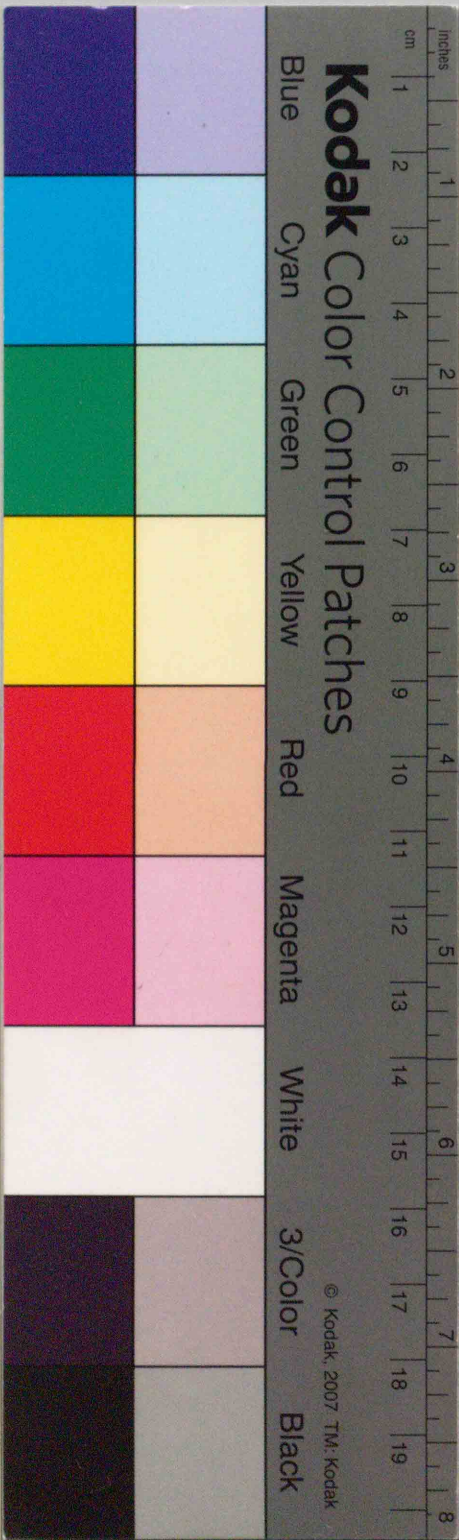


40167

教科書文庫

4
413
41-1929
2000.0 80479



Kodak Color Control Patches

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

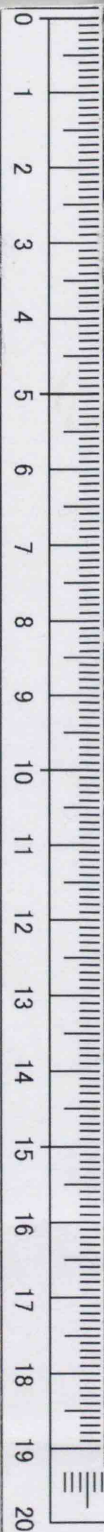
© Kodak, 2007 TM: Kodak

Kodak Gray Scale

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19



© Kodak, 2007 TM: Kodak



広島大学図書

2000080479



新制
平面幾何教科書
理學博士 林鶴一 著

4a
413
BBX

教科書文庫
4
413
41-1929
2000080479

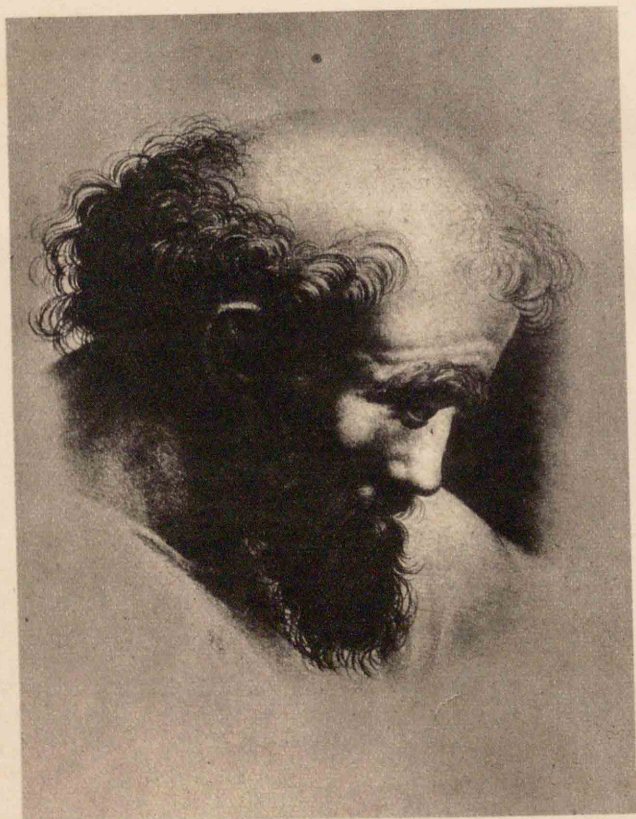
資料室

Pythagoras (569—500 B.C. 頃)

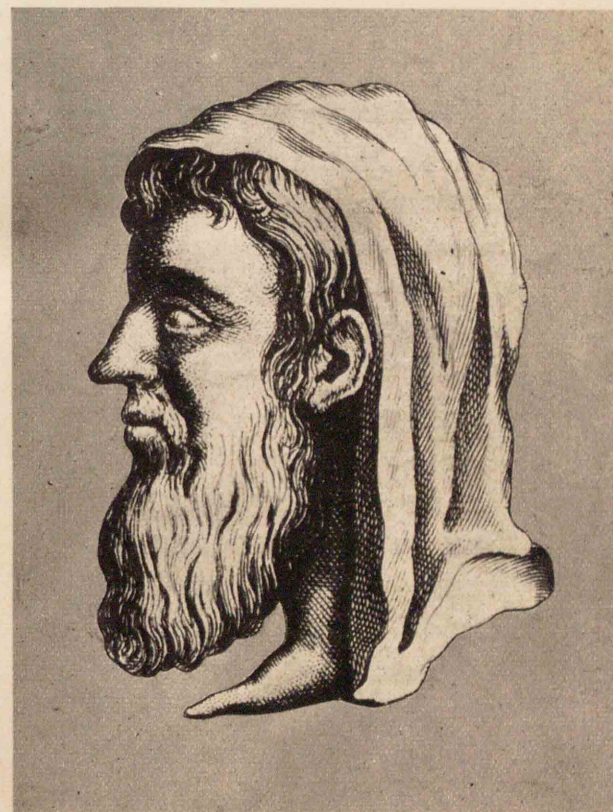
びたごらすハ地中海ノさもす Samos
島ニ生レ希臘及ビ埃及ニ遊學シ、後南伊
太利ノくろとん Croton ニ學舎ヲ開設シ
多數ノ學徒ヲ教養シタ。コノ學校ハ實ニ
氏ノ名ヲ不朽ナラシメタモノデ、氏ハコ
コデ數學、倫理學及ビ哲學ヲ講シタガ常
ニ聽衆ハ堂ニ溢レタトイフ。

氏ハ數學ヲ四ツノ部門(靜止量學即チ
幾何學、運動量學即チ力學、算術及ビ應用
數學)ニ分ケ、又倫理學及ビ哲學ハ皆數學
ヲ基礎トシテ立論シタ。

本書ニ掲ゲタ所謂びたごらすノ定理ハ
氏ノ發見ニヨルト傳ヘラレル重要ナ定理
デアアル。



Pythagoras



Euclid

Euclid (330—275 B.C. 頃)

あれきさんどる Alexander 王ノ死
(323 B.C. 頃) 後, ソノ屬將ぶとれめうす
Ptolemäus ハ埃及王ニ封セラレ, あれき
さんどりあ Alexandria ナ首府ト定メ,
ココニ世界最初ノ大學ヲ起シ, 當時ノ賢
人碩學ヲ招聘シタ。ヱーくりッドハソノ
トキ希臘本國ヨリ招カレテコノ大學最初
ノ教授トナツタ大數學者デアアル。

氏ノ編纂シタ幾何學教科書ハ世界最初
ノ整頓シタ教科書トシテ爾後二千年間殆
ド原版ノママ各國語ニ翻譯サレ, ヱーク
リッドノ名ハ實ニ幾何學ナル語ニ代用サ
レルニ到ツタ。コレヲ以テモ如何ニ氏が
偉大ナ學者デアツタカガ想像サレタ。

文 部 省 検 定 済

昭和四年十一月七日 中學校數學科用
昭和八年三月十八日 實業學校數學科用

新 制 平面幾何教科書

東北帝國大學名譽教授

理 學 博 士

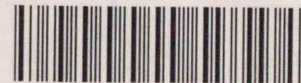
林 鶴 一

著



広島大学図書

2000080479



東京開成館

目次

緒論	[1—4]
----	-------

第一篇 簡單ナル圖形	[5—48]
------------	--------

第一章 角	5
第二章 幾何學ノ考究法	15
第三章 三角形ノ合同	23
第四章 圓ノ基本性質	33
第五章 作圖題	38

第二篇 直線圖形	[49—94]
----------	---------

第一章 平行線	49
第二章 三角形	57
第三章 平行四邊形	77

第三篇 圓	[95—139]
-------	----------

第一章 中心角・圓周角	95
第二章 割線・切線	109
第三章 ニツノ圓	119
第四章 內接形・外接形	129

第四篇 軌 跡 [140—151]

第五篇 面 積 [152—173]

- 第一章 矩形ノ面積 …… 152
 第二章 多角形ノ面積 …… 159
 第三章 三角形ノ邊ノ平方 …… 165

第六篇 比 例 [174—217]

- 第一章 基本ノ定理 …… 174
 第二章 線分ノ比例 …… 177
 第三章 相似形 …… 188
 第四章 面積ノ比 …… 202

第七篇 圓ノ周及ビ面積 [218—226]

補充問題

[1—40]

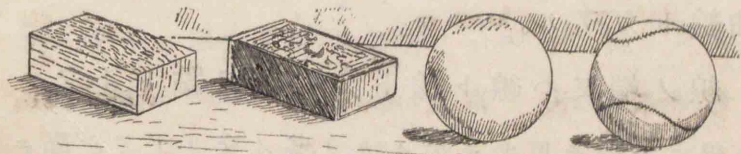
新 制

平面幾何教科書

緒 論

1. 立 體

スベテ物體ニ就イテハ之ヲ構成スル物質ノ色、目方、硬サ等ノ事ガ考ヘラレルガ、此等ノ事ニハ關係ナク、タゞ其ノ形狀、大サ及ビ位置ダケニ就イテ考ヘルトキハ、之ヲ立體トイフ。



物體ガ立體トシテ考ヘラレルノハ物體ニ境ガアルカラデアル。物體ノ境ハ又立體ノ境デアル。

立體ノ境ヲ面又ハ表面トイフ。

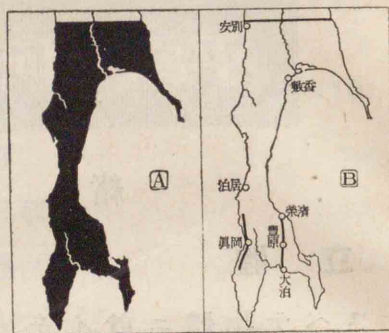
面ニハ平ラナ面即チ平面ト曲ツタ面即チ曲面トガアル。

何レノ面モ廣サハアルガ厚サハナイ。

面ノ境又ハ面ト面
トノ交リヲ線トイフ。

圖Aノ白イ部分ト黒
イ部分トノ境ノヤウニ
線ニハ長サハアルガ幅
モ厚サモナイ。然シ幅
モ厚サモナイモノヲ書

キ表ハスコトハ困難デアルカラ、通常圖Bノヤウニ
細ク書イテ之ヲ示ス。



線ニハ眞直ナ線即チ直線ト曲ツタ線即チ
曲線トガアル。

線ノ端又ハ線ト線トノ交リヲ點トイフ。

線ニハ幅モ厚サモナイカラ、其ノ交リデアル點ニ
ハ位置ダケアツテ大サハナイ。然シ大サノナイモノ
ヲ書キ表ハスコトハデキナイカラ、之ヲ・又ハ×デ
示シ、之ニA, B, C等ノ文字ヲ附ケ、點A, 點B等ト呼ブ。

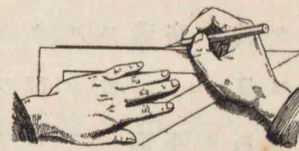
2. 直 線

小サナ孔カラ暗室ニ差込ム光線ヲ強ク引張ツタ
絲ハ直線狀ヲ示ス。

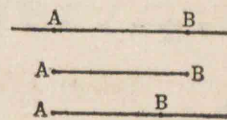
直線ヲ畫クニハ直線定木又ハ三角定木ヲ用ヒル。
一ツノ點ヲ通ル直線ハ幾本デモ引ケルガ、

二ツノ點ヲ通ル直線ハ一本シカ引ケナイ。

依ツテ直線ハ其ノ上ノ任意ノ二點ヲ示ス文字例ヘ
バA, Bヲ用ヒ、直線ABノヤ
ウニ書キ表ハス。



直線ハ双方ヘ限リナク長
イモノデアル。若シ其ノ一
部分ヲ取ルトキハ之ヲ線分
トイヒ、殘リノ部分ヲ其ノ延



長トイフ。線分ハ其ノ兩端ヲ示ス文字例ヘバA, B
ヲ用ヒ、線分ABノヤウニ書ク。時ニハ直線L, 線分l
ノヤウニ一ツノ文字ヲ以テ書キ表ハスコトモアル。

注意 線分ヲ有限直線トイヒ、之ニ對シテ双方ヘ限リナ
ク長イ直線ヲ無限直線トイフ。又一點カラ一方ニ
限リナク長イ直線ヲ半直線トモイフ。

二點A, Bヲ兩端トスル線分ヲ引クコトヲ二點A,
Bヲ結ブトイヒ、二點ヲ結ブ線分ノ長サヲ其ノ二點
間ノ距離トイフ。

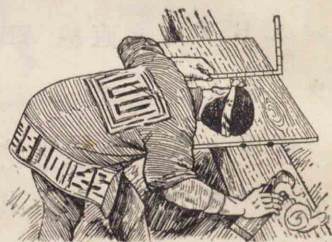
二點ヲ結ブ線分ハ其ノ二點間ノ最短通路デアル。

3. 平面

鏡ノ面ヤ静カナ水面ハ平面ヲ示ス。平面上ニ定木ヲ當テルト全クソレニ密着スル。故ニ

平面上ノ二點ヲ通ル直線ハ全ク其ノ面上ニアル。

大工ガさしがねヲ板ニ當テ其ノ密着スルカドウカヲ見ルノハ、此ノ理ヲ應用シ板ガ平面デアアルカドウカヲ檢スルタメデアル。



4. 圖形

立體、面、線、點又ハ其等ノ集合ヲ圖形トイフ。直線ダケノ圖形ヲ直線圖形トイヒ、同ジ平面上ニアル圖形ヲ平面圖形トイフ。

幾何學ハ圖形ノ性質ヲ考究スル學問デ、其ノ平面圖形ダケヲ考究スルモノヲ平面幾何學トイヒ、同ジ平面上ニナイ圖形ヲ考究スルモノヲ立體幾何學トイフ。

幾何學ハ初メ土地ヲ測量スル目的デ研究サレ、ソレガ次第ニ發達シタモノデアル。

第一篇

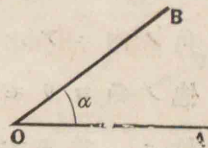
簡單ナル圖形

第一章 角

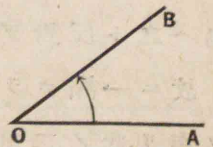
5. 角

一點カラ出ル二ツノ半直線デ出來ル圖形ヲ角トイヒ、其ノ點ヲ角ノ頂點、其ノ二ツノ半直線ヲ角ノ邊トイフ。

例ヘバ圖ノヤウニ一點 O カラ出ル二ツノ半直線 OA, OB ハ角ヲ作ル。此ノ角ヲ二邊 OA, OB ノ夾角又ハ其ノ夾角トイヒ、之ヲ角 AOB 又ハ角 BOA ト呼ビ、 $\angle AOB$ 又ハ $\angle BOA$ ト書ク。但シ紛レル虞ノナイトキハ單ニ一ツノ文字ヲ用ヒ、角 O 或ハ角 α トイヒ、之ヲ $\angle O$ 又ハ $\angle \alpha$ ト書ク。

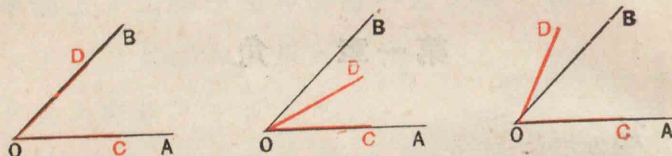


一ツノ平面上ニ半直線 OA ガ一端 O ヲ中心トシ、初メノ位置 OA カラ OB マデ廻轉シタトキ、 OA ハ角 AOB ダケ廻轉シタ又ハ角 AOB ヲ畫イタトイフ。



ソシテ其ノ廻轉ノ量ヲ角 AOB ノ大サトイフ。

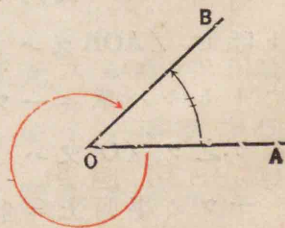
又此ノ廻轉デ OA ノ通過シタ平面ノ部分ヲ角ノ内部トイヒ、他ノ部分ヲ角ノ外部トイフ。



一ツノ角ヲ他ノ角ノ上ニ置イテ頂點ト一邊トヲ重ネ合ハセタトキ、他ノ邊モ亦重ナルトキハ此ノ二ツノ角ハ相等シイトイヒ、一ツノ角ノ第二ノ邊ガ他ノ角ノ内ニアルカ、又ハ外ニアルカニヨツテ、其ノ角ハ他ノ角ヨリモ小デアル、又ハ大デアルトイフ。

故ニ 角ノ大サハ二邊ノ長サニハ關係シナイ。

又 OA ヲ廻轉シテ OB ノ位置ニ至ラシメルニ二ツノ途ガアル。即チ右ノ圖ニ示ス通り一ツハ時計ノ針ノ廻轉ト同ジデ、



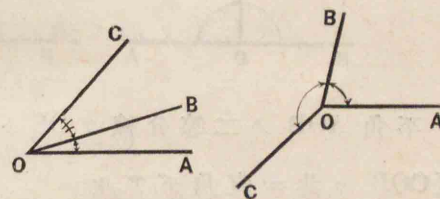
他ハ之ト反對デアル。
故ニ一點カラ出ル二ツノ半直線ハ常ニ二ツノ角ヲ作り、此ノ二角ハ頂點ト邊トガ共通デアル。此ノヤウナ二角ハ互ニ共軛角デアルトイヒ、大ナル方ヲ

優角、小ナル方ヲ劣角トイフ。ケレドモ單ニ角トイフトキニハ通例其ノ劣角ヲ指スモノトスル。

6. 接 角

頂點ト一邊トガ共通デ且其ノ共通邊ノ兩側ニアル二角ヲ

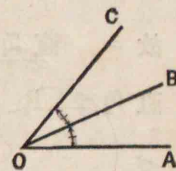
接角又ハ隣接角トイフ。



右ニ示ス圖ニ於

テ $\angle AOB$ ト $\angle BOC$ トハ接角デアル。

角ノ頂點ヲ過ギ、之ヲ相等シイ接角ニ分ケル直線ヲ此ノ角ノ二等分線トイフ。

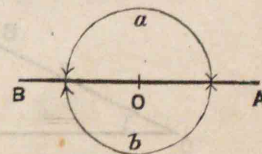


角ノ二等分線ハタバーツシカナイ。

紙ヲ折ツテ角ノ二等分線ヲ作ツテミヨ。

7. 平角・直角

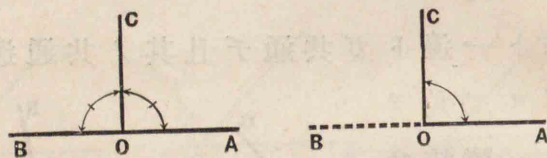
二邊ガ頂點ノ兩側ニアツテ一直線ヲナス角ヲ平角トイフ。



平角ハ皆重ネ合ハスコトガデキル。

故ニ 平角ハ皆相等シイ。

平角ノ半分ニ等シイ角ヲ直角トイフ。



平角 AOB ノ二等分線ヲ OC トスレバ, $\angle AOC$ 及ビ $\angle COB$ ハ共ニ直角デアアル。

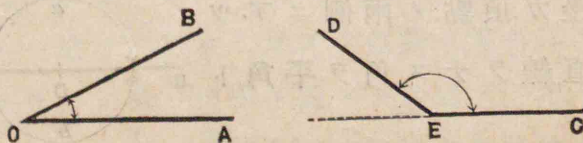
直角ハ平角ノ半分ニ等シク且平角ハ皆相等シイ。

故ニ 直角モ皆相等シイ。

直角ヲ R 又ハ R ト略記スルコトガアル。例
ヘバ

$$\angle AOC = R, \quad \angle AOC + \angle COB = 2R$$

直角ヨリ小デアアル角ヲ鋭角トイヒ, 直角ヨリハ大ニシテ平角ヨリハ小デアアル角ヲ鈍角トイフ。



8. 角ノ單位

前ニ述ベタヤウニ, 直角ハ其ノ大サガ一定デアアルカラ, 之ヲ角ノ基本單位トスル。ケレドモ實用上ニハ此ノ單位ハ餘リ大キ過ギルノデ, 其ノ $\frac{1}{90}$ ヲ基本單位ニ取ツテ之ヲ度トイヒ, 補助單位ニ分秒ガアル。此等ノ單位間ノ關係ハ次ノ通りデアアル。

$$1 \text{ 直角} = 90 \text{ 度}$$

$$1 \text{ 度} = 60 \text{ 分}$$

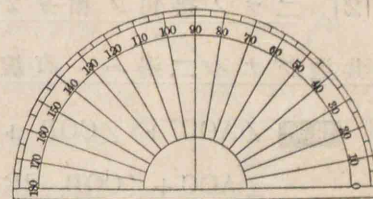
$$1 \text{ 分} = 60 \text{ 秒}$$

度, 分, 秒ノ代リニ $^{\circ}$, $'$, $''$ ヲ用ヒ, 例ヘバ 5 度 37 分 30 秒ヲ $5^{\circ} 37' 30''$ ト書ク。

角ノ大サヲ測ルニハ

分度器ヲ用ヘル。右ノ圖

ハ分度器ノ一種デアアル。



問 1. 2 直角ノ三分ノ一ハ幾度カ。 $\frac{3}{4}$ 直角ハ幾度カ。又 $\frac{4}{32}$ 直角ハ幾度幾分カ。

問 2. 次ノ各ノ角度ヲ直角單位デ表ハセ。

$$30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 22^{\circ} 30', 135^{\circ}$$

又分度器ヲ使ツテ此等ノ角ヲ畫ケ。

問 3. 一直線 AB 上ノ任意ノ一點 O カラ一ツノ

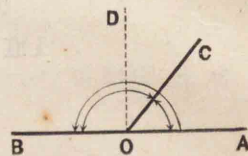
直線 OC を引けば、 $\angle AOC$ と $\angle COB$ との和は幾直角か。

以上數節ニ於テ學ンダコトカラ容易ニ次ノ事實ガワカル。

[1] 一直線ガ他ノ一直線ニ出會ツテ作ル二ツノ接角ノ和ハ2直角ニ等シイ。

説明 直線 OC が直線 AB と點 O で出會フトスレバ、

$$\begin{aligned}\angle AOC + \angle COB &= \text{平角 } AOB \\ &= 2R\end{aligned}$$



[2] 二ツノ接角ノ和ガ2直角ニ等シイトキハ、其ノ共通デナイ二邊ハ一直線ヲナス。

説明 $\angle AOC$ と $\angle COB$ トヲ二ツノ接角トシ、

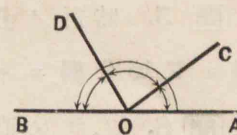
$$\angle AOC + \angle COB = 2R \quad \text{デアルトスレバ、}$$

$\angle AOB$ ハ $\angle AOC$ と $\angle COB$ とノ和デアルカラ、平角ニ等シイ。

依ツテ二邊 OA, OB ハ一直線ヲナス。

[3] 一直線上ノ一點カラ其ノ同ジ側ニ若干ノ直線ヲ引クトキ、此等ノ直線ガ夫々其ノ次ノ直線トデ作ル角ノ和ハ2直角ニ等シイ。

説明 直線 AB 上ノ一點 O カラ其ノ同ジ側ニ直線 OC, OD を引ケバ、



$$\angle AOC + \angle COD + \angle DOB = \angle AOB$$

ソシテ $\angle AOB$ ハ平角デアルカラ、上ノ三ツノ角ノ和ハ2直角デアル。

OC, OD ノ如キ直線ハ幾ツアツテモ同様デアル。

[4] 一點カラ出ル若干ノ直線ガ夫々其ノ次ノ直線トデ作ル角ノ和ハ4直角ニ等シイ。

説明 一點 O カラ引イタ直

線ヲ OA, OB, OC, OD トシ

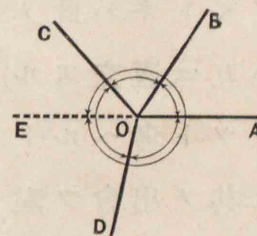
AO ノ延長ヲ OE トスレバ、

此等ノ角ノ和ハ平角 AOE

ト其ノ共軛角(之モ亦平角)

トノ和ニ等シイカラ、

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 2R \times 2 = 4R$$

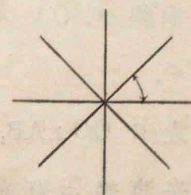


問 4. 一點カラ出ル八ツノ直線

ガ八ツノ相等シイ角ヲ作ルナ

ラバ、其ノ一ツノ角ノ大サハ幾

直角カ、又幾度カ。



問 5. 時計ノ分針ハ一時間ニ幾度ノ角ヲ廻ルカ。

又15分間ニハドウカ。

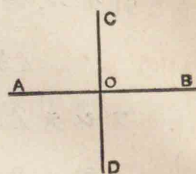
問 6. ニツノ直線ガ相交ハツテ

作ル四ツノ角ノ中、其ノ一ツガ

直角デアルトキハ、他ノ三ツノ

角モ亦直角デアル。其ノ理ヲ

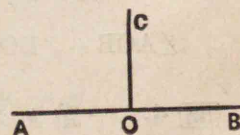
述ベヨ。



9. 垂線・斜線

ニツノ直線ガ相交ハツテ作ル角ガ直角デアルトキハ、此ノ二直線ハ互ニ垂直デアル(又ハ互ニ直交スル)トイヒ、其ノ一ツガ他ノ上ニ立ツト考ヘルトキハ、前者ヲ後者ノ垂線トイヒ、其ノ出會フ點ヲ垂線ノ足トイフ。

右ノ圖デ AB ト OC トハ互ニ垂直デアル。ツシテ OC ハ AB ノ垂線デ、OA ハ OC ノ垂線デアル。



之ヲ $OC \perp AB$, $OA \perp OC$ ノヤウニ書キ表ハス。

一直線ニ直交スル直線ハ其ノ直線上ノ何レノ點

ニ於テモタバーツシカナイ。

實際ニ垂線ヲ引クニハ三角定木ヲ用ヒルノガ便利デアル。

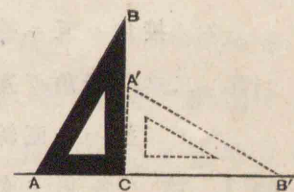
問 1. 紙ヲ折ツテ直角ヲ作ル方法ハドウカ。

問 2. 圖ノヤウニシテ三

角定木ノ直角ガ正シイ

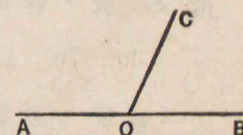
カドウカヲ檢スル方法

ヲ考案セヨ。



一直線ト出會ツテ之ニ垂直デナイ直線ヲ其ノ直線ノ斜線トイヒ、其ノ出會フ點ヲ斜線ノ足トイフ。

右ノ圖デ OC ハ AB ノ斜線デ、O ハ其ノ足デアル。



問 3. OC ガ AB ノ斜線デアレバ、 $\angle AOC$ ト $\angle BOC$ トノ中ノ一ツハ鈍角デ他ハ鋭角デアル。其ノ理ヲ述ベヨ。

10. 餘角・補角

ニツノ角ノ和ガ直角ニ等シイトキハ、其ノ各ノ角ヲ他ノ餘角トイヒ、又ニツノ角ノ和ガ

2 直角ニ等シイトキ、其ノ各ノ角ヲ他ノ補角トイフ。

〔注意〕 第8節ノ[1],[2]ハ夫々次ノヤウニ述ベデモヨイ。

[1] 一ツノ直線ガ他ノ一ツノ直線ニ出會ツテ作ルニツノ接角ハ互ニ補角デアル。

[2] ニツノ接角ガ互ニ補角デアルトキハ、其ノ共通デナイ二邊ハ一直線ヲナス。

〔問〕 1. 次ノ各角ノ餘角ヲ求メヨ。

15° , 30° , 45° , 60° , $\frac{2}{3}$ 直角, $52^\circ 18' 14''$

一般ニ $\angle a$ ノ餘角ハドウカ。

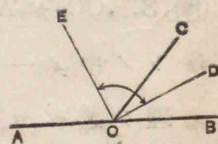
〔問〕 2. 次ノ各角ノ補角ヲ求メヨ。

30° , 70° , 125° , $\frac{3}{2}$ 直角, 直角, $72^\circ 35' 15''$

一般ニ $\angle a$ ノ補角ハドウカ。

〔問〕 3. 接角ヲナス二角ガ互ニ

補角デアルトキハ、各ノ角ノ二等分線ハ互ニ垂直デアル。其ノ理ヲ述ベヨ。



第二章 幾何學ノ考究法

11. 定義

スベテ物事ヲ正確嚴密ニ説述スル場合ニハ、先ヅ其ノ用語ノ意味ヲ明カニシテ置カナケレバ種々ノ誤リヲ生ジ易イ。幾何學ハ極メテ正確ナ理論ノ上ニ成立ツ學問デアルカラ、特ニ其ノ用語ノ意味ヲ嚴密ニ定メテ置イテ、誰ニデモ常ニ同ジ意味ニ解釋サレルヤウニ言ヒ表ハサネバナラス。

一般ニ、用語ノ意味ヲ嚴密ニ定メタモノヲ其ノ語ノ定義トイフ。

例ヘバ前節ノ二ツノ角ノ和ガ直角ニ等シイトキハ、其ノ各ノ角ヲ他ノ餘角トイフトイフノハ餘角ノ定義デアル。

〔問〕 1. 次ノ定義ヲ述ベヨ。

圖形, 接角, 平角, 直角, 補角, 垂線

〔問〕 2. 次ノ説述ハ正シイカ。

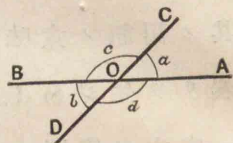
(1) 小刀ハ鉛筆ヲ削ルモノデアル。

(2) 曲線ハ直線デナイ線デアル。

12. 對頂角

定義 二ツノ直線ガ交ハツテ作ル角ノ中
デ向ヒ合フ二ツノ角ヲ對頂角トイフ。

二直線 AB, CD ガ O デ交ハルトキハ、二組ノ對頂角 ($\angle AOC$ ト $\angle BOD$ 及ビ $\angle BOC$ ト $\angle AOD$) ヲ作ル。分度器デ此等ノ角ノ大サヲ測レ。



對頂角ノ大サノ關係ハ次ノヤウニシテ知ルコト
ガデキル。

上ノ圖デ

$$\angle a + \angle c = 2RL$$

又

$$\angle c + \angle b = 2RL$$

故ニ

$$\angle a + \angle c = \angle c + \angle b$$

兩邊カラ $\angle c$ ヲ引ケバ

$$\angle a = \angle b$$

同様ニシテ

$$\angle c = \angle d$$

依ツテ次ノ事實ノ眞デアアルコトガワカル。

對頂角ハ相等シイ。

問 二直線 AB, CD ガ O デ交ハツテ作ル角ノ中、一
ツガ 60° ナラバ他ノ角ノ大サハ各幾度カ。

13. 定理

前節ニ得タ事實ノヤウニ、定義及ビ既ニ眞
デアルト確定シタ事實カラ推理ニヨツテ論
定シタ事柄ヲ**定理**トイフ。

定理ノ眞デアアルコトヲ論定スル方法ヲ定
理ノ**證明**トイフ。

問 既ニ學ンダ事柄ノ中デ定理ト思ハレルモノ
ヲ列舉セヨ。

14. 幾何學的證明法

幾何學ノ定理ヲ證明スルニハ、紙上ニ圖形ヲ畫キ、
實驗ニヨツテ之ヲ確メルコトモ出來ルガ、實驗ダケ
デ定理ヲ斷定スルノハ正確デアルトハイヘヌ。何
故ナレバ觀察ニハ誤リノアルコトガアリ、實驗ハ如
何ニ精密ニ行ツテモ其ノ結果ハ絶對的ニハ眞デア
アルモノデナイ。其ノ上、圖形ノ大小種類ハ無數ニア
ルカラ、之ヨリ一般ノ理法ヲ得ルタメニ一々實驗ヲ
スルコトハ到底ナシ得ナイコトデ、又少シ複雑ナ場
合ニハ一ツノ圖形ニツイテサヘ實驗ヲ完成スルコ
トハ甚ダ困難デアアルカラデアル。

ソコデ之ヲ斷定スルタメニハ、既ニ眞デアルト認メタ事柄ヨリ一步一步推論ヲ進メルノガヨイ。此ノヤウニシテ幾何學ノ定理ヲ證明スル方法ヲ幾何學的證明法トイフ。

幾何學ハ圖形ノ性質ヲ考究スル學問デアルコトハ既ニ述ベタガ、更ニ詳シクイヘバ、

幾何學ハ既ニ確定シタ事實ヲ基礎トシテ各種ノ圖形ヲ觀察シ、必要ノ場合ニハ實驗ヲモ行ヒ、種々ノ定理ヲ探索シ、且之ヲ證明シテ之ヲ確定シ、更ニ其等ノ定理ヲ應用シテ種々ノ計算及ビ作圖ノ方法等ヲモ考究スルモノデアル。

此等ノ定理ヤ計算、作圖法ハ實ニ百般ノ科學、工業等ノ基礎トナルモノデ、且其ノ研究ノ方法ハ吾等ノ思考力ノ鍛鍊ニ最モ効果アルモノデアル。

15. 公理

定理ヲ證明スルノニ其ノ基礎トナル全部ノ事實ヲ證明ヲ經タモノトスルコトハ不可能デアル。ソレデ其ノ中何人ニモ眞デアルト認メラレル若干ハ

證明ナシニ眞デアアルモノトシテ、之ヲ推理ノ根源トスル。此ノ事實ヲ公理トイフ。即チ

公理トハ吾等ガ經驗ニヨツテ眞デアルト認定スル事實デ、推理ノ基礎トスルモノデアル。

幾何學デ用ヒル公理ヲ次ニ掲ゲル。

公理一 定マツタ二點ヲ通ル直線ハ一ツアル、ソシテ唯一ツシカナイ。 (第2節參照)

此ノ事實ヲ二點ハ一直線ヲ決定スルトモイフ。

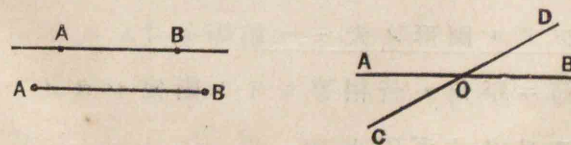
此ノ公理カラ直ニ次ノ事ガワカル。

[1] 二點ヲ共有スル二ツノ直線ハ相合シテ同一ノ直線トナル。

從ツテ一部ヲ共有スル二直線ハ全ク相合スル。

[2] 相交ハル二直線ノ交點ハタバ一ツシカナイ。

從ツテ相交ハル二直線ハ一點ヲ決定スル。



公理二 二點ヲ兩端トスル線分ハ其ノ二點間ノ最短通路デアル。 (第2節參照)

公理 三 同一平面上ノ二點ヲ通ル直線ハ
全ク其ノ平面上ニアル。 (第3節參照)

公理 四 一ツノ平面上ニアルーツノ直線
ハ其ノ平面ヲ二ツノ部分ニ分ケル。ソシテ
其ノ各部分ニ各一點ヲ取レバ、其ノ二點ヲ結
ブ線分ハ必ズ初メノ直線ト交ハル。

公理 五 平面ハ其ノ何レノ部分ヲ任意ノ
平面ノ何レノ部分ニモ重ネ合ハスコトガデ
キル。

公理 六 圖形ハ其ノ形狀及ビ大サヲ變ヘ
ルコトナシニ、其ノ位置ダケヲ變ヘルコトガ
デキル。

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ置イテ、其ノ兩者ヲ
全ク重ネ合ハセルコトガデキレバ、此ノ二ツノ圖形
ハ**合同デアル**或ハ**全等デアル**トイフ。

合同デアル圖形ノ大サハ相等シイ。

第7節ニ「平角ハ皆相等シイ」ト斷定シタノハ此ノ
公理ニヨツタノデアル。

次ニ掲ゲルモノハ**普通公理**トイヒ、幾何學ニ限ラ
ズ算術、代數學ニモ用ヒラレルモノデアル。

[1] 全部ハ其ノ總テノ部分ノ和デアル。

從ツテ全部ハ其ノ一部分ヨリ大キイ。

以下A, B, C, Dハ量ヲ表ハシ、 m, n ハ任意ノ正數デ
アルトスル。

[2] $A=C, B=C$ デアレバ $A=B$

又 $A=C, B=D$ デ且 $C=D$ デアレバ $A=B$

[3] $A>B, B>C$ デアレバ $A>C$

[4] $A=B$ デアレバ $mA=mB$

第7節ニ直角ハ相等シイト斷定シタノハ之ニ
ヨツタモノデアル。($m=\frac{1}{2}$ トシテ)

又 $A>B$ デアレバ $nA>nB$

$mA=mB$ デアレバ $A=B$

$nA>nB$ デアレバ $A>B$

[5] $A=B, C=D$ デアレバ

$A+C=B+D$ 及ビ $A\sim C=B\sim D$

第12節デ「對頂角ガ相等シイ」コトノ證明ハ之ニ
ヨツタモノデアル。

[6] $A>B, C=D$ デアレバ $A+C>B+D,$

及ビ $A-C>B-D$ 或ハ $C-A<D-B$

[7] $A>B, C>D$ デアレバ $A+C>B+D$

[注意] 此ノ時 $A-C>B-D$ トシテハイケナイ。

問 1. 次ノ二定理ヲ證明セヨ。(普通公理[5]ニヨレ)

(1) 同角又ハ等角ノ補角ハ相等シイ。

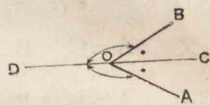
(2) 同角又ハ等角ノ餘角ハ相等シイ。

問 2. 前問題ヲ用ヒテ次ノ定理ヲ證明セヨ。

角ノ二邊ガ其ノ角ノ二等

分線ノ延長ト作ル角ハ相

等シイ。



問 3. 第12節ノ定理ト普通公理(2)トニヨツテ次ノ定理ヲ證明セヨ。

(1) 一ツノ直線 AB ノ上ノ一點 O カラ AB ノ

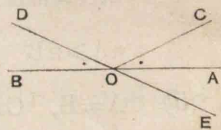
同ジ側ニ二ツノ半直線 OC, OD ヲ $\angle AOC$ ト

$\angle BOD$ トガ等シイヤウニ

引キ, DO ノ延長ヲ QE トス

レバ, OA ハ $\angle COE$ ヲ二等

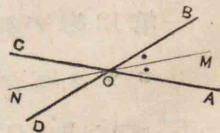
分スル。



(2) 角ノ二等分線ノ延長ハ

其ノ角ノ對頂角ヲ二等分

スル。



第三章 三角形ノ合同

16. 三角形

〔定義〕 三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ三角形トイヒ, 其ノ三線分ヲ三角形ノ邊ニ邊ノナス角ヲ三角形ノ角, 其ノ頂點ヲ三角形ノ頂點トイフ。

平面ノ中デ三角形ニ屬スル部分ヲ其ノ三角形ノ

内部トイヒ, ソウデナイ部分ヲ其ノ外部トイフ。

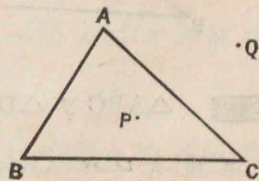
例ヘバ右圖ノ三角形 ABC ニ

於テ線分 AB, BC, CA ハ其ノ邊,

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ハ其ノ角, 點 A,

B, C ハ其ノ頂點デアル。又點

P ハ此ノ三角形ノ内部ニアツテ, 點 Q ハ外部ニアル。



三角形 ABC ヲ $\triangle ABC$ ト書ク。

$\triangle ABC$ ニ於テ, 頂點 A ヲ邊 BC ニ對スル頂點トイヒ,

逆ニ邊 BC ヲ頂點 A ニ對スル邊トイフ。其ノ他ノ

頂點及ビ邊ニ就イテモ之ニ準ズル。

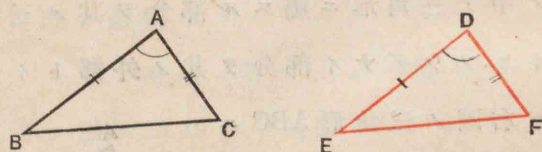
問 1. 三ツノ直線ハ常ニ三角形ヲ作ルカ。

問 2. 四直線デハ幾ツノ三角形ガ出來ルカ。

17. 三角形ノ合同(一)

定理一 一ツノ三角形ノ二邊ト其ノ夾角トガ夫
夫他ノ三角形ノ二邊ト夾角トニ等シイトキハ、此ノ
兩三角形ハ合同デアアル。

$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トヲ任意ノ二ツノ三角形トシ、
 $AB=DE$, $AC=DF$ デ且 $\angle A=\angle D$ デアルトスル。ソ
シテ此ノ兩三角形ガ合同デアアルコトヲ證明スル。



證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ニ重ネルニ、先ヅ AB ヲ DE
ニ重ネレバ $AB=DE$ デアルカラ頂點 A ト D ト
ハ重ナリ、又 B ト E トハ重ナル。
次ニ頂點 C ト F トガ DE ノ同ジ側ニ來ルヤウ
ニスレバ、 $\angle A=\angle D$ デ且 $AC=DF$ デアルカラ頂
點 C ト F トハ重ナル。

故ニ邊 BC ハ EF ニ重ナル。

從ツテ此ノ兩三角形ハ合同デアアル。

注意 1. 二ツノ圖形ノ合同デアアルコトヲ表ハスニ記號

ニヲ用ヒル。例ヘバ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トノ合同デア
アルコトヲ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ト書ク。

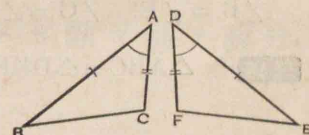
注意 2. 此ノ定理ノ證明ノヤウニ、兩圖形ヲ重ネ合ハセ
テ或事柄ヲ證明スル方法ヲ重置法トイフ。

注意 3. 二ツノ三角形ヲ重ネ合ハスニ、(1)前ノヤウニ其
ノマ、重ナル場合ト(2)

右ノ圖ニ示スヤウニ其

ノ一ツヲ裏返シタモノ

ガ他ニ重ナル場合トガ



アル。之ヲ區別スル必要ガアルトキハ(1)ヲ順ニ合
同デアルトイヒ、(2)ヲ逆ニ合同デアルトイフ。

定理一ニ見ルヤウニ、定理ニハ常ニ二ツノ部分ガ
アル。即チ

「一ツノ三角形ノ二邊ト夾角トガ夫々他ノ三角形
ノ二邊ト夾角トニ等シイトキハ」トイフヤウニ始メ
ノ部分ハ假ニソウト定メタ事柄デ之ヲ**假設**トイヒ、
後ノ部分ハ假設ヨリ得ラレル結論デ之ヲ**終結**トイ
フ。上ノ假設ヨリ得ル終結ハ「此ノ兩三角形ハ合同
デアアル」トイフコトデアアル。

假設ヨリ終結ノ眞デアアルコトヲ論定スル方法ガ
即チ定理ノ證明デアアル。

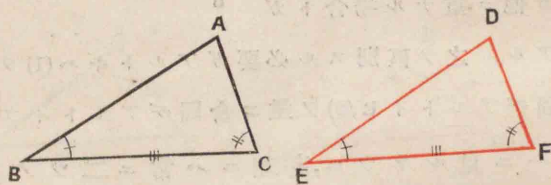
18. 三角形ノ合同(二)

定理二 一ツノ三角形ノ二角ト其ノ間ノ邊トガ
夫々他ノ三角形ノ二角ト其ノ間ノ邊トニ等シイト
キハ此ノ兩三角形ハ合同デアル。

假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $BC = EF$ トスル。

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$



證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ニ重ネルニ、先ヅ BC ヲ
 EF ニ重ネレバ $BC = EF$ デアルカラ頂點 B ト E
トハ重ナリ、又 C ト F トハ重ナル。

次ニ頂點 A ト D トガ EF ノ同ジ側ニ來ルヤウ
ニスレバ、 $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ デアルカラ BA ハ
 ED ニ重ナリ、又 CA ハ FD ニ重ナル。從ツテ A
ハ D ニ重ナル。

故ニ此ノ兩三角形ハ合同デアル。

注意 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ナルトキニ

$\angle A = \angle D$ ナラバ $BC = EF$

$\angle B = \angle E$ ナラバ $AC = DF$

$\angle C = \angle F$ ナラバ $AB = DE$ デアル。

即チ合同ナル二ツノ三角形デハ相等シイ邊ト相等
シイ角ハ夫々相對スル。

19. 三角形ノ中線

定義 線分ヲ二等分スル點ヲ其ノ線分ノ
中點トイフ。

線分ノ中點ハタバーツシカナイ。

定義 三角形ノ頂點ト其ノ對邊ノ中點ト
ヲ結ブ線分ヲ中線トイフ。

問 1. AD ヲ $\triangle ABC$ ノ一中線トシ、之ヲ延長シ、其

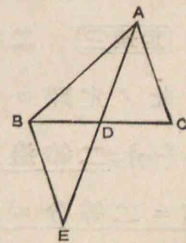
ノ上ニ點 E ヲ取リ $DE = AD$ ニ

等シクシテ、 BE ヲ結ベバ、

$\triangle BDE \equiv \triangle CDA$ デ $BE = CA$,

$\angle BED = \angle CAD$, $\angle DBE = \angle DCA$

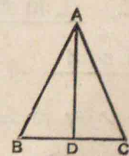
デアル。之ヲ證明セヨ。*



問 2. $\triangle ABC$ ノ頂點 A カラ出ル

中線ガ邊 BC ノ垂線デアレバ、

二邊 AB , AC ハ相等シイ。



* 以下ノ問題デハ「之ヲ證明セヨ」ヲ略スルコトニスル。

20. 二等邊三角形

定義 二邊ガ相等シイ三角形ヲ二等邊三角形又ハ等脚三角形トイフ。

二等邊三角形デハ、等邊ノ夾角ヲ特ニ頂角トイヒ、頂角ノ頂點ヲ其ノ頂點トイフ。

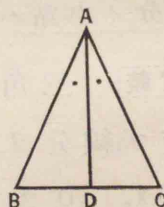
又頂角ノ對邊ヲ底邊トイヒ、底邊ノ兩端ニアル二ツノ角ヲ底角トイフ。

二等邊三角形ABCノ頂角ノ二等分線ヲADトスレバ、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD \quad (\text{定理一})$$

故ニ $\angle B = \angle C$

之カラ次ノ定理ガ得ラレル。



定理三 二等邊三角形ノ二ツノ底角ハ相等シイ。

此ノ定理ヨリ容易ニ次ノ定理ガワカル。

[一] 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル。

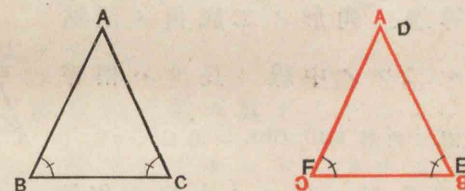
[二] 三角形ノ三邊ガ相等シイトキハ、其ノ三角ハ相等シイ。

此ノヤウニ或定理ヨリ容易ニ推定シ得ル定理ヲモトノ定理ノ系トイフ。

定理四 三角形ノ二角ガ相等シイトキハ、此ノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B = \angle C$ トスル。

終結 $AC = AB$



證明 $\triangle ABC$ ヲ裏返シタモノヲ $\triangle DFE$ トシ、其ノ頂點D, E, Fガ夫々 $\triangle ABC$ ノ頂點A, B, Cデアッタトスレバ、 $\angle B = \angle C$ デ且 $\angle C = \angle F$ デアルカラ

$$\angle B = \angle F$$

$$\text{同様ニ} \quad \angle C = \angle E$$

$$\text{又} \quad BC = FE$$

$$\text{故ニ} \quad \triangle ABC \equiv \triangle DFE \quad (\text{定理二})$$

$$\text{故ニ} \quad AB = DF$$

$$\text{然ルニ} \quad AC = DF$$

$$\text{故ニ} \quad AB = AC$$

系 三角形ノ三角ガ相等シイトキハ、其ノ三邊ハ相等シイ。

定義 三角ガ相等シイ三角形ヲ正三角形

トイフ。

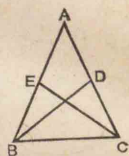
從ツテ前頁ノ系ハ次ノヤウニ述ベテモヨイ。

正三角形ノ三邊ハ相等シイ。

問 1. 二等邊三角形ノ二底角ノ頂點

カラ出ル二ツノ中線ノ長サハ相等

シイ。(兩三角形 BCD, CBE ニ着目セヨ)



問 2. 正三角形ノ三ツノ中線ハ相等シイ。

21. 定理ノ逆

定理ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタモノヲ
モトノ定理ノ逆トイフ。

例ヘバ定理四ハ定理三ノ逆デアル。

一般ニ、

$$\text{「}A=B \text{ ナラバ } C=D \text{ デアル」} \quad (1)$$

トイフ定理ガアレバ

$$\text{「}C=D \text{ ナラバ } A=B \text{ デアル」} \quad (2)$$

トイフノハ前ノ定理ノ逆デアル。

注意 (2)ハ又(1)ノ逆デアルカラ(1)ト(2)トハ互ニ逆デア

ルトモイフ。

或定理ガ真デアツテモ、其ノ逆ハ必ズシモ真デア
ルトハイヘナイ。

例ヘバ「 $\angle a$ ト $\angle b$ トガ各、直角ニ等シイナラバ $\angle a$
ト $\angle b$ トハ相等シイ」ハ真デアルガ、其ノ逆ノ「 $\angle a$ ト
 $\angle b$ トガ相等シイナラバ $\angle a$ ト $\angle b$ トハ各、直角ニ等
シイ」ハ真デナイ。

ソレデ或定理ノ逆ガ真デアルコトヲ主張スルニ
ハ、別ニ之ヲ證明シナケレバナラナイ。

22. 三角形ノ合同(三)

定理五 一ツノ三角形ノ三邊ガ夫々他ノ三角形
ノ三邊ニ等シイトキハ、此ノ兩三角形ハ合同デアル。

假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

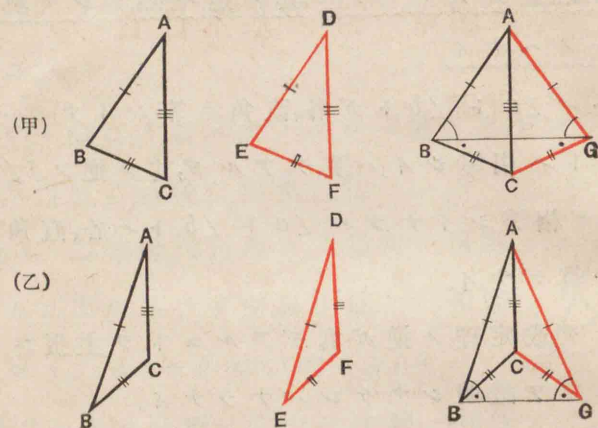
$$AB=DE, \quad BC=EF, \quad CA=FD \quad \text{トスル。}$$

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明 $\triangle DEF$ ノ邊 DF ラ $\triangle ABC$ ノ邊 AC ニ重ネ、
此ノ兩三角形ヲ AC ノ兩側ニ置イテ點 E ノ來
タ點ヲ G トシテ BG ヲ結ベバ、

$$DE=AG$$

$$\text{故ニ} \quad AG=AB$$



依ッテ $\angle ABG = \angle AGB$ (定理三)

又 $EF = CG$

故ニ $CG = CB$

依ッテ $\angle CBG = \angle CGB$ (同上)

故ニ甲乙何レノ場合ニモ

$\angle ABC = \angle AGC$

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (定理一)

問 1. 二等邊三角形ノ頂點ヨリ出ル中線ハ底邊ニ垂直デ且頂角ヲ二等分スル。

問 2. 次ノ場合ニ兩三角形ハ合同デアルカ。

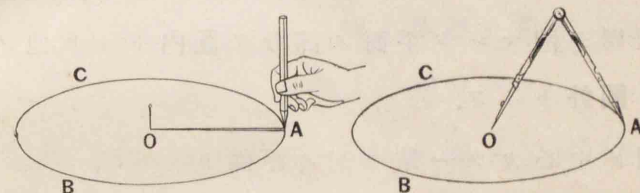
(1) 二角ト一邊トガ夫々相等シイトキ。

(2) 二邊ト一角トガ夫々相等シイトキ。

第四章 圓ノ基本性質

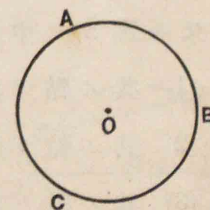
23. 圓・圓周

一ツノ線分 OA ノ一端 O ヲ固定シテ之ヲ一ツノ平面上デ廻轉シモトノ位置ニ歸ラシメルト、他端 A ハ一ツノ閉ヂタ曲線 ABC ヲ畫ク。此ノ曲線デ圍マレタ平面ノ部分ヲ圓トイフ。



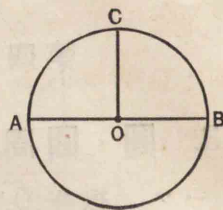
定義 圓トハ一ツノ曲線デ圍マレタ平面ノ一部分デ、此ノ曲線上ノスベテノ點ハ形内ノ一定點ヨリ等距離ニアル。其ノ曲線ヲ圓周トイヒ、其ノ定點ヲ圓ノ中心トイフ。

圓及ビ圓周ヲ表ハスニハ通例圓周上ノ三點ヲ表ハス文字ヲ並記スルカ、又ハ中心ヲ表ハス文字デ示ス。例ヘバ圓周 ABC 又ハ圓 O ノヤウデアル。



注意 圓ヲ圓周ノ意ニ用ヒルコトガアル。

定義 圓ノ中心カラ圓周
上ノ一點ニ引イタ線分ヲ圓
ノ半徑トイヒ、中心ヲ通り兩
端ガ圓周上ニアル線分ヲ圓
ノ直徑トイフ。

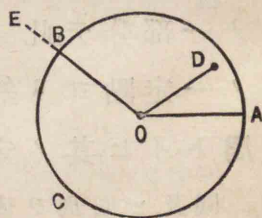


24. 圓ト點トノ位置ノ關係

圓周デ圍マレタ平面ノ部分ヲ圓内トイヒ、他ノ部
分ヲ圓外トイフ。

圓ノ中心カラ一點マデノ距離ガ

- (1) 半徑ヨリ小デアレバ其ノ點ハ圓内ニアツテ、
- (2) 半徑ニ等シケレバ其ノ
點ハ圓周上ニアツテ、
- (3) 半徑ヨリ大デアレバ其
ノ點ハ圓外ニアル。



又一點カラ中心マデノ距離ハ

- (1) 其ノ點ガ圓内ニアレバ半徑ヨリ小デ、
 - (2) 其ノ點ガ圓周上ニアレバ半徑ニ等シク、
 - (3) 其ノ點ガ圓外ニアレバ半徑ヨリ大デアル、
- 此等ノコトカラ次ノ定理ヲ得ル。

定理六 一點ヨリ等シイ距離ニアル點ハスベテ
其ノ點ヲ中心トシ其ノ距離ヲ半徑トスル圓周上ニ
アル。

前節ノ定義ト上ノ定理トカラ容易ニ次ノ事柄ガ
ソカル。

- (1) 同ジ圓ノ半徑(從ツテ直徑)ハ相等シイ。
- (2) 半徑ノ相等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。
- (3) 合同デアル二ツノ圓ノ半徑ハ相等シイ。
- (4) 直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分スル。

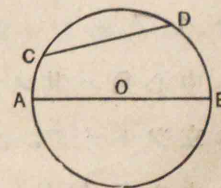
定義 直徑デ分ケラレタ圓ノ二部分ヲ各、
半圓トイヒ、直交スル二ツノ直徑デ分ケラレ
タ圓ノ四部分ヲ各、四分圓(又ハ象限)トイフ。

四分圓ノ相等シイコトヲ紙ヲ折ツテ驗セ。

25. 弧・弦・中心角

定義 圓周ノ一部分ヲ弧
トイフ。

弧ヲ表ハスニ、例ヘバ弧 CD 又
ハ \widehat{CD} ト記ス。



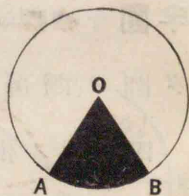
同ジ圓或ハ等シイ圓(合同ナル圓)ニ於テ、二ツノ弧ノ大サハ線分ノ大サト同ジヤウニ之ヲ重ネ合ハセテ比較スルコトガデキル。

圓周ヲ二ツノ弧ニ分ケタトキ、此ノ二ツノ弧ヲ共軛弧トイヒ、其ノ大ナル方ヲ優弧、小ナル方ヲ劣弧トイフ。ケレドモ單ニ弧トイフトキニハ通例劣弧ヲ指スモノトスル。

定義 同ジ圓周上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ弦トイフ。

直徑ハ中心ヲ通ル弦デアル。

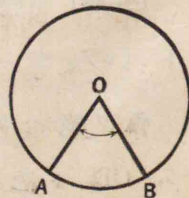
定義 圓ノ二ツノ半徑ハ其ノ圓ヲ二ツノ部分ニ分ケル、其ノ中ノ一方ダケヲ考ヘルトキハ之ヲ扇形トイフ。



右ノ圖ニ於テ AOB ハ扇形デアル。

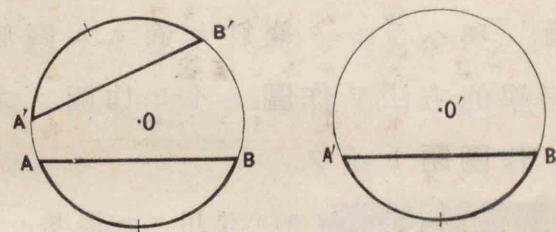
定義 圓ノ二ツノ半徑ノ夾ム角ヲ中心角トイフ。

中心角ハ其ノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツトイフ。例ヘバ右ノ圖ニ於テ中心角 AOB ハ弧 AB ノ上ニ立ツ



定理七 同圓又ハ等圓ニ於テ、

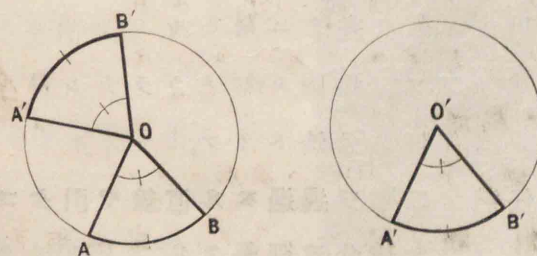
- [1] 等弧ニ對スル弦ハ相等シイ。
- [2] 等弦ニ對スル弧ハ相等シイ。



(本定理及ビ次ノ定理ハ重置法ニヨツテ證明セヨ。)

定理八 同圓又ハ等圓ニ於テ、

- [1] 相等シイ中心角ニ對スル弧ハ相等シイ。
- [2] 等弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シイ。



問 1. 同圓又ハ等圓ニ於テ、相等シイ中心角ニ對スル弦ハ相等シイ。

問 2. 圓ヲ畫イテ之ヲ切抜キ、之ヲ二ツニ折合ハセテ其ノ中心ヲ求メヨ。

第五章 作圖題

26. 作圖題

定義 與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ畫ク幾何學的方法ヲ作圖トイヒ、作圖ヲ求メル問題ヲ作圖題トイフ。

幾何學デ作圖題ヲ解クニ使用スル器具ハ次ノ二種ニ限ル。

[1] 目盛ノナイ定木。

[2] 兩脚器(こんばす)。

前者ハ直線ヲ引キ又ハ線分ヲ延長スルニ用ヒ、後者ハ圓周或ハ弧ヲ畫クニ用ヒル。

故ニ次ノ二ツノ作圖ハ初メカラナシ得ルモノトスル。之ヲ作圖ノ公法トイフ。

[1] 任意ノ二點ヲ通過スル直線ヲ引クコト。

之ニヨツテ線分ヲ延長スルコトガデキル。

[2] 任意ノ點ヲ中心トシ、任意ノ半徑ヲ有スル圓周或ハ弧ヲ畫クコト。

作圖題ノ解法ニハ、先ヅ作圖ヲ示シ、次ニ其ノ圖形ガ與ヘラレタ條件ニ適スルコトヲ證明セネバナラス。

27. 基本ノ作圖題

作圖題一 三邊ガ夫々與ヘラレタ三線分ニ等シ

イ三角形ヲ作レ。

題意 L, M, N ヲ與ヘラレタ三線分トスル。

三邊ガ夫々 L, M, N ニ等シイ三角形ヲ作ルコトヲ求メル。

作圖 ① 任意ノ直線 AB ヲ引ク。 (公法1)

② AB 上ノ一點 A ヲ中心トシ L ニ等シイ半徑ノ圓周ヲ畫キ、之ト AB トノ交點ヲ B トスル。

(公法2)

③ A 及ビ B ヲ中心トシ夫々 M 及ビ N ニ等シイ半徑ノ圓周ヲ畫キ、其ノ交點ノ一ツヲ C トスル。

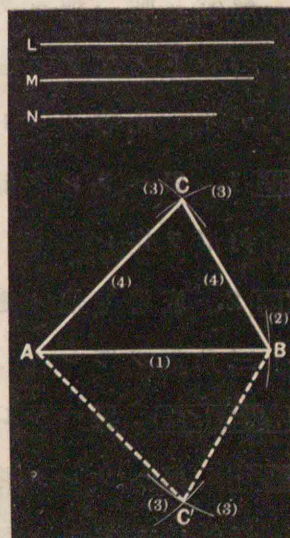
(公法2)

④ AC 及ビ BC ヲ結ブ。

(公法1)

然ラバ $\triangle ABC$ ハ求メル三角形デアル。

證明 $\triangle ABC$ ノ三邊 AB, AC, BC ハ夫々與ヘラレ



タ三線分 L, M, N ニ等シイ。 (作圖)

故ニ此ノ三角形ハ與ヘラレタ條件ニ適スル。

作圖 ③ ノ二ツノ圓周ハ點 C ノ外ニ尙一ツノ點デ交ハル。此ノ交點ヲ C' トスレバ $\triangle ABC'$ モ亦與ヘラレタ條件ニ適スルモノデアル。

ケレドモ $\triangle ABC'$ ト $\triangle ABC$ トハ合同デアルカラ解答ハ唯一種デアル。

若シ上ノ二ツノ圓周ガ交ハラナケレバ解答ハナイ。此等ノコトニ就イテハ後ニ詳論スル。

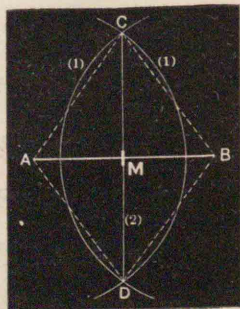
問 1. 與ヘラレタ線分ニ等シイ邊ヲ有スル正三角形ヲ作レ。

問 2. 底邊ト他ノ邊トヲ與ヘラレタトキ二等邊三角形ヲ作レ。

作圖題 二 與ヘラレタ線分ヲ二等分セヨ。

題意 與ヘラレタ線分 AB ヲ二等分スルコトヲ求メル。

作圖 ① AB ノ兩端ヲ中心トシ、等シイ半徑デ相交ハル二ツノ圓周ヲ畫キ、其ノ交點ヲ C 及ビ D トスル。 (公法 2)



② CD ヲ結ビ、 AB トノ交點ヲ M トスル。 (公法 1)

然ラバ CD ハ AB ヲ二等分スル。

證明 AC, BC, AD, BD ヲ結ベバ

$$\triangle ACD \equiv \triangle BCD \quad (\text{定理五})$$

$$\text{故ニ} \quad \angle ACD = \angle BCD$$

ソシテ $\triangle ACB$ ハ二等邊三角形デ $\angle ACB$ ハ其ノ頂角デアル。 (作圖)

$$\text{故ニ} \quad AM = MB$$

故ニ CD ハ AB ヲ二等分スル。 (定理三系一)

注意 CD ヲ AB ノ垂直二等分線トイフ。

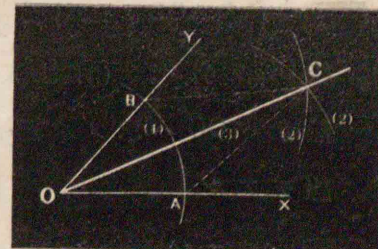
問 3. 與ヘラレタ線分ヲ直徑トスル圓周ヲ畫ケ。

作圖題 三 與ヘラレタ角ノ二等分線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ角ヲ $\angle XOY$ トスル。

$\angle XOY$ ノ二等分線ヲ引クコトヲ求メル。

作圖 ① 頂點 O ヲ中心トシ任意ノ圓周ヲ畫キ、二邊ト夫々 A 及ビ B デ交ハラシメル。 (公法 2)



② A, B ヲ中心トシ、等シイ半徑デ相交ハル二

ツノ圓周ヲ畫キ、其ノ交點ヲCトスル。(公法2)

③ 直線OCヲ引ク。(公法1)

然ラバOCハ求メル二等分線デアル。

證明 兩三角形AOC, BOCノ三邊ハ夫々相等シイ。

故ニ $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$ (定理五)

故ニ $\angle AOC = \angle BOC$

故ニOCハ $\angle XOY$ ヲ二等分スル。

注意 解答ハイツモ一ツアル、ソシテ唯一ツシカナイ。

問 4. 與ヘラレタ角ヲ四等分セヨ、又八等分セヨ。

作圖題 四 與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ヲ
通り其ノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

題意 ABヲ與ヘラレタ直線トシ、Oヲ其ノ上ノ與
ヘラレタ點トスル。

Oヲ通りABニ垂線ヲ引クコトヲ求メル。

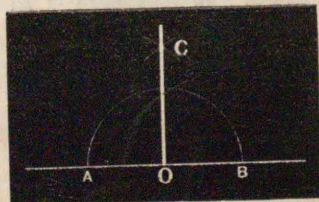
作圖 平角AOBノ二等分

線OCヲ引ク。(作圖題三)

然ラバOCハ求メル垂
線デアル。

證明 (略スル)

問 5. 45° 及ビ 135° ノ角ヲ作レ



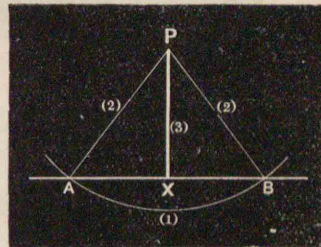
作圖題 五 與ヘラレタ直線外ノ與ヘラレタ點ヨ
リ其ノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ直線ヲAB, 與ヘラレタ點ヲP
トスル。

PヨリABヘ垂線ヲ引クコトヲ求メル

作圖 ① Pヲ中心トシ

ABニ交ハル任意ノ圓
周ヲ畫キ、其ノ交點ヲA
及ビBトスル。



② AP及ビBPヲ結ブ。

③ $\angle APB$ ノ二等分線PXヲ引ク。(作圖題三)

然ラバPXハ求メル垂線デアル。

證明 $\triangle PAB$ ハ二等邊三角形デ、Pハ其ノ頂點、

PXハ其ノ頂角ノ二等分線デアル。(作圖)

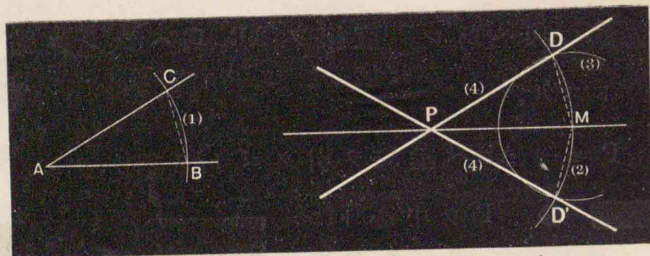
故ニPXハABニ垂直デアル。(定理三系一)

即チPXハPヲ通ルABノ垂線デアル。

作圖題 六 與ヘラレタ直線上ノ一點デ其ノ直線
ト與ヘラレタ角ニ等シイ角ヲ作ル直線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ直線ヲPM, 其ノ直線上ノ一點
ヲPトシ、與ヘラレタ角ヲ $\angle BAC$ トスル。

Pヲ過ギ、PMト $\angle BAC$ ニ等シイ角ヲ作ル直線ヲ引クコトヲ求メル。



- 作圖** ① Aヲ中心トスル任意ノ圓周ヲ畫イテ、 $\angle BAC$ ノ二邊トB、Cデ交ハラシメル。(公法2)
- ② Pヲ中心トシ 前ノ圓ノ半徑ニ等シイ半徑デ圓周ヲ畫キ、PMトMデ交ハラシメル。(公法2)
- ③ Mヲ中心トシ BCニ等シイ半徑デ圓周ヲ畫キ、②ノ圓周トD、D'デ交ハラシメル。(公法2)
- ④ 直線PD及ビPD'ヲ引ク。(公法1)
- 然ラバ PD及ビPD'ハ求メル直線デアル。

證明 $\triangle MPD$ 、 $\triangle MPD'$ 及ビ $\triangle BAC$ ハ三邊ガ夫々相等シイカラ合同デアル。(定理五)

故ニ $\angle MPD$ 及ビ $\angle MPD'$ ハ共ニ $\angle BAC$ ニ等シイ。

次ニ作圖②ノ圓周ハPMトMノ外ニ尙一ツノ點デ交ハルカラ、Dノヤウナ點ガ尙二ツ出來ルガ、其等ハ夫々直線DPトD'トノ延長上ニ

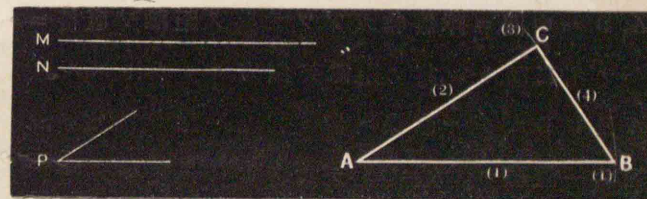
アルカラ、解答ハ上ノPD、PD'ノ二ツデアル。

作圖題七 二邊ト其ノ夾角トヲ知ツテ三角形ヲ

作シ。

題意 M、Nヲ與ヘラレタ二邊トシ、 $\angle P$ ヲ與ヘラレタ其ノ夾角トスル。

二邊ガ夫々M、Nニ等シクテ其ノ夾角ガ $\angle P$ ニ等シイ三角形ヲ畫クコトヲ求メル。



- 作圖** ① Mニ等シイ線分ABヲ引ク。(公法1, 2)
- ② AヨリABト $\angle P$ ニ等シイ角ヲ作ル直線ACヲ引ク。(作圖題六)
- ③ Aヲ中心トシ Nニ等シイ半徑デ圓周ヲ畫キ、ACトノ交點ヲCトスル。(公法2)
- ④ BCヲ結ブ。(公法1)

然ラバ $\triangle ABC$ ハ求メル三角形デアル。

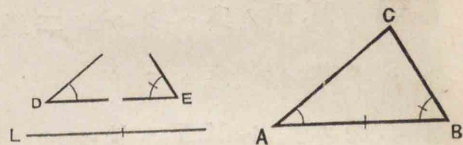
證明 (略スル)

注意 求メル三角形ハ唯一種ダケデアル。

問 6. 頂角ト其ノ邊トヲ知ツテ二等邊三角形ヲ作レ。

問 7. 二角ト其ノ頂點間ノ邊トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

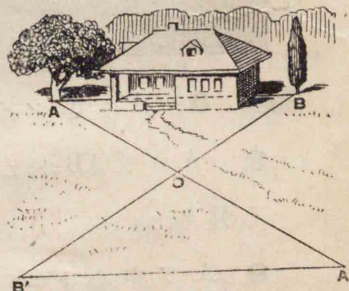
(右ノ圖ニヨツ
テ考ヘヨ)



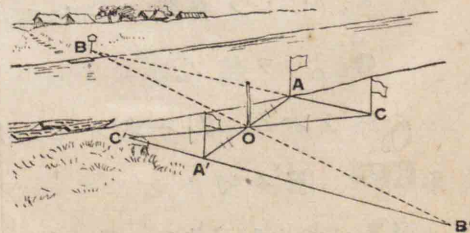
28. 距離ノ測定

A, B ハ中間ニ障害物ガアツテ其ノ距離ヲ直接ニハ測定
デキナイ二點トシ、其ノ距離ヲ測定シヨウトスル。

A 及ビ B マデー直線ニ歩ミ得ル一點 O ヲ定メ、A ヨリ O
ヲ經テ直線ニ $OA' = OA$ デ
アルヤウニ點 A' ヲ求メ、又 B
ヨリ O ヲ經テ $OB' = OB$ デア
ルヤウニ點 B' ヲ求メル。ソ
コデ A', B' 間ノ距離ヲ測レバ、
之ガ A, B 間ノ距離ニ等シイ。



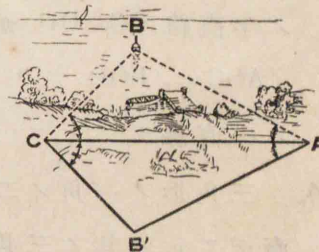
又 AB 上或ハ其ノ
延長上ニ任意ノ一點
C ヲ取り、他ニ一點 O
ヲ定メ AO, CO ヲ測定
シ、其ノ延長上ニ A' 及



ビ C' ヲ夫々 $OA' = OA$, $OC' = OC$ デアルヤウニ取り、直線 $C'A'$
又ハ其ノ延長上ニ O ト B トヲ一直線ニ見通ス點 B' ヲ取レ
バ線分 $B'A'$ ノ長サガ A, B 間ノ距離ニ等シイ。(之ヲ證明セヨ)

若シ測角器ヲ用ヒルナラバ、A ヨリ適宜ニ一線分 AC ヲ
引イテ、A ヨリ AC ト $\angle CAB$ ニ等シイ角ヲ其ノ反對ノ側ニ作
ル直線ヲ引キ、又 C ヨリ CA ト

$\angle ACB$ ニ等シイ角ヲ其ノ反對
ノ側ニ作ル直線 CB' ヲ引イテ、此
ノ兩直線ノ交點ヲ B' トシ、A, B'
ノ距離ヲ測レバヨイ。



今カラ約 2500 年前ニ有名ナ
希臘ノ數學者タレズ (Thales)

ハ此ノ方法デ海岸ヨリ或船マデノ距離ヲ測ツタトイフコ
トデアル。

問題 1

1. 或角ノ補角ト其ノ角ノ餘角トノ和ガ 150° デア
ル、其ノ角ハ何度カ。

(求メル角ヲ x 度トシテ方程式ヲ作レ)

2. 一直線 OC ガ他ノ直線 AB ト O 點デ出會ツテ作
ル二ツノ接角 $\angle AOC$ ト $\angle BOC$ トニ於テ $\angle AOC$ ガ

$$2x + x = 150$$

$$3x = 150$$

$$x = 50$$

$\angle BOC$ ノ 3 倍ナラバ、此ノ二

角ノ大サハ各、幾ラカ。

又 $\angle BOC$ ガ $\angle AOC$ ノ $\frac{1}{5}$ ナラ

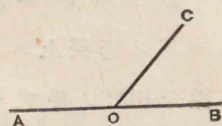
バ、此ノ二角ノ大サハ各、幾ラカ。

3. 一直線 AB 上ノ一點 O ヲ過ギ其ノ兩側ニ二ツ

ノ半直線 OC , OD ガアツテ

$\angle AOC = \angle BOD$ ナラバ、 COD

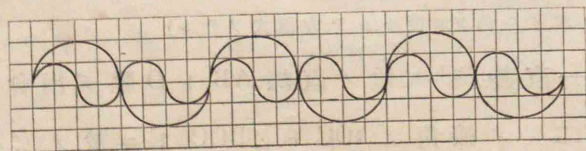
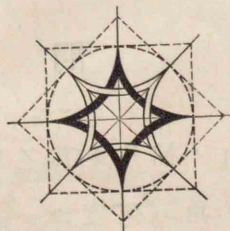
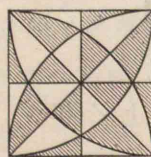
ハ一直線デアアル。



4. 三角形ノ一角ノ二等分線ガ其ノ角ノ對邊ニ垂直デアレバ、其ノ三角形ハ二等邊三角形デアアル。

5. 頂角ト頂點カラ底邊ニ引イタ垂線ノ長サトガ與ヘラレタトキ、二等邊三角形ヲ作レ。

6. 次ノ圖ヲ畫ク方法ハドウカ。



第二篇

直線圖形

第一章 平行線

29. 平行線

一直線ガ二直線ト交ハレバ其ノ交點ヲ頂點トスルハツノ角ガ出來ル。此等ノ角ニ夫々次ノヤウニ命名スル。

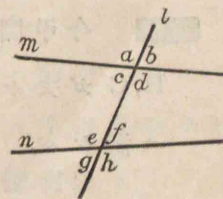
$\angle a$ ト $\angle e$, $\angle b$ ト $\angle f$ } ヲ同位角,

$\angle c$ ト $\angle g$, $\angle d$ ト $\angle h$ }

$\angle c$ ト $\angle f$, $\angle d$ ト $\angle e$ ヲ錯角,

$\angle c$, $\angle d$, $\angle e$, $\angle f$ ヲ内角,

$\angle a$, $\angle b$, $\angle g$, $\angle h$ ヲ外角



トイヒ、特ニ

$\angle c$ ト $\angle e$, $\angle d$ ト $\angle f$ ヲ同側内角,

$\angle a$ ト $\angle g$, $\angle b$ ト $\angle h$ ヲ同側外角

トイフコトガアル。

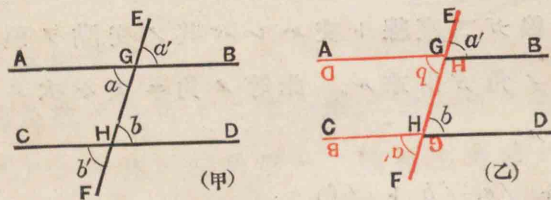
問 1. 上圖ニ於テ、相等シイ角ヲ舉ゲヨ。

問 2. 上圖ニ於テ、互ニ補角ヲナス角ヲ舉ゲヨ。

定理九 二直線ガ一直線ト交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ相等シイトキハ、此ノ二直線ハ相交ハラナイ。

假設 二直線 AB, CD ガ一直線 EF ト夫々 G, H デ交ハリ, $\angle AGH(a) = \angle GHD(b)$ トスル。

終結 AB, CD ハ相交ハラナイ。



證明 今甲圖ノ圖形 EGBDHF ヲ廻轉シテ其ノ H, G ガ夫々モトノ圖形ノ G, H ニ重ナルヤウニ置ケバ,

$$\angle a = \angle b \quad (\text{假設})$$

$$\text{然ルニ} \quad \angle a = \angle a', \quad \angle b = \angle b' \quad (\text{對頂角})$$

$$\text{故ニ} \quad \angle a' = \angle b'$$

依ツテ兩圖形ハ乙圖ノヤウニ全ク重ナル。

故ニガシ GA, HC ノ延長ガ相交ハルトスレバ HD, GB ノ延長モ亦相交ハルコトニナル。

故ニ二直線 AB, CD ガ半直線 GA, HC ノ方向デ

相交ハルトスレバ、又 GB, HD ノ方向デモ相交ハルコトニナル。即チ二直線 AB, CD ガ二點デ相交ハルコトニナル。之ハ公理一ニ戻ル。

依ツテ AB, CD ハ相交ハラナイ。

上ノ定理ノ證明デハ假ニ其ノ終結ヲ否定シテ推論ヲ進メ公理ニ戻ル結論ヲ導キ、ソレデ其ノ終結ハ真デナケレバナラスト斷定シタ。

此ノヤウニ終結ヲ假ニ否定シテ既定ノ公理、定義、定理ニ戻ルカ、又ハ所定ノ假設ニ反スル結論ヲ導キ、ソレデ其ノ終結ノ真デアルコトヲ斷定スル證明法ヲ歸謬法トイフ。

歸謬法ハ間接證明法デアル。之ニ對シテ、今マデニナシタ定理ノ證明ノヤウニ、假設ヨリ出發シテ終結ニ到達スルヤウナ證明法ヲ直接證明法トイフ。

定義 同一ノ平面上ニアツテ相交ハラナイ二直線ハ互ニ平行デアルトイヒ、平行デアル直線ヲ平行線トイフ。

同一ノ平面上ニアル二直線ハ互ニ平行デアルカ又ハ相交ハル。

相交ハル二直線ヲ相交線トイフ。

二直線 AB, CD ガ互ニ平行デアルコトヲ $AB \parallel CD$ ノヤウニ書き表ハス。

定理九ハ次ノヤウニ述ベルコトガ出來ル。

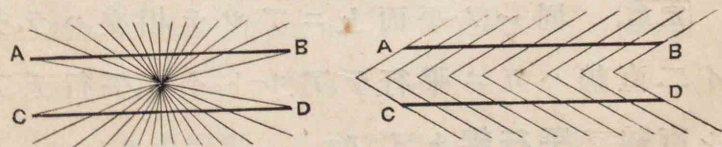
二直線ガ一直線ト交ハツテ出來ル一組ノ錯角ガ相等シイトキハ、此ノ二直線ハ互ニ平行デアル。

系一 二直線ガ一直線ト交ハツテ出來ル。

- (1) 一組ノ同位角ガ相等シイトキ、
 - (2) 一組ノ同側内角ガ互ニ補角デアルトキ、
 - (3) 一組ノ同側外角ガ互ニ補角デアルトキ、
- 此ノ二直線ハ互ニ平行デアル

系二 同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

問 3. 圖ニ於テ直線 AB, CD ガ平行デアルコトヲ檢セヨ。(一組ノ錯角又ハ同位角ヲ測ツテ)



問 4. 双方ニ如何ニ延長シテモ相交ハラズ且平行デモナイ二ツノ直線ガアルカ。

問 5. 平行線ノ例ヲ舉ゲヨ。

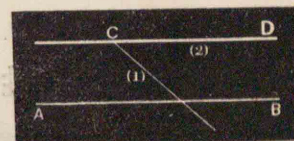
30. 平行線ノ公理

作圖題 八 與ヘラレタ點ヲ過ギ與ヘラレタ直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ點 C ヲ過

ギ、與ヘラレタ直線 AB ニ

平行ナル直線ヲ引ク。

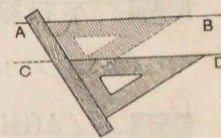


問 1. 二枚ノ三角定木又ハ一本ノ直線定木ト一

枚ノ三角定木トヲ用ヒテ平行

線ヲ畫ク方法ハドウカ。

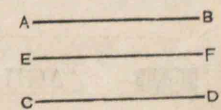
平行線ニ就イテ次ノ公理ガアル。



公理七 一直線外ノ一點ヲ過ギ此ノ直線ニ平行ナル直線ハタビ一ツダケアル。

定理十 平行線ノ一ツニ交ハル直線ハ亦他ノ一ツニモ交ハル。(歸謬法ニヨツテ證明セヨ)

系一 平行線ノ一ツニ平行ナル直線ハ亦他ノ一ツニモ平行デアル。



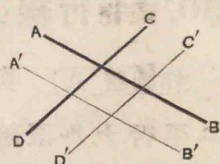
系二 同ジ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行デアル。

*以下定理ノ證明ヤ作圖題ノ作圖證明ノ簡單ナモノハ省ク、學生自ラナセ。

問 2. 相交ハル二直線 AB, CD

ニ夫々平行ナル二直線 A'B',

C'D' ハ相交ハル。



31. 平行線ノ性質

定理十一 平行線ガ一直線ト交ハツテ出来ル二

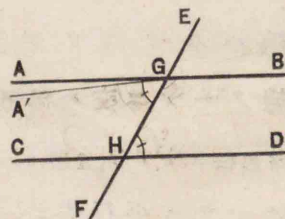
組ノ錯角ハ夫々相等シイ。

(定理九ノ逆)

假设 平行線 AB, CD ガ一直線 EF ト夫々 G, H デ交

ハルモノトスル。

終結 $\angle AGH = \angle GHD$, $\angle BGH = \angle GHC$



證明 $\angle AGH \neq \angle GHD$ トスレバ, Gヲ過ギ $\angle GHD$

ニ等シク $\angle A'GH$ ヲ作ル直線 GA' ガ引ケル。

然ルトキハ $A'G \parallel CD$ (定理九)

然ルニ $AG \parallel CD$ (假設)

故ニ A'G, AG ハ一點 Gヲ過ギ CD ニ平行ナル二

直線デアル。之ハ公理七ニ戻ル。

故ニ $\angle AGH = \angle GHD$

從ツテ $\angle BGH = \angle GHC$

系一 平行線ガ一直線ト交ハツテ出来ル。

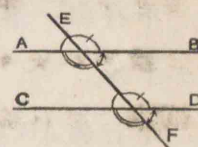
(1) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。

(2) 二組ノ同側内角ハ夫々互ニ

補角デアル。

(3) 二組ノ同側外角ハ夫々互ニ

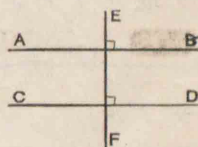
補角デアル。



系二 平行線ノ一ツニ垂直デ

アル直線ハ亦他ノ一ツニモ垂直

デアル。



此ノ事ヲ平行線ハ共通垂線ヲ有スルトイフ。

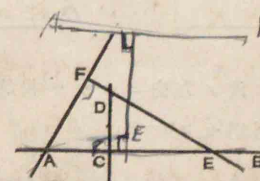
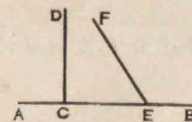
系三 同ジ直線ノ垂線ト斜線トハ相交ハル。

(歸謬法)

系四 相交線ノ各ニ夫々垂直デアル直線ハ相交

ハル。

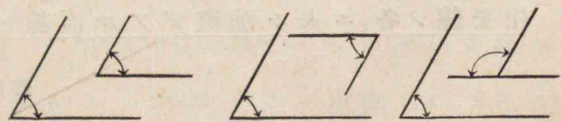
(歸謬法)



問題 2

1. 若干ノ直線ガアツテ、其ノ何レノ二ツヲ取ツテモ互ニ平行デアレバ、其ノ何レカーツニ垂直ナル直線ハ他ノ總テニモ垂直デアル。
2. 平行線ノ各、ニ夫々垂直ナル二直線ハ互ニ平行デアル。
3. 平行線 AB, CD ノ間ニ圖ノヤウニ任意ノ一點 P ヲ取ルトキハ

$$\angle APC = \angle BAP + \angle DCP$$
 デアル。
4. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ平行デアレバ、此ノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角デアル。



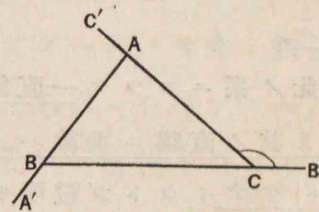
(兩角ノ邊ノ方向ニヨツテ相等シイ場合ト、互ニ補角デアル場合トヲ區別セヨ)

第二章 三角形

32. 三角形ノ内角・外角

定義 三角形ノ二邊ノナス角ヲ三角形ノ内角又ハ單ニ角トイヒ、一邊ト他ノ邊ノ延長トノナス角ヲ三角形ノ外角トイフ。

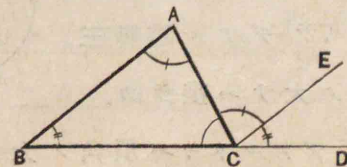
三角形ノ外角ニ隣接シナイ二ツノ内角ノ各ヲ其ノ外角ノ内對角トイフ。例ヘバ圖ニ於テ $\angle BAC, \angle ABC$ ハ共ニ外角 $\angle ACB'$ ノ内對角デアル。



定理十二 三角形ノ外角ハ其ノ内對角ノ和ニ等シイ、ソシテ三ツノ内角ノ和ハ2直角ニ等シイ。

假設 任意ノ三角形 ABC ノ一外角ヲ $\angle ACD$ トシ、
 A, B, C ニ於ケル三ツノ内角ヲ夫々 $\angle A, \angle B, \angle C$ トスル。

終結 $\angle ACD = \angle A + \angle B, \angle A + \angle B + \angle C = 2R^\circ$



證明 Cヲ過ギBAニ平行ニCEヲ引ケバ

$$\angle ACE = \angle A, \quad \angle ECD = \angle B$$

$$\text{故ニ} \quad \angle ACE + \angle ECD = \angle A + \angle B$$

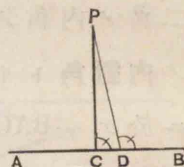
$$\text{即チ} \quad \angle ACD = \angle A + \angle B$$

$$\text{又} \quad \angle ACD + \angle C = 2R$$

$$\text{故ニ} \quad \angle A + \angle B + \angle C = 2R$$

系一 三角形ノ外角ハ内對角ノ何レヨリモ大デアル。

此ノ系ニヨツテ、一直線外ノ一點ヨリ其ノ直線ニ垂線ハタバーツシカ引ケナイコトガ證明サレル。



定義 一點ヨリ一直線マデ引イタ垂線ノ長サヲ其ノ點ト直線トノ距離トイフ。

系二 正三角形ノ一角ハ $\frac{2}{3}$ 直角 (60°) ニ等シイ。

問 1. $60^\circ, 30^\circ, 15^\circ, 75^\circ$ 及 105° ノ角ヲ作圖セヨ。

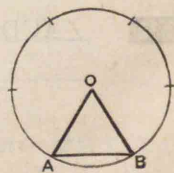
問 2. 圓周ノ六分ノ一デアル弧

ノ弦ハ其ノ圓ノ半徑ニ等シイ。

問 3. 頂角ガ 72° デアル等脚三

角形ノ底角ノ大サハ幾ラカ。

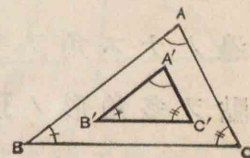
又底角ガ 72° デアルトキハ頂角ノ大サハ幾ラカ。



問 4. 二等邊三角形ノ底角ハ銳角デアル。

系三 三角形ハ一ツヨリ多クノ直角又ハ鈍角ノ内角ヲ有スルコトハナイ。

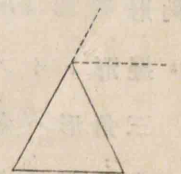
系四 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シイトキハ、第三角モ等シイ。



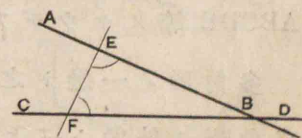
問 5. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シク且其ノ一組ノ等角ノ對邊ガ等シイトキハ、此ノ兩三角形ハ合同デアル。

問 6. 二等邊三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引イタ垂線ハ底邊ヲ二等分スル。

問 7. 二等邊三角形ノ頂點ヲ過ギ底邊ニ平行ナル直線ハ頂點ニ於ケル外角ヲ二等分スル。



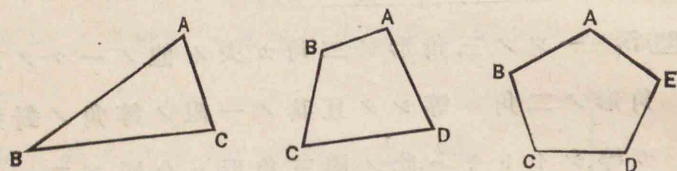
系五 二直線ガ之ニ交ハル一直線ト其ノ同ジ側ニ於テ作ル内角ノ和ガ2直角ニ等シクナイトキハ、此等ノ二直線ハ其ノ和ガ2直角ヨリ小さい内角ノアル方デ相交ハル。



(歸謬法)

33. 多角形

定義 若干ノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ多角形トイヒ、其ノ線分ヲ多角形ノ邊、二隣邊ノナス角ヲ多角形ノ角トイヒ、此ノ角ノ頂點ヲ多角形ノ頂點トイフ。



多角形ハ角又ハ邊ノ數ニヨツテ三角形、四角形、五角形、……、 n 角形又ハ三邊形、四邊形、五邊形、……、 n 邊形トイフ。

三角形ハ多角形ノ中邊數ノ最モ少イモノデアル。

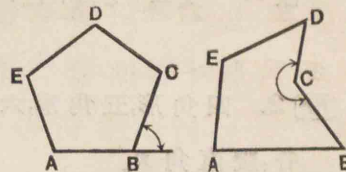
多角形ヲ書き表ハスニハ其ノ頂點ヲ表ハス文字ヲ順ニ並記スル。例ヘバ四角形 ABCD 或ハ五角形 ABCDE 等ノヤウデアル。

多角形ノ一邊ト之ニ隣ル邊ノ延長トノナス角ヲ多角形ノ外角トイヒ、外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ其ノ内角トモイフ。

内角ガ何レモ 2 直角ヨリ小サイ多角形ヲ凸多角

形トイヒ、内角ノ中少クトモ一ツガ 2 直角ヨリ大キイモノヲ凹多角形トイフ。

注意 爾後本書デ單ニ多角形トイフトキハ常ニ凸多角形ヲ指スモノトスル。



多角形ノ相隣ラナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ其ノ對角線トイフ。

問 1. 四角形、五角形ニハ各、幾ツノ對角線ガ引ケルカ。

又 n 角形ノ對角線ノ總數ヲ求メル公式ヲ作レ。

定理十三 n 角形ノ内角ノ和ハ $(2n-4)$ 直角ニ等シイ。

假設 ABCD……ヲ n 角形(圖デハ六角形)トスル。

終結 $\angle A + \angle B + \angle C + \dots = (2n-4)R$

證明 一頂點 A ヨリ對角線

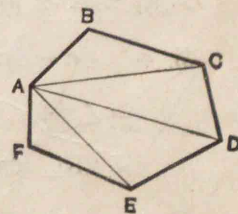
AC, AD, ……ヲ引ケバ、此等

$(n-3)$ 箇ノ對角線ハ本形ヲ

$(n-2)$ 箇ノ三角形ニ分ケル。

此等ノ三角形ノ總テノ内

角ノ和ガ此ノ多角形ノ内角ノ和デアル。



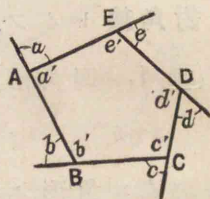
然ルニ三角形ノ内角ノ和ハ2直角ニ等シイ。

$$\begin{aligned}\text{故ニ } \angle A + \angle B + \angle C + \dots &= 2R \times (n-2) \\ &= (2n-4)R\end{aligned}$$

問2. 四角形、五角形、六角形、八角形ノ内角ノ和ハ各、幾直角カ。

定理十四 n 角形ノ總テノ邊ヲ順次延長シテ作ツタ外角ノ和ハ4直角ニ等シイ。

假設 ABCD ヲ n 角形 (圖デハ五角形トシ、 $\angle a, \angle b, \angle c, \dots$ ヲ夫々頂點 A, B, C,ニ於ケル外角ノ一ツヲ表ハスモノトシ、 $\angle a', \angle b', \angle c', \dots$ ヲ夫々其ノ外角ニ隣ル内角ヲ表ハスモノトスル。



終結 $\angle a + \angle b + \angle c + \dots = 4R$

證明 各頂點ニ於ケル一ツノ外角ト内角トノ和ハ明カニ2直角ニ等シイ。

$$\begin{aligned}\text{故ニ } \angle a + \angle a' + \angle b + \angle b' + \angle c + \angle c' + \dots \\ &= \angle a' + \angle b' + \angle c' + \dots + \angle a + \angle b + \angle c + \dots \\ &= 2R \times n = 2nR\end{aligned}$$

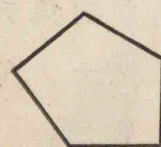
$$\text{然ルニ } \angle a' + \angle b' + \angle c' + \dots = (2n-4)R$$

$$\text{故ニ } \angle a + \angle b + \angle c + \dots = 4R$$

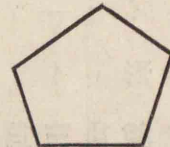
34. 正多角形

定義 多角形ノ各邊ガ皆相等シイモノヲ等邊多角形トイヒ、内角ガ皆相等シイモノヲ等角多角形トイフ。

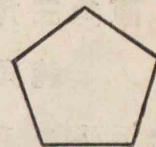
等邊デ且等角デアル多角形ヲ正多角形トイフ。



等邊五角形



等角五角形



正五角形

三角形ノ場合ニハ等邊ナルモノハ必ズ等角デ、等角ナルモノハ必ズ等邊デアルガ、一般ノ多角形デハ必ズシモソウデナイ。

正多角形ハ其ノ角ノ邊數ニ從ツテ之ヲ正三角形、正四角形、正五角形等トイフ。

特ニ正四角形ヲ正方形トイフ。

問1. 正五角形、正六角形、正八角形ノ各角ノ大サヲ求メヨ。

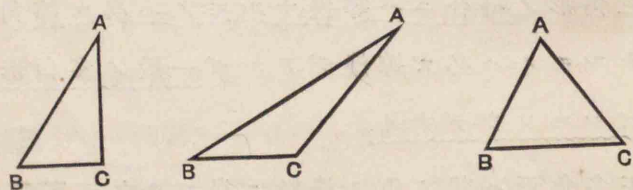
又正 n 角形ノ一角ノ大サヲ表ハス公式ヲ作レ。

問2. 正十五角形ノ一外角ノ大サヲ求メヨ。

35. 三角形ノ種類

三角形ハ之ヲ邊ニツイテ分類スレバ、三邊不等デアルモノ(不等邊三角形)、二邊相等シイモノ(二等邊三角形)及ビ三邊皆相等シイモノ(正三角形)ガアルガ、又角ニツイテ之ヲ分類スルコトモデキル。

定義 三角形ノ一ツノ角ガ直角デアルモノヲ**直角三角形**トイヒ、一ツノ角ガ鈍角デアルモノヲ**鈍角三角形**トイフ。又總テノ角ガ銳角デアルモノヲ**銳角三角形**トイフ。



直角三角形デハ直角ノ對邊ヲ其ノ**斜邊**トイフ。

問 1. 直角三角形ノ斜邊ノ兩端ノ角ハ共ニ銳角デ又互ニ餘角デアル。

問 2. 鈍角三角形ノ鈍角デナイ二角ハ共ニ銳角デアル。

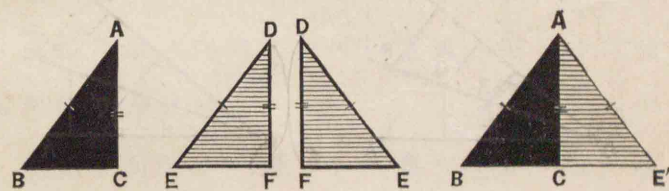
問 3. 直角二等邊三角形ノ各角ノ大サハ幾ラカ。

36. 直角三角形ノ合同

定理十五 斜邊ト他ノ一邊トヲ夫々等シクスル兩直角三角形ハ合同デアル。

假設 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ヲ兩直角三角形トシ、 AB , DE ヲ夫々其ノ斜邊トシ、且 $AB=DE$, $AC=DF$ トスル。

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$



證明 $\triangle DEF$ ノ邊 DF ヲ之ニ等シイ AC ニ重ネ、 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トヲ各、 AC ノ兩側ニアルヤウニ置キ、 $\triangle DEF$ ヲ圖ニ於ケル $\triangle AE'C$ ノ位置ヲ取ラシメルト、 $\angle ACB$ ト $\angle ACE'$ トガ共ニ直角デアルカラ、 BCE' ハ一直線トナル。

然ルニ $\triangle ABE'$ ニ於テ $AB=AE'$ デアル。(假設)

故ニ $\angle B = \angle E'$ (定理三)

又 $\angle E' = \angle E$ 故ニ $\angle B = \angle E$

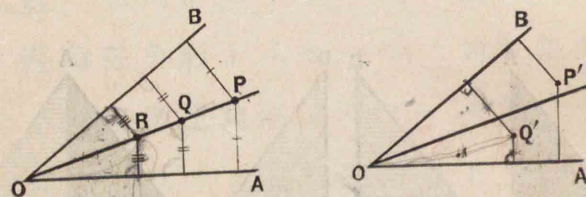
從ツテ $\angle A = \angle D$ (定理十二系四)

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (定理二)

問 二等邊三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ下シタ垂線ハ頂角ヲ二等分スル。

系 角ノ二等分線上ノ各點ハ夫々其ノ角ノ二邊ヨリ等距離ニアル。

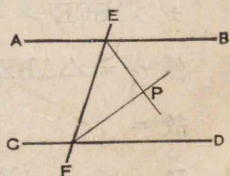
又 角ノ二邊ヨリ等距離ニアル點ハ皆其ノ角ノ二等分線ノ上ニアル。



從ツテ角ノ二等分線ノ上ニナイ點ハ其ノ角ノ二邊ヨリ不等距離ニアル。 (歸謬法)

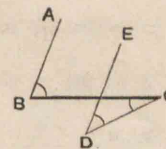
問題 3

1. ニツノ平行線 AB, CD ニ直線 EF ガ交ハツテ出來ル同側内角ノ二等分線ハ互ニ直交スル。

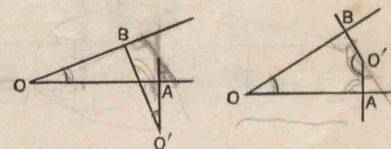


2. 二等邊三角形ノ一角ガ 60° デアレバ此ノ三角形ハ正三角形デアル。

3. 圖ニ於テ $\angle B = 74^\circ$, $\angle C = 36^\circ$, $\angle D = 38^\circ$ デアルトキハ BA ト DE トハ平行デアル。



4. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ垂直デアルトキハ此ノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角デアル。

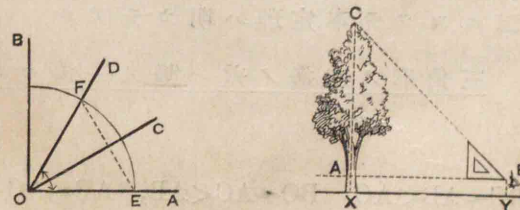


5. 或多角形ノ内角ノ和ガ16直角ニ等シイ。此ノ多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

6. 或正多角形ノ一角ガ $\frac{9}{5}$ 直角デアル。其ノ邊數ヲ求メヨ。

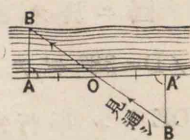
7. 凸多角形ハ三ツヨリ多ク鋭角ノ内角ヲ有スルコトハナイ。

8. 直角ヲ三等分セヨ。



9. 直角二等邊三角形ノ定木ヲ用ヒテ木ノ高サヲ概測スル方法ヲ考案セヨ。

10. コハニ示ス圖ニヨツテ河ノ
幅ヲ概測スル種々ノ方法ヲ考
案セヨ。



37. 三角形ノ邊及ビ角ノ不等

定理十六 三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大
デアル。

公理ニヨツテ本定理ハ明カデアル。

系 三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小デア
ル。

$$BC \sim AB < AC, BC \sim AC < AB, AB \sim AC < BC$$

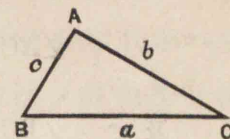
問 1. 多角形ノ一邊ハ他ノ邊ノ和ヨリ小デアル。

問 2. 圓ノ弧ハ之ニ對スル弦ヨリ大デアル。

注意 $\triangle ABC$ ニ於テハ一般ニ角 A, B, C ノ對邊ヲ夫々 a, b, c デ表ハス。

依ツテ $b+c>a, c+a>b, a+b>c,$

又 $b \sim c < a, c \sim a < b, a \sim b < c$

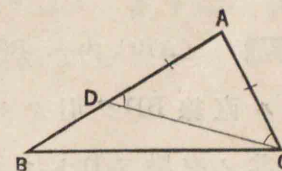
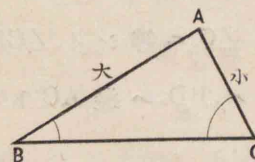


故ニ三ツノ線分ガ三角形ノ三邊トナルニハ、其ノ中
何レノ二ツヲ取ツテモ其ノ和ハ他ノ一ツヨリ大デ、
其ノ差ハ他ノ一ツヨリ小デナケレバナラナイ。

定理十七 三角形ノ二邊ガ等シクナイトキハ、大
邊ノ對角ハ小邊ノ對角ヨリ大デアル。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB > AC$ トスル。

終結 $\angle ACB > \angle ABC$



證明 AB 上ニ AC ニ等シク AD ヲ取り、 CD ヲ結ベバ

$$\angle ACD = \angle ADC \quad (\text{定理三})$$

然ルニ D ハ AB ノ上ニアルカラ

$$\angle ADC > \angle ABC \quad (\text{定理十二系一})$$

又 $\angle ACB > \angle ACD$

故ニ $\angle ACB > \angle ABC$

問3. 前ノ圖ニ於テ

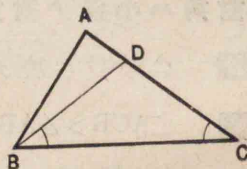
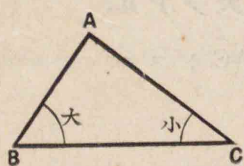
$$\angle ACD = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC)$$

及ビ $\angle BCD = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC)$

定理十八 三角形ノ二角ガ等シクナイトキハ、大角ノ對邊ハ小角ノ對邊ヨリ大デアル。(定理十七ノ逆)

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle ABC > \angle ACB$ トスル。

終結 $AC > AB$



證明 $\angle ABC$ 内ニ BC ト $\angle C$ ニ等シイ $\angle CBD$ ヲ作ル直線 BD ヲ引クトキハ、 BD ハ邊 AC ト交ハル。其ノ交點ヲ D トスル。

然ラバ $DB = DC$ (定理四)

ソシテ $AD + DB > AB$ (定理十六)

故ニ $AD + DC > AB$

即チ $AC > AB$

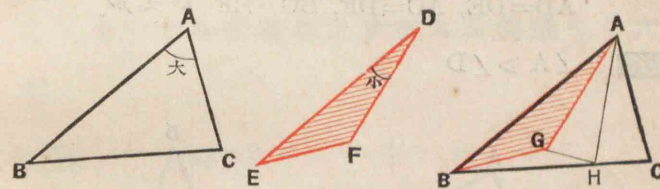
問4. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリ大デアル。鈍角三角形ノ鈍角ノ對邊ハドウカ。

定理十九 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク、其ノ夾角ガ等シクナイトキハ、夾角ノ大キイ方ノ三角形ノ第三邊ガ他ノ三角形ノ第三邊ヨリ大デアル。

假設 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ

$AB = DE, AC = DF, \angle BAC > \angle EDF$ トスル。

終結 $BC > EF$



證明 $\triangle DEF$ ヲ取ツテ DE ヲ AB ニ重ネ、兩三角形ヲ AB ノ同ジ側ニ置キ、頂點 F ガ G ニ來タトスレバ、 $\angle EDF$ ハ $\angle BAC$ ヨリ小デアルカラ、 AG ハ $\angle BAC$ 内ニアル。 $\angle GAC$ ノ二等分線 AH ヲ引キ BC トノ交點ヲ H トシ、 GH ヲ結ベバ、

$$\triangle AGH \equiv \triangle ACH \quad (\text{定理一})$$

故ニ $HG = HC$

然ルニ $BH + HG > BG$ (定理十六)

故ニ $BH + HC > BG$ 即チ $BC > BG$

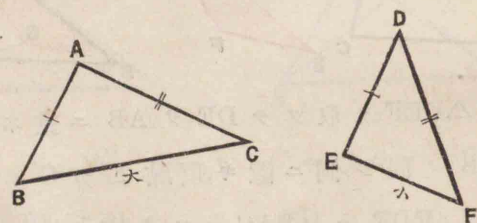
故ニ $BC > EF$

問 5. $\triangle ABC$ ノ一邊 BC ノ中點ヲ M トシ、 $\angle AMB$ ガ鈍角ナラバ $AB > AC$ デアル。

定理二十 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク第三邊ガ等シクナイトキハ、大ナル第三邊ヲ有スル方ノ三角形ノ其ノ邊ニ對スル角ハ他ノ三角形ノ第三邊ニ對スル角ヨリ大デアル。

假設 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ
 $AB = DE, AC = DF, BC > EF$ トスル。

終結 $\angle A > \angle D$



證明 若シ $\angle A = \angle D$ トスレバ $BC = EF$ (定理一)

又若シ $\angle A < \angle D$ トスレバ $BC < EF$ (定理十九)

然ルニ之ハ何レモ假設ニ戻ルカラ、 $\angle A$ ハ $\angle D$ ニ等シクモナク又 $\angle D$ ヨリ小サクモナイ。

故ニ $\angle A > \angle D$

問 6. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB > AC$ トシ、 AD ヲ A ヨリ出ル中線トスレバ、 $\angle ADB$ ハ鈍角デアル。

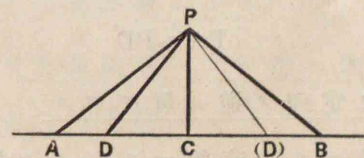
38. 垂線ト斜線

定理二十一 一直線外ノ一點ヨリ此ノ直線マデ垂線ト斜線トヲ引ケバ、

- [1] 垂線ガ最小(最短)デアル。
- [2] 垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル兩斜線ハ相等シイ。
- [3] 垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ、之ヨリ小ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ヨリ大デアル。

假設 一直線 AB 外ノ一點ヲ P トシ、
 $PC \perp AB, CA = CB, CA > CD$ トスル

終結 [1] PC ハ最小 [2] $PA = PB$ [3] $PA > PD$



證明 [1] PA ヲ P ヨリ AB へ引イタ任意ノ斜線トスレバ、直角三角形 PAC ニ於テ

$$\angle PAC < \angle PCA \quad (\text{定理十二系三})$$

故ニ $PC < PA$ (定理十八)

[2] $\triangle PAC \equiv \triangle PBC$ (定理一)

故ニ $PA = PB$

[3] $CA > CD$ デアルカラ、Dハ線分AC又ハBCノ上ニアル。

今DガACノ上ニアルトスレバ

$\angle PDA > \angle PCD$ (定理十二系一)

故ニ $\angle PDA$ ハ鈍角デアル。

然ルニ $\angle PAD$ ハ鋭角デアル。 (定理十二系三)

故ニ $\angle PDA > \angle PAD$

故ニ $PA > PD$ (定理十八)

又DガBCノ上ニアルトスレバ、

$PB > PD$

故ニ何レニシテモ

$PA > PD$

系一 此ノ定理ノ逆モ真デアル。 (歸謬法)

系二 一點ヨリ一直線マデ引イタ相等シイ斜線ハ、同ジ點ヨリ引イタ垂線ト等角ヲナス。

大ナル(長イ)斜線ハ小ナル(短イ)斜線ヨリ垂線ト大ナル角ヲナス。

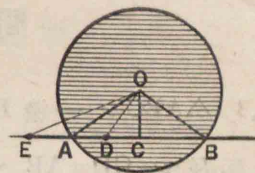
又 逆モ真デアル。

系三 圓ノ弦ノ上ノ點ハ

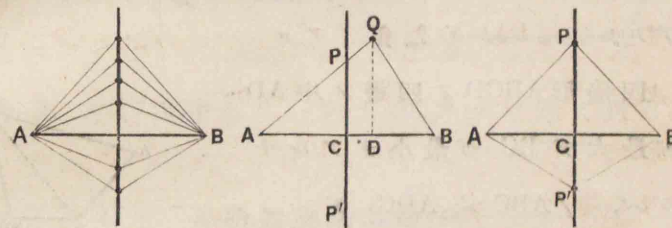
其ノ兩端ノ外皆圓内ニアル。

ソシテ弦ノ延長上ノ點ハ

皆圓外ニアル。



系四 線分ノ垂直二等分線ノ上ノ點ハ、皆其ノ線分ノ兩端ヨリ等距離ニアル。



ソシテ其ノ垂直二等分線ノ上ニナイ點ハ、皆其ノ

線分ノ兩端ヨリ不等距離ニアル。

從ツテ二點ヨリ等距離ニアル點ハ、皆其ノ二點ヲ

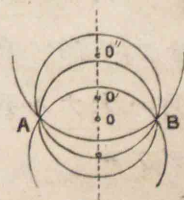
結ブ線分ノ垂直二等分線ノ上ニアル。

問 與ヘラレタ二點ヲ通ル圓

周ノ中心ハ、皆其ノ二點ヲ結

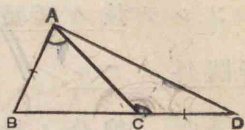
ブ線分ノ垂直二等分線ノ上

ニアル。



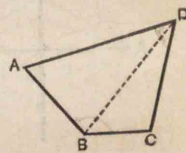
問題 4

1. $\triangle ABC$ ノ一邊 BC ヲ D マデ
延長シ、 $CD=AB$ ナルヤウニ
スレバ $BC < AD$ デアル。



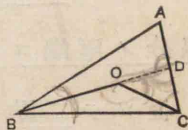
2. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ底邊 BC 上ノ任
意ノ一點 D ニ結ブ線分 AD ハ AB, AC ノ各ヨリ小デ
アル。

3. 四邊形 $ABCD$ ノ四邊ノ中 AD
ガ最大デ BC ガ最小デアルナ
ラバ、 $\angle ABC > \angle ADC$ デ
且 $\angle BCD > \angle BAD$ デアル。

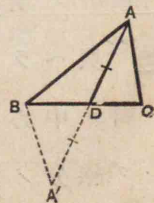


4. O ヲ $\triangle ABC$ 内ノ任意ノ一點
トスレバ、

$$OB + OC < AB + AC \text{ デアル。}$$



- ⑤. 三角形ノ中線ガ之ト隣ル邊
トナス角ノ中、小ナル邊トナス
角ハ大ナル邊トナス角ヨリ大
デアル

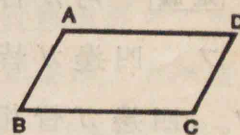


第三章 平行四邊形

39. 平行四邊形ノ性質

定義 對邊ガ各互ニ平行デアル四邊形ヲ
平行四邊形トイフ。

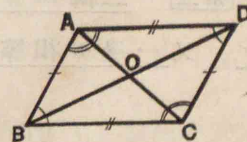
平行四邊形 $ABCD$ ヲ $\square ABCD$
ト書キ、又 $\square AC$ 或ハ $\square BD$ トモ
略記スル。



問 1. 平行四邊形ノ一角ガ 60° ナラバ他ノ角ハ幾
度カ。

定理 二十二 平行四邊形ニ於テ、

- [1] 對角線ハ之ヲ合同ナルニツノ三角形ニ分ケル。
- [2] 對邊ハ各相等シイ。
- [3] 對角ハ各相等シイ。
- [4] 對角線ハ互ニ他ヲ二等



分スル。

系一 平行線ニ共通垂線ヲ引イタトキ、其ノ平行
線ノ間ニアル部分ハ相等シイ。

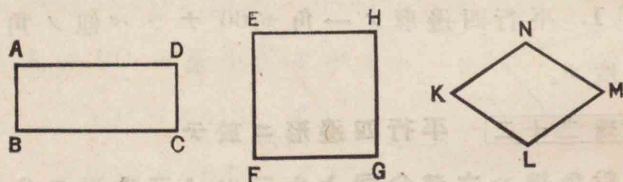
定義 平行線間ニアル其ノ共通垂線ノ部
分ノ長サヲ平行線ノ距離トイフ。

問 2. 與ヘラレタ直線ヨリ與ヘラレタ距離ニアツテ之ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

系二 平行四邊形ニ於テ、

- [1] 一角ガ直角デアレバ、他ノ角モ皆直角デアル。
- [2] 一組ノ隣邊ガ相等シケレバ、四邊皆相等シイ。

定義 角ガ皆直角デアル四角形ヲ矩形トイフ。四邊ガ皆相等シイ矩形ヲ正方形トイフ。四邊ガ皆相等シイ四邊形ヲ菱形トイフ。



系三 二隣邊ガ夫々相等シイ矩形ハ皆合同デアル。又一邊ガ相等シイ正方形ハ皆合同デアル。

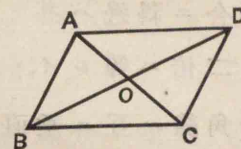
40. 平行四邊形デアルタメノ條件

定理二十三 四邊形ハ次ノ場合ニ平行四邊形デアル。

- [1] 二組ノ對邊ガ各、相等シイトキ。
- [2] 一組ノ對邊ガ相等シク且平行デアルトキ。

[3] 二組ノ對角ガ各、相等シイトキ。

[4] 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキ。

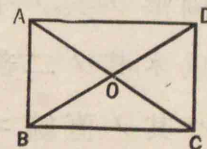


系 矩形、菱形、正方形ハ皆平行四邊形デアル。

問 1. 平行四邊形ガ矩形、正方形、菱形トナル條件ハドウカ。(邊、角、對角線ニ關スル種々ナル條件ヲ研究セヨ)

問 2. 平行四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ、他ノ邊ニ平行デ且對角線ヲ二等分スル。

定理二十四 矩形ノ對角線ハ相等シイ。



(ABCDヲ矩形トスレバ $\triangle ABC$ ト $\triangle DCB$ トノ合同デアルコトカラ之ヲ證明セヨ)

系一 二ツノ對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。

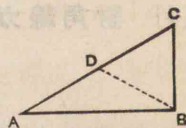
系二 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ、三ツノ頂點ヨリ等距離ニアル。(本定理ノ圖ヲ見ヨ)

問3. 直角三角形ノ一鋭角ガ他ノ鋭角ノ二倍ナ

ラバ、三ツノ角ノ大サハ幾ラ

カ。又此ノ場合ニ斜邊ハ其

ノ最小ノ邊ノ二倍ニ等シイ。



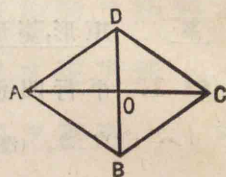
問4. 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ニ二等分スル。

ソレデ菱形ハ其ノ對角線ヲ

折目トシテ、其ノ一部ヲ他ノ

部分ノ上ニ全ク折重ネルコ

トガデキル



41. 對 稱

定義 一ツノ圖形ヲ其ノ平面上ノ一直線ヲ折目トシテ折重ネ、其ノ二部分ガ全ク相重ナレバ、此ノ圖形ハ其ノ直線ニ關シテ對稱デアルトイヒ、其ノ直線ヲ對稱ノ軸トイフ。

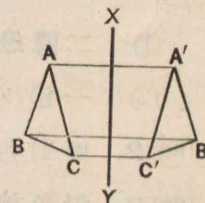
菱形ハ其ノ對角線ニ關シテ對稱デアアル

問1. 二等邊三角形及ビ圓ノ對稱ノ軸ハ何カ。

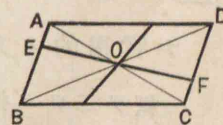
問2. 四邊形ノ一ツノ對角線 AC ガ他ノ對角線 BC ヲ垂直ニ二等分スレバ、此ノ四邊形ハ AC ニ關シテ對稱デアアル。

二ツノ圖形ノ一ツヲ或一ツノ直線ヲ折目トシテ他ノ上ニ全ク折重ネ得ルトキハ、此ノ二ツノ圖形ハ其ノ直線ニ關シテ對稱デアルトイヒ、其ノ直線ヲ矢張り對稱ノ軸トイフ。

二點ハ之ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ニ關シテ對稱デアアル。又一直線 XY ニ關シテ對稱デアアル三組ノ點 A, A'; B, B'; C, C' ガアルトキ A, B, C 及ビ A', B', C' ヲ結ンデ出來ル兩三角形ハ又 XY ニ關シテ對稱デアアル。



問3. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ハ、之ヲ通り二組ノ對邊ノ上ニ兩端ヲ有スル總テノ線分ノ中點デアアル。



上ノ問ノヤウナ場合ニ此ノ圖形ハ對角線ノ交點ニ關シテ對稱デアルトイフ。點ニ關シテ對稱デアアル圖形ハ、此ノ點ヲ通ル直線ガ其ノ圖形ヲ分ケタ片側ノ部分ヲ其ノ平面上デ 180°ダケ廻轉スレバ他ノ片側ノ部分ト全ク相重ナル。

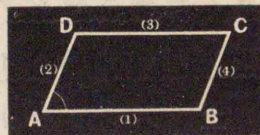
圓ハ其ノ中心ニ關シテ對稱デアアル。

42. 平行四邊形ノ作圖

作圖題 九 二隣邊ト其ノ夾角トヲ知ツテ平行四邊形ヲ作レ。

二隣邊ヲ知ツテ矩形ヲ作レ。

一邊ヲ知ツテ正方形ヲ作レ。



問 1. 次ノモノヲ知ツテ平行四邊形ヲ作レ。

(1) 二隣邊ト一對角線。

(2) 一邊ト兩對角線。

問 2. 兩對角線ヲ知ツテ菱形ヲ作レ。

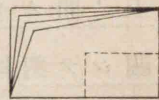
問 3. 對角線ヲ知ツテ正方形ヲ作レ。

問 4. 對角線ト一邊トヲ知ツテ矩形ヲ作レ。

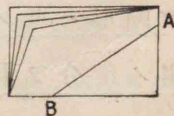
問 5. 紙上ニ矩形及ビ菱形ヲ畫クノニ次ノヤウ

ナ實用的ノ方法ガアル、其ノ理ヲ説明セヨ。

紙ヲ二ツニ折り、更ニ又之ヲ二ツニ折り(折目ヲ折重ネ)其ノ上ニ針デ穴ヲ穿テ、之ヲ開イテ四ツノ穴ヲ連結スレバ矩形ガ出來ル。



又上ノヤウニ折ツタ紙ヲ AB 線ニ沿ウテ斷チ切ツテ開ケバ切口 AB ヲ邊トスル菱形ガ出來ル。



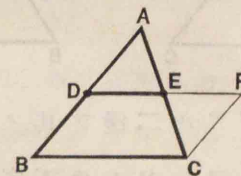
此ノヤウニシテ正方形ヲ切ルニハドウスレバヨイカ。

43. 平行線ニ關スル定理

定理 二十五 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ他ノ邊ニ平行デ且其ノ半分ニ等シイ。

假設 $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トスル。

終結 $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$



證明 DE ヲ延長シテ EF ヲ DE ニ等シク取り CF

ヲ結ベバ* $\triangle ADE \equiv \triangle CFE$ (定理一)

故ニ $\angle ADE = \angle F$

故ニ $AD \parallel CF$ 從ツテ $BD \parallel CF$

又 $AD = CF$ 從ツテ $BD = CF$

故ニ四邊形 $DBCF$ ハ平行四邊形デアル。

故ニ $DE \parallel BC$

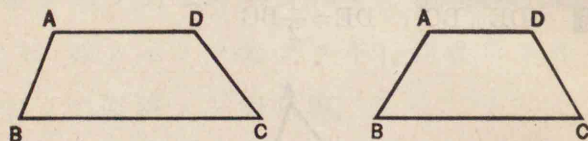
又 $DF = BC$ 然ルニ $DE = \frac{1}{2}DF$

故ニ $DE = \frac{1}{2}BC$

* EF, CF ノヤウナ線ヲ補助線トイフ。補助線ヲ引クコトハ證明ヲナスニ極めて重要ナコトデアル。

系一 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通り他ノ邊ニ平行ニ引イタ直線ハ残りノ邊ノ中點ヲ通ル。(歸謬法)

定義 一組ノ對邊ガ平行デアル四邊形ヲ梯形トイフ。

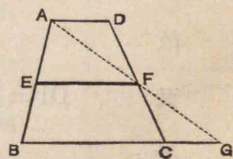


梯形デハ平行デアル二邊ヲ其ノ底トイヒ、一ツヲ上底、他ヲ下底トイフ。ソシテ下底ノ兩端ノ角ヲ其ノ底角トイフ。

梯形ノ底デナイ二邊ノ相等シイモノヲ等脚梯形又ハ二等邊梯形トイフ。

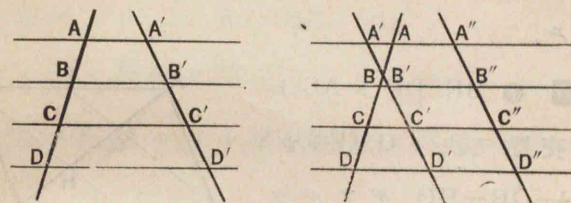
問 1. 等脚梯形ノ兩底角ハ相等シク、對角ハ補角ヲナス。

系二 梯形ノ平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ、底ニ平行デ且兩底ノ和ノ半分ニ等シイ。



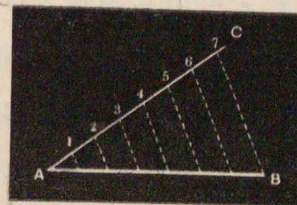
系三 梯形ノ平行デナイ二邊ノ一ツノ中點ヲ通り底ニ平行ニ引イタ直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ通ル。

定理二十六 若干ノ平行線ガ之ニ交ハルーツノ直線カラ等シイ線分ヲ截取ルナラバ、他ノ之ニ交ハル直線カラモ等シイ線分ヲ截取ル。



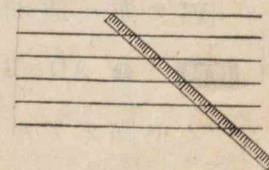
($ACC'A'$, $BDD'B'$ 等ヲ梯形ト考ヘ、定理二十五ノ系三ヲ用ヒテ證明セヨ)

作圖題 + 與ヘラレタ線分ヲ n 等分セヨ。



(圖ハ七等分スル場合デアル)

問 2. 兩縁ノ平行ナ板ヲ五等分スル簡單ナ方法ヲ工夫セヨ。



44. 證明ノ解析

〔例〕 平行四邊形 $ABCD$ ノ一組ノ對邊 AD, BC ノ中點ヲ夫々 E, F トスレバ, BE, DF ハ對角線 AC ヲ三等分スル。

考へ方 ① BE, DF ト AC ト

ノ交點ヲ夫々 G, H トシ,

$AG=GH=HC$ デアルタ

メニハ $AE=ED$ デアル

カラ $GE \parallel HD$ デナケレバナラス。 (定理二十五)

② 依ツテ $EBFD$ ハ平行四邊形デナケレバナラス。

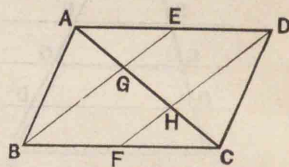
③ 從ツテ定理二十三ノ何レカーツノ條件ガワカレバヨイ。然ルニ $ED=BF, ED \parallel BF$ ハ假設ヨリ直チニワカルコトデアル。

依ツテ此ノ最後ノコトヲ出發點トシテ上ノ推理ヲ逆ニ進メバ本問題ノ證明ガ得ラレル。

證明 ① $AD=BC, AD \parallel BC$ デ, E, F ハ夫々 AD, BC ノ中點デアルカラ $ED=BF$ 且 $ED \parallel BF$ デアル。

② 故ニ $EBFD$ ハ平行四邊形デアル。

③ 故ニ $GE \parallel HD$



④ ツシテ $\triangle AHD$ ニ於テ $AE=ED$ デアルカラ

$$AG=GH \quad (\text{定理二十五系一})$$

同様ニシテ $GH=HC$

故ニ $AG=GH=HC$

此ノ例ノ證明ヲ工夫シタヤウニ,

[1] 先ヅ證明スベキ事柄(終結)ガ成立ツモノト假定シ,

[2] 次ニ此ノ假定ガ成立ツタメニハドンナ條件ガ必要デアルカラ次第ニ考ヘテ,

[3] 此等ノ必要ナ條件ト與ヘラレタ事柄(假設)又ハ既知ノ事柄トノ關係ヲ明カニスル

コトヲ證明ノ解析トイフ。

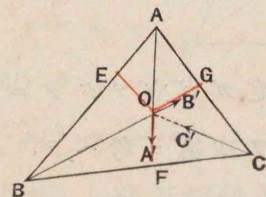
問題ヲ證明スルトキ假設ヨリ終結ガ容易ニ得ラレナイトキハ, 上ノヤウニ解析ヲシテ假設又ハ既知ノ事柄カラ直チニ斷定シ得ル關係ヲ得テ, 之ヲ出發點トシテ解析デトツタ推理ヲ逆ニ進メバ容易ニ證明ガ得ラレル。

〔注意〕 證明ノ解析ハ其ノ考ヘ方デアル。ソレ故證明ヲ要求スル問題ノ解答ニハ之ヲ記ス必要ハナイ。ケレドモ練習ノタメニ證明ノ前ニ書イテ見ルコトハ甚ダ有益デアル。

45. 三角形ノ内心・傍心・外心・重心・垂心

定理 二十七 三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル。

解析 $\triangle ABC$ ノ $\angle A, \angle B, \angle C$ ノ二等分線ヲ夫々 AA', BB', CC' トシテ、此ノ三直線ガ同一ノ點ヲ通ルナラバ、



① 先ヅ其ノ中ノ二ツ例ヘバ AA' ト BB' トハ必ズ相交ハラネバナラス、依ツテ其ノ交點ヲ O トスレバ $\angle BAO + \angle ABO < 2R$ デナケレバナラス。

然ルニ之ハ假設ヨリ明カデアル。(何故カ)

② 次ニ AA', BB', CC' ガ同一ノ點デ相交ハルトスレバ CC' ハ點 O ヲ通ラネバナラス。

依ツテ OC ヲ結ブ直線ハ CC' ト一致シ $\angle C$ ノ二等分線デナケレバナラス。

依ツテ O ヨリ BC, CA ニ垂線 OF, OG ヲ引ケバ、 $OF=OG$ デナケレバナラス。

然ルニ之ハ O ガ $\angle A, \angle B$ ノ二等分線ノ交點デアル、コトカラ直チニツカルコトデアル。(何故カ)

證明 $\triangle ABC$ ノ $\angle A, \angle B$ ノ二等分線ヲ夫々 AA', BB' トスレバ

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B < 2R$$

デアルカラ AA' ト BB' トハ

$\triangle ABC$ ノ内部デ相交ハル。

此ノ交點ヲ O トシ、 O ヨリ

三邊 AB, BC, CA ニ夫々垂線 OE, OF, OG ヲ引ケバ

$$OE=OF, \quad OE=OG$$

故ニ

$$OF=OG$$

故ニ O ハ $\angle C$ ノ二等分線上ニアル。(定理十五系)

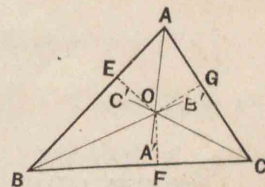
ソシテ角ノ二等分線ハタバーツシカナイカラ

OC ハ即チ $\angle C$ ノ二等分線デアル。故ニ三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル。

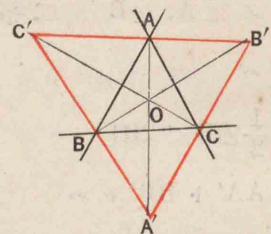
定義 三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ノ交點ヲ三角形ノ内心トイフ。

問 1. 三角形ノ内心ヲ中心トシ、之ヨリ一邊ニ至ル距離ヲ半径トシテ圓ヲ畫イテ見ヨ。

三角形ノ内心ヨリ三邊マデノ距離ハ皆相等シイ。



定理 二十八 三角形ノ一ツノ内角ト他ノ二ツノ内角ニ隣レル外角トノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル。



(前定理ノ證明ト同ジヤウニシテ證明サレル)

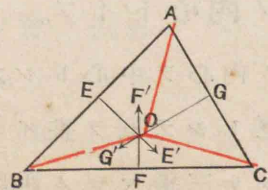
定義 三角形ノ一ツノ内角ト他ノ二ツノ内角ニ隣レル外角トノ二等分線ノ交點ヲ三角形ノ傍心トイフ。

三角形ノ傍心ヨリ三邊ニ至ル距離ハ皆相等シイ。

三角形ニハ三ツノ傍心ガアル。

定理 二十九 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル。

解析 $\triangle ABC$ ノ三邊 AB, BC, CA ノ垂直二等分線 EE', FF', GG' ガ同一ノ點ヲ通ルトスレバ、



① 先ヅ其ノ中ノ二ツ例ヘバ EE', FF' ハ相交ハラネバナラス。之ハ假設ヨリ明カデアル。依ツテ其ノ交點ヲ O トスル。

② EE', FF', GG' ガ同一ノ點デ相交ハルトスレバ、 GG' ハ點 O ヲ通ラネバナラス。

依ツテ AC ノ中點 G ト O トヲ結ブ直線 OG ハ GG' ト一致シ AC ノ垂直二等分線デナケレバナラス。

然ルニ $OA=OC$ デアルカラ、 OG ハ AC ノ垂直二等分線デアル (何故カ)

證明 (略スル)

定義 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ノ交點ヲ三角形ノ外心トイフ。

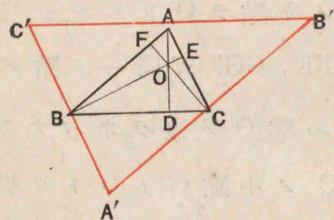
問 2. 三角形ノ外心ヲ中心トシ之ヨリ一頂點ニ至ル距離ヲ半徑トシテ圓ヲ畫イテ見ヨ。

三角形ノ外心ヨリ三頂點マデノ距離ハ相等シイ。

定理 三十 三角形ノ三頂點ヨリ對邊ヘ引イタ三垂線ハ同一ノ點ヲ通ル。

證明 $\triangle ABC$ ノ三頂點 A, B, C ヲ通り夫々對邊ニ平行線ヲ引ケバ、次圖ノヤウニ $\triangle A'B'C'$ ヲ得ル。

然ルトキハ A, B, C ハ $\triangle A'B'C'$ ノ三邊ノ中點トナル。(何故カ)



故ニ $\triangle ABC$ ノ三頂點ヨリ其ノ對邊ヘ引イタ垂線 AD, BE, CF ハ夫々 $\triangle A'B'C'$ ノ三邊 $B'C', C'A', A'B'$ ノ垂直二等分線デアル。

故ニ此ノ三直線ハ同一ノ點ヲ通ル。(定理二十八)

定義 三角形ノ三頂點ヨリ對邊ヘ引イタ三垂線ノ交點ヲ三角形ノ垂心トイフ。

定理 三十一 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ヲ通り、且其ノ點ハ各頂點ヨリ夫々各中線ノ $\frac{2}{3}$ ノ所ニアル。

證明 $\triangle ABC$ ノ三邊 $BC, CA,$

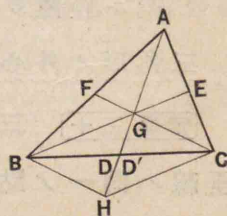
AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F ト

シ、 BE, CF ノ交點ヲ G トシ、

AG ヲ結ビ、其ノ延長ガ BC

ト交ハル點ヲ D' トスル。

D ト D' トガ一致スルコトヲ證明スレバヨイ。



今 AD' ノ延長ト B ヨリ GC ニ平行ニ引イタ BH トノ交點ヲ H トシ、 HC ヲ結ベバ、 G ハ AH ノ中點デアル。(定理二十五系一)

故ニ $GE \parallel HC$ 即チ $BG \parallel HC$ (定理二十五)

故ニ $GBHC$ ハ平行四邊形デアル。

故ニ D' ハ BC ノ中點デ D ト一致スル。

從ツテ三中線 AD, BE, CF ハ同一ノ點 G ヲ通ル。

ソシテ $AG = GH = 2GD$

故ニ $AG = \frac{2}{3}AD$

同様ニ $BG = \frac{2}{3}BE, CG = \frac{2}{3}CF$

定義 三角形ノ三中線ノ交點ヲ三角形ノ重心トイフ。

問題 5

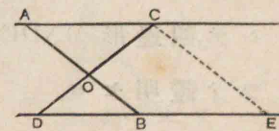
1. 平行四邊形ノ一對角線ガ其ノ兩端ニアル角ヲ二等分スレバ、其ノ平行四邊形ハ菱形デアル。

2. 相等シイ二線分 AB, CD

ガ右ノ圖ノヤウニ平行線

AC, DB ノ間ニアツテ O ニ

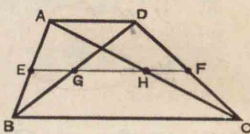
於テ交ハルトキハ、 $OA = OC$ 及ビ $OB = OD$ デアル。



3. 四邊形 ABCD ノ四邊 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ,

- (1) 四邊形 EFGH ハ平行四邊形デアル。
- (2) 此ノ平行四邊形 EFGH ノ周ハ ABCD ノ兩對角線ノ和ニ等シイ。
- (3) EG, FH ハ互ニ二等分スル。

4. 梯形 ABCD ニ於テ AD, BC ヲ兩底トシ, AB, CD, BD, AC ノ中點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ,

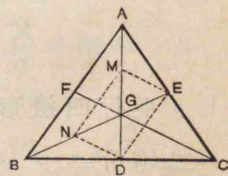


- (1) E ヲ過ギテ BC ニ平行デアアル直線ハ G, H, F ヲ通ル。從ツテ四點 E, G, H, F ハ同ジ直線ノ上ニアル。

$$(2) EF = \frac{1}{2}(AD + BC), \quad GH = \frac{1}{2}(AD - BC)$$

5. 三角形ノ三ツノ中線ガ同一

ノ點ヲ通ルコトヲ右ノ圖ノヤウニ BE, CF ノ交點ヲ G トシ, AG, BG ノ中點ヲ夫々 M, N ト



シテ, 四邊形 MNDE ガ平行四邊形デアルコトニヨツテ證明セヨ。

第三篇

圓

第一章 中心角・圓周角

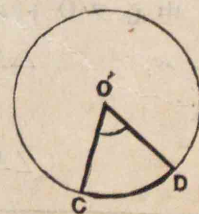
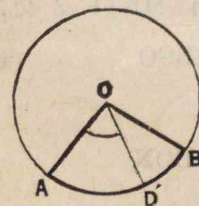
46. 中心角

同圓又ハ等圓ニ於テ,

- [1] 相等シイ中心角ニ對スル弧(弦)ハ相等シク,
 - [2] 相等シイ弧(弦)ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シイ
- コトハ既ニ學ンダ。此等ノ定理ヲ擴張シテ更ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 三十二 同圓又ハ等圓ニ於テ,

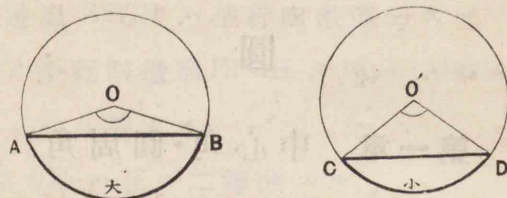
- [1] 大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大デアル。逆モ眞デアル。(重置法)



- [2] ニツノ中心角ガ共ニ劣角デ不等デアルトキハ,

定理 { 1. 大ナル弦ニ對スル弧ハ小ナル弦ニ對スル弧ヨリ大ナルデアル。
2. 大ナル弦ニ對スル弧ハ小ナル弦ニ對スル弧ヨリ大ナルデアル。 }

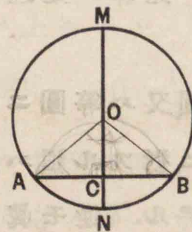
大ナル中心角ニ對スル弦ガ小ナル中心角ニ對スル弦ヨリ大ナルデアル。 逆モ眞ナル。



(定理十九ヲ用ヒテ證明セヨ)

47. 中心ヨリ弦ニ引イタ垂線

【定理 三十三】 弦 (AB) ニ垂直ナル直径 (MN) ハ此ノ弦及ビ此ノ弦ニ對スルニツノ弧 (ANB, AMB) ヲ二等分スル*。



【證明】 中心ヲ O トシ、AB ト MN トノ交點ヲ C ト

スレバ、 $\triangle ACO \equiv \triangle BCO$ (定理十五)

故ニ $AC = BC$

又 $\angle AON = \angle BON$

* 以下一々圖ニ就イテ、假設、終結ヲ説明シナイデ、定理ノ中ニ符號ヲ挿ミ之ヲ示スコトニスル。作圖運ニ就イテモ之ニ準ズル。

故ニ $\widehat{AN} = \widehat{BN}$ (定理八[1])

從ツテ $\widehat{AM} = \widehat{BM}$

【系一】 弦ノ垂直二等分線ハ中心ト其ノ弦ニ對スル弧ノ中點トヲ通過スル。

此ノ系ヨリ所設ノ弧ヲ二等分スルコトガデキル。

【系二】 弦ノ中點ト中心トヲ通ル直線ハ此ノ弦ニ垂直ナル。

【注意】 定理三十三ノ弦ニ關スル定理ノ逆ハ系一、系二ノ二ツナル。

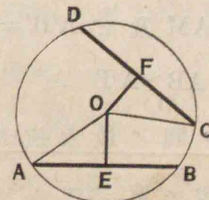
此ノヤウニ假設ガ二ツ以上ノ事柄ヲ含ムトキニハ其ノ一ツト終結トヲ交換シテ生ズル事柄ヲ原定理ノ逆トイフ。

【定理 三十四】 同圓又ハ等圓ニ於テ、

[1] 中心ヨリ等距離ニアル弦ハ相等シイ。

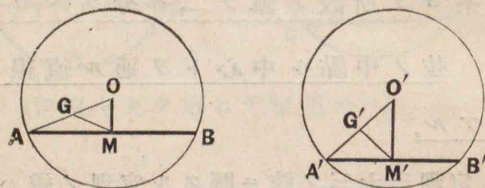
[2] 中心ニ近イ弦ハ之ヨリ遠イ弦ヨリ大ナル。

[1] (下ノ圖ニ就イテ證明セヨ)



[2] 【假設】等圓 O, O' ノ二弦ヲ夫々 $AB, A'B'$ トシ、中心 O, O' ヨリ此ノ二弦ヘ夫々垂線 $OM, O'M'$ ヲ下シ $OM < O'M'$ トスル。

【終結】 $AB > A'B'$



【證明】 $OA, O'A'$ ヲ引キ、其ノ中點ヲ夫々 G, G' トシ、
 $GM, G'M'$ ヲ結ベバ、

$$AG = GO = GM = A'G' = G'O' = G'M'$$

故ニ 兩三角形 $GOM, G'O'M'$ ニ於テ

$$\angle OGM < \angle O'G'M' \quad (\text{定理二十})$$

故ニ $\angle AGM > \angle A'G'M'$

故ニ 兩三角形 $GAM, G'A'M'$ ニ於テ

$$AM > A'M' \quad (\text{定理十九})$$

然ルニ $AB = 2AM$ 及ビ $A'B' = 2A'M'$ (定理三十三)

故ニ $AB > A'B'$

【系一】 直徑ハ其ノ圓ノ最大弦デアル。

【系二】 本定理ノ逆モ眞デアル。

系二ハ本定理ト同ジヤウニ證明スルコトガデキ
ルガ、次ノヤウナ證明法ニヨルノガ更ニ便利デアル。

既ニ本定理ニヨツテ證明サレタ事柄ハ次ノ三ツ
デアル。

[1] $OM < O'M'$ ナラバ $AB > A'B'$

[2] $OM = O'M'$ ナラバ $AB = A'B'$

[3] $OM > O'M'$ ナラバ $AB < A'B'$

然ルニ系二デ證明スベキ事柄ハ次ノ三ツデアル。

[4] $AB > A'B'$ ナラバ $OM < O'M'$

[5] $AB = A'B'$ ナラバ $OM = O'M'$

[6] $AB < A'B'$ ナラバ $OM > O'M'$

先ヅ[4]ヲ證明スルニ、若シ假ニ OM ガ $O'M'$ ヨリ小
デナイトスレバ、必ズ $OM = O'M'$ カ或ハ $OM > O'M'$ デ
アル。

然ルニ若シ $OM = O'M'$ トスレバ[2]カラ $AB = A'B'$
トナツテ之ハ假設ニ戻ル。

又若シ $OM > O'M'$ トスレバ[3]カラ $AB < A'B'$ トナ
ツテ之モ假設ニ戻ル。

故ニ $OM < O'M'$ デアル。

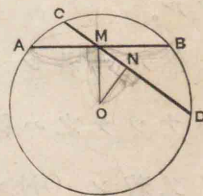
同様ニ[5]及ビ[6]ヲ證明スルコトガデキル。

此ノ證明法ハ與ヘラレタ定理ノ終結ト異ナツタ終結ヲ真デアルト假定シ、ソレガ皆假設ニ戻ル結果ヲ生ズルコトヲ示シテ、其ノ定理ノ終結ダケガ真デアルト結論スルモノデアル。(定理二十ノ證明参照)

既ニ證明セラレタ互ニ關聯スル一群ノ定理デ、其等ノ假設ガ或事柄ニ就イテ起ルベキ總テノ場合ヲ盡クシ從ツテ其ノ中一ツハ必ズ成立ツ、終結ガ互ニ相容レナイモノデアル(即チ同時ニ二ツ以上真デアルコトガデキナイ)ナラバ、上ノ理論ハ必ズ成立ツカラ直チニ其ノ逆ハ真デアルト斷定シテヨイ。此ノ證明法ヲ轉換法ト稱スル。

問 1. 第46節定理三十二[1]ノ逆ノ部分ハ轉換法デ直チニ真デアルト斷定シテヨイカ。

問 2. 圓内ノ同ジ點ヲ通ル諸弦ノ中デ此ノ點デ二等分セラレルモノガ最短デアル。

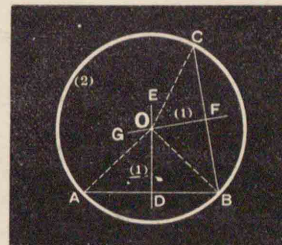


問 3. 圓内ノ同ジ點ヲ通ル諸弦ノ中デ最短ナルモノハ其ノ點ヲ通ル直徑ニ垂直ナル弦デアル。

48. 三點ヲ通ル圓

作圖題 十一 與ヘラレタ三點ヲ通ル圓周ヲ畫ケ。

題意 與ヘラレタ三點ヲ A, B, C トシ、此ノ三點ヲ通ル圓周ヲ求メル。



解析 (作圖法ノ解析) 求メル圓周ガ畫キ得ラレタ

ト假定シ、其ノ中心ヲ O トスレバ OA, OB, OC ハ半徑デアルカラ皆相等シクナケレバナラス。ソレデ O ハ AB ノ垂直二等分線上ニアリ、且 BC ノ垂直二等分線上ニナケレバナラス。依ツテ O ハ此ノ兩垂直二等分線ノ交點デナケレバナラス。

作圖 ① AB, BC ノ垂直二等分線 ED, GF ヲ引キ、其ノ交點ヲ O トスル。

② O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケバ之ガ求メル圓周デアル。

證明 OA, OB, OC ヲ結ベバ $OA=OB$, $OB=OC$

故ニ $OA=OB=OC$

故ニ此ノ圓周ハ與ヘラレタ三點 A, B, C ヲ通ル。

注意 作圖題ヲ解クニ當ツテ行フ解析ハ既ニ述ベタ證明ノ解析ト異ナリ解法ノ一部デ之ニヨツテ作圖ノ方法及ビ其ノ證明ヲ知ルバカリデナク求メル圖形ヲ悉ク得ルコトガデキル。

上ノ問題デハ O ハ AB, BC ノ垂直二等分線ノ交點デアルカラ此ノ兩者ガ平行スルトキハ存在シナイ故ニ與ヘラレタ三點 A, B, C ガ一直線上ニアレバ解答ハナイ。即チ問題ハ不可能デアル。

又 A, B, C ガ一直線上ニナインアラバ此ノ兩垂直二等分線ハ必ズ一點デ交ハルカラ解答ハ一ツアル。

此ノヤウニ問題ノ可能、不可能ニ關スル與ヘラレタ元素間ノ關係ヲ定メテ其ノ可能ノ場合ニ於ケル解答ノ數ヲ定メルコトヲ作圖題ノ吟味トイフ。

作圖題ノ完全ナル解法ハ上ノヤウニ先ヅ題意ヲ述べ、次ニ解析、作圖、證明、吟味ノ順ニナスベキデアル。然シ容易ナ問題デハ解析ヲ略スコトガアリ、又解析ヲ詳シク述ベテ作圖又ハ證明ヲ略スコトモアル。

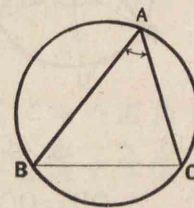
上ノ研究カラ次ノ定理ヲ得ル。

定理 三十五 一直線上ニナイ三點ヲ通ル圓周ハ一ツアル、ソシテタバーツニ限ル。

三點ヲ共有スル圓周ハ皆相合スル。

49. 圓周角・弓形

定義 圓周上ノ一點ヨリ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲ圓周角又ハ內接角トイフ。

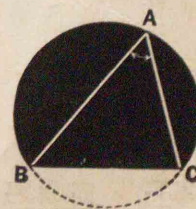


圓周角ハ其ノ二邊ノ間ニ夾マレタ弧(又ハ其ノ兩端ヲ結ブ弦)ノ上ニ立ツトイフ。

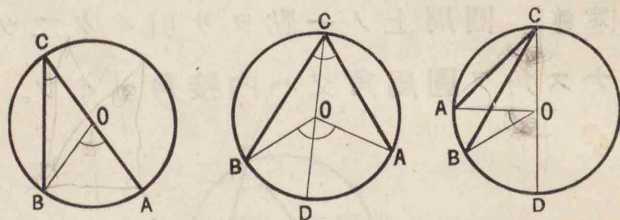
例ヘバ上圖デ圓周角 BAC ハ弧 BC 又ハ弦 BC ノ上ニ立ツトイフ

定義 一ツノ弦デ分ケラレタ圓ノ二ツノ部分ヲ各弓形トイフ。

弓形ノ弧ノ上ノ一點ト其ノ弦ノ兩端トヲ結ブ二ツノ弦ノナス圓周角ヲ弓形ノ角又ハ弓形ノ含ム角トイフ。



定理 三十六 一ツノ圓ニ於テ、圓周角 (ACB) ハ之ニ對スル弧 (AB) ノ上ニ立ツ中心角 (AOB) ノ半分ニ等シイ。



證明 (1) $\angle ACB$ ノ一邊 AC ガ中心 O ヲ通過スルトキハ、
 $OB = OC$ デアルカラ

$$\angle OCB = \angle OBC$$

$$\text{故ニ } \angle AOB = \angle OCB + \angle OBC = 2\angle ACB$$

(2) AC ガ中心 O ヲ通過シナイトキハ、
 直徑 COD ヲ引ケバ (1) ヨリ、

$$\angle AOD = 2\angle ACD$$

$$\text{及ビ } \angle BOD = 2\angle BCD$$

$$\text{故ニ } \angle AOD \pm \angle BOD = 2(\angle ACD \pm \angle BCD) \text{ (複號同順)}$$

$$\text{故ニ } \angle AOB = 2\angle ACB$$

$$\text{故ニ一般ニ } \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

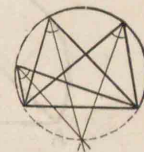
系一 同ジ弓形ノ角ハ皆相等シイ。

系二 同圓又ハ等圓ニ於テ、等弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。逆モ眞デアル。

問 1. 圓ノ平行二弦ノ間ニアル弧ハ相等シイ。

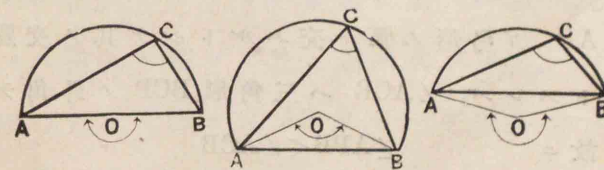
問 2. 圓ノ圓周角ノ二等分線ハ、之ニ對スル弧ヲ二等分スル。

問 3. 同ジ弓形ノ角ノ二等分線ハ皆同一點ニ集交スル。



定理 三十七 半圓ノ角ハ直角デアル。^{*} 又半圓ヨリ大ナル弓形ノ角ハ銳角デ、半圓ヨリ小ナル弓形ノ角ハ鈍角デアル。

逆モ眞デアル。



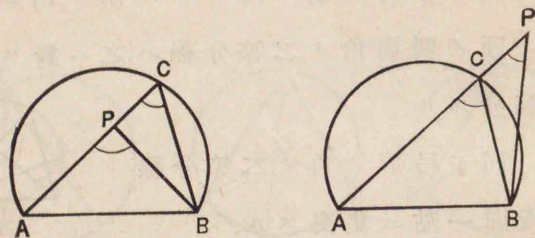
(前節ノ定理ニヨツテ證明セヨ)

系 直徑ニ對スル內接角ハ直角デアル。

定理 三十八 弓形 (ACB) ノ弦 (AB) ノ兩端ヲ其ノ弦ノ弓形ノ方ノ側ニアル一點 (P) ニ結ブトキ、其ノ二直

^{*} 此ノ定理ハたーれすが發見シタモノデアルトイフ。

線ノ夾角ハ其ノ點ガ弓形内ニアレバ弓形ノ角ヨリ大デ其ノ點ガ弓形外ニアレバ弓形ノ角ヨリ小デア
ル。逆モ眞デアル。



證明 (1) 點 P ガ弓形 ACB ノ内ニアルトキハ、
AP ノ延長ト弓形ノ弧トノ交點ヲ C トスレバ、
 $\angle APB$ ハ三角形 BCP ノ外角デア
ルカラ、

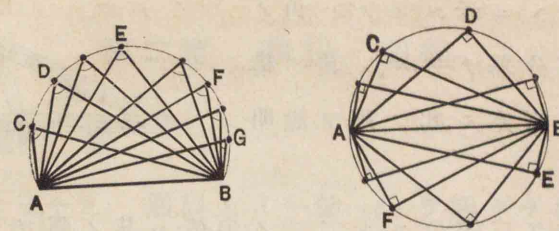
$$\angle APB > \angle ACB$$

(2) 點 P ガ弓形 ACB ノ外ニアルトキハ、
AP ガ弓形ノ弧ト交ハルトシテ其ノ交點ヲ C
トスレバ、 $\angle ACB$ ハ三角形 BCP ノ外角デア
ル。
故ニ $\angle APB < \angle ACB$

(逆ハ歸謬法ニヨツテ容易ニ證明サレル)

系 同ジ底邊上ニ其ノ同ジ側ニ立ツ*三角形ノ
中デ其ノ頂角ガ等シイモノ、頂點ハ、皆其ノ底ヲ弦
トスル同ジ弓形ノ弧ノ上ニアル。

* 三角形ハ其ノ一邊ノ上ニ立ツト考ヘルトキ其ノ邊ヲ底トイヒ、底ト之ニ對ス
ル頂點トノ距離ヲ其ノ高サトイフ。



特ニ 同ジ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ直角ノ頂
點ハ、皆其ノ斜邊ヲ直徑トスル圓ノ周上ニアル。

問題 6

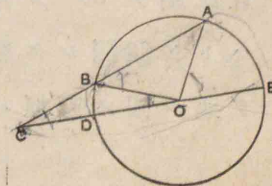
1. 等圓又ハ同圓ニ於テ、一ツノ中心角ガ他ノ中心
角ノ n 倍デアルトキハ、前者ニ對スル弧ハ後
者ニ對スル弧ノ n 倍デア
ル。逆モ眞デア
ル。

2. 中心 O ナル圓ノ弦 AB ヲ C マデ延長シ、BC ヲ
此ノ圓ノ半徑ニ等シクシ、

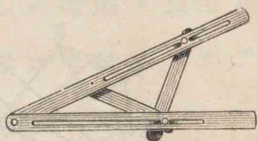
C ト O トヲ過ギル直線

CDOE ヲ引キ、圓周ト交ハ
ル點ヲ D、E トスレバ、弧

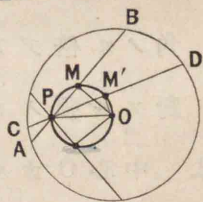
AE ハ弧 BD ノ三倍ニ等シク、 $\angle C$ ハ $\angle AOE$ ノ三分
ノ一ニ等シイ。



3. コゝニ示スモノハ角ノ
三等分器デアル。其ノ構
造ヲ推定シ其ノ理ヲ説明
セヨ。



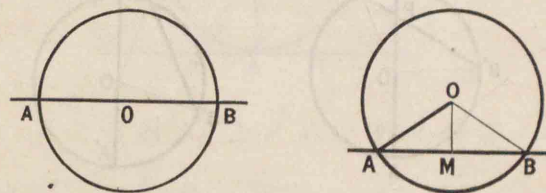
4. 弦ヲ三等分スルニツノ半徑ハ其ノ弧ヲ三等分
スルカ。
5. 中心ヲ通ラナイニツノ弦ガ互ニ二等分スルコ
トガアルカ。
6. 圓ノニツノ弦 AB, CD 又ハ其ノ延長ノ交點ヲ E
トスレバ、 $\angle AEC$ ハニツノ弧 AC 及ビ BD ノ上ニ
立ツ中心角ノ和又ハ差ノ半分ニ等シイ。
7. 同ジ點ヲ通ル弦ノ中點ハ皆
其ノ點ト中心トヲ結ブ線分ヲ
直徑トスル圓周上ニアル。
8. 學校ノ建物ノ長サガ $20m$ デ
且或點デ 30° ノ角ニ含マレル
コトヲ觀測シタ、然ラバ此ノ建物ノ兩端ト測點ト
ヲ通ル圓ノ直徑ハ幾米カ。



第二章 割線・切線

50. 割線

定理 三十九 圓周上ノ一點 (A) ヲ過ギテ此ノ點
ニ引イタ半徑 (OA) ニ垂直デナイ直線 (AB) ハ圓周ト
ニツノ點ヲ共有スル。



證明 (1) AB ガ中心 O ヲ通ル場合ハ、 AB ハ即チ
直徑デ、圓周ト其ノ兩端ノ二點ヲ共有スル。

(2) AB ガ O ヲ通過シナイ場合ハ、 O ヨリ
 AB へ垂線 OM ヲ下シ、 AM ノ延長上ニ $MB=MA$
ナルヤウニ點 B ヲ取レバ、

$$OB=OA \quad (\text{定理二十一}[2])$$

故ニ B ハ圓周上ノ點デアル。

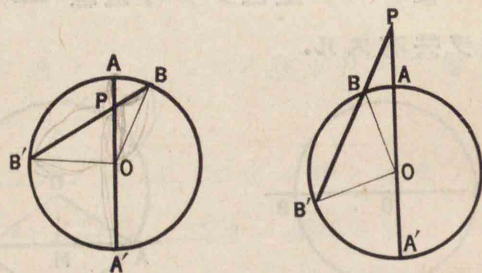
故ニ AB ハ此ノ圓周ト二點ヲ共有シ、且此ノ二
點ノ外ニハ共有點ハナイ。 (同上系三)

定義 一ツノ直線ガ圓周ト二點ヲ共有ス

ルトキハ、其ノ直線ハ其ノ圓ニ交ハルトイヒ、
圓ニ交ハル直線ヲ圓ノ割線トイフ。

中心ヲ通ル割線ヲ特ニ中心線トイフ。

定理四十 一點ヨリ圓周ニ至ル線分ノ中、其ノ點
ヲ通ル中心線ニ合スルモノガ最短又ハ最長デアル。



假設 P ヲ一點トシ、 APA' 又ハ PAA' ヲ中心線ト
シ、 BPB' 又ハ PBB' ヲ他ノ任意ノ割線トスル。
ソシテ $PA < PA'$ 及ビ $PB < PB'$ トスル。

終結 [1] $PA < PB$ [2] $PA' > PB'$

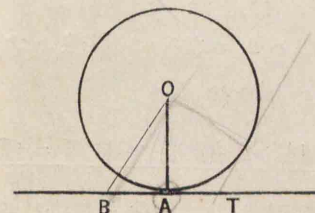
證明 [1] $OB \sim OP < PB$ 及ビ $OB = OA$ デアルカラ
 $PA < PB$

[2] $OP + OB' > PB'$ 及ビ $OB' = OA'$ デアルカラ
 $PA' > PB'$

定義 一點ヨリ之ヲ通ル中心線ト圓周ト
ノ交點ノ中ノ近イ方マデノ距離ヲ其ノ點ト
圓周トノ距離トイフ。

51. 切線

定理四十一 圓周上ノ一點 (A) ヲ過ギテ、此ノ點
ニ引イタ半徑 (OA) ニ垂直ナル直線 (BAT) ハ、圓周ト
タゞ此ノ一點ダケヲ共有スル。



證明 B ヲ直線 AT 上ノ A ノ外ノ任意ノ一點ト
スレバ

$$OB > OA \quad (\text{定理二十一}[1])$$

故ニ B ハ圓外ニアル。

故ニ BAT ハ圓周ト點 A ヲ共有スルダケデアル。

定義 圓周ト唯一點ヲ共有スル直線ヲ其
ノ圓ノ切線トイヒ、其ノ點ヲ其ノ切點トイフ。

切線ハ切點ニ於テ其ノ圓ニ切スルトイフ。

定理三十九ト定理四十一トハ合ハセテ次ノヤウ
ニ述ベテモヨイ。

圓周上ノ一點ヲ過ギテ、其ノ點ニ引イタ半徑ニ斜
交スル直線ハ割線デ、直交スル直線ハ切線デアル。

【注意】 圓ノ割線 AB ヲ A ヲ固

定シテ B ガ次第ニ A ニ近

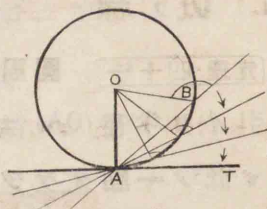
ヅクヤウニ動カストキハ、

割線 AB ハ次第ニ切線 AT

ニ近ヅイテ B ガ A ニ重ナ

ルトキニハ AB ハ A ニ於ケル切線トナル。ソシテ此

ノ時 AB ハ OA ノ垂線トナル。



【系一】 切線ハ切點ヲ過ギル半徑ニ垂直デアル。

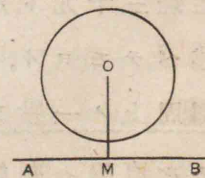
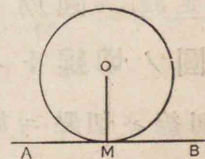
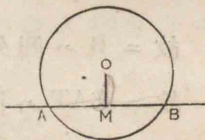
【系二】 切線ハ圓周上ノ各點ニ於テ各一ツアル、ソシテタバーツシカナイ。

【系三】 切點ヲ過ギテ切線ニ垂直ナル直線ハ其ノ圓ノ中心ヲ通ル。

【系四】 直線ハ之ト圓ノ中心トノ距離ガ其ノ圓ノ半徑ヨリ小デアルカ、半徑ニ等シイカ、又ハ半徑ヨリ大デアルカニヨツテ、其ノ圓ニ交ハルカ、切スルカ又ハ全ク其ノ圓ニ出會ハナイ。

逆モ眞デアル。

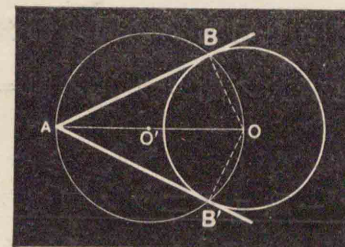
【問】 圓周上ノ與ヘラレタ點ヲ通ル其ノ圓ノ切線ヲ引ケ。



52. 圓外ノ一點ヨリノ切線

【作圖題 十二】 與ヘラレタ圓 (O) ノ外ニアル一點

(A) ヨリ其ノ圓ニ切線ヲ引ケ。



【解析】 求メル切線ガ引カレタトシテ、之ヲ AB トシ、又其ノ切點ヲ B トシ、OB ヲ結ベバ $\angle ABO$ ハ直角デアル。

(定理四十一系一)

故ニ B ハ AO ヲ直徑トスル圓周上ニアル。

從ツテ切點 B ハ與ヘラレタ圓周ト、AO ヲ直徑トスル圓周トノ交點デナケレバナラス。

【作圖】 AO ヲ結ビ、之ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ、此ノ圓周ト與ヘラレタ圓周トノ交點ヲ B、B' トシ、AB、AB' ヲ引ケバ之ガ求メル切線デアル。

【證明】 (略スル)

【吟味】 圓 O' ハ必ズ圓 O ニ交ハルカラ、求メル切線ハ常ニ二ツアル。

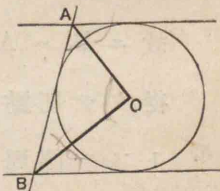
注意 點 A が圓 O の周上ニアルトキハ切線ハーツダケアル、又 A が圓 O の内ニアレバ A ヲ通ル切線ハナイ。之ハ圓 O' ハ圓 O ニ交ハラナイカラデアル。

定理 四十二 圓外ノ一點ヨリ其ノ圓ニ引イタニツノ切線デ其ノ點ト切點トノ間ノ部分ハ相等シイ。此ノ部分ヲ通例其ノ點ヨリ其ノ圓ニ引イタ切線ノ長サトイフ。

系 圓外ノ一點ヨリニツノ切線ヲ引クトキハ、

- [1] 二切線ハ其ノ點ヲ通ル中心線ト等角ヲナス。
- [2] 其ノ點ヲ通ル中心線ハ二切點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル。

問 圓 O ノ一切線ガ他ノ平行ナル二切線ト夫々 A, B ニ於テ交ハレバ, $\angle AOB$ ハ直角デアアル。

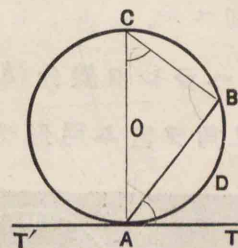


53. 切線ト弦トノナス角

定理 四十三 切線 (TAT') ト其ノ切點 (A) ヲ通ル弦 (AB) トノナス角 ($\angle BAT$) ハ其ノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角(其ノ角ニ隣ル弓形ノ角 C)ニ等シイ。

證明 直徑 AC ヲ引ケバ $\angle CAT$ ト $\angle B$ トハ共ニ直角デアアルカラ, $\angle BAT$ ト $\angle C$ トハ共ニ $\angle BAC$ ノ餘角デアアル。

故ニ $\angle BAT = \angle C$



ソシテ $\angle C$ ハ $\angle BAT$ 内ニアル弧 ADB ノ上ニ立ツ圓周角デアアル。

注意 同様ニ $\angle BAT'$ ハ弧 ACB ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ。

問 1. 圓内デ交ハル二弦 AB, CD ノ交點 P ニ於テ圓 APC ニ切スル直線ヲ引ケバ、此ノ切線ハ BD ニ平行デアアル。

系 圓周上ノ一點ヲ通ル直線ト其ノ點ヨリ引イタ弦トノ作ル角ガ、其ノ角内ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイトキニハ、其ノ直線ハ其ノ點ニ於テ其ノ圓ニ切スル。

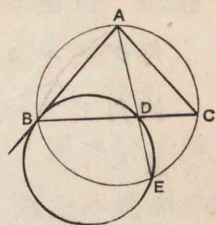
問 2. 二等邊三角形 ABC ノ

頂點 A ヲ通ル直線ガ底ト

D デ、又 A, B, C ヲ通ル圓周

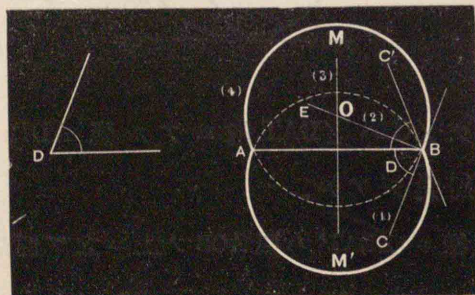
ト E デ交ハルナラバ、AB

ハ圓 BDE ニ切スル。



作圖題 十三 與ヘラレタ線分 (AB) ノ上ニ、與ヘラ

レタ角 (D) ニ等シイ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ。



作圖 前節ノ定理ニヨツテ直ニ次ノ作圖ヲ得ル。

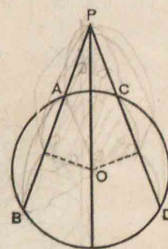
- ① AB ト其ノ一端 B ニ於テ與ヘラレタ角 D ニ等シイ角ヲ作ル直線 BC ヲ引ク。
- ② B ヨリ BC ニ垂線 BE ヲ引ク。
- ③ AB ノ垂直二等分線ヲ引キ BE トノ交點ヲ O トスル。
- ④ O ヲ中心トシ OB ヲ半径トスル圓周 AMB

ヲ畫ケバ、 $\angle ABC$ 外ニアル弓形 AMB ハ求メルモノデアル。

同様ニ AB ノ上ト反對ノ側ニモ今一ツノ弓形 AM'B ガ畫カレルカラ、求メル弓形ハ AB ノ兩側ニ一ツヅ、出來ル。

問題 7

1. 弧ノ中點ヲ通ル中心線ハ其ノ弧ノ弦ヲ垂直ニ二等分スル。
2. PO ヲ圓 O ノ中心線トシ、PAB, PCD ヲ之ト等角ヲナス二ツノ割線トスレバ $PA=PC$, $PB=PD$ デアル。
3. 圓周上ノ一點 A ニ於ケル切線ニ平行ナル任意ノ弦ヲ BC トスレバ、弧 AB ト弧 AC トハ相等シイ。
4. 相交ハル二直線ノ各ニ切スル圓ノ中心ハ其ノ二直線ノナス角ノ二等分線ノ上ニアル。
5. 與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ニ於テ此ノ



直線ニ切シ、且與ヘラレタ長サノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。

6. 同ジ中心ヲ有スル二ツノ圓(同心圓)ノ中、小圓ニ切スル大圓ノ弦ハ皆相等シク、且皆其ノ切點デニ等分セラレル。

注意 此ノ弦ヲ無數ニ引クトキハ、内圓ハ丁度此等ノ弦デ作ラレタヤウニ見エル。

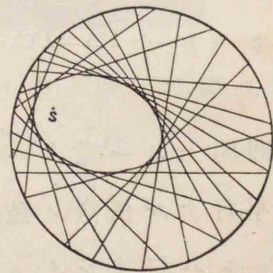
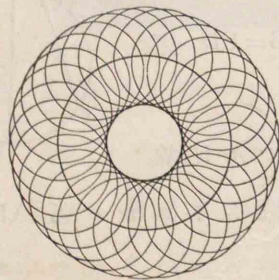
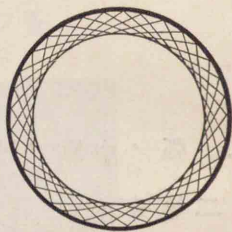
故ニ此ノ内圓ハ此等ノ弦ノ

包線トイフ。

點ノ運動ニヨツテ線ノ生ズ

ルコトハ前ニ述ベタガ線モ

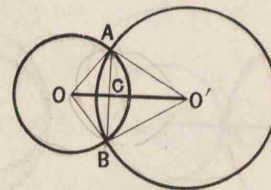
運動シテ線ヲ作ルト考ヘラレル。尙次ニ例ヲ示ス。



第三章 ニツノ圓

54. ニツノ圓周ノ共有點

定理 四十四 二圓周ガ其ノ兩中心 O, O' ヲ通ル直線ノ上ニナイ一點 A ヲ共有スルトキハ、又其ノ直線ニ關スル其ノ點ノ對稱點ヲ共有スル。ソシテ其ノ他ニハ共有點ハナイ。



證明 A ヨリ OO' へ垂線 AC ヲ下シテ延長シ、 CB ガ AC ニ等シイヤウニ點 B ヲ取レバ、

$$OB = OA, \quad O'B = O'A$$

故ニ兩圓周 O, O' ハ共ニ B ヲ通ル。

ソシテ B ハ OO' ニ關スル A ノ對稱點デアル。

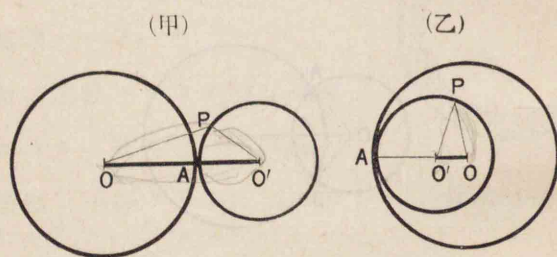
故ニ此ノ二圓周ハ A ノ他ニ OO' ニ關スル A ノ對稱點 B ヲ共有スル。

ソシテ此ノ他ニハ共有點ハナイ。(定理三十五系)

定義 二圓周ガ二點ヲ共有スルトキハ此ノ二圓ハ互ニ相交ハルトイフ。

系 相交ハル二圓ノ共通弦ハ其ノ兩中心ヲ通ル直線デ垂直ニ二等分セラレル。

定理 四十五 二圓周ガ其ノ兩中心 (O, O') ヲ通ル直線上ノ一點 (A) ヲ共有スルトキハ、此ノ二圓周ニハ其ノ點ノ他ニ共有點ハナイ。



證明 A ガ線分 OO' ノ上ニ(甲),又ハ OO' ノ延長上ニ(乙)アルトシテ,圓 O' ノ圓周上ニ A ノ他ニ任意ノ點 P ヲ取レバ,

$$\begin{array}{cc} \text{(甲)} & \text{(乙)} \\ OP > OO' - O'P & OP < OO' + O'P \end{array}$$

ソシテ $O'P = O'A$

故ニ $OP > OA$ | $OP < OA$

故ニ(甲)デハ P ハ圓 O ノ外ニアツテ,(乙)デハ P ハ

圓 O ノ内ニアル。

故ニ(甲)デハ二圓周ハ互ニ他ノ外ニアツテ、點 A ダケヲ共有シ、(乙)デハ圓 O' ガ全ク圓 O ノ内ニアツテ、兩圓周ハ點 A ダケヲ共有スル。

定義 二圓周ガタバ一點ヲ共有スルトキ此ノ二圓ハ相切スルトイヒ、其ノ點ヲ其ノ切點トイフ。ソシテ各圓ガ互ニ他ノ外ニアルトキハ之ヲ外切トイヒ、小圓ガ全ク大圓ノ内ニアルトキハ、之ヲ内切トイフ。

定理四十五ハ次ノヤウニ述ベルコトガデキル。

二圓周ガ其ノ兩中心ヲ通ル直線上ノ一點ヲ共有スルトキハ、此ノ二圓ハ相切スル。

定理 四十六 二圓ガ相切スルトキハ、其ノ切點ハ兩中心ヲ通ル直線ノ上ニアル。

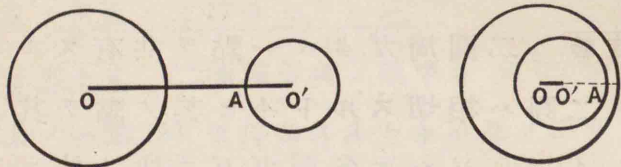
(歸謬法)

ソシテ其ノ中心間ノ距離ハ二圓ノ半径ノ和(外切ノ場合)又ハ差(内切ノ場合)ニ等シイ。

又二圓ガ相交ハルトキハ、其ノ交點ハ兩中心ヲ通ル直線ノ上ニハナイ。

ソシテ其ノ中心間ノ距離ハ二圓ノ半径ノ和ヨリ小デ其ノ差ヨリ大デアル。

〔定理 四十七〕 二圓周ニ全ク共有點ガナイトキハ、
其ノ中心間ノ距離ハ二圓ノ半徑ノ和ヨリ大デアル
カ、又ハ其ノ差ヨリ小デアル。



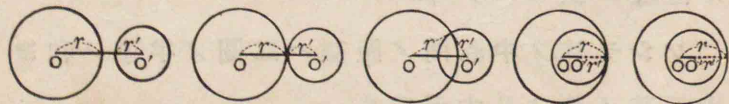
55. 二圓ノ位置ト其ノ中心間ノ關係

〔定理 四十八〕 二圓ノ半徑ヲ夫々 r, r' トシ、其ノ中
心間ノ距離ヲ d トスレバ、

- [1] 二圓ガ外方ニ離レルトキハ、 $d > r + r'$
- [2] 二圓ガ外切スルトキハ、 $d = r + r'$
- [3] 二圓ガ相交ハルトキハ、 $r + r' > d > r - r'$
- [4] 二圓ガ内切スルトキハ、 $d = r - r'$
- [5] 一圓ガ全ク他ノ内ニアツテ

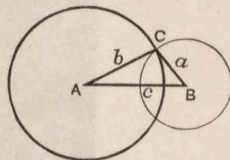
離レルトキハ、 $d < r - r'$

- [6] 逆ハ皆眞デアル。 (轉換法)



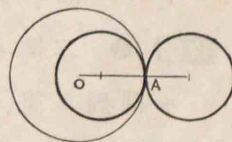
[3]ノ逆カラ $a + b > c > a - b$ ナル關係ニ適スル三線
分 a, b, c デハ必ズ三角形ヲ畫キ得ルコトガワカル。

即チ三線分 a, b, c ノ間ノ此ノ
關係ハ a, b, c ヲ三邊トスル三角
形ヲ畫キ得ルタメニ必要ニシテ
且十分ナル條件デアル。(作圖題一)



〔問 1.〕 二圓ノ半徑ガ夫々 $3\text{ cm}, 5\text{ cm}$ デ、兩圓ノ中心
間ノ距離ガ 2 cm デアレバ、此ノ二圓ノ位置ハド
ウカ。若シ中心間ノ距離ガ 8 cm デアレバド
ウカ。

〔問 2.〕 所設ノ圓周ニ其ノ上ノ
定點ニ於テ切シ、且所設ノ半
徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。



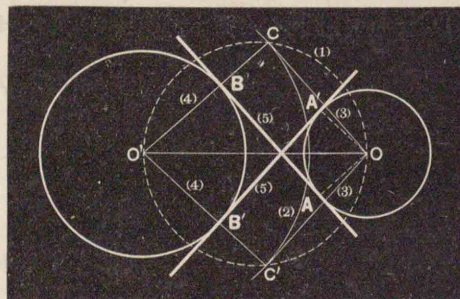
56. 二圓ノ共通切線

〔作圖題 十四〕 與ヘラレタ二圓 (O, O') ニ共通切線
ヲ引ケ。

[1] 二圓ヲ同ジ側ニ有スル切線(共通外切線)。

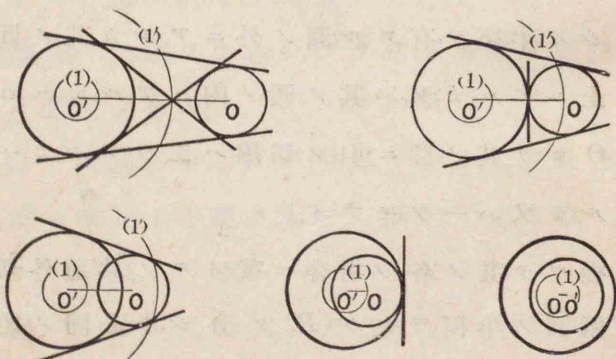
〔解析〕 求メル切線ガ既ニ引カレタトシテ、其ノ二
圓ノ切點ヲ夫々 A 及ビ B トスル。

[2] 二圓ヲ其ノ兩側ニ有スル切線(共通内切線).



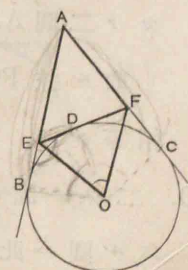
(此ノ場合ハ圖ニツイテ研究セヨ)

[問] 二圓ノ位置ヲ色々ニ變ヘテ實際ニ共通切線ヲ畫イテ見ヨ。

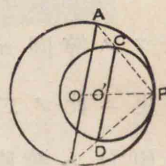
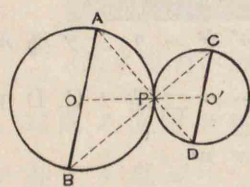


問題 8

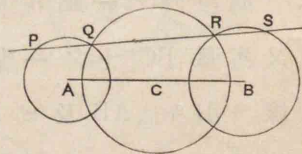
- 三ツノ等圓ガニツヅ、相切スルトキハ、
 - 三ツノ中心及ビ三ツノ切點ハ各、一ツノ正三角形ノ頂點トナル。
 - 切點ニ於ケル共通切線ハ同一ノ點デ會スル。
- 二ツノ等圓ガ二點 A, B デ交ハリ, Aヲ通ル一直線ガ更ニ此ノ二圓周ト交ハル二點ヲ C, D トスレバ, $\triangle BCD$ ハ等脚三角形デアル。
- 三角形ノ二邊ヲ直徑トスル二圓周ハ他ノ邊又ハ其ノ延長上デ相交ハル。
- 圓 O 外ノ一點 A ヨリニツノ切線 AB, AC ヲ引キ又劣弧 BC 上ノ一點 D ニ於テ切線ヲ引キ, AB 及ビ AC ト夫々 E 及ビ F ニ於テ交ハラシメレバ, $\triangle AEF$ ノ周及ビ $\angle EOF$ ノ大サハ點 D ノ位置ニ關ハラズ一定デアル。
- 二圓ガ P デ内切シ, 一割線ガ其ノ二圓周ヲ夫々 A, B, C, D デ截ルトキハ, $\angle APB = \angle CPD$ デアル。



6. 相切スル二圓ノ切點ヲ通り任意ノ割線ヲ引クトキハ、其ノ交點ニ至ル二圓ノ半徑ハ平行デアル。
7. 圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ハ其ノ圓ニ内切シ、其ノ周ハ切點ヲ通ル第一圓ノ弦ヲ二等分スル。
8. 相切スル二圓ノ平行ナル直徑ノ端ト切點トハ三點ヅツ同一ノ直線上ニアル。



9. 下圖ノヤウニ交ハル三ツノ圓ノ中心 A, C, B ガ一直線上ニアツテ $AC=CB$ ナルトキハ、圓周ノ交點 Q 及ビ R ヲ通ル直線カラ二圓 A, B ノ周ガ截リ取ル弦 PQ ト RS トハ相等シイ。
10. ニツノ圓 O, O' ガ外切スルトキハ、 OO' ヲ直徑トスル圓ハ此ノ二圓ノ共通外切線ニ切スル。



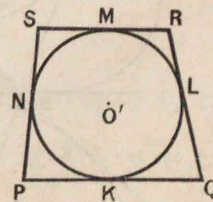
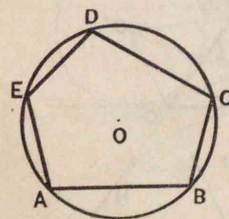
第四章 内接形・外接形

57. 内接・外接

定義 一ツノ多角形ノ頂點ガ悉ク一ツノ圓ノ周上ニアルトキハ、此ノ多角形ヲ其ノ圓ノ内接多角形トイヒ、其ノ圓ヲ此ノ多角形ノ外接圓トイフ。

多角形ノ邊ガ悉ク同一ノ圓ニ切スルトキハ、此ノ多角形ヲ其ノ圓ノ外接多角形トイヒ、其ノ圓ヲ此ノ多角形ノ内接圓トイフ。

次ノ圖ニ於テ ABCDE ハ圓 O ノ内接五角形デ、PQRS ハ圓 O' ノ外接四角形デアル。



- 問 1.** 圓ニ外接スル四角形ノ一組ノ對邊ノ和ハ、他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シイ。
- 問 2.** 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形デアル。

58. 三角形ノ内接圓・外接圓・傍接圓

定理 四十九 三角形ノ内接圓及ビ外接圓ハ各一ツアツタバーツダケデアル、其ノ中心ハ夫々内心、外心デアル。

(定理二十七、二十九参照)

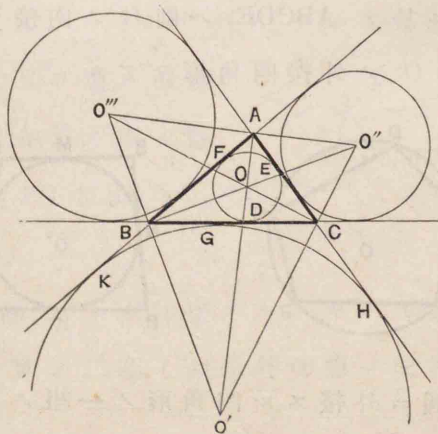
問 1. 三點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

問 2. 三直線ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

定義 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ此ノ三角形ノ傍接圓トイフ。

三角形ノ傍接圓ハ三ツアル。其ノ中心ハ即チ傍心デアル。

(定理二十八参照)



問 3. 上ノ圖デ $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB ヲ夫々

a, b, c デ表ハシ且 $a+b+c=2s$ トスレバ,

$$AH=AK=s$$

$$BG=BK=s-c$$

$$AE=AF=s-a$$

$$BD=BF=s-b$$

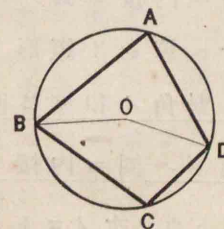
$$FK=EH=a$$

$$DG=b-c$$

$$BG=CD$$

59. 内接四角形

定理 五十 圓ニ内接スル四角形 $(ABCD)$ ノ對角 $(A \text{ ト } C \text{ 及 } B \text{ ト } D)$ ハ互ニ補角デアル。

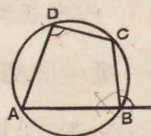


證明 $\angle A$ ハ弧 BCD ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シク、 $\angle C$ ハ弧 BAD ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シイ。

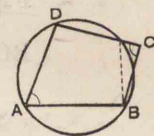
故ニ $\angle A + \angle C$ ハ中心 O ニ於ケル共軛ナル二角ノ和ノ半分即チ 2 直角ニ等シイ。

同様ニ $\angle B + \angle D$ モ 2 直角ニ等シイ。

【系一】 圓ニ内接スル四角形ノ外角
ハ其ノ内對角(其ノ外角ニ隣ル内角ノ
對角)ニ等シイ。

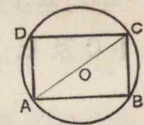


【系二】 圓ニ内接シナイ四角形ノ對
角ノ和ハ2直角ニ等シクナイ。



【系三】 四角形ノ對角ノ和ガ2直角
ニ等シイトキハ、此ノ四角形ハ圓ニ内接スル。

【問1】 矩形ハ圓ニ内接スル。ソシ
テ其ノ對角線ハ直徑デアル。



【問2】 所設ノ圓ニ内接シ、其ノ一邊
ガ所設ノ線分ニ等シイ矩形ヲ畫ケ。

【系四】 四角形ノ對角ノ和ガ2直角ニ等シクナイ
トキニハ、此ノ四角形ハ圓ニ内接シナイ。(歸謬法)

【注意】 系三ト系四トカラ次ノコトガワカル。

四角形ガ圓ニ内接スルタメニ必要ニシテ且十分ナル
條件ハ、其ノ對角ガ互ニ補角デアルコトデアル。

60. 定理ノ裏・對偶

前節ノ定理ト系二トヲ較ベルト、系二ハ定理ノ假
設ヲ否定シタモノヲ假設トシ、定理ノ終結ヲ否定シ

タモノヲ終結トスルモノデアル。

此ノヤウナ二ツノ定理ヲ互ニ裏デアルトイフ。

前節ノ系三ト系四モ互ニ裏デアル。

定理ノ裏ニハ眞デアルモノト眞デナイモノトガ
アル。

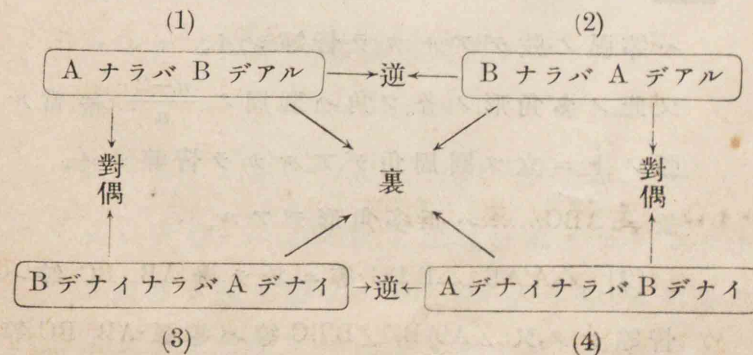
次ニ前節系四ヲ見ルニ、之ハ原定理ノ終結ヲ否定
シタモノヲ假設トシ、原定理ノ假設ヲ否定シタモノ
ヲ終結トスルモノデアル。

此ノヤウナ二ツノ定理ヲ互ニ對偶デアルトイフ。

定理ノ對偶ハ必ズ眞デアル。

前節ノ系二ト系三モ互ニ對偶デアル。

今定理ノ假設ヲA、終結ヲBデ表ハシ、定理ノ關係
ヲ示スト次ノ通りデアル。

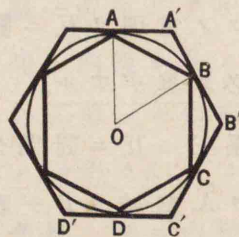


61. 正多角形

定理 五十一 圓周ヲ若干ニ等分シテ其ノ分點ヲ順次ニ結ベバーツノ正多角形ガ出來ル。又各分點ニ切線ヲ引ケバーツノ正多角形ガ出來ル。

假設 圓周ヲ n 等分シ其ノ分點ヲ A, B, C 等トシ、又此等ノ分點ニ於ケル相隣ル切線ノ交點ヲ順次 A', B', C' 等トスル。

終結 $ABC \dots$ ト $A'B'C' \dots$ トハ正多角形デアル。



證明 [1] 多角形 $ABC \dots$ ニ於テ、邊 AB, BC 等ハ等弧ノ弦デアルカラ皆等シイ。

又此ノ多角形ノ各ノ角ハ圓周ノ $\frac{n-2}{n}$ = 當ル弧ノ上ニ立ツ圓周角デアルカラ皆等シイ。

故ニ $ABC \dots$ ハ正多角形デアル。

[2] $\triangle A'AB, \triangle B'BC$ 等ニ於テ、邊 AB, BC 等ハ皆等シク、又 $\angle A'AB, \angle B'BC$ 等ハ等弧 AB, BC 等

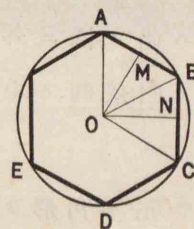
ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイカラ皆等シイ。

故ニ此等ノ三角形ハ皆合同デアル。

故ニ多角形 $A'B'C' \dots$ ハ等角デ等邊デアル。

故ニ $A'B'C' \dots$ ハ正多角形デアル。

定理 五十二 正多角形ハ圓ニ内接シ、又外接スル。



證明 [1] 正多角形 $ABCD \dots$ ノ二隣角 A, B ノ二等分線ノ交點ヲ O トシ、 OC ヲ結ベバ

$$\triangle AOB \equiv \triangle BOC \quad (\text{定理一})$$

$$\text{故ニ} \quad OA = OB = OC$$

ソシテ $\triangle AOB$ ハ等脚三角形デアル。

$$\text{故ニ} \quad OA = OB = OC$$

$$\text{故ニ又} \quad \angle OCB = \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle BCD$$

ソレデ OC ハ $\angle BCD$ ノ二等分線デアルカラ、上ト同様ニ順ヲ追ツテ OD, OE 等モ皆 OA ニ等シイコトヲ證明スルコトガデキル。

故ニ $ABCD\dots$ ハ O ヲ中心トスル圓ニ内接スル。

[2] OM, ON 等ヲ O ヨリ邊 AB, BC 等ヘ下シ
タ垂線トスレバ、

$$OM = ON = \dots\dots \quad (\text{定理三十四}[1])$$

故ニ O ヲ中心トシ OM ヲ半径トスル圓ハ
 $ABCD\dots\dots$ ニ内接スル。

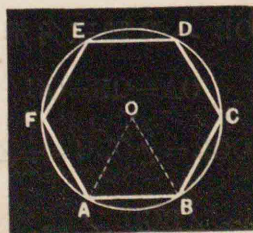
故ニ $ABCD\dots\dots$ ハ此ノ圓ニ外接スル。(定理四十一)

[系] 正多角形ノ内接圓ノ中心ト外接圓ノ中心
トハ同ジ點デアル。

此ノ共通ノ中心ヲ正多角形ノ中心トイフ。

62. 正多角形ノ作圖

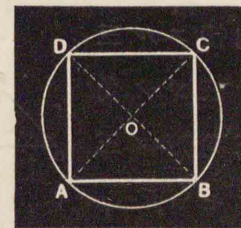
[作圖題十五] 所設ノ圓ニ内接スル正六角形正三
角形正十二角形等ヲ作レ。



(第32節問2ヲ参照セヨ)

[問1.] 所設ノ線分ヲ一邊トスル正六角形ヲ作レ。

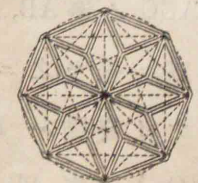
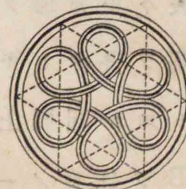
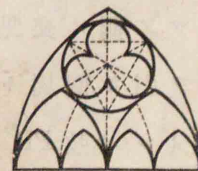
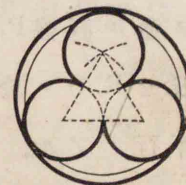
[作圖題十六] 圓ニ内接スル正方形正八角形正十
六角形正三十二角形等ヲ作レ。



[注意] 正多角形ノ作圖法ハ圓周ノ等分法ニ歸着シ、圓周
ノ等分法ハ4直角ノ等分法ニ歸着スル。ソシテ角
ノ二等分ハ常ニナシ得ルカラ、或正多角形ヲ畫キ得
タナラバ、之ヲ基礎トシテ順次ニ其ノ二倍邊數ノ正
多角形ヲ畫クコトガデキル。

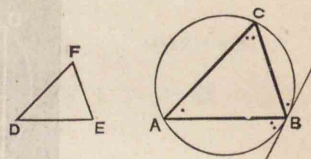
[問2.] 邊數ガ偶數デアル正多角形ハ其ノ中心ニ
關シテ對稱デアル。

[問3.] 次ニ示ス圖ヲ畫ケ。



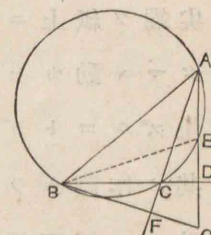
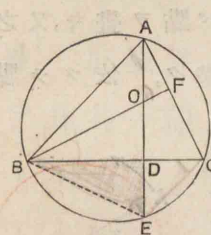
問題 9

1. 所設ノ圓ニ内接スル三角形ヲ畫キ、其ノ三ツノ角ヲ夫々所設ノ三角形ノ三ツノ角ニ等シクセヨ。
2. 圓ノ弧 AB ノ中點 C ヨリ二弦 CD, CE ヲ引キ、弦 AB ト夫々 F, G ニ於テ交ハラシメレバ、四點 D, F, G, E ハ同一ノ圓周上ニアル。
3. 圓ニ内接スル正三角形ノ邊ハ之ニ垂直ナル半徑ヲ二等分スル。
4. 直角三角形ニ内接スル圓ノ直徑ハ直角ヲ夾ム二邊ノ和ト斜邊トノ差ニ等シイ。
5. 二ツノ圓ノ交點 A 及ビ B ヲ通ル直線 PAQ 及ビ RBS ヲ引キ、圓周ト夫々 P, Q 及ビ R, S ニ於テ交ハラシメレバ、弦 PR ト QS トハ平行デアル。
6. $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC ノ上ニ夫々正方形ヲ三角形ノ外方ニ畫キ、之ニ外接スル圓ヲ畫クトキハ、其ノ A デナイ交點ハ BC ヲ直徑トスル圓周上ニアル。
7. 圓 O ノ直徑 AB ノ兩端 A, B ヲ任意ノ一點 C ニ

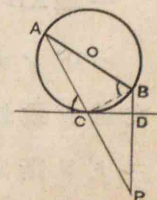


結ブ直線ガ圓周ト交ハル點ヲ夫々 P, Q トスレバ OP, OQ ハ圓 CPQ ニ切スル。

8. 三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ下シタ垂線ノ足ハ其ノ垂線又ハ其ノ延長ガ外接圓ニ會スル點ト垂心トノ間ノ線分ノ中點デアル。



9. $\triangle ABC$ ノ内心ヲ過ギ邊 BC ニ平行ナル直線ガ AB 及ビ AC ニ交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ、 BD ト CE トノ和ハ DE ニ等シイ。
10. AB ヲ定圓 O ノ定直徑トシ、其ノ周上ノ任意ノ一點 C ニ於テ切線ヲ引キ、 B ヨリ之ニ下シタ垂線ト AC トノ交點ヲ P トスレバ、 P ハ常ニ他ノ一ツノ定圓ノ周上ニアル。



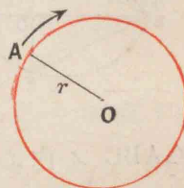
第 四 篇

軌 跡

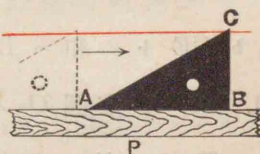
63. 軌 跡

鉛筆ノ尖端ヲ紙上ニ當テレバ點ヲ畫キ、又之ヲ紙上ニ當テタマ、動カセバ線ヲ畫ク。依ツテ點ガ動イテ線ヲ生ズルコトガワカル。

圓周ハ其ノ作圖カラワカル
ヤウニ一點ヨリ等距離ニアル
點ノ動イタ跡デアル。



〔問〕 圖ノヤウニ定木 P ヲ固
定シ、其ノ一ツノ縁ニ沿ウ
テ三角定木 ABC ノ直角ノ
一邊 AB ヲ之ラセルト點 C



ハドンナ條件ニ從ツテ動キ、ドンナ線ヲ畫クカ。
或線ガ或條件ニ從ツテ動イタ點ノ畫イタ跡デア
ルコトヲ斷定スルニハ、

〔1〕 條件ニ適スル點ハ悉ク其ノ線上ニアルコト

〔2〕 其ノ線上ノ點ハ悉ク其ノ條件ニ適スルコト

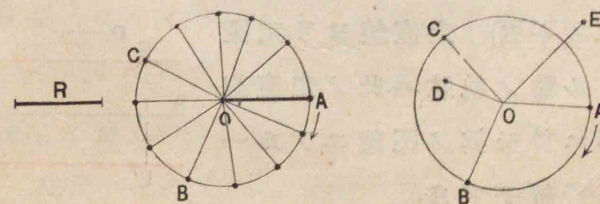
ノ二ツヲ知ラナケレバナラス。

何トナレバ〔1〕ダケデハ條件ニ適シナイ點即チ條件ニ從ツテ動イタ點以外ノモノモ此ノ線上ニアルカモ知レズ、又〔2〕ダケデハ其ノ線以外ニナホ條件ニ適スル點即チ條件ニ從ツテ動イタ點ガアルカモ知レヌカラデアル。

〔定義〕 或條件ニ適スル點ガ悉ク或線上ニアツテ且其ノ線上ノ點ハ悉ク其ノ條件ニ適スルトキハ、其ノ線ヲ其ノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。

此ノ定義ヨリ軌跡ノ定理ハ二ツノ定理ノ結合ト考ヘラレル。依ツテ其ノ證明ニハ必ズ前ニ述ベタ二ツノ事柄ヲ證明セネバナラス。

〔定理五十三〕 圓周ハ定點 (O) ヨリ定距離 (R) ニアル點ノ軌跡デアル。



〔證明〕 〔1〕 O ヨリ R ニ等シイ距離ニアル點 A, B,

C 等ハ皆 O ヲ中心トシ, R ニ等シイ半徑ヲ有スル圓周上ニアル。(第 24 節)

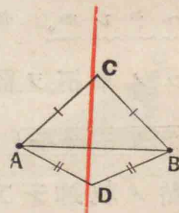
[2] 圓周 ABC 上ニアル點ハ何レモ皆 O ヨリノ距離ガ R ニ等シイ。(第 23 節)

故ニ定點 O ヨリ定距離 R ニアル點ノ軌跡ハ O ヲ中心トシ R ヲ半徑トスル圓周デアアル。

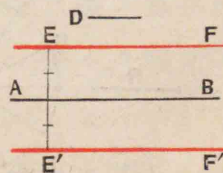
64. 基礎トナル軌跡

前節ニ述ベタ定理ノ他ニ基礎トナル軌跡ノ諸定理ヲ列舉スル。證明スベキニツノ事柄ヲ述べ、前節ノ例ニ倣ツテ之ヲ證明セヨ。

定理 五十四 二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ、此ノ二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線デアアル。(定理二十一系四)



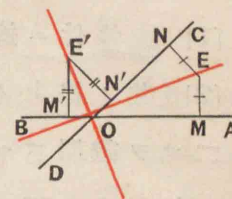
定理 五十五 定直線ヨリ定距離ニアル點ノ軌跡ハ、此ノ定直線ノ兩側ニ於テ其ノ距離ニアル一組ノ平行線デアアル。



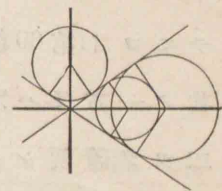
問 1. 平行線ノ双方ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡

ハ其ノ平行線ノ共通垂線ヲ垂直ニ二等分スル直線デアアル。

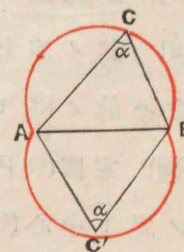
定理 五十六 相交ハル二定直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ、其ノ二定直線ノナス角ヲ二等分スル二直線デアアル。(定理十五系)



問 2. 相交ハル二定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ、其ノ二定直線ノナス角ヲ二等分スル二直線デアアル。



定理 五十七 同ジ底ノ上ニ立チ、大サダケ定マツタ頂角ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ、此ノ底ノ兩端ヲ通ルニツノ圓弧デアアル。(定理三十八系)



問 3. 上ノ定理五十七デ頂角ノ大サガ直角デアレバ、其ノ軌跡ハドウナルカ。

注意 軌跡ノ問題ヲ解クニハ上ノ基礎定理ノ何レカニ歸着セシメルコトノ出來ル場合ガ多イ。

65. 軌跡ノ證明

軌跡ヲ證明スルニハ、

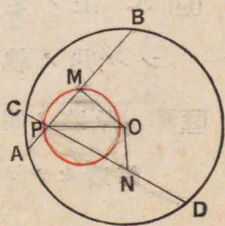
- [1] 或條件ニ適スル點ハ悉ク或線上ニアルコト、
 [2] 其ノ線上ノ點ハ悉ク其ノ條件ニ適スルコト
 ノ二ツヲ證明スベキコトハ前ニ述ベタ通りデア
 ルガ、一般ニ或定理ヲ證明スル代リニ其ノ對偶ヲ證明
 シテモヨイ(第60節)カラ、上ノ[1]、[2]ヲ證明スル代リ
 ニ其ノ一方又ハ双方ノ對偶ヲ用ヒ、例ヘバ次ノヤウ
 ナ二ツヲ證明シテモヨイ。

- [1] 或線上ノ點ハ悉ク或條件ニ適スルコト
 [2] 其ノ線上ニナイ點ハ條件ニ適シナイコト。
 之ハ前ノ[2]ト[1]ノ對偶トデア
 ル。

[例] 定圓(O)内ノ定點(P)ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ハ、
 其ノ點ト中心(O)トヲ結ブ線分(PO)ヲ直徑トスル圓
 周デア
 ル。

[證明] [1] POヲ直徑トスル圓
 周上ノ任意ノ一點ヲMトシ、
 MトPトヲ通ル弦ABヲ引
 キOMヲ結ベバ、

$$\angle PMO = \text{直角}$$



故ニMハ弦ABノ中點デア
 ル。

故ニPOヲ直徑トスル圓周上ノ點ハ皆Pヲ通
 ル弦ノ中點デア
 ル。

- [2] POヲ直徑トスル圓周上ニナイ任意ノ一
 點ヲNトシ、NトPトヲ通ル弦CDヲ引キON
 ヲ結ベバ

$$\angle PNO = \text{直角}$$

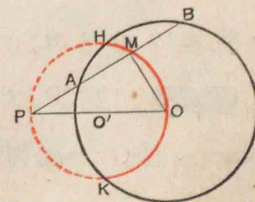
故ニNハ弦CDノ中點デナ
 イ。

故ニPOヲ直徑トスル圓周上ニナイ點ハ皆P
 ヲ通ル弦ノ中點デナ
 イ。

故ニ求メル軌跡ハPOヲ直徑トスル圓周デア
 ル。

[注意] 定點Pガ圓Oノ外ニアル

トキハ、此ノ軌跡ハPOヲ直
 徑トスル圓周ノ全部デハナ
 ク其ノ圓ノ内ニアル弧HOK
 ダケデア
 ル。



此ノヤウニ求メル軌跡ガ直線又ハ圓周ノ一部分ダ
 ケノトキハ軌跡ノ限界ヲ明カニシナケレバナ
 ラヌ。

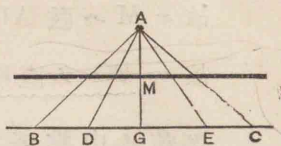
[問] 次ノ問題ノ證明ヲ上ニ述ベタ二様ニ行ヘ。

定點 A ヨリ定直線 BC ニ

至ル線分ノ中點ノ軌跡ハ、

A ヨリ BC へ下シタ垂線

AGノ中點 Mヲ通り BCニ平行ナル直線デアル。



66. 軌跡ノ求メ方

軌跡ノ問題ハ今マデ示シタヤウニ其ノ軌跡トナル圖形ヲ示スコトモアルガ、之ヲ示サズニソレヲ求メル場合ガ多イ。此ノヤウナ場合ニハ、先ヅ與ヘラレタ條件ニ適スル點ヲ考ヘ此ノ點ハ如何ナル線ノ上ニアルベキカヲ研究シテ前節ノ[1]ヲ證明シ、次ニ[2]ヲ證明スベキデアル。

[例] 定圓 Oノ周上ノ定點 Pヨリ引イタ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

考ヘ方 點 Pヲ通ル最大弦

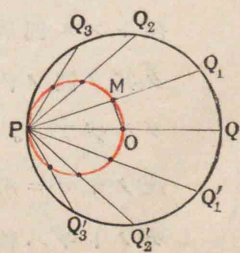
ハ圓 Oノ直徑 PQデ、其ノ

中點ハ中心 Oデアル。故

ニ Oハ與ヘラレタ條件ニ

適スル一ツノ點デアル。

又點 Pヲ通り次第ニ小ナル弦ヲ引ケバ、其ノ中



點ハ次第ニ點 Pニ近ヅキ遂ニ最小弦ノ中點ハ點 Pニ一致スルト考ヘラレル。

其ノ他ノ任意ノ弦、例ヘバ PQ_1 ヲ引キ其ノ中點 Mト Oトヲ結ベバ

$$OM \perp PQ_1$$

故ニ與ヘラレタ條件ニ適スル點ハ POヲ直徑トスル圓周上ニアル(證明[1])。

證明[2]ハ略スル。

[注意] 軌跡ヲ探シ求メルニハ此ノ例ノヤウニ與ヘラレタ條件ニ適スル點ノ中、特別ノ意味アル位置ノ點ヲ取ルガヨイ。此ノヤウナ點ヲ特殊點トイフ。

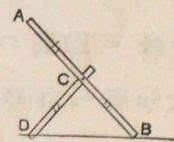
[問 1.] AB, CDヲ圖ノヤウニ連

結シテ平板上ニ置キ、Dヲ固

定シ Bヲ定直線 DB上ニ沿

ウテ動カストキハ Aノ畫ク

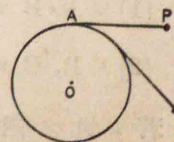
軌跡ハドウカ。但シ $AC=CB=CD$ デ目釘 C 及ビ Dノ周リノ廻轉ハ自由ナモノトスル。



[問 2.] 一定ノ長サノ線分ノ一

端ガ一定圓ニ切シテ動クト

キノ他端ノ軌跡ヲ求メヨ



67. 軌跡ノ應用

甲乙二ツノ條件ガアツテ、其ノ各ニ適スル點ノ軌跡ガ夫々 A, B ナラバ、此ノ兩軌跡ノ交點ハ兩條件甲乙ノ双方ニ適スルコトハ明カデアル。ソシテ此ノ交點ノ外ニハ其ノ兩條件ニ適スル點ハナイ。

若シ此ノ兩軌跡ガ交ハラナイトキニハ、此ノ兩條件ノ双方ニ適スル點ハナイ。

問 1. 二定點ヨリ等距離ニアル點ヲ、定直線又ハ定圓周ノ上ニ求メヨ。

問 2. 二定點ヨリ等距離ニアツテ、且二定直線ヨリモ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

作圖題ノ解法ハ結局ニ條件ニ適スル點ヲ求メルコトニ歸着スルモノデ、之ヲ兩軌跡ノ交點ニヨツテ求メルコトノ便利ナ場合ガ多イ。

例ヘバ三定點 A, B, C ヲ通ル圓周ヲ畫ク作圖題ハ A, B, C ヲリ等距離ノ點(即チ中心)ヲ求メルコトニ歸着シ、之ニハ次ノ兩軌跡ノ交點ヲ求メレバヨイ。

[1] A, B ヲリ等距離ノ點ノ軌跡

[2] B, C ヲリ等距離ノ點ノ軌跡

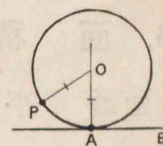
若シ此ノ兩軌跡ガ交ハラナケレバ求メル點ハナ

線ノ各ノ上ニアツテ動クトキ、其ノ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 底ト高サト一底角又ハ底ヘノ中線トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

6. 互ニ外方ニ相離レタ二ツノ定圓ニ切シテ與ヘラレタ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。

7. 所設ノ一點ヲ通り所設ノ直線又ハ圓周ト其ノ上ノ定點ニ於テ切スル圓周ヲ畫ケ。

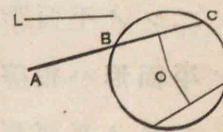


8. 所設ノ直線ト圓トニ切シ、且所設ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫ケ。

9. 半徑 2cm ノ圓ヲ半徑 5cm ノ半圓ノ弧ト直徑トニ切スルヤウニ畫ケ。

10. 所設ノ圓ニ其ノ外ニアル所設ノ點ヨリ割線ヲ引キ、其ノ圓外ノ部分ヲ圓内ノ部分(弦)ニ等シクセヨ。

又其ノ弦ヲ所設ノ線分ニ等シクセヨ。



第五篇

面積

第一章 矩形ノ面積

68. 面積

定義 平面形ノ内ニアル平面ノ大サ(廣サ)ヲ其ノ平面形ノ面積トイフ。

面積ヲ測ルニハ單位ノ長サヲ一邊トスル正方形ノ面積ヲ單位トスル。

或平面形ノ面積ガ單位面積ノ n 倍デアルトキハ其ノ面積ヲ表ハス數値ハ n デアアル、或ハ略シテ其ノ面積ハ n デアルトイフ。

二ツノ平面形ノ面積ガ相等シイコトヲ其ノ二ツノ平面形ハ相等シイ又ハ等積デアルトイフ。

二ツノ平面形ノ等積デアアルコトヲ表ハスニハ等號 $=$ ヲ用ヒル。

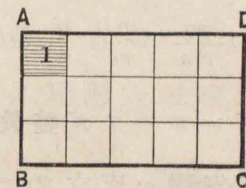
例ヘバ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トガ等積デアルトキハ之ヲ $\triangle ABC = \triangle DEF$ ノヤウニ書ク。

注意 合同デアアル多角形ハ等積デアアルガ、等積デアアル多角形ハ必ズシモ合同デハナイ。

69. 矩形ノ面積

定理 五十八 矩形(ABCD)ノ面積ヲ表ハス數値(S)ハ其ノ二隣邊ヲ表ハス數値(a, b)ノ積ニ等シイ。

證明 (1) a, b ヲ共ニ整數トスル。



ABヲ a 等分シ、ADヲ b 等分シ、各分點ヨリ夫々二隣邊ニ平行ナル直線ヲ引ケバ、矩形ABCD、明カニ ab 箇ノ單位面積ニ分ケラレル。

故ニ $S = ab$

(2) a, b ヲ分數トシ、 $a = \frac{p}{m}$, $b = \frac{q}{n}$ トスル。

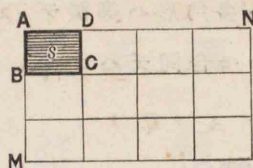
但シ m, n, p, q ハ皆整數トスル。

AB, ADヲ夫々M, Nマデ延長シ

$$AM = mAB,$$

$$AN = nAD$$

ナルヤウナ矩形MNヲ作レバ



二隣邊 AM, AN ヲ表ハス數値ハ夫々 p, q デ、且此ノ矩形ハモトノ矩形 ABCD ノ mn 倍デアル。

故ニ $mn \cdot S = pq$

故ニ $S = \frac{pq}{mn} = \frac{p}{m} \cdot \frac{q}{n} = ab$

又 a, b ノ中何レカーツガ整數デ他ガ分數デア

ル場合ニモ本定理ハ成立ツ。

上ノ定理ハ略シテ次ノヤウニモイフ。

矩形ノ面積ハ其ノ二隣邊ノ積ニ等シイ。

又矩形ノ一邊ヲ底トイヘバ其ノ隣邊ヲ高サトイヒ、或ハ二隣邊ヲ夫々長サ及ビ幅トモイフカラ、

矩形ノ面積ハ底ト高サ(又ハ長サト幅)トノ積ニ等シイ。

〔系〕 正方形ノ面積ハ、其ノ一邊ノ二乗(平方)ニ等シイ。

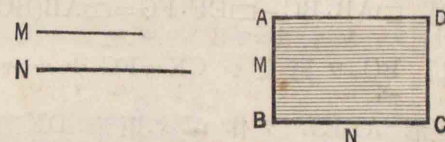
一邊ガ AB デアル正方形ヲ AB ノ上ノ正方形トイ

ヒ、其ノ面積ヲ AB^2 デ表ハシ、之ヲ AB ノ平方トイフ。
一邊ガ線分 A ニ等シイ正方形ノ面積ヲ上ニ準ジテ A^2 デ表ハシ、之ヲ A ノ平方トイフコトガアル。

矩形ノ面積、正方形ノ面積トイフベキヲ紛レル虞ノナイ限リ單ニ矩形、正方形トイフコトガ多イ。

70. 二線分ノ矩形

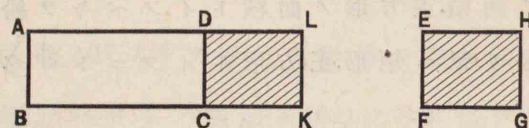
〔定義〕 二隣邊ガ夫々二線分ニ等シイ矩形ヲ其ノ二線分ノ矩形トイフ。



例ヘバ矩形 ABCD ノ二隣邊 AB, BC ガ夫々二線分 M, N ニ等シイトキハ、此ノ矩形ヲ M, N ノ矩形又ハ M, N ノ包ム矩形トイヒ、其ノ面積ヲ矩形 M, N 又ハ $\square M \cdot N$ ノヤウニ書キ表ハス。

又此ノ矩形ヲ AB, BC ノ矩形トモイヒ、其ノ面積ヲ矩形 $AB \cdot BC$ 又ハ $\square AB \cdot BC$ トモ書ク。但シ $\square AB \cdot (BC + CD)$ ノヤウナ場合ニハ括弧ノ前ノ・ヲ略スルコトガ多イ。

定理五十九 一邊ガ等シイニツノ矩形ノ和又ハ差ハ其ノ等シイ邊ト兩矩形ノ他ノ邊ノ和又ハ差トノ矩形ニ等シイ。



假設 矩形 ABCD, EFGH = 於テ

$$AB = EF, \quad BC > FG \quad \text{トスル。}$$

終結 [1] $\square AB \cdot BC + \square EF \cdot FG = \square AB(BC + FG)$

[2] $\square AB \cdot BC - \square EF \cdot FG = \square AB(BC - FG)$

證明 [1] BCヲ延長シ CK=FGナルヤウニKヲ

取リ、矩形 ABKLヲ作レバ、矩形 DKト矩形 EGトハ合同デアルカラ、

$$\square AK = \square AC + \square EG$$

ソシテ矩形 ABKLハ ABト、BC+FGニ等シイ

BKトノ矩形デアルカラ、

$$\square AC + \square EG = \square AB(BC + FG)$$

故ニ $\square AB \cdot BC + \square EF \cdot FG = \square AB(BC + FG)$

[2] 同様ニ

$$\square AB \cdot BC - \square EF \cdot FG = \square AB(BC - FG)$$

注意 三線分 A, B, Cノ數値ヲ夫々 a, b, c トスレバ、

$$ab \pm ac = a(b \pm c) \quad (\text{複號同順})$$

系 $\square A \cdot B + \square A \cdot C + \square A \cdot D = \square A(B + C + D)$

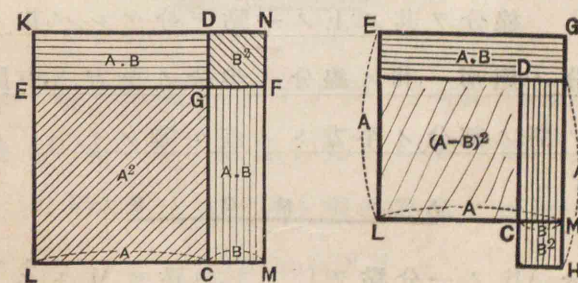
$$\square A \cdot B - \square A \cdot C + \square A \cdot D = \square A(B + D - C)$$

但シ A, B, C, Dヲ皆線分トシ、 $B + D > C$ トスル。

定理六十 二線分 A, Bノ和又ハ差ノ上ノ平方ハ其ノ各線分ノ平方ノ和ニ其ノ二線分ノ矩形ノ二倍ヲ加ヘタモノ、又ハ其ノ兩平方ノ和カラ其ノ矩形ノ二倍ヲ引イタモノニ等シイ。

$$[1] (A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2\square A \cdot B$$

$$[2] (A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2\square A \cdot B \quad (\text{但シ } A > B \text{ トスル})$$



注意 二線分 A, Bノ數値ヲ夫々 a, b トスレバ、

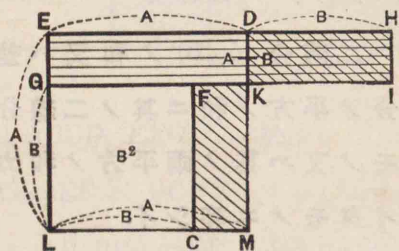
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

系一 或線分ノ平方ハ其ノ半分ノ平方ノ四倍ニ等シイ。

【系二】 面積ノ等シイ兩正方形ノ邊ハ相等シイ。

【定理 六十一】 二線分 (A, B) ノ平方ノ差ハ其ノ二線分ノ和ト差トノ矩形ニ等シイ。

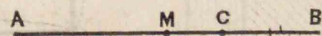
$$A^2 - B^2 = \square(A+B)(A-B) \quad (\text{但シ } A > B \text{ トスル})$$



【注意】 二線分 A, B ノ數値ヲ夫々 a, b トスレバ,

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

【系】 線分ヲ其ノ上ノ一點デ分ケレバ其ノ二ツノ部分ノ矩形ハ其ノ線分ノ半分ノ平方ト中點ト分點トノ間ノ部分ノ平方トノ差ニ等シイ。



線分 AB ノ一分點ヲ C トシ中點ヲ M トスレバ,

$$AC \cdot CB = AM^2 - CM^2$$

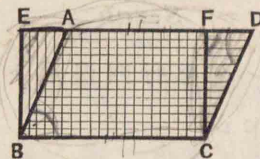
本節ノ定理ヲ等式デ書キ表ハシタモノハ全ク代數學ノ乗法ニ符合シ線分及ビ面積ヲ數値デ表ハシタモノハ代數學ノ公式トナル。

第二章 多角形ノ面積

71. 平行四邊形ノ面積

平行四邊形ハ其ノ一邊ノ上ニ立ツト考ヘルコトガアル。此ノトキ其ノ邊ヲ底トイヒ底ト對邊トノ距離ヲ其ノ高サトイフ。

【定理 六十二】 平行四邊形 (ABCD) ハ之ト等底等高ノ矩形 (EBCF) ニ等シイ。



【證明】 底ノ兩端 B, C ヨリ BC ニ垂線ヲ引イテ對邊 AD 又ハ其ノ延長ト夫々 E, F デ交ハラシメレバ EBCF ハ ABCD ト同底等高ノ矩形デアル。

$$\triangle ABE \equiv \triangle DCF$$

$$\square ABCD = \square EBCF$$

故ニ 平行四邊形 ABCD ハ其ノ底 BC ニ等シイ底ト其ノ高サ BE ニ等シイ高サトヲモツ矩形ニ等シイ。

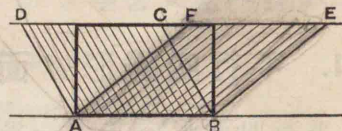
【系一】 等底等高ノ平行四邊形ハ等積デアル。

【問】 1. 同底又ハ等底ヲ

有シ、同ジ平行線ノ間

ニアル平行四邊形ハ

皆相等シイ。



【系二】 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等

シイ。

平行四邊形ノ面積ヲ S , 其ノ底及ビ高サヲ夫々 a ,
及ビ h トスレバ,

$$S = ah$$

【問】 2. 與ヘラレタ平行四邊形ト等積デ高サガ二

倍ノ矩形ヲ作レ。

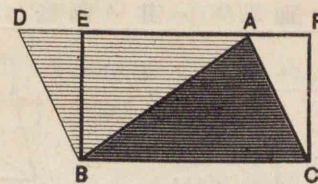
【系三】 等底デ等積デアル平行四邊形ハ等高デア

ル。又等高デ等積デアル平行四邊形ハ等底デアル。

72. 三角形ノ面積

三角形ハ其ノ一邊ノ上ニ立ツト考ヘルトキ其ノ
邊ヲ底トイヒ、底ト之ニ對スル頂點トノ距離ヲ其ノ
高サトイフ。

【定理 六十三】 三角形ハ等底等高ノ矩形ノ半分ニ
等シイ。(次ノ圖ニヨツテ之ヲ證明セヨ)



【系一】 等底等高ノ三角形ハ等積デアル。又等底
(又ハ等高)等積ノ三角形ハ等高(又ハ等底)デアル。

【系二】 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ半分ニ
等シイ。

三角形ノ面積ヲ S , 其ノ底ト高サト夫々 a , h ト
スレバ,

$$S = \frac{1}{2}ah$$

【問】 1. 三角形ノ中線ハ其ノ三角形ヲ二等分スル。

【問】 2. 同底等積ノ兩三角形ノ頂點ヲ結ブ直線ハ
底ニ平行デアルカ、又ハ底デ二等分サレル。

【問】 3. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ガ BD ヲ二等分
スルトキハ AC ハ本形ヲ二等分スル。

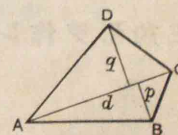
【問】 4. 四邊形 ABCD ノ對角線

AC ノ長サヲ d トシ、B 及ビ D

ヨリ AC へ下シタ垂線ノ長

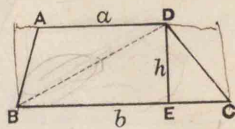
サヲ夫々 p 及ビ q トスレバ、此ノ四邊形ノ面積

ハ $\frac{1}{2}(p+q)d$ デアル。

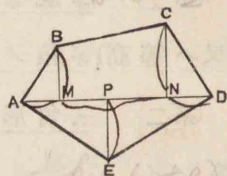


系三 梯形ノ面積(S)ハ其ノ兩底(a, b)ノ和ト高サ
(兩底間ノ距離 h)トノ積ノ半分ニ
等シイ。

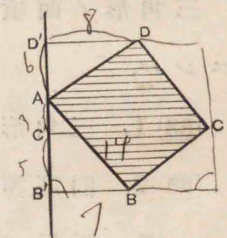
即チ
$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$



問 5. 右圖ノ多角形 ABCDE ノ
面積ヲ計算セヨ。但シ
AM, MN, ND, BM, CN, EP
ヲ夫々 a, b, c, d, e, f トスル。

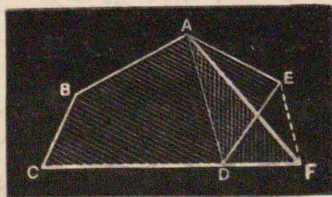


問 6. 右圖ノ四邊形 ABCD ノ
面積ヲ計算セヨ。但シ
 $AD' = 6m, AC' = 3m,$
 $C'B' = 5m, DD' = 8m,$
 $CC' = 14m, BB' = 7m$ トスル。



73. 多角形ノ等積變形

作圖題十七 所設ノ多角形 (ABCDE) ト等積ナル
三角形ヲ作シ。



解析 先ヅ ABCDE ガ、之ヨリ邊數ガ一ツ少イ等
積ノ ABCF ニ變形セラレタトシテ、AD, EF ヲ
結ベバ、 $\triangle ADF = \triangle ADE$

故ニ此ノ兩三角形ハ AD ヲ底ト見レバ等高デ
ナケレバナラナイ。

故ニ $EF \parallel AD$

作圖 對角線 AD ヲ引キ、之ニ平行ニ EF ヲ引キ
CD ノ延長ト F デ交ハラシメ、AF ヲ結ブ。

次ニ又對角線 AC ヲ引イテ同ジ方法ヲ行ヘバ
求メル三角形ヲ得ル。

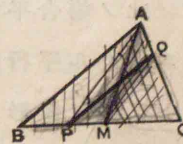
證明 $EF \parallel AD$ (作圖)

故ニ $\triangle ADF = \triangle ADE$

故ニ 多角形 ABCF = 多角形 ABCDE

故ニ此ノ方法ヲ續ケテ行ヘバ如何ナル多角形
デモ一回ニ元ノ多角形ヨリ一邊少イ等積ノ多
角形ニ變ヘラレ、終ニ一ツノ三角形トナル。

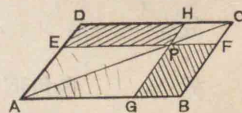
△ABC ノ一邊 BC 上ノ定點
P ヲ通り、此ノ三角形ノ面積ヲ
二等分スル直線ヲ引ケ。



又此ノ面積ヲ三等分スル直線ヲ引ケ。

問題 11

1. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル平行四邊形ハ原形ノ半分ニ等シイ。
2. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 又ハ其ノ延長上ニ任意ノ一點 P ヲ取ルトキハ、三角形 PCB, PCD ハ相等シイ。
3. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ハ原形ヲ二等分スル。
4. 與ヘラレタ點ヲ通ル直線ヲ以テ與ヘラレタ平行四邊形ヲ二等分セヨ。
5. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ノ一點 P ヲ通り、二隣邊ニ平行ニ EF, GH ヲ引



クトキ出來ル平行四邊形 PGBF, PHDE ハ等積デアル。

此ノ場合、平行四邊形 AGPE ト PFCH トヲ對角線 AC ニ沿ヘル平行四邊形トイヒ、平行四邊形 PGBF ト PHDE トヲ其ノ餘形トイフ。

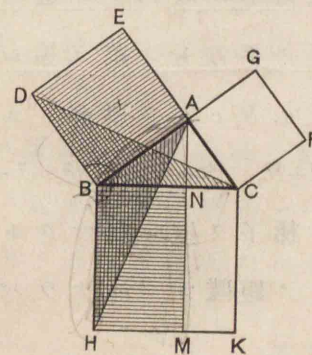
第三章 三角形ノ邊ノ平方

74. ぴたごらすノ定理

定理 六十四 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シイ。 (Pythagoras* ノ定理)

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle BAC$ ヲ直角トスル。

終結 $BC^2 = AB^2 + AC^2$



證明 AB, AC, BC 上ニ $\triangle ABC$ ノ外方ニ夫々正方形 ABDE, ACFG, BCKH ヲ畫キ、A ヨリ BH ニ平行ニ AM ヲ引キ HK ト M デ交ハラシメ、AH 及ビ CD ヲ結ベバ、CAE ハ一直線デ BD ニ平行デ

* 卷首ニぴたごらす (Pythagoras) ノ肖像ト傳記トガアル。

モト我國デハ此ノ定理ヲ鈎股弦ノ適等トイヒ、關孝和 (寛永 19 年ニ生レ寶永 5 年ニ死ス、西曆 1642—1708 年) ガ獨立ニ之ヲ證明シタ。

アルカラ、正方形 $BE = 2\triangle BCD$

又 矩形 $BM = 2\triangle ABH$

然ルニ $\triangle BCD \equiv \triangle BHA$ (定理一)

故ニ 正方形 $BE =$ 矩形 BM

同様ニ 正方形 $CG =$ 矩形 CM

然ルニ 正方形 $BK =$ 矩形 $BM +$ 矩形 CM

故ニ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

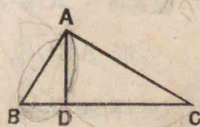
系一 直角三角形ノ直角ノ一邊ノ平方ハ、斜邊ノ平方ト他ノ一邊ノ平方トノ差ニ等シイ。

三邊ノ數値ヲ a, b, c (c ヲ斜邊トスル) トスレバ、

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 = c^2 - b^2, \quad b^2 = c^2 - a^2$$

問 1. $6m$ ノ梯子ヲ壁ニ掛ケタトキ、壁ノ礎ト梯子ノ下端トノ距離ガ $2m$ ナラバ、梯子ノ上端ノ高サハ幾米カ。

系二 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊ヘ下シタ垂線ヲ AD トスレバ



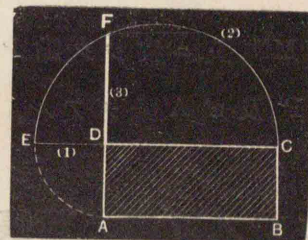
(1) $AB^2 = BD \cdot BC, \quad AC^2 = CD \cdot CB$

(2) $AD^2 = BD \cdot DC$

問 2. $\sqrt{2}cm, \sqrt{3}cm$ 等ヲ表ハス線分ヲ作レ。

系二ヨリ次ノ作圖題ヲ解クコトガデキル。

作圖題 十八 與ヘラレタ矩形 $(ABCD)$ ニ等シイ正方形ヲ畫ケ。



作圖 ① CD ヲ E マデ延長シ、 DE ヲ DA ニ等シクスル。

② CE ヲ直径トスル圓周ヲ畫ク。

③ AD ノ延長ト此ノ圓周トノ交點ヲ F トスレバ、 DF 上ノ正方形ガ求メルモノデアル。

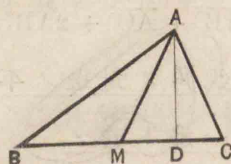
75. 正射影

定義 或點ヨリ或直線ニ下シタ垂線ノ足ヲ其ノ直線上ニ投ジタ其ノ點ノ正射影トイフ。又或線分ノ兩端ヨリ或直線ニ下シタ垂線ノ足ノ間ニアル其ノ直線ノ部分ヲ其ノ直線上ニ投ジタ其ノ線分ノ正射影トイフ。

定理 六十六 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ第三邊ノ半分ノ平方ノ二倍ト此ノ邊ヘノ中線ノ平方ノ二倍トノ和ニ等シイ。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ M ヲ邊 BC ノ中點トスル。

終結 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AM}^2$



證明 (1) AM ガ BC ノ垂線デアル場合ニ此ノ定理ノ成立ツコトハ明カデアル。

(2) AM ガ BC ノ斜線デアルトキハ、 $\angle AMB$ ト $\angle AMC$ トノ中一ツハ鈍角デ他ハ鋭角トナル。今 $\angle AMB$ ガ鈍角デアルトシ、 A ヨリ BC ニ引イタ垂線ノ足ヲ D トスレバ、

$$\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MD}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{MD}$$

$$= \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{BM} \cdot \overline{MD}$$

$$\text{故ニ} \quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AM}^2$$

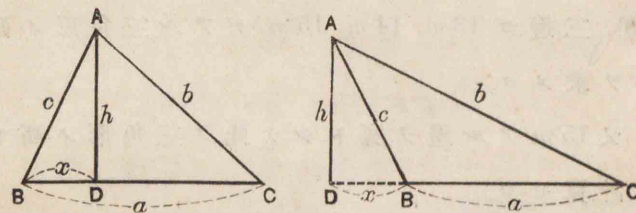
問 2. 平行四邊形ノ四邊ノ平方ノ和ハ兩對角線ノ平方ノ和ニ等シイ。

77. 三角形ノ面積ニ關スル公式

定理 六十七 三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ測度ヲ夫々 a, b, c トシ其ノ面積ノ測度ヲ S トスレバ

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}^*$$

但シ $s = \frac{a+b+c}{2}$ (半周)



證明 高サ AD ノ測度ヲ h , BD ノ測度ヲ x トスレバ、

$$h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a \pm x)^2$$

之ヨリ $x = \pm \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$

之ヲ $h^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x)$ ニ代入スレバ

$$h^2 = \frac{1}{4a^2} (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

然ルニ $S = \frac{1}{2}ah$

故ニ $S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

* 之ヲヒェーロー (Heron) 又ハヘロン (Heron) ノ公式トイフ。此ノ人ハ埃及アレキサンドリアニ住ミ、B. C. 200—125 年頃ノ數學者デアル。

$$\text{然ルニ} \quad a+b+c=2s$$

$$\text{故ニ} \quad b+c-a=2s-2a=2(s-a),$$

$$c+a-b=2(s-b),$$

$$a+b-c=2(s-c)$$

之ヲ前式ニ代入スレバ

$$S=\sqrt{s(s-a)s-b)(s-c)}$$

問 三邊ガ $13m, 14m, 15m$ デアル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

又 $15m$ アル邊ヲ底トシテ此ノ三角形ノ高サヲ計算セヨ。

問題 12

1. 一邊ガ a デアル正方形ノ對角線ヲ求メヨ。
2. 一邊ガ a デアル正三角形ノ高サ及ビ面積ヲ求メヨ。
3. 三角形ノ三邊 a, b, c ヲ知ツテ三中線ノ長サヲ求メル公式ヲ作レ。若シ底ガ $210cm$, 他ノ邊ガ $105cm, 135cm$ ナラバ, 底ヘノ中線ノ長サハ幾ラカ。
4. 四邊形 $ABCD$ ノ對角線ガ直交スレバ,

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$$

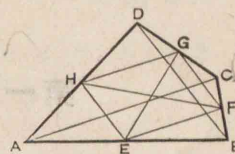
5. $\triangle ABC$ ノ頂點 B, C ヨリ對邊ヘ垂線 BE, CF ヲ引ケバ,

$$AB \cdot AF = AC \cdot AE$$

6. 四邊形ノ對角線ノ平方ノ

和ハ對邊ノ中點ヲ結ブ線分

ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シイ。



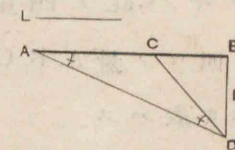
7. $\triangle ABC$ ノ A ヨリ BC ヘ垂線 AD ヲ下セバ,

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

8. 所設ノ線分ヲ二分シ, 其ノ

二部分ノ平方ノ差ヲ所設ノ

正方形ニ等シクセヨ。



9. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ定量 K^2 ニ等

イ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

10. 直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ヘ下シタ垂線ノ

長サヲ求メヨ。但シ直角ノ二邊ノ長サヲ a, b ト

スル。

11. 周ノ等シイ正三角形ト正方形トガアル。何レ

ノ面積ガ大デアルカ。

第六篇

比 例

第一章 基本ノ定理

78. 比 例

定義 二量ノ比ガ他ノ二量ノ比ニ等シイトキハ、此ノ四量ハ比例スルトイフ。

四ツノ量 A, B, C, D ガ比例スルコトヲ次ノヤウニ書キ表ハス。

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

或ハ $A:B=C:D$

之ヲ比例式トイフ。此ノ比例式デ A, B, C, D ヲ比例ノ項トイヒ、夫々比例ノ第一項、第二項、第三項、第四項トイフ。又 A ト D トヲ比例ノ外項、B ト C トヲ内項トイフ。

A ト B ト及ビ C ト D トハ各、同種ノ量デアルベキハ勿論デアルガ、A ト C ト、從ツテ B ト D トハ必ズシモ同種ノ量デアルヲ要シナイ。

若シ A, B, C ガ同種ノ三量デ比例式

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

ガ成立ツトキハ、此ノ三量 A, B, C ガ比例スルトイヒ、C ヲ A ト B トノ第三比例項トイヒ、B ヲ A ト C トノ比例中項トイフ。

定理六十八 同種ノ二量(A, B)ノ比ハ之ヲ同ジ單位デ計ツタ數値(a, b)ノ比ニ等シイ。

證明 C ヲ共通ノ單位トシ、

$$A = aC, \quad B = bC$$

トスレバ、

$$C = \frac{1}{b}B$$

$$\text{故ニ} \quad A = \frac{a}{b}B$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

幾何學デ學ブ比例ハ主ニ線分面積等ノ幾何學的
量ニ關スルモノデアルガ、上ノ定理デ同種ノ二量ノ
比ハ之ヲ二數ノ比デ表ハスコトガデキルカラ、代數
學デ學ンダ數ニ關スル比例ノ諸定理ハ何レモ之ヲ
幾何學ニ適用スルコトガデキル。

79. 比例ノ基本定理

$$[1] \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ナルトキハ}$$

$$ad = bc$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a \pm b}{a \mp b} = \frac{c \pm d}{c \mp d} \quad (\text{複號同順})$$

$$[2] \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ナルトキハ}$$

$$ac = b^2$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}$$

又 $(n+1)$ 箇ノ數 a, b, c, d, \dots, p, q ガ連比例ヲ作ツテ

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots = \frac{p}{q} \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\frac{a}{q} = \frac{a^n}{b^n} = \frac{b^n}{c^n} = \frac{c^n}{d^n} = \dots$$

$$[3] \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots = \frac{a + b + c + \dots}{a' + b' + c' + \dots}$$

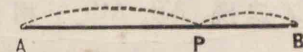
$$= \frac{pa + qb + rc + \dots}{pa' + qb' + rc' + \dots}$$

第二章 線分ノ比例

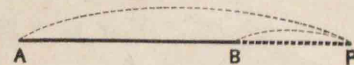
80. 内分・外分

定義 線分上ノ一點ハ之ヲ**内分**スルトイヒ、其ノ延長上ノ一點ハ之ヲ**外分**スルトイフ。何レノ場合デモ分點ト線分ノ兩端トノ間ノ線分ヲ其ノ二ツノ**部分**トイフ。

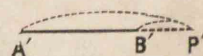
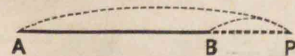
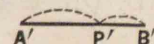
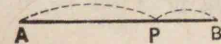
(内分)



(外分)



定義 二線分ガ夫々一點デ内分又ハ外分サレタトキ、各ノ二ツノ部分ノ比ガ相等シケレバ此ノ二線分ハ相似ニ分ケラレルトイフ。



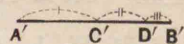
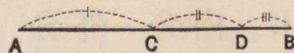
例ヘバ二線分 $AB, A'B'$ ガ夫々 P, P' デ分ケラレ、

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'} \quad \text{從ッテ} \quad \frac{AP}{A'P'} = \frac{PB}{P'B'}$$

デアルトキハ、 $AB, A'B'$ ハ相似ニ分ケラレテキル。

同様ニ線分 $AB, A'B'$ ガ夫々 C, D 及ビ C', D' デ各三分セラレ、

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DB}{D'B'}$$

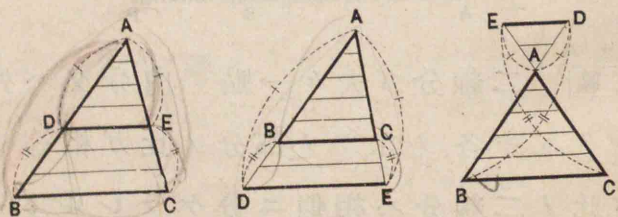


デアルトキハ、 $AB, A'B'$ ハ相

似ニ三分セラレルトイフ。他ハ之ニ準ズル。

定理六十九 三角形 (ABC) ノ一邊 (BC) ニ平行ナル直線 (DE) ハ他ノ二邊 (AB, AC) ヲ相似ニ内分又ハ外分スル。

(Thales ノ定理)



證明 AD, DB ガ夫々或單位ノ m 倍, n 倍(共ニ整数トスル)ニ等シイトスレバ、

$$\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$$

今 AD ヲ m 等分シ、 DB ヲ n 等分シ、各分點ヲ通り邊 BC ニ平行線ヲ引ケバ、此等ノ直線ハ AE ヲ

m 等分シ、 EC ヲ n 等分スル。 (定理二十六)

$$\text{故ニ} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

注意 同種ノ二量ガ共通ノ單位デ計リ切レル場合ニハ此ノ二量ハ公約量ヲ有スルトイヒ、ソウデナイ場合ニハ公約量ヲ有シナイトイフ。同種ノ二量ガ公約量ヲ有シナイトキ、其ノ比ハ無理數トナル。

本定理ハ二量ガ如何ナル場合デモ成立ツガ、公約量ヲ有シナイ場合ノ證明ハ困難デアルカラ略スル。

系一 本定理ノ逆モ真デアル。

系二 本定理ヨリ次ノ比例式ヲ得ル。

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \quad \frac{BD}{BA} = \frac{CE}{CA}$$

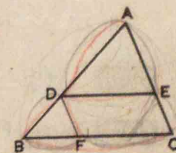
(第79節[1])

又

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

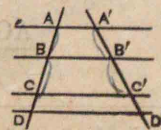
(D ヨリ AC ニ平行ニ DF ヲ引イテ

$$\frac{DA}{BA} = \frac{FC}{BC} \text{ ト } FC=DE \text{ トヲ用ヒヨ})$$

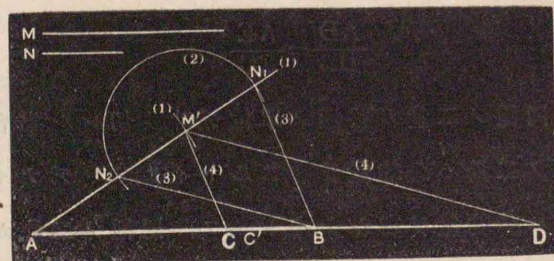


系三 二直線ガ若干ノ平行線デ截

ラレルトキハ、其ノ對應スル部分ノ比ハ相等シイ。



作圖題 十九 與ヘラレタ線分 (AB) ヲ與ヘラレタ
比 (M:N)* ニ内分及ビ外分セヨ。



- 作圖** ① Aヨリ任意ノ半直線 AM' ヲ引キ、其ノ上ニ AM'=M ナルヤウニ M' ヲ取ル。
② M' ヲ中心トシテ Nニ等シイ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫イテ、AM' トノ交點ヲ N₁ 及ビ N₂ トスル。
③ N₁B 及ビ N₂A ヲ結ブ。
④ M' ヲヨリ N₁B, N₂A ニ夫々平行ニ M'C, M'D ヲ引イテ AB 及ビ其ノ延長トノ交點ヲ夫々 C, D トスレバ、C 及ビ D ハ求メル分點デアアル。

證明 (學生之ヲセヨ)

吟味 今 C ヲ内分點トシ、C' ヲ AB 上ノ他ノ一點トシテ、假ニ $AC':C'B=M:N$ トスレバ

$$\frac{AC'+C'B}{C'B} = \frac{M+N}{N} \quad \text{即チ} \quad \frac{AB}{C'B} = \frac{M+N}{N}$$

* 與ヘラレタ比ハ其ノ兩項ヲ逆例線分デ表ハス。

$$\text{然ルニ} \quad \frac{AB}{CB} = \frac{M+N}{N} \quad \text{故ニ} \quad \frac{AB}{C'B} = \frac{AB}{CB}$$

$$\text{故ニ} \quad C'B=CB$$

故ニ C' ハ C ニ合スル。

故ニ AB ヲ比 M:N ニ内分スル點ハ點 C タバーツダケデアアル。

同様ニ外分スル點モタバーツダケデアアル。

但シ M=N ナル場合ニハ外分點ハナイ。

此ノ場合ニハ點 N₂ ハ點 A ニ合シ M'D ハ AB ニ平行トナル。

上ノ吟味ヨリ或線分ヲ或比ニ内分又ハ外分スル點ハ各、タバーツダケデアアル。但シ其ノ比ガ

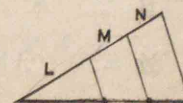
1 ニ等シイ場合ニハ外分點ハナイ。

上ノ作圖ニ準ジ次ノ作圖題ヲ解クコトガデキル。

[1] 與ヘラレタ三線分 (L, M, N) ノ第四比例項ヲ作レ $\frac{M}{L} = \frac{N}{x}$



[2] 與ヘラレタ線分ヲ分ケ、其ノ部分ノ比ヲ與ヘラレタ比 (L:M:N) ニ等シクセヨ。

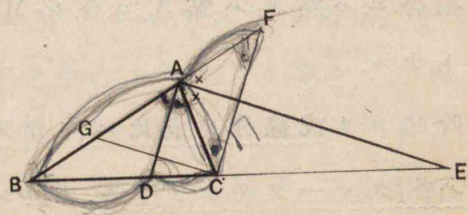


81. 調和列點

定理七十 三角形ノ内角又ハ外角ノ二等分線ハ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分スル。

假設 $\triangle ABC$ ノ頂角 BAC 及ビ其ノ外角 FAC ノ二等分線ガ底邊 BC 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスル。

終結 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$



證明 $DA \parallel CF$ ヲ引キ, BA ノ延長ト F デ交ハラシメレバ,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AF}$$

然ルニ $\angle AFC = \angle BAD, \angle ACF = \angle DAC$

且 $\angle BAD = \angle DAC$

故ニ $\angle AFC = \angle ACF$ 從ツテ $AF = AC$

故ニ $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\triangle E$ ニ平行ニ CG ヲ引ケバ前ト同様ニシテ

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

問 1. $\triangle ABC$ ニ於テ $AC > AB$ トシ, 頂角 A ノ二等分線ガ BC ト D デ交ハルトスレバ,

$$CD > BD$$

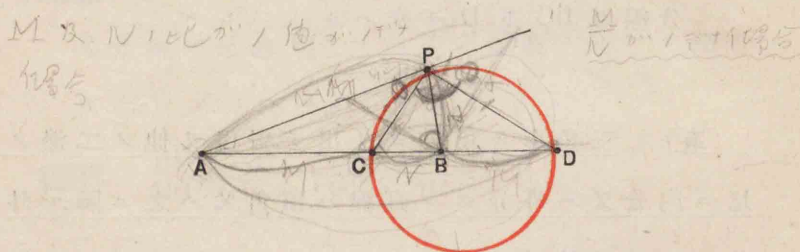
系 三角形ノ頂點ヨリ出テ, 對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分スル直線ハ, 頂角又ハ之ニ隣ル外角ノ二等分線デアアル。

定義 線分 AB ヲ相等シイ比ニ夫々内分及ビ外分スルトキ, 其ノ二分點 C, D ハ此ノ線分ヲ調和ニ分ケルトイヒ, 此ノ四點 A, B, C, D ヲ調和列點トイヒ, C, D ハ A, B ニ關シテ調和共軛點デアルトイフ。(作圖題十九ノ圖ヲ見ヨ)

前頁ノ圖デハ D ト E トガ BC ヲ調和ニ分ケル。

問 2. 圓ノ直徑 CD 上ノ一點 B ヨリ之ニ垂線 BP ヲ引キ, 圓周トノ交點 P ニ於テ此ノ圓ニ切線 PA ヲ引キ, CD ノ延長ト A ニ於テ交ハラシメレバ A, B, C, D ハ調和列點デアアル。

【定理 七十一】二定點 (A, B) マデノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シイ點ノ軌跡ハ其ノ二定點ヲ結ブ線分 (AB) ヲ此ノ比ニ内分及ビ外分スル二點 (C, D) ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周デアル。(Apollonius*ノ定理)



【證明】 [1] $M:N$ ヲ與ヘラレタ比トシ、 P ヲ與ヘラレタ條件ニ適スル任意ノ一點ト考ヘレバ

$$\frac{PA}{PB} = \frac{M}{N}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{M}{N}$$

故ニ $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC}$

故ニ PC ハ $\angle APB$ ヲ二等分スル。(定理七十系)

同様ニ PD ハ $\angle APB$ ニ隣ル外角ヲ二等分スル。

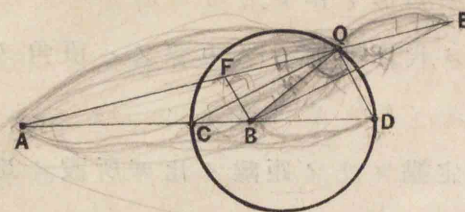
故ニ $\angle CPD$ ハ直角デアル。

ソシテ線分 CD ノ位置ト長サトハ定マル。

故ニ P ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアル。

* 古代希臘ノ有名ナル數學者 (C. C. 230—210 年頃) デアル。

✓ [2] 次ニ此ノ圓周上ノ任意ノ一點ヲ Q トシ、



QA, QB, QC, QD ヲ結ビ、又 B ヲ通リ QC 及ビ QD ニ平行ナル直線ヲ引キ、 AQ 又ハ其ノ延長ト夫夫 E, F デ交ハラシメレバ、

$$\frac{AQ}{QE} = \frac{AC}{CB} = \frac{M}{N}$$

又 $\frac{AQ}{QF} = \frac{AD}{DB} = \frac{M}{N}$

故ニ $\frac{AQ}{QE} = \frac{AQ}{QF}$

故ニ $QE = QF$

又 BE, BF ハ夫々 QC, QD ニ平行デ $\angle CQD$ ハ直角デアルカラ、 $\angle EBF$ ハ直角デアル。

故ニ Q ハ直角三角形 EBF ノ斜邊ノ中點デアル。

故ニ $QE = BQ$

故ニ $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AQ}{QE} = \frac{M}{N}$

問 3. 三角形ノ底、他ノ二邊ノ比及ビ高サヲ知ツテ其ノ三角形ヲ作レ。

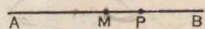
又高サノ代リニ底ヘノ中線又ハ頂角ヲ知レバドウカ。

問 4. 三定點ヨリノ距離ノ比ガ所設ノ比ニ等シイ點ヲ求メヨ。

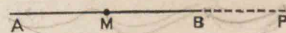
問 題 13

1. Pヲ線分 ABノ分點、Mヲ其ノ中點トスレバ

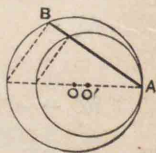
$$(1) PM = \frac{1}{2}(AP \pm BP)$$



$$(2) AP \cdot BP = AM^2 \sim PM^2$$



2. ニツノ圓ガ内切スルトキ、切點ヲ通ル大圓ノ弦ハ、皆小圓ノ周デ相似ニ分ケラレル。



3. $\triangle ABC$ ノ邊 AB上ノ任意ノ點 Dヨリ BCニ平行ニ DEヲ引キ ACト Eデ交ハラシメ、又 Cヨリ BEニ平行ニ CFヲ引キ ABノ延長ト Fデ交ハラシメレバ、ABハ ADト AFトノ比例中項デアル。

4. 二等邊三角形ガアツテ、其ノ底ノ高サニ對スル

比ガ 3:2 デアル。然ラバ内心ニヨツテ分ケラレタ高サノ二部分ノ比ハドウカ。

5. $\triangle ABC$ ノ三邊 AB, BC, CAノ長サヲ夫々 12 cm, 7 cm, 9 cm トシ、又 $\angle BAC$ 及ビ其ノ外角ヲ二等分スル直線ガ BC 及ビ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 P, Q トスレバ、P, Q ガ BC ヲ分ケル各ノ部分及ビ PQノ長サヲ求メヨ。

6. 所設ノ角 BACノ内又ハ外ニアル所設ノ點 Pヲ通り、此ノ角ノ二邊ト B, Cデ交ハル直線ヲ引イテ、BP:PCヲ所設ノ比ニ等シクセヨ。

7. 所設ノ弧 AB上ニ一點 Cヲ取り、弦 AC, BCノ比ヲ所設ノ比ニ等シクセヨ。

8. $\triangle ABC$ ノ底 BCノ中點ヲ Dトシ、 $\angle ADB$, $\angle ADC$ ノ二等分線ト二邊トノ交點ヲ夫々 E, Fトスレバ EFト BCトハ平行デアル。

9. A, C, B, Dガ一直線上ニ此ノ順ニアツテ調和列點ヲナストキハ

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$$

又 ABノ中點ヲ Oトスレバ

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OD}$$

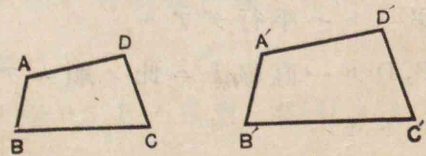
第三章 相似形

82. 相似

定義 一ツノ多角形ノ角ガ夫々他ノ多角形ノ同ジ順ニ取ツタ角ニ等シトキハ、此ノ兩形ハ互ニ等角デアルトイヒ、其等ノ相等シイ角ヲ對應角トイヒ、二ツノ對應角ノ間ニアル邊ヲ對應邊トイフ。

定義 互ニ等角デ且對應邊ガ比例スル兩多角形ヲ相似多角形トイヒ、此ノ兩形ハ互ニ相似デアルトイフ。

例ヘバ兩四角形 $ABCD$, $A'B'C'D'$ ニ於テ、



$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D' \text{ デ}$$

$$\text{且 } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \text{ デアルトキハ}$$

此ノ兩四角形ハ相似デアル。

之ヲ次ノヤウニ書キ表ハス。

四角形 $ABCD$ の 四角形 $A'B'C'D'$

又相似多角形ノ對應邊ノ比ヲ兩形ノ相似比トイフ。

上ノ定義ヨリ次ノ定理ハ容易ニワカル。

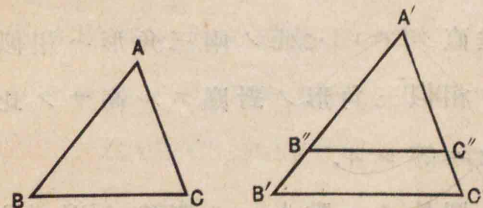
邊數ノ等シイ正多角形ハ皆相似デアル。

又相似多角形ノ周ノ比ハ其ノ相似比ニ等シイ。

(第79節[3])

83. 相似三角形

定理 七十二 互ニ等角デアル二ツノ三角形 (ABC , $A'B'C'$) ハ相似デアル。



證明 邊 $A'B'$ 又ハ其ノ延長上ニ B'' ヲ $A'B'' = AB$ ナルヤウニ、又邊 $A'C'$ 又ハ其ノ延長上ニ C'' ヲ $A'C'' = AC$ ナルヤウニ取リ、 B'' , C'' ヲ結ベバ

$$\triangle A'B''C'' \equiv \triangle ABC$$

且 $B''C'' \parallel B'C'$

$$\text{故ニ } \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{A'C''}{A'C'} = \frac{B''C''}{B'C'} \quad (\text{定理六十九及二系二})$$

即チ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

故ニ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (第82節)

系一 二角ガ夫々相等シイニツノ三角形ハ相似デアル。

系二 三角形ノ一邊ニ平行デアル直線ガ他ノ二邊ト作ル三角形ハモトノ三角形ト相似デアル。

問1. 所設ノ線分ヲ一邊トシテ、所設ノ三角形ニ相似ナル三角形ヲ畫ケ。

問2. 兩三角形ノ邊ガ夫々平行デアルカ、又ハ夫々垂直デアレバ、此ノ兩三角形ハ相似デアル。

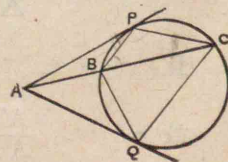
問3. 相似三角形ノ對應スル高サノ比ハ其ノ相似比ニ等シイ。

問4. 圓外ノ一點Aヨリ割線ABC、ADEヲ引キ、圓周ト夫々B、C、D、Eニ於テ交ハラシメレバ $\triangle ABD$ ト $\triangle AEC$ トハ相似デアル。又此ノ割線ノ中一ツガ切線トナルトキハドウカ。

又Aヨリ引イタ兩切線ノ

切點ヲP、Qトスレバ、

$$PB:PC=QB:QC$$

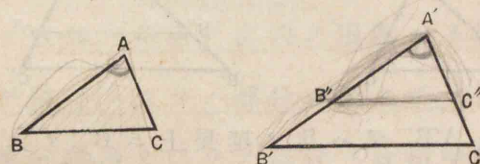


定理七十三 ニツノ三角形ノ一角ガ相等シク且此ノ等角ヲ夾ム二邊ガ比例スルトキハ、此ノ兩三角形ハ相似デアル。

假設 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ ニ於テ

$$\angle A = \angle A' \text{ 及ビ } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ トスル。}$$

終結 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



證明 邊 $A'B'$ 又ハ其ノ延長上ニ B'' ヲ $A'B''=AB$

ナルヤウニ取リ、 $B'C'$ ニ平行ニ $B''C''$ ヲ引ケバ、

$$\triangle A'B''C'' \sim \triangle A'B'C' \quad (\text{定理七十二系二})$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{A'C''}{A'C'}$$

$$\text{然ルニ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\text{及ビ} \quad A'B''=AB \quad (\text{作圖})$$

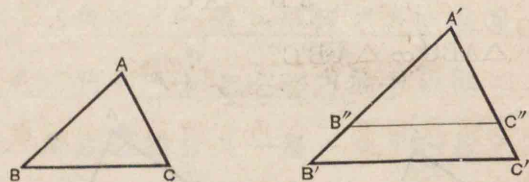
$$\text{故ニ} \quad A'C''=AC$$

$$\text{故ニ} \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B''C''$$

$$\text{故ニ} \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

問 5. ニツノ相似三角形ノ對應スル中線ノ比ハ
此ノ兩形ノ相似比ニ等シイ。

定理 七十四 一ツノ三角形 (ABC) ノ三邊ガ他ノ
三角形 (A'B'C') ノ三邊ニ比例スルトキハ、此ノ兩三角
形ハ相似デアアル。



證明 邊 A'B' 又ハ其ノ延長上ニ B'' ヲ A'B''=AB
ナルヤウニ取り、B'C' ニ平行ニ B''C'' ヲ引ケバ

$$\triangle A'B''C'' \sim \triangle A'B'C'$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{B''C''}{B'C'} = \frac{C''A'}{C'A'}$$

$$\text{然ルニ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \quad (\text{假設})$$

$$\text{及ビ} \quad A'B'' = AB$$

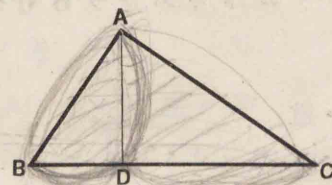
$$\text{故ニ} \quad B''C'' = BC \quad \text{及ビ} \quad C''A' = CA$$

$$\text{故ニ} \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B''C''$$

$$\text{故ニ} \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

問 6. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ンデ出來ル三角
形ハモトノ三角形ト相似デアアル。

定理 七十五 直角三角形 (ABC) ノ直角ノ頂點 (A)
ヨリ斜邊 (BC) ニ下シタ垂線 (AD) ハ、此ノ三角形ヲ之
ト相似ナルニツノ三角形ニ分ケル。



系 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ下シ

タ垂線デ斜邊ヲニツノ部分ニ分ケルトキハ、

- ① 垂線ハ斜邊ノニツノ部分ノ比例中項デアアル。
- ② 直角ヲ夾ム邊ハ何レモ其ノ邊ニ隣ル斜邊ノ部
分ト斜邊トノ比例中項デアアル。

上ノ圖ニ就イテイヘバ、

$$\text{①ハ} \quad BD : AD = AD : DC$$

$$\text{②ハ} \quad BD : AB = AB : BC, \quad DC : AC = AC : BC$$

此ノ系ヨリ容易ニ次ノ作圖ガ解カレル。

與ヘラレタ二線分ノ比例中項ヲ求メヨ。

84. 勾 配

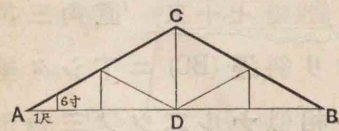
建物ノ屋根又ハ坂道ノ傾斜ノ度合ヲ表ハスニ

勾配ナル言葉ヲ用ヒル。

例へバ家屋ノ屋根ノ

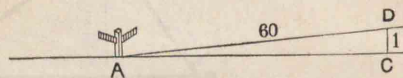
傾キガ水平1尺ニツイ

テ6寸ダケ高クナルトキハ、之ヲ6寸勾配ノ流レト
イフ。



又鐵道線路ヤ道

路デ坂道ノ上リ又



下リノ度合ハ、其ノ坂ノ長サニ對スル歩合ヲ以テ
イヒ表ハス。例へバ $\frac{1}{60}$ ノ上リトイフノハ坂ノ長サ
60mニツイテ1mノ割デ上ルトイフコトデアル。

勾配ハ相似ナル三角形ノ二邊ノ比ヲ表ハスカラ、
其ノ値ハ梁木ノ長サ又ハ坂道ノ長サニハ關係ナク、
其ノ水平線トノ間ノ角ニ伴ツテ變化スル。

前者ヲ其ノ角 (CAD) ノ正切トイヒ、後者ヲ其ノ正
弦トイフ、ソシテ夫々之ヲ $\tan A$ 及ビ $\sin A$ ト記ス。

但シ A ハ $\angle CAD$ ノ大サヲ表ハスモノデアル。

$\tan A$, $\sin A$ 等ヲ角 A ノ三角函數トイフ。

三角函數ニ關スル詳シイコトハ三角法デ學ブ。

問 $\frac{1}{60}$ ノ上リ勾配ヲ有スル鐵道線路ヲ1km上ル

ナラバ、モトノ處カラ幾米ダケ高クナルカ。

問題 14

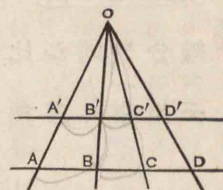
1. 同ジ點ヨリ出ル一群ノ直

線ハ平行線ヲ相似ニ分ケル。

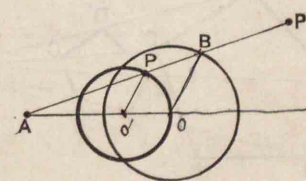
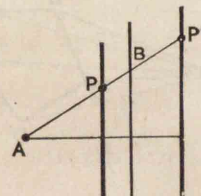
2. $\triangle ABC$ ノ邊 BC上ノ一點

ヲ D トシ、AD 上ニ任意ノ點

P ヲ取り、P ヨリ AB, AC ニ平行ニ PX, PY ヲ引キ
BC トノ交點ヲ夫々 X, Y トスレバ、 $BX:CY$ ハ P
ノ位置ニ關セズ一定デアル。



3. 一定點ヨリ一定直線又ハ一定圓周ニ至ル線分
ヲ所設ノ比ニ分ケル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

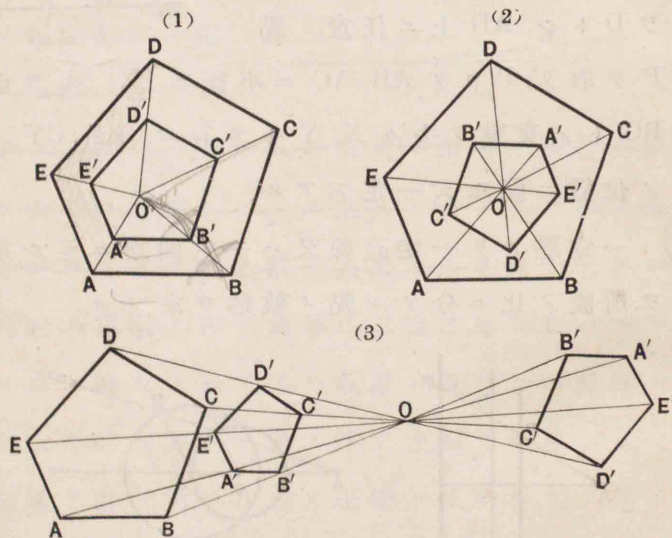


4. AB ハ與ヘラレタ弦、P ハ劣弧 AB 上ノ與ヘラ
レタ點デアル。P ヲ通ル弦 PQ ヲ引キ AB ト C ニ
於テ交ハラシメ $PC:PQ=1:3$ ナラシメヨ。

5. 梯形ノ兩底ヲ a, b トシ高サヲ h トスルトキハ
他ノ二邊ノ延長ノ交點ヨリ兩底ノ中ノ長イモノ
ニ至ル垂線ノ長サヲ求メヨ。

85. 相似多角形

定理七十六 多角形ノ總テノ頂點ヲ同ジ點ニ結
ブ線分ヲ同ジ比ニ内分又ハ外分スル點ヲ順次ニ結
ンデ出來ル多角形ハ原形ト相似デアル。



系 多角形ノ總テノ頂點ヲ同ジ點ニ結ンダ線
分又ハ其ノ延長上ニ頂點ヲ置イテ、夫々其ノ各邊ニ
平行ナル邊ヲ有スル多角形ハ原形ト相似デアル。

定理七十七 ニツノ相似多角形(ABCDE, A'B'C'D'E')
ハ兩形ノ對應邊(AB, A'B'; BC, B'C';)ガ各、平行ニ

ナルヤウニ置クコトガデキル。此ノ場合ニ其ノ對
應スル頂點ヲ結ブ直線ハ同ジ點(O)ニ集交スル。

證明 相似多角形 ABCDE, A'B'C'D'E' ノ一組ノ對
應邊 AB, A'B' ヲ平行ニナルヤウニ置キ(前頁ノ
圖ニヨル)直線 BB' ヲ引キ、其ノ上ノ一點ヲ O ト
スレバ、

$$\angle OBA = \angle OB'A', \quad \angle ABC = \angle A'B'C'$$

$$\text{故ニ} \quad \angle OBC = \angle OB'C'$$

$$\text{故ニ} \quad BC \parallel B'C'$$

同様ニ順次他ノ對應邊モ平行デアル。

次ニ AA' ト BB' トノ交點ヲ O トシ、CC' ト BB'
トノ交點ヲ O' トスレバ、 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ デ
アルカラ、

$$OB : OB' = AB : A'B', \quad O'B : O'B' = BC : B'C'$$

$$\text{然ルニ} \quad AB : A'B' = BC : B'C'$$

$$\text{故ニ} \quad OB : OB' = O'B : O'B'$$

故ニ O ト O' トハ相合スル。

即チ CC' ハ AA' ト BB' トノ交點 O ヲ通ル。

同様ニシテ DD' ハ BB' ト CC' トノ交點即チ O ヲ
通ル。カクシテ總テ對應スル頂點ヲ結ブ直線

ハ皆同ジ點 O ニ集交スル。

注意 此ノヤウナ兩相似多角形ハ相似ノ位置ニアルトイヒ、點 O ヲ其ノ相似ノ中心トイフ。

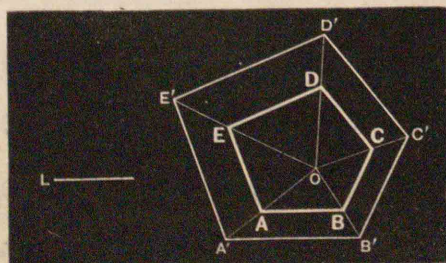
系一 相似ニシテ相似ノ位置ニアル兩多角形ノ相似ノ中心ハ、其ノ兩形ノ對應スル頂點ヲ結ブ直線ヲ兩形ノ相似比ニ内分又ハ外分スル。

問 1. 二圓ノ共通切線ハ、其ノ二圓ノ共通中心線上ニ於テ交ハリ、且其ノ交點ハ其ノ二圓ノ中心間ノ線分ヲ半径ノ比ニ内分又ハ外分スル。

注意 此ノ點ヲ二圓ノ相似ノ中心トイフ。

系二 相似ナル兩多角形ハ、各、同數ノ相似三角形ニ分ケルコトガデキル。

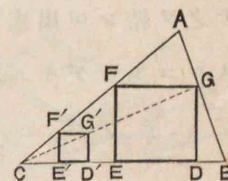
作圖題 二十 與ヘラレタ多角形 ($A'B'C'D'E'$) ニ相似デ、其ノ一邊 ($A'B'$ ノ對應邊 AB) ガ與ヘラレタ線分 (L) ニ等シイ多角形ヲ作レ。



解析 $ABCDE$ ヲ求メル多角形トシテ邊 AB ガ L ニ等シク、且 $A'B'$ ニ平行ナルヤウニシ、 AA' 、 BB' ノ交點ヲ O トスレバ、 C 、 D 、 E ハ夫々 OC' 、 OD' 、 OE' 上ニアツテ、 BC 、 CD 、 DE 、 EA ハ夫々 $B'C'$ 、 $C'D'$ 、 $D'E'$ 、 $E'A'$ ニ平行デアルカラ容易ニ作圖法ガワカル。

注意 O ハ兩形ノ相似ノ中心デアル。此ノヤウニ相似ノ中心ヲ利用シテ問題ヲ解ク方法ヲ相似法トイヒ、其ノ應用ハ甚ダ廣イ。

問 2. 與ヘラレタ三角形 ABC ニ與ヘラレタ矩形ト相似ナル矩形ヲ内接セシメヨ。但シ矩形ノ一邊ハ BC 上ニ置クモノトスル。



注意 一ツノ多角形ノ頂點ガ皆他ノ多角形ノ邊上ニアルトキハ、前者ハ後者ニ内接スルトイヒ、後者ハ前者ニ外接スルトイフ。

問 3. 與ヘラレタ半圓又ハ扇形ニ正方形又ハ圓ヲ内接セシメヨ。

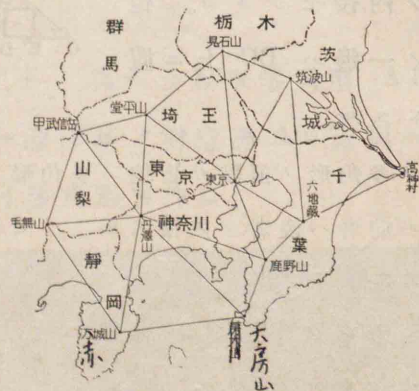
問 4. 正方形ノ對角線ト一邊トノ和又ハ差ヲ知ツテ此ノ正方形ヲ作レ。

86. 圖形ノ擴大及ビ縮小

前節ノ方法デーツノ多角形ノ一邊ノ n 倍又ハ n 分ノ一ニ等シイ線分ノ上ニ、其ノ多角形ニ相似ナル多角形ヲ、其ノ二邊ガ一組ノ對應邊トナルヤウニ畫クトキハ、後者ノ各邊、對角線、其ノ他其ノ上ノ諸點ヲ結ブ線分ハ、皆夫々前者ノ之ニ對應スルモノ、 n 倍又ハ n 分ノ一ニ等シイ。

此ノヤウニ或圖形ト相似デ大サダケ異ナル圖形ヲ畫クコトヲ圖形ヲ擴大スル又ハ縮小スルトイフ。

直線圖形デナイ圖形モ、其ノ上ノ重要ナル諸點ヲ選定シテ、之ヲ結ンデ出來ル直線圖形ヲ基礎トシテ擴大又ハ縮小スルコトガデキル。

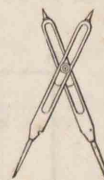


地圖ノ製作ハ全ク此ノ方法ノ應用デ、先ヅ地上ノ重要ナル諸點間ノ距離ヲ實測シ、此等ノ諸點ヲ結ンダ縮小圖ヲ畫

キ、之ニ海岸線其ノ他ヲ記入スルノデアル。二萬分ノ一、十萬分ノ一等ノ地圖トイフハ、其ノ縮小率ヲイフノデ、圖上ノ兩地間ノ距離ガ夫々實際ノ距離ノ二萬分ノ一、十萬分ノ一ニ當ルトイフコトデアル。

圖形ヲ擴大又ハ縮小スルニハコ、ニ示ス比例コンパストイフモノヲ使用スルノガ便利デアル。

又次ニ示スモノハぱんとぐらふトイフモノ、最モ簡單ナモノデ、圖形ヲ擴大又ハ縮小スルニ用ヒル器具デアル。

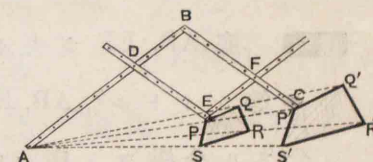


AB, BC, DE, EF ハ BDEF

ガ平行四邊形トナルヤウ

ニ組合ハセタ四ツノ竿デ、

之ヲ



$$AD : AB = BF : BC$$

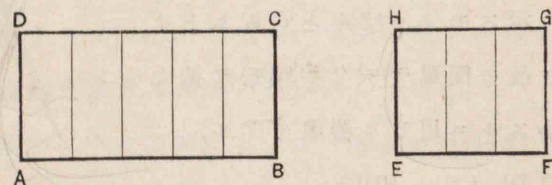
ナルヤウニ組合ハスレバ A, E, C ハ常ニ一直線上ニアル。

ソコデ A ヲ固定シ、E ニアル針ヲ動カシテ所設ノ圖形例ヘバ四邊形 PQRS ノ周上ヲ畫クトキハ、C ニアル鉛筆又ハぺんノ尖端ハ之ニ相似ナル圖形 P'Q'R'S' ヲ畫ク。

第四章 面積ノ比

87. 矩形・三角形ノ面積ノ比

定理 七十八 等高ナルニツノ矩形 (ABCD, EF3H) ノ面積ノ比ハ底 (AB, EF) ノ比ニ等シイ。



証明 底 AB, EF ガ夫々或單位ノ m 倍及ビ n 倍ニ等シイトシ*, AB, EFヲ夫々 m 等分及ビ n 等分スル分點ヨリ底ニ垂線ヲ引ケバ, 兩矩形 AC, EGハ夫々 m 等分及ビ n 等分セラレテ, 其等ノ各部分ハ皆相等シイ。

$$\text{故ニ} \quad \frac{\square AC}{\square EG} = \frac{m}{n}$$

$$\text{然ルニ} \quad \frac{AB}{EF} = \frac{m}{n}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{\square AC}{\square EG} = \frac{AB}{EF}$$

* AB, EF ガ公約量ヲ有シナイ場合ノ證明ハ省ク。

系一 等底ノニツノ矩形ノ面積ノ比ハ其ノ高さノ比ニ等シイ。

系二 等高(又ハ等底)ノ兩平行四邊形及ビ兩三角形ノ面積ノ比ハ其ノ底(又ハ高さ)ノ比ニ等シイ。

問 1. $\triangle ABC$ ノ頂點 A ヨリ邊 BC 又ハ其ノ延長上ヘ任意ノ直線 AD ヲ引キ, 其ノ上又ハ其ノ延長上ニ任意ノ一點 O ヲ取レバ, $\triangle AOB, \triangle AOC$ ノ比ハ BD, DC ノ比ニ等シイ。

定義 ニツノ比ノ積ニ等シイ比ヲ其ノニツノ比ノ複比トイヒ, 其ノニツノ比ガ相等シイトキハ其ノニツノ比ノ複比ヲ其ノ各ノ比ノ二乗比トイフ。

$$\text{例ヘバ} \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{M}{N} \quad \text{デアルトキハ}$$

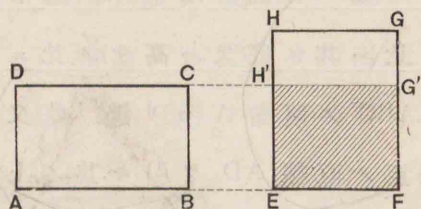
$$\frac{M}{N} \text{ハ} \frac{A}{B} \text{ト} \frac{C}{D} \text{トノ複比デ}$$

$$\text{若シ此ノ場合ニ} \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{デアレバ}$$

$$\frac{M}{N} \text{ハ} \frac{A}{B}, \frac{C}{D} \text{ノ各ノ二乗比デ,}$$

$$\frac{M}{N} = \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \left(\frac{C}{D}\right)^2 \quad \text{デアル。}$$

定理七十九 ニツノ矩形 (AC, EG) ノ面積ノ比ハ其ノ底ノ比 (AB:EF) ト高サノ比 (AD:EH) トノ複比ニ等シイ。



証明 $\square EG'$ ヲ $\square EG$ ト同底デ、 $\square AC$ ト等高デア
ル矩形トスレバ

$$\frac{\square AC}{\square EG'} = \frac{AB}{EF}, \quad \frac{\square EG'}{\square EG} = \frac{EH'}{EH} \quad (\text{定理七十八})$$

$$\text{然ルニ} \quad \frac{\square AC}{\square EG} = \frac{\square AC}{\square EG'} \times \frac{\square EG'}{\square EG}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{\square AC}{\square EG} = \frac{AB}{EF} \times \frac{EH'}{EH} = \frac{AB}{EF} \times \frac{AD}{EH}$$

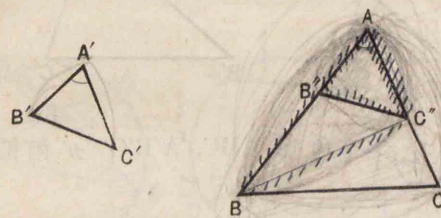
系一 ニツノ三角形又ハ平行四邊形ノ面積ノ比ハ其ノ底ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。

系二 ニツノ正方形ノ面積ノ比ハ邊ノ比ノ二乗比ニ等シイ。

問 2. ニツノ矩形又ハ三角形ガ等積ナラバ、其ノ高サノ比ハ底ノ比ノ反比ニ等シイ。

問 3. 四ツノ線分 A, B, C, D ガ比例スレバ、 $A^2:B^2=C^2:D^2$ デアル。逆モ眞デアル。

定理八十 ニツノ三角形 (ABC, A'B'C') ノ一ツノ角 (A, A') ガ相等シイトキハ、其ノ面積ノ比ハ此ノ等角ヲ夾ム二邊 (AB, AC; A'B', A'C') ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シイ。



証明 $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネ其ノ位置ヲ
圖ニ於ケル $\triangle AB''C''$ トスレバ、 $\triangle AB''C''$ ト $\triangle ABC''$
及ビ $\triangle ABC''$ ト $\triangle ABC$ ハ夫々等高デアアルカラ、

$$\frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC''} = \frac{AB''}{AB}, \quad \frac{\triangle ABC''}{\triangle ABC} = \frac{AC''}{AC}$$

$$\text{然ルニ} \quad \frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC} = \frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC''} \times \frac{\triangle ABC''}{\triangle ABC}$$

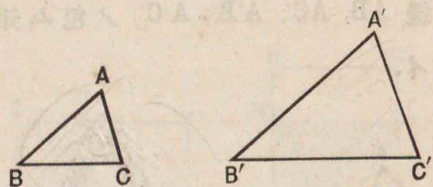
$$\text{故ニ} \quad \frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC} = \frac{AB''}{AB} \times \frac{AC''}{AC} = \frac{AB'' \cdot AC''}{AB \cdot AC}$$

$$\text{即チ} \quad \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = \frac{A'B' \cdot A'C'}{AB \cdot AC}$$

系 $\angle A$ ト $\angle A'$ トガ互ニ補角ヲナス場合ニモ
本定理ハ眞デアアル。

問 4. 平行四邊形ニ就イテ本定理ハドウカ。

【定理 八十一】 ニツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ其ノ相似比ノ二乗比ニ等シイ。



【証明】 ニツノ三角形 ABC, A'B'C' ガ相似デ

$\angle A = \angle A'$ トスレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AC}{A'C'}$$

然ルニ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

故ニ $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$

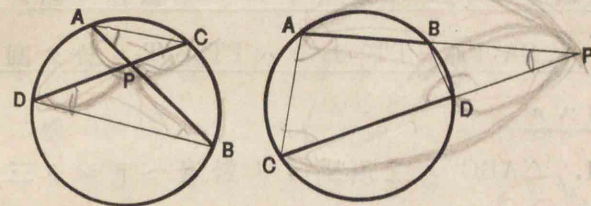
【系一】 ニツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ其ノ相似比ノ二乗比ニ等シイ。從ツテ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

【系二】 同邊數ノニツノ正多角形ノ面積ノ比ハ其ノ外接圓及ビ内接圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シイ。

【問 5】 $\triangle ABC$ ノニツノ中線 AD, BE ノ交點ヲ G トスレバ、兩三角形 AGB, DGE ノ比ハドウカ。

88. 弦ノ二部分ノ包ム矩形

【定理 八十二】 圓ノニツノ弦(AB, CD)又ハ其ノ延長ガ相交ハルトキハ、其ノ交點(P)デ分ケラレタ各弦ノニツノ部分ノ包ム矩形ハ等積デアル。



【証明】 AC, BD ヲ結ベバ

$\triangle APC \sim \triangle DPB$

故ニ $PA : PD = PC : PB$

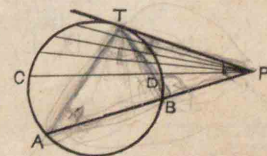
故ニ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

(第 79 節 [1])

【系一】 同ジ點デ内分又ハ外分セラレタ弦ノニツノ部分ノ包ム矩形ハ皆等積デアル。

ソシテ外分セラレタトキハ、

其ノニツノ部分ノ包ム矩形ハ其ノ分點ヨリ其ノ圓ニ引イタ切線ノ平方ニ等シイ。



圖デ $PA \cdot PB = PC \cdot PD = \dots = PT^2$

系二 系一ノ逆モ真デアル。即チ

(1) 二線分 AB, CD ガ P ニ於テ内分又ハ外分セラレ,
 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ナラバ, 此ノ兩線分ノ端 A, B, C, D
 ハ同一圓周上ニアル。

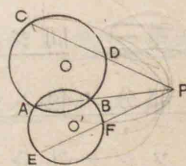
(2) 一線分 AB ノ外分點 P ヨリ一線分 PT ヲ引イ
 タトキ, $PA \cdot PB = PT^2$ ナラバ PT ハ T ニ於テ圓 ABT
 ニ切スル。

問 1. $\triangle ABC$ ノ三頂點ヨリ對邊ヘ下シタ三垂線
 ヲ AD, BE, CF トシ, 其ノ交點ヲ O トスレバ,
 $AO \cdot OD = BO \cdot OE = CO \cdot OF$

問 2. 二定點 A, B ヲ通ル圓ヘ AB ノ延長上ノ同
 一點ヨリ引イタ切線ハ皆相等シイ。

問 3. 相交ハル二圓ノ交點 A, B

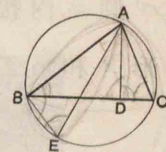
ヲ結ビ AB ノ延長上ノ任意ノ
 一點 P ヨリ兩圓ヘ割線 $PDC,$
 PFE ヲ引キ, 兩圓周トノ交點ヲ



夫々 C, D, E, F トスレバ, 此ノ四點ハ同一圓周
 上ニアル。

問題 15

1. 三角形 (ABC) ノ二邊ノ包ム矩形 $(AB \cdot AC)$ ハ第三
 邊 (CD) ヘノ高サ (AD) ト外接圓ノ直
 徑 (AE) トノ矩形ニ等シイ。

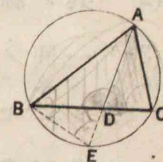


2. 半徑 r ナル圓ニ内接スル $\triangle ABC$
 ノ二邊 AB, AC ノ長サガ夫々 m, n デアルトキハ,
 A ヨリ對邊ヘ下シタ垂線ノ長サハドウカ。

3. $\triangle ABC$ ノ頂角 A ノ二等分線ガ底 BC ト D デ, 外
 接圓ノ周ト E デ交ハルトキハ,

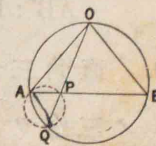
$$(1) AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

$$(2) \overline{AD}^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$



又 AD ガ A ニ隣ル外角ノ二等分線ナラバドウカ。

4. 二等邊三角形 OAB ノ頂點 O ヨリ
 任意ノ直線ヲ引キ, 底 AB ト P デ, 外
 接圓ノ周ト Q デ交ハラシメレバ, 矩
 形 $OP \cdot OQ$ ハ一定デアル。

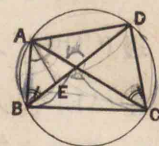


5. 菱形 $ABCD$ ノ頂點 A ヲ通ル直線ヲ引キ, 其ノ直
 線ガ二邊 BC, CD 及ビ對角線 BD ト夫々 E, F 及ビ
 K ニ於テ交ハルトキハ $\overline{KC}^2 = KE \cdot KF$ デアル。

6. $\triangle ABC$ ノ邊 BC 又ハ其ノ延長上ニ任意ノ一點 D ヲ取レバ, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ノ外接圓ノ直徑ノ比ハ $AB:AC$ ニ等シイ。

7. 圓ニ内接スル四邊形ノ對邊ノ矩形ノ和ハ對角線ノ矩形ニ等シイ。

(Ptolemy* ノ定理)

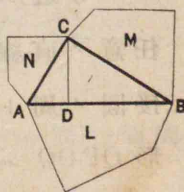


8. 相交ハル二圓周ノ一交點ヲ通ル割線ヲ引き,
 (1) 兩圓周ニ夾マレル部分ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。
 (2) 其ノ線分ヲ最大ナラシメヨ。
 (3) 一圓ノ弦ト他ノ圓ノ弦トノ比ヲ所設ノ比ニ等シクセヨ。

9. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊ヘ垂線 CD ヲ下ストキハ,

$$\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2 = AB : BD : AD$$

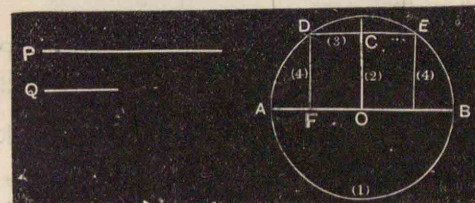
10. 直角三角形ノ三邊上ニ、夫々其ノ三邊ヲ對應邊トスルヤウニ相似形ヲ畫クトキハ、斜邊上ノ圖形ノ面積ハ他ノ二ツノ圖形ノ面積ノ和ニ等シイ。



* A.D. 139 年頃あれきさんどりあデ活動シタ星學者デ又地理學者デアル。

89. 作圖題

【作圖題 二十一】 二線分ノ和 (P) ト其ノ二線分ノ包ム矩形ノ面積 (Q^2)* トヲ知ツテ其ノ二線分ヲ求メヨ。



【作圖】 ① P ニ等シイ線分 AB ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ、其ノ中心ヲ O トスル。

② AB ニ垂直ナル半徑上ニ Q ニ等シク OC ヲ取ル。

③ C ヲ通リ AB ニ平行ナル弦 DE ヲ引き、此ノ圓ノ周トノ交點ヲ D, E トスル。

④ D ヨリ AB ニ垂線 DF ヲ引き其ノ足ヲ F トスル。 AF, FB ハ求メル二線分デアル。

【證明】 (略スル)

【吟味】 本題ハ點 D ガ存在スルトキ、即チ圓ノ中心

* 與ヘラレタ矩形ノ面積ハ正方形ノ面積デ與ヘラレル、從ツテ其ノ正方形ノ一邊デアル線分ガ與ヘラレタモノトスル。

ヲ O トスレバ $OC \leq OA$ 従ツテ $Q \leq \frac{P}{2}$ ナル

トキニ限ツテ解答ガアル。

ソシテ $Q < \frac{P}{2}$ ナルトキハ DE ハ此ノ圓ト交ハルカラ AB ノ分點ハ二ツ得ラレルガ解答ハタダ一種デアアル。

又 $Q = \frac{P}{2}$ ナルトキハ兩線分ハ共ニ $\frac{P}{2}$ トナル。

[注意] P 及ビ Q ノ數値ヲ夫々 p 及ビ q トシ、求メル線分ノ數値ヲ x 及ビ y トスレバ、本題ハ

$$x+y=p, \quad xy=q^2 \quad \text{ナル一組ノ方程式, 従ツテ}$$

$$x^2 - px + q^2 = 0 \quad \text{ナル二次方程式ノ作圖的解}$$

法ヲ求メルモノデアアル。

今圖ニヨツテ x 及ビ y ヲ計算スルニ

$$x = AF = OA - OF, \quad y = FB = OA + OF$$

$$\text{且} \quad OF^2 = OD^2 - DF^2 = OA^2 - OC^2$$

$$\text{故ニ} \quad OF = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$$

$$\text{故ニ} \quad x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$$

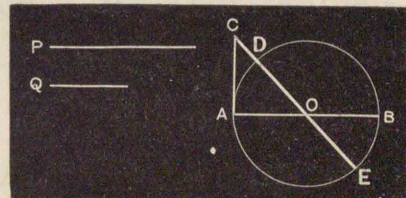
$$y = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$$

之ハ上ノ方程式ノ二根デアアル。

[問] 方程式 $x^2 - 10x + 16 = 0$ ヲ作圖ニヨツテ解ケ。

作圖題 二十二 二線分ノ差(P)ト其ノ二線分ノ包

ム矩形ノ面積(Q^2)トヲ知ツテ其ノ二線分ヲ求メヨ。



作圖 P ニ等シイ線分 AB ヲ直徑トシテ圓周ヲ

畫キ、其ノ一端 A ニ於ケル此ノ圓ノ切線上ニ Q

ニ等シク AC ヲ取り、 C ヨリ中心線 $CDOE$ ヲ引

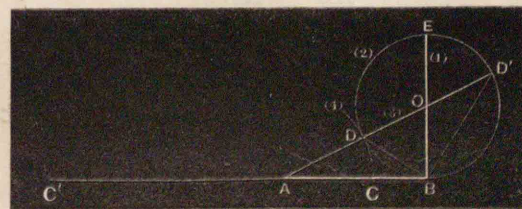
ケバ、 CD 、 CE ハ求メル二線分デアアル。

吟味 本題ハ常ニ成立スル。

作圖題 二十三 與ヘラレタ線分(AB)ヲ二分シ、其

ノ一部分ヲ他ノ部分ト全線分トノ比例中項ナラシ

メヨ。



作圖 ① 與ヘラレタ線分 AB ノ一端 B ヨリ BA

ニ等シイ垂線 BE ヲ引ク。 $AC^2 = AB \cdot BC$

golden section



② BEヲ直径トスル圓周Oヲ畫ク。

③ Aヲ通ル中心線ADD'ヲ引ク。

④ ADニ等シクAB上ニACヲ取ル。

然ラバCハ求メル内分點デアル。

證明 ABハB點デ圓Oニ切スルカラ

$$\overline{AB}^2 = AD \cdot AD' = AD(AD + DD')$$

$$\text{故ニ} \quad \overline{AB}^2 = AC(AC + AB)$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AC + AB}{AB}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{AB - AC}{AC} = \frac{AC + AB - AB}{AB}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

又ABノ延長上ニAD'ニ等シクAC'ヲ取レバ

$$\frac{BC'}{AC'} = \frac{AC'}{AB}$$

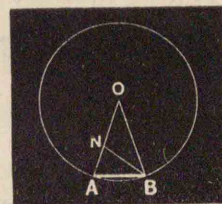
故ニC'ハ求メル外分點デアル。

注意 上ノヤウニ線分ヲ分割スルコトヲ中末比ニ分ケルトイヒ、之ヲ又黄金分割トモイフ。

問 1. 上ノ分割法デハ

$$AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB, \quad AC' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$$

作圖題 二十四 正十角形及ビ正五角形ヲ作レ。



解析 正十角形ガ既ニ畫カレタトシ、ABヲ其ノ一邊トシ、其ノ外接圓ヲ畫キ中心ヲOトスレバ

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$$

故ニ $\angle OBA$ ノ二等分線 BN ヲ引ケバ

$$\angle ABN = 36^\circ$$

故ニ $\triangle BAN \sim \triangle OAB$

故ニ $AN : AB = AB : AO$

然ルニ $\triangle ONB$, $\triangle ABN$ ハ共ニ等脚三角形デアル

カラ $AB = BN = NO$

故ニ $AN : NO = NO : AO$

故ニ N ハ半徑 AO ヲ中末比ニ分ケル點デアル。

作圖 任意ノ半徑 OA ヲ引キ、之ヲ N デ中末比ニ内分シ、其ノ大ナル部分 ON ニ等シイ弦 AB ヲ

作り、之ニ等シイ連接スル弦ヲ作レバ此ノ圓ニ
内接スル正十角形ガ出來ル。

内接正十角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ブトキハ
内接正五角形ガ出來ル。

【證明】 (略スル)

【問】 2. 圓ノ半徑ヲ r トスレバ其ノ内接正十角形
ノ一邊ハ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ デアル。

【問】 3. 所設ノ圓ニ内接スル正十五角形ヲ作レ。

$$\left(\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \text{ニ着目セヨ}\right)$$

【注意】 正七角形、正九角形、正十一角形ノヤウナ正多角形
ハ之ヲ作圖スルコトガデキナイ。諸子ガ既ニ作圖
シ得タ正多角形ノ邊數ヲ擧ゲヨ。

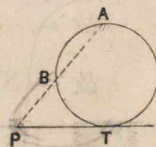
問 題 16

1. 一邊面積及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ
作レ。

2. 二定點ヲ通り一定直線ニ切スル
圓周ヲ畫ケ(幾ツノ解答ガアルカ)。

$$(PA \cdot PB = PT^2 \text{ニヨリ切點} T \text{ヲ定メヨ})$$

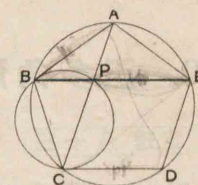
3. P ハ $\triangle ABC$ ノ邊 AB 上ノ一點デ $AP:PB$ ガ $5:2$



ニ等シイトキハ P ヲ通り此ノ三角形ノ面積ヲ二
等分スル直線ハ邊 AC ヲ $7:3$ ニ内分スル。

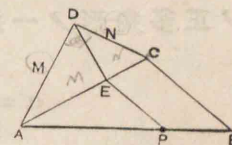
4. 所設ノ三角形ト等積デ其ノ三角形ノ一角ヲ頂
角トスル二等邊三角形ヲ作レ。

5. 正五角形 $ABCDE$ ノ對角線
 AC, BE ノ交點ヲ P トスレバ、 P
ハ BE ヲ中末比ニ分ケル。

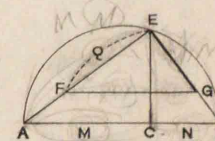


6. 所設ノ線分 (AB) ヲ所設ノ兩
平方ノ比 $(M^2:N^2)$ ニ分ケヨ。

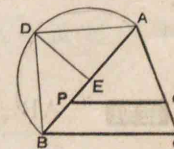
(問題15ノ9ヲ用ヒヨ)



7. 所設ノ平方 (Q^2) トノ比ガ所
設ノ比 $(M:N)$ ニ等シイ正方形
ヲ作レ。



8. 所設ノ三角形 (ABC) ヲ其ノ
一邊 (BC) ニ平行ナル直線デ二
等分セヨ。



(AB 上ニ直角三角形 ADB ヲ畫キ、 AB ニ垂線 DE ヲ引ケバ、

$$AD^2:AE^2=AE:AB \text{ デアルコトニ着目セヨ})$$

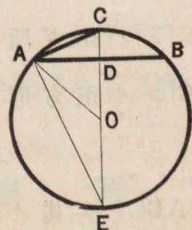
第七篇

圓ノ周及ビ面積

90. 正多角形ノ周

定理 八十三 半徑ガ r デアル圓ニ内接スル正多角形ノ一邊ヲ a トシ、同ジ圓ニ内接スル二倍ノ邊數ノ正多角形ノ一邊ヲ a' トスレバ、

$$a' = \sqrt{2r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \right)}$$



證明 AB ヲ圓 O ノ内接正多角形ノ一邊トシ、之ニ垂直ナル直径 CDOE ヲ引ケバ、弦 AC ハ二倍ノ邊數ノ内接正多角形ノ一邊トナル。

從ツテ $\widehat{BC} = \widehat{AC}$

故ニ $\angle CAD = \angle E$

故ニ AC ハ圓 ADE ニ切スル。

$$\text{故ニ} \quad \overline{AC}^2 = CE \cdot CD$$

$$\text{而シテ} \quad CE = 2r, \quad CD = r - OD$$

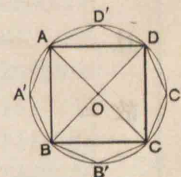
$$\text{及ビ} \quad OD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$\text{故ニ} \quad a' = \sqrt{2r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \right)}$$

問 1. 内接正八角形ノ一邊ハ、 $\sqrt{2 - \sqrt{2}} r$ ナルコ

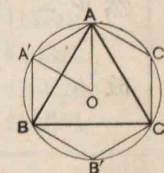
トヲ證明シ、且直径ヲ 1 トシテ

此ノ値並ニ内接正八角形ノ周ヲ計算セヨ。



問 2. 正三角形、正六角形、及ビ正

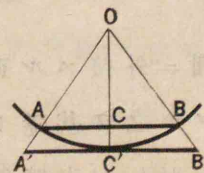
十二角形ノ一邊ヲ外接圓ノ半径 r ヲ以テ計算セヨ。



定理 八十四 半徑ガ r デアル圓ニ内接及ビ外接スル同邊數ノ正多角形ノ一邊ヲ夫々 a 及ビ a' トスレバ、

$$a' = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

$$a = \frac{a'r}{\sqrt{r^2 + \frac{a'^2}{4}}}$$



證明 AB ヲ圓ニ内接スル正多角形ノ一邊トシ、之ニ垂直ナル半徑 OCC' ヲ引キ、C' ニ於ケル切線ト OA, OB ノ延長トノ交點ヲ夫々 A', B' トスレバ、A'B' ハ同邊數ノ外接正多角形ノ一邊デアル。

依ツテ $OA=r$, $AB=a$, $A'B'=a'$

且 $\triangle A'OB' \sim \triangle AOB$

故ニ $\frac{a'}{a} = \frac{r}{OC}$

然ルニ $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$

故ニ $a' = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}$

同様ニシテ $\frac{a}{a'} = \frac{OA}{OA'}$

故ニ $a = \frac{a'r}{\sqrt{r^2 + \frac{a'^2}{4}}}$

問 3. 半徑ガ r デアル圓ノ外接正六角形ノ一邊ヲ求メヨ。

直徑ガ 1 デアル圓ニ外接スル正方形ノ一邊ノ長サハ 1 デアル。依ツテ之ヲ基礎トシ上ノ二ツノ定理ニヨツテ内接正方形及ビ内接、外接正八角形ノ一

邊ヲ算出スルコトガデキ、尙順次ニ十六角形、三十二角形等ノ正多角形ノ一邊ノ長サヲ求メルコトガデキル、從ツテ其ノ周ヲ計算スルコトガデキル。此ノ方法ニヨツテ次ノ表ヲ得ル。

邊 數	内 接 形 ノ 周	外 接 形 ノ 周
4	2.8284271	4.0000000
8	3.0614675	3.3137085
16	3.1214452	3.1825979
32	3.1365485	3.1517249
64	3.1403312	3.1441184
128	3.1412773	3.1422236
256	3.1415138	3.1417504
512	3.1415729	3.1416321
1024	3.1415877	3.1416025
2048	3.1415914	3.1415951

91. 圓ノ周

圓ノ周ハ之ニ内接スル多角形ノ周ヨリ大デ、外接スル多角形ノ周ヨリハ小デアル。然ルニ前節ノ表ニ於テ見ルヤウニ、圓ニ内接スル多角形ノ周ハ其ノ邊數ノ増スニ從ツテ次第ニ増シ、外接スル多角形ノ周ハ其ノ邊ノ増スニ從ツテ次第ニ減ジテ双方互ニ近ヅクコトヲ見ル。故ニ此等ノ多角形ノ邊數ヲ限

リナク増ストキハ其ノ周ハ限リナク近ヅキ、從ツテ
圓ノ周ニ限リナク近ヅク。

又同邊數ノ正多角形ノ周ハ其ノ直徑ノ比ニ等シ
イ。從ツテ二圓ノ周ノ比モ亦其ノ直徑ノ比ニ等シ
イ。依ツテ二圓ノ周ヲ夫々 l, l' トシ其ノ半徑ヲ r, r'
トスレバ、

$$\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'} \quad \text{故ニ} \quad \frac{l}{2r} = \frac{l'}{2r'}$$

即チ圓周ガ其ノ直徑ニ對スル比ハ一定デアル。

此ノ比ノ値ヲ圓周率トイヒ、之ヲ表ハスニハ通常
 π ナル文字ヲ用ヒル。

$$\text{依ツテ} \quad \frac{l}{2r} = \pi$$

$$\text{故ニ} \quad l = 2\pi r$$

即チ半徑ガ r デアル圓ノ周ハ $2\pi r$ デアル。

92. 圓周率

直徑ガ 1 デアル圓ノ周ヲ P トスレバ $P = \pi$ デアル
ルカラ第 90 節ノ表ヨリ

$$3.1415914 < \pi < 3.1415951$$

故ニ小數第五位マデ正シイ π ノ近似値ハ

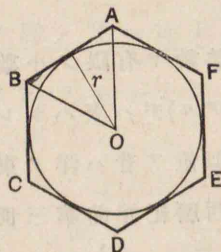
$$3.14159 \quad \text{デアアル。}$$

[注意] 1. π ノ近似値トシテ通例 3.1416 又ハ $\frac{22}{7}$ 或ハ
 $\frac{355}{113}$ ヲ用ヒル。

[注意] 2. π ノ値ハ整數ヤ有限ノ小數ヤ分數(無限ノ小數
トナルコトガアル)デハ表ハサレナイ、即チ無理數デ
アル。此ノ近似値ヲ昔ハ洋ノ東西トモニ 3 又ハ
 3.16 トシタガ、西曆紀元前第三世紀ニ希臘人あるき
めです (Archimedes) ハ $3\frac{1}{7}$ 即チ $\frac{22}{7}$ ヲ得、同紀元後第
十六世紀ニ和蘭人めちうす (Metius) ハ $\frac{355}{113}$ ヲ得タト
イハレテキル。又支那デハ齊(西曆第十二世紀)ノ祖
沖之ガ此ノ二ツノ分數ヲ用ヒタガ、前者ハ其ノ約率、
後者ハ其ノ密率トイハレタ。多クノ數學者ハ種々
ノ方法デ其ノ精密ナ値ヲ算出セント勉メタガ、今日
マデニ得ラレタ中デ最モ精密ナ値トサレテキルモ
ノハ西曆 1870 年ニ英國人しんくす (Shanks) ガ求メ
得タ小數 707 位マデノモノデアル。當時ノ風潮デ
此ノヤウナ長イ算出ヲ喜ビ尊ンダノデアルガ、實用
上ニハ其ノヤウナ精密ナ値ハ全ク不必要デアル。
我國デハ元文四年即チ西曆 1739 年ニ關流正統第二
傳松永良弼ガ小數 50 位マデ算出シタ。

93. 正多角形及ビ圓ノ面積

定理 八十五 正多角形ノ面積ハ其ノ周ト内接圓ノ半徑トノ積ノ半分ニ等シイ。



第91節ニイヘルコトハ圓ノ面積ニ就イテモ同様ニイヘル。即チ内接多角形又ハ外接多角形ノ邊ノ數ガ限リナク増ストキハ、其等ノ面積ハ限リナク圓ノ面積ニ近ヅク。

故ニ圓ニ外接スル正多角形ノ面積及ビ周ヲ夫々 s, p デ表ハシ、又此ノ圓ノ面積、周及ビ半徑ヲ夫々 S, P, r デ表ハセバ、此ノ多角形ノ邊數ガ限リナク増シタトキハ s, p ハ夫々 S, P ニ限リナク近ヅク。

而シテ $s = \frac{pr}{2}$

故ニ $S = \frac{Pr}{2}$

依ツテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 八十六 圓ノ面積ハ圓周ト半徑トノ積ノ半分ニ等シイ。

依ツテ半徑ガ r デアル圓ノ面積 (S) ハ πr^2 ニ等シイ。

即チ $S = \pi r^2$

系一 圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ比例スル。

問 1. 周ガ $10m$ アル圓ノ面積ヲ求メヨ。

系二 扇形ノ面積ハ半徑ト弧トノ積ノ半分ニ等シイ。

問 2. 等半徑ノ扇形ノ面積ハ其ノ弧從ツテ其ノ中心角ニ比例スル。

問題 17

1. 所設ノ二ツ又ハ幾ツカノ圓ノ周ノ和ニ等シイ一ツノ圓周ヲ作レ。又二ツノ圓ノ和又ハ差ニ等シイ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ。
2. 半徑 $9cm$ ノ圓ガアル。其ノ面積ヲ二等分スル同心圓ノ半徑ト、三等分スル二ツノ同心圓ノ半徑トヲ計算セヨ。
3. 直角三角形ガ其ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下シタ垂線デ分ケラレタトキ、其ノ兩三角形ノ内接圓

ノ面積ノ比ハ斜邊ノ二部分ノ比ニ等シイ。

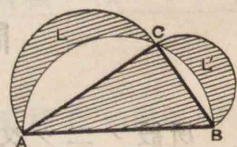
4. 半徑ガ r デアル圓ヲ其ノ内接正三角形ノ一邊
デ二分シテ各部分ノ面積ヲ求メヨ。

5. 30° ノ中心角ニ對スル弧ノ長サガ 10 cm デアル
圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

6. 半徑ガ 2.5 cm アル二ツノ等圓ガ相交ハリ、其ノ
各ノ圓ノ周ガ夫々他ノ圓ノ中心ヲ通ルナラバ、此
ノ兩圓ニ共通ナル部分ノ面積ヲ計算セヨ。

7. 正方形 $ABCD$ ノ一邊ヲ半徑トシ、相對スル頂點
 A 及ビ C ヲ中心トシテ畫イタ二ツノ圓周ノ間ニ
含マレル部分ノ面積ヲ計算セヨ。

8. 直角三角形 ABC ノ三邊ノ
上ニ圖ノヤウニ半圓ヲ畫ク
トキハ、新月形 L ト L' トノ和
ハ $\triangle ABC$ ニ等シイ。



此ノ定理ヲヒポクラテス (Hippocrates) ノ定理トイヒ、此ノ人ハ
B.C. 460 年頃ノ希臘ノ幾何學者デアル。

補 充 問 題 I

[1] 第一篇, 第二篇ノ分

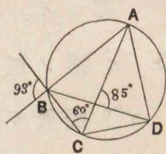
1. A, B, Cヲ順次ニ一ツノ直線ノ上ニ列ブ三ツノ點トシ,
BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 L, M, N トスレバ,
$$MN = \frac{1}{2}BC, \quad NL = \frac{1}{2}CA, \quad LM = \frac{1}{2}AB$$
2. $\angle AOB$ ノ二等分線ヲ OM トシ ON ヲ角外ノ任意ノ一直線トスレバ, $\angle MON$ ハ $\angle AON$ ト $\angle BON$ トノ和ノ半ニ等シイ。
3. ニツノ直角 $\angle AOB$ ト $\angle COD$ ガ頂點 O ヲ共有スルナラバ
 $\angle AOD$ ト $\angle BOC$ トハ相等シイカ, 又ハ互ニ補角デアル。
4. 互ニ補角デアルニツノ角ガアリ, 其ノ一ツハ他ノ三倍デアル, 各ノ角ノ大サヲ求メヨ。
5. $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トシ E, F カラ形外ニ夫々 AC, AB ニ垂線 EG, FH ヲ引キ, 之ヲ夫々 AC, AB ノ半分ニ等シカラシメレバ $\triangle DEG$ ト $\triangle DFH$ トハ合同デアル, ソシテ $\angle GDH$ ハ直角デアル。
6. 圓ノ中心ヲ固定シテ此ノ圓ヲ其ノ平面ノ上ニ廻轉スレバ, 其ノ圓周ハ常ニモトノ周ニ合シナガラ廻轉スル。
7. ニツノ圓ヲ重ネ其ノ中心ヲ合ハセレバ, 小半徑ノ圓周ハ全部大半徑ノ圓ノ内ニアル。

8. 小半径ノ圓ハ大半径ノ圓ヨリモ小サイ。
9. 圓ノ中心角ノ二等分線ハ其ノ角ニ對スル弦ヲ垂直ニ二等分スル。
10. 與ヘラレタ二點カラ共ニ與ヘラレタ距離ニアル點ヲ求メヨ。此ノヤウナ點ハ幾ツアルカ。
11. $22\frac{1}{2}^\circ$ ノ大サノ角ヲ作圖セヨ。
12. 三角形ノ三ツノ高サノ和ハ其ノ三角形ノ周ヨリ小サイ。
13. 正三角形ノ兩底角ノ二等分線ノ交點ヲ過ギ、二邊ニ平行ニ引イタ二直線ハ底ヲ三等分スル。
14. $\triangle ABC$ ハ C ヲ直角トスル直角三角形デアル。今 A カラ AD ヲ引イテ BC ヲ E ニ於テ、 B ヨリ AC ニ平行ニ引イタ直線ヲ D ニ於テ截ラシメ、且 $DE=2AB$ ナラシメレバ、 $\angle DAC$ ハ $\angle BAC$ ノ三分ノ一ニ等シイ。
15. 對角線ガ20アル多角形ノ邊數ヲ求メヨ。
16. $\triangle ABC$ ノ $\angle B$ ノ外角ノ二等分線ト邊 AC トガ相交ハルトキハ、其ノ交角ハ $\angle A$ ト $\angle C$ トノ差ノ半分ニ等シイ。
17. 三角形ノ二ツノ底角ノ外角ノ二等分線ハ必ズ相交ハル、ソシテ其ノ交角ハ兩底角ノ和ノ半分ニ等シイ。又頂角ノ半分ノ餘角ニ等シイ。
18. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ト A カラ BC ヘ下ス垂線トノ交角ハ $\angle B$ ト $\angle C$ トノ差ノ半分ニ等シイ。

19. 凸四角形デハ、
- [1] 二隣角ノ二等分線ノ交角ハ他ノ二角ノ和ノ半分ニ等シイ。
- [2] 二對角ノ二等分線ノ交角ハ他ノ二角ノ差ノ半分ニ等シイ。
20. n 邊ノ正多角形ノ外角ノ大サヲ表ハス公式ヲ作り、之ヨリ邊數ガ多クナルニ從ツテ外角ハ次第ニ小サクナリ、内角ハ次第ニ大キク(但シ2直角ヨリハ小)ナルコトヲ證明セヨ。
21. $\triangle ABC$ ノ邊 AB ノ中點ヲ D トスル、邊 AC ノ上ニ AE ヲ AC ノ三分ノ二ニ等シク取ツテ CD ト BE トノ交點ヲ O トスレバ、 OE ハ BE ノ四分ノ一デアル。
22. 等脚梯形ノ對角線ハ相等シイ。
逆ニ對角線ガ相等シイ梯形ハ等脚梯形デアル。
23. 四邊形 $ABCD$ ニ於テ $AB=CD$ 及ビ $\angle ABC=\angle BCD$ ナレバ、此ノ四邊形ハ梯形デアル。
24. 矩形又ハ等脚梯形ノ四ツノ邊ノ中點ヲ順次ニ結ビテデキル四邊形ハ菱形デアル。
25. A ヲ直角トスル三角形 ABC ノ $\angle B$ ノ二等分線ト邊 AC トノ交點ヲ D トシ、又 A カラ斜邊 BC ヘ引イタ垂線ト BD トノ交點ヲ E トスレバ AD ハ AE ニ等シイ。

[2] 第三篇, 第四篇ノ分

1. 與ヘラレタ弧ヲ完全ナル圓周トセヨ。
2. $\triangle ABC$ ノ垂心ヲ P トスレバ, 四點 A, B, C, P ハ其ノ何レヲ取ツテモ, 他ノ三ツヲ頂點トスル三角形ノ垂心デアル。
3. 圖ニ示ス圓ノ内接四角形 $ABCD$ ノ各角ノ大サヲ求メヨ。
4. 相等シイ二圓ガ其ノ中心ヲ結ブ直線ニ平行ナル直線カラ截リ取ル弦ハ相等シイ。
5. 圓 O ノ中心線ノ上ノ一點 P カラ中心線ト等角ヲナス二ツノ直線ヲ引キ, 圓周ト夫々 A ト B 及ビ C ト D ニ於テ交ハラシメレバ, $AD=BC$ 及ビ $AC \parallel BD$ デアル。
6. 圓 O ノ平行ナル二ツノ切線ノ切點ヲ A ト B トスレバ A, O, B ハ一直線上ニ在ル三點デアル。
7. O ヲ中心トスル圓周上ノ一點 A ニ於ケル切線ト, 任意ノ半徑 OB ノ延長トノ交點ヲ C トシ, OB ニ垂線 AD ヲ引クトキハ, AB ハ $\angle DAC$ ヲ二等分スル。
8. 圓周上ノ與ヘラレタ點ヲ通ル其ノ圓ノ切線ヲ引ケ。但シ此ノ圓ノ中心ハ求メルコトガデキナイモノトスル。
9. 與ヘラレタ直線ニ平行ナルヤウニ與ヘラレタ圓ニ切線ヲ引ケ。



10. 相切スル二圓ノ切點ヲ通ル一直線ガ, 再び各ノ圓周ト交ハル點ニ於テ兩圓ノ切線ヲ引ケバ, 此ノ兩切線ハ平行デアル。
11. 定マレル二圓ノ各ニ外切スル圓ノ中心ト, 其ノ二定圓ノ中心トノ距離ノ差ハ常ニ等シイ。
12. 夫々定メラレタ長サノ半徑ヲ有シ, 互ニ相切スル三ツノ圓ヲ畫ケ。
13. 平行ナル二弦ノ端ヲ結ブ線分ハ各相等シイ。
14. 四邊形ノ對角線ガ直交スルトキハ, 其ノ四邊ヲ直徑トスル四ツノ圓周ハ同一ノ點ヲ通ル。
15. 相交ハル二圓ノ交點ヲ A ト B トシ, A ヲ通ル各圓ノ直徑ヲ夫々 AC, AD トスレバ, C, B, D ハ同一直線上ニアル。
16. $\triangle ABC$ ノ垂心ヲ S トスレバ, AS ハ外心 O カラ BC へ下ス垂線 OD ノ二倍ニ等シイ。
17. 平行四邊形 $ABCD$ ノ三ツノ頂點 A, B, C ヲ通ル圓周ガ邊 AD ニ交ハル點ヲ E トスレバ, CE ハ CD ニ等シイ。
18. 三角形ノ外心ト垂心トガ重ナルトキハ, 此ノ三角形ハ正三角形デアル。
19. 圓ニ内接スル六角形ノ二組ノ對邊ガ各平行デアルトキハ, 残りノ一組ノ對邊モ亦平行デアル。
20. $\triangle ABC$ ノ邊 AC ニ切スル傍接圓ノ中心 O' カラ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ, 邊 AC, AB トノ交點ヲ夫々 E, F ト

スレバ, EF ハ BF ト CE トノ差ニ等シイ。

21. 一定點ヲ通り, 與ヘラレタ二直線ト等角ヲナス直線ヲ引ケ。
22. 定點ヲ通り, 與ヘラレタ平行線間ニ與ヘラレタ長サヲ夾ム直線ヲ引ケ。
23. 平行二直線ト之ニ交ハル一一直線トヲ與ヘテ, 此ノ三直線ニ切スル圓周ヲ畫ケ。
24. 定直線又ハ定圓周上ノ定點ニ於テ, 之ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。
25. A ハ定點デ B ハ定直線 MN 上ヲ動ク點デアル。今 AB ノ延長上ニ $AB = BP$ ニ等シク BP ヲ取ルトキ, P ノ軌跡ヲ求メヨ。
26. 圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
27. 圓ノ相等シイ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
28. 定圓ノ直徑ヲ底トスル三角形ノ頂點ガ其ノ圓ノ周上ヲ動クトキ, 其ノ三角形ノ重心ノ軌跡ヲ求メヨ。
29. 底, 頂角及ビ一底角ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。
30. 底, 高サ及ビ外接圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。
31. 斜邊ト直角ノ頂點カラ斜邊ヘ下ス垂線トヲ知ツテ直角三角形ヲ作レ。
32. 高サヲ與ヘテ正三角形ヲ作レ。

[3] 第五篇ノ分

1. 次ノ關係ヲ證明セヨ。但シ A, B ハ二ツノ線分トスル。

$$[1] (A+B) \cdot B = A \cdot B + B^2$$

$$[2] (A-B) \cdot B = A \cdot B - B^2 \quad (\text{但シ } A > B)$$

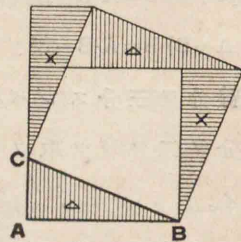
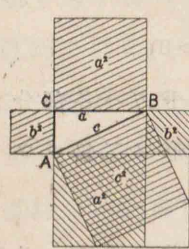
2. 或線分ヲ三分スレバ, 全線分ノ平方ハ各部分ノ平方ト各部分ヲ二ツツ取ツテ作ル矩形ノ二倍ツツトノ和ニ等シイ。
3. 二ツノ線分ノ和ノ平方ハ其ノ差ノ平方ヨリ其ノ二線分ノ矩形ノ四倍ダケ大キイ。
4. ABCD, ABFE ヲ AB ノ同ジ側ニアル等積ナル二ツノ平行四邊形トシ, AF ガ BC ノ中點ヲ通ルトスレバ,

$$\square ABCD = \square ABFE = \frac{1}{2} \square ABED$$

5. 平行四邊形ノ兩對角線ハ本形ヲ四等分スル。
6. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ガ BD ヲ二等分シナイトスレバ, AC ハ本形ヲ二等分シナイ。
7. 平行二邊ガ 15cm 及ビ 28cm デ, 其ノ間ノ距離ガ 12cm デアル梯形ノ面積ヲ求メヨ。
8. 梯形ノ底デナイ一邊ノ中點ヲ通り, 對邊ニ平行ナル直線ヲ引イテ定理六十三ノ系三ヲ證明セヨ。
9. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ中點 E, F ヲ結ブトキハ梯形ガデキル, ソシテ其ノ面積ハ $\triangle ABC$ ノ四分ノ三ニ等シイ。

10. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點 M カラニツノ直線ヲ引イテ三等分セヨ。

11. 下圖ニヨツてびたごらすノ定理ノ別證ヲ考案セヨ。



12. 梯形ノ兩底ガ夫々 $6m$, $9m$ デ、他ノ二邊ガ $5m$, $4m$ デアルトキ、此ノ梯形ノ面積ヲ計算セヨ。

13. 三角形ノ三邊ガ $6m$, $11m$, $7m$ デアルトキ、其ノ面積ヲ求メヨ。

14. 矩形ノ相對スル二頂點ヲ任意ノ點ニ結ブ線分ノ平方ノ和ハ、他ノ二頂點ヲ同ジ點ニ結ブ二線分ノ平方ノ和ニ等シイ。

15. 河幅ヲ測ラウトシテ河岸ノ一地點 A ニ立チ、其ノ正對岸ノ地點 B ヲ望ミ、更ニ AB ト直角ヲナセル河岸ニ沿ウテ歩ムコト $50m$ デ C ニ達シテ、再ビ B ヲ望ミテ $\angle ACB$ ガ 60° デアルコトヲ知ツタ、然ラバ此ノ河幅ハ幾米カ。

[4] 第六篇、第七篇ノ分

1. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ヲ延長シ、 $BC =$ 等シク CD ヲ取り、 D ヲ AC ノ中點 E ニ結び、延長シテ AB ト F ニ於テ交ハラシメ $EF:ED$ ノ値ヲ求メヨ。
2. $\triangle ABC$ ノ底ニ平行ニ EF ヲ引キ、二邊 AB , AC ト夫々 E , F ニ於テ交ハラシメ、 E ヲ底ノ中點 D ニ結ンダトキ、 ED ガ $\angle ADB$ ヲ二等分スルナラバ FD ハ $\angle ADC$ ヲ二等分スル。
3. $\triangle ABC$ ノ三邊ヲ夫々 $3m$, $5m$, $6m$ トスレバ、最大角ノ二等分線ガ對邊ヲ分ケル二部分ノ長サヲ計算セヨ。
4. A , B 及ビ C ハ同一直線上ニ與ヘラレタ三點トスル、今 $\angle APB = \angle BPC$ ナルヤウニ取ル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。
5. 弧 ACB ヲ C ニ於テ二分シ、 C ヲ ACB ノ共軛弧ノ中點ニ結ブ直線ハ弦 AB ヲ弦 AC ト BC トノ比ニ分ケル。
6. 底邊、他ノ二邊ノ比ト頂角ノ二等分線ノ長サトヲ知ツテ三角形ヲ作レ。
7. P ニ於テ内切スル二定圓ニ P カラ割線 PXY ヲ引キ、其ノ二圓ノ周ト夫々 X , Y ニ於テ交ハラシメ、 XY ヲ與ヘラレタ線分ニ等シクセヨ。
8. 相似多角形ノ對角線(對應スル)ノ比ハ相似比ニ等シイ。
9. D ト E ヲ夫々 $\triangle ABC$ ノ邊 AB ト AC ヲ $2:3$ ノ比ニ分ケル點トスレバ、 BE ト CD トハ各、他ヲ $5:2$ ニ分ケル。

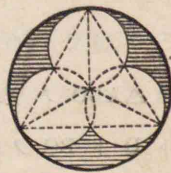
10. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點 D ヲ A ニ結ブ DA ノ上ニ
 $DE = \frac{1}{6}DA$ ナルヤウニ E ヲ取り、 BE ト AC トノ交點ヲ F
 トスレバ、 $AF:FC=5:2$
11. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ上ニ夫々二點 E, F ヲ取り、 BE
 ハ EA ノ二倍、 AF ハ FC ノ二倍ナラシメルトキ、 EF, BC
 ノ延長ガ M ニ於テ交ハレバ $BM:CM$ ノ値ハ幾ラカ。
12. $\triangle ABC$ ノ角 A 及ビ B ノ二等分線ノ交點 O ヲ過ギ、 AO
 ニ垂線ヲ引キ、邊 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレ
 バ、 OD 及ビ OE ハ BD ト CE トノ比例中項デアル。
13. 正方形 $DEFG$ ガ直角三角形 ABC ニ内接シ、邊 DE ガ斜邊
 BC 上ニアルトキハ、 DE ハ BD ト EC トノ比例中項デアル。
14. 直角三角形 ABC ニ於テ $\angle C=90^\circ$ 、 $AC=12cm$ 、 $BC=16cm$ デ
 アル。今 AB ノ上ニ $AP=6cm$ ナルヤウニ一點 P ヲ取り、
 PQ, PR ヲ夫々 AC, BC ニ平行ニ引イテ生ズル矩形 $PQCR$
 ノ面積ヲ求メヨ。
15. 所設ノ點 P カラ一直線ヲ引キ、同一点 O カラ出ル三ツ
 ノ定直線 OA, OB, OC ニ夫々 A, B, C ニ於テ交ハラシメ、
 $AB=BC$ ナルヤウニセヨ。
16. 二線分ノ包ム矩形ハ其ノ各ノ平方ノ比例中項デアル。
17. AD ヲ $\triangle ABC$ ノ角 BAC ノ二等分線トスレバ、
 $\triangle ABD:\triangle ACD=AB:AC$
18. 三角形ノ三中線ニ夫々等シイ三邊ヲ有スル三角形ト

- 原三角形トノ比ハ $3:4$ ニ等シイ。
19. 四邊形 $ABCD$ ノ對角線ノ交點ヲ O トシ、 $\triangle AOB, \triangle BOC$ 、
 $\triangle COD$ ノ面積ヲ夫々 4 平方糎、 7 平方糎、 6 平方糎トスレ
 バ、 $\triangle AOD$ ノ面積ハ幾ラカ。
20. 圓外ノ一點カラ其ノ圓ニ二ツノ切線ト一ツノ割線ト
 ヲ引キ、二切點ヲ割線ト圓周トノ二交點ニ結ビテ四邊形
 ヲ作ルトキハ、其ノ四邊形ノ對邊ノ矩形ハ相等シイ。
21. 圓ノ弦ヲ双方ヘ相等シク延長スルトキハ、其ノ兩端カ
 ラ其ノ圓ヘ引ク切線ハ相等シイ。
22. 相交二圓ノ交點ヲ A, B トシ、弦 AB ノ長サヲ $7cm$ トシ、
 AB ノ延長上ニ BP ガ $9cm$ ナルヤウニ P ヲ取ルトキハ P
 カラ各圓ヘ引イタ切線ノ長サハ幾ラカ。
23. 平行四邊形 $ABCD$ ノ對角線 AC ノ上ノ一點 O ヲ過ギ、
 二邊ニ平行ニ引イタ直線ガ AD, BC ト夫々 E, F ニ於テ、
 又 AB, CD ト夫々 G, H ニ於テ交ハルトキハ、
 $EO:OF=GO:OH$
24. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トシ、 A
 ト D ト BC ノ中點 M トヲ通ル圓ガ AB, AC ニ夫々 E ト
 F ニ於テ交ハルトキハ BE ハ CF ニ等シイ。
25. 同ジ圓ニ内接スル正六角形ト正三角形ノ邊ノ上ニ作
 ル正方形ノ比ヲ求メヨ。
26. 圓ノ内接四邊形 $ABCD$ ノ對角線ノ交點ヲ E トスレバ、

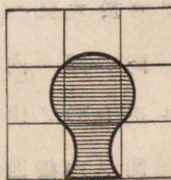
$$AB \cdot AD : CB \cdot CD = AE : CE$$

27. 兩相似三角形ノ比ハ其ノ對應邊ヘ引イタ兩形ノ高サノ平方ノ比ニ等シイ。又兩形ノ外接圓ノ半徑ノ平方ノ比ニモ等シイ。
28. $\triangle ABC$ ノ頂點 A ニ於テ外接圓ニ切線ヲ引イテ BC ノ延長ト D デ交ハラシメレバ $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : CD$ デアル。
29. 周ガ $10m$ デアル圓ノ面積ヲ求メヨ。
30. 30° ノ中心角ニ對スル弧ノ長サガ $1m$ デアル圓ノ半徑ヲ計算セヨ。
31. 半徑ガ r ナル扇形ノ角ヲ d° トセバ其ノ面積ハ $\frac{d}{360} \pi r^2$ デアル。
32. 半徑 $25mm$ ノ二ツノ等圓ガ相交ハリ、其ノ各ガ他ノ圓ノ中心ヲ通ルトキハ、其ノ二圓ニ共通ナル部分ノ面積ハ幾ラカ。
33. 半徑 $2cm$ ノ三圓ガ相切スルトキ、其ノ間ニアル部分(三ツノ弧デ圍マレル)ノ面積ヲ計算セヨ。

34. 圖中ノ影ヲツケタ部分ノ周及ビ面積ヲ計算セヨ。但シ大圓ノ半徑ヲ $2a$ 、三ツノ等圓ノ半徑ヲ a トスル。



35. 右ノ圖形デ影ヲツケタ部分ノ周及ビ面積ヲ計算セヨ。但シ圖中ノ各弧ハ方眼(一邊 a)ニ外接スル圓ノ弧トスル。



補 充 問 題 II

證 明 問 題

[1] 二角ノ相等問題

- $\angle XOY$ ノ邊 OX ノ上ニ A, B 二點ヲ、邊 OY ノ上ニ C, D 二點ヲ取り、 $OC=OA$, $OD=OB$ ナラシメ、 AD, BC ノ交點ヲ E トスレバ、 $\angle AOE = \angle EOC$ デアル。
- 二圓ガ A ニ於テ内切スルトキ、 B ニ於テ小圓ニ切スル大圓ノ弦ノ兩端ヲ C, D トスレバ、

$$\angle CAB = \angle BAD$$
- $\triangle ABC$ ノ外心ヲ O 、内心ヲ I トシ、頂點 A ヨリ BC ヘ下シタ垂線ヲ AD トスレバ、 AI ハ $\angle OAD$ ヲ二等分スル。
- 圓ノ二ツノ弦 AB, CD ガ此ノ圓内ノ點 E ニ於テ相交ハルトキ、弧 AD ノ中點 M ト弧 BC ノ中點 N トヲ通ル直線ハ弦 AB, CD ト等角ヲナス。
- 梯形 $ABCD$ ニ於テ斜邊 AB ガ斜邊 CD ノ半分ニ等シイトキ、平行二邊 AD, BC ノ上ニ夫々點 E, F ヲ取り、 AE ヲ ED ノ半分、 BF ヲ FC ノ半分ニ等シカラシメ、 EF ヲ結ベバ、 EF ハ AB, CD ト等角ヲナス。

[2] 四點同一圓周上(共圓點)問題

1. 圓ノ互ニ直交スル弦 AB, CD ノ各端 A, B, C, D ニ於ケル切線ノ交點 E, F, G, H ハ同ジ圓ノ周上ニアル。
2. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC へ垂線 AD ヲ引キ, D ヨリ AB, AC へ夫々垂線 DE, DF ヲ引ケバ四ツノ點 B, E, F, C ハ同一圓周上ニアル。
3. $\triangle ABC$ ノ三邊 BC, CA, AB ト夫々 D, E, F ニ於テ交ハル直線ヲ引イタトキ, D, E, F ヲ過ギ夫々三邊 BC, CA, AB ニ垂直ナル直線ガ同ジ點 P ヲ通ルトキハ, P ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ周上ニアル。
4. 三角形ノ三邊ノ中點ト, 三垂線ノ足ト, 垂心ヨリ三頂點ニ至ル線分ノ中點トハ同ジ圓ノ周上ニアル。
 [注意] 此ノ圓ヲ三角形ノ九點圓トイフ。九點圓ノ中心ハ其ノ三角形ノ垂心ト外心トノ間ノ線分ノ中點デ其ノ直徑ハ外接圓ノ半徑ニ等シイ。
5. 鋭角三角形 ABC ノ二ツノ頂點 A, B ヨリ對邊 BC, CA ニ夫々垂線 AX, BY ヲ下シ其ノ足ヲ X, Y トシ, 又 AB ノ中點ヲ M トスレバ $\angle MXY = \angle ACB$ デアル。

[3] 二直線平行問題

1. 圓 O 外ノ一點 A ヨリ此ノ圓ニ切線 AB, AC 及ビ割線

APQ ヲ引クトキ, 弦 CR ガ PQ ヲ二等分スレバ $BR \parallel PQ$ ニ平行デアル。

2. 圓ノ二ツノ互ニ垂直ナル直徑ノ延長ト, 任意ノ切線トノ交點ヨリ引イタ其ノ圓ノ二ツノ切線ハ互ニ平行デアル。
3. 四邊形 $ABCD$ ニ於テ $\angle B = \angle D$ ナルトキハ, $\angle A, \angle C$ ノ二等分線ハ平行デアル。
4. 圓ニ内接スル四邊形 $ABCD$ ニ於テ A ヨリ BD へ垂線 AE ヲ引キ CD ト X ニ於テ交ハラシメ, 又 D ヨリ AC へ垂線 DF ヲ引キ AB ト Y ニ於テ交ハラシメレバ, $XY \parallel BC$ ニ平行デアル。
5. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ト對邊 BC トノ交點ヲ D トシ, A ニ於テ此ノ三角形ノ外接圓ニ切スル直線ト C ヲ通り AD ニ平行ナル直線トノ交點ヲ E トスレバ, $ED \parallel AB$ ニ平行デアル。

[4] 二直線直交問題

1. $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ弧 AB, AC ノ中點ヲ結ブ直線ハ $\angle A$ ノ二等分線ニ垂直デアル。
2. 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル邊ノ延長ガ夫々相交ハツテナス角ノ二等分線ハ直交スル。
3. 一ツノ四邊形ニ内接圓ト外接圓トヲ畫キ得ルトキハ,

其ノ内接圓ノ相隣ラナイ切點ヲ結ブニツノ直線ハ互ニ垂直デアル。

4. 直角三角形 ABC ノ直角ノ二邊 AB, AC 上ニ, 三角形ノ外側ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ作り, DE, FG ヲ延長シテ H デ交ハランメレバ直線 HA ハ斜邊 BC ニ垂直デアル。
5. O, O' ヲ中心トスル二圓ノ共通切線ノ切點ヲ A, A' トシ, 中心線 OO' ト兩圓周ノ交點ヲ夫々 B, B' トスレバ AB ハ A'B' ニ平行デアルカ, 又ハ垂直デアル。

[5] 直線定方向問題

1. A, B ハ二定點, P ハ任意ノ一點トスル, 今 PA, PB ノ中點ヲ夫々 C, D トスレバ線分 CD ハ P ノ位置如何ニ關セズ一定ノ方向ヲ有シ, 且其ノ長サハ一定デアル。
2. 外切スルニツノ等圓 O, O' ノ切點ヲ A トスル, 今圓 O ノ周上ニ點 P, 圓 O' ノ周上ニ點 Q ヲ取り, $\angle PAQ$ ヲ直角ナラシメレバ直線 PQ ハ常ニ一定ノ方向ヲ有スル。
3. P ハ圓周上ノ定點デ A, B ハ此ノ圓ニ交ハル任意ノ圓ト此ノ圓トノ交點トスル, PA, PB ガ第二ノ圓ト交ハル點ヲ X, Y トスレバ XY ハ方向一定デアル。
4. 定圓周上ノ定點 A ヲ頂點トスル任意ノ内接三角形ノ頂點 B, C ヨリ夫々邊 AC, AB ニ平行ニ弦 BP, CQ ヲ引ケバ, PQ ハ方向一定デアル。

5. AB ヲ直徑トスル半圓周上ノ任意ノ二點ヲ P, Q トシ, AP, BQ ノ交點ヲ X, AQ, BP ノ交點ヲ Y トスレバ, XY ハ常ニ一定ノ方向ヲ有スル。

[6] 三點一直線上問題

1. ニツノ圓周ガニツヅ、A, B, C ニ於テ相切シ弦 AB, AC ノ延長ガ第三圓周ト夫々 E, D ニ於テ交ハルトキハ, 其ノ圓ノ中心ト二點 E, D トハ同一直線上ニアル。
2. 梯形ノ兩對角線ノ中點及ビ兩底ヲ結ブ任意ノ線分ノ中點ハ同一直線上ニアル。
3. 三角形ノ外心, 重心, 垂心及ビ九點圓ノ中心ハ同一直線上ニアル。
4. $\triangle ABC$ ノ垂心ヲ H, 邊 BC ノ中點ヲ M トスレバ, 直線 HM ハ外接圓ノ A ヲ通ル直徑ノ他ノ端ヲ通ル。
5. 一直線ガ $\triangle ABC$ ノ三邊 BC, CA, AB ヲ夫々 E, F, G ニ於テ截ルトキハ,

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AG}{GB} = 1 \quad (\text{Menelaus ノ 定理})$$

又此ノ逆モ證明セヨ。

[7] 三圓周一點通過問題

1. 四直線ガ三ツヅツ交ハツテ作ル四ツノ三角形ノ外接圓周ハ同一點ヲ通ル。ソシテ

- [1] 其ノ交點ヨリ其ノ四直線ヘ下シタ垂線ノ足ハ同一直線上ニアル。
- [2] 其ノ交點ト其ノ四圓ノ中心ハ同一圓周上ニアル。
2. 三角形ノ外接圓ノ其ノ三角形外ニアル三ツノ弓形ヲ邊ニ沿ウテ形内ニ折返ストキハ其ノ三圓弧ハ同一點ヲ通ル。
3. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ヲ一邊トスル二ツノ正方形ヲ三角形ノ形外ニ作り、又 BC ヲ對角線トスル正方形ヲ作ルトキハ、此等三ツノ正方形ノ外接圓ノ周ハ同一點ヲ通ル。
4. 圓ニ内接スル四邊形ノ頂點ト之ニ隣レル二邊ノ中點トヲ通ル圓周ハ何レモ一定點ヲ通ル。

[8] 三直線一點通過問題

1. $\triangle ABC$ ノ三垂線ヲ AD, BE, CF トスレバ、 $AB, DE; BC, EF; CA, FD$ ノ中點ヲ通ル三直線ハ同一點ヲ通ル。
2. 二ツツ、相交ハル三ツノ圓ノ三ツノ共通弦ノ延長ハ同一點ヲ通ル。
3. $\triangle ABC$ ノ三頂點ヨリ夫々對邊(又ハ延長)ヘ引イタ三直線 AD, BE, CF ガ同一點ヲ通ルトキハ

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1 \quad (\text{Cevaノ定理})$$

4. 前問ノ逆ヲ證明セヨ。

5. 圓ニ外接スル三角形ノ各邊ノ切點ト其ノ對角ノ頂點トヲ結ブ直線ハ同一ノ點ニ於テ交ハル。

[注意] 此ノ交點ヲ其ノ三角形ノ Gergonne 點トイフ。

[9] 線分ノ相等問題

1. 相交ハル二圓周ノ一交點 A ヲ過ギ、共通弦 AB ト等角ヲナス二直線ノ兩圓周間ニアル線分 CD, EF ハ相等シイ。
2. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB 上ニ一點 D ヲ取り $AD \cdot DB = CD^2$ ナルトキハ、 D ハ AB ノ中點デアルカ、或ハ CD ハ AB ニ垂直デアル。
3. $AC=2AB$ ナル $\triangle ABC$ ニ於テ頂角 A ノ二等分線ガ底 BC ト交ハル點 D ヨリ二邊 AC, AB ニ夫々平行ナル二直線ヲ引キ AB, AC ト夫々 E, F デ交ハラシメ、 FE ノ延長ト CB ノ延長トノ交點ヲ G トスレバ、 $EF=GE$ デアル。
4. $\triangle ABC$ ニ於テ、 $AB < AC$ トシ、 AC 上ニ $AB=CD$ ナルヤウニ D ヲ取り BC ノ中點ヲ E, AD ノ中點ヲ F トスル、ソシテ EF ノ延長ガ BA ノ延長ト交ハル點ヲ G トスレバ、 $\triangle AFG$ ハ二等邊三角形デアル。
5. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle ABC = 3\angle ACB$ トシ、 $\angle BAC$ ノ二等分線ヘ垂線 BD ヲ引クトキハ BD ハ AC ト AB トノ差ノ半分ニ等シイ。

[10] 角及ビ線分ノ不等問題

1. 四邊形 ABCD = 於テ $\angle B = \angle C$ デアルトキハ,
 $AB \cong CD$ ナルニ從ツテ $\angle CDA \cong \angle DAB$ デアル。
2. 三角形ノ二邊ガ不等デアルトキハ其ノ對角ノ頂點カラ大邊ニ至ル垂線ハ小邊ニ至ル垂線ヨリ小デアル。
3. 三角形ノ角ノ二等分線ハ其ノ角ノ二邊ノ等差中項ヨリ小デアル。
4. 正三角形ノ角 BAC 内ニ一點 P フ取ルトキハ, $BP + CP$ ハ AP ヨリ小デナイ。
5. $\triangle ABC$ = 於テ $AC > BC$ トシ, A, B ヨリ夫々其ノ對邊ヘ垂線 AD, BE フ引クトキハ $AC + BE > BC + AD$ デアル。

[11] 切線及ビ切圓問題

1. $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ, O ヨリ邊 AB 及ビ AC ニ平行線ヲ引キ B 及ビ C ニ於ケル切線ト夫々 D 及ビ E ニ於テ交ハラシメルトキハ, 直線 DE ハ此ノ圓ニ切スル。
2. 平行四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, B ヨリ AD へ垂線 BE, D ヨリ AB へ垂線 DF フ引クトキハ OE, OF ハ $\triangle AEF$ ノ外接圓ノ切線デアル。
3. 四邊形ノ相對スル二邊ノ和ガ互ニ相等シイトキハ此ノ四邊形ハ圓ニ外接スル。

4. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點 M フ中心トシ $\frac{1}{2}(AB \pm AC)$ フ半徑トスル圓周ハ AC フ直徑トスル圓周ニ切スル。
5. ABCD フ圓ニ外接スル四邊形トスレバ $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle ADC$ ノ内接圓ハ相切スル。

[12] 三角形及ビ矩形ノ面積問題

1. 圓 O 外ノ一點ヨリ此ノ圓ニ切線 PA, PB フ引キ, 其ノ切點ヲ A, B トシ, A フ通ル此ノ圓ノ直徑 AC フ引ケバ,
 $\triangle OPB = \triangle OPC$
2. 平行四邊形 ABCD ノ D フ通り直線ヲ引キ, 邊 BC ト E ニ於テ又邊 AB ノ延長ト F ニ於テ交ハラシメレバ,
 $\triangle ABE = \triangle CEF$
3. ABCD フ矩形トシ, $\triangle ABC$ ノ内心 O カラ AD, DC へ夫々垂線 OE, OF フ引ケバ, 矩形 OEDF ハ全形ノ半分ニ等シイ。
4. $\triangle ABC$ ノ中線 AD ノ中點ヲ E トシ, BE ト AC トノ交點ヲ F トスレバ, $\triangle BCF = 2\triangle ABF$
5. $\triangle ABC$ ノ外方ニ二邊 AB, AC フ夫々一邊トスル平行四邊形 BAED, CAGF フ畫キ, DE, FG ノ延長ガ H デ交ハルトスル。今 HA フ延長シ BC ト J デ交ハラシメ, 更ニ之ヲ K マデ延長シ $JK = AH$ ナラシメ, K フ過ギ BC ニ平行ナル直線ト BC トノ間ニ平行四邊形 BCLM フ作レバ,
 $\square BL = \square BE + \square CG$

[13] 多角形ノ邊ノ平方問題

1. $\triangle ABC$ ノ垂心ヲ H , 外心ヲ O トシ, O ヨリ三邊 BC, CA, AB ヘ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トスレバ,

$$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2)$$

2. 一ツノ圓ノ中心ヨリ圓外ノ一直線ヘ下シタ垂線ノ足ヲ D トシ, 同ジ直線上ノ他ノ任意ノ點ヲ G トシ, D 及ビ G ヨリ此ノ圓ニ切線 DE, GF フ引クトキハ,

$$\overline{GF}^2 = \overline{GD}^2 + \overline{DE}^2$$

3. $\triangle ABC$ ノ底 BC 上ニ二點 P, Q フ取り, $BP = CQ = \frac{1}{4}BC$ ナルヤウニスルトキハ,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 + \frac{3}{2}\overline{PQ}^2$$

4. 三角形 ABC ノ重心ヲ O トスレバ,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 3(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2)$$

又 P フ任意ノ一點トスレバ,

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + 3\overline{PO}^2$$

5. 四角形ガ圓ニ内接シ其ノ對角線ガ直交スルトキハ, 相對スル二邊ノ平方ノ和ハ此ノ圓ノ直徑ノ平方ニ等シイ。

[14] 比例式問題

1. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ BC ヘノ垂線ヲ AD トシ, $\angle B$ ノ二等分線ガ AD, AC ニ交ハル點ヲ夫々

E, F トスレバ, $DE : AE = AF : CF$ デアル。

2. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB = nAC$ ナルトキ, B ヨリ $\angle BAC$ ノ二等分線ヘ下シタ垂線ノ足ヲ P トシ, BC, AP ノ交點ヲ Q トスレバ, $PQ : QA = n-1 : 2$ デアル。
3. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ノ交點ヨリ相對スル二邊ヘ引イタ垂線ノ比ハ其ノ二邊ノ比ニ等シイ。
4. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ劣弧 BC 上ノ任意ノ一點ヲ D トシ, AB, CD ノ延長ノ交點ヲ E, AC, BD ノ延長ノ交點ヲ F トスレバ, BC ハ BE, CF ノ比例中項デアル。
5. $\triangle ABC$ ノ底 BC ニ平行ニ DE フ引キ, A ヨリ BE, CD ノ交點 F ヘ引イタ直線ガ DE, BC ト交ハル點ヲ夫々 H, K トスレバ, A, H, F, K ハ調和列點デアル。

[15] 比例ヲ用ヒル面積問題

1. 圓 O ノ半徑 OA 上ニ半圓ヲ畫キ, OA 上ノ任意ノ一點 D ニ於ケル垂線ガ半圓周ト M デ, 圓 O ノ周ト C デ交ハルトキハ, $\overline{AC}^2 = 2\overline{AM}^2$ デアル。
2. 相交ハル二圓及ビ其ノ共通弦ヲ任意ノ一直線デ截ルトキハ五ツノ交點ヲ得, 其等ノ點ヲ直線上順次ニ A, B, C, D, E トスレバ, $AB : BC = ED : DC$ デアル。
3. 圓ニ内接スル四邊形 $ABCD$ ノ對角線ノ交點ヲ O トスレバ, $AB \cdot AD : CB \cdot CD = AO : CO$ デアル。

4. 直角三角形ノ頂點 C カラ斜邊 AB へ垂線 CD ヲ引キ
AD ヲ直徑トスル圓周ト AC トノ交點ヲ E トスレバ、

$$AE:CE=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$$

5. 平行四邊形 ABCD = 於テ一頂點 A ヨリ任意ノ直線ヲ
引キ對角線 BD, 邊 CD, BC 又ハ此等ノ延長トノ交點ヲ夫
々 P, Q, R トスレバ, $PQ:PR=\overline{PD}^2:\overline{PB}^2$ デアル。

[16] 定 量 問 題

1. 正三角形 ABC アリ邊 AB 上ニ動點 D ヲ取り、又 AC 上
ニ BD = 等シク AE ヲ取ルトキハ、BE ト CD トノ交角ノ
大サハ一定デアル。
2. 二點 A, B デ交ハル二圓ノ一ツノ周上ニ任意ノ一點 P
ヲ取り、PA, PB ガ他ノ圓周ト交ハル點ヲ夫々 Q, R トス
レバ、弦 QR ノ長サハ一定デアル。
3. 二等邊三角形ノ底ノ上ノ任意ノ一點ヨリ他ノ二邊マ
デ引イタ垂線ノ和ハ一定デアル。
又點ガ底ノ延長上ニアルトキハドウカ。
4. 正三角形内ノ任意ノ一點カラ三邊マデ引イタ垂線ノ
和ハ一定デアル。
5. 定圓 O ノ周上ノ任意ノ一點 A ヲ中心トシテ圓ヲ畫キ、
此ノ圓 A ニ切スルヤウニ圓 O ノ弦 BC ヲ引クトキハ矩形
AB·AC ハ一定デアル。

[17] 定點通過、定圓切線問題

1. 圓ノ弧ト之ニ對スル弦ニ切スル圓ノ切點ヲ結ブ直線
ハ其ノ弧ト共軛ナル弧ノ中點ヲ通ル。
2. 圓ノ周上ノ任意ノ點 P ヨリ定マレル直徑 AB = 垂直
ナル弦 PQ ヲ引キ、且中心 O ト P トヲ結ベバ、 $\angle OPQ$ ノ二
等分線ハ二ツノ定點ノ中ノ何レカ一ツヲ通ル。
3. 定角 O ノ二邊上ニ一ツツ、定點 A, B ガアル、OA, OB ノ
延長上ニ夫々點 P, Q ヲ取り、 $AP \cdot BQ = OA \cdot OB$ ナラシメ
レバ、直線 PQ ハ常ニ OA, OB ヲ二邊トスル平行四邊形ノ
一頂點ヲ通ル。
4. 定直線ニ切シ且定圓ニ外切スル任意ノ圓ヲ畫クトキ
ハ、其ノ二ツノ切點ヲ通過スル直線ハ一定點ヲ通ル。但
シ定直線ト定圓トハ相交ハラナイモノトスル。
5. O ハ定圓、A, B ハ二定點トスル。B ヲ通ル任意ノ割線
BCD ヲ引キ、AC, AD ガ圓 O ノ周ト E, F ニ於テ交ハルト
キハ、圓周 AEF ハ一定點ヲ通ル。
6. 二定圓 O, O' ノ交點ヲ A, B トシ、圓 O ノ周上ノ任意ノ點
ヲ P トシ、PA, PB ガ圓 O' ノ周ト交ハル點ヲ C, D トスル
トキ、CD ガ圓 O' ノ直徑デナイトキハ必ズ或ル一ツノ定
圓ニ切スル。

軌 跡

[18] 軌跡ガ直線トナル問題

1. 直交スル二直線上ニ各一點ヲ取り之ヲ結ブ線分ヲ對角線トスル正方形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。
2. 一定點ヨリ一定直線ヘ引イタ線分上ニ畫ク正三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。
3. 正三角形 PMN ノ邊 MN ノ上ニ任意ノ點 A ヲ取り, AP ヲ高サトシ A ヲ頂點トスル正三角形 ABC ヲ畫クトキ B 及ビ C ノ軌跡ヲ求メヨ。
4. 所設ノ圓周上ノ所設ノ點 O ヨリ弦 OP ヲ引キ, 此ノ上ニ一點 Q ヲ取り, 矩形 OP·OQ ヲ與ヘラレタ正方形ニ等シカラシメルトキ點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。
5. 定圓 O ヘノ切線及ビ定點 A ヘノ距離ガ相等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[19] 軌跡ガ圓周トナル問題

1. 定圓ニ引イタ切線ノ長サガ其ノ圓ノ直徑ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。
2. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle BAC$ ハ直角トシテ, BC ニ任意ノ垂線 EF ヲ引キ之ガ AB, AC 或ハ其ノ延長ト夫々 D, F ニ於テ交ハルトキ, BF ト CD トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

3. 定直線上ニ二點 A, B ガアル, A ニ於テ其ノ直線ニ切スル圓ト, B ニ於テ其ノ直線ニ切スル圓トガ互ニ相切スルトキ, 此ノ兩圓ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。
4. O ヲ中心トスル定圓内ノ定點 A ニ於テ直角ヲ張ルベキ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
5. 三定點 A, B, C ヨリ一點 P ニ至ル三線分ノ平方ノ和ガ一定デアルトキ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。 ([13] ノ 4 參照)

[20] 軌跡ガ圓弧トナル問題

1. 一ツノ半圓ニ於テ其ノ半徑ニ等シイ弦ヘ中心ヨリ下シタ垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。
2. 定圓ニ於テ定直徑ト定長ノ弦トヲ一組ノ對邊トスル内接四角形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。
3. 同底上ニ立チ頂角ノ大サガ一定デアル三角形ノ垂心ノ軌跡ヲ求メヨ。
4. 定角 XOY 内ニアツテ邊 OX ニ定點 A ニ於テ切スル圓ト邊 OY ニ定點 B ニ於テ切スル圓トガ互ニ外切スルトキハ, 其ノ切點ノ軌跡ハ A, B ヲ通ル一ツノ圓弧デアル。
5. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 M, N トシ, A ヲ通ル任意ノ直線ヘ B, C ヨリ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 Q, R トスルトキ, 二直線 QM, RN ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

作 圖 題

[21] 點ヲ求メル問題

1. A ハ中心 C ナル圓ノ外ニアル所設ノ一點デアル。CA 上ニ一點 P ヲ求メ線分 AP ト P ヨリ此ノ圓ニ引イタ切線 PT (T ヲ切點トスル) トガ相等シイヤウニセヨ。
2. 所設ノ線分 AB ヲ弦トスル弓形 ACB ノ弧上ニ一點 P ヲ求メ弦 PA ヲ弦 PB ノ三倍ナランメヨ。
3. 所設ノ圓外ニ一點ヲ求メ此ノ點ヨリ其ノ圓ニ引イタ二切線ノ和ヲ其ノ點ヨリノ圓ノ中心線ニ等シクセヨ。
4. 一直線上ニ三點 A, B, C ガ此ノ順序ニ列ブトキ此ノ直線上ニ一點 O ヲ求メテ, OB ヲ OA, OC ノ比例中項トナルヤウニセヨ。
5. 與ヘラレタ直線上ニ一點 P ヲ求メ, P ヨリ與ヘラレタ圓ヘ引イタ切線 PT ガ所設ノ線分ニ等シイヤウニセヨ。

[22] 直線ヲ引ク問題

1. 一點カラ出ル三ツノ直線ノ何レカーツノ上ノ與ヘラレタ點ヲ通ル直線ヲ引キ, ソレガ此ノ三直線ニ於テ夾ミ取ラレル二ツノ部分ガ等シイヤウニセヨ。
2. 點 P ヨリ直角ヲナス二直線ヲ引キ, 定直線 XY ヨリ定長ノ線分ヲ截リ取ランメヨ。

3. 一定直線外ニ一定點 A ガアリ, 其ノ反對ノ側ニ此ノ直線ニ平行ナル定直線上ニ一定點 B ガアル。A ヨリ直線 AMN ヲ引イテ其ノ平行線ト夫々 M, N ニ於テ交ハラシメ, $BM=BN$ ナランメヨ。
4. 與ヘラレタ圓ノ周上ノ所設ノ點 M ヨリ弦 MN ヲ引キ, 所設ノ弦 AB ニ於テ二等分セラレルヤウニセヨ。
5. 與ヘラレタ二ツノ同心圓ノ周ニ交ハル直線ヲ引キ, 外圓ノ弦ガ内圓ノ周ニ於テ三等分セラレルヤウニセヨ。

[23] 圓周ヲ畫ク問題

1. 一定點ヲ中心トシ一定直線ニ交ハル圓ヲ畫イテ, 生ズル所ノ弓形ノ一ツノ含ム角ヲ所設ノ角ニ等シクセヨ。
2. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツニ於ケル兩圓ノ切線ガ直交スルトキハ, 其ノ切線ハ夫々其ノ兩圓ノ中心ヲ通ル。

[注意] 此ノヤウナ二圓ヲ直交圓トイフ。

又二ツノ圓周ノ交點ニ於ケル兩圓ノ切線ノナス角ヲ其ノ二圓周ノ交角ト云フ。

3. 一定圓ト其ノ周上ノ一定點ニ於テ直交スル定半径ノ圓周ヲ畫ケ。
4. 所設ノ直線 XY 上ノ所設ノ點 P ヲ過ギ, 中心ハ XY 上ニアツテ所設ノ圓ニ切スル圓周ヲ畫ケ。
5. 一定點ヲ過ギ, 二定直線ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

[24] 三角形ヲ畫ク問題

1. 次ノモノヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

- [1] 頂角、高サ及ビ底ヘノ中線。
- [2] 三中線。
- [3] 頂角ト其ノ一邊ヘノ中線ト面積。
- [4] 底、他ノ二邊ノ和ト底ノ一端ヨリ對邊ニ至ル距離。
- [5] 周、頂角及ビ頂角ノ頂點ヨリ對邊ヘノ垂線。

2. 一邊ト高サトノ和トヲ知ツテ正三角形ヲ作レ。

3. 周ト高サトヲ知ツテ二等邊三角形ヲ作レ。

4. 底角ガ頂角ノ二倍ナル等脚三角形ヲ作レ。

5. 次ノモノヲ與ヘテ直角三角形ヲ作レ。

- [1] 直角ノ頂點カラ出ル中線ト垂線。
- [2] 斜邊ト内接圓ノ半徑。

[25] 四角形ヲ畫ク問題

1. 所設ノ四角形ニ外接スルヤウニ正方形ヲ作レ。

2. 次ノモノヲ與ヘテ矩形ヲ作レ。

- [1] 周ト對角線。
- [2] 外接スル平行四邊形ト其ノ一邊上ノ一頂點。

3. 兩底ト兩對角線トヲ與ヘテ梯形ヲ作レ。

4. 外接圓ノ半徑、兩底ノ差及ビ高サヲ知ツテ等脚梯形ヲ作レ。

[26] 相似法、平行移動法及ビ
對稱法ヲ用ヒル問題

1. 二邊ノ和ト二角トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

2. 與ヘラレタ三角形 ABC ノ邊 AB 上ニ一點 D ヲ取り、
 AC 上ニ一點 E ヲ取り、 $BD=DE=EC$ ナルヤウニセヨ。

3. AB ハーツノ圓ノ弦デ其ノ一方ノ弧ノ上ニ二點 C, D
ガアル。今之ト共軛ナル弧ノ上ニ點 P ヲ求メ、 PC, PD ガ弦
 AB ヨリ截リ取ル部分ヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ。

[注意] 或線分ヲ之ニ平行ニ適當ノ位置ニ移動センメテ
解法ヲ工夫スル方法ヲ平行移動法トイフ。

4. 四邊ノ長サヲ與ヘテ梯形ヲ作レ。

5. 夫々二ツツ三點 A, B, C ニ於テ交ハル三直線ノ一ツ
 AB = 垂直ナル直線 QPR ヲ引キ、 AB, BC, AC ト夫々 $P, Q,$
 R = 於テ交ハラシメ、 $PQ=PR$ ナルヤウニセヨ。

[27] 多角形ノ等積變形問題

1. 與ヘラレタ三角形又ハ平行四邊形ニ等積デ、其ノ一邊
ガ與ヘラレタ線分ニ等シイ矩形ヲ作レ。

2. 與ヘラレタ五角形ノ三分ノ一ニ等シイ正方形ヲ作レ。

3. 與ヘラレタ正方形ト等積ナル正三角形ヲ作レ。

4. 與ヘラレタ三角形ニ相似デ、且之ト面積ノ比ガ $m:n$ ナ
ル三角形ヲ作レ。

[28] 面積ノ分割問題

1. 三角形ノ邊上ノ與ヘラレタ點ヲ通ル直線ヲ以テ此ノ三角形ヲ與ヘラレタ比ニ分ケヨ。
2. 一邊ニ垂直ナル直線又ハ與ヘラレタ直線ニ平行ナル直線ヲ以テ三角形ヲ二等分セヨ。
3. 一頂點ヲ通ル直線ヲ以テ四角形ヲ二等分セヨ。
4. 一邊上ノ所設ノ一點ヲ通ル直線ヲ以テ四角形ヲ二等分セヨ。
5. 三角形ノ面積ヲ一邊ニ平行ナル二直線ヲ以テ三等分セヨ。又之ヲ $l:m:n$ ノ比ニ分ケヨ。

[29] 極大極小問題

1. 一定直線上ニ一點ヲ求メ、
 - [1] 其ノ直線ノ同側ニアル所設ノ二點ニ至ル距離ノ和ガ最小ナルヤウニセヨ。
 - [2] 其ノ直線ノ兩側ニアル二點ニ至ル距離ノ差ガ最大ナルヤウニセヨ。
2. 與ヘラレタ直線上ニ一點ヲ求メ、其ノ點ヨリ定圓ヘ引イタ切線ガ最小ナルヤウニセヨ。
3. 定角 XOY 内ノ一定點ヲ A トスル。今 OY 上ニ一點 P ヲ求メ、AP ト P ヲリ OX へノ距離トノ和ヲ最小ナルヤウニセヨ。

4. 與ヘラレタ三角形ニ外接スル正三角形ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

[30] 計算問題

1. ABCD ヲ圓ニ内接スル四角形トシ、AB, CD ノ延長ノ交點ヲ P トシ、DA, CB ノ延長ノ交點ヲ Q トシテ、
 $\angle APD = 20^\circ$, $\angle CQD = 40^\circ$ ナルトキ、此ノ四角形ノ總テノ角ヲ求メヨ。
2. $\triangle ABC$ ノ三邊ヲ a, b, c トシ、其ノ内接圓及ビ傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r 及ビ r', r'', r''' トシ、 S ヲ此ノ三角形ノ面積トスレバ、

$$S^2 = r r' r'' r'''$$
 又 a', b', c' ヲ夫々 a, b, c ニ對スル高サトスレバ、

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}$$

3. 角 A ヲ直角トスル直角三角形 ABC ニ於テ $AB = 8m$, $AC = 6m$ ナルトキ、斜邊ノ中點ニ於テ之ニ切シ、且邊 AB ニ切スル圓ヲ畫クトキ其ノ半徑ヲ計算セヨ。
4. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ヲ底トシ、其ノ高サ CD ヲ直徑トスル圓周ト二邊 AC, CB トノ交點ヲ夫々 E, F トシ、BF, AE, BC 及ビ AC ヲ順次 x, y, a 及ビ b トスレバ、

$$x:y = a^3:b^3$$

[31] 雑 題

1. ニツノ直角三角形 ABC, ABD. ガ斜邊 AB ヲ共有シテ其ノ兩側ニアルトキ, A, B ノ CD 上ニ於ケル正射影ヲ夫々 E, F トスレバ $CE=DF$ デアル。
2. 鋭角三角形 ABC ノ外方ニ正三角形 ABD, BCE, CAF ヲ畫ケバ AE, BF, CD ハ一點ニ集交スル。
3. PQ ヲ定圓 O ノ定弦 AB ニヨツテ二等分セラレル任意ノ弦デアルトスルトキ, P, Q ニ於ケル圓 O ノ切線ノ交點 R ハ他ノ一定圓ノ周上ニアル。
4. 矩形ノ一ツノ對角線ノ兩端ヨリ一雙ノ平行線ヲ引イテ一雙ノ對邊ト交ハラシメ, 與ヘラレタ正方形ニ等シイ面積ヲ有スル平行四邊形ヲ截リ取レ。
5. A ニ於テ内切スルニツノ圓ガアツテ, 外圓周上ノ一點 B ヨリ内圓ニ切線ヲ引キ C ニ於テ内圓ニ切シ, D ニ於テ外圓ニ交ハラシメレバ $\angle BAC = \angle CAD$ デアル。
6. 梯形 ABCD ニ於テ $AB \parallel CD$ デ $AB+CD=BC$ デアルトキハ $\angle ABC$ 及ビ $\angle BCD$ ノ二等分線ハ AD 上デ交ハル。
7. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A > 45^\circ$ デ, $\angle B = 2\angle C$ デアルトキハ, $AC < 2AB$ デアル。
8. M ヲ一ツノ圓周上ノ任意ノ一點トシ M ヨリ圓周上ノ二點 A, B ニ於ケル切線ヘ垂線 ME, MF ヲ引キ $AB \perp$

線 MG ヲ引ケバ $MG^2 = ME \cdot MF$ デアル。

9. $\triangle ABC$ ノ三邊 BC, CA, AB 上ニ夫々三點 D, E, F ヲ取リ

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{AF}{AB} = x$$

トスルトキ, $\triangle DEF$ ノ面積ノ $\triangle ABC$ ノ面積ニ對スル比ヲ計算シ, 且其ノ結果ヲ用ヒテ $\triangle DEF$ ノ面積ハ D, E, F ガ三邊ノ中點トナルトキ最小トナルコトヲ證明セヨ。

10. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ニ A カラ下シタ垂線 AD ヲ直徑トスル圓周ガ AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスル。AD ガ直線 EF 及ビ $\triangle ABC$ ノ外接圓ト交ハル點ヲ夫々 G, H トスレバ AD ハ AG, AH ノ比例中項デアル。
11. C ヲ直角頂トスル直角三角形 ABC ガアル, 今邊 AC ノ上ニ ABC ト相似ナル三角形 ACD ヲ A, C, D ガ夫々 A, B, C ニ對應スルヤウニ作り, 次ニ邊 AD ノ上ニ同ジク ACD ト相似ナル三角形 ADE ヲ A, D, E ガ夫々 A, C, D ニ對應スルヤウニ作ル。順次此ノヤウニシテ無數ニ多ク作ツタ三角形ノ面積ノ總和ヲ求メヨ。但シ邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トシテ計算セヨ。
12. O ヲ三角形 ABC ノ内心トシ, 圓 OBC ガ AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トスレバ $BD=CE=AB-AC$ デアル。
13. ABC, DEF ヲニツノ與ヘラレタ三角形トスル。ABC ト相似デ且 DEF ト等積ナル三角形ヲ畫ケ。
14. $\triangle ABC$ ノ外側ニ其ノ邊ヲ一邊トスル正三角形 BCD,

CAE, ABF を作つたら三角形 DEF が正三角形デアツタ、然ラバ此ノ事カラ $\triangle ABC$ ハ正三角形デアルト断定シテヨイカ。

15. $\angle BAC$ ノ一邊 AB 上ニ一點 P を求め、P カラ AC ニ下シタ垂線ヲ PQ トシ、 $AP+AQ$ を定長ナラシメヨ。

16. $\triangle ABC$ 内ノ一點ヲ O トシ、AO, BO, CO が邊 BC, CA, AB ト交ハル點ヲ夫々 A', B', C' トスレバ、

$$\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} = 2$$

17. 或凸多角形ノ内角ハ順次ニ等差級數ヲナス最小角ハ 120 度デ、公差ハ 5 度デアルトイフ。邊數ヲ求めヨ。

18. $\triangle ABC$ ノ頂點 A, B, C 及ビ重心 G ヨリ此ノ三角形ヲ截ラナイーツノ直線ヘ下シタ垂線ノ長サヲ夫々 a, b, c 及ビ g トスルトキハ次ノ關係ガアル。

$$a+b+c=3g$$

19. 半径ガ夫々 3cm, 5cm ナル二圓ガアリ、中心間ノ距離ハ 11cm デアル、此ノ二圓ノ共通切線ノ長サヲ小數第二位マデ正シク算出セヨ。

20. 正方形 ABCD ガアル、邊 AB, BC, CD 及ビ DA ノ上ニ夫々點 E, F, G 及ビ H を取ツテ $AE=BF=CG=DH$ ナラシメル、今四直線 AF, BG, CH 及ビ DE が相交ハツテ作ル正方形ノ面積ヲ正方形 ABCD ノ面積ノ二分ノ一ニ等シクスルタメニハ $AE:AB$ ノ値ヲ幾ラニスレバヨイカ。但

シ小數第二位マデ正シク算出セヨ。

21. 一點 P ヨリ互ニ直交スル二ツノ定直線ニ至ル距離ノ差ガ常ニ定長 l ヨリモ小デアルトイフ。P ハ如何ナル範圍内ニアルベキカ。

22. 與ヘラレタ三角形ニ外接シ他ノ定三角形ト相似デアル面積ノ最大ナルモノヲ畫ケ。

23. 矩形 ABCD ノ一邊上ノ與ヘラレタ點ヲ通ル二直線ヲ引キ此ノ矩形ヲ三等分セヨ。

24. 三角形 ABC ニ於テ BC ノ中點ヲ D トスルトキ AB, AD, AC ガ等比級數ヲナスコトガアルカ。

25. 周圍ガ 1cm デアル直角三角形ノ三邊ノ上ノ正方形ノ面積ガ等差級數ヲナストキ、其ノ斜邊ノ長サヲ小數第二位マデ求め、第三位ヨリ下ハ四捨五入セヨ。

26. 二ツノ與ヘラレタ點ヲ通リーツノ與ヘラレタ圓ニ切スル圓周ヲ畫ケ。

27. A, B, C ハ平原ノ三地點デアル、此ノ平原ノ或地點 D デ發シタ號報ガ A ト B ニハ同時ニ聞エ、C ニハソレヨリ 2 秒後レテ聞エタ、作圖ニヨツテ D 點ヲ求めヨ。但シ音ノ速サハ毎秒 a トスル。

28. 定圓ニ内接スル三角形ノ各邊ノ中點ヲ通ル圓ノ半径ハ一定デアル。

29. O を中心トスル圓内ニ二點 A, B ガアツテ $OA=OB$ トス

ル。圓周上ニ一點 P フ求メ、P ヨリ A, B フ通ル二弦 PC, PD フ引キ PC=PD ナラシメヨ。且解答ノ數ニツイテ吟味セヨ。

30. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ヘ底邊 BC ノ兩端ヨリ夫々垂線 BE, CF フ引キ、又頂點 A ヨリ底邊 BC ヘ垂線 AD フ引キ、D, E, F ノ三點ヲ通ル圓周ヲ作レバ此ノ圓周ハ底邊 BC ノ中點ヲ通ル。
31. 定圓ノ定直徑 AB 上ノ一定點 P フ通ル任意ノ弦 CPD フ引キ、弦 AC, AD 又ハ其ノ延長ガ AB ニ垂直ナル弦 GPH 又ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ夫々 M, N トスルトキハ PM ト PN トノ包ム矩形ハ常ニ PG ノ上ノ正方形ニ等シイ。
32. 一ツノ矩形ガアリ、其ノ面積ハ之ニ外接スル圓ノ面積ノ半分デアルトキ、圓周率ヲ $\frac{22}{7}$ トシテ計算スレバ、此ノ矩形ノ二邊ノ比ハ $(5+\sqrt{3}):(5-\sqrt{3})$ デアル。
33. 定底邊 BC フ有スル三角形 ABC ノ頂角 A ノ大サガ一定デアルトキ、其ノ頂角ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ P トシ、AP フ Q マデ延長シ AP·AQ=AB·AC ナラシメレバ、Q ハ定點デアル。
34. 矩形 ABCD ガアリ AB ノ長サヲ a 、BC ノ長サヲ b トスル。頂點 D ヨリ對角線 AC ニ下シタ垂線ノ足ヲ E トスルトキ、BE ノ長サヲ求メヨ。

35. 中心 O ナル圓内ノ一點ヲ A トスル。A フ通ル直徑 BC ニ平行ニ弦 DE フ作レバ、

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2$$

36. 三角形 ABC 内ニ底邊 BC ニ平行ナル直線 DE フ引キ、他ノ二邊トノ交點ヲ D, E トスル。ソシテ DE フ AE, EC ノ比例中項ナラシメヨ。
37. 直角 AOB ガアリ、其ノ角内ノ一點 P ヨリ OA 及ビ OB ニ下シタ垂線ノ足ヲ夫々 C, D トスル。ソシテ PC+2PD フ一定ナラシメルトキ P ノ軌跡ヲ求メヨ。
38. 四邊形 ABCD ノ頂點 A フ通ル二直線ヲ引イテ其ノ面積ヲ三等分セヨ。
39. 圓 O ノ半徑 OA ノ上ニ二點 M, N フ取り、AM=MN=NO ナラシメル。次ニ OA フ直徑トスル半圓ヲ畫キ、M, N ヨリ OA ニ垂線 MP, NQ フ引キ其ノ半圓弧ト夫々 P, Q ニ於テ交ハラシメレバ、點 O フ中心トシ OP, OQ フ半徑トスル二ツノ圓周ハ元ノ圓 O フ三等分スル。
40. 與ヘラレタ三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ邊 BC ニ至ル線分 AD フ引キ、AD フ BD, CD ノ比例中項ナラシメヨ。
41. 三角形 ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引イテ二邊 AB, AC ト交ハル點ヲ夫々 D, E トシ、DE=DB+EC ナルヤウニセヨ。(問題 9 ノ 9 参照)
42. 周圍 24cm、内接圓ノ半徑 2cm ナル直角三角形ノ三邊ノ

長サヲ求メヨ。

43. 二等邊三角形ノ等邊ノ長サ l 糧、其ノ面積 S 平方糧デアル。底邊ノ長サヲ求メヨ。但シ $l^2 > 2S$ トスル。

44. 中心 C ナル圓外ノ一點 A ヨリ二直線 APQ 及ビ ARS ヲ引キ、此ノ圓ノ周トノ交點ヲソレゾレ P, Q, R, S トシ $\angle PAC = \angle RAC$ ナラシメル。 PS, QR ノ交點ヲ O トスレバ P, Q, C, O ハ同一圓周上ニアル。

45. 定直線上ノ與ヘラレタ二點 A 及ビ B ニ於テ之ニ切シ且互ニ外切スル二圓ヲ畫キ、其ノ半徑ノ和ヲ與ヘラレタ長サニ等シカラシメヨ。

46. 銳角三角形 ABC ノ垂心ヲ H トスル。今 BC ヲ底トシ AH ノ上ニ頂點ヲ有スル直角三角形 LBC ヲ作レバ、 $\triangle LBC$ ハ $\triangle ABC$ ト $\triangle HBC$ トノ比例中項デアル。

47. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ト底トノ交ハリヲ D 、 BC ノ中點ヲ M トシ、 A, D, M ヲ通ル圓周ガ邊 AB, AC ト夫々 E, F ニ於テ交ハレバ $BE = CF$ デアルコトヲ證明セヨ。但シ $AB \neq AC$ トスル。

新 制

平面幾何教科書

定價金壹圓拾貳錢

昭和四年九月七日初版印刷

昭和四年九月十日初版發行



著 者 林 鶴 一

發 行 者 東京市小石川區小日向水道町84 株式會社 東京開成館
代表者 松本繁吉

印 刷 者 東京市牛込區市谷加賀町一丁目 寺井藤左工門

販 賣 所 東京市日本橋區吳服橋二丁目5 林 平 書 店

販 賣 所 大阪市北久寶寺町心齋橋筋角 三 木 佐 助

發 行 所

東京市小石川區小日向水道町八十四番地

株式會社 東京開成館
振替口座東京五三二二番

株式會社秀英舎印刷

機軸科第學年
末田茂又

