改訂版

新撰中等教育

代數學教科書

續卷

昭和三年三月三十一日
文部省檢定濟
中學校數學科用

改訂版

新撰
中等教育
代數學教科書
續卷

東京高等師範學校教授
理學博士
國枝元治
編纂

東京
寶文館藏版

改訂版序

本改訂版ニ於テハ「上下兩卷」ノ組織ヲ變更シタル結果トシテ本續卷ニ於テモ多少ノ變更ヲ施スコトトシタリ．即チ本卷ハ主トシテ「上下兩卷」ノ總括及補充ニ宛ツルコトトシ,不等式ノ章ハ方程式ノ後ニ置キ,又比及比例ニ關スル一二ノ事項ヲ本卷ニ納ムルコトトシ,且順列組合及二項定理ニ關スル事項ハ之ヲ附錄ニ掲ゲ,尚時勢ノ要求ニ應ゼンガタメ確率ニ關スル一章ヲ之ニ附加スルコトトシタリ．

昭和二年十一月

編　者　識

初版序

本書ハ中等程度ノ學校ニ於ケル補習用教科書トシテ編纂シタルモノニシテ,先ヅ不等式,順列,組合セ,二項定理ヲ説キ,夫ヨリ上下兩巻ニ掲載セル事項ノ復習ト補充トヲ兼ヌルノ目的ヲ以テ數ニ關スル一般的考察ヨリ始メ,有理整式ノ乗法除法ニ關スル分離係數法,剩餘ノ定理,對稱式,交代式,最大公約數及最小公倍數ヲ求ムル一般ノ方法,開立法,未定係數法,方程式ノ不定及不能ノ吟味ヨリ二次方程式ノ理論ノ補充,二次方程式ニ歸セシメ得ル各種方程式ノ補遺,等差級數及等比級數ニアラザル諸種ノ級數ニ論及シ,最後ニ函數觀念導入ノ補充トシテ分數式ノ値ノ變化ヲ論述スルコトトシタリ.

以上ヲ以テ本書内容ノ梗概トス.

本書ノ編纂ニ當リ,東京高等師範學校附屬中學校教諭鍋島信太郎君ノ助力ヲ煩シタル所尠カラズ,茲ニ同君ニ對シ謝意ヲ表ス.

大正十一年十二月

編者識

續巻目次

改訂版

新撰

中等教育

代數學

續卷

總括及補充

第一章 數

1. 數ノ種類.

既ニ本書ノ正編タル改訂版新撰中等教育代數學教科書上下兩卷*ノ各所ニ於テ諸種ノ數ヲ學ビタリ. 之ヲ總括スレバ次ノ如シ.

數ヲ大別シテ**實數**及**虚數**ニ別チ,實數ニハ**有理數**,**無理數**ノ二種アリ,又有理數ハ**整數**,**分數**ニ區別

---

* 簡單ナルコトノ爲ニ今後ハ單ニ「上卷」,「下卷」ト云フコトニスベシ.

セラル. 而シテ零ナラザル實數ハ正數,負數ニ分タル. 今之ヲ表ノ形ニ示セバ次ノ如シ.

- 數
  - 實數
    - 有理數
      - 整數……正,負,零
      - 分數……正,負
    - 無理數……正,負
  - 虛數

【注意】整數ハ廣キ意味ニテハ零ヲ含メルモノトスルヲ便利ナリトス. 因テ上ノ表ニテハ零ヲ入レタルナリ.

偖要スルニ整數ハ1ニツキ有限ノ度數加法及減法ヲ適用シテ得ラルルモノニシテ,有理數ハ1ニツキ有限ノ度數四則ノ計算ヲ適用シテ得ラルルモノナリ.

又無理數ハ如何ナル整數及分數ニモ等シカラズシテ,循環小數ナラザル無限小數(又ハ無限帶小數)ヲ以テ表シ得ルモノナリ.

最後ニ上ノ表ニ於ケル虛數トハ $2+3i,\ 2i,\ -\sqrt{2}i$ 等ノ如ク $a+bi$ ナル形ヲ有スル數ノコトナリ. 而シテ茲ニ a ハ任意ノ實數ヲ表シ, b ハ零ナラザル任意ノ實數ヲ表スモノトス.

(問) 次ノ數ノ種類別ケヲナセ.

$$-8,\ \frac{3}{7},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt[3]{7},\ 0,\ 10,\ 5i,\ -\sqrt{-28}$$

2. 四則ノ基礎ノ法則.

既ニ算術及「上卷」ト「下卷」ニ於テ學ビタルガ如ク四則計算ノ方法ハ加法及乘法ニ關スル或少數ノ法則ニ基ヅクモノナリ. 例ヘバ數多ノ數ヲ加フルニ當リ,相加フベキ數ノ順序ヲ如何ニ變更スルトモ又之ヲ如何ニ組合シテ加フルトモ其ノ結果ニハ變リナシト云フ法則ヲ適用スルガ如シ.

茲ニ更メテ此等ノ法則ヲ考究セン.

(1) **加法ノ法則.**

交換ノ法則 $a+b=b+a$

組合ノ法則 $(a+b)+c=a+(b+c)$

(問) 此等ノ法則ヲ言葉ニテ言ヘ.

此等ノ二法則ヲ**加法ノ基礎ノ法則**ト云フ.

正負ノ整數分數等ニツキ此等ノ法則ノ成立スルコトハ既ニ學ビタルガ如シ.

此等ノ法則ヨリ次ノ一般ナル法則ガ導キ出サルルナリ.

法則 三ツ以上ノ數ノ和ヲ求ムルトキ,各數ヲ任意ノ順序ニ取リ且如何樣ニ之ヲ組合セテ相加フルモ其ノ結果ハ一樣ナリ.

例ヘバ $a+b+c+d=(b+d)+(a+c)$

何トナレバ

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= b+a+c+d && (交換ノ法則)\\ &= b+(a+c)+d && (組合ノ法則)\\ &= b+\{(a+c)+d\} && (同\quad上)\\ &= b+\{d+(a+c)\} && (交換ノ法則)\\ &= (b+d)+(a+c) && (組合ノ法則) \end{aligned}$$

其ノ他ノ場合モ皆同樣ニシテ證明スルコトヲ得ベシ.

(問) 交換ノ法則及組合ノ法則ヲ用ヒテ次ノ等式ヲ證明セヨ.

(1) $a+b+c+d=c+b+d+a$

(2) $a+b+c+d=d+(b+a+c)$

【注意】 三ツ以上ノ數ノ和ヲ求ムルトキ,「順序ヲ變更シテ差支ナシ」ト云フコトハ交換,組合ノ兩法則ニヨリ證明セラルルモノナルコトニ注意セヨ.

(2) **乘法ノ法則.**

交換ノ法則 $ab=ba$

組合ノ法則 $(ab)c=a(bc)$

分配ノ法則 $(a+b)c=ac+bc$

(問) 此等ノ法則ヲ言葉ニテ言ヘ.

此等ノ三法則ヲ**乘法ノ基礎ノ法則**ト云フ.

正負ノ整數及分數等ニツキ此等ノ法則ノ成立スルコトハ既ニ學ビタルガ如シ.

交換,組合ノ二法則ヨリ次ノ一般ナル法則ガ導キ出サル.

法則 三ツ以上ノ數ノ積ヲ求ムルトキ,各數ヲ任意ノ順序ニ取リ且如何樣ニ之ヲ組合セテ相乘ズルモ其ノ結果ハ一樣ナリ.

例ヘバ $abcd=(bd)(ac)$

$\qquad\qquad =c\{d(ba)\}$

何トナレバ

$$\begin{aligned} abcd &= bacd & &(\text{交換ノ法則}) \\ &= b(ac)d & &(\text{組合ノ法則}) \\ &= b\{(ac)d\} & &(\text{同　上}) \\ &= b\{d(ac)\} & &(\text{交換ノ法則}) \\ &= (bd)(ac) & &(\text{組合ノ法則}) \end{aligned}$$

同様ニシテ　$abcd=c\{d(ba)\}$

モ證明スルコトヲ得ベシ．學生諸子自ラ之ヲ試ミヨ．

其ノ他ノ場合モ皆同様ナリ．

又分配ノ法則ハ次ノ如ク一般的ニスルコトヲ得．

法則　數多ノ數ノ和ニ或數ヲ乘ジタル積ハ其ノ各數ニ此ノ數ヲ乘ジタル積ノ和ニ等シ．

例ヘバ　$(a+b+c+d)e=ae+be+ce+de$

何トナレバ

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)e &= \{(a+b)+(c+d)\}e & &(\text{加法ノ法則}) \\ &= (a+b)e+(c+d)e & &(\text{分配ノ法則}) \\ &= (ae+be)+(ce+de) & &(\text{同　上}) \\ &= ae+be+ce+de & &(\text{加法ノ法則}) \end{aligned}$$

其ノ他ノ場合モ皆同様ナリ．

偖減法ハ加法ニ歸シ,除法ハ乘法ニ歸スルコトヲ得ルガ故ニ減法及除法ニ關スル計算ノ法則ハ何レモ皆加法及乘法ノ基礎ノ法則ヨリ導キ出サルルナリ．

例ヘバ　$(a-b-c)\div d=a\div d-b\div d-c\div d$

何トナレバ

$$\begin{aligned} (a-b-c)\div d &= \{a+(-b)+(-c)\}\times\frac{1}{d} \\ &= a\times\frac{1}{d}+(-b)\times\frac{1}{d}+(-c)\times\frac{1}{d} \\ &= a\div d+(-b\div d)+(-c\div d) \\ &= a\div d-b\div d-c\div d \end{aligned}$$

(問)　次ノ等式ヲ證明セヨ．

(1)　$a-b-c+d=a+d-(b+c)$

(2)　$(a-b+c-d)e=ae-be+ce-de$

3. 虚數ニツキテ.

例ヘバ　$2+3i$,　$5-2i$　ノ如ク,實數ト虚數トノ代數的ノ和ノ形ヲ有スル數ヲモ亦虚數ト云フ．サレド又斯ノ如キ形ノ數ヲ特ニ**複素數**トモ云フ．

即チ複素數トハ a, b ガ實數ナルトキ $a+bi$ ナル形ヲ有スル數ヲ云フナリ．而シテ a ヲ此ノ複素數

ノ**實數部**,b ヲ其ノ**虚數部**ト云フ.

例ヘバ $5+2i$ ノ實數部ハ 5 ニシテ,虚數部ハ 2 ナリ,又 $-3-5i$ ノ實數部ハ -3 ニシテ,虚數部ハ -5 ナリ.

廣義ノ虚數卽チ複素數ニ對シ,例ヘバ $2i,\ -5i$ ノ如キ虚數卽チ複素數 $a+bi$ ニ於テ其ノ實數部 a ノ零ナルモノヲ**純粹ナル虚數**ト云フ.

複素數 $a+bi$ ニ於テ $b=0$ ナルトキハ此ノ數ハ實數 a トナル. 故ニ實數ハ複素數ノ虚數部ガ零トナリタルモノト見做サル

$a+bi,\ a-bi$ ノ如ク唯虚數部ノ符號ノミノ相異ナル複素數ヲ互ニ**共軛ナル複素數**又ハ**共軛ナル虚數**ト云フ.

例ヘバ $2+3i,\ 2-3i$ ハ共軛ナル複素數ナリ.

又 $\sqrt{a^2+b^2}$ ヲ複素數 $a+bi$ ノ**絶對値**ト云フ.

例ヘバ $2+3i$ ノ絶對値ハ $\sqrt{2^2+3^2}$ 卽チ $\sqrt{13}$ ナリ.

偖 $a^2+b^2=a^2+(-b)^2$ ナルガ故ニ互ニ共軛ナル複素數ノ絶對値ハ相等シ. 又 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ナルガ故ニ互ニ共軛ナル複素數ノ積ハ其ノ各數ノ絶對値ノ二乘ニ等シ.

次ニ複素數ハ其ノ實數部及虚數部ノ兩方ガ零ナルトキニ限リ零トナル. 卽チ $a=0,\ b=0$ ナルトキニ限リ $a+bi=0$ ナリ.

又二ツノ複素數ハ其等ノ實數部同士ト虚數部同士トガ相等シキトキニ限リ相等シクナルナリ. 卽チ $a=c,\ b=d$ ナルトキニ限リ $a+bi=c+di$ ナリ.

例題

1. 次ノ數ノ實數部ト虚數部トヲ示セ.

$$-2+5i,\quad \frac{1}{2}-\frac{i}{5},\quad -25-\sqrt{3}\,i$$

2. 次ノ數ノ絶對値ヲ求ム.

$$5-4i,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\quad \sqrt{5}-5i$$

3. $a,\ b$ ガ零ナラザル實數ニシテ $a=bi$ ナル等式ハ成立チ得ルカ.
4. n ガ整數ナルトキ $8+(-i)^{n}\cdot 7$ ノ値如何.
5. 係數ガ實數ナル二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ一根ガ虚數ナルトキハ他ノ根ハ之ニ共軛ナル虚數ナリ. 何故カ.
6. $x,\ y$ ガ實數ニシテ $2x-3y+(x+2y-7)i=0$ ナルトキ,x 及 y ノ値ヲ求ム.

第二章　有理整式

4. 代數式ノ種類.

代數式モ亦數ノ場合ト略同樣ノ理由ニテ次ノ如ク分類セラル.

- 代數式
  - 有理式
    - 整式
      - 單項式
      - 多項式
    - 分數式
  - 無理式

5. 有理整式ニツキテ.

文字 x ニ關スル一次,二次ノ有理整式ノ一般ナル形ハ夫夫 $ax+b$, ax^2+bx+c ナルコトハ既ニ知ル所ナリ.

偖 x ニ關シテ n 次ノ有理整式ノ一般ナル形ハ

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots+kx+l$$

ナリ. 之ハ x ニ關シテ降冪ノ順ニ排列セルモノニシテ, $a, b, c, \dots\dots, k, l$ ハ x ヲ含マザル數ナリ. 此等ノ文字ヲ此ノ**有理整式ノ係數**ト云フ.

或文字例ヘバ x ニ關スル有理整式ハ多クノ場合ニ於テ茲ニ示スガ如ク,其ノ文字 x ニ關シテ降

冪ノ順ニ排列シ置クヲ便利トス.

又 x ニ關シテ n 次ノ有理整式ヲ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\dots+a_{n-1}x+a_n$$

ト書キ表スコトアリ. 此ノ記方ニヨレバ x^{n-r} ノ項ノ係數ハ a_r ニシテ,文字 $a_0, a_1, a_2, \dots\dots, a_{n-1}, a_n$ ノ右下ニ添附セル數(添數ト云フ)ヲ見レバ直チニ何レノ項ノ係數ナルカヲ判知シ得ルナリ. 斯ノ如キ便利ヲ伴フガ故ニ此ノ記方ハ廣ク用ヒラル.

問題 I

1. $5x^7+3x^6-4x^4+x^3-9$ ハ上ニ示シタル一般ナル形ニ於テ $n, a_0, a_1, a_2, \dots\dots$ ガ夫夫如何ナル値ヲ有スル場合ナルカ.
2. $(x+1)(5x^2+3)(x^5-3)$ ノ次數如何. 之ヲ展開シタル式ニ於ケル係數 $a_0, a_1, a_2, \dots\dots$ ノ値ヲ求ム.
3. $x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ ハ何次式ナルカ. 又 x, y, z ノ各ニ關シテ其ノ次數如何.
4. x ニ關スル三次ノ整式ノ一般ナル形ヲ書ケ.
5. x, y ニ關スル二次ノ同次式ノ例ヲ示セ. 又其ノ一般ナル形ハ如何ナルモノナルカ.

6.　二次ノ同次式ト三次ノ同次式トノ積ハ何次ノ同次式ナルカ.

7.　文字 x ヲ含ム式ヲ特ニ此ノ文字ニ着目シテ $f(x)$ ナル記號ヲ用ヒテ之ヲ表スコトアリ. 例ヘバ $f(x)=ax^2+bx+c$ 又ハ $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ ト置クガ如シ. 今 $f(x)=2x^3-x^2+1$ ナルトキ, $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$ ノ値各如何.

8.　$f(x)=x^4-5x^2-6$ ナルトキ $f(1)$, $f(3)$, $f(6)$ ノ値ヲ求メヨ.

9.　$f(x,y)=x^2-x-y+8$ ト置クトキ

$$f(0,0),\quad f(1,0),\quad f(-2,-3)$$

ノ値ヲ求ム.

次ノ式ヲ文字 x ノミニ着目シテ之ヲマトメヨ.

10.　$5x^2-3x^2+ax+bx+ab$

11.　$ax^2+a^2x+bx^2+cx^2+abc+b^2x+c^2x$

12.　$ax^2+abx-bx^2-bcx+abc-acx-cx^2$

13.　$\dfrac{-ax^2-bx^3}{3}-\dfrac{cx^2+dx}{3}$

次ノ式ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列セヨ.

14.　$a^4-b^4+ab^3-a^3b+6a^2b^2-3a^3b+2b^4-5ab^3$

15.　$a^3+a^2b-2a^2c+ab^2-3abc-a^2c+bc^2-2b^2c+c^2a$

6. 多項式ノ乘法. (分離係數法)

二ツノ多項式ノ積例ヘバ

$$(2x^4-4x^2+3x-1)\times(x^2-3x+5)$$

ヲ求ムルニハ,通常「上卷」第五編ニ於テ學ビタル方法ニ依ルモノナレドモ,次ノ如クスレバ運算ノ手數ヲ省略スルコトヲ得ベシ.

運算

$$\begin{array}{rrrrrrr}
2 & +0 & -4 & +3 & -1 & & \\
1 & -3 & +5 & & & & \\
\hline
2 & +0 & -4 & +3 & -1 & & \\
 & -6 & +0 & +12 & -9 & +3 & \\
 & & 10 & +0 & -20 & +15 & -5 \\
\hline
2 & -6 & +6 & +15 & -30 & +18 & -5
\end{array}$$

所要ノ積 $=2x^6-6x^5+6x^4+15x^3-30x^2+18x-5$

卽チ先ヅ兩式ヲ x ニ關シテ降冪ノ順ニ排列シ,然ル後其ノ係數ノミヲ書キ下シテ計算ヲ行フナリ. 但缺ケタル項アラバ其ノ係數ハ 0 ナルコトニ注意スベシ.

此ノ如キ方法ヲ**分離係數法**ト云フ.

(問)　分離係數法ヲ適用シテ次ノ積ヲ計算セヨ.

(1)　$(x^3-2x^2+3x-1)(x^2-x+1)$

(2)　$(7x^3-3x^2+11x-15)(2x^2-3)$

7. 多項式ノ項數及次數.

二ツノ多項式ノ積ノ項數ハ兩式ノ項數ノ積ヨリモ大ナラズ.

何トナレバ二ツノ多項式ノ積ヲ作ルニハ,一方ノ式ノ各項ニ他ノ式ノ各項ヲ乘ジタル積卽チ部分積ノ總和ヲ求ムレバ可ナリ,而シテ斯ノ如キ部分積ノ數ハ明ニ兩式ノ項數ノ積ニ等シケレドモ,此等ノ部分積ノ中ニ若同類項アラバ之ヲ約スルガ故ニ,一般ニハ最後ノ結果ニ於ケル項數ハ此ノ積ヨリモ小トナルナリ.

又二ツノ多項式ノ積ノ最高次ノ項ハ兩式ニ於ケル最高次ノ項ノ積ニシテ,其ノ最低次ノ項ハ兩式ニ於ケル最低次ノ項ノ積ナリ,而シテ適宜或文字ニ着目スレバ多項式ノ積ニ於テハ最高次ノ項ト最低次ノ項トハ必ズ存在スルモノナリ.

故ニ **二ツノ多項式ノ積ノ項數ハ少ナクトモ二ナリ.**

又 **二ツノ多項式ノ積ノ次數ハ兩式ノ次數ノ和ニ等シ.**

例題

次ノ積ヲ求ム.

1. $(3x^5-2x^4-x^3+7x^2-6x+5)(2x^2-3x+1)$
2. $(x^4-x^3+3x^2-3x+1)(x^2+2x+1)$
3. $(5x^3-3ax^2+2a^2x+a^3)(3x^2-ax-2a^2)$
4. $(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)(x+y)$
5. $(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+2x^2+3x-8)$

ノ展開式ニ於テ x^8, x^6, x^4 ノ係數ヲ求メヨ.

8. 多項式ノ除法.(分離係數法)

多項式ノ除法ニ於テモ亦**分離係數法**ヲ用フルヲ便利トスルコトアリ.

例. x^3-4x^2+6x+2 ヲ x^2-2x+1 ニテ除スベシ.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-2 \\
\hline
1-2+1 & 1-4+6+2 \\
 & 1-2+1 \\
\hline
 & \quad -2+5+2 \\
 & \quad -2+4-2 \\
\hline
 & \qquad\quad 1+4
\end{array}
$$

答 商 $x-2$, 剩餘 $x+4$

(問) 分離係數法ニヨリ次ノ除法ヲ行ヘ.

(1) $(2x^4-x^3-5x^2-8x+12)\div(x^2-3x+2)$

(2) $(x^4+ax^3+2a^2x^2+2a^3x+4a^4)\div(x^2+2ax+2a^2)$

スベテ除法ヲ行フニハ,實及法ノ項ヲ順序良ク排列セザレバ混雜ヲ來スモノナリ. 特ニ複雜ナル式ニ於テ然リトス. 今次ニ一例ヲ示サン.

例. $a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ $a+b+c$ ニテ除スベシ,

解 文字 a ニ着目シテ計算ヲ行ヘバ次ノ如シ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2) \\
\hline
a+(b+c) & a^3-3abc+b^3+c^3 \\
 & a^3+a^2(b+c) \\
\cline{2-2}
 & -a^2(b+c)-3abc \\
 & -a^2(b+c)-a(b+c)^2 \\
\cline{2-2}
 & a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 \\
 & a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

答 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

例　題

次ノ第一式ヲ第二式ニテ除スベシ.

1. $6x^4-7x^3-3x^2+24x-20,\ 3x^2+x-6$
2. $4x^7-3x^5+19x^4+2x^3+4x^2-4x+7,\ x^3-x+1$
3. $x^4-4xy^3+3y^4,\ x-y$
4. $27a^3-8b^3+c^3+18abc,\ 3a-2b+c$
5. $a^2(b+c)+b^2(c+a)-c^2(a+b),\ ab+bc+ca$
6. $abc-b^2(a+c)+a^2(b+c)+c^2(a+b),\ ab+ac+bc$

9. 剩餘ノ定理.

既ニ「下卷」第十一編ニ於テ剩餘ノ定理及其ノ應用ヲ學ビタレドモ,茲ニハ先ヅ其ノ一般ナル證明法ヲ示シ且其ノ應用ノ補充ヲ試ミントスルナリ.

先ヅ x ニ關スル n 次ノ有理整式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

ヲ $f(x)$ ニテ表シ,之ヲ $x-\alpha$ ニテ除シタルトキノ整商ヲ Q トシ,剩餘ヲ R トスベシ. 但茲ニ $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n$ 及 α ハ x ヲ含マザル數ナリトス.

然ルトキハ除法ノ意義ニヨリ

$$f(x)=(x-\alpha)\mathrm{Q}+\mathrm{R}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ,而シテ $x-\alpha$ ハ x ニ關シテ一次ノ有理整式ナルガ故ニ,之ニテ $f(x)$ ヲ除シタルトキノ剩餘 R ハ x ヲ含マザル數ナリ.

今(1)ナル等式ニ於テ $x=\alpha$ ト置ケバ

$$f(\alpha)=0\cdot\mathrm{Q}+\mathrm{R}=\mathrm{R}$$

$$\therefore\ \mathrm{R}=f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n$$

即チ次ノ定理ガ證明セラレタリ.

定理. x ニ關スル或整式ヲ x ニ關スル一次式 $x-\alpha$ ニテ除シタルトキノ剩餘ハ其ノ整式中ノ x

ニ α ヲ代入シタルモノニ等シ.

是即チ剩餘ノ定理ナリ.（「下卷」第十一編參照）

例ヘバ $5x^3-3x^2-x+4$ ヲ $x-2$ ニテ除シタルトキノ剩餘ハ $5\times2^3-3\times2^2-2+4$ 即チ 30 ニ等シ.

剩餘ノ定理ヨリ直チニ次ノ定理ヲ得ベシ.

定理. x ニ關スル或整式中ノ x ニ α ヲ代入シタルモノガ零トナルトキハ,其ノ整式ハ $x-\alpha$ ニテ整除セラル.

（問） 學生諸子自ラ此ノ定理ヲ證明セヨ.

例. $4x^3-8x^2-5x+10$ ハ $x=2$ ナルトキ,其ノ値ハ $4\times2^3-8\times2^2-5\times2+10$ 即チ 0 トナル. 因テ此ノ式ハ $x-2$ ニテ整除セラル.

10. $x-\alpha$ ニテノ除法.

x ニ關スル有理整式ヲ一次式 $x-\alpha$ ニテ除スルニハ,次ニ示スガ如キ簡便ナル方法アリ.

例ヘバ $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ ヲ $x-\alpha$ ニテ除シタル商ヲQトシ,剩餘ヲRトスレバ

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x-\alpha)Q+R \quad\cdots\cdots(1)$$

偖整商Qハ x ニ關シ三次ノ有理整式ナルベシ. 因テ今其ノ係數ヲ b_0, b_1, b_2, b_3 ニテ表セバ

$$Q=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$\begin{aligned}&a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4\\&\quad=(x-\alpha)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)+R\\&\quad=b_0x^4+(b_1-b_0\alpha)x^3+(b_2-b_1\alpha)x^2+(b_3-b_2\alpha)x+R-b_3\alpha\end{aligned}$$

偖Rハ x ヲ含マザル數ナルコトニ注意シ,此ノ右邊ガ左邊ニ全ク等シカルベキコトニヨレバ

$$b_0=a_0,\ b_1-b_0\alpha=a_1,\ b_2-b_1\alpha=a_2,\ b_3-b_2\alpha=a_3,\ R-b_3\alpha=a_4$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &b_0=a_0\\&b_1=a_1+b_0\alpha=a_0\alpha+a_1\\&b_2=c_2+b_1\alpha=a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2\\&b_3=a_3+b_2\alpha=a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3\\&R=a_4+b_3\alpha=a_0\alpha^4+a_1\alpha^3+a_2\alpha^2+a_3\alpha+a_4\end{aligned}$$

因テ b_1, b_2, b_3, R ヲ求ムルニハ次ノ形式ニヨレバ可ナリ.

$$\begin{array}{ccccc|l}a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \alpha\\ & a_0\alpha & b_1\alpha & b_2\alpha & b_3\alpha & \\ \hline a_0 & b_1 & b_2 & b_3 & R & \end{array}$$

即チ先ヅ a_0 ニ α ヲ乗ジタルモノヲ a_1 ニ加フレバ b_1 ヲ得ベシ. 次ニ b_1 ニ α ヲ乗ジテ a_2 ニ加フレバ

b_2 ヲ得, b_2 ニ a ヲ乘ジテ a_3 ニ加フレバ b_3 ヲ得, b_3 ニ a ヲ乘ジテ a_4 ニ加フレバ R ヲ得ベシ.

一般ニ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ヲ $x-a$ ニテ除シタルトキノ整商ノ係數ヲ $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ トシ,剩餘ヲ R トスレバ此等ハ同樣ノ計算ヲ施スコトニヨリテ求メラルルナリ. 其ノ證明ハ上ノ場合ト全ク同樣ナリ.

例 1. $2x^4-8x^3+5x^2+8x-6$ ヲ $x-2$ ニテ除スベシ.

解
$$\begin{array}{rrrrrl} 2 & -8 & +5 & +8 & -6 & (2 \\ & 4 & -8 & -6 & 4 & \\ \hline 2 & -4 & -3 & +2 & -2 & \end{array}$$

$\therefore\ Q=2x^3-4x^2-3x+2,\ R=-2$ 答.

例 2. x^5+3x^3-3x+1 ヲ $x+1$ ニテ除スベシ.

解 $x+1=x-(-1)$ ナルガ故ニ $a=-1$ トスベシ.
$$\begin{array}{rrrrrrl} 1 & 0 & +3 & 0 & -3 & +1 & (-1 \\ & -1 & +1 & -4 & +4 & -1 & \\ \hline 1 & -1 & +4 & -4 & +1 & 0 & \end{array}$$

$\therefore\ Q=x^4-x^3+4x^2-4x+1,\ R=0$ 答.

例 3. $3x^3-11x^2+18x-3$ ヲ $3x-2$ ニテ除スベシ.

解 $3x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)$ ナルガ故ニ,今整商ヲ Q, 剩餘ヲ R トスレバ

$$3x^3-11x^2+18x-3=(3x-2)Q+R=\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot 3Q+R$$

故ニ先ヅ $x-\frac{2}{3}$ ニテ除シ,剩餘ハ其ノママ取リ, 整商ハ 3 ニテ除スレバ可ナリ. 卽チ
$$\begin{array}{rrrrl} 3 & -11 & +18 & -3 & \left(\frac{2}{3}\right. \\ & 2 & -6 & 8 & \\ \hline 3 & -9 & 12 & 5 & \end{array}$$

$\therefore\ Q=\frac{1}{3}(3x^2-9x+12)=x^2-3x+4,\ R=5$ 答.

例 題

次ノ第一式ヲ第二式ニテ除セ.

1. $3x^4-5x^3-6x^2+4x-2,\ x-1$
2. $x^4+x^3-8x-10,\ x+2$
3. $3x^3-5x^2+14x-3,\ 3x-2$
4. $5x^5-x^3+x+2,\ x-3$
5. $2x^3-3x^2+8x-12,\ 2x-3$
6. $7x^5-15x^4+x^3-2x-5,\ x-2$
7. $2x^3+3x^2-2x-3$ ハ x^2-1 ニテ整除セラルルコトヲ示セ.
8. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$ ハ $x-a$ ニテ整除セラルルカ. 若然ラバ其ノ商ヲ求メヨ.

11. 未定係數ノ方法.

例 1. $(x^2-5x+6)^2-(x+1)(x+2)$ ヲ $(x-2)(x+1)$ ニテ除シタルトキノ剩餘ヲ求ム.

解 $(x-2)(x+1)$ ハ x ニツキテ二次ノ整式ナリ. 故ニ此ノ式ニテ除シタルトキノ剩餘ハ一般ニ x ニツキテ一次ノ式ナリ. 因テ此ノ剩除ヲ $Lx+M$ ト置キ,且此ノ除法ノ商ヲ Q トスレバ

$$(x^2-5x+6)^2-(x+1)(x+2)=(x-2)(x+1)Q+Lx+M$$

但 L, M ハ數係數ナルコトニ注意スベシ. 偖此ノ等式ハ恒等式ナルベキガ故ニ x ニ如何ナル値ヲ與フルトモ等式ハ成立スベシ.

因テ今 $x=2$ ト置ケバ

$$-12=2L+M \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

次ニ $x=-1$ ト置ケバ

$$144=-L+M \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

L, M ニツキテノ聯立方程式(1), (2) ヲ解ケバ

$$L=-52,\quad M=92$$

$\therefore$ 所要ノ剩餘$=-52x+92$ 答.

例 2. $x^3+3px^2+3qx+r$ ガ $x^2+2px+q$ ニテ整除セラルルトキハ前者ハ完全立方式ニシテ後者ハ完

全平方式ナルコトヲ證明セヨ.

解 $x^3+3px^2+3qx+r$ ヲ $x^2+2px+q$ ニテ除シタルトキノ商ハ x ニツキ一次式ニシテ其ノ初項ハ x^3 ヲ x^2 ニテ除シタル商ナル x ナリ. 因テ此ノ商ヲ $x+a$ ト置クベシ. 但 a ハ x ヲ含マザル數ナリ.

偖假定ニヨリ整除セラルル場合ナルガ故ニ

$$x^3+3px^2+3qx+r=(x^2+2px+q)(x+a)$$

右邊ヲ展開スレバ

$$x^3+3px^2+3qx+r=x^3+(a+2p)x^2+(2pa+q)x+qa$$

之ハ恒等式ナルベキガ故ニ,左右兩邊ニ於ケル x ノ同ジ羃ノ係數ハ相等シカルベシ. 因テ

$$a+2p=3p,\quad 2pa+q=3q,\quad qa=r$$

之ヨリ $\quad a=p,\ q=p^2,\ r=p^3$

$$\therefore\ x^3+3px^2+3qx+r=x^3+3px^2+3p^2x+p^3=(x+p)^3$$

$$x^2+2px+q=x^2+2px+p^2=(x+p)^2$$

即チ $x^3+3px^2+3qx+r$ ハ完全ナル立方式ニシテ, $x^2+2px+q$ ハ完全ナル平方式ナリ.

例　題

1. x^3-5x^2+px+q ガ x^2-x+1 ニテ整除セラルルト

云フ. p, q ノ値ヲ求ム.

2. $(x^2-1)^3+5(x-2)^2$ ヲ $(x-1)(x-2)$ ニテ除シタルトキノ剰餘ヲ求ム.

3. $x^2+2ax+b$ ガ $x+a$ ニテ整除セラルルトキハ前者ハ完全平方式ナルコトヲ證明セヨ.

4. 次ノ恒等式ガ成立ツ様ニ數係數 A, B, C ノ値ヲ定メヨ.

$$(x^2+x+2)(x^2-2x+1)-(Ax^2+Bx+C)=x^4-x^3+x+1$$

5. 次ノ恒等式ガ成立ツ様ニ數係數 A, B, C ノ値ヲ定メヨ.

$$3x^2-2x+1=A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2)$$

6. $A+B(x+2)+C(x+2)^2+D(x+2)^3$ ヲ整頓スレバ $1+x^3$ トナルト云フ. A, B, C, D ノ値ヲ求ム. 但此等ノ文字ハ數係數ヲ表スモノトス.

7. $x^4+2x^3+mx^2+x+n$ ガ完全ナル平方式トナル様ニ m, n ノ値ヲ定メヨ.

8. x^3+px^2+qx+r ガ完全ナル立方式ナルガ爲ニハ $p^3=27r$, $q^3=27r^2$ ナルヲ要ス. 之ヲ證明セヨ.

問題 II

1. $x^3+mx^2-20x+6$ ガ $x-3$ ニテ整除セラルル様ニ m ノ値ヲ定メヨ.

2. $2x^3-x^2+lx+m$ ガ $(x+2)(x-4)$ ニテ整除セラルル様ニ l, m ノ値ヲ定メヨ.

3. $3bm+am-2an-6bn$ ハ $m-2n$ ニテモ, 又 $a+3b$ ニテモ割リ切レルコトヲ示セ.

4. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ ハ $(a-b)(a-c)(b-c)$ ニテ整除セラルルコトヲ示セ.

5. x^2+px+q ヲ $x-1$ 及 $x+1$ ニテ除スレバ夫夫剰餘 6 及 2 ヲ得ベシト云フ. p, q ノ値如何.

6. x ニ關スル三次式アリ, $x=1$, $x=4$, $x=-2$ ト置クトキハ夫夫 0 トナリ, 又 $x=2$ ト置クトキハ -16 トナルト云フ. 此ノ三次式ヲ求ム.

7. $x^4+px^2+qx+a^2$ ガ $x-1$ 及 $x+1$ ノ何レニテモ整除セラルルナラバ此ノ式ハ又 $x-a$ 及 $x+a$ ノ何レニテモ整除セラルルコトヲ示セ.

8. n ガ 2 以上ノ整數ナルトキ $x^n-na^{n-1}x+(n-1)a^n$ ハ $(x-a)^2$ ニテ整除セラルルコトヲ證明セヨ.

9. $ax^3+3bx^2+3cx+d$ ガ $ax^2+2bx+c$ ニテ整除セラルルトキハ前者ハ完全ナル立方式ニシテ後者ハ完全ナル平方式ナルコトヲ證明セヨ.

10. x^4+px^2+q ガ x^2+px+q ニテ整除セラルル樣ニ p, q ノ値ヲ定メヨ. 但 $p\neq0,\ q\neq0$ トス.

11. x ニ關スル二次式アリ, x ノ値ガ 2 及 -3 ナルトキ其ノ値ハ零トナリ, $x=0$ ナルトキ其ノ値ハ 6 トナルト云フ. 此ノ二次式ヲ求ム.

12. x ニ關スル三次式アリ, x ノ値ガ 0, 1, 2, 3 ナルニ從テ其ノ値ハ夫夫 1, 1, 1, 7 トナルト云フ. 此ノ式ヲ決定セヨ.

13. $\dfrac{x^2-x+1}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$ ナル樣ニ A, B, C ノ値ヲ定メヨ.

14. x^2+3x+c 及 $x^2-5x+2c$ ガ公約數ヲ有スルガ爲ノ條件ヲ求ム.

15. ax^3+bx^2+c 及 ax^2+bx+d ガ x ニ關シテ一次式ナル最大公約數ヲ有スルガ爲ニハ

$$ac^2+bcd+d^3=0$$

ナラザルベカラザルコトヲ證明セヨ.

第三章　因數分解

12. 二次式ノ因數分解.

x ニ關スル二次式 ax^2+bx+c ハ簡單ナル場合ニハ視察ニヨリ容易ニ因數ニ分解シ得ルコトアルハ既ニ「上卷」第五編ニ於テ學ビタル所ナリ. 玆ニハ之ヲ因數ニ分解スル一般ナル方法ヲ示サン.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$
$$=a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

例. $6x^2+23x+20$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解 $$6x^2+23x+20=6\left(x^2+\frac{23}{6}x+\frac{20}{6}\right)$$
$$=6\left\{\left(x+\frac{23}{12}\right)^2-\frac{49}{144}\right\}$$
$$=6\left(x+\frac{23}{12}-\frac{7}{12}\right)\left(x+\frac{23}{12}+\frac{7}{12}\right)$$
$$=(3x+4)(2x+5)\qquad \text{答.}$$

【注意】以上ノ解法ト二次方程式ノ根ノ公式ヲ用ヒテ先ヅ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ求ムルコトニヨリテ因數分解ヲナス方法トヲ比較セヨ.

例　　題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ.

1. $x^2-20x+36$　　2. $x^2+15x+56$

3. $2x^2-9x-35$　　4. $3x^2+4x-32$

5. $10y^2-31y+15$　　6. $5x^2-14x-24$

7. $4x^2-24xy+35y^2$　　8. $6a^2-7ab-20b^2$

9. $3y^2-20yz-63z^2$　　10. $8x^2+26ax+21a^2$

13. 剩餘ノ定理ノ應用.

x ニ關スル或整式ニ於テ $x=a$ ト置クトキ,此ノ式ノ値ガ零ニナルナラバ此ノ式ハ $x-a$ ナル因數ヲ有スルコトハ剩餘ノ定理ニヨリテ知ル所ナリ. 而シテ或場合ニハ視察ニヨリテ容易ニ斯ノ如キ數 a ノ見出サルルコトアルナリ.

例 1. x^3-6x+5 ヲ因數ニ分解セヨ.

解 先ヅ視察ニヨリ $x=1$ ト置ケバ此ノ式ノ値ハ零トナルコト知ラル. 即チ

$$1^3-6+5=0$$

因テ此ノ式ハ $x-1$ ナル因數ヲ有ス.

倚 $x-1$ ニテ與ヘラレタル式ヲ除スレバ

$$x^3-6x+5=(x-1)(x^2+x-5)\quad 答.$$

【注意】x^2+x-5 ハ係數ヲ有理數ニ限レバ因數ニ分解スルコトヲ得ズ.

例 2. $2x^3-5x^2-x+6$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解 $x=-1$ ト置ケバ與ヘラレタル式ノ値ハ

$$2(-1)^3-5(-1)^2-(-1)+6=-2-5+1+6=0$$

トナル. 因テ $x+1$ ナル因數アリ.

倚 $x+1$ ニテ與ヘラレタル式ヲ除スレバ

$$2x^3-5x^2-x+6=(x+1)(2x^2-7x+6)$$

然ルニ $2x^2-7x+6$ ヲ因數ニ分解スレバ

$$2x^2-7x+6=(x-2)(2x-3)$$

$$\therefore\ 2x^3-5x^2-x+6=(x+1)(x-2)(2x-3)\quad 答.$$

【注意】$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ \ldots\ldots\ +a_n$ ノ係數 a_0, a_1, a_2,……, a_n ガ悉ク整數(正,負或ハ零)ナル場合ニ於テ此ノ式ニ a ガ整數ナルトコロノ因數 $x-a$ ガ存在スルトキハ a ハ此ノ式ノ x ヲ含マザル項ナル a_n ノ一因數ナリ. 因テ斯ノ如キ因數 $x-a$ ノ存否ヲ

知ルニハ a_n ニ含マルル因數ニツキテ檢スレバ可ナリ.

例　題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ.

1. x^3+6x-7　　2. $2x^3-8x^2-x+9$
3. $3x^3-16x^2+17x-4$
4. $x^4-x^3-3x^2+x+2$　　5. $x^3-7a^2x-6a^3$
6. $2x^3+3x^2y-18xy^2+8y^3$

---

14. 對稱式及交代式.

$a+b+c$, $ab+ac+bc$ ノ如キ式ハ其ノ中ノ文字 a, b, c ノ何レノ二ツヲ交換スルモ値ヲ變ゼズ.

斯ノ如ク二ツ以上ノ文字ヲ含ム式ガ此等ノ文字ノ何レノ二ツヲ交換スルモ其ノ値ヲ變ゼザルトキハ,此ノ式ヲ**稱對式**ト云フ.

上例ノ二式ハ何レモ文字 a, b, c ニツキテノ對稱式ナリ.

又 x^2+y^2, $4xy$ ハ何レモ x, y ノ對稱式ニシテ,又 $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2$ ハ x, y, z ニツキテ對稱式ナリ.

對稱式ニ關シテ次ノ定理成立ス.

定理. 同ジ文字ニツキテノ對稱式ノ和,差,積及商ハ何レモ對稱式ナリ.（證明ハ容易ナリ）

假文字 a, b, c ニツキテ二次ノ同次對稱式ノ一般ナル形ハ

$$L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+ac+bc)$$

ナリ. 茲ニ L, M ハ a, b, c ヲ含マザル數ナリトス.

(問) a, b, c ニツキテ三次ノ同次對稱式ヲ作レ.

次ニ例ヘバ $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ ニ於テ

a, b ヲ交換スレバ $b(a^2-c^2)+a(c^2-b^2)+c(b^2-a^2)$

a, c ヲ交換スレバ $c(b^2-a^2)+b(a^2-c^2)+a(c^2-b^2)$

b, c ヲ交換スレバ $a(c^2-b^2)+c(b^2-a^2)+b(a^2-c^2)$

トナリ,此等ノ三式ハ何レモ原ノ式ノ符號ノミヲ變ジタルモノナリ.

斯ノ如ク,二ツ以上ノ文字ヲ含ム式ニ於テ,此等ノ文字ノ何レノ二ツヲ交換スルモ唯符號ノミ變ズルトキハ,此ノ式ヲ**交代式**ト云フ.

上例ノ式ハ文字 a, b, c ニツキテノ交代式ナリ.

又 $(a-b)(a-c)(b-c)$ モ a, b, c ニツキテノ交代式ナリ.

假例ヘバ同ジ文字 a, b, c ニツキテノ交代式

$$P=(a-b)(a-c)(b-c)$$

ト,對稱式　　$Q=ab+ac+bc$

トノ積PQヲ作レバ

$$PQ=(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)$$

トナリ, a, b, c ノ中ノ何レノ二ツヲ交換スルモ P ハ唯其ノ符號ノミヲ變ジ, Q ハ少シモ其ノ値ヲ變ゼザルガ故ニ, PQ ハ唯其ノ符號ノミヲ變ズ. 從テ積 PQ ハ a, b, c ニツキテノ交代式ナリ.

一般ニ次ノ定理成立ス.

定理. 同ジ文字ニツキテノ交代式ト對稱式トノ積ハ交代式ナリ.

因テ又次ノ定理成立ス.

定理. 同ジ文字ニツキテ二ツノ交代式アルトキ,其ノ一方ヲ他方ニテ除シタル商ハ對稱式ナリ.

(問) 次ノ式ハ交代式ナルカ,又對稱式ナルカ.

(1) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

(2) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

(3) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

【注意】 或式ガ對稱式又ハ交代式ナルコトニ着目スレバ計算ノ結果ヲ豫知シ,其ノ手數ノ短縮セラルル場合少ナカラズ.

15. 對稱式及交代式ノ因數分解.

例 1. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解 $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ ハ $a=-b$ ト置ケバ 0 トナル. 因テ此ノ式ハ $a+b$ ナル因數ヲ有ス.

偖此ノ式ハ a, b, c ニツキテ對稱式ナリ. 故ニ其ノ一因數ナル $a+b$ ニ於テ文字ノ交換ニヨリテ生ズル $a+c$, $b+c$ モ亦因數ナラザルベカラズ. 而シテ上ノ式ハ三次ノ同次式ナルガ故ニ因數分解ノ結果ハ次ノ如クナルベシ.

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=L(a+b)(a+c)(b+c)$$

但 L ハ或數字因數ナリ. L ヲ求ムルガ爲ニ, $a=1$, $b=1$, $c=0$ ト置ケバ

$$8-1-1=L\times2,\quad\therefore\ L=3$$

$$\therefore\ (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)\quad 答.$$

例 2. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$ ヲ因數ニ分解セヨ.

解 此ノ式ニ於テ $a=b$ ト置ケバ 0 トナル. 因テ $a-b$ ハ此ノ式ノ一因數ナリ. 又 $a=c$ 或ハ $b=c$ ト置キテモ此ノ式ハ 0 トナルガ故ニ, $a-c$ 及 $b-c$ モ亦此ノ式ノ因數ナリ. 因テ此ノ式ハ

$$(a-b)(a-c)(b-c)$$

ニテ整除セラル.

偖原式ハ四次ノ同次交代式ニシテ此ノ式ハ三次ノ同次交代式ナリ. 因テ原式ヲ此ノ式ニテ除シタル商ハ a, b, c ニツキテ一次ノ同次對稱式ナルベク,且 a, b, c ニツキテ一次ノ同次對稱式ハ一般ニ $L(a+b+c)$ ニテ表サルベシ. 故ニ

$$\text{原式}=L(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$$

之ハ恒等式ナルベキニヨリ,左右兩邊ニ於ケル ab^3 ノ係數ヲ比較スレバ

$$1=-L, \quad \therefore \ L=-1$$

$$\therefore \ \text{原式}=-(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c) \quad \text{答.}$$

(問) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ヲ因數ニ分解セヨ.

例 3. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$$

解 此ノ等式ノ左邊ヲ P ニテ表セバ,P ハ a, b, c ニツキテ對稱式ナリ,而シテ P ヲ一ツノ分數式ニ直セバ次ノ如シ.

$$P=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

前例題ノ次ニ掲ゲタル(問)ノ結果ヲ用フレバ

$$P=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$$

【注意】 例ヘバ $a^2(b-c)$ ナル式ニ於テ a ノ代リニ b, b ノ代リニ c, c ノ代リニ a ヲ置キ換フレバ $b^2(c-a)$ トナリ,再ビ同ジ手續ヲ施セバ $c^2(a-b)$ ヲ得ベシ. 而シテ $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ハ a, b, c ニ斯ノ如キ置換ヲ施スコトニヨリテハ變化ヲ生ゼズ. 斯ノ如ク a, b, c ナル一列ノ文字ノ各ヲ夫夫其ノ次ノモノニテ置キ換ヘ,最後ノモノハ最初ノモノニテ置キ換フルコトヲ此等ノ文字ニツキ**循環ノ順序ノ交換**ヲナスト云フ.

循環ノ順序ノ交換ニ着目スルコトニヨリ便宜ヲ得ルコトアリ.

例題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ.

1. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
2. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$
3. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$
4. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

次ノ等式ヲ證明セヨ.

5. $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$

6. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$

問　題　III

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ.

1. $7x^2+39x-18$　　2. $12x^2-37x-144$

3. $16x^2+72x-63$　　4. $5x^2-38xy+21y^2$

5. $x^2+4ax-4b^2+8ab$　　6. $x^2+2xy+y^2-3x-3y-40$

7. $4ab+1-4a^2-b^2$　　8. $x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9$

9. $1+bx-a(a+b)x^2$　　10. $(a^2-b^2)x^2+4abx-(a^2-b^2)$

11. $x^2-xy-x+2y-2$　　12. $x^4-27x^2y^2+y^4$

13. $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$　　14. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$

15. $x^2-(a+b)xy+ab(y-a)(y+b)$

16. $2x^2-5xy+2y^2-ax-ay-a^2$

17. $x^3+4x^2-7x-10$　　18. $2x^3-ax^2-5a^2x-2a^3$

19. x^4-4x+3　　20. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$

21. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$

22. $(2x-a-b)^3-(x-a)^3-(x-b)^3$

23. $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

24. $x^4-2a^2x^2+2b^2x^2+a^4+b^4-2a^2b^2$

25. $(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)-280$

26. $(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3+a^3+b^3+c^3$

27. $a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)$

28. $x^5-y^5-(x-y)^5$　　29. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$

30. $a^4x^4+16a^2x^2y^2+256y^4$　　31. x^8+x^4+1

32. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

33. 前問題ヲ應用シテ次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ.

(1) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

(2) $(y-z)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(x-y)$

34. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

(1) $2(x^3+y^3+z^3)-6xyz$

$$=(x+y+z)\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$$

(2) $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b)$

35. $a+b+c=0$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$

36. $3s=a+b+c$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$$

第四章 方程式

16. 方程式ノ同値.

二ツノ方程式或ハ二組ノ聯立方程式ガ全ク同ジ根ヲ有スルトキハ互ニ**同値**ナリト云フ.

方程式ヲ解クトキ,次ノ定理ハ屢用ヒラル.

定理. 方程式ノ兩邊ニ同一ノ數(又ハ式)ヲ加ヘタルモノハ原方程式ト同値ナリ.

何トナレバ,方程式ヲ $A=B$..................(1)

トシ,兩邊ニ同一ノ數(又ハ式)Cヲ加フレバ

$$A+C=B+C \text{ .... } (2)$$

トナル. 倍(1)ヲ滿足スル未知數ノ値ハ明ニ(2)ヲ滿足シ,(2)ヲ滿足スル未知數ノ値ハ $A+C$, $B+C$ ノ値ヲ相等シカラシメ,從テ之ヨリ同一ノCノ値ヲ減ジタルA, Bノ値ヲ相等シカラシム,即チ(1)ヲ滿足ス. 即チ定理ハ證明セラレタリ.

定理. 方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含マズ且0ナラザル同一ノ數ヲ乘ジタルモノハ原方程式ト同値ナリ. (此ノ定理ノ證明ハ前定理ト同樣ナリ)

定理. 次ノ(1),(2)ノ聯立方程式ハ互ニ同値ナリ

$$A=B,\ C=D \text{ .... } (1)$$

$$A=B,\ mA+nC=mB+nD \text{ .... } (2)$$

但 n ハ 0 ナラザル數トス.

何トナレバ(1)ヲ滿足スル未知數ノ値ハ明ニ(2)ヲ滿足シ,又(2)ヲ滿足スル未知數ノ値ニ對シテハ mA, mB ハ相等シキ値ヲ有シ,從テ(2)ノ第二ニヨリ nC ト nD トハ相等シク,之ヲ n ニテ除シタル商ナル C ト D トノ値モ亦相等シケレバナリ.

此ノ定理ハ聯立一次方程式解法ノ加減法ノ原理ナリ.

尙置換法,等置法ヲ行フモ原方程式ト同値ナル方程式ノ得ラルルコト容易ニ證明セラルベシ.

17. 方程式ノ兩邊ヲ同一ノ式ニテ乘除スルコト.

方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム同一ノ式ヲ乘ズレバ餘分ノ根ヲ誘致スルコトアリ.

例ヘバ $3x=4$ ノ根ハ $\frac{4}{3}$ ナリ. 倘此ノ方程式ノ兩邊ニ $x-7$ ヲ乘ズレバ

$$3x(x-7)=4(x-7), \quad \text{即チ} \quad (x-7)(3x-4)=0$$

トナリ,根ハ $\frac{4}{3}$ 及 7 ノ二ツトナル.

即チ $x-7=0$ ナル方程式ノ根ガ餘分ニ生ジタリ.

又方程式ノ兩邊ヲ未知數ヲ含ム同一ノ式ニテ除スレバ原方程式ヨリモ根ノ不足スルコトアリ.

例ヘバ $x^2-9=5x-15$ ノ根ハ 2 ト 3 トナリ. 然ルニ兩邊ヲ $x-3$ ニテ除スレバ $x+3=5$ トナリテ根ハ $x=2$ トナリ, $x-3=0$ ノ根ダケ不足ス.

故ニ,未知數ヲ含ム式ニテ方程式ノ兩邊ヲ妄リニ乘除スベカラズ.

但乘除スル式(特ニ整式ナルトキ)ガ零トナリ得ザルモノナルトキハ乘除スルモ差支ナシ. 例ヘバ分數方程式ノ解法ニ於テ分母ノ最小公倍數ヲ兩邊ニ乘ジ,分母ヲ拂ヒテ差支ナキハ,所要ノ未知數ノ値ハ分母ヲ零ナラシメザルガ故ナリ.

18. 一元一次方程式ノ不能及不定.

一元一次方程式

$$ax+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ若 $a=0$ トナリ,而カモ b ハ零ナラザル如キコトアラバ明ニ此ノ等式ハ x ノ値ノ如如ニ拘ラズ成立セズ. 斯ノ如キ場合ニ於テハ方程式(1)ハ不能ナリト云フ.

次ニ $a=0,\ b=0$ トナルコトアラバ,此ノ場合ニハ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ(1)ハ成立ス,換言スレバ(1)ヲ滿足スル x ノ値ハ限ナク多クアリテ,或定マリタル數ニハアラズ. 斯ノ如キ場合ニ於テハ方程式(1)ハ不定ナリト云フ.

例ヘバ方程式 $2x-5=3(x-2)-x$

ハ移項スレバ $0=-1$

トナリテ成立セズ. 故ニ此ノ方程式ハ不能ナリ.

又方程式 $2(x-5)+6=5(x-1)-3x+1$

ハ括弧ヲ外セバ $2x-4=2x-4$

トナリ,移項スレバ $0=0$

トナリテ x ノ如何ニ拘ラズ恒ニ成立ス. 故ニ此ノ方程式ハ不定ナリ.

(問) 次ノ方程式ハ不能ナルカ,不定ナルカ.

(1) $\frac{1}{2}(2x+5)=x-2$ (2) $\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}(x+5)+x$

(3) $3-x=5-(2+x)$

19. 應用問題ノ不能及不定.

例 1. 鶴龜合セテ34頭アリ,其ノ足數ハ合セテ160本ナリト云フ. 鶴龜各幾頭ナルカ.

解 鶴ノ數ヲ x トスベシ. 然ルトキハ龜ノ數

ハ $34-x$ ナリ.

因テ鶴ノ足數ハ $2x$ ニシテ龜ノ足數ハ $4(34-x)$ ナリ. 故ニ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$2x+4(34-x)=160$$

之ヲ解ケバ　　$x=-12$

鶴ノ數ガ -12 トハ意味ナキコトナリ. 從テ之ハ問題ノ不合理ナルコトヲ示セルナリ.

若龜ノ數ヲ x トシテ方程式ヲ作レバ

$$4x+2(34-x)=160$$

之ヲ解ケバ　　$x=46$

然ルニ 46 ハ鶴龜ノ總數ヨリモ大ナルガ故ニ此ノ根ハ正ノ整數ナルニ拘ラズ問題ニ適セズ,卽チ此ノ問題ハ不合理ナリ.

上ノ如キ場合ニハ**問題ハ不能ナリ**ト云フ.

【注意】 應用問題ヲ解クニ當リ方程式ノ根トシテ正數ヲ得ルトモ場合ニヨリテハ問題ニ適セザルコトアルナリ.

例 2. 二位ノ數アリ,其ノ數字ノ和ハ 10 ニシテ數字ノ位置ヲ交換シテ得ル所ノ數ハ原ノ數ノ二倍ナリト云フ. 原ノ數ヲ求ム.

解 一ノ位ノ數字ヲ x トスベシ. 然ルトキハ十ノ位ノ數字ハ $10-x$ ニシテ原ノ數ハ $10(10-x)+x$ ナルベク,又數字ノ位置ヲ交換シテ得ル所ノ數ハ $10x+(10-x)$ ナルベシ.

因テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$10x+(10-x)=2\{10(10-x)+x\}$$

之ヲ解ケバ　　$x=7\frac{1}{27}$

併此ノ問題ニ於テ求ムル所ノ x ノ値ハ整數ナラザルベカラズ. 然ルニ玆ニハ分數ヲ得タリ.

從テ之ハ問題ノ不能ナルコトヲ示セルナリ.

例 1 及例 2 ニツキテ見ルガ如ク,應用問題ヲ解クニ當リ取扱フ所ノ方程式ノ根ハ必ズシモ問題ノ答ヲ與フルモノニアラズ. 是問題ノ答ハ其ノ方程式ニ適合スベキハ勿論ナレドモ其ノ他ニ若方程式ニテ書キ表サレザル條件(問題中ニ含マル)アラバ之ヲモ滿足スベキモノナレバナリ.

次ニ上記ノ例 2 ニ於テ後ノ部分ヲ

「數字ノ位置ヲ交換シテ得ル數ト原ノ數トノ和ハ 110 ナリ. 原ノ數如何」

ト改ムルトキハ次ノ方程式ヲ得ベシ.

$$10x+(10-x)+\{10(10-x)+x\}=110$$

此ノ左邊ヲ簡單ニスレバ 110=110 トナリ,方程式ハ不定トナル. 從テ此ノ方程式ノ x ニハ如何ナル値ヲ與フルトモ差支ナキヲ以テ,二ツノ數字ノ和ガ10トナル如キ二位ノ數ハ何レモ皆所要ノ數ナリ.

斯カル場合ニハ**問題ハ不定ナリ**ト云フ.

例題

1. 二錢銅貨ト五錢白銅貨ト合セテ34個ニテ其ノ金高ヲ二圓ナラシメントス. 各何個宛カ.
2. 二數ノ差ハ4ニシテ其ノ和ノ四倍ハ二數ノ各ノ二乘ノ差ニ等シト云フ. 二數ヲ求ム.
3. 一升1圓20錢ノ酒ト一升1圓50錢ノ酒トヲ混合シテ一升1圓60錢ノ酒3斗ヲ作ラントス. 各幾升宛混ズベキカ.
4. 父ハ45歳,母ハ37歳,子ハ14歳ナリ. 兩親ノ年齢ノ和ガ子ノ年齢ノ2倍ナリシハ幾年前ナルカ.

---

20. 聯立一次方程式ノ不能及不定.

聯立二元一次方程式

$$ax+by=c \quad\cdots\cdots(1)$$
$$a'x+b'y=c' \quad\cdots\cdots(2)$$

ニツキテハ既ニ「上卷」第四編ニ於テ學ビタルガ如ク,兩方程式ヨリ y, x ヲ順次ニ逐出セバ

$$(ab'-a'b)x=cb'-c'b \quad\cdots\cdots(3)$$
$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c \quad\cdots\cdots(4)$$

ヲ得. 之ヨリ $ab'-a'b\neq 0$ トシテ根ノ公式

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \\ y&=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b} \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(5)$$

ヲ得ベシ.

偖 $ab'-a'b=0$ ナル場合ニハ (3), (4) ニ於ケル x, y ノ係數ガ零トナリ,從テ之ヨリ x, y ノ値ヲ求ムルコトヲ得ズ. 斯カル場合ニハ次ノ例ニ示スガ如ク不能ノ場合ト不定ノ場合トアルナリ.

例 1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} 5x-2y=3 \quad\cdots\cdots(1) \\ 15x-6y=7 \quad\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 (1)ノ兩邊ニ3ヲ乘ズレバ

$$15x-6y=9$$

之ヲ(2)ト邊邊相減ズレバ $0=2$ トナリテ不合理ナル結果ニ到着ス. 卽チ(1),(2)ノ二ツノ方程式ハ未知數 x, y ノ如何ナル値ニ對シテモ同時ニ成立スルコト能ハザルナリ.

斯ノ如キ場合ニ於テ**聯立方程式ハ不能ナリ**ト云フ. 或ハ之ヲ**不能**(又ハ**矛盾**)**ノ場合**ト云フ.

今根ノ公式ニツキテ考究スレバ

$$ab'-a'b=5\times(-6)-15\times(-2)=-30+30=0$$

$$cb'-c'b=3\times(-6)-7\times(-2)=-18+14=-4$$

$$ac'-a'c=5\times7-15\times3=35-45=-10$$

卽チ方程式(3),(4)ニ於ケル x, y ノ係數(根ノ公式ノ分母)ハ零ニシテ,其ノ右邊(根ノ公式ノ分子)ハ零ナラズ.

斯ノ如ク根ノ公式ノ分母ガ零ニシテ分子ガ零ナラザルトキハ聯立二元一次方程式ハ不能ノ場合ニ屬スルナリ. (次節參照)

(問) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$7x+5y=12,\quad 14x+10y=20$$

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} 5x-2y=3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 15x-6y=9 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 (1)ノ兩邊ニ3ヲ乘ズレバ方程式(2)トナル. 卽チ此ノ場合ハ方程式(1)ガ唯一ツ與ヘラレタルト同樣ナリ,從テ此ノ聯立方程式ヲ滿足スル x, y ノ値ハ限ナク多クアリテ一定ナラズ.

斯ノ如キ場合ニ於テ**聯立方程式ハ不定ナリ**ト云フ. 或ハ之ヲ**不定ノ場合**ト云フ.

今根ノ公式ニツキテ考究スレバ

$$ab'-a'b=5\times(-6)-15\times(-2)=-30+30=0$$

$$cb'-c'b=3\times(-6)-9\times(-2)=-18+18=0$$

$$ac'-a'c=5\times9-15\times3=45-45=0$$

卽チ方程式(3),(4)ニ於ケル x, y ノ係數(根ノ公式ノ分母)及右邊(根ノ公式ノ分子)ハ何レモ零ナリ.

斯ノ如ク根ノ公式ノ分母及分子ガ皆零ナルトキハ聯立二元一次方程式ハ不定ノ場合ニ屬スルナリ. (次節參照)

(問) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$7x+5y=12,\quad 28x+20y=48$$

21. $ab'-a'b=0$ ナル場合ノ一般的觀察.

前節ノ初メニ揭ゲタル(1),(2)ノ方程式ニ於テ a, b, a', b' ノ四數ハ皆零ナラズト假定シテ

$$ab'-a'b=0$$

ナル場合ヲ考究スベシ.

此ノ場合ニハ $\quad \dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}$

此等ノ分數ノ値ヲ k トスレバ

$$a'=ka,\quad b'=kb$$

(i) **根ノ公式ノ分子ガ零ナラザル場合.**

例ヘバ $ac'-a'c\neq0$ ナルトキハ

$$c'\neq\frac{a'}{a}c,\quad \text{即チ}\quad c'\neq kc \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

偖方程式(1)ノ兩邊ニ k ヲ乘ズレバ

$$kax+kby=kc$$

即チ $\qquad a'x+b'y=kc \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

トナル. 之ヲ方程式(2)ト邊邊相減ズレバ

$$0=kc-c'$$

トナリ,(6)トハ矛盾ヲ來ス. 故ニ x, y ノ値ノ如何ニ拘ラズ方程式(1),(2)ハ同時ニ成立セズ,即チ聯立方程式ハ不能ノ場合ニ屬ス.

$cb'-c'b\neq0$ トスルモ亦同様ナリ.

(ii) **根ノ公式ノ分子ガ兩方トモ零ナル場合.**

$$ac'-a'c=0,\quad cb'-c'b=0$$

ナルガ故ニ $\quad c'=\dfrac{a'}{a}c=\dfrac{b'}{b}c=kc$

因テ方程式(1)ノ兩邊ニ k ヲ乘ジタルモノハ

$$a'x+b'y=c'$$

トナリ,方程式(2)ト一致ス. 因テ此ノ場合ニハ方程式(1)ガ唯一ツ與ヘラレタルト同様ナリ. 從テ聯立方程式ハ不定ノ場合ニ屬ス.

【注意】 a, b, a', b' ガ零ナラズシテ且 $ab'-a'b=0$ ナル場合ニハ, $ac'-a'c$ 及 $cb'-c'b$ ノ一方ガ零ナルトキハ他モ亦零トナル. 例ヘバ $ac'-a'c=0$ ナルトキハ $c'=\dfrac{a'}{a}c=\dfrac{b'}{b}c\left(\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}\ \text{ナルガ故ニ}\right)$,從テ

$$c'=\frac{b'}{b}c,\quad \therefore\ cb'-c'b=0$$

因テ又同ジ場合ニ於テ $ac'-a'c$ 及 $cb'-c'b$ ノ一方ガ零ナラザルトキハ他モ亦零ナラズ.

例題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1. $3x+y=5,\quad 6x+2y=8$

2. $2x-5y=3,\ 8x-20y=12$

3. $2(x+y)-(x-y)=5,\ 3(3x-y)-5(x-3y)=14$

4. $(x-2)(y+3)=x(y+2),\ x-2y=10$

5. $5(x-2y)+8=0,\ 2(5x-9y)=2y-16$

6. $3x+y=29,\ 3x+z=23,\ y-z=6$

7. $7x-5y=8,\ 5y+2z=10,\ 7x+2z=5$

問題 IV

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $\dfrac{5x-3}{3}-\dfrac{7x-6}{2}=\dfrac{8x+7}{4}-2$

2. $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=3x(x^2-1)$

3. $\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{4}{x}$

4. $\dfrac{2x-5}{5}+\dfrac{x-3}{2x-5}=\dfrac{4x-14}{10}$

5. $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-7}{x-5}=\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x-6}{x-4}$

6. $\dfrac{a(a-x)}{b}=\dfrac{b(b+x)}{a}+x$

7. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x$

8. $(2m+n)(x+m)+(m+2n)(x+n)=m^2+n^2$

9. $\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\right)x=\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}-2x$

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

10. $ax+\dfrac{b}{y}=a^2+1,\ a^nx+\dfrac{b^n}{y}=a^{n+1}+b^{n-1}$

11. $\dfrac{4}{3x+y}+\dfrac{4}{3x-y}=3,\ \ \dfrac{6}{3x+y}-\dfrac{1}{3x-y}=1$

12. $3x+\dfrac{y}{x}=6,\ \ 7x-\dfrac{2y}{x}=1$

13. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c},\ \ x+y+z=l$

14. $\begin{cases} x+0.01y+0.02z=4 \\ -0.01x+5y-0.02z=20 \\ -0.02x+0.02y-4z=8 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3 \\ x-by+b^2z=b^3 \\ x-cy+c^2z=c^3 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} (a+1)x+y+z=p \\ (b+1)y+z+x=q \\ (c+1)z+x+y=r \end{cases}$

17. $\begin{cases} ax+by+cz=0,\ \ x+y+z=0 \\ bcx+cay+abz=(b-c)(c-a)(a-b) \end{cases}$

18. $ax+by+cz=0,\ \ a'x+b'y+c'z=0$ ナルトキハ

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{z}{ab'-a'b}$$

ナルコトヲ證明セヨ

19. $7x+3y+4z=6x+5y-3z=9x-7y+10z$

ナルトキハ x, y, z ノ連比如何.

---

22. 二次方程式ノ判別式,有理根.

一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

ニ於テ, b^2-4ac ヲ其ノ判別式ト稱スルコトハ既ニ學ビタル所ナリ. 今其ノ性質ヲ再記スレバ次ノ如シ.

上ノ方程式ニ於テ係數 a, b, c ヲ實數トス. 然ルトキハ次ノ三ツノ場合アリ.

$$\begin{cases} b^2-4ac>0 & \text{ナルトキ,二根ハ}\textbf{相異ナル實數}\text{ナリ.} \\ b^2-4ac=0 & \text{ナルトキ,二根ハ}\textbf{相等シキ實數}\text{ナリ.} \\ b^2-4ac<0 & \text{ナルトキ,二根ハ}\textbf{共軛ナル虛數}\text{ナリ.} \end{cases}$$

次ニ a, b, c ヲ有理數トスレバ根ノ公式即チ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ニヨリテ明ナルガ如ク,

判別式 b^2-4ac ガ完全ナル平方數即チ或有理數ノ二乘ナルトキニ限リ二根ハ有理數ナリ. 若判別式ガ正ノ數ナルトモ完全ナル平方數ナラザルトキハ二根ハ相異ナル無理數ナリ.

例ヘバ $x^2-5x-14=0$ ニ於テハ

$$\text{判別式}=(-5)^2-4(-14)=25+56=81=9^2$$

卽チ完全平方數ナリ. 因テ此ノ方程式ノ二根ハ相異ナル有理數ナリ. 實際之ヲ解ケバ

$$x=7 \text{ 或ハ } -2$$

又 $2x^2-5x-5=0$ ニ於テハ

$$\text{判別式}=(-5)^2-4\cdot2\cdot(-5)=25+40=65$$

之ハ正數ナレドモ完全平方數ニアラズ. 因テ此ノ方程式ノ二根ハ有理數ニアラズ. 實際之ヲ解ケバ

$$x=\frac{5-\sqrt{65}}{4} \quad \text{或ハ} \quad \frac{5+\sqrt{65}}{4}$$

ヲ得,何レモ無理數ナリ.

有理數ナル根ヲ**有理根**トモ云フ.

(問) 次ノ方程式ハ有理根ヲ有スルカ.

(1) $3x^2-7x+4=0$ (2) $2x^2-8x-5=0$

例 1. 二次方程式 $x^2+px+q=0$ ニ於テ q ガ負數ナルトキハ此ノ方程式ノ二根ハ符號ノ相異ナル實數ナルコトヲ證明セヨ.

解 q ガ負數ナル故,p ノ大小如何ニ拘ラズ判別式 p^2-4q ノ値ハ恒ニ正數ナリ. 故ニ二根ハ相異ナル實數ナリ. 今此ノ二根ヲ α, β トスレバ根ト

係數トノ關係ニヨリ

$$\alpha\beta=q<0$$

即チ二根ハ實數ニシテ其ノ積ガ負數ナルガ故ニ二根ハ符號ノ相異ナル實數ナリ.

例 2. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ係數 a, b, c ガ整數ニシテ其ノ一根ガ無理數ナルトキハ他ノ一根モ亦無理數ナルコトヲ證明セヨ.

解 此ノ二次方程式ノ二根ヲ α, β トシ,其ノ中 α ガ無理數ナリトセヨ. 然ルトキハ根ト係數トノ關係ニヨリテ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\therefore \quad \beta=-\frac{b}{a}-\alpha$$

然ルニ $\frac{b}{a}$ ハ有理數,α ハ無理數ナルヲ以テ此ノ右邊ハ無理數ナリ. 即チ問題ハ證明セラレタリ.

(問) 根ノ公式ニツキテ之ヲ證明セヨ.

例　題

1. $b^2-4ac=0$ ナルトキハ ax^2+bx+c ハ完全平方式ナルコトヲ證明セヨ.

2. 積 ac ガ負ナルトキハ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ハ恒ニ異符號ノ實數ナルコトヲ證明セヨ.

3. m ガ如何ナル値ヲ有スルトキ次ノ方程式ハ等根ヲ有スルカ.

(1) $x^2+(2-m)x+25=0$ (2) $3mx^2+4x-1=0$

(3) $(2m-1)x^2+(m+1)x+1=0$

4. a, b, c ガ何レモ零ナラズシテ方程式

$$(m^2a^2+b^2)x^2+2mca^2x-a^2(b^2-c^2)=0$$

ガ等根ヲ有スルトキハ $c^2=m^2a^2+b^2$ ナルコトヲ證明セヨ.

5. a, b, c ガ有理數ナルトキ方程式

$$(a+b+c)x^2-2(a+b)x+a+b-c=0$$

ハ有理根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

6. 方程式 $(x-a)(x-b)=h^2$ ノ根ハ實數ナルコトヲ證明セヨ. 但 a, b, h ハ實數トス.

---

23. 二次方程式ハ二ツヨリモ多クノ根ヲ有セザルコト.

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ....(1)

ノ二根ヲ α, β トス,即チ例ヘバ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ト置クトキハ　　$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

トナリ,方程式(1)ハ

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル.

今 α, β ノ何レニモ等シカラザル數 γ ヲ取リ,(2)ノ左邊ノ x ノ代リニ置ケバ左邊ハ

$$a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル,而シテ a ハ假定ニヨリ x ヲ含マズ,且零ナラザル數ナリ,又假定ニヨリ

$$\gamma-\alpha\neq0,\quad \gamma-\beta\neq0$$

故ニ γ ガ α, β ニ等シカラザルトキハ(3)ハ決シテ零トナラズ. 故ニ γ ハ方程式(2)ヲ滿足セズ.

故ニ方程式(1)ハ α, β 以外ニハ根ヲ有セズ.

卽チ一元二次方程式ハ二ツヨリモ多クノ根ヲ有セザルナリ.

次ニ二三ノ雜例ヲ示サン.

例 1.　二次方程式 $x^2-kx+45=0$ ノ二根ノ差ガ 4 ナルガ爲ニ k ノ取ルベキ値ヲ求ム.

解　二根ノ小ナル方ヲ α トスレバ大ナル方ハ $\alpha+4$ ナリ. 而シテ根ト係數トノ關係ニヨレバ

$$\alpha+(\alpha+4)=k \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\alpha(\alpha+4)=45 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)ヨリ　　$\alpha^2+4\alpha-45=0$

之ヨリ　　$\alpha=5$ 或ハ -9

之ヲ(1)ニ代入スレバ次ノ如シ.

$\alpha=5$ ナルトキ　　$k=5+9=14$

$\alpha=-9$ ナルトキ　　$k=-9-5=-14$

答 $k=\pm14$

例 2.　視察ニヨリ $(x+1)(x+3)=3\times5$ ヲ解ケ.

解　視察ニヨリ $x=2$ ガ一ツノ根ナルコトヲ直チニ知ルコトヲ得. 次ニ二根ノ和ヲ求ムレバ -4 ナリ. 故ニ

他ノ根 $=-4-2=-6$　　答 $x=2$ 或ハ -6

【注意】 又ハ二根ノ積ガ $3-15$ 卽チ -12 ナルコトニヨリテ他ノ根ヲ求ムルモ可ナリ.

例 3.　二ツノ二次方程式

$$ax^2+bx+c=0,\quad a'x^2+b'x+c'=0$$

ガ共通根ヲ有スルトキハ

$$(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(ac'-a'c)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解 兩方程式ニ共通ナル根ヲ α トスレバ

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

(1)ノ兩邊ニ a' ヲ乘ジ,(2)ノ兩邊ニ a ヲ乘ジテ邊邊相減ズレバ

$$(ab'-a'b)\alpha=ca'-c'a \quad\cdots\cdots(3)$$

又(1)ノ兩邊ニ b' ヲ乘ジ,(2)ノ兩邊ニ b ヲ乘ジテ邊邊相減ズレバ

$$(ab'-a'b)\alpha^2=bc'-b'c \quad\cdots\cdots(4)$$

(3)ノ兩邊ヲ二乘シ,(4)ノ兩邊ニ $ab'-a'b$ ヲ乘ジテ邊邊相減ズレバ

$$0=(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$

$$\therefore\ (ab'-a'b)(bc'-b'c)=(ac'-a'c)^2$$

例　題

1. $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ α, β トシ, $(\alpha-\beta)^2$, $\alpha^4+\beta^4$ 及 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ ノ値ヲ p, q ノミノ式ニテ表セ.

2. $x^2-3x+1=0$ ノ二根ヲ α, β トシ,次ノ二數ヲ二根トスル二次方程式ヲ作レ.

(1) $-\alpha,\ -\beta$　　(2) $\alpha+1,\ \beta+1$

3. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トシ,次ノ二數ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ.

(1) $\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ \frac{\beta}{\alpha+\beta}$　　(2) $2\beta-\alpha,\ 2\alpha-\beta$

(3) $\alpha^2+1,\ \beta^2+1$

4. $3x^2-2kx-14=0$ ノ二根ノ差ガ5ナルガ爲ニ k ノ取ルベキ値如何.

5. $4x^2+12x+d=0$ ノ二根ノ差ガ2ナルトキ,其ノ二根及 d ノ値如何.

6. 視察ニヨリ次ノ方程式ヲ解ケ.

(1) $(x-2)(x+1)=5\times 8$　　(2) $x^2-2x=a^2-2a$

(3) $(x+4)(x-6)=(a+4)(a-6)$

7. $ax^2+bx+c=0$ ノ一根ガ他根ノ m 倍ナルガ爲ニハ a, b, c ノ間ニ如何ナル關係アルコトヲ要スルカ.

8. $ax^2+bx+c=0$ ノ一根ノ m 倍ガ他根ノ n 倍ニ等シキガ爲ノ條件ヲ求ム.

9. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ガ夫夫 $4x^2+8x+1=0$ ノ二根ノ二乘ニ等シキガ爲ノ條件ヲ求ム.

10. $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ ノ二根ガ夫夫 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ノ二乘ニ等シキガ爲ノ條件ヲ求ム.

11. 或二次方程式ノ二根ノ差ハ3ニシテ其ノ二乘ノ和ハ65ナリ. 此ノ二次方程式ヲ求ム.

12. 二ツノ方程式 $x^2+px+q=0$, $x^2+qx+p=0$ ガ唯一ツノ共通根ヲ有スルトキハ共通ナラザル根ノ和ハ -1 ニ等シキコトヲ證明セヨ.

問題 V

次ノ方程式ヲ解ケ. (以下係數中ノ文字ハ皆實數ヲ表スモノトス)

1. $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6)$

2. $3x^2+(9a-1)x-3a=0$

3. $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0$

4. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$

5. $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}-\dfrac{x^2}{6x-2x^2}=\dfrac{11}{5}$

6. $\dfrac{x+1}{1-x}+\dfrac{x+2}{2-x}+\dfrac{x+3}{3-x}=3$

7. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+6}$

8. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}+\dfrac{2x^3+x}{1-x^4}=0$

9. $\dfrac{x^2+4x}{x-1}+\dfrac{72x-72}{x(x+4)}=18$

10. $\dfrac{4x^2+2x}{x^2+6}+\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}-3=0$

11. $2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}=5$

12. $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$

13. $\sqrt{x^2+7ax+10a^2}-\sqrt{x^2-ax-6a^2}=x+2a$

14. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-3}}=2x-5$

15. $\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}=0$

16. $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-5}}+2=0$

17. $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=x-3$

18. $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1$

19. $4x^2+kx+25=0$ ガ等根ヲ有スルナラバ,其ノ値如何,又 k ノ値ヲ求メヨ.

20. 方程式 $(x-m)(x-n)=mnx^2$ ハ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

21. 方程式 $(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$ ガ等根ヲ有スルトキハ $2b=a+c$ ナルコトヲ證明セヨ. 但 $b\neq c$ トス.

22. $p=k+\dfrac{q}{k}$ ナルトキハ方程式 $x^2+px+q=0$ ノ根ハ有理數ナルコトヲ證明セヨ. 但 p, q, k ハ

有理數ナリトス.

23. $x^2+(a+2b)x-3b^2=0$, $x^2+(a+4b)x+ab=0$ ノ一方ガ等根ヲ有スルトキハ他モ亦然リ. 何故カ.

24. $x^2+ax+b=0$, $x^2+ax+c=0$ ハ $b=c$ ナルニアラザレバ共通根ヲ有セザルコトヲ證明セヨ.

25. $x^2+2x+m=0$ ノ一根ガ $x^2+x+1=0$ ノ一根ノ 2 倍ナル様ニ m ノ値ヲ定メヨ.

26. 次ノ方程式ハ實根ヲ有ス. 何故カ.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=0 \quad (\text{但 } ab\neq 0)$$

27. $x^2-px+q=0$ ガ二ツノ連續セル正ノ整數ヲ根トスルトキハ $p^2-4q-1=0$ ナルコトヲ證明セヨ.

28. $(3n+2)x^2-n(3n+2)x+n^3=0$ ノ二根ヲ α, β トスレバ $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ ハ n ガ 0 ニアラザル限リ其ノ値ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

29. $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ $m(m+n)b^2=(2m+n)^2ac$ ナルトキハ二根ノ比ハ $\dfrac{m}{m+n}$ ニ等シ. 何故カ.

30. $mx^2+(m+1)x+n=0$ ガ m ノ如何ナル有理數値ニ對シテモ恒ニ有理根ヲ有スルトキハ n ノ値ハ 0 或ハ 1 ナルコトヲ證明セヨ.

---

24. 相反方程式.

例ヘバ $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$

$$x^5+2x^4-4x^3+4x^2-2x-1=0$$

ノ如ク,方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メテ之ヲ整頓シタルトキ,其ノ邊ノ左右兩端ヨリ數ヘテ同ジ番目ノ係數ガ皆相等シキカ或ハ其ノ絶對値ガ相等シク且符號ガ相反スルトキハ,之ヲ**相反方程式**又ハ**逆數方程式**ト云フ.

相反方程式ニハ次ノ性質アリ.

相反方程式ノ一根(零ナラザル)ヲ α トスレバ其ノ逆數 $\dfrac{1}{\alpha}$ モ亦此ノ方程式ノ根ナリ.

何トナレバ,例ヘバ方程式

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0 \quad \text{............}(1)$$

ノ一根ヲ α トスレバ

$$a\alpha^5+b\alpha^4+c\alpha^3+c\alpha^2+b\alpha+a=0 \text{..............}(2)$$

又(1)ノ左邊ニ $x=\dfrac{1}{\alpha}$ ヲ代入シテ書キ直セバ

$$\frac{1}{\alpha^5}(a+b\alpha+c\alpha^2+c\alpha^3+b\alpha^4+a\alpha^5)$$

トナリ,括弧内ノ式ハ(2)ノ左邊ニ外ナラズ,從テ其ノ値ハ零ナリ. 因テ $\dfrac{1}{\alpha}$ モ亦(1)ノ根ナリ.

(1)ノ代リニ $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$

ヲ取ルモ亦同様ナリ.

其ノ他ノ相反方程式ニ於テモ亦同様ナリ.

相反方程式ヲ解クニハ此ノ性質ニ注意スベシ.

例 1. $ax^3+bx^2+bx+a=0$ ヲ解ケ.

解 方程式ヲ書キ直セバ

$$a(x^3+1)+b(x^2+x)=0$$

即チ $$(x+1)\{a(x^2-x+1)+bx\}=0$$

$$\therefore\ x+1=0 \quad 或ハ \quad ax^2-(a-b)x+a=0$$

之ヲ解ケバ

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ 或ハ\quad x=\dfrac{a-b\pm\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a} \end{array}\right\} 答.$$

例 2. $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$ ヲ解ケ.

解 明ニ x ハ 0 ニアラズ,從テ x^2 モ亦 0 ニアラズ. 故ニ x^2 ニテ兩邊ヲ除シテ書キ直セバ

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=y$ ト置ケバ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$ トナル. 因テ

$$2(y^2-2)-9y+14=0$$

之ヲ解ケバ $y=2$ 或ハ $\dfrac{5}{2}$

$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=2 \quad 或ハ \quad x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

之ヨリ $x=1$ (等根), 2 或ハ $\dfrac{1}{2}$ 答.

(問) 次ノ方程式ヲ解ケ.

(1) $x^3-2x^2-2x+1=0$ (2) $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$

25. 立方根ハ三ツアルコト.

先ヅ 1 ノ立方根ヲ求メンニ,之ヲ x ニテ表セバ方程式 $x^3=1$ ヲ得. 之ヲ解クタメ,移項スレバ

$$x^3-1=0$$

因數ニ分解スレバ $(x-1)(x^2+x+1)=0$

即チ $x-1=0$ 或ハ $x^2+x+1=0$

之ヲ解ケバ

$$x=1,\quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ 或ハ\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

即チ此等ノ數ハ何レモ 1 ノ立方根ナリ,從テ 1 ノ立方根ハ三ツアルナリ.

偖上ノ三根ノ中複素數ナル根ノ一方ヲ表スニ通常 ω ナル文字ヲ用フ.

例ヘバ $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ トスレバ他ノ根 $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ハ ω^2 ニ等シ. 何トナレバ實際計算スレバ

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

因テ 1 ノ立方根ハ 1, ω, ω^2 ノ三ツナリ.

倍一般ニ一ツノ實數 a ノ立方根ヲ x トスレバ

$$x^3=a,\quad \text{即チ}\quad x^3=(\sqrt[3]{a})^3$$

從テ
$$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3=1$$

故ニ $\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}}$ ハ 1 ノ立方根ニ相當スルニヨリ

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}}=1,\ \omega,\ \text{或ハ}\ \omega^2$$

因テ x 即チ a ノ立方根ハ

$$\sqrt[3]{a},\quad \omega\sqrt[3]{a},\quad \omega^2\sqrt[3]{a}$$

ノ三ツナリ. 但 $\sqrt[3]{a}$ ハ實數,他ハ皆虚數ナリ.

故ニ一般ニ實數ノ立方根ハ三ツアリ,其ノ一ツハ實數ニシテ他ノ二ツハ虚數ナリ.

【注意】 一般ニ任意ノ數ノ n 乘根ハ n 個アリ. 其ノ證明ハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ玆ニハ之ヲ揭ゲズ.

問　題　VI

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $4x^4-17x^2+18=0$　　2. $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2$
3. $x^4+x^3+x^2+3x-6=0$

4. $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$
5. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$
6. $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0$
7. $x^5-243=0$　　8. $(2x-1)^3=0$
9. $(1+x)^3=(1-x)^3$　　10. $(x-2)^4-81=0$
11. $x(x-1)(x-2)(x-3)=3\cdot4\cdot5\cdot6$
12. $(x+a)^3+(x+b)^3=(2x+a+b)^3$
13. $(a-x)^4-(b-x)^4=(a-b)(a+b-2x)$
14. $x^4-22x^2+81=0$ ノ根ヲ小數第三位迄求メヨ.
(但端數ハ切捨)
15. $x^3+3px+q=0$ ニ於テ $x=\dfrac{p-y^2}{y}$ ト置ケバ此ノ方程式ハ如何ニ變ルカ.
16. $x^2+qx+1=0$, $x^3+px^2+qx+1=0$ ガ一ツノ共通根ヲ有スルトキハ
$$(p-1)^2-q(p-1)+1=0$$
ナルコトヲ證明セヨ.
17. x^3+bx^2+cx+1 ト x^3+cx^2+bx+1 トガ一次式ナル公約數ヲ有スルガ爲ニハ $b=c$ 或ハ $b+c+2=0$ ナルコトヲ要ス. 之ヲ證明セヨ

---

26. 聯立二次方程式ノ例.

次ニ特別ノ工夫ニヨル解法ノ二三ヲ例示セン.

例 1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} 2xy-x^2=3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+4xy+3x=40-6y-4y^2 \quad \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 (2)ヲ移項シテ書キ直セバ

$$(x+2y)^2+3(x+2y)-40=0$$

之ヨリ $\qquad x+2y=5$ 或ハ -8

因テ此等ノ方程式ト(1)トヲ組合セテ

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2xy-x^2=3 \end{cases} \quad 或ハ \quad \begin{cases} x+2y=-8 \\ 2xy-x^2=3 \end{cases}$$

之ヲ解ケバ

$$\left.\begin{aligned} &x=1,\ y=2;\ x=\frac{3}{2},\ y=\frac{7}{4} \\ &x=\frac{-4+\sqrt{10}}{2},\ y=\frac{-12-\sqrt{10}}{4} \\ 或ハ\quad &x=\frac{-4-\sqrt{10}}{2},\ y=\frac{-12+\sqrt{10}}{4} \end{aligned}\right\} 答.$$

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} x+y=4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^4+y^4=82 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 (1)ノ兩邊ヲ四乘シテ(2)ト邊邊相減ズレバ

$$4x^3y+6x^2y^2+4xy^3=174 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)ノ兩邊ヲ二乘シテ兩邊ニ $4xy$ ヲ乘ズレバ

$$4x^3y+8x^2y^2+4xy^3=64xy$$

之ト(3)トヲ邊邊相減ズレバ

$$2x^2y^2=64xy-174$$

即チ $\qquad x^2y^2-32xy+87=0$

之ヨリ $\qquad xy=3$ 或ハ 29

因テ

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} \quad 或ハ \quad \begin{cases} x+y=4 \\ xy=29 \end{cases}$$

之ヲ解ケバ次ノ四組ノ根ヲ得ベシ.

$$答 \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases},\ \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases},\ \begin{cases} x=2+5i \\ y=2-5i \end{cases} \ 或ハ\ \begin{cases} x=2-5i \\ y=2+5i \end{cases}$$

例 3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} xy+xz=14 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ yz+yx=18 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ zx+zy=20 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解 (1)ト(2)トヲ邊邊相加フレバ

$$2xy+xz+yz=32$$

之ヨリ(3)ヲ邊邊相減ズレバ

$$2xy=12$$

因テ　　　　$xy=6$ ……………………(4)

(1)ト(4)トヨリ　　$xz=8$ ……………………(5)

又(2)ト(4)トヨリ　$yz=12$ ……………………(6)

(4)ト(5)トヲ邊邊相乗ズレバ

$$x^2yz=58$$

之ト(6)トヨリ　　$x^2=4$

$$\therefore\ x=\pm 2$$

$x=2$ ナルトキハ(4)ト(5)トヨリ

$$y=3,\ z=4$$

又 $x=-2$ ナルトキハ　$y=-3,\ z=-4$

答 $\begin{cases} x=2, & y=3, & z=4 \\ \text{或ハ } x=-2, & y=-3, & z=-4 \end{cases}$

別解　(1), (2), (3) ヲ邊邊相加フレバ

$$2xy+2yz+2zx=52$$

卽チ　　$xy+yz+zx=26$

之ト(1), (2), (3) ノ各トヲ邊邊相減ズレバ

$$yz=12,\ zx=8,\ xy=6 \text{………………}(7)$$

邊邊相乗ズレバ　$x^2y^2z^2=576$

平方ニ開ケバ　　$xyz=\pm 24$

之ト(7)トニヨレバ次ノ如シ.

$xyz=24$　ナルトキハ　$x=2,\quad y=3,\quad z=4$

$xyz=-24$　ナルトキハ　$x=-2,\quad y=-3,\quad z=-4$

例 4.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} x+y+z=24 \text{……………………}(1) \\ x^2+y^2=z^2 \text{……………………}(2) \\ xy=24 \text{……………………}(3) \end{cases}$$

解　(1)ヨリ　　$x+y=24-z$ ……………………(4)

兩邊ヲ二乗スレバ $(x+y)^2=z^2-48z+576$ …………(5)

(3)ノ兩邊ヲ2倍シテ(2)ト邊邊相加フレバ

$$(x+y)^2=z^2+96$$

之ト(5)トヲ邊邊相減ズレバ　$48z-480=0$

之ヨリ　　$z=10$

之ヲ(4)ニ代入スレバ　$x+y=14$

之ト(3)トヲ組合セテ解ケバ

$$x=6,\ y=8 \quad \text{或ハ} \quad x=8,\ y=6$$

答　$x=6,\ y=8,\ z=10$　或ハ　$x=8,\ y=6,\ z=10$

問　題　VII

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1.　$x^2+y^2=8,\quad (x+1)^2=(y-1)^2$

2. $\begin{cases} x^2-xy-2y^2+y=0 \\ (x-2y)(x+y-3)=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ x^2y^2+x+y=8xy-9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=4 \\ x^3+y^3=5(x^2+y^2) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=1 \\ x+y=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+y^2-3x+2y=39 \\ 3x^2-17xy+10y^2=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38 \\ x^2-xy+y^2=14 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ 4x^2+4xy+y^2+4x+2y=3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3-y^3=63 \\ x-y=3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^4+y^4=82 \\ x-y=2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x^2+27xy+6y^2-6x-21y+4=0 \\ 2x^2-9xy-3y^2-6x+6y+4=0 \end{cases}$

13. $2x^2-xy+y^2=2y,\quad 2x^2+4xy=6y$

14. $\begin{cases} \dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=12 \\ 2xy=ab \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-3xy+3y^2=x^2y^2 \\ 7x^2-10xy+4y^2=12x^2y^2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=12 \\ x^2+y^2=189 \end{cases}$

17. $\begin{cases} xy=60 \\ x+y+\sqrt{x^2+y^2}=30 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{20}{3} \\ xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

19. $\begin{cases} (x+y)(x^2-2y^2)=-70 \\ (x-y)(x^2-2y^2)=14 \end{cases}$

20. $x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{2}{x+y},\quad x^2+y^2=7$

21. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=931 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^3+y^3=468 \\ x^2y+xy^2=420 \end{cases}$

23. $\begin{cases} xy+x+y+19=0 \\ x^2y+xy^2+20=0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^4+y^4-(x^2+y^2)=72 \\ x^2+x^2y^2+y^2=19 \end{cases}$

25. $x^2y+xy^2=30,\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{10}$

26. $\begin{cases} x(y+z)=14 \\ y(x-z)=50 \\ x+y-z=15 \end{cases}$

27. $\begin{cases} yz+y+z=a \\ zx+z+x=b \\ xy+x+y=c \end{cases}$

28. $xy=a(x+y),\quad yz=b(y+z),\quad zx=c(z+x)$

29. $\dfrac{xy}{4y-3x}=20,\quad \dfrac{yz}{4y-5z}=12,\quad \dfrac{zx}{2x-3z}=15$

30. $\dfrac{x}{yz}=3,\quad \dfrac{y}{zx}=2,\quad \dfrac{z}{xy}=1$

31. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{7},\quad x^2-y^2+z^2=74$

32. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=10 \\ (y+z)(y+x)=14 \\ (z+x)(z+y)=35 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=45 \\ yz=20 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=11 \\ xyz=6 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x+y+z=10 \\ yz+zx+xy=33 \\ (y+z)(z+x)(x+y)=294 \end{cases}$

36. 聯立方程式

$$ax+by=1,\quad cx^2+dy^2=1$$

ガ相等シキ二組ノ根ヲ有スルトキハ $\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{d}=1$ ナルコトヲ證明セヨ.

37. 聯立方程式

$$x^2+xy-2y^2+y=0,\quad y=mx$$

ノ二組ノ根ガ相等シクナル樣ニ m ヲ定メヨ.

38. x, y ガ實數ニシテ

$$\left(x^2+\frac{1}{y^2}-10\right)^2+\left(x+\frac{1}{y}-4\right)^2=0$$

ナルトキ, x 及 y ノ値ヲ求ム.

39. $x+y+z=a,\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\quad yz+zx+xy=a^2$

ナルトキハ $a^2-b^2=2c^2$ ナルコトヲ證明セヨ.

40. $x+y=a,\quad x^2+y^2=b^2,\quad x^3+y^3=c^3$

ヨリ x 及 y ヲ消去セヨ.

41. $\dfrac{x}{y+z}=a,\quad \dfrac{y}{z+x}=b,\quad \dfrac{z}{x+y}=c$

ナルトキ,次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ

$$bc+ca+ab+2abc=1$$

42. $x^2-yz=a^2,\ y^2-zx=b^2,\ z^2-xy=c^2,\ x+y+z=0$

ヨリ x, y 及 z ヲ消去セヨ.

27. 應用問題.

之ヨリ應用問題練習ノ補充ノタメ,學習上ノ便宜ヲ圖リ

歩合及利息ニ關スル問題

比例配分及混合ニ關スル問題

數ニ關スル問題

仕事ニ關スル問題

運動ニ關スル問題

幾何學的問題

ノ六種類ニツキ十題前後ノ問題ヲ掲グルコトトシタリ.

問題 VIII

歩合及利息ニ關スル問題.

1. 十年前ニハ1250圓ニテ出來上リシ建築物ガ材料ハ7割5分,賃金ハ2倍ニ騰貴セル現時ニ於テハ2300圓ヲ要スト云フ. 此ノ建物ノ材料ノ價及賃金ハ現時幾許ナルカ.

2. 甲品ヲ其ノ時價ヨリモ2割高ク賣リ,乙品ヲ時價ヨリモ5圓安ク賣ルトキハ合計86圓ヲ得

ベク,又甲品ヲ時價ヨリモ2圓50錢安ク賣リ,乙品ヲ時價ヨリモ1割2分高ク賣ルトキハ合計80圓50錢ヲ得ベシト云フ. 甲乙兩品ノ時價各如何.

3. 或商店ニテ使用人ニ賞與金ヲ與フルニ,上半期ハ平均4人ニツキ125圓,下半期ハ平均1人ニツキ33圓ノ割合トスレバ兩期ノ賞與金總額相等シト云フ. 兩期ノ人數合計257人ナルトキ,各期ノ人數各如何.

4. 米價ヲ十年前ト今年トニ於テ比較スルニ,21圓ニツキテハ3斗4升ノ騰貴トナリ,又4斗入1俵ニツキテハ6圓80錢ノ騰貴トナリタリ. 今年ノ米價1升ノ價ヲ求ム.

5. 或中學校ノ現在生徒數ハ770名ニシテ,今年ハ昨年ニ比シ3.75%減ジ,而シテ通學生ハ5%增シ,寄宿生ハ30%減ゼリト云フ. 現在ノ通學生及寄宿生ノ數ヲ求ム.

6. 或人4500圓ヲ甲乙二部ニ分チ相異ナル利率ニテ貸シタルニ,双方ヨリ同額ノ利息ヲ得タリ. 若甲ヲ乙ノ利率ニテ貸サバ利息147圓ヲ得ベ

ク,乙ヲ甲ノ利率ニテ貸サバ利息192圓ヲ得ベシト云フ. 各ノ利率ヲ求ム.

7. 或人年利率6分ニテ金3000圓ヲ借リ,滿1年每ニ一定ノ金額ヲ返濟シテ三年間ニ之ヲ皆濟セントス. 每回ノ支拂額何程ナルカ. 但利息ハ滿1年每ニ計算スルモノトシ,又仕拂額ニ於ケル一圓未滿ハ四捨五入スルモノトス.

8. 金1000圓ヲ年利率若干ニテ1ケ年間預ケ其ノ利子ノ內ヨリ40圓ヲ受取リ,其ノ餘リヲ元金ニ加ヘ,更ニ前ヨリモ5厘高キ利率ニテ1ケ年間預ケタルニ,元利合計1086圓30錢トナレリト云フ. 初メノ利率ヲ求ム.

9. 甲乙二校ニテ各300名宛ノ生徒ヲ募集セシニ,應募者ノ數ハ兩校合セテノ數ニテ云ヘバ募集人員ノ8倍ヨリモ猶150名多カリシガ,之ヲ前年度ニ比スレバ兩校合セテノ數ニテハ10%ヲ減ジ,又甲校ノミニツキテハ20%ヲ增シ,乙校ノミニツキテハ20%ヲ減ジタリト云フ. 兩校ニ於ケル應募者ノ數各幾名ナルカ.

10. 3年間ノ利息ガ單利ニテハ450圓,1年每ノ

複利ニテハ 477 圓 54 錢トナルベキ元金及年利率ヲ求ム.

比例配分及混合ニ關スル問題.

11. 酒精 4 升 8 合ヲ容レタル瓶ヨリ若干升酌ミ出シ,水ヲ以テ之ヲ補ヒ,更ニ前回ヨリモ 8 合 4 勺多ク酌ミ出シ又水ヲ以テ之ヲ補ヒタルニ,水ト酒精ト等分ニナリタリト云フ. 最初酌ミ出セシ酒精ノ量ヲ求ム.

12. 酒若干升ヲ滿セル樽アリ,今之ヨリ 8 升ヲ酌ミ出シ水ヲ以テ之ヲ補ヒタルニ樽內ノ酒ト水トノ比ハ 17:8 トナレリト云フ. 此ノ樽ノ容量ヲ求ム.

13. 葡萄酒ヲ容レタル樽アリ,此ノ中ヨリ 9 升ヲ酌ミ出シ水ヲ以テ之ヲ補ヒ,又更ニ 9 升ヲ酌ミ出シ水ヲ以テ之ヲ補ヒタルニ樽中ノ葡萄酒ト水トノ量ノ比ハ 16:9 トナリタリト云フ. 最初樽ノ中ニ何程ノ葡萄酒ガ容レアリシカ.

14. 上中下三種ノ酒アリ,上酒 2, 中酒 1, 下酒 3 ノ割合ニ混合スルトキハ平均 1 升 148 錢ノ酒ヲ得,上酒 4, 中酒 3, 下酒 5 ノ割合ニ混合スルトキハ平均 1 升 150 錢ノ酒ヲ得,又上酒 1, 中酒 2, 下酒 7 ノ割合ニ混合スルトキハ平均 1 升 139 錢ノ酒ヲ得ベシト云フ. 上中下各ノ酒 1 升ノ價幾何.

15. 錫 3 貫ト鉛 600 匁トヲ含ム合金塊アリ,之ニ鉛ガ錫ノ 2 倍ヲ含ミテ重サ 120 匁ナル合金塊幾個ヲ鎔カシコマバ錫ガ鉛ノ 3 倍ナル合金ヲ作リ得ルカ.

16. 寶石入ノ金指環アリ,其ノ重サ 9.1 瓦ナリ. 之ヲ水中ニテ量レバ 8.1 瓦ニシテ金ノ比重ハ 19, 寶石ノ比重ハ 2.5 ナリト云フ. 此ノ指環ノ寶石及金ノ目方ヲ求ム.

17. 4% ノ鹽分ヲ含メル水若干瓦アリ,此ノ水ヨリ水分ヲ蒸發シ 10% ノ鹽分ヲ含メル水トナシタル後, 4% ノ鹽分ヲ含メル水 300 瓦ヲ混ジタルニ, 6.4% ノ鹽分ヲ含メル水ヲ得タリト云フ. 初メノ鹽水ハ幾瓦ナリシカ.

18. 甲ハ乙ヨリ 300 圓多ク出シ,兩人組合ニテ一事業ヲ營メリ. 然ルニ事業開始後 3 ケ月ニシテ丙ガ 1000 圓ヲ出資シテ此ノ事業ニ加入セリ,

而シテ初メヨリ1ケ年後ノ清算ニヨレバ3180圓ノ純益ヲ得タリ. 今此ノ益金ヲ出資高及其ノ出資期間ニ比例シテ分配シ,之ヲ次年度ノ資本金ニ繰入ルルコトトシタルニ,乙ノ次年度ノ資本金ハ1760圓トナリタリト云フ. 乙ハ最初幾圓ヲ出資シタルカ.

19. 某工場ニ於テ甲種職工8人,乙種職工15人,丙種職工800人アリ. 之ニ賞與金ヲ分配スルニ當リ,一旦甲,乙,丙各人ノ分配額ヲ5ト2ト1トノ割合ニ定メタルニ,更ニ之ヲ改メテ甲ヨリハ其ノ分配額ノ1割ヲ減ジ,乙ニハ各金10圓ヲ增シ,丙ニハ其ノ分配額ノ4割ヲ增シテ分配シ,賞與金總計金35730圓ヲ要シタリト云フ. 甲乙丙職工各一人ノ所得金幾許ナルカ.

20. 光ノ照度ハ發光體ノ光度ニ正比例シ,距離ノ二乘ニ反比例スルモノトス. 今二個ノ發光體A, Bアリ,其ノ距離12尺ニシテAノ光度ハBノ光度ノ4倍ニ等シト云フ. A, Bヲ結ビ付クル直線上如何ナル位置ニ衝立ヲ置カバ其ノ照度相等シカルベキカ.

數ニ關スル問題.

21. 三ツノ有效數字ヨリ成ル三桁ノ數アリ. 此ノ數ハ其ノ數字ノ和ノ48倍ニ等シク,此ノ數ヨリ198ヲ減ズレバ同ジ數字ヲ逆ノ順ニ列ベタル三桁ノ數ヲ得ベク,且兩端ノ數字ノ和ハ中央ノ數字ノ2倍ニ等シト云フ. 此ノ數ヲ求ム.

22. 二數アリ,其ノ和ト積ト平方ノ差トガ悉ク相等シト云フ. 二數ヲ求ム.

23. 四ツノ正ノ數アリ,其ノ中ノ三ツ宛ノ積ガ夫夫60, 40, 30及24ナラバ各數如何.

24. 分數アリ,其ノ分子ニ1ヲ加ヘ,分母ヨリ1ヲ減ズルトキハ$\frac{2}{3}$ニ等シクナリ,又分母分子ノ差ヲ分子トシ,其ノ和ヲ分母トスル分數ハ$\frac{2}{5}$ニ等シト云フ. 如何ナル分數カ.

25. 一ノ位ト小數第一位トノ二桁ヨリナル帶小數アリ,各數字ノ二乘ノ和ハ52ニシテ,此ノ數ト其ノ數字ノ位置ヲ交換シテ得ベキ帶小數トノ差ハ1.8ナリト云フ. 此ノ帶小數ヲ求ム.

26. 三ツノ數アリ,其ノ和ハ6,積モ6ニシテ其ノ二乘ノ和ガ14ナルトキ,各數ノ三乘ノ和ヲ求ム

27. 相等シカラザル二ツノ正ノ整數ノ中ニテ二乘ノ差ガ其ノ差ノ7倍ニ等シキモノヲ求ム.

28. 二桁ノ二整數甲乙アリ,甲ノ數字ノ順序ヲ交換シタルモノハ乙數ニ等シ,而シテ甲ノ右ニ乙ヲ書キ並ベテ得ベキ四桁ノ整數ヲ乙ニテ除スレバ商51,剩餘50ヲ得,又乙ノ右ニ甲ヲ書キ列ベテ得ベキ四桁ノ整數ヲ甲ノ3倍ニテ除スレバ商66,剩餘11ヲ得ベシト云フ. 甲乙二數如何.

仕事ニ關スル問題.

29. 一工事アリ,甲乙二工夫共ニ働クトキハa日ニテ之ヲ成就スベク,又甲一人ニテ之ヲナストキハ乙一人ニテナスヨリモb日多ク日數ヲ要スベシト云フ. 甲一人ニテ之ヲナスニハ幾日ヲ要スルカ.

30. 甲乙丙ノ三工夫アリ. 或仕事ヲ甲一人ニテ完成スルニ要スル日數ハ乙丙ノ兩人協同シテ完成スルニ要スル日數ノm倍ニシテ,乙一人ニテ完成スルニ要スル日數ハ丙甲ノ兩人協同シテ完成スルニ要スル日數ノn倍,又丙一人ニテ完成スルニ要スル日數ハ甲乙ノ兩人協同シテ完成スルニ要スル日數ノp倍ナリト云フ. 然ラバ各人單獨ニテ此ノ仕事ヲ完成スルニ要スル日數ノ割合ハ$(m+1):(n+1):(p+1)$ナルコトヲ證明セヨ.

31. 上ノ問題ニ於テ

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1$$

ナル等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ.

32. 容積12石ノ桶ニ水ヲ充タスニ,甲乙丙ノ三管ヲ以テ注入スレバ24分ヲ要スベク,甲管ノミヲ以テスレバ丙管ノミヲ以テスルヨリモ30分多クヲ要スベシ,而シテ1分間ニ丙管ヨリ注入スル水量ハ同時間ニ甲乙二管ヨリ注入スル水量ノ和ヨリモ1斗ダケ少ナシ. 甲乙丙各一管ヲ以テ此ノ桶ヲ充タスニ要スル時間各如何.

33. 二萬斤以上ノ石炭ヲ若干ノ人夫ニテ或場所ヨリ他ノ場所ニ運搬スルニ8時間ヲ要シタリ. 若人夫ヲ8人增シ,各人每時間ノ運搬量ヲ5斤宛減ズレバ7時間ニテ運搬シ得ベク,又若人夫ヲ8人減ジ,各人每時間ノ運搬量ヲ11斤宛增セバ9時間ニテ運搬シ得ベシ. 人夫幾人カ.

34. 水夫アリ,或河ヲ3里漕ギ上ルニ2時間ヲ要シ,5里漕ギ下ルニハ2時間ニテ足レリ. 然ルニ大雨後1時間ニ3里半漕ギ下リタリ,此ノ際2里漕ギ上ルニハ幾時間ヲ要スルカ.

運動ニ關スル問題.

35. 甲乙二人同時ニ相離レタル兩地ヨリ相向ツテ出發シ,5時間ニテ相會シタリ. 若甲ガ毎時1哩ダケ速ク旅行シ,乙ガ1時間早ク出發スルカ,或ハ乙ガ毎時1哩ダケ緩ク旅行シ,甲ガ1時間晩ク出發シタルナラバ兩人ハ最初出會ヒシ所ニテ出會フベシト云フ. 兩地ノ距離ヲ求ム.

36. 甲乙ノ二船アリ, 200浬隔タレル東西兩港間ヲ甲ハ東港ヨリ,乙ハ西港ヨリ各一定ノ速サニテ同時ニ出發シテ一回ノ往復ヲナセシニ,往路ノトキ出會ヒシ場所ハ復路ノトキ出會ヒシ場所ヨリ40浬ダケ西港ニ近カリシト云フ. 二船ノ速サヲ求ム. 但甲ノ速サハ乙ノ速サヨリモ毎時2浬大ニシテ,二船ハ何レモ往航ヲ終リ復航ニツク迄ノ間ニ於テ2時間宛休ムモノトス.

37. 二ツノ列車アリ, 360哩ノ距離ヲ行クニ要スル時間ノ差ハ5時間ナリ. 若双方トモ其ノ速サヲ毎時6哩宛増ストキハ此ノ時間ノ差ハ3時間トナルベシト云フ. 兩列車ノ速サ毎時幾哩ナルカ.

38. 甲乙二人アリ,池ノ周圍ヲ走ルニ同一ノ方向ヲ取ルトキハ20分毎ニ一所ニナリ,反對ノ方向ヲ取ルトキハ4分毎ニ出會フト云フ. 甲乙各此ノ池ヲ一周スルニ要スル時間ヲ求ム.

39. 甲列車ハ正東ニ向ヒ,乙列車ハ正南ニ向ヒテ進行シ,甲乙何レモ一定ノ速サヲ有シ,其ノ比ハ2:3ニ等シ. 而シテ兩列車ノ距離或時48粁ナリシガ1時間後ニハ32粁トナリ,更ニ1時間後ニハ80粁トナリタリト云フ. 各列車ノ速サ毎時何粁ナルカ

40. 四人ノ走者 A, B, C, D ガ或一定ノ方陣ノ四隅ノ位置ヲ保チテ共通速度毎分 v 米ニテ方陣ノ一邊 AB ニ平行ナル方向ニ走リツツアリ. 今他ノ一人 E ガ毎分 u 米ノ速サニテ順次 A, B, C, D ヲ歴訪シテ再ビ A ノ所ニ來リシガ, A ヨリ B ニ至ル迄ニ45分ヲ要シ, B ヨリ C ニ至ル迄ニ

15分ヲ要シタリト云フ. 但Eハ恒ニ最モ近キ路ヲ取リテ走リタルモノトス. 然ルトキハ

(1) $u:v$ ノ値如何.

(2) CヨリD, 又DヨリAニ至ル迄ニハ各幾分ヲ要シタルカ.

41. 甲ハ2200尺距リタル的ニ向ツテ射擊セシニ, 發射後$3\frac{3}{8}$秒ヲ經テ銃丸ノ的ニ中リタル音ヲ聞キ, 又乙ハ甲ヨリハ1800尺, 的ヨリハ1250尺距リタル所ニアリテ銃聲ヲ聞キテ後$\frac{7}{8}$秒ヲ經テ銃丸ノ的ニ中リタル音ヲ聞キタリト云フ. 音及銃丸ハ各定マリタル速サニテ進ムモノトスレバ各ノ速サ如何.

42. 甲ハ東地ヨリ西地ニ向ヒ, 乙ハ西地ヨリ東地ニ向ヒテ同時ニ出發シ, 各一定ノ速サニテ同一街道ヲ進行セリ. 甲ハm時間ニテ西地ニ着シ, 乙ハn時間ニテ東地ニ着セリ, 又兩人出會セシ時ヨリ甲ハa時間, 乙ハb時間ヲ要シタリト云フ. 然ルトキハa, b, m, nノ間ニ

$$a:b=m^2:n^2$$

ナル關係アルコトヲ證明セヨ.

幾何學的問題.

43. 菱形ノ地面アリ, 其ノ一邊ノ長サハ15米ニシテ兩對角線ノ長サノ差ハ6米ナリト云フ. 此ノ地面ノ面積ヲ求ム.

44. 面積300坪ノ矩形ノ地面アリ, 其ノ間口ヲ4間延バシ, 奥行ヲ3尺縮ムレバ, 面積48坪ヲ增スベシト云フ. 此ノ地所ノ間口及奥行各幾何ナルカ.

45. 面積ノ相等シキ矩形ト正方形トアリ. 正方形ノ一邊ハ矩形ノ長キ邊ヨリモ6寸短カシ. 而シテ若矩形ノ幅ヲ1寸增シ, 長サヲ2寸減ズルモ面積ニハ變リナシト云フ. 矩形ノ幅及長サヲ求ム.

46. 矩形ノ公園アリ, 或一定ノ速サヲ以テ周圍ヲ一周スルニ14分ヲ要シ, 一對角線ヲ通過スルニ5分ヲ要スト云フ. 此ノ公園ノ縱, 橫ヲ通過スルニハ各幾分ヲ要スルカ.

47. 矩形アリ, 其ノ相隣ル二邊ノ長サノ比ハ$a:b$ニ等シク, 其ノ和ト對角線トノ差ハd尺ナリト云フ. 相隣ル二邊ノ長サヲ求ム

48. 周ガ28糎ナル直角三角形ニ内接スル圓ノ半徑ガ2糎ナルトキ,此ノ三角形ノ各邊ノ長サヲ求ム.

49. 半徑ガ14糎ト10糎トノ二圓アリ,其ノ中心間ノ距離ガ6糎ナリト云フ. 兩圓ノ共通弦ノ長サヲ求メヨ.

50. 三角形アリ,底邊ハ2寸5分,高サハ1寸2分ニシテ他ノ二邊ノ差ハ5分ナリト云フ. 此等二邊ノ長サヲ求ム.

51. 直角三角形アリ,其ノ周ハa米ニシテ面積ハb平方米ナリ. 三邊ノ長サヲ求ム.

52. 長サガ幅ヨリモ60米長キ矩形ノ池ノ周圍ニ或幅ノ馬場ヲ開クタメ32アールノ地面ヲ要シ,而シテ其ノ外圍ハ360米トナルト云フ. 馬場ノ幅及池ノ面積ヲ求ム.

53. 立方體アリ,其ノ縱,横,高サヲ各3糎宛減ズルトキハ其ノ體積ハ元ノモノヨリモ3087立方糎ダケ減ズベシト云フ. 元ノ立方體ノ高サ何糎ナルカ.

54. 内徑8寸,深サ9寸ノ罐ノ中ニ二個ノ相等シキ球ヲ容レタルニ丁度蓋ヲ蔽フコトヲ得タリト云フ. 各球ノ半徑ハ何程ナルカ.

55. 二ツノ相切スル相等シキ圓アリ,其ノ共通切線上ニ一邊ヲ有シ,二頂點ガ夫夫此等二圓ノ上ニアリテ而カモ此ノ切線ト二圓ノ間ニ夾マル樣ニ正方形ヲ畫クトキハ,此ノ正方形ノ一邊ノ長サハ幾何ナルカ. 但各圓ノ直徑ノ長サヲ1尺トセヨ.

56. 一邊ノ長サa寸ナル正方形ニ内接シ且之ト一頂點ヲ共有スル正三角形ノ一邊ノ長サ幾何ナルカ.

57. 點Oニ於テ直角ニ交ル二直線アリ. A及Bノ二點ガ夫夫各直線上ヲ點Oニ向ツテ一定ノ速サヲ以テ運動シツツアリトス. 或時AハOヨリ28糎,Bハ9糎ノ距離ニアリシガ,2秒後ニハA,Bノ距離13糎トナリ,3秒後ニハ5糎トナリタリトスレバ,A及Bノ速サ毎秒各幾糎ナルカ.

第五章 不等式

28. 不等式.

例ヘバ　$(a-b)^2+2>0$ ....(1)

$x-3<5$ ....(2)

ノ如ク,不等號ヲ以テ二ツノ式(又ハ數)ヲ連結セルモノヲ**不等式**ト云フ. 而シテ不等號ノ左ニアル式(又ハ數)ヲ其ノ**左邊**,右ニアルモノヲ**右邊**ト云フ.

不等式ニ二種アリ. 上例(1)ハ a, b ガ實數ナルトキハ其ノ値ノ如何ニ拘ラズ恒ニ成立ス. サレド(2)ニ於テハ x ノ取リ得ベキ値ニ限界アリ,即チ x ハ 8 ヨリモ小ナラザルベカラズ,又 x ガ 8 ヨリモ小ナラバ此ノ不等式ノ示セル關係ハ成立ス.

一般ニ此ノ(2)ノ如キ種類ノ不等式ニ於テ不等ノ關係ヲ成立セシムルガ爲ニ其ノ式中ノ或特別ナル文字(未知數)ノ取リ得ベキ値ノ限界ヲ求ムルコトヲ稱シテ其ノ**不等式ヲ解ク**ト云フ. 例ヘバ上例(2)ヲ解キテ得ベキ答ハ $x<8$ ナリ.

偖二數ノ大小ハ其ノ符號ノ正負如何ニ拘ラズ其ノ差ノ正負ニヨリテ判知シ得ルコトハ既ニ知

ル所ナリ. 即チ

$a-b>0$　ナルトキハ　$a>b$

$a-b<0$　ナルトキハ　$a<b$

此等ハ何レモ不等式ヲ論ズルトキ,基本トナルモノナリ.

【注意】 不等式ヲ論ズルトキハ數ハ實數ノ範圍ニ限ルモノト知ルベシ.

29. 不等式ノ性質.

(1) 不等式ノ兩邊ニ同一ノ數ヲ加ヘ,或ハ兩邊ヨリ同一ノ數ヲ減ズルモ不等號ノ向ハ變ゼズ.

例ヘバ $a>b$ ナルトキハ

$$a+c>b+c, \quad a-c>b-c$$

ナリ. 何トナレバ

$a>b$ ナルトキハ　$a-b>0$

然ルニ　$(a+c)-(b+c)=a-b$

因テ　$(a+c)-(b+c)>0$

$$\therefore \quad a+c>b+c$$

c ノ代リニ $-c$ ヲ取レバ $a-c>b-c$ トナル.

故ニ不等式ニ於テハ其ノ任意ノ項ノ符號ヲ變ヘテ之ヲ他ノ邊ニ移スコトヲ得. 斯スルコトヲ**移項**スルト云フ.

例. 不等式 $5x-4>4x+1$ ニ於テ x ヲ含ム項ヲ左邊ニ然ラザル項ヲ右邊ニ移セバ $x>5$ トナル.

(2) 不等式ノ兩邊ヲ同一ノ正數ニテ乘除スルモ不等號ノ向ハ變ゼズ.

例ヘバ m ガ正數ニシテ $a>b$ ナルトキハ

$$ma>mb,\quad \frac{a}{m}>\frac{b}{m}$$

ナリ. 何トナレバ

$a>b$ ナルトキハ $\qquad a-b>0$

且 m ハ正數ナルガ故ニ $m(a-b)>0$

因テ $\qquad ma-mb>0$

$$\therefore\quad ma>mb$$

m ノ代リニ $\dfrac{1}{m}$ ヲ取レバ $\dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m}$ トナル.

例. 不等式 $\dfrac{x}{3}>2$ ノ兩邊ニ 3 ヲ乘ズレバ $x>6$ トナル.

(3) 不等式ノ兩邊ヲ同一ノ負數ニテ乘除スレバ不等號ノ向ヲ變ズ

例ヘバ m ガ負數ニシテ $a>b$ ナルトキハ

$$ma<mb,\quad \frac{a}{m}<\frac{b}{m}$$

ナリ. 何トナレバ

$a>b$ ナルトキハ $\qquad a-b>0$

且 m ハ負數ナルガ故ニ $m(a-b)<0$

因テ $\qquad ma-mb<0$

$$\therefore\quad ma<mb$$

m ノ代リニ $\dfrac{1}{m}$ ヲ取レバ $\dfrac{a}{m}<\dfrac{b}{m}$ トナル.

例. 不等式 $-5x>15$ ノ兩邊ヲ -5 ニテ除スレバ $x<-3$ トナル. 又 $-\dfrac{x}{3}>-2$ ノ兩邊ニ -3 ヲ乘ズレバ $x<6$ トナル.

30. 不等式ノ解法.

(1) **一次ノ不等式.**

例. $\dfrac{7}{3}x+2>\dfrac{14}{5}x+9$ ヲ解ケ.

解 兩邊ニ 15 ヲ乘ズレバ

$$35x+30>42x+135$$

移項スレバ $\qquad -7x>105$

兩邊ヲ -7 ニテ除スレバ

$x<-15$ $\qquad$ 答 $x<-15$

(問)　次ノ不等式ヲ解ケ.

(1)　$3x-1>5-x$　　(2)　$\frac{x-1}{3}<2x+\frac{1}{6}$

(3)　$5-8x<\frac{1}{2}(4-5x)$　(4)　$\frac{x^2}{3}+5>\frac{1}{6}(2x-1)(x-10)$

(2)　二次ノ不等式.

例 1.　$4x^2-3x>5x+60$ ヲ解ケ.

解　移項スレバ　$4x^2-8x-60>0$

兩邊ヲ4ニテ除スレバ

$$x^2-2x-15>0$$

左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x+3)(x-5)>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

偖 $x+3$ ト $x-5$ トノ積ガ正數トナルニハ兩因數ガ共ニ正數ナルカ或ハ共ニ負數ナルコトヲ要シ,且夫ニテヨシ.

今(1)ノ左邊ヲ零ナラシムル x ノ値ナル -3 ト 5 トヲ境界トシテ總テノ數ヲ三部ニ分チ,此ノ各部ノ數ニツキテ考究スレバ次ノ如シ.

(i)　$x<-3$ ナルトキハ　$x+3<0$,　$x-5<0$

故ニ不等式(1)ハ成立ス.

(ii)　$-3<x<5$ ナルトキハ　$x+3>0$,　$x-5<0$

故ニ不等式(1)ハ成立セズ.

(iii)　$x>5$ ナルトキハ　$x+3>0$,　$x-5>0$

故ニ不等式(1)ハ成立ス.

$\therefore$ $x<-3$ 或ハ $x>5$ 答.

例 2.　$\frac{x^2}{2}-2x<\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-3$ ヲ解ケ.

解　兩邊ニ6ヲ乘ズレバ

$$3x^2-12x<2x^2-3x-18$$

移項シテ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-3)(x-6)<0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

偖 $x-3$ ト $x-6$ トノ積ガ負數トナルニハ兩因數ガ異符號ナルコトヲ要シ,且夫ニテヨシ.

今(1)ノ左邊ヲ零ナラシムル x ノ値ナル $3, 6$ ノ二數ヲ境界トシテ總テノ數ヲ三部ニ分チテ考究スレバ次ノ如シ.

(i)　$x<3$ ナルトキハ　$x-3<0$,　$x-6<0$

故ニ不等式(1)ハ成立セズ.

(ii)　$3<x<6$ ナルトキハ　$x-3>0$,　$x-6<0$

故ニ不等式(1)ハ成立ス.

(iii)　$x>6$ ナルトキハ　$x-3>0$,　$x-6>0$

故ニ不等式(1)ハ成立セズ.

$\therefore$ $3<x<6$ 答.

【注意】兩邊ガ整式ナル不等式ヲ解キテ得ベキ未知數 x ノ値ノ限界ハ其ノ不等式ニ於テ不等號ノ代リニ等號ヲ置キ換ヘテ得ベキ方程式ノ根ナルコト上例ニ於テ見ルガ如シ.

(問) 次ノ不等式ヲ解ケ.

(1) $2x^2-3>6x+5$　(2) $\frac{x^2-5}{3}<\frac{2x}{3}+1$

(3) $(3x-1)(x-8)<x^2+8$

例 3. $x^2+5<2x$ ヲ解ケ.

解 移項スレバ　$x^2-2x+5<0$

數ヲ實數ノ範圍ニ限ルトキハ左邊ヲ因數ニ分解スルコトヲ得ズ. サレド左邊ヲ書キ直セバ

$$(x-1)^2+4<0$$

トナル,而シテ此ノ左邊ハ x ニ如何ナル實數値ヲ與フルトモ其ノ値ハ恒ニ正數トナリ,決シテ負數トナルコトナシ. 故ニ此ノ不等式ハ x ニ如何ナル實數値ヲ與フルトモ成立セズ,從テ與ヘラレタル不等式ハ成立セズ.

【注意】此ノ例ノ如キ場合ニ於テハ**解ナシ**ト云フナリ.

(問) 不等式 $(x-2)(x+1)<x-5$ ヲ解ケ.

例 4. $x^2>x-1$ ヲ解ケ.

解 移項スレバ　$x^2-x+1>0$

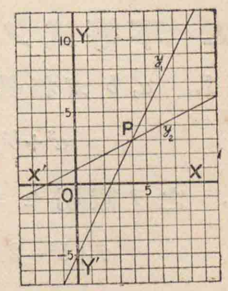
左邊ヲ書キ直セバ　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

トナル,而シテ此ノ左邊ハ x ニ如何ナル實數値ヲ與フルトモ其ノ値ハ恒ニ正數トナリ,不等式ハ恒ニ成立ス. 故ニ此ノ不等式ハ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ恒ニ成立ス.

(問) 不等式 $2x^2-3x+3>0$ ヲ解ケ.

31. 不等式ノ圖解.

例 1. $2x-5>\frac{1}{2}x+1$ ヲ圖解セヨ.

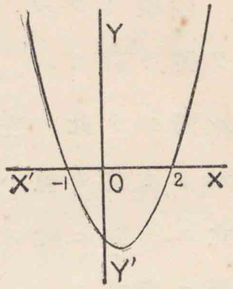


解 $y_1=2x-5$ 及 $y_2=\frac{1}{2}x+1$ ノぐらふヲ畫ケバ右圖ノ如ク,其ノ交點Pノ右方ニ於テノミ $y_1>y_2$ ナリ. 而シテ此ノ點Pノ横坐標ハ此ノぐらふニヨレバ $x=4$ ナリ. 因テ所要ノ解ハ $x>4$ ナリ.

(問) 此ノ圖解ノ理由ヲ説明セヨ.

例 2. $x^2-x-2>0$ ヲ圖解セヨ.

解 $y=x^2-x-2$ ノぐらふヲ畫キ(右圖ノ如ク),其ノ x 軸ノ上方ニアル部分ニ對應スル x ノ値ノ範圍ヲ求ムレバ可ナリ. 而シテ此ノ圖ニヨリ直チニ斯ノ如キ x ノ値ハ



$$x<-1 \quad 或ハ \quad x>2$$

ナルコト知ラル. 答 $x<-1$ 或ハ $x>2$

(問) 此ノ圖解ノ理由ヲ説明セヨ.

32. 不等式ノ證明.

例 1. a, b ガ相異ナル實數ナルトキハ

$$a^2+b^2>2ab$$

ナリ. 之ヲ證明セヨ.

解 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

ナリ. 然ルニ a, b ハ相異ナル實數ナルガ故ニ

$$(a-b)^2>0$$

$$\therefore\ a^2+b^2-2ab>0$$

$$\therefore\ a^2+b^2>2ab$$

例 2. a, b ガ相異ナル正數ナルトキ

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解 $$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

然ルニ a, b ハ相異ナル正數ナルガ故ニ,$\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ ハ何レモ相異ナル正數ニシテ

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>0$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

(問) a, b ガ同符號ニシテ相異ナル實數ナルトキ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$ ナルコトヲ證明セヨ.

問　題　IX

次ノ不等式ヲ解ケ.

1. $3-2x>-11$
2. $\frac{x}{3}>\frac{2}{5}x+4$ (圖解セヨ)
3. $\frac{x}{2}-1>\frac{x}{7}+\frac{5}{14}$
4. $x^2-5x+4>0$ (圖解セヨ)
5. $x^2-5x-14<0$
6. $x^2-11x+10<0$

7. $x^2+10x>42-x$　　8. $3x^2+27<30+2x-5x^2$

9. $x^2-29x+5<11-4x^2$　　10. $(x-1)(2x-3)>15x-39$

11. $\frac{x-1}{3}+\frac{1}{x-1}>\frac{4}{3}$　　12. $\frac{3x-2}{5}>x^2-\frac{2}{5}$

13. $(x-1)(x-2)(x-3)>0$　　14. $x(x+2)(x-3)<0$

15. $\frac{x(x-2)}{x+2}>0$　　16. $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}<0$

17. a, b ガ相異ナル正數ナルトキ次ノ不等式ヲ證明セヨ.

(1) $\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$　　(2) $\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$

18. a, b, c ガ相異ナル實數ナルトキハ

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$$

ナリ. 之ヲ證明セヨ.

19. 方程式 $x^2+2(a-1)x+5a-9=0$ ガ實根ヲ有スルガ爲ニ a ノ取ルベキ値ノ限界ヲ求ム.

20. 方程式 $(k+3)x^2-4x+k=0$ ガ實根ヲ有スルガ爲ニハ k ハ如何ナル値ヲ取ルベキカ.

21. $\frac{x^2-ax-12}{x^2+2}$ ノ値ヲ3ナラシムベキ x ノ實數値ヲ求メ,且 a ノ取リ得ベキ値ノ限界ヲ定メヨ.

22. $x^2-6x+8>0$, $x^2-9x+18<0$ ヲ同時ニ滿足スベキ x ノ整數値ヲ求ム.

23. $xy>1$ ナルトキハ $\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+y\right)>0$ ナルコトヲ證明セヨ.

24. a, b ガ共ニ正ニシテ相等シカラザルトキハ $a^3+b^3>ab(a+b)$ ナルコトヲ證明セヨ.

25. a, b ガ共ニ正ニシテ相等シカラザルトキハ a^3-b^3 ト $3a^2(a-b)$ トハ何レガ大ナルカ.

26. a, b, m, n ハ實數ニシテ且 $a>0, b>0$ ナルトキ $\frac{m^2}{a}+\frac{n^2}{b}$ ト $\frac{(m+n)^2}{a+b}$ トハ何レガ大ナルカ,又此等二式ノ値ガ相等シキガ爲ノ條件如何.

27. 次ノ各式ノ極大,極小ヲ求メヨ.

(1) $2x^2-7x+11$　　(2) $3-5x-2x^2$

(3) $x^2-8x+22$　　(4) $(3-2x)(5+x)$

28. 甲乙二人正方形ノ周圍ヲ廻ルニ,甲ガ出發點ナル一ツノ角ノ頂點ヲ發シテ次ノ角頂ニ達シタルトキ,乙ハ甲ト同ジ出發點ヲ發シテ甲ト同方向ニ廻ルモノトスレバ,乙ノ出發後兩人ガ初メテ正方形ノ同一邊上ニ來ル迄ノ時間如何.
但甲乙ノ速サハ夫夫毎分72間及67間トシ,正方形ノ一邊ハ60間ナリトス.

第六章　最大公約數及最小公倍數

33. 二ツノ多項式ノ最大公約數ヲ求ムル一般ナル方法.

或一ツノ文字ニツキテノ二ツノ多項式ノ最大公約數ヲ求ムルトキ,容易ニ因數ニ分解サレザル場合ニハ一般ナル方法ニヨルベシ. 其ノ方法ハ次ノ如シ.

二ツノ多項式A, Bノ最大公約數ヲ求ムルニハ,先ヅ兩式A, Bヲ特ニ着目セル共通ノ文字ニ關シテ降羃ノ順ニ排列シ,然ル後AガBヨリモ低次ナラズトスレバBヲ以テAヲ除スベシ. 若割切ルレバB夫自身ガ所要ノ最大公約數ナリ. 若割切レズシテ剩餘ヲ生ズレバ之ヲ除數トシテBヲ除シ,尙剩餘ヲ生ズレバ之ヲ以テ此ノ除法ノ除數ヲ除シ,逐次斯ノ如クシテ終ニ割切レル迄計算ヲ續ケ行

フベシ. 然ルトキハ最後ノ除數ガ所要ノ最大公約數ナリ.

此ノ方法ヲ**連除法**(又ハ**互除法**)ト云フ.

【注意】 與ヘラレタル多項式ガ單項因數ヲ含ムトキハ先ヅ之ヲ取去リ,然ル後上ノ方法ヲ施スベシ. 而シテ別ニ單項因數ノ最大公約數ヲ求メテ之ヲ所要ノ最大公約數ノ因數ノ一部トナスベシ.

例. $x^4-4x^3+3x^2$ ト $4x^4-9x^3-15x^2+18x$ トノ最大公約數ヲ求ム.

解　先ヅ單項因數ヲ括弧外ニ出セバ

$$x^4-4x^3+3x^2=x^2(x^2-4x+3)$$

$$4x^4-9x^3-15x^2+18x=x(4x^3-9x^2-15x+18)$$

因テ先ヅ單項因數ノ最大公約數ハ x ナリ.

次ニ多項因數ノ最大公約數ハ次ノ如シ.

$$\begin{array}{r|r|l}
 & 4x+7 & \\
x^2-4x+3 & 4x^3-9x^2-15x+18 & \\
 & 4x^3-16x^2+12x & \\
\hline
 & 7x^2-27x+18 & \\
 & 7x^2-28x+21 & x-1 \\
\hline
 & x-3 & x^2-4x+3 \\
 & & x^2-3x \\
\hline
 & & -x+3 \\
 & & -x+3 \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

故ニ $x-3$ ガ多項因數ノ最大公約數ナリ.

故ニ所要ノ最大公約數ハ $x(x-3)$ ナリ.

【注意】 上記ノ方法ニヨリ次第ニ除法ヲ行ヒ,終ニ着目セル文字ヲ含マザル(零ナラザル)剩餘ヲ生ズルトキハ兩式ハ其ノ文字ヲ含メル公約數ヲ有セザルナリ.

(問) 次ノ式ノ最大公約數ヲ求ム.

(1) $x^2+3x+2,\quad x^2+4x+3$

(2) $x^3-10x^2+21x,\quad x^3-x^2-12x$

(3) $x^3-x^2-9x+14,\quad x^2+x-6$

(4) $a^3+6a^2+11a+6,\quad a^3+5a^2+5a-3$

(5) $6y^2-14y-12,\quad 6y^3-14y^2+8$

34. 前節ノ方法ノ證明.

前節ニ述ベタル方法ヲ證明スルニ當リ,先ヅ以テ次ノ(I)及(II)ノ定理ヲ證明セン.

(I) 整式 P ガ整式 A ノ約數ナルトキハ P ハ又 mA ノ約數ナリ. 但 m ハ任意ノ整式又ハ數トス.

何トナレバ,P ニテ A ヲ除シタル商ヲ a トセバ

$$A=aP,\qquad \therefore\ mA=maP$$

因テ P ハ mA ノ約數ナリ.

(II) 整式 P ガ二ツノ整式 A, B ノ公約數ナルトキハ P ハ又 $m\mathrm{A}\pm n\mathrm{B}$ ノ約數ナリ. 但 m, n ハ任意ノ整式又ハ數トス.

何トナレバ今 P ニテ A, B ヲ除シタル商ヲ夫夫 a, b トスレバ

$$A=aP,\quad B=bP$$

$$\therefore\ mA\pm nB=maP\pm nbP=(ma\pm nb)P$$

因テ P ハ $m\mathrm{A}\pm n\mathrm{B}$ ノ約數ナリ.

偖之ニヨリテ前節ノ方法ヲ證明セン.

先ヅ A ヲ B ニテ除シテ割切レルトキハ B 夫自身ガ A ト B トノ最大公約數ナルコト明ナリ.

若 A ヲ B ニテ除シタルトキ商 p, 剩餘 C ヲ得タリトスレバ

$$\begin{array}{l}
B\,\big|\,\underline{\;p\;}\\
\quad\;\big|\;A\\
\;\;\underline{pB}\,\big|\,\underline{\;q\;}\\
\quad\;C\;\big|\;B\\
\qquad\underline{qC}\,\big|\,\underline{\cdots}\\
\qquad\;\;D\;\big|\;C\\
\qquad\qquad\cdots\\
\qquad\quad\underline{\cdots}\,\big|\,\underline{\;t\;}\\
\qquad\quad\;K\;\big|\;H\\
\qquad\qquad\quad\;\underline{tK}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$A-pB=C\ \ldots\ldots(1)$$

故ニ(II)ニヨリ A ト B トノ公約數ハ何レモ C ノ約數ナリ. 從テ A ト B トノ公約數ハ總テ B ト C トノ公約數ナリ.

又(1)ヲ書キ直セバ

$$A=pB+C$$

トナル. 故ニ(II)ニヨリBトCトノ公約數ハ何レモ皆Aノ約數ナリ. 從テBトCトノ公約數ハ總テAトBトノ公約數ナリ.

因テAトBトノ公約數ハ全クBトCトノ公約數ト一致ス. 從テAトBトノ最大公約數ハBトCトノ最大公約數ナリ.

次ニBヲCニテ除シテ剩餘Dヲ得タリトスレバ上ト同理ニヨリBトCトノ最大公約數ハCトDトノ最大公約數ナリ.

偖最後ニHガKニテ割切レタリトスベシ. 然ルトキハ上記ノ論法ヲ進ムルコトニヨリ, HトKトノ最大公約數ハAトBトノ最大公約數ナルコトヲ知ル. 而シテHハKニテ割切レルガ故ニKハHトKトノ最大公約數ナリ.

故ニKハAトBトノ最大公約數ナリ.

【注意】 二ツノ多項式A, Bノ公約數ハ何レモ皆H, Kノ公約數ニシテ從テKノ約數ナリ. 因テ次ノ定理成立ス.

定理. 二ツノ整式ノ公約數ハ其ノ最大公約數ノ約數ナリ.

又二ツノ多項式A, Bニツキテ連除法ヲ適用シ最後ニHヲKニテ除シタルトキ着目セル文字ヲ含マズシテ且零ナラザル剩餘Lヲ得タリトセヨ. 斯ノ如キ場合ニ於テモ上記ノ論法ニヨリA, Bニ公約數アラバ之ハLノ約數ナラザルベカラザルコトトナル. 然ルニLハ着目セル文字ヲ含マズシテ且零ナラザルガ故ニ斯ノ如キ約數(其ノ文字ヲ含ム所ノ)ヲ有スルコトヲ得ズ. 故ニ斯ノ如キ場合ニハA, Bハ其ノ文字ニ關スル公約數ヲ有セザルナリ.

二ツノ整式ガ公約數ヲ有セザルトキハ**互ニ素**ナリト云フ.

例ヘバ x^2+x-1 ト x^2+1 ノ如キハ互ニ素ナリ.

又明ニ二ツノ多項式ヲ其ノ最大公約數ニテ除シタル商ハ互ニ素ナリ.

35. 最大公約數ヲ求ムル例.

連除法ニヨリ最大公約數ヲ求ムルトキ, 途中ニ於ケル除法ヲ行フニ際シ, 被除數或ハ除數ヲ單項式(或ハ數)ニテ便宜乘除スルトモ多項式ナル最大公約數ニハ影響ナシ. 但最大公約數中ノ單項因

數ハ豫メ別ニ求メ置クコトニ注意スベシ.

故ニ途中ノ計算ニ於テ分數ノ形ノ商ノ生ズルコトヲ避ケンガ爲ニ適宜ニ除數或ハ被除數ヲ單項式或ハ數ニテ乘除シテ計算ヲ簡便ナラシムルコトヲ得ベシ.

例. $2x^2-5x+2$ ト $4x^3+12x^2-x-3$ トノ最大公約數ヲ求ム.

解

$$\begin{array}{r|l}
2x^2-5x+2 & 2x+11 \\ \hline
 & 4x^3+12x^2-x-3 \\
 & 4x^3-10x^2+4x \\ \hline
 & \quad 22x^2-5x-3 \\
 & \quad 22x^2-55x+22 \\ \hline
\end{array}$$

$$\text{25ニテ除ス}\cdots\cdots 25 \,\Big|\, \frac{50x-25}{2x-1} \quad \begin{array}{|r}
x-2 \\ \hline
2x^2-5x+2 \\
2x^2-x \\ \hline
-4x+2 \\
-4x+2 \\ \hline
0
\end{array}$$

答　$2x-1$

例　　題

次ノ式ノ最大公約數ヲ求ム.

1. $x^3-4x^2+7x-6,\quad x^3-5x^2+x+10$
2. $x^4-4x^3+7x^2-2x-5,\quad x^3+4x^2-6x-5$
3. $x^3+5x^2+10x+12,\quad x^3+4x^2+5x+6$
4. $a^3-a^2-5a-3,\quad a^3-4a^2-11a-6$

5. $x^3-4x+15,\quad x^4+x^2+25$
6. $x^4-2x^3-4x-7,\quad x^4+x^3-3x^2-x+2$
7. $2x^3+3x^2-1,\quad 4x^3+x-1$

---

36. 數多ノ多項式ノ最大公約數.

三ツノ多項式ノ最大公約數ヲ求ムルニハ,其ノ中ノ任意ノ二式ノ最大公約數ヲ求メ,其ノ結果ト第三式トノ最大公約數ヲ求ムレバ可ナリ.

四ツ以上ノ多項式ノ最大公約數ヲ求ムル方法モ亦之ニ準ズ.

其ノ理由ハ,今A, B, Cヲ以テ與ヘラレタル三式トシ,AトBトノ最大公約數ヲDトスレバ,DトCトノ公約數ハ皆A, B, Cノ公約數ニシテ,又A, B, Cノ公約數ハ皆DトCトノ公約數ナリ. 故ニDトCトノ公約數ハ全クA, B, Cノ公約數ト一致ス. 從テDトCトノ最大公約數ハA, B, Cノ最大公約數ナリ.

例. $x^3+x^2-4x-4,\ x^3-x^2-4x+4,\ x^3-x^2-x-2$ ノ最大公約數ヲ求ム.

解　先ヅ第一式ト第二式トノ最大公約數ヲ求ムレバ x^2-4 ナリ,

次ニx^2-4ト第三式トノ最大公約數ヲ求ムレバ$x-2$ナリ.

故ニ所要ノ最大公約數ハ$x-2$ナリ. 答 $x-2$

例　題

次ノ式ノ最大公約數ヲ求ム.

1. $x^3+3x^2-4,\ x^3+2x^2-x-2,\ x^3-1$
2. $4x^3+6x^2-2,\ 4x^3+4x^2-x-1,\ x^3+1$
3. $x^3-2x^2+3x-6,\ x^3-4x^2+7x-6,\ x^3-5x^2+x+10$
4. $x^4-1,\ 2x^3+3x^2-2x-3,\ x^6-1$
5. $x^4+x^2+1,\ x^3-1,\ x^6-1,\ x^4+x^3-x-1$

37. 數ノ最大公約數.

整數ノ最大公約數ヲ求ムル一般ナル方法ハ整式ノ場合ト同様ナル形式ニヨルナリ.

例. 423ト2303トノ最大公約數ヲ求ム.

解

$$\begin{array}{r|r|r|r}
 & 5 & & \\
423 & 2303 & & \\
 & 2115 & 2 & \\
 & 188 & 423 & \\
 & & 376 & 4 \\
 & & 47 & 188 \\
 & & & 188 \\
 & & & 0
\end{array}$$

答 47

此ノ方法ノ理由モ亦整式ノ場合ニ於ケルモノト同様ナル形式ニヨルナリ.

卽チ先ヅ

(I) 或數ノ約數ハ其ノ數ノ倍數ノ約數ナリ.

ナル性質ニヨリ

(II) 或二數ノ公約數ハ此等二數ノ倍數ノ和及差ノ各ノ約數ナリ.

ナル性質アルコトヲ證明シ,之ヲ用ヒテ整式ノ場合ニ於ケルト同様ニシテ證明スルナリ.

例ヘバ上例ニツキテハ次ノ如シ.

$$2303-423\times5=188$$

ナリ. 故ニ423ト2303トノ公約數ハ何レモ皆188ノ約數ニシテ且423ノ約數ナリ,從テ423ト2303トノ公約數ハ總テ423ト188トノ公約數ナリ.

次ニ　$423\times5+188=2303$

ナリ. 故ニ423ト188トノ公約數ハ2303ノ約數ニシテ且423ノ約數ナリ,從テ423ト188トノ公約數ハ總テ423ト2303トノ公約數ナリ.

故ニ2303ト423トノ公約數ハ423ト188トノ公約數ニ全ク一致ス. 從テ2303ト423トノ最大公

約數ハ 423 ト 188 トノ最大公約數ナリ.

同理ニヨリ 423 ト 188 トノ最大公約數ハ 188 ト 47 トノ最大公約數ナリ.

然ルニ 188 ハ 47 ニテ割切レ,從テ此等二數ノ最大公約數ハ 47 ナリ.

故ニ 2303 ト 423 トノ最大公約數ハ 47 ナリ.

他ノ場合ニ於テモ其ノ證明法ハ同樣ナリ.

尙三ツ以上ノ數ノ最大公約數ヲ求ムル方法及其ノ理由モ亦整式ノ場合ニ於ケルト同樣ナリ.

【注意】 同ジク最大公約數ト云フト雖モ整式ノ場合ト數ノ場合トニ於テ大イニ其ノ意味ヲ異ニス. 卽チ數ノ場合ニハ公約數中ノ最大ナルモノヲ指セドモ整式ノ場合ニハ其ノ數値ノ大小ニハ關係ナク單ニ公約數中次數ノ最大ナルモノヲ指スナリ. 學生諸子ハ此ノ區別ニ能ク注意スベシ.

例　　題

次ノ數ノ最大公約數ヲ求ム.

1. 391, 805　　2. 1102, 1596

3. 2373, 6667　　4. 32721, 65169

5. 1121, 6821, 2831　　6. 228456, 47952, 6804

7. 325, 832, 351, 1092

---

38. 二ツノ多項式ノ最小公倍數ヲ求ムル一般ナル方法.

二ツノ多項式ノ最小公倍數ヲ求ムルトキ,容易ニ因數ニ分解サレザル場合ニハ一般ナル方法ニ依ルベシ. 其ノ方法ハ次ノ如シ.

二ツノ多項式ノ最小公倍數ヲ求ムルニハ,先ヅ其等ノ二式ノ最大公約數ヲ求メ,然ル後其等ノ二式中ノ何レカ一方ヲ此ノ最大公約數ニテ除シタル商ヲ他ノ式ニ乘ズベシ.

今 A 及 B ヲ以テ與ヘラレタル二式トシ, G ヲ其ノ最大公約數, L ヲ其ノ最小公倍數トセヨ.

A, B ヲ G ニテ除シタル商ヲ夫夫 A', B' トスレバ

$$A=A'G,\quad B=B'G$$

ナリ,而シテ A' ト B' トハ公約數ヲ有セズ.

故ニ積 $A'B'G$ ハ A ト B トニテ整除シ得ル最低

次ノ式ナリ.

$$\therefore\quad L=A'B'G$$

因テ　$L=AB'=A'B=\dfrac{AB}{G}$

又之ヨリ　$LG=AB$

故ニ,或二ツノ整式ノ最小公倍數ト最大公約數トノ積ハ其等ノ二式ノ積ニ等シ.

例. x^3+2x-3 ト x^3+2x^2-5x+2 トノ最小公倍數ヲ求ム.

解 先ヅ兩式ノ最大公約數ヲ求ムレバ $x-1$ ヲ得. 而シテ

$$x^3+2x-3=(x^2+x+3)(x-1)$$

$$x^3+2x^2-5x+2=(x^2+3x-2)(x-1)$$

故ニ所要ノ最小公倍數ハ次ノ如シ.

$$(x-1)(x^2+x+3)(x^2+3x-2)\quad 答.$$

【注意】 與ヘラレタル二ツノ整式ガ互ニ素ナルトキハ此等二式ノ積ガ所要ノ最小公倍數ナリ.

39. 數多ノ多項式ノ最小公倍數.

三ツノ多項式ノ最小公倍數ヲ求ムルニハ,其ノ中ノ任意ノ二式ノ最小公倍數ヲ求メ,其ノ結果ト第三式トノ最小公倍數ヲ求ムレバ可ナリ.

四ツ以上ノ多項式ノ場合モ亦之ニ準ズ.

(理由ハ學生諸子自ラ考究セヨ)

例題

次ノ諸式ノ最小公倍數ヲ求ム.

1. $x^2-11x+28,\ x^3-11x^2+33x-20$
2. $x^3-6x^2+11x-6,\ x^3-9x^2+26x-24$
3. $6x^2+x-2,\ 21x^2+17x+2,\ 18x^2+15x+2$
4. $x^2-1,\ x^3-1,\ x^3+1,\ x^4-1$
5. $x^3+1,\ x^2+x+1,\ x^4+x^2+1$

40. 數ノ最小公倍數.

整數ノ最小公倍數ヲ求ムル一般ナル方法ハ整式ノ場合ト同様ナリ.

例ヘバ 60 ト 45 トノ最大公約數ハ 15 ナリ,而シテ

$$60=4\times15,\quad 45=3\times15$$

ニシテ,二數ヲ其ノ最大公約數 15 ニテ除シタル商ノ 3 ト 4 トハ互ニ素ナリ.

故ニ 60 ト 45 トノ最小公倍數ハ $3\times4\times15$ ナラザルベカラズ. 之ハ 60×3 或ハ 45×4 トモ見做サル. 故ニ

二ツノ整數ノ最小公倍數ヲ求ムルニハ,先ヅ其ノ最大公約數ヲ求メ,之ニテ其等ノ二數ノ一方ヲ除シタル商ト他ノ數トノ積ヲ求ムレバ可ナリ.

例. 296 ト 333 トノ最小公倍數ヲ求ム.

解

$$\begin{array}{r|r|r} & 1 & \\ 296 & 333 & \\ & 296 & 8 \\ \hline & 37 & 296 \\ & & 296 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

$296 \div 37 = 8$

$333 \times 8 = 2664$

答 2664

三ツ以上ノ整數ノ最小公倍數ヲ求ムル方法及其ノ理由モ亦整式ノ場合ニ於ケルト同樣ナリ.

【注意】 同ジク最小公倍數ト云フト雖モ整式ノ場合ト數ノ場合トニ於テ大イニ其ノ意味ヲ異ニスルコトニ注意スベシ.

例　題

次ノ數ノ最小公倍數ヲ求ム.

1. 2021, 6407
2. 323, 437, 299
3. 1121, 6821, 2831
4. 28, 100, 196, 112
5. 120, 60, 220, 528

問　題　X

次ノ式ノ最大公約數ヲ求ム.

1. $2x^4-2x^3+x^2+3x-6,\ 4x^4-2x^3+3x-9$
2. $3x^3-4x^2-5x+2,\ 6x^3-17x^2+11x-1,\ 3x^3-x^2-12x+4$
3. $a^3+3a^2-a-3,\ a^4+4a^3-12a-9,\ a^3+4a^2+2a-3$

次ノ式ノ最小公倍數ヲ求ム.

4. $x^2-a^2,\ x^2-(a+b)x+ab,\ x^3-b^3$
5. $2x^3-x^2-26x-15,\ 2x^3-9x^2+2x+5$
6. $x^2-4a^2,\ x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3,\ x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$
7. $x^4+3x^2+6x+35,\ \ x^3-4x^2+10x-7$ ノ最大公約數ト最小公倍數トヲ求ム.
8. $2x^3-x^2+x-6$ ト $6x^3-9x^2+10x-15$ トヲ同時ニ零ナラシムル x ノ値ヲ求ム.
9. 或二式ノ最大公約數ハ $x-1$ ニシテ其ノ最小公倍數ハ $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ ナリト云フ. 此等ノ二式ヲ求ム. 但何レモ一次式ナラズトス.
10. 二ツノ二次式アリ,其ノ最大公約數ハ $x+2$,最小公倍數ハ $6x^3+7x^2-9x+2$ ナリ. 兩式ヲ求ム.

第七章　分數式

41. 分數式ノ計算.

例 1. $\dfrac{x^3-2x^2+x+4}{2x^3-9x^2+17x-12}$ ヲ簡單ニセヨ.

解　分母ト分子トノ最大公約數ヲ求ムレバ

$$x^2-3x+4$$

ヲ得. 之ニテ兩項ヲ除スレバ與ヘラレタル分數式ハ

$$\frac{x+1}{2x-3}$$

トナル.　答 $\dfrac{x+1}{2x-3}$

例 2. $\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{2a}{a^2+x^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+x^4}$

ヲ簡單ニセヨ.

解　此ノ場合ニハ總テノ分數式ヲ一時ニ通分スルヨリモ順次ニ加法ヲ施ス方簡單ナリ.

$$\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}=\frac{(a+x)+(a-x)}{a^2-x^2}=\frac{2a}{a^2-x^2}$$

$$\frac{2a}{a^2-x^2}+\frac{2a}{a^2+x^2}=\frac{2a(a^2+x^2)+2a(a^2-x^2)}{a^4-x^4}=\frac{4a^3}{a^4-x^4}$$

$$\frac{4a^3}{a^4-x^4}+\frac{4a^3}{a^4+x^4}=\frac{4a^3(a^4+x^4)+4a^3(a^4-x^4)}{a^8-x^8}=\frac{8a^7}{a^8-x^8}$$

答 $\dfrac{8a^7}{a^8-x^8}$

例 3. $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}$ ヲ簡單ニセヨ.

解　此ノ場合ニモ亦一時ニ通分セザルヲ可トス. 卽チ

$$\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}=\frac{(x+3)-(x-3)}{x^2-9}=\frac{6}{x^2-9}$$

$$\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}=\frac{3(x-1)-3(x+1)}{x^2-1}=\frac{-6}{x^2-1}$$

此等二ツノ結果ヲ相加フレバ

$$\frac{6}{x^2-9}+\frac{-6}{x^2-1}=\frac{6(x^2-1)-6(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)}$$

$$=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}\quad 答.$$

例 4. $x+\dfrac{1}{x}=1$ ナルトキ $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ ノ値ヲ求ム.

解 $$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$$

$$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}^2-2$$

之ニ $x+\dfrac{1}{x}=1$ ヲ代入スレバ

$$x^4+\frac{1}{x^4}=(1^2-2)^2-2=-1 .$$

答 -1

例題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ.

1. $\dfrac{x^3+x^2-10x+8}{x^3+4x^2-x-4}$　　2. $\dfrac{2x^3+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5}$

3. $\dfrac{x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-b^4}$　　4. $\dfrac{6a^4-5a^3-20a^2+1}{4a^4-17a^2-10a+3}$

5. $\dfrac{b^2-c^2+2ca-a^2}{b^2-c^2-2ab+a^2}\times\dfrac{c^2+2ca+a^2-b^2}{c^2-2ab-a^2-b^2}$

6. $\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$

7. $\dfrac{9}{3x+a}-\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{9}{a-3x}+\dfrac{1}{x-a}$

8. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}$

9. $\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}\right)(a^4+a^3)$

10. $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2-y^2}\right)$

11. $\dfrac{2}{x^3-x^2+x-1}-\dfrac{2}{x^3+x^2+x+1}$

12. $(yz+zx+xy)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-xyz\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)$

13. $\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left\{1+\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)}{(a-b+c)(a+b-c)}\right\}$

14. $\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\left(1-\dfrac{c}{a}\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{c}{b}\right)\left(1-\dfrac{a}{b}\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{a}{c}\right)\left(1-\dfrac{b}{c}\right)}$

15. $\dfrac{(x-a)(y-a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-b)(y-b)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-c)(y-c)}{(c-a)(c-b)}$

16. $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}$

42. 無限大.

例ヘバ,變數xニ關スル分數式$\dfrac{4}{x}$ニ於テ,xノ値ガ漸次小トナリ限ナク0ニ接近スル場合ヲ考ヘンニ,例ヘバxニ

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001,\ 0.00001,\ \ldots\ldots$$

等ノ値ヲ與フレバ此ノ式ノ値ハ夫夫

$$40,\ 400,\ 4000,\ 40000,\ 400000,\ \ldots\ldots$$

等トナリ,xノ値ガ限ナク0ニ接近スルニ從テ此ノ式ノ値ハ限ナク大トナル,即チ如何ニ大ナル數ヲ取ルモ夫ヨリモ大トナルベシ. 何トナレバ今Aヲ以テ任意ニ取リタル大ナル正數トスレバ

$$x<\frac{4}{A}$$

ナル如キ正ノ値ヲxニ與フレバ

$$\frac{4}{x}>A$$

トナレバナリ.

xノ値ガ限ナク0ニ接近スルニ從テ$\dfrac{4}{x}$ノ値ガ限ナク大トナルコトヲ稱シテ「xガ0ニナリタル極限ニ於テ$\dfrac{4}{x}$ハ**無限大ニナル**」ト云ヒ,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}=\infty$$

ナル記號ヲ以テ之ヲ表ス.

以上ニ於テハ x ノ値ガ正ノ數ニシテ限ナク 0 ニ接近スル場合ヲ考究シタリ. 次ニ x ノ値ガ負ノ數ニシテ限ナク 0 ニ接近スル場合ヲ考フルニ, 例ヘバ x ニ

$$-0.1,\ -0.01,\ -0.001,\ -0.0001,\ -0.00001,\ \ldots\ldots$$

ナル値ヲ與フレバ $\frac{4}{x}$ ノ値ハ夫夫

$$-40,\ -400,\ -4000,\ -40000,\ -400000,\ \ldots\ldots$$

トナリテ此ノ式ノ値ハ負數ニシテ其ノ絕對値ガ限ナク大トナル.

偖正數ニシテ絕對値ガ限ナク大トナル場合ト, 負數ニシテ絕對値ガ限ナク大トナル場合トヲ區別センガ爲ニ前者ニ於テハ**正ノ無限大ニナル**ト云ヒ,後者ニ於テハ**負ノ無限大ニナル**ト云フ.

此等ヲ區別シテ表スニ次ノ如キ記號ヲ用フ.

$$\lim_{x\to+0}\frac{4}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{4}{x}=-\infty$$

一般ニ $\frac{a}{x}$ ノ値ニツキテモ同樣ナリ. 卽チ $a>0$ ナル場合ニ於テハ, x ガ正數ニシテ限ナク

0 ニ接近スレバ,此ノ式ノ値モ正數ニシテ限ナク大トナル. 卽チ

$$\lim_{x\to+0}\frac{a}{x}=+\infty$$

又同樣ニシテ

$$\lim_{x\to-0}\frac{a}{x}=-\infty$$

次ニ $a<0$ ナル場合ニハ次ノ如シ.

$$\lim_{x\to+0}\frac{a}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{a}{x}=+\infty$$

尙例ヘバ $\frac{4}{x-3}$ ナル分數式ニ於テ x ガ限ナク 3 ニ接近スル場合ヲ考フレバ次ノ如シ.

x ガ 3 ヨリモ大ニシテ限ナク 3 ニ接近スレバ此ノ式ノ値ハ正數ニシテ限ナク大トナル. 之ヲ

$$\lim_{x\to3+0}\frac{4}{x-3}=+\infty$$

ナル記號ヲ以テ表スコトアリ. 但 $\lim\limits_{x\to3+0}$ ナル記號ハ x ノ値ガ 3 ヨリモ大ナル値ヨリ減小シテ限ナク 3 ニ接近シタル極限ヲ表スナリ.

又 x ガ 3 ヨリモ小ニシテ限ナク 3 ニ接近スレバ此ノ式ノ値ハ負數ニシテ其ノ絕對値ハ限ナク

大トナル．卽チ

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{4}{x-3}=-\infty$$

同様ニシテ一般ニ $\dfrac{a}{x-a}$ 或ハ $\dfrac{a}{bx+c}$ ナル分數式ニ於テ x ガ分母ヲ零トスル様ナル値ニ限ナク接近スル場合ヲ考究スルコトヲ得ベシ．

次ニ例ヘバ $\dfrac{4}{x}$ ニ於テ x ノ値ガ正數ニシテ限ナク大トナレバ此ノ式ノ値ハ限ナク小トナル．

例ヘバ x ニ

100, 1000, 10000, 100000, ...

ナル値ヲ與フレバ此ノ式ノ値ハ夫夫

0.04, 0.004, 0.0004, 0.00004, ...

トナルガ如シ．

此ノ事柄ヲ稱シテ「x ガ無限大トナリタルトキニ $\dfrac{4}{x}$ ノ値ハ0トナル」ト云ヒ，之ヲ表スニ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$$

ナル記號ヲ用フ．

x ノ値ガ負數ニシテ絶對値ガ限ナク大トナルトキモ亦同様ナリ．卽チ

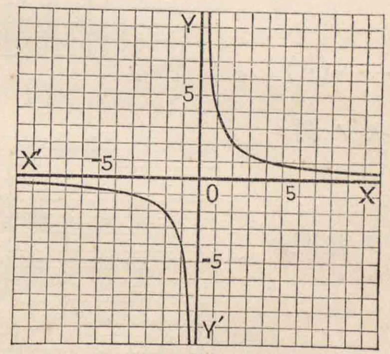
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0$$

43. 分數式ノ値ノ變化．

(1) $\dfrac{a}{x}$ ノぐらふ．

例ヘバ　　$y=\dfrac{4}{x}$ ....(1)

ノぐらふヲ畫クコトハ既ニ學ビタル所ニシテ，其ハ次ニ示スガ如シ．



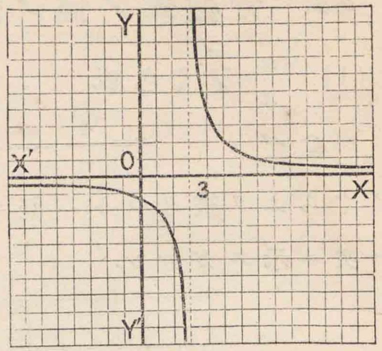
尚一般ニ $y=\dfrac{a}{x}$ ノぐらふモ亦同様ノ形ヲ有シ，a ノ正負ニヨリ其ノ所在ヲ異ニスルコトモ既ニ學ビタル所ナリ．

(2) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ノぐらふ．

例ヘバ　　$y=\dfrac{4}{x-3}$ ....(2)

ノぐらふハ $y=\dfrac{4}{x}$ ノぐらふト全ク同様ナル形ヲ有シ，唯其ノ位置ガ3ニ相當スル距離ダケ右方

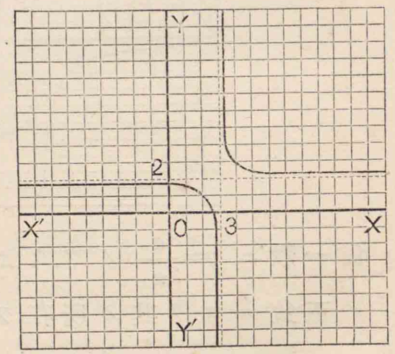
ニ移動シタルモノニ外ナラズ. (圖ヲ見ヨ) 其ノ理由ハ學生諸子自ラ考究セヨ.



又例ヘバ

$$y=\frac{2x-5}{x-3}\cdots\cdots(3)$$

ノぐらふハ次ノ圖ノ如シ.



(3)ノ右邊ヲ書直セバ

$$y=2+\frac{1}{x-3}$$

因テ此ノぐらふハ

$$y=\frac{1}{x-3}\cdots\cdots(4)$$

ノぐらふヲY軸ノ正ノ方向ニ於テ2ニ相當スル距離ダケ移動シタルモノナリ. 又(4)ハ(2)ト同様ナル形ヲ有スルニヨリ,結局(3)ノぐらふハ $y=\frac{1}{x}$ ノぐらふヲX軸ノ正ノ方向ニ於テ3ニ相當スル距離ダケ移動シ,次ニ之ヲY軸ノ正ノ方向ニ於テ

2ニ相當スル距離ダケ移動シタルモノナリ.

スベテ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ノぐらふハ同樣ニシテ $y=\frac{k}{x}$ ナル形ノ分數式ノぐらふニ導クコトヲ得ルモノナリ.

(問) 次ノ分數式ノぐらふヲ畫ケ.

$$\frac{-3}{x-5},\quad \frac{1}{x+2},\quad \frac{3x}{x-1},\quad \frac{4x+3}{2x-3}$$

(3) 他ノ例.

例 1. xガ實數ナルトキ $\frac{x^2-2x-5}{2x-7}$ ハ2ト3トノ間ノ値ヲ決シテ取ルコトナシ. 之ヲ證明セヨ.

解 此ノ式ノ値ヲyニテ表セバ

$$y=\frac{x^2-2x-5}{2x-7}\cdots\cdots(5)$$

分母ヲ拂ヒテ移項スレバ

$$x^2-2(y+1)x+7y-5=0$$

偖xノ値ハ實數ナルベキガ故ニ,此ノ方程式ノ判別式ハ負數ナルコトヲ得ズ. 卽チ

$$(y+1)^2-7y+5\geqq 0$$

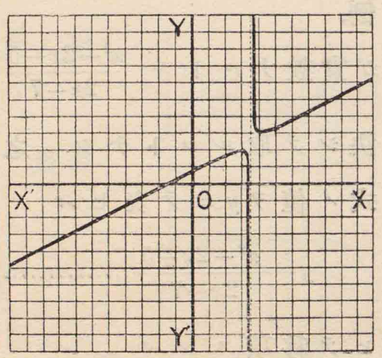
左邊ヲ書直セバ

$$(y-2)(y-3)\geqq 0$$

$$\therefore \quad y \leqq 2 \quad 或ハ \quad y \geqq 3$$

因テ y ハ 2 ト 3 トノ間ノ値ヲ取ルコトヲ得ズ.

【注意】 $y=2$ ナルトキ $x=3$ ニシテ, $y=3$ ナルトキ $x=4$ ナリ. 即チ與ヘラレタル式ハ $x=3$ トナルトキ $y=2$ ナル極大値ニ達シ,又 $x=4$ トナルトキ $y=3$ ナル極小値ニ達ス. 今此ノ式ノぐらふヲ畫ケバ次ノ如シ.



例 2. x ガ實數ナルトキ $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ ノ取ルベキ値ノ範圍ヲ定メヨ.

解 $$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ト置キ,分母ヲ拂ヒテ移項スレバ

$$(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0$$

偖 x ノ値ハ實數ナルベキガ故ニ,此ノ方程式ノ判別式ハ負數ナルコトヲ得ズ. 即チ

$$(y+1)^2-4(y-1)^2 \geqq 0$$

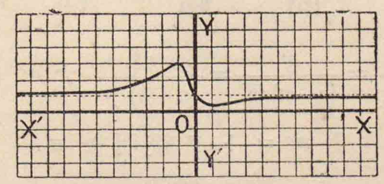
左邊ヲ書キ直セバ

$$-(y-3)(3y-1) \geqq 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} \leqq y \leqq 3$$

是即チ所要ノ範圍ナリ.

【注意】 $y=\dfrac{1}{3}$ ナルトキハ $x=1$ ニシテ, $y=3$ ナルトキハ $x=-1$ ナリ. 即チ與ヘラレタル分數式ハ $x=1$ ナルトキ $y=\dfrac{1}{3}$ ナル極小値ニ達シ, $x=-1$ ナルトキ $y=3$ ナル極大値ニ達ス. 今此ノ式ノぐらふヲ畫ケバ次ノ如シ.



例題

次ノ函數ノぐらふヲ畫ケ.

1. $\dfrac{5x-8}{x}$ 2. $\dfrac{x+1}{x-1}$ 3. $\dfrac{5x-1}{2x+1}$

4. x ガ實數ナルトキハ $x+\frac{1}{x}$ ハ 2 ト -2 トノ間ノ値ヲ取リ得ザルコトヲ證明セヨ.

5. x ガ實數ナルトキハ $x-\frac{1}{x}$ ハ如何ナル實數値ヲモ取リ得ルコトヲ示セ.

6. $y=\frac{x^2-3x-10}{x-3}$ ノぐらふヲ畫ケ.(大略ニテヨシ)

7. $\frac{1}{x^2+x+1}$ ノ値ハ x ノ實數値ニ對シ,決シテ負數トハナラズ,又 $\frac{4}{3}$ ヨリモ大トハナラザルコトヲ證明セヨ.

8. 次ノ式ノぐらふヲ畫キ,其ノ異同ヲ示セ.

(1) $\frac{1}{x^2}$ (2) $\frac{4}{(x-2)^2}$

問　題　XI

1. $\frac{x}{(b-c)yz}=\frac{y}{(c-a)zx}=\frac{z}{(a-b)xy}$ ナルトキハ

$x^2+y^2+z^2=0$ ナルコトヲ證明セヨ.

2. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ナルトキ,次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{3(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}$$

3. a, b, c ガ何レモ零ナラズシテ且

$$abc=(b+c)(c+a)(a+b)$$

ナルトキハ $\frac{abc}{b+c}-a^2=\frac{abc}{c+a}-b^2=\frac{abc}{a+b}-c^2$

ナルコトヲ證明セヨ.

4. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$

ナルトキ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ヲ證明セヨ.

5. $3x-2y=x-5y$ ナル關係アルトキ, $\frac{x}{y}$ 及 $\frac{x+y}{x-y}$ ノ値ヲ求ム.

6. $a+b+c=0$ ナルトキ,次ノ式ノ値ヲ求ム.

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

7. $x=\frac{a}{b+c},\quad y=\frac{b}{c+a},\quad z=\frac{c}{a+b}$ ナルトキ

$yz+zx+xy+2xyz$ ノ値ヲ求ム.

8. $x=a+\frac{1}{a},\quad y=b+\frac{1}{b},\quad z=ab+\frac{1}{ab}$ ナルトキ

$x^2+y^2+z^2-xyz$ ノ値ヲ求ム.

9. x ガ m 及 n ノ比例中項ナルトキ

$$\frac{1}{m^2-x^2}+\frac{1}{n^2-x^2}+\frac{1}{x^2}$$

ノ値ヲ求ム.

10. 次ノ式ノ極大,極小ヲ求ム.

$$\frac{x}{x^2-5x+9},\quad \frac{x^2+3x+3}{x+1},\quad \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$$

第八章　比及比例

44. 二三ノ重要ナル性質.

「上卷」第七編ニ於テ學ビタルモノノ外尙次ノ如キ二三ノ重要ナル性質アリ.

二ツノ正數ノ比ニ於テ1ヨリモ大ナル値ヲ有スルモノヲ**優比**ト云ヒ, 1ヨリモ小ナル値ヲ有スルモノヲ**劣比**ト云フ.

例ヘバ $3:2$ ハ優比ニシテ, $\sqrt{2}:3$ ハ劣比ナリ.

(1) 二ツノ正數ノ比ノ兩項ニ同一ノ正數ヲ加フレバ,優比ハ其ノ値ヲ減ジ,劣比ハ其ノ値ヲ增ス.

何トナレバ a, b, x ヲ正數トシテ比 $a:b$ ト比 $(a+x):(b+x)$ トノ値ニツキテ考フルニ

$$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$$

因テ $a>b$ ナルトキハ $a-b>0$ ニシテ此ノ右邊ハ正數ナリ. 故ニ $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$ ナリ.

又 $a<b$ ナルトキハ $a-b<0$ ニシテ此ノ右邊ハ

負數ナリ. 故ニ $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$ ナリ.

之ト全ク同樣ニシテ次ノ定理ヲ證明スルヲ得.

(2) 二ツノ正數ノ比ノ兩項ヨリ各項ノ何レヨリモ小ナル同一ノ正數ヲ減ズレバ,優比ハ其ノ値ヲ增シ,劣比ハ其ノ値ヲ減ズ.

上ノ二定理ハ又次ノ如クニ述ブルコトヲ得.

二ツノ正數ノ比ノ兩項ニ同一ノ正數ヲ加フレバ比ノ値ハ1ニ近ヅキ,又兩項ヨリ各項ノ何レヨリモ小ナル同一ノ正數ヲ減ズレバ比ノ値ハ1ヨリ遠ザカル.

(問) 上ノ(1), (2)ヲ應用シテ次ノ比ヲ比較セヨ.

(1) $7:9,\ 5:7$　　(2) $15:13,\ 19:17$

尙又次ノ如キ定理成立ス.

(3) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ ナルトキ各比ハ

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3+\cdots\cdots+p_na_n}{p_1b_1+p_2b_2+p_3b_3+\cdots\cdots+p_nb_n}\quad\cdots\cdots(1)$$

及 $\dfrac{\sqrt[n]{p_1a_1^n+p_2a_2^n+p_3a_3^n+\ldots+p_na_n^n}}{\sqrt[n]{p_1b_1^n+p_2b_2^n+p_3b_3^n+\ldots+p_nb_n^n}}$ …………(2)

ニ等シ. 茲ニ $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n$ ハ任意ノ數ニシテ, n ハ正ノ整數トス. 又(2)ノ場合ニハ各比ノ値ヲ正數トス.

各比ノ値ヲ k ト置クコトニヨリテ容易ニ證明スルコトヲ得ベシ. (學生諸子ニ委ス)

例. 或直角三角形ノ周ハ p 尺ニシテ直角ヲ夾ム二邊ノ比ハ $a:b$ ニ等シ. 此等二邊ノ長サ如何.

解 所要ノ二邊ノ長サヲ夫夫 x 尺, y 尺トスベシ. 然ルトキハ斜邊ノ長サハ $\sqrt{x^2+y^2}$ 尺ナルベシ. 因テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(2)ヨリ $\quad \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$

(1)ヲ代入スレバ $\quad \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{p}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\therefore\ x=\frac{ap}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{bp}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$$

答 二邊夫夫 $\dfrac{ap}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$ 尺, $\dfrac{bp}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$ 尺

問題 XII

1. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ ナルトキハ $ab+bc+cd$ ハ $a^2+b^2+c^2$ ト $b^2+c^2+d^2$ トノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ.

2. $a:b=b:c$ ナルトキ,次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{b^3+c^3}$$

3. $a:b=c:d$ ナルトキ,次ノ等式ヲ證明セヨ.

(1) $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\dfrac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\dfrac{d^3}{b}}$

(2) $\sqrt[n]{a^n+b^n}:\sqrt[m]{a^m-b^m}=\sqrt[n]{c^n+d^n}:\sqrt[m]{c^m-d^m}$

4. 矩形アリ,相隣レル二邊ノ比ハ $5:12$ ニ等シク且其ノ對角線ノ長サハ2尺6寸ナリト云フ. 二邊ノ長サヲ求ム.

5. 直角三角形アリ,斜邊ト一邊トノ比ハ $a:b$ ニ等シク,他ノ一邊ノ長サハ p 米ナリト云フ. 斜邊ノ長サヲ求ム.

6. 直角三角形アリ,其ノ三邊ノ長サノ連比ガ連續セル三ツノ正ノ整數ノ連比ニ等シト云フ. 此等ノ連續セル三整數ノ最小ナル一組ヲ求ム.

第九章　開平法及開立法

45. 整式ノ開平法.

先ヅ $a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ヲ求ムベシ.

運算

$$\begin{array}{r|l} & a^2+2ab+b^2\,(a+b \\ & a^2 \\ \hline 2a+b) & 2ab+b^2 \\ & 2ab+b^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

答 $a+b$

先ヅ與ヘラレタル式ヲ其ノ中ニ含マルル或文字例ヘバ a ノ降冪ノ順ニ排列シ,初項ノ平方根 a ヲ求メ,之ヲ所要ノ根ノ初項トシ,a^2 ヲ與ヘラレタル式ヨリ減ジ,剩餘ノ初項 $2ab$ ヲ a ノ 2 倍即チ $2a$ ニテ除シテ得ル所ノ商 b ヲ根ノ第二項トス. 偖 $2a$ ニ b ヲ加ヘタル $2a+b$ ニ b ヲ乘ジテ上ノ剩餘ヨリ減ズレバ殘ナシ.

故ニ $a+b$ ハ所要ノ平方根ナリ.

若此ノ例ノ場合トハ異ニシテ第二ノ剩餘ガ 0 ナラザルトキハ,既得ノ二項ノ和ノ 2 倍ヲ以テ第二ノ剩餘ヲ除シ,其ノ商ノ第一項ヲ以テ所要ノ平方根ノ第三項トシテ上例ニ於ケルト同法ヲ繰返シ,逐次斯ノ如クシテ剩餘ナキニ至リテ止ムベシ.

【注意】 $-(a+b)$ モ亦上ノ式ノ平方根ナリ. サレド本節ニ於テハ單ニ平方根ヲ求ムルトキハ其ノ初項ノ符號ノ正ナルモノヲ求ムルコトトス.

例 1. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ ノ平方根ヲ求ム.

$$\begin{array}{r|l} & a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2\,(a+b-c \quad 答. \\ & a^2 \\ \hline 2a+b) & 2ab-2ac+b^2 \\ & 2ab \qquad\; +b^2 \\ \hline 2a+2b-c) & -2ac \qquad -2bc+c^2 \\ & -2ac \qquad -2bc+c^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

例 2. $4x^6+32x^5+80x^4+60x^3-8x+1$ ヲ平方ニ開ケ

解

$$\begin{array}{r|l} & 4x^6+32x^5+80x^4+60x^3 \quad -8x+1\,(2x^3+8x^2+4x-1 \quad 答 \\ & 4x^6 \\ \hline 4x^3+8x^2) & 32x^5+80x^4 \\ & 32x^5+64x^4 \\ \hline 4x^3+16x^2+4x) & 16x^4+60x^3 \\ & 16x^4+64x^3+16x^2 \\ \hline 4x^3+16x^2+8x-1) & -4x^3-16x^2-8x+1 \\ & -4x^3-16x^2-8x+1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(問) $x^4-2x^3+5x^2-4x+4$ ヲ平方ニ開ケ.

例 3. $4a^2+8ab+5b^2$ ノ平方根ヲ求ム.

解

$$\begin{array}{r|l} & 4a^2+8ab+5b^2\,(2a+2b \\ & 4a^2 \\ \hline 4a+2b) & 8ab+5b^2 \\ & 8ab+4b^2 \\ \hline & b^2 \end{array}$$

答 $2a+2b$, 開平剩餘 b^2

之ハ開キ切レヌ場合ナリ．根ノ第三項ヲ求メントスレバ分數式ヲ得ベキニヨリ演算ヲ中止セルナリ．斯ノ如キ場合ノ剩餘ヲ**開平剩餘**ト云フ．

例　　題

次ノ式ノ平方根ヲ求ム．

1. $4x^2+16x+16$　　　2. $a^2x^2-10abx+25b^2$
3. $a^2+4b^2+c^2-4ab-2ac+4bc$
4. $9x^4-30x^3+19x^2+10x+1$
5. $x^4+4x^3+2x^2-3x-1$

46. 數ノ開立法．

先ヅ「下卷」第八編ニ掲ゲタル基數ノ立方ハ暗記セルモノトスベシ．

(1) **立方根ノ位．**

$$1^3=1,\quad 10^3=1000,\quad 100^3=1000000,\ \cdots\cdots\cdots$$

又　$1^3=1,\quad 0.1^3=0.001,\quad 0.01^3=0.000001,\ \cdots\cdots\cdots$

之ニヨリテ平方根ノ場合ト同樣ニ考フレバ或數ノ立方根ノ最高位ハ容易ニ知ルコトヲ得ベシ．

今或數ノ最高位ト其ノ立方根ノ最高位トノ關係ヲ示セバ次ノ如シ．

	整數			小數		
原數ノ最高位	第七位 第八位 第九位	第四位 第五位 第六位	第一位 第二位 第三位	第三位 第二位 第一位	第六位 第五位 第四位	第九位 第八位 第七位
立方根ノ最高位	第三位	第二位	第一位	第一位	第二位	第三位

因テ與ヘラレタル數ヲ小數點ヨリ三桁毎ニ區切レバ其ノ立方根ノ最高位ヲ知ルコトヲ得ベシ．

例ヘバ 66430125 ヲ區切レバ 66|430|125 トナリ，從テ此ノ數ノ立方根ノ最高位ハ百ノ位ナリ．

又 0.000000216 ヲ區切レバ 0.000|000|216 トナリ，從テ此ノ數ノ立方根ハ小數第三位ヨリ始マル．

(2) **開立ノ仕方．**

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ナル公式ニヨリ例ヘバ

$$64^3=(60+4)^3=60^3+3(60^2\times4)+3(60\times4^2)+4^3$$

偕 $64^3=262144$ ナリ．今此ノ數ノ立方根ヲ求ムル方法ヲ次ニ示サン．

運算

		262|144 (64
180	10800	216
4	736	46144
184	11536	46144
		0

(I) 一ノ位ヨリ始メテ三桁毎ニ區切レバ立方

根ハ十ノ位ヨリ始マルコトヲ知ル.

(II) 偖第一區分ノ 262 ダケニ着目シ,其ノ中ニ含マルル最大ナル立方數ハ 6^3 卽チ 216 ナルコトニヨリ立方根ノ十ノ位ノ數ハ 6 ナルコトヲ知ル.

(III) 原數ヨリ 60^3 卽チ 216000 ヲ減ジテ 46144 ヲ得. 今立方根ヲ $60+x$ トスレバ

$$\begin{aligned}46144&=(60+x)^3-60^3\\&=3\times60^2\times x+3\times60\times x^2+x^3\\&=\{3\times60^2+(3\times60+x)x\}x\end{aligned}$$

故ニ 3×60 卽チ 180 ヲ第一行ニ, 3×60^2 卽チ 10800 ヲ第二行ニ書ク. 實際ニハ 3×6 卽チ 18 ヲ第一行ニ, 3×6^2 卽チ 108 ヲ第二行ニ書キ,第一行ニハ 0 ヲ第二行ハ 00 ヲ添フルモノトス.

(IV) 以上ノ關係ニヨリ, 46144 ヲ 10800 ニテ除スルコトニヨリ略 x ハ見出サルベシ. 卽チ此ノ除法ノ整商 4 ヲ以テ立方根ノ一ノ位ナルベシト推定シ,此ノ 4 ヲ 180 ニ加ヘ,此ノ和ニ 4 ヲ乘ジタル積ヲ 10800 ニ加ヘ,此ノ和ニ 4 ヲ乘ジテ 46144 ヨリ減ズレバ上ノ計算ニ見ルガ如ク殘リナシ.

故ニ 64 ハ所要ノ立方根ナルヲ知ル.

例 1. 152273304 ノ立方根ヲ求ム.

解

150	7500	152|273|304 (534	
3	459	125	
153	7959	27273	
3	9	23877	
1590	842700	3396304	
4	6376	3396304	
1594	849076	0	答 534

先ヅ立方根ハ百ノ位ヨリ始マルコトヲ見出シ,此ノ位ノ數 5 ヲ知リ上例ニ於ケルト同樣ニシテ次ノ位卽チ十ノ位ノ數ガ 3 ナルコトヲ推定シ,此ノ 3 ヲ 150 ニ加ヘテ 3 ヲ乘ジ,之ヲ 7500 ニ加ヘタル 7959 ニ 3 ヲ乘ジタルモノヲ 27273 ヨリ減ジ,其ノ殘リ 3396 ノ右ニ第三區分 304 ヲ書列ベルナリ. 而シテ第一行ニ 3 ヲ書キ,} ニテ示セル三數ヲ加フレバ 53 ノ 3 倍 159 ヲ得,第二行ニ 3^2 卽チ 9 ヲ書キ,} ニテ示セル三數ヲ加フレバ 3×53^2 卽チ 8427 ヲ得ルナリ. 今立方根ヲ $530+x$ トスレバ

$$3396304=(530+x)^3-530^3=\{3\times530^2+(3\times530+x)x\}x$$

ナルニヨリ 3396304 ヲ 842700 ニテ除スレバ略 x ハ求メラル. 卽チ此ノ除法ノ商 4 ヲ見出シ,前同樣ニ計算ヲ續行スレバ殘ナシ.

故ニ所要ノ立方根ハ 534 ナリ.

例 2.　15ノ立方根ヲ小數第三位迄求ム.

解

		15(2.466
60	1200	8
4	256	7000
64	1456	5824
4	16	1176000
720	172800	1062936
6	4356	113064000
726	177156	109194696
6	36	3869304
7380	18154800	
6	44316	
7386	18199116	答　2.466强

之ハ**開キ切レヌ**場合ナリ. 之ニ反シ開立法ノ計算ニ於テ殘ナキニ至ルトキハ**開キ切レル**ト云フナリ.

(3)　**分數ノ開立法.**

分數ノ立方根ヲ求ムルニハ,分母ガ開キ切レルトキハ分子ノ立方根ヲ分母ノ立方根ニテ除スベシ,然ラザルトキハ先ヅ其ノ分數ヲ小數ニ化シテ後立方根ヲ求ムベシ. 或ハ場合ニヨリ次ノ如クスルモ亦可ナリ.

例 3.　$\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{4\times5^2}{5^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{100}}{5}=\dfrac{4.642\ldots}{5}=0.928\ldots$

例　　題

次ノ數ノ立方根ヲ求ム. (開キ切レヌ場合ニハ小數第三位未滿切捨)

1.　2197　　2.　13.824　　3.　0.004096

4.　2000376　　5.　5683247　　6.　$\dfrac{355}{113}$

47.　整式ノ開立法.

先ヅ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ノ立方根ヲ求ムベシ.

運算

$$\begin{array}{lr}
 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3(a+b \quad 答. \\
3a^2 & a^3 \\
3a+b\ldots\ldots(3a+b)b & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
3a^2+3ab+b^2\ldots\ldots\ldots & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
 & 0
\end{array}$$

先ヅ與ヘラレタル式ヲ其ノ中ニ含マルル或文字例ヘバ a ノ降冪ノ順ニ排列シ,初項ノ立方根 a ヲ求メ,之ヲ以テ所要ノ根ノ初項トシ,其ノ立方 a^3 ヲ與ヘラレタル式ヨリ減ズベシ.

初項 a ノ三倍 $3a$ ヲ第一行ニ,又 a ノ二乘ノ 3 倍 $3a^2$ ヲ第二行ニ書キ,而シテ $3a^2$ ニテ第一剩餘ノ初項ヲ除シテ商 b ヲ得,之ヲ所要ノ根ノ第二項トス.

倩 b ヲ第一行ニ加ヘ,其ノ和 $3a+b$ トbトノ積

即チ $(3a+b)b$ ヲ第二行ニ加ヘ,而シテ其ノ和ナル $3a^2+3ab+b^2$ ト b トノ積ヲ第一剩餘ヨリ減ズベシ.

第二剩餘ハ0ナリ. 因テ所要ノ立方根ハ $a+b$ ナリ.

若第二剩餘ガ0ナラザルトキハ第一行ニ $a+b$ ノ三倍(實際ハ前ニ書キアル $3a+b$ ニ $2b$ ヲ加フ)ヲ書シ,第二行ニハ $a+b$ ノ二乘ノ三倍(實際ハ前ニ書キアル $3a^2+3ab+b^2$ ニ初メノ第一行 $3a+b$ ト b トノ積 $(3a+b)b$ ト b^2 トヲ加フ)ヲ書シ,此ノ第二行ニテ第二剩餘ヲ除シタル商ノ初項ヲ根ノ第三項トシテ前ト同ジ手續ヲ施スベシ.

第三剩餘アラバ尚同樣ノ手續ヲ繰返シ,逐次斯ノ如クシテ剩餘ナキニ至リテ止ムベシ.

例. $8x^6-12x^5+42x^4-37x^3+63x^2-27x+27$ ノ立方根ヲ求ム.

解

$$
\begin{array}{lll}
 & & 8x^6-12x^5+42x^4-37x^3+63x^2-27x+27\,(2x^2-x+3 \quad \text{答.} \\
 & & \underline{8x^6} \\
 & 12x^4 & -12x^5+42x^4-37x^3 \\
6x^2-x & \underline{(6x^2-x)(-x)} & \\
 & 12x^4-6x^3+x^2 & \underline{-12x^5+6x^4-x^3} \\
 & \underline{\phantom{12x^4-6x^3+{}}x^2} & 36x^4-36x^3+63x^2-27x+27 \\
\underline{-2x} & 12x^4-12x^3+3x^2 & \\
6x^2-3x+3 & \underline{(6x^2-3x+3)3} & \\
 & 12x^4-12x^3+21x^2-9x+9 & \underline{36x^4-36x^3+63x^2-27x+27} \\
 & & 0
\end{array}
$$

【注意】 第一行ニ $3(2x^2-x)$ ヲ書ク代リニ $6x^2-x$ ニ $2(-x)$ 即チ $-2x$ ヲ加ヘ,又第二行ニ $3(2x^2-x)^2$ 即チ $12x^4-12x^3+3x^2$ ヲ書クニハ $\}$ ニテ示シタル三式ノ和ヲ求ムレバ可ナリ.

例　題

次ノ式ノ立方根ヲ求ム.

1. $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
2. $125a^3x^3+75a^2x^2y+15axy^2+y^3$
3. $x^6-3x^5+5x^3-3x-1$

問　題　XIII

次ノ式ノ平方根ヲ求ム.

1. $x^4-4ax^3-2a^2x^2+12a^3x+9a^4$
2. $x^4+4x^3+2x^2-3x-1$
3. 次ノ數ノ立方根ヲ求ム.(小數第三位未滿切捨)

(1) 7529.536　　(2) 3.141592653

次ノ式ノ立方根ヲ求ム.

4. $x^6-3x^5+5x^3-3x-1$
5. $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$

6. $27x^6-27x^5-99x^4+71x^3+132x^2-48x-64$

7. 次ノ式ノ六乘根ヲ求ム.

$x^6-12x^5+6x^4-160x^3+240x^2-192x+64$

次ノ冪根ヲ求ム. (開キ切レザルモノハ小數第四位迄求メ端數ヲ切捨テヨ)

8. $\sqrt[3]{60236.288}$　　9. $\sqrt[3]{2.718281828}$

10. $\sqrt[6]{244140625}$　　11. $\sqrt[6]{40.353607}$

12. $\sqrt[9]{42720835.145912}$

13. 一升ノ容積ヲ有スル立方體ノ一稜ノ長サ幾寸ナルカ. 厘位迄求メ端數ヲ四捨五入セヨ.

14. 球ノ體積ハ其ノ直徑ノ立方ニ比例スルモノナリ. 甲乙ノ球アリ,甲ノ體積ハ乙ノ體積ノ十倍ナリト云フ. 甲ノ直徑ハ乙ノ直徑ノ何倍ナルカ. 小數第三位迄求メ端數ヲ切捨テヨ.

15. 球ノ半徑ヲrニテ表セバ,其ノ體積ハ$\frac{4}{3}\pi r^3$ニテ表サル. 今$\pi=3.1416$トシテ一斗ノ容積ヲ有スル球ノ直徑ヲ計算セヨ. 厘ノ位迄求メ端數ヲ四捨五入セヨ.

第十章　諸種ノ級數

48. 調和級數.

級數ノ總テノ項ノ逆數ガ等差級數ヲナストキハ其ノ級數ヲ**調和級數**ト云フ.

例ヘバ $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots\cdots$ ハ調和級數ナリ.

一般ニ調和級數ハ次ノ形ニ表サル.

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \cdots\cdots$$

49. 調和中項.

調和級數ヲナセル數多ノ數ニ於テ初項ト末項トノ間ニアル總テノ數ヲ其等ノ二數ノ間ニ挿入セル**調和中項**ト云フ.

二數a, bノ間ニ一ツノ調和中項ヲ挿入セルトキ,之ヲH(單ニa, bノ調和中項トモ云フ)トスレバ

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{\mathrm{H}}, \frac{1}{b}$$

ハ等差級數ヲナス. 因テ

$$\frac{1}{\mathrm{H}}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{\mathrm{H}}$$

$$\therefore\ \frac{2}{\mathrm{H}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

之ヨリ $$H=\frac{2ab}{a+b}$$

例. 二數ノ等比中項ハ其等ノ二數ノ等差中項ト調和中項トノ等比中項ナルコトヲ證明セヨ.

解 二數ヲ a, b トシ,其ノ等差中項ヲ A, 等比中項ヲ G, 調和中項ヲ H トスレバ

$$A=\frac{a+b}{2},\quad G^2=ab,\quad H=\frac{2ab}{a+b}$$

$$\therefore\ AH=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

$$\therefore\ G^2=AH$$

故ニ G ハ A, H ノ等比中項ナリ.

50. 其ノ他ノ級數.

例 1. $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$ ノ和ヲ求ム.

解 $S_1=1+2+3+\ldots\ldots+n$

$S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$

ト置ケバ,既ニ知レルガ如ク

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$$

偖 x ノ値ノ如何ニ拘ラズ恒ニ

$$(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$$

ナリ. 今 x ノ代リニ $n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots\ldots,\ 2,\ 1$ ト

置ケバ
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$
$$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1$$
$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-2)^2+3(n-2)+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$$
$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$$

此等ノ等式ヲ邊邊相加フレバ

$$(n+1)^3-1=3S_2+3S_1+n$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 3S_2&=(n+1)^3-3S_1-(n+1)\\&=(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)\\&=\frac{(n+1)n(2n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\quad \text{答.}$$

例 2. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots\ldots+n(n+1)$ ノ和ヲ求ム.

解 此ノ和ヲ S ニテ表セバ

$$\begin{aligned}S&=1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\ldots\ldots+n(n+1)\\&=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\ldots\ldots+(n^2+n)\\&=(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)+(1+2+3\ldots\ldots+n)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\quad \text{答.}\end{aligned}$$

別解 $S'=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)$

ト置ケバ

$$S'=0\cdot1\cdot2+1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots\ldots+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$$

此ノ兩等式ヲ邊邊相減ズレバ

$$0=3\{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots\ldots+n(n+1)\}-n(n+1)(n+2)$$

$$=3S-n(n+1)(n+2)$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

例 3. 三角錐形ニ同大ノ球ヲ積ミ上ゲタルモノアリ,其ノ最下層ノ一邊ニハ n 個ノ球ガ列ビ居ルト云フ. 球ノ總數ヲ求ム.

解 題意ノ如ク球ガ積ミ上ゲアルトキハ,一層宛上ニ進ムニ從テ其ノ一邊ニ列ベル球ノ數ハ一ツ宛減ジ,且各層ニハ球ガ正三角狀ニ列ビ居ルベク,最上層ニ至レバ其ノ數ハ一個トナルベシ. 而シテ先ヅ最下層ニ列ベル球ノ數ハ

$$1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

ナルベシ. 從テ所要ノ球ノ數ヲ N ニテ表セバ

$$N=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)n+\ldots\ldots+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\quad 答.$$

例 4. $\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot8}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}$ ノ和ヲ求ム.

解 一般ニ $\dfrac{b-a}{ab}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$ ナルガ故ニ

$$\frac{2}{2\cdot4}=\frac{4-2}{2\cdot4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{4\cdot6}=\frac{6-4}{4\cdot6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{6\cdot8}=\frac{8-6}{6\cdot8}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{2}{2n(2n+2)}=\frac{(2n+2)-2n}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}$$

此等ノ等式ヲ邊邊相加ヘ,且所要ノ和ヲ S ニテ表セバ

$$2S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}=\frac{n}{2(n+1)}$$

$$\therefore\ S=\frac{n}{4(n+1)}\quad 答.$$

問題 XIV

1. 調和級數アリ,其ノ初メノ三項ガ $\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{1}{3}$ ナリト云フ. 其ノ次ノ三項ヲ求ム.

2. 二數ノ等差中項ハ 4 ニシテ調和中項ハ $\dfrac{15}{4}$ ナ

リト云フ. 二數ヲ求ム.

3. 15ト10トノ間ニ四ツノ調和中項ヲ入レヨ.

4. 二數ノ等比中項ハ4ニシテ調和中項ハ$\frac{16}{5}$ナリト云フ. 二數ヲ求ム.

5. a, b, cガ調和級數ヲナストキハ $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ モ亦調和級數ヲナスコトヲ證明セヨ.

6. a, b, cガ調和級數ヲナストキハ $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$ナルコトヲ證明セヨ.

7. $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+20^2$ ノ和ヲ求ム.

8. 正四角錐形ニ同大ノ球ヲ積ミ上ゲタルモノアリ,層ノ數ガ30ナルトキ球ノ總數ヲ求ム.

9. 同大ノ球ヲ屋根形ニ積ミ上ゲタルアリ,最上層ニハp個アリ,又層ノ數ガnナルトキ,球ノ總數ハ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+3p-2)$ ナルコトヲ證明セヨ.

10. $2\cdot4+4\cdot6+6\cdot8+\ldots\ldots+2n(2n+2)$ ノ和ヲ求ム.

11. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ ノ和ヲ求ム.

12. 29個ノ石ヲ1尺, 2尺, 3尺等次第ニ距離ガ1尺宛大ナル樣ニシテ一列ニ並ベアリ. 第一ノ石ノ處ニ立テル人ガ一ツ宛運ビテ總テノ石ヲ其ノ處迄運ビ終ル迄ニハ幾何ノ行程ヲ歩ムカ

附　錄

I 順列, 組合, 二項定理及確率

第一章　順　列

1. 順列.

例ヘバ玆ニa, b, c, dナル四ツノ文字アルトキ,此ノ中ヨリ三ツ宛採リテ之ヲ種種ノ順序ニ一列ニ列ベタルモノヲ作レバ次ノ如シ.

$abc, acb, abd, adb, acd, adc$

$bac, bca, bad, bda, bcd, bdc$

$cab, cba, cad, cda, cbd, cdb$

$dab, dba, dac, dca, dbc, dcb$

此等24個ノ配列ノ各ヲ四ツノ文字a, b, c, dヨリ3個宛採リタル**順列**ト云フ.

一般ニ,n個ノ物ノ中ヨリr個宛任意ニ採リ出シ,之ヲ任意ノ順序ニ一列ニ列ベタルモノヲ**n個ノ物ヨリr個宛採リタル順列**ト云フ.

偖二ツノ順列ニ於テ,之ヲ組立ツル物ガ兩者全ク一致シ且其ノ配列ノ順序モ亦全ク一致スルト

キハ二ツノ順列ハ相等シト云ヒ,然ラザル場合ニハ,卽チ之ヲ組立ツル物ノ中ニ一致セザルモノアルカ,或ハ之ヲ組立ツル物ハ兩者全ク一致スルトモ其ノ配列ノ順序ニ相異ナル所アルトキハ二ツノ順列ハ相異ナルト云フナリ.

上例二十四個ノ順列ハ相異ナル順列ナリ.

n 個ノ物ガ皆相異ナルトキ,r 個宛採リタル順列ノ總數ヲ表スニ $_nP_r$ ナル記號ヲ以テス.

例ヘバ上例ニ於テ見ルガ如ク $_4P_3=24$ ナリ.

(問) 文字 a, b, c ノ中ヨリ二ツ宛採リタル順列ヲ作レ. 又其ノ總數ヲ求ム.

2. 順列ノ數.

n 個ノ物ガ皆相異ナレリトス.

(I) n 個ノ物ノ中ヨリ一ツ宛採リタル順列ノ數ハ明ニ其ノ物ノ數ナル n ニ等シ.

$$\therefore\ {}_nP_1=n$$

(II) n 個ノ物ノ中ヨリ二ツ宛採リタル順列ノ數ハ次ノ如シ.

例ヘバあいうえおナル五ツノ文字ヨリ相異ナル二ツ宛ヲ採リテ幾ツノ語ヲ作リ得ルカト云フ

$_4P_3 = \frac{4.3.2.1}{1} = 24$

ニ,先ヅあノ次ニ他ノ四ツノ文字ノ各ヲ附スレバあノ字ニテ始マル總テノ語ヲ作リ得ベシ. 又い,う,え,おノ各ノ文字ヨリ始マル總テノ語モ同樣ニ各文字以外ノ四ツノ文字ヲ附スルコトニヨリテ作リ得ベシ. 卽チ次ノ如シ.

あい	いあ	うあ	えあ	おあ
あう	いう	うい	えい	おい
あえ	いえ	うえ	えう	おう
あお	いお	うお	えお	おえ

斯ノ如ク,與ヘラレタル文字ノ中ヨリ一ツ宛採リタルあ,い,う,え,おノ各ニツキテ四ツ宛作リ得ベク,其ノ數ハ全部ニテハ 5×4 卽チ 20 ナリ.

$$\therefore\ {}_5P_2=5\times4=20$$ $_5P_2 = \frac{5.4.3.2.1}{2.1}$

一般ニ,n 個ノ物ノ中ノ何レカ一ツヲ採リ之ニ殘ノ $(n-1)$ 個ノ物ヲ一ツ宛添加スルコトニヨリテ n 個ノ物ヨリ二ツ宛採リタル順列ヲ作リ得ベシ. 而シテ n 個ノ物ノ各ニツキテ此ノ手續ヲ施セバ所要ノ順列ノ總テヲ得ベシ.

$5(5-1)$

$$\therefore\ {}_nP_2=n(n-1)$$

又ハ $${}_nP_2={}_nP_1\times(n-1)$$

(III) n 個ノ物ノ中ヨリ三ツ宛採リタル順列ノ數ハ上記ト同樣ナル方法ニテ求メ得ベシ.

卽チ, n 個ノ物ノ中ヨリ二ツ宛採リタル順列ノ各ニ其ノ中ニ含マレザル $(n-2)$ 個ノ物ノ各ヲ添加スレバ所要ノ順列ノ總テヲ得ベシ. 因テ

$${}_nP_3={}_nP_2\times(n-2)$$

$$\therefore\ {}_nP_3=n(n-1)(n-2)$$

(IV) ${}_nP_r$ ノ公式.

上ニ示セルト同樣ニシテ次ノ結果ヲ得ベシ.

$${}_nP_4={}_nP_3\times(n-3)=n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$${}_nP_5={}_nP_4\times(n-4)=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

一般ニ

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

例 1. 1, 2, 3, 4, 5 ナル五ツノ數字ヲ用ヒテ三桁ノ數ヲ幾ツ作リ得ベキカ. 但同ジ數字ノ重複ヲ許サザルモノトス.

解 問題ハ五ツノ相異ナル物ヨリ三ツ宛採リタル順列ノ數ヲ求ムルコトト同樣ナリ. 卽チ所要ノ數ヲNニテ表セバ

$$N={}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60 \qquad 答\ 60個$$

(V) n 個ノ物ヲ悉ク採リタル順列ノ數.

${}_nP_r$ ノ公式ニ於テ $r=n$ ト置ケバ

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3\cdot2\cdot1$$

或ハ

$${}_nP_n=1\cdot2\cdot3\ldots\ldots(n-2)(n-1)n$$

是卽チ n 個ノ相異ナル物ヲ悉ク採リタル順列ノ總數ナリ.

偖 $1\cdot2\cdot3\ldots n$ 卽チ 1 ヨリ n ニ至ル迄ノ總テノ整數ノ連乘積ヲ **n ノ階乘**ト云ヒ, $n!$ 又ハ $\underline{n|}$ ナル記號ヲ以テ之ヲ表ス. 因テ

$${}_nP_n=n!$$

例 2. 5人ノ小供ヲ全部一列ニ列ベントス. 幾通リノ列ベ方ガアルカ.

解 問題ハ五ツノ相異ナル物ヲ悉ク採リタル順列ノ總數ヲ求ムルト同樣ナリ. 因テ

所要ノ數 $={}_5P_5=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ 答 120通リ

例 題

1. a, b, c, d, e, f, g, h ナル八個ノ文字ヨリ三文字宛採リタル順列ノ數ヲ求ム.

2. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ナル六個ノ數字ヲ以テ三桁ノ整數ハ幾通リ作リ得ルカ．但各位ノ數字ハ皆相異ナルモノトス．

3. 一級25名ノ生徒ヨリ級長一人,副級長一人ヲ選ブ仕方ハ幾通リアルカ．

4. ${}_7P_4$ ヲ計算セヨ．

5. 兒童6人ヲ一列ニ整列セシムル仕方ハ幾通リアルカ．

6. 1, 3, 5, 7, 9 ナル數字ヲ用ヒテ四桁ノ數ハ幾ツ作リ得ルカ．但同一ノ數字ノ重複ヲ許サザルモノトス．

7. 六人ノ人ガ圓卓ノ周圍ニ着席スル仕方ハ幾通リアルカ．

8. 10人ノ兒童ヲ以テ圓陣ヲ作ラントス．相異ナル排列ノ仕方幾通リアルカ．

9. 四組ノ夫婦ガ一ツノ圓卓ヲ圍ミテ着席セントス．幾通リノ仕方アルカ,但男同士又女同士ハ相隣ルコトナシトス．

10. ${}_nP_6=12{}_nP_4$ ナルトキ, n ノ値ヲ求ム．

3. 悉クハ相異ナラザル物ヲ總テ採リタル順列．

例ヘバ $a, a, a, b, b, b, b, c, c, d, e, f$ ナル12個ノ文字ノ總テヲ採リタル順列ノ數ヲNニテ表サン．

先ヅ此等ノN個ノ順列ノ任意ノ一ツヲ取リ,其ノ中ノ三ツノ a ノ代リニ a_1, a_2, a_3 ナル三ツノ相異ナル新文字ヲ以テ置キ換ヘ,且他ノ文字ノ位置ハ原ノママトシ,唯 a_1, a_2, a_3 ノ配列ヲ變ズルコトニヨリテ3!個ノ順列ヲ得ベシ．此ノ手續ヲN個ノ順列ノ各ニ施セバ N×3! 個ノ順列ヲ得ベシ．斯シテ得タル順列ハ $a_1, a_2, a_3, b, b, b, b, c, c, d, e, f$ ナル文字ヲ總テ採リタル順列ニシテ何レモ皆相異ナリ,又此等ノ文字ヲ以テ作レル順列ハ以上ノモノノ他ニハナシ．故ニ此等12個ノ文字ヲ總テ採リタル順列ノ數ハ N×3! ナリ．

次ニ斯シテ得タル N×3! 個ノ順列ノ各ニ於テ四ツノ b ノ代リニ b_1, b_2, b_3, b_4 ヲ置キ換ヘテ他ノ文字ノ位置ハ原ノママトシ,唯此ノ四文字ノ配列ヲ變ズルコトニヨリテ N×3!×4! 個ノ順列ヲ得ベシ,而シテ前ノ場合ト同理ニヨリ此ノ數N×3!×4!

ハ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, c, c, d, e, f$ ナル12個ノ文字ヲ總テ採リタル順列ノ數ニ外ナラズ.

尙二ツノ c ノ代リニ c_1, c_2 ヲ以テ置キ換フレバ同樣ニシテ $N\times3!\times4!\times2!$ 個ノ順列ヲ得ベシ.

偖斯シテ得タル $N\times3!\times4!\times2!$ 個ノ順列ハ12個ノ相異ナル文字 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, d, e, f$ ヲ總テ採リタル順列ノ總數ニ外ナラズ. 因テ

$$N\times3!\times4!\times2!=12!$$

$$\therefore\ N=\frac{12!}{3!\times4!\times2!}$$

一般ニ n 個ノ物ノ中 a ガ p 個, b ガ q 個, c ガ r 個アリテ其ノ他皆相異ナルトキ,其ノ n 個ノ物全部ヲ採リタル順列ノ數ヲ N トスレバ

$$N=\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

ナリ.

例. 3, 3, 4, 4, 4, 7, 7, 7 ナル8個ノ數字ヲ一列ニ列ベルコトニヨリ八桁ノ數ハ幾ツ作リ得ルカ.

解 8個ノ數ノ中3ハ2個, 4ハ3個, 7モ亦3個アルガ故ニ所要ノ數ヲ N トスレバ

$$N=\frac{8!}{2!\,3!\,3!}=560$$ 答 560個

(問) 赤球4個,白球3個,黑球1個アリ. 之ヲ全部一列ニ列ベントス. 其ノ仕方幾通リアルカ.

問題 I

1. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ナル數字ヲ用ヒテ二位ノ整數幾ツヲ作リ得ルカ. 但同ジ數字ヲ重複シテ用フルコトヲ得ザルモノトス.
2. 前問題ニ於テ同ジ數字ノ重複ヲ許ストキハ如何.
3. ふぢはらふぢふさナル8個ノ文字ヲ悉ク採リタル順列ノ數ヲ求ム.
4. いろはにほへとナル七文字ヲ一列ニ列ベルニいトろトハ必ズ相隣ラシメントス. 其ノ仕方ハ幾通リアルカ.
5. 前問題ニ於テいトろトガ決シテ相隣ラザル列べ方ノ數ハ幾何.
6. 母音 a, e, i, o, u 及子音 h, k, l, m, n, p ヨリ各二文字宛ヲ採リ,母音ハ必ズ偶數番目,子音ハ奇數番目ニアル樣ニ(例ヘバ *mine* ノ如シ)列ベントス. 其ノ仕方幾通リアルカ.

7. 太郎,次郎,三郎,四郎ハ左舷ヲ漕ギ,はる子,花子,みね子ハ右舷ヲ漕グコトヲ得ルトキ,六人乘ノボートノ乘込員ヲ此等七人中ヨリ選定セントス. 座席配當ノ仕方幾通リアルカ.

8. 赤,白,黄,綠,黒ノ五色ノ旗アリ,之ヲ一本宛,二本宛,三本宛,四本宛又ハ五本全部ヲ取ルモノトシ,旗竿ニ懸クル順序ノ配列ニヨリテ信號ヲ作ラントス. 幾通リノ信號ヲ作リ得ルカ.

9. 2, 3, 4, 5, 6 ナル五ツノ數字ヲ悉ク一列ニ列ベルコトニヨリ五位ノ偶數ヲ幾通リ作リ得ベキカ.

10. n 人ノ人ガ圓卓ノ周圍ニ着席スル仕方ハ $(n-1)!$ 通リアルコトヲ證明セヨ.

11. 次ノ式ニ適スル n ノ値ヲ求ム.

(1) ${}_{2n}P_3=100\times{}_{n}P_2$　　(2) ${}_{2n}P_3=2{}_{n}P_4$

12. A, B, C, D, E ナル五冊ノ書籍ヲ三個ノ本箱甲乙丙ニ入レントス. 其ノ仕方幾通リアルカ.

13. 六人ノ客ヲ四ツノ應接室ニ案内スル仕方ハ幾通リアルカ.

第二章 組合セ

4. 組合セ.

例ヘバ茲ニ a, b, c, d ナル四ツノ文字アルトキ, 此ノ中ヨリ三ツ宛採リテ作レル群ハ次ノ如シ.

$abc,\ abd,\ acd,\ bcd$

此等ノ群ヲ a, b, c, d ヨリ三ツ宛採リタル**組合セ**ト云フ.

一般ニ, n 個ノ物ヨリ r 個宛任意ニ採リ出シテ作レル群ヲ **n 個ノ物ヨリ r 個宛採リタル組合セ**ト云フ.

組合セハ其ノ中ノ物ノ配列ノ順序ニハ關係ナキモノナリ. 卽チ二ツノ組合セニ於テ其ノ各ヲ組立ツル物ガ兩者全ク一致スルトキハ其ノ配列ノ順序ノ如何ニ拘ラズ二ツノ組合セハ相等シト云ヒ,然ラザル場合ニハ,卽チ之ヲ組立ツル物ノ中ニ一致セザルモノアルトキハ二ツノ組合セハ相異ナルト云フナリ.

例ヘバ組合セ abc, bca ハ同ジ組合セニシテ,上例ノ四ツハ相異ナル組合セナリ.

n個ノ物ガ相異ナルトキ,r個宛採リタル組合セノ總數ヲ表スニ $_nC_r$ ナル記號ヲ以テス.

例ヘバ上例ニ於テ見ルガ如ク $_4C_2=4$ ナリ.

尚一例ヲ示セバ五ツノ文字 a, b, c, d, e ヨリ二ツ宛採リタル組合セハ

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ bc,\ bd,\ be,\ cd,\ ce,\ de$$

ノ10個ナリ. 此等ハ何レモ相異ナル組合セニシテ,且 a, b, c, d ヨリ二ツ宛採リタル組合セハ此ノ他ニハナシ. 因テ $_5C_2=10$ ナリ.

5. 組合セノ數.

相異ナルn個ノ物ヨリr個宛採リタル組合セノ數$_nC_r$ハ次ノ如クシテ求ムルコトヲ得ベシ.

今相異ナルn個ノ物ヨリr個宛採リテ作リタル $_nC_r$ 個ノ組合セノ任意ノ一ツヲ取リ出シ,其ノ中ノ物ヲ一列ニ排列スレバ$r!$個ノ相異ナル順列ヲ得ベシ.

因テ $_nC_r$ 個ノ組合セノ各ノ中ノ物ヲ一列ニ列ベルコトニヨリ,全部ニテハ $_nC_r\times r!$ 個ノ順列ヲ得ベク,而シテ此等ノ順列ハ皆相異ナリ且n個ノ物ヨリr個宛採リタル順列ハ此ノ他ニハナシ.

$$\therefore\ {}_nC_r\times r!={}_nP_r$$

$$\therefore\ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$$

然ルニ $_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$

$$\therefore\ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

例ヘバ前節ニ示シタル四ツノ文字 a, b, c, d ヨリ三ツ宛採リタル組合セノ數$_4C_3$及五ツノ文字a, b, c, d, eヨリ二ツ宛採リタル組合セノ數$_5C_2$ハ夫夫次ノ如シ.

$${}_4C_3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4,\quad {}_5C_6=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=10$$

$_nC_r$ノ値ニ關スル上記ノ公式ニ於テ其ノ分子及分母ニ$(n-r)!$ヲ乘ズレバ

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

トナル.

【注意】 公式(1)ニ於テハ$r=n$トスルモ差支ナケレドモ,(2)ニ於テハ$r=n$トスレバ分母ニ$0!$ナルモノ出デ來リ,無意義ノモノトナル. サレド通常$0!$ハ1ヲ表ス記號ナリトシテ之ヲ使用ス. 然スル

トキハ(2)ニ於テモ亦 $r=n$ ト置キテ差支ナキコトトナルナリ.

例 1. 12名ノ生徒ヨリ4名ノ月番ヲ選バントス. 其ノ仕方幾通リアルカ.

解 12個ノ相異ナルモノヨリ4個宛採リタル組合セノ數ヲ求ムレバヨシ. 卽チ

$${}_{12}C_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=495 \qquad \text{答 495通リ}$$

例 2. 男子8人,女子6人アリ,之ヨリ男子2人,女子2人ヨリ成ル一ツノ組ヲ作ラントス. 其ノ仕方幾通リアルカ.

解 8人ノ男子ヨリ2人宛採リタル組合セノ數ハ ${}_8C_2$ ニシテ,6人ノ女子ヨリ2人宛採リタル組合セノ數ハ ${}_6C_2$ ナリ. 偖 ${}_8C_2$ 個ノ組合セノ任意ノ一ツニ ${}_6C_2$ 個ノ組合セノ一ツヲ足セバ所要ノ組ノ一ツヲ得ベキガ故ニ, ${}_8C_2$ 個ノ組合セノ各ヨリ ${}_6C_2$ 通リノ組ヲ得ベシ. 故ニ所要ノ組ノ總數ハ ${}_8C_2\times{}_6C_2$ ナリ. 偖

$${}_8C_2\times{}_6C_2=\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\times\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=420 \qquad \text{答 420通リ}$$

例　　題

1. ${}_4C_2$, ${}_8C_3$, ${}_{10}C_5$ ノ値ヲ計算セヨ.
2. 15名ノ生徒中ヨリ4人一組ノ庭球仕合ノ組ヲ作ラントス. 其ノ仕方幾通リアルカ.
3. 40名ノ生徒中ヨリ2人ノ當番ヲ選ビ出ス仕方ハ幾通リアルカ.
4. 徵兵檢査ノ合格者20名アリ. 其ノ中8人ダケ徵集セントス. 其ノ仕方幾通リアルカ.
5. n 個ノ點ガ與ヘラレタルトキ,其ノ中少ナクトモ二點ヲ通過スル直線ヲ引クトキハ其ノ數ノ最モ大ナル値ハ如何.
6. 15人ノ子供ヲ5人宛赤,白,青ノ三組ニ分チテ遊戯ヲナサントス. 其ノ三組ノ作リ方幾通リアルカ.

---

6. ${}_nC_r$ ノ性質.

(I) $\qquad {}_nC_r={}_nC_{n-r}$

之ハ前節ノ公式(2)ニヨリ直チニ知ラルベシ.

(II) $\qquad {}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

此ノ等式ノ證明ハ次ノ如シ.

$$ {}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{r!}+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{(r-1)!} $$

$$ =\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\{(n-r)+r\} $$

$$ =\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} $$

$$ ={}_nC_r $$

別證 n 個ノ相異ナルモノヲ文字 $a, b, c, \ldots\ldots, l$ ニテ表サン.

偖此ノ中ヨリ r 個宛採リテ作リタル ${}_nC_r$ 個ノ組合セハ a ヲ含マザルモノト a ヲ含ムモノトノ二種類ニ區別スルコトヲ得. 而シテ a ヲ含マザルモノハ $n-1$ 個ノ文字 $b, c, \ldots\ldots, l$ ヨリ r 個宛採リタル組合セニ外ナラズ,從テ其ノ數ハ ${}_{n-1}C_r$ ナリ. 又 a ヲ含ム組合セハ $b, c, \ldots\ldots, l$ ヨリ $r-1$ 個宛採リテ作レル組合セニ a ヲ添加シタルモノニ外ナラズ,從テ其ノ數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ.

$$ \therefore\ {}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1} $$

(問 1) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ヲ前節ノ公式ニ依ラズシテ證明セヨ.

(問 2) ${}_{n+2}C_r={}_nC_r+2{}_nC_{r-1}+{}_nC_{r-2}$ ヲ證明セヨ.

問題 II (茲ニハ順列ニ關スルモノモ含ム)

1. 將校 5 人,兵卒 200 人ノ一隊ヨリ,或特別任務ノ爲ニ將校 1 人,兵卒 5 人ヲ選ビ出サントス, 其ノ方法幾通リアルカ.

2. 5 人ノ日本人, 8 人ノ英國人ノ中ヨリ 4 人ヨリ成ル一組ヲ選定セントスルニ當リ,日本人ハ少ナクトモ一人入リ交ル樣ニセントス. 其ノ仕方幾通リアルカ.

3. 10人ノ婦人ヲ 5 名宛二ツノ圓卓ノ周圍ニ着席セシメントス,其ノ方法幾通リアルカ.

4. 五拾錢銀貨 3 個,貳拾錢銀貨 5 個,拾錢白銅貨 2 個,壹錢銅貨 4 個ノ中ヨリ二個宛ノ貨幣ヲ取ルコトニヨリテ幾通リノ金高ヲ作リ得ベキカ.

5. 25人ノ生徒ヨリ 4 人ノ總代ヲ選ブニ當リ或特別ノ二人ガ同時ニ選定サレザル樣ニセントス. 幾通リノ仕方アルカ.

6. 男兒八人,女兒八人アリ,各四人宛ヨリ成ル八人ノ圓陣ヲ二ツ作ラントス. 但男同士又女同士ハ相隣ラザルモノトス,幾通リノ仕方アルカ.

7. 八ツノ相異ナル玉ヲ腕輪ノ周圍ニ等間隔ヲ以テ附ケントス．排列ノ仕方幾通リアルカ．

8. 赤玉3個,白玉5個,青玉7個ヲ絲ニテツナギ一ツノ環ヲ作ラントス．但相隣ル白玉ノ間ニハ他ノ色ノ玉ガ二ツ宛アル様ニスルモノトス．玉ノ排列ノ方法幾通リアルカ．

9. 20人ノ兵士ヲ9人, 7人, 4人ノ三組ニ分タントス．其ノ方法幾通リアルカ．

10. 同一平面上ニn個ノ直線アルトキ,其ノ交點ノ最モ多キトキノ數ヲ求ム．

11. 同一平面上ニアルn個ノ點ノ中三點ヲ頂點トスル三角形ハ幾ツアルカ．但何レノ三點モ同一直線上ニアラザルモノトス．

12. 凸多角形ノ邊ノ數ガnナルトキ,其ノ對角線ノ數ハ$\frac{1}{2}n(n-3)$ナルコトヲ證明セヨ．

13. 矩形ノ市街アリ,兩側トモニテ八個ノ南北ニ貫通スル道路ト,兩側トモニテ五個ノ東西ニ貫通スル道路トニテ碁盤目ニ區劃セラル．今東北隅ヨリ西南隅ニ至ルニ最モ短キ路ノ選ビ方ハ幾通リアルカ．

第三章　二項定理

7. 二項式ノ羃.

先ヅ二項式ノ羃ノ二三ヲ示セバ

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

之ヨリ斯ノ如キ展開式ヲ求ムル一般ナル方法ヲ考究セン．

8. 二項定理.

先ヅ乘法ニヨリ

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$
$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4&+(a+b+c+d)x^3\\&+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\&+(abc+abd+acd+bcd)x\\&+abcd\end{aligned}$$

ナルコト容易ニ知ラル．此等ノ等式ノ右邊ヲ吟味スレバ直チニ次ノ法則ヲ發見スベシ．

(1)　項ノ數ハ左邊ノ二項因數ノ數ヨリモ1ダケ多シ.

(2)　初項ノ x ノ羃ノ指數ハ因數ノ數ニ等シク,之ガ x ニ關シ最高次ノ項ナリ.

(3)　x ノ各羃ノ係數ヲ見ルニ,初項ノ係數ハ1ニシテ,第二項ノ係數ハ左邊ノ二項因數中ノ第二番目ノ文字ノ和,第三項ノ係數ハ此等ノ文字ヲ二ツ宛採リタル積ノ和,第四項ノ係數ハ此等ノ文字ヲ三ツ宛採リタル積ノ和ナリ. 以下之ニ準ジ,最後ノ項ハ此等ノ文字ノ積ナリ.

一般ニ二項因數ノ數ガ n 個アルトキニ於テモ此ノ法則ハ成立ス. 卽チ

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+h)(x+k)$$
$$=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots\ldots+A_n$$

玆ニ　$A_1=a+b+c+\ldots\ldots+h+k$

$$A_2=ab+ac+bc+\ldots\ldots+hk$$
$$A_3=abc+abd+bcd+\ldots\ldots+ghk$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n=abc\ldots\ldots hk$$

倍 $b,\ c,\ \ldots\ldots,\ h,\ k$ ヲ皆 a ニ等シトスレバ $A_1,\ A_2,$

$A_3,\ \ldots\ldots,\ A_n$ ハ次ノ如クナル.

$$A_1=a+a+a+\ldots\ldots+a+a=na$$
$$A_2=a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots+a^2={}_nC_2a^2$$
$$A_3=a^3+a^3+a^3+\ldots\ldots+a^3={}_nC_3a^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n=a^n$$

且上ノ等式ノ左邊ハ $(x+a)^n$ トナル.

$$\therefore\quad (x+a)^n=x^n+{}_nC_1ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+{}_nC_3a^3x^{x-3}+\ldots\ldots+a^n$$

卽チ　$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2x^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3x^{n-3}+\ldots\ldots+a^n$$

是卽チ $(x+a)^n$ ノ展開式ヲ與フル公式ニシテ,之ヲ**二項定理**ト云フ.

例. $(a+b)^5$ ノ展開式ヲ求ム.

解　$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}a^3b^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}a^2b^3$$
$$+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}ab^4+b^5$$
$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\quad \text{答.}$$

【注意】 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ナル故 $(x+a)^n$ ノ展開式ニ於テ初項ト末項トヨリ同ジ番目ノ項ノ數係數ハ相等シ.

上ニ得タル公式ニ於テ $x,\ a$ ノ代リニ夫夫 $a,\ b$

ト置ケバ

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\dots\dots+b^n$$

トナル.

又之ニ於テ a, b ノ代リニ夫夫 1, x ト置ケバ

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\dots+x^n$$

(問) 次ノ式ヲ展開セヨ.

(1) $(x-a)^6$　(2) $(a+b)^8$　(3) $(1+x)^5$

9. 一般項.

前節ニ見出シタル公式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\dots\dots+b^n$$

ニ於テ第 $(r+1)$ 番目ノ項ハ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\dots\dots r}a^{n-r}b^r$$

即チ $\quad {}_nC_ra^{n-r}b^r$

ナリ. 之ニ於テ r ニ 1, 2, 3, ... ノ値ヲ與フレバ第二項,第三項,第四項,...... ヲ得ベシ. 因テ之ヲ $(a+b)^n$ ノ展開式ニ於ケル**一般項**ト云フ.

例 1. $(x-y)^{16}$ ノ展開式ニ於ケル第八項ヲ求ム.

解 $n=16$, $r+1=8$ 即チ $r=7$ ナリ. 因テ所要ノ項ハ次ノ如シ.

$$\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^9(-y)^7=-11440x^9y^7 \quad 答.$$

例 2. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ ノ展開式ニハ x^{11} ヲ含ムカ. 若含マバ其ノ項ヲ求メヨ.

解 第 $r+1$ 番目ノ項ガ求ムル項トスレバ,

$n=10$, $a=x^2$, $b=\dfrac{1}{x}$ ナルガ故ニ

$$a^{n-r}b^r=(x^2)^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=x^{20-3r}=x^{11}$$

$$\therefore\quad 20-3r=11$$

之ヨリ $\qquad r=3$

因テ所要ノ項ハ 3+1 即チ 4 番目ノ項ナリ. 故ニ所要ノ項ハ次ノ如シ.

$$\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}x^{11}=120x^{11} \qquad 答\ 120x^{11}$$

例 3. $(1-x+x^2)^3$ ヲ展開セヨ.

解

$$\begin{aligned}原式&=\{1-x(1-x)\}^3\\&=1-3x(1-x)+3x^2(1-x)^2-x^3(1-x)^3\\&=1-3x+3x^2+3x^2(1-2x+x^2)-x^3(1-3x+3x^2-x^3)\\&=1-3x+6x^2-7x^3+6x^4-3x^5+x^6 \quad 答.\end{aligned}$$

例 4.　1.005^7 ヲ小數第三位迄求ム.

解　$1.005^7=(1+0.005)^7=1+7\times 0.005+21\times 0.005^2+\dots$

第三項以下ノ項ニハ夫夫 0.005^2, 0.005^3, ……ナル因數ヲ含ミ小數第三位ノ 1 ヨリモ遙カニ小ナリ. 故ニ右邊ノ第三項以下ヲ切捨ツレバ

$1.004^7=1+7\times 0.005=1.035$　　　答 1.035

【注意】 $(1\pm x)^n$ ニ於テハ x ガ餘程小ナル場合ニハ此ノ冪ノ近似値トシテ $1\pm nx$ ヲ採リ得ルコトニ注意スベシ.

例 5.　993^4 ヲ十億ノ位マデ計算セヨ.

解　$993^4=(1000-7)^4=1000^4\left(1-\dfrac{7}{1000}\right)^4$

$$\fallingdotseq 1000^4\left(1-4\times\frac{7}{1000}\right)$$

$$=972000000000$$

答 9720億

此ノ計算ノ理由ハ學生諸子自ヲ考究セヨ.

【注意】 $(a\pm b)^n$ ニ於テ b ガ a ニ對シ餘程小ナル場合ニハ此ノ冪ノ近似値トシテ $a^n\left(1\pm\dfrac{nb}{a}\right)$ ヲ採ルコトヲ得ベシ. 但 $\dfrac{b}{a}$ ノ値ニヨリ近似ノ度合ニ精疎アルコト勿論ナリ.

問　題　III

次ノ各式ヲ展開セヨ.

1. $(1+x)^8$　　2. $(a-3x)^5$　　3. $(a+bx)^7$

4. $(1-2x^2)^5$　　5. $(x-a)^9$　　6. $(1+x-x^2)^4$

7. $(a+b+c)^5$

8. $(1-x)^n$ ノ展開式ノ一般項ヲ求ム.

9. $(x-by)^{12}$ ノ第八項ヲ求ム.

10. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$ ノ第六項ヲ求ム.

11. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{20}$ ノ展開式ニ於ケル x^7 ノ項ノ係數ヲ求ム.

12. $(3-2x)^7$ ノ展開式ニ於ケル x^4 ノ係數ヲ求ム.

13. $(1+2x)^9+(1-2x)^{11}$ ニ於テ x^3 ノ係數ヲ求ム.

14. $(1+\sqrt{1-x^2})^5+(1-\sqrt{1-x^2})^5$ ヲ展開セヨ.

15. 次ノ數ノ近似値ヲ求ム.

(1) 1.008^4（小數第二位迄）　(2) 0.9995^6（小數第六位迄）

16. 1005^9, 9991^5 ノ最初ノ四位ヲ求ム.

17. $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於ケル總テノ數係數ノ和ハ 2^n ニ等シキコトヲ證明セヨ.

第四章　確　率

10. 確率.

一ツノ袋ノ中ニ5個ノ白球ト3個ノ赤球トガ入レアルトキ,無心ニ一球ヲ取出セバ其ガ白球ナルコトト赤球ナルコトトアルベシ. 而シテ8個ノ球ノ何レカガ取出サルルヲ以テ8個ノ相異ナル場合アリ,其ノ中白球ガ取出サルル場合ノ數ハ5ナリ. 斯ノ如キ場合ニ於テハ,白球ガ取出サルル確率ハ $\frac{5}{8}$ ナリト云フ. 但8個ノ球ノ何レガ取出サルルカハ全ク豫想シ難キモノニシテ,何レモ齊一ニ取出サレ得ルモノトセルナリ.

又一ツノ骰子ヲ投グルトキハ1ノ目乃至6ノ目ノ何レカガ顯ハルベシ,卽チ顯ハルル面ニ關シテハ6個ノ相異ナル場合アリ,而シテ其ノ中1ノ目ノ顯ハルル場合ノ數ハ1ナリ. 斯ノ如キ場合ニ於テ1ノ目ノ顯ハルル確率ハ $\frac{1}{6}$ ナリト云フ. 但骰子ノ6個ノ目ハ齊一ニ顯ハレ得ルモノトス.

斯ノ如ク或事象ノ生起不生起ニ關スル相異ナル場合ガ n 個アリ,且此等ノ場合ガ齊一ニ起リ得ルモノニシテ,其ノ中其ノ事象ノ起ル場合ノ數ガ a ナルトキ,其ノ**事象ノ起ル確率**(或ハ其ノ**事象ノ確率**)ハ $\frac{a}{n}$ ナリト云フ.

此ノトキ a 個ノ場合ヲ其ノ事象ノ**起ルニ都合ヨキ場合**ト云ヒ,殘リノ $(n-a)$ 個ノ場合ヲ其ノ事象ノ**起ルニ都合惡シキ場合**ト云フ.

上記ノ初メノ例ニ於ケル白球ノ取出サルル事象ニツキテハ $n=8,\ a=5$ ニシテ其ノ確率ハ $\frac{5}{8}$ ナリ,又次ノ例ニ於ケル骰子ヲ投ゲテ1ノ目ノ顯ハルル事象ニツキテハ $n=6,\ a=1$ ニシテ其ノ確率ハ $\frac{1}{6}$ ナリ.

偖 n 個ノ場合ガ齊一ニ起リ得ルトハ其ノ中何レノ場合ニテモ他ノ何レノ場合ニ比シテヨリ容易ニ起リ得ルコトヲ期待シ得ザルコトナリ.

因テ例ヘバ上記ノ初メノ例ニ於テ,袋ノ中ヨリ無心ニ一球ヲ取出シ,其ガ白球カ赤球カヲ記錄シテ後之ヲ原ノ袋ニ返入シ,再ビ無心ニ一球ヲ取出シテ同様ナル手續ヲ繰返スモノトセン. 斯ノ如キ試行ヲ單ニ8回ナシタルダケニテハ其ノ間ニ於テ白球,赤球ガ夫夫5回, 3回取出サルルトハ限

ラザルベシ,サレド斯ノ如キ試行ノ度數Nガ非常ニ大ナル數ナルトキハ其ノ間ニ於テ白球及赤球ノ取出サレタル回數ヲ夫夫r及r'トスレバ比$r:r'$ハ5:3ニ極メテ近キ値ヲ有スベク,從テ$\frac{r}{N}$ハ$\frac{5}{8}$ニ極メテ近キ値ヲ有スベシ. 而シテNガ限ナク增大スレバ$r:r'$ハ限ナク5:3ニ接近シ,$\frac{r}{N}$ハ限ナク$\frac{5}{8}$ニ接近スベシ.

又骰子ヲN回繰返シテ投ゲタル間ニ於テ1ノ目ノ顯ハレタル回數ヲrトスレバ,Nガ增スニ從テrモ增シ,Nガ非常ニ大ナルトキハ$\frac{r}{N}$ハ$\frac{1}{6}$ニ極メテ近キ値ヲ有シ,Nガ限ナク增大スレバ$\frac{r}{N}$ハ限ナク$\frac{1}{6}$ニ接近スベシ.

因テ一般ニN回ノ試行中或事象ノ起リタル回數ヲrニテ表セバ,Nガ非常ニ大ナルトキハ$\frac{r}{N}$ハ大略或一定ノ數ニ極メテ近キ値ヲ有ス,而シテ此ノ一定ノ數ヲ其ノ事象ノ起ル確率ナリト云フコトヲ得ルナリ. 之ヲ確率ノ**經驗的定義**ト云ヒ,前ニ掲ゲタルヲ**數學的定義**ト云フ.

或死亡生殘表ニヨレバ30歲ノ人ガ86292人中60歲迄生存セシモノ55973人ナルコト知ラル.

此ノ事實ニヨリ今30歲ノ人ガ今後30年間生存スル確率ハ$\frac{55973}{86292}$ナリト云フ如キハ確率ノ經驗的定義ニヨルモノナリ.

偖確率ノ定義(初メノ)ニヨレバ次ノ事柄直チニ知ラル.

(1) 或事象ガ恒ニ確實ニ起ルトキハ其ノ事象ノ起ル確率ハ1ナリ. 何トナレバ此ノ場合ニハ明ニ$a=n$,從テ$\frac{a}{n}=\frac{n}{n}=1$ナレバナリ.

(2) 或事象ノ起ル確率ヲpトスルトキ,其ノ事象ノ起ラザル確率ハ$1-p$ナリ. 何トナレバ總テノ場合ガn個アル中其ノ事象ニ都合惡シキ場合ノ數ハ$n-a$ナルヲ以テ其ノ起ラザル確率ハ明ニ$\frac{n-a}{n}=1-\frac{a}{n}=1-p$ナレバナリ.

(問 1) 一ツノ骰子ヲ投ゲテ奇數ノ目ノ顯ハルル確率ヲ求ム.

(問 2) 一ツノ錢ヲ投ゲテ表面ノ顯ハルル確率ヲ求ム.

(問 3) 袋ノ中ニ白球3個,赤球5個,黑球4個入レアルトキ,無心ニ取出シタル一球ガ白球ナル確率及其ガ白球ナラザル確率ヲ求ム.

11. 排反事象.

二ツ以上ノ事象ガ同時ニ起リ得ザルトキハ,其等ノ**事象ハ互ニ排反ス**ト云フ.

例ヘバ骰子ヲ投ゲルトキ1ノ目乃至6ノ目ノ顯ハルル六ツノ事象ハ互ニ排反スル事象ナリ.又一ツノ袋ノ中ニ白球3個,赤球5個,黑球4個入レアルトキ,無心ニ一球ヲ取出シ之ガ白ナルト赤ナルトハ互ニ排反スル事象ナリ.

例. 上記ノ第二ノ場合ニ於テ無心ニ取出シタル一球ガ白若クハ赤ナル確率ヲ求ム.

解 總テノ場合ノ數ハ$3+5+4$卽チ12ニシテ,無心ニ取出シタル一球ガ白ナル場合ノ數ハ3,赤ナル場合ノ數ハ5ナリ,從テ其ガ白若クハ赤ナル場合ノ數ハ$3+5$ナリ. 因テ所要ノ確率ハ$\frac{3+5}{12}$卽チ$\frac{2}{3}$ナリ.

答 $\frac{2}{3}$

【注意】 此ノ例ニ於テ$\frac{3+5}{12}=\frac{3}{12}+\frac{5}{12}$ナリ. 偖此ノ$\frac{3}{12}$ハ取出シタル一球ガ白ナル確率ニシテ,$\frac{5}{12}$ハ其ガ赤ナル確率ナリ,而シテ白ナルト赤ナルトハ互ニ排反スル事象ニシテ,上ノ結果ニヨレバ此等二ツノ事象ノ何レカガ起ル確率ハ兩事象ノ確率

ノ和ニ等シキナリ.

此ノ例ノ如クシテ次ノ事柄ヲ證明シ得ベシ.

二ツ以上ノ排反事象ノ何レカガ起ル確率ハ各事象ノ確率ノ和ニ等シ.

(問) 一ツノ骰子ヲ投ゲテ1カ6カノ何レカノ目ノ顯ハルル確率ヲ求ム.

12. 獨立事象,從屬事象.

二ツ以上ノ事象アリテ其ノ何レモガ起ル確率ハ他ノモノガ起ルト否トニ關係ヲ有セザルトキハ其ノ**事象ハ互ニ獨立**ナリト云ヒ,然ラザル場合ニ於テハ卽チ其ノ或一事象ノ起ル確率ハ他ノモノノ起ルト否トニヨリテ其ノ値ヲ異ニスルトキハ其等ノ**事象ハ互ニ從屬**ナリト云フ.

例ヘバ骰子ヲ二回投ゲタルトキ,第一回ニ6ノ目ガ顯ハルルコトト第二回ニ6ノ目ノ顯ハルルコトトハ互ニ獨立ナル事象ナリ. 一ツノ袋ノ中ニ白球5個ト赤球3個トガ入レアル場合ニ,二回續キテ一球宛取出スモノトスレバ,第一回ニ赤球ガ出ヅルコトト第二回ニ赤球ガ出ヅルコトトハ互ニ從屬ナリ. 何トナレバ第一回ニ白球ガ出デ

タルトキハ第二回ニ赤球ノ出ヅル確率ハ $\frac{3}{4+3}=\frac{3}{7}$ ナレドモ,第一回ニ赤球ガ出デタルトキハ第二回ニ赤球ノ出ヅル確率ハ $\frac{2}{5+2}=\frac{2}{7}$ トナリ $\frac{3}{7}$ トハ異ナレバナリ.

例. 甲ハ一ツノ骰子ヲ投ゲテ1カ6カノ目ヲ出セバ受賞シ,乙ハ伏セタル52枚ノとらんぷノ一枚ヲ取リテきんぐヲ出セバ受賞スルト云フトキ,兩人ガ之ヲ試ミテ共ニ受賞スル確率ヲ求ム.

解 先ヅ一ツノ骰子ヲ投ゲテ1カ6カノ目ノ顯ハルル事象ヲ E_1 トシ, 52枚ノとらんぷヨリ一枚ヲ取リテきんぐノ顯ハルル事象ヲ E_2 トスレバ, E_1 ノ確率ハ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, E_2 ノ確率ハ $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ ナリ,而シテ明ニ E_1 ト E_2 トハ互ニ獨立ナリ. 偖骰子ノ六ツノ目ノ何レガ顯ハルルニ對シテモとらんぷノ五十二枚ノ何レカガ取ラルルヲ以テ,總テノ場合ノ數ハ 6×52 ナリ,而シテ E_1 ニ都合ヨキ場合ノ各ニ對シテ E_2 ニ都合ヨキ場合ノ何レカガ起レバ兩人共ニ受賞スルニ都合ヨキ場合トナル,從テ兩人共ニ受賞ニ都合ヨキ場合(即チ E_1, E_2 ガ共ニ起ルニ都合ヨキ場合)ノ數ハ 2×4 ナリ. 因テ所要ノ確率ハ

$$\frac{2\times4}{6\times52}=\frac{2}{6}\times\frac{4}{52}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{13}=\frac{1}{39}$$ 答 $\frac{1}{39}$

【注意】 所要ノ確率ハ E_1, E_2 ノ確率ノ積ニ等シキコトニ注意セヨ. 同樣ニシテ次ノ結果ヲ得ベシ.

一般ニ獨立事象ガ悉ク起ル確率ハ各事象ノ確率ノ積ニ等シ.

尙從屬事象ニツキテモ同樣ナル事柄存在ス.

二ツノ從屬事象 E_1, E_2 アリテ, E_1 ノ起ル確率ガ p_1, E_1 ガ起リタリトシテ E_2 ノ起ル確率ヲ p_2 トスレバ, E_1 及 E_2 ガ相續イテ起ル確率ハ p_1p_2 ナリ.

此ノ證明ハ獨立事象ノ場合ト同樣ナリ.

例. 一ツノ袋ノ中ニ白球5個,赤球3個入レアルトキ,無心ニ一球宛二回續ケテ取出シ,二回トモ白球ガ取出サルル確率ヲ求ム.

解 第一回ニ取出シタル球ガ白ナル確率ハ明ニ $\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$ ナリ. 次ニ第一回ニ白球ガ取出サレタルトキ第二回ニ白球ノ取出サルル確率ハ $\frac{4}{4+3}=\frac{4}{7}$ ナリ. 因テ二回トモ白球ガ取出サルル確率ハ $\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}$ 即チ $\frac{5}{14}$ ナリ. 答 $\frac{5}{14}$

(問) 此ノ例ニツキテ所要ノ確率ガ二ツノ事象ノ確率ノ積 $\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}$ ニ等シキコトノ證明ヲ試ミヨ.

例　題

1. 一ツノ骰子ヲ二回續ケテ投ゲテ第一回ニハ2ノ目,第二回ニハ5ノ目ノ顯ハルル確率如何.
2. 二ツノ骰子ヲ投ゲテ其ノ何レカ一方ニハ奇數,他ノ方ニハ偶數ノ目ノ顯ハルル確率ヲ求ム.
3. 50本ノ籤ノ中當リ籤ガ12本アル場合ニ,甲乙兩人共ニ之ヲ引キテ當リ籤ヲ得ル確率ヲ求ム.
4. 一ツノ袋ニ白球5個,赤球7個入レアルトキ,無心ニ二ツノ球ヲ取出シ,何レモ白ナル確率ヲ求ム. (二球ヲ取出ストキハ總テノ場合ノ數ハ${}_{12}C_2$ナルコトニ注意セヨ.)
5. 一ツノ骰子ヲ6回續ケテ投ゲ其ノ間ニ少ナクトモ1回ハ1ノ目ノ顯ハルル確率ヲ求ム.

---

13. n回試行ニ關スル確率.

例. 一ツノ骰子ヲ5回投ゲテ其ノ中3回ダケ1ノ目ガ顯ハルル確率ヲ求ム.

解 骰子ヲ1回投ゲテ1ノ目ノ顯ハルル確率ヲpトシ,之ガ顯ハレザル確率ヲqトスレバ$p=\frac{1}{6}$ニシテ$q=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ナリ. 偖1ノ目ノ顯ハルルト,之ガ顯ハレザルトハ互ニ獨立ナル事象ナルヲ以テ例ヘバ最初3回引續キテ1ノ目ガ顯ハレ,殘リノ2回ニハ之ガ顯ハレザル確率ハp^3q^2ナリ.

一般ニ5回投ゲタル中或特別ノ3回ダケ1ノ目ガ顯ハレ他ノ2回ニハ之ガ顯ハレザル確率モ亦p^3q^2ナリ. 而シテ5回ノ中3回ダケ1ノ目ガ顯ハレ,他ノ2回ニハ之ガ顯ハレザル場合ノ數ハ${}_5C_3$ニシテ此等ノ場合ハ排反ス. 因テ所要ノ確率ハ${}_5C_3p^3q^2$ナリ. 之ヲ計算スレバ次ノ如シ.

$${}_5C_3p^3q^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{125}{3888}\qquad 答\ \frac{125}{3888}$$

此ノ例ト同樣ニシテ次ノ結果ヲ得ベシ.

一回ノ試行ニ於テ或事象ノ起ル確率ヲpトシ,其ノ起ラザル確率ヲ$q(=1-p)$トスレバ,n回ノ試行ニ於テ其ノ事象ガ丁度r回起ル確率ハ${}_nC_rp^rq^{n-r}$ナリ.

之ニヨレバ,$(p+q)^n$ヲ二項定理ニヨリ展開シタル各項ハn回ノ施行中其ノ事象ガ丁度n回,$n-1$回,$n-2$回,……起ル確率ナルコト知ラルルナリ.

從テ又n回ノ施行中其ノ事象ガ少ナクトモr

回起ル確率ハ次ノ和ニ等シ.

$$p^n+np^{n-1}q+\frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+\frac{n!}{n!(n-r)!}p^rq^{n-r}.$$

(問) 錢ヲ10回投ゲテ丁度6回ダケ表面ノ顯ハルル確率ヲ求ム.

14. 期望金額.

或事象ノ起ル確率ガ p ナルトキ,或人ガ其ノ事象ガ起レバM圓ノ金額ヲ受ケ取リ得ル場合ニ於テハ此ノ人ノ**期望金額**ハ pM 圓ナリト云フ.

例ヘバ或人ガ一ツノ骰子ヲ投ゲテ1ノ目ガ顯ハルレバ30圓ヲ受ケ取ルコトヲ契約セルトキハ,此ノ人ノ期望金額ハ $30\times\frac{1}{6}$ 圓卽チ5圓ナリ.

倘此ノ人ガ一ツノ骰子ヲ投ゲルコトヲN回試ミ,其ノ間1ノ目ノ出ヅル每ニ30圓宛受取ルモノトスレバ,Nガ非常ニ大トナルトキハ1ノ目ノ顯ハルル度數ハ $N\times\frac{1}{6}$ ニ極メテ近キ値ヲ有シ,從テ此ノ人ノ受クル金額ノ總和ハ殆ンド $N\times\frac{1}{6}\times30$ 圓ニ等シ. 今之ヲ試行ノ回數Nニテ平均スレバ此人ハ平均每回 $N\times\frac{1}{6}\times30\div N$ 圓卽チ5圓ヲ受取リタルコトトナルベシ.

之ニヨリテ期望金額ノ意義推知セラルベシ.

15. 雜例.

例1. 甲乙ノ袋アリ,甲ニハ赤球5個,白球7個,乙ニハ赤球3個,白球9個入レアルモノトス. 今無心ニ何レカノ袋ヨリ一球ヲ取出ストキ,之ガ赤球ナル確率ヲ求ム.

解 先ヅ甲ノ袋ニ手ヲ入レル確率ハ $\frac{1}{2}$ ナリ,而シテ此ノ袋ヨリ赤球ヲ取出ス確率ハ $\frac{5}{5+7}=\frac{5}{12}$ ナリ,從テ甲ニ手ガ入リテ取出サレタル球ガ赤ナル確率ハ $\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{24}$ ナリ. 次ニ乙ニ手ガ入リテ取出サレタル球ガ赤ナル確率ハ $\frac{1}{2}\times\frac{3}{3+9}=\frac{3}{24}$ ナリ. 而シテ兩事象ハ互ハ排反スルヲ以テ所要ノ確率ハ $\frac{5}{24}+\frac{3}{24}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ ナリ. 答 $\frac{1}{3}$

例2. 甲乙ノ二人アリ,甲,乙ノ順ニ一ツノ骰子ヲ投ゲテ最初ニ1ノ目ヲ振リ出シタル者ヲ勝者トナストキ,甲乙各人ノ勝ツ確率ヲ求ム.

解 甲ノ勝ツ場合ハ次ノ如シ.

第一回ニ甲投ゲテ1ノ目ノ出ヅル場合.

第一回ニ甲投ゲテ1ノ目出デズ,第二回ニ乙投ゲテモ1ノ目出デズ,第三回ニ甲投ゲテ1ノ目出ヅル場合. 次ニハ第五回目ニ始メテ1ノ目出ヅ

ル場合. 追テ斯ノ如シ.

偕第一回ニ1ノ目出ヅル確率$=\frac{1}{6}$

第三回目ニ1ノ目出ヅル確率

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$

第五回目ニ1ノ目出ヅル確率$=\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}$

....

而シテ此等ノ場合ハ互ニ排反ス. 故ニ甲ノ勝ツ確率ヲpトスレバ

$$p=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\cdots\cdots=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{6}{11}$$

乙ノ勝ツ確率モ亦同樣ニシテ求メ得ベシ,サレド甲ノ勝ツ確率ヲ求メタル以上ハ之ヲ1ヨリ引ケバ乙ノ勝ツ確率トナル,卽チ其ハ$1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$ナリ.

答 甲ノ勝ツ確率$=\frac{6}{11}$,乙ノ勝ツ確率$=\frac{5}{11}$

例 3. 一ツノ骰子ヲ投ゲテ顯ハレタル目ガ1ナラバ10圓,3ナラバ6圓,5ナラバ2圓ヲ受取リ,其ノ他ノ目ナラバ何モ受取ラザル契約ヲナシタル人アリトス. 此ノ人ガ一ツノ骰子ヲ一回投グルトキノ期望金額ヲ求ム.

解 今此ノ人ガ一ツノ骰子ヲ投グルコトヲN回試ミタルモノトシ,Nヲ非常ニ大ナル數トスレバ此ノN回ノ試行中1,3,5ノ目ノ顯ハレタル回數ハ何レモ$N\times\frac{1}{6}$ナルベシ. 因テ此ノ人ノ受取ルベキ金額ノ和ハ$\left(10\times N\times\frac{1}{6}+6\times N\times\frac{1}{6}+2\times N\times\frac{1}{6}\right)$圓ナルベク,之ヲN回ニ平均シタルモノハ次ノ如シ.

$$\left(10\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}\right)\text{圓}=3\text{圓}$$

之卽チ所要ノ期望金額ナリ. 答 3圓

問 題 IV

1. 一ツノ袋ニ白球3個,赤球5個入レアルトキ,無心ニ二球ヲ取リ出シ,一ツガ白,他ガ赤ナル確率ヲ求ム.

2. 一ツノ袋ニ白球2個,赤球2個,黑球2個入レアルトキ,無心ニ三個ノ球ヲ取出シ,其ガ白,赤,黑ノ三種一個宛ナル確率ヲ求ム.

3. 一ツノ錢ヲ三回續ケテ投ゲテ三回トモ同ジ面ノ表ハルル確率如何.

4. 二個ノ骰子ヲ投ゲテ顯ハルル目ノ數ノ和ガ8トナル確率ヲ求ム. 又此ノ場合ニ目數ノ和ガ8トナル場合ノ數ハ$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ノ展開式ニ於ケル$x^8$ノ係數ニ等シ,之ヲ證明セヨ.

5. 三個ノ骰子ヲ投ゲテ顯ハルル目ノ數ノ和ガ10トナル確率ヲ求ム.

6. 甲,乙,丙ノ三人ガ甲,乙,丙ノ順ニ一ツノ骰子ヲ投ゲテ最初ニ1ノ目ヲ振リ出ス者ヲ勝者トスルトキ,甲乙丙各ガ勝者トナル確率ヲ求ム.

7. 甲乙ノ兩人交互ニ二ツノ骰子ヲ投ゲ,顯ハル目ノ數ノ和ガ最初ニ6トナリタルモノヲ勝者トスルトキ,兩人ノ勝ツ確率各如何.

8. 50本ノ籤ノ中3本ノ當リ籤ノアル場合ニ,之ヲ一マトメトシテ一本ヲ引カシムルト,之ヲ30本ト20本ノ二口ニ分チ,30本ノ方ニ當リ籤ヲ入レ置キテ兩口ノ中ヨリ勝手ニ一本ヲ引カシムルトニテハ引當テル確率何レガ大ナルカ.

9. 一ツノ袋ノ中ニ1, 2, 3ノ番號ヲ附セル三枚ノ切符ヲ入レ置キ,無心ニ其ノ一枚ヲ取リ出シテハ原ニ戻スコトヲ4回行フトキハ引出シタル切符面ノ數ノ和ガ偶數ナル確率如何.

10. 甲,乙ガ此ノ順ニ一ツノ五十錢銀貨ヲ投ゲ最初ニ其ノ表面ヲ出ダシタル者ガ之ヲ得ル約束ヲナシタリ. 兩人ノ期望金額各如何.

11. 甲,乙ガ此ノ順ニ一ツノ骰子ヲ投ゲ最初ニ6ヲ振リ出シタル者ガ第三者ヨリ10圓ヲ得ル契約ヲナシタルトキ,兩人ノ期望金額各如何.

12. 甲ハ二ツノ骰子ヲ投ゲテ10ヲ出セバ30圓ヲ得,乙ハ52枚ノとらんぷヨリ一枚ヲ拔キ取リテきんぐヲ出セバ20圓,ぽいんとヲ出セバ15圓ヲ得ル約束ナルトキ,兩人同時ニ各ノ試ミヲ一回ナストキノ期望金額ヲ求ム.

復習雜問題

1. 相異ナル n 個ノ物全部ヲ以テ作レル順列ノ中特別ナル r 個ノモノガ一定ノ順序ニ排列サレタルモノノ數ハ $\frac{n!}{r!}$ ナルコトヲ證明セヨ.

2. 10冊ノ書籍ヲ一列ニ列ベルニ當リ或特別ナル2冊ガ相隣ラザル樣ニセントス. 幾通リノ列ベ方ガアルカ.

3. ${}_nP_r={}_{n-1}P_r+r{}_{n-1}P_{r-1}$ ヲ證明セヨ.

4. $2n$ 個ノ相異ナル物ヨリ n 個宛採リタル組合セノ中或一ツノ特別ナルモノヲ含ムモノノ數ヲ求ム.

5. ${}_nC_r:{}_nC_{r+1}:{}_nC_{r+2}=1:2:3$ ナルトキ, n 及 r ヲ求ム.

6. n ガ與ヘラレタル場合ニ, ${}_{2n}C_r$ ハ $r=n$ ナルトキ最大ナルコトヲ證明セヨ.

7. ${}_{n+3}C_r={}_nC_r+3{}_nC_{r-1}+3{}_nC_{r-2}+C_{r-3}$ ナルコトヲ證明セヨ.

8. 平面上ニ n 個ノ點ガ與ヘラレタルトキ,之ヲ頂點トスル n 邊形ハ幾ツ作リ得ルカ. 但 n 個ノ點ノ中何レノ三ツモ同一直線上ニナシトス.

9. 球ノ中心ヲ通ル n 個ノ平面ハ球面ヲ n^2-n+2 個ノ部分ニ分ツコトヲ證明セヨ. 但 n 個ノ平面ノ中何レノ三ツモ同一直線ニテ相交ラズトス.

10. 一ツノ平行四邊形内ニ於テ各邊ニ平行ナル二組ノ m 個ノ直線ヲ引クコトニヨリテ生ズル平行四邊形ノ數ハ $\frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2$ ナルコトヲ證明セヨ.

11. $(1+x)^{12}$ ノ展開式ニ於ケル最大係數ヲ求ム.

12. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ノ展開式ニ於ケル中央ノ項ヲ求ム.

13. $(1+x)^n$ ノ展開式ノ奇數番目ノ項ノ和ヲA,他ノ項ノ和ヲBニテ表セバ $(1-x^2)^n=A^2-B^2$ ナルコトヲ示セ.

14. $(1+x)^n$ ノ展開式ノ係數ヲ $c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ トスレバ次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ.

(1) $c_0^2+c_1^2+c_2^2+\ldots\ldots+c_n^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(2) $c_0^2-c_1^2+c_2^2-\ldots\ldots+(-1)^n c_n^2=0$

15. 甲ガ問題ヲ解キ得ル能力ハ $\frac{3}{4}$, 乙ガ問題ヲ解キ得ル能力ハ $\frac{2}{3}$ ナルトキ,兩人協力シテ問題ヲ解キ得ル確率如何.

16. n 本ノ福引中ニ當リ籤 a 本アルトキ,最初ニ引ク人ト第二番目ニ引ク人トノ損益ヲ比較セヨ.

17. 骰子ヲ6回投ゲテ1乃至6ノ目全部ノ顯ハルル確率如何.

II 總復習雜問題

I.

1. x ニ關スル有理整式 x^n-ax+b ト $nx^{n-1}-a$ トガ公約數ヲ有スルトキハ $\left(\dfrac{a}{n}\right)^n=\left(\dfrac{b}{n-1}\right)^{n-1}$ ナルコトヲ證明セヨ. 但 n ハ 1 ヨリモ大ナル整數ニシテ a ハ 0 ナラズトス.

2. P ハ線分 AB 上ノ一點ニシテ $AB\cdot AP=BP^2$ ナルトキ, $\dfrac{AP}{PB}$ ノ値ヲ小數第三位マデ計算シ,端數ハ切捨テヨ.

3. 級數アリ,奇數番目ノ項ハ等差級數ヲナシ,偶數番目ノ項ハ等比級數ヲナスト云フ,其ノ初メノ四項ヲ 1, 2, 3, 4 トスルトキハ其ノ初メノ n 項ノ和ヲ求メヨ. 但 n ハ奇數トス.

II.

1. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ虚根ヲ有スルトキ,二次式 ax^2+bx+c ハ x ノ實數値ニ對シテ恒ニ a ト同一ノ符號ヲ有スルコトヲ證明セヨ. 但 a, b, c ハ何レモ實數トス.

2. y ハ x ノ二乘ニ比例シ, z ハ x ノ三乘ニ比例スト云

フ. 若 $x=2$ ナルトキ $y=3, z=2$ ナラバ, x ガ 3 ヨリモ小ナルトキハ y ハ z ヨリモ小ナラザルコトヲ證明セヨ.

3. 正ノ整數 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... ニ於テ 1 ヲ第一群, 2, 3, ヲ第二群, 4, 5, 6 ヲ第三群トシ,以下順次此ノ如クスルトキ,第 n 群迄ニ含マルル數ノ總和ヲ求メヨ.

III.

1. $x=cy+b,\ y=a+cx,\ bx+ay=1$ ナルトキハ $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ ナルコトヲ證明セヨ.

2. x ニ關スル二次式 $ax^2+2bx+c$ ガ x ノ或一次式ノ二乘ニ等シキガタメニハ係數 b ハ a, c ノ比例中項ナルベキコトヲ證明セヨ.

3. $A+B(x+1)+C(x+1)^2+D(x+1)^3$ ヲ簡單ニスルトキ $1-x^3$ トナルト云フ. A, B, C, D ノ數値ヲ求ム.

IV.

1. $\dfrac{13}{12}+\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ ノ平方根ヲ求ム.

2. 二位ノ數アリ. 其ノ數字ノ差ハ 5 ニシテ,此ノ數ヲ其ノ一ノ位ノ數字ニテ割レバ商 27 ト剩餘 2 ヲ生ズト云フ. 其ノ數ヲ求ム.

3. a, b, c ガ實數ニシテ相等シカラザルトキ,

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

ノ根ハ二ツノ相異ナル實數ナルコトヲ證明セヨ.

V.

1. $ax^2+2bxy+cy^2$ ニ於テ $x=px'+qy'$, $y=rx'+sy'$ ト置キテ得ベキ式ヲ $Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2$ トスレバ $B^2-AC=(b^2-ac)(ps-qr)^2$ ナル關係アルベキコトヲ證明セヨ.

2. 一ノ位ト小數第一位トノ二桁ヨリ成ル帶小數アリ. 各數字ノ二乘ノ和ハ52ニシテ,此ノ帶小數ト,數字ノ位置ヲ交換シテ得ベキ帶小數トノ和ハ11ナリ. 此ノ帶小數ヲ求ム.

3. m, n, a 及 b ハ實數ニシテ且 m, n ガ共ニ正ナルトキハ $\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}$ ト $\dfrac{(m+n)^2}{a^2+b^2}$ トハ何レガ大ナルカ.

VI.

1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} 2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0 \\ x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0 \end{cases}$$

2. 次ノ方程式ノ二根ノ差ノ二乘ヲ求ム.

$$(1+\sqrt{2})x^2+(\sqrt{2}-1)x-4=0$$

3. 或人金2000圓ヲ或利率ニテ貸シ,一ケ年後ニ元利合計ヲ受取リ,其ノ中45圓ヲ消費シ,殘金ヲ前ト同利率ニテ貸付ケ再ビ一ケ年ヲ經テ元利合計2241.65圓ヲ得タリト云フ. 年利率何程ナルカ.

VII.

1. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$$

2. $x=2-\sqrt{-3}$, $y=3+\sqrt{-4}$ ナルトキ x^2-xy+y^2 ノ値ヲ計算セヨ.

3. $$\frac{a^4}{(a+b)(a-b)(a^2-c^2)}+\frac{b^4}{(b+c)(b-c)(b^2-a^2)}+\frac{c^4}{(c+a)(c-a)(c^2-b^2)}$$
ヲ簡單ニセヨ.

4. 酒精4升8合ヲ入レタル瓶ヨリ若干升ヲ酌ミ出シ水ヲ以テ之ヲ補ヒ,更ニ前回ヨリモ4合多ク酌ミ出シ又水ヲ以テ之ヲ補ヒシニ,水ト酒精トハ3:5ノ割合ニナレリト云フ. 最初酌ミ出セシ酒精ノ量何程ナリシカ.

VIII.

1. $(x+1)^2=x+3\sqrt{3x^2+3x-11}$ ヲ解ケ.

2. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ ナルトキハ x, y, z ノ比如何.

3. $x^4+px^2+2kqx+k^2a^2$ ガ $x-k$ 及 $x+k$ ノ孰レニテモ割切レルナラバ, $x-a$ 及 $x+a$ ノ孰レニテモ亦割切レルコトヲ證明セヨ. 但 $k\neq 0$ トス.

4. 或人若干ノ土地ヲ地代1440圓ニテ借受ケ,其ノ内八段歩ヲ自家用ニ供シ,其ノ殘リヲ自己ノ借賃ヨリハ一段ニツキ2圓宛高ク他人ニ轉貸シタルニヨリ,其ノ貸賃ヲ以テ丁度地主ニ地代全部ヲ拂ヒ得タリト云フ. 此ノ人ノ借リタル總段別如何.

IX.

1. (イ) x^3-2x^2+5x-6 ヲ $x-2$ デ割リタルトキノ剩餘ヲ求ム.

   (ロ) $9x^2-3x+7m$ ガ $x-5$ デ割切レル樣ニ m ノ値ヲ定メヨ.

2. 瓦斯體ノ體積ハ其ノ絕對溫度ニ正比例シ,且壓力ニ反比例ス. 今壓力7氣壓,絕對溫度280度ナルトキ160立方寸ノ瓦斯體アリ. 壓力8.5氣壓トナリ且絕對溫度250度トナラバ體積ハ幾許トナルカ.

3. $\dfrac{3x-1}{x+1}+\dfrac{2-x}{x-1}=\dfrac{2}{x^2-1}$ ヲ解ケ.

4. 水槽アリ,栓ヲ拔キテ之ニ充チタル水ヲ出セバ4時間ニテ盡クルト云フ. 今此ノ水槽ノ空ニナレルトキ,栓ノ拔ケ居ルヲ知ラズシテ或管ヨリ水ヲ入レタルニ,豫定ヨリ9時間長クカカリテ充チタリト云フ. 若栓ガ拔ケ居ラザリセバ幾時間ニテ充チタルベキカ.

X.

1. $a+b=c$ ナルトキ,次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)-b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)-c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

2. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ p 及 q トシ $p=2q+1$ ナルタメニハ係數 a, b 及 c ノ間ニ如何ナル關係アルカ.

3. 內徑24糎,深サ27糎ノ罐ノ內ニ二個ノ球ヲ容レタルニ丁度蓋ヲ蔽フコトヲ得タリ. 各球ノ直徑ハ何程ナルカ. 但一方ハ他ノ二倍ナリトス.

4. $1+2x^4$ ハ x^2+2x^3 ヨリ小ナラザルコトヲ證明セヨ.

XI.

1. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ ナルトキ,次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$$

2. $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ ナルトキハ $x^3-3\sqrt[3]{6}x=5$ ナルコトヲ證明セヨ.

3. x ニツキテノ二次三項式アリ. 今 x ヲ $5+2\sqrt{3}$ 及 $5-2\sqrt{3}$ ト置ケバ其ノ式ノ値ハ共ニ 0 トナリ,又 x ヲ 12 ト置ケバ其ノ式ノ値ハ 37 トナルト云フ. 此ノ三項式ヲ求ム.

4. P, Q, R ヲ夫夫等差級數ノ第 p, q, r 項トスルトキ, $P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)$ ヲ簡單ニセヨ.

XII.

1. x ト y トヲ未知數トスル聯立方程式

$$kx-6y=5k-3, \qquad 2x+(k-7)y=-7k+29$$

ニ於テ $x=y$ ナルガタメノ文字 k ノ値如何. 又其ノ場合ノ x, y ノ値如何.

2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\left(\dfrac{lx+my}{n}\right)^2$ ガ完全平方ナルガタメニハ次ノ關係アルヲ要スルコトヲ證明セヨ.

$$a^2l^2+b^2m^2=n^2$$

3. x^2+px+q ヲ $x-1$ ニテ割レバ剩餘 9 トナリ,又之ヲ $x+1$ ニテ割レバ剩餘 2 トナル. p 及 q ノ値如何.

4. 直角三角形アリ,其ノ周圍ハ三尺ニシテ,其ノ面積ハ三十平方寸ナリト云フ. 各邊幾寸ナルカ.

XIII.

1. $(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)$

$$=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d)$$

ナルトキハ $a:b=c:d$ ナルコトヲ證明セヨ.

2. $y^2=12x,\ y=3x+n$ ナル聯立方程式ヨリ得ベキ二組ノ根ニ於ケル x ノ値ガ相等シクナル様ニ n ノ値ヲ定メヨ.

3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases}(x^2+y^2)(x^3+y^3)=455\\ x+y=5\end{cases}$$

4. 水中ニテ秤レバ錫 37 封度ハ其ノ重サ 5 封度ヲ減ジ,鉛 23 封度ハ 2 封度ヲ減ズト云フ. 今錫ト鉛トノ合金 120 封度ヲ水中ニテ秤リシニ其ノ重サ 14 封度ヲ減ジタリト云フ. 合金中ニアル錫鉛ノ量各幾何ナルカ.

XIV.

1. $(x+a)(x+2b)+(x+2a)(x+b)$ ナル式ガ x ノ完全平方式ナルガタメニハ $\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{14}{9}$ ナル關係アルベキコトヲ證明セヨ.

2. 次ノ方程式ヨリ未知數 x, y ノ比ヲ求ム.

$$4\sqrt{\frac{x}{x+2y}}-3\sqrt{1+\frac{2y}{x}}=11$$

3. 四ツノ相連續スル整數ノ積ニ1ヲ加フレバ,或數ノ平方ニ等シキコトヲ證明セヨ.

4. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\frac{xy}{4y-3x}=20,\quad \frac{zx}{2x-4z}=15,\quad \frac{yz}{4y-5z}=12$$

XV.

1. $7x+3y+4z=6x+5y-3z=9x-7y+10z$ ナルトキ, x, y, z ノ連比ヲ求ム.

2. a, b, c ガ $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ根ナルトキ, $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ ノ値ヲ求ム.

3. $\dfrac{y+z}{y-z}=a,\quad \dfrac{z+x}{z-x}=b,\quad \dfrac{x+y}{x-y}=c$

ナルトキハ a, b, c 間ニ如何ナル關係アルカ.

4. 列車ノ速サハ一哩ニ要スル石炭ノ量ノ平方根ニ正比例シ,列車ノ車輛數ニ反比例スト云フ. 今車輛18ヲ連結セル或列車ガ半時間ニ25哩進ムニ石炭$\frac{1}{2}$噸ヲ要シタリト云フ. 然ラバ此ノ列車ガ車輛20ヲ連結シテ20分間ニ15哩進ムニハ何程ノ石炭ヲ要スベキカ. 但列車ハ等速運動ヲナスモノトス.

XVI.

1. $x^4+3x^3+ax^2+bx+c$ ガ $(x^2+1)(x+2)$ ニテ整除セラルルガタメニハ a, b, c ノ値ヲ如何ニ定ムベキカ.

2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} 3x^2-3xy+2y^2=2x \\ 2x^2+3y^2-4x=xy \end{cases}$$

3. a, b ガ與ヘラレタルトキ, a, x, y, b ガ連比例ヲナス樣ニ x, y ノ値ヲ定メヨ.

4. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x-5}=1$$

5. 二次式 px^2+qx+r ニ於テ x ヲ順次 $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ トスルトキハ,二次式ノ次次ノ數値ノ差ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ. 又此ノ等差級數ノ n 項ノ和如何.

XVII.

1. $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$ ヲ a ヲ含メル式ノ二乘ト, a ヲ含マザル式ノ二乘トノ差ニ變形シテ之ヲ因數ニ分解セヨ.

2. $x+y+z=11,\ x^2+y^2+z^2=45,\ yz=20$ ヲ解ケ.

3. 等差級數ニ於テ p 番目ノ項ガ q ニシテ, q 番目ノ項ガ p ナラバ $(p+q)$ 番目ノ項ハ0ナリ. 之ヲ證明セヨ.

4. 等比級數ノ公比ガ$\frac{1}{2}$ヨリモ小ナル正數ナルトキ,其ノ各項ノ絕對値ハ其ノ次ノ項以下ノ總テノ項ノ和ノ絕對値ヨリモ大ナルコトヲ證明セヨ.

5. 平面上ニ及ボス風ノ壓力ハ,其ノ面ノ廣サト,風速ノ平方トニ正比例ス. 風速毎時15哩ナルトキ,1平方尺ニ及ボス風壓一封度ナリトスレバ,9平方尺ニ及ボス風壓16封度トナルトキノ風速如何.

XVIII.

1. $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y-3}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{y-2}$$
ナルトキ,此等ノ相等シキ式ハ何レモ$\frac{5}{6}$ニ等シキコトヲ證明セヨ.

2. $x^2-(a-m)x-(a-1)(m-1)=0$ ハ a, m ガ實數ナルトキハ恒ニ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

3. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスルトキ,二次方程式 $x^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)x+\frac{a}{c}=0$ ノ二根ヲ α, β ノ式ニテ表セ.

4. $x^3-9x^2+26x-24=0$ ノ一根ガ他ノ一根ノ二倍ニ等シキコトヲ知リテ此ノ方程式ヲ解ケ.

5. 半徑 r ナル圓ニ內接スル正方形ヲ畫キ,更ニ此ノ正方形ニ內接スル圓ヲ畫キ,更ニ又此ノ圓ニ內接スル正方形ヲ畫キ,以下追ツテ此ノ如クシテ作ラレタル總テノ圓ノ面積ノ總和ヲ求ム.

XIX.

1. 方程式 $(2x-1)(x-1)(2x-7)(x-3)=9$ ヲ解ケ.

2. 方程式 $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$ ヲ解ケ.

3. 方程式 $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}=\dfrac{b-x}{\sqrt{b}-\sqrt{x}}$ ヲ解ケ.

4. 100個ノ石ヲ3尺オキニ一直線ニ並ベタルアリ. 今其ノ一端ヨリ第 n 番目ノ所ニ立テル人ガ此等ノ石ヲ悉ク一ツ宛其ノ所ニ運ビ集メントス. 運ビ終ルマデニ幾尺ノ道ヲ步ムベキカ.

5. 互ニ外切スル二ツノ圓周ノ一ツガ正方形ノ相隣レル二邊ニ切シ,他ノ一ツガ正方形ノ殘リノ相隣レル二邊ニ切ス. 此等二ツノ圓ノ面積ノ和ガ半徑 a 寸ナル圓ノ面積ニ等シク,此ノ正方形ノ一邊ノ長サハ b 寸ナリトス. 各ノ圓ノ半徑ノ長サヲ求メヨ.

XX.

1. $x^3-4a^2x+15a^3$ ト $x^4+a^2x^2+25a^4$ トノ最大公約數ヲ求ム.

2. $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ ガ實根ヲ有スルガタメニハ, a, b, c ノ關係如何.

3. k ガ如何ナル數値ヲ有スルトキ
$$x^2-y^2+3x-7y+k$$
ガ二ツノ一次因數ニ分解スルコトヲ得ルカ.

4. 一邊ノ長サ a 糎ナル正三角形ニ內接スル正方形ノ一邊ノ長サヲ求ム.

5. $x+y+z=\frac{14}{3}x=\frac{7}{2}y$ ナルトキ, $\frac{x+y+z}{z}$ ノ値ヲ求ム.

XXI.

1. $\frac{y}{a^2-y^2}\left(\frac{a}{a+\sqrt{a^2-y^2}}-1\right)+\frac{a}{y\sqrt{a^2-y^2}}$ ヲ簡單ニセヨ.

2. 方程式 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)xy+(b^2+c^2)y^2=0$ ニ於テ a, b, c, x 及 y ガ實數ナルトキハ, a, b, c ハ等比級數ヲナシ且 $\frac{x}{y}$ ハ其ノ公比ニ等シキコトヲ證明セヨ.

3. $ax^3+3bx^2+3cx+d$ ガ完全立方ナルトキハ,

$$ac=b^2,\quad bd=c^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

4. 第 n 項マデノ和ガ $n(np+q)$ ニ等シキ等差級數ノ初項及公差ヲ求ム.

5. 或整數ノ 2 倍ニ 7 ヲ加フレバ 19 ヨリモ大ナラズ, 又其ノ整數ノ 3 倍ヨリ 5 ヲ減ズレバ 13 ヨリモ小ナラズト云フ. 此ノ整數ヲ求ム.

XXII.

1. $6x^3-7x^2-16x+12$ ヲ 0 ナラシムルモ, $3x^3-5x^2-4x+4$ ヲ 0 ナラシメザル x ノ値ヲ求ム.

2. $(2n+1)$ 個ノ連續整數ノ和ハ $2n+1$ ノ倍數ナルコトヲ證明セヨ.

3. $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$ ナルトキ

$$A=a+b+c+d,\qquad B=a+b-c-d$$
$$C=a-b+c-d,\qquad D=a-b-c+d$$

トスレバ $AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2)$ ナルコトヲ證明セヨ.

4. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\begin{cases} yz+y+z=a-1 \\ zx+z+x=b-1 \\ xy+x+y=c-1 \end{cases}$$

XXIII.

1. $x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$ ガ完全平方式ナル樣ニ a, b, c ノ値ヲ定メヨ.

2. $ax^2+bx+c=0$ ト $px^2+qx+r=0$ トガ唯一ツノ共通根ヲ有スルガタメノ條件ハ

$$aq-bp\neq 0$$

且 $\quad (ar-cp)^2=(bp-aq)(cq-br)$

ナルコトヲ證明セヨ.

3. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ ナラバ, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ナルコトヲ證明セヨ.

4. $x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12$ ヲ解ケ.

5. 240 哩ヲ隔ツル兩停車場ヨリ二ツノ列車ガ同時ニ相向ヒテ出發シ, 途中ニテ相會シテヨリ一ツハ 4 時間,

他ノ一ツハ9時間ニテ各先方ノ停車場ニ達セリト云フ. 各列車ノ速サヲ求メヨ.

XXIV.

1. $x+y-\sqrt{x+y}-12$ ヲ0ナラシムル x, y ノ値ニシテ且其ノ平方ノ差ガ9トナルベキモノヲ求ム.
2. 聯立方程式 $x+\frac{1}{y}=a,\quad y+\frac{1}{x}=b$ ガ唯一組ノ根ヲ有スト云フ. a, b 間ノ關係及此ノ方程式ノ根ヲ求ム. 但 a, b ハ何レモ0ナラズトス.
3. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+x}=0,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+y}=0$ 及 $\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0$ ナルトキ $a+b+c=0$ ナルコトヲ證明セヨ.
4. 寶石入純金ノ指環アリ. 其ノ重サ7.29瓦ナリ. 之ヲ水中ニテ量レバ6.39瓦ナリト云フ. 金ノ比重ハ19.3寶石ノ比重ハ2.5ナルコトヲ知リテ金及寶石ノ重サヲ求ム.
5. 長サa尺ノモノアリ. 初メ其ノ三分ノ一ヲ取リ去リ次ニ其ノ殘リノ三分ノ一ヲ取リ去リ次ニ又其ノ殘リノ三分ノ一ヲ取リ去リ次第ニ斯クノ如クシテ限リナク取リ去リタル部分ノ長サハ總計幾尺ナルカ.

XXV.

1. 五位ノ整數アリ. 之ヲ9ニテ除シテ得ベキ剩餘ハ其ノ數字ノ和ヲ9ニテ除シテ得ベキ剩餘ニ等シキコ

トヲ證明セヨ.

2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$xy+x+y+3=0,\quad yz+y+z+7=0,\quad zx+z+x-11=0$$

3. 等差級數ヲナス四ツノ整數アリ. 其ノ平方ノ和ハ120ニシテ第二數ト第四數トノ積ハ第一數ト第三數トノ積ノ2倍ヨリモ大ナルコト8ナリ. 此等四ツノ整數ヲ求メヨ.
4. a, b, c, d ハ何レモ實數ニシテ且

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$$

ナルトキハ a, b, c, d ハ等比級數ヲナスコトヲ證セヨ.

5. 半徑a寸ノ圓ニ內接スル二等邊三角形アリ. 其ノ頂角ガ銳角ニシテ且其ノ面積ガ底邊及之ニ平行ナル直徑ヲ二邊トスル梯形ノ面積ニ等シキトキ,此ノ三角形ノ面積ヲ求メヨ.

XXVI.

1. 分子ガ分母ヨリモ大ニシテ且共ニ正ナル分數ノ兩項ニ同ジ正ノ數ヲ加フルトキハ分數ノ値ハ減小スルコトヲ證明セヨ.
2. $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ナルトキハ x, y, z ノ中少ナクトモ一ツハ1ニ等シキコトヲ證明セヨ.
3. 聯立方程式 $\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}=3,\ x^2+y^2+1=2x$ ヲ滿足スル x, y ノ實數値ハ存在セザルコトヲ證明シ,然ル後此ノ方程

式ヲ解ケ.

4. 甲乙兩地ノ距離ハ 385 哩ナリ. A 飛行機ハ甲地ヲ出發シ乙地ニ向ヒタル後 1 時間ヲ經テ B 飛行機ハ乙地ヲ出發シテ甲地ニ向ヘリ. 而シテ途中行違ヒタル後 A ハ 2 時 55 分間ニテ乙地ニ着シ, B ハ 3 時間ニテ甲地ニ着セリト云フ. 兩飛行機ノ速サハ各毎時幾哩ナルカ.

5. 或整數ヲ二等分シ,其ノ商ニ端數アラバ之ヲ捨テ,次ニ此ノ得タル整數ヲ二等分シ,其ノ商ニ端數アラバ之ヲ捨テ,此ノ如クスルコト n 回ニシテ最後ノモノハ 1 トナリタリ. 此ノ如キ整數ノ最大ナルモノ及最小ナルモノハ何ナルカ.

XXVII.

1. 正ナル二數アリ,其ノ和ハ 128400 ニシテ其ノ最大公約數ハ 8025 ナリト云フ. 斯ノ如キ二數ハ幾通リアルカ悉ク之ヲ求メヨ.

2. $x=by+cz,\quad y=cz+ax,\quad z=ax+by$ ナルトキ,次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$$

3. 今ヨリ n 年前ノ米價ヲ今ヨリ 4 年前ノニ比較スルニ, 1 圓ニ付テハ 3 升安ク, 1 升ニ付テハ 30 錢安カリシト云フ. 今ヨリ n 年前ノ米價ハ 1 升ニツキ何錢ナリシカ.

4. $z-30$ ハ t ニ比例スル一數ト t^2 ニ比例スル一數トノ和ナリ. 今 $t=3$ ナルトキ $z=84$ ニシテ, $t=4$ ナルトキ $z=110$ ナリト云フ. z ヲ最小ナラシムル t ノ實數値及其ノ z ノ最小値ヲ求メヨ.

XXVIII.

1. 次ノ語ノ意義ヲ述ベヨ.

恒等式; 方程式, 有理式; 無理式, 有理數, 無理數, 實數

2. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ トシテ $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ ノ値ヲ求メヨ

3. 次ノ三ツノ方程式ノ共通根ヲ求メヨ.

$$3x^3+7x^2-4=0$$

$$3x^3+x^2-8x+4=0$$

$$x^3+6x^2+11x+6=0$$

4. 甲乙兩人 A 地ヲ出發シテ B 地ニ向ヒ, B 地ニ到着スルヤ直ニ A 地ニ引キ返スモノトス. 今甲ハ乙ヨリ 1 時間遲レテ出發セシモ B ヨリ 2 粁ノ處ニテ追ヒ付キ, 其後 36 分間ヲ經テ相會シ,甲ガ A ニ歸着セルトキ乙ハ尙 A ヨリ 4 粁ノ處ニアリシト云フ. A, B 兩地間ノ距離如何.

5. 等比級數ノ初メヨリ n 項ノ和及其ノ逆數ノ和ヲ夫夫 A, B トシ,又此ノ n 項ノ連乘積ヲ P トスレバ $P^2=\frac{A^n}{B^n}$ ナルコトヲ證明セヨ.

XXIX.

1. x^3+px+q ガ x^2+ax+b 及 $x^2+a'x+b'$ ノ倍數ナルトキ,次ノ關係成立スルコトヲ證明セヨ.

$$ab=a'b'=-aa'(a+a')$$

2. x ガ實數ナルトキ,分數式 $\dfrac{2x^2+3x-4}{2+3x-4x^2}$ ハ如何ナル數値ヲモ取リ得ルコトヲ證明セヨ.

3. 方程式 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=1$ ヲ解ケ.

4. 甲列車ハ正東ニ向ヒ,乙列車ハ正南ニ向ヒテ進行シ,甲乙共ニ一定ノ速サヲ有シ,其ノ比ハ 2:3 ナリ. 兩列車間ノ距離或時36粁ナリシガ一時間ノ後ニハ24粁トナリ,更ニ一時間ヲ經テ60粁トナリタリト云フ. 各列車ノ速サ毎時何粁ナルカ.

5. 初項 a, 公比 r, 項數 n ナル等比級數ノ總和ヲ求メ,然ル後 n ガ無限大トナリタル場合ヲ吟味セヨ.

XXX.

1. A, B, Q 及 R ガ何レモ整式ニシテ A=QB+R ナル關係アルトキ, A ト B トノ最大公約數ハ B ト R トノ最大公約數ト全然同一ナルコトヲ證明セヨ.

2. $x+\dfrac{a^2}{x}=y+\dfrac{a^2}{y}=z+\dfrac{a^2}{z}$ ナルトキ, x, y, z ノ何レカ二ツハ必ズ相等シキコトヲ證明セヨ.

3. 方程式 $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+b^2}}=0$ ヲ解ケ. 但 a, b ハ正ニシテ c ハ0ナラズトス.

4. 甲乙二人或池ノ周ニ於テ競走ヲナシ,三周ヲ以テ勝敗ヲ決スル約束ニテ同時ニ同所ヲ出發セリ. 甲ハ常ニ初メノ速サヲ保チテ走リ,乙ハ第三周目ヨリ其ノ速サヲ初メノ速サノ $\dfrac{1}{3}$ ダケ增シタルモ,甲ハ乙ニ勝ツコト54米ナリキ. 若シ乙ガ第二周目ヨリ其ノ速サヲ初メノ速サノ $\dfrac{1}{5}$ ダケ增シタリシナラバ,乙ハ甲ニ30米勝ツコトヲ得タルベシト云フ. 池ノ周何米ナルカ.

答

問題 I

2. 3 次, 5, 5, 3, 3, 0, -15, -15, -9, -9

4. ax^3+bx^2+cx+d 或ハ $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$

5. $ax^2+bxy+cy^2$ 6. 5 次 7. 1, -2, 46

8. -10, 30, 1110 9. 8, 8, 17 10. $2x^2+(a+b)x+ab$

11. $(a+b+c)x^2+(a^2+b^2+c^2)x+abc$

12. $(a-b-c)x^2+(ab-ac-bc)x+abc$

13. $-\frac{b}{3}x^3-\frac{a+c}{3}x^2-\frac{d}{3}x$

14. $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

15. $a^3+(b-3c)a^2+(b^2-3bc+c^2)a-2b^2c+bc^2$

問題 II

1. $m=3$ 2. $l=-22$, $m=-24$ 5. $p=2$, $q=3$

6. $2(x-1)(x-4)(x+2)=2x^3-6x^2-12x+16$

10. $p=1$, $q=1$ 或ハ $p=-2$, $q=1$ 11. $-x^2-x+6$

12. x^3-3x^2+2x+1 13. $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\frac{3}{2}$

14. $c=0$ 或ハ -88

問題 III

1. $(x+6)(7x-3)$ 2. $(3x-16)(4x+9)$ 3. $(4x-3)(4x+21)$

4. $(5x-3y)(x-7y)$　　5. $(x+2b)(x+4a-2b)$

6. $(x+y+5)(x+y-8)$　　7. $(1-2a+b)(1+2a-b)$

8. $(x-2y+3)^2$　　9. $(1-ax)\{1+(a+b)x\}$

10. $\{(a+b)x-a+b\}\{(a-b)x+a+b\}$　　11. $(x-2)(x-y+1)$

12. $(x^2-5xy-y^2)(x^2+5xy-y^2)$　　13. $(x+1)^2(x^2+1)$

14. $(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$

15. $(x-ay-ab)(x-by+ab)$　　16. $(x-2y-a)(2x-y+a)$

17. $(x+1)(x+5)(x-2)$　　18. $(x-2a)(x+a)(2x+a)$

19. $(x-1)^2(x^2+2x+3)$　　20. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

21. $(x+y)(x-y)^3$　　22. $3(x-a)(x-b)(2x-a-b)$

23. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$　　24. $(x^2-a^2+b^2)^2$

25. $(x-1)(x+8)(x^2+7x+26)$　　26. $6abc$

27. $(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$　　28. $5xy(x-y)(x^2-xy+y^2)$

29. $(x-1)^3(x+1)^2$　　30. $(a^2x^2+4axy+16y^2)(a^2x^2-4axy+16y^2)$

31. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

33. (1) $3(y-z)(z-x)(x-y)$　　(2) $(x-z)^3$

問　題　IV

1. $\frac{27}{46}$　　2. 0　　3. 1　　4. $\frac{25}{9}$

5. 2　　6. $a-b$　　7. 1　　8. $-\frac{m+n}{3}$

9. $\frac{m-n}{m+n}$　　10. $(a,\ b)$　　11. $(1,\ 1)$　　12. $(1,\ 3)$

13. $\left(\frac{al}{a+b+c},\ \frac{bl}{a+b+c},\ \frac{cl}{x+b+c}\right)$　　14. $(4,\ 4,\ -2)$

15. $(abc,\ bc+ca+ab,\ a+b+c)$

16. $\left(\frac{p-t}{a},\ \frac{q-t}{b},\ \frac{r-t}{c};\right.$ 但 $\left.t=\frac{pbc+qca+rab}{abc+bc+ca+ab}\right)$

17. $(c-b,\ a-c,\ b-a)$　　19. $29:4:(-3)$

問　題　V

1. 4 (等根)　　2. $\frac{1}{3},\ -3a$　　3. $a(3c\pm 2b)$

4. $\frac{a+b}{a-b},\ \frac{a-b}{a+b}$　　5. 8　　6. $0,\ 2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　7. $-4\frac{1}{2}$

8. $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$　　9. $2,\ 6,\ 1\pm i\sqrt{5}$　　10. $2,\ -3,\ \frac{-1\pm\sqrt{19}}{3}$

11. $5,\ -2$　　12. $1,\ -4\frac{1}{2}$　　13. $-6a,\ -2a,\ \frac{10}{3}a$

14. $3,\ 4$　　15. $0,\ 16,\ 81$　　16. 3　　17. $2+\frac{\sqrt{6}}{3}$

18. $\frac{1}{5}$　　19. $\pm\frac{5}{2},\ k=\mp 20$　　25. $m=4$

問　題　VI

1. $\pm\frac{3}{2},\ \pm\sqrt{2}$　　2. $\pm\sqrt{2},\ \pm 3\sqrt{2}$　　3. $1,\ -2\pm i\sqrt{3}$

4. $1,\ -1,\ \frac{5}{3},\ -\frac{1}{3}$　　5. $1,\ 1,\ \pm i$

6. $1,\ 2\pm\sqrt{3},\ 3\pm 2\sqrt{2}$

7. $3,\ \frac{3}{4}\left(-\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$

$\frac{3}{4}\left(\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$

8. $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$　　9. $0,\ 1+2\omega,\ 1+2\omega^2$　　10. $5,\ -1,\ 2+3i,\ 2-3i$

11. $-3,\ 6,\ \frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{71}}{2}$　　12. $-a,\ -b,\ -\frac{a+b}{2}$

13. $\frac{a+b}{2},\ \frac{1}{2}\{a+b\pm\sqrt{2-(a-b)^2}\}$　　14. $\pm 2.162,\ \pm 4.162$

15. $y^6-qy^3-p^3=0$

問題 VII

1. $(-1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}),\ (-1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}),\ (2,\ -2),$
$(-2,\ 2)$　　2. $(0,\ 0),\ \left(1\frac{7}{8},\ 1\frac{1}{8}\right)$

3. $(6+\sqrt{30},\ 6-\sqrt{30}),\ (6-\sqrt{30},\ 6+\sqrt{30})$

4. $(3+\sqrt{6},\ 3-\sqrt{6}),\ (3-\sqrt{6},\ 3+\sqrt{6})$

5. $(2+\sqrt{12},\ 2-\sqrt{12}),\ (2-\sqrt{12},\ 2+\sqrt{12})$　　6. 不能

7. $(2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}),\ (-2\sqrt{3},\ -3\sqrt{3}),\ (-5,\ -1),\ \left(\frac{15}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

8. $(3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}),\ (2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}),\ (-3\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}),$
$(-2\sqrt{2},\ -3\sqrt{2})$

9. $(2,\ -3),\ \left(-\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{3}\right),\ \left(-2+2\sqrt{\frac{2}{3}},\ 1-4\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$
$\left(-2-2\sqrt{\frac{2}{3}},\ 1+4\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$　　10. $(4,\ 1),\ (-1,\ -4)$

11. $(3,\ 1),\ (-1,\ -3),\ (1\pm i\sqrt{10},\ -1\pm i\sqrt{10})$

12. $(1,\ -1),\ \left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0)$

13. $(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ \left(1\frac{1}{11},\ 1\frac{5}{11}\right)$　　14. $\left(\frac{a}{4},\ 2b\right),\ \left(-\frac{a}{4},\ -2b\right)$

15. $(0,\ 0),\ \left(1,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(-1,\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{91}}{5},\ \frac{\sqrt{91}}{16}\right),$
$\left(-\frac{\sqrt{91}}{5},\ -\frac{\sqrt{91}}{16}\right)$

16. $\left(\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{33},\ \frac{9}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{33}\right),\ \left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{33},\ \frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{33}\right)$

17. $(5,\ 12),\ (12,\ 5)$

18. $\left(\frac{1}{2},\ 3\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ -3\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}\right)$

19. $(2,\ 3),\ (2\omega,\ 3\omega),\ (2\omega^2,\ 3\omega^2)$

20. $(2,\ \sqrt{3}),\ (2,\ -\sqrt{3}),\ \left(-\sqrt{\frac{11}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{11}{2}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

21. $(5,\ 3),\ (-5,\ -3),\ (3,\ 5),\ (-3,\ -5)$

22. $(5,\ 7),\ (7,\ 5),\ (5\omega,\ 7\omega),\ (5\omega^2,\ 7\omega^2)$

23. $(-4,\ 5),\ (5,\ -4),\ (-10\pm 3\sqrt{11},\ -10\pm 3\sqrt{11})$

24. $(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (-1,\ -3),\ (-3,\ -1),\ (3,\ -1),\ (1,\ -3)$
$(-1,\ 3),\ (-3,\ 1),\ (i\sqrt{5},\ i\sqrt{6}),\ (i\sqrt{5},\ -i\sqrt{6}),$
$(-i\sqrt{5},\ i\sqrt{6}),\ (-i\sqrt{5},\ -i\sqrt{6}),\ (i\sqrt{6},\ i\sqrt{5}),$
$(i\sqrt{6},\ -i\sqrt{5}),\ (-i\sqrt{6},\ i\sqrt{5}),\ (-i\sqrt{6},\ -i\sqrt{5})$

25. $(2,\ -5),\ (-5,\ 2),\ \left(\frac{3+i\sqrt{31}}{2},\ \frac{3-i\sqrt{31}}{2}\right),$
$\left(\frac{3-i\sqrt{31}}{2},\ \frac{3+i\sqrt{31}}{2}\right)$

26. $(7,\ 5,\ -3),\ (-2,\ 5,\ -12),\ (2,\ 10,\ -3),\ (-7,\ 10,\ -12)$

27. $\left(-1+\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{a+1},\ -1+\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{b+1},\right.$
$\left.-1+\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{c+1}\right),\ \left(-1-\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{a+1},\right.$
$\left.-1-\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{b+1},\ -1-\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{c+1}\right)$

28. $\left(\frac{2abc}{bc-ca+ab},\ \frac{2abc}{ca-ab+bc},\ \frac{2abc}{ab-bc+ca}\right)$

29. (5, 4, 3)　30. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$
$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

31. $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, -7\sqrt{2})$

32. $(0, 2, 5)$, $(0, -2, -5)$

33. $(-2, 4, 5)$, $(-2, 5, 4)$, $(9, -1+i\sqrt{19}, -1-i\sqrt{19})$,
$(9, -1-i\sqrt{19}, -1+i\sqrt{19})$

34. $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$

35. $(3, 3, 4)$, $(3, 4, 3)$, $(4, 3, 3)$　37. 0

38. $(3, 1)$, $\left(1, \frac{1}{3}\right)$　40. $a(3b^2-a^2)=2c^3$

42. $a^2=b^2=c^2$

問題 VIII

1. 材料1400圓, 賃金900圓　2. 甲55圓, 乙25圓

3. 上半期132人, 下半期125人　4. 42錢

5. 通學生630名, 寄宿生140名

6. 甲年8分, 乙年7分　7. 1122圓

8. 年6分　9. 甲1650名, 乙3300名

10. 6分　11. 9合6勺　12. 25升

13. 45升　14. 上172錢, 中154錢, 下130錢

15. 6個　16. 金7.6瓦, 寶石1.5瓦　17. 500瓦

18. 800圓　19. 甲135圓, 乙70圓, 丙24圓

20. A, B ノ間ニ於テ A ヨリ8尺ノ處, 及 B ヲ超エテ B ヨリ12尺ノ處

21. 432　22. $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$

23. 2, 3, 4, 5

24. $\frac{3}{7}$　25. 6.4　26. 36

27. (1, 6), (2, 5), (3, 4)　28. 甲37, 乙73

29. $\frac{2a+b+\sqrt{4a^2+b^2}}{2}$ (但 $a>0, b>0$ トス)

32. 甲90分, 乙72分, 丙60分

33. 36人　34. 4時間　35. 50哩

36. 甲每時11浬, 乙每時9浬,　37. 每時24哩, 18哩

38. 甲 $6\frac{2}{3}$分, 乙10分

39. 甲每時32粁, 乙每時48粁

40. (1) $\frac{u}{v}=\frac{5}{4}$　(2) 5分, 15分

41. 音每秒1100尺, 銃丸每秒1600尺

43. 2.16アール　44. 間口20間, 奥行15間

45. 幅8寸, 長サ18寸　46 3分, 4分

47. $\frac{ad}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$寸, $\frac{bd}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$寸

48. $8-2\sqrt{2}$糎, $8+2\sqrt{2}$糎, 12糎　49. $10\sqrt{3}$糎

50. 2寸, 1寸5分

51. $\frac{a^2+4b+\sqrt{a^4-24a^2b+16b^2}}{4a}$米,
$\frac{a^2+4b-\sqrt{a^4-24a^2b+16b^2}}{4a}$米, $\frac{a^2-4b}{2a}$米

52. 10米, 40アール　53. 20糎　54. 2.5寸

55. 2寸　56. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})a$寸

57. 甲每秒8糎, 乙每秒2糎, 或ハ甲每秒$7\frac{577}{865}$糎,
乙每秒$3\frac{31}{863}$糎

問題 IX

1. $x<7$　2. $x<-60$　3. $x>\frac{19}{5}$

4. $x<1$ 或ハ $x>4$　5. $-2<x<7$　6. $1<x<10$

7. $x<-14$ 或ハ $x>3$　8. $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$

9. $-\frac{1}{5}<x<6$　10. $x<3$ 或ハ $x>7$

11. $1<x<2$ 或ハ $x>4$　12. $0<x<\frac{3}{5}$

13. $1<x<2$ 或ハ $x>3$

14. $x<-2$ 或ハ $0<x<3$　15. $-2<x<0$ 或ハ $x>2$

16. $x<1$ 或ハ $2<x<3$　19. $a\leqq 2$ 或ハ $a\geqq 5$

20. $-4\leqq k<1$

21. $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-144}}{4}$, $a\leqq -12$ 或ハ $a\geqq 12$

22. 5　25. $a^3-b^3<3a^2(a-b)$

26. $\frac{m^2}{a}+\frac{n^2}{b}\geqq\frac{(m+n)^2}{a+b}$, $bm=an$　27. (1) 極小 $4\frac{7}{8}$
(2) 極大 $6\frac{1}{8}$　(3) 極小 6　(4) 極大 $21\frac{1}{8}$

28. $24\frac{1}{6}$分

問題 X

1. $2x^2-3$　2. $3x^2-7x+2$　3. $a+3$

4. $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$　5. $(x-1)(x+3)(2x^2-7x-5)$

6. x^4-16a^4

7. G.C.M.$=x^2-3x+7$,　L.C.M.$=x^5-x^4+3x^3+3x^2+29x-35$

8. $x=\frac{3}{2}$　9. x^2-1, x^3-1　10. $2x^2+3x-2$, $3x^2+5x-2$

問題 XI

. $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{5}$　6. -3　7. 1　8. 4　9. 0

. 極小 $-\frac{1}{11}$, 極大 1; 極小 3, 極大 -1; 極小 $\frac{1}{3}$, 極大 3

問題 XII

4. 1尺, 2.4尺　5. $\frac{ap}{\sqrt{a^2-b^2}}$米　6. 3, 4, 5

問題 XIII

1. $x^2-2ax-3a^2$　2. x^2+2x-1, 開平剩餘 $x-2$

3. (1) 19.6 (2) 1.464　4. x^2-x-1　5. $2x^2-3x+4$

6. $3x^2-x-4$　7. $x-2$　8. 39.2　9. 1.3956

10. 25　11. 1.8520　12. 7.0444　13. 4.2寸

14. 2.154倍　15. 1.074尺

問題 XIV

1. $\frac{3}{11}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{1}{5}$ 2. 3, 5 3. $\frac{150}{11}$, $\frac{25}{2}$, $\frac{150}{13}$, $\frac{75}{7}$

4. 2, 8 7. 2870 8. 9455

10. $\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)$ 11. $\frac{n}{n+1}$ 12. 8120 尺

附　錄

I. 順列, 組合, 二項定理及確率

問題 I

1. 81 2. 90 3. 3360 4. 1440

5. 3600 6. 600 7. 144 8. 325

9. 72 11. (1) 13 (2) 8 12. $3^5=243$ 13. $4^6=4096$

問題 II

1. 12678250200 2. 645 3. 145152

4. 10 5. 12397 6. 50803200

7. 2520 8. 12 9. $\frac{20!}{9!7!4!}$

10. $\frac{1}{2}n(n-1)$ 11. $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 13. 330

問題 III

1. $1+8x+28x^2+56x^3+70x^4+56x^5+28x^6+8x^7+x^8$

2. $a^5-15a^4x+90a^3x^2-270a^2x^3+405ax^4-243x^5$

3. $a^7+7a^6bx+21a^5b^2x+35a^4b^3x^3+35a^3b^4x^4$
$+21a^2b^5x^5+7ab^6x^6+b^7x^7$

4. $1-10x^2+40x^4-80x^6+80x^8-32x^{10}$

5. $x^9-9ax^8+36a^2x^7-84a^3x+126a^4x^5$
$-126a^5x^4+84a^6x^3-36a^7x^2+9a^8x-a^9$

6. $1+4x+2x^2-8x^3-5x^4+8x^5+2x^6-4x^7+x^8$

7. $a^5+b^5+c^5+5(a^4b+ab^4+a^4c+ac^4+b^4c+bc^4)$
$+10(a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+a^2c^3+b^3c^2+b^2c^3)$
$+20abc(a^2+b^2+c^2)+30abc(ab+ac+bc)$

8. $(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}x^r$ 9. $-792b^7x^5y^7$ 10. $-\frac{56}{x^2}$

11. -167960 12. 15120 13. -648

14. $32-40x^2+10x^4$ 15. (1) 1.03 (2) 0.997004

16. 1046×10^{24}, 9955×10^{16}

問題 IV

1. $\frac{15}{28}$ 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{5}{36}$

5. $\frac{1}{8}$ 6. $\frac{36}{91}$, $\frac{30}{91}$, $\frac{25}{91}$ 7. $\frac{36}{67}$, $\frac{31}{67}$

8. 一マトメノ方 9. $\frac{41}{81}$ 10. 甲 $\frac{1}{3}$圓, 乙 $\frac{1}{6}$圓

11 甲 $5\frac{5}{11}$圓, 乙 $4\frac{6}{11}$圓 12. 甲 2.5 圓, 乙 $2\frac{19}{13}$圓

復習雜問題

2. $8\times9!$ 4. $\frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{(n-1)!}$ 5. $n=14$, $r=4$

8. $(n-1)!$ 11. 924 12. $(-1)^n\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ 15. $\dfrac{11}{12}$

16. 損益ナシ 17. $\dfrac{6!}{6^6}=\dfrac{5}{324}$

II. 總復習雜問題

I. 2. 0.618 3. $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2+2(2^{\frac{n-1}{2}}-1)$

II. 3. $\dfrac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}$

III. 3. A=2, B=−3, C=3, D=−1

IV. 1. $\pm\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{5}{6}}\right)$ 2. 83

V. 2. 4.6 或ハ 6.4 3. $\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\geqq\dfrac{(m+n)^2}{a^2+b^2}$

VI. 1. $(2+\sqrt{41},\ 2-\sqrt{41}),\ (2-\sqrt{41},\ 2+\sqrt{41}),$

$\left(\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{-1-2\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(\dfrac{-1-2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{-1+2\sqrt{3}}{3}\right)$

2. $1+4\sqrt{2}$ 3. 7分

VII. 1. $-\dfrac{1}{3}(a+b+c)$ 2. $-2\sqrt{3}+(8-\sqrt{3})i$ 3. 1

4. 8合

VIII. 1. $4,\ -5,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

2. $\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right):\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right):\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)$

4. 8町步

IX. 1. (イ) 4 (ロ) −30 2. $117\dfrac{11}{17}$立方寸

3. $\dfrac{1}{2}$ 4. 3時間

X. 2. $(a+b)(2b-a)=9ac$ 3. 5糎, 10糎

XI. 3. $x^2-10x+13$ 4. 0

XII. 1. $k=3,\ x=y=-4$ 或ハ $k=5\dfrac{1}{4},\ x=y=-31$

3. $p=3\dfrac{1}{2},\ q=4\dfrac{1}{2}$ 4. 5寸, 12寸, 13寸

XIII. 2. $n=1$

3. $(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ \left(\dfrac{15\pm\sqrt{309}\,i}{6},\ \dfrac{15\mp\sqrt{309}\,i}{6}\right)$

4. 錫74封度, 鉛46封度

XIV. 2. $\dfrac{y}{x}=-\dfrac{4}{9}$ 4. $x=-10,\ y=-\dfrac{20}{3},\ z=-6$

XV. 1. $x:y:z=29:4:(-3)$ 2. $p^3-4pq+8r$

3. $bc+ca+ab+1=0$ 4. $\dfrac{3}{10}$噸

XVI. 1. $a=3,\ b=3,\ c=2$ 2. $(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ \left(\dfrac{2}{23},\ \dfrac{8}{23}\right)$

3. $x=\sqrt[3]{a^2b},\ y=\sqrt[3]{ab^2}$ 4. $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 5. $n(q+np)$

XVII. 1. $(a+b-3c)(a-3b+c)$

2. $(2,\ 4,\ 5),\ (2,\ 5,\ 4),\ (9,\ 1+i\sqrt{19}\ \ 1-i\sqrt{19}),$

$(9,\ 1-i\sqrt{19},\ 1+i\sqrt{19})$ 5. 每時20哩

XVIII. 3. $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{\alpha+\beta}+\alpha+\beta\pm\sqrt{\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta}+\alpha+\beta\right)^2-\dfrac{4}{\alpha\beta}}\right\}$

5. $2\pi r^2$

XIX. 1. $2,\ 2,\ \dfrac{4\pm\sqrt{13}}{2}$ 2. $a,\ b,\ \dfrac{a+b}{2}$

3. $\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2$ 4. $\{6n(n-1)-600n+30300\}$尺

5. $\dfrac{1}{2}\{(2\pm\sqrt{2})b+\sqrt{2a^2-(6\pm4\sqrt{2})b^2}\}$寸,

$\dfrac{1}{2}\{(2\pm\sqrt{2})b\ \ \sqrt{2a^2-(6\pm4\sqrt{2})b^2}\}$寸

XX. 1. $x^2-3ax+5a^2$ 2. $b^2=ac$ 3. -10

4. $(2\sqrt{3}-3)a$ 糎 5. 2

XXI. 1. $\frac{1}{y}$ 4. 初項$p+q$, 公差$2p$ 5. 6

XXII. 1. $-\frac{3}{2}$ 4. $\left(\frac{\sqrt{abc}}{a}-1, \frac{\sqrt{abc}}{b}-1, \frac{\sqrt{abc}}{c}-1\right)$

$\left(-\frac{\sqrt{abc}}{a}-1, -\frac{\sqrt{abc}}{b}-1, -\frac{\sqrt{abc}}{c}-1\right)$

XXIII. 1. $a=-6, b=92, c=105$ 或ハ $a=38, b=-92,$

$c=137$ 4. 6 或ハ -1 5. 毎時24哩, 16哩

XXIV. 1. $\frac{265}{32}, \frac{247}{32}$ 2. $ab=4,\ x=\frac{2}{b}, y=\frac{b}{2}$

4. 金5.79瓦, 寶石1.5瓦 5. a尺

XXV. 6. $(-3, 0, -7), (1, -2, 5)$

3. 2, 4, 6, 8 或ハ $-2, -4, -6, -8$

5. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)a^2$ 平方寸

XXVI. 3. $x=y=\frac{1\pm i}{2}$, 或ハ $x=2y,\ y=\frac{2\pm i}{5}$

4. A毎時60哩, B毎時70哩 5. $2^{n+1}-1,\ 2^n$

XXVII. 1. (8025, 120375), (24075, 104325), (40125, 88275),

(56175, 72225) 3. 20錢

4. $t=-3,\ z=12$

XXVIII. 2. 1 3. -2 4. 10粁

XXIX. 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. 甲毎時24粁, 乙毎時36粁

XXX. 3. $\frac{ac}{a+b}$ 4. 810米

大正十一年十二月十日印刷
大正十一年十二月十四日發行
大正十二年二月十日訂正再版印刷
大正十二年二月十五日訂正再版發行
昭和二年十二月七日訂正三版印刷
昭和二年十二月十日訂正三版發行
昭和三年三月二十五日訂正四版印刷
昭和三年三月二十八日訂正四版發行

續卷定價金五十六錢
昭和三年度臨時定價金九十三錢

新撰中等教育代數學教科書
改訂版

著作者 國枝元治

發行者 東京市日本橋區本銀町三丁目十四番地 大葉久吉

印刷者 東京市小石川區久堅町百八番地 東勇治

印刷所 共同印刷株式會社

發行所 東京市日本橋區本銀町三丁目 振替口座東京二八〇番 株式會社寶文館

關西專賣 大阪市西區阿波堀通四丁目 振替口座大阪四三番 株式會社大阪寶文館