昭和五年十月二十四日
文部省檢定濟
中學校數學科用

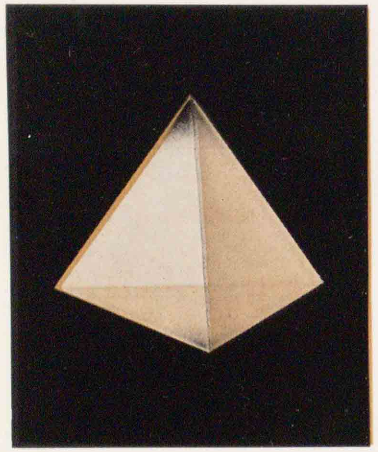
修訂

中等 立体幾何學新教科書

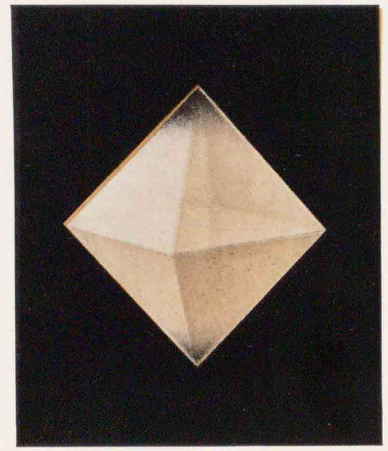
理学博士
竹内端三著

株式會社
三省堂

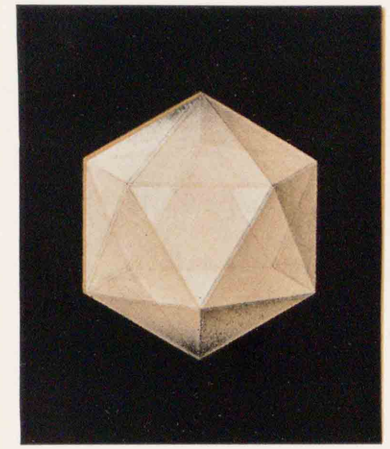
正四面體



正八面體

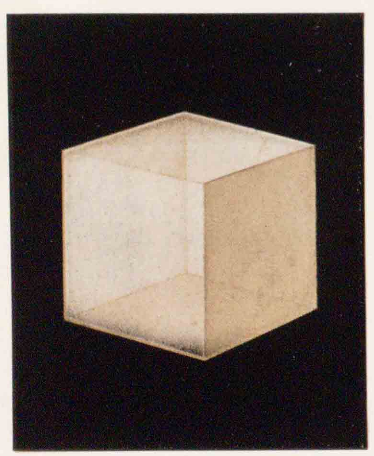


正二十面體

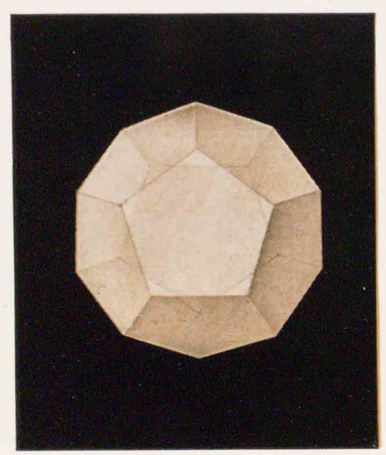


直圓錐

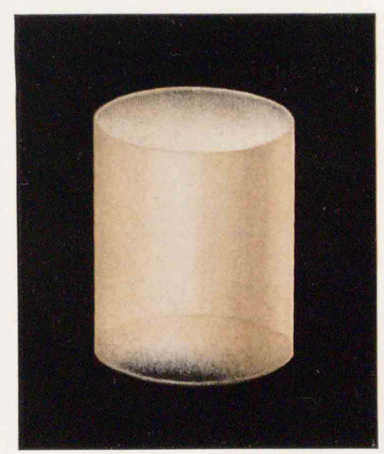
正六面體



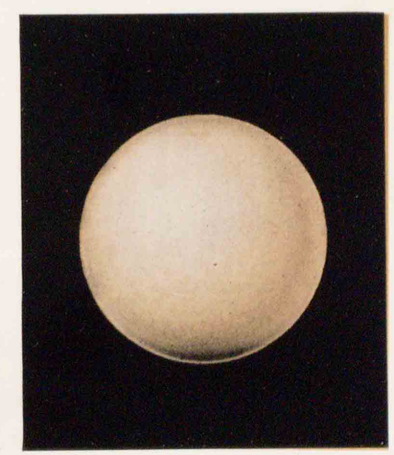
正十二面體



直圓壔



球



改版緒言

本書ハ曩ニ刊行セル中等立體幾何學新教科書ノ改版ニシテ,平行平面ニ關スル定理其ノ他ニ若干ノ改訂ヲ加ヘ且ツ補充問題ヲ多少增補シ,教授ノ便宜ヲ計レルモノナリ。初版以來著者ガ特ニ意ヲ用ヒ來レル二三ノ要點ヲ摘記スレバ次ノ如シ。

(一) 必要ナル教材ノ他ハ成ルベク之ヲ省キ,生徒ノ負擔ヲ輕カラシムルト同時ニ教授時數ニ餘裕ヲ生ゼシメ,以テ數學全體ノ練習ヲナスノ便ヲ計レリ。

(二) 本文ノ間ニ挿入スル問題ノ數ヲ成ルベク少クシ其ノ代リニ補充問題ヲ卷末ニ添ヘ,教師ガ適當ノ時間ニ任意ノ問題ヲ課スルノ便ヲ計レリ。

(三) 平面幾何學トノ連絡ニ注意シタリ。

(四) 公理ノ選定及ビ定理ノ證明ハ論理

ノ嚴密ヲ著シク毀損セザル程度ニ於テナルベク常識的ニシテ簡明ナラシメンコトヲ計レリ。

終リニ臨ミ著者ハ本書舊版ニ對シテ有益ナル忠言ヲ寄セラレタル諸賢ニ厚ク感謝ノ意ヲ表シ,ナホ本書ヲシテ更ニ將來改良スル所アラシムベク實地教授ノ任ニ當ラルル諸賢ノ高批ヲ切望ス。

昭和五年八月

著者識

目　次

修　訂

中等立體幾何學新教科書

第一篇

直線及ビ平面

第一章　緒論

1. 定義

立體幾何學ハオモニ同一ノ平面上ニ在ラザル圖形ノ形,大サ及ビ位置ニ關スル性質ヲ研究スル學科ナリ。

公理 一. 一平面上ノ任意ノ二點ヲ過ル直線ハ全ク其ノ面上ニ在リ。(平面幾何學公理三)

サレバ平面ハ其ノ上ノ何レノ方向ニモ限リナク擴レルモノナリ。然レドモ之ヲ圖ニ表スニハソノ上ニ書キタル一ツノ平行四邊形ヲ以テスルヲ常トス。

一點マタハ一直線ガ一平面上ニアルトキハ,此ノ平面ハ其ノ點マタハ其ノ直線ヲ**含ム**或ハ**過ル**ト云フ。

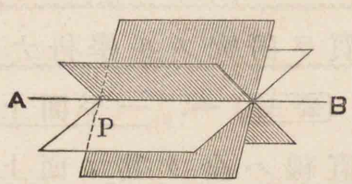
一直線ト一平面トガ少クトモ一點ヲ共有スルトキハ,其ノ直線ト其ノ平面トハ**出會フ**トイフ。(直線ガ全ク平面上ニアル場合ヲモ含ム。)

又一直線ト一平面トガタヾ一點ノミヲ共有スルトキハ,其ノ直線ト其ノ平面トハ**相交ル**ト云フ。

2. 平面ノ基本性質

$\boxed{\text{公理}}$ **二.** 二點ヲ含ム平面ノ數ハ限リナシ。

故ニ一直線上ニ任意ノ二點ヲトレバ之ヲ含ム平面ハ無數ニ多クアリ。而シテソレラノ平面ハ何レモモトノ一直線ヲ含ム。



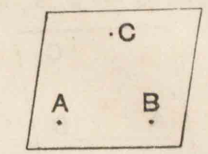
依ッテ公理二ノ代リニ次ノ如クイフモ可ナリ。

一直線ヲ含ム平面ノ數ハ限リナシ。

$\boxed{\text{公理}}$ **三.** 一直線上ニアラザル三點ヲ過ル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

コノコトヲ次ノ如クニイフコトアリ。

一直線上ニアラザル三點ハ唯一ツノ平面ヲ決定ス。

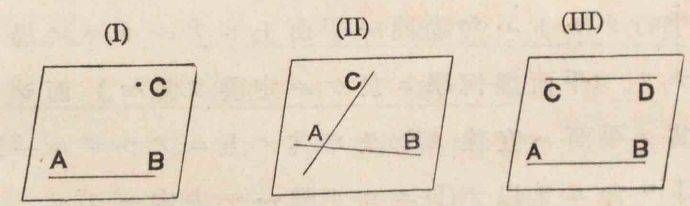


$\boxed{\text{定理}}$ **一.** 次ノ各ノ條件ハ唯一ツノ平面ヲ決定ス。

(I) 一直線ト其ノ上ニ在ラザル一點トヲ含ムコト。

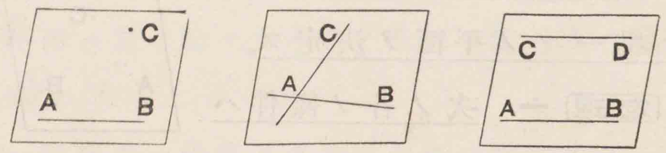
(II) 相交ル二直線ヲ含ムコト。

(III) 平行ナル二直線ヲ含ムコト。



$\boxed{\text{證明}}$ (I)直線 AB 上ニ任意ノ二點 A, B ヲトレバ,コノ二點ヲ含ム平面ハ直線 AB ヲ含ミ,又逆ニ直線 AB ヲ含ム平面ハ勿論二點 A, B ヲ含ム。故ニ直線 AB ト其ノ上ニアラザル一點 C トヲ含ム平面トハ,一直線上ニアラザル三點 A, B, C ヲ含ム平面ニ他ナラズ。依ッテ公理三ニヨリ,一直線 AB 及ビ其ノ上ニアラザル一點 C ハ唯一ツノ平面ヲ決定ス。

(I)　(II)　(III)



(II) 相交ル二直線 AB, AC ヲ含ム平面ハ直線 AB 及ビ其ノ上ニアラザル一點 C ヲ含ム平面ニ他ナラズ。故ニ(I)ニヨリ AB, AC ハ唯一ツノ平面ヲ決定ス。

(III) 平行線ノ定義ニヨレバ二直線 AB, CD ガ平行ナリトハ勿論同一平面上ニアルトキノ場合ナリ。(平面幾何學ニ於ケル定義ヲ見ヨ。) 而シテ其ノ平面ハ直線 AB 及ビ其ノ上ニアラザル一點 C ヲ含ムヲ以テ(I)ニヨリ唯一ツ決定セラル。

3. 二直線ノ位置

空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ハ次ノ四種ニ限ル。

モシ同一平面上ニ在ラバ

(1) 相交ルカ, (2) 互ニ平行ナルカ,

又ハ (3) 全ク相一致ス。

同一平面上ニ在ラザルトキハ

(4) 相交ラズ,又互ニ平行ナラズ,又全ク相一致セズ。

4. 二平面ノ位置

定義 二ツノ平面ガ少クモ一點ヲ共有スルトキハ其ノ二平面ハ**出會フ**トイフ。(二平面ガ相一致スル場合ヲモ含ム。)

モシ二平面ガ出會ハザルトキハ,其ノ二平面ハ互ニ**平行ナリ**トイフ。

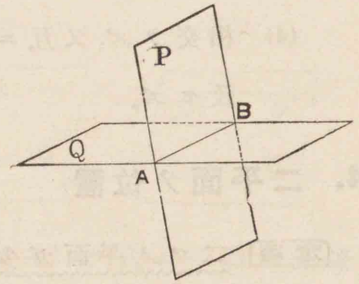
公理 四. 二ツノ平面ガ出會フトキハ唯一點ノミヲ共有スルコト能ハズ。

換言スレバ,二ツノ平面ガ出會フトキハ少クモ二點ヲ共有セザル可カラザルナリ。從ツテ公理一ニ依リソノ二點ヲ過ル直線ヲモ共有スルコトトナル。

定理 二. 二ツノ平面ガ出會フトキハ,全ク相一致スル場合ヲ除クノ他,此等ノ二平面ハ一ツノ直線ヲ共有シ,其ノ直線以外ノ點ヲ共有セズ。

P, Q ハ二ツノ出會フ平面ニシテ,全ク相一致セザルモノトス。然ルトキハ P ト Q トハタヾ一直

線ノミヲ共有ス。



[證明] A, B ヲ兩平面ニ共通ナル二ツノ點トセヨ(公理四)。

二點 A, B ハ平面 P 上ニアルヲ以テ,直線 AB ヲ引ケバ平面 P ハ之ヲ含ム。

同樣ニ平面 Q モ亦直線 AB ヲ含ム。

故ニ兩平面 P, Q ハ一直線 AB ヲ共有ス。

若シ兩平面 P, Q ガ直線 AB 外ノ一點ヲモ共有スルモノトスレバ,此ノ兩平面ハ全ク相一致セザルベカラズ(定理一)。コレ假設ニ反ス。

故ニ兩平面ハ一直線ヲ共有シ,其ノ直線以外ノ點ヲ共有セズ。

[定義] 二ツノ平面ガ唯一ツノ直線ヲ共有スルトキハ其ノ二平面ハ**相交ル**ト云ヒ,其ノ直線ヲ二平面ノ**交リ**又ハ**交線**ト云フ。

二平面ノ位置ノ關係ハ次ノ三ツノ場合ニ限ル。

モシ二平面ガ出會フナラバ

(1) 相交ルカ, 又ハ (2) 全ク相一致ス。

二平面ガ出會ハザルトキハ

(3) 互ニ平行ナリ。

例題

1. 三角形ノ三邊ハ皆同一平面上ニ在リ。

2. 梯形ノ四邊ハ皆同一平面上ニ在リ。

3. 同一平面上ニ在ラザル三直線ガ同一點ヲ過ルトキ,此等ノ直線ニテ決定セラルヽ平面ノ數ハ何程アルカ。

4. 同一平面上ニ在ラザル四ツノ點アリ,此等ノ點ニテ決定セラルヽ平面ノ數ハ何程アルカ。

5. 同一平面上ニ在ラザル二直線ノ兩方ニ交ル二ツノ直線ハ,互ニ平行ナルコトナシ。

第二章 平行ナル平面及ビ直線

5. 直線ト平面トノ位置

定義 一直線ト一平面トガ出會ハザルトキハ,此ノ一直線ト一平面トハ互ニ**平行ナリ**ト云フ。

一直線ト一平面トノ位置ノ關係ハ次ノ三種ニ限ル。

モシ直線ト平面トガ出會フナラバ

(1)相交ルカ,又ハ (2)直線ガ平面ニ含マル。

又直線ト平面トガ出會ハザルトキハ

(3)互ニ平行ナリ。

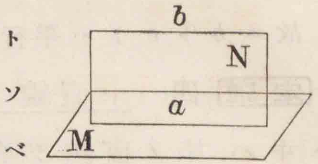
6. 平行直線ニ關スル定理

定理 三. 二直線ガ平行ナルトキ,其ノ一直線ヲ含ミ他ノ一直線ヲ含マザル平面ハ後ノ一直線ニ平行ナリ。

二ツノ平行ナル直線ヲ a, b トシ, a ヲ含ミ b ヲ含マザル一ツノ平面ヲ M トスレバ, M ハ b ニ平行ナリ。

證明 a, b ハ平行ナルヲ以テ一ツノ平面ヲ定ム。之ヲNトスレバ,a ハ即チ二平面MトNトノ

交リナリ。



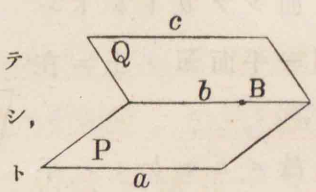
故ニ假リニ b ガ平面Mト出會フコトアリトスレバ,ソノ交點ハ a 上ニ在ラザルベカラズ,從ツテ a, b ハ相交ルコトヽナル(定理二)。

然ルニ b ト a トハ假設ニヨリ平行ナルヲ以テ相交ルコトナシ。

故ニ b トMトハ出會ハズ,即チ互ニ平行ナリ。

系 1. 二直線ガ平行ナルトキハ,夫々ソノ一ツヽヲ含ム二ツノ平面ノ交リハ其等ノ二直線ノ各ニ平行ナリ。

系 2. 同一直線 a ニ平行ナル二直線 b, c ハ互ニ平行ナリ。



證明 a ト b トニヨリテ決定セラルヽ平面ヲPトシ,又 b 上ノ一點Bト直線 c トニヨリテ決定セラルヽ平面ヲQトセヨ。

然ルトキハ PトQトノ交リハ a ニ平行ナリ(系1)。故ニ其ノ交リハP上ニ在リテ,點Bヲ過リ a ニ平行ナル直線ナリ,即チ直線 b ニ他ナラズ。

而シテ c ハ其ノ交リト平行ナラザルベカラズ

(系1)。

故ニbトcトハ平行ナリ。

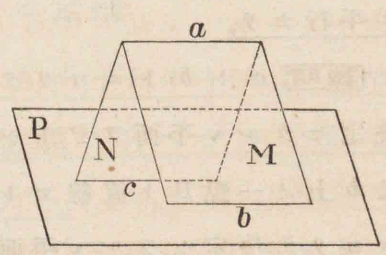
定理 四. 一直線ト一平面トガ平行ナルトキハ,其ノ直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交リハ前ノ直線ニ平行ナリ,而シテ其等ノ交リハマタ互ニ平行ナリ。

直線aト平面Pトヲ平行ナリトシ,aヲ含ム平面M及ビNト,平面Pトノ交リヲ夫々b, cトスレバ,b, cハ何レモaニ平行ニシテ,且ツマタ互ニ平行ナリ。

證明 aトPトハ平行ナルヲ以テ出會ハズ。

故ニaハP上ノ直線bト出會フコトナシ。

而シテaトbトハ同一平面Mノ上ニ在リ。



故ニaトbトハ平行ナリ。

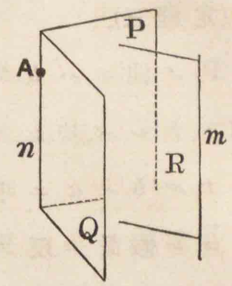
同様ニaトcトモ亦平行ナリ。

從ツテマタbトcトモ平行ナリ(定理三系2)。

系 1. 同一ノ直線ニ平行ナル二平面ノ交リハ其ノ直線ニ平行ナリ。

同一ノ直線mニ平行ナル二平面P, Qノ交リヲnトスレバ,nトmトハ互ニ平行ナリ。

證明 交線n上ノ任意ノ一點Aトmトヲ含ム平面ヲRトスレバ,Rハ平面Pトmニ平行ナル直線ニ於テ交ル。



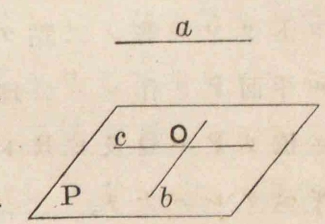
同様ニRトQトモmニ平行ナル直線ニ於テ交ル。

然ルニ一點Aヲ過リテmニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

故ニPトRトノ交リモ,QトRトノ交リモ同一直線ニシテ,ツマリPトQトノ交リnニ他ナラズ。

故ニnトmトハ互ニ平行ナリ。

系 2. 同一平面上ニ在ラザル二直線ノ一ツヲ含ミテ,他ノ一ツニ平行ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。



a, bヲ同一平面上ニ在ラザル二直線トスレバ,bヲ含ミテaニ平行ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

證明 b上ノ一點Oト直線aトノ定ムル平面

ニ於テ,Oヲ過リaニ平行ナル直線cヲ引ケバ,二直線b, cノ定ムル平面Pハbヲ含ミaニ平行ナリ(定理三)。

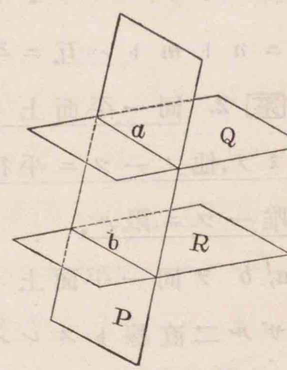
Pノ他ニハbヲ含ミaニ平行ナル平面ナシ。何トナレバ,若シアリトセバ,其ノ平面トPトノ交リナルbハaニ平行ナラザル可カラズ(系1)。

コレ假設ニ反ス。

7. 平行平面ニ關スル定理

定理 五. 平行ナル二平面ガ一ツノ平面ト交ルトキハ,其ノ交リハ互ニ平行ナリ。

平行ナル二平面Q, Rノ何レトモ相交ル平面ハ常ニアリ。何トナレバQ及ビR上ニ夫々任意ノ一點ヲトリソレ等ノ二點ヲ過ル平面Pヲ作レバ公理四ニ依リPハQ及ビRト交ルベケレバナリ。



今PトQ, Rトノ交リヲ夫々a, bトセヨ。

然ルトキハa, bハ互ニ平行ナリ。

證明 QトRトハ平行ナルヲ以テ出會ハズ。故ニaトbトハ相交ラズ。

而シテaトbトハ同一ノ平面Pノ上ニ在リ。

故ニaトbトハ互ニ平行ナリ。

系 1. 一平面外ノ一點ヲ過リ,ソノ平面ニ平行ナル平面ハ唯一ツ存在ス。

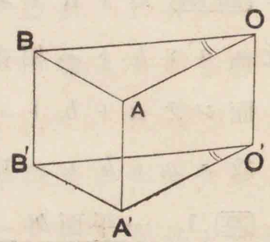
平面P外ノ一點ヲAトス。モシAヲ過リPニ平行ナル平面ガ二ツアリトセバ,之ヲQ, Rトセヨ。Aヲ過リPト交ル平面ノ中ニテQ, Rノ交リヲ含マザル一平面ヲトリ,之トP, Q, Rトノ交リヲ夫々p, q, rトスレバ,一點Aヲ過リ一直線pニ平行ナル二ツノ直線q, rガアルコトヽナル,コレ不合理ナリ。

系 2. 平行ナル二平面ノ一ツト相交ル平面ハ他ノ一ツトモ相交ル。

何トナレバ,モシ相交ラザレバ一點ヲ過リ一平面ニ平行ナル平面ガ二ツアルコトヽナレバナリ。

定理 六. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ一ツノ角ノ二邊ニ夫々平行ニシテ,且ツ其ノ相對應スル邊ガ二角ノ頂點ヲ過ル直線ニ關シテ夫々同ジ側ニ在ルトキハ,其ノ二ツノ角

ハ相等シ。



$\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トニ於テ, OA ハ O'A' ニ平行, OB ハ O'B' ニ平行ニシテ,且ツ夫々 OO' ニ關シテ同ジ側ニ在ルトキハ,　$\angle AOB=\angle A'O'B'$ ナリ。

證明 $OA=O'A'$, $OB=O'B'$ ナラシムレバ, OAA'O' 及ビ OBB'O' ハ何レモ平行四邊形ナリ。

故ニ AA', BB' ハ共ニ OO' ト相等シク且ツ平行ナリ,從ツテマタ互ニ相等シク且ツ平行ナリ。

故ニ ABB'A' ハ平行四邊形ニシテ, $AB=A'B'$.

從ツテ $\triangle OAB$ ト $\triangle O'A'B'$ トハ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ合同ナリ。

故ニ　$\angle AOB=\angle A'O'B'$.

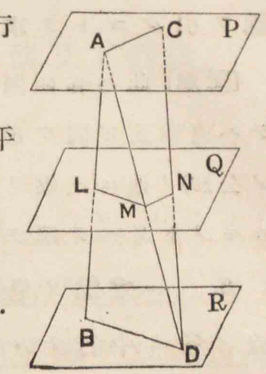
定理 七. 二直線ガ三ツノ平行ナル平面ト相交リテ截リ取ラルヽ線分ハ比例ヲナス。

二直線 AB, CD ガ三ツノ平行ナル平面 P, Q, R ト交ル點ヲ夫々 A, L, B 及ビ C, N, D トスレバ,

$$AL:LB=CN:ND$$ ナリ。

證明 A, D ヲ結ビ,之ト平面Qトノ交リヲMトスレバ, AB ト AD トガ定ムル平面トQ, Rトノ交

リナル LM ト BD トハ互ニ平行ナリ(定理五)。



同様ニ MN ト AC トモ互ニ平行ナリ。

故ニ　$AL:LB=AM:MD$,

$AM:MD=CN:ND$.

從ツテ　$AL:LB=CN:ND$.

例　題

1. 平行ナル二平面ノ間ニ夾マルヽ平行ナル二線分ハ相等シ。

2. 四邊形ノ四邊ガ必ズシモ悉ク同一平面上ニアラザル場合ニテモ,其ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブ四ツノ線分ハ一ツノ平行四邊形ヲ作ル。

定義 四邊ガ同一平面上ニアラザル四邊形ヲ**ごーしゅ四邊形**(捩四邊形)ト云フ。

3. 平行ナル二直線ノ一ツガ一平面ト交ルトキハ,他ノ一ツモ亦此ノ平面ト交ル。

4. 平行ナル二平面ノ一ツト交ル直線ハ他ノ一ツトモ交ル。

5. 一定點ヲ過リ,二定直線ノ各ト出會フ一直

線ヲ引クコトヲ求ム。

注意 此ハ作圖題ナリ。立體幾何學ノ作圖題ニ於テハ直線及ビ圓ヲ畫クコト(平面幾何學ニ於ケル作圖ノ公法)ノ他ニ「三點ヲ過ル平面ヲ作ルコト」モ亦出來得ルモノト考ヘテ解クベキモノトス。

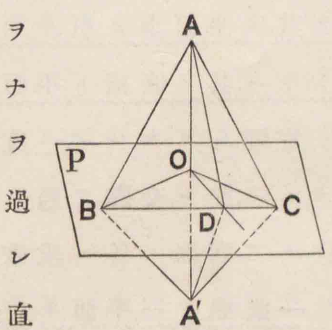
6. 一定點ヲ過リ同一平面上ニアラザル二直線ノ各ニ平行ナル平面ヲ作ルコトヲ求ム。

第三章　垂直ナル平面及ビ直線

8. 一平面ノ垂線

定理 八. 相交ル二直線ノ交點ヲ過リ且ツ其ノ各ニ垂直ナル直線ハ,其ノ二直線ヲ含ム平面上ニテ其ノ交點ヲ過ル任意ノ直線ニ垂直ナリ。

二直線 OB, OC ノ交點 O ヲ過リテ此ノ二直線ニ垂直ナル直線ヲ OA トシ, OB, OC ヲ含ム平面 P 上ニ於テ O ヲ過ル任意ノ直線ヲ OD トスレバ, OA ト OD トハ互ニ垂直ナリ。



證明 平面 P 上ニテ OB, OD, OC ト相交ル直線ヲ引キ,其ノ交點ヲ夫々 B, D, C トス。

AO ヲ延長シテ $OA'=OA$ ナラシメ, A, A′ ヲ各 B, D, C ト結ベバ OB, OC ハ夫々 AA′ ノ垂直二等分線ナルガ故ニ,

$$AB=A'B,\qquad AC=A'C.$$

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$.

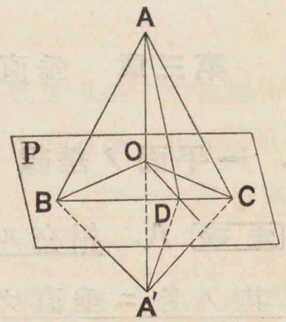
從ツテ $\angle ABD = \angle A'BD$.

故ニ $\triangle ABD \equiv \triangle A'BD$.

從ツテ $AD = A'D$.

故ニ $\triangle AOD \equiv \triangle A'OD$.

故ニ $\angle AOD = \angle A'OD$.



卽チ OA ト OD トハ互ニ垂直ナリ。

定義 一直線ガ一平面ト交リ,其ノ交點ヲ過リテ其ノ平面上ニ引キタル總テノ直線ニ垂直ナルトキハ,其ノ直線ト平面トハ互ニ**垂直ナリ**ト云フ。

定理八ニヨレバ,一直線ガ一平面ニ垂直ナルタメニハ,ソノ交點ヲ過リ其ノ平面上ニ引キタル任意ノ二直線ノ各ニ垂直ナレバ可ナルヲ知ルベシ。

一直線ト一平面トガ互ニ垂直ナルトキ,其ノ直線ヲ其ノ平面ノ**垂線**ト云ヒ,垂直ナラズシテ相交ルトキハ其ノ直線ヲ其ノ平面ノ**斜線**ト云フ。

垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲ其ノ垂線又ハ斜線ノ足ト云フ。

系 1. 一直線ガ一平面ニ垂直ナルトキハ,其ノ足ヲ過リ其ノ直線ニ垂直ナル直線ハ其ノ平面上ニアリ。

系 2. 平行ナル二直線ノ一ツガ一平面ニ垂直ナルトキハ,他ノ一ツモ亦其ノ平面ニ垂直ナリ。

定義 **同一平面上ニアラザル二直線ノナス角**トハ任意ノ一點ヲ過リ夫々之ニ平行ニ引キタル二直線ノナス角ヲ云フ。

其ノ角ノ大サガ上ニイフ所ノ任意ニ取リタル一點ノ位置ニ關係ナキコトハ定理六ニヨリテ明カナリ。

此ノ定義ヲ用フレバ定理八ヨリ直チニ次ノ系 3 ヲ得。

系 3. 一直線ガ一平面上ノ平行ナラザル任意ノ二直線ニ夫々垂直ナルトキハ,其ノ平面ニ垂直ナリ。

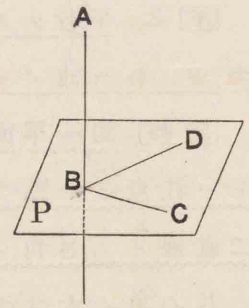
系 4. 平面外ノ一點ヨリ其ノ平面ニ垂線及ビ斜線ヲ引ケバ,垂線ハ斜線ヨリモ短シ。

定理 **九.** 一直線上ノ一點ヲ過リ之ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

直線 AB 上ノ一點 B ヲ過リテ AB ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

證明 B ヲ過リテ AB ニ任意ノ二ツノ垂線 BC, BD ヲ引キ, BC, BD ノ定ムル平面ヲ P トスレ

バ, P ハ AB ニ垂直ナル平面ナリ(定理八)。

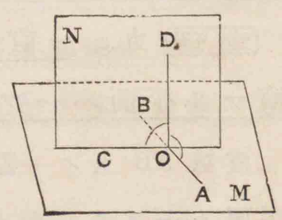


若シ平面 P ノ外ニ B ヲ過リテ AB ニ垂直ナル平面 Q アリトシ, AB, BC ノ定ムル平面 R ト Q トノ交リヲ BE トスレバ, BC, BE ハ AB ト共ニ R 上ニ在リ,且ツ一點 B ヲ過リテ同一ノ直線 AB ニ垂直ナルコトヽナル,コレ不合理ナリ。

故ニ斯クノ如キ平面ハ P ノ他ニハナシ。

系 一直線外ノ一點ヲ過リ之ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

定理 十. 平面上ノ一點ヲ過リ之ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。



平面 M 上ノ一點 O ヲ過リテ平面 M ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

證明 平面 M 上ニ O ヲ過ル任意ノ一直線 AB ヲ引キ, O ヲ過リテ AB ニ垂直ナル平面 N ヲ作リ, M ト N トノ交リヲ OC トス。

O ヲ過リ平面 N 上ニテ OC ニ垂直ニ OD ヲ引ケバ, OD ハ O ヲ過リテ M ニ垂直ナル直線ナリ。

何トナレバ N ハ AB ニ垂直ナルヲ以テ,

$\angle AOD =$ 直角.

又假定ニヨリ $\angle COD =$ 直角.

故ニ OD ハ M ニ垂直ナリ(定理八)。

若シ O ヲ過リテ M ニ垂直ナル直線ガ OD ノ他ニモアリトセバ,之ヲ OH トセヨ。OH ト OD トニヨリテ決定セラルヽ平面ト M トノ交リヲ OK トスレバ, OH, OD ハ OK ト同一平面上ニアリテ共ニ OK ニ垂直トナル,コレ不合理ナリ。

故ニ O ヲ過リテ M ニ垂直ナル直線ハ OD ノ他ニハナシ。

系 同一ノ平面ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

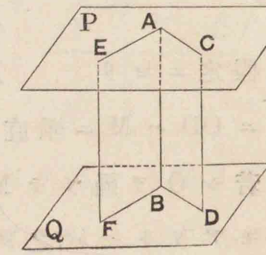
證明 一方ノ垂線 足ヲ過リ他ノ垂線ニ平行ナル直線ヲ引キ,定理八系2, 及ビ定理十ヲ用ヒテ同一法ニヨリ證明スルコトヲ得。

9. 二平面ノ共通垂線

定理 十一. 平行ナル平面ノ一ツニ垂直

ナル直線ハ他ノ一ツニモ亦垂直ナリ。

平面PトQトハ平行ニシテ,一直線ABガ平面PトAニ於テ垂直ニ交ルトキハ,ABハ亦Qトモ垂直ニ交ル。



[證明] PトQトハ平行ニシテABハPト交ルヲ以テ,Qトモ亦交ル(15頁例題4)。其ノ交點ヲBトス。

ABヲ含ム一平面トP,Qトノ交リヲ夫々AC,BDトスレバ,ACトBDトハ互ニ平行ナリ。

然ルニABハPノ垂線ナルヲ以テ,

∠BAC=直角.

故ニ ∠ABD=直角.

又ABヲ含ム他ノ一平面トP,Qトノ交リヲ夫夫AE,BFトスレバ,同様ニシテ ∠ABF=直角.

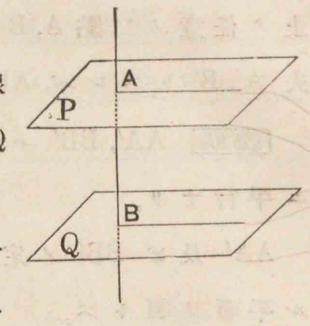
即チABハ平面Q上ノ二直線BD,BFノ各ニ垂直ナリ。

故ニABハ平面Qニ垂直ナリ。

[定義] 平行ナル二平面ノ間ニ在ル共通垂線ノ線分ノ長サヲ其ノ二平面ノ間ノ**距離**ト云フ。

[定理] **十二.** 同一直線ニ垂直ナル二ツノ

平面ハ互ニ平行ナリ。



二平面P,Qガ同一直線ABニ垂直ナルトキハ,P,Qハ互ニ平行ナリ。

[證明] PトQトガ平行ナラズトセバ,其ノ交リノ上ニ一點Mヲ取リ,MA,MBヲ結ブベシ。

然ルトキハMA,MBハ共ニABニ垂直ナリ。即チ一點ヨリABニ二ツノ垂線ガ引カルヽコトトナル,コレ不合理ナリ。

故ニPトQトハ平行ナラザル可カラズ。

10. 正射影

[定義] 一點ノ一平面上ニ投ズル**正射影**トハ其ノ點ヨリ其ノ平面ニ引ケル垂線ノ足ノコトナリ。

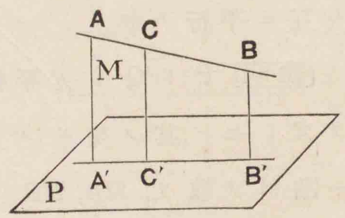
一直線ノ一平面上ニ投ズル**正射影**トハ其ノ直線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ノコトナリ。

[定理] **十三.** 一平面ニ垂直ナラザル一直線ノ其ノ平面上ニ投ズル正射影ハ,其ノ一直線上ノ二點ノ正射影ヲ過ル一直線ナリ。

一平面Pニ垂直ナラザル一直線ヲABトシ,AB

上ノ任意ノ二點A, BノP上ニ投ズル正射影ヲ夫夫A′, B′トスレバ, ABノ正射影ハ直線A′B′ナリ。

證明 AA′, BB′ハ共ニPニ垂直ナルヲ以テ,互ニ平行ナリ。



AA′及ビBB′ノ定ムル平面ヲMトス。

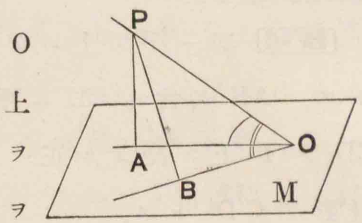
AB上ノ任意ノ一點CヨリAA′ニ平行ニCC′ヲ引ケバ, CC′ハM上ニアリ。而シテA′B′ハAA′ト交ルガ故ニ,之ト平行ナルCC′トモ交ルベシ,ソノ交點ヲC′トス。然ルトキハCC′ハ平面Pニ垂直ニシテ(定理八,系2), Cノ正射影ハC′ナリ。

故ニAB上ノ總テノ點ノ正射影ハ直線A′B′上ニ在リ。

又逆ニA′B′上ノ任意ノ點C′ヨリ平面M上ニ於テA′Aニ平行ナル直線C′Cヲ引ケバ, ABハA′A ト交ルガ故ニ之ト平行ナルC′Cトモ交ルベシ,ソノ交點ヲCトス。然ルトキハCC′ハ平面Pニ垂直ニシテ, C′ハCノ正射影ナリ。故ニA′B′上ノ總テノ點ハAB上ノ點ノ正射影ナリ。

故ニABノP上ニ投ズル正射影ハA′B′ナリ。

定理 **十四.** 一ツノ平面ノ斜線ガ其ノ平面上ニ於テ其ノ足ヲ過ル諸直線トナス角ノ中,其ノ斜線ノ正射影トナス鋭角ガ最小ナリ。



OPヲ平面Mノ斜線, Oヲ其ノ足トス。又M上ニ投ズルOPノ正射影ヲOAトシ, M上ニ於テOヲ過ル他ノ任意ノ直線ヲOBトスルトキハ, ∠POAハ∠POBヨリモ小ナリ。

證明 點Pノ正射影ヲAトシ, OA=OBナラシムレバ△AOPト△BOPトニ於テ,

OA=OB,　OPハ共通,

而シテ　PA<PB.

故ニ　∠AOP<∠BOP.

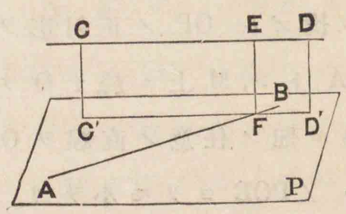
定義 **一直線ト一平面トノナス角**トハ,其ノ平面上ニ投ズル其ノ直線ノ正射影ト,モトノ直線トノナス角ヲイフ。

11. 二直線ノ共通垂線

定理 **十五.** 同一平面上ニアラザル二ツ

ノ直線ニ共通ナル垂線ハ一ツアリ,唯一ツニ限ル。而シテ兩直線上ニ夫々一端ヲ有スル線分ノ中ニテソノ共通垂線ナルモノガ最モ短シ。

[證明] 同一平面上ニアラザル二直線ヲ AB, CD トス。AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 P ヲ作リ, CD ノ P 上ニ投ズル正射影ヲ C′D′ トス。



C′D′ ハ CD ニ平行ナルヲ以テ, AB ニ平行ナラズ。故ニ C′D′ ハ AB ト一ツノ點 F ニ於テ交ル。

サテ定理十三ニヨレバ, C′D′ 上ノ點ハスベテ CD 上ノ或ル點ノ正射影ナリ。依ツテ今 F ヲ CD 上ノ一點 E ノ正射影ナリトスレバ, EF ハ平面 P ニ垂直ナルヲ以テ, EF ハ AB 及ビ C′D′ ニ垂直ナリ。

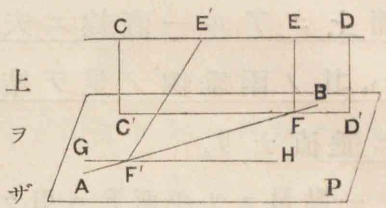
從ツテ EF ハ AB 及ビ CD ニ垂直ナリ。

若シ EF ノ他ニ AB, CD ニ共通ナル垂線 E′F′ アリトセバ, AB, CD トノ交點ヲ夫々 F′, E′ トセヨ。

F′ 及ビ CD ヲ含ム平面ト P トノ交リヲ GH トスレバ, GH ハ CD ニ平行ナリ(定理四)。

從ツテ E′F′ ハ AB ト GH トニ垂直ナルヲ以テ

平面 P ノ垂線ナリ。



然ラバ F′ ハ E′ ノ M 上ニ投ズル正射影ナルヲ以テ C′D′ ノ上ニ在ラザルベカラズ。從ツテ F′ ハ F ト同ジ點ニシテ,ツマリ E′F′ ハ EF ト相一致ス。

故ニ EF ノ他ニ AB, CD ニ共通ナル垂線ナシ。

次ニ同ジ圖ニ於テ E′, F′ ヲ夫々 CD, AB 上ノ任意ノ二點トスレバ E′F′ ガ全ク EF ト相合セザル限リ,上述ノ理ニヨリ E′F′ ハ平面 P ニ垂直ナラザルヲ以テ, E′F′ ハ E′ ヨリ平面 P ニ引ケル垂線ヨリモ大ナリ。

而シテ E′ ヨリ P ニ引ケル垂線ハ EF ニ等シ。

故ニ EF ハ E′F′ ヨリ小ナリ。

即チ EF ハ AB, CD 上ニ夫々一端ヲ有スル線分中ニテ最モ短キモノナリ。

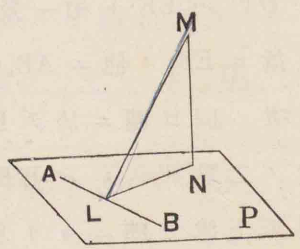
[定義] 二直線ノ間ニアル共通垂線ノ線分ノ長サヲ其ノ二直線ノ間ノ距離トイフ。

12. 三垂線ノ定理

[定理] 十六. 一點ヨリ一平面及ビ其ノ平

面上ニアル一直線ニ夫々垂線ヲ引クトキハ,其ノ兩垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ前ノ直線ニ垂直ナリ。

一點Mヨリ平面Pニ引ケル垂線ノ足ヲNトシ,又MヨリP上ノ一直線ABニ引ケル垂線ノ足ヲLトス。然ルトキハ直線NLハABニ垂直ナリ。



[證明] ABハ相交ル二直線MN及ビMLニ共ニ垂直ナリ。故ニABハMN,MLノ定ムル平面LMNニ垂直ナリ。從ツテABハ平面LMN上ノ直線NLニ垂直ナリ。

同ジ圖ヲ用ヒ,同樣ノ論法ニヨリ次ノ系ヲ得。

[系] 1. MNガ平面Pニ垂直,NLガ直線ABニ垂直ナラバ,MLハ直線ABニ垂直ナリ。

[系] 2. MLガ直線ABニ垂直,LNガP上ニテ直線ABニ垂直ニシテ,MNガ直線LNニ垂直ナラバ,MNハ平面Pニ垂直ナリ。

[系] 3. 平面外ノ一點ヲ過リ其ノ平面ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

[注意] 定理十六及ビ系1,系2ヲ**三垂線ノ定理**ト云フ。

例題

1. 二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。又三定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

2. 相交ル二平面ノ間ニアル一點ヨリ此ノ二平面ニ引ケル二垂線ノ足ヲ結ブ直線ハ其ノ二平面ノ交線ニ垂直ナリ。

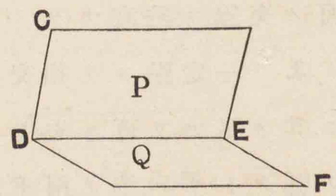
3. 一定點ヨリ相交ル二平面ノ各ニ垂線ヲ引キ,其ノ足ヨリ更ニ夫々其ノ二平面ノ交線ニ垂線ヲ引クトキハ,後ノ兩垂線ハ二平面ノ交線上ノ一點ニ於テ出會フ。

4. 一點ヨリ一平面ニ引ケル二ツノ斜線ノ中,其ノ正射影ノ大ナルモノガ他ヨリ大ナリ。其ノ正射影ガ相等シケレバ其ノ二ツノ斜線モ相等シ。

第四章 二面角及ビ多面角

13. 二面角

定義 相交ル二平面ハ**二面角**ヲ作ルト云ヒ,其ノ各ノ平面ヲ二面角ノ**面**ト云ヒ,其ノ交線ヲ二面角ノ**稜**ト云フ。



二面角ヲ表スニハ其ノ二面ノ上ニ夫々一點ヅヽヲトリ,其ノ記號ノ間ニ稜上ノ二點ノ記號ヲ挾ミテ之ヲ呼ブ。

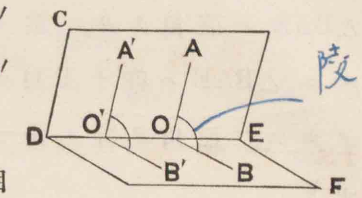
例ヘバ二面角 CDEF トイフガ如シ。

然レドモ唯一ツノ二面角ノミガ存在スルトキハ其ノ稜ノ上ノ任意ノ二點ノミヲ以テ之ヲ呼ブコトアリ。

例ヘバ二面角 DE トイフガ如シ。

定理 十七. 一ツノ二面角ニ於テ,其ノ稜上ノ任意ノ一點ヨリ各面上ニ於テ夫々其ノ稜ニ垂直ニ引キタル直線ノナス角ハ一定ナリ。

二面角 CDEF ニ於テ,稜 DE 上ノ任意ノ二點 O, O′



ヨリ DE ニ垂直ニ AO, A′O′ ヲ面 CDE 上ニ; BO, B′O′ ヲ面 FED 上ニ引クトキ,∠AOB ト ∠A′O′B′ トハ相等シ。

證明 ∠AOB, ∠A′O′B′ ニ於テ, AO, A′O′ 及ビ BO, B′O′ ハ夫々平行ニシテ,且ツ稜 DE ノ同ジ側ニアリ。

故ニ　∠AOB＝∠A′O′B′.　(定理六)

定義 二面角ノ大サヲ計ルニハ其ノ稜上ノ一點ヨリ各面上ニ於テ夫々其ノ稜ニ引キタル二ツノ垂線ノナス角ノ大サヲ以テス。

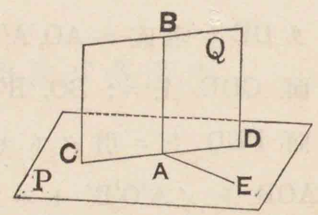
定義 二ツノ平面ノナス二面角ガ直角ナルトキハ,其ノ二ツノ平面ハ互ニ**垂直ナリ**ト云フ。

定理 十八. 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ前ノ平面ニ垂直ナリ。

AB ヲ點 A ニ於ケル平面 P ノ垂線トシ, AB ヲ含ム任意ノ平面ヲ Q トスレバ, Q ハ P ニ垂直ナリ。

證明 P ト Q トノ交リヲ CD トス。P 上ニテ A ヲ過リテ CD ニ垂直ナル直線 AE ヲ引クトキハ,假定ニヨリ AB ガ平面 P ニ垂直ナルヲ以テ

∠BAE ハ直角ナリ。然ルニ ∠BAE ハ卽チ P,Q ノナス二面角ヲ計ル角ナリ。



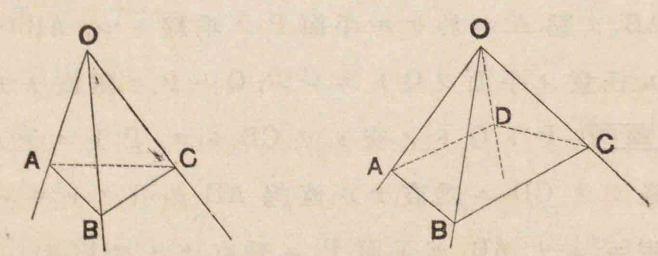
故ニ P,Q ハ互ニ垂直ナリ。

系 1. 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ,其ノ交リノ上ノ一點ヲ過リ一方ノ平面ニ垂直ナル直線ハ他ノ平面ニ含マル。

系 2. 相交ル二平面ガ各第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ,前ノ二平面ノ交線ハ第三ノ平面ニ垂直ナリ。

14. 多面角

定義 三ツ以上ノ平面ガ同一ノ點ヲ過リ,且ツ二ツヅヽ順次ニ相異ル直線ニ於テ交ルトキハ,ソレラノ平面ハ**多面角**又ハ**立體角**ヲ作ルト云フ。



其ノ同一ノ點ヲ多面角ノ**頂點**ト云ヒ,其ノ平面ノ順次ニ相交ル交線ヲ多面角ノ**稜**ト云フ。又相隣レル二稜ノナス角ヲ其ノ多面角ニ於ケル**平面角**ト云フ。

多面角ハ之ヲ作ル平面ノ數ニ從ヒテ**三面角,四面角**等ト稱ス。

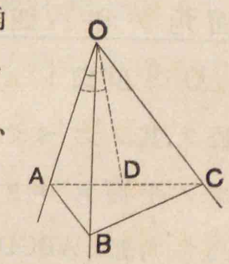
前ノ圖ニ於ケル多面角ヲ表スニハ夫々

O−ABC, O−ABCD 等トス。

多面角ノ總テノ稜ガ一平面ト交リ,之ニヨリテ生ゼル截リ口ガ凸多角形ナルトキハ,其ノ多面角ヲ**凸多面角**ト云フ。

定理 **十九.** 三面角ニ於ケル一ツノ平面角ハ他ノ二ツノ平面角ノ和ヨリ小ナリ。

三面角 O−ABC ニ於テ,平面角 AOB, BOC, COA ノ中何レノ一ツヲ取ルモ殘リノ二ツノ和ヨリ小ナリ。



證明 今例ヘバ

$$\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$$

ナルコトヲ證明セントスルニ,∠AOC ガ他ノ二角ノ一方又ハ兩方ヨリモ大ナラザル場合ハ特ニ證

明ヲ要セザルヲ以テ,ココニハ$\angle AOC$ガ他ノ二角ノ何レヨリモ大ナルモノトシテ證明スレバ足ル。

平面AOC上ニ$\angle AOD$ヲ$\angle AOB$ニ等シクトリ,一ツノ直線トOA, OD, OCトノ交點ヲA, D, Cトス。OBヲODニ等シク取リ, AB, BCヲ結ベバ,

$$\triangle AOB \equiv \triangle AOD.$$

故ニ　$AB = AD$.　従ッテ　$DC < BC$.

依ッテ二ツノ三角形BOC, DOCニ於テ

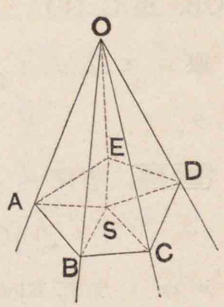
$$\angle DOC < \angle BOC.$$

コノ不等式ト

$$\angle AOD = \angle AOB$$

トヲ邊々相加フレバ今證明セントスル式ヲ得。

定理 二十. 一ツノ凸多面角ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。



Oヲ頂點トスル凸多面角ニ於テ,其ノスベテノ稜ト交ル一ツノ平面ニヨリテノ截リ口ヲ凸多角形ABCDEトス。然ルトキハ平面角$\angle AOB$, $\angle BOC$等ノスベテノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。

證明 多角形ABCDE内ニ任意ノ一點Sヲトリ, Sヲ頂點A, B, C, D, Eト夫々結ブベシ。然ルトキハSヲ共通ノ頂點トシ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トスル三角形ノ數ト, Oヲ共通ノ頂點トシ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トスル三角形ノ數トハ相等シキヲ以テ,此ノ二組ノ三角形ノ内角ノ和ハ相等シ。

然ルニ　$\angle OAB + \angle OAE > \angle BAE$.　(定理十九)

即チ　$\angle OAB + \angle OAE > \angle SAB + \angle SAE$.

B, C, D, E等ノ點ニ於テモ夫々同樣ノ關係アリ。

故ニOヲ頂點トスル總テノ三角形ノ底角ノ和ハ, Sヲ頂點トスル總テノ三角形ノ底角ノ和ヨリ大ナリ。

故ニOニ於ケル總テノ平面角ノ和ハ, Sニ於ケル總テノ角ノ和ヨリ小ナリ,即チ四直角ヨリ小ナリ。

例題

1. 二面角ノ稜上ノ一點ヲ過リ各面上ニテ夫夫稜ノ一方ノ向キトαナル角ヲナス直線ヲ引クトキハ,其ノ二直線ノナス角ハ稜上ニトリタル最

初ノ點ノ位置ニハ無關係ニシテ,又其ノ角ハ α ガ $90°$ ナルトキニ最大トナル。

2. A, B ハ二面角ノ二ツノ面ノ各ノ上ニ夫々一ツヅヽ在ル點ナリトス,今其ノ二平面ノ交リノ上ニ一點 P ヲ求メ PA+PB ガ最小トナル樣ニセヨ。

3. 與ヘラレタル四面角ヲ一ツノ平面ニテ截リ,其ノ截リ口ヲ平行四邊形ナラシメヨ。

4. 三面角ノ一ツノ稜ニ於ケル二面角ガ直角ナルトキハ,コノ三面角ヲ其ノ何レノ稜ニ垂直ナル平面ニテ截ルモ,ソノ截リ口ハ直角三角形ナリ。

第二篇

多面體

第一章 角壔及ビ角錐

15. 多面體

定義 **多面體**トハ若干ノ平面ニテ圍マレタル立體ナリ。(ソノ平面ノ數ハ四ツヨリ少カラズ。)

多面體ヲ圍ム平面ノ數ガ四,五,六等ナルニ從ツテ,其ノ多面體ヲ**四面體,五面體,六面體**等ト稱ス。

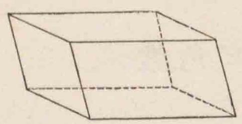
多面體ヲ界スル平面ノ限ラレタル部分(多角形)ヲ多面體ノ**面**ト云ヒ,面ト面トノ交線ヲ多面體ノ**稜**ト云ヒ,稜ト稜トノ交點ヲ多面體ノ**頂點**ト云フ。

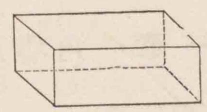
同一ノ面上ニ在ラザル二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**ト云フ。

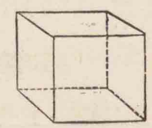
多面體ノ何レノ面ヲ延長スルモ其ノ平面ガモトノ多面體ヲ截ラザルトキハ,之ヲ**凸多面體**ト云フ。(本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズ。)

平行六面體トハ三双ノ相對スル面ガ夫々平行ナル六面體ナリ。

各ノ面ガ矩形ナル平行六面體ヲ**直六面體**ト云ヒ,各ノ面ガ正方形ナル直六面體ヲ**立方體**又ハ**正六面體**ト云フ。


平行六面體


直六面體


立方體

16. 角壔

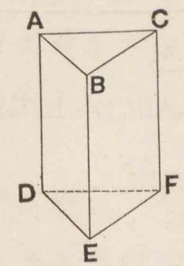
定義 **角壔トハ一直線ニ平行ナル若干ノ平面及ビ其ノ直線ト交ル二ツノ平行ナル平面ニヨリテ圍マレタル多面體ナリ。**

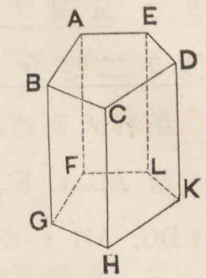
其ノ一直線ニ平行ナル面ヲ**側面**ト云ヒ,其ノ一直線ト交ル二ツノ平行ナル面ヲ角壔ノ**底面**トイフ。側面ノ交リヲ**側稜**ト云ヒ,二ツノ底面間ノ距離ヲ其ノ角壔ノ**高サ**ト云フ。

角壔ノ側稜ガ其ノ底面ニ垂直ナルトキハ之ヲ**直角壔**ト云ヒ,垂直ナラザルトキハ之ヲ**斜角壔**ト云フ。

角壔ハ其ノ側面ノ數ガ三,四,五等ナルニ從ツテ,之ヲ**三角壔**,**四角壔**,**五角壔**等ト名ヅク。

右ノ圖ハ三角壔及ビ五角壔ニシテ之ヲ表スニハ夫々 $ABC-DEF$ 及ビ $ABCDE-FGHKL$, 或ハ $ABC-D$ 及ビ $ABCDE-F$ 等ト記ス。

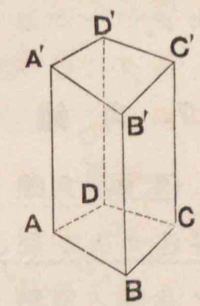




角壔ヲ其ノ側稜ニ垂直ニシテ底面ヲ截ラザル一ツノ平面ニヨリテ截リタル截リ口ヲ其ノ角壔ノ**直截面**ト云フ。

定理 **二十一.** 角壔ノ側面ハ何レモ平行四邊形ニシテ,其ノ二ツノ底面ハ合同ナル多角形ナリ。

角壔 $ABCD-A'B'C'D'$ ニ於テ,側面 $ABB'A'$, $BCC'B'$ 等ハ何レモ平行四邊形ニシテ,又其ノ二ツノ底面 $ABCD$, $A'B'C'D'$ ハ合同ナル多角形ナリ。

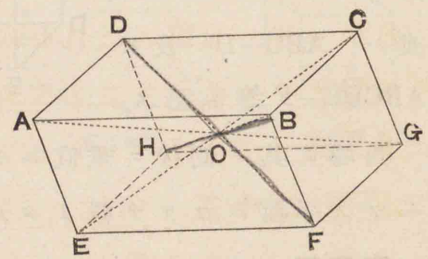


證明 容易ナレバ學生自ラ其ノ證明ヲ試ミルベシ。

定理 **二十二.** 平行六面體ニ於テ三双ノ相對スル面ハ夫々合同ナル平行四邊形ナ

リ。又四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ過リ,各他ヲ二等分ス。

平行六面體 ABCD−EFGH ニ於テ,三双ノ相對スル面 AC ト EG, AF ト DG, AH ト BG トハ夫々合同ナル平行四邊形ニシテ,又四ツノ對角線 AG, BH, CE, DF ハ皆同一ノ點ヲ過リ各他ヲ二等分ス。

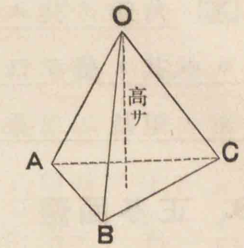


[證明] 容易ナレバ學生自ラ其ノ證明ヲ試ミルベシ。

17. 角錐

[定義] **角錐**トハ一ツノ多角形ト,其ノ多角形ノ各邊ヲ夫々底邊トシ其ノ多角形ノ平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル若干ノ三角形トニヨリテ圍マレタル一ツノ多面體ナリ。

初メノ多角形ヲ其ノ角錐ノ**底面**ト云ヒ,同一點ヲ共有スル三角形ヲ其ノ**斜面**,總テノ斜面ガ共有スル同一點ヲ其ノ**頂點**,相隣レル斜面ノ交リヲ**斜稜**ト云フ。



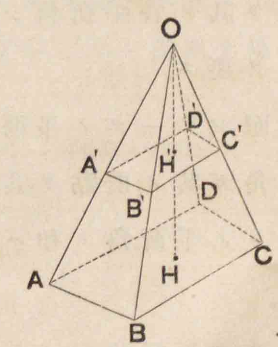
角錐ノ頂點ヨリ底面ニ引ケル垂線ノ長サヲ其ノ**高サ**ト云フ。

角錐ハ其ノ底面ガ三角形,四角形等ナルニ從ツテ之ヲ**三角錐**,**四角錐**等ト云フ。

上ノ圖ハ三角錐ニシテ,之ヲ O−ABC ト記ス。

[定理] **二十三.** 角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニヨリテ截ルトキハ,各ノ斜稜及ビ高サハ同一ノ比ニ分タル。又其ノ截リ口ハ底面ニ相似ナル多角形ナリ。

下ノ圖ニ於テ,角錐 O−ABCD ノ底面ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口ヲ A′B′C′D′ トシ,又 O ヨリ底面ニ引ケル垂線 OH ト其ノ截リ口トノ交點ヲ H′ トスレバ, OA, OB, OC, OD, OH ハ夫々 A′, B′, C′, D′, H′ ニ於テ同一ノ比ニ分タル。又多角形 ABCD ト A′B′C′D′ トハ互ニ相似ナリ。



[證明] 容易ナレバ學生自ラ其ノ證明ヲ試ミヨ。

系 角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其ノ截リ口ノ面積ハ,頂點ヨリ其ノ截リ口マデノ距離ノ二乘ニ正比例ス。

18. 正多面體

定義 正多面體トハ,其ノ總テノ面ガ全ク相等シキ正多角形ニシテ,且ツ其ノ總テノ多面角ガ全ク相等シキ多面體ナリ。

定理 二十四. 正多面體ハ次ノ五種ニ限ル。

正四面體, 正六面體, 正八面體,
正十二面體, 正二十面體。

證明 正多面體ノ多面角ハ何レモ合同ニシテ且ツ其ノ各平面角ハ正多角形ノ一ツノ角ナルコトヲ要ス。

而シテ一ツノ多面角ヲ作ルニハ三ツ以上ノ平面角ガ其ノ頂點ヲ共有スルコトヲ要シ,而シテソレラノ平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナルコトヲ要ス。

サテ正三角形ノ一角ハ$\frac{2}{3}$直角ナルガ故ニ,正三角形ヲ面トシテ作リ得ベキ正多面體ノ多面角ハ

三面角,四面角又ハ五面角ニ限ル。

又正方形ノ一角ハ1直角,正五角形ノ一角ハ$\frac{6}{5}$直角ナルガ故ニ,正方形又ハ正五角形ヲ以テ作リ得ベキ正多面體ノ多面角ハ各三面角ニ限ル。

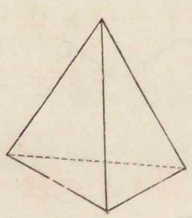
次ニ邊數ガ六以上ナル正多角形ノ一角ハ$\frac{4}{3}$直角以上ナルガ故ニ,最早之ヲ以テ多面角ヲ作ルコトヲ得ズ。

故ニ正多面體ノ一ツノ多面角ヲナス面ハ次ノ五種ニ限ル。

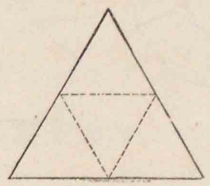
(1) 三ツノ正三角形, (2) 三ツノ正方形,
(3) 四ツノ正三角形, (4) 三ツノ正五角形,
(5) 五ツノ正三角形。

注意 此ノ五種ノ各ニ對應スル正多面體ハ實際ニ作成スルコトヲ得。例ヘバ次ノ展開圖ヲ厚紙ノ上ニ畫キ之ヲ點線ニ沿ヒテ折リ曲グレバ其ノ模型ヲ得ベシ。

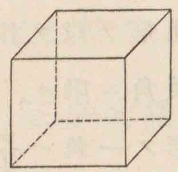
(1) 正四面體



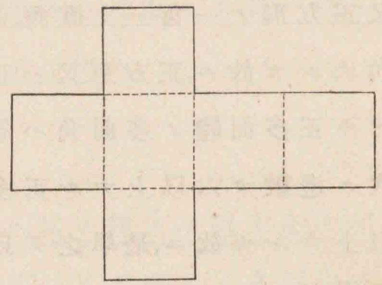
(1′) 正四面體ノ展開圖



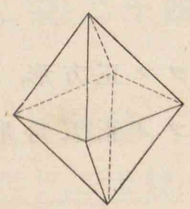
(2) 正六面體(立方體)



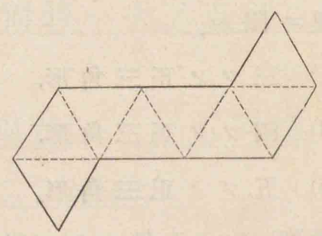
(2′) 正六面體ノ展開圖



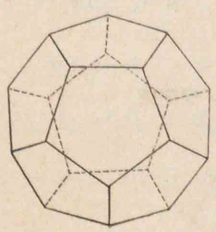
(3) 正八面體



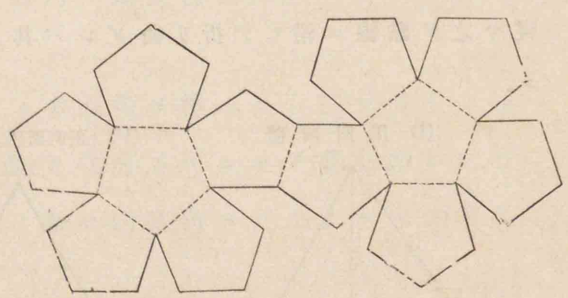
(3′) 正八面體ノ展開圖



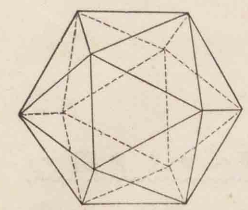
(4) 正十二面體



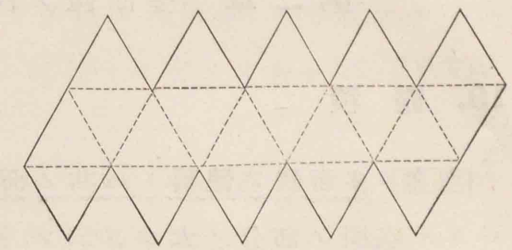
(4′) 正十二面體ノ展開圖



(5) 正二十面體



(5′) 正二十面體ノ展開圖



例　題

1. 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ平方ノ和ハ十二ノ稜ノ平方ノ和ニ等シ。

2. 底面ガ一邊 $2m$ ナル正三角形ニシテ,高サガ $3m$ ナル直角壔ノ全表面積ヲ求メヨ。

3. 直六面體ノ一ツノ頂角ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ長サガ夫々 a 米, b 米, c 米ナルトキ,其ノ直六面體ノ對角線ノ長サヲ問フ。

4. 直角壔ノ側稜ノ長サヲ h, 全側面ノ面積ヲ S, 底面ノ周ノ長サヲ p ナル數ニテ表ストキハ,

$$S=ph.$$

5. 角錐ノ斜面ノ高サガスベテ l ニシテ,又其ノ底面ノ周ガ p, 全斜面ノ面積ガ S ナルトキハ,

$$S=\frac{1}{2}pl.$$

第二章　多面體ノ體積

19. 體積

定義　多面體ノ體積トハ其ノ面ニヨリテ圍マレタル空間ノ部分ノ大サヲ云フ。

體積ヲ計ルニハ長サノ單位ヲ一稜トスル立方體ノ體積ヲ單位トシテ用フ。

合同ナル多面體ノ體積ハ相等シキモノトス。

又多面體AトBトガ合同,CトDトガ合同ナルトキハ,多面體A±CトB±Dトハ其ノ形ヲ異ニスル場合ト雖,矢張其ノ體積ハ相等シキモノトス。

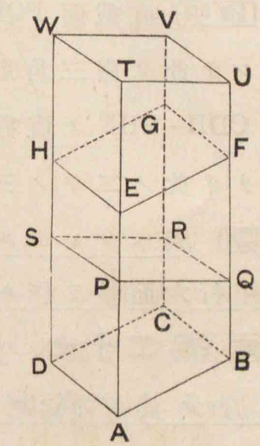
20. 角壔ノ體積

定理　**二十五.** 斜角壔ノ體積ハ其ノ直截面ヲ底面トシ其ノ側稜ニ等シキ高サヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シ。

次ノ圖ニ於テ,斜角壔ABCD−EFGHノ直截面ヲPQRSトセバ,ABCD−EFGHノ體積ハPQRSヲ底面トシ其ノ側稜AEニ等シキ高サヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シ。

證明　稜AEヲ延長シ,ソノ上ニPT=AEナル如キ點Tヲトリ,Tヲ過リテPQRSニ平行ナル平面ヲ作リ,各側面ノ延長トノ交リヲ夫々TU,UV,VW,WTトス。

然ルトキハPQRS−TUVWハ直角壔ニシテ,其ノ側稜ハAEニ等シク,其ノ底面ハPQRSナリ。



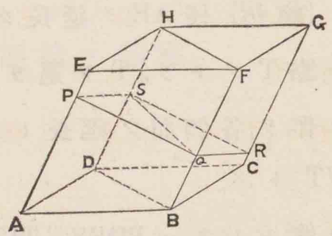
サテ多面體ABCD−PQRSト多面體EFGH−TUVWトハ總テノ相對應スル稜及ビ角ガ夫々相等シキヲ以テ,此ノ二ツノ多面體ハ全ク相等シ。

故ニ此ノ二ツノ多面體ニ夫々同ジ多面體PQRS−EFGHヲ加ヘタルモノハ相等シ,卽チ斜角壔ABCD−EFGHハ直角壔PQRS−TUVWニ等シ。

定理　**二十六.** 一ツノ平行六面體ヲ其ノ一双ノ相對スル稜ヲ含ム平面ニヨリテ截レバ,相等シキ體積ヲ有スル二ツノ三角壔ヲ得。

平行六面體ABCD−EFGHヲ其ノ一双ノ相對ス

ル稜 BF, DH ヲ含ム平面ニ依リテ二ツノ三角壔 ABD－EFH, CDB－GHF ニ分ツトキハ,此ノ二ツノ三角壔ノ體積ハ相等シ。



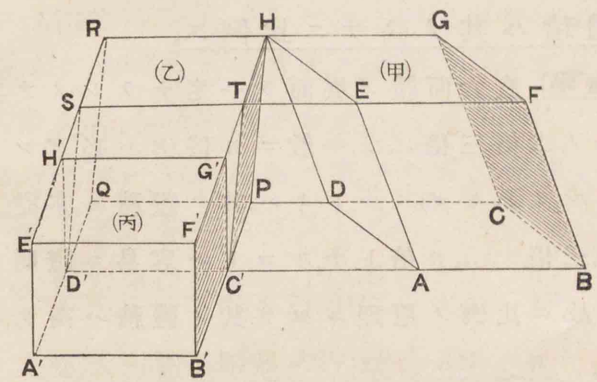
證明 直截面 PQRS ヲ作レバ, △PQS≡△RSQ. 而シテ此ノ兩三角形ハ夫々三角壔 ABD－EFH 及ビ CDB－GHF ノ直截面ナリ。故ニ定理二十五ニヨリテ此ノ二ツノ三角壔ノ體積ハ相等シ。

系 與ヘラレタル三角壔ノ二倍ノ體積ヲ有スル平行六面體ヲ作ルコトヲ得。

定理 **二十七.** 平行六面體ト直六面體トニ於テ其ノ高サガ相等シク,且ツ其ノ底面ノ底邊及ビ高サガ夫々相等シケレバ,其ノ體積ハ相等シ。

證明 平行六面體 ABCD－EFGH (甲) ノ稜 GH ヲ延長シ,ソノ上ニ R ヲトリ, HR＝GH ナラシム。H 及ビ R ヲ過リテ夫々 HR ニ垂直ナル平面ヲ作リ,(甲) ノ GH ト平行ナル側稜ノ延長ト交ラシメテ,(甲) ト等底等高ナル一ツノ平行六面體 $D'C'PQ$－STHR (乙) ヲ作ル。

然ルトキハ (乙) ノ稜 HR ハ GH ニ等シク,又其ノ面 $C'H$ ハ (甲) ノ稜 GH ニ垂直ナル直截面ナルヲ以テ, (甲) ト (乙) トハ相等シキ體積ヲ有ス (定理二十五)。



次ニ PC' 及ビ之ニ平行ナル (乙) ノ側稜ヲ延長シ $PC'=C'B'$ ナラシメ, C' 及ビ B' ヲ過リ $C'B'$ ニ垂直ナル平面ヲ作ルトキハ,(乙) ト等底等高ナル直六面體 $A'B'C'D'$－$E'F'G'H'$ (丙) ヲ得。

(丙) ノ稜 $C'B'$ ハ (乙) ノ稜 PC' ニ等シク,又其ノ面 $C'H'$ ハ PC' ニ垂直ナル (乙) ノ直截面ニ等シ。故ニ (乙) ト (丙) トハ相等シキ體積ヲ有ス (定理二十五)。

而シテ (丙) ノ面 $A'C'$ ト (甲) ノ面 AC トハ明カニ等底等高ニシテ,之ヲ夫々 (丙) 及ビ (甲) ノ底面ト見做セバ兩體ノ高サノ相等シキコトモ明カナリ。

故ニ平行六面體 ABCD－EFGH ノ體積ハ,之ト相

等シキ底面及ビ相等シキ高サヲ有スル直六面體 A'B'C'D'−E'F'G'H' ノ體積ニ等シ。

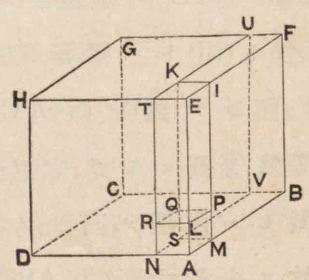
定理 二十八. 底面ガ一定ナル直六面體ノ體積ハ其ノ高サニ比例ス。

證明 直六面體ノ底面ヲ一定ナラシメテ其ノ高サヲ二倍,三倍,……,一般ニ n 倍(n ハ必ズシモ整數ナルヲ要セズ)スルトキハ,其ノ體積モ亦從ツテ二倍,三倍,……,n 倍トナルコトハ容易ニ證明セラル。故ニ比例ノ原理ニヨリ其ノ體積ハ高サニ比例ス。

此ノ定理ハマタ次ノ如ク換言セラル。

系 二ツノ直六面體ノ底面ガ全ク相等シキトキハ,其ノ體積ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シ。

定理 二十九. 直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ長サヲ表ス數ノ積ニ等シ。



直六面體 ABCD−EFGH ノ一ツノ頂點 A ニ於テ出會フ三ツノ稜 AE, AB, AD ノ長サヲ夫々 l, m, n トスレバ,此ノ直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ lmn ナリ。

證明 AE, AB, AD 又ハ其ノ延長上ニ AL, AM, AN ヲ夫々單位ノ長サニ等シク取リ,先ヅ N ヲ過リテ ABFE ニ平行ナル平面 NVUT ヲ作リ,次ニ M ヲ過リテ AETN ニ平行ナル平面 MIKS ヲ作リ,又 L ヲ過リテ AMSN ニ平行ナル平面 LPQR ヲ作ル。

然ルトキハ同ジ底面ヲ有スル直六面體ノ體積ハ其ノ高サニ比例スルヲ以テ,

$$\frac{\text{直六面體 ABFE−DCGH}}{\text{直六面體 ABFE−NVUT}}=\frac{AD}{AN}=\frac{n}{1},$$

$$\frac{\text{直六面體 ABFE−NVUT}}{\text{直六面體 AMIE−NSKT}}=\frac{AB}{AM}=\frac{m}{1},$$

$$\frac{\text{直六面體 AMIE−NSKT}}{\text{直六面體 AMPL−NSQR}}=\frac{AE}{AL}=\frac{l}{1}.$$

此ノ三ツノ比ノ相乘比ヲ作レバ,

$$\frac{\text{直六面體 ABFE−DCGH}}{\text{直六面體 AMSN−LPQR}}=\frac{lmn}{1}.$$

然ルニ直六面體 AMSN−LPQR ハ長サノ單位ヲ一稜トスル立方體ナルヲ以テ,其ノ體積ハ 1 ナル數ニヨリテ表サル。依ツテ直六面體 ABFE−DCGH ノ體積ハ lmn ナル數ニヨリテ表サル。

附言. 此ノ定理ヲ次ノ如ク略言スルコトアリ。
直六面體ノ體積ハ其ノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ積ニ等シ。

同様ノ略言ヲ用フレバ「直六面體ノ體積ハ其ノ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シ」トモイフコトヲ得。

任意ノ平行六面體ハ定理二十七ニヨリテ之ヲ等底等高ニシテ等體積ナル直六面體ニ直シ得ルガ故ニ,ソノ體積ハ矢張底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シ。

三角壔ハ定理二十六系ニヨリテ一ツノ平行六面體ノ半分ト考フルコトヲ得ルヲ以テ,上記ノ結果ヨリシテ,其ノ體積ハ矢張底面ト高サトノ積ニ等シキコトヽナル。

任意ノ角壔ハ之ヲ幾ツカノ等高ナル三角壔ニ分チテ考フレバ,結局矢張其ノ體積ハ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シキコトヽナル。

依ッテ次ノ定理ヲ得。

定理 三十. 角壔ノ體積ハ其ノ底面ノ面積ト高サトノ積ニ等シ。

定義 二ツノ多面體ニ於テ各ノ體積ノ數値(體積ヲ表ス數)ガ相等シキトキハ,タトヘ其ノ一方ヲ初等幾何學的ニ變形シテ他方ノモノトナスコトヲ得ザル場合ト雖,兩者ノ體積ハ相等シキモノトス。

依ッテ次ノ系ヲ得。

系 1. 等底等高ナル直六面體ノ體積ハ相等シ。

系 2. 等底等高ナル平行六面體ノ體積ハ相等シ。

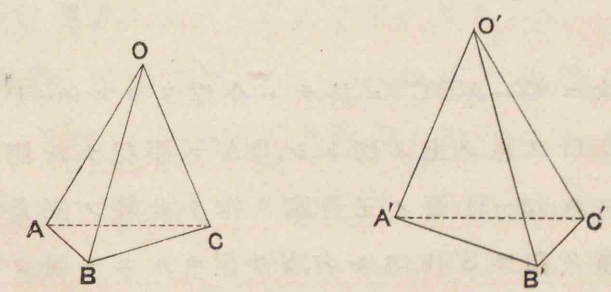
系 3. 等底等高ナル角壔ノ體積ハ相等シ。

(底面ナル多角形ノ邊數ガ相等シカラザル場合ヲモ含ム。)

21. 角錐ノ體積

定理 三十一. 二ツノ三角錐ガ等底ニシテ且ツ等高ナルトキハ其ノ體積ハ相等シ。

三角錐 O−ABC, O′−A′B′C′ ニ於テ,其ノ底面 ABC, A′B′C′ ガ等積ニシテ且ツ之ニ對スル高サモ相等シキトキハ,兩三角錐ノ體積ハ相等シ。

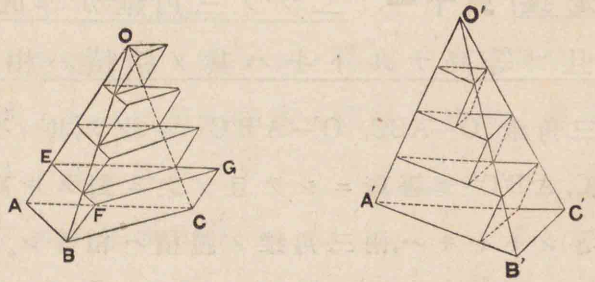


證明 各三角錐ノ側稜 OA, O′A′ ヲ夫々 n 等分シ,其ノ分點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ヲ作リテ

各角錐ヲ截レバ,相對應スル截リ口ガ夫々等積ナルコトハ定理二十三ヨリシテ容易ニ證明セラル。

今 $O-ABC$, $O'-A'B'C'$ ノ體積ヲ夫々 V, V' トシ,假リニ $V>V'$ ナリトセヨ。

先ヅ $O-ABC$ ニ於テ其ノ底面 ABC 及ビ今作リタル$(n-1)$個ノ截リ口ヲ夫々下ノ底トシ,OA ニ平行ナル稜ヲ有スル n 箇ノ三角壔ヲ作リ,此等ノ三角壔ノ體積ノ和ヲ S トスレバ, $S>V$ ナルコト明カナリ。



次ニ $O'-A'B'C'$ ニ於テハ今作リタル$(n-1)$箇ノ截リ口ヲ悉ク上ノ底トシ,$O'A'$ ニ平行ナル側稜ヲ有スル $(n-1)$ 箇ノ三角壔ヲ作リ,此等ノ三角壔ノ體積ノ和ヲ S' トスレバ,$V'>S'$ ナルコト明カナリ。

依ツテ　　　$S-S'>V-V'$

ナル關係ヲ得。

然ルニ此等ノ三角壔ハ兩三角錐ニ於テ上ヨリ順次ニ第一ハ第一ト等シク,第二ハ第二ト等シク,以下同樣ニ第$(n-1)$ハ第$(n-1)$ト等シ。故ニ $S-S'$ ハ $O-ABC$ ノ方ニアル最下ノ三角壔 $ABC-EFG$ ニ等シ。依ツテ

三角壔 $ABC-EFG>V-V'$.

サテ OA ヲ等分スル數 n ガ大ナレバ大ナル程三角壔 $ABC-EFG$ ノ高サガ小トナルヲ以テ,此ノ三角壔ノ體積ハ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得ベキモノナリ。然ルニ上ノ結果ニヨレバ其ハ一定量 $V-V'$ ヨリ大ナリトイフ,コレ不合理ナリ。

故ニ $V>V'$ ナルコトヲ得ズ。

又同樣ノ理由ニヨリ $V<V'$ ナルコトヲ得ズ。

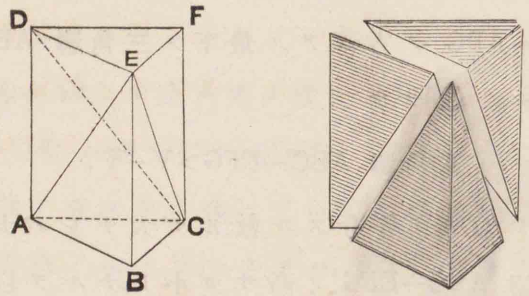
依ツテ是非トモ $V=V'$ ナラザル可カラズ。

定理 **三十二.** 一ツノ三角壔ハ相等シキ體積ヲ有スル三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得。

證明 三角壔$ABC-DEF$ヲ二ツノ平面ACE, DCEニテ截レバ,三ツノ三角錐$E-ABC$, $E-ACD$, $E-FDC$ヲ得。

而シテ三角錐$E-ACD$ト$E-FDC$トニ於テ,高サ

ハ何レモEヨリ平面ACFDニ至ル距離ニシテ,又其ノ底面ACD, FDCハ相等シ。故ニコノ二ツノ



三角錐ノ體積ハ相等シ。

次ニ三角錐E—ABCトE—CDF卽チC—DEFトニ於テ,高サハ何レモ平面ABCトDEFトノ間ノ距離ニシテ,又其ノ底面ABC, DEFハ相等シ。故ニコノ二ツノ三角錐モ亦相等シキ體積ヲ有ス。

カクシテ三角壔ABC—DEFハ相等シキ體積ヲ有スル三ツノ三角錐ニ分タル。

系 1. 三角錐ノ體積ハ其ノ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

系 2. 任意ノ角錐ノ體積ハ其ノ底面ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

系 3. 等底等高ナル角錐ノ體積ハ相等シ。

試

22. 多面體ノ體積

一般ニ任意ノ多面體ノ體積ヲ求ムルニハ,先ヅ若干ノ適當ナル平面ニヨリテ其ノ多面體ヲ幾ツカノ角壔及ビ角錐ニ分チ,其ノ各ノ體積ヲ上述ノ理ニヨリテ求メ,コレラヲ合計シテ全體積ヲ得ルモノトス。

例　題

1. 一稜ノ長サa糎ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ。

2. 一邊ノ長サa米ナル正六角形ヲ底面トシ高サ$2a$米ナル六角錐ノ側面積及ビ體積ヲ求メヨ。但シ頂點ヨリ底面ニ引ケル垂線ノ足ガ底面ノ外接圓ノ中心ニアルモノトス。

3. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ之ニ對スル稜ヲ其ノ二面角ノ兩面ノ面積ノ比ニ分ツ。

定義　角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截リタルトキ,其ノ截リ口ト底面トノ間ニアル部分ヲ**截頭角錐**トイフ。

其ノ截リ口トモトノ底面トヲトモニ其ノ截頭角錐ノ**底面**トイヒ,兩底面ノ間ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。

4. 截頭角錐ノ體積ヲ V, 其ノ兩底面積ヲ夫夫 a, b 又其ノ高サヲ h トスレバ,

$$V=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b).$$

5. 正四面體內ノ任意ノ一點ヨリ其ノ四面ニ至ル距離ノ和ハ一定ナリ。

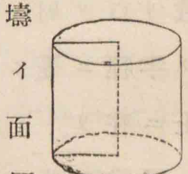
第三篇

曲面體

第一章　直圓壔及ビ直圓錐

23. 直圓壔

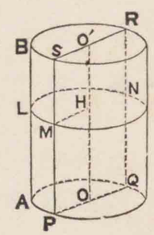
定義　**直圓壔**トハ矩形ヲ其ノ一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周回轉セシムル時生ズル立體ナリ。



回轉ノ軸トシタル邊ヲ其ノ直圓壔ノ**軸**トイヒ,之ニ對スル邊ヲ**母線**トイフ。母線ノ回轉ニ依ツテ生ズル曲面ヲ直圓壔ノ**側面**,軸ニ隣レル二邊ノ回轉ニヨリテ生ズル二ツノ圓ヲ**底面**ト云ヒ,其ノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**ト云フ。又軸ノ長サヲ直圓壔ノ**高サ**ト云フ。

定理　**三十三.** 直圓壔ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截リタル截リ口ハ底面ト合同ナル圓ナリ。

APQ−BSR ヲ直圓壔, OO′ ヲ其ノ軸, LMN ヲ底面 APQ 又ハ BSR ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口



トセバ, LMN ハ底面 APQ 又ハ BSR ト合同ナル圓ナリ。

[證明] 截リ口ノ周上ノ任意ノ一點ヲM, 截リ口ト軸トノ交リヲHトシ, 又 M ヲ過ル母線ヲ PMS トス。

截リ口ト底面トハ互ニ平行ナルヲ以テ, MH ハ PO ニ平行ナリ。又 PS ハ母線ナルヲ以テ OO′ ニ平行ナリ。

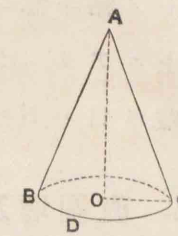
故ニ POHM ハ平行四邊形ニシテ, MH=PO. 卽チ截リ口ノ周ノ上ノ點トHトノ距離ハ常ニ直圓壔ノ半徑ニ等シク,且ツコレラノ點ハ悉ク同一平面上ニ在リ。

又逆ニ此ノ平面上ニテHヨリノ距離ガ半徑ニ等シキ點ハ截リ口ノ周上ニアルコトモ容易ニ證明セラル。

故ニ截リ口ハ底面ト合同ナル圓ナリ。

24. 直圓錐

[定義] **直圓錐**トハ直角三角形ヲ其ノ直角ニ隣ル一邊ヲ軸トシテ空間ニ一周回轉セシムル時生ズル立體ナリ。



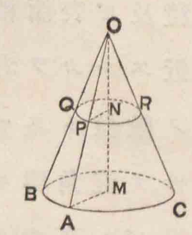
回轉ノ軸トシタル一邊ヲ直圓錐ノ**軸**トイヒ,斜邊ヲ**母線**トイフ。

直圓錐ノ軸ニアラザル一邊ノ回轉ニ依ツテ生ズル圓ハ軸ニ垂直ナル一ツノ圓ニシテ之ヲ**底面**トイヒ,軸ト母線トノ交點ヲ**頂點**ト云フ。

軸ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**ト云ヒ,母線ノ長サヲ**斜高**トイフ。

[定理] **三十四.** 直圓錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニヨリテ截リタル截リ口ハ圓ナリ。

O−ABC ヲ直圓錐, OM ヲ其ノ軸, PQR ヲ底面ニ平行ナル截リ口トスレバ, PQR ハ圓ナリ。



[證明] 截リ口ト軸トノ交リヲ N トシ,又截リ口ノ周上ノ任意ノ一點ヲ P トス。

P ヲ過ル母線ヲ OPA トスレバ, PN ト AM トハ互ニ平行ナルヲ以テ,

$$PN : AM = ON : OM.$$

之ニ依ツテ見レバ, PN ト底面ノ半徑トノ比ハ常ニ一定ニシテ ON : OM ニ等シ。卽チ截リ口ノ

周上ノ點ハ悉クNヨリ等距離ニアリ,且ツ同一平面上ニアリ。又此ノ逆モ容易ニ證明セラル。故ニ截リ口ハNヲ中心トスル圓ナリ。

25. 直圓壔及ビ直圓錐ノ體積及ビ表面積

先ヅ直圓壔ニ於テ,其ノ底面ニ內接スル正n邊形ヲ作リ,之ヲ底面トシ,モトノ直圓壔ノ高サヲ高サトスル直角壔ヲ作レバ,邊數nヲ限リナク增大スルニ從ツテ此ノ直角壔トモトノ直圓壔トハ其ノ表面ガスベテノ點ニ於テ限リナク相接近ス。依ツテnガ限リナク增大スルトキ此ノ直角壔ノ體積及ビ表面積ノ數値ガ如何ナル値ニ限リナク接近スルカヲ考ヘテ,之ヲ直圓壔ノ體積及ビ表面積ノ數値トスベシ。

サテ直角壔ニ於テハ,底面ノ面積及ビ周ヲ夫々A及ビp,高サヲhトスレバ,其ノ體積及ビ側面積ハ夫々Ah及ビphナリ。然ルニ今nヲ限リナク增大スレバA及ビpハ夫々直圓壔ノ底面ナル圓ノ面積及ビ周トナルヲ以テ,其ノ半徑ヲrトスレバ,

$$A=\pi r^2, \qquad p=2\pi r$$

試

ナリ。之ヲ上ノ結果ニ代入スレバ,直圓壔ノ體積V及ビ曲面積*Sヲ得ルコト次ノ如シ。

$$V=\pi r^2h, \qquad S=2\pi rh.$$

次ニ直圓錐ニ於テモ,其ノ底面ニ內接スル正n邊形ヲ作リ,之ヲ底面トシ,モトノ頂點ヲ頂點トスル直角錐ヲ考ヘ,邊數nヲ限リナク增大スルモノトシテ,モトノ直圓錐ノ體積及ビ曲面積ノ數値ヲ見出シ得ベシ。卽チ直圓錐ノ底ノ半徑ヲr,高サヲh,斜高ヲlトスレバ,其ノ體積V及ビ曲面積Sハ次ノ式ニヨリテ求メラル。

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h, \qquad S=\pi rl.$$

C

例題

1. 高サ$8cm$,底面ノ半徑$6cm$ナル直圓錐ノ體積及ビ曲面積ヲ求メヨ。

2. 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ。

3. 底面ガ半徑$1m$ナル圓ニシテ,高サガ$2m$ナル直圓壔ノ曲面積及ビ體積ヲ求ム。 47 36

* 表面ノ一部又ハ全部ガ曲面ナル立體ヲ曲面體トイヒ,其ノ表面ノ中曲面ナル部分ノミノ面積ヲ其ノ曲面積トイフ。

定義 直圓錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截リタルトキ,其ノ截リ口ト底面トノ間ニアル部分ヲ**截頭直圓錐**トイフ。

其ノ截リ口トモトノ底面トヲ共ニ其ノ截頭直圓錐ノ底面トイヒ,兩底面ノ間ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイヒ,又底面ノ間ニアル母線ノ部分ヲ其ノ**斜高**トイフ。

4. 截頭直圓錐ノ兩底ノ半徑ヲ a 及ビ b, 高サヲ h, 斜高ヲ l トスレバ,其ノ體積 V 及ビ曲面積 S ハ次式ニヨリテ求メラル。

$$\mathbf{V}=\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2),\qquad \mathbf{S}=\pi l(a+b).$$

第二章 球

26. 基本性質

定義 **球**トハ半圓ヲ其ノ直徑ヲ軸トシテ一周回轉セシムルトキ生ズル立體ナリ。特ニ其ノ表面ノミヲ考フルトキハ之ヲ**球面**トイフ。

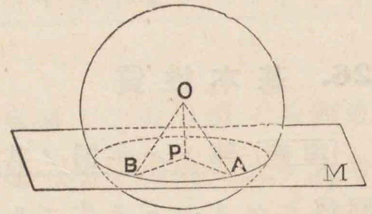
回轉シタル半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**トイフ。中心ヨリ球面上ノ一點ニ至ル距離ハスベテ相等シキモノニシテ之ヲ球ノ**半徑**トイヒ,又球ノ中心ヲ過リ球面上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ。

定理 三十五. 一球面ト一平面トガ一ツヨリ多クノ點ヲ共有スルトキハ,一ツノ圓周ヲ共有ス。

證明 O ヲ中心トスル球面ト平面 M トガ少クモ二點 A 及ビ B ヲ共有シタリトス。中心 O ヨリ平面 M ニ垂線 OP ヲ引クトキ,其ノ足 P ハ A 又ハ B ト合スルコトナシ。何トナレバモシ P ガ A 又ハ B ノ何レカ一方ト相合ストセバ, OA 又ハ OB ノ何レカ一方ガ M ニ垂線ニシテ他ノ一方ガ斜線

ナリ,從ツテ OA ト OB トハ相等シカラザルコトヽナル,コレ不合理ナリ。

サテ △APO ト △BPO トニ於テ,



OA=OB, OP ハ共通,

∠OPA=∠OPB=直角.

故ニ兩三角形ハ合同ニシテ, AP=BP.

逆ニマタ平面 M 上ニ P ヨリ AP ニ等シキ距離ニ一點 B ヲトレバ, OB=OA ニシテ從ツテ B ガ此ノ球面上ニアルコトモ容易ニ證明セラル。

故ニ球面 O ト平面 M トハ, P ヲ中心トシ半徑 PA ナル一ツノ圓周ヲ共有ス。

定義 球面(又ハ球)ト唯一點ノミヲ共有スル平面ヲ其ノ球面(又ハ球)ノ**切平面**トイヒ,其ノ一點ヲ**切點**トイフ。 球面(又ハ球)ト平面トガ一ツノ圓周(又ハ圓)ヲ共有スルトキハ兩者ハ**相交ル**トイフ。

球面(又ハ球)ト平面トノ位置ノ關係ハ,次ノ三ツノ場合ニ限ル。

(1)一點モ共有セザルカ, (2)相切スルカ,

(3)相交ル。

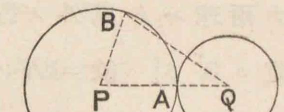
系 1. 球ノ切平面ハ其ノ切點ニ引キタル半徑

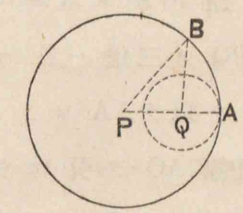
ニ垂直ナリ。

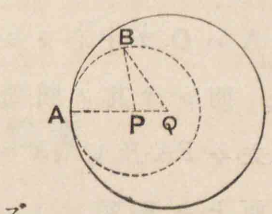
系 2. 球ト平面トノ交リナル圓ハ,ソノ平面ガ球ノ中心ヲ過ル場合ニ最大ナリ。

定理 **三十六.** 二ツノ球面ガ一ツヨリ多クノ點ヲ共有スルトキハ,一ツノ圓周ヲ共有ス。

證明 P 及ビ Q ヲ中心トスル二ツノ球面ガ少クモ二點ヲ共有スルモノトス。 今其ノ共有點ノ一ツヲ A トスレバ, A ハ直線 PQ 上ニハアラズ。何トナレバ,モシ A ガ線分 PQ 上ニアリトスレバコレ卽チ球 P ト線分 PQ トノ唯一ノ交點ナリ。 球 P 上ノ A 以外ノ任意ノ一點ヲ B トスレバ B ハ PQ 上ニアラズ。







故ニ　PB+BQ>PA+AQ,

從ツテ　BQ>AQ.

モシ又 A ガ線分 PQ ノ延長上ニアルトキハ,同

樣ニシテ

$$PB-BQ<PA-AQ$$

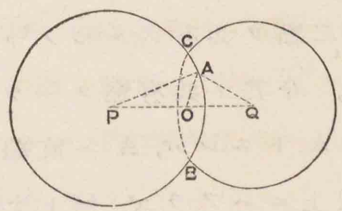
又ハ
$$QB-BP<QA-AP.$$

從ッテ
$$BQ>AQ$$

又ハ
$$QB<QA.$$

故ニ何レニシテモBハ球Qノ上ニアラズ。依ッテ兩球ハA以外ノ點ヲ共有セザルコトヽナリ，假定ニ反ス。故ニAハPQ上ニハアラズ。

兩球面ノ共有スル何レノ點ヲAトスルモ，△APQノ三邊ハ各一定ナルヲ以テ，AヨリPQニ垂線AOヲ引ケバAOハ一定ニシテ，又Oハ定點ナリ。今PQヲ軸トシテ△APQヲ回轉スルトキハAハOヲ中心トシAOヲ半徑トスル圓周ヲ畫ク。而シテ其ノ圓周上ノ點ハスベテP及ビQヨリ夫々PA及ビQAニ等シキ距離ニアルガ故ニ兩球面上ニアリ。



故ニ兩球ハコノ一ツノ圓周ヲ共有ス。

定義 二ツノ球面ガ一圓周ヲ共有スルトキハ**相交ル**トイヒ，唯一點ヲ共有スルトキハ**相切ス**ト

イフ。相切スル場合ニ互ニ他ノ球ノ外ニアルトキハ兩球ハ互ニ**外切ス**トイヒ，一方ガ他ノ內部ニアルトキハ互ニ**內切ス**トイフ。

二ツノ球面ノ位置ノ關係ハ，次ノ五ツノ場合ニ限ル。

一點モ共有セザルトキ，

(1)互ニ他ノ外部ニアルカ，

(2)一ツガ全ク他ノ內部ニアリ。

一點ヲ共有スルトキ，

(3)互ニ外切スルカ，(4)互ニ內切ス。

一圓周ヲ共有スルトキ，

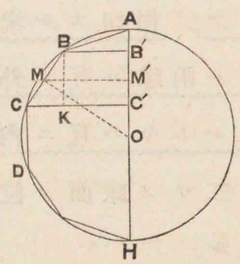
(5)相交ル。

モシ二ツノ球面ガ相等シキトキニハ(2)及ビ(4)ノ代リニ二ツノ球面ガ全ク相一致スル特別ノ場合ヲ生ズ。

27. 球ノ表面積及ビ體積

今Oヲ中心トシ，半徑rナル半圓ABC......Hガ直徑AHヲ軸トシテ一周回轉スルモノトシ，其ノ生ズル球ノ表面積ヲ求メントス。

半圓周ABC......Hヲn等分シ，其ノ分點ヲB,C,



D,......トシ,コレラノ點ヨリAHニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々B',C',D',......トスレバ,此ノ半圓ノ囘轉ニ伴ヒテ三角形ABB',梯形$B'BCC'$等ハ夫々一ツノ直圓錐又ハ截頭直圓錐ヲ生ズ。コレラノスベテノ體ノ曲面積(弦AB, BC, ...等ノ囘轉ニヨリテ生ズル曲面積)ノ和ヲ求メ,然ル後nナル數ヲ限リナク增大スト考フレバ,之ニヨリテ求ムル所ノ球ノ表面積ヲ得ベシ。

今其ノ中ノ一ツナル梯形$B'BCC'$ニツイテ考フルニ,其ノ曲面積ハ64頁例題4ニヨリ$\pi.BC(BB'+CC')$ナリ。依ツテBCノ中點MヨリAHニ垂線MM'ヲ引クトキハ,此ノ曲面積ハ$2\pi.BC.MM'$ナリ。

今OMヲ結ビ,又BヨリCC'ニ垂線BKヲ引ケバ

$$\triangle BCK \backsim \triangle MOM'.$$

依ツテ $$\frac{BC}{MO}=\frac{BK}{MM'}=\frac{B'C'}{MM'}.$$

故ニ $$BC.MM'=MO.B'C'.$$

之ニヨツテ上記ノ曲面積ハマタ$2\pi.MO.B'C'$ト

書キ直サル。

他ノ梯形ニツイテモ同樣ノ關係アリ。又三角形ABB'ハ梯形ノ平行ナル邊ノ一ツガ零トナリタル特別ノ場合ト考フレバ矢張同樣ノ結果ヲ得。

而シテコレラノ結果ニ於テMOノ長サハ弦AB, BC, ...等ニツイテスベテ同一ナリ,依ツテ之ヲr'トスレバ,結局多角形ABC......Hノ囘轉ニヨリテ生ズル曲面積ハ

$$2\pi r'.AB'+2\pi r'.B'C'+\ldots\ldots$$
$$=2\pi r'(AB'+B'C'+\ldots\ldots)$$
$$=2\pi r'.AH$$
$$=4\pi r' r$$
トナル。

ココニ於テnヲ限リナク增大スレバr'ハ球ノ半徑rニ限リナク接近ス,依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 三十七. 半徑rナル球ノ表面積ハ$4\pi r^2$ナリ。

次ニ半徑rナル球ノ體積ヲ求メンニ,先ヅスベテノ頂點ガ此ノ球面上ニアル一ツノ多面體ヲ考ヘ,其ノ各面ノ面積ヲ夫々A_1, A_2, ...トシ,又中心Oヨリコレラノ面ニ引ケル垂線ノ長サヲ夫々r_1, r_2, ...トスレバ,此ノ多面體ハOヲ共通ノ頂點

試

トシ各面ヲ底面トスル角錐ノ集マリタルモノト考ヘラルヽガ故ニ,其ノ全體積ハ

$$\frac{1}{3}r_1A_1+\frac{1}{3}r_2A_2+\cdots\cdots$$

ナリ (定理三十二系 2)。

ココニ於テ多面體ノ頂點ノ數ヲ限リナク增大シ且ツ其ノ全表面ヲ球面ニ限リナク接近セシムレバ, $r_1, r_2,$……等ハスベテ球ノ半徑 r ニ限リナク接近シ,又 A_1+A_2+……ハ球ノ表面積即チ $4\pi r^2$ ニ限リナク接近ス。

故ニ球ノ體積ハ $\frac{1}{3}r.4\pi r^2$ 即チ $\frac{4}{3}\pi r^3$ トナル。依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 三十八. 半徑 r ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ナリ。

例題

1. 一球面ト一直線トノ位置ノ關係如何。

2. 半徑 $8m$ ナル球ト體積相等シクシテ底面ノ半徑 $7m$ ナル直圓錐ノ高サヲ求メヨ。

3. 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シ。

4. 半徑 r ナル球面ヲ二ツノ平行ナル平面ニヨリテ截ルトキ,其ノ二平面ノ間ノ距離ヲ h トスレバ,其ノ間ニ挾マレタル球面ノ部分ノ面積ハ $2\pi rh$ ナリ。

定義 二ツノ平行ナル平面ノ間ニ夾マレタル球面ノ部分ヲ**球帶**トイフ。

5. 半徑 r 糎ナル球ニ內接スル直圓錐ニシテ,其ノ高サガ底ノ直徑ニ等シキモノヽ體積ヲ求メヨ。

補充問題

第一　直線及ビ平面

1. 一定點ヲ過リ與ヘラレタル平面ニ平行ニシテ且ツ一ツノ定直線ニ交ルベキ直線ヲ引ケ。
2. 互ニ平行ナル二平面ノ間ニ夾マルル任意ノ線分ヲ定比$m:n$ニ分ツ點ノ軌跡如何。
3. 一ツノ平面ヲPトシ, AB, CDヲ互ニ平行ナラズ且ツPニモ平行ナラザル空間ノ定直線トス,今二ツノ平面ヲ作リ,其ノ一ツハABヲ含ミ,他ノ一ツハCD ヲ含ミ,且ツ其ノ交リノ直線ガPニ含マルル様ニセヨ。
4. 平面外ノ一定點ヨリ其ノ平面ニ至ル定長ノ斜線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。
5. 相交ル二ツノ平面ノ一方ノ上ニアル直線ト,ソレガ他ノ平面上ニ投ズル正射影トノ爲ス鋭角ハ,最初ノ直線ガ二ツノ平面ノ交リニ垂直ナルトキニ最大ナリ。
6. 三角形ABCノ垂心OヨリОノ平面ニ垂線OPヲ引ケバ,直線PAハAヲ過リBCニ平行ナル直線ニ垂直ナリ。
7. 一點ニ於テ相交ル三ツノ直線ノ各ガ他ノ二ツニ垂直ナルトキハ,其ノ二ツヅツヲ含ム三ツノ平面ハ互ニ垂直ナリ。

8. 一直線ガ一平面上ノ平行ナラザル三直線ト等シキ角ヲナストキハ,其ノ直線ハ其ノ平面ニ垂直ナリ。

9. 直交スル二直線ノ一ツガ一平面ニ平行ナラバ,其ノ二直線ガ其ノ平面上ニ投ズル正射影ハ直交スル二直線ナリ。但シ二直線ノ中ノ他ノ一ツハ其ノ平面ニ垂直ナラザルモノトス。

10. 與ヘラレタル一平面ニ交ル一ツノ斜線アリ,其ノ足ヲ過リテ其ノ斜線ニ垂直ナル直線ヲ其ノ平面上ニ引ケ。

11. 同一ノ點ニ於テ出會ヒ同一ノ平面上ニ在ラザル三ツノ直線アリ,其ノ交點ヲ過リ三ツノ直線ト相等シキ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求ム。

12. 一平面上ニアリテ此ノ平面外ノ有限直線ニ對シテ常ニ直角ヲ張ル如キ點ノ軌跡ヲ求ム。

13. 二ツノ相交ル平面ノ各ニ投ズル正射影ガ共ニ直線ナル如キ線ハ,或ル一ツノ場合ヲ除ク他ハ,常ニ直線ナリ。又其ノ例外ナル場合如何。

14. 與ヘラレタル一直線上ニ一點ヲ求メ,二ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ナラシメヨ。

15. 二ツノ相交ル直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

16. 二ツノ相交ル平面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

17. 三面角ノ三ツノ面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

18. 一ツノ平面P,及ビPノ同ジ側ニアル二點A,Bア

リ,Pノ上ニ一點Cヲ取リ AC ト CB トノ和ガ最小ナル様ニセヨ。

19. 前題ニ於テA,BガPノ反對ノ側ニアルトキ,AC,CBノ差ガ最大ナル様ニセヨ。

20. 與ヘラレタル平面上ニ於テ,其ノ平面外ノ二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

21. 二ツノ定平面ヨリ等距離ニアリテ,且ツ二ツノ定點ヨリモ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

22. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ム。

23. 一定點Pヨリ一ツノ平面ニ平行ナル直線ヲ引キテ他ノ一平面ト交ラシメ,其ノ交點トPトノ距離ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。

24. 一平面外ノ一定點ヨリ,此ノ平面上ニ於テ一定點ヲ通過スル直線ニ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム。

25. 一定點ヨリ同一ノ直線ヲ過ルスベテノ平面ニ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

26. 二ツノ與ヘラレタル平面ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

27. 一ツノ圓アリ,其ノ平面外ノ與ヘラレタル點ヨリ此ノ圓ノ周ニ至ル最大及ビ最小ナル線分ヲ引ケ。

28. AB ハ圓ノ直徑ナリトス,其ノ一端Aニ於テ其ノ圓ノ平面ニ垂線ヲ引キ其ノ上ノ一點ヲPトシ,圓周上ノ一點ヲQトセバ,平面PAQ, PBQハ互ニ垂直ナリ。

29. 三面角ノ各稜トコレニ對スル平面角ノ二等分線トヲ夫々含ム三ツノ平面ハ,一ツノ直線ニ於テ相

交ル。

30. 與ヘラレタル二直線ニ交リ,且ツ與ヘラレタル一平面ニ垂直ナル直線ヲ作レ。

31. 矩形ノ紙 ABCD アリ, AB ハ 4 cm, BC ハ 3 cm ナリ,今之ヲ對角線 AC ニ沿ヒテ折リ平面 ABC ト CDA トヲ互ニ垂直ナラシメタルトキ,B ト D トノ間ノ距離如何。

32. 二平面 M 及ビ N ガ與ヘラレタルトキ,與ヘラレタル點 A ヲ通過シテ N ニ平行ニシテ M ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引ケ。

第二 多面體

33. 正四面體ノ高サハ其ノ足ヨリ一ツノ面ニ引ケル垂線ノ三倍ニ等シ。

34. 直六面體ノ對角線ハ皆相等シ。

35. 三角錐ノ相對スル一双ノ稜ニ平行ナル平面ニヨリテノ截リロハ平行四邊形ナリ。

36. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ通過スル三ツノ直線ハ一點ニ於テ相交ル。

37. 四面體 ABCD ノ三ツノ平面角 ABC, CBD, CDA ガ皆直角ナルトキハ,平面角 ADB モ亦直角ナリ。

38. 四面體ノ各頂點ト之ニ對スル面ノ重心トヲ結ブ四線分ハ同一ノ點ヲ通過シ,且ツ此ノ點ニ於テ互ニ1:3ナル比ニ分タル。

定義 此ノ點ヲ四面體ノ重心ト云フ。

39. 等高ナル二ツノ角錐ヲ,頂點ヨリ等距離ニシテ其ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其ノ截リロノ面積ハ兩底面ノ面積ニ比例ス。

40. 正四面體ノ相對スル二稜ハ各直交ス。

41. 正四面體ノ一稜ガ 1 m ナルトキ,其ノ高サヲ求メヨ。

42. 四面體ノ内ニ一點ヲトリ,之ヲ頂點トシ各面ヲ底面トスル四ツノ四面體ノ體積ヲ相等シカラシメントス,其ノ點ノ位置ヲ求ム。

43. 四面體ノ六ツノ稜ノ上ノ正方形ノ和ハ,相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三線分ノ上ノ正方形ノ和ノ四倍ニ等シ。

44. 一邊ノ長サ 1 m ナル正八角形ヲ底トシ,各側稜ト高サトガ互ニ30度ノ角ヲナス角錐ノ體積ヲ計算セヨ。

45. 一稜ノ長サ a ナル正四面點ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ヲ求ム。

第三 曲面體

46. 球ノ面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ曲面積ニ等シ。

47. 球ノ面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ全面積ノ三分ノ二ニ等シ。

48. 半徑 r ナル球ニ內接スル正四面體ノ稜ノ長サヲ計算セヨ。

49. 矩形ノ二ツノ相隣レル邊ノ長サヲ a, b トシ,其ノ各ノ邊ヲ軸トシテ此ノ矩形ヲ一周回轉スルトキ

生ズル二ツノ直圓壔ノ體積ヲ求メヨ。又其ノ體積ノ比ヲ求メヨ。

定義 球ノ中心ヲ過ル平面ニ依リテノ截リ口ヲ球ノ**大圓**トイヒ,中心ヲ過ラザル平面ニ依リテノ截リ口ヲ**小圓**トイフ。

50. 同一ノ球面ニ於ケル二ツノ大圓ハ互ニ他ヲ二等分ス。

定義 二ツノ大圓ノ弧(實ハ半圓)ニ依リテ圍マレタル球面ノ部分ヲ**月形**トイヒ,ソノ二ツノ大圓ノナス角*ヲ**月形ノ角**トイフ。

51. 半徑 r ナル球面上ニ於ケル月形ノ角ノ弧度** ヲ A トスレバ,ソノ面積ハ $2Ar^2$ ナリ。

定義 三ツノ大圓ノ弧ニ依リテ圍マレタル球面ノ部分ヲ**球面三角形**トイヒ,ソレ等ノ大圓ノ二ツヅツノナス三ツノ二面角ヲソノ角トイフ。

52. 半徑 r ナル球面上ニ於ケル球面三角形ノ三ツノ角ノ弧度ヲ A, B, C トスレバ,ソノ面積ハ

$(A+B+C-\pi)r^2$ ナリ。

---

*二ツノ大圓ノナス角トハ,ソノ交點ニ於ケル各圓ノ切線ノナス角ヲイフ。

** 角ノ弧度ガAナリトハソノ頂點ヲ中心トシ半徑1ナル圓ヲ畫クトキソノ角ノ內部ニアル弧ノ長サガAナルコトナリ。故ニ弧度ガAナル角ハ $\frac{2A}{\pi}$ 直角ナリ。

53. 底ノ周 8.8 cm ニシテ高サ 2.7 cm ナル直圓錐ノ體積ヲ求ム。但シ圓周率ヲ $\frac{22}{7}$ トシテ計算セヨ。

54. 定長ナル線分ノ兩端ガ一ツノ球面上ニ在ルトキハ,其ノ線分ト球ノ中心トノ距離ハ一定ナリ。

55. 半圓周ヲ三等分シ其ノ直徑ノ周リニ之ヲ回轉セシムレバ,其ノ中央ノ弧ニヨリテ生ズル球帶ノ面積ハ他ノ二ツノ弧ニヨリテ生ズルモノノ和ニ等シ。

56. 半徑 60 cm, 斜高 1 m ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。

57. 定直線ヲ過リ定球ニ切スル平面ヲ作レ。

58. 或ル直圓壔ノ高サハ 1 m ニシテ其ノ全面積ハ半徑 2 m ナル圓ニ等シトイフ,此ノ圓壔ノ體積ヲ求メヨ。

59. 定直線ヲ過リ定球ヲ截ル平面ヲ作リ,其ノ截リ口ノ半徑ヲシテ定長ナラシメヨ。

60. 直圓壔ノ側面體ガ 169.56 平方米ニシテ其ノ直徑ト高サトノ比ガ 3:2 ナリ,此ノ體積ハ幾立方米アルカ。

61. 一ツノ球面ト,ソレト交ラザル一直線トノ上ニ夫夫一點ヲ求メ,其ノ二點間ノ距離ヲシテ最短ナラシメヨ。

62. 定平面ニ切シ且ツ二定點ヲ過ル球面ハ如何ニシテ作圖スベキカ。但シ此ノ球ノ半徑ハ一定トス。

63. 鉛ノ球アリ,其ノ重サ 45 kg ナリ,其ノ三分ノ一ノ直徑ヲ有スル鉛ノ球ノ重サヲ求ム。

64. 直圓錐ノ頂點 S ヲ通ジテ截面 SAB ヲ作リ, ∠ASB ヲシテ與ヘラレタル角 α ニ等シカラシメヨ。

65. 一定直線ヲ含ム平面ニヨリテ定球ヲ截ルトキ,其

ノ截リロナル圓ノ中心ノ軌跡如何。

66. 球ノ體積トソレニ內接スル立方體ノ體積トノ比ハ $\sqrt{3}\pi:2$ ナリ。

67. 直圓錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニヨリテ截リ，其ノ曲面積ヲ二等分セヨ。

68. 球ノ直徑 AB ニ垂直ナル平面ヲ P トス，A ヨリ引ケル任意ノ直線ガ球面及ビ平面 P ト交ル點ヲ夫夫 C, D トスレバ，AC.AD ハ一定ナリ。

69. 與ヘラレタル球面上ノ一定點 O ヲ過ル任意ノ直線ヲ引キ球面ト再ビ A ニ於テ會セシメ，此ノ直線上ニ一點 A′ ヲ取リ矩形 OA.OA′ ヲ一定ナラシムルトキ，點 A′ ノ軌跡ヲ求ム。

70. 球ニ外接スル直圓錐アリ，其ノ高サガ球ノ直徑ノ二倍ナルトキ，此ノ直圓錐ノ體積及ビ全面積ノ夫夫球ノ體積及ビ表面積ニ對スル比ヲ求メヨ。

第四雜題

71. 正四面體ノ一ツノ稜ヲ a トシ其ノ高サヲ h トスレバ $3h^2=2a^2$ ナリ。

72. 四面體ノ相對スル二稜ガ夫々相等シキトキハ，二ツノ對稜ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハコノ對稜ノ各ニ垂直ナリ。又對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ同一點ヲ過ル。

73. 四定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

74. 直徑 AB ナル半圓周上ノ任意ノ一點ヲ C トシ，A ヨリ圓ノ平面ニ垂線 AP ヲ引キ之ヲ弦 BC ニ等シク取レバ，△PBC ト △PAB トハ合同ナリ。

75. 水平面ニ垂直ニ立テル二本ノ棒アリテソノ高サハ等シカラズトスレバ，コノ平面上ニ於テ各ノ棒ヲ見ル視角(仰角)ガ相等シキ點ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ。

76. 二ツノ點 A, B ヨリ一ツノ平面 P ニ垂線 AX, BY ヲ引キ其ノ足ヲ夫々 X, Y トス，今直線 AB ニ垂直ナル平面ヲ作リ P ト直線 LM ニ於テ交ラシムレバ，LM ハ XY ニ垂直ナリ。

定義 二ツノ多面體ニ於テ相對應スル面ガ夫夫相似ニシテ且ツ相對應スル多面角ガ夫々合同ナルトキハソノ**二ツノ多面體ハ互ニ相似ナリ**トイフ。

77. 二ツノ相似多面體ノ體積ノ比ハ相對應スル稜ノ比ノ三乘比ニ等シ。

78. 角壔ノ總テノ側稜ト交ル截リロノ中ニテ直截面ハ最小ナル面積ヲ有ス。

79. 立方體ヲ一ツノ平面ニテ截リ，ソノ截リロガ正六角形トナル樣ニセヨ。

80. 上ニ開キタル直六面體ノ箱アリ，底面ノ二邊ハ $6cm$ 及ビ $5cm$ ニシテ深サ $8cm$ ナリ，今底面ノ $5cm$ ノ邊ヲ水平面上ニ置キ，底面ヲ水平面ト $30°$ ノ角ヲナスマデ箱ヲ傾ケテ之ニ水ヲ充滿セシムレバ，其ノ水ノ量幾何ナルカ。

81. 半徑10糎ナル球面ト，ソノ中心 O ヨリ 8 糎ノ距離

ニアル平面トノ交リナル圓ニ內接スル正三角形ノ面積ヲ求メヨ。

82. 中心 O ナル一ツノ球ニ外接スル直圓錐 ABC ノ高サ AD ガコノ球ノ直徑ノ 2 倍ナルトキハ,コノ圓錐ノ全表面積ハコノ球ノ表面積ノ 2 倍ナリ。コノ圓錐ノ體積モ亦球ノ體積ノ 2 倍ナリ。

83. 同一平面上ニアラザル二直線 XX', YY' アリ,今 XX' 上ニ相等シキ二線分 AB, $A'B'$ ヲ取リ,又 YY' 上ニモ相等シキ二線分 CD, $C'D'$ ヲ取ルトキハ,二ツノ四面體 $A-BCD$, $A'-B'C'D'$ ハ其ノ體積相等シ。

84. 四面體 $V-ABC$ ヲ其ノ相對スル稜 VB, AC ニ平行ナル平面ニテ截リ,其ノ四稜 VA, AB, BC, CV ト此ノ平面トノ交點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ,四邊形 $EFGH$ ノ面積ガ最大ナル如キ點 E ノ位置如何。

85. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

86. 四面體ノ四ツノ面ニ切スル球ヲ作レ。

87. 曲面積ガ底面積ノ二倍ナル圓錐ノ頂角ノ大サヲ求ム。

88. 同一平面上ニアラザル二定直線 AB, CD 上ニ夫夫任意ノ點 X, Y ヲ取ルトキハ,線分 XY ノ中點ハ常ニ一定平面上ニアリ。

89. 一稜ノ長サ a ナル正八面體ノ對角線ノ長サ,表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

90. 一邊ノ長サ a ナル正三角形 ABC ヲ, A ヨリ BC ニ引ケル垂線ニ沿ヒテ折リ $60°$ ノ二面角ヲ作ルトキハ, BC ト A トノ距離如何。

大正十一年十月一日印刷
大正十一年十月四日發行
大正十一年十二月七日修正再版印刷
大正十一年十二月十日修正再版發行
大正十三年十月廿四日修正三版印刷
大正十三年十月廿七日修正三版發行
大正十四年一月廿三日修正四版印刷
大正十四年一月廿六日修正四版發行
昭和二年七月廿六日修正五版印刷
昭和二年七月廿九日修正五版發行
昭和二年十一月一日修正六版印刷
昭和二年十一月四日修正六版發行
昭和五年八月四日修正七版印刷
昭和五年八月七日修正七版發行
昭和五年十月十二日修正八版印刷
昭和五年十月十五日修正八版發行

不許	修訂 中等立體幾何學新教科書 定價金四十三錢	複製

著作者　竹內端三

東京市神田區神保町一丁目一番地
發行兼印刷者　株式會社　三省堂
代表者　龜井寅雄

東京市蒲田區仲六郷一丁目五番地
印刷所　株式會社　三省堂蒲田工場

東京市神田區神保町一丁目一番地
發行所　株式會社　三省堂
（振替東京三一五五五）

大阪市西區阿波座下通二丁目六番地
株式會社　三省堂大阪支店
（振替大阪八一三〇〇）

兌

Hiroshimashi
Minamisendamachi
Shudo Middle School
T. Takeuchi

竹内徳

o comy 8