T. HAYASHI

GEOMETRY

(PLANE)

TOKYOKAISEIKAN

Pythagoras (B.C. 569 頃—500 頃)

ぴたごらすハ地中海ノさもす Samos 島ニ生レ希臘及ビ埃及ニ遊學シ，後南伊太利ノくろとん Croton ニ學舍ヲ開設シ多數ノ學徒ヲ敎養シタリ。此學校コソ實ニ氏ノ名ヲ不朽ナラシメタルモノニシテ，氏ハ此學校ニ於テ數學，倫理學及ビ哲學ヲ講ジ聽衆常ニ堂ニ溢レタリト云フ。

氏ハ數學ヲ四ツノ部門（靜止量學卽チ幾何學，運動量學卽チ力學，算術及ビ應用數學）ニ分チ，又倫理學及ビ哲學ヲ皆數學ヲ基礎トシテ立論シタリト云フ。

本書第 103 節ニ揭ゲル所謂ぴたごらすノ定理ハ重要ナルモノナリ。

Pythagoras

Euclid

Euclid (B.C. 330 頃—275 頃)

あれきさんどろ Alexander 王ノ死 (B.C. 323) 後，其屬將ぷとれめうす Ptolemäus ハ埃及王ニ封セラレ，あれきさんどりあ Alexandria ヲ首府ト定メ，コヽニ世界最初ノ大學ヲ起シ，當時ノ碩學ヲ招聘シタリ。ゆーくりっどハ其時希臘本國ヨリ招聘セラレテ此大學最初ノ教授トナレル大數學者ナリキ。

氏ノ編纂セル幾何學教科書ハ世界最初ノ整頓セル教科書トシテ爾後二千年ノ間殆ド原版ノマヽ各國ニ飜譯使用セラレ，ゆーくりっどナル名ハ實ニ幾何學ナル語ニ代用セラレタリ。以テ如何ニ氏ガ偉大ナル學者タリシカヲ想像スルヲ得ベシ。

文部省檢定濟

昭和二年十二月十五日 中學校師範學校數學科用

中等教育

幾何學教科書

平面之部

東北帝國大學教授

理學博士

林鶴一

著

東京開成館

序

本書初版發行以來既ニ二十年其間極メテ多數ノ中等學校ノ教科書ニ採用セラレ、其教師諸君ノ誠實ナル批評忠言ト著者ノ不斷ノ研究トニヨリテ屢改訂ヲナシ、常ニ時代ノ要求ニ適應セシメタルノミナラズ我國中等教育數學教科改進ノ先驅タランコトヲ努メタリ。今亦茲ニ修正第八版ヲ提供スルニ至リタルハ余ノ甚ダ欣幸トスル所ナリ。

次ニ今回ノ改纂ノ要項ヲ述ブベシ。

(一) 教材ヲ選擇シ、之ヲ輕減シテ教授ノ徹底ヲ期シタルコト。

(二) 文章ヲ嚴正ニシ、說明ノ方法ニ多大ノ考慮ヲ拂ヒタルコト。

(三) 門戸ヲ簡易ニシ教材ノ排列ヲ改善シテ生徒ノ心理發達ニ順應セシメ、又推理ノ根本ヲ明カニシ且其系統ヲ一層明確ナラシメタルコト。

(四) 挿圖ヲ改良シ且大ニ其數ヲ增シ,以テ了解ヲ容易ナラシメ,又生徒ノ考案ヲ適度ニ援助シタルコト。

(五) 定理ノ證明及ビ作圖題ノ解法ヲ單ニ其方法ヲ示スニ止メズ,之ヲ解析シテ其解法ヲ案出スルニ至ル筋途ヲ悟ラシムルコトニ努メタルコト。

(六) 問題ヲ精選シ,且計算問題ヲ加ヘテ算術代數學トノ融合ヲ圖リ,又實用的事項,測量問題,畫法問題等ヲ加ヘテ實生活トノ接觸ヲ圖リ興味ヲ喚起シタルコト。

(七) 度量衡ノ單位ヲめーとる法ニヨルコトトナシタルコト。

(八) 圖形ノ要素ノ變化ヲ相互ニ對照セシムル機會ヲ多クシ,以テ圖形ニ關スル函數思想ヲ養成シタルコト。

(九) 各章ノ終リニ**回顧復習**ノ項目ヲ揭ゲ,生徒ヲシテ常ニ既往ヲ回顧セシメテ既修事項ノ了解收得ヲ確實ニシ,以テ應用ノ基礎ヲ確固タラシメタルコト。

(十) 附錄雜題ヲ改修シ,其第一ヲ專ラ復習練習ニ適スルモノトシ,第二ヲ以テ研究鍛練ノ資料トナシタルコト。

以上ノ外改補シタル事項甚ダ多シ。余ハ之ヲ以テ現時ノ要求ニ適應スルモノニシテ恐ラクハ教師諸君ノ意ヲ盡クシタルモノナルコトヲ信ズ。

余ハ尙諸君ト共ニ益研究ヲ怠ラズ本書ヲシテ更ニ進步シタルモノタラシメンコトヲ期シ,諸君ノ忠言ニ吝ナラザランコトヲ望ミテ止マザルナリ。

昭和二年九月

著者識

目　次

緒　論

平面幾何學

中等教育

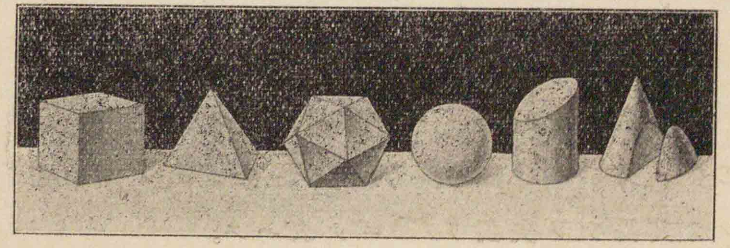
幾何學教科書

緒論

1. 幾何學. 幾何學ハ物體ノ形,大サ及ビ位置ニ關スル事柄ヲ論ズル學問ナリ。

2. 立體. 物體ヲ組成スル物質ヲ顧ミズ,唯其形大サ及ビ位置ノミニ就キテ考フルトキハ,之ヲ立體ト云フ。

面,線,點. 立體ノ限界ヲ面ト云ヒ,面ノ限界又ハ二面ノ交ハル處ヲ線ト云ヒ,線ノ限界又ハ二線ノ交ハル處ヲ點ト云フ。



立體ハ形,大サ及ビ位置ヲ有ス。

面ハ大サ(廣サ)及ビ位置ヲ有シ,厚サヲ有セズ

線ハ大サ(長サ)及ビ位置ヲ有シ,幅及ビ厚サヲ有セズ。

點ハ全ク大サヲ有セズ,唯位置ノミヲ有ス。

點ヲ表ハスニハ・又ハ×ヲ以テシ,之ニA,B,C等ノ文字ヲ附シ,點A(・A),點B(×B)等ト呼ブ。コレ全ク大サナキモノニテハ表ハスコト困難ナレバナリ。

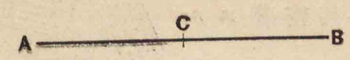
3. 直線. 眞直(マツスグ)ナル線ヲ直線ト云フ。

強ク張レル細キ絲ノ如キハ其形ヲ表ハス。

直線ハ雙方へ限リナク長キモノトス。若シ其一部分ヲ取ルトキハ,之ヲ**有限直線**又ハ**線分**ト云ヒ,殘リノ部分ヲ其**延長**ト云フ。有限直線ニ對シテ,長サニ限リナキモノヲ**無限直線**ト云フコトアリ。

有限直線ヲ表ハスニハ其兩端ナル點ヲ表ハス二ツノ文字ヲ並記ス。例ヘバ線分ABノ如シ,而シテ其長サヲ矢張リABニテ表ハス。

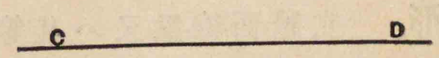
線分ノ中點. 線分ヲ相等シキ二ツノ部分ニ分ツ點ヲ其ノ線分ノ**中點**ト云フ。



例ヘバ點Cガ線分ABヲAC=CBナルヤウニ分ツトキハCハABノ中點ナリ。

線分ノ中點ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

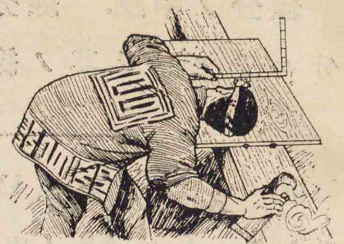
無限直線ヲ表ハスニハ,其上ノ任意ノ二點ヲ列記ス。例ヘバ直線CDノ如シ。



4. 曲線. 何レノ部分モ直線ナラザル線ヲ曲線ト云フ。

5. 平面. 面上ニ在ル任意ノ二點ヲ通過スル直線ガ,全クソレニ密著スル面ヲ平面ト云フ。

大工ガ板ヲ平ラニ削ルニ當リ,さしがねノ線ヲ板ノ面ニ當テテ,其密著スルカ否カヲ見ルハ此理ニ基ヅク。



6. 曲面. 何レノ部分モ平面ナラザル面ヲ**曲面**ト云フ。

7. 圖形. 立體,面,線,點又ハ其等ノ集合ヲ**圖形**ト云フ。

直線ノミニテ成ル圖形ヲ**直線圖形**ト云ヒ,同一平面上ニ在ル圖形ヲ**平面圖形**ト云フ。

故ニ**幾何學**ハ圖形ノ性質ヲ論ズル學問ナリ。

平面幾何學ハ平面圖形ノミヲ論ズ。其他ノ圖形ノ考究ハ**立體幾何學**ニ屬ス。

問 1. 四ツノ直線アリ,其交點ハ幾ツアルカ。種々ノ場合ヲ示セ。

問 2. 四ツノ點アリ,其二ツヅヽヲ過グル直線ハ幾ツアルカ。種々ノ場合ヲ示セ。

平面幾何學

第一篇

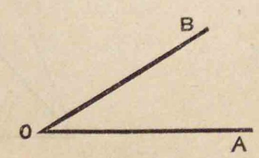
簡單ナル平面圖形

第一章

角

8. 角. 一點ヨリ出ヅル二直線ヨリ成レル圖形ヲ**角**ト云フ。此點ヲ角ノ**頂點**ト云ヒ,其二直線ヲ角ノ**邊**ト云フ。

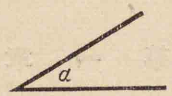
例ヘバ一點 O ヨリ出ヅル二直線 OA, OB(1) ハ角ヲ作ル。之ヲ角 O, 角 AOB 又ハ角 BOA ト云フ。



(1)カクノ如キ直線ヲ**半直線**又ハ**射線**ト云フコトアリ。

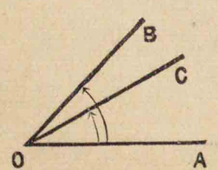
角ヲ記スルニハ,角ナル文字ノ代リニ $\angle$ ナル記號ヲ用ヒテ $\angle AOB$, $\angle BOA$ ノ如クスルコトアリ。又一頂點ニ一ツノ角アルトキハ,其頂點ノ文字一ツニテ表ハシテ可ナリ。例ヘバ $\angle O$ ノ如シ。

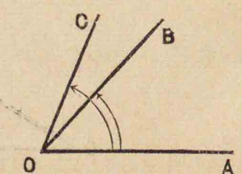
又頂點ニ近ク二邊ノ間ニ置キタル一ツノ文字ヲ以テスルコトアリ。例ヘバ $\angle \alpha$ ノ如シ。



角ノ大サ. 角 AOB ニ於テ一邊 OA ヲ頂點 O ノ周リニ,平面ヲ離ルルコトナク廻轉シテ, OB ニ重ナル位置マデ來ラシムルトキハ, OA ハ角 AOB ヲ畫ク又ハ角 AOB ダケ廻轉セリト云フ。

此ノ廻轉ニ於テ, OA ノ觸レタル平面ノ部分ヲ**角內**ト云ヒ,他ノ部分ヲ**角外**ト云フ。

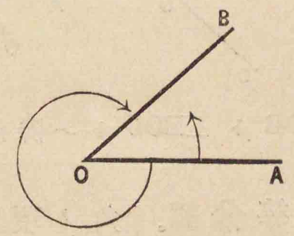




一ツノ角ヲ他ノ角ノ上ニ置キ,頂點ト一邊トヲ

相合セシメタルトキ,他ノ邊ガ亦相合スルトキハ,此二角ハ**相等シ**ト云ヒ,一ツノ角ノ第二ノ邊ガ他ノ角ノ內ニ在ルカ,又ハ外ニ在ルカニヨリテ,其角ハ他ノ角ヨリ**小ナリ**,又ハ**大ナリ**ト云フ。

故ニ角ノ大サハ二邊ノ長サニハ關係セズ。



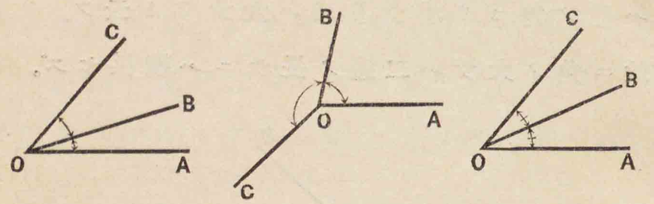
サテ OA ヲ廻轉セシメテ OB ノ位置ニ至ラシムルニ二ツノ途アリ 即チ上圖ニ示セルガ如ク,一ツハ時計ノ針ノ廻轉ト同ジク,他ハ之ニ反ス。

故ニ一點ヨリ出ヅル二直線ハ常ニ二ツノ角ヲ作リ,此二角ノ頂點ト邊トハ共通ナリ。

此二角ヲ互ニ**共軛角**ト云ヒ,大ナル方ヲ**優角**,小ナル方ヲ**劣角**ト云フ。

サレド單ニ角ト云ハバ,通例其劣角ヲ指スモノトス。

9. 隣接角. 頂點ト一邊トヲ共通ニシ,且其共通邊ノ兩側ニ在ル二角ヲ**隣接角**ト云フ。



圖ニ於テ∠AOBト∠BOCトハ隣接角ナリ。

10. 角ノ二等分線. 角ノ頂點ヲ過ギ之ヲ相等シキ二ツノ隣接角ニ分ツ直線ヲ,此角ノ**二等分線**ト云フ。

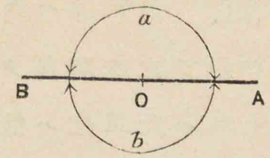
角ノ二等分線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

問　紙ヲ折リテ角ノ二等分線ヲ作ル方法如何。

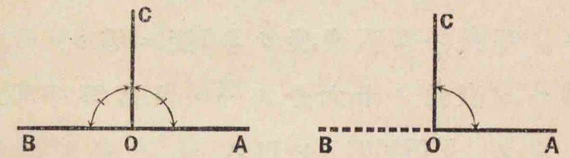
11. 平角. 角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアリテ一直線ヲナストキハ,此角ヲ**平角**ト云フ。

平角ハ皆重ネ合ハスコトヲ得。

故ニ　**平角ハ皆相等シ.**



12. 直角. 平角ノ半分ニ等シキ角ヲ**直角**ト云フ。

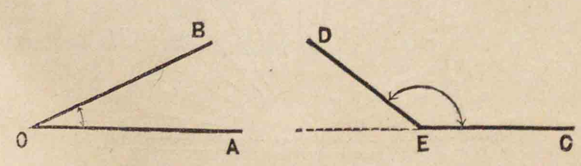


平角AOBノ二等分線ヲOCトセバ,∠AOC及ビ∠COBハ共ニ直角ナリ。

平角ハ皆相等シキヲ以テ,　**直角ハ皆相等シ.**

而シテ　**平角ハ直角ノ二倍ニ等シ.**

13. 鋭角, 鈍角. 直角ヨリ小ナル角ヲ**鋭角**ト云ヒ, 直角ヨリ大ニシテ平角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**ト云フ。



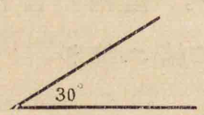
14. 角ノ單位. 前ニ述ベタル如ク,直角ハ其大サ一定セルヲ以テ,之ヲ**測角ノ基本單位**トス。

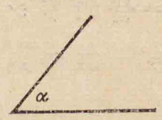
然レドモ實用上ニハ此單位ハ餘リニ大ニ過グルヲ以テ,其九十分ノ一ヲ**一度**ト云ヒ,一度ノ六十分ノ一ヲ**一分**,一分ノ六十分ノ一ヲ**一秒**ト云ヒ,此等ヲ併用ス。

故ニ　平角ハ2直角,從テ180度ニ等シ.

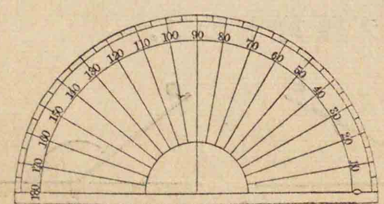
又例ヘバ直角ノ十六分ノ一ハ5度37分30秒ニシテ,之ヲ $5°37'30''$ ト記ス。

角ノ大サヲ表ハスニ,其內部ノ頂點ニ近キ處ニ記シタル數字又ハ文字ヲ以テスルコトアリ。





角ノ大サヲ測ルニハ**分度器**ヲ用フ。



問 1. 2直角ノ三分ノ一ハ幾度ナルカ。

$\frac{3}{4}$直角ハ幾度カ。又 $\frac{4}{32}$ 直角ハ幾度幾分カ。

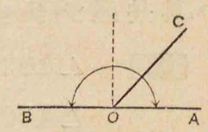
問 2. 次ノ各ノ角度ヲ直角單位ニテ表ハセ。

30°,　45°,　60°,　22°30′,　135°

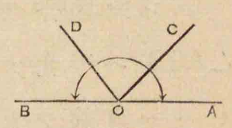
又分度器ヲ使用シテ此等ノ角ヲ畫ケ。

問 3. 二ツノ隣接角ガ 30° 及ビ 45° ナルトキハ,其二角ノ二等分線ノナス角ハ幾度幾分ナルカ。

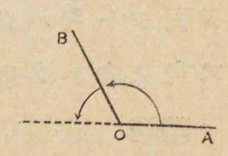
問 4. 一直線 AB 上ニ任意ノ一點 O ヲ取リ, O ヨリ一ツノ直線 OC ヲ引クトキハ, ∠AOC, ∠COB ノ和如何。



又 AB ノ同ジ側ニ O ヨリ直線 OC, OD ヲ引クトキハ, ∠AOC, ∠COD, ∠DOB ノ和如何。



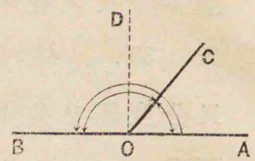
問 5. OA, OB ハ點 O ヨリ出ヅル二直線トス,今 OA ハ固定シ OB ガ動クトスレバ, ∠AOB ノ大サガ如何ナルトキ OA ト OB トガ一直線トナルカ。



15. 前數節ニヨリ容易ニ次ノ事實ヲ得ベシ。

(一)　一直線ガ他ノ一直線ニ會スルトキ,生ズル二ツノ隣接角ノ和ハ2直角ニ等シ.

說明　直線 OC ガ直線 AB ト O ニ於テ會スレバ



∠AOC+∠COB＝平角AOB
＝2直角

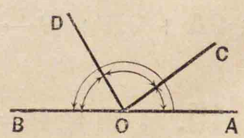
(二)　二ツノ隣接角ノ和ガ2直角ニ等シキトキハ,其共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス.

說明　∠AOC ト ∠COB トヲ二ツノ隣接角トシ,
∠AOC+∠COB＝2直角　ナルトキハ,
AO ト OB トハ一直線ヲナス。(上ノ圖ヲ見ヨ)

コレ此場合ニハ ∠AOC ト ∠COB トノ和ナル ∠AOB ハ平角ナルヲ以テ其二邊ナル OA ト OB トハ一直線ヲナスヲ以テナリ。　(11)

(三)　一直線上ノ一點ヨリ同ジ側ニ若干ノ直線ヲ引クトキハ,此等ノ直線ガ夫々其次ノ直線トナス角ノ和ハ2直角ニ等シ.

說明　直線OC, OD ガ直線 AB ト O ニ於テ會シ,共ニ AB ノ同ジ側ニ在ルトキハ,



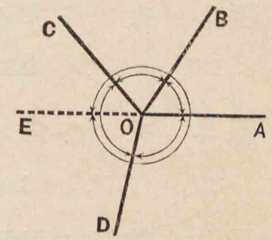
∠AOC+∠COD+∠DOB＝2直角

コレ此等ノ角ノ和ハ平角 AOB ナレバナリ。

又 OC, OD ノ如キ直線ハ幾ツアルモ同様ナリ。

(四)　一點ヨリ出ヅル若干ノ直線ガ夫々其次ノ直線トナス角ノ和ハ4直角ニ等シ.

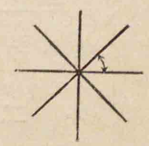
說明　一點 O ヨリ引ケル直線ヲ OA, OB, OC, OD トスレバ,



∠AOB+∠BOC+∠COD+∠DOA＝4直角

コレ AO ノ延長ヲ OE トセバ,此等ノ角ノ和ハ平角 AOE ト其共軛角(コレ亦平角)トノ和ニ等シキヲ以テナリ。

問 1.　一點ヨリ出ヅル八ツノ直線ガ八ツノ相等シキ角ヲ作ラバ,其各角ノ大サハ幾直角ナルカ。又幾度ナルカ。



問 2.　時計ノ分針ハ一時間ニ幾度ノ角ヲ廻ルカ。又一分間ニハ如何。又15分間ニハ如何。

16. 餘角, 補角. 二角ノ和ガ直角ニ等シキトキハ,其各角ヲ互ニ他ノ**餘角**ト云ヒ, 二角ノ和ガ 2 直角ニ等シキトキハ,其各角ヲ互ニ他ノ**補角**ト云フ。

問 **1.** 次ノ各角ノ餘角如何。

15°, 30°, 45°, 60°, $\frac{2}{3}$直角, 52°18′14″

問 **2.** 次ノ各角ノ補角如何。

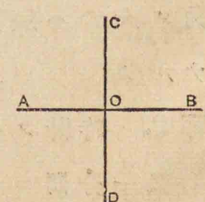
30°, 70°, 135°, $\frac{3}{2}$直角, 直角, 72°35′

*問 **3.** 前節ノ[1]及ビ[2]ハ夫々次ノ如ク述べ得ルコトヲ説明セヨ。

[1] 一直線ガ他ノ一直線ニ會スルトキ,生ズル二ツノ隣接角ハ互ニ補角ナリ。

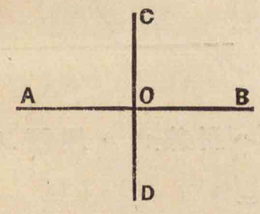
[2] 二ツノ隣接角ガ互ニ補角ナルトキハ,其共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス。

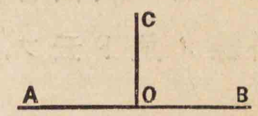
問 **4.** 二直線ガ相交ハリテナス四ツノ角ノ中,一ツガ直角ナラバ,他ノ三ツノ角モ亦直角ナリ。其ノ理如何。



* ヲ附シタル問題ハ重要ナルモノナリ。

17. 垂直ナル二直線, 垂線. 二ツノ直線ガ相交ハリテナス角ガ直角ナルトキハ, 此二直線ハ互ニ**垂直ナリ**(又ハ互ニ**直交ス**, **直角ニ交ハル**)ト云フ。 而シテ一ツガ他ノ上ニ立ツト考フル場合ニハ,前者ヲ後者ノ**垂線**ト云ヒ,其出會フ點ヲ垂線ノ**足**ト云フ。





上ノ圖ニ於テ AB ト CD トハ互ニ垂直ナリ。

又 CO ハ AB ノ垂線, AO ハ CD ノ垂線ナリ。

而シテ此等ヲ次ノ如ク記スコト多シ。

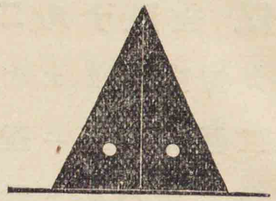
$$CO \perp AB, \qquad AO \perp CD$$

一直線ノ垂線ハ,其ノ直線ヲ邊トシ垂線ノ足ヲ頂點トスル平角ヲ二等分スベキヲ以テ, (10,11)

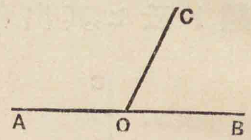
一直線ニ垂直ナル直線ハ其直線上ノ何レノ點ニ於テモ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

實際ニ垂線ヲ引クニハ三角定木ヲ用フ。

問　三角定木ノ直角ガ正シキカ否カヲ檢査スル方法ヲ考案セヨ。



18. 斜線. 一直線ト出會ヒ之ニ垂直ナラザル直線ヲ,其直線ノ斜線ト云ヒ,其出會フ點ヲ斜線ノ足ト云フ。



19. 定義. 前節ノ說述ハ「斜線」ナル**用語ノ意義**ヲ定ムルモノナリ。一般ニ

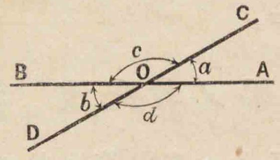
用語ノ意義ヲ定ムル說述ヲ其語ノ**定義**ト云フ。

問　次ノ各語ノ定義ヲ述ベヨ。

平面,　圖形,　平角,　隣接角,　直角,　補角,　餘角,　垂直ナル二直線,　垂線。

20. 定義 對頂角. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ノ延長ナルトキハ,此二角ヲ**對頂角**ト云フ

二直線AB, CDガOニ於テ交ハルトキハ,二組ノ對頂角(∠AOC, ∠BOD及ビ∠BOC, ∠AOD)ヲ作ル。分度器ヲ以テ此等ノ角ノ大サヲ測レ。



21. 對頂角ノ比較. 上ノ圖ニ於テ

$\angle a+\angle c$　モ　$\angle b+\angle c$　モ共ニ平角ナリ。

故ニ　　$\angle a+\angle c=\angle b+\angle c$

双方ヨリ$\angle c$ヲ減ズレバ,

$$\angle a=\angle b$$

同樣ニ　　$\angle c=\angle d$

依テ次ノ事實ヲ得。

對頂角ハ相等シ.

22. 定理. 前節ニ得タル事實ノ如ク,

定義及ビ既ニ眞ナルコトノ確定シタル事實ニヨリテ,推理ヲ以テ其眞ナルコトヲ論定セル事實ヲ**定理**ト云フ。

定理ノ眞ナルコトヲ論定スル方法ヲ定理ノ證明ト云フ。

問　本章ニ於テ學ビタル事柄ノ中,定理ト思フモノヲ列擧セヨ。

23. 幾何學ノ考究法. 觀察,實驗及ビ證明.　吾人ハ第21節ニ於テ對頂角ヲ比較シテ其相等シキコトヲ知リタリ。之ヲナスニハ先ヅ相交ハル二直線ヲ引キ,生ジタル所ノ對頂角ヲ**觀察**シテ其相等シカランコトヲ看破シタルベシ。次ニ**實驗**ニヨリテ之ヲ確メ得ント思ヒタルベシ。

サレド觀察ト實驗ノミニテハ未ダ之ヲ斷定スルコト能ハザルナリ。何トナレバ觀察ニハ誤リアルコトアリ,又實驗ハ如何ニ精密ニ行フト雖モ其結果ヲ絶對的ニ正確ナリトハ言フヲ得ザルノミナラズ,圖形ノ複雜ナル場合ニ,直線,角等ノ大小,位置等ヲ考ヘ,其總テニツキテ實驗ヲ完了スルコトハ困難ナレバナリ。

故ニ之ヲ嚴正ニ斷定センガタメニ,既ニ眞ナルコトヲ認メタル事項ニヨリテ一歩々々推論ヲ進メ之ヲ論理的ニ確定シタリ。而シテ此論定法ハ即チ定理ノ**證明**ナリ。

幾何學ハ既ニ確定シタル事項ヲ基礎トシテ各種ノ圖形ヲ觀察シ,必要アラバ實驗ヲ試ミ以テ種々ノ定理ヲ探索シ,且之ヲ證明シテ之ヲ確定シ,併セテ其等ノ定理ヲ應用シテ種々ノ計算及ビ作圖ノ方法ヲ考究スルヲ以テ目的トス。

此等ノ定理及ビ作圖法ハ實ニ百般ノ科學,工業等ノ基礎トナルモノニシテ,且其研究ノ方法ハ吾人ノ思考力ノ最モ効果アル鍛錬トナルモノナリ。

24. 公理.　定理ヲ證明スルニ,其基礎トナル事項ハ其全部ヲ證明ヲ經タルモノトスルコトハ不可能ナリ。故ニ其中何人モ眞ナルコトヲ認ムルモノ若干ヲ證明ナシニ眞ナリトシ,之ヲ以テ推理ノ根源トス。此事項ヲ**公理**ト云フ。即チ

吾人ノ經驗ニヨリテ眞ナリト認定スル事柄ニシテ推理ノ基礎トスルモノヲ**公理**ト云フ。

幾何學ニ於テ用フル公理ヲ次ニ揭グ.

公理一. **定マレル二點ヲ通過スル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.**

此事實ヲ二點ハ一直線ヲ決定スト云フ。

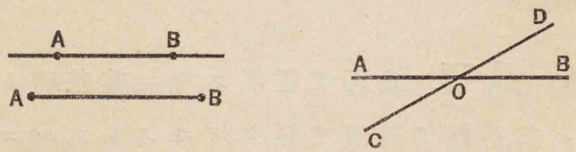
此公理ヨリ直ニ次ノコトノ眞ナルヲ知ル。

[1] 二點ヲ共有スル二直線ハ相合シテ同一直線トナル。

從テ 一部ヲ共有スル二直線ハ全ク相合ス。

[2] 相交ハル二直線ノ交點ハ唯一ツニ限ル。

從テ 相交ハル二直線ハ一點ヲ決定ス。



二點ヲ兩端トスルヤウニ線分ヲ引クコトヲ,其二點ヲ結ブト云フ。

公理二. **二點ヲ結ブ線分ノ長サハ其二點間ノ最短通路ナリ.**

二點ヲ結ブ線分ノ長サヲ其二點間ノ距離ト云フ。

公理三. **平面上ニアル一ツノ直線ハ平面ヲ二部分ニ分ツ,而シテ其各部分ニ各一點ヲ取レバ,其二點ヲ結ブ直線ハ必ズ初ノ直線ト交ハル.**

公理四. **平面ハ其任意ノ部分ヲ他ノ部分,又ハ他ノ平面ノ任意ノ部分ニ重ヌルコトヲ得.**

公理五. **圖形ハ其形及ビ大サヲ變ズルコトナク,其位置ノミヲ變ズルコトヲ得.**

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ置キ,兩者ヲ全ク密合セシメ得ルトキハ,此二ツノ圖形ハ**合同ナリ**,或ハ**全等ナリ**ト云フ。

合同ナルモノノ大サハ相等シ。

第11節ニ平角ハ皆相等シト斷定シタルハ此公理ニヨリタルナリ。

次ニ揭グルモノハ**普通公理**ト稱シ,幾何學ニ限ラズ算術,代數學ニモ用フルモノナリ。

[1] 全部ハ其總テノ部分ノ和ナリ。

從テ 全部ハ其一部分ヨリ大ナリ。

以下 A, B, C, D ハ量ヲ表ハシ,m, n ハ任意ノ正數ナリトス。

[2] $A=C,\ B=C$ ナラバ $A=B$

又 $A=C$, $B=D$, $C=D$ ナラバ, $A=B$

[3] $A>B$, $B>C$ ナラバ $A>C$

[4] $A>B$ ナラバ $mA>mB$

又 $A=B$ ナラバ $nA=nB$

第12節ニ於テ直角ハ相等シト斷定シタルハ之ニヨリタルモノナリ$\left(n=\frac{1}{2}\right.$トシテ$\left.\right)$。

又 $mA>mB$ ナラバ $A>B$

$nA=nB$ ナラバ $A=B$

[5] $A=B$, $C=D$ ナラバ

$A+C=B+D$ 及ビ $A\sim C=B\sim D$

第21節ニ於ケル對頂角ハ相等シキコトノ證明ニハ此第二ヲ用ヒタリ。

[6] $A>B$, $C=D$ ナラバ $A+C>B+D$,

及ビ $A-C>B-D$ 或ハ $C-A<D-B$

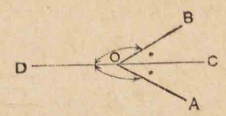
[7] $A>B$, $C>D$ ナラバ $A+C>B+D$

(此時 $A-C>B-D$ ナリトスベカラズ)

*問 1. 上ノ[5]ノ第二ヲ用ヒテ次ノ定理ヲ證明セヨ。

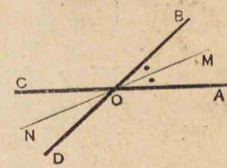
同角又ハ等角ノ補角ハ相等シ。又同角又ハ等角ノ餘角ハ相等シ。

問 2. 前問題ヲ用ヒテ次ノ定理ヲ證明セヨ。



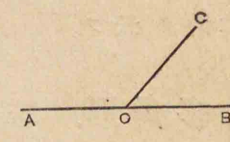
角ノ二邊ガ其角ノ二等分線ノ延長トナス角ハ相等シ。

問 3. 第21節ノ定理ト普通公理[2]トニヨリテ次ノ定理ヲ證明セヨ。



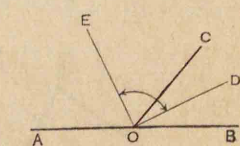
角ノ二等分線ノ延長ハ其角ノ對頂角ヲ二等分ス。

問 4. 一直線 OC ガ他ノ直線 AB ト O ニテ出會ヒ,二ツノ不等ナル角ヲ作ルトキハ,其一ツハ鋭角ニシテ他ハ鈍角ナリ。之ヲ證明セヨ。



若シ ∠BOC ガ 60° ナラバ ∠COA ハ何度ナルカ。而シテ此二角ノ二等分線ノナス角ハ何度カ。

*一般ニカヤウナル二角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ。



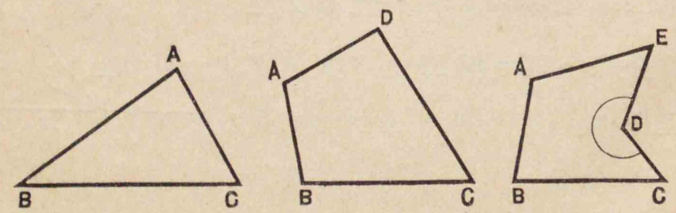
第二章

三角形ノ合同

25. **定義** **平面形.** 線ヲ以テ圍マレタル平面ノ有限ノ部分ヲ**平面形**ト云フ。

而シテ其部分ヲ平面形ノ**內**ト云ヒ,他ノ部分ヲ其**外**ト云フ。

多角形. 若干ノ線分ニテ圍マレタル平面形ヲ**多角形**ト云フ。其各線分ヲ多角形ノ**邊**ト云ヒ,二隣邊ノ作ル角ヲ多角形ノ角ト云ヒ,其頂點ヲ多角形ノ頂點ト云フ。



多角形ノ邊數,角數及ビ頂點ノ數ハ相等シ。

多角形ノ總テノ邊ノ長サノ和ヲ其周ト云フ。

26. **定義** **三角形.** 三ツノ角ヲ有スル多角形ヲ**三角形**ト云フ。

四角形,五角形,六角形等. 四ツ,五ツ,六ツノ角ヲ有スル多角形ヲ夫々**四角形,五角形,六角形**ト云フ, 他ハ之ニ準ズ。

四角形,五角形,六角形等ヲ夫々**四邊形,五邊形,六邊形**等トモ云フ。

三角形ハ多角形中邊數ノ最少ナルモノナリ。

多角形ヲ表示スルニハ,其頂點ヲ表ハス文字ヲ順ニ並記ス。例ヘバ三角形**ABC**,四角形**ABCD**,五角形**ABCDE** 等ノ如シ。

三角形**ABC**ハ之ヲ△**ABC**ト記スコト多シ。

問 三直線ハ常ニ三角形ヲ作ルカ。四直線ハ常ニ四角形ヲ作ルカ。又幾ツノ三角形ヲ作ルカ。

27. **三角形ノ合同.**

定理 **二ツノ三角形ニ於テ,次ノモノガ夫々相等シキトキハ,此兩三角形ハ合同ナリ.**

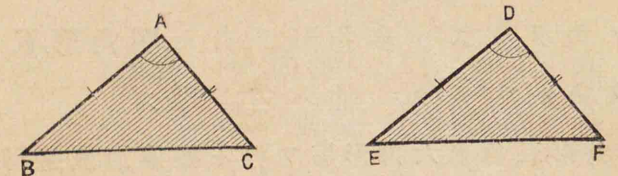
而シテ等邊ハ夫々等角ニ對ス.

【一】二邊ト其夾角. **【二】二角ト其頂點間ノ邊.**

【一】 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ,

$AB=DE$, $AC=DF$ ニシテ且 $\angle A=\angle D$ ナラバ,

此兩三角形ハ合同ナルベシ。



今之ヲ證明センニ, $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ノ上ニ置キ,頂點 A ヲ頂點 D ノ上ニ重ネ,邊 AB ヲ邊 DE ノ上ニ重ヌルトキハ, $AB=DE$ ナル故,頂點 B ハ頂點 E ノ上ニ重ナリ,更ニ角 A ヲ之ニ等シキ角 D ノ上ニ重ヌルトキハ,邊 AC ハ邊 DF ノ上ニ重ナリ, $AC=DF$ ナル故,頂點 C ハ頂點 F ノ上ニ重ナル。

故ニ邊 BC ハ邊 EF ノ上ニ重ナル。 (公理一)

故ニ $\triangle ABC$ ハ全ク $\triangle DEF$ ニ重ナル。

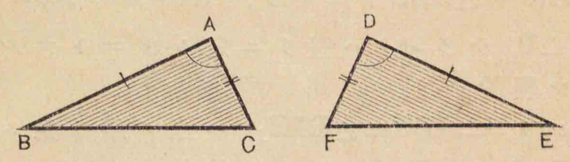
故ニ此兩三角形ハ合同ナリ。

而シテ $BC=EF$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$

注意一. 上ノ如ク二ツノ圖形ヲ重ネ合セテ,或事柄ヲ證明スル方法ヲ**重置法**ト云フ。

注意二. 兩三角形ガ上圖ニ示スガ如キトキハ,其一ツヲ其儘他ノ上ニ重ヌルコトヲ得レド

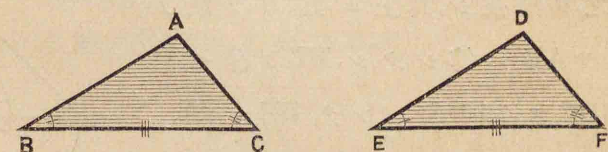
モ,若シ次ノ圖ニ示スガ如キ場合ニハ其一ツヲ裏返ヘシテ之ヲ他ノ上ニ重ヌルヲ要ス。サレド其合同ナルコトニ於テハ何レモ同一ナリ。



【二】 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ

$\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$, $BC=EF$ ナラバ,

此兩三角形ハ合同ナルベシ。



(重置法ニヨリテ學生之ヲ證明セヨ)

兩三角形ガ合同ナルコトヲ記スニハ $\equiv$ ナル記號ヲ用フ。例ヘバ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ト記ス。

28. 假設,終結. 定理ハ假設及ビ終結ヨリ成ル。定理ニ於テ假リニ定ムル事柄ヲ假設ト云ヒ,假設ヨリ生ズベシト主張スル事柄ヲ終結ト云フ。

而シテ假設ヨリ終結ヲ得ル理由ハ即チ定理ノ

證明ナリ。

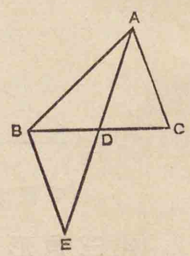
例ヘバ前節ノ定理[一]ニ就キテ云ヘバ次ノ如シ。

「△ABC ト △DEF トニ於テ, AB=DE, AC=DF ∠A=∠D ナラバ」ハ假リニ定ムルコトナルヲ以テコレ假設ナリ。

而シテ「△ABC≡△DEF」ハ上ノ通リ定ムルトキニ生ズル結果ニシテ,コレ終結ナリ。

問 1. 前節ノ定理[二]ノ假設及ビ終結ヲ述ベヨ。

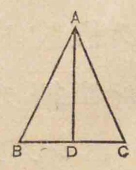
問 2. △ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トシ, AD ヲ結ビ,之ヲ延長シ,其上ニ點 E ヲ取リ DE ヲ AD ニ等シクシ, BE ヲ結ベバ, △BDE≡△CDA ニシテ BE=CA, ∠BED=∠CAD, ∠DBE=∠DCA ナリ。之ヲ證明セヨ。



29. 定義 三角形ノ中線.

三角形ノ頂點ト其對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ三角形ノ**中線**ト云フ。

問 △ABC ノ頂點 A ヨリ出ヅル中線ガ邊 BC ノ垂線ナラバ,二邊 AB,AC ハ相等シ。之ヲ證明セヨ。

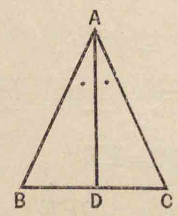


30. 定義 二等邊三角形.

二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**或ハ**等脚三角形**ト云フ。

二等邊三角形ニ於テハ,其二ツノ相等シキ邊ノ會點ヲ特ニ其**頂點**ト云ヒ,頂點ニ於ケル角ヲ其**頂角**,其對邊ヲ其**底邊**又ハ**底**ト云ヒ,底邊ノ端ニアル二ツノ角ヲ其**底角**ト云フ。

31. 定理 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ,其ノ底邊ヲ垂直ニ二等分ス.(1)



(第27節ノ定理〔一〕ヲ用ヒテ之ヲ證明セヨ)

系 一.(2) 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シ。

系 二. 三角形ノ三邊ガ相等シキトキ(之ヲ**等邊三角形**ト云フ)ハ其三角ハ相等シ。

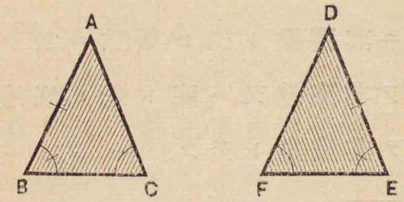
問 二等邊三角形ノ兩等邊ノ延長ト底邊トノナス角ハ相等シキコトヲ證明セヨ。

(1) 底邊ニ垂直ニシテ且之ヲ二等分スル(其中點ヲ過グル)コトナリ。
(2) 定理ヨリ直ニ推定シ得ル事柄ヲ其定理ノ系ト云フ。

32. **定理** **三角形ノ二角ガ相等シキトキハ,之ニ對スル二邊ハ相等シ.**

假設 △ABC ニ於テ ∠B=∠C トス。

終結 AB=AC



證明 △ABC ヲ裏返シタルモノヲ △DFE トシ, D, E, F ガモト A, B, C ナリシトス。

兩三角形 ABC, DFE ニ於テ,

∠B=∠C=∠F,　∠C=∠B=∠E

ニシテ　　BC=FE

故ニ　　△ABC≡△DFE　　(27〔二〕)

故ニ　　AB=DF

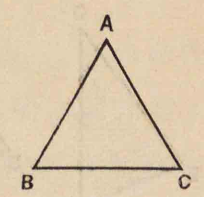
然ルニ兩三角形ハ裏返シナル故,

DF=AC

故ニ　　AB=AC

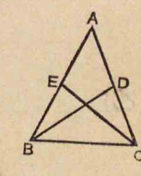
系 三角形ノ三角ガ相等シキトキハ,其三邊ハ相等シ。

33. **定義** **正三角形.** 三邊ガ相等シキ(從テ三角モ亦相等シキ)三角形ヲ**正三角形**ト云フ。



等邊三角形ハ即チ正三角形ナリ。

問 1. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ出ヅル中線ハ相等シ。之ヲ證明セヨ。[1]



(兩三角形 BCD, CBE ニ着目セヨ)

問 2. 正三角形ノ三中線ハ相等シ。

34. **定理** **一ツノ三角形ノ三邊ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ三邊ニ等シキトキハ,此兩三角形ハ合同ナリ.**

假設 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ,

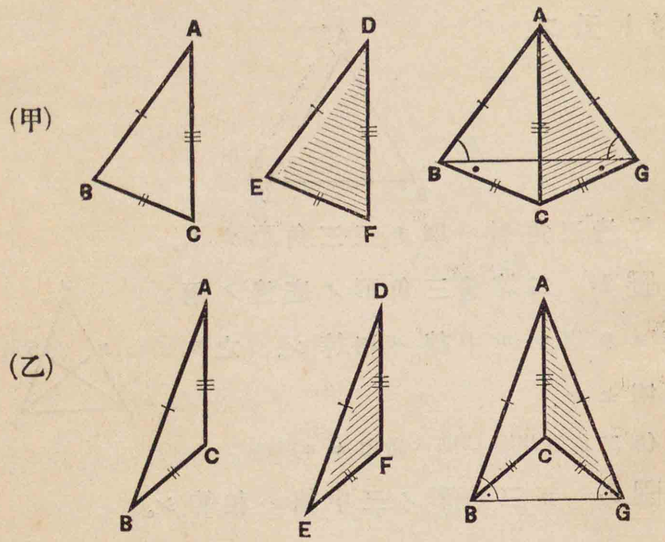
AB=DE, BC=EF, CA=FD トス。

終結 △ABC ≡ △DEF

證明 △DEF ノ邊 DF ヲ △ABC ノ邊 AC ニ重ネ

[1] 以下ノ問題ニハ此一句「之ヲ證明セヨ」ヲ略スルコトヽス。

此兩三角形ヲ AC ノ兩側ニ置キ,點 E ノ來タレル點ヲ G トシ, BG ヲ結ベバ,



AG=AB ナル故,　∠ABG=∠AGB　(31系一)

又 CG=CB ナル故,　∠CBG=∠CGB　(同上)

故ニ甲乙何レノ場合モ ∠ABC=∠AGC (普通公理[5])

故ニ兩三角形 ABC, AGC ハ二邊ト其夾角トヲ夫々等シクスルヲ以テ合同ナリ。

故ニ　　△ABC ≡ △DEF

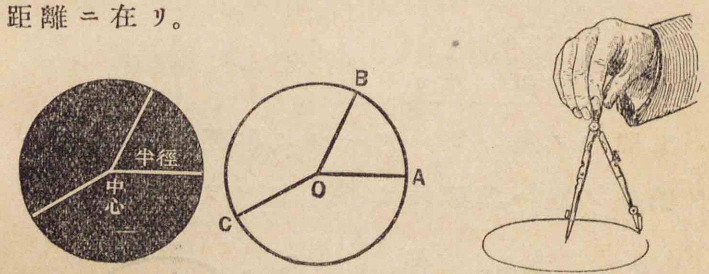
問　二等邊三角形ノ頂點ヨリ出ヅル中線ハ底邊ニ垂直ナリ。又頂角ヲ二等分ス。

第三章

圓

35. 圓, 圓周.　一線分 OA ヲ其一端 O ヲ固定シテ,平面上ニ廻轉シ原位置ニ歸ヘラシムレバ,他ノ端 A ハ一ツノ閉デタル曲線 ABC ヲ畫ク。

而シテ此曲線上ノ點ハ皆 O ヨリ OA ニ等シキ距離ニ在リ。



定義　圓トハ一ツノ曲線ニテ圍マレタル平面形ニシテ,此曲線ハ其上ノ點ガ皆或一定ノ點ヨリ等距離ニ在ルモノナリ。此曲線ヲ**圓周**ト云ヒ,其一定ノ點ヲ圓ノ**中心**ト云フ。而シテ中心ヨリ圓周マデ引ケル線分ヲ圓ノ**半徑**ト云フ。

故ニ　同ジ圓ノ半徑ハ皆相等シ

圓又ハ圓周ヲ表ハスニハ通例圓周上ノ三點ヲ表ハス文字ヲ列記ス。

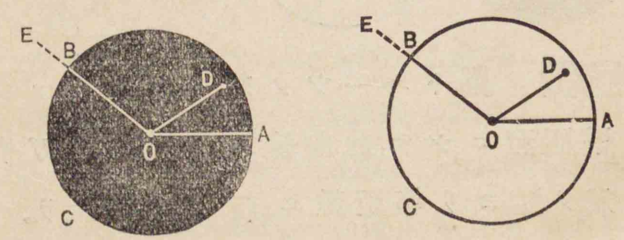
例ヘバ圓ABC，圓周ABCノ如シ。

時ニハ圓ヲ表ハスニ其中心ヲ表ハス文字ヲ以テスルコトアリ。例ヘバ圓Oト云フガ如シ。

圓周ニテ圍マルル平面ノ部分(上ノOAガ廻轉シタルトキ觸レタル部分)ヲ**圓內**ト云ヒ，他ノ部分ヲ**圓外**ト云フ。

中心ハ圓內ニ在リ。

又圓內ノ點ハ何レカ一ツノ半徑ノ上ニ在リ，又圓外ノ點ハ其延長ノ上ニ在ルヲ以テ，



一點ヨリ中心マデノ距離ハ,其點ガ圓內ニ在ラバ半徑ヨリ小ニシテ,其點ガ圓周上ニ在ラバ半徑ニ等シク,其點ガ圓外ニ在ラバ半徑ヨリ大ナリ。

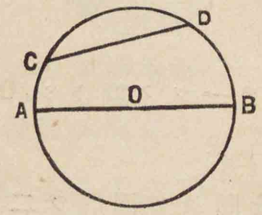
又逆ニ　一點ヨリ中心マデノ距離ガ,其圓ノ半

徑ヨリ小ナラバ其點ハ圓內ニ在リ,其距離ガ半徑ニ等シキトキハ其點ハ圓周上ニ在リ,又其距離ガ半徑ヨリ大ナラバ其點ハ圓外ニ在リ。

故ニ　一點ヨリ等シキ距離ニ在ル點ハ皆其點ヲ中心トシ其距離ヲ半徑トスル圓周上ニ在リ。

從テ　同ジ中心ヲ有シ等シキ半徑ヲ有スル圓ハ皆相合シテ唯一ツノ圓トナル。

36. 定義 **弧.** 圓周ノ一部分ヲ弧ト云フ。



弦. 圓周上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ弦ト云ヒ,中心ヲ通過スル弦ヲ特ニ**直徑**ト云フ。

上ノ圖ニ於テCDハ弦ニシテ,ABハ直徑ナリ。

直徑ハ皆中心ニテ二等分セラル。

從テ　直徑ハ半徑ノ二倍ナリ。

依テ　同ジ圓ノ直徑ハ皆相等シ。

又圓ノ中心ハ其直徑ノ中點ナルヲ以テ,

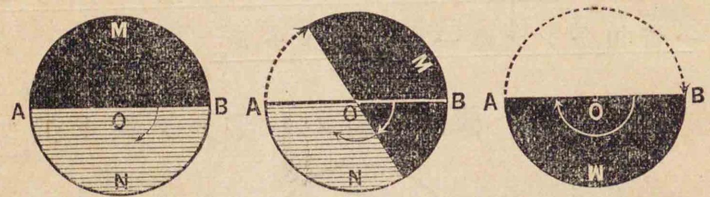
圓ノ中心ハ唯一ツアルノミ。

故ニ 二圓ガ相合スレバ,其中心モ亦相合ス。

又 合同ナル圓(等圓)ノ半徑ハ相等シ。

逆ニ 相等シキ半徑ヲ有スル圓ハ合同ナリ。

37. 定理 直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分ス.



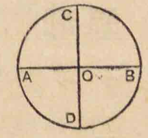
假設 AMBN ヲ一ツノ圓トシ,O ヲ其中心, AB ヲ其一ツノ直徑トス。

終結 AB ハ此圓及ビ圓周ヲ二等分ス。

證明 AB ガ圓ヲ分チタル二ツノ部分ヲ AMB 及ビ ANB トシ, O ヲ固定シ之ヲ中心トシテ AMB ヲ廻轉シ,之ヲ ANB ノ上ニ來ラシムレバ,弧 AMB 上ノ點ハ皆圓 O ノ周上ニアルベキヲ以テ,半徑 OB ガ 2 直角ダケ廻轉シタルトキ AMB ハ全ク ANB ノ上ニ重ナル。故ニ此二ツノ部分ハ全ク相等シ。

故ニ直徑 AB ハ此圓及ビ圓周ヲ二等分ス。

系 直交スル二ツノ直徑ハ圓及ビ圓周ヲ四等分ス。

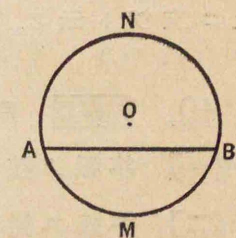


38. 定義 **半圓.** 直徑ニテ分タレタル圓ノ二部分ヲ各半圓ト云フ。

象限. 直交スル二ツノ直徑ニテ分タレタル圓ノ四部分ヲ各象限(四分圓)ト云フ。

弓形. 弦ニテ分タレタル圓ノ二部分ヲ各弓形ト云フ。

弓形ノ大ナル方ヲ**優弓形**,小ナル方ヲ**劣弓形**ト云フ。



劣弓形ハ半圓ヨリ小ナリ。

中心ハ優弓形内ニ在リ。

又合セテ全圓周トナル二ツノ弧ヲ**共軛弧**ト云ヒ,其大ナルモノヲ**優弧**,小ナルモノヲ**劣弧**ト云フ。

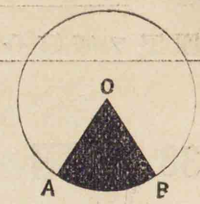
但シ單ニ弧ト云ハバ通例劣弧ヲ指スモノトス。

而シテ 劣弧ハ半圓周ヨリ小ナリ。

圖ニ於テ二ツノ弓形 AMB, ANB ノ弧 AMB, ANB ハ共軛弧ニシテ AMB ハ劣弧ナリ。

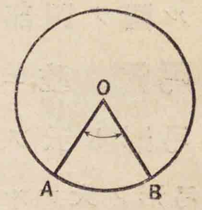
扇形. 二ツノ半徑ノ間ニアル圓ノ部分ヲ**扇形**ト云フ。

圖ニ於テ OAB ハ扇形ナリ。



39. **定義** **中心角.** 二ツノ半徑ノ夾メル角ヲ圓ノ**中心角**ト云フ。

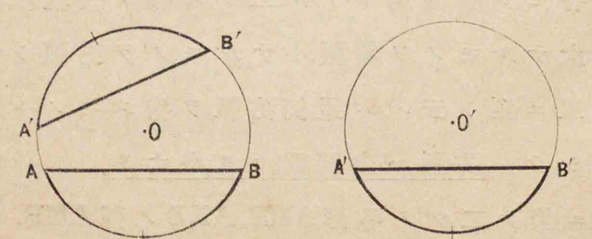
中心角ハ其角內ニアル弧ノ上ニ立ツト云フ。



40. **定理** **同圓又ハ等圓ニ於テ,**

【一】等弧ノ弦ハ相等シ.

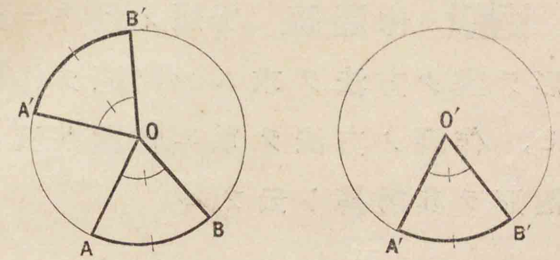
【二】等弦ニ對スル弧ハ相等シ.



【三】相等シキ中心角ニ對スル弧ハ相等シ.

【四】等弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シ.

【五】相等シキ中心角ヲ有スル扇形ハ合同ナリ.



(上ノ定理ハ皆重置法ニヨリテ證明スルヲ得。學生之ヲ試ミヨ)

問 1. 同圓又ハ等圓ニ於テ相等シキ中心角ニ對スル弦ハ相等シ。

(上ノ〔三〕ト〔一〕トニヨリ證明シ,又第27節〔一〕ヲ用ヒテモ證明セヨ)

問 2. 圓ヲ畫キ之ヲ切リ拔キ之ヲ折リ合セテ其中心ヲ求メヨ。

第四章

作圖題

41. **定義** 作圖題. 所題ノ條件ニ適スル圖形ヲ畫ク方法ヲ求ムル問題ヲ作圖題ト云ヒ, 作圖ノ方法ヲ單ニ作圖ト云ヒ,得タル圖形ヲ其解答ト云フ。

42. 作圖ノ器具. 作圖題ヲ解クニ使用スルヲ得ト定ムル器具ハ次ノ二種ニ限ル。

〔1〕 目盛リナキ定木.

〔2〕 兩脚器　即チ　こんぱす.

〔1〕ハ直線ヲ引クニ用ヒ,〔2〕ハ圓周ヲ畫クニ用フ。

43. 作圖ノ公法. 次ノ二ツノ作圖ハ初ヨリナシ得ルモノトシ,之ヲ基礎トシテ順次他ノ作圖ヲナスモノトス。

〔1〕 任意ノ二點ヲ通過スル直線ヲ引クコト.

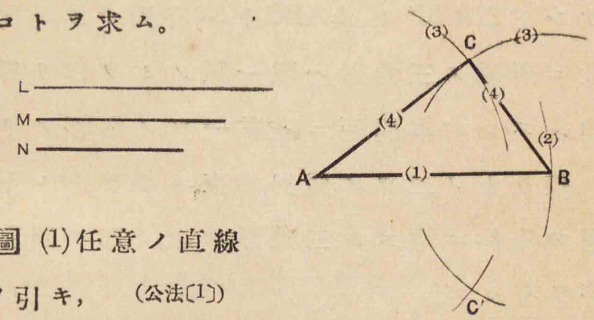
コレニヨリテ所設ノ線分ヲ延長スルコトヲ得。

〔2〕 任意ノ點ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫クコト.

44. **作圖題** **三邊ガ夫々所設ノ三線分ニ等シキ三角形ヲ作レ.**

題意 L, M, N[1]ヲ所設ノ三線分トス。

夫々 L, M, N ニ等シキ三邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコトヲ求ム。



作圖 (1)任意ノ直線 AB ヲ引キ,　(公法〔1〕)

(2) AB 上ノ一點 A ヲ中心トシ L ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫キ,　(公法〔2〕)

此圓周ト AB トノ交點ヲ B トス。

(3) A 及ビ B ヲ中心トシ,夫々 M 及ビ N ニ等シキ半徑ノ圓周ヲ畫キ,其交點ノ一ツヲ C トス。(公法〔2〕)

(4) AC 及ビ BC ヲ結ブ。　(公法〔1〕)

然ルトキハ△ABC ハ所要ノ三角形ナリ。

證明 △ABC ノ三邊 AB, AC, BC ハ夫々所設ノ三線分 L, M, N ニ等シ。　(作圖)

(1) 線分ヲ表ハスニカク一ツノ文字ヲ以テスルコトアリ。

故ニ此三角形ハ所題ノ條件ニ適ス。

注意 作圖(3)ノ二ツノ圓周ハ點Cノ外尚一ツノ點ニ於テ交ハル,此交點ヲC′トセバ△ABC′モ亦所題ノ條件ニ適スルモノナリ。

サレド△ABC′ト△ABCトハ合同ナリ。 (34)

故ニ所要ノ三角形ハ唯一種ノミヲ作リ得。

換言スレバ本問題ニハ唯一ツノ解答アリ。

但シ上ノ二ツノ圓周ガ交ハラザルトキハ,所題ノ條件ニ適スル三角形ナシ。即チ問題ハ解答ヲ有セズ。

此等ノ事項ニ關シテハ後篇ニ詳論スベシ。

45. 次ノ作圖題ハ容易ニ解クコトヲ得ベシ。

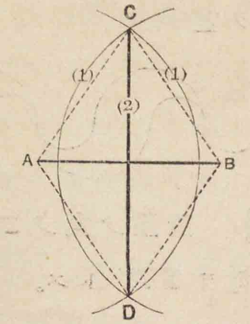
作圖題 **所設ノ線分ニ等シキ邊ヲ有スル正三角形ヲ作レ。**

問 底邊ト他ノ邊トヲ與ヘラレテ二等邊三角形ヲ作レ。

46. **作圖題** **所設ノ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線(之ヲ垂直二等分線ト云フ)ヲ引ケ。**

題意 所設ノ線分ヲABトス。

ABヲ垂直ニ二等分スル直線ヲ引クコトヲ求ム。



作圖 (1) ABノ兩端ヲ中心トシ,等シキ半徑ヲ有シテ相交ハル二ツノ圓周(圓周ノ全部ヲ畫クニ及バズ)ヲ畫キ,其交點ヲC及ビDトス。 (公法〔2〕)

(2) CDヲ結ベ。 (公法〔1〕)

然ルトキハ,CDハ所要ノ直線ナリ。

證明 AC, BC, AD, BDヲ結ベバ,

$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (34)

∴ $\angle ACD = \angle BCD$

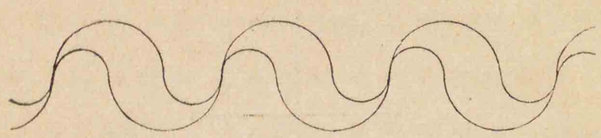
而シテ△ACBハ二等邊三角形ニシテ∠ACBハ其頂角ナリ。 (作圖)

故ニCDハABヲ垂直ニ二等分ス。 (31)

注意 所要ノ直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。 (3及ビ17)

*問 1. 所設ノ線分ヲ直徑トスル圓周ヲ畫ケ。

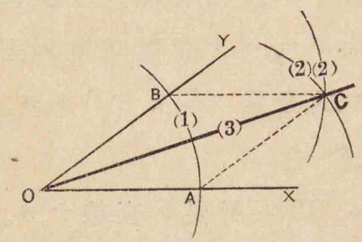
問 2. 次ノ圖ヲ畫ケ。



47. 作圖題 所設ノ角ノ二等分線ヲ引ケ.

題意 所設ノ角ヲ XOY トス。

∠XOY ノ二等分線ヲ引クコトヲ求ム。



作圖 (1) 頂點Oヲ中心トシ任意ノ圓周ヲ畫キ,二邊ト夫々A及ビBニ於テ交ハラシム。 (公法〔2〕)

(2) A及ビBヲ中心トシ,相等シキ半徑ヲ有シ相交ハル二ツノ圓周ヲ畫キ,其交點ヲCトス。(公法〔2〕)

(3) 直線OCヲ引ケ。 (公法〔1〕)

然ルトキハOCハ所要ノ二等分線ナリ。

證明 兩三角形 AOC, BOC ノ三邊ハ夫々相等シ。 (作圖)

故ニ $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$ (34)

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$

故ニOCハ所設ノ角XOYヲ二等分ス。

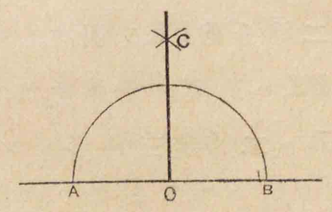
注意 解答ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

問 所設ノ角ヲ四等分セヨ。又八等分セヨ。

48. 作圖題 所設ノ直線上ノ所設ノ點ヲ過ギ其直線ニ垂線ヲ引ケ.

題意 ABヲ所設ノ直線トシ,Oヲ其上ノ所設ノ點トス。

Oヲ過ギABニ垂線ヲ引クコトヲ求ム。



作圖 平角AOBノ二等分線OCヲ引ケ。(47)

然ルトキハOCハ所要ノ垂線ナリ。

證明 略ス。

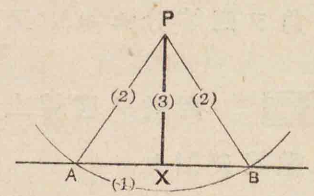
注意 解答ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

問 45° 及ビ 135° ノ角ヲ作レ。

49. 作圖題 所設ノ直線外ノ所設ノ點ヨリ此直線ニ垂線ヲ引ケ.

題意 所設ノ直線ヲ AB, 所設ノ點ヲ P トス。

P ヨリ AB ヘ垂線ヲ引クコトヲ求ム。



作圖 (1) P ヲ中心トシ, AB ニ交ハル任意ノ圓周ヲ畫キ,其交點ヲ A 及ビ B トス。 (公法〔2〕)

(2) AP 及ビ BP ヲ結ブ。 (公法〔1〕)

(3) ∠APB ノ二等分線 PX ヲ引ク。 (47)

然ルトキハ PX ハ所要ノ垂線ナリ。

證明 △PAB ハ二等邊三角形ニシテ P ハ其頂點ナリ。 (作圖)

故ニ PX ハ AB ニ垂直ナリ。 (31)

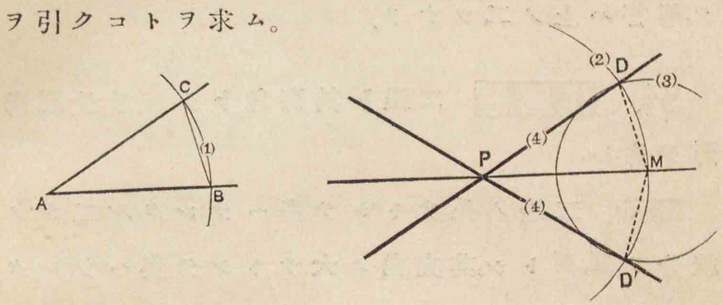
即チ PX ハ P ヲ過ギル AB ノ垂線ナリ。

注意 解答ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

50. 作圖題 所設ノ直線上ノ所設ノ點ニテ,其直線ト所設ノ角ニ等シキ角ヲ作ル直線ヲ引ケ.

題意 所設ノ直線ヲ PM, 所設ノ點ヲ P トシ, 所設ノ角ヲ BAC トス。

P ヲ過ギ, PM ト ∠BAC ニ等シキ角ヲ作ル直線ヲ引クコトヲ求ム。



作圖 (1) A ヲ中心トスル任意ノ圓周ヲ畫キ, B 及ビ C ニ於テ ∠A ノ二邊ト交ハラシム。 (公法〔2〕)

(2) P ヲ中心トシ前ノ圓ノ半徑ニ等シキ半徑ノ圓周ヲ畫キ, M ニ於テ PM ト交ハラシム。 (公法〔2〕)

(3) M ヲ中心トシ BC ニ等シキ半徑ノ圓周ヲ畫キ,作圖(2)ノ圓周ト D 及ビ D′ ニ於テ交ハラシム。

(4) 直線 PD 及ビ PD′ ヲ引ク。 (公法〔1〕)

PD 及ビ PD′ ハ所要ノ直線ナリ。

證明 三角形 MPD, MPD′ 及ビ BAC ハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ。

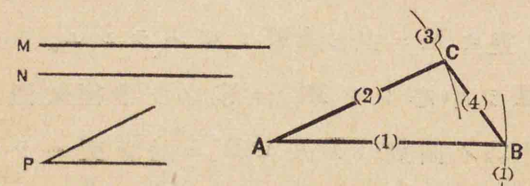
故ニ ∠MPD 及ビ ∠MPD′ ハ共ニ ∠BAC ニ等シ

次ニ作圖(2)ノ圓周ハPMトMノ外尙一ツノ點ニ於テ交ハルヲ以テ,Dノ如キ點尙二ツヲ得レドモ,其等ハ夫々直線PDトPD′ノ上ニ在ルベキヲ以テ,解答ハ上ノ二ツナリ。

51. 作圖題 二邊ト其夾角トヲ知リテ三角形ヲ作レ.

題意 二邊ノ長サトシテ與ヘラレタル二ツノ線分ヲM,Nトシ,其夾角ノ大サトシテ與ヘラレタル角ヲ∠Pトス。

二邊ガ夫々M,Nニ等シクシテ,其夾角ガ∠Pニ等シキ三角形ヲ畫クコトヲ求ム。



作圖 (1) Mニ等シキ線分ABヲ引ク。(公法〔1〕及ビ〔2〕)

(2) AヨリABト∠Pニ等シキ角ヲ作ル直線ACヲ引ク。 (50)

(3) Aヲ中心トシNニ等シキ半徑ヲ有スル圓周

ヲ畫キ,ACトノ交點ヲCトス。 (公法〔2〕)

(4) BCヲ結ブ。 (公法〔1〕)

然ラバ△ABCハ所要ノ三角形ナリ。

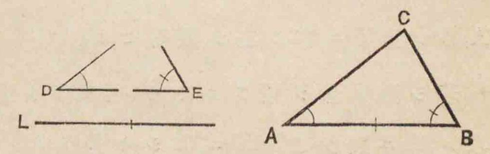
證明 (學生之ヲナスベシ)

注意 所要ノ三角形ハ唯一ツニ限ル。

問 頂角ト其邊トヲ知リテ等脚三角形ヲ作レ。

52. 作圖題 二角ト其頂點間ノ邊トヲ知リテ三角形ヲ作レ.

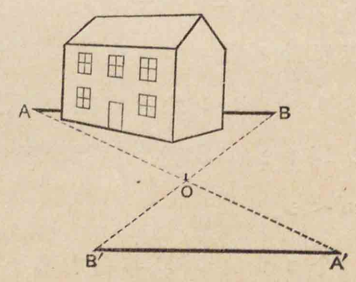
(前節ノ解法ニ準ジテ學生之ヲ解クベシ)



53. 二點間ノ距離ノ簡易測量.

A,Bノ中間ニ障害物アリテ其距離ヲ直接ニ測定スルコト困難ナル二點トシ,其距離ヲ測定セントス。

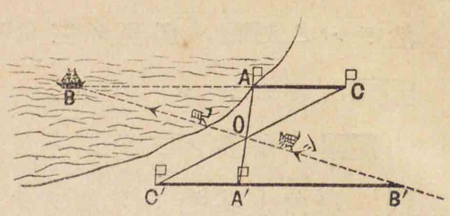
A及ビBマデ一直線ニ歩ミ得ベキ一點Oヲ取リ,



AヨリOヲ經テ一直線ニOA′=OAナルヤウニ點A′ヲ求メ,又BヨリOヲ經テOB′=OBナルヤウニB′ヲ求メ,A′B′

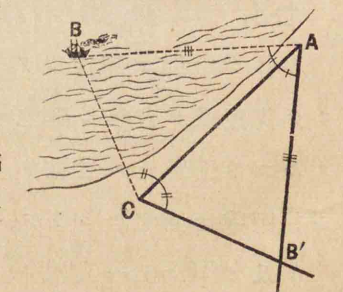
間ノ距離ヲ測定セバ,コレAB間ノ距離ニ等シ。

若シ二點ノ中Aダケ近ヅキ得ルトキハ次ノ如クス。

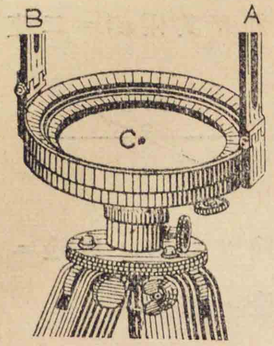


AB上又ハ其延長上ニ任意ノ一點Cヲ取リ,又他ニ一點Oヲ定メAO, COヲ測定シ,其延長上ニA′及ビC′ヲ夫々OA′=OA, OC′=OCナルヤウニ取リ,直線C′A′又ハ其延長上ニOトBトヲ一直線ニ見通スヤウニ一點B′ヲ取レバ,線分B′A′ノ長サハA,Bノ距離ニ等シ(之ヲ證明セヨ)。

若シ測角器ヲ用フルトキハ,Aヨリ適宜ニ一線分ACヲ求メ,Aニ於テ∠CABニ等シキ角ヲACト其反對ノ側ニ作ル直線ヲ作リタリトシ,又Cニ於テCAト∠ACBニ等シキ角ヲ其反對ノ側ニ作ル直線CB′ヲ作リタリトシ,此兩直線ノ交點ヲB′トシ,AB′間ノ距離ヲ測定スベシ。

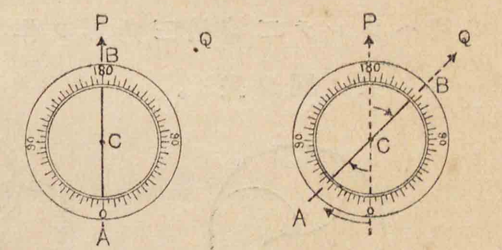


今ヨリ約2500年前有名ナル希臘ノ數學者たーれす(Thales, 紀元前640年頃ヨリ550年頃ノ人)ハ此方法ニヨリテ海岸ヨリ海上ニ在ル船マデノ距離ヲ測リタリト云フ。



コヽニ示ス圖ハ平盤測角器ナリ,中央ノ軸Cノ周リニ廻轉スル圓盤ト其一直徑ノ兩端ニ直立スル二ツノ視孔A,Bト其盤ノ外側ニ廻轉スル度盛ヲ附ケタル圓輪トヨリ成ル。

視孔Aヲ外輪面ノ0°ノ處ニ合セ,盤全部ヲ廻轉シテABノ方向ガ目標ノ一ツPニ合シタルトキ外輪ノ廻轉ヲ止メ,内側ノ盤ノミヲ廻轉シテABノ方向ヲ他ノ目標Qニ合セシムレバ,Aノ處ニアル度數(外輪面ノ)ヲ讀ミテ∠PCQノ大サヲ知ルコトヲ得。



又盤ノ中央ニハ磁針アリテ之ニヨリテモ地面上ノ直線ノ方向ヲ定ムルコトヲ得。

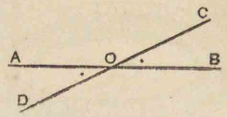
問題 1

1. 或角ノ補角ト其角ノ餘角トノ和ガ150°ナリ,其角ハ何度カ。(求ムル角ヲx°トセヨ)

*2.　一直線AB上ノ一點Oヲ過ギ其兩側ニ二直線OC, ODアリテ

∠AOD=∠BOC ナルトキハ,

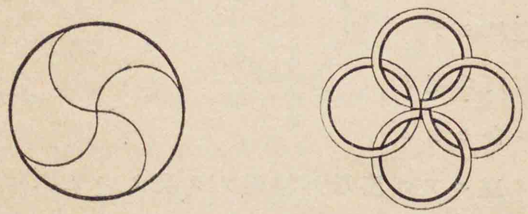
CODハ一直線ヲナス。



3.　三角形ノ一角ノ二等分線ガ其角ノ對邊ニ垂直ナルトキハ,其三角形ノ二邊ハ相等シ。

4.　頂角ト頂點ヨリ底邊ニ至ル垂線ノ長サトヲ與ヘラレテ二等邊三角形ヲ作レ。

5.　次ノ圖ヲ畫ケ。



回顧, 復習.

學生ハ次ニ揭グル項目ニヨリテ既修事項ヲ能ク理解シタルカ否カヲ考ヘ,且既修事項ヲ總括スベシ。

一. 角.

(1)　平角, 直角, 銳角, 鈍角, 補角, 餘角。

(2)　垂線, 斜線。

(3)　定義, 定理, 公理, 定理ノ假設ト終結。

(4)　一點ヨリ出ヅル若干ノ直線ニテ生ズル角ニ關スル定理。(四ツ)

二. 三角形.

(1)　兩三角形ノ合同ニ關スル定理。(三ツ)

(2)　二等邊三角形ト正三角形。

(3)　二等邊三角形ニ關スル定理。

三. 圓.

(1)　圓, 圓周, 中心, 半徑。

(2)　或點ト圓ノ中心トノ距離ト其點ノ位置トニ關スル定理。

(3)　弧, 弦, 直徑。

(4)　直徑ト圓及ビ圓周トノ關係。(定理)

(5)　半圓, 象限(四分圓), 弓形, 扇形, 中心角。

(6)　同圓及ビ等圓ニ於ケル弧弦及ビ中心角ニ關スル定理。

四. 作圖題.

(1)　作圖題, 作圖ト解答。

(2)　作圖ノ器具。

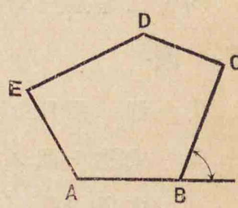
(3)　作圖ノ公法。

(4)　學ビタル作圖題。(基礎作圖)

第二篇
直線圖形

第一章
平行線

54. **定義** **多角形ノ外角.** 多角形ノ一邊ト之ニ隣ル邊ノ延長トノ夾ム角ヲ其外角ト云フ。



外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ其内角ト云フコトアリ。

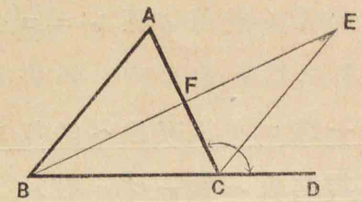
55. **定理** **三角形ノ外角ハ之ニ隣ラザル内角ノ何レヨリモ大ナリ.**

假設 △ABC ノ邊 BC ヲ C[1] ノ方ヘ延長シ,其上ノ任意ノ一點ヲ D トス。(次頁ノ圖)

終結 ∠ACD>∠BAC 及ビ ∠ACD>∠ABC

證明 邊 AC ノ中點ヲ F トシ, BF ヲ結ビ之ヲ延長シテ FE=BF ナルヤウニ E ヲ取リ EC ヲ結ベバ,

[1] 以後 BC ヲ C ノ方ヘ延長シタルモノヲ BC ノ延長, B ノ方ヘ延長シタルモノヲ CB ノ延長ト云ヒテ區別スルコトトス。



E ハ ∠ACD 内ニアル故, CE ハ ∠ACD 内ニアリ。

故ニ　∠ACD > ∠ACE　(普通公理〔1〕)

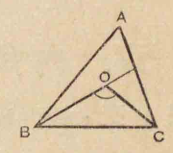
然ルニ　△CEF ≡ △ABF　(27〔一〕)

∴ ∠ACE = ∠BAC

∴ ∠ACD > ∠BAC

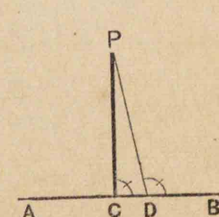
同様ニ　∠ACD > ∠ABC

問 O ヲ △ABC 内ノ任意ノ一點トセバ ∠BOC ハ ∠A ヨリ大ナリ。



系 直線外ノ一點ヨリ其直線ヘ引ケル垂線ハ唯一ツニ限ル。

何トナレバ,一點 P ヨリ直線 AB ヘ引ケル垂線ガ二ツアリトシ,之ヲ PC, PD トセバ, △PCD ニ於テ外角 PDB ト之ニ隣ラザル内角 PCD トガ共ニ直角ニシテ相等シク,コレ上ノ定理ニヨリテ不合理ナレバナリ。

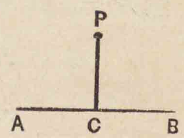


注意 第49節ト前節ノ系トニヨリ次ノ事實ヲ得。

直線外ノ一點ヨリ其直線ヘ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ其垂線ハ唯一ツニ限ル。

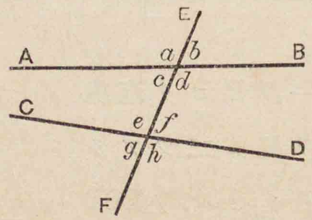
56. 定義 一點ト一直線トノ距離.

一點ヨリ一直線マデ引キタル垂線ノ長サヲ其點ト其直線トノ距離ト云フ。



57. 内角, 錯角, 同位角.

一直線ガ二直線ト交ハルトキ,其交點ヲ頂點トスル八ツノ角ニ夫々次ノ圖ニ示スガ如ク命名スレバ,

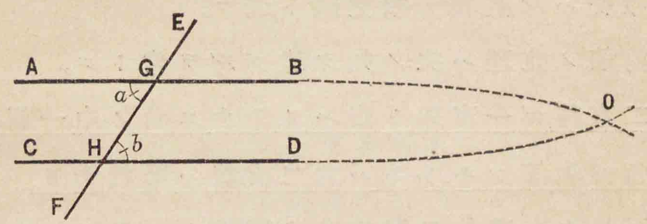


四角 c, d, e, f ヲ内角ト云ヒ, 二角 c ト f 及ビ二角 d ト e ヲ各錯角ト云ヒ, 二角 a ト e; 二角 b ト f; 二角 c ト g 及ビ二角 d ト h ヲ各同位角ト云フ

58. 定理 二直線ガ一直線ト交ハルトキ生ズル錯角ガ相等シキトキハ,其二直線ハ相交ハラズ。

假設 二直線 AB, CD ガ一直線 EF ト夫々 G 及ビ H ニ於テ交ハリ, $\angle AGH(a)=\angle GHD(b)$ トス。

終結 AB ト CD トハ相交ハラズ。



證明 今假ニ AB, CD ガ其 B, D ノ方ノ側ニテ交ハルトシ,其交點ヲ O トセン。

然ラバ $\triangle OGH$ ヲ生ジ, $\angle a$ ハ其一外角ニシテ $\angle b$ ハ之ニ隣ラザル内角ナリ。

故ニ $\angle a$ ハ $\angle b$ ヨリ大ナルヲ要ス。 (55)

コレ假設ニヨリテ不可能ナリ。

故ニ AB, CD ハ B, D ノ方ノ側ニテハ交ハラズ。

同様ニ AB, CD ハ A, C ノ方ノ側ニテモ交ハラズ。

故ニ AB, CD ハ相交ハラザル二直線ナリ。

59. **定義** **平行線.** 同一ノ平面上ニ在リテ相交ハラザル二直線ヲ**平行線**ト云フ.

二直線AB, CDガ平行ナルコトヲ次ノ如ク記ス。

$$AB \parallel CD$$

注意 同一ノ平面上ニ在ル二直線ハ相交ハルカ,又ハ平行ナリ。

相交ハル直線ヲ**相交線**ト云フ。

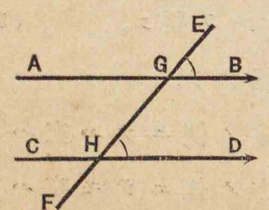
前節ノ定理ハ次ノ如ク述ブルヲ常トス。

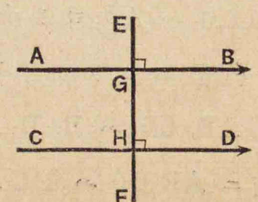
二直線ガ一直線ト交ハリテナス角ノ中,一組ノ錯角ガ相等シキトキハ,其二直線ハ**平行ナリ**。

平行ナル直線ヲ**同方向ノ直線**トモ云フ。

系一. 二直線ガ一直線ト交ハリテナス角ノ中,一組ノ同位角ガ相等シキカ,後ノ直線ノ同側ニ在ル内角ガ補角ヲナストキハ,其二直線ハ平行ナリ。

(此場合ニハ錯角ガ各相等シクナルヲ以テナリ)

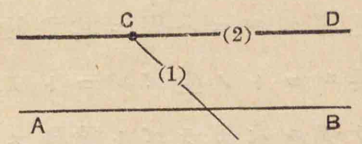




系二. 同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ平行ナリ。

60. 前節ノ定理又ハ系ニヨリ第50節又ハ第49節及ビ第48節ヲ用ヒテ容易ニ次ノ作圖題ヲ解クコトヲ得ベシ。

作圖題 **所設ノ點(C)ヲ過ギ,所設ノ直線(AB)ニ平行ナル直線ヲ引ケ.**



問 三角定木二枚,又ハ直線定木ト三角定木ト各一枚ヲ用ヒテ平行線ヲ引ケ。

61. **公理** **六.** **一直線外ノ一點ヲ通過シ,此直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル.**

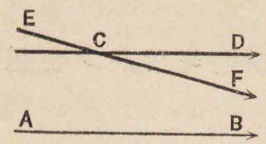
前節ト上ノ公理トニヨリ次ノ事實ヲ知ル。

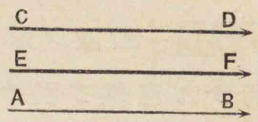
一直線外ノ一點ヲ通過シ,此直線ニ平行ナル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

系一. 平行線ノ一ツニ交ハル直線ハ亦他ノ一ツニモ交ハル。

系二. 平行線ノ一ツニ平行ナル直線ハ亦他ノ一ツニモ平行ナリ。

系三. 同ジ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。





上ノ系ヲ證明スルニハ,假ニ其終結ヲ否定シテ上ノ公理ニ戻ルコトノ生ズルコトヲ示シ,以テ其終結ハ眞ナラザルベカラズト論斷スベシ。

カク終結ヲ假ニ否定シテ,既定ノ公理,定義,定理ニ戻ルカ,又ハ所設ノ假設ニ反スル(第58節定理ノ證明參照)コトノ起ルヲ示シ,以テ其終結ハ眞ナリト斷定スル證明法(論理的方法)ヲ**歸謬法**ト云フ。

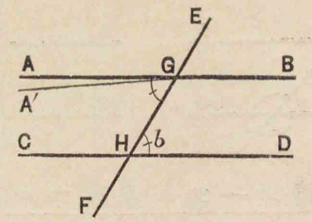
假設ヨリ出發シテ終結ニ到達スル方法ハ**直接證明法**ニシテ歸謬法ハ**間接證明法**ナリ。

*問 平行線ノ各ニ夫々平行ナル二直線ハ互ニ平行ニシテ,相交線ノ各ニ夫々平行ナル二直線ハ相交ハル。

62. 定理 平行線ガ一直線ト交ハラバ,其錯角ハ各相等シ.

假設 平行線AB, CD ガ一直線EF ト夫々G, H ニ於テ交ハルトス。

終結 $\angle AGH=\angle GHD(b)$ 及ビ $\angle BGH=\angle GHC$



證明 G ヲ過ギ $\angle b$ ニ等シクシテ且之ト錯角ノ位置ニ在ル角ヲ GH ト作ル直線 GA′ ヲ引ケバ, GA′ ハ G ヲ過ギ CD ニ平行ナル直線ナリ。(59)

然ルニ AB モ亦 G ヲ過ギ CD ニ平行ナル直線ニシテ,カクノ如キ直線ハ唯一ツニ限ル故, GA′ ハ GA ニ重ナル。

故ニ $\angle AGH$ ハ $\angle A'GH$ ニ重ナル。

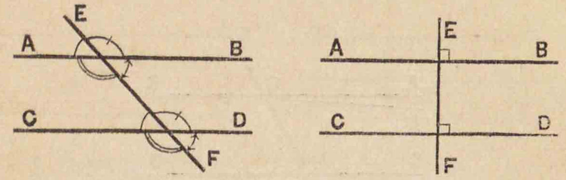
然ルニ $\angle A'GH$ ハ $\angle b$ ニ等シ。 (作圖)

故ニ $\angle AGH=\angle b$ 即チ $\angle AGH=\angle GHD$

同樣ニ $\angle BGH=\angle GHC$

問 平行線ガ一直線ト交ハリテナス角ノ中,一ツガ45°ナラバ,他ノ七ツノ角ノ大サ各如何。

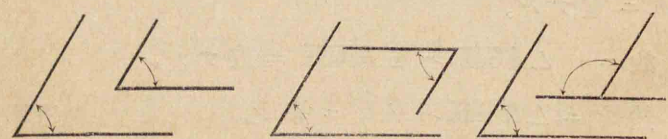
系一. 平行線ガ一直線ト交ハルトキハ,同位角ハ各相等シク,又後ノ直線ノ同ジ側ニ在ル內角ノ和ハ各2直角ニ等シ。



系二. 平行線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ亦他ノ一ツニモ垂直ナリ。

注意 此事柄ヲ平行線ハ**共通垂線**ヲ有スト云フ。

系三. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ平行ナルトキハ,此二角ハ相等シキカ,又ハ互ニ補角ヲナス。



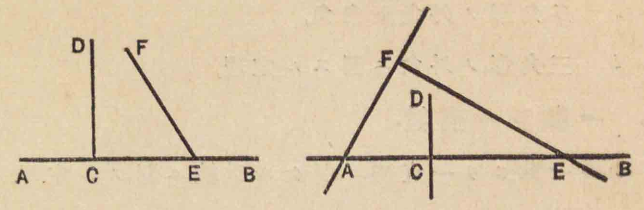
兩角ノ邊ノ方向ニヨリテ相等シキ場合ト補角ヲナス場合トヲ區別セヨ。

系四. 同ジ直線ノ垂線ト斜線トハ相交ハル。

(歸謬法)

系五. 相交線ノ各ニ夫々垂直ナル直線ハ相交ハル。

(歸謬法)



問題 2

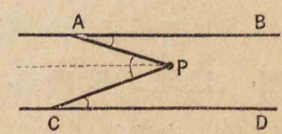
1. 若干ノ直線アリ,其何レノ二ツヲ取ルモ互ニ平行ナルトキハ,其何レカ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ總テニモ垂直ナリ。

2. 平行線ノ各ニ夫々垂直ナル二直線ハ平行ナリ。

3. 平行線 **AB, CD** ノ間ニ圖ノ如ク任意ノ一點 **P** ヲ取ルトキハ,

$\angle APC = \angle BAP + \angle DCP$

ナリ。



4. 二等邊三角形ノ頂點ヲ過ギ底邊ニ平行ナル直線ハ,頂點ニ於ケル外角ヲ二等分ス。

回顧，復習．

一．多角形．

(1) 多角形ノ外角ト內角。

(2) 三角形ノ外角ニ關スル定理。

二．一點ト一直線．

(3) 一點ヨリ一直線ニ引ケル垂線ニ關スル定理。

(4) 一點ト一直線トノ距離。

三．平行線．

(1) 錯角，同位角，內角。

(2) 平行線。

(3) 二直線ガ平行ナルコトヲ斷定スル定理。

(4) 平行線ノ作圖。

(5) 平行線ニ關スル公理。

(6) 平行線ト他ノ一直線トニ關スル定理。

(7) 二直線ガ相交ハルコトヲ斷定スル定理。

(8) 二邊ガ夫々平行ナル二角ノ大サノ關係。

四．定理ノ證明法．

(1) 直接證明法。

(2) 間接證明法(歸謬法)。

第二章

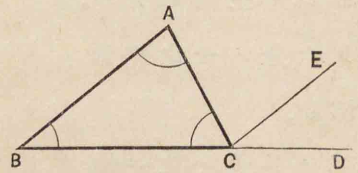
三角形

(1) 多角形ノ角ノ和

63. **定理** 三角形ノ三內角ノ和ハ2直角ニ等シ．

假設 所設ノ三角形ヲABCトス。

終結 $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=2$直角



證明 邊BCヲ延長シ其上ニ一點Dヲ取リ，CヨリBAニ平行ニCEヲ引ケバ，

$\angle ACE=\angle A$ 及ビ $\angle ECD=\angle B$ (62及ビ62系一)

而シテ$\angle ACD$ハ$\angle A$ヨリモ大ナリ。 (55)

故ニCEハ$\angle ACD$ノ內ニアリ。

故ニ $\angle ACD=\angle A+\angle B$

故ニ $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=\angle ACD+\angle ACB$

$=$平角$BCD=2$直角

問 1.　次ノ二角ヲ有スル三角形ノ第三角如何。

[1]　50°, 70°　　[2]　30°, 120°　　[3]　53°20′, 64°45′

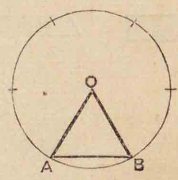
系一.　正三角形ノ一角ハ $\frac{2}{3}$ 直角(60°)ナリ。

*問 2.　60°, 30°, 15°, 75° 及ビ 105° ノ角ヲ作圖セヨ。

問 3.　二等邊三角形ノ底角ハ鋭角ナリ。

問 4.　頂角ガ72°ナル等脚三角形ノ底角ノ大サハ如何。又底角ガ72°ナルトキハ頂角ハ如何。

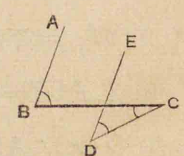
*問 5.　二等邊三角形ノ一角ガ60°ナルトキハコレ正三角形ナリ。



*問 6.　圓周ノ六分ノ一ナル弧ノ弦ハ半徑ニ等シ。

系二.　三角形ノ外角ハ之ニ隣ラザル内角(内對角)ノ和ニ等シ。

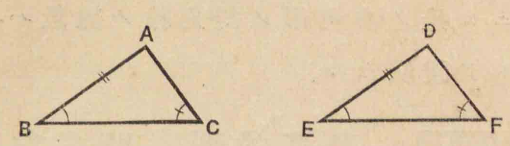
問 7.　圖ニ於テ∠B=74°, ∠C=36°, ∠D=38° ナルトキハ BA ト DE トハ平行ナリ。



系三.　一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シキトキハ,第三角モ相等シ。

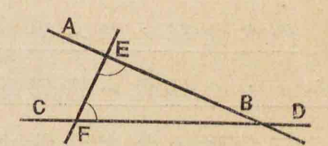
系四.　一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シク,且其一組ノ等角ノ對邊ガ

相等シキトキハ,此兩三角形ハ合同ナリ。



問 8.　二等邊三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ハ底邊ヲ二等分ス。

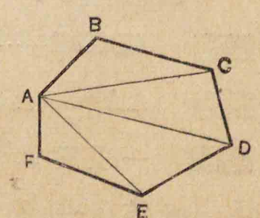
系五.　二直線ガ之ニ交ハル一直線ト其同側ニ於テ作ル内角ノ和ガ2直角ニ等シカラザルトキハ,此等ノ二直線ハ其和ガ2直角ヨリ小ナル内角ノ在ル方ニ於テ交ハル。



(歸謬法)

64.　定義　多角形ノ對角線.　多角形ノ相隣ラザル頂點ヲ結ブ線分ヲ其對角線ト云フ。

問 1.　四角形,五角形ニハ各幾ツノ對角線ガアルカ。



問 2.　六角形ノ一頂點ヨリ出ヅル對角線ハ幾ツアル

カ。カクシテ其對角線ノ總數ヲ求メヨ。

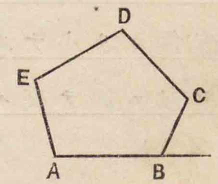
一般ニ n 邊ノ多角形ノ對角線ノ總數ハ $\frac{n(n-3)}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

65. 定義 凸多角形, 凹多角形.

多角形ノ邊ノ延長ガ何レモ其形內ニ入ラザルトキハ,之ヲ**凸多角形**ト云フ。然カラザルトキハ,之ヲ**凹多角形**ト云フ。

圖ニ示ス ABCDE ハ凸多角形ナリ。

凸多角形ノ角ハ皆平角ヨリ小ニシテ,外角ハ皆形外ニ在リ。



三角形ハ凸多角形ナリ。

爾後單ニ多角形ト言ハバ,常ニ凸多角形ヲ指スコトトス。

66. 定理 n 邊ノ多角形ノ內角ノ和ハ $(2n-4)$ 直角ニ等シ.

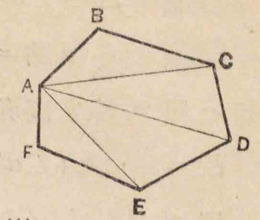
假設 ABCDE……ヲ n 邊ノ多角形トス。

終結 ∠ABC+∠BCD+∠CDE+…$=(2n-4)$直角

證明 一頂點 A ヨリ對角線 AC, AD 等ヲ引クトキハ,此等 $(n-3)$ 箇ノ對角線ハ本形ヲ $(n-2)$ 箇ノ

三角形ニ分ツ。

而シテ此等ノ三角形ノ總テノ內角ノ和ハ此多角形ノ內角ノ和ナリ。



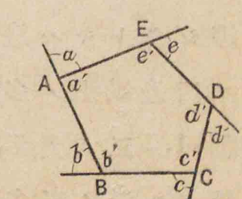
故ニ ∠ABC+∠BCD+∠CDE+… ハ此等ノ三角形ノ內角ノ和即チ 2 直角ノ $(n-2)$ 倍即チ $(2n-4)$ 直角ニ等シ。

問 1. 形內ノ任意ノ一點ヲ各頂點ニ結ビテ以テ本定理ヲ證明セヨ。

問 2. 四角形,五角形,六角形,八角形ノ內角ノ和ハ各幾直角ナルカ。

67. 定理 多角形ノ總テノ邊ヲ順次延長シテ作レル外角ノ和ハ 4 直角ニ等シ.

假設 ABCD……ヲ n 邊ノ多角形(圖ニ於テハ五邊形トス)トシ, $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, … ヲ夫々頂點 A, B, C, … ニ於ケル一ツノ外角ノ大サヲ表ハスモノトシ, $\angle a'$, $\angle b'$, $\angle c'$, … ヲ夫々其外角ニ隣ル內角ノ大サヲ表ハスモノトス。



終結 $\angle a+\angle b+\angle c+\cdots=4$直角

證明 各頂點ニ於ケル一ツノ外角ト內角トノ和ハ明カニ2直角ニ等シ。

故ニ $\angle a+\angle a'+\angle b+\angle b'+\angle c+\angle c'+\cdots\cdots$

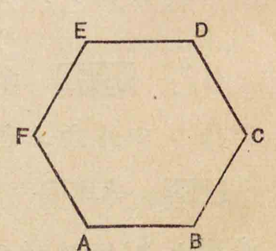
即チ $\angle a'+\angle b'+\angle c'+\cdots\cdots+\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots$ ハ2直角ノn倍即チ$2n$直角ニ等シ。

然ルニ $\angle a'+\angle b'+\angle c'+\cdots=(2n-4)$直角 (66)

$=2n$直角-4直角

$\therefore\ \angle a+\angle b+\angle c+\cdots=4$直角

68. 定義 **正多角形.** 邊ガ皆相等シク,且角ガ皆相等シキ多角形ヲ**正多角形**ト云フ.



三角形ニ於テハ邊ガ皆等シキトキハ角モ皆等シク,又角ガ皆等シキトキハ邊モ皆等シト雖モ,四邊以上ノ多角形ニ於テハ然ラズ。

*問 **1.** 正六角形,正八角形ノ各角ノ大サ如何。一般ニn邊ノ正多角形ノ一角ヲ表ハス公式如何。

問 **2.** 正十五角形ノ外角ノ大サ如何。

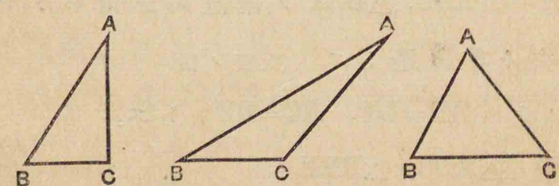
問 **3.** 三角形ノ一角ガ他ノ二角ノ和ヨリ大ナルカ,其和ニ等シキカ,又ハ其和ヨリ小ナルカニ從ツテ,其角ハ鈍角ナルカ,直角ナルカ,又ハ鋭角ナリ。

問 **4.** 三角形ハ二ツ以上ノ直角又ハ鈍角ヲ有スルコトヲ得ルカ。

69. 定義 **直角三角形.**

一角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**ト云フ。而シテ其直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**ト云フ。

鈍角三角形, 鋭角三角形. 一角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**, 三角ガ皆鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**ト云フ。



問 **1.** 直角三角形ノ直角ナラザル二角ハ共ニ鋭角ニシテ互ニ餘角ナリ。

問 **2.** 鈍角三角形ノ鈍角ナラザル二角ハ共ニ

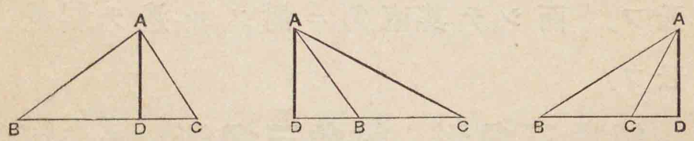
銳角ナリ。

問 3. 正三角形ハ銳角三角形ナリ。

問 4. 直角二等邊三角形ノ各角ノ大サ如何。

問 5. 直角ノ二邊ヲ與ヘテ直角三角形ヲ作レ。

*問 6. $\triangle ABC$ ニ於テ A ヨリ BC ヘ垂線ヲ下ストキ,其足ハ $\angle B$ 及ビ $\angle C$ ガ共ニ銳角ナラバ邊 BC 上ニ在リ, $\angle B$ ガ鈍角ナラバ CB ノ延長上ニ, $\angle C$ ガ鈍角ナラバ BC ノ延長上ニ在リ。 (歸謬法)



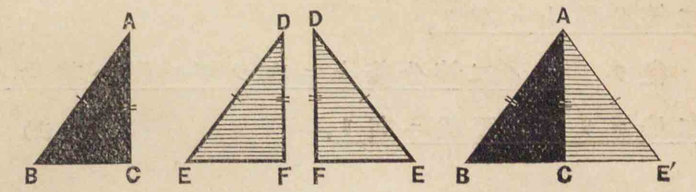
70. 定理 斜邊及ビ他ノ一邊ヲ夫々等シクスル兩直角三角形ハ合同ナリ。

假設 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ヲ兩直角三角形トシ, AB, DE ヲ夫々其斜邊トス。(次頁ノ圖)

而シテ $AB=DE$, $AC=DF$ トス。

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明 $\triangle DEF$ ノ邊 DF ヲ之ニ等シキ AC ニ重ネ, $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トヲ各 AC ノ反對ノ側ニアルヤウニ置キ, $\triangle DEF$ ヲ圖ニ於ケル $\triangle AE'C$ ノ位置ヲ



取ラシムレバ, $\angle ACB$ 及ビ $\angle ACE'$ ハ共ニ直角ナルヲ以テ, BCE' ハ一直線トナル。 (15〔二〕)

$\triangle ABE'$ ニ於テ $AB=AE'$ (假設)

故ニ $\angle B=\angle E'$

然ルニ $\angle E'=\angle E$

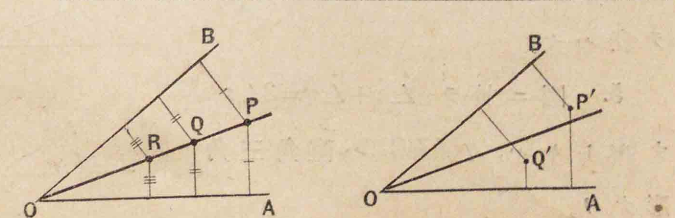
$\therefore$ $\angle B=\angle E$

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (63 系四)

問 二等邊三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ下セル垂線ハ頂角ヲ二等分ス, 又底邊ヲ二等分ス。

系 角ノ二等分線上ノ各點ハ,夫々其角ノ二邊ヨリ等距離ニ在リ。

又 角ノ二邊ヨリ等距離ニ在ル點ハ皆其角ノ



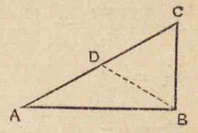
二等分線上ニ在リ。

從テ　角ノ二等分線上ニ在ラザル點ハ其角ノ二邊ヨリ不等距離ニ在リ。　（歸謬法）

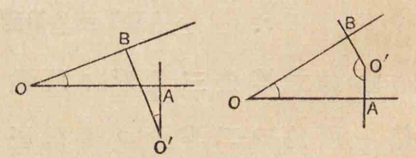
問題　3

1. 直角三角形ノ一鋭角ガ他ノ鋭角ノ二倍ナルトキハ,三ツノ角ノ大サ如何。

又此場合ニハ斜邊ハ其一ツノ邊ノ二倍ニ等シ。

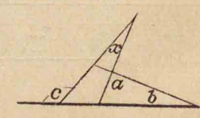


2. 一角ノ二邊ガ夫々他ノ一角ノ二邊ニ垂直ナルトキハ,此二角ハ相等シキカ,又ハ互ニ補角ヲナス。

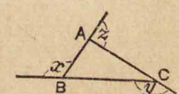


3. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ夫々對邊マデ引ケル垂線ハ相等シ。

4. 圖ニ於テ角xヲ角a, b, cニテ表ハセ。



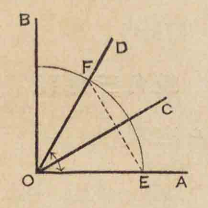
5. 圖ニ於テ $\angle x+\angle y=3\angle z$ ナルトキハ, △ABC ハ直角三角形ナリ。

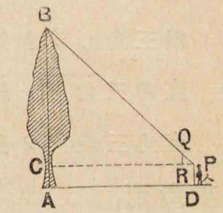


6. 或多角形ノ內角ノ和ガ16直角ニ等シト云フ。此多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

7. 正多角形ノ一角ガ$\frac{9}{5}$直角ナルトキハ其邊數如何。

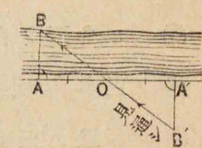
*8. 直角ヲ三等分セヨ。

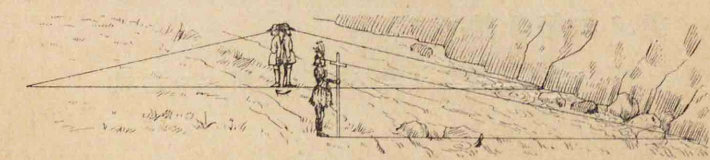




9. 直角二等邊三角定木ヲ用ヒテ木ノ高サヲ概測スル方法ヲ考案セヨ。

10. コヽニ示ス圖ニヨリテ河ノ幅ヲ概測スル種々ノ方法ヲ考案セヨ。





回顧，復習.

一. 三角形.

(1) 三角形ノ内角ノ和。

(2) 三角形ノ外角。

(3) 二角ガ夫々相等シキ兩三角形ニ就キテノ定理。

(4) 兩三角形ガ合同ナル場合。(四ツ)

(5) 直角三角形，鈍角三角形，鋭角三角形。

(6) 直角三角形ノ合同ニ關スル定理。

二. 多角形.

(1) 多角形ノ對角線。 n角形ノ對角線ノ總數(公式)。

(2) 凸多角形，凹多角形。

(3) n角形ノ内角ノ和及ビ外角ノ和(公式)。

(4) 正多角形。

(5) n邊ノ正多角形ノ内角及ビ外角ノ大サ(公式)。

三. 角ノ二等分線.

角ノ二等分線上ノ點ノ性質ニ關スル定理。

(2) 三角形ノ邊及ビ角ノ不等

71. **定理** **三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ.**

證明 $\triangle ABC$ ニ於テ BC ヲ最大邊トスルモ，

$$AB+AC>BC \qquad \text{(公理二)}$$

ナレバナリ。

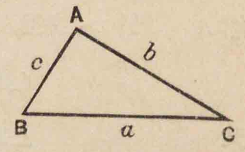
系 三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ。

$$BC\sim AB<AC,\quad BC\sim AC<AB,\quad AB\sim AC<BC$$

問 1. 多角形ノ一邊ハ他ノ邊ノ和ヨリ小ナリ。

問 2. 圓ノ弧ハ之ニ對スル弦ヨリ大ナリ。

注意 $\triangle ABC$ ニ於テハ一般ニ角 A, B, C ノ對邊ヲ夫々 a, b, c ニテ表ハス。



依テ $b+c>a,\quad c+a>b,\quad a+b>c,$

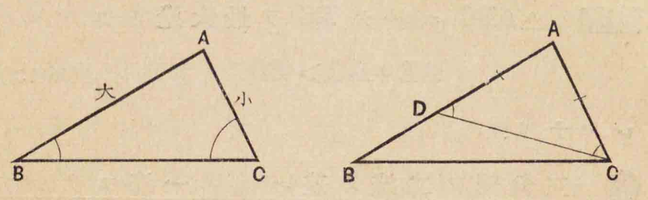
又 $b\sim c<a,\quad c\sim a<b,\quad a\sim b<c$

故ニ三ツノ線分ガ三角形ノ三邊タルコトヲ得ルニハ，其中何レノ二ツヲ取ルモ其和ガ他ノ一ツヨリ大ナラザルベカラズ，又其差ガ他ノ一ツヨリ小ナラザルベカラズ。

72. **定理**　**三角形ノ二邊ガ不等ナルトキハ，大邊ノ對角ハ小邊ノ對角ヨリ大ナリ．**

假設　$\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ トス。

終結　$\angle ACB > \angle ABC$



證明　AB 上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ，CD ヲ結ベバ，

$$\angle ACD = \angle ADC \qquad (31\ 系一)$$

然ルニ D ハ AB ノ上ニ在ルヲ以テ

$$\angle ADC > \angle ABC \qquad (55)$$

又

$$\angle ACB > \angle ACD$$

$$\therefore \quad \angle ACB > \angle ABC$$

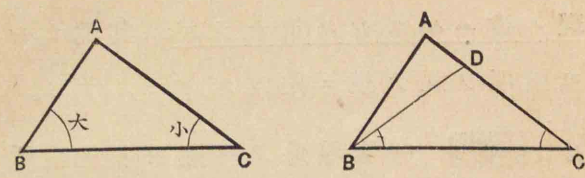
問　上ノ圖ニ於テ　$\angle ACD = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC)$，

及ビ　$\angle BCD = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC)$

73. **定理**　**三角形ノ二角ガ不等ナルトキハ，大角ノ對邊ハ小角ノ對邊ヨリ大ナリ．**

假設　$\triangle ABC$ ニ於テ $\angle ABC > \angle ACB$ トス。

終結　$AC > AB$



證明　$\angle ABC$ 內ニ BC ト $\angle C$ ニ等シキ $\angle CBD$ ヲ作ル直線 BD ヲ引クトキハ，BD ハ邊 AC ト交ハル，其交點ヲ D トス。

然ラバ　$$DB = DC \qquad (32)$$

而シテ　$$AD + DB > AB \qquad (71)$$

$$\therefore \quad AD + DC > AB$$

$$\therefore \quad AC > AB$$

*問　直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大ナリ。又鈍角三角形ニ於テハ鈍角ノ對邊ガ最大邊ナリ。

74. **定義**　**定理ノ逆．**　定理ノ假設ト終結トヲ交換シテ生ズル事柄ヲ原ノ定理ノ逆ト云フ。

例ヘバ第72節ノ定理ト第73節ノ定理トハ互ニ逆ナリ。

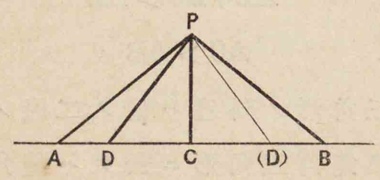
定理ノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ, 其眞ナルモノト雖モ證明ヲ經テ後ニ確定スルモノナリ。

75. 定理 **一直線外ノ一點ヨリ此直線マデ垂線及ビ斜線ヲ引クトキハ,**

【一】垂線ガ最小(最短)ナリ.

【二】垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル兩斜線ハ相等シ.

【三】垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ,之ヨリ小ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ヨリ大ナリ.



假設 一直線ヲ AB トシ,其上ニ在ラザル一點ヲ P トシ,

[一] PC ヲ P ヨリ AB マデ引ケル垂線トス。

[二] PA, PB ヲ二ツノ斜線, A, B ヲ夫々其足トシ, $CA=CB$ トス。

[三] PA, PD ヲ二ツノ斜線トシ $CA>CD$ トス。

終結 [一] PC ハ P ヨリ引ケル總テノ斜線ヨリ小ナリ。

[二] $PA=PB$

[三] $PA>PD$

證明 [一] PA ヲ P ヨリ AB ヘ引ケル任意ノ斜線トセバ,直角三角形PACニ於テ

$$\angle PAC < \angle PCA \qquad (69)$$

$$\therefore \quad PC < PA \qquad (73)$$

[二]

$$\triangle PAC \equiv \triangle PBC \qquad ([一]27)$$

$$\therefore \quad PA = PB$$

[三] $CA>CD$ ナルヲ以テ, D ハ線分 AC 又ハ BC 上ニ在リ。今 D ヲ AC 上ニ在リトセバ

$$\angle PDA > \angle PCD \qquad (55)$$

故ニ $\angle PDA$ ハ鈍角ナリ。

然ルニ $\angle PAD$ ハ鋭角ナリ。 (69)

故ニ

$$\angle PDA > \angle PAD$$

$$\therefore \quad PA > PD \qquad (73)$$

又 D ヲ BC 上ニ在リトセバ, $PB>PD$ ナル故,

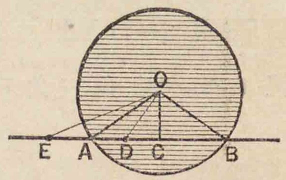
何レニシテモ $PA>PD$

系一. 此定理ノ逆モ眞ナリ。

系二. 一點ヨリ一直線マデ引ケル相等シキ斜線ハ,同ジ點ヨリ引ケル垂線ト等角ヲナス。

大ナル斜線ハ小ナル斜線ヨリ垂線ト大ナル角ヲナス, 逆モ亦眞ナリ。

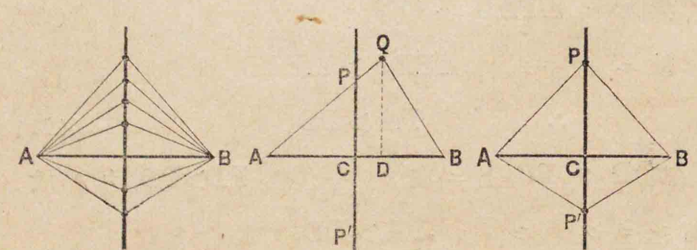
系三. 圓ノ弦上ノ點ハ其兩端ノ外皆圓內ニ在リ, 而シテ 弦ノ延長上ノ點ハ皆圓外ニ在リ。



系四. 線分ノ垂直二等分線上ノ點ハ,皆其線分ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ。

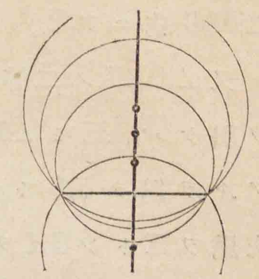
而シテ 其上ニ在ラザル點ハ,皆其線分ノ兩端ヨリ不等距離ニ在リ。

從テ 二點ヨリ等距離ニ在ル點ハ,皆其二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ニ在リ。



*問 1. 二點A,Bヨリ等距離ニ在ル二點P,P'ヲ通過スル直線ハ,線分ABノ垂直二等分線ナリ。

問 2. 二點ヲ過グル圓周ノ中心ハ,皆其二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ニ在リ。

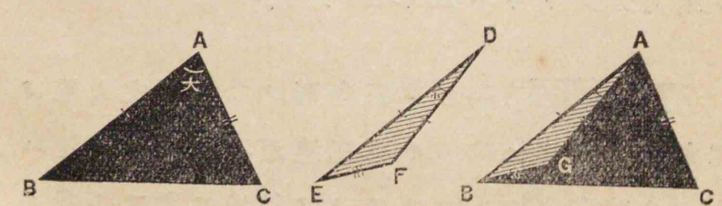


76. 定理 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク,其夾角ガ不等ナルトキハ,夾角ノ大ナル三角形ノ第三邊ガ他ノ三角形ノ第三邊ヨリ大ナリ.

假設 兩三角形ABC, DEFニ於テ

$AB=DE,\ AC=DF,\ \angle BAC>\angle EDF$ トス。

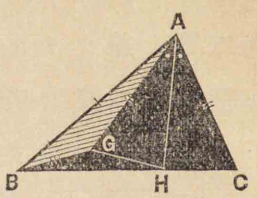
終結 $BC>EF$



證明 △DEFヲ取リテDEヲABニ重ネ,兩三角形ヲABノ同ジ側ニ置キ,頂點FガGニ來レリ

トセバ, ∠EDF ハ ∠BAC ヨリ小ナルヲ以テ, AG ハ ∠BAC 内ニアリ。

又 ∠GAC ノ二等分線 AH ヲ引ケバ, AH モ ∠BAC 内ニアルヲ以テ BC ト交ハル,其交點ヲ H トシ GH ヲ結ベバ,



$\triangle AGH \equiv \triangle ACH$ (27〔一〕)

∴ $HG = HC$

然ルニ $BH + HG > BG$ (71)

∴ $BH + HC > BG$

∴ $BC > BG$

∴ $BC > EF$

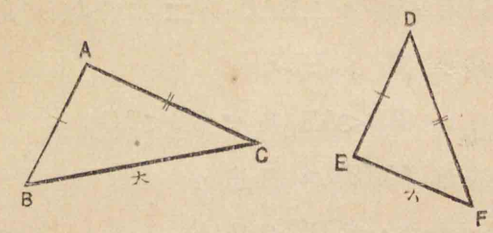
問 △ABC ノ一邊 BC ノ中點ヲ M トシ, ∠AMB ガ鈍角ナルトキハ AB>AC ナリ。

77. 定理 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク,第三邊ガ不等ナルトキハ, 大ナル第三邊ヲ有スルモノノ其邊ニ對スル角ハ, 他ノ三角形ノ第三邊ニ對スル角ヨリ大ナリ.

假設 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ,

AB=DE, AC=DF, BC>EF トス。

終結 ∠A>∠D



證明 若シ ∠A=∠D トセバ BC=EF (27〔一〕)

又若シ ∠A>∠D トセバ BC<EF (76)

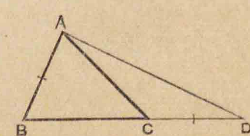
コレハ何レモ假設ニ戻ルヲ以テ, ∠A ハ ∠D ニ等シカラズ,又 ∠D ヨリ小ナラズ。

故ニ ∠A>∠D

問 △ABC ニ於テ AB>AC トシ, AD ヲ A ヨリ出ヅル中線トセバ ∠ADB ハ鈍角ナリ。

問題 4

1. △ABC ノ一邊 BC ヲ D マデ延長シ CD=AB ナラシムレバ BC<AD ナリ。



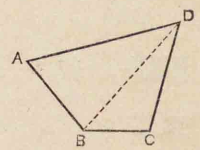
2. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ底邊 BC 上

ノ任意ノ一點Dニ結ブ線分ADハAB, ACノ各ヨリ小ナリ。

3. △ABCニ於テ∠BACノ二等分線ガ對邊BCニ交ハル點ヲDトセバ,

$$BD<AB \text{ 及ビ } CD<AC$$

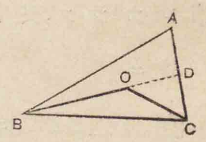
4. 四邊形ABCDノ四邊ノ中ADガ最大ニシテ,BCガ最小ナルトキハ,



$$\angle ABC>\angle ADC$$

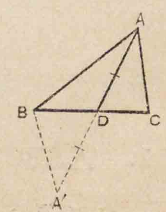
且 $$\angle BCD>\angle BAD$$

5. Oヲ△ABC内ノ任意ノ一點トセバ



$$OB+OC<AB+AC$$

6. 三角形ノ中線ガ之ト隣レル邊トナス角ノ中,小ナル邊トナス角ハ大ナル邊トナス角ヨリ大ナリ。



回顧, 復習.

(1) 三角形ノ二邊ノ和及ビ差ト第三邊トノ大小ニ關スル定理。

(2) 三角形ノ邊ノ大小ト其對角ノ大小ニ關スル定理。

(3) 一直線外ノ點ヨリ其直線ニ引ケル垂線及ビ斜線ノ大小ニ關スル定理。

(4) 線分ノ垂直二等分線上ノ點ノ性質。

(5) 二點ヨリ等距離ニ在ル點ノ位置。

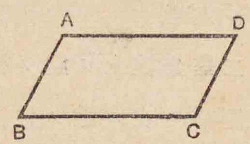
(6) 二邊ガ夫々相等シキ兩三角形ニ於テ,其二邊ノ夾角ノ大小ト第三邊ノ大小ニ關スル定理。

(7) 定理ノ逆(逆定理)。

第三章

平行四邊形

78. **定義** **平行四邊形.** 對邊ガ各平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**ト云フ。



例ヘバ上圖 **ABCD** ノ如シ。 之ヲ ▱**ABCD** ト記シ, ▱**AC** 又ハ ▱**BD** ト略記スルコトアリ。

*問　平行四邊形ノ相隣レル角ハ互ニ補角ナリ。一角ガ60°ナラバ他ノ角ハ如何。

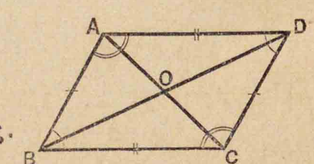
79. **定理** **平行四邊形ニ於テハ,**

【一】對角線ハ之ヲ合同ナル二ツノ三角形ニ分ツ.

【二】對邊ハ各相等シ.

【三】對角ハ各相等シ.

【四】對角線ハ互ニ二等分ス.



(學生之ヲ證明セヨ)

系一. 平行線ノ共通垂線ノ其平行線間ニアル

部分ハ相等シ。

定義 **平行線ノ距離.** 平行線間ニアル其共通垂線ノ部分ノ長サヲ**平行線ノ距離**ト云フ。

*問　所設ノ直線ヨリ所設ノ距離ニ在リテ之ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

系二. 平行四邊形ニ於テ,

[1]　一角ガ直角ナラバ他ノ角モ皆直角ナリ。

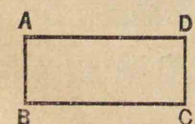
[2]　一組ノ隣邊相等シケレバ四邊皆相等シ。

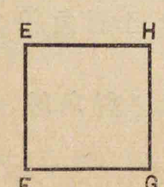
80. **定義** **矩形, 正方形, 菱形.**

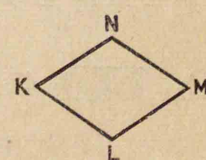
角ガ皆直角ナル四邊形ヲ**矩形**ト云フ。

四邊ガ皆相等シキ矩形ヲ**正方形**ト云フ。

四邊ガ皆相等シキ四邊形ヲ**菱形**ト云フ。







系　二隣邊ガ夫々相等シキ矩形ハ皆合同ナリ。

又　一邊ガ相等シキ正方形ハ皆合同ナリ。

81. 定理 四邊形ハ次ノ場合ニ於テハ平行四邊形ナリ.

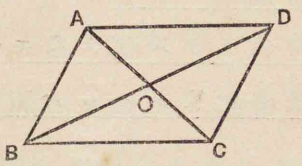
【一】二組ノ對邊ガ各相等シキトキ.

【二】一組ノ對邊ガ相等シク且平行ナルトキ.

【三】二組ノ對角ガ各相等シキトキ.

【四】對角線ガ互ニ二等分スルトキ.

(學生之ヲ證明セヨ)

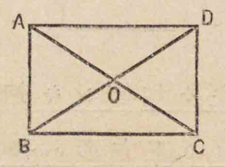


系 矩形,菱形,正方形ハ皆平行四邊形ナリ。

*問 1. 平行四邊形ガ矩形,正方形,菱形タル條件如何。(邊,角,對角線ニ關シテ種々ナル條件ヲ研究セヨ)

問 2. 平行四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ,他ノ邊ニ平行ニシテ且對角線ヲ二等分ス。

82. 定理 矩形ノ對角線ハ相等シ.

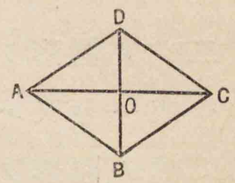


(ABCDヲ矩形トセバ,兩三角形ABC,DCBノ合同ナルコトニヨリ之ヲ證明セヨ)

系一. 對角線ガ相等シキ平行四邊形ハ矩形ナリ。

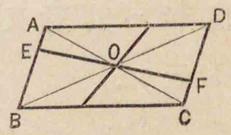
系二. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ,三ツノ頂點ヨリ等距離ニ在リ。(本定理ノ圖ヲ見ヨ)

*問 1. 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ニ二等分ス。



故ニ菱形ハ其對角線ヲ折リ目トシテ,其一部ヲ他ノ部分ノ上ニ全ク折リ重ヌルヲ得。

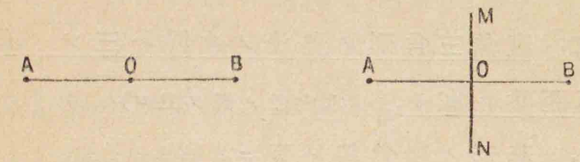
*問 2. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ過ギ,對邊ノ上ニ兩端ヲ有スル線分ハ皆其交點ニテ二等分セラル。



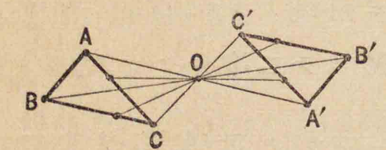
83. 定義 對稱. 二ツノ點(A,B)ガ其二點ヲ結ブ線分上ノ一點(O)ヨリ等距離ニ在ルトキハ,其二點(A,B)ハ後ノ點(O)ニ關シテ對稱ナリト云フ。

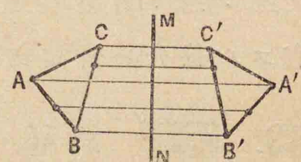
又二ツノ點(A,B)ヲ結ブ線分ガ一直線

(MN)ニテ垂直ニ二等分セラルヽトキハ,其二點(A, B)ハ其直線(MN)ニ關シテ對稱ナリト云フ。



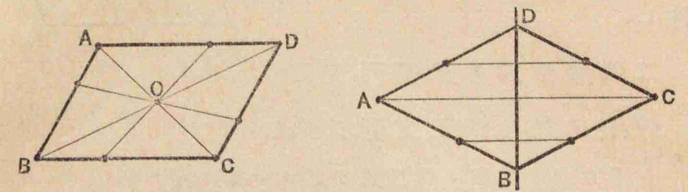
二ツノ圖形アリ,其何レノ上ノ各點ヲ取ルモ,或一點又ハ或一直線ニ關スル其對稱點ガ他ノ圖形ノ上ニ在ルトキハ,此二ツノ圖形ハ其點又ハ其直線ニ關シテ對稱ナリト云フ。





又一ツノ圖形上ノ各點ヲ取リテ,或一點又ハ或一直線ニ關スル其對稱點ガ矢張リ其圖形上ニ在ルトキハ,其圖形ハ其點又ハ其直線ニ關シテ對稱ナリト云フ。(次頁ノ圖)

而シテ其點ヲ其圖形ノ**對稱ノ中心**,其直線ヲ其圖形ノ**對稱ノ軸**ト云フ。



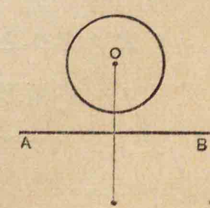
對稱ノ軸ヲ有スル圖形ハ,其軸ヲ折リ目トシテ其圖形ノ半分ヲ他ノ半分ノ上ニ折リ重ネルコトヲ得,故ニ此性質ヲ以テ其定義トスルモ可ナリ。

*問 1. 圓ハ其中心ニ關シテ對稱ナリ。又其直徑ニ關シテ對稱ナリ。

問 2. 角ノ二邊ハ其角ノ二等分線ニ關シテ對稱ナリ。

*問 3. 所設ノ點Oト所設ノ直線ABガ與ヘラレタルトキ,ABニ關スル點Oノ對稱點ヲ求メヨ。

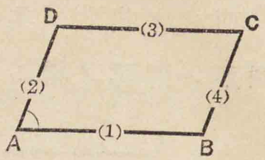
問 4. 所設ノ圓Oト所設ノ直線ABトヲ與ヘ,ABニ關スル圓Oノ對稱圓ヲ畫ケ。



問 5. 矩形ノ對稱ノ軸ハ何カ。

問 6. 正三角形ノ對稱ノ軸ハ何カ。

84. 作圖題 **二隣邊ト其夾角トヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ.**



二隣邊ヲ知リテ矩形ヲ作レ.

一邊ヲ知リテ正方形ヲ作レ.

(學生自ラ此等ノ作圖題ヲ解クベシ)

問 1. 次ノモノヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

[1] 二隣邊ト一對角線。

[2] 一邊ト兩對角線。

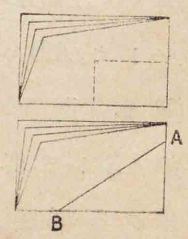
問 2. 兩對角線ヲ知リテ菱形ヲ作レ。

*問 3. 對角線ヲ知リテ正方形ヲ作レ。

問 4. 對角線ト一邊トヲ知リテ矩形ヲ作レ。

問 5. 紙上ニ矩形及ビ菱形ヲ畫クニ次ノ如キ實用的方法アリ,其理ヲ說明セヨ。

紙ヲ二ツニ折リ,更ニ又之ヲ二ツニ折リ(折リ目ヲ折リ重ネ)其上ニ針ニテ穴ヲ穿チ,之ヲ開キ四ツノ穴ヲ連結スレバ矩形ヲ得ベシ。

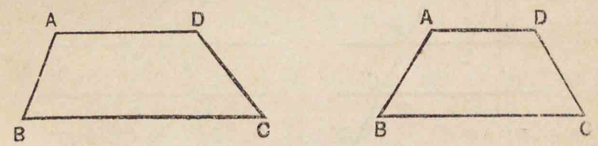


又上ノ如ク折リタル紙ヲ,AB 線ニ沿ヒテ斷チ切リ展開スルトキハ,切リ口 AB ヲ邊トスル菱形ヲ得ベシ。

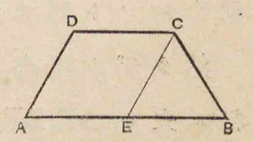
カクシテ正方形ヲ切ル法ハ如何。

85. 定義 **梯形.** 一組ノ對邊ガ平行ナル四邊形ヲ**梯形**ト云フ。

梯形ノ平行ナル二邊ヲ其底ト云ヒ,一ヲ**上底**,他ヲ**下底**ト云フ。而シテ下底ノ兩端ニ在ル角ヲ其**底角**ト云フ。



梯形ノ底ニアラザル二邊ノ相等シキモノヲ**等脚梯形**又ハ**二等邊梯形**ト云フ。



問 1. 等脚梯形ノ兩底角ハ相等シク,對角ハ補角ヲナス。

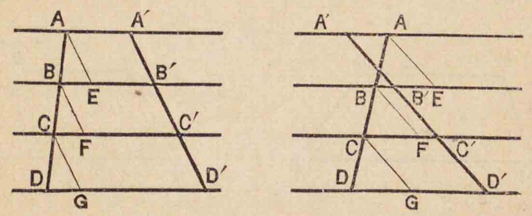
問 2. 等脚梯形ハ對稱ノ軸ヲ有ス。

86. 定理 **若干ノ平行線ガ之ニ交ハル二直線ノ一ツヲ若干等分スルトキハ,他ノ線ヲモ同數ニ等分ス.**

假設　AA', BB', CC', DD' 等ヲ平行線，AB ヲ此等ニ夫々 A, B, C, D 等ニ於テ交ハルー直線トシ，且 $AB=BC=CD$ 等　トス。

又 $A'B'$ ヲ此等ノ平行線ニ交ハル他ノ任意ノ一直線トシ,其交點ヲ夫々 A', B', C', D' 等トス。

終結　$A'B'=B'C'=C'D'$　等ナリ。



證明　$A'B'$ ガ AB ニ平行ナル場合ハ本定理ノ眞ナルコト明カナリ。

然ラザル場合ハ分點 A, B, C 等ヨリ $A'B'$ ニ平行ニ夫々 AE, BF, CG 等ヲ引キテ E, F, G 等ニ於テ夫々 BB', CC', DD' 等ニ交ハラシムルトキハ,

$$\triangle ABE \equiv \triangle BCF \equiv \triangle CDG \equiv \cdots\cdots \qquad (27〔二〕)$$

$$\therefore \quad AE=BF=CG=\cdots\cdots$$

然ルニ $A'B'=AE$,　$B'C'=BF$,　$C'D'=CG$, …　(79〔二〕)

$$\therefore \quad A'B'=B'C'=C'D'=\cdots\cdots$$

注意　定理ヲ證明スルニ當リ直ニ其方法ニ氣附カザルトキハ次ノ如クスベシ。

終結ノ事實ガ既ニ成立スルトキハ如何ナル事實ガ成立スルカヲ考ヘ,次ニ其事實ヨリ成立スル第三ノ事實ヲ探究シ,追テカクノ如クシテ既ニ證明シタル定理若シクハ假設ヨリ直ニ斷定シ得ベキ事實ニ到着シ,之ヲ以テ證明ノ出發點トシ,前ノ推究ヲ逆ニタドルベシ。

今更ニ上ノ定理ノ證明法ニ就キテ之ヲ說明センニ，終結ガ既ニ成立シ,

即チ　$A'B'=B'C'=C'D'$　ナリトシ,

A, B, C ヨリ $A'D'$ ニ平行ニ AE, BF, CG[1] ヲ引クトキハ,　$AE=BF=CG$

且　$\angle BAE=\angle CBF=\angle DCG$

尙　$AB=BC=CD$

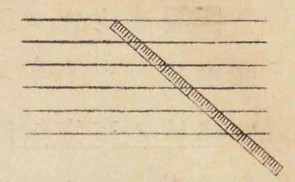
故ニ　$\triangle ABE \equiv \triangle BCF \equiv \triangle CDG$

コレ假設ヨリ直ニ斷定スルヲ得ル事實ナリ。

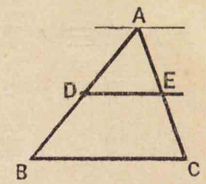
故ニ之ヲ以テ證明ノ出發點トシタルナリ。

(1)カク適當ニ補助線ヲ引クコトハ，幾何學全般ヲ通ジテ最モ重要ナルコトニシテ，學生ノ特ニ留意研究シテ習熟ヲ期スベキコトナリ。

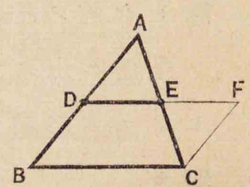
圖 布等ヲ等分スルニ,圖ニ示スガ如ク物指ヲ斜メニ當テハムルハ如何ナル理ニヨルカ。



系一. 三角形ノ一邊ノ中點ヨリ他ノ邊ニ平行ニ引ケル直線ハ第三邊ノ中點ヲ過グ。



系二. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ,他ノ邊ニ平行ニシテ且其半ニ等シ。



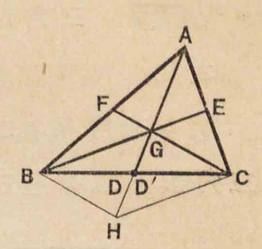
(DE ヲ延長シ EF=DE ナルヤウニFヲ取リ, △ADE, △CFE ノ合同ナルコトヲ利用シ, BCFD ガ平行四邊形ナルコトヲ證明スベシ)

87. 定理 三角形ノ三中線ハ同一點ニ集交ス. 而シテ其交點ヨリ各頂點マデノ距離ハ夫々其中線ノ三分ノ二ナリ.

假設 △ABC ノ三中線ヲ AD, BE, CF トス。

終結 AD, BE, CF ハ同一點ニ集交ス 其交點ヲGトセバ $AG=\frac{2}{3}AD$, $BG=\frac{2}{3}BE$, $CG=\frac{2}{3}CF$ ナリ。

證明 BE, CF ノ交點ヲGトシ,AG ヲ引キ BC トノ交點ヲ D′トシ,AD′ノ延長トBヨリ CF ニ平行ニ引キタル直線トノ交點ヲ H トシ,HC ヲ結べバ,



(1) G ハ AH ノ中點ナリ。 (前節系一)

(2) 故ニ HC ∥ BG (同系二)

(3) 故ニ四邊形 BHCG ハ平行四邊形ナリ。

(4) 故ニ D′ハ BC ノ中點即チ D ト同ジ點ナリ。

故ニ AD′ハ即チ AD ニシテ三中線ハ同一點 G ニ集交ス。

而シテ $GD=\frac{1}{2}GH=\frac{1}{2}AG$

故ニ $AG=\frac{2}{3}AD$

同様ニ $BG=\frac{2}{3}BE$

及ビ $CG=\frac{2}{3}CF$

考へ方

(1) 三中線ガ集交セバ AD′ハ中線ナル故 D′ハ BC ノ中點 D ナリ。

∴ △BD′H≡△CD′G

∴ BH=CG

(2) 故ニ BHCG ハ平行四邊形ナリ。

(3) 故ニ BG∥HC

而シテ E ハ AC ノ中點ナリ。

(4) 故ニ G ハ AH ノ中點ナリ。

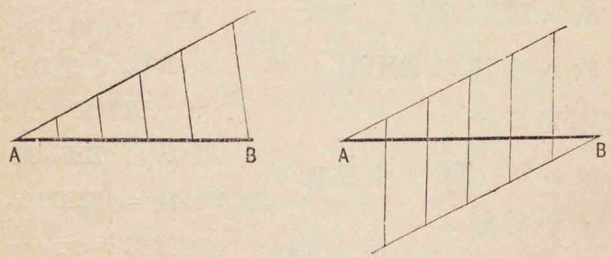
コレ假設ト作圖トヨリ(F ガ AB ノ中點ニシテ CF ハ BH ニ平行ナル故)直ニ斷定シ得,之ヲ證明ノ出發點トス。

注意 三角形ノ三中線ノ交點ヲ其**重心**ト云フ。

問 三角形ノ二ツノ中線ガ相等シキトキハ,此三角形ハ二等邊三角形ナリ。

88. 作圖題 所設ノ線分ヲ若干等分セヨ.

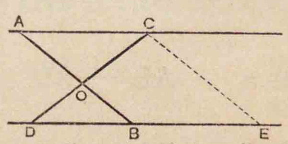
(第86節ノ定理及ビ問題ニヨルベシ)



問題 5

1. 平行四邊形ノ一對角線ガ其兩端ニアル角ヲ二等分セバ,其平行四邊形ハ菱形ナリ。

2. 相等シキ二線分AB, CDガ平行線AC, DBノ間ニアリテOニ於テ交ハルトキハ, OA=OC及ビOB=ODナリ。



3. 四邊形ABCDノ四邊AB, BC, CD, DAノ中

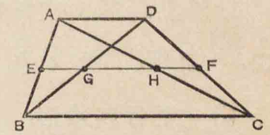
點ヲ夫々E, F, G, Hトセバ,

(1) 四邊形EFGHハ平行四邊形ナリ。

(2) EFGHノ周ハABCDノ兩對角線ノ和ニ等シ。

(3) EG, FHハ互ニ二等分ス。

***4.** 梯形ABCDニ於テAD, BCヲ兩底トシ, AB, CD, BD, ACノ中點ヲ夫々E,F,G,Hトセバ,

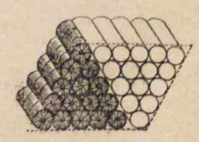


(1) Eヲ過ギBCニ平行ナル直線ハG,H,Fヲ過グ,從テ四點E,G,H,Fハ同一直線上ニアリ。

(2) $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$, $GH=\frac{1}{2}(AD\sim BC)$

5. E及ビFヲ夫々平行四邊形ABCDノ一組ノ對邊AD及ビBCノ中點トセバ, BE, DFハ對角線ACヲ三等分ス。

6. 圖ノ如ク積ミタル俵ノ數ヲ計算スル方法ヲ求メヨ。且コレヨリ自然數1, 2, 3, 4,……ノ和ヲ求ムル公式



$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ヲ證明セヨ。

回顧，復習．

一．定義．

平行四邊形，矩形，正方形，菱形，梯形，等脚梯形．

平行線ノ距離，三角形ノ重心。

對稱(點對稱ト直線對稱)。

二．定理． 次ノ各ニ關スル定理。

(1) 平行四邊形，矩形，正方形，菱形ノ性質。

(2) 四邊形ガ平行四邊形，矩形，正方形，菱形タルベキ條件。

(3) 直角三角形ノ斜邊ノ中點。

(4) 一直線ヲ等分スル若干ノ平行線。

(5) 三角形ノ一邊ノ中點ヲ過ギ他ノ一邊ニ平行ナル直線。

(6) 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線

(7) 三角形ノ三中線(重心問題)。

三． 定理證明ノ考案法。

四．作圖題．

(1) 平行四邊形，矩形，正方形，菱形ノ作圖

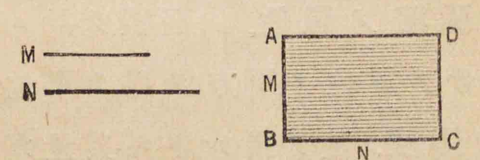
(2) 直線ノ等分法。

第四章

矩形ノ面積

89. **定義** **平面形ノ面積．** 平面形内ニアル平面ノ大サ(廣サ)ヲ平面形ノ**面積**ト云フ。

90. **定義** **二線分ノ矩形．** 二線分ニ等シキ二隣邊ヲ有スル矩形ヲ其**二線分ノ矩形**ト云フ。

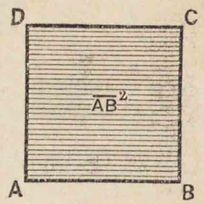


例ヘバ矩形 ABCD ノ二隣邊 AB, BC ガ夫々二線分 M, N ニ等シキトキハ，此矩形ヲ M, N ノ(又ハ M, N ノ包ム)矩形ト云ヒ，其面積ヲ矩形 M.N 又ハ ▭MN ト記ス。

又此矩形ヲ AB, BC ノ矩形トモイヒ，其面積ヲ矩形 AB.BC 又ハ ▭AB.BC ト記ス，

91. **定義** **線分上ノ正方形**トハ,此線分ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ヲ云フ。

線分 AB 上ノ正方形ノ面積ヲ $\overline{AB}^2$ ニテ表ハシ,線 A ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ノ面積ヲ A^2 ニテ表ハス。而シテ此等ヲ夫々 **AB ノ平方, A ノ平方**ト云フコトアリ。



矩形ノ面積,正方形ノ面積等ト言フベキヲ單ニ矩形,正方形等ト云フコト多シ。

92. **面積ノ單位.** 面積ヲ計ルニハ,其時ノ**長サノ單位ノ平方**ヲ以テ單位トス。

量ノ測度. 量ヲ計ルトキ,其量ガ單位ノ幾倍又ハ幾分ノ幾ツニ當ルカヲ表ハス數ヲ其量ノ**測度**ト云フ。

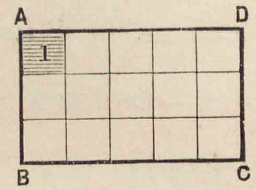
93. **定理** **矩形ノ面積ノ測度ハ其ノ二隣邊ノ測度ノ乘積ニ等シ.**

假設 ABCD ヲ矩形トシ,其二邊 AB, AD ノ同

ジ單位ニ對スル測度ヲ夫々 a, b トシ,面積ノ測度ヲ S トス。

終結 $S=ab$

證明 [1] a, b ヲ共ニ整數トス。



AB ヲ a 等分シ, AD ヲ b 等分シ,各分點ヨリ夫夫二隣邊ニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,矩形 AC ハ明カニ ab 箇ノ單位面積ニ分タル。

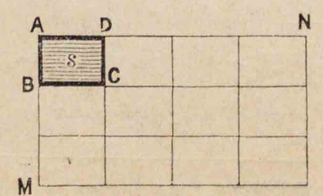
故ニ　$S=ab$

[2] a, b ヲ分數トシ, $a=\dfrac{p}{m}$, $b=\dfrac{q}{n}$ トス。

但シ m, n, p, q ハ皆整數トス。

AB, AD ヲ夫々 M, N マデ延長シ,

$$AM=mAB,\quad AN=nAD$$ ナラシメ,



AM, AN ヲ二邊トスル矩形ヲ作レバ,AM, AN ノ測度ハ夫々 p 及ビ q ニシテ,且 □AM.AN ハ □ABCD ノ mn 倍ニシテ其測度ハ pq ナリ。

故ニ $$mn.S=pq$$

故ニ $$S=\frac{pq}{mn}=\frac{p}{m}\cdot\frac{q}{n}=ab$$

又 a, b ノ中何レカ一ツガ整數ニシテ,他ガ分數ナル場合モ同様ナリ。尙 a, b ノ内何レカ一ツ又ハ雙方ガ不盡數ナル場合[1]ニモ本定理ハ眞ナリ。

此定理ハ之ヲ次ノ如ク略述スルヲ常トス。

矩形ノ面積ハ其二隣邊ノ乘積ニ等シ。

或ハ一邊ヲ**底**ト云ハバ其隣邊ヲ**高サ**ト云ヒ,又ハ二隣邊ヲ夫々**長サ**及ビ**幅**ト云フニヨリ,

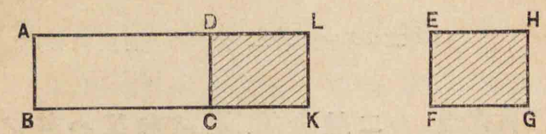
矩形ノ面積ハ底ト高サ(又ハ長サト幅)トノ乘積ニ等シ。

系 正方形ノ面積ノ測度ハ,其一邊ノ測度ノ二乘冪(平方)ニ等シ。

*問 矩形ノ底(又ハ高サ)ノ測度ハ,其面積ノ測度ヲ高サ(又ハ底)ノ測度ニテ除シタル商ナリ。

(1) 此場合ノ證明ハ稍繁雜ナルヲ以テ省略ス。

94. 定理 一邊ヲ等シクスル二ツノ矩形ノ和又ハ差ハ,其相等シキ邊ト兩形ノ他ノ邊ノ和又ハ差トノ矩形ニ等シ.



假設 二ツノ矩形 ABCD, EFGH ニ於テ

AB=EF トス。

終結 □AB.BC+□EF.FG = □AB(BC+FG)

證明 BC ヲ延長シ CK=FG ナラシメ, 矩形 ABKL ヲ作ルトキハ, 矩形 DK ハ矩形 EG ニ合同ナルヲ以テ

□AK = □AC+□EG

而シテ矩形 ABKL ハ AB ト BC+FG ニ等シキ BK トノ矩形ナリ。

故ニ □AC+□EG = □AB.(BC+FG)

故ニ □AB.BC+□EF.FG = □AB(BC+FG)

同様ニ □AB.BC−□EF.FG = □AB(BC−FG)

但シ BC>FG トス。

系 $\square A.B+\square A.C+\square A.D=\square A(B+C+D)$ 等

$\square A.B-\square A.C+\square A.D=\square A(B+D-C)$ 等

但シ $B+D>C$ トス。

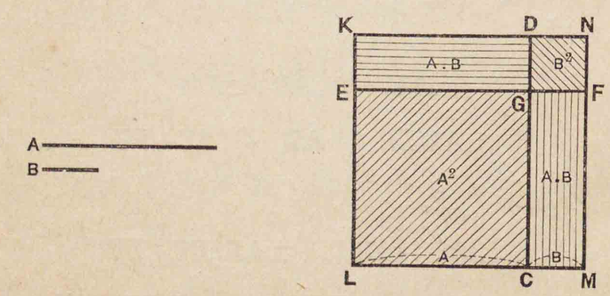
注意 A, B, C ノ測度ヲ夫々 a, b, c トスレバ;

$$ab\pm ac=a(b\pm c) \quad \text{(複號同順)}$$

95. 定理 二線分(A, B)ノ和又ハ差ノ上ノ正方形ハ,其各線分上ノ正方形ノ和ニ,其二線分ノ矩形ノ2倍ヲ加ヘタルモノ,又ハ其兩正方形ノ和ヨリ其矩形ノ2倍ヲ減ジタルモノニ等シ.

【一】 $(A+B)^2=A^2+B^2+2\square A.B$

【二】 $(A-B)^2=A^2+B^2-2\square A.B$ 但シ $A>B$ トス。



證明 [一] LM ヲ A+B ニ等シキ線分トシ, LM 上ニ正方形 LMNK ヲ作リ, 又 LM 及ビ LK 上ニ

LC=A, LE=A ナルヤウニ夫々 C 及ビ E ヲ取リ, C 及ビ E ヲ過ギ夫々 LK 及ビ LM ニ平行ニ CD 及ビ EF ヲ引クトキハ,

正方形 $LN=(A+B)^2$,

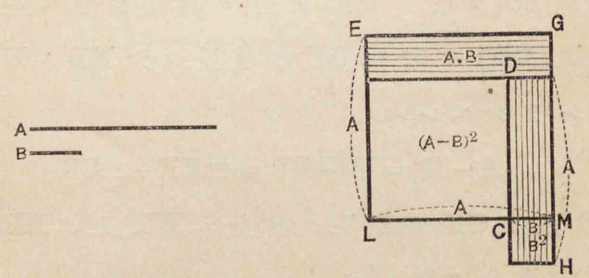
正方形 $CE=A^2$, 正方形 $DF=B^2$,

矩形 $CF=A.B$, 矩形 $DE=A.B$

而シテ 正方形 $LN=CE+DF+CF+DE$

故ニ $(A+B)^2=A^2+B^2+2\square A.B$

[二] (次ノ圖ニヨリテ學生之ヲ證明セヨ)



注意 A 及ビ B ノ測度ヲ夫々 a 及ビ b トセバ,

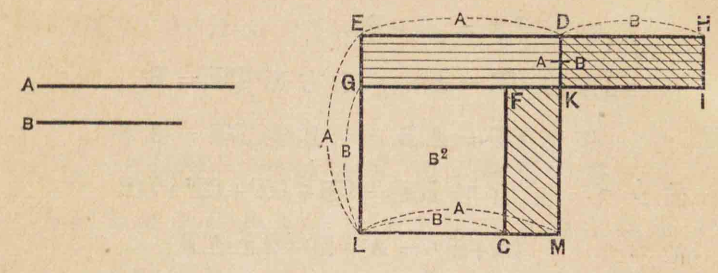
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \quad 及ビ \quad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

系一. 或線分上ノ正方形ハ,其半分ノ上ノ正方形ノ四倍ニ等シ。

系二. 面積相等シキ兩正方形ノ邊ハ相等シ。

96. 定理 二線分(A,B)上ノ正方形ノ差ハ,其二線分ノ和ト差トノ矩形ニ等シ.

$$A^2-B^2=\square(A+B)(A-B) \quad \text{但シ} A>B \text{トス。}$$



證明 LMヲAニ等シキ線分トシ,其上ニBニ等シクLCヲ取リ LM,LC上ニ其同ジ側ニ正方形LMDE,LCFGヲ作リ,GFヲ延長シテMDトKニ於テ交ハラシムレバ,

$$A^2-B^2=LD-LF=\square EK+\square CK$$

ED及ビGKヲ延長シ,其上ニDH及ビKIヲ共ニBニ等シク取レバ,

$$\square KH\equiv\square CK$$

故ニ $\square EK+\square CK=\square EK+\square KH=\square GH$

故ニ $A^2-B^2=\square GH=\square EH.EG$

然ルニ $EH=A+B,\quad EG=A-B$

故ニ $A^2-B^2=\square(A+B)(A-B)$

注意 A,Bノ測度ヲ夫々a,bトスレバ,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

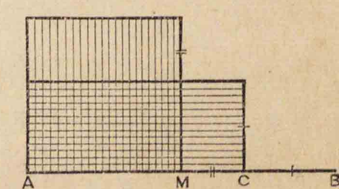
以上數節ニ於テ定理ヲ等式ニテ表ハシタルモノガ,全ク代數學ニ於ケル乘法ノ公式ニ符合シ,其測度ニ改メタルモノハ代數學ノ等式トナル。

系 線分上ノ一點ハ之ヲ二ツノ部分ニ分ツ,其二ツノ部分ノ矩形ハ,其線分ノ半分ノ平方ト中點ト分點トノ間ノ部分ノ平方トノ差ニ等シ。

線分ABノ一分點ヲCトシ,中點ヲMトスレバ,

$$\square AC.BC=\overline{AM}^2-\overline{CM}^2$$

問 1. 線分ABヲCニテ分チ,□AC.BCノ最大ナルハCガABノ中點ナルトキナリ。



問 2. 等周ノ矩形ノ中正方形ガ最大ナリ。

問 3. Mヲ線分ABノ中點トシ,Cヲ分點トシ,AC=9糎,BC=5糎ナルトキハ,CMノ長サ如何。

一般ニ $CM = \frac{1}{2}(AC \sim BC)$

又 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2)$

回顧, 復習.

一. 定義.

(1) 平面形ノ面積, 二線分ノ矩形, 線分上ノ正方形。

(2) 面積ノ單位, 量ノ測度。

二. 定理. 次ノ各ニ關スル定理。

(1) 矩形ノ面積, 正方形ノ面積。

(2) 一邊ヲ等シクスル矩形ノ和又ハ差。

(3) 二線分ノ和又ハ差ノ平方。

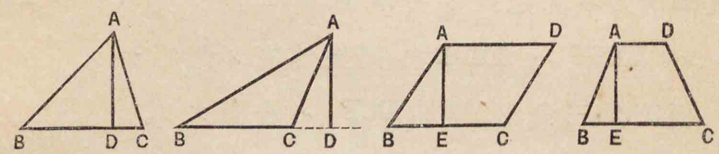
(4) 二線分ノ平方ノ差。

(5) 線分ヲ二分シタルトキ其二部分ノ包ム矩形。

第五章

多角形ノ面積

97. **定義** 三角形及ビ平行四邊形ハ其何レカ一邊ヲ底ト見做シ,其上ニ立ツト考フルコトアリ, 而シテ此場合ニハ底ト之ニ對スル頂點又ハ底ノ對邊トノ距離ヲ其**高サ**ト云フ。



梯形ノ高サトハ其兩底間ノ距離ヲ云フ。

問 直角等脚三角形ノ高サハ,其底ノ半ニ等シ。

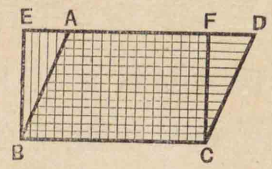
二ツノ平面形ニ於テ其形ヲ異ニシテ,其大サ即チ面積ノ相等シキモノアリ,此場合ニハ兩形ハ**相等シ又ハ等積ナリ**ト云フ。

合同ナル圖形ハ相等シ。

98. **定理** **平行四邊形ハ之ト底ト高サトヲ夫々等シクスル矩形ニ等シ.**

假設 ABCD ヲ平行四邊形トシ, BC ヲ其底トス。

終結 ABCD ハ BC ニ等シキ底ヲ有シ,其高サニ等シキ高サヲ有スル矩形ニ等シ。



證明 底ノ兩端 B, C ヨリ BC ニ垂線ヲ引キ,對邊 AD 又ハ其延長ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシムレバ, EBCF ハ ABCD ト同底等高ノ矩形ナリ。

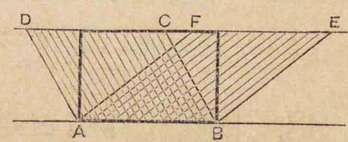
兩直角三角形 ABE, DCF ハ合同ナリ。 (70)

故ニ ▱ABCD=▭EBCF

故ニ平行四邊形 ABCD ハ其底 BC ニ等シキ底ヲ有シ,其高サ BE ニ等シキ高サヲ有スル矩形ニ等シ。

系一. 等底等高ノ平行四邊形ハ等積ナリ。

問 1. 同底又ハ等底ヲ有シ,同ジ平行線間ニアル平行四邊形ハ等積ナリ。



問 2. 所設ノ平行四邊形ニ等積ナル矩形ヲ作レ。

系二. 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ乘積ニ等シ。

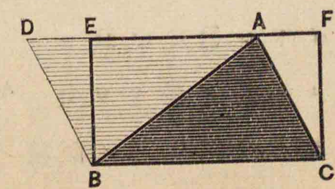
平行四邊形ノ面積ヲ S, 其底及ビ高サヲ夫々 b 及ビ h トセバ $S=bh$

系三. 等底(又ハ等高)ノ平行四邊形ニ於テハ,高サ(又ハ底)ノ大ナルモノガ大ナル面積ヲ有ス。

逆モ眞ナリ。

*問 3. 等底等積ナル平行四邊形ハ等高ナリ。又等高等積ナル平行四邊形ハ等底ナリ。 (系一參照)

99. 定理 三角形ハ等底等高ノ矩形ノ半ニ等シ。(次ノ圖ニヨリ學生之ヲ證明セヨ)

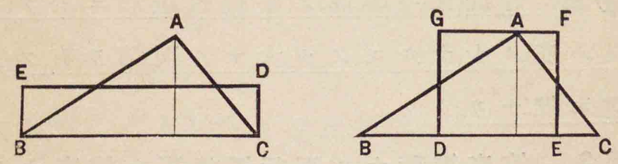


系一. 等底等高ノ三角形ハ等積ナリ。又等底(又ハ等高)等積ナル三角形ハ等高(又ハ等底)ナリ。

系 二. 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ乘積ノ半ニ等シ。

三角形ノ面積ヲS,其底及ビ高サヲ夫々b及ビhトセバ　$S=\frac{1}{2}bh$

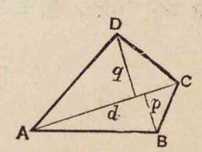
問 1. AヨリBCヘ垂線ヲ引キテ此定理ヲ證明セヨ。又次ノ圖ニヨリテモ證明セヨ,



問 2. 三角形ノ中線ハ其三角形ヲ二等分ス。

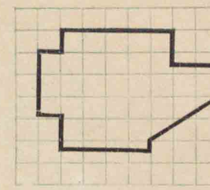
問 3. 四邊形ABCDノ對角線ACガBDヲ二等分スルトキハ,ACハ本形ヲ二等分ス。

問 4. 四邊形ABCDノ對角線ACノ長サヲdトシ,B及ビDヨリACヘ下セル垂線ノ長サヲ夫々p及ビqトセバ,此四邊形ノ面積ハ$\frac{1}{2}d(p+q)$ナリ。



問 5. 同底等積ナル兩三角形ノ頂點ヲ結ブ直線ハ底ニ平行ナルカ又ハ底ニテ二等分セラル。

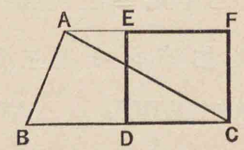
問 6. 方眼ノ數ヲ數ヘテ圖ノ多角形ノ面積ヲ概算セヨ。但シ方眼ノ一邊ヲ一糎トスベシ。



此方法ハ甚ダ實用的ニシテ方眼ノ大サヲ小サクスレバ益々精確ナル結果ヲ得。

100. 作圖題 所設ノ三角形ト等積ナル矩形ヲ作レ.

(次ノ圖ニヨリ學生之ヲ解クベシ)

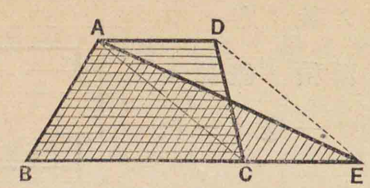


問 所設ノ三角形ト等積ニシテ,所設ノ角ニ等シキ一角ヲ有スル三角形及ビ平行四邊形ヲ作レ。

101. 定理 梯形ハ之ト等高ニシテ其兩底ノ和ニ等シキ底ヲ有スル三角形ニ等シ.

假設 ABCDヲ梯形トシAD, BCヲ其兩底トス。

終結 ABCDハ之ト等高ニシテAD, BCノ和ニ等シキ底ヲ有スル三角形ニ等シ。



證明 BC ヲ延長シ其上ニ CE ヲ AD ニ等シク取リ, AE, AC, DE ヲ結ブ。

然ラバ,四邊形 ACED ハ其一組ノ對邊 AD, CE ガ平行ニシテ且相等シキヲ以テ平行四邊形ナリ。

故ニ　　DE ∥ AC

故ニ　　△ADC = △AEC　　(99系一)

△ABC ニ夫々此相等シキ兩三角形ヲ加フレバ,

梯形 ABCD = △ABE

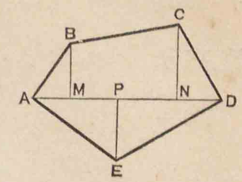
然ルニ △ABE ハ BE ヲ底トスレバ,梯形 ABCD ト等高ニシテ且其底 BE ハ BC+AD ニ等シ。

故ニ梯形 ABCD ハ之ト等高ニシテ其兩底ノ和ニ等シキ底ヲ有スル △ABE ニ等シ。

系 梯形ノ面積ハ兩底ノ和ト高サトノ乘積ノ半ニ等シ。

梯形ノ兩底ヲ夫々 a, b トシ,其高サヲ h トシ,其面積ヲ S トセバ,　$S=\frac{1}{2}h(a+b)$

問 1. 右ノ多角形 ABCDE ノ面積ヲ計算セヨ。但シ **AM, MN, ND, BM, CN, EP** ヲ夫々 $a\ b, c, d, e, f$ トス。

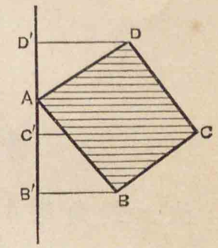


問 5. 右ノ四邊形 ABCD ノ面積ヲ計算セヨ。但シ

AD′=6米, AC′=3米,

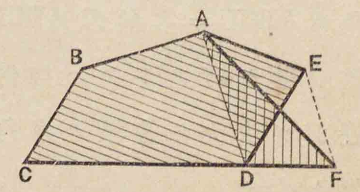
C′B′=5米, DD′=8米,

CC′=14米, BB′=7米 トス。



102. 作圖題 所設ノ多角形ニ等積ナル三角形ヲ作レ.

題意 ABCDE ヲ所設ノ多角形トシ,之ニ等積ナル三角形ヲ作ルコトヲ求ム。

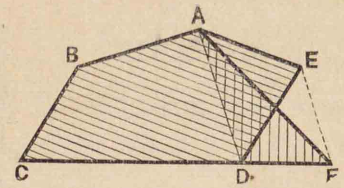


作圖 今若シ ABCDE ガ邊數一ツ少ナキ ABCF ニ等シトシ, AD, EF ヲ結ベバ,

△AFD = △AED

ナルベキヲ以テ,此兩三角形ハ AD ヲ底ト見レバ等高ナルヲ要ス。

故ニ　　EF ∥ AD　　ナルヲ要ス。[1]



依テ對角線 AD ヲ引キ,之ニ平行ニ EF ヲ引キ CD ノ延長ト F ニ於テ交ハラシメ,AF ヲ結ブ。

次ニ又對角線 AC ヲ引キテ同法ヲ行フ。

カクスレバ終ニ所要ノ三角形ヲ得。

證明　　EF ∥ AD　　(作圖)

故ニ　　△AFD ＝ △AED

故ニ　　多角形 ABCF ＝ 多角形 ABCDE

故ニ此方法ヲ續ケ行フトキハ,如何ナル多角形モ一回ニ一邊ヅツ少ナキ等積ノ多角形ニ變ゼラレ,終ニ三角形トナル。

(1) ココマデハ解析ト云フ部分ナリ, 第110節ニ至リテ明瞭トナルベシ。

問題 6

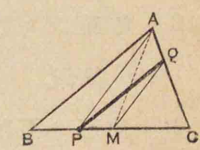
1. 所設ノ二線分ヲ二邊トスル三角形ノ中,其夾角ガ直角ナルモノガ最大ナリ。

2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次結ビテ成ル平行四邊形ハ本形ノ半分ニ等シ。

3. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ過グル直線ハ本形ヲ二等分ス。

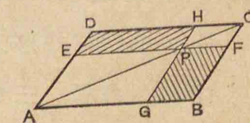
4. 所設ノ點ヲ過グル直線ヲ以テ所設ノ平行四邊形ヲ二等分セヨ。

5. △ABC ノ一邊 BC 上ノ定點 P ヲ過ギ,此三角形ノ面積ヲ二等分スル直線ヲ引ケ。



又此面積ヲ三等分スル直線ヲ引ケ。

*6. ABCD ヲ平行四邊形トシ,P ヲ其形內ニ在ル一點トシ,P ヲ過ギ二隣邊ニ平行ニ EF, GH ヲ引クトキハ,



[1] P ガ對角線上ニ在レバ,　▱PB＝▱PD

此場合ニ於テ ▱EG, ▱FH ヲ對角線 AC ニ沿ヘ

ル**平行四邊形**ト云ヒ，▱PB, ▱PD ヲ其**餘形**ト云フ。

[2] P ガ對角線 AC 上ニ在ラザレバ，

$$\triangle APC = \frac{1}{2}(\square PB \sim \square PD)$$

[3] ▱PB＝▱PD ナラバ，P ハ AC 上ニ在リ。

回顧，復習.

一. 定義.

三角形，平行四邊形，梯形ノ底及ビ高サ

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) 平行四邊形及ビ三角形ノ面積。

(2) 等積ナル兩平行四邊形及ビ兩三角形ノ底ト高サトノ關係。

(3) 梯形ノ面積。

三. 平行四邊形，三角形，梯形ノ面積ノ公式。

四. 作圖題.

(1) 平行四邊形及ビ三角形ヲ矩形ニ直スコト。

(2) 多角形ヲ三角形ニ直スコト。

第六章

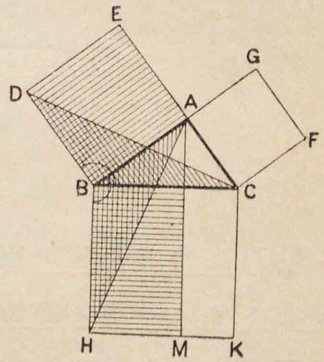
三角形ノ邊ノ平方

103. **定理** **直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シ.** (ぴたごらすノ定理)[1]

假設 △ABC ニ於テ ∠BAC ヲ直角トス。

終結 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

證明 AB, AC, BC 上ニ夫々正方形 ABDE, ACFG, BCKH ヲ畫キ，A ヨリ BH ニ平行ニ AM ヲ引キ HK ト M ニテ交ハラシメ，AH 及ビ DC ヲ結ベバ，CAE ハ一直線ニシテ BD ニ平行ナル故，



故，　正方形 BE ＝ 2△BCD

又　矩形 BM ＝ 2△ABH

而シテ　△BCD ≡ △ABH　(27[一])

故ニ　正方形 BE ＝ 矩形 BM

---

[1] 卷首ニぴたごらす Pythagoras ノ肖像及ビ傳記アリ。

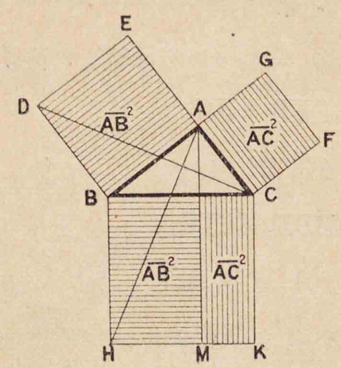
我國ニテハ此定理ヲ**鈎股弦**ノ定理ト云ヒ，之ヲ完全ニ證明セシハ關孝和(寬永19年ニ生レ寶永5年ニ死ス，西曆1642—1708)ナリト云フ。

同様ニ　正方形CG＝矩形CM

然ルニ AMハ∠BAC内ニ在ルヲ以テ,

正方形BK＝矩形BM＋矩形CM

故ニ　$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$



系　直角三角形ノ直角ノ一邊ノ平方ハ,斜邊ノ平方ト他ノ一邊ノ平方トノ差ニ等シ。

三邊ノ測度ヲa, b, c(aヲ斜邊トス)トセバ,

$$a^2 = b^2 + c^2,\quad b^2 = a^2 - c^2,\quad c^2 = a^2 - b^2$$

問 1.　6米ノ梯子ヲ壁ニ掛ケタルアリ,壁ノ礎ト梯子ノ下端トノ距離2米ナリ,梯子ノ上端ノ高サ幾米ナルカ。

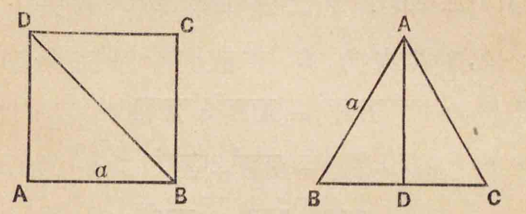
問 2.　6米ト4米トノ高サアル二ツノ柱ガ3米離レテ直立スルトキハ,其頂ノ距離如何。

問 3.　四邊形ABCDノ對角線ガ直交スレバ,

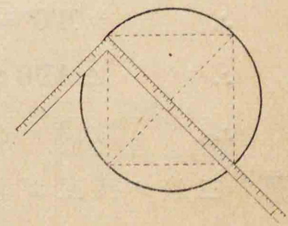
$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2$$

系一.　一邊ガaナル正方形ノ對角線ハ$\sqrt{2}a$ナリ。

系二.　一邊ガaナル正三角形ノ高サハ$\frac{\sqrt{3}}{2}a$ニシテ,面積ハ$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ナリ。



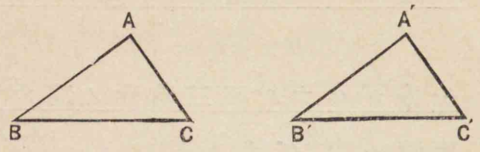
注意　古來我國ノ大工等ノ所持スル物指(さしがね)ニアル裏指(うらざし)ハ$\sqrt{2}$寸ヲ分割ノ單位トセルモノニシテ,丸太ヨリ取ル柱ノ寸法等ヲ知ルニ用ヒテ甚ダ便ナルモノナリ。



104.　定理　三角形ノ一邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シキトキハ,其邊ノ對角ハ直角ナリ。

假設 △ABC ニ於テ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ トス。

終結 ∠A ハ直角ナリ。



證明 △A′B′C′ ヲ二邊 A′B′, A′C′ ガ夫々 AB, AC ニ等シク,且其夾角 A′ ガ直角ナル三角形トセバ,

$$\overline{B'C'}^2=\overline{A'B'}^2+\overline{A'C'}^2 \qquad (103)$$

$$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 \qquad (作圖)$$

然ルニ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ (假設)

∴ $\overline{B'C'}^2=\overline{BC}^2$

∴ $B'C'=BC$

∴ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$ (34)

∴ $\angle A=\angle A'=$ 直角

問 三邊ノ測度ガ 3, 4, 5 ナル三角形ハ直角三角形ナリ。

注意 此簡單ナル三ツノ長サハ一筋ノ繩ニテ直角ヲ作ルニ用ヒテ極メテ便ナリ,故ニ測量ニ應用ス。

105. **作圖題** **所設ノ二ツノ正方形ノ和又ハ差ニ等シキ正方形ヲ作レ.**

題意 所設ノ兩正方形ノ一邊ヲ A 及ビ B トス。A^2+B^2 ニ等シキ正方形及ビ A^2-B^2 ($A>B$ トシ) ニ等シキ正方形ヲ作ルコトヲ求ム。

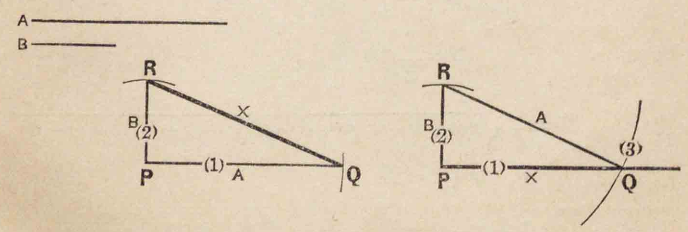
解 所要ノ正方形ノ一邊ヲ X トセバ,

$$A^2+B^2=X^2$$

又ハ $A^2-B^2=X^2$ 從テ $A^2=B^2+X^2$

ナルベキヲ以テ,A, B, X ハ一ツノ直角三角形ノ三邊ニ等シク, 第一ノ場合ニ於テハ X ガ斜邊トナリ,第二ノ場合ニ於テハ A ガ斜邊トナル。

(依テ容易ニ作圖法ヲ得ベシ,學生之ヲ試ミヨ)



問 $A^2+B^2+C^2$ ニ等シキ正方形ヲ作レ。

106. **定理** **三角形ABCノ三邊 BC, CA, AB ノ測度ヲ夫々 a, b, c トシ,其面積ノ測度ヲ S トセ**

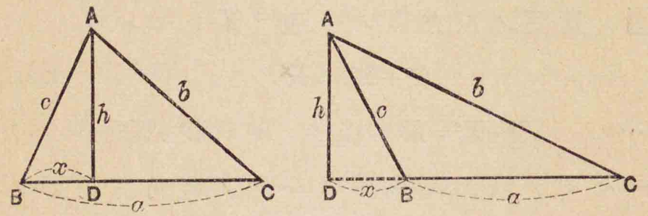
バ,

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ^{*}$$

但シ $s=\dfrac{(a+b+c)}{2}$ [半周]

證明 高サ AD ノ測度ヲ h, BD ノ測度ヲ x トセバ,

$$h^2=c^2-x^2=b^2-(a\pm x)^2$$



故ニ $x=\pm\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}$

之ヲ $h^2=c^2-x^2=(c+x)(c-x)$ ニ代入スレバ

$$h^2=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

然ルニ $S=\dfrac{1}{2}ah$ (93 系二)

故ニ $S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

然ルニ $a+b+c=2s$

故ニ $b+c-a=2s-2a=2(s-a)$,

$c+a-b=2(s-b)$,

$a+b-c=2s-c)$

(1)之ヲひーらー Hero 又ハへろん Heron ノ公式ト云フ。此人ハ埃及あれきさんどりやニ住シ，西暦紀元前200年頃ヨリ125年頃ノ數學者ナリ。

之ヲ前式ニ代入スレバ

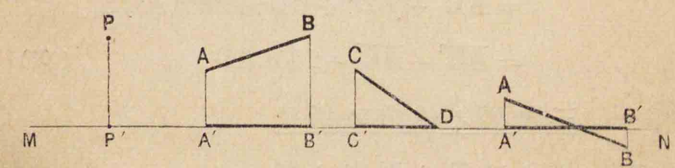
$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

問 三邊ガ 13 m, 14 m, 15 m ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

又 15 m ノ邊ヲ底トスレバ此三角形ノ高サ如何。

107. **定義** **正射影.** 一直線上ニ投ズル或點ノ正射影トハ,其點ヨリ其直線ヘ下セル垂線ノ足ヲ云フ。

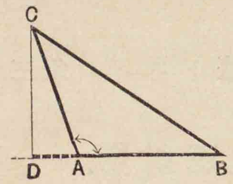
又一直線上ニ投ズル或線分ノ正射影トハ,其線分ノ兩端ヨリ,其直線ヘ下セル垂線ノ足ノ間ニアル其直線ノ部分ヲ云フ。



108. **定理** **鈍角三角形ノ鈍角ノ對邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ,其一邊ト其上ニ投ズル他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ダケ大ナリ.**

假設 △ABC ニ於テ ∠BAC ヲ鈍角トシ, CD ヲ C ヨリ對邊ヘ下シタル垂線トス。

終結 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB.AD$



證明 ∠BAC ハ鈍角ナル故, D ハ BA ノ延長上ニ在リ。 故ニ $BD = AB + AD$

又 $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$ (103)

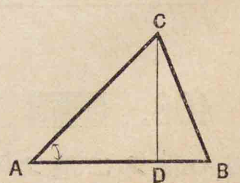
故ニ $\overline{BC}^2 = (AB+AD)^2 + \overline{CD}^2$

$= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2AB.AD + \overline{CD}^2$ (95)

$= \overline{AB}^2 + (\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2) + 2AB.AD$

$= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB.AD$ (103)

系一. 三角形ノ鋭角ノ對邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ,其一邊ト其上ニ投ズル他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ダケ小ナリ。



問 1. △ABC ノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a,

b, c トスルトキハ,

(1) ∠A = 120° ナレバ $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ ニシテ,

(2) ∠A = 60° ナレバ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ナリ。

系二. 三角形ノ一邊ノ平方ガ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ大ナルカ,又ハ小ナルカニ從テ,其邊ノ對角ハ鈍角又ハ鋭角ナリ。 (歸謬法)

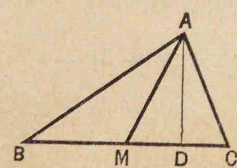
問 2. 三角形ノ三邊ノ長サガ夫々次ノ如キトキハ,此三角形ハ鋭角三角形,直角三角形,鈍角三角形ノ中何レナルカ。

(1) 2, 3, 4 (2) $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1 (3) $\sqrt{20}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{40}$

109. 定理 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ,第三邊ノ半分ノ平方ト此邊ヘノ中線ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ.

假設 △ABC ニ於テ M ヲ邊 BC ノ中點トス。

終結 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$



(A ヨリ BC ヘ垂線 AD ヲ引キ,前節ノ定理及ビ其系一ヲ用ヒテ學生之ヲ證明セヨ)

*圖 1. 平行四邊形ノ四邊ノ平方ノ和ハ,兩對角線ノ平方ノ和ニ等シ。

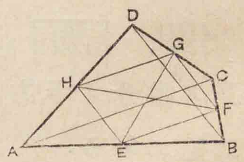
圖 2. △ABC ノ三中線ノ長サヲ三邊 a, b, c ニテ表ハセ。若シ底ガ 210 cm, 他ノ邊ガ 105 cm, 135 cm ナラバ,底ヲ二等分スル中線ノ長サ如何。

問 題 7

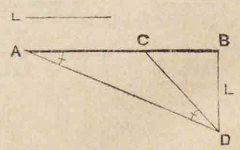
1. △ABC ノ A ヨリ BC ヘ垂線 AD ヲ下セバ,

$$\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 \sim \overline{CD}^2$$

2. 四邊形ノ對角線ノ平方ノ和ハ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シ。



*3. 所設ノ線分ヲ二分シ,其兩部分ノ平方ノ差ヲ所設ノ正方形ニ等シクセヨ。



4. 直角ノ二邊ノ長サガ a, b ナル直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ。

5. 正三角形ト正方形トアリ,其周ガ相等シキトキハ何レノ面積ガ大ナルカ。

又其周ガ何レモ 12 m ナルトキハ,其面積ノ差ハ幾平方米ナルカ。

回顧, 復習.

一. 定義.

一直線上ニ投ズル點及ビ線分ノ正射影。

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) ぴたごらすノ定理及ビ其逆定理。

(2) 鈍角三角形ノ鈍角ノ對邊ノ平方。

(3) 三角形ノ鋭角ノ對邊ノ平方。

(4) 三角形ノ二邊ノ平方ノ和。

三. 公式.

(1) ひーろーノ公式。

(2) 一邊ガ a ナル正方形ノ對角線。

(3) 一邊ガ a ナル正三角形ノ高サト面積。

四. 作圖題.

二ツノ正方形ノ和又ハ差ニ等シキ正方形ヲ作ルコト。

雜 題 1

1. 正三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ト他ノ二邊(其延長ヲモ含ムコトアリ)トニテ作ル三角形ハ正三角形ナリ。

2. △ABC ノ二中線 BE, CF ヲ夫々 M, N マデ延長シ EM=BE, FN=CF トセバ,三點 M, A, N ハ同一直線上ニ在リ。

3. AD ヲ △ABC ノ一中線トセバ,

$$2AD < AB + AC$$

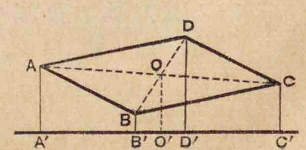
4. 三角形ノ一角ノ二等分線ハ其角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ト中線トノ間ニアリ。

5. 三角形ノ二中線ノ中,大邊ヘ引ケルモノハ他ヨリ小ナリ。

6. O ヲ △ABC 內ノ一點トセバ,

$$AB+BC+CA > AO+BO+CO > \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

7. 平行四邊形ノ一組ノ對角ノ頂點ヨリ其形外ノ一直線ニ下ス垂線ノ和ハ,他ノ一組ノ對角ノ頂點ヨリ同ジ直線ニ下ス垂



線ノ和ニ等シ。

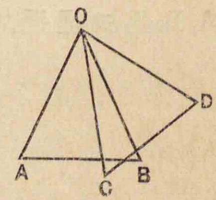
8. 二邊ガ夫々相等シク,其夾角ガ互ニ補角ナル兩三角形ハ等積ナリ。

9. 四邊形ノ四邊ノ平方ノ和ハ兩對角線ノ平方ノ和ヨリモ,兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ノ平方ノ四倍ダケ大ナリ。

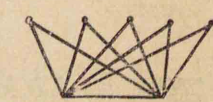
10. 次ノモノヲ與ヘテ直角三角形ヲ作レ。

斜邊ト一邊, 斜邊ト一銳角, 一邊ト一銳角。

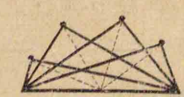
11. 同ジ頂點 O ヲ有スル二ツノ合同ナル二等邊三角形 OAB, OCD アルトキ,其一ツ OCD ヲ O ヲ中心トシテ回轉スルトキハ, AC ト BD トハ常ニ相等シ。



12. 同ジ底邊上ノ同側ニ等積ノ三角形ガ立ツトキハ其頂點ハ如何ナル線上ニ在ルカ。



13. 同ジ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ直角ノ頂點ハ如何ナル線上ニ在ルカ。



第三篇

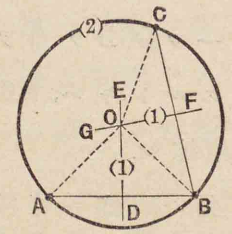
圓

第一章

中心角,弧及ビ弦

(第一篇第三章ノ續キ)

110. **作圖題** **一直線上ニ在ラザル三點 (A, B, C) ヲ通過スル圓周ヲ畫ケ.**[1]



作圖 (1) AB, BC ノ垂直二等分線 DE, FG ヲ引ク。DE, FG ハ相交ハル,其交點ヲ O トス。 (46, 62 系五)

(2) O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケバ,コレ所要ノ圓周ナリ。

---

[1] 以下一々圖ニ就キテ題意ヲ說明セズ,題文中ニ符號ヲ挿ミテ之ヲ指示スルニ止ム。定理ニ就キテモ亦同樣トス。

證明 AO, BO, CO ヲ結ベバ,

OA = OB 及ビ OB = OC (75 系四)

故ニ OA = OB = OC

故ニ此圓周ハ A, B 及ビ C ヲ過グ。

注意一. 作圖題ヲ解クニ當リ,直ニ其作圖法ヲ案出シ得ザルトキハ,次ノ如クスベシ。

問題ガ既ニ解キ得ラレタリト考ヘ, 解答ト假定スル圖形ヲ畫キ,此圖形ニ於テ所題ノ條件ガ成立スルタメニハ其代リニ如何ナル條件ガ成立スルヲ要スルカヲ考ヘ, 更ニ此新條件ガ成立スルタメニ必要ナル第三ノ條件ヲ探究シ, 追テカクノ如クシテ, 終ニ直ニ作圖シ得ベキ條件ヲ得, 以テ作圖ノ出發點トスベシ。之ヲ作圖題ノ**解析**ト云フ。

解析ニテ得タル筋途ニ依リ解析ト全ク反對ノ順序ヲ以テ作圖ヲ進行スルトキハ終ニ所要ノ圖形ヲ得ベシ。之ヲ**總合**又ハ**作圖**ト云フ。

作圖題ヲ解クニハ先ヅ解析ヲ施シテ作圖ノ出發點ヲ究メ, 次ニ總合ニヨリテ作圖ノ方法ヲ知ルベシ。前者ハ進路ヲ指導シ,後者ハ解答

ヲ實現セシム。

更ニ本節ノ問題ニ就キテ之ヲ說明センニ,

圓ヲ畫クニハ其中心ト半徑トヲ知ルヲ要スルヲ以テ,A,B,Cヲ過グル圓周ガ既ニ畫キ得ラレタリト考ヘ, 其中心ヲOトセバ,Oハ三點A,B,Cヨリ等距離ニ在ルヲ要ス。

故ニOハ二點A,Bヨリ等距離ニ在リ,且二點B,Cヨリモ等距離ニ在ルヲ要ス。

故ニOハ線分ABノ垂直二等分線上ニ在リテ,且線分BCノ垂直二等分線上ニモ在ルヲ要ス。故ニOハ此兩垂直二等分線ノ交點タルヲ要ス。

故ニ上ノ作圖法ヲ得ルナリ。

注意二. 作圖題ヲ解クニ當リ,先ヅ解析ヲ行フトキハ,作圖ノ方法ヲ知ルノミナラズ,作圖ニヨリテ所要ノ圖形ガ悉ク得ラルルコトトナル。

上ノ問題ニ於テハOハAB, BCノ垂直二等分線ノ交點ナルヲ要スルヲ以テ,此兩者ガ平行ナルトキハ存在セズ。

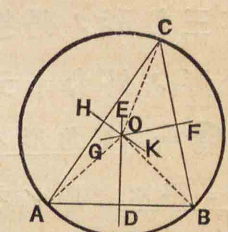
故ニ所設ノ三點A,B,Cガ一直線上ニ在ラバ

解答ナシ, 即チ問題ハ**不可能**ナリ。

又A,B,Cガ一直線上ニ在ラザレバ此兩垂直二等分線ハ必ズ交ハルヲ以テ解答アリ。

而シテOハAB, BCノ垂直二等分線ノ交點ニ限ラズ,三線分AB, BC, CAノ中何レカ二ツノ垂直二等分線ノ交點ニテ可ナリ。

然ルニ OA=OC ナルヲ以テ,ACノ垂直二等分線ハOヲ通過ス。 (75系四)



即チ AB, BC, CA ノ垂直二等分線ハ同一點Oニ集交ス。

而シテ同ジ點ヲ中心トシ,等シキ半徑ヲ有スル圓周ハ唯一ツニ限ル(35)ヲ以テ,A,B,Cヲ通過スル圓周ハ上ノ圓周唯一ツニ限ル。

即チ本問題ノ解答ハ唯一ツアルノミ。

カク 問題ノ可能不可能ニ關スル所設ノ元素間ノ關係ヲ定メ,且其可能ノ場合ニ於ケル解答ノ數ヲ定ムルコトヲ作圖題ノ**吟味**ト云フ。

作圖題ノ解ニハ吟味ヲモナスコト肝要ナリ。

上ノ研究ニヨリ次ノ定理ヲ得。

定理 一直線上ニ在ラザル三點ヲ通過スル圓周ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

系 三點ヲ共有スル圓周ハ皆相合ス。

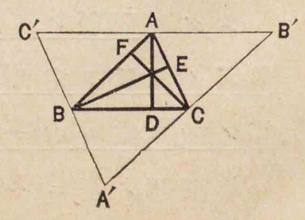
111. **定義** **三角形ノ外接圓.** 圓周ガ三角形ノ三頂點ヲ通過スルトキハ,其圓ヲ其三角形ノ**外接圓**ト云ヒ, 其中心ヲ其三角形ノ**外心**ト云フ。

系一. 三角形ノ外接圓ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。而シテ 外心ハ三頂點ヨリ等距離ニ在リ。

系二. 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ一點ニ集交シ,其交點ハ外心ナリ。

系三. 三角形ノ各頂點ヨリ夫々對邊ヘ下セル三垂線ハ同一點ヲ通過ス。

(何トナレバ此三垂線ハ各頂點ヲ過ギ夫々對邊ニ平行ナル三直線ガ作ル三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ニ相當スレバナリ)



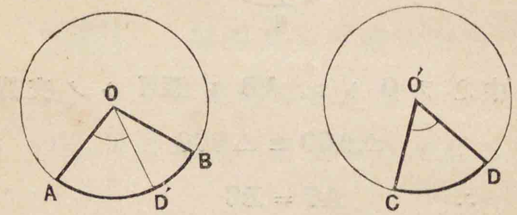
此點ヲ三角形ノ**垂心**ト云フ。

112. **作圖題** 所設ノ圓ノ中心ヲ求メヨ.

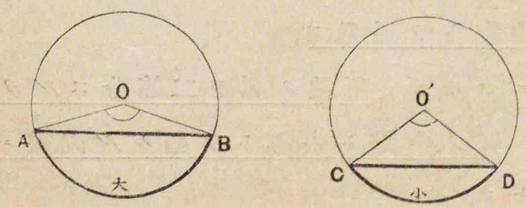
(學生之ヲ試ミヨ)

113. **定理** 等圓又ハ同圓ニ於テ二ツノ中心角ガ等シカラザルトキハ,其大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大ナリ.

逆モ眞ナリ. (重置法)

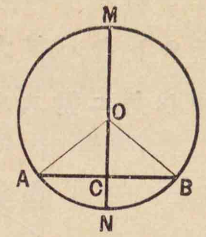


114. **定理** 等圓又ハ同圓ニ於テ二ツノ劣弧ガ等シカラザルトキハ,其大ナル弧ノ弦ハ小ナル弧ノ弦ヨリ大ナリ. 逆モ眞ナリ.



(前節及ビ第76節,第77節ヲ用ヒテ證明セヨ)

115. **定理** 弦(AB)ニ垂直ナル直徑(MN)ハ此弦及ビ此弦ニ對スルニツノ弧(ANB及ビ AMB)ヲ二等分ス.



證明 中心ヲ O トシ, AB ト MN トノ交點ヲ C トセバ

$\triangle ACO \equiv \triangle BCO$ (70)

$\therefore$ AC = BC

又 $\angle AON = \angle BON$

$\therefore$ 弧 AN = 弧 BN (40[五])

從テ 弧 AM = 弧 BM

系一. 弦ノ垂直二等分線ハ中心ト其弦ニ對スル弧ノ中點トヲ通過ス。

此系ニヨリテ 所設ノ弧ヲ二等分スルヲ得。

系二. 弦ノ中點ト中心トヲ過グル直線ハ此弦ニ垂直ナリ。

注意 上ノ定理ノ弦ニ關スルモノノ逆ハ系一,系二ノ二ツナリ。

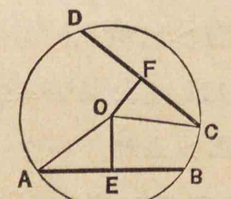
カク 假設ガ二ツ以上ノ事柄ヲ含ムトキハ其一ツト終結トヲ交換シテ生ズル事柄ヲ原定理ノ逆ト云フ。

問 一點ト一直線トアリ,其距離 3m ナリ,今此點ヲ中心トシ,其直線ヨリ 8m ノ弦ヲ截リ取ル圓ヲ畫カントス,半徑ヲ何程ニスベキカ。

116. **定理** 等圓又ハ同圓ニ於テ,

【一】 中心ヨリ等距離ニ在ル弦ハ相等シ.

【二】 中心ニ近キ弦ハ之ヨリ遠キ弦ヨリ大ナリ.

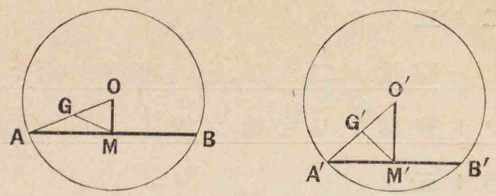


[一] (學生之ヲ證明セヨ)

[二] **假設** 等圓 O, O′ ノ二弦ヲ夫々 AB, A′B′ トシ, 中心 O, O′ ヨリ此二弦ヘ夫々垂線 OM, O′M′ ヲ下シ,

$OM < O'M'$ トス。

終結 $AB > A'B'$



證明 OA, O′A′ ヲ引キ,其中點ヲ夫々 G, G′ トシ, GM, G′M′ ヲ結ベバ,

$$AG=GO=GM=A'G'=G'O'=G'M'$$

故ニ　兩三角形 GOM, G′O′M′ ヨリ

$$\angle OGM<\angle O'G'M' \qquad (77)$$

$$\therefore\quad \angle AGM>\angle A'G'M'$$

故ニ　兩三角形 GAM, G′A′M′ ヨリ

$$AM>A'M' \qquad (76)$$

然ルニ　$AB=2AM$ 及ビ $A'B'=2A'M'$　(115)

$$\therefore\quad AB>A'B'$$

問 1. 本定理ヲぴたごらすノ定理ニヨリテ證明セヨ.

系一. 直徑ハ其圓ノ最大ナル弦ナリ。

系二. 本定理ノ逆モ眞ナリ。

コレ上ト同法ニヨリテ證明スルヲ得レドモ,一括シテ次ノ如ク論理的ニ證明スルヲ便ナリトス。

既ニ本定理ニ依テ次ノ三ツヲ證明セリ。

[1] $OM<O'M'$ ナラバ 弦 $AB>$ 弦 $A'B'$ ナリ。

[2] $OM=O'M'$ ナラバ 弦 $AB=$ 弦 $A'B'$ ナリ。

[3] $OM>O'M'$ ナラバ 弦 $AB<$ 弦 $A'B'$ ナリ。

而シテ證明スベキ事項(系二)ハ次ノ三ツナリ。

[4] 弦 $AB>$ 弦 $A'B'$ ナラバ $OM<O'M'$ ナリ。

[5] 弦 $AB=$ 弦 $A'B'$ ナラバ $OM=O'M'$ ナリ。

[6] 弦 $AB<$ 弦 $A'B'$ ナラバ $OM>O'M'$ ナリ。

今先ヅ[4]ヲ證明セン。

若シ假ニ OM ガ O′M′ ヨリ小ナラズトセバ,

必ズ $OM=O'M'$ 或ハ $OM>O'M'$ ナルヲ要ス。

然ルニ若シ $OM=O'M'$ ナリトセバ,

[2]ヨリ　弦 $AB=$ 弦 $A'B'$ トナリテ假設ニ戻リ,

又若シ　$OM>O'M'$ ナリトセバ,

[3]ヨリ　弦 $AB<$ 弦 $A'B'$ トナリテ假設ニ戻ル。

故ニ　$OM<O'M'$ ナリ。

同樣ニ[5]及ビ[6]ヲ證明スルコトヲ得。

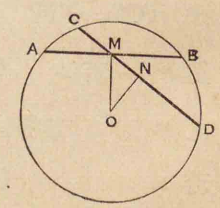
此論法ハ證明セントスル定理ノ終結ト異ナル終結ヲ眞ナリト假定スレバ,皆假設ニ戻ル結果ヲ生ズルコトヲ示シ, 以テ其定理ノ終結ノミガ眞

ナリト結論ス。 (第77節ノ證明參照)

既ニ證明セラレタル互ニ關聯セル一群ノ定理ニ於テ,其等ノ假設ハ或事項ニ就キテ起ルベキ總テノ場合ヲ盡クシ(從テ其中一ツハ必ズ成立スベク),終結ガ互ニ相容レザル(即チ同時ニ二ツ以上眞ナルヲ得ザル)トキハ,上ノ論理ハ必ズ成立スルヲ以テ,直ニ其逆ハ眞ナリト斷定シテ可ナリ。此證明法ヲ**轉換法**ト稱ス。

問 2. 第113節ノ定理ノ逆ノ部分ハ轉換法ニテ直ニ眞ナリト斷定スルコトヲ得ルカ。

問 3. 圓內ノ同ジ點ヲ過グル弦ノ中ニテ,此點ニテ二等分セラルヽモノガ最短ナリ。



問 4. 圓內ノ同ジ點ヲ過グル弦ノ中ニテ,最短ナルモノハ其點ヲ過グル直徑ニ垂直ナリ。

問　題　8

***1.** 等圓又ハ同圓ニ於テ一ツノ中心角ガ他ノ中心角ノ n 倍ナルトキハ,前者ニ對スル弧ハ,後者ニ對スル弧ノ n 倍ニ等シ。

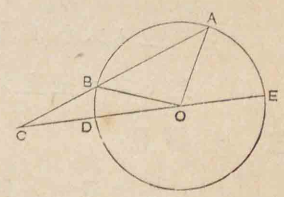
逆モ眞ナリ。

2. 弧ノ中點ヲ過グル中心線ハ其弧ノ弦ヲ垂直ニ二等分ス。

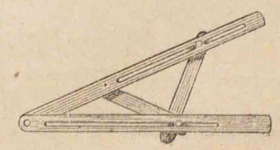
3. 二ツノ等弦ガ相交ハルトキハ,其交點ニテ分タレタル部分ハ二ツヅツ相等シ。

***4.** 圓外ノ一點 P ヨリ其圓周へ二ツノ相等シキ線分 PA, PB ヲ引クトキハ, ∠APB ノ二等分線ハ中心ヲ通過ス。

5. 中心 O ナル圓ノ弦 AB ヲ C マデ延長シ, BC ヲ此圓ノ半徑ニ等シクシ, C ト O トヲ過グル直線 CDOE ヲ引キ,圓周ト交ハル點ヲ D,E トスレバ,弧 AE ハ弧 BD ノ三倍ニ等シク, ∠C ハ ∠AOE ノ三分ノ一ニ等シ。



6. 右ニ示スモノハ角ノ三等分器ナリ,其構造ヲ推定シ,其理ヲ說明セヨ。



回顧，復習.

一. 定義.

(1) 三角形ノ外接圓，外心，垂心。

(2) 定理ノ假設ガ二ツアル場合ノ逆。

(3) 轉換法。

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) 一直線上ニ在ラザル三點ヲ過グル圓周。

(2) 三角形ノ外心ノ問題及ビ垂心ノ問題。

(3) 同圓又ハ等圓ニ於テ，

(a) 中心角ノ大小ト其對弧ノ大小。

(b) 弧ノ大小ト其弦ノ大小。

(c) 弦ノ大小ト其中心ヨリノ距離ノ大小。

(4) 弦ト之ニ垂直ナル直徑トノ關係。

三. 作圖題.

(1) 三點ヲ過グル圓周ヲ畫クコト。

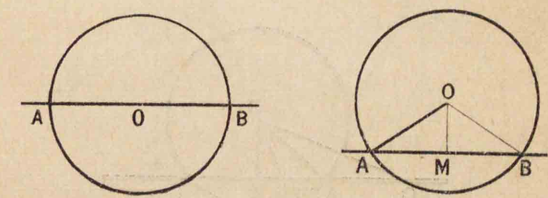
(2) 圓ノ中心ヲ求ムルコト。

(3) 弧ヲ二等分スルコト。

第二章

割線及ビ切線

117. **定理** **圓周上ノ一點(A)ヲ過ギ，此點ニ引ケル半徑(OA)ニ垂直ナラザル直線(AB)ハ圓周ト二點ヲ共有ス。**



證明 AB ガ中心 O ヲ過グルトキハ，AB ハ即チ直徑ニシテ，圓周ト其兩端ナル二點ヲ共有ス。

AB ガ O ヲ通過セザルトキハ，O ヨリ AB ヘ垂線 OM ヲ下シ，AM ノ延長上ニ MB＝MA ナルヤウニ B ヲ取レバ，OB＝OA ナリ。 (75〔二〕)

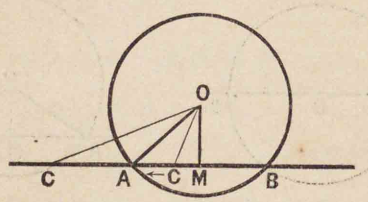
故ニ B ハ圓周上ノ點ナリ。

故ニ AB ハ此圓周ト二點ヲ共有シ，且此二點ノ外ニ共有點ナシ。 (110 注意二)

118. **定義** **割線.** 一直線ガ圓周ト二點ヲ共有スルトキ,其直線ハ其圓ニ交ハルト云ヒ,圓ニ交ハル直線ヲ圓ノ割線ト云フ。

中心ヲ通過スル割線ヲ特ニ**中心線**ト云フ。

119. **定理** **直線(AB)外ノ點(O)ヲ中心トシ,其點ト其直線トノ距離(OM)ヨリ大ナル半徑ヲ有スル圓周ハ其直線ニ交ハル.**

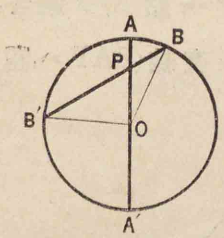


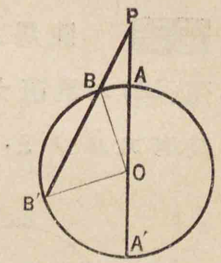
證明 OヨリABニ引キタル斜線ヲOCトセバ,OCハOMヨリ大ニシテ,其足CヲMヨリ次第ニ遠ザクレバOCハ次第ニ大トナリ,如何ニ大ナル線分ヨリモ大トナル。

故ニOCガ丁度此圓ノ半徑ニ等シキ位置ニアルトキ,之ヲOAトセバ,Aハ此圓周上ノ點ニシテABハ此點Aヲ過ギ半徑OAニ斜交スルヲ以テ此圓ノ割線ナリ。故ニ此圓周ハABト交ハル。

系 直線外ノ一點ヨリ,其直線ニ,所設ノ線分ニ等シキ斜線(其點ト其直線トノ距離ヨリ長キ)ヲ二ツ引クコトヲ得, 而シテ唯二ツニ限ル。

120. **定理** **一點ヨリ圓周ニ至ル線分中,其點ヲ過グル中心線ニ合スルモノガ,最短及ビ最長ナリ.**





假設 Pヲ一點トシ,APA′又ハPAA′ヲ中心線トシ, BPB′又ハPBB′ヲ他ノ任意ノ割線トス。

而シテ $PA<PA'$ 及ビ $PB<PB'$ トス。

終結 $PA<PB$ 及ビ $PA'>PB'$

證明 [1] $OB \sim OP<PB$ 及ビ $OB=OA$ ナル故,

$$PA<PB$$

[2] $OP+OB'>PB'$ 及ビ $OB'=OA'$ ナル故,

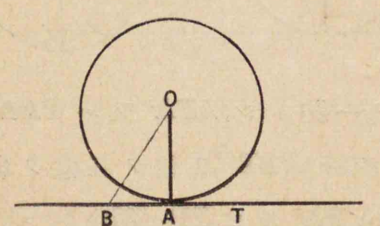
$$PA'>PB'$$

121. 定義 一點ト圓周トノ距離トハ,此點ヨリ之ヲ過グル中心線ト圓周トノ二交點ノ中ノ近キ點マデノ距離ヲ云フ。

問 同ジ中心ノ二ツノ圓周アリテ,其一ツノ上ノ各點ヨリ,他ノ圓周マデノ距離ハ皆相等シ。

注意 同ジ中心ノ諸圓ヲ**同心圓**ト云フ。

122. 定理 **圓周上ノ一點(A)ヲ過ギ,此點ヘ引ケル半徑(OA)ニ垂直ナル直線(BAT)ハ,圓周ト唯此一點ヲ共有スルノミ.**



證明 BヲAT上ノAニアラザル任意ノ一點トセバ, OAハBATノ垂線ナルヲ以テ

$$OB > OA$$

故ニBハ圓外ニ在リ。

故ニBATハ圓周Oト點Aヲ共有スルノミ。

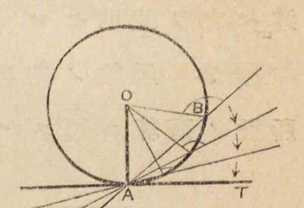
123. 定義 切線. 圓周ト唯一點ヲ共有スル直線ヲ其圓ノ**切線**ト云ヒ, 其點ヲ其**切點**ト云フ。

切線ハ切點ニ於テ其圓ニ**切ス**ト云フ。

第117節及ビ前節ノ定理ハ次ノ如ク述ブルヲ得。

圓周上ノ一點ヲ通過シ,其點ヘ引キタル半徑ニ斜交スル直線ハ割線ニシテ,直交スル直線ハ切線ナリ。

注意 圓ノ割線ABヲAヲ固定シテBガ次第ニAニ近ヅクヤウニ動カストキハ,割線ABハ次第ニ切線ATニ近ヅキBガAニ重ナルトキ,ABハAニ於ケル切線トナル。而シテ此時ABハOAノ垂線トナル。

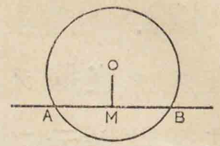


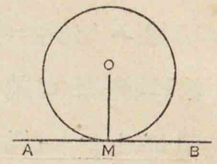
系一. 切線ハ切點ヲ過グル中心線ニ垂直ナリ。

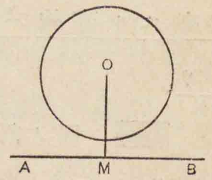
系二. 切線ハ圓周上ノ各點ニ於テ各一ツアリ, 而シテ唯一ツヅツアルノミ。

系三. 切點ヲ過ギ切線ニ垂直ナル直線ハ,其圓ノ中心ヲ過グ。

系四. 直線ト圓ノ中心トノ距離ガ,其圓ノ半徑ヨリ小ナルカ,半徑ニ等シキカ,又ハ半徑ヨリ大ナルカニ從テ,其圓ニ交ハルカ,切スルカ,又ハ全ク其圓ニ出會ハズ。







逆モ亦眞ナリ。

*問 1. 系三ノ逆(二ツアリ)ヲ述べ,之ヲ證明セヨ。

*問 2. 所設ノ點ヲ中心トシ所設ノ直線ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

124. 作圖題 所設ノ圓周上ノ所設ノ點ヲ過グル其圓ノ切線ヲ引ケ.

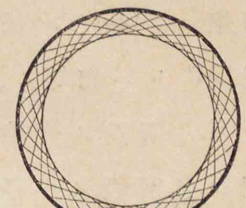
(學生之ヲ解クベシ)

問題 9

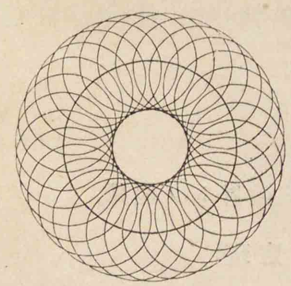
1. 二ツノ同心圓ノ中,小圓ニ切スル大圓ノ弦ハ皆相等シク, 且皆切點ニテ二等分セラル。

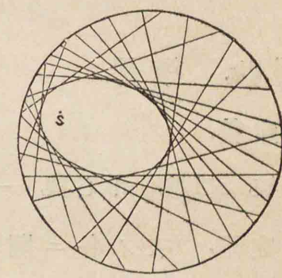
注意 此弦ヲ無數ニ引クトキハ内ナル圓ハ恰モ此

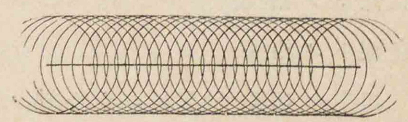
等ノ弦ニテ作ラレタルノ觀ヲ呈ス。故ニ此内圓ハ此等ノ弦ノ包線ト稱ス。



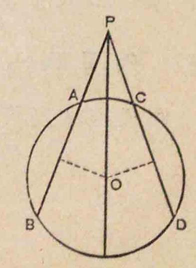
點ノ運動ニヨリテ線ノ生ズルコトハ前ニ云ヘルガ線モ亦運動シテカク線ヲ作ルト考フルヲ得。次ニ尙二三ノ圖ヲ示サン。







2. PO ヲ圓Oノ中心線トシ, PAB, PCD ヲ之ト等角ヲナス二ツノ割線トセバ, PA=PC, PB=PD ナリ。



3. 圓周上ノ一點 A ニ於ケル

切線ニ平行ナル任意ノ弦ヲ BC トセバ,弧 AB ト弧 AC トハ相等シ。

4. 所設ノ直線上ノ所設ノ點ニ於テ此直線ニ切シ,且所設ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。

5. 相交ハル二直線ノ各ニ切スル圓ノ中心ハ,其二直線ノナス角ノ二等分線上ニ在リ。

回顧,復習.

一. 定義.

割線, 切線, 中心線, 一點ト圓周トノ距離。

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) 圓ト直線トノ相交。

(2) 圓ト直線トノ相切。

(3) 切線, 切點, 切點ヲ過グル中心線ノ關係。

(4) 一點ヨリ圓周ニ至ル最短線分ト最長線分。

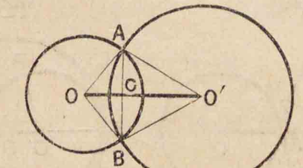
三. 作圖題.

圓周上ノ所設ノ點ニ於ケル切線ヲ引クコト。

第三章

二圓ノ相交及ビ相切

125. 定理 **二ツノ圓周ガ其兩中心(O,O′)ヲ通過スル直線(OO′)上ニ在ラザル一點(A)ヲ共有スルトキハ,又其直線(OO′)ニ關スル其點(A)ノ對稱點ヲ共有シ,此外ニハ共有點ナシ.**



證明 A ヨリ OO′ へ垂線 AC ヲ下シ,之ヲ延長シテ CB ガ AC ニ等シキヤウニ B ヲ取ルトキハ,

$$OA=OB \text{ 及ビ } O'A=O'B$$

故ニ兩圓周 O, O′ ハ共ニ B ヲ通過ス。

而シテ B ハ OO′ ニ關スル A ノ對稱點ナリ。

故ニ此兩圓周ハ A ノ外ニ OO′ ニ關スル A ノ對稱點 B ヲ共有ス。

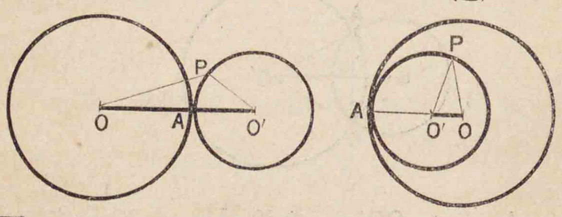
而シテ此外ニハ共有點ナシ。 (110 系)

126. **定義** 二點ヲ共有スル二ツノ圓周ハ互ニ**相交ハル**ト云フ。

系 相交ハル二圓ノ共通弦ハ,其兩中心ヲ通過スル直線ニテ垂直ニ二等分セラル。

127. **定理** **二ツノ圓周(O, O′)ガ其兩中心ヲ通過スル直線(OO′)上ノ一點(A)ヲ共有スルトキハ,其二圓周ハ其點(A)ノ外ニ共有點ヲ有セズ.**

(甲) (乙)



證明 Aガ線分OO′ノ上ニ(甲),又ハOO′ノ延長上ニアリ(乙)トシ,圓O′ノ周上ニAニアラザル任意ノ點Pヲ取レバ,

(甲)	(乙)
$OP > OO' - O'P$	$OP < OO' + O'P$

而シテ $O'P = O'A$

故ニ $OP > OA$ | $OP < OA$

故ニ(甲)ニ於テハPハ圓Oノ外ニアリテ,(乙)ニ於テハPハ圓Oノ內ニアリ。

故ニ(甲)ニ於テハ兩圓周ハ互ニ他ノ外ニアリテ,點Aノミヲ共有シ,(乙)ニ於テハ圓O′ハ全ク圓Oノ內ニアリテ,兩圓周ハ點Aノミヲ共有ス。

128. **定義** 唯一點ヲ共有スル二ツノ圓周ハ互ニ**相切ス**ト云ヒ,其點ヲ其**切點**ト云フ。而シテ各圓ガ互ニ他ノ外ニ在ルトキハ,之ヲ**外切**ト云ヒ, 小圓ガ全ク大圓ノ內ニ在ルトキハ之ヲ**內切**ト云フ。

前節ノ定理ハ次ノ如ク述ブルヲ得。

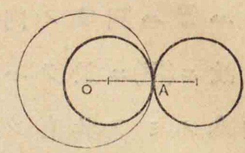
二ツノ圓周ガ其兩中心ヲ通過スル直線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,此二圓ハ相切ス。

129. **定理** **兩圓相切スルトキハ,其切點ハ兩圓ノ中心ヲ通過スル直線上ニ在リ.** (歸謬法)

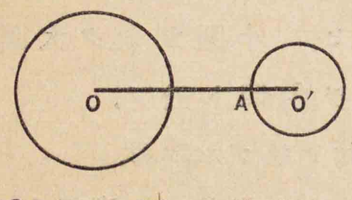
而シテ **其中心間ノ距離ハ兩圓ノ半徑ノ和**(外切ノ場合)**又ハ差**(內切ノ場合)**ニ等シ.**

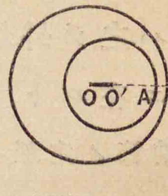
又 **兩圓相交ハルトキハ,其交點ハ兩中心ヲ過グル直線上ニ在ラズ.** 而シテ **其中心間ノ距離ハ兩圓ノ半徑ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナリ.**

問 所設ノ圓周ニ其上ノ定點ニ於テ切シ,且所設ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。



130. **定理** **二ツノ圓周ガ全ク共有點ヲ有セザルトキハ,其中心間ノ距離ハ兩圓ノ半徑ノ和ヨリ大ナルカ,或ハ其差ヨリ小ナリ.**





131. 二圓ノ位置ト其中心間ノ關係.

今兩圓ノ半徑ヲ r 及ビ r' トシ,其中心間ノ距離ヲ d トセバ, 前二節ヨリ

[1] 兩圓互ニ外方ニ離ルルトキハ, $d > r+r'$

[2] 兩圓外切スルトキハ, $d = r+r'$

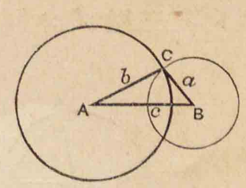
[3] 兩圓相交ハルトキハ, $r+r' > d > r\sim r'$

[4] 兩圓内切スルトキハ, $d = r\sim r'$

[5] 一圓ガ全ク他ノ内ニ在リテ相離ルルトキハ, $d < r\sim r'$

上ノ五ツノ定理ノ逆ハ皆眞ナリ。 (轉換法)

特ニ[3]ノ逆ニヨリテ $a+b > c > a\sim b$ ナル關係ヲ有スル三線分 a, b, c ニテハ必ズ三角形ヲ作リ得ルコトヲ知ル。



即チ三線分 a, b, c 間ノ此關係ハ a, b, c ヲ三邊トスル三角形ガ出來ルタメニ必要ニシテ十分ナル條件ナリ。 (44 注意)

問 二ツノ圓ノ半徑ガ夫々3糎,5糎ニシテ,兩圓ノ中心間ノ距離ガ2糎ナリト云フ,此兩圓ノ位置如何。若シ中心間ノ距離ガ8糎ナラバ如何。

問題 10

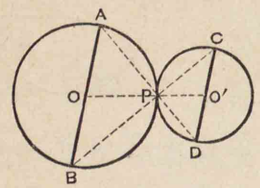
1. 三ツノ等圓ガ二ツヅヽ相切スルトキハ,

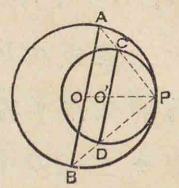
(1) 三ツノ中心及ビ三ツノ切點ハ各正三角形ノ頂點トナル。

(2) 切點ニ於ケル共通切線ハ同一點ニ會ス。

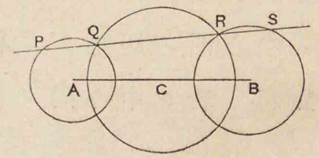
2. 相切スル兩圓ノ切點ヲ通過シテ任意ニ割線ヲ引クトキハ,其交點ニ至ル兩半徑ハ平行ナリ。

3. 相切スル兩圓ノ平行ナル直徑ノ端ト切點トハ三點ヅツ同一ノ直線上ニ在リ。





4. 圖ノ如ク交ハル三圓ノ中心A,C,Bカ一直線上ニアリテ AC=CB ナルトキハ,圓周ノ交點Q及ビRヲ過グル直線ヨリ兩圓A,Bガ截リ取ル弦PQ,RSハ相等シ。



回顧, 復習.

一. 定義.

二圓ノ相交, 相切(內切,外切)。

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) 相交ハル二圓ノ關係。

(2) 相切スル二圓ノ關係。

(3) 二圓ノ位置ト其中心間ノ距離トノ關係。

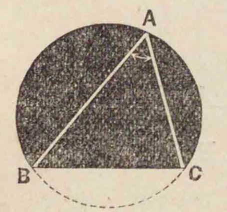
第四章

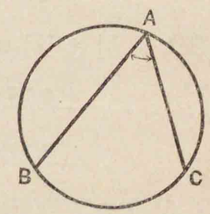
內接角

132. 定義　弓形ノ角, 圓ノ內接角.

弓形ノ弧上ノ一點ヲ其弧ノ兩端ニ結ブ直線ノナス角ヲ其弓形ノ角ト云フ。

弓形ノ角ヲ圓ニ就キテ云フトキハ,之ヲ圓ノ內接角又ハ圓周角ト云フ。





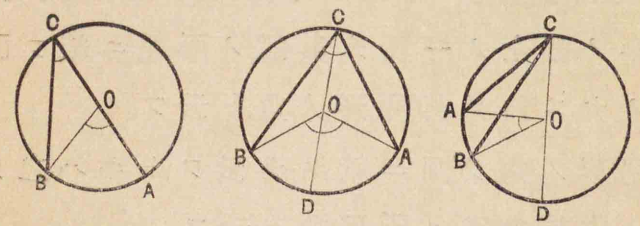
例ヘバ圖ニ於テ ∠BAC ハ弓形BACノ角ニシテ,之ヲ圓 ABC ノ弧 BC 上ニ立ツ內接角又ハ圓周角トモ云フ。

133. 定理　內接角(ACB)ハ同弧(AB)ノ上ニ立ツ中心角(AOB)ノ半ニ等シ.

證明 [1] ∠ACB ノ一邊 AC ガ中心 O ヲ通過スルトキハ, OB=OC ナル故,

$$\angle OCB=\angle OBC$$

$$\therefore \quad \angle AOB=\angle OCB+\angle OBC=2\angle ACB$$



[2] AC ガ O ヲ通過セザルトキハ,

直徑 COD ヲ引キ [1] ヨリ,

$$\angle AOD=2\angle ACD$$

及ビ $$\angle BOD=2\angle BCD$$

$$\therefore \quad \angle AOD\pm\angle BOD=2(\angle ACD\pm\angle BCD)$$ (複號同順)

$$\therefore \quad \angle AOB=2\angle ACB$$

故ニ一般ニ $$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$$

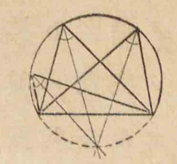
系一. 同ジ弓形ノ角ハ皆相等シ。

系二. 同圓又ハ等圓ニ於テ等弧ノ上ニ立ツ内接角ハ相等シ。逆モ眞ナリ。

*問 1. 圓ノ平行二弦ノ間ニアル弧ハ相等シ。

*問 2. 圓ノ内接角ノ二等分線ハ,之ニ對スル弧ヲ二等分ス。

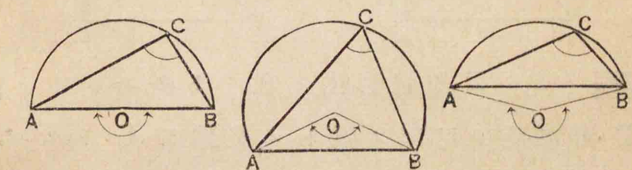
問 3. 同ジ弓形ノ角ノ二等分線ハ皆同一點ニ集交ス。



134. 定理 半圓ノ角ハ直角ナリ.[1]

半圓ヨリ大ナル弓形ノ角ハ鋭角ニシテ,半圓ヨリ小ナル弓形ノ角ハ鈍角ナリ.

逆モ眞ナリ.



(前節ノ定理ニヨリ學生之ヲ證明セヨ)

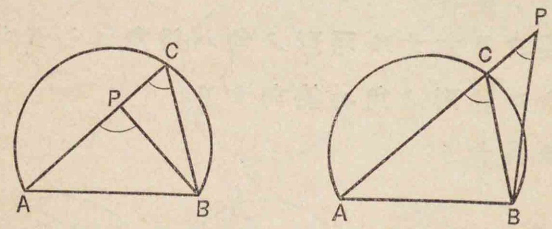
系 直徑ニ對スル内接角ハ直角ナリ。

問 1. 圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ハ其圓ニ内切シ,其周ハ切點ヲ過グル第一圓ノ弦ヲ二等分ス。

問 2. 學校ノ建物ノ長サガ20mニシテ且某點ニ於テ30°ノ角ニ含マルルコトヲ觀測セリ,然ラバ其建物ノ兩端ト測點トヲ過グル圓ノ直徑幾何。

(1) 此定理ハたーれすガ發見セシモノナリト云フ。

135. 定理 弓形(ACB)ノ弦(AB)ノ兩端ヲ其弦ノ弓形ト其側ニ在ル一點(P)ニ結ブトキ,其二直線ノ夾角ハ,其點ガ弓形内ニ在ラバ弓形ノ角ヨリ大ニシテ,其點ガ弓形外ニ在ラバ弓形ノ角ヨリ小ナリ. 逆モ眞ナリ.



證明 [1] Pガ弓形内ニ在ルトキハ,
APノ延長ト弓形ノ弧トノ交點ヲCトセバ,
$\angle APB$ハ三角形BCPノ外角ナルヲ以テ,

$$\angle APB > \angle C$$

[2] Pガ弓形外ニ在ルトキハ,
APガ弓形ノ弧ト交ハルトシ其交點ヲCトセバ,
$\angle ACB$ハ三角形BCPノ外角ナルヲ以テ,

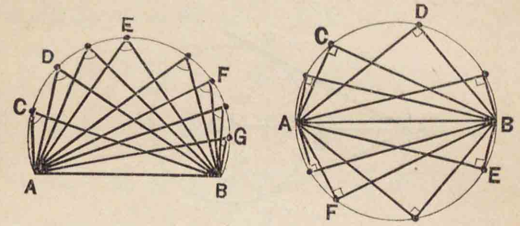
$$\angle APB < \angle ACB$$

逆ハ歸謬法ニヨリテ容易ニ證明スルヲ得。

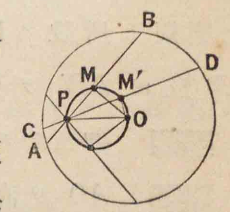
系 同ジ底邊上ニ其同ジ側ニ立ツ三角形ノ中,頂角ガ相等シキモノノ頂點ハ,皆其底ヲ弦トスル

同ジ弧ノ上ニ在リ。

特ニ 同ジ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ直角ノ頂點ハ皆其斜邊ヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。



問 1. 同ジ點ヲ過グル弦ノ中點ハ皆其點ト中心トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周上ニアリ。



問 2. 同ジ底BC上ニ立チ,頂角ガ60°ナル三角形ノ頂角ノ頂點ハ皆BCヲ底トスル正三角形ABCノ外接圓ノ弧BAC上ニアリ。

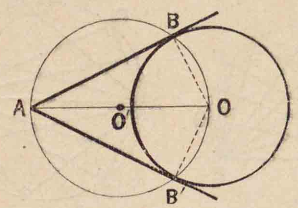
136. 作圖題 所設ノ圓(O)外ノ所設ノ點(A)ヨリ其圓ニ切線ヲ引ケ.

解析 所要ノ切線ガ既ニ引カレタリトシ,之ヲAB,其切點ヲBトシ,OBヲ結ベバ,$\angle ABO$ハ直

角ナリ。

故ニBハAOヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。

故ニ切點Bハ所設ノ圓周ト,AOヲ直徑トスル圓周トノ交點ナルヲ要ス。



作圖 AOヲ結ビ,之ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ,此圓周ト所設ノ圓周トノ交點ヲB及ビB′トシ,AB及ビAB′ヲ引クトキハ,コレ所要ノ切線ナリ。

證明 (學生之ヲナスベシ)

吟味 AOヲ直徑トスル圓ノ中心(AOノ中點)ヲO′トシ,圓O及ビO′ノ半徑ヲ夫々r及ビr'トセバ,

$$AO=2r',\quad O'O=r'$$

故ニ $$O'O<r+r'$$

而シテ $r'>r$ ナルトキハ $O'O>r'-r$ ナルコト勿論ニシテ, $r'<r$ ナルトキモ $AO=2r'>r$ ナル故, $r'>r-r$ 即チ $O'O>r-r'$

故ニ圓周O′ハ必ズ圓Oニ交ハル。 (131)

故ニAヨリノ切線ハ必ズ二ツアリ。

注意 點Aガ圓Oノ周上ニ在ルトキハ切線ハ一ツアリ。 (123 系二)

又Aガ圓Oノ內ニ在ラバAヲ過グル切線ナシ,コレ此場合ニハ圓O′ハ圓Oニ交ハラザレバナリ。上ノ吟味ニヨリ次ノ定理ヲ得ベシ。

定理 **圓外ノ一點ヨリ此圓ニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯二ツニ限ル.**

圓內ノ點ヲ過グル切線ナシ.

系 圓外ノ一點ヨリ引ケル兩切線ノ,其點ト切點トノ間ノ部分ハ相等シ。

此部分ヲ通例其點ヨリ其圓ニ引キタル**切線ノ長サ**ト云フ。

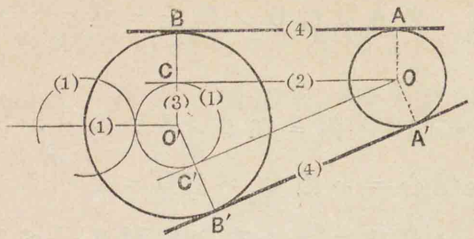
*問 圓外ノ一點ヨリ二ツノ切線ヲ引クトキ,

[1] 兩切線ハ其點ヲ過グル中心線ト等角ヲナス。

[2] 其點ヲ過グル中心線ハ兩切點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分ス。

137. **作圖題** 所設ノ二圓(O, O′)ニ共通切線ヲ引ケ.

[1] 兩圓ヲ同ジ側ニ有スル切線(共通外切線)。



解析 所要ノ切線ガ既ニ引カレタリトシ,其兩圓トノ切點ヲ夫々A及ビBトス。

OヨリABニ平行ニOCヲ引キO′Bトノ交點ヲCトセバ,∠OCO′ハ直角ニシテ,O′Cハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シ(但シO′B>OAトス)。

故ニOCハOヨリ,O′ヲ中心トシ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ニ引キタル切線ナリ。

作圖 (1)大圓ノ中心O′ヲ中心トシ,兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ク。

(2)Oヨリ此圓ニ切線OC, OC′ヲ引ク。

(3)O′C, O′C′ヲ引キ,圓O′ノ周トノ交點ヲB, B′トス。

(4)B及ビB′ニ於テ圓O′ニ切線BA及ビB′A′ヲ引ク。

AB, A′B′ハ所要ノ共通切線ナリ。

證明 O′Cハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキ故,BCハ圓Oノ半徑ニ等シ。OヨリABヘ垂線OAヲ引ケバABCOハ矩形ナル故,OAハBCニ等シ。

故ニOAハ圓Oノ半徑ニ等シ。

故ニABハ圓Oニモ切ス。 (123系四)

故ニABハ兩圓O及ビO′ニ切ス。

同様ニA′B′モ兩圓O及ビO′ニ切ス。

吟味 點Oガ,O′ヲ中心トシ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ノ外ニ在ルカ,其圓ノ周上ニ在ルカ,又ハ其圓ノ內ニ在ルカニ從テ,Oヨリ其圓ニ引ク切線ハ二ツアルカ,一ツアルカ,又ハ一ツモナシ。

從テ其各ノ場合ニ就キテ上ノ共通外切線ハ夫々二ツアルカ,一ツアルカ,又ハ一ツモナシ。

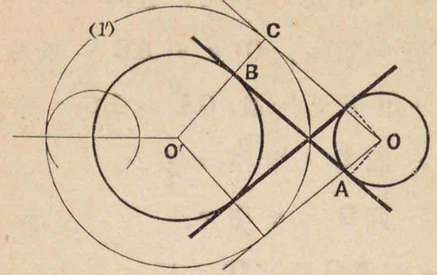
兩圓ノ半徑ヲ夫々R, rトシ中心間ノ距離(OO′)ヲdトセバ,

$d>R\sim r$ ナルトキハ共通外切線二ツアリ,

$d=R\sim r$ ナルトキハ共通外切線一ツアリ,

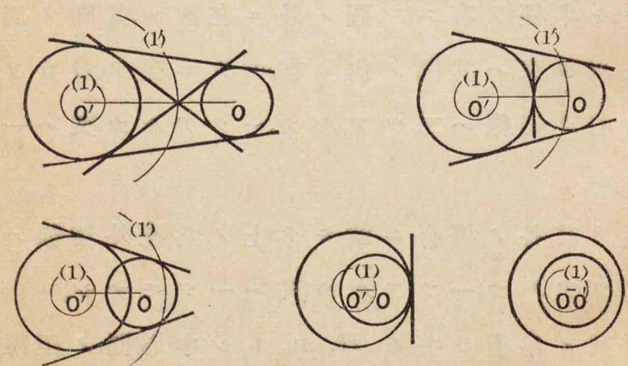
$d<R\sim r$ ナルトキハ共通外切線一ツモナシ。

[2] 兩圓ヲ其兩側ニ有スル切線(共通内切線)。

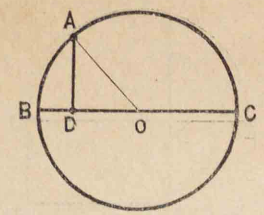


(此場合ハ學生之ヲ研究スベシ)

學生ハ兩圓ノ位置ト解答ノ數トヲ吟味スベシ。



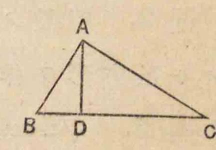
138. **定理** 圓周上ノ一點(A)ヨリ其圓ノ直徑(BC)ヘ下セル垂線(AD)ノ平方ハ,此垂線ニテ分タルル其直徑ノ二ツノ部分ノ矩形(BD.DC)ニ等シ.



證明 直角三角形 AOD ヨリ

$$\overline{AD}^2=\overline{AO}^2-\overline{OD}^2$$
$$=(AO-OD)(AO+OD)$$
$$=(BO-OD)(CO+OD)$$
$$=BD.DC$$

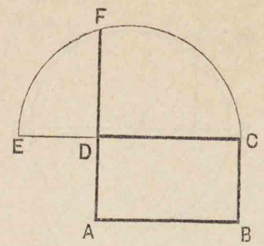
系 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ノ平方ハ,之ニヨリテ分タレタル斜邊ノ二ツノ部分ノ矩形ニ等シ。



*問 上圖ニ於テ $\overline{AB}^2=BC.BD$, $\overline{AC}^2=BC.CD$ 之ヲ證明セヨ。

139. **作圖題** 所設ノ矩形(ABCD)ニ等シキ正方形ヲ畫ケ.

前節ノ定理ニヨリテ直ニ次ノ作圖法ヲ得ベシ。



作圖 (1) CD ヲ E マデ延長シ, DE ヲ DA ニ等シクス。

(2) CE ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ, AD ノ延長ト此圓周トノ交點ヲ F トス。

(3) DF 上ニ正方形ヲ作レバ, コレ所要ノモノナリ。

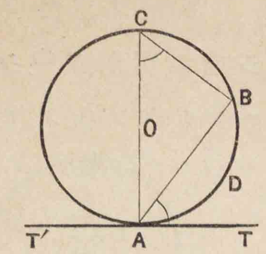
*問 1. 所設ノ多角形ニ等シキ正方形ヲ畫ケ。

問 2. 所設ノ正方形ノ n 倍又ハ n 分ノ一ニ等シキ正方形ヲ作レ。

問 3. $\sqrt{2}$cm, $\sqrt{3}$cm 等ヲ表ハス線分ヲ作レ。

140. 定理 切線(TAT')ト其切點(A)ヲ過グル弦(AB)トノ間ノ角(BAT)ハ,此角内ノ弧上ニ立ツ内接角(此角ニ隣ル弓形ノ角)ニ等シ。

證明 直徑 AC ヲ引クトキハ ∠CAT 及ビ ∠B ハ共ニ直角ナル故, ∠BAT ト ∠C トハ共ニ ∠BAC



ノ餘角ナリ。故ニ　∠BAT = ∠C

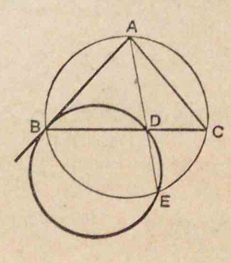
然ルニ ∠BAT 内ノ弧(ADB)上ニ立ツ内接角ハ皆 ∠C ニ等シキ故, ∠BAT ハ此等ノ角ニ等シ。

同様ニ ∠BAT' ハ弧 ACB 上ニ立ツ内接角ニ等シ。

問 1. 圓内ニテ交ハル二弦 AB, CD ノ交點 P ニ於テ三點 A, P, C ヲ過グル圓ニ切スル直線ヲ引ケバ,此直線ハ BD ニ平行ナリ。

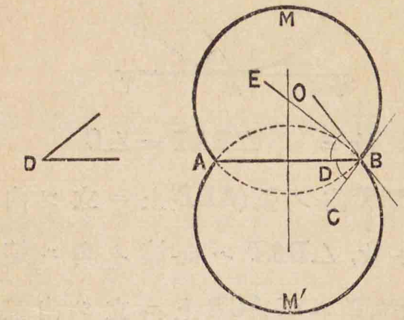
系 圓周上ノ一點ヲ過グル直線ト其點ヨリ引ケル弦トノ角ガ其角内ノ弧上ニ立ツ内接角ニ等シキトキハ,其直線ハ其點ニ於テ其圓ニ切ス。

問 2. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ過グル直線ガ底ト D ニテ,外接圓ノ周ト E ニテ交ハルトキハ, AB ハ圓 BDE ニ切ス。



141. **作圖題** 所設ノ線分(AB)上ニ所設ノ角(D)ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ.

前節ノ定理ニヨリテ直ニ次ノ作圖ヲ得ベシ。



作圖 (1) AB ノ一端 B ニ於テ所設ノ角 D ニ等シキ角 ABC ヲ作ル。

(2) B ヨリ BC ニ垂線 BE ヲ引ク。

(3) AB ノ垂直二等分線ヲ引キ BE トノ交點ヲ O トス。

(4) O ヲ中心トシ OB ヲ半徑トスル圓周 AMB ヲ畫ケバ,此圓ノ ∠ABC 內ニ在ラザル弓形 AMB ハ所要ノモノナリ。

同樣ニ AB 上ノ反對ノ側ニモ所要ノ弓形ヲ畫クヲ得ルヲ以テ,所要ノ弓形ハ AB ノ兩側ニ一ツヅヽアリ。而シテ此兩者ハ AB ニ關シテ對稱ナリ。

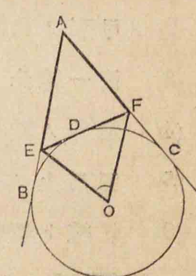
問題 11

1. 一ツノ圓ノ二ツノ弦 AB, CD 又ハ其延長ノ交點ヲ E トセバ, ∠AEC ハ二ツノ弧 AC 及ビ BD 上ニ立ツ中心角ノ和又ハ差ノ半ニ等シ。

2. 二ツノ等圓アリ, 二點 A, B ニ於テ交ハル。今 A ヲ過グル一直線ガ更ニ兩圓周ト交ハル二點ヲ C, D トセバ, △BCD ハ等脚三角形ナリ。

3. 三角形ノ二邊ヲ直徑トスル二ツノ圓周ハ他ノ邊又ハ其延長上ニ於テ相交ハル。

4. 中心 O ナル圓外ノ一點 A ヨリ二ツノ切線 AB, AC ヲ引キ,又劣弧 BC 上ノ一點 D ニ於テ切線ヲ引キ, AB 及ビ AC ト夫々 E 及ビ F ニ於テ交ハラシムレバ, △AEF ノ周及ビ ∠EOF ノ大サハ點 D ノ位置ニ關セズ一定ナリ。

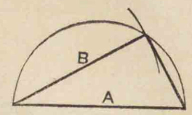


5. 二ツノ圓ガ P ニ於テ內切シ,割線ガ其二圓周ヲ夫々 A, B, C, D ニテ截ルトキハ ∠APB=∠CPD ナリ。

***6.** 所設ノ兩正方形 A^2, B^2 ノ差ニ等シキ正方形

ヲ畫ケ。

(第105節ノ方法ニアラザル別法ヲ考案セヨ)



7. 次ノモノニ等シキ正方形ヲ畫ケ。

$$A^2-B^2-C^2,\quad A^2+B^2-C^2,\quad A^2-B^2+C^2$$

但シ A, B, C ハ所設ノ三線分トス。

回顧，復習.

一. 定義.

弓形ノ角，圓ノ內接角，圓周角。

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) 同弧上ノニ立ツ圓周角ト中心角。

(2) 弓形ノ角ノ大サ。

(3) 同一線分上ニ立ツ多クノ等角ノ頂點。

(4) 圓外ノ點ヨリ其圓ニ引ケル二切線。

(5) 圓周上ノ一點ヨリ直徑ニ下セル垂線ノ平方。

(6) 切線ト切點ヲ過グル弦トノ作ル角。

三. 作圖題.

(1) 圓外ノ定點ヨリ其圓ヘ切線ヲ引クコト。

(2) 二圓ノ共通切線ヲ引クコト。

(3) 矩形ニ等積ナル正方形ヲ畫クコト。

(4) 線分上ニ所設角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ畫クコト。

第五章

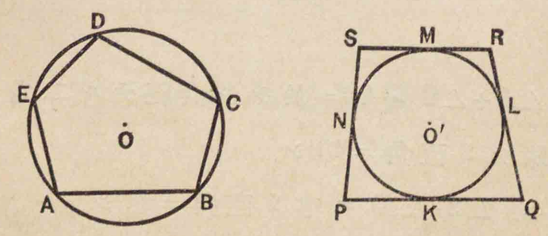
內接形及ビ外接形

142. 定義 內接多角形，外接圓.

頂點ヲ悉ク同一ノ圓周上ニ有スル多角形ヲ其圓ノ**內接多角形**ト云ヒ，其圓ヲ此多角形ノ**外接圓**ト云フ。

外接多角形 內接圓. 邊ガ悉ク同一ノ圓周ニ切スル多角形ヲ其圓ノ**外接多角形**ト云ヒ，其圓ヲ此多角形ノ**內接圓**ト云フ。

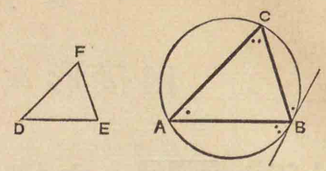
圖ニ於テ ABCDE ハ圓 O ノ內接五角形ニシテ，PQRS ハ圓 O′ ノ外接四角形ナリ



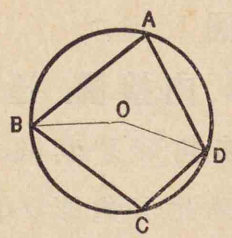
*問 1. 圓ニ外接スル四角形ノ一組ノ對邊ノ和ハ,他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シ,

問 2. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形ナリ。

問 3. 所設ノ圓ニ內接スル三角形ヲ畫キ,其三ツノ角ヲ夫々所設三角形ノ角ニ等シクセヨ。



143. **定理** **圓ニ內接スル四角形(ABCD)ノ對角ハ補角ヲナス.**

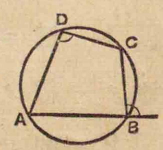


證明 ∠Aハ弧BCDノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シク,∠Cハ弧BADノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ.

故ニ ∠A+∠C ハOニ於ケル共軛ナル二角ノ和ノ半分即チ2直角ニ等シ。

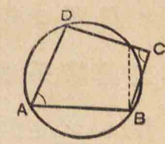
同樣ニ ∠B+∠D モ亦2直角ニ等シ。

系一. 圓ニ內接スル四角形ノ外角ハ其內對角(其外角ニ隣ル內角ノ對角)ニ等シ。



問 1. 圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形ナリ。

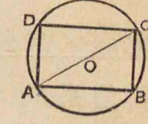
系二. 圓ニ內接セザル四角形ノ對角ノ和ハ2直角ニ等シカラズ。



系三. 四角形ノ對角ノ和ガ2直角ニ等シキトキハ,此四角形ハ圓ニ內接ス。

*問 2. 矩形ハ圓ニ內接ス。

問 3. 所設ノ圓ニ內接シ,其一邊ガ所設ノ線分ニ等シキ矩形ヲ畫ケ。



系四. 四角形ノ對角ノ和ガ2直角ニ等シカラザルトキハ,此四角形ハ圓ニ內接セズ。 (歸謬法)

注意 系三ト系四トニヨリテ,四角形ガ圓ニ內接スルタメニ必要ニシテ十分ナル條件ハ,其對角ガ補角ナルコトヲ知ル。

144. 定理ノ裏及ビ對偶.

前節ノ定理ト系二トヲ比較スルニ,系二ハ定理ノ假設ヲ打チ消シタルモノヲ假設トシ,定理ノ終結ヲ否定シタルモノヲ終結トスルモノナリ。

カクノ如キ二ツノ定理ヲ互ニ他ノ**裏**ト云フ。

前節ノ系三ト系四トハ互ニ裏ナリ。

定理ノ裏ハ必ズシモ眞ナラズ,其眞ナルモノト雖モ證明ヲ經テ後ニ斷定スベキモノナリ。

又前節系四ヲ見ルニ,コレ定理ノ終結ノ否定ヲ假設トシ,定理ノ假設ノ打消シヲ終結トシタルモノナリ。

カクノ如キ二ツノ定理ヲ互ニ他ノ**對偶**ト云フ。

定理ノ對偶ハ必ズ眞ナリ。

前節系二ト系三トハ互ニ對偶ナリ。

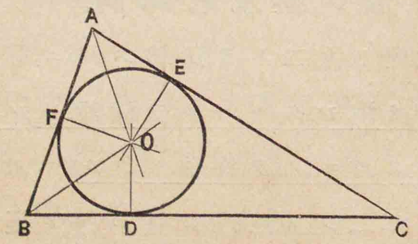
問 一ツノ定理ガ

AガBナレバCハDナリ

ナル形ニ表ハサレタラバ,其裏及ビ對偶如何。

又此定理ノ逆ヲ述ベ,コレ此定理ノ裏ノ對偶ナルコトヲ示セ。

145. **作圖題** **三角形(ABC)ノ内接圓ヲ畫ケ。**



解析 内接圓DEFガ既ニ畫カレタリトシ,其切

點ヲD, E, F, 中心ヲOトシ OD, OE, OF ヲ結ベバ, OE, OF ハ相等シク且夫々 AC, AB ニ垂直ナルヲ以テ, O ハ ∠BAC ノ二等分線上ニ在ルベク,同様ニ O ハ亦∠ABC ノ二等分線上ニ在ルヲ要ス。

作圖 ∠BAC 及ビ ∠ABC ノ二等分線ヲ引クトキハ相交ハル故(63系五), 其交點ヲ O トス。

O ヨリ BC ヘ垂線 OD ヲ下シ, O ヲ中心トシ, OD ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ,コレ所要ノ圓ナリ。

證明 (學生之ヲナスベシ)

吟味 OF=OE=OD ナル故, ∠BCA ノ二等分線モ亦 O ヲ通過ス。故ニ解答ハ唯一ツナリ。

又上ノ吟味ニヨリ次ノ定理ヲ得。

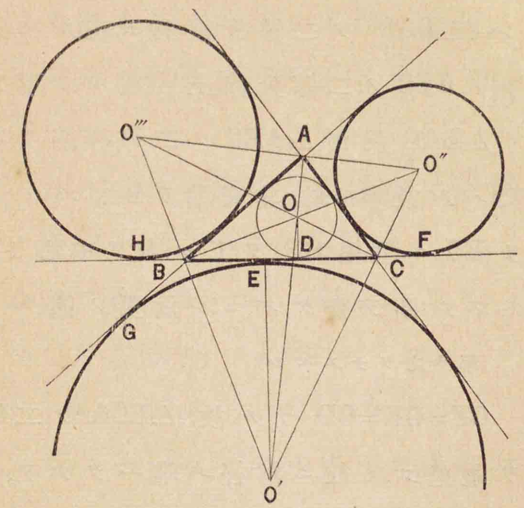
定理 **三角形ノ三角ノ二等分線ハ同一點ニ集交シ,其點ハ三邊ヨリ等距離ニ在リ.**

此點ヲ三角形ノ**内心**(内接圓ノ中心)ト云フ。

系 三角形ノ一角ノ二等分線ト他ノ二角ノ外角ノ二等分線トハ同一點ニ集交ス。而シテ此點ハ三邊(或ハ延長)ヨリ等距離ニ在リ。

此點ヲ中心トシ,此點ト邊トノ距離ヲ半徑トスル圓ハ,三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切ス。

此圓ヲ此三角形ノ傍接圓ト云ヒ,其中心ヲ傍心ト云フ。三角形ニハ三ツノ傍接圓アリ。



*問 1. 三ツノ直線ヨリ等距離ニ在ル點ヲ求ム。

問 2. 三ツノ直線ヨリ等長ノ弦ヲ截リ取ル圓ノ中心ヲ求メヨ。

*問 3. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ヲ夫々 a, b, c ニテ表ハシ,且 $a+b+c=2s$ トセバ, 上圖ニ於テ,

(1) $BD = s-b$, $AG = s$, $BE = BG = s-c$

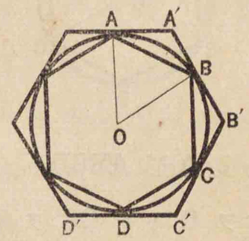
(2) $S = sr$ 及ビ $S = (s-a)r'$

但シ r ハ内接圓ノ半徑, r' ハ BC ニ切スル傍接圓ノ半徑ニシテ, S ハ △ABC ノ面積トス。

146. 定理 圓周ヲ若干等分スルトキ,其分點ヲ順次ニ結ベバ一ツノ正多角形ヲ生ズ. 又各分點ニ於テ切線ヲ引ケバ一ツノ正多角形ヲ生ズ.

假設 圓周ヲ n 等分シ,其分點ヲ A, B, C 等トシ, 又此等ノ分點ニ於ケル相隣レル切線ノ交點ヲ順次 A', B', C' 等トス。

終結 ABC… 及ビ A'B'C'… ハ正多角形ナリ。



證明 [1] 多角形ABC… ニ於テ邊 AB, BC 等ハ等弧ノ弦ナル故皆相等シ。

又其各角ハ圓周ノ $\frac{n-2}{n}$ ニ當ル弧上ニ立ツ内接角ナル故皆相等シ。

故ニ ABC… ハ正多角形ナリ。

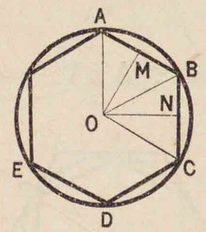
[2] △A'AB, △B'BC 等ニ於テ邊 AB, BC 等ハ皆相等シク,又∠A'AB, ∠B'BC等ハ等弧AB,BC等ノ上ニ立ツ内接角ニ等シキヲ以テ皆相等シ。

故ニ此等ノ三角形ハ皆合同ナリ。

故ニ多角形A′B′C′…ハ等角ニシテ等邊ナリ。

故ニ A′B′C′…ハ正多角形ナリ。

147. 定理 **正多角形ハ圓ニ內接シ,又外接ス.**



證明 [1] 正多角形 ABCD…ノ二隣角 A, B ノ二等分線ノ交點ヲ O トシ OC ヲ結ベバ,

$$\triangle AOB \equiv \triangle BOC \qquad (27〔一〕)$$

$$\therefore \quad OA = OC$$

而シテ △AOB ハ等脚三角形ナリ。

$$\therefore \quad OA = OB = OC$$

$$\therefore \quad \angle OCB = \angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BCD$$

故ニ OC ハ ∠BCD ノ二等分線ナリ。

故ニ上ト同様ニ順ヲ追ヒテ OD, OE 等モ皆 OA ニ等シキコトヲ證明スルヲ得。

故ニ ABCD…ハ O ヲ中心トスル圓ニ內接ス。

[2] OM, ON 等ヲ O ヨリ邊 AB, BC 等ヘ引ケル垂線トスレバ,

$$OM = ON = \cdots\cdots \qquad (116系二)$$

故ニ O ヲ中心トシ OM ヲ半徑トスル圓ハ ABCD…ニ內接ス。

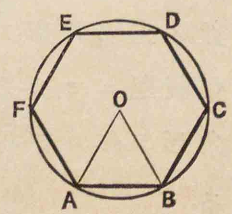
故ニ ABCD…ハ圓 O ニ外接ス。

系一. 正多角形ノ內接圓ノ中心ト外接圓ノ中心トハ同ジ點ナリ。

此共通ノ中心ヲ正多角形ノ**中心**ト云フ。

系二. 正多角形ノ面積ハ,其周ト內接圓ノ半徑トノ乘積ノ半ニ等シ。

148. 作圖題 **所設ノ圓ニ內接スル正六角形, 正三角形, 正十二角形等ヲ作レ.**

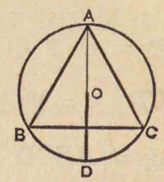


(第63節問6ヲ參照シテ,學生之ヲ解クベシ)

*問 1. 正六角形ノ一邊ヲaトシ其面積ヲ求メヨ。

*問 2. 所設ノ線分ヲ一邊トスル正六角形ヲ作レ。

*問 3. 圓ニ內接スル正三角形ノ邊ハ之ニ垂直ナル半徑ヲ二等分ス。



*問 4. 正三角形ノ一邊ヲaトシ,其內接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

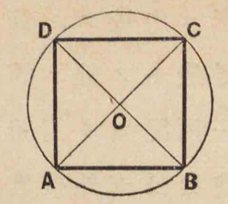
*問 5. 半徑Rナル圓ノ內接正三角形ノ邊ハ$\sqrt{3}R$ナリ。

注意 正多角形ノ作圖法ハ圓周ノ等分法ニ歸シ,圓周ノ等分法ハ4直角ノ等分法ニ歸ス。

而シテ角ノ二等分ハ常ニナシ得ルヲ以テ,或正多角形ヲ畫クコトヲ得バ,之ヲ基礎トシテ順次ニ其二倍邊數ノ正多角形ヲ作ルコトヲ得。

例ヘバ上ノ作圖題ニヨリテハ3×2^n箇ノ邊ヲ有スル正多角形ヲ作ルヲ得。但シnハ任意ノ正ノ整數トス。

149. 作圖題 圓ニ內接スル正方形,正八角形,正十六角形,正三十二角形等ヲ作レ.

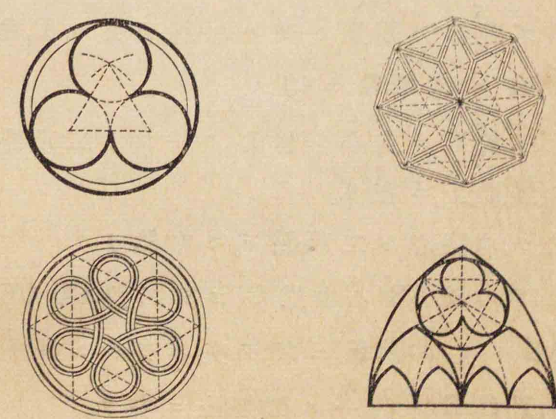


(學生之ヲ解クベシ)

問 1. 半徑Rナル圓ノ內接正方形ノ一邊ヲ求メヨ。

問 2. 邊數ガ偶數ナル正多角形ハ其中心ニ關シテ對稱ナリ。

問 3. 次ニ示ス圖ヲ畫ケ。



問 題 12

*1. 直角三角形ニ內接スル圓ノ直徑ハ,直角ヲ夾ム二邊ノ和ト斜邊トノ差ニ等シ。

2. 三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ下セル垂線ノ足ハ,其垂線又ハ其延長ガ外接圓ニ會スル點ト垂心トノ半途ニ在リ。

3. 二ツノ圓ノ交點A及ビBヲ過グル直線PAQ及ビRBSヲ引キ,圓周トP, Q及ビR, Sニ於テ交ハラシムルトキハ,弦PRトQSトハ平行ナリ。

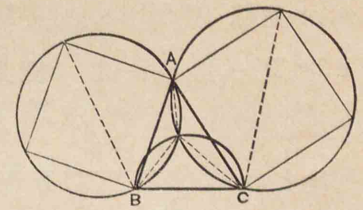
4. 圓Oノ直徑ABノ兩端A, Bヲ任意ノ一點Cニ結ブ直線ガ圓周ト交ハル點ヲ夫々P, QトセバOP, OQハ圓CPQニ切ス。

5. 三角形ノ內心ト傍心ノ一ツト二頂點トハ同一ノ圓周上ニ在リ。

又二ツノ傍心ト二頂點トモ亦然リ。

6. 圓ノ弧ABノ中點Cヨリ二弦CD, CEヲ引キ弦ABト夫々F, Gニ於テ交ハラシムルトキハ,四點D, F, G, Eハ同一ノ圓周上ニ在リ。

7. △ABCノ邊AB, ACノ上ニ夫々正方形ヲ三角形ノ外方ニ畫キ,之ニ外接スル圓ヲ畫クトキハ,其Aニアラザル交點ハBCヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。



*8. 三角形ノ內心ト外心トガ重ナルトキハ,コレ正三角形ナリ。

9. △ABCノ內心ヲ過ギ邊BCニ平行ナル直線ガAB及ビACニ交ハル點ヲ夫々D, EトセバBDトCEトノ和ハDEニ等シ。

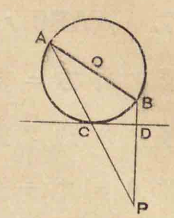
10. △ABCノ邊BCニ平行ナル直線ヲ引キ,二邊AB, ACト夫々E, Fニ於テ交ハラシメ, BEトCFトノ和(又ハ差)ヲEFニ等シクセヨ。

11. 直角三角形ノ斜邊ニアラザル二邊ノ長サヲa, bトシ,斜邊上ニ中心ヲ有シ他ノ二邊ニ切スル圓ノ半徑ノ長サヲ計算セヨ。

12. 正多角形內ノ任意ノ一點ヨリ各邊或ハ其延長ヘ下セル垂線ノ和ハ一定ナリ。

13. ABヲ定圓Oノ定直徑トシ,圓周上ノ任意ノ

一點 C ニ於ケル切線ニ B ヨリ下シタル垂線ト AC トノ交點ヲ P トセバ, P ハ常ニ一定ノ圓周上ニアリ。



回顧, 復習.

一. 定義.

圓ノ内接多角形,外接多角形。多角形ノ外接圓,内接圓。

三角形ノ内心, 傍接圓及ビ傍心。

定理ノ裏ト對偶。

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1)　圓ノ内接四角形ノ對角。外角ト内對角。

(2)　四角形ガ圓ニ内接スルタメノ條件。

(3)　三角形ノ三角ノ二等分線。

(4)　圓ト正多角形。

三. 作圖題.

(1)　三角形ノ内接圓及ビ傍接圓ヲ畫クコト。

(2)　正六角形,正三角形,正十二角形等ヲ作ルコト。

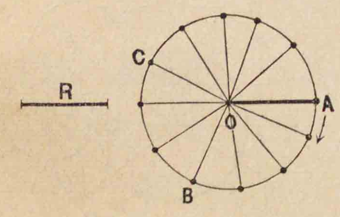
(3)　正方形,正八角形,正十六角形等ヲ作ルコト。

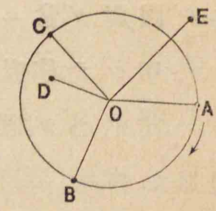
第六章

軌　跡

150. 或條件ニ適スルヤウニ動キタル點ノ通路.　點ノ運動ニヨリテ線ノ生ズルコトハ前ニ言ヘリ。今點ガ或條件ニ適スルヤウニ平面ノ上ヲ動クトキニ生ズル線ニ就キテ研究セン。

例　所設ノ點 O ヨリ所設ノ距離(R)ヲ保チツツ動キタル點(A)ノ通路如何。





解　O ヲ中心トシ, R ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫クトキハ, O ヨリ R ニ等シキ距離ヲ有スル點 A, B, C 等ハ皆此圓周上ニ在リ。　(35)

而シテ此圓周上ニ在ル點ハ皆 O 點ヨリノ距離ガ R ニ等シ。　(35)

故ニ A ガ動キタル通路ハ此圓周ナリ。

前ノ事柄ハ次ノ二ツノ事實ヲ表ハス。

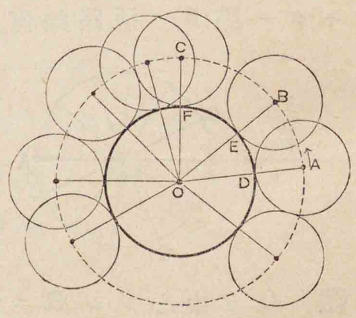
[1]　OヨリRニ等シキ距離ニ在ル點ハ皆此圓周上ニ在ルコト。

[2]　此圓周上ノ點ハ皆Oヨリノ距離ガRニ等シキコト。

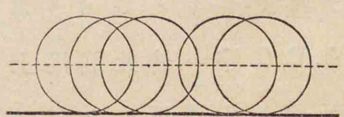
[1]ハ此圓周ガ,Oヨリノ距離ガRニ等シキ點ノ總テヲ占有スルコトヲ表ハシ,

[2]ハ此圓周上ノ點ハ皆其性質ヲ有スルコトヲ表ハス。

問 1.　所設ノ半徑rヲ有スル圓周ガ,常ニ定圓周ニ外切シテ移動スルトキハ,其中心ガ通過スル通路如何。

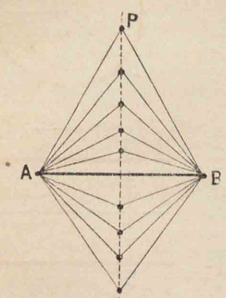


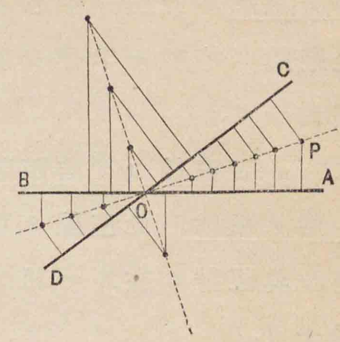
問 2.　一直線ヲナス軌道上ニ汽車ガ進行スルトキ,其車輪ノ中心(軌道ヨリ常ニ等距離ニ在リ)ハ如何ナル動キ方ヲナスカ。



問 3.　所設ノ二點ヨリ等距離ニ在ルヤウニ移動スル點ノ通路如何。

問 4.　所設ノ二直線ヨリ等距離ニ在ルヤウニ移動スル點ノ通路如何。



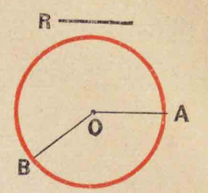


151.　定義　或條件ニ適スル點ガ悉ク或圖形上ニ在リ(即チ其圖形ガ其條件ニ適スル點ノ總テヲ占有シ),且其圖形上ノ點ハ悉ク其條件ニ適スルトキハ,其圖形ヲ其條件ニ適スル點ノ**軌跡**ト云フ。

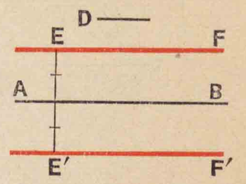
故ニ或條件ニ適スル點ノ軌跡トハ,點ガ其條件ニ適スルヤウニ動キタリト考フルトキ,其點ガ通過シタル通路ヲ云フ。

152. 定理 基礎軌跡. 前二節ニヨリ軌跡ニ關スル次ノ諸定理ヲ得ベシ。

一. 一定點ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ此點ヲ中心トシ,其定距離ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ナリ.

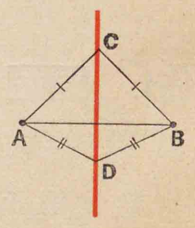


二. 一定直線ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,此直線ノ兩側ニ於テ其距離ニ在ル一組ノ平行線ナリ.



三. 二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ此二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ナリ.

(75 系四)



四. 相交二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,其二直線ノナス角ヲ二等分スル一組ノ直線ナリ. (70 系)

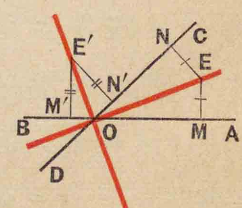
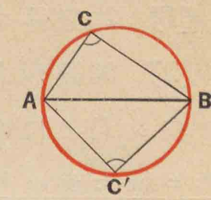


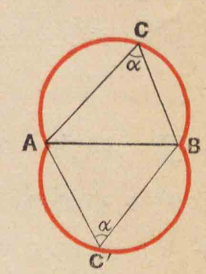
*圖 1. 平行二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,其平行線ノ距離ヲ垂直ニ二等分スル直線ナリ。

五. 所設ノ線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ハ,其線分ヲ直徑トスル圓周ナリ.

(134 及ビ 135 系)

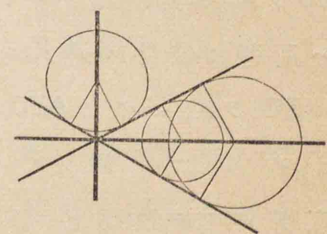


六. 同ジ底邊上ニ立チ,定マレル大サノ頂角ヲ有スル三角形ノ頂角ノ頂點ノ軌跡ハ,底ノ兩端ヲ通過スル二ツノ圓弧ナリ. (135 系)



以上ノ定理ハ軌跡ニ關スル基礎定理ニシテ,多クノ軌跡問題ハ,上ノ何レカ一ツニ歸著セシメ得ベシ。

圖 2. 相交二直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ,其二直線ノナス角ヲ二等分スル一組ノ直線ナリ。



153. 軌跡ノ證明法. 前數節ニ於ケル研究ニヨリ,或條件ニ適スル點ノ軌跡ガ或圖形ナルコトヲ斷定スルニハ,次ノ二ツノ事項ヲ證明スルコトガ必要ニシテ,且ソレニテ十分ナリ。

【1】 其條件ニ適スル點ハ皆其圖形上ニ在ル事.

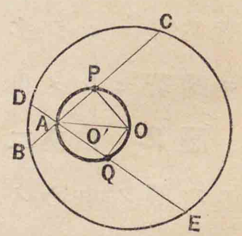
【2】 其圖形上ノ點ハ皆其條件ニ適スル事.

但シ[1]ノ代リニ其圖形上ニ在ラザル點ハ其條件ニ適セザル事([1]ノ對偶)ヲ證明スルモ可ナリ。

而シテ此場合ニハ,初ニ[2]ヲ證明スルヲヨシトス。

例 圓内ノ定點(A)ヲ過グル弦ノ中點ノ軌跡ハ其點ト中心トヲ結ブ線分(AO)ヲ直徑トスル圓周ナリ。(第135節問1參照)

解 Aヲ過グル任意ノ弦BCヲ引キ,其中點ヲPトセバ,Pハ所題ノ條件ニ適スル點ナリ。



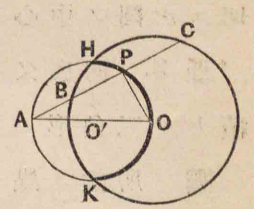
POヲ結ベバ∠APOハ直角ナル(115系二)ヲ以テPハAOヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。故ニ

[1] Aヲ過グル弦ノ中點ハ皆AOヲ直徑トスル圓O′ノ周上ニ在リ。 (15問1)

次ニ圓O′ノ周上ノ任意ノ點ヲQトシ,QトAトヲ過グル弦DEヲ引キQOヲ結ベバ∠AQOハ直角ナル(134)ヲ以テQハDEノ中點ナリ。故ニ

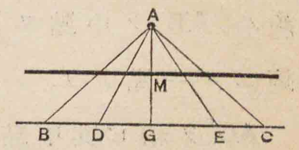
[2] AOヲ直徑トスル圓周上ノ點ハ皆Aヲ過グル弦ノ中點ナリ。

注意 定點Aガ若シ定圓Oノ外ニ在ルトキハ,此軌跡ハ圓O′ノ周全部ニアラズシテ,其定圓内ニアル弧HOKナリ。



*問 次ノ問題ヲ二樣ニ證明セヨ。

定點Aヨリ定直線BCニ至ル線分ノ中點ノ軌跡ハ,AヨリBCヘ下セル垂線AGノ中點Mヲ過ギBCニ平行ナル直線ナリ。



154. 軌跡ノ求メ方.

軌跡問題ハ今マデ示セルガ如ク,其軌跡タル圖形ヲ指示スルコトアルモ,多クハ其圖形ヲ示サズシテ之ヲ決定スルコトヲ要求ス。

カカル場合ニハ,先ヅ所題ノ條件ニ適スル點ヲ考ヘ,此點ハ如何ナル圖形上ニ在ルベキカヲ研究シテ前節ノ[1]ヲ證明シ,次デ[2]ヲ證明スベシ。

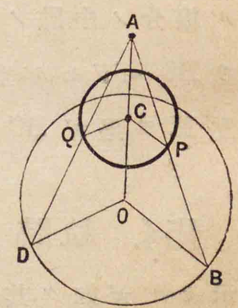
*問 1. 二定點ヲ過グル圓周ノ中心ノ軌跡如何。

*問 2. 定直線又ハ定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。

*問 3. 同底又ハ同一直線上ノ等底上ニ立ツ等積ナル三角形ノ頂點ノ軌跡如何。

例 所設ノ點Aヨリ所設ノ圓Oノ周ニ至ル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 Aヨリ圓Oノ周上ノ任意ノ一點Bニ至ル線分 AB ノ中點ヲPトセバ, Pハ所題ノ條件ニ適スル一點ナリ。



AO ヲ結ビ其中點ヲCトシ, OB, CP ヲ結ベバ, P及ビCハ夫々△ABOノ二邊ノ中點ナルヲ以テ $CP=\frac{1}{2}OB$

然ルニ OB ハB點ガ圓Oノ周上ヲ如何ニ移動スルモ其長サ一定ナリ。

故ニ CP ノ長サハ點Pノ移動ニ關セズ一定ナリ。

而シテCハ不動ノ點ナリ。故ニ

[1] PハCヲ中心トシ所設ノ圓ノ半徑ノ半ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周上ニ在リ。

次ニ此圓(C)ノ周上ニ任意ノ點Qヲ取リ, AQ ヲ結ビ, AQ ノ延長上ニ點Dヲ取リ, QD=AQ ナラシメ, CQ, OD ヲ結ベバ, OD=2CQ ニシテ $CQ=CP=\frac{1}{2}OB$ ナル故 OD=OB

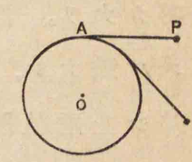
故ニDハ圓Oノ周上ノ點ナリ。

故ニQハ所設ノ點Aヨリ所設ノ圓周上ニ至ル線分ノ中點ナリ。故ニ

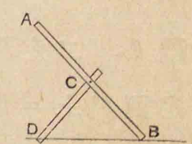
[2] 此圓(C)ノ周上ノ點ハ皆所題ノ條件ニ適ス。

故ニ所要ノ軌跡ハ此圓(C)ノ周ナリ。

問 4. 一定ノ長サノ線分ノ一端ガ一定圓ニ切シテ動クトキ,他ノ端ノ軌跡如何。

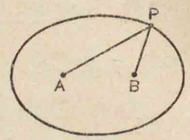


問 5. AB, CD ヲ圖ノ如ク連結シテ平板上ニ置キ, Dヲ固定シBヲ定直線 DB 上ニ沿ヒテ動カストキハ點Aノ畫ク軌跡如何。但シ AC=CB=CD ニシテ目釘C及ビDノ周リノ廻轉ハ自由ナルモノトス。(前節例ノ注意ニ留意セヨ)



注意 點ノ軌跡ハ直線又ハ圓周ニアラザル曲線ナルコトアリ。例ヘバ絲ノ兩端ヲ二定點

A,B ニ固定シ,之ヲ張リナガラ鉛筆ノ尖端Pヲ動カストキハ,Pノ軌跡ハ楕圓ト稱スル曲線ナルコトハ既ニ知レル所ナルベシ。サレド本書ニ於テハカヽル軌跡ヲ考究セズ。



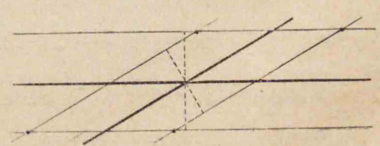
155. 軌跡ノ交ハリ. 甲乙二ツノ條件アリ,其各ニ適スル點ノ軌跡ヲ夫々A, Bトセバ,此A, B兩軌跡ノ交點ハ,兩條件甲,乙ノ雙方ニ適スルコト明カナリ。而シテ其交點ノ他ニハ此兩條件ニ適スル點ナシ。 (110 注意二)

若シ此兩軌跡ガ交ハラザレバ,此兩條件ノ全部ニ適スル點ナシ。

問 1. 二定點ヨリ等距離ニ在ル點ヲ,定直線又ハ定圓周上ニ求メヨ。

問 2. 二定點ヨリ等距離ニ在リテ,且二定直線ヨリモ等距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

*問 3. 二定直線ヨリ夫々所設ノ距離ニ在ル點ヲ求メヨ。



156. 作圖題ノ解法ニ軌跡ヲ應用スルコト. 作圖題中ニハ其解法ガ,或條件ニ適スル點ヲ發見スルコトニ歸スルモノ多シ。

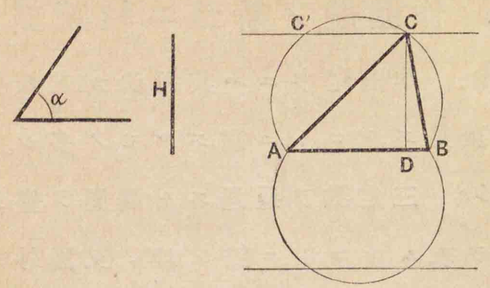
例ヘバ,三定點ヲ通過スル圓周ヲ畫クコトハ其中心ヲ求ムルコトニ歸シ(110),又圓外ノ一點ヨリ此圓ニ切線ヲ引クコト(136)ハ其切點ヲ決定スルコトニ歸スルガ如シ。

此場合ニ於テ所題ノ條件ノ中,一ツヲ除キテ殘リノ條件ノミニ適スル點ヲ求ムルトキハ,概シテ或軌跡ヲ得ベシ。是ニ於テ更ニ先ニ除キ置キタル條件ヲ復活シ,其代リニ他ノ一條件ヲ除去スルトキハ,又多クハ一軌跡ヲ得ン。然ルトキハ此兩軌跡ノ交點ハ所題ノ條件全部ニ適スル點ナリ。

而シテ其交點ガ數多アラバ,解答モ亦從テ數多アリ,又若シ兩軌跡ガ交ハラザルトキハ解答ナシ。

例 底(AB)ノ長サ及ビ位置ト,高サ(H)並ニ頂角(α)トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

解 底ABノ大サ及ビ位置ハ定マレルヲ以テ,本問題ハ唯頂點トナルベキ點ヲ定ムレバ可ナリ。



今所題ノ條件中ヨリ高サニ關スルモノヲ除クトキハ,頂點ノ軌跡トシテ**AB**ヲ弦トシ$\angle\alpha$ヲ含ム弓形ノ弧二ツヲ得(152六),コレ第一軌跡ナリ。

次ニ**AB**ヨリ**H**ニ等シキ距離ニ在リテ**AB**ニ平行ナル一組ノ直線ハ頂點ノ第二軌跡ナリ(152二)。

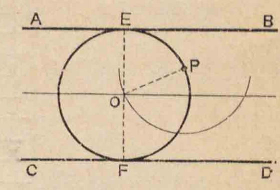
故ニ此兩軌跡ヲ畫キ,其交點ノ一ツヲ**C**トスレバ,△**ABC**ハ所題ノ條件ニ適ス。

吟味 作圖ノ各段階ニツキテハ兩軌跡ヲ得ルマデ常ニ可能ナリ。

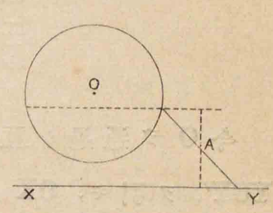
次ニ第二軌跡ナル直線ガ第一軌跡ナル弧ニ交ハルトキハ互ニ合同ナル四ツノ三角形ヲ得。兩軌跡ガ相切スルトキハ合同ナル二ツノ等脚三角形ヲ得。兩軌跡ガ交ハラザルトキハ解答ナシ。

問 1. 底邊ト頂角ト底邊ヲ二等分スル中線トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

問 2. 所設ノ二直線ニ切シ,所設ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。



問 3. 所設ノ平行線ノ各ニ切シ,且一定點ヲ過グル圓周ヲ畫ケ。



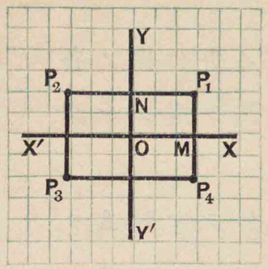
問 4. 圖ニ於テ定點**A**ヲ過グル直線ヲ引キ定圓**O**ノ周ト定直線**XY**トノ間ニ在ル部分ガ點**A**ニヨリテ二等分セラルヽヤウニセヨ。又點**A**ノ位置ニ關シテ制限アラバ,ソレヲモ述ベヨ。

157. 點ノ位置ヲ定ムル方法, 座標.

或點ノ位置ヲ表ハスニハ,他ニ既ニ位置ノ確定セルモノヲ基準トセザルベカラズ。

例ヘバ或地點**P**ノ位置ヲ知ルニハ,他ニ既ニ位置ノ確定セル一地點**O**ヲ取リ,**O**ヨリ東3粁等ト云ヒテ**P**ノ位置ヲ知ルコトヲ得。

此場合ニ若シPガOノ正東ニ在ラザルトキハ，Pハ0ノ東3粁ノ地點ヨリ正北2粁ノ處ニ在リ等ト云ハバ,其位置ヲ確定スルコトヲ得。(1)



今Oヲ通過シ互ニ直交スル二直線 XOX′ 及ビ YOY′ ヲ引キ, OX 及ビ OY ヲ夫々Oヨリ東及ビ北ノ方向ヲ示スモノトセバ,點Pノ位置ハPト此二直線トノ距離 NP (即チ OM) 及ビ MP (即チ ON) ノ長サニヨリテ定マル。地球上ノ或地點ノ位置ヲ表ハスニ,東經何度,北緯何度ト云フガ如キハ之ニ類セル方法ニヨルモノニシテ,夫々英國ぐりにっちヲ通過スル本初子午線及ビ赤道ヘノ距離ヲ以テスルモノナリ。

(1) 此場合Pノ位置ヲ表ハスニOヨリ引ケル一直線OXノ位置ト,∠XOPノ大サ及ビOPノ長サトヲ以テスル方法モアレド,ココニハ之ヲ説カズ。

OM, ON ノ長サヲ點Pノ座標ト云ヒ, OMヲ横座標, ONヲ縦座標ト云フ。而シテ通例 x 及ビ y ヲ以テ夫々OM及ビONノ長サヲ表ハス。

XOX′, YOY′ ヲ點Pノ座標軸ト云ヒ,横軸ヲ x 軸,縦軸ヲ y 軸トモ云フ。而シテ兩軸ノ交點Oヲ座標ノ原點ト云フ。

然ルニ横軸及ビ縦軸ヨリノ距離ガ夫々3及ビ2ナル點ハ圖ニ示スガ如ク四ツアリ。依テ此等ヲ區別センガタメニ,原點OヨリOX及ビOY上ニ測リタル長サヲ正數ヲ以テ表ハシ,反對ノ方向即チOX′及ビOY′上ニ測リタル長サヲ負數ヲ以テ表ハスコトトス。而シテ上ノ四點ハ之ヲ次ノ如ク記ス。

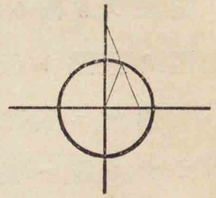
$P_1(3,2)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(-3,-2)$, $P_4(3,-2)$

互ニ相關聯シテ變化スル二量ノ關係ノ狀況ノ如キハ座標ヲ用ヒテ甚ダ明瞭ニ之ヲ圖示スルヲ得ルコトハ,既ニ代數學ニ於テ知リタルコトナルベシ。

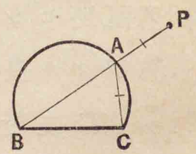
問題 13

1. 半徑2cmナル定圓ノ周ヨリ1cmノ距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

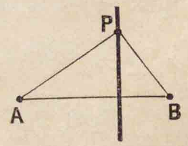
2. 定長ノ線分ノ端ガ一ツヅツ直交スル二直線ノ各ノ上ニ在リテ動クトキ,其線分ノ中點ノ軌跡ヲ求ム。



3. 弓形**BAC**ノ弦**BA**ヲ延長シ**AP**ヲ**AC**ニ等シクスルトキ,點**P**ノ軌跡ヲ求メヨ。



***4.** 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ所設ノ平方ニ等シキ點ノ軌跡ハ其二點ヲ通過スル直線ニ直交スル一直線ナリ。

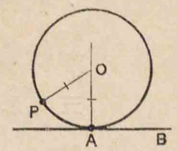


5. 底ト高サト一底角又ハ底ヘノ中線トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

6. 互ニ外方ニ相離レタル二定圓ニ切シ,所設ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。

7. 所設ノ一點ヲ過ギ所設ノ直線又ハ圓周ト

其上ノ定點ニ於テ切スル圓周ヲ畫ケ。

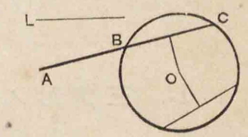


8. 所設ノ直線ト圓トニ切シ,且所設ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。

9. 半徑2cmナル圓ヲ半徑5cmナル半圓ノ周及ビ直徑ニ切セシメヨ。

10. 所設ノ圓ニ其外ニ在ル所設ノ點ヨリ割線ヲ引キ,其圓外ノ部分ヲ圓內ノ部分(弦)ニ等シカラシメヨ。

又其弦ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。



回顧,復習.

(1) 軌跡ノ意義,定義。

(2) 基礎軌跡(定理)。

一. 一定點ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡。

二. 一定直線ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡。

三. 二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡。

四. 二定直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡。

五. 定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點

ノ軌跡。

六. 同底上ニ立チテ定マレル大サノ頂角ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡。

(3) 軌跡斷定ノ二段階。

(4) 二種ノ軌跡ノ交點ノ性質。

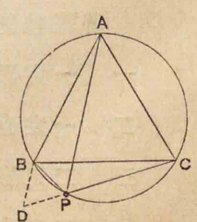
(5) 軌跡ヲ作圖題ニ應用スルコト。

(6) 點ノ位置ヲ決定スル方法, 座標。

雜題 2

1. 三角形ノ各頂點ヨリ夫々對邊ヘ引ケル三ツノ垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形(此三角形ヲ原三角形ノ**垂足三角形**ト云フ)ノ邊ハ,原三角形ノ邊ト夫々等角ヲナス。

***2.** 正三角形ABCノ外接圓ノ弧BC上ノ任意ノ一點ヲPトセバ, PA = PB+PC ナリ。



***3.** △ABCノ垂心ヲH, 外心ヲOトシ,邊BCノ中點ヲMトスレバ, AH=2OM ナリ。

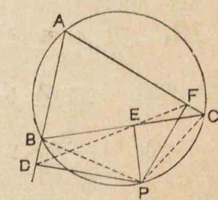
4. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スルトキ,其交點ヲ過ギ一邊ニ垂直ナル直線ハ其對邊ヲ二等分ス。[1]

5. 三角形ABCノ外接圓ノ直徑ADヘB,Cヨリ垂線BE,CFヲ引クトキハ,

$$\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = AD.EF$$

6. 三角形ABCノ三邊BC,CA,AB(其延長ニテモ可ナリ)上ニ夫々任意ニ一點ヅツD,E,Fヲ取ルトキハ,三角形AEF,BFD,CDEノ外接圓周ハ一點ニ會ス。

***7.** 三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ一點ヨリ,三邊ヘ下セル垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ。



此定理ヲ**しむそん**[2]ノ**定理**ト云ヒ,此直線ヲ其點ニ關スル三角形ノ**しむそん線**ト云フ。

8. 一定圓周上ニ在ル二ツノ定點ヲP,Qトシ,一ツノ定長ノ動弦ヲABトス。二直線AP,BQノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

---

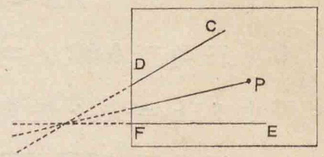
(1) Brahmegupta(七世紀ノ印度ノ數學者)ノ定理ト云フ。

(2) 英國ぐらすごー大學ノ敎授しむそん Simson (1687－1768).

9. 同底上ニ立ツ三角形ノ底ノ一端ヨリ出ヅル中線ガ定長ナルトキハ,其頂點ノ軌跡如何。

10. 一定點ヲ通過シ,所設ノ平行線間ニ所設ノ長サノ線分ヲ夾ム直線ヲ引ケ。

11. 引延バシテ其交點ヲ知ルコト能ハザル二ツノ直線アリ,



[1] 一定點ヲ通過シ,其二直線ノ交點ヲ通過スル直線ヲ引ケ。

[2] 其二直線ノナス角ノ二等分線ヲ引ケ。

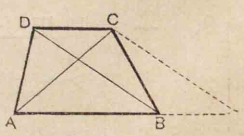
12. 次ノモノガ與ヘラレテ三角形ヲ作レ。

*[1] 二邊ト其一對角。(吟味ニ注意セヨ)

[2] 一邊ト一ツノ高サト一中線(五ツノ場合)。

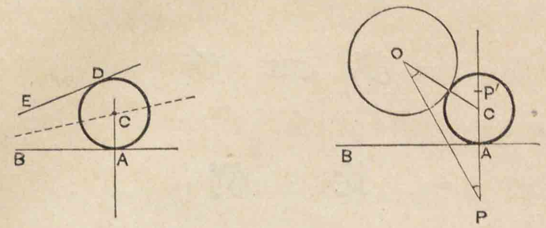
[3] 底邊,一底角,他ノ二邊ノ和又ハ差。

[4] 二ツノ角ト周。



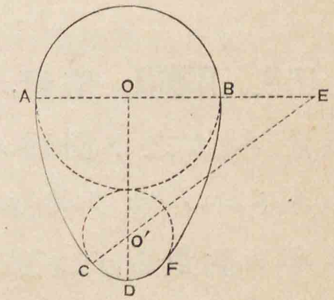
13. 兩底及ビ兩對角線ノ長サヲ知リテ梯形ヲ作レ。

14. 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且他ノ定直線又ハ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。



15. 斜邊 29 cm, 他ノ一邊 21 cm ナル直角三角形ノ內接圓ノ半徑及ビ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ。

16. コヽニ示スモノハ**卵形**ト稱スル平面形ニシテ四ツノ圓弧ヨリ成ル。今二圓 **O** 及ビ **O′** ノ半徑ヲ夫々 $2a$ 及ビ a トシテ圓弧 **AC** ノ半徑ヲ求メヨ。而シテ此圖形ノ作圖ヲ求メヨ。



第四篇

比例

第一章

線分ノ比例

158. 定義 **倍量, 約量, 公約量(公度).** 或量 A ガ之ト同種ノ量 B ノ整數倍ニ等シキトキハ, A ヲ B ノ**倍量**ト云ヒ, 逆ニ B ヲ A ノ**約量**ト云フ。二量ノ各ノ約量タル量ヲ其二量ノ**公約量**又ハ**公度**ト云フ。

例ヘバ二線分ノ長サヲ測リシニ夫々 3cm 及ビ $2\frac{1}{3}$cm ヲ得タリトセバ $\frac{1}{3}$cm, $\frac{1}{6}$cm, $\frac{1}{9}$cm 等ノ長サヲ有スル線分ハ,皆此二線分ノ公約量ナリ。

二量ガ公約量ヲ有スルトキハ之ヲ**通約セラル**ト云ヒ,然ラザレバ之ヲ**通約セラレズ**ト云フ。

159. 定義 **比.** 或量 A ノ他ノ量 B ニ對スル比トハ, A ガ B ノ何倍ナルカノ關係ヲ云フ.

此關係ハ A ヲ得ルタメニ B ニ乘ズベキ數ヲ知ラバ定マル。此數ヲ**比ノ値**ト云フ。

比ノ値ト云フベキヲ單ニ比ト云フコト多シ。

從テ A ノ B ニ對スル比ハ, B ヲ單位トシテ A ヲ計ルトキ, A ヲ表ハス數ナリト云フコトヲ得。

通約セラルル二量ノ比ハ整數又ハ分數ニシテ, 通約セラレザル二量ノ比ハ不盡數ナリ。

例ヘバ 6cm ノ長サト 2cm ノ長サトノ比ハ 3 ニシテ 3cm ノ長サト 5cm ノ長サトノ比ハ $\frac{3}{5}$ ナリ。

又正方形ノ對角線ト一邊トノ比ハ $\sqrt{2}$ ナリ。

從テ通約セラレザル二量ノ比ハ,其眞ノ値ヲ求ムルコト能ハザレドモ,適當ナル程度ニ於テ其近似値ヲ求メテ實用ニ供ス。

A ノ B ニ對スル比ヲ $\frac{A}{B}$ 又ハ A:B ト記ス。

而シテ A ヲ其**前項**, B ヲ**後項**ト云ヒ,兩者ヲ通稱シテ**比ノ項**ト云フ。

160. 定義 比例. 二量ノ比ガ他ノ二量ノ比ニ等シキトキハ,此四量ハ**比例ヲナス**ト云ヒ,此四量ヲ**比例量**ト云フ。

四量**A, B, C, D** ガ比例ヲナスコトヲ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

ト記シ,之ヲ**比例式**ト云フ。

此式ハ又

$$A:B=C:D \quad 或ハ \quad A:B::C:D$$

トモ記ス。

Aト**D**トヲ比例ノ**外項**ト云ヒ, **B**ト**C**トヲ**內項**ト云フ。又**D**ヲ**A, B, C**ノ**第四比例項**ト云フ。

Aト**B**ト及ビ**C**ト**D**トハ各同種ノ量タルベキハ勿論ナルモ, **A**ト**C**ト從テ**B**ト**D**トハ必ズシモ同種ノ量タルヲ要セズ。

若シ**A, B, C**ガ同種ノ三量ニシテ比例式

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C} \quad 即チ \quad A:B=B:C$$

ガ成立スルトキハ,此三量ハ比例ヲナスト云ヒ, **C**ヲ**A**ト**B**トノ**第三比例項**, **B**ヲ**A**ト**C**トノ**比例中項**ト云フ。

161. 定理 二量AトBトノ比ハ,之ヲ同單位ニテ計リタルAノ測度aト, Bノ測度bトノ比ニ等シ.

證明 Cヲ共通ノ單位トセバ,

$$A=aC, \qquad B=bC$$

故ニ $$C=\frac{1}{b}B \quad 從テ \quad A=\frac{a}{b}B$$

故ニ $$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

注意 此定理ニヨリ,量ノ比ヲ研究スルニハ其測度ノ比ヲ以テスレバ可ナルヲ知ル。

故ニ以下代數學ニ於テ知リタル比例ノ諸性質ヲ引用スベシ。

其重ナルモノヲ擧グレバ次ノ如シ。

[1] $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$ 但シmハ任意ノ正數トス。

[2] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラバ $a \gtreqless b$ ニ從テ $c \gtreqless d$

[3] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラバ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (反轉ノ理)

及ビ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (更迭ノ理)

[4]　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナラバ $\dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}$　（複號同順）

及ビ　$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$

[5]　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots$ ナラバ

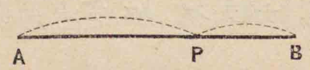
$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}$　（加比ノ理）

[6]　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$　ナラバ　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\left(\dfrac{c}{d}\right)^2$

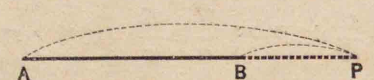
逆ニ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\left(\dfrac{c}{d}\right)^2$　ナラバ　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

162. **定義** **線分ノ內分,外分.** 線分上ノ點又ハ其延長上ノ點ハ此線分ヲ**分ツ**ト云フ。而シテ後者ハ特ニ此線分ヲ**外分ス**ト云ヒ,之ニ對シテ前者ハ此線分ヲ**內分ス**ト云フコトアリ。

(內分)



(外分)

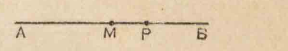


何レノ場合ニ於テモ,分點ト線分ノ兩端トノ間

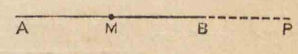
ノ線分ヲ其二ツノ分ト云フ。

内分ノ場合ニ於テハ,線分ハ其二分ノ和ニ等シク,外分ノ場合ニ於テハ其差ニ等シ。

*問　Pヲ線分ABノ分點,Mヲ其中點トセバ

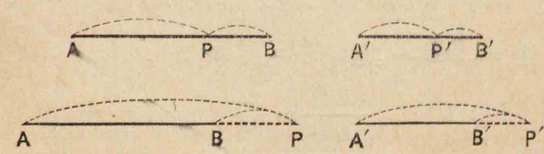


(1)　$PM=\dfrac{1}{2}(AP\pm BP)$



(2)　$AP.BP=\overline{AM}^2\sim\overline{PM}^2$

線分ノ相似分割. 二ツノ線分ガ各二ツノ部分ニ分タレ,其二分ノ比ガ相等シキトキハ,此二線分ハ**相似ニ分タル**ト云フ。

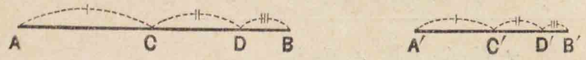


例ヘバ二線分AB,A′B′ガ夫々P及ビP′ニ於テ分タレ,

$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{A'P'}{P'B'}$　從テ　$\dfrac{AP}{A'P'}=\dfrac{PB}{P'B'}$

ナルトキハ,ABトA′B′トハ相似ニ分タルト云フ。

又二ツノ線分 AB, A′B′ ガ夫々C, D 及ビ C′, D′ ニ於テ各三分セラレ,



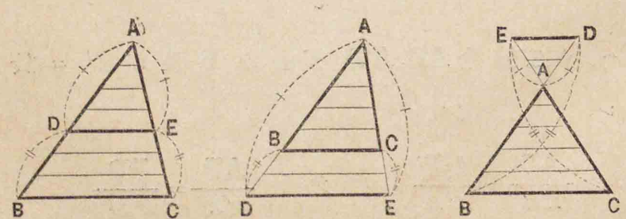
$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DB}{D'B'}$$ (1)

ナルトキハ,AB, A′B′ ハ相似ニ三分セラルト云フ。他ハ之ニ準ズ。

163. **定理** 三角形(ABC)ノ一邊(BC)ニ平行ナル直線(DE)ハ,他ノ二邊(AB, AC)ヲ相似ニ内分又ハ外分ス. (Thales ノ定理)

證明 AD ト DB トガ公約量ヲ有ストシ, AD ハ其 m 倍ニ,DB ハ其 n 倍ニ等シトスレバ,

$$\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$$



(1) 此比例式ハ AC : CD : DB = A′C′ : C′D′ : D′B′ トモ記ス。

今 AD ヲ m 等分シ,DB ヲ n 等分シ,各分點ヲ過ギテ底 BC ニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,此等ノ直線ハ AE ヲ m 等分シ EC ヲ n 等分ス。而シテ其各分ハ皆相等シ。 (86)

故ニ
$$\frac{AE}{EC}=\frac{m}{n}$$

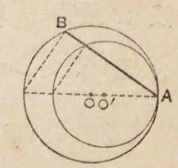
故ニ
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

AD ト DB ガ公約量ヲ有セザル場合ノ證明ハ省略ス。

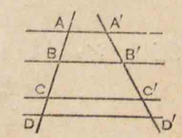
問 1. 前ノ圖ニ於テ次式ヲ證明セヨ。

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},\quad \frac{BD}{BA}=\frac{CE}{CA}$$

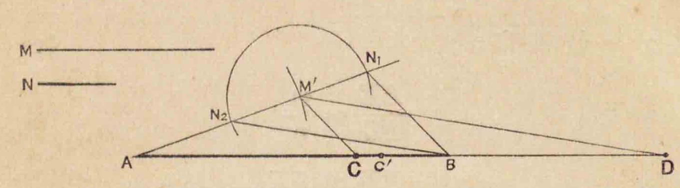
問 2. 二ツノ圓ガ内切スルトキ,切點ヲ過グル大圓ノ弦ハ,皆小圓ノ周ニテ相似ニ分タル。



系 二ツノ直線ガ若干ノ平行線ニテ截ラルヽトキハ,其對應スル分ノ比ハ相等シ。



164. **作圖題** 所設ノ線分(AB)ヲ所設ノ比(M:N)[1]ニ內分及ビ外分セヨ.



作圖 (1) A ヨリ AB ニ重ナラザル直線 AM′ ヲ引キ,其上ニ AM′=M ナルヤウニ M′ ヲ取ル。

(2) M′ ヲ中心トシ N ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫キ, AM′ トノ交點ヲ N_1 及ビ N_2 トス。

(3) N_1B 及ビ N_2B ヲ結ビ, M′ ヨリ之ニ平行ニ M′C 及ビ M′D ヲ引キテ AB 及ビ其延長トノ交點ヲ C 及ビ D トセバ, C 及ビ D ハ所要ノ分點ナリ。

證明 (學生之ヲナスベシ)

吟味 今 C ヲ內分點トシ, C′ ヲ AB 上ノ他ノ一點トシ, 假ニ AC′:C′B = M:N トセバ

$$AC'+C'B : C'B = M+N : N$$

即チ $$AB : C'B = M+N : N$$

(1) 所設ノ比ハ通例二線分ノ比ニテ與フルモノトス。

然ルニ $$AB : CB = M+N : N \quad (作圖)$$

$$\therefore\ AB : C'B = AB : CB$$

$$\therefore\ C'B = CB$$

故ニ C′ ハ C ニ合ス。

故ニ AB ヲ AC:CB = M:N ナルヤウニ內分スル點ハ點 C 唯一ツアルノミ。

同樣ニ外分點モ唯一ツアルノミ。

但シ M=N ナル場合ニハ外分點ナシ。

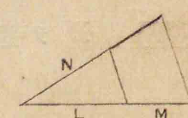
此場合ニハ點 N_1 ハ點 A ニ合シ M′D ハ AB ニ平行ナリ。

故ニ 或線分ヲ或比ニ內分又ハ外分スル點ハ各一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

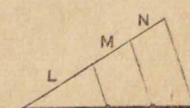
但シ其比ガ 1 ニ等シキ場合ニハ外分點ナシ。

又上ノ方法ニ準ジテ直ニ次ノ作圖題ヲ解クコトヲ得。

[1] 所設ノ三線分(L, M, N)ノ第四比例項ヲ作レ。



[2] 所設ノ二線分ノ第三比例項ヲ作レ。



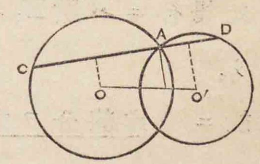
[3] 所設ノ線分ヲ分チ,其分ノ

比ヲ所設ノ比(L:M:N)ニ等シクセヨ。

注意　線分ABガP及ビQニテ同ジ比ニ夫々內分及ビ外分セラルヽトキハ,四點A,P,B,Qヲ**調和列點**ト云ヒ, ABハPトQトニテ**調和ニ分タル**ト云フ。(222頁ノ圖ヲ見ヨ)

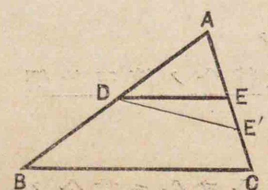
問 1.　線分ABヲC及ビDニ於テ同ジ比 $m:n$ ニ內分及ビ外分スルトキCA, CB, DA及ビDBノ長サヲ求メヨ。但シABノ測度ヲ a トス。

問 2.　相交ハル圓ノ交點ノ一ツヲ過グル直線ヲ引キ,各圓ガ夫々截取ル弦ノ比ヲ2:1ニ等シクセヨ。



165.　**定理**　**三角形ノ二邊(AB, AC)ヲ相似ニ內分又ハ外分スル直線(DE)ハ第三邊ニ平行ナリ。**

證明　Dヲ過ギBCニ平行ナル直線ハ唯一ツ



アリ, 之ヲDE′トシACトノ交點ヲE′トセバ,

$$\frac{AE'}{E'C}=\frac{AD}{DB} \qquad (163)$$

然ルニ
$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB} \qquad (假設)$$

故ニ
$$\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$$

故ニE′トEトハ同ジ點ナリ。　(164 吟味)

故ニ　DE ∥ BC

注意　上ノ證明ハ次ノ如ク論理的ニ直ニ論斷スルモ可ナリ, 之ヲ**同一法**ト稱ス。

Dヲ過ギBCニ平行ナル直線(甲)ハ

Dヲ過ギACヲAD:DBニ等シク分ツ直線(乙)ナリ。

コレ既ニ第163節ニ於テ證明シタル定理ニシテ,此甲及ビ乙ハ共ニ唯一ツヅヽアルノミナルヲ以テ,甲ト乙トハ同一物ナリ。

故ニ其逆即チ本節ノ定理モ亦眞ナリ。

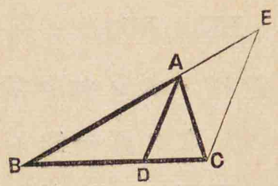
問　四邊形ABCDノ邊AB上ノ一點EヨリBCニ平行ニEFヲ引キ,對角線ACトFニ於テ交ハラシメ,更ニFヨリCDニ平行ニFGヲ引キADトGニ於テ交ハラシムレバ,EGハBDニ平行ナリ。

166. **定理** 三角形ノ内角又ハ外角ノ二等分線ハ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分ス.

[1] 内分ノ場合。

假設 三角形 ABC ノ頂角 BAC ノ二等分線ヲ AD トシ,底 BC ヲ D ニ於テ内分ストス。

終結 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$



證明 DA ニ平行ニ CE ヲ引キ, BA ノ延長ト E ニ於テ交ハラシムレバ,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE} \qquad (163)$$

然ルニ $\angle ACE=\angle CAD,\quad \angle E=\angle BAD$

且 $\angle CAD=\angle BAD$

$\therefore\ \angle ACE=\angle E$

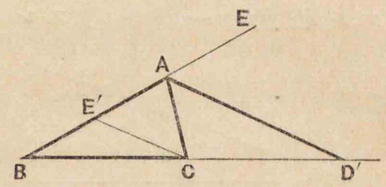
$\therefore\ AE=AC$

$\therefore\ \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$

[2] 外分ノ場合。

AD′ ヲ外角 CAE ノ二等分線トシ, BC ノ延長ト D′ ニ於テ交ハルトセバ, 上ト同樣ニ

$$\frac{BD'}{CD'}=\frac{AB}{AC}$$



問 1. △ABC ニ於テ AC>AB ナリトシ,頂角 A ノ二等分線ガ BC ト D ニ於テ交ハルトセバ

$$CD>BD$$

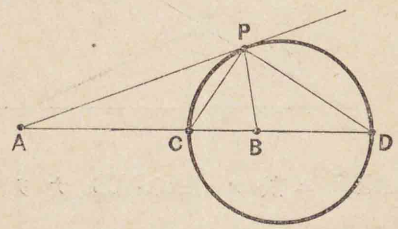
問 2. △ABC ノ底 BC ノ中點ヲ D トシ, ∠ADB, ∠ADC ノ二等分線ト二邊トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ, EF ∥ BC ナリ。

又二邊ノ延長ニ交ハラシムルトキハ如何。

系 三角形ノ頂點ヨリ出デ,對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分スル直線ハ,頂角又ハ之ニ隣ル外角ノ二等分線ナリ。 (同一法)

167. **定理** 二定點(A, B)ヨリノ距離ノ比ガ所設ノ比ニ等シキ點ノ軌跡ハ,其二定點ヲ結ブ線分(AB)ヲ此比ニ内分及ビ外分スル二點(C, D)間ノ線分(CD)ヲ直徑トスル圓周ナリ.(Apollonius ノ定理[1])

證明 [1] M:N ヲ所設ノ比トシ, P ヲ所題ノ條件ニ適スル任意ノ一點ト考フレバ,



$$\frac{PA}{PB}=\frac{M}{N},\qquad \frac{AC}{BC}=\frac{M}{N}$$

$$\therefore\quad \frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}$$

故ニ PC ハ ∠APB ヲ二等分ス。 (166系)

同様ニ PD ハ ∠APB ニ隣ル外角ヲ二等分ス。

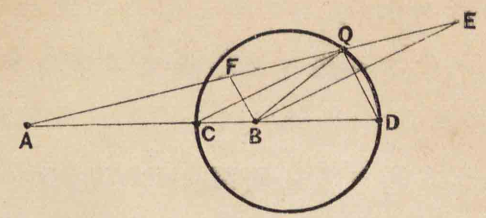
故ニ ∠CPD ハ直角ナリ。

而シテ CD ハ不動ノ線分ナリ。

故ニ P ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。

(1)古代希臘ノ有名ナル數學者(西暦紀元前 260—210 年頃)ナリ。

[2] 次ニ此圓周上ノ任意ノ一點ヲQトシ,



QA, QB, QC, QD ヲ結ビ, 又 B ヲ過ギ QC 及ビ QD ニ平行ナル直線ヲ引キ, AQ 又ハ其延長ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシムレバ,

$$\frac{AQ}{QE}=\frac{AC}{BC}=\frac{M}{N}$$

又 $$\frac{AQ}{QF}=\frac{AD}{BD}=\frac{M}{N}$$

$$\therefore\quad \frac{AQ}{QE}=\frac{AQ}{QF}$$

$$\therefore\quad QE=QF$$

又 BE, BF ハ夫々 QC, QD ニ平行ニシテ ∠CQD ハ直角ナルヲ以テ ∠EBF ハ直角ナリ。

故ニ Q ハ直角三角形 EBF ノ斜邊ノ中點ナリ。

$$\therefore\quad QE=BQ$$ (82 系二)

$$\therefore\quad \frac{AQ}{BQ}=\frac{AQ}{QE}=\frac{M}{N}$$

圖 1. 三角形ノ底,他ノ二邊ノ比及ビ高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

又高サノ代リニ底ヘノ中線又ハ頂角ヲ知ラバ如何。

圖 2. 三定點ヨリノ距離ノ比ガ所設ノ比ニ等シキ點ヲ求メヨ。

問題 14

1. △ABC ノ邊 AB 上ノ任意ノ點 D ヨリ BC ニ平行ニ DE ヲ引キ AC ト E ニ於テ交ハラシム,又 C ヨリ BE ニ平行ニ CF ヲ引キ AB ノ延長ト F ニ於テ交ハラシムレバ,AB ハ AD ト AF ノ比例中項ナリ。

2. 二等邊三角形アリ,底ノ高サニ對スル比ガ 3:2 ニ等シ,然ラバ内心ニテ分タルル高サノ二ツノ部分ノ比如何。

3. △ABC ノ三邊 AB, BC, CA ノ長サヲ夫々 12 cm, 7 cm, 9 cm トシ,又 ∠BAC 及ビ其外角ヲ二等分スル直線ガ BC 及ビ其延長ト交ハル點ヲ夫々 P, Q トスレバ, P, Q ガ BC ヲ分ツ各ノ分及ビ PQ ノ長サ如何。

4. 所設ノ角 BAC ノ内又ハ外ニ在ル所設ノ點 P ヲ過ギ,此角ノ二邊ト B, C ニ於テ交ハル直線ヲ引キテ,BP : PC ヲ所設ノ比ニ等シカラシメヨ。

5. 所設ノ弧 AB 上ニ一點 C ヲ取リ,弦 AC, BC ノ比ヲ所設ノ比ニ等シクセヨ。

回顧, 復習.

一. 定義.

(1) 公約量, 比, 比例, 三量ノ第四比例項。

二量ノ第三比例項, 二量ノ比例中項。

(2) 線分ノ内分,外分, 二線分ノ相似分割, 調和列點。

二. 定理.

(1) たーれすノ定理(及ビ逆)。

(2) 三角形ノ内角及ビ外角ノ二等分線ト其角ノ對邊トノ關係。

(3) あぽろにうすノ定理(軌跡)。

三. 作圖題.

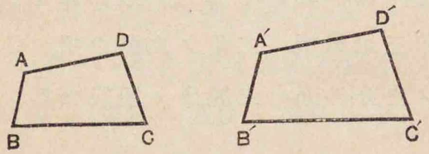
線分ノ分割(比例配分)。

第二章

相似形

168. **定義** **相似多角形.** 一ツノ多角形ノ角ガ夫々順次ニ他ノ多角形ノ角ニ等シク,且其相等シキ各組ノ角ノ間ニ在ル各組ノ邊(對應邊)ノ比ガ相等シキトキハ,此兩多角形ハ相似ナリト云フ。

例ヘバ兩四角形 ABCD, A'B'C'D' ニ於テ,



$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$ ニシテ

且 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}$ ナルトキハ,

此兩四角形ハ相似ナリト云ヒ,之ヲ次ノ如ク記ス。

$$ABCD \backsim A'B'C'D'$$

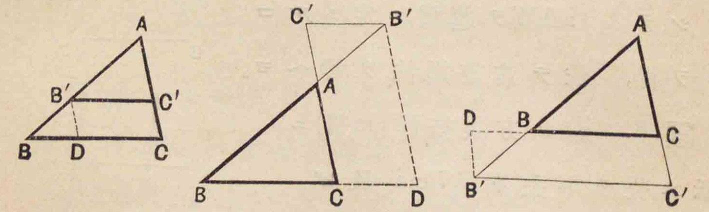
相似多角形ノ對應邊ノ比ヲ兩形ノ**相似比**ト云フ。

系 相似多角形ノ周ノ比ハ其相似比ニ等シ。

*問 同邊數ノ兩正多角形ハ相似ナリ。

(1) 三角形ノ相似

169. **定理** **三角形(ABC)ノ一邊ニ平行ナル直線(B'C')ト他ノ二邊(或ハ延長)トノ作ル三角形(AB'C')ハ,原形ト相似ナリ.**



證明 先ヅ $B'C' \parallel BC$ ナルヲ以テ,

兩三角形 AB'C', ABC ノ角ハ夫々相等シ。

次ニ $\dfrac{AB'}{AC'}=\dfrac{BB'}{CC'}=\dfrac{AB'\pm BB'}{AC'\pm CC'}$

故ニ $\dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{AC'}{AC}$

同様ニ AC ニ平行ニ B'D ヲ引クトキハ,

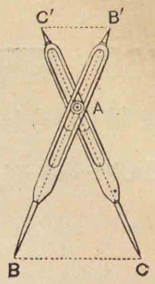
$$B'C'=DC$$

故ニ $\dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{B'C'}{BC}$

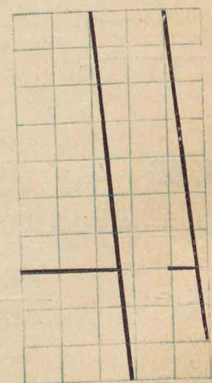
故ニ兩三角形ノ對應邊ハ比例ヲナス。

故ニ $\triangle AB'C' \backsim \triangle ABC$

問 1. 梯形ノ一底ガ他ノ底ノ二倍ナルトキ,兩對角線ハ互ニ其三分ノ一ノ處ニテ交ハル。



問 2. 右ニ示スモノハ**比例こんぱす**ナリ, Aニアルねぢヲ動カシテ $AB:AB'$ ヲ適當ニ定ムルコトヲ得, 依テ其使用法ヲ考ヘヨ。



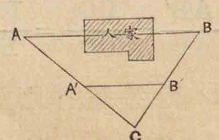
問 3. 右ノ方眼紙(1 cm目)ニ示ス長サハ夫々 2.7 cm 及ビ $\frac{7}{9}$ cm ナルコトヲ證明セヨ。

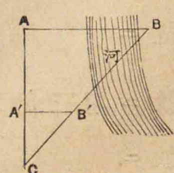
此方法ヲ**對角線尺**又ハ**斜線尺**ト云フ。

此方法ニヨリテ 3.3 cm, $\frac{5}{13}$ cm ノ長サヲ作レ。

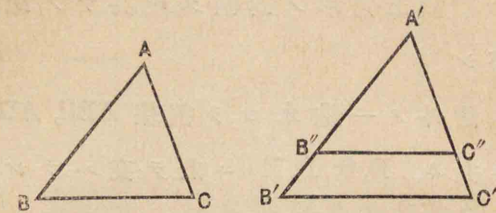
問 4. 本節ノ定理ヲ應用シテ二點間ノ距離ヲ間接ニ測ルコトヲ得(測量ニ應用セラル)。

圖ニヨリテ其方法ヲ考案セヨ。





170. **定理** 角ヲ夫々等シクスル兩三角形 $(ABC, A'B'C')$ ハ相似ナリ.



證明 邊 $A'B'$ (又ハ其延長)上ニ一點 B'' ヲ取リ, $A'B''$ ヲ $A'B'$ ノ對應邊 AB ニ等シクシ, $B'C'$ ニ平行ニ $B''C''$ ヲ引キ $A'C'$ (又ハ其延長)ト C'' ニ於テ交ハラシムレバ,

$$\triangle A'B''C'' \backsim \triangle A'B'C' \qquad (169)$$

然ルニ $$\triangle A'B''C'' \equiv \triangle ABC$$

$$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

系一. 二角ヲ夫々相等シクスル兩三角形ハ相似ナリ。

系二. 同邊數ノ正多角形ノ周ノ比ハ,其外接圓ノ半徑ノ比及ビ內接圓ノ半徑ノ比ニ等シ。

*問 1. 所設ノ線分ヲ一邊トシ,所設ノ三角形ニ相似ナル三角形ヲ畫ケ。

*問 2. 兩三角形ノ邊ガ夫々平行ナルカ,又ハ夫々垂直ナラバ,此兩三角形ハ相似ナリ。

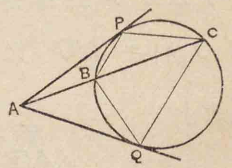
*問 3. 相似三角形ノ對應スル高サノ比ハ其相似比ニ等シ。

*問 4. 圓外ノ一點 A ヨリ割線 ABC, ADE ヲ引キ,圓周ト夫々 B, C; D, E ニ於テ交ハラシムレバ $\triangle ABD$, $\triangle AEC$ ハ相似ナリ。

又此割線ノ中一ツガ切線トナルトキハ如何。

又 A ヨリ引ク兩切線ノ切點ヲ P, Q トセバ

$$PB : PC = QB : QC$$



問 5. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊ヘ垂線 CD ヲ引クトキハ,

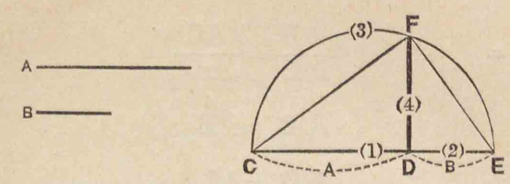
[1] $\triangle ACD \backsim \triangle CBD \backsim \triangle ABC$

[2] $AD : AC = AC : AB,\quad BD : BC = BC : BA$

[3] $AD : CD = CD : BD$

171. 作圖題 二線分 (A, B) ノ比例中項ヲ求メヨ.

前節ノ問 5 ノ [3] ヨリ直ニ作圖法ヲ得ベシ。

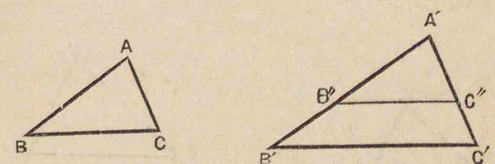


172. 定理 兩三角形ノ一角ガ相等シク,且其角ノ二邊ガ比例ヲナストキハ,此兩三角形ハ相似ナリ.

假設 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$\angle A = A'$ 及ビ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ トス。

終結 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$



證明 邊 $A'B'$ (又ハ其延長) 上ニ B'' ヲ $A'B'' = AB$ ナルヤウニ取リ, $B'C'$ ニ平行ニ $B''C''$ ヲ引クトキハ,

$$\triangle A'B''C'' \backsim \triangle A'B'C'$$

$$\therefore \quad \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{A'C''}{A'C'}$$

然ルニ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ （假設）

及ビ $A'B'' = AB$ （作圖）

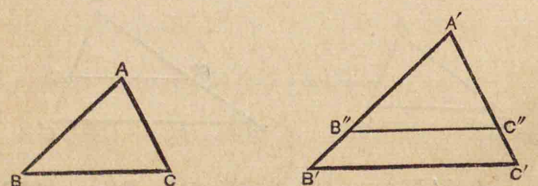
$\therefore \quad A'C'' = AC$

$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B''C''$

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

圖 兩相似三角形ノ對應スル中線ノ比ハ此兩形ノ相似比ニ等シ。

173. **定理** **一ツノ三角形(ABC)ノ三邊ガ他ノ三角形(A′B′C′)ノ三邊ト比例ヲナストキハ,此兩三角形ハ相似ナリ.**



證明 邊 $A'B'$ (又ハ其延長)上ニ B'' ヲ $A'B''=AB$ ナルヤウニ取リ,$B'C'$ ニ平行ニ $B''C''$ ヲ引クトキハ,

$$\triangle A'B''C'' \backsim \triangle A'B'C'$$

$$\therefore \quad \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{B''C''}{B'C'} = \frac{C''A'}{C'A'}$$

然ルニ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$

及ビ $A'B'' = AB$

$\therefore \quad B''C'' = BC$ 及ビ $C''A' = CA$

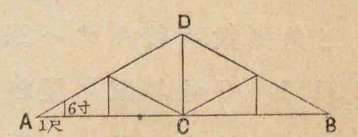
$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B''C''$

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

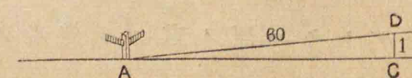
圖 三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ビテ生ズル三角形ハ原形ト相似ナリ。

174. **勾配.** 建物ノ屋根又ハ坂道ノ高クナル度合ヲ表ハスニ**勾配**ナル言葉ヲ用フ。

例ヘバ家屋ノ屋根ノ上リ方ガ水平1尺ノ距離ニ對シテ6寸ダケ高クナルトキハ,之ヲ**6寸勾配ノ流レ**ト云フ。



又鐵道線路等ニ於ケル坂道ノ上リ又ハ下リノ割合ハ,其坂ノ長サニ對スル步合ヲ以テ言ヒ表ハス。例ヘバ$\dfrac{1}{60}$ノ上リトハ坂ノ長



サ60米ニ對シテ1米ノ割ニ上ルコトヲ云フナリ。

勾配ハ相似ナル三角形ノ二邊ノ比ヲ表ハスヲ以テ,其値ハ梁木ノ長サ又ハ坂道ノ長サニハ關スルコトナク,其水平線トノ間ノ角ニ伴ウテ變ズ。

前者ヲ其角(CAD)ノ**正切**ト云ヒ,後者ヲ其**正弦**ト云フ,而シテ夫々之ヲ tan A 及ビ sin A ト記ス。但シ A ハ ∠CAD ノ大サヲ表ハスモノトス。

角 CAD ガ增大スレバ,其正切及ビ正弦モ亦增大スルコトハ AC ノ長サヲ定メテ D ヲ CD 線上ニ動カスカ,又ハ AD ノ長サヲ定メテ A ヲ中心トスル圓弧ヲ畫カシメテ容易ニ知ルコトヲ得。

tan A, sin A 等ヲ角 A ノ**三角函數**ト云フ。

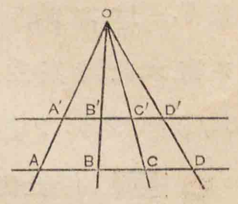
三角函數ニ就キテハ三角法ニ於テ詳說スベシ。

問 1. 6寸勾配ノ屋根ニ於テ梁木ノ長サガ30尺ナラバ,棟木ト梁トノ距離ハ何程カ。

問 2. $\frac{1}{60}$ ノ上リ勾配ヲ有スル鐵道線路ヲ 1km 上ルトキハ,原ノ處ヨリ幾米ノ高サニ上ルカ。

問　題　15

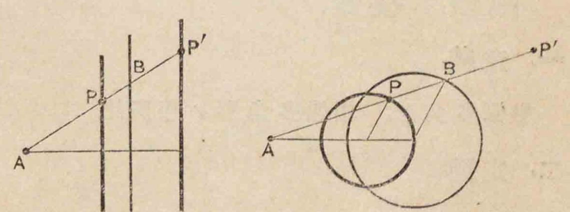
1. 一點ヲ過グル一群ノ直線[1]ハ平行線ヲ相似ニ分ツ。



2. 外切スル兩圓ノ共通外切線ノ切點ヲ A, B トセバ,線分 AB ハ此兩圓ノ直徑ノ比例中項ナリ。

3. △ABC ノ邊 BC 上ノ一點ヲ D トシ, AD 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ,P ヨリ AB, AC ニ平行ニ PX, PY ヲ引キ BC トノ交點ヲ夫々 X, Y トセバ,BX : CY ハ P ノ位置ニ關セズ一定ナリ。

4. 一定點ヨリ一定直線又ハ一定圓周ニ至ル線分ヲ所設ノ比ニ分ツ點ノ軌跡如何。



5. AB ハ與ヘラレタル弦,P ハ劣弧 AB 上ノ與ヘラレタル點ナリ,P ヲ過グル弦 PQ ヲ引キ AB トC ニ於テ交ハラシメ PC : PQ = 1 : 3 ナラシメヨ。

[1] 一點ヲ過グル一群ノ直線ハ一ツノ**射線束**ヲナスト云ヒ,其點ヲ**束點**ト云フ,而シテ束點ヲ過ギザル直線ヲ其**軸線**ト云フ。

6. 定圓外ノ所設ノ一點 **P** ヨリ割線 **PAB** ヲ引キ圓外部 **PA** ヲ弦 **AB** ノ二倍ナラシメヨ。

7. 塔アリ,日光ノタメニ地上ニ長サ 30m ノ影ヲ寫ス,此時直立セル高サ 9m ノ竿ハ地上ニ長サ $3\sqrt{3}$ m ノ影ヲ寫スト云フ,塔ノ高サヲ求メヨ。[1]

注意 此問題ノ方法ニヨリ一本ノ杖ヲ利用シテ塔ノ高サヲ測ルコトヲ得。

8. 梯形ノ兩底ヲ a, b トシ高サヲ h トスルトキ,他ノ二邊ノ交點ヨリ兩底ノ中,長キモノニ至ル垂線ノ長サヲ求メヨ。

回顧, 復習.

一. 定義.

相似多角形, 相似多角形ノ相似比。

二. 定理.

兩三角形ガ相似ナルタメノ條件。

三. 作圖題.

二線分ノ比例中項ヲ求ムルコト。

---

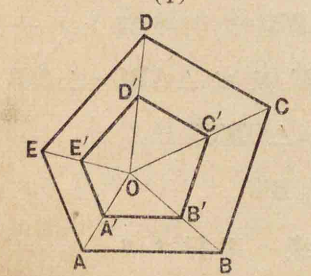
(1) たーれすハぴらみっどノ高サヲ其影ノ長サニヨリテ計算シ, 時ノ埃及王あましす(Amasis)ヲ驚嘆セシメタリト云フ。

(2) 多角形ノ相似

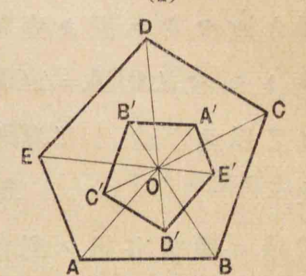
175. 定理 **多角形ノ總テノ頂點ヲ同一點ニ結ベル線分ヲ同ジ比ニ内分(又ハ外分)スル點ヲ順次結ビテ成ル多角形ハ原形ト相似ナリ.**

(學生之ヲ證明セヨ)

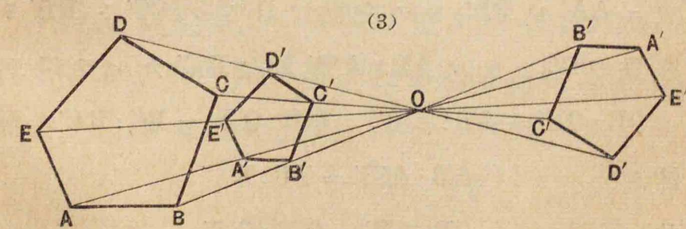
(1)



(2)



(3)



系 多角形ノ總テノ頂點ヲ同一點ニ結ベル線分(又ハ其延長)上ニ頂點ヲ有シ,且其各邊ニ平行ナル邊ヲ有スル多角形ハ原形ト相似ナリ。

176. 定理 二ツノ相似多角形ハ各組ノ對應邊ガ各平行ナルヤウニ置クコトヲ得, 而シテ此場合ニ其對應スル頂點ヲ結ブ直線ハ同一點ニ集交ス.

此交點ヲ兩形ノ**相似ノ中心**ト云フ。

證明 二ツノ相似多角形ヲ ABCDE, A′B′C′D′E′ トシ(前節ノ圖ヲ用フ),其一組ノ對應邊 AB, A′B′ ヲ平行ナルヤウニ置キ,直線 BB′ ヲ引キ,其上ノ一點ヲ O トセバ $\angle OBA=\angle OB'A'$ 及ビ $\angle ABC=\angle A'B'C'$ ナルヲ以テ

$$\angle OBC=\angle OB'C'$$

故ニ

$$BC \parallel B'C'$$

同様ニ順次各組ノ對應邊ハ平行ナリ。

次ニ AA′ ト BB′ トノ交點ヲ O トシ, CC′ ト BB′ トノ交點ヲ O′ トセバ, $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ ナルヲ以テ,

$$OB:OB'=AB:A'B',\quad O'B:O'B'=BC:B'C'$$

然ルニ

$$AB:A'B'=BC:B'C'$$

故ニ

$$OB:OB'=O'B:O'B'$$

故ニ O ト O′ トハ相合ス。 (164)

換言スレバ CC′ ハ AA′ ト BB′ トノ交點 O ヲ通過ス。同様ニ DD′ ハ BB′ ト CC′ トノ交點即チ O ヲ通過ス。同様ニ對應スル頂點ヲ結ブ直線ハ皆同一點 O ニ集交ス。

系一. 兩多角形ノ相似ノ中心ハ其兩形ノ對應スル頂點ヲ結ブ直線ヲ相似比ニ内分又ハ外分ス。

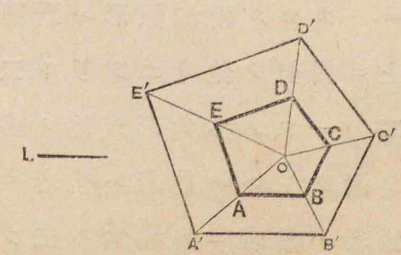
*圖 兩圓ノ共通切線ハ,其兩圓ノ中心線上ニ於テ交ハリ,且其交點ハ其兩圓ノ中心間ノ線分ヲ半徑ノ比ニ内分又ハ外分ス。

此點ヲ**兩圓ノ相似ノ中心**ト云フ。

系二. 相似ナル兩多角形ハ其對應邊ヲ夫々對應邊トスル同數ノ相似三角形ニ分ツコトヲ得。

(前節ノ圖(1), (2)ニ示スガ如ク分ツコトヲ得,又對角線ニヨリテモ分ツコトヲ得)

177. 作圖題 所設ノ多角形(A′B′C′D′E′)ニ相似ニシテ,其一邊(A′B′ノ對應邊)ガ所設ノ線分(L)ニ等シキ多角形ヲ作レ.



前節ヨリ直ニ次ノ方法ヲ得ベシ。

作圖 (1) A'B' ニ平行ニシテ L ニ等シキ線分 AB ヲ引ク。

(2) AA' 及ビ BB' ヲ引キ其交點ヲ O トシ, OC', OD', OE' ヲ引ク。

(3) A, B ヨリ夫々 A'E', B'C' ニ平行ニ AE, BC ヲ引キ OE', OC' トノ交點トヲ夫々 E, C トス。

(4) C ヨリ C'D' ニ平行ニ CD ヲ引キ OD' トノ交點ヲ D トス。

(5) DE ヲ結ベバ ABCDE ハ所要ノ多角形ナリ。

證明 CD ∥ C'D', BC ∥ B'C', AB ∥ A'B' ナルヲ以テ,

$$\frac{OD}{OD'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OE}{OE'}$$

故ニ　DE ∥ D'E'　(165)

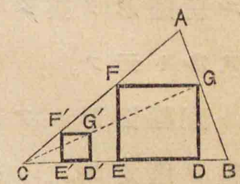
故　ABCDE ∽ A'B'C'D'E'　(175系)

注意一. カカル兩相似形ハ對應邊 (AB ト A'B') ノ上ニ相似ノ位置ニアリト云フ。

注意二. 一ツノ多角形ガ他ノ多角形ノ邊上ニ頂點ヲ置クトキハ,前者ハ後者ニ內接スト云ヒ,逆ニ後者ハ前者ニ外接スト云フ。

問 1. 所設ノ三角形 ABC ニ,二邊ノ比ガ所設ノ比ニ等シキ矩形ヲ內接セシメヨ。但シ矩形ノ一邊ハ BC 上ニ置クモノトス。

解析 所要ノ矩形ガ圖ノ如ク畫カレタリト考へ, CG ヲ結ベバ, CF, CG, CD, CE ヲ同ジ比ニ分ツ點 F', G', D', E' ハ所要ノ矩形ニ相似ナル矩形 D'E'F'G' ヲ作ル,從テ C ハ此兩矩形ノ相似ノ中心トナル。



カク相似ノ中心ヲ使用シテ問題ヲ解ク方法ヲ**相似法**ト云ヒ,其應用甚ダ廣シ。

問 2. 所設ノ三角形ニ正方形ヲ內接セシメヨ。

問 3. 所設ノ半圓又ハ扇形ニ,正方形又ハ圓ヲ內接セシメヨ。

問 4. 正方形ノ對角線ト一邊トノ和又ハ差ヲ知リテ此正方形ヲ作レ。

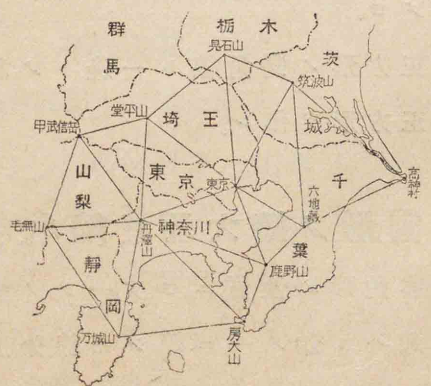
178. 圖形ノ擴大及ビ縮小. 上ニ述ベタル相似多角形ノ性質ニヨリ,一ツノ多角形ノ一邊ノ n 倍又ハ n 分ノ一ニ等シキ線分上ニ,其多角形ニ相似ナル多角形ヲ,其二邊ガ一組ノ對應邊ト

ナルヤウニ畫クトキハ,後者ノ各邊對角線,其他其上ノ諸點ヲ結ブ線分ハ,皆夫々前者ノ之ニ對應スルモノノ n 倍又ハ n 分ノ一ニ等シ。

カクノ如ク或圖形ト相似ニシテ大サヲ異ニスル新圖形ヲ畫クコトヲ,**圖形ヲ擴大スル**又ハ**縮小スル**ト云フ。

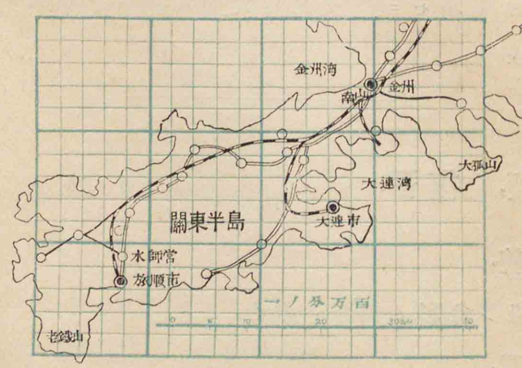
直線圖形ニアラザル圖形モ,其上ノ重要ナル諸點ヲ選定シ,之ヲ結ビテ生ズル直線圖形ヲ基礎トシテ擴大又ハ縮小スルコトヲ得。

地圖ノ製作ノ如キモ全ク此方法ノ應用ニシテ,先ヅ地上ノ重要ナル諸點間ノ距離ヲ實測ニヨリテ測定シ,此等ノ諸點ヲ結ビタル縮小圖ヲ畫キ,之

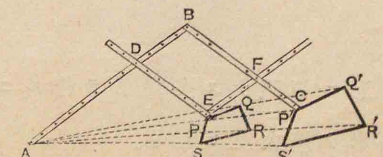


ヲ基礎トシテ海岸線其他ヲ記入スルナリ。二萬分ノ一,十萬分ノ一等ノ地圖ト云フハ,其**縮小率**ヲ云フモノニシテ,圖上ノ兩地間ノ距離ガ實際ノ距離ノ二萬分ノ一,十萬分ノ一等ニ當ルノ謂ヒナリ。

上ノ擴大又ハ縮小ヲナスニハ方眼紙ヲ使用スルヲ便ナリトス。



次ニ示スハぱんとぐらふ(Pantograph) ト稱スルモノ、最モ簡單ナルモノニシテ,圖形ヲ擴大又ハ縮小スルニ用ヒラル、モノナリ。



AB, BC, DE, EF ハ **BDEF** ガ平行四邊形ヲナスヤウニ組

合ハセル四ツノ竿ニシテ,之ヲ

$$AD : AB = BF : BC$$

ナルヤウニ組合ハストキハA, E, Cハ常ニ一直線上ニ在リ。Aヲ固定シ,Eニ在ル針ヲ動カシテ所設ノ圖形,例ヘバ四邊形PQRSノ周上ヲ畫クトキハ, Cニ在ル鉛筆又ハぺんノ尖端ハ之ニ相似ナル圖形P'Q'R'S'ヲ畫ク。

此理ヲ證明セヨ。又其擴大又ハ縮小ノ率ハ何ニヨリテ定ムルカ。

回顧, 復習.

一. 定義.

兩相似多角形ノ相似ノ中心。

二. 定理.

(1) 多角形ノ頂點ヲ同一點ニ結ブ直線上ニ頂點ヲ有シ原形ト相似ナル多角形ト原形トノ關係。

(2) 兩相似多角形ノ相似ノ中心ニ關スル定理。

三. 作圖題.

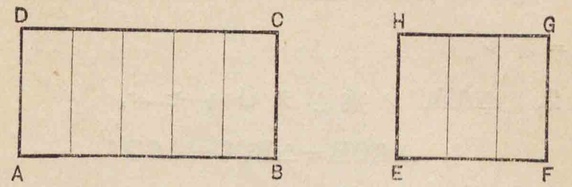
所設ノ多角形ニ相似ナル多角形ヲ作ルコト。

相似法, 圖形ノ擴大及ビ縮小。

第三章

面積ニ關スル比例

179. **定理** 等高ノ矩形(ABCD, EFGH)ノ比ハ底(AB, EF)ノ比ニ等シ.



證明 底AB, EFガ公約量ヲ有シ(1),ABハ其m倍, EFハ其n倍ナリトシ, AB及ビEFヲ夫々m等分及ビn等分スル分點ヨリ底ニ垂線ヲ引ケバ,矩形ABCD及ビEFGHハ夫々m等分及ビn等分セラレ,其各部分ハ皆相等シ。

$$\therefore \quad \frac{\square AC}{\square EG} = \frac{m}{n}$$

然ルニ

$$\frac{AB}{EF} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\square AC}{\square EG} = \frac{AB}{EF}$$

---

(1)AB, EFガ通約スベカラザル場合ノ證明ハ省略ス。

系一. 等底ノ矩形ノ比ハ其高サノ比ニ等シ。

系二. 等高(又ハ等底)ノ兩平行四邊形及ビ兩三角形ノ比ハ,其底(又ハ高サ)ノ比ニ等シ。

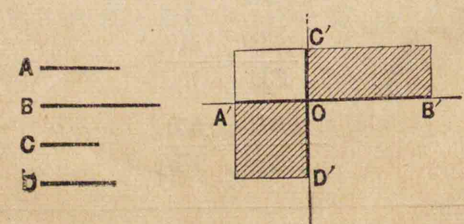
問 1. △ABC ノ頂點 A ヨリ邊 BC (又ハ其延長)ヘ任意ノ直線 AD ヲ引キ,其上(又ハ其延長上)ニ任意ノ一點 O ヲ取ラバ, △AOB, △AOC ノ比ハ BD, DC ノ比ニ等シ。

問 2. △ABC ノ重心ヲ G トセバ,

$$\triangle AGB = \triangle BGC = \triangle CGA$$

問 3. 三角形内ニ一點ヲ求メ,之ヲ各頂點ニ結ビテ,以テ三角形ヲ三等分セヨ。

180. 定理 四ツノ線分 (A,B,C,D) ガ比例ヲナストキハ,外項ノ矩形 (A.D) ハ内項ノ矩形 (B.C) ニ等シ.



證明 O ニ於テ直交スル二直線 A′B′, C′D′ 上ニ OA′=A, OB′=B, OC′=C, OD′=D ナルヤウニ四點 A′,B′,C′,D′ ヲ取リ,矩形 B′C′, C′A′, A′D′ ヲ作ルトキハ,

$$\frac{\square A'C'}{\square B'C'} = \frac{A'O}{OB'} = \frac{A}{B},$$

及ビ $$\frac{\square A'C'}{\square A'D'} = \frac{C'O}{OD'} = \frac{C}{D} \qquad (173)$$

然ルニ $$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \qquad (假設)$$

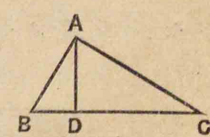
$$\therefore \quad \frac{\square A'C'}{\square B'C'} = \frac{\square A'C'}{\square A'D'}$$

$$\therefore \quad \square A'D' = \square B'C'$$

$$\therefore \quad \square A.D = \square B.C$$

系一. 二ツノ矩形又ハ三角形ガ等積ナルトキハ其高サノ比ハ底ノ比ノ反比ニ等シ。

系二. 二線分ノ矩形ハ,其比例中項ノ平方ニ等シ。逆モ亦眞ナリ。



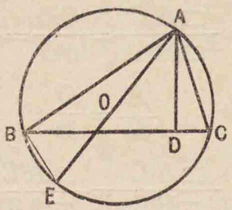
問 1. 第138節ノ系ヲ再ビ證明セヨ。

問 2. 圓ニ内接スル四角形 ABCD ノ一組ノ對邊 AB, CD ノ延長ガ P ニ於テ交ハルトキハ,

$$PB.AC = PC.BD$$

181. **定理** 三角形(ABC)ノ二邊ノ包ム矩形(AB.AC)ハ第三邊ヘノ高サ(AD)ト外接圓ノ直徑トノ矩形ニ等シ.

證明 Aヨリ直徑AEヲ引キ, BEヲ結ベバ,



$$\triangle ABE \backsim \triangle ADC \qquad (170)$$

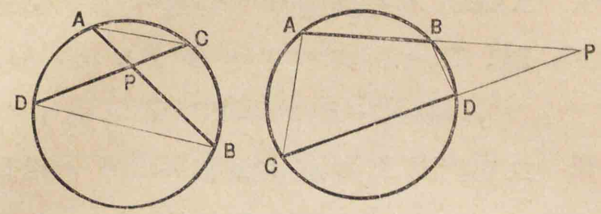
$$\therefore \quad AB : AD = AE : AC$$

$$\therefore \quad AB.AC = AD.AE$$

問 半徑rナル圓ニ内接スル△ABCノ二邊AB, ACノ長サガ夫々m, nナルトキハ, Aヨリ對邊ヘ下セル垂線ノ長サ如何。

182. **定理** 圓ノ二弦若シクハ其延長ガ相交ハルトキハ其交點ニテ分タレタル各弦ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ相等シ.

證明 AB, CDヲ二弦トシPヲ其交點トセバ,



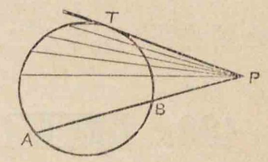
$$\triangle APC \backsim \triangle BPD \qquad (170)$$

故ニ $\quad AP : PD = CP : PB$

故ニ $\quad AP.PB = CP.PD$

系一. 同ジ點ヲ過グル弦ノ此點ニテ分タルル二ツノ分ノ包ム矩形ハ皆等積ナリ。

而シテ 其分點ガ圓外ニ在ルトキハ,其點ヨリ引ケル切線ノ平方ニ等シ。



系二. 系一ノ逆モ眞ナリ。即チ

[1] 二線分AB, CD(又ハ其延長)ガPニ於テ相交ハリ, AP.PB = CP.PDナラバ,此兩線分ノ端A, B, C, Dハ同一ノ圓周上ニ在リ。

[2] 一線分ABノ外分點Pヨリ一線分PTヲ引キタルトキ, $AP.PB = PT^2$ナラバ, PTハTニ於テ圓ABTニ切ス。

問 1.　△ABC ノ三頂點ヨリ對邊ヘ下セル三垂線ヲ AD, BE, CF トシ,其交點ヲ O トセバ,

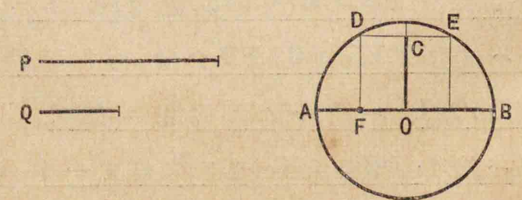
$$AO.OD = BO.OE = CO.OF$$

*問 2.　二定點 A, B ヲ過グル圓ヘ AB ノ延長上ノ同一點ヨリ引ケル切線ハ皆相等シ。

問 3.　相交ハル二圓ノ交點 A, B ヲ結ビ, AB ノ延長上ノ任意ノ一點 P ヨリ各圓ヘ割線 PCD, PEF ヲ引キ,兩圓周トノ交點ヲ夫々 C, D; E, F トセバ,此四點ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

*問 4.　系一ノ後半ヲ應用シテ所設ノ二線分ノ比例中項ヲ求メヨ。

183. 作圖題　二線分ノ和(P)ト其積[1] (Q^2) トヲ知リテ其二線分ヲ作レ.



(1) 二線分ノ矩形ト云フ代リニ,二線分ノ積ト云フコトアリ。又所設ノ面積ハ正方形ノ面積ニテ與ヘラル,從テ其正方形ノ一邊ヲ既知ノモノトス。

第138節ニヨリ直ニ次ノ作圖ヲ得。

作圖　(1) P ニ等シキ線分 AB ヲ引キ,之ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ,其中心ヲ O トス。

(2) AB ニ垂直ナル半徑上ニ Q ニ等シク OC ヲ取ル。

(3) C ヲ過ギ AB ニ平行ナル弦 DE ヲ引ク。

(4) D ヨリ AB ヘ垂線ヲ引キ其足ヲ F トス。

AF, FB ハ所要ノ線分ナリ。

證明　(略ス)

吟味　本題ハ點 D ガ存在スルトキ,即チ

$$OC \leqq OA \quad 從テ \quad Q \leqq \frac{P}{2}$$

ナルトキニ限リ解答アリ。

而シテ　$Q < \frac{P}{2}$　ナルトキハ, AB ノ分點ハ二ツアレドモ解答ハ唯一種ナリ。

又 $Q = \frac{P}{2}$ ナルトキハ,兩線分共ニ $\frac{P}{2}$ トナル。

注意　P 及ビ Q ノ測度ヲ夫々 p 及ビ q トシ,所要ノ線分ノ測度ヲ x 及ビ y トスレバ,

本題ハ　$x + y = p,\ xy = q^2$　ナル一組ノ方程式

從テ　$x^2 - px + q^2 = 0$　ナル二次方程式ノ作圖的解法ヲ問フモノナリ。

今圖ニヨリテx及ビyヲ計算センニ,

$$x=\mathrm{AF}=\mathrm{OA}-\mathrm{OF},\quad y=\mathrm{FB}=\mathrm{OA}+\mathrm{OF}$$

且　$$\overline{\mathrm{OF}}^2=\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{DF}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2$$

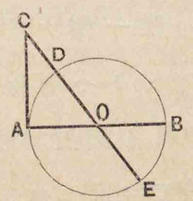
$$\therefore\quad \mathrm{OF}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=\dfrac{p}{2}-\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q^2} \\ y=\dfrac{p}{2}+\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q^2} \end{cases}$$

コレ上ノ方程式ノ二根ナリ。

問　方程式 $x^2-10x+16=0$ ヲ作圖ニヨリテ解ケ。

184. **作圖題**　二線分ノ差(P)ト其積(Q^2)トヲ知リテ其二線分ヲ作レ.



作圖　Pニ等シキ線分ABヲ直徑トシテ圓周ヲ畫キ,其一端Aニ於ケル此圓ノ切線上ニQニ等シキACヲ取リ, Cヨリ中心線CDOEヲ引ケバ

CD, CEハ所要ノ二線分ナリ。　(182系一)

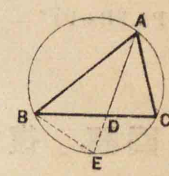
吟味　本題ハ常ニ成立ス。

問　題　16

1. △ABCノ頂角Aノ二等分線ガ底BCトDニ於テ,外接圓ノ周トEニ於テ交ハルトキハ,

[1]　AB.AC = AD.AE

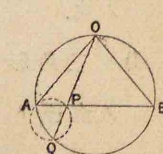
[2]　$\overline{\mathrm{AD}}^2$ = AB.AC − BD.CD



又ADガAニ隣ル外角ノ二等分線ナラバ如何。

2. 菱形ABCDノ頂點Aヲ過グル直線ヲ引キ,其直線ガ二邊BC, CD及ビ對角線BDト夫々E, F及ビKニ於テ交ハルトキハ, $\overline{\mathrm{KC}}^2$=KE.KFナリ。

3. 二等邊三角形OABノ頂點OヨリP任意ノ直線ヲ引キ,底ABトPニ於テ,外接圓ノ周トQニ於テ交ハラシムレバ,矩形OP.OQハ一定ナリ。

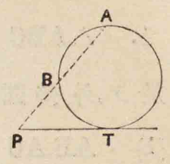


4. △ABCノ邊BC又ハ其延長上ニ任意ノ一點Dヲ取レバ, △ABD, △ACDノ外接圓ノ直徑ノ比ハAB:ACニ等シ。

*5. 三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ R, 三邊ヲ a, b, c トセバ,面積ハ $\dfrac{abc}{4R}$ ナルコトヲ證明セヨ。

*6. 一邊,面積及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

*7. 二定點ヲ過ギ一定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。



($PA.PB=\overline{PT}^2$ ニヨリ切點 T ヲ定メヨ)

回顧, 復習.

一. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) 等高(又ハ等底)ノ矩形(平行四邊形,三角形)ノ比。

(2) 比例ヲナス四線分ノ内項ノ矩形ト外項ノ矩形。

(3) 等積ナル矩形(平行四邊形,三角形)ノ底ノ比ト高サノ比。

(4) 三角形ノ二邊ノ矩形ト他ノ邊ヘノ高サト外接圓ノ直徑トノ矩形。

(5) 圓ノ二弦ノ其交點ニテ分タルヽ分ノ包ム矩形。

二. 作圖題.

二線分ノ和又ハ差ト其積ヲ知リテ其二線分ヲ作ルコト。

185. 定義 **複比, 二乘比.** 二ツノ比ノ乘積ニ等シキ比ヲ其二ツノ比ノ複比(又ハ**相乘比**)ト云ヒ, 其二ツノ比ガ相等シキトキハ其二比ノ複比ヲ其各比ノ**二乘比**ト云フ。

例ヘバ $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{M}{N}$ ナルトキハ,

$\dfrac{M}{N}$ ヲ $\dfrac{A}{B}$ ト $\dfrac{C}{D}$ トノ複比ト云フ。

若シ此場合ニ $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ ナルトキハ,

$\dfrac{M}{N}$ ヲ $\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{C}{D}$ ノ各ノ二乘比ト云ヒ,

$$\frac{M}{N}=\left(\frac{A}{B}\right)^2=\left(\frac{C}{D}\right)^2$$

186. 定理 **A, B, C ヲ同種類ノ量トセバ, A:C ハ A:B ト B:C トノ複比ナリ.**

證明 $\dfrac{A}{B}=p$, $\dfrac{B}{C}=q$ トスレバ,

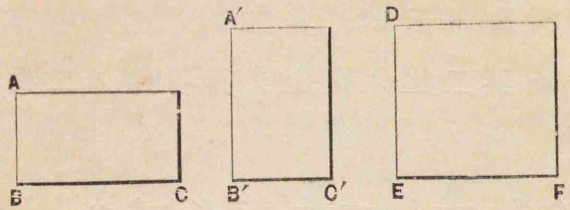
$A=pB$, $B=qC$ ナル故,

$$A=pq.C$$

$$\therefore \frac{A}{C}=pq=\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}$$

注意 量ガ三ツヨリ多キ場合モ同様ナリ。

187. **定理** 二ツノ矩形ノ比ハ其高サノ比ト底ノ比トノ複比ニ等シ.



證明 AC ト A'C' ヲ二ツノ矩形トシ, AC ト等底ニシテ A'C' ト等高ナル矩形 DF ヲ作ラバ,

$$\frac{\square AC}{\square DF}=\frac{AB}{DE}, \qquad (179\text{系一})$$

又 $$\frac{\square DF}{\square A'C'}=\frac{EF}{B'C'} \qquad (179)$$

及ビ $$\frac{\square AC}{\square A'C'}=\frac{\square AC}{\square DF}\times\frac{\square DF}{\square A'C'} \qquad (183)$$

$$\therefore \quad \frac{\square AC}{\square A'C'}=\frac{AB}{DE}\times\frac{EF}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{BC}{B'C'}$$

系一. 二ツノ三角形(平行四邊形)ノ比ハ,其高サノ比ト底ノ比トノ複比ニ等シ。

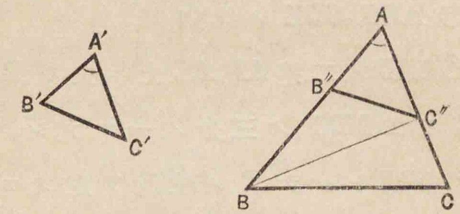
系二. 二ツノ正方形ノ比ハ邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

*問 四線分 A, B, C, D ガ比例ヲナストキハ, $A^2:B^2=C^2:D^2$ ナリ。逆モ亦眞ナリ。

188. **定理** 一角ヲ等シクスル兩三角形ノ比ハ其等角ヲ夾メル二邊ノ矩形ノ比ニ等シ.

證明 三角形 A'B'C', ABC ニ於テ ∠A=∠A' トス。

△A'B'C' ヲ △ABC ノ上ニ重ネ,其位置ヲ圖ニ於ケル △AB''C'' トセバ,



兩三角形 AB''C'', ABC'' ハ等高ナリト考フルヲ得。

$$\therefore \quad \frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC''}=\frac{AB''}{AB} \qquad (179\text{系二})$$

同様ニ $$\frac{\triangle ABC''}{\triangle ABC}=\frac{AC''}{AC}$$

然ルニ $$\frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC}=\frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC''}\times\frac{\triangle ABC''}{\triangle ABC} \qquad (183)$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC}=\frac{AB''}{AB}\times\frac{AC''}{AC}=\frac{AB''.AC''}{AB.AC} \qquad (187)$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$$

系 等積ナル兩三角形ノ一角ガ相等シキトキハ,其角ノ邊ハ比例ヲナシ,一ツノ二邊ガ內項ニ,他ノ二邊ガ外項トナル。

*問 1. $\angle A$ ト $\angle A'$ トガ互ニ補角ナル場合モ本定理ハ眞ナリ。

又平行四邊形ニ就キテモ本定理ハ眞ナリ。

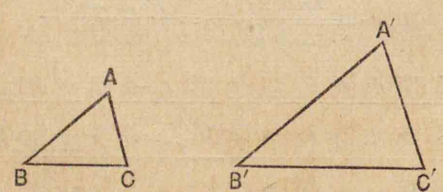
問 2. $\triangle ABC$ ノ二邊 BC, CA 上ニ夫々二點 D, E ヲ取リ, $BD:DC=2:3$, $CE:EA=7:5$ ナラシムレバ,兩三角形 ABC, CDE ノ比如何。

問 3. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC 上ニ夫々 D, E ヲ取リ, $\triangle ADE$ ヲ $\triangle ABC$ ノ三分ノ一ナラシメントス。D ヲ AB ノ中點トシテ E ノ位置ヲ定メヨ。

問 4. $\triangle ABC$ ノ三邊 BC, CA, AB 上ニ夫々 D, E, F ヲ取リ, $BD:DC=CE:EA=AF:FB=2:1$ ナラシムレバ $\triangle DEF$ ト $\triangle ABC$ トノ比如何。

189. 定理 **兩相似三角形ノ比ハ其相似比ノ二乘比ニ等シ.**

證明 兩三角形 $ABC, A'B'C'$ ガ相似ニシテ,



$\angle A=\angle A'$ トセバ,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB.AC}{A'B'.A'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'} \quad (188, 187)$$

然ルニ
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'} \quad (假設)$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 \quad (185)$$

系一. 兩相似多角形ノ比ハ相似比ノ二乘比ニ等シ。從テ對應邊ノ平方ノ比ニ等シ。

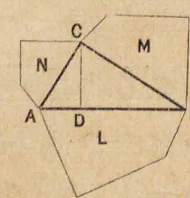
系二. 同邊數ノ兩正多角形ノ比ハ其外接圓及ビ內接圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シ。

問 1. $\triangle ABC$ ノ二ツノ中線 AD, BE ノ交點ヲ G トセバ,兩三角形 AGB, DGE ノ比如何。

*問 2. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊ヘ垂線 CD ヲ下ストキハ,

$$\overline{AB}^2:\overline{BC}^2:\overline{CA}^2=AB:BD:AD$$

問 3. 直角三角形ノ三邊上ニ,夫々相似形ヲ其三邊ヲ對應邊トスルヤウニ畫クトキハ,斜邊上ノ形ハ,他ノ二ツノ形ノ和ニ等シ。



注意 一. 此定理ハ又ぴたごらすノ定理ト稱

スルモノニシテ,各邊上ノ形ハ單ニ直線形ニ限ラズ如何ナル相似形ニテモ可ナリ。第103節ノ定理ハ此定理ノ特別ノ場合ナリ。

注意 二. 第179節,第103節,第189節等ヨリ次ノコトヲ知ル。

[1] 等高(又ハ等底)ノ矩形(三角形)ノ面積ハ其底(又ハ高サ)ニ比例ス。

[2] 矩形及ビ三角形ノ面積ハ其底ト高サトニ複比例ス。

[3] 正方形ノ面積ハ其邊ノ平方ニ比例ス。

[4] 相似多角形ノ面積ハ其對應邊ノ平方ニ比例ス。

[5] 等積ナル矩形(又ハ三角形)ニ於テハ其底ト高サトハ互ニ反比例ス。

問 4. 上ノ[1],[3],[5]ヲ示スぐらふヲ畫ケ。

190. **作圖題** **所設ノ線分(AB)ヲ二分シ,其一部分ヲ他ノ部分ト全線分トノ比例中項ナラシメヨ.**

解析 C ヲ內分點トシ,

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$$

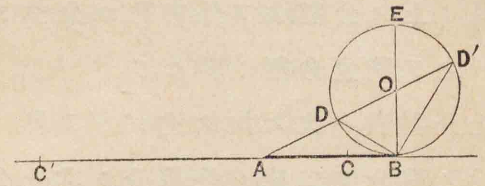
ナリトセバ, $\dfrac{AC+BC}{AC}=\dfrac{AB+AC}{AB}$ ナルヲ以テ,

$$(AB+AC)AC=\overline{AB}^2$$

ナルヲ要ス。

而シテ AB+AC ト AC トノ差ハ定線分 AB ニ等シ。

故ニ本問題ノ解法ハ第184節ノ解法ニ歸ス。



作圖 (1) B ヨリ BA ニ等シキ垂線 BE ヲ引ク。

(2) BE ヲ直徑トスル圓周ヲ畫ク。

(3) A ヲ過グル中心線 ADD′ ヲ引ク。

(4) AD ニ等シク AB 上ニ AC ヲ取レバ C ハ所要ノ內分點ナリ。

證明 AB ハ圓 O ニ切スルヲ以テ

$$\overline{AB}^2=AD.AD'=AD(AD+DD')$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2=AC(AC+AB)$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AC}=\frac{AC+AB}{AB}$$

$$\therefore \quad \frac{AB-AC}{AC}=\frac{AC+AB-AB}{AB}$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$$

又BAノ延長上ニAD'ニ等シクAC'ヲ取レバC'ハ所要ノ外分點ニシテ $C'B:AC'=AC':AB$ ナリ。

（學生之ヲ證明セヨ）

注意 上ノ分割法ヲ**外中比ニ分ツ**トモ云ヒ，古昔ハ之ヲ**黄金分割**ト稱セリ。

又此分割法ハ次ノ如ク述ブルヲ得。

所設ノ線分ヲ二分シ，全線分ト其一分トノ矩形ヲ他ノ分ノ上ノ正方形ニ等シクスルコト。

*問 上ノ分割法ニ於テ

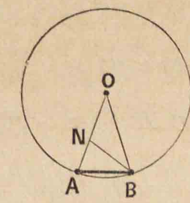
$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB, \quad AC'=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$$

（先ヅAOヲ求メヨ，又二次方程式解法ニヨリテモヨシ）

191. 作圖題 正十角形及ビ正五角形ヲ作レ.

解析 正十角形ガ既ニ畫カレタリトシ AB ヲ

其一邊トシ，其外接圓ヲ畫キ中心ヲOトスレバ，



$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$$

$$\therefore \quad \angle OAB=\angle OBA=72^\circ$$

故ニ $\angle OBA$ノ二等分線BNヲ引ケバ，

$$\therefore \quad \angle ABN=36^\circ$$

$$\therefore \quad \triangle BAN \backsim \triangle OAB$$

$$\therefore \quad AN:AB=AB:AO$$

然ルニ ONB, ABN ハ共ニ等脚三角形ナリ。

$$\therefore \quad AB=NB=ON$$

$$\therefore \quad AN:NO=NO:AO$$

故ニ N ハ半徑 AO ヲ外中比ニ分ツ。

作圖 任意ノ圓Oヲ畫キ，其任意ノ半徑OAヲNニ於テ外中比ニ內分シ，其大ナル分ONニ等シキ弦ABヲ作リ，之ニ等シキ連接スル弦ヲ作レバ此圓ニ內接スル正十角形ヲ得。

內接正十角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ブトキハ內接正五角形ヲ得。

證明 (學生之ヲ證明セヨ)

*問 1. 圓ノ半徑ヲRトセバ,其內接正十角形ノ一邊ハ$\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$ナリ。

*問 2. 所設ノ圓ニ內接スル正十五角形ヲ作レ。

$\left(\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right.$ ニ着目セヨ$\left.\right)$

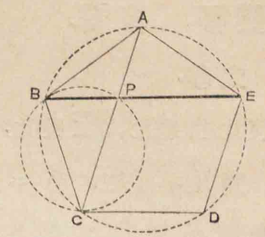
注意 正七角形,正九角形,正十一角形ノ如キ正多角形ハ之ヲ作圖スルヲ得ズ。旣ニ作圖シ得タル正多角形ノ邊數ヲ擧ゲヨ。

問題 17

1. P ハ△ABCノ邊AB上ノ一點ニシテ AP:PB ガ 5:2 ニ等シキトキハ P ヲ過ギ此三角形ノ面積ヲ二等分スル直線ハ邊ACヲ7:3ニ內分ス。

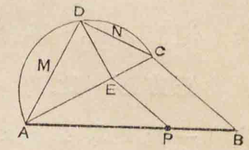
2. 所設ノ三角形ト等積ニシテ,其三角形ノ一角ヲ頂角トスル二等邊三角形ヲ作レ。

3. 正五角形 ABCDE ノ對角線 AC, BE ノ交點ヲ P トセバ,P ハ BE ヲ外中比ニ分ツ。

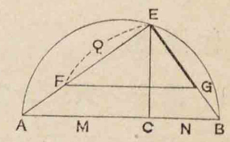


*4. 所設ノ線分 (AB) ヲ所設ノ兩平方ノ比 ($M^2 : N^2$) ニ分テ。

(第189節問2ヲ用ヒヨ)



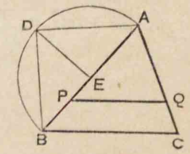
*5. 所設ノ平方(Q^2)トノ比ガ所設ノ比(M:N)ニ等シキ正方形ヲ作レ。



6. 所設ノ三角形 (ABC) ヲ其一邊(BC)ニ平行ナル直線ニテ二等分セヨ。

(AB 上ニ直角三角形 ABD ヲ畫キ,AB ニ垂線 DE ヲ引ケバ,

$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = AE : AB$ ナルコトニ着目セヨ)



回顧，復習.

一. 定義.

複比(相乘比)，二乘比，外中比(黄金分割)。

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) $\frac{A}{B}$ ト $\frac{B}{C}$ ノ複比。

(2) 矩形ノ比，平行四邊形ノ比，三角形ノ比，正方形ノ比。

(3) 一角ヲ等シクスル三角形ノ比。

(4) 二ツノ相似多角形ノ比。

三. 作圖題.

(1) 線分ノ黄金分割。

(2) 正十角形,正五角形ヲ作ルコト

(3) 作圖シ得ル正多角形ノ邊數。

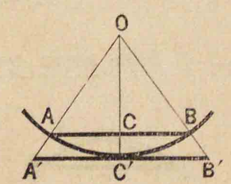
第四章

圓ノ周及ビ面積

192. **定理** 半徑 R ナル圓ニ内接及ビ外接スル同邊數ノ正多角形ノ一邊ヲ夫々 a 及ビ a' トセバ,

$$a'=\frac{aR}{\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}} \quad 及ビ \quad a=\frac{a'R}{\sqrt{R^2+\frac{a'^2}{4}}}$$

證明 AB ヲ圓ニ内接スル正多角形ノ一邊トシ,之ニ垂直ナル半徑 OCC′ ヲ引キ,C′ ニ於ケル切線ト OA, OB ノ延長トヲ夫々 A′, B′ ニ於テ交ハラシムレバ, A′B′ ハ同邊數ノ外接正多角形ノ一邊ナリ。



依テ OA $=R$, AB $=a$, A′B′ $=a'$ ニシテ,

且 $\triangle A'OB' \backsim \triangle AOB$

$$\therefore \quad \frac{a'}{a}=\frac{R}{OC}$$

而シテ $OC=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$

$$\therefore \quad a'=\frac{aR}{\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}}$$

同様ニ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{OA}{OA'}$

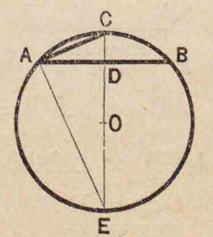
$$\therefore \quad a=\frac{a'R}{\sqrt{R^2+\frac{a'^2}{4}}}$$

問 半徑Rナル圓ノ外接正六角形ノ一邊如何。

193. **定理** **半徑Rナル圓ニ内接スル正多角形ノ一邊ヲaトシ,二倍ノ邊數ノ正多角形ノ一邊ヲa'トセバ,**

$$a'=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right)}$$

證明 AB ヲ一ツノ内接正多角形ノ一邊トシ,



之ニ垂直ナル直徑 CDOE ヲ引クトキハ,弦 AC ハ二倍ノ邊數ノ内接正多角形ノ一邊ナリ。

而シテ 弧BC＝弧AC

故ニ $\angle CAD=\angle E$

故ニ $\triangle ACE \backsim \triangle DCA$

故ニ $\overline{AC}^2=CE.CD$

而シテ $CE=2R,\quad CD=R-OD,$

及ビ $OD=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$

故ニ $a'=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right)}$

問 内接正八角形ノ一邊ハ$\sqrt{2-\sqrt{2}}R$ナルコトヲ證明シ,且直徑ヲ1トシテ此値並ニ内接正八角形ノ周ヲ計算セヨ。

194. 正多角形ノ周. 直徑1ナル圓ニ外接スル正方形ノ一邊ノ長サハ1ナルヲ以テ,直ニ内接正方形ノ一邊ノ長サヲ得。而シテ之ヲ基礎トシテ二倍邊數即チ八邊ノ内接及ビ外接正多角形ノ一邊ヲ算出スルヲ得,尚順次ニ十六邊,三十二邊等ノ正多角形ノ一邊ノ長サヲ知ルヲ得,從テ其

周ヲ計算スルコトヲ得。而シテ此方法ニヨリ次表ヲ得。

邊　數	內接形ノ周	外接形ノ周
4	2.8284271	4.0000000
8	3.0614675	3.3137085
16	3.1214452	3.1825979
32	3.1365485	3.1517249
64	3.1403312	3.1441184
128	3.1412773	3.1422236
256	3.1415138	3.1417504
512	3.1415729	3.1416321
1024	3.1415877	3.1416025
2048	3.1415914	3.1415951

195. **公理** **七.** **圓周ハ外接多角形ノ周ヨリ小ナリ.**

圓周ノ長サハ,此圓ニ內接スル正多角形ノ周ト,外接スル正多角形ノ周トノ間ニアリ,而シテ其邊數ヲ限リナク增ストキハ,其周ハ何レモ其圓周ニ限リナク近迫ス.

196. **定理** **二ツノ圓ノ周ノ比ハ其半徑ノ比ニ等シ.**

證明　所設ノ二ツノ圓ノ周ノ長サヲ P, P' ト

シ,其半徑ヲ夫々 R, R' トシ,此二圓ニ內接スル n 邊ノ正多角形ヲ畫キ,其周ヲ夫々 p, p' トセバ,n ノ値ニ係ラズ　$p:p' = R:R'$　(170 系二)

n ヲ限リナク增ストキハ,p 及ビ p' ハ夫々 P 及ビ P' ニ限リナク近迫スルヲ以テ

$$P:P' = R:R'^{(1)}$$

系 **一.** 圓周ガ其直徑ニ對スル比ハ一定ナリ。

コレ $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{R}{R'}$ ナル故　$\dfrac{P}{2R} = \dfrac{P'}{2R'}$　ナレバナリ。

此比ハ不盡數ナリ。之ヲ圓周率ト云ヒ,之ヲ表ハスニ通常 π[2] ナル文字ヲ以テス。

系 **二.** 半徑 R ナル圓ノ周ハ $2\pi R$ ニ等シ。

故ニ　圓周ハ其半徑ニ比例ス。

197. 圓周率ノ近似値.

直徑 1 ナル圓ノ周ヲ P トセバ,$P=\pi$ ナリ。

故ニ第 194 節ニ得タル表ニヨリ

$$3.1415914 < \pi < 3.1415951$$

故ニ小數第五位迄正シキ π ノ近似値ハ

3.14159

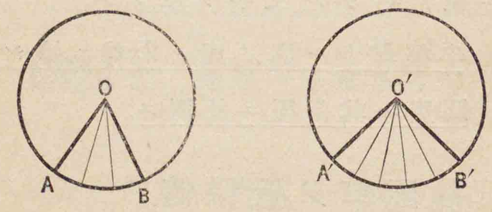
(1) 此事實ノ證明ハココニハ之ヲ省ク。
(2) 希臘文字ノ一ツニシテぱい(Pi)ト訓ム。

注意 π ノ近似値トシテハ通例 3.1416 又ハ $\frac{22}{7}$ 或ハ $\frac{355}{113}$ ヲ用フ。

問 1. π ノ値ヲ 3.14159 トスルト, $\frac{22}{7}$ トスルトハ,半徑 120 m ノ圓ノ周ニ於ケル差幾米カ。

問 2. 圓周 22 cm ナル圓ニ内接スル正方形ノ面積ヲ求ム。

198. 定理 **同圓或ハ等圓ニ於テ,二ツノ中心角 (AOB, A′O′B′) ノ比ハ,其夾弧 (AB, A′B′) ノ比ニ等シ.**



證明 角 AOB, A′O′B′ ガ公約量ヲ有スルトシ,[1] ∠AOB ハ其 m 倍ニ等シク, ∠A′O′B′ ハ其 n 倍ニ等シトセバ,

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{m}{n}$$

又 ∠AOB ヲ m 等分シ, ∠A′O′B′ ヲ n 等分シタリ

[1] 二角ガ公約量ヲ有セザル場合ノ證明ハ省略ス。

ト考フレバ,弧 AB, 弧 A′B′ モ亦同様ニ等分セラル。

$$\therefore \quad \frac{弧\,AB}{弧\,A'B'}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{弧\,AB}{弧\,A'B'}$$

問 半徑 3 cm ナル圓ノ周ヨリ,半徑 2 cm ノ圓ノ周ニ等シキ弧ヲ截リ取レ。

199. 公理八. **圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ガ無限ニ增ストキ,其面積ハ其圓ノ面積ニ限リナク近迫ス.**

200. 定理 **圓ノ面積ハ圓周ト半徑トノ乘積ノ半ニ等シ.**

證明 圓ノ面積,圓周及ビ半徑ヲ夫々 S, P 及ビ R ニテ表ハシ,之ニ内接スル正多角形ノ面積,周及ビ此正多角形ニ内接スル圓ノ半徑ヲ夫々 s, p 及ビ r ニテ表ハセバ,此多角形ノ邊數ヲ限リナク增ストキハ, s, p, r ハ夫々 S, P, R ニ限リナク近迫ス。

然ルニ $\qquad s=\frac{pr}{2}$ $\qquad$ (147系二)

故ニ $\qquad S=\frac{PR}{2}$

系一. 半徑 R ナル圓ノ面積ハ πR^2 ニ等シ。

故ニ　圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ比例ス。

系二. 扇形ノ面積ハ半徑ト弧トノ乘積ノ半ニ等シ。

*問 1. 等半徑ノ扇形ノ比ハ其弧,從テ其中心角ニ比例ス。

問 2. 半徑 r ナル圓ヲ內接正三角形ノ一邊ニヨリテ二分スルトキハ,各部分ノ面積如何。

問　題　18

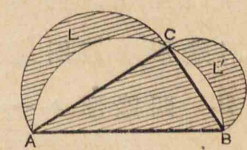
1. 所設ノ二圓,又ハ若干箇ノ圓ノ周ノ和ニ等シキ一ツノ圓周ヲ作レ。又二圓ノ和又ハ差ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

2. 半徑 9cm ナル圓アリ,其面積ヲ二等分スル同心圓ノ半徑ト,三等分スル二ツノ同心圓ノ半徑トヲ計算セヨ。

3 直角三角形ガ其直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ニテ分タレタル兩三角形ニ內接スル圓ノ面積ノ比ハ,斜邊ノ其二ツノ部分ノ比ニ等シ。

4. 正方形 ABCD ノ一邊ヲ半徑トシ相對スル頂點 A 及ビ C ヲ中心トシテ畫キタル二ツノ圓ノ間ニ含マルヽ部分ノ面積ヲ計算セヨ。

5. 直角三角形 ABC ノ三邊上ニ圖ノ如ク半圓ヲ畫クトキ,新月形 L, L′ ノ和ハ △ABC ニ等シ。(Hippocrates ノ定理)[1]



回顧,復習.

一. 公理. 圓ニ內接及ビ外接スル正多角形ノ邊數ガ限リナク增シタルトキノ周及ビ面積。

圓周率(π)ノ定メ方及ビ其値。

二. 定理. (次ノ各ニ關スル定理)

(1) 二ツノ圓ノ周ノ比及ビ面積ノ比。

(2) 同圓又ハ等圓ニ於ケル二ツノ弧ノ比。

三. 公式.

(1) 圓周及ビ圓ノ面積ノ公式。

(2) 扇形ノ面積ノ公式。

---

[1] ひぽくらてす ハ西曆紀元前460年頃ノ希臘ノ幾何學者ナリ。此人ハゆーくりっどノ教科書ノ下地トナリシ幾何學ノ一卷ヲ書キシト云フ。

雜　題　3

1. 四邊形ノ各頂點ヨリ其頂點ヲ過ギザル對角線ヘ垂線ヲ引クトキハ,其足ヲ順次ニ結ビテ成ル四邊形ハ原四邊形ニ相似ナリ。

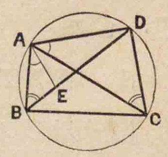
2. 四邊形ノ一雙ノ對角ノ二等分線ガ對角線ノ一ツノ上ニテ交ハルトキハ,他ノ一雙ノ對角ノ二等分線モ亦他ノ對角線ノ上ニテ交ハル。

3. △ABC ノ邊 BC ノ中點 D ヲ過グル任意ノ直線ガ AB, AC 及ビ A ヲ過ギ BC ニ平行ナル直線ト夫々 E, F 及ビ G ニテ交ハラバ $EG.FD=ED.FG$ ナリ。

4. 一線分 AB ヲ $m:n$ ノ比ニ內分スル點ヲ P トシ, A, P, B ヲ過ギ互ニ平行ナル三直線ガ他ノ任意ノ直線ヲ夫々 A′, P′, B′ ニテ截ルトキハ,

$$PP'=\frac{nAA'+mBB'}{m+n}$$

5. 圓ニ內接スル四邊形ノ對邊ノ矩形ノ和ハ對角線ノ矩形ニ等シ。



(Ptolemy ノ定理)[1]

[1] 西曆紀元 139 年頃あれきさんどりあニテ活動セシ星學者地理學者ナリ。

6. 相交二圓周ノ一交點ヲ過グル割線ヲ引キ,

(1) 兩圓周ニ夾マルル部分ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。

(2) 其線分ヲ最大ナラシメヨ。

(3) 一圓ノ弦ト他ノ圓ノ弦トノ比ヲ所設ノ比ニ等シクセヨ。

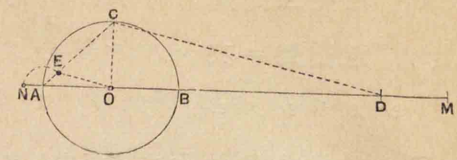
7. 相交ハラザル二定圓ノ一ツト內切シ,他ト外切スル圓ヲ畫ケバ,其切點ヲ結ブ直線ハ常ニ一定點ヲ過グ。

8. 高サノ知レザル塔アリ,今塔ノ底 A ト同ジ水平面上 A ヨリ 12 m 距リタル點 M ヨリ塔頂 B ノ仰角 AMB 及ビ A ヨリ 4 m ノ高サニ在ル點 C ノ仰角 AMC ヲ觀測シタルニ,前者ハ後者ノ二倍ニ等シト云フ,塔ノ高サヲ求ム。

9. 圓周ノ長サニ近似的ニ等シキ線分ヲ作圖スル方法ハ種々アリ,次ニ其一ツヲ示サン。

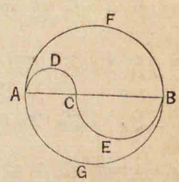
圓 O ノ直徑 AB ヲ引キ, AB ヲ M マデ延長シテ $AM=6AO$ ナラシメ, $AD=5AO$ トシ, AB ニ垂直ナル半徑 OC ヲ引キ, O ヨリ CD ニ平行ニ OE ヲ引キ, A ヲ中心トシ AE ヲ半徑トスル圓周ヲ畫キ, OA ノ延

長トNニ於テ交ハラシムレバ,MNハ殆ド圓Oノ周ニ等シ。之ヲ證明セヨ。



10. 圓ノ直徑AB上ニ任意ノ一點Cヲ取リAC, BCヲ直徑トスル半圓ヲ圖ノ如クABノ互ニ反對ノ側ニ畫クトキハ,曲線形ADCEBFトAGBECDトノ比ハBC:ACニ等シ。

カクシテ圓ヲ任意ノ數ニ等分スル方法ヲ發見セヨ。



11. 第193節ノ公式ヨリ(或ハ直接ニ)

公式 $a=\frac{a'}{R}\sqrt{4R^2-a'^2}$ ヲ誘出セヨ。

依テ半徑Rノ圓ニ内接スル正五角形ノ一邊ハ

$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}R$ ナルコトヲ證明セヨ。

附 錄

復 習 補 習

附　録

復習補習

雜　題　一

(1) 第一篇第一章ノ分

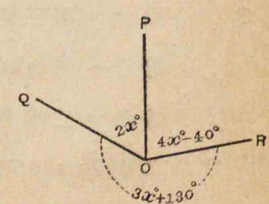
1. A, B, C ヲ順次ニ一直線上ニ並列スル三點トシ, BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 L, M, N トセバ,

$$MN=\frac{1}{2}BC,\quad NL=\frac{1}{2}CA,\quad LM=\frac{1}{2}AB$$

2. 角 AOB ノ二等分線ヲ OM トシ, ON ヲ角外ノ任意ノ一直線トスレバ, 角 MON ハ二角 AON, BON ノ和ノ半ニ等シ。

3. 一點ヨリ出ヅル六ツノ直線ガ六ツノ相等シキ角ヲ作ルトキハ,其角ハ何度ナリヤ。

4. 圖ニ於テ $\angle POQ=2x°$, $\angle QOR=3x°+130°$, $\angle ROP=4x°-40°$ ナルトキハ x ハ幾度ナルカ。



5. 一點ヨリ出ヅル四ツノ直線ガ四ツノ直角ヲ作ルトキハ此四直線ハ二ツヅヽ一直線トナル。

6. 一點ヨリ出ヅル四ツノ直線ガ作ル四ツノ角ニ於テ,相隣ラザル角ガ各相等シキトキハ此四直線ハ二直線トナル。

7. 互ニ補角ヲナス二角アリテ其一ツハ他ノ三倍ナリト云フ。各角ヲ求メヨ。

8. 角ノ頂點ヲ過ギ此角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ハ,此角ノ二邊ト等角ヲナス。

(2) 第一篇第二章ノ分

1. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線上ノ各點ハ,夫々其底ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ。

2. 等脚三角形 ABC ノ底 BC ヲ雙方ニ延長シ,其上ニ二點 D 及ビ E ヲ取リ, BD=CE ナラシムレバ,△ADE ハ等脚三角形ナリ。

3. 合同ナル兩三角形ニ於テハ,

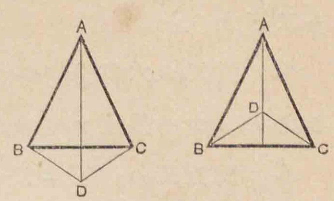
(1) 等邊ヘ引ケル中線ハ各相等シ。

(2) 等角ノ二等分線(對邊マデノ部分)ハ各相等シ。

(3) 各頂點ヨリ等邊ヘ下セル垂線ハ各相等シ。

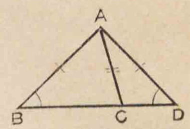
4. △ABC ノ底 BC ノ中點 M ヲ過ギ,他ノ二邊 AB, AC ト夫々 D, E ニテ交ハル直線ヲ引キ, DM=EM ナラシムレバ,

$$AD+AE=AB+AC$$

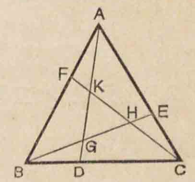


5. 同ジ底邊上ニ立ツ二ツノ等脚三角形ノ頂點ヲ結ブ直線又ハ其延長ハ其共通ノ底ヲ垂直ニ二等分ス。

6. 二等邊三角形 ABC ノ兩底角 ABC, ACB ノ二等分線ノ交點ヲ O トセバ, AO ハ頂角 BAC ヲ二等分ス。



7. 二邊ト一角トヲ夫々等シクスル兩三角形ハ合同ナルカ。



8. △ABC ハ正三角形ナリトシ,其三邊上ニ BD=CE=AF ナルヤウニ D, E, F ヲ取ルトキハ, AD, BE, CF ノ作ル三角形ハ正三形角ナリ。

(3) 第一篇第三章ノ分

1. 圓ノ中心ヲ固定シ,此圓ヲ其平面上ニ廻轉スレバ,其圓周ハ常ニ原位置ニ合シナガラ廻轉ス。

2. 二ツノ圓ヲ重ネ其中心ヲ合セシムレバ,小半徑ノ圓周ハ全部大半徑ノ圓ノ内ニ在リ。

從テ小半徑ノ圓ハ大半徑ノ圓ヨリ小ナリ。

3. 圓ノ中心角ノ二等分線ハ其角ニ對スル弦ヲ垂直

ニ二等分ス。

4. 圓周ヲ六等分スルトキハ其一部分(弧)ニ對スル中心角ノ大サハ幾度ナルカ。

5. 同圓又ハ等圓ニ於テ一ツノ中心角ガ他ノ中心角ノ二倍,三倍,………ナルトキハ,前者ニ對スル弧モ亦夫々後者ニ對スル弧ノ二倍,三倍,………ナリ。

) 第一篇第四章ノ分

1. 所設ノ二點ヨリ共ニ所設ノ距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

2. 所設ノ二點ヨリ夫々所設ノ距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

3. 所設ノ線分ヲ四等分セヨ, 又八等分セヨ。

4. 所設ノ角ヲ四等分セヨ, 又八等分セヨ。

5. $22^\circ\frac{1}{2}$ ノ大サノ角ヲ作圖セヨ。

6. 所設ノ二線分ノ和又ハ差ニ等シキ線分ヲ作レ。

7. 二線分ノ和ト差トガ與ヘラレタルトキ,其二線分ノ長サヲ作圖ニヨリテ求メヨ。

8. 所設ノ二角ノ和及ビ差ニ等シキ角ヲ作レ。

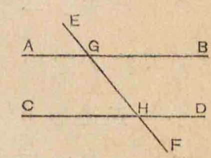
9. 所設ノ角ノ補角及ビ餘角ヲ作レ。

10. 直角ノ一邊ト斜邊トガ與ヘラレタルトキ,直角三角形ヲ作レ。

11. 斜邊ト一鋭角トヲ知リテ直角三角形ヲ作レ。

(5) 第二篇第一章ノ分

1. 二直線ガ一直線ト交ハリテナス角ノ中,一組ノ錯角ガ相等シキトキハ,他ノ一組ノ錯角モ亦相等シク,四組ノ同位角ハ各相等シク,又後ノ直線ノ同側ニアル二ツノ內角ノ和ハ2直角ニ等シ。



2. 歸謬法ニヨリ次ノ定理ヲ證明セヨ。

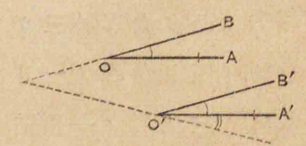
(イ) 二ツノ隣接角ノ共通ナラザル二邊ガ一直線ヲナサザレバ,其二角ノ和ハ2直角ニ等シカラズ。

(ロ) 隣接角ノ和ガ2直角ニ等シカラザレバ,其共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナサズ。

3. 平行線ノ各ニ夫々平行ナル直線ハ平行ナリ。

4. 平行線ノ各ニ夫々垂直ナル直線ハ平行ナリ。

5. 相等シキ二ツノ鋭角アリテ,其一組ノ邊ハ平行ナリ。然ラバ他ノ一組ノ邊ハ必ズ平行ナルカ。



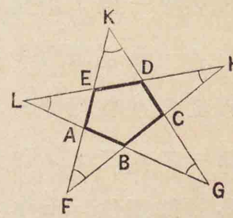
(6) 第二篇第二章ノ分

1. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ノナス角ハ底角ニ隣レル外角ニ等シ。

2. 各頂點ヲ形內ノ一點ニ結ビテ第66節ノ定理ヲ證明セヨ。

3. 任意ノ一點ヨリ總テノ邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ第67節ノ定理ヲ證明セヨ。

4. 五邊形 ABCDE ノ各邊ヲ延長シテ**星形** FGHKL ヲ作ルトキハ, ∠F+∠G+∠H+∠K+∠L ハ2直角ニ等シ。



5. n 邊ノ正多角形ノ外角ノ大サヲ表ハス公式ヲ作リ,ヨリテ以テ邊數ガ多クナルニ從テ外角ハ次第ニ小サクナリ,內角ハ次第ニ大キクナル(但シ2直角ヨリハ小)コトヲ證明セヨ。

6. 正十五角形ノ一角ノ大サハ何度カ。

又正十一角形ノ一角ノ大サハ何度何分何秒カ。

7. 凸多角形ハ三ツヨリ多クノ鋭角ヲ有セズ。(歸謬法)

8. 正多角形ノ一外角ガ30°ナルトキハ其邊數如何。

9. 三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ引ケル中線ノ二倍ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ。

10. △ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トシ, AD<$\frac{1}{2}$BC ナルトキ, ∠BAC ハ鈍角ナリ, 若シ AD=$\frac{1}{2}$BC 又ハ AD>$\frac{1}{2}$BC ナラバ如何。

11. △ABC ノ A ヨリ邊 BC ヘ引ケル線分ハ皆 AB, AC ノ中ノ大ナルモノヨリ小ナリ。邊 BC ノ延長ヘ引ケル線分ハ如何。

12. △ABC ニ於テ AC>AB ナルトキ, A ヨリ BC ヘ垂線 AD ヲ引クトキハ, ∠DAC>∠DAB 及ビ DC>DB ナリ。

13. △ABC ニ於テ AB>AC ナルトキ,邊 BC ヲ雙方ヘ延長シ,其上ニ BD=AC, CE=AB ナルヤウニ D 及ビ E ヲ取ルトキハ, AD>AE ナリ。

14. △ABC ニ於テ AB>AC トス。今 BA, CA 上ニ BD, CE ヲ等シク取ルトキハ, BE>CD ナリ。若シ D,E ヲ AB, AC ノ延長上ニ取ラバ如何。

15. △ABC ノ邊 BA, CA 上ニ BD, CE ヲ等シク取リタルトキ, BE>CD ナルトキハ AB>AC ナリ。

16. 斜邊ヲ與ヘテ直角二等邊三角形ヲ作レ。

(7) 第二篇第三章ノ分

1. 平行四邊形ニ於テ一組ノ隣邊相等シクシテ一角ガ直角ナルトキハ,ソハ正方形ナリ。

又兩對角線ガ直交スルトキハ,ソハ菱形ナリ。

2. 二隣邊ガ夫々相等シク,一角ガ相等シキ二ツノ平行四邊形ハ合同ナリ。

矩形及ビ正方形ノ合同ナル條件如何。

3. 四邊形ノ一對角線ガ他ヲ垂直ニ二等分スレバ,其四邊形ハ其對角線ニ關シテ對稱ナリ。

カクノ如キ四邊形ヲ紙鳶形(タコガタ)ト云フ。

4. 四邊形ノ對角線ガ相等シク且一雙ノ對邊ノミガ相等シキトキハ,此四邊形ハ梯形ナリ。

5. 梯形ノ對角線ガ相等シキトキハ,此梯形ハ等脚梯形ナリ。

6. 平行四邊形ノ四ツノ角ノ二等分線ハ矩形ヲ作ル。

矩形ノ角ノ二等分線ハ正方形ヲ作ル。

7. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ二ツヅツ結ブトキハ,四ツノ合同三角形ヲ生ズ。

8. 三角形ノ二中線ガ相等シキトキハ,此三角形ハ二等邊三角形ナリ。

9. 四邊形ノ兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ,相對スル二邊ノ差ノ半分ヨリ小ナラズ。

10. 平行四邊形ABCDノ二邊AB,AD上ニ夫々二點E,FヲAE=EB, AF=$\frac{1}{2}$FDナルヤウニ取リ,直線EFト對角線ACトノ交點ヲGトセバ,AGハACノ五分ノ一ナリ。

(8) 第二篇第四章ノ分

1. 矩形ノ底(又ハ高サ)ノ測度ハ,其面積ノ測度ヲ高サ(又ハ底)ノ測度ニテ除シタル商ナリ。

2. 次ノ關係ヲ證明セヨ。但シA,Bヲ二線分トス。

(1) $(A+B).B=A.B+B^2$

(2) $(A-B).B=A.B-B^2$

3. 或線分ヲ三分スレバ,全線分ノ平方ハ,各部分ノ平方ト各部分ヲ二ツヅツ取リテ作レル矩形ノ二倍ヅツトノ和ニ等シ。

4. 二線分ノ和ノ平方ハ,其差ノ平方ヨリ其二線分ノ矩形ノ四倍ダケ大ナリ。

(9) 第二篇第五章ノ分

1. ABCD, ABEFヲABノ同側ニ於ケル等積ナル兩平行四邊形トシ,AFガBCノ中點ヲ通過ストセバ,

$$\square ABCD=\square ABEF=\frac{1}{2}ABED$$

2. 平行四邊形ノ兩對角線ハ本形ヲ四等分ス。

3. 四邊形ABCDノ對角線ACガBDヲ二等分スル

トキハ, AC ハ本形ヲ二等分ス。

4. 平行二邊ガ 15cm 及ビ 28cm ニシテ,其間ノ距離ガ 12cm ナル梯形ノ面積ヲ求メヨ。

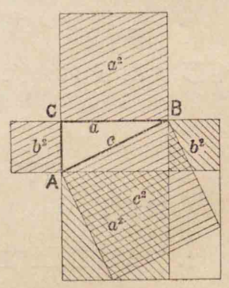
5. 梯形ノ底ニアラザル一邊ノ中點ヲ過ギ,對邊ニ平行ナル直線ヲ引キ,以テ第101節ノ定理ヲ證明セヨ。

6. △ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點 E, F ヲ結ブトキハ梯形ヲ生ジ,其面積ハ △ABC ノ四分ノ三ニ等シ。

7. △ABC ヲ邊 BC ノ中點 M ヨリ二直線ヲ引キテ三等分セヨ。

(10) 第二篇第六章ノ分

1. 右ノ圖ニヨリテぴたごらすノ定理ヲ證明セヨ。



2. 梯形ノ兩底ガ夫々 6m, 9m ニシテ他ノ二邊ガ 5m 及ビ 4m ナルトキ,此梯形ノ面積ヲ計算セヨ。

3. 三角形ノ三邊ガ 6m, 11m, 7m ナルトキ,其面積ヲ求メヨ。

4. 矩形ノ相對スル二頂點ヲ任意ノ點ニ結ブ線分ノ平方ノ和ハ,他ノ二頂點ヲ同ジ點ニ結ブ二線分ノ平方ノ和ニ等シ。

5. 河幅ヲ測ラントシテ河岸ノ一地點 A ニ立チ,其正對岸ノ地點 B ヲ望ミ,更ニ AB ト直角ヲナセル川岸ニ沿ヒテ歩ムコト 50m ニシテ C ニ達シ,再ビ B ヲ望ミタルニ ∠ACB ハ 60° ナリシト云フ。河幅幾何カ。

---

(11) 第三篇第一章ノ分

1. △ABC ノ垂心ヲ P トセバ,四點 A, B, C, P ハ其何レヲ取ルモ,他ノ三ツヲ頂點トスル三角形ノ垂心ナリ。

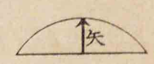
2. 所設ノ弧ヲ完全ナル圓周トセヨ。

3. 同圓又ハ等圓ニ於テ,或弧ノ弦ハ其二倍ノ弧ノ弦ノ半分ヨリ大ナリ。

4. 相等シキ二圓ノ中心ヲ結ブ直線ニ平行ナル直線ヨリ,其二圓ガ截リ取ル弦ハ相等シ。

5. 中心ヲ通過セザル二弦ハ互ニ等分スルコトナシ。

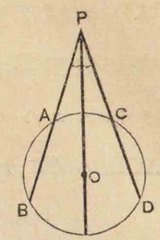
6. 圓弧アリ,其弦ノ長サハ 12m ニシテ矢ノ長サハ 2m ナリ。此圓ノ直徑ヲ求メヨ。



(12) 第三篇第二章ノ分

1. 圓内ノ點ヲ過グル直線ハ其圓ノ割線ナリ.

2. 圓Oノ中心線上ノ一點Pヨリ中心線ト等角ヲナス二ツノ直線ヲ引キ,圓ノ如ク圓周ト夫々A,B及ビC,Dニテ交ハラシムレバ, PA=PC及ビPB=PDナリ。



3. 圓Oノ平行ナル二ツノ切線ノ切點ヲA及ビBトスレバ, A,O,Bハ一直線上ニ在リ。

4. Oヲ中心トスル圓周上ノ一點Aニ於ケル切線ト任意ノ半徑OBノ延長トノ交點ヲCトシ, OBニ垂線ADヲ引クトキハ, ABハ∠DACヲ二等分ス。

5. 所設ノ直線ニ平行ナルヤウニ所設ノ圓ニ切線ヲ引ケ。

(13) 第三篇第三章ノ分

1. 三ツノ等圓互ニ相切スルトキハ,其三中心ハ一ツノ正三角形ノ頂點トナル。三切點モ亦然リ。

2. 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル一直線ガ,再ビ各ノ圓ト交ハル點ニ於ケル兩圓ノ切線ハ平行ナリ。

3. 定マレル二圓ノ各ニ外切スル圓ノ中心ト,其二定圓ノ中心トノ距離ノ差ハ常ニ同ジ。

4. 第126節ノ系ヲ應用シテ第49節ヲ解ケ。

5. 定長ノ半徑ヲ有シ,互ニ相切スル三圓ヲ畫ケ。

6. 二圓ノ半徑ガ夫々4cm, 5cmニシテ,中心距離ガ6cmナルトキ,此二圓ノ共通弦ノ長サヲ計算セヨ。

(14) 第三篇第四章ノ分

1. 同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル弧上ニ立ツ內接角ハ之ヨリ小ナル弧上ニ立ツ內接角ヨリ大ナリ。逆モ眞ナリ。

2. 平行二弦ノ端ヲ結ブ線分ハ各相等シ。

3. 四邊形ノ對角線ガ直交スルトキハ,其四邊ヲ直徑トスル四圓周ハ同一點ニ集交ス。

4. 相交ハル二圓ノ交點ヲA, Bトシ, Aヲ過グル各圓ノ直徑ヲ夫々AC, ADトセバ, C, B, Dハ同一直線上ニ在リ。

5. 圓ノ平行ナル二ツノ切線ガ,他ノ一切線トA及ビBニ於テ交ハルトキハ,線分ABハ其圓ノ中心ニ於テ直角ヲ夾ム。

6. △ABCノ垂心ヲSトセバ, ASハ外心OヨリBCヘ下セル垂線ODノ二倍ニ等シ。

7. △ABCノ頂點B, Cヲ過ギ,夫々AC, ABニ平行ニBD, CEヲ引キ,外接圓トD, Eニ於テ交ハラシムレバ, DEハ其外接圓ノAニ於ケル切線ニ平行ナリ。

8. 角ト弦トヲ夫々等シクスル兩弓形ハ合同ナリ。

9. △ABC ノ角ガ夫々 $30°$, $50°$ 及ビ $100°$ ナルトキ,此三ツノ角ノ二等分線ガ外接圓周ト交ハル點ヲ A′, B′, C′ トセバ, △A′B′C′ ノ各角ノ大サ如何。

10. 圓ノ中心ヨリ圓外ノ直線ニ下セル垂線ノ足ヲ D トシ, D 及ビ其直線上ノ他ノ任意ノ一點 G ヨリ此圓ニ切線 DE 及ビ GF ヲ引クトキハ, $\overline{GF}^2=\overline{GD}^2+\overline{DE}^2$ ナリ。

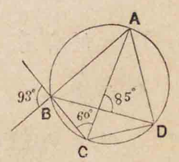
11. 二等邊三角形 ABC ノ底ノ一端 C ヨリ AB ヘ垂線 CD ヲ引キ, D ヨリ BC ヘ垂線 DP ヲ引クトキハ,

$$\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PD}^2$$

12. $L^2+M.N$ ニ等シキ正方形ヲ作レ。但シ L, M, N ハ所設ノ線分トス。

(15) 第三篇第五章ノ分

1. 圖ニ示ス圓ノ內接四角形ノ各角ノ大サヲ求メヨ。



2. 平行四邊形 ABCD ノ三ツノ頂點 A, B, C ヲ過グル圓ガ,邊 AD ニ交ハル點ヲ E トセバ, CE=CD ナリ。

3. △ABC ノ二頂點 B, C ヨリ對邊ヘ下セル垂線ノ足ヲ E, F トシ,垂心ヲ O トセバ, A, E, O, F 及ビ B, C, E, F ハ

各同一圓周上ノ四點ナリ。

4. 三角形ノ外心ト內心トガ重ナルトキハ,此三角形ハ正三角形ナリ。

5. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點ニ於テ,此交點ト二頂點トヲ過グル圓ニ切線ヲ引クトキハ,此切線ハ此四邊形ノ一邊ニ平行ナリ。

6. 圓ニ內接スル六角形ノ二組ノ對邊ガ各平行ナルトキハ,殘リノ一組ノ對邊モ亦平行ナリ。

7. 梯形ノ平行邊ヲ AB, CD トシ,對角線ノ交點ヲ E トスレバ, △ABE, △CDE ノ外接圓ハ E ニ於テ相切ス。

8. △ABC ノ邊 AC ニ切スル傍接圓ノ中心 O′ ヨリ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,邊 AC, AB トノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ, EF ハ BF ト CF トノ差ニ等シ。

9. 一邊 10cm ノ正方形ニ內接スル圓ニ內接スル正三角形ノ邊ノ長サヲ計算セヨ。

10. 一邊ノ長サ $2\sqrt{3}$m ナル正三角形ノ內接圓ニ內接スル正方形ノ面積ヲ求メヨ。

11. 一定點ヲ通過シ,所設ノ二直線ト等角ヲナス直線ヲ引ケ。

12. 定點ヲ過ギ,所設ノ平行線間ニ所設ノ長サヲ夾ム直線ヲ引ケ。

13. 平行二直線ト之ニ交ハル一直線トヲ與ヘ,此三直線ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

14. 一定點 P ヲ過ギテ一直線 PBC ヲ引キ,定角 A ノ二邊ヲ夫々 B 及ビ C ニテ截リ,生ズル △ABC ノ周ヲ所設ノ長サニ等シカラシメヨ。

15. 三角形ノ底ト頂角ノ大サトガ一定ナルトキハ,底ノ兩端ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ結ブ線分ノ長サハ一定ナリ。

(16) 第三篇第六章ノ分

1. 定直線又ハ定圓周上ノ定點ニ於テ,之ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. A ハ定點ニシテ B ハ定直線 MN 上ヲ動ク點ナリ。今 AB ノ延長上ニ AB ニ等シク BP ヲ取ルトキ, P ノ軌跡如何。

3. △ABC ノ邊 BC 上ニ任意ニ一點 D ヲ取リ, D ヨリ AC, AB ニ平行ニ夫々 DE, DF ヲ引キ AB, AC ト夫々 E, F ニテ交ハラシムルトキ,線分 EF ノ中點ノ軌跡ヲ求ム。

4. 圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 圓ノ相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

6. 定圓ノ直徑ヲ底トスル三角形ノ頂點ガ其圓ノ周上ヲ動クトキ,其三角形ノ重心ノ軌跡ヲ求メヨ。

7. 定圓 O ノ定直徑 AB 上ノ任意ノ點 P ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ,圓周トノ交點ヲ C トシ, OC 上ニ OP ニ等シク OQ ヲ取ルトキ,點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。

8. 底邊ト頂角ノ大サトガ定メラレタルトキ,其三角形ノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ。

9. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ定量 M^2 ナルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

10. 次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

(1) 底,頂角,一底角。

(2) 底,高サ及ビ外接圓ノ半徑。

11. 斜邊及ビ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線トヲ知リテ,直角三角形ヲ作レ。

12. 定圓內ノ定點ヨリ定直線マデ直線ヲ引キ,其定圓ノ周ニテ二等分セシメヨ。

13. 所設ノ圓周上ノ所設ノ點ニ於テ之ニ切シ,且所設ノ一直線ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

---

(17) 第四篇第一章ノ分

1. 正三角形ノ內接圓,外接圓及ビ傍接圓ノ半徑ノ比

ヲ求メヨ。

2. 圓周ヲ11ト13トノ比ニ分テ。

3. △ABC ノ邊 BC ヲ延長シ, BC ニ等シク CD ヲ取リ, D ヲ AC ノ中點 E ニ結ビ,延長シテ AB ト F ニ於テ交ハラシメ EF:ED ノ値ヲ求メヨ。

4. △ABC ノ底 BC ニ平行ニ EF ヲ引キ,二邊 AB, AC ト夫々 E, F ニテ交ハラシメ, E ヲ底ノ中點 D ニ結ビタルトキ, ED ガ∠ADB ヲ二等分スルトキハ, FD ハ∠ADC ヲ二等分ス。

5. △ABC ノ三邊ヲ夫々 3m, 5m, 6m トセバ,最大角ノ二等分線ガ對邊ヲ分ツ二部分ノ長サヲ計算セヨ。

6. 同底上ニ立ツ三角形ノ他ノ二邊ノ比ガ所設ノ比ニ等シキトキ,頂點ノ軌跡如何。

7. A, B, C ハ同一直線上ニ與ヘラレタル三點トス,今∠APB=∠BPC ナルヤウニ取ル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

8. 所設ノ弧 ACB ヲ C ニテ二分シ, 弦 AC, BC ノ比ヲ所設ノ比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ。

9. 底邊,他ノ二邊ノ比及ビ頂角ノ二等分線ノ長サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

10. P ニ於テ內切スル二定圓ニ P ヨリ割線 PXY ヲ引キ,其二圓ノ周ト夫々 X, Y ニテ交ハラシメ, XY ヲ所設ノ線分ニ等シクセヨ。

(18) 第四篇第二章ノ分

1. 兩直角三角形及ビ兩二等邊三角形ガ各相似ナル條件如何。

2. 相似四角形ノ對角線(對應スル)ノ比ハ相似比ニ等シ。

3. D 及ビ E ガ夫々△ABC ノ邊 AB 及ビ AC ヲ 2:3 ノ比ニ分ツ點トセバ, BE ト CD トハ各他ヲ 5:2 ニ分ツ。

4. △ABC ノ邊 BC ノ中點 D ヲ A ニ結ブ DA 上ニ $DE=\frac{1}{6}DA$ ナルヤウニ E ヲ取リ, BE ト AC トノ交點ヲ F トセバ, AF:FC=5:2 ナリ。

5. △ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫々二點 E, F ヲ取リ, BE ハ EA ノ二倍, AF ハ FC ノ二倍ナラシメ, EF, BC ノ延長ガ M ニテ交ハラバ BM:CM ノ値如何。

9. △ABC ノ角 A 及ビ B ノ二等分線ノ交點 O ヲ過ギ, AO ニ垂線ヲ引キ,邊 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トセバ, OD 又ハ OE ハ BD, CE ノ比例中項ナリ。

7. 正方形 DEFG ガ直角三角形 ABC ニ內接シ,邊 DE ガ斜邊 BC 上ニ在ルトキハ, DE ハ BD ト EC トノ比例中項ナリ。

8. 直角三角形 ABC ニ於テ $\angle C=90°$, $AC=12$ cm, $BC=16$ cm ナリ。今 AB 上ニ $AP=6$ cm ナルヤウニ一點 P ヲ取リ, PQ, PR ヲ夫々 AC, BC ニ平行ニ引キテ生ズル矩形 PQCR ノ面積ヲ求メヨ。

9. 所設ノ圓ニ內接又ハ外接シ,所設ノ三角形ニ相似ナル三角形ヲ作レ。

10. 所設ノ點 P ヨリ一直線ヲ引キ,同一點 O ヨリ出ヅル三ツノ定直線 OA, OB, OC ニ夫々 A, B, C ニテ交ハル直線ヲ引キ, $OA=OB$ ナラシメヨ。

(19) 第四篇第三章ノ分

1. 二線分ノ包ム矩形ハ其各ノ平方ノ比例中項ナリ。

2. AD ヲ △ABC ノ角 BAC ノ二等分線トセバ

$$\triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC$$

3. 三角形ノ三中線ニ夫々等シキ三邊ヲ有スル三角形ト原三角形トノ比ハ 3:4 ニ等シ。

4. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, △AOB, △BOC, △COD ノ面積ヲ夫々 4 平方糎, 7 平方糎, 6 平方糎トセバ, △AOD ノ面積如何。

5. 圓外ノ一點ヨリ其圓ニ二ツノ切線ト一ツノ割線トヲ引キ,二切點ヲ割線ト圓周トノ二交點ニ結ビテ四邊形ヲ作ルトキハ,其四邊形ノ對邊ノ矩形ハ相等シ。

6. 圓ノ弦ヲ雙方ヘ相等シク延長スルトキハ,其兩端ヨリ其圓ヘ引ケル切線ハ相等シ。

7. 相交二圓ノ交點ヲ A, B トシ,弦 AB ノ長サヲ 7cm トシ, AB ノ延長上ニ BP ガ 9cm ナルヤウニ P ヲ取ルトキハ P ヨリ各圓ヘ引ケル切線ノ長サ如何。

8. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ノ一點 O ヲ過ギ,二邊ニ平行ニ引キタル直線ガ AD, BC ト夫々 E, F ニテ, 又 AB, CD ト夫々 G, H ニテ交ハルトキ, $EO:OF=GO:OH$ ナリ。

9. △ABC ノ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D, BC ノ中點ヲ M トシ, A, D, M ヲ過グル圓ガ AB, AC ニ夫々 E, F ニテ交ハルトキハ $BE=CF$ ナリ。

10. 同圓ニ內接スル正六角形ト正三角形トノ邊ノ上ニ作レル正方形ノ比ヲ求メヨ。

11. 圓ノ內接四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ E トセバ,

$$AB.AD : CB.CD = AE : CE$$

12. 兩相似三角形ノ比ハ其對應邊ヘ引ケル兩形ノ高サノ平方ノ比ニ等シ。又兩形ノ外接圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シ。

13. △ABC ノ頂點 A ニ於テ外接圓ニ切線ヲ引キ BC

ノ延長トDニ於テ交ハラシムレバ $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BD:CD$ ナリ。

14. 半徑 2 cm ノ圓ニ內接スル正十角形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ。

15. 頂角ガ直角ノ五分ノ二ナル二等邊三角形ヲ作レ。

(20) 第四篇第四章ノ分

1. 半徑ガ R ナル圓ニ內接スル正八角形ノ一邊ハ $\sqrt{2-\sqrt{2}}R$ ナリ。

2. 半徑 3.256 m ナル圓ノ周ヲ計算セヨ。

3. 直徑 10 m ノ圓ノ面積ヲ計算セヨ。

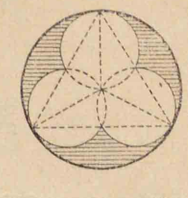
4. 周ガ 10 m ナル圓ノ面積ヲ求メヨ。

5. 30° ノ中心角ニ對スル弧ノ長サガ 1 m ナル圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

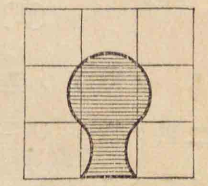
6. 半徑ガ R ナル扇形ノ角ヲ $d°$ トセバ其面積ハ $\frac{d}{360}\pi R^2$ ナリ。

7. 半徑 25 cm ナル二ツノ等圓ガ相交ハリ,其各ガ他ノ圓ノ中心ヲ過グルトキハ,其二圓ニ共通ナル部分ノ面積如何。

8. 半徑 2cm ノ三圓相切スルトキ,其間ニアル三ツノ弧ニテ圍マルル部分ノ面積ヲ計算セヨ。



9. 圖中ノ影ヲツケタル部分ノ周及ビ面積ヲ計算セヨ。但シ大圓ノ半徑ヲ $2a$, 三ツノ等圓ノ半徑ヲ a トス。



10. コヽニ示ス圖形ノ周及ビ面積ヲ計算セヨ。但シ圖中ノ各弧ハ方眼(一邊 a)ノ中心ヲ中心トスル圓弧ナリトス。

雜　題　二

證明問題

〔1〕 二角ノ相等問題

1. ∠XOY ノ邊 OX 上ニ A, B 二點ヲ, 邊 OY 上ニ C, D ノ二點ヲ取リ, OC=OA, OD=OB ナラシメ, AD, BC ノ交點ヲ E トスレバ, ∠AOE=EOC ナリ。

2. 二圓ガ A ニテ內切スルトキ, B ニテ小圓ニ切スル大圓ノ弦ノ兩端ヲ C, D トスレバ

∠CAB=BAD

3. △ABC ノ外心ヲ O, 內心ヲ I トシ, 頂點 A ヨリ BC ヘ下セル垂線ヲ AD トスレバ, AI ハ ∠OAD ヲ二等分ス。

4. 圓ノ二ツノ弦 AB, CD ガ此圓內ノ點 E ニ於テ相交ハルトキ弧 AD ノ中點 M ト弧 BC ノ中點 N トヲ過グル直線ハ弦 AB, CD ト等角ヲナス。

5. 梯形 ABCD ニ於テ斜邊 AB ガ斜邊 CD ノ半分ニ等シキトキ, 平行二邊 AD, BC ノ上ニ夫々一點 E, F ヲ取リ, AE ヲ ED ノ半分, BF ヲ FC ノ半分ニ等シカラシメ, EF ヲ結ベバ, EF ハ AB, CD ト等角ヲナス。

6. 直角三角形 ABC(C ガ直角)ニ於テ A ヨリ AD ヲ引

キ BC ヲ E ニテ截ラシメ, 又 B ヨリ AC ニ平行ニ引ケル直線ヲ D ニテ截ラシメ, 且 DE=2AB ナラシムレバ, ∠DAC ハ ∠BAC ノ三分ノ一ニ等シ。

7. A, B ヲ一直線上ノ二點トシ, C, D ヲ他ノ一直線上ノ二點トセバ, ∠ADC, ∠CBA ヲ二等分スル直線ノナス角 BOD ハ ∠DAB ト ∠BCD トノ和ノ半ニ等シ。

〔2〕 四點同一圓周上(共圓點)問題

1. 圓ノ互ニ直交スル弦 AB, CD ノ各端 A, B, C, D ニ於ケル切線ノ交點 E, F, G, H ハ同一圓周上ニ在リ。

2. 三角形ノ各頂點ヨリ夫々對邊ヘ引ケル垂線ノ足ヨリ夫々又他ノ二邊ヘ垂線ヲ引クトキハ, 此等六ツノ垂線ノ足ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

3. △ABC ノ三邊 BC, CA, AB ト夫々 D, E, F ニ於テ交ハル直線ヲ引キ, D, E, F ヲ過ギ夫々三邊 BC, CA, AB ニ垂直ナル直線ガ同一點 P ヲ通過スルトキハ, P ハ △ABC ノ外接圓周上ニ在リ。

4. 圓 O ノ平行二弦ヲ AB, CD トシ, CD ノ中點 M ト B トヲ結ブ直線 BM ノ延長ト圓周トノ交點ヲ E トスレバ, A, O, M, E ハ同一圓周上ニ在リ。

5. 三角形ノ三邊ノ中點ト, 三垂線ノ足ト, 垂心ヨリ三

頂點ニ至ル線分ノ中點トハ同一ノ圓周上ニ在リ。

注意 此圓ヲ三角形ノ**九點圓**ト云フ。九點圓ノ中心ハ垂心,外心間ノ線分ノ中點ニシテ其直徑ハ外接圓ノ半徑ニ等シ。

6. 鋭角三角形 ABC ノ二ツノ頂點 A, B ヨリ對邊 BC, CA ニ夫々垂線 AX, BY ヲ下シ其足ヲ X, Y トシ,又 AB ノ中點ヲ M トスレバ $\angle MXY = \angle ACB$ ナリ。

7. 圓 O 外ノ一點 P ヨリ此圓ニ二ツノ切線 PA, PB ヲ引キ,弦 AB ノ中點ヲ過グル任意ノ弦 MN ヲ作レバ,四點 P, O, M, N ハ同一ノ圓周上ニ在リ,而シテ PO ハ $\angle MPN$ ヲ二等分ス。

〔3〕 二直線平行問題

1. 圓 O 外ノ一點 A ヨリ此圓ニ切線 AB, AC 及ビ割線 APQ ヲ引クトキ,弦 CR ガ PQ ヲ二等分スレバ BR ハ PQ ニ平行ナリ。

2. 圓ノ二ツノ互ニ垂直ナル直徑ノ延長ト任意ノ切線トノ交點ヨリ引キタル其圓ノ二ツノ切線ハ互ニ平行ナリ。

3. 四邊形 ABCD ニ於テ $\angle B = \angle D$ ナルトキハ, $\angle A$, $\angle C$ ノ二等分線ハ平行ナリ。

4. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ A ヨリ BD ヘ垂線 AE ヲ引キ CD ト X ニ於テ交ハラシメ,又 D ヨリ AC ヘ垂線 DF ヲ引キ AB ト Y ニテ交ハラシムレバ, XY ハ BC ニ平行ナリ。

5. 平行四邊形 ABCD ニ於テ邊 AD ニ平行ナル任意ノ直線ヲ引キ其上ニ二點 E, F ヲ取ル, BE, CF ノ交點ヲ G, AE, DF ノ交點ヲ H トスレバ, GH ハ AB ニ平行ナリ。

6. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ト對邊 BC トノ交點ヲ D トシ, A ニ於テ此三角形ノ外接圓ニ切スル直線ト C ヲ過ギ AD ニ平行ナル直線トノ交點ヲ E トスレバ, ED ハ AB ニ平行ナリ。

〔4〕 二直線直交問題

1. $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ弧 AB, AC ノ中點ヲ結ブ直線ハ $\angle A$ ノ二等分線ニ垂直ナリ。

2. 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル邊ノ延長ガ夫々相交ハリテナス角ノ二等分線ハ直交ス。

3. 一ツノ四邊形ニ內接圓ト外接圓トヲ畫キ得ルトキハ,其內接圓ノ相隣ラザル切點ヲ結ブ二ツノ直線ハ互ニ垂直ナリ。

4. 線分 AB 上ニ一點 C ヲ取リ, AC, CB ノ上ニ夫々同

側ニ正方形 ACDE, CBFG ヲ作レバ, BD ト AG トノナス角ハ直角ナリ。

5. 直角三角形 ABC ノ直角ノ二邊 AB, AC 上ニ三角形ノ外側ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ作リ, DE, FG ヲ延長シテ H ニテ交ハラシムレバ直線 HA ハ斜邊 BC ニ垂直ナリ。

6. 中心 O ナル圓周上ノ任意ノ一點 P ヨリ其圓周上ノ定點 C ヲ中心トスル圓ニ引ケル二ツノ切線ト圓 O トノ交點ヲ夫々 A, B トスレバ直線 AB ハ直線 BC ニ垂直ナリ。

7. 頂角ヲ共有シ相等シキ底邊ヲ有スル二ツノ三角形ノ外接圓ノ共通切線ハ其共通弦ノ延長ト直交ス。

8. O, O′ ヲ中心トスル二圓ノ共通切線ノ切點ヲ A, A′ トシ,中心線 OO′ ト兩圓周ノ交點ヲ夫々 B, B′ トスレバ AB ハ A′B′ ニ平行ナルカ,又ハ垂直ナリ。

〔5〕 直線定方向問題

1. A, B ハ二定點, P ハ任意ノ一點トス,今 PA, PB ノ中點ヲ夫々 C, D トセバ,線分 CD ハ P ノ位置如何ニ關セズ一定ノ方向ヲ有シ,且其長サハ一定ナリ。

2. 外切スル二等圓 O, O′ ノ切點ヲ A トス,今圓 O ノ周上ニ點 P, 圓 O′ ノ周上ニ點 Q ヲ取リ, ∠PAQ ヲ直角ナラシムレバ直線 PQ ハ常ニ一定ノ方向ヲ有ス。

3. P ハ圓周上ノ定點ニシテ A, B ハ此圓ニ交ハル任意ノ圓ト此圓トノ交點トス, PA, PB ガ第二ノ圓ト交ハル點ヲ X, Y トセバ XY ハ方向一定ナリ。

4. 定圓周上ノ定點 A ヲ頂點トスル任意ノ內接三角形ノ頂點 B, C ヨリ夫々邊 AC, AB ニ平行ニ弦 BP, CQ ヲ引ケバ, PQ ハ方向一定ナリ。

5. AB ヲ直徑トスル半圓周上ノ任意ノ二點ヲ P, Q トシ, AP, BQ ノ交點ヲ X, AQ, BP ノ交點ヲ Y トスレバ, XY ハ常ニ一定ノ方向ヲ有ス。

6. 定圓 O ノ周上ノ定點 C ヲ中心トスル定圓アリ,圓 O ノ周上ノ點ヨリ圓 C ニ引ケル二ツノ切線ガ圓 O ト交ハル點ヲ A, B トセバ, AB ハ P ノ位置ニ關セズ定方向ヲ有ス。

〔6〕 三點一直線上問題

1. 三ツノ圓周ガ二ツヅツ A, B, C ニ於テ相切ス, 弦 AB, AC ノ延長ガ第三圓周ト夫々 E, D ニ於テ交ハルトキハ,其圓ノ中心ト二點 E, D トハ同一直線上ニ在リ。

2. △ABC ノ A ヨリ B ニ於ケル內角又ハ外角ノ二等分線ニ垂線ヲ下シ其足ヲ K トシ,又 AB, AC ノ中點ヲ夫

々 P, Q トスレバ, P, Q, K ハ一直線上ニ在リ。

3. △ABC ノ B, C ニ於ケル内角及ビ外角ノ二等分線ヘ A ヨリ下ス垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ。

4. 梯形ノ兩對角線ノ中點及ビ兩底ヲ結ブ任意ノ線分ノ中點ハ同一直線上ニ在リ。

5. 三角形ノ外心,重心,垂心及ビ九點圓ノ中心ハ同一直線上ニ在リ。

6. 圓外ノ一點 P ヨリ此圓ニ切線 PA, PB 及ビ割線 PCD ヲ引キ, 又 A ヨリ CD ニ平行ナル弦 AE ヲ引キ,弦 CD ノ中點ヲ F トスレバ, E, F, B ハ一直線上ニ在リ。

7. 平行四邊形 ABCD 内ノ一點 P ヲ過ギ邊 AB ニ平行ニ直線 HPF ヲ,邊 BC ニ平行ニ EPG ヲ作レ,今 BG, DF ノ交點ヲ Q トスレバ, A, P, Q ハ一直線上ニ在リ。

8. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ邊 AB, CD ノ交點ヲ P, AD, BC ノ交點ヲ Q トスレバ, PQ ハ △BCP, △CDQ ノ外接圓ノ C ニアラザル交點ヲ通過ス。

9. △ABC ノ垂心ヲ H, 邊 BC ノ中點ヲ M トスレバ,直線 HM ハ外接圓ノ A ヲ過グル直徑ノ他ノ端ヲ過グ。

10. 一直線ガ △ABC ノ三邊 BC, CA, AB ヲ夫々 E, F, G ニテ截ルトキハ,

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1 \text{ ナリ。}\quad \text{(Menelaus ノ定理)}$$

11. 前問ノ逆ヲ證明セヨ。

12. 三角形ノ各外角ノ二等分線ト其角ノ内角ノ對邊ノ延長トノ交點(三點)ハ一直線上ニ在リ。

〔7〕 三圓周一點集交問題

1. 四直線ガ三ツヅツ交ハリテ作ル四ツノ三角形ノ外接圓周ハ同一點ニ集交ス。 而シテ

(1) 其交點ヨリ其四直線ヘ下ス垂線ノ足ハ同一直線上ニ在リ。

(2) 其交點ト其四ツノ圓ノ中心ハ同一圓周上ニ在リ。

2. 三角形ノ外接圓ノ其三角形外ニアル三ツノ弓形ヲ邊ニ沿ヒテ形内ニ折返ストキハ其三圓弧ハ一點ニ集交ス。

3. △ABC ノ二邊 AB, AC ヲ一邊トスル二ツノ正方形ヲ三角形ノ形外ニ作リ,又 BC ヲ對角線トスル正方形ヲ作ルトキハ,此等三正方形ノ外接圓ハ一點ニ集交ス。

4. 圓ニ内接スル四邊形ノ頂點ト之ニ隣レル二邊ノ中點トヲ過グル圓周ハ何レモ一定點ヲ通過ス。

〔8〕 三直線一點集交問題

1. △ABC ノ三垂線ヲ AD, BE, CF トスレバ, AB, DE;

BC, EF; CA, FD ノ中點ヲ通過スル三直線ハ同一點ヲ通過ス。

2. △ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ形外ニ作ルトキハ,二直線 BF, CD ト高サ AH トハ同一點ヲ通過ス。

3. 二ツヅツ相交ハル三ツノ圓ノ三ツノ共通弦ノ延長ハ同一點ヲ通過ス。

4. 三角形ノ各邊ヲ對角線トシ,所設ノ二直線ニ平行ナル邊ヲ有スル三ツノ平行四邊形ヲ作ルトキハ,此等ノ四邊形ノ他ノ三對角線ハ同一ノ點ニ於テ交ハル。

5. △ABC ノ三頂點ヨリ夫々對邊(又ハ延長)ヘ引ケル三直線 AD, BE, CF ガ同一點ヲ通過スルトキハ,

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1 \quad ナリ。 \qquad (Ceva ノ定理)$$

6. 前問ノ逆ヲ證明セヨ。

7. 圓ニ外接スル三角形ノ各邊ノ切點ト對角頂トヲ結ブ直線ハ同一ノ點ニ於テ交ハル。

此交點ヲ其三角形ノ Gergonne 點ト云フ。

8. 三角形ノ各頂點ヲ其對邊上ノ傍接圓ノ切點ニ結ブ直線ハ同一ノ點ヲ通過ス。

此交點ヲ其三角形ノ Nagel 點ト云フ。

〔9〕 線分ノ相等問題

1. 相交ハル二圓周ノ一交點 A ヲ過ギ,共通弦 AB ト等角ヲナス二直線ノ兩圓ノ間ニアル線分 CD, EF ハ相等シ。

2. AB, CD ヲ與ヘラレタル圓ノ平行ナル二定弦, O ヲ弦 AB ノ中點トス,今弧 BD 上ニ任意ノ點 E ヲ取リ弦 COF, EOG ヲ引キ,弦 AB ト弦 CG, EF トノ交點ヲ夫々 M, N トスレバ,

〔1〕 四邊形 ODEN ハ圓ニ內接ス。

〔2〕 OM=ON

3. 矩形 ABCD ノ一頂點 C ヨリ對角線 BD ニ下セル垂線ト ∠BAD ノ二等分線トノ交點ヲ M トスレバ, CM=AC ナリ。

4. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB 上ニ一點 D アリテ, $AD.DB=\overline{CD}^2$ ナルトキハ, D ハ AB ノ中點ナルカ,或ハ CD ハ AB ニ垂直ナリ。

5. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊 AB, AC 上ニ夫々正方形 ABDB′, ACGC′ ヲ畫キ, CD ヲ結ブ直線ガ邊 AB ヲ M ニテ, BG ヲ結ブ直線ガ邊 AC ヲ N ニテ截ルトキハ, AM=AN ナリ。

6. AC=2AB ナル △ABC ニ於テ頂角 A ノ二等分線ガ

底 BC ト交ハル點 D ヨリ二邊 AB, AC ニ夫々平行ナル二直線ヲ引キ AB, AC ト夫々 E, F ニテ交ハラシメ, EF ノ延長ト CB ノ延長トノ交點ヲ G トスレバ, EF=GE ナリ。

7. 二等邊三角形 ABC ノ邊 AB 上ノ一點 D ヲ過ギテ底 BC ニ平行ニ DE ヲ引キ, AC ニ E ニテ交ハラシメ, E ヲ中心トシ EA ヲ半徑トスル圓周ト C, D ヲ過グル直線トノ交點ノ一ツヲ F トシ, EF ニ平行ニ DG ヲ引キ, BC 又ハ其延長ニ G ニ交ハラシメ,又 AB ニ平行ニ GH ヲ引キ AC 又ハ其延長ニ H ニ於テ交ハラシムレバ DG=GH ナリ。

8. △ABC アリ, AB<AC トス, AC 上ニ AB=CD ナルヤウニ D ヲ取リ BC ノ中點ヲ E, AD ノ中點ヲ F トス, EF ノ延長ガ BA ノ延長ト交ハル點ヲ G トスレバ, △AFG ハ二等邊三角形ナリ。

9. 圓ノ中心 O ヨリ任意ノ直線 XY ニ引ケル垂線ノ足 A ヲ過ギ割線ヲ引キ圓周トノ交點ヲ B, C トセバ B, C ニ於ケル切線ト XY トノ交點ハ A ヨリ等距離ニ在リ。

10. 圓甲ノ周ガ圓乙ノ中心ヲ通過スルトキハ,圓甲ノ周上ノ一點ヨリ圓乙ニ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ結ブ直線ハ共通弦ニテ二等分セラル。

11. △ABC ニ於テ AB, BC 上ニ正三角形 ABC′, BCA′ ヲ其外方ニ,又 AC 上ニ正三角形 ACB′ ヲ其内方ニ畫クトキハ, A′B′C′B ハ平行四邊形ナリ。

12. △ABC ニ於テ ∠ABC=3∠ACB トシ, ∠BAC ノ二等分線ヘ垂線 BD ヲ引クトキハ BD ハ AC ト AB トノ差ノ半分ニ等シ。

13. 正方形 ABCD ノ頂點 A ト邊 BC 上ノ任意ノ點 E トヲ結ビ, ∠EAD ノ二等分線ガ CD ト交ハル點ヲ F トスレバ DF ハ AE∼BE ニ等シ。

14. △ABC ノ三邊上ニ其外方ニ夫々三ツノ正三角形 BCA′, CAB′, ABC′ ヲ作ルトキハ,

(1) AA′=BB′=CC′

(2) 此三ツノ正三角形ノ外接圓周ハ同一點ニ集交ス。

(3) AA′, BB′, CC′ ハ同一點ニ集交ス。

〔10〕 角及ビ線分ノ不等問題

1. 四邊形 ABCD ニ於テ ∠B=∠C ナルトキハ, AB⋛CD ナルニ從テ ∠CDA⋛∠DAB ナリ。

2. △ABC ニ於テ AB>AC ナリトス,今外接圓ノ劣弧 BC ノ中點ヲ P トシ, P ヨリ AB, AC ヘ垂線ヲ引クトキハ,其 AB ヘノ垂線ノ足ハ AB 上ニ在リテ, AC ヘノ垂線ノ足ハ AC ノ延長上ニ在リ。

3. Aヲ頂點トスル二等邊三角形ABCニ於テ邊AB上ノ任意ノ一點ヲDトシ, ACノ延長上ニBDニ等シクCEヲ取リ, DEヲ結ベバ,

〔1〕 BCハDEヲ二等分ス。

〔2〕 DEハBCヨリ大ナリ。

4. 三角形ノ二邊ガ不等ナルトキハ其對角頂ヨリ大邊ニ至ル垂線ハ小邊ニ至ル垂線ヨリ小ナリ。

5. 三角形ノ角ノ二等分線ハ其角ノ二邊ノ等差中項ヨリ小ナリ。

6. 面積ニ關スル定理ニヨラズシテ,正方形ノ對角線ハ一邊ノ三分ノ四ヨリ長ク,其二分ノ三ヨリ短キコトヲ證明セヨ。

7. 一圓周上ニ順次ニ四點A, B, C, Dヲ取リテ,圓周ヲ四分シ,且弧AB, BC, CD, DAヲ次第ニ小サクナルヤウニ取ルトキハ,弦BDハ常ニ弦ACヨリ大ナリ。

8. 正三角形ノ角BAC内ニ一點Pヲ取ルトキハ, $BP+CP$ハAPヨリ小ナラズ。

9. $\triangle ABC$ノ頂點Aニ於ケル外角ノ二等分線上ニ任意ノ點Mヲ取ルトキハ, $MB+MC>AB+AC$ ナリ。

10. $\triangle ABC$ニ於テ$AC>BC$トシ, A, Bヨリ夫々其對邊ヘ垂線AD, BEヲ引クトキハ $AC+BE>BC+AD$ ナリ。

11. $\triangle ABC$内ノ一點ヲOトシAO, BO, COガ夫々BC, CA, ABトD, E, Fニ於テ交ハレバ,

$$3(AB+BC+CA)>2(AD+BE+CF)$$

〔11〕 切線及ビ切圓問題

1. $\triangle ABC$ノ外接圓ノ中心ヲOトシ, Oヨリ邊AB及ビACニ平行線ヲ引キB及ビCニ於ケル切線ト夫々D及ビEニ於テ會セシムルトキハ,直線DEハ此圓ニ切ス。

2. 平行四邊形ABCDノ對角線ノ交點ヲOトシ, BヨリADヘ垂線BE, DヨリABヘ垂線DFヲ引クトキハOE, OFハ$\triangle AEF$ノ外接圓ノ切線ナリ。

3. 四邊形ノ相對スル二邊ノ和ガ互ニ相等シキトキハ此四邊形ハ圓ニ外接ス。

4. $\triangle ABC$ノ邊BCノ中點Mヲ中心トシ$\frac{1}{2}(AB\pm AC)$ヲ半徑トスル圓周ハACヲ直徑トスル圓周ニ切ス。

5. 圓ニ内接スル四邊形ABCDノ各邊AB, BC, CD, DAノ中點ヲ夫々E, F, G, HトスルトキハΔAEH, ΔBEF, ΔCGF, ΔDGHノ外接圓ハ皆圓ABCDニ切ス。

6. ABCDヲ圓ニ外接スル四邊形トセバ三角形ABC及ビADCノ内接圓ハ相切ス。

7. 所設ノ圓ヲ圍繞スルニハ之ニ等シキ圓幾箇ヲ要

スルカ。但シ各圓ハ皆原圓及ビ兩隣圓ニ切スルモノトス。

〔12〕三角形及ビ矩形ノ面積問題

1. 圓O外ノ一點Pヨリ此圓ニ切線PA, PBヲ引キ其切點ヲA, Bトシ, Aヲ過グル此圓ノ直徑ACヲ引ケバ,

$$\triangle OPB=\triangle OPC$$

2. 平行四邊形ABCDノDヲ過ギ直線ヲ引キ,邊BCトEニ於テ又邊ABノ延長トFニ於テ交ハラシムレバ

$$\triangle ABE=\triangle CEF$$

3. ABCDヲ矩形トシOヲ△ABCノ內心トシ, OヨリAD, DCヘ垂線OE, OFヲ引クトキハ,矩形OEDFハ全形ノ半ニ等シ。

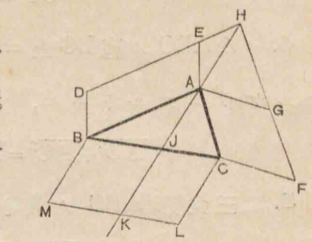
4. △ABCノ中線ADノ中點ヲEトシ, BEトACトノ交點ヲFトスレバ, △BCF=2△ABF ナリ。

5. 平行四邊形ノ四邊AB, BC, CD, DAノ中點ヲ夫々E, F, G, Hトシ, AF, BG, CH, DEヲ結ブトキハ,此等ノ四直線ニテ圍メル平行四邊形ノ面積ハABCDノ幾分ノ一ニ相當スルカ。

6. 四邊形ABCDノ對角線AC, BDノ中點ヲ夫々E, Fトシ, Eヲ過ギBDニ平行ナル直線トFヲ過ギACニ

平行ナル直線トノ交點ヲOトシ, Oト各邊ノ中點トヲ結ブトキハ,此四ツノ線分ハ此四邊形ヲ四等分ス。

7. △ABCノ二邊AB, ACノ上ニ圖ノ如クBE, CGナル平行四邊形ヲ畫キDE, FGノ延長ガHニ於テ交ハルトス。今HAヲ延長シBCトJニ於テ會セシメ,更ニ之ヲKマデ延長シJK=AHナラシメ, Kヲ過ギBCニ平行ナル直線トBCトノ間ニ平行四邊形BCLMヲ作ルトキハ,



$$▱BL=▱BE+▱CG$$

〔13〕多角形ノ邊ノ平方問題

1. △ABCノ垂心ヲH, 外心ヲOトシ, Oヨリ三邊BC, CA, ABヘ下セル垂線ノ足ヲ夫々D, E, Fトセバ,

$$\overline{OD}^2+\overline{OE}^2+\overline{OF}^2=\frac{1}{4}(\overline{AH}^2+\overline{BH}^2+\overline{CH}^2)$$

2. 鋭角三角形ABCアリ,邊BCニ平行ニ直線XYヲ引キABトXニ於テ, ACトYニ於テ交ハラシム。若シ $\overline{BY}^2=\overline{CY}^2+BC.XY$ ナルトキハ, △ABCハ二等邊三角形ナリ。

3. 一ツノ圓ノ中心ヨリ圓外ノ一直線ヘ下セル垂線

ノ足ヲ D トシ,同ジ直線上ノ他ノ任意ノ點ヲ G トシ, D 及ビ G ヨリ此圓ニ切線 DE, GF ヲ引クトキハ,

$$\overline{GF}^2=\overline{GD}^2+\overline{DE}^2$$

4. △ABC ノ底 BC 上ニ二點 P, Q ヲ取リ, $BP=CQ=\frac{1}{4}BC$ ナルヤウニスルトキハ,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\frac{3}{2}\overline{PQ}^2$$

5. 三角形 ABC ノ重心ヲ O トスレバ

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)$$

又 P ヲ任意ノ一點トスレバ,

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2+\overline{CO}^2+3\overline{PO}^2$$

6. A ヲ直角トスル直角三角形 ABC ノ各邊上ニ其外側ニ正方形 BADE, CBFG, ACHK ヲ作リ, EF, GH ヲ結ベバ $\overline{EF}^2+\overline{GH}^2=5\overline{BC}^2$ ナリ。

7. 四邊形ガ圓ニ內接シ且其對角線ガ直交スルトキハ,相對スル二邊ノ平方ノ和ハ此圓ノ直徑ノ平方ニ等シ。

〔14〕 比例式問題

1. 直角三角形 ABC ノ直角頂 A ヨリ BC ヘノ垂線ヲ AD トシ, ∠B ノ二等分線ガ AD, AC ニ交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ, DE : AE = AF : CF ナリ。

2. △ABC ノ內心ヲ I トシ,直線 AI ガ邊 BC ニ交ハル

點ヲ X トスレバ, AI : IX = AB + AC : BC ナリ。

3. △ABC ニ於テ AB = nAC ナルトキ, B ヨリ ∠BAC ノ二等分線ヘ下セル垂線ノ足ヲ P トシ, BC, AP ノ交點ヲ Q トスレバ, PQ : QA = $n-1$: 2 ナリ。

4. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點ヨリ相對スル二邊ヘ引ケル垂線ノ比ハ其二邊ノ比ニ等シ。

5. △ABC ノ C ニ於テ AC ニ切シ且 D ニ於テ AB ノ延長ニ切スル圓ヲ畫キ BC ト G ニ於テ會セシメ, A ヨリ BC, CD ニ夫々垂線 AH, AE ヲ下ストキハ,

$$CG : AH = CD : AE$$

6. A, B, C ハ圓周上ノ三定點ニシテ A ヨリ B, C ニ於ケル切線ニ平行ニ引キタル直線ヲ弦 BC ト夫々 D, E ニ於テ交ハラシムレバ, AD ハ BD ト CE トノ比例中項ナリ。

7. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ劣弧 BC 上ノ任意ノ一點ヲ D トシ, AB, CD ノ延長ノ交點ヲ E, AC, BD ノ延長ノ交點ヲ F トセバ, BC ハ BE, CF ノ比例中項ナリ。

8. 平行四邊形 ABCD ノ一邊 AD ノ中點ヲ E トシ,對角線 AC ト BE トノ交點ヲ F トスレバ,

$$\frac{\triangle AEF}{1}=\frac{\triangle EFC}{2}=\frac{\triangle BCF}{4}$$

9. △ABC ノ底 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,邊 AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ハラシム。今邊 AB 上ニ一點 F ヲ

取リ $\triangle BFC$ ヲ $\triangle ADE$ ニ等シカラシムレバ, AD ハ BF ト BA トノ比例中項ナリ。

10. $\triangle ABC$ ノ底 BC ニ平行ニ DE ヲ引キ, A ヨリ BE, CD ノ交點 F ヘ引ケル直線ガ DE, BC ト交ハル點ヲ夫々 H, K トスレバ, A, H, F, K ハ調和列點ナリ。

11. 圓ノ直徑ハ任意ノ切線及ビ切點ヲ過グル垂線ニテ調和ニ分タル。

12. A, C, B, D ガ調和列點ナルトキハ

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$$

13. 調和列點 A, C, B, D ヲ含ム一直線外ノ任意ノ一點ヲ S トシ, C ヲ過ギ SD ニ平行ニ一直線ヲ引キ, SA 及ビ SB ト夫々 G 及ビ H ニテ交ハラシムレバ, GC=CH ナリ。

〔15〕 比例ヲ用フル面積問題

1. AB ハ圓ノ直徑ニシテ CD ハ之ニ垂直ナル弦ナリ, CD 上ニ一點 M ヲ取リ AM, BM ガ圓ニ再ビ交ハル點ヲ夫々 E, F トセバ, $CE.DF=CF.DE$ ナリ。

2. 圓ノ弦 AB ノ兩端ヨリ此弦ニ引ケル垂線 AE, BF ガ弧 AB 上ノ任意ノ點 C ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ夫々 E, F トシ, C ヲ通ル半徑ト弦 AB トノ交點ヲ D トスレバ, $CE.CF=DA.DB$ 及ビ $\overline{CD}^2=AE.BF$ ナリ。

3. 圓ニ內接セザル四邊形ノ對角線ノ矩形ハ對邊ノ矩形ノ和ヨリ小ナリ。

4. 圓 O ノ半徑 OA 上ニ半圓ヲ畫キ, OA 上ノ任意ノ一點 D ニ於ケル垂線ガ半圓周ト M ニテ, 圓 O ノ周ト C ニテ交ハルトキハ, $\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2$ ナリ。

5. 相交ハル二圓及ビ其共通弦ヲ任意ノ一直線ニテ截ルトキハ五ツノ交點ヲ得, 其等ノ點ヲ直線上順次ニ A, B, C, D, E トスレバ, $AB:BC=ED:DC$ ナリ。

6. $\triangle ABC$ ノ邊 AB 上ニ二點 D, F ヲ取リ, AD ヲ AB, BF ノ比例中項ナラシメ, D ヨリ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ邊 AC ト E ニ於テ交ハラシムルトキハ, $\triangle ADE$ ハ $\triangle BFC$ ニ等シ。

7. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスレバ, $AB.AD:CB.CD=AO:CO$ ナリ。

8. 三角形ノ三頂點ヨリ互ニ平行ナル直線ヲ引キ對邊或ハ其延長ト交ハラシメ其交點ヲ頂點トスル三角形ト原三角形トノ比ヲ求メヨ。

9. 直角三角形ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ垂線 CD ヲ引キ AD ヲ直徑トスル圓周ト AC トノ交點ヲ E トセバ,

$$AE:CE=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$$

10. 平行四邊形 ABCD ニ於テ一頂點 A ヨリ任意ノ直

線ヲ引キ對角線 BD, 邊 CD, BC 又ハ此等ノ延長トノ交點ヲ夫々 P, Q, R トスレバ, $PQ:PR=\overline{PD}^2:\overline{PB}^2$ ナリ。

11. 圓ノ互ニ垂直ナル半徑ヲ OA, OB トシ,弧 AB 上ノ任意ノ點 M ニ於ケル切線ト OA, OB ノ延長トノ交點ヲ夫々 S, T トシ, M ヨリ OA ニ下セル垂線ノ足ヲ P トスレバ △AOB ハ △SOT, △OMP ノ比例中項ナリ。

12. △ABC ノ邊 BC 上ニ二點 P, Q アリ, P ヨリ二邊 AB, AC ニ至ル距離ノ包ム矩形ト, Q ヨリ二邊 AB, AC ニ至ル距離ノ包ム矩形トガ等積ナルトキハ, BP ハ QC ニ等シ。

〔16〕 定量問題

1. 正三角形 ABC アリ,邊 AB 上ニ動點 D ヲ取リ,又 AC 上ニ BD ニ等シク AE ヲ取ルトキハ, BE ト CD トノ交角ノ大サハ一定ナリ。

2. 相交ハル二圓周ノ交點ノ一ツ A ヲ過ギ二ツノ割線 MN, M′N′ ヲ引キ兩圓周トノ交點ヲ夫々 M, M′ 及ビ N, N′ トスレバ,

〔1〕 直線 MM′ ト NN′ トノ交角,

〔2〕 M, N ニ於ケル兩圓ノ切線ノ交角

ノ大サハ共ニ一定ナリ。

3. AB, CD ヲ圓ノ二ツノ定直徑トシ, E, F ヲ圓周上ノ任意ノ一點 P ヨリ夫々 AB, CD ニ下セル垂線ノ足トスレバ線分 EF ノ長サハ一定ナリ。

4. 二點 A, B ニ於テ交ハル二圓ノ一ツノ周上ニ任意ノ點 P ヲ取リ, PA, PB ガ他ノ圓周ト交ハル點ヲ夫々 Q, R トスレバ,弦 QR ノ長サハ一定ナリ。

5. 二等邊三角形 ABC ノ底 BC 上ノ任意ノ點 P ニ於ケル垂線ヲ作リ他ノ一邊 CA ノ延長ニ交ハル點ヲ K, AB ニ交ハル點ヲ S トスレバ, KP+SP ハ一定ナリ。

6. 定長ノ線分ヲ內分シ各分上ニ正三角形ヲ作レバ其高サノ和ハ一定ナリ。又外分ノ場合ハ如何。

7. 二等邊三角形ノ底上ノ任意ノ一點ヨリ他ノ二邊マデ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ。

又點ガ底ノ延長上ニアルトキハ如何。

8. 正三角形內ノ任意ノ一點ヨリ三邊マデ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ。

點ガ形外ニアルトキハ如何。

9. 正多角形內ノ一點ヨリ各邊ヘ下セル垂線ノ和ハ其點ノ位置如何ニ拘ラズ一定ナリ。

10. 矩形ニ內接スル平行四邊形ノ各邊ヲ夫々其矩形ノ對角線ニ平行ナラシムレバ其平行四邊形ノ周ハ一定ナリ。

11. 四邊形ノ兩對角線ノ長サ及ビ其夾角一定ナルトキハ其面積モ亦一定ナリ。

12. 平行四邊形 ABCD ノ一ツノ頂點 A ヲ過グル任意ノ直線ト BC 又ハ BC ノ延長トノ交點ヲ E トシ, CD 又ハ CD ノ延長トノ交點ヲ F トスレバ, EB ト DF トノ包ム矩形ノ面積ハ一定ナリ。

13. 定圓 O ノ周上ノ任意ノ一點 A ヲ中心トシテ圓ヲ畫キ, 此圓 A ニ切スル圓 O ノ弦 BC ヲ引クトキハ矩形 AB.AC ハ一定ナリ。

14. 直徑 AB 上ノ定點 C ヲ圓周上ノ任意ノ點 M ニ結ビ, M ニ於テ CM ニ垂直ナル直線ガ A 及ビ B ニ於ケル切線ニ交ハル點ヲ夫々 E, F トスルトキハ, ∠ECF ハ直角ニシテ, 矩形 AE.BF ハ一定ナリ。

15. 定圓ノ直徑上ノ一定點ト此直徑ニ平行ナル弦ノ兩端トヲ結ブ二直線上ノ正方形ノ和ハ一定ナリ。

16. 圓ノ直徑上ニ於テ中心 O ノ左右等距離ニ設ケタル二點ヲ A, B トシ, B ヲ過グル任意ノ弦ヲ CD トスレバ, △ACD ノ三邊ノ平方ノ和ハ一定ナリ。

17. 二ツノ同心圓アリ, 小圓周上ノ一點 P ヲ過ギ小圓ノ弦 PA ヲ引キ, 又之ト直交スル大圓ノ弦 BPC ヲ引クトキハ, △ABC ノ三邊ノ平方ノ和ハ PA ノ方向ニ關セズ一

定ナリ。

18. 二圓アリ, A ニ於テ內切ス。今外圓周上ノ任意ノ一點 P ヨリ內圓周ニ切線 PQ ヲ引キ Q ヲ切點トスレバ, 比 PQ:PA ハ一定不變ナリ。

19. 定周圓上ノ定マレル弧 AB ノ中點ヲ C トシ, 其共軛弧ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ比 $\frac{AP+BP}{CP}$ ハ一定ナリ。

〔17〕 定點通過, 定圓切線問題

1. 圓ノ弧ト之ニ對スル弦ニ切スル圓ノ切點ヲ結ブ直線ハ其弧ト共軛ナル弧ノ中點ヲ通過ス。

2. 圓 O ノ周上ノ任意ノ點 P ヨリ定マレル直徑 AB ニ垂直ナル弦 PQ ヲ引キ, 且中心 O ト P トヲ結べバ, ∠OPQ ノ二等分線ハ二ツノ定點ノ中ノ何レカ一ツヲ通ル。

3. 底 BC ガ一定ニシテ頂角 A ノ大サガ定マレル三角形ニ於テ, 頂角 A ノ二等分線ガ底ト交ハル點ヲ P トシ, AP ノ延長上ニ Q ヲ取リ AP, AQ ヲ夫々 AC, AB ニ等シカラシムレバ, Q ハ定點ナリ。

4. 定角 O ノ二邊上ニ定點 A, B アリ, OA, OB ノ延長上ニ夫々點 P, Q ヲ取リ, AP.BQ=OA.OB ナラシムレバ, 直線 PQ ハ常ニ OA, OB ヲ二邊トスル平行四邊形ノ一頂

點ヲ通過ス。

5. 與ヘラレタル圓ノ外ニ與ヘラレタル直線 XY アリ, XY 上ノ任意ノ一點 P ヨリ此圓ニ二ツノ切線 PA, PB ヲ引クトキハ,其切點 A, B ヲ結ベル直線ト圓ノ中心 O ヨリ XY ニ下セル垂線 OQ トノ交點 R ハ定點ナリ。

6. 定直線ニ切シ且定圓ニ外切スル任意ノ圓ヲ畫クトキハ,其二ツノ切點ヲ通過スル直線ハ一定點ヲ過グ。

但シ定直線ト定圓ハ相交ハラザルモノトス。

7. 相交ハラザル二定圓ノ一ツト內切シ,他ト外切スル圓ヲ畫ケバ,其切點ヲ結ブ直線ハ常ニ一定點ヲ過グ。

8. △ABC ノ一角 C ノ二等分線 CE ニ頂點 A, B ヨリ夫々垂線 AP, BQ ヲ作リ, M ヲ邊 AB ノ中點トシ邊 AB ガ內接圓ニ切スル點ヲ D トス。然ルトキハ M ヲ中心トシ MD ヲ半徑トスル圓周ハ P 及ビ Q ヲ過グ。

9. O ハ定圓 A, B ハ二定點トス。B ヲ過グル任意ノ割線 BCD ヲ引キ AC, AD ガ圓 O ノ周ト E, F ニテ交ハルトキハ,圓周 AEF ハ定點ヲ通過ス。

10. 平行線 AA′, BB′ ノ距離 AB ノ中點ヲ C トシ, C ヲ直角頂トスル直角三角形 CA′B′ ノ二頂點 A′, B′ ガ夫々此平行線ノ各ノ上ニアルトキハ直線 A′B′ ハ一定圓ニ切ス。

11. A, B ニ於テ交ハル二圓ノ一ツノ周上ノ任意ノ一

點ヲ P トシ, PA, PB ガ他ノ圓ノ周ト交ハル點ヲ C, D トスレバ,直線 CD ハ一定ノ圓ニ切ス。

12. 形ノ定マレル三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ガ夫々二定點 P, Q ヲ過グルヤウニ動クトキハ,頂點 A ハ一定圓ノ弧ヲ畫キ,且底 BC ハ恒ニ他ノ一定圓ノ切線トナル。

13. △ABC ノ二邊 AB, AC ガ夫々中心 O, O′ ナル二定圓ニ切シテ動クトキハ,邊 BC ハ常ニ一定圓ニ切ス。

軌 跡

〔18〕 軌跡ガ直線トナル問題

1. 直交スル二直線上ニ各一點ヲ取リ之ヲ結ブ線分ヲ對角線トスル正方形ノ頂點ノ軌跡。

2. 二定直線ヨリノ距離ノ比ガ定比ニ等シキ點ノ軌跡。

3. 一定點ヨリ一定直線ヘ引ケル直線上ニ畫ク正三角形ノ頂點ノ軌跡。

4. 正三角形 PMN ノ邊 MN ノ上ニ任意ノ點 A ヲ取リ, AP ヲ高サトシ A ヲ頂點トスル正三角形 ABC ヲ畫クトキ B 及ビ C ノ軌跡。

5. 相交ハル二直線ニ至ル距離ノ和(差)ガ所設ノ線分

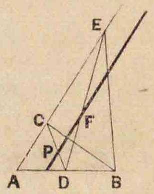
ニ等シキ點ノ軌跡。

6. 所設ノ二圓ヘ引ケル切線ガ相等シキ點ノ軌跡。

7. 直交スル二定直線ヲ甲,乙トシ,A,Bヲ甲上ノ二定點,Pヲ乙上ノ任意ノ點トスルトキ,A,Bニ於テ夫々PA,PBニ垂直ナル二ツノ直線ノ交點Qノ軌跡ハ甲ニ直交スル一ツノ直線ナリ。

8. 所設ノ圓周上ノ所設ノ點OヨリOPヲ引キ,此上ニ一點Qヲ取リ,矩形OP.OQヲ所設ノ正方形ニ等シカラシムルトキ,點Qノ軌跡。

9. 定圓Oヘノ切線及ビ定點Aヘノ距離ガ相等シキ點ノ軌跡。



10. 同底上ニ立チ一底角ノ定マレル三角形ノ重心ノ軌跡。

〔19〕 軌跡ガ圓周トナル問題

1. 三角形ノ底邊ノ位置ト大サガ與ヘラレ,且他ノ二邊ノ差ガ與ヘラレタルトキ,底ノ兩端ヨリ頂角ノ二等分線ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡。

2. 定圓ニ引ケル切線ノ長サガ其圓ノ直徑ニ等シキ點ノ軌跡。

3. Oヲ中心トスル定圓內ノ定點Aニ於テ直角ヲ張

ルベキ弦ノ中點ノ軌跡。

4. 定圓ノ周上ニ中心ヲ置キ,一定ノ半徑ヲ有スル圓ヲ作リ之ニ一定ノ方向ノ切線ヲ引クトキ其切點ノ軌跡。

5. 三定點A,B,Cヨリ一點Pニ至ル三線分ノ平方ノ和ガ一定ナルトキ點Pノ軌跡。

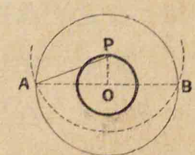
6. $\triangle$ABCニ於テ$\angle$BACハ直角ナリトシ,BCニ任意ノ垂線EFヲ引クトキ之ガAB,AC或ハ其延長ト夫々D,Fニ於テ交ハルトキ,BFトCDトノ交點ノ軌跡。

7. 定直線上ニ二點A,Bアリ。Aニ於テ其直線ニ切スル圓トBニ於テ其直線ニ切スル圓トガ互ニ相切スルトキ,兩圓ノ切點ノ軌跡。

8. Aハ所設ノ圓周上ノ所設ノ點ニシテBハ其圓周上ノ動點トス。$\angle$APB及ビPA:PBヲ一定ナラシムルトキ點Pノ軌跡。

9. 定點Aト定直線XYトアリ。Aヲ過ギ二ツノ直線AB,ACヲ引キ$\angle$BACヲ定角ニ等シクシ,且ABトXYトノ交點ヲBトシ,矩形AB.ACノ面積ヲ一定ナラシムルトキ點Cノ軌跡。

10. 定半徑ヲ有シ,且所設ノ圓周ヲ二等分スル圓ノ中心ノ軌跡。



〔20〕 軌跡ガ圓弧トナル問題

1. 一ツノ半圓ニ於テ其半徑ニ等シキ弦ヘ中心ヨリ下セル垂線ノ足ノ軌跡。

2. 定圓ニ於テ定直徑ト定長ノ弦トヲ一雙ノ對邊トスル內接四邊形ノ對角線ノ交點ノ軌跡。

3. 同底上ニ立チ頂角ノ大サ一定ナル三角形ノ垂心ノ軌跡。

4. 定角 XOY 內ニアリテ邊 OX ニ定點 A ニ於テ切スル圓ト,邊 OY ニ定點 B ニ於テ切スル圓トガ互ニ外切スルトキハ,其切點ノ軌跡ハ A, B ヲ過グル一ツノ圓弧ナリ。

5. △ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 M, N トシ, A ヲ過グル任意ノ直線ヘ B, C ヨリ下セル垂線ノ足ヲ夫々 Q, R トスルトキ,二直線 QM, RN ノ交點 P ノ軌跡。

6. AB ヲ定圓 O ノ定マレル弦トシ, AP ヲ任意ノ弦トスルトキ PB ノ中點 Q ノ軌跡。

7. 所設ノ三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ取リタル一點 D ヲ過ギ任意ノ截線 DEF ヲ引キ邊 AC ト點 E ニ於テ,邊 AB ノ延長ト點 F ニ於テ交ハラシメ,圓 CDE 及ビ BDF ヲ畫クトキハ此二圓周ノ第二ノ交點 M ノ軌跡。

作圖題

〔21〕 點ヲ求ムル問題

1. 一平面上ニアル平行ナラザル等長ノ二線分 AB, A′B′ アリ。其平面上ノ或一點ヲ中心トシ其平面上ニ於テ AB ヲ廻轉シテ A′B′ ニ重ネ合ハセントス。其中心點ヲ求メヨ。

2. 與ヘラレタル直線上ニ一點 P ヲ求メ, P ヨリ與ヘラレタル圓ヘ引ケル切線 PT ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。

3. A ハ中心 C ナル圓ノ外ニアル所設ノ一點ナリ。CA 上ニ一點 P ヲ求メ線分 AP ト P ヨリ此圓ニ引ケル切線 PT(T ヲ切點トス)トヲ相等シカラシメヨ。

4. 所設ノ線分 AB ヲ弦トスル弓形 ABC ノ弧上ニ一點 P ヲ求メ,弦 PA ヲ弦 PB ノ三倍ナラシメヨ。

5. 所設ノ圓外ニ一點ヲ求メ,此點ヨリ其圓ニ引ク二ツノ切線ノ和ヲ同ジ點ヨリノ其圓ノ中心線ニ等シカラシメヨ。

6. 所設ノ線分 AB ノ延長上ニ一點 C ヲ求メ,矩形 AB.AC ヲ所設ノ正方形ニ等シクセヨ。

7. 一直線上ニ三點 A, B, C ガ此順序ニ列ブトキ,此直

線上ニ一點Oヲ求メテ,OB ヲ OA,OC ノ比例中項トナラシメヨ。

8. A ハ定直線 XY 上ノ定點,P ハ XY 上ニアラザル定點トス,XY 上ニ一點 B ヲ求メ, AB+2PB ヲ所設ノ線分ニ等シクセヨ。

〔22〕 直線ヲ引ク問題

1. 一點ヨリ出ヅル三直線ノ何レカ一ツノ上ノ所設ノ點ヲ通ル直線ヲ引キ,ソレガ此三直線ニテ夾ミ取ラルヽ二ツノ部分ガ等シキヤウニセヨ。

2. 所設ノ點 A ヲ通過シ,某方向ニ等速度ヲ以テ直進スル船アリ。或人一地點 O ヨリ之ヲ望見セシニ,A ヲ通過セシ後 t 時間ニシテ一定直線 OB 上ニ見ヘ,更ニ t 時間ヲ經タルニ他ノ定直線 OC 上ニ見ユルニ至レリト。此船ノ航路ヲ見出ス作圖法如何。

3. 定點 P ヨリ直角ヲナス二直線ヲ引キ,定直線 XY ヨリ定長ノ線分ヲ截リ取ラシメヨ。

4. 一定直線外ニ一定點 A アリ。其反對ノ側ニアル平行線上ニ一定點 B アリ。 A ヨリ直線 AMN ヲ引キテ,其平行線ト M,N ニ於テ交ハラシメ, BM=BN ナラシメヨ。

5. 直線狀ノ鐵道線路ヲ設ケントスルニ,與ヘラレタル三ツノ地點ヨリ其線路ニ至ル距離ヲ相等シカラシメントス,線路ノ位置ヲ定メヨ。

6. 所設ノ圓 O ノ周上ノ所設ノ點 M ヨリ弦 MN ヲ引キ,所設ノ弦 AB ニテ二等分セラルヽヤウニセヨ。

7. 所設ノ點ヲ過グル直線ヲ引キ所設ノ二組ノ平行線ニヨリ等長ノ線分ヲ夾ミ取ラルヽヤウニセヨ。

8. 所設ノ二ツノ同心圓ノ周ニ交ハル直線ヲ引キ,外圓ノ弦ガ内圓ノ周ニテ三等分セラルヽヤウニセヨ。

9. 一定點 P ヲ通過スル一直線ヲ引キ,所設ノ角ノ二邊ヲ A 及ビ B ニテ截リ,矩形 PA.PB ガ定量 K^2 ニ等シキヤウニセヨ。

10. 相交ハル二定圓ノ交點ノ一ツ A ヲ過ギテ一直線ヲ引キ,各圓周トノ交點ヲ夫々 P, Q トシ,矩形 AP.AQ ヲ所設ノ正方形 K^2 ニ等シクセヨ。

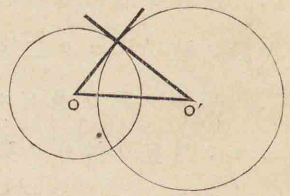
〔23〕 圓周ヲ畫ク問題

1. 所設ノ二點ヲ過ギ所設ノ圓ニ交ハル圓周ヲ畫キ,其共通弦ヲ所設ノ直線ニ平行ナラシメヨ。

2. 定點ヲ中心トシ定直線ニ交ハル圓ヲ畫キ,生ズル所ノ弓形ノ中ノ一ツノ含ム角ヲ所設ノ角ニ等シクセヨ。

3. 定點ヲ中心トスル圓周ヲ畫キ,與ヘラレタル平行線ト夫々X,Yニ於テ交ハラシメ,線分XYヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。

4. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツニ於ケル兩圓ノ切線ガ直交スルトキハ,其切線ハ夫々其兩圓ノ中心ヲ過グ。



カクノ如キ二圓ヲ**直交圓**ト云フ。

又兩圓周ノ交點ニ於ケル兩圓ノ切線ノナス角ヲ其兩**圓周ノ交角**ト云フ。

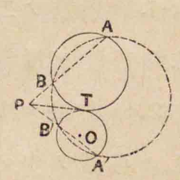
5. 定圓ト其周上ノ定點ニ於テ直交スル定半徑ノ圓周ヲ畫ケ。

6. 二定點ヲ過ギ一定圓ニ直交スル圓ヲ畫ケ。

7. 所設ノ直線XY上ノ所設ノ點Pヲ過ギ,中心ハXY上ニアリテ所設ノ圓ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

8. 一直線上ニアラザル三點ノ各ヲ中心トシ,互ニ相切スル三圓ヲ畫ケ。

9. 二定點ヲ過ギ,一定圓ニ切スル圓周ヲ畫ケ。



10. 二定點A,Bヲ通ル圓周ヲ畫キ,此

圓周ニテ一定圓Oノ周ヲG,Hニテ截リ,GHヲ圓Oノ直徑ナラシメヨ。

11. 所設ノ圓ヲ二等分スル同心圓周ヲ畫ケ。

12. 所設ノ二點ヲ過ギ,所設ノ圓周ヲ1:2ニ分ツ圓周ヲ畫ケ。

〔24〕 三角形ヲ畫ク問題

1. 次ノモノヲ知リテ三角形ヲ作レ。

〔1〕 底,他ノ二邊ノ和及ビ外接圓ノ半徑。

〔2〕 頂角,高サ及ビ底ヘノ中線。

〔3〕 三中線。

〔4〕 頂角及ビ其二邊ヘノ中線。

〔5〕 底ノ兩端ヨリ出ヅル中線ト高サ。

〔6〕 頂角ト其一邊ヘノ中線ト面積。

〔7〕 二邊ト其二邊ニ對スル角ノ差。

〔8〕 底,他ノ二邊ノ和ト底ノ一端ヨリ對邊ニ至ル距離。

〔9〕 一角,一ツノ高サ及ビ外接圓ノ半徑。

〔10〕 底,一底角ト內接圓ノ半徑。

〔11〕 周,頂角ト其角頂ヨリ對邊ヘノ垂線。

〔12〕 一角ト高サト面積。

〔13〕 底 BC,頂點 A ヨリ BC ヘ下セル垂線ノ足 D ノ位置,及ビ頂角ノ二邊ノ平方ノ和。

2. 等速度ヲ以テ一直線ニ航行スル汽船アリ。或人一定地點ヨリ,其距離ヲ觀測セシニ,最初ハ d_1 浬ナリシガ30分ヲ經テ d_2 浬トナリ,更ニ30分ヲ經タルニ d_3 浬トナレリ。同船ガ一時間ニ進メル距離ヲ求ムベキ作圖法ヲ問フ。

3. 次ノモノヲ知リテ正三角形ヲ作レ。

〔1〕 一邊ト高サトノ和。

〔2〕 一ツヅツ頂點ヲ置クベキ三ツノ平行線。

〔3〕 一ツヅツ頂點ヲ置クベキ三ツノ同心圓。

〔4〕 一頂點ト他ノ二頂點ヲ一ツヅツ置クベキ二直線。

〔5〕 一頂點ト他ノ二頂點ヲ一ツヅツ置クベキ一直線ト一圓周。

4. 次ノモノヲ與ヘテ二等邊三角形ヲ作レ。

〔1〕 底ト其一端ヨリ出ヅル垂線。

〔2〕 周ト高サ。

〔3〕 頂角ト内接圓ノ半徑。

5. 底角ガ頂角ノ二倍ナル等脚三角形ヲ作レ。

6. 次ノモノヲ與ヘテ直角三角形ヲ作レ。

〔1〕 直角頂ヨリ出ヅル中線ト垂線。

〔2〕 斜邊ト内接圓ノ半徑。

7. 直角ノ頂點ト他ノ二頂點ヲ一ツヅツ置クベキ平行線トヲ與ヘテ直角二等邊三角形ヲ作レ。

〔25〕 四角形ヲ畫ク問題

1. 次ノモノヲ與ヘテ四邊形ヲ作レ。

〔1〕 一組ノ對邊ト三ツノ角。

〔2〕 四邊ト一組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分。

2. 所設ノ四邊形ニ外接スルヤウニ正方形ヲ作レ。

3. 一頂點 A ト之ニ隣ラザル邊(又ハ其延長)上ニアルベキ二點 B,C トヲ與ヘテ正方形ヲ作レ。

4. 二等圓ガ相切スルトキ其圓周ト共通切線トノ間ニ正方形ヲ畫ケ。但シ正方形ノ頂點ノ二ツハ一ツヅツ兩圓周上ニアリテ,一邊ハ共通切線上ニアルモノトス。而シテ圓ノ直徑ヲ 5cm トシテ内接正方形ノ一邊ヲ求メヨ。

5. 次ノモノヲ與ヘテ矩形ヲ作レ。

〔1〕 周ト對角線。

〔2〕 外接セル平行四邊形ト其一邊上ノ一頂點。

6. 兩底ト兩對角線トヲ與ヘテ梯形ヲ作レ。

7. 外接圓ノ半徑,兩底ノ差及ビ高サヲ知リテ等脚梯形ヲ作レ。

8. 一邊ヲ知リテ所設ノ圓ニ外接スル菱形ヲ作レ。

〔26〕 相似法, 平行移動法及ビ對稱法ヲ用フル問題

1. 二邊ノ和ト二角トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

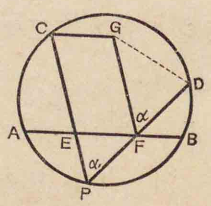
2. 所設ノ三角形 ABC ノ邊 AB 上ニ一點 D ヲ取リ, AC 上ニ一點 E ヲ取リ, BD=DE=EC ナラシメヨ。

3. 頂角,高サ及ビ頂點ヨリ底ヘ下セル垂線ガ底ヲ內分スル比ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

4. 所設ノ三角形ニ內接シ,其三邊ガ夫々所設ノ三直線ニ平行ナル三角形ヲ作レ。

5. 所設ノ線分ヲ二分シ,其二ツノ分ノ差ト,比例中項トヲ等シクセヨ。

6. AB ハ一ツノ圓ノ弦ニシテ其一方ノ弧上ニ二點 C, D アリ。今之ト共軛ナル弧ノ上ニ一點 P ヲ求メ, PC, PD ガ弦 AB ヨリ截リ取ル部分ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。



注意 或線分ヲ之ニ平行ニ適當ノ位置ニ移動セシメ

テ解法ヲ工夫スル方法ヲ**平行移動法**ト云フ。

7. 四邊ノ長サヲ與ヘテ梯形ヲ作レ。

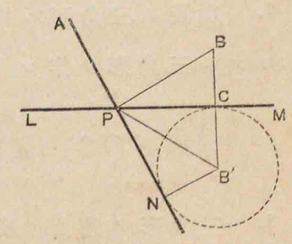
8. 定點 P ト一點 O ヨリ出ヅル三直線 OA, OB, OC ヲ與フ。 P ヲ過ギル一直線ヲ引キ, OA, OB, OC ト夫々 A, B, C ニ於テ交ハラシメ,

(1) AB=BC (2) 2AB=BC ナラシメヨ。

9. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ニ平行ニ DE ヲ引キ, AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ハラシメ, $\overline{AD}^2+\overline{CE}^2$ ヲ所設ノ量 M^2 ニ等シクセヨ。

10. 夫々二ツヅツ三點 A, B, C ニ於テ交ハル三直線ノ一ツ AB ニ垂直ナル直線 QPR ヲ引キ, AB, BC, AC ト夫々 P, Q, R ニテ交ハラシメ, PQ=PR ナラシメヨ。

11. 一直線 LM ト其同側ニ二點 A, B ヲ與ヘ, LM 上ニ一點 P ヲ求メ, ∠APL=2∠BPM ナラシメヨ。



解析 AP ヲ延長シ其上ニ一點 N ヲ取レバ

∠MPN=∠APL=2∠BPM

ナルヲ以テ, ∠MPN ノ二等分線 PB′ ヲ引キ, B ヨリ LM ニ下シタル垂線ノ延長ト B′ ニ交ハラシムレバ, B′ ハ LM ニ關スル點 B ノ對稱點ナリ。而シテ AN ハ B′ ヲ中心トシ

B'C ヲ半徑トスル圓周ニ切スルヲ要ス。

カク或直線ニ關シ或圖形ノ對稱圖形ヲ利用シテ解法ヲ考案スル方法ヲ**對稱法**ト云フ。

12. 二圓ト一直線トヲ與ヘ,此直線上ニ一點ヲ求メ,其點ヨリ其二圓ヘ引ケル切線ヲ其直線ト等角ヲナサシメヨ。

13. 中心(對角線ノ交點)ト夫々各邊上ニアルベキ四點トヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作レ。

〔27〕 多角形ノ等積變形問題

1. 所設ノ三角形又ハ平行四邊形ニ等積ニシテ,其一邊ガ所設ノ線分ニ等シキ矩形ヲ作レ。
2. 所設ノ五角形ノ三分ノ一ニ等シキ正方形ヲ作レ。
3. 所設ノ正方形ト等積ナル正三角形ヲ作レ。
4. 所設ノ三角形ニ相似ニシテ,且之ト面積ノ比ガ $m:n$ ナル三角形ヲ作レ。

〔28〕 面積ノ分割問題

1. 三角形ノ邊上ノ所設ノ點ヲ過グル直線ヲ以テ此三角形ヲ所設ノ比ニ分テ。
2. 一邊ニ垂直ナル直線又ハ所設ノ直線ニ平行ナル

直線ヲ以テ三角形ヲ二等分セヨ。

3. EF ハ BC ニ垂直ニシテ △ABC ヲ二等分スル直線ナリ。今 A ヨリ BC ニ至ル垂線ノ足ヲ D トシ, $BD=m$, $CD=n$ トシ, AD ト EF トノ距離ヲ x トシ, x ヲ m ト n トニテ表ハセ。
4. 一頂點ヲ過グル直線ヲ以テ四角形ヲ二等分セヨ。
5. 一邊上ノ所設ノ點ヲ過グル直線ヲ以テ四角形ヲ二等分セヨ。
6. 對角線ニ平行ナル二直線ヲ引キテ平行四邊形ヲ三等分セヨ。
7. 三角形ノ面積ヲ一邊ニ平行ナル二直線ヲ以テ三等分セヨ。又之ヲ $l:m:n$ ノ比ニ分テ。
8. 梯形ヲ底ニ平行ナル直線ヲ以テ二等分セヨ。
9. 一ツノ六角形ノ三雙ノ對邊ハ夫々平行ニシテ且相等シ。與ヘラレタル點ヲ過ギ直線ヲ引キ之ヲ二等分セヨ。
10. 圓ヲ二ツノ同心圓ニテ三等分セヨ。

又之ヲ $l:m:n$ ノ比ニ分テ。

〔29〕 極大極小問題

1. 一定直線上ニ一點ヲ求メ,

〔1〕 其直線ノ同側ニアル所設ノ二點ニ至ル距離ノ和ヲ最小ナルヤウニセヨ。

〔2〕 其直線ノ兩側ニアル二點ニ至ル距離ノ差ヲ最大ナルヤウニセヨ。

2. 一直線 LM ト其同側ニ二點 A, B ヲ與フ。 LM 上ニ二點 C, D ヲ求メ, CD ヲ所設ノ線分 d ニ等シカラシメ且 AC+CD+DB ヲ最小ナラシメヨ。

3. 鋭角 C 内ニ二定點 P, Q アリ,今 P ヨリ此角ノ一邊上ノ點 A ニ至リ, A ヨリ他ノ邊上ノ點 B ニ至リ, B ヨリ Q ニ至ル徑路 PABQ ガ最短ナルヤウニ A, B ヲ定メヨ。

4. 河岸ヲ距ル或距離ノ點 A ニ民家アリ。 其河ヲ隔テテ對岸ヲ距ル或距離ノ點 B ニ井戸アリ。 今 A ヨリ最モ近キ距離ヲ以テ B ニ至リ得ルヤウニ河ニ橋ヲ架セントス。 河岸ノ架橋點ヲ定メヨ。 但シ河ノ兩岸ハ平行ニシテ,橋ハ河岸ニ直角ニ架スルモノトス。

5. 所設ノ直線上ニ一點ヲ求メ,其點ヨリ定圓ヘ引ケル切線ガ最小ナルヤウニセヨ。

6. 定角 XOY 内ノ一定點ヲ A トス。 今 OY 上ニ一點 P ヲ求メ, AP ト P ヨリ OX ヘノ距離トノ和ヲ最小ナルヤウニセヨ。

7. 平板上ニ二箇ノ極メテ細キぴん P, Q ヲ固定シ,三角定木 ABC ヲ其二邊 AB, AC ガ常ニ此ぴんニ觸ルヽヤウニ其板上ヲ動カストキ,尖端 A ヨリ P 及ビ Q ニ至ル長サノ和ガ最大ナルベキ A ノ位置ヲ定メヨ。

8. 圓周上ノ所設ノ二點 A 及ビ C ヲ過ギ,互ニ平行ナル二弦 AB 及ビ CD ヲ引キ,其和ヲ最大ナラシメヨ。

9. AB ハ圓ノ一定弦ナリ。 今弦 AC ヲ引キ弦 AB, AC ヲ二邊トシ,且對角線 AD ガ最大ナルベキ平行四邊形 ABDC ヲ作レ。

10. 相交ハラザル二圓ニ於テ,一ツノ圓周上ノ點ヨリ他ノ圓周上ノ點ヘ引ケル線分ノ最大又ハ最小ナル位置ヲ問フ。

11. 二定點 A, B アリ。 定直線又ハ定圓周上ニ一點 T ヲ求メ, $\angle$ATB ヲ最大ナラシメヨ。

12. 所設ノ角 XOY アリ,其内部ニ所設ノ點 P アリ。 P ヲ過ギ直線ヲ引キ OX, OY ヲ夫々 A 及ビ B ニ於テ截ル。 P ガ AB ノ中點ナルトキ $\triangle$OAB ノ面積ハ最小ナリ。

13. 底ノ長サト頂角ノ大サトガ一定セル三角形ノ中ニテ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

14. 一ツノ圓ト其外ニ二點 A, B ヲ與フ。 今圓周上ニ一點 P ヲ求メ, $\triangle$APB ノ面積ヲ最小(又ハ最大)ナラシメヨ。 但シ直線 AB ハ所設ノ圓ヲ截ラザルモノトス。

15. 中心Oナル所設ノ圓ニ其外ノ一定點Aヨリ割線ヲ引キ圓周ヲB,Cニ於テ截リ,△OBCノ面積ヲ最大ナラシメヨ。

16. 頂角及ビ二邊ノ和ガ一定ナル三角形ノ中,其二邊ノ相等シキモノガ最大面積ヲ有ス。

17. 所設ノ三角形ニ外接シ,他ノ定三角形ト相似ニシテ面積ガ最大ナル三角形ヲ畫ケ。

18. 圓ニ内接スル矩形ノ中,其面積ノ最大ナルモノハ正方形ナリ。

上文中矩形ノ代リニ多角形ヲ考フレバ如何。

---

〔30〕計算問題

1. ABCDヲ圓ニ内接セル四角形トシ, AB, CDノ延長ノ交點ヲPトシ, DA, CBノ延長ノ交點ヲQトス。$\angle APD=20^\circ$, $\angle CQD=40^\circ$ナルトキ,此四角形ノ總テノ角ヲ求メヨ。

2. 邊數ガ偶數ナル多角形ガ圓ニ内接スルトキ,一ツ置キニ取リタル内角ノ和ヲ求メヨ。

3. 圓Oノ周上ノ一點Aヨリ切線ABト弦ACトヲ引キ,各ノ長サヲ半徑ニ等シカラシメ, BCヲ結ビテ圓周

トDニ於テ交ハラシムレバ,弧ADハ圓周ノ幾分ナルカ。

4. 半徑1.8cmヲ有スル圓周アリ。此圓周ヨリ2.7cm距リタル一點Pヨリ此圓ニ二ツノ切線ヲ引キ其切點ヲA,BトセバZ弦ABノ長サハ何程ナルカ。

5. 二圓A,Bハ相等シ。兩圓外ニ一點Oヲ取リ, Bヲ中心トシOAニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ, Oヨリ此三圓ヘノ切線ヲ作ルトキハ,其三切線ヲ以テ一ツノ直角三角形ヲ組立ツルコトヲ得。

9. △ABCノ形内ニ一點Pヲ取リ, AP, BP, CPヲ結ビテ面積ヲ三等分スルトキ, AP, BC, CA, ABヲ夫々x, a, b, cトスレバ, $x^2=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$ ナリ。

7. △ABCノ三邊ヲa, b, cトシ,其内接圓及ビ傍接圓ノ半徑ヲ夫々r及ビr', r'', r'''トシ, Sヲ此三角形ノ面積トスレバ $S^2=r\,r'r''r'''$ ナリ。

又a', b', c'ヲ夫々a, b, cニ對スル高サトセバ,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'} \quad \text{ナリ。}$$

8. △ABCノ底BCヲDニ於テ分チ, BD:DCヲ$m:n$ニ等シカラシムレバ,

$$m\overline{AC}^2+n\overline{AB}^2=m\overline{CD}^2+n\overline{BD}^2+(m+n)\overline{AD}^2 \quad \text{ナリ。}$$

9. 角Aヲ直角トスル直角三角形ABCニ於テAB=8m, AC=6mナルトキ,斜邊ノ中點ニテ之ニ切シ,且邊ABニ

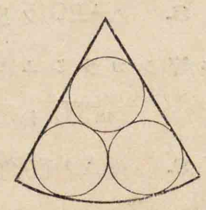
切スル圓ヲ作ルトキ其半徑幾何ナルカ。

10. 直角三角形ABCノ直角ヲ夾ム二邊BC, CAノ長サハ夫々4m及ビ3mナリ。此三角形内ニ一列ニ等圓三箇ヲ何レモBCニ切シ且一端ノ圓ハABニ,他端ノ圓ハCAニ,中間ノ圓ハ兩端ノ圓ニ切スルヤウニ容ルヽトキハ,此圓ノ半徑ハ何程カ。

11. 直角三角形ABCノ斜邊ABヲ底トシ,其高サCDヲ直徑トスル圓周ト二邊AC, CBトノ交點ヲ夫々E, Fトシ, BF, AE, BC及ビACヲ順次ニx,y,a及ビbトスレバ, $x:y=a^3:b^3$ ナリ。

12. Oヲ中心トシ,半徑ノ長サ1ナル圓ノ直徑ヲAOBトシ,弦ACヲ半徑ノ長サニ等シク作リ, OヨリACニ下セル垂線ト, Aニ於ケル此圓ノ切線トノ交點ヲDトシ, DA上ニDヨリAノ方ニ半徑ノ三倍ニ等シクDEヲ取ルトキ, BEノ長サヲ小數第五位マデ正シク算出セヨ。

13. 各邊ノ長サaナル正三角形ノ頂點ヲA,B,Cトシ,之ヲ中心トシテ畫ケル圓弧ヲ夫々BC, CA, ABトス。此等ノ圓弧ヨリ成ル弧三角形ノ面積ヲ求ム。

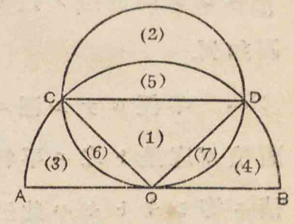


14. 圖ノ如ク互ニ外接スル半徑aナル三箇ノ圓ニ外接スル扇形ノ中心

角並ニ半徑ヲ求メヨ。

15. 60°ノ角ヲ以テ交ハル二ツノ直線アリ。其角内ニアリテ其二直線ニ切スル圓ノ半徑ヲ$a$cmトス。二ツノ切點ニヨリテ分タレタル圓弧ノ大ナル部分ト二直線トニヨリテ包マレタル風船形ノ面積ヲ求ム。

16. 圖ニ於テOACDBハ半圓, △CODハ直角二等邊三角形ニシテ斜邊CDハABニ平行,圓OCDハCDヲ直徑トス。然ルトキハ



面積 (1)=(2)=(3)+(4) 及ビ (5)=(6)+(7) ナリ。

17. △ABCノ邊AB上ノ内接圓ノ切點ヲDトシ, ABノ延長上ニ於ケル∠A内ノ傍接圓ノ切點ヲEトシ, AE=3ADナリトスルトキハ,此三角形ノ三邊ハ等差級數ヲナス。

18. 正方形ABCDノ邊ABヲ底邊トシ,邊CD上ノ一點Pヲ頂點トスル△ABPニ於テ,邊AB上ニ底邊ヲ有スル甲乙二ツノ内接スル矩形ヲ作ルニ,甲ハ横ガ縦ノ二倍乙ハ横ガ縦ノ半分ナラシムルトキハ,此兩矩形ハ相等シ。

19. 二邊ノ長サガaナル直角二等邊三角形ノ各邊上ニ各角頂ヲ占メ斜邊ニ平行ナル一邊ヲ有スル正三角形

ノ面積ヲ求メヨ。

20. 頂角ガ直角ノ半分ナル二等邊三角形ノ底邊ハ他ノ邊ノ $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 倍ナリ。

21. 一邊ノ長サ12cmナル正方形ヲ一直線ニテ三角形ト五角形トノ二部分ニ分チタルニ,此兩形ノ面積ノ比ハ $\frac{1}{5}$ ニシテ共通邊ノ長サハ10cmナリト云フ。分割線ノ位置如何。

22. 半徑 a ナル圓ニ内接スル二等邊三角形アリ。其面積ガ底邊ト之ニ平行ナル直徑ヲ二邊トスル梯形ノ面積ニ等シキトキハ,此三角形ノ面積如何。

23. 三邊ノ長サガ a,b,c ナル $\triangle ABC$ ノ各角ノ二等分線ト對邊トノ交點ヲ D,E,F トスルトキハ, $\triangle DEF$ ト $\triangle ABC$ トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

24. LM, L′M′ ヲ平行ナラザル二直線トシ,別ニ互ニ平行ナル三ツノ直線 AA′, BB′, CC′ ヲ取リ, LM トノ交點ヲ順次ニ A,B,C トシ, L′M′ トノ交點ヲ順次ニ A′,B′,C′ トス。

(甲) 直線 AB′ ト BC′ トガ平行ナルトキハ, AA′, BB′, CC′ ハ等比級數ヲナス。

(乙) 直線 AC′ ガ BB′ ヲ截ル點 O ガ BB′ ノ中點ナルトキハ, AA′, BB′, CC′ ハ調和級數ヲナス。

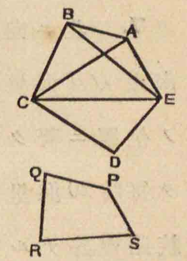
(丙) AA′, BB′, CC′ ガ等差級數ヲナスタメニハ,此三ツノ平行線ハ如何ナル位置ニアルベキカ。

25. 兩斜邊ノ相等シキ梯形アリ。兩平行邊ノ長サヲ a, b, 斜邊ノ長サヲ c トシ, a, b, c ヲ以テ此梯形ノ外接圓ノ半徑ヲ表ハス式ヲ作レ。

26. 圓ニ内接スル四角形 ABCD ニ於テ, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ トシ,對角線 AC ノ長サヲ求メヨ。

---

〔31〕 雜問題



1. A,B,C,D,E; P,Q,R,S ノ處ヲ蝶(テフ)番(ツガヒ)ニシタル圖ノ如キ二ツノ枠(ワク)アリ。此各ハ其形ガ變リ得ルヤ。若シ變ジ得ザルモノアラバ其理ヲ示セ。

2. A,B,C ガ一ツノ定圓周ノ三等分點ナルトキ,此圓ニ内接スル等角六角形 APBQCR (等邊ニアラズ)ヲ畫ケ。

3. 等角六角形ノ四ツノ邊ノ長サガ夫々順次1m, 3m, 3m, 2m ナルトキ,他ノ二邊ノ長サヲ求ム。

4. 直線 LM ノ一ツノ側ニ二點 A, B, 他ノ側ニ一點 C アリ。A, B ヨリ LM ニ下セル垂線ノ和ガ C ヨリ下セル垂線ニ等シキトキハ, LM ハ $\triangle ABC$ ノ重心ヲ過グ。

5. 互ニ垂直ニ交ハル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ定長ヨリ小ナル如キ點ハ如何ナル範圍內ニアルベキカ。

6. 矩形ノ撞球臺アリ。

(1) 任意ノ一點ヨリ球ヲ撞キ出シ各邊ニ一度ヅツ觸レテ原位置ニ歸著セシメントスルニハ,如何ナル方向ニ撞クベキカ。

(2) 臺上ニアル二球ノ一ツヲ如何ナル方向ニ撞クトキハ,四邊ニ一度ヅツ觸レタル後他ノ球ニ突キ當ルベキカ。

7. 北ニ向ヒ毎時10海里ノ速サニテ進行スル旗艦ノ南東$\sqrt{2}$海里ノ位置ニ一驅逐艦アリ,旗艦ノ西方1海里ノ位置ニ著クベシトノ電命ヲ受ケタリ。驅逐艦ノ速サヲ毎時20海里ナリトセバ,指定ノ位置ニ到ルマデノ最短航路幾許ナルベキカ。

8. 三角形ノ周邊ノ長サガ一定ニシテ,一邊ノ長サガ他ノ一邊ノ長サノ二倍ナルトキ,最短邊ノ周邊ニ對スル比ハ$\frac{1}{6}$ト$\frac{1}{4}$トノ間ニアリ。

9. $\angle AOB$ノ二等分線ヲOP_1トシ,$\angle AOP_1$ノ二等分線ヲOP_2トシ,$\angle P_2OP_1$ノ二等分線ヲOP_3トシ,以下此方法ヲ繼續スレバ,二等分線ハ$\angle AOB$ノ三等分線ノ一ツニ限リナク接近スルコトヲ證明セヨ。

10. 一ツノ三角形ノ各外角ノ二等分線ノ作ル三角形ヲ第一新三角形トシ,此第一新三角形ノ各外角ノ二等分線ノ作ル三角形ヲ第二新三角形トシ,次次ニ此作圖法ヲ繼續スルトキ生ズル三角形ハ,次第ニ正三角形ニ近ヅクコトヲ證明セヨ。

11. n邊ノ凸多角形ガ等角ナルトキ,一邊ヨリ數ヘ始メテ何番目ノ邊ガ初メノ邊ニ平行ナルカ。

12. 同ジ底BC上ニ其兩側ニ兩等積三角形ABC, A′BCガ立ツトキハ,AA′ハBCニテ二等分セラル。

13. 任意ノ四角形ABCD內ノ一點Pヲ此四角形ノ頂點A, B, C, Dニ結ビテ生ズル四ツノ三角形ガ總テ等積トナルヤウニPヲ定メ得ルカ。

計算問題ノ答

問題 1.

1. $60°$

問題 3.

5. $x=c-a-b$　　6. 10　　7. 20

問題 7.

4. $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　5. 2.1平方米(約)

問題 12.

11. $\dfrac{ab}{a+b}$

雜題 2.

16. $6a$

問題 14.

2. 5:3　　3. 4cm, 3cm ; 28cm, 21cm ; 24cm

問題 15.

7. $30\sqrt{3}$m　　8. $\dfrac{ah}{a-b}$

問題 18.

2. $3\sqrt{3}$cm, $3\sqrt{6}$cm

4. 正方形ノ一邊ヲaトセバ $\dfrac{a^2}{2}(\pi-2)$

雜題 3.

8. 4.5m

附　錄

雜題一

〔1〕 3. 60°　4. 30°　7. 45°

〔3〕 4. 60°

〔6〕 6. 156°, $147°16'12''\frac{9}{11}$　8. 12

〔9〕 4. 258平方粍

〔10〕 2. 30平方米　3. $6\sqrt{10}$平方米　5. 86.6m

〔11〕 6. 20m

〔13〕 6. $\frac{5}{4}\sqrt{7}$cm

〔14〕 9. 40°, 75°, 65°

〔15〕 1. 62°, 93°, 118°, 87°　9. $5\sqrt{6}$cm　10. 2平方米

〔17〕 3. 1:3　5. $\frac{9}{4}$m, $\frac{15}{4}$m

〔16〕 5. 4:1　8. 40.32平方粍

〔19〕 4. $\frac{24}{7}$平方粍　7. 12cm　14. 1.23cm

〔21〕 2. 20.458m　3. 78.54平方米　4. $\frac{25}{\pi}$平方米

5. $\frac{6}{\pi}$m　7. 768平方粍　8. 0.64平方粍

9. $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{2}a^2$　10. $\frac{14+\pi}{8}a^2$

雜題二

〔11〕 5. $\frac{1}{5}$

〔25〕 4. 1cm

〔30〕 1. A=60°, B=80°, C=120°, D=100°

2. $2n-1)$直角　3. $\frac{1}{12}$ 或ハ $\frac{5}{12}$

4. $\frac{18\sqrt{21}}{25}$cm　9. $\frac{5}{3}$m　10. $\frac{1}{2}$m

12. 3.14159　13. $\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{3})a^2$

14. $(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)a$　15. $(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi)a^2$

19. $\frac{\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})a^2$

21. 一頂點ヨリ夫々6cm, 8cmノ點ヲ結ブ直線。

22. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)a^2$　23. $\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$

24. (丙)BガACノ中點ナルトキ。

25. $c\sqrt{\frac{c^2+ab}{(2c+a-b)(2c-a+b)}}$

26. $\sqrt{\frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}}$

〔31〕 8. 2m, 4m　7. $\frac{10}{3}$海里

11. 邊數偶數$2n$ナルトキハ第$(n+1)$邊。

邊數奇數ナルトキハ互ニ平行ナル邊ナシ。

中等教育 幾何學教科書（平面之部）

定價金八拾八錢　昭和三年度臨時定價 金壹圓四拾六錢

檢

著作權法
第三十二條ノ一
練習用ノタメニ著作シタル問題ノ解答書ヲ發行スル者ハ僞作者ト看做ス

大正二年十二月一日　印刷	大正二年十二月四日　發行
大正五年十二月四日　修正再版發行	大正五年十二月廿八日　訂正三版發行
大正十一年十二月廿三日　修正四版發行	大正十二年二月八日　訂正五版發行
大正十四年二月十五日　修正六版發行	大正十四年三月十二日　訂正七版發行
昭和二年九月廿七日　修正八版印刷	昭和二年九月三十日　修正八版發行

昭和二年十二月　二　日訂正九版印刷
昭和二年十二月　五　日訂正九版發行

著作者　林　鶴一

東京市小石川區小日向水道町八十四番地
發行兼印刷者　株式會社 東京開成館
代表者　松本繁吉

東京市小石川區小日向水道町八十四番地
發行所　株式會社 東京開成館
（振替貯金口座）東京第五參貳番

大阪市東區北久寶寺町心齋橋筋角
販賣所　三木佐助

東京市日本橋區數寄屋町九番地
販賣所　林平次郎

東京開成館