツヅヽアル點トスル,今ソノ二平面ノ交ハリノ上ニ一點 P ヲ求メ PA+PB ガ最小トナル樣ニセヨ。

3. 與ヘラレタ四面角ヲ一ツノ平面デ截リ,ソノ截リ口ヲ平行四邊形ナラシメヨ。

雜題

1. 同一平面上ニナイ二直線ノ兩方ニ交ハル二ツノ直線ガ互ニ平行トナルコトハナイ。

2. 三面角ノ一ツノ稜ニ於ケル二面角ガ直角ナルトキハ,コノ三面角ヲソノ何レノ稜ニ垂直ナル平面デ截ルモ,ソノ截リ口ハ直角三角形デアル。

3. 互ニ平行ナ二ツノ平面ノ間ニ夾マレル任意ノ線分ヲ定比$(m:n)$ニ分ツ點ノ軌跡如何。

4. 同一點ヲ過ギル三ツノ直線ノ各ガ他ノ二ツニ垂直ナルトキハソノ二ツヅヽヲ含ム三ツノ平面ハ互ニ垂直デアル。

5. 一ツノ平面 P 及ビソノ同ジ側ニ二點 A, B ガアル, P ノ上ニ一點 C ヲ取リ AC ト CB トノ和ガ最小トナル樣ニセヨ。

6. 前問ニ於テ A, B ガ P ノ反對ノ側ニアルトキ AC ト BC トノ差ガ最大トナル樣ニセヨ。

7. 三面角ノ各稜ト之ニ對スル平面角ノ二等分線トヲ含ム三ツノ平面ハ一直線ニ於テ相交ハル。

第十一篇

多面體

第一章　角壔及ビ角錐

トウ　スイ

137. 多面體

定義 **多面體**トハ若干ノ平面デ圍マレタ**立體**デアル。(ソノ平面ノ數ハ四ツヨリ少クハナイ)

多面體ヲ圍ム平面ノ數ガ四,五,六等デアルニ從ツテ,ソノ多面體ヲ**四面體,五面體,六面體**等ト稱ヘル。

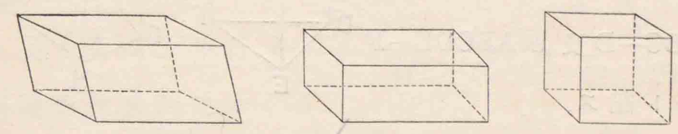
多面體ヲ界スル平面ノ限ラレタ部分(多角形)ヲ多面體ノ**面**トイヒ,面ト面トノ交線ヲ多面體ノ**稜**トイヒ,稜ト稜トノ交點ヲ多面體ノ**頂點**トイフ。

同一ノ面上ニナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ。

多面體ノ何レノ面ヲ延長スルモソノ平面ガモトノ多面體ヲ截ラナイトキハ,之ヲ**凸多面體**トイフ。(本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズル)。

平行六面體トハ三双ノ相對スル面ガ夫々平行ナル六面體デアル。

各ノ面ガ矩形ナル平行六面體ヲ**直六面體**トイヒ,各ノ面ガ正方形ナル直六面體ヲ**立方體**又ハ**正六面體**トイフ。



平行六面體　　直六面體　　立方體

138. 角壔

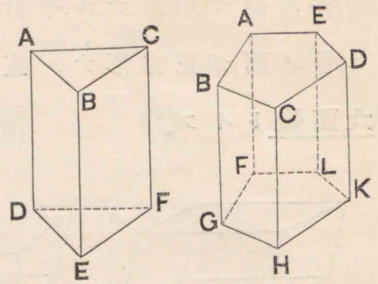
定義 **角壔**トハ一直線ニ平行ナル若干ノ平面及ビソノ直線ト交ハル二ツノ平行ナル平面ニヨツテ圍マレタ多面體デアル。

ソノ一直線ニ平行ナル面ヲ**側面**トイヒ,ソノ一直線ト交ハル二ツノ平行ナル面ヲ角壔ノ**底面**トイフ。側面ノ交ハリヲ**側稜**トイヒ,二ツノ底面ノ間ノ距離ヲソノ角壔ノ**高サ**トイフ。

角壔ノ側稜ガソノ底面ニ垂直ナルトキハ之ヲ**直角壔**トイヒ,垂直デナイトキハ之ヲ**斜角壔**トイフ。

角壔ハソノ側面ノ數ガ三,四,五等ナルニ從ツテ,之ヲ**三角壔,四角壔,五角壔**等ト名ヅケル。

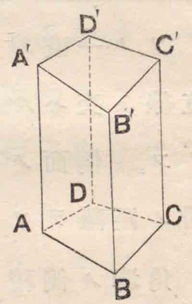
右ノ圖ハ三角壔及ビ五角壔デ之ヲ表ハスニハ夫々 ABC−DEF 及ビ ABCDE−FGHKL, 或ハ ABC−D 及ビ ABCDE−F 等ト記ス。



角壔ヲソノ側稜ニ垂直デ底面ヲ截ラナイ一ツノ平面デ截ッタ截リ口ヲソノ角壔ノ**直截面**トイフ。

定理 二十一. 角壔ノ側面ハ何レモ平行四邊形デ,ソノ二ツノ底面ハ合同ナル多角形デアル。

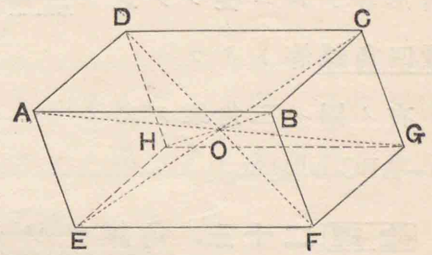
角壔 ABCD−A′B′C′D′ ニ於テ,側面 ABB′A′, BCC′B′ 等ハ何レモ平行四邊形デ,又ソノ二ツノ底面 ABCD, A′B′C′D′ ハ合同ナル多角形デアル。



證明 學生自ラ證明ヲ試ミヨ。

定理 二十二. 平行六面體ニ於テ三双ノ相對スル面ハ夫々合同ナ平行四邊形デアル。又四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ過ギリ,各他ヲ二等分スル。

平行六面體 ABCD−EFGH ニ於テ,三双ノ相對スル面 AC ト EG, AF ト DG, AH ト BG トハ夫々合同ナ平行四邊形デ,又四ツノ對角線 AG, BH, CE, DF ハ皆同一ノ點ヲ過ギリ各他ヲ二等分スル。



證明 學生自ラ證明ヲ試ミヨ。

139. 角 錐

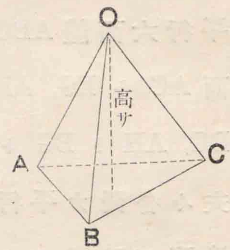
定義 **角錐**トハ一ツノ多角形ト,ソノ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トシソノ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル若干ノ三角形トニヨッテ圍マレターツノ多面體デアル。

初メノ多角形ヲソノ角錐ノ**底面**トイヒ,同一點ヲ共有スル三角形ヲソノ**斜面**,總テノ斜面ガ共有スル同一點ヲソノ**頂點**,相隣レル斜面ノ交ハリヲ**斜稜**トイフ。

角錐ノ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ長サヲソ

ノ**高サ**トイフ。

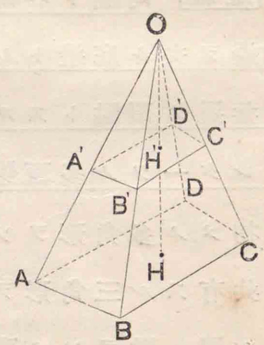
角錐ハソノ底面ガ三角形,四角形等ナルニ從ツテ之ヲ**三角錐**,**四角錐**等トイフ。



右ノ圖ハ三角錐デ,之ヲ O—ABC ト記ス。

定理 **二十三.** 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキハ,各ノ斜稜及ビ高サハ同一ノ比ニ分タレル。又ソノ截リ口ハ底面ニ相似ナ多角形デアル。

右ノ圖ニ於テ,角錐 O—ABCD ノ底面ニ平行ナ平面ニヨツテノ截リ口ヲ $A'B'C'D'$ トシ,又 O カラ底面ニ引イタ垂線 OH トソノ截リ口トノ交點ヲ H' トスレバ, OA, OB, OC, OD, OH ハ夫々 A', B', C', D', H' ニ於テ同一ノ比ニ分タレル。又多角形 ABCD ト $A'B'C'D'$ トハ互ニ相似デアル。



證明 學生自ラ證明ヲ試ミヨ。

系 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキ

ハ,ソノ截リ口ノ面積ハ,頂點カラソノ截リ口マデノ距離ノ二乘ニ正比例スル。

140. 正多面體

定義 **正多面體**トハ,ソノ總テノ面ガ全ク相等シイ正多角形デ,且ツソノ總ベテノ多面角ガ全ク相等シイ多面體デアル。

定理 **二十四.** 正多面體ハ次ノ五種ニ限ル。

正四面體, 正六面體, 正八面體,
正十二面體, 正二十面體。

證明 正多面體ノ多面角ハ何レモ合同デ且ツソノ各平面角ハ正多角形ノ一ツノ角デアルコトヲ要スル。

而シテ一ツノ多面角ヲ作ルニハ三ツ以上ノ平面角ガソノ頂點ヲ共有スルコトヲ要シ,而シテソレラノ平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナルコトヲ要スル。

サテ正三角形ノ一角ハ $\frac{2}{3}$ 直角デアルカラ,正三角形ヲ面トシテ作リ得ル正多面體ノ多面角ハ三面角,四面角又ハ五面角ノ三種ニ限ル。

又正方形ノ一角ハ1直角,正五角形ノ一角ハ$\frac{6}{5}$直角デアルカラ,正方形又ハ正五角形ヲ以テ作リ得ル正多面體ノ多面角ハ各三面角ノ一種ニ限ル。

次ニ邊數ガ六以上ナル正多角形ノ一角ハ$\frac{4}{3}$直角以上デアルカラ,最早之ヲ以テ多面角ヲ作ルコトハ出來ナイ。

故ニ正多面體ノ一ツノ多面角ヲナス面ハ次ノ五種ニ限ル。

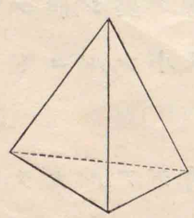
(1) 三ツノ正三角形,　(2) 三ツノ正方形,

(3) 四ツノ正三角形,　(4) 三ツノ正五角形,

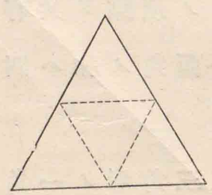
(5) 五ツノ正三角形。

注意 コノ五種ノ各ニ對應スル正多面體ハ實際ニ作成スルコトガ出來ル。例ヘバ次ノ展開圖ヲ厚紙ノ上ニ畫キ之ヲ點線ニ沿ウテ折リ曲ゲレバソノ模型ヲ得ル。

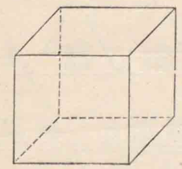
(1) 正四面體



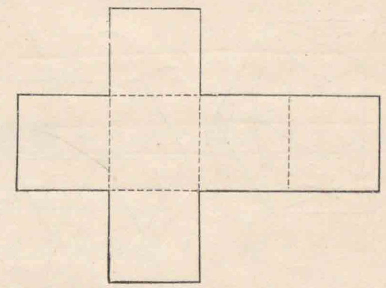
(1′) 正四面體ノ展開圖



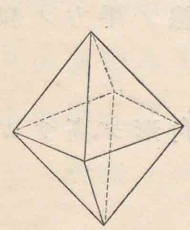
(2) 正六面體(立方體)



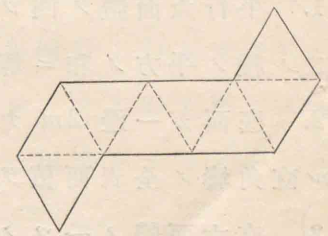
(2′) 正六面體ノ展開圖



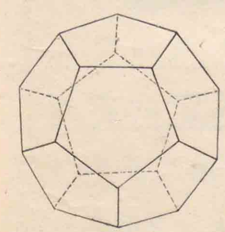
(3) 正八面體



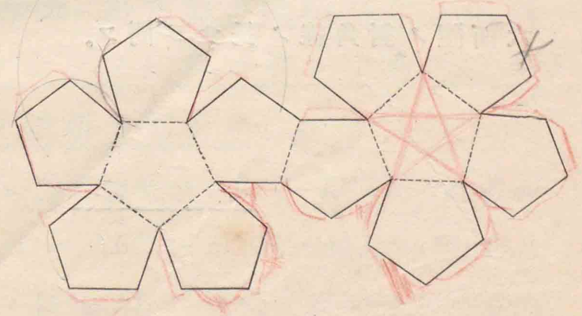
(3′) 正八面體ノ展開圖



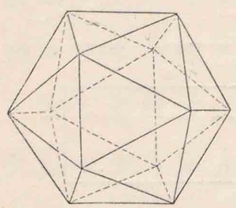
(4) 正十二面體



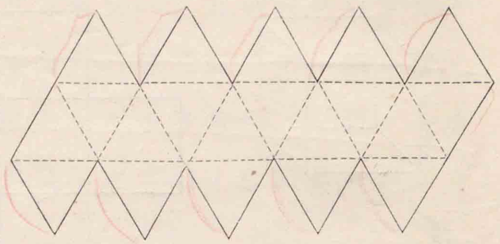
(4′) 正十二面體ノ展開圖



(5) 正二十面體



(5′) 正二十面體ノ展開圖



例 題

1. 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ平方ノ和ハ十二ノ稜ノ平方ノ和ニ等シイ。

2. 底面ガ一邊 $2m$ ナル正三角形デ,高サガ$3m$ナル直角壔ノ全表面積ヲ求メヨ。

3. 直六面體ノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ長サガ夫々a米,b米,c米ナルトキ,ソノ直六面體ノ對角線ノ長サヲ問フ。

第二章 多面體ノ體積

141. 體 積

定義 多面體ノ體積トハソノ面ニヨッテ圍マレタ空間ノ部分ノ大サヲイフ。

體積ヲ計ルニハ長サノ單位ヲ一稜トスル立方體ノ體積ヲ單位トシテ用キル。

合同ナ多面體ノ體積ハ相等シイモノトスル。

又多面體AトBトガ合同,CトDトガ合同ナラバ,多面體A±CトB±Dトハソノ形ヲ異ニスル場合デモ,矢張リソノ體積ハ相等シイモノトスル。

142. 角壔ノ體積

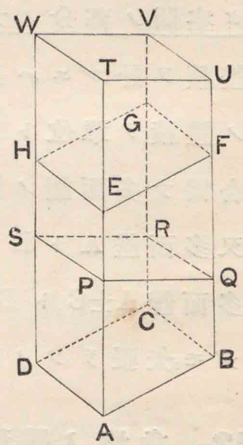
定理二十五. 斜角壔ノ體積ハソノ直截面ヲ底面トシソノ側稜ニ等シイ高サヲモツ直角壔ノ體積ニ等シイ。

次頁ノ圖ニ於テ,斜角壔ABCD−EFGHノ直截面ヲPQRSトスレバ,ABCD−EFGHノ體積ハPQRSヲ底面トシソノ側稜AEニ等シイ高サヲモツ直角壔ノ體積ニ等シイ。

證明 稜AEヲ延長シ,ソノ上ニPT=AEナル如

キ點Tヲトリ,Tヲ過ギッテ PQRS ニ平行ナ平面ヲ作リ,各側面ノ延長トノ交ハリヲ夫々 TU, UV, VW, WT トスル。

然ルトキハ PQRS−TUVW ハ直角壔デ,ソノ側稜ハ AE ニ等シクソノ底面ハ PQRS デアル。



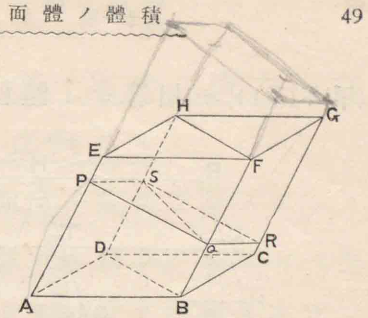
サテ多面體 ABCD−PQRS ト多面體 EFGH−TUVW トハ總テノ相對應スル稜及ビ角ガ夫々相等シイカラ,コノ二ツノ多面體ハ全ク相等シイ。

故ニコノ二ツノ多面體ニ夫々同ジ多面體PQRS−EFGH ヲ加ヘタモノハ相等シイ,卽チ斜角壔ABCD−EFGH ハ直角壔PQRS−TUVW ニ等シイ。

定理 二十六. 一ツノ平行六面體ヲソノ一双ノ相對スル稜ヲ含ム平面デ截レバ,相等シイ體積ヲモツ二ツノ三角壔ヲ得ル。

平行六面體 ABCD−EFGH ヲ一双ノ相對スル稜 BF, DH ヲ含ム平面デ二ツノ三角壔 ABD−EFH, CDB−GHF ニ分ツトキハ,コノ二ツノ三角壔ノ體

積ハ相等シイ。



證明 直截面 PQRS ヲ作レバ,$\triangle PQS \equiv \triangle RSQ$. 而シテコノ兩三角形ハ夫々三角壔 ABD−EFH 及ビ CDB−GHF ノ直截面デアル。故ニ定理二十五ニヨツテコノ二ツノ三角壔ノ體積ハ相等シイ。

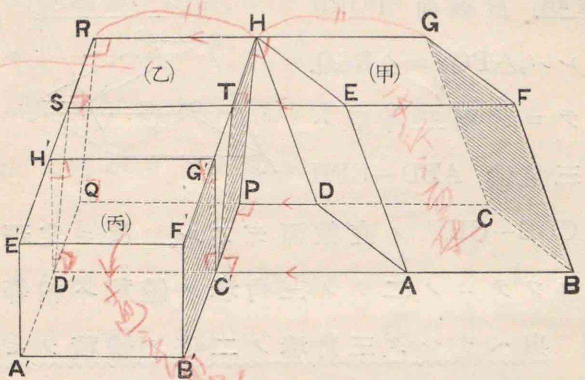
系 與ヘラレタ三角壔ノ二倍ノ體積ヲモツ平行六面體ヲ作ルコトガ出來ル。

定理 二十七. 平行六面體ト直六面體トニ於テソノ高サガ相等シク,且ツソノ底面ノ底邊及ビ高サガ夫々相等シイトキハ,ソノ體積ハ相等シイ。

證明 平行六面體 ABCD−EFGH (甲) ノ稜 GH ヲ延長シ,ソノ上ニ R ヲトリ,GH=HR ナラシメル。H 及ビ R ヲ過ギッテ夫々 HR ニ垂直ナ平面ヲ作リ,(甲) ノ GH ト平行ナ側稜ノ延長ト交ハラシメテ,(甲) ト等底等高ナ一ツノ平行六面體 D′C′PQ−STHR (乙) ヲ作ル。

然ルトキハ (乙) ノ稜 HR ハ GH ニ等シク,又ソノ面 C′H ハ (甲) ノ稜 GH ニ垂直ナ直截面デアルカラ,

(甲)ト(乙)トハ相等シイ體積ヲモツ(定理二十五)。



次ニ PC′ ノ延長上ニ B′ ヲトリ PC′=C′B′ ナラシメ,之ニ平行ナ(乙)ノ側稜ヲ延長シ, C′ 及ビ B′ ヲ過ギリ C′B′ ニ垂直ナ平面デ截レバ,(乙)ト等底等高ナ直六面體 A′B′C′D′−E′F′G′H′(丙)ヲ得ル。

(丙)ノ稜 C′B′ ハ(乙)ノ稜 PC′ ニ等シク,又ソノ面 C′H′ ハ PC′ ニ垂直ナ(乙)ノ直截面デアル。故ニ(乙)ト(丙)トハ相等シイ體積ヲモツ(定理二十五)。

而シテ(丙)ノ面 A′C′ ト(甲)ノ面 AC トハ明カニ等底等高デ,之ヲ夫々(丙)及ビ(甲)ノ底面ト見做セバ兩體ノ高サノ相等シイコトモ明カデアル。故ニ平行六面體 ABCD−EFGH ノ體積ハ,之ト相等シイ底面及ビ高サヲモツ直六面體 A′B′C′D′−E′F′G′H′ ノ體積ニ等シイ。

定理 二十八. 底面ガ一定ナル直六面體ノ體積ハソノ高サニ比例スル。

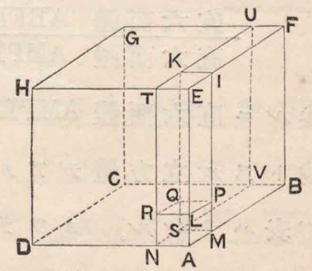
證明 直六面體ノ底面ヲ一定ナラシメテソノ高サヲ二倍,三倍,……,一般ニ n 倍(n ハ必ズシモ整數ナルヲ要シナイ)スルトキハ,ソノ體積モ亦從ツテ二倍,三倍,……,n 倍トナルコトハ容易ニ證明サレル。故ニ比例ノ原理ニヨリソノ體積ハ高サニ比例スル。

コノ定理ハマタ次ノ如クニ換言サレル。

系 二ツノ直六面體ノ底面ガ全ク相等シイトキハ,ソノ體積ノ比ハソノ高サノ比ニ等シイ。

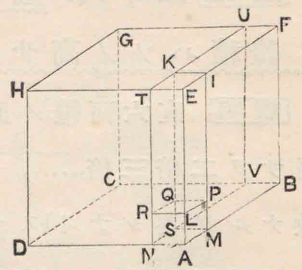
定理 二十九. 直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハソノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。

直六面體 ABCD−EFGH ノ一ツノ頂點 A ニ於テ出會フ三ツノ稜 AE, AB, AD ノ長サヲ夫々 l, m, n トスレバ,コノ直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ lmn デアル。



證明 AE, AB, AD 又ハソノ延長上ニ AL, AM

AN ヲ夫々單位ノ長サニ等シク取リ,先ヅ N ヲ過ギッテ ABFE ニ平行ナ平面 NVUT ヲ作リ,次ニ M ヲ過ギッテ AETN ニ平行ナ平面 MIKS ヲ作リ,又 L ヲ過ギッテ AMSN ニ平行ナ平面 LPQR ヲ作ル。



然ルトキハ同ジ底面ヲ有スル直六面體ノ體積ハソノ高サニ比例スルカラ,

$$\frac{\text{直六面體 ABFE}-\text{DCGH}}{\text{直六面體 ABFE}-\text{NVUT}}=\frac{AD}{AN}=\frac{n}{1},$$

$$\frac{\text{直六面體 ABFE}-\text{NVUT}}{\text{直六面體 AMIE}-\text{NSKT}}=\frac{AB}{AM}=\frac{m}{1},$$

$$\frac{\text{直六面體 AMIE}-\text{NSKT}}{\text{直六面體 AMPL}-\text{NSQR}}=\frac{AE}{AL}=\frac{l}{1}.$$

コノ三ツノ比ノ相乘比ヲ作レバ,

$$\frac{\text{直六面體 ABFE}-\text{DCGH}}{\text{直六面體 AMPL}-\text{NSQR}}=\frac{lmn}{1}.$$

然ルニ直六面體 AMPL−NSQR ハ長サノ單位ヲ一稜トスル立方體デアルカラ,ソノ體積ハ 1 ナル數デ表ハサレル。ヨッテ直六面體 ABFE−DCGH ノ體積ハ lmn ナル數デ表ハサレル。

附言。 コノ定理ヲ次ノ如ク略言スルコトガアル。

「直六面體ノ體積ハソノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ積ニ等シイ。」

同樣ノ略言ヲ用ヰレバ「直六面體ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ」トモイフコトガ出來ル。

任意ノ平行六面體ハ定理二十七ニヨッテ之ヲ等底等高等體積ナル直六面體ニ直シ得ルカラ,ソノ體積ハ矢張リ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ。

三角壔ハ定理二十六系ニヨッテ一ツノ平行六面體ノ半分ト考ヘルコトガ出來ルカラ,上記ノ結果ニヨリ,ソノ體積ハ矢張リ底面ト高サトノ積ニ等シイコトトナル。

任意ノ角壔ハ之ヲ幾ツカノ等高ナ三角壔ニ分ケテ考ヘレバ,結局矢張リソノ體積ハ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイコトトナル。

ヨッテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 三十. 角壔ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ。

定義 二ツノ多面體ニ於テ各ノ體積ノ數値(體積ヲ表ハス數)ガ相等シイトキハ,タトヘソノ一方ヲ截リ又ハ繼グコトニヨッテ他方ノモノトナスコトガ出來ナイ場合ト雖,兩者ノ體積ハ相等シイモノトスル。

ヨッテ次ノ系ヲ得ル。

系 1. 等底等高ナ直六面體ノ體積ハ相等シイ。

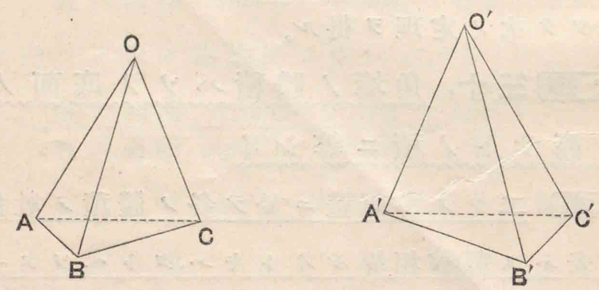
系 2. 等底等高ナ平行六面體ノ體積ハ相等シイ。

系 3. 等底等高ナ角壔ノ體積ハ相等シイ。(底面デアル多角形ノ邊數ガ相等シクナイ場合ヲモ含ム)

143. 角錐ノ體積

定理 三十一. 二ツノ三角錐ガ等底デ且ツ等高ナルトキハソノ體積ハ相等シイ。

三角錐 $O-ABC$, $O'-A'B'C'$ ニ於テ,ソノ底面 ABC, $A'B'C'$ ガ等積デ且ツ之ニ對スル高サモ相等シイトキハ,兩三角錐ノ體積ハ相等シイ。

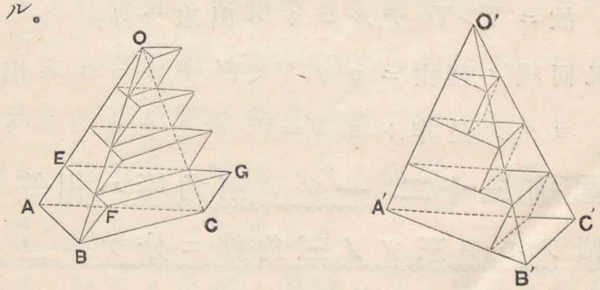


證明 各三角錐ノ側稜 OA, $O'A'$ ヲ夫々 n 等分シ,ソノ分點ヲ過ギリ底面ニ平行ナ平面ヲ作ッテ各角錐ヲ截レバ,相對應スル截リ口ガ夫々等積ナ

コトハ定理二十三カラシテ容易ニ證明サレル。

今 $O-ABC$, $O'-A'B'C'$ ノ體積ヲ夫々 V, V' トシ,假リニ $V>V'$ デアルトスル。

先ヅ $O-ABC$ ニ於テソノ底面 ABC 及ビ今作ッタ $(n-1)$ 箇ノ截リ口ヲ夫々下ノ底トシ,OA ニ平行ナ稜ヲモツ n 箇ノ三角壔ヲ作リ,コレラノ三角壔ノ體積ノ和ヲ S トスレバ,$S>V$ ナルコトハ明カデアル。



次ニ $O'-A'B'C'$ ニ於テハ今作ッタ $(n-1)$ 箇ノ截リ口ヲ悉ク上ノ底トシ,$O'A'$ ニ平行ナ側稜ヲモツ $(n-1)$ 箇ノ三角壔ヲ作リ,コレラノ三角壔ノ體積ノ和ヲ S' トスレバ,$V'>S'$ ナルコトハ明カデアル。

ヨッテ $S-S'>V-V'$ ナル關係ヲ得ル。

然ルニコレラノ三角壔ハ兩三角錐ニ於テ上カラ順次ニ第一ハ第一ト等シク,第二ハ第二ト等シク,以下同樣ニ第 $(n-1)$ ハ第 $(n-1)$ ト等シイ。故ニ $S-S'$ ハ $O-ABC$ ノ方ノ最モ下ニアル三角壔

ABC$-$EFG ニ等シイ。 ヨツテ

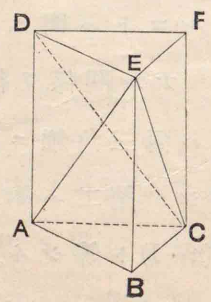
三角壔 ABC$-$EFG$>V-V'$.

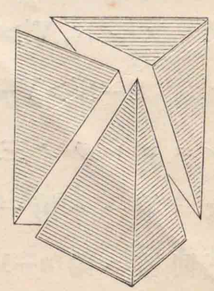
サテ OA ヲ等分スル數 n ガ大ナレバ大ナル程三角壔 ABC$-$EFG ノ高サガ小トナルカラ,コノ三角壔ノ體積ハ何程デモ小ナラシメルコトガ出來ルノデアル。然ルニ上ノ結果ニヨレバソレハ一定量 $V-V'$ ヨリ大デアルトイフ,コレ不合理デアル。故ニ $V>V'$ ナルコトハ出來ナイ。

又同様ノ理由ニヨリ $V<V'$ ナルコトモ出來ナイ。ヨツテ是非トモ $V=V'$ デナケレバナラヌ。

定理 三十二. 一ツノ三角壔ハ相等シイ體積ヲモツ三ツノ三角錐ニ分ケルコトガ出來ル。

證明 三角壔ABC$-$DEFヲ二ツノ平面ACE, DCEデ截レバ,三ツノ三角錐 E$-$ABC, E$-$ACD, E$-$FDC ヲ得ル。





而シテ三角錐 E$-$ACD ト E$-$FDC トニ於テ,高サハ何レモ E カラ平面 ACFD ニ至ル距離デ,又ソノ底面 ACD, FDC ハ相等シイ。故ニコノ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。

次ニ三角錐 E$-$ABC ト E$-$CDF 卽チ C$-$DEF トニ於テ,高サハ何レモ平面 ABC ト DEF トノ間ノ距離デ,又ソノ底面 ABC, DEF ハ相等シイ。故ニコノ二ツノ三角錐モ亦相等シイ體積ヲモツ。

カクシテ三角壔 ABC$-$DEF ハ相等シイ體積ヲモツ三ツノ三角錐ニ分タレル。

系 1. 三角錐ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

系 2. 任意ノ角錐ノ體積ハソノ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シイ。

系 3. 等底等高ナ角錐ノ體積ハ相等シイ。

144. 多面體ノ體積

一般ニ任意ノ多面體ノ體積ヲ求メルニハ,先ヅ若干ノ適當ナ平面デソノ多面體ヲ幾ツカノ角壔及ビ角錐ニ分チ,ソノ各ノ體積ヲ上述ノ理ニヨツテ求メ,コレラヲ合計シテ全體積ヲ得ルモノトスル。

例題

1. 一稜ノ長サa糎ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ。

2. 一邊ノ長サa米ナル正六角形ヲ底面トシ高サガ$2a$米ナル六角錐ノ側面積及ビ體積ヲ求メヨ。但シ頂點カラ底面ニ引イタ垂線ノ足ガ底面ノ外接圓ノ中心ニアルモノトスル。

雜題

1. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ之ニ對スル稜ヲソノ二面角ノ兩面ノ面積ノ比ニ分ツ。

定義 角錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ツタトキ,ソノ截リ口ト底面トノ間ニアル部分ヲ**截頭角錐**トイフ。

ソノ截リ口トモトノ底面トヲ共ニソノ截頭角錐ノ**底面**トイヒ,兩底面ノ間ノ距離ヲソノ**高サ**トイフ。

2. 截頭角錐ノ體積ヲV,ソノ兩底面積ヲ夫々a, b又ソノ高サヲhトスレバ,

$$V=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b).$$

3. 正四面體內ノ任意ノ一點カラソノ四面ニ至ル距離ノ和ハ一定デアル。

4. 直角壔ノ側稜ノ長サヲh,全側面ノ面積ヲS,底面ノ周ノ長サヲpナル數デ表ハストキハ,

$$S=ph.$$

5. 角錐ノ斜面ノ高サガスベテl·デ,又ソノ底面ノ周ガp,全斜面ノ面積ガSナルトキハ,

$$S=\frac{1}{2}pl.$$

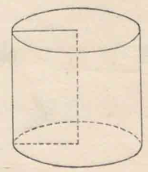
第十二篇

曲面體

第一章　直圓壔及ビ直圓錐

145. 直圓壔

定義 直圓壔トハ矩形ヲソノ一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周回轉セシメルトキ生ズル立體デアル。

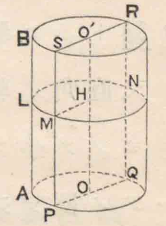


回轉ノ軸トシタ邊ヲソノ直圓壔ノ**軸**トイヒ,之ニ對スル邊ヲ**母線**トイフ。母線ノ回轉ニヨツテ生ズル曲面ヲ直圓壔ノ**側面**,軸ニ隣レル二邊ノ回轉ニヨツテ生ズル二ツノ圓ヲ**底面**トイヒ,ソノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**トイフ。又軸ノ長サヲ直圓壔ノ**高サ**トイフ。

定理 三十三. 直圓壔ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ツタ截リ口ハ底面ト合同ナル圓デアル。

APQ−BSR ヲ直圓壔, OO′ ヲソノ軸, LMN ヲ底面 APQ 又ハ BSR ニ平行ナ平面デノ截リ口トスレバ,

LMN ハ底面 APQ 又ハ BSR ト合同ナル圓デアル。



證明 截リ口ノ周上ノ任意ノ一點ヲ M, 截リ口ト軸トノ交ハリヲ H トシ,又 M ヲ過ギル母線ヲ PMS トスル。

截リ口ト底面トハ互ニ平行デアルカラ, MH ハ PO ニ平行デアル。又 PS ハ母線デアルカラ OO′ ニ平行デアル。

故ニ POHM ハ平行四邊形デ, MH=PO. 卽チ截リ口ノ周ノ上ノ點ト H トノ距離ハ常ニ直圓壔ノ半徑ニ等シク,且ツコレラノ點ハ悉ク同一平面上ニアル。

又逆ニコノ平面上デ H カラノ距離ガ直圓壔ノ半徑ニ等シイ點ハ截リ口ノ周上ニアルコトモ容易ニ證明サレル。

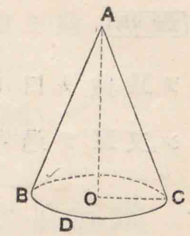
故ニ截リ口ハ底面ト合同ナル圓デアル。

146. 直圓錐

定義 直圓錐トハ直角三角形ヲソノ直角ノ一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周回轉セシメルトキ生ズル立體デアル。

回轉ノ軸トシタ一邊ヲ直圓錐ノ軸トイヒ,斜邊ヲ**母線**トイフ。

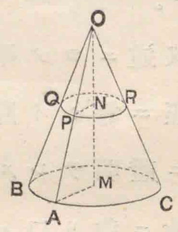
又直角ノ軸デナイ一邊ノ回轉ニヨツテ生ズル圓ハ軸ニ垂直ナ一ツノ圓デ之ヲ**底面**トイヒ,軸ト母線トノ交點ヲ**頂點**トイフ。



軸ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**トイヒ,母線ノ長サヲ**斜高**トイフ。

定理 三十四. 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ツタ截リ口ハ圓デアル。

O−ABC ヲ直圓錐, OM ヲソノ軸, PQR ヲ底面ニ平行ナ截リ口トスレバ, PQR ハ圓デアル。



證明 截リ口ト軸トノ交ハリヲNトシ,又截リ口ノ周上ノ任意ノ一點ヲPトスル。

P ヲ過ギル母線ヲ OPAトスレバ, PN ト AM トハ互ニ平行デアルカラ,

$$PN : AM = ON : OM.$$

之ニヨツテ見レバ, PN ト底面ノ半徑トノ比ハ常ニ一定デ ON : OM ニ等シイ。即チ截リ口ノ周

上ノ點ハ悉クNカラ等距離ニアリ,且ツ同一平面上ニアル。又コノ逆モ容易ニ證明サレル。故ニ截リ口ハNヲ中心トスル圓デアル。

147. 直圓壔及ビ直圓錐ノ體積及ビ表面積

先ヅ直圓壔ニ於テ,ソノ底面ニ内接スル正n邊形ヲ作リ,之ヲ底面トシ,モトノ直圓壔ノ高サヲ高サトスル直角壔ヲ作レバ,邊數nヲ限リナク增大スルニ從ツテコノ直角壔トモトノ直圓壔トハソノ表面ガスベテノ點ニ於テ限リナク相接近スル。ヨツテnガ限リナク增大スルトキ極限ニ於テコノ直角壔ノ體積及ビ表面積ノ數値ガ如何ナル値トナルカヲ考ヘテ,之ヲ直圓壔ノ體積及ビ表面積ノ數値トスル。

サテ直角壔ニ於テハ,底面ノ面積及ビ周ヲ夫々A及ビp,高サヲhトスレバ,ソノ體積及ビ側面積ハ夫々Ah及ビphデアル。然ルニ今nヲ限リナク增大スレバ極限ニ於テA及ビpハ夫々直圓壔ノ底面デアル圓ノ面積及ビ周トナルカラ,ソノ半徑ヲrトスレバ,

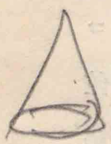
$$A=\pi r^2, \qquad p=2\pi r$$

デアル。之ヲ上ノ結果ニ代入スレバ,直圓壔ノ體積V及ビ曲面積*Sヲ得ルコト次ノ如クデアル。

$$V=\pi r^2h,\qquad S=2\pi rh.$$

次ニ直圓錐ニ於テモ,ソノ底面ニ内接スル正n邊形ヲ作リ,之ヲ底面トシ,モトノ頂點ヲ頂點トスル直角錐ヲ考ヘ,邊數nヲ限リナク增大スルト考ヘテ,モトノ直圓錐ノ體積及ビ曲面積ノ數値ヲ見出シ得ル。卽チ直圓錐ノ底ノ半徑ヲr, 高サヲh, 斜高ヲlトスレバ,ソノ體積V及ビ曲面積Sハ次ノ式ニヨツテ求メラレル。

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h,\qquad S=\pi rl.$$



例題

1. 高サ8cm,底面ノ半徑6cmナル直圓錐ノ體積及ビ曲面積ヲ求メヨ。

2. 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニヨツテノ截リ口ハ二等邊三角形デアル。

3. 底面ガ半徑1mナル圓デ,高サガ2mナル直圓壔ノ曲面積及ビ體積ヲ求ム。

*表面ノ一部又ハ全部ガ曲面ナル立體ヲ**曲面體**トイヒ,ソノ表面ノ中曲面ナル部分ノミノ面積ヲソノ**曲面積**トイフ。

定義 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截ツタトキ,ソノ截リ口ト底面トノ間ニアル部分ヲ**截頭直圓錐**トイフ。

ソノ截リ口トモトノ底面トヲ共ニソノ截頭直圓錐ノ底面トイヒ,兩底面ノ間ノ距離ヲソノ**高サ**トイヒ,又底面ノ間ニアル母線ノ部分ヲソノ**斜高**トイフ。

4. 截頭直圓錐ノ兩底ノ半徑ヲa及ビb, 高サヲh,斜高ヲlトスレバ,ソノ體積V及ビ曲面積Sハ次式ニヨツテ求メラル。

$$V=\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2),\qquad S=\pi l(a+b).$$

円錐台ノ体積ヲ出ス公式

第二章 球

148. 基本性質

定義 球トハ半圓ヲソノ直徑ヲ軸トシテ一周回轉セシメルトキ生ズル立體デアル。特ニソノ表面ノミヲ考ヘルトキハ之ヲ**球面**トイフ。

回轉シタ半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**トイフ。中心カラ球面上ノ一點ニ至ル距離ハスベテ相等シイ

モノデ之ヲ球ノ**半徑**トイヒ,又球ノ中心ヲ過ギリ球面上ニ兩端ヲモツ線分ヲ球ノ**直徑**トイフ。

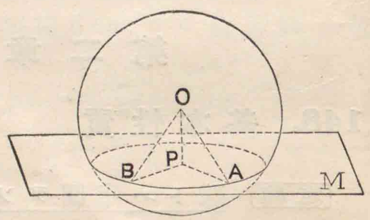
定理 三十五. 一球面ト一平面トガ一ツヨリ多クノ點ヲ共有スルトキハ,一ツノ圓周ヲ共有シ,ソレ以外ノ點ヲ共有シナイ。

證明 Oヲ中心トスル球面ト平面Mトガ少クモ二點A及ビBヲ共有シタトスル。中心Oカラ平面Mニ垂線OPヲ引クトキ,ソノ足PハA又ハBト合スルコトハナイ。何トナレバモシPガA又ハBノ何レカ一方ト相合スルトスレバ,OA又ハOBノ何レカ一方ガMニ垂線デ他ノ一方ガ斜線デアル,從ッテOAトOBトハ相等シクナイコトトナル,コレ不合理デアル。

サテ$\triangle OPA$ト$\triangle OPB$トニ於テ,

$OA=OB$, OPハ共通,

$\angle OPA=\angle OPB$(=直角).



故ニ兩三角形ハ合同デ,$AP=BP$デアル。

逆ニマタ平面M上ニPカラAPニ等シイ距離ニ一點Bヲトレバ,$OB=OA$デ從ッテBガコノ球面上ニアルコトモ容易ニ證明サレル。

故ニ球面Oト平面Mトハ,Pヲ中心トシ半徑PAナル一ツノ圓周ヲ共有シ,ソレ以外ノ點ヲ共有シナイ。

定義 球面(又ハ球)ト平面トガ唯一點ノミヲ共有スルトキハ互ニ**相切スル**トイヒ,ソノ平面ヲソノ球面(又ハ球)ノ**切平面**,ソノ一點ヲ**切點**トイフ。球面(又ハ球)ト平面トガ一ツノ圓周(又ハ圓)ヲ共有スルトキハ兩者ハ**相交ハル**トイフ。

球面(又ハ球)ト平面トノ位置ノ關係ハ,次ノ三ツノ場合ニ限ル。

(1)一點モ共有シナイカ, (2)相切スルカ,

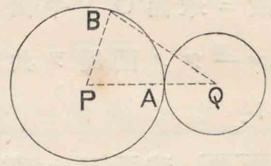
(3)相交ハル。

系 1. 球ノ切平面ハソノ切點ニ引イタ半徑ニ垂直デアル。

系 2. 球ト平面トノ交ハリナル圓ハ,ソノ平面ガ球ノ中心ヲ過ギル場合ニ最大デアル。

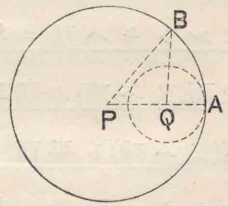
定理 三十六. 二ツノ球面ガ一ツヨリ多クノ點ヲ共有スルトキハ,一ツノ圓周ヲ共有シ,ソレ以外ノ點ヲ共有シナイ。

證明 P及ビQヲ中心トスル二ツノ球面ガ少クモ二點A,Bヲ共有スルモノトスル。先ヅAガ



直線PQ上ニナイコトヲ證明スル。

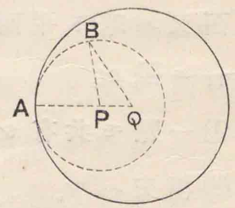
何トナレバ,線分PQト球Pトハ唯一點ノミヲ共有シ得ルモノデアルカラ,今モシAガPQ上ニアリトスレバBハPQ上ニハナイ。



故ニ

$$PB+BQ>PA+AQ.$$

從ツテ $BQ>AQ.$



故ニ點Bハ球面Q上ニアルコトハ出來ヌ。

モシ又Aガ線分PQノ延長上ニアルトキハ,同樣ニシテ

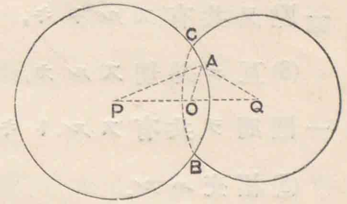
$$PB-BQ<PA-AQ \text{ 又ハ } QB-BP<QA-AP.$$

從ツテ $BQ>AQ$ 又ハ $QB<QA.$

故ニ矢張リBハ球面Q上ニアルコトハ出來ヌ。

故ニ何レニシテモBハ球面Qノ上ニナイ。ヨツテ兩球ハA以外ノ點ヲ共有シナイコトトナリ,假定ニ反スル。故ニAハ直線PQ上ニハナイ。

サテコヽニ於テ△APQヲ考ヘルト,ソノ三邊ノ



長サハ各一定デアル。

從ツテAカラPQニ引イタ垂線AOノ長サモ亦一定デ,且ツOハ定點デアル。今PQヲ軸トシテ△APQヲ回轉スルトキハAハOヲ中心トシAOヲ半徑トスル圓周ヲ畫ク。而シテソノ圓周上ノ點ハスベテP及ビQカラ夫々PA及ビQAニ等シイ距離ニアルカラ兩球面上ニアル。

故ニ兩球ハコノ一ツノ圓周ヲ共有スル。而シテソレ以外ノ點ヲ共有シナイコトハ定理三十五ニヨツテ明カデアル。

$\boxed{\text{定義}}$ 二ツノ球面ガ一圓周ヲ共有スルトキハ**相交ハル**トイヒ,唯一點ヲ共有スルトキハ**相切スル**トイフ。相切スル場合ニ互ニ他ノ球ノ外ニアルトキハ兩球ハ互ニ**外切スル**トイヒ,一方ガ他ノ內部ニアルトキハ互ニ**內切スル**トイフ。

半徑ガ相等シクナイ二ツノ球面ノ位置ノ關係ハ,次ノ五ツノ場合ニ限ル。

一點モ共有シナイトキ,

(1) 互ニ他ノ外部ニアルカ,

(2) 一ツガ全ク他ノ內部ニアル。

一點ヲ共有スルトキ,

(3)互ニ外切スルカ, (4)互ニ内切スル。

一圓周ヲ共有スルトキ,

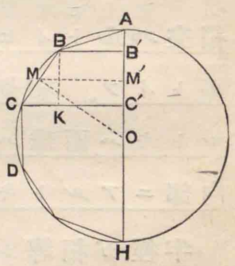
(5)相交ハル。

モシ二ツノ球面ノ半徑ガ相等シイトキニハ(2)及ビ(4)ノ代リニ二ツノ球面ガ全ク相一致スル特別ノ場合ガ生ズル。

149. 球ノ表面積及ビ體積

今Oヲ中心トシ,半徑 r ナル半圓 ABC......H ガ直徑 AH ヲ軸トシテ一周回轉スルモノトシ,ソノトキ生ズル球ノ表面積ヲ求メヨウトスル。

半圓周 ABC......H ヲ n 等分シ,ソノ分點ヲ B, C, D,......トシ,コレラノ點カラ AH ニ引イタ垂線ノ足ヲ夫々 B′, C′,......トスレバ,コノ半圓ノ回轉ニ從ツテ三角形 ABB′, 梯形 B′BCC′ 等ハ夫々一ツノ直圓錐又ハ截頭直圓錐ヲ作ル。コレラノスベテノ體ノ曲面積(弦 AB, BC,......等ノ回轉ニヨツテ生ズル曲面積)ノ和ヲ求メ,然ル後 n ナル數ヲ限リナク增大スルト考ヘレバ,ソノ極限トシテノ球ノ表面積ヲ得ル。



今ソノ中ノ一ツデアル梯形 B′BCC′ ノ回轉體ニツイテ考ヘルニ,ソノ曲面積ハ 65 頁例題 4 ニヨリ $\pi BC(BB'+CC')$ デアル。ヨツテ今 BC ノ中點 M カラ AH ニ引イタ垂線ヲ MM′ トスレバ,コノ曲面積ハ $2\pi BC.MM'$ ニ等シイ。

今 OM ヲ結ビ,又 B カラ CC′ ニ垂線 BK ヲ引ケバ

$$\triangle BCK \backsim \triangle MOM'.$$

ヨツテ $$\frac{BC}{MO}=\frac{BK}{MM'}=\frac{B'C'}{MM'}.$$

故ニ $$BC.MM'=MO.B'C'.$$

之ニヨツテ上記ノ曲面積ハマタ $2\pi MO.B'C'$ ト書キ直サレル。

他ノ梯形ノ回轉體ニツイテモ同樣ノ關係ガアル。又三角形 ABB′ ハ梯形ノ平行ナ邊ノ一ツガ零トナツタ特別ノ場合ト考ヘレバ矢張同樣ノ結果ヲ得ル。

而シテコレラノ結果ニ於テ MO ノ長サハ弦 AB, BC,......等ニツイテスベテ同一デアル,ヨツテ之ヲ r' トスレバ,結局多角形 ABC......H ノ回轉ニヨツテ生ズル曲面積ハ

$$2\pi r'.AB'+2\pi r'.B'C'+\ldots\ldots$$
$$=2\pi r'(AB'+B'C'+\ldots\ldots)$$ 直徑
$$=2\pi r'.AH=4\pi r'r$$

トナル。コヽニ於テnヲ限リナク增大スレバr'ハ球ノ半徑rニ限リナク接近スル,ヨツテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 三十七. 半徑rナル球ノ表面積ハ$4\pi r^2$デアル。

次ニ中心O,半徑rナル球ノ體積ヲ求メルニ,先ヅスベテノ頂點ガコノ球面上ニアル一ツノ多面體ヲ考ヘ,ソノ各面ノ面積ヲ夫々$A_1, A_2, \ldots\ldots$トシ,又中心Oカラコレラノ面ニ引イタ垂線ノ長サヲ夫々$r_1, r_2, \ldots\ldots$トスレバ,コノ多面體ハOヲ共通ノ頂點トシ各面ヲ底面トスル角錐ノ集マツタモノト考ヘラレルカラ,ソノ全體積ハ

$$\frac{1}{3}r_1A_1+\frac{1}{3}r_2A_2+\ldots\ldots$$

デアル（定理三十二系2）。

球に内接スル無数ノ体錐

コヽニ於テ多面體ノ頂點ノ數ヲ限リナク增大シ且ツソノ各面ヲ限リナク小ナラシメレバ,ソノ全表面ハ球面ニ限リナク接近シ,極限ニ於テr_1, r_2……等ハスベテ球ノ半徑rトナリ,又$A_1+A_2+\ldots\ldots$ハ球ノ表面積卽チ$4\pi r^2$トナル。

故ニ球ノ體積ハ$\frac{1}{3}r.4\pi r^2$　卽チ$\frac{4}{3}\pi r^3$デアル。

定理 三十八. 半徑rナル球ノ體積ハ$\frac{4}{3}\pi r^3$デアル。

例　題

1. 一球面ト一直線トノ位置ノ關係如何。

2. 半徑$8m$ノ球ト體積相等シク底面ノ半徑$7m$ナル直圓錐ノ高サヲ求メヨ。

雜　題

1. 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シイ。

2. 半徑rノ球面ヲ二ツノ平行ナ平面デ截ルトキ,ソノ二平面ノ間ノ距離ヲhトスレバ,ソノ間ニ挾マレタ球面ノ部分ノ面積ハ$2\pi rh$デアル。

定義 二ツノ平行ナ平面ノ間ニ夾マレタ球面ノ部分ヲ**球帶**トイフ。

3. 半徑r糎ナル球ニ內接スル直圓錐デ,ソノ高サガ底ノ直徑ニ等シイモノノ體積ヲ求メヨ。

4. 球面ト平面トノ交ハリナル圓ノ半徑ハ,ソノ平面ガ球ノ中心ニ近イ程大デアル。

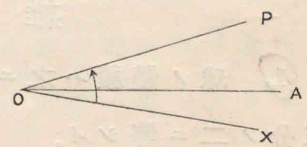
第十三篇

一般ノ角ノ三角函數

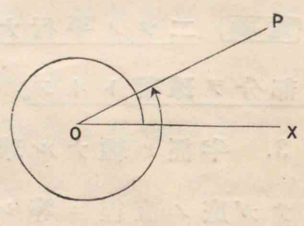
第一章　一般ノ角ノ三角函數

150. 一般ノ角

一定點Oカラ引イタ半直線OAガOXナル位置カラ發シテ一ツノ平面内ニ於テOノ周リニ回轉シ,OPナル位置ニ來タトスレバ,コヽニ角XOPヲ生ズル。OXヲ**原線**,OAヲ**動徑**トイフ。

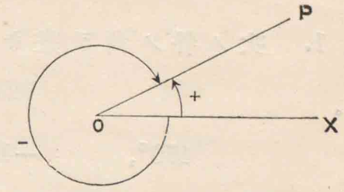


角ノ大小トイフノハ畢竟動徑ガ原線カラ發シテソノ最後ノ位置ニ至ルマデノ回轉ノ多少ノコトデアルト考ヘレバ,角ノ大サニハ限リガナイ。即チ圖ノ如ク動徑ガOXノ位置ヲ通リ越シテナホ回轉シタトスレバ,角XOPハ360°以上ニモナル。



ナホ又動徑ガOXカラOPニ至ルニソノ回轉ノ

方向ガ二ツアル,次ノ圖ニ於テ矢ヲ以テ示スガ如クデアル。



コノ相反スル二ツノ方向ヲ區別スルタメニ角ノ大サニ正負ノ符號ヲツケル。通常ノ規約トシテハ,動徑ノ回轉ガ時計ノ針ノ回轉ト反對ノ方向ヲトツタトキ生ズル角ヲ**正角**トシ,時計ノ針ノ回轉ト同一ノ方向ヲトツタトキノ角ヲ**負角**ト定メル。

之ニヨツテ角ノ大サハ正,負及ビ零ノアラユル値ヲ取リ得ルモノトナル。之ヲ**一般ノ角**トイフ。

一般ノ角ニ於テ原線ト動徑ノ位置ノミヲ知ルトキ,ソノ一ツノ度數ヲαトスレバ,ソノ角ノ最モ一般ナル度數ハ

$$\alpha + n.360^\circ$$

ニヨツテ表ハサレル,コヽニnハ任意ノ整數(正又ハ負ノ整數,又ハ0)トスル。

例 題

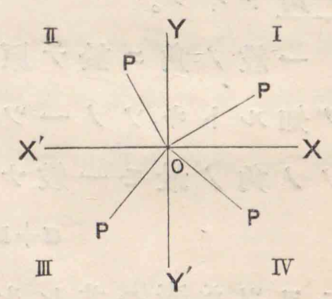
1. 次ノ各ノ角ヲ畫キ,矢ヲ以テ回轉ノ跡ヲ示セ。

$450°$, $-120°$, $-405°$

2. 或ル鈍角ヲ四倍スレバソノ動徑ハ丁度前ト同ジ位置ニ來ルトイフ,ソノ角ヲ求メヨ。

151. 象 限

原線OXト直線OYトガ直交スルモノトシ,XO,YOノ延長ヲ夫々OX′,OY′トスル。角XOPノ動徑OPガOXトOYトノ間ニアルトキハコノ角ハ**第一象限**ニアルトイヒ,コレカラ順次ニOPガOYトOX′ノ間,OX′トOY′ノ間,OY′トOXノ間ニアルニ從ツテ,角XOPハ夫々**第二,第三,第四象限**ニアルトイフ。



例ヘバ$225°$ハ第三象限ニアル角,$-300°$及ビ$400°$ハ第一象限ニアル角デアル。

例 題

1. 次ノ角ハ各第何象限ニアルカ。

$30°$, $125°$, $330°$

$-30°$, $-125°$, $-480°$

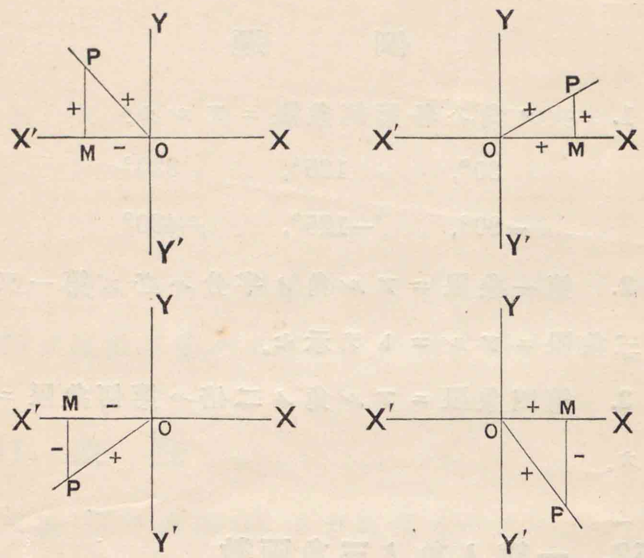
2. 第一象限ニアル角ノ半分ハ必ズ第一又ハ第三象限ニアルコトヲ示セ。

3. 第四象限ニアル角ノ二倍ハ第何象限ニアルカ。

152. 一般ノ角ノ三角函數

XOX′及ビYOY′ノ意味ヲ前節ノ通リトシ,動徑OPニヨツテ作ラレタ角XOPヲ單ニ角Aト呼ブコトトスル。

今角Aガ何レノ象限ニアツテモ常ニOP上ノ任意ノ一點PカラXOX′ニ垂線PMヲ引イテ,直角三角形OPMヲ作リ,ソノ三邊ニ夫々次ノ如ク正負ノ符號ヲツケタモノトスル。



(1) 斜邊OPハ常ニ正トスル。

(2) 底邊OMハOX上ニアルトキハ正トシ,OX′上ニアルトキハ負トスル。

(3) 垂線PMハXOX′ニ對シテOYト同ジ側ニアルトキハ正トシ,OY′ト同ジ側ニアルトキハ負トスル。

斯クノ如クニ符號ヲツケタ線分ヲ用ヰテ,次ノ如ク定義スル。

$$\sin A=\frac{PM}{OP},\quad \cos A=\frac{OM}{OP},\quad \tan A=\frac{PM}{OM},$$

$$\cot A=\frac{OM}{PM},\quad \sec A=\frac{OP}{OM},\quad \mathrm{cosec}\,A=\frac{OP}{PM}.$$

コレ即チ一般ノ角ノ三角函數デ,ソノ値ハ角ノ大サノミニヨツテ定マルコトハ明カデアル。(第111節參照)

マタソノ符號ハ上ニ述ベタ規約ニヨリ次表ノ如クニ確定スル。

函數 / 象限	sin cosec	cos sec	tan cot
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

153. 三角函數ノ間ノ關係

一般ノ角ニツイテモ次ノ式ガ成立スルコトハ定義ニヨツテ容易ニ證明サレル。

$$\left.\begin{aligned}\sin A\,\mathrm{cosec}\,A&=1\\ \cos A\sec A&=1\\ \tan A\cot A&=1\end{aligned}\right\}(1)\qquad \left.\begin{aligned}\tan A&=\frac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A&=\frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 A+\cos^2 A&=1\\ 1+\tan^2 A&=\sec^2 A\\ 1+\cot^2 A&=\mathrm{cosec}^2 A\end{aligned}\right\}(3)$$

(1),(2)及ビ(3)ニヨツテ,一ツノ角ノ三角函數ノ中

何レカ一ツヲ知ルトキハ他ノ五ツヲ求メルコトガ出來ル。

例　Aガ第三象限ノ角デ $\sin A=-a\,(a>0)$ ナルトキ,他ノ三角函數ヲ求メヨ。

解　$\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\sqrt{1-a^2},$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\quad \cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a},$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}},\quad \mathrm{cosec}\,A=\frac{1}{\sin A}=-\frac{1}{a}.$$

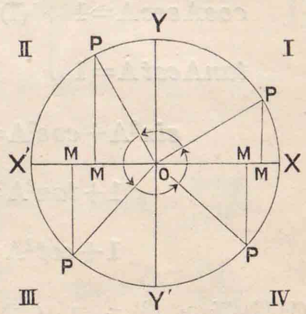
例　題

1. Aガ第二象限ノ角ナルトキ, $\tan A$ ヲ用ヰテ他ノ三角函數ヲ表ハセ。

2. $\sec A=-a\ (a>0)$ ナルトキ,Aノ他ノ三角函數ヲ求メヨ。

154. 三角函數ノ値ノ變動

第152節ノ定義ニヨリ,第113節乃至第116節ヲ參考スレバ,動徑OPガOXカラ發シテ順次ニI, II, III, IVノ各象限ヲ經過スルトキ,之ニ伴フ角



XOPノ三角函數ノ値ノ變動ハ次ノ如クデアルコトヲ知ル。

象限 / 角 / 函數	0°	1	90°	II	180°	III	270°	IV	360°
sin	0	＋ 增	1	＋ 減	0	－ 減	−1	－ 增	0
cos	1	＋ 減	0	－ 減	−1	－ 增	0	＋ 增	1
tan	0	＋ 增	∞ / −∞	－ 增	0	＋ 增	∞ / −∞	－ 增	0
cot	∞	＋ 減	0	－ 減	−∞ / ∞	＋ 減	0	－ 減	−∞
sec	1	＋ 增	∞ / −∞	－ 增	−1	－ 減	−∞ / ∞	＋ 減	1
cosec	∞	＋ 減	1	＋ 增	∞ / −∞	－ 增	−1	－ 減	−∞

注意 1.　表中「角」ノ欄ニアル 0°, 90°, 180°, 270°, 360° 等ハ各之ニ 360° ノ任意ノ整數倍ヲ附加シテモ宜イ。コレラノ角ノ三角函數ナルモノハ第152節ノ定義ノ中ニ含マレナイモノデ,コノ表ニ於テ始メテソノ値ヲ定義シタモノデアル。

注意 2.　Aガ第一象限ヲ經テ 90° ニ近ヅクトキハ $\tan A$ ハ正デ∞トナルケレドモAガ第二象限ノ方カラ 90° ニ近ヅクトキハ $\tan A$ ハ負デソノ絕對値ガ∞トナ

ル,ヨツテ之ヲ $-\infty$ ト書ク。元來 $tan 90^\circ$ ナルモノハ到底之ニ一定ノ數値ヲ與ヘルコトガ出來ヌモノデ(∞ハ數デハナイ)吾人ハタヾAガ限リナク90°ニ近ヅクトキノ $tan A$ ノ變動ノ有樣ガ∞又ハ$-\infty$デアルトイヒ得ルニスギナイ。

コノ他一般ニ90°ノ奇數倍ナル角ノ正切,正割及ビ90°ノ偶數倍ナル角ノ餘切,餘割ニツイテモ常ニ上ト同樣ニ考フベキモノデアル。

注意 3. 如何ナル角ニツイテモ正弦及ビ餘弦ハソノ絕對値ガ1ヨリ大ナルコトハナイ。正割及ビ餘割ハソノ絕對値ガ1ヨリ小ナルコトハナイ。正切及ビ餘切ニハ何等ノカクノ如キ制限ガナイ。(第113, 114, 115, 116節參照)

例　　題

1. $1-sin A$ ノ値ノ變動ヲ考ヘ,ソノトリ得ル最大値及ビ最小値ヲ求メヨ。

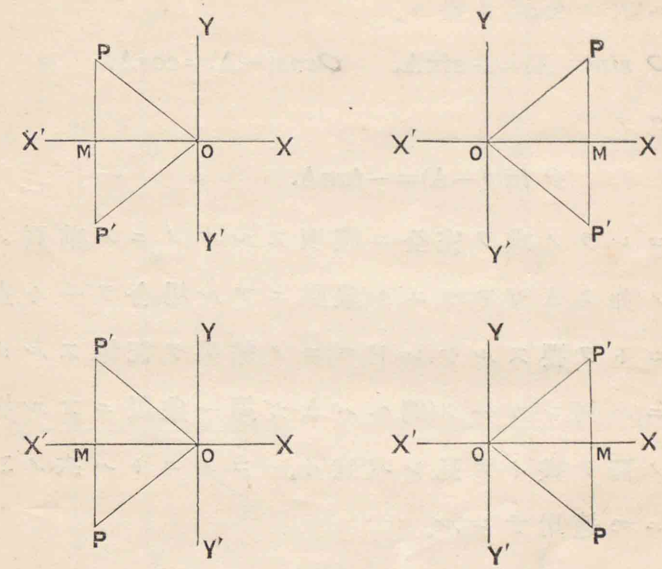
2. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $cos^2 x - 2 cos x = 3$

(2) $cot^2 x + cosec x - 1 = 0$

155. (−A)ノ三角函數

原線OXトAナル角ヲナス動徑OPト,−Aナル角ヲナス動徑OP′トハ常ニOXニ關シテ對稱ノ位置ニアル。今OP上ノ一點PカラOX(或ハソ



ノ延長OX′)ニ垂線PMヲ引キ,更ニ之ヲ延長シテOP′トP′ニ於テ交ラシメレバ,二ツノ三角形OPM, OP′Mハ全ク相等シク

$$OP' = OP.$$

又P′MトPMトモソノ長サハ相等シイケレドモ,ソノ符號ハ相反スル,卽チ

$$P'M = -PM.$$

然ルニ

$$sin A = \frac{PM}{OP}, \quad sin(-A) = \frac{P'M}{OP'} = -\frac{PM}{OP},$$

$$cos A = \frac{OM}{OP}, \quad cos(-A) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP}.$$

負角関係

故ニ次ノ公式ヲ得ル。

$$\sin(-A) = -\sin A, \qquad \cos(-A) = \cos A.$$

從ツテ

$$\tan(-A) = -\tan A.$$

コレラノ式ヲ完全ニ證明スルタメニハ前頁ノ圖ノ如クAガアラユル象限ニアル場合ヲ一々畫クコトヲ要スルケレドモ,コノ結果ヲ記憶スルタメニハ何レカ一ツ(例ヘバAガ第一象限ニアル場合)ノ圖ヲ畫イテ見レバ宜イ。コノコトハ次ノ二節ニモ適用サレル。

156. (90°+A) ノ三角函數

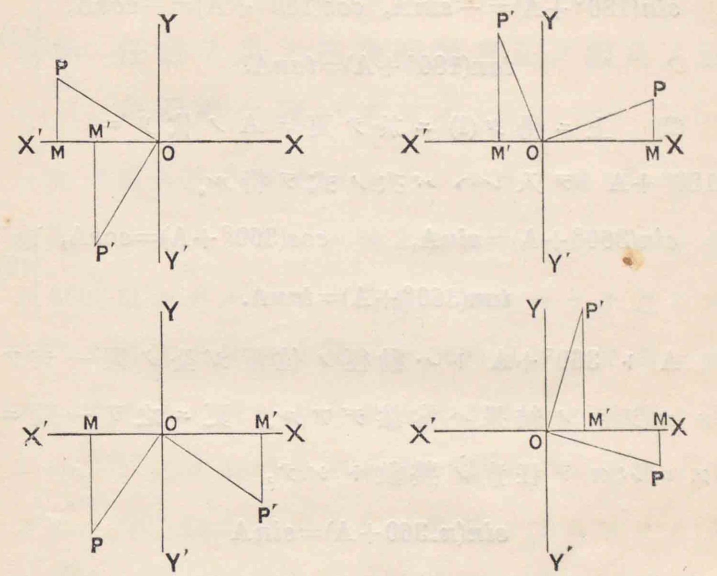
角 XOP ヲ A, 角 XOP′ ヲ 90°+A トシ, OP=OP′ トシテ P 及ビ P′ カラ XOX′ ニ垂線 PM 及ビ P′M′ ヲ引ケバ,三角形 OPM ト P′OM′ トハ全ク相等シク

$$P'M' = OM, \quad OM' = -PM.$$

然ルニ

$$\sin A = \frac{PM}{OP}, \quad \sin(90^\circ + A) = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{OM}{OP},$$

$$\cos A = \frac{OM}{OP}, \quad \cos(90^\circ + A) = \frac{OM'}{OP'} = -\frac{PM}{OP}.$$



故ニ

$$\sin(90^\circ + A) = \cos A, \qquad \cos(90^\circ + A) = -\sin A,$$

$$\tan(90^\circ + A) = -\cot A.$$

157. (n. 90±A) ノ三角函數

(1)　前節ノ公式ニ於ケルAハ任意ノ角デアルカラ今Aノ代リニ90°+Aヲ入レヽバ

$$\sin\{90^\circ + (90^\circ + A)\} = \cos(90^\circ + A) = -\sin A,$$

$$\cos\{90^\circ + (90^\circ + A)\} = -\sin(90^\circ + A) = -\cos A.$$

ヨツテ次ノ公式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned} &\sin(180°+A)=-\sin A,\quad \cos(180°+A)=-\cos A,\\ &\qquad\tan(180°+A)=\tan A.\end{aligned}\right\}(1)$$

(2)　上ニ得タ(1)ニ於テ更ニAノ代リニ180°+A ヲ入レヽバ次ノ式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned} &\sin(360°+A)=\sin A,\qquad \cos(360°+A)=\cos A,\\ &\qquad\tan(360°+A)=\tan A.\end{aligned}\right\}(2)$$

A ト 360°+A トハ動徑ノ位置ガ全ク同一デアルカラコノ結果ハ當然デアル。更ニ之ヲ一般ニスレバ n ヲ任意ノ整數トシテ,

$$\sin(n.360+A)=\sin A$$

等トスルコトガ出來ル。

(3)　前節ノ式及ビ本節(1), (2)ニ於テAノ代リニ$-A$ヲ入レヽバ次ノ三組ノ公式ヲ得ル。

餘角関係

$$\left.\begin{aligned} &\sin(90°-A)=\cos A,\qquad \cos(90°-A)=\sin A,\\ &\qquad\tan(90°-A)=\cot A.\end{aligned}\right\}(3)$$

補角関係

$$\left.\begin{aligned} &\sin(180°-A)=\sin A,\qquad \cos(180°-A)=-\cos A,\\ &\qquad\tan(180°-A)=-\tan A.\end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin(360°-A)=-\sin A,\qquad \cos(180°-A)=\cos A,\\ &\qquad\tan(360°-A)=-\tan A.\end{aligned}\right\}(5)$$

注意　Aノ如何ニ拘ハラズ90°−A及ビ180°−Aヲ夫々Aノ**餘角**及ビ**補角**ト稱ヘル。

158. 任意ノ角ノ三角函數ヲ正ノ鋭角ノ三角函數デ表ハスコト

先ヅ與ヘラレタ角ガ負ナルトキハ第155節ノ公式ニヨッテ之ヲ正ノ角ニ直ス。モシソノ正角ガ360°以上ナルトキハ前節ノ(2)ニヨッテ之カラ360°ノ適當ナ倍數ヲ減ジテ360°以下ノ正角ニ直ス。ナホソノ角ガ180°以上ナルトキハ前節ノ(1)ニヨッテ之ヲ180°以下ノ角ニ直シ,ソノ結果ノ角ガナホ90°以上ナルトキハ前節ノ(4)ニヨッテソノ補角ニ直セバ確カニ90°以下ノ正角トナル。以上ノ取扱ヒニ於テハ函數ノ種類ハ少シモ變ズルコトガナイ,例ヘバ任意ノ角ノ正弦ハ常ニ正ノ鋭角ノ正弦ヲ用キテ之ヲ表ハスコトヲ得ル。

ケレドモ若シ函數ノ種類ヲ變ズルコトヲ許セバ,更ニ前節ノ(3)ニヨッテ角ヲ45°以下ノ正角ニ直スコトモ出來ル。

例 1.　$\sin 1765°=\sin(4\times360°+325°)$

$$\begin{aligned} &=\sin 325°=\sin(180°+145°)\\ &=-\sin 145°=-\sin(180°-35°)\\ &=-\sin 35°.\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ **2.** $\tan(-1190^\circ) = -\tan 1190^\circ = -\tan(3\times 360^\circ + 110^\circ)$

$$= -\tan 110^\circ = -\tan(180^\circ - 70^\circ)$$

$$= \tan 70^\circ = \tan(90^\circ - 20^\circ) = \cot 20^\circ.$$

ケレドモ必ズシモ常ニ上記ノ手順ニ拘泥スル必要ハナイ。例ヘバ前節ノ(5)及ビ(1)ニヨツテ夫夫次ノ如クニ考ヘテモ宜イ。

$$\sin 1765^\circ = \sin(5\times 360^\circ - 35^\circ)$$

$$= \sin(-35^\circ) = -\sin 35^\circ,$$

$$\tan(-1190^\circ) = \tan(7\times 180^\circ - 1190^\circ) = \tan 70^\circ.$$

例　題

次ノ三角函數ヲ或ル正ノ鋭角ノ同ジ三角函數デ表ハセ。

$\sin(-2000^\circ)$,　$\tan 523^\circ 41'$,　$\cos(-293^\circ 26')$

雜　例　題

1. 次ノ三角函數ヲ求メヨ。

$\sin 585^\circ$,　$\cos 690^\circ$,　$\sec(-930^\circ)$

2. 第 119 節ノ表ニヨリ,次ノ各角ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求メヨ。

238°,　-1072°

3. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$(1)\left\{\begin{aligned} &\sin(270^\circ + A) = -\cos A \\ &\cos(270^\circ + A) = \sin A \\ &\tan(270^\circ + A) = -\cot A \end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned} &\sin(270^\circ - A) = -\cos A \\ &\cos(270^\circ - A) = -\sin A \\ &\tan(270^\circ - A) = \cot A \end{aligned}\right.$$

4. $\sin(A-90^\circ)$, $\cos(A-90^\circ)$, $\tan(A-90^\circ)$ ヲ A ノ三角函數デ表ハセ。

5. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\cos A + \sin(270^\circ + A) + \sin(A - 270^\circ) + \cos(A + 180^\circ)$

(2) $\sin(-270^\circ) + \tan^2(180^\circ - \alpha) - \mathrm{cosec}^2(450^\circ - \alpha)$

6. 360° 以下ノ正角デ次ノ方程式ヲ滿足セシメルスベテノ角ヲ求メヨ。

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

7. $\cos\theta = \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ ナルトキ, $\tan\theta$ ノ値如何。

8. θ ヲイカナル角トスルモ $x + \dfrac{1}{x} = \sin\theta$ ヲ滿足セシメル實數 x ハ存在シナイコトヲ示セ。

便利

第二章 加法定理

159. 正弦及ビ餘弦ノ加法定理

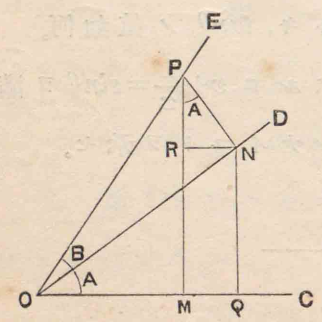
二角A, Bノ各ノ正弦及ビ餘弦ヲ知ツテ, A+Bノ正弦及ビ餘弦ヲ求メルニハ次ノ式ニヨル。

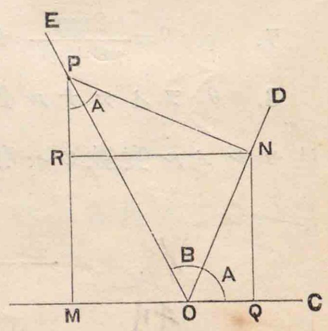
$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

之ヲ正弦及ビ餘弦ノ**加法定理**トイフ。

A及ビBヲ共ニ正ノ鋭角トスレバ,ソノ和A+Bハ鋭角,鈍角又ハ直角デアル,下ノ圖ハ和ガ鋭角及ビ鈍角ナル場合ヲ示ス。

$\angle COD=A$, $\angle DOE=B$トシ, OE上ノ任意ノ一點PカラOC, ODニ夫々垂線PM, PNヲ引ケバ,$\angle MPN$ハAニ等シイ。次ニNカラOC, PMニ夫々垂線NQ, NRヲ引クトキハ





$$\sin(A+B)=\frac{PM}{OP}=\frac{PR+RM}{OP}$$
$$=\frac{PR+NQ}{OP}=\frac{NQ}{OP}+\frac{PR}{OP}$$
$$=\frac{NQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ-MQ}{OP}$$
$$=\frac{OQ-RN}{OP}=\frac{OQ}{OP}-\frac{RN}{OP}$$
$$=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RN}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

A+Bガ直角ナルトキハ, OEガOCニ垂直トナルカラ, MハOト合シ, RハOEノ上ニアル。ケレドモ上ノ證明ハ矢張リ成立スル。

以上A及ビBヲ共ニ正ノ鋭角ト考ヘテ證明シタケレドモ,然ラザル場合ニモ同様ノ方法デ證明スルコトガ出來ル。

上ノ公式ニ於テBノ代リニ$-B$トスレバ

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$
$$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$

$$= \sin A\cos B - \cos A\sin B,$$

$$\cos(A-B) = \cos\{A+(-B)\}$$
$$= \cos A\cos(-B) - \sin A\sin(-B)$$
$$= \cos A\cos B + \sin A\sin B.$$

本節ノ結果ヲ併記スレバ下ノ如クデアル。

$$\boldsymbol{\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B} \qquad (\mathrm{I})$$
$$\boldsymbol{\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B} \qquad (\mathrm{II})$$
$$\boldsymbol{\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B} \qquad (\mathrm{III})$$
$$\boldsymbol{\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B} \qquad (\mathrm{IV})$$

コレラノ四式カラ後節ニ述ベル種々ノ公式ヲ誘出シ得ルバカリデナク,今迄ニ得タ三角函數ノ性質ニ關スル公式ハ皆コノ四式ノ中ニ含有サレルモノデアル。例ヘバ(I)ニ於テ $B=90°$ ト置ケバ,

$$\sin(A+90°) = \sin A\cos 90° + \cos A\sin 90° = \cos A$$

デ,コレ即チ第 156 節ノ公式デアル。又 (II) ニ於テ $A=0°$ ト置ケバ

$$\sin(-B) = \sin 0°\cos B - \cos 0°\sin B = -\sin B$$

トナリ,是即チ第 155 節ノ公式ト同ジデアル。

例　　題

1. $75°(=45°+30°)$ ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。

2. $15°(=45°-30°)$ ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。

160. 正切ノ加法定理

前節ノ(I)及ビ(III)ニヨリ

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B - \sin A\sin B}.$$

コノ右邊ノ分母及ビ分子ヲ $\cos A\cos B$ デ除スレバ

$$\boldsymbol{\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}}$$

ヲ得ル,コレ即チ正切ノ加法定理デアル。

同樣ニ(II)及ビ(IV)カラ次ノ式ヲ得ル。

$$\boldsymbol{\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}}.$$

例　　題

次ノ式ヲ證明セヨ。

(1) $$\tan(45°\pm A) = \frac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$$

(2) $$\cos(A\pm B) = \frac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A}$$

161. 倍角公式

正弦,餘弦及ビ正切ノ加法定理ニ於テ, B=A ト置ケバ次ノ式ヲ得ル。

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A,$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 A,$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

コレラヲ**二倍角公式**トイフ。

更ニ加法定理ニ於テ, B=2A ト置キ,二倍角公式ヲ應用スレバ次ノ公式ヲ得ル。(學生自ラソノ計算ヲ試ミヨ)

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A,$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A,$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.$$

コレラヲ**三倍角公式**トイフ。

例 題

1. 次ノ式ヲ證明セヨ。

(1) $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$

(2) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x$　　(3) $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \cos 2x$

(4) $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$

2. A=18° ナルトキハ $\sin 2A = \cos 3A$ デアル。之カラ $\sin 18°$ ノ値ヲ求メヨ。

162. 半角公式

A ノ三角函數ニヨッテ $\dfrac{A}{2}$ ノ三角函數ヲ表ハス式ヲ作ルニハ cos A ヲ用キルガ便デアル。卽チ餘弦ノ二倍角公式ニ於テ A ノ代リニ $\dfrac{A}{2}$ ヲ入レヽバ

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$$

ヲ得ル。ヨッテ

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

ヨッテ

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

ヲ得ル。コレラヲ**半角公式**トイフ。

右邊ニ於ケル正負ノ符號ハ $\dfrac{A}{2}$ ガ何レノ象限ニアルカヲ考ヘテ適當ニ選ブベキモノトスル。

$\boxed{例}$ $\cos 330° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ知ッテ, 165° ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。

解　$\sin 165^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\cos 330^\circ}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos 165^\circ = -\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

例　題

半角公式ニヨッテ, 15° 及ビ $22^\circ 30'$ ノ三角函數ヲ求メヨ。

163. 乘積公式

正弦及ビ餘弦ノ加法定理ノ中(I)ト(II)又ハ(III)ト(IV)ヲ相加ヘ又ハ減ズレバ次ノ四式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}
\sin(A+B)+\sin(A-B)&=2\sin A\cos B\\
\sin(A+B)-\sin(A-B)&=2\cos A\sin B\\
\cos(A+B)+\cos(A-B)&=2\cos A\cos B\\
\cos(A+B)-\cos(A-B)&=-2\sin A\sin B
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ヨコヽニ於テ　$A+B=C,\quad A-B=D$

ト置ケバ　$A=\dfrac{C+D}{2},\quad B=\dfrac{C-D}{2}$

トナル,ヨッテ(1)ヲ書キ直セバ下ノ如クニナル。

$$\left.\begin{aligned}
\sin C+\sin D&=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\
\sin C-\sin D&=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\\
\cos C+\cos D&=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\
\cos C-\cos D&=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

(1)及ビ(2)ハ二角ノ正弦及ビ餘弦ノ和又ハ差ヲ積ノ形ニ變ジ,若シクハ積ヲ和又ハ差ノ形ニ變ズル場合ニ用ヰラレル公式デアル。

例　題

1. 次ノ式ヲ積ノ形ニ變ゼヨ。

(1)　$\sin 3A+\sin 5A$

(2)　$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x$

2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\sin A+\sin 4A+\sin 7A}{\cos A+\cos 4A+\cos 7A}$$

3. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\sin 50^\circ+\sin 10^\circ=\cos 20^\circ$$

雜　題

1. A, B ガ共ニ正ノ鋭角デ, $\sin A=\frac{1}{3}$, $\cos B=\frac{1}{2}$ ナルトキ, $\sin(A+B)$ ノ値如何。

2. α ガ正ノ鋭角, β ガ正ノ鈍角デ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$ ナルトキ, $\cos(\alpha-\beta)$ ノ値如何。

3. $\cos\alpha=\frac{11}{61}$, $\sin\beta=\frac{9}{41}$ ナルトキ, $\cos(\alpha-\beta)$ ノ値如何。

4. $\tan\frac{A}{2}=t$ ナルトキ, t ヲ用キテ A ノスベテノ三角函數ヲアラハセ。

5. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

(1) $$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$$
$$=\cos^2 B-\cos^2 A$$

(2) $$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$$
$$=\cos^2 B-\sin^2 A$$

(3) $$\sin(A+B+C)$$
$$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$$
$$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$$

(4) $$\cos(A+B+C)$$
$$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$$
$$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$$

(5) $$\tan(A+B+C)$$
$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$$

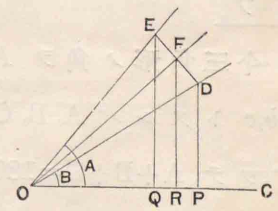
6. $A+B+C=180°$ ナルトキ, 次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(2) $$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

(3) $$\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

7. 圖ニ於テ OD=OE=1, ∠COE=A, ∠COD=B デ, OF ハ角 DOE ノ二等分線, マタ EQ, FR, DP ハ何レモ OC ニ垂直デアルトスル。



之ニヨツテ幾何學的ニ

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

第十四篇

三角形ノ解法

第一章　三角形ニ關スル公式

164. 三角形ノ原素

一ツノ三角形ハ三ツノ角及ビ三ツノ邊ヲモツ,コレラヲ總稱シテ三角形ノ**原素**トイフ。

今三角形ノ角ヲ A, B, C; 之ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ, A, B, C ハ何レモ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアツテ, $A+B+C=180°$ ナル關係ガアル。

又 a, b, c ハ正デ,ソノ何レノ二ツノ和モ,殘リノ一ツヨリ大デアル,卽チ $a+b>c$ 等ノ關係ガアル。

一ツノ三角形ノ原素ノ間ニハナホ種々ノ關係ガアル,ソノ重要ナモノヲ本章デ述ベル。以下本章ニ於テハ三角形ノ原素ヲ常ニ上ノ如キ記號デ表ハスコトトスル。

例　　題

三角形 ABC ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1)　$\sin A=\sin(B+C),\quad \cos A=-\cos(B+C)$

(2)　$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2},\quad \cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$

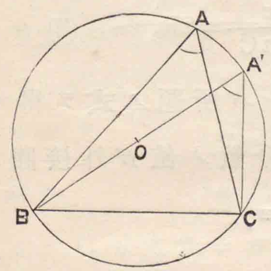
(3)　$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

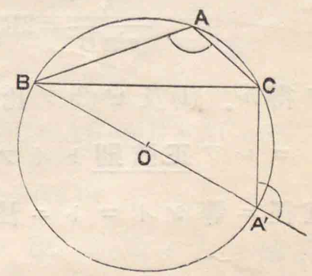
165. 原素間ノ關係 I (正弦則)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ $=2R$ [外節円直径]

三角形ノ辺ノ長サハソノ対角ノsinニ等シイ.

之ヲ證明スルニ,今 A ガ鋭角又ハ鈍角ナル場合ヲ考ヘ,三角形 ABC ノ外接圓ヲ畫キ,ソノ半徑ヲ R トスル。

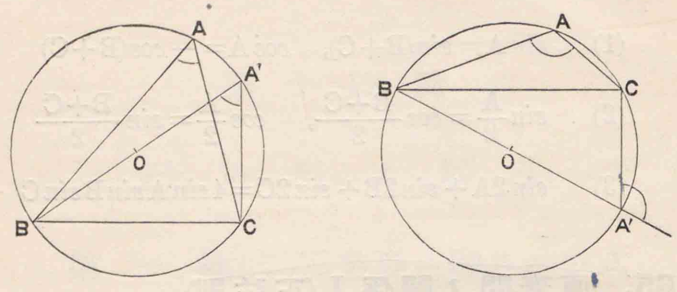




コノ圓ニ於テ B ヲ過ギル直徑ノ他ノ端ヲ A′ トシ, CA′ ヲ結ベバ,角 BA′C ハ角 A ニ等シイカ(A ガ鋭角ナルトキ),又ハ A ノ補角ニ等シイ(A ガ鈍角ナルトキ)。

何レニシテモ　$\sin BA'C=\sin A$　デアル。

然ルニ　　　$BC=BA'\sin BA'C$



デアルカラ　　$a = 2R\sin A$

即チ　　$\dfrac{a}{\sin A} = 2R.$　　(1)

Aガ直角ナルトキハ,　$\sin A = 1,\ a = 2R$　デアルカラ,(1)ハ矢張リ眞デアル。

同様ニシテ

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad (2)$$

ヲ得ル。(1)及ビ(2)ヲ比較スレバ所題ノ式ヲ得ル.

コレヲ**正弦則**トイフ。各分數ノ値ガ外接圓ノ直徑ニ等シイコトニ注意セヨ。

例　題

1.　次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1)　$\sin A + \sin B > \sin C$

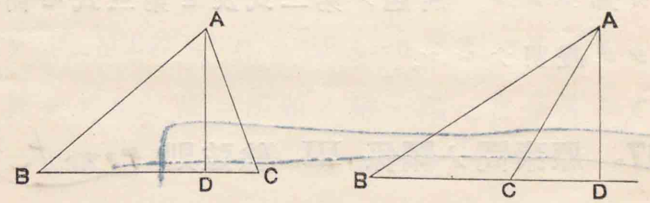
(2)　$\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2}$

2.　$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 0$ ナラバ, $C = 90°$ デアル。

166. 原素間ノ關係 II

$$a = b\cos C + c\cos B,$$
$$b = c\cos A + a\cos C,$$
$$c = a\cos B + b\cos A.$$

AカラBCニ垂線ADヲ引ケバ,B及ビCガ共ニ鋭角ナルトキハ,DハBCノ間ニアル。



ヨツテ　　$BC = BD + DC = AB\cos B + AC\cos C.$

故ニ　　$a = b\cos C + c\cos B.$

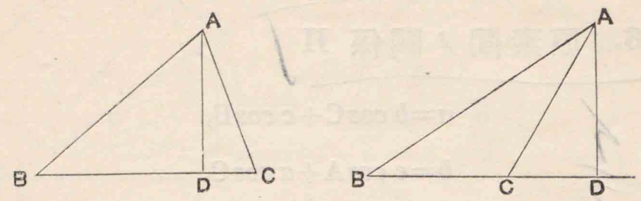
モシCガ鈍角ナラバ,DハBCヲCノ方ニ延長シタ上ニアル。ヨツテ

$$BC = BD - CD = AB\cos B - AC\cos(180° - C)$$
$$= AB\cos B + AC\cos C.$$

故ニ再ビ　　$a = b\cos C + c\cos B$

ヲ得ル。Bガ鈍角ナルトキモ亦同様デアル。

Cガ直角ナルトキハ, $a = c\cos B,\quad \cos C = 0$; 故ニ



上ノ式ハナホコノ場合ニモ眞デアル。Bガ直角ナルトキモ亦然リ。

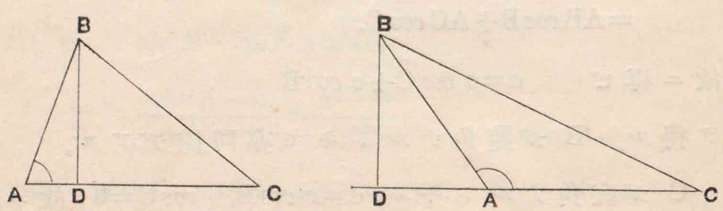
故ニ上ノ式ハスベテノ場合ヲ通ジテ眞ナルコトガ知ラレル。所題ノ第二式及ビ第三式モ同様ニシテ證明サレル。

167. 原素間ノ關係 III (餘弦則) チョット大切ナ.

$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,}$$
$$\boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,}$$
$$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.}$$

BカラAC又ハソノ延長ニ引イタ垂線ヲBDトスレバ,Aガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ

$$BC^2=AC^2+AB^2\mp 2.AC.AD$$



デアル。然ルニ一方ニ於テ,Aガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ

$$AD=AB\cos A$$

又ハ $$AD=AB\cos(180°-A)=-AB\cos A$$

デアルカラ,何レニシテモ

$$BC^2=AC^2+AB^2-2.AC.AB\cos A,$$

即チ $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

又Aガ直角ナルトキハ,ぴたごらすノ定理ニヨッテ $a^2=b^2+c^2$ デ,且ツ $\cos A=0$ デアルカラ,上ノ式ハ眞デアル。故ニ所題ノ第一式ハ常ニ眞デアル。第二式,第三式モ同様ニ證明サレル。

之ヲ**餘弦則**ト稱ヘル。或ハ前節ノ關係ヲ**第一餘弦則**トイヒ,本節ノ關係ヲ**第二餘弦則**トイフコトモアル。

例題

次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1) $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$

(2) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

(3) $b\cos A-a\cos B=\dfrac{b^2-a^2}{c}$

168. 原素間ノ關係 IV

餘弦則ニヨリ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}=b^2+c^2-2bc\left(1-2\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}\right)$$

$$=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}.$$

故ニ $\sin^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}.$

今 $a+b+c=2s$ ト置ケバ,

$a+b-c=2(s-c),\quad a-b+c=2(s-b)$

デアルカラ,

$$\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

コヽニ $\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ ハ正ノ鋭角デアルカラ, $\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ ハ正デアル。

故ニ

同樣ニシテ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\\ \sin\frac{\mathrm{B}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\\ \sin\frac{\mathrm{C}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

3辺ヲ知ッテ三ツノ角ヲ出ス

モシ餘弦則ニ於テ $\cos\mathrm{A}=2\cos^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}-1$ トシテ,上ト同樣ノ計算ヲスレバ次ノ式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\\ \cos\frac{\mathrm{B}}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},\\ \cos\frac{\mathrm{C}}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

縦ツテ (1) ト (2) カラ次ノ式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\\ \tan\frac{\mathrm{B}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},\\ \tan\frac{\mathrm{C}}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

(3辺ヲ知ッテ3ツノ角ヲ出ス。)

例 題

1. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1) $\sin\mathrm{A}=\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(2) $\tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}\tan\dfrac{\mathrm{B}}{2}=\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$

2. a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ,

$\cot\dfrac{\mathrm{A}}{2}\cot\dfrac{\mathrm{C}}{2}=3$ ナルコトヲ證明セヨ。

169. 原素間ノ關係 V

正弦則ニヨリ

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

故ニ

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}}{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}=\frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}}=\frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\cot\dfrac{A}{2}}.$$

故ニ 正弦則ヨリ出ル。

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

二辺ト夾角ニヨッテ△形ヲトク。

他ノ角及ビ邊ノ間ニモ同様ノ關係ガアル。之ヲ**ねぴあ(Napier)ノ公式**トイフ。

上ノ式ハBトC,又ハbトcノ大小如何ニ拘ハラズ眞デアルケレドモ,實際使用スルトキニハ成ルベク負數ヲ避ケルガ便デアル。故ニ例ヘバ

$$A>B>C,\quad 從ツテ\quad a>b>c$$

トスレバ,次ノ三ツノ式ヲ用キルガ宜イ。

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},\quad \tan\frac{A-C}{2}=\frac{a-c}{a+c}\cot\frac{B}{2},$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

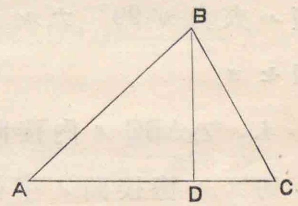
例題

次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$(1)\quad \frac{a}{b+c}=\frac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}}\qquad (2)\quad \frac{a}{b-c}=\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B-C}{2}}$$

170. 面積

三角形ABCノ面積ヲSトスル。頂點Bカラ底邊ACニ垂線BDヲ引ケバ



$$S=\frac{1}{2}AC.BD.$$

而シテ　$AC=b,\quad BD=c\sin A$

デアルカラ,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

(二辺ト夾角ヨリ面積ヲ求ム)

ヲ得ル。同様ニ

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

(證明ヲ省ク)

上ノ式ヲ第168節ノ公式ニヨッテ書キ直セバ

$$S=\frac{1}{2}bc.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

即チ　$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(三辺ヨリ面積ヲ求ム)

トナル。之ヲ**へろん(Heron)ノ公式**トイフ。

例題

1. 三邊ガ $26\,cm$, $35\,cm$, $51\,cm$ ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

2. 二ツノ邊ガ $18\,m$ 及ビ $25\,m$ デソノ夾角ガ $60°$ ナル三角形ノ地面ノ面積如何。

3. 三角形ノ二邊ノ長サガ一定ナラバ,ソノ面積ハ夾角ガ $90°$ ナルトキニ最大トナルコトヲ證明セヨ。

4. △ABC ノ内接圓ノ半徑ヲ r, 邊 BC, CA, AB ニ切スル傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r_1, r_2, r_3 トスレバ

$$r=\frac{S}{s},\quad r_1=\frac{S}{s-a},\quad r_2=\frac{S}{s-b},\quad r_3=\frac{S}{s-c}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

雜例題

(次ノ諸問題ニ用キタ記號ハスベテ本章中ニ說明シタト同ジ意味ヲモツモノトスル。)

1. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$

(2) $a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$

(3) $4RS=abc$

2. $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ ガ等差級數ヲナストキハ, a^2, b^2, c^2 モ亦等差級數ヲナスコト,及ビコノ逆ヲ證明セヨ。

3. $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ, a, b, c, モ亦等差級數ヲナスコト,及ビコノ逆ヲ證明セヨ。

4. 頂點 A カラ引イタ中線 AD ノ長サハ $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$ デ,又 $\tan ADB=\frac{2bc\sin A}{b^2-c^2}$ ナルコトヲ示セ。

5. 角 A ノ二等分線ノ長サハ $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ ナルコトヲ示セ。

第二章　三角函數ノ對數表

171. 對數

三角形ニ關スル計算ニ於テハ對數ヲ利用スルコトガ多イ。ケレドモ對數ノ理論ハ代數學ニ屬スベキモノデアルカラ,コヽニ之ヲ詳述シナイ。タヾ概要ヲ記シテ參考ニ供スル。

定義　$a^x=n$ ナルトキ,x ヲ稱シテ「a ヲ底トシタ

n ノ**對數**」トイヒ,之ヲ $x=\log_a n$ ト記ス。

又 n ヲ對數 x ノ**眞數**トイフ。

[定理]

(1) $\log_a a=1.$　　(2) $\log_a 1=0.$

(3) $\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n.$

(4) $\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n.$

(5) $\log_a(m^r)=r\log_a m.$　　(6) $\log_a\sqrt[r]{m}=\frac{1}{r}\log_a m.$

[定義] 10ヲ底トシタ對數ヲ**常用對數**トイフ。

常用對數ニ於テハ底ヲ略シテ記サナイ。今後本書ニ於ケル對數ハスベテ常用對數トスル。

[注意] 對數ガ負ナル場合デモ,ソノ數値ヲ記スニハ小數部分ヲ常ニ正ナラシメ,負號ハ整數部分ノ上ニ冠ラセル。例ヘバ -1.2564 ノ代リニ $\bar{2}.7436$ ノ如クニ書ク。

對數ノ小數部分ヲ**假數**トイヒ,整數部分ヲ**指標**トイフ。

[定理] 或ル數ト,ソノ數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數トノ對數ハ同一ノ假數ヲモツ。

指標ノ法則. 或ル數ノ對數ノ指標ハ,ソノ數ガ1ヨリ大ナルトキハソノ整數部分ノ桁數カラ1ヲ減ジタモノニ等シク,

1ヨリ小ナルトキハソノ小點數以下初メテ現

ハレル有効數字ノアル桁マデノ桁數ニ負號ヲ附シタルモノニ等シイ。

172. 三角函數ノ對數表

實際ノ計算ニハ三角函數ノ値ソレ自身ヨリモソノ對數ノ値ノ方ガ必要ガ多イカラ,之ヲ表ニシタモノガアル,コレヲ三角函數ノ對數表ト稱ヘル。

本書ノ卷末ニツケタモノハ10′置キノ角ニツイテ小數第四位マデノ近似値ヲ示シタモノデアル。ソノ見方ハ第 119 節ノ表ニ準ズル。

[例] $\log\sin 25°20'=\bar{1}.6313$　$\log\sin 54°30'=\bar{1}.9107$

$\log\cos 40°10'=\bar{1}.8832$　$\log\cos 79°50'=\bar{1}.2468$

$\log\tan 15°20'=\bar{1}.4381$　$\log\cot 89°\ 0'=\bar{2}.2419$

正弦,餘弦及ビ45°ヨリ小ナル角ノ正切等ハ1ヨリ小デアルカラソノ對數ハ負ノ指標ヲモツ。然ルニ數字ノ上ニ一々負號ヲツケルコトハ印刷上不便デアルカラ,對數ノ眞ノ値ニ10ヲ加ヘテ正數トシタモノヲ表ニスルコトガアル。斯クノ如キ場合ニハ,之ヲ**表對數**トイヒ, $\log\sin$ 等ノ代リニ $L\sin$ 等ト書ク。例ヘバ

$L\sin 25°20=9.6313$　　$L\tan 15°20=9.4381$

例題

1. 表ニヨツテ次ノ値ヲ求メヨ。

$\log\sin 7°10'$　　$\log\cos 18°0'$　　$\log\sin 112°20'$

2. 次ノ式ヲ滿足セシメル正ノ鋭角 x ヲ求メヨ。

$\log\sin x=\bar{1}.4939$　$\log\cos x=\bar{1}.6990$　$\log\tan x=\bar{1}.9848$

173. 比例部分ノ理

表中ニナイ鋭角ノ三角函數ノ對數ヲ求メヨウトスルトキハ,

角ノ變化ガ微小ナルトキハ,ソレニ伴フ三角函數ノ對數ノ變化ハホヾ角ノ變化ニ正比例スルト見做シテ之ヲ計算スルノデアル。之ヲ**比例部分ノ理**ト稱ヘル。

例 1. $\log\sin 27°16'$ ヲ求メヨ。

解 表ニヨリ

$$\log\sin 27°10'=\bar{1}.6595$$
$$\log\sin 27°20'=\bar{1}.6620.$$

故ニ　$\log\sin 27°20'=\log\sin 27°10'+0.0025.$

ヨツテ今　$\log\sin 27°16'=\log\sin 27°10'+x$

トスレバ,比例部分ノ理ニヨリ

$$10':6'=0.0025:x$$

卽チ　$x=0.0025\times\dfrac{6}{10}=0.0015$

ヲ得ル。故ニ

$$\log\sin 27°16'=\log\sin 27°10'+0.0015$$
$$=\bar{1}.6595+0.0015$$
$$=\bar{1}.6610.$$

コノ計算ニ於ケル 0.0025 (又ハ小數ノ末位ヲ單位トシテ單ニ 25) ノ如キ數ヲ**表差**トイヒ; 0.0015 (又ハ單ニ 15) ノ如キ數ヲ**比例部分**トイフ。

$\log\sin$ 及ビ $\log\cos$ ニ對スル表差ハ各表中ノ「差」ト題シタ欄内ニアル,又 $\log\tan$ 及ビ $\log\cot$ ハ共通ノ表差ヲモツカラ,表ノ中央ニ「通差」ナル欄ヲ設ケテ之ヲ載セテアル。

又計算ノ勞ヲ省クタメニ各ノ表差ニ對シテソノ $\dfrac{1}{10},\dfrac{2}{10},\ldots\ldots,\dfrac{9}{10}$ 等ヲ表トシタモノヲ對數表ノ傍ニ添ヘテアル,之ヲ比例部分ノ表ト稱ヘル。

故ニ上ノ例ハ實際ノ計算デハ次ノ如クニ記ス。

$$\begin{array}{ll} \log\sin 27°10'=\bar{1}.6595 & \text{差表 } 25 \\ \quad 6'\ \ldots\ldots\ 15.0 & \\ \hline \log\sin 27°16'=\bar{1}.6610 & \end{array}$$

例 2. $\log\cos 48°12'$ ヲ求メヨ。

解 餘弦ハ角ガ增大スルニ從ツテ却ツテソノ

値ヲ減ズルコトニ注意シ,次ノ如クニ計算スル。

$$\log\cos 48°10' = \bar{1}.8241 \qquad 表差\ 14$$
$$2' \ldots\ldots -2.8$$
$$\log\cos 48°12' = \bar{1}.8238$$

或ハ次ノ如クニスルモ宜イ。

$$\log\cos 48°20' = \bar{1}.8227 \qquad 表差\ 14$$
$$-8' \ldots\ldots 11.2$$
$$\log\cos 48°12' = \bar{1}.8238$$

例 3. $\log\tan 56°24'40''$ ヲ求メヨ。

解 $24'40'' = 24'.67$

ヨツテ次ノ如クニ計算スル。

$$\log\tan 56°20' = 0.1765 \qquad 表差\ 27$$
$$4' \ldots\ldots 10.8$$
$$0.6 \ldots\ldots 16.2$$
$$0.07 \ldots\ldots 18.9$$
$$\log\tan 56°24'.67 = 0.1777609$$

故ニ四捨五入シテ

$$\log\tan 56°24'40'' = 0.1778$$

例 4. $\log\sin x = \bar{1}.9545$ ナル正ノ鋭角ヲ求メヨ。

解
$$\log\sin x = \bar{1}.9545$$
$$\log\sin 64°10' = \bar{1}.9543$$
$$2 \qquad 表差\ 6$$
$$3' \ldots\ldots 1.8$$
$$2$$
$$0.3 \ldots\ldots 1.8$$
$$64°13'.3 \qquad 2$$

故ニ $x = 64°13'.3$

例 5. $\log\cos x = \bar{1}.3614$ ナル正ノ鋭角 x ヲ求メヨ。

例2ト同様ノ注意ヲ以テ次ノ如クニ計算スル。

$$\log\cos x = \bar{1}.3614$$
$$\log\cos 76°40' = \bar{1}.3629$$
$$15 \qquad 表差\ 54$$
$$2' \ldots\ldots 10.8$$
$$42$$
$$0.8 \ldots\ldots 43.2$$
$$x = 76°42'.8 \qquad -12$$

注意 小數第四位マデノ表ヲ用ヰ,比例部分ノ理ニヨツテ算出シタ値ニ於テハソノ小數第五位以下ハ必ズシモ確實デナイ。通常ハ上ノ諸例ニ示ス如ク第四位マデニ四捨五入スルモノトスル。又角ヲ求メル場合ニ於テハ1分ノ小數第二位以下ハ殆ンド之ヲ取ル要ガナイ。

例題

1. 次ノ値ヲ求メヨ。

$\log \sin 10°45'$　　$\log \cos 20°3'$　　$\log \tan 77°17'$

2. 次ノ式ヲ滿足セシメル正ノ鋭角ヲ求メヨ。

$\log \tan x = \bar{1}.5551$　　$\log \sin x = \bar{1}.9876$　　$\log \cos x = \bar{1}.7890$

雜例題

1. 0° ト 360° トノ間ニアツテ次ノ方程式ヲ滿足セシメル角ヲ求メヨ。

(1)　$\cos 3\theta = \cos^2\theta$

(2)　$1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$

(3)　$5\cos\theta - 2\sin\theta = 2$

2. 次ノ式カラ x 及ビ y ヲ求メヨ。

$$\begin{cases} \sin 26°10' = 0.4410 \\ \sin 26°17' = x \\ \sin y = 0.4415 \\ \sin 26°20' = 0.4436 \end{cases}$$

第三章　三角形ノ解法

174. 三角形ノ解法

一ツノ三角形ノ六ツノ原素ノ中,一般ニ何レカ三ツガ與ヘラレルトキハ他ノ三ツヲ算出スルコトガ出來ル,卽チ所謂三角形ヲ解クコトガ出來ル。但シソノ與ヘラレル三原素ノ中少クモ一ツハ邊ナルコトヲ要スル。

故ニ三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合ガアル。

(1)　一邊ト二角トヲ知ル場合。

(2)　二邊トソノ夾角ヲ知ル場合。

(3)　二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知ル場合。

(4)　三邊ヲ知ル場合。

以下次第ニ節ヲ逐ツテコレラノ各ノ解法ヲ述ベル。但シ A, B, C ハ三角形ノ角, a, b, c ハ夫々ノ對邊ヲ表ハスコトトスル。

注意　六ツノ原素以外ノモノデモ適當ナ三ツノ量ガ與ヘラレヽバ三角形ハ定マル,例ヘバ三ツノ中線ガ與ヘラレル場合ノ如クデアル。カクノ如キ場合ニ於

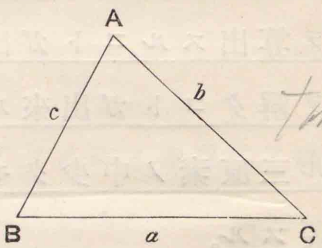
テモソノ三角形ノ原素ヲ悉ク算出スルコトヲ稱シテ三角形ヲ**解ク**トイフ。

175. 一邊ト二角トヲ知ル場合

與ヘラレタ一邊ヲaトスル。與ヘラレタ二角ハA, B, Cノ中ノ何レトスルモ,殘リノ一ツハ

$$A+B+C=180^\circ$$

ナル關係ニヨツテ定マル。



次ニ正弦則ニヨリ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

之ニヨツテb及ビcヲ得ル。

對數ヲ用キルトキノ式トシテハ夫々

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A,$$
$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

トスベキデアルケレドモ,繁ヲ避ケルタメ以下ノ諸節ニ於テハ一々カク書キ直スコトヲ略ス。

176. 二邊トソノ夾角ヲ知ル場合

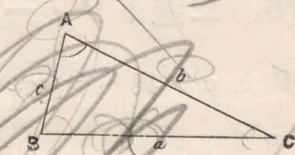
A, b, c, ヲ與ヘラレタモノトシ, $b>c$ トスル

先ヅ $B+C=180^\circ-A$ デアルカラ

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}\qquad(1)$$

又第169節ノ公式ニヨリ

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.\quad(2)$$



(2)カラ $\frac{B-C}{2}$ ガ定マリ,之ト(1)トカラ

$$B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},\qquad C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}$$

トシテ,B及ビCヲ得ル。最後ニ正弦則ニヨリ

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}\quad 又ハ\quad a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

トシテaヲ得ル。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

177. 二邊トソノ夾角ヲ知ツテ第三邊ヲ求メルコト。

略ス

A, b, c ヲ知ツテ a ヲ求メルニ,前節ノ方法ニヨルヨリモ更ニ便利ナ法ガアル。即チ先ヅ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求メルコトハ前節ノ如クシ,之カラ第169節ノ例題ニ擧ゲタ式ニヨリ

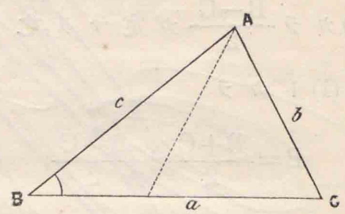
$$a=(b+c)\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\quad 又ハ\quad a=(b-c)\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$$

トシテaヲ得ルノデアル。

178. 二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知ル場合

B, b, c ヲ與ヘラレタモノトスレバ,先ヅ正弦則ニヨリ

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}.$$



之ニヨッテCヲ求メ,

従ッテ

A=180°−(B+C) ヲ得ル。再ビ正弦則ニヨリ

$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$ ヲ得ル。

コノ解法ニ於テハ先ヅ $\sin$ Cノ値ヲ求メ,之カラCヲ出スモノデアルカラ,コヽニ種々ノ場合ヲ生ズル。(詳細ナ吟味ハ附録 III ニアル)

179. 三邊ヲ知ル場合。

コノ場合ニハ第168節ノ公式ノ中

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \qquad s=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ニヨッテ三ツノ角ヲ求メルガ宜イ。

實際ニ計算スルニハ先ヅ

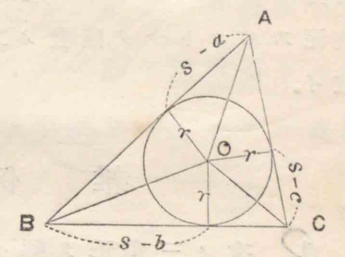
$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

ナル r ヲ計算シテ置イテ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$$



トスルノガ便利デアル。

コノ r ハ内接圓ノ半徑デアル。(第170節例題4)

注意 $\sin\frac{A}{2}$ 又ハ $\cos\frac{A}{2}$ 等ノ公式デハ $a, b, c, s-a, s-b, s-c$ 等ノ對數ヲ要スルケレドモ, $\tan\frac{A}{2}$ ノ公式デハ $s, s-a, s-b, s-c$ ダケノ對數デ足リルノデアル。

180. 三角形解法ニ就イテノ注意

(1) 表ニ掲ゲラレタ數ハ小數若干位マデノ近似値ニ過ギナイ,又比例部分ノ理モ絶對ニ精確ナモノデハナイ(特ニ表差ガ比較的大ナル部分ニ於テ最モ不確實デアル)。故ニ表ヲ用ヰテ計算シタ結果ニ於テハ或ル程度以上ノ精密ハ到底望マレナイ。

(2) 計算ニ際シテ無用ノ小數位ヲ多クトラナイ様ニ注意セヨ。使用スル表ノ精粗ニヨリ,又與ヘラレタ既知數ノ確實ノ程度ニモヨリ,殊ニ實地問題ニ於テハ

ソノ必要ノ程度ヲ考ヘテ常ニ適當ナ桁數ヲ選定スベキデアル。(第 173 節ノ注意ヲ參照セヨ)

(3) 與ヘラレタ數ガ簡單デ對數ヲ用ヰル要ノナイトキ,或ハ三角形ガ直角三角形又ハ二等邊三角形等ノ特殊ナモノナルトキハ,必ズシモ本章ニ述ベタ方法ニ拘泥スルコトナク,臨機ノ工夫ニヨツテ簡單ニ解イテ宜イ。

雜例題

1. 次ノ三角形ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} a=55 \\ A=41°13' \\ B=71°19' \end{cases}$ (2) $\begin{cases} A=76°30' \\ b=87 \\ c=38 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} a=109 \\ b=71 \\ c=100 \end{cases}$

2. 三邊ノ長サガ 20, 21, 29 ナルトキ,最大ナル角ヲ求メヨ。

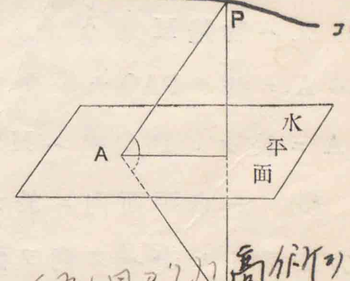
3. $B=30°$, $b=50\sqrt{3}$, $c=150$ ナル三角形ハ二ツアル;一ツハ二等邊三角形,一ツハ直角三角形ナルコトヲ示シ,且ツ各ノ第三邊ヲ求メヨ。

4. $b:c=2:\sqrt{3}$ デ且ツ $B=C+30°$ ナル三角形ノ三ツノ角ヲ求メヨ。

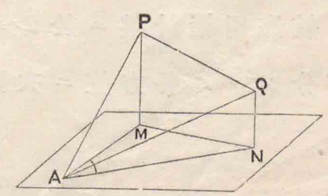
第四章 測量問題

181. 測量上ノ術語

(1) 一點ト地球ノ中心トヲ過ギル直線ヲソノ點ニ於ケル**鉛直線**,之ヲ含ム平面ヲ**鉛直面**トイヒ,鉛直線ニ垂直ナ平面ヲ**水平面**,ソノ上ニアル直線ヲ**水平線**トイフ。



(2) 一點PガAヲ過ギル水平面ヨリ上ニアルトキハ,直線 AP ノコノ水平面トナス角ヲ稱シテAニ於ケルPノ**仰角**又ハ**高度**トイフ。モシ點ノ位置ガP′ノ如クAヲ過ギル水平面ヨリ下ニアルトキハ,コノ角ヲ**俯角**又ハ**深度**トイフ。

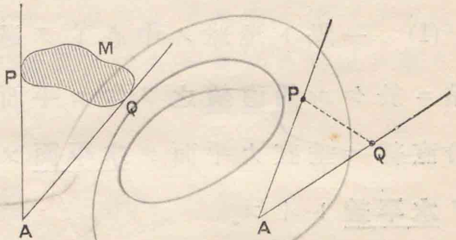


(3) 二點P,Qノ間ノ**水平距離**トハ,コノ二點ノ一水平面上ニ投ズル正射影M,Nノ間ノ距離デアル。二直線 AP, AQ ノ間ノ**水平角**トハ,コノ

正射影

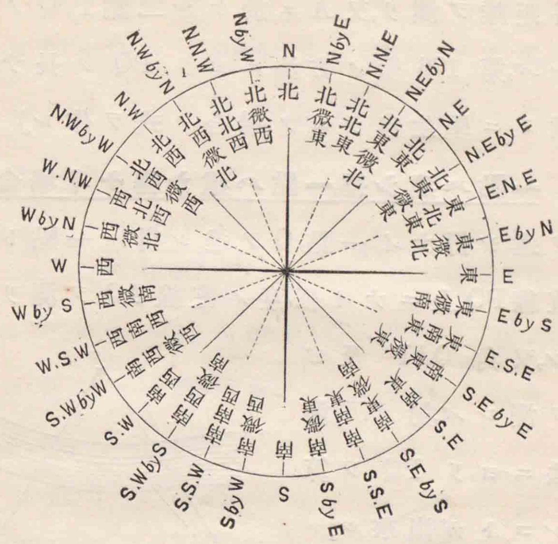
二直線ノ一水平面上ニ投ズル正射影AM, ANノ間ノ角デアル。

(4) 二點P, Q又ハ一物體Mガアルトキ,一點Aヲ過ギリ丁度之ヲ夾ム二直線ヲAP, AQトスレバ,二點P, Q又ハ物體MハAニ於テPAQナル角ヲ**張ル**トイヒ,コノ角ヲ點Aニ於ケルP, Q又ハMノ**視角**トイフ。



(5) 一水平面内ニ於テ一點カラ見タ他ノ點ノ方向ヲイヒ表ハス角ヲ**方位角**トイフ。通常ノ陸地測量ニ於テハ北(又ハ南)ノ方向ニ引イタ直線ヲ原線トシテ之カラ測ツタ角ヲ以テ示ス。例ヘバ北30°東(N30°E)トイヘバ北カラ30°ダケ東ニ偏シタ方向ノコトデアル。

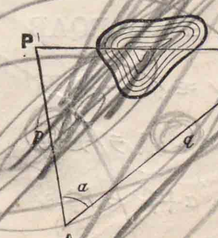
航海用羅針盤ニ於テハ北東南西ノ各ノ間ヲ八等分シ,ソノ各方位ニ次頁ノ圖ノ如キ名稱ヲツケル。



注意 地面上ノ二ツノ點ノ間ノ距離ヲ直接ニ測ルニハ**測鎖**又ハ**巻尺**ヲ用ヰ,又角ヲ測ルニハ**六分儀**又ハ**經緯儀**ヲ用ヰル。

182. 直接ニ測リ得ナイ二點間ノ距離ヲ求メルコト

(1) **二點共ニ別々ニ達シ得ル場合**。

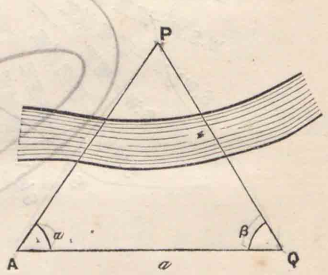


二點ヲP及ビQトスル。直線PQ上ニナイ一點AカラP及ビQニ

至ル各距離ヲ測リ,又Aニ於ケル二點P,Qノ視角ヲ測レバ,第176節ノ方法ニヨリPQノ長サヲ得ル。(試ミニ學生自ラコノ場合ノ式ヲ作レ)

(2) **一點ハ達シ得,一點ハ達シ得ナイ場合。**

Pヲ達シ得ナイ一點,Qヲ達シ得ル一點トスル。先ヅ直線PQ上ニナイ任意ノ直線AQヲ測リ之ヲaトシ,又角QAP及ビAQPヲ測レバ,第175節ノ方法ニヨリPQヲ算出スルコトガ出來ル。



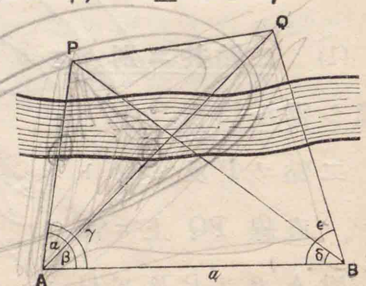
コノAQノ如ク測量ノ基礎トスル直線ヲ**基線**ト稱ヘル。

(3) **二點共ニ達シ得ナイ場合。**

二點ヲP,Qトスル。直線PQ上ニナイ基線ABヲ測リソノ長サヲaトシ,Aニ於テ

$$\angle PAQ=\alpha, \qquad \angle QAB=\beta, \qquad \angle PAB=\gamma$$

ヲ測ル。コヽニPQABハ必ズシモ同一平面内ニアルト限ラナイカラγハ$\alpha+\beta$ニ等シイト考ヘテハナラヌ。



矢張リ別ニ之ヲ測ラナケレバナラヌ。

次ニBニ於テ $\angle PBA=\delta$, $\angle QBA=\varepsilon$ ヲ測ル。

然ルトキハ,三角形PAB及ビQABニ於テ正弦則ニヨリ

$$AP=\frac{a\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}, \qquad AQ=\frac{a\sin\varepsilon}{\sin(\beta+\varepsilon)}$$

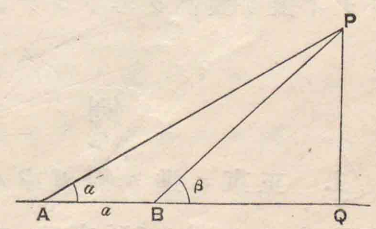
ヲ得ル。ヨツテ三角形PAQニ於テ二邊AP,AQ及ビソノ夾角αガ既知トナルカラ,(1)ノ場合ノ如クニシテPQヲ得ル。

183. 直接ニ測リ得ナイ高サヲ求メルコト

Aヲ觀測者ノ位置トシ,Aヲ過ギル水平面ヨリ上ニアル一點ヲPトスル。今Pカラコノ水平面ニ至ル鉛直線PQノ長サヲ求メヨウトスル。

(1) **直線AQ上ニ基線ヲトリ得ル場合。**

先ヅAQ上ニ基線ABヲ測リ,之ヲaトスル。A及ビBニ於テPノ仰角ヲ測リ,之ヲ夫々α及ビβトスル。



然ルトキハ三角形ABPニ於テ

$$AP=\frac{a\sin(180^\circ-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

從ツテ $$PQ=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

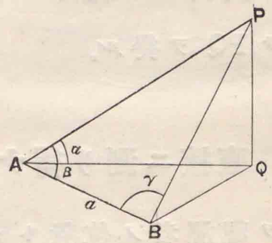
(2) **直線AQ上ニ基線ヲトリ得ナイ場合。**

Aカラ任意ノ方向ニ基線ABヲ測リ,之ヲaトシ,

又 $\angle PAQ=\alpha$, $\angle PAB=\beta$, $\angle PBA=\gamma$

ヲ測ル。然ルトキハ三角形PABカラ

$$AP=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$



ヲ得ル。從ツテ

$$PQ=\frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

デアル。

注意 實際ニ於テハAハ觀測者ノ眼又ハ測量器械中ノ一點デ地上若干ノ高サニアル。コノ高サヲ眼高トイフ。上ニ得タ PQ ニ眼高ヲ加ヘタモノガ眞ノ地上カラノ高サデアル。ケレドモ本書ニ於テハ特ニ斷ラナイ限リ眼高ヲ零トシテ計算スルモノトスル。

例題

1. 正東ニ進ム船ガ或ル位置ニ於テ二ツノ燈臺P,Qヲ夫々北15°東及ビ北57°東ニ見タ,ソノ後20浬進ンダ點ニ於テハ夫々北70°西及ビ北10°西

ニ見エタ,P,Q間ノ距離ヲ求メヨ。

2. 相距ルコト2kmナル甲乙二地點カラ同時ニ一ツノ飛行機ノ方位及ビ仰角ヲ測ツテ,甲ニ於テハ方位北,仰角30°,乙ニ於テハ方位東,仰角60°ヲ得タ,コノ機ノ高サハ何米ナルカ。

雜題

1. 塔ノ基底カラ或ル樹木ノ頂ノ高度ヲ測レバαデ,塔ノ頂ニ登ツテソノ樹ノ根元ノ深度ヲ測レバβデアル。コノ塔ノ高サヲhトスレバ,樹ノ高サ如何。

2. 或ル人山麓ノ一點ニ於テ山頂ノ仰角ヲ測リ45°ヲ得タ,此所カラ山頂ニ向ヒ眞直ニ傾斜15°ナル坂路ヲ登ルコト160mデ再ビ山頂ノ仰角ヲ測ツテ60°ヲ得タ,山ノ高サヲ求メヨ。但シ一米未滿ハ四捨五入セヨ。

3. 河ノ對岸ニ高サ20mノ臺ガアツテ,ソノ上ニ高サ3mノ銅像ヲ載セテアル,然ルニ河ヲ隔テテ銅像ノ視角ヲ測レバ丁度ソノ臺ノ基礎ニ立ツテヰル高サ2mノ樹木ノ視角ト等シイ,河ノ幅ハ何米ナルカ。

4. 相等シイ高サヲモツ二本ノ煙突ガアル,或ル人ソノ基底ヲ結ブ直線上ノ一點ニ於テ近イ方ノ煙突ノ高度ヲ測リ 60° ヲ得タ,更ニコノ點カラソノ直線ニ垂直ナ方向ニ $20m$ 歩ンダ後兩煙突ノ高度ヲ測リ 45° 及ビ 30° ヲ得タ,二ツノ煙突ノ高サ及ビソノ間ノ距離ヲ求メヨ。

5. 煙突ノ頂點ヲD,ソノ基底ヲCトシ,A及ビBヲCト同ジ水平面上ノ二點トスル,而シテ實測ニヨリ $\angle CAB=105°$, $\angle CBA=30°$, $\angle DAC=60°$, $AB=60m$ ナル値ヲ得タ,煙突ノ高サハ何程ナルカ,米ノ小數第一位マデ計算セヨ。

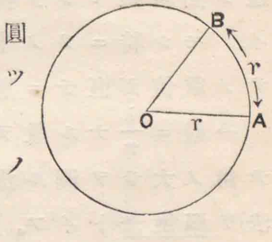
6. 樹木ガアル,ソノ根元カラ測ツテ全長ノ三分ノ一ニ當ル所ニ一ツノ枝ガアル,今樹カラ $10m$ ヲ距テテ望メバ枝カラ上ノ部分ハ 30° ノ視角ヲ張ルトイフ,樹ノ高サヲ求メヨ。

7. 敵艦ハ我艦ノ正北20海里ノ所ニアツテ北東ノ方向ヲトリ15節(ノツト)ノ速サデ逃走シテヰル,今我艦ハ $15\sqrt{2}$ 節ノ速サデ一直線ニ之ニ追ヒツカウトスル,我艦ノトルベキ方向如何。又追ヒツクマデニ何時間ヲ要スルカ。

附錄

I. 弧度法

角ヲ測ルニ六十分法ヲ用ヰルノハ最モ普通デアルケレドモ,理論上ノ研究ニ當ツテハ別ニ**弧度法**ナルモノヲ用ヰル。



Oヲ中心トシ,任意ノ半徑 r デ圓ヲ畫キ,弧 AB ヲ半徑ニ等シクトツタトスル。然ルトキハ角 AOB ト 360° トノ比ハ弧 AB ト全圓周トノ比ニ等シイ,即チ

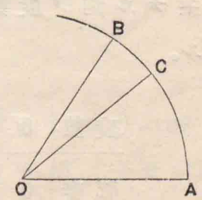
$$\angle AOB : 360° = r : 2\pi r.$$

故ニ
$$\angle AOB=\frac{360°}{2\pi}=57°.29577951......$$
$$=57°17'44''.806......$$

デ,コノ角ノ大サハ半徑 r ノ如何ニ關ハラズ一定シタモノデアル。

コノ一定ノ角ヲ**らぢあん(Radian)**ト名ヅケ,之ヲ單位トシテ任意ノ角ヲ測ルコトガ出來ル。

今 AOC ヲ一ツノ與ヘラレタ角トスル。Oヲ中心トシ任意ノ半徑 r デ圓ヲ畫キ,角ノ兩邊トA及ビCニ於テ交ハラシメ,弧 AC ノ長サヲ l トスル。又同ジ圓周上ニ弧 AB ヲ r ニ等シクトレバ,角 AOB ハ1らぢあんデアル。而シテ



$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB}=\frac{\text{弧}AC}{\text{弧}AB}=\frac{l}{r}$$

デアルカラ,

$$\angle AOC=\frac{l}{r}\ \text{らぢあん}$$

デアル。ヨツテ次ノ法則ヲ得ル。

與ヘラレタ角ガ幾らぢあんデアルカヲ知ルニハ,ソノ頂點ヲ中心トシ,任意ノ半徑デ圓ヲ畫キ,ソノ角ノ兩邊ノ間ニ挾マレタ弧ノ半徑ニ對スル比ヲ求メレバヨイ。モシ特ニソノ半徑ヲ長サノ單位トスレバ,弧ノ長サノ數値ガ直チニ所要ノらぢあんノ數デアル。

一般ニ $\frac{l}{r}$ ナル數ヲ角AOCノ**弧度**ト名ヅケ,之ニヨツテ角ノ大サヲ測ル法(即チらぢあんヲ單位トシテ測ル法)ヲ**弧度法**トイフ。らぢあんヲアラハスニハ一定ノ記號ナク,弧度法ニ於テハ單位ノ名稱ヲ略スノガ常デアル。

角AOCガ180°ナルトキハ,lハ半圓周トナルカラπrニ等シイ,ヨツテ180°ノ弧度ハπデアル。之カラ比例ノ考ニヨリ一般ニ或ル角ノ度數ヲx,弧度ヲθトスレバ

$$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$$

ナル關係ヲ得ル。

主ナル角ノ度數ト弧度トヲ對照スレバ次ノ如クデアル。

度數	0	30	45	60	90	180	270	360
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

例　題

1. 次ノ弧度ヲ有スル角ヲ六十分法デ表ハセ。

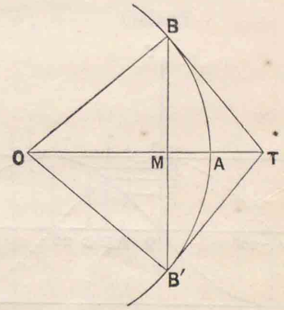
$\frac{\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{5}$

2. 次ノ角ヲ弧度法デ表ハセ。

48°, 110°, 395°30′

3. 半徑Rノ圓ニ於テ,長サcナル弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ幾らぢあんナルカ。

4. 角AOB, AOB′ヲ任意ノ相等シイ鋭角トシ,Oヲ中心トシ圓BAB′ヲ畫キ,弦BMB′及ビ切線BT, B′Tヲ作ルトキ,



弦BMB′<弧BAB′<BT+TB′

ナルコトハ既知トスル。ヨツテ角AOBノ弧度ヲθトスレバ $\sin\theta<\theta<\tan\theta$ ナルコトヲ證明セヨ。

5. 前問ノ結果カラ

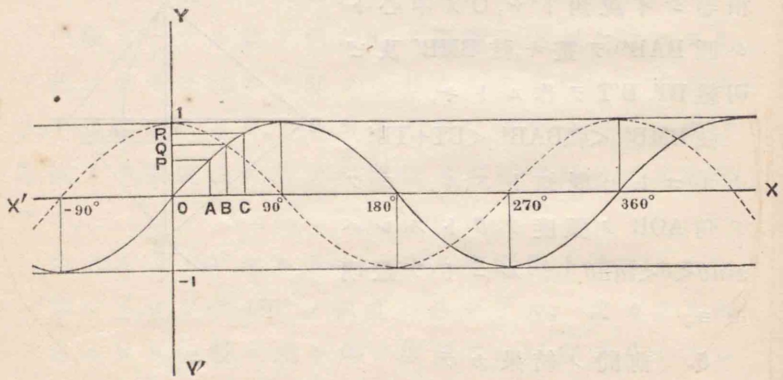
$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$$

ヲ出シ,ヨツテ角ガ微小ナルトキハソノ正弦ト弧度トハ殆ンド相等シイコトヲ示セ。

II. 三角函數ノ値ノ變動

角ノ大サガ變ズルトキ之ニ伴フ正弦ノ變動ハ既ニ第154節ニ表示シタ。今コノ變動ノ模樣ヲ一層明瞭ナラシメルタメニ次頁ノ如キ圖ヲ畫ク。先ヅOニ於

テ直交スル二直線XOX′, YOY′ヲトリ, OX上ニOカラ測ツタ長サデ角ノ大サ(例ヘバ度數)ヲ表ハサシメ,ソノ端カラOYニ平行(卽チOXニ垂直)ナル直線ヲソノ方向ニ引キ,ソノ長サデ正弦ノ値ヲ表ハサシメル,但シ角ガ負ナルトキハソノ大サヲOX′上ニ表ハシ,又正弦ガ負ナルトキハ垂線ヲOY′ノ方向ニ引クモノトスル。斯クノ如キ垂線ノ端ノ軌跡ヲ考ヘレバ圖ニ實線デ示スヤウナ波狀ノ曲線ヲ得ル,コレ卽チ正弦ノ變動ヲ圖示スルモノデ**正弦曲線**ト稱ヘルモノデアル。



但シ圖ニ於テ

$$OA=30^\circ,\qquad OB=45^\circ,\qquad OC=60^\circ,$$

$$OP=\frac{1}{2},\qquad OQ=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad OR=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

デアルトスル。

同様ノ考ニヨツテ餘弦ノ變動ヲ圖示スレバ上圖ノ點線ノ如キ曲線ヲ得ル。之ヲ**餘弦曲線**トイフ。

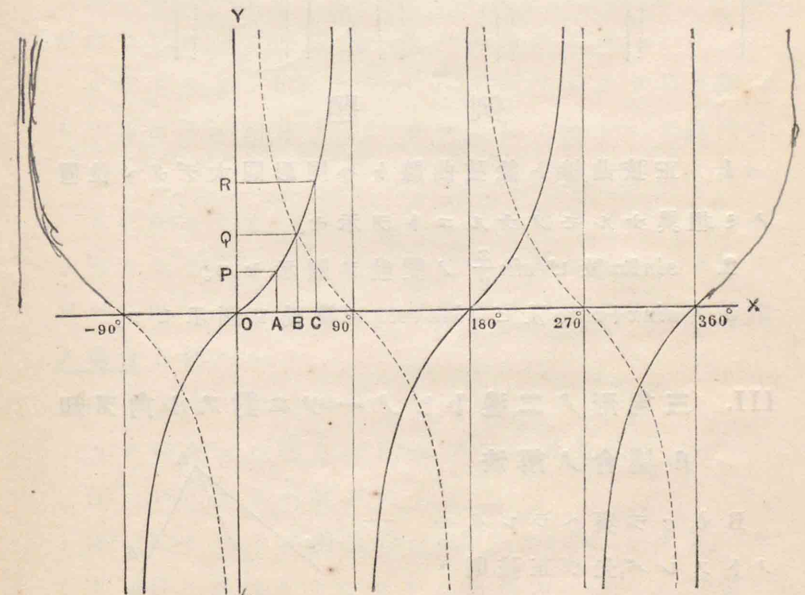
他ノ三角函數ニツイテモ夫々ソノ變動ヲ示ス曲線ガアル。下ニ示ス圖ノ實線ナル曲線ハ**正切曲線**デ點線ナル曲線ハ**餘切曲線**ヲ表ハシ,次頁ニ示ス實線ノ曲線ハ**正割曲線**,點線ノ曲線ハ**餘割曲線**デアル。何レノ圖ニ於テモOA, OB, OCノ意味ハ前ノ通リトシ,正切曲線ニ於テハ

$$OP=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad OQ=1,\qquad OR=\sqrt{3}.$$

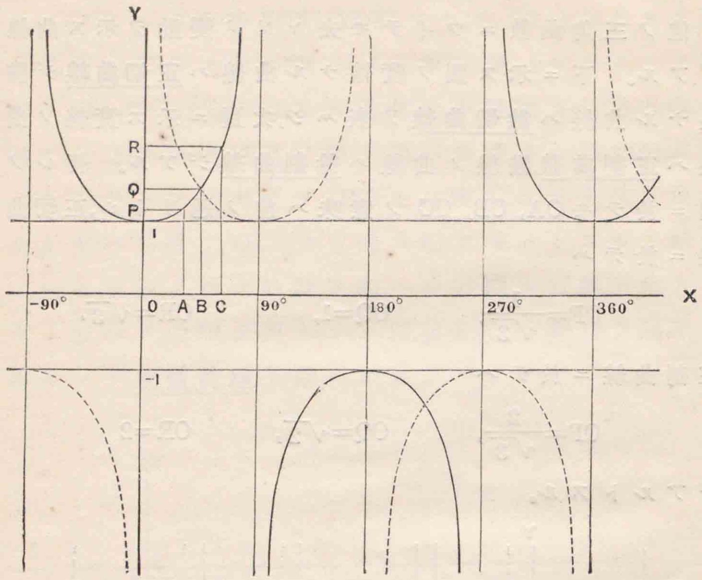
正割曲線ニ於テハ

$$OP=\frac{2}{\sqrt{3}},\qquad OQ=\sqrt{2},\qquad OR=2$$

デアルトスル。



tan cot



例題

1. 正弦曲線ト餘弦曲線トハ同形同大デタヾ位置ノミ相異ナルモノナルコトヲ示セ。

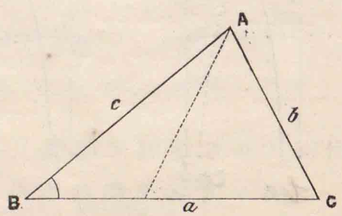
2. $\sin 2x$ 及ビ $\sin\frac{x}{2}$ ノ變動ヲ圖示セヨ。

3. $\sin x+\cos x$ 及ビ $\sin x\cos x$ ノ變動ヲ圖示セヨ。

III. 三角形ノ二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知ル場合ノ解法

B, b, c ヲ與ヘラレタモノトスレバ,先ヅ正弦則ニヨリ

$$\sin \mathrm{C}=\frac{c\sin \mathrm{B}}{b}.$$



之ニヨツテCヲ求メ,從ツテ $\mathrm{A}=180°-(\mathrm{B}+\mathrm{C})$ ヲ得ル。再ビ正弦則ニヨリ $a=\frac{b\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}$ ヲ得ル。

コノ解法ニ於テハ先ヅ $\sin$C ノ値ヲ求メ,之カラCヲ出スモノデアルカラ,コヽニ種々ノ場合ヲ生ズル。

I. $\mathrm{B}<90°$ ナルトキ

(1) $b<c\sin \mathrm{B}$ ナラバ, $\sin \mathrm{C}>1$ トナリ,從ツテCヲ得ナイ。コノ場合ニハ解ガナイ。

(2) $b=c\sin \mathrm{B}$ ナラバ, $\sin \mathrm{C}=1$ トナリ,從ツテ $\mathrm{C}=90°$ デアル。故ニコノ場合ニハ

$$\mathrm{A}=90°-\mathrm{B}, \qquad a=c\cos \mathrm{B}$$

トシテ解クコトガ出來ル。

(3) $b>c\sin \mathrm{B}$ ナラバ, $\sin \mathrm{C}<1$ トナリ從ツテCノ値ガ二ツアル,一ツハ銳角,一ツハ鈍角デアル。

ケレドモ,モシ $b\geqq c$ ナラバ, $\mathrm{B}\geqq\mathrm{C}$ デアルカラCガ鈍角トナルコトハ出來ナイ。ヨツテCノ値トシテ銳角ノミヲトラナケレバナラヌ,從ツテ解ハ唯一通リデアル。

モシ $b<c$ ナラバ,Cノ値トシテ銳角ヲモ鈍角ヲモ取リ得ルカラ,之ニ應ジテA及ビ a モ各二種ヅヽノ値ヲトル。卽チコノ場合ニハ二通リノ解ガアル,之ヲ**兩意ノ場合**ト稱ヘル。

II. $\mathrm{B}\geqq 90°$ ナルトキ

コノ場合ニハ明カニ $\mathrm{B}>\mathrm{C}$ デアルカラ,

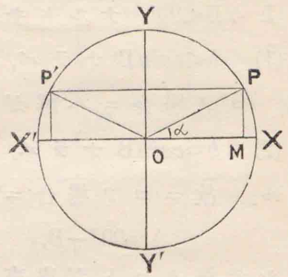
(1) $b\leqq c$ ナラバ解ガナイ。

(2) $b>c$ ナラバ勿論 $b>c\sin \mathrm{B}$ デ, $\sin \mathrm{C}<1$ トナル。ケレドモCハ鈍角トナルコトガ出來ナイカラCノ値トシテ唯一ツ銳角ノミヲトル,從ツテ解ハ一通リデアル。

例 題

次ノ三角形ヲ解ケ。

$$b=8.5,\qquad c=12,\qquad B=40^\circ$$



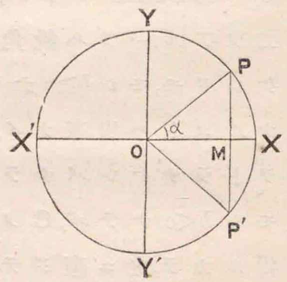
IV. 三角方程式

次ノ三ツハ三角方程式ノ基本的ナモノデアル。

(1) $\sin x=a,\quad -1\leqq a\leqq 1$

ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ α トスレバ, x ノ最モ一般ナ値ハ次ノ式ニヨツテ表ハサレル,

$$x=n\pi+(-1)^n\alpha.\quad (n\text{ ハ整數})$$



(2) $\cos x=a,\quad -1\leqq a\leqq 1$

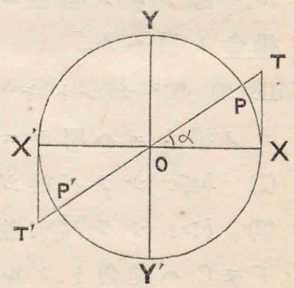
ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ α トスレバ,

$$x=2n\pi\pm\alpha.\quad (n\text{ ハ整數})$$

(3) $\tan x=a$

ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ α トスレバ,

$$x=n\pi+\alpha.\quad (n\text{ ハ整數})$$



例 1. 次ノ各ノ式ヲ滿足セシメルスベテノ角ヲ求メヨ。

(1) $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解 各式ニ適スル x ノ一ツノ値ハ夫々 $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{6}$ デアル。故ニ一般ノ解ハ次ノ如クデアル。

(1) $x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}$,　　(2) $x=2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$,

(3) $x=n\pi-\dfrac{\pi}{6}$.

例 2. $\sin^2x=\dfrac{1}{2}$ ヲ解ケ。

解 兩邊ヲ平方ニ開ケバ $\sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ得ル。

$\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ トスレバ,　$x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{4}$,

$\sin x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ トスレバ,　$x=n\pi-(-1)^n\dfrac{\pi}{4}$

ヲ得ル,ヨツテ兩者ヲマトメレバ

$$x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}=(4n\pm1)\frac{\pi}{4}$$

トナル。然ルニ $4n\pm1$ ハスベテノ奇數ヲアラハスカラソノ內容ニ於テハ $2n+1$ ト全ク相等シイ,ヨツテ次ノ答ヲ得ル。

$$x=(2n+1)\frac{\pi}{4}.$$

例 3. $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$ ヲ解ケ。

コノ方程式ヲ滿足セシメル $2x$ ノ一ツノ値ハ $\dfrac{\pi}{6}$ デアル。故ニソノ一般ナル値ハ

$$2x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

デアル。ヨツテ

$$x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}.$$

注意 公式 $n\pi+(-1)^n\alpha$ ハ $sin x=a$ ナル形ノ方程式ノ一般ナ根ヲ與ヘルモノデアルカラ,本例ノ如キ場合ニハ上ノ如ク $2x$ ヲ一ツノ未知角ト見做シテコノ公式ヲ適用スベキデアル。之ヲ次ノ如クニスルノハ誤リデアル。

$2x$ ノ一ツノ値ハ $\frac{\pi}{6}$, 從ツテ x ノ一ツノ値ハ $\frac{\pi}{12}$ デアル。故ニ一般ニ

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{12}.$$

例 **4.** $sin 2x=cos 3x$ ヲ解ケ。

之ヲ書キ直セバ

$$cos(90°-2x)=cos\ 3x.$$

故ニ

$$3x=n.360°\pm(90°-2x).$$

ヨツテ

$$x=\frac{n.360°\pm90°}{3\pm2}$$

$$=(4n+1)18° \quad 又ハ \quad (4n-1)90°.$$

例題

1. $n.180°+(-1)^n A$ ニ於テ $A=30°$ ナル場合ト, $A=150°$ ナル場合トノ諸角ヲ列記シ,何レニシテモコノ式ノ表ハス內容ハ全ク同ジモノナルコトヲ示セ。

2. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $sin 4x+sin x=0$ (2) $sin^2 x-2cos x+\frac{1}{4}=0$

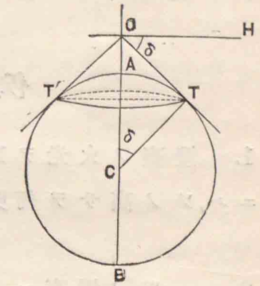
(3) $tan 2x=8cos^2 x-cot x$ (4) $sin 3\theta=sin 2\theta$

3. 次ノ各組ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} sin x=\frac{1}{2} \\ tan(x+y)=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=150° \\ tan x+tan y=-\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

V. 視界

地球ノ形ヲ完全ナ球ト假定シ, C ヲソノ中心トシ,一ツノ直徑 BCA ノ延長ノ上ニ任意ノ一點 O ヲトリ, O カラ球面ニ切線 OT, OT′ 等ヲ引ケバ切點 T, T′ 等ノ軌跡ハ一ツノ圓周トナル。コノ圓周ノ內ダケガ O カラ展望シ得ベキ範圍デ,之ヲ O ニ於ケル**視界**トイヒ,コノ圓周ヲ**視水平**トイフ。又 OT ノ長サヲ**視界半徑**トイヒ, OT ガ O ヲ過ギル水平面トナス角ヲ**視水平ノ俯角**トイフ。



今 $AC=r$, $OA=h$ トスレバ,

$$OT^2=OA.OB=h(2r+h)$$

デアルカラ,

$$OT=\sqrt{h(2r+h)}$$

デアル。ケレドモ通常吾人ノ登リ得ル高サ h ハ地球ノ半徑 r ニ比スレバ頗ル小デアルカラ,概算ニ於テハ $2r+h$ ノ代リニ $2r$ ヲ用ヰルコトトシ,

$$OT=\sqrt{2hr}$$

トシテ差支ナイ。

從ツテマタ視水平ノ俯角ヲ δ トスレバ,概略

$$tan\,\delta=tan\,OCT=\frac{OT}{CT}=\sqrt{\frac{2h}{r}}$$

デアル。

地球ノ半徑ハ大約 3960 哩デ, 1 哩ハ 5280 呎デアルカ

ラ, h 呎ノ高サカラ見得ル視界ノ半徑ノ哩數ハ大約

$$\sqrt{2\times\frac{h}{5280}\times3960}=\sqrt{\frac{3}{2}h}$$

ニ等シイ。

例 題

1. 燈臺ノ火光ヲ15哩ノ距離カラ望ミ得ル樣ニスルニハ,ソノ高サヲ何呎以上ナラシメルコトヲ要スルカ。

2. 一ツノ燈臺ニ向ツテ進行スル船ガアル,檣頭カラ燈臺ノ火光ヲ初メテ視水平ノ線上ニ認メタ後30分ヲ經テツイニ甲板カラモソノ火光ヲ認メ得ルヤウニナツタ,甲板ハ海面上16呎ノ高サニアリ,檣頭ハ甲板上48呎ノ高サニアルトスレバ,コノ船ノ速サ如何。

補 充 問 題

第一 直線及ビ平面

1. 一定點ヲ過ギリ與ヘラレタ平面ニ平行デ且ツ一ツノ定直線ニ交ハルベキ直線ヲ引ケ。

2. 一ツノ平面ヲPトシ, AB, CDヲ互ニ平行デナク且ツPニモ平行デナイ空間ノ定直線トスル,今二ツノ平面ヲ作リ,ソノ一ツハ AB ヲ含ミ,他ノ一ツハ CD ヲ含ミ,且ツソノ交ハリノ直線ガPニ含マレル樣ニセヨ。

3. 平面外ノ一定點カラソノ平面ニ至ル定長ノ斜線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

4. 相交ハル二ツノ平面ノ一方ノ上ニアル直線ト,ソレガ他ノ平面上ニ投ズル正射影トノナス銳角ハ,最初ノ直線ガ二ツノ平面ノ交ハリニ垂直ナルトキニ最大デアル。

5. 三角形ABCノ垂心Oカラソノ平面ニ垂線OPヲ引ケバ,直線PAハAヲ過ギリBCニ平行ナ直線ニ垂直デアル。

6. 一直線ガ一平面上ノ平行デナイ三直線ト等シイ角ヲナストキハ,ソノ直線ハソノ平面ニ垂直デアル。

7. 直交スル二直線ノ一ツガ一平面ニ平行ナラバソノ二直線ガソノ平面上ニ投ズル正射影ハ直交スル二直線デアル。但シ二直線ノ中ノ他ノ一ツハソノ平面ニ垂直デナイモノトスル。

8. 與ヘラレター平面ニ交ハルーツノ斜線ガアル,ソノ足ヲ過ギツテソノ斜線ニ垂直ナ直線ヲソノ平面上ニ引ケ。

9. 同一ノ點ニ於テ出會ヒ同一ノ平面上ニナイ三ツノ直線ガアル,ソノ交點ヲ過ギリ三ツノ直線ト相等シイ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求ム。

10. 一平面上ニ於テ,コノ平面外ノ有限直線ニ對シテ常ニ直角ヲ張ル如キ點ノ軌跡ヲ求ム。

11. 二ツノ相交ハル平面ノ各ニ投ズル正射影ガ共ニ直線ナル如キ線ハ,或ルーツノ場合ヲ除ク他ハ,常ニ直線デアル。又ソノ例外ナル場合如何。

12. 與ヘラレター直線上ニ一點ヲ求メ,二ツノ與ヘラレタ點カラ等距離ナラシメヨ。

13. 二ツノ相交ハル直線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

14. 二ツノ相交ハル平面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

15. 三面角ノ三ツノ面カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

16. 與ヘラレタ平面上ニ於テ,ソノ平面外ノ二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

17. 二ツノ定平面カラ等距離ニアツテ,且ツ二ツノ定點カラモ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

18. 二定點カラノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ム。

19. 一定點Pカラーツノ平面ニ平行ナ直線ヲ引イテ他ノ一平面ト交ハラシメ,ソノ交點トPトノ距離ヲ與ヘラレタ長サニ等シカラシメヨ。

20. 一平面外ノ一定點カラ,コノ平面上ニ於テ一定點ヲ通過スル直線ニ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム。

21. 一定點カラ同一ノ直線ヲ過ギルスベテノ平面ニ引イタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

22. 二ツノ與ヘラレタ平面カラノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

23. 一ツノ圓ガアル,ソノ平面外ノ與ヘラレター點カラコノ圓周ニ至ル最大及ビ最小ナル線分ヲ引ケ。

24. AB ヲ圓ノ直徑トスル,ソノ一端 A ニ於テソノ圓ノ平面ニ垂線ヲ引キ,ソノ上ノ一點ヲ P トシ,圓周上ノ一點ヲ Q トスレバ,平面 PAQ, PBQ ハ互ニ垂直デアル。

25. 與ヘラレタ二直線ニ交ハリ,且ツ與ヘラレター平面ニ垂直ナル直線ヲ作レ。

26. 矩形ノ紙 ABCD ガアル, AB ハ $4\,cm$, BC ハ $3\,cm$ デアル,今之ヲ對角線 AC ニ沿ウテ折リ平面 ABC ト CDA トヲ互ニ垂直ナラシメルトキ,B ト D トノ間ノ距離如何。

27. 二平面 M 及ビ N ガ與ヘラレタトキ,與ヘラレタ點 A ヲ通過シテ N ニ平行デ M ト與ヘラレタ角ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引ケ。

第二 多面體

28. 正四面體ノ高サハソノ足カラーツノ面ニ引イタ垂線ノ三倍ニ等シイ。

29. 直六面體ノ對角線ハ皆相等シイ。

30. 三角錐ノ相對スル一双ノ稜ニ平行ナ平面ニヨツテノ截リ口ハ平行四邊形デアル。

31. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ通過スル三ツノ直線ハ一點ニ於テ相交ハル。

32. 四面體 ABCD ノ三ツノ平面角 ABC, CBD, CDA ガ皆直角ナルトキハ,平面角 ADB モ亦直角デアル。

33. 四面體ノ各頂點ト之ニ對スル面ノ重心トヲ結ブ四ツノ線分ハ同一ノ點ヲ通過シ,且ツコノ點ニ於テ互ニ 1:3 ナル比ニ分タレル。

定義 コノ點ヲ四面體ノ**重心**トイフ。

34. 等高ナ二ツノ角錐ヲ,頂點カラ等距離デソノ底面ニ平行ナ平面デ截ルトキハ,ソノ截リ口ノ面積ハ,兩底面ノ面積ニ比例スル。

35. 正四面體ノ相對スル二稜ハ各直交スル。

36. 正四面體ノ一稜ガ $1m$ ナルトキ,ソノ高サヲ求メヨ。

37. 四面體ノ内ニ一點ヲトリ,之ヲ頂點トシ各面ヲ底面トスル四ツノ四面體ノ體積ヲ相等シカラシメヨウトスル,ソノ點ノ位置ヲ求ム。

38. 四面體ノ六ツノ稜ノ上ノ正方形ノ和ハ,相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ノ上ノ正方形ノ和ノ四倍ニ等シイ。

39. 一邊ノ長サ $1m$ ノ正八角形ヲ底トシ,各側稜ト高サトガ互ニ30度ノ角ヲナス角錐ノ體積ヲ計算セヨ。

40. 一稜ノ長サ a ナル正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ヲ求ム。

第三 曲面體

41. 球ノ面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ曲面積ニ等シイ。

42. 球ノ面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ全面積ノ三分ノ二ニ等シイ。

43. 半徑 r ノ球ニ内接スル正四面體ノ稜ノ長サヲ計算セヨ。

44. 矩形ノ二ツノ相隣レル邊ノ長サヲ a, b トシ,ソノ各ノ邊ヲ軸トシテコノ矩形ヲ一周回轉スルトキ生ズル二ツノ直圓壔ノ體積ヲ求メヨ。 又ソノ體積ノ比ヲ求メヨ。

定義 球ノ中心ヲ過ギル平面ニヨツテノ截リ口ヲ球ノ**大圓**トイヒ,中心ヲ過ギラナイ平面ニヨツテノ截リ口ヲ**小圓**トイフ。

45. 同一ノ球面ニ於ケル二ツノ大圓ハ互ニ他ヲ二等分スル。

定義 二ツノ大圓ノ弧(實ハ半圓周)ニヨツテ圍マレタ球面ノ部分ヲ**月形**トイヒ,ソノ二ツノ大圓ノナス角*ヲ**月形ノ角**トイフ。

---

* 二ツノ大圓ノナス角トハ,ソノ大圓ノ平面ガ作ル二面角ノコトデアル,從ツテソノ大サハソノ大圓ノ周ノ交點ニ於ケル各圓ノ切線ノナス角ニ等シイ。

46. 半徑 r ノ球面上ニ於ケル月形ノ角ノ弧度* ヲ A トスレバ,ソノ面積ハ $2Ar^2$ デアル。

定義 **三ツノ大圓ノ弧ニヨツテ圍マレタ球面ノ部分ヲ球面三角形トイヒ,ソレラノ大圓ノ二ツヅヽノナス三ツノ角ヲ球面三角形ノ角トイフ。**

47. 半徑 r ナル球面上ニ於ケル球面三角形ノ三ツノ角ノ弧度ヲ A, B, C トスレバ,ソノ面積ハ

$$(A+B+C-\pi)r^2$$

デアル。

48. 底ノ周 8.8 cm デ高サ 2.7 cm ナル直圓錐ノ體積ヲ求ム。但シ圓周率ヲ $\frac{22}{7}$ トシテ計算セヨ。

49. 定長ノ線分ノ兩端ガ一ツノ球面上ニアルトキハ,球ノ中心カラソノ線分ニ至ル距離ハ一定デアル。

50. 半圓周ヲ三等分シソノ直徑ノ周リニ之ヲ回轉セシメレバ,ソノ中央ノ弧ニヨツテ生ズル球帶ノ面積ハ他ノ二ツノ弧ニヨツテ生ズルモノノ和ニ等シイ。

51. 半徑 60 cm, 斜高 1 m ノ直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。

52. 定直線ヲ過ギリ定球ニ切スル平面ヲ作レ。

53. 或ル直圓壔ノ高サハ 1 m デ,ソノ全面積ハ半徑 2 m ナル圓ニ等シイトイフ,コノ圓壔ノ體積ヲ求メヨ。

54. 定直線ヲ過ギリ定球ヲ截ル平面ヲ作リ,ソノ截リロノ半徑ヲ定長ナラシメヨ。

---

* 角ノ弧度ガ A デアルトハソノ頂點ヲ中心トシ半徑 1 ナル圓ヲ畫クトキソノ角ノ內部ニアル弧ノ長サガ A ナルコトデアルト考ヘテ宜イ。(附錄 I 參照。)

55. 直圓壔ノ側面體ガ 169.56 平方米デ,ソノ直徑ト高サトノ比ガ 3:2 デアル,コノ體積ハ幾立方米アルカ。

56. 一ツノ球面ト,ソレト交ハラナイ一直線トノ上ニ夫々一點ヲ求メ,ソノ二點間ノ距離ヲ最短ナラシメヨ。

57. 定平面ニ切シ且ツ二定點ヲ過ギル球面ハ如何ニシテ作圖サレルカ。但シコノ球ノ半徑ハ一定トスル。

58. 重サ 45 kg ナル鉛ノ球ガアル,ソノ三分ノ一ノ直徑ヲモツ鉛ノ球ノ重サヲ求ム。

59. 直圓錐ノ頂點 S ヲ通ジテ截面 SAB ヲ作リ,$\angle$ASB ヲ與ヘラレタ角 α ニ等シカラシメヨ。

60. 一定直線ヲ含ム平面デ定球ヲ截ルトキ,ソノ截リロナル圓ノ中心ノ軌跡如何。

61. 球ノ體積トソレニ內接スル立方體ノ體積トノ比ハ $\sqrt{3}\pi : 2$ デアル。

62. 直圓錐ヲソノ底面ニ平行ナ平面デ截リ,ソノ曲面積ヲ二等分セヨ。

63. 球ノ直徑 AB ニ垂直ナ平面ヲ P トスル,A カラ引イタ任意ノ直線ガ球面及ビ平面 P ト交ハル點ヲ夫夫 C, D トスレバ, AC.AD ハ一定デアル。

64. 與ヘラレタ球面上ノ一定點 O ヲ過ギル任意ノ直線ヲ引キ球面ト再ビ A ニ於テ出會ハセ,コノ直線上ニ一點 A′ ヲ取リ矩形 OA.OA′ ヲ一定ナラシメルトキ,點 A′ ノ軌跡ヲ求ム。

65. 球ニ外接スル直圓錐ガアル,ソノ高サガ球ノ直徑ノ二倍ナルトキ,コノ直圓錐ノ體積及ビ全面積ノ夫夫球ノ體積及ビ表面積ニ對スル比ヲ求メヨ。

第四　一般ノ角ノ三角函數

66. $A+B+C=180°$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(2) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

67. $A+B+C=180°$, $\cos A=\cos B\cos C$ ナルトキハ, $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

68. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\sin A+\cos B=2\sin\left(\frac{A+B}{2}+45°\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}-45°\right)$$
$$=2\cos\left(45°-\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(45°+\frac{A-B}{2}\right)$$

69. 次ノ式ヲ證明セヨ。

(1) $\sin 4A=4\sin A\cos^3A-4\cos A\sin^3A$

(2) $\cot A+\tan A=2\operatorname{cosec}2A$

(3) $\cot A-\tan A=2\cot 2A$

(4) $\frac{1\pm\sin\alpha}{1\mp\sin\alpha}=\tan^2\left(45°\pm\frac{\alpha}{2}\right)$

(5) $\sec\alpha\pm\tan\alpha=\tan\left(45°\pm\frac{\alpha}{2}\right)$

70. $\tan^2\alpha=1+2\tan^2\beta$ ナルトキハ,

$\cos2\alpha+\sin^2\beta=0$

ナルコトヲ示セ。

71. $\cos47°-\cos61°-\cos11°+\cos25°=\sin7°$ ヲ證明セヨ。

72. $\cos55°+\cos65°+\cos175°$ ノ値ヲ求メヨ。

73. $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$ ヲ證明シ,之ニヨツテ $15°$ 及ビ $22°30'$ ノ正切ヲ求メヨ。

74. $\sin^4A-\cos^4A$ 及ビ $\sin^6A+\cos^6A$ ノ取リ得ベキ最大値及ビ最小値ヲ求メヨ。

75. ABC ハ C ヲ直角トスル直角二等邊三角形デアル, BC ノ中點ヲ D トスレバ, $\cot BAD=3$ ナルコトヲ示セ。

76. A, B ガ正ノ鋭角デ $\sin A=\frac{12}{13}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ ナルトキ, $\tan(A+B)$ ノ値如何。

77. α, β ガ正ノ鋭角デ $\tan\alpha=\frac{2}{3}$, $\tan\beta=\frac{3}{2}$ ナルトキ, $\alpha+\beta$ ハ何度ナルカ。

78. 方程式 $x^2+6x+7=0$ ノ二根ヲ $\tan A$, $\tan B$ トスレバ, $A+B$ ノ値如何。

79. $\cos(30°+\alpha)+\sin(30°-\alpha)=k\sin(45°-\alpha)$ ナル如キ k ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ。

80. $\sin\theta+\sin\varphi=a$, $\cos\theta+\cos\varphi=b$ ナルトキ $\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)$ ノ値ヲ a ト b トデ表ハセ。

81. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $\tan(45°+\alpha)\tan(45°-\alpha)=1$

(2) $\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

(3) $\sin 2A\tan 2A=\frac{4\tan^2A}{1-\tan^4A}$

(4) $\frac{\sin3A}{\sin A}-\frac{\sin3B}{\sin B}=4\sin(A+B)\sin(B-A)$

(5) $\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$

82. $A+B+C=180°$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $\sin8A+\sin8B+\sin8C+4\sin4A\sin4B\sin4C=0$

(2) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

(3) $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$

83. $\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$ ヲ證明セヨ。

84.· $\sin A = \frac{3}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$, $\sin C = \frac{7}{25}$ デA, B, Cハ何レモ正ノ鋭角トスレバ, $\sin(A+B+C)$ ノ値如何。

85. $\cos\theta = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ ナルトキハ, $\tan^2\frac{\theta}{2} = \tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

86. $a\sin\theta + b\cos\theta = c = a\,\mathrm{cosec}\,\theta + b\sec\theta$ ナルトキハ, $\sin 2\theta = \frac{2ab}{c^2-a^2-b^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

87. $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ ナルトキハ, $\tan(\alpha-\beta) = (1-n)\tan\alpha$ ナルコトヲ示セ。

88. $\sin 3A = n\sin A$ ナルトキハ, n ハ3ト-1トノ間ニアル數デナケレバナラヌコトヲ示シ,次ニ $n=2$ ナル場合ニ於ケル $\sin A$ ノ値ヲ求メヨ。

89. 次ノ各組ノ式カラ θ ヲ消去セヨ。

(1) $\begin{cases} a\sec^2\theta - b\cos\theta = 2a \\ b\cos^2\theta - a\sec\theta = 2b \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta = m \\ \sec\theta - \cos\theta = n \end{cases}$

(3) $\sin\theta + \cos\theta = a$, $\cos 2\theta = b$

90. $\left.\begin{array}{l} y\cos\varphi - x\sin\varphi = a\cos 2\varphi \\ y\sin\varphi + x\cos\varphi = 2a\sin 2\varphi \end{array}\right\}$ カラ φ ヲ消去スレバ,

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$$

ヲ得ルコトヲ示セ。

91. $\tan x + \tan y = m$, $\cot x + \cot y = n$, $x+y=a$ カラ x, y ヲ消去セヨ。

92. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A}\right\}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin A} \mp \sqrt{1-\sin A}\right\}$$

但シ右邊ニ於ケル符號ハ $\frac{A}{2}$ ノ値ニヨツテ適當ニ選ブモノトスル。

93. 矩形ノ相隣レル二邊ヲ m, n トシ,ソノ對角線ノ夾ム角ヲ θ トスレバ, $\tan\theta = \frac{2mn}{m^2-n^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

94. 半徑 a 及ビ b ナル二ツノ圓ガ互ニ外切スルトキ,一双ノ外公切線ノナス角ヲ θ トスレバ,

$$\sin\theta = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。但シ $a>b$ トスル。

第五　三角形ノ解法

(三角形ノ內角ヲA, B, C, 之ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トスル)。

95. 正弦則カラ第一,第二餘弦則ヲ導ケ。又餘弦則カラ正弦則ヲ導ケ。

96. 三邊ガ $a=x^2+x+1$, $b=2x+1$, $c=x^2-1$ ナル三角形ノ最大角ハ何度ナルカ。

97. $A=2C$ ナルトキハ $a^2=bc+c^2$ ナルコトヲ證明セヨ。

98. $a\cos^2\frac{C}{2} + c\cos^2\frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$ ナルトキハ, a, b, c ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

99. $a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\frac{A+B}{2}$ ナラバ,二等邊三角形ナルコトヲ證明セヨ。

100. A. B. Cカラ夫々對邊ニ引イタ垂線ヲ AD, BE,

CF トスレバ,垂足三角形 DEF ノ三邊ハ $EF=a\cos A$, $FD=b\cos B$, $DE=c\cos C$ ナルコトヲ證明セヨ。

101. BC上ニ一點Dヲトリ, $BD:DC=m:n$ トスレバ,

$$(m+n)\cot ADC=n\cot B-m\cot C$$

ナルコトヲ證明セヨ。

102. 四邊形ノ對角線ノ長サヲ p 及ビ q トシ,ソノ間ノ角ヲ θ トスレバ,ソノ四邊形ノ面積ハ $\frac{1}{2}pq\sin\theta$ ナルコトヲ證明セヨ。

103. 三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナストキ,ソノ三角形ノ最大角ヲ θ, 最小角ヲ φ トスレバ,

$$4(1-\cos\theta)(1-\cos\varphi)=\cos\theta+\cos\varphi$$

ナルコトヲ證明セヨ。

104. 半徑 r ナル球形ノ氣球ガアル,ソノ視角ガ α, 中心ノ高度ガ β ナルトキ,コノ氣球ノ中心ハ幾何ノ高サニアルカ。

105. 東西ノ方向ニ亙ツテ立ツテヰル矩形ノ塀ガアル,今太陽ガ南30°東ノ方向デ60°ノ高度ヲモツトスレバ,コノ塀ガ地ニ投ズル影ノ面積ト實物ノ面積トノ比如何。

106. ABハ水平面上ノ一直線デ,ソノ長サハ $2a$ 米デアルトスル, A及ビBカラ或ル山ノ頂ヲ望メバ,ソノ仰角ハ共ニ θ デ,又ABノ中點カラ望メバソノ仰角ハ φ デアルトスレバ,コノ山ノ高サハ

$$\frac{a\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{\sin(\varphi+\theta)\sin(\varphi-\theta)}}\text{米}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

107. 一地點Aニ於テ東南東ノ方向ニ一ツノ飛行機

ヲ見,ソノ仰角ヲ測ツテ45°ヲ得タ,然ルニ之ト同時刻ニ, Aカラ北東ニアル一地點Bデハコノ飛行機ヲ正南ノ方向ニ見,又Bカラ800 m 南ニアル一地點Cデハ垂直ニ頭上ニ見タトイフ,コノ機ノ高サハ何米デアツタカ。

108. 甲乙二ツノ塔ガアル,ソノ高サ甲ハ 18 m, 乙ハ 8 m デアル,而シテ各塔ノ基底ニ於テ互ニ他ノ塔ノ仰角ヲ測ツテ見ルト,甲塔ノ仰角ハ乙塔ノ仰角ノ二倍デアルトイフ,二ツノ塔ノ間ノ距離如何。

109. 湖水ヲ隔テヽA及ビBナル二ツノ山ガアル,Aノ高サハ湖水面上 h 米デアル,今Aノ頂カラBノ頂ノ仰角ヲ測レバ α デ又湖水面ニ映ズルBノ頂ノ像ノ俯角ヲ測レバ β デアル,B山ノ湖水面上カラノ高サ何米ナルカ。

110. 塔ノ頂ニ長サ a 米ノ旗竿ヲ立テ地上ノ一點カラ之ヲ望ムト,塔ト竿トガ共ニ θ ナル視角ヲモツトイフ,塔ノ高サハ $a\cos2\theta$ 米ナルコトヲ證明セヨ。

111. 二點P, Qガアル,今Pノ正南ナル一地點Aカラ之ヲ望ンデ $\angle PAQ=\theta$ ナルコトヲ知リ, Aカラ正西ニ a ナル距離ヲ進ンデBニ行ツテモナホ矢張リ $\angle PBQ=\theta$ ナルコトヲ知リ,更ニBカラ正西ニ b ナル距離ヲ進ンデ見レバQガ正北ニ見タトイフ,然ルトキハ

$$PQ=\sqrt{(a+b)^2+b^2\tan^2\theta}$$

ナルコトヲ證セヨ。

112. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

(2) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-B)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$

(3) $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{cot\mathrm{A}}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{cot\mathrm{B}}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{cot\mathrm{C}}$

(4) $a\,cos\mathrm{A}+b\,cos\mathrm{B}+c\,cos\,\mathrm{C}=2a\,sin\mathrm{B}\,sin\mathrm{C}$

113. 次ノ各三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

(1) $a=13\,cm,\quad b=14\,cm,\quad c=15\,cm$

(2) $a=12\,m,\quad \mathrm{B}=45°,\quad \mathrm{C}=60°$

114. 或ル人112mノ縄ヲ50m, 41m, 21mノ三部ニ分ケテ地上ニ三角形ヲ作ラウトシタガ,誤ツテソノ一部ヲ51mトシタ,然ラバ豫定ト同ジ面積ノ三角形ヲ作ルニハ,殘リノ二部ヲ何米ト何米トニスベキカ。

115. $\dfrac{tan\mathrm{A}}{tan\mathrm{B}}=\dfrac{sin^2\mathrm{A}}{sin^2\mathrm{B}}$ ナルトキハ,コノ三角形ハ直角三角形デアルカ,或ハ二等邊三角形デアルコトヲ證明セヨ。

116. 一ツノ圓ニ外接スル正n邊形及ビ正$2n$形邊ノ面積ノ比ガ3:2ナルトキ,nヲ求メヨ。

117. 一ツノ圓ニ內接スル正$2n$邊形ノ面積ハ,同ジ圓ニ內接及ビ外接スル二ツノ正n邊形ノ面積ノ比例中項ナルコトヲ示セ。

118. 一ツノ圓ニ內接及ビ外接スル二ツノ正n邊形ノ面積ノ比ガ3:4ナルトキ,nヲ求メヨ。

119. 鋭角三角形ABCノ外心ヲOトシ, AO又ハソノ延長ガBCト交ハル點ヲDトスレバ,

$$\mathrm{DO}.cos(\mathrm{B}-\mathrm{C})=\mathrm{AO}.cos\mathrm{A}.$$

120. 一直線上ニアル四點P, Q, R, Sヲソノ直線外ノ一點Oト結べバ, $\dfrac{\mathrm{PQ.RS}}{\mathrm{QR.PS}}=\dfrac{sin\mathrm{POQ}.\,sin\mathrm{ROS}}{sin\mathrm{QOR}.\,sin\mathrm{POS}}$ ナルコトヲ證セヨ。

121. 高サhナル望樓カラ東ノ方ニ一ツノ船ヲ見,ソノ俯角αデアツタガ,一時間ノ後ソノ船ハ南ニ見エ俯角ハβトナツタトイフ,モシコノ船ガ一直線ニ航行シタモノトスレバ,ソノ速度如何。

122. 高サhナル山上カラ西ニ方ツテ一ツノ船ヲ見テ俯角θヲ得タ,ソノ後或ル時間ヲ經テ再ビ之ヲ望メバ南30°西ニ方リ俯角ハφデアツタトイフ,コノ船ノ前後兩位置間ノ距離如何。

123. 一ツノ梯子ヲ地面トAナル角ヲナシテ家ニ立テカケレバソノ上端ガ丁度窓ノ上端ニ接スル,モシ梯子ノ下端ヲ更ニ之カラa米遠ザケ地面トノ傾斜ヲBトスレバソノ上端ハ窓ノ下端ニ接スルトイフ,窓ノ長サハ$a\,cot\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$米ナルコトヲ證明セヨ。

124. 垣ノ彼方ニ木ガアル,或ル地點カラ見レバ垣ノ上端ト木ノ梢トハ相重ナツテ見エ共ニαナル仰角ヲモツ,更ニコノ地點ニ於テh米ノ臺ニ上ツテ見レバ梢ノ仰角ハβトナリ木ノ根元ハ垣ノ上端ト相重ナツテ見エルトイフ,木ト垣トノ高サ各何米ナルカ,但シ眼高ヲ零トスル。

125. 或ル塔ノ頂ニ一ツノ旗竿ヲ立テ地上カラ之ヲ望ムト,旗竿ノ視角ハ塔ノ基底カラlナル距離ニ於ケルトキガ最大デソノ値θデアルトスレバ,塔ノ高サハ$l\,tan\left(45°-\dfrac{\theta}{2}\right)$デ,旗竿ノ長サハ$2l\,tan\theta$ナルコトヲ示セ。

126. 臺ノ上ニ立テル銅像ガアル,臺ノ底カラ9m及ビ11mヲ距テタ二ツノ地點ニ於ケル銅像ノ視角ハ何レモαデ,コヽニ$tan\,\alpha=\dfrac{1}{10}$トスル,臺及ビ像ノ各ノ高サ如何。

第六雜題

127. n ガ任意ノ整數ナルトキ,次ノ式ヲ證明セヨ。

$$sin(n.180^\circ+A)=(-1)^n sinA$$

$$cos(n.180^\circ+A)=(-1)^n cosA$$

$$tan(n.180^\circ+A)=tanA$$

128. 360° 以下ノ正角デ次ノ方程式ヲ滿足セシメルスベテノ角ヲ求メヨ。

(1) $cot\,x+tan\,x=2cosec\,x$

(2) $cos\,\theta+2sec\,\theta+2tan\,\theta=0$

(3) $cos4x+cos2x+cosx=0$

(4) $cos2x-cos4x=sin\,x$

(5) $cos\,\theta-sin\,\theta=\sqrt{2}$

(6) $cos3\,\theta+sin3\,\theta=cos\,\theta+sin\,\theta$

129. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $2+tan^2(\theta+90^\circ)+cot^2(\theta-90^\circ)=4cosec^2 2\theta$

(2) $tanA\,tan(60^\circ+A)tan(120^\circ+A)+tan3A=0$

130. $A+B+C=360^\circ$ ナルトキ,次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1) $sinA+sinB+sinC$

$$=4sin\frac{B+C}{2}.\ sin\frac{C+A}{2}.\ sin\frac{A+B}{2}$$

(2) $cosA+cosB+cosC+1$

$$=4cos\frac{B+C}{2}cos\frac{C+A}{2}cos\frac{A+B}{2}$$

(3) $cos^2A+cos^2B+cos^2C-2cosAcosBcosC=1$

131. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{sin150^\circ cosec(-45^\circ)}{cos225^\circ tan135^\circ}$

(2) $\dfrac{sin(90^\circ+A)cos(90^\circ-A)}{cos(180^\circ+A)}$

$$+\frac{sin(180^\circ-A)cos(90^\circ+A)}{sin(180^\circ+A)}$$

(3) $sin(\theta+60^\circ)+2sin(\theta-60^\circ)-\sqrt{3}cos(120^\circ-\theta)$

132. A ガ第三象限ノ角デ $tanA=\dfrac{8}{15}$ ナルトキ, $sinA$ 及ビ $cosA$ ノ値ヲ求メヨ。

133. $tanx=(2+\sqrt{3})tan\dfrac{x}{3}$ ナルトキ, $tanx$ ノ値ヲ求メヨ。

134. $sin\,A=-\dfrac{3}{5}$ ナルトキ, $sin\dfrac{A}{2}$, $cos\dfrac{A}{2}$, $tan\dfrac{A}{2}$ ヲ求メヨ。但シ $270^\circ>A>180^\circ$ トスル。

135. A ヲ一般ナル角トシ, $secA=\sqrt{2}$ ナルトキ, $\sqrt{\dfrac{1+cosA}{1-sinA}}$ ノスベテノ値ヲ求メヨ。

136. $cos2x=\dfrac{3}{5}$ ナルトキ, sin^4x+cos^4x ノ値如何。

137. $sec^2\theta=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ ガ成立スルタメニハ,必ズ $x=y$ ナルコトヲ要シ,且ツ θ ハ 180° ノ整數倍ナルコトヲ證明セヨ。

138. $sin3\theta=sin\theta cos2\theta$ ナラバ, θ ハ 90 ノ整數倍ナルコトヲ證明セヨ。

139. 任意ノ四邊形 ABCD ニ於テ $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ トシ,又ソノ面積ヲ S トスルトキ次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1) $2S=ad\,sin\,A+bc\,sin\,C$

(2) $\dfrac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2)=ad\,cosA-bc\,cosC$

140. 前問ノ二式ヲ各邊自乘シテ相加ヘ,之ヲ變形スレバ,

$$16S^2=4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-16abcd\,cos^2\frac{A+C}{2}$$

ヲ得ル。之カラ次ノ式ヲ導ケ。

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

但シ $s=\frac{a+b+c+d}{2}$ トスル。

141. 前問ノ結果カラ次ノ公式ヲ出セ。

(1) 四邊形ガ圓ニ内接スルトキハ,

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

(2) 四邊形ガ圓ニ外接スルトキハ,

$$S=\sqrt{abcd}\sin\frac{A+C}{2}.$$

(3) 四邊形ガ一ツノ圓ニ外接シ,他ノ一ツノ圓ニ内接スルトキハ,

$$S=\sqrt{abcd}.$$

142. 三角形ABCニ於テ, $A=30°$, $B=\frac{3}{2}$(らぢあん)ナルトキ, Cノ弧度ヲ求メヨ。

143. 高サ5尺5寸ノ人像標的ヲ $1800\,m$ ノ距離カラ望メバソノ視角ハ如何,但シ圓周率ヲ3.1416トシテ計算シ,分以下ヲ四捨五入セヨ。

144. 次ノ式ヲ證明セヨ。

(1) $\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(2n\pi+\theta)\right\}=\sin\theta$

(2) $\tan\left\{\pi+(4n+3)\frac{\pi}{2}-\theta\right\}=\cot\theta$

145. 扇形ノ半徑ヲ r, 中心ニ於ケル角ノ弧度ヲ θ トスレバ,ソノ面積ハ $\frac{1}{2}r^2\theta$ ナルコトヲ證明セヨ。

146. 半徑 r ナル圓ニ於テ長サ l ナル弧ノ兩端ヲ結ビ付ケテ得ル弓形ノ面積ハ $\frac{1}{2}r\left(l-r\sin\frac{l}{r}\right)$ ナルコトヲ示セ。

147. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $\tan x-\tan a=\cot x-\cot a$

(2) $\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}=\cos x-\cos\frac{\pi}{3}$

(3) $\tan x+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2$ (4) $6\cot^2 x-1=4\cos^2 x$

148. 地球ノ半徑ヲ r トスレバ,地面カラノ高サ h ガ甚シク大ナラザル限リ,視水平ノ俯角ノ弧度ハ大約 $\sqrt{\frac{2h}{r}}$ ニ等シイコトヲ證明セヨ。

149. 或ル飛行船上カラ視水平ノ俯角ヲ計ツテ $1°$ ヲ得タトスレバ,コノ飛行船ノ高サ及ビソノ視界ノ面積如何,但シ地球ノ半徑ヲ3960哩トスル。

150. 觀測點ガ地面カラ甚シク高カラザルトキハ,視界ノ面積ハ高サニ正比例スルコトヲ證明セヨ。

151. 正四面體ノ一ツノ稜ヲ a トシ,ソノ高サヲ h トスレバ, $3h^2=2a^2$ デアル。

152. 四面體ノ相對スル二稜ガ夫々相等シイトキハ,二ツノ對稜ノ中點ヲ結ビツケル直線ハコノ對稜ノ各ニ垂直デアル。又對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ同一點ヲ過ギル。

153. 四定點カラ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

154. 直徑ABナル半圓周上ノ任意ノ一點ヲCトシ,Aカラ圓ノ平面ニ垂線APヲ引キ之ヲ弦BCニ等シク取レバ,△PBCト△PABトハ合同デアル。

155. 水平面ニ垂直ニ立ツテヰル二本ノ棒ガアル,ソノ高サハ等シクナイトスレバ,コノ平面上ニ於テ各ノ棒ヲ見ル視角(仰角)ガ相等シイ點ノ軌跡ハ一ツノ圓周デアル。

156. 二ツノ點A, Bカラ一ツノ平面Pニ垂線AX, BYヲ引キソノ足ヲ夫々X, Yトスル,今直線ABニ垂直ナ平面ヲ作リPト直線LMニ於テ交ハラシメレバ, LMハXYニ垂直デアル。

定義 二ツノ多面體ニ於テ相對應スル面ガ夫夫相似デ且ツ相對應スル多面角ガ夫々合同ナルトキハ,ソノ二ツノ多面體ハ**互ニ相似デアル**トイフ。

157. 二ツノ相似多面體ノ體積ノ比ハ相對應スル稜ノ比ノ三乘比ニ等シイ。

158. 角壔ノ總テノ側稜ト交ハル截リ口ノ中デ直截面ハ最小ナル面積ヲモツ。

159. 立方體ヲ一ツノ平面デ截リ,ソノ截リ口ガ正六角形トナル樣ニセヨ。

160. 上ニ開イタ直六面體ノ箱ガアル,底面ノ二邊ハ$6\,cm$及ビ$5\,cm$デ深サハ$8\,cm$デアル,今底面ノ$5\,cm$ノ邊ヲ水平面上ニ置キ,底面ヲ水平面ト$30°$ノ角ヲナスマデ箱ヲ傾ケテ之ニ水ヲ充滿セシメレバ,ソノ水ノ量幾何ナルカ。

161. 半徑10糎ナル球面ト,ソノ中心カラ8糎ノ距離ニアル平面トノ交ハリナル圓ニ內接スル正三角形ノ面積ヲ求メヨ。

162. 一ツノ球ニ外接スル直圓錐ノ高サガコノ球ノ直徑ノ2倍ナルトキハ,コノ圓錐ノ全表面積ハコノ球ノ表面積ノ2倍デアル。マタコノ圓錐ノ體積モ球ノ體積ノ2倍デアル。

163. 同一平面上ニナイ二直線XX', YY'ガアル,今XX'上ニ相等シイ二ツノ線分AB, $A'B'$ヲ取リ,又YY'上ニモ相等シイ二ツノ線分CD, $C'D'$ヲ取ルトキハ,二ツノ四面體$A-BCD$, $A'-B'C'D'$ハソノ體積ガ相等シイ。

164. 四面體$V-ABC$ヲソノ相對スル稜VB, ACニ平行ナ平面デ截リ,ソノ四稜VA, AB, BC, CVトコノ平面トノ交點ヲ夫々E, F, G, Hトスレバ,四邊形$EFGH$ノ面積ガ最大ナル如キ點Eノ位置如何。

165. 二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

166. 四面體ノ四ツノ面ニ切スル球ヲ作レ。

167. 曲面積ガ底面積ノ二倍ナル圓錐ノ頂角ノ大サヲ求ム。

168. 同一平面上ニナイ二定直線AB, CD上ニ夫々任意ノ點X, Yヲ取ルトキハ,線分XYノ中點ハ常ニ一定平面上ニアル。

169. 一稜ノ長サaノ正八面體ノ對角線ノ長サ,表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

170. 一邊ノ長サaノ正三角形ABCヲ,AカラBCニ引イタ垂線ニ沿ウテ折リ$60°$ノ二面角ヲ作ルトキ,直線BCトAトノ距離如何。

答

第 十 三 篇

雜例題 (88 頁) **1.** $\sin 585^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 690^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sec(-930^\circ) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

2.

角	sin	cos	tan
238°	−0.8480	−0.5299	1.6003
−1072°	0.1392	0.9903	0.1405

4. $\sin(\mathrm{A}-90^\circ) = -\cos \mathrm{A}$, $\cos(\mathrm{A}-90^\circ) = \sin \mathrm{A}$,

$\tan(\mathrm{A}-90^\circ) = -\cot \mathrm{A}$

5. (1) 0 (2) 0 **6.** 150° 又ハ 210° **7.** $\pm\dfrac{(m^2-n^2)}{2mn}$

雜　題 (98 頁) **1.** $\dfrac{1+2\sqrt{6}}{6}$ **2.** 0

3.

α ノ象限	β ノ象限	値
I	I	$\dfrac{980}{2501}$
I	II	$\dfrac{100}{2501}$
IV	I	$\dfrac{-100}{2501}$
IV	II	$\dfrac{-980}{2501}$

4. $\sin \mathrm{A} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos \mathrm{A} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan \mathrm{A} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

第 十 四 篇

雜例題 (118 頁) **1.** (1) 0° 221°24′.5 138°35′.5

(2) 45° 225° 26°34′.1 206°34′.1

(3) 270° 46°23′.3

2. $x=0.4428$, $y=26^\circ 11'.9$

雜例題 (124 頁) 1. (1) $C=67°28'$, $b=79.09$, $c=77.10$

(2) $B=78°11'.5$, $C=25°18'.5$, $a=86.44$

(3) $A=77°8'.4$, $B=39°26'.0$, $C=63°25'.8$

2. 90°

3. 直角三角形ノトキハ $a=100\sqrt{3}$, 二等邊三角形ノトキハ $a=50\sqrt{3}$

4. $A=30°$, $B=90°$, $C=60°$

例題 (130 頁) 1. 17 浬 2. 1095 m (强)

雜題 (131 頁) 1. $h \cot\beta \tan\alpha$ 2. 309 m (强) 3. 30 m (强)

4. 高サ 24.5 m (弱) 距離 51 m (强) 5. 73.48 m

6. 17.3 m 7. 北 30° 東, 2 時 34.5 分間

附錄

[I] 1. 18°, 210°, 144° 2. $\frac{4\pi}{15}$, $\frac{11\pi}{18}$, $\frac{791\pi}{360}$

3. $\frac{c}{2R}$ radians

[III] $\begin{cases} A=74°50' \\ C=65°10' \\ a=12.76 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} A=25°10' \\ C=114°50' \\ a=5.62 \end{cases}$

[IV] 1. $A=30°$ 又ハ 150° トシテ諸角ヲ表ハセバ

A \ n	−2	−1	0	1	2	3	4	5
30°	−330°	−210°	30°	150°	390°	510°	750°	870°
150°	−210°	−330°	150°	30°	510°	390°	870°	750°

2. (1) $x=\frac{2n\pi}{5}$ 又ハ $x=\frac{(2n+1)\pi}{3}$ (2) $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

(3) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 又ハ $x=\frac{1}{4}\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$

(4) $\theta=2n\pi$ 又ハ $\theta=\frac{(2n+1)\pi}{5}$

3. (1) $\begin{cases} x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6} \\ y=m\pi+\frac{\pi}{6}-(-1)^n\frac{\pi}{6} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=120°+n.90° \\ y=30°-n.90° \end{cases}$

[V] 1. 150 呎以上 2. 每時 9.796 哩

補充問題

第四 一般ノ角ノ三角函數

72. 0 73. $\tan 15°=2-\sqrt{3}$, $\tan 22°30'=\sqrt{2}-1$

74. 第一式ノ最大値ハ 1, 最小値ハ −1

第二式ノ最大値ハ 1, 最小値ハ $\frac{1}{4}$

76. $-\frac{56}{33}$ 77. 90° 78. $45°+n.180°$ 79. 1.93

80. $\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 84. $\frac{56}{65}$ 88. 0 又ハ $\pm\frac{1}{2}$

89. (1) $a^2=b^2$ (2) $m^2n^2(m^2+n^2+3)=1$

(3) $a^2(a^2-2)+b^2=0$

91. $(n-m)\tan a=mn$

第五 三角形ノ解法

96. 120° 104. $r \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\sin\beta$ 105. 1:2

107. 612.24 m 108. 24 m 109. $\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}h$ 米

113. (1) 84 平方粍 (2) 45.646 平方米 114. 26 m, 35 m

116. $n=3$ 118. $n=6$

121. 每時 $h\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta}$ ノ行程デ南 θ 西ニ進ム。但シ $\tan\theta=\frac{\cot\alpha}{\cot\beta}$

122. $h\sqrt{\cot^2\theta+\cot^2\varphi-\cot\theta.\cot\varphi}$

124. 木ノ高サ $\dfrac{h\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$米,　垣ノ高サ$\dfrac{h}{2-\cot\alpha.\tan\beta}$米

126. 像 $2\,m$, 臺 $9\,m$

第六雜題

128. (1) 60°, 300°　　(2) ナシ。

(3) 90° 270°, 40°, 160°, 280°, 80,° 200, 320°

(4) 0°, 180°, 360°, 10°, 130°, 250°, 50°, 170°, 290°

(5) 315°

(6) 0°, 180°, 360°, 22°.5, 202.°5; 112.°5, 292.°5

131. (1) −1　(2) 0　**(3) 0**　　132. $-\dfrac{8}{17}$,　$-\dfrac{15}{17}$

133. 0 又ハ ±1

134. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$,　$-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$,　-3

135. $\sqrt{2}+1$ 又ハ 1　　136. $\dfrac{17}{25}$

142. $C=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{3}{2}=1.118$ 弱　　143. 約$\dfrac{10}{3.1416}$分$=3$分(强)

147. (1) $x=\dfrac{n\pi}{2}+\alpha$　(2) $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ 又ハ $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$

(3) $x=n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$　(4) $x=n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$

149 高サ$=\dfrac{11.\pi^2}{180}$哩$=\dfrac{11\pi^2\times5280}{180}$呎$=3184.6$呎

面積$=484.\pi^3$平方哩$=15007.1$平方里

附表

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分	度
0	0	$-\infty$		$-\infty$		∞	0	0.0000	0	**90**
	10	$\bar{3}.4637$	3011	$\bar{3}.4637$	3011	2.5363	0	0.0000	50	
	20	$\bar{3}.7648$	1760	$\bar{3}.7648$	1761	2.2352	0	0.0000	40	
	30	$\bar{3}.9408$	1250	$\bar{3}.9409$	1249	2.0591	0	0.0000	30	
	40	$\bar{2}.0658$	969	$\bar{2}.0658$	969	1.9342	0	0.0000	20	
	50	$\bar{2}.1627$	792	$\bar{2}.1627$	792	1.8373	1	0.0000	10	
1	0	$\bar{2}.2419$	669	$\bar{2}.2419$	670	1.7581	0	$\bar{1}.9999$	0	**89**
	10	3088	580	3089	580	6911	0	9999	50	
	20	3668	511	3669	512	6331	0	9999	40	
	30	4179	458	4181	457	5819	1	9999	30	
	40	4637	413	4638	415	5362	0	9998	20	
	50	5050	378	5053	378	4947	1	9998	10	
2	0	$\bar{2}.5428$	348	$\bar{2}.5431$	348	1.4569	0	$\bar{1}.9997$	0	**88**
	10	5776	321	5779	322	4221	1	9997	50	
	20	6097	300	6101	300	3899	0	9996	40	
	30	6397	280	6401	281	3599	1	9996	30	
	40	6677	263	6682	263	3318	0	9995	20	
	50	6940	248	6945	249	3055	1	9995	10	
3	0	$\bar{2}.7188$	235	$\bar{2}.7194$	235	1.2806	1	$\bar{1}.9994$	0	**87**
	10	7423	222	7429	223	2571	0	9993	50	
	20	7645	212	7652	213	2348	1	9993	40	
	30	7857	202	7865	202	2135	1	9992	30	
	40	8059	192	8067	194	1933	1	9991	20	
	50	8251	185	8261	185	1739	1	9990	10	
4	0	$\bar{2}.8436$	177	$\bar{2}.8446$	178	1.1554	0	$\bar{1}.9989$	0	**86**
	10	8613	170	8624	171	1376	1	9989	50	
	20	8783	163	8795	165	1205	1	9988	40	
	30	8946	158	8960	158	1040	1	9987	30	
	40	9104	152	9118	154	0882	1	9986	20	
	50	9256	147	9272	148	0728	2	9985	10	
5	0	$\bar{2}.9403$		$\bar{2}.9420$		1.0580		$\bar{1}.9983$	0	**85**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分	度
5	0	$\bar{2}.9403$	142	$\bar{2}.9420$	143	1.0580	1	$\bar{1}.9983$	0	**85**
	10	$\bar{2}.9545$	137	$\bar{2}.9563$	138	1.0437	1	9982	50	
	20	$\bar{2}.9682$	134	$\bar{2}.9701$	135	1.0299	1	9981	40	
	30	$\bar{2}.9816$	129	$\bar{2}.9836$	130	1.0164	1	9980	30	
	40	$\bar{2}.9945$	125	$\bar{2}.9966$	127	1.0034	2	9979	20	
	50	$\bar{1}.0070$	122	$\bar{1}.0093$	123	0.9907	1	9977	10	
6	0	$\bar{1}.0192$	119	$\bar{1}.0216$	120	0.9784	1	$\bar{1}.9976$	0	**84**
	10	0311	115	0336	117	9664	2	9975	50	
	20	0426	113	0453	114	9547	1	9973	40	
	30	0539	109	0567	111	9433	1	9972	30	
	40	0648	107	0678	108	9322	2	9971	20	
	50	0755	104	0786	105	9214	1	9969	10	
7	0	$\bar{1}.0859$	102	$\bar{1}.0891$	104	0.9109	2	$\bar{1}.9968$	0	**83**
	10	0961	99	0995	101	9005	2	9966	50	
	20	1060	97	1096	98	8904	1	9964	40	
	30	1157	95	1194	97	8806	2	9963	30	
	40	1252	93	1291	94	8709	2	9961	20	
	50	1345	91	1385	93	8615	1	9959	10	
8	0	$\bar{1}.1436$	89	$\bar{1}.1478$	91	0.8522	2	$\bar{1}.9958$	0	**82**
	10	1525	87	1569	89	8431	2	9956	50	
	20	1612	85	1658	87	8342	2	9954	40	
	30	1697	84	1745	86	8255	2	9952	30	
	40	1781	82	1831	84	8169	2	9950	20	
	50	1863	80	1915	82	8085	2	9948	10	
9	0	$\bar{1}.1943$	79	$\bar{1}.1997$	81	0.8003	2	$\bar{1}.9946$	0	**81**
	10	2022	78	2078	80	7922	2	9944	50	
	20	2100	76	2158	78	7842	2	9942	40	
	30	2176	75	2236	77	7764	2	9940	30	
	40	2251	73	2313	76	7687	2	9938	20	
	50	2324	73	2889	74	7611	2	9936	10	
10	0	$\bar{1}.2397$		$\bar{1}.2463$		0.7537		$\bar{1}.9934$	0	**80**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
10	0	$\bar{1}$.2397	71	$\bar{1}$.2463	73	0.7537	3	$\bar{1}$.9934	0	**80**
	10	2468	70	2536	73	7464	2	9931	50	
	20	2538	68	2609	71	7391	2	9929	40	
	30	2606	68	2680	70	7320	3	9927	30	
	40	2674	66	2750	69	7250	2	9924	20	
	50	2740	66	2819	68	7181	3	9922	10	
11	0	$\bar{1}$.2806	64	$\bar{1}$.2887	66	0.7113	2	$\bar{1}$.9919	0	**79**
	10	2870	64	2953	67	7047	3	9917	50	
	20	2934	63	3020	65	6980	2	9914	40	
	30	2997	61	3085	64	6915	3	9912	30	
	40	3058	61	3149	63	6851	2	9909	20	
	50	3119	60	3212	63	6788	3	9907	10	
12	0	$\bar{1}$.3179	59	$\bar{1}$.3275	61	0.6725	3	$\bar{1}$.9904	0	**78**
	10	3238	58	3336	61	6664	2	9901	50	
	20	3296	57	3397	61	6603	3	9899	40	
	30	3353	57	3458	59	6542	3	9896	30	
	40	3410	56	3517	59	6483	3	9893	20	
	50	3466	55	3576	58	6424	3	9890	10	
13	0	$\bar{1}$.3521	54	$\bar{1}$.3634	57	0.6366	3	$\bar{1}$.9887	0	**77**
	10	3575	54	3691	57	6309	3	9884	50	
	20	3629	53	3748	56	6252	3	9881	40	
	30	3682	52	3804	55	6196	3	9878	30	
	40	3734	52	3859	55	6141	3	9875	20	
	50	3786	51	3914	54	6086	3	9872	10	
14	0	$\bar{1}$.3837	50	$\bar{1}$.3968	53	0.6032	3	$\bar{1}$.9869	0	**76**
	10	3887	50	4021	53	5979	3	9866	50	
	20	3937	49	4074	53	5926	4	9863	40	
	30	3986	49	4127	51	5873	3	9859	30	
	40	4035	48	4178	52	5822	3	9856	20	
	50	4083	47	4230	51	5770	4	9853	10	
15	0	$\bar{1}$.4130		$\bar{1}$.4281		0.5719		$\bar{1}$.9849	0	**75**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
15	0	$\bar{1}$.4130	47	$\bar{1}$.4281	50	0.5719	3	$\bar{1}$.9849	0	**75**
	10	4177	46	4331	50	5669	3	9846	50	
	20	4223	46	4381	49	5619	4	9843	40	
	30	4269	45	4430	49	5570	3	9839	30	
	40	4314	45	4479	48	5521	4	9836	20	
	50	4359	44	4527	48	5473	4	9832	10	
16	0	$\bar{1}$.4403	44	$\bar{1}$.4575	47	0.5425	3	$\bar{1}$.9828	0	**74**
	10	4447	44	4622	47	5378	4	9825	50	
	20	4491	42	4669	47	5331	4	9821	40	
	30	4533	43	4716	46	5284	3	9817	30	
	40	4576	42	4762	46	5238	4	9814	20	
	50	4618	41	4808	45	5192	4	9810	10	
17	0	$\bar{1}$.4659	41	$\bar{1}$.4853	45	0.5147	4	$\bar{1}$.9806	0	**73**
	10	4700	41	4898	45	5102	4	9802	50	
	20	4741	40	4943	44	5057	4	9798	40	
	30	4781	40	4987	44	5013	4	9794	30	
	40	4821	40	5031	44	4969	4	9790	20	
	50	4861	39	5075	43	4925	4	9786	10	
18	0	$\bar{1}$.4900	39	$\bar{1}$.5118	43	0.4882	4	$\bar{1}$.9782	0	**72**
	10	4939	38	5161	42	4839	4	9778	50	
	20	4977	38	5203	42	4797	4	9774	40	
	30	5015	37	5245	42	4755	5	9770	30	
	40	5052	38	5287	42	4713	4	9765	20	
	50	5090	36	5329	41	4671	4	9761	10	
19	0	$\bar{1}$.5126	37	$\bar{1}$.5370	41	0.4630	5	$\bar{1}$.9757	0	**71**
	10	5163	36	5411	40	4589	4	9752	50	
	20	5199	36	5451	40	4549	5	9748	40	
	30	5235	35	5491	40	4509	4	9743	30	
	40	5270	36	5531	40	4469	5	9739	20	
	50	5306	35	5571	40	4429	4	9734	10	
20	0	$\bar{1}$.5341		$\bar{1}$.5611		0.4389		$\bar{1}$.9730	0	**70**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
20	0	1̄.5341		1̄.5611		0.4389		1̄.9730	0	70
	10	5375	34	5650	39	4350	5	9725	50	
	20	5409	34	5689	39	4311	4	9721	40	
	30	5443	34	5727	38	4273	5	9716	30	
	40	5477	34	5766	39	4234	5	9711	20	
	50	5510	33	5804	38	4196	5	9706	10	
21	0	1̄.5543	33	1̄.5842	38	0.4158	4	1̄.9702	0	69
	10	5576	33	5879	37	4121	5	9697	50	
	20	5609	33	5917	38	4083	5	9692	40	
	30	5641	32	5954	37	4046	5	9687	30	
	40	5673	32	5991	37	4009	5	9682	20	
	50	5704	31	6028	37	3972	5	9677	10	
22	0	1̄.5736	32	1̄.6064	36	0.3936	5	1̄.9672	0	68
	10	5767	31	6100	36	3900	5	9667	50	
	20	5798	31	6136	36	3864	6	9661	40	
	30	5828	30	6172	36	3828	5	9656	30	
	40	5859	31	6208	36	3792	5	9651	20	
	50	5889	30	6243	35	3757	5	9646	10	
23	0	1̄.5919	30	1̄.6279	36	0.3721	6	1̄.9640	0	67
	10	5948	29	6314	35	3686	5	9635	50	
	20	5978	30	6348	34	3652	6	9629	40	
	30	6007	29	6383	35	3617	5	9624	30	
	40	6036	29	6417	34	3583	6	9618	20	
	50	6065	29	6452	35	3548	5	9613	10	
24	0	1̄.6093	28	1̄.6486	34	0.3514	6	1̄.9607	0	66
	10	6121	28	6520	34	3480	5	9602	50	
	20	6149	28	6553	33	3447	6	9596	40	
	30	6177	28	6587	34	3413	6	9590	30	
	40	6205	28	6620	33	3380	6	9584	20	
	50	6232	27	6654	34	3346	5	9579	10	
25	0	1̄.6259	27	1̄.6687	33	0.3313	6	1̄.9573	0	65
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
25	0	1̄.6259		1̄.6687		0.3313		1̄.9573	0	65
	10	6286	27	6720	33	3280	6	9567	50	
	20	6313	27	6752	32	3248	6	9561	40	
	30	6340	27	6785	33	3215	6	9555	30	
	40	6366	26	6817	32	3183	6	9549	20	
	50	6392	26	6850	33	3150	6	9543	10	
26	0	1̄.6418	26	1̄.6882	32	0.3118	6	1̄.9537	0	64
	10	6444	26	6914	32	3086	7	9530	50	
	20	6470	26	6946	32	3054	6	9524	40	
	30	6495	25	6977	31	3023	6	9518	30	
	40	6521	26	7009	32	2991	6	9512	20	
	50	6546	25	7040	31	2960	7	9505	10	
27	0	1̄.6570	24	1̄.7072	32	0.2928	6	1̄.9499	0	63
	10	6595	25	7103	31	2897	7	9492	50	
	20	6620	25	7134	31	2866	6	9486	40	
	30	6644	24	7165	31	2835	7	9479	30	
	40	6668	24	7196	31	2804	6	9473	20	
	50	6692	24	7226	30	2774	7	9466	10	
28	0	1̄.6716	24	1̄.7257	31	0.2743	7	1̄.9459	0	62
	10	6740	24	7287	30	2713	6	9453	50	
	20	6763	23	7317	30	2683	7	9446	40	
	30	6787	24	7348	31	2652	7	9439	30	
	40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20	
	50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10	
29	0	1̄.6856	23	1̄.7438	30	0.2562	7	1̄.9418	0	61
	10	6878	22	7467	29	2533	7	9411	50	
	20	6901	23	7497	30	2503	7	9404	40	
	30	6923	22	7526	29	2474	7	9397	30	
	40	6946	23	7556	30	2444	7	9390	20	
	50	6968	22	7585	29	2415	7	9383	10	
30	0	1̄.6990	22	1̄.7614	29	0.2385	8	1̄.9375	0	60
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
30	0	$\bar{1}$.6990	22	$\bar{1}$.7614	30	0.2386	7	$\bar{1}$.9375	0	**60**
	10	7012	21	7644	29	2356	7	9368	50	
	20	7033	22	7673	28	2327	8	9361	40	
	30	7055	21	7701	29	2299	7	9353	30	
	40	7076	21	7730	29	2270	8	9346	20	
	50	7097	21	7759	29	2241	7	9338	10	
31	0	$\bar{1}$.7118	21	$\bar{1}$.7788	28	0.2212	8	$\bar{1}$.9331	0	**59**
	10	7139	21	7816	29	2184	8	9323	50	
	20	7160	21	7845	28	2155	7	9315	40	
	30	7181	20	7873	29	2127	8	9308	30	
	40	7201	21	7902	28	2098	8	9300	20	
	50	7222	20	7930	28	2070	8	9292	10	
32	0	$\bar{1}$.7242	20	$\bar{1}$.7958	28	0.2042	8	$\bar{1}$.9284	0	**58**
	10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50	
	20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40	
	30	7302	20	8042	28	1958	8	9260	30	
	40	7322	20	8070	27	1930	8	9252	20	
	50	7342	19	8097	28	1903	8	9244	10	
33	0	$\bar{1}$.7361	19	$\bar{1}$.8125	28	0.1875	8	$\bar{1}$.9236	0	**57**
	10	7380	20	8153	27	1847	9	9228	50	
	20	7400	19	8180	28	1820	8	9219	40	
	30	7419	19	8208	27	1792	8	9211	30	
	40	7438	19	8235	28	1765	9	9203	20	
	50	7457	19	8263	27	1737	8	9194	10	
34	0	$\bar{1}$.7476	18	$\bar{1}$.8290	27	0.1710	9	$\bar{1}$.9186	0	**56**
	10	7494	19	8317	27	1683	8	9177	50	
	20	7513	18	8344	27	1656	9	9169	40	
	30	7531	19	8371	27	1629	9	9160	30	
	40	7550	18	8398	27	1602	9	9151	20	
	50	7568	18	8425	27	1575	8	9142	10	
35	0	$\bar{1}$.7586		$\bar{1}$.8452		0.1548		$\bar{1}$.9134	0	**55**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos		
35	0	$\bar{1}$.7586	18	$\bar{1}$.8452	27	0.1548	9	$\bar{1}$.9134	0	**55**
	10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50	
	20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40	
	30	7640	17	8533	26	1467	9	9107	30	
	40	7657	18	8559	27	1441	9	9098	20	
	50	7675	17	8586	27	1414	9	9089	10	
36	0	$\bar{1}$.7692	18	$\bar{1}$.8613	26	0.1387	10	$\bar{1}$.9080	0	**54**
	10	7710	17	8639	27	1361	9	9070	50	
	20	7727	17	8666	26	1334	9	9061	40	
	30	7744	17	8692	26	1308	10	9052	30	
	40	7761	17	8718	27	1282	9	9042	20	
	50	7778	17	8745	26	1255	10	9033	10	
37	0	$\bar{1}$.7795	16	$\bar{1}$.8771	26	0.1229	9	$\bar{1}$.9023	0	**53**
	10	7811	17	8797	27	1203	10	9014	50	
	20	7828	16	8824	26	1176	9	9004	40	
	30	7844	17	8850	26	1150	10	8995	30	
	40	7861	16	8876	26	1124	10	8985	20	
	50	7877	16	8902	26	1098	10	8975	10	
38	0	$\bar{1}$.7893	17	$\bar{1}$.8928	26	0.1072	10	$\bar{1}$.8965	0	**52**
	10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50	
	20	7926	15	8980	26	1020	10	8945	40	
	30	7941	16	9006	26	0994	10	8935	30	
	40	7957	16	9032	26	0968	10	8925	20	
	50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10	
39	0	$\bar{1}$.7989	15	$\bar{1}$.9084	26	0.0916	10	$\bar{1}$.8905	0	**51**
	10	8004	16	9110	25	0890	11	8895	50	
	20	8020	15	9135	26	0865	10	8884	40	
	30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30	
	40	8050	16	9187	25	0813	11	8864	20	
	50	8066	15	9212	26	0788	10	8853	10	
40	0	$\bar{1}$.8081		$\bar{1}$.9238		0.0762		$\bar{1}$.8843	0	**50**
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

度	分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	分	度
40	0	$\bar{1}$.8081	15	$\bar{1}$.9238	26	0.0762	11	$\bar{1}$.8843	0	50
	10	8096	15	9264	25	0736	11	8832	50	
	20	8111	14	9289	26	0711	11	8821	40	
	30	8125	15	9315	26	0685	10	8810	30	
	40	8140	15	9341	25	0659	11	8800	20	
	50	8155	14	9366	26	0634	11	8789	10	
41	0	$\bar{1}$.8169	15	$\bar{1}$.9392	25	0.0608	11	$\bar{1}$.8778	0	49
	10	8184	14	9417	26	0583	11	8767	50	
	20	8198	15	9443	25	0557	11	8756	40	
	30	8213	14	9468	26	0532	12	8745	30	
	40	8227	14	9494	25	0506	11	8733	20	
	50	8241	14	9519	25	0481	11	8722	10	
42	0	$\bar{1}$.8255	14	$\bar{1}$.9544	26	0.0456	12	$\bar{1}$.8711	0	48
	10	8269	14	9570	25	0430	11	8699	50	
	20	8283	14	9595	26	0405	12	8688	40	
	30	8297	14	9621	25	0379	11	8676	30	
	40	8311	13	9646	25	0354	12	8665	20	
	50	8324	14	9671	26	0329	12	8653	10	
43	0	$\bar{1}$.8338	13	$\bar{1}$.9697	25	0.0303	12	$\bar{1}$.8641	0	47
	10	8351	14	9722	25	0278	11	8629	50	
	20	8365	13	9747	26	0253	12	8618	40	
	30	8378	13	9773	25	0227	12	8606	30	
	40	8391	14	9798	25	0202	12	8594	20	
	50	8405	13	9823	25	0177	13	8582	10	
44	0	$\bar{1}$.8418	13	$\bar{1}$.9848	26	0.0152	12	$\bar{1}$.8569	0	46
	10	8431	13	$\bar{1}$.9874	25	0126	12	8557	50	
	20	8444	13	$\bar{1}$.9899	25	0101	13	8545	40	
	30	8457	12	$\bar{1}$.9924	25	0076	12	8532	30	
	40	8469	13	$\bar{1}$.9949	26	0051	13	8520	20	
	50	8482	13	$\bar{1}$.9975	25	0025	12	8507	10	
45	0	$\bar{1}$.8495		0.0000		0.0000		$\bar{1}$.8495	0	45
		log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分	度

表

	4	5	6	7
7	435	443	451	459
5	513	520	528	536
2	589	597	604	612
7	664	672	679	686
1	738	745	752	760
3	810	818	825	832
5	882	889	896	903
5	952	959	966	973
4*	021*	028*	035*	041*
2	089	096	102	109
9	156	162	169	176
5	222	228	235	241
0	287	293	299	306
4	351	357	363	370
7	414	420	426	432
0	476	482	488	494
1	537	543	549	555
1	597	603	609	615
1	657	663	669	675
0	716	722	727	733
8	774	779	785	791
5	831	837	842	848
2	887	893	899	904
8	943	949	954	960
3	998	004*	009*	015*
7	053	058	063	069
1	106	112	117	122
4	159	165	170	175
6	212	217	222	227
8	263	269	274	279
9	315	320	325	330
0	365	370	375	380
0	415	420	425	430
0	465	469	474	479
9	513	518	523	528
7	562	566	571	576
5	609	614	619	624
2	657	661	666	671
9	703	708	713	717
5	750	754	759	763
1	795	800	805	809
5	841	845	850	854
1	886	890	894	899
5	930	934	939	943
9	974	978	983	987

50

49

48

47

46

45

度

對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	120	425	430	435	440
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	007*	016*	024*	033*	042*	050*	059*	067*	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

比例

	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.

	32	33	34	35	36	37	38	39
1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.
2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.
3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.
4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.
5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.
6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.
7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.
8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.
9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.

	53	54	55	56	57	58	59	61
1	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.
2	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.
3	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.
4	21.2	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.
5	26.5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.
6	31.8	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.
7	37.1	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.
8	42.4	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.
9	47.7	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.

	75	76	77	78	79	81	82	84
1	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.1	8.2	8.
2	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.2	16.4	16.
3	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.3	24.6	25.
4	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.4	32.8	33.
5	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.5	41.0	42.
6	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.6	49.2	50.
7	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.7	57.4	58.
8	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.8	65.6	67.
9	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.9	73.8	75.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	007*	016*	024*	033*	042*	050*	059*	067*	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.1
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.2
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.3
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.4
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.5
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.6
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.7
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.8
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.9

	32	33	34	35	36	37	38	39	41	42	43	44	45	46	47	48	49	51	52
1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.1	5.2
2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	10.2	10.4
3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.3	12.6	12.9	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7	15.3	15.6
4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6	20.4	20.8
5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5	25.5	26.0
6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.6	25.2	25.8	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4	30.6	31.2
7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.7	29.4	30.1	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3	35.7	36.4
8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.8	33.6	34.4	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2	40.8	41.6
9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.9	37.8	38.7	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1	45.9	46.8

	53	54	55	56	57	58	59	61	62	63	64	65	66	67	68	69	71	73	74
1	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.1	7.3	7.4
2	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	14.2	14.6	14.8
3	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	21.3	21.9	22.2
4	21.2	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.4	24.8	25.2	25.6	26.0	26.4	26.8	27.2	27.6	28.4	29.2	29.6
5	26.5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.5	31.0	31.5	32.0	32.5	33.0	33.5	34.0	34.5	35.5	36.5	37.0
6	31.8	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.6	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.2	40.8	41.4	42.6	43.8	44.4
7	37.1	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.7	43.4	44.1	44.8	45.5	46.2	46.9	47.6	48.3	49.7	51.1	51.8
8	42.4	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.8	49.6	50.4	51.2	52.0	52.8	53.6	54.4	55.2	56.8	58.4	59.2
9	47.7	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.9	55.8	56.7	57.6	58.5	59.4	60.3	61.2	62.1	63.9	65.7	66.6

	75	76	77	78	79	81	82	84	85	86	87	89	91	93	94	95	97	98	99
1	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.1	8.2	8.4	8.5	8.6	8.7	8.9	9.1	9.3	9.4	9.5	9.7	9.8	9.9
2	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.2	16.4	16.8	17.0	17.2	17.4	17.8	18.2	18.6	18.8	19.0	19.4	19.6	19.8
3	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.3	24.6	25.2	25.5	25.8	26.1	26.7	27.3	27.9	28.2	28.5	29.1	29.4	29.7
4	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.4	32.8	33.6	34.0	34.4	34.8	35.6	36.4	37.2	37.6	38.0	38.8	39.2	39.6
5	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.5	41.0	42.0	42.5	43.0	43.5	44.5	45.5	46.5	47.0	47.5	48.5	49.0	49.5
6	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.6	49.2	50.4	51.0	51.6	52.2	53.4	54.6	55.8	56.4	57.0	58.2	58.8	59.4
7	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.7	57.4	58.8	59.5	60.2	60.9	62.3	63.7	65.1	65.8	66.5	67.9	68.6	69.3
8	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.8	65.6	67.2	68.0	68.8	69.6	71.2	72.8	74.4	75.2	76.0	77.6	78.4	79.2
9	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.9	73.8	75.6	76.5	77.4	78.3	80.1	81.9	83.7	84.6	85.5	87.3	88.2	89.1

函數 / 度	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0	0.0000	0.0000	1.0000	∞	∞	1.000	90
1	0.0175	0.0175	1.0002	57.2987	57.2900	0.9998	89
2	0.0349	0.0349	1.0006	28.6537	28.6363	0.9994	88
3	0.0523	0.0524	1.0014	19.1073	19.0811	0.9986	87
4	0.0698	0.0699	1.0024	14.3356	14.3007	0.9976	86
5	0.0872	0.0875	1.0038	11.4737	11.4301	0.9962	85
6	0.1045	0.1051	1.0055	9.5668	9.5144	0.9945	84
7	0.1219	0.1228	1.0075	8.2055	8.1443	0.9925	83
8	0.1392	0.1405	1.0098	7.1853	7.1154	0.9903	82
9	0.1564	0.1584	1.0125	6.3925	6 3138	0.9877	81
10	0.1736	0.1763	1.0154	5.7588	5.6713	0.9848	80
11	0.1908	0.1944	1.0187	5.2408	5.1446	0.9816	79
12	0.2079	0.2126	1.0223	4.8097	4.7046	0.9781	78
13	0.2250	0.2309	1.0263	4.4454	4.3315	0.9744	77
14	0.2419	0.2493	1.0306	4.1336	4.0108	0.9703	76
15	0.2588	0.2679	1.0353	3.8637	3.7321	0.9659	75
16	0.2756	0.2867	1.0403	3.6280	3.4874	0.9613	74
17	0.2924	0.3057	1.0457	3.4203	3.2709	0.9563	73
18	0.3090	0.3249	1.0515	3.2361	3.0777	0.9511	72
19	0.3256	0.3443	1.0575	3.0716	2.9042	0.9455	71
20	0.3420	0.3640	1.0642	2.9238	2.7475	0.9397	70
21	0.3584	0.3839	1.0711	2.7904	2.6051	0.9336	69
22	0.3746	0.4040	1.0785	2.6695	2.4751	0.9272	68
23	0.3907	0.4245	1.0864	2.5593	2.3559	0.9205	67
24	0.4067	0.4452	1.0946	2.4586	2.2460	0.9135	66
25	0.4226	0.4663	1.1034	2.3662	2.1445	0.9063	65
26	0.4384	0.4877	1.1126	2.2812	2.0503	0.8988	64
27	0.4540	0.5095	1.1223	2.2027	1.9626	0.8910	63
28	0.4695	0.5317	1.1326	2.1301	1.8807	0.8829	62
29	0.4848	0.5543	1.1434	2.0627	1.8040	0.8746	61
30	0.5000	0.5774	1.1547	2.0000	1.7321	0.8660	60
31	0.5150	0.6009	1.1666	1.9416	1.6643	0.8572	59
32	0.5299	0.6249	1.1792	1.8871	1.6003	0.8480	58
33	0.5446	0.6494	1.1924	1.8361	1.5399	0.8387	57
34	0.5592	0.6745	1.2062	1.7883	1.4826	0.8290	56
35	0.5736	0.7002	1.2203	1.7434	1.4281	0.8192	55
36	0.5878	0.7265	1.2361	1.7013	1.3764	0.8090	54
37	0.6018	0.7536	1.2521	1.6616	1.3270	0.7986	53
38	0.6157	0.7813	1.2690	1.6243	1.2799	0.7880	52
39	0.6293	0.8098	1.2868	1.5890	1.2349	0.7771	51
40	0.6428	0.8391	1.3054	1.5557	1.1918	0.7660	50
41	0.6561	0.8693	1.3250	1.5243	1.1504	0.7547	49
42	0.6691	0.9004	1.3456	1.4945	1.1106	0.7431	48
43	0.6820	0.9325	1.3673	1.4663	1.0724	0.7314	47
44	0.6947	0.9657	1.3902	1.4396	1.0355	0.7193	46
45	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	0.7071	45
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	度 / 函數

公式一覽表

三角形

$$=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$C+c\cos B.\qquad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$
$$A+a\cos C.\qquad b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$
$$B+b\cos A.\qquad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

$$C=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

$$\frac{a}{b-c}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

$$=\frac{a+b+c}{2}.$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$
$$=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}.\qquad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}.$$
$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}.$$
$$=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{r}{s-b}.$$
$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{r}{s-c}.$$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}.$$

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\frac{S}{s}.$$

$$=\frac{S}{s-a}.\quad r_2=\frac{S}{s-b}.\quad r_3=\frac{S}{s-c}.$$

公式一覽表

三角函數

$$\left.\begin{aligned}\sin A &= \text{垂線} \div \text{斜邊}.\\ \cos A &= \text{底邊} \div \text{斜邊}.\\ \tan A &= \text{垂線} \div \text{底邊}.\end{aligned}\right\}$$

	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞

$$\left\{\begin{aligned}\sin A\times \operatorname{cosec} A &= 1.\\ \cos A\times \sec A &= 1.\\ \tan A\times \cot A &= 1.\end{aligned}\right.$$

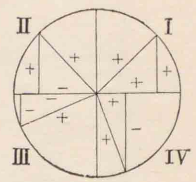
$$\left\{\begin{aligned}&\sin^2 A+\cos^2 A=1.\\ &1+\tan^2 A=\sec^2 A.\\ &1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A.\end{aligned}\right.$$

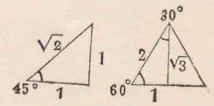
$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.\quad \cot A=\frac{\cos A}{\mathit{cin}\, A}.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}\sin(-A)&=-\sin A.\\ \cos(-A)&=\cos A.\\ \tan(-A)&=-\tan A.\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}\sin(90^\circ+A)&=\cos A.\\ \cos(90^\circ+A)&=-\sin A.\\ \tan(90^\circ+A)&=-\cot A.\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}\sin(180^\circ+A)&=-\sin A.\\ \cos(180^\circ+A)&=-\cos A.\\ \tan(180^\circ+A)&=\tan A.\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}$$

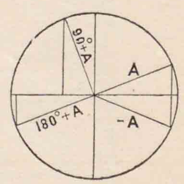
$$\left\{\begin{aligned}\sin(360^\circ+A)&=\sin A.\\ \cos(360^\circ+A)&=\cos A.\\ \tan(360^\circ+A)&=\tan A.\end{aligned}\right.$$

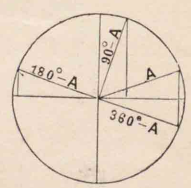
$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}\sin(90^\circ-A)&=\cos A.\\ \cos(90^\circ-A)&=\sin A.\\ \tan(90^\circ-A)&=\cot A.\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}\sin(180^\circ-A)&=\sin A.\\ \cos(180^\circ-A)&=-\cos A.\\ \tan(180^\circ-A)&=-\tan A.\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}\sin(360^\circ-A)&=-\sin A.\\ \cos(360^\circ-A)&=\cos A.\\ \tan(360^\circ-A)&=-\tan A.\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}$$





$\sqrt{2}=1.41421$
$\sqrt{3}=1.73205$
$\sqrt{5}=2.23607$
$\sqrt{6}=2.44949$
$\pi=3.14159$





$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B.\\ \sin(A-B)&=\sin A\cos B-\cos A\sin B.\\ \cos(A+B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B.\\ \cos(A-B)&=\cos A\cos B+\sin A\sin B.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan(A+B)&=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.\\ \tan(A-B)&=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 2A&=2\sin A\cos A.\\ \cos 2A&=\cos^2 A-\sin^2 A\\ &=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A.\\ \tan 2A&=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 3A&=3\sin A-4\sin^3 A.\\ \cos 3A&=4\cos^3 A-3\cos A.\\ \tan 3A&=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.\\ \sin\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)+\sin(A-B)&=2\sin A\cos B.\\ \sin(A+B)-\sin(A-B)&=2\cos A\sin B.\\ \cos(A+B)+\cos(A-B)&=2\cos A\cos B.\\ \cos(A+B)-\cos(A-B)&=-2\sin A\sin B.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin C+\sin D&=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.\\ \sin C-\sin D&=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.\\ \cos C+\cos D&=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.\\ \cos C-\cos D&=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.\end{aligned}\right\}$$

α ト同ジ正弦ヲ有スル角

$n\pi+(-1)^n\alpha.$

α ト同ジ餘弦ヲ有スル角

$2n\pi\pm\alpha.$

α ト同ジ正切ヲ有スル角

$n\pi+\alpha.$

三角形

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\left\{\begin{aligned}a&=b\cos C+c\cos B.\\ b&=c\cos A+a\cos C.\\ c&=a\cos B+b\cos A.\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A.\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B.\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}\right.$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{a}{b+c}&=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.\\ \frac{a}{b-c}&=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.\end{aligned}\right.$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

$$\left\{\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}.\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}.\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}.\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{r}{s-b}.\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{r}{s-c}.\end{aligned}\right.$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}.$$

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\frac{S}{s}.$$

$$r_1=\frac{S}{s-a}.\quad r_2=\frac{S}{s-b}.\quad r_3=\frac{S}{s-c}.$$

昭和六年十月十九日印刷
昭和六年十月二十三日發行
昭和六年十二月十一日修正再版印刷
昭和六年十二月十五日修正再版發行

不許複製
中等幾何三角法教科書卷四
定價金五十二錢

著作者　竹内端三

東京市神田區通神保町一番地
發行兼印刷者　株式會社三省堂
代表者　龜井寅雄

東京市蒲田區出雲町一〇一番地
印刷所　株式會社三省堂蒲田工場

東京市神田區通神保町一番地
發行所　株式會社三省堂
（振替東京三一五五五）
大阪市西區阿波座下通二丁目六番地
株式會社三省堂大阪支店
（振替大阪八一三〇〇）

【蒲田製本】

Hirano

Takeo Hirano

Takeo Hirano

Takeo Hirano

Takeo

Hirano

Takeo Hirano

Takeo

[illegible] 平野武夫

SSD