新制平面幾何

理學博士
竹内端三著

株式會社
三省堂
東京　大阪

新制平面幾何

東京帝國大學教授

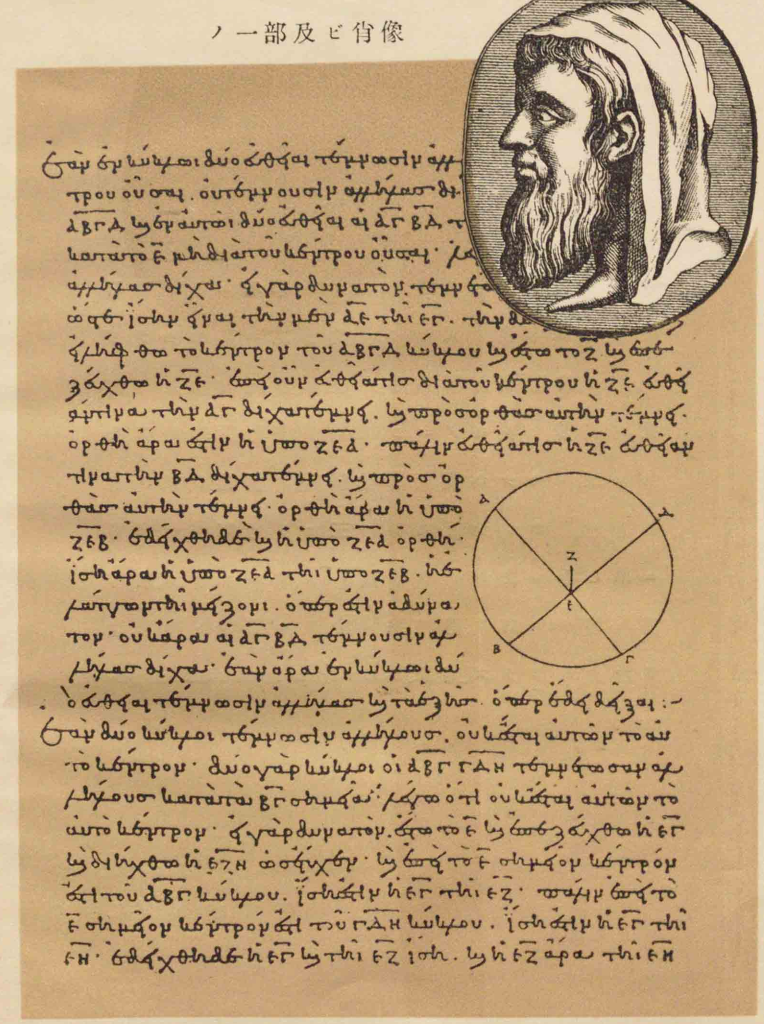
理學博士

竹内端三 著

昭和三年十一月五日
文部省檢定濟
中學校・師範學校數學科用

EUCLID ノ原本

ノ一部及ビ肖像



ゆーくりつどハぎりしやノ數學者ニシテ西曆紀元前300年頃ノ人ナリ。其傳記ハ詳カナラザレドモ其著「幾何學原本」ハ彼自身及ビ前人ノ研究ヲ編纂セルモノニシテ、秩序整然、論理嚴正、今日ニ至ルモナホ幾何學教科書ノ模範ヲ以テ目セラル。カツテとれみー王ヨリ幾何學ヲ容易ニ學ビ得ル法ナキヤト問ハレタルニ對シ、彼言下ニ答ヘテ曰ク、幾何學ニ於テハ王者ト雖別途ヲ行ク可カラズ(英譯、There is no royal road in geometry.)ト。

緒　言

本書ハ中等教育ニ於ケル平面幾何學ノ教科用ニ供センガタメニ編述セルモノナリ。同一ノ目的ニ對シテ著者ハ既ニ中等平面幾何學新教科書ヲ公ニシ現ニ普ク採用セラレツヽアリト雖,本書ハ之ト稍趣ヲ異ニセル特色ヲ有スルヲ以テ,著者ハ兩者相並ビテ刊行セシメントト欲スルモノナリ。

本書ノ特色ハ現行ノ教授要目ニ抵觸セザル範圍内ニ於テ記載事項ヲ出來得ル限リ簡約シ,學生ノ負擔ヲ輕減スルト共ニ教授者ヲシテ自由ニ手腕ヲ振フノ餘地ヲ多カラシメ,且學生ノ實力ニ應ジテ適宜ニ程度ヲ高低スルノ便ヲ計レルニアリ。全國幾百ノ中等學校中ニハ必ズヤ此ノ種ノ教科書ヲ要望セラルヽ所尠カラザルベク,且又本書ノ如キハ各種實業學校ノ教科用トシテモ恰好ノモノタルベキコトハ著者ノ竊カニ期スル所ナリ。

今本書ニ於テ著者ガ特ニ意ヲ用ヒタル若干ノ要點ヲ摘記スレバ次ノ如シ。

1. 小學校ニ於ケル數學教育ノ發達ニ信頼シ特ニ所謂幾何學入門ナル一章ヲ設ケズ,終始一貫シテ抽象的理論ヲ以テ幾何學ノ體系ヲ組織セリ。然レドモ教授者ノ意見ニヨリテハ第二編第三章平行線マデハ實驗,實測ヲ以テ證明ニ換フルモ可ナリ。

2. 簡單ナル定理等ニ就イテハ成ルベク學生ヲシテ其ノ證明ニ當ラシメ,自ラ全系統ノ建設ニ干與スルコトニヨリテ自然ニ斯學ニ對スル興味ト研究心トヲ喚起セシメンコトヲ計レリ。

3. 各節ノ終リニ例題ヲ,又各編ノ終リニ雜題ヲ置キ其ノ節又ハ其ノ編ニ於ケル事項ノ練習並ビニ應用ニ充テタリ。

4. 問題ハ何レモ穩當ニシテ實力ノ練磨ニ資スベキモノヲ選ビ,時ニ著名ナル古典的問題ヲモ混ヘタレドモ,甚シキ難解ノモノハ一切之ヲ避ケタリ。

5. 軌跡ハ常ニ學生ノ理解ニ苦シム所ナリ,之レ蓋シ學生ニ對シ初期ヨリソノ證明,吟味等ノ完全ヲ要求スルニアリトス。依ツテ本書ニ於テハ軌跡篇ノ多クノ定理ニ對シ證明ヲ學生ニ求メ,各自ノ力量ニ應ジテ先ヅ其ノ概念ヲ會得セシメ,後適宜ニ教授者ノ補正ニ依ツテ其ノ理論ヲ完全ナラシムルコトヽセリ。

著者ハ曩ニ刊行セル中等平面幾何學新教科書ニ對シテ種々有益ナル忠言ヲ寄セラレタルト同様,本書ニ對シテモ教授者諸賢ノ高批ヲ賜ランコトヲ希望シテ止マザルモノナリ。

昭和三年五月

著者識

目　次

新制平面幾何

第一篇
緒論

1. 幾何學ノ目的

物體ノ形,大サ及ビ位置ハソノ物體ガ空間ヲ占有スル有樣ニノミ關スルモノニシテ,之ヲ組織スル物質ノ如何ニハ關係ナキモノナリ。之ヲ空間的性質トイフ。幾何學ハ物體ノ空間的性質ヲ研究スル學科ナリ

2. 體,面,線,點

物體ノ空間的性質ニノミ注目スルトキハ之ヲ體又ハ立體トイフ。卽チ**體トハ形,大サ及ビ位置ノミヲ有スルモノナリ。**

體ノ限界ヲ面トイフ。面ハ廣サヲ有スレドモ厚サヲ有セズ。一般ニ體ノ限界タルト否トヲ問ハズ,スベテ**形,位置及ビ廣サノミヲ有スルモノヲ面トイフ**。

面ノ中ニテ靜止セル水面ノ如ク凹凸ナキモノヲ**平面**トイヒ,平面ニアラザル面ヲスベテ**曲面**トイフ。平面ハ限リナク廣キモノトス。

面ノ限界又ハ二ツノ面ノ交リ*ヲ考フルトキハ形,位置及ビ長サヲ有スレドモ廣サ及ビ厚サヲ有セザルモノヲ得。一般ニ斯クノ如ク**形,位置及ビ長サノミヲ有スルモノヲ線トイフ**。

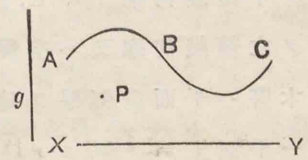
線ノ中ニテ強ク張ラレタル絲ノ如ク,眞直ナルモノヲ**直線**トイヒ,直線ナラザル線ヲ總テ**曲線**トイフ。直線ハ限リナク長キモノトス。

線ノ限界又ハ二ツノ線ノ交リヲ考フルトキハ唯位置ノミヲ有シテ形及ビ大サヲ有セ

*「交リ」トハ兩方ニ共通ナル部分ヲイフ。

ザルモノヲ得。一般ニ斯クノ如ク**位置ノミヲ有スルモノヲ點トイフ**。

[注意] 點ヲ呼ブニハ之ニ附シタル記號ノ一文字ヲ以テス,例ヘバ點Pノ如シ。線ヲ呼ブニハソノ上ニアル二ツ以上ノ點ニ附シタル記號ヲ併稱ス,例ヘバ直線(ソノ一部ヲ畫ク)XY,曲線ABCノ如シ。然レドモ或ル場合ニハ線全體ヲ唯一ツノ文字ニシテ表スコトアリ,例ヘバ直線 g ノ如シ。



例題

1. 線ト面,體ト線,體ト面ノ交リハ何ナルカ。又コレ等ノ例ヲ擧ゲヨ。
2. 形等シクシテ物質ノ異ルモノ,又物質等シクシテ形ノ異ルモノヽ例ヲ擧ゲヨ。

3. 圖形

體,面,線,點又ハソレラノモノヽ集合ヲ**圖形**トイフ。特ニ同一平面上ニアル圖形ヲ**平面圖形**

トイフ。即チ平面圖形ハ同一平面上ニアル線, 點又ハソレラノモノヽ集合ナリ。

注意　幾何學ノ中特ニ平面圖形ノミヲ研究スルモノヲ**平面幾何學**トイヒ, 更ニ一般ノ圖形ヲ研究スルモノヲ**立體幾何學**又ハ**空間幾何學**トイフ。

本書ハ平面幾何學ヲ述ブ。故ニ總テノ圖形ハ悉ク同一平面上ニアルモノト考フベシ。煩雜ヲ避クルタメ以下一々同一平面上ニアルコトノ斷リ書ヲナサズ。

4. 公　理

幾何學ニ於テハ簡單ナル事項ヨリ推理ニヨリテ種々ノ眞理ヲ求ム。ソノ推理ノ基トスル事項ニシテ何人モ之ヲ承認スベキモノヲ公理トイフ。

公理 一. 任意ノ二點ヲ過ル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

公理 二. 一直線上ニアラザル任意ノ三點ヲ過ル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

公理 三. 一平面上ノ二點ヲ過ル直線ハ全クソノ平面上ニアリ。

一ツノ圖形ノ形及ビ大サヲ變ゼズシテソノ位置ノミヲ變ゼシメ,之ヲシテ他ノ一ツノ圖形ト互ニ過不足ナク同一ノ場所ヲ占有セシメ得ルトキハ,ソノ二ツノ圖形ハ**合同ナリ**又ハ**全等ナリ**トイフ。

公理 四. 任意ノ二直線ハ合同ナリ。

公理 五. 任意ノ二平面ハ合同ナリ。

例　題

1. 一平面上ニアル曲線ノ例ヲ擧ゲヨ。
2. 一平面上ニアラザル曲線ノ例ヲ擧ゲヨ。
3. 圖形ノ形ヲ變ゼズシテ大サヲ變ズルコト,又大サヲ變ゼズシテ形ヲ變ズルコトヲ考ヘ得ルカ。各ソノ例ヲ擧ゲヨ。

第二篇

直線

第一章 基本性質

5. 直線ノ部分

幾何學ニ於テ單ニ直線トイフトキハ双方ノ方向ニ限リナク長キモノヲイフ。モシ直線上ニ一點ヲトリ,之ヨリ一方ノ側ニアル直線ノ部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**半直線**トイフ。モシ又直線上ニ二點ヲトリ,ソノ間ニアル直線ノ部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**線分**又ハ**有限直線**トイフ。

有限直線ニ對シテ双方ノ方向ニ限リナキ直線ヲ**無限直線**ト云フコトアリ。

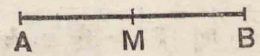
直線ノ中ヨリ半直線又ハ線分ヲ取リタル殘リノ部分ヲソノ半直線又ハ線分ノ**延長**トイフ。

二點A及ビBヲ兩端トスル線分ノコトヲ線

分ABト呼ビ,ソノ長サヲ表スニハ $\overline{AB}$ 又ハ單ニABト記ス。

線分ABノ長サノコトヲ**二點A,Bノ間ノ距離**トイフ。

線分AB上ニ一點MヲトリAM=MBナラシムルトキハ,Mヲ**線分ABノ中點**トイフ。



6. 直線ニ關スル公理

公理一(第4節)ヨリ直チニ次ノ事項ヲ斷定スルコトヲ得。

(1) 一點ヲ共有スル二直線ハ全ク相合スルニアラザレバ他ノ點ヲ共有スルコトナシ。

二直線ガ唯一點ノミヲ共有スルトキハ,ソノ二直線ハ其ノ點ニ於テ**相交ル**トイヒ,ソノ點ヲ其ノ二直線ノ**交點**トイフ。

(2) 任意ノ二點ヲ兩端トスル線分ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

カクノ如キ線分ヲ作ルコトヲ,其ノ二點ヲ**結ブ**トイフ。

例題

1. 一直線上ニ順次ニ三點 A, B, C アリ。線分 BC ノ中點ヲ M, 線分 AB ノ中點ヲ N トスレバ,

$$AM=\frac{AB+AC}{2},\quad MN=\frac{AC}{2}$$

ナルコトヲ示セ。

2. 一直線上ニ順次ニ三點 A, B, C アリ。線分 AC ノ中點ヲ M, 線分 BC ノ中點ヲ N トスレバ,

$$MN=\frac{AC-BC}{2}=\frac{AB}{2}$$

ナルコトヲ示セ。

3. 一直線上ニ順次ニ四點 A, B, C, D アリ。線分 AB 及ビ CD ノ中點ヲ夫々 M 及ビ N トス。$MN=a,\ BC=b$ ナラバ,線分 AD ノ長サ如何。

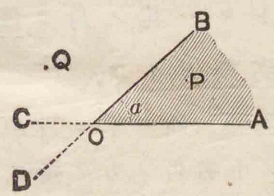
4. 線分 AB ノ中點ヲ C トシ, AB ノ延長ノ上ニ BC ニ等シク CD ヲトルトキ, AD ノ中點ハ BC ノ中點ナルコトヲ示セ。

第二章 角

7. 角

定義* 共通ノ一端ヲ有スル二ツノ半直線ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ツ。其ノ一方ノ部分ヲ稱シテ角トイヒ,二ツノ半直線ヲソノ角ノ邊,共通ノ一端ヲソノ角ノ頂點トイフ。平面ノ中ニテ角ニ屬スル部分ヲソノ角ノ內部トイヒ,然ラザル部分ヲ外部トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ二ツノ半直線 OA, OB ハ角ヲ作ル(圖ニ陰影ヲ施シテソノ一ツヲ示ス)。半直線 OA, OB ハソノ邊,點 O ハソノ頂點ナリ。點 P ハ此ノ角ノ內部ニアリ,點 Q ハ外部ニアリ。



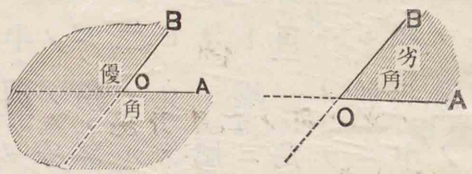
OA, OB ヲ邊トスル角ノコトヲ OA, OB ノ夾ム角又ハソノ夾角トモイフ。

注意 角ヲ表スニハ記號 ∠ ヲ用フ。例ヘバ ∠AOB

*用語ノ意味ヲ定ムル陳述ヲ其ノ語ノ定義ト云フ。

又ハ ∠BOA ノ如ク頂點ヲ表ス文字ヲ各邊上ノ二點ヲ表ス文字ノ中央ニ入ルヽモノトス。或ル場合ニハ略シテ單ニ ∠O トイフコトアリ,又角全體ヲ一ツノ文字ニテアラハシ $\angle\alpha$ 等トイフコトモアリ。

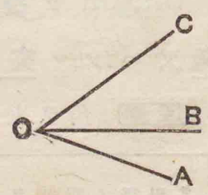
半直線 OA, OB ハ二ツノ角ヲ作リ,ソノ二角ハ頂點及ビ二邊ヲ共有ス。カクノ如キ二角ノ各ヲ他ノ角ノ**共軛角**トイフ。二邊ノ延長ガ角ノ内部ニアルトキハ其ノ角ヲ**優角**トイヒ,外部ニアルトキハ**劣角**トイフ。



注意 通常單ニ ∠AOB 等トイフトキハ一双ノ共軛角ノ中,劣角ノ方ヲ指スモノトス。若シ優角ヲ指ス必要アルトキハ特ニ優角 AOB ト呼ブベシ。

頂點ト一邊トヲ共有シ,且内部ガ共通ノ部分ヲ有セザル二角ヲ**接角**トイヒ,ソノ中ノ一方ノ角ヲ他ノ角ノ**隣リノ角**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ ∠AOB ト ∠BOC トハ接角ナリ。コノ場合ニ ∠AOC ノコトヲ ∠AOB ト ∠BOC トノ**和**ト



イヒ,又 ∠AOB (又ハ ∠BOC) ヲ ∠AOC ト ∠BOC (又ハ ∠AOB) トノ**差**トイフ。

又互ニ接角ヲナス二角 ∠AOB, ∠BOC ニ於テ ∠AOB = ∠BOC ナルトキハ OB ヲ ∠AOC ノ**二等分線**トイフ。

例題

1. 一ツノ角ノ二等分線ハ唯一ツアルノミナルコトヲ示セ。
2. ∠AOB 及ビ ∠BOC ヲ接角ナリトシ,ソノ各角ノ二等分線ヲ夫々 ON 及ビ OM トスルトキハ,

$$\angle AOM = \frac{\angle AOB + \angle AOC}{2},$$

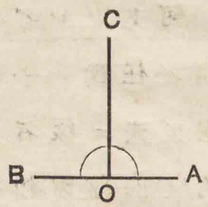
$$\angle NOM = \frac{\angle AOB + \angle BOC}{2} = \frac{\angle AOC}{2}$$

ナルコトヲ示セ。

8. 平角,直角

定義 角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアリテ一直線ヲナストキハ其ノ角ヲ**平角**トイフ。

平角ノ半分ヲ**直角**トイフ。



例ヘバ圖ニ於テ,ACB ヲ一直線トスレバ $\angle AOB$ ハ平角ナリ,

又 $\angle AOC = \angle COB$

トスレバ $\angle AOC$ 及ビ $\angle COB$ ハ何レモ直角ナリ。

此ノ場合ニ直線(又ハ線分) CO ハ直線 AB ニ**垂直ナリ**又ハ之ト**直交ス**トイフ。

二ツノ直線ガ互ニ直交スルトキハ,ソノ一方ヲ他ノ**垂線**トイヒ,ソノ交點(上ノ圖ニテハ點 O)ヲ垂線ノ**足**トイフ。

注意 二直線ガ互ニ垂直ナルコトヲ表スニハ記號⊥ヲ用ヰ。例ヘバ二直線 CO ト AB トガ互ニ垂直ナルコトヲ $CO \perp AB$ ト書ク。又直角ヲ表スニ記號 R∠ (Right Angle ノ略)又ハ ∠R ヲ用フルコトアリ。

定理*一. スベテノ平角ハ合同ナリ。

---

* 公理,定義其ノ他既ニ眞ナルコトノ確定セル事項ヨリ推理ニ依ツテ得ル事項ヲ**定理**トイフ。而シテソノ推理ノ理路(スヂミチ)ヲ陳述スルコトヲソノ定理ノ**證明**トイフ,例ヘバ定理一ニ於ケル「何トナレバ」以下ノ如シ。

何トナレバ,一ツノ平角ノ位置ヲ變ゼシメテ他ノ任意ノ平角ノ上ニ重ネ,前者ノ頂點及ビ二邊ガ夫々後者ノ頂點及ビ二邊ノ上ニ落チ,且兩角ノ内部ガ相重ナル樣ニ置クコトヲ得。(公理四,五) 故ニスベテノ平角ハ合同ナリ。

系* 1. スベテノ平角ハ相等シ。

注意 平角ニ限ラズ一般ニ二角ガ合同ナル事ト其ノ大サノ相等シキ事トハ常ニ相伴フ。依ツテ以下一々之ヲ特記セズ。

系 2. スベテノ直角ハ相等シ。

何トナレバ,スベテノ平角ハ相等シキガ故ニ,ソノ半分ヅヽナル直角モ亦相等シカルベキナリ。

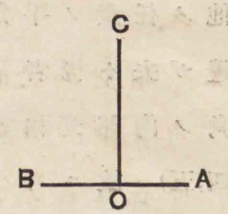
定理 二. 接角ヲナス二角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ,ソノ共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス。

何トナレバ,其ノ二角ノ和ハ平角ニ等シ。從ツテ平角ノ定義ニヨリ其ノ二邊ハ一直線ヲナスベキナリ,

---

* 定理ヨリ直チニ推定シ得ル事項ヲ其ノ定理ノ**系**トイフ。

定理 **三.** 一直線上ノ一點ヲ過リ之ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ル。



今點 O ヲ直線 AB 上ノ一點トスレバ, O ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線ハ平角 AOB ノ二等分線ニ他ナラズ。

故ニ斯クノ如キ直線ハ唯一ツニ限ル。(第7節例題 1)

定義 直角ヨリ小ナル角ヲ**鋭角**トイヒ,直角ヨリ大ニシテ平角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ。

二角ノ和ガ平角ニ等シキトキハ各ヲ他ノ**補角**トイヒ,二角ノ和ガ直角ニ等シキトキハ各ヲ他ノ**餘角**トイフ。

例題

1.* 接角ヲナス二角ノ共通ナラザル二邊ガ一

*コヽニ記述セル事項ノ證明ヲ求ムル問題ナリ。詳シク云ヘバ「......ナルコトヲ證明セヨ」トイフベキナレドモ,通常之ヲ省略スルモノトス。

直線ヲナストキハ,ソノ接角ハ互ニ補角ヲナス。

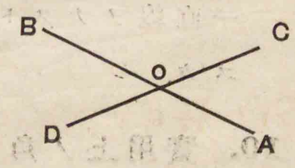
2. 相交ル二直線ニヨリテ作ラルヽ四ツノ劣角ノ中一ツガ直角ナルトキハ,殘リノ三ツモ亦各直角ナリ。

3. 接角ヲナス二角ガ互ニ補角ヲナストキハ,各ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ。

9. 對頂角

定義 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ノ延長ナルトキハ,ソノ二角ヲ**對頂角**トイフ。

例ヘバ二ツノ直線 AB, CD ガ O ニ於テ相交ルトキハ,



∠AOC ト ∠BOD ハ對頂角
又 ∠COB ト ∠DOA モ對頂角ナリ。

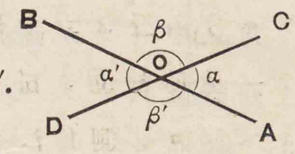
定理 **四.** 對頂角ハ相等シ。

圖ニ於テ ∠AOC, ∠COB, ∠BOD, ∠DOA ヲ夫々

$\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\alpha'$, $\angle\beta'$ ニテ表ストスレバ $\angle\alpha=\angle\alpha'$ 及ビ $\angle\beta=\angle\beta'$ ナルコトヲ證明セントス。

サテ　$\angle\alpha+\angle\beta=$平角,

$\angle\beta+\angle\alpha'=$平角.



故ニ　$\angle\alpha+\angle\beta=\angle\beta+\angle\alpha'$.

從ツテ　$\angle\alpha=\angle\alpha'$.

同様ニ　$\angle\beta=\angle\beta'$.

例　題

1. 二角ガ對頂角ヲナストキ,其ノ一方ノ角二等分線ヲ延長スレバ,他ノ角ヲ二等分ス。
2. 對頂角ノ各ノ二等分線ハ一直線ヲナス。
3. 頂點ヲ共有スル二ツノ相等シキ角ヲ $\angle AOB$ 及ビ $\angle COD$ トス。モシ AO ト OC トガ一直線ヲナストキハ,此ノ二角ハ對頂角ヲナスカ。

10. 實用上ノ角ノ單位

幾何學ノ理論上ニ於テハ,角ヲ計ルニ直角ヲ單位トスルコト多ケレドモ,實際問題ニ於テハ直角ヨリ小ナル角ヲ取扱フコト多キヲ以テ,更ニ小ナル單位ヲ用フル方ガ便利ナリ。依ツテ一直角ノ九十分ノ一ヲ**一度**,一度ノ六十分ノ一ヲ**一分**,一分ノ六十分ノ一ヲ**一秒**ト名付ケ,コレラノ補助單位ヲ併用シテ角ノ大サヲ計ルコトトス。コノ測角法ヲ**六十分法**ト云フ。

注意　度,分,秒等ノ單位ノ名ヲ示スニハ,數字ノ右肩ニ夫々 °, ′, ″ ナル記號ヲ附ス。

例ヘバ57度17分43秒ヲ 57°17′43″ ト記スガ如シ。

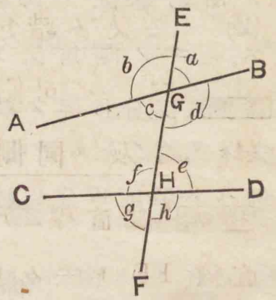
例　題

1. 直角ノ四分ノ一ハ幾度幾分ナルカ。
2. 平角ノ $\frac{7}{16}$ ヲ六十分法ニテ表セ。
3. 直角ヲ單位トシテ,次ノ各角ヲ言ヒ表セ。
   30°, 60°, 270°, 18°, 75°.
4. 二時十五分ノトキ,時計ノ兩針ノナス角ヲ度(分秒ヲ用ヒズ)ヲ單位トシテ表セ。
5. 二角ガ夫々 32°17′8″ 及ビ 73°54′36″ ナルトキソノ和ノ補角ヲ求メヨ。

第三章 平行線

11. 同位角,錯角,內角,外角

二直線 AB, CD 及ビ其ノ交點ヲ過ラザル一直線 EF アリ。EF ガ AB 及ビ CD ト交ル點ヲ夫々 G 及ビ H トシ,且 A ト C ハ EF ノ同ジ側ニアリ, B ト D ハ他ノ同ジ側ニアリトス。コヽニ於テ



$\angle BGE = a,\ \angle EGA = b,\ \angle AGH = c,\ \angle HGB = d,$

$\angle DHG = e,\ \angle GHC = f,\ \angle CHF = g,\ \angle FHD = h$

ト名付クルトキハ,

a ト e, b ト f, c ト g, d ト h ヲ **同位角**,

c ト e, d ト f ヲ **錯角**, c, d, e, f ヲ **內角**,

a, b, g, h ヲ **外角** トイフ。

特ニ　c ト f, d ト e ヲ **同側內角**,

　　a ト h, b ト g ヲ **同側外角**

トイフコトアリ。

定理 五. 二直線ガ其ノ交點ヲ過ラザル一直線ト交リ,ソノナス一双ノ同位角ガ相等シキトキハ,

(1) 他ノ三双ノ同位角ハ各相等シ。

(2) 二双ノ錯角ハ各相等シ。

(3) 二双ノ同側內角ハ各互ニ補角ヲナス。

(4) 二双ノ同側外角ハ各互ニ補角ヲナス。

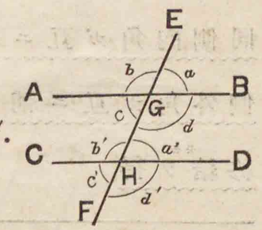
特述* 二直線 AB, CD ガ其ノ交點ヲ過ラザル直線 EF ト夫々 G, H ニ於テ交リタリトシ,

$\angle BGE = \angle a,\ \angle EGA = \angle b,\ \angle AGH = \angle c,\ \angle HGB = \angle d,$

$\angle DHG = \angle a',\ \angle GHC = \angle b',\ \angle CHF = \angle c',\ \angle FHD = \angle d'$

トスルトキ,モシ

$\angle a = \angle a'$ ナラバ



(1) $\angle b = \angle b',\ \angle c = \angle c',\ \angle d = \angle d'.$

(2) $\angle c = \angle a',\ \angle d = \angle b'.$

(3) $\angle c + \angle b' = 2$直角, $\angle d + \angle a' = 2$直角.

* 定理ノ證明ニ取リカヽル前ニ,今書キタル圖ニ附セル記號ノ意味ヲ説明スルト共ニ,ソレヲ用ヒテ定理ノ內容ヲ陳述シ置クヲ常トス。之ヲ**特述**トイフ。

(4) $\angle a+\angle d'=2$ 直角, $\angle b+\angle c'=2$ 直角

ナルコトヲ證明セントス。

證明 (1) AG ト GB トハ,點 G ノ反對ノ側ニアリテ一直線ヲナス。

故ニ $\angle a+\angle b=2$ 直角.

同樣ニ $\angle a'+\angle b'=2$ 直角.

故ニ $\angle a+\angle b=\angle a'+\angle b'$.

然ルニ $\angle a=\angle a'$, (假設)*

故ニ $\angle b=\angle b'$.

同樣ニシテ $\angle c=\angle c'$, $\angle d=\angle d'$.

(2), (3), (4), ハ學生自ラソノ證明ヲ試ミヨ。

系 一双ノ錯角ガ相等シキトキ,又ハ一双ノ同側内角ガ互ニ補角ヲナストキ,又ハ一双ノ同側外角ガ互ニ補角ヲナストキニモ上ト同樣ノ終結**ヲ得。

* 假リニ定ムル事項ヲ**假設**又ハ**假定**トイフ。

** 假設ヨリ生ズル結果ヲ**終結**トイフ。
例ヘバ定理五ニ於テ,
「二直線ガ…相等シキトキハ」ハ假設ニシテ,
(1), (2), (3), (4) ハ何レモ終結ナリ。

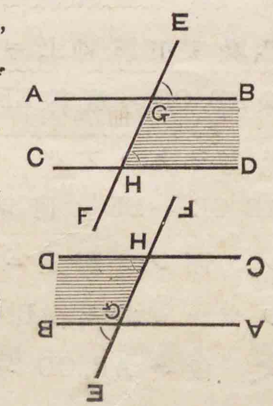
例 題

1. 第18頁ノ圖ニ於テ $c=65^\circ$, $e=80^\circ$ ナラバ,他ノ各角ノ度數如何。

2. 一双ノ同位角ガ互ニ補角ヲナストキハ,四双ノ同位角及ビ二双ノ錯角モ各互ニ補角ヲナシ,二双ノ同側内角及ビ同側外角ハ各相等シ。

12. 平行線

豫備定理 二直線ガ其ノ交點ヲ過ラザル一直線ト交リテ一双ノ相等シキ同位角ヲ作ルトキハ前ノ二直線ハ相交ラズ。



(甲)

(乙)

甲圖ニ於テ,二直線 AB, CD ガ其ノ交點ヲ過ラザル,一直線 EF ト交ル點ヲ夫々 G,H トシ, $\angle BGE=\angle DHG$ ナリトス。

今甲圖ヲ回轉シテ乙圖ノ如クシ,之ヲ甲圖ノ上ニ持チ來リテ乙圖ノ H, G ガ

夫々甲圖ノG, Hノ上ニ重ナル樣ニ置キタリトセヨ。然ルトキハ乙圖ノ直線FHGEハ全ク甲圖ノ EGHF ト合スベク(公理一),

而シテ　∠BGE＝∠DHG　(假設)

故ニ　∠BGE＝∠CHF　(定理四)

ナルヲ以テ,乙圖ノBGハ甲圖ノ CH ト相重ナル,從ツテ乙圖ノ直線 BGA ハ甲圖ノ CHD ト全部相重ナル(公理一)。同樣ニシテ乙圖ノ直線DHCハ甲圖ノAGBト相重ナル。

故ニ若シ甲圖ニ於テ直線ABト CD トガ直線EFノ何レカノ側ニ於テ相交ルトセバ,其ノ交點ハ乙圖ニ於テハ直線FEノ前ト反對ノ側ニアルベク,乙圖ヲ甲圖ノ上ニ重ネテ見ルトキハ,結局二直線AB, CDハ直線EFノ兩側ニ一ツヅヽ交點ヲ有スルコトヽナル。コレ不合理ナリ(公理一)。故ニAB, CDハEFノ何レノ側ニ於テモ相交ルコトナシ。而シテ假定ニヨリ,EFハAB, CDノ交點ヲ過ラザルガ故ニ,AB, CDハEFノ上ニ於テモ相交ラズ。故ニ AB, CD ハ何所ニ於テモ相交ルコトナシ。

定義　同一平面上ニアリテ相交ラザル二直線ヲ**平行線**トイフ。又其ノ二直線ハ**平行ナリ**トイフ。

注意　二直線例ヘバAB, CDガ平行ナルコトヲ表スニAB∥CDナル記號ヲ用フルコトアリ。

今證明シタル豫備定理ト定理五トヲ綜合シテ次ノ定理ヲ得。

定理 六.　二直線ガ其ノ交點ヲ過ラザル一直線ト交リ,次ノ條件ノ中何レカ一ツガ成立スルトキハ,前ノ二直線ハ平行ナリ。

(1)　一双ノ同位角又ハ錯角ガ相等シキトキ。

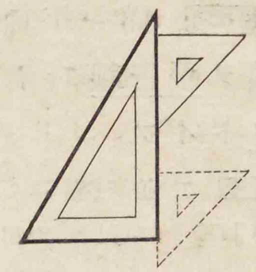
(2)　一双ノ同側内角又ハ同側外角ガ互ニ補角ヲナストキ。

例　題

1.　同一ノ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

2.　二枚ノ三角定規ヲ用ヒテ,平行線ヲ畫ク法ヲ考案セヨ。

3. 二枚ノ三角定規ヲ用ヒテ,與ヘラレタル一直線外ノ一點ヲ過リ之ニ平行ナル直線ヲ引ク法ヲ考案セヨ。

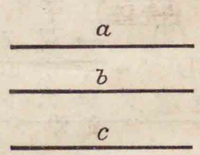


13. 平行線ニ關スル公理及ビ定理

公理 六. 一直線外ノ一點ヲ過リ之ニ平行ナル直線ハ唯一ツ存在ス。

定理 七. 同一ノ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

特述 a, b, c ヲ三ツノ直線トシ,a ト c 及ビ b ト c ヲ夫々互ニ平行ナリトセヨ。然ルトキハ a ト b トハ互ニ平行ナルコトヲ證明セントス。



證明 モシ a ト b トガ互ニ平行ナラザルトキハ,必ズ相交ル。ソノ交點ヲ P トスベシ。モシ點 P ガ直線 c ノ上ニアラザルトキハ,直線外ノ一點ヲ過リ之ニ平行ナル二ツノ直線ヲ引キ得ルコトヽナリ,公理六ニ反ス。モシ又點 P ガ

PE

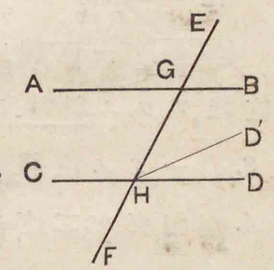
直線 c 上ニアルトキハ,a 及ビ b ハ c ト相交ルコトヽナリ,假設ニ反ス。何レニシテモ不都合ナレバ結局交點 P ハ存在スルヲ得ズ。

換言スレバ a ト b トハ相交ルコトナシ,卽チ互ニ平行ナリ。

定理 八. 平行ナル二直線ガ一直線ト交ルトキハ,

(1) 四双ノ同位角及ビ二双ノ錯角ハ各相等シ。

(2) 二双ノ同側內角及ビ同側外角ハ各互ニ補角ヲナス。



特述 平行ナル二直線 AB, CD ガ一直線 EF ト交リタリトシ,ソノ交點ヲ夫々 G, H トス。先ヅ最初ニ $\angle BGE = \angle DHG$ ナルコトヲ證明セントス。

證明 若シ $\angle BGE \neq \angle DHG$ トスレバ,點 H ヲ過リテ $\angle BGE = \angle D'HG$ ナル如キ直線 HD′ ヲ引クトキハ,HD′ ハ HD トハ相異ナルベシ。而シテ GB ト

HD′ トハ EF ト交リテ相等シキ同位角ヲ作ルヲ以テ互ニ平行ナリ(定理六)。故ニ結局一點 H ヲ過リテ一直線AB ニ平行ナル直線ガ二ツ(HD ト HD′)アルコトヽナル。コレ公理六ニ反ス。

故ニ　∠BGE＝∠DHG ナラザル可カラズ。

(其ノ他ノ終結ハ學生自ラ證明セヨ)。

例　題

1. 平行ナル二直線ノ一ツト交ル直線ハ他ノ一ツトモ交ル。

2. 平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ垂直ナリ。

定義　一直線ト交リテ,コレニ垂直ナラザル直線ヲソノ**斜線**ト云フ。

3. 一ツノ直線ノ垂線ト斜線トハ相交ル。

4. 相交ル二直線ニ夫々垂直ナル二直線ハ相交ル。

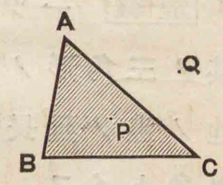
5. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ一ツノ角ノ二邊ニ夫々平行ナルトキハ,其ノ二角ハ相等シキカ又ハ互ニ補角ヲナス。

第四章　三　角　形

14. 三角形

定義　相連接セル三ツノ線分ニテ圍マレタル平面ノ部分ヲ**三角形**トイヒ,其ノ三ツノ線分ヲ三角形ノ**邊**,其ノ線分ノ端ヲ三角形ノ**頂點**トイフ。平面ノ中ニテ三角形ニ屬スル部分ヲ其ノ三角形ノ**內部**トイヒ,然ラザル部分ヲ**外部**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ三ツノ線分 AB, BC, CA ハ一ツノ三角形ヲ作ル。線分 AB, BC, CA ハ其ノ邊,點 A, B, C ハ其ノ頂點ナリ。點 P ハ此ノ三角形ノ內部ニアリ,點 Q ハ外部ニアリ。



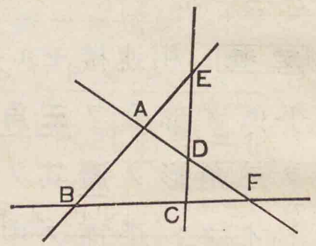
頂點 A ヲ邊 BC ニ對スル頂點トイヒ,邊 BC ヲ頂點 A ニ對スル邊トイフ。其ノ他ノ頂點及ビ邊ニツイテモ之ニ準ズ。

注意　頂點ガ A, B, C ナル三角形ノコトヲ △ABC ナル記號ニテ表ス

例題

1. 一平面上ニアル三ツノ直線ハ常ニ三角形ヲ作ルカ。

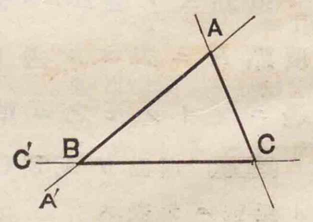
2. 圖ノ如ク四ツノ直線ガ二ツヅツ六ツノ點ニ於テ相交ルトキ,幾個ノ三角形ヲ作ルカ。



15. 内角, 外角

定義 一ツノ三角形ノ二邊ノ夾ム劣角ヲ其ノ三角形ノ**内角**又ハ單ニ**角**トイヒ,一邊ト他ノ邊ノ延長トノ夾ム劣角ヲ其ノ三角形ノ**外角**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ ハ $\triangle ABC$ ノ内角ニシテ, $\angle ABC'$, $\angle A'BC$ 等ノ如キハ外角ナリ。



内角ヲ表スニ單ニ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ トイフコトアリ。

$\angle A$ ヲ邊 BC ニ對スル角

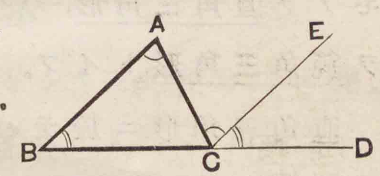
トイヒ,邊 BC ヲ $\angle A$ ニ對スル邊トイフ。其ノ他ノ内角及ビ邊ニツイテモ之ニ準ズ。

定理 九. 一ツノ三角形ニ於テ

(1) 一ツノ外角ハ之ニ隣ラザル二ツノ内角ノ和ニ等シ。

(2) 三ツノ内角ノ和ハ二直角ニ等シ。

特述 $\triangle ABC$ ニ於テ邊 BC ノ延長ヲ CD トス。然ルトキハ



(1) $\angle ACD = \angle A + \angle B$,

(2) $\angle A + \angle B + \angle C = 2$ 直角

ナルコトヲ證明セントス。

證明 C ヲ過リ,邊 BA ニ平行ナル直線 CE ヲ引キ,定理八ニヨリテ學生自ラ證明ヲ試ミヨ。

系 1. 三角形ノ外角ハ之ニ隣ラザル何レノ内角ヨリモ大ナリ。

系 2. 一ツノ三角形ハ一ツヨリ多クノ直角

又ハ鈍角ヲ其ノ內角トシテ有スルコトナシ。

系 3. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ相等シケレバ,第三角モ亦相等シ。

定義 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ皆鋭角ナルモノヲ**鋭角三角形**,一ツノ角ガ直角ナルモノヲ**直角三角形**,一ツノ角ガ鈍角ナルモノヲ**鈍角三角形**トイフ。

直角三角形ニ於テハ直角ニ對スル邊ヲ特ニ**斜邊**トイフ。

定義 三角形ノ外角ニ隣ラザル內角ヲ何レモ其ノ外角ノ**內對角**ト云フ。

例ヘバ前頁ノ圖ニ於テ $\angle A$, $\angle B$ ハ何レモ外角 ACD ノ內對角ナリ。

例　題

1. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々 $48°30'$ 及ビ $90°20'$ ナルトキハ,殘リノ一角如何。

2. $\triangle ABC$ ノ內部ニ一點 O ヲトルトキハ、

$$\angle BOC > \angle BAC$$ ナリ。

3. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ垂直ナルトキハ,ソノ二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲナス。

4. 一直線外ノ一點ヲ過リ,此ノ直線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

16. 邊及ビ角ノ大小

定義 二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**又ハ**等脚三角形**トイヒ,三邊ガ相等シキ三角形ヲ**正三角形**又ハ**等邊三角形**トイフ。

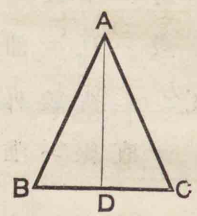
一般ニ一ツノ三角形ニ於テ其ノ任意ノ一邊ヲ**底邊**又ハ**底**トイフコトアリ。 其ノ場合ニハ之ニ對スル頂點ノコトヲ單ニ**頂點**トイヒ,頂點ニ於ケル內角ヲ**頂角**トイヒ,他ノ二角ヲ各**底角**トイフ。 又底邊ニ對スル頂點ヨリ底邊マデ引キタル垂線ノ長サヲ其ノ三角形ノ**高サ**トイフ。

二等邊三角形ニ於テハ單ニ底邊トイフトキ

ハ其ノ等邊ニアラザル邊ヲ指スモノトシ,頂角底角等ノ語モ之ニ應ジテ用フルモノトス。

定理 十. 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シ。

特述 △ABC ニ於テ AB=AC ナルトキハ, ∠B=∠C ナルコトヲ證明セントス。



證明 ∠A ノ二等分線ヲ引キ之ガ邊 BC ト交ル點ヲ D トス。

今 AD ヲ折リ目トシテ △ADC ヲ △ADB ノ上ニ重ネタリトセヨ。然ルトキハ ∠CAD=∠BAD ナルヲ以テ直線 AC ハ直線 AB ト合シ,且 AC=AB ナルヲ以テ點 C ハ點 B ト合ス　從ツテ邊 DC ハ邊 DB ト合ス。故ニ △ADB ト △ADC トハ合同ナリ。

依ツテ ∠B=∠C ナリ。

系 1. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分シ,*其ノ三角形ヲ合同ナル二ツノ三角形ニ分ツ。

---

*底邊ニ垂直ニ交リ且底邊ヲ二等分スルコトナリ。

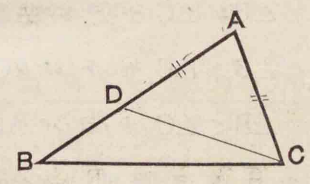
一般ニ一ツノ線分ニ垂直ニシテ且コノ線分ヲ二等分スル直線ヲコノ線分ノ**垂直二等分線**ト云フ。

系 2. 正三角形ノ三ツノ角ハ各60°ナリ。

系 3. 二等邊三角形ノ底角ハ鋭角ニシテ,其ノ外角ハ鈍角ナリ。

定理 十一. 一ツノ三角形ノ二邊ガ相等シカラザルトキハ大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリ大ナリ。

特述 △ABC ニ於テ AB>AC ナルトキハ, ∠C>∠B ナルコトヲ證明セントス。



證明 假設ニヨリ AB>AC ナルヲ以テ, AB 上ニ AC ニ等シク AD ヲ取ルコトヲ得。 D ト C トヲ結ブベシ。然ルトキハ △ADC ニ於テ AD=AC ナルヲ以テ,

$$\angle ACD=\angle ADC. \qquad (1)\ (定理十)$$

故ニ

$$\angle C>\angle ACD. \qquad (2)$$

又 ∠ADC ハ △DBC ノ外角ナルヲ以テ

$$\angle ADC>\angle B. \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ $\angle C > \angle B$ ヲ得。

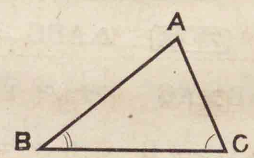
定理 十二. 一ツノ三角形ノ二角ガ相等シキトキハ,之ニ對スル二邊ハ相等シ,二角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリ大ナリ。

特述 $\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle B = \angle C$ ナラバ $AC = AB$,

$\angle B > \angle C$ ナラバ $AC > AB$,

$\angle B < \angle C$ ナラバ $AC < AB$



ナルコトヲ證明セントス。

證明 先ヅ $\angle B = \angle C$ ナリトセンニ,此ノ時モシ $AC > AB$ ナリト考フレバ前定理ニヨリ $\angle B > \angle C$ トナリ假設ニ反スベク,モシ $AC < AB$ ナリト考フレバ又同定理ニヨリ $\angle B < \angle C$ トナリ矢張假設ニ反ス。故ニ $\angle B = \angle C$ ナリトスレバ是非共 $AC = AB$ ナラザル可カラズ。

次ニ $\angle B > \angle C$ ナリトセンニ,此ノ時モシ $AC = AB$ ナリト考フレバ定理十ニヨリ $\angle B = \angle C$ トナリ

假設ニ反スベク;モシ又 $AC < AB$ ナリト考フレバ前定理ニヨリ $\angle B < \angle C$ トナリ矢張假設ニ反ス。故ニ $\angle B > \angle C$ ナルトキハ $AC > AB$ ナラザル可カラズ。

同様ニシテ, $\angle B < \angle C$ ナルトキハ $AC < AB$ ナルコトヲ證明シ得。

系 1. 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ相等シケレバソノ三角形ハ正三角形ナリ。

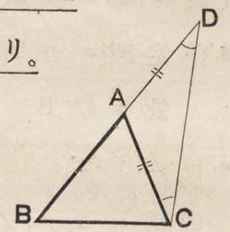
系 2. 三角形ノ一角ガ直角又ハ鈍角ナルトキハ,之ニ對スル邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大ナリ。

系 3. 一直線外ノ一定點ヨリ其ノ直線マデ引キタル線分ノ中ニテ垂線ガ最モ短シ。

定義 一點ヨリ一直線ニ至ル**距離**トハ,其ノ點ト之ヨリ其ノ直線ニ引ケル垂線ノ足トノ間ノ距離ヲ云フ。

系 4. 一直線外ノ一定點ヨリ其ノ直線マデ引キタル斜線ノ中ニテ相等シキモノハ唯二ツアルノミ。

定理 十三. 一ツノ三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ。



特述 △ABC ニ於テ

AB+AC>BC

ナルコトヲ證明セントス。

證明 邊 BA ヲ A ヲ通シテ延長シ,其ノ上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ, D ト C トヲ結ビ付ケヨ。

然ルトキハ　　AB+AC=BD.

故ニ今 BD>BC ナルコト,卽チ ∠BCD>∠BDC ナルコトヲ證明スレバヨシ。(以下學生自ラ之ヲ試ミヨ。)

系 一ツノ三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ。

例　題

1. 一角ガ 60° ナル二等邊三角形ハ正三角形ナリ。

2. △ABC ニ於テ AB= AC ナルトキ,邊 BC 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ AB>AP, AC>AP ナリ.

モシ點 P ガ邊 BC ノ延長上ニアラバ如何。

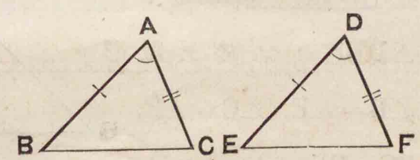
3. △ABC ニ於テ ∠A ノ二等分線ガ邊 BC ト交ル點ヲ D トスレバ, AB>BD, AC>CD ナリ。

4. △ABC ノ內部ニ一點 O ヲ取ルトキハ,

BO+OC<BA+AC.

17. 三角形ノ合同

定理 十四. 一ツノ三角形ノ二邊ト其ノ夾角ガ,他ノ三角形ノ二邊ト其ノ夾角トニ夫夫相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。



特述 △ABC ト △DEF トニ於テ AB=DE,　AC=DF, ∠A=∠D ナルトキハ,兩三角形ハ合同ナルコトヲ證明セントス。

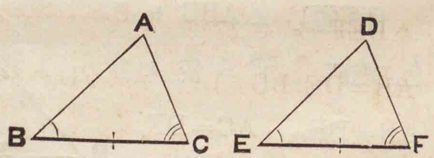
證明 今 △ABC ヲ △DEF ノ上ニ重ヌルニ, AB ヲ之ニ等シキ DE ニ合セシメ,頂點 C ト F トハ DE ノ同ジ側ニ落ツル樣ニセヨ。 然ルトキハ ∠A=∠D ニシテ且 AC=DF ナルヲ以テ, AC ハ DF ト合ス.

斯クシテ頂點B,Cハ夫々E,Fト相合スルニヨリ,邊BCハ邊EFト合ス。故ニ兩三角形ハ合同ナリ。

注意 二ツノ圖形ガ合同ナルコトヲ表スニハ記號≡ヲ用フ。例ヘバ本定理ノ終結ハ$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ト書クコトヲ得。

系 二ツノ直角三角形ニ於テ直角ヲ夾ム二邊ガ夫々相等シキトキハ兩三角形ハ合同ナリ。

定理 十五. 一ツノ三角形ノ二角ト其ノ間ノ邊ガ,他ノ三角形ノ二角ト其ノ間ノ邊トニ夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。



特述 $\triangle ABC$ト$\triangle DEF$トニ於テ$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $BC = EF$ナルトキハ, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ナルコトヲ證明セントス。

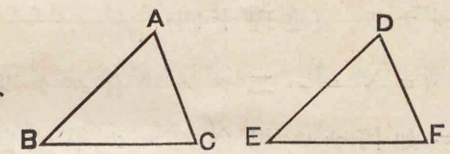
證明 前定理ニ倣ヒ,學生自ラ之ヲ證明セヨ。

系 1. 二ツノ三角形ニ於テ二角ト其ノ一ツニ對スル邊トガ夫々相等シキトキハ兩三角形ハ合同ナリ。

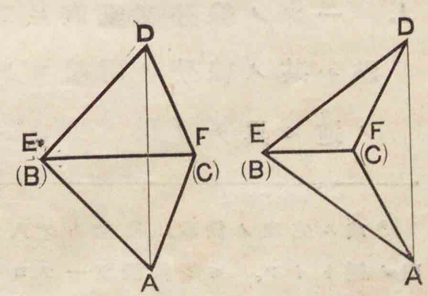
系 2. 二ツノ直角三角形ニ於テ一邊ト其ノ端ニ於ケル一鋭角トガ夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。

系 3. 二ツノ直角三角形ニ於テ一邊ト之ニ對スル一鋭角トガ夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。

定理 十六. 一ツノ三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ト夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。



特述 $\triangle ABC$ト$\triangle DEF$トニ於テ$AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$ナルトキハ, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ナルコトヲ證明セントス。



證明 今$\triangle ABC$ヲ取リテ,ソノ邊BCヲ之ニ等シキEFニ合セシメ,頂點AハEFニ對シテDト反對ノ側ニ落ツル樣

ニ置キ, AトDトヲ結ブベシ。

然ルトキハ $\triangle EAD$ ニ於テ $EA=ED$ ナルヲ以テ,

$\angle EDA=\angle EAD.$ (定理十)

又 $\triangle FAD$ ニ以テ $FA=FD$ ナルヲ以テ,

$\angle FDA=\angle FAD.$ (定理十)

故ニ $\angle EDF=\angle EAF.$

卽チ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A=\angle D$ ナルコトヽナルヲ以テ, 兩三角形ハ合同ナリ。(定理十四)

(コヽニハ二ツノ場合ダケヲ示セリ。コノ他ニ如何ナル場合アルカ,學生自ラ研究セヨ。)

20

例題

1. 一ツノ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線上ノ點ハ其ノ線分ノ兩端ヨリ等距離ニアリ。又此ノ逆*モ眞ナリ。

*或ル定理ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタルモノヲ其ノ定理ノ逆トイフ。モシ假設ガ一ツヨリ多クアルトキハ其ノ一ツト終結トヲ入レ換ヘタルモノヲ各モトノ定理ノ逆トイフ。

2. 二等邊三角形ノ底邊ノ中點ト頂點トヲ過ル直線ハ底邊ニ垂直ナリ。

3. 同一ノ底邊ヲ共有スル二ツノ二等邊三角形ノ兩頂點ヲ過ル直線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分ス。

4. 斜邊ト他ノ一邊トガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ハ合同ナリ。

5. $\triangle ABC$ ニ於テ邊 BC ノ中點ヲDトシ, DトAトヲ結ブトキハ, $AB+AC>2.AD$ ナリ。

定義 三角形ノ一ツノ頂點ト之ニ對スル邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ其ノ**中線**トイフ。

例題 5 ニ於ケルADハ卽チ一ツノ中線ナリ。

6. 三角形ノ一頂點ヨリ引ケル中線ガソノ頂角ヲ夾ム二邊トナス二角ノ大サヲ比較セヨ。

7. 三角形ノ三邊ヲ夫々垂直ニ二等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル。而シテソノ交點ハ三ツノ頂點ヨリ等距離ニアリ。

定義 例題 7 ニイフ所ノ交點ヲ其ノ三角形ノ**外心**トイフ。

8. 一ツノ角ノ二等分線上ノ點ハ,ソノ角ノ二邊ヨリ等距離ニアリ。又コノ逆ハ如何。

9. 三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル,而シテ其ノ交點ハ三邊ヨリ等距離ニアリ。

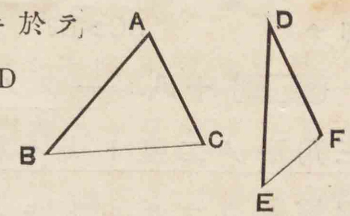
[定義] 例題9ニイフ所ノ交點ヲ其ノ三角形ノ**内心**トイフ。

10. 三角形ノ一ツノ内角ト之ニ隣ラザル二ツノ外角トヲ夫々二等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル,而シテ其ノ交點ハ三邊ヨリ等距離ニアリ。且斯クノ如キ點ハ一ツノ三角形ニ就キテ三ツアリ。

[定義] 例題10ニイフ所ノ交點ヲ何レモ其ノ三角形ノ**傍心**トイフ。

18. 二邊ガ夫々相等シキ三角形

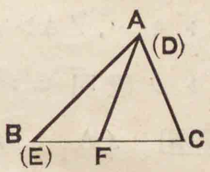
[定理] **十七.** 一ツノ三角形ノ二邊ガ他ノ三角形ノ二邊ト夫々相等シク,其ノ夾角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル夾角ヲ有スル方ノ三角形ガ大ナル第三邊ヲ有ス。



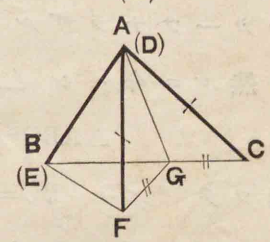
[特述] $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ,$AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A > \angle D$ ナルトキハ,$BC>EF$ ナルコトヲ證明セントス。

[證明] 今 $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ヌルニ,DE ヲ之ニ等シキ AB ニ合セシメ,頂點 F ト C トハ AB ノ同シ側ニ落ツル樣ニセヨ。然ルトキハ $\angle D < \angle A$ ナルヲ以テ DF ハ $\angle A$ ノ内部ニアリ。故ニ若シ F ガ丁度 BC ノ上ニ落ツルナラバ(甲圖ノ場合),明カニ $BC>EF$ ナリ。

(甲)



(乙)



モシ F ガ BC 上ニアラザルトキハ(乙圖ノ場合),$\angle FAC$ ノ二等分線ガ BC ト交ル點ヲ G トシ,G ト F トヲ結ベ。然ルトキハ $\triangle AFG$, $\triangle ACG$ ニ於テ

$$AF=AC,\ AG\ ハ共通,\ \angle FAG=\angle CAG$$

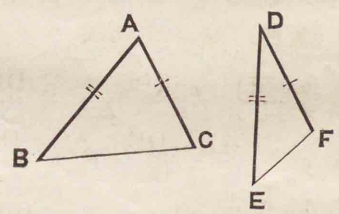
ナルガ故ニ,兩三角形ハ合同ナリ。故ニ $GF=GC$.

故ニ $$BC=BG+GC=BG+GF>BF.$$

卽チ　$BC>EF$　ナリ。

定理 **十八.** 一ツノ三角形ノ二邊ガ他ノ三角形ノ二邊ト夫々相等シク,其ノ第三邊ガ相等シカラザルトキハ,大ナル第三邊ヲ有スル方ノ三角形ガ之ニ對スル大ナル角ヲ有ス。

特述　$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ
$AB=DE$, $AC=DF$, $BC>EF$
ナルトキハ, $\angle A>\angle D$ ナルコトヲ證明セントス。



證明　$\angle A$ ト $\angle D$ トノ關係ハ $\angle A>\angle D$, $\angle A=\angle D$, $\angle A<\angle D$ ノ中ノ何レカ一ツナラザル可カラズ。

然ルニ今モシ $\angle A=\angle D$ ナリトセバ,

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF. \quad \text{(定理十四)}$$

從ツテ　$BC=EF$

ナラザル可カラズ。コレ假設ニ反ス。

モシ又 $\angle A<\angle D$ トセバ,

$$BC<EF \quad \text{(定理十七)}$$

ナラザル可カラズ。コレモ亦假設ニ反ス。

故ニ是非共 $\angle A>\angle D$ ナラザル可カラズ。

定理 **十九.** 一ツノ三角形ノ二邊ガ他ノ三角形ノ二邊ト夫々相等シク,且其ノ一双ノ相等シキ邊ニ對スル角ガ相等シキトキハ,他ノ一双ノ相等シキ邊ニ對スル角ハ相等シキカ又ハ互ニ補角ヲナス。

注意　前者ノ場合ニハ兩三角形ハ合同ナリ。

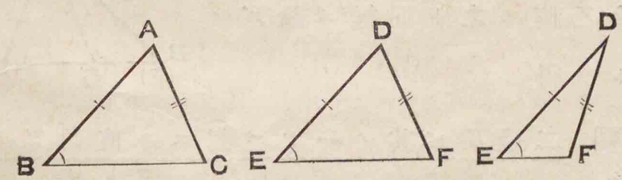
特述　$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$AB=DE$,　$AC=DF$,　$\angle B=\angle E$

ナルトキハ,

$\angle C=\angle F$　又ハ　$\angle C+\angle F=2$直角

ナルコトヲ證明セントス。



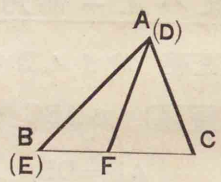
證明　今 $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ヌルニ, DE ヲ之ニ等シキ AB ニ合セシメ,頂點 F ト C トハ AB ノ同シ側ニ落ツル様ニセヨ。然ルトキハ

∠B＝∠E ナルヲ以テ EF ハ BC ノ上ニ落ツ。

モシ F ガ C ト合スレバ,兩三角形ハ合同ニシテ ∠C＝∠F トナル。

モシ F ガ C ト合セザレバ, BC 又ハ其ノ延長ノ上ニアルベシ。今 F ガ BC 上ニアリ(甲圖)トスレバ,

(甲)



△AFC ニ於テ　AF＝AC

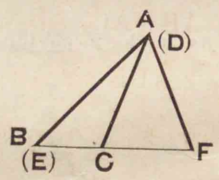
ナルヲ以テ　∠ACF＝∠AFC,

從ツテ

∠AFB＋∠ACF＝∠AFB＋∠AFC＝2直角.

故ニ　∠F＋∠C＝2直角.

(乙)



又 F ガ BC ノ延長ノ上ニアル場合(乙圖)モ之ト同樣ニ論ズルコトヲ得。

系 二邊及ビ其ノ一ツニ對スル直角又ハ鈍角ガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形又ハ鈍角三角形ハ合同ナリ。

例　題

1. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ガ之ニ對スル邊ノ中點ヲ過ルトキハ,其ノ三角形ハ二等邊ナリ。

2. △ABC ニ於テ AB＞AC ナルトキ, 邊 AB, AC ノ上ニ夫々點 D, E ヲトリ, BD＝CE ナラシムレバ, BE＞CD ナリ。

3. △ABC ノ邊 AB, AC ノ上ニ夫々點 D, E ヲトリ, BD＝CE ナラシムレバ, DE＜BC ナリ。

定理十八

4. △ABC ニ於テ邊 BC ノ中點ヲ D トスレバ, AB＞AC, AB＝AC, AB＜AC ナルニ從ツテ, ∠ADB＞∠ADC, ∠ADB＝∠ADC, ∠ADB＜∠ADC ナリ。コノ逆モ眞ナリ。定理十七

定理十九

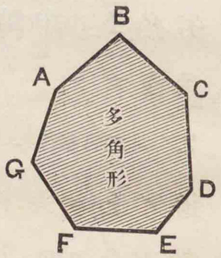
5. △ABC, △DEF ニ於テ, AB＜AC, AB＝DE, AC＝DF, ∠B＝∠E ナルトキハ

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

ナリ。

第五章 多角形

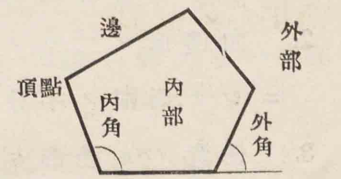
19. 多角形



一ツノ線分ABノ端Bヲ一端トスル第二ノ線分BCアリ,次ニ又Cヲ一端トスル第三ノ線分CDアリ,順次ニカクノ如ク其ノ端ニ於テ相接續セル線分ノ一連アリ,途中ニテ自ラ相交ルコトナクシテ最初ノ點Aニ復歸スルトキハ,之ニヨリテ平面ガ二ツノ部分ニ分タル。其ノ中ニテ大サノ限ラレタル部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**多角形**トイヒ,其ノ限界ヲナス線分ノ一連ヲ多角形ノ**周圍**トイフ。平面ノ中ニテ多角形ニ屬スル部分ヲ其ノ多角形ノ**內部**トイヒ然ラザル部分ヲ其ノ**外部**トイフ。

多角形ノ周圍ヲナス各線分ヲソノ**邊**,邊ノ端ヲ**頂點**トイフ。二ツノ相隣レル邊ノ夾ム

共軛角ノ中ニテ多角形ノ內部ヲ含ム方ノ角ヲ其ノ多角形ノ**內角**トイヒ,一邊ト其ノ隣リノ邊ノ延長トノ夾ム劣角ヲ其ノ多角形ノ**外角**トイフ。



一ツノ多角形ニ於テ邊,頂點及ビ內角ハ常ニ同數ダケアリ。其ノ數ガ3, 4, 5, ..., n ナルニ從ツテ其ノ多角形ヲ夫々**三角形,四角形,五角形,......, n 角形**,又ハ**三邊形,四邊形,五邊形,......, n 邊形**トイフ。

注意 多角形ヲ示スニハ,其ノ頂點ニ附シタル記號ヲ順次ニ並記シテ之ヲ表ス。例ヘバ四角形ABCD,五角形PQRST等トスルガ如シ。

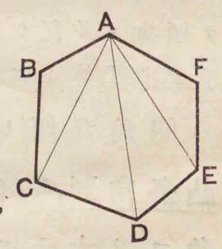
內角ガ何レモ二直角ヨリ小ナル多角形ヲ**凸多角形**トイヒ,內角ノ中少クモ一ツガ二直角ヨリ大ナルモノヲ**凹多角形**トイフ。

多角形ノ相隣ラザル二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ**對角線**トイフ。

例 題

1. 四角形ノ內角ノ和ハ四直角ニ等シ。
2. 四邊形ノ二ツノ對角線ノ和ハ周圍ヨリ小ニシテ,周圍ノ半分ヨリ大ナリ。
3. 任意ノ n 邊形ニ於テ $(n-1)$ 邊ノ和ハ殘リノ一邊ヨリ大ナリ。
4. n 角形ノ一ツノ頂點ヨリ幾ツノ對角線ヲ引キ得ルカ。又 n 角形ノ對角線ノ總數ヲ求ムル公式ヲ作レ。

20. 內角,外角



定理 二十. n 角形ノ內角ノ總和ハ$(2n-4)$直角ニ等シ。

特述 ABC......F ヲ n 角形トス(圖ニハ假リニ六角形ヲ畫ケリ), 然ルトキハ

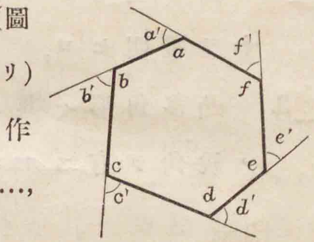
$$\angle A+\angle B+\angle C+\cdots\cdots+\angle F=(2n-4)\text{直角}$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 一ツノ頂點 A ヨリ對角線 AC, AD 等ヲ

引クトキハ,之ニヨリテ n 角形ハ$(n-2)$個ノ三角形 ABC, ACD 等ニ分タル。而シテ一ツノ三角形ノ內角ノ和ハ 2 直角ニ等シキガ故ニ,$(n-2)$個ノ三角形ノ內角ノ總和ハ $2(n-2)$直角卽チ $(2n-4)$直角ニ等シ。

定理 二十一. 凸多角形ノ各頂點ニ於テ一ツヅヽ作リタル外角ノ總和ハ四直角ニ等シ。



特述 一ツノ凸 n 角形(圖ニハ假リニ六角形ヲ畫ケリ)ノ各頂點ニ於テ一ツヅヽ作リタル外角ヲ $\angle a'$, $\angle b'$,......, $\angle f'$ トス。然ルトキハ

$$\angle a'+\angle b'+\cdots\cdots+\angle f'=4\text{直角}$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 $\angle a'$, $\angle b'$, ..., $\angle f'$ ニ隣ル內角ヲ夫々 $\angle a$, $\angle b$, ..., $\angle f$ トスレバ,

$$\angle a'+\angle a=2\text{直角},\quad \angle b'+\angle b=2\text{直角},$$
$$\cdots\cdots,\quad \angle f'+\angle f=2\text{直角}.$$

故ニ $(\angle a'+\angle b'+\dots\dots+\angle f')+(\angle a+\angle b+\dots\dots+\angle f)$

$$=2n \text{ 直角.}$$

然ルニ $\angle a+\angle b+\dots\dots+\angle f=(2n-4)$ 直角.

(定理二十)

故ニ $\angle a'+\angle b'+\dots\dots+\angle f'=4$ 直角.

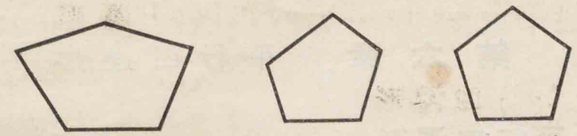
例 題

1. 多角形ノ内部ニ一點ヲトリ,之ト各頂點トヲ結ビ,全形ヲ n 個ノ三角形ニ分チテ定理二十ヲ證明セヨ。
2. 凸多角形ハ其ノ内角トシテ三ツヨリ多クノ鋭角ヲ有スルコトナシ。

21. 正多角形

定義 多角形ノ邊ガ皆相等シキモノヲ**等邊多角形**トイヒ,内角ガ皆相等シキモノヲ**等角多角形**トイフ。

等邊ニシテ且等角ナル多角形ヲ**正多角形**トイフ。



等邊五角形　等角五角形　正五角形

注意 三角形ノ場合ニハ等邊ナルモノハ必ズ等角,等角ナルモノハ必ズ等邊ナレドモ,一般ノ多角形ニ於テハ必ズシモ然ラズ。

正多角形ハ其ノ邊數ニ從ツテ之ヲ**正三角形,正四角形**等ト稱ス。特ニ正四角形ノコトヲ**正方形**トイフ。

例 題

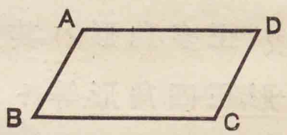
1. 正 n 角形ノ一ツノ内角ノ大サヲ求メヨ。n ノ値ヲ 4, 5, 6, 8 トシテ夫々其ノ度數ヲ計算セヨ。
2. 一ツノ外角ノ大サガ 30° ナル正多角形ノ邊數ヲ求メヨ。
3. 一邊ガ相等シキ二ツノ正 n 角形ハ合同ナリ。

第六章 平行四邊形

22. 平行四邊形

定義 四邊形ノ相對スル二双ノ邊ガ夫々平行ナルモノヲ**平行四邊形**トイフ。

注意 頂點ガ順次ニ A, B, C, D ナル平行四邊形ヲ表スニハ ▱ABCD 又ハ ▱AC, ▱BD 等ノ記號ヲ用フ。



定理 二十二. 一ツノ平行四邊形ニ於テ

(1) 相對スル角及ビ邊ハ夫々相等シ。

(2) 對角線ハ各他ヲ二等分ス。

特述 略ス。

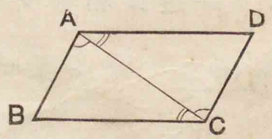
證明 ▱ABCD ニ於テ對角線 AC ヲ引ケバ

$\angle BAC = \angle DCA$, $\angle DAC = \angle BCA$. (定理八)

故ニ $\angle BAC + \angle DAC = \angle DCA + \angle BCA$,

即チ $\angle A = \angle C$

同様ニシテ $\angle B = \angle D$.

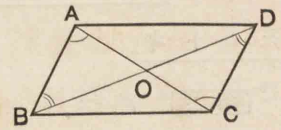


ナルコトモ證明セラル。

次ニ $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$. (定理十五)

從ッテ

$AB = DC$, $BC = AD$.



次ニ兩對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスレバ, $\triangle ABO$ ト $\triangle CDO$ トニ於テ, 今證明シタル所ニヨリ $AB = CD$,

又 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle ABO = \angle CDO$. (定理八)

故ニ $\triangle ABO \equiv \triangle CDO$.

從ッテ $AO = OC$, $BO = OD$.

系 1. 平行四邊形ノ對角線ハ之ヲ二ツノ合同ナル三角形ニ分ツ。

系 2. 二ツノ平行線ノ中ノ任意ノ一ツノ上ノ各點ト他ノ線トノ距離ハ皆相等シ。

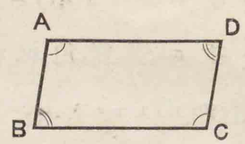
定義 二ツノ平行線ノ**距離**トハ其ノ中ノ任意ノ一ツノ上ノ點ト他ノ線トノ距離ナリ。

定理 二十三. 四邊形ハ次ノ各場合ニ於テ平行四邊形ナリ。

(1) 二双ノ相對スル角又ハ相對スル邊ガ夫々相等シキトキ。

(2) 對角線ガ各他ヲ二等分スルトキ。

(3) 一双ノ相對スル邊ガ相等シク,且平行ナルトキ。



[特述] 略ス。

[證明] 四邊形 ABCD ニ於テ $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ ナルトキハ,

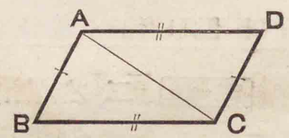
$$\angle A + \angle B = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D).$$

然ルニ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ 直角.

故ニ $\angle A + \angle B = 2$ 直角.

故ニ AD ト BC トハ平行ナリ。 (定理六)

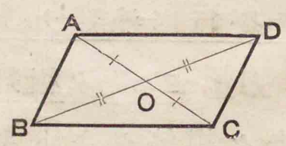
同様ニシテ AB ト DC トガ平行ナルコトモ證明セラル。故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。



次ニ AB=DC, AD=BC ナルトキ,對角線 AC ヲ引ケバ $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$.

從ツテ $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle ACB = \angle CAD$.

故ニ AB ト DC, AD ト BC ハ夫々平行ニシテ, ABCD ハ平行四邊形ナリ。



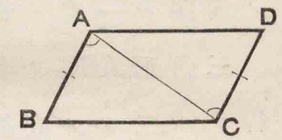
次ニ兩對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トシ,

AO=OC, BO=OD ナリトスレバ,

$\triangle AOB \equiv \triangle COD$. (定理十四)

從ツテ $\angle BAO = \angle DCO$.

故ニ AB ト DC トハ平行ナリ。同様ニシテ AD ト BC トガ平行ナルコトモ證明セラル。故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。



次ニ AB ト DC トガ平行ニシテ,且 AB=DC ナリトスレバ,對角線 AC ヲ引クトキ,

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$. (定理十四)

從ツテ $\angle ACB = \angle CAD$.

故ニ AD ト BC トハ平行ナリ。故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。

[系] 1. 等邊ナル四邊形ハ平行四邊形ナリ。

[系] 2. 等角ナル四邊形(ソノ各角ハ直角ナリ)ハ平行四邊形ナリ。

[定義] 等邊ナル四邊形ヲ**菱形**トイヒ,等角ナル四邊形ヲ**矩形**又ハ**長方形**トイフ。

菱形ニシテ且矩形ナルモノハ正方形ナリ。

例　題

1. 相隣レル二邊ト其ノ夾角トガ夫々相等シキ二ツノ平行四邊形ハ合同ナリ。

2. 二等邊三角形ノ底ノ一點ヨリ相等シキ邊ニ平行線ヲ引ケバ,之ニテ作レル平行四邊形ノ周圍ハ一定ノ長サヲ有ス。

3. 三角形 ABC ノ各頂點ヲ過リ夫々對邊ニ平行ナル三ツノ直線ヲ引キ,ソノ作ル三角形ヲ DEF トスレバ, A, B, C ハ夫々三角形 DEF ノ三邊ノ中點ナリ。

4. 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ引ケル三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ過ル。

定義　此ノ點ヲ其ノ三角形ノ**垂心**トイフ。

5. 菱形ノ對角線ハ各他ヲ垂直ニ二等分ス。此ノ逆ハ眞ナルカ。

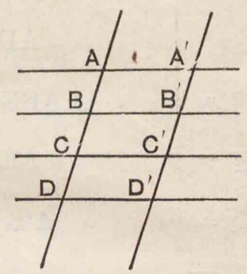
6. 矩形ノ兩對角線ハ相等シ。

7. 平行四邊形ノ兩對角線ガ相等シケレバ矩形ナリ。

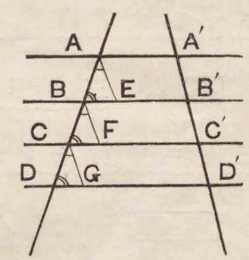
8. 三角形 ABC ノ邊 AB, AC ノ外側ニ正三角形 ABD, ACE ヲ作リ,又 BC ニ關シテ三角形 ABC ト同側ニ正三角形 BCF ヲ作レバ,四邊形 ADFE ハ平行四邊形ナリ。

23. 平行線ニ關スル定理

(甲)



(乙)



定理 **二十四.** 若干ノ平行線ガ一ツノ直線ト交リテ之ヨリ相等シキ線分ヲ截リ取ルトキハ,他ノ如何ナル直線ト交ルモ常ニソレヨリ相等シキ線分ヲ截リ取ル。

特述　平行線 AA′, BB′, CC′, DD′ ガ二ツノ直線 ABCD 及ビ A′B′C′D′ ト交ルトキ,モシ AB=BC=CD ナラバ, A′B′=B′C′=C′D′ ナルコトヲ證明セントス。

證明　二直線 ABCD 及ビ A′B′C′D′ ガ平行ナルトキハ(甲圖ノ場合)學生自ラ證明セヨ。

モシ二直線ガ平行ナラザルトキハ(乙圖ノ場

合), A, B, C ヲ過リ直線 $A'B'C'D'$ ニ平行ニ夫々 AE, BF, CG ヲ引キ,ソノ BB', CC', DD' トノ交點ヲ夫々 E, F, G トセヨ。然ルトキハ $AEB'A'$, $BFC'B'$, $CGD'C'$ ハ何レモ平行四邊形ナルガ故ニ

$$AE=A'B',\ BF=B'C',\ CG=C'D'.$$

然ルニ　$\triangle ABE \equiv \triangle BCF \equiv \triangle CDG$,　(定理十五)

從ッテ　$AE=BF=CG.$

故ニ　$A'B'=B'C'=C'D'.$

系 1. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ過リ他ノ一邊ニ平行ナル直線ハ第三邊ノ中點ヲ過ル。

系 2. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行ニシテ,且其ノ半分ニ等シ。

定義 一双ノ相對スル邊ガ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,ソノ平行ナル各邊ヲ**底邊**又ハ**底**トイフ。底ニアラザル二邊ガ相等シキ梯形ヲ**二等邊梯形**又ハ**等脚梯形**トイフ。

定理二十四ノ乙圖ニ於ケル $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ ハ何レモ梯形ナリ。

系 3. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點ヨリ等距離ニアリ。又此ノ逆モ眞ナリ。

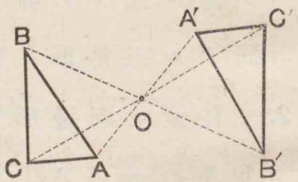
例　題

1. 一ツノ三角形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビテ得ル三ツノ線分ハ此ノ三角形ヲ四ツノ合同ナル三角形ニ分ツ。
2. 任意ノ四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブトキハ一ツノ平行四邊形ヲ得。特ニ最初ノ四邊形ガ矩形ナルトキハ,斯クシテ得ル平行四邊形ハ菱形ナリ。
3. △ABC ノ邊 AB, AC 上ニ夫々點 D, E ヲトルトキ, BE, CD ガ互ニ二等分セラルヽコトアルカ。
4. 一ツノ梯形ニ於テ平行ナラザル二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行ニシテ,且兩底ノ和ノ半分ニ等シ。又兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ如何。
5. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ヲ過ル。

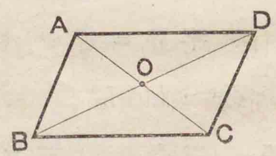
而シテ此ノ點ト各頂點トノ距離ハ夫々各中線ノ長サノ三分ノ二ニ等シ。

定義 三角形ノ三ツノ中線ノ交點ヲ其ノ三角形ノ**重心**ト云フ。

24. 點對稱,線對稱



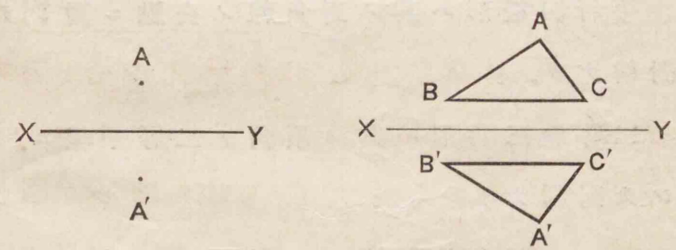
定義 同一平面上ニ二ツノ圖形アリ,此ノ平面上ニ於テ一定點ノ周リニ二直角ダケ一ツノ圖形ヲ回轉シテ他ノ圖形ノ上ニ全ク重ネ合ハスコトヲ得ルトキハ,此ノ二ツノ圖形ハ其ノ**一定點ニ關シテ對稱ナリ**ト云ヒ,其ノ一定點ヲ**對稱ノ中心**ト云フ。



定義 一ツノ圖形アリ,其ノ平面上ニ於テ一定點ノ周リニ二直角ダケ此ノ圖形ヲ回轉シテ原ノ圖形ノ上ニ全ク重ネ合ハスコトヲ得ルトキハ,此ノ圖形ハ其ノ**一定點ニ關シテ對稱ナリ**或ハ**點對稱ヲ有ス**ト云ヒ其ノ一定點ヲ**對稱ノ中心**ト云フ。(前ノ特別ノ場合ナリ)。

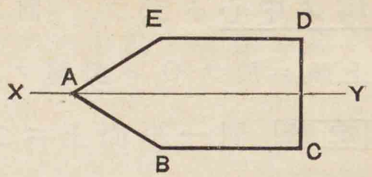
上圖ニ於テOハ對稱ノ中心ヲ示ス。

定義 同一平面上ニ二ツノ圖形アリ,此ノ平面上ニ於テ一定直線ヲ折リ目トシテ一ツノ圖形ノ在ル平面ヲ他ノ圖形ノアル平面ノ上ニ折リ重ヌルトキ其ノ兩圖形ガ全ク相重ナルトキハ,其ノ兩圖形ハ此ノ**一定直線ニ關シテ對稱ナリ**ト云ヒ,其ノ一定直線ヲ**對稱ノ軸**ト云フ。



定義 一ツノ圖形アリ,其ノ平面上ニ於テ一定直線ヲ折リ目トシテコノ圖形ヲ折リ重ヌルトキ此ノ圖形ノ二部分ガ全ク相重リ合

フトキハ此ノ圖形ハ其ノ**一定直線ニ關シテ對稱ナリ**或ハ**線對稱ヲ有ス**ト云ヒ其ノ一定直線ヲ**對稱ノ軸**ト云フ。(前ノ特別ノ場合ナリ)。



上圖ニ於テ XY ハ對稱ノ軸ヲ示ス。

例題

1. 平行四邊形ハ其ノ對角線ノ交點ニ關シテ對稱ナリ。
2. 二等邊三角形ハ其ノ頂角ノ二等分線ニ關シテ對稱ナリ。
3. 一ツノ對角線ニ關シテ對稱ナル平行四邊形ハ菱形ナリ。
4. 直線 XY ノ同ジ側ニアル二點ヲ A, B, 又 XY ニ關シテ A ト對稱ナル點ヲ A' トシ, BA'

ト XY トノ交點ヲ C トスレバ

$$\angle ACX = \angle BCY.$$

又 XY 上ニ C ノ他ニ一點 P ヲトレバ

$$AC + BC < AP + BP.$$

雜題

1. 二直線 AO ト BC トノ交點ヲ O トス, 今 $\angle AOB$ ノ二等分線ニ垂直ニ O ヲ過リテ引キタル直線ハ $\angle AOC$ ヲ二等分ス。
2. $\triangle ABC$ ノ内部ニ一點 O ヲ取ルトキハ
$$AB+BC+CA>OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA).$$
3. 四邊形 ABCD ノ邊ノ中ニテ AD ガ最大ニシテ BC ガ最小ナルトキハ, $\angle ABC$ ハ $\angle ADC$ ヨリモ大ニシテ, $\angle BCD$ ハ $\angle BAD$ ヨリモ大ナリ。
4. 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊ニ至ル距離ノ和ハ一定ナリ。

又ソノ點ヲ底邊ノ延長上ニトルトキハ如何。

5. 一直線外ノ一定點ヨリ引ケル斜線ノ中ニテ,其ノ足ガソノ點ヨリ其ノ直線ニ引ケル垂線ノ足ヨリ相等シキ距離ニアルモノハ其ノ長サ相等シク,遠キモノハ其ノ長サ大ナリ。コノ逆モ眞ナリ。

6. 有限直線 AB 上ニ一點 C ヲトリ,線分 AC, CB 上ニ夫々同側ニ正方形 ACDE, CBGF ヲ畫ケバ, AF, DB ハ互ニ垂直ナリ。モシ正方形ノ代リニ正三角形 ACD, CBF ヲ作ラバ AF, DB ノナス角ノ大サ如何。

7. △ABC ノ中線 BE, CF ノ延長上ニ夫々 BE, CF ニ等シク EG, FH ヲ取レバ, G, A, H ハ一直線上ニアリ。

8. 二等邊三角形 ABC ニ於テ A ヲソノ頂點トス, AB ヲ B ヲ通過シテ F マデ延長シ BF=AB トシ, G ヲ AB ノ中點トセバ CF=2.CG.

9. △ABC ノ邊 BC ノ中點 D ヲ過リ角 A ノ二等分線ニ垂直ニ引キタル直線ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 X, Y トセバ,

(1) $\angle X=\angle Y=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$,

(2) $\angle BDX=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C)$,

(3) $BX=\frac{1}{2}(AB\sim AC)$,

(4) $AX=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

10. 二隣邊ガ相等シカラザル平行四邊形ノ四ツノ角ヲ二等分スル直線ハ一ツノ矩形ヲ作ル。

11. △ABC ニ於テ $\angle C=90°$, $\angle B=30°$ ナラバ AB ハ AC ノ二倍ニ等シ。コノ逆モ眞ナリ。

12. △ABC ノ底邊 BC ヲ C ヲ通過シテ延長シ其ノ延長上ニ CD ヲ AB ニ等シク取レバ, AD ハ BC ヨリモ大ナリ。定理十七

13. 三角形ノ大ナル邊ニ引ケル中線ハ,小ナル邊ニ引ケル中線ヨリモ小ナリ。定理十八

14. △ABC ノ垂心ヲ H トスレバ A ハ △HBC ノ垂心ナリ。

15. 平行四邊形 ABCD ノ對邊 BC, AD ノ中點ヲ夫々 F, E トスレバ BE, DF ハ AC ヲ三等分ス。

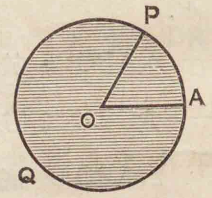
第三篇

圓

第一章　基本性質

25. 圓周，圓

一ツノ線分OAヲ取リ,ソノ一端Oヲ固定シ置キテコノ線分ヲ一平面內ニテ一回轉セシムルトキハ,他ノ端Aハ一ツノ線ヲ畫クベシ。



コノ線ヲ名付ケテ圓周トイヒ,點Oヲソノ中心トイフ。

圓周ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ツ。其ノ中ニテ大サノ限ラレタル方ノ部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ圓トイヒ,其ノ圓周ノ中心ヲ圓ノ中心トイフ。

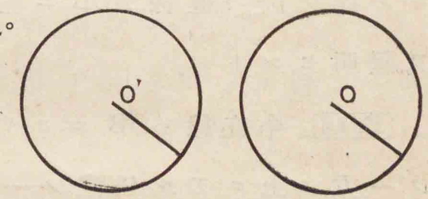
平面ノ中ニテ圓ニ屬スル部分ヲソノ圓ノ

內部トイヒ,然ラザル部分ヲ外部トイフ。

圓周上ノ一點ト中心トヲ結ブ線分ヲ圓ノ半徑トイフ。同ジ圓ノ半徑ハスベテ相等シ。

注意　圓ヲ表スニハ圓周上ニアル若干ノ點ニ附シタル記號ヲ並記スルカ,又ハ中心ニ附シタル記號ヲ以テス。例ヘバ圓周上ノ三點A, P, Qヲトリテ圓APQ, 又ハ中心Oヲトリテ圓OトイフガＩ如シ。

定理 二十五. 相等シキ半徑ヲ有スル二ツノ圓ハ合同ナリ。

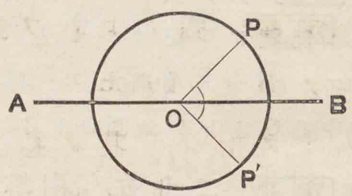


特述　圓O, 圓O′ノ半徑ヲ相等シトス,然ルトキハ圓Oト圓O′トハ合同ナルコトヲ證明セントス。

證明　中心O′ガ中心Oニ重ナル樣ニ圓O′ヲ圓Oノ上ニ置クトキハ,圓O′ノ周上ノ各點ハ圓Oノ周上ニ在ルベシ。何トナレバ若シ然ラザレバ兩圓ノ半徑ハ等シキコトヲ得ズシテ假設ニ反スレバナリ。同樣ニ圓Oノ周上ノ各點モ亦圓O′ノ周上ニ在リ。

故ニ兩圓周ハ全ク相重リ,從ツテ兩圓モ亦相重ル。故ニ圓Oト圓O′ハ合同ナリ。

定理 二十六. 圓ハ其ノ中心ヲ過ル直線ニ關シテ對稱ナリ。

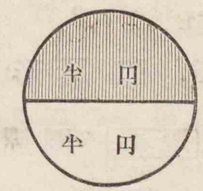


特述 圓Oノ中心ヲ過ル一ツノ直線ヲAOBトセヨ。然ルトキハ此ノ圓ハ直線AOBニ關シテ對稱ナルコトヲ證明セントス。

證明 今直線AOBニヨリテ分タレタル圓周ノ一方ノ上ニアル任意ノ一點ヲPトシ,OトPトヲ結ビ,OBニ關シテPト反對ノ側ニ∠BOP′ガ∠BOPニ等シクナル樣ニ直線OP′ヲ引キ,圓周ト交ル點ヲP′トセヨ。然ルトキハOP, OP′ハ共ニ圓Oノ半徑ナルガ故ニ相等シ。故ニ直線AOBヲ折リ目トシテ圓周ノ一方ノ部分ヲ他ノ方ノ上ニ重ヌルトキハ,PハP′ト相合スベシ。斯クノ如クシテ圓周上ノ何レノ點ヲトルモ之ヲ上記

ノ如ク折リ返ストキハ常ニ圓周上ノ他ノ部分ノ何レカノ點ト相合ス。故ニ此ノ圓周ハ直線AOBニ關シテ對稱ナリ。從ツテ此ノ圓周ニヨリテ圍マルヽ圓モ亦直線AOBニ關シテ對稱ナリ。

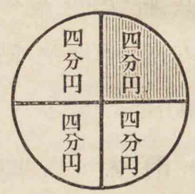
定義 圓ノ中心ヲ過ル直線ノ中ソノ圓內ニアル部分ノミヲ指シテ其ノ圓ノ**直徑**トイフ。一ツノ圓ノ直徑ハ半徑ノ二倍ニシテ皆相等シ。



一ツノ直徑ニヨリテ分タレタル圓ノ一部分ヲ**半圓**トイフ。

例題

1. 圓ノ中心ハ唯一ツニ限ル。
2. 圓周上ノ一點ト一ツノ直徑ノ兩端トヲ夫夫結ブ二ツノ線分ハ互ニ垂直ナリ。
3. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ノ半圓ハ合同ナリ。
4. 一ツノ圓ニ於テ互ニ垂直ナル二ツノ直徑



ハ其ノ圓ヲ合同ナル四ツノ部分ニ分ツ。

定義 本問(4)ニ於ケル其ノ一ツノ部分ヲ**四分圓**又ハ**象限**トイフ。

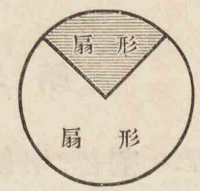
26. 弧, 扇形

定義 圓周ノ一部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**弧**トイフ。

同ジ圓或ハ相等シキ圓ノ二ツノ弧ノ大サヲ比較スルニハ,線分ノ大サヲ比較スルガ如クニ,之ヲ重ネ合ハセテ見ルコトヲ得。

一ツノ圓周ヲ二ツノ弧ニ分チタルトキハ,ソノ二ツノ弧ヲ互ニ**共軛**ナリトイヒ,其ノ二ツガ相等シカラザルトキハ大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**トイフ。

一ツノ圓ノ二ツノ半徑ハ其ノ圓ヲ二ツノ部分ニ分ツ。其ノ中ノ一方ノミヲ考フルトキハ之ヲ**扇形**トイヒ,其ノ二ツノ半徑ノ夾ム



共軛角ノ中ニテ扇形ヲソノ內部ニ有スル方ヲ**扇形ノ角**トイフ。

注意 半圓及ビ四分圓ハ扇形ノ角ガ夫々二直角及ビ一直角ナル特別ノ場合ナリ。

例題

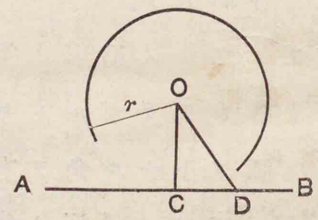
1. 半徑及ビ角ガ夫々相等シキ二ツノ扇形ハ合同ナリ。
2. 半徑及ビ弧ガ夫々相等シキ二ツノ扇形ハ合同ナリ。
3. 二ツノ扇形ノ半徑ガ相等シク其ノ角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル角ヲ有スル方ノ弧ガ,小ナル角ヲ有スル方ノ弧ヨリ大ナリ。
4. 二ツノ扇形ノ半徑ガ相等シク其ノ弧ガ相等シカラザルトキハ,大ナル弧ヲ有スル方ノ角ハ小ナル弧ヲ有スル方ノ角ヨリ大ナリ。
5. 一ツノ圓ニ於ケル扇形ノ角ヲ二倍,三倍等ニスレバ,其ノ扇形ニ屬スル弧モ亦二倍,三倍等ニナル。コノ逆モ眞ナリ。

第二章 圓ト直線

27. 割線,切線

定理 **二十七.** 圓ノ中心ヨリ一ツノ直線ニ至ル距離ガ其ノ圓ノ半徑ヨリ大ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナルカニ從ツテ,其ノ直線ハ其ノ圓周ト共通ナル點ヲ有セザルカ,或ハ之ト唯一點ヲ共有スルカ,或ハ之ト二點ヲ共有ス。

特述 圓Oノ中心ヨリ直線ABニ垂線OCヲ引キタリトシ,又此ノ圓ノ半徑ヲrトス。然ルトキハ,直線ABト圓Oノ周トハ,$OC>r$ナラバ共通點ヲ有セズ, $OC=r$ナラバ唯一點ヲ共有シ, $OC<r$ナラバ二點ヲ共有スルコトヲ證明セントス。



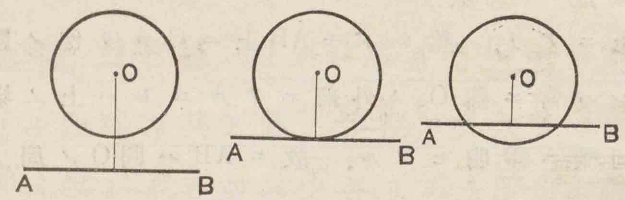
證明 先ヅ$OC>r$ナルトキハ,點OトAB上ノ任意ノ一點Dトヲ結ベバ常ニ $OD \geqq OC > r$,

故ニDハ圓Oノ周上ニアラズ。故ニ直線ABハ圓周ト出會フコトナシ。

次ニ$OC=r$ナルトキハ,點Cハ明カニ圓Oノ周上ニアリ。然レドモAB上ニCヨリ他ノ點ヲ取レバ常ニ圓Oノ外部ニアルコトハ上ノ場合ト同樣ニ證明セラル。故ニABハ圓Oノ周ト唯一點Cヲ共有ス。

次ニ$OC<r$ナリトセヨ。今一點Dガ最初ニ點Cト相合セル位置ニアリ,之ヨリ發シテ半直線CA又ハCB上ニ變動シ限リナク遠方マデ行クモノトシ,之ニ伴フ線分ODノ長サヲ考フルニ,最初ハrヨリ小ナレドモ次第ニソノ大サヲ增シ,ツイニハrヨリ大ナルニ至ルベシ。故ニソノ途中ニテ$OD=r$ナル位置ガ一ツアルベク,其ノ位置ニ於ケル點Dハ圓Oノ周上ニアリ,ソノ他ノ位置ニ於テハ圓Oノ周上ニアラズ。而シテ斯クノ如キ位置ハ半直線CA及ビCB上ニ各一ツヅヽアルヲ以テ,結局直線ABハ圓Oノ周ト二點ダケヲ共有ス,

系 圓周ト直線トノ位置ニ就キテハ次ノ三ツノ場合アリ。



(1) 直線ト圓周トハ一點ヲモ共有セズ,直線ハ全部圓ノ外部ニアリ。

(2) 直線ト圓周トハ唯一點ヲ共有ス,直線中ソノ一點ヲ除ク他ノ部分ハ圓ノ外部ニアリ。

(3) 直線ト圓周トハ二點ヲ共有ス,而シテ直線中ソノ二點ヲ兩端トスル線分ハ圓ノ内部ニアリ,其ノ他ノ部分ハ圓ノ外部ニアリ。

圓ノ中心ト直線トノ間ノ距離ハ(1)ニ於テハ圓ノ半徑ヨリ大ナリ,(2)ニ於テハ半徑ニ等シ,(3)ニ於テハ半徑ヨリ小ナリ。

定義 圓周ト直線トガ二點ヲ共有スルトキハ兩者ハ**相交ル**トイヒ,其ノ直線ヲ其ノ圓ノ**割線**トイフ。

圓周ト直線トガ唯一點ヲ共有スルトキハ兩者ハ**相切ス**トイヒ,其ノ直線ヲ其ノ圓ノ**切線**,マタ其ノ點ヲ**切點**トイフ。

定理 **二十八.** 圓周上ノ一點ヲ過リ此ノ點ヲ端トスル半徑ニ垂直ナル直線ハ其ノ圓ノ切線ニシテ,其ノ點ハ其ノ切線ノ切點ナリ。

證明 略ス。(學生自ラ之ヲ試ミヨ)

系 本定理ノ逆モ眞ナリ。

例題

1. 圓ト直線トハ三點ニ於テ交ルコトナシ。
2. 圓周上ノ一點ヲ過ル切線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。
3. 圓周上ノ一點ヲ過リ其ノ點ニ引キタル半徑ニ垂直ナラザル直線ハ割線ナリ。

28. 弦

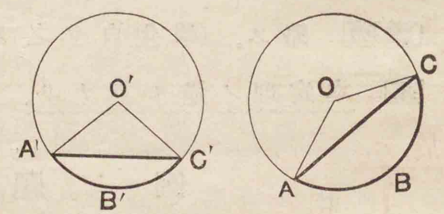
定義 同一圓周上ニアル二點ヲ結ブ線分

ヲソノ圓ノ弦トイフ。

定理 二十九. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,

(1) 二ツノ弧ガ相等シキトキハ,之ニ對スル弦モ相等シ。

(2) 二ツノ劣弧ガ相等シカラザルトキハ,大ナル弧ニ對スル弦ガ小ナル弧ニ對スル弦ヨリモ大ナリ。



特述 弧 ABC ト弧 A′B′C′ トハ同ジ圓又ハ相等シキ圓ノ二ツノ弧ナリトス。今此ノ兩弧ガ相等シキトキハ,之ニ對スル弦 AC 及ビ A′C′ ハ相等シク,又兩弧ガ共ニ劣弧ニシテ且 ABC ガ A′B′C′ ヨリ大ナルトキハ,弦 AC ハ A′C′ ヨリモ大ナリ。

證明 學生自ラ之ヲ證明セヨ。

系 本定理ノ逆モ亦眞ナリ。

定理 三十. 圓ノ中心ヨリ弦ニ引ケル垂線ハ其ノ弦ヲ二等分ス。

證明 學生自ラ之ヲ證明セヨ。

系 1. 弦ノ中點ト圓ノ中心トヲ結ブ直線ハ其ノ弦ニ垂直ナリ。

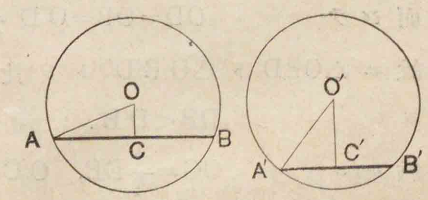
系 2. 弦ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ圓ノ中心ヲ過ル。

系 3. 圓ノ中心ト弦ノ中點トヲ過ル直線ハ其ノ弦ニ對スル共軛弧ノ各ヲ二等分ス。

定理 三十一. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,

(1) 相等シキ弦ハ中心ヨリ等距離ニアリ。

(2) 相等シカラザル弦ノ中,大ナル弦ハ小ナル弦ヨリモ中心ニ近シ。



特述 AB, A′B′ ヲ相等シキ圓(又ハ同ジ圓)ノ二ツノ弦トシ,中心 O,

O' ヨリ之ニ引キタル垂線ヲ夫々 OC, $O'C'$ トス。

然ルトキハ,

(1) $AB=A'B'$ ナラバ $OC=O'C'$,

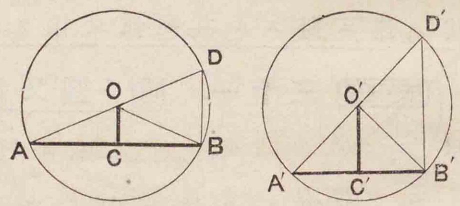
(2) $AB>A'B'$ ナラバ $OC<O'C'$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 $AB=A'B'$ ナルトキハ $AC=A'C'$.(定理三十)

故ニ　$\triangle OAC\equiv\triangle O'A'C'$. 從ツテ $OC=O'C'$.

次ニ $AB>A'B'$ ナルトキハ半徑 AO, $A'O'$ ノ延長ガ圓周ト交ル點ヲ夫々 D, D' トシ, DB, $D'B'$, OB, $O'B'$ ヲ引キ, $\triangle OAB$ ト $\triangle O'A'B'$ トヲ比較スルニ,



$$OA=OB=O'A'=O'B',\ 而シテ\ AB>A'B',$$

故ニ　$\angle AOB>\angle A'O'B'$.

從ツテ　$\angle DOB<\angle D'O'B'$.

而シテ　$OD=OB=O'D'=O'B'$.

故ニ $\triangle OBD$ ト $\triangle O'B'D'$ トヲ比較スルコトニ依リヲ

$$DB<D'B'.$$

然ルニ　$OC=\frac{1}{2}DB$, $O'C'=\frac{1}{2}D'B'$.

依ツテ　$OC<O'C'$.

系 此ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ。

例題

1. 圓ノ中心以外ノ點ニ於テ相交ルニツノ弦ハ互ニ他ヲ二等分スルコトナシ。

2. 二ツノ平行ナル弦ハ圓周ヨリ相等シキ弧ヲ截リ取ル。

3. 圓內ノ一定點ヲ過ル弦ノ中ニテ最小ナルモノハ,其ノ點ヲ過ル直徑ニ垂直ニシテ,且之ニヨリテ二等分セラル。

4. 一ツノ圓ニ於ケル相等シキ長サノ弦ハスベテ他ノ一ツノ圓ニ切ス。

定義 同一ノ中心ヲ共有スル圓ヲ同心圓トイフ。

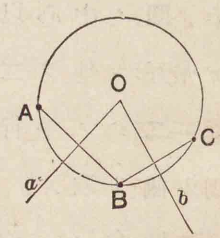
5. 二ツノ同心圓ニ於テ,小ナル圓ニ切スル大ナル圓ノ弦ノ長サハ一定ナリ。

29. 三點ヲ過ル圓

定理 三十二. 同一直線上ニアラザル任

意ノ三點ヲ過ル圓周ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

特述　A, B, C ヲ一直線上ニアラザル三點トス。然ルトキハ此ノ三點ヲ過ル圓周ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證明セントス。



證明　若シ此ノ三點ヲ過ル圓周アリトセバ,定理三十系2ニヨリ其ノ中心ハ弦ABヲ垂直ニ二等分スル直線 a ノ上ニアルベシ。

同理ニヨリ,其ノ中心ハマタ弦BCヲ垂直ニ二等分スル直線 b ノ上ニモアルベシ。故ニ其ノ中心ハ a ト b トノ交點ナラザル可カラズ。

然ルニ假定ニヨリ AB ト BC トハ一直線ヲナサヾルガ故ニ,ソノ各ニ垂直ナル a ト b トハ平行ナラズ。故ニ a ト b トノ交點ハ實際ニ存在ス,コレヲOトスレバ

$$OA=OB=OC$$

ナリ。(第17節例題7)

故ニOヲ中心トシ, OA (又ハ OB, 又ハ OC) ヲ半徑トスル圓周ヲ考フレバ,コレ卽チ三點 A, B, C ヲ過ル圓周ナリ。

上ノ推理ニヨリテ明カナル如ク,求ムル圓周ノ中心Oハ a ト b トノ交點ナラザル可カラザルガ故ニ唯一ツニ限リ,從ツテソノ半徑ノ長サモ唯一通リニ限ラル。故ニ三點 A, B, C ヲ過ル圓周ハ唯一ツニ限ル。

注意　此ノ定理ヲ換言シテ「同一直線上ニアラザル三點ハ一ツノ圓周ヲ決定ス」トモイフ。

例　題

1. 一點ヨリ圓周上ノ二ツヨリ多クノ點マデノ距離ガ相等シケレバ,其ノ點ハソノ圓ノ中心ナリ。
2. 同一直線上ニアル三點ヲ過ル圓周ハ存在セズ。

第三章　二ツノ圓

30. 二ツノ圓ノ共有點

前節ノ定理三十二ヨリ直チニ次ノ事ヲ推知スルコトヲ得。

二ツノ圓*ハ全ク相合スルニアラザレバ二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトナシ。

定義　二ツノ圓ノ中心ヲ兩方共過ル直線ヲ兩圓ノ**中心線**トイフ。

一ツノ圓ハソノ中心ヲ過ル任意ノ直線ニ關シテ對稱ナルガ故ニ,次ノ定理アリ。

定理 **三十三.** 二ツノ圓ハソノ中心線ニ關シテ對稱ナリ。

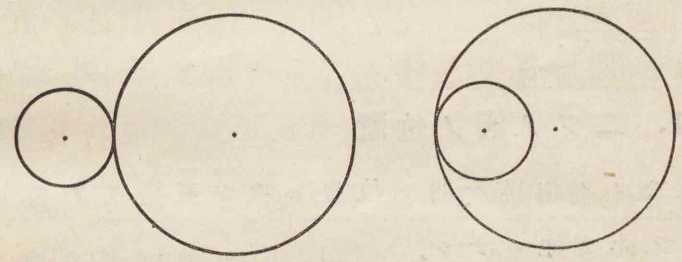
系 1. 二ツノ圓ガ中心線上ニアラザル一點ヲ共有スルトキハ,中心線ニ關シテ之ト對稱ナル他ノ一點ヲモ共有ス。

*本章ニ於テハ便宜上圓周ノコトヲモ單ニ圓ト稱ス。ナホ今後モ斯クノ如ク云フコトアリ。

系 2. 二ツノ圓ガ中心線上ニアル一點ヲ共有スルトキハ,其ノ他ニ共有點ナシ。

定義　二ツノ圓ガ二點ヲ共有スルトキハ二圓ハ**相交ル**トイヒ,唯一ツノ點ヲ共有スルトキハ**相切ス**トイフ。相切スル場合ニハ其ノ共有スル一點ヲ**切點**トイフ。

(甲)　(乙)



又二ツノ圓ガ相切スル場合ニ,ソノ切點ヲ除クノ他,各他ノ外部ニアルトキハ**外切ス**トイヒ(甲圖)一方ガ他方ノ內部ニアルトキハ**內切ス**トイフ(乙圖)。

例題

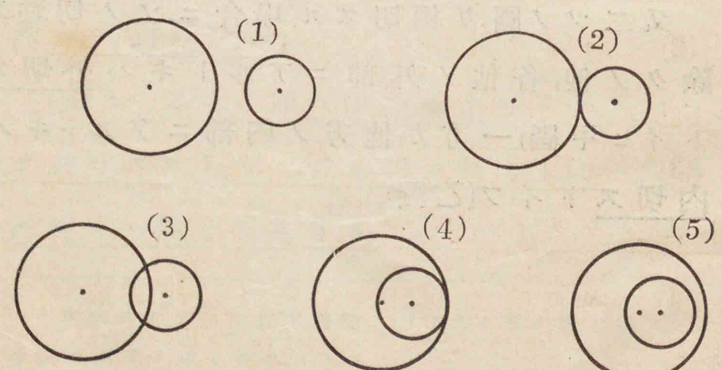
1. 二ツノ圓ガ相交ルトキハ,其ノ交點ハ中心線上ニアラズ。

2. 二ツノ圓ガ相切スルトキハ,其ノ切點ニ於テ共通ナル切線ヲ有ス。

3. 二ツノ相交ル圓ノ交點ヲ結ブ線分(之ヲ**共通弦**トイフ)ハ中心線ニヨリテ垂直ニ二等分セラル。

31. 二ツノ圓ノ位置

二ツノ相異ル圓ノ位置ハ次ノ五通リアリ,而シテ此ノ他ニナシ。



(1) 各他ノ外部ニアリ。(共有點ナシ)

(2) 外切ス。(共有點一ツアリ)

(3) 相交ル。(共有點二ツアリ)

(4) 內切ス。(共有點一ツアリ)

(5) 一ツガ他ノ內部ニアリ。(共有點ナシ)

注意 二圓ガ合同ナルトキニハ(4),(5)ハ成立セズ,其ノ代リニ(1),(2),(3)ノ他ニ二圓ガ相重リ合フトイフ一ツノ場合ヲ生ズ。故ニ合同ナル二ツノ圓ノ位置ハ四通リトナル。

定理 三十四. 二ツノ圓ノ中心ノ間ノ距離ハ,

(1) 兩圓ガ各他ノ外部ニアルトキハ,半徑ノ和ヨリモ大ナリ。

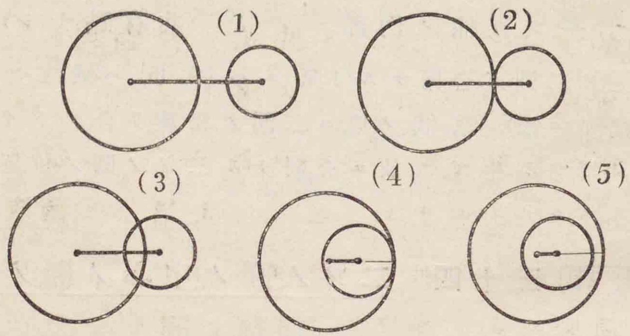
(2) 兩圓ガ外切スルトキハ,半徑ノ和ニ等シ。

(3) 兩圓ガ相交ルトキハ,半徑ノ和ヨリモ小ニシテ,差ヨリモ大ナリ。

(4) 兩圓ガ內切スルトキハ半徑ノ差ニ等シ。

(5) 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ内部ニアルトキハ半徑ノ差ヨリモ小ナリ。

[證明] 學生自ラ之ヲ證明セヨ。



[系] 此ノ定理ノ逆モ眞ナリ。

例題

二ツノ圓ガ各他ノ外部ニアルトキ,其ノ中心線ト兩圓トノ交點ヲ順次ニ A, B, C, D トスレバ,各圓周上ニ夫々一端ヲ有スル任意ノ線分ノ長サハ AD ヨリモ大ナラズ,又 BC ヨリモ小ナラズ。

第四章 作圖題

32. 作圖ノ公法

與ヘラレタル條件ニ適スル圖形ヲ畫ク幾何學的ノ方法ヲ求ムル問題ヲ**作圖題**トイヒ,之ヲ實際ニ畫クコトヲ**作圖**トイフ。

初等平面幾何學ニ於テ作圖ヲナスニ當リ使用スルコトヲ許サルヽ器具ハ**定規**及ビ**兩脚規**ニ限ル。而シテ前者ハ線分ヲ引クタメニ,後者ハ圓周又ハ弧ヲ畫クタメニノミ用フベキモノトス。

[注意] 斯クノ如ク制限ヲ附スル理由ハ作圖題ナルモノガ單ニ製圖スルコトノミヲ目的トセズシテ,寧ロソノ作圖法ヲ案出スルタメニ思考力ヲ練磨スルコトヲ主眼トスルガ故ナリ。

次ノ二ツノコトハ定規及ビ兩脚規ヲ用ヒテ爲シ得ルモノト承認ス。之ヲ作圖ノ**公法**又ハ**規矩**トイフ。

(1) 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル任意ノ長サノ線分ヲ引クコト。

(2) 與ヘラレタル點ヲ中心トシ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ畫クコト。

例題

1. 與ヘラレタル線分ヲ他ノ與ヘラレタル線分ダケ延長セヨ。
2. 與ヘラレタル線分ノ一端ヲ中心トシテ其ノ二倍ノ長サヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケ。
3. 與ヘラレタル線分ヲ一邊トスル正三角形ヲ作レ。
4. 與ヘラレタル三角形ト合同ナル三角形ヲ作レ。

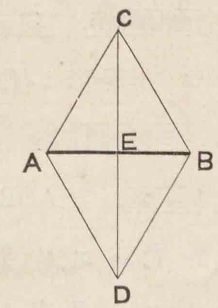
33. 基本的作圖題

[作圖題] 1. 與ヘラレタル線分ヲ二等分セヨ。

[特述] 與ヘラレタル線分ヲ ABトス。今之ヲ二等分スルコトヲ求ム。

[作圖] ABノ兩側ニ之ヲ一邊トスル正三角形

ABC 及ビ ABD ヲ作リ(前節ノ例題 3), CトDトヲ結ブ線分ヲ引キ之ト AB トノ交點ヲ E トセヨ。E ハ卽チ求ムル二等分點ナリ。



[證明] 第17節例題 3 ヲ見ヨ。

[吟味]* 二ツノ正三角形 ABC 及ビ ABD ハ常ニ作圖シ得。又線分 CD ト AB トハ必ズ相交ル。故ニ E ハ常ニ唯一ツ決定セラル。

[注意] CD ハ AB ヲ單ニ二等分スルノミナラズ,之ト垂直ニ交ルモノナリ。

[應用] 1. 與ヘラレタル線分ヲ直徑トスル圓ヲ畫ケ。

[應用] 2. 與ヘラレタル弧ヲ二等分セヨ。

[應用] 3. 與ヘラレタル三點ヲ過ル圓ヲ畫ケ。(定理三十二)

[應用] 4. 與ヘラレタル圓(又ハ弧)ノ中心ヲ求メヨ。

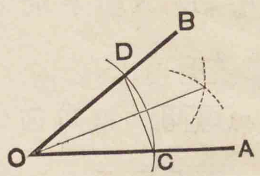
---

* 作圖ノ可能,不可能及ビ可能ナル場合ニ得ル圖形ノ個數等ヲ調ブルコトヲ作圖題ノ**吟味**トイフ。

應用 5. 與ヘラレタル二ツノ線分ヲ對角線トスル菱形ヲ作レ。

作圖題 2. 與ヘラレタル角ヲ二等分セヨ。

特述 ∠AOB ヲ與ヘラレタル角トス。今之ヲ二等分スルコトヲ求ム。



作圖 頂點Oヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ,邊 OA, OB ト交ル點ヲ夫々 C, D トシ, C ト D トヲ結ビ付ケヨ。線分 CD ノ垂直二等分線ヲ作レバ(作圖題1),コレ即チ ∠AOB ノ二等分線ナリ。

證明 (學生自ラ之ヲ試ミヨ)。

注意 線分 CD ノ垂直二等分線ヲ作ルニハ作圖題1ノ方法ヲ繰リ返ス代リニ, C 及ビ D ヲ夫々中心トスル相等シキ (CD ノ半分ヨリ大ナル)半徑ノ圓ヲ畫キ,其ノ一ツノ交點トOトヲ結ベバヨシ。

應用 1. 與ヘラレタル角ヲ四等分,八等分(一般ニ 2^n 等分)セヨ。

應用 2. 與ヘラレタル三角形ノ內心及ビ傍心ヲ求メヨ。

應用 3. 與ヘラレタル直線上ノ一點ヲ過リ之ニ垂線ヲ引ケ。(平角ヲ二等分セヨ)。

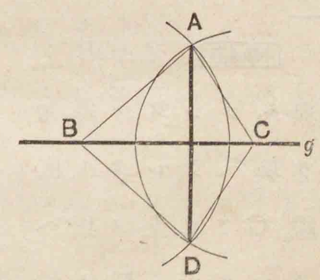
應用 4. 與ヘラレタル線分ヲ一邊トスル正方形ヲ形レ。

應用 5. 60°, 30°, 15°, 7° 30′ 及ビ 90°, 45°, 22° 30′ 等ノ角ヲ作レ。

應用 6. 直角ヲ三等分セヨ。

作圖題 3. 與ヘラレタル直線外ノ一點ヨリ之ニ垂線ヲ引ケ。

特述 g ヲ與ヘラレタル直線, A ヲソノ上ニアラザル一點トス。今 A ヨリ g ニ垂線ヲ引クコトヲ求ム。



作圖 g 上ニ任意ノ二點 B 及ビ C ヲトリ,コレヲ夫々中心トシテ A ヲ過ル二ツノ圓ヲ畫キ,其ノ兩圓ノ A 以外ノ交點ヲ D トセヨ。A ト D トヲ結ベバ,コレ即チ求ムル垂線ナリ。

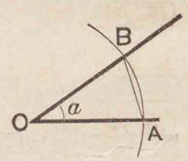
證明 (學生自ラ之ヲ試ミヨ)。

別法 1. g上ニ任意ノ一點Bヲトリ,線分ABヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,之トgトノ交點ヲAト結ベバ求ムル垂線ヲ得。(第25節例題2)

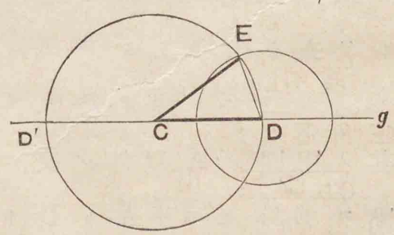
別法 2. Aヲ中心トシg上ノ一點ヲ過ル圓ヲ畫キ,モシgガ此ノ圓ニ切スルナラバ,ソノ切點トAトヲ結ブベク,モシgガ此ノ圓ト二點B, Cニ於テ相交ルナラバ,線分BCノ垂直二等分線ヲ作ルベシ。之ニ依ツテ求ムル垂線ヲ得。(定理三十系2)

應用 與ヘラレタル點ヲ中心トシ,與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

作圖題 4. 與ヘラレタル直線上ノ一點ヲ過リ,之ト與ヘラレタル角ヲナス直線ヲ引ケ。



特述 ∠AOBヲ與ヘラレタル角,gヲ與ヘラレタル直線,Cヲg上ノ與ヘラレタル一點トス。今Cヲ過リ,gト∠AOBニ等シキ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求ム。



作圖 Oヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ,邊OA, OBトノ交點ヲ夫々A, Bトス。Cヲ中心トシ前ト同ジ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ,gト交ル一ツノ點ヲDトス。Dヲ中心トシ線分ABニ等シキ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ,圓Cトノ交點ノ一ツヲEトシ,CトEトヲ過ル直線ヲ引ケバコレ卽チ求ムル所ノモノナリ。

證明 CE＝CD＝OA＝OB.　　ED＝AB.

故ニ　　$\triangle CDE \equiv \triangle OAB$.

從ツテ　　$\angle DCE = \angle AOB$.

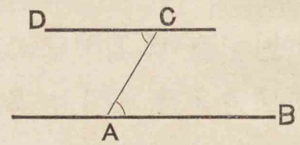
吟味 一般ニ斯クノ如キ直線ハ幾ツ引キ得ルカ。學生自ラ之ヲ考ヘヨ。

應用 1. 與ヘラレタル二角ノ和及ビ差ニ等シキ角ヲ作レ。

應用 2. 二邊ト其ノ夾角トガ與ヘラレタルトキ,三角形ヲ作レ。

應用 3. 二角ト一邊トガ與ヘラレタルトキ,三角形ヲ作レ。

作圖題 5. 與ヘラレタル直線外ノ一點ヲ過リ之ニ平行ナル直線ヲ引ケ。



特述 AB ヲ與ヘラレタル直線,C ヲソノ上ニアラザル與ヘラレタル一點トス。今 C ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ヲ引クコトヲ求ム。

作圖 直線 AB 上ニ任意ノ一點 A ヲトリ,C ト A トヲ結ビ,∠BAC ト相等シキ錯角 ∠ACD ヲ作ル様ニ直線 CD ヲ引ケ。CD ハ卽チ求ムル直線ナリ。

證明 定理六ニヨル。

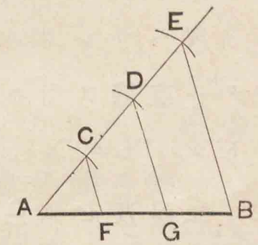
別法. 定理二十四系 2 ヲ應用スレバ本作圖題ノ別法ヲ得。(學生自ラ之ヲ試ミヨ)。

應用 與ヘラレタル點ヲ過リ,與ヘラレタル直線ト與ヘラレタル角ヲナス直線ヲ引ケ。

作圖題 **6.** 與ヘラレタル線分ヲ若干等分セヨ。

特述 AB ヲ與ヘラレタル線分トス。今之ヲ三等分スルコトヲ求ム,(幾等分トスルモ同理ナリ)。

作圖 A ヲ過リ, AB ト合セザル任意ノ直線ヲ引キ, A ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ其ノ直線トノ交點ヲ C トシ,次ニ C ヲ中心トシ同ジ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ同ジ直線トノ交點ヲ D トシ,更ニ今一度 D ヲ中心トシテ同樣ノ作圖ヲナシ交點 E ヲ求メヨ。E ト B トヲ結ビ, C 及ビ D ヲ過リテ EB ニ平行ニ CF, DG ヲ引キ, AB トノ交點ヲ夫々 F, G トスレバ,コノ二點ハ卽チ線分 AB ヲ三等分スルモノナリ。



證明 定理二十四ニヨル。

例題

1. 一對角線ヲ與ヘテ正方形ヲ作レ。
2. 二角ト周トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。
3. 三角形 ABC ノ一邊 BC ニ平行ニシテ AB, AC ト夫々 M, N ニ於テ相交ル直線ヲ引キ, MN ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。
4. 同上ノ作圖ニ於テ MN ヲシテ BM ト CN トノ和ニ等シカラシメヨ。

5. 二ツノ對角線及ビ一邊ヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

6. 與ヘラレタル角LMN內ノ一定點Pヲ過リテ一直線ヲ引キML, MNトノ交點ヲ夫々L, NトシPL=PNナラシメヨ。

7. 二邊及ビ第三邊ヘノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

8. 二點A, Bガ直線XYノ同ジ側ニアルトキ, XY上ニ一點Pヲトリ∠APX=∠BPYナラシメヨ。又A, BガXYノ兩側ニ一ツヅツアルトキ, XY上ニ一點Pヲトリ∠APX=∠BPXナラシメヨ。

9. 一直線ABノ同側ニ二定點P, Qアリ。AB上ニ一點Rヲ取リPR+RQヲ最小ナラシムル樣ニセヨ。

10. 與ヘラレタル點Pヲ過リ,與ヘラレタル平行線AB, CDノ間ニアル部分ガ與ヘラレタル長サヲ有スル如キ直線ヲ引ケ。

第五章　圓ト角及ビ切線

34. 中心角

定義　圓ノ二ツノ半徑ノナス角ヲ**中心角**トイフ。中心角ハ其ノ二邊ノ間ニ夾マレタル**弧(或ハ其ノ兩端ヲ結ブ弦)ノ上ニ立ツ**トイヒ,**弧(或ハ弦)ハ其ノ中心角ニ對ス**トイフ。

第26節ノ例題1,3ヲ換言スレバ直チニ次ノ定理ヲ得ベシ。

定理 **三十五.** 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ

(1) 二ツノ中心角ガ相等シキトキハ,之ニ對スル弧モ相等シ。

(2) 二ツノ中心角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル中心角ニ對スル弧ガ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリモ大ナリ。

系　此ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ。

コヽニ於テ更ニ定理二十九及ビ其ノ系ヲ參酌スレバ次ノ定理ヲ得。

定理 三十六. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ

(1) 二ツノ中心角ガ相等シキトキハ,之ニ對スル弦モ相等シ。

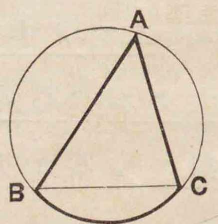
(2) 二ツノ中心角ガ共ニ劣角ニシテ相等シカラザルトキハ大ナル中心角ニ對スル弦ガ小ナル中心角ニ對スル弦ヨリモ大ナリ。

系 此ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ。

例題

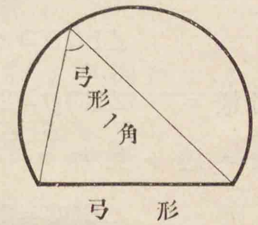
定理三十六ニ於テ二ツノ中心角ガ共ニ優角ナル場合ハ如何。

35. 圓周角



定義 圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ弦ノナス劣角ヲ**圓周角**トイフ。圓周

角ハ其ノ二邊ノ間ニ夾マレタル**弧(或ハ其ノ兩端ヲ結ブ弦)ノ上ニ立ツ**トイヒ,**弧(或ハ弦)ハ其ノ圓周角ニ對ス**トイフ。

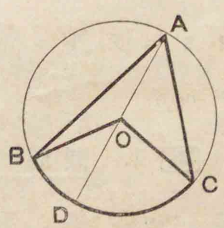


一ツノ弦ニヨリテ分タレタル圓ノ一部分ヲ**弓形**トイフ。

弓形ニ屬スル弧ノ上ノ一點トソノ弦ノ兩端トヲ夫々結ブ二ツノ弦ノナス圓周角ヲソノ**弓形ノ含ム角**又ハ單ニ**弓形ノ角**トイフ。

定理 三十七. 一ツノ圓ニ於テ圓周角ハ之ニ對スル弧(或ハ弦)ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ。

(甲)



特述 圓Oニ於テ $\angle BAC$ ヲ一ツノ圓周角トスルトキハ,

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 Aヲ過ル直徑ADヲ引

キ,先ヅDガ$\angle BAC$ニ對スル弧BCノ上ニ落チタリトセヨ(甲圖ノ場合)。然ルトキハ$\triangle AOB$ハ二等邊三角形ナルヲ以テ

$$\angle BOD=2\angle BAO.$$

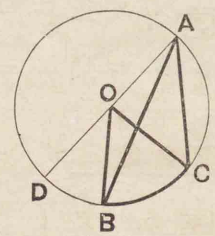
同樣ニ $$\angle COD=2\angle CAO.$$

故ニ邊々相加フレバ

$$\angle BOC=2\angle BAC.$$

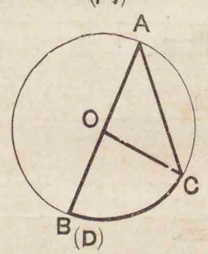
故ニ $$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

(乙)



モシDガ$\angle BAC$ニ對スル弧BCノ共軛弧ノ上ニ落チタリトスレバ(乙圖ノ場合),上ノ二式ヲ相加ヘタル代リニ一方ヨリ他方ヲ減ズレバヨシ。

(丙)



モシ又DガB又ハCト相合スルトキハ(丙圖ノ場合),上ノ二式ノ何レカ一方ノミニテ既ニ證明スベキ結果ヲ與フルコトヽナル。

系 1. 圓周角ニツイテモ定理三十五,三十六及ビソノ各ノ系ト同樣ノコトガ成立ス。

系 2. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハスベテ相等シ。

系 3. 同ジ弓形ノ角ハ相等シ。

系 4. 弓形ノ角ハ,ソノ弓形ガ半圓ヨリ小ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ大ナルカニ從ツテ,鈍角,或ハ直角,或ハ鋭角ナリ。

系 5. 系4ノ逆モ眞ナリ。

系 6. 弓形ノ弦又ハソノ延長ニ關シテソノ弓形ト同側ニ在ル點ガ弓形ノ内或ハ外ニ在ルニ從ツテ,コノ點ト弦ノ兩端トヲ結ビテ得ル角ハ弓形ノ含ム角ヨリ大或ハ小ナリ。

系 7. 系6ノ逆モ眞ナリ。

例題

1. 一ツノ圓ノ二弦AB, CDガ圓内ノ一點Eニ於テ相交ルトキハ,角AECハ弧AC及ビBDノ上ニ立ツ中心角ノ和ノ半分ニ等シ。

2. 一ツノ圓ノ二弦AB, CDガ圓外ノ一點E

ニ於テ相交ルトキハ,角 AEC ハ弧 AC 及ビ BD ノ上ニ立ツ中心角ノ差ノ半分ニ等シ。

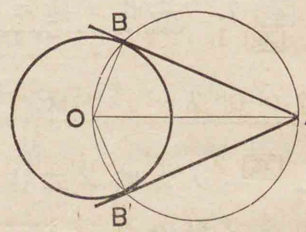
3. 三角形ノ二邊ヲ夫々直徑トスル二圓周ハ第三邊又ハ其ノ延長ノ上ニ於テ出會フ。

4. 一ツノ圓ニ於テ同一ノ弧ノ上ニ立ツスベテノ圓周角ノ二等分線ハ一定點ヲ過ル。

5. 一ツノ圓ニ於テ二ツノ相等シキ弧ヲ AB, CD トスレバ,弦 AC, BD ハ平行ナルカ,或ハ相等シ。

36. 切線

定理 三十八. 圓外ノ一點ヲ過リ其ノ圓ニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯二ツニ限ル。



特述 圓 O ノ外部ニアル一點ヲ A トス。然ルトキハ A ヲ過リ,圓 O ニ切スル直線ハ二ツアリ,而シテ唯二ツニ限ルコトヲ證明セントス。

證明 今 A ヲ過ル切線アリトシ,其ノ一ツヲトリテ切點ヲ B トセヨ。然ルトキハ ∠OBA ハ直角ナリ(定理二十八系)。故ニ B ハ OA ヲ直徑トスル圓周上ニアリ(定理三十七系5)。之ニ依ツテ見レバ, A ヲ過リ圓 O ニ引キタル切線ノ切點ハ OA ヲ直徑トスル圓ト圓 O トノ交點ナラザル可カラズ。サテ點 O ハ圓 O ノ内部ニアリ,點 A ハ外部ニアルヲ以テ, OA ヲ直徑トスル圓ハ圓 O ト二點ニ於テ相交ル。從ツテソノ各交點ヲ夫々 A ト結ベバ二ツノ切線ヲ得。

切點タリ得ベキ點ハ上記ノ兩圓ノ交點ニ限リ,而シテ兩圓ノ交點ハ唯二ツニ限ルヲ以テ,結局 A ヲ過ル切線モ唯二ツニ限ル。

系 1. 圓外ノ一點ヨリソノ圓ニ引キタル切線ノ切點マデノ長サハ相等シ。

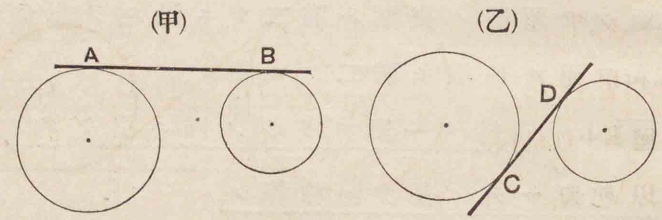
系 2. 圓ノ中心ト圓外ノ一點トヲ過ル直線ハソノ點ヨリ引キタル二ツノ切線ノナス角ヲ二等分シ,二ツノ切點ヲ結ブ弦ヲ垂直ニ二等分ス。

作圖題 與ヘラレタル圓外ノ一點ヨリソノ圓ニ切線ヲ引ケ。

定理三十八ノ證明中ニ之ヲ解セリ。

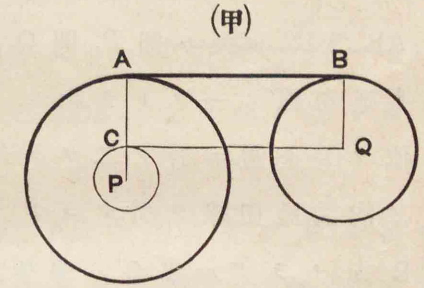
定義 二ツノ圓ニ共通ナル切線ヲソノ**共通切線**トイフ。二ツノ圓ガソノ共通切線ノ同側ニアルトキハソノ共通切線ヲ**外共通切線**トイヒ,二ツノ圓ガソノ共通切線ノ反對ノ側ニ一ツヅツアルトキハ**内共通切線**ト云フ。

例ヘバ甲圖ノ直線 AB ハ外共通切線ニシテ,乙圖ノ直線 CD ハ内共通切線ナリ。



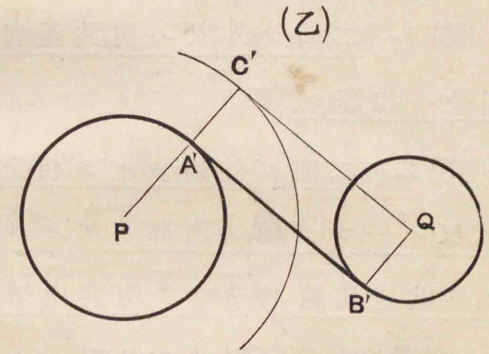
定理 三十九. 二ツノ圓ノ各ガ全ク他ノ外ニアルトキハ,此ノ二圓ニ二ツノ外共通切線ト二ツノ内共通切線トヲ引クコトヲ得。

特述 二ツノ圓ノ中心ヲ夫々 P, Q トシ,コノ二圓ガ各全ク他ノ圓ノ外ニアルトキハ,二ツノ外共通切線ト二ツノ内共通切線トヲ引キ得ルコトヲ證明セントス。



證明 圓 P 及ビ圓 Q ノ半徑ヲ夫々 R, r トシ,今 $R>r$ トス。

二圓ハ各全ク他ノ外ニアルヲ以テ $PQ>R+r$ ナリ。



故ニ P ヲ中心トシ,半徑 $R-r$(甲圖)及ビ半徑 $R+r$(乙圖)ヲ以テ夫々圓ヲ畫ケバ,點 Q ハ此等ノ圓ノ外ニアリ。

依ツテ(前定理ニヨリ)Q ヨリ此等ノ二圓ニ夫夫二ツヅツノ切線ヲ引クコトヲ得。

今二ツノ切線ノ中ノ一ツヲ甲圖ニ於テハ QC,

乙圖ニ於テハ QC′ トス。PC, PC′ ト圓Pノ周トノ交リヲ夫々 A, A′ トシ, Q ヨリ CA, C′A′ ニ平行ニ夫々 QB, QB′ ヲ引キ圓Qノ周トノ交リヲ夫夫 B, B′ トスレバ, ACQB, A′C′QB′ ハ矩形ナリ。故ニ AB, A′B′ ハ夫々圓P, 圓Qノ外共通切線及ビ內共通切線ノ一ツトナル。

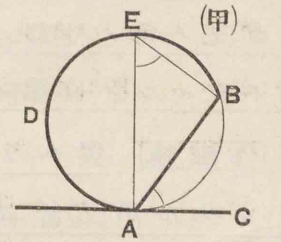
依ツテ全體ニ於テ二ツノ外共通切線及ビ二ツノ內共通切線ヲ引クコトヲ得。

$R>r$ ナラザル場合ハ學生自ラ研究セヨ。

系 1. 二圓ノ外(又ハ內)共通切線ノ切點間ノ部分ハ相等シ。

系 2. 二圓ガ外切スルカ,相交ルカ,內切スルカ,又ハ一ツガ他ノ內部ニアルカニ從ツテ二ツノ外共通切線ト一ツノ內共通切線ヲ有スルカ, 二ツノ外共通切線ノミヲ有スルカ, 一ツノ外共通切線ノミヲ有スルカ又ハ共通切線ヲ有セズ。

定理 四十. 弦ノ一端ニ於ケル切線トソノ弦トノ夾ム角ハ,ソノ角ノ外部ニアル弓形ノ含ム角ニ等シ。

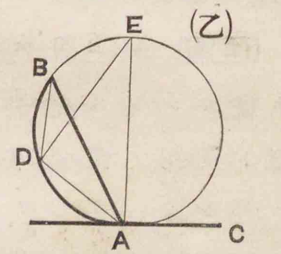


特述 圓 ABD ニ於ケル一ツノ弦ヲ AB トシ,ソノ一端 A ニ於ケル切線ヲ AC トス。

然ルトキハ ∠CAB ハソノ內部ニアラザル弓形 ADB ノ含ム角ニ等シキコトヲ證明セントス。

證明 A ヨリ直徑 AE ヲ引キ,先ヅ E ガ弓形 ADB ノ弧上ニアリトセヨ(甲圖ノ場合)。然ルトキハ EB ヲ結ベバ ∠ABE ハ直角ナルヲ以テ

∠AEB+∠EAB=直角.



又∠EAC モ直角ナルヲ以テ

∠CAB+∠EAB=直角.

故ニ ∠AEB=∠CAB.

而シテ ∠AEB ハ卽チ弓形 ADB ノ含ム角ナリ。

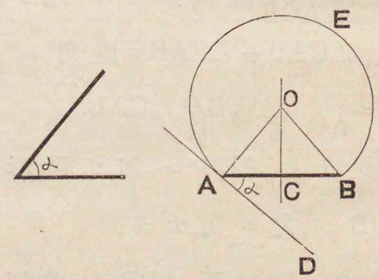
次ニ E ガ弧 ADB ノ共軛弧ノ上ニアリトセヨ(乙圖ノ場合)。弧 ADB 上ノ任意ノ一點 D ヨリ DA, DE, DB ヲ結ビ,學生自ラ證明セヨ。

系 弦ノ一端ヲ過ル直線ト其ノ弦トノナス角ガソノ角ノ外部ニアル弓形ノ含ム角ニ等シキトキハ,ソノ直線ハ切線ナリ。

作圖題 與ヘラレタル線分ヲ弦トシ,與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ作レ。

解析* 與ヘラレタル線分 AB ノ一定ノ側ニ與ヘラレタル角 α ヲ含ム弓形ノ弧 AEB ガ畫カレタリトス。弓形ノ弧ノ中心 O ハ AB ノ垂直二等分線上ニアリ。又點 A ニ於テ圓 AEB ニ切線 AD ヲ引クトキハ, AB ニ關シテ弓形ト反對ノ側ニアル角 BAD ハ $\angle\alpha$ ニ等シ(定理四十)。而シテ OA ハ AD ニ垂直ナリ。依ツテ次ノ作圖ヲ得。

作圖 AB ニ關シテ畫カントスル弓形ト反對ノ側ニ $\angle\alpha$ ニ等シク $\angle BAD$ ヲ作レ。A ニ於テ AD ニ垂直ナル直線ト,



*求ムル圖形ガ出來タルモノトシテ其ノ性質ヲ調べ,作圖法ヲ案出スルコトヲ**解析**ト云フ。

AB ノ垂直二等分線トノ交點ヲ O トス。O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓ヲ畫クトキ, AB ニ關シテ D ト反對ノ側ニアル弓形ハ求ムルモノナリ。

證明 學生自ラ之ヲ試ミヨ。

注意 $\angle\alpha$ ガ直角ナルトキハ,求ムル弓形ハ AB ヲ直徑トスル半圓ナリ。

應用 底邊,頂角,高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

例題

1. 圓 O ノ二ツノ平行ナル切線ガ同ジ圓ノ他ノ一ツノ切線ト交ル點ヲ A, B トスレバ, $\angle AOB$ ハ直角ナリ。

2. 圓周上ノ一點 A ヨリ引ケル二ツノ弦ヲ AB, AC トシ, B ヲ過リテ A ニ於ケル切線ニ平行ナル直線ヲ引キ AC (又ハ其ノ延長)ト D ニ於テ交ラシム。三點 B, C, D ヲ過ル圓ハ AB ニ切ス。

3. 弧 AB ノ中點 C ヲ過ル直線ガ弦 AB ト交ル點ヲ D トシ,弧 AB ノ共軛弧ト交ル點ヲ E トス

直線 AC ハ三點 A, D, E ヲ過ル圓ニ切ス。

4. 與ヘラレタル圓ヨリ與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ截リ取レ。

5. 與ヘラレタル二點 A, B 及ビ與ヘラレタル直線 l アリ。l 上ニ一點 P ヲ求メ ∠APB ヲ與ヘラレタル角 α ニ等シカラシメヨ。

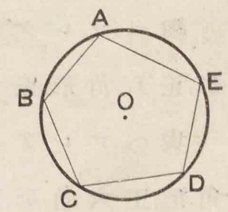
6. 二ツノ圓ノ一双ノ內(又ハ外)共通切線ノ交點ハ其ノ中心線上ニアリ。

第六章 圓ト多角形

37. 內接, 外接

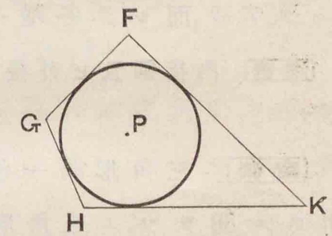
定義 一ツノ多角形ノ頂點ガ皆同一ノ圓周上ニアルトキハ,コノ多角形ハソノ圓ニ內接ストイヒ,圓ハコノ多角形ニ外接ストイフ。

一ツノ多角形ノ邊ガ皆同一ノ圓ニ切スルトキハ,コノ多角形ハ其ノ圓ニ外接ストイヒ,圓ハコノ多角形ニ內接ストイフ。



外接又ハ內接スル圓ノコトヲ夫々外接圓又ハ內接圓トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ ABCDE ハ圓 O ニ內接スル五角形, FGHK ハ圓 P ニ外接スル四角形ニシテ,圓 O ハ前者ノ外接圓,圓 P ハ後者ノ內接圓ナリ。



例題

1. 正多角形ニハ內接圓及ビ外接圓ヲ畫クコトヲ得。

2. 圓周ヲ n 等分シ,ソノ分點ヲ順次ニ結ブトキハ,ソノ圓ニ內接スル正 n 角形ヲ得。又各分點ニ於テ切線ヲ引クトキハ,ソノ圓ニ外接スル正 n 角形ヲ得。

3. 同シ圓ニ內接(又ハ外接)スル二ツノ正 n 角形ハ合同ナリ。

4. 與ヘラレタル圓ニ內接又ハ外接スル正方形,正八角形,正十六角形等ヲ作レ。

5. 與ヘラレタル圓ニ內接又ハ外接スル正三角形,正六角形,正十二角形ヲ作レ。

6. 任意ノ三角形ニハ內接圓及ビ外接圓各一ツアリ,而シテ各唯一ツニ限ル。

注意 內接圓及ビ外接圓ノ中心ハ夫々內心及ビ外心ナリ。

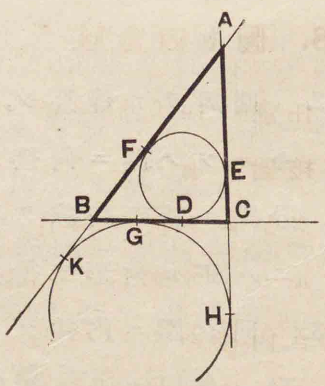
定義 三角形ノ一邊及ビ他ノ二邊ノ延長ニ切スル圓ヲソノ三角形ノ**傍接圓**トイフ。

7. 一ツノ三角形ハ三ツノ傍接圓ヲ有ス。

(17節例題10參照)

注意 傍接圓ノ中心ハ傍心ナリ。

8. △ABC ノ內接圓ガ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トシ,同ジ三角形ノ邊 BC ニ切スル傍接圓ガ邊 BC 及ビ邊 AC, AB ノ延長ニ切スル點ヲ夫々 G, H, K トス。



今 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,

$$\frac{a+b+c}{2}=s \quad \text{トスルトキハ,}$$

$AK=AH=s$, $FK=EH=a$,

$AF=AE=s-a$, $BG=BK=s-c$,

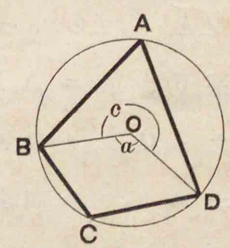
$BD=BF=s-b$, $CH=CG=s-b$,

$CE=CD=s-c$, $GD=b\sim c$.

9. 與ヘラレタル圓ニ內接スル三角形ヲ畫キ,ソノ三ツノ角ヲシテ他ノ與ヘラレタル三角形ノ三ツノ角ニ夫々等シカラシメヨ。

10. 與ヘラレタル圓ニ外接シ且與ヘラレタル三角形ト等シキ角ヲ有スル三角形ヲ作レ。

38. 圓ト四角形



任意ノ四角形ハ必ズシモ外接圓ヲ有セズ,之ヲ有シ得ルタメニハ或ル條件ヲ具備スルコトヲ要ス。今 ABCD ヲ圓ニ內接スル四角形トシ,弧 BCD 及ビ BAD ノ上ニ立ツ中心角ヲ夫々 a 及ビ c トスレバ,

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle a,\quad \angle C=\frac{1}{2}\angle c.\quad (\text{定理三十七})$$

故ニ　$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle a+\angle c)=2$ 直角.

卽チ $\angle A$ ト $\angle C$ トハ補角ヲナシ,從ツテ $\angle B$ ト $\angle D$ トモ補角ヲナスコトヲ知ル。コレ卽チ四角形ガ圓ニ內接シ得ルタメニ必ズ具フベキ條件ナリ。

逆ニ,四角形 ABCD ニ於テソノ一双ノ相對スル角AトCトガ補角ヲナストキハ,ソノ四角形ハ圓ニ內接スルコトヲ得ベシ。何トナレバ三ツノ頂點 A, B, D ヲ過ル圓周ヲ考フルニ,殘リノ頂點 C ハ對角線 BD ノ A ト反對ノ側ニアルヲ以テ, C ガ弧 BAD ノ共軛弧ノ上ニアルトキニ限リテ $\angle A$ ト $\angle C$ トガ補角ヲナスベシ。(定理三十七系 6) 故ニ A, B, C, D ハ同一圓周上ニアリ。

之ニ依ツテ見ルニ,一双ノ相對スル角ガ補角ヲナストキハ四角形ハ確ニ圓ニ內接スベシ。

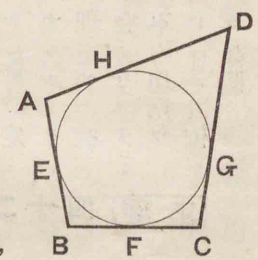
故ニ次ノ定理ヲ得。

定理 四十一. 四角形ガ圓ニ內接シ得ルタメノ條件ハ,一双ノ相對スル角ガ補角ヲナスコトナリ。

定義 四角形ノ外角ニ隣レル內角ト相對スル內角ヲソノ外角ノ**內對角**ト云フ。

系 圓ニ內接スル四角形ノ外角ハソノ內對角ニ等シ。

次ニ四角形 ABCD ガ圓ニ外接スル場合ヲ考フルニ,邊 AB, BC, CD, DA 上ノ切點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ



$$AE=AH,\quad CG=CF,$$
$$BE=BF,\quad DG=DH.$$

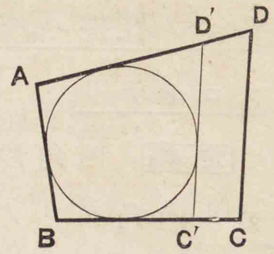
故ニ　$(AE+BE)+(CG+DG)$
$=(AH+DH)+(BF+CF),$

卽チ　$AB+CD=AD+BC.$　(1)

卽チ相對スル邊ノ和ガ相等シキコトヲ知ル。

逆ニ,四角形 ABCD ニ於テ (1) ノ關係ガ成立スルトキハソノ四角形ハ圓ニ外接シ得ベシ。何トナレバ先ヅ三邊 DA, AB, BC ニ切スル圓ヲ畫キ,モシ CD ガ之ニ切セザルナラバ,之ニ平行ナル

切線ヲ引キ,邊 AD, BC 又ハソノ延長トノ交點ヲ夫々 D', C' トス。然ルトキハ四角形 $ABC'D'$ ハ圓ニ外接スルヲ以テ



$$AB+C'D'=AD'+BC' \qquad (2)$$

ナル關係ガ成立ス。(1) ヨリ (2) ヲ邊々相減ズレバ

$$CD-C'D'=D'D+C'C,$$

卽チ $$CD=D'D+D'C'+C'C.$$

コレ不合理ナリ。(19節例題 3) 故ニ CD ハ同ジ圓ニ切セザル可カラズ。

依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 四十二. 四角形ガ圓ニ外接シ得ルタメノ條件ハ,相對スル邊ノ和ガ相等シキコトナリ。

例題

1. 平行四邊形ガ圓ニ內接スルトキハ矩形ニシテ,外接スルトキハ菱形ナリ.

2. 三角形ノ外接圓周上ノ一點ヨリ三邊ニ引ケル垂線ノ足ハ同一直線上ニ在リ。

之ヲしむそん (Simson) ノ定理ト云ヒ, 此ノ直線ヲ**シムソン線**ト云フ。

3. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキ,其ノ對角線ノ交點ヨリ一邊ニ引ケル垂線ノ延長ハ其ノ對邊ヲ二等分ス。

之ヲぶらーめぐぷた (Brahmegupta) ノ定理トイフ。

4. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ,其ノ足 D ヨリ邊 AB, AC ニ夫々垂線 DE, DF ヲ引クトキハ,四點 A, E, D, F 及ビ B, E, F, C ハ夫々一ツノ圓周上ニアリ。

5. 三ツノ定レル直線 a, b, c アリ。a, b ノ交點ヲ P; b, c ノ交點ヲ Q トス。P, Q ヲ過ル任意ノ圓ガ a, c ト交ル點ヲ夫々 A, C トスレバ,直線 AC ハ一定ノ方向ヲ有ス。

6. A, B ニテ相交ル二圓ノ中一ツノ圓周上ノ任意ノ點 P ヲ A, B ニ結ブ直線ト他ノ一ツノ圓トノ交點ヲ夫々 X, Y トスレバ, XY ハ第一ノ圓ノ P ヲ過ル直徑ト直交ス。

7.　圓ニ內接スル等邊多角形ハ正多角形ナリ。

8.　圓ニ內接スル等角多角形ハ,頂點ノ數ガ奇數ナラバ正多角形ナリ。偶數ナルトキハ必ズシモ然ラズ。

9.　圓ニ外接スル等角多角形ハ正多角形ナリ。

10.　圓ニ外接スル等邊多角形ハ邊ノ數ガ奇數ナラバ正多角形ナリ。偶數ナルトキハ必ズシモ然ラズ。

雜　題

1.　二等邊三角形ノ等邊ノ一ツヲ直徑トシテ畫ケル圓ハ底邊ノ中點ヲ過ル。

2.　相交ル二圓ノ交點A,Bノ各ヲ過ギリ夫々直線PQ,RSヲ引キ一圓周トP,R,他ノ圓周トQ,Sニ於テ交ラシムレバ,直線PR,QSハ平行ナリ。

3.　相切スル二圓ノ切點ヲ過リ二直線PQ,RSヲ引キ一圓周トP,R,他ノ圓周トQ,Sニ於テ交ラシムレバ,弦PR,QSハ平行ナリ。

4.　二圓ガ互ニ切スルトキ切點ヲ過ル直線ガ再ビ二圓周ト交ル二點ニ於ケル切線ハ互ニ平行ナリ。

5.　圓周上ノ一點Cニ於テソノ圓ニ切線ヲ引キ,直徑ABノ一端AヨリコノT切線ニ垂線ADヲ引クトキハ,ACハ角BADヲ二等分ス。

6.　圓ノ割線ト切線トガ相交ルトキハ其ノナス角ハ此等ノ二直線ノ間ニ夾マレタル二弧ノ差ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

7.　圓ノ二切線ノナス角ハ此ノ二切線ノ間ニ夾マレタル二弧ノ差ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

8.　內心ト外心トガ同一點ナル三角形ハ如何ナル三角形ナルカ。

9.　三角形ノ一頂點ガ內心及ビ外心ト共ニ一直線上ニアルトキハ,コノ三角形ハ二等邊ナリ。

10.　圓ニ內接スル四邊形ノ外角ノ二等分線ト其ノ內對角ノ二等分線トハ同ジ圓ノ周上ニ於テ出會フ。

11. 中心Oナル圓周上ノ一點Aヲ過ル總テノ弦ハOAヲ直徑トスル圓周ニヨリテ二等分セラル。

12. Aニ於テ內切スル二圓ノ內圓ニBニ於テ切スル外圓ノ弦ヲ引クトキハ,直線ABハ此ノ弦ニ對スル一ツノ弧ヲ二等分ス。

又二圓ガ外切シ一ツノ圓ノ弦ノ延長ガ他ノ圓ニ切スルトキハ如何。

13. Pニ於テ內切スル二圓ヲ一ツノ割線ニテ截リ,ソノ交點ヲ順次ニA, B, C, Dトスレバ

$\angle APB = \angle CPD$ ナリ。

又二圓ガ外切スルトキハ如何。

14. 二圓ガ相切(內切又ハ外切)スルトキ切點ヲ過ル任意ノ直線ハ二ツノ圓ヨリ相等シキ角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ル。

15. 一ツノ弦ニ對スル弧ノ中點ハ其ノ弦及ビ其ノ一端ニ於ケル切線ヨリ等距離ニ在リ。

16. 圓ニ內接スル三角形ノ一ツノ頂點ヨリ底邊ニ引ケル垂線ノ足ハ其ノ垂線ノ延長ガ圓周ト出會フ點ト垂心トヨリ等距離ニアリ。

17. 三角形ノ一ツノ頂點ヨリ垂心ニ至ル距離ハ外心ヨリ其ノ頂點ニ對スル邊ニ至ル距離ノ二倍ナリ。

18. 三角形ノ三頂點ト垂心トノ中任意ノ三點ヲ過ル圓ハ皆相等シ。

19. 正三角形ノ外接圓周上ノ一點ヨリ各頂點ニ至ル距離ノ中,最モ大ナルモノハ他ノ二ツノ和ニ等シ。

20. 定點Aニ於テ定角ヲナシテ交ル任意ノ二直線ニ他ノ定點Bヨリ垂線BP, BQヲ引クトキハ, PQハ定長ニシテ且定圓ニ切ス。

第四篇

軌跡

39. 軌跡

圓周上ノ點ハ皆中心ヨリ半徑ニ等シキ距離ニアリ。逆ニ,中心ヨリ半徑ニ等シキ距離ニアル點ハ皆圓周上ニアリ。故ニ今一定點ヨリ與ヘラレタル距離ニアル點ヲスベテ含ミ,然ラザル點ハ一ツモ含マザル如キ圖形ハ何カト問ハバ,其ハソノ定點ヲ中心トシ,與ヘラレタル距離ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ナリトイハザル可カラズ。斯クノ如ク一般ニ與ヘラレタル條件ニ適スル點ヲスベテ含ミ,然ラザル點ハ一ツモ含マザル如キ圖形ヲ考フルコトハ屢必要アリ。

依ッテ次ノ定義ヲ設ク。

[定義] 或ル圖形上ノ點ハ皆與ヘラレタル條件ニ適シ,又逆ニソノ條件ニ適スル點ハ皆ソノ圖形上ニアルトキハ,其ノ圖形ヲ稱シテ

其ノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。

軌跡トイフ語ヲ用ヒテ圓周ニ關スル上ノ事實ヲ言ヒ表セバ次ノ定理ヲ得。

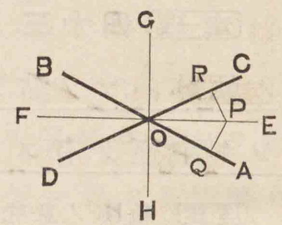
[定理] 四十三. 定點ヨリ定距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ點ヲ中心トシソノ定距離ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ナリ。

[注意] 軌跡ノ意味ヲ更ニ考ヘ直シテ見レバ次ノ如クニモイフコトヲ得。今一ツノ點ガ平面上ニテ運動スルトキ,モシ之ニ或ル條件ヲ附スルトキハ(例ヘバ一定點ヨリ常ニ一定ノ距離ニアルベシト定ムルガ如シ),ソノ點ノ運動ハ之ガタメニ制限セラレテ或ル特殊ノ線又ハ平面ノ一部分ノ上ニノミ運動シ得ルコトヽナルベシ。コノ限ラレタル運動ノ範圍ガ即チ上ニ定義シタル軌跡トイフモノニ當ル。故ニ或ル條件ニ適スル點ノ軌跡トハ,一ツノ點ガ常ニ其ノ條件ニ適スル樣ニ運動スルトキ,其ノ點ノ通過シ得ベキスベテノ範圍ヲイフト考ヘテモ可ナリ。

軌跡ハ一ツノ線(直線又ハ曲線)ナルコトアリ,或ハソノ一部分ナルコトアリ,或ハ幾ツカノ線ノ集マリテ成レル圖形ナルコトアリ。又條件ノ如何ニヨリテハ平面ノ全部或ハソノ一部分トナルコトモアルベシ。

[定理] 四十四. 二ツノ相交ル定直線ヨリ

等距離ニアル點ノ軌跡ハ,ソノ二直線ノナス二双ノ對頂角ノ各ヲ二等分スル二ツノ直線ナリ。



特述 AB, CD ヲ O ニ於テ相交ル二ツノ定直線トス。然ルトキハ此ノ二直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ二双ノ對頂角 AOC, BOD 及ビ COB, AOD ノ各ヲ二等分スル二ツノ直線 EOF 及ビ GOH ナルコトヲ證明セントス。

證明 今二直線 AOB, COD ヨリ等距離ニアル一點アリトシ,之ヲ P ト名付ク。然ルトキハ P ヨリコレラノ二直線ニ夫々引ケル垂線 PQ, PR ハ相等シク,從ツテ △POQ≡△POR ナリ。故ニ ∠POQ=∠POR, 卽チ P ハ二直線 AOB, COD ノナス角ノ二等分線 EOF, GOH ノ中ノ何レカ一ツノ上ニアリ。

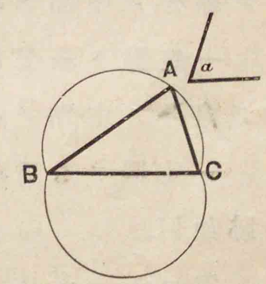
逆ニ EOF, GOH ノ中ノ何レカ一ツノ上ニ任意ノ一點 P ヲ取リ,之ヨリ二直線 AOB, COD ニ夫々垂線 PQ, PR ヲ引クトキハ △POQ≡△POR, 從ツテ PQ=PR ナルコトハ容易ニ證明セラル。

故ニ二直線 AOB, COD ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,二直線 EOF, GOH ナリ。

定理 四十五. 定直線ヨリ定距離ニアル點ノ軌跡ハ,其ノ直線ニ平行ニシテ且之ヨリ其ノ距離ニアル二ツノ直線ナリ。

證明 學生自ラ之ヲ證明セヨ。

定理 四十六. 三角形ノ底邊ノ位置及ビ大サガ一定シ且頂角ノ大サモ一定ナルトキ,其ノ頂點ノ軌跡ハ底邊ノ上ニ立チ與ヘラレタル頂角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧ナリ。

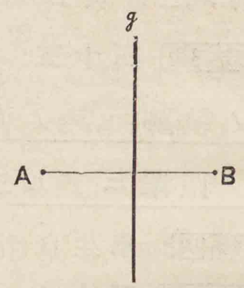


特述 三角形 ABC ニ於テ底邊 BC ノ位置及ビ大サガ一定シ且頂角 A ノ大サガ一定角 α ニ等シトス。然ルトキハ頂點 A ノ軌跡ハ BC ノ上ニ立チ兩側ニ夫々立チテ α ニ等シキ角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧ナリ。

[證明] 學生自ラ之ヲ證明セヨ。

[定理] 四十七. 二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ其ノ二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ナリ。

[特述] A,Bヲ二定點トス。然ルトキハ此ノ二點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,線分ABノ垂直二等分線gナリ。



[證明] 學生自ラ之ヲ證明セヨ。

例　題

1. 一定點ト一定直線上ノ任意ノ一點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡如何。
2. 一定點ト一定圓周上ノ任意ノ一點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡如何。
3. 一定圓ニ於テ,一定點ヲ過ル弦ノ中點ノ軌跡如何.
4. 定マレル長サノ線分ノ兩端ガ,垂直ニ相交ル二定直線上ニ一ツヅヽアリテ動クトキ,ソノ線分ノ中點ノ軌跡如何。

5. 三角形ノ底邊ノ位置及ビ大サト頂角ノ大サトガ定マレルトキ,ソノ三角形ニ於ケル次ノ各軌跡如何,
   (1) 內心　(2) 外心　(3) 重心.
6. 二定點A,Bヨリ等距離ニアリ且定點Cヨリ與ヘラレタル距離ニアル點ヲ求メヨ。
7. 相交ル二定直線ニ至ル距離ガ相等シク且二定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

雜　題

1. 一定點ヨリ他ノ一定點ヲ中心トスル同心圓ニ引ケル切線ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。
2. 一ツノ圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
3. 一線分ノ一端ヲ恒ニ一定圓周上ニアラシメ,且コノ線分ヲ他ノ一定直線ニ平行ナラシメツヽ動カストキ,コノ線分ノ他ノ一端ノ軌跡如何。

4. 定長ナル等邊ヲ有スル二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ガ定直線上ニアリ,且 B ハ定點ナリトス。CA ヲ A ノ方ニ延長シテ其ノ上ニ CA ニ等シク AP ヲトルトキ,點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ニ垂直ナル任意ノ直線ガ邊 BA, CA 又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ D, E トス。直線 CD, BE ノ交點ノ軌跡如何。

6. 半徑 $5cm$ ノ甲乙二圓アリ,甲圓ハ固定シ乙圓ハ甲圓ト $\frac{2}{3}$ 直角ノ交角ヲ保チツヽ動クトキ,乙圓ノ中心ノ軌跡如何。(二圓ノ交角トハ其ノ交點ニ於ケル各圓ノ切線ノナス角ナリ。)

7. 與ヘラレタル二直線ニ切シ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

〔略解〕今與ヘラレタル二直線ヲ AB,CD トシ, O ニ於テ相交ルモノトス(平行ナル場合ハ學生自ラ考ヘヨ)。求ムル圓ノ中心ハ AB, CD ノナス角ノ二等分線 EF, GH ノ上ニアリ(定理四十四)。又與ヘラレタル半徑ヲ L トスレバ,其ノ圓ノ中心ハ AB ニ平行ニシテ且ツ AB ヨリ L ノ距離ニアル二直線 PQ, RS ノ上ニアリ(定理四十五)。依ツテ求ムル圓ノ中心ハ EF, GH ノ何レカ一ツト PQ, RS, ノ何レカ一ツトノ交リナリ。

8. 與ヘラレタル一ツノ直線及ビ一ツノ圓ニ切シ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

9. 底邊,高サ及ビ頂點ヨリ引キタル中線ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

10. 底邊,頂角及ビ內接圓ノ半徑ヲ知リテ,三角形ヲ作レ。

11. 一定點ヲ過リ定圓ニ割線ヲ引キ,コノ圓ガコノ割線ヨリ截リ取ル弦ヲシテ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。

12. 與ヘラレタル直線ニ與ヘラレタル點ニ於テ切シ,且他ノ與ヘラレタル點ヲ過ル圓ヲ畫ケ。

13. 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切シ,且與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

14. 一邊及ビ二中線ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

15. 一角及ビ二ツノ高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

第　五　篇

面　積

第一章　基本性質

40. 多角形ノ面積

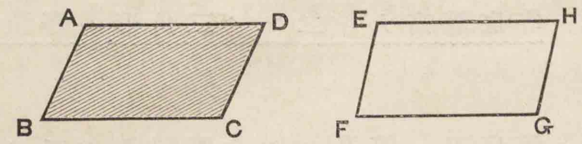
[定義] 多角形ノ**面積**トハ其ノ限界内ニアル平面ノ部分ノ大サ(卽チ廣サ)ノコトナリ。

二ツノ多角形ノ面積ガ相等シキコトヲ**等積**ナリトイフ。

合同ナル多角形ハ等積ナリ,然レドモ等積ナル多角形ハ必ズシモ合同ナラズ。

[定義] 平行四邊形ノ任意ノ一邊ヲ**底邊**又ハ單ニ**底**ト稱ス。ソノトキ之ト其ノ對邊トノ距離ヲ其ノ平行四邊形ノ**高サ**トイフ。

[定理] **四十八.** 二ツノ平行四邊形ニ於テ其ノ底ト高サトガ夫々相等シキトキハ,兩形ハ等積ナリ。



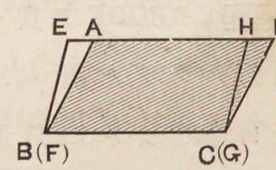
[特述] 二ツノ平行四邊形 ABCD, EFGH ニ於テ底邊 BC, FG ガ相等シク,又之ニ對スル高サモ相等シトセバ,兩形ハ等積ナルコトヲ證明セントス。

[證明] EFGH ヲ ABCD ノ上ニ重ネ,邊 FG ガ邊 BC ト合シ,且兩形ハ邊 BC ノ同ジ側ニアル樣ニセヨ。

若シ $\angle ABC = \angle EFG$ ナラバ兩形ハ合同ニシテ勿論等積ナリ。

若シ又 $\angle ABC < \angle EFG$ ナリトスルモ,AD ト EH トハ同一直線上ニアルコト明カニシテ,且

$$\triangle DCH \equiv \triangle ABE.$$



コノ各ヲ梯形 ABCH ヨリ引ケバ　$ABCD = EBCH.$

卽チ　$ABCD = EFGH$ ヲ得。

$\angle ABC > \angle EFG$ ナルトキモ同樣ニ證明セラル。

系 1. 等底,等高ナル二ツノ三角形ハ等積ナリ。

系 2. 等底(又ハ等高)ニシテ等積ナル二ツノ三角形ハ等高(又ハ等底)ナリ。

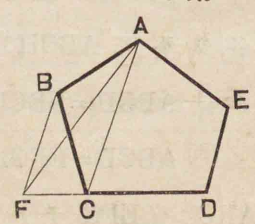
系 3. 三角形ノ中線ハソノ面積ヲ二等分ス。

系 4. 平行四邊形ハ之ト等底,等高ナル矩形ト等積ナリ。

系 5. 三角形ノ面積ハ之ト等底,等高ナル矩形ノ面積ノ半分ニ等シ。

作圖題 與ヘラレタル(三角形ナラザル)多角形ト等積ニシテ,邊數ガ之ヨリ一ツ少キ多角形ヲ作レ。

特述 ABCDEヲ與ヘラレタル五角形トス。(三角形ナラザル限リ,何角形トスルモ同樣ナリ。)今之ト等積ナル四角形ヲ作ラントス。



作圖 Bヲ過リテ對角線ACニ平行ニBFヲ引キ,邊DCノ延長トFニ於テ交ラシメ,AFヲ結ブベシ。然ルトキハ四角形AFDEハ卽チ求ムル所ノモノナリ。

證明 三角形ABC, AFCハ底邊ACヲ共有シ,且同ジ平行線AC, BFノ間ニ夾マルヽヲ以テ等高ナリ。

故ニ　　$\triangle ABC=\triangle AFC.$

兩邊ニ　ACDEヲ加フレバ

$$ABCDE=AFDE.$$

應用 1. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル三角形ヲ作レ。

應用 2. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル矩形ヲ作レ。

例　題

1. 梯形ノ面積ハ其ノ平行ナル二邊ノ和ヲ底邊トシ,其ノ二邊間ノ距離ヲ高サトスル矩形ノ面積ノ半分ニ等シ。

2. 平行四邊形ABCDノ對角線AC又ハソノ

延長ノ上ニ任意ノ一點Pヲトルトキハ,三角形 PCB, PCD ハ等積ナリ。

3. 與ヘラレタル二ツノ線分ヲ二邊トスル三角形ノ中ニテ其ノ夾角ノ直角ナルモノガ最大ノ面積ヲ有ス。

4. 平行四邊形ノ一ツノ對角線上ノ一點ヲ過リテ各邊ニ平行ナル直線ヲ引キ,全形ヲ四ツノ平行四邊形ニ分ツトキ,始メニ取リタル對角線ヲ其ノ内部ニ有セザル二ツノ平行四邊形ハ等積ナリ。

$\boxed{\text{定義}}$ 斯クノ如キ二ツノ平行四邊形ヲ元ノ平行四邊形ノ對角線ニ沿フ平行四邊形ノ**餘形**トイフ。

5. 與ヘラレタル一角ト一邊トヲ有シ,且與ヘラレタル平行四邊形ト等積ナル平行四邊形ヲ作レ。

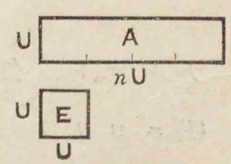
第二章 面積ヲ計ルコト

41. 矩形ノ面積ノ數値

矩形ノ面積ヲ計ルニハ一ツノ定マレル矩形ノ面積ヲ單位トシ,與ヘラレタル矩形ノ面積ガソレノ幾倍ナルカヲ考フレバヨシ。

面積ノ單位トシテ普通用ヒラルヽモノハ單位ノ長サヲ有スル線分ヲ一邊トスル正方形ノ面積ナリ。之ニヨリテ任意ノ矩形ノ面積ヲ計リ其ノ數値ヲ定ムルニハ次ノ如クスベシ。

長サノ單位ヲUトシ,一邊ガUナル正方形ノ面積ヲEトス, Eハ卽チ面積ノ單位ナリ。今與ヘラレタル任意ノ矩形ノ面積ヲAトシ, AガEノ幾倍ナルカヲ考ヘントスルニ,便宜上次ノ二ツノ場合ニ分ツ。

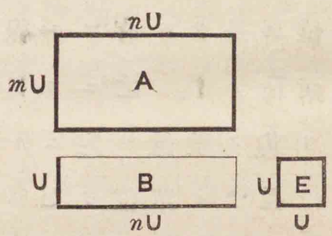


(1) 矩形Aノ一邊ガ丁度Uニ等シク,ソノ隣邊ガ nU (n ハ其ノ邊ノ長サノ數値)ニ等シキトキハ $A=nE$ ナリ。

何トナレバ,一般ニ矩形ノ高サ(又ハ底)ヲ一定ナラシメテ其ノ底(又ハ高サ)ヲ若干倍又ハ若干等分スレバ,其ノ面積モ亦同一ノ數ダケニ倍セラレ又ハ等分セラルヽコト明カナレバナリ。

(nガ無理數ナル場合ト雖,何程ニテモ之ニ近キ有理數ノ近似値ヲ取リテ同樣ニ考フルコトヲ得ベシ)。

(2) 一般ニ矩形Aノ相隣ル二邊ガ夫々 mU, nUナルトキハ,先ヅ別ニU, nUナル二邊ヲ有スル矩形Bヲ作リ,AトBトヲ比較スベシ。



コノ兩形ニ於テハnUナル邊ハ双方相等シキヲ以テ,(1)ニ於ケルト同樣ノ論法ニヨリ

$$A=mB$$

ナルコトヲ知ル。次ニBトEトヲ比較スレバ

(1)ニヨリ $B=nE$

ナリ。故ニ $A=m(nE)=mnE$

ナル結果ヲ得。

以上ノ結果ニヨリ次ノ定理ヲ得。

矩形ノ面積ノ數値ハ其ノ相隣ル二邊ノ長サノ數値ノ積ニ等シ。

[注意] コヽニ面積ノ單位トシテハ長サノ單位ヲ一邊トスル正方形ヲ用フルコトガ必要ナリ。若シ長サト面積トニ各任意ノ單位ヲ用フルトキハ此ノ定理ハ必ズシモ成立セズ。

數値トイフ語ヲ省キテ上ノ定理ヲ次ノ如クニ略言スルコトアリ。

矩形ノ面積ハ其ノ相隣ル二邊ノ長サノ積ニ等シ。

今後長サ,面積ノ數値ノコトヲ略シテ單ニ長サ,面積トイフコトトス。

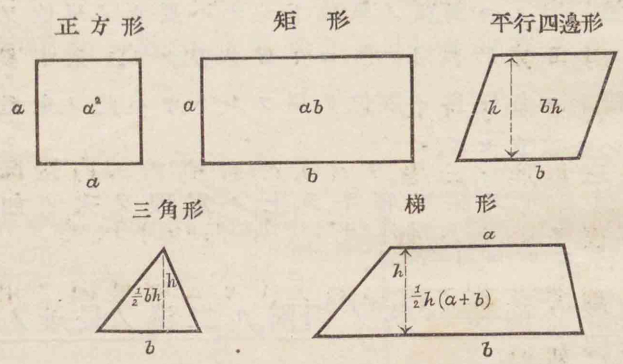
42. 多角形ノ面積ノ數値

任意ノ多角形ハ之ト等積ナル矩形ニ直スコトヲ得(第41節作圖題應用2)。從ツテ前節ノ理ニヨリ其ノ面積ヲ求ムルコトヲ得。

實際ニ於テヨク行ハルヽ方法トシテハ與ヘ

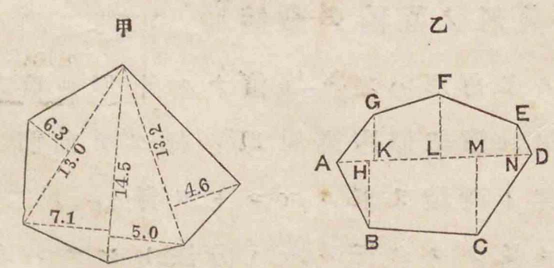
ラレタル多角形ヲ對角線ニヨリテ若干ノ三角形又ハ梯形ニ分チ,其ノ各形ノ面積ノ和ヲ求ムルニアリ。(次ノ例題1ヲ見ヨ)

簡單ナル面積ノ公式ヲ擧グレバ次ノ如シ。



例題

1. 次ノ圖ノ如キ多角形ノ面積ヲ求メヨ。



長サノ單位ハ甲圖ニ於テハ m, 乙圖ニ於テハ km ニシテ且

AH=1.8	HK=0.7	KL=5.0	LM=2.3
MN=2.5	ND=2.2	BH=4.5	GK=2.9
FL=3.6	CM=6.2	EN=2.0	

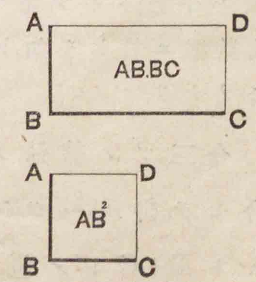
2. 對角線ノ長サガ a 及ビ b ナル菱形ノ面積ヲ表ス公式ヲ作レ。

3. 三角形ノ三邊ヲ a, b, c, 面積ヲ S, 内接圓ノ半徑ヲ r トスルトキハ, $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ ナリ。

4. 前題ニ於テ内接圓ノ代リニ傍接圓ヲ用フレバ如何。

5. 正多角形ノ周圍,面積及ビ内接圓ノ半徑ノ間ノ關係式ヲ見出セ。

43. 二ツノ線分ノ包ム矩形



「相隣ル二邊ガ AB, BC ニ等シキ矩形」ノコトヲ「AB, BC ノ包ム矩形」トイヒ,ソノ面積ヲ示スニ AB. BC ト記スコトアリ。

又一邊ガ AB ナル正方形ノコトヲ「AB ノ上ノ正方形」トイヒ,ソノ面積ヲ示スニ AB^2 ト記スコトアリ。

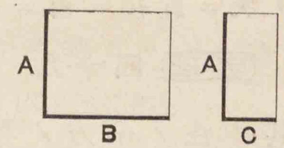
モシ二ツノ線分ヲ各一ツノ文字例ヘバ M, N ニテ表ストキニハ,其ノ包ム矩形ノ面積ヲ示スニハ M.N 又ハ單ニ MN ト記ス。又コヽニ AB.BC 又ハ M.N ノ代リニ BC.AB 又ハ N.M ト書キテモ同一ナリトス。

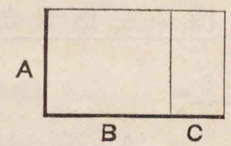
斯クノ如キ記法ニテ示サレタル矩形ノ面積ヲ二ツノ線分 AB, BC 又ハ M, N ノ**積**ト稱ス。特ニ二ツノ線分 AB, BC 又ハ M, N ガ相等シキトキハ其ノ積ヲ AB ノ**平方**又ハ M ノ**平方**ト稱ス。

$\boxed{\text{注意}}$ コヽニ AB, BC, M, N 等ハ何レモ「線分」ヲ表スモノニシテ其ノ長サノ「數値」ヲ表スモノニアラズ,故ニ積(又ハ平方)トイフ語ヲ用フルハ唯便宜上ノコトニシテ代數學ニ於ケル如キ文字ノ積(又ハ平方)トハ全ク別ノモノナリ。

今三ツノ線分 A, B, C アリ。B ト C トヲ繼ギ合セテ得ル一ツノ線分ヲ B+C ニテ表ストキハ, A ト B+C トノ包ム矩形ノ面積ハ上述ノ記法ニ

ヨレバ A(B+C) ニシテ,又 A ト B, A ト C トノ包ム矩形ノ面積ハ夫々 A.B, A.C ナリ。而シテコレラノ三ツノ矩形ノ面積ノ間ニハ A(B+C)=A.B+A.C ナル關係アリ。或ハ同一ノ關係ヲ (B+C)A=B.A+C.A トモ書クコトヲ得。





又 B ガ C ヨリ大ナルトキニハ

$$A(B-C)=A.B-A.C,$$
$$(B-C)A=B.A-C.A$$

ナル關係アルコトモ容易ニ證明セラル。

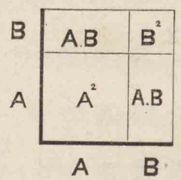
コレラノ式ハ代數學ニ於ケルト全ク同一ノ形ヲ有ス。從ツテ之ヲ基礎トシテ代數學ニ於ケルト同樣ノ推理ニヨリテ更ニ幾多ノ關係ヲ導キ出スコトヲ得ベシ。例ヘバ

$$(A+B)(C+D)=(A+B)C+(A+B)D$$
$$=A.C+B.C+A.D+B.D$$

ノ如シ。

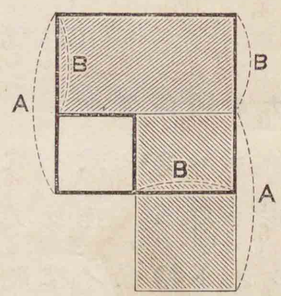
次ノ三ツノ定理ヲ先ヅ線分ノ積ノ計算ニヨリ,次ニ直接ニ圖ニヨリテ證明セヨ。

定理 四十九. 二ツノ線分ノ和ノ平方ハ,其ノ各ノ平方ノ和ニ其ノ二線分ノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。



即チ $(A+B)^2=A^2+B^2+2A.B$

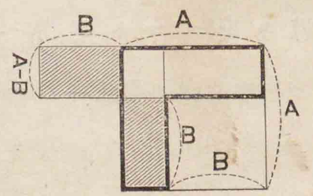
定理 五十. 二ツノ線分ノ差ノ平方ハ,其ノ各ノ平方ノ和ヨリ其ノ二線分ノ積ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ



即チ

$(A-B)^2=A^2+B^2-2A.B$

定理 五十一. 二ツノ線分ノ和ト差トノ積ハ,モトノ各線分ノ平方ノ差ニ等シ。



即チ

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2.$

例題

1. 四ツノ點 A, B, C, D ガ一直線上ニコノ順ニアルトキハ, $AB.CD+AD.BC=AC.BD.$

2. 四ツノ點 A, B, C, D ガ一直線上ニコノ順ニアリテ且 $AB.CD=AD.BC$ ナルトキハ,

$$AB.AC+AC.AD=2.AB.AD.$$

3. 線分 AB 上ノ任意ノ點ヲ C トシ,又ソノ線分ノ中點ヲ M トスレバ,

$$AC.CB=AM^2-MC^2.$$

4. 與ヘラレタル線分ヲ二ツニ分チ,其ノ包ム矩形ノ面積ヲ最大ナラシメヨ。

5. 與ヘラレタル周ヲ有スル矩形ノ中ニテ正方形ハ最大ノ面積ヲ有ス。

6. 同ジ二線分ノ和ノ平方ト差ノ平方トノ和ハ其ノ二線分ノ各ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シク,又其ノ差ハ其ノ二線分ノ積ノ四倍ニ等シ。

第三章　三角形ノ性質

44. ぴたごらすノ定理

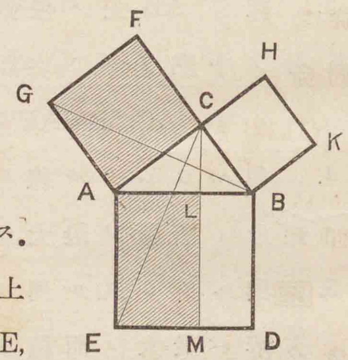
[定理] 五十二. 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シ。

之ヲぴたごらす(Pythagoras)ノ定理トイフ。

[特述] 三角形ABCニ於テ角Cヲ直角ナリトスレバ,

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

ナルコトヲ證明セントス。



[證明] AB, AC, BCノ上ノ正方形ヲ夫々 ABDE, ACFG, BCHKトシ, CヨリABニ垂線ヲ引キ,之トAB及ビEDトノ交リヲ夫々L及ビMトス。BGヲ結ベバ,正方形ACFGト三角形ABGトハ底AGヲ共有シ且等高(BCトCFトハ一直線ヲナス)ナルヲ以テ

$$ACFG=2\triangle ABG.$$

同様ニ, CEヲ結ベバ

$$ALME=2\triangle AEC.$$

然ルニ二ツノ三角形ABG, AECニ於テ

$$AB=AE,\quad AG=AC,$$

又角BAG, EACハ何レモ直角ニ角BACヲ加ヘタル和ニ等シキヲ以テ互ニ相等シ。

故ニ　$\triangle ABG\equiv\triangle AEC.$

從ツテ　$ACFG=ALME.$　(1)

同様ニシテ　$BCHK=BLMD.$　(2)

(1), (2)ヲ邊々相加フレバ

$$ACFG+BCHK=ABDE,$$

卽チ　$AC^2+BC^2=AB^2.$

[系] 1. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊及ビ斜邊ノ長サヲ同一ノ單位ニテ計リタルトキノ數値ヲ夫々a, b及ビcトスルトキハ,其ノ中ノ何レカ二ツヲ知リテ殘リノ一ツヲ求ムル公式ハ次ノ如シ。

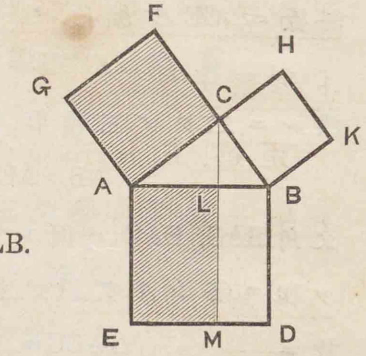
$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)},$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)},$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

系 2. $AC^2=AL.AB,$

$BC^2=BL.BA.$



系 3. $CL^2=AL.LB.$

何トナレバ

$$AC^2=AL.AB=AL^2+AL.LB.$$

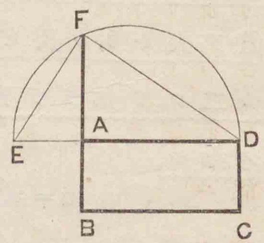
故ニ

$$AC^2-AL^2=CL^2=AL.LB.$$

此ノ性質ヲ利用シテ次ノ作圖題ヲ解クコトヲ得。

作圖題 與ヘラレタル矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

作圖 ABCD ヲ與ヘラレタル矩形トス。AD ヲ A ヲ通シテ延長シ $AE=AB$ ナラシメ, ED ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ, AB ヲ A ヲ通シテ延長シ,圓周ト F ニ於テ交ラシメヨ。AF ヲ一邊トスル正方形ハ卽チ求ムル所ノモノナリ。

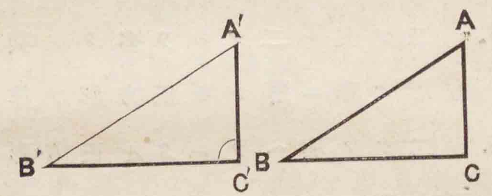


作圖題 與ヘラレタル線分ヲ二ツノ部分

ニ分チ,ソノ包ム矩形ヲ與ヘラレタル正方形ト等積ナラシメヨ。

定理 **五十三.** 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ガ第三邊ノ平方ニ等シキトキハ,第三邊ニ對スル角ハ直角ナリ。(ぴたごらすノ定理ノ逆)

特述 $\triangle ABC$ ニ於テ $AC^2+BC^2=AB^2$ ナルトキハ, $\angle C$ ハ直角ナルコトヲ證明セントス。



證明 AC, BC ニ夫々等シキ二邊 $A'C'$, $B'C'$ ヲ有シ,且ソノ夾角ガ直角ナル三角形 $A'B'C'$ ヲ作リタリトセヨ。然ルトキハぴたごらすノ定理ニヨリ $A'C'^2+B'C'^2=A'B'^2.$

又假定ニヨリ $A'C'^2+B'C'^2=AC^2+BC^2=AB^2.$

故ニ $A'B'=AB.$

從ツテ二ツノ三角形 ABC, $A'B'C'$ ハ合同ナリ。

故ニ角 C ハ角 C' ニ等シク,卽チ直角ナリ。

例題

1. 三邊ノ長サノ數値ガ次ノ式ニテ表サル、如キ三角形ハ直角三角形ナリ。

(1)　m^2-n^2,　$2mn$,　m^2+n^2.

(2)　$4p^2-1$,　$4p$,　$4p^2+1$.

2. 四邊形 ABCD ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ $AB^2+CD^2=AD^2+CB^2$ ナリ。逆モ亦眞ナリ。

3. 二ツ又ハ二ツヨリ多クノ與ヘラレタル正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作レ。

4. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ差ニ等シキ正方形ヲ作レ。

5. 與ヘラレタル正方形ノ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 及ビ $\frac{3}{5}$ ノ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ。

6. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

7. 一邊ノ長サガ 1 *cm* ナル正方形ノ對角線ノ長サ如何。

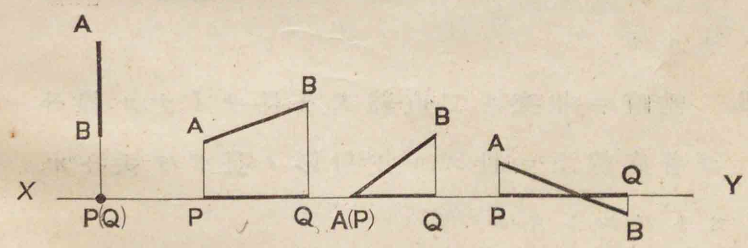
8. 一邊ノ長サガ 2 *cm* ナル正三角形ノ高サハ幾糎ナルカ。又ソノ面積ヲ求メヨ。

45. 正射影

$\boxed{\text{定義}}$ 一直線上ニ投ズル一點ノ**正射影**トハ其ノ點ヨリ其ノ直線ニ引ケル垂線ノ足ヲイフ。

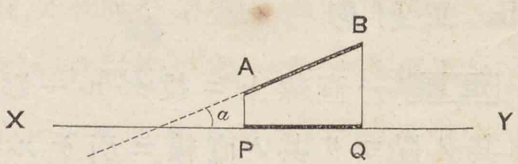
一ツノ線分ノ兩端 A, B ノ一直線 XY 上ニ投ズル正射影ヲ夫々 P, Q トスルトキハ,線分 PQ (特別ノ場合ニハ一點トナルコトアリ)ノコトヲ直線 XY 上ニ投ズル線分 AB ノ**正射影**トイフ。

正射影ヲ考フル基準トシテ用ヒタル直線 XY ニ對シテ線分 AB ノナス角ヲ此ノ線分ノ**傾角**トイフ。



線分 AB ノ長サト其ノ傾角トガ與ヘラルレバ,ソレニヨリテ其ノ正射影 PQ ノ長サハ定マル

モノナリ,卽チ換言スレバ,相等シク且平行ナル



二ツノ線分ノ同一直線上ニ投ズル正射影ハ相等シ。(學生自ラ之ヲ證明セヨ)。

例題

1. 平行ナル二ツノ線分ノ同一直線上ニ投ズル正射影ガ相等シキトキハ,其ノ二線分ハ相等シ。

2. 相等シキ二ツノ線分ノ同一直線上ニ投ズル正射影ガ相等シキトキ,其ノ二線分ハ平行ナルカ。

3. 垂直ニ相交ル二直線アリ,長サlナル線分ガ各直線上ニ投ズル正射影ノ長サヲ夫々m, nトスルトキハ,

$$m^2+n^2=l^2$$

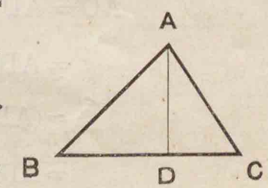
ナル關係アリ。

4 一單位ノ長サノ線分ガ一定直線上ニ投ズル正射影ノ長サト其ノ傾角トノ間ニハ次表ノ如キ關係アリ。

傾角	0°	30°	45°	60°	90°
正射影	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

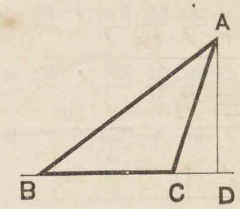
46. 一般ノ三角形ニ關スル定理

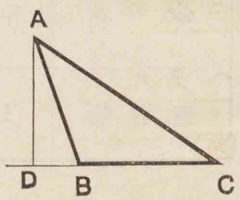
(1) △ABCニ於テ,角Bガ鋭角ナルトキ,AヨリBCニ引ケル垂線ヲADトスレバ角Cガ鋭角ナラバDハBトCトノ間ニアリ。



故ニ
$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2+DC^2 \\ &= AD^2+(BC-BD)^2 \\ &= (AD^2+BD^2)+BC^2-2BD.BC \\ &= AB^2+BC^2-2BD.BC. \qquad (1) \end{aligned}$$

モシ角Cガ鈍角ナラバ,Dハ邊BCノCヲ通シテノ延長ノ上ニアリ。此ノ場合ニハ上ノ第二式ニアル$(BC-BD)^2$ノ代リニ$(BD-BC)^2$ヲ入ルレバヨシ,其ノ他ニハ何等ノ變更ヲ要セズ。





(2) 角Bガ鈍角ナルトキハ,Dハ邊CBノBヲ通シテノ延長ノ上ニアリ。此ノ場合ニハ次ノ如クスベシ。

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2+DC^2 \\ &= AD^2+(DB+BC)^2 \\ &= (AD^2+DB^2)+BC^2+2BD.BC \\ &= AB^2+BC^2+2BD.BC. \qquad (2) \end{aligned}$$

扨(1),(2)ニ於テBDハ即チ線分ABノ直線BC上ニ投ズル正射影ナリ。依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 五十四. 三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ,其ノ二邊ノ中ノ一邊ト其ノ上ニ投ズル他ノ邊ノ正射

影トノ積ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ。

三角形ノ鈍角ニ對スル邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ニ,其ノ二邊ノ中ノ一邊ト其ノ上ニ投ズル他ノ邊ノ正射影トノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

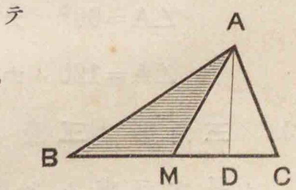
系 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ガ第三邊ノ平方ヨリモ大ナルカ又ハ小ナルカニ從ツテ,ソノ第三邊ニ對スル角ハ鋭角ナルカ又ハ鈍角ナリ。

定理 五十五. 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ,第三邊ノ半分ノ平方ト,第三邊ニ引ケル中線ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ。

特述 三角形ABCニ於テ邊BCノ中點ヲMトスレバ,

$$AB^2+AC^2=2(BM^2+AM^2)$$

ナルコトヲ證明セントス。



證明 AヨリBCニ引ケル垂線ヲADトシ,今假ニ角AMCヲ鋭角ナリトスレバ,

$$AB^2 = BM^2 + AM^2 + 2BM.MD,$$

$$AC^2 = CM^2 + AM^2 - 2CM.MD$$

$$= BM^2 + AM^2 - 2BM.MD.$$

故ニ $\quad AB^2 + AC^2 = 2(BM^2 + AM^2).$

(角 AMC ガ直角又ハ鈍角ナル場合ハ學生自ラ研究セヨ。)

系 三角形ノ二邊ノ平方ノ差ハ第三邊ト,第三邊ニ引ケル中線ガソノ上ニ投ズル正射影トノ積ノ二倍ニ等シ。

例題

1. 三角形 ABC ノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トスルトキ,

$\angle A = 60^\circ$ ナラバ, $a^2 = b^2 + c^2 - bc$,

$\angle A = 120^\circ$ ナラバ, $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

2. 三角形ノ三邊 a, b, c ヲ知リテ,三ツノ中線ノ長サヲ求ムル公式ヲ作レ。

3. 三角形ノ三邊ノ平方ノ和ノ三倍ハ三中線ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ。

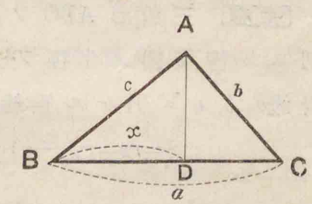
4. 四邊形ノ各邊ノ平方ノ和ハ,兩對角線ノ平方ノ和ニ,兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ノ平方ノ四倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

5. 平行四邊形ノ四邊ノ平方ノ和ハ兩對角線ノ平方ノ和ニ等シ。コノ逆モ亦眞ナリ。

47. 三角形ノ面積ニ關スル公式

三角形 ABC ノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トシ,邊 AB ノ直線 BC 上ニ投ズル正射影 BD ヲ x トス。先ヅ角 B ヲ鋭角トスレバ

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ax.$$



之ヨリ x ヲ求ムレバ

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

之ヲ $\quad AD^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$

ニ代入スレバ

$$AD^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{(a + b + c)(c + a - b)(a + b - c)(b + c - a)}{4a^2}$$

角 B ガ鋭角ナラザル場合ニモ同樣ノ結果ヲ得。

コヽニ於テ $a+b+c=2s$ ト置ケバ,

$$AD^2=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

トナル,之ヨリADヲ求ムルコトヲ得。

今三角形ABCノ面積ヲSトスレバ

$$S=\frac{a.AD}{2}.$$

故ニ上ニ得タルADノ値ヲ代入スレバ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

コレ卽チ三角形ノ三邊ヲ知リテ其ノ面積ヲ求ムル公式ナリ。

注意 三角形ABCノ内接圓ノ半徑ヲr;邊a, b, cニ切スル傍接圓ノ半徑ヲ夫々r_1, r_2, r_3;頂點A, B, Cヨリ對邊a, b, cニ引ケル垂線ヲ夫々h_1, h_2, h_3トスレバ

$$S=rs=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c).$$

(42節例題3, 4参照)

$$2S=ah_1=bh_2=ch_3.$$

例 題

1. 三角形ノ三邊ガ夫々13 m, 14 m, 15 m ナルトキ,其ノ面積如何。

2. 平行四邊形ノ相隣レル二邊ガ60 cm 及ビ70 cm ニシテ一ツノ對角線ガ110 cm ナルトキ,其ノ面積如何。

3. 二邊ガ夫々18 m 及ビ25 m ニシテ其ノ夾角ガ60° ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

雜 題

1. 與ヘラレタル點ヲ過ル直線ヲ引キ與ヘラレタル平行四邊形ヲ二等分セヨ。

2. 三角形ABCニ於テ,頂點A, Bヲ過リ邊ABニ引ケル垂線ガ邊BC, AC(又ハ其ノ延長)ト交ル點ヲ夫々D, Eトスレバ,三角形CDEハ三角形ABCト等積ナリ。

3. 四邊形ノ面積ハ,其ノ二ツノ對角線ヲ二邊トシ且對角線ノナス角ヲ夾角トスル三角形ノ面積ニ等シ。

4. 四邊形ノ對角線ノ長サガ各一定ナラバ,其ノナス角ガ如何ナルトキ最大ノ面積ヲ有スルカ。

5. 梯形ノ底邊ニアラザル二邊ヲトリ,其ノ一

ツヲ底トシ他ノ一ツノ中點ヲ之ニ對スル頂點トスル三角形ヲ作レバ,其ノ面積ハ原ノ梯形ノ半分ニ等シ。

6. 四邊形ノ一双ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ブ線分ガ其ノ四邊形ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツトキハ,其ノ二邊ハ互ニ平行ナリ。

7. 與ヘラレタル面積ヲ有スル矩形ノ中,正方形ハ最小ノ周圍ヲ有ス。

8. 三角形ノ重心ヲ三頂點ニ結ブ三線分ハ其ノ三角形ノ面積ヲ三等分ス。

9. 一ツノ等邊多角形ニ於テ,其ノ形內ノ任意ノ一點ヨリ各邊ニ引ケル垂線ノ和ハ,其ノ點ノ位置ニ拘ラズ一定ナリ。

10. 四邊形ノ一ツノ對角線ガ他ノ對角線ヲ二等分スレバ,此ノ對角線ハ此ノ四邊形ノ面積ヲ二等分ス。又コノ逆ハ如何。

11. 同ジ底邊ノ同ジ側ニ在ル等高ナル二ツノ三角形ガ底邊ニ平行ナル一直線ヨリ截リ取ル二ツノ線分ハ相等シ。

12. 三角形ノ底邊ニ平行ニシテ他ノ二邊ノ間ニ夾マルヽ線分ハ,ソノ底邊ニ引ケル中線ニヨリテ二等分セラル。

13. 四邊形ノ二ツノ對角線ノ平方ノ和ハ,此ノ四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ブ線分ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シ。

14. 圓ノ二弦AB, CDガ直交スルトキ,ソノ交點ヲOトスレバ $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$ ハ其ノ圓ノ直徑ノ平方ニ等シ。

15. 定圓ノ直徑上ノ定點ト此ノ直徑ニ平行ナル任意ノ弦ノ兩端トヲ結ブ二ツノ線分ノ平方ノ和ハ一定ナリ。

16. 與ヘラレタル三角形ノ面積ヲソノ周上ノ定點ヨリ引ケル直線ニテ二等分セヨ。

17. 與ヘラレタル四邊形ノ一頂點ヨリ一直線ヲ引キ此ノ四邊形ノ面積ヲ二等分セヨ。

18. 定角內ノ一定點ヲ過リテ一直線ヲ引キ,之ト角ノ二邊トニテ作ラルヽ三角形ノ面積ヲ最小ナラシメヨ。

第六篇
比例
第一章　基本性質
48. 比及ビ比例

同ジ種類ノ二ツノ量A及ビBアルトキ,之ヲ相較ベテAガBノ幾倍ナルカヲ考フルコトヲ稱シテ**AノBニ對スル比**又ハ**AトBトノ比**ヲ考フトイフ。

一般ノ量ノ比ニ關スル主ナル事項ヲ擧グレバ次ノ如シ。(詳細ハ代數學ニ讓ル)

「AトBトノ比」ヲ記號ニテA:B又ハ$\frac{A}{B}$ト書ク。A及ビBヲ**比ノ項**トイヒ,Aヲ**前項**,Bヲ**後項**トイフ。

AガBノ幾倍ナルカヲ示スニハBヲ單位トシテAヲ計リタルトキ得ルAノ數値ヲイヘバ可ナリ,之ヲ比A:Bノ**値**トイフ。例ヘバ$A=nB$ナラバ,A:Bノ値ハnナリ。比ノ値ノコトヲ略シテ單ニ比トイフコト多シ。

比ノ値ハ常ニ一ツノ不名數ナリ。

二量ノ比ハ其ノ各ヲ同ジ單位ニテ計リテ得ル數値ノ比ニ等シ。

之ニヨリテスベテ量ノ比ハ之ヲ數ノ比ニ直シテ考フルコトヲ得。

比ノ兩項ニ零ニアラザル同ジ數ヲ乘ジ,又ハ兩項ヲ零ニアラザル同ジ數ニテ除スルモ,ソノ比ノ値ハ變ラズ。

比ノ前項ト後項トヲ交換シテ得ル比ヲモトノ比ノ**反比**又ハ**逆比**トイフ。

反比ノ値ハモトノ比ノ値ノ逆數ナリ。

二ツノ比A:BトC:Dトノ値ガ相等シキトキハA, B, C, Dハ**比例ヲナス**トイフ。A, B, C, Dノ各ヲ此ノ比例ノ**項**トイヒ,特ニAトDトヲ**外項**,BトCトヲ**內項**トイヒ,又Dヲ三ツノ量A, B, Cノ**第四比例項**トイフ。

A:B=C:Dナルトキハ次ノ關係ガ成立ス,

(1)　　B:A=D:C.　　(反轉ノ理)

(2)　　$mA:nB=mC:nD$,

但シ m, n ハ任意ノ正數トス。

(3)　$\dfrac{A+B}{B}=\dfrac{C+D}{D}$,　$\dfrac{A-B}{B}=\dfrac{C-D}{D}$.

(合比,除比ノ理)

從ッテ　$\dfrac{A+B}{A-B}=\dfrac{C+D}{C-D}$.

(4)　A, B, C, D ガ悉ク同種ノ量ナラバ

$A:C=B:D.$　(更迭ノ理)

(5)　$A>B$,　$A=B$,　$A<B$　ニ從ッテ,夫々

$C>D$,　$C=D$,　$C<D$.

又同種類ノ數多ノ量ヲ A, B, C, D, E, F…… トスルトキ,

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}=\dfrac{E}{F}=\cdots\cdots$ ナラバ $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A+C+E+\cdots\cdots}{B+D+F+\cdots\cdots}$.

(加比ノ理)

同ジ種類ノ三ツノ量 A, B, C ガ

$A:B=B:C$

ナル關係ヲ有スルトキハ, B ヲ A ト C トノ**比例中項**トイヒ, C ヲ A, B ノ**第三比例項**トイフ。

49. 互ニ比例スル量

相互ニ關聯シテ其ノ大サヲ變動スル二ツ

ノ量 A, B (同種又ハ異種)アリテ,其ノ相對應スル數値ヲ夫々 a 及ビ b トスルトキ,二數 a, b ノ比ガ各量ノ變動ニ關セズ常ニ一定ノ値ヲ有スルトキハ,二量 A, B ハ**互ニ比例ス**トイフ。

比 $a:b$ ノ一定ナル値ヲ**比例常數**トイフ。之ヲ k トスレバ

$\dfrac{a}{b}=k$　卽チ　$a=kb$

ナル關係アリ。

二量 A, B ガ互ニ比例スルトキハ, A ノ取ル任意ノ二ツノ値 a, a' ト, B ノ夫々之ニ對應スル値 b, b' トハ比例ヲナス。

何トナレバ　$\dfrac{a}{b}=k$,　$\dfrac{a'}{b'}=k$.

故ニ　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}$.　依ッテ　$a:a'=b:b'$.

卽チ詳シクイヘバ, A ヲ二倍,三倍,……,一般ニ n 倍 (n ハ必ズシモ整數ナルヲ要セズ)スルトキハ,之ニ對應スル B モ亦二倍,三倍,……, n 倍トナル。

又逆ニ A, B ガ斯クノ如キ關係ヲ有スルトキハ此ノ二量ハ互ニ比例スルコト明カナリ。

第41節(1)ヲ參照スレバ直チニ次ノ定理ヲ得。

定理 **五十六.** 高サガ一定ナル矩形ノ面積ハ其ノ底ニ比例ス。底ガ一定ナル矩形ノ面積ハ其ノ高サニ比例ス。

系 平行四邊形及ビ三角形ニツイテモ同樣ノ定理ガ成立ス。

定理五十六ト同樣ノ考ニ依リ次ノ定理ヲ得。

定理 **五十七.** 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,中心角(又ハ圓周角)ト之ニ對スル弧トハ互ニ比例ス。

系 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,二ツノ中心角(又ハ圓周角)ノ比ハ之ニ對スル弧ノ比ニ等シ。

例 題

1. 一ツノ圓ニ於テ扇形ノ面積ハ之ニ屬スル弧ニ比例ス。

2. 一ツノ圓ニ於テ弦ト之ニ對スル弧トハ互ニ比例スルカ。

3. 三角形ノ二邊ノ長サガ一定ナルトキ,其ノ夾角ト第三邊トハ互ニ比例スルカ。

50. 互ニ反比例スル量

相關聯シテ變化スル二ツノ量 A, B アリ, A ノ數値 a トコレニ對應スル B ノ數値 b ノ逆數トノ比ガ常ニ一定ノ値ヲ有スルトキハ, 二量 A, B ハ**互ニ反比例ス**或ハ**逆比例ス**トイフ。

コノ場合ニ比 $a:\frac{1}{b}$ ノ値ナル常數ヲ k トスレバ

$$\frac{a}{\frac{1}{b}}=k \qquad \text{即チ} \qquad ab=k.$$

又 A ノ取ル任意ノ二ツノ値 a, a' ト, B ノ夫々之ニ對應スル値 b, b' トノ間ニハ常ニ

$$a:a'=b':b$$

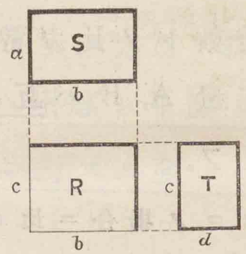
ナル關係ガ成立ス。何トナレバ $ab=k,\ a'b'=k.$ 故ニ $ab=a'b'.$ 依ツテ $a:a'=b':b.$

又逆ニ A, B ガ斯クノ如キ關係ヲ有スルトキハ此ノ二量ハ互ニ反比例ス。

第41節ヨリ直チニ次ノ定理ヲ得。

定理 **五十八.** 面積ガ一定ナル矩形ノ高サト底トハ互ニ反比例ス。

系 等積ナル二ツノ矩形ノ高サノ比ハ其ノ底ノ反比ニ等シ。



次ニ二ツノ矩形ノ面積ヲS, Tトシ,其ノ相隣レル二邊ヲ夫々a, b及ビc, dトス。今別ニc, bヲ相隣レル二邊トスル矩形ヲ考ヘ,其ノ面積ヲRトスレバ

$$\mathrm{S}:\mathrm{R}=a:c,$$
$$\mathrm{T}:\mathrm{R}=d:b.$$

故ニ若シ $a:c=d:b$ ナラバ,

$$\mathrm{S}:\mathrm{R}=\mathrm{T}:\mathrm{R}.$$

故ニ $\mathrm{S}=\mathrm{T}$

ナリ。依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 **五十九.** 四ツノ線分ガ比例ヲナストキハ,其ノ内項ノ包ム矩形ト外項ノ包ム矩形トハ等積ナリ。

系 A, B, C, D ガ何レモ線分ノ長サヲ表ストキニハ, A:B=C:D 及ビ A.D=B.C ノ一方ガ成立スレバ他方モ亦成立ス。但シ A.D 及ビ B.C ハ第43節ニ述ベタル如ク矩形ノ面積ヲ表スモノトス。

例 題

1. 平行四邊形及ビ三角形ニツイテ定理五十八ト同樣ノ定理ヲ述べ,且之ヲ證明セヨ。
2. 底邊ガ一定ナル二等邊三角形ノ頂角ハ高サニ反比例スルカ。

51. 複 比

定義 一ツノ比ノ値ガ他ノ幾ツカノ比ノ値ノ相乘積ニ等シキトキハ,前ノ一ツノ比ヲ後ノ幾ツカノ比ノ**複比**又ハ**相乘比**トイフ。

相等シキ二ツ,三ツ,一般ニn個ノ比ノ相乘

比ヲ夫々其ノ各ノ比ノ**二乘比,三乘比**一般ニ **n 乘比**トイフ。

注意 A:BトC:Dトノ複比ヲ表スニハ

$$\left.\begin{matrix}A:B\\C:D\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}A:B\\C:D\end{matrix}\right.\quad \text{又ハ}\quad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}$$

ト書ク,三ツ以上ノ比ノ複比モ之ニ準ズ。

二乘比,三乘比等ヲ示スニハ

$$(A:B)^2,\quad (A:B)^3\quad \text{又ハ}\quad \left(\frac{A}{B}\right)^2,\quad \left(\frac{A}{B}\right)^3$$

等ト書ク。

第41節ニ述ベタル所ニヨリ直チニ次ノ定理ヲ得。

定理 六十. 二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ其ノ底ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シ。

系 1. 二ツノ平行四邊形又ハ三角形ノ面積ノ比ハ其ノ底ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シ。

系 2. 二ツノ正方形ノ面積ノ比ハ其ノ邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

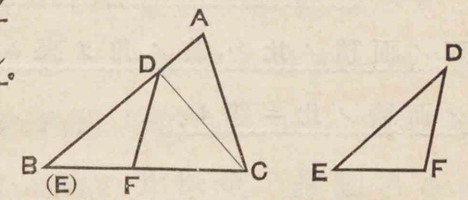
系 3. A, B, C, D ガ何レモ線分ノ長サヲ表ストキニハ,

$$\left.\begin{matrix}A:B\\C:D\end{matrix}\right\}=A.C:B.D.$$

$$(A:B)^2=A^2:B^2.$$

但シ A.C, B.D, A^2, B^2 ハ第43節ニ述ベタル如ク矩形又ハ正方形ノ面積ヲ表スモノトス。

定理 六十一. 一ツノ角ガ互ニ相等シキ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,其ノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シ。



證明 三角形 ABC, DEF ニ於テ ∠B=∠E ナルトキハ,

$$\triangle ABC:\triangle DEF=AB.BC:DE.EF$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 三角形 DEF ヲ ABC ノ上ニ重ネ, E ガ B ノ上ニ,邊 ED EF, ガ夫々邊 BA, BC ノ上ニ重ナル樣ニ置キタリトシ, CD ヲ結ベバ

$$\triangle ABC:\triangle DBC=AB:DB,$$

何トナレバ,コノ兩三角形ハ C ヨリノ高サガ相

等シケレバナリ。同樣ニ

$$\triangle DBC : \triangle DBF = BC : BF.$$

故ニ複比ヲトレバ

$$\triangle ABC : \triangle DBF = \left\{\begin{matrix} AB : DB \\ BC : BF \end{matrix}\right.$$

$$= AB.BC : DB.BF,$$

卽チ $\triangle ABC : \triangle DEF = AB.BC : DE.EF.$

系 一ツノ角ガ互ニ補角ヲナス二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,其ノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シ。

例題

1. 一ツノ角ガ互ニ相等シキ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,之ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シ。

2. 二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ

$$\angle A = \angle D, \quad AB = DE$$

ナルトキハ,

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AC : DF.$$

52. 複比例スル量

各任意ニ大サヲ變ジ得ル二ツノ量A,B及ビ其ノ各ニ關聯シテ變動スル第三ノ量Cアリ。モシAガ一定ニシテBノミ變ズルトキハ,CハBニ比例シ,モシBガ一定ニシテAノミ變ズルトキハ,CハAニ比例ストセバ,A,B共ニ變ズルトキハCハ如何ナル變動ヲナスベキカトイフ問題ハ代數學ニ於テ一般ニ論ゼラルヽ所ニシテ,其ノ結論ニヨレバCノ數値ガA,Bノ數値ノ積ニ比例シテ變動スルモノナリ。斯クノ如キ場合ニCハA及ビBニ**複比例スト**稱セラル。

定理六十及ビ其ノ系1等ハ此ノ一般ナル理論ノ中ニ包含セラルヽモノニシテ,複比例トイフ語ヲ用フレバ更ニ次ノ如クニ言ヒ直スコトヲ得。

矩形(一般ニ平行四邊形又ハ三角形)ノ面積ハ其ノ底及ビ高サニ複比例ス。

定理六十一ヲ換言スレバ次ノ如シ.

一ツノ角ノ大サガ一定ナル三角形ノ面積ハ之ヲ夾ム二邊ノ長サニ複比例ス。

例題

1. △ABCアリ, AB, ACノ長サ夫々12*cm*, 15*cm*ナリ,今AB, AC上ニ夫々點D, Eヲ取リBDノ長サヲ3*cm*, CEノ長サヲ5*cm*トスレバ, △ABCト△ADEトノ面積ノ比ノ値如何。

2. 前題ニ於テ四邊形BCEDト△ADEトノ面積ノ比ヲ求メヨ。

3. △ABCノ三邊AB, BC, CAヲ夫々P, Q, Rニ於テ何レモ2:1ニ分タバ△ABC:△PQRノ値如何。

4. △ABCノ邊ABノ中點ヲDトス。AC上ニ一點Eヲ求メ△ADEト四邊形DBCEトノ比ヲ2:3ナラシムルニハ點Eヲ如何ニ定ムベキカ。

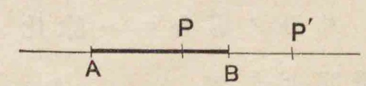
第二章 線分ノ比

53. 内分, 外分

定義 線分上ノ一ツノ點ハ之ヲ**内分ス**トイヒ,其ノ延長上ノ一ツノ點ハ之ヲ**外分ス**トイフ。何レノ場合ニ於テモ線分ノ兩端ヨリ分點マデノ距離ヲ其ノ**分**トイフ。

内分ノ場合ニハモトノ線分ハ二ツノ分ノ和ニ等シク,外分ノ場合ニハ二ツノ分ノ差ニ等シ。

線分ABヲPニ於テ内分又ハ外分シタルトキ,單ニ其ノ二ツノ分ノ比トイヘバAP:BPトBP:APトノ二通リニ考ヘラル, 之ヲ區別スルタメニ前者ノ場合ニハ線分ABヲ分チタル分ノ比トイヒ,後者ノ場合ニハ線分BAヲ分チタル分ノ比トイフコトヽ定ムベシ。



例ヘバPハ線分ABヲ2:1ナル比ニ内分ス

ル點*, P' ハ AB ヲ 3:1 ナル比ニ外分スル點トスレバ, P ハ線分 BA ヲ 1:2 ナル比ニ内分スル點, P' ハ BA ヲ 1:3 ナル比ニ外分スル點ナリ。

定理 **六十二.** 線分 AB ヲ P 及ビ P' ニ於テ共ニ内分又ハ共ニ外分シタルトキ, $\frac{AP}{BP}=\frac{AP'}{BP'}$ ナラバ, P ト P' トハ相合ス。

證明 先ヅ内分ノ場合ニツイテ考フレバ,

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AP'}{BP'}$$

ナルヲ以テ

$$\frac{AP+BP}{BP}=\frac{AP'+BP'}{BP'}.\ (\text{合比ノ理})$$

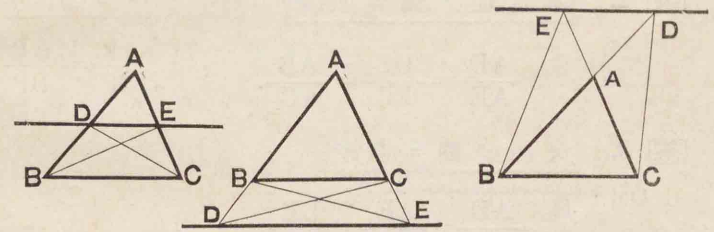
然ルニ $AP+BP=AB=AP'+BP'$.

故ニ $BP=BP'$. 依ツテ P ト P' トハ相合セザル可カラズ。

外分ノ場合ニハ除比ノ理ヲ用フレバ同様ニ證明セラル。

* 一般ニ $m:n$ ナル比ニ内分(外分)スルトハ,二ツノ分ノ比ガ $m:n$ ナル様ニ内分(外分)スルコトナリ

定理 **六十三.** 三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シキ比ニ(其ノ二邊ノ相會スル頂點ヲ一端トスル分ガ相對應スル様ニ)内分又ハ外分ス。



特述 三角形 ABC ノ一邊 BC ニ平行ナル直線ガ他ノ二邊 AB, AC 又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ夫々 D, E トス。然ルトキハ

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 BE, CD ヲ結ビ付ケヨ。DE ト BC トハ平行ナルヲ以テ

$$\triangle BDE=\triangle CDE.$$

故ニ $$\frac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\frac{\triangle ADE}{\triangle CDE}.$$

然ルニ　$\dfrac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\dfrac{AD}{DB}$,　$\dfrac{\triangle ADE}{\triangle CDE}=\dfrac{AE}{EC}$.

從ツテ　$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

系 1.　此ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ。

系 2.　本定理ノ圖ニ於テ

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$

系 3.　又同ジ圖ニ於テ

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

系 4.　二ツノ直線ガ數多ノ平行ナル直線ニヨリテ截ラルヽトキハ,其ノ相對應スル部分ノ比ハ一定ナリ。

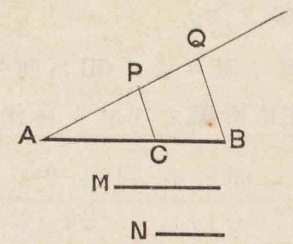
作圖題　與ヘラレタル線分ヲ與ヘラレタル比*ニ內分及ビ外分セヨ。

特述　AB ヲ與ヘラレタル線分, M:N ヲ與ヘラレタル比トス。今 AB ヲ M:N ナル比ニ內分

---

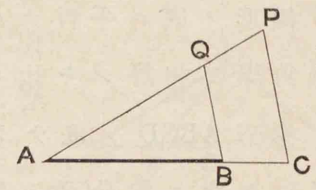
*與ヘラレタル比ハ通常二ツノ線分ニテ表サルヽモノトス。

及ビ外分セントス。

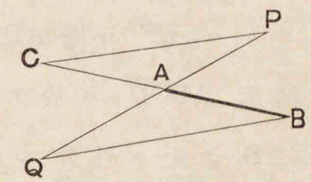


甲

作圖　A ヲ過リ, AB ト合セザル任意ノ直線ヲ引キ,其上ノ二二點 P, Q ヲ AP=M, PQ=N ナル樣ニトリ, QB ヲ結ビ, P ヲ過リ QB ニ平行ナル直線ヲ引キ,之ガ AB ト交ル點ヲ C トセヨ。C ハ卽チ求ムル點ニシテ, P ガ A ト Q トノ間ニアルトキハ(甲)內分點,然ラザルトキハ(乙,丙)外分點ナリ。



乙



丙

證明　定理六十三ニヨリテ明カナリ。

吟味　內分點ハ常ニ存在シ,外分點ハ M=N ナラザル限リ常ニ存在ス。而シテ各唯一ツニ限ル。(定理六十二)

應用　三ツノ與ヘラレタル線分ノ第四比例

項ヲ求メヨ。

(前頁ノ圖ニ於テCBハ既知ノ三ツノ線分AQ, PQ, ABノ第四比例項ナルコトニ注目セヨ)

例 題

1. 梯形ノ底ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊及ビ對角線ヲ相等シキ比ニ分ツ。

2. 梯形ABCDノ底ナラザル二邊AB, DCヲ相等シキ比ニ內分(又ハ外分)スル點ヲ夫々E, Fトスレバ, EFハ底AD, BCニ平行ナリ。

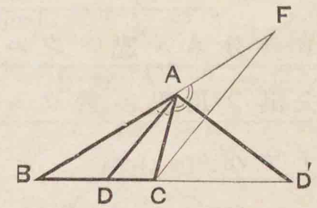
3. 梯形ABCDニ於テ底ナラザル邊BAヲBC:ADノ比ニ外分スル點ヲEトスレバC, D, Eハ同一直線上ニアリ。

4. 二ツノ與ヘラレタル線分ノ第三比例項ヲ求メヨ。

5. 與ヘラレタル角ノ邊上ニアラザル與ヘラレタル點Pヲ過ル直線ヲ引キ, 角ノ二邊ト夫夫A, B於テ交ラシメ, 比PA:PBヲ與ヘラレタル比ニ等シカラシメヨ。

54. 調和列點

定理 六十四. 三角形ノ頂角及ビ之ニ接スル外角ノ二等分線ハ夫々底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分ス。



特述 △ABCニ於テ,頂角A及ビ其ノ外角ノ二等分線ガ底邊BC又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ夫々D, D'トセヨ。然ルトキハ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}, \qquad \frac{BD'}{CD'}=\frac{AB}{AC}$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 Cヲ過リDAニ平行ニCFヲ引キ, BAノ延長トFニ於テ交ラシムレバ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{FA}.$$

而シテ $\angle AFC=\angle BAD, \quad \angle ACF=\angle DAC.$

然ルニ $\angle BAD=\angle DAC.$

故ニ $\angle AFC=\angle ACF,$ 從ツテ $FA=CA.$

故ニ $$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

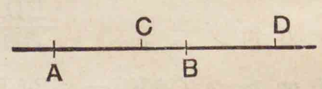
Cヲ過リ $D'A$ ニ平行線ヲ引ケバ,外角ノ二等分線ノ場合モ同様ニシテ證明セラル。

但シ $AB=AC$ ナルトキハ點 D' ハ存在セズ,此ノ場合ダケハ本定理ヨリ除外スベシ。

[系] 三角形ノ一邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分及ビ外分スル點ト之ニ對スル頂點トヲ結ベバ,夫夫其ノ頂點ニ於ケル内角及ビ外角ノ二等分線トナル。

上ノ定理ニ於ケル二點 D, D' ハ線分 BC ヲ同一ノ比ニ内分及ビ外分スル一對ノ點ナリ。一般ニ線分 AB ガ二點 C, D ニヨリテ同ジ比ニ内分及ビ外分セラルヽトキハ,線分 AB ハ C, D ニヨリテ**調和ニ分タル**トイヒ,四點 A, C, B, D ヲ**調和列點**,A ト B,C ト D ヲ各一對ノ**共軛點**トイフ。

[注意] $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}$ ナルトキハ



$$\frac{CB}{DB}=\frac{CA}{DA}$$ ナリ。(更迭ノ理)

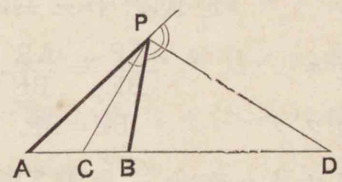
故ニ AB ガ C, D ニヨリテ調和ニ分タルヽトキハ,CD ハマタ A, B ニヨリテ調和ニ分タル。

[定理] 六十五. 二定點ヨリノ距離ノ比ガ

1ニ等シカラザル一定ノ値ヲ有スル如キ點ノ軌跡ハ一ツノ圓周ニシテ,二定點ノ間ヲ其ノ比ニ内分及ビ外分スル一對ノ共軛點ハ其ノ圓ノ一ツノ直徑ノ兩端ナリ。

之ヲあぽろにうす (Apollonius) ノ定理トイフ。

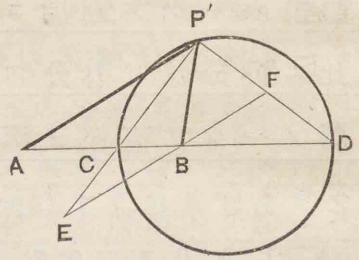
[特述] A, B ヲ二定點トシ,線分 AB ヲ一定ノ比 $m:n$ ニ内分及ビ外分スル一對ノ共軛點ヲ C 及ビ D トス。然ルトキハ $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{m}{n}$ ナル如キ點 P ノ軌跡ハ CD ヲ直徑トスル圓周ナルコトヲ證明セントス。



[證明] P ヲ斯クノ如キ一點ナリトシ,PC, PD ヲ結ベバ,コレラハ夫々角 APB 及ビソレニ隣レル外角ノ二等分線ナリ。故ニ角 CPB ト角 BPD ノ和,卽チ角 CPD ハ直角ナリ。故ニ P ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアリ。

次ニハ逆ニ CD ヲ直徑トスル圓周上ニ一點 P' ヲトリタルトキ $\dfrac{P'A}{P'B}=\dfrac{m}{n}$ ナルコトヲ證明セザ

ル可カラズ。今Bヲ過リP'Aニ平行ナル直線ヲ引キ,直線P'C, P'Dト交ル點ヲE, Fトセヨ。然ルトキハ



$$\frac{AP'}{BF}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n},$$

$$\frac{AP'}{BE}=\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}.$$

(定理六十三系3)

故ニ $$\frac{AP'}{BF}=\frac{AP'}{BE},$$

從ツテ $BF=BE.$

卽チBハ直角三角形EP'Fノ斜邊EFノ中點ナリ。

故ニ $BE=BP'.$

故ニ $$\frac{AP'}{BP'}=\frac{AP'}{BE}=\frac{m}{n}.$$

例 題

1. 線分ABガ二點C, Dニヨリテ調和ニ分タルヽトキ,線分CD, ABノ中點ヲ夫々M, Nトスレバ $MA.MB=MC^2,\quad NC.ND=NA^2.$

2. 四點A, B, C, Dガ一直線上ニ此ノ順ニアリテ調和列點ヲナストキハ

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}.$$

注意 ACヲAB, ADノ**調和中項**トイフ。

3. 四點A, B, C, Dガ一直線上ニ此ノ順ニアリテ $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AD}=\dfrac{2}{AC}$ ナルトキハ其ノ四點ハ調和列點ヲナス。

(前問2ノ逆)

4. 三角形ABCノ邊BC, CA, ABノ長サヲ夫々 a, b, c トスルトキ,角A及ビ其ノ外角ノ二等分線ガ直線BCト交ル點ヲP, Qトスレバ,線分PQノ長サ如何。

5. 底邊,高サ(又ハ頂角)及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

第三章 相似多角形

55. 相似多角形

定義 二ツノ n 角形ノ頂點ヲ夫々順次ニ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 及ビ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ トスルトキ,モシ

$$\angle A_1=\angle B_1,\quad \angle A_2=\angle B_2, \ldots\ldots,\quad \angle A_n=\angle B_n$$

ナル關係アルトキハ,兩形ハ互ニ**等角**ナリトイフ。而シテA_1トB_1, A_2トB_2, ..., A_nトB_nヲ**相對應スル頂點**トイヒ, A_1A_2トB_1B_2, A_2A_3トB_2B_3, ..., $A_{n-1}A_n$ト$B_{n-1}B_n$, A_nA_1トB_nB_1ヲ**相對應スル邊**トイフ。

二ツノn角形ガ互ニ等角ニシテ且ソノ相對應スル邊ノ比ガ皆相等シキトキハ,兩形ハ互ニ**相似**ナリトイフ。

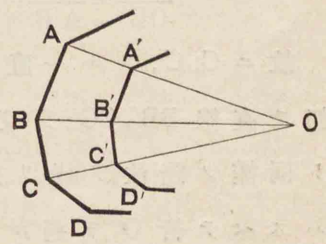
注意 1. コヽニイフ等角ハ第21節ニ定義セルモノト異リ,二ツノ多角形ニツイテイフモノナリ,混同スベカラズ。

注意 2. 二ツノn角形 $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ ガ互ニ相似ニシテ $A_1, A_2, ..., A_n$ ガ夫々 $B_1, B_2, ..., B_n$ ニ對應スルコトヲ表スニハ $A_1A_2...A_n \backsim B_1B_2...B_n$ ト記ス。

定理 六十六. 二ツノ多角形ガ互ニ相似ナルトキハ,其ノ對應邊ガ夫々平行ナル樣ニ置クコトヲ得。斯ク置キタルトキニハ,相對應スル頂點ヲ夫々結ブ直線ハスベテ平行ナルカ或ハスベテ同一ノ點ヲ過ル。

特述 $ABC... \backsim A'B'C'...$ ナルトキハ,コノ二ツ

ノ多角形ノ位置ヲ適當ニトレバ邊AB, BC, ...ヲシテ夫々邊$A'B'$, $B'C'$, ...ニ平行ナラシメ得ルコト,及ビ其ノ場合ニハ直線AA', BB', CC', ...ハスベテ平行ナルカ,又ハスベテ同一ノ點ヲ過ルコトヲ證明セントス。



證明 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ナルヲ以テ,其ノ二邊AB, BCヲ夫々$A'B'$, $B'C'$ニ平行ナル樣ニ置クコトヲ得。然ルトキハ又 $\angle BCD = \angle B'C'D'$ ナルヲ以テ,邊CDト$C'D'$トモ平行ナリ。以下次第ニ同樣ニシテ兩形ノスベテノ對應邊ガ夫々平行ナル事ガ證明セラル。

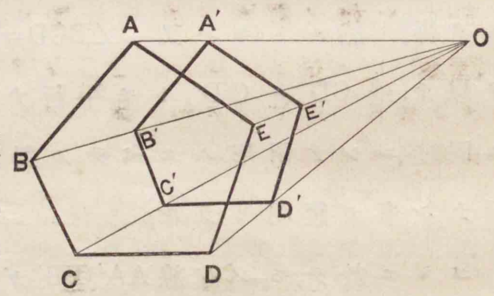
コヽニ於テ,モシ直線AA', BB'ガ平行ナリトセバ$ABB'A'$ハ平行四邊形ニシテ,從ツテ$AB=A'B'$ナリ。然ルトキハ他ノスベテノ對應邊モ夫々相等シ,即チ$BC=B'C'$, $CD=C'D'$, ...從ツテ$BCC'B'$, $CDD'C'$, ...等モ皆平行四邊形ナリ。故ニAA', BB', CC', DD', ...ハスベテ平行ナリ。(此ノ場合

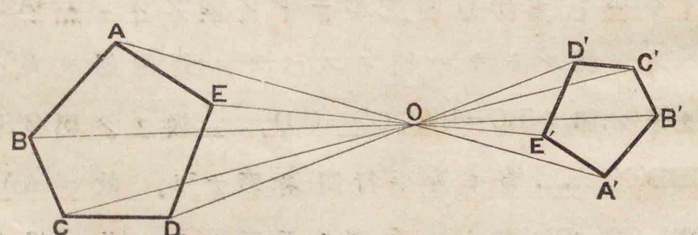
ニハ兩形ハ相似ナルノミナラズ,實ハ合同ナルモノナリ)。

モシ直線 AA′, BB′ ガ相交ルトセバ,其ノ交點ヲOトセヨ。然ルトキハ

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$ (假設及ビ定理六十三系3)

故ニ C, C′, O ハ一直線上ニアリ(第53節例題3), 卽チ直線 BB′, CC′ ノ交點モ亦Oナリ。依ツテ上ト同樣ノ論法ヲ繰リ返セバ,結局 AA′, BB′, CC′ 等ハスベテ皆 O ヲ過ルコトヲ知ル。(此ノ場合ニハ兩形ハ合同ナラズ,圖ニハ二ツノ相似五角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ニツキ二種ノ位置ヲ示ス)。





系 1. 二ツノ相似n角形ヲ各n個ノ三角形ニ分チ,兩形ニ於テ相對應スル三角形ヲ夫々互ニ相似ナラシムコトヲ得。

系 2. 二ツノ n 角形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots A_n$ 及ビ $B_1B_2B_3\ldots\ldots B_n$ ニ於テ,

$$\angle A_2=\angle B_2,\quad \angle A_3=\angle B_3,\quad \ldots\ldots,\quad \angle A_{n-1}=\angle B_{n-1},$$

$$A_1A_2:B_1B_2=A_2A_3:B_2B_3=\ldots\ldots=A_{n-1}A_n:B_{n-1}B_n$$

ナルトキハ,兩形ハ互ニ相似ナリ。(定理六十六ニ於ケル如ク兩形ヲ置キテ見ヨ)。

注意 之ニ依ツテ見レバ,二ツノ多角形ノ相似ナルタメノ條件ハ本節ノ定義ニ述ベタルヨリモヤヽ簡單ニスルコトヲ得ベシ。

例 題

1. 同ジ邊數ヲ有スル正多角形ハ互ニ相似ナリ。

2. 一角ガ相等シク,之ヲ夾ム二邊ガ比例ヲナス二ツノ平行四邊形ハ相似ナリ。

3. 二ツノ相似 n 角形ヲ各 $n-2$ 個ノ三角形ニ

分チ,兩形ニ於テ相對應スル三角形ヲ夫々互ニ相似ナラシムルコトヲ得。

4. 二ツノ相似多角形ノ周圍ノ比ハ一双ノ對應邊ノ比ニ等シ。

5. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ AB, AC(又ハ其ノ延長)ト交ル點ヲ夫々 D, E トシ,線分 BC 及ビ DE ヲ同ジ比ニ内分(又ハ外分)スル點ヲ夫々 M, N トスレバ三點 A, M, N ハ一直線上ニアリ。

56. 相似三角形

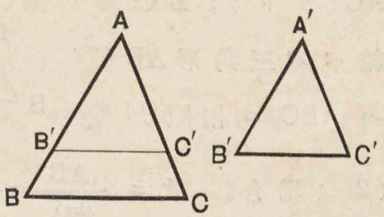
定理 六十七. 二ツノ三角形ハ次ノ各ノ場合ニ於テ互ニ相似ナリ。

(1) 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ三角形ノ二角ニ等シク,從ツテ兩形ガ等角ナルトキ。

(2) 一ツノ三角形ノ一角ト之ヲ夾ム二邊ノ比ガ夫々他ノ三角形ノ一角ト之ヲ夾ム二邊ノ比ニ等シキトキ。

(3) 一ツノ三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ト比例ヲナストキ。

證明 (1) 二ツノ三角形 ABC, $A'B'C'$ ニ於テ,先ヅ



$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$

ト假定スルトキハ,三角形 $A'B'C'$ ヲ ABC ノ上ニ重ネ,邊 $A'B'$, $A'C'$ ガ夫々邊 AB, AC ノ上ニ落ツル樣ニ置ケバ, $B'C'$ ハ BC ニ平行ナリ。故ニ

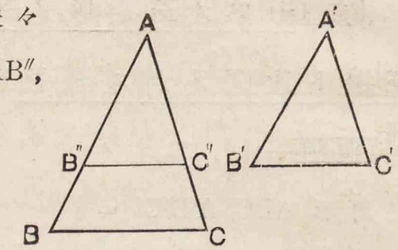
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}. \quad \text{(定理六十三)}$$

依ツテ兩三角形ハ互ニ相似ナリ。

(2) 次ニ, $\angle A=\angle A'$, $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$ ト假定シ,上ノ場合ト同樣ニ三角形 $A'B'C'$ ヲ ABC ノ上ニ重ヌルトキハ,矢張 $B'C'$ ハ BC ニ平行ナリ(定理六十三系 1)。依ツテ兩三角形ハ等角ニシテ,從ツテ(1)ニヨリ相似ナリ。

(3) 最後ニ, $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$ ト假定スルトキ

ハ,邊 AB, AC ノ上ニ夫々 $A'B'$, $A'C'$ ニ等シク AB'', AC'' ヲトリ, $B''C''$ ヲ結ベバ三角形 $AB''C''$ ハ ABC ニ相似ナリ。



((2) ノ場合)。故ニ $\dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{BC}{B''C''}$.

然ルニ $\dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

故ニ $\dfrac{BC}{B''C''}=\dfrac{BC}{B'C'}$, 從ツテ $B''C''=B'C'$.

故ニ $\triangle AB''C''\equiv\triangle A'B'C'$.

依ツテ三角形 $A'B'C'$ ト ABC トハ相似ナリ。

定理 六十八. 二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ一双ノ對應邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

證明 (學生自ラ之ヲ證明セヨ)。

系 1. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ一双ノ對應邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

系 2. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ一双ノ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シ。

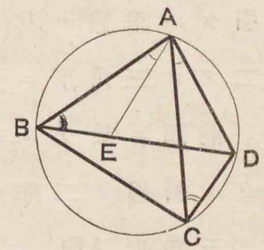
定理 六十九. 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ對角線ノ包ム矩形ニ等シ。

之ヲとれみー (Ptolemy) ノ定理トイフ。

特述 ABCD ヲ圓ニ內接スル四邊形トシ,

$$AB.CD+AD.BC=AC.BD$$

ナルコトヲ證明セントス。



證明 BD 上ニ點 E ヲ取リ $\angle BAE=\angle CAD$ ナラシムレバ定理六十七(1)ニヨリ

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$. (1)

從ツテ $AB:AC=BE:CD$,

故ニ $AB.CD=AC.BE$. (2)

次ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle AED$ トニ於テ

$\angle BAC=\angle EAD$, (作圖ニヨル)

$AB:AC=AE:AD$. ((1)ニヨル)

故ニ $\triangle ABC \backsim \triangle AED$.

從ツテ $BC:ED=AC:AD$.

故ニ $AD.BC=AC.ED$. (3)

(2) ト (3) トヨリ

$$\begin{aligned} AB.CD+AD.BC &= AC.BE+AC.ED \\ &= AC(BE+ED) \\ &= AC.BD. \end{aligned}$$

例題

1. 直角三角形ニ於テ,直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ引ケル垂線ハ,其ノ三角形ヲ原形ニ相似ナル二ツノ三角形ニ分ツ。

2. 前問ニ於ケル,垂線ハ,ソレニ依ツテ分タレタル斜邊ノ二部分ノ比例中項ナリ。

3. 三角形 ABC ニ於テ, A ヨリ邊 BC ニ引ケル垂線ノ足 D ガ B ト C トノ間ニアリテ且 AD ガ BD, DC ノ比例中項ナルトキハ,角 A ハ直角ナリ。

4. 二ツノ三角形ノ各邊ガ夫々平行ナルカ又ハ夫々垂直ナルトキハ,兩三角形ハ相似ナリ。

5. 二ツノ三角形ニ於テ一双ノ角ガ相等シク他ノ一双ノ角ガ互ニ補角ヲナストキハ此等ノ角ニ對スル邊ハ比例ヲナス。

6. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一ツノ頂點ヨリ對邊ニ引ケル垂線ト此ノ頂角ヲ夾ム二邊トノ第四比例項ナリ。

7. 圓ニ內接セザル四邊形ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ對角線ノ包ム矩形ヨリ大ナリ。

8. 三角形 ABC ノ中線 AM ニ平行ナル直線ガ AB, AC (又ハ其ノ延長) ト夫々 D, E ニ於テ交ルトキハ, AD:AE=AB:AC.

9. 二ツノ定直線ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

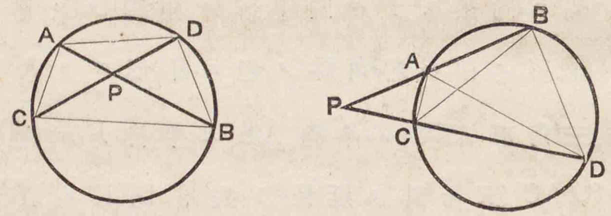
10. 一定點ト一定圓周上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ一定ノ比ニ分ツ點ノ軌跡如何。

11. 定點 A ヲ過ル任意ノ直線ガ定直線ト交ル點ヲ B トシ,與ヘラレタル三角形ト相似ナル △ABC ヲ作ルトキ,頂點 C ノ軌跡如何。

12. 一點 P ヨリ二定圓 O, O′ ノ各ニ引ケル切線ノ長サガ相等シキトキ,點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。(之ヲ二圓ノ**根軸**トイフ。)

57. 作圖題ニ於ケル應用

圓ノ內又ハ外ニアル一點Pヲ過ル二ツノ直線ガ圓周ト交ル點ヲ夫々A,B及ビC,Dトスル



トキハ,定理六十七ニヨリ

$$\triangle PAC \backsim \triangle PDB,$$

又 $$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$$

ナルコト明カナリ。之ヨリ次ノ比例式ヲ得。

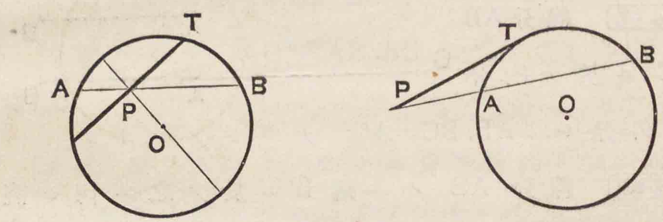
$$PA:PC=PD:PB.$$

從ッテ $$PA.PB=PC.PD.$$

依ッテ次ノ定理ヲ得。

定理 七十. 圓ノ弦又ハ其ノ延長ガ一定點ヲ過ルトキハ,其ノ定點ニヨリテ內分又ハ外分セラレタル弦ノ二ツノ分ノ積ハ一定ナリ。

系 1. 本定理ニイフ所ノ一定ノ積ハ,定點Pガ圓內ニアルトキハPヲ過ル直徑ニ垂直ナル弦ノ半分PTノ平方ニ等シク,又Pガ圓外ニアルトキハPヨリ圓ニ引キタル切線ノ長サ(定點Pヨリ切點Tマデノ距離)ノ平方ニ等シ。



卽チ $$PA.PB=PT^2.$$

系 2. 二ツノ線分AB, CD又ハ兩線分ノ延長ガ一點Pニ於テ相交リ$PA.PB=PC.PD$ナルトキハ,四點A,B,C,Dハ同一圓周上ニアリ。

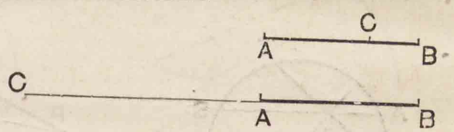
系 3. 線分BAノ延長上ノ一點Pヨリ他ノ線分PTヲ引キタルトキ,$PA.PB=PT^2$ナラバ三點A,B,Tヲ過ル圓ハTニ於テPTニ切ス。

作圖題 1. 二ツノ線分ノ比例中項ヲ求ム。

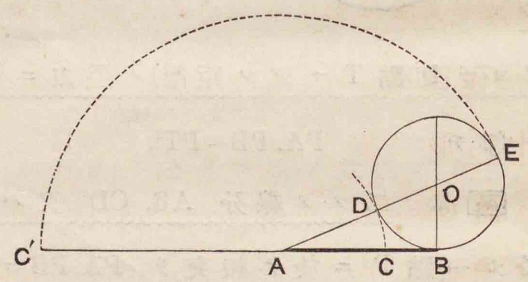
(學生自ラ之ヲ試ミヨ)。

［作圖題］ 2. **與ヘラレタル線分ヲ內分又ハ外分シ全線分ト其ノ一ツノ分トノ積ヲ他ノ分ノ平方ニ等シカラシメヨ。**

［特述］ 線分ABヲCニ於テ內分又ハ外分シ, $AB.BC=AC^2$ ナラシメントス。



［作圖］ 線分ABノ一端Bニ於テ之ニ切シ直徑ガABニ等シキ圓ヲ畫キ, Aト其ノ圓ノ中心Oトヲ過ル直線ト圓周トノ交點ヲD, Eトス。Aヲ中心トシAD又ハAEヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, AB又ハ其ノ延長トノ交點ヲ夫々C又ハC′トスレバ,コレ卽チ求ムル分點ナリ。



［證明］ 定理七十ニヨリ,

$$AD.AE=AB^2.$$

然ルニ $AD=AC,$

又 $AE=AD+DE=AC+AB.$

故ニ $AC(AC+AB)=AB^2.$

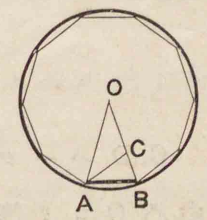
依ツテ $AC^2=AB^2-AC.AB=AB(AB-AC)$

$$=AB.BC.$$

同樣ニシテ $AC'^2=AB.BC'$ ナルコトモ證明セラル。

［注意］ 線分ヲ斯クノ如クニ分ツコトヲ**中末比ニ分ツ**又ハ**黃金分割**ト云ヒ,種々ノ場合ニ應用セラル。

［作圖題］ 3. **與ヘラレタル圓ニ內接スル正十角形ヲ畫ケ。**



圓Oニ內接スル正十角形ノ一邊ヲABトスレバ,

$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ,$$

從ツテ $\angle OAB=\angle OBA=72^\circ.$

故ニ角OABノ二等分線ACヲ引クトキハ,

$$\triangle ABC \backsim \triangle OAB$$

ナルコトハ容易ニ證明セラル。依ツテ

$$BC:AB=AB:OB.$$

然ルニ三角形 COA, ABC ハ何レモ二等邊ニシテ

$$AB = CA = OC$$

ナルヲ以テ $BC : OC = OC : OB.$

卽チ $OB.BC = OC^2.$

故ニ與ヘラレタル圓ノ半徑ヲCニ於テ斯クノ如クニ内分スレバ(黄金分割), OC ハ卽チ此ノ圓ニ内接スル正十角形ノ一邊ニ等シ。

(作圖,證明) 學生自ラ之ヲ試ミヨ。

應用 1. 正十五角形ヲ作圖セヨ。

$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}\right.$ ナルコトヲ利用セヨ。$\left.\right)$

應用 2. 直角ヲ五等分セヨ。

例 題

1. C, D ハ一ツノ半圓ノ直徑上ニ在リテ其ノ中心 O ヨリ等距離ニ在ル二ツノ定點ナリ。任意ノ平行線 CP, DQ ヲ引キ半圓ノ周トノ交點ヲ P, Q トスルトキハ,矩形 CP. DQ ハ一定ナリ。

2. 與ヘラレタル多角形ト相似ニシテ,且ソレ

トノ面積ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ多角形ヲ作レ。

3. 與ヘラレタル三角形ノ面積ヲ其ノ一邊ニ平行ナル直線ニテ二等分セヨ。

4. 二定點ヲ過リ,且一定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

5. 二定點ヲ過リ,且一定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。

6. 正五角形ニ於テ同一ノ頂點ヲ過ラザル二ツノ對角線ハ互ニ中末比ニ内分セラル。

7. 與ヘラレタル線分ノ長サヲ a トセバ,黄金分割ニ於ケル各ノ分ノ長サ如何。

8. 24°ノ大サヲ有スル角ヲ作レ。

9. 與ヘラレタル線分ヲ一邊トスル正十角形ヲ畫ケ。

10. 與ヘラレタル圓ニ内接スル正五角形,及ビ與ヘラレタル一邊ヲ有スル正五角形ヲ畫ケ。

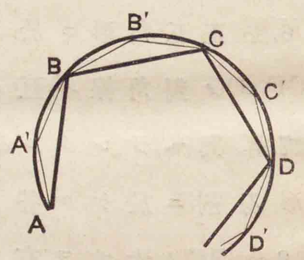
11. 與ヘラレタル三角形ヲ其ノ一邊ニ垂直ナル直線ニヨリテ二等分セヨ。

第四章

正多角形ニ關スル計算

58. 作圖シ得ル正多角形

正n角形ABCD……ノ外接圓ノ弧AB, BC, CD, ……ヲ各二等分シ,其ノ分點ヲ夫々 A′, B′, C′,……トスレバ, AA′BB′CC′D……ナル多角形ガ正$2n$角形ナルコトハ容易ニ證明セラル。故ニ正n角形ガ作圖セラルヽトキハ從ツテ正$2n$角形,正$4n$角形等,一般ニ正$2^h n$角形(hハ任意ノ正ノ整數)ヲ作圖スルコトヲ得。

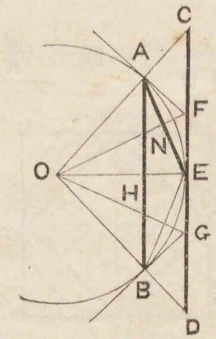


サテ正三角形,正四角形(正方形)ハ容易ニ作圖シ得,又正五角形,正十五角形モ作圖シ得。從ツテ次ノ邊數ヲ有スル正多角形ハ今マデ學ビタル所ニテスベテ作圖スルコトヲ得ルモノナリ。

$$3.2^h,\quad 4.2^h,\quad 5.2^h,\quad 15.2^h.$$

59. 一ツノ圓ノ外接及ビ內接正多角形ノ周圍ノ計算

中心Oナル圓ニ於テ,內接正n角形ノ一邊ヲAB,外接正n角形ノ一邊ヲCDトシ,且CDノ切點Eハ弧ABノ中點ニアリトス。A及ビBニ於ケル此ノ圓ノ切線ガCDト交ル點ヲ夫々F及ビGトスレバ, OF, OGガ夫々角COE, DOEノ二等分線ナルコト,從ツテ又FGガ外接正$2n$角形ノ一邊ナルコトハ容易ニ證明セラル。



今同ジ圓ニ於ケル

外接正n角形ノ周ヲP,內接正n角形ノ周ヲp,

外接正$2n$角形ノ周ヲP_1,內接正$2n$角形ノ周ヲp_1トスレバ,

$$CD=2.CE=\frac{P}{n},\qquad FG=2.FE=\frac{P_1}{2n},$$

$$AB=2.AH=\frac{p}{n},\qquad AE=2.EN=\frac{p_1}{2n}.$$

サテ　　$\triangle COD \backsim \triangle AOB$

ナルヲ以テ $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OC}{OE}=\dfrac{CF}{FE}$.（定理六十四）

故ニ $\dfrac{AB+CD}{AB}=\dfrac{CF+FE}{FE}=\dfrac{CE}{FE}$,

卽チ $$\frac{\frac{p}{n}+\frac{P}{n}}{\frac{p}{n}}=\frac{\frac{P}{2n}}{\frac{P_1}{4n}}.$$

故ニ $$\frac{p+P}{p}=\frac{2P}{P_1},$$

從ツテ $$P_1=\frac{2pP}{p+P}$$

ヲ得。卽チ P_1 ハ p ト P トノ調和中項ナリ。

又 $\triangle AHE \backsim \triangle ENF$

ナルヲ以テ $\dfrac{AH}{AE}=\dfrac{EN}{EF}$.

卽チ $$\frac{\frac{p}{2n}}{\frac{p_1}{2n}}=\frac{\frac{p_1}{4n}}{\frac{P_1}{4n}}.$$

故ニ $$\frac{p}{p_1}=\frac{p_1}{P_1}.$$

從ツテ $$p_1=\sqrt{pP_1}$$

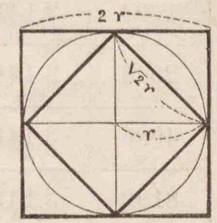
ヲ得。卽チ p_1 ハ p ト P_1 トノ比例中項ナリ。

故ニ一ツノ圓ニ外接及ビ內接スル二ツノ正

n 角形ノ周 P 及ビ p ヨリ始メテ逐次ニ相連續スル二數ノ調和中項及ビ比例中項ヲ交互ニ取リテ進ムトキ得ル一列ノ數

$$P,\ p,\ P_1,\ p_1,\ P_2,\ p_2,\ \ldots\ldots$$

ヲ作ルトキハ, P_h, p_h ハ夫々同ジ圓ノ外接及ビ內接正 $2^h n$ 角形ノ周ナリ。



半徑 r（直徑 $2r$）ナル圓ニ外接及ビ內接スル二ツノ正方形ノ周ヲ考フレバ,

$$P=2r\times 4,$$

$$p=4\sqrt{2}\,r=2\sqrt{2}\times 2r=2.8284271\times 2r$$

ナルコトハ容易ニ計算セラル。之ヨリ始メテ上記ノ理ニヨリ順次ニ同ジ圓ニ外接及ビ內接スル正八,十六,……角形ノ周ヲ計算スレバ下表ノ如シ。

邊數	外接正多角形ノ周	內接正多角形ノ周
4	4.0000000 $\times 2r$	2.8284271 $\times 2r$
8	3.3137085 $\times 2r$	3.0614675 $\times 2r$
16	3.1825979 $\times 2r$	3.1214452 $\times 2r$
32	3.1517249 $\times 2r$	3.1365485 $\times 2r$

64	3.1441184 $\times 2r$	3.1403312 $\times 2r$
128	3.1422236 $\times 2r$	3.1412773 $\times 2r$
256	3.1417504 $\times 2r$	3.1415138 $\times 2r$
512	3.1416321 $\times 2r$	3.1415729 $\times 2r$
1024	3.1416025 $\times 2r$	3.1415877 $\times 2r$
2048	3.1415951 $\times 2r$	3.1415914 $\times 2r$
4096	3.1415933 $\times 2r$	3.1415923 $\times 2r$
8192	3.1415928 $\times 2r$	3.1415926 $\times 2r$

例 題

1. 第203頁ノ圖ニ於テ,圓 O ノ半徑ヲ r トシ,又 $AB=a$, $CD=b$ トスレバ,

$$OH=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$ ニシテ,且 $\frac{CE}{OE}=\frac{AH}{OH}$

ナル關係アリ。之ニヨリテ次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$a=\frac{2rb}{\sqrt{b^2+4r^2}},\qquad b=\frac{2ra}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

2. 更ニ同ジ圖ニ於テ, EO ノ延長ガ再ビ圓ト交ル點ヲ K トスレバ

$$AE^2=EH.\,EK$$

ニシテ,コヽニ

$$EH=r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\qquad EK=2r$$

ナルコトニ注目シ,依ツテ

$$AB=a,\qquad AE=a'$$

トスレバ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

$$a'=\sqrt{r\left(2r-\sqrt{4r^2-a^2}\right)},$$

$$a=\frac{a'\sqrt{4r^2-a'^2}}{r}.$$

第五章 圓ニ關スル計算

60. 圓周ノ長サ

$\boxed{\text{定義}}$ 一ツノ圓ニ外接スル正 n 角形ノ周ガ同ジ圓ニ內接スル正 n 角形ノ周ヨリ大ナルコトハ容易ニ證明セラル。而シテ其ノ邊數 n ヲ增ストキハ外接形ノ周ハ次第ニ小トナリ,內接形ノ周ハ次第ニ大トナリ,或ル共通ノ値ニ限リナク接近シ來ル。其ノ共通ノ値ヲ圓周ノ長サトス。

扨前節ノ終リニ擧ゲタル表ニヨレバ,一ツノ圓ノ外接及ビ内接正多角形ノ周ノ其ノ圓ノ直徑ニ對スル比ノ値ハ,邊數ガ漸々增加スルニ從ツテ外接ノ場合ト内接ノ場合トハ次第ニ相接近シ,ツイニ邊數ガ 8192 ナルニ至レバ此ノ二種ノ比ノ値ハ小數第六位マデハ全ク一致スルヲ見ル, 故ニ圓周ノ長サハ直徑ノ約 3.141592 倍ナリ。ナホ外接及ビ内接正多角形ノ邊數ヲ增加シテ見レバ上記ノ二種ノ比ノ値ハ小數點以下更ニ多クノ桁數マデ相一致スベク,從ツテ圓周ノ其ノ直徑ニ對スル比ノ値ヲ更ニ精シク定ムルコトヲ得ベシ。此ノ比ノ値ガ實ハ無理數ニシテ有限ナル桁數ノ小數ヲ以テ正シク表スヲ得ザルコトハ高等數學ノ證明スル所ナリ。

通常此ノ比ノ値ヲ π(パイ)ナルぎりしや文字ニテ表ス。

以上ノ結果ニヨリ次ノ定理ヲ得。

定理 七十一. 半徑 r ナル圓周ノ長サハ $2\pi r$ ナリ。

系 圓周ノ長サハ其ノ半徑(又ハ直徑)ニ比例ス。

注意 圓周ノ其ノ直徑ニ對スル比ノ値(卽チ π)ヲ圓周率トイフ。其ノ値ハ今日ニテハ小數點以下七百七位マデ算出セラレタリ。試ミニ其ノ最初ノ若干位ヲ擧グレバ次ノ如シ。

$$\pi=3.14159265358979323846264338327 9\ldots\ldots$$

然レドモ實用ニハ大抵 3.1416 ナル近似値ヲ用フ。又屢分數 $\dfrac{22}{7}=3.1428\ldots\ldots$ 及ビ $\dfrac{355}{113}=3.14159292\ldots\ldots$ ヲ用フルコトアリ。

例 題

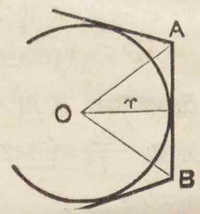
1. 半徑 120 m ナル圓周ノ長サヲ計算セヨ。
但シ圓周率ノ近似數トシテ 3.1416 ヲ用ヒ,でしめーとる位未滿ヲ四捨五入セヨ。
2. 周圍 300 m ナル圓形ノ池ノ直徑ヲ米ノ小數一位マデ正シク求メヨ。
3. 半徑 r ナル圓ニ於テ,長サ l ナル弧ニ對スル中心角ノ度數ヲ求メヨ。

61. 圓ノ面積

圓ノ面積ハ之ニ内接スル正多角形ノ面積ヲ

リモ大ニシテ又外接スル正多角形ノ面積ヨリモ小ナルコト明カナリ。而シテ邊數ヲ限リナク增ストキハ兩多角形ノ面積ハ或ル共通ノ値ニ限リナク接近ス。コレ卽チ圓ノ面積ナリ。

半徑 r ナル圓ノ中心ヲO,之ニ外接スル正 n 角形ノ一邊ヲABトスレバ,



$$\triangle AOB=\frac{1}{2}AB.r.$$

今此ノ正 n 角形ノ面積ヲSトスレバ,

$$S=n.\triangle AOB=\frac{1}{2}n.AB.r.$$

然ルニ $n.AB$ ハ正 n 角形ノ周ニ他ナラズ,之ヲPニテ表セバ,

$$S=\frac{1}{2}Pr$$

トナル。コヽニ於テ邊數 n ヲ限リナク增ストキハ,Pハ圓周ノ長サ卽チ $2\pi r$ ニ限リナク接近ス。依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 七十二. 半徑 r ナル圓ノ面積ハ πr^2 ナリ。

系 圓ノ面積ハ其ノ半徑(又ハ直徑)ノ平方ニ比例ス。

扨第49節ノ例題1ニヨリ,一ツノ圓ニ於ケル扇形ノ面積ハ之ニ屬スル弧ノ長サニ比例スルコトヲ知ル。故ニ今半徑 r ナル圓ノ面積ヲS,同ジ圓ニ於テ a ナル長サノ弧ヲ有スル扇形ノ面積ヲAトスレバ,

$$\frac{A}{S}=\frac{a}{2\pi r},$$

故ニ $$A=\frac{a}{2\pi r}S=\frac{a}{2\pi r}\pi r^2=\frac{ar}{2}.$$

依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 七十三. 扇形ノ面積ハ其ノ半徑ノ長サト弧ノ長サトノ積ノ半分ニ等シ。

例題

1. 一邊ノ長サ1cmナル正方形ニ外接スル圓ノ面積如何。

2. 一平方米ノ面積ヲ有スル圓ノ直徑ヲ求メヨ,但シ糎位未滿ハ四捨五入スベシ。

3. 周圍 P ナル圓ノ面積ハ $\frac{P^2}{4\pi}$ ナリ。

4. 半徑 r, 中心角 α 度ナル扇形ノ面積如何。

5. 半徑 r ナル圓板アリ,之ニ圓形ノ穴ヲ穿チ殘部ノ面積ヲ始メノ面積ノ $\frac{3}{4}$ ナラシメントス。穴ノ半徑ヲ何程トスベキカ。

6. 三ツノ圓周ノ和(又ハ二圓周ノ和ト第三圓周トノ差)ニ等シキ一ツノ圓周ヲ作レ。

7. 與ヘラレタル二圓ノ和(又ハ差)ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

雜題

1. 四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ交點ヲ O トスルトキハ, $\triangle ABD : \triangle BCD = AO : CO$.

2. CA, CB ハ一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル半徑, DE ハ任意ノ弦ナリ。BD, BE ガ AC ト夫々 F, G ニ於テ交レバ $\triangle BFG$, $\triangle BDE$ ハ相似ナリ。

3. $\triangle ABC$ ニ於テ BC ノ中點ヲ D トシ, $\angle ADB$, $\angle ADC$ ノ二等分線ガ夫々 AB, AC ト交ル點ヲ E, F トスレバ, EF ト BC トハ平行ナリ。又コノ逆ハ如何。

4. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB 上ニ一點 D ヲトリ $AD.DB = CD^2$ ナラシムルトキ, D ハ AB ノ中點ナルカ,或ハ CD ハ AB ニ垂直ナリ。

5. 與ヘラレタル一點ヲ過ル一直線ヲ引キ此ノ直線ト他ノ與ヘラレタル二點トノ距離ヲシテ與ヘラレタル比ヲ有セシメヨ。

6. 與ヘラレタル三角形ノ一邊ニ平行線ヲ引キ,之ニヨリテ截ラレタル他ノ二邊ノ一双ノ對應部分ノ和(又ハ差)ヲシテ與ヘラレタル長サヲ有セシメヨ。

7. 圓周上ノ二ツノ與ヘラレタル點ノ各ヲ過リ,互ニ平行ニシテ且ツソノ長サガ與ヘラレタル比ヲ有スル如キ弦ヲ引ケ。

8. 三角形ノ一邊,他ノ二邊ノ比及ビ一角ガ與ヘラレタルトキ,此ノ三角形ヲ作レ。

9. 與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作レ。

10. △ABC ノ ∠A (又ハ其ノ外角)ノ二等分線ガ BC (又ハ其ノ延長)及ビ其ノ外接圓周ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ, AB. AC＝AD. AE.

11. 三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ二點 P, Q アリ, P ヨリ二邊 AB, AC ニ至ル距離ノ積ト, Q ヨリ二邊 AB, AC ニ至ル距離ノ積ト相等シキトキハ, BP ハ QC ニ等シ。

12. 底邊ト高サトノ和(又ハ差)及ビ頂角ヲ知リテ二等邊三角形ヲ作レ。

13. 三角形 ABC ノ邊 AB 上ニ二點 D, E ヲ, 邊 AC 上ニ三點 F, G, H ヲ, 邊 BC 上ニ一點 K ヲトリ, AD＝DE＝EB, AF＝FG＝GH＝HC, BK＝KC ナラシムルトキ, 四邊形 DEGF ト五邊形 EBKHG トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

14. 半徑 a ナル圓ニ於テ 120° ヲ含ム弓形ノ面積ヲ求メヨ。

高二
山崎達朗

昭和三年六月廿七日印刷
昭和三年六月三十日發行
昭和三年十月十日修正再版印刷
昭和三年十月十三日修正再版發行

不許複製
新制平面幾何
定價金六十一錢

昭和五年度臨時定價 金九拾九錢

著作者 竹内端三

東京市神田區通神保町一番地
發行兼印刷者 株式會社 三省堂
代表者 神保周藏

東京市外蒲田
印刷所 株式會社 三省堂蒲田工場

東京市神田區通神保町一番地
發行所 株式會社 三省堂
(振替東京三一五五五)
大阪市南區順慶町通一丁目
株式會社 三省堂大阪支店
(振替大阪八一三〇〇)

[蒲田製本]

商工専校・豫科二年

荒田正義

島根県松江市雑賀[illegible]

松江中二学年

荒田俊一

SSD