NEW PLANE GEOMETRY

H. TERAO
R. FUZINO

FUZAMBO

文部省檢定濟
昭和三年十二月二十三日　中學校數學科用

中學數科

新平面幾何

理學博士　寺尾　壽
藤野了祐
共編

【昭和四年版】

東京神田
冨山房

緒　言

本教科書ハ初版以來絶エズ改訂ヲ加ヘ,常ニ世運ノ進歩ニ伴ヒ,且ツ實際使用上ノ圓滑ヲ期シツヽアツタガ,本版デハ一層新時代ニ適應スルヤウニ工夫ヲ重ネ,更ニ好意ヲ以テ寄セラレタ多數實地教授者諸氏ノ意見ヲ十分參酌シタ結果

(1)　文章ヲ口語體ニシタコト

(2)　例題ヲ精選シテ簡易適切ナモノニシタコト

(3)　實用的事項ヲ増シタコト

ソノ他全體ニ亘ツテ種々ノ改訂ヲ施シ,論理ノ正確ヲ失ハナイ範圍ニ於テ出來ルダケ簡易化シ,現代幾何學教授ノ目的ニ對シテ遺憾ナイヤウニ努メタ.

ナホ本書ヲ使用セラルル諸賢ガ,更ニ本書ニツイテ實際教授上ニ於ケル貴重ナル高見ヲ寄セラレ,本書ヲシテ常ニ完

壁タラシメル資ニ供セラレンコトヲ偏ニ懇請スル.

昭和三年十月　編者識ス

目次

中學教科

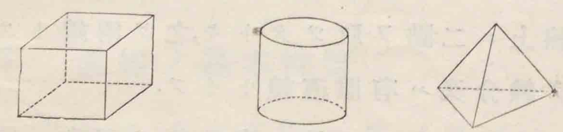
新平面幾何

第一篇

緒論

1. 立體,面,線,點

物體ヲ其ノ形チ,大サ及位置ダケニツイテ考ヘタトキ,之ヲ立體トイフ.



立體ノ境界ヲ面トイフ. 面ノ境界ヲ線トイフ. 線ノ境界ヲ點トイフ.

點ハ位置ダケアツテ大サガナイ. 線ハ長サダケアツテ幅モ厚サモナイ. 面ハ廣サダケアツテ厚サガナイ.

點ヲ圖ニ表スニハ ● ヲ用ヒル. マタ點ノ名ニハ一ツノ大ろーま字A,Bナドヲ使フ,例ヘバ點A,點Bナド.

2. 直線

直線トハ眞直(マツスグ)ナ線ノコトデアル.

例ヘバ強ク張ツタ絲ナドデ直線ノ觀念ガ得ラレル.

直線ハ双方ヘ限リノナイモノトスル.

直線ヲ,其上ノ或一點デ二ツニ分ケタトキ,其一方ヲ**半直線**トイヒ,其點ヲ其ノ半直線ノ**原點**トイフ.

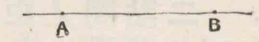
直線上ニ二點ヲ取ツタトキ,之ヲ**兩端**トスル部分ヲ**線分**又ハ**有限直線**トイフ.

有限直線ニ對シテ只ノ直線(卽チ双方ヘ限リノナイト考ヘル直線)ヲ**無限直線**トモイフ.

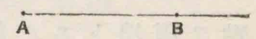
無限直線上ニ取ツタ半直線又ハ線分ノ殘リノ部分ヲ其ノ**延長**トイフ.

紛レル恐ノナイトキニハ半直線又ハ有限直線ノコトヲ單ニ直線トイフコトモアル.

直線ヲ表スニハ通例其上ノ任意ノ二點ノ名ヲ續ケテ書ク,例ヘバ直線ABナド.

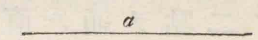


半直線ノ場合ニハ先ヅ原點ノ名ヲ書キ,次ニ其上ノ任意ノ一點ノ名ヲ書ク.



線分ノ場合ニハ其ノ兩端ノ名ヲ書ク.

マタ唯一ツノ文字デ直線(マタハ半直線,線分)ヲ表スコトモアル,例ヘバ直線 a ナド.



直線デナイ線ヲスベテ**曲線**トイフ.

3. 直線ノ基本性質

二定點ヲ通ル直線ハ唯一ツアル.

從テ二定點ヲ通ル直線ヲ幾ツ引イテモ是等ハ全ク相合スル. マタ二直線ハ其上ノ二點ヲ合セレバ全ク相合スル. 因テ

一點デ出會フ二直線ハ全ク相合シナイ限リハ他ノ點デハ出會ハナイ.

唯一點デ出會フ二直線ハ相交ルトイフ.

4. 二點間ノ距離

二點間ノ距離トハ此ノ二點ヲ兩端トスル線分ノコトデアル.

二點ヲ兩端トスル線分ヲ作ルコトヲ此ノ二點ヲ結ビツケル(又ハ略シテ結ブ)トイフ.

5. 平面

平面トハ一ツノ面デアツテ,其上ノ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全ク其ノ面上ニアルモノヲイフ.

面ガ平ラデアルカドウカヲ調ベルタメニ定木ノ緣ヲ色々ノ方向ニ之ニ當テ,ソレガ其面ニ密着スルカドウカヲ見ルノハコノタメデアル

平面デナイ面ヲスベテ曲面トイフ.

6. 圖形

立體,面,線,點又ハ是等ノ幾ツカノ集リヲ圖形トイフ.

スベテノ部分ガ同一ノ平面上ニアル圖形ヲ平面圖形トイフ.

二ツノ圖形ノ各ヲ互ニ他ノ圖形ノ上ニ,其ノ總テノ部分ガ合スルヤウニ重ネ得ルトキハ,此ノ二ツノ圖形ハ全等マタハ合同デアルトイフ.

7. 幾何學

幾何學ハ圖形ノ性質ヲ研究スル學科デアル.

平面幾何學ハ平面圖形ノ性質ヲ研究スル學科デアル

8. 定義,公理,定理

或語ノ意義ヲ定メルタメノ陳述ヲ定義トイフ.

例ヘバ第4節——第7節ニ述ベタノハ夫々二點間ノ距離,平面,圖形,幾何學トイフ語ノ定義デアル.

吾人ノ常識又ハ經驗ニヨツテ眞デアルト認メル事柄デ,推理ノ基礎トスルモ

ノヲ公理トイフ.

第3節ニ述ベタ「二定點ヲ通ル直線ハ唯一ツアル」トイフノハ直線ノ公理デアル.

既知ノ事實カラ推理シテ其ノ眞ナルコトヲ證明シ(證據立テ)得ル事柄ヲ定理トイフ.

定理ヲ證明スルタメニ使フ既知ノ事實ハ定義,公理及既ニ證明ヲ經タ定理デアル.

公理又ハ定理カラ容易ニ推定シ得ラレル事柄ヲ其公理又ハ其定理ノ系トイフ.

第3節ニ述ベタ「一點デ出會フ二直線ハ全ク相合シナイ限リハ他ノ點デハ出會ハナイ」トイフノハ直線ノ公理ノ系デアル.

第二篇

直線圖形

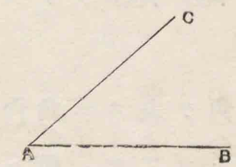
第一章 角及垂線

9. 定義(角)

一點カラ引イタ二直線ハ角ヲナス或ハ角ヲ夾ムトイフ.

其點ヲ角ノ頂點,其直線ノ各ヲ角ノ邊トイフ.

圖ハAカラ引イタ二直線AB, ACノナス角, Aハ角ノ頂點, AB, ACハ何レモ此角ノ邊デアル.



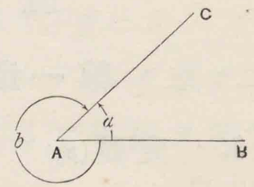
角トイフ文字ノ代リニ符號∠ヲ用ヒル.

角ヲ表スニハ頂點ノ名ヲ各邊上ノ任意一點ヅヽノ名ノ間ニオク. 例ヘバ上ノ角ヲ∠BAC或ハ∠CABト書ク.

但シ他ト紛レル恐ノナイトキハ唯頂點ノ名

ダケデ表ス. 例ヘバ上ノ角ヲ $\angle A$ ト書ク.

$\angle BAC$ ノ頂點 A カラ引イタ直線ガ其ノ角ノ平面上デ,頂點 A ノ周リニ同ジ向キニ廻ツテ AB ノ位置カラ AC ノ位置マデ來タトキ,其ノ廻リ方ノ多少ニヨツテ其ノ角ノ大サヲ計ル.



直線ガ AB ノ位置カラ AC ノ位置マデ廻ル仕方ハ上圖ニ矢ノ向キデ示シタ二通リアル,從テ AB, AC ノナス角モ亦二ツアルト考ヘラレル.

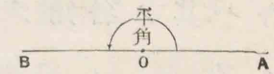
角ヲ表スニ,角內ニ一ツノ文字ヲ書イテ示スコトガアル. 例ヘバ上圖ノ二角ヲ夫々 $\angle a$, $\angle b$ ト書クナド.

上圖 $\angle a$, $\angle b$ ノヤウニ,頂點及二邊ヲ共有スル二角ハ互ニ**共軛**デアルトイフ,而シテ其中ノ大キイ方 (上圖 $\angle b$) ヲ**優角**,小サイ方 (上圖 $\angle a$) ヲ**劣角**トイフ.

注意 通常單ニ角トイヘバ劣角ノコトデア

ルトスル.

一邊ガ他ノ邊ノ延長デアル角ヲ**平角**トイフ.



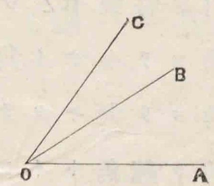
二ツ以上ノ直線ハ全ク重ネ合セルコトガ出來ルカラ

平角ハスベテ相等シイ.

平角ノ共軛角ハ亦平角デアル.

10. 定義(接角)

頂點及一邊ヲ共有シ,其邊ノ兩側ニアル二角ノ各ヲ他ノ角ノ**接角**トイフ.



圖ノ $\angle AOB$, $\angle BOC$ ハ互ニ接角デアル.

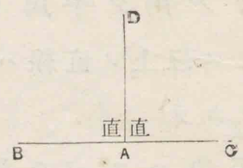
二ツノ接角ノ共有邊ヲ除イテ考ヘタ角ヲ此二角ノ**和**トイフ.

上圖 $\angle AOC$ ハ $\angle AOB$ ト $\angle BOC$ トノ和デアル.

11. 定義(直角)

直線上ノ一點カラ一ツノ直線ヲ引ク

トキニ出來ル二ツノ接角ガ相等シイトキハ,其ノ各角ヲ直角トイフ.



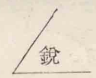
圖デ $\angle BAD=\angle CAD$ トスレバ,其ノ各ハ直角デアル.

直角ハ平角ノ半分デアル. 故ニ直角ノ大サハ一定デアル. 卽チ

直角ハスベテ相等シイ.

ソコデ角ノ單位ニハ直角ヲ用ヒル.

直角ヲ符號 R∠ デ表ス.



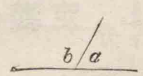
直角ヨリ小サイ角ヲ**銳角**トイフ.

直角ヨリ大キクテ2直角ヨリ小サイ角ヲ**鈍角**トイフ.

12. 定理

次ノ四ツノ定理ハ角ノ和ノ定義カラ直ニ推定シ得ラレル.

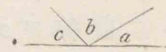
1. 直線上ノ一點カラ一ツノ直線ヲ引イテ出來



$\angle a+\angle b=2R\angle$

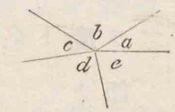
ル二ツノ接角ノ和ハ2直角ニ等シイ.

2. 直線上ノ一點カラ幾ツカノ直線ヲ其ノ同ジ側ニ引イテ出來ル次々ノ接角ノ和ハ2直角ニ等シイ.



$\angle a+\angle b+\angle c=2R\angle$

3. 一點カラ幾ツカノ直線ヲ引イテ出來ル次々ノ接角ノ和ハ4直角ニ等シイ.



$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e=4R\angle$

4. 二ツノ接角ノ和ガ2直角ニ等シケレバ,其ノ共通デナイ二邊ハ一直線ヲナス.(1ノ圖ヲ見ヨ)

例題

1. 互ニ共軛ナル二角ガ相等シイトキハ,各角ノ大サハ幾ラカ. 180°.

2. 角ノ二等分線(頂點カラ角內ニ引イテ其角ヲ二等分スル半直線)ノ延長ハ其ノ共軛角ヲ二等分スル.

3. 一點カラ四ツノ半直線ヲ引クトキ出來

ル次々ノ四ツノ接角ノ中,隣リ合ハナイ角ガ二ツヅヽ夫々相等シケレバ,是等ノ四ツノ半直線ハ二直線ヲナス. 頂對角は相等しい

13. 定義(角ノ單位)

實用上デハ通例直角ノ$\frac{1}{90}$ヲ角ノ基本單位ニスル,之ヲ**度**ト名ヅケル.

即チ　1直角＝90度

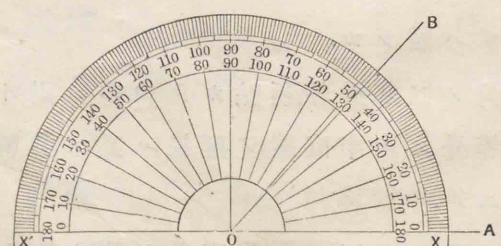
度ノ下ニ補助單位トシテ**分**,**秒**ヲ用ヒル.

1度＝60分,　　1分＝60秒

度,分,秒ヲ夫々符號 °, ′, ″ デ表ス. 例ヘバ58度47分23秒ヲ 58°47′23″ ト書ク.

注意　紙面ニ畫イタ角ヲ測ルニハ通例分度器ヲ用ヒル.

例ヘバ次圖ノ ∠AOB ハ 48°デアル.



例題

1. 75°ヲ直角ノ分數デ表セ. $\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$R∠
2. 0.75直角ハ幾度カ. 90×0.75＝

14. 定義(餘角,補角)

二角ノ和ガ直角ニ等シイトキ,其ノ各角ヲ他ノ角ノ**餘角**トイフ.

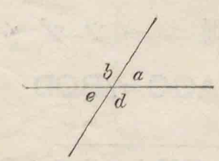
二角ノ和ガ2直角ニ等シイトキ,其ノ各角ヲ他ノ角ノ**補角**トイフ.

例題

1. 次ノ各角ノ餘角ヲ言ヘ.
   75°　60°　45°
   15°,　30°,　45°,　71°33′,　18°27′4″
2. 次ノ各角ノ補角ヲ言ヘ.
   45°,　60°,　61°5′　108°32′,　134°46′16″ (180°より引く)

15. 對頂角

定義　二直線ガ相交ツテ出來ル四ツノ角ノ中,隣リ合ハナイ二ツノ角ヲ**對頂角**トイフ.

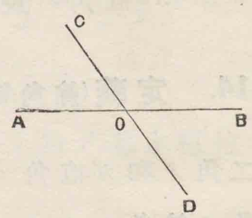


圖デ∠aト∠cトハ對頂角デアル. 又∠bト∠dト

ハ對頂角デアル.

定理 對頂角ハ相等シイ.

【特述*】 二直線AB, CDガ點Oデ交レバ



$\angle AOC=\angle BOD$

$\angle AOD=\angle BOC$

證明

$\angle AOC=\angle AOB-\angle COB=2R\angle-\angle COB$

$\angle BOD=\angle COD-\angle COB=2R\angle-\angle COB$

$\therefore\ \angle AOC=\angle BOD$

同様ニ $\angle AOD=\angle BOC$

注意 直線ABヲOノ周リニ廻シテ半直線OAヲ半直線OCノ上ニ重ネレバAOノ延長OBハCOノ延長ODノ上ニ重ナル. 故ニOAガ廻ツタ角AOCトOBガ廻ツタ角BODトノ等シイコトガ分カル.

系 直線AB上ノ一點Oカラ其ノ兩側ニ一ツヅヽ半直線OC, ODヲ引イテ$\angle AOC=\angle BOD$ ナルヤウニスレバ,此ノ二

* **特述**トハ定理ノ意味ヲ,符號ヲ使ツテ,再ビ言ヒ直シタモノノコトデアル.

ツノ半直線ハ一直線ヲナス.

例題

1.* 二直線ガ相交ツテ出來ル四ツノ角ノ中,一ツガ直角ナラバ,他ノ三ツノ角モ皆直角デアル. 対頂角

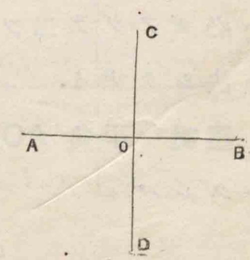
2.* 對頂角ノ一方ノ二等分線ノ延長ハ亦他方ヲ二等分スル. 矢張り対頂角

3*. 對頂角ノ各ノ二等分線ハ一直線ヲナス.

16. 定義(垂線,斜線)

二直線ガ相交ツテナス角ガ直角ナラバ,此ノ二直線ハ互ニ垂直デアルトイフ. 其中ノ一ツヲ他ノ垂線トイフ,而シテ其ノ交點ヲ垂線ノ足トイフ.

圖デ$\angle AOC$ガ直角(從テ他ノ三ツノ角モマタ直角)ナラバABハCDノ垂線デ,CDハABノ垂線デアル,而シテ其ノ足ハ何レモOデアル.



* 番號ノ肩ニ*ヲ附ケタ問題ハ特ニ必要ナモノデアル.

二直線ガ互ニ垂直ナルコトヲ,此ノ二直線ガ直角ニ交ル又ハ直交スルトモイフ.

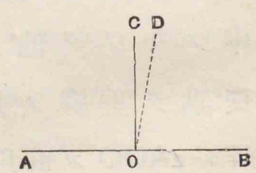
AB, CD ガ互ニ垂直ナルコトヲ $AB \perp CD$ ト書ク.

二直線ガ相交ツテナス角ガ直角デナケレバ,此ノ二直線ノ一ツヲ他ノ斜線トイフ,其ノ交點ヲ斜線ノ足トイフ.

17. 定理

定直線上ノ一定點ヲ通ツテ此直線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアル.

【特述】定直線 AB 上ノ一定點 O ヲ通ツテ AB ニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアツテ二ツ以上ハ決シテナイ.



證明 平角 AOB ヲ二等分スル直線ヲ OC トスレバ

$$\angle AOC = R\angle$$

$$\therefore OC \perp AB$$

故ニ O ヲ通ツテ AB ニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアル.

次ニ O ヲ通ツテ OC 以外ノ直線 OD ヲ引ケバ $\angle AOD$ ハ直角デナイ.

故ニ OD ハ AB ニ垂直デナイ.

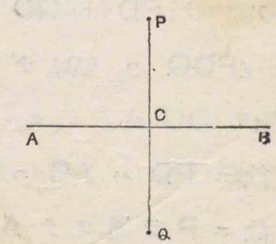
故ニ O ヲ通ツテ AB ニ垂直ナル直線ハ唯一ツダケデアル.

18. 定理

定直線外ノ一定點ヲ通ツテ此直線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアル.

證明 定直線ヲ AB トシ,其外ノ一定點ヲ P トスル.

AB ヲ折目トシテ平面ノ P ノアル側ヲ他ノ側ノ上ニ折返ストキ P ガ落チルベキ位置ヲ Q トシ,P ト Q トヲ結ビツケ,ソレト AB トノ交點ヲ C トセヨ.



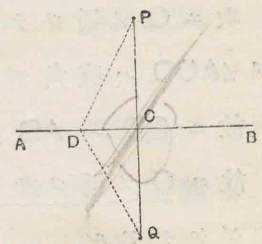
サウスレバ實際折返セバ P ハ Q ニ重ナルノ

ダカラ線分 PC ハ線分 QC ニ重ナラネバナラヌ. 従テ

$$\angle PCB=\angle QCB$$

$$\therefore\quad \angle PCB=R\angle$$

$$\therefore\quad PC\perp AB$$



故ニ P ヲ通ッテ AB ニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアル.

次ニ AB 上ニ C ノ外ニ任意ノ一點 D ヲ取ッテ P ト D, 及 Q ト D ヲ結ビツケヨ. サウスレバ實際折返セバ P ハ Q ニ重ナルカラ PD ハ QD ニ重ナル, 従テ

$$\angle PDC=\angle QDC$$

デアッテ, PD ト QD トハ一直線ニナラナイカラ $\angle PDQ$ ハ $2R\angle$ デナイ, 因テ $\angle PDC$ ハ直角デナイ.

故ニ PD ハ AB ニ垂直デナイ.

故ニ P ヲ通ッテ AB ニ垂直ナル直線ハ唯一ツダケデアル.

19. 定義(點ト直線トノ距離)

直線外ノ一點カラ此直線ニ引イタ垂線又ハ斜線ノ長サトイフノハ, 其點ト其ノ垂線又ハ斜線ノ足トノ間ノ距離ノコトデアル.

直線外ノ一點カラ此直線ニ引イタ垂線ノ長サヲ其ノ點ト直線トノ距離トイフ.

問題

1. 時計ガ三時三十分ヲ指ストキ, 其ノ兩針ノ夾ム角ハ幾直角カ. 又幾度カ.

九時三十六分ヲ指ストキハドウカ.

2. 正南ノ方向ト南東ノ方向トノナス角ハ幾直角カ. 又幾度カ.

3. 直線 AB 上ノ一點 O カラ直線 OC ヲ引ケバ $\angle BOC$ ハ $\angle AOC$ ト其共軛角トノ差ノ半分ニ等シイ.

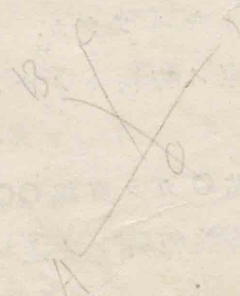
4. 同一ノ點デ交ル三直線デ出來ル六ツノ接角ヲ一ツオキニ取ッタモノノ和ハ $2R\angle$ ニ等

シイ.

5. 頂點Oヲ共有スル任意ノ二ツノ直角∠AOB, ∠CODヲ作レバ, ∠AOCト∠BODトハ相等シイカ又ハ互ニ補角デアル.

6.* 一直線上ノ一點カラ一ツノ直線ヲ引イテ出來ル二ツノ接角ノ各ノ二等分線ハ互ニ垂直デアル.

7. 相交ル二直線デ出來ル四ツノ角ヲ夫々二等分スル四ツノ半直線ハ互ニ垂直ナル二直線ヲナス.



第二章 三角形

20. 定義(多角形)

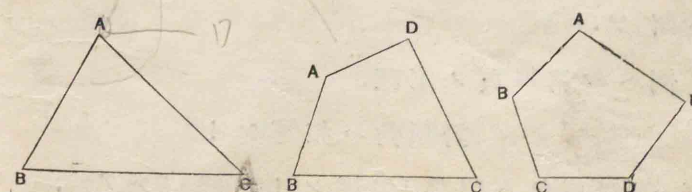
相接續スル幾ツカノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**多角形**トイフ.

多角形ヲ組立テル各線分ヲ多角形ノ邊トイフ,隣リ合ノ二邊ガナス形内ノ角ヲ多角形ノ角トイフ,其頂點ヲ多角形ノ頂點トイフ.

多角形ノ邊ノ數,角ノ數,頂點ノ數ハ何レモ皆同一デアル.

邊數ガ三ツノ多角形ヲ**三角形**トイフ.

邊數ガ四ツ,五ツ等ノ多角形ヲ夫々**四邊形,五邊形**等(又ハ**四角形,五角形**等)トイフ.



多角形ヲ表スニハ其ノ各頂點ノ名ヲ順ニ續

ケテ書ク,例ヘバ五邊形 ABCDE ナド.

三角形トイフ文字ノ代リニ符號△ヲ用ヒル,例ヘバ △ABC ナド.

三角形デハ其ノ一角ト其角ノ邊デナイ邊トハ相對スルトイフ.

例ヘバ前頁ノ圖△ABCニ於テ,∠A ト邊 BC トハ相對スル,即チ ∠A ニ對スル邊ハ BC デ,邊 BC ニ對スル角ハ ∠A デアル.

21. 定義(假設,終結)

スベテ定理ハ二ツノ部分カラ出來テ居ルト考ヘラレル. 第一ハ初カラ假定シテアル事柄デアツテ之ヲ假設トイフ. 第二ハ此ノ假定ノ結果トシテ必ズ成リ立ツト主張スル事柄デアツテ之ヲ終結トイフ.

例ヘバ第14頁ノ定理

對頂角ハ相等シイ

デハ,「對頂角」ハ假設,「相等シイ」ハ終結デアル.

又第16頁ノ定理

定直線上ノ一定點ヲ通ツテ此直線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアル.

デハ,「定直線上ノ一定點ヲ通ツテ此直線ニ垂直ナル直線」ハ假設,「唯一ツアル」ハ終結デアル.

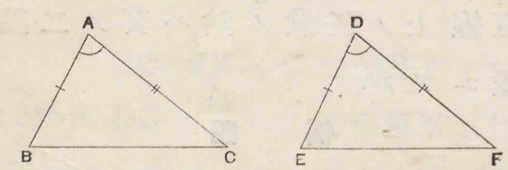
22. 定理(三角形ノ合同ノ一)

二邊ト其ノ夾ム角トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

【假設】△ABC 及 △DEF ニ於テ

AB=DE, AC=DF, ∠A=∠D トスル.

【終結】 △ABC≡△DEF*



證明 先ヅ AB=DE ダカラ,△DEF ヲ △ABC ノ上ニ,DE ガ AB ニ重ナリ(即チ D ガ A ニ,E ガ B ニ重ナリ),而シテ兩三角形ガ何レモ AB ノ一方ニアルヤウニ置クコトガ出來ル. サウスレバ

* ≡ ハ合同ノ符號デアル.

$\angle D=\angle A$ ダカラ邊 DF ハ邊 AC ノ上ニ重ナリ,其上ニ DF=AC ダカラ點 F ハ點 C ニ重ナル.

因テ邊 EF ハ邊 BC ニ重ナル.

故ニ $\triangle DEF$ ト $\triangle ABC$ トハ全ク相合スル.

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

注意 スベテ合同ナル三角形ニ於テハ,等シイ角ニ對スル邊ハ等シイシ,等シイ邊ニ對スル角ハ等シイ.

例ヘバ上ノ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テハ

$$BC=EF, \quad \angle B=\angle E, \quad \angle C=\angle F$$

系 二點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線*上ノ任意ノ點ハ其ノ二點カラ等距離ニアル.

例題

1. $\angle A$ ノ一邊上ニ二點 B, C ヲ,他ノ邊上ニ二點 D, E ヲ, AD=AB, AE=AC ナルヤウニ取レバ, BE=CD

2. 同一ノ點カラ引イタ相等シイ二線分ノ各ノ他ノ端ハ其ノ二線分ノ夾ム角ノ二等分線

* 線分ノ中點ヲ通ツテ之ニ垂直ナル直線ノコト.

上ノ任意ノ點カラ等距離ニアル.

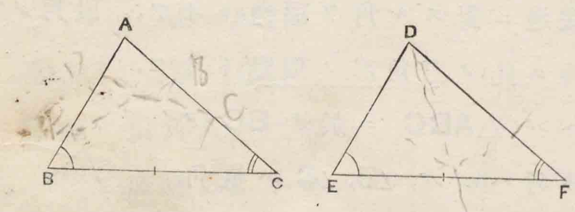
23. 定理(三角形ノ合同ノ二)

二角ト其ノ頂點ノ間ノ邊トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

【假設】 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ニ於テ

$$\angle B=\angle E, \quad \angle C=\angle F, \quad BC=EF$$

【終結】 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$



證明 先ヅ BC=EF ダカラ,$\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ,EF ガ BC ニ合シテ兩三角形ガ何レモ BC ノ同ジ側ニアルヤウニ置クコトガ出來ル,サウスレバ $\angle E=\angle B$ ダカラ ED ハ BA ノ上ニ重ナリ,又 $\angle F=\angle C$ ダカラ FD ハ CA ノ上ニ重ナル,從テ點 D ハ點 A ニ合スル.

因テ $\triangle DEF$ ト $\triangle ABC$ トハ全ク相合スル.

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

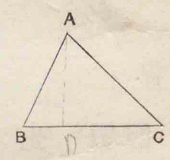
例題

角ノ二等分線上ノ任意ノ點カラ之ニ引イタ垂線ガ角ノ二邊ニ交ル點ハ其點カラ等距離ニアル.

24. 定義（底邊,頂角等）

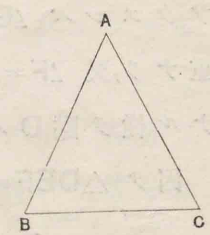
三角形ノ任意ノ邊ヲ其ノ**底邊**トイフコトガアル,此場合ニハ底邊ノ兩端ニアル角ヲ**底角**トイヒ,底邊ニ對スル角ヲ**頂角**トイフ. 頂角ノ頂點ヲ特ニ此ノ三角形ノ頂點トイフ.

例ヘバ △ABC ニ於テ BC ヲ底邊ト考ヘレバ, ∠B, ∠C ハ底角, ∠A ハ頂角, 點 A ハ此ノ三角形ノ頂點デアル.



二邊ガ相等シイ三角形ヲ**二等邊三角形**トイフ.

二等邊三角形デハ,其ノ相等シイ二邊デナイ邊ヲ特ニ其ノ底邊トイフ,從テ之ニ對スル角卽チ相等シ



イ二邊ガナス角ヲ其ノ頂角トイフ.

例ヘバ前圖二等邊三角形 ABC ニ於テ, BC ハ底邊, ∠B, ∠C ハ底角, ∠A ハ頂角, 點 A ハ頂點デアル.

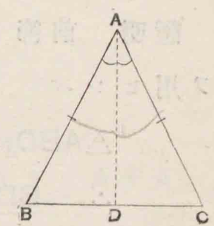
25. 定理

二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ.

【假設】 △ABC ニ於テ

AB=AC

【終結】 ∠B=∠C



證明 頂角 A ノ二等分線ヲ作リ,底邊 BC ト交ル點ヲ D トセヨ.

サウスレバ △ABD ト △ACD トニ於テ

AB=AC （假設）

AD ハ共通

∠BAD=∠CAD （作圖）

∴ △ABD≡△ACD （第22節）

從テ ∠B=∠C

系 三邊ガ相等シイ三角形ノ三ツノ

角ハ相等シイ.

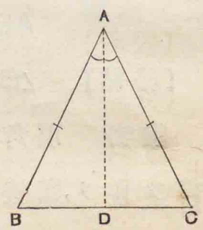
例題

二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ガ夫々其對邊ニ出會フマデノ部分ハ相等シイ.

26. 定理

二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル.

證明 前節ト同ジ圖ヲ用ヒレバ



$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

$\therefore$ BD＝CD

又 $\angle ADB = \angle ADC$

$\therefore$ AD⊥BC

系 1. 二等邊三角形ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結ブ直線ハ底邊ニ垂直デアツテ,且ツ頂角ヲ二等分スル.

系 2. 二等邊三角形ノ頂點カラ底邊ニ引イタ垂線ハ頂角ヲ二等分シ,且ツ底邊ヲ二等分スル.

系 3. 二定點カラ等距離ニアル任意ノ點ハ其ノ二定點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線上ニアル.

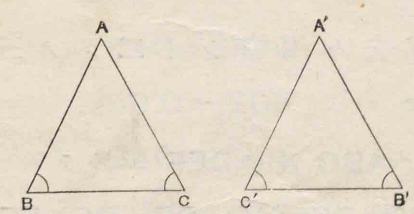
27. 定理 = 第四 ∠ ニ關スル條件

二角ガ相等シイ三角形ニ於テハ其角ニ對スル邊ガ相等シイ. 即チ此三角形ハ二等邊三角形デアル.

【假設】 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B = \angle C$

【終結】 AC＝AB

證明 $\triangle ABC$ ヲ裏返シニシタトキ,A ガ A′ニ, B ガ B′ニ, C ガ C′ ニ來タトセヨ.



サウスレバ $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'C'B'$ ニ於テ

$\angle B = \angle C'$ 〔$\because$ $\angle B = \angle C = \angle C'$〕

$\angle C = \angle B'$ 〔$\because$ $\angle C = \angle B = \angle B'$〕

$$BC=C'B'$$
$$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle A'C'B'$$
從テ $\qquad AB=A'C'$

然ルニ $\qquad A'C'=AC$

$$\therefore\ AB=AC$$

系 三ツノ角ガ相等シイ三角形ノ三邊ハ相等シイ.

例題

二等邊三角形ノ底邊ト其ノ兩底角ノ二等分線トデ出來ル三角形ハマタ二等邊三角形デアル.

28. 定理(三角形ノ合同ノ三)

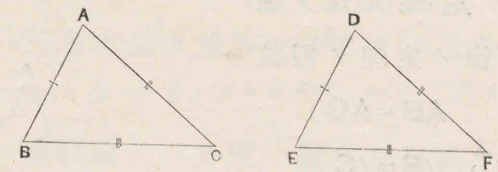
三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

【特述】$\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ニ於テ

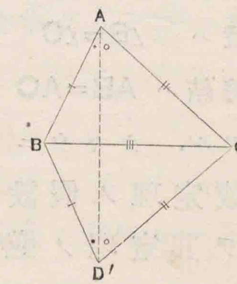
$$AB=DE,\ AC=DF,\ BC=EF$$

ナラバ $\qquad \triangle ABC\equiv\triangle DEF$

證明 先ヅ $BC=EF$ ダカラ, $\triangle DEF$ ヲ, EF ガ BC ニ合シ,而シテ BC ニ對シテ $\triangle ABC$ ノ反對



ノ側ニアルヤウニ置クコトガ出來ル. 此時 D ガ取ル位置ヲ D' トシ, A ト D' トヲ結ビツケヨ. サウスレバ $\triangle BAD'$ 及 $\triangle CAD'$ ニ於テ



$\angle BAD'=\angle BD'A$ 〔$\because$ $BA=BD'$ 第 25 節〕

$\angle CAD'=\angle CD'A$ 〔$\because$ $CA=CD'$ 第 25 節〕

$$\therefore\ \angle BAC=\angle BD'C$$

然ルニ $\qquad \angle BD'C=\angle EDF$

$$\therefore\ \angle BAC=\angle EDF$$

$$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle DEF \quad (\text{第 22 節})$$

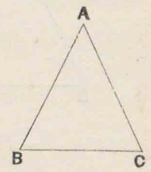
例題

同ジ底邊ノ上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ結ブ直線ハ其底邊ヲ垂直ニ二等分スル.

29.　定義(定理ノ逆)

第25節ノ定理ノ假設ハ

$$AB=AC$$



デ,終結ハ　$\angle B=\angle C$

デアル.　又第27節ノ定理ノ

假設ハ　$\angle B=\angle C$　〔第25節ノ定理ノ終結〕

デ,終結ハ　$AB=AC$　〔第25節ノ定理ノ假設〕

デアル.　カヤウニ

或定理ノ假設ト終結トヲ交換シタ陳述ヲ其定理ノ逆トイフ.

注意　或定理ノ逆ハ必ズシモ眞デナイ.

例ヘバ「直角ハ相等シイ」トイフコトハ眞デアルガ,其ノ逆「相等シイ角ハ直角デアル」トイフノハ眞デナイ,何トナレバ直角デナクテモ相等シイ角ハアルカラデアル.

故ニ或定理ノ逆ガ眞デアルコトヲ示スタメニハ必ズ別ニ之ヲ證明セネバナラヌ.

例　題

次ノ各定理ノ逆ヲ言ヘ,且ツ其ノ眞否ヲ判定セヨ.

1.　對頂角ハ相等シイ.　相等しきは對頂角(否)

2.　三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.　合同なる二つの△は三辺が夫々相等し(否)

3.　或整數ノ一ノ位ノ數字ガ偶數ナラバ,其整數ハ2ノ倍數デアル.

4.　或整數ノ一ノ位ノ數字ガ5ナラバ,其整數ハ5ノ倍數デアル.

問　題

1.　頂角ノ二等分線ガ底邊ニ垂直ナル三角形ハ二等邊三角形デアル.

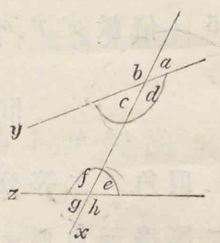
2.　二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ト之ニ對スル邊ノ中點トヲ結ビツケル二線分ハ相等シイ.

3.　三線分 AA', BB', CC' ガ同一ノ點 O デ交リ,O ガ各線分ノ中點ナラバ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ デアル.　若シ三點 A, B, C ガ一直線上ニアラバ A', B', C' ハマタ他ノ一直線上ニアル.

第三章 平行直線

30. 定義(錯角,同位角等)

直線 x ガ二直線 y 及 z ニ交ルトキハ,其ノ二ツノ交點ニ於テ圖ノ通リ a, b, c, d, e, f, g, h デ表サレル八ツノ角ガ出來ル,ソコデ是等ノ角ノ位置ノ相互ノ關係ニヨツテ次ノ通リノ名前ヲ附ケル.



(1) $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$, $\angle f$ ノ各ヲ**內角**トイフ.

(2) $\angle a$, $\angle b$, $\angle g$, $\angle h$ ノ各ヲ**外角**トイフ.

(3) $\angle c$ ト $\angle e$, $\angle d$ ト $\angle f$ ノ各組ヲ**錯角**トイフ.

(4) $\angle a$ ト $\angle e$, $\angle b$ ト $\angle f$, $\angle c$ ト $\angle g$, $\angle d$ ト $\angle h$ ノ各組ヲ**同位角**トイフ.

若シ一組ノ錯角ガ相等シケレバ,他ノ組ノ錯角モ亦相等シク,各組ノ同位角モ亦夫々相等シイ.

一組ノ同位角ガ相等シイトキモ之ト同樣デアル.

31. 定理

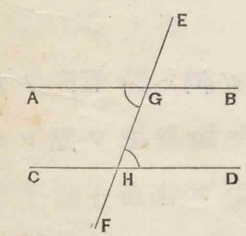
一直線ガ他ノ二直線ト交ツテナス錯角ガ相等シケレバ,此二直線ハ交ラナイ.

【假設】一直線 EF ガ二直線 AB, CD ト夫々 G, H デ交リ

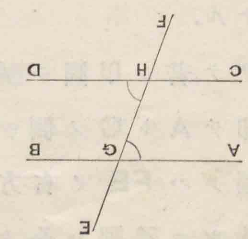
$\angle AGH = \angle DHG$

【終結】AB, CD ハ交ラナイ.

(甲 圖)



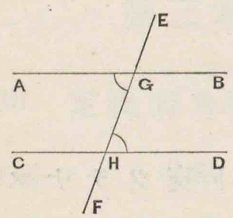
(乙 圖)



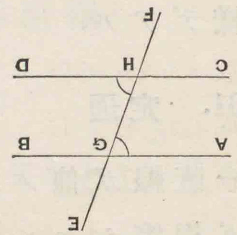
證明 甲圖ヲグルリト廻シテ乙圖ノ位置ニシ,之ヲ甲圖ノ上ニ,乙圖ノ線分 HG ガ甲圖ノ線分 GH ニ全ク合スルヤウニ置ケ.

サウスレバ甲圖ノ $\angle AGH$ ト乙圖ノ $\angle DHG$ ト

（甲 圖）



（乙 圖）



ハ相等シイカラ,乙圖ノ半直線 HD ハ甲圖ノ半直線 GA ニ重ナル.

從テ乙圖ノ直線 DC ハ甲圖ノ直線 AB ニ重ナル.

同樣ニ乙圖ノ直線 BA ハ甲圖ノ直線 CD ニ重ナル.

サテ,若シ甲圖デ AB, CD ガ例ヘバ EF ノ左方卽チ A ト C ノ側デ交ルトスレバ,之ヲ廻シタ乙圖デハ FE ノ右方デ交ル.

然ルニ乙圖ハ全ク甲圖ニ重ナルノダカラ,サウスルト甲圖ノ AB, CD ハ EF ノ右方卽チ B ト D ノ側デモ亦交ルコトニナル.

卽チ二直線 AB, CD ハ EF ノ兩側ニアル二點デ相交ルコトニナル.

此ハ直線ノ公理(第3節)ニ背クカラ不合理デアル.

故ニ AB, CD ハ A ト C ノ側デハ交ラナイ.

同樣ニ B ト D ノ側デモ交ラナイ.

卽チ AB, CD ハ何レノ方デモ交ルコトガ出來ナイ.

32. 平行直線

同一平面上ニアツテ相交ラナイ二直線ハ互ニ平行デアルトイフ.

二直線 AB, CD ガ互ニ平行ナルコトヲ AB // CD ト書ク.

平行直線ヲ略シテ**平行線**トモイフ.

二ツノ半直線又ハ線分ガ平行デアルトハ,是等ヲ含ム直線ガ平行ナルコトデアル.

ソコデ前節ノ定理ヲ次ノヤウニ陳ベルコトガ出來ル.

定理　一直線ガ他ノ二直線ト交ツテナス錯角ガ相等シケレバ,此二直線ハ互ニ平行デアル.

系 1. 一直線ガ他ノ二直線ト交ツテナス同位角ガ相等シケレバ,此二直線ハ互ニ平行デアル.

系 2. 同一ノ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル.

33. 公理(平行線ノ公理)

一定點ヲ通ツテ一定直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル.

系 1. 同一ノ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル.

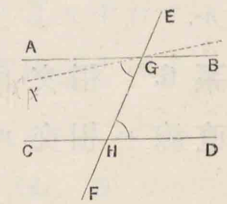
系 2. 二平行線ノ一ツニ交ル直線ハマタ他ニモ交ル.

系 3. 相交ル二直線ニ夫々平行ナル二直線ハ相交ル.

34. 定理

一直線ガ二平行線ト交ツテナス錯角ハ相等シイ.

證明 直線 EF ガ二平行線 AB, CD ト夫々 G, H デ交ルトセヨ.



G ヲ通ツテ EF ト ∠GHD ニ等シイ角ヲナス直線 GA′ ヲ直線 EF ニ對シ, HD ト反對ノ側ニ引ケ.

サウスレバ　A′G // HD　(第 32 節)

然ルニ　AG // HD　(假設)

故ニ A′G ハ AG ニ合スル.(前節公理)

$\therefore$ ∠AGH=∠GHD

系 1. 一直線ガ二平行線ト交ツテナス同位角ハ相等シイ.

系 2. 二平行線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直デアル.

系 3. 二平行線ニ夫々垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル.

系 4. 一直線ガ他ノ二直線ト交ツテナス錯角(若クハ同位角)ガ相等シクナケ

レバ,此二直線ハ相交ル.

系 5. 同一直線ノ垂線ト斜線トハ相交ル.

系 6. 相交ル二直線ニ夫々垂直ナル二直線ハ相交ル.

例 題

1. 一直線ガ他ノ二直線ト交ツテナス内角ノ中デ,初ノ直線ニ對シテ同ジ側ニアル二ツガ互ニ補角ナラバ,後ノ二直線ハ互ニ平行デアル.

2. 一直線ガ二平行線ト交ツテナス一組ノ錯角(又ハ同位角)ノ二等分線ハ互ニ平行デアル.

3.* 一直線ガ二平行線ト交ツテナス内角ノ中デ,初ノ直線ニ對シテ同ジ側ニアル二ツハ互ニ補角デアル.

4. 一直線ガ他ノ二直線ト交ツテ其ノ同ジ側ニアル二ツノ内角ガ互ニ補角デナケレバ,後ノ二直線ハ相交ル.

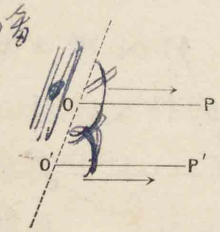
35. 定義(方向)

二ツノ半直線ガ,其等ノ原點ヲ通ル直線ノ同

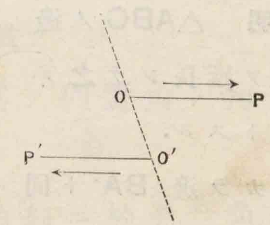
ジ側ニアツテ互ニ平行ナルトキハ是等ノ半直線ハ**同方向**デアルトイフ.(甲圖) 又原點ヲ通ル直線ノ兩側ニ一ツヅヽアツテ互ニ平行ナルトキハ是等ノ半直線ハ**反對ノ方向**デアルトイフ.(乙圖)

前頁の図

(甲 圖)



(乙 圖)



注意 半直線OPノ延長ハ上ノ乙圖デ點O'ガ點Oニ合シタ特別ノ場合デアル.

例 題

1.* 二邊ガ夫々平行ナル二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角デアル.

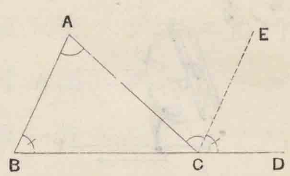
2.* 二邊ガ夫々垂直ナル二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角デアル.

第四章　三角形ノ續

36. 定理

三角形ノ三ツノ角ノ和ハ2直角ニ等シイ.

證明 △ABCノ邊BCヲ延長シテ之ヲCDトスル.



Cカラ邊BAト同方向ニ直線CEヲ引ケ. サウスレバ

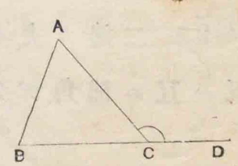
$\angle A = \angle ACE$　　(第34節)

$\angle B = \angle DCE$　　(同節系1)

$\therefore\ \angle A + \angle B + \angle C = \angle ACE + \angle DCE + \angle ACB$

$= 2R\angle$　　(第12節2)

定義 三角形ノ一邊ト其ノ隣リノ邊ノ延長トガナス角ヲ三角形ノ**外角**トイヒ,外角ニ對シテ三角形ノ角ヲ其ノ**內角**トイフ.



前圖デ$\angle ACD$ハ△ABCノ(頂點Cニ於ケル)外角デアル.

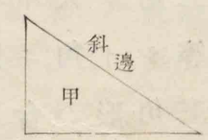
三角形ノ一外角ニ接シナイ兩內角ノ各ヲ其外角ノ**內對角**トイフ. 例ヘバ前圖ノ$\angle A$及$\angle B$ハ外角ACDノ內對角デアル.

系 1. 三角形ノ外角ハ其ノ兩內對角ノ和ニ等シイ. 從テ三角形ノ外角ハ其ノ內對角ノ何ヨレリモ大キイ.

系 2. 二ツノ三角形ニ於テ,二角ガ夫々相等シケレバ,第三ノ角モ亦相等シイ.

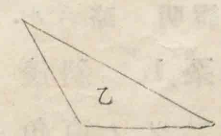
系 3. 三角形ニハ直角又ハ鈍角ハ一ツヨリ多クナイ.

定義 直角ヲ有スル三角形ヲ**直角三角形**トイフ.

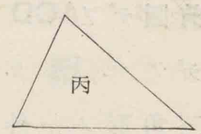


直角ニ對スル邊ヲ其ノ**斜邊**トイフ. (甲圖)

鈍角ヲ有スル三角形ヲ**鈍角三角形**トイフ. (乙圖)



各角ガ何レモ鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**トイフ.（丙圖）



例題

1. 直角三角形ノ直角デナイ二角ハ互ニ餘角デアル.

2. 二等邊三角形ノ底角ハ鋭角デアル.

3. 三角形ノ一角ガ他ノ二角ノ和ヨリ小サイカ,或ハ之ニ等シイカ,或ハ之ヨリ大キイカニ從テ,其角ハ鋭角或ハ直角或ハ鈍角デアル.

4. 二等邊三角形ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行デアル.

37. 定理（三角形ノ合同ノ四）

二角ガ夫々相等シク且ツ其ノ一組ノ相等シイ角ニ對スル邊ガ相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

證明 略スル.

系 1. 斜邊ト一鋭角トガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル.

系 2. 角ノ二等分線上ノ任意ノ點ハ其ノ二邊カラ等距離ニアル.

例題

二等邊三角形ノ底邊ノ兩端カラ其ノ對邊ニ引イタ垂線ノ長サハ相等シイ. 系1.

38. 定理（直角三角形ノ合同）

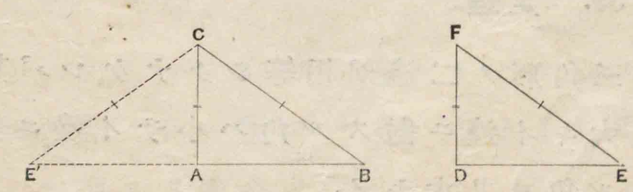
斜邊ト他ノ一邊トガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル.

【特述】 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ニ於テ

$$\angle A=\angle D=R\angle,\quad BC=EF,\quad AC=DF$$

ナラバ　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

證明 先ヅ $DF=AC$ ダカラ,$\triangle DEF$ ヲ,DF ガ AC ニ合シ,而シテ AC ニ對シテ $\triangle ABC$ ノ反對ノ側ニアルヤウニ置クコトガ出來ル. 此時 E ガ取ル位置ヲ E' トセヨ.



サウスレバ $\angle CAB=\angle CAE'=R\angle$

$$\therefore \quad BAE'=2R\angle$$

故ニ BA, AE′ ハ一直線ニナル.

ソコデ $\triangle CE'B$ ニ於テ

$$CB=CE' \qquad \text{(假設作圖)}$$

$$\therefore \quad \angle B=\angle E' \qquad \text{(第 25 節)}$$

然ルニ $\quad \angle E'=\angle E$

$$\therefore \quad \angle B=\angle E$$

$$\therefore \quad \triangle ABC\equiv\triangle DEF$$

系 角ノ二邊カラ等距離ニアル點ハ此角ノ二等分線上ニアル.

例題

三角形ノ底邊ノ兩端カラ其ノ對邊ニ引イタ垂線ノ長サガ相等シケレバ,此ノ三角形ハ二等邊三角形デアル.

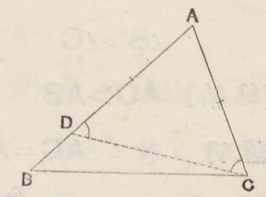
39. 定理

三角形ノ二邊ガ相等シクナケレバ,其ノ大キイ邊ニ對スル角ハ小サイ邊ニ對スル角ヨリ大キイ.

【特述】$\triangle ABC$ ニ於テ

$$AB>AC$$

ナラバ $\quad \angle C>\angle B$



證明 $AB>AC$ ダカラ, AB ノ上ニ AC ニ等シイ線分 AD ヲ取ッテ D ト C トヲ結ベバ CD ハ $\angle ACB$ ノ内ニアル.

$$\therefore \quad \angle ACB>\angle ACD$$

又 $\quad \angle ADC>\angle B \qquad$ (第36節系1)

然ルニ $\quad AD=AC \qquad$ (作　圖)

$$\therefore \quad \angle ACD=\angle ADC \qquad \text{(第 25 節)}$$

$$\therefore \quad \angle ACB>\angle ABC$$

例題

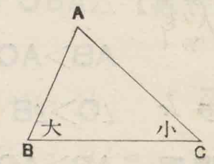
底邊ガ他ノ邊ヨリ小サイ二等邊三角形ハ鋭角三角形デアル.

40. 定理

三角形ノ二角ガ相等シクナケレバ,其ノ大キイ角ニ對スル邊ハ小サイ角ニ對スル邊ヨリ大キイ.

【假設】$\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle B > \angle C$



【終結】$AC > AB$

證明 若シ $AC = AB$

ナラバ $\angle B = \angle C$

トナツテ(第25節),假設ニ矛盾スル.

$\therefore \quad AC \neq AB$

又若シ

$AC < AB$

ナラバ $\angle B < \angle C$

トナツテ(前節),是亦假設ニ矛盾スル.

$\therefore \quad AC \not< AB$

因テ是非トモ

$AC > AB$

デアルヨリ外ナイ.

注意 上ノヤウニ,終結ヲ否定スレバ假設又ハ既知ノ事實ニ矛盾スルヤウニナルコトヲ示シ,之ニヨツテ終結ノ否定出來ナイコト即チ是非トモ終結ガ眞デアルヨリ外ナイコトヲ示ス證明法ヲ**不合理ニ歸スル法**又ハ**間接ノ證明法**トイフ.

第31節ノ定理(平行線ノ存在ノ定理)ノ證明モ此方法デアツタ.

系 1. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大キイ.

鈍角三角形デハ鈍角ニ對スル邊ガ最大デアル.

系 2. 直線外ノ一點カラ此直線ヘ引イタ垂線及斜線ノ中デ

(1) 垂線ハ最モ短カイ.

(2) 斜線ノ足ガ垂線ノ足カラ等距離ニアルモノハ相等シイ,又大キイ距離ニアルモノハ小サイ距離ニアルモノヨリ大キイ. 従テ

相等シイ斜線ハ唯二ツニ限ル.

(3) 相等シイ斜線ノ足ハ垂線ノ足カラ等距離ニアル,又大キイ斜線ノ足ハ小サイ斜線ノ足ヨリモ垂線ノ足ニ遠イ.

(4) 垂線ト等角ヲナス斜線ハ相等シイ,又大キイ角ヲナス斜線ハ小サイ角ヲ

ナス斜線ヨリ大キイ.

(5) 相等シイ斜線ハ垂線ト等角ヲナス,又大キイ斜線ハ小サイ斜線ヨリモ垂線ト大キイ角ヲナス.

例題

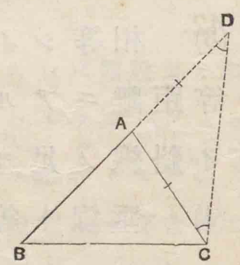
二等邊三角形ノ頂點ト底邊上ノ(兩端デナイ)一點トヲ結ブ線分ハ相等シイ邊ノ各ヨリ小サイ.

41. 定理

三角形ノ二邊ノ和ハ第三邊ヨリ大キイ.

證明 $\triangle ABC$ ニ於テ BC ヲ最大邊トスレバ明カニ

$$BC+AB>AC$$
$$BC+AC>AB$$



次ニ邊 BA ヲ延長シ,其上ニ AC ニ等シク AD ヲ取ツテ,C ト D トヲ結ビツケヨ.

サウスレバ $\triangle ACD$ ハ二等邊三角形デアル.

$$\therefore \angle ACD=\angle D$$

然ルニ AC ハ $\angle BCD$ ノ内ニアル.

$$\therefore \angle BCD>\angle ACD$$
$$\therefore \angle BCD>\angle D$$

故ニ $\triangle BCD$ ニ於テ

$$BD>BC \quad (前節)$$

然ルニ $BD=BA+AD=AB+AC$

$$\therefore AB+AC>BC$$

系 三角形ノ二邊ノ差ハ第三邊ヨリ小サイ.

例題

三角形内ノ一點ト一邊ノ兩端トヲ結ビツケル二線分ノ和ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小サイ.

42. 定理

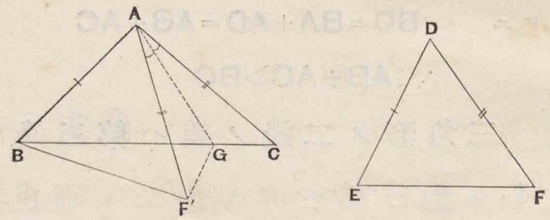
二ツノ三角形ニ於テ,二邊ガ夫々相等シク,其夾角ガ相等シクナケレバ,大キイ夾角ニ對スル邊ハ小サイ夾角ニ對スル邊ヨリ大キイ.

【特述】$\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ニ於テ

$$AB=DE,\quad AC=DF,\quad \angle A>\angle D$$

ナラバ　$BC>EF$

證明　先ヅ $DE=AB$ ダカラ,$\triangle DEF$ ヲ,DE ガ AB ニ合シ,而シテ AB ニ對シテ $\triangle ABC$ ト同ジ側ニアルヤウニ置クコトガ出來ル.



此時 F ガ取ル位置ヲ F' トスレバ

$$AF'=DF,\qquad BF'=EF$$

サテ $\angle A>\angle D$ ダカラ,AF' ハ $\angle BAC$ ノ内ニアル.

ソコデ $\angle F'AC$ ノ二等分線ヲ引キ,邊 BC ト交ル點ヲ G トシ,G ト F' トヲ結ベ.

サウスレバ $\triangle AF'G$ 及 $\triangle ACG$ ニ於テ

$$AF'=AC$$

AG ハ共通

$$\angle GAF'=\angle GAC \quad (\text{作圖})$$

$$\therefore\ \triangle AF'G\equiv\triangle ACG$$

從テ　$GF'=GC$

$$\therefore\ BC=BG+GC=BG+GF'$$

然ルニ　$BG+GF'>BF'$

$$\therefore\ BC>BF'$$

$$\therefore\ BC>EF$$

例題

1. 線分ノ中點ヲ通ツテ之ニ垂直ナル直線外ノ任意ノ點カラ此線分ノ兩端ニ至ル距離ハ相等シクナイ.

2. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ延長シ,其上ニ AB ニ等シク CD ヲ取ツテ,A ト D トヲ結ビツケレバ $AD>BC$

43. 定理

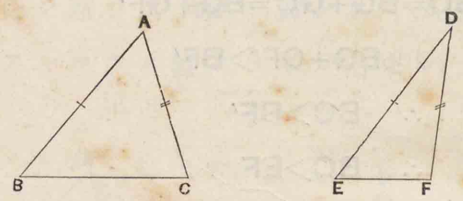
二ツノ三角形ニ於テ,二邊ガ夫々相等シク,第三邊ガ相等シクナケレバ,其ノ大キイ邊ニ對スル角ハ小サイ邊ニ對スル

角ヨリ大キイ.

【假設】$\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ニ於テ

$AB=DE,\ AC=DF,\ BC>EF$

【終結】 $\angle A>\angle D$



證明 若シ $\angle A=\angle D$

ナラバ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

從テ $BC=EF$

トナツテ假設ニ矛盾スル.

$\therefore\ \angle A\neq\angle D$

又若シ

$\angle A<\angle D$

ナラバ $BC<EF$

トナツテ(前節),是亦假設ニ矛盾スル.

$\therefore\ \angle A\nless\angle D$

$\therefore\ \angle A>\angle D$

例題

$\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ナルトキ,邊 BC ノ中點ヲ D トスレバ, $\angle ADB$ ハ鈍角デアル.

問題

1. 三角形ノ底邊ト其ノ兩底角ノ二等分線トデ出來ル三角形ハ鈍角三角形デアル.

2. 二等邊三角形ノ底邊ノ一端カラ對邊ヘ引イタ垂線ト底邊トノナス角ハ頂角ノ半分ニ等シイ.

3. $\triangle ABC$ ノ $\angle B$ ノ二等分線ト頂點 C ニ於ケル外角ノ二等分線トノ交點ヲ D トスレバ $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle A$

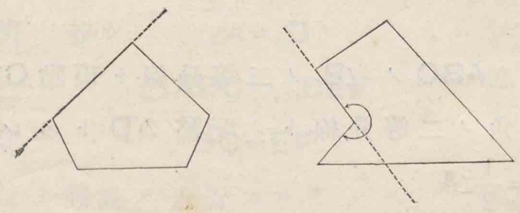
4.* 三角形内ノ一點ヲ底邊ノ兩端ニ結ビツケル二線分ノナス角ハ此三角形ノ頂角ヨリ大キイ.

5. 直角三角形ノ直角ノ二邊上ノ(端デナイ)點ヲ一ツヅヽ取ツテ結ビツケタ線分ハ斜邊ヨリ小サイ.

第五章　多角形ノ角ノ和

44.　定義(凸多角形,正多角形等)

多角形ガ其ノ何レノ邊ヲ延長シテモ其ノ一方ニアルモノヲ**凸多角形**トイフ,其ノ何レカノ邊ヲ延長スレバ其ノ兩側ニアルヤウニナルモノヲ**凹多角形**トイフ.



凸多角形ノ各角ハ2直角ヨリ小サイ.凹多角形デハサウデナイ.

注意　通常單ニ多角形トイヘバ凸多角形ノコトデアルトスル.

總テノ邊ガ相等シイ多角形ヲ**等邊多角形**トイフ.總テノ角ガ相等シイ多角形ヲ**等角多角形**トイフ.

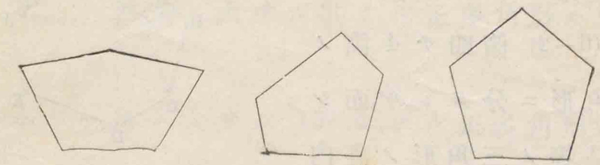
等邊デ且ツ等角ナル多角形ヲ**正多角形**トイフ.

正四角形ノコトヲ特ニ**正方形**トイフ.

注意　等邊三角形ハ正三角形デアル.(第25節系),又等角三角形ハ正三角形デアル.(第27節系)

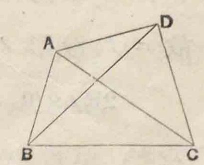
併シ四邊以上ノ多角形デハ等邊デアツテモ等角トハ限ラナイシ,又等角デアツテモ等邊トハ限ラナイ.

等邊五角形　　等角五邊形　　正五角形



多角形ノ隣リ合ハナイ二頂點ヲ結ブ線分ヲ其ノ**對角線**トイフ.

圖ノ二線分 AC, BD ハ何レモ四邊形 ABCD ノ對角線デアル.



多角形ノ一邊ト其ノ隣リノ邊ノ延長トガナス角ヲ多角形ノ外角トイフ,外角ニ對シテ多角

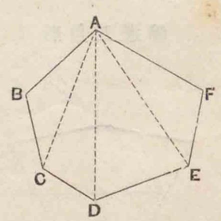
形ノ角ヲ其ノ内角トイフ.

45. 定理

多角形ノ内角ノ和ハ邊數ノ2倍カラ4ヲ引イタ數ヲ直角ニ掛ケタモノニ等シイ.

即チ n 邊形ノ内角ノ和ハ $2n-4$ 直角デアル.

證明 例ヘバ六邊形ABCDEFヲ取リ,一頂點Aカラ對角線ヲ引ケバ,六邊形ハAヲ頂點トスル$(6-2)$箇即チ4箇ノ三角形ニ分タレル,而シテ是等ノ三角形ノ各内角ノ和ハ此ノ六邊形ノ内角ノ和ニ等シイ.



サテ各三角形ノ内角ノ和ハ2R∠ニ等シイ.

故ニ六邊形ノ内角ノ和ハ

$$2R\angle\times(6-2)=(2\times6-4)R\angle=8R\angle$$

デアル.

系1. 四邊形ノ内角ノ和ハ4直角ニ等シイ.

系2. 同ジ邊數ノ正多角形デ,一邊ガ相等シイモノハ合同デアル.

系3. 多角形ノ各頂點ニ於ケル外角ヲ一ツヅヽ取ツタモノノ和ハ4直角ニ等シイ.

例題

1. 内角ノ和ガ50R∠ナル多角形ハ何邊カ.
2. 正三角形カラ正十邊形マデノ各正多角形ノ一内角ノ大サヲ計算セヨ.
3. 一外角ノ大サガ30°ナル正多角形ハ何邊カ.
4. 一角ノ大サガ157°.5ナル正多角形ハ何邊カ.

問題

1. 或正多角形ノ一内角ガ一外角ノ3倍ニ等シイ. 此正多角形ノ邊數ヲ求メヨ.
2. 五邊形及六邊形ノ各ノ對角線ノ數ヲ求メヨ.

一般ニ n 邊形ノ對角線ノ數ヲ求メヨ.

3. 五角星形(右圖)ノ頂點ニ於ケル角ノ和ハ 2R∠ ニ等シイ.

4. 凸多角形ノ内角ニハ鋭角ガ三ツヨリ多クナイ.

第六章 平行四邊形

46. 定義(平行四邊形)

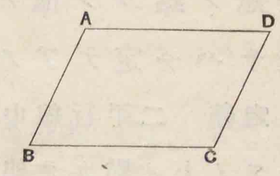
四邊形ノ隣リ合ハナイ二邊及隣リ合ハナイ二角ハ夫々相對スルトイフ.

二組ノ對邊ガ夫々互ニ平行ナル四邊形ヲ平行四邊形トイフ.

圖ニ於テ

AB//CD, AD//BC

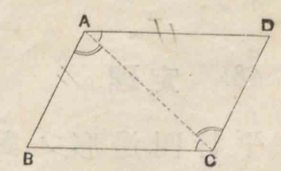
ナラバ,ABCD ハ平行四邊形デアル.



47. 定理

平行四邊形ノ對邊ハ相等シイ.

證明 平行四邊形 ABCD ニ於テ對角線 AC ヲ引ケ. サウスレバ △ABC及△CDA ニ於テ



$\angle CAB=\angle ACD$ (∵ $AB /\!/ CD$)

$\angle ACB=\angle CAD$ (∵ $BC /\!/ AD$)

AC ハ共通

∴ $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

從テ $AB=CD$, $BC=DA$

系 1. 平行四邊形ノ隣リ合ノ二邊ガ相等シケレバ,各邊ハ皆相等シイ.

系 2. 二平行線中ノ一ツノ上ニアル任意ノ點カラ他ノ直線ニ引イタ垂線ノ長サハ一定デアル.

定義 二平行線中ノ一ツノ上ノ點カラ他ノ直線ニ下シタ垂線ノ長サ(卽チ此ノ二平行線ニ共通ナル垂線ガ其間ニ夾マツタ部分ノ長サ)ヲ此ノ二平行線間ノ距離トイフ.

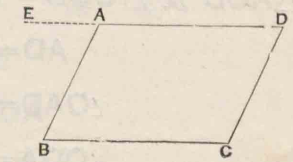
48. 定理

平行四邊形ノ對角ハ相等シイ.

證明 平行四邊形 ABCD ニ於テ

$BC /\!/ AD$

故ニ DA ノ延長上ニ一點 E ヲ取レバ



$\angle B=\angle BAE$

又 $AB /\!/ CD$ ∴ $\angle BAE=\angle D$

∴ $\angle B=\angle D$

同様ニ $\angle A=\angle C$

系 平行四邊形ノ一角ガ直角ナラバ,各角ハ皆直角デアル.

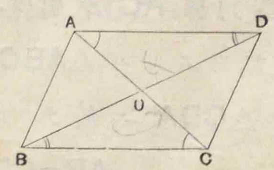
例 題

平行四邊形ノ對角ノ二等分線ハ互ニ平行デアル.

49. 定理

平行四邊形ノ兩對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル.

證明 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トセヨ.



$\triangle AOD$ 及 $\triangle COB$ ニ於テ

$AD=CB$ (第47節)

$\angle OAD=\angle OCB$ ($\because AD /\!/ BC$)

$\angle ODA=\angle OBC$ (同上)

$\therefore \triangle AOD \equiv \triangle COB$

從テ $AO=CO$, $DO=BO$

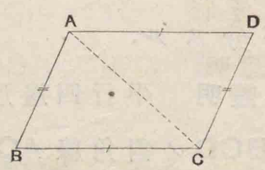
例題*

平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ツテ一組ノ對邊間ニ夾マレタ線分ハ,對角線ノ交點デ二等分サレル.

50. 定理

二組ノ對邊ガ夫々相等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル.

證明 四邊形 ABCD ニ於テ $AB=CD$, $BC=DA$ トセヨ.



對角線 AC ヲ引ケ.

サウスレバ $\triangle ABC$ 及 $\triangle CDA$ ニ於テ

$AB=CD$ (假設)

$BC=DA$ (假設)

AC ハ共通

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle CDA$

從テ $\angle ACB=\angle CAD$

$\therefore BC /\!/ AD$

又 $\angle CAB=\angle ACD$

$\therefore AB /\!/ CD$

即チ ABCD ハ平行四邊形デアル.

例題

平行四邊形 ABCD ノ四邊 AB, BC, CD, DA ノ上ニ夫々相等シイ線分 AK, BL, CM, DN ヲ取レバ,四邊形 KLMN ハ亦平行四邊形デアル.

51. 定理

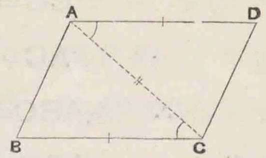
一組ノ對邊ガ相等シク且ツ平行ナル四邊形ハ平行四邊形デアル.

證明 四邊形 ABCD ニ於テ $AD \underline{/\!/} BC$* トセヨ.

對角線 AC ヲ引ケ.

* $\underline{/\!/}$ ハ平行デ且ツ相等シイコトヲ示ス符號デアル.

サウスレバ$\triangle ABC$



及$\triangle CDA$ニ於テ

$CB=AD$　（假　設）

AC ハ共通

然ルニ　$AD \parallel BC$　（假　設）

$\therefore\ \angle ACB=\angle CAD$

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle CDA$

従テ　$\angle CAB=\angle ACD$

$\therefore\ AB \parallel CD$

即チ $ABCD$ ハ平行四邊形デアル.

例　題

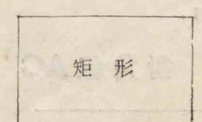
平行四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ夫々ソノ對邊ノ兩端ニ結ビツケル四直線ハ平行四邊形ヲ作ル.

52. 定義（矩形,菱形,梯形等）

各角ガ直角ナル四邊形ヲ**矩形**トイフ.

矩形ハ平行四邊形デアル.

一角ガ直角ナル平行四邊形ハ矩形デアル.（第 48 節系）



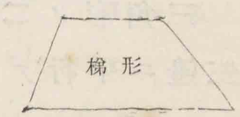
各邊ガ相等シイ四邊形ヲ**菱形**トイフ.

菱形ハ平行四邊形デアル.（第 50 節）

隣リ合ノ二邊ガ相等シイ平行四邊形ハ菱形デアル.（第 47 節系 1）

正方形ハ矩形デアリ且ツ菱形デアル.

一組ノ對邊ガ互ニ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイフ.



梯形ノ互ニ平行ナル二邊ヲ何レモ其ノ**底邊**トイフ.

平行デナイ二邊ヲ各其ノ**斜邊**トイフ.

二斜邊ガ相等シイ梯形ヲ**二等邊梯形**トイフ.

例　題

1.* 矩形ノ對角線ハ相等シイ.

2.* 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直デアル.

3. 菱形ノ各對角線ハ菱形ノ角ヲ二等分スル.

4. 二等邊梯形ノ底邊ノ兩端ニ於ケル角ハ夫々相等シイ.

53.　定理

隣リ合ノ二邊ガ夫々相等シイ二ツノ矩形ハ合同デアル.

證明　略スル.

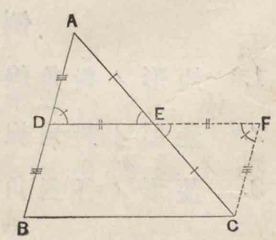
系　一邊ガ相等シイ二ツノ正方形ハ合同デアル.(第45節系2ノ特別ノ場合)

54.　定理

三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行デアツテ,且ツ其ノ半分ニ等シイ.

證明　△ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トセヨ.

線分 DE ヲ作リ,之ヲ E ノ方ヘ延長シ,其上ニ DE ニ等シク EF ヲ取リ, F ト C トヲ結ビツケヨ.



サウスレバ△ADE 及△CFE ニ於テ

$$AE=CE \quad (\text{假　設})$$

$$DE=FE \quad (\text{作　圖})$$

$$\angle AED=\angle CEF \quad (\text{對頂角})$$

$$\therefore \triangle ADE \equiv \triangle CFE$$

從テ　$\angle ADE=\angle CFE$

$\therefore$　AD∥CF (平行且相等)

卽チ　BD∥CF

然ルニ　AD=BD　(假　設)

$\therefore$　BD∥CF (平行且相等)

故ニ BCFD ハ平行四邊形デアル.(第51節)

$\therefore$　DE∥BC

且ツ　DF=BC　(第47節)

然ルニ　$DE=\frac{1}{2}DF$　(作　圖)

$$\therefore DE=\frac{1}{2}BC$$

系　三角形ノ一邊ノ中點ヲ通ツテ他ノ一邊ニ平行ニ引イタ直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル.

例　題

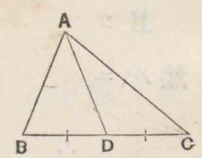
1.　正三角形ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ベバ亦正三角形ガ出來ル.

2. 平行四邊形 ABCD ノ對邊 AD, BC ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ, AF 及 CE ハ對角線 BD ヲ三等分スル.

3. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ビツケテ出來ル四邊形ハ平行四邊形デアル. 而シテ其ノ周(各邊ノ和)ハ初ノ四邊形ノ兩對角線ノ和ニ等シイ.

55. 中線

定義 三角形ノ一頂點ト其ノ對邊ノ中點トヲ結ビツケル線分ヲ三角形ノ**中線**トイフ.



圖ノ AD ハ A カラ引イタ中線デアル.

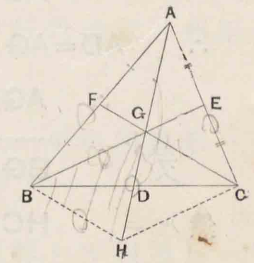
定理 三角形ノ三中線ハ一點ニ會スル. (同一ノ點ヲ通ル)

而シテ其交點ト各頂點トノ距離ハ夫夫其頂點カラ引イタ中線ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイ.

證明 △ABC ニ於テ BE, CF ヲ二ツノ中線

トシ, 其交點ヲ G トスル.

A, G ヲ結ビ, 之ヲ G ノ方へ延長シテ AG ニ等シク GH ヲ取リ, H ヲ B 及 C ニ結ビツケヨ.



サウスレバ △ABH ニ於テ

$$AF=FB \quad (\text{假設})$$
$$AG=GH \quad (\text{作圖})$$
$$\therefore FG \parallel BH \quad (\text{前節})$$

卽チ $GC \parallel BH$

次ニ △ACH カラ, 同樣ノ理由デ

$$GB \parallel CH$$

故ニ四邊形 BHCG ハ平行四邊形デアル.

故ニ GH ト BC トノ交點ヲ D トスレバ,

$$BD=CD \quad (\text{第 49 節})$$

因テ AD ハ中線デアル.

故ニ三中線 AD, BE, CF ハ一點 G デ會スル.

次ニ $GD=HD$ (第 49 節)

$$\therefore GH=2.GD$$

然ルニ $AG=GH$ (作圖)

$\therefore\ AG=2.GD$

$\therefore\ AD=AG+GD=3.GD$

$\therefore\ AG=\frac{2}{3}.AD$

又 $BG=HC$ (第 47 節)

然ルニ $HC=2GE$ (前節)

$\therefore\ BG=2.GE$

$\therefore\ BG=\frac{2}{3}.BE$

同樣ニ $CG=\frac{2}{3}.CF$

定義 三角形ノ三中線ノ交點ヲ三角形ノ重心トイフ.

例題

1. 前頁ノ圖デ△BGHノ三邊ハ夫々△ABCノ各中線ノ$\frac{2}{3}$ニ等シイ.

2 △ABCニ於テ,BE,CFヲ二中線トシ,EカラCFト同方向デ且ツ之ニ等シイ線分EKヲ引ケバ,△BEKノ三邊ハ夫々△ABCノ三中線ニ等シイ.

問題

1.* 對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル.

2.* 對角線ガ互ニ垂直ナル平行四邊形ハ菱形デアル.

3.* 二組ノ對角ガ夫々相等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル.

4.* 對角線ガ互ニ二等分スル四邊形ハ平行四邊形デアル.

5. a 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ點カラ夫々他ノ二邊ニ平行ニ引イタ直線ガ他ノ邊ト交ツテ出來ル二線分ノ和ハ不易(一定)デアル.
b 若シ底邊ノ延長上ノ一點カラナラバドウカ.

6. 定直線外ノ定點ト此直線上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ハ皆或一定ノ直線上ニアル.

雜題

1. 二等邊三角形ノ頂點ヲ通ツテ底邊ニ平行ナル直線ハ頂點ニ於ケル外角ヲ二等分スル.

2.* 線分ノ中點カラ此線分ニ交ラナイ他ノ直線ニ至ル距離ハ,此線分ノ兩端カラ此直線ニ至ル距離ノ和ノ半分ニ等シイ.

3. $\triangle ABC$ ノ邊 AC 又ハ其延長上ニ AB ニ等シク AD ヲ取ツテ B, D ヲ結ベバ

$$\angle ABD=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C),\quad \angle CBD=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C)$$

4. 底邊ト頂角トガ夫々相等シイ二ツノ二等邊三角形ハ合同デアル.

5.* 一角ガ $60°$ ナル二等邊三角形ハ正三角形デアル.

6. 三角形ノ二頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガナス角ハ,今一ツノ頂點ニ於ケル外角ノ半分ニ等シイ.

7. 正方形 $ABCD$ ノ二頂點 A, C カラ他ノ頂點 B ヲ通ル任意ノ直線ヘ垂線 AA', CC' ヲ引ケバ $AA'=BC'$

8. 矩形ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ビツケテ出來ル四邊形ハ菱形デアル.

9. 菱形ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ビツケテ出來ル四邊形ハ矩形デアル.

10. 二等邊梯形ノ對角線ハ相等シイ.

11.* 直角三角形ノ斜邊ノ中點ト直角ノ頂點トヲ結ブ線分ハ斜邊ノ半分ニ等シイ.

12. 直角三角形ノ一鋭角ガ $60°$ (從テ他ノ鋭角ガ $30°$) ナラバ,其ノ斜邊ハ最小邊ノ 2 倍ニ等シイ.

13. 四邊形ノ周ハ其ノ兩對角線ノ和ヨリ大キクテ,和ノ 2 倍ヨリ小サイ.

14. 四邊形ノ對角線ノ交點デナイ任意ノ點カラ各頂點マデノ距離ノ和ハ兩對角線ノ和ヨリ大キイ.

15. 三角形ノ頂點カラ引イタ中線ハ頂角ヲ夾ム二邊ノ和ノ半分ヨリ小サイ.

16. 二等邊三角形ノ底邊ノ一端ト其ノ對邊上ノ任意ノ一點トヲ結ブ線分ハ,後ノ點ト底邊

上ノ(兩端デナイ)任意ノ點トヲ結ブ線分ヨリ大キイ.

17. 三角形內ノ一點カラ各頂點マデノ距離ノ和ハ三角形ノ周ヨリ小サクテ,周ノ半分ヨリ大キイ.

18. 不等邊四角形 ABCD ニ於テ AD ガ最大邊,BC ガ最小邊ナラバ

$$\angle ABC > \angle ADC, \quad \angle BCD > \angle BAD$$

19. 四邊形ノ二組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二線分ト兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分トハ一點ニ會スル,而シテ此點ハ各線分ノ中點デアル.

20. 梯形ノ兩斜邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底邊ニ平行デアツテ,且ツ兩底邊ノ和ノ半分ニ等シイ.

21. 梯形ノ兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ底邊ニ平行デアツテ,且ツ兩底邊ノ差ノ半分ニ等シイ.

22. 正方形ノ紙 ABCD ガアル,邊 BC 上ノ任意ノ點 A′ ト頂點 A トガ合スルヤウニ此紙ヲ二ツニ折レバ,其ノ折目ノ長サハ AA′ ニ等シイ.

23. 直線 XY ノ同ジ側ニ二點 A, B ガアル. P ハ XY 上ノ一點デアツテ直線 PA, PB ガ XY トナス角ガ相等シイトスル. 今 Q ヲ XY 上ノ他ノ任意ノ點トスレバ

$$PA+PB < QA+QB$$

24. 直線 XY ノ兩側ニ一ツヅヽ二點 A, B ガアル. P ハ XY 上ノ一點デアツテ直線 PA, PB ガ XY トナス角ガ相等シイトスル. 今 Q ヲ XY 上ノ他ノ任意ノ點トスレバ

$$PA \sim PB > QA \sim QB$$

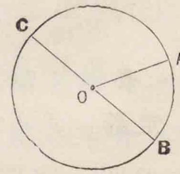
第三篇

圓

第一章 基本ノ性質

56. 圓

定義 線分ノ一端ヲ固定シテオイテ,之ヲ一平面上デ其端ノ周リニ始終同ジ向キニ廻シ,再ビ元ノ位置マデ戻ラセルトキ,他ノ端ガ畫ク線ヲ**圓周**トイフ.



圓周デ圍マレタ其ノ平面ノ部分ヲ**圓**トイフ.

初メ固定シテオイタ端ヲ圓ノ**中心**トイフ.

中心カラ圓周マデ引イタ線分ヲ此圓ノ**半徑**トイフ. 中心ヲ通ツテ其ノ兩端ガ圓周上ニアル線分ヲ其ノ**直徑**トイフ.

前圖デ,O ハ中心, OA, OB, OC ハ何レモ半徑, BC ハ直徑デアル.

圓ヲ表スニハ其ノ中心ノ名ヲ書クカ,又ハ圓周上ノ三點ノ名ヲ續ケテ書ク. 例ヘバ圓O又ハ圓 ABC ナド.(前圖)

圓ノ定義カラ直ニ次ノ事柄ガ分カル.

(1) 同ジ圓ノ半徑ハ皆相等シイ. 從テ直徑モ亦皆相等シイ.

(2) 半徑ガ相等シイ二圓ハ相等シイ.(合同デアル)

(3) 相等シイ(合同ナル)二圓ノ半徑ハ相等シイ.

(4) 直徑ハ圓及圓周ヲ二等分スル.(合同ナル二ツノ部分ニ分ケル)

定義 直徑デ分タレタ圓及圓周ノ各部ヲ夫夫**半圓**及**半圓周**トイフ.

注意 圓周ハ線デアリ圓ハ面デアルガ,圓周トイフ代リニ略シテ圓トイフコトモアル.

57. 圓ト點トノ位置ノ關係

(1) 圓內ノ一點ト圓ノ中心トノ距離ハ半徑ヨリ小サイ.

(2) 圓周上ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ニ等シイ.

(3) 圓外ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ大キイ.

逆ニ

(1)′ 圓ノ中心カラノ距離ガ半徑ヨリ小サイ點ハ圓內ニアル.

(2)′ 中心カラノ距離ガ半徑ニ等シイ點ハ圓周上ニアル.

(3)′ 中心カラノ距離ガ半徑ヨリ大キイ點ハ圓外ニアル.

58. 圓ト直線トノ位置ノ關係

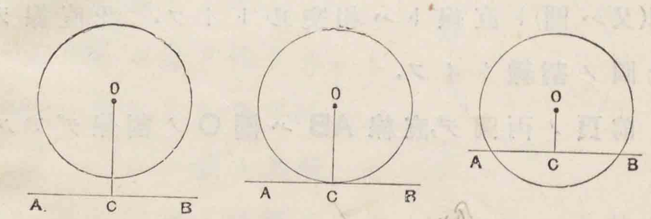
圓ノ中心ト直線トノ距離ガ

(1) 半徑ヨリ大キケレバ,此ノ圓周ト直線トハ出會ハナイ.

(2) 半徑ニ等シケレバ,此ノ圓周ト直線トハ唯一點デ出會フ.

(3) 半徑ヨリ小サケレバ,此ノ圓周ト直線トハ二點デ出會フ.

(甲 圖)　(乙 圖)　(丙 圖)



逆ニ

圓ト直線トガ

(1)′ 出會ハナケレバ,此ノ直線ト圓ノ中心トノ距離ハ半徑ヨリ大キイ.

(2)′ 唯一點デ出會ヘバ,此ノ直線ト中心トノ距離ハ半徑ニ等シイ.

(3)′ 二點デ出會ヘバ,此ノ直線ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ小サイ.

定義 圓周ト直線トガ唯一點デ出會フトキ

ハ,此ノ圓周(又ハ圓)ト直線トハ相**切スル**トイフ. 此直線ヲ此圓ノ**切線**トイフ. 而シテ其ノ會點ヲ其ノ**切點**トイフ.

前頁ノ乙圖ニ於テ,直線ABハ圓Oノ切線デ,Cハ其ノ切點デアル.

圓周ト直線トガ二點デ出會フトキハ,此ノ圓周(又ハ圓)ト直線トハ相**交ル**トイフ. 此直線ヲ此圓ノ**割線**トイフ.

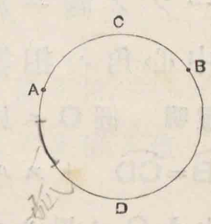
前頁ノ丙圖デ,直線ABハ圓Oノ割線デアル.

第二章 弧,弦及中心角

59. 定義(弧,中心角)

圓周ノ一部分ヲ**弧**トイフ.

例ヘバ圖ノ圓周ノ部分ABハ弧デアル.

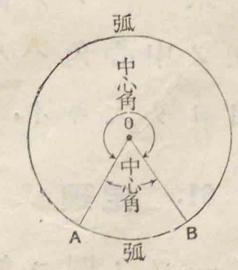


弧ABト書ク代リニ $\overset{\frown}{AB}$ ト書クコトモアル.

圓ノ一ツノ弧ト其殘リノ弧トハ互ニ**共軛**デアルトイフ,而シテ其中ノ大キイ方(上圖 $\overset{\frown}{ADB}$)ヲ**優弧**,小サイ方(上圖 $\overset{\frown}{ACB}$)ヲ**劣弧**トイフ.

圓ノ中心ヲ頂點トスル角ヲ(劣角デモ優角デモ)**中心角**トイフ.

中心角ハ此ノ角內ニ夾マレタ弧ノ**上ニ立ツ**トイフ.

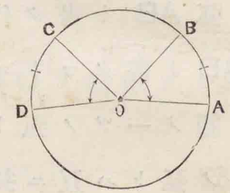


又此弧ト此中心角トハ**相對スル**トイフ.

前頁ノ圖デ,劣弧 AB ノ上ニ立ツ中心角ハ劣角 AOB, 優弧 AB ノ上ニ立ツ中心角ハ優角 AOB デアル.

60. 定理

一ツノ圓ニ於テ,相等シイ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シイ.



證明 圓 O ニ於テ

仮設 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ トスル.

中心 O ノ周リニ圓ヲ廻セバ, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ダカラ, $\overset{\frown}{AB}$ ヲ $\overset{\frown}{CD}$ ノ元ノ位置ニ重ネ合セルコトガ出來ル.

從テ $\angle AOB=\angle COD$

系 一ツノ圓ニ於テ,大キイ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ小サイ弧ノ上ニ立ツ中心角ヨリ大キイ.

61. 定理

一ツノ圓ニ於テ,相等シイ中心角ガ立

ツ弧ハ相等シイ.

證明 略スル.

系 一ツノ圓ニ於テ,大キイ中心角ガ立ツ弧ハ小サイ中心角ガ立ツ弧ヨリ大キイ.

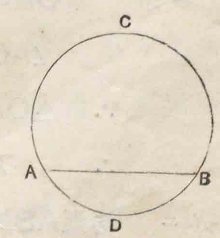
例題

一ツノ圓ニ於テ,弧ガ元ノ 2 倍,3 倍,……ニナレバ,之ニ對スル中心角モ亦元ノ 2 倍,3 倍,……ニナル.(分度器ノ原理)

62. 定義(弦)

圓周上ノ二點ヲ結ビツケル線分ヲ此圓ノ弦トイフ.

弧ノ兩端ヲ結ブ弦ハ此弧ヲ**張ル**トイフ.



圖デ,弦 AB ハ二ツノ共軛弧 ACB 及 ADB ノ各ヲ張ル弦デアル.

弧ト之ヲ張ル弦トハ**相對スル**トイフ.

例　題

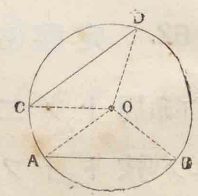
直徑ハ最大弦デアル.

63. 定理

一ツノ圓ニ於テ,相等シイ弧ニ對スル弦ハ相等シイ.

相等シクナイ劣弧ニ對スル弦ノ中デ,大キイ劣弧ニ對スル弦ハ小サイ劣弧ニ對スル弦ヨリ大キイ.

證明　圓Oニ於テ



$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ トセヨ.

OA, OB, OC, OD

ヲ引ケ. サウスレバ

△OAB 及 △OCD ニ於テ

$$OA=OC,\quad OB=OD$$

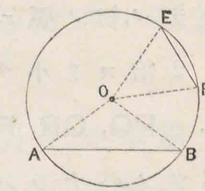
$$\angle AOB=\angle COD \quad (\text{第 60 節})$$

$$\therefore\quad \triangle OAB \equiv \triangle OCD$$

$$\therefore\quad AB=CD$$

次ニ　劣弧AB>劣弧EF トセヨ.

OE, OF ヲ引ケバ, △OAB 及 △OEF ニ於テ



$$OA=OE$$

$$OB=OF$$

$$\angle AOB>\angle EOF \quad (\text{第 60 節系})$$

$$\therefore\quad AB>EF \quad (\text{第 42 節})$$

系　一ツノ圓ニ於テ,相等シイ弦ニ對スル劣弧(又ハ優弧)ハ相等シイ.

相等シクナイ弦ニ對スル劣弧ノ中デ,大キイ弦ニ對スル劣弧ハ小サイ弦ニ對スル劣弧ヨリ大キイ.

例　題

1. 一ツノ圓ニ於テ,相等シイ弦ニ對スル中心角*ハ相等シイ.相等シクナイ弦ニ對スル中心角ノ中デ,大キイ弦ニ對スル者ハ小サイ弦ニ對スル者ヨリ大キイ.

逆ニ,相等シイ中心角ニ對スル弦ハ相等シイ.

相等シクナイ中心角ニ對スル弦ノ中デ,大キイ中心角ニ對スル弦ハ小サイ中心角ニ對スル弦ヨリ大キイ.

2. 一ツノ圓ニ於テ,一ツノ弧ガ他ノ弧ノ2

* 弦ノ兩端ニ引イタ半徑ノナス劣角ノコト.

倍ナラバ,初ノ弧ニ對スル弦ハ後ノ弧ニ對スル弦ノ2倍ヨリ小サイ.

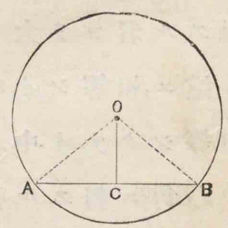
3. PQ, QR, RS, ST ガ一ツノ圓ノ相等シイ四ツノ弦ナラバ,三ツノ弦 PR, QS, RT モ亦相等シイ.

64. 定理

圓ノ中心カラ弦ヘ引イタ垂線ハ其弦ヲ二等分スル.

證明 圓ノ中心 O カラ弦 AB ヘ垂線ヲ引キ其足ヲ C トセヨ.

A, B ヲ O ニ結ビツケレバ △AOC ト △BOC トニ於テ



OA＝OB

OC ハ共通

∠OCA＝∠OCB＝R∠

∴ △AOC≡△BOC

∴ AC＝BC

系 1. 圓ノ中心ト直徑デナイ弦ノ中點トヲ通ル直線ハ其弦ニ垂直デアル.

系 2. 弦ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

系 3. 中心カラ弦ヘ引イタ垂線ノ延長ハ此ノ弦ニ對スル二ツノ共軛弧ノ各ヲ二等分スル. (61の定で分る)

例 題

1. 二定點ヲ通ル總テノ圓ノ中心ハ,皆此二點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ニアル.

2. 圓ノ中心ヲ通ラナイ二弦ガ相交ルトキハ,其交點ニ於テ互ニ他ヲ二等分スルコトハ出來ナイ. (定理64)

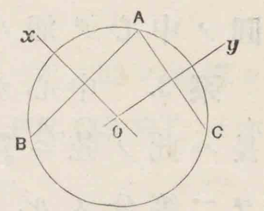
65. 定理

同一直線上ニナイ三點ヲ通ル圓周ハ唯一ツアル.

證明 A, B, C ヲ同一直線上ニナイ三點トセヨ.

線分 AB ヲ垂直ニ二等分スル直線 x ト線分 AC ヲ垂直ニ二等分スル直線 y トハ,相交ル二

直線 AB, AC ニ夫々垂直ダカラ必ズ相交ル.



(第 34 節系 6)

ソコデ其交點ヲ O トセヨ.

O ハ直線 x 上ニアルカラ,二點 A, B カラ等距離ニアル. (第 22 節系)

又 O ハ直線 y 上ニアルカラ,二點 A, C カラ等距離ニアル.

故ニ O ハ三點 A, B, C カラ等距離ニアル.

因テ O ヲ中心, OA ヲ半徑トスル圓周ハ三點 A, B, C ヲ通ル. 故ニ此ノ三點ヲ通ル圓周ハ一ツハ必ズアル.

次ニ三點 A, B, C ヲ通ル圓ノ中心ハ弦 AB ノ垂直二等分線 x ノ上ニナケレバナラズ,其ト同時ニ弦 AC ノ垂直二等分線 y ノ上ニモナケレバナラヌ. (前節系 2)

然ルニ二直線 x, y ハ唯一點 O デ出會フダケデアル.

故ニ三點 A, B, C ヲ通ル圓ノ中心ハ O ヨリ

外ニハナイ.

サテ中心ガ O デアル上ハ,其ノ半徑ハ OA ニ等シクナケレバナラヌ.

故ニ三點 A, B, C ヲ通ル圓周ハ唯一ツニ限ル.

系 1. 三角形ノ三頂點ヲ通ル圓周ハ唯一ツアル. ([illegible])

此圓ヲ此三角形ノ外接圓トイフ.

系 2. 三點ヲ共有スル二圓周ハ全ク相合スル.

系 3. 二圓周ハ,全ク相合シナイ限リ,二ツヨリ多クノ點デ出會フコトハ出來ナイ.

例題

圓內ノ一點カラ圓周マデ引イタ三線分ガ皆相等シケレバ,此點ハ此圓ノ中心デアル. (定理65)

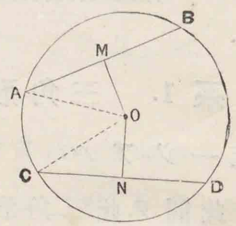
66. 定理

一ツノ圓ニ於テ,相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル.
等シイ円ニオイテ

大キイ弦ハ小サイ弦ヨリモ中心ニ近イ.

證明 圓 O ニ於テ AB=CD トセヨ.

O カラ AB, CD ニ垂線ヲ引キ其足ヲ夫々M, N トシ, OA,OC ヲ引ケバ △OAM ト △OCN トニ於テ



$$OA=OC$$

$$AM=CN \qquad (\because AB=CD)$$

$$\angle OMA=\angle ONC=R\angle$$

$$\therefore \triangle OAM \equiv \triangle OCN$$

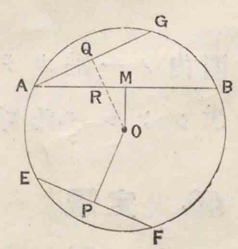
$$\therefore \underline{OM=ON}$$

次ニ $AB>EF$

トセヨ. サウスレバ

劣弧AB＞劣弧EF

ソコデ劣弧 AB 上ニ劣弧 EF ニ等シイ弧 AG ヲ取レバ



$$AG=EF \qquad (\text{第 63 節})$$

デ,弦 AG ハ弦 AB ニ對シテ中心 O ト反對ノ側ニアル.

從テ O カラ弦 AG ニ垂線 OQ ヲ引ケバ,Q ハ AG ノ中點ダカラ (第 46 節), 線分 OQ ハ弦 AB ニ交ル. 其交點ヲ R トスレバ

$$OR<OQ$$

然ルニ $OM<OR$ (第 40 節系)

$$\therefore OM<OQ$$

サテ O カラ弦 EF ニ垂線 OP ヲ引ケバ,前ノ證明ニヨツテ

$$OP=OQ$$

$$\therefore \underline{OM<OP}$$

系 一ツノ圓ニ於テ,中心カラ等距離ニアル弦ハ相等シイ.

中心ニ近イ弦ハ中心ニ遠イ弦ヨリ大キイ.

例 題

1. 相等シイ二圓ノ中心ヲ通ル直線ニ平行ナル一直線ガ此ノ二圓ニ交ツテ出來ル二弦ハ相等シイ.

2. 圓内ノ一定點ヲ通ル弦ノ中デ,其點ヲ通ル直徑ニ垂直ナモノガ最小弦デアル.

問題

1. 相等シイ二圓ノ中心ヲ結ビツケル線分ノ中點ヲ通ル直線ガ各圓ニ交ツテ出來ル二弦ハ相等シイ.

2. 一直線ガ二ツノ**同心圓**（同ジ中心ヲ有スル圓）ノ各ノ周ト交レバ,此ノ二圓周ノ間ニ夾マル其直線上ノ二線分ハ相等シイ.

3. 圓ノ相等シイ二弦若クハ其延長ノ交點カラ弦ノ兩端マデノ距離ハ二ツヅヽ相等シイ.

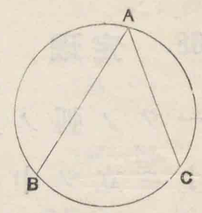
4. 圓ノ相交ル二弦ガ其ノ交點ヲ通ル直徑ト等角ヲナサバ,此二弦ハ相等シイ.

第三章　弓形及圓周角

67. 定義（圓周角,弓形）

圓周上ノ一點カラ引イタ二弦ノナス角ヲ**圓周角**トイフ.

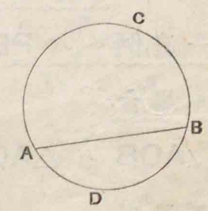
圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マツテキル弧ノ上ニ立ツトイフ.



圖デ,$\angle BAC$ ハ $\overset{\frown}{BC}$ ノ上ニ立ツ圓周角デアル.

弧ト之ヲ張ル弦トデ圍マレタ圓ノ部分ヲ**弓形**トイフ.　弓形ノ含ム角ー弓形角

スベテ弦ハ圓ヲ二ツノ弓形ニ分ケル.



例ヘバ圖ノ弓形ACB, ADB ナド.

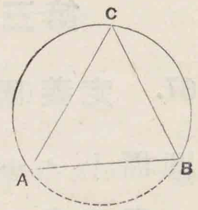
弓形ノ弧ノ上ノ一點ヲ其弧ノ兩端ニ結ビツケル二弦ノナス角ヲ其ノ弓形ノ含ム角或ハ略シテ**弓形ノ角**トイフ.

卽チ弓形ノ含ム角ト

イフノハ,此弓形ノ弧ノ

共軛弧ノ上ニ立ツ圓周

角ノコトデアル.



圖デ, $\angle C$ ハ弓形ACB

ノ含ム角デアル.

68. 定理

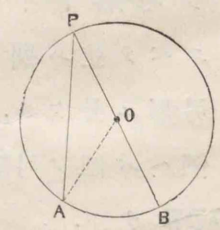
一ツノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ,同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シイ.

證明　圓Oニ於テ, $\overset{\frown}{AB}$ ノ上ニ立ツ一ツノ圓周角ヲ APB トシ,中心角ヲ AOB トセヨ.

(第一)　中心Oガ圓周角

ノ一邊,例ヘバ PB ノ上ニ

アル場合.



$\angle AOB$ ハ $\triangle AOP$ ノ外

角デアル.

$$\therefore\quad \angle AOB = \angle OAP + \angle OPA$$

然ルニ　$OA = OP$

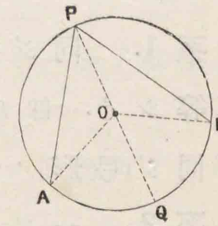
$$\therefore\quad \angle OAP = \angle OPA \qquad (\text{第 25 節})$$

$$\therefore\quad \angle AOB = 2\angle APB$$

$$\therefore\quad \angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

(第二)　中心Oガ圓周角

ノ內ニアル場合.



點Pヲ通ル直徑 PQ ヲ

引ケ.　サウスレバ

$$\angle APB = \angle APQ + \angle BPQ$$

然ルニ　$\angle APQ = \frac{1}{2}\angle AOQ$　(第一)

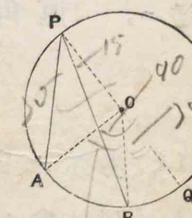
$\angle BPQ = \frac{1}{2}\angle BOQ$　(同上)

$$\therefore\quad \angle APQ + \angle BPQ = \frac{1}{2}(\angle AOQ + \angle BOQ)$$

卽チ　$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$

(第三)　中心Oガ圓周角

ノ外ニアル場合.



點Pヲ通ル直徑 PQ ヲ

引ケバ

$$\angle APB = \angle APQ \sim \angle BPQ$$

然ルニ　$\angle APQ = \frac{1}{2}\angle AOQ$

$\angle BPQ = \frac{1}{2}\angle BOQ$

$$\therefore \quad \angle APQ \sim \angle BPQ = \frac{1}{2}(\angle AOQ \sim \angle BOQ)$$

卽チ $$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

系 1. 同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ皆相等シイ. 卽チ

同ジ弓形ノ含ム角ハ皆相等シイ.

系 2. 一ツノ圓ニ於テ,相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ.

系 3. 一ツノ圓ニ於テ,相等シイ圓周角ガ立ツ弧ハ相等シイ.

系 4. 直徑ノ上ニ立ツ圓周角(卽チ半圓ノ含ム角)ハ直角デアル.

逆ニ, 直角ヲ含ム弓形ハ半圓デアル.

例題

1.* 劣弧ノ上ニ立ツ圓周角(卽チ半圓ヨリ大キイ弓形ノ含ム角)ハ鋭角デ,優弧ノ上ニ立ツ圓周角(卽チ半圓ヨリ小サイ弓形ノ含ム角)ハ鈍角デアル.

逆ニ,弓形ノ含ム角ガ鋭角(又ハ鈍角)ナラバ,其

ノ弓形ハ半圓ヨリ大キイ(又ハ小サイ).

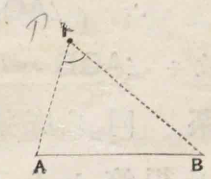
2. 全圓周ノ$\frac{1}{6}$ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ノ大サハ幾ラカ.

3. 二等邊三角形ノ相等シイ一邊ヲ直徑トスル圓ハ底邊ノ中點ヲ通ル.

4. 同ジ弧ノ上ニ立ツ總テノ圓周角ノ二等分線ハ一定ノ點ヲ通ル.

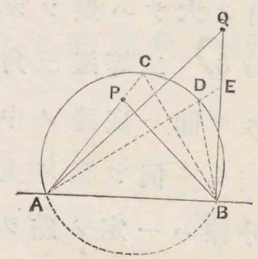
69. 定理

弓形内ノ一點ニ於テ其弦ヲ見込ム角ハ其弓形ノ含ム角ヨリ大キイ. 又弓形外ニアツテ其弦ニ對シ其弓形ト同ジ側ニアル一點ニ於テ其弦ヲ見込ム角ハ其弓形ノ含ム角ヨリ小サイ.



註 一點Pニ於テ一線分ABヲ見込ム角トハ,PカラABノ兩端ニ引イタ二直線PA,PBノナス角ノコトデアル. 之ヲPカラABヲ見ル角トモイフ.

證明 AB ヲ弓形ノ弦,P ヲ其弓形内ノ點トシ,Q ヲ其弓形外ニアツテ直線 AB ニ對シ其弓形ト同ジ側ニアル點トスル.



∠APB ノ一邊 AP ノ延長ト弓形ノ弧トノ交點ヲ C トスレバ

∠APB>∠ACB (第 36 節系 1)

故ニ ∠APB ハ弓形 AB ノ角ヨリ大キイ.

次ニ ∠AQB ノ二邊ノ間ニ夾マツタ弓形ノ弧ノ上ニ其端デナイ任意ノ一點 D ヲ取リ,AD ヲ引キ其延長ト線分 BQ トノ交點ヲ E トスレバ

∠AQB<∠AEB (第 36 節系 1)

∠AEB<∠ADB (同 上)

∴ ∠AQB<∠ADB

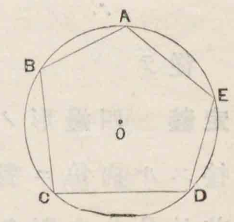
故ニ ∠AQB ハ弓形 AB ノ角ヨリ小サイ.

系 同ジ底邊ノ上ニ,其ノ同ジ側ニ,頂角ガ相等シイ三角形ガ幾ツアツテモ,其中ノ一ツノ三角形ノ外接圓ノ周ハ其他ノ總テノ三角形ノ頂點ヲ通ル.

70. 定義(外接圓)

多角形ノ頂點ガスベテ同一ノ圓周上ニアルトキハ,此多角形ハ此圓ニ**内接**スルトイヒ,此圓ヲ此多角形ノ**外接圓**トイフ.

圖ノ ABCDE ハ圓 O ニ内接スル五邊形デアツテ,圓 O ハ此五邊形ノ外接圓デアル.



三角形ノ場合ニ限ツテ,其ノ外接圓ノ中心ノコトヲ略シテ三角形ノ**外心**トイフ.

71. 定理

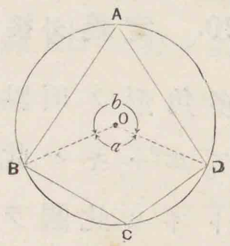
圓ニ内接スル四邊形ノ對角ハ互ニ補角デアル.

證明 ABCD ヲ圓 O ニ内接スル四邊形トスル.

OB, OD ヲ引イテ, $\overset{\frown}{BCD}$ ニ對スル中心角ヲ a トシ, $\overset{\frown}{BAD}$ ニ對スル中心角ヲ b トスレバ

$\angle A = \frac{1}{2}\angle a$

$\angle C = \frac{1}{2}\angle b$



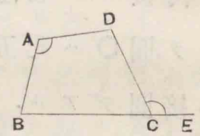
$\therefore \quad \angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\angle a + \angle b)$

サテ　$\angle a + \angle b = 4R\angle$

$\therefore \quad \angle A + \angle C = 2R\angle$

從テ　$\angle B + \angle D = 2R\angle$

定義　四邊形ノ一外角ニ接スル内角ニ對スル角ヲ,其外角ノ**内對角**トイフ.



圖デ, ∠A ハ外角 DCE ノ内對角デアル.

系　圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハ其ノ内對角ニ等シイ.

例題

圓ニ内接スル平行四邊形ハ矩形デアル.

72. 定理

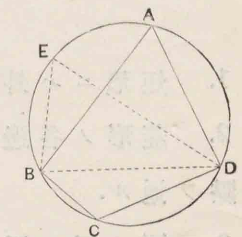
逆　對角ガ互ニ補角ヲナス四邊形ハ圓ニ内接スルコトガ出來ル.

證明　四邊形 ABCD ニ於テ,

$\angle A + \angle C = 2R\angle$

トセヨ.

△BCD ノ外接圓ヲ畫キ, $\overset{\frown}{BCD}$ ノ共軛弧ノ上ニ任意ノ點 E ヲ取レバ, 四邊形 EBCD ハ圓ニ内接スルカラ



$\angle E + \angle C = 2R\angle$　(前節)

然ルニ　$\angle A + \angle C = 2R\angle$　(假設)

$\therefore \quad \angle A = \angle E$

故ニ此圓周ハ A ヲ通ル. (第 69 節系)

即チ ABCD ハ此圓ニ内接スル.

逆　**系**　外角ガ其ノ内對角ニ等シイ四邊形ハ圓ニ内接スルコトガ出來ル.

例題

1. △ABC ノ二頂點 B, C カラ夫々其ノ對邊ニ垂線 BE, CF ヲ引キ,其ノ二垂線(又ハ其延長)ノ交點ヲ H トスレバ,四點 A, E, H, F ハ一圓周上ニアル.

2. 二等邊梯形ニ外接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル.

問題

1. 矩形ニハ外接圓ヲ畫クコトガ出來ル.

2. 菱形ノ各邊ヲ直徑トスル四圓周ハ同一ノ點ヲ通ル.

3. 圓ノ互ニ平行ナル二弦ノ間ニ夾マル二ツノ弧ハ相等シイ.

4. 圓ノ二弦 AB, CD (又ハ其延長)ノ交點ヲ E トスレバ, ∠AEC ハ $\overset{\frown}{AC}$ 及 $\overset{\frown}{BD}$ ノ上ニ立ツ中心角ノ和(又ハ差)ノ半分ニ等シイ.

5. 圓ニ內接スル六邊形ノ內角ヲ一ツオキニ取ツタ三ツノ角ノ和ハ4直角ニ等シイ.

6. 平行四邊形 ABCD ノ二頂點 A, B ヲ通ル任意ノ圓ガ BC, AD 又ハ其延長ト夫々 E, F デ交レバ,四點 C, D, F, E ハ一ツノ圓周上ニアル.

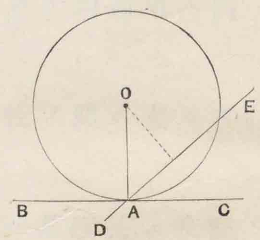
7. △ABC ノ頂點 A カラ對邊 BC へ垂線 AD ヲ引キ,其足 D カラ邊 AB, AC へ夫々垂線

DE, DF ヲ引ケバ,四邊形 BEFC ハ圓ニ內接シ得ル四邊形デアル.

第四章 切線

73. 定理

圓ノ半徑ノ端ヲ通ツテ此半徑ニ垂直ナル直線ハ此圓ノ切線デアツテ,此半徑ニ垂直デナイ直線ハ此圓ノ割線デアル.



證明 略スル.(第58節2,3)

系1. 圓ノ切線ト切點ヲ通ル直徑トハ互ニ垂直デアル.

系2. 圓周上ノ一點ニ於ケル切線ハ唯一ツアル.

系3. 切線ノ切點ヲ通ツテ之ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

例題

1. 圓ノ直徑ノ兩端ニ於ケル切線ハ互ニ平行デアル.

2. 圓ノ平行ニ切線ノ切點ヲ結ブ線分ハ此圓ノ直徑デアル.

3. 圓ノ相等シイ弦ハ皆之ト同心ナル他ノ一ツノ圓ニ切スル.

74. 定理

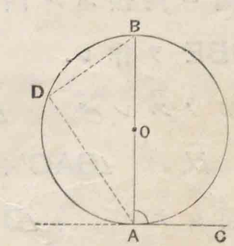
圓ノ弦ト其ノ一端カラ引イタ切線トノナス角ハ,其ノ角内ニ夾マツタ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ.
→(隣ノ弓形角ニ等シイ)

證明 AB ヲ圓 O ノ弦, AC ヲ A カラ引イタ切線トセヨ.

(第一) ∠BAC ガ直角ナル場合

此場合ニハ,弦 AB ハ圓ノ直徑デアル.(前節系3)

而シテ直徑ノ上ニ立ツ圓周角 D ハ直角デアル.(第68節系4)



∴ ∠BAC=∠D

(第二) ∠BAC ガ鋭角ナル場合

點 A ヲ通ル直徑 AD ヲ引キ, B,D ヲ結ビツケレバ

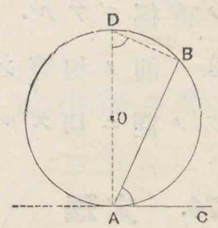
$OA \perp AC$ (前節系1)

∴ $\angle BAC + \angle BAD = R\angle$

然ルニ $\angle ABD = R\angle$

∴ $\angle D + \angle BAD = R\angle$

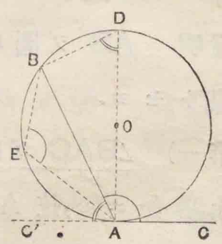
∴ $\angle BAC = \angle D$



(第三) ∠BAC ガ鈍角ナル場合

切線 AC ノ延長ヲ AC′ トセヨ.

∠C′AB 內ニ夾マツタ弧ノ上ニ其端デナイ一點 E ヲ取リ, A ヲ通ル直徑ノ他ノ端ヲ D トシテ此圓ニ內接スル四邊形 ADBE ヲ作レ.



サウスレバ $\angle D + \angle E = 2R\angle$ (第71節)

又 $\angle BAC' + \angle BAC = 2R\angle$

而シテ $\angle D = \angle BAC'$ (第二)

∴ $\angle BAC = \angle E$

系 弦ノ一端カラ引イタ直線ト此弦

トノナス角ガ,此弦ニ對シテ此直線ト反對ノ側ニアル弓形ノ角ニ等シケレバ,此直線ハ此圓ノ切線デアル.

例題

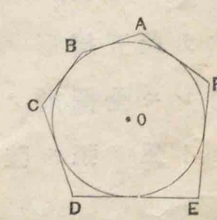
1. 圓ノ切線ニ平行ナル弦ガ張ル一ツノ弧ハ,其切線ノ切點デ二等分サレル.

2. 圓周上ノ一點カラ其圓ニ切線ト弦トヲ引ケバ,其弦ガ張ル弧ノ中點ハ切線ト弦トカラ等距離ニアル.

3. 二等邊三角形 ABC (頂點 A) ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ一點ヲ P トシ, AP ト BC トノ交點ヲ Q トスレバ,圓 BPQ ハ AB ニ切スル.

75. 定義(內接圓)

多角形ノ各邊(延長シナイモノ)ガ同一ノ圓ニ切スルトキハ,此多角形ハ此圓ニ外接スルトイヒ,此圓ヲ此多角形ノ內接圓ト



イフ.

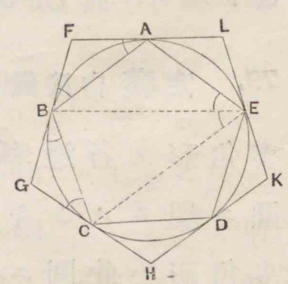
前圖ノ ABCDEF ハ圓 O ニ外接スル六邊形デアツテ,圓 O ハ此六邊形ノ內接圓デアル.

76. 定理

圓周ヲ n 箇ニ等分シ,其ノ各分點ヲ順ニ結ビツケレバ,此圓ニ內接スル n 邊ノ正多角形ガ出來ル.

又其ノ各分點ニ於テ切線ヲ引ケバ,是等ノ切線デ此圓ニ外接スル n 邊ノ正多角形ガ出來ル.

證明 例ヘバ圓周ヲ A, B, C, D, E デ五等分シタトセヨ.



是等ノ分點ヲ順ニ結ビツケレバ內接五邊形 ABCDE ヲ得ル.

サテ此五邊形ノ各邊ハ,何レモ全圓周ノ $\frac{1}{5}$ ニ等シイ弧ヲ張ル弦ダカラ,皆相等シイ.

又此五邊形ノ各角ハ,何レモ全圓周ノ $\frac{3}{5}$ ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ダカラ,皆相等シイ.

故ニ ABCDE ハ內接正五邊形デアル.

次ニ A, B, C, D, E ニ於テ引イタ五ツノ切線デ出來ル外接五邊形ヲ FGHKL トセヨ.

BE, CE ヲ引ケバ,△AFB ト △BGC トニ於テ

$$AB=BC$$

$$\angle FAB=\angle AEB=\angle FBA \quad \text{(第 74 節)}$$

$$\angle GBC=\angle BEC=\angle GCB \quad \text{(同　上)}$$

又 $$\angle AEB=\angle BEC \quad \text{(第 68 節系 2)}$$

$$\therefore \angle FAB=\angle FBA=\angle GBC=\angle GCB$$

$$\therefore \triangle AFB\equiv\triangle BGC$$

同ジ理由デ

$$\triangle BGC\equiv\triangle CHD\equiv\triangle DKE\equiv\triangle ELA$$

$$\therefore \angle F=\angle G=\angle H=\angle K=\angle L$$

卽チ五邊形 FGHKL ノ各角ハ皆相等シイ.

又 FA=FB, GB=GC, HC=HD 等 (第 27 節)

然ルニ $\triangle AFB\equiv\triangle BGC\equiv\triangle CHD\equiv\cdots\cdots$

$\therefore$ FA=FB=GB=GC=……

$\therefore$ FG=GH=HK=……

卽チ五邊形 FGHKL ノ各邊ハ皆相等シイ.

因テ FGHKL ハ外接正五邊形デアル.

例題

1.* 圓ニ外接スル正方形ノ一邊ハ圓ノ直徑ニ等シイ.

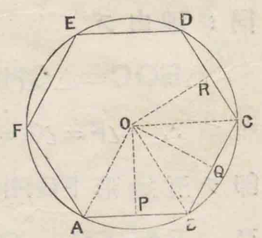
2.* 圓ニ內接スル正六邊形ノ一邊ハ圓ノ半徑ニ等シイ.

77. 定理

正多角形ニハ外接圓及內接圓ガアル.

證明 例ヘバ ABCDEF ヲ正六邊形トセヨ.

先ヅ ∠A, ∠B ノ二等分線ヲ作リ,其交點ヲ O トシ, O ト C トヲ結ベバ



△OAB≡△OCB (第22節)

$\therefore\quad \angle OCB=\angle OAB=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C$

故ニ ∠C ノ二等分線ハ O ヲ通ル.

同様ニシテ ∠D 等ノ二等分線モ皆 O ヲ通ル.

サテ ∠OAB=∠OBA (∵ ∠A=∠B)

$\therefore$ OA=OB

同様ニ OB=OC……

$\therefore$ OA=OB=OC………

因テ O ヲ中心, OA ヲ半徑トスル圓周ハ此多角形ノ總テノ頂點ヲ通ル.

故ニ此ノ正多角形ニハ外接圓ガアル.

次ニ O カラ正多角形ノ各邊ニ垂線 OP, OQ, OR, …… ヲ引ケバ

AB=BC=CD=……

ダカラ

OP=OQ=OR=…… (第66節)

因テ O ヲ中心, OP ヲ半徑トスル圓ハ此多角形ノ總テノ邊ニ切スル.

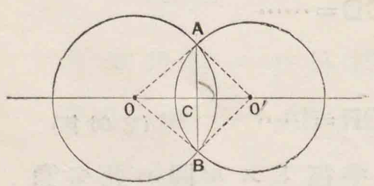
故ニ此ノ正多角形ニハ內接圓ガアル.

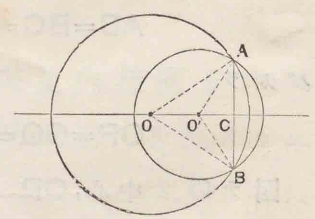
第五章 二ツノ圓

78. 定理

二ツノ圓周ガ其ノ中心線*外ノ一點デ出會ヘバ,是等ノ圓周ハ又他ノ一點デ出會フ. 而シテ此二點ヲ結ブ線分ハ中心線ノタメニ垂直ニ二等分サレル.

證明 二圓O, O′ガ其ノ中心線OO′外ノ一點Aデ出會ツタトセヨ.





Aカラ中心線OO′ニ垂線ACヲ引キ,之ヲ延長シテACニ等シクCBヲ取レバ

$$OA=OB, \quad O'A=O'B$$ (第22節系)

* 二圓ノ中心ヲ通ル直線ノコト.

サテ OA, O′A ハ夫々圓 O, O′ ノ半徑デアル,
故ニ OB, O′B モ亦夫々圓 O, O′ ノ半徑デアル,
故ニ點 B ハ二圓 O, O′ ノ何レノ周上ニモアラネバナラヌ.

卽チ二圓周 O, O′ ハ此點Bデ出會フ.

而シテ線分ABハ中心線OO′ニヨツテ垂直ニ二等分サレテキル. (作圖)

定義 二圓周ガ二點デ出會フトキハ,此ノ二圓周(或ハ圓)ハ相交ルトイフ.

79. 定理

相合シナイ二圓周ガ其ノ中心線上ノ一點デ出會ヘバ,此二圓周ハ其他ノ點デハ出會ハナイ.

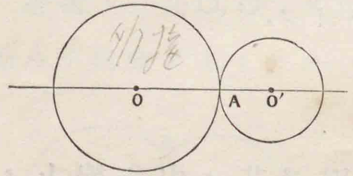
證明 二圓 O, O′ ノ周ガ其ノ中心線OO′上ノ一點Aデ出會ツタトセヨ.

若シ此二圓周ガ中心線OO′上ノ今一ツノ點Bデ出會フトスレバ, ABハ此ノ各圓ノ直徑デナケレバナラヌ,卽チ此二圓ハ同一ノ直徑ヲ有スル圓デアツテ,相合スル.

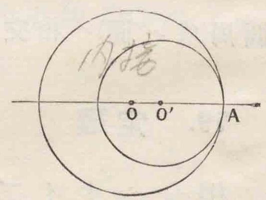
又若シ此ノ二圓周ガ中心線OO′外ノ一點B デ出會フトスレバ,此ハマタOO′外ノ他ノ一點C デ出會ハネバナラヌ(前節),從テ三點A, B, C ヲ共有スルカラ此ノ二圓周ハ相合スル.(第65節系2)

故ニ此ノ二圓周ハ,相合シナイ限リ,Aヨリ外ノ點デ出會フコトハ出來ナイ.

(甲)



(乙)



定義 二圓周ガ唯一點デ出會フトキハ此ノ二圓周(或ハ圓)ハ**相切スル**トイヒ,其點ヲ其ノ**切點**トイフ.

此場合ニ,上ノ甲圖ノヤウニ二圓ガ互ニ他ノ外ニアレバ此ノ二圓ハ互ニ**外切**スルトイヒ,乙圖ノヤウニ一圓ガ他ノ圓ノ內ニアレバ前ノ圓ガ後ノ圓ニ**內切**スル(又ハ略シテ此二圓ガ內切スル)トイフ.

系 1. 二圓ガ相切スレバ,其ノ切點ハ是等ノ圓ノ中心線上ニアル.

系 2. 二圓ガ相切スレバ,是等ノ圓ハ其ノ切點ニ於テ一切線ヲ共有スル.

系 3. 同一直線上ノ同一ノ點デ此直線ニ切スル二圓ハ相切スル.

80. 定理

二ツノ圓ガ

(1) 全ク出會ハズニ,各ガ他ノ外ニアレバ,其ノ中心間ノ距離ハ半徑ノ和ヨリ大キイ.

(2) 外切スレバ,其ノ中心間ノ距離ハ半徑ノ和ニ等シイ.

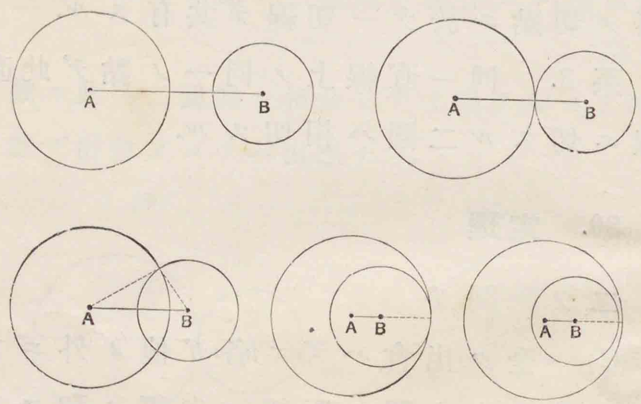
(3) 相交レバ,其ノ中心間ノ距離ハ半徑ノ和ヨリ小サクテ其ノ差ヨリ大キイ.

(4) 內切スレバ,其ノ中心間ノ距離ハ半徑ノ差ニ等シイ.

(5) 全ク出會ハズニ,一ツガ他ノ內ニ

アレバ,其ノ中心間ノ距離ハ半徑ノ差ヨリ小サイ.

證明　略スル.(下圖ヲ見ヨ)



系　二圓ノ中心間ノ距離ガ

(1)　半徑ノ和ヨリ大キケレバ,各圓ハ他ノ圓ノ外ニアツテ,是等ノ圓周ハ全ク出會ハナイ.

(2)　半徑ノ和ニ等シケレバ,是等ノ圓ハ外切スル.

(3)　半徑ノ和ヨリ小サクテ其ノ差ヨリ大キケレバ,是等ノ圓ハ相交ル.

(4)　半徑ノ差ニ等シケレバ,是等ノ圓ハ内切スル.

(5)　半徑ノ差ヨリ小サケレバ,一圓ハ他ノ圓ノ内ニアツテ,是等ノ圓周ハ全ク出會ハナイ.

例題

1. 圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ハ初ノ圓ニ内切スル.

2. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ中心トシ他ノ二邊ノ和ノ半分ニ等シイ半徑ヲ有スル圓ハ,他ノ二邊ヲ夫々直徑トスル二圓ノ各ニ切スル,

問題

1. 相交ル二圓ノ一交點ヲ通ツテ各圓ノ直徑ヲ引ケバ,是等ノ直徑ノ他ノ端ヲ結ビツケル直線ハ他ノ交點ヲ通ル.

2. 二圓周ノ交點 A, B ノ各ヲ通ツテ二線分 PAQ, RBS ヲ引キ,夫々圓周デ終ラシメレバ PR∥QS

3. 相切スル二圓ノ切點 A ヲ通ツテ二線分

PAQ, RBS ヲ引キ,夫々圓周デ終ラシメレバ PR // QS

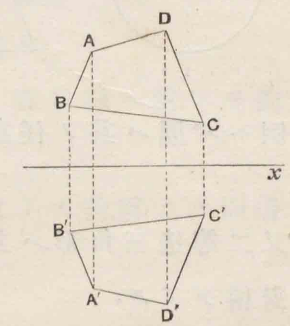
4. 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル任意ノ直線ガ各圓周ニ交ル點ヲ其圓ノ中心ニ結ビツケル二直線ハ互ニ平行デアル.

5. 二定圓周ノ各ニ切スル任意ノ圓ノ中心カラ此ノ二定圓ノ中心マデノ距離ノ和或ハ差ハ,二定圓ノ半徑ノ和ニ等シイカ若クハ其差ニ等シイ.

第六章 對稱圖形

81. 定義(直線ニ就テノ對稱)

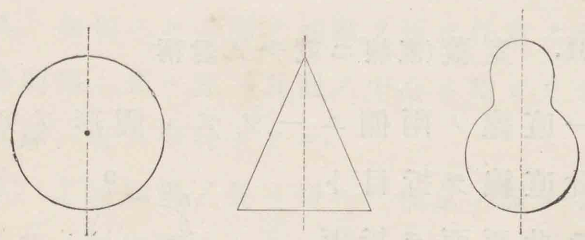
一直線ノ兩側ニ一ツヅヽ圖形ガアツテ,此直線ヲ折目トシテ此平面ヲ折返ストキ,二ツノ圖形ガ全ク相合スレバ,此ノ兩圖形ハ此直線ニ就テ互ニ對稱デアルトイヒ,此直線ヲ此兩圖形ノ對稱ノ軸トイフ.



上圖デ,四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ハ直線 x ニ就テ互ニ對稱ナル圖形デアツテ,直線 x ハ此ノ兩圖形ノ對稱ノ軸デアル.

一圖形ガ或直線ノタメニ互ニ對稱ナル二ツノ部分ニ分ケラレルトキハ,此圖形ハ此直線ニ就テ對稱デアルトイヒ,此

直線ヲ此圖形ノ對稱ノ軸トイフ



例ヘバ圓ハ其ノ任意ノ直徑ニ就テ對稱デアル.

又二等邊三角形ハ其ノ頂角ノ二等分線ニ就テ對稱デアル.

例 題

1.* 一點Pカラ定直線xニ垂線PMヲ引キ,之ヲ延長シテPMニ等シクMP′ヲ取レバ,P′ハ直線xニ就テPト互ニ對稱ナル唯一ノ點デアル.

2.* 或直線ヲ軸トスル對稱圖形ノ相對應スル** 二點ヲ結ビツケル線分ハ,其ノ對稱ノ軸ニヨツテ垂直ニ二等分サレル.

**此場合ニハ互ニ對稱ナルコトノ意デアル.

3.* 直線ニ關スル對稱圖形ノ相對應スル二直線ハ其ノ軸上デ出會フ,而シテ其ノ軸ト等角ヲナス.

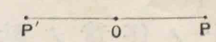
4. 定直線AB上ノ任意ノ點ヲ中心トシ,此直線外ノ一定點Pヲ通ル總テノ圓ハ,皆ABニ就テPト對稱ナル點ヲ通ル.

5. 菱形ハ其ノ何レノ對角線ニ就テモ對稱デアル.

6. 何レノ對角線ニ就テモ對稱ナル四邊形ハ菱形デアル.

82. 定義(點ニ就テノ對稱)

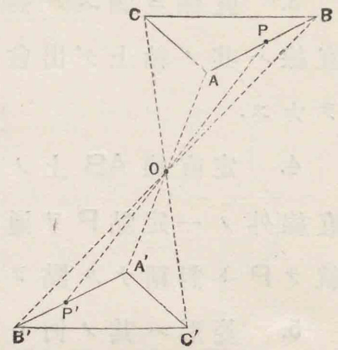
二點(P, P′)ハ之ヲ結ビツケル線分(PP′)ノ中點(O)ニ就テ互ニ對稱デアルトイフ.



此場合ニ,一方ノ點例ヘバPヲOノ周リニ2R,ダケ廻セバ,他ノ點P′ニ合スル.

二ツノ圖形ガアツテ,或一定點ニ就テ其ノ任意一方ノ圖形上ノ任意ノ點ニ對

稱ナル點ガ常ニ他ノ圖形上ニアレバ,此ノ兩圖形ハ此點ニ就テ互ニ對稱デアルトイヒ,此點ヲ此兩圖形ノ對稱ノ中心トイフ.

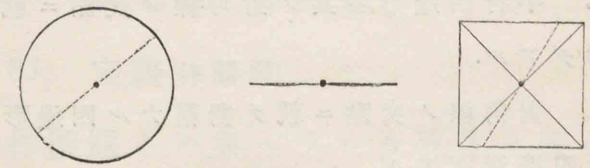


圖デ,△ABC,△A'B'C'ハ點Oニ就テ互ニ對稱ナル圖形デアツテ,點Oハ此ノ兩圖形ノ對稱ノ中心デアル.

此場合ニ,一方ノ圖形例ヘバ △ABC ヲ對稱ノ中心Oノ周リニ2R∠ダケ廻セバ,△A'B'C'ニ全ク合スル.

一圖形ガアツテ,或一定點ニ就テ此圖形上ノ任意ノ點ニ對稱ナル點ガ常ニ亦此圖形上ニアレバ,此圖形ハ此點ニ就テ對稱デアルトイヒ,此點ヲ此圖形ノ對稱ノ中心トイフ.

例ヘバ圓ハ其ノ中心ニ就テ對稱デアル.



又線分ハ其ノ中點ニ就テ對稱デアル.

又正方形ハ其ノ對角線ノ交點ニ就テ對稱デアル.

此場合ニ,此圖形ヲ對稱ノ中心ノ周リニ2R∠ダケ廻セバ全ク元ノ位置ニ復ル.

例題

1.* 二ツノ圖形ガアツテ,其一ツヲ或點ノ周リニ2R∠ダケ廻シタトキ二ツノ圖形ガ全ク相合スレバ,此ノ兩圖形ハ其點ニ就テ互ニ對稱デアル.

2.* 一圖形ヲ或點ノ周リニ2R∠ダケ廻シタトキ全ク元ノ位置ニ復レバ,此圖形ハ其點ヲ對稱ノ中心トスル圖形デアル.

3.* 點ニ關スル對稱圖形ノ相對應スル二直

線ハ平行デアル.

4. 平行四邊形ハ其ノ對角線ノ交點ニ就テ對稱デアル.

5. 對角線ノ交點ニ就テ對稱ナル四邊形ハ平行四邊形デアル.

第七章　作圖題

83. 定義(作圖題)

作圖題トハ與ヘラレタ條件ニ適合スル圖形ヲ畫クコトヲ要求スル問題ノコトデアル.

作圖ヲスルタメニハ器具ヲ用ヒル.

初等幾何學デ用ヒルコトヲ許ス器具ハ**定木**ト**こんぱす**ニ限ル,定木ハ直線ヲ引クタメダケニ,こんぱすハ圓ヲ畫クタメダケニ用ヒルモノトスル.

ソコデ初等幾何學ニ於テ最初カラ出來ルト認メル作圖ハ次ノ二ツダケデアル.

(1) 任意ノ二點ヲ通ル直線ヲ引クコト.

(2) 任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑デ圓ヲ畫クコト.

此ノ二ツヲ**作圖ノ公法**トイフ.

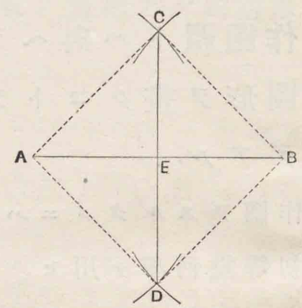
設定

ヲ二等分スルコト

線分ABヲ二等分シ二等分線ヲモトメ

84. 作圖題

定線分 (AB) ヲ二等分セヨ.



作圖 A及Bヲ夫々中心トシ,任意ノ相等シイ半徑デ二ツノ圓弧ヲ畫キ(公法2), 二點 C, D デ交ラセ, CトDトヲ結ビツケヨ.(公法1)** サウスレバ AB ト CD トノ交點EガABノ中點デアル.

證明 線分 AC, BC, AD, BD ヲ引ケバ,四邊形 ADBC ハ菱形デアル.

$\therefore$ EA=EB (第49節)

注意 CD ハ AB ヲ垂直ニ二等分スル.

例題

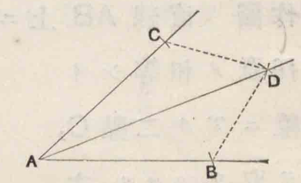
1.* 定線分ヲ直徑トスル圓ヲ畫ケ.

2.* 定圓弧ヲ二等分セヨ.

**今後ハ一々公法ヲ斷ルコトヲ略スル.

85. 作圖題

定角(A)ヲ二等分セヨ.



作圖 頂點Aヲ中心トシ,任意ノ半徑デ圓弧ヲ畫キ, ∠A ノ二邊ト夫々 B, C デ交ラセヨ.

次ニ B, C ノ各ヲ中心トシ任意ノ相等シイ半徑デ二ツノ圓弧ヲ畫キ $\overset{\frown}{BC}$ ニ對シAト反對ノ側ニ於ケル其交點ヲDトシ,AトDトヲ結ビツケレバ,之ガ ∠A ノ二等分線デアル.

證明 B, C ノ各トDトヲ結ビツケヨ. サウスレバ

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (第28節)

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

例題

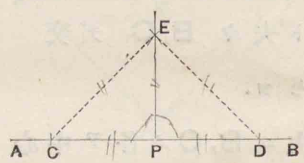
定角ヲ四等分セヨ. 又八等分セヨ.

一般ニ 2^n ニ等分セヨ.

86. 作圖題

定直線(AB)上ノ定點(P)ヲ通ツテ,此直線ニ垂線ヲ引ケ.

作圖 直線AB上ニ於テ點Pノ兩方ニ,Pカラ任意ノ相等シイ距離ニアル二點C,Dヲ取リ(公法2),次ニC,Dヲ夫々中心トシ任意ノ相等シイ半徑デ二ツノ圓弧ヲ畫キ,其ノ一交點ヲEトシ,EトPトヲ結ビツケヨ. サウスレバPEガ所要ノ垂線デアル.



證明 略スル.

注意 上ノ作圖法ハ,前節デ與ヘラレタ角ガ特ニ平角デアル場合ノ二等分線ヲ畫ク方法ニ過ギナイ.

例題

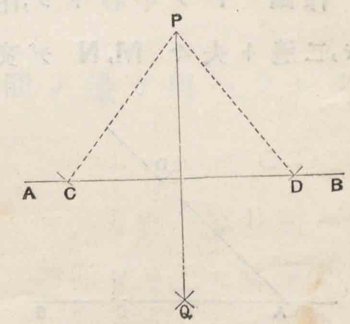
1.* 隣リ合ノ二邊ヲ與ヘテ矩形ヲ畫ケ.

2.* 一邊ヲ與ヘテ正方形ヲ畫ケ.

87. 作圖題

定直線(AB)外ノ一定點(P)カラ此直線ニ垂線ヲ引ケ.

作圖 點Pヲ中心トシ任意ノ半徑デ圓弧ヲ畫キ,直線ABト二點C,Dデ交ラセヨ.



次ニC,Dノ各ヲ中心トシ,任意ノ相等シイ半徑デ二ツノ圓弧ヲ畫キ,ABニ對シPト反對ノ側ニ於ケル其交點ヲQトシ,PトQトヲ結ビツケレバ,之ガ所要ノ垂線デアル.

證明 PC,PDヲ引ケバ

$$PC=PD$$

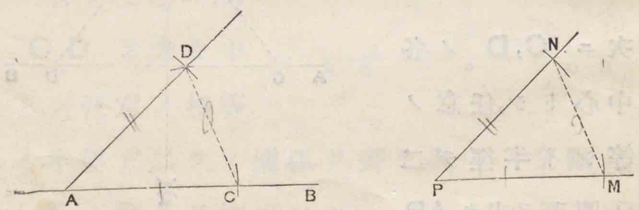
故ニ△PCDハ二等邊三角形デアツテ,PQハ其頂角Pノ二等分線ニ當ル.(第85節)

$\therefore$ PQ⊥AB (第26節)

88. 作圖題

定直線(AB)上ノ定點(A)カラ直線ヲ引イテ,之ト前ノ直線トノナス角ガ與ヘラレタ角(P)ニ等シイヤウニセヨ.

作圖 Pヲ中心トシ,任意ノ半徑デ圓弧ヲ畫キ,二邊ト夫々 M,N デ交ラセヨ.



次ニAヲ中心トシ,前ト同ジ半徑デ圓弧ヲ畫キ AB トCデ交ラセヨ. Cヲ中心トシ線分 MN ニ等シイ半徑デ圓弧ヲ畫キ前ノ圓弧トDデ交ラセ,AトDトヲ結べバ,之ガ所要ノ直線デアル.

證明 略スル.

注意 AB ニ對シテ AD ト對稱ナル直線モ亦求メルモノデアル.

89. 作圖題

二邊及其ノ夾ム角ガ與ヘラレタ三角形ヲ作レ.

解 略スル.

90. 作圖題

二角及其ノ項點間ノ邊ガ與ヘラレタ三角形ヲ作レ.

解 略スル.

91. 作圖題

三邊ガ與ヘラレタ三角形ヲ作レ.

解 略スル.

例題

一邊ヲ與ヘテ正三角形ヲ作レ.

92. 作圖題

斜邊ト一鋭角トガ與ヘラレタ直角三角形ヲ作レ.

解 略スル.

93. 作圖題

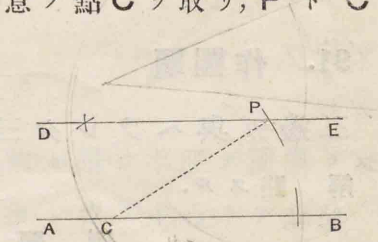
斜邊ト他ノ一邊トガ與ヘラレタ直角三角形ヲ作レ.

解 略スル.

94. 作圖題

一定點 (P) ヲ通ツテ定直線 (AB) ニ平行ナル直線ヲ引ケ.

作圖 AB 上ニ任意ノ點 C ヲ取リ, P ト C トヲ結ビツケ, P ヲ通ツテ CP ト $\angle PCB$ ニ等シイ錯角ヲナスヤウニ直線 DE ヲ引ケ.



サウスレバ之ガ所要ノ平行線デアル.

證明 略スル.

例題

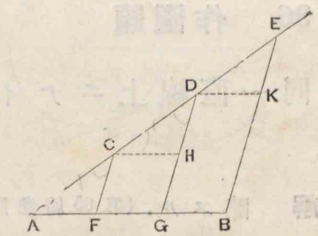
定點ヲ通ツテ定直線ト定角ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引ケ.

95. 作圖題

定線分 (AB) ヲ任意ノ數ニ等分セヨ.(例ヘバ三等分セヨ)

作圖 定線分 AB ノ一端 A カラ任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ任意ノ相等シイ三線分 AC, CD, DE ヲ取ツテ,最後ノ端 E ヲ B ニ結ベ,

次ニ C, D ノ各カラ EB ニ平行線ヲ引イテ AB ト夫々 F, G デ交ラセレバ, F, G ガ線分 AB ヲ三等分スル點デアル.



證明 C, D カラ夫々 AB ニ平行線ヲ引イテ DG, EB ト夫々 H, K デ交ラセレバ

$$\triangle AFC \equiv \triangle CHD \equiv \triangle DKE \quad (第23節)$$

$$\therefore \quad AF = CH = DK$$

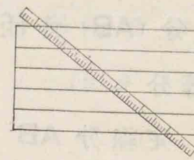
然ルニ $CH = FG, \quad DK = GB$ (第47節)

$$\therefore \quad AF = FG = GB$$

注意 同様ニシテ幾等分デモ出來ル.

例　題

紙ナドヲ等シイ幅ニ折ルニハ,圖ノヤウニ物指ヲ斜ニ當テ、折目ノシルシヲ付ケテモイヽ. 此ハドウイフ譯カ.



96. 作圖題

同一直線上ニナイ三點ヲ通ル圓ヲ書ケ.

解　略スル.(第 65 節參照)

例　題

定圓弧ガ屬スル圓ノ中心ヲ求メヨ.

97. 作圖題

圓周上ノ一點ニ於テ之ニ切線ヲ引ケ.

解　略スル.

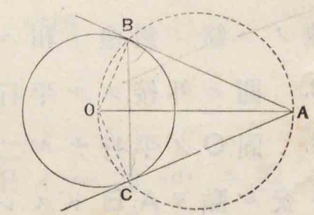
例　題

定圓ニ切シ,定直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ.

98. 作圖題

定圓(O)外ノ一定點(A)カラ此圓ニ切線ヲ引ケ.

作圖　OトAトヲ結ビ之ヲ直徑トスル圓ヲ書キ,此圓ト定圓Oトノ交點ヲB, CトシBCノ各トAトヲ通ル二直線ヲ引ケバ,之ガ所要ノ切線デアル.



證明　B及CヲOニ結ベバ

$\angle OBA = R\angle$, $\angle OCA = R\angle$　(第 68 節系 4)

故ニ AB, AC ハ何レモ圓Oノ切線デアル.

99. 定理

圓外ノ一點カラ此圓ヘ引イタ二切線ノ長サ(其點ト切點トノ間ノ部分)ハ相等シイ.

證明　略スル.

系　圓外ノ一點ト此圓ノ中心トヲ結ブ直線ハ,其點カラ此圓ヘ引イタ二切線ノナス角ヲ二等分シ,且ツ二切點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル.

例題

1.* 圓ニ外接スル四邊形ノ一組ノ對邊ノ和ハ他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シイ.

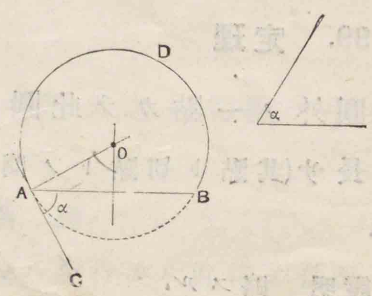
2. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形デアル

3. 圓Oノ平行ナル二切線ガ他ノ任意ノ切線ト交ル點ヲA,Bトスレバ∠AOB=R∠

100. 作圖題

定線分(AB)ヲ弦トシ,定角(α)ニ等シイ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ.

作圖　ABノ一端Aヲ通ツテ∠BAC=∠αナルヤウニ直線ACヲ引キ,Aヲ通ツテ,ACニ垂



直ナル直線トABヲ垂直ニ二等分スル直線トノ交點ヲOトシ,Oヲ中心OAヲ半徑トシテ圓弧ヲ畫キ, ∠BAC內ニ含マレナイ弓形ADBヲ作レバ,之ガ所要ノ弓形デアル.

證明　ACハ圓Oノ切線デアル.(第73節)

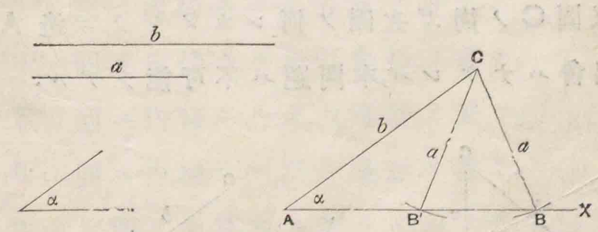
∴　弓形ADBノ角=∠BAC　(第74節)

=∠α

101. 作圖題

二邊(a, b)及其中ノ一邊(a)ニ對スル角(α)ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

作圖　bニ等シイ線分ACヲ引キ,Aカラ∠CAX=∠αナルヤウニ直線AXヲ引ケ. Cヲ中心トシaニ等シイ半徑デ圓ヲ畫ケ.



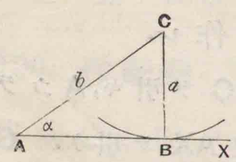
此圓周ト∠CAXノ邊AXトノ交點ヲBトシ,

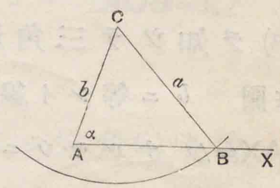
BC ヲ引ケバ,△ABC ガ所要ノ三角形デアル.

證明 略スル.

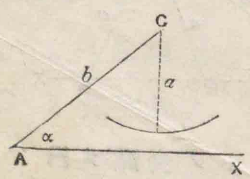
注意 圓 C ノ周ト邊 AX トガ A ノ外ノ二點デ交レバ所要ノ三角形ハ二ツアル,卽チ前頁ノ圖ノ△ABC 及△AB′C ガソレデアル. 此場合ニハ ∠ABC ト ∠AB′C トハ互ニ補角デアル.

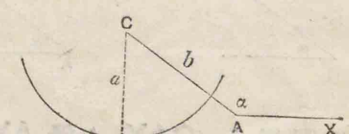
又圓 C ノ周ト邊 AX トガ次ノ二圖ノ何レカノヤウニ,A ノ外ノ唯一點デ出會ヘバ,所要ノ三角形ハ唯一ツデアル.





又圓 C ノ周ガ次圖ノ何レカノヤウニ邊 AX ニ出會ハナケレバ,本問題ハ不可能デアル.





例題

1. 上ノ作圖題デ,α ガ直角又ハ鈍角ナラバ,所要ノ三角形ガ二ツ出來ルコトハ決シテ無イ.

2.* 二邊ガ夫々相等シク,且ツ其二邊中ノ大キイ邊ニ對スル角ガ相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル.

問題

1. 二隣邊ト其夾ム角トヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作レ.

2. 一直線上ニナイ三定點ヲ三頂點トスル平行四邊形ヲ作レ.

3. 直角ヲ三等分セヨ.

4. 二定點ヲ通ル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

5.* 圓ニ内接スル正方形ヲ畫ケ.

6.* 圓ニ内接スル正三角形ヲ畫ケ.

7.* 圓ニ内接スル正六邊形ヲ畫ケ. (112 P. 10)

8. 圓ニ内接スル正八邊形ヲ畫ケ.

9. 定圓カラ定角ニ等シイ角ヲ含ム弓形ヲ截リ取レ.

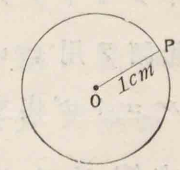
10. 定圓周上ノ定點デ之ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

第八章 軌 跡

102. 定義(軌跡)

點ガ或條件ノ下ニ平面上デ動カウトスルト,其條件ノタメニ制限サレテ自由ニ動クコトガ出來ズニ,或定マツタ路ダケヨリ動カレナイノガ例デアル.

例ヘバ,定點Oカラ 1cm ノ距離ニアルトイフ條件ノ下ニ點ガ動カウトスルト中心ガO,半徑ガ 1cm ナル圓周ノ上ナラバ隨意ニ動ケルガ,此圓周ヲ外レルコトハ出來ナイ. 卽チ此條件ノ下ニ點ガ動キ得ベキ路ハ此圓周ダケデアル. 此路ノコトヲ**軌跡**トイフ. 卽チ



定點カラノ距離ガ一定ナル點ノ軌跡ハ其定點ヲ中心トシ其ノ一定ノ長サヲ半徑トスル圓デアル.

此場合ニ「點ガ圓周上ヲ隨意ニ動ケル」トイフ

コトヲ言ヒ換ヘレバ

(1) 圓周上ノ點ハ皆其條件ニ適スル

トイフコトデアリ,又「點ガ圓周ヲ外レルコトガ出來ナイ」トイフコトヲ言ヒ換ヘレバ

(2) 圓周外ノ點ハ皆其條件ニ適シナイ

或ハ

(2)′ 其條件ニ適スル點ハスベテ此圓周上ニアル

トイフコトデアル.

此語ヲ用ヒレバ,軌跡ノ定義ヲ次ノヤウニ述ベルコトガ出來ル.

或線ガアツテ

(1) 此線上ノ點ハ或與ヘラレタ條件ニ適スル.

(2) 此線外ノ點ハ其條件ニ適シナイ.

或ハ

(2)′ 其條件ニ適スル點ハ總テ此線上ニアル.

トイフ二定理ガ成リ立ツトキハ,此線ヲ

與ヘラレタ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ.

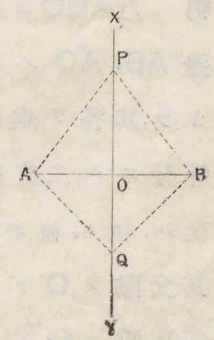
注意 (2)ト(2)′トハ同一ノ事實ヲ違ツタ語デ述ベタニ過ギナイ.

一般ニ,甲ガ乙デアルトイフコトト乙デナイモノハ甲デナイトイフコトトハ同ジ事ニ歸スル. 其ノ一ツノ陳述ヲ他ノ對偶トイフ.

103. 定理

二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ此ノ二定點ヲ結ビツケル線分ヲ垂直ニ二等分スル直線デアル.

證明 A,B ヲ二定點トシ,線分 AB ヲ其中點 O ニ於テ垂直ニ二等分スル直線ヲ XY トセヨ.



(1) P ヲ XY 上ノ任意ノ點トスレバ

PA=PB (第22節系)

即チ XY 上ノ任意

ノ點ハA,Bカラ等距離ニアル.

(2)′ QヲA及Bカラ等距離ニアル任意ノ點トスレバ,QハXY上ニアル.(第26節系3)

故ニXYハA,Bカラ等距離ニアル點ノ軌跡デアル.

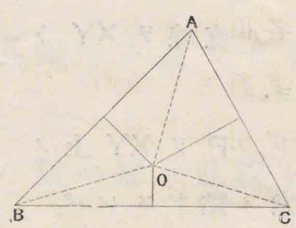
例題

1. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ハ何カ.
2. 二定點カラ等距離ニアル點ヲ定直線上ニ求メヨ.

104. 定理

三角形ノ各邊ヲ垂直ニ二等分スル三直線ハ一點ニ會スル.

證明 △ABCニ於テ二邊AB, ACハ相交ルカラ,其各ヲ垂直ニ二等分スル二直線ハ相交ル.(第34節系6)



今其交點ヲOトシ,之ヲ各頂點ニ結ビツケヨ.サウスレバ

$$OA=OB,\quad OA=OC$$

$$\therefore\ OB=OC$$

故ニ點OハマタBCヲ垂直ニ二等分スル直線上ニアル,即チ邊BCヲ垂直ニ二等分スル直線ハ點Oヲ通ル.

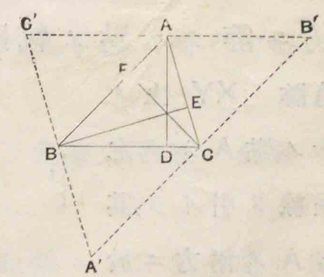
因テ各邊ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ一點Oニ會スル.

注意 OA=OB=OCダカラ,點Oハ△ABCノ外心デアル.

105. 定理

三角形ノ各項點カラ其對邊ヘ引イタ三垂線ハ一點ニ會スル.

證明 △ABCノ各頂點ヲ通ツテ其對邊ニ平行線ヲ引ケバ,圖ノ通リ△A′B′C′ヲ得ル. 而シテ三點A,B,Cハ夫々



$\triangle A'B'C'$ ノ三邊 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ノ中點デアル.

故ニ $\triangle ABC$ ノ各頂點カラ其對邊ニ引イタ三垂線 AD, BE, CF ハ夫々 $\triangle A'B'C'$ ノ三邊 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ヲ垂直ニ二等分スル直線デアル.

因テ此ノ三垂線ハ一點ニ會スル.(前節)

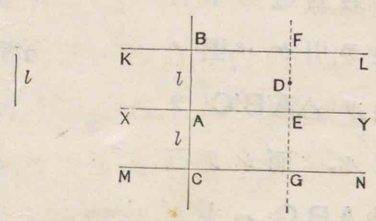
定義 三角形ノ各頂點カラ其對邊ヘ引イタ三垂線ノ交點ヲ此三角形ノ**垂心**トイフ.

例題

$\triangle ABC$ ノ垂心ヲ O トスレバ, A, B, C ハ夫々 $\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$ ノ垂心デアル.

106. 軌跡題

定直線(XY)カラノ距離ガ定線分ノ長サ(l)ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.



軌跡 XY 上ノ任意ノ點 A カラ之ニ垂線ヲ引イテ,其上ニ A ノ兩方ニ於テ l ニ等シイ線分

AB, AC ヲ取レ. B 及 C ヲ通ツテ XY ニ平行線 KL, MN ヲ引ケバ,此二直線ガ所要ノ軌跡デアル.

證明 (1) 此二直線ノ何レヲ取ツテモ,其上ニアル任意ノ點カラ XY マデノ距離ハ AB 又ハ AC ノ長サ卽チ l ニ等シイ.

(2) KL 上ニモ MN 上ニモナイ任意ノ一點ヲ D トシ,之カラ XY ニ垂線 DE ヲ引キ, DE 又ハ其延長ガ KL, MN ト交ル點ヲ夫々 F, G トスレバ, D ハ F, G ノ何レニモ合シナイ.

$$\therefore \quad DE \neq FE, \quad DE \neq EG$$

$$\therefore \quad DE \neq l$$

故ニ二直線 KL, MN ガ所要ノ軌跡デアル.

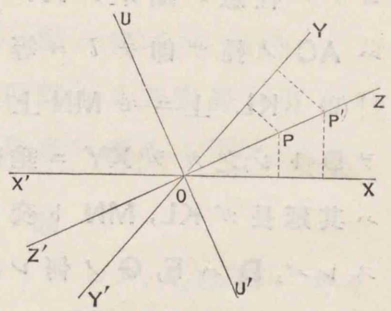
例題

1. 定直線ニ切スル定半徑ノ圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.
2. 同底等高ナル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ何カ.
3. 定直線カラ定距離ニアル點ヲ他ノ定直線上ニ求メヨ.

107. 軌跡題

相交ル二定直線 (XX', YY') カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 XX', YY' ノ交點ヲ O トシ, ∠XOY ノ内ニアッテ XX', YY' カラ等距離ナル任意ノ一點ヲ P トスレバ, P ハ ∠XOY ノ二等分線上ニアル. (第38節系)



次ニ ∠XOY ノ二等分線ヲ OZ トシ, OZ 上ニ任意ノ點 P' ヲ取レバ, P' ハ XX' 及 YY' カラ等距離ニアル. (第37節系2)

故ニ ∠XOY 内ニ於ケル所要ノ軌跡ハ此角ノ二等分線 OZ デアル.

同樣ニ ∠X'OY' 内ニ於ケル所要ノ軌跡ハ此角ノ二等分線 OZ' デアル.

又 ∠X'OY 内デハ此角ノ二等分線 OU ガ所要

ノ軌跡デアッテ, ∠XOY' 内デハ此角ノ二等分線 OU' ガ所要ノ軌跡デアル.

サテ OZ 及 OZ' ハ一直線ニナリ, OU 及 OU' ハ又他ノ一直線ニナル.

故ニ相交ル二定直線カラ等距離ナル點ノ軌跡ハ,其交點ニ於テ出來ル二組ノ對項角ノ二等分線デアル.

注意 上ノ軌跡ノ二直線ハ互ニ垂直デアル.

例題

1. 相交ル二定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ何カ.

2. 相交ル二定直線ニ切シ,且ツ中心ガ他ノ定直線上ニアル圓ヲ畫ケ.

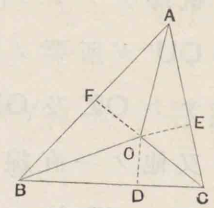
3. 定角ノ二邊ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

108. 定理

三角形ノ各角ノ二等分線ハ一點ニ會スル.

證明 △ABC ニ於テ,先ヅ ∠B 及 ∠C ノ二等分線ハ三角形内デ相交ル. 今其交點ヲ O トシ,

Oカラ三邊 BC, CA, AB ニ夫々垂線 OD, OE, OF ヲ引ケバ



$$OD=OE$$

$$OD=OF$$

$$\therefore \quad OE=OF$$

故ニ點Oハ∠Aノ二等分線上ニアル,卽チ∠Aノ二等分線ハ點Oヲ通ル.

因テ三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ一點Oニ會スル.

系 三角形ノ內接圓ハ唯一ツアル.

注意 三角形ノ內接圓ノ中心ヲ略シテ三角形ノ**內心**トイフ. 內心ハ各角ノ二等分線ノ交點デアル.

例題

△ABC ニ於テ BC=5ᵐ, CA=6ᵐ, AB=7ᵐ デアル. 此三角形ノ內接圓ガ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスルトキ BD, DC, CE, EA, AF, FB ノ長サハ各幾ラカ.

109. 定理

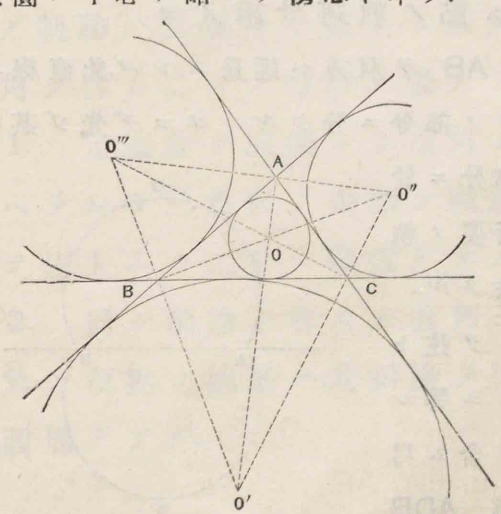
三角形ノ一內角ノ二等分線及他ノ二頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ一點ニ會スル.

證明 略スル.

系 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ハ三ツアル.

定義 上ノ三圓ノ各ヲ其三角形ノ**傍接圓**トイフ.

傍接圓ノ中心ヲ略シテ**傍心**トイフ.



例題

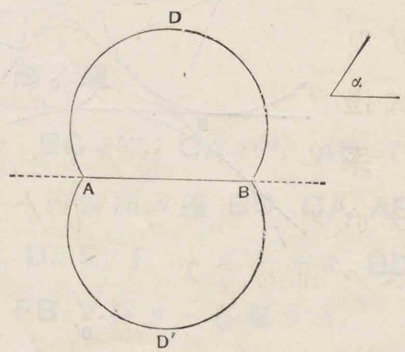
1. △ABC ノ ∠A 内ニアル傍接圓ガ二邊 AB, AC ノ延長ニ切スル點ヲ夫々 D, E トスレバ,線分 AD 又ハ AE ハ此三角形ノ周ノ半分ニ等シイ.

2. 三角形ノ内心ハ三ツノ傍心ヲ頂點トスル三角形ノ垂心デアル.

110. 軌跡題

定線分 (AB) ヲ定角 (α) ニ等シイ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 AB ヲ双方へ延長スレバ,此直線ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ケル. ソコデ先ヅ其中ノ一ツノ部分ニ於ケル所要ノ軌跡ヲ求メル.



AB ヲ弦トシ $\angle\alpha$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ弧 ADB

ヲ畫ケバ(第100節),其上ノ點ニ於テ AB ヲ見込ム角ハ $\angle\alpha$ ニ等シイ.

又此弧ノ上デナイ點ニ於テ AB ヲ見込ム角ハ $\angle\alpha$ ニ等シクナイ.(第69節)

故ニ直線 AB ノ一方(弧 ADB ノアル方)ニ於ケル此點ノ軌跡ハ弧 ADB デアル.

直線 AB ノ他ノ方ニ於テハ,上ト全ク同様ニ AB ニ就テ弧 ADB ト對稱ナル弧 AD'B ガ所要ノ軌跡デアル.

故ニ定線分ヲ定角ニ等シイ角ニ見込ム點ノ軌跡ハ,其線分ヲ弦トシ其角ニ等シイ角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル.

系 1. 定線分ヲ底邊トシ,頂角ノ大サガ與ヘラレタ三角形ノ頂點ノ軌跡ハ,此底邊ヲ弦トスル二ツノ圓弧デアル.

系 2. 同ジ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ハ,此斜邊ヲ直徑トスル圓周デアル.

例題

一定點ヲ通ル任意ノ直線ガ定圓ニ交ツテ出來ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

第九章 作圖題ノ續

111. 軌跡ノ交リ

作圖題ハ結局或條件ニ適スル點ヲ求メルコトニ歸着スル. 例ヘバ三點ヲ通ル圓ヲ畫クコトハ其ノ中心ヲ求メルコトニ歸スルシ,又圓外ノ點カラ此圓ニ切線ヲ引クコトハ其ノ切點ヲ求メルコトニ歸スル.

カウイフ場合ニ,若シ與ヘラレタ條件中ノ一ツヲ省ケバ殘リノ條件ダケニ適スル點ハ無數ニアツテ其軌跡トシテ或線ヲ得ルノガ普通デアル. ソコデ先ニ省イタ條件ヲ元ヘ戻シテ他ノ一ツノ條件ヲ省ケバ又新ラシイ軌跡ヲ得ル. 此ノ兩軌跡ノ交リガ所要ノ點デアル.

若シ此ノ兩軌跡ガ出會ハネバ所要ノ條件ニ適スル點ハ一ツモナイ,卽チ其問題ハ不可能デアル.

定義 スベテ,要求サレタ圖形ヲ作リ得ルタメニハ與ヘラレタ量ノ間ニドンナ關係ガナケ

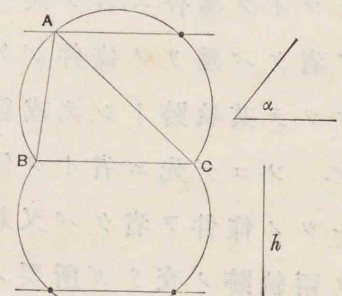
レバナラヌカ,又違ツタ圖形ガ幾通リ作レルカナドヲ考究スルコトヲ作圖題ノ**吟味**トイフ.

112. 作圖題

底邊(BC),頂角(α)及高サ(h)ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

註 三角形ノ**高サ**トハ,頂點ト底邊トノ距離ノコトデアル.

解 先ヅ底邊BCヲ任意ノ位置ニ置ク. ソコデ所要ノ三角形ヲ畫クニハ其頂點ノ位置ガ分カレバイヽ. 因テ先ヅ底邊ト高サトダケガ與ヘラレタトスレバ,頂點ノ軌跡ハBCカラhニ等シイ距離ニアル一双ノ平行線デアル. (第106節)



次ニ底邊ト頂角トダケガ與ヘラレタトスレバ,頂點ノ軌跡ハBCヲ弦トシテ$\angle\alpha$ニ等シイ

角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧デアル. (第100節)

故ニ此ノ兩軌跡ノ交點ノ一ツヲAトスレバ△ABCハ所要ノ三角形デアル.

吟味 上ノ兩軌跡ノ交點ノ數ハ四ツマデアリ得ル,此場合ニハ他ノ交點ヲ頂點トシテモ所要ノ三角形ガ出來ル,併シ其ハ何レモ前ノ三角形ト合同ダカラ,結局所要ノ三角形ハ唯一ツヨリナイ.

若シ兩軌跡ガ出會ハナケレバ,問題ハ不可能デアル.

例題

1. 底邊,頂角及頂點カラノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.
2. 底邊,高サ及底邊ノ一端カラノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

113. 解析ト總合

作圖題ヲ解カウトスルトキ,容易ニ其ノ解法ヲ考ヘツカネバ,先ヅ所要ノ作圖題ガ或方法デ解ケタ(卽チ所要ノ圖形ガ或方法デ畫ケタ)モノ

ト假定シ,此假定ノ圖ニツイテ圖形中ノ既知ノ部分卽チ初ニ與ヘラレタ線,角等ト未知ノ部分トノ間ニドンナ關係ガアルカヲ考ヘ,其關係ニヨツテ此作圖題ヲ他ノ比較的容易ナ作圖題ニ代ヘ,逐次此樣ニシテ終ニ既知ノ作圖題ニ歸着サセル. 之ヲ作圖題ノ**解析**トイフ.

次ニ解析ニヨツテ得タ結果ヲ基トシテ,之カラ其順序ヲ逆ニ辿ツテ所要ノ作圖法ヲ求メル. 之ヲ作圖題ノ**總合**トイフ.

次ニ此作圖法ノ正シイコトヲ證明シ,終リニ之ヲ吟味セヨ.

114. 作圖題

二定圓(O, O')ニ共通ノ切線ヲ引ケ.

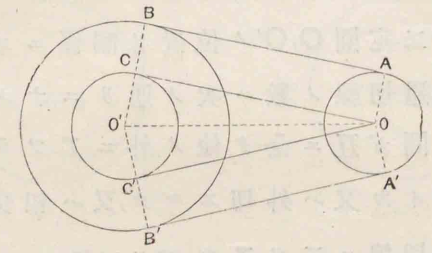
(第一) 兩圓ガ共通切線ノ一方ニアル場合.

此場合ノ共通切線ヲ**外共通切線**トイフ.

解析 ABヲ二定圓 O, O' ノ一ツノ外共通切線ト假定シ,其切點 A, B ヲ夫々其圓ノ中心 O, O' ニ結ビツケレバ

$$OA \perp AB, \quad O'B \perp AB$$

今圓 O' ガ圓 O ヨリ大キイトシ, O カラ AB ニ平行線ヲ引イテ O'B ト C デ交ラセレバ,四邊形 OABC ハ矩形デアツテ O'C ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シイ,而シテ OC ハ O' ヲ中心トシ O'C ヲ半徑トスル圓ニ切スル.



作圖 大キイ方ノ圓 O' ノ中心ヲ中心トシ,二定圓 O, O' ノ半徑ノ差ニ等シイ半徑デ圓ヲ畫ケ.

次ニ此圓ニ小サイ方ノ圓ノ中心 O カラ切線ヲ引キ(第98節),其切點ヲ C, C' トシ,之ヲ通ル定圓 O' ノ半徑 O'B, O'B' ヲ引ケ.

ソコデ O'B, O'B' ト夫々同方向ニ定圓 O ノ半徑 OA, OA' ヲ引キ,直線 AB, A'B' ヲ作レバ,是ガ所要ノ外共通切線デアル.

證明　OABC ハ矩形デアル.

$\therefore\ AB\perp OA,\ AB\perp O'B$

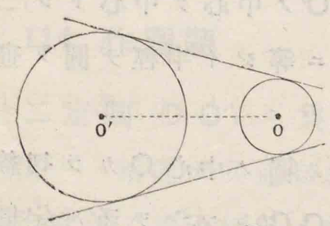
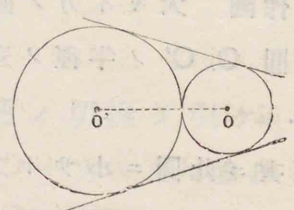
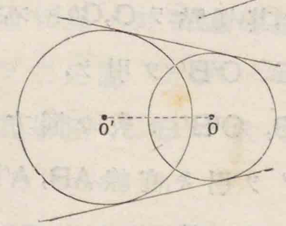
因テ AB ハ二圓 O, O′ ノ共通切線デアル. 而シテ兩圓ハ明カニ此共通切線ノ一方ニアル.

故ニ AB ハ所要ノ外共通切線デアル.

同樣ニ, A′B′ モ亦所要ノ外共通切線デアル.

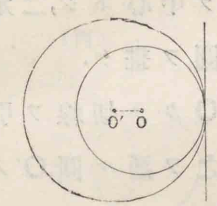
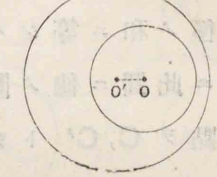
吟味　二定圓 O, O′ ノ位置ノ關係ニヨッテ, 其ノ外共通切線ノ數ハ次ノ通リニナル.

(1)　兩圓ガ互ニ全ク他ノ外ニアッテ, 一ツモ出會ハナイカ又ハ外切スルカ, 又ハ相交ルトキハ, 外共通切線ハ二ツアル. (甲, 乙, 丙圖)

(甲)

(乙)

(丙)


(2)　兩圓ガ内切スルトキハ, 外共通切線ハ唯一ツデアル. (丁圖)

(3)　一圓ガ全ク他ノ圓ノ内ニアッテ一ツモ出會ハナケレバ, 外共通切線ハナイ. (戊圖)

(丁)

(戊)


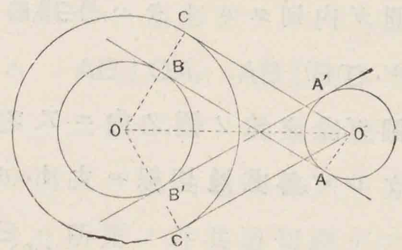
(第二)　兩圓ガ共通切線ノ兩側ニ一ツヅヽアル場合.

此場合ノ共通切線ヲ**内共通切線**トイフ.

解析　AB ヲ一ツノ内共通切線ト假定シ, 其切點 A, B ヲ夫々中心 O, O′ ニ結ビツケレバ

$$OA\perp AB,\quad O'B\perp AB$$

今 O カラ AB ニ平行線ヲ引キ O′B ノ延長ト C デ交ラセレバ, 四邊形 OABC ハ矩形デアッテ O′C ハ兩圓ノ半徑ノ和ニ等シイ, 而シテ OC ハ O′ ヲ中心トシ O′C ヲ半徑トスル圓ニ切スル.



作圖　一ツノ圓O'ノ中心ヲ中心トシ,二定圓ノ半徑ノ和ニ等シイ半徑デ圓ヲ畫ケ.

次ニ此圓ニ他ノ圓ノ中心Oカラ切線ヲ引キ,其切點ヲC, C'トシ,延長ガ之ヲ通ル圓O'ノ半徑$O'B, O'B'$ヲ引キ,B及B'カラ夫々直線$CO, C'O$ニ平行線ヲ引ケバ,是ガ所要ノ內共通切線デアル.

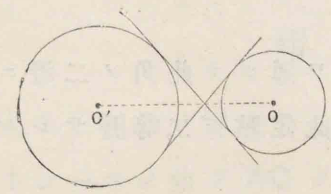
證明　略スル.

吟味　1　兩圓ガ互ニ全ク他ノ外ニアツテ一ツモ出會ハナケレバ,內共通切線ハ二ツアル.(甲圖)

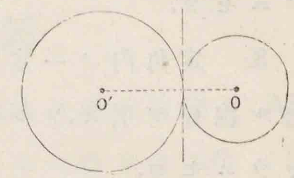
(2　兩圓ガ外切スレバ,內共通切線ハ唯一ツアル.(乙圖)

(3)　其他ノ場合ニハ內共通切線ハナイ.(丙,丁,戊圖)

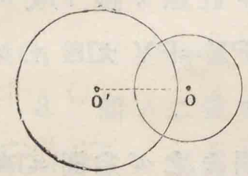
(甲)



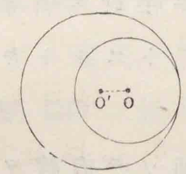
(乙)



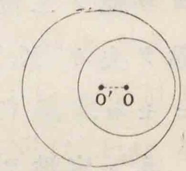
(丙)



(丁)



(戊)



例　題

1.　定圓ニ於テ定長ノ弦ヲ引イテ,其延長ガ他ノ定圓ニ切スルヤウニセヨ.

2.　頂角,高サ及內接圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

問　題

1.　一定點ヲ通ツテ他ノ二定點カラ等距離ニアル直線ヲ引ケ.

2.　一定點ヲ通ツテ直線ヲ引キ,ソレガ二定

平行線間ニ夾マレル部分ヲ定線分ニ等シイヤウニセヨ.

3. 定角内ノ一定點ヲ通ツテ此角ノ二邊ニ終ル線分ヲ引キ,ソレガ此定點デ二等分サレルヤウニセヨ.

4. △ABCノ一邊AC上ニ一點Pヲ求メ,Pカラ他ノ二邊ニ平行ニ引イタ直線ガ邊ト交ル點ヲ夫々X,YトスルトキPX=PYナルヤウニセヨ.

5. 定點ヲ通ツテ直線ヲ引キ,之ガ定圓ニ交ツテ出來ル弦ヲ定長ニ等シイヤウニセヨ.

6. 底邊,一底角及他ノ二邊ノ和ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

7. 底邊,一底角及他ノ二邊ノ差ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

雜題

1. 圓Oノ周上ノ一點Aヲ通ル直徑ヲABトシ一ツノ弦ヲACトスレバ,OカラACニ平行ニ引イタ直線ハ弧BCヲ二等分スル.

2. 圓ノ二弦AB, CDガ相等シケレバ,二弦AC, BDハ相等シイカ若クハ互ニ平行デアル.

3. 圓ノ二弦AB, CDガ圓内デ直交スレバ$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$ハ半圓周ニ等シイ.

4. 相等シイ二圓ガA, Bデ交ルトキ,Bヲ通ル任意ノ直線ガ兩圓ト交ル點ヲC, Dトスレバ,△ACDハ二等邊三角形デアル.

5. 二等邊三角形ノ各頂點ニ於テ其ノ外接圓ニ引イタ三ツノ切線デ出來ル三角形ハ亦二等邊デアル.

6. 圓ノ直徑ABヲ延長シ其上ニ半徑ニ等シクBCヲ取リ,Cカラ此圓ニ引イタ切線ノ切點ヲDトスレバ△DACハ二等邊三角形デアル.

7.* 多角形ノ各邊ヲ垂直ニ二等分スル直線ガ皆一點デ出會ヘバ,此多角形ニ外接圓ヲ畫クコトガ出來ル.

8.* 多角形ノ各角ノ二等分線ガ皆一點デ出會ヘバ,此多角形ニ内接圓ヲ畫クコトガ出來ル.

9. 相對スル邊ノ和ガ相等シイ四邊形ニハ内接圓ヲ畫クコトガ出來ル.

10. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ

$$PA=PB+PC$$

11. △ABC ノ内心 O ト頂點 A トヲ通ル直線ガ外接圓ノ周ト交ル點ヲ D トスレバ

$$DB=DO=DC$$

12. 三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ點カラ三邊又ハ其延長ニ下シタ三ツノ垂線ノ足ハ一直線上ニアル.〔Simson (1687–1768) ノ定理〕

13. 四邊形ノ各角ノ二等分線デ出來ル四邊形ノ對角ハ互ニ補角デアル.

若シ初ノ四邊形ガ平行四邊形(若クハ矩形)ナラバ,後ノ四邊形ハドンナ形ニナルカ.

14. 三角形ノ三中線ノ和ハ,三角形ノ周ヨリ小サクテ,周ノ $\frac{3}{4}$ ヨリ大キイ.

15. 二圓ノ交點ヲ A, B トスル. 其ノ一圓周上ノ任意ノ點ヲ C トスルトキ,二直線 CA, CB ガ他ノ圓周ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ $\overparen{DE}$ ノ長サハ一定デアル.

16. 圓周上ノ任意ノ點 A カラ此圓ノ二定直徑ニ垂線 AB, AC ヲ引ケバ,線分 BC ノ長サハ一定デアル.

17. 三角形ノ垂心ハ,其ノ各頂點カラ對邊ヘ引イタ垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形*ノ内心又ハ傍心デアル.

18. 二定平行線カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

19. 定長ノ線分ガ,常ニ定方向ヲ有シ且ツ其ノ一端ガ常ニ定圓周上ニアルヤウニ動クトキ,其ノ他端ノ軌跡ヲ求メヨ.

20. 二圓ノ交點ヲ A, B トシ,A ヲ通ル一ツノ直線ガ兩圓ト夫々 C, D デ交ルトスル. 今 A ヲ

*コノ三角形ヲ原三角形ノ垂足三角形トイフ.

通ル任意ノ直線ヲ引キ兩圓トノ交點ヲ夫々P, Qトスレバ,二弦CP, DQ又ハ其延長ノ交點Rノ軌跡ハ定三角形BCDノ外接圓周デアル.

21. 定圓弧AB上ノ任意ノ點ヲPトシ,弦APヲ延長シ其上ニPBニ等シクPQヲ取ルトキQノ軌跡ヲ求メヨ.

22. 定線分ヲ底邊トシ,頂角ノ大サガ與ヘラレタ三角形ノ内心ノ軌跡ヲ求メヨ.

23. 定直線上ニ於テ,此直線外ノ二定點カラノ距離ノ和ガ最小ナルベキ點ヲ求メヨ.

24. 定直線上ニ於テ,此直線外ノ二定點カラノ距離ノ差ガ最大ナルベキ點ヲ求メヨ.

25. 二定圓ノ一交點ヲ通ッテ,各圓周上ニ一ツヅヽ兩端ガアル最モ長イ線分ヲ引ケ.

26. 底邊,頂角及他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

27. 底邊,頂角及他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

28. 頂角,周及高サヲ知ッテ三角形ヲ作レ.

29. 定直線上ノ定點ニ於テ此直線ニ切シ,且ツ此直線外ノ一定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ.

30. 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

31. 定直線ト定圓周トニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

32. 定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

第四篇
面　積

115. 定義

面積ガ相等シイ圖形ハ等積デアルトイフ.

二ツノ圖形例ヘバ△ABCト四邊形 DEFGトガ等積ナルコトヲ

△ABC=四邊形DEFG

ト書ク.

116. 面積ノ單位

面積ノ單位ニハ,一邊ノ長サガ長サノ單位ニ等シイ正方形ノ面積ヲ用ヒルモノトスル.

例ヘバ長サノ單位ヲ1米トスレバ,之ヲ一邊トスル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トシテ之ヲ1平方米トイフ. 其他モ之ニ倣フ.

117. 定理

矩形ノ面積ヲ表ハス數(S)ハ其ノ二隣邊ヲ表ハス數(l, m)ノ積ニ等シイ.

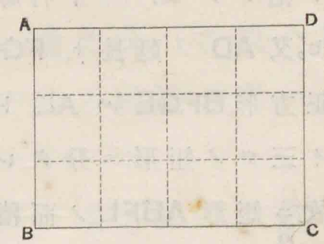
卽チ　　$S=l.m$

證明

(第一)　l, mガ何レモ整數ノトキ

矩形 ABCD ニ於テ,例ヘバ AB=3糎, BC=4糎,從テ $l=3$, $m=4$トスル.

AB ヲ三等分シBC ヲ四等分シ,各分點ヲ通ッテ夫々隣邊ニ平行線ヲ引ケバ,此矩形ハ三ツヅヽ四列卽チ12箇ノ相等シイ正方形ニ分タレル,而シテ此ノ各正方形ノ邊ノ長サハ1糎ダカラ其面積ハ1平方糎デアル. 從テ矩形ABCDノ面積ハ12平方糎デアル.

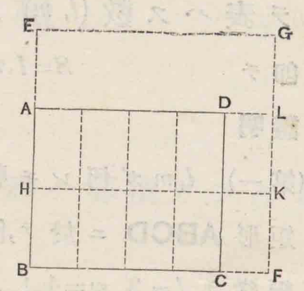


$S=3\times4(=l.m)$

(第二) l, m ガ何レモ分數ノトキ

例ヘバ AB$=\frac{2}{3}$寸, BC$=\frac{4}{5}$寸,從テ $l=\frac{2}{3}$, $m=\frac{4}{5}$ トスル.

AB 及 BC ヲ夫々 E, F マデ延長シテ BE 及 BF ヲ各1寸ニ等シク取ッテ正方形 BFGE ヲ作レ.



AB ヲ H デ二等分シ, H ヲ通ッテ BF ニ平行線ヲ引キ FG ト K デ交ラセ,又 AD ノ延長ト FG トノ交點ヲ L トスレバ,正方形 BFGE ハ AL ト HK トノタメニ相等シイ三ツノ矩形ニ分タレル.

故ニ矩形 ABFL ノ面積ハ正方形 BFGE ノ面積ノ$\frac{2}{3}$ニ等シイ.

次ニ BC ヲ四等分シ,各分點ヲ通ッテ AB ニ平行線ヲ引ケバ矩形 ABFL ハ是等ノ平行線ト CD トノタメニ五ツノ相等シイ矩形ニ分タレル.

故ニ矩形 ABCD ノ面積ハ矩形 ABFL ノ面積

ノ$\frac{4}{5}$ニ等シイ.

故ニ矩形 ABCD ノ面積ハ正方形 BFGE ノ面積ノ$\frac{2}{3}$ノ$\frac{4}{5}$即チ$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$ニ等シイ,而シテ正方形 BFGE ノ邊ノ長サハ1寸,從テ其ノ面積ハ1平方寸ダカラ,矩形 ABCD ノ面積ハ1平方寸ノ$\frac{8}{15}$即チ$\frac{8}{15}$平方寸デアル.

$$\therefore\ S=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}(=l.m)$$

系 1. 正方形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ一邊ヲ表ハス數ノ平方(二乘)ニ等シイ.

系 2. 矩形ノ一邊ヲ表ハス數ハ其ノ面積ヲ表ハス數ヲ其ノ隣邊ヲ表ハス數デ割ッタ商ニ等シイ.

系 3. 正方形ノ一邊ヲ表ハス數ハ其ノ面積ヲ表ハス數ノ平方根ニ等シイ.

118. 定義(線分ノ積,平方)

隣リ合ノ二邊ガ二線分 AB 及 CD ニ等シイ矩形ノコトヲ略シテ此二線分ノ

包ム矩形トイヒ,其面積ヲ此二線分ノ積トイフ.

二線分 AB, CD ノ積ヲ AB.CD デ表ハス.

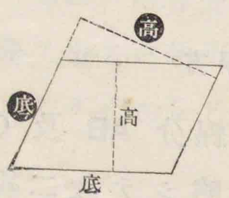
一邊ガ一線分ニ等シイ正方形ノコトヲ略シテ此線分上ノ正方形トイヒ,其面積ヲ此線分ノ平方トイフ.

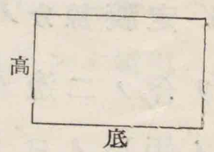
線分 EF ノ平方ヲ EF^2 デ表ハス.

119. 定義(底,高)

平行四邊形ノ任意ノ一邊ヲ特ニ其ノ底邊トイフコトガアル,此場合ニハ底邊ト其ノ對邊トノ間ノ距離ヲ此ノ平行四邊形ノ高サトイフ.

矩形デハ,高サハ底邊ノ隣リノ邊ニ等シイ. 矩形ノ底邊及高サノコトヲ通俗ニハ縱横或ハ長サ,幅ナドトイフ.





梯形ノ兩底邊間ノ距離ヲ其ノ高サトイフ.

120. 定理

底邊(又ハ高サ)ガ相等シクテ高サ(又ハ底邊)ガ相等シクナイ二ツノ矩形ハ等積デナイ,高サ(又ハ底邊)ノ大キイ方ガ他ヨリ大キイ.

即チ a, b, c ヲ三ツノ線分トスルトキ

$b>c$ ナラバ $a.b>a.c$

證明 略スル.

系 1. 等積ナル二ツノ矩形ノ底邊(又ハ高サ)ガ相等シケレバ,其ノ高サ(又ハ底邊)ハ亦相等シイ.

即チ a, b, c ヲ三ツノ線分トスルトキ

$a.b=a.c$ ナラバ $b=c$

系 2. 等積ナル二ツノ正方形ノ邊ハ相等シイ.

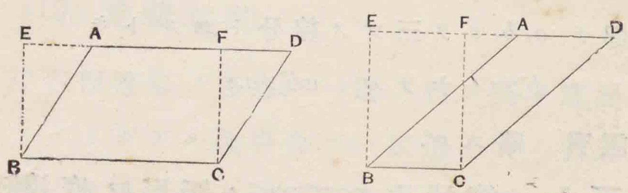
即チ a, b ヲ二ツノ線分トスルトキ

$a^2=b^2$ ナラバ $a=b$

121. 定理

平行四邊形ハ其ノ底邊ト高サトノ包ム矩形ト等積デアル.

證明 平行四邊形ABCDノ底邊BCノ兩端B,Cカラ之ニ垂線ヲ引キ,對邊若クハ其延長ト夫々E,Fデ交ラセヨ.



サウスレバ四邊形BCFEハ平行四邊形ノ底邊BCト高サCFトノ包ム矩形デアル.

而シテ　　$\triangle ABE \equiv \triangle DCF$

サテ四邊形BCDEカラ,$\triangle ABE$ヲ取去レバ其殘リハ平行四邊形ABCDニナルシ,$\triangle DCF$ヲ取去レバ其殘リハ矩形BCFEニナル.

故ニ平行四邊形ABCDト矩形BCFEトハ等積デアル.

系 1. 平行四邊形ノ面積(S)ハ其ノ底邊(b)ト高サ(h)トノ積ニ等シイ.

卽チ　　$S=b.h$

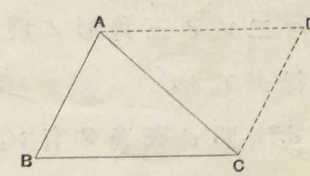
系 2. 底邊及高サガ夫々相等シイ二ツノ平行四邊形ハ等積デアル.

系 3. 等積ナル二ツノ平行四邊形ノ底邊(又ハ高サ)ガ相等シケレバ,其ノ高サ(又ハ底邊)ハ亦相等シイ.

122. 定理

三角形ノ面積ハ之ト等シイ底邊及等シイ高サノ平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シイ.

證明 $\triangle ABC$ノ二頂點A, Cカラ夫々邊BC, BAニ平行線ヲ引イテ其交點ヲDトセヨ. サウスレバABCDハ平行四邊形デ,其ノ底邊及高サ



ハ夫々△ABCノ底邊及高サニ等シイ.

而シテ $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

$\therefore \quad \triangle ABC = \frac{1}{2}(ABCD)$

系 1. 三角形ノ面積 (S) ハ其ノ底邊 (b) ト高サ (h) トノ積ノ半分ニ等シイ.

即チ $S = \frac{1}{2} b.h$

系 2. 底邊及高サガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ等積デアル.

系 3. 等積ナル二ツノ三角形ノ底邊(又ハ高サ)ガ相等シケレバ,其ノ高サ(又ハ底邊)ハ亦相等シイ.

例題

1.* 三角形ノ中線ハ其面積ヲ二等分スル.

2. 同ジ底邊(又ハ一直線上ニアル相等シイ底邊)ヲ有シ,且ツ其直線ノ同ジ側ニアツテ等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ結ブ直線ハ底邊ニ平行デアル.

3.* 同ジ底邊ヲ有シ,其兩側ニアツテ等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ結ビツケル線分ハ,底邊若クハ其延長ノタメニ二等分サレル.

4. 四邊形ABCDノ對角線ノ交點ヲOトスルトキ,ABトCDトガ互ニ平行ナラバ,△AODト△BOCトハ等積デアル.

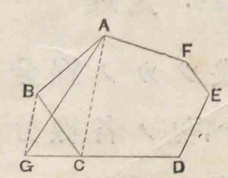
5. 四邊形ABCDノ對角線ノ交點ヲOトスルトキ,△AODト△BOCトガ等積ナラバ,ABトCDトハ互ニ平行デアル.

123. 作圖題

定多角形ト等積デアツテ,邊ノ數ガ之ヨリ一ツダケ少ナイ一ツノ多角形ヲ作レ.

作圖 例ヘバ六邊形 ABCDEF ガ與ヘラレテアルトキ,對角線ACヲ引キ,頂點BカラACニ平行線ヲ引イテDCノ延長トGデ交ラセ,AトGトヲ結ビツケヨ.

サウスレバ五邊形 AGDEF ハ所要ノ五邊形デアル.



證明 △ABC ト

△AGCトハ底邊ACガ共通デアツテ其ノ高サモ亦相等シイ.

$$\therefore\quad \triangle ABC=\triangle AGC$$

$\therefore$　五邊形AGDEF＝六邊形ABCDEF

124. 作圖題

定多角形ト等積ナル一ツノ三角形ヲ作レ.

解　前節ノ作圖ヲ引續イテスレバ,終ニハ此ノ作圖題ガ解ケル.

125. 作圖題

定三角形ト等積ナル一ツノ矩形ヲ作レ.

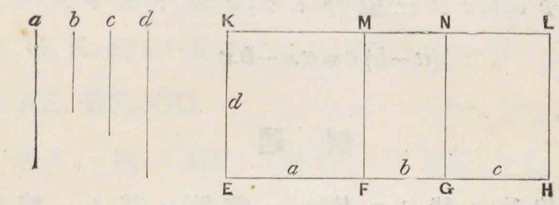
解　略スル.

126. 定理

幾ツカノ線分ノ和ト他ノ一線分トノ積ハ,初ノ各線分ト後ノ線分トノ積ノ和ニ等シイ.

例ヘバ a, b, c, d ヲ四ツノ線分トスレバ

$$(a+b+c).d=a.d+b.d+c.d$$



證明　一直線上ニ引續イタ三線分EF, FG, GH ヲ夫々 a, b, c ニ等シク取レ. 次ニEカラEH ニ垂線ヲ引キ,其上ニ d ニ等シクEK ヲ取リ,矩形EHLK ヲ作レバ,其面積ハ $(a+b+c).d$ デ表ハサレル.

次ニF及GカラEK ニ平行線ヲ引イテKL ト夫々M及Nデ交ラセレバ,三ツノ矩形EFMK, FGNM, GHLN ノ面積ハ夫々 $a.d,\ b.d,\ c.d$ デ表サレル.

而シテ矩形EHLK ノ面積ハ後ノ三ツノ矩形ノ面積ノ和ニ等シイ.

$$\therefore\quad (a+b+c).d=a.d+b.d+c.d$$

系　二線分ノ差ト他ノ一線分トノ積

ハ,初ノ各線分ト後ノ線分トノ積ノ差ニ等シイ.

即チ a, b, c ヲ三線分トシ, $a>b$ トスレバ

$$(a-b).c=a.c-b.c$$

例題

二線分ノ積ノ m 倍(m ハ整數)ハ,其ノ一線分ノ m 倍ニ等シイ線分ト今一ツノ線分トノ積ニ等シイ.

127. 定理

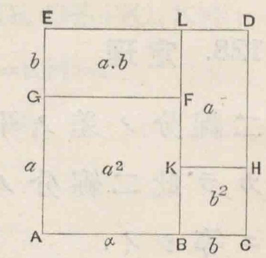
二線分ノ和ノ平方ハ,其ノ各ノ平方ノ和ニ此二線分ノ積ノ2倍ヲ加ヘタモノニ等シイ.

即チ a, b ヲ二線分トスレバ

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2.a.b$$

證明 a ニ等シイ線分 AB ヲ引キ,之ヲ延長シテ其上ニ b ニ等シク BC ヲ取レ. サウスレバ AC$=a+b$

ソコデ AC ノ上ニ正方形 ACDE ヲ作リ,其



內ニ AB, BC ヲ夫々邊トスル正方形 ABFG, BCHK ヲ作レバ, G, K, H ハ夫々直線 AE, BF, CD ノ上ニ來ル. 次ニ BF ヲ延長シテ DE ト L デ交ラセヨ.

サウスレバ

$$AC^2=AB^2+BC^2+FG.EG+LK.HK$$

サテ FG=KL$=a$, EG=HK$=b$

$$\therefore \quad (a+b)^2=a^2+b^2+a.b+a.b$$

$$=a^2+b^2+2.a.b$$

別證

$$(a+b)^2=(a+b).(a+b)$$

$$=(a+b).a+(a+b).b \quad (前節)$$

$$=a.a+b.a+a.b+b.b \quad (同上)$$

$$=a^2+b^2+2.a.b$$

例題

一線分ノ2倍ニ等シイ線分ノ平方ハ原線分ノ平方ノ4倍ニ等シイ.

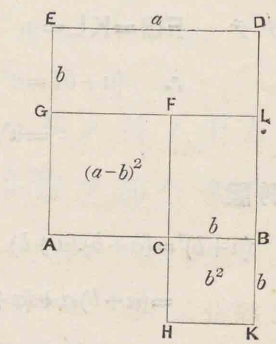
128. 定理

二線分ノ差ノ平方ハ,其ノ各ノ平方ノ和カラ此二線分ノ積ノ2倍ヲ引イタモノニ等シイ.

即チ a, b ヲ二線分トシ, $a>b$ トスレバ

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2.a.b$$

證明 a ニ等シイ線分 AB ヲ引キ,其上ニ b ニ等シク BC ヲ取リ, AB ノ上ニ正方形 ABDE ヲ作リ,其内ニ AC ノ上ニ正方形 ACFG ヲ作レバ,點 G ハ AE ノ上ニ來ル.



次ニ BC ノ上ニ正方形BCHK ヲ AB ノ今一方ノ側ニ作レバ, CH ト CF トハ一直線ニナリ, BD ト BK トハ一直線ニナル.

ソコデ GF ヲ延長シテ BD ト L デ交ラセヨ.

サウスレバ

$$AC^2=AB^2+BC^2-(GL.GE+KL.KH)$$

サテ $GL=KL=a,\quad GE=KH=b$

$$\therefore\ (a-b)^2=a^2+b^2-(a.b+a.b)$$
$$=a^2+b^2-2.a.b$$

別證

$$(a-b)^2=(a-b).(a-b)$$
$$=(a-b)\,a-(a-b).b \qquad \text{(第126節系)}$$
$$=a^2-b.a-(a.b-b^2) \qquad \text{(同 上)}$$
$$=a^2-b.a+b^2-a.b$$
$$=a^2+b^2-2.a.b$$

例題

1. 二線分ノ和ノ平方ト差ノ平方トノ和ハ此二線分ノ平方ノ和ノ2倍ニ等シイ.

2. 二線分ノ和ノ平方ト差ノ平方トノ差ハ此二線分ノ積ノ4倍ニ等シイ.

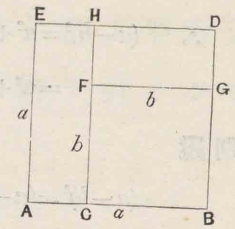
129. 定理

二線分ノ和ト差トノ積ハ,此二線分ノ平方ノ差ニ等シイ.

即チ a, b ヲ二線分トシ, $a>b$ トスレバ

$$(a+b).(a-b)=a^2-b^2$$

證明 a ニ等シイ線分 AB ヲ引キ,其上ニ BC ヲ b ニ等シク取リ, AB 上ニ正方形 ABDE ヲ作リ,其内ニ BC ノ上ニ正方形 BCFG ヲ畫キ, CF ノ延長ト DE トノ交點ヲ H トセヨ.



サウスレバ

$$AB^2-BC^2=AC.AE+GD.GF$$

而シテ $AC=GD=a-b$

$\therefore$ $AC.AE+GD.GF=AC.(AE+GF)$

$\therefore$ $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$

即チ $(a+b).(a-b)=a^2-b^2$

別證

$$(a+b).(a-b)=(a+b).a-(a+b).b$$
$$=a^2+b.a-a.b-b^2$$
$$=a^2-b^2$$

例題

1.* 線分 AB ノ中點ヲ M トシ, AB 又ハ其ノ延長上ノ一點ヲ P トスレバ

$$PA.PB=AM^2\sim PM^2$$

2. 前問題ニ於テ

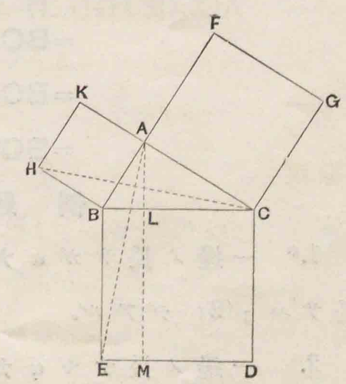
$$PA^2\sim PB^2=2.AB.PM$$

130. 定理 (*Pythagoras** ノ定理)

直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シイ.

證明 △ABC ニ於テ A ヲ直角トセヨ.

△ABC ノ各邊ノ上ニ,其ノ外側ニ夫々正方形 BCDE, CAFG, ABHK ヲ畫キ,頂點 A カラ斜邊 BC ニ垂線 AL ヲ引キ,之ヲ延長シテ ED ト交ル點ヲ M トセヨ.



A, E 及 C, H ヲ結ビツケレバ, △ABE 及 △HBC ニ於テ

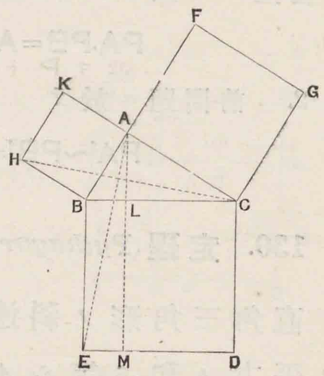
*ぎりしやノ人,西紀前570–500頃

$BE=BC$

$AB=HB$

$\angle ABE=\angle HBC$

$\therefore\ \triangle ABE\equiv\triangle HBC$



然ルニ

$2.(\triangle ABE)=BE.BL$

又 AC, AK ハ一直線ニナルカラ

$$2.(\triangle HBC)=HB.AB=AB^2$$

$$\therefore\ AB^2=BE.BL$$

同様ニ $AC^2=CD.CL$

$$\therefore\ AB^2+AC^2=BE.BL+CD.CL$$
$$=BC.BL+BC.CL$$
$$=BC.(BL+CL)$$
$$=BC^2$$

例題

1.* 一邊ノ長サガaナル正方形ノ對角線ノ長サハ $\sqrt{2}a$ デアル.

2. 一邊ノ長サガaナル正三角形ノ高サハ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ デアル.

3. 半徑rナル圓ニ内接スル正方形及正三角形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ.

4. 四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナラバ,一組ノ對邊ノ平方ノ和ハ他ノ組ノ對邊ノ平方ノ和ニ等シイ.

5.* $\triangle ABC$ $(AB>AC)$ ノ頂點Aカラ邊BCニ垂線ADヲ引ケバ

$$AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$$

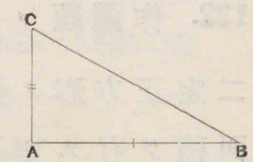
131. 定理

一邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シイ三角形ハ直角三角形デアル.

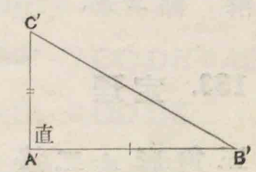
證明 $\triangle ABC$ニ於テ

$BC^2=AB^2+AC^2$

デアルトスル.



今二邊A′B′及A′C′ガ夫々AB, ACニ等シク其ノ夾ム角A′ガ直角ニ等シイ直角三角形A′B′C′ヲ作レバ



$$B'C'^2=A'B'^2+A'C'^2 \qquad \text{(前節)}$$
$$=AB^2+AC^2 \qquad \text{(作圖)}$$
$$=BC^2 \qquad \text{(假設)}$$
$$\therefore\ B'C'=BC$$
$$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$
$$\therefore\ \angle A=\angle A'$$

然ルニ $\angle A'=R\angle$ $\quad\therefore\ \angle A=R\angle$

即チ $\triangle ABC$ ハ直角三角形デアル.

例題

m, n ヲ任意ノ數($m>n$)トスルトキ,三邊ノ値ガ夫々 m^2+n^2, $2mn$, m^2-n^2 ナル三角形ハ直角三角形デアル.

132. 作圖題

二定正方形ノ面積ノ和(又ハ差)ニ等シイ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ.

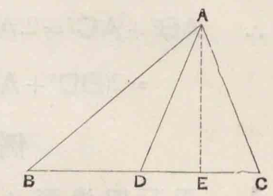
解　略スル.

133. 定理

三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ第三邊ノ

半分ノ平方ト其邊ヘノ中線ノ平方トノ和ノ2倍ニ等シイ.

證明　$\triangle ABC$ ニ於テ,邊 BC ノ中點ヲ D トセヨ.



頂點 A カラ BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ E トスルトキ,E ガ D ニ合シナイトシ,例ヘバ E ガ線分 BD ノ延長上ニアルトセヨ.

サウスレバ直角三角形 ABE ニ於テ

$$AB^2=BE^2+AE^2$$
$$=(BD+DE)^2+AE^2$$
$$=BD^2+DE^2+2.BD.DE+AE^2$$
$$=BD^2+AD^2+2.BD.DE$$

又直角三角形 ACE ニ於テ

$$AC^2=CE^2+AE^2$$
$$=(CD\sim DE)^2+AE^2$$
$$=CD^2+DE^2-2.CD.DE+AE^2$$
$$=CD^2+AD^2-2.CD.DE$$
$$=BD^2+AD^2-2.BD.DE$$

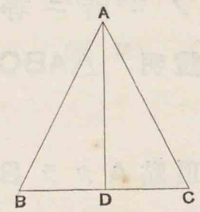
$$\therefore \quad AB^2+AC^2=2(BD^2+AD^2)$$

若シ E ガ D ニ合スレバ

$$AB=AC$$

$$AB^2=BD^2+AD^2$$

$$\therefore \quad AB^2+AC^2=2.AB^2$$
$$=2(BD^2+AD^2)$$



例題

1. 平行四邊形ノ各邊ノ平方ノ和ハ兩對角線ノ平方ノ和ニ等シイ.

2. 定直線上ニ於テ,其直線外ノ二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ最小ナル點ヲ求メヨ.

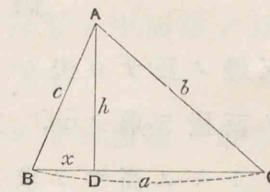
134. 定理

三角形ノ三邊ヲ表ス數ヲ a, b, c トシ周ノ半分ヲ表ス數卽チ $\frac{1}{2}(a+b+c)$ ヲ s トスレバ

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ *$$

證明 △ABC ニ於テ∠A ヲ最大角トシ,三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ表ス數ヲ夫々 a, b, c トシ, A カラ BC ニ引イタ垂線ヲ AD トシ AD, BD ノ長サヲ表ス數ヲ夫々 h, x トセヨ.

*Heron (西紀前200−125頃) ノ公式



サウスレバ

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}a.h$$

サテ
$$CD=BC-BD=a-x$$

$$c^2-x^2=h^2$$

$$b^2-(a-x)^2=h^2$$

$$\therefore \quad c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$$

之カラ
$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

因テ
$$h^2=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2$$
$$=\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$\therefore \quad 4a^2h^2=(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac+b^2-a^2-c^2)$$
$$=\{(a+c)^2-b^2\}\{b^2-(a-c)^2\}$$
$$=(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)$$
$$=16s(s-a)(s-b)(s-c) \qquad [\because a+b+c=2s]$$

$$\therefore \quad ah=2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

例題

三邊ノ長サガ夫々 13寸, 14寸, 15寸ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ. 又此三角形ノ各邊ヲ底トスルトキノ高サヲ求メヨ.

問題

1.* 梯形ノ面積ハ其ノ兩底邊ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ.

2. 平行四邊形ノ一對角線上ノ任意ノ一點ヲ通ツテ二邊ニ平行線ヲ引キ之ヲ四ツノ平行四邊形ニ分ケルトキ,前ノ對角線ノ部分ヲ對角線トシナイ二ツノ平行四邊形ハ等積デアル.

3. 一邊ガ a ナル正三角形ノ外接圓及內接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

4. 半徑 r ナル圓ニ內接スル正三角形ノ面積ヲ求メヨ.

5 半徑 r ナル圓ニ內接スル正六邊形ノ面積ヲ求メヨ.

6. 正多角形ノ面積ハ,其ノ周ト內接圓ノ半徑トノ積ノ半分ニ等シイ.

7. 二邊ガ定長ナル三角形ノ中,面積ノ最大ナモノハ何カ.

8.* 定周ヲ有スル矩形ノ中デ,面積ノ最大ナモノハ正方形デアル.

雑題

1. 圓ノ二弦ガ直交スレバ,其交點カラ二弦ノ兩端マデノ四線分ノ平方ノ和ハ此圓ノ直徑ノ平方ニ等シイ.

2. 四邊形ノ隣リ合ノ邊ノ中點ヲ順ニ結ビツケテ出來ル平行四邊形ノ面積ハ元ノ四邊形ノ面積ノ半分ニ等シイ.

3. 四邊形ノ面積ハ,其ノ兩對角線ヲ二邊トシ兩對角線ノナス角ヲ其ノ夾ム角トスル三角形ノ面積ニ等シイ.

4. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ通ル直線ガ其四邊形ノ面積ヲ二等分スレバ,其二邊ハ互ニ平行デアル.

5. 二等邊三角形ノ底邊(又ハ其延長)上ノ任意ノ點カラ他ノ二邊マデノ距離ノ和(又ハ差)ハ一定デアル.

6. 三角形ノ重心ヲ各頂點ニ結ビツケテ出來ル三ツノ三角形ハ皆等積デアル.

7. △ABC 外ニ一點 G ヲ

$$\triangle GBC = \triangle GCA = \triangle GAB$$

ナルヤウニ求メヨ.

8. 三角形ノ一角ノ頂點カラ引イタ中線ガ其角ノ二邊トナス角ノ中,小サイ邊トナス角ハ大キイ邊トナス角ヨリ大キイ.

9. 圓ノ弦ヲ三等分スル半徑ハ此弦ニ對スル弧ヲ三等分スルカ.

10. 三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ小サク,鈍角ニ對スル邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ大キイ.

11. 三角形ノ一角ニ對スル邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ小サイカ又ハ大キイカニ從ッテ,此角ハ鋭角又ハ鈍角デアル.

12. 三角形ノ各邊ノ平方ノ和ノ 3 倍ハ各中線ノ平方ノ和ノ 4 倍ニ等シイ.

13. 四邊形ノ對角線ノ平方ノ和ハ,對邊ノ中點ヲ結ビツケル二線分ノ平方ノ和ノ 2 倍ニ等シイ.

14. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 D カラ任意ノ

直線ヲ引キ,邊 BC トEデ, AB ノ延長トFデ交ラセレバ

$$\triangle ABE = \triangle CEF$$

15. 正方形 ABCD ノ對角線 BD 上ノ任意ノ點ヲEトスレバ

$$2.AE^2 = BE^2 + ED^2$$

16. 平行四邊形ABCD内ノ任意ノ點Eヲ通ツテ二邊ニ夫々平行ナル直線ヲ引ケバ,DトE,及BトEヲ夫々向ヒ合ノ二頂點トスル平行四邊形ノ面積ノ差ハ△ACEノ面積ノ2倍ニ等シイ.

17. 定角内ノ一定點ヲ通ル直線ト此角ノ二邊トデ出來ル三角形ノ面積ハ,其定點ガ之ヲ通ル邊ノ中點ナルトキニ最小デアル.

18. 三角形ヲナス三定直線ノ各カラ相等シイ定長ノ弦ヲ截リ取ル圓ヲ書ケ.

19. 三角形ノ底邊上ノ一定點カラ直線ヲ引イテ其面積ヲ二等分セヨ.

20. 四邊形ノ一頂點カラ直線ヲ引イテ其面積ヲ二等分セヨ.

21. 定線分 AB 又ハ其延長上ニ一點Cヲ求

メ $AC^2 - BC^2 = k^2$ ナルヤウニセヨ. 但シ k ハ他ノ定線分デアル.

22. 二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ハ,此二定點ヲ結ブ線分ノ中點ヲ中心トスル一圓周デアル.

23. 二定點カラノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ハ,此二定點ヲ通ル直線ニ垂直ナル一直線デアル.

第五篇

比及比例

第一章 總論

135. 定義(比)

一量Aノ之ト同種類ノ量Bニ對スル比トハ,Aヲ得ルタメニBニ掛ケルベキ數ノコトデアル.

故ニAノBニ對スル比ハAヲBデ割ツタ商デアル,又Bヲ單位トシタトキAヲ表ス數デアル.

AノBニ對スル比ヲ $\frac{A}{B}$ ト書ク.

同種類ノ二量A,Bガ之ト同種類ノ或一量Uノ夫々m倍,n倍ニ等シイトキハ,A,Bノ比ガm,nノ比ニ等シイトイフ.

此事ヲ $A:B=m:n$ ト書ク.

一般ニ,同種類ノ幾ツカノ量A,B,C,……ガ之

ト同種類ノ或一量Uノ夫々l倍,m倍,n倍,……ニ等シイトキ,之ヲ次ノヤウニ書キ表ス.

$$A:B:C:\cdots\cdots=l:m:n:\cdots\cdots$$

此時ニ,Uヲ單位トシテA,B,C,……ヲ測レバ,其値ハ夫々l,m,n,……デアル.故ニ幾ツカノ量ノ比ハ之ヲ同ジ單位デ測ツテ得ル數ノ比ニ等シイ.

$\frac{A}{B}$ 又ハ $A:B$ ニ於テ,A,Bヲ通稱シテ比ノ**項**トイヒ,其中Aヲ**前項**,Bヲ**後項**トイフ.

AノBニ對スル**反比**(又ハ $\frac{A}{B}$ ノ反比)トハ,BノAニ對スル比卽チ $\frac{B}{A}$ ノコトデアル.

注意 本篇デハ,スベテ量ヲ表スニハ大ろーま字A,B,C等ヲ用ヒ,數ヲ表スニハ小ろーま字a,b,c等ヲ用ヒルコトニスル.

136. 定理

同種類ノ二量A,Bガアルトキ

$A:B=m:n$ ナラバ $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$

逆ニ $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$ ナラバ $A:B=m:n$

證明 先ヅ $A:B=m:n$

ナラバ,適當ナ第三量Cヲ取ツタトキ

$$A=mC,\quad B=nC \qquad \text{(定義)}$$

$$\therefore\quad C=B\div n=\frac{1}{n}B$$

$$\therefore\quad A=mC=m\left(\frac{1}{n}B\right)=\frac{m}{n}B$$

$$\therefore\quad \frac{A}{B}=\frac{m}{n}$$

逆ニ
$$\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$$

ナラバ
$$A=\frac{m}{n}B \qquad \text{(定義)}$$

$$\therefore\quad A=m\left(\frac{1}{n}B\right)$$

又
$$B=n\left(\frac{1}{n}B\right)$$

$$\therefore\quad A:B=m:n$$

137. 定理

同種類ノ三量 A, B, C ガアルトキ

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{A}{C}$$

證明 A, B, C ヲ同ジ單位デ測ツテ得ル數ヲ夫々 a, b, c トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{B}{C}=\frac{b}{c},\quad \frac{A}{C}=\frac{a}{c} \qquad \text{(前節)}$$

$$\therefore\quad \frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}=\frac{A}{C}$$

例題

1.* $A\gtreqqless B$ ニ從テ $\frac{A}{B}\gtreqqless 1$

逆ニ $\frac{A}{B}\gtreqqless 1$ ニ從テ $A\gtreqqless B$

2.* $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}$

3. $\frac{A}{B}=\frac{3}{2}$ ナルトキ次ノ各比ノ値ハ幾ラカ.

$$\frac{A+B}{B},\quad \frac{A-B}{B},\quad \frac{A+B}{A-B}$$

4. $\frac{A+B}{A-B}=\frac{5}{2}$ デアル. $\frac{A}{B}$ ノ値ハ幾ラカ.

138. 定理(比例式)

二ツノ比ガ相等シイコトヲ表ス等式ヲ**比例式**トイフ.

例ヘバ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ 又ハ $A:B=C:D$ ハ,何レモ比例式デアル.

此場合ニ,四量 A, B, C, D ガ**比例ヲナス**トイ

ヒ, A 及 D ヲ此比例式ノ**外項**, B 及 C ヲ其ノ**内項**トイフ. 又 D ヲ三量 A, B, C ノ**第四比例項**トイフ.

比例式ノ兩内項ガ同ジ量デアルトキ, 例ヘバ $A:B=B:C$ ナラバ, B ヲ A, C ノ**比例中項**トイフ.

139. 定理

幾ツカノ量ノ比ハ之ヲ同ジ單位デ測ッテ得ル數ノ比ニ等シイカラ, 數ノ比及比例ニ關スル代數學ノ諸定理ハ, 量ニ關スル意義ニ障リノナイ限リ, スベテ量ノ比及比例ニ適用スルコトガ出來ル.

次ニ比例ニ關スル重ナ定理ヲ揭ゲル.

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ (卽チ $A:B=C:D$) ナルトキハ

(1) $A \gtreqqless B$ ニ從テ $C \gtreqqless D$

(2) $B:A=D:C$

(3) $\frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D}$

(4) $\frac{A-B}{B}=\frac{C-D}{D}$ 但シ $A>B$ 從テ又 $C>D$ トスル

(5) $A:C=B:D$ 但シ A, B, C, D ハ皆同種ノ量デアルトスル.

(6) A, B, C, D, E, F, ………ガ皆同種類ノ量デアツテ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\cdots\cdots\cdots$$

ナルトキハ, 此ノ各比ハ

$$\frac{A+C+E+\cdots\cdots}{B+D+F+\cdots\cdots}$$

ニ等シイ.

例 題

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ (卽チ $A:B=C:D$) ナルトキ, 次ノ各等式ヲ證明セヨ.

1.* $mA:nB=mC:nD$

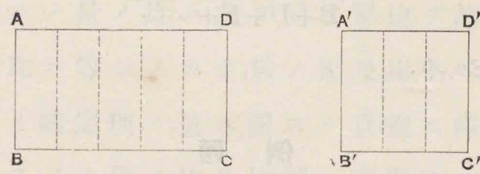
2. $\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}$ 但シ $A>B$ 從テ又 $C>D$ トスル.

3.* $\frac{A}{B}=\frac{A-C}{B-D}$ 但シ $A>C$ 從テ又 $B>D$ トスル.

第二章 比例線

140. 定理

高サ(又ハ底邊)ガ相等シイ二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,其ノ底邊(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ.



證明 矩形 ABCD 及 A′B′C′D′ ニ於テ

$$AB=A'B'$$

トシ, BC, B′C′ ガ夫々同ジ單位ノ m 倍, n 倍(m, n ハ整數)ニ等シイトセヨ.

サウスレバ

$$BC:B'C'=m:n$$

ソコデ BC ヲ m 箇ニ, B′C′ ヲ n 箇ニ等分シ, 各分點カラ夫々 BA, B′A′ ニ平行線ヲ引ケバ, 是等ノ直線ハ矩形 ABCD 及矩形 A′B′C′D′ ヲ

夫 m 箇及 n 箇ノ合同ナ矩形ニ分ケル.

$$\therefore\quad AB.BC:A'B'.B'C'=m:n$$

$$\therefore\quad AB.BC:A'B'.B'C'=BC:B'C'$$

系 1. 高サ(又ハ底邊)ガ相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,其ノ底邊(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ.

系 2. 高サ(又ハ底邊)ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,其ノ底邊(又ハ高サ)ノ比ニ等シイ.

例題

1. △ABC ノ內心 O ヲ各頂點ニ結ビツケレバ

$$\triangle BOC:\triangle COA:\triangle AOB=BC:CA:AB$$

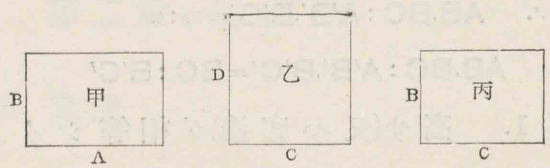
2. 一點 O ヲ △ABC ノ各頂點ニ結ビツケ, 直線 AO ト邊 BC 又ハ其延長トノ交點ヲ D トスレバ

$$\triangle AOB:\triangle AOC=BD:CD$$

141. 定理

二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ其ノ底邊ノ

比ト高サノ比トノ積ニ等シイ.*



證明 矩形甲ノ二隣邊ヲ A, B トシ,矩形乙ノ二隣邊ヲ C, D トセヨ.

ソコデ二隣邊ガ夫々 B, C ニ等シイ矩形丙ヲ作レバ

$$\frac{A.B}{C.B}=\frac{A}{C} \qquad \text{(前　節)}$$

$$\frac{C.B}{C.D}=\frac{B}{D} \qquad \text{(同　上)}$$

然ルニ $$\frac{A.B}{C.B}\times\frac{C.B}{C.D}=\frac{A.B}{C.D} \qquad \text{(第 137 節)}$$

$$\therefore\quad \frac{A.B}{C.D}=\frac{A}{C}\times\frac{B}{D}$$

系 1. 二ツノ正方形ノ面積ノ比ハ其邊ノ比ノ平方ニ等シイ.

---

*甲ノ面積ノ乙ノニ對スル比ガ甲ノ底邊ノ乙ノニ對スル比ト甲ノ高サノ乙ノニ對スル比トノ積ニ等シイトイフコトノ略語デアル. 今後モ之ニ倣フ.

系 2. 二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ其ノ高サノ比ト底邊ノ比トノ積ニ等シイ.

系 3. 二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ其ノ高サノ比ト底邊ノ比トノ積ニ等シイ.

例 題

1.* 四線分ガ比例ヲナセバ,其各ノ平方モ亦比例ヲナス.

2.* 四線分ノ各ノ平方ガ比例ヲナセバ,是等ノ線分モ亦比例ヲナス.

142. 定理

四線分ガ比例ヲナストキハ,其ノ外項ノ積ト内項ノ積トハ相等シイ.

證明 A, B, C, D ガ四ツノ線分デアッテ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

トセヨ. サウスレバ

$$\frac{A.D}{B.C}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C} \qquad \text{(前　節)}$$

$$=\frac{A}{B}\times\frac{B}{A} \qquad (假\quad定)$$

$$=1$$

$$\therefore \quad A.D=B.C$$

系　一線分ガ他ノ二線分ノ比例中項ナルトキハ,前ノ線分ノ平方ハ後ノ二線分ノ積ニ等シイ.

143. 定理

二ツノ矩形ガ等積ナルトキハ,一ツノ矩形ノ二隣邊ヲ外項トシ他ノ矩形ノ二隣邊ヲ內項トスル比例式ガ成リ立ツ.

證明　一ツノ矩形ノ二隣邊ヲA, Dトシ,他ノ矩形ノ二隣邊ヲB,Cトスレバ

$$A.D=B.C \qquad (假\quad設)$$

$$\therefore \quad \frac{A.D}{B.C}=1$$

$$\therefore \quad \frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=1 \qquad (第141節)$$

$$\therefore \quad \frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

系　正方形ト矩形トガ等積ナラバ,正

方形ノ一邊ハ矩形ノ二隣邊ノ比例中項デアル.

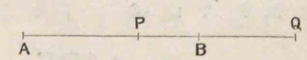
例題

三角形ノ二邊ノ比ハ之ニ對應スル高サノ反比ニ等シイ.

144. 定義(內分,外分)

線分AB上ニ任意ノ一點Pヲ取レバ,點Pハ線分ABヲ二ツノ分AP, PBニ內分スルトイフ.

又線分ABノ延長上ニ任意ノ一點Qヲ取レバ,點Qハ線分ABヲ二ツノ分AQ, QBニ外分スルトイフ.



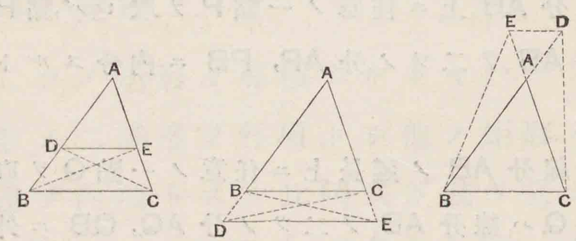
注意　內分ノ場合ニハ與ヘラレタ線分ハ其ノ二ツノ分ノ和ニ等シイシ,外分ノ場合ニハ與ヘラレタ線分ハ其ノ二ツノ分ノ差ニ等シイ.

線分AB又ハ其延長上ニ一點Cヲ取ツタトキ,比$\dfrac{AC}{CB}$ガ定比ニ等シケレバ,線分ABハ此點ニ於テ其比ニ內分又ハ外分サレタトイフ.

145. 定理

三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ同ジ比ニ内分若クハ外分スル.

證明 △ABCノ邊BCニ平行線ヲ引キ,他ノ二邊AB, AC(若クハ其延長)ト夫々D,Eデ交ラセヨ. BトE及CトDヲ結べ.



サウスレバ

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\frac{AD}{DB}$$ (第140節系2)

又 $$\frac{\triangle ADE}{\triangle CDE}=\frac{AE}{EC}$$ (同上)

然ルニ $DE /\!/ BC$ (假設)

∴ $\triangle BDE=\triangle CDE$ (第122節系2)

∴ $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

系 1. $AB:DB=AC:EC$

$AB:AD=AC:AE$

系 2. 三ツ以上ノ平行線ガ之ト交ル二直線ノ一ツカラ截リ取ル各線分ハ他カラ截リ取ル各部分ニ比例スル.

例題

1. 定點Oヲ通ル任意ノ直線ガ二定平行線ト夫々P,Qデ交ルトキ,OP:OQハ不易デアル.

2. 二圓ガ内切スルトキハ,切點ヲ通ル大圓ノ任意ノ弦ハ小圓ノ周デ皆同ジ比ニ分タレル.

3. △ABCノ邊AB上ノ點DカラBCニ平行線ヲ引イテ邊ACト點Eデ交ラセ,又CカラEBニ平行線ヲ引イテ邊ABノ延長ト點Fデ交ラセレバ

$AD:AB=AB:AF$

4. △ABCノ邊AB上ノ點DカラBCニ平行線ヲ引イテ邊ACト點Eデ交ラセ,又EカラABニ平行線ヲ引イテ邊BCト點Fデ交ラセレバ

$AD:DB=BF:FC$

146. 定理

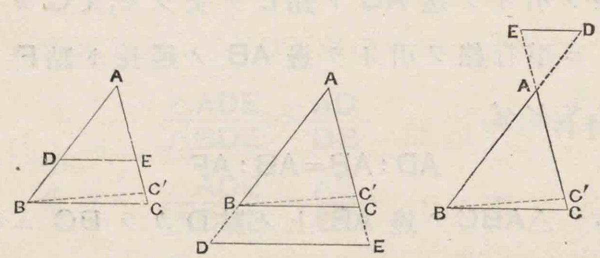
三角形ノ二邊ヲ同ジ比ニ內分若クハ同ジ比ニ外分スル直線ハ第三邊ニ平行デアル.

證明 一直線ガ△ABCノ二邊 AB, AC 若クハ共ニ其延長ト夫々 D, E デ交リ

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

デアルトセヨ.

B ヲ通ッテ DE ニ平行線ヲ引キ, AC ト C′ デ交ラセレバ



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC'}$$ (前節)

$$\therefore\quad \frac{AE}{EC}=\frac{AE}{EC'}$$

$$\therefore\quad EC=EC'$$

故ニ C′ ト C トハ同一ノ點デアル, 卽チ BC′ ハ BC ニ合スル.

$$\therefore\quad DE \parallel BC$$

系 一直線ガ △ABC ノ二邊 AB, AC 若クハ共ニ其延長ト夫々 D, E デ交リ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ 又ハ $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$ ナラバ

$$DE \parallel BC$$

例 題

同ジ底邊ヲ有スル △ABC, △ABD ガアル. AB 上ノ一點 E カラ AC, AD ニ平行線ヲ引イテ BC, BD ト夫々 F, G デ交ラセレバ

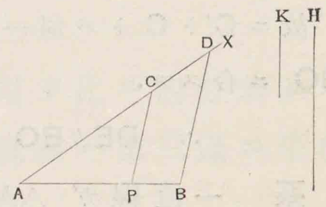
$$FG \parallel CD$$

147. 作圖題

定線分 (AB) ヲ他ノ二定線分ノ比 $\left(\frac{H}{K}\right)$ ニ內分及外分セヨ.

(1) 內分ノ場合

作圖 A カラ任意ノ方向ニ直線 AX ヲ (AB 外ニ) 引キ, 其上ニ H ニ等シイ線分 AC ヲ取リ, 尙



引續イテKニ等シイ線分 CD ヲ取リ，B, D ヲ結ビツケ，C カラ DB ニ平行線ヲ引イテ AB トP デ交ラセヨ．

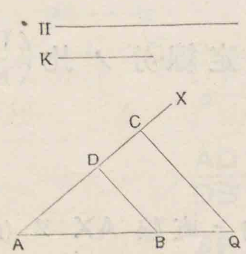
サウスレバPガ所要ノ内分點デアル．

證明 略スル．

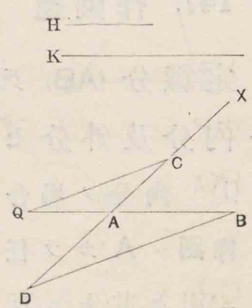
(2) 外分ノ場合

作圖 内分ノ場合ト同樣ニ，先ヅ直線 AX ヲ引キ，其上ニHニ等シイ線分 AC ヲ取リ，次ニC カラ半直線 CA 上ニKニ等シイ線分 CD ヲ取リ，B, D ヲ結ビツケ，C カラ DB ニ平行線ヲ

H>K ナル場合



H<K ナル場合



引イテ AB ノ延長トQデ交ラセヨ．

サウスレバQガ所要ノ外分點デアル．

證明 略スル．

H=K ナラバ D ハ A ニ合スル，從テ直線 DB ハ直線 AB ニ合スルカラ點Qハ求メラレナイ，卽チ此場合ニハ作圖ハ不可能デアル．此ハ線分ヲドコデ外分シテモ其ノ二ツノ分ハ決シテ等シクナイコトニヨツテモ明カデアル．

148. 定理

定線分ヲ定比ニ内分スル點及1以外ノ定比ニ外分スル點ハ何レモ唯一ツアル．

證明 略スル．

例題

1. 梯形 ABCD ノ兩斜邊 AB, CD 上ニ夫々二點 P, Q ヲ AP : PB = DQ : QC ナルヤウニ取レバ，PQ ハ兩底邊ニ平行デアル．

2. 定點Oカラ定直線マデ引イタ任意ノ線分 OP ヲ定比ニ内分若クハ外分スル點ノ軌跡

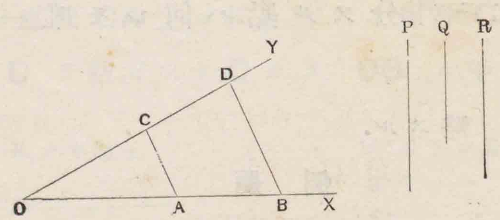
ヲ求メヨ.

149. 作圖題

三定線分 (P, Q, R) ノ第四比例項ヲ求メヨ.

作圖 一點 O カラ二ツノ半直線 OX, OY ヲ引キ, OX 上ニ引續イタ二線分 OA, AB ヲ夫々 P, Q ニ等シク取リ, 又 OY 上ニ R ニ等シイ線分 OC ヲ取リ, A, C ヲ結ビツケ, B カラ AC ニ平行線ヲ引イテ OY トDデ交ラセヨ.

サウスレバ CD ガ所要ノ第四比例項デアル.



證明 略スル.

例 題

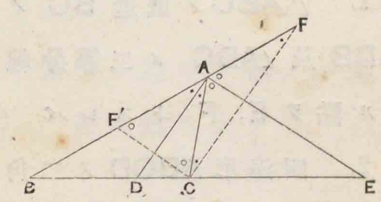
定矩形ト等積デアツテ,且ツ一邊ガ定線分ニ等シイ矩形ヲ作レ.

150. 定理

三角形ノ頂角及其ノ外角ノ二等分線ハ,底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分及外分スル.

證明 △ABCノ頂角A及其ノ外角ノ二等分線ガ底邊BC及其延長ト交ル點ヲ夫々D,Eトセヨ.

CカラADニ平行線ヲ引イテBAノ延長トFデ交ラセヨ.



サウスレバ

$$DB:DC=AB:AF \qquad \text{(第145節)}$$

$$\angle BAD=\angle F$$

又 $\angle DAC=\angle ACF$

然ルニ $\angle BAD=\angle DAC$ (假 設)

$\therefore$ $\angle F=\angle ACF$

$\therefore$ $AC=AF$

$\therefore$ $DB:DC=AB:AC$

同樣ニ,C カラ AE ニ平行線 CF′ ヲ引イテ

$$EB:EC=AB:AC$$

ヲ證明スルコトガ出來ル.

系　三角形ノ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分スル點ト項點トヲ結ビツケル直線ハ夫々項角又ハ其ノ外角ヲ二等分スル.

例題

1. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ノ中點ヲ D トシ, $\angle ADB$ 及 $\angle ADC$ ノ二等分線ガ夫々 AB, AC ト交ル點ヲ E, F トスレバ　$EF \parallel BC$

2. 四邊形 ABCD ノ二角 A 及 C ノ二等分線ガ對角線 BD 上デ交ラバ,他ノ二角 B 及 D ノ二等分線ハ對角線 AC 上デ交ル.

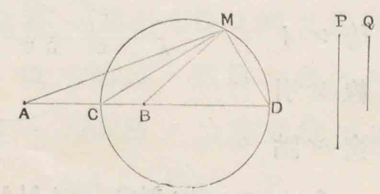
151. 軌跡題(*Apollonius** ノ軌跡)

二定點カラノ距離ノ比ガ定比ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　二定點ヲ A, B トシ,定比ヲ $\frac{P}{Q}$ トセヨ.

*ぎりしやノ人,西紀前 260−200 頃

但シ $\frac{P}{Q} \neq 1$ トスル.



先ヅ線分 AB ヲ定比 $\frac{P}{Q}$ ニ内分及外分シタ點ヲ夫々 C 及 D トスレバ,此二點ハ與ヘラレタ條件ニ適スル點デアル.

今 M ヲ與ヘラレタ條件ニ適スル他ノ一點トシテ,之ヲ A, B, C, D ノ各ニ結ビツケヨ.

サウスレバ

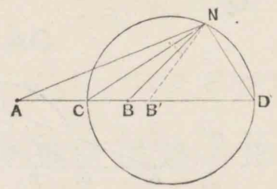
$$\frac{MA}{MB}=\frac{P}{Q}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$$

故ニ MC ハ $\triangle MAB$ ノ頂角 M ノ二等分線デアリ, MD ハ其外角ノ二等分線デアル.(前節系)

$$\therefore \quad \angle CMD = R\angle$$

故ニ與ヘラレタ條件ニ適スル點ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアル.

逆ニ,此圓周上ニ任意ノ一點 N ヲ取リ,之ヲ A,



B, C, D ノ各ニ結ビツケ,N カラ NC ト ∠ANC ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引イテ CD ト交ル點ヲ B′ トセヨ. サウスレバ NC ハ △NAB′ ノ頂角 N ノ二等分線デアル.

$$\therefore \quad \frac{NA}{NB'}=\frac{CA}{CB'} \qquad (前節)$$

又 $\angle CND = R\angle$

ダカラ, ND ハ △NAB′ ノ頂點 N ニ於ケル外角ヲ二等分スル.

$$\therefore \quad \frac{NA}{NB'}=\frac{DA}{DB'} \qquad (前節)$$

從テ $$\frac{CA}{CB'}=\frac{DA}{DB'}$$

$$\therefore \quad (1) \quad \frac{CA}{DA}=\frac{CB'}{DB'}$$

然ルニ $$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB} \qquad (作圖)$$

$$\therefore \quad (2) \quad \frac{CA}{DA}=\frac{CB}{DB}$$

(1),(2) カラ

$$\frac{CB'}{DB'}=\frac{CB}{DB}$$

即チ B 及 B′ ハ線分 CD ヲ同ジ比ニ内分スル點デアル. 故ニ點 B′ ハ點 B ニ合スル.(第148節)

故ニ NC ハ ∠ANB ノ二等分線デアル.

從テ $$\frac{NA}{NB}=\frac{CA}{CB}=\frac{P}{Q}$$

故ニ CD ヲ直徑トスル圓周上ノスベテノ點ハ與ヘラレタ條件ニ適スル.

因テ　二定點カラノ距離ノ比ガ(1ニ等シクナイ)定比ニ等シイ點ノ軌跡ハ,此二定點ヲ結ビツケル線分ヲ定比ニ内分及外分スル二點ヲ直徑ノ兩端トスル圓周デアル.

$\frac{P}{Q}=1$ 即チ P=Q ナラバ,本問題ハ二定點 A, B カラ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メルコトトナル, 此ハ已ニ第 103 節ニ述ベタ.

例題

1. 三點 A, B, C ガ一直線上ニ此順ニ並ブ

トキ,二線分 AB, BC ヲ等角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求メヨ.

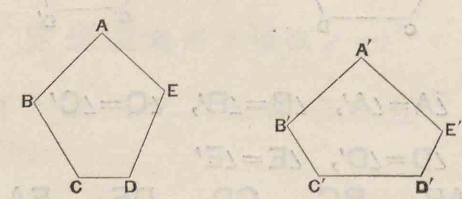
2. 定圓弧ヲ二分シテ各弧ノ弦ノ比ヲ定比ニ等シイヤウニセヨ.

3. 底邊,頂角及他ノ二邊ノ比ヲ知ッテ三角形ヲ作レ.

第三章 相似形

152. 定義(相似形)

一ツノ多角形ノ(順ニ取ッタ)角ガ夫々他ノ多角形ノ(順ニ取ッタ)角ニ等シイトキ,此ノ兩多角形ハ互ニ等角デアルトイフ. 而シテ一ツノ多角形ノ各角ハ他ノ多角形ノ之ニ等シイ角ニ對應スルトイヒ,隣リ合ノ二双ノ對應角ノ頂點間ノ邊モ亦互ニ對應スルトイフ.



圖デ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

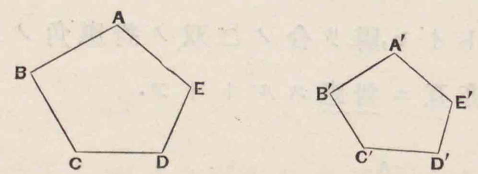
$\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$

ナラバ,二ツノ多角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ハ互ニ等角デアッテ, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ ト $\angle A'$, $\angle B'$, $\angle C'$, $\angle D'$, $\angle E'$ トハ夫々對應角, AB, BC, CD, DE, EA ト A′B′ B′C′, C′D′, D′E′, E′A′ トハ夫々對應邊

デアル.

二ツノ多角形ガ等角デアツテ對應邊ガ比例スルトキハ,此ノ兩多角形ハ互ニ相似デアルトイフ.

例ヘバ二ツノ多角形 ABCDE, A'B'C'D'E' ニ於テ



$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C'$$
$$\angle D=\angle D',\quad \angle E=\angle E'$$
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$$

ナラバ,此ノ二ツノ多角形ハ互ニ相似デアル.

多角形 ABCDE, A'B'C'D'E' ガ互ニ相似ナルコトヲ ABCDE ∽ A'B'C'D'E' ト書ク.

二ツノ相似多角形ノ對應邊ノ比ヲ其ノ相似比トイフ.

同ジ多角形ニ相似ナル二ツノ多角形

ハ亦互ニ相似デアル.

注意 合同ナル多角形ハ相似多角形ノ特別ナ場合デアツテ其ノ相似比ガ1ニ等シイモノデアル.

例題

1. 同邊數ノ二ツノ正多角形ハ互ニ相似デアル.

2. 二ツノ相似多角形ノ周ノ比ハ其ノ相似比ニ等シイ.

153. 定理(三角形ノ相似ノ一)

等角ナル二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル.

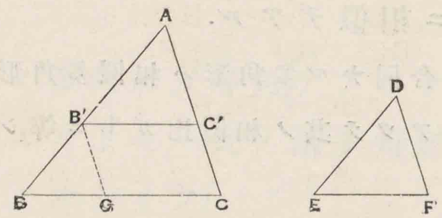
證明 △ABC ト △DEF トニ於テ

$$\angle A=\angle D,\quad \angle B=\angle E$$

從テ $\angle C=\angle F$

トセヨ.

邊 AB 上ニ DE ニ等シク AB' ヲ取リ,又邊 AC 上ニ DF ニ等シク AC' ヲ取ツテ,B' ト C' トヲ結べ.



サウスレバ $\triangle AB'C'$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$$AB'=DE,\quad AC'=DF \qquad (\text{作圖})$$

$$\angle A=\angle D \qquad (\text{假設})$$

$$\therefore\ \triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$$

從テ $\angle AB'C'=\angle E=\angle B$

$$\therefore\ B'C' /\!/ BC$$

$$\therefore\ (1)\quad \frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'} \qquad (\text{第145節系1})$$

次ニ B' カラ AC ニ平行線ヲ引イテ BC ト G デ交ラセレバ

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{CB}{CG}$$

然ルニ $CG=C'B'$

$$\therefore\ (2)\quad \frac{AB}{AB'}=\frac{CB}{C'B'}$$

(1),(2)カラ

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{CB}{C'B'}$$

$$\therefore\ \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$$

$$\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

系 1. 三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ト他ノ二邊又ハ其延長トデ出來ル三角形ハ原三角形ニ相似デアル.

系 2. 一鋭角ガ相等シイ二ツノ直角三角形ハ互ニ相似デアル.

例題

1. 二ツノ相似三角形ノ相對應スル高サ(對應スル邊ヲ何レモ底邊トシタトキノ高サ)ノ比ハ其ノ相似比ニ等シイ.

2. 圓外ノ點 A カラ此圓ニ切線ト割線ヲ引キ,切線ノ切點ヲ B,割線ト圓周トノ交點ヲ C,D トスレバ $\triangle ABC \backsim \triangle ADB$

3. 三邊ガ夫々互ニ平行若クハ夫々互ニ垂直ナル二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル.

154. 定理(三角形ノ相似ノ二)

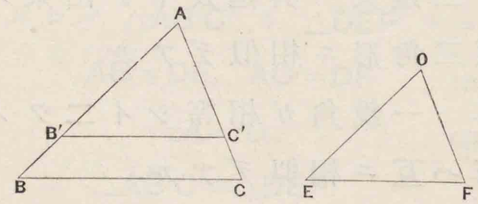
一角ト 之ヲ夾ム二邊ノ比トガ夫々相

等シイ二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル.

證明 △ABC ト △DEF トニ於テ

$$\angle A=\angle D,\quad \frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$$

トセヨ.



邊 AB 上ニ DE ニ等シク AB′ ヲ取リ,又邊 AC 上ニ DF ニ等シク AC′ ヲ取ツテ, B′,C′ ヲ結べ.

サウスレバ △AB′C′ ト △DEF トニ於テ

$AB'=DE$ (作圖)

$AC'=DF$ (同上)

$\angle A=\angle D$ (假設)

$\therefore\ \triangle AB'C'\equiv\triangle DEF$

然ルニ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$ (假設)

$$\therefore\ \frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$$

$$\therefore\ \frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$$

$\therefore\ B'C' /\!/ BC$ (第146節)

$\therefore\ \triangle ABC\sim\triangle AB'C'$ (前節系1)

$\therefore\ \triangle ABC\sim\triangle DEF$

例題

1. 二ツノ相似三角形ノ相對應スル中線(對應スル頂點カラ引イタ中線)ノ比ハ其ノ相似比ニ等シイ.

2. 三角形ノ一頂點カラ底邊ヘ引イタ垂線ガ三角形ノ内ニアツテ,且ツ其足デ分タレタ底邊ノ二ツノ分ノ比例中項ナルトキハ,此三角形ハ直角三角形デアル.

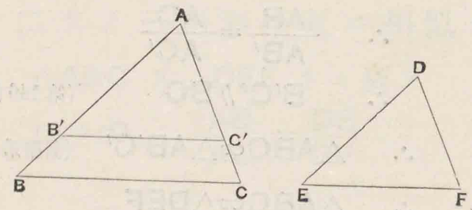
155. 定理(三角形ノ相似ノ三)

三邊ガ比例スル二ツノ三角形ハ互ニ相似デアル.

證明 △ABC ト △DEF トニ於テ

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$$

トセヨ.



邊 AB 上ニ DE ニ等シク AB′ ヲ取リ, B′ カラ BC ニ平行線ヲ引イテ AC ト C′デ交ラセヨ.

サウスレバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \qquad \text{(第153節系1)}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}$$

然ルニ $AB'=DE$ (作圖)

$$\therefore \quad \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{AC'}$$

又 $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}$ (假設)

$$\therefore \quad \frac{AC}{AC'}=\frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \quad AC'=DF$$

同樣ニ $B'C'=EF$

$$\therefore \quad \triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

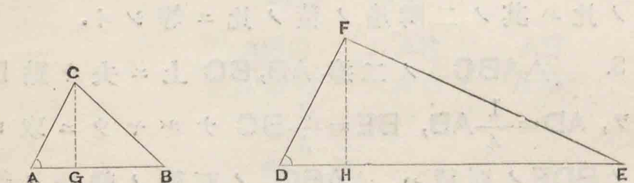
156. 定理

一角ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ此角ヲ夾ム二邊ノ積ノ比ニ等シイ.

證明 △ABC ト △DEF トニ於テ

$$\angle A=\angle D$$

トセヨ.



△ABC ノ邊 AB ヲ底邊トスルトキノ高サヲ CG トシ, △DEF ノ邊 DE ヲ底邊トスルトキノ高サヲ FH トスレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{CG}{FH} \qquad \text{(第141節系3)}$$

然ルニ $\triangle ACG \backsim \triangle DFH$ (第153節系2)

$$\therefore \quad \frac{CG}{FH}=\frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{AC}{DF}$$

$$=\frac{AB.AC}{DE.DF} \qquad \text{(第141節)}$$

例題

1. 一ツノ三角形ノ一角ト他ノ三角形ノ一角トガ互ニ補角ナラバ,此ノ兩三角形ノ面積ノ比ハ此角ヲ夾ム二邊ノ積ノ比ニ等シイ.

2. 一角ガ相等シイ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ其ノ二隣邊ノ積ノ比ニ等シイ.

3. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, BC 上ニ夫々點 D, E ヲ, $AD=\frac{1}{4}AB$, $BE=\frac{2}{3}BC$ ナルヤウニ取レバ,$\triangle BDE$ノ面積ハ $\triangle ABC$ ノ面積ノ幾分ノ幾ツカ.

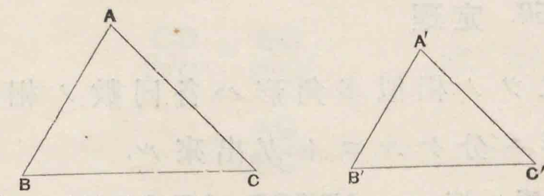
157. 定理

二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ其ノ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ.

證明 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

トセヨ. サウスレバ

$$\angle A=\angle A'$$



$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'} \qquad \text{(前節)}$$

然ルニ
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'} \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

例題

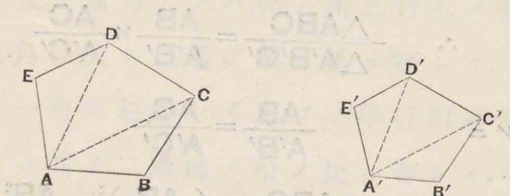
1. 二ツノ相似三角形ガアル,其一組ノ對應邊ノ長サハ夫々12糎及9糎デアッテ大キイ方ノ三角形ノ面積ハ60平方糎デアルトイフ. 小サイ方ノ三角形ノ面積ハ幾ラカ.

2. 二ツノ相似三角形ガアル,其面積ハ夫々100平方米及64平方米デアッテ,大キイ方ノ三角形ノ一邊ノ長サハ7米デアル. 小サイ方ノ三角形デ之ニ對應スル邊ノ長サハ幾ラカ.

158. 定理

二ツノ相似多角形ハ各同數ノ相似三角形ニ分ケルコトガ出來ル.

證明　例ヘバ ABCDE, A'B'C'D'E' ヲ互ニ相似ナル二ツノ五邊形トセヨ.



先ヅ ABCDE ノ一頂點 A カラ對角線 AC, AD ヲ引キ,次ニ A'B'C'D'E' ノ A ニ對應スル頂點 A' カラ對角線 A'C', A'D' ヲ引ケ. サウスレバ兩多角形ハ各同數ノ三角形ニ分タレル.

サテ △ABC ト △A'B'C' トニ於テ.

$\angle B=\angle B'$　(假　設)

$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$　(同　上)

∴　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$　(第154節)

∴ (1)　$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

(2)　$\angle BCA=\angle B'C'A'$

次ニ △ACD ト △A'C'D' トニ於テ

$\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}$　(假　設)

$=\dfrac{AC}{A'C'}$　(1)

又　$\angle BCD=\angle B'C'D'$　(假　設)

∴　$\angle ACD=\angle A'C'D'$　(2)

∴　$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$　(第154節)

同樣ニ　$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$

例　題

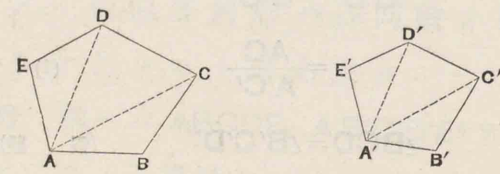
定多角形ニ相似ナル多角形ヲ畫キ,原多角形ノ一定邊ニ對應スル新多角形ノ邊ヲ定線分ニ等シイヤウニセヨ.

159. 定理

二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ其ノ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ.

證明　例ヘバ ABCDE, A'B'C'D'E' ヲ二ツノ相似多角形トシ,其ノ對應スル一組ノ頂點 A,A' ヲ通ル各多角形ノ對角線ヲ引ケ.

サウスレバ兩多角形ハ同數ノ相似三角形ニ分タレル．(前節)



$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

$$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$$

$$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad \text{(第157節)}$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{CD^2}{C'D'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad \text{(同 上)}$$

同様ニ $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \dfrac{AB^2}{A'B'^2}$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE}{\triangle A'B'C' + \triangle A'C'D' + \triangle A'D'E'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

(第139節6)

卽チ $\dfrac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \dfrac{AB^2}{A'B'^2}$

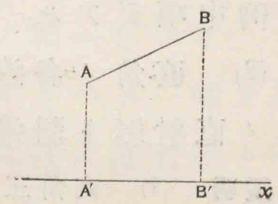
例　題

縮尺十萬分ノ一ノ地圖上デ20平方粴アル地面ノ實際ノ面積ハ大約幾平方粁カ．

160. 定義(直射影)

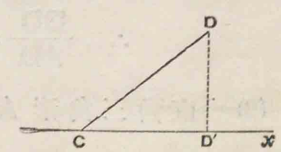
線分ノ兩端カラ他ノ直線上ニ下シタ垂線ノ足ノ間ノ部分ヲ,其線分ノ此直線上ニ於ケル**直射影**トイヒ,此直線ヲ其ノ直射影ノ**軸**トイフ．

圖デ,線分A′B′ハ線分 AB ノ直線 x 上ニ於ケル直射影デアッテ,直線 x ハ此直射影ノ軸デアル．



直射影ノコトヲ**正射影**トモイフ．又他ニ紛レル恐ノナイトキハ略シテ單ニ射影トイフコトモアル．

若シ線分ノ一端ガ射影ノ軸上ニアルトキハ,其端ト他ノ端カラ下シタ垂線ノ足トノ間ノ部分ガ其ノ直射影デアル．



圖デ,線分CD′ハ線分 CD ノ直線 x 上ニ

於ケル直射影デアル.

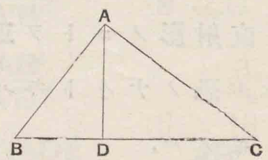
161. 定理

直角三角形ニ於テ

(1) 直角ノ頂點カラ斜邊ニ引イタ垂線ハ,其足デ分タレタ斜邊ノ二ツノ分ノ比例中項デアル.

(2) 直角ノ各邊ハ,斜邊ノ上ニ於ケル其ノ直射影ト斜邊トノ比例中項デアル.

證明 (1) 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ニ下シタ垂線ノ足ヲ D トセヨ. サウスレバ直角三角形 ABD 及 CAD ニ於テ



$$\angle B=\angle CAD$$

$$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle CAD$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$$

(2) 直角三角形 ABC 及 DBA ハ ∠B ヲ共有スル.

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DBA$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{BA}=\frac{BA}{BD}$$

同様ニシテ $\frac{CB}{CA}=\frac{CA}{CD}$

系 1. 圓周上ノ一點カラ一ツノ直徑ニ下シタ垂線ノ平方ハ其足デ分タレタ此直徑ノ二ツノ分ノ積ニ等シイ.

系 2. 圓ノ弦ノ平方ハ其一端ヲ通ル直徑ノ上ニ於ケル其弦ノ直射影ト直徑トノ積ニ等シイ.

系 3. 直角三角形ノ直角ノ各邊ノ平方ノ比ハ斜邊上ニ於ケル其二邊ノ直射影ノ比ニ等シイ.

例題

1. 圓ノ平行ナル二切線ガ,點 A デ切スル第三ノ切線ト交ル點ヲ P, Q トスレバ,此圓ノ半徑ハ AP, AQ ノ比例中項デアル.

2. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ,次ニ ∠B ノ二等分

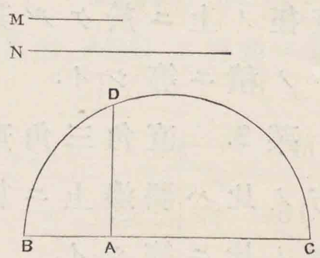
線ヲ引イテ AC, AD ト夫々 E,F デ交ラセレバ

$$DF:AF=AE:CE$$

162. 作圖題

二定線分(M,N)ノ比例中項ヲ求メヨ.

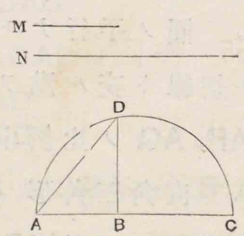
作圖1. 一直線上ノ一點Aカラ其ノ兩側ニ, M ニ等シク AB ヲ, N ニ等シク AC ヲ取リ,線分 BC ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, A カラ BC ニ垂線ヲ引イテ此半圓周トDデ交ラセヨ.



サウスレバ線分 AD ガMトNトノ比例中項デアル.

證明 略スル.

作圖2. 一直線上ノ一點Aカラ其ノ同ジ側ニ, M ニ等シク AB ヲ, N ニ等シク AC ヲ取リ, AB, AC ノ中ノ大キイ方 AC ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, B カラ AB ニ



垂線ヲ引イテ此半圓周トDデ交ラセ, A トDトヲ結ビツケヨ.

サウスレバ線分 AD ガ所要ノ比例中項デアル.

證明 略スル.

例 題

定三角形ト等積デアツテ且ツ之ト同ジ頂角ヲ有スル二等邊三角形ヲ作レ.

163. 作圖題

定矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ.

解 略スル.(前節)

164. 作圖題

定多角形ト等積ナル正方形ヲ作レ.

解 略スル.

165. 作圖題

定正方形(P^2)トノ比ガ二定線分(M,N)ノ比ニ等シイ正方形ヲ作レ.

作圖 先ヅ三線分 M, N, P ノ第四比例項 Q

ヲ求メヨ.(第149節)

次ニ二線分P, Qノ比例中項Xヲ求メヨ.(第162節)

サウスレバXガ所要ノ正方形ノ一邊デアル.

證明

$$\frac{P^2}{X^2}=\frac{P^2}{P.Q} \qquad (作\ 圖)$$

$$=\frac{P}{Q} \qquad (第140節)$$

$$=\frac{M}{N} \qquad (作\ 圖)$$

例題

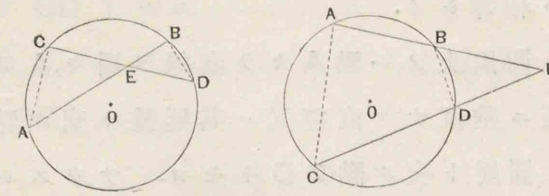
1. 定多角形ト相似デアッテ,面積ガ其ノ半分ナル多角形ヲ作レ.

2. 三角形ノ邊ニ平行ナル直線ヲ引イテ其面積ヲ二等分セヨ.

166. 定理

圓ノ二弦若クハ其延長ガ相交ルトキハ,其交點デ分タレル各弦ノ分ノ積ハ相等シイ.

證明 圓Oノ二弦AB, CD若クハ其延長ノ交點ヲEトセヨ.



A, C及B, Dヲ結ビツケレバ,△EACト△EDBトニ於テ

$$\angle AEC=\angle DEB$$

$$\angle ACE=\angle DBE$$

$$\therefore \quad \triangle EAC \backsim \triangle EDB$$

$$\therefore \quad \frac{AE}{CE}=\frac{DE}{BE}$$

$$\therefore \quad AE.BE=CE.DE$$

系 二線分若クハ共ニ其延長ガ相交リ,其交點デ分タレタ各線分ノ二ツノ分ノ積ガ相等シケレバ,此ノ二線分ノ端ハ一圓周上ニアル.

例題

1. 三角形ノ各頂點カラ其對邊ヘ引イタ垂線ガ垂心ニ於テ内分又ハ外分サレル二ツノ分

ノ積ハ相等シイ.

2. 圓周上ノ一點Aカラ直線ヲ引キ,Aヲ通ル直徑ニ垂直ナル直徑又ハ其延長ト交ル點ヲCトシ,圓周ト交ル點ヲDトセヨ. サウスレバ

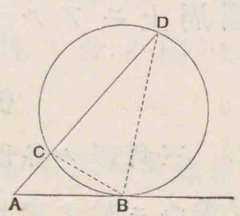
$$AC.AD=2(\text{圓ノ半徑})^2$$

3. 相交ル二圓ノ共通弦又ハ其延長上ノ一點Pヲ通ツテ二直線ヲ引クトキ,一ツノ直線ガ一ツノ圓トC,Dデ交リ,他ノ直線ガ他ノ圓トE,Fデ交レバ,四點C,D,E,Fハ同一圓周上ニアル.

167. 定理

圓外ノ一點カラ引イタ切線ノ(其點ト切點トノ間ノ部分ノ)平方ハ,其點カラ引イタ割線上ノ弦ガ其點デ外分サレル二ツノ分ノ積ニ等シイ.

證明 圓外ノ一點Aカラ引イタ切線ノ切點ヲBトシ,Aカラ引イタ割線デ出來ル



弦ヲCDトセヨ.

C,Dヲ各Bニ結ビツケレバ,△ABDト△ACBトニ於テ

$$\angle A \text{ハ共通}$$

$$\angle ADB=\angle ABC \qquad (\text{第74節})$$

$$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle ACB$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \quad AB^2=AC\cdot AD$$

系 圓ノ弦ヲ任意ノ點デ外分シタトキ,其ノ二ツノ分ノ積ガ,其點ト圓周上ノ或點トヲ結ブ線分ノ平方ニ等シケレバ,此線分ハ其點デ其圓ニ切スル.

例 題

1. 二定點ヲ結ビツケル線分ノ延長上ノ一點カラ,此二點ヲ通ル數多ノ圓ヘ引イタ切線ノ長サハ皆相等シイ.

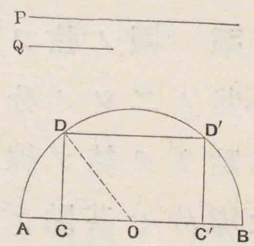
2. 圓外ノ一點Aカラ此圓ニ割線ヲ引キ圓周トノ交點ヲB,Cトスル,次ニAカラ任意ノ方向ニ直線ヲ引キ,其上ニAカラ引イタ切線ト等

長ノ線分 AD ヲ取リ, DB, DC 又ハ其延長ト圓周トノ他ノ交點ヲ E, F トスレバ EF//AD

168. 作圖題

二線分ノ和 (P) ト積 (Q^2) トヲ知ツテ各線分ヲ求メヨ.

解析　先ヅ P ニ等シイ線分 AB ヲ引ケバ, 和ガ P ニ等シイ二線分ハ AB ヲ或一點 C デ内分シタ二ツノ分 AC, BD ニ限ル. ソコデ之ヲ所要ノ二線分トシ, AB ヲ直徑トスル半圓ヲ畫キ, C カラ AB ニ垂線ヲ引イテ此半圓周ト交ル點ヲ D トスレバ



$$AC \cdot BC = CD^2 \qquad \text{(第161節系1)}$$

然ルニ
$$AC \cdot BC = Q^2 \qquad \text{(假設)}$$
$$\therefore \quad CD = Q$$

作圖　P ニ等シイ線分 AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, AB ニ對シテ此半圓ト同ジ側ニ AB カラノ距離ガ Q ニ等シイ平行線ヲ引キ, 此半圓

周トノ一交點ヲ D トシ, D カラ AB ニ垂線 DC ヲ引ケバ, 其足 C デ AB ガ分タレタ二ツノ分 AC, BC ガ所要ノ二線分デアル.

證明
$$AC + BC = P$$
$$AC \cdot BC = CD^2 = Q^2$$

吟味　(1)　$Q < \frac{1}{2}P$ ノトキハ前圖ノ通リ二ツノ交點 D, D′ ヲ得ル. 併シ D′ ニヨツテ得ル二線分 AC′, BC′ ハ夫々 BC, AC ニ等シイカラ, 此場合ニハ解ハ唯一ツアル.

(2)　$Q = \frac{1}{2}P$ ノトキハ, 上ノ平行線ハ半圓周ニ切シ, 從テ C ハ AB ノ中點 O ニ合シ, 所要ノ二線分ハ OA, OB トナツテ何レモ $\frac{1}{2}P$ ニ等シイ.

(3)　$Q > \frac{1}{2}P$ ノトキハ, 上ノ平行線ハ半圓周ニ出會ハナイカラ D ガ得ラレナイ, 從テ C ガ得ラレナイ, 因テ問題ハ不可能デアル.

注意　次ノヤウニシテ AC, BC ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル.

$$AC = OA - OC$$
$$BC = OB + OC = OA + OC$$
$$OA = \frac{1}{2}P = OD$$

又直角三角形OCDカラ

$$OC^2=OD^2-CD^2=(\frac{1}{2}P)^2-Q^2$$

今線分P,Qノ數値ヲ夫々p,qトスレバ

$$OC=\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q^2}$$

$$\therefore \quad AC=\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q^2}$$

$$BC=\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q^2}$$

ツマリ本作圖題ハ,代數學デ聯立方程式

$$x+y=p$$

$$xy=q^2$$

ヲ解クコト,從テ一元二次方程式

$$z^2-pz+q^2=0$$

ヲ解クコトニ對應スルモノデアル.

例題*

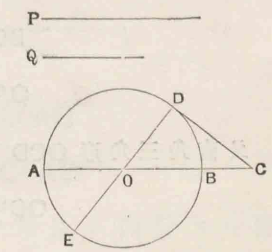
和ガ一定ナル二線分ノ積ハ,各ガ相等シイトキ最大デアル.

169. 作圖題

二線分ノ差(P)ト積(Q^2)トヲ知ツテ各線分ヲ求メヨ.

解析 先ヅPニ等シイ線分ABヲ引ケバ,差

ガPニ等シイ二線分ハABヲ或一點Cデ外分シタ二ツノ分AC,BCニ限ル. ソコデ之ヲ所要ノ二線分トシ,ABヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,Cカラ此圓ニ切線ヲ引イテ其切點ヲDトスレバ



$$AC.BC=CD^2 \quad \text{(第167節)}$$

然ルニ $$AC.BC=Q^2$$

$$\therefore \quad CD=Q$$

作圖 Pニ等シイ線分DEヲ直徑トシテ圓Oヲ畫キ,Dニ於ケル切線上ニQニ等シクDCヲ取リ,CトOトヲ通ル直線ヲ引イテ圓Oノ周トA,Bデ交ラセレバ,ABガCデ外分サレタ二ツノ分AC, BCガ所要ノ二線分デアル.

證明 $AC-BC=AB=DE=P$

$AC.BC=CD^2=Q^2$

吟味 本問題ハ常ニ成リ立ツテ,解ハ唯一ツアル.

注意 次ノヤウニシテAC, BCノ長サヲ計算スルコ

トガ出來ル.

$$AC=OC+OA$$

$$BC=OC-OB=OC-OA$$

$$OA=\frac{1}{2}P$$

又直角三角形 OCD カラ

$$OC^2=OD^2+CD^2=(\frac{1}{2}P)^2+Q^2$$

今線分 P, Q ノ數値ヲ夫々 p, q トスレバ

$$OC=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q^2}$$

$$\therefore \quad AC=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q^2}+\frac{1}{2}p$$

$$BC=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q^2}-\frac{1}{2}p$$

ツマリ本作圖題ハ,代數學デ聯立方程式

$$x-y=p$$

$$xy=q^2$$

ノ正數解ヲ求メルコト,從テ一元二次方程式

$$z^2-pz-q^2=0$$

ノ根ノ絕對値ヲ求メルコトニ對應スルモノデアル.

170. 定義(中末比)

定線分ヲ內分或ハ外分シテ,其ノ一ツノ分ガ他ノ分ト全線分トノ比例中項ニナルヤウニス

ルコトヲ,此線分ヲ**中末比**ニ分ケルトイフ.

圖デ $AC^2=BC.AB$

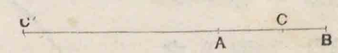
$$AC'^2=BC'.AB$$

ナラバ,C ハ線分 AB ヲ中末比ニ內分スル點デアリ,C′ハ AB ヲ中末比ニ外分スル點デアル.

171. 作圖題

定線分(AB)ヲ中末比ニ分ケヨ.

解析 所要ノ內分點ヲ C トスレバ



$$AC^2=BC.AB=(AB-AC).AB$$

$$=AB^2-AC.AB$$

$$\therefore \quad AC^2+AC.AB=AB^2$$

$$\therefore \quad AC.(AC+AB)=AB^2$$

即チ求メル線分 AC ト之ヨリ大キイ他ノ線分 (AC+AB) トノ差ハ定線分 AB ニ等シク,積ハ定面積 AB^2 ニ等シイ.

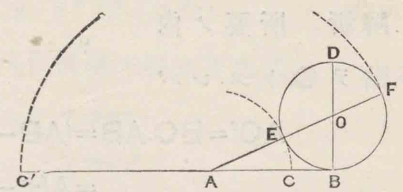
次ニ所要ノ外分點ヲ C′トスレバ

$$AC'^2=BC'.AB=(AB+AC').AB$$
$$=AB^2+AC'.AB$$
$$\therefore\quad AC'^2-AC'.AB=AB^2$$
$$\therefore\quad AC'.(AC'-AB)=AB^2$$

卽チ求メル線分 AC′ ト之ヨリ小サイ他ノ線分 (AC′−AB) トノ差ハ定線分 AB ニ等シク,積ハ定面積 AB^2 ニ等シイ.

因テ AC, AC′ ハ何レモ差ガ AB ニ等シク積ガ AB^2 ニ等シイ二線分ノ一ツデアル.

作圖　B カラ AB ニ垂線ヲ引キ,其上ニ AB ニ等シク BD ヲ取リ,之ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ,A ト此圓ノ中心 O トヲ通ル直線ヲ引イテ圓ノ周ト E, F デ交ラセル.



次ニ線分 AB 上ニ AE ニ等シク AC ヲ取リ,BA ノ延長上ニ AF ニ等シク AC′ ヲ取レバ,點 C ガ所要ノ内分點デアリ,點 C′ ガ所要ノ外分點デアル.

證明　(1)　$AC'-AC=AB$　(作圖)

(2)　$AC'.AC=AB^2$　(同上)

(1) カラ　$AC'=AB+AC$

之ヲ (2) ニ代入シテ

$$(AB+AC).AC=AB^2$$
$$\therefore\quad AC^2=AB^2-AB.AC=AB.(AB-AC)$$
$$=AB.BC$$

故ニ C ハ所要ノ内分點デアル.

同様ニシテ,C′ ガ所要ノ外分點デアルコトヲ證明スルコトガ出來ル.

注意　AB ノ數値ヲ a トシ,AC ノ數値ヲ x トスレバ

$$x^2=a(a-x)$$
$$\therefore\quad x^2+ax-a^2=0$$

x ニ關スル此二次方程式ハ一ツノ正根ト一ツノ負根トヲ有スル,其ノ正根ハ勿論 AC ノ長サデアル.

次ニ其ノ負根ヲ $-y$ トスレバ

$$(-y)^2+a(-y)-a^2=0$$
$$\therefore\quad y^2=a^2+ay=(a+y)a$$

故ニ y ハ AC′ ノ長サヲ表ハス.

因テ結局上ノ二次方程式ノ二根ノ絶對値ガ AC 及

AC′ ノ數値デアル. 而シテ其二根ノ絕對値ノ差ハ a デアツテ積ハ a^2 ニ等シイ.

例題

第256頁ノ圖ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ.

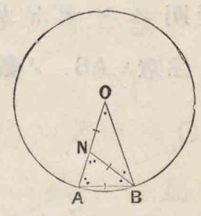
$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.AB,\quad AC'=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.AB$$

172. 作圖題

圓ニ内接スル正十邊形ヲ書ケ.

解析 AB ヲ圓 O ノ内接正十邊形ノ一邊トセヨ.

半徑 OA, OB ヲ引ケバ ∠AOB ハ一點ノ周リノ角 360° ノ $\frac{1}{10}$ 卽チ 36° デアル.



$$\therefore\ \angle OAB=\angle OBA=\frac{1}{2}(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$$

ソコデ ∠OBA ノ二等分線ヲ引イテ OA ト N デ交ラセレバ

$$\angle ABN=36^\circ=\angle AOB$$

$$\therefore\ \triangle BAN \backsim \triangle OAB \qquad \text{(第153節)}$$

$$\therefore\ \frac{AN}{AB}=\frac{AB}{AO}$$

$$\therefore\ (1)\quad AB^2=AN\cdot AO$$

然ルニ $\angle OBN=36^\circ=\angle AOB$

$$\therefore\ NB=NO$$

又 $\angle BNA=72^\circ=\angle BAN$

$$\therefore\ AB=NB$$

$$\therefore\ AB=NO$$

$$\therefore\ NO^2=AN\cdot AO \qquad (1)$$

因テ點 N ハ半徑 OA ヲ中末比ニ内分シタ點デアル.

作圖 任意ノ半徑 OA ヲ引キ,之ヲ N デ中末比ニ内分シ $NO^2=AN\cdot AO$ ナルヤウニスレバ, NO ハ所要ノ内接正十邊形ノ一邊デアル.

證明 略スル.

例題

1. 圓ニ内接スル正五邊形ヲ書ケ.
2. 直角ヲ五等分セヨ.
3. 一邊ノ長サガ1寸ナル正十邊形ノ外接圓ノ半徑ヲ計算セヨ.
4. 圓ニ内接スル正十五邊形ヲ書ケ.

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$$

173.* 定理

二元一次方程式ノぐらふハ直線デアル.

證明 二元一次方程式ノ一般ナル形ハ

$$(1)\qquad ax+by+c=0$$

之ヲyニツイテ解ケバ

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

トナル. 今

$$-\frac{a}{b}=m,\quad -\frac{c}{b}=n$$

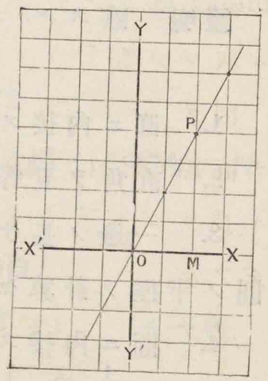
ト置ケバ, (1) ハ次ノ形ニナル.

$$y=mx+n$$

ソコデ先ヅ $n=0$ ノ場合,例ヘバ

$$y=2x$$

ヲ考ヘヤウ.



坐標ノ原點ヲOトシ, xノ任意ノ値例ヘバOMニ應ズルぐらふ上ノ點ヲPトスレバ, △OPMハ直角三角形デ,其ノ直角ヲ夾ム

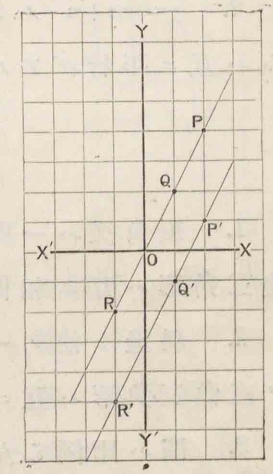
*代數デぐらふチ學バナカツタ場合ニハ,本節ハ省ク.

二邊ノ比 OM:MP ハ常ニ1:2デ一定ダカラ此三角形ハ常ニ相似,從テ∠POMガ一定デアル. 故ニ此ノぐらふハOヲ通ル直線デアルコトガ分カル.

次ニ $n\neq 0$ ノ場合,例ヘバ

$$y=2x-3$$

ヲ考ヘヤウ.



上ニ示シタ $y=2x$ ノぐらふ上ノ一點ヲPトスレバ,同ジxニ應ズル $y=2x-3$ ノぐらふ上ノ點ハ,Pノy坐標ノ上ニPカラ3ニ等シイ長サヲ下方ニ取ツタ點P'デアル.

因テ $y=2x-3$ ノぐらふハ $y=2x$ ノぐらふ卽チ直線OP上ノ點P,Q,R等カラ常ニ3ニ等シイ長サダケ下方ニ取ツタ點P',Q',R'等ノ集リデアル.

サテ $PP' \,\underline{\parallel}\, QQ' \,\underline{\parallel}\, RR'$ 等

∴ $P'Q' \parallel PQ,\quad Q'R' \parallel QR$ 等

故ニ $y=2x-3$ ノぐらふハ OP ニ平行ナル一ツノ直線デアル.

例題

1. $y=x$ ノぐらふハ坐標軸ノナス角 YOX ヲ二等分スル直線デアル.

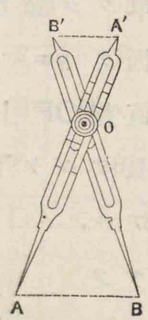
2. $y=mx+n$ ノぐらふト $y=mx+n'$ ノぐらふトハ互ニ平行デアル.

問題

1. 頂角又ハ一底角ガ相等シイ二ツノ二等邊三角形ハ互ニ相似デアル.

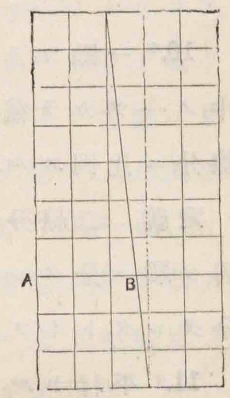
2. 斜邊ト他ノ一邊トノ比ガ相等シイ二ツノ直角三角形ハ互ニ相似デアル.

3. 圖ハ比例こんぱすトイフ器具デアッテ, OA=OB, OA'=OB' 且ツ O ニアル「ネジ」ヲこんぱすノ竿ニアル適當ノ目盛リノ所ニ動カシテ OA:OA' ヲ随意ノ比ニ等シクスルコトガ出來ル.



此器具ヲ用ヒテ定線分 AB ト定比ヲモツ線分 A'B' ヲ簡單ニ作リ得ルコトヲ示セ.

4. 右ノ方眼紙ノ目盛リヲ 1 *cm* トスレバ,線分 AB ノ長サハ 2.7 *cm* ナルコトヲ示セ.



之ニ倣ッテ 0.3 *cm*, 3.2 *cm*, 及 4.6 *cm* ノ長サヲ作レ.

此方法ヲ**對角線尺**トイフ.

5. 二ツノ相似三角形ノ相似比ハ其ノ外接圓又ハ内接圓ノ半徑ノ比ニ等シイ.

6. 相似三角形ノ面積ハ其ノ外接圓又ハ内接圓ノ半徑ノ平方ニ比例スル.

7. 同ジ邊數ノ二ツノ正多角形ノ相似比ハ其ノ外接圓又ハ内接圓ノ半徑ノ比ニ等シイ.

8. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 B カラ AC ニ垂線 BD ヲ引ケバ

$$BC^2=2.AC.CD$$

9. 梯形 ABCD ノ底邊 AD, BC ニ平行ナル

任意ノ直線ガ兩斜邊 AB, CD 及兩對角線 AC, BD ト交ル點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ

$$EH=FG$$

10.* 一點カラ引イタ數多ノ直線ガ二平行線中ノ一ツカラ截取ル各線分ハ他カラ截取ル各線分ニ比例スル.

定義 二線分ガ互ニ比例スル同數ノ部分ニ(同ジ順ニ)分タレルトキハ,此ノ二線分ハ相似ニ分タレタトイフ.

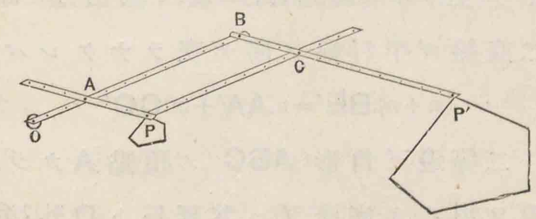
11.* 平行ナル二線分ガ相似ニ分タレルトキハ,其ノ對應スル分點ヲ結ビツケル直線ハ皆平行デアルカ又ハ一點ニ會スル.

12. 多角形ノ各頂點ヲ一ツノ點ニ結ビツケル線分ヲ同ジ比ニ內分(又ハ外分)シ,其ノ各分點ト次々ノ分點トヲ順ニ結ビツケテ得ル多角形ハ原多角形ニ相似デアル.

13.* 二ツノ相似多角形ヲ,其ノ各對應邊ガ平行ナルヤウニ置クコトガ出來ル,而シテ此場合ニ其ノ對應スル頂點ヲ結ビツケル直線ハ皆平行デアルカ又ハ一點ニ會スル.

定義 コノヤウニ置カレタ兩相似形ハ相似ノ位置ニアルトイフ.

14. 下圖ハ伸縮摸寫器 (Pantograph) トイフ器具デアッテ,四ツノ竿 OB, BP′, AP, PC デ成リ立チ,A, B, C, P ノ所ハ「ネジ」デトメテ各點ノ周リニ自由ニ廻レルヤウニ出來テ居ル. 今此器具ヲ $OB=n.OA$, $BP'=n.BC$, $AP=BC$, $AB=PC$ ナルヤウニ定メ,O ヲ固定シ,P ヲ動カシテ或多角形ヲ畫カセレバ,P′ハ之ト相似比ガ $1:n$ ナル相似多角形ヲ畫クコトヲ示セ.



15. 相交ル二圓ノ共通弦上ノ一點 C ヲ通ッテ一直線ヲ引キ,一方ノ圓トノ交點ヲ A 及 D トシ,他ノ圓トノ交點ヲ B 及 E トスレバ

$$AB.CD=BC.DE$$

16. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一頂點カラ對

邊ヘ引イタ垂線ト其頂點デ出會フ二邊トノ第四比例項デアル.

17. 外切スル二圓ノ外共通切線ノ長サ(其ノ二切點間ノ部分)ハ,此二圓ノ直徑ノ比例中項デアル.

18. 直角三角形ノ各邊上ニ,其等ノ邊ヲ對應邊トスル相似形ヲ畫ケバ,斜邊上ニ畫イタ者ノ面積ハ他ノ二邊上ニ畫イタ者ノ面積ノ和ニ等シイ.

19. 二直線ガ三平行線ト夫々A, B, C及A′, B′, C′デ交ツテ AB:BC=$m:n$ デアルトスル.初ノ二直線ガ平行線ノ間デ交ラナケレバ

$$(m+n).BB'=n.AA'+m.CC'$$

20. 二等邊三角形 ABC ノ頂點Aカラ任意ノ直線ヲ引イテ,底邊又ハ其延長トD,外接圓ノ周トEデ出會ハセレバAD.AEハ不易デアル.

21. △ABCノ底邊BCヲ之ニ等シク延長シテCDトシ,DトACノ中點Eトヲ結ブ直線トABトノ交點ヲFトスルトキ, EF, EDノ比ヲ計算セヨ.

22. 三角形ノ三中線ヲ邊トスル三角形ノ面積ノ原三角形ノ面積ニ對スル比ヲ求メヨ.

23. 半徑rナル圓ニ內接スル正五邊形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ.

24. 定點Oカラ定圓周トPデ交ル任意ノ直線ヲ引イテ,其上ニ OP:OQ ガ定比ニ等シイ點Qヲ取レバ,Qノ軌跡ハ何カ.

25. 定三角形ト等積デアツテ,頂角ガ定角ニ等シイ二等邊三角形ヲ作レ.

特ニ,定三角形ト等積ナル正三角形ヲ作レ.

26. 二定點ヲ通ツテ定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

第四章 圓ノ周及面積

174. 圓ノ周

圓ニ内接スル多角形ノ周ハ圓ノ周ヨリ小サイ,又圓ニ外接スル多角形ノ周ハ圓ノ周ヨリ大キイ.

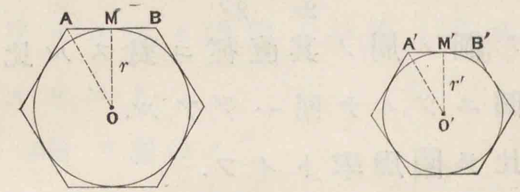
今圓ニ内接及外接スル任意ノ正多角形ヲ考ヘ,其ノ邊數ヲ段々多クスレバ,内接正多角形ノ周ハ段々大キクナリ外接正多角形ノ周ハ段々小サクナツテ何レモ段々圓ノ周ニ近ヅキ,邊數ヲ非常ニ多クスレバ何レモ限リナク圓ノ周ニ近ヅク.

圓ノ周ハ其ノ内接正多角形又ハ外接正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クスルトキ,此多角形ノ周ノ極限デアル.

175. 圓周率

二圓 O, O′ ノ半徑ヲ夫々 r, r' トシ,其圓ノ周ヲ夫々 c, c' トセヨ.

今此二圓ニ外接スル同ジ邊數ノ正多角形ヲ畫キ,其一邊ヲ夫々 AB, A′B′, 其レガ圓ニ切スル點ヲ夫々 M, M′, 其周ヲ夫々 p, p' トシ,邊數ヲ n トスレバ



$$\mathrm{AB}=2.\mathrm{AM},\qquad \mathrm{A'B'}=2.\mathrm{A'M'}$$

$$p=n.\mathrm{AB},\qquad p'=n.\mathrm{A'B'}$$

$$\therefore\quad \frac{p}{p'}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A'M'}}$$

又 $\triangle\mathrm{OAM}\backsim\triangle\mathrm{O'A'M'}$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A'M'}}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M'}}=\frac{r}{r'}$$

$$\therefore\quad \frac{p}{p'}=\frac{r}{r'}$$

卽チ邊ノ數ニ拘ラズ是等ノ正多角形ノ周ノ比ハ常ニ内接圓ノ半徑ノ比ニ等シクテ一定デアル.

故ニ此正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クスル

トキノ極限卽チ二圓ノ周ニツイテモ亦同ジ式ガ成リ立ツ．卽チ

$$\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}$$

$$\therefore\quad \frac{c}{2r}=\frac{c'}{2r'}$$

卽チ圓ノ周ノ其直徑ニ對スル比ハ總テノ圓ニツイテ同一デアル．

此比ヲ圓周率トイフ．

圓周率ヲ通例ぎりしや文字πデ表ス。

卽チ
$$\frac{c}{2r}=\pi$$

$$\therefore\quad c=2\pi r$$

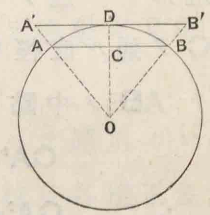
圓ノ周ハ直徑ニ圓周率ヲ掛ケタモノニ等シイ．

サテ圓ニ外接スル正方形ノ周ハ直徑ノ4倍ニ等シイシ,圓ニ内接スル正六邊形ノ周ハ直徑ノ3倍ニ等シイカラ,圓ノ周ハ直徑ノ3倍ヨリ大キクテ4倍ヨリ小サイ．

因テ圓周率ハ3ト4ノ間ノ數デアルコトダケハ容易ニ分カル．

176. πノ近似値ノ計算

(第一) 半徑rナル圓ニ内接スル正n邊形ノ一邊ノ長サ$(2l)$ヲ知ツテ同ジ圓ニ外接スル正n邊形ノ一邊ノ長サ$(2l')$ヲ求メルコト.



解　ABヲ圓Oノ内接正n邊形ノ一邊,Cヲ其中點トシ,$\overset{\frown}{AB}$ノ中點Dニ於テ此圓ニ切線ヲ引キ,OA, OBノ延長ト夫々A', B'デ交ラセレバ, A'B'ハ此圓ノ外接正n邊形ノ一邊デアル.

サテ
$$\frac{A'D}{AC}=\frac{OD}{OC}$$

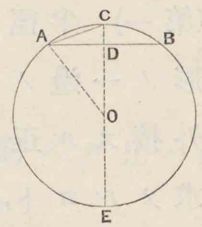
$$\therefore\quad \frac{l'}{l}=\frac{r}{\sqrt{r^2-l^2}}$$

$$\therefore\quad (1)\quad l'=\frac{r.l}{\sqrt{r^2-l^2}}$$

(第二) 半徑rナル圓ニ内接スル正n邊形ノ一邊ノ長サ$(2l)$ヲ知ツテ同ジ圓

ニ内接スル正 $2n$ 邊形ノ一邊ノ長サ $(2l_1)$ ヲ求メルコト.

解　AB ヲ圓 O ノ内接正 n 邊形ノ一邊トシ, $\overset{\frown}{AB}$ ノ中點ヲ C トスレバ, AC ハ此圓ノ内接正 $2n$ 邊形ノ一邊デアル.



C ヲ通ル直徑 CE ヲ引キ, 之ト AB トノ交點即チ AB ノ中點ヲ D トスレバ

$$CA^2 = CE.CD \qquad \text{(第161節系2)}$$

$$\therefore \quad CA^2 = CE.(CO-DO)$$

$$\therefore \quad (2l_1)^2 = 2r.(r-\sqrt{r^2-l^2})$$

$$\therefore \quad (2) \quad l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2r(r-\sqrt{r^2-l^2})}$$

此ノ (1) ト (2) ニヨツテ π ノ近似値ヲ計算スルコトガ出來ル.

先ツ圓ノ半徑ヲ長サノ單位ニスレバ圓ノ周ヲ表ス數ハ 2π, 從テ半圓ノ周ヲ表ス數ガ π デアル.

ソコデ上ノ公式 (1), (2) ニ於テ $r=1$ トオケバ

$$(1)' \qquad l' = \frac{l}{\sqrt{1-l^2}}$$

$$(2)' \qquad l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-l^2}}$$

ヲ得ル. 因テ邊ノ長サガ容易ニ求メラレル内接正 n 邊形ノ一邊ノ長サノ半分 l ヲ直接ニ計算スレバ, (1)′ ニヨツテ l' ガ求メラレ, 又 (2)′ ニヨツテ l_1(即チ邊數ガ 2 倍ニナツタトキノ l) ガ求メラレルカラ, 更ニ (1)′ ニヨツテ邊數ガ 2 倍ニナツタトキノ l' ガ求メラレル.

コノヤウニ上ノ二式ヲ繰返シテ適用スレバ邊數ガ 2 倍ヅヽニ增大スル内接及外接正多角形ノ一邊ノ長サノ半分ガ求メラレル, 從テ其周ノ半分ヲ計算スルコトガ出來ル.

カヤウニシテ得ル二組ノ數ガ π ヲ夾ム不足近似値ト過剩近似値トデアル.

サテ圓ノ内接正六邊形ノ一邊ハ半徑ニ等シイカラ, $n=6$ カラ始メテ (1)′ 及 (2)′ ヲ用ヒ l 及 l' ノ値ヲ小數第六位マデ計算スレバ次ノ通リニナル.

$n=6$ ノトキ $l=0.5$, $l'=0.577351$

$n=12$ ノトキ $l=0.258819$, $l'=0.267949$

……………………………………………………

ソコデ π ノ近似値トシテ次ノ表ヲ得ル.

n	nl	nl'
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187
384	3.14156	3.14166
768	3.14158	3.14161
1536	3.14159	3.14160

此表ニヨレバ,π ハ 3.14159 ト 3.14160 トノ間ニアルコトガ分カル. 従テ上ノ二ツノ値ノ中ノドレヲ π ト見做シテモ其誤差ハ小數第五位ノ1ヨリ小サイ.

今別ニ π ノ値ヲ小數第十五位マデ求メタモノヲ示セバ

$$\pi=3.141592653589793\cdots\cdots$$

實用上デハ通例 π ノ値トシテ

$$3.1416 \text{ 又ハ } \frac{355}{113}(=3.1415929\cdots\cdots)$$

ヲ用ヒル.

極メテ大略ノ計算ヲスルトキニハ,π ヲ

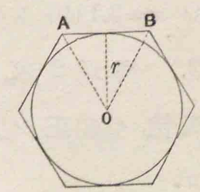
$$3.14 \text{ 又ハ } \frac{22}{7}(=3.142\cdots\cdots)$$

トシテイヽ.

177. 圓ノ面積

第 174 節ニ述ベタノト同樣ナ事柄ガ圓ノ面積ニツイテモ成リ立ツ. 即チ

圓ノ面積ハ其ノ內接正多角形又ハ外接正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クスルトキ,此多角形ノ面積ノ極限デアル.



今圓 O ノ半徑ヲ r,其面積ヲ S,之ニ外接スル正 n 邊形ノ一邊ヲ AB,周ヲ p,其面積ヲ S' トスレバ

$$S'=n.(\triangle \mathrm{OAB})$$

$$=n.\frac{1}{2}\mathrm{AB}.r=\frac{1}{2}(n.\mathrm{AB}).r$$

$$=\frac{1}{2}.p.r$$

卽チ邊ノ數ニ拘ラズ外接正多角形ノ面積ハ其周ト圓ノ半徑トノ積ノ半分ニ等シイ.

サテ n ヲ限リナク大キクスルトキノ p ノ極限ハ圓ノ周卽チ $2\pi r$ デアツテ,其時ノ S' ノ極限ハ圓ノ面積 S デアル.

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}(2\pi r).r$$

$$\therefore\quad S=\pi r^2$$

圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ圓周率ヲ掛ケタモノニ等シイ.

例題

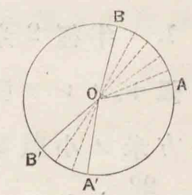
1. 半徑3米ノ圓ノ周及面積ヲ計算セヨ. 但シ $\pi=3.1416$ トセヨ.

2. 周ガ2米ナル圓ノ面積ヲ平方米ノ小數第四位マデ正シク計算セヨ. 但シ $\pi=\frac{355}{113}$ トセヨ.

178. 定理

一ツノ圓ニ於テ,中心角ハ之ニ對スル弧ニ比例スル.

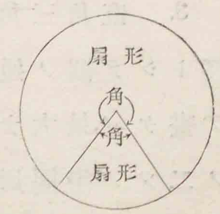
證明 略スル.(第140節ノ證明ニ倣フテ證明スルコトガ出來ル)



179. 扇形

定義 圓ノ弧ト其兩端ヲ通ル二ツノ半徑トデ圍マレル圓ノ一部分ヲ扇形トイフ.

扇形ノ弧ニ對スル中心角ヲ其ノ扇形ノ角トイフ.



定理 一ツノ圓ノ扇形ノ面積ハ扇形ノ角(或ハ扇形ノ弧)ニ比例スル.

證明 略スル.

例題

1. 扇形ノ面積ハ其弧ノ長サト半徑トノ積ノ半分ニ等シイ.

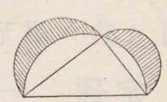
2. 扇形ノ角ノ度數ヲk,其半徑ヲrトスレバ, 弧ノ長サ$=\dfrac{k\pi r}{180}$, 面積$=\dfrac{k\pi r^2}{360}$

問題

1. 半徑2米ノ圓ニ於テ60°ノ中心角ニ對スル弧ト,ソレヲ張ル弦トデ出來ル弓形ノ面積ヲ平方米ノ小數第二位マデ計算セヨ. 但シ$\pi=\dfrac{22}{7}$トセヨ.

2. 二ツノ同心圓ノ周ノ間ニアル輪狀部分ノ面積ハ內圓ニ切スル外圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シイ.

3. 直角三角形ノ各邊ヲ直徑トシテ圖ノ通リ三ツノ半圓ヲ畫ケバ,最大ナ半圓ノ弧ト他ノ二ツノ半圓周トデ出來ル二ツノ新月形ノ面積ノ和ハ直角三角形ノ面積ニ等シイ.



4. 一邊ガa粍ノ正八邊形ニ內接及外接スル圓ノ半徑及面積ヲ求メヨ.

5. 半徑r米ノ圓ニ內接スル正八邊形及正十二邊形ノ一邊及面積ヲ計算セヨ.

6. 二定圓ノ周ノ和ニ等シイ周ヲ有スル圓ヲ畫ケ.

7. 二定圓ノ面積ノ和ニ等シイ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ.

8. 圓ノ面積ヲ,之ト同心ノ圓周デn等分セヨ.

雜 題

1.* 二圓ノ共通切線ハ是等ノ圓ノ中心ヲ結ブ線分ヲ其ノ半徑ノ比ニ內分又ハ外分スル.

定義　二圓ノ中心ヲ結ブ線分ヲ其ノ半徑ノ比ニ內分及外分シタ點ヲ夫々此二圓ノ相似ノ內心及外心トイヒ,之ヲ通稱シテ相似ノ中心トイフ.

2. 二圓ノ相似ノ中心ヲ通ル直線カラ各圓周ガ截取ル弦ノ比ハ半徑ノ比ニ等シイ.

3. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ガ邊 BC 及此三角形ノ外接圓周ニ交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ $AD \cdot AE = AB \cdot AC$

4. 前題デ,$\angle A$ ガ直角ナラバ

$$AD \cdot AE = 2.(\triangle ABC)$$

5. $\triangle ABC$ ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ト交ル點ヲ D トスレバ

$$AB.AC = AD^2 + BD.CD$$

6. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ニ任意ノ點 P ヲ取レバ

$$AP^2 = BP.CP + BC^2$$

7. $\triangle ABC$ 內ノ任意ノ一點ヲ O トスル. $\angle BOC, \angle COA, \angle AOB$ ノ二等分線ガ夫々 BC, CA, AB ニ交ル點ヲ P, Q, R トスレバ

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

8. $\triangle ABC$ ノ邊 BC 又ハ其延長上ノ一點ヲ D トスレバ $\triangle ABD, \triangle ACD$ ノ外接圓ノ直徑ノ比ハ AB, AC ノ比ニ等シイ.

9. 直角三角形 ABC ノ直角頂 A カラ斜邊 BC ニ垂線 AP ヲ引キ,P カラ二邊 AB, AC ニ夫々垂線 PX, PY ヲ引ケバ

$$\frac{BX}{CY} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$$

10. 二ツヅヽ相交ル三圓ガアル,其ノ二ツヅツノ共通弦若クハ其延長ハ一點ニ會スル.

11. 二ツヅヽ相切スル三圓ガアル,其切點ニ於ケル三ツノ共通切線ハ一點ニ會スル.

12. 任意ノ三角形ニ於テ,次ノ九點ヲ通ツテ一圓ヲ書クコトガ出來ル.

各邊ノ中點

各頂點カラ對邊へ引イタ垂線ノ足

垂心ト各頂點トヲ結ブ線分ノ中點

定義 此圓ヲ此三角形ノ**九點圓**トイフ.

13. 定圓ト定直線トニ切スル任意ノ圓ノ其二切點ヲ結ブ直線ハ恒ニ定點ヲ通ル.

14. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC 上ニ $BD:DC=1:2$ ナル點 D ヲ取レバ

$$2.AB^2+AC^2=6.BD^2+3.AD^2$$

15. 等邊凸多角形内ノ任意ノ點カラ其各邊ニ引イタ垂線ノ和ハ不易デアル.

16. $\angle A$ ガ鋭角ナル $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, AB 上ニ A カラ此圓ニ引イタ切線ニ等シイ線分 AD ヲ取リ, D カラ AB ニ垂線ヲ引イテ AC ノ延長ト E デ交ラセレバ

$$\triangle ABC=\triangle ADE$$

17.* 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル二邊ノ積ノ和ハ其ノ對角線ノ積ニ等シイ.〔Ptolemy (えじぷとノ人,西紀130年頃)ノ定理〕

18.* 四邊形ノ相對スル二邊ノ積ノ和ガ其ノ對角線ノ積ニ等シケレバ,此四邊形ニ外接圓ヲ畫クコトガ出來ル.(Ptolemy ノ定理ノ逆)

19. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナラバ,對邊ノ積ノ和ハ此四邊形ノ面積ノ 2 倍ニ等シイ.

20.* 一直線ガ $\triangle ABC$ ノ三邊 BC, CA, AB 又ハ其延長ヲ夫々三點 X, Y, Z デ截レバ

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

〔Menelaus (ぎりしやノ人,西紀100年頃) ノ定理〕

21.* X, Y, Z ハ $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長上ノ三點デ,其中一ツガ延長上ニ二ツガ邊上ニアルカ或ハ三點ガ皆延長上ニアルカデアツテ

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

ナラバ,三點 X, Y, Z ハ一直線上ニアル.(Menelaus ノ定理ノ逆)

22.* $\triangle ABC$ ノ各頂點ヲ任意ノ一點 O ニ結ビツケル直線ガ對邊 BC, CA, AB 又ハ其延長ト夫々 X, Y, Z デ交レバ

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

〔Ceva (いたりーノ人,西紀1700年頃) ノ定理〕

23.* X, Y, Z ハ △ABC ノ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長上ノ三點デ,其中一ツガ邊上ニ二ツガ延長上ニアルカ或ハ三點ガ皆邊上ニアルカデアツテ

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

ナラバ,三直線 AX, BY, CZ ハ一點ニ會スル.

(Ceva ノ定理ノ逆)

24. 三角形ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガ對邊ノ延長ト交ル三點ハ一直線上ニアル.

25. △ABC ノ内接圓ガ三邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスレバ,三直線 AD, BE, CF ハ一點ニ會スル.

26. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ夫々 BD, CE, AF ヲ其邊ノ$\frac{1}{3}$ニ等シク取ツタトキ, △DEF ノ面積ノ △ABC ノ面積ニ對スル比ヲ計算セヨ.

27. 同ジ圓ニ内接スル正六邊形ト正三角形トノ一邊ノ上ニ畫イタ二ツノ正方形ノ面積ノ比ヲ求メヨ.

28. 弓形ノ弦ノ長サガ16糎,高サ(弧ノ中點ト弦トノ距離)ガ4糎ノトキ,此弓形ガ屬スル圓ノ半徑ヲ求メヨ.

29. 面積154平方米ノ圓ト等シイ周圍ヲ有スル正方形及正六邊形ノ面積ヲ何レモ平方米ノ小數第一位マデ求メヨ. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トセヨ.

30. 二定直線ニ至ル距離ノ比ガ定比ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

31. 二定圓ヲ等角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求メヨ.

註 一點ニ於テ或圓ヲ見込ム角トハ,此點カラ此圓ニ引イタ二切線ノナス角ノコトデアル.

32. 定圓周上ノ一定點 O カラ此圓周ト更ニ P デ交ル任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ OP.OQ ガ定正方形ノ面積ニ等シイヤウニ Q ヲ取ル. Q ノ軌跡ヲ求メヨ.

33. 一定點 O カラ直線ヲ引イテ定直線ト P, 定圓周ト Q デ交ラセ, OP : OQ ガ定比ニ等シイ

ヤウニセヨ.

34. 二定相似多角形ノ面積ノ和ニ等シイ面積ヲ有スル,之ト相似ナル多角形ヲ作レ.

35. 定線分トノ比ガ二定正方形ノ面積ノ比ニ等シイ線分ヲ作レ.

36. 定三角形ニ內接スル正方形ヲ作レ.

37. Oハ定點,Pハ定直線AB上ノ定點デアル. 今Oヲ中心トシテ圓ヲ畫キABト交ル點ヲM及Nトスルトキ,PM,PNノ比例中項ガ定長ニ等シクナルヤウニセヨ.

38. 定直線ノ同ジ側ニアル二定點ヲ此直線上ノ一點ニ結ビツケル二線分ノナス角ガ最大ナルヤウニセヨ.

39. 二定點ヲ通ツテ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

40. 定圓外ノ二定點ヲ此圓周上ノ一點ニ結ビツケル二線分ノナス角ガ最大又ハ最小ナルヤウニセヨ.

附　　錄

縣立實業学校
第弐学年
高田薫

縣立實業學校
第貳学年
高田薫

[illegible] Agricultural School
[illegible]
K. Takata

附錄　補充問題

第二篇ノ部

1.　三角形ノ頂角ノ二等分線ガ底邊トナス二角ノ差ハ三角形ノ兩底角ノ差ニ等シイ.

2.　三角形ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガ底邊ノ延長ト交ツテナス角ハ兩底角ノ差ノ半分ニ等シイ.

3.　△ABC ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線デ出來ル三角形ノ各角ハ夫々 $90^\circ-\frac{A}{2}, 90^\circ-\frac{B}{2}, 90^\circ-\frac{C}{2}$ ニ等シイ.

4.　四邊形ノ二隣角ノ二等分線ノナス角ハ他ノ二角ノ和ノ半分ニ等シイ.

5.　四邊形ノ二對角ノ二等分線ノナス角ハ他ノ二角ノ差ノ半分ニ等シイ.

但シ後ノ二角ガ相等シイトキハ,初ノ二對角ノ二等分線ハ平行デアル.

6.　四邊形 ABCD ノ一組ノ對邊 BA, CD ノ延長ノ交點ヲ E トシ,他ノ對邊 AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トスレバ, ∠E, ∠F ノ二等分線ノナス角ハ四邊形ノ一組ノ

對角ノ和ノ半分ニ等シイ.

7. △ABC ノ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トスレバ AB>BD, AC>CD

8. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ點 P カラ BC ニ垂線ヲ引キ,二邊 AB, AC (又ハ其延長) ト交ル點ヲ Q, R トスレバ, PQ+PR ハ一定デアル.

9. 前題ニ於テ, P ガ BC ノ延長上ノ任意ノ點ナラバ PQ~PR ハ一定デアル.

10. 二等邊三角形ABC ノ頂點ヲ A トシ,邊 AB ノ延長上ニ AB ニ等シク BD ヲ取リ,又 AB ノ中點ヲ E トスレバ CD=2.CE

11. △ABC ノ各邊上ニ其外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ畫ケバ AD=BE=CF

12. △ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫々正三角形 APB, AQC ヲ原三角形ノ外側ニ作リ,又邊 BC 上ニ正三角形 BRC ヲ原三角形ト同ジ側ニ作レバ,四邊形 APRQ ハ平行四邊形デアル.

13. △ABC ノ各邊上ニ其外側ニ正方形 BCDE, CAFG, ABHK ヲ畫ケバ,線分 FK, HE, DG ハ夫々 △ABC ノ頂點 A, B, C ヲ通ル中線ニ垂直デアッテ且ツ其 2 倍ニ等シイ.

14. 直角三角形ABC ノ一鋭角 B ノ二等分線ト其對邊トノ交點ヲ D トシ,又直角ノ頂點 A カラ斜邊 BC ヘ引イタ垂線ト BD トノ交點ヲ E トスレバ AD=AE

15. 正方形 ABCD ノ邊 BC 上ノ任意ノ點ヲ E トシ, ∠EAD ノ二等分線ト邊 CD トノ交點ヲ F トシ, FD ヲ延長シ其上ニ DG ヲ BE ニ等シク取レバ GA=GF

16. △ABC ニ於テ邊 AC ノ中點ヲ D トシ,邊 BC 上ニ一點 E ヲ $BE=\frac{1}{3}BC$ ナルヤウニ取リ,二直線 BD, AE ノ交點ヲ F トスレバ AF=3.EF

17. 平行四邊形ノ一組ノ對角ノ頂點カラ此平行四邊形ヲ截ラナイ或直線ニ引イタ垂線ノ和ハ,他ノ一組ノ對角ノ頂點カラ引イタ垂線ノ和ニ等シイ.

18. 二定平行線上ニ兩端ガアルスベテノ線分ノ中點ハ一定直線上ニアル.

19. 三角形ノ一頂點カラ,他ノ二頂點ニ於ケル内角及外角ノ二等分線ニ垂線ヲ下セバ,コノ四垂線ノ足ハ一直線上ニアル.

20. 二等邊三角形 ABC (頂點 A) ニ於テ,邊 AB 上ニ任意ノ一點 D ヲ取リ,又 AC ノ延長上ニ點 E ヲ CE=BD ナルヤウニ取レバ,線分 DE ハ BC ニヨツテ二等分サレル. 且ツ DE>BC

21. 梯形 ABCD ニ於テ, $AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$ ナルトキ,此梯形ノ各角ノ大サハ幾ラカ.

22. n 邊形ノ各邊ヲ延長シテ得ル n 邊ノ星形ノ頂點ニ於ケル角ノ和ハ $(2n-8)$ 直角ニ等シイ.

23. 四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビツケル二線分ガ相等シイ(又ハ直交スル)トキハ,四邊形ノ兩對角線ハ直交スル(又ハ相等シイ).

第三篇ノ部

1. 一定點ヲ定圓周上ノ一點ニ結ビツケル線分ノ中デ,中心ヲ通ルモノガ最大デアル,又其延長ガ中心ヲ通ルモノガ最小デアル.

2. △ABC ノ內接圓及 ∠A 內ニアル傍接圓ガ三邊 BC, CA, AB 又ハ其延長ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F 及 G, H, K トシ, BC, CA, AB ヲ夫々 a, b, c デ表シ,且ツ三角形ノ周ノ半分ヲ s デ表セバ次ノ關係ガアル.

$$AE=AF=s-a \qquad AH=AK=s$$
$$BD=BF=s-b \qquad BG=BK=s-c$$
$$CD=CE=s-c \qquad CG=CH=s-b$$

3. 一圓ガ他ノ圓ノ內ニアツテ內圓ニ切スル外圓ノ(平行デナイ)二弦ガ何レモ其切點デ二等分サレヽバ,此ノ二圓ハ同心デアル.

4. 點 A デ外切スル二圓ノ外共通切線ヲ引キ,其切點ヲ B, C トスレバ ∠BAC=R∠

5. 二圓ノ交點 A, B ノ各ヲ通ツテ平行線 PAQ, RBS ヲ引キ夫々圓周デ終ラセレバ PQ=RS

6. 三角形ノ各頂點ヲ中心トシ其內接圓ノ最モ近

イ切點マデノ距離ヲ半徑トスル三ツノ圓ハ二ツヅヽ互ニ外切スル.

7. 三角形ノ一內角ノ二等分線ト其對邊ヲ垂直ニ二等分スル直線トハ外接圓ノ周上デ交ル.

8. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, △AOB ノ外接圓ヲ畫キ, 點 O ニ於テ此圓ニ切線ヲ引ケバ, 此切線ハ邊 CD ニ平行デアル.

9. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ二邊 AB, DC ノ延長ノ交點ヲ E トシ, AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トシ, △BCE 及 △CDF ノ外接圓ノ交點ヲ G トスレバ, 三點 E, G, F ハ一直線上ニアル.

10 三角形ノ各邊上ニ其外側ニ正三角形ヲ畫ケバ此三ツノ正三角形ノ外接圓ハ一點ニ會スル.

又此點ト三角形ノ一頂點ト其對邊上ノ正三角形ノ頂點トハ一直線上ニアル.

11. A, B, C ハ一圓周上ノ三點, D, E ハ夫々弧 AB, AC ノ中點デアル. 直線 DE ガ AB, AC 又ハ其延長ト交ル點ヲ M, N トスレバ AM=AN

12. 三角形ノ頂點カラ引イタ外接圓ノ直徑ハ底邊ノ兩端カラ夫々其對邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ結ブ直線ニ垂直デアル.

13. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ二邊 AB, DC ノ延長ノ交點ヲ E トシ, AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トスレバ, ∠E, ∠F ノ二等分線ハ直交スル.

又是等ノ二等分線ガ四邊形ノ各邊ト交ル四點ハ一ツノ菱形ノ頂點ニナル.

14. △ABC ノ各角ノ二等分線ガ其外接圓ノ周ト交ル點ヲ夫々 A′, B′, C′ トスレバ, △ABC ノ內心ハ △A′B′C′ ノ垂心デアル.

15. 三角形ノ頂角ノ二等分線ハ頂點カラ底邊ヘ引イタ垂線ト頂點カラ引イタ外接圓ノ直徑トノナス角ヲ二等分スル.

16. 圓ニ內接スル四邊形ノ一角ノ二等分線トソレニ對スル角ノ外角ノ二等分線トハ此圓ノ周上デ交ル.

17. 圓外ノ點 P カラ圓ニ二切線 PA, PB 及割線 PCD ヲ引キ, 弦 CD ノ中點ヲ E トスレバ ∠AEP=∠BEP

18. 圓ノ弧 BC ノ中點 A ヲ通ツテ任意ノ二弦 AD, AE ヲ引キ弦 BC ト F, G デ交ラセレバ, 四點 D, E, F, G ハ一圓周上ニアル.

19. 圓 O ノ周上ノ一點 A ニ於ケル切線ガ任意ノ半徑 OB ノ延長ト交ル點ヲ C トシ, A カラ OB ニ垂線 AD ヲ引ケバ, AB ハ ∠CAD ヲ二等分スル.

20. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ト底邊ノ一端 B トカラ互ニ平行ナル任意ノ二直線ヲ引キ外接圓ノ周ト夫々 P,Q デ交ラセレバ AQ//PC

21. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スレバ,其交點カラ一邊ニ引イタ垂線ノ延長ハ之ニ對スル邊ヲ二等分スル.〔Brahmegupta (西紀 600—660 頃, 印度ノ人) ノ定理〕

22. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スレバ,其交點カラ各邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ頂點トスル四邊形ニハ外接圓及內接圓ヲ畫クコトガ出來ル.

23. 圓 O ノ一直徑ヲ AB トシ,半徑 OA 上ニ其中點カラ A ノ方ニ偏シタ處ニ一點 C ヲ取リ, C ヲ中心 CO ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ之ト圓 O トノ一交點ヲ D トシ DC ノ延長ト圓 O ノ周トノ交點ヲ E トスレバ

$\widehat{AD}=\frac{1}{3}\cdot\widehat{BE}$

24. $\widehat{AB}$ ハ圓 O ノ(四分圓周ヨリ小サイ)一弧デアル B カラ一直線ヲ引イテ圓ノ周ト D, 直徑 AC ノ延長ト E デ交ラセルトキ, DE ガ圓ノ半徑ニ等シケレバ

$$\widehat{CD}=\frac{1}{3}\cdot\widehat{AB},\quad \angle E=\frac{1}{3}\cdot\angle AOB$$

25. 定角 XOY ノ二等分線上ノ一點ヲ P トスル. 二點 O, P ヲ通ル任意ノ圓ガ角ノ二邊 OX, OY ト交ル點ヲ A, B トスレバ OA+OB ハ不易デアル.

26. 定圓周上ノ任意ノ點カラ之ニ引イタ切線上ニ於テ,切點カラノ距離ガ定長ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

27. 定點カラ定圓周上ノ任意ノ點マデ引イタ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

28. 直交スル二定直線上ニ兩端ヲ有スル定長線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

29. 定圓弧 AB 上ニ定長ノ弧 PQ ヲ(四點 A, P, Q, B ガ此順ニアルヤウニ)取ルトキ,二直線 AP, BQ ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

30. 定圓外ノ一定點 P カラ引イタ二切線ノ切點ヲ A 及 B トシ, A ヲ通ル任意ノ弦 AQ ニ平行ニ P カラ引イタ直線ト QB 又ハ其延長トノ交點ヲ R トスル. R ノ軌跡ヲ求メヨ.

31. 定圓ノ定直徑 AB ノ一端 A カラ任意ノ弦 AC ヲ引キ, C ニ於テ此圓ニ切線ヲ引キ, B カラ之ニ垂線 BD ヲ引クトキ, BD, AC ノ延長ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

32. 定弧 AB 上ノ任意ノ點 P ト A トヲ結ビツケ, PA 又ハ其延長上ニ PB ニ等シク PQ ヲ取ルトキ,點

Qノ軌跡ヲ求メヨ.

33. 相交ル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ定長ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

34. 前題ニ於テ,和ヲ差ニ代ヘレバドウカ.

35. 定線分AB上ノ任意ノ點ヲPトシ,AP, BPノ上ニ其各ヲ底邊トスル二ツノ正三角形ヲ其ノ同ジ側ニ畫クトキ,其頂點ヲ結ビツケル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

36. 一定點ヲ通ツテ二定直線ト等角ヲナス直線ヲ引ケ.

37. 二定點ヲ通ツテ定直線若クハ定圓周上ニ中心ガアル圓ヲ畫ケ.

38. 定點ヲ通ツテ定直線若クハ定圓ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

39. 二定直線ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

40. 二定圓ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

41. 定直線若クハ定圓周上ニ中心ガアツテ他ノ定直線若クハ定圓ニ切スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ.

42. 定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ他ノ定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ.

43. 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ他ノ定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

44. 頂角ヲ夾ム二邊及兩底角ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

45. 頂角ノ位置,周圍,及底邊上ノ一點ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

46. 二定圓ニ一割線ヲ引キ,此割線ガ各圓デ截取ラレル弦ノ長サガ夫々二定長ニ等シイヤウニセヨ.

47. 相切スル二圓ノ切點ヲ通ツテ割線ヲ引キ,兩圓周ノ間ニ夾マレル部分ガ定線分ニ等シイヤウニセヨ.

48. 二圓ノ一交點Aヲ通ツテ各圓周ニ終ル線分PAQヲ引キPA=AQナルヤウニセヨ.

49. 河岸ヲ離レタ或點ニ家Aガアリ,其川ヲ隔テヽ對岸ヲ離レタ或點ニ家Bガアル. 今A, B兩家ノ間ヲ最短距離デ達スルヤウニ川ニ橋ヲカケルニハ何處ニカケタラヨイカ. 但シ川ノ兩岸ハ平行シ橋ハ河岸ニ直角ニカケルモノトスル.

50. 定圓弧AB上ニ一點Pヲ求メ, AP+BPヲ最大ニセヨ.

51. B, Cハ定圓周上ノ二定點デアル,今此圓周上ニ一點Aヲ取リ弦AB及ACヲ二邊トスル平行四邊形ABDCヲ作リ,對角線ADヲ最大又ハ最小ニセヨ.

52. 前題ニ於テ AB, BC ヲ二邊トスル平行四邊形 ABCE ヲ作リ,對角線 BE ヲ最大又ハ最小ニセヨ.

53. 45° ヨリ小サイ角 XOY 内ノ一定點ヲ A トスル. 角ノ一邊 OX 上ニ一點 B ヲ取リ, B カラ邊 OY ニ至ル距離ト AB トノ和ヲ最小ニセヨ.

第四篇ノ部

1. 梯形ノ面積ハ一斜邊ト之ニ他ノ斜邊ノ中點カラ引イタ垂線トノ積ニ等シイ.

2. 三角形ノ三邊ノ長サヲ a, b, c トスレバ, a ナル邊ノ中點ヲ通ル中線ノ長サハ $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$ デアル.

3. 二等邊梯形ノ兩底邊ノ長サガ a, b, 斜邊ノ長サガ各 c ナルトキ,其面積ハ

$$\frac{1}{4}(a+b)\sqrt{(2c+b-a)(2c+a-b)}$$ デアル.

4. 直角三角形 ABC ノ直角ヲ夾ム二邊 AB, AC ノ各ノ上ニ夫々點 D 及 E ヲ取レバ

$$CD^2+BE^2=DE^2+BC^2$$

5. ABCD ヲ矩形, P ヲ任意ノ一點トスレバ

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$

6. 二ツノ同心圓 APB, CQD ノ直徑ヲ夫々 AB, CD トシ, P 及 Q ヲ夫々圓周上ノ任意ノ點トスレバ

$$PC^2+PD^2=QA^2+QB^2$$

7. AB ハ圓ノ直徑, CD ハ AB ニ平行ナル弦, P ハ AB 上ノ任意ノ點トスレバ

$$CP^2+DP^2=AP^2+BP^2$$

8. $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB ヲ夫々 a, b, c 内接圓ノ半徑ヲ r, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 内ニアル傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r_1, r_2, r_3 トシ,三角形ノ周ノ半分卽チ $\frac{1}{2}(a+b+c)$ ヲ s トスレバ　$sr=(s-a)r_1=(s-b)r_2=(s-c)r_3$

9. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=45°$ ノトキ,邊 AB ノ中點ヲ D トシ,頂點 C カラ AB ニ引イタ垂線ノ足ヲ E トスレバ

$$AC^2=2(AD^2+DE^2)$$

10. 直角二等邊三角形 ABC ノ斜邊 BC 上ノ任意ノ一點ヲ D トスレバ

$$2.AD^2=BD^2+DC^2$$

11. ABCD ヲ平行四邊形, O ヲ任意ノ一點トスレバ, $\triangle OAB$ ト $\triangle OBC$ トノ面積ノ和或ハ差ハ $\triangle OBD$ ノ面積ニ等シイ.

12. $\triangle ABC$ ノ各邊ノ上ニ其外側ニ正方形 BCDE, CAFG, ABHK ヲ畫ケバ

$$\triangle AFK=\triangle BHE=\triangle CDG$$

13. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ D 及 E デ三等分スレバ

$$AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+BE^2$$

14 $\triangle ABC$ ノ各邊上ニ其外側ニ正方形 BCDE, CAFG, ABHK ヲ畫ケバ

$$BC^2+FK^2=2(AB^2+AC^2)$$

$$CA^2+HE^2=2(BC^2+AB^2)$$

$$AB^2+DG^2=2(BC^2+AC^2)$$

15. 前題ニ於テ,六邊形 FKHEDG ノ各邊ノ平方ノ和ハ $\triangle ABC$ ノ各邊ノ平方ノ和ノ 4 倍ニ等シイ.

16. 四邊形ノ一組ノ對邊ノ延長ノ交點ト兩對角線ノ中點トヲ三頂點トスル三角形ノ面積ハ原四邊形ノ面積ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シイ.

17. 三角形内ノ一點ヲ各頂點ニ結ビツケル三直線デ此三角形ノ面積ガ三等分サレヽバ,其點ハ此三角形ノ重心デアル.

18. 四邊形 ABCD ニ於テ AB=BC=13米, CD=4 米, DA=14 米, BD=15 米ナルトキ,其面積ヲ計算セヨ.

19. 周圍ガ a ナル正三角形及正方形ノ面積ヲ計算シ,ドチラガ大キイカヲ示セ.

20. 四定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

21. 定圓周上ニ於テ,其上ニナイ二定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ最大又ハ最小ナル點ヲ求メヨ.

22. 三角形ノ面積ヲ,其ノ底邊上ノ一定點カラ引イタ二直線デ三等分セヨ.

23. 四邊形ノ面積ヲ,其ノ一頂點カラ引イタ二直線

デ三等分セヨ.

24. 四邊形ノ面積ヲ,其ノ一邊上ノ定點カラ引イタ直線デ二等分セヨ.

第五篇ノ部

1. 線分 AB ガ P 及 Q ニ於テ同ジ比ニ内分及外分サレヽバ,線分 PQ ハ A 及 B ニ於テ他ノ同ジ比ニ内分及外分サレル.

2. △ABC ノ二邊 AB 及 AC ヲ $m:n$ ニ分ツ點ヲ夫夫 D 及 E トスレバ, BE ト CD トハ各其交點ニ於テ $(m+n):m$ ニ分タレル.

3. 二ツノ弓形 ABC, A′B′C′ ノ含ム角ガ相等シケレバ,是等ノ弓形ガ屬スル圓ノ半徑ノ比ハ其弦 AC, A′C′ ノ比ニ等シイ.

4. 二定點 A, B ヲ通ル任意ノ圓ト他ノ定圓トノ交點ヲ C, D トスレバ, CD ト AB トハ常ニ平行デアルカ又ハ常ニ一定ノ點デ交ル.

5. 二定圓ノ何レニモ交ル任意ノ圓ヲ畫ケバ,其ノ各圓トノ共通弦ノ延長ノ交點カラ初ノ二圓ニ引イタ切線ノ長サハ相等シイ.

6. 三角形ノ各頂點カラ之ニ對スル邊ニ引イタ三線分(又ハ其延長)ガ一點デ出會ヒ,此點デ各線分ガ分タレタ二ツノ分ノ積ガ皆相等シケレバ此點ハ其三角形

ノ垂心デアル.

7. 定圓弧 AB ノ中點ヲ C トシ,其ノ共軛弧ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ $(PA+PB):PC$ ハ一定デアル.

8. 正方形 ABCD ノ外接圓ノ弧 AD 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ $(PC+PA):PB$ 及 $(PC-PA):PB$ ハ夫々一定デアル.

9 圓周上ノ一點 A ニ於ケル切線ヘ任意ノ弦 BC ノ兩端カラ垂線 BB′, CC′ ヲ引キ,又 A カラ BC ニ垂線 AA′ ヲ引ケバ $AA'^2=BB'.CC'$

10. 圓外ノ一點 P カラ此圓ニ切線 PA, PB 及割線 PCD ヲ引ケバ,四邊形 ACBD ノ對邊ノ積ハ相等シイ.

11. △ABC ノ邊 AB ノ中點 D カラ直線ヲ引イテ AC トEデ, BC ノ延長トFデ交ラセレバ

$$AE:EC=BF:CF$$

12. △ABC ノ頂角 A ノ二等分線ヲ AD トシ,內心ヲ O トスレバ $AO:OD=(AB+AC):BC$

13. 二定圓ニ切スル任意ノ圓ノ二切點ヲ通ル直線ハ恒ニ初ノ二定圓ノ相似ノ中心ヲ通ル.

14. 二定圓ノ相似ノ中心ヲ O トスル. O カラ任意ノ割線ヲ引イテ第一ノ圓周ト A A′, 第二ノ圓周ト B, B′ デ交ラセレバ, $OA.OB'$ 及 $OA'.OB$ ハ相等シクテ且

ツ一定デアル.

15. 正五邊形ニ於テ,同ジ頂點ヲ通ラナイ二ツノ對角線ハ互ニ中末比ニ內分サレル.

16. 直角三角形ノ頂點カラ斜邊ニ引イタ垂線デ分タレタ二ツノ三角形ノ內接圓ノ面積ノ比ハ,其垂線デ斜邊ガ分タレタ二ツノ分ノ比ニ等シイ.

17. 圓 O ノ互ニ垂直ナル二直徑ヲ AB, CD トスル. D ヲ中心 DA ヲ半徑トシテ圓內ニ弧 AEB ヲ畫ケバ,弧 ACB ト弧 AEB トデ出來ル新月形ハ △DAB ト等積デアル.

18. 半圓周ノ兩端ニ於ケル半徑ヲ直徑トシテ其內側ニ二ツノ相等シイ半圓ヲ畫ケバ,此ノ三ツノ半圓周ニ切スル圓ノ直徑ハ最初ノ半圓ノ直徑ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ.

19. 二線分ノ積ガ一定ノトキ,和ノ最小ナル場合ヲ求メヨ.

20. 長サガ a ナル線分ヲ $m:n$ ニ內分及外分スルトキ其ノ兩分點間ノ距離ヲ求メヨ.

21. 三邊ガ夫々4米, 5米, 7米ナル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ計算セヨ.

22. 半徑 r ナル三圓ガ二ツヅヽ相切スルトキ其間

ニ出來ル弧三角形ノ面積ヲ計算セヨ.

23. 定點 O カラ引イタ二線分 OP, OQ ノ比ガ一定デ且ツ此二線分ガ常ニ定角ヲナストキ,點 P ノ軌跡ガ直線(又ハ圓周)ナラバ點 Q ノ軌跡ハ何カ.

24. 定直線外ノ定點 O ト此直線上ノ任意ノ點 P トヲ結ビツケル線分 OP 又ハ其延長上ニ一點 M ヲ $OP.OM=k^2$ (k ハ定長)ナルヤウニ取ルトキ, M ノ軌跡ヲ求メヨ.

25. 二圓ノ一交點 A ヲ通ツテ任意ノ直線ヲ引キ,各圓ノ周ト夫々 C, D デ交ラセルトキ,線分 CD ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

26. 定圓 O ノ定直徑ヲ AB トシ周上ノ任意ノ點ヲ C トスル. BC ヲ延長シ其上ニ BC ニ等シク CD ヲ取ルトキ, AC ト OD トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

27. 定點 O ト定圓周上ノ任意ノ點 P トヲ結ブ線分 OP 又ハ其延長上ニ一點 M ヲ $OP.OM=k^2$ (k ハ定長) ナルヤウニ取ルトキ,M ノ軌跡ヲ求メヨ. (問題14參照)

28. 底邊,高サ及他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

29. 底邊,底ヘノ中線及他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

30. 頂角,高サ及頂角ヲ夾ム二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

31. 頂角,頂點カラノ中線及頂角ヲ夾ム二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

32. 一邊ノ長サヲ知ツテ正五邊形ヲ畫ケ.

33. 定多角形ニ相似デアツテ,其ノ面積ノ比ガ二定線分ノ比ニ等シイ多角形ヲ作レ.

34. 定圓外ノ定點 P カラ此圓ニ割線ヲ引キ,之ニヨツテ出來ル弦 AB ガ PA ト PB トノ比例中項ニ等シクナルヤウニセヨ.

35. 圓外ノ一點カラ此圓ニ引イタ二切線ノ長サノ和ガ此點カラ圓ノ周ニ至ル最大距離ニ等シクナルヤウニ此點ノ位置ヲ求メヨ.

36. 三定點カラノ距離ガ三定線分ニ比例スル點ヲ求メヨ.

37. 相交ル二圓ノ一交點 A ヲ通ツテ其兩端ガ各圓周上ニアル線分 PQ ヲ引キ PA : AQ ガ定比ニ等シクナルヤウニセヨ.

38. △ABC ノ邊 BC 上ニ一點 D ヲ求メ $AD^2=BD.DC$ ナルヤウニセヨ.

39. 前題ニ於テ BC ノ延長上ニ D ヲ求メヨ.

40. 定三角形ヲ其一邊ニ平行ナル直線デ二ツノ部分ニ分ケ,其面積ノ比ガ定比ニ等シイヤウニセヨ.

41. 三角形ノ邊ニ平行ナル直線ヲ引イテ其面積ヲ n 等分セヨ.

42. 三角形ノ面積ヲ其一邊ニ垂直ナル直線デ二等分セヨ.

43. 定三角形ニ定矩形ト相似ナル矩形ヲ內接サセヨ. 但シ此矩形ノ一邊ハ定三角形ノ最大角ニ對スル邊ノ上ニアルモノトスル.

44. 二定直線ニ切シ,且ツ一定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ.

雜題

1. $\triangle ABC$ ノ二頂點 A.B カラ其對邊ニ夫々垂線 AD, BE ヲ引キ, B カラ直線 DE ニ垂線 BF ヲ引ケバ $\angle FBD = \angle EBA$

2 正三角形內ノ任意ノ點カラ三邊マデノ距離ノ和ハ不易デアル.

正三角形外ノ點カラナラバドウイフ關係ガアルカ.

3. 二ツノ中線ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル.

4. 三角形ノ頂角ノ二等分線ハ頂點ヲ通ル中線ト頂點カラ底邊へ引イタ垂線トノ間ニアル.

5. 三角形ノ大キイ角ノ頂點カラノ高サハ小サイ角ノ頂點カラノ高サヨリ小サイ.

6. 三角形ノ大キイ角ノ頂點カラノ中線ハ小サイ角ノ頂點カラノ中線ヨリ小サイ.

7. 對角線ノ數ガ 90 アル多角形ノ邊數ヲ求メヨ.

8. 三邊ノ長サガ夫々 6 糎, 5 糎, 4 糎ナル三角形ノ內接圓及傍接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

9. 三角形ノ外心カラ一邊マデノ距離ハ其邊ニ對

スル頂點ト垂心トノ距離ノ半分ニ等シイ.

10. 三角形ノ重心ヲ通ル直線ニ對シ,其直線ノ同ジ側ニアル二頂點カラ其直線ヘノ距離ノ和ハ,反對ノ側ニアル一頂點カラノ距離ニ等シイ.

11. 三角形ノ各頂點カラ此三角形ヲ截ラナイ直線マデノ距離ノ和ハ,其重心カラ其直線マデノ距離ノ3倍ニ等シイ.

直線ガ三角形ヲ截ルトキハドウカ.

又特ニ直線ガ重心ヲ通ル場合ヲ吟味シテ前題ノ結果ヲ導ケ.

12. △ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ其外側ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ畫ケバ BC, EG ノ中點及二ツノ正方形ノ對角線ノ交點ハ一ツノ正方形ノ四頂點ニナル.

13. XX′, YY′ ハ O ニ於テ互ニ直交スル二定直線, A ハ其外ニアル一定點デアル. A カラ互ニ直交スル任意ノ二直線ヲ引イテ XX′, YY′ ト B, C デ交ラセレバ,線分 BC ノ中點 M ハ恒ニ定直線上ニアル.

14. 直交スル二定直線上ニ夫々相對スル二頂點ヲ有スル正方形ノ他ノ二頂點ハ常ニ他ノ二定直線上ニアル.

15. 內切スル二圓ノ切點ヲ A トシ, B ニ於テ內圓ニ切スル外圓ノ弦 CD ヲ作レバ, AB ハ ∠CAD ヲ二等分スル.

16. 三角形ノ外心,垂心及重心ハ一直線上ニアル,而シテ垂心ト重心トノ距離ハ外心ト重心トノ距離ノ2倍ニ等シイ.

17. △ABC ノ三邊上ニ其外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ畫キ,此ノ三ツノ正三角形ノ外接圓ノ交點ヲ O トスレバ

$$AD=BE=CF=OA+OB+OC$$

18. 定圓周上ノ一定點ヲ A トシ,定直線上ノ一定點ヲ B トスル. A, B ヲ通ル任意ノ圓ヲ畫イテ此ノ定圓ト定直線トニ再ビ交ル點ヲ C, D トスレバ,直線 CD ハ常ニ一定點ヲ通ル.

19. 底邊ト頂角ノ大サトガ一定ナル任意ノ三角形ニ於テ,底邊ノ兩端カラ夫々其對邊ニ引イタ垂線ノ足ヲ結ビツケル線分ノ長サハ不易デアル.

20. 或點カラ三角形ノ三邊又ハ其延長ニ下シタ三ツノ垂線ノ足ガ一直線上ニアラバ,此點ハ此三角形ノ外接圓ノ周上ニアル.(本文第163頁 Simson ノ定理ノ逆)

21. 四邊形 ABCD ノ二邊 AB, DC ノ延長ノ交點ヲ E トシ,他ノ二邊ノ延長ノ交點ヲ F トスレバ,四ツノ三角

形 BCE, CDF, ADE, ABF ノ外接圓ノ周ハ一點ニ會スル.

22. 三角形ノ重心カラ各頂點ニ至ル距離ノ平方ノ和ノ 3 倍ハ三邊ノ平方ノ和ニ等シイ.

23. $\triangle ABC$ ノ重心ヲ G トシ,任意ノ一點ヲ P トスレバ

$$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3.GP^2$$

24. $\angle B, \angle C$ ガ何レモ鋭角ナル $\triangle ABC$ ニ於テ, B, C カラ其對邊ニ引イタ垂線ヲ夫々 BP, CQ トスレバ

$$BC^2=AB.BQ+AC.CP$$

$\angle B$ 又ハ $\angle C$ ガ鈍角ナラバ

$$BC^2=AB.BQ\sim AC.CP$$

25. 二ツノ同心圓ガアル,內圓ノ周上ノ任意ノ點 P ヲ通ツテ此圓ニ任意ノ弦 PA ヲ引キ,又 PA ニ垂直ニ外圓ノ弦 BPC ヲ引ケバ

$$PA^2+PB^2+PC^2 \text{ 及 } BC^2+CA^2+AB^2$$

ハ夫々一定デアル.

又 $\triangle ABC$ ノ重心ヲ G トスレバ線分 GP ノ長サモ亦一定デアル.

26. 圓周上ノ一點 A カラ直徑 AB 及切線 AC ヲ引キ,切線上ノ一點 C カラ第二ノ切線ヲ引イテ其切點ヲ D トシ,D カラ AB ニ垂線 DE ヲ下セバ, DE ハ BC ノタメニ二等分サレル.

又 B カラ切線ヲ引イテ CD ノ延長ト F デ交ラセレバ AF, BC, DE ハ一點ニ會スル.

27. 圓周上ノ一點カラ之ニ內接スル四邊形ノ對邊ニ引イタ垂線ノ積ハ相等シイ.

28. 圓ニ內接スル四邊形外ノ(四邊形ノ角ノ對頂角內デナイ)點カラ對邊ニ引イタ垂線ノ積ガ相等シケレバ,此點ハ此圓周上ニアル.

29. 線分 AB ノ兩端カラ之ニ垂直ナル二線分 AC, BD ヲ同ジ向キニ引キ, AD, BC ノ交點 E カラ AB ニ垂線 EF ヲ引ケバ, EF ハ $\angle CFD$ ヲ二等分スル.

30. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ニ平行ナル任意ノ直線ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 D, E トシ, BE, CD ノ交點ヲ F トスレバ,直線 AF ハ BC ヲ二等分スル.

31. 三角形ノ二角ノ二等分線及第三ノ角ノ外角ノ二等分線ガ夫々其對邊又ハ其延長ト交ル三點ハ一直線上ニアル.

32. 直角三角形ノ直角頂カラ斜邊ニ引イタ垂線ガ斜邊ヲ中末比ニ分テバ,此三角形ノ最小邊ハ斜邊ガ分タレタ一ツノ部分ニ等シイ.

定義　線分 AB ガ C ト D トデ同ジ比ニ內分及外分

サレルトキハ,四點 A, B, C, D ガ調和列點ヲナストイヒ,之ヲ調和列點 (A,B,C,D) ト書クコトトスル.

33. 調和列點 (A,B,C,D) ガアル. AB ノ中點ヲ O トスレバ　$OA^2=OC.OD$　$\frac{OC}{OD}=\left(\frac{AC}{AD}\right)^2$

34. 調和列點 (A,B,C,D) ガアル. 直線 AB 外ノ一點ヲ S トシ, B ヲ通ツテ SA ニ平行ニ引イタ直線ガ二直線 SC, SD ト交ル點ヲ E, F トスレバ, B ハ EF ノ中點デアル.

35. 梯形ノ兩底邊ノ中點,對角線ノ交點,及兩斜邊ノ延長ノ交點ハ調和列點ヲナス.

36. 四邊形 ABCD ニ於テ, BC, AD ノ延長ノ交點ヲ E トシ, BA, CD ノ延長ノ交點ヲ F トシ, EF ガ AC 及 BD ノ延長ト交ル點ヲ夫々 M, N トスレバ,四點 E, F, M, N ハ調和列點ヲナス.

又 AC, BD ノ交點ヲ P トスレバ四點 A, C, P, M 及四點 B, D, P, N モ調和列點ヲナス.

37. 圓 O 外ノ一點 P カラ此圓ニ二切線 PA, PB 及割線 PCD ヲ引キ,弦 AB ト OP トノ交點ヲ M トスレバ, AB ハ ∠CMD ヲ二等分スル.

38. △ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫々二點 E, F ヲ, BE=2.EA, AF=2.FC ナルヤウニ取リ, EF ト BC トノ

交點ヲ H トスルトキ BH:CH ヲ求メヨ.

39. 半徑 1 ナル圓ニ內接スル正十二邊形ト外接スル正十二邊形トノ一邊ノ長サヲ各小數第二位マデ算出セヨ.

40. 直角三角形 ABC (∠A=R∠) ノ一鋭角 B ノ二等分線ガ AC ト交ル點ヲ D トスルトキ AB=2.AD デアルトイフ. 三邊ノ比ヲ求メヨ.

41. △ABC ノ底邊 BC ニ平行ニ任意ノ直線ヲ引キ, AB, AC 又ハ其延長ト夫々 D, E デ交ラセル. 二直線 BE, CD ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

42. 定三角形ニ內接スル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

43. 定三角形ニ相似ナル三角形ノ一頂點ハ定點デアツテ,第二ノ頂點ハ定直線上ヲ動クトキ,第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.

44. 定圓內ノ定點 A ヲ通ツテ此圓ニ任意ノ弦 BC ヲ引キ,次ニ A ヲ通リ夫々 B, C ニ於テ此定圓ニ切スル二ツノ圓ヲ畫クトキ,此二圓ノ第二ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

45. ABCD ハ平行四邊形デアツテ,其一邊 AB ハ位置ガ與ヘラレ, BC ハ長サダケガ與ヘラレテアルトス

ル. ∠C及∠D ノ二等分線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

46. 相交ル二定直線ニ下ス垂線ノ足ノ間ノ距離ガ定長ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

47. 三定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

48. 二定圓ニ引イタ切線ノ長サガ相等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

49. 正三角形ニ於テ,其ノ二頂點ニ至ル距離ノ和ガ第三ノ頂點ニ至ル距離ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

50. 頂角,周圍及底邊ノ一端カラノ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

51. 二邊及一中線ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

52. 一邊ト二中線トヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

53. 三中線ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

54. 頂角,高サ及頂點カラノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

55. 頂角ノ二等分線ノ長サ,其頂點カラノ中線及其頂點カラノ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

56. 定線分ヲ二ツノ分ニ內分又ハ外分シ,其ノ各分ノ平方ノ和(或ハ差)ガ定面積k^2ニ等シイヤウニセヨ.

57. 二邊ガ夫々定長ナル三角形ノ中,面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ.

58. 圓O外ノ點Aカラ此圓ニ割線 ABC ヲ引イテ△BOC ノ面積ヲ最大ニセヨ.

59. 鋭角 BAC 內ノ一定點Oヲ一頂點トシ,他ノ二頂點ガ一ツヅヽ此角ノ二邊上ニアル最小周圍ノ三角形ヲ求メヨ.

60. 定三角形ニ最大面積ノ矩形ヲ內接サセヨ.

61. 定角內ノ定點Pヲ通ツテ二邊トQ,Rデ交ル直線ヲ引キ PQ.PR ヲ最小ニセヨ.

62. 定點ヲ通ツテ定直線及定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

昭和三年十月二十六日印刷
昭和三年十月二十八日發行
昭和三年十二月十五日訂正再版印刷
昭和三年十二月十八日訂正再版發行

中學教科
新平面幾何

著作權所有

昭和四年版 中學教科新平面幾何

定價金壹圓拾六錢

編者 寺尾壽
藤野了祐

發行者 合資會社 冨山房

代表者 坂本嘉治馬

印刷者 冨山房印刷部

發行所
合資 冨山房 會社
東京市神田區通神保町九番地
電話九段 1921. 1922. 1923 番