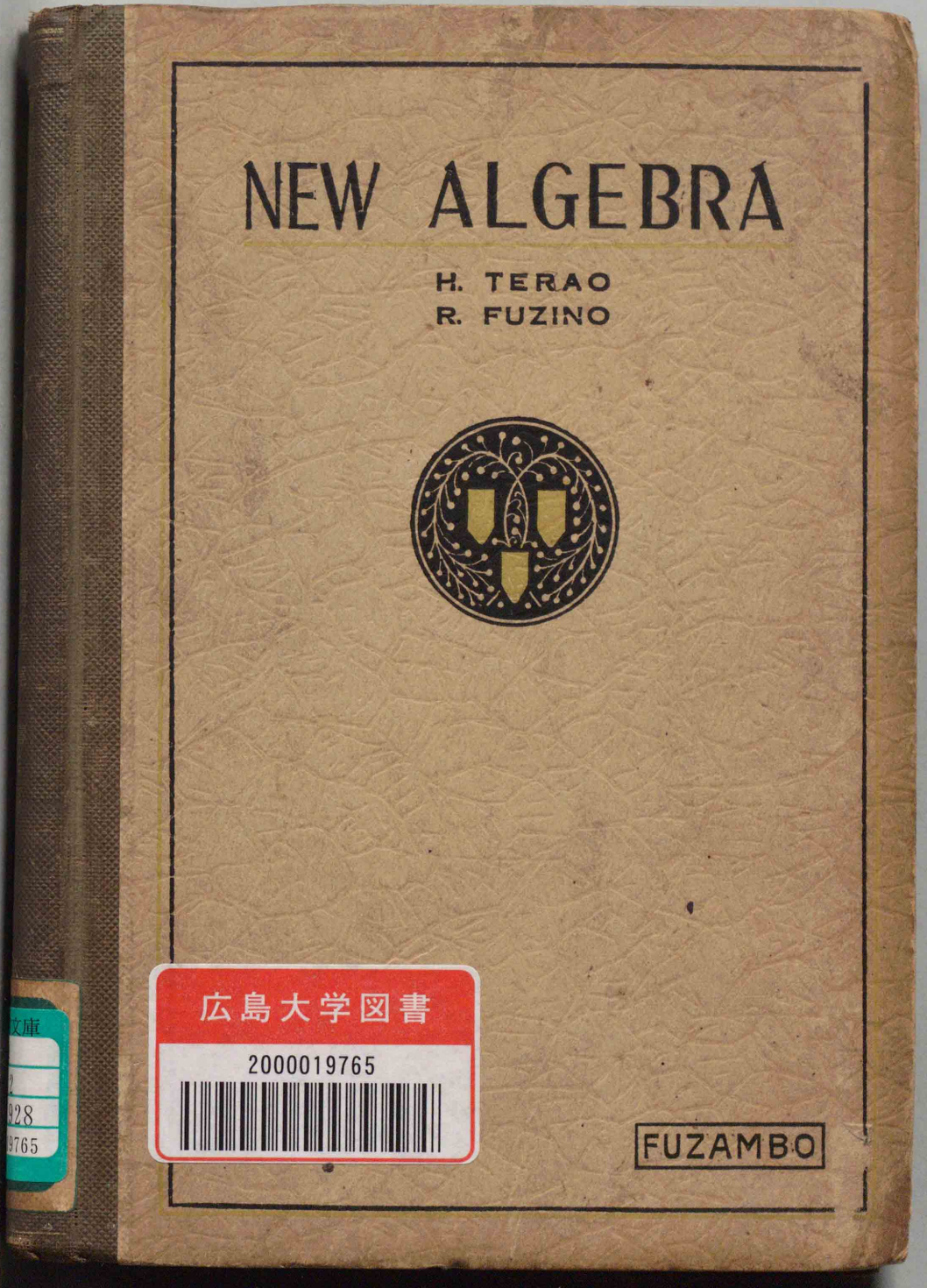
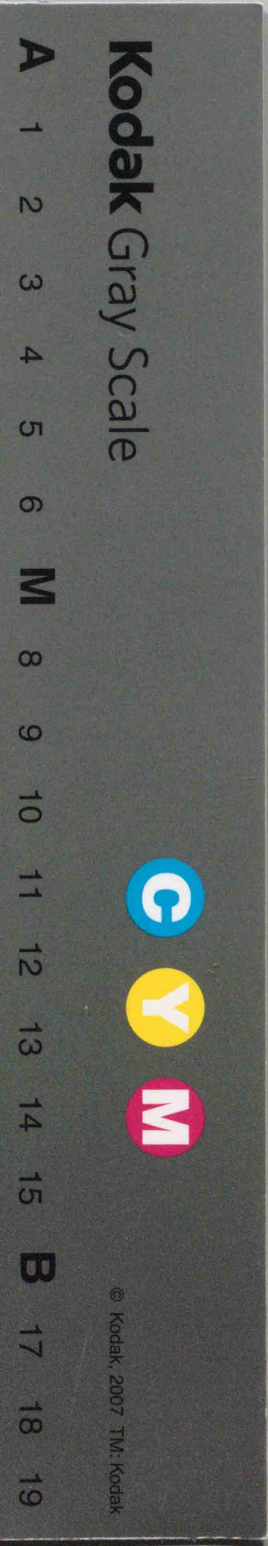
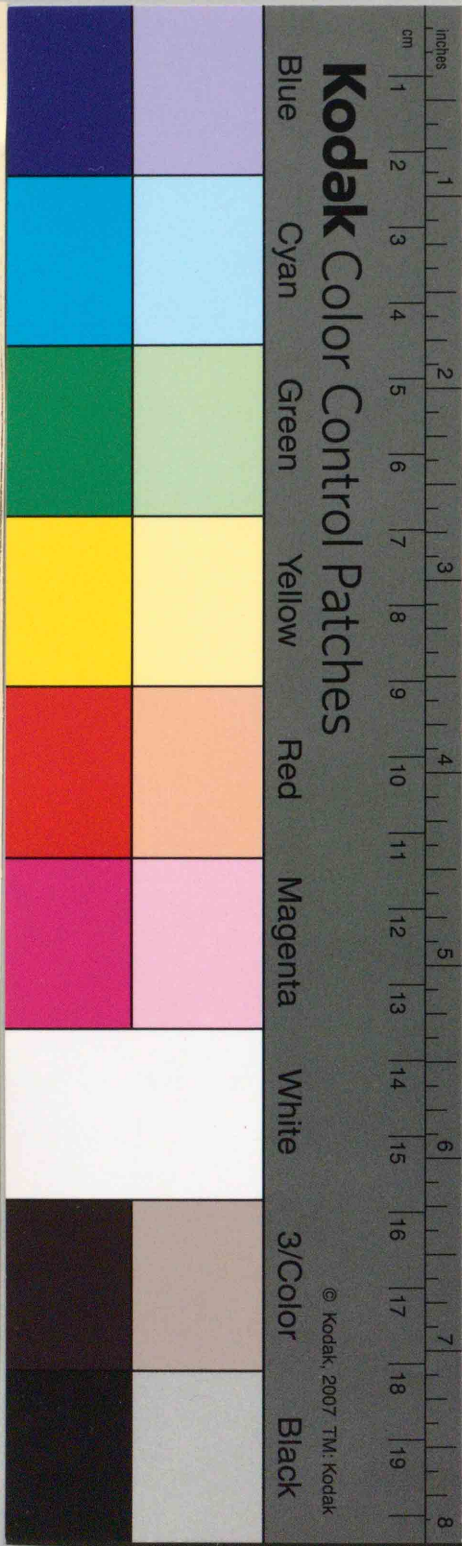


40171

教科書文庫

4
4/2
41-1928
2000.0 19765



375.9  
Te18

新  
代  
教  
科  
書

教科書文庫  
4  
412  
41-1928  
2000019765

科 室

Sains Tiruo. Kihara.

Sains  
Sains

Tiruo

文 部 省 檢 定 済

昭和三年一月二十六日 中學校數學科用

昭和八年三月二十日 實業學校數學科用

昭和三年版

中 學 數 科

新 代 數

下 卷

理學博士 寺 尾 壽  
藤 野 了 祐  
共 編



広島大学図書

2000019765



東京 神田

富 山 房



## 下 卷 目 次

第十一篇	二次方程式ノ續	1
	聯立二次方程式	12
	くらふノ續	29
	雜題	39
第十二篇	無理方程式	49
	雜題	55
第十三篇	不等式ノ續	60
第十四篇	比,比例	
	數ノ比	69
	量ノ比及比例	89
	雜題	118
第十五篇	級數	
	等差級數	124

等比級數	135
雜題	154
<b>第十六篇 對數</b>	160
指數定義ノ擴張	160
對數	169
常用對數	174
對數表ノ用法	182
對數計算	187
<b>第十七篇 歩合算</b>	196
雜題	220
<b>附錄</b>	
I 分母ガ0ナル分數式ノ數値	1
II 補充問題	9
III 補習用問題集	23
答	53

昭和三年版

中學教科

新代數

下卷

## 第十一篇 二次方程式ノ續

## 113. 二次方程式ニ導キ得ル一元分數方程式

【例1】  $\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-7} = \frac{1}{2x-4}$  ヲ解ケ.

解 分母ノ最小公倍數  $(x-8)(x-7)(2x-4)$  ヲ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ拂ヘバ

$$(x-7)(2x-4) - (x-8)(2x-4) = (x-8)(x-7)$$

即チ

$$2x^2 - 18x + 28 - 2x^2 + 20x - 32 = x^2 - 15x + 56$$

$$\therefore x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$\therefore x = 12 \quad \text{或ハ} \quad x = 5$$

12及5ハ何レモ原分數方程式ノ分母ヲ0ニシナイ故ニ根デアアル。

【例2】  $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{2} = 0$  ヲ解ケ。

解  $2(x-2)(x-1)$  ヲ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ拂ヘ

$$2(x-1)^2 - 2(x-2)^2 + 3(x-2)(x-1) = 0$$

即チ

$$2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 8x - 8 + 3x^2 - 9x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 5x = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad \text{或ハ} \quad x = \frac{5}{3}$$

コノ二ツノ値ハ何レモ分母ヲ0ニシナイカラ、求メル根デアアル。

【例3】  $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{2-x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$  ヲ解ケ。

解  $x^2-1$  ヲ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ拂ヘバ

$$(x-1)(3x-1) + (x+1)(2-x) = 2$$

$$\text{故ニ} \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$



Higashi

$$\therefore x = 1 \quad \text{或ハ} \quad x = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ ハ原方程式中ノ分母ヲ0ニシナイカラ、求メル根デアアル。シカシ  $x=1$ ハ  $x^2-1$ ヲ0ニスルカラ、原方程式ノ根デナイ。

故ニ根ハ  $\frac{1}{2}$ ダケデアアル。

### 例 題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1.  $\frac{x-1}{x-3} + 2x = 12$

2.  $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{3}{x+7}$

3.  $\frac{2}{x+3} + \frac{x+3}{2} = \frac{10}{3}$

4.  $\frac{3(x-1)}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x-1} = 5$

5.  $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x-1}{x-1}$

6.  $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{x^2-2}{x-2} = 2x$

7.  $\frac{x+1}{x^2+x-2} + \frac{x-1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x^2-1} = 0$

8.  $\frac{x^2-3x}{x^2-1} + 2 + \frac{1}{x-1} = 0$

*J. Kubo*  
*G. Kubota*  
*Kubota*  
*Jesus Wilson*

*Junno*

*Handwritten mark*

## 114. 應用問題

【例1】 或人鶏卵ヲ 1円20銭 だけ買ツタ、モシ同ジ金高デ一箇ニツキ 6 厘だけ安イモノヲ買ツタナラバ 10 箇だけ多ク買へタ筈デアルトイフ、今買ツタ卵一箇ノ價ハ何程カ。

解 求メル價ヲ  $x$  厘トスレバ、1円20銭デ實際ニ買ツタ數ハ  $\frac{1200}{x}$  箇デ 6 厘だけ安イモノナラバ  $\frac{1200}{x-6}$  箇だけ買ヒ得タ譯デアル。

因テ次ノ方程式ヲ得ル。

$$\frac{1200}{x-6} = \frac{1200}{x} + 10$$

$$\therefore 120x = 120(x-6) + x(x-6)$$

$$x^2 - 6x - 720 = 0$$

$$\therefore x = 30 \quad \text{或ハ} \quad x = -24$$

コノ二ツノ値ハ何レモ上ノ分數方程式ノ分母ヲ 0 ニシナイカラ方程式ノ根デアアルガ、所要ノ數ハ正ノ數デナケレバナラヌカラ、 $-24$ ハ本問題ニ適シナイ。

故ニ鶏卵一箇ノ價ハ 30 厘即チ 3 銭デアル。

【例2】 甲乙二人ノ職工ガ共ニ働イテ或仕事ヲ 12 日間デ仕上ゲタ。モシ乙一人デ之ヲスルナラバ、甲一人デスルヨリモ 7 日間多クカ、ルトイフ、甲乙各一人デコレヲ仕上ゲルニ要スル日數ヲ求メヨ。

解 甲一人デ仕上ゲル日數ヲ  $x$  トセヨ。サウスレバ乙一人デ仕上ゲル日數ハ  $x+7$  デアル、故ニ甲ガ一日ニスル仕事ハ全事業ノ  $\frac{1}{x}$ 、乙ガ一日ニスル仕事ハ全事業ノ  $\frac{1}{x+7}$ 、ソシテ甲乙共ニ働ケバ 12 日デ仕上ゲルカラ、ソノトキノ一日ニスル仕事ハ全事業ノ  $\frac{1}{12}$  デアル。

因テ次ノ方程式ヲ得ル。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore 12(x+7) + 12x = x(x+7)$$

$$\therefore x^2 - 17x - 84 = 0$$

$$\therefore x = 21 \quad \text{或ハ} \quad x = -4$$

是等ハ方程式ノ根デアアル。シカシ求メル日數ハ正ノ數デナケレバナラヌカラ、 $-4$ ハ本問題ニ適シナイ。

因テ甲一人デスレバ21日カ、リ、從テ乙一人  
デスレバ28日カ、ル。

## 問 題

1. 若干人デ懇親會ヲシテ總費用ガ67<sup>円</sup>5.カ  
カッタ、トコロガコノ人數ノ中來賓二人カラハ  
會費ヲ取ラズ殘リ人デ負擔シタタメ、各人ノ  
出金高ハ平均額ヨリモ20錢ダケ増シタトイフ、  
總人數ハ幾ラカ。

2. 汽車ガ108哩ノ距離ヲ走ツタノニ、最初  
36哩走ツタトキ機關ニ故障ガ出來タノデ、ソノ  
後ハソノ速サヲ毎時9哩ダケ減ラシテ進行シ  
タタメ、豫定ノ時刻ヨリモ24分ダケ延著シタト  
イフ。初ノ速サハ毎時何程デアツタカ。

3. 水槽ガアル、栓ヲ抜イテコレニ充チタ水  
ヲ出セバ4時間デ盡キルトイフ。今コノ水槽  
ガ空ノトキ、栓ノ抜ケテ居ルノヲ知ラズニ或管  
カラ水ヲ入レタトコロガ、豫定ヨリ9時間長ク  
カ、ツテ充チタトイフ、モシ栓ガ抜ケテキナカ  
ツタラバ幾時間デ充チタカ。

4. 川蒸汽船<sup>ノ</sup>3.5海里ノ間ヲ往復スルノ  
ニ1時40分間カ、ツタ、靜水面デノコノ船ノ速  
サヲ5節トシテコノ川ノ流レノ速サ毎時幾海  
里デアルカラ求メヨ。

5. 一ツノ仕事ヲ甲ガスレバ乙ガスルヨリ  
モ4日早く出來上ルトイフ。今甲乙共ニ1日  
ダケ此仕事ヲシタ後、乙一人デ9日半カ、ツテ  
殘リヲ仕上ゲタトイフ、各、ガ一人デスレバ幾日  
カ、ルカ。

6. 甲乙二人ノ職工ガアル、甲ハ幾日間カ働  
イテ賃金42圓ヲ得、乙ハソレヨリ8日間少ナク  
働イテ賃金40圓ヲ得タ、モシ甲ノ働イタ日數ダ  
ケ乙ガ働キ、乙ノ働イタ日數ダケ甲ガ働イタナ  
ラバ兩人ノ賃金合ハセテ4圓ダケ増シタ筈デ  
アルトイフ。各、ガ働イタ日數ヲ求メヨ。

7. 二輪車ガアル、ソノ前輪ノ周ハ後輪ノ周  
ヨリ20<sup>cm</sup>長クテ、2520米ノ道ヲ行ク間ニ後輪ハ  
前輪ヨリモ60回多ク廻轉スルトイフ。各輪ノ  
周ハ幾ラカ。

8. 或正ノ數ト其逆數トノ和ガソノ差ノ $\frac{5}{3}$

J. K. K.

S. K. K.

K. K. K.

42x(x-8)  
x



デアルトイフ、ソノ數ヲ求メヨ。

### 115. 特別ナル一元高次方程式

【例1】  $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$  ヲ解ケ。

解  $x^2 = X$  トオケバ

$$X^2 - 37X + 36 = 0$$

$$\therefore (X-36)(X-1) = 0$$

$$\therefore X=36 \text{ 或ハ } X=1$$

ソコデ  $X=36$  ナラバ

$$x^2 = 36 \quad \therefore x = \pm 6$$

マタ  $X=1$  ナラバ

$$x^2 = 1 \quad \therefore x = \pm 1$$

因テコノ方程式ニハ  $\pm 6, \pm 1$  ナル四ツノ根ガアル。

【例2】  $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) = -12$  ヲ解ケ。

解  $x^2 - x = X$  トオケバ

$$X^2 - 8X + 12 = 0$$

$$\therefore (X-6)(X-2) = 0$$

$$\therefore X=6 \text{ 或ハ } X=2$$

ソコデ  $X=6$  ナラバ

$$x^2 - x = 6$$

$$\therefore x^2 - x - 6 = 0$$

$$\therefore x=3 \text{ 或ハ } x=-2$$

マタ  $X=2$  ナラバ

$$x^2 - x = 2$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 或ハ } x=-1$$

因テ原方程式ハ  $3, -2, 2, -1$  ナル四根ヲ有スル。

【例3】  $x^3 = 1$  ヲ解ケ。

解 移項スレバ

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\text{即チ } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或ハ } x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 或ハ } x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

即チ1ノ代數的立方根ハ三ツアル、ソノ中ノ一ツハ實數1デ、他ノ二ツハ虛數  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$  デアル。

【例4】  $(x^2-1)(3x-2)=(x-1)(9x+1)$  ヲ解ケ.

解 コノ方程式ノ兩邊ニハ  $x-1$  ナル公因数ガアル. ソコデコノ方程式ノスベテノ項ヲ左邊ニ集メテ  $x-1$  ヲ括リ出セバ

$$(x-1)\{(x+1)(3x-2)-(9x+1)\}=0$$

故ニ

$$(1) \quad x-1=0$$

或ハ

$$(2) \quad (x+1)(3x-2)-(9x+1)=0$$

サテ(1)カラ

$$x=1$$

ヲ得ル. 次ニ(2)ヲ簡單ニスレバ

$$3x^2-8x-3=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{3} \quad \text{或ハ} \quad x=3$$

故ニ原方程式ハ  $1, -\frac{1}{3}, 3$  ナル三根ヲ有スル.

【例5】  $x^3+2x^2-3=0$  ヲ解ケ.

解 コノ方程式ノ各項ノ係數ノ和ハ

$$1+2-3=0$$

故ニ  $x=1$  トスレバソノ左邊ハ  $0$  トナル. 因テ整除ノ定理ニヨツテ左邊ガ  $x-1$  デ割切レル

コトガワカル.

ソコデ左邊ヲ因数ニ分解シテ

$$(x-1)(x^2+3x+3)=0$$

$$\therefore x-1=0 \quad \text{或ハ} \quad x^2+3x+3=0$$

$$\therefore x=1 \quad \text{或ハ} \quad x=\frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

### 例 題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

$$1. \quad x^4-13x^2+36=0$$

$$2. \quad 2x^4+28=15x^2$$

$$3. \quad (x^2-2)^2=32-4(x^2-2)$$

$$4. \quad (x^2-2ax)^2-8a^4=7a^2x(x-2a)$$

$$5. \quad x^3+1=0$$

$$6. \quad x^3=8$$

$$7. \quad x^3=a^3$$

$$8. \quad (x^2-2x)^2+6(x^2-2x+6)=C3$$

$$9. \quad 5x^2(a-x)=(a^2-x^2)(x+3a)$$

$$10. \quad x^3-2x+1=0$$

$$11. \quad x^3+4x^2+2x-7=0$$

$$12. \quad x^4-6x^3+3x^2+6x-4=0$$

Higashi

*Handwritten notes:*  
 $x^2 - 3x + 3 = 0$   
 $x = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$   
 $x^2 - 2x + 6 = 0$   
 $x = 1 \pm i\sqrt{5}$   
 $x^3 + 1 = 0$   
 $x = -1, \omega, \omega^2$   
 $x^3 = 8$   
 $x = 2, \omega, \omega^2$   
 $x^3 = a^3$   
 $x = a, \omega a, \omega^2 a$   
 $x^3 - 2x + 1 = 0$   
 $x = 1, \omega, \omega^2$   
 $x^3 + 4x^2 + 2x - 7 = 0$   
 $x = 1, \omega, \omega^2$

## 聯立二次方程式

## 116. 一次及二次ノ二元聯立方程式

【例1】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1)  $x - y = 2$

(2)  $3x^2 - 2xy + y^2 = 6$

解 (1) カラ

(3)  $y = x - 2$

コレヲ (2) ニ代入スレバ

(4)  $3x^2 - 2x(x-2) + (x-2)^2 = 6$

$\therefore 2x^2 - 2 = 0$

$\therefore x = 1$  或ハ  $x = -1$

ソコデ (3) ニ  $x = 1$  ヲ代入スレバ  $y = -1$ , マタ (3)ニ  $x = -1$  ヲ代入スレバ  $y = -3$ 

故ニ次ノ二組ノ根ヲ得ル.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

【例2】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

(2)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{9}$

解  $\frac{1}{x} = X, \frac{1}{y} = Y$  トオケバ, 是等ノ方程式ハ

(1)'  $X - Y = \frac{1}{3}$

(2)'  $X^2 + Y^2 = \frac{5}{9}$

トナル. コレヲ前例ト同様ニシテ解ケバ

$$\begin{cases} X = \frac{2}{3} \\ Y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} X = -\frac{1}{3} \\ Y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

ナル二組ノ根ヲ得ル.

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

【例3】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1)  $x + y = 7$

(2)  $xy = 12$

解 コノ問題ヲ例1ト同様ニシテ解ケバ

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{或ハ} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

ナル二組ノ根ヲ得ル。

シカシ本問題ハ根ト係數トノ關係ヲ用ヒテ  
次ノヤウニ解クノガ簡便デアル。

二數  $x, y$  ノ和ガ7デ積ガ12デアルカラ、 $x$  ト  
 $y$  ノ値ハ  $t$  ヲ未知數トスル二次方程式

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

ノ二根ニ等シイ。

コノ二次方程式ヲ解ケバ

$$t=4 \quad \text{及} \quad t=3$$

ヲ得ル。サテ  $x, y$  ノドレヲ4トシドレヲ3ト  
シテモイ、カラ、求メル答ハ上ノ通りノ二組デ  
アル。

### 例 題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

1.  $2x - y = 5$

$x + 3y = 2xy$

3.  $3x + 2y = 10$

$x^2 - y^2 = 15$

5.  $x + y = 6$

$xy = 5$

2.  $2x + y = 9$

$x^2 + y^2 = 50$

4.  $3x - 2y = 1$

$9x^2 + 4y^2 = 13$

6.  $x - y = 2$

$xy = 48$

註 6 ヲ  $x + (-y) = 2, x(-y) = -48$  トスレバ二數  $x$  ト  
 $-y$  トハ  $t^2 - 2t - 48 = 0$  ノ二根デアル。

7.  $x + y = 5$

$x^2 + xy + y^2 = 19$

9.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$

$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 20$

11.  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$

### 117. 未知數ヲ含ム項ガスベテ二次ナル二元聯立方程式

【例1】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1)  $3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17$

(2)  $-x^2 + y^2 = 16$

解 マヅ常數項ヲ消去スルタメニ

$(1) \times 16 - (2) \times 17 = \text{ヨツテ}$

(3)  $65x^2 - 64xy + 15y^2 = 0$

*That's very good all right excellent*

*J. J. Kishan*

ヲ得ル。コレヲ  $x$  ニツイテ解ケバ

$$(4) \quad x = \frac{3}{5}y$$

或ハ (5)  $x = \frac{5}{13}y$

ソコデ原聯立方程式ハ結局次ノ二組ノ聯立方程式ニナル。

$$(I) \begin{cases} x = \frac{3}{5}y \\ -x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x = \frac{5}{13}y \\ -x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

(I) カラ  $-\frac{9}{25}y^2 + y^2 = 16$

即チ  $\frac{16y^2}{25} = 16 \quad \therefore y = \pm 5$

$\therefore \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$  或ハ  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$

マタ (II) カラ  $-\frac{25}{169}y^2 + y^2 = 16$

即チ  $\frac{144}{169}y^2 = 16 \quad \therefore y = \pm \frac{13}{3}$

$\therefore \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{13}{3} \end{cases}$  或ハ  $\begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{13}{3} \end{cases}$

故ニ答ハ次ノ四組デアル。

$$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{13}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ y=-\frac{13}{3} \end{cases}$$

【例2】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1)  $x^2 - 2xy + y^2 = 18$

(2)  $2x^2 + 2xy - 3y^2 = 36$

解 (2) - (1) × 2 ニ ヨツテ

$$6xy - 5y^2 = 0$$

即チ  $y(6x - 5y) = 0$

故ニ

$$y = 0$$

或ハ  $y = \frac{6}{5}x$

因テ原聯立方程式ハ次ノ二組ノ聯立方程式ニ分ケラレル。

$$(I) \begin{cases} y=0 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 18 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} y = \frac{6}{5}x \\ x^2 - 2xy + y^2 = 18 \end{cases}$$

ソコデ前例ノヤウニ、コノ各組ヲ解イテ次ノ四組ノ根ヲ得ル。

$$\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=15\sqrt{2} \\ y=18\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-15\sqrt{2} \\ y=-18\sqrt{2} \end{cases}$$

【例3】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$(1) \quad 2x^2 - 3xy + y^2 = 4$$

$$(2) \quad 8x^2 + 2xy - 3y^2 = -12$$

解 (1)×3+(2)

$$14x^2 - 7xy = 0$$

即チ  $7x(2x - y) = 0$

故ニ

$$x = 0$$

或ハ  $y = 2x$

故ニ次ノ二組ノ聯立方程式ヲ得ル.

$$(I) \begin{cases} x=0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 4 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} y=2x \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$(I) \text{カ} \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

ナル二組ノ根ヲ得ル.

次ニ(II)ヲ解クタメニ  $y=2x$ ヲ今一ツノ式ニ代入スレバ

$$2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 4$$

$$\therefore \quad 0x = 4$$

即チ  $0 = 4$

トナツテ不可能デアル.

故ニ原方程式ノ根ハ上ニ求メタ二組ダケデアル.

【例4】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 34$$

$$(2) \quad xy = 15$$

解 コノ問題モ前三例ト同様ニシテ解ケルケレドモ、次ノヤウニシテ解クノガ簡便デアル.

$$(1)+(2) \times 2 \quad (x+y)^2 = 64$$

$$\therefore \quad x+y = \pm 8$$

故ニ原聯立方程式ハ次ノ二組ノ聯立方程式ニナル.

$$(I) \begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x+y=-8 \\ xy=15 \end{cases}$$

(I)ヲ解ケバ

$$\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{或ハ} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

(II)ヲ解ケバ

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{或ハ} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$$

故ニ都合四組ノ根ガアル。

## 例 題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

1.  $x^2 + 2xy - 4y^2 = 20$       2.  $x^2 - 2xy = 21$

$2x^2 + xy - 20y^2 = 16$        $xy + y^2 = 18$

3.  $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$       4.  $2x^2 - 3xy = 14$

$2x^2 + y^2 = 6$        $3y^2 - x^2 + 1 = 0$

5.  $3x^2 - 7xy + 4y^2 = 5$       6.  $3x^2 - xy = 105$

$4x^2 - 7xy + 3y^2 = 2$        $3xy - y^2 = 90$

7.  $x^2 + y^2 = 50$       8.  $x^2 - y^2 = 9$

$xy = -7$        $xy = 20$

### 118. 二次方程式ヲ含ム三元聯立方程式ノ特別ナ場合

【例1】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1)  $yz = 20$

(2)  $zx = 15$

(3)  $xy = 12$

解  $x, y, z$  ハ何レモ0デナイコト明カデア  
ル。因テ

$$(2) \times (3) \div (1) \quad x^2 = \frac{15 \times 12}{20} = 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

コレヲ(3)ト(2)トニ代入シテ次ノ二組ノ根ヲ  
得ル。

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \\ z = -5 \end{cases}$$

【例2】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1)  $x(x+y+z) = 2$

(2)  $y(x+y+z) = -4$

(3)  $z(x+y+z) = 6$

解 (1)+(2)+(3) = ヨツテ

$$(x+y+z)^2 = 4 \quad \therefore x+y+z = \pm 2$$

コレヲ(1), (2), (3) = 代入シテ

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

ナル二組ノ根ヲ得ル。

## 例 題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

- |                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| 1. $yz=30$          | 2. $(x+y)(x+z)=12$ |
| $zx=-60$            | $(y+z)(y+x)=15$    |
| $xy=-50$            | $(z+x)(z+y)=20$    |
| 3. $x(y+z)=7$       | 4. $x(x+y+z)=a$    |
| $y(z+x)=32$         | $y(x+y+z)=b$       |
| $z(x+y)=35$         | $z(x+y+z)=c$       |
| 5. $(y+z)(x+y+z)=6$ | 6. $x^2yz=6$       |
| $(z+x)(x+y+z)=8$    | $y^2zx=12$         |
| $(x+y)(x+y+z)=-6$   | $z^2xy=18$         |

119.  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  ノ變形

$a, b$  ヲ二ツノ正ノ有理數トスレバ

$$(\sqrt{a+\sqrt{b}})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$$

マタ  $a > b$  ナラバ

$$(\sqrt{a-\sqrt{b}})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$$

$$\therefore \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a+\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

因テ有理數ト根號 $\sqrt{\quad}$ ヲ冠ツタ根式トノ和マ

タハ差ノ平方根ハ、或特別ナ場合ニハ二ツノ有理數ノ平方根ノ和マタハ差ニ等シイコトガアル。即チ二重ニ根號 $\sqrt{\quad}$ ヲ冠ツタ式ガ唯一ツノ根號ヲ冠ツタ二項ノ和マタハ差ニ等シイコトガアル。

$$\begin{aligned} \text{【例1】 } \sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{3+2+2\sqrt{3 \times 2}} \\ &= \sqrt{3+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

【例2】  $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$  ヲ二ツノ有理數ノ平方根ノ和ニ直セ。

解 與ヘラレタ式ガ二ツノ有理數  $x, y$  ノ平方根ノ和ニ等シイト假定シヤウ。即チ

$$(1) \quad \sqrt{14+6\sqrt{5}} = \sqrt{x+\sqrt{y}}$$

トシヤウ。モシ果シテサウナラバコノ式ノ兩邊ノ平方モマタ相等シクナケレバナラス。即チ

$$(2) \quad 14+6\sqrt{5} = x+y+2\sqrt{xy}$$

$$\text{即チ} \quad 14-x-y+6\sqrt{5} = 2\sqrt{xy}$$

再ビコノ兩邊ヲ二乗スレバ

$$(14-x-y+6\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{xy})^2$$

$$\therefore (14-x-y)^2 + 12\sqrt{5}(14-x-y) + (6\sqrt{5})^2 = 4xy$$



$$\therefore 12\sqrt{5}(14-x-y)=4xy-(14-x-y)^2-(6^2 \times 5)$$

サテコノ等式ノ右邊ハ有理數デアアル, マタ左邊ハ  $\sqrt{5}$  ノ係數ガ 0 デナイ限リハ無理數デアツテ右邊ニ等シクナルコトガ出來ナイ. 因テ是非トモ

$$14-x-y=0$$

即チ

$$(3) \quad x+y=14$$

サウスレバ(2)ニヨツテ

$$2\sqrt{xy}=6\sqrt{5}$$

$$\therefore \sqrt{xy}=3\sqrt{5}$$

故ニ

$$(4) \quad xy=45$$

ソコデ(3)ト(4)トカラ  $x, y$  ヲ求メレバ有理數

$$\begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{或ハ} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}$$

ヲ得ル. ドノ組ヲ取ツテモ

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{9+\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}$$

トナル.

注意 上ト同様ニシテ  $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$  ヲニツノ

有理數ノ平方根ノ差ニ直スコトガ出來ル. 即チ

$$(1) \quad \sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

ト置イテ上ト同様ニスレバ, ヤハリ

$$\begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{或ハ} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}$$

ヲ得ル. トコロガ(1)ノ左邊ハ正, 從テ  $\sqrt{x}-\sqrt{y}$  モ正, 即チ  $x > y$  デナケレバナラス. 故ニ

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{9-\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$$

【例3】  $\sqrt{21+3\sqrt{24}}$  ヲ簡單ニセヨ.

解  $\sqrt{24}$  ノ係數ヲ 2 ニ直セバ

$$3\sqrt{24}=\sqrt{9 \times 24}=\sqrt{9 \times 4 \times 6}=2\sqrt{54}$$

$$\therefore \text{原式}=\sqrt{21+2\sqrt{54}}$$

ソコデ和ガ 21 積ガ 54 ナル二數ヲ求メテ 18 ト

3 トヲ得ル.

$$\therefore \sqrt{21+3\sqrt{24}}=\sqrt{18+\sqrt{3}}=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

注意 例ハバ  $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$  ヲ簡單ニシヤウトシ

テ

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

トオキ, コノ兩邊ヲ平方スレバ

$$4+2\sqrt{2}=x+y+2\sqrt{xy}$$

トナル. コノ式ハ  $x+y=4$ ,  $xy=2$  ナラバ成リ立ツコトハ明カデアアルガ, コノ聯立方程式ヲ解ケバ  $x, y$  ノ値ハ  $2+\sqrt{2}$  及  $2-\sqrt{2}$  トナツテ有理數ヲ得ナイカラ, 等式

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

ハ成リ立ツケレドモ, 簡單ニハナラナイ.

### 例 題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

1.  $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$
2.  $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
3.  $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$
4.  $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$
5.  $\sqrt{7-3\sqrt{5}}$  ( $7-3\sqrt{5}=\frac{14-6\sqrt{5}}{2}=\frac{14-2\sqrt{45}}{2}$ )
6.  $\sqrt{5+\sqrt{21}}$
7.  $\sqrt{3-\sqrt{5}}$
8.  $\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}$

### 120. 應用問題

【例】 矩形ノ地面ガアル, 縦ヲ 3 米増シ横ヲ 2 米減ラシテモ面積ハ變ラナイガ, モシ縦ヲ 9 米増シ横ヲ 5 米減ラサバソノ面積ハ元ノ面積ノ  $\frac{3}{4}$  ニナルトイフ. コノ地面ノ縦横各, 何程カ.

*J. Kihara*

解 縦ヲ  $x$  米, 横ヲ  $y$  米トセヨ. サウスレバ次ノ聯立方程式ヲ得ル.

$$(1) \quad (x+3)(y-2)=xy$$

$$(2) \quad (x+9)(y-5)=\frac{3}{4}xy$$

コノ左邊ノ括弧ヲハツシテ簡單ニスレバ

$$(1)' \quad 3y-2x-6=0$$

$$(2)' \quad xy+36y-20x-180=0$$

(1)' カラ

$$(1)'' \quad y=\frac{2x+6}{3}$$

コレヲ (2)' = 代入スレバ

$$\frac{x(2x+6)}{3}+12(2x+6)-20x-180=0$$

$$\therefore x^2+9x-162=0$$

$$\therefore x=9 \quad \text{或ハ} \quad x=-18$$

然ルニ  $x$  ハ正ノ數デナケレバナラヌカラ  $x=-18$  ハ本問題ニ適シナイ.

ソコデ  $x=9$  ヲ (1)' ニ代入スレバ

$$y=8$$

答 縦 9 米, 横 8 米

問 題

1. ニツノ正ノ數ガアル,ソノ平方ノ和ハ 244, ソノ平方ノ差ハ 44デアルトイフ,コノ二數ヲ求メヨ.
2. 矩形ノ地面ガアル,間口ハ奥行ヨリ 3 間ダケ短イ,モシ間口ヲ 5 間増シ奥行ヲ 8 間減ラサバ面積ハ元ノ半分ヨリ 250 坪多クナルトイフ,間口ト奥行トヲ求メヨ.
3. 直角三角形ノ地面ガアル,ソノ面積ハ 600 坪デ斜邊ノ長サハ 50 間デアアル,直角ヲ夾ム兩邊ノ長サ各,幾ラカ.
4. 仲買人ガアル,1875 圓デ或鐵道株若干株ヲ買ツテ,ソノ中 15 株ヲ殘シ,ソノ餘ヲ買價ヨリモ一株ニツキ 4 圓ダケ高ク賣ツテ 1740 圓ヲ得タトイフ,買入レタ株數ヲ求メヨ.
5. A, B 二列車ガアル, A ハ甲停車場ヲ發シテソコカラ 30 哩隔タル乙停車場ニ, B ハ同時ニ乙停車場ヲ發シテ甲停車場ニ向ヒ,各一定ノ速サデ直行シ,36 分間ヲ經タトキ兩列車摺違ヒ, A

*That's all right*

ハ B ヨリモ 30 分ダケ早ク目的ノ停車場ニ著イタトイフ. 兩列車ノ速サ毎時各,幾ラカ.

6. 馬車ガ或速サデ甲地ヲ發シ,40 哩ダケ行ツタ後ソノ速サヲ毎時 2 哩ダケ増シテ乙地ニ達シタ. モシ最初カラ後ノ速サデ行クナラバ 40 分早ク乙地ニ達シ,マタ始終最初ノ速サデ行クナラバ 20 分遅ク著イタ筈デアルトイフ. 甲乙兩地間ノ距離及コノ馬車ノ最初ノ速サヲ求メヨ.

*J. Kikawa*

*4 ぐらふノ續\**

*Plot all right very fast*

121.  $y=ax^2+bx+c$  ノぐらふ

例トシテ  $y=x^2-2x-5$

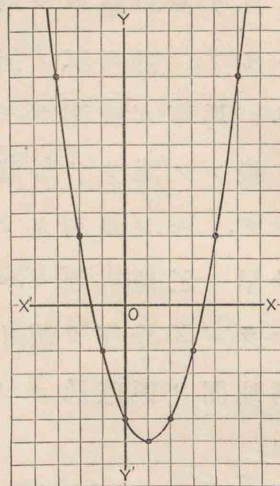
ヲ取ラウ. コノ方程式ノ  $x$  ニ種々ノ値ヲ與ヘテコレニ對應スル  $y$  ノ値ヲ求メレバ次ノ結果ヲ得ル.

$x$	.....	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	.....
$y$	.....	10	3	-2	-5	-6	-5	-2	3	.....

\*後廻シニシテモイ.

ソコデコノ方程式  
ノぐらふヲ畫ケバ右  
圖ノヤウナ曲線ヲ得  
ル。

一般ニ  $y = ax^2 + bx + c$   
ナル形ノ方程式ノぐ  
らふハヤハリ右圖ノ  
ヤウナ曲線デアツテ  
皆拋物線トイフ曲線  
デアル。



### 122. $x^2 + y^2 = r^2$ ノぐらふ

コノ方程式ノぐらふモ前節ノ例ノヤウニ  $x$ ,  
 $y$  ノ相對應スル數組ノ値ヲ求メテ畫ケルケレ  
ドモ、次ノヤウニシテ簡單ニ求メルコトガ出來  
ル。

コノ方程式ノぐらふ上ノ任意ノ點  $P$  カラ  $X$   
軸ニ垂線ヲ引イテソノ足ヲ  $M$  トスレバ、 $P$  ノ坐  
標  $(x, y)$  ハ夫々

$$x = OM, \quad y = MP$$

デアツテ、直角三角形

OMP カラ

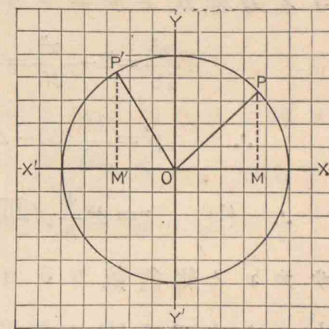
$$OM^2 + MP^2 = OP^2$$

$$\text{即チ} \quad x^2 + y^2 = OP^2$$

$$\text{ソシテ} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{從テ} \quad OP = r$$

故ニソノ點ハ原點



Oヲ中心トシテ半徑ノ長サガ  $r$  ニ等シイ圓ノ  
周上ニアル。

逆ニ、コノ圓周上ノ任意ノ點  $P'$  カラ  $X$  軸ニ垂  
線ヲ引イテソノ足ヲ  $M'$  トスレバ、 $P'$  ノ坐標  $(x, y)$   
ニツイテ

$$x^2 + y^2 = OM'^2 + M'P'^2 = OP'^2$$

$$= OP'^2 = r^2$$

故ニ方程式  $x^2 + y^2 = r^2$  ノぐらふハ原點ヲ中心  
トシテ半徑ノ長サガ  $r$  ニ等シイ圓デアル。

### 123. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ノぐらふ

例トシテ  $a=5, b=4$  ナル場合ヲ取ラウ。

$$\text{即チ} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

この方程式ヲ  $y$  ニツイテ解ケバ

$$\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{25} = \frac{25-x^2}{25}$$

$$\therefore y^2 = \frac{16}{25}(25-x^2)$$

$$\therefore (1) \quad y = \pm \frac{4}{5} \sqrt{25-x^2}$$

サテ  $x$  ノ絶對値ガ 5 ヨリ大ナラバ  $x^2$  ハ 25 ヨリ大キクナツテ (1) ノ右邊ハ虚數トナル。故ニ  $x$  ハ  $-5$  ト  $+5$  トノ間ニダケアルコトガ分カル。

ソコデ (1) ノ右邊ニ於ケル  $x = 0$  カラ 5 マデノ種々ノ値ヲ與ヘテコレニ對應スル  $y$  ノ値ヲ求メレバ次ノ結果ヲ得ル。

$x$	0	1	2	3	4	5
$y$	$\pm 4$	約 $\pm 3.9$	約 $\pm 3.7$	$\pm 3.2$	$\pm 2.4$	0

又 (1) ノ右邊ニハ  $x^2$  ガアルダケデ  $x$  ノ項ガナイ、サテ  $(-x)^2 = x^2$  ダカラ、 $x$  ニ或負ノ値ヲ與ヘタトキノ  $y$  ノ値ハ、 $x$  ニソノ負數ノ絶對値ニ等シイ正ノ値ヲ與ヘタトキノ  $y$  ノ値ニ等シイ。故ニ  $x$  ノ負ノ値ニ對應スル  $y$  ノ値ハ特ニコレヲ計算スルニ及バナイ、ソシテ求メルぐらふハ  $y$

軸ニツイテ對稱ナル線デアルコトガ分カル。

マタ前ノ表デ明カニ分カル通り、 $x$  ノ一ツノ値ニ對應スル  $y$  ノ値ハ二ツツアツテ唯ソノ符號ガ違ツテ居ルダケダカラ、求メルぐらふハマタ  $x$  軸ニ關シテモ對稱ナル線デアルコトガ分カル。

ソコデ前ノ表ニアル相對應スル  $x, y$  ノ値ヲ夫々坐標ニ有スル點ヲ求メテ是等ヲ通過スル線ヲ作レバ所要ノぐらふトシテ右圖ノヤウナ曲線ヲ得ル。

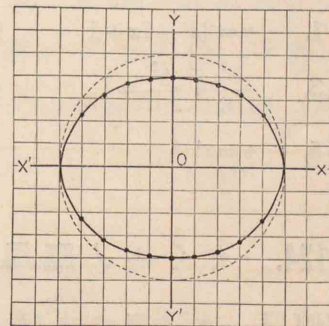
コノ曲線ハ橢圓トイフ曲線デアル。

一般ニ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ナル形ヲ有スル方程

式ノぐらふハコノ圖ノヤウナ橢圓デアル。

注意 方程式  $x^2 + y^2 = 25$  ノぐらふハ原點ヲ中心トシ半径ガ 5 ナル圓ヲ表ハス。サテコノ方程式ヲ  $y$  ニツイテ解ケバ

$$(2) \quad y = \pm \sqrt{25-x^2}$$



コレト前ノ

$$(1) \quad y = \pm \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$$

トヲ比べレバ  $x$  ノ同ジ値ニ對應スル(1)ノ  $y$  ノ値ハ常ニ(2)ノ  $y$  ノ値ノ  $\frac{4}{5}$  デアル。即チ(1)ナル楕圓ハ(2)ナル圓ガ縦ノ方向ニ  $\frac{4}{5}$  ニ縮マツタ形デアル。楕圓ノ名ハコレカラ起ツタ。

### 例 題

次ノ各方程式ノぐらふヲ畫ケ。

1.  $y = 2x^2 - 7x + 1$       2.  $x^2 + y^2 = 16$

3.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$       4.  $y = x^3$

5.  $y = x^4$

## 124. ぐらふノ應用

【例1】 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 25$$

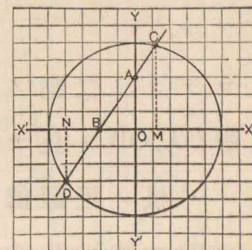
$$(2) \quad 2y - 3x = 6$$

解 (1)ノぐらふハ原點ヲ中心トシテ半徑ガ5ナル圓デアル。

マタ(2)ニ於テ  $x=0$  トオケバ  $y=3$  マタ  $y=0$  ト

オケバ  $x=-2$  トナル。

故ニ(2)ノぐらふハ二點  $A(0, 3)$  及  $B(-2, 0)$  ヲ結ブ直線デアル。



ソシテ聯立方程式(1), (2)ノ根ハ、コノ二方程式

ノ何レニモ適合スル  $x, y$  ノ値ダカラ、コノ圓  $O$  ト直線  $AB$  トノ交點  $C$  及  $D$  ノ坐標デアル。

ソコデ  $C, D$  ノ坐標ヲ讀メバ根ノ近似値ガ分かる。即チ  $C$  ノ坐標ヲ讀ンデ  $x=1$  餘,  $y=$  約5 マタ  $D$  ノ坐標ヲ讀ンデ  $x=$  約-4,  $y=$  約-3

注意 根ノ正シイ値ハ  $x=1\frac{3}{13}, y=4\frac{11}{13}$  及  $x=-4, y=-3$  デアル。

【例2】 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

解  $y = x^2 - 2x - 5$  トオイテ、マヅコノ方程式ノぐらふヲ作レバ次頁ノ圖ノ通りデアル。(第30頁第121節例參照)

サテ  $x^2 - 2x - 5 = 0$  ノ根ハ  $y = x^2 - 2x - 5 = 0$  ニ於テ  $y=0$  ナラシメル  $x$  ノ値即チコノぐらふガ  $X$  軸

ニ交ル點 A, B ノ  $x$  坐標デアアル。

ソコデコノ二點ノ  $x$  坐標 OA, OB ノ長サヲ讀メバ根ノ近似値トシテ約  $-1.5$  及約  $3.5$  ヲ得ル。

注意 根ノ正シイ値ハ  $-1.45$  弱及  $3.45$  弱デアアル。

別解  $x^2=y$

トオケバ, 原方程式ハ

$$y-2x-5=0$$

トナル。

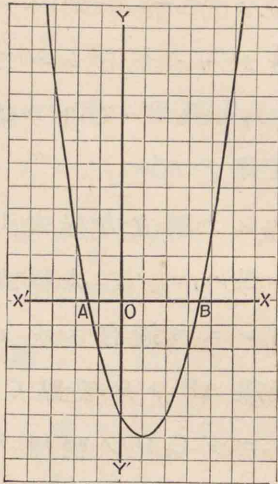
因テ原方程式ノ根ハ聯立方程式

$$(1) \quad y=x^2$$

$$(2) \quad y-2x-5=0$$

ノ根デアアル。

(1)ノぐらふハ拋物線デアアル。(上卷第189頁第92節ノ圖參照)



マタ(2)ニ於テ  $x=0$  ト

オケバ  $y=5$ , マタ  $y=0$

トオケバ  $x=-2.5$  トナル。

ル。

故ニ(2)ノぐらふハ

二點 A(0,5) 及 B(-2.5,0)

ヲ結ブ直線デアアル。

故ニ聯立方程式(1),

(2)ノ根ハコノ拋物線

ト直線 AB トノ交點

C, D ノ坐標デアツテ, ソノ  $x$  坐標ヲ讀メバ OM

=約  $-1.5$ , ON=約  $3.5$  ヲ得ル。

注意 拋物線  $y=x^2$  ノ圖ダケアレバ, 本解ニ倣フテ, 直線ヲ一本引クダケデ任意ノ二次方程式ノ實根ノ近似値ヲ求メルコトガ出來ル。

### 例 題

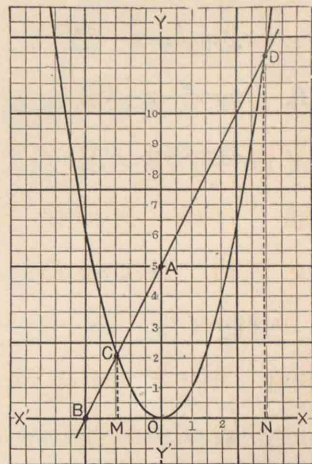
ぐらふヲ用ヒテ次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$1. \quad x^2-7x+5=0$$

$$2. \quad 3x^2-7x+2=0$$

ぐらふヲ用ヒテ次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$3. \quad x-2y+2=0, \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$



4.  $4x=3y$

$x^2+y^2=9$

6.  $y=x^2-x+1$

$2y+9x+1=0$

5.  $y=3x^2$

$x^2+y^2=25$

## 雜 題

1.  $x^3+y^3+z^3-3xyz$  ノ因數ニ分解シテ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

ナルコトヲ示セ.

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
 ノ用ヒヨ.

2.  $(y-z)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(x-y)$  ノ簡單ニセ

ヨ.

3.  $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$  ガ等根ヲ有スルトキハ  $2b=a+c$  ナルコトヲ證明セヨ.4.  $x^2-(2k-1)x+k=0$  ノ二根ノ和ガソノ積ノ5 倍ニ等シトイフ、 $k$  ノ値ヲ求メヨ.5.  $ax^2+bx+c=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トシテ次ノ各式ヲ  $a, b, c$  デ表ハセ.

(1)  $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$  (2)  $\alpha^2-\beta^2$

6.  $x^2+2(m-1)x+4m^2+1=0$  ノ一根ガ他ノ根ノ2 倍ニナルヤウニ  $m$  ノ値ヲ求メヨ.7.  $(x-a)(x-b)=m^2$  ノ根ハ常ニ實數デアルコ

トヲ證明セヨ.

8.  $x^2+px-q=0$  ニ於テ、 $p$  ハ任意ノ實數、 $q$  ハ



正ノ數ナラバコノ方程式ハーツノ正根トーツノ負根トヲ有スルコトヲ證明セヨ。

次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$9. \quad \frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}$$

$$10. \quad \frac{5-6x}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} = \frac{4}{9x^2-4}$$

$$11. \quad \frac{x+3}{3-x} + \frac{x+6}{6-x} + \frac{x+9}{9-x} = 3$$

$$12. \quad (a-x)^3 + (b-x)^3 = (a+b-2x)^3$$

$$13. \quad \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{62(x+1)}{63(x-1)}$$

$$14. \quad x^3 - 2x^2 + 3 = 0$$

$$15. \quad 4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 40x - 25 = 0$$

左邊ヲ  $(ax^2+bx)^2 - (cx+d)^2$  ノ形ニ直セ。

$$\text{【例】} \quad \frac{x^2+4x}{x-1} + \frac{72(x-1)}{x^2+4x} = 18 \text{ ヲ解ケ。}$$

$$\text{解} \quad \frac{x^2+4x}{x-1} = X \text{ トオケバ}$$

$$X + \frac{72}{X} = 18$$

$$\therefore X^2 - 18X + 72 = 0$$

$$\therefore X = 12 \quad \text{或ハ} \quad X = 6$$

ソコデ  $X=12$  ナラバ

$$\frac{x^2+4x}{x-1} = 12$$

$$\therefore x^2 + 4x = 12(x-1)$$

$$\therefore x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\therefore x = 6 \quad \text{或ハ} \quad x = 2$$

マタ  $X=6$  ナラバ

$$\frac{x^2+4x}{x-1} = 6$$

$$\therefore x^2 + 4x = 6(x-1)$$

$$\therefore x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm i\sqrt{5}$$

答 6, 2,  $1 \pm i\sqrt{5}$

次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$16. \quad \frac{x^2+1}{x+1} + \frac{2(x+1)}{x^2+1} = 3$$

$$17. \quad \frac{x^2-5x+3}{x^2+5x-3} - \frac{x^2+5x-3}{x^2-5x+3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{【例】} \quad 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ ヲ解ケ。}$$

解 同係數ノ項ヲ纏メテ

$$6(x^4+1) + 5(x^3+x) - 38x^2 = 0$$

兩邊ヲ  $x^2$  デ割ツテ

$$(1) \quad 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

ソコデ

$$(2) \quad x + \frac{1}{x} = y$$

ト置ケバ

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$$

故ニ(1)ハ次ノヤウニナル。

$$(1)' \quad 6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 0$$

$$\therefore \quad 6y^2 + 5y - 50 = 0$$

$$\therefore \quad y = \frac{5}{2} \quad \text{或ハ} \quad y = -\frac{10}{3}$$

サテ  $y = \frac{5}{2}$  ナラバ、(2)カラ

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\therefore \quad x = 2 \quad \text{或ハ} \quad x = \frac{1}{2}$$

マタ  $y = -\frac{10}{3}$  ナラバ(2)カラ

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$$

$$\therefore \quad 3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$\therefore \quad x = -3 \quad \text{或ハ} \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{答} \quad 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$$

コノ例ニ倣フテ次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$18. \quad x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$19. \quad 12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$$

$$20. \quad 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$21. \quad x^2 - 4y^2 + x + 3y = 2x - y = 1$$

$$22. \quad x^2 - 3xy + 3y^2 = 1 \quad 23. \quad x(x+y) = a(a+b)$$

$$7x^2 - 10xy + 4y^2 = 12$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

【例】次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$(1) \quad x + 2xy = 63$$

$$(2) \quad y + xy = 32$$

解 コノ方程式ハドチラモ二次方程式デア  
ルガ、(1)-(2)×2ニヨツテ一ツノ一次方程式ヲ得  
ル。即チ

$$(3) \quad x - 2y = -1$$

(3)ト(1)若クハ(2)トカラ次ノ二組ノ根ヲ得ル。

$$\begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-9 \\ y=-4 \end{cases}$$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

24.  $2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10$

$5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10$

25.  $(x+y)8-x=10$

$(x+y)(5-y)=20$

【例】次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1)  $x-y=1$

(2)  $x^3-y^3=19$

解 (2)ノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=19$

ソコデ(1)ニヨツテ

(3)  $x^2+xy+y^2=19$

(1)ト(3)トカラ次ノ二組ノ根ヲ得ル.

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

26.  $x^3+y^3=189$

$x+y=9$

27.  $x^2-xy+y^2=3$

$x^3+y^3=9$

28.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{6}{5}$

$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{126}{125}$

29.  $x^2-xy+y^2=7$

$x^4+x^2y^2+y^4=133$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

30.  $(a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2$

$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$

31.  $x(x-y)-5y=6$

32.  $x+y=6$

$\frac{x}{x-y} = \frac{7}{2}$

$4xy=96-x^2y^2$

33.  $2x^2-3xy+5y-5=0$

$(x-2)(y-1)=0$

34.  $3x^2+5x-8y=36$

$2x^2-3x-4y=3$

35.  $x^2+xy=8x+3$

$y^2+xy=8y+6$

36.  $x^3+y^3=7xy=28(x+y)$

37.  $x+y=a+b$

$\frac{a}{x+b} + \frac{b}{y+a} = 1$

38.  $x^2+y^2+z^2=5$

$x+y+z=3$

$xy=2$

39.  $x+y+z=19$

$x^2+y^2+z^2=133$

$xz=y^2$

40.  $x+y+z=8$

$x^2+yz=13$

$x^2yz=36$

42. 聯立方程式

$$y=mx+k, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

が唯一組ノ根ヲ有スルタメニハ  $k^2=m^2a^2+b^2$  ナルコトヲ證明セヨ.

43. 或列車ガ 120 哩ノ距離ヲ走ルニ、モシソノ速サヲ毎時 5 哩ダケ増サバ 20 分ダケ早ク行ケルトイフ。コノ列車ノ速サ毎時幾ラカ。

44. 直六面體ガアル、縦ハ横ノ 2 倍、高サハ横ノ 3 倍デ、ソノ體積ハ 750 立方糎デアルトイフ、縦、横、高サヲ求メヨ。

45. 直六面體ノ一ツノ頂點ニ出會フ三ツノ面ノ面積ガ夫々 23.66 平方寸、106.47 平方寸及 30.42 平方寸デアルトイフ。各稜ノ長サヲ求メヨ。

46. 甲乙丙ノ三人ガ或工事ヲスルノニ、甲一人デスレバ三人協同シテスル日數ヨリ 9 日長クカ、リ、乙一人デスレバ 16 日半長クカ、リ、丙

一人デスレバ丁度 3 倍カ、ルトイフ。三人協同シテ仕上ゲルニ要スル日數ヲ求メヨ。

47. 舟デ川ヲ上下シタノニ、上リニハ甲地ヲ發シテカラ乙地ニ著クマデ、ソノ距離ノ後半分ハ前半分ヨリ毎時 9 町少ナイ速サデ行キ、合計 11 時間デ乙地ニ著イタ。下リニハ上リノ前半分ヲ行ツタトキヨリ毎時半里多イ速サデ下リ、7 時間半デ歸著シタ。甲乙兩地間ノ距離及コノ舟ノ上リ前半分ノ速サヲ求メヨ。

48. 現今ノ米價ヲ若干年前ノニ比ベレバ、一圓ニツイテハ 3 升高ク、一升ニツイテハ 30 錢高イトイフ。現今ノ米價ハ一升幾ラカ。

49. A, B, C 三臺ノ飛行機ガ甲市カラ乙市ニ飛行シタ、A ハ B ヨリ毎時 21 籽大キイ速サデ飛行シ、B ハ C ヨリ毎時 9 籽大キイ速サデ飛行シタノニ、A ハ B ヨリ  $1\frac{1}{2}$  時早ク、B ハ C ヨリ 45 分早ク到著シタトイフ。甲乙兩市間ノ距離ヲ求メヨ。

50. 甲乙二人ノ職工ガ某工場ニ雇ハレ、乙ハソノ期間ノ終リニ賃金 32 圓ヲ得、甲ハ乙ヨリモ

5日少ナイ期間ノ終リニ賃金18圓ヲ得タ。モ  
シ甲ガ乙ノ働イタ日數ダケ働キ、乙ガソノ日數  
ヨリモ15日少ナク働クトスレバ甲ハ乙ヨリモ  
16圓多ク得ルトイフ。甲乙ノ働イタ日數及各  
ノ日給ヲ求メヨ。

*J. Kubota*

## 第十二篇 無理方程式

### 125. 無理方程式

未知數ヲ表ハス文字ニ關スル無理式  
ヲ含ム方程式ヲ無理方程式トイフ。

例ヘバ  $x + \sqrt{x-1} = 7$ ,  $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{b-x} = a+b$  ハ  
何レモ無理方程式デアル。

本篇デハ平方根號 $\sqrt{\quad}$ ダケヲ含ム無理方程式  
ダケヲ扱フコトニスル。

### 126. 無理方程式ノ解方

平方根號 $\sqrt{\quad}$ ダケヲ含ム方程式ヲ解クニハ、通  
例原方程式マタハコレヲ適當ニ變形シタモノ  
ノ各邊ヲ二乗シテ新ラシイ方程式ヲ作り、ソノ  
根號ヲ次第ニ取去ルノデアル。

但シ方程式ノ兩邊ヲ二乗シテ得ル新  
方程式ノ根ノ中ニハ原方程式ノ根ハ殘  
ラズアルガ、尙一般ニハ餘分ノ根ヲ含ム  
モノデアル。

$$\text{先ツ} \quad (1) \quad A=B$$

ヲ與ヘラレタ方程式トセヨ。

コノ兩邊ヲ二乗シテ得ル方程式ハ

$$(2) \quad A^2=B^2$$

$$\text{即チ} \quad A^2-B^2=0$$

$$\text{即チ} \quad (A+B)(A-B)=0$$

デアアル。

$$\text{サテ} \quad A+B=0 \quad \text{或ハ} \quad A-B=0$$

ニ適合スル未知數ノ値ハ方程式(2)ニ適合スル、ソシテ  $A-B=0$  ハ(1)ト同ジダカラ、(1)ノ根ハ悉ク(2)ノ根デアアル。

シカシ  $A+B=0$  ニ根ガアル場合ニハ、ソノ根ハ(2)ニハ適合スルケレドモ(1)ニハ必ズシモ適合シナイ。

故ニ原方程式ノ兩邊ヲ二乗シタガタメニ、原方程式ノ根ヲ遺失スル恐レハナイケレドモ、餘分ノ根ヲ得ル恐レガアル、ダカラ

新方程式カラ得タ根ハ一々原方程式ニ當篋メタ上デコレヲ定メナケレバナラス。

【例1】  $\sqrt{4x^2-9}-2x=9$  ヲ解ケ。

解  $-2x$  ヲ右邊ニ移セバ

$$\sqrt{4x^2-9}=2x+9$$

兩邊ヲ二乗スレバ

$$4x^2-9=4x^2+36x+81$$

$$\therefore -36x=90$$

$$\therefore x=-\frac{5}{2}$$

$$x=-\frac{5}{2} \quad \text{トスレバ}$$

$$\text{原方程式ノ左邊}=\sqrt{25-9}+5=4+5=9$$

$$\text{故ニ} -\frac{5}{2} \text{ハ根デアアル。} \quad \text{答} -\frac{5}{2}$$

【例2】  $x+\sqrt{x+1}=5$  ヲ解ケ。

解  $x$  ヲ右邊ニ移セバ

$$\sqrt{x+1}=5-x$$

兩邊ヲ二乗スレバ

$$x+1=25-10x+x^2$$

$$\therefore x^2-11x+24=0$$

$$\therefore x=8 \quad \text{或ハ} \quad x=3$$

$$x=8 \quad \text{トスレバ}$$

$$\text{原方程式ノ左邊}=\sqrt{8+1}=8+3=11$$

故 = 8 ハ根デナイ。

マタ  $x=3$  トスレバ

$$\text{左邊} = 3 + \sqrt{3+1} = 3+2=5$$

故 = 3 ハ根デアル。

答 3

【例3】  $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+20} - 2\sqrt{x+11} = 0$  ヲ解ケ。

解 移項シテ

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x+20} = 2\sqrt{x+11}$$

コノ兩邊ヲ二乗スレバ

$$x+4 - 2\sqrt{x+4}\sqrt{x+20} + x+20 = 4(x+11)$$

$$\therefore -2\sqrt{x+4}\sqrt{x+20} = 2x+20$$

$$\therefore -\sqrt{x+4}\sqrt{x+20} = x+10$$

再ビ兩邊ヲ二乗スレバ

$$(x+4)(x+20) = x^2 + 20x + 100$$

$$\therefore 4x = 20$$

$$\therefore x = 5$$

$x=5$  トスレバ

$$\text{原方程式ノ左邊} = \sqrt{9} - \sqrt{25} - 2\sqrt{16}$$

$$= 3 - 5 - 8 = -10$$

故 = 5 ハ原方程式ノ根デナイ。

故 = 原方程式ニ適合スル  $x$  ノ値ハナイ, 即チ

原方程式ハ不可能デアル。

【例4】  $x^2 - 10x - 4\sqrt{x^2 - 10x + 45} = -33$  ヲ解ケ。

解  $\sqrt{x^2 - 10x + 45} = X$  トオケバ

$$x^2 - 10x = X^2 - 45$$

故 = 原方程式ハ

$$X^2 - 45 - 4X = -33$$

$$\text{即チ } X^2 - 4X - 12 = 0$$

$$\therefore X = 6 \text{ 或ハ } X = -2$$

然ルニ  $X$  即チ  $\sqrt{x^2 - 10x + 45}$  ハ負數デハナイ

筈ダカラ,  $-2$  ハ原方程式ニ適合シナイ。

$$\therefore X = 6$$

$$\text{即チ (1) } \sqrt{x^2 - 10x + 45} = 6$$

兩邊ヲ平方シテ

$$(2) \quad x^2 - 10x + 45 = 36$$

$$\therefore x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\therefore x = 9 \text{ 或ハ } x = 1$$

答 9, 1

注意 上ノ解デ(1)ノ兩邊ヲ平方シテ(2)ヲ作ツタケレドモ,(1)ノ一邊ノ符號ヲ變ヘテ得ル方程式

$$\sqrt{x^2-10x+45}=-6$$

ニハ根ガナイ(即チコノ方程式ハ不可能デアル)コトガ明カダカラ、(1)ヲ平方シテモ餘分ノ根ガ出来ナイコトガ(實際當筈メテ見ナクテモ)ソカル。

## 例 題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$1. \sqrt{5x-1}=2\sqrt{x+3}$$

$$2. \sqrt{4x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$$

$$3. \sqrt{x+2}-\sqrt{4x+1}-\sqrt{9x+7}=0$$

$$4. x+\sqrt{25-x^2}=7$$

$$5. \sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-6}$$

$$6. x-4\sqrt{x+2}=0$$

$$7. x^2-2x+5\sqrt{x^2-2x+6}=18$$

## 雜 題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

$$1. \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} \quad 2. \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{2}}$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{(16+2\sqrt{63})}} + \frac{1}{\sqrt{(16-2\sqrt{63})}}$$

$$4. (\sqrt{x+\sqrt{y}})^3 - (\sqrt{x-\sqrt{y}})^3$$

5. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\frac{3}{2}(\sqrt{3+1})^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2+1}}\right)^2 = \sqrt{59+24\sqrt{6}}$$

$$6. x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ナル ト キ } \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$$

値ヲ求メヨ。

次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$7. (7-4\sqrt{3})x^2 + (2-\sqrt{3})x = 2$$

$$8. 2x^2 - (2+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$

$$9. \sqrt{5x-1} - \sqrt{8-2x} = \sqrt{x-1}$$

$$10. \sqrt{x+5} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{12x+1}$$

$$11. x^4 - 18x^2 + 1 = 0$$

$$12. x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \quad \text{ノ根ヲ小數第三位マデ求}$$



メヨ.

【例】  $\sqrt{x^2-5x+20} + \sqrt{x^2-5x+4} = 8$  ヲ解ケ.

解 通常ノヤウニ移項シ、二乗シテモ解ケルガ、マタ次ノヤウニ解イテモイ、.

マヅ次ノ等式ガアル.

$$(x^2-5x+20) - (x^2-5x+4) = 16$$

左邊ヲ無理因數ニ分解シテ

$$(\sqrt{x^2-5x+20} + \sqrt{x^2-5x+4})(\sqrt{x^2-5x+20} - \sqrt{x^2-5x+4}) = 16$$

コレニ原方程式ヲ代入シテ

$$\sqrt{x^2-5x+20} - \sqrt{x^2-5x+4} = 2$$

ヲ得ル. コノ等式ト原方程式トヲ加減シテ

$$\sqrt{x^2-5x+20} = 5 \quad \text{及} \quad \sqrt{x^2-5x+4} = 3$$

ヲ得ル. コノ二方程式ノドチヲ取ツテソノ

兩邊ヲ二乗シテモ同ジク

$$x^2 - 5x - 5 = 0$$

ヲ得ル. コレヲ解イテ

$$x = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2} \dots \dots \text{答}$$

コノ例ニ倣ツテ次ノ各方程式ヲ解ケ.

13.  $\sqrt{3x^2-4x+34} - \sqrt{3x^2-4x-11} = 5$

14.  $a = x + \sqrt{x^2-1}$  但シ  $a > 1$  トスル.

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

15.  $x + y + \sqrt{x+y} = 30$     16.  $x + y = 8$

$$xy = 144$$

$$x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 20$$

次ノ各式ヲ實因數(虛數ヲ含マナイ因數)ニ分解セヨ.

17.  $x^2 + 2x - 1$

18.  $3x^2 + 10x + 2$

19.  $x^4 + 1$

20.  $ax^2 + bx + c = m$  ノ根ガ實數ナルタメニ  $m$  ノ取ルベキ値ノ範圍ヲ  $a, b, c$  デ表ハセ.

【例】 矩形ガアル、縦ハ横ヨリ 7 寸長ク、ソノ周圍ハソノ對角線ノ  $\frac{34}{13}$  ニ等シイトイフ、縦横各、幾ラカ.

解 横ヲ  $x$  寸トスレバ縦ハ  $(x+7)$  寸、從テ周圍ハ  $2\{x+(x+7)\}$  寸デアツテ、對角線ハ  $\sqrt{x^2+(x+7)^2}$  寸デアル. 因テ次ノ方程式ヲ得ル.

$$(1) \quad 2(x+x+7) = \frac{34}{13} \sqrt{x^2+(x+7)^2}$$

$$\therefore 13(2x+7) = 17\sqrt{2x^2+14x+49}$$

$$\therefore 169(4x^2+28x+49) = 289(2x^2+14x+49)$$

$$\therefore 98x^2 + 686x - 5880 = 0$$

$$\therefore x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\therefore x = -12 \quad \text{或ハ} \quad x = 5$$

然ルニ矩形ノ横ノ長サハ正ノ數ダカラ  $-12$  ハ題意ニ適シナイ。マタ  $x=5$  ハ上ノ無理方程式(1)ニ適合スルシ、題意ニモ合フ。故ニ横ハ5寸、從テ縦ハ12寸デアアル。

21. 矩形ガアル、縦ハ横ノ  $\frac{3}{4}$  デ、縦横ノ和ト對角線トノ差ガ3寸デアアル、縦横ノ長サ各、幾ラカ。

22. 三邊ノ長サガ夫々13<sup>寸</sup>、14<sup>寸</sup>、15<sup>寸</sup>ナル三角形ニ於テ、長サ14<sup>寸</sup>ノ邊ヲ底邊トシタトキノ三角形ノ高サヲ求メヨ。

23. 周圍ガ30<sup>寸</sup>デアアル面積ガ30平方<sup>寸</sup>ナル直角三角形ノ各邊ノ長サヲ求メヨ。

24. 甲乙二船ガアル、甲ハ東港ヲ發シテソコカラ200海里隔ツタ西港ニ乙ハ同時ニ西港ヲ發シテ東港ニ向ヒ各、一定ノ速サデ航行シ、若干時ノ後ニ出會ヒ、ソレカラ甲ハソノ速サヲ2節減ラシ乙ハ1節増シタタメ、會合ノトキカラ各、10時間デ甲ハ西港ニ、乙ハ東港ニ到著シタ、二船ノ最初ノ速サハ幾ラデアツタカ。

25. 前問題ノ終リニ、各、10時間デ云々トアルノヲ、甲ハ10時間デ西港ニ、乙ハ11時間デ東港ニ到著シタト直シテ、二船ノ最初ノ速サヲ求メヨ。

### 第十三篇 不等式ノ續

本篇デ取扱フ數ハスベテ實數ニ限ルコトトスル。

#### 127. 一元二次不等式ノ解法

【例1】  $x^2 - 8x + 15 > 0$  ヲ解ケ。

解 (1)  $x^2 - 8x + 15 > 0$

コノ左邊ヲ0ニ等シイト置イテ得ル二次方程式

(2)  $x^2 - 8x + 15 = 0$

ヲ解ケバ相異なる二ツノ實根3, 5ヲ得ル。

$\therefore x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

因テ(1)ハ

(1)'  $(x-3)(x-5) > 0$

トナル。

サテ二數ノ積ガ正ナルタメニハ各數ガ共ニ正カマタハ共ニ負ナラバ、マタサウデナケレバナラヌ。今  $x = 5$  ヨリ大キイ値ヲ與ヘレバ  $x-5$  モ  $x-3$  モ共ニ正ニナルシ、 $x = 3$  ヨリ

小サイ値ヲ與ヘレバ  $x-5$  モ  $x-3$  モ共ニ負ニナルカラ、是等ハ皆(1)'即チ(1)ニ適合スル。 $x = 3$  ト5トノ間ノ數ヲ與ヘレバ  $x-3$  ハ正  $x-5$  ハ負トナツテソノ積ハ負ニナルシ、マタ  $x$  ヲ3或ハ5トスレバ  $(x-3)(x-5) = 0$  トナツテ、是等ハ皆(1)'即チ(1)ニ適合シナイ。

故ニ結局(1)ニ適合スル  $x$  ノ範圍ハ次ノ通りデアル。

$x > 5$  或ハ  $x < 3$

【例2】  $x^2 - 8x + 15 < 0$  ヲ解ケ。

解 前例ノ説明ニヨツテ

$x^2 - 8x + 15 < 0$

即チ  $(x-3)(x-5) < 0$

ナルタメニハ、 $x$ ガ3ト5トノ間ノ値ヲ取ラネバナラヌコトガ分カル。即チ答ハ

$3 < x < 5$

#### 例題

次ノ各不等式ヲ解ケ。

1.  $x^2 - 2x - 15 > 0$
2.  $x^2 - 7x - 30 < 0$
3.  $4x^2 + 3x - 1 > 0$
4.  $3x^2 - 2x - 1 < 0$

## 128. 不等式ヲ證明スル問題

【例1】  $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$  ヲ證明セヨ.解 方程式  $4x^2 - 12x + 9 = 0$  ヲ解ケバ等根  $\frac{3}{2}$  ヲ得ル.

$$\begin{aligned} \therefore 4x^2 - 12x + 9 &= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ &= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (2x - 3)^2 \end{aligned}$$

故ニ  $2x - 3 = 0$  即チ  $x = \frac{3}{2}$  トスレバ  $4x^2 - 12x + 9 = 0$  トナリ、ソノ他ノ  $x$  ノ値ニ對シテハ常ニ  $4x^2 - 12x + 9 > 0$  トナル.

【例2】  $x^2 - 10x + 29 > 0$  ヲ證明セヨ.解 方程式  $x^2 - 10x + 29 = 0$  ヲ解ケバ虚根  $5 \pm 2i$  ヲ得ル.

$$\begin{aligned} \therefore x^2 - 10x + 29 &= \{x - (5 + 2i)\}\{x - (5 - 2i)\} \\ &= \{(x - 5) - 2i\}\{(x - 5) + 2i\} \\ &= (x - 5)^2 - 4i^2 = (x - 5)^2 + 4 \end{aligned}$$

故ニ  $x$  ニドンナ實數値ヲ與ヘテモコノ式ハ常ニ正デアルコトガ分カル.

## 例 題

1.  $x$  ノ任意ノ正數値ニ對シテ  $x^3 - 6x^2 + 10x > 0$  ナルコトヲ證明セヨ.
2.  $5(2x^2 + 1) > 14x$  ヲ證明セヨ.

## 129. 最大、最小

定理1. 和ガ一定ナル二ツノ正ノ數ノ積ハ、ソノ差(算術差)ガ最小ナルトキニ最大デアル.

證明  $x, y$  ヲ二ツノ正數トスレバ、等式

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

ニヨツテ、和  $x + y$  ガ一定ナラバ差  $x - y$  ノ小サイホドソノ積  $xy$  ノ大キイコトガ分カル.

故ニ積ノ最大ナトキハ差ノ最小ナトキデアル.

モシ二數ガ相等シクナルコトガ出來レバ、ソノトキハ勿論差ガ最小、從テ積ガ最大ニナル.

例ヘバ和ガ15ニ等シイ二ツノ正ノ數ノ積ハ各數ガ相等シイトキ、即チ

$$7.5 \times 7.5 = (7.5)^2 = 56.25$$

ノトキニ最大デアアル。

マタ若シ和ガ15ニ等シイニツノ正ノ整数ノ積ハソノ差ガ1デアルトキ、即チ

$$8 \times 7 = 56$$

ノトキニ最大デアアル。

**定理 2.** 積ガ一定ナルニツノ正ノ數ノ和ハ、ソノ差(算術差)ガ最小ナルトキニ最小デアアル。

證明 上ノ等式

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

カラ、積  $xy$  ガ一定ナラバ和  $x+y$  ノ大小ハ差  $x-y$  ノ大小ニ伴フコトガ分カル。

故ニ和ノ最小ナトキハ差ノ最小ナトキデアアル。

モシ二數ガ相等シクナルコトガ出來レバ、ソノトキハ勿論差ガ最小、從テ和ガ最小ニナル。

例ヘバ積ガ48ニ等シイニツノ正ノ數ノ和ハ各數ガ相等シイトキ、即チ

$$\sqrt{48} + \sqrt{48} = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3} = 13.856 \dots$$

ノトキニ最小デアアル。

マタ若シ積ガ48ニ等シイニツノ正ノ整数ノ和ハソノ差ガ2デアルトキ、即チ

$$6 + 8 = 14$$

ノトキニ最小デアアル。

### 130. 前節ノ續

【例】  $x^2 - 5x + 6$  ノ最大マタハ最小ノ値ヲ求メヨ。マタコノトキノ  $x$  ノ値ヲ求メヨ。

解  $y = x^2 - 5x + 6$

即チ (1)  $x^2 - 5x + (6 - y) = 0$

ト置ケバ、 $x$  ガ實數ナルタメニハ

$$(2) \quad 5^2 - 4(6 - y) \geq 0$$

$$\therefore y \geq -\frac{1}{4}$$

故ニ原式ニハ最大ハナク、 $-\frac{1}{4}$  ガソノ最小値デアアル。

マタコノトキノ  $x$  ノ値ハ(2)ノ符號  $\geq$  ガニナツタトキ即チ(1)ガ等根ノトキダカラ

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(6 - y)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{5}{2}$$

別解  $x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

サテ  $x$  = 絶對值ノ十分大キイ値ヲ與ヘレバ  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$  ハ幾ラデモ大キクナルカラ  $x^2 - 5x + 6$  モ  
マタ幾ラデモ大キクナル、因テコノ式ニハ最大  
ハナイ。

マタ  $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$  即チ  $x = \frac{5}{2}$  ノトキコノ式ハ最  
小ニナツテ、ソノ値ハ  $-\frac{1}{4}$  デアルコトガ分カル。

## 例 題

1.  $x^2 - 6x + 14$  ノ最小値ヲ求メヨ。
2.  $3 - 5x - 2x^2$  ノ最大値ヲ求メヨ、マタソノト  
キノ  $x$  ノ値ヲ求メヨ。
3. 二數ノ和ガ一定デアルトキ、ソノ平方ノ  
和ハ二數ノ差ガ最小ナルトキニ最小デアルコ  
トヲ證明セヨ。  $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$

## 問 題

次ノ各不等式ヲ解ケ。

1.  $ax + b > cx + d$
2.  $(2x + 5)(8 - x) > 0$
3.  $-3x^2 - 4x + 4 < 0$

4. 次ノ聯立不等式ヲ解ケ。

$$x^2 - 6x + 8 > 0, \quad x^2 - 9x + 18 < 0$$

【例】  $\frac{3}{x^2 - 5x - 6} > 0$  ヲ解ケ。

解 兩邊ニ正ノ數  $(x^2 - 5x - 6)^2$  ヲ掛ケテ分母ヲ  
拂ヘバ

$$3(x^2 - 5x - 6) > 0$$

$$\therefore x^2 - 5x - 6 > 0$$

$$\text{即チ } (x - 6)(x + 1) > 0$$

$$\therefore x > 6 \quad \text{或ハ} \quad x < -1$$

注意 原不等式ノ分子ガ正ダカラ、コノ分數ガ正ナ  
ルタメニハ分母ガ正デアル、コノ考ヘデ直ニ  $x^2 - 5x - 6 > 0$   
トシテモイ。

次ノ各不等式ヲ解ケ。

$$5. \frac{x+3}{x-4} < 0 \qquad 6. \frac{3x-5}{2x+1} < 5$$

【例】 二次方程式  $x^2 + 2(p+1)x + 4(p+1) = 0$  ノ根ガ  
實數ナルタメニ  $p$  ノ取ルベキ値ノ範圍ヲ求メ  
ヨ。

解 コノ方程式ガ實根ヲ有スルタメニハソ  
ノ判別式ガ正マタハ 0 ナルコト、即チ

$$(p+1)^2 - 4(p+1) \geq 0$$

即チ  $(p+1)(p-3) \geq 0$

ナルコトガ必要ニシテ且ツ十分デアル。

故ニ答ハ  $p \geq 3$  或ハ  $p \leq -1$

7. 二次方程式  $x^2 + 2(m-1)x + 5m - 9 = 0$  ノ根ガ實數ナルタメニ  $m$  ノ取ルベキ値ノ範圍ヲ求メヨ。

8.  $x, y$  ニ關スル次ノ聯立方程式ノ根ガ實數ナルタメニ  $a$  ノ値ノ範圍如何。

$$x^2 - 3xy + y^2 = 5, \quad y = 2x + a$$

$x, y$  ノ中ノ一ツガ實數ナラバ後ノ式ニヨツテ今一ツモマタ實數デアルコトガ分カル。

## 第十四篇 比, 比例

### 數ノ比

#### 131. 比

一數  $a$  ガ 0 デナイ他ノ數  $b$  ノ幾倍\*デア  
アルカヲ示ス數ヲ  $a$  ノ  $b$  ニ對スル比ト  
イフ。

コレハ結局  $a$  ヲ  $b$  デ割ツタ商ニ等シイカラ、  
商ノ記號ヲソノマ、用ヒテ

$$\frac{a}{b}$$

ト書ク。

二數  $a, b$  ガ夫々 0 デナイ他ノ數  $c$  ノ  
 $m$  倍,  $n$  倍ニ等シイトキ  $a, b$  ノ比ガ  $m, n$   
ノ比ニ等シイトイヒ, コレヲ

$$a : b = m : n$$

ト書ク。

\* 例ヘバ 3 倍,  $\frac{4}{7}$  倍, 0 倍,  $\sqrt{2}$  倍等任意ノ實數倍テイ、今  
後モ之ニ倣フ。

サテ  $a:b=m:n$

ナラバ、比ノ意味ニヨツテ

$$a=mc, \quad b=nc \quad [c \neq 0]$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{mc}{nc} = \frac{m}{n}$$

即チ  $a, b$  ノ比ガ  $m, n$  ノ比ニ等シケレバ  $a$  ノ  
 $b$ ニ對スル比ハ  $m$ ノ  $n$ ニ對スル比ニ等シイ。

マタ逆ニ  $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

ナラバ  $a = \frac{m}{n}b$

ソコデ  $\frac{b}{n} = c$  トオケバ  $b = nc$

且ツ  $a = \frac{m}{n}b = m \cdot \frac{b}{n} = mc$

$$\therefore a:b=m:n$$

即チ  $a$ ノ  $b$ ニ對スル比ガ  $m$ ノ  $n$ ニ對スル比  
ニ等シケレバ  $a, b$ ノ比ハ  $m, n$ ノ比ニ等シイ。

結局  $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$  ト  $a:b=m:n$

トハ同ジ事實ヲ表ハスコトニナル。

$\frac{a}{b}$  マタハ  $a:b$ ニ於テ  $a, b$ ヲ通稱シテ比ノ項  
トイヒ、ソノ中  $a$ ヲ前項、 $b$ ヲ後項トイフ。

## 132. 定理

比ノ兩項ニ0デナイ同ジ數ヲ掛ケテ  
モ、マタ兩項ヲ同ジ數デ割ツテモ比ノ値  
ハ變ラナイ。(元ノ比ニ等シイ比ヲ得ル)

即チ  $a:b=ma:mb \quad [m \neq 0]$

マタ  $a:b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$

證明  $ma, mb$ ハ0デナイ數  $m$ ノ夫々  $a$ 倍、 $b$   
倍ダカラ、比ノ意味ニヨツテ

$$ma:mb=a:b$$

$$\text{次ニ} \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \left( \frac{a}{m} \cdot m \right) : \left( \frac{b}{m} \cdot m \right) = a:b$$

【例1】  $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \left( \frac{1}{a} \times ab \right) : \left( \frac{1}{b} \times ab \right) = b:a$

【例2】  $25ax : 15bx = \frac{25ax}{5x} : \frac{15bx}{5x} = 5a : 3b$

問 次ノ各比ヲ簡單ニセヨ。(ナルベク簡單  
ナ項ノ比ニ直セ)

$$\frac{13}{18} : \frac{39}{32} \quad -3\frac{1}{8} : 2\frac{1}{2} \quad 36a^2b^2 : 24a^2b^3$$



## 133. 反比(逆比)

$a:b$  ノ前項ト後項トヲ入レ換ヘテ得ル比  $b:a$  ヲ名ヅケテ  $a, b$  ノ反比(マタハ逆比)トイフ。

$$\text{サテ} \quad b:a = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

故ニ  $a, b$  ノ反比ハ  $a$  ノ逆數ト  $b$  ノ逆數トノ比ニ等シイ。

## 134. 比例式

二ツノ比ガ相等シイコトヲ表ハス等式ヲ比例式トイフ。

$$\text{例ヘバ} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{マタ} \quad a:b=c:d$$

ハ比例式デアル。

$a, b, c, d$  ヲ通稱シテ上ノ比例式ノ項トイヒ、ソノ中  $a$  ト  $d$  トヲ外項、 $b$  ト  $c$  トヲ内項トイフ。マタ  $d$  ヲ  $a, b, c$  ノ第四比例項トイフ。

上ノ場合ニ四數  $a, b, c, d$  ガ(コノ順ニ)比例ヲナストイフコトモアル。

比例式ノ兩内項ガ相等シイトキハソノ内項ヲ兩外項ノ比例中項トイフ。

即チ  $a:b=b:c$  ナラバ  $b$  ヲ  $a, c$  ノ比例中項トイフ。

## 135. 定理

比例式ノ内項ノ積ハソノ外項ノ積ニ等シイ。

$$\text{即チ} \quad a:b=c:d$$

$$\text{ナラバ} \quad ad=bc$$

デアル。

$$\text{證明} \quad a:b=c:d$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

コノ兩邊ニ  $bd$  ヲ掛ケレバ

$$ad=bc$$

系 二數ノ比例中項ノ平方ハコノ二數ノ積ニ等シイ。

$$\text{即チ} \quad a:b=b:c$$

$$\text{ナラバ} \quad b^2=ac$$

## 136. 定理

0 デナイ二數ノ積ガ他ノ二數ノ積ニ等シイトキハ、ソノ一組ノ二數ヲ外項トシ、他ノ一組ノ二數ヲ内項トスル比例式ガ成リ立ツ。

例ヘバ  $ad=bc$

ナラバ  $a$  ト  $d$  (マタハ  $b$  ト  $c$ ) ヲ外項トシ  $b$  ト  $c$  (マタハ  $a$  ト  $d$ ) ヲ内項トスル次ノ八ツノ比例式ガ成リ立ツ。

- |               |               |
|---------------|---------------|
| (1) $a:b=c:d$ | (2) $a:c=b:d$ |
| (3) $d:b=c:a$ | (4) $d:c=b:a$ |
| (5) $b:a=d:c$ | (6) $c:a=d:b$ |
| (7) $b:d=a:c$ | (8) $c:d=a:b$ |

證明  $ad=bc$

コノ兩邊ヲ  $bd$  デ割レバ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore (1) \quad a:b=c:d$$

同様ニ  $ad=bc$  ノ兩邊ヲ  $cd, ab, ac$  デ割レバ夫夫 (2), (3), (4) ヲ得ル。マタ (5), (6), (7), (8) ハ夫々

(4), (3), (2), (1) ノ兩邊ヲ取換ヘタダケノモノデア  
ル。

## 137. 比例式ノ變形

前節ニアル八ツノ比例式ノ中、一ツガ成リ立テバ他ノ七ツモ成リ立ツ。

何トナレバ、ドノ一ツガ成リ立ツテモ

$$ad=bc \quad (\text{第135節})$$

從テ前節ニヨツテ他ノ七ツガ成リ立ツ。

就中 (1)  $a:b=c:d$

ガ成リ立テバ

$$(2) \quad a:c=b:d$$

$$(3) \quad d:b=c:a$$

即チ 比例式ノ内項或ハ外項ヲ交換シテモイ、。

マタ (5)  $b:a=d:c$

即チ 比例式ノ兩邊ニ於テ、ソノ前項ト後項トヲ交換シテモイ、。

## 例 題

次ノ各等式カラ  $x:y$  ヲ求メヨ。

1.  $ax=by$                       2.  $ax+by=c(x+y)$

3.  $\frac{x+y}{x-y}=\frac{m}{n}$                       4.  $\frac{6y-5x}{6y+5x}=\frac{2}{3}$

5.  $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}, \frac{y}{z}=\frac{c}{d}$  ナルトキ  $x:z$  ヲ求メヨ.

## 138. 比例式ヲ解クコト

比例式ヲ解クトハ、コレニ適合スル未知數ノ  
値ヲ求メルコトデアル。

【例1】  $2:3=6:x$  ヲ解ケ。

解  $2x=6 \times 3$   
 $\therefore x=\frac{6 \times 3}{2}=9$

【例2】  $6:x=15:10$  ヲ解ケ。

解  $15x=6 \times 10$   
 $\therefore x=\frac{6 \times 10}{15}=4$

比例式ノ一外項ヲ求メルニハ兩内項  
ノ積ヲ今一ツノ外項デ割レ。

マター内項ヲ求メルニハ兩外項ノ積  
ヲ今一ツノ内項デ割レ。

## 例 題

次ノ各比例式ヲ解ケ。

1.  $7\frac{1}{2}:3\frac{1}{5}=x:2\frac{2}{3}$

2.  $\frac{x}{a+b}=\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3+b^3}$

3.  $(x+1):(x-1)=5:3$

4.  $(x+a):(2x-b)=(2x+b):(4x-a)$

次ノ各聯立比例式ヲ解ケ。

5.  $x:y=3:4$

6.  $x:y=y:162$

$(x-1):(y+2)=1:2$

$x:6=6:y$

## 139. 定理

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$  ナラバ

(1)  $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(2)  $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

證明 (1)  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore \frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$

即チ  $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

(2)  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

コノ二式ヲ邊々割ツテ

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

### 應用

【例1】  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ナラバ  $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$  ナルコトヲ證

明セヨ.

證明

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

$\therefore \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$  (第137節)

【例2】  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ナラバ  $\frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{3c+2d}{3c-2d}$  ナルコ

トヲ證明セヨ.

證明

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \frac{3a}{2b} = \frac{3c}{2d}$

$\therefore \frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{3c+2d}{3c-2d}$  (本節(2))

【例3】  $b$  ガ  $a$  ト  $c$  トノ比例中項ナラバ

$\frac{a+b}{b+c} = \frac{a-b}{b-c}$  ナルコトヲ證明セヨ.

證明

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{b+c}{b-c}$  (本節(2))

$\therefore \frac{a+b}{b+c} = \frac{a-b}{b-c}$  (第137節)

### 例 題

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ナルトキ, 次ノ各比例式ガ成リ立ツコ

トヲ證明セヨ

1.  $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$

2.  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

3.  $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2}$

4.  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{ac}{bd}$

5.  $\frac{ma^2}{nc^2} = \frac{mb^2}{nd^2}$

6.  $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$

7.  $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{b^2}{d^2}$

8.  $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{a^2}{c^2}$

## 140. ニツ以上ノ相等シイ比

**定理** 幾ツカノ比ガ相等シイトキハ、  
是等ノ比ノ前項ノ和ヲ前項トシ後項ノ  
和ヲ後項トスル比ハ原ノ各比ニ等シイ。

例ヘバ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$  ナラバ

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b}$$

**證明**  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = k$  トオケバ

$$(1) \quad a=bk, \quad c=dk, \quad e=fk, \quad \dots$$

$$\begin{aligned} \text{從テ} \quad a+c+e+\dots &= bk+dk+fk+\dots \\ &= k(b+d+f+\dots) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = k = \frac{a}{b} = \dots$$

マタ(1)ノ各等式ノ兩邊ニ夫々  $p, q, r, \dots$  ヲ掛  
ケテ邊々加ヘ合ハセレバ

$$pa+qc+re+\dots = k(pb+qd+rf+\dots)$$

$$\therefore \frac{pa+qc+re+\dots}{pb+qd+rf+\dots} = k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots \\ = \frac{pa+qc+re+\dots}{pb+qd+rf+\dots} \end{aligned}$$

コノ特別ノ場合トシテ  $p=1, q=-1$  ト置ケバ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

ヲ得ル。即チ

ニツノ比ガ相等シイトキハ、ソノ前項  
ノ差ヲ前項トシ後項ノ差ヲ後項トスル  
比ハ原ノ各比ニ等シイ。

**應用**

**【例1】**  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$  ナルトキハ  $b+c$  ハ  $a+b$  ト  
 $c+d$  トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ。

$$\text{證明} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a+b}{b+c}$$

$$\text{マタ} \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{b+c}{c+d}$$

$$\therefore \frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+d}$$

**【例2】**  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$  ナルトキハ、コノ各比ハ

$$\frac{2a+7c-3e}{2b+7d-3f} = \text{等シイコトヲ證明セヨ.}$$

$$\text{證明} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

$$\therefore \frac{2a}{2b} = \frac{7c}{7d} = \frac{-3e}{-3f}$$

$$= \frac{2a+7c-3e}{2b+7d-3f}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2a+7c-3e}{2b+7d-3f}$$

コレハ前頁ノ最初ノ式ニ於テ三ツノ相等シイ比ヲ取り、且ツ  $p=2, q=7, r=-3$  トオイタモノデアル。

### 例 題

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ナルトキハ、次ノ各比例式ガ成リ立ツ}$$

コトヲ證明セヨ。

$$1. \quad \frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{3a-2c}{3b-2d}$$

$$2. \quad \frac{ma+nc}{pa+qc} = \frac{mb+nd}{pb+qd}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ ナルトキハ、次ノ各比例式ガ成リ立ツ}$$

コトヲ證明セヨ。

$$3. \quad \frac{ma^2+nb^2}{ma^2-nb^2} = \frac{mb^2+nc^2}{mb^2-nc^2}$$

$$4. \quad \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$$

$$5. \quad \frac{y+z}{b-c} = \frac{z+x}{c-a} = \frac{x+y}{a-b} \text{ ナルトキハ}$$

$x+y+z=0$  ナルコトヲ證明セヨ。

### 141. 比ノ擴張

幾ツカノ數例ヘバ三數  $a, b, c$  ガ0デナイ他ノ一數  $k$  ノ夫々  $a'$  倍,  $b'$  倍,  $c'$  倍ニ等シイトキハ  $a, b, c$  ノ比ガ  $a', b', c'$  ノ比ニ等シイトイヒ、コレヲ

$$a:b:c = a':b':c'$$

ト書ク。

コノ場合ニ一組ノ數  $a, b, c$  ト他ノ組ノ數  $a', b', c'$  トハ互ニ比例スルトイヒ、 $a, b, c$  ト  $a', b', c'$  トハ夫々對應スルトイフ。

四數以上ノ場合モ之ニ倣フ。

$a:b:c$  ニ於テ、 $a, b, c$  ヲ通稱シテコノ比ノ項トイフ。

## 142. 定理

互ニ比例スル二組ノ數ニ於テ、相對應スル數ノ比ハ相等シイ。

マタ逆ニ、二組ノ(同數ノ)數ガアツテ、ソノ相對應スル數ノ比ガ相等シケレバ、コノ二組ノ數ハ互ニ比例スル。

例ヘバ  $a:b:c = a':b':c'$  ナラバ

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

マタ逆ニ

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ ナラバ}$$

$$a:b:c = a':b':c'$$

證明 先ツ

$$a:b:c = a':b':c'$$

ナラバ、比例スルコトノ意味ニヨツテ

$$a = a'k, \quad b = b'k, \quad c = c'k$$

$$\therefore \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} (=k)$$

次ニ

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

ナラバ、コノ各比ノ値ヲ  $k$  トオケバ

$$a = a'k, \quad b = b'k, \quad c = c'k$$

$$\therefore a:b:c = a':b':c'$$

## 143. 定理

比ノ各項ニ 0 デナイ同ジ數ヲ掛ケテモ、マタ各項ヲ同ジ數デ割ツテモ比ノ値ハ變ラナイ。(元ノ比ニ等シイ比ヲ得ル)

例ヘバ  $a:b:c = ma:mb:mc$  [ $m \neq 0$ ]

$$\text{マタ} \quad a:b:c = \frac{a}{m} : \frac{b}{m} : \frac{c}{m}$$

證明 略スル。(第71頁第132節ノ證明ニ倣ヘ)

例ヘバ  $\frac{1}{bc} : \frac{1}{ca} : \frac{1}{ab}$  ノ各項ニ  $abc$  ヲ掛ケレ

$$\text{バ} \quad \frac{1}{bc} : \frac{1}{ca} : \frac{1}{ab} = a:b:c$$

## 例 題

1.  $5x+6y-3z=0, 2x+5y+4z=0$  カラ  $x:y:z$  ヲ求メヨ。
2.  $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$  カラ  $x:y:z$  ヲ求メヨ。

3.  $x-2y+z=3x+y-2z=0$  カラ  $x:y:z$  フ求メ  
ヨ.

## 問 題

1.  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  ナルトキ  $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$

ナルコトヲ證明セヨ.

2.  $\frac{a+b+c+d}{a-b+c-d} = \frac{a+b-c-d}{a-b-c+d}$  ナルトキ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ナルコトヲ證明セヨ.

【例】  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ナルトキ、次ノ比例式ガ成リ立ツ  
コトヲ證明セヨ.

$$(1) \frac{a^2+ac+c^2}{a^2-ac+c^2} = \frac{b^2+bd+d^2}{b^2-bd+d^2}$$

第一解  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\therefore \frac{a^2}{b^2} = \frac{ac}{bd} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2+ac+c^2}{b^2+bd+d^2} \quad \text{〔第140節〕}$$

$$= \frac{a^2-ac+c^2}{b^2-bd+d^2} \quad \text{〔同上〕}$$

$$\therefore \frac{a^2+ac+c^2}{a^2-ac+c^2} = \frac{b^2+bd+d^2}{b^2-bd+d^2} \quad \text{〔第137節〕}$$

第二解  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$  ト置ケバ

$$a=bk, \quad c=dk$$

コレヲ(1)ノ左邊ニ代入スレバ

$$\begin{aligned} \frac{a^2+ac+c^2}{a^2-ac+c^2} &= \frac{b^2k^2+bdk^2+d^2k^2}{b^2k^2-bdk^2+d^2k^2} \\ &= \frac{b^2+bd+d^2}{b^2-bd+d^2} \end{aligned}$$

第三解 (1)ガ成リ立ツコトヲ證明スルニハ、  
第136節ノ定理ニヨリ(1)ノ一邊ノ分子ト他邊  
ノ分母トヲ掛ケ合ハセタモノガ相等シイコト、  
即チ

$$(a^2+ac+c^2)(b^2-bd+d^2) = (a^2-ac+c^2)(b^2+bd+d^2)$$

即チ

$$\begin{aligned} (a^2+c^2)(b^2+d^2) + ac(b^2+d^2) - bd(a^2+c^2) - acbd \\ = (a^2+c^2)(b^2+d^2) - ac(b^2+d^2) + bd(a^2+c^2) - acbd \end{aligned}$$

從テ  $2ac(b^2+d^2) = 2bd(a^2+c^2)$

從テ (2)  $ac(b^2+d^2) = bd(a^2+c^2)$

ナルコトヲ證明スレバイ、

サテ假定ニヨツテ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \therefore ad=bc$$

コレヲ(2)ノ左邊ニ代入スレバ



$$\begin{aligned} ac(b^2+d^2) &= acb^2+acd^2 \\ &= ab.bc+ad.cd=ab.ad+bc.cd \\ &= bd(a^2+c^2) \end{aligned}$$

故 = (1) に成り立ツ。

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ナルトキ、次ノ各比例式ガ成り立ツコトヲ證明セヨ。

$$3. \frac{ma+b}{b} = \frac{mc+d}{d} \quad 4. \frac{(a-b)^2}{ab} = \frac{(c-d)^2}{cd}$$

$$5. \frac{a^2+c^2}{ab+cd} = \frac{c}{d} \quad 6. \frac{a^2+c^2}{ab+cd} = \frac{ab+cd}{b^2+d^2}$$

$$7. \frac{ma^2+nb^2}{pa^2-qb^2} = \frac{mc^2+nd^2}{pc^2-qd^2}$$

$$8. \frac{a+c}{b+d} = \frac{a^2d}{b^2c}$$

$$9. \frac{a}{a+c} = \frac{2a+b}{2a+b+2c+d}$$

$$10. \frac{ad-bc}{a-b-c+d} = \frac{ac-bd}{a-b+c-d} \quad \text{ナルトキハ、コノ}$$

各比ハ  $\frac{a+b+c+d}{4}$  ニ等シイコトヲ證明セヨ。

11.  $ax^2+bx+c=0$  ノ二根ノ比ガ  $m:n$  ナラバ  $mnb^2=(m+n)^2ac$  ナルコトヲ證明セヨ。

## 量ノ比及比例

### 144. 量ノ比

一量 A ガコレト同種類ノ量 B ノ幾倍デアルカヲ示ス數ヲ A ノ B ニ對スル比トイフ。

ツマリ A ノ B ニ對スル比トハ、B ヲ單位トシタトキ A ヲ表ハス數デアル。

注意 1. 量ノ比比例ニ關シテハ數ノ比比例ト同様ノ名稱及記法ヲ用ヒル。

注意 2. 本節以下スベテ量ヲ表ハスニハ大羅馬字 A, B, C 等ヲ用ヒ、數ヲ表ハスニハ小羅馬字 a, b, c 等ヲ用ヒル。

例ヘバ  $aA$  トハ量 A ニ數 a ヲ掛ケタ量ヲ表ハス。

### 145. 定理

二量ノ比ハ、コレヲ同ジ單位デ測ツテ得ル二數ノ比ニ等シイ。

證明 二量  $A, B$  フ同ジ單位  $C$  デ測ツテ得ル數ヲ夫々  $a, b$  トセヨ. サウスレバ

$$A = aC, \quad B = bC \quad \therefore \quad C = \frac{1}{b}B$$

$$\therefore \quad A = a\left(\frac{1}{b}B\right) = \frac{a}{b}B$$

$$\therefore \quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

二數ノ比ハ、同一ノ單位ヲ用ヒルトキ  
コノ二數デ表ハサレル二量ノ比ニ等シ  
イ.

注意 數ノ比及比例ニ關スル定理ハ量ニ關  
スル意義ニ障リノナイ限り、總テ量ノ比及比例  
ニ適用スルコトガ出來ル.

例ヘバ  $A : B = C : D$

ニ於テ  $A, B, C, D$  ガ總テ同種類ノ量ナラバ、ソ  
ノ内項若クハ外項ヲ交換シテ

$$A : C = B : D \quad \text{マタハ} \quad D : B = C : A$$

トシテモイ.

シカシ二量  $C, D$  ノ種類ガ二量  $A, B$  ノ種類ニ  
同ジクナケレバ、ソノ内項若クハ外項ヲ交換ス

ルコトハ出來ナイ.

#### 146. 互ニ比例スル二種ノ量

二種ノ量ガアツテ、一方ノ量ガ元ノ  $n$   
倍トナルトキ、他ノ量モ同ジク  $n$  倍トナ  
ルトキハ、コノ二種ノ量ハ互ニ比例スル  
或ハ一ツノ量ガ他ノ量ニ比例スルトイ  
フ.

例ヘバ或職工ガ働ク日數トツレガタメニ得  
ル賃金トハ互ニ比例スル.

今1日ノ賃金ヲ  $k$  圓トシ、 $x$  日間ノ賃金ヲ  $y$   
圓トスレバ、 $x$  日ハ明カニ1日ノ  $x$  倍ダカラ  $y$   
圓ハ  $k$  圓ノ  $x$  倍デナケレバナラス.

$$\therefore \quad y = kx$$

コノ  $y = kx$  ハ  $x, y$  ニ關係ノナイ一定ノ數デア  
ル. カヤウニ

(第一) 二種ノ量ガ互ニ比例スルトキ、  
ソノ任意ノ相對應スルモノノ數値ヲ  $x, y$   
トスレバ、 $x, y$  ノ間ニハ常ニ次ノ等式ガ  
成リ立ツ.

$$y = kx \quad [k \text{ハ一定ノ數}]$$

次ニ  $x_1$  日,  $x_2$  日,  $x_3$  日, …… 間ノ賃金ヲ夫々  $y_1$  圓,  
 $y_2$  圓,  $y_3$  圓, …… トスレバ, (第一)ニヨツテ

$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = kx_2, \quad y_3 = kx_3, \quad \dots\dots$$

$$\therefore \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots\dots \left( = \frac{1}{k} \right)$$

$$\therefore x_1 : x_2 : x_3 \dots\dots = y_1 : y_2 : y_3 \dots\dots\dots$$

カヤウニ

(第二) 二種ノ量ガ互ニ比例スルトキハ, ソノ一方ノ量ノ任意ノ幾ツカノモノノ比ハ他ノ量ノコレニ對應スルモノノ比ニ等シイ.

次ニ

(第三) 相伴フテ變化スル二種ノ量  $X$ ,  $Y$  ノ任意ノ相對應スルモノノ數値  $x, y$  ノ間ニ常ニ等式  $y = kx$  [ $k$ ハ一定] ガ成リ立テバ,  $X, Y$  ハ互ニ比例スル.

何トナレバ  $X$  ノ任意ノ二ツヲ  $X_1, X_2$  ソノ數値ヲ  $x_1, x_2$  トシ, コレニ對應スル  $Y$  ノ二ツヲ  $Y_1, Y_2$  ソノ數値ヲ  $y_1, y_2$  トスレバ

$$y_1 = kx_1 \quad y_2 = kx_2$$

$$\therefore \frac{y_2}{y_1} = \frac{kx_2}{kx_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\therefore \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{X_2}{X_1}$$

コノ式カラ  $X_2 = nX_1$  ナラバ  $Y_2 = nY_1$  デアルコトガ分カル.

故ニ  $Y$  ハ  $X$  ニ比例スル.

注意 代數學デ比例ノ問題ヲ解クニハ, 問題ノ中ニ與ヘラレタ二ツノ變量ノ二組ノ相對應スル數値ニヨツテ比例式

$$y : y' = x : x'$$

ヲ作ツテコレヲ解クカ, マタハ

$$y = kx, \quad y' = kx'$$

ノヤウナ二ツノ等式ヲ作り, コノ二式ヲ邊々割ツテ  $k$  ヲ消去シ, ソノ結果トシテ得ル方程式ヲ解イテ未知數ノ値ヲ求メル.

【例】或職工ガ12日間ニ賃金18圓ヲ得ルトキ, コノ職工ガ15圓ヲ得ルニ要スル日數ハ何程カ.

解 賃金ハ日數ニ比例スルカラ, 求メル日數ヲ  $x$  トスレバ次ノ比例式ヲ得ル.

$$18^{\text{日}} : 15^{\text{日}} = 12^{\text{日}} : x^{\text{日}}$$

コレヲ解イテ

$$x = \frac{15 \times 12}{18} = 10 \quad \text{答 10 日}$$

別解  $x, y$  ヲ労働日數ト賃金トノ相對應スル數値トセヨ. サウスレバ賃金ハ日數ニ比例スルカラ

$$(1) \quad y = kx \quad (k \text{ハ一定ノ數})$$

ソシテ 12 日間ノ賃金ハ 18 圓ダカラ,  $x=12$ ,  $y=18$  ハ一組ノ相對應スル數値デアル.

コレヲ (1) ニ代入スレバ

$$(2) \quad 18 = k \times 12$$

マタ賃金 15 圓ヲ得ル爲ニ要スル日數ヲ  $z$  トスレバ

$$(3) \quad 15 = kz$$

ソコデ (3) ヲ (2) デ割レバ

$$\frac{15}{18} = \frac{z}{12}$$

$$\therefore z = 12 \times \frac{15}{18} = 10 \quad \text{答 10 日}$$

相伴フテ變化スル二種ノ量  $X, Y$  ノ數

値  $x, y$  ノ間ニ, 例ヘバ

$$y = kx^2 \quad [k \text{ハ一定ノ數}]$$

ナル關係ガアレバ,  $Y$  ハ  $X$  ノ二乗ニ比例スルトイフ.

ソノ他モ之ニ倣フ.

【例】 静止シテキル物體ガ落下スルトキ, 落ちル距離ハソノタメニ費シタ時間ノ平方ニ比例スル. ソシテ 4 秒間ニ 256 呎落ちルトスレバ, 10 秒間ニ落ちル距離ハ幾ラカ.

解 求メル距離ヲ  $x$  呎トスレバ

$$x : 256 = 10^2 : 4^2$$

$$\therefore x = \frac{256 \times 100}{16} = 1600 \quad \text{答 1600 呎}$$

別解 距離ト時間ノ相對應スル數値ヲ  $x, y$  トスレバ, 距離ハ時間ノ平方ニ比例スルカラ

$$(1) \quad x = ky^2 \quad (k \text{ハ一定ノ數})$$

ソシテ 4 秒間ニ 256 呎落ちルカラ  $x=256$ ,  $y=4$  ハ一組ノ相對應スル數値デアル. コレヲ (1) ニ代入スレバ

$$(2) \quad 256 = k \times 4^2$$

また10秒間ニ落チル距離ヲ $z$ 呎トスレバ

$$(3) \quad z = k \times 10^2$$

ソコデ(3)ヲ(2)デ割レバ

$$\frac{z}{256} = \frac{10^2}{4^2}$$

$$\therefore z = 256 \times \frac{100}{16} = 1600 \quad \text{答 } 1600 \text{ 呎}$$

#### 147. 互ニ反比例スル二種ノ量

二種ノ量ガアツテ、一方ノ量ガ元ノ $n$ 倍トナルトキ、他ノ量ガ元ノ $\frac{1}{n}$ トナルトキハ、コノ二種ノ量ハ互ニ反比例スル或ハーツノ量ガ他ノ量ニ反比例スルトイフ。

例ヘバ或工事ヲ仕上ゲルニ要スル日數トコレガタメニ働ク人數トハ互ニ反比例スル。

今1人ナラバ $k$ 日カ、ルトシ、 $x$ 人ナラバ $y$ 日カ、ルトスレバ、 $x$ 人ハ1人ノ $x$ 倍ダカラ $y$ 日ハ $k$ 日ノ $\frac{1}{x}$ デナケレバナラス。

$$\therefore y = k \frac{1}{x}$$

$$\therefore xy = k$$

コノ $k$ ハ $x, y$ ニ關係ノナイ一定ノ數デアル。カヤウニ

(第一) 二種ノ量ガ互ニ反比例スルトキ、ソノ任意ノ相對應スルモノノ數値ヲ $x, y$ トスレバ、 $x, y$ ノ間ニハ常ニ次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$xy = k \quad [k \text{ハ一定ノ數}]$$

次ニ $x_1$ 人デハ $y_1$ 日カ、リ、 $x_2$ 人デハ $y_2$ 日カ、ルトスレバ、(第一)ニヨツテ

$$x_1 y_1 = k = x_2 y_2$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\therefore x_1 : x_2 = y_2 : y_1$$

カヤウニ

(第二) 二種ノ量ガ互ニ反比例スルトキハ、ソノ一方ノ量ノ任意ノ二ツノモノノ比ハ他ノ量ノコレニ對應スルモノノ反比ニ等シイ。

一般ニ $xy = k$ カラ $x = k \left( \frac{1}{y} \right)$ ヲ得ル。故ニ

二種ノ量ガ互ニ反比例スルトキハ、ソノ一方ノ量ノ數値ハ他ノ量ノコレニ對應スルモノノ數値ノ逆數ニ比例スル。

次ニ

(第三) 相伴フテ變化スル二種ノ量  $X, Y$  ノ任意ノ相對應スルモノノ數値  $x, y$  ノ間ニ常ニ等式  $xy=k$  [ $k$ ハ一定] ガ成リ立テバ、 $X, Y$ ハ互ニ反比例スル。

何トナレバ  $X$  ノ任意ノ二ツヲ  $X_1, X_2$  ソノ數値ヲ  $x_1, x_2$  トシ、コレニ對應スル  $Y$  ノ二ツヲ  $Y_1, Y_2$  ソノ數値ヲ  $y_1, y_2$  トスレバ

$$x_1 y_1 = k = x_2 y_2$$

$$\therefore \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\therefore \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{X_2}{X_1}$$

コノ式カラ  $X_2 = nX_1$  ナラバ  $Y_2 = \frac{1}{n}Y_1$  デアルコトガ分カル。

故ニ  $Y$  ハ  $X$  ニ反比例スル。

【例1】 工夫15人デ或工事ヲ仕上ゲルニ16日

カ、ルトイフ、コレヲ12日間ニ仕上ゲルニ要スル人數ヲ求メヨ。

解 人數ト日數トハ互ニ反比例スルカラ、所要ノ人數ヲ  $x$  トスレバ次ノ比例式ヲ得ル。

$$15^{\wedge} : x^{\wedge} = 12^{\text{日}} : 16^{\text{日}}$$

$$\therefore x = \frac{15 \times 16}{12} = 20 \quad \text{答 20人}$$

別解 相對應スル人數ト日數トヲ夫々  $x, y$  トセヨ。サウスレバ

$$(1) \quad xy = k \quad (k \text{ハ一定ノ數})$$

サテ15人デハ16日カ、ルカラ、 $x=15, y=16$ ハ一組ノ相對應スル數値デアル。コレヲ(1)ニ代入スレバ

$$(2) \quad 15 \times 16 = k$$

マタ12日間ニ仕上ゲルタメニ要スル人數ヲ  $z$  トスレバ

$$(3) \quad 12z = k$$

ソコデ(3)ト(2)トカラ

$$12z = 15 \times 16$$

$$\therefore z = 15 \times \frac{16}{12} = 20 \quad \text{答 20人}$$

【例2】 物體ガ受ケル光ノ強サハ光源トソノ物體トノ距離ノ平方ニ反比例スル。今或電燈ガ2間隔タツタ處ヲ照ス光ノ強サヲ10トスレバ、コノ電燈ガ2間半隔タツタ處ヲ照ス光ノ強サハ幾ラカ。

解 求メル強サヲ  $x$  トスレバ

$$x:10=2^2:(2.5)^2$$

$$\therefore x = \frac{10 \times 4}{2.5 \times 2.5} = 6.4 \dots \text{答}$$

別解 距離ト光ノ強サトノ任意ノ相對應スル數値ヲ夫々  $d, i$  トセヨ。サウスレバ

$$(1) \quad i = k \left( \frac{1}{d^2} \right) \quad [k \text{ ハ一定ノ數}]$$

サテ  $d=2, i=10$  ガ一組ノ相對應スル數値ダカラ、コレヲ(1)ニ代入スレバ

$$(2) \quad 10 = k \times \frac{1}{2^2}$$

マタ2間半隔タツタ處ヲ照ス光ノ強サヲ  $i'$  トスレバ

$$(3) \quad i' = k \times \frac{1}{(2.5)^2}$$

$$(3) \div (2) \quad \frac{i'}{10} = \frac{2^2}{(2.5)^2}$$

$$\therefore i' = 10 \times \frac{2^2}{(2.5)^2} = \frac{10 \times 4}{2.5 \times 2.5} = 6.4$$

## 例 題

1. 木綿三反ノ價 4<sup>円</sup>.35 ノトキ、同ジ品物8反ノ價ハ幾ラカ。
2. 甲ガ16日間ニ仕上ゲル仕事ヲ乙ハ20日間ニ仕上ゲルトイフ、甲1週間ノ賃金ガ15圓ナラバ、乙1週間ノ賃金ヲ何程トスレバイ、カ。
3. 底邊ガ一定ナル三角形ノ面積ハソノ高サニ比例スル、今高サ12尺ナル或三角形ノ面積ガ90平方尺ナルトキハコレト等シイ底邊ヲ有シ高サガ16尺ナル三角形ノ面積ハ何程カ。
4. 氣體ノ容積ハ溫度ガ同ジケレバソノ壓力ニ反比例スル、今15氣壓ノトキノ體積ガ20立方尺ナル氣體ノ壓力ヲ12氣壓ニスレバソノトキノ體積ハ何程カ。
5. 圓ノ面積ハソノ半徑ノ平方ニ比例スル、半徑5尺ノ圓ノ面積ガ約78.5平方尺ナルコトヲ知ツテ、半徑6尺ノ圓ノ面積ガ約幾平方尺ナ

ルカヲ求メヨ。

6. 球ノ體積ハソノ直徑ノ立方ニ比例スル、直徑1.4尺ノ球ノ體積ガ約1436.8立方寸ナルコトヲ知ツテ、直徑2尺ノ球ノ體積ガ約幾立方寸ナルカヲ計算セヨ。

#### 148. ニツ以上ノ量ニ比例若クハ反比例スル量

ニツ以上ノ量、例ヘバ  $X, Y, Z$  ノ變化ニ伴フテ變化スル一ツノ量  $U$  ガアツテ、モシ  $X$  ダケガ變化シテ  $Y, Z$  ガ變ラナイトキ  $U$  ガ  $X$  ニ比例シ、マタ  $Y$  ダケガ變化シテ  $X, Z$  ガ變ラナイトキ  $U$  ガ  $Y$  ニ比例シ、マタ  $Z$  ダケガ變化シテ  $X, Y$  ガ變ラナイトキ  $U$  ガ  $Z$  ニ反比例スルトキハ、 $U$  ハ  $X$  ト  $Y$  トニ比例シ、 $Z$  ニ反比例スルトイフ。ソノ他ノ場合モコレニ倣フ。

定理1. 二量  $X, Y$  ニ比例スル一量  $U$  ガアルトキ、ソノ任意ノ相對應スル數値

$x, y, u$  ノ間ニハ次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$u = kxy \quad [k \text{ ハ一定ノ數}]$$

證明  $X, Y, U$  ノ或相對應スル一組ノ數値ヲ夫々  $a, b, c$  トシ、マタ任意ノ相對應スル一組ノ數値ヲ  $x, y, u$  トセヨ。マツ  $X$  ガ元ノ數値  $a$  ノマ、變ラズニ  $Y$  ガ元ノ數値  $b$  カラ新シイ數値  $y$  ニ變ツタトシ

$$y = mb$$

トスレバ、 $U$  ハ  $Y$  ニ比例スルカラ、ソノトキノ  $U$  ノ數値ハ  $mc$  ニナル。即チソノトキノ  $X, Y, U$  ノ相對應スル數値ハ

$$a, \underset{(mb)}{y}, mc$$

デアル。ソコデ今度ハ  $Y$  ガ  $y$  (即チ  $mb$ ) ナル數値ノマ、變ラズニ、 $X$  ガ元ノ數値  $a$  カラ新シイ數値  $x$  ニ變ツタトシ

$$x = na$$

トスレバ、 $U$  ハ  $X$  ニ比例スルカラ、ソノトキノ  $U$  ノ數値ハ  $n(mc)$  ニナル。即チソノトキノ  $X, Y, U$  ノ相對應スル數値ハ

$$\underset{(na)}{x}, \underset{(mb)}{y}, n(mc)$$



デアル。サテ最初ノ假定ニヨツテ  $x, y, u$  ハ相對應スル數値ダカラ、コノトキノ  $U$  ノ數値  $n(mc)$  ガ  $u$  デアル。即チ

$$u = mnc$$

$$\therefore \frac{u}{xy} = \frac{mnc}{(na)(mb)} = \frac{c}{ab}$$

コノ  $a, b, c$  ハ  $x, y, u$  ニ關係ノナイ一定ノ數、從テ  $\frac{c}{ab}$  モ一定ノ數デアアル。コノ一定ノ數ヲ  $k$  トオケバ

$$\frac{u}{xy} = k$$

$$\therefore u = kxy \quad [k \text{ ハ一定ノ數}]$$

即チ

$U$  ガ  $X$  及  $Y$  ニ比例スルトキハ、 $U$  ハ  $X$  及  $Y$  ノ數値ノ積ニ比例スル。

**定理 2.** 三量  $X, Y, Z$  ガアツテ、 $X$  ガ  $Y$  ニ比例シ、 $Z$  ニ反比例スルトキ、ソノ任意ノ相對應スル數値  $x, y, z$  ノ間ニハ次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$x = k \left( \frac{y}{z} \right) \quad [k \text{ ハ一定ノ數}]$$

**證明**  $X$  ガ  $Z$  ニ反比例スルトハ、 $X$  ノ數値

ガ  $Z$  ノ數値ノ逆數ニ比例スルコトト考ヘラレルカラ、定理 1 ニヨツテ

$$x = ky \left( \frac{1}{z} \right) = k \left( \frac{y}{z} \right)$$

**【例】** 直圓壙ノ體積ハソノ高サニ比例シ、且ツソノ底面ノ半徑ノ平方ニ比例スル。今高サ 5 糎、底面ノ半徑 7 糎ナル直圓壙ノ體積ガ約 770 立方糎ナラバ高サ 21 糎、底面ノ半徑 6 糎ナル直圓壙ノ體積ハ約何程カ。

**解** 直圓壙ノ高サ、半徑、體積ノ任意ノ相對應スル數値ヲ  $h, r, v$  トスレバ、次ノ等式ガ成リ立ツ。

$$(1) \quad v = khr^2 \quad [k \text{ ハ一定ノ數}]$$

$$(1) = \text{於テ } h=5, r=7, v=770 \text{ トオケバ}$$

$$(2) \quad 770 = k \times 5 \times 7^2$$

次ニ  $h=21, r=6$  ニ對應スル  $v$  ノ値ヲ  $v'$  トスレバ

$$(3) \quad v' = k \times 21 \times 6^2$$

ソコデ (3) ヲ (2) デ割レバ

$$\frac{v'}{770} = \frac{21 \times 6^2}{5 \times 7^2}$$

$$\therefore v' = 770 \times \frac{21 \times 6^2}{5 \times 7^2} = \text{約 } 2376$$

答 約 2376 立方種

### 例 題

1. 工夫 18 人ガ若干日間ニ長サ 50 米、幅 3 米、深サ 2 米ノ溝ヲ掘ルトイフ。同ジ日數ノ間ニ長サ 70 米、幅 4 米、深サ 2.5 米ノ溝ヲ掘ルニハ工夫幾人ヲ要スルカ。

2. 28 人ノ職工ガ毎日八時間ツツ働イテ 15 日間ニ賃金 504 圓ヲ得タ、コノ割合デ 21 人ノ職工ガ毎日若干時間ツツ 20 日間働イテ賃金 441 圓ヲ得タトイフ、毎日ノ勞働時間ハ何程カ。

3. 馬 8 頭ヲ用ヒ 5 日間ニ某所へ石炭 30 噸ヲ運ブ割合デ、馬 9 頭ヲ用ヒ同所へ石炭 45 噸ヲ運ブニハ幾日カ、ルカ。

4. 鐵ノ丸棒ノ目方ハソノ長サニ比例シ、ソノ切口ノ直徑ノ平方ニ比例スル。サウスレバ鐵ノ丸棒ノ長サハソノ目方トソノ切口ノ直徑トニ對シテドンナ關係ヲ有スルカ。

### 149. 比例配分ノ問題

【例 1】 金  $a$  圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ  $l, m, n$  ニ比例スルヤウニ分配スレバ、各ノ取分ハ幾ラカ。

解 各ノ取分ヲ夫々  $x^m, y^m, z^m$  トスレバ

$$x + y + z = a$$

$$\text{ソシテ } \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

$$= \frac{x + y + z}{l + m + n} \quad (\text{第 140 節})$$

$$= \frac{a}{l + m + n}$$

$$\therefore x = \frac{la}{l + m + n}, \quad y = \frac{ma}{l + m + n}, \quad z = \frac{na}{l + m + n}$$

答 甲  $\frac{l}{l + m + n} a$  圓, 乙  $\frac{m}{l + m + n} a$  圓, 丙  $\frac{n}{l + m + n} a$  圓

【例 2】 甲乙丙三人ガ資本ヲ出シ合ハセテ商業ヲ營ミ、甲ハ  $a$  圓ヲ  $l$  箇月間、乙ハ  $b$  圓ヲ  $m$  箇月間、丙ハ  $c$  圓ヲ  $n$  箇月間出シテオイタ、今利益金  $d$  圓ヲ出金高ト出金シテオイタ月數トニ比例スルヤウニ分配スレバ、各ノ取分ハ幾ラカ。

解 甲乙丙ノ取分ヲ夫々  $x$  圓,  $y$  圓,  $z$  圓トスレバ、コレニ對應スル出金高ノ數値ハ  $a, b, c$ , 月

數ハ  $l, m, n$  デアル.

$$\therefore \frac{x}{al} = \frac{y}{bm} = \frac{z}{cn} \quad [\text{前節}]$$

故ニ例1ト同様ニ

$$x = \frac{ald}{al+bm+cn}, \quad y = \frac{bmd}{al+bm+cn}, \quad z = \frac{cnd}{al+bm+cn}$$

$$\text{答 甲 } \frac{al}{al+bm+cn}d \text{ 圓, 乙 } \frac{bm}{al+bm+cn}d \text{ 圓, 丙 } \frac{cn}{al+bm+cn}d \text{ 圓}$$

### 例 題

1. 三角形ノ三ツノ角ノ大サガ 2, 3, 7 ニ比例スルトイフ, 各角ヲ求メヨ.
2. 甲乙丙ノ三人ガ資金トシテ夫々 3600 圓, 2400 圓, 2000 圓ヲ出シ合ハセテ商業ヲ營ミ利益金 3000 圓ヲ得タ, コレヲ各ノ出資高ニ比例スルヤウニ分配スレバ, 各ノ取前ハ幾ラカ.
3. 金  $a$  圓ヲ甲乙丙三人ニ分ケルニ, 甲ノ取分ト乙ノ取分トノ比ハ  $m:n$ , 乙ノ取分ト丙ノ取分トノ比ハ  $p:q$  デアルトイフ, 各ノ取分ヲ求メヨ.
4. 甲乙丙三人合資シテ商業ヲ營ム, ソノ出資高甲ノ  $\frac{2}{5}$  ハ乙ノ  $\frac{3}{4}$  ニ等シク, 乙ノ 3 倍ハ丙ノ

4 倍ニ等シイ, マタソノ出資期間甲ハ乙ノ  $\frac{7}{8}$ , 乙ハ丙ノ  $\frac{4}{5}$  デアル. 今或營業期間ニ得タ利益金 2862.5 圓ノ中ソノ一割二分ヲ積立金トシ, 殘リヲ出資額ト出資期間トニ比例シテ分タバ各ノ所得金何程カ.

5. 金 360 圓ヲ男子, 女子, 子供合計 200 人ニ分ケルニ, 男子, 女子, 子供各全體ノ取前ハ 5, 4, 3 ニ比例シ, マタ男子, 女子, 子供各一人ノ取前ハ 3, 2, 1 ニ比例スルヤウニスル. 男子, 女子, 子供ノ人数及各一人ノ取前ヲ求メヨ.

### 150. 混合ノ問題

【例1】 1 立ノ價ガ夫々  $a$  錢,  $b$  錢,  $c$  錢ナル三種ノ酒ヲ分量  $l, m, n$  ノ割合ニ混合スレバ平均 1 立ノ價何程トナルカ.

解 求メル平均價ヲ  $x$  錢トシ, 混合スベキ原料ノ分量ヲ夫々  $ly$  立,  $my$  立,  $ny$  立トセヨ.

サウスレバ原料ノ總價額ハ  $(aly+bmy+cny)$  錢デアル, ソシテコノ價額ハマタ  $(ly+my+ny)x$  錢デアルカラ次ノ方程式ヲ得ル.

$$(ly + my + ny)x = ay + bmy + cny$$

$$\text{即チ } y(l + m + n)x = y(al + bm + cn)$$

$$\therefore x = \frac{al + bm + cn}{l + m + n}$$

サテコノ答數ニハ  $a, b, c$  及  $l, m, n$  ヲ含ムダケデアツテ  $y$  ヲ含マナイカラ、混合ノ分量  $y$  ニハ無關係デアル。故ニ次ノ事柄ガ分カル。

混合物ノ品位ハ原料ノ品位ト混合ノ割合トデ定マル。

【例2】一盃4圓ノ茶ト一盃3圓ノ茶トヲドシテ分量ノ割合ニ混合スレバ平均一盃3.6圓ノ茶ヲ得ルカ。

解 混合スベキ分量ヲ上茶  $x$  盃、下茶  $y$  盃トスレバ

$$400x + 300y = 360(x + y)$$

$$\therefore x(400 - 360) = y(360 - 300)$$

$$\therefore x : y = (360 - 300) : (400 - 360)$$

$$= 60 : 40 = 3 : 2$$

即チ

混合ノ割合ハ各原料ノ價ト平均價トノ差ノ反比ニ等シイ。

實地ノ計算ニハ次ノヤウニ考ヘルノガ便利デアル。

上茶一盃ヲ3.6圓ニ賣レバ40錢ノ損、下茶一盃ヲ3.6圓ニ賣レバ60錢ノ得。因テ上茶ヲ60盃下茶ヲ40盃混合スレバ上茶ノ方ノ損  $40^{\text{錢}} \times 60$  ト下茶ノ方ノ得  $60^{\text{錢}} \times 40$  ト丁度相償フテ損得ガナイ。故ニ混合スベキ分量ノ割合ハ  $60^{\text{錢}} : 40^{\text{錢}}$  即チ  $3 : 2$  デアル。

コノ計算ヲ通例次ノヤウニ書ク。

$$360 \left| \begin{array}{l} 400 \\ 300 \end{array} \right. \begin{array}{l} 60 \ 3 \\ 40 \ 2 \end{array}$$

### 例 題

1. 品位0.8ノ銀塊ト品位0.9ノ銀塊トヲ目方3ト2トノ割合ニ取ツテ一所ニ熔カセバ品位何程ノ銀塊ヲ得ルカ。

註 金塊マタハ銀塊ノ品位トハソノ中ニ含マレル純金マタハ純銀ノ目方ノソノ塊ノ總目方ニ對スル比ノコトデアル。

2. 一盃240錢ノ茶ト一盃170錢ノ茶トヲドウイフ分量ノ割合ニ混合スレバ一盃190錢

ノモノヲ得ルカ。

3. 品位0.8ノ銀塊ト純銀トヲドウイフ目方ノ比ニ熔合スレバ品位0.85ノ銀塊トナルカ。

4. 一圓ニツキ3軒ノ米ト2.5軒ノ米トヲ其價格5ト3トノ割合ニ(例ヘバ5圓分ト3圓分ト)混合スレバ一圓ニツキ何程ノ米ヲ得ルカ。

若シ分量5ト3トノ割合ニ(例ヘバ5軒ト3軒ト)混合スレバドウカ。

5. 酒精ト水トノ混合液ヲ入レタニツノ瓶ガアル、甲瓶中ノ酒精ト水トノ比ハ5:1、乙瓶中ノ酒精ト水トノ比ハ25:3デアル。今甲瓶ノ液ト乙瓶ノ液トヲ6ト7トノ割合ニ混合シタ液中ノ酒精ト水トノ比ハ如何。

6. 一ツ4.5錢ノ梨ト一ツ3.6錢ノ梨トヲ取交ゼ100箇ヲ平均一ツ5.4錢ノ割ニ賣ツテ1<sup>円</sup>26<sup>銭</sup>ノ利ヲ得タトイフ、各ノ箇數ヲ求メヨ。

### 151. 互ニ比例スル量ノぐらふ

互ニ比例スル二種ノ量ノ任意ノ相對應スルモノノ數値  $x, y$  ノ間ニハ常ニ次ノ等式ガ成リ

立ツ。

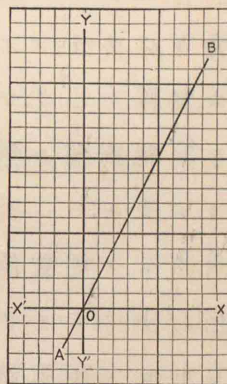
$$y=kx \quad (k \text{ハ一定ノ數})$$

コレハ  $x, y$  ニ關スル一次方程式ダカラ、ソノぐらふハ直線デアル。シカモ  $x=0$  トスレバ  $y=0$  トナルカラ、 $(0,0)$  即チ原點ヲ通ル直線デアル。

一般ニ

比例スル量ノぐらふハ原點ヲ通ル直線デア

ル。右圖ノ AB ハ  $k=2$  ノ場合即チ  $y=2x$  ノぐらふデア



### 152. 互ニ反比例スル量ノぐらふ

互ニ反比例スル二種ノ量ノ任意ノ相對應スルモノノ數値  $x, y$  ノ間ニハ常ニ次ノ等式ガ成リ立ツ。

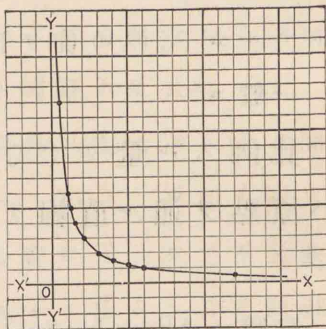
$$xy=k \quad (k \text{ハ一定ノ數})$$

例ヘバ  $k=6$  ナルトキコノ式ニ於ケル  $x, y$  ノ相對應スル數組ノ値ヲ表ニスレバ次ノ通りデ

アル。

$x$	...	0.1	0.5	1	1.2	1.5	2	3	4	5	6	12	60	...
$y$	...	60	12	6	5	4	3	2	1.5	1.2	1	0.5	0.1	...

$x$  の絶対値が小サクナルニ從ヒ  $y$  の絶対値ハ大キクナリ,  $x$  の絶対値ガ無限ニ小サクナレバ  $y$  の絶対値ハ無限ニ大キクナル。

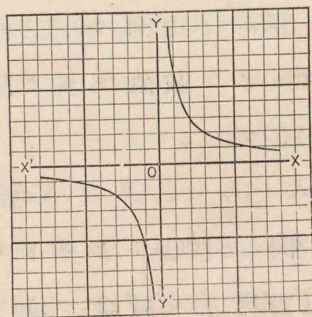


マタ  $x$  の絶対値が大キクナルニ從ヒ  $y$  の絶対値ハ小サクナリ,  $x$  の絶対値ガ無限ニ大キクナレバ  $y$  の絶対値ハ無限ニ小サクナル。

因テ所要ノぐらふハ上圖ノヤウナ曲線デア  
ル。

コノ曲線ハ雙曲線ト  
イフ曲線デアアル。

$x, y$  = 負ノ値ヲモ與ヘレバ右圖ノヤウニ二ツニ離レ  
タ曲線ヲ得ル, ダカラ雙曲線  
トイフ名ヲ附ケタノデアアル。



一般ニ

反比例スル量ノぐらふハ雙曲線デア  
ル。

問 題

1. 静止セル物體ガ落下シ始メテカラ 4 秒  
間ニ 256 呎落ちルトイフ, 然ラバ静止セル物體  
ガ地上何程ノ高處カラ落下スレバ 15 秒デ地上  
ニ達スルカ. 但シ落下ノ距離ハコレニ要シタ  
時間ヲ表ハス數ノ平方ニ比例スル。

2. 圓ノ面積ハソノ半徑ノ平方ニ比例スル。  
半徑 6.5 尺ナル圓ノ面積ハ半徑ガ夫々 6 尺及 2.5  
尺ナル二ツノ圓ノ面積ノ和ニ等シイコトヲ證  
明セヨ。

3. 甲乙二船ガアル, 甲ハ乗組人員 40 名デ麵  
麩 10000 斤ヲ積入レ 125 日分ノ食糧ニ充テルト  
イフ, 今乙ハ乗組人員 60 名デ麵麩 12000 斤ヲ積  
入レ, 毎日 1 人ニ給スル麵麩ノ量ヲ甲船ノ  $\frac{5}{6}$  ト  
スレバ幾日ノ航海ニ堪ヘラレルカ。

4. 甲乙丙三人合同シテ或事業ヲスルノニ,

甲ハ或金額ヲ三箇月間出シ、乙ハ或金額ヲ九箇月間出シ、丙ハ金 756 圓ヲ四箇月間出シタ、ソシテ決算期ニナツテ出資金高トコレヲ出シテオイタ月數トニ比例スルヤウニ利益ヲ分配シタトコロガ、甲ハ全利益ノ  $\frac{1}{12}$  ヲ、乙ハ全利益ノ半分ヲ得タトイフ、甲及乙ノ出資金高ヲ求メヨ。

5. 銅ト亞鉛トノ合金ガ甲乙二塊アル、甲デハ銅ト亞鉛ノ目方ノ比ハ 3:2、乙デハソノ比ガ 7:3 デアル、サウスレバコノ二塊ヲドンナ目方ノ割合ニ取ツテ融合スレバ、ソノ中ニ含マレル銅ト亞鉛ノ目方ノ比ガ 11:5 トナルカ。

6.  $7x+5y=4x+3y$  ナラバ  $x$  ハ  $y$  ニ比例スルコトヲ證明セヨ。

7.  $x^2y^2+1=2xy$  ナラバ  $x$  ハ  $y$  ニ反比例スルコトヲ證明セヨ。

8.  $x$  ガ  $y^2$  ニ比例シ、 $y=3a$  ナルトキ  $x=4a$  ナラバ  $x$  ト  $y$  トノ間ニドンナ等式ガ成リ立ツカ。

9.  $x+y$  ガ  $x-y$  ニ比例スルトキハ、 $x$  ハ  $y$  ニ比例スルコトヲ證明セヨ。

10. 三種ノ量  $X, Y, Z$  ガアツテ、 $Z$  ガ一定ナ

ルトキ  $X$  ガ  $Y$  ニ反比例シ、 $X$  ガ一定ナルトキ  $Y$  ガ  $Z$  ニ反比例スルトキハ、 $Y$  ガ一定ナルトキ  $X$  ガ  $Z$  ニ反比例スルコトヲ證明セヨ。

## 雜 題

1.  $x^2+x-1=0$  ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ.  
 $x^3+2x^2+x+1$
2.  $\frac{ax}{b}=\frac{cy}{d}=\frac{ez}{f}$  カラ  $x:y:z$  ヲ求メヨ.
3.  $(x-2y):(2x-3z):(2y+3z)=1:3:5$  カラ  $x:y:z$  ヲ求メヨ.
4.  $6x^2+4y^2=11xy$  ナルトキ  $\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}$  ノ値ヲ求メヨ.
- 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.
5.  $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, lx+my+nz=p$
6.  $\frac{y+z}{l}=\frac{z+x}{m}=\frac{x+y}{n}, x+y+z=a$
7.  $\frac{x}{y+z+a}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y-a}=x+y+z$
8.  $x^2+y^2+3xy=79, x+y+2xy=38$
9.  $x:y:z:u=1:2:3:4, 9x+7y+3z+u=200$
10.  $pq=rs, qt=su$  ナラバ  $p:r=t:u$  ナルトコトヲ證明セヨ.

11.  $\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$  ナルトキハ  
 $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)=(ll'+mm'+nn')^2$   
 ナルトコトヲ證明セヨ.
12.  $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)=(ll'+mm'+nn')^2$  ナルトキハ  $l:m:n=l':m':n'$  ナルトコトヲ證明セヨ.  
 但シ  $l, m, n, l', m', n'$  ハ皆實數トスル.
13.  $b$  ガ  $a, c$  ノ比例中項ナラバ  
 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=ac(a^2+b^2+c^2)$   
 ナルトコトヲ證明セヨ.
14.  $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ.  
 $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$
15.  $\frac{bz+cy}{b-c}=\frac{cx+az}{c-a}=\frac{ay+bx}{a-b}$  ナルトキハ  
 $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$   
 ナルトコトヲ證明セヨ.
16.  $\frac{2x+3y}{4a-5b}=\frac{3y+4z}{3b-a}=\frac{4z+5x}{2b-3a}$  ナルトキハ  
 $7x+6y+8z=0$  ナルトコトヲ證明セヨ.
17.  $\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ.



$$(x+y+z)(a+b+c) = (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)$$

18.  $ap=bq=cr$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{p^2}{qr} + \frac{q^2}{rp} + \frac{r^2}{pq} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$$

【例】  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots > 0$  ナラバ是等ノ各比ハ

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \dots}{b_1^n + b_2^n + b_3^n + \dots}}$$

ニ等シイコトヲ證明セヨ.

解  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots$

$$\therefore \frac{a_1^n}{b_1^n} = \frac{a_2^n}{b_2^n} = \frac{a_3^n}{b_3^n} = \dots$$

$$= \frac{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \dots}{b_1^n + b_2^n + b_3^n + \dots} \quad \text{〔第140節〕}$$

$$\therefore \frac{a_1}{b_1} = \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \dots}{b_1^n + b_2^n + b_3^n + \dots}}$$

19.  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots > 0$  ナラバ是等ノ各

比ハ  $\sqrt[n]{\frac{pa_1^n + qa_2^n + ra_3^n + \dots}{pb_1^n + qb_2^n + rb_3^n + \dots}}$  ニ等シイコトヲ證明セヨ.

20.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} > 0$  ナラバ  $\frac{a-c}{b-d} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}$  ナルコ

トヲ證明セヨ.

21.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , ( $a, c > 0$ ) ナラバ  $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\sqrt{c^2+cd+d^2}}$

ナルコトヲ證明セヨ.

22.  $a:c:e=b:d:f$  ナルトキハ

$$\frac{\sqrt{4a^2+5e^2-7e^2}}{\sqrt{4b^2+5d^2-7f^2}} = \frac{\sqrt[3]{3a^3-c^3+2e^3}}{\sqrt[3]{3b^3-d^3+2f^3}}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

23.  $\frac{y+z}{b-c} = \frac{z+x}{c-a} = \frac{x+y}{a-b}$  ナルトキ, コノ各比ハ

$$\sqrt[3]{\frac{-xyz}{(b-c)(c-a)(a-b)}} \quad \text{ニ等シイコトヲ證明セヨ.}$$

24. 酒精ヲ入レタ器ガアル, ソノ中カラ9立ヲ出シテ同量ノ水ヲ入レ, 更ニコノ中カラ9立ヲ出シテ再ビ同量ノ水ヲ入レタラ, 器中ノ水ト酒精ノ割合ガ9:16ニナツタトイフ. 最初ノ酒精ノ量ヲ求メヨ.

25. 或小學校デ現在ノ生徒數ヲ前年度ノニ比ベタラ, 女生徒ハ7%増シ, 男生徒ハ4%減リ, 男女總數ハ3%増シタトイフ. 現在ノ男生徒數ト女生徒數トノ割合ハ如何.

26. ニツノ圓ガアル, ソノ面積甲ハ150平方

糧、乙ハ 120 平方糧デア、大圓ノ直徑ト小圓ノ直徑トノ比ヲ求メヨ。但シ圓ノ面積ハソノ直徑ノ平方ニ比例スル。

27. 球ノ體積ハソノ半徑ノ立方ニ比例スル。半徑ガ夫々 6 cm, 8 cm, 10 cm ナル三ツノ球ノ體積ノ和ニ等シイ體積ヲ有スル球ノ半徑ヲ求メヨ。

28. 海洋ヲ望ミ得ル距離ハ海面上ソノ眼ノ高サノ平方根ニ比例スルモノトシ、眼ノ高サ 6 呎ノトキ望見シ得ル距離ガ 3 哩デアルトスレバ、眼ノ高サ 72 碼ノトキ望見シ得ル距離ハ何程カ。

29. 物體ノ重サハ地球ノ中心カラノ距離ノ平方ニ反比例スル。地面上カラ何程ノ高サノ所ニ物體ヲ置カバソノ重サガ地面上ニアルトキノ半分トナルカ。但シ地球ノ半徑ハ 6400 糎トスル。

30. 定線分 AB 上若クハソレヲ A ノ方へ延長シタ上ニ一點 C ヲ取ツテ  $AB:CB=m:n$  ( $m, n$  ハ何レモ正ノ數)ナラシメルニハ、點 C ヲ A ノド

チラノ方ドンナ所ニ取レバイ、カ。

31.  $u$  ト  $v$  トノ和ハ  $y$  ニ等シク,  $u$  ハ  $x$  ニ比例シ,  $v$  ハ  $x$  ニ反比例スル。今  $x=4$  ノトキ  $y=10$  デ,  $x=1$  ノトキ  $y=-5$  デアルトシテ  $x, y$  ノ關係ヲ表ハス式ヲ求メヨ。

32.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  ガ  $x-y$  ニ反比例スルトキハ  $xy$  ハ  $x^2+y^2$  ニ比例スルコトヲ證明セヨ。

## 第十五篇 級 數

### 等 差 級 數

#### 153. 等差級數

或一定ノ法則ニ從テ順ニ並ベラレタ一群ノ數ヲ級數トイヒ、ソノ各數ヲ級數ノ項トイフ。

級數ノ各項(第二項以下)ガソノ直グ前ノ項ニ或一定ノ數ヲ加ヘタモノニ等シイトキハコレヲ等差級數(略符號A.P.)トイヒ、コノ一定ノ數ヲソノ公差トイフ。

【例1】 5, 7, 9, 11, 13 ハ初項ガ5, 公差ガ2, 項ノ數ガ5ナル等差級數デアツテ、ソノ末項ハ13デアアル。

【例2】 21, 18, 15, 12, 9, 6 ハ初項ガ21, 公差ガ-3, 項ノ數ガ6ナル等差級數デアアル。

注意1. 等差級數ノ公差ハ或項カラソノ直グ前ノ項ヲ引イタモノデアアル。

注意2. スベテ等差級數ハソノ初項ト公差トガ分

カレバ、ソレデ幾項マデデモ書キ下スコトガ出來ル。

#### 154. 等差級數ノ一般項

初項ヲ  $a$ , 公差ヲ  $d$  トスレバ

第二項ハ  $a+d$

第三項ハ  $(a+d)+d$  即チ  $a+2d$

第四項ハ  $(a+2d)+d$  即チ  $a+3d$

カヤウニ、等差級數ノ或項ハ、ソノ項ノ番號數カラ1ヲ引イタ數ヲ公差ニ掛ケタモノヲ初項ニ加ヘタモノニ等シイ。

ソコデ第  $n$  項ヲ  $l$  トスレバ

$$l = a + (n-1)d$$

コレガ等差級數ノ一般ノ項ヲ與ヘル公式デアアル。

【例】 初項7, 公差-3ナル等差級數ノ第十一項ヲ求メヨ。

解 上ノ公式ニ於テ

$$a=7, d=-3, n=11$$

トオケバ

$$l = 7 + 10 \times (-3) = -23 \dots \text{答}$$

## 例 題

1. 初項が3, 公差が2ナル等差級數ノ最初ノ五項ヲ書ケ. マタソノ第十二項ヲ求メヨ.
2. 初項2, 公差-2ナル等差級數ノ第十項ヲ求メヨ.
3. 15, 12, 9, ……ナル等差級數ノ第 $n$ 項ヲ表ハス式ヲ作レ.
4. 1カラ初メテ第 $n$ 番目ニ當ル奇數ヲ表ハス式ヲ作レ. マタ2カラ初メテ第 $n$ 番目ニ當ル偶數ヲ表ハス式ヲ作レ.

## 155. 應用

$$\text{前節ノ公式 } l = a + (n-1)d$$

ニヨツテ  $l, a, n, d$  ノ四ツノ中ドレカ三ツガ分カレバ残リノ一ツヲ求メルコトガ出來ル.

【例1】 初項が39デ, 第十一項が9ナル等差級數ノ公差ヲ求メヨ.

解 求メル公差ヲ  $d$  トスレバ, 第十一項ハ上ノ公式ニヨツテ

$$39 + 10d$$

ソシテコレガ9ニ等シイ.

$$\therefore 39 + 10d = 9$$

$$\therefore 10d = -30$$

$$\therefore d = -3 \dots \text{答}$$

【例2】 等差級數ノ初項が2, 公差が $\frac{2}{3}$ ナルトキ, 第何番目ノ項が7トナルカ.

解 求メ $n$ 項ヲ第 $n$ 項トスレバ, 上ノ公式ニヨツテ次ノ方程式ヲ得ル.

$$2 + \frac{2}{3}(n-1) = 7$$

$$\text{コレカラ } n = \frac{17}{2}$$

ヲ得ル. 然ルニ求メル數ハ正ノ整數デナケレバナラヌ, 因テコノ問題ハ不可能デアル.

【例3】 等差級數ノ第六項が20デ第十一項が35デアル, ソノ初項及公差ヲ求メヨ.

解 初項ヲ  $a$ , 公差ヲ  $d$  トスレバ, 上ノ公式ニヨツテ次ノ聯立方程式ヲ得ル.

$$a + 5d = 20$$

$$a + 10d = 35$$

$$\therefore d=3$$

$$\text{從テ } a=5$$

答 初項5, 公差3

### 例 題

1. 初項が60, 第十三項が12ナル等差級數ノ公差ヲ求メヨ.
2. 初項が3, 公差が2ナル等差級數ノ第何番目ノ項が21トナルカ.
3. 第二項ト第三項トノ和が19, 第五項ト第七項トノ和が40ナル等差級數ノ初項及公差ヲ求メヨ.

### 156. 等差級數ノ和

初項ヲ  $a$ , 公差ヲ  $d$ , 項數ヲ  $n$ , 末項(第  $n$  項)ヲ  $l$ , 初項カラ末項マデノ和ヲ  $S$  トスレバ

$$(1) \quad S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) + (l-d) + l$$

今コノ右邊ヲ逆ノ順ニ書ケバ次ノ通りニナル.

$$(2) \quad S = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a$$

(1), (2) ヲ邊々相加ヘレバ

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l) + (a+l) + (a+l) \\ = n(a+l)$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}n(a+l)$$

コレガ等差級數ノ初項ト末項ト項ノ數トヲ知ツテソノ和ヲ求メルタメノ公式デアル.

マタ上ノ公式ノ  $l = a + (n-1)d$  ヲ代入スレバ

$$S = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

トナル, コレハ等差級數ノ初項ト公差ト項ノ數トヲ知ツテソノ和ヲ求メルタメノ公式デアル.

【例1】 1カラ始マル  $n$  箇ノ正ノ整數ノ和ヲ求メヨ.

解 求メル和ハ, 初項ガ1, 末項ガ  $n$ , 項數ガ  $n$  ナル等差級數ノ和デアル.

故ニ上ノ第一ノ公式ニ於テ  $a=1$ ,  $l=n$  トオケバ

$$S = \frac{1}{2}n(n+1) \dots \text{答}$$

【例2】 5以上ノ5ノ倍數ヲ初カラ30箇ダケ加ヘ合ハセタ和ヲ求メヨ.

解 上ノ第二ノ公式ニ於テ  $a=5, d=5, n=30$   
トオケバ

$$S = \frac{1}{2} \times 30(10 + 29 \times 5) = 2325 \dots \dots \text{答}$$

### 例 題

1. 初項 5, 末項 20, 項數 4 ナル等差級數ノ總テノ項ノ和ヲ求メヨ.
2. 初項 2, 公差 3, 項數 10 ナル等差級數ノ總テノ項ノ和ヲ求メヨ.
3. 等差級數 17, 15, 13, ……ノ第八項マデノ和ヲ求メヨ.
4. 1 カラ初メテ  $n$  箇ノ奇數ノ和ヲ求メヨ.
5. 2 カラ初メテ  $n$  箇ノ偶數ノ和ヲ求メヨ.
6. 100 カラ 1000 マデノ間ニアル 7 ノ總テノ倍數ノ和ヲ求メヨ.

## 157. 應用

第 154 節ト前節トニ述ベタ公式即チ

$$l = a + (n-1)d$$

及  $S = \frac{1}{2}n(a+l)$  或ハ  $S = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

ノ中ニハ五ツノ文字  $a, d, n, l, S$  ガ含マレルカラ、是等ノ文字ノ中、ドレカ三ツノ値ガ分カレバ是等ノ公式ヲバ殘リノ二ツノ文字ヲ未知數トスル聯立方程式トシテソレカラソノ値ヲ求メルコトガ出來ル.

【例 1】 第三項ガ 7 デ、初項カラ第十八項マデノ和ガ 360 ナル等差級數ノ初項及公差ヲ求メヨ.

解 初項ヲ  $a$ , 公差ヲ  $d$  トスレバ、第三項ハ 7  
ダカラ

$$(1) \quad a + 2d = 7$$

マタ第十八項マデノ和ガ 360 ダカラ

$$\frac{18(2a + 17d)}{2} = 360$$

$$\therefore (2) \quad 2a + 17d = 40$$

(1)ト(2)トカラ

$$d = 2, \quad a = 3$$

答 初項 3, 公差 2

【例 2】 初項 15, 末項 3 ナル等差級數ノ總テノ項ノ和ガ 45 デアル、項ノ數及公差ヲ求メヨ.

解 項ノ數ヲ  $n$ , 公差ヲ  $d$  トスレバ

$$3 = 15 + (n-1)d$$

$$45 = \frac{n}{2}(15+3)$$

コレカラ  $n=5, d=-3$

【例3】 初項15, 公差-3ナル等差級數ノ總テノ項ノ和ガ45デアアル, 項ノ數ヲ求メヨ.

解 項ノ數ヲ  $n$  トスレバ

$$\frac{n\{2 \times 15 - 3(n-1)\}}{2} = 45$$

分母ヲ拂ヒ簡單ニシテ

$$n^2 - 11n + 30 = 0$$

$$\therefore n=5 \text{ 或ハ } n=6$$

驗 第五項マデノ和  $= 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 45$

第六項マデノ和  $= 15 + 12 + 9 + 6 + 3 + 0 = 45$

即チ項ノ數ハ五ツデモ, 六ツデモイヽ.

### 例 題

1. 初項12, 公差  $\frac{1}{2}$  ナル等差級數ノ總テノ項ノ和ガ126デアアル, 項ノ數ヲ求メヨ.
2. 初項5, 末項103ナル等差級數ノ總テノ項ノ和ガ2700デアアル, 項ノ數及公差ヲ求メヨ.
3. 20, 17, ……ナル等差級數ノ初項カラ第

何項マデノ和ガ75トナルカ.

4. 公差ガ2, 末項ガ20ナル等差級數ノ總テノ項ノ和ガ68デアルトイフ, 初項及項數ヲ求メヨ.

### 158. 等差中項

三數  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナストキ, ソノ真中ノ項  $b$  ヲ兩端ノ項  $a, c$  ノ等差中項トイフ.

コノ場合ニハ

$$b - a = c - b$$

$$\therefore b = \frac{a+c}{2}$$

即チ 二數ノ等差中項ハソノ和ノ半分ニ等シイ.

### 例 題

1.  $a+b$  ト  $a-b$  トノ等差中項ヲ求メヨ.
2. 三角形ノ三ツノ角ガ等差級數ヲナサバ, ソノ一角ハ  $60^\circ$  デアル. マタ逆ニ, 三角形ノ一角ガ  $60^\circ$  ナラバソノ三ツノ角ハ等差級數ヲナスコトヲ示セ.

3. 27 ト 7 ト ノ 間ニ 4 箇ノ 數ヲ 插ミ、全體ガ 等差級數ヲ ナスヤウニ セヨ。

### 159. 應用問題

【例】 或人 初日ニ 8 里、二日目ニ 8 里半、三日目ニ 9 里行クトイフヤウニ、毎日ノ行程ヲ 次第ニ 半里 ヅツ増シテ一週間旅行シタトイフ、旅行シタ 總里數何程カ。

解 求メル里數ハ 初項ガ 8、公差ガ  $\frac{1}{2}$  ナル等 差級數ノ 初項カラ 第七項マデノ和ニ 等シイ。

故ニ 第 129 頁ノ 第二ノ公式ニ ヨツテ

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \left( 2 \times 8 + 6 \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \times 7 \times 19 = 66 \frac{1}{2}$$

答 66.5 里

### 例 題

1. 米俵ヲ 積上ゲタノガアル、最下ノ段ニハ 11 俵、ソノ上ノ段ニハ 10 俵、……ト 順ニ 1 俵 ヅツ 減リ、最上段ニハ 5 俵アルトイフ、積上ゲテアル 總俵數幾ラカ。

2. 若干人ニ 賞與金ヲ 與ヘルノニ、第一ノ人ニ 30 圓ヲ 與ヘ、次第ニ 5 圓 ヅツ減ラシタトコロ

ガ 賞與金總額 100 圓トナツタ、人數ハ 幾ラカ。

3. 若干人ニ 金ヲ 分配スルノニ、第一ノ人、第二ノ人、……ト 順ニ 5 圓 ヅツ増シテ 與ヘタトコロガ、金高合ハセテ 420 圓デ、第一ノ人ノ取分ハ 最後ノ人ノ半分デアツタトイフ、人數ハ 幾ラカ。

4. 100 箇ノ石ヲ 1 米オキニ一直線ニ 並ベタノガアル、今ソノ一端ノ石ノ處ニ 立ツテキル人ガ他ノ石ヲ 悉ク其處ニ一ツツ持ツテ來ルニハ 合計何程ノ道ヲ 歩カネバナラヌカ。

5. 多角形ガアル、ソノ各内角ノ大サハ 等差級數ヲ ナシ、最大角ハ  $172^\circ$  デ 公差ハ  $4^\circ$  デアルトイフ。ソノ邊數ヲ 求メヨ。

### 等 比 級 數

#### 160. 等比級數

級數ノ 各項 (第二項以下) ガソノ直グ前ノ項ニ 一定ノ數ヲ 掛ケタモノニ 等シイトキハコレヲ 等比級數 (略符號 G.P.) トイヒ、コノ一定ノ數ヲソノ公比トイフ。



【例1】 2, 6, 18, 54, 162 ハ初項ガ2, 公比ガ3, 項ノ數ガ5ナル等比級數デアアル.

【例2】  $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}$  ハ初項ガ1, 公比ガ $-\frac{1}{3}$ , 項ノ數ガ4ナル等比級數デアアル.

注意1. スベテ等比級數ハソノ初項ト公比トガ分かレバ, ソレデ幾項マデデモ書キ下スコトガ出來ル.

注意2. 本書デハ, 等比級數ノ公比ハスベテ實數ニ限ルコトトスル.

### 161. 等比級數ノ一般項

初項ヲ  $a$ , 公比ヲ  $r$  トスレバ

第二項ハ  $a \times r$  即チ  $ar$

第三項ハ  $ar \times r$  即チ  $ar^2$

第四項ハ  $ar^2 \times r$  即チ  $ar^3$

.....

カヤウニ, 等比級數ノ或項ハ, ソノ項ノ番號數カラ1ヲ引イタ數ヲ指數トスル公比ノ冪ヲ初項ニ掛ケタモノニ等シイ.

ソコデ第  $n$  項ヲ  $l$  トスレバ

$$l = ar^{n-1}$$

コレガ等比級數ノ一般ノ項ヲ與ヘル公式デアアル.

【例1】 初項5, 公比3ナル等比級數ノ第七項ヲ求メヨ.

解 上ノ公式ニ於テ  $a=5, r=3, n=7$  トオケバ

$$l = 5 \times 3^6 = 5 \times 729 = 3645 \dots \dots \text{答}$$

【例2】 初項ガ4, 第6項ガ $\frac{1}{8}$ ナル等比級數ノ公比ヲ求メヨ.

解 上ノ公式ニ於テ  $a=4, l=\frac{1}{8}, n=6$  トオケバ

$$4r^5 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore r^5 = \frac{1}{32}$$

$$\therefore r = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

### 例 題

1. 初項ガ3, 公比ガ2ナル等比級數ノ最初ノ五項ヲ書ケ. マタソノ第十二項ヲ求メヨ.
2. 初項10, 公比 $\frac{1}{2}$ ナル等比級數ノ第六項ヲ求メヨ.

3. 第三項ガ18,第七項ガ1458ナル等比級數ノ初項ト公比トヲ求メヨ.

4. 等比級數ヲナス四數ガアル,第一數ト第二數トノ和ハ60,第三數ト第四數トノ和ハ240デアル,各數ヲ求メヨ.

162. 等比級數ノ和

初項ヲa,公比ヲr,初項カラ第n項マデノ和ヲSトスレバ

(1)  $S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

コノ兩邊ニrヲ掛ケレバ

(2)  $Sr = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$

(2)カラ(1)ヲ邊々相引ケバ

$S(1-r) = a - ar^n$

即チ  $S(1-r) = a(1-r^n)$

1-r ≠ 0 トシ,コレデ兩邊ヲ割レバ

$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

或ハ  $S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

コノ二ツハ等比級數ノ初項ト公比ト項ノ數

トヲ知ツテソノ和ヲ求メルタメノ公式デアアル.

注意1.  $r < 1$ ノトキハ上ノヲ用ヒ, $r > 1$ ノトキハ下ノヲ用ヒルガ便利デアアル.

注意2. 第n項ヲlトスレバ  $l = ar^{n-1}$ ダカラ,コレヲ上ノ公式ニ代入スレバ

$S = \frac{a-lr}{1-r} = \frac{lr-a}{r-1}$  [但シ  $r \neq 1$ ]

コレハ等比級數ノ初項ト公比ト末項トヲ知ツテソノ和ヲ求メルタメノ公式デアアル.

注意3.  $r = 1$ ノトキハ上ノ公式ハ何レモ用ヒラレナイ. コノ場合ニハ等比級數ノ各項ハ皆初項aニ等シイカラ次ノ結果ニナル.

$S = na$

【例1】 初項2,公比5ナル等比級數ノ初項カラ第六項マデノ和ヲ求メヨ.

解 公式  $S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ ニ於テ  $a=2, r=5, n=6$ トスレバ

$S = \frac{2(5^6-1)}{4} = \frac{1}{2}(5^6-1) = 7812 \dots \dots$ 答

【例2】 初項ガ $\frac{1}{2}$ ,末項ガ32ナル等比級數ノ總テノ項ノ和ガ $63\frac{1}{2}$ デアアル,ソノ公比ヲ求メヨ.

解 公式  $S = \frac{a-lr}{1-r}$  に於て  $a = \frac{1}{2}$ ,  $l = 32$ ,  
 $S = 63\frac{1}{2}$  トオケバ

$$63\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} - 32r}{1-r}$$

$$\therefore 127 - 127r = 1 - 64r$$

$$\therefore 63r = 126$$

$$\therefore r = 2$$

## 例 題

1. 初項 1, 公比 2 ナル等比級數ノ初メノ十項ノ和ヲ求メヨ.
2. 初項 0.12, 公比 0.1 ナル等比級數ノ初項カラ第五項マデノ和ヲ求メヨ.
3. 公比  $\frac{1}{2}$ , 末項  $\frac{1}{4}$ , 項數 5 ナル等比級數ノ總テノ項ノ和ヲ求メヨ.
4. 初項  $\frac{1}{2}$ , 末項 16 ナル等比級數ノ總テノ項ノ和ガ  $31\frac{1}{2}$  デアルトイフ, ソノ項數ハ幾ラカ.
5. 第二項ガ 40, 第四項ガ 1000 ナル等比級數ノ初メノ五項ノ和ヲ求メヨ.

*That's all right very good*

*good*

本館代印

## 163. 等比中項

三數  $a, b, c$  ガ等比級數ヲナストキ, ソノ真中ノ項  $b$  ヲ兩端ノ項  $a, c$  ノ等比中項トイフ.

コノ場合ニハ

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$\therefore b = \pm\sqrt{ac}$$

即チ二數ノ等比中項ハソノ積ノ平方根ニ等シイ.

二數ノ等比中項ハツマリコノ二數ノ比例中項デアアル.

## 例 題

1.  $(a+b)^2$  ト  $(a-b)^2$  トノ等比中項ヲ求メヨ.
2. 2 ト 162 トノ間ニ 3 箇ノ數ヲ插ミ, 全體ガ等比級數ヲナスヤウニセヨ.

## 164. 定理

相異ナル二ツノ正ノ數ノ等差中項ハソノ二數ノ正ナル等比中項(即チ正ナル比例中項)ヨリ大キイ.

證明  $a, b$  が相異なる二正数トスレバ、その  
等差中項ト正ナル等比中項トハ夫々

$$\frac{a+b}{2} \quad \text{及} \quad \sqrt{ab}$$

デアル。今この二数ノ大小ヲ比較スルタメ、その  
ノ平方ノ差ヲ作ツテ見レバ

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 &= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4} \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > (\sqrt{ab})^2$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

### 165. 無限等比級數

第 162 節ニ述ベタ等比級數ノ和ヲ求メル公  
式

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{即チ} \quad S = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

ニ於テ、 $r$ ノ絶対値ガ1ヨリ小サイ場合ニハ、 $n$   
ガ限り無く大キクナレバ  $r^n$ ノ絶対値ハ限り無

ク小サクナリ、從テコレニ  $\frac{a}{1-r}$  ヲ掛ケタモノ  
 $\frac{ar^n}{1-r}$  モマタ限りナク0ニ近ヅク。

故ニ  $n$ ヲ十分ニ大キクスレバ  $S$ ハ限りナク  
 $\frac{a}{1-r}$ ニ近ヅク。コノ事柄ヲ言ヒ表ハスニ

$n$ ガ限りナク大キクナルトキ、コノ等  
比級數ノ  $n$ 項ノ和ノ極限ハ  $\frac{a}{1-r}$ デアル。  
マタハ

$a$ ヲ初項トシ、絶対値ガ1ヨリ小サイ  
數  $r$ ヲ公比トスル、限りナク多クノ項ヲ  
有スル等比級數(即チ所謂無限等比級數)  
ノ和ノ極限ハ  $\frac{a}{1-r}$ デアル。

トイフ。

即チ無限等比級數ノ和ノ極限ヲ  $S_\infty$ トスレバ

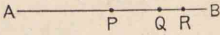
$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

【例1】無限等比級數  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ ノ和ノ極  
限ヲ求メヨ。

解 上ノ公式  $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ ニ於テ  $a = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$   
トオケバ

$$S_{\infty} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \dots \dots \text{答}$$

コノ問題ヲ次ノヤウニ具體的ニ考ヘテ見ヨウ。

線分 AB ヲ取ツテコレヲ表ハス數ヲ 1 トシ、  

  
 中點ヲ P トスレバ、AP ヲ表ハス數ハ  $\frac{1}{2}$  デアル。  
 次ニ PB ノ中點ヲ Q トシ、QB ノ中點ヲ R トスレバ、PQ ヲ表ハス數ハ  $\frac{1}{4}$ 、QR ヲ表ハス數ハ  $\frac{1}{8}$  デアル。

カヤウニ順次右端ノ部分ヲ二等分スレバ、左端カラノ各部分ヲ表ハス數ハ順次ニ

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \dots$$

トナル。サテ P, Q, R, …… 等ヲ十分ニ多ク取レバ殘リノ部分(即チ右端ノ部分)ハドレホドデモ小サクナルカラ、是等ノ數ノ和ノ極限ハ AB ヲ表ハス數、即チ 1 ニ等シイ。

【例2】 初項ガ  $a$ 、公比ガ  $-\frac{1}{2}$  ナル無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求メヨ。

解 前ノ公式ニ於テ  $r = -\frac{1}{2}$  トオケバ

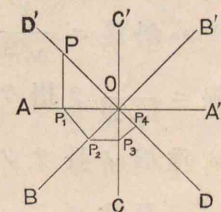
$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a \dots \dots \text{答}$$

例 題

1. 初項ガ 6、公比ガ  $\frac{1}{3}$  ナル無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求メヨ。
2. 初項  $\frac{8}{5}$ 、公比  $-\frac{5}{8}$  ナル無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求メヨ。
3. 無限等比級數  $2, 1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \dots \dots$  ノ和ノ極限ヲ求メヨ。
4. 第二項ガ  $\frac{3}{4}$  ナル無限等比級數ノ和ノ極限ガ 4 デアルトイフ、ソノ初項及公比ヲ求メヨ。

166. 應用問題

【例】 同一点 O ヲ通ル四直線 AA', BB', CC', DD' ガアツテ相隣レル二直線ノナス角ガ何レモ 45 度デアルトスル。今是等ノ直線



ノ中、ドレカーツ、例ヘバ DD' 上ノ一點 P カラソノ隣リノ直線 AA' へ垂線 PP<sub>1</sub> ヲ下シ、ソノ足 P<sub>1</sub> カラ又ソノ隣リノ直線 BB' へ垂線 P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> ヲ下シ、ソノ足 P<sub>2</sub> カラ又ソノ隣リノ直線 CC' へ垂線 P<sub>2</sub>P<sub>3</sub> ヲ下ストイフヤウニ何處マデモ際限ナクコノ手數ヲ續ケテ行フトキ、是等ノ垂線ノ長サノ和ノ極限ヲ求メヨ。但シ OP ノ長サヲ a 糰トスル。

解 直角三角形 OPP<sub>1</sub>ニ於テ角 POP<sub>1</sub>ハ 45 度ダカラ

$$PP_1 = OP_1 = \frac{OP}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{糰}$$

同様ニ

$$P_1P_2 = \frac{OP_1}{\sqrt{2}} = \frac{PP_1}{\sqrt{2}} = \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{糰}$$

$$= \frac{a}{(\sqrt{2})^2} \text{糰}$$

ドノ直角三角形ヲ取ツテモ、カヤウニ垂線ノ長サハ斜邊ニ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ヲ掛ケタモノ即チソノ前ノ垂線ニ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ヲ掛ケタモノニ等シイ、故ニ求メル所ノ垂線ノ長サノ和ノ極限ヲ表ハス數ハ初項ガ  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 、公比ガ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ナル無限等比級數

$$\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{(\sqrt{2})^2}, \frac{a}{(\sqrt{2})^3}, \dots$$

ノ和ノ極限デアアル。

故ニ求メル數ハ

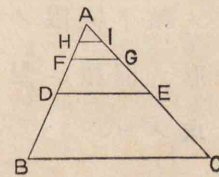
$$\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2} + 1)a$$

即チ是等ノ垂線ノ長サノ和ノ極限ハ  $(\sqrt{2} + 1)a$  糰デアアル。

例 題

1. 次ノ圖ニ於テ  $\triangle ABC$  ノ邊 AB ノ中點ト邊 AC ノ中點トヲ結ビツケル線分 DE ヲ作り、次ニ  $\triangle ADE$  ノ二邊 AD, AE ノ中點ヲ結ビツケル線分 FG ヲ作ルト

イフヤウニ、ドコマデモ際限ナクコノ手數ヲ續ケテ行フトキ、是等ノ線分ノ長サノ和

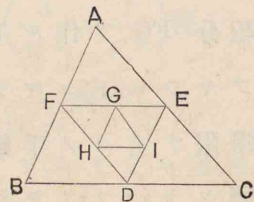


ノ極限ヲ求メヨ。但シ邊 BC ノ長サヲ a 糰トスル。

2. 正方形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA 上ニ夫

夫  $AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{1}{3}AB$  ナルヤウニ點  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  ヲ取ツテ新シイ正方形  $A'B'C'D'$  ヲ作り, 次ニコノ正方形ノ各邊上ニ  $A'A'' = B'B'' = C'C'' = D'D'' = \frac{1}{3}A'B'$  ナルヤウニ點  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$  ヲ取ツテマタ正方形  $A''B''C''D''$  ヲ作り, 次第ニ際限ナク同ジ作圖ヲシテ得ル所ノ無數ノ正方形ト元ノ正方形トノ面積ノ和ノ極限ヲ求メヨ. 但シ元ノ正方形ノ一邊ノ長サヲ  $a$  糶トスル.

3.  $\triangle ABC$  ノ三邊ノ中點  $D, E, F$  ヲ結ビツケテ  $\triangle DEF$  ヲ作り, 更ニコノ三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ビツケテ  $\triangle GHI$  ヲ作ルトイフヤウニ際限ナクコノ作圖ヲ續ケテ得ルスベテノ三角形ノ面積ノ和ノ極限ノ元ノ三角形ノ面積ニ對スル比ヲ求メヨ.



167. 循環小數ヲ分數ニ直スコト

(第一) 純粹ナル循環小數\*ノ場合

\*小數點下ニ循環シナイ數字ノナイモノノコト.

【例】  $0.\dot{4}8$  ヲ分數ニ直セ.

解  $0.\dot{4}8 = 0.484848\dots$   
 $= 0.48 + 0.0048 + 0.000048 + \dots$   
 $= 0.48 + 0.48 \times 0.01 + 0.48 \times (0.01)^2 + \dots$

サテ循環小數  $0.48$  ヲ分數ニ直ストハコノ循環小數ノ極限(即チ初項ガ  $0.48$ , 公比ガ  $0.01$  ナル無限等比級數ノ和ノ極限)ヲ求メルコトデアル.

故ニ第 165 節ノ公式  $S_\infty = \frac{a}{1-r}$  ニヨツテ

$$0.\dot{4}8 \text{ノ極限} = \frac{0.48}{1-0.01} = \frac{0.48}{0.99}$$

$$= \frac{48}{99} = \frac{16}{33}$$

カヤウニ, 純粹ナル循環小數ノ極限ハソノ循環數ヲ分子トシコノ循環數ノ桁數ダケ 9 ヲ書キ列ネテ得ル整數ヲ分母トスル分數ニ等シイ.

(第二) 複雑ナル循環小數\*ノ場合

【例】  $0.34\dot{6}29$  ヲ分數ニ直セ.

\*小數點下ニ循環シナイ數字ノアルモノノコト.

解  $0.34\dot{6}2\dot{9}$  ヲ分數ニ直ストハ  $0.34$  ト  $0.00\dot{6}2\dot{9}$   
ノ極限トノ和ヲ求メルコトデアル。

$$\text{サテ} \quad 0.34 = \frac{34}{100}$$

$$0.00\dot{6}2\dot{9} = 0.00629629629\dots$$

$$= 0.00629 + 0.00629 \times 0.001$$

$$+ 0.00629 \times (0.001)^2 + \dots$$

$$\therefore 0.34\dot{6}2\dot{9} = \frac{34}{100} + \frac{0.00629}{1-0.001}$$

$$= \frac{34}{100} + \frac{0.00629}{0.999} = \frac{34}{100} + \frac{629}{99900}$$

$$= \frac{34 \times 999 + 629}{99900} = \frac{34 \times (1000 - 1) + 629}{99900}$$

$$= \frac{34629 - 34}{99900} = \frac{34595}{99900} = \frac{187}{540}$$

カヤウニ、複雑ナル循環小數ノ極限ハ、  
循環シナイ部分ノ右ニ循環數ヲソノマ  
マ書キ列ネテ得ル整數カラ、循環シナイ  
部分ノ數字ヲソノマ、書キ列ネテ得ル  
整數ヲ引イタ殘リヲ分子トシ、循環數ノ  
桁數ダケヲ書キ列ネソノ右ニ循環シ  
ナイ部分ノ桁數ダケヲ書キ添ヘタモ

ノヲ分母トスル分數ニ等シイ。

注意  $\sqrt{2} = 1.4142\dots$  ノヤウナモノハ循環小數デナ

イ。何トナレバ循環小數ノ極限ハ分數デアルシ、 $\sqrt{2}$   
ハ無理數ダカラデアル。

### 例 題

次ノ各循環小數ヲ分數ニ直セ。

1.  $0.\dot{2}\dot{7}$       2.  $0.4\dot{0}\dot{7}$       3.  $0.\dot{0}\dot{6}$

4.  $0.\dot{9}$       5.  $0.8\dot{3}\dot{6}$       6.  $0.1\dot{7}\dot{2}$

7.  $0.0\dot{6}$       8.  $3.4\dot{5}$

### 問 題

1. 初日ニハ 1 厘、二日目ニハ 2 厘、三日目ニハ  
4 厘トイフヤウニ、次第ニ毎日ソノ前日ノ 2 倍  
ダケ 30 日間金ヲ積立テルトスレバ、總積立金高  
何程トナルカ。

2.  $3\frac{1}{3}$ ,  $6\frac{1}{6}$ ,  $12\frac{1}{12}$ , ……ナル級數ノ最初 20 項  
ノ和ヲ求メヨ。

3. 等差級數ヲナス三數ガアル、ソノ和ハ 21  
デソノ各ノ平方ノ和ハ 155 デアル、コノ三數ヲ  
求メヨ。



4. 等比級數ノ第一,第二,第三項ノ和ハ26,第一,第三,第五項ノ和ハ182デアアル. 初項及公比ヲ求メヨ.

5. 無限等比級數ノ第三項以下ノ和ノ極限ガ初ノ二項ノ和ノ3倍ニ等シイトキ,ソノ公比ヲ求メヨ.

6. 無限等比級數ノ任意ノ項トソノ項以下ノ和ノ極限トノ比ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

7.  $xy, y^2, z^2$ ガ等差級數ナラバ,  $y, z, 2y-x$ ハ等比級數ナルコトヲ證明セヨ.

8.  $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ ガ等差級數ナラバ  $a^2, b^2, c^2$ モマタ等差級數ナルコトヲ證明セヨ.

9.  $a, b, c, d$ ガ等比級數ヲナサバ

$$(a+b+c+d)^2 = (a+b)^2 + (c+d)^2 + 2(b+c)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

10. 相異ナル三數  $a, b, c$ ガ等差級數,  $a, b-a, c-a$ ガ等比級數ナラバ

$$a = \frac{1}{3}b = \frac{1}{5}c$$

ナルコトヲ證明セヨ.

級數ノ各項ノ逆數ガ等差級數ヲナストキハ, 元ノ級數ヲ調和級數トイフ.

即チ  $a, b, c, \dots$ ガ調和級數ヲナストハ,  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ ガ等差級數ヲナスコトデアアル.

三數ガ調和級數ヲナストキ,ソノ真中ノ數ヲ他ノ二數ノ調和中項トイフ.

11. 二數  $a, b$ ノ調和中項ヲ求メヨ.

12.  $a, b, c$ ガ調和級數ヲナサバ  $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ ナルコトヲ證明セヨ.

13. 調和級數ノ初項ガ  $a$ , 第二項ガ  $b$ ナルトキ, 第三項ヲ求メヨ.

14. 二ツノ相異ナル正ノ數ノ比例中項ハコノ二數ノ等差中項ト調和中項トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ.

## 雜 題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

$$1. \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2x}{x^2-4} = \frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

$$2. \frac{1}{x-a-b} = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

$$3. \begin{cases} xy+ab=2ax \\ x^2y^2+a^2b^2=2b^2y^2 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 18+9(x+y)=2(x+y)^2 \\ 6-(x-y)=(x-y)^2 \end{cases}$$

【例】恒等式  $\frac{x^2+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$  二於テ A, B, C ハ x ヲ含マナイ數デアルトイフ, ソノ各ノ値ヲ求メヨ.

解 右邊ヲ通分スレバ

$$\frac{x^2+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

コノ恒等式ニ於テ兩邊ノ分母ハ同一ダカラ分子モマタ同一デナケレバナラナイ.

故ニ

$$(1) \quad x^2+2 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

ハ恒等式デアル. ソコデコノ式ノ未定ノ係數

A, B, C ヲ求メルノニ通例ニ様ノ方法ガアル.

(第一) 恒等式ノ兩邊ハ全ク同一デナケレバナラヌカラ,

(1)ノ兩邊ニ於テ, マヅ  $x^2$  ノ項ノ係數ヲ比ベテ

$$(2) \quad 1 = A + B + C$$

次ニ  $x$  ノ項ノ係數ヲ比ベテ

$$(3) \quad 0 = -A - 2B + C$$

終リニ常數項ヲ比ベテ

$$(4) \quad 2 = -2A$$

聯立方程式(2), (3), (4) ヲ解イテ

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1$$

(第二) 恒等式ハソノ中ノ文字ノ値ニ拘ラズ成リ立タネバナラヌカラ,

(1)ニ於テ, マヅ  $x=0$  トスレバ

$$2 = -2A \quad \therefore A = -1$$

次ニ  $x=-1$  トスレバ

$$3 = B(-1)(-3) = 3B \quad \therefore B = 1$$

次ニ  $x=2$  トスレバ

$$6 = C \cdot 2 \cdot 3 = 6C \quad \therefore C = 1$$

コノ例ニ倣ツテ次ノ各恒等式中ノ未定係數

ノ値ヲ求メヨ.

$$5. \frac{3}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$6. A+B(x+2)+C(x+2)^2=1+x^2$$

【例】  $x^3+ax^2+3x+b$  ガ  $x^2+x+2$  デ割切レルヤウニ  $a, b$  ノ値ヲ求メヨ.

解  $x^3+ax^2+3x+b$  ガ  $x^2+x+2$  デ割切レルトスレバ、ソノ商ハ  $x$  ノ一次式デナケレバナラス、ソシテソノ初項ハ被除數ノ初項  $x^3$  ヲ除數ノ初項  $x^2$  デ割ツタ商  $x$  デナケレバナラス. 因テ商ハ  $x+c$  ノ形デアルコトガ分カル. ソコデ

$$x^3+ax^2+3x+b=(x^2+x+2)(x+c)$$

トオケバ、コレハ恒等式デアル.

因テ兩邊ノ係數ヲ比ベテ

$$(1) a=1+c$$

$$(2) 3=2+c$$

$$(3) b=2c$$

$$(2) \text{カラ } c=1$$

コレヲ (1), (3) ニ代入シテ  $a=2, b=2$

コノ例ニ倣ツテ次ノ各問ニ答ヘヨ.

$$7. ax^3+6x^2+5x+1 \text{ ガ } bx^2-2x+1 \text{ デ割切レルヤウ}$$

ウニ  $a, b$  ヲ定メヨ.

8.  $4x^4-ax^3+bx^2-40x+16$  ガ平方ニ開キ切レルヤウニ  $a, b$  ノ値ヲ求メヨ. 原式  $= (2x^2+cx\pm 4)^2$

9.  $a, b, c, d$  ガ等比級數ヲナストキハ次ノ關係式アルコトヲ證明セヨ.

$$(1) (a-b)^3:(b-c)^3=a:d$$

$$(2) (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$$

10.  $x:y=(x+z)^2:(y+z)^2$  ナルトキハ  $x=y$  ナルカマタハ  $z$  ガ  $x$  ト  $y$  トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ.

11. 凸多角形ガアル、ソノ各内角ノ大サハ等差級數ヲナシ、最小角ハ  $120^\circ$  デ公差ハ  $5^\circ$  デアルトイフ. ソノ邊數ヲ求メヨ.

12. 等差級數ノ最初10項ノ和ガ20デ、最初20項ノ和ガ10デアルトイフ、最初30項ノ和ヲ求メヨ.

13. 七項ノ等比級數ガアル、最初ノ三項ノ和ハ26、最後ノ三項ノ和ハ2106デアルトイフ、コノ級數ヲ求メヨ.

14. 2 と 9 との間ニ二ツノ數ヲ插入シ、初ノ三數ハ等差級數ヲナス、後ノ三數ハ等比級數ヲナスヤウニセヨ。

15. 等差級數ガアル、初ノ七項ノ和ハソノ次ノ四項ノ和ヨリ 5 ダケ大キク、第四項、第七項、第十一項ハ等比級數ヲナストイフ。コノ級數ノ初項及公差ヲ求メヨ。

16. 等差級數ヲナス三數ガアツテ、ソノ和ハ 69 デアル、今コノ三數ニ夫々 1, 3, 18 ヲ加ヘレバ等比級數ヲナストイフ、初ノ三數ヲ求メヨ。

17. 等比級數ヲナス三數ガアツテ、ソノ和ハ 14, ソノ平方ノ和ハ 84 デアル、各數ヲ求メヨ。

18. 相異ナル二正數ノ等差中項ガソノ等比中項ノ  $n$  倍ニ等シイトキ、コノ二正數ノ比ヲ求メヨ。

19.  $a, b, c$  ガ調和級數ヲナストキハ  $a - \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, c - \frac{b}{2}$  ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

20.  $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$  ナラバ  $a, b, c, d$  ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。但シ  $x \neq 0$  ト

スル。

21. 二位ノ整數ガアツテ、コノ數ハ各位ノ數字ノ和ノ 8 倍ニ等シイトイフ、ソノ數ヲ求メヨ。

22. 汽車ガアル、ソノ機關車ダケナラバ一時間ニ 40 哩ヲ行クガ、ソレニ列車ヲ連結スルトキハソノ速サハ連結セル列車ノ數ノ平方根ニ比例シテ減ルトイフ。今列車ヲ九ツ連結シタトキノ速サガ毎時 32 哩デアルトスレバ、コノ機關車ニ連結シ得ル列車ノ最大數ハ幾ツカ。

## 第十六篇 對數

本篇デ取扱フ冪ハ正ノ數ノ冪、冪根ハ正ノ數ノ算術的冪根ニ限ルコトトスル。

### 指數定義ノ擴張

#### 168. 正ノ分數冪

第九篇(上卷第202頁第100節)ニ述べタ通り、 $p, q$ ガ正ノ整數デ、且ツ $p$ ガ $q$ ノ倍數例ヘバ $p=kq$ ナラバ

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{kq}} = a^k = a^{\frac{kq}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$$

デアアル。

【例1】  $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

【例2】  $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}} = 5^3$

モシ $p$ ガ $q$ ノ倍數デナケレバ $a^{\frac{p}{q}}$ ハ意味ガナイ。シカシコノ場合ニモ、 $p$ ガ $q$ ノ倍數ナルトキノ意味ニ倣ツテ

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

ト定メル。

【例1】  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$

【例2】  $a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a^1} = \sqrt[5]{a}$

分子ガ1ナル分數ヲ指數トスル或數ノ冪トハ、ソノ分母ヲ根指數トスル同ジ數ノ冪根ノコトデアアル。

【例3】  $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

【例4】  $(a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p}$

任意ノ分數ヲ指數トスル或數ノ冪トハ、同ジ數ノ分子ニ等シイ冪ノ、分母ニ等シイ冪根ノコトデアアル。

#### 169. 定理

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$  ト定メレバ指數定則、即チ

(1)  $a^m a^n = a^{m+n}$

(2)  $(a^m)^n = a^{mn}$

(3)  $(ab)^m = a^m b^m$

ハ $m, n$ ガ正ノ分數ナル場合ニモ成リ立ツ。

【例 1】  $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$

【例 2】  $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{8}} c^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4} + \frac{3}{8}} c^{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} b^{\frac{7}{8}} c^{\frac{17}{15}}$

【例 3】  $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}}$

【例 4】  $(x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{4}})^{\frac{6}{5}} = (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{6}{5}} (y^{\frac{1}{4}})^{\frac{6}{5}} = x^{\frac{2}{3} \times \frac{6}{5}} y^{\frac{1}{4} \times \frac{6}{5}} = x^{\frac{4}{5}} y^{\frac{3}{10}}$

證明ノ例トシテ(1)即チ  $a^m a^n = a^{m+n}$ ヲ證明シヤウ。

今  $m = \frac{p}{q}$ ,  $n = \frac{r}{s}$  [但シ  $p, q, r, s$ ハ何レモ正ノ整数]トセヨ。サウスレバ

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} \\ &= \sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[s]{a^r} \quad [\text{分數冪ノ意味}] \\ &= \sqrt[q^s]{a^{ps}} \times \sqrt[s^q]{a^{qr}} \quad [\text{上卷第100節ニヨル}] \\ &= \sqrt[q^s]{a^{ps}} \times a^{qr} = \sqrt[q^s]{a^{ps+qr}} \\ &= a^{\frac{ps+qr}{q^s}} \quad [\text{分數冪ノ意味}] \\ &= a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = a^{m+n} \end{aligned}$$

(2)及(3)モコレト同様ニシテ證明スルコトガ出來ル。

注意 指數ノ定則ハ指數ガ分數ノトキニモ

當儀マルカラ、コノ定則カラ誘導サレル事柄ハ悉ク指數ガ分數ノ場合ニモ當儀マル。

例ヘバ  $m$ ガ分數デアツテモ、(3)ニヨツテ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

マタ  $m > n$ ナラバ、 $m, n$ ノ一方マタハ雙方ガ分數デアツテモ、(1)ニヨツテ

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

【例】  $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = a$

### 例 題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1.  $x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{6}} x$
2.  $(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$
3.  $(x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{6}})^6$
4.  $a^{\frac{3}{4}} \div a^{\frac{1}{2}}$
5.  $x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{4}} \div x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{8}}$

### 170. 0 冪

前節ニ述べタ通り、 $m, n$ ガ正ノ數デ、 $m-n$ モマタ正ノ數ナラバ、一般ニ

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

デアル。コノ等式ニ於テ  $m=n$  トオケバ左邊ハ  $a^{m-m}$  即チ  $a^0$  トイフ無意味ナ形ニナルガ、右邊ハ  $\frac{a^m}{a^m}$  即チ 1 トナル。

ソコデコノ場合ニモ上ノ等式ガ成リ立ツヤウニ意味ヲツケルコトニシ、一般ニ

$$a^0=1$$

ト定メル。即チ

0 デナイ任意ノ數ノ零冪トハ 1 ノコトデアアル。

### 171. 負數冪

$p, q$  ガ正ノ數デ且ツ  $p-q < 0$  ナラバ

$$(1) \quad a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q}$$

デアアル。サテ  $p-q < 0$  ナルトキ、 $p-q = -m$  トオケバ  $m$  ハ正ノ數デアアル。ソシテ

$$q = p + m$$

從テ上ノ等式(1)ノ左邊ハ  $a^{-m}$  トイフ無意味ナ形ニナルガ、右邊ハ  $\frac{a^p}{a^{p+m}} = \frac{1}{a^m}$  トナル。

ソコデコノトキニモ上ノ等式ガ成リ立ツヤ

ウニ

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

ト定メル。即チ

負ノ數ヲ指數ニ有スル或數ノ冪トハ、ソノ絶對値ヲ指數トスル同ジ數ノ冪ノ逆數ノコトデアアル。

$$\text{【例1】} \quad a^{-4} = \frac{1}{a^4}$$

$$\text{【例2】} \quad a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$$

注意 或數ヲ  $a^n$  デ割ルコトト、ソノ數ニ  $a^{-n}$  ヲ掛ケルコトトハ同ジコトデアアル。

### 172. 定理

$a^0=1$ ,  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  ト定メレバ、指數定則ハ指數ガ 0 マタハ負數ナル場合ニモ成リ立ツ。

$$\text{【例1】} \quad x^{-\frac{5}{6}} \times x^{-\frac{2}{3}} = x^{(-\frac{5}{6}) + (-\frac{2}{3})} = x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{【例2】} \quad a \times a^{-\frac{2}{3}} = a^{1-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{【例3】} \quad (a^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}} = a^{(-\frac{2}{3})(-\frac{3}{4})} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{【例 4】 } (a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^{-2} = a^{\frac{3}{2} \times (-2)} b^{(-\frac{1}{2}) \times (-2)} = a^{-3}b$$

$$\text{【例 5】 } (x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{-1}$$

證明ノ例トシテ  $m, n$  ガ何レモ負數ナルトキ  
 $= a^m a^n = a^{m+n}$  ヲ證明シヨウ。

今  $m < 0, n < 0$  トシ、 $m = -r, n = -s$  トオケバ  $r, s$   
 ハ何レモ正ノ數デアル。

ソコデ

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{-r} a^{-s} \\ &= \frac{1}{a^r} \times \frac{1}{a^s} \quad \text{[負數器ノ意味]} \\ &= \frac{1}{a^{r+s}} \\ &= a^{-(r+s)} \quad \text{[負數器ノ意味]} \\ &= a^{-(-m-n)} = a^{m+n} \end{aligned}$$

ソノ他ノ場合モ同様ニシテ證明スルコトガ  
 出來ル。

### 例 題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1.  $25^{-\frac{1}{2}}$

2.  $a^{-\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{6}}$

3.  $(a^{-2})^{-\frac{1}{2}}$

4.  $(x^{-\frac{5}{6}} y^{-\frac{2}{3}})^{-6}$

5.  $a^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{3}}$

6.  $x^{m-1} x^{1-2m} x^m$

7.  $\frac{4x^{-n}y^{-3}}{5a^{-4}b^{-m}} \times \frac{15a^{-2}b^{3-m}}{14x^n y^{n-3}}$

8.  $\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-6}$

### 173. 一般ノ冪指數ヲ含ム式ノ計算

以上述べた通り指數ノ定則ガ一般ニ當儀マ  
 ルヤウニ指數ノ意味ヲ擴張シタカラ、次ノ例ノ  
 ヤウナ計算ハ指數ガ正ノ整數ノトキト同様ニ  
 演算スレバイ。

【例 1】  $a^{\frac{4}{3}} - 2 + a^{-\frac{4}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}$  ヲ掛ケヨ。

演算

$$\begin{aligned} &a^{\frac{4}{3}} - 2 + a^{-\frac{4}{3}} \\ &\quad a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{2}{3}} \\ \hline &a^2 - 2a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}} \\ &\quad -a^{\frac{2}{3}} + 2a^{-\frac{2}{3}} - a^{-2} \\ \hline &a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} + 3a^{-\frac{2}{3}} - a^{-2} \end{aligned}$$

【例 2】  $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$  ヲ  $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}}$  デ割レ。



## 演算

$$\begin{array}{r} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}} \\ \hline x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}} \\ \hline x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \\ - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{2}{3}} \\ \hline - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{2}} \\ \hline x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{2}{3}} \\ \hline x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{2}{3}} \end{array}$$

## 例 題

- $(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1)(a^{\frac{1}{3}} - 1)$  ヲ展開セヨ.
- $(x^{\frac{1}{2}} + 2 + x^{-1})(x^{\frac{1}{2}} - 2 + x^{-1})$  ヲ展開セヨ.
- $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}$  ヲ  $a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$  デ割レ.
- $\frac{1}{1-x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{1-x}$  ヲ簡單ニセヨ.

## 問 題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

- $25^4 \times 5^{-4}$
- $\frac{1}{3^{-3}}$
- $(-0.1)^{-2}$
- $0.25^{0.5}$
- $(x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{5}{3}})^{-\frac{2}{3}}$
- $a\sqrt{a^{-3} \times \sqrt[4]{a^3}}$
- $(1\frac{3}{5})^{\frac{2}{3}}(22\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}(3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}$

$$8. \frac{x^{q-r} x^{r-n} x^{p-q}}{x^{qr} x^{rp} x^{pq}}$$

- $n$  ガ任意ノ整數ナルトキ  $a + (-1)^n b$  ノ値ヲ求メヨ.  $5 + (-1)^n \times 3$  ハ何カ.

次ノ各方程式ヲ解ケ.

- $a^{2x+3} = a^{8-8x}$  [ $a \neq 1$ ]
- $\sqrt{x-2} \sqrt{a^{x-3}} = \sqrt{a^{x+1}}$  [ $a \neq 1$ ]
- $(\frac{3}{7})^{3x-7} = (\frac{7}{3})^{7x-3}$
- $x^3 + 11x^2 + 50x + 79)^{\frac{1}{3}} - x = 4$
- $(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}} - (x^2 - x + 1)^{\frac{1}{2}} = 2$

## 對 數

## 174. 對數

$a$  ガ 1 ノ外ノ正ノ數デアツテ

$$a^n = b$$

ナルトキ, コノ冪指數  $n$  ヲ  $a$  ヲ底數トス  
ルトキノ  $b$  ノ對數トイヒ, コレヲ

$$\log_a b$$

デ表ハス.

ツマリ

$$a^n = b \quad \text{及} \quad n = \log_a b$$

ハ同ジ事柄ヲ表ハス。即チ

1 デナイ或正ノ數ヲ底數トスルトキ  
ノ或數ノ對數トハ、後ノ數ニ等シイ「底數  
ノ冪」ノ指數ノコトデアアル。

$a$  1 トスレバ、 $n$  ノ値ニ拘ラズ  $a^n$  ハ常ニ  $1^n = 1$  ト  
ナルカラ、 $a^n = b$  ハ  $b$  ガ 1 デナイ限り常ニ不可能デア  
ル。ダカラ對數ノ底數ニハ 1 ヲ用ヒナイノデアアル。

1 デナイドンナ正ノ數ヲ底數トシテモイ、  
ガ、通常ノ計算ニハ 10 ヲ底數トシタトキノ對數  
ヲ用ヒル。コノ場合ニハ符號  $\log$  ノ右ノ下ニ  
小サク書クベキ底數 10 ヲ略スルノガ慣例デア  
ル。

10 ヲ底數トシタトキノ或數ノ對數ヲ  
ソノ數ノ常用對數トイフ。

$a > 0$  ダカラ、 $n$  ガドンナ數デモ(正デモ負モデ 0  
デモ)  $a^n$  ハ必ズ正ノ數デアアル、ダカラ  $b$  ガ正ノ數  
デナケレバ  $a^n = b$  ニ適合スル  $n$  ノ値ハナイ。

因テ次ノ事柄ガアル。

正ノ數デナケレバ對數ヲ有シナイ。

注意 今後特ニ底數ヲ示ス必要ノナイトキハ(例ヘ  
バ任意ノ底數ニツイテ成リ立ツ事柄ヲ述ベルトキナ  
ドニハ)、常用對數ニ限ラズ底數ヲ略シテ書カスコトニ  
スル。

### 175. 對數ノ性質

(第一) スベテ底數ノ對數ハ常ニ 1 デ  
アル。

即チ  $\log_a a = 1$

何トナレバ  $a^1 = a$  ダカラデアアル。

(第二) 底數ノ如何ニ拘ラズ 1 ノ對數  
ハ常ニ 0 デアル。

即チ  $\log_a 1 = 0$

何トナレバ  $a$  ガ何デアツテモ  $a^0 = 1$  ダカラデ  
アル。

(第三) 幾ツカノ數ノ積ノ對數ハ各因  
數ノ對數ノ和ニ等シイ。

但シ底數ハ同一ノモノトスル。次ノ(第四),(第  
五),(第六)ニ於テモ同様デアアル。

例へバ

$$\log xyz = \log x + \log y + \log z$$

證明 今底數ヲ  $a$  トシ

$$\log x = m, \quad \log y = n, \quad \log z = p$$

トオケバ, 對數ノ定義ニヨツテ

$$x = a^m, \quad y = a^n, \quad z = a^p$$

$$\therefore xyz = a^{m+n+p}$$

$$\therefore \log xyz = m + n + p$$

$$= \log x + \log y + \log z$$

(第四) 商ノ對數ハ被除數ノ對數カラ  
除數ノ對數ヲ引イタモノニ等シイ.

即チ 
$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

證明 (第三)ニヨツテ

$$\log \frac{x}{y} + \log y = \log \left( \frac{x}{y} \cdot y \right) = \log x$$

$$\therefore \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

(第五) 或數ノ逆數ノ對數ハ, 原數ノ對  
數ノ符號ヲ變ヘタモノニ等シイ.

即チ 
$$\log \frac{1}{x} = -\log x$$

證明 
$$\begin{aligned} \log \frac{1}{x} &= \log 1 - \log x \\ &= 0 - \log x = -\log x \end{aligned}$$

(第六) 或正ノ數ノ冪ノ對數ハ, ソノ數  
ノ對數ニソノ冪指數ヲ掛ケタモノニ等  
シイ.

即チ  $n$  ガ何デアツテモ (正デモ負デモ0デモ整  
數デモ分數デモ)

$$\log x^n = n \log x$$

證明 底數ヲ  $a$  トシ  $\log x = p$  トスレバ

$$x = a^p$$

故ニ  $n$  ノ値ニ拘ハラズ

$$x^n = (a^p)^n = a^{np}$$

$$\therefore \log x^n = np = n \log x$$

例へバ 或正ノ數ノ平方, 立方, 第四冪, ...  
ノ對數ハ夫々原數ノ對數ノ二倍, 三倍,  
四倍, .....ニ等シイシ, ソノ平方根, 立方根,  
第四冪根, .....ノ對數ハ夫々原數ノ對數  
ノ二分ノ一, 三分ノ一, 四分ノ一, .....ニ等  
シイ.

以上述ベタ性質ガアルタメニ、對數ヲ用ヒレバ或數ノ乗除ハソノ數ノ對數ノ加減ニ、冪及冪根ヲ求メルコトハ對數ノ上ニ簡單ナ乗除ヲ行フコトニ導カレ、一般ノ數計算ノ上ニ非常ナ便利ヲ得ルノデアアル。

## 例 題

次ノ各式ヲ  $\log a, \log b, \log c$  デ表ハセ。但シ底數ハ總テニ通ジテ同一トスル。

$$1. \log \frac{ab}{c} \qquad 2. \log \frac{a^2c^3}{b^3}$$

$$3. \log(\sqrt[3]{ab^2c^3} \times \sqrt[3]{abc^2})$$

次ノ各式ノ値ヲ求メヨ。

4.  $\log_2 8$       5.  $\log_3 2$       6.  $\log_3 3$   
 7.  $\log_4 \frac{1}{8}$       8.  $\log_5 0.04$       9.  $\log_{3\sqrt{3}} 81$   
 10.  $\log_{0.5} 128$

## 常 用 對 數

176. 本節以下ニ於テハ專ラ常用對數ニ限ル特別ノ性質ヲ論ズル。

(第一) 先ツ定義ニヨツテ

10, 100, 1000, ..... 即チ  $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ ノ常用對數ハ、夫々 1, 2, 3, .....ニ等シイ。

次ニ

0.1, 0.01, 0.001, ..... 即チ  $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$ ノ對數ハ夫々 -1, -2, -3, .....ニ等シイ。

(第二) 上ノヤウニ、冪指數ガ大キク(小サク)ナレバナルホド冪其者モ大キク(小サク)ナルカラ、1ト10トノ間ニアル數ノ對數ハ0ト1トノ間ニアル數デアアル。マタ10ト100トノ間ニアル數ノ對數ハ1ト2トノ間ニアル數デアアル。

一般ニ、 $10^n$ ト $10^{n+1}$ トノ間ニアル數ノ對數ハ $n$ ト $n+1$ トノ間ニアル數デアアル。因テ

1ヨリ大キイ數ノ對數ノ整數部ハ、ソノ數ノ整數部ノ桁數カラ1ヲ引イタ數デアアル。

例ヘバ

$$\log 5796 = 3 + (1 \text{ヨリ小サイ或正ノ數})$$

實際ハ  $\log 5796 = 3.7631 \dots$ デアアル。即チ

$$10^{3.7631} \quad \text{即チ} \quad 10^{\frac{37631}{10000}} \quad \text{即チ} \quad \sqrt[10000]{10^{37631}}$$

ヲ計算スレバ約 5796 ニナルノデアル。

(第三) 1 ト 0.1 トノ間ニアル數ノ對數ハ 0 ト  
-1 トノ間ニアル數デアル。 マタ 0.1 ト 0.01 ト  
ノ間ニアル數ノ對數ハ -1 ト -2 トノ間ニアル  
數, 0.01 ト 0.001 トノ間ノ數ノ對數ハ -2 ト -3  
トノ間ノ數デアル。

一般ニ,  $10^{-n}$  ト  $10^{-(n+1)}$  トノ間ニアル數, 即チ小  
數點下第  $n$  桁マデ 0 ガ並ブ或數ノ對數ハ負ノ  
數デアツテ, ソノ絶對値ノ整數部ハ小數點ノ右  
ニ並ブ 0 ノ數即チ  $n$  ニ等シイ。

例ヘバ

$$\log 0.00473 = -[2 + (1 \text{ ヲリ小サイ或正ノ數})]$$

ソコデ例ヘバ

$$\log 0.00473 = -2.3251$$

トスレバ, コレヲ

$$\log 0.00473 = -3 + (1 - 0.3251)$$

$$= -3 + 0.6749$$

ト書クコトガ出來ル。

一般ニ, 1 ヲリ小サイ數ノ對數ハ負數デアツ

テ, ソノ絶對値ノ整數部ヲ  $n$  トシ小數部ヲ  $p$  ト  
スレバ, コノ對數ハ  $-(n+p)$  ダカラ, コレハ常ニ  
 $-(n+1) + (1-p)$

ト書クコトガ出來ル。 コノ場合ニ  $1-p$  ハ必ズ  
1 ヲリ小サイ正ノ數デアル。

因テ, 負ナル對數ハ上ノヤウニコレヲ  
負ノ整數ト正ノ小數トノ和ノ形ニ直シ,  
ソシテコノ負ナル整數ノ前ニ書クベキ  
符號 - ヲソノ整數ノ上ニ書キ, ソノ右ニ  
小數點ヲ打チ, ソノ右ニ正ナル小數部ヲ  
書クコトト定メル。

即チ上ノ例デハ

$$\log 0.00473 = \bar{3}.6749$$

ト書ク。

### 177. 指標及假數

對數ノ整數部ヲ指標トイヒ, ソノ小數  
部ヲ假數トイフ。

例ヘバ  $\log 5796 = 3.7631$  ノ指標ハ 3, 假數ハ .7631,  
マタ  $\log 2.5 = 0.3979$  ノ指標ハ 0, 假數ハ .3979, マ

タ  $\log 0.00473 = \bar{3}.6749$  ノ 指 標 ハ  $\bar{3}$ , 假 數 ハ  $.6749$ , マ  
 タ  $\log 100 = 2.0000$  ノ 指 標 ハ  $2$ , 假 數 ハ  $.0000$  デ ア ル.

### 178. 定 理

ス ベ テ, 或 數 ノ 小 數 點 ヲ 幾 桁 カ 右 ノ 方  
 或 ハ 左 ノ 方 ニ 移 シ テ モ コ ノ 數 ノ 對 數 ノ  
 假 數 ハ 變 ラ ナ イ, ソ シ テ ソ ノ 指 標 ハ 小 數  
 點 ヲ 移 シ タ 桁 數 ダ ケ 増 シ 或 ハ 減 ル.

證 明 例 ヘ バ

$$\log 61.331 = 1.7877$$

ト ス レ バ

$$\begin{aligned} \log 61331 &= \log(61.331 \times 1000) \\ &= \log 61.331 + \log 1000 \quad [\text{第 175 節}] \\ &= 1.7877 + 3 = 4.7877 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{マ タ } \log 0.061331 &= \log(61.331 \div 1000) \\ &= \log 61.331 - \log 1000 \quad [\text{第 175 節}] \\ &= 1.7877 - 3 = \bar{2}.7877 \end{aligned}$$

$$\text{マ タ } \log 0.025 = \bar{2}.3979$$

ト ス レ バ

$$\log 2.5 = \log(0.025 \times 100)$$

$$= \log 0.025 + \log 100 \quad [\text{第 175 節}]$$

$$= \bar{2}.3979 + 2 = 0.3979$$

デ ア ル.

一 般 ニ, 或 數  $A$  ノ 小 數 點 ヲ  $n$  桁 ダ ケ 右 ニ 移 シ  
 タ モ ノ ハ  $A \times 10^n$  ニ 等 シ イ シ,  $n$  桁 ダ ケ 左 ニ 移 シ  
 タ モ ノ ハ  $A \div 10^n$  ニ 等 シ イ. サ テ

$$\log(A \times 10^n) = \log A + \log 10^n = \log A + n$$

$$\log(A \div 10^n) = \log A - \log 10^n = \log A - n$$

故 ニ  $\log A$  ノ 指 標 ヲ  $m$ , ソ ノ 假 數 ヲ  $\alpha$  ト ス レ バ

$$\log A = m + \alpha$$

$$\log(A \times 10^n) = (m + n) + \alpha$$

$$\log(A \div 10^n) = (m - n) + \alpha$$

デ ア ル. 卽 チ  $\log(A \times 10^n)$  モ  $\log(A \div 10^n)$  モ ソ ノ 假  
 數 ハ 何 レ モ  $\alpha$  デ ア ツ テ, ソ ノ 指 標 ハ 一 ツ ハ  $m + n$   
 ニ 等 シ イ シ, 一 ツ ハ  $m - n$  ニ 等 シ イ.

### 179. 指 標 ノ 求 メ 方 及 與 ヘ ラ レ タ 數 ヲ 對 數 ト ス ル 數 ノ 位 取

第 176, 177 節 ニ 述 ベ タ コ ト ニ ヨ ツ テ, 次 ノ 事  
 柄 ガ 分 カ ル.

(第一)  $n$  桁ノ整數部ヲ有スル數ノ對數ノ指標ハ  $n-1$  デアル。

逆ニ, 對數ノ指標ガ正ノ數  $n$  ナル數ハ  $n+1$  桁ノ整數部ヲ有スル數デアアル。

對數ノ指標ガ 0 ナル數ハ一桁ノ整數部ヲ有スル數デアアル。

(第二) 小數第一位, 第二位, 第三位, ……ニ始メテ有效數字ヲ有スル數ノ對數ノ指標ハ夫々  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ ,  $\bar{3}$ , ……デアアル。

逆ニ, 對數ノ指標ガ負ノ數  $\bar{n}$  ナル數ハ小數第  $n$  位ニ始メテ有效數字ガアル數デアアル。

例ヘバ對數ガ  $\bar{3}.6021$  デアル數ハ小數點下ニ 0 ガニツアツテ, 三桁目ニ始メテ有效數字ガ顯ハレル數デアアル。

ツマリ 或數ノ對數ノ指標ハソノ數ノ位取ヲ定メルモノデアツテ, 對數ノ假數ハソノ數ガドンナ數字ヲドンナ順序ニ並ベテ書イタカヲ定メルモノデアアル。

## 例 題

次ノ各數ノ對數ノ指標ヲ求メヨ。

1. 3174                      2. 62.57

3. 3.502                      4. 0.4

5. 0.00013                      6. 0.012345

$\log 2563 = 3.4087$  ヲ知ツテ次ノ各式ノ値ヲ求メヨ。

7.  $\log 2,563$                       8.  $\log 256300$

9.  $\log 0.02563$

$\log 324 = 2.5105$  ヲ知ツテ次ノ各數ヲ對數トスル數ヲ求メヨ。

10. 4.5105                      11. 0.5105

12.  $\bar{2}.5105$

$\log 2 = 0.3010$ ,  $\log 3 = 0.4771$  ヲ知ツテ次ノ各式ノ値ヲ求メヨ。

13.  $\log 12$                       14.  $\log 5$

15.  $\log 1.5$                       16.  $\log \sqrt{1.8}$

## 對數表ノ用法

## 180. 對數表

對數表トハ任意ノ數ノ對數ノ近似値ヲ小數點下或位マデ求メテコレヲ表ニ作ツタモノノコトデアアル。

各對數ノ指標ハ前節ニ述べタコトニヨツテ直ニ分カルカラ、對數表ノ中ニハコレヲ掲ゲテナイ、タゞ對數ノ假數(通例末位未滿ヲ四捨五入シタモノ)ダケヲ、シカモ小數點ヲ省イテ掲ゲテアル。

是等ノ假數ハ、第 178 節ニ述べタコトニヨツテ表中ニアル數ノ位取ヲ任意ニ變ヘタモノノ對數ニ共通ナモノデアアル。

表中ニ書イテアル假數ノ桁數ガ四桁ノモノヲ四桁ノ對數表五桁ノモノヲ五桁ノ對數表トイフ、ソノ外三桁、六桁、七桁、十桁等ノ對數表ガアル。夫々計算ノ目的ニヨツテ適當ナモノヲ使フノデアアルガ、普通ノ場合ニ用ヒラレルノハ多クハ四桁ノ表デアアル。

本書デハスベテ卷末ニ添ヘテアル四桁ノ對數表ヲ用ヒルコトトスル。

## 181. 或數ノ對數ノ求メ方

【例 1】  $\log 18.5$  ヲ求メヨ。

コノ數ノ整數部ハ二桁ダカラ、求メル對數ノ指標ハ 1 デアル。ソシテ表中數ト書イテアル行ニ於テ、18 ト書イテアル列ト最上欄ニ 5 ト書イテアル行トノ交叉點ニアル數 2672 ガ  $\log 185$  ノ假數、即チ  $\log 18.5$  ノ假數デアアル。即チ

$$\log 18.5 = 1.2672$$

【例 2】  $\log 1.856$  ヲ求メヨ。

求メル對數ノ指標ハ 0 デ、ソノ假數ハ 185.6 ノ對數ノ假數ニ等シイ。サテ表ノ中ニ 185.6 ノ對數ノ假數ハナイ。シカシ 185.6 ヲ夾ム二數 185 ト 186 トノ對數ノ假數ハアルカラ

$$\log 1.85 = 0.2672$$

$$\log 1.86 = 0.2695$$

ナルコトハ分カル。ソシテコノ二ツノ對數ノ差ハ小數第四位ノ 23 デアル。



サテ二數ノ差ガソノ各數ニ比ベテ極メテ小サイトキハ、是等ノ數ノ對數ノ差ハソノ數ノ差ニ比例スルモノト見做シテ實際ノ計算上差支ナイモノデアル。

コノ例デハ二數 185 ト 186 トノ差 1 ニ對シ對數ノ差ガ小數第四位ノ 23 ダカラ、185 ト 185.6 トノ差 0.6 ニ對スル對數ノ差ハ

$$23 \times 0.6 = 13.8$$

コレヲ四捨五入シテ 14 トシ、 $\log 1.85$  ノ小數第四位ノ處ニ加ヘテ  $\log 1.856 = 0.2686$  ヲ得ル。

注意 表中ノ引續イタ二數ノ差(例ヘバ本例ノ 23)ノコトヲ表差トイフ。

實際ニハ上ノ掛算ヲ實行セズニ濟ムヤウニ、表ノ中ニ比例部分トイフ欄ヲ置キ、各表差ニツイテコレニ 0.1, 0.2, …… 0.9 ヲ掛ケタ結果ヲ表ニ作ツテソノ欄ノ中ニ書イテアルカラ、ソレニヨツテ直ニ求メラレル。因テ實際ノ演算ハ次ノヤウニスル。

$$\begin{array}{r} \text{演算} \quad \log 1.85 = 0.2672 \quad (\text{表差 } 23) \\ \quad \quad \quad 6 \dots\dots 138 \\ \hline \therefore \quad \log 1.856 = 0.2686 \end{array}$$

【例 3】  $\log 2.1827$  ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r} \text{演算} \quad \log 2.18 = 0.3385 \quad (\text{表差 } 19) \\ \quad \quad \quad 2 \dots\dots\dots 38 \\ \quad \quad \quad 7 \dots\dots\dots 133 \\ \hline \therefore \quad \log 2.1827 = 0.3390 \end{array}$$

【例 4】  $\log 0.0025748$  ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r} \text{演算} \quad \log 0.00257 = \bar{3}.4099 \quad (\text{表差 } 17) \\ \quad \quad \quad 4 \dots\dots\dots 68 \\ \quad \quad \quad 8 \dots\dots\dots 136 \\ \hline \therefore \quad \log 0.0025748 = \bar{3}.4107 \end{array}$$

例 題

次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

- 1. 4567                      2. 23.56                      3. 0.7539
- 4. 0.0084725              5. 1.9742

182. 或對數ノ眞數ノ求メ方

或數ノ對數トイフ語ニ對シテ元ノ數ヲコノ對數ノ眞數トイフ。

【例】 對數  $\bar{3}.1394$  ノ眞數ヲ求メヨ。

指標ガ  $\bar{3}$  ダカラ、眞數ハ小數第三位ニ始メテ有效數字ガアル數デアル。ソコデ表中對數ノ行ニ於テ 1394 ヲ夾ム二數 1367 及 1399 ニ對應ス

ル表中ノ數ヲ見レバ夫々 137 及 138 ダカラ, 求  
 メル眞數ハ 0.00137 ト 0.00138 トノ間ニアルコ  
 トガ分カル.

サテコノ例ノ表差ハ 32 デ, コレニ對シ數ノ差  
 ハ 138-137=1 ダカラ, 與ヘラレタ假數 1394 ト  
 1367 トノ差即チ

$$1394 - 1367 = 27$$

ニ對スル數ノ差ハ

$$1 \times \frac{27}{32} = \frac{27}{32}$$

トナル.

サテコノ割算ヲ實行セズニソノ商ヲ求メル  
 タメニ所謂比例部分ヲ利用スルコトガ出來ル.  
 即チマツ比例部分ノ 32 トアル所ノ下デ 27 ニ最  
 モ近い數ヲ見レバ 8 ノ右ニアル 25.6 デアル.

即チ  $32 \times 0.8 = 25.6$

故ニ  $\frac{27}{32}$  ヲ四捨五入シテ小數第一位マデ求  
 メレバ 0.8 ヲ得ルコトガ分カル. 故ニ求メル  
 眞數ハ  $0.00137 + 0.000008 = 0.001378$

コノ演算ハ通常次ノヤウニ行フ.

手  
算  
法

演算

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{.1394} \quad (\text{表差 } 32) \\ \sqrt[3]{.1367 \dots 0.00137} \\ \hline 27 \\ 256 \dots \dots 8 \\ \hline 0.001378 \dots \dots \text{答} \end{array}$$

例 題

次ノ各對數ノ眞數ヲ求メヨ.

- 1. 3.8954      2. 0.6914      3. 1.7521
- 4. 1.7401      5. 5.9919

對 數 計 算

183. 【例 1】  $3.1279^2 \times 0.993$  ヲ計算セヨ.

解 求メル數ヲ  $x$  トスレバ

$$\log x = \log 3.1279^2 + \log 0.993$$

$$= 2 \log 3.1279 + \log 0.993$$

ソコデ次ノヤウニ演算スル.

$2 \log 3.1279 = 0.9904$	補助計算
$\log 0.993 = 1.9969$	$\log 3.12 = 0.4942$
$\log x = 0.9873$	$7 \dots \dots 91$
$0.9872 \dots 9.71$	$9 \dots \dots 117$
$1 \dots \dots 2$	$\log 3.1279 = 0.4952$
$x = 9.712 \dots \dots \text{答}$	

【例2】  $\frac{0.993}{13.784}$  ヲ計算セヨ.

解 求メル數ヲ  $x$  トスレバ

$$\log x = \log 0.993 - \log 13.784$$

$\log 0.993 = \bar{1}.9969$	$\log 13.7 = 1.1367$
$\log 13.784 = 1.1394$	$\begin{array}{r} 8 \quad 256 \\ 4 \quad 128 \end{array}$
$\log x = \bar{2}.8575$	$\log 13.784 = 1.1394$
$\quad \quad \quad \bar{2}.8573 \dots 0.0720$	
$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \bar{2} \dots \dots \dots 3$	
$\quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 0.07203 \dots \dots$	答

### 184. 餘對數

スベテ、一ツノ數ノ逆數ノ對數(即チ原數ノ對數ノ符號ヲ變ヘタモノ)ヲ原數ノ餘對數トイヒ、コレヲ **colog** ナル記號デ表ハスコトガアル.

前節ノ例2ノヤウニ一數  $a$  ヲ他ノ數  $b$  デ割ルコトハ、 $a = b$  ノ逆數ヲ掛ケルコトニ歸スルカラ、 $a$  ノ對數カラ  $b$  ノ對數ヲ引ク代リニ、 $a$  ノ對數ニ  $b$  ノ餘對數ヲ加ヘレバイ、.

サテ  $b$  ノ對數ノ指標ヲ  $n$ 、假數ヲ  $\alpha$  トスレバ

$$\text{colog } b = -\log b = -(n + \alpha) = -(n + 1) + (1 - \alpha)$$

故ニ、 $b$  ノ餘對數ノ指標ハ、 $b$  ノ對數ノ指標ニ **+1** ヲ加ヘテソノ符號ヲ變ヘタモノ、ソノ假數ハ  $b$  ノ對數ノ假數ヲ1カラ引イタモノニ等シイ.

$$\text{例ヘバ } \log b = 2.4358 \text{ ナラバ } \text{colog } b = \bar{3}.5642$$

指標ハ  $2 = +1$  ヲ加ヘ符號ヲ變ヘテ  $\bar{3}$ 、假數ハ最初三桁ハ  $4, 3, 5$  ヲ9カラ引イテ夫々  $5, 6, 4$ 、最後ノ一桁ハ  $8$  ヲ10カラ引イテ  $2$

$$\text{マタ } \log b = \bar{5}.0374 \text{ ナラバ } \text{colog } b = 4.9626$$

【例1】  $\sqrt[3]{\frac{43 \times 237}{879^4}}$  ヲ計算セヨ.

解 求メル數ヲ  $x$  トスレバ

$$\log x = \frac{\log 43 + \log 237 + 4 \text{colog } 879}{3}$$

$\log 43 = 1.6335$	$\log 879 = 2.9440$
$\log 237 = 2.3747$	$\text{colog } 879 = \bar{3}.0560$
$4 \text{colog } 879 = \bar{12}.2240$	
$\quad \quad \quad 3) \bar{8}.2322$	
$\log x = \bar{3}.4107$	
$\quad \quad \quad \bar{3}.4099 \dots \dots 0.00257$	
$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \bar{8}$	
$\quad \quad \quad \quad \quad \quad 85 \dots \dots \dots 5$	
$\quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 0.002575 \dots \dots$	答

注意  $\bar{8}.2322$  ヲ3デ割ツタモノノ小數部ヲ正ノ數ニスルタメ、指標ノ絶對値8ヲ、ソレヨリ

モ大キクテ最モコレニ近イ3ノ倍數9ニ換ヘ、  
 ソノ代リニ今増シタ數1ヲ假數ニモ加ヘテ  
 $\bar{9}+1.2322$ トシ、ソレカラ負ノ數ト正ノ數トヲ別  
 別ニ3デ割ツタノデアアル。

【例2】  $\sqrt[5]{\frac{0.075 \times 0.487^2}{3.4^3 \times 0.00737}}$ ヲ計算セヨ。

解 求メル數ヲxトスレバ

$$\log x = \frac{\log 0.075 + 2 \log 0.487 + 3 \operatorname{colog} 3.4 + \operatorname{colog} 0.00737}{5}$$

$\begin{array}{r} \log 0.075 = \bar{2}.8751 \\ 2 \log 0.487 = \bar{1}.3750 \\ 3 \operatorname{colog} 3.4 = \bar{2}.4055 \\ \hline \operatorname{colog} 0.00737 = 2.1325 \\ \hline 5) \bar{2}.7881 \\ \log x = \bar{1}.7576 \\ \hline \bar{1}.7574 \dots 0.572 \\ \hline 2 \dots \dots \dots 25 \\ \hline x = 0.5723 \dots \dots \text{答} \end{array}$	$\begin{array}{r} \log 0.487 = \bar{1}.6875 \\ \log 3.4 = 0.5315 \\ \operatorname{colog} 3.4 = \bar{1}.4685 \\ \log 0.00737 = \bar{3}.8675 \end{array}$
---	---

【例3】  $\frac{a^5bc^2}{d^3}$ ニ於テ  $a=-105, b=2.13, c=-0.2, d=170$ ナルトキ、ソノ數値ヲ求メヨ。

解 マヅ求メル數値ノ符號ヲ定メル。コ、  
 デハ負數デアアル。

サテ乗除ダケノ結果ノ絶對值ハ各文字ヲソ  
 ノ絶對值デ置換ヘテ計算シタモノニ等シイコ

ト明カデアアル。

一般ニ、負ノ因數ヲ有スル乗除ノ結果ヲ對數  
 計算デ求メルニハ、乗除ノ符號ノ規則ニヨツテ、  
 マヅソノ符號ヲ定メ、次ニ是等ノ因數ヲバソノ  
 絶對值デ置換ヘ、ソシテ對數表ニヨツテ計算シ、  
 ソレニサキニ定メテオイタ符號(本例デハ-)ヲ  
 附ケヨ。

本例デハ所要ノ絶對值ヲxトスレバ

$$\log x = 5 \log 105 + \log 2.13 + 2 \log 0.2 + 3 \operatorname{colog} 170$$

$\begin{array}{r} 5 \log 105 = 10.1060 \\ \log 2.13 = 0.3284 \\ 2 \log 0.2 = \bar{2}.6020 \\ 3 \operatorname{colog} 170 = \bar{7}.3088 \\ \hline \log x = 2.3452 \\ \hline 2.3444 \dots \dots 221. \\ \hline 8 \dots \dots \dots 4 \\ \hline x = 221.4 \end{array}$	$\begin{array}{r} \log 105 = 2.0212 \\ \log 0.2 = \bar{1}.3010 \\ \log 170 = 2.2304 \\ \operatorname{colog} 170 = \bar{3}.7696 \end{array}$
---	---

答 -221.4

例 題

對數表ヲ用ヒテ次ノ各式ヲ計算セヨ。

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| 1. $\frac{125 \times 72.8}{4.55}$ | 2. $3.1416 \times 124 \times 85^2$         |
| 3. $\frac{22}{7} \times 1.5^3$    | 4. $\sqrt{\frac{52.8 \times 68.6}{462.5}}$ |

5.  $\frac{-156 \times 2.357^2}{1.6^2 \times 4.3}$       6.  $\frac{0.15^2 \times 0.04^{-3}}{\sqrt{6}}$

### 185. 應用問題

【例1】 底面ノ半径 4.3 糎, 高サ 8.4 糎ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。但シ  $\pi=3.1416$  トシテ計算セヨ。

解 直圓錐ノ底面ノ半径ヲ  $r$  糎, 高サヲ  $h$  糎, 體積ヲ  $V$  立方糎トスレバ, 幾何學ニヨツテ次ノ公式ガアル。

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\therefore \log V = \log \pi + 2 \log r + \log h + \text{colog } 3$$

コ、デハ  $\pi=3.1416, r=4.3, h=8.4$  トオイテ計算スレバ

$\log \pi = 0.4971$	$\log 3.14 = 0.4969$
$2 \log r = 1.2670$	$1 \dots \dots \dots 14$
$\log h = 0.9243$	$6 \dots \dots \dots 84$
$\text{colog } 3 = 1.5229$	$\hline \log \pi = 0.4971$
$\log V = 2.2113$	$\log 4.3 = 0.6335$
$2.2095 \dots \dots 162.$	$\log 3 = 0.4771$
$\quad \quad 18$	
$\quad \quad 189 \dots \dots 7$	
$\quad \quad \hline V = 162.7$	

答 162.7 立方糎

【例2】 圓壩形 1 立樹ハソノ直徑(内法)ト深サトガ相等シイ, ソノ直徑ヲ耗ノ位マデ計算セヨ。但シ  $\pi=3.1416$  トセヨ。

解 底ノ半径ヲ  $x$  耗トスレバ, コノ樹ノ容量ハ  $\pi x^2 \times 2x$  即チ  $2\pi x^3$  立方耗デアル。ソシテ 1 立ハ 1000 立方糎即チ 1000000 立方耗ダカラ, 次ノ方程式ヲ得ル。

$$2\pi x^3 = 1000000$$

$$\therefore x = \sqrt[3]{\frac{1000000}{2\pi}}$$

$$\therefore \log x = \frac{1}{3}(\log 1000000 + \text{colog } 2\pi)$$

$\log 1000000 = 6.0000$	$\log 3.14 = 0.4969$
$\text{colog } 2\pi = 1.2019$	$1 \dots \dots \dots 14$
$3 \int 5 \ 2019$	$6 \dots \dots \dots 84$
$\log x = 1.7340$	$\hline \log \pi = 0.4971$
$x = 54.2$	$\log 2 = 0.3010$
$\therefore 2x = 108.4$	$\hline \log 2\pi = 0.7981$

答 108 耗

### 例 題

1. 直徑 12.56 糎ナル球ノ體積ヲ求メヨ。但シ  $\pi=3.1416$  トセヨ。
2. 中空ナル銅ノ圓壩ガアル, 外徑 0.234 米,

内徑 0.105 米, 高サ 0.568 米デアル, ソノ目方ヲ求  
メヨ. 但シ  $\pi = \frac{22}{7}$ , 銅ノ比重ヲ 8.9 トスル.

## 問 題

1.  $\log 2 = 0.3010$ ,  $\log 3 = 0.4771$  ヲ知ツテ次ノ各  
式ノ値ヲ求メヨ.

$$\log 360 \quad \log \sqrt[3]{0.075} \quad \log \frac{2.4}{\sqrt[3]{18}}$$

對數表ヲ用ヒズニ次ノ各式ノ値ヲ求メヨ.

2.  $\log(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$

3.  $2 \log \frac{5}{2} + \log 18 - \log \frac{9}{8}$

4.  $\log 100 - \log 80 + \log 75 - \log 1.3 + \frac{1}{2} \log 10816$

$$-2 \log \frac{1}{2} \sqrt[3]{3}$$

5. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

$$\log_3 x = 2, \quad \log_4 x = -3, \quad \log_5 x = 0,$$

$$\log_x 3 = 2, \quad \log_x \frac{1}{3} = 0.5$$

6. 方程式  $2 \times 10^{3x} - 10^{1-3x} = 1$  ヲ解ケ. 但シ  
 $\log 2 = 0.3010$

7. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$18y^x - y^{2x} = 81, \quad 3^x = y^2$$

8. 方程式  $(\log x)^2 + \log x^2 = 10$  ヲ満足セシメル  
 $x$  ノ値ヲ四捨五入シテ最初ノ有效數字以下三  
位マデ求メヨ.

9. 次ノ各等式ヲ證明セヨ.

$$\log_a b \times \log_b a = 1, \quad \log_a b \times \log_b c = \log_a c$$

【例】  $\log 2 = 0.3010$  ヲ知ツテ  $2^{48}$  ヲ計算シタ結  
果ノ桁數ヲ求メヨ.

解  $\log(2^{48}) = 48 \log 2 = 48 \times 0.3010$

$$= 14.4480$$

答 15 桁

10.  $8^{50}$  ハ幾桁ノ數カ. 但シ  $\log 2 = 0.3010$ .

11.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{95}$  ヲ小數ニ直ストキハ小數點下幾  
桁目ニ初メテ有效數字ガ顯ハレルカ. 但シ  
 $\log 2 = 0.3010$

## 第十七篇 歩合算

## 186. 歩合算ノ基礎ノ公式

或量  $A$  = 對スルコレト同種類ノ他ノ量  $B$  ノ比ヲ歩合ト呼ブ場合ニハ  $A$  ヲ元高,  $B$  ヲ歩合高トイフ. ソノ歩合ヲ  $r$  トスレバ

$$r = \frac{B}{A}$$

從テ

$$B = Ar$$

$$A = \frac{B}{r}$$

コレガ歩合算ニ關スル基礎ノ公式デアアル.

## 187. 殘高及合計高

元高ヲ  $A$ , 歩合ヲ  $r$  トスレバ, 歩合高ハ  $Ar$  デアル. ソコデ元高カラ歩合高ヲ引イタ殘高ヲ  $D$ , 元高ト歩合高トヲ加ヘタ合計高ヲ  $S$  トスレバ次ノ公式ヲ得ル.

$$(1) \quad D = A - Ar = A(1 - r)$$

$$(2) \quad S = A + Ar = A(1 + r)$$

割引ノ結果ヲ求メルニハ (1) ヲ用ヒ, 割増ノ結果ヲ求メルニハ (2) ヲ用ヒル.

【例】或品物ヲ定價ノ 2 割引ニ賣ツテモ尙 1 割 2 分ノ利益ガアルトイフ, 定價ハ原價ノ幾割増カ.

解 定價ヲ  $x$  圓トスレバ賣價ハ  $(1 - 0.2)x$  圓, マタ原價ヲ  $y$  圓トスレバ賣價ハ  $(1 + 0.12)y$  圓デアアル. コノ二ツガ相等シイカラ

$$(1 - 0.2)x = (1 + 0.12)y$$

$$\therefore 0.8x = 1.12y$$

$$\therefore x = 1.4y$$

故ニ定價ハ原價ノ 4 割増デアアル.

## 例題

1. 或商品ニソノ原價ト, ソノ 2 割ニ當ル見越利益トノ和ヲ保險金額トシテ海上保險ヲ附ケ, ソノ保險料トシテ 60 圓ヲ支拂ツタ, ソシテ保險料ノ歩合ハ 2.5% デアルトイフ. コノ商品ノ原價ハ何程カ.

2. 定價ノ 5 分引ニ賣ツテモ尙原價ノ 1 割 2 分ヲ儲ケルヤウニスルニハ定價ヲ原價ノ幾

割増ニスベキカ。(分未滿四捨五入)

3. 或食料品ノ原料ノ價ハ賣價ノ7割デ、賣買ソノ他ニ要スル諸雜費ハ賣價ノ2割デアル。ソノ後物價下落ノタメ原料デ5割、諸雜費デ2割5分安クナツタタメ賣値ヲ幾割カ引下ゲタケレドモ尙利益額ハ從來ヨリ5割ダケ増シタトイフ。コノ食料品ノ賣價ヲ引下ゲタ歩合ハ何程カ。

4. 或人6圓デ甲乙二箇ノ商品ヲ仕入レ、何レモ2割ノ利益ヲ見テ定價ヲ附ケテ置イタガ、都合ニヨリ甲ハ定價ノ2割引、乙ハ定價ノ1割引デ賣拂ツタタメ全體デハ損益ノナイ勘定ニナツタトイフ、各ノ仕入値段ヲ求メヨ。

5. 或商品ヲ原價ノ5分増ニ賣ルトキノ値段ト定價ノ1割引ニ賣ルトキノ値段トニ3錢ノ差ガアル、マタ原價ノ1割増ニ賣ルトキノ値段ト定價通りニ賣ルトキノ値段トニ10錢ノ差ガアル。コノ商品ノ原價及定價各、幾ラカ。

### 188. 單利法ノ公式

利息ガ元金ト期間トニ比例スルトキノ利息算ヲ後ニ言フ複利法ト區別スルタメニ單利法トイフ。

今元金ヲA、單位期間ノ利率ヲr、期間ヲ表ハス數ヲt、ソノ期間ニ於ケル利息ヲBトスレバ單利法ニ關スル次ノ公式ヲ得ル。

$$B = Art$$

$$\text{從テ } A = \frac{B}{rt}, \quad r = \frac{B}{At}, \quad t = \frac{B}{Ar}$$

マタ元利合計ヲSトスレバ

$$S = A + Art = A(1 + rt)$$

#### 例 題

1. 金500圓ヲ甲乙二口ニ分ケ、甲口ハ年利1割2分、乙口ハ年利1割5分デ貸シタトコロガ、1箇年ノ末ニ乙口カラノ利息ハ甲口カラノ利息ヨリ75錢ダケ多カツタトイフ。各口ノ元金ヲ求メヨ。

2. 元金618圓ヲ甲乙丙ノ三口ニ分ケテ貸付ケルノニ、ソノ期間甲ハ4箇月、乙ハ6箇月、丙



ハ 8 箇月トシ、且夫々満期ニ於テ受取ルベキ元利合計ヲ各口トモ相等シクシヨウトスル、利率ヲ何レモ年 6 分トシテ各口ノ貸附金高ヲ求メヨ。(圓未滿四捨五入)

### 189. 手形ノ割引

或期日ニ支拂ハレルベキ手形(即チソレト引換ニ金錢ノ受渡ヲナス所ノ書附)ノ所有者ガソノ支拂期日前ニ現金ノ必要アル場合ニハ通例或利率デソノ手形面ニ書イテアル金高(即チ額面高)ヲ元金トシ、ソノ日カラ支拂期日マデヲ期間トシタ利息ヲ額面高カラ引去ツタ價格デコレヲ他ノ者(通例銀行マタハ手形仲買人)ニ賣渡ス。コレヲ手形ノ割引トイヒ、ソノ時ニ用ヒタ利率ヲ割引歩合、引去ツタ金高ヲ割引高(割引料)、額面カラ割引高ヲ引イタ残り即チソノ時受渡スル金高ヲ現在價格マタハ略シテ現價(手取金)トイフ。

今手形ノ額面高ヲ  $P$ 、單位期間ニ於ケル割引歩合ヲ  $r$ 、期間ヲ表ハス數ヲ  $t$ 、現在價格ヲ  $A$  ト

スレバ

$$(1) \quad A = P(1 - rt)$$

注意 1. 手形ノ割引ヲスル場合ニ、ソノ現在價格ヲ元金トシ、割引ノ日カラ支拂期日マデヲ期間トスル元利合計ガ丁度手形ノ額面高ニ等シクナルヤウニ計算スルコトモアル。

コノ算法ニヨルトキノ現在價格ヲ  $B$  トスレバ

$$B(1 + rt) = P$$

$$\therefore (2) \quad B = \frac{P}{1 + rt}$$

サテ(1)ニヨツテ得ル現在價格  $A$  ハ(2)ニヨツテ得ル現在價格  $B$  ヨリ小サイ。

如何ニモ

$$\begin{aligned} A &= P(1 - rt) = B(1 + rt)(1 - rt) \\ &= B(1 - r^2t^2) < B \end{aligned}$$

ダカラデアアル。

マタコノ式ニヨツテ  $r$  ト  $t$  トガ小サケレバ  $A$  ト  $B$  トノ差ハ額面高ニ比ベテ極メテ僅カデアアルコトガ分カル。

(1)ニヨル計算ハ(2)ニヨル計算ニ比ベテ簡單ナ上ニ、割引ヲ取扱フ銀行ナドニ取ツテハ利益

デアラカラ(上ノ通り  $A < B$  ダカラ), 實際ハ(1)ニヨツテ計算スルノガ例デアラ。 (1)ニヨル割引ノ仕方ハ多ク銀行デ行ハレルタメコレヲ銀行割引トイヒ, コレニ對シ(2)ニヨル割引ノ仕方ヲ眞割引トイフ。

割引ノ期間ハ通例短期ニ限ラレテキル, ダカラ銀行割引ノ結果ト眞割引ノ結果トニハ大差ガナイ。 從テ銀行ト取引スル一個人ガ銀行割引ノ結果トシテ受ケル損失ハ極メテ僅カデアラ。

**注意 2.** 單ニ割引トイフノハスベテ銀行割引ノコトデアラ。

**【例 1】** 額面 3500 圓ノ手形ガアル, 支拂期日ハ今カラ 64 日後デアラ, 割引日歩ヲ  $2\frac{5}{100}$  トスレバコノ手形ノ割引高及現在價格ハ何程カ。

$$\text{解} \quad 3500 \text{圓} \div 100 \text{圓} = 35$$

$$\therefore \text{割引高} = 2\frac{5}{100} \times 35 \times 64 = 56 \text{圓}$$

$$\therefore \text{現在價格} = 3500 \text{圓} - 56 \text{圓} = 3444 \text{圓}$$

**【例 2】** 額面 250 圓ノ手形ガアル, ソノ支拂期日ハ今カラ 3 箇月後デアラ, 割引歩合ヲ年 6 分

トシテコノ手形ノ現在價格ヲ銀行割引ト眞割引トノ兩様ニ計算セヨ。

**解** 銀行割引シタトキノ現在價格ハ

$$250 \text{圓} \times \left(1 - 0.06 \times \frac{1}{4}\right) = 246 \text{圓}.25$$

マタ眞割引シタトキノ現在價格ハ

$$250 \text{圓} \div \left(1 + 0.06 \times \frac{1}{4}\right) = 246 \text{圓}.305 \text{ 強}$$

**注意** 上ノ二ツノ現在價格ノ差ハ

$$246 \text{圓}.305 \text{ 強} - 246 \text{圓}.25 = 0 \text{圓}.055 \text{ 強}$$

$$\text{ソシテ} \quad \frac{0.055}{250} = \frac{1.1}{5000}$$

即チ額面高ノ五千分ノ一ホドノ違ヒニ過ギナイ。

### 例 題

1. 2 箇月後拂額面 420 圓ノ手形ガアル, 割引歩合ヲ年 7 分トシテコノ手形ノ割引高ヲ銀行割引ト眞割引トノ兩様ニ計算セヨ。

2. 振出日附ガ三月十五日デ, ソレカラ 50 日後ニ支拂ハレルベキ額面 500 圓ノ手形ガアル, 今割引日歩 2.5 錢ノトキ四月二十五日ニ於ケルコノ手形ノ現在價格ハ幾ラカ。

3. 或手形ノ所持人ガ急ニ金ノ入用アツテ  
ソノ支拂期日カラ1箇月前ニ銀行ニ割引ヲ求  
メタトコロガ、銀行ハ年1割2分ノ歩合デ割引  
シ、金693圓ヲ拂渡シタトイフ、コノ手形ノ額面  
高ハ何程カ。

4. 或人ガ今カラ64日後ニ受取ルベキ額面  
150圓ノ約束手形ヲ銀行デ割引ヲ求メ現金  
147.60圓ヲ受取ツタトイフ、割引日歩ハ幾ラカ。

### 190. 複利法

金錢貸借ノ期間ガ長クナルトキニハ通例6  
箇月若クハ1箇年毎ニ利息ヲ勘定シテ債務者  
(借主)ガ債權者(貸主)ニ支拂フノガ常デア  
ル。シカシ貯蓄銀行ノ預金ノヤウナ場合ニハ、  
利息ヲ拂フベキ時期ニ、ソノ利息ヲ元金ニ加  
ヘ込ミ、ソノ和ヲ次期ノ元金ト見做シテ、  
コレニ利息ヲ附ケルヤウニスルコトガ多  
イ。

各單位期間ノ利率ヲ變ヘズニ、利息ヲ  
元金ニ加ヘ込ム貸借ヲ複利法トイフ。

### 191. 複利法ノ公式

最初ノ元金ヲ $a$ 圓、單位期間ノ利率ヲ $r$ 、期間  
ヲ表ハス數ヲ $n$ [正ノ整數]トセヨ。

第一期末ニ於ケル元利合計、即チ第二期ノ元  
金ヲ表ハス數ハ

$$a+ar=a(1+r)$$

一般ニ、或期ノ始メニ於ケル元金ニ $(1+r)$ ヲ  
掛ケタモノガソノ期末ノ元利合計デア  
ル。

故ニ第二期末ニ於ケル元利合計ヲ表ハス數  
ハ

$$a(1+r)(1+r) \quad \text{即チ} \quad a(1+r)^2$$

デ、コレガ第三期ノ元金ヲ表ハス。次第ニコ  
ノヤウニシテ、第 $n$ 期末ノ元利合計ヲ表ハス數ヲ  
 $S$ トスレバ

$$S=a(1+r)^n$$

コレガ複利法ニ關スル公式デア  
ル。

### 192. 應用

上ノ公式  $S=a(1+r)^n$

ノ中ニハ  $S, a, r, n$  ナル四ツノ文字ガアル,故ニ是等ノ文字ノ中ドレカ三ツヲ知レバコノ公式ニヨツテ残りノ一ツヲ求メルコトガ出來ル.

【例1】 年利率ヲ5分トシ,半年毎ニ利子ヲ預金ニ加ヘルトキ,550圓ノ預金ハ3年半後ニハ何程トナルカ.

解 上ノ公式ニ於テ  $a=550, r=0.025, n=7$  トオケバ

$$S=550(1+0.025)^7$$

$$\therefore \log S = \log 550 + 7 \log 1.025$$

$\log 550 = 2.7404$	補助計算
$7 \log 1.025 = 0.0749$	$\log 1.02 = 0.0086$
$\log S = 2.8153$	$5 \dots \dots 21$
$2.8149 \dots \dots 653.$	$\log 1.025 = 0.0107$
$\frac{4 \dots \dots 6}{S = 653.6}$	

答 約 653.6 圓

例 題

1. 年5分5厘,1年ヲ一期トスル複利デ元金300圓ヲ10箇年間預ケテ置ケバ元利合計何程トナルカ.
2. 年6分ノ複利デ元金500圓ヲ15箇年間

預ケテ置クノニ,利子ヲ預金ニ加ヘルノヲ,半年毎ニスルノト1年毎ニスルノトデハ最後ノ元利合計ノ上ニ何程ノ差ガアルカ.

【例2】 年利6分,1年ヲ一期トスル複利デ今カラ4年後ニ元利合計2700圓ヲ得ベキ元金ヲ求メヨ.

解 求メル元金ヲ  $a$  圓トスレバ

$$2700 = a(1+0.06)^4$$

$$\therefore a = \frac{2700}{1.06^4}$$

$$\therefore \log a = \log 2700 + 4 \operatorname{colog} 1.06$$

$\log 2700 = 3.4314$	$\log 1.06 = 0.0253$
$4 \operatorname{colog} 1.06 = 1.8988$	$\operatorname{colog} 1.06 = 1.9747$
$\log a = 3.3302$	
$3.3284 \dots \dots 2130$	
$\frac{18 \dots \dots 9}{a = 2139}$	

答 約 2139 圓

例 題

1. 年4分ノ複利トシテ,今カラ3箇年後ニ受取ルベキ金640圓ノ現在價格(即チ元利合計ガ640圓トナルベキ元金)ヲ圓ノ位マデ求メヨ. 但

シ半年ヲ一期トスル。

2. 年5分(1年一期)ノ複利デ今何程ノ元金ヲ預ケテ置ケバ10箇年後ニ元利合計ガ1000圓トナルカ。

【例3】 金900圓ヲ年利幾ラカノ複利デ滿4年間貸シテオイタラ元利合計1093.90圓ニナツタトイフ、年利率ヲ求メヨ。但シ1年ヲ一期トスル。

解 求メル年利率ヲ $r$ トスレバ

$$1093.9 = 900(1+r)^4$$

$$\therefore 1+r = \sqrt[4]{\frac{1093.9}{900}}$$

$$\therefore \log(1+r) = \frac{\log 1093.9 + \text{colog } 900}{4}$$

log 1093.9 = 3.0390	log 1090 = 3.0374
colog 900 = 3.0458	3. .... 12
4) 0.0848	9. .... 36
log(1+r) = 0.0212	log 1093.9 = 3.0390
1+r = 1.05	log 900 = 2.9542
$\therefore r = 0.05$	

答 0.05

### 例 題

1. 元金2500圓ヲ年利若干(1年一期)ノ複利

デ預ケ置キ、3箇年後ニ元利合計2812<sup>円</sup>.16ヲ得タトイフ、年利率ハ幾ラカ。

2. 半年ヲ一期トスル複利デ金若干ヲ預ケ、8年後ニ受取ル元利合計ヲ最初ノ元金ノ二倍ニシヨウトスルニハ年利率ヲ何程トスベキカ。(厘未滿切上)

【例4】 年1割(半年一期)ノ複利デ幾年間金ヲ貸シテオケバ元利合計ガ元金ノ2倍トナルカ。

解 元金ヲ $a$ 圓トシ、所要ノ期間ヲ表ハス數ヲ $n$ トスレバ

$$2a = a \times 1.05^n$$

$$\therefore 2 = 1.05^n$$

$$\therefore n \log 1.05 = \log 2$$

$$\therefore n = \frac{\log 2}{\log 1.05} = \frac{0.3010}{0.0212} = 14.3 \text{ 弱}$$

故ニ年1割ノ複利デ14期即チ7年間貸シタノデハ元金ノ2倍ニ少シ足リナイシ、15期即チ7年半ノ間貸シテオケバ元金ノ2倍ヲ超エルコトトナル。

注意 上ノ演算中ノ割算(0.3010÷0.0212)ヲ更ニ對數表ヲ用ヒテ行ツテモイ、。

## 例 題

年6分(1年一期)ノ複利デ幾年間金ヲ貸シテ  
置ケバ元利合計ガ元金ノ3倍トナルカ。

## 193. 積立金ノ公式

今カラ  $n$  年間毎年ノ始ニ金  $a$  圓ツツ  
ヲ年利  $r$ , 1年ヲ一期トスル複利デ預ケ  
ルトキ, 第  $n$  年目ノ終リニ於ケル元利合  
計ヲ求メルコト。

解 初年ニ預ケタ金  $a$  圓ノ第  $n$  年目ノ終リ  
ニ於ケル元利合計ハ  $a(1+r)^n$  圓 トナリ, 第二年  
目ニ預ケタ金  $a$  圓ハ第  $n$  年目ノ終リニハ  
 $a(1+r)^{n-1}$  圓 トナリ, 第三年目ニ預ケタ金  $a$  圓ハ  
第  $n$  年目ノ終リニハ  $a(1+r)^{n-2}$  圓 トナル。

カヤウニ  $1+r$  ノ指數ガ次第ニ1ツツ小サク  
ナリ, 最後ノ年ニ預ケタモノハソノ年ノ終リニ  
ハ  $a(1+r)$  圓 トナルカラ, 求メル所ノ元利合計  
ヲ  $A$  圓トスレバ

$$A = a(1+r) + a(1+r)^2 + \dots + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^n$$

即チ初項ガ  $a(1+r)$ , 公比ガ  $1+r$  ナル等比級數ノ

第  $n$  項マデノ和ニ等シイ。因テ

$$A = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

コレガ年賦積立金ヲ計算スルトキニ用ヒル  
公式デアアル。

コノ公式ニヨツテ  $A, a, n, r$  ノ中ドレカ三ツ  
ヲ知レバ残りノ一ツヲ求メルコトガ出來ル。  
シカシ對數デ計算スルニシテモ, 前節ノ問題ノ  
ヤウニハ簡單デナイ。例ヘバ  $A$  ヲ計算スルト  
キ, 是非トモ先ヅ  $(1+r)^n$  ヲ求メナケレバナラス。  
マタ  $r$  ガ未知數デアルト  $n+1$  次ノ方程式ニ  
ナルカラ, 初等代數學ノ力デハコレヲ解クコト  
ガ出來ナイ。

【例】年5分(1年一期)ノ複利デ二十年間毎年  
ノ始メニ金 100 圓ツツ拂込ンデ、レヲ積ミ立  
テルトキハ, 第二十年目ノ終リニ, コノ積立金ノ  
元利合計ハ何程トナルカ。

解 上ノ公式ニ於テ  $a=100, r=0.05, n=20$  ト  
オイテ,  $A$  ヲ求メレバ、即チ

$$A = \frac{100 \times 1.05 \times (1.05^{20} - 1)}{0.05}$$

$$=2100 \times (1.05^{20} - 1)$$

$$\log 1.05 = 0.0212$$

$$\log 1.05^{20} = 0.4240$$

$$\frac{0.4232 \dots 2.65}{8}$$

$$85 \dots \dots 5$$

$$\frac{\quad}{1.05^{20} = 2.655}$$

$$\therefore 1.05^{20} - 1 = 1.655$$

$$\log 2100 = 3.3222$$

$$\log 1.655 = 0.2188$$

$$\log A = 3.5410$$

$$\frac{3.5403 \dots 3470}{7}$$

$$65 \dots \dots 5$$

$$\frac{\quad}{A = 3475}$$

答 約 3475 圓

### 例 題

1. 年 5 分 5 厘(1 年一期)ノ複利デ毎年ノ初ニ元金 50 圓ヅツ十箇年間預ケレバ,十箇年ノ終リニ元利合計何程トナルカ.

2. 年 5 分(1 年一期)ノ複利デ毎年ノ初ニ等額ノ金高ヲ預ケ,七箇年ノ終リニ於ケル元利合計ヲ 1000 圓ニシヨウトスルニハ,毎年何程ヅツ預クベキカ.

### 194. 年賦償還ノ公式

金 A 圓ヲ年利率  $r$  (1 年一期)ノ複利デ借入レ,ソレカラ一ケ年目毎ニ年々  $a$  圓ヅツ返濟シテ第  $n$  年目ノ終リニコノ負債ヲ全ク償還スルタメニ,  $A, a, n, r$  ノ間ノ關係式ヲ求メルコト.

解 借入レテカラ第一年目ノ終リニナレバ,元金 A 圓ノ元利合計ハ

$$A(1+r) \text{ 圓}$$

トナル. コノ時  $a$  圓ヲ拂フカラ,第二年目ノ始メニ於ケル元金ハ

$$A(1+r) - a \text{ 圓}$$

トナル. 故ニ第二年目ノ終リニハ,元利合計ハ

$$\{A(1+r) - a\}(1+r) \text{ 圓}$$

$$\text{即チ } A(1+r)^2 - a(1+r) \text{ 圓}$$

トナル. コノ時第二回目ニ  $a$  圓ヲ拂フカラ,第三年目ノ始メニ於ケル元金ハ

$$A(1+r)^2 - a(1+r) - a \text{ 圓}$$

從テ第三年目ノ終リニ於ケル元利合計ハ

$$A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) \text{ 圓}$$

トナル. 次第ニコノヤウニシテ第  $n$  年目ノ終リニ於ケル元利合計ヲ表ハス數ハ

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a(1+r)$$

トナル, ソシテコノ時第  $n$  回目ニ  $a$  圓ヲ拂フテ負債ハ全ク償還サレルカラ

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a(1+r) - a = 0$$

故ニ

$$\begin{aligned} A(1+r)^n &= a\{(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1\} \\ &= \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{Ar}{1 - (1+r)^{-n}}$$

コレガ年賦償還金ヲ計算スルトキニ用ヒル公式デアル.

別解 上ノ公式ハマタ次ノヤウニ考ヘテモ求メラレル.

一年目ノ終リニ  $a$  圓ヅツ返済シテ第  $n$  年目ノ終リニ元金  $A$  圓ノ負債ヲ償還スルコトハ, ツマリ借リタ方ノ  $A$  圓ニハ皆済ノトキマデ始終年利率  $r$  ノ複利ガツク代リニ, 毎年末ニ拂込ム

$a$  圓ニモ始終同ジ利率ノ複利ガツクモノトシ, 第  $n$  年目ノ末ニ丁度雙方ノ元利合計ガ相等シクナツテ償還シ了ルモノト見做シテモイ、.

サテ借リタ  $A$  圓ノ元利合計ヲ表ハス數ハ

$$A(1+r)^n$$

デ, 一年目毎ニ拂込ム  $a$  圓ノ第  $n$  年目ノ終リニ於ケル元利合計ヲ表ハス數ハ

$$\begin{aligned} a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a \\ = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r} \end{aligned}$$

$$\therefore A(1+r)^n = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

從テ上ノ公式ト同ジ結果ヲ得ル.

[例] 或會社ガ金四萬圓ヲ年 4 分 (1 年一期) ノ複利デ借入レ, ソレカラ十五箇年目ノ終リマデ毎年末ニ同額ノ年賦金ヲ拂フテ償還シヨウトスル, 毎年ノ年賦金高ヲ求メヨ.

解 上ノ公式ニ於テ  $A=40000$ ,  $r=0.04$ ,  $n=15$  ト置ケバ

$$a = \frac{40000 \times 0.04}{1 - 1.04^{-15}} = \frac{1600}{1 - 1.04^{-15}}$$



$$\therefore \log a = \log 1600 + \text{colog}(1 - 1.04^{-15})$$

サテ

$$\log 1.04^{-15} = -\log 1.04^{15} = \text{colog } 1.04^{15}$$

$\log 1.04 = 0.0170$ $\log 1.04^{15} = 0.2550$ $\text{colog } 1.04^{15} = \bar{1}.7450$ $\frac{\bar{1}.7443 \dots\dots 0.555}{7}$ $72 \dots\dots\dots 9$ $\frac{1.04^{-15} = 0.5559}{\log(1 - 1.04^{-15}) = \bar{1}.6475}$	$0.1700 \quad (0.0170 \times 10)$ $850 \quad (0.0170 \times 5)$ $\frac{0.2550}{\log 0.444 = \bar{1}.6474}$ $\frac{1 \dots\dots\dots 1}{\log(1 - 1.04^{-15}) = \bar{1}.6475}$
---	---

$$\therefore 1 - 1.04^{-15} = 0.4441$$

$$\frac{\log 1600 = 3.2041}{\text{colog}(1 - 1.04^{-15}) = 0.3525}$$

$$\log a = 3.5566$$

$$\frac{3.5563 \dots\dots 3600}{3}$$

$$\frac{36 \dots\dots\dots 3}{a = 3603}$$

答 約 3603 圓

例 題

或人某年ノ初ニ金 7000 圓ヲ年 8 分(1 年一期)ノ複利デ借入レコレヲ 25 箇年間ニ年賦償却シヨウトスル、毎年ノ終リニ何程ヅツヲ償却スベキカ。

195. 年金

金 A 圓ヲ年利率 r (1 年一期)ノ複利デ預ケテオキ、毎年ノ終リニ等額ノ金高ヲ受取リ、第 n 年目ノ終リマデニ悉皆取り盡サウトスルトキ、毎年受取ルベキ金高ヲ年金トイフ。

サテ前節ノ公式

$$a = \frac{Ar}{1 - (1+r)^{-n}}$$

ハコノ問題ニモソノマ、當籤マル。

マタ上ノ公式デ n ヲ限リナク大キクスレバ  $(1+r)^{-n}$  ハ限リナク 0 ニ近ヅクカラ、a ノ値ハ限リナク Ar ニ近ヅク。

コノ場合ハ永久ニ元金ノ償還ヲ受ケナイコトナルカラ、永久受ケル年金(即チ所謂永久年金)ハ Ar 圓デアツテ、ツマリソノ元金カラ一年間ニ生ズル利息ニ當ル。

【例】 年利 6 分(1 年一期)ノ複利デ、十二箇年間 1500 圓ヅツノ年金ヲ生ズベキ資金ハ何程カ。

解 上ノ公式カラ A ヲ求メレバ

$$A = \frac{a\{1 - (1+r)^{-n}\}}{r}$$

$$\therefore A = \frac{1500(1 - 1.06^{-12})}{0.06}$$

$$\therefore \log A = \log 1500 + \log(1 - 1.06^{-12}) + \text{colog } 0.06$$

$\log 1.06 = 0.0253$	$0.2530$	$(0.0253 \times 10)$
$\log 1.06^{12} = 0.3036$	$506$	$(0.0253 \times 2)$
$\log 1.06^{-12} = \bar{1}.6964$	$0.3036$	

$\therefore 1.06^{-12} = 0.497$	$\log 0.06 = \bar{2}.7782$
---------------------------------	----------------------------

$$\therefore 1 - 1.06^{-12} = 0.503$$

$\log 1500 = 3.1761$
$\log(1 - 1.06^{-12}) = \bar{1}.7016$
$\text{colog } 0.06 = 1.2218$
$\log A = 4.0995$
$4.0969 \dots\dots 12500$
$\underline{26}$
$245 \dots\dots 70$
$\underline{\hspace{1em}}$
$A = 12570$

答 約 12570 圓

### 例 題

1. 年 6 分(1 年一期)ノ複利デ今後半年目毎ニ金 150 圓ヅツ受取ルベキ永久年金ノ現在價格如何.

2. 今カラ十年間毎年末ニ金 300 圓ヅツ受

取ルベキ年金ノ代リニ、年 5 分(1 年一期)ノ複利勘定デ現今一時拂ノ金ヲ受取ラウトスル、幾圓受取り得ルカ.

## 雜 題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

$$1. \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$$

$$2. \sqrt{(x-a)^2 + 2xb + b^2} = x - a + b$$

$$3. \sqrt{a+b-c+2\sqrt{b(a-c)}} \text{ヲ簡單ニセヨ.}$$

$$4. \text{甲乙ノ二船ガアル,ソノ速サ甲ハ乙ノ} \frac{2}{3}$$

デ,甲ハ正東ニ,乙ハ正南ニ向ツテ進行シテ居ル,二船間ノ距離ガ或時12哩デアツテ,ソレカラ1時間ノ後8哩トナリ,更ニ1時間ノ後20哩トナツタ.二船ノ速サヲ求メヨ,マタ二船ノ最初ノ關係位置ヲ求メヨ.

5. 甲ハ或地ヲ出發シ,初日ニ5里行キ,二日目カラ毎日ソノ前日ノ行程ニ半里ヲ増シテ行ツタ,甲ガ出發シテ三日ノ後乙ハ同地ヲ出發シ毎日12里ヅツ行ツテ甲ヲ追ヘバ乙ノ出發後幾日目ニ甲ニ追付クカ.

6. 直角三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナストキ,ソノ三邊ノ比ヲ求メヨ.

7.  $a, b, c$  ガ等比級數ヲナサバ

$$(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2) = a^4 + b^4 + c^4$$

ナルコトヲ證明セヨ.

8.  $b+c, c+a, a+b$  ガ調和級數ヲナストキハ  $a^2, b^2, c^2$  ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ.

9. 等差級數ノ第  $p$  項,第  $q$  項,第  $r$  項ヲ夫々  $P, Q, R$  トスルトキ,次式ヲ證明セヨ.

$$P(q-r) + Q(r-p) + R(p-q) = 0$$

10. 等比級數ノ第  $p$  項,第  $q$  項,第  $r$  項ヲ夫々  $P, Q, R$  トスルトキ,次式ヲ證明セヨ.

$$P^{q-r} Q^{r-p} R^{p-q} = 1$$

11. 調和級數ノ第  $p$  項,第  $q$  項,第  $r$  項ヲ夫々  $P, Q, R$  トスルトキ,次式ヲ證明セヨ.

$$QR(q-r) + RP(r-p) + PQ(p-q) = 0$$

$$12. (x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}})(3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}) \text{ヲ展開セヨ.}$$

$$13. \frac{a^2 + ab + b^2}{(a^3 - b^3)(x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(a-b)(x-a)} \text{ヲ簡單ニセヨ.}$$

次ノ各方程式ヲ解ケ.

$$14. \log_x 81 = -4$$

$$15. x^{\log x} = 100x$$

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$16. \quad 2 \log x + 7 \log y = 20, \quad 5 \log x - 2 \log y = 11$$

【例】 方程式  $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$  ヲ解ケ.

解 分母ヲ拂ツテ

$$\log(35-x^3) = 3 \log(5-x) = \log(5-x)^3$$

$$\therefore 35-x^3 = (5-x)^3$$

簡單ニシテ

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad \text{或ハ} \quad x = 3$$

$x$  ノ是等ノ値ハ何レモ原分數方程式ノ分母ヲ0ニシナイシ、マタ  $35-x^3$  及  $5-x$  ヲ正ニスルカラ求メル根デアル.

次ノ各方程式ヲ解ケ.

$$17. \quad \log(x^2 - 6x + 8) = \log(x-4) + 1$$

$$18. \quad \log \sqrt{3x+4} + \frac{1}{2} \log(5x+1) = 1 + \log 3$$

19. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\log(x-y) + \log(7x-8y) = 2$$

$$\log(x^3+y^3) - \log(x^2-xy+y^2) = 1$$

【例】 三ツノ手形ガアル、第一ハ額面 400 圓支

拂期日ハ某年四月二十七日、第二ハ額面 850 圓支拂期日ハ同年五月二日、第三ハ額面 750 圓支拂期日ハ同年五月二十六日デアル、コノ三ツノ手形ノ平均支拂期日ヲ求メヨ.

解 同ジ人ニ對シ種々ノ期日ニ支拂フベキ幾口カノ約束手形ヲ振出シタ人ガ受取人ト相談ノ上、是等ノ手形ノ額面高ノ和ヲ額面高トスル一枚ノ手形ヲ作り、或日ニ於テ或同一ノ割引歩合デ前ノ各手形ヲ銀行割引シテ得ル現價ノ和ガ、同ジ日ニ同ジ歩合デ今振出サウトスル手形ヲ銀行割引シテ得ル現價ニ等シクナルキツニソノ支拂期日ヲ定メテコレト前ノモノトヲ引替ヘルトキ、コノ一枚ノ手形ノ支拂期日ヲ前數口ノ手形ノ平均支拂期日トイフノデアル.

ソコデ假ニソノ年ノ四月一日カラ起算スルコトトシ、コレカラ所要ノ平均支拂期日マデノ日數ヲ  $x$  トシ、1日ヲ單位トスルトキノ利率ヲ  $r$  トスレバ、四月一日カラ前ノ三ツノ手形ノ支拂期日マデノ日數ハ夫々 27, 32, 56 ダカラ、次ノ方程式ヲ得ル.

$$400(1-27r) + 850(1-32r) + 750(1-56r)$$

$$= (400 + 850 + 750)(1-rx)$$

$$\therefore r(400 \times 27 + 850 \times 32 + 750 \times 56) = rx(400 + 850 + 750)$$

$$x = \frac{400 \times 27 + 850 \times 32 + 750 \times 56}{400 + 850 + 750} = 40$$

因テ答ハ四月一日カラ後40日目、即チ五月十日。

20. 四月十八日 = 350 圓, 五月廿五日 = 450 圓, 五月廿七日 = 250 圓, 十一月四日 = 750 圓ヲ支拂フベキ四枚ノ手形ノ平均支拂期日ヲ求メヨ。

21. 或人 7500 圓デ家屋ヲ買ヒ, 内 2500 圓ヲ即時ニ拂ヒ, 殘金ノ内 1500 圓ヲ九月三十日ニ, 2500 圓ヲ十二月三十一日ニ, 1000 圓ヲ翌年二月十二日ニ支拂フコトヲ約束シタ, トコロガソノ後賣主カラ一時ニ金ヲ受取リタイト申込ンデキタ, サウスレバ何月何日ニ殘金ヲ悉ク拂渡サバ雙方トモ損得ガナイカ。平均支拂期日ノ計算法ニヨツテ計算セヨ。

## 附 錄

### I 分母ガ0ナル分數式ノ數值

#### 1. 例ヘバ分數式

$$\frac{x+5}{x-1}$$

ニ於テ  $x=1$  トオケバ分母ハ 0 トナツテ, コノ式ハ意味ヲ失フ。シカシ上ノ分數式ニ於テ  $x$  フ直ニ 1 ニ等シクセズ, 漸々ニ 1 ニ近イ値ヲ  $x$  ニ與ヘテ行ケバ, 分母  $x-1$  ノ絶對值ハ漸々 0 ニ近ヅキ, 分子  $x+5$  ハ漸々 6 ニ近ヅキ, 從テコノ分數式ノ絶對值ハ漸々ニ大キクナル。若シ  $x$  フ限リナク 1 ニ近ヅケレバコノ分數式ノ絶對值ハ限リナク大キクナル。

コノ事柄ヲ  $x$  ノ極限ガ 1 ナルトキ分數式  $\frac{x+5}{x-1}$  ノ極限ハ無限大デアルトイフ。

或ハ略シテ  $x=1$  ナルトキ  $\frac{x+5}{x-1}$  ハ無限大

デアルトモイフ。

無限大ヲ符號 $\infty$ デ表ハス。

問  $x=2$  ナルトキ  $\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x+6}$  ノ値ハ何カ。

$x=3$  ナルトキハドウカ。

## 2. 例ヘバ分數式

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$$

ニ於テ  $x=2$  トオケバ  $\frac{0}{0}$  ナル形ヲ取ル。

サテ整除ノ定理ニヨツテコノ分數式ノ兩項ハ何レモ  $x-2$  デ割切レルコトガ分ル、即チコノ分數式ノ兩項ハ  $x-2$  ナル公約數ヲ有スル。

ソコデコノ分數式ヲ約シテ

$$\frac{x+2}{x-3}$$

トシタ後、 $x=2$  トオケバ  $\frac{4}{-1}$  即チ  $-4$  トナル。

サテ分數式ノ兩項ヲ同ジ數デ割ル場合ニハ、除數ガ0デナイトキニ限ル。ダカラ  $x=2$  トオク場合ニハ  $x-2$  デ約スルコトガ出來ナイ。

シカシ  $x$  ヲ直ニ  $2$  ニ等シクセズ、次第ニ  $2$  ニ近寄セテ行ケバ、其際イツモ分數式  $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$  ニ等シイ所ノ分數式  $\frac{x+2}{x-3}$  ノ値ハ次第ニ  $-4$  ニ近ヅキ、遂ニ限リナク  $-4$  ニ近ヅク。即チ

$x$  ノ極限ガ  $2$  ナルトキ、分數式  $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$  ノ極限ハ  $-4$  デアル。

コノ事柄ヲ略シテ

$x=2$  ナルトキ分數式  $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$  ノ數値ハ  $-4$  デアルトモイフ。

分數式ノ數値ヲ(上ノ意味デ)求メルトキ  $\frac{0}{0}$  ナル形ニナツタトキハ、コレヲ既約分數式ニ直シテカラソノ數値ヲ求メヨ。

マタ  $x$  ナル文字ニツイテ幾ツカノ分數式ヲ含ム代數式ニ於テ、 $x$  ニ或値ヲ與ヘルトキ分母ノ數値ガ0トナルモノガ二ツ以上アラバ、マヅ是等ノ分數式ヲ一ツニ纏メ、コレヲ既約分數式ニ直シ、然ル後ソノ數値ヲ求メヨ。

【例】  $x=3$  ナルトキ次式ノ數値ヲ求メヨ.

$$x + \frac{2}{3} + \frac{4x-5}{x-3} - \frac{3(2x+1)}{x(x-3)}$$

解 原式  $= x + \frac{2}{3} + \frac{x(4x-5) - 3(2x+1)}{x(x-3)}$

$$= x + \frac{2}{3} + \frac{4x^2 - 11x - 3}{x(x-3)}$$

$$= x + \frac{2}{3} + \frac{(x-3)(4x+1)}{x(x-3)}$$

$$= x + \frac{2}{3} + \frac{4x+1}{x}$$

ソコデ  $x=3$  トオケバ

$$3 + \frac{2}{3} + \frac{13}{3} = 3 + \frac{15}{3} = 3 + 5 = 8$$

コレガ原式ノ數値極限ノ意味ニ於ケル數値

デアル.

### 例題

1.  $x=3$  ナルトキ  $\frac{x^2+2x-15}{x^2+5x-24}$  ノ數値ヲ求メ

ヨ.

2.  $x=0$  ナルトキ  $\frac{2x^3+5x}{x^2}$  ノ數値ヲ求メヨ.

3.  $x=1$  ナルトキ  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}$  ノ數値

ヲ求メヨ.

4.  $x=1$  ナルトキ次ノ分數式ノ數値ヲ求メヨ.

$$3x+2 + \frac{1}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{25}{(x+4)(x-1)^2}$$

5.  $x=4$  ナルトキ次ノ分數式ノ數値ヲ求メヨ.

$$\frac{5x+2}{x-4} + \frac{x+3}{x+4} - \frac{2(x+7)}{x-4}$$

### 3. 分數方程式ノ特例

【例1】  $\frac{x}{x-5} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-5} - \frac{3}{(x-2)(x-5)}$  ヲ解ケ.

解 分母ノ最小公倍數  $(x-2)(x-5)$  ヲ方程式ノ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ拂ヘバ

$$x(x-2) + x-5 = 3(x-2) - 3$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = 0$$

即チ

$$(1) (x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

サテ  $x=2$  ヲ原方程式ニ當筈メレバ兩邊トモ無限大ノ項ヲ含ムコトトナツテ、本來ナラバ原方程式ハ不可能デアル.

シカシマヅ原方程式ノ總テノ項ヲ左邊ニ集メテ

$$\frac{x}{x-5} + \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-5} + \frac{3}{(x-2)(x-5)} = 0$$

トシ、コノ左邊ヲ一ツノ分數式ニ纏メレバ

$$(2) \quad \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-5)} = 0$$

ソコデ左邊ヲ既約分數式ニ化スレバ

$$\frac{x-2}{x-5} = 0$$

トナル。コ、デ  $x=2$  トオケバ左邊ハ 0 トナル。

因テ前節ニ述ベタト同様ニ、 $x$  ノ極限ガ 2 ナルトキ原方程式ノ兩邊ノ差ハ如何程デモ 0 ニ近ヅク、即チ原方程式ノ兩邊ハ限リナク等シイコトニ近ヅク。

カヤウノ場合ニコノ 2 ヲ原方程式ノ根トイフコトモアル。

注意 原方程式ノ分母ヲ拂ツテ得タ方程式ノ總テノ項ヲ左邊ニ集メタモノ、即チ(1)ノ左邊ハ原方程式ノ分母ヲ拂ハズニ總テノ項ヲ左邊ニ集メタモノ即チ(2)ノ左邊  $\frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x-5)}$  ノ分子ダカラ、(2)ヲ作ルトキ必ず

シモ計算ヲ最初カラ仕直スニ及バナイ。

$$\text{【例 2】} \quad \frac{x+4}{x+2} + \frac{12}{(x-4)(x+2)} = \frac{8}{x(x-4)} \quad \text{ヲ解ケ。}$$

解 分母ノ最小公倍數  $x(x+2)(x-4)$  ヲ方程式ノ兩邊ニ掛ケテ分母ヲ拂ヘバ

$$x(x+4)(x-4) + 12x = 8(x+2)$$

$$\therefore x(x+4)(x-4) + 4(x-4) = 0$$

$$\text{即チ} \quad (x-4)\{x(x+4)+4\} = 0$$

$$\text{即チ} \quad (x-4)(x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x=4 \quad \text{及} \quad x=-2$$

コノ  $x=4$  モ  $x=-2$  モ何レモ原方程式ノ分母ヲ 0 ニスル。

ソコデ原方程式ノ總テノ項ヲ左邊ニ集メテコレヲ通分スレバ

$$\frac{(x-4)(x+2)^2}{x(x+2)(x-4)} = 0$$

トナリ[前例ノ注意]、コノ左邊ヲ約スレバ

$$\frac{x+2}{x} = 0$$

トナル。

サテコノ左邊ノ數値ハ、 $x=4$  ノトキハ  $\frac{3}{2}$  トナ



ツテ 0 ニナラナイガ、 $x=-2$ ノトキハ 0 ニナル。

因テ原方程式ノ兩邊ノ値ノ差ハ  $x=4$ ナルト  
キニハ 0 トナラズ、 $x=-2$ ナルトキニハ 0 トナ  
ル。故ニ  $-2$ ダケガ原方程式ノ根(極限ノ意味ニ  
於ケル根)デアル。

### 例 題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1.  $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x+3} + \frac{15}{(x+3)(x-2)} = 0$
2.  $\frac{x-2}{x-3} = \frac{2(x-1)}{2x+1} + \frac{1}{x-3}$
3.  $\frac{2x^2-1}{(x-1)(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} = \frac{15}{4(x+3)}$
4.  $\frac{x}{x-2} - \frac{x-6}{(x-4)(x-2)} = \frac{x}{x-3} - \frac{2(x-6)}{(x-5)(x-3)}$

## II 補 充 問 題

二次方程式ニ導キ得ル

### 一元分數方程式

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1.  $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x}$
2.  $x + \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{5x-4}{x^2-1}$
3.  $\frac{x-3}{x-\frac{1}{x}} + 2 + \frac{1}{x-1} = 0$
4.  $\frac{5}{x-a} + \frac{5}{x+a} = \frac{8}{x} + \frac{1}{x-2a} + \frac{1}{x+2a}$
5.  $\frac{1}{x+1} + \frac{2x+11}{x-3} = \frac{2(x+1)}{x^2-2x-3} + \frac{15}{x-3}$
6.  $\frac{x}{x-3} - \frac{x-3}{x} + \frac{x}{x+3} - \frac{x+3}{x} = \frac{2}{3}$

### 一元高次方程式

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1.  $x^3 = a$
2.  $(a-x)^3 = (x-b)^3$
3.  $(x^2+7x+5)^2 - 3x(x+7) = 19$
4.  $x^3 - (a+1)x + a = 0$

5.  $(x-1)^3 + (x-2)^3 = (2x-3)^3$   
 6.  $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4) = 144$   
 7.  $(x+3)(x-5)(x+6)(x-10) = 20x^2$

8. 1 の虚ナル立方根(即チ  $x^3 = 1$  の虚根)ノ一ツヲ  $\omega$  デ表ハセバ、今一ツハ  $\omega^2$  デ表ハサレルコトヲ示セ.

### 聯立二次方程式

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

1.  $x^2 - y^2 + (x+y)^2 = 24, \quad x+y=4$   
 2.  $2x+y=5, \quad 3x^2 - 2xy + 4x + y = 4$   
 3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{bx+ay}{bx-ay} = \frac{3}{4}$   
 4.  $(x+1)(y+1) = 70, \quad (x-1)(y-1) = 40$   
 5.  $3x^2 + 5x - 8y = 36, \quad 2x^2 - 3x - 4y = 3$   
 6.  $x^2 + xy = 4x - 2, \quad y^2 + xy = 4y - 1$   
 7.  $x^2 - xy = 8x + 3, \quad xy - y^2 = 8y - 6$   
 8.  $xy + \frac{x}{y} = \frac{5}{3}, \quad \frac{1}{xy} + \frac{y}{x} = \frac{20}{3}$   
 9.  $yz = 16x, \quad zx = 9y, \quad xy = 4z$   
 10.  $x(x+y+z) = 7-x, \quad y(x+y+z) = 14-y, \quad z(x+y+z) = 21-z$   
 11.  $x(x+2y+3z) = 30, \quad y(x+2y+3z) = 20, \quad z(x+2y+3z) = 10$

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

12.  $\frac{83}{\sqrt{(172+26\sqrt{3})}}$       13.  $\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{24}}{4\sqrt{2}+\sqrt{24}}}$   
 14.  $\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}$   
 15.  $\frac{1}{\sqrt{(6+4\sqrt{2})}} + \frac{1}{\sqrt{(6-4\sqrt{2})}}$   
 16.  $\sqrt{2p-1} + \sqrt{(2p-1)^2-1}$   
 17.  $\frac{\sqrt{(3+\sqrt{2})} + \sqrt{(3-\sqrt{2})}}{\sqrt{(3+\sqrt{2})} - \sqrt{(3-\sqrt{2})}} + \frac{\sqrt{(3+\sqrt{2})} - \sqrt{(3-\sqrt{2})}}{\sqrt{(3+\sqrt{2})} + \sqrt{(3-\sqrt{2})}}$

18.  $x=2+\sqrt{3}$  ナルトキ  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  ノ値ヲ小數第四位マデ求メヨ.

### 二次方程式應用問題

1. 對角線ガ9本ダケ引ケル多角形ノ邊數ヲ求メヨ.  
 2. 長サ  $l$  ナル線分 AB 若クハソノ延長ノ上ニ一點 C ヲ取り、 $AC^2 = BC \cdot AB$  ナラシメヨウトスル、點 C ノ位置ヲ求メヨ.  
 3. 直角三角形ガアル、ソノ周圍ハ28糎、ソノ内接圓ノ半徑ハ1糎デアルトイフ、三邊ノ長サヲ求メヨ.  
 4. 甲乙二箇ノ推進機プロペラーガアル、甲ハ毎分乙ヨリ150回多ク廻轉シ、甲ガ1000廻轉スル間ノ時間ハ乙ガ650

廻轉スル間ノ時間ヨリモ  $\frac{5}{44}$  分長イトイフ、各ノ毎分  
ノ廻轉數(1000回以上)ヲ求メヨ。

### 無理方程式

次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$1. \sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} + \sqrt{\frac{x-5}{3x-4}} = \frac{5}{2}$$

$$2. \sqrt{3x^2-2x+4} - 3x^2+2x+16=0$$

$$3. \sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{1-x}} = 1$$

$$4. \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{2x}{9}$$

$$5. \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{3}$$

$$6. \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = 8$$

$$7. \sqrt[3]{3x^2+13} + \sqrt{3x^2+13} = 6$$

### 不等式

次ノ各不等式ヲ解ケ

$$1. x^2+7x-9 > 0 \quad 2. 3x^2-26x+35 < 0$$

$$3. -4x^2-11x+3 > 0$$

4. 和ガ 125 ナル二整数ノ積ノ最大値ヲ求メヨ。

5. 27ヲニツニ分ケ、一數ノ平方ノ4倍ト他數ノ平方ノ5倍トノ和ヲ最小ニセヨ。

6. 二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  ニ於テ、 $a$ ガ正ナルトキ、次ノ事柄ヲ證明セヨ。

(1) コノ方程式ガ相異ナル實根ヲ有スレバ、 $x$ ニ二根ノ間ノ任意ノ値ヲ與ヘレバコノ方程式ノ左邊ハ負ニナリ、 $x$ ニ大ナル根ヨリモ大ナル値マタハ小ナル根ヨリモ小ナル値ヲ與ヘレバコノ方程式ノ左邊ハ正ニナル。

(2) コノ方程式ガ等根ヲ有スレバ、 $x$ ニコノ根以外ノドンナ實數値ヲ與ヘテモコノ方程式ノ左邊ハ恒ニ正デアアル。

(3) コノ方程式ガ虚根ヲ有スレバ、 $x$ ニドンナ實數値ヲ與ヘテモコノ方程式ノ左邊ハ恒ニ正デアアル。

### 比、比例

1.  $x+y+z = \frac{14}{3}x = \frac{7}{2}y$  ナルトキ  $\frac{x+y+z}{z}$  ノ値ヲ求メヨ。

2.  $x-y=7z$ ,  $x-z=4y$  ナルトキ  $\frac{y-z}{x}$  ノ値ヲ求メヨ。

3.  $\sqrt{2(a+b)^2}$  ト  $2\sqrt{2(a-b)^2}$  トノ比例中項ヲ求メヨ。

4.  $\sqrt{7}-\sqrt{5}$  ト  $11\sqrt{7}+13\sqrt{5}$  トノ比例中項ヲ求メヨ。

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ナルトキ次ノ各式ノ成リ立ツコトヲ證明

セヨ.

$$5. \frac{b(a-c)}{c(b-d)} = \frac{a-b}{c-d} \quad 6. \frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$$

$$7. abcd(a+b+c+d)^2 = (bcd+eda+dab+abc)^2$$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  ナルトキ次ノ各式ノ成リ立ツコトヲ證明

セヨ.

$$8. \frac{a-2b-3c}{2a+b-c} = \frac{a-4b+3c}{2a-3b+c}$$

$$9. a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$$

$$10. (3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d) \\ = (3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d)$$

ナルトキハ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ナルコトヲ證明セヨ.

$$11. \frac{2a-b-c}{x+a-b-c} = \frac{2b-c-a}{x+b-c-a} \text{ ナルトキハ, コノ各比ハ}$$

$$\frac{3}{2} \text{ニ等シク, マタ } \frac{2c-a-b}{x+c-a-b} \text{ニ等シイコトヲ證明セ}$$

ヨ.

$$12. \frac{y+z-x}{b-c} = \frac{z+x-y}{c-a} = \frac{x+y-z}{a-b} \text{ ナラバ } ax+by+cz=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

13.  $x$  ガ  $ay+bz$  ニ比例シ,  $y$  ガ  $cx+dz$  ニ比例スレバ  $x$  ハ  $y$  ニ比例スルコトヲ證明セヨ. 但シ  $a, b, c, d$  ハ何レモ一定ノ數デアル.

14. 二數ノ和, 差, 積ガ 7, 1, 60 ニ比例スルトイフ, 各數ハ何カ.

15. 既約分數ガアル, ソノ分母ノ 5 倍カラ分子ノ 4 倍ヲ引イタモノヲ分子トシ, 分母ノ 7 倍カラ分子ノ 2 倍ヲ引イタモノヲ分母トスル分數ハ  $\frac{3}{5}$  ニ等シイトイフ, 元ノ分數ヲ求メヨ.

16. 甲乙丙三人ノ所持金合計 30 圓デ, 甲ノカラ 5 錢, 乙ノカラ 7 錢, 丙ノカラソノ半分ヲ引イタモノハ 4, 3, 1 ニ比例スルトイフ. 各ノ所持金ハ幾ラカ.

17. 甲乙丙三人ノ所有金ハ 8, 5, 3 ニ比例スル, 今甲ガ所有金ノ半分ヲ丙ニ與ヘ, 丙ハ 100 圓ヲ乙ニ與ヘレバ, 乙丙ノ所有金ハ相等シクナルトイフ. 最初各ノ所有金ハ幾ラカ.

18. 線分 AB 上ニ  $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$  ナルヤウニ取ツタ點 C ト  $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$  ナルヤウニ取ツタ點 D トノ間ノ距離ガ 2 寸デアルトイフ, AB ノ長サヲ求メヨ.

19. 甲器ニ酒精 12 升ト水 18 升トノ混合液, 乙器ニ酒精 9 升ト水 3 升トノ混合液ガアル, コノ兩器カラ夫々

幾升ヅツカヲ取ツテ混合シ酒精ト水トガ等分ニ混ゼル液14升ヲ作ラウトスル、各器カラ取ルベキ量ヲ求メヨ。

20. 酒精ト水トノ混合液ガアル、コレニコノ混合液ト同量ノ酒精ヲ加ヘタトキノ酒精ノ量ノ水ノ量ニ對スル比ハ、初ノ混合液ニ同量ノ水ヲ加ヘタトキノ酒精ノ量ノ水ノ量ニ對スル比ノ10倍トナルトイフ。與ヘラレタ混合液ノ中ニ含マレル酒精ノ量ノ割合ヲ求メヨ。

## 級 數

1. 第一項カラ第四項マデノ和ガ68、第六項カラ第十項マデノ和ガ50ナル等差級數ノ第十五項カラ第三十項マデノ和ヲ求メヨ。

2. 等差級數ノ初メノ十二項ノ和ガ354デ、ソノ中ノ偶數番目ノ項ノ和ト奇數番目ノ項ノ和トノ比ガ32:27デアルトイフ、コノ級數ノ公差ヲ求メヨ。

3.  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナサバ

$$\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

4.  $a, b, c$  ガ等比級數ヲナシ、 $x$  及  $y$  ガ夫々  $a, b$  及  $b,$

$c$  ノ等差中項ナルトキハ  $\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = 2$  ナルコトヲ證明セヨ。

5.  $b+c-a, c+a-b, a+b-c$  ガ等比級數ヲナサバ、ソノ公比ハ  $\frac{a}{c}$  ニ等シイコトヲ證明セヨ。

6.  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナシ、 $x$  ガ  $a$  ト  $b$  トノ等比中項、 $y$  ガ  $b$  ト  $c$  トノ等比中項ナルトキハ  $x^2, b^2, y^2$  ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

7. 60度ナル角ノ一邊上ニ頂點  $A$  カラ  $a$  種ノ處ニ一點  $P$  ヲ取り、 $P$  カラ他ノ邊ニ垂線  $PP_1$  ヲ下シ、ソノ足  $P_1$  カラ邊  $AP$  へ垂線  $P_1P_2$  ヲ下シ、ソノ足  $P_2$  カラ邊  $AP_1$  へ垂線  $P_2P_3$  ヲ下ストイフヤウニ、何處マデモ際限ナクコノ手數ヲ續ケテ行フトキ、是等ノ垂線ノ長サノ和ノ極限ヲ求メヨ。

## 一 般 ノ 冪

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

$$1. (6x^{\frac{1}{2}} + 9x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-1} - 13) + (3x^{\frac{1}{2}} - 5 + 2x^{-\frac{1}{2}})$$

$$2. \frac{ax}{by} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+n}{m}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{m-n}{m}}$$

次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$3. 2x^{-2} - x^{-1} = 1$$

$$4. \quad 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} - 4 = 0$$

### 對 數

1. 次ノ各對數ヲ求メヨ.

$$\log_4 0.125 \quad \log_{\frac{3}{4}} 128 \quad \log_{49} \sqrt[4]{7} \quad \log_{0.1} 10$$

2.  $\log 2 = 0.3010$ ,  $\log 3 = 0.4771$  ナ知ツテ次ノ各式ノ値ヲ求メヨ.

$$\log 450 \quad \log \sqrt[3]{1 \frac{4}{5}} \quad \log \left( 7.5 \times \sqrt[5]{\frac{25}{288}} \right)$$

3. 對數表ヲ用ヒテ次ノ二式ノ値ヲ求メヨ.

$$\frac{6.431 \times 0.5921}{7.925 \times 0.0625} \quad \sqrt[3]{\frac{(5.431)^2 \times 3.14}{7.193 \times (0.293)^2}}$$

4. 方程式  $x^{\log x} = 1000x^2$  ナ解ケ.

5.  $2^x = 5$  ナ解ケ. 但シ  $\log 2 = 0.3010$

6.  $\log 5 = 0.6990$  ナ知ツテ  $\log_5 8$  ナ求メヨ.

### 步 合 算

1. 今カラ 4 箇月後ニ拂フベキ額面 2460 圓ノ手形ヲ若干歩合デ割引スルノニ銀行割引ニヨルノト眞割引ニヨルノトノ差ガ 1.5 圓デアルトイフ. 割引ノ歩合ハ幾ラカ.

2. 或人二萬圓ヲ年利五分(1年一期)ノ複利デ借入レ、ソレカラ 20 箇年ノ終リマデニ一年毎ニ年賦デ償還シヨウトスルニハ、年賦金ヲ何程トスベキカ.

3. 或年ノ始メニ金 21668 圓ヲ年利 4 分(1年一期)ノ複利デ銀行ニ預ケ置キ、ソレカラ毎年ノ終ニ金 1650 圓ヅツヲ受取ラウトスル、幾年間受取レルカ.

4. 毎年ノ始ニ 100 圓ヅツ 20 年間積立テ、ソノ後 10 年間毎年ノ初ニ或同額ノ金ヲ引出サウトスルニハ一回ノ引出金額ハ何程カ. 但シ年利 6 分 1 年ヲ一期トスル複利法デ計算セヨ.

### 雜 題

$$1. \quad \frac{1}{1 + \sqrt{(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{(3 + \sqrt{5})}}} \text{ ナ簡單ニセヨ.}$$

次ノ各方程式ヲ解ケ.

$$2. \quad (\sqrt{5} - 2)x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$3. \quad (x+1)^2 = \sqrt{(x+1)^2}$$

$$4. \quad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

$$5. \quad \frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a-b}{x}$$

$$6. \quad \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x-7} = 2$$

$$7. \quad \sqrt{x^2+3x+6} - \sqrt{x^2+3x-1} = 1$$

8.  $\sqrt{x+\sqrt{2x+4}}-1=\sqrt{x-1}$

9.  $\frac{1}{2}\log(x-9)+\log\sqrt{2x-1}=1$

10.  $6^{e+1}\times 3^{5e-2}=21$  (對數表ヲ用ヒヨ)

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ.

11.  $x^2+xy+y^2=19, \quad x^2-xy+y^2=7$

12.  $(x+y)(2x+y)=15, \quad (x+y)(x-y)=3$

13.  $\sqrt{x}-\sqrt{y}=3, \quad \log x-\log y=2$

14.  $\log x+\log y=2+\log 3, \quad 3y-2x=5$

15.  $2x-4y+z=0, \quad x+y-4z=0, \quad (x+1)(z+1)=(y-1)(y+6)$

16.  $x+y+z=4\frac{1}{3}, \quad x+yz=3\frac{1}{3}, \quad xyz=1$

17.  $a, b, x$  ガ何レモ正ノ數ナルトキ  $\frac{a}{b}$  ト  $\frac{a+x}{b+x}$  トノ  
大小ヲ比ベヨ.

18.  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$  ( $b, d, f > 0$ ) ナラバ  $\frac{a}{b} < \frac{a+c+e}{b+d+f} < \frac{e}{f}$   
ナルコトヲ證明セヨ.

19. 任意ノ正數トソノ逆數トノ和ハ2ヨリ小サク  
ナイコトヲ證明セヨ.

20. 方程式  $x^2+(m-4)x+9=0$  ノ根ガ實數ナルタメニ  
ハ  $m$  ノ値ノ範圍如何.

21.  $x=\frac{9}{4}$  ナルトキ  $x^{x^{\frac{1}{x}}}=x(\sqrt{x})^x$  ナルコトヲ示セ.

22.  $\frac{b(a-c)}{c(b-d)}=\frac{a-b}{c-d}$  ナラバ  $b=c$  ナルカ若クハ  
 $a:b=c:d$  ナルコトヲ證明セヨ.

23.  $a:b=c:d$  ナルトキハ

$$(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)=ad(a+b+c+d)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

24.  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナシ,  $b, c, d$  ガ調和級數ヲ  
ナストキハ  $a:b=c:d$  ナルコトヲ證明セヨ.

25.  $x$  ガ  $yz$  ニ比例シ,  $y$  ガ  $xz$  ニ比例スレバ,  $z$  ハ一  
定不易ナルコトヲ證明セヨ.

26. 等差級數ノ第  $m$  項ガ  $a$ , 第  $n$  項ガ  $\beta$  ナルトキハ  
第  $m+n$  項ハ  $\frac{m\alpha-n\beta}{m-n}$  ナルコトヲ示セ.

27. 等差級數ノ最初  $m$  項ノ和ガ  $a$ , 最初  $n$  項ノ和ガ  
 $\beta$  ナルトキハ, 最初  $m+n$  項ノ和ハ  $\frac{(m+n)(a-\beta)}{m-n}$  ナルコト  
ヲ示セ.

28. 等比級數ノ最初  $n$  項ノ和ガ  $a$ , 最初  $2n$  項ノ和  
ガ  $\beta$  ナルトキハ, 最初  $3n$  項ノ和ハ  $\frac{a^2-a\beta+\beta^2}{a}$  ナルコ  
トヲ示セ.

29.  $a, b, c, d$  ガ等比級數ヲナストキ次式ヲ證明セヨ.

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$$

30. 一軒ノ競走ニ於テ甲ハ乙ニ30秒勝ツ, モシ乙ニ  
100米ノ先發ヲ許サバ甲ハ35米ダケ負ケルトイフ, 兩

人ノ速サガ始終變ラナイモノトシテ,各,ガ一籽ヲ走ルニカ、ル時間ヲ求メヨ.

31. 風ガ或平面ニ垂直ニ當ルトキノ壓力ノ強サハ風ヲ受ケル面ノ廣サニ比例シ,風ノ速サノ平方ニ比例スル. 今1平方米ノ平面ニ毎秒1米ノ速サノ風ガ垂直ニ當ルトキノ壓力ガ80瓦デアルトスレバ,縦60種,横80種ノ紙鳶ノ面ニ垂直ニ風ガ當ツテ,張力18斤ノ絲ガ切レルトキノ風ノ速サハ幾ラカ.

32. 中空ノ球ガアル,ソノ直徑 25.8 種,ソノ厚サ 4.6 種デアル,ソノ體積ヲ對數ニヨツテ算出セヨ. 但シ  $\pi = 3.1416$  トセヨ.

33. 或人年齡ガ夫々12歳,8歳,5歳ナル三子ニ金15125圓ヲ,各子ガ20歳ノトキニソノ元利合計ガ相等シクナルヤウニ分ケテ銀行ニ預ケタトイフ,ソノ分配高各何程ヅツカ. 但シ年利5分5厘,1年ヲ一期トスル複利トシテ計算セヨ.

*shorted  
shorts all right  
very good*

## 補習用問題集

餘裕アル生徒ノ研鑽用トシテ,ナルベク本文ニナイ色々ナ種類ノ問題ヲ,重ニ過去ノ各學校入學試験問題カラ少シツツ集メタモノデアル.

### 整式ノ因數分解

次ノ各式ヲ有理係數ノ因數ニ分解セヨ.

1.  $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2$
2.  $(y+z)(z+x)(x+y) + xyz$
3.  $x^3 + 3xy + y^3 - 1$
4.  $6x^2 - 7xy + y^2 + 35zx - 5yz - 6z^2$
5.  $(b^2 + c^2)^2 + a^2(b+c)^2 + a^2(b-c)^2 + a^4$
6.  $x^4 - 27x^2y^2 + y^4$
7.  $4x^3 - x - 3$
8.  $(x-a)^2(b-c) + (x-b)^2(c-a) + (x-c)^2(a-b)$
9.  $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$
10.  $(x^3 - x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x + 2) - 6$

### 最大公約數,最小公倍數

1.  $x^2 + px + q, x^2 + p'x + q'$  ノ最大公約數ガ  $x+a$  ナラ



バ  $a = \frac{q-q'}{p-p'}$  ナルコトヲ證明セヨ.

2.  $x^2+ax+b, x^2+mx+n$  ノ最大公約數ガ  $x+f$  ナラバ,  $\text{ソノ}$  最小公倍數ハ

$$x^3+(a+m-f)x^2+(am-f^2)x+f(a-f)(m-f)$$

ナルコトヲ示セ.

3.  $2x^4+x^3-2x-a, 2x^3-x^2-x-3$  ノ最大公約數ガ  $x$  ノ二次式ナルトキ,  $a$  ノ値ハ何カ.

4.  $x$  ニ關スルニツノ二次式ガアル,  $\text{ソノ}$  最大公約數ハ  $2x+3$ , 最小公倍數ハ  $24x^3-26x^2-53x+60$  デアル.

コノ二式ヲ求メヨ.

5.  $x$  ニツイテノ二次式ト三次式トガアル,  $\text{ソノ}$  積ハ  $x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1$ ,  $\text{ソノ}$  最大公約數ハ  $x-1$  デアル. コノ二式ヲ求メヨ.

### 分數式ヲ簡約スル問題

次ノ各式ヲ簡約セヨ.

$$1. \frac{(a+b-c)^2-d^2}{(a+b)^2-(c+d)^2} + \frac{(b+c-a)^2-d^2}{(b+c)^2-(a+d)^2} + \frac{(c+a-b)^2-d^2}{(c+a)^2-(b+d)^2}$$

$$2. \frac{1}{(x-y)(x-z)(a+x)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)(a+y)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)(a+z)}$$

$$3. \frac{\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} - 3}{\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} + \frac{x}{x-c} - 3} = \frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$4. \frac{6x^4-5x^3-20x^2+1}{4x^4-17x^2-10x+3}$$

$$5. \frac{1}{x-3a} - \frac{1}{x+3a} + \frac{3}{x+a} - \frac{3}{x-a}$$

$$6. 1 + \frac{x}{1+x + \frac{2x^2}{1-x}}$$

$$7. \frac{2x^2-3x+2}{x-1} + \frac{3x^2+x-7}{x+2} - \frac{5x^2+8x-20}{x-3} + \frac{13x+49}{x+4}$$

マヅ各項ヲ帶分數ニ直セ.

8.  $a+b+c=0$  ナルトキ次式ヲ簡單ニセヨ.

$$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) - \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2) + \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

### 等式ヲ證明スル問題

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ.

$$1. (a+b)^3 + (a+c)^3 + (a+d)^3 + (b+c)^3 + (b+d)^3 + (c+d)^3 = 3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$2. \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} + \frac{a-b}{1+ab} = \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ca} \cdot \frac{a-b}{1+ab}$$

3.  $\frac{a+c}{1-ac} = \frac{b+d}{1-bd}$  ナルトキ次ノ二式ヲ證明セヨ.

$$\frac{a-b}{1+ab} = \frac{d-c}{1+dc}, \quad \frac{a-d}{1+ad} = \frac{b-c}{1+bc}$$

4.  $a+b+c=0$  ナルトキ次ノ各式ヲ證明セヨ.

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 3 = 0$$

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = 0$$

$$a^4+b^4+c^4 = 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$

5.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$  ナルトキ次ノ各等式ヲ

證明セヨ.

$$(b+c)(c+a)(a+b) = 0$$

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3$$

$$a^7+b^7+c^7 = (a+b+c)^7$$

6.  $abc=1$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

7.  $a+b+c+d=0$  ナルトキ次ノ二式ヲ證明セヨ.

$$abc+bed+cda+dab = (a+b)(a+c)(a+d)$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3 = 3(a+b)(a+c)(a+d)$$

8.  $x + \frac{1}{x} = 1$  ナルトキ次ノ二式ヲ證明セヨ.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = -1, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = -2$$

9.  $abc = (b+c)(c+a)(a+b)$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{abc}{b+c} - a^2 = \frac{abc}{c+a} - b^2 = \frac{abc}{a+b} - c^2$$

10.  $yz+zx+xy=1$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

11.  $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = 1$  ナルトキ  $xyz+1=0$  ナルコト

ヲ證明セヨ.

12.  $y = a - \frac{a^2}{x}, \quad z = a - \frac{a^2}{y}$  且  $a \neq 0$  ナルトキ  $x = a - \frac{a^2}{z}$

ナルコトヲ證明セヨ.

13.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$  ナルトキハ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
 ナルコトヲ證明セヨ.

14.  $x+y+z = x^2+y^2+z^2 = 2$  ナラバ  $x(1-x)^2 = y(1-y)^2 = z(1-z)^2$  ナルコトヲ證明セヨ.

15.  $a(by+cz-ax) = b(cz+ax-by) = c(ax+by-cz)$  且  $a+b+c=0$  ナルトキ  $x+y+z=0$  ナルコトヲ證明セヨ.

### 整除, 剰餘ノ問題

1.  $ax^2+bx+c$  が  $2ax+b$  で割切レ、バ、前ノ式ハ  $x$  ニツイテ完全平方式ナルコトヲ證明セヨ.

2.  $ax^3+3bx^2+3cx+d$  が  $ax^2+2bx+c$  で割切レ、バ、前者ハ完全立方式デ、後者ハ完全平方式デアル。コト

ヲ證明セヨ。尙  $a, b, c, d$  ハ等比級數ヲナス。

3.  $n$  ガ任意ノ整數ナルトキ  $n^3+5n$  ハ恒ニ 6 ノ倍數ナルコトヲ證明セヨ。

$$\text{原式} = n(n^2-1+6) = n(n+1)(n-1)+6n$$

4. 引續イタ三ツノ奇數ノ平方ノ和ニ 1 ヲ加ヘタモノハ 12 ノ倍數デアツテ 24 ノ倍數デナイコトヲ示セ。

5.  $x^4+px^2+qx+a^2$  ガ  $x-1$  デモ  $x+1$  デモ割切レルナラバ  $x-a$  デモ  $x+a$  デモマタ割切レルコトヲ證明セヨ。

6.  $x$  ニ關スル或多項式ヲ  $x-1$  デ割ツタ剩餘ハ 4,  $x$  ノ整商ヲ更ニ  $x-2$  デ割ツタ剩餘ハ 3 デアルトイフ。原式ヲ  $x-2$  及  $(x-1)(x-2)$  デ割ツタトキノ剩餘ヲ求メヨ。

### 未定ノ係數ヲ求メル問題

1. 次ノ恒等式ニ於ケル數係數  $A, B, C$  ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{x^2+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

2.  $(x^3-px^2+qx-r)(qx^3+x^2+5x+7)$  ヲ展開整頓シタトキ,  $x$  ノ奇數幂ノ項ガ皆ナクナルヤウニ  $p, q, r$  ノ値ヲ定メヨ。

3.  $x^4+3x^3+lx^2+mx+n$  ガ  $(x^2+1)(x+2)$  デ割切レルヤウニ  $l, m, n$  ヲ定メヨ。

4.  $x^4+4x^3+3x^2+px+q$  及  $x^3+3x^2+2x+1$  ヲ共ニ  $x^2+x+1$  デ割ルトキ相等シイ剩餘ヲ得ルヤウニ  $p, q$  ヲ定メヨ。

5.  $x^2+(a-10)x+b+8$  ト  $x^2+(2a-11)x+39$  トガ何レモ  $x-2$  デ割切レルヤウニ  $a, b$  ヲ定メヨ。

6.  $(b+c)(c+a)(a+b)+nabc$  ガ  $a+b+c$  デ割切レルヤウニ  $n$  ノ値ヲ求メヨ。

7.  $x^4+ax^3+bx^2+cx+4$  ガ平方ニ開キ切レ, 且  $x=-1$  ナルトキコノ式ノ數値ガ 1 トナルヤウニ  $a, b, c$  ヲ定メヨ。

8.  $x^2-x+p$  ト  $x^3+x^2+x+(p+3)$  トガ一次式ノ最大公約數ヲ有スルヤウニ  $p$  ノ値ヲ定メヨ。マタ上ノ二式ガ  $x$  ニ關スル公約數ヲ有スルヤウニ  $p$  ノ値ヲ定メヨ。

### 有理式雜題

1.  $ax^2+2bxy+cy^2 =$  於テ  $x=px'+qy', y=rx'+sy'$  トオイテ得ル式ヲ  $Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2$  トスレバ  $B^2-AC=(b^2-ac)(ps-qr)^2$  ナルコトヲ證明セヨ。

2.  $x$  ニツイテノ三次式ガアル, コレヲ  $2x-3$  デ割レバ  $-3$  ガ残り,  $2x^2-5x+3$  デ割レバ整商  $3x+4$  ヲ得ルトイフ, コノ三次式ヲ求メヨ。

3.  $(ax+b)^2+(cx+d)^2$  が  $x$  ニツイテ完全平方式ナル  
タメ  $a, b, c, d$  間ノ關係ヲ求メヨ.

4.  $ax^3+bx^2+cx+d$  が  $x$  ニツイテ完全立方式ナルタ  
メ  $a, b, c, d$  間ノ關係ヲ求メヨ.

5.  $x+y+z=0$  ナラバ  $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$  ハ或有理式ノ  
平方ニ等シイコトヲ示セ.

6.  $x^3+px^2+qx+1$  及  $x^3+qx^2+px+1$  が一次ノ公約數  
ヲ有スルトキハ、ソノ公約數ハ  $x-1$  デ、且ツ  $p+q=-2$  ナ  
ルコトヲ證明セヨ. 但シ  $p \neq q$  トスル.

7.  $\frac{abc}{b+c}-a^2=\frac{abc}{c+a}-b^2$  ナラバ、コノ等式ノ各邊ハ  
 $\frac{abc}{a+b}-c^2$  ニ等シク、マタ  $(b+c)(c+a)(a+b)=abc$  ナルコトヲ  
證明セヨ. 但シ  $a \neq b$  トスル.

8.  $\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}=1$  ナルトキハ  
 $x=y+z$  カ  $y=z+x$  カ  $z=x+y$  カノ中ノ或一ツダケガ成  
リ立ツコトヲ證明セヨ.

9.  $x^n+py^m+qz^n$  が  $(x-ay)(x-bz)$  デ割切レルトキハ  
 $\frac{p}{a^n}+\frac{q}{b^n}+1=0$  ナルコトヲ證明セヨ.

10.  $x^3-3b^2x+2c^3$  が  $x-a$  及  $x-b$  デ割切レルトキハ  
 $a=b=c$  ナルカ或ハ  $a=-2b=-2c$  ナルコトヲ證明セヨ.  
但シ  $a, b, c$  ハ實數トスル.

## 無理式

1.  $\sqrt{73-12\sqrt{35}}$  ナ簡單ニセヨ.

2.  $x=\frac{a+b}{\sqrt{2(a-b)}}$  ナルトキ次式ヲ  $a, b$  ノ最簡形デ表  
ハセ.

$$\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

3.  $2x=a+\frac{1}{a}$ ,  $2y=b+\frac{1}{b}$  ナルトキ次式ヲ  $a, b$  ノ最  
簡形デ表ハセ.

$$2\{xy-\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\}$$

但シ  $0 < b < 1 < a$  トスル.

4.  $x=y+z=\sqrt[3]{4}$  ナルトキ  $x^3+2(y^3+z^3)+6xyz$  ノ値ヲ求  
メヨ.

5.  $a=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ,  $b=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$  ナルトキ次式ノ値  
ヲ計算セヨ. (四捨五入, 小數第二位マデ)

$$\frac{a(b^2-1)+a(ab+1)}{b(a^2+1)-b(ab+1)}$$

6.  $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$  ナルトキハ  
 $x^3+3bx-2a=0$  ナルコトヲ示セ.

## 一元整方程式

次ノ各方程式ヲ解ケ.

1.  $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$

2.  $x(x-1)(x-2)=6.5.4$

3.  $x^3-10x^2+15x-6=0$  係數ノ和=0

4.  $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$   
 5.  $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5$   
 $12x^2 - 5x$  一團トセヨ.

6.  $x^3 - 5x^2 + px + 45 = 0$  ノ一ノ根ガ  $-5$  ナルコトヲ知  
 ヲテコノ方程式ヲ解ケ。マツ  $p$  ノ値ヲ求メヨ。

## 一元分數方程式

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1.  $\frac{x}{x-4} + \frac{3}{(x-1)(x-4)} = \frac{2}{x-4} - \frac{1}{x-1}$   
 2.  $\frac{1}{x+1} - \frac{15}{x-3} - \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = 3 - \frac{5x+2}{x-3}$   
 3.  $\frac{5}{x^2+6x+8} = \frac{1}{x^2+6x+5} + \frac{4}{x^2+6x+9}$   
 $x^2+6x$  一團トセヨ。  
 4.  $\frac{1}{x^2+11x-8} + \frac{1}{x^2+2x-8} + \frac{1}{x^2-13x-8} = 0$   
 $x^2-8$  一團トセヨ。  
 5.  $\frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} = \frac{a-c}{x+a-c} + \frac{b+c}{x+b+c}$

## 一元無理方程式

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1.  $\frac{1}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \sqrt{x-4}$   
 2.  $\sqrt{(2x+1)^2} = 3x+4$       3.  $\sqrt[3]{37+x} - \sqrt{x} = 1$

4.  $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+b^2}} = 0$  但シ  $a, b > 0, c \neq 0$   
 5.  $\sqrt{3ax-x^2} - \sqrt{x^2-3bx} = \sqrt{3(a-b)x}$

## 聯立整方程式

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

1.  $x-ay+a^2z=a^3$       2.  $a(z+x)-b(z-x)=2azx$   
 $x-by+b^2z=b^3$        $b(x+y)-c(x-y)=2bxy$   
 $x-cy+c^2z=c^3$        $c(y+z)-a(y-z)=2cyz$   
 3.  $xy(x+y)=30$       4.  $x-y=1$   
 $(x+y)(x^2+xy+y^2)=95$        $x^4+y^4=881$   
 5.  $xy+x+y=19$       6.  $x^2+y^2+z^2=50$   
 $yz+y+z=29$        $yz-zx+xy=7$   
 $zx+z+x=23$        $xy-yz-zx=47$   
 7.  $x+y+z=a$       8.  $x+y+z=0$   
 $x^2+y^2+z^2=a^2$        $x^2+y^2+z^2=6$   
 $x^3+y^3+z^3=a^3$        $12x^2+15y^2+20z^2=107$   
 9.  $x^2+xy+y^2=39, y^2+yz+z^2=49, z^2+zx+x^2=19$   
 10.  $x^2+2yz=y^2+2zx=z^2+2xy=12$

## 聯立分數方程式

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

1.  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}, x^2-y^2=3$

2.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12$
3.  $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}, z + \frac{1}{x} = 4$
4.  $\frac{yz}{y+z} = a, \frac{zx}{z+x} = b, \frac{xy}{x+y} = c$
5.  $3x = \frac{y}{z} + \frac{z}{y}, 4y = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}, 5z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

## 聯立無理方程式

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

1.  $x+y+\sqrt{x+y}=12, x^3+y^3=189$
2.  $x+y=5+\sqrt{x}+\sqrt{y}, (x-\sqrt{x})(y-\sqrt{y})=6$
3.  $2x+6\sqrt{2x+y+4}=23-y, 4x^2-6x=y^2+3y$
4.  $x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{2}{x+y}, x^2+y^2=7$
5.  $\sqrt{x^2+ay-a^2}=b-x, \sqrt{y^2+cx}=x+y$

## 消去ノ問題

1. 次ノ二式カラ  $x$  ヲ消去セヨ。

$$a=x(2-ax), b=1-\frac{2x^2}{1+x^2}$$

2. 次ノ三式カラ  $m, m'$  ヲ消去セヨ。

$$m^2x-my+a=0, m'^2x-m'y+a=0, mm'+1=0$$

3. 次ノ四式カラ  $x, y, z$  ヲ消去セヨ。

$$\frac{x^2(y+z)}{a^3} = \frac{y^2(z+x)}{b^3} = \frac{z^2(x+y)}{c^3} = \frac{xyz}{abc} = 1$$

4. 次ノ三ツノ同次式カラ  $x, y, z$  ヲ消去セヨ。

$$x^2+yz=ax, y^2+zx=by, z^2+xy=cz \text{ 但シ } x, y, z \text{ ハ皆 } 0 \text{ デナイトスル。}$$

5. 次ノ三式カラ  $x, y, z$  ヲ消去セヨ。

$$x+y+z=a, x^2+y^2+z^2=b^2, x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3$$

## 二次方程式ノ根ト係数トノ關係

1.  $ax^2+bx+c=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トシテ、次ノ各式ヲ  $a, b, c$  デ表ハセ。

$$\alpha^4+\beta^4 \quad \alpha^2\left(\frac{\alpha^2}{\beta}-\beta\right)+\beta^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha}-\alpha\right)$$

2.  $ax^2+bx+c=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トスルトキ  $m\alpha+n\beta$  ト  $n\alpha+m\beta$  トヲ二根トスル二次方程式ヲ作レ。

3.  $x^2-x+1=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トスレバ  $\frac{\alpha}{\beta}=a-1, \frac{\beta}{\alpha}=\beta-1$  ナルコトヲ證明セヨ。

4.  $x^2+px+q=0, x^2+qx+p=0$  ガ唯一ツノ共通根ヲ有スルトキハ、ソノ共通デナイ根ノ和ハ  $-1$  ニ等シイコトヲ證明セヨ。

5.  $x^2+px+1=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トシ、 $x^2+qx+1=0$  ノ二根ヲ  $\gamma, \delta$  トスルトキ、次式ヲ證明セヨ。

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$$

6.  $x^2+ax+b=0$  と  $x^2+px+q=0$  とガーツノ共通根ヲ有スルトキ、ソノ異ナル二根ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ。

7.  $ax^2+bx+c=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トスルトキ  $\alpha=2\beta+1$  ナルタメニハ  $a, b, c$  間ノ關係如何。

8. 三次方程式  $x^3+px+q=0$  ノ三根ノ中ノ二根ガ相等シイタメニハ  $p, q$  間ノ關係如何。

## 方程式雜題

1. 次ノ方程式ニ適スル  $x, y$  ノ實數値ヲ求メヨ。

$$(x^2+1)(y^2+4)-8xy=0$$

2.  $n$  ノ値ニ拘ラズ恒ニ次ノ方程式ニ適スル  $x, y$  ノ値ヲ求メヨ。

$$(n+1)(x^2+y^2)=ax+nb$$

3. 次ノ聯立方程式ニ適合スル  $y$  ノ値ガソノ  $x$  ノ値ノ3倍トナルタメニハ  $m$  ノ値ハ何カ。マタソノトキノ  $x, y$  ノ値ヲ求メヨ。

$$(5m+11)x-(m+4)y+12=0, (m+15)x+(2m-1)y-20=0$$

4. 二次方程式  $(a^2+p^2)x^2-2(aq+bp)x+(b^2+q^2)=0$  ガ實根ヲ有スルトキハ必ず等根ナルコトヲ示セ。但シ  $a, b, p, q$  ハ皆實數トスル。

5. 聯立方程式  $x+\frac{1}{y}=a, y+\frac{1}{x}=b$  ノ二組ノ根

ガ一致スルタメニハ  $a, b$  間ノ關係如何。且ツソノトキノ  $x, y$  ノ値ヲ求メヨ。

6.  $a>b>c$  ナラバ方程式  $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$  ハ  $a, b$  ノ間ト  $b, c$  ノ間トニツツ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

7. 次ノ二方程式ニ共通ナル根ヲ求メヨ。

$$2x^4+x^3-6x^2-2x+3=0, 2x^4-3x^3+2x-3=0$$

二方程式ノ左邊ノ最大公約數ヲ考ヘヨ。

8.  $x =$  關スル二次方程式  $(x-a)^2+y^2-25=0$  ガ等根ヲ有スルトキ  $x, y$  ノ値ヲ求メヨ。

9.  $x, y =$  關スル聯立方程式

$$x+my-m=0, x^2+y^2=x$$

ノ二組ノ根ヲ  $x_1, y_1$  及  $x_2, y_2$  トスルトキ

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$$

ナルヤウニ  $m$  ノ値ヲ求メヨ。

10. 二次方程式  $mx^2+(m+1)x+n=0$  ガ  $m$  ノ任意ノ有理値ニ對シテ恒ニ有理數ノ根ヲ有スルトキハ  $n=0$  マタハ  $n=1$  ナルコトヲ證明セヨ。

11.  $ax^2+bx+c=0$  ノ二根ガ引續クニ二整數ナラバ  $a^2=b^2-4ac$  ナルコトヲ證明セヨ。

12. 三次方程式  $x^3-9x^2+26x-24=0$  ノ三根ノ中、一

ハ他ノ一根ノ2倍ニ等シイ。コノ事ヲ知ツテコノ方程式ヲ解ケ。

### 方程式應用問題

1. 峠ヲ隔テテ A, B 兩地ガアル, ソノ距離 9.5 里デアル。今或人上リハ毎時 1 里, 下リハ毎時 2 里, 平地デハ毎時 1.5 里ノ速サデ A カラ B ニ行クニハ 6 時間, B カラ A ニ行クニハ 7 時間半カ、ルトイフ。兩地間ニアル上リ道, 下リ道及平地ノ長サ各、幾ラカ。

2. A, B 二人ノ旅客ガアル, B ガ乙地ヲ出發スルト同時ニ A ハ乙地ヲ經テ B ト同ジ道ヲ行ク目的デ甲地ヲ發シタ, A ガ B ニ追付イタトキマデニ二人ガ歩イタ路程ハ合計 120 籽デ, A ハコノトキカラ 4 時間前ニ乙地ヲ通ツタ, B ガ甲地カラ此所マデ來ルニハ 9 時間カカル筈デアルトイフ, 甲乙兩地間ノ距離ヲ求メヨ。

3. 甲乙丙丁四人ノ自轉車乗ガアル, 甲乙二人ハ A 地カラ B 地ニ向ヒ, 丙丁二人ハ B 地カラ A 地ニ向ヒ, 四人同時ニ出發シタトコロガ, 甲ハ A カラ 5 籽ノ處デ丙ニ出會ヒ, B カラ 4.5 籽ノ處デ丁ニ出會ヒ, 乙ハ A カラ 3.6 籽ノ處デ丙ニ出會ヒ, 兩地ノ中央デ丁ニ出會ツタトイフ。A, B 兩地間ノ距離ハ幾ラカ。

4. 半徑  $\alpha$  ナル半圓形ノ紙片カラ最大ナル圓ヲ截リ取り, 次ニソノ殘リノ部分カラ再ビ最大ナル圓ヲ截リ取ルトキハコノ圓ノ半徑如何。

5. 内徑 8 瓶, 深サ 9 瓶ノ罐ノ内ニ二ツノ相等シイ球ヲ容レタトコロガ, 丁度隙間ナク蓋ヲスルコトガ出來タトイフ, コノ球ノ直徑ヲ求メヨ。

6. 或人電車路ニ沿フテ毎時 4 哩ノ速サデ歩イタノニ 8 分 24 秒 時毎ニ電車ニ追越サレ, マタ 6 分 時毎ニ電車ニ行會ツタトイフ, 電車ノ速サハ毎時幾哩カ。但シ電車ハ總テ等シイ速サデ等シイ時間ヲ隔テテ雙方ノ起點カラ發車シ, 途中停留シナイモノトスル。

7. 900 籽隔タル甲乙兩地ガアル。A 號飛行機ガ甲地ヲ出發シテ乙地ニ向ツテカラ 3 時間ノ後 B 號飛行機ガ乙地ヲ出發シテ甲地ニ向ツタ, ソシテ途中行違ツテカラ A 號ハ 2 時間半デ乙地ニ著キ, B 號ハ 4 時間デ甲地ニ著イタ。兩飛行機ノ速サ毎時幾籽カ。

8. 井戸ノ中ヘ石ヲ落シテカラソレガ水面ニ落チタ音ノ聞コエルマデ 2.5 秒カ、ツタトイフ, コノ井戸ノ深サ約何米カ。但シ音ノ速サハ毎秒 330 米デ, 石ハ  $t$  秒間ニ  $4.9t^2$  米ダケ落ちルモノトセヨ。



## 不等式

- 1.
- $a, b$
- が實數ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$a^4 - a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geq 0$$

- 2.
- $a, b$
- が實數ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$$

- 3.
- $a, b, c$
- が相異ナル正ノ數ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$(a+b)(a+c)(b+c) > 8abc$$

定理  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$  = 注意セヨ.

- 4.
- $x^2 + px + \frac{p}{2}$
- が
- $x$
- ノ任意ノ實數値ニ對シテ恒ニ正ナルタメニ
- $p$
- ノ取ルベキ値ノ範圍ヲ求メヨ.

- 5.
- $x$
- ノ任意ノ實數値ニ對シテ分數式
- $\frac{x}{x^2 - 5x + 9}$
- が取り得ル値ノ範圍ヲ求メヨ.

$\frac{x}{x^2 - 5x + 9} = y$  ト置ケバ,  $x$  ニ關スルコノ方程式ノ根ガ實數ナルタメニ  $y$  ノ取り得ル値ノ範圍ヲ求メヨトイフノト同シ意味デアアル.

## 最大最小

1. 二次式  $x^2 + px + q$  が  $x=1$  ナルトキ3ナル最小値ヲ取ルトイフ.  $p, q$  ノ値ハ何カ.
2.  $x$  が實數ナルトキ  $\frac{x}{x^2 - 5x + 9}$  ノ最大値及最小

値ヲ求メヨ. マタソノトキノ  $x$  ノ値ヲ求メヨ.

- 3.
- $x$
- が實數ナルトキ
- $(2+3x)(7-6x)$
- ノ最大値ヲ求メヨ.

コノ式ノ最大ナトキハソノ2倍  $(4+6x)(7-6x)$  ノ最大ナトキデアアル, トコロガ二數  $4+6x$  ト  $7-6x$  トノ和ハ11テ一定デアアル, ダカラソノ積ノ最大ナトキハ  $4+6x=7-6x$  即チ  $x=\frac{1}{4}$  ノトキデアアル.

4. 底邊
- $a$
- , 高サ
- $h$
- ナル三角形ニ内接シ, 一邊ヲ三角形ノ底邊上ニ有スル最大面積ノ矩形ヲ作ルニハ, ソノ二邊ノ長サヲ何程ニスレバイ、カ.

5. 直角ニ交叉スル甲乙二直線ガアル, Aハ甲直線上ニ, Bハ乙直線上ニ夫々交叉點カラ50米ト100米トノ位置カラ共ニ交叉點ニ向ツテ同時ニ進行ヲ始メ, Aハ毎秒4米, Bハ毎秒3米ノ速サデ進行スル. A, Bノ距離ガ最モ近クナルハ幾秒ノ後カ, 且ツソノ距離ヲ求メヨ.

## 比ヲ求メル問題

1.  $2x - 3y + z = 0, x - 4y + 2z = 0, 5w = 6z$  カラ  $x:y:z:w$  ヲ求メヨ.
2.  $\frac{b}{a+b} = \frac{a-b+c}{-a+b+c} = \frac{a+b+c}{2a+b+2c}$  ナルトキ  $a:b:c$  ヲ求メヨ.

3.  $x+3y+5z=0, 2x+4y+7z=0$  ナルトキ  $\frac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+7z^2}$  ノ値ヲ求メヨ.

## 比例ニ關スル證明問題

1.  $\frac{x+y}{ax+by} = \frac{y+z}{by+cz} = \frac{z+x}{cz+ax}$  ナルトキハ  $a=b=c$  ナルコトヲ證明セヨ. 但シ  $x, y, z$  ハ何レモ 0 デナイトスル.

2.  $x:y:z=a:b:c$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{y-b}{y+b} - \frac{2(z^2-c^2)}{z^2+c^2} = \frac{8(x+y+z)^2(a+b+c)^2}{(x+y+z)^3 - (a+b+c)^4}$$

3.  $\frac{y+z}{pb+qc} = \frac{z+x}{pc+qa} = \frac{x+y}{pa+qb}$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c} = \frac{(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z}{bc+ca+ab}$$

但シ  $p+q \neq 0$  トスル.

4.  $\frac{x+y}{a^2} = \frac{y+z}{b^2} = \frac{z+x}{c^2}, xy+yz+zx=0$  ナラバ  $a \pm b \pm c = 0$  ナルコトヲ證明セヨ.

5.  $3y + \frac{(z-x)^2}{y} = 3z + \frac{(x-y)^2}{z}$  ナルトキハ、コノ式ノ各邊ハ  $3x + \frac{(y-z)^2}{x} =$  等シイコトヲ證明セヨ. 但シ  $y \neq z$  トスル. 各邊  $= 2(x+y+z)$

6.  $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)} = \frac{y^2-zx}{y(1-zx)}$  ナルトキハ、コノ式ノ各邊ハ

$\frac{z^2-xy}{z(1-xy)}$  = 等シク、マタ  $x+y+z =$  等シク、マタ  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} =$  等シイコトヲ證明セヨ. 但シ  $x \neq y$  トスル.

## 比例雜題

1.  $x$  ガ  $y =$  比例シ、 $z =$  反比例スルトキ、 $x=1, y=2, z=3$  ガ一組ノ相對應スル値ナラバ、 $y=4, z=5 =$  對應スル  $x$  ノ値ハ何カ.

2. 三數  $x, y, z$  ガアル.  $y+z-x$  ハ一定デアツテ、 $(x+y-z)(z+x-y)$  ガ  $yz =$  比例スルナラバ  $x+y+z$  モマタ  $yz =$  比例スルコトヲ證明セヨ.

3. 甲乙二人一箇年ノ收入ノ比ハ  $5:3$ 、支出ノ比ハ  $9:5$  デアツテ、一年間ニ二人共 1200 圓ヅツ残シタトイフ、各人ノ年收ヲ求メヨ.

4. 机上 0.6 米ノ所ニ 16 燭光ノ電球ヲツケテアツタノヲ机上 0.8 米ノ所ニ擧ゲテ、机ノ上ヲ元ト同ジ明ルサニスルニハ幾燭光ノ電球ヲツケタライ、カ. 但シ明ルサハ燭力ニ比例シ、光源(電球)カラノ距離ノ平方ニ反比例スル.

5. 8 燭ノ電燈ト 32 燭ノ電燈トガ 3 米隔テテアル、コノ二ツノ電燈ヲ連結スル直線上ノドンナ所ニ障子ヲ置カバコノ障子ノ各電燈カラ受ケル光量ガ相等シ

クナルカ。(前題ノ但書參照)

6. 遊星ガ太陽ノ周圍ヲ廻ルニ要スル時間ノ平方ハ遊星ト太陽トノ平均距離ノ立方ニ比例スル、ソシテ水星ト太陽トノ平均距離ハ地球ト太陽トノ平均距離ノ約 $\frac{2}{5}$ デアル。水星ハ一年間ニ太陽ノ周圍ヲ約幾回廻ルカ。

7. 物體ガ斜面ヲ滑リ落ちルニカ、ル時間ハ、ソノ斜面ノ長サニ比例シ、初ノ高サノ平方根ニ反比例スル。高サ4尺ノ處カラ8尺ノ斜面ヲ滑リ落ちルニ1秒カカルトスレバ、高サ9尺ノ處カラ24尺ノ斜面ヲ滑リ落ちルニハ幾秒カ、ルカ。

8. 汽船ガ消費スル石炭ノ量ハ航海スル距離ト速サノ平方トニ比例スルモノトスル。或汽船ガ12.5<sup>ノット</sup>節ノ速サデ1300海里航行シタトキ300噸ノ石炭ヲ使ツタトスレバ、13節ノ速サデ2000海里ヲ航行シヨウトスルニハドレダケノ石炭ヲ用意シタライ、カ。

9. 進行中ノ列車ヲ停車サセルニ要スル力ハ列車ノ重サト速サノ平方トニ比例シ、停車スルマデニ通過スル距離ニ反比例スルモノトスル。重サ200噸ノ列車ガ毎時45軒ノ速サデ走ツテキルトキ、コレヲ200米先キデ停車サセルノニ10噸ノ力ヲ要スルトスレバ、重

サ300噸ノ列車ガ毎時30軒ノ速サデ走ツテキルトキ、15噸ノ力デ停車サセヨウトスレバ幾米先キデ停マルカ。

10. 家族ノ人數ガ一定ナラバ生計費ハ月數ニ比例シ、月數ガ一定ナラバ生計費ノ一部ハ人數ニ比例シ一部ハ定額デアルトスル。家族4人3箇月間ノ生計費ガ255圓、5人4箇月間ノ生計費ガ400圓ナラバ、6人5箇月間ノ生計費ハ何程イルコトトナルカ。

### 等差級數

1. 等差級數 2, 5, 8, ……200 及 2, 7, 12, ……202 = 於テ相合致スル項ハ幾ツアルカ。

2.  $\frac{1}{1+\sqrt{3}}, \frac{1}{4+2\sqrt{3}}, -\frac{1}{5+3\sqrt{3}}, \dots$  ハ等差級數デアルコトヲ驗セ。

3. 3ト5トノ間ニ幾ツカノ數ヲ挿入シ、3, 5ト合ハセテ等差級數ヲナシ、ソシテソノ總和ガ28ニナルヤウニセヨ。

4. 最初 $n$ 項ノ和ガ $n$ ノ値ニ拘ラズ $An^2+Bn$ ナル級數ハ等差級數ナルコトヲ示セ。

5. ニツノ等差級數ガアル、ソノ各級數ノ最初 $n$ 項ノ和ノ比ガ $n$ ノ値ニ拘ラズ $(7n+2):(n+4)$ デアルトイ

フ、ソノ各級數ノ第  $m$  項ノ比ヲ求メヨ。

6. 等差級數ノ第  $p$  項、第  $q$  項、第  $r$  項ガ夫々  $x, y, z$  ナル正ノ整數デ、ソノ第  $x$  項、第  $y$  項、第  $z$  項ガ夫々  $p, q, r$  ナラバ、初項ハ或整數、公差ハ  $-1$  ナルコトヲ示セ。

7. 甲ハ或地ヲ出發シテ初日 = 1 里、二日目 = 1.5 里、三日目 = 2 里、……ト毎日増シテ行ク、甲ノ出發後五日目 = 乙ガ同地ヲ發シテ毎日 6 里ヅツ行ケバ乙出發後幾日目 = 甲 = 追付クカ。

8. 相異ナル四ツノ實數  $a, b, c, d$  ガ等差級數ヲナストキ次ノ二式ヲ證明セヨ。

$$ad < bc \quad a^2 + d^2 > b^2 + c^2$$

### 等比級數

1.  $m^2 + m + 1, m^2 + 2m + 11, m^2 + 3m + 28$  ガ等比級數ヲナスヤウ =  $m$  ノ値ヲ定メヨ。

2. 項ノ數ガ奇數ナル或等比級數ノ和ヲ  $p$  トシ、マタコノ級數ノ偶數番目ノ項ノ符號ヲ變ヘタ級數(即チ元ノ級數ノ公比ノ符號ヲ變ヘタモノヲ公比トスル等比級數)ノ和ヲ  $q$  トスレバ、コノ級數ノ各項ノ平方ヲ項トスル等比級數ノ和ハ  $pq$  = 等シイコトヲ證明セヨ。

3.  $x, y, z$  ガ等比級數ヲナスバ  $x^2 + y^2 + z^2$  ハ一次ノ二因數 = 分解シ得ルコトヲ示セ。

4. 等比級數ノ第  $m$  項ガ  $a$ 、第  $n$  項ガ  $\beta$  ナルトキ、第  $m+n$  項ヲ求メヨ。

5.  $y^3 z^3 + z^3 x^3 + x^3 y^3 = xyz(x^3 + y^3 + z^3)$  ナラバ  $x, y, z$  ハ或順ニ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

6. 三正數  $a, b, c$  ガ等比級數ヲナストキハ  $a^2 + b^2 + c^2 > (a - b + c)^2$  ナルコトヲ證明セヨ。

### 級數雜題

1.  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナシ、 $b, a, c$  ガ等比級數ヲナスバ、 $a, c, b$  ハ調和級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

2.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2b-c} + \frac{1}{2b-a}$  ナルトキハ、 $a, b, c$  ガ等差級數ヲナスカ、マタハ  $a, 2b, c$  ガ調和級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

3. 次ノ級數ノ最初  $2n$  項ノ和ヲ求メヨ。

$$1, a, ab, a^2b, a^2b^2, a^3b^2, a^3b^3, \dots$$

一ツオキノ項ガ等比級數ヲナス。

4. 次ノ級數ノ最初  $n$  項ノ和ヲ求メヨ。

$$1, 2+3, 4+5+6, 7+8+9+10, \dots$$

5. 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, (n-1)^2, n^2$$

恒等式  $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$  = 於テ  $n$  ヲ  $1, 2, 3, \dots, n$  トオイテ得タ  $n$  箇ノ等式ヲ悉ク加ヘ合ハセテ見ヨ。

6. 次ノ級數ノ最初  $n$  項ノ和ヲ求メヨ。 マタ  $x$  ノ  
絶對値ガ 1 ヨリ小サイトキ, ソノ無限項ノ和ノ極限ヲ  
求メヨ。

$$x, 2x^2, 3x^3, 4x^4, \dots$$

等比級數ノ和ノ求メ方ニ倣ヘ。

### 一般ノ冪

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

$$1. \frac{1}{x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{8}} + 1} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{8}} + 1} - \frac{2x^{\frac{1}{8}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1}$$

$$2. \frac{x - 7x^{\frac{1}{2}}}{x - 5x^{\frac{1}{2}} - 14} + \left(1 + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$3. (x^{2n-1} + a^{2n-1})(x^{2n-1} - a^{2n-1}) \quad x^{2n-1} \text{ハ } x^{(2n-1)} \text{ノ意}$$

$$4. p = \frac{1}{2} \left( \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}} \right) \text{ ナラバ } (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} \text{ ナル}$$

コトヲ證明セヨ。

### 對數

1. 對數ノ和ガ 0 ナル二數ノ間ノ關係如何。

次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$2. \log(x-1) - \log(x^2 - 5x + 4) + 1 = 0$$

$$3. (\log x)^{\log x} = x$$

$$4. a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x} \text{ 但シ } a, b > 0$$

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$5. x^{x+y} = y^4, \quad y^{x+y} = x \text{ 但シ } x, y > 0$$

$$6. (3-x)^y = 100(3+x)^{-y}, \quad (8x)^y = 100 \text{ 但シ } 0 < x < 3$$

$$7. x^y = y^x, \quad x^a = y^b \text{ 但シ } x, y > 0 \text{ マタ } a, b \text{ ハ相異ナル}$$

正ノ數トスル。

8.  $3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times \dots$  ナ  $10^7$  ヨリ大キクスルタメ  
ニ, 初カラ取ルベキ因數ノ最小數ヲ求メヨ。

### 歩合, 利息

1. 或商人甲乙二品ヲ 625 圓デ買ヒ, 甲ヲ 455 圓デ  
乙ヲ 180 圓デ賣ツタノニ, 甲デ得タ利益ノ歩合ト乙デ  
失ツタ損失ノ歩合トガ丁度相等シカッタトイフ, 各品  
ノ買價ヲ求メヨ。

2. 或人 1000 圓ノ支拂ヲスル代リニ 60 日後拂割引  
日歩 3 錢ノ約束手形ヲ振出サウトスル, コノ手形ノ額  
面高ヲ幾ラニスベキカ。(圓未滿切上)

3. 今カラ 30 日後ニ 1000 圓, 60 日後ニ 1500 圓, 90 日後  
ニ 2000 圓ヲ支拂フ代リニ 只今 3000 圓ヲ支拂ヘバ, 殘金  
ハイツ支拂ヘバイ、カ。平均支拂期日ノ計算法ニヨ

ツテ計算セヨ。

4. 償還期が今カラ5箇年後ナル五分利附公債ヲ95圓ノ相場デ買入レ、今後半年毎ニ受ケル利子ヲ年6分(半年一期)ノ複利デ銀行ニ預ケテオクモノトスレバ、利廻リハ年幾ラニナルカ。

所要ノ利廻リヲ年 $x$ トスレバ、今支出シタ金95圓ヲ年 $x$ (半年一期)ノ複利テ今後5年間預ケテオイタ元利合計ガ、今後受入レタ利子ヲ償還期マテ預ケテオイタ元利合計ト償還金100圓トノ和ニ丁度等シクナルベキ譯デアル。

### 全 雑 題

1.  $x$ ニツイテノ三次式ガアル、ソノ最高次ノ係數ハ1デアツテ、原式ハ $x-1$ デ割切レル、ソシテソノ商ヲ20ニ等シイト置イテ得ル方程式ノ二根ハ5ト-3デアル。原式ヲ求メヨ。

2.  $\frac{ax+b}{cx+d}$ ガ $x$ ノ値ニ拘ラズ常ニ一定ノ値ヲ有スルタメニハ $a:b=c:d$ ナルコトガ必要ニシテ且ツ十分ナルコトヲ證明セヨ。

3.  $x, y, z$ ガ皆相異ナル數デアツテ

$$y^2 + myz + z^2 = z^2 + mzx + x^2 = x^2 + mxy + y^2$$

ナラバ、各式ハ $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) =$ 等シイコトヲ證明セヨ。

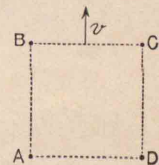
4.  $x, y, z$ ガ皆相異ナル數デ、且ツソノ値ニ拘ラズ恒ニ

$$y = \frac{a+bz}{c+dz}, \quad z = \frac{a+bx}{c+dx}, \quad x = \frac{a+by}{c+dy}$$

ナルトキハ $ad+bc+b^2+c^2=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

5. 既約分數ノ分母ガ2及5以外ノ因數ヲ含マネバコノ分數ハ有限小數ニ等シク、然ラザレバ循環小數ニナルコトヲ示セ。

6. 四人ノ走者A, B, C, Dガ下圖ノヤウニ正方形ノ陰形ヲ保チ或共通ノ速サ $v$ デ矢ノ方向ニ走ツテキル。今他ノ一人Eガ $u$ ナル速サデ順次A, B, C, Dヲ歴訪シテ再ビAノ處ニ來タガ、AカラBニ行クメニ45分、BカラCニ行クメニ15分、カ、ツタトイフ、但シEハ常ニ最モ短イ道ヲ選ンダトスル。ソコデ



(1)  $u:v$ ヲ求メヨ。

(2) CカラD, DカラAニ行クマデニ各、何分カ、ツタカ。

7.  $8+6i$ ノ平方根ヲ $x+yi$ ナル形デ表ハセ。但シ $x, y$ ハ實數トスル。

8. 或正ノ整數ヲ2デ割リ剩餘1ガアツタラコレヲ捨テ、次ニ今得タ整商ヲ2デ割リ剩餘1ガアツタラ

コレヲ棄テル、コノヤウニスルコト $n$ 回デ最後ノ整商  
ガ1ニナツタ。コノヤウナ整数ノ最大ナモノト最小  
ナモノトヲ求メヨ。

Tern

Tern Kubota

## 答

ヤサシイノハ略スル

## 例題 (3頁)

1.  $5, 3\frac{1}{2}$  2. 11, -3 3.  $3, -\frac{7}{3}$  4.  $\frac{1}{2}, -3$   
5. 4, 0 6.  $\frac{5}{3}, 0$  7.  $0, \frac{1}{2}$  8.  $-\frac{1}{3}$

## 問題 (6—8頁)

1. 27人 2. 45哩 3. 3時間 4. 2海里 5. 甲8日, 乙12日  
6. 甲28日, 乙20日 7. 前輪300種, 後輪280種 8.  $2, \frac{1}{2}$

## 例題 (11頁)

1.  $\pm 2, \pm 3$  2.  $\pm 2, \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$  3.  $\pm 6, \pm i\sqrt{6}$  4.  $4a, -2a$ ,  
 $a$ (等根) 5.  $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$  6.  $2, -1 \pm i\sqrt{3}$  7.  $a$ ,  
 $\frac{a(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$  8.  $-1, 3, 1 \pm 2i\sqrt{2}$  9.  $a, -\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}$   
10.  $1, \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}$  11.  $1, \frac{-5 \pm i\sqrt{3}}{2}$  12.  $1, -1, 3 \pm \sqrt{5}$

## 例題 (14—15頁)

- 答ハ $x, y$ ノ順 1.  $(3, 1), (\frac{5}{4}, -\frac{5}{2})$  2.  $(1, 7), (\frac{31}{5}, -\frac{17}{5})$  3.  $(4, -1), (8, -7)$  4.  $(1, 1), (-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2})$   
5.  $(1, 5), (5, 1)$  6.  $(8, 6), (-6, -8)$  7.  $(3, 2), (2, 3)$  8.  
 $(20, 9), (9, 20)$  9.  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$  10.  $(6, 5)$  11.  $(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a})$

## 例題 (20頁)

- 答ハ $x, y$ ノ順, 複符號ハ相對應スル. 1.  $(\pm 4, \pm 1), (\pm 11, \mp 4)$

2.  $(\pm 7, \pm 2), (\pm\sqrt{3}, \pm 3\sqrt{3})$  3.  $(\pm 1, \pm 2), (\pm\sqrt{3}, 0)$   
 4.  $(\pm 2, \mp 1), (\pm 7, \pm 4)$  5.  $(\pm 1, \pm 2)$  6.  $(\pm 7, \pm 6)$   
 7.  $(\pm 7, \mp 1), (\pm 1, \mp 7)$  8.  $(\pm 5, \pm 4), (\pm 4i, \mp 5i)$

## 例題 (22頁)

- 答ハ  $x, y, z$  ノ順, 複符號ハ相對應スル. 1.  $(\pm 10, \mp 5, \mp 6)$   
 2.  $(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$  3.  $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 2\sqrt{3}, \pm 5\sqrt{3})$   
 4.  $(\pm aM, \pm bM, \pm cM)$  但  $\simeq M = \frac{1}{\sqrt{a+b+c}}$  5.  $(\pm 1, \pm 2, \mp 5)$   
 6.  $(\pm 1, \pm 2, \pm 3), (\pm i, \pm 2i, \pm 3i)$

## 例題 (26頁)

5.  $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$  6.  $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$  7.  $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$   
 8.  $\sqrt{\frac{a+1}{2}} - \sqrt{\frac{a-1}{2}}$

## 問題 (28—29頁)

1. 12, 10 2. 間口25間, 奥行28間 3. 40間, 30間 4. 75株  
 5. A 30哩, B 20哩 6. 60哩, 每時10哩

## 例題 (37—38頁)

1. 約0.8, 約6.2 2. 約2, 約0.3 3.  $x \approx 1.8, y \approx 1.9$   
 4.  $x = \pm(\text{約}2), y = \pm(\text{約}2.5)$  5.  $x = \pm(\text{約}1.3), y = \text{約}4.8$   
 6.  $x = -(\text{約}3), y = \text{約}13; x = -\text{約}0.5, y = \text{約}2$

## 雜題 (39—48頁)

2.  $x-2)^3$  4.  $-\frac{1}{3}$  5. (1)  $\frac{b^2-ac}{a^2}$  (2)  $\pm \frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2}$  6.  
 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{14}$  9. 4 10. 不可能 11.  $0, 6 \pm \sqrt{3}$  12.  $a,$   
 $b, \frac{a+b}{2}$  13.  $5, \frac{5(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$  14.  $-1, \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$  15.  
 $-1, -\frac{5}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{41}}{4}$  16.  $0, 1, 1 \pm \sqrt{2}$  17.  $1, \frac{3}{2}, -5 \pm \sqrt{31}$

18.  $1, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$  19.  $2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$  20.  $1, -1, -2,$   
 $\frac{1}{2}$  21.  $(1, 1), (\frac{8}{15}, \frac{1}{15})$  22.  $(\pm 2, \pm 1), (\pm\frac{16}{\sqrt{91}}, \pm\frac{5}{\sqrt{91}})$   
 23.  $(\pm a, \pm b), (\pm\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a-b}{\sqrt{2}})$  24.  $(3, 1), (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$   
 25.  $(7, 3), (\frac{14}{3}, -\frac{5}{3})$  26.  $(4, 5), (5, 4)$  27.  $(1, 2), (2, 1)$   
 28.  $(1, 5), (5, 1)$  29.  $(\pm 2, \pm 3), (\pm 3, \pm 2)$  30.  $(\frac{a+b}{2},$   
 $\frac{a-b}{2})$  31.  $(14, 10), (-\frac{3}{2}, -\frac{15}{14})$  32.  $(2, 4), (4, 2), (3$   
 $\pm\sqrt{21}, 3 \mp\sqrt{21})$  33.  $(2, 3), (0, 1), (\frac{3}{2}, 1)$  34.  $(5, 8), (6,$   
 $\frac{51}{4})$  35.  $(3, 6), (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$  36.  $(0, 0), (2, -4), (-4,$   
 $2)$  37.  $(a, b), (2a-b, 2b-a)$  38.  $(2, 1, 0), (1, 2, 0), (\pm i\sqrt{2},$   
 $\mp i\sqrt{2}, 3)$  39.  $(4, 6, 9), (9, 6, 4)$  40.  $(2, 3, 3), (-2, 1, 9),$   
 $(-2, 9, 1), (3, 1, 4), (3, 4, 1), (-3, \frac{11 \pm \sqrt{105}}{2}, \frac{11 \mp \sqrt{105}}{2})$   
 41.  $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1)$  43. 40哩 44. 縱10  
 種, 橫5種, 高15種 45. 2.6寸, 9.1寸, 11.7寸 46. 6日 47. 15  
 里, 每時1.5里 48. 50錢 49. 2835斤 50. 甲15日 1.2圓, 乙  
 20日 1.6圓

## 例題 (54頁)

1. 13 2. 1 3. 不可能 4. 3, 4 5. -1 6.  $6 \pm 4\sqrt{2}$   
 7. 3, -1

## 雜題 (55—59頁)

1. 1 2.  $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$  3. 3 4.  $2\sqrt{y(3x+y)}$  6. 1 7.  
 $2+\sqrt{3}, -2(2+\sqrt{3})$  8.  $1, \frac{\sqrt{3}}{2}$  9. 2 10. 4  
 11.  $2 \pm \sqrt{5}, -(2 \pm \sqrt{5})$  12.  $\pm 3.146, \pm 0.318$  13.  $3, -\frac{5}{3}$   
 14.  $\frac{a^2+1}{2a}$  15.  $(16, 9), (9, 16)$  16.  $(5, 3)$



17.  $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$  18.  $\frac{1}{3}(3x+5-\sqrt{19})(3x+5+\sqrt{19})$

19.  $(x^2+\sqrt{2x+1})(x^2-\sqrt{2x+1})$  20.  $a>0$  ナラバ  $m \geq \frac{4ac-b^2}{4a}$ ,  $a<0$

ナラバ  $m \leq \frac{4ac-b^2}{4a}$  21. 縦4.5寸, 横6寸 22. 12種 23. 5種,

12種, 13種 24. 甲11 $\frac{11}{41}$ 節, 乙9 $\frac{30}{41}$ 節 25. 甲11節, 乙9節

例題 (61頁)

1.  $x>5, x<-3$  2.  $-3<x<10$  3.  $x>\frac{1}{4}, x<-1$

4.  $-\frac{1}{3}<x<1$

例題 (66頁)

1. 5 2.  $\frac{49}{8}, -\frac{5}{4}$

問題 (66—68頁)

1.  $a-c>0$  ナラバ  $x>\frac{d-b}{a-c}$ ,  $a-c<0$  ナラバ  $x<\frac{d-b}{a-c}$  2.

$-\frac{5}{2}<x<8$  3.  $x>\frac{2}{3}, x<-2$  4.  $4<x<6$  5.  $-3<x<4$

6.  $x<-\frac{10}{7}, x>-\frac{1}{2}$  7.  $m \leq 2, m \geq 5$  8.  $a \leq -2, a \geq 2$

例題 (75—76頁)

1.  $b:a$  2.  $(c-b):(a-c)$  3.  $(m+n):(m-n)$  4. 6:25

5.  $ac:bd$

例題 (77頁)

1.  $\frac{25}{4}$  2.  $a^2+ab+b^2$  3. 4 4.  $\frac{a^2-b^2}{3a}$  5.  $x=6, y=8$

6.  $x=2, y=18; x=-1 \pm i\sqrt{3}, y=9(-1 \mp i\sqrt{3})$

例題 (85—86頁)

1. 3:-2:1 2.  $(-bc+ca+ab):(bc-ca+ab):(bc+ca-ab)$

3. 3:5:7

例題 (101—102頁)

5. 113平方尺強 6. 4189立方寸弱

例題 (106頁)

1. 42人 2. 7時間 3.  $6\frac{2}{3}$ 日

例題 (108—109頁)

4. 甲1155圓, 乙704圓, 丙660圓 5. 男50人(3圓), 女60人(2圓), 子供90人(1圓)

例題 (111—112頁)

1. 0.84 2. 2:5 3. 3:1 4.  $2\frac{13}{16}$ 斤,  $2\frac{34}{43}$ 斤 5. 45:7

6. 上60, 下40

問題 (115—117頁)

1. 3600呎 3. 120日 4. 甲201.6圓, 乙403.2圓 5. 1:7

8.  $9ax=4y^2$

雜題 (118—123頁)

1.  $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$  2.  $bce:ade:acf$  3. 3:1:1 4.  $-\frac{61}{11}, -11$

5.  $\frac{ap}{la+mb+nc}, \frac{bp}{la+mb+nc}, \frac{cp}{la+mb+nc}$  6.  $\frac{a(-l+m+n)}{l+m+n}$ ,  $\frac{a(l+m-n)}{l+m+n}$  7.  $\frac{1+2a}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1-2a}{6}$  8. (3, 5),

(5, 3),  $(\frac{-15 \pm i\sqrt{139}}{4}, \frac{-15 \mp i\sqrt{139}}{4})$  9.  $x=\frac{50}{9}, y=\frac{100}{9}, z=\frac{50}{3}, u=\frac{200}{9}$

24. 45立 25. 384:749 26.  $\sqrt{5}:2$  27. 12 cm

28. 18厘 29.  $6400(\sqrt{2}-1)=2600$ 斤餘 30.  $m>n$  ナラバ AB 上 A カラ  $\frac{m-n}{m}$  AB ノ 處,  $m<n$  ナラバ AB ノ 延長上 A カラ  $\frac{n-m}{m}$  AB ノ 處 31.  $3x^2-xy-8=0$

## 例題 (128頁)

1. -4 2. 第10項 3. 初項5, 公差3

## 例題 (130頁)

1. 50 2. 155 3. 80 4.
- $n^2$
- 5.
- $n^2+n$
6. 70336

## 例題 (132—133頁)

1. 9 2. 項數50, 公差2 3. 6 4. 初項14, 項數4或ハ初項-12, 項數17

## 例題 (134—135頁)

1. 56度 2. 5人 3. 8人 4. 9900米 5. 12

## 例題 (137—138頁)

1. 第12項 6144 2.
- $\frac{5}{16}$
3. 初項2, 公比±3 4. 20, 40, 80, 160 又ハ -60, 120, -240, 480

## 例題 (140頁)

1. 1023 2. 0.133332 3.
- $7\frac{3}{4}$
4. 6 5. 6248 又ハ -4168

## 例題 (145頁)

1. 9 2.
- $\frac{64}{5}$
3. 6 4. 初項3, 公比
- $\frac{1}{4}$
- 又ハ初項1, 公比
- $\frac{3}{4}$

## 例題 (147—148頁)

1. a糧 2.
- $\frac{9}{4}a^2$
- 平方糧 3.
- $\frac{1}{3}$

## 問題 (151—153頁)

1. 107,374148.823 2.
- $3 \times 2^{20} - \frac{1}{3 \times 2^{19}} - \frac{7}{3}$
3. 5, 7, 9
- 
4. 初項2, 公比3 又ハ初項
- $\frac{26}{3}$
- , 公比-2 5.
- $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 11.
- $\frac{2ab}{a+b}$
- 
- 13.
- $\frac{ab}{2a-b}$

## 雜題 (154—159頁)

1. 不可能 2.
- $a, b$
- 3.
- $(b, a), \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}b, (1 \mp \sqrt{3})a\right)$
- 
- 4.
- $(4, 2), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}\right), \left(-\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right)$
- 5.
- $A=3, B=-3$
- 6.
- $A=5, B=-4, C=1$
- 7.
- $a=140, b=20$
- 8.
- $a=20, b=41$
- 又ハ
- $a=-20, b=9$
11. 9 12. -30 13. 初項2, 公比3 又ハ初項
- $\frac{26}{7}$
- , 公比-3 14. 4, 6 15. 初項11, 公差1 又ハ初項
- $\frac{5}{3}$
- , 公差0 16. 12, 23, 34 又ハ 51, 23, -5 17. 2, 4, 8
- 
18. 二數ヲ
- $a, b (a > b)$
- トスレバ
- $\frac{a}{b} = 2n^2 - 1 + 2n\sqrt{n^2 - 1}$
21. 72
- 
22. 224

## 例題 (163頁)

- 1.
- $x^2$
- 2.
- $x^{\frac{1}{3}}$
- 3.
- $x^8y^2z^5$
- 4.
- $a^{\frac{1}{4}}$
- 5.
- $x^6y^{\frac{1}{12}}$

## 例題 (166—167頁)

- 1.
- $\frac{1}{5}$
- 2.
- $a^{-\frac{1}{2}}$
- 3.
- $a$
- 4.
- $x^6y^4$
- 5.
- $a^{\frac{7}{12}}$
6. 1
- 
- 7.
- $\frac{6}{7}a^2b^3x^{-2}y^{-n}$
- 8.
- $1-x^2$

## 例題 (168頁)

- 1.
- $a-1$
- 2.
- $x-4+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2}$
- 3.
- $a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}$
- 4.
- $\frac{1}{1-x}$

## 問題 (168—169頁)

1. 625 2. 27 3. 100 4. 0.5 5.
- $x^{-4}y^{-\frac{5}{2}}$
- 6.
- $a^{-\frac{1}{3}}$
- 
7. 96 8. 1 9.
- $n$
- ガ偶數ナラバ
- $a+b, n$
- ガ奇數ナラバ
- $a-b$
- ;
- 
- 8(
- $n$
- 偶數), 2(
- $n$
- 奇數) 10.
- $\frac{1}{2}$
11. 7 12. 1 13. 5, -3
- 
14. 不可能

## 例題 (174頁)

1.  $\log a + \log b - \log c$  2.  $2\log a + 3\log c - 3\log b$  3.  $\frac{2}{3}\log a + \log b + \frac{5}{3}\log c$  4. 3 5.  $\frac{1}{3}$  6. 1 7.  $-\frac{3}{2}$  8. -2  
9.  $\frac{8}{3}$  10. -7

## 例題 (181頁)

13. 1.0791 14. -0.6990 15. 0.1761 16. 0.1276

## 例題 (191—192頁)

1. 2000 2.  $2814 \times 10^3$  3. 10.61 4. 2.799 5. -78.74  
6. 143.5

## 例題 (193—194頁)

1. 1033立方糎 2. 173.7kg

## 問題 (194—195頁)

1. 2.5562, 1.6250, 1.9617 2.  $\frac{1}{2}$  3. 2 4. 4 5. 9,  
 $\frac{1}{64}, 1, \sqrt{3}, \frac{1}{9}$  6. 0.1327 7.  $(2, \pm 3), (-2, \pm \frac{1}{3})$   
8. 207, 0.0000482 10. 46桁 11. 29桁目

## 例題 (197—198頁)

1. 2000圓 2. 0.18弱 3. 0.35 4. 甲4圓, 乙2圓  
5. 原價2圓, 定價2.3圓, 或、原價1圓, 定價1.2圓

## 例題 (199—200頁)

1. 甲275圓, 乙225圓 2. 甲208圓強, 乙206圓弱, 丙204圓強

## 例題 (203—204頁)

1. 銀行割引4.9圓, 眞割引4.844圓弱 2. 498.875圓 3. 700圓

4. 2.5錢

## 例題 (206—207頁)

1. 約513圓 2. 約13圓

## 例題 (207—208頁)

1. 568圓強 2. 約614圓

## 例題 (208—209頁)

1. 0.04 2. 0.089

## 例題 (210頁)

約19年

## 例題 (212頁)

1. 約681圓 2. 約117圓

## 例題 (216頁)

約656圓

## 例題 (218—219頁)

1. 5000圓 2. 約2317圓

## 雜題 (220—224頁)

1. 2, 3 2.  $2a$  3.  $\sqrt{b} + \sqrt{a-c}$  4. 甲8節, 乙12節, 乙ガ甲ノ北12哩ノ處又ハ乙ガ甲ノ東11 $\frac{1}{13}$ 哩ノ地點カラ正北ノ方向ニ4 $\frac{8}{13}$ 哩ノ處  
5. 4日目 6. 3:4:5 12.  $3x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{2}{3}}$   
13.  $\frac{\sqrt{a}}{(a-b)(x-a)}$  14.  $\frac{1}{3}$  15. 100, 0.1 16.  $x=1000, y=100$  17. 12 18. 7 19.  $x=7, y=3$  20. 七月二十五日  
21. 十二月十二日

## 附 錄

例題 (4—5頁)

1.  $\frac{8}{11}$  2.  $\infty$  3. 1 4.  $\frac{26}{5}$  5.  $\frac{31}{8}$

例題 (8頁)

1. -3 2. 不可能 3. 1 4. 不可能

## 補 充 問 題

二次方程式 = 導キ得ル一元分數方程式 (9頁)

1.  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$  2.  $\frac{3 \pm i\sqrt{31}}{4}$  3.  $-\frac{1}{3}$  4.  $\pm 4a$  5.  $-\frac{3}{2}$  6.  $\pm 6$

一元高次方程式 (9—10頁)

1.  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{a}$  2.  $\frac{a+b}{2}$ ,  $\frac{a+b \pm i\sqrt{3}(a-b)}{2}$  3. -1, -6,  $\frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$  4. 1,  $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$  5. 1, 2,  $\frac{3}{2}$  6. -5, 4,  $\frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$  7.  $\frac{9 \pm \sqrt{201}}{2}$ ,  $\frac{-3 \pm \sqrt{129}}{2}$

聯立二次方程式 (10—11頁)

1. (3, 1) 2. (1, 3),  $(\frac{1}{7}, \frac{33}{7})$  3.  $(\pm \frac{7\sqrt{2}}{10}a, \mp \frac{\sqrt{2}}{10}b)$  複符號ハ上同士マタ下同士相對應スル. 4. (6, 9), (9, 6) 5. (5, 8),  $(6, \frac{51}{4})$  6. (2, 1),  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  7. (3, -6),  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  8.  $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3})$ ,  $(\pm \frac{1}{2}, \pm 3)$  9. (0, 0, 0), (6,  $\pm 8$ ,  $\pm 12$ ), (-6,  $\pm 8$ ,  $\mp 12$ ) 10. (1, 2, 3),  $(-\frac{7}{6}, -\frac{14}{6}, -\frac{21}{6})$  11. ( $\pm 3$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 1$ ) 12.  $\frac{13 - \sqrt{3}}{2}$  13.  $2 - \sqrt{3}$  14.  $2\sqrt{3}$  15. 2 16.  $\sqrt{p + \sqrt{p-1}}$  17.  $3\sqrt{2}$  18. 0.9659

二次方程式應用問題 (11—12頁)

1. 6 2. Aカラ  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ノ處 3.  $\frac{15 \pm \sqrt{113}}{2}$ 種, 13種 4. 甲2750回, 乙2600回

無理方程式 (12頁)

1. 1, 16 2. 3,  $-\frac{7}{3}$  3. 0 4.  $\pm 3$  5.  $\pm \frac{2\sqrt{6}}{5}$  6.  $-\frac{5}{2}$  7.  $\pm 1$

不 等 式 (12—13頁)

1.  $x > \frac{-7 + \sqrt{85}}{2}$ ,  $x < \frac{-7 - \sqrt{85}}{2}$  2.  $\frac{5}{3} < x < 7$  3.  $-3 < x < \frac{1}{4}$  4. 3906 5. 15, 12

比, 比例 (13—16頁)

1. 2 2.  $\frac{1}{9}$  3.  $\pm 2(a+b)(a-b)$  4.  $\pm(\sqrt{7} + \sqrt{5})$  14. 20, 15 15.  $\frac{2}{7}$  16. 甲13.33圓, 乙10.03圓, 丙6.64圓 17. 甲800圓, 乙500圓, 丙300圓 18. 7尺 19. 甲10升, 乙4升 20.  $\frac{1}{3}$  或ハ  $\frac{2}{3}$

級 數 (16—17頁)

1.  $-\frac{1488}{11} = -135\frac{3}{11}$  2. 5 7.  $a\sqrt{3}$ 種

一 般 ノ 冪 (17—18頁)

1.  $2-x^{-\frac{1}{2}}$  2.  $a^2b^{-\frac{(m+n)^2}{mn}}x^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$  3. -2, 1 4.  $\frac{8(31+7\sqrt{13})}{81}$

對 數 (18頁)

1.  $-\frac{3}{2}$ ,  $\frac{21}{2}$ ,  $\frac{1}{8}$ , -1 2. 2.6532, 0.0851, 0.6629 3. 7.688, 2.876 4. 0.1, 1000 5. 約2.322 6. 約1.29

步 合 算 (18—19頁)

1. 年0.075 2. 約1605圓 3. 19年餘 4. 約500圓

## 雜題 (19—22頁)

1.  $\frac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{6}$  2.  $\sqrt{5}+3, \sqrt{5}+1$  3. 0, -1, -2 4. -1,  $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$  5.  $\frac{ab}{a+b}$  6.  $11-2\sqrt{21}$  7. 2, -5 8. 4 9. 13 10. 0.4736 11.  $(\pm 2, \pm 3), (\pm 3, \pm 2)$  12.  $(\pm 2, \pm 1)$  13.  $(\frac{100}{9}, \frac{1}{9})$  14. (20, 15) 15. (5, 3, 2), (35, 21, 14) 16.  $(8, 1, \frac{1}{3}), (3, \frac{1}{3}, 1), (\frac{1}{3}, 1, 3), (\frac{1}{3}, 3, 1)$  17.  $a \cong b =$  從ツテ  $\frac{a}{b} \cong \frac{a+x}{b+x}$  20.  $m \geq 10, m \leq -2$  30. 甲6分55 $\frac{5}{13}$ 秒, 乙7分25 $\frac{5}{13}$ 秒 31. 每秒22米弱 32. 約6600立方種 33. 長子約6064圓, 次子約4893圓, 末子約4166圓

## 補習用問題集

## 整式ノ因數分解 (23頁)

1.  $(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$  2.  $(x+y+z)(yz+zx+xy)$  3.  $(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$  4.  $(6x-y-z)(x-y+6z)$  5.  $(a^2+b^2+c^2)^2$  6.  $(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$  7.  $(x-1)(4x^2+4x+3)$  8.  $(a-b)(a-c)(b-c)$  9.  $(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$  10.  $(x-1)(x^2+1)(x^3-x^2+x+4)$

## 最大公約數, 最小公倍數 (23—24頁)

3. 1 4.  $(2x+3)(4x-5), (2x+3)(3x-4)$  5.  $x^3-1, x^3+2x^2-2x-1$

## 分數式ヲ簡約スル問題 (24—25頁)

1.  $\frac{a+b+c+3d}{a+b+c+d}$  2.  $\frac{1}{(a+x)(a+y)(a+z)}$  3. 2 4.  $\frac{3x^2+5x+1}{2x^2+5x+3}$  5.  $\frac{48a^3}{(x^2-9a^2)(x^2-a^2)}$  6.  $\frac{1+x}{1+x^2}$  7.  $\frac{2(2x^2-18x+1)}{(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)}$  8.  $-4b$

## 整除, 剰餘ノ問題 (27—28頁)

6. 7,  $3x+1$

## 未定ノ係數ヲ求ムル問題 (28—29頁)

1.  $A=-1, B=C=1$  2.  $p=\frac{7}{5}, q=\frac{5}{7}, r=1$  或ハ  $p=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, q=\pm\sqrt{5}, r=\pm\frac{7}{\sqrt{5}}$  3.  $l=m=3, n=2$  4.  $p=-1, q=-2$  5.  $a=-\frac{21}{4}, b=-\frac{37}{2}$  6. 1 7.  $a=4, b=c=8$  或ハ  $a=8, b=20, c=16$  或ハ  $a=c=0, b=-4$  或ハ  $a=-4, b=0, c=8$  8. 初ノ場合 -2, 後ノ場合 3 或ハ -2

## 有理式雜題 (29—30頁)

2.  $6x^3-7x^2-11x+9$  3.  $ad=bc$  4.  $b^2=3ac, c^2=3bd$

## 無理式 (31頁)

1.  $3\sqrt{5}-2\sqrt{7}$  2.  $\frac{8ab}{(a-b)^2}$  3.  $ab+\frac{1}{ab}$  4. 12 5. 1.93強

## 一元整方程式 (31—32頁)

1.  $3(\sqrt{3}+1), -(\sqrt{3}+1)$  2. 6,  $\frac{-3\pm i\sqrt{71}}{2}$  3. 1,  $\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}$

4. 1, 1, 2,  $-\frac{1}{2}$  5.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{5\pm i\sqrt{39}}{24}$  6. -5, 1, 9

## 一元分數方程式 (32頁)

1. 1 2.  $-\frac{3}{2}$  3. 1, -7 4.  $\pm 1, \pm 8$  5. 0,  $-\frac{a+b}{2}$

## 一元無理方程式 (32—33頁)

1. 5 2. -1 3. 27, -64 4.  $\frac{ac}{a+b}$  5. 0,  $3b$

## 聯立整方程式 (33頁)

1.  $(abc, bc+ca+ab, a+b+c)$  2. (0, 0, 0), (1, 1, 1) 3. (2, 3), (3, 2),  $(2\omega, 3\omega), (3\omega, 2\omega), (2\omega^2, 3\omega^2), (3\omega^2, 2\omega^2)$  但シ  $\omega \neq 1$  ノ虚+

- ル立方根ノ一ツ 4. (5, 4), (-4, -5),  $\left(\frac{1 \pm i\sqrt{87}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{87}}{2}\right)$   
 5. (3, 4, 5), (-5, -6, -7) 6. ( $\pm 3, \pm 4, \mp 5$ ), ( $\pm 3, \pm 5, \mp 4$ ),  
 $\left(9, \frac{3 \pm i\sqrt{71}}{2}, \frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{2}\right)$  7. (a, 0, 0), (0, a, 0), (0, 0, a)  
 8. ( $\pm 1, \pm 1, \mp 2$ ),  $\left(\pm \frac{2}{7}, \pm \frac{11}{7}, \mp \frac{13}{7}\right)$  9. ( $\pm 2, \pm 5, \pm 3$ ),  
 $\left(\pm \frac{11}{\sqrt{7}}, \mp \frac{19}{\sqrt{7}}, \pm \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$  10. ( $\pm 2, \pm 2, \pm 2$ )

## 聯立分數方程式 (33—34頁)

1. (2,  $\pm 1$ ), (-2,  $\pm 1$ ) 2. (6, 6),  $\left[\frac{3(-1 \pm \sqrt{5})}{2}, \frac{3(-1 \mp \sqrt{5})}{2}\right]$   
 3. (1, 2, 3),  $\left(\frac{3}{10}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$  4.  $\left(\frac{2abc}{-bc+ca+ab}, \frac{2abc}{bc-ca+ab}, \frac{2abc}{bc+ca-ab}\right)$   
 5.  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

## 聯立無理方程式 (34頁)

1. (5, 4), (4, 5) 2.  $\left(4, \frac{7+\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}, 4\right)$  3. (2, 1)  
 4. (2,  $\pm \sqrt{3}$ ) 5.  $\left(0, \frac{a^2+b^2}{a}\right), \left(\frac{-2a^2-2b^2+ac}{a-4b}, \frac{a^2+b^2-2bc}{a-4b}\right)$

## 消去ノ問題 (34—35頁)

1.  $a^2+b^2=1$  2.  $x+a=0$  但シ  $m \neq m'$  トスル. 3.  $a^3+b^3+c^3+abc=0$   
 4.  $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=8$  5.  $a^3+2c^3=3ab^2$

## 二次方程式ノ根ト係数トノ關係 (35—36頁)

1.  $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}, -\frac{4a^2bc^2-5ab^3c+b^5}{a^4c}$  2.  $a^2x^2+(m+n)ax+ac(m-n)^2+mb^2=0$   
 6.  $(p-a)^2x^2+(p-a)(p^2-a^2+2b-2q)x+ap(p-a)^2+(p^2-a^2)(b-q)+(b-q)^2=0$  若シ共通根ガ 0 テナケレバ  
 $(b-q)^2x^2-(b^2-q^2)(p-a)x+bq(p-a)^2=0$ , 若シ共通根ガ 0 ナラバ  
 $x^2+(a+p)x+ap=0$  7.  $(a+b)(a-2b)+9ac=0$  8.  $4p^3+27q^3=0$

## 方程式雜題 (36—38頁)

1. ( $\pm 1, \pm 2$ ) 2. (0, 0),  $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$  3.  $m=-1, x=4$ ,

- $y=12$  5.  $ab=4, x=-\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$  7.  $-1, \frac{3}{2}$  8. (a,  $\pm 5$ )  
 9.  $\frac{1}{2}$  12. 2, 3, 4

## 方程式應用問題 (38—39頁)

1. Aカラ上リ1里, 下リ4里, 平地4.5里 2. 24秆 3. 12秆 4.  $\frac{a}{4}$   
 5. 5種 6. 24哩 7. A 120秆, B 150秆 8. 約29米

## 不等式 (40頁)

4.  $0 < p < 2$  5. 1カラ  $-\frac{1}{11}$  マテノ間

## 最大最小 (40—41頁)

1.  $p=-2, q=4$  2. 最大値1( $x=3$ ), 最小値 $-\frac{1}{11}$ ( $x=-3$ )  
 3.  $\frac{121}{8}$  4.  $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$  5. 20秒, 50米

## 比ヲ求メル問題 (41—42頁)

1. 2:3:5:6 2. 2:3:4 3.  $\frac{8}{11}$

## 比例雜題 (43—45頁)

1.  $\frac{6}{5}$  3. 甲12000圓, 乙7200圓 4. 約29燭光 5. 32燭ノ  
 方カラ8燭ノ方ヘ2米ノ處及6米ノ處 6. 約4回 7. 2秒  
 8. 約500艘 (499.2艘) 9.  $88\frac{8}{9}$ 米 10. 575圓

## 等差級數 (45—46頁)

1. 14 3. 公差  $\frac{1}{3}$  5.  $(14m-5):(2m+3)$  7. 7日

## 等比級數 (46—47頁)

1.  $-3, \frac{31}{6}$  3.  $(x+y+z)(x-y+z)$  4.  $\sqrt[m-n]{\frac{\alpha^m}{\beta^m}}$  ( $m-n$  奇數)  
 或ハ  $\pm \sqrt[m-n]{\frac{\alpha^m}{\beta^m}}$  ( $m-n$  偶數) 但シ  $m > n$  トスル.

## 級數雜題 (47—48頁)

$$3. \frac{(a^2b^{n+1}-1)(1+a)}{ab-1} \quad 4. \frac{n(n^2+1)}{2} \quad 5. \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$6. \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}, \frac{x}{(1-x)^2}$$

## 一般ノ冪 (48頁)

$$1. \frac{2(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}-1)}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} \quad 2. \frac{x}{x+4x^{\frac{1}{2}}+4} \quad 3. x^{2^n}-a^{2^n}$$

## 對數 (48—49頁)

$$1. \text{積カ1} \quad 2. 14 \quad 3. 10^{10} \quad 4. \frac{\log a}{\log b - \log a} \quad 5. (1, 1)$$

$$6. \left(1, \frac{\log 100}{\log 8}\right) \quad 7. (1, 1), \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}, \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\right] \quad 8. 5$$

## 歩合,利息 (49—50頁)

$$1. \text{甲}437.5\text{圓, 乙}187.5\text{圓 或ハ 甲}325\text{圓, 乙}300\text{圓} \quad 2. 1019\text{圓}$$

$$3. 200\text{日後} \quad 4. \text{約}0.062$$

## 全雜題 (50—52頁)

$$1. x^3-3x^2+7x-5 \quad 6. 5:4, 5\text{分}, 15\text{分} \quad 7. x=\pm 3, y=\pm 1$$

$$8. \text{最小}2^{2^i}, \text{最大}2^{2^i+1}-1$$

重要ナル公式,定理ノ一覽表  
平方,立方,平方根,立方根,逆數  
ノ表

## 重要ナル公式、定理ノ一覽表

### 恒等式

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 & (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab) \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 & (a+b)^2 + (a-b)^2 &= 2(a^2 + b^2) \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) & (a+b)^2 - (a-b)^2 &= 4ab \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) & (a+b)^3 &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \end{aligned}$$

### 分數方程式

分數方程式ノ分母ヲ拂ツテ得タ整方程式ノ根ノ中、分母ヲ0ニシナイモノダケガ元ノ分數方程式ノ根デアアル。

**剰餘ノ定理**—— $x$ ニツイテノ(降幕ノ順ニ排列サレタ)或整式ヲ $x-a$ テ割ツタトキノ剰餘ハ、コノ式ノ $x=a$ ヲ代入シテ得ル値ニ等シイ。

**整除ノ定理**—— $x$ ニツイテノ或整式ニ於テ、 $x=a$ ヲ代入シタトキ、 $\lambda$ ノ整式ノ値ガ0トナルナラバ、ソノ整式ハ $x-a$ テ割切レル。

### 二次方程式

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \text{ ノ根ハ} & \quad \text{虚數} \dots \dots i^2 = -1, \quad \sqrt{-1} = i \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \quad a \text{ ガ正ナラバ } \sqrt{-a} = i\sqrt{a} \\ ax^2 + 2bx + c = 0 \text{ ノ根ハ} & \quad ax^2 + bx + c = 0 \text{ ノ二根ヲ } \alpha, \beta \text{ トスレバ} \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} & \quad ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) \\ & \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

判別式 $\dots \dots b^2 - 4ac$   
 $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c$ ハ實數)ニ於テ 和ガ $p$ 、積ガ $q$ ナル二數ハ  
 $b^2 - 4ac > 0$  ナラバ相異ナル二實根。  $x^2 - px + q = 0$  ノ二根デアアル。  
 $b^2 - 4ac = 0$  ナラバ等根。(實根)  
 $b^2 - 4ac < 0$  ナラバ相異ナル二虚根。  $\sqrt{x+y \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$  ( $x > y$ )

### 無理方程式

方程式ノ兩邊ヲ平方シテ得タ方程式ノ根ノ中ニハ原方程式ノ根ハ残ラズアルガ、尙一般ニハ餘分ノ根ヲ含ムモノデアアル。

## 最大最小

和ガ一定ナル二正數ノ積ハ、ソノ差ガ最小ナルトキ最大デアアル。  
 積ガ一定ナル二正數ノ和ハ、ソノ差ガ最小ナルトキ最小デアアル。

## 比、比例

$$\begin{aligned} a:b=c:d \text{ ナラバ } ad=bc \quad \text{逆ニ} \quad ad=bc \text{ ナラバ } a:b=c:d \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ナラバ } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots \dots \text{ ナラバ } \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$x, y$ ガ比例スレバ  $y=kx$  ( $k$ ハ一定ノ數) コノ逆モ眞ナリ。  
 $x, y$ ガ反比例スレバ  $xy=k$  ( $k$ ハ一定ノ數) コノ逆モ眞ナリ。

### 等差級數

初項 $a$ 、公差 $d$ 、項數 $n$ 、第 $n$ 項 $l$ 、  
 初 $n$ 項ノ和 $S$

$$\begin{aligned} l &= a + (n-1)d \\ S &= \frac{n}{2}(a+l) \\ S &= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \end{aligned}$$

$a, b$ ノ等差中項ハ  $\frac{a+b}{2}$

### 一般ノ冪

$$\begin{aligned} \frac{p}{a^q} &= \sqrt[q]{a^p}, \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p} \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

### 對數

$$\begin{aligned} a^n &= b \text{ ナルトキ } n = \log_a b \\ (a > 1 \text{ テナイ正數, 從テ } b > 0) \\ \log 1 &= 0 \quad \log_a a = 1 \\ \log xy &= \log x + \log y \\ \log \frac{x}{y} &= \log x - \log y \\ \log x^n &= n \log x \end{aligned}$$

### 等比級數

初項 $a$ 、公比 $r$ 、項數 $n$ 、第 $n$ 項 $l$ 、  
 初 $n$ 項ノ和 $S$

$$\begin{aligned} l &= ar^{n-1} \\ S &= \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \\ S_\infty &= \frac{a}{1-r} \quad (r \text{ ノ絶對値} < 1) \end{aligned}$$

$a, b$ ノ等比中項ハ  $\pm\sqrt{ab}$

### 利息算

元金 $a$ 、單位期間ノ利率 $r$ 、期間數 $n$   
 元利合計 $S$

單利 $\dots \dots$  利息 $=arn$

複利 $\dots \dots S = a(1+r)^n$

年初拂込年賦積立

$$\begin{aligned} \text{毎年ノ積立金 } a \\ S &= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \end{aligned}$$

期末拂年賦償還

$$\begin{aligned} \text{元金 } A, \text{ 年賦金 } a \\ a &= \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{Ar}{1 - (1+r)^{-n}} \end{aligned}$$



*That all right very good excellent*

數	平方	立方	平方根	立方根	逆數
1	1	1	1.0000000	1.0000000	1.000000000
2	4	8	1.41421356	1.2599210	0.500000000
3	9	27	1.73205081	1.4422496	0.333333333
4	16	64	2.0000000	1.5874011	0.250000000
5	25	125	2.23606798	1.7099759	0.200000000
6	36	216	2.44948974	1.8171206	0.166666667
7	49	343	2.64575131	1.9129312	0.142857143
8	64	512	2.82842712	2.0000000	0.125000000
9	81	729	3.0000000	2.0800838	0.111111111
10	100	1000	3.16227766	2.1544347	0.100000000
11	121	1331	3.31662479	2.2239801	0.090909091
12	144	1728	3.46410162	2.2894286	0.083333333
13	169	2197	3.60555128	2.3513347	0.076923077
14	196	2744	3.74165738	2.4101422	0.071428571
15	225	3375	3.87298335	2.4662121	0.066666667
16	256	4096	4.0000000	2.5198421	0.062500000
17	289	4913	4.12310563	2.5712816	0.058823529
18	324	5832	4.24264069	2.6207414	0.055555556
19	361	6859	4.35889894	2.6684016	0.052631579
20	400	8000	4.47213596	2.7144177	0.050000000
21	441	9261	4.58257569	2.7589243	0.047619048
22	484	10648	4.69041576	2.8020393	0.045454545
23	529	12167	4.79583152	2.8438670	0.043478261
24	576	13824	4.89897949	2.8844991	0.041666667
25	625	15625	5.0000000	2.9240177	0.040000000
26	676	17576	5.09901951	2.9624960	0.038461538
27	729	19683	5.19615242	3.0000000	0.037037037
28	784	21952	5.29150262	3.0365889	0.035714286
29	841	24389	5.38516481	3.0723163	0.034482759
30	900	27000	5.47722558	3.1072325	0.033333333
31	961	29791	5.56776436	3.1413806	0.032258065
32	1024	32768	5.65685425	3.1743021	0.031250000
33	1089	35937	5.74456265	3.2075343	0.030303030
34	1156	39304	5.83095189	3.2396118	0.029411765
35	1225	42875	5.91607978	3.2710663	0.028571429
36	1296	46656	6.0000000	3.3019272	0.027777778
37	1369	50653	6.08276253	3.3322218	0.027027027
38	1444	54872	6.16441400	3.3619754	0.026315789
39	1521	59319	6.24499800	3.3912114	0.025641026
40	1600	64000	6.32455532	3.4199519	0.025000000
41	1681	68921	6.40312424	3.4482172	0.024390244
42	1764	74088	6.48074070	3.4760266	0.023809524
43	1849	79507	6.55743853	3.5033981	0.023255814
44	1936	85184	6.63324958	3.5303483	0.022727273
45	2025	91125	6.70820393	3.5568933	0.022222222
46	2116	97336	6.78232998	3.5830479	0.021739130
47	2209	103823	6.8565459	3.6088261	0.021276600
48	2304	110592	6.92820323	3.6342411	0.020833333
49	2401	117649	7.0000000	3.6593057	0.020408163
50	2500	125000	7.07106780	3.6840314	0.020000000

數	平方	立方	平方根	立方根	逆數
51	2601	132651	7.14142843	3.7084298	0.019607843
52	2704	140608	7.21110255	3.7325111	0.019237669
53	2809	148877	7.28010989	3.7562858	0.018867925
54	2916	157464	7.34846923	3.7797631	0.018518519
55	3025	166375	7.41619849	3.8029525	0.018181818
56	3136	175616	7.48331478	3.8258624	0.017857143
57	3249	185193	7.54983443	3.8485011	0.017543860
58	3364	195112	7.61577311	3.8708766	0.017241379
59	3481	205379	7.68114575	3.8929965	0.016949153
60	3600	216000	7.74596669	3.9143676	0.016666667
61	3721	226981	7.81024967	3.9364972	0.016393443
62	3844	238328	7.87400787	3.9578915	0.016129032
63	3969	250047	7.93725393	3.9790571	0.015873016
64	4096	262144	8.00000000	4.0000000	0.015625000
65	4225	274625	8.06225775	4.0207256	0.015384615
66	4356	287496	8.12403841	4.0412401	0.015151515
67	4489	300763	8.18535277	4.0615480	0.014925373
68	4624	314432	8.24621125	4.0816551	0.014705882
69	4761	328509	8.30662387	4.1015661	0.014492754
70	4900	343000	8.36660027	4.1212853	0.014285714
71	5041	357911	8.42614978	4.1403178	0.014084507
72	5184	373248	8.48528138	4.1601676	0.013888889
73	5329	389017	8.54400375	4.1793292	0.013698630
74	5476	405224	8.60232527	4.1983364	0.013513514
75	5625	421875	8.66025403	4.2171633	0.013333333
76	5776	438976	8.71779789	4.2358236	0.013157895
77	5929	456533	8.77496439	4.2543210	0.012987013
78	6084	474552	8.83176086	4.2726586	0.012820513
79	6241	493039	8.88819442	4.2908404	0.012658228
80	6400	512000	8.94427191	4.3088695	0.012500000
81	6561	531441	9.00000000	4.3267487	0.012345679
82	6724	551368	9.05538514	4.3444815	0.012195122
83	6889	571787	9.11043358	4.3620707	0.012048193
84	7056	592704	9.16515139	4.3795191	0.011904762
85	7225	614125	9.21954446	4.3968296	0.011764706
86	7396	636056	9.27361849	4.4140049	0.011627907
87	7569	658503	9.32737906	4.4310476	0.011494253
88	7744	681472	9.38083152	4.4479602	0.011363636
89	7921	704969	9.43398113	4.4647451	0.011235955
90	8100	729000	9.48683298	4.4814047	0.011111111
91	8281	753571	9.53939202	4.4979414	0.010989011
92	8464	778688	9.59166305	4.5143574	0.010869565
93	8649	804357	9.64365076	4.5306549	0.010752688
94	8836	830584	9.69535971	4.5468359	0.010638298
95	9025	857375	9.74679434	4.5629026	0.010526316
96	9216	884736	9.79795897	4.5788370	0.010416667
97	9409	912673	9.84885780	4.5947009	0.010309278
98	9604	941192	9.89949493	4.6104363	0.010204082
99	9801	970299	9.94987436	4.6260650	0.010101010
100	10000	1000000	10.00000000	4.6415888	0.010000000

數

10  
11  
12  
13  
14

15  
16  
17  
18  
19

20  
21  
22  
23  
24

25  
26  
27  
28  
29

30  
31  
32  
33  
34

35  
36  
37  
38  
39

40  
41  
42  
43  
44

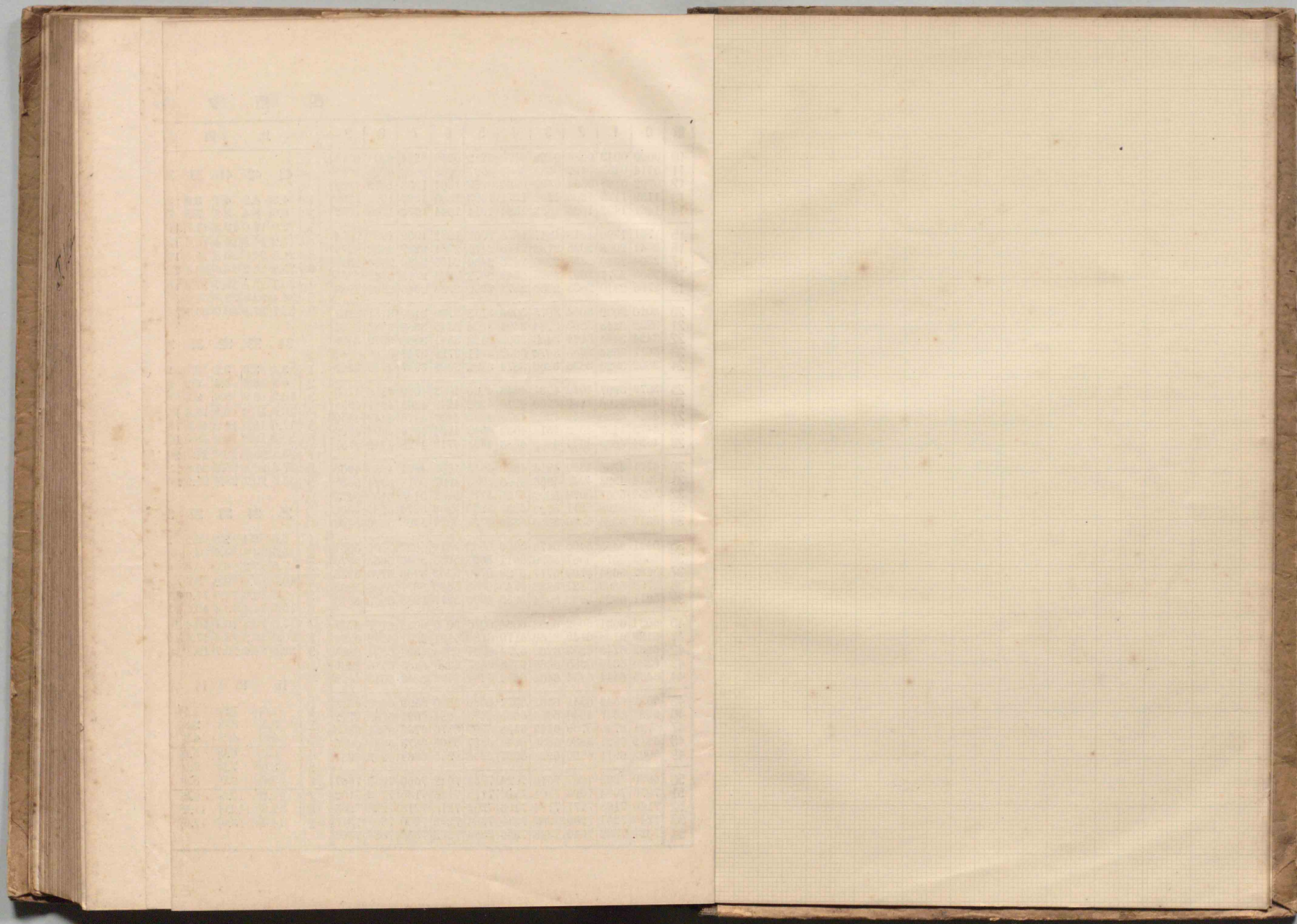
45  
46  
47  
48  
49

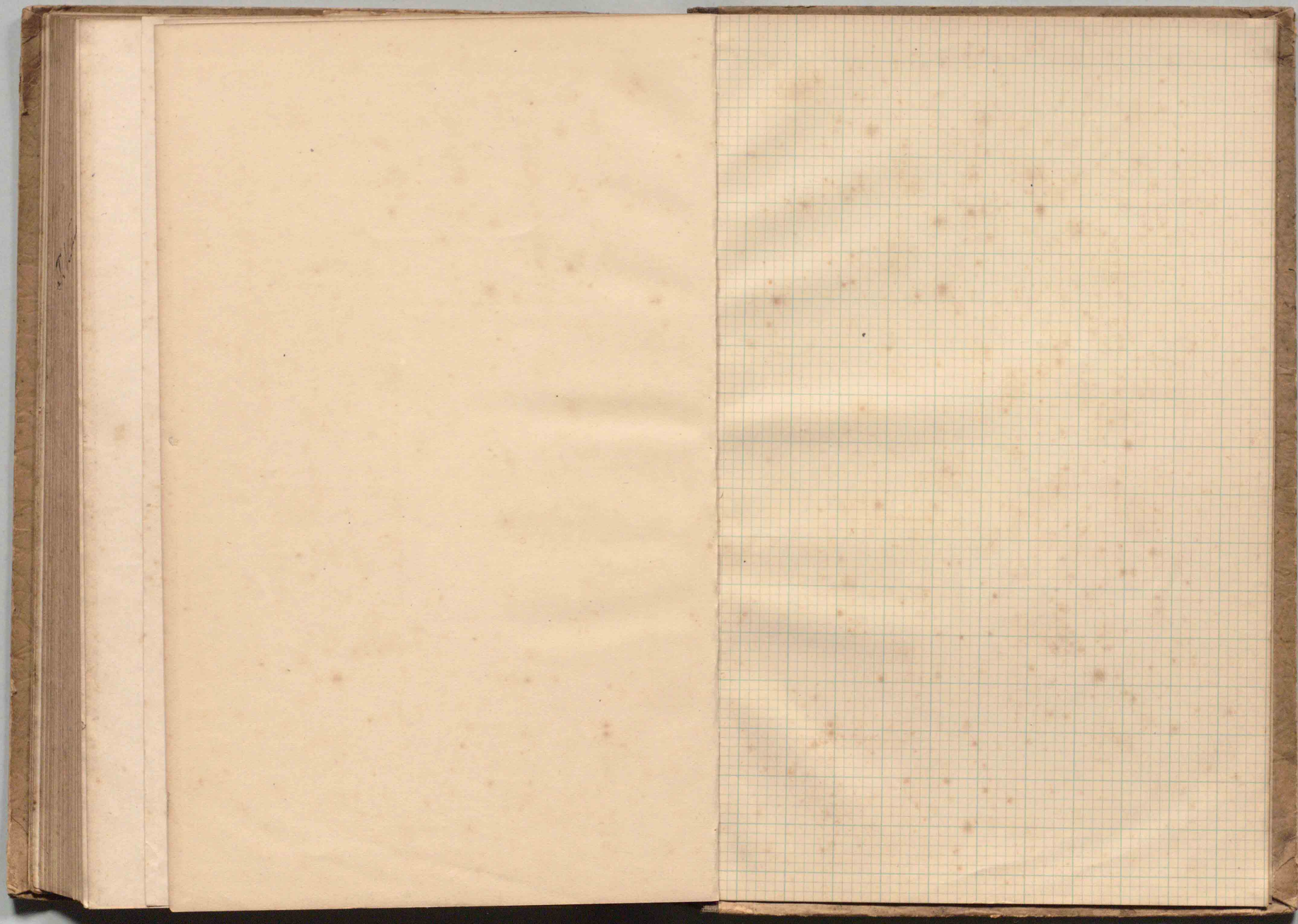
50  
51  
52  
53  
54

四桁ノ對數表

四 桁 対 数 表

數	比 例 部 分									數	比 例 部 分																						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9												
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	43	42	41	39	38	37	36	35	55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474				
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755										56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551			
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	1	4.3	4.2	4.1	3.9	3.8	3.7	3.6	3.5	1	57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627		
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430		2	8.6	8.4	8.2	7.8	7.6	7.4	7.2		7.0	2	58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732		3	12.9	12.6	12.3	11.7	11.4	11.1	10.8		10.5		3	59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	4	17.2	16.8	16.4	15.6	15.2	14.8	14.4	14.0	4	60	7782		7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	5	21.5	21.0	20.5	19.5	19.0	18.5	18.0	17.5		5	61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	6	25.8	25.2	24.6	23.4	22.8	22.2	21.6	21.0	6		62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	7	30.1	29.4	28.7	27.3	26.6	25.9	25.2	24.5		7	63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	8	34.4	33.6	32.8	31.2	30.4	29.6	28.8	28.0	8		64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	9	38.7	37.8	36.9	35.1	34.2	33.3	32.4	31.5		9	65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	34	33	32	31	29	28	27	26	66	8195		8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254			
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598										1	3.4	3.3	3.2	3.1	2.9	2.8	2.7	2.6	1	67	8261	8267	8274
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	6.8	6.6	6.4	6.2	5.8	5.6	5.4	5.2	2	68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363		8370	8376	8382	
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	3	10.2	9.9	9.6	9.3	8.7	8.4	8.1	7.8		3	69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	4	13.6	13.2	12.8	12.4	11.6	11.2	10.8	10.4	4		70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4293	5	17.0	16.5	16.0	15.5	14.5	14.0	13.5	13.0		5	71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	6	20.4	19.8	19.2	18.6	17.4	16.8	16.2	15.6	6		72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	7	23.8	23.1	22.4	21.7	20.3	19.6	18.9	18.2		7	73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	8	27.2	26.4	25.6	24.8	23.2	22.4	21.6	20.8	8		74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	9	30.6	29.7	28.8	27.9	26.1	25.2	24.3	23.4		9	75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	25	24	23	22	21	19	18	17	76	8808		8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859			
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172										1	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	1.9	1.8	1.7	1	77	8865	8871	8876
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	2	5.0	4.8	4.6	4.4	4.2	3.8	3.6	3.4	2	78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954		8960	8965	8971	
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	3	7.5	7.2	6.9	6.6	6.3	5.7	5.4	5.1		3	79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	4	10.0	9.6	9.2	8.8	8.4	7.6	7.2	6.8	4		80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	5	12.5	12.0	11.5	11.0	10.5	9.5	9.0	8.5		5	81	9085	9090	9096	9101	9106	9111	9117	9122	9128	9133	
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	6	15.0	14.4	13.8	13.2	12.6	11.4	10.8	10.2	6		82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	7	17.5	16.8	16.1	15.4	14.7	13.3	12.6	11.9		7	83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	8	20.0	19.2	18.4	17.6	16.8	15.2	14.4	13.6	8		84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	9	22.5	21.6	20.7	19.8	18.9	17.1	16.2	15.3		9	85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	16	15	14	13	12	11	90	9345	9350	9355		9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390					
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325								1	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	1	87	9395	9400	9405	9410	9415	9420
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	2	3.2	3.0	2.8	2.6	2.4	2.2	2.0	2	88	9445	9450	9455	9460	9465		9470	9475	9480	9485	9490		
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	3	4.8	4.5	4.2	3.9	3.6	3.3	3.0		3	89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538		
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	4	6.4	6.0	5.6	5.2	4.8	4.4	4.0	4		90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586		
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	5	8.0	7.5	7.0	6.5	6.0	5.5	5.0		5	91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633		
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	6	9.6	9.0	8.4	7.8	7.2	6.6	6.0	6		92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680		
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	7	11.2	10.5	9.8	9.1	8.4	7.7	7.0		7	93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727		
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	8	12.8	12.0	11.2	10.4	9.6	8.8	8.0	8		94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773		
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	9.9	9.0		9	95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818		
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	96	97	98	99	98	97	96	95	96		9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863			
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235										1	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	1	97	9868	9872	9877	9881
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	2	3.2	3.0	2.																			





昭和二年十一月三日印  
昭和二年十一月五日發  
昭和三年一月十七日訂正再版印刷  
昭和三年一月十九日訂正再版發行

昭和三年版  
中學教科

新 代 數



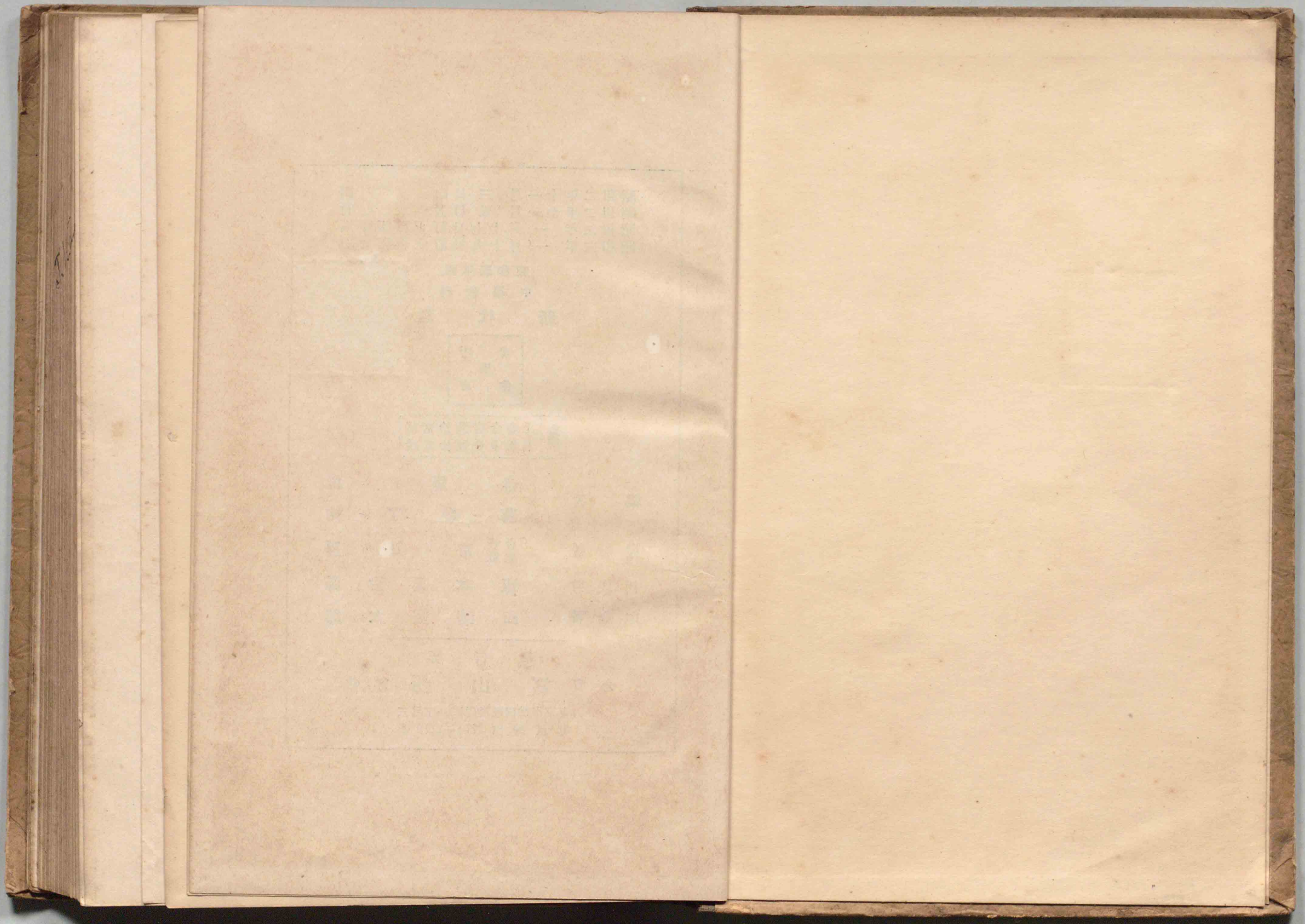
著 所  
權  
作 有

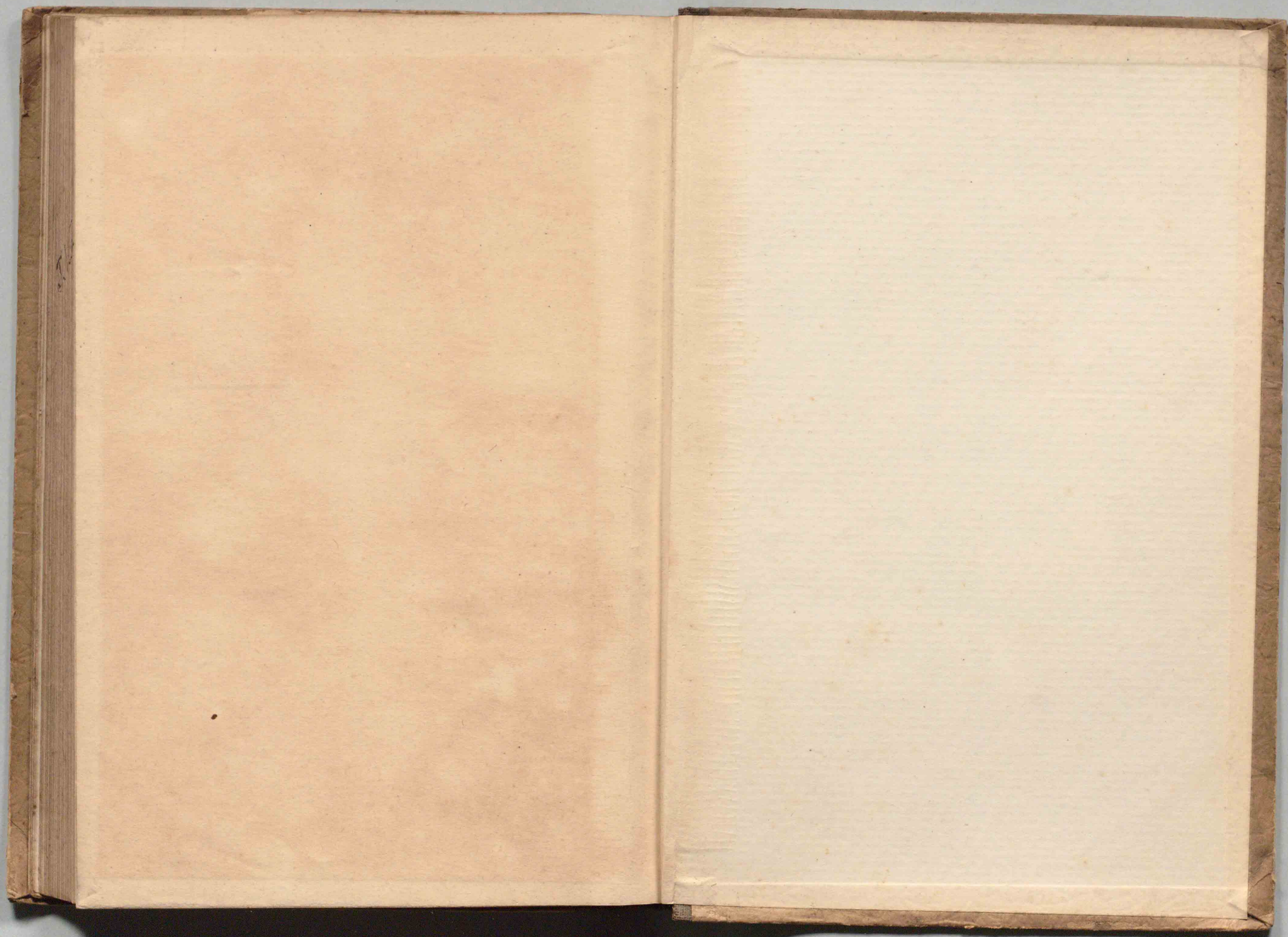
定價 上卷金壹圓拾貳錢  
下卷金壹圓拾貳錢

編 者 寺 尾 壽  
藤 野 了 祐  
發 行 者 合 資 富 山 房  
代 表 者 坂 本 嘉 治 馬  
印 刷 者 古 橋 照 太 郎

發 行 所  
合 資 富 山 房 會 社

東京市神田區神保町一丁目三  
電 話 神 田 2171~2178 番







J. Kubara  
Richard

枕  
木



横島縣立西條農学校

林三年北組十三番

木原榮夫

不

J. Kubara

