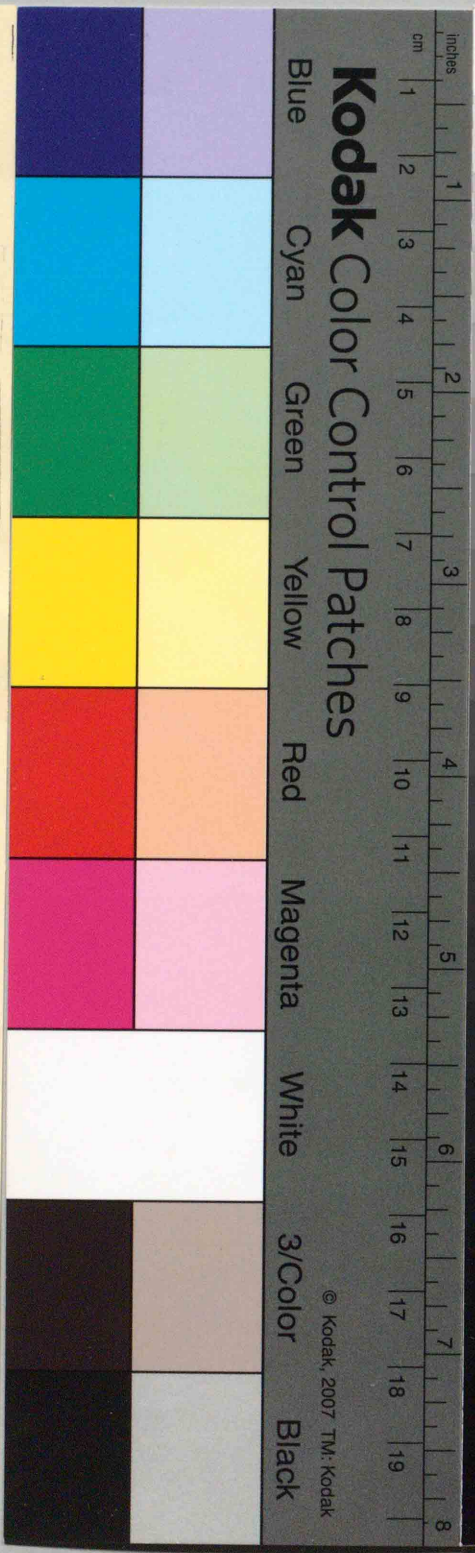
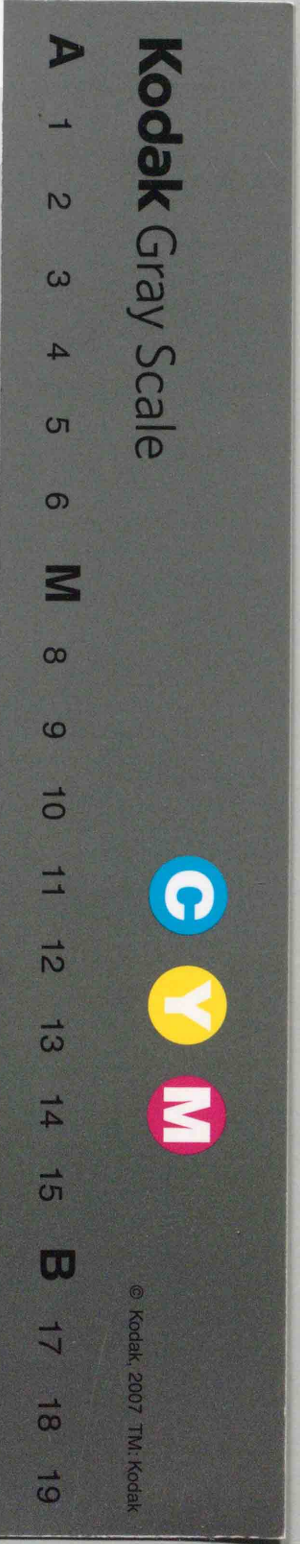


広島大学図書  
2000089897



文庫  
4  
1930  
8897



40165

教科書文庫

4
414
41-1930
2000.0 89897



4a  
414  
AB 5

教科書文庫  
4  
414  
41-1930  
2000089897

資 料 室



昭和五年十月二十四日  
文 部 省 檢 定 濟  
中 學 校 數 學 科 用

修 訂

# 中 等 三 角 法 新 教 科 書



理 学 博 士  
竹 内 端 三 著

株 式 會 社  
三 省 堂



広島大学図書  
2000089897  



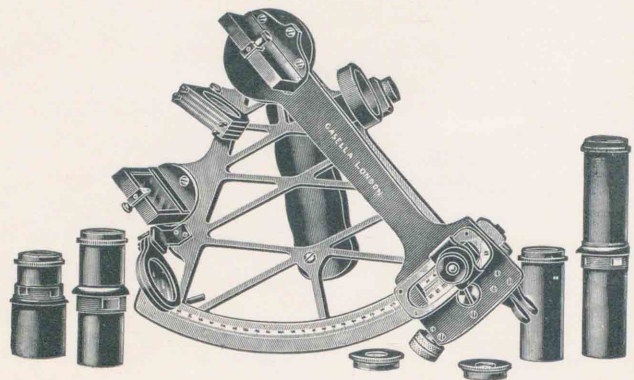

伊能忠敬先生



伊能忠敬ハ上總國武射郡小堤村ノ人ナリ。  
延享二年ヲ以テ生ル。寛政六年家ヲ其子景敬  
ニ讓リテ隱居シ、江戸深川ニ寓シテ専ラ志ヲ天  
文、曆學ニ委ヌ。寛政七年高橋至時ガ人ト爲リ  
ヲ聞キ、贊ヲ資リテ其門ニ踵リ、就キテ天文、曆法  
ヲ學ビ、日月行度、交食推歩ノ術ヲ講ジテ日夜倦  
ム無シ。一日忠敬至時ニ詣ルニ、天文臺ト深川  
居宅トノ距離及緯差ヲ測リテ度法ヲ定ムルコ  
トヲ以テス。至時曰ク、足下天文臺ト深川トノ  
距度ヲ測ルモ、江戸ト蝦夷トノ距度ヲ測ルモ、何  
ゾ異ナランヤ。若シ之ヲ精測シ得バ、大ニ國ニ  
益アラムト。忠敬甚ダ此語ニ感ジ、事ヲ幕府ニ  
申ス。寛政十二年幕府之ヲ准許ス。是ヨリ以  
來奔走勉勵遂ニ日本全國沿海ヲ測定シテ、大ニ  
前代未聞ノ偉業ヲ成セリ。文政元年卒ス、年七  
十四。幕府忠敬ガ功ヲ追賞シテ、廩米若干ヲ賜  
フ。(遠藤利貞氏遺著、増修日本數學史、五四七頁ニ依ル)

註 延享二年——西曆一七四五年  
寛政十二年——西曆一八〇〇年、時ニ忠  
敬五十六歳(徳川十一代家齊ノ時代)  
文政元年——西曆一八一八年

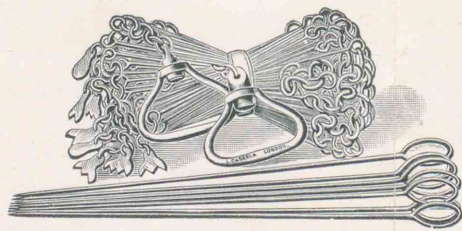




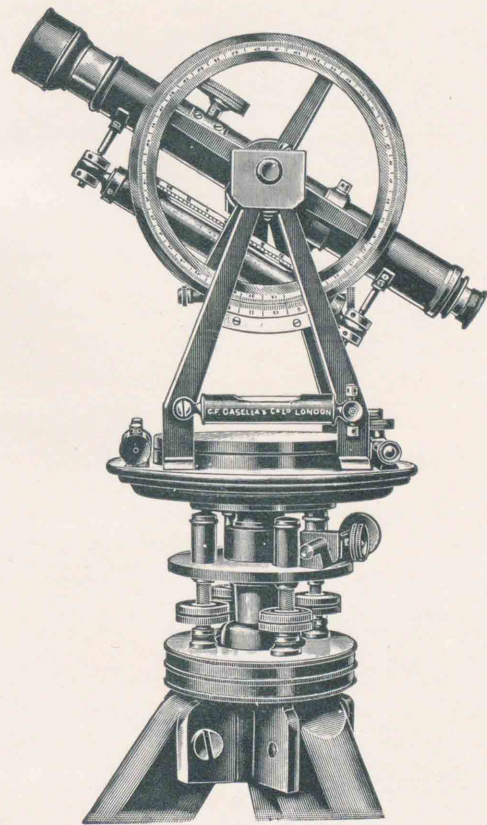
六分儀



卷尺



測繩



經緯儀



## 改 版 緒 言

本書ハ曩ニ編述セル中等三角法新教科書ヲ改版シ、舊版ニ於テ著者ガ特ニ意ヲ用ヒタル次ノ諸點ヲ一層徹底セシメンコトヲ計レルモノナリ。

(一) 必要ナル教材ノ他ハ成ルベク之ヲ省キ、學生ノ負擔ヲ輕カラシムルト共ニ授業時數ニ餘裕ヲ生ゼシメ、以テ數學全體ノ練習ヲナスノ便ヲ計レリ。

(二) 三角法ノ教育的價値ハ營ニ測量等ノ應用問題ヲ解セシムルノミナラズ、之ニヨリテ函數ノ概念ヲ會得セシムルニアリ。サレバ本書ニ於テハ三角函數ノ値及ビソノ變動等ニツキテ稍詳細ニ説明セリ。

(三) 理論ハ十分嚴密ナランコトヲ期シタレドモ、同時ニマタ數學教育ニ於ケル最近ノ傾向ニ從ヒ、成ルベク圖形等ニヨリテ直觀的ニ眞理ヲ悟了セシメ、之ニヨリテ學生ヲシテ無意味ニ公式ヲ把玩スルノ弊ヲ避ケシメ、併セテ證明ノ結果ヲ記憶シ易カラシメンコトヲ計レリ。



(四) 本書中ノ問題ヲ三種ニ分テリ。各節ノ終ニ附シタル「例題」ハ其ノ節ニ説明セル事項ヲ練習セシムルタメノ簡易ナル問題ニシテ、各章ノ終リニ附シタル「雜題」ハ主トシテ其ノ章ニ説明セル事項ノ應用問題ナリ。次ニ卷末ニ蒐集セル「補充問題」ハ全書ニ互ル問題ニシテ其ノ一部ハ各篇ノ内容ニ從ツテ分類シ、一部ハ全卷ヲ通ジテ雜然ト排列セルモノナリ。

(五) 問題ハスベテ穩當ニシテ實力ノ練磨ニ資スベキモノノミヲ選ビ、且ツナルベク多方面ノ種類ノモノヲ蒐集スル様ニ努メタリ。

(六) 全卷ヲ通ジテ簡明ヲ主トシ冗長ヲ避ケ、學生ヲシテ倦怠ノ念ヲ去リ興味ヲ以テ勉學セシメンコトニ留意セリ。

終リニ臨ミ著者ハ本書舊版ニ對シ適切ナル高批ヲ與ヘラレタル諸賢ニ厚ク感謝ノ意ヲ表スルト共ニナホ將來本書ニ對シ諸賢ノ懇篤ナル叱正ヲ切望スルモノナリ。

昭和五年八月

著者 譚

## 目次

<b>第一篇 銳角</b>	
第一章 銳角ノ三角函數.....	1
第二章 直角三角形ノ解法 .....	22
<b>第二篇 一般ノ角</b>	
第一章 一般ノ角ノ三角函數 .....	28
第二章 加法定理 .....	45
<b>第三篇 三角形ノ解法</b>	
第一章 三角形ニ關スル公式 .....	56
第二章 三角函數ノ對數表.....	69
第三章 三角形ノ解法 .....	76
第四章 測量問題 .....	82
附錄 .....	1—15
補充問題.....	1—13
答 .....	1—5
附表 .....	1—12



ギリシヤ文字

三角法ニ於テハ習慣上ギリシヤ文字ヲ使用スルコト多シ。次ニソノ字體及ビ讀ミ方ノ表ヲ掲グ。

大文字	小文字	讀ミ方	大文字	小文字	讀ミ方
A	$\alpha$	Alpha	N	$\nu$	Nu
B	$\beta$	Beta	$\Xi$	$\xi$	Xi
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma	$O$	$o$	Omicron
$\Delta$	$\delta$	Delta	$\Pi$	$\pi$	Pi
E	$\epsilon$	Epsilon	$\rho$	$\rho$	Rho
Z	$\zeta$	Zeta	$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
H	$\eta$	Eta	T	$\tau$	Tau
$\theta$	$\theta$	Theta	$\Upsilon$	$\upsilon$	Upsilon
I	$\iota$	Iota	$\phi$	$\varphi$	Phi
K	$\kappa$	Kappa	$\chi$	$\chi$	Chi (Ki)
$\Lambda$	$\lambda$	Lambda	$\psi$	$\psi$	Psi
M	$\mu$	Mu	$\Omega$	$\omega$	Omega

修訂

中等三角法新教科書

第一篇

銳角

第一章 銳角ノ三角函數

1. 三角法ノ最初ノ目的

幾何學ニ於テ三角形ノ三邊、或ハ二邊トソノ夾角等ガ與ヘラルルトキハ、ソノ三角形ハ全ク定マル、然レドモソノ與ヘラレタル邊及ビ角等ノ數値ヨリ、未知ノ邊及ビ角等ノ數値ヲ算出スルコトハ一般ニハ容易ナラズ。

三角法ハ實ニ斯クノ如キ問題ニ應ズル計算法ヲ研究スルコトヲ最初ノ目的トシテ發達シタル數學ノ一科ニシテ、測量、航海等ニハ必要缺ク可カラザルモノナリ。



## 2. 三角函數ノ定義

角Aヲ一ツノ銳角トシ、ソノ一邊ノ上ノ任意ノ點Bヨリ他ノ邊ニ垂線BCヲ引キテ直角三角形ABCヲ作ルトキ

ハ、ソノ三邊AB, BC, CA

ノ比ハ角Aノ大サ

ノミニヨリテ定

マルモノニシテ、

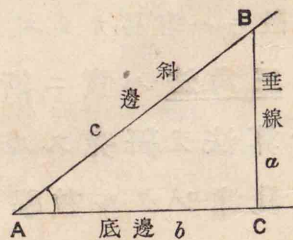
點Bノ邊上ニ於ケル位置ニハ無關係ナリ。

何トナレバ、Bノ代リニ邊AB上ニ他ノ任意ノ點B'ヲ取リ、又ハ邊AC上ニ任意ノ點B''ヲ取リ、又ハB''ヨリ夫々他ノ邊ニ垂線B'C'又ハB''C''ヲ引ケバ、ソノ時生ズル三角形AB'C', AB''C''等ハ常ニ三角形ABCニ相似ニシテ、從ツテ

$$AB:BC:CA=AB':B'C':C'A=AB'':B''C'':C''A$$

等ナレバナリ。

此ノ直角三角形ABCノ邊AB, BC, CAヲ夫々斜邊(c), 垂線(a), 底邊(b)ト呼ビコレ等ノ中ヨリ二



ツツトリテ作レル六種ノ比ニ次ノ如キ名稱ヲ附ス。コレラノ六ツノ比ノ値ハ角Aノ大サノミニヨリテ定マルモノニシテ、コレヲ總稱シテ角Aノ三角函數トイフ。

$$\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c} = \sin A \quad [\text{角Aノ正弦}(\text{sine})]$$

$$\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} = \frac{b}{c} = \cos A \quad [\text{角Aノ餘弦}(\text{cosine})]$$

$$\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} = \frac{a}{b} = \tan A \quad [\text{角Aノ正切}(\text{tangent})]$$

$$\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}} = \frac{b}{a} = \cot A \quad [\text{角Aノ餘切}(\text{cotangent})]$$

$$\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}} = \frac{c}{b} = \sec A \quad [\text{角Aノ正割}(\text{secant})]$$

$$\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}} = \frac{c}{a} = \text{cosec } A \quad [\text{角Aノ餘割}(\text{cosecant})]$$

注意 1. 三角函數ハスベテ不名數ナリ。

注意 2. 餘切, 正割, 餘割ハ夫々正切, 餘弦, 正弦ノ逆數ナリ。

## 例題

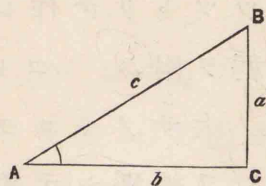
1.  $\sin A = \frac{3}{4}$ ,  $\tan B = \frac{5}{3}$  ナル角A, Bヲ作圖セヨ。
2. 次ノ圖ニ於テ  $\angle C = \text{直角}$ ,  $c = 5$ ,  $a = 3$  ナルトキ、



角Aノ三角函數ノ値ヲ

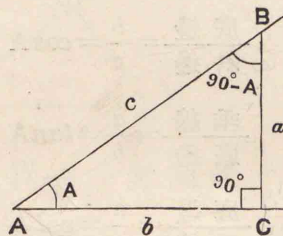
求メヨ。

3. 又圖ニ於テ  $b = \sqrt{3}a$  ナ  
ルトキ、角Bノ三角函數  
ノ値ヲ求メヨ。



### 3. 正弦及ビ餘弦

圖ニ於テ角Aノ一邊上ノ  
點Bヨリ他ノ邊ニ垂線BC  
ヲ引クトキ、角Bニツイテ考  
フレバ、BA、BCガソノ二邊ニ  
シテ、ACハソノ一邊ノ上ノ一  
點Aヨリ他邊ニ引  
ケル垂線ナルヲ以テ、



$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A,$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A$$

ナリ。然ルニBハAノ餘角ニシテ、即チ  $90^\circ - A =$   
等シ。依ツテ、次ノ公式(1)ヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \cos A, \\ \cos(90^\circ - A) &= \sin A. \end{aligned} \right\} (1)$$

又幾何學ニ於ケル Pythagoras ノ定理ニヨリ

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ナルヲ以テ、

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

故ニ

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

ナル關係アリ。通常之ヲ次ノ如ク略記ス。

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \quad (2)$$

**注意** 指數  $n$  ガ正ノ整數ナル場合ニ限リ  $(\sin A)^n$  等ノ  
代リニ  $\sin^n A$  等ト書クヲ常トス。

### 例題

次ノ等式ヲ證明セヨ。

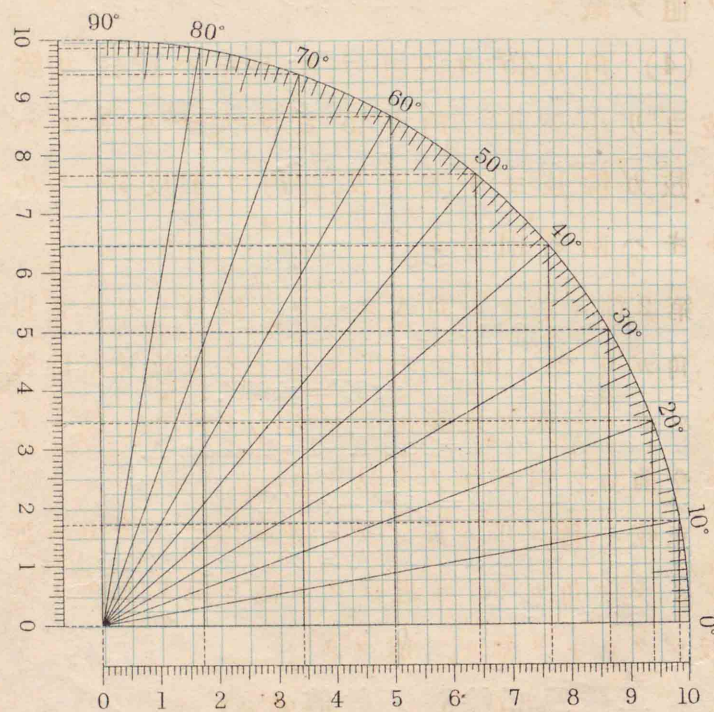
- $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ.$
- $\cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A.$
- $\sin^2 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \cos^4 A.$
- $\sin^4 A - \cos^4 A$  ヲ  $\sin A$  ニテ表セ。又  $\cos A$  ニテ表セ。

### 4. 正弦及ビ餘弦ノ數値

角ノ大サガ  $0^\circ$  ト  $90^\circ$  トノ間ノ種々ノ値ヲトル  
トキソノ正弦及ビ餘弦ガ如何ナル値ヲトルカヲ



見シニハ、2頁ノ下圖ニ於テ  $c$  ノ長サヲ一定ニ保チツツ角  $A$  ノ大サヲ次第ニ變化シ、之ニ伴フ  $a$  及ビ  $b$  ノ長サノ變化ヲ見レバ可ナリ。次ノ圖ハ種種ノ銳角ノ正弦及ビ餘弦ノ値ヲ小數二位マデ正シク讀ミ得ル様ニ畫キタルモノナリ。



正弦及ビ餘弦ノ値ニ關シテ次ノ性質アルコトハ上ノ圖ニヨリテ容易ニ之ヲ知リ得ベシ。

- (1) 正弦及ビ餘弦ノ値ハ何レモ0ト1トノ間ニアリ。
- (2) 正弦ハ角ノ大サガ増スニ從ツテソノ値ヲ増ス。
- (3) 餘弦ハ角ノ大サガ増スニ從ツテソノ値ヲ減ズ。
- (4) 角ガ45°ヨリ小ナルトキハ正弦ガ餘弦ヨリ小ナリ。角ガ45°ヨリ大ナルトキハ正弦ガ餘弦ヨリ大ナリ。角ガ丁度45°ナルトキハ兩者相等シ。

第2節ニ於テハ角  $A$  ヲツノ銳角トセルヲ以テ、角ガ0°又ハ90°ナルトキハソノ正弦及ビ餘弦ナルモノハ未ダ定義セラレザリシナリ。然レドモ今前頁ノ圖ニヨリテ見ルニ、

正弦ハ、角ガ0°ニ近ヅクニ從ヒ限リナク0ニ近ヅキ、マタ角ガ90°ニ近ヅクニ從ヒ限リナク1ニ近ヅクコトヲ知ル。依ツテ

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1$$

ト定ムベシ。

又餘弦ハ、角ガ0°ニ近ヅクニ從ヒ限リナク1ニ



近ヅキ、角ガ  $90^\circ$  ニ近ヅクニ從ヒ限リナク  $0$  ニ近  
ヅクヲ以テ

$$\underline{\cos 0^\circ = 1}, \quad \underline{\cos 90^\circ = 0}$$

ト定ムベシ。

斯ク定ムレバ前節ノ公式(1)及ビ(2)ハ  $0^\circ$  及ビ  $90^\circ$   
ニ對シテモ成立ス。

### 例題

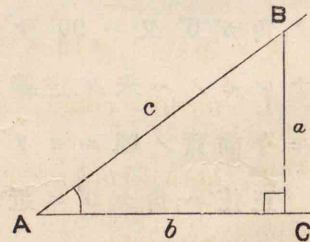
第6頁ノ圖ニヨリテ種々ノ角(例ヘバ  $20^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  
 $80^\circ$  等)ノ正弦及ビ餘弦ノ値ヲ求メヨ。又コレヲ  
ハ角ノ大サニ正比例又ハ反比例スルモノニアラ  
ザルコトヲ驗セ。

### 5. 正切及ビ餘切

第2節ニ述ベタル定義ニ  
ヨリ、

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

即チ



$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} (1)$$

同様にシテ  
又第3節ニ於ケルト同ジク、角Bニツイテ考フ  
レバ

$$\left. \begin{aligned} \tan(90^\circ - A) &= \cot A, \\ \cot(90^\circ - A) &= \tan A. \end{aligned} \right\} (2)$$

更ニ定義ニヨリ、同ジ角ノ正切ト餘切トノ間ニ  
ハ次ノ關係アリ。

$$\tan A \cdot \cot A = 1. \quad (3)$$

### 例題

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

次ノ等式ヲ證明セヨ。

1.  $\tan 40^\circ = \cot 50^\circ, \quad \cot 70^\circ = \tan 20^\circ.$
2.  $\tan A + \cot A = \frac{1}{\sin A \cos A}.$
3.  $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A.$
4.  $\frac{\sin^2 A}{\tan^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\cot^2 A} = 1.$

### 6. 正切及ビ餘切ノ數値

前節(1)ノ關係ニヨリ、第4節ノ圖ヲ參考スレバ、



角  $A$  が  $0^\circ$  より  $90^\circ$  マデ漸次増大スルトキノ  $\tan A$  及ビ  $\cot A$  ノ變化ヲ考フルコトヲ得。

先ヅ正切ニツイテ考フレバ、角ガ  $0^\circ$  ナルトキハ  $\sin 0^\circ = 0$ ,  $\cos 0^\circ = 1$  ナルヲ以テ  $\tan 0^\circ = 0$  トスベシ。

之ヨリ角ガ漸次増大スルニ從ヒ正弦ハ次第ニ増シ餘弦ハ減ズルヲ以テ、結局正切ハ次第ニソノ値ヲ増ス。サテ角ガ  $90^\circ$  ニ近ヅクトキハ正弦ハ 1 ニ近ヅキ餘弦ハ 0 ニ近ヅクニヨリ、正切ハ限リナクソノ値ヲ増シユクベシ。依ツテ角ガ  $90^\circ$  ニ接近スルトキハ、ソノ正切ハ「無限大トナル」トイヒ、之ヲ記號ニテ

$$\tan 90^\circ = \infty$$

ト記ス。  $\infty$  ハ數ニアラズ、限リナク増大シテ止ムコトナキヲ示ス符牒ナリ。

餘切ニツイテモ同様ニ考フレバ、

$$\cot 0^\circ = \infty, \quad \cot 90^\circ = 0$$

トスベキモノニシテ、角ノ大サガ増スニ從ツテ餘切ハ次第ニソノ値ヲ減ズルコトヲ知ル。

之ヲマトメテ次ノ結果ヲ得。

(1) 正切及ビ餘切ハ 0 及ビ正數ノ如何ナル値ヲモトル。

(2) 角ノ大サガ増スニ從ツテ正切ハ次第ニソノ値ヲ増シ、餘切ハ次第ニソノ値ヲ減ズ。

(3) 正切ノ値ハ、角ガ  $0^\circ$  ニ近ヅクトキハ限リナク 0 ニ近ヅキ、 $90^\circ$  ニ近ヅクトキ無限大トナル。又餘切ノ値ハ、角ガ  $0^\circ$  ニ近ヅクトキ無限大トナリ、 $90^\circ$  ニ近ヅクトキ限リナク 0 ニ近ヅク。

### 例題

1. 第 4 節ノ圖ニヨリテ、 $50^\circ$  ノ角ノ正切及ビ餘切ノ値ヲ求メヨ。
2. 一ツノ角ノ正切ト餘切ト何レガ大ナルカヲ吟味セヨ。

### 7. 正割及ビ餘割

再ビ第 2 節ノ定義ヲ參照スレバ直チニ次ノ關係ヲ得ベシ。

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

從ツテ  $\sec A \cdot \cos A = 1$ ,  $\operatorname{cosec} A \cdot \sin A = 1$ .



更ニ第3節ノ如クシテ

$$\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A,$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A.$$

ナルコトモ容易ニ證明セラル。

又 Pythagoras ノ定理ニヨリ

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ナルヲ以テ、此ノ兩邊ヲ  $b^2$  又ハ  $a^2$  ニテ除スレバ夫  
夫

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A,$$

$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

ナル關係ヲ得。

前節ノ方法ニナラヒ、角ノ變化ニ伴フ正割及ビ  
餘割ノ變化ヲ調ブレバ次ノ結果ヲ得ベシ。

(1) 正割及ビ餘割ハ何レモ 1 ヨリ小ナ  
ラズ。

(2) 角ノ大サガ増スニ從ツテ、正割ハ次  
第ニソノ値ヲ増シ、餘割ハ次第ニソノ値ヲ  
減ズ。

(3) 正割ノ値ハ、角ガ  $0^\circ$  ニ近ヅクトキハ  
限りナク 1 ニ近ヅキ、マタ  $90^\circ$  ニ近ヅクトキ  
ハ無限大トナル。又餘割ノ値ハ、角ガ  $0^\circ$  ニ

近ヅクトキハ無限大トナリ、 $90^\circ$  ニ近ヅク  
トキハ限りナク 1 ニ近ヅク。

依ツテ

$$\sec 0^\circ = 1, \quad \sec 90^\circ = \infty.$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \infty, \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

### 例題

次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$1. \tan A \sin A + \cos A = \sec A.$$

$$2. \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A.$$

$$3. \sec^4 A + \tan^4 A = 1 + 2 \sec^2 A \tan^2 A.$$

$$4. \frac{1}{1 + \sin A} + \frac{1}{1 - \sin A} = 2(1 + \tan^2 A).$$

### 8. 總括

第3節乃至第7節ニ得タル公式ヲマトムレバ  
次ノ如シ。

$$\left. \begin{array}{l} \sin A \operatorname{cosec} A = 1 \\ \cos A \sec A = 1 \\ \tan A \cot A = 1 \end{array} \right\} (1) \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A \end{array} \right\} (2)$$



$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \cos A \\ \cos(90^\circ - A) &= \sin A \\ \tan(90^\circ - A) &= \cot A \\ \cot(90^\circ - A) &= \tan A \\ \sec(90^\circ - A) &= \operatorname{cosec} A \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - A) &= \sec A \end{aligned} \right\} (4)$$

コレラノ關係ノ中(1), (2) 及ビ(3)ヲ利用スレバ,  
一ツノ三角函數ノ値ヲ知リテ他ノ五ツノモノヲ  
求ムルコトヲ得ベシ。

例 1.  $\sin A$ ヲ用ヒテ他ノ三角函數ヲ表セ。

先ヅ(2)ニヨリテ

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}.$$

從ツテ(3)ニヨリテ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}, \quad \cot A = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A}.$$

次ニ(1)ニヨリテ

$$\sec A = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}.$$

此ノ種ノ問題ハ或ハ次ノ例 2ノ如ク幾何學的  
ニ解スルモ可ナリ。

例 2.  $\cos A = a$ ナルトキ, 他ノ三角函數ノ値ヲ  
求メヨ。

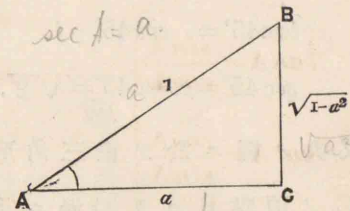
三角形 ABCニ於テ, Cヲ直角トスレバ

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

ナルヲ以テ, 今

AB=1トスレバ

$$AC = \cos A = a$$



ナリ。從ツテ Pythagorasノ定理ニヨリ

$BC = \sqrt{1 - a^2}$ トナル。依ツテ Aノ三角函數ヲ得  
ルコト次ノ如シ。

$$\sin A = \sqrt{1 - a^2}, \quad \tan A = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a},$$

$$\cot A = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad \sec A = \frac{1}{a}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

### 例題

正切, 餘切, 正割, 餘割ノ中何レカーツノ値ヲ知リ  
テ他ノ三角函數ヲ求ムル公式ヲ作レ。

### 9. $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ノ三角函數

ABCハCヲ直角トスル直角二等邊三角形ナリ  
トスレバ  $A=B=45^\circ$ ニシテ, ココニ  $AC=BC=1$   
トスレバ  $AB=\sqrt{2}$ ナリ。依ツテ次ノ結果ヲ得。



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1,$$

$$\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}.$$

又次ノ圖ニ於テ正三角形  
ABCノ頂點Bヨリ對邊ニ垂  
線BDヲ引クトキハ、 $\triangle ABD$ ハ

$$A = 60^\circ, \quad \angle ABD = 30^\circ$$

ナル角ヲ有スル直角三角形

ニシテ、ココニ  $AD = 1$

トスレバ  $AB = 2, \quad BD = \sqrt{3}$

ナリ。故ニ次ノ結果ヲ得。

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

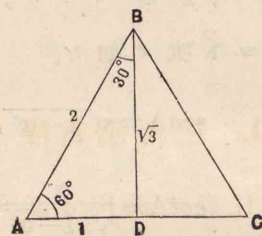
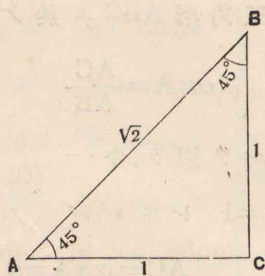
$$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2, \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**[注意]** 本節ニ得タル三角函數ノ値及ビ

$$\sqrt{2} = 1.41421 \quad \sqrt{3} = 1.73205$$

ナルコトハ常ニ記憶スルヲ便トス。但シコレヲノ値ヲ  
或ル式ニ入ルルトキニハ先ヅ以テソノ式ヲ計算ニ便利  
ナル形ニ直シ置クコトヲ忘ル可カラズ。例ヘバ



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.41421}{2} = 0.70711 \quad (\text{末位四捨五入})$$

ノ如シ。

## 例題

1.  $\tan 30^\circ$  ノ値ヲ小數第五位マデ求メヨ。
2.  $8\cot^2 45^\circ - 2\cos^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ$  ノ値ヲ求メヨ。
3.  $\cot^2 45^\circ + \cos 60^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{3}{4}\cot^2 60^\circ$  ノ値ヲ求メヨ。

## 10. 三角函數表

任意ノ鋭角ノ三角函數<sup>\*</sup>ハ前節ノ如キ簡單ナル  
方法ニヨリテ求ムルヲ得ズ。依ツテ實際ニ必要  
アルトキハ古來ノ學者ニヨリテ作製セラレタル  
三角函數表ナルモノヲ用フルナリ。次頁ニ掲グ  
ルモノハ $1^\circ$ ノ整數倍ナルスベテノ鋭角ノ三角函  
數ヲ示セル略表ナリ。

**[注意]**  $0^\circ, 90^\circ$ ノ諸函數及ビ  $\sin 30^\circ, \operatorname{cosec} 30^\circ, \tan 45^\circ, \cot 45^\circ, \cos 60^\circ, \sec 60^\circ$  等ノ他ハ皆無理數ナルヲ以テ、表ニハ小數  
第五位以下ヲ四捨五入シタル値ヲ掲ゲタリ。

\* 嚴密ニイヘバ「三角函數ノ値」トイフベキナレドモ以下略シテ  
單ニ「三角函數」トイフコトアリ。



函 數 度	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0	0.0000	0.0000	1.0000	∞	∞	1.0000	90
1	0.0175	0.0175	1.0002	57.2987	57.2900	0.9998	89
2	0.0349	0.0349	1.0006	28.6537	28.6363	0.9994	88
3	0.0523	0.0524	1.0014	19.1073	19.0811	0.9986	87
4	0.0698	0.0699	1.0024	14.3356	14.3007	0.9976	86
5	0.0872	0.0875	1.0038	11.4737	11.4301	0.9962	85
6	0.1045	0.1051	1.0055	9.5668	9.5144	0.9945	84
7	0.1219	0.1228	1.0075	8.2055	8.1443	0.9925	83
8	0.1392	0.1405	1.0098	7.1853	7.1154	0.9903	82
9	0.1564	0.1584	1.0125	6.3925	6.3138	0.9877	81
10	0.1736	0.1763	1.0154	5.7588	5.6713	0.9848	80
11	0.1908	0.1944	1.0187	5.2408	5.1446	0.9816	79
12	0.2079	0.2126	1.0223	4.8097	4.7046	0.9781	78
13	0.2250	0.2309	1.0263	4.4454	4.3315	0.9744	77
14	0.2419	0.2493	1.0306	4.1336	4.0108	0.9703	76
15	0.2588	0.2679	1.0353	3.8637	3.7321	0.9659	75
16	0.2756	0.2867	1.0403	3.6280	3.4874	0.9613	74
17	0.2924	0.3057	1.0457	3.4203	3.2709	0.9563	73
18	0.3090	0.3249	1.0515	3.2361	3.0777	0.9511	72
19	0.3256	0.3443	1.0575	3.0716	2.9042	0.9455	71
20	0.3420	0.3640	1.0642	2.9238	2.7475	0.9397	70
21	0.3584	0.3839	1.0711	2.7904	2.6051	0.9336	69
22	0.3746	0.4040	1.0785	2.6695	2.4751	0.9272	68
23	0.3907	0.4245	1.0864	2.5593	2.3559	0.9205	67
24	0.4067	0.4452	1.0946	2.4586	2.2460	0.9135	66
25	0.4226	0.4663	1.1034	2.3662	2.1445	0.9063	65
26	0.4384	0.4877	1.1126	2.2812	2.0503	0.8988	64
27	0.4540	0.5095	1.1223	2.2027	1.9626	0.8910	63
28	0.4695	0.5317	1.1326	2.1301	1.8807	0.8829	62
29	0.4848	0.5543	1.1434	2.0627	1.8040	0.8746	61
30	0.5000	0.5774	1.1547	2.0000	1.7321	0.8660	60
31	0.5150	0.6009	1.1666	1.9416	1.6643	0.8572	59
32	0.5299	0.6249	1.1792	1.8871	1.6003	0.8480	58
33	0.5446	0.6494	1.1924	1.8361	1.5399	0.8387	57
34	0.5592	0.6745	1.2062	1.7883	1.4826	0.8290	56
35	0.5736	0.7002	1.2203	1.7434	1.4281	0.8192	55
36	0.5878	0.7265	1.2361	1.7013	1.3764	0.8090	54
37	0.6018	0.7536	1.2521	1.6616	1.3270	0.7986	53
38	0.6157	0.7813	1.2690	1.6243	1.2799	0.7880	52
39	0.6293	0.8098	1.2868	1.5890	1.2349	0.7771	51
40	0.6428	0.8391	1.3054	1.5557	1.1918	0.7660	50
41	0.6561	0.8693	1.3250	1.5243	1.1504	0.7547	49
42	0.6691	0.9004	1.3456	1.4945	1.1106	0.7431	48
43	0.6820	0.9325	1.3673	1.4663	1.0724	0.7314	47
44	0.6947	0.9657	1.3902	1.4396	1.0355	0.7193	46
45	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	0.7071	45
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	度 函 數

例 題

1. 正弦ガ  $\frac{3}{4}$  ナル角ハ何度ト何度トノ間ニアルカ。  
*42° ~ 48°*
2.  $\tan x = \frac{8}{5}$  ナル  $x$  ノ度數ヲ求メヨ。
3.  $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin x$  ヨリ  $x$  ヲ求メヨ。
4.  $\sin 20^\circ, \cos 40^\circ, \tan 80^\circ$  ヲ6頁ノ圖ニヨリテ概算セルモノト, 前頁ノ表ニヨリテ求メタルモノトヲ比較セヨ。

11. 三角法ノ定義

三角法ノ最初ノ目的ハ既ニ第1節ニ述ベタル如シ。而シテ三角函數ナルモノハ此ノ目的ヲ達センガタメニ案出セラレタルモノナリ。然ルニ其ノ後三角函數ハ單ニ三角形ノ邊及ビ角等ヲ計算スルタメニ有用ナルノミナラズ, ナホ他ニモ種ノ應用アルコトガ知ラレタルヲ以テ, 今日ニ於テハ

三角法トハ三角函數ノ性質及ビソノ應用ヲ講ズル學科ナリ。

ト定義スルヲ至當ナリトス。



三角法ニ於テ論ズル主要ナル事項ハ次ノ三ツニ分タル。

(1) 三角函數ノ性質。

(2) 平面三角形(本書ニ於テハ單ニ三角形ト稱ス)ニ關スル計算法。

(3) 球面三角形(球面上ニ作ラレタル三角形)ニ關スル計算法。

本書ニ於テハ(1)ノ初步及ビ(2)ヲ論ズ。コレ即チ平面三角法ト稱セラルルモノナリ。(3)ヲ論ズルモノハ所謂球面三角法ニシテ、星學、航海術等ニ應用セラル。又(1)ヲ更ニ深ク論ズルコトハ高等數學ノ範圍ニ屬スルモノナリ。

### 雜 題

1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$(1) (1 + \tan A)(1 + \cot A) = \frac{(\sin A + \cos A)^2}{\sin A \cos A}.$$

$$(2) \sin A(\tan A + \cot A) = \sec A.$$

$$(3) \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x.$$

2.  $\tan A = \frac{a}{b}$  ナルトキ、角 A ノ他ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

3.  $\cot \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$  ナルトキ  $\frac{\operatorname{cosec}^2 \theta - \cos^2 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta + \cos^2 \theta}$  ノ値如何。

4.  $\frac{\sin x + 2 \sin x \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}$  ヲ簡單ニセヨ。

5. 次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

$$4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^3 30^\circ.$$

6.  $\tan x + \cot x = 2$  ヲ満足セシムル銳角  $x$  ヲ求メヨ。(斯クノ如ク未知角ノ三角函數ヲ含ム方程式ヲ三角方程式ト云ヒ、コレヲ満足セシムル角ヲ求ムルコトヲソノ方程式ヲ解クト云フ。)

7. 次ノ三角方程式ヲ解ケ。

$$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0.$$

8. 正方形 ABCD ノ一邊 BC ノ中點ヲ E トスレバ、角 EAB ノ正弦及ビ餘弦如何。

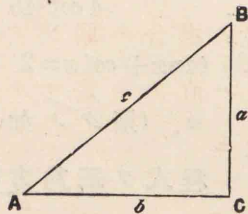


## 第二章 直角三角形ノ解法

## 12. 直角三角形ノ解法

三角函數ノ應用ヲ示サンガタメニ、ココニ直角三角形ノ解法及ビ簡易ナル測量問題ヲ説明スベシ。

三角形ABCニ於テCヲ直角トシ、又角A, B, Cニ對スル邊ヲ夫々  $a, b, c$  ト名付ク。



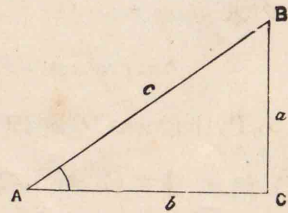
直角三角形ノ二ツノ邊、又ハ一ツノ邊ト一ツノ銳角トノ數値ヲ知リテ殘リノ邊及ビ角ノ數値ヲ求ムル計算法ヲ直角三角形ノ解法ト云フ。

ソノ解法ハ次ノ四種ニ分タル。

(1) 斜邊  $c$  及ビ一銳角A(又ハB)ヲ知ル時。

$$A+B=90^\circ$$

ナルヲ以テ、A又ハBノ中何レカ一方ガ知ラルルトキハ、他ノ方ハ直チニ求メラル。次ニ



$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

ナルガ故ニ  $a = c \sin A, \quad b = c \cos A.$

(2) 直角ノ一邊  $a$  及ビ一銳角A(又ハB)ヲ知ルトキ。

前ノ場合ト同ジク殘リノ銳角ハ直チニ定マル。

次ニ

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

ナルガ故ニ

$$c = \frac{a}{\sin A} = a \operatorname{cosec} A, \quad b = \frac{a}{\tan A} = a \cot A.$$

(3) 斜邊  $c$  ト他ノ一邊  $a$  トヲ知ルトキ。

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

ニヨリテAヲ求メ、從ツテソノ餘角トシテBヲ得。

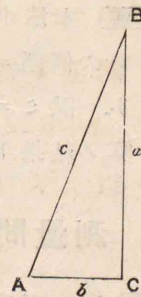
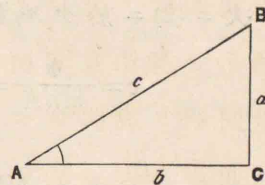
$b$ ヲ求ムルニハ、(1)ニ於ケル如ク

$$b = c \cos A,$$

又ハPythagorasノ定理ニヨリ

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

(4) 直角ノ二邊  $a$  及ビ  $b$  ヲ知ルトキ。





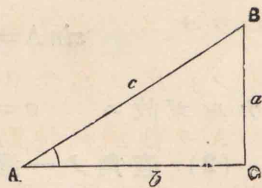
先ツ  $\tan A = \frac{a}{b}$

ニヨリテ A ヲ求メ、從ツテソノ

餘角トシテ B ヲ得。

次ニ (2) ニ於ケル如ク

$$c = \frac{a}{\sin A} = a \operatorname{cosec} A.$$



### 例題

第18頁ノ表ヲ用ヒ、次ノ各ノ場合ニ於テ直角三角形 ABC ( $C=90^\circ$ ) ヲ解ケ。

1.  $c=12,$   $A=32^\circ$
2.  $A=35^\circ,$   $a=2.3$
3.  $c=250,$   $a=235$
4.  $a=8\text{cm},$   $b=9.5\text{cm}$

**注意** 本節中ニ挿入セル四箇ノ三角形ノ圖ハ夫々上ノ四ツノ例題ニ相當スル寸法ノ割合ヲ以テ畫キタルモノナリ。試ミニ尺度及ビ分度器ヲ以テコレラノ圖ヲ測リ、計算ノ結果ト比較セヨ。

### 13. 測量問題

**例** 1. 五重ノ塔アリ、ソノ基底ヲ距ルコト  $50\text{m}$ ノ地點ヨリ頂上ヲ望メバソノ方向ハ地面ト  $30^\circ$ ノ

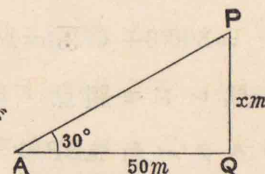
角ヲナス、(之ヲ稱シテ塔頂ノ仰角ガ  $30^\circ$  ナリトイフ。) 塔ノ高サヲ求メヨ。

A ヲ觀測ノ地點トシ、

PQ =  $x$  米ヲ塔ノ高サトスレバ

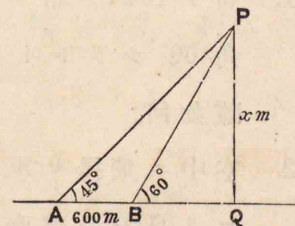
$$x = AQ \tan A$$

$$= 50 \tan 30^\circ = 50 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} = 28.9(\text{m})$$



**例** 2. 一直線ノ道路ヲ進行スル人アリ、此ノ道ト  $45^\circ$ ノ角ヲナス方向ニ一ノ煙突ヲ見タリ、コレヨリ進ムコト  $600\text{m}$ ニシテ再ビソノ煙突ヲ見レバ道ト  $60^\circ$ ノ角ヲナス方向ニアリシトイフ。コノ煙突ト道路トノ距離如何。

P ヲ煙突ノ位置、A 及ビ B ヲ夫々前後兩回ノ觀測地點、PQ ヲ煙突ト道路トノ距離トシ、今 PQ =  $x$  米トス。然ルトキハ



$$AQ = x \cot 45^\circ = x(\text{米}), \quad BQ = x \cot 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}(\text{米})$$

ニシテ、其ノ差ハ  $600\text{m}$ ナルヲ以テ

$$x - \frac{x}{\sqrt{3}} = 600$$

ナル方程式ヲ得、之ヲ解ケバ



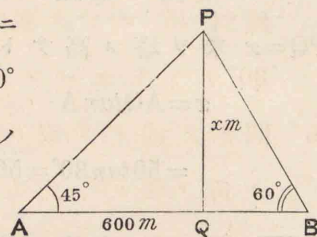
$$x = \frac{600\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{600\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{600(3+\sqrt{3})}{2}$$

$$= 300(3+\sqrt{3}) = 1419.6(m)$$

然レドモ題意ノ取リ方ニ  
ヨリテハ角 ABP ノ方ガ  $60^\circ$   
ナル様ニモ解セラル。ソノ  
場合ニハ方程式ハ

$$x + \frac{x}{\sqrt{3}} = 600$$

トナル。(學生自ラ此ノ場合ノ解答ヲ求ムベシ)



### 例 題

1. 高サ  $10m$  ノ塔ノ頂ヲアル地點ヨリ望メバ仰角  $60^\circ$  ナリトイフ、ソノ地點ヨリ塔マデノ距離如何。
2. 空中ニ飛揚セル輕氣球アリ、地上ノアル一點ヨリ見レバ垂直ニ頭上ニアリ、同時ニ此ノ點ヨリ  $300m$  ヲ距テタル一點ヨリ見レバ仰角  $60^\circ$  ナリトイフ、此ノ輕氣球ハ地上何米ノ高サニアルカ。
3. 鐵道線路ノ勾配  $\frac{1}{25}$  ナルトキ線路ガ水平面トナス角如何。

**注意** 普通勾配ト云フハ水平面トナス角ノ正切ノ意味ナレドモ、鐵道線路ニ於テハ正弦ヲ用フ。

4. 或ル山ノ頂ニ登ルニ二ツノ坂路アリ、一方ハ傾斜  $45^\circ$  ニシテ長サ  $200m$  アリ、他ノ方ハ傾斜  $30^\circ$  ナリトセバソノ長サ何米ナルカ。
5. 圓形ノ池アリ、或ル地點ヨリコレヲ見レバ  $60^\circ$  ノ角ヲ張ル\*、而シテソノ點ヨリ池ノ岸ノ最も近キ點マデノ距離ハ  $25m$  ナリトイフ、此ノ池ノ半径ヲ求メヨ。
6. 相距ルコト  $2km$  ナル甲乙二地點ヨリ同時ニ一ツノ飛行機ノ方位及ビ仰角ヲ測リタルニ、甲ニ於テハ方位北、仰角  $30^\circ$ 、乙ニ於テハ方位東、仰角  $60^\circ$  ヲ得タリ、此ノ機ノ高サハ何米ナルカ。

\*其ノ地點ヨリ池ノ縁ニ引ケル二ツノ切線ノナス角ガ  $60^\circ$  ナリ。



## 第二篇

### 一般ノ角

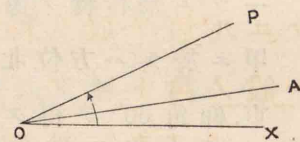
#### 第一章 一般ノ角ノ三角函數

##### 14. 一般ノ角

一定點  $O$  ヨリ引キタル半直線  $OA$  ガ  $OX$  ナル位置ヨリ發シテ一ツノ平面内ニ於テ  $O$  ノ周リニ回轉シ、 $OP$  ナル位置ニ來レ

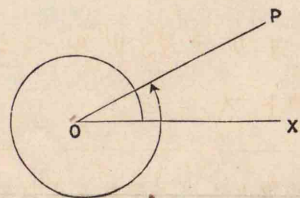
リトスレバ、ココニ角  $XOP$

ヲ生ズ。  $OX$  ヲ原線、 $OA$  ヲ



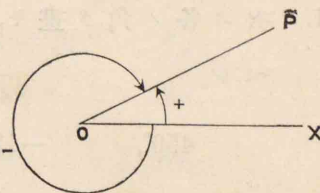
**動徑** トイフ。角ノ大小トイフハ畢竟動徑ガ原線ヨリ發シテソノ最後ノ位置ニ至ルマデノ回轉ノ多少ノコトナリト考フレバ、角ノ大サニハ限リナシ。即チ圖ノ如ク動徑

ガ  $OX$  ノ位置ヲ通り越シテナホ回轉シタリトスレバ、角  $XOP$  ハ  $360^\circ$  以上ニモナルベシ。



ナホ又動徑ガ  $OX$  ヨリ  $OP$  ニ至ルニソノ回轉ノ方向ニツアリ、次ノ圖ニ於テ矢ヲ以テ示スガ如シ。

コノ相反セル二ツノ方向ヲ區別スルタメニ角ノ大サニ正負ノ符號ヲ附ス。通常ノ規約トシテハ、動徑



ノ回轉ガ時計ノ針ノ回轉ト反對ナル方向ヲトリシ時生ズル角ヲ**正角**トシ、時計ノ針ノ回轉ト同一ナル方向ヲトリシ時ノ角ヲ**負角**ト定ム。

之ニヨリテ角ノ大サハ正、負及ビ零ノアラユル値ヲ取り得ルモノトナレリ。之ヲ**一般ノ角**トイフ。

一般ノ角ニ於テ原線ト動徑ノ位置ノミヲ知ルトキ、ソノ一ツノ度數ヲ  $a$  トスレバ、ソノ角ノ最モ一般ナル度數ハ

$$a + n \cdot 360^\circ$$

ニヨリテ表サルベシ、ココニ  $n$  ハ任意ノ整數\*トス。

\* 整數トイヘバ、零及ビ正負ノ整數ヲ總稱スルモノトス、以下常ニ然リ。



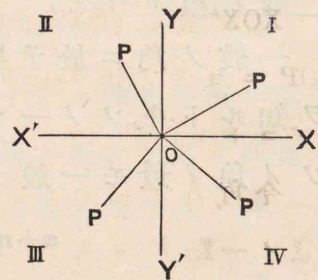
例題

1. 次ノ各ノ角ヲ畫キ, 矢ヲ以テ回轉ノ跡ヲ示スベシ。  
450°, -120°, -405°.
2. 或ル鈍角ヲ四倍スレバソノ動徑ハ丁度前ト同ジ位置ニ來ルトイフ, ソノ角ヲ求ム.

15 象限

原線OXト直線OYトガ直交スルモノトシ, XO, YOノ延長ヲ夫々OX', OY'トス。角XOPノ動徑OPガOXトOYトノ間ニアル

トキハ此ノ角ハ**第一象限**ニアリトイヒ, コレヨリ順次ニOPガOYトOX'トノ間, OX'トOY'トノ間, OY'トOXトノ間ニアルニ從



ヒテ, 角XOPハ夫々**第二, 第三, 第四象限**ニアリト云フ。例ヘバ225°ハ第三象限ニアリ, -300°及ビ400°ハ第一象限ニアル角ナリ。

この中に 2象限と3象限の同じ ことを如何

例題

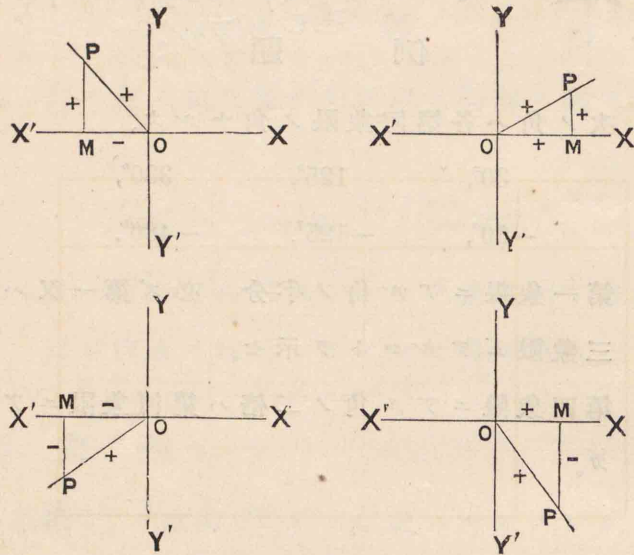
1. 次ノ角ハ各第何象限ノ角ナルカ。  
30°, 125°, 330°,  
-30°, -125°, -480°.
2. 第一象限ニアル角ノ半分ハ必ズ第一又ハ第三象限ニアルコトヲ示セ。
3. 第四象限ニアル角ノ二倍ハ第何象限ニアルカ。

16. 一般ノ角ノ三角函數

XOX'及ビYOY'ノ意味ヲ前節ノ如シトシ, 動徑OPニヨリテ作ラレタル角XOPヲ單ニ角Aト呼ブコトトス。

今角Aガ何レノ象限ニアルモ常ニOP上ノ任意ノ一點PヨリXOX'ニ垂線PMヲ引キ, 直角三角形OPMヲ作り, ソノ三邊ニ夫々正負ノ符號ヲ附スルコト次ノ如クスベシ。





- (1) 斜邊 OP ハ常ニ正トス。
- (2) 底邊 OM ハ OX 上ニアルトキハ正トシ, OX' 上ニアルトキハ負トス。
- (3) 垂線 PM ハ XOX' ニ對シテ OY' ト同ジ側ニアルトキハ正トシ, OY' ト同ジ側ニアルトキハ負トス。

斯クノ如ク符號ヲ附シテ次ノ如ク定義ス。

$$\sin A = \frac{PM}{OP}, \quad \cos A = \frac{OM}{OP}, \quad \tan A = \frac{PM}{OM},$$

$$\cot A = \frac{OM}{PM}, \quad \sec A = \frac{OP}{OM}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{OP}{PM}.$$

コレ即チ一般ノ角ノ三角函數ニシテ, ソノ値ハ角ノ大サノミニヨリテ定マルコト明カナリ(第2節参照)。マタンノ符號ハ上ニ述ベタル規約ニヨリ次表ノ如クニ確定ス。

函數 象限	$\sin$ $\operatorname{cosec}$	$\cos$ $\sec$	$\tan$ $\cot$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

### 17. 三角函數ノ間ノ關係

一般ノ角ニツイテモ次ノ式ガ成立スルコトハ定義ニヨリテ容易ニ證明セラル。

$$\left. \begin{aligned} \sin A \operatorname{cosec} A &= 1 \\ \cos A \sec A &= 1 \\ \tan A \cot A &= 1 \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned} \right\} (3)$$

(1),(2)及ビ(3)ニヨリテ, 一ツノ角ノ三角函數ノ中



何レカーツヲ知ルトキハ他ノ五ツヲ求ムルコトヲ得ベシ。

例 A が第三象限ノ角ニシテ  $\sin A = -a (a > 0)$

ナルトキ、他ノ三角函數ヲ求ム。

$$\cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 A} = -\sqrt{1 - a^2},$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a},$$

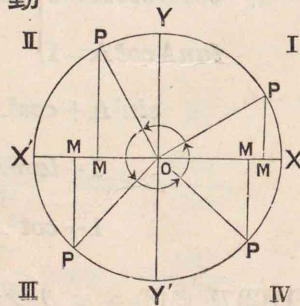
$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = -\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = -\frac{1}{a}.$$

例題

1. A が第二象限ノ角ナルトキ、 $\tan A$  ヲ用ヒテ他ノ三角函數ヲ表セ。
2.  $\sec A = -a (a > 0)$  ナルトキ、A ノ他ノ三角函數ヲ求メヨ。

18. 三角函數ノ値ノ變動

第16節ノ定義ニヨリ、第4節乃至第7節ヲ參考スレバ、動徑 OP ガ OX ヨリ發シテ順次ニ I, II, III, IV ノ各象限ヲ經過スルトキ、



之ニ伴フ角 XOP ノ三角函數ノ値ノ變動ハ次ノ如クナルヲ知ルベシ。

象限 角 函數		I		II		III		IV	
	0°		90°		180°		270°		360°
sin	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
cos	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
tan	0	+	∞	-	0	+	∞	-	0
cot	∞	+	0	-	-∞	+	0	-	-∞
sec	1	+	∞	-	-1	-	-∞	+	1
cosec	∞	+	1	+	∞	-	-1	-	-∞

注意 1. 表中「角」ノ欄ニアル 0°, 90°, 180°, 270°, 360° 等ハ各之ニ 360° ノ任意ノ整數倍ヲ附加スルモ可ナリ。コレラノ角ノ三角函數ナルモノハ第16節ノ定義ノ中ニ含マレザルモノニシテ、此ノ表ニ於テ始メテソノ値ヲ定義セルモノナリ。

注意 2. A が第一象限ヲ經テ 90°ニ近ヅクトキハ  $\tan A$  ハ正ニシテ ∞トナル、然レドモ A が第二象限ノ方



ヨリ  $90^\circ = \text{近ヅクトキハ } \tan A \text{ ハ負ニシテソノ絶對値ガ}$   
 $\infty$ トナル,依ツテ之ヲ  $-\infty$ ト書ク。元來  $\tan 90^\circ$  ナルモノ  
 ハ到底之ニ一定ノ數值ヲ與フルコト能ハザルモノニシ  
 テ( $\infty$ ハ數ニアラズ),吾人ハタダ  $A$ ガ限リナク  $90^\circ = \text{近ヅ}$   
 $\text{クトキノ } \tan A \text{ ノ變動ノ有様ガ } \infty \text{ 又ハ } -\infty \text{ ナリト云ヒ}$   
 得ルニスギズ。

コノ他一般  $= 90^\circ$ ノ奇數倍ナル角ノ正切,正割及ビ  $90^\circ$   
 ノ偶數倍ナル角ノ餘切,餘割ニツイテモ常ニ上ト同様ニ  
 考フベシ。

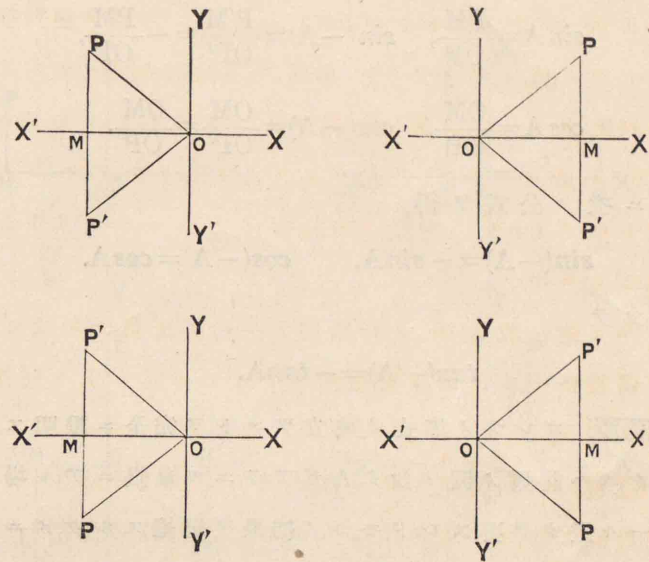
**注意** 3. 如何ナル角ニツイテモ正弦及ビ餘弦ハソノ  
 絶對値ガ1ヨリ大ナルコトナシ。正割及ビ餘割ハソノ  
 絶對値ガ1ヨリ小ナルコトナシ。正切及ビ餘切ニハ何  
 等ノカクノ如キ制限ナシ。(第4,5,6,7節参照)

### 例 題

1.  $1 - \sin A$ ノ値ノ變動ヲ考ヘ,ソノトリ得ベキ  
 最大値及ビ最小値ヲ求メヨ。
2. 次ノ方程式ヲ解ケ。
  - (1)  $\cos^2 x - 2 \cos x = 3$ .
  - (2)  $\cot^2 x + \operatorname{cosec} x - 1 = 0$ .

### 19. $(-A)$ ノ三角函數

原線  $OX$ ト  $A$ ナル角ヲナス動徑  $OP$ ト,  $-A$ ナ



ル角ヲナス動徑  $OP'$ トハ常ニ  $OX$ ニ關シテ對稱  
 ノ位置ニアリ。今  $OP$ 上ノ一點  $P$ ヨリ  $OX$ (或ハ  
 ソノ延長  $OX'$ )ニ垂線  $PM$ ヲ引キ,更ニ之ヲ延長シ  
 テ  $OP'$ ト  $P'$ ニ於テ交ラシムレバ,二ツノ三角形  
 $OPM, OP'M$ ハ全ク相等シク

$$OP' = OP.$$

又  $P'M$ ト  $PM$ トモソノ長サハ相等シケレドモ,ソ  
 ノ符號ハ相反ス,即チ

$$P'M = -PM.$$

然ルニ



$$\sin A = \frac{PM}{OP}, \quad \sin(-A) = \frac{P'M}{OP'} = -\frac{PM}{OP},$$

$$\cos A = \frac{OM}{OP}, \quad \cos(-A) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP}.$$

故ニ次ノ公式ヲ得。

$$\sin(-A) = -\sin A, \quad \cos(-A) = \cos A.$$

從ツテ

$$\tan(-A) = -\tan A.$$

**〔注意〕** コレラノ等式ノ成立ツコトヲ完全ニ證明スル  
タメニハ前頁ノ圖ノ如クAガアラユル象限ニアル場合  
ヲ一々畫クヲ要スレドモ、コノ結果ヲ記憶スルタメニハ  
何レカーツ(例ヘバAガ第一象限ニアル場合)ノ圖ヲ畫キ  
テ見レバ可ナリ。コノコトハ次ノ二節ニモ適用セラル  
ルモノトス。

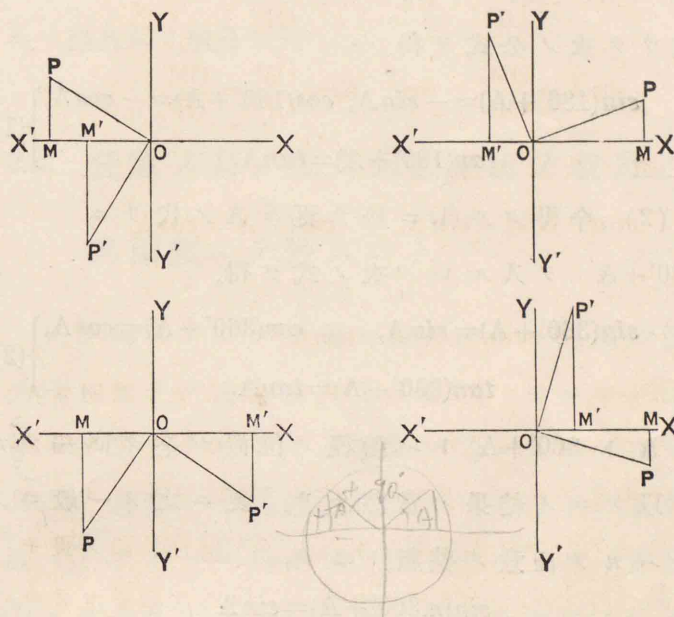
## 20. $90^\circ + A$ ノ三角函數

角  $XOP$  ヲ  $A$ , 角  $XOP'$  ヲ  $90^\circ + A$  トシ,  $OP = OP'$   
トシテ  $P$  及ビ  $P'$  ヨリ  $XOX'$  ニ垂線  $PM$  及ビ  $P'M'$   
ヲ引ケバ, 三角形  $OPM$  ト  $P'OM'$  トハ全ク相等シク

$$P'M' = OM, \quad OM' = -PM.$$

然ルニ

$$\sin A = \frac{PM}{OP}, \quad \sin(90^\circ + A) = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{OM}{OP},$$



$$\cos A = \frac{OM}{OP}, \quad \cos(90^\circ + A) = \frac{OM'}{OP'} = -\frac{PM}{OP}.$$

故ニ

$$\sin(90^\circ + A) = \cos A, \quad \cos(90^\circ + A) = -\sin A,$$

$$\tan(90^\circ + A) = -\cot A.$$

## 21. $n \cdot 90^\circ \pm A$ ノ三角函數

(1) 前節ノ公式ニ於ケル  $A$  ハ任意ノ角ナルヲ

以テ, 今  $A$  ノ代リニ  $90^\circ + A$  ヲ入ルレバ

$$\sin\{90^\circ + (90^\circ + A)\} = \cos(90^\circ + A) = -\sin A,$$



$$\cos\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\sin(90^\circ+A)=-\cos A.$$

依ツテ次ノ公式ヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ+A) &= -\sin A, & \cos(180^\circ+A) &= -\cos A, \\ \tan(180^\circ+A) &= \tan A. \end{aligned} \right\} (1)$$

(2) 今得タル(1)ニ於テ更ニAノ代リニ  
180°+A ヲ入ルレバ次ノ式ヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \sin(360^\circ+A) &= \sin A, & \cos(360^\circ+A) &= \cos A, \\ \tan(360^\circ+A) &= \tan A. \end{aligned} \right\} (2)$$

Aト360°+Aトハ動徑ノ位置ガ全ク同一ナル  
ヲ以テコノ結果ハ當然ナリ。更ニ之ヲ一般ニス  
レバnヲ任意ノ整數トシテ、

$$\sin(n \cdot 360^\circ + A) = \sin A$$

等トスルヲ得ベシ。

(3) 前節ノ式及ビ本節(1), (2)ニ於テAノ代リ  
ニ-Aヲ入ルレバ次ノ三組ノ公式ヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ-A) &= \cos A, & \cos(90^\circ-A) &= \sin A, \\ \tan(90^\circ-A) &= \cot A. \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ-A) &= \sin A, & \cos(180^\circ-A) &= -\cos A, \\ \tan(180^\circ-A) &= -\tan A. \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(360^\circ-A) &= -\sin A, & \cos(360^\circ-A) &= \cos A, \\ \tan(360^\circ-A) &= -\tan A. \end{aligned} \right\} (5)$$

**注意** Aノ如何ニ拘ラズ90°-A及ビ180°-Aヲ夫々  
Aノ餘角及ビ補角ト稱ス。

## 22. 任意ノ角ノ三角函數ヲ正ノ銳角ノ三 角函數ニテ表スコト

先ヅ與ヘラレタル角ガ負ナルトキハ第19節ノ  
公式ニヨリテ之ヲ正ノ角ニ直ス。モシソノ正角  
ガ360°以上ナルトキハ前節ノ(2)ニヨリテ之ヨリ  
360°ノ適當ナル倍數ヲ減ジテ360°以下ノ正角ニ  
直ス。ナホソノ角ガ180°以上ナルトキハ前節ノ  
(1)ニヨリテ之ヲ180°以下ノ角トナシ、ソノ結果ノ  
角ガナホ90°以上ナルトキハ前節ノ(4)ニヨリテ  
ソノ補角ニ直セバ確カニ90°以下ノ正角トナル  
ベシ。

以上ノ取扱ヒニ於テハ函數ノ種類ハ少シモ變  
ズルコトナシ、例ヘバ任意ノ角ノ正弦ハ常ニ正ノ  
銳角ノ正弦ヲ用ヒテ之ヲ表スコトヲ得。

然レドモ若シ函數ノ種類ヲ變ズルコトヲ許セ  
バ、更ニ前節ノ(3)ニヨリテ角ヲ45°以下ノ正角ニ  
直スコトヲ得ベシ



$$\begin{aligned}
 \text{例 1. } \sin 1765^\circ &= \sin(4 \times 360^\circ + 325^\circ) \\
 &= \sin 325^\circ = \sin(180^\circ + 145^\circ) \\
 &= -\sin 145^\circ = -\sin(180^\circ - 35^\circ) \\
 &= -\sin 35^\circ.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{例 2. } \tan(-1190^\circ) &= -\tan 1190^\circ \\
 &= -\tan(3 \times 360^\circ + 110^\circ) \\
 &= -\tan 110^\circ = -\tan(180^\circ - 70^\circ) \\
 &= \tan 70^\circ = \tan(90^\circ - 20^\circ) = \cot 20^\circ.
 \end{aligned}$$

然レドモ必ズシモ常ニ上記ノ手順ニ拘泥スルヲ要セズ。或ハ前節ノ(5)及ビ(1)ニヨリテ夫々次ノ如クニ考フルモ可ナリ。

$$\begin{aligned}
 \sin 1765^\circ &= \sin(5 \times 360^\circ - 35^\circ) \\
 &= \sin(-35^\circ) = -\sin 35^\circ,
 \end{aligned}$$

$$\tan(-1190^\circ) = \tan(7 \times 180^\circ - 1190^\circ) = \tan 70^\circ.$$

### 例 題

次ノ三角函數ヲ或ル正ノ銳角ノ同ジ三角函數ニテ表セ。

$$\sin(-2000^\circ), \quad \tan 523^\circ 41', \quad \cos(-293^\circ 26').$$

### 雜 題

1. 次ノ三角函數ヲ求メヨ。

$$\sin 585^\circ, \quad \cos 690^\circ, \quad \sec(-930^\circ).$$

2. 第18頁ノ表ニヨリ、次ノ各角ノ正弦、餘弦及ビ正切ヲ求メヨ。

$$238^\circ, \quad -1072^\circ.$$

3. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$(1) \begin{cases} \sin(270^\circ + A) = -\cos A \\ \cos(270^\circ + A) = \sin A \\ \tan(270^\circ + A) = -\cot A \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \sin(270^\circ - A) = -\cos A \\ \cos(270^\circ - A) = -\sin A \\ \tan(270^\circ - A) = \cot A \end{cases}$$

4.  $\sin(A-90^\circ)$ ,  $\cos(A-90^\circ)$ ,  $\tan(A-90^\circ)$  ヲ  $A$  ノ三角函數ニテ表セ。

5. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$(1) \cos A + \sin(270^\circ + A) + \sin(A-270^\circ) + \cos(A+180^\circ).$$

$$(2) \sin(-270^\circ) + \tan^2(180^\circ - a) - \operatorname{cosec}^2(450^\circ - a).$$

6.  $360^\circ$  以下ノ正角ニシテ次ノ方程式ヲ満足セ



シムルスベテノ角ヲ求メヨ。

$$2\sin^2 x + \sqrt{3} \cos x + 1 = 0.$$

7.  $\cos \theta = \frac{2mn}{m^2+n^2}$  ナルトキ  $\tan \theta$  ノ値如何。
8.  $\theta$  ライカナル角トナスモ  $x + \frac{1}{x} = \sin \theta$  ヲ満足セシムル實數  $x$  ハ存在セザルコトヲ示セ。

## 第二章 加法定理

### 23. 正弦及ビ餘弦ノ加法定理

二角  $A, B$  ノ各ノ正弦及ビ餘弦ヲ知リテ,  $A+B$  ノ正弦及ビ餘弦ヲ求ムルニハ次ノ式ニヨル。

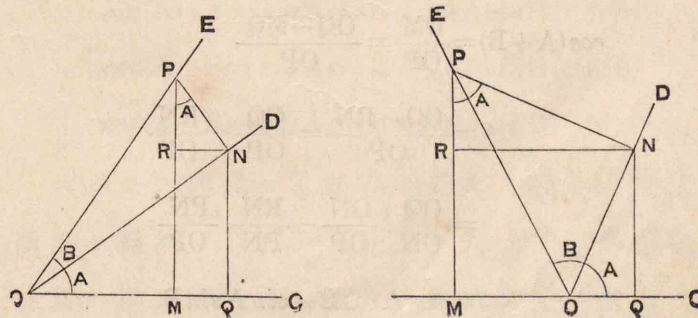
$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

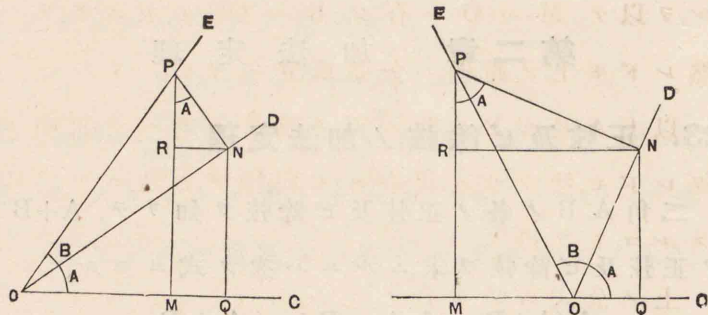
之ヲ正弦及ビ餘弦ノ加法定理トイフ。

$A$  及ビ  $B$  ヲ共ニ正ノ銳角ナリトスレバ, ソノ和  $A+B$  ハ銳角, 鈍角又ハ直角ナリ, 下ノ圖ハ和ガ銳角及ビ鈍角ナル場合ヲ示ス。

$\angle COD = A, \angle DOE = B$  トシ,  $OE$  上ノ任意ノ一點  $P$  ヨリ  $OC, OD$  ニ夫々垂線  $PM, PN$  ヲ引ケバ,  $\angle MPN$







ハ A = 等シ; 次ニ N ヨリ OC, PM = 夫々垂線 NQ,  
NR ヲ引クトキハ

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= \frac{PM}{OP} = \frac{PR+RM}{OP} \\ &= \frac{PR+NQ}{OP} = \frac{NQ}{OP} + \frac{PR}{OP} \\ &= \frac{NQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{PR}{PN} \cdot \frac{PN}{OP} \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B. \\ \cos(A+B) &= \frac{OM}{OP} = \frac{OQ-MQ}{OP} \\ &= \frac{OQ-RN}{OP} = \frac{OQ}{OP} - \frac{RN}{OP} \\ &= \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{RN}{PN} \cdot \frac{PN}{OP} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B. \end{aligned}$$

A+B ガ直角ナルトキハ, OE ガ OC ニ垂直トナ

ルヲ以テ, M ハ O ト合シ, R ハ OE ノ上ニアリ。

然レドモ上ノ證明ハ矢張成立スベシ。

以上 A 及ビ B ヲ共ニ正ノ鋭角ト考ヘテ證明シ  
タレドモ, 然ラザル場合ニモ同様ノ方法ニテ證明  
スルコトヲ得。

上ノ公式ニ於テ B ノ代リニ  $-B$  トスレバ

$$\begin{aligned} \sin(A-B) &= \sin\{A+(-B)\} \\ &= \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B) \\ &= \sin A \cos B - \cos A \sin B, \\ \cos(A-B) &= \cos\{A+(-B)\} \\ &= \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B) \\ &= \cos A \cos B + \sin A \sin B. \end{aligned}$$

本節ノ結果ヲ併記スレバ下ノ如シ。

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (I)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad (II)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (III)$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (IV)$$

コレラノ四式ヨリ後節ニ述ブル種々ノ公式ヲ  
誘出シ得ルノミナラズ, 今迄ニ得タル三角函數ノ  
性質ニ關スル公式ハ皆コノ四式ノ中ニ含有セラ  
ルルモノナリ。例ヘバ(1)ニ於テ  $B=90^\circ$  ト置ケバ,



$\sin(A+90^\circ) = \sin A \cos 90^\circ + \cos A \sin 90^\circ = \cos A$   
 ニシテ、コレ即チ第20節ノ公式ナリ。又(II)ニ於テ  
 $A=0^\circ$ ト置ケバ

$\sin(-B) = \sin 0^\circ \cos B - \cos 0^\circ \sin B = -\sin B$   
 トナリ、是即チ第19節ノ公式ト同ジ。

### 例 題

1.  $75^\circ (=45^\circ + 30^\circ)$  ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。
2.  $15^\circ (=45^\circ - 30^\circ)$  ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。

### 24. 正切ノ加法定理

前節ノ(I)及ビ(III)ニヨリ

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

コノ最後ノ式ノ分母及ビ分子ヲ  $\cos A \cos B$  ニテ除  
 スレバ

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

ヲ得、コレ即チ正切ノ加法定理ナリ。

同様ニ(II)及ビ(IV)ヨリ次ノ式ヲ得ベシ、

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

### 例 題

次ノ式ヲ證明セヨ。

$$1. \quad \tan(45^\circ \pm A) = \frac{1 \pm \tan A}{1 \mp \tan A}$$

$$2. \quad \cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$$

### 25. 倍角公式

正弦、餘弦及ビ正切ノ加法定理ニ於テ、 $B=A$ ト  
 置ケバ次ノ式ヲ得。

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A,$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 \\ = 1 - 2 \sin^2 A,$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

コレヲ 二倍角公式 トイフ。

更ニ加法定理ニ於テ、 $B=2A$ ト置キ、二倍角公式  
 ヲ應用スレバ次ノ公式ヲ得。(學生自ラソノ計算  
 ヲ試ミヨ。)

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A,$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A,$$



$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

コレヲ三倍角公式トイフ。

### 例 題

次ノ式ヲ證明セヨ。

1.  $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$

2.  $\frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x$

3.  $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$

4.  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$

5.  $A = 18^\circ$  ナルトキハ  $\sin 2A = \cos 3A$  ナリ、之ヨリ  $\sin 18^\circ$  ノ値ヲ求メヨ。

### 26. 半角公式

A ノ三角函數ニヨリテ  $\frac{A}{2}$  ノ三角函數ヲ表ス式ヲ作ルニハ  $\cos A$  ヲ用フルヲ便ナリトス。即チ餘弦ノ二倍角公式ニ於テ A ノ代リニ  $\frac{A}{2}$  ヲ入ルレバ

$$\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$$

ヲ得。依ツテ

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

從ツテ

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

ヲ得。コレヲ半角公式トイフ。

右邊ニ於ケル正負ノ符號ハ  $\frac{A}{2}$  ガ何レノ象限ニアルカヲ考ヘテ適當ニ選ブベキモノトス。

例  $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ヲ知リテ、 $165^\circ$  ノ正弦及ビ餘弦ヲ求ム。

$$\sin 165^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 330^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 165^\circ = -\sqrt{\frac{1 + \cos 330^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

### 例 題

半角公式ニヨリテ、 $15^\circ$  及ビ  $22^\circ 30'$  ノ三角函數ヲ求メヨ。



## 27. 乗積公式

正弦及ビ餘弦ノ加法定理ノ中(I)ト(II)又ハ(III)ト(IV)ヲ相加ヘ又ハ減ズレバ次ノ四式ヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) + \sin(A-B) &= 2\sin A \cos B \\ \sin(A+B) - \sin(A-B) &= 2\cos A \sin B \\ \cos(A+B) + \cos(A-B) &= 2\cos A \cos B \\ \cos(A+B) - \cos(A-B) &= -2\sin A \sin B \end{aligned} \right\} (1)$$

ココニ於テ  $A+B=C$ ,  $A-B=D$

ト置ケバ  $A = \frac{C+D}{2}$ ,  $B = \frac{C-D}{2}$

ナリ、依ツテ(1)ヲ書キ直セバ下ノ如シ。

$$\left. \begin{aligned} \sin C + \sin D &= 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D &= 2\cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \\ \cos C + \cos D &= 2\cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \cos C - \cos D &= -2\sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \end{aligned} \right\} (2)$$

(1)及ビ(2)ハ二角ノ正弦及ビ餘弦ノ和又ハ差ヲ積ノ形ニ變ジ、若シクハ積ヲ和又ハ差ノ形ニ變ズル場合ニ用ヒラルル公式ナリ。

## 例題

1. 次ノ式ヲ積ノ形ニ變ゼヨ。

$$(1) \sin 3A + \sin 5A.$$

$$(2) \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x.$$

2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\sin A + \sin 4A + \sin 7A}{\cos A + \cos 4A + \cos 7A}.$$

3. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\sin 50^\circ + \sin 10^\circ = \cos 20^\circ.$$

## 雜題

1.  $A, B$  ハ共ニ正ノ銳角ニシテ,  $\sin A = \frac{1}{3}$ ,  $\cos B = \frac{1}{2}$  ナルトキ,  $\sin(A+B)$  ノ値如何。
2.  $\alpha$  ハ正ノ銳角,  $\beta$  ハ正ノ鈍角ニシテ  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$  ナルトキ,  $\cos(\alpha-\beta)$  ノ値如何。
3.  $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ ,  $\sin \beta = \frac{9}{41}$  ナルトキ  $\cos(\alpha-\beta)$  ノ値如何。
4.  $\tan \frac{A}{2} = t$  ナルトキ、之ヲ用ヒテ  $A$  ノスベテノ三角函數ヲアラハセ。



5. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$(1) \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B \\ = \cos^2 B - \cos^2 A.$$

$$(2) \cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B \\ = \cos^2 B - \sin^2 A.$$

$$(3) \sin(A+B+C) \\ = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C \\ + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C.$$

$$(4) \cos(A+B+C) \\ = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C \\ - \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C.$$

$$(5) \tan(A+B+C) \\ = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}.$$

6.  $A+B+C=180^\circ$  ナルトキ, 次ノ等式ヲ證明セヨ

$$(1) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$(2) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

$$(3) \sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

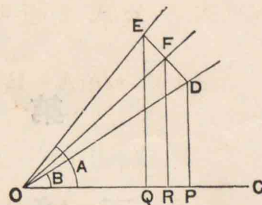
7. 圖ニ於テ  $OD=OE=1$ ,  $\angle COE=A$ ,  $\angle COD=B$

ニシテ,  $OF$  ハ角  $DOE$  ノ

二等分線, マタ  $EQ$ ,  $FR$ ,

$DP$  ハ何レモ  $OC$  ニ垂

直ナリトス。



之ニヨリテ幾何學的ニ

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。



### 第三篇

## 三角形ノ解法

### 第一章 三角形ニ關スル公式

#### 28 三角形ノ原素

一ツノ三角形ハ三ツノ角及ビ三ツノ邊ヲ有ス、コレヲ總稱シテ三角形ノ原素トイフ。

今一ツノ三角形ノ角ヲ  $A, B, C$ ; 之ニ對スル邊ヲ夫々  $a, b, c$  トスレバ,  $A, B, C$  ハ何レモ  $0^\circ$  ト  $180^\circ$  トノ間ニアリテ,  $A+B+C=180^\circ$  ナル關係アリ。

又  $a, b, c$  ハ正ニシテ, ソノ何レノ二ツノ和モ, 残りノ一ツヨリ大ナリ, 即チ  $a+b > c$  等ノ關係アリ。

一ツノ三角形ノ原素ノ間ニハナホ種々ノ關係アリ, ソノ重要ナルモノヲ本章ニ述ベントス。

以下本章ニ於テハ三角形ノ原素ヲ本節ニ用ヒタル如キ記號ニテ表スコトトス。

### 例題

三角形  $ABC$  ニ於テ次ノ關係ヲ證セヨ。

$$1. \sin A = \sin(B+C), \quad \cos A = -\cos(B+C).$$

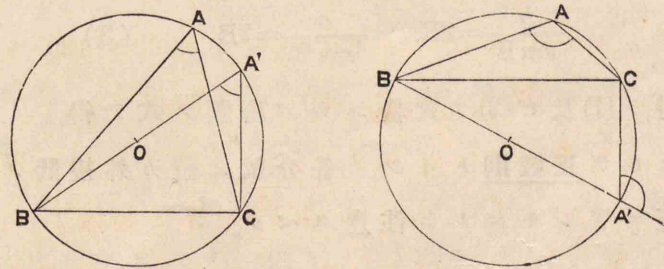
$$2. \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}.$$

$$3. \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

#### 29. 原素間ノ關係 I (正弦則)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

之ヲ證明センニ, 今  $A$  ガ銳角又ハ鈍角ナル場合ヲ考ヘ, 三角形  $ABC$  ノ外接圓ヲ畫キ, ソノ半徑ヲ  $R$  トス。

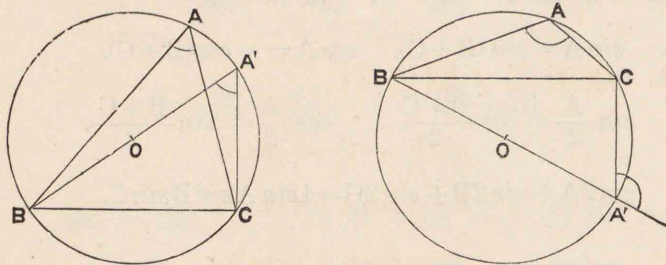


此ノ圓ニ於テ  $B$  ヲ過ル直徑ノ他ノ端ヲ  $A'$  トシ,  $CA'$  ヲ結ベバ, 角  $BA'C$  ハ角  $A$  ニ等シキカ ( $A$  ガ銳角ナルトキ), 又ハ  $A$  ノ補角ニ等シ ( $A$  ガ鈍角ナルトキ)。



何レニシテモ  $\sin BA'C = \sin A$  ナリ。

然ルニ  $BC = BA' \sin BA'C$



ナルヲ以テ  $a = 2R \sin A$ ,

即チ  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ . (1)

Aガ直角ナルトキハ,  $\sin A = 1$ ,  $a = 2R$  ナルヲ以テ, (1)ハ矢張眞ナリ。

同様ニシテ

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (2)$$

ヲ得。(1)及ビ(2)ヲ比較スレバ所題ノ式ヲ得。

コレヲ正弦則トイフ。各分數ノ値ガ外接圓ノ直徑ニ等シキコトニ注意スベシ。

### 例 題

三角形ABCニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

1.  $\sin A + \sin B > \sin C$ .

2.  $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 0$  ナラバ  $C = 90^\circ$  ナリ。

3.  $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$ .

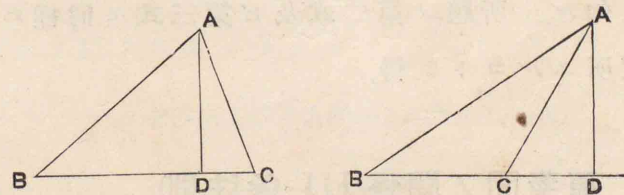
### 30. 原素間ノ關係 II

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

$$b = c \cos A + a \cos C,$$

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

AヨリBCニ垂線ADヲ引ケバ, B及ビCガ共ニ銳角ナルトキハ, Dハ邊BC上ニアリ。



依ツテ  $BC = BD + DC = AB \cos B + AC \cos C$ ,

故ニ  $a = b \cos C + c \cos B$ .

モシCガ鈍角ナラバ, DハBCヲCノ方ニ延長シタル上ニアリ。依ツテ

$$BC = BD - CD = AB \cos B - AC \cos(180^\circ - C)$$

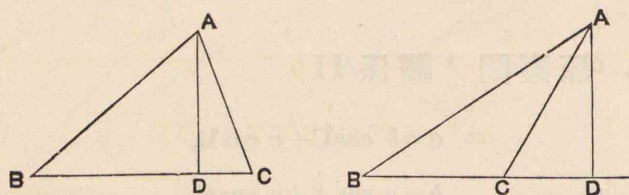
$$= AB \cos B + AC \cos C,$$

故ニ再ビ  $a = b \cos C + c \cos B$



ヲ得。Bガ鈍角ナルトキモ亦同様ナリ。

Cガ直角ナルトキハ、 $a=c\cos B$ ,  $\cos C=0$ ;



故ニ上ノ式ハナホ此ノ場合ニモ眞ナリ。Bガ直角ナルトキモ亦然リ。

故ニ上ノ式ハスベテノ場合ヲ通ジテ眞ナルコトヲ知ル。所題ノ第二式及ビ第三式モ同様ニシテ證明スルコトヲ得。

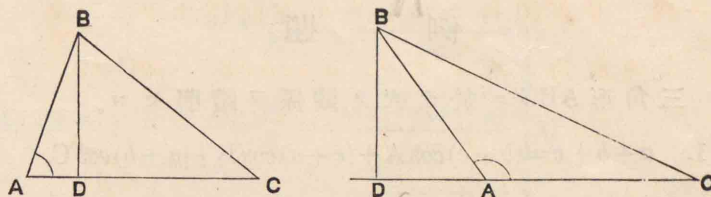
### 31. 原素間ノ關係 III (餘弦則)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Bヨリ AC 又ハソノ延長ニ引ケル垂線ヲ BD トスレバ、幾何學ニテ知レル如ク、Aガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \mp 2.AC.AD$$

ナリ。然ルニ一方ニ於テ、Aガ鋭角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ

$$AD = AB \cos A$$

$$\text{又ハ} \quad AD = AB \cos(180^\circ - A) = -AB \cos A$$

ナルヲ以テ、何レニシテモ

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.AC.AB \cos A,$$

$$\text{即チ} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Aガ直角ナルトキハ、Pythagorasノ定理ニヨリ  $a^2 = b^2 + c^2$ ニシテ、且ツ  $\cos A = 0$ ナルヲ以テ、上ノ式ハ眞ナリ。故ニ所題ノ第一式ハ常ニ眞ナリ。第二式、第三式モ同様ニ證明スルコトヲ得。

之ヲ餘弦則ト稱ス。或ハ前節ノ關係ヲ第一餘弦則ト稱シ、本節ノ關係ヲ第二餘弦則ト稱スルコトアリ。



## 例題

三角形ABCニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$1. a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C.$$

$$2. \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

$$3. b\cos A - a\cos B = \frac{b^2-a^2}{c}.$$

## 32. 原素間ノ關係 IV

餘弦則ニヨリ

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \left(1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}\right) \\ &= (b-c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{故ニ } \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}.$$

$$\text{今 } a+b+c=2s \quad \text{ト置ケバ,}$$

$$a+b-c=2(s-c), \quad a-b+c=2(s-b)$$

ナルヲ以テ

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

ココニ  $\frac{A}{2}$  ハ正ノ銳角ナルヲ以テ,  $\sin \frac{A}{2}$  ハ正

ナリ。故ニ

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \text{同様ニシテ } \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{aligned} \right\} (1)$$

モシ餘弦則ニ於テ  $\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1$  トシテ, 上ト同様ノ計算ヲナセバ次ノ式ヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned} \right\} (2)$$

從ツテ(1)ト(2)ヨリ次ノ式ヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned} \right\} (3)$$

以下本章ニ於テハ三角形ノ半周ヲ常ニ  $s$  ヲ以テ表ハスコトトス。



## 例題

1. 三角形 ABC に於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$(1) \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$(2) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

2. 三邊  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナストキハ,

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2} = 3 \text{ ナルコトヲ證明セヨ。}$$

## 33. 原素間ノ關係 V

正弦則ニヨリ

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

故ニ

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{b+c} &= \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} \\ &= \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan \frac{B+C}{2}} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\cot \frac{A}{2}} \end{aligned}$$

故ニ

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

他ノ角及ビ邊ノ間ニモ同様ノ關係アリ。之ヲ

## Napier ノ公式 トイフ。

上ノ式ハ B ト C, 又ハ  $b$  ト  $c$  ノ大小如何ニ拘ラズ眞ナレドモ, 實際使用スルトキニハ成ルベク負數ヲ避クルヲ便トス。サレバ假リニ

$A > B > C$ , 從ツテ  $a > b > c$  トスレバ, 次ノ三ツノ式ヲ用フベシ。

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}, \quad \tan \frac{A-C}{2} = \frac{a-c}{a+c} \cot \frac{B}{2},$$

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}.$$

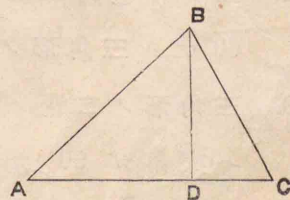
## 例題

次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$1. \frac{a}{b+c} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} \quad 2. \frac{a}{b-c} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}}$$

## 34. 面積

三角形 ABC ノ面積ヲ  $S$  トス。頂點 B ヨリ底邊 AC (又ハツノ延長上)ニ垂線 BD ヲ引ケバ





$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

而シテ  $AC = b,$   $BD = c \sin A$

ナルヲ以テ

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

ヲ得。同様ニ

$$S = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

上ノ式ヲ第32節ノ公式ニヨリテ書キ直セバ

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = bc \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

即チ  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ナリ。之ヲ Heron (又ハ Hero) ノ公式 トイフ。

### 例 題

1. 三邊ガ  $26\text{cm}, 35\text{cm}, 51\text{cm}$  ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。
2. ニツノ邊ガ  $18\text{m}$  及ビ  $25\text{m}$  ニシテソノ夾角ガ  $60^\circ$  ナル三角形ノ地面ノ面積如何。
3. 三角形ノ二邊ノ長サガ一定ナラバ、ソノ面積ハ夾角ガ  $90^\circ$  ナルトキニ最大トナルコトヲ證明セヨ。

頂角

4.  $\triangle ABC$  ノ内接圓ノ半徑ヲ  $r$ , 邊  $BC, CA, AB$  ニ切スル傍接圓ノ半徑ヲ夫々  $r_1, r_2, r_3$  トスレバ

$$r = \frac{S}{s}, \quad r_1 = \frac{S}{s-a}, \quad r_2 = \frac{S}{s-b}, \quad r_3 = \frac{S}{s-c}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

### 雜 題

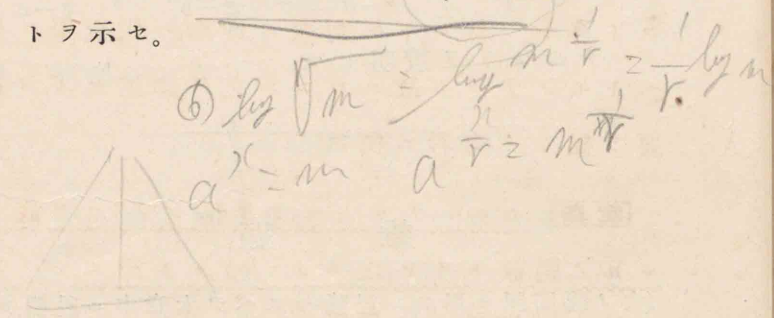
(次ノ諸問題ニ用フル記號ハスベテ本章中ニ説明セル如キ意味ヲ有スルモノトス)

1. 次ノ關係ヲ證明セヨ。
  - (1)  $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C.$
  - (2)  $a \sin A - b \sin B = c \sin(A - B).$
  - (3)  $4RS = abc.$
2.  $\cot A, \cot B, \cot C$  ガ等差級數ヲナストキハ、 $a^2, b^2, c^2$  モ亦等差級數ヲナスコト、及ビ此ノ逆ヲ證明セヨ。
3.  $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$  ガ等差級數ヲナストキハ、 $a, b, c$  モ亦等差級數ヲナスコト、及ビ此ノ逆ヲ證明セヨ。



4. 頂點 A ヨリ引キタル中線 AD ノ長サハ  
 $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc \cos A}$  ニシテ 又  $\tan \angle ADB = \frac{2bc \sin A}{b^2-c^2}$   
 ナルコトヲ示セ。

5. 角 A ノ二等分線 ノ長サハ  $\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$  ナルコトヲ示セ。



⑥  $\log \sqrt[m]{m} = \log m^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \log m$   
 $a^x = m \quad a^{\frac{x}{r}} = m^{\frac{1}{r}}$

⑦  $a^x = m \Rightarrow \frac{x}{a^x} = \frac{m}{m}$   
 $a^y = m \Rightarrow \frac{y}{a^y} = \frac{m}{m}$

⑧  $\log_a m^r = r \log_a m$   
 $\log_a m^r = \log_a (m \cdot m \cdot \dots \cdot m) = \log_a m + \log_a m + \dots + \log_a m = r \log_a m$

⑨  $\log_a m = x \Rightarrow a^x = m$   
 $a^{rx} = m^r \Rightarrow \log_a m^r = rx$   
 $\Rightarrow r \log_a m$

$\log_a M = x \rightarrow a^x = M$

第二章 三角函数ノ對數表

35. 對數

三角形ニ關スル計算ニ於テハ對數ヲ利用スルコト多シ。然レドモ對數ノ理論ハ代數學ニ屬スベキモノナルガ故ニココニ之ヲ詳述セズ、タダ概要ヲ記シテ參考ニ便ス。

**定義**  $a^x = n$  ナルトキ、 $x$ ヲ稱シテ「 $a$ ヲ底トセル  $n$ ノ對數」トイヒ、之ヲ  $x = \log_a n$  ト記ス。  
 又  $n$ ヲ對數  $x$ ノ真數トイフ。

**定理**

- (1)  $\log_a a = 1. \quad a^1 = a \quad (2) \quad \log_a 1 = 0. \quad a^0 = 1$
- (3)  $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n.$
- (4)  $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n.$
- (5)  $\log_a (m^r) = r \log_a m.$
- (6)  $\log_a \sqrt[r]{m} = \frac{1}{r} \log_a m.$

**定義** 10ヲ底トセル對數ヲ常用對數トイフ。  
 常用對數ニ於テハ底ヲ略シテ記サズ。今後本書ニ於ケル對數ハスベテ常用對數ナリトス。

常用對數

$\log_a m = x \Rightarrow a^x = m$   
 $\log_a n = y \Rightarrow a^y = n$   
 $a^x a^y = mn$   
 $a^{x+y} = mn$   
 $\log_a (mn) = x+y$   
 $= \log_a m + \log_a n$



**注意** 對數ガ負ナル場合ト雖、ソノ數值ヲ記スニハ小數部分ヲ常ニ正ナラシメ、負號ハ整數部分ノ上ニ冠ス。例ヘバ  $-1.2564$  ノ代リニ  $\bar{2}.7436$  トスルガ如シ。

對數ノ小數部分ヲ **假數** トイヒ、整數部分ヲ **指標** トイフ。

**定理** 或ル數ト、其ノ數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數トノ對數ハ同一ノ假數ヲ有ス。

**指標ノ法則.** 或ル數ノ對數ノ指標ハ、其ノ數ガ1ヨリ大ナルトキハ、其ノ整數部分ノ桁數ヨリ1ヲ減ジタルモノニ等シク、

1ヨリ小ナルトキハ、其ノ小數點以下初メテ現ハルル有効數字マデノ間ニアル0ノ數ニ1ヲ加ヘテ符號ヲ變ジタルモノニ等シ。

### 36. 三角函數ノ對數表

實際ノ計算ニハ三角函數ノ值ソレ自身ヨリモ其ノ對數ノ值ノ方が必要多キヲ以テ、之ヲ表ニシタルモノアリ、コレヲ三角函數ノ對數表ト稱ス。

本書ノ卷末ニ附セルモノハ10'飛ビノ角ニツイテ小數第四位マデノ近似值ヲ示セルモノナリ。ソノ見方ハ第18頁ノ表ニ準ジテ知ルベシ。

$$\text{例} \quad \log \sin 25^\circ 20' = \bar{1}.6313 \quad \log \sin 54^\circ 30' = \bar{1}.9107$$

$$\log \cos 40^\circ 10' = \bar{1}.8832 \quad \log \cos 79^\circ 50' = \bar{1}.2468$$

$$\log \tan 15^\circ 20' = \bar{1}.4381 \quad \log \cot 89^\circ 0' = \bar{2}.2419$$

正弦、餘弦及ビ  $45^\circ$  ヨリ小ナル角ノ正切等ハ1ヨリ小ナルヲ以テソノ對數ハ負ノ指標ヲ有ス。然ルニ數字ノ上ニ一々負號ヲ附スルコトハ印刷上不便ナルヲ以テ、對數ノ真ノ值ニ10ヲ加ヘテ正數トセルモノヲ表ニスルコトアリ。斯クノ如キ場合ニハ、之ヲ**表對數**トイヒ、 $\log \sin$  等ノ代リニ  $L \sin$  等ト書ク。例ヘバ

$$L \sin 25^\circ 20' = 9.6313 \quad L \tan 15^\circ 20' = 9.4381$$

### 例題

1. 表ニヨリテ次ノ值ヲ求メヨ。

$$\log \sin 7^\circ 10' \quad \log \cos 18^\circ 0' \quad \log \sin 112^\circ 20'$$

2. 次ノ式ヲ満足セシムル正ノ銳角  $x$  ヲ求メヨ。

$$\log \sin x = \bar{1}.4939 \quad \log \cos x = \bar{1}.6990$$

$$\log \tan x = \bar{1}.9848$$

### 37. 比例部分ノ理

表中ニ在ラザル銳角ノ三角函數ノ對數ヲ求メント欲スルトキハ、次ノ法則ニ依リテ之ヲ計算スルモノトス。之ヲ**比例部分ノ理**ト稱ス。







$$\log \tan 56^\circ 20' = 0.1765 \quad \text{表差 27}$$

$$4' \dots\dots\dots 10.8$$

$$0.6 \dots\dots\dots 16.2$$

$$0.07 \dots\dots\dots 18.9$$

$$\log \tan 56^\circ 24'.67 = 0.1777609$$

故ニ四捨五入シテ

$$\log \tan 56^\circ 24' 40'' = 0.1778$$

例 4.  $\log \sin x = \bar{1}.9545$  ナル正ノ鋭角  $x$ ヲ求ム。

$$\log \sin x = \bar{1}.9545$$

$$\log \sin 64^\circ 10' = \bar{1}.9543$$

2 表差 6

$$3' \dots\dots\dots 1.8$$

2

$$0.3 \dots\dots\dots 1.8$$

$$64^\circ 13'.3 \quad 2$$

故ニ  $x = 64^\circ 13'.3$

例 5.  $\log \cos x = \bar{1}.3614$  ナル正ノ鋭角  $x$ ヲ求ム。

例 2ト同様ノ注意ヲ以テ次ノ如ク計算ス。

$$\log \cos x = \bar{1}.3614$$

$$\log \cos 76^\circ 40' = \bar{1}.3629$$

15 表差 54

$$2' \dots\dots\dots 10.8$$

42

$$0.8 \dots\dots\dots 43.2$$

$$x = 76^\circ 42'.8 \quad -12$$

注意 小數四位マデノ表ヲ用ヒ、比例部分ノ理ニヨリテ算出セル値ニ於テハソノ小數第五位以下ハ必ズシモ確實ナラズ。通常ハ上ノ諸例ニ示ス如ク第四位マデニ四捨五入スルモノトス。又角ヲ求ムル場合ニ於テハ一分ノ小數第二位以下ハ殆ンド之ヲ取ル要ナシ。

### 例 題

1. 次ノ値ヲ求メヨ。

$$\log \sin 10^\circ 45' \quad \log \cos 20^\circ 3' \quad \log \tan 77^\circ 17'$$

2. 次ノ式ヲ満足セシムル正ノ鋭角ヲ求メヨ。

$$\log \tan x = \bar{1}.5551 \quad \log \sin x = \bar{1}.9876$$

$$\log \cos x = \bar{1}.7890$$

### 雜 題

1.  $0^\circ$ ト $360^\circ$ トノ間ニアリテ次ノ方程式ヲ満足セシムル角ヲ求メヨ。

$$(1) \cos 3\theta = \cos 2\theta.$$

$$(2) 1 + \sin^2\theta = 3 \sin\theta \cos\theta.$$

$$(3) 5 \cos\theta - 2 \sin\theta = 2.$$

2. 次ノ式ヨリ  $x$  及ビ  $y$ ヲ求メヨ。

$$\begin{cases} \tan 26^\circ 10' = 0.4410, \\ \sin 26^\circ 17' = x, \quad \sin y = 0.4415, \\ \sin 26^\circ 20' = 0.4436. \end{cases}$$



## 第三章 三角形ノ解法

## 38. 三角形ノ解法

一ツノ三角形ノ六ツノ原素ノ中、一般ニ何レカ三ツガ與ヘラルルトキハ他ノ三ツヲ算出スルコトヲ得、即チ所謂三角形ヲ解クコトヲ得ベシ。但シソノ與ヘラルル三原素ノ中少クモ一ツハ邊ナルヲ要ス。

サレバ三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合アリ。

- (1) 一邊ト二角トヲ知ル場合。
- (2) 二邊トソノ夾角ヲ知ル場合。
- (3) 二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知ル場合。
- (4) 三邊ヲ知ル場合。

以下次第ニ節ヲ逐ツテコレラノ各ノ解法ヲ述ベントス。

**〔注意〕** 六ツノ原素以外ノモノニテモ適當ナル三ツノ量ヲ與フレバ三角形ハ定マル、例ヘバ三ツノ中線ヲ與フル場合ノ如シ。カクノ如キ場合ニ於テモソノ三角形ノ原素ヲ悉ク算出スルコトヲ稱シテ三角形ヲ解クトイフ。

## 39. 一邊ト二角トヲ知ル場合

與ヘラレタル一邊ヲ  $a$  トス。與ヘラレタル二角ハ  $A, B, C$  ノ中ノ何レノ二ツナリトスルモ、残りノ一ツハ

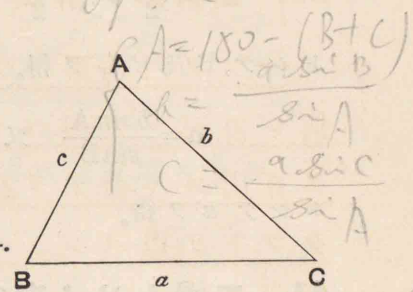
$$A+B+C=180^\circ$$

ナル關係ニヨリテ定マル。

次ニ正弦則ニヨリ

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

之ニヨリテ  $b$  及ビ  $c$  ヲ得。



對數ヲ用フルトキノ式トシテハ夫々

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A,$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

トスベキナレドモ、繁ヲ避クルタメ以下ノ諸節ニ於テハ、一々カク書き直スコトヲ略ス。

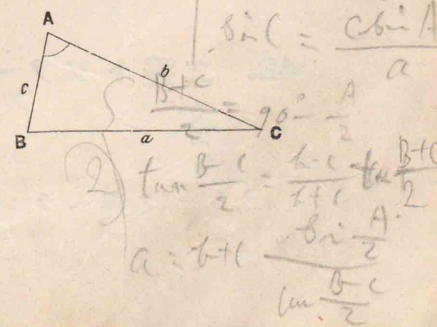
## 40. 二邊トソノ夾角ヲ知ル場合

$A, b, c$  ヲ與ヘラレタルモノトシ、 $b > c$  トス。先ヅ  $B+C=180^\circ-A$  ナルヲ以テ

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \quad (1)$$

又第33節ノ公式ニヨリ

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \quad (2)$$





(2)ヨリ  $\frac{B-C}{2}$  が定まり、之ト(1)トヨリ

$$B = \frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2}, \quad C = \frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2}$$

トシテ、B及ビCヲ得。最後ニ正弦則ニヨリ

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} \quad \text{又ハ} \quad a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

トシテ aヲ得。

#### 41. 二邊トソノ夾角ヲ知リテ第三邊ヲ求ムルコト

A, b, cヲ知リテ aヲ求ムルニ、前節ノ方法ニヨルヨリモ更ニ便利ナル法アリ。即チ先ヅ  $\frac{B-C}{2}$ ヲ求ムルコトハ前節ノ如クシ、之ヨリ第33節ノ例題ニ擧ゲタル式ニヨリ

$$a = (b+c) \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} \quad \text{又ハ} \quad a = (b-c) \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}}$$

トシテ aヲ得ベシ。

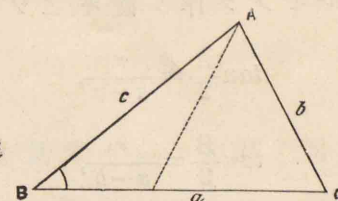
#### 42. 二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知ル場合

B, b, cヲ與ヘラレタルモノトスレバ、先ヅ正弦

則ニヨリ

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b}$$

之ニヨツテ Cヲ求メ、從ツテ



$A = 180^\circ - (B+C)$ ヲ得。再ビ正弦則ニヨリ

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} \quad \text{ヲ得ベシ。}$$

此ノ解法ニ於テハ先ヅ  $\sin C$ ノ値ヲ求メ、之ヨリ Cヲ出スモノナルヲ以テ、ココニ種々ノ場合ヲ生ズ。(詳細ナル吟味ハ附録IIIニ在リ)

#### 43. 三邊ヲ知ル場合

此ノ場合ニハ第32節ノ公式ノ中

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ニヨリテ三ツノ角ヲ求ムベシ。

實際ニ計算スルニハ先ヅ

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

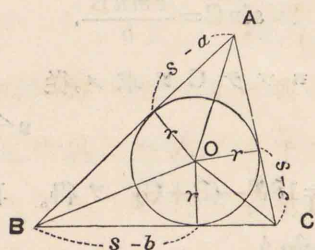


ナルモノヲ作り置き、之ヲ用ヒテ、

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a},$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b},$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}$$



トスルヲ便トス。

此ノ  $r$  ハ内接圓ノ半徑ニ他ナラズ。(第67頁例題4)

**注意**  $\sin \frac{A}{2}$  又ハ  $\cos \frac{A}{2}$  等ノ公式ニテハ  $a, b, c, s-a, s-b, s-c$  等ノ對數ヲ要スレドモ、 $\tan \frac{A}{2}$  ノ公式ニテハ  $s, s-a, s-b, s-c$  ダケノ對數ニテ足ルノ利アリ。

#### 44. 三角形解法ニ就キテノ注意

(1) 表ニ掲ゲラレタル數ハ小數若干位マデノ近似値ニ過ギズ、又比例部分ノ理モ絶對ニ精確ナルモノニハアラズ(特ニ表差ガ比較的大ナル部分ニ於テ最モ不確實ナリトス)。故ニ表ヲ用ヒテ計算シタル結果ニ於テハ或ル程度以上ノ精密ハ到底期ス可カラズ。

(2) 計算ニ際シテ無用ノ小數位ヲ多クトラザル様ニ注意スベシ。使用スル表ノ精粗ニヨリ、又與ヘラレタル既知數ノ確實ノ程度ニモヨリ、殊ニ

實地問題ニ於テハソノ必要ノ程度ヲ考ヘテ常ニ適當ナル桁數ヲ選定スベシ。(第37節ノ注意ヲ參照セヨ)

(3) 與ヘラレタル數ガ簡單ニシテ對數ヲ用フル要ナキトキ、或ハ三角形ガ直角三角形又ハ二等邊三角形等ノ特殊ナルモノナルトキハ、必ズシモ本章ニ述ベタル方法ニ拘泥スルコトナク、臨機ノ工夫ニヨリテ簡單ニ解キテ可ナリ。

#### 雜 題

1. 次ノ三角形ヲ解ケ。

$$(1) \begin{cases} a=55 \\ A=41^\circ 13' \\ B=71^\circ 19' \end{cases} \quad (2) \begin{cases} A=76^\circ 30' \\ b=87 \\ c=38 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} a=109 \\ b=71 \\ c=100 \end{cases}$$

2. 三邊ノ長サガ 20, 21, 29 ナルトキ、最大ナル角ヲ求ム。

3.  $B=30^\circ, b=50\sqrt{3}, c=150$  ナル三角形ハ二ツアリ、一ツハ二等邊三角形、一ツハ直角三角形ナルコトヲ示シ、且ツ各ノ第三邊ヲ求メヨ。

4.  $b:c=2:\sqrt{3}$  ニシテ且ツ  $B=C+30^\circ$  ナル三角形ヲ解ケ。

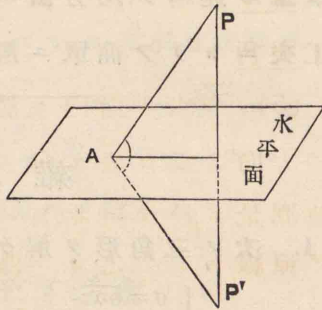


### 第四章 測量問題

#### 45. 測量上ノ術語

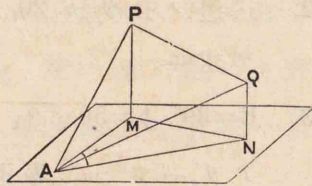
(1) 一點ト地球ノ中心トヲ過ル直線ヲソノ點ニ於ケル鉛直線、之ヲ含ム平面ヲ鉛直面ト云ヒ、鉛直線ニ垂直ナル平面ヲ水平面、其ノ上ニアル直線ヲ水平線ト云フ。

(2) 一點PガAヲ過ル水平面ヨリ上ニアルトキハ、直線APノ此ノ水平面トナス角ヲ稱シテAニ於ケルPノ仰角又ハ高度トイフ。



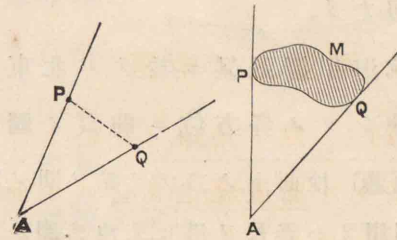
モシ點ノ位置ガP'ノ如クAヲ過ル水平面ヨリ下ニアルトキハ、此ノ角ヲ俯角又ハ深度トイフ。

(3) 二點P,Qノ間ノ水平距離トハ、コノ二點ノ一水平面上ニ於ケル正射影M,Nノ間ノ距離ナリ。

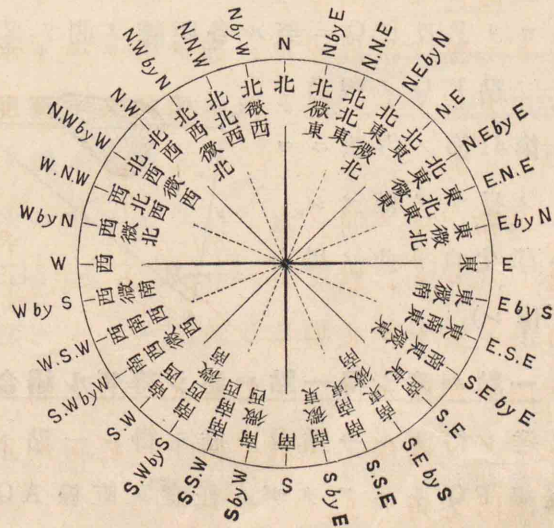


二直線AP,AQノ間ノ水平角トハ、コノ二直線ノ一水平面上ニ於ケル正射影AM,ANノ間ノ角ナリ。

(4) 二點P,Q又ハ一物體Mアリ。Aヲ過リ丁度之ヲ夾ム二直線ヲAP,AQトスレバ、二點P,Q又ハ物體MハAニ於テPAQナル角ヲ張ルト稱シ、此ノ角ヲ點Aニ於ケルP,Q又ハMノ視角トイフ。



(5) 一水平面内ニ於テ一點ヨリ見タル他ノ點ノ方向ヲ云ヒ表ス角ヲ方位角トイフ。通常ノ陸地測量ニ於テハ北(又ハ南)ノ方向ニ引キタル直線ヲ原線トシテ之ヨリ測レル角ヲ示ス。例ヘバ北





30° 東 (N 30° E) トイヘバ北ヨリ 30° ダケ東ニ偏セル方向ナリ。

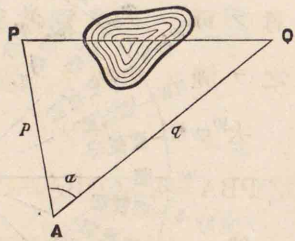
航海用羅針盤ニ於テハ北東南西ノ各ノ間ヲ八等分シ、ソノ各方位ニ前頁ノ圖ノ如キ名稱ヲ付ス。

**〔注意〕** 地面上ノ二ツノ點ノ間ノ距離ヲ直接ニ測ルニハ測鎖又ハ卷尺ヲ用ヒ、又角ヲ測ルニハ六分儀又ハ經緯儀ヲ用フ。

### 46. 直接ニ測リ得ザル二點間ノ距離ヲ求ムルコト

#### (1) 二點共ニ別々ニ達シ得ル場合。

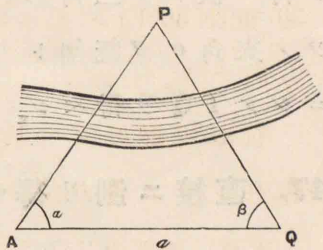
二點ヲ P 及ビ Q トス。直線 PQ 上ニアラザル一點 A ヨリ P 及ビ Q ニ至ル各距離ヲ測リ、又 A ニ於ケル二點 P, Q ノ視角ヲ測レバ、第 41 節ノ方法ニヨリ PQ ノ長サヲ得ベシ。  
(試ミニ學生自ラ此ノ場合ノ式ヲ作レ)。



#### (2) 一點ハ達シ得、一點ハ達シ得ザル場合。

P ヲ達シ得ザル一點、Q ヲ達シ得ル一點トス。先ヅ直線 PQ 上ニアラザル任意ノ直線 AQ ヲ測

リ之ヲ a トシ、又角 QAP 及ビ AQP ヲ測レバ、第 39 節ノ方法ニヨリ PQ ヲ算出スルコトヲ得。



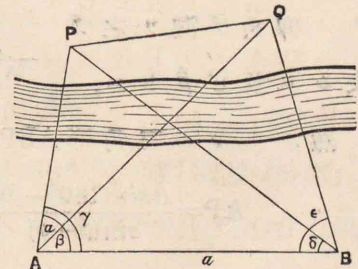
此ノ AQ ノ如ク測量ノ基礎トスル直線ヲ **基線** ト稱ス。

#### (3) 二點共ニ達シ得ザル場合。

二點ヲ P, Q トス。直線 PQ 上ニアラザル基線 AB ヲ測リ其ノ長サヲ a トシ、A ニ於テ

$$\angle PAQ = \alpha, \quad \angle QAB = \beta, \quad \angle PAB = \gamma$$

ヲ測ルベシ。ココニ PQAB ハ必ズシモ同一平面内ニアリト限ラザルヲ以テ  $\gamma$  ハ  $\alpha + \beta$  ニ等シト考フ可カラズ、矢張別ニ之ヲ測ルヲ要ス。



次ニ B ニ於テ  $\angle PBA = \delta, \angle QBA = \epsilon$  ヲ測ルベシ。

然ルトキハ、三角形 PAB 及ビ QAB ニ於テ正弦則ニヨリ

$$AP = \frac{a \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)}, \quad AQ = \frac{a \sin \epsilon}{\sin (\beta + \epsilon)}$$



ヲ得。依ツテ三角形PAQニ於テ二邊AP, AQ及ビソノ夾角 $\alpha$ ガ既知ナルヲ以テ, (1)ノ場合ノ如クニシテPQヲ得ベシ。

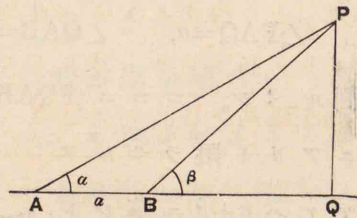
47. 直接ニ測リ得ザル高サヲ求ムルコト

Aヲ觀測者ノ位置トシ, Aヲ過ル水平面ヨリ上ニアル一點ヲPトス。今Pヨリコノ水平面ニ至ル鉛直線PQノ長サヲ求メントス。

(1) 直線AQ上ニ基線ヲトリ得ル場合。

先ヅAQ上ニ基線

ABヲ測リ, 之ヲ $a$ トス。A及ビBニ於テPノ仰角ヲ測リ, 之ヲ夫々 $\alpha$ 及ビ $\beta$ トス。



然ルトキハ三角形ABPニ於テ

$$AP = \frac{a \sin(180^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

從ツテ  $PQ = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$

(2) 直線AQ上ニ基線ヲトリ得ザル場合。

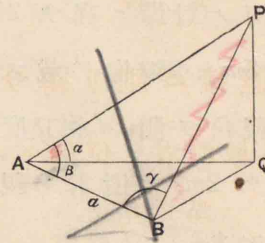
Aヨリ任意ノ方向ニ基線ABヲ測リ, 之ヲ $a$ トシ, 又

$\angle PAQ = \alpha$ ,  $\angle PAB = \beta$ ,  $\angle PBA = \gamma$   
ヲ測ルベシ。然ルトキハ三角形PABヨリ

$$AP = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

ヲ得。從ツテ

$$PQ = \frac{a \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$



ナリ。

**注意** 實際ニ於テハAハ觀測者ノ眼又ハ觀測器械中ノ一點ニシテ地上若干ノ高サニアリ。此ノ高サヲ眼高トイフ。上ニ得タルPQニ眼高ヲ加ヘタルモノガ眞ノ地上ヨリノ高サナリ。然レドモ本書ニ於テハ特ニ斷リナキ限リ眼高ヲ零トシテ計算スルモノトス。

雜題

1. 塔ノ基底ヨリ或ル樹木ノ頂ノ高度ヲ測レバ $a$ ニシテ, 塔ノ頂ニ登リテソノ樹ノ根元ノ深度ヲ測レバ $\beta$ ナリ, 此ノ塔ノ高サヲ $h$ トスレバ, 樹ノ高サ如何。
2. 或ル人山麓ノ一點ニ於テ山頂ノ仰角ヲ測リ $45^\circ$ ヲ得タリ, 此所ヨリ山頂ニ向ヒ眞直ニ傾斜 $15^\circ$ ナル坂路ヲ登ルコト $160m$ ニシテ再ビ



- 山頂ノ仰角ヲ測リタルニ  $60^\circ$  ヲ得タリ、山ノ高サヲ求ム。但シ一米未滿ハ四捨五入セヨ。
3. 河ノ對岸ニ高サ  $20m$  ノ臺アリ、ソノ上ニ高サ  $3m$  ノ銅像ヲ載ス、然ルニ河ヲ隔テテ銅像ノ視角ヲ測レバ丁度ソノ臺ノ基礎ニ立テル高サ  $2m$  ノ樹木ノ視角ト等シ、河ノ幅ハ何米ナルカ。
4. 相等シキ高サヲ有スル二本ノ煙突アリ、或ル人ソノ基底ヲ結ブ線分上ノ一點ニ於テ之ニ近キ方ノ煙突ノ高度ヲ測リ  $60^\circ$  ヲ得、更ニ此ノ點ヨリソノ直線ニ垂直ナル方向ニ  $20m$  歩ミタル後兩煙突ノ高度ヲ測リ  $45^\circ$  及ビ  $30^\circ$  ヲ得タリ、二ツノ煙突ノ高サ及ビソノ間ノ距離ヲ求メヨ。
5. 煙突ノ頂點ヲ  $D$ 、ソノ基底ヲ  $C$  トシ、 $A$  及ビ  $B$  ヲ  $C$  ト同ジ水平面上ノ二點トス、而シテ觀測ニヨリ  $\angle CAB=105^\circ$ 、 $\angle CBA=30^\circ$ 、 $\angle DAC=60^\circ$ 、 $AB=60m$  ナル値ヲ得タリ、煙突ノ高サハ何程ナルカ。米ノ小數第一位マデ計算セヨ。
6. 樹木アリ、ソノ根元ヨリ測リテ全長ノ三分ノ一ニ當ル所ニ一ツノ枝ヲ有ス、今樹ヨリ  $10m$

- ヲ距テテ望メバ枝ヨリ上ノ部分ハ  $30^\circ$  ノ視角ヲ有ストイフ、樹ノ高サヲ求ム。
7. 敵艦ハ我艦ノ正北  $20$  海里ノ所ニアリテ北東ノ方向ヲトリ  $15$  節<sup>ノット</sup>ノ速サニテ逃走シツツアリ、今我艦ハ  $15\sqrt{2}$  節ノ速サニテ一直線ニ之ニ追ヒツカント欲ス、我艦ノトルベキ方向如何。又追ヒツクマデニ何時間ヲ要スルカ。

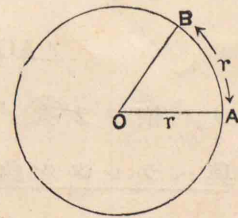


## 附 録

### I. 弧度法

角ヲ測ルニ六十分法ヲ用フルハ最モ普通ナレドモ、理論上ノ研究ヲナスニ當ツテハ別ニ弧度法ナルモノヲ用フ。

Oヲ中心トシ、任意ノ半徑  $r$ ヲ以テ圓ヲ畫キ、弧 ABヲ半徑ニ等シクトリタリトス。然ルトキハ角 AOBト  $360^\circ$ トノ比ハ



弧 ABト全圓周トノ比ニ等シ、即チ

$$\angle AOB : 360^\circ = r : 2\pi r.$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad \angle AOB &= \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.29577951\dots\dots \\ &= 57^\circ 17' 44'' .806\dots\dots \end{aligned}$$

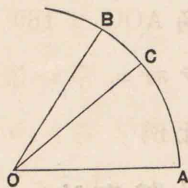
ニシテ、コノ角ノ大サハ半徑  $r$ ノ如何ニ關ハラズ一定セルモノナリ。

コノ一定ナル角ヲ Radianト名ヅケ、之ヲ單位トシテ任意ノ角ヲ測ルコトヲ得ベシ。

今 AOCヲ一ツノ與ヘラレタル角トス。 Oヲ中



心トシ任意ノ半徑  $r$ ヲ以テ圓ヲ  
畫キ、角ノ兩邊ト A 及ビ Cニ於テ  
交ラシメ、弧 ACノ長サヲ  $l$ トス。



又同ジ圓周上ニ弧 ABヲ  $r$ ニ等  
シクトレバ、角 AOBハ  $1\text{radian}$ ナリ。而シテ

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{弧 AC}}{\text{弧 AB}} = \frac{l}{r}$$

ナルヲ以テ

$$\angle AOC = \frac{l}{r} \text{radian}$$

ナリ。依ツテ次ノ法則ヲ得。

與ヘラレタル角ガ幾  $\text{radian}$  ナルカラ知ランニ  
ハ、ソノ頂點ヲ中心トシ、任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫  
キ、ソノ角ノ兩邊ノ間ニ挾マレタル弧ノ半徑ニ對  
スル比ヲ求ムレバヨシ。モシ特ニソノ半徑ヲ長  
サノ單位トスレバ、弧ノ長サノ數値ガ直チニ所要  
ノ  $\text{radian}$  ノ數ナリ。

一般ニ  $\frac{l}{r}$  ナル數ヲ角 AOCノ **弧度**ト名ヅケ、之ニ  
ヨリテ角ノ大サヲ測ル法(即チ  $\text{radian}$ ヲ單位トシ  
テ測ル法)ヲ **弧度法**トイフ。  $\text{Radian}$ ヲアラハスニ  
ハ一定ノ記號ナク、弧度法ニ於テハ單位ノ名稱ヲ  
略スヲ常トス。

角 AOCガ  $180^\circ$ ナルトキハ、 $l$ ハ半圓周トナルヲ  
以テ  $\pi r$ ニ等シ、依ツテ  $180^\circ$ ノ弧度ハ  $\pi$ ナリ。之ヨ  
リ比例ノ考ニヨリ一般ニ或ル角ノ度數ヲ  $x$ 、弧度  
ヲ  $\theta$ トスレバ

$$\frac{x}{180} = \frac{\theta}{\pi}$$

ナル關係ヲ得ベシ。

主ナル角ノ度數ト弧度トヲ對照スレバ次ノ如  
シ。

度數	0	30	45	60	90	180	270	360
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

但シ  $\pi = 3.14159\dots$  ナレドモ、近似値トシテ 3.14 又  
ハ 3.1416; 分數ニテハ  $\frac{22}{7}$  又ハ  $\frac{355}{113}$ ヲ用ヒテ可ナ  
リ。

### 例題

1. 次ノ弧度ヲ有スル角ヲ六十分法ニテ表セ。

$$\frac{\pi}{10}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{4\pi}{5}$$

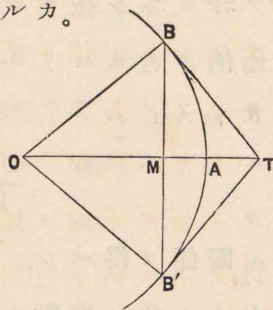
2. 次ノ角ヲ弧度法ニテ表セ。

$$48^\circ, \quad 110^\circ, \quad 395^\circ 30'$$



3. 半径  $R$  ナル圓ニ於テ、長サ  $c$  ナル弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ幾 *radian* ナルカ。

4. 角  $AOB$ ,  $AOB'$  ヲ任意ノ相等シキ銳角トシ、 $O$  ヲ中心トシ圓  $BAB'$  ヲ畫キ、弦  $BMB'$  及ビ切線  $BT$ ,  $B'T$  ヲ作ルトキ、



$$\text{弦 } BMB' < \text{弧 } BAB' < BT + TB'$$

ナルコトハ既知トス。依ツテ角  $AOB$  ノ弧度ヲ  $\theta$  トスレバ  $\sin\theta < \theta < \tan\theta$  ナルコトヲ示セ。

5. 前問ノ結果ヨリ

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

ヲ出シ、依ツテ角ガ微小ナルトキハソノ正弦ト弧度トハ殆ンド相等シキコトヲ證明セヨ。

## II. 三角函數ノ値ノ變動

角ノ大サガ變ズルトキ之ニ伴フ正弦ノ變動ハ既ニ第18節ニ表示セリ。今コノ變動ノ模様ヲ一層明瞭ナラシムルタメニ次頁ノ如キ圖ヲ畫クベシ。先ヅ  $O$  ニ於テ直交スル二直線  $XOX'$ ,  $YOY'$  ヲトリ、 $OX$  上ニ  $O$  ヲリ測リタル長サヲ以テ角ノ大

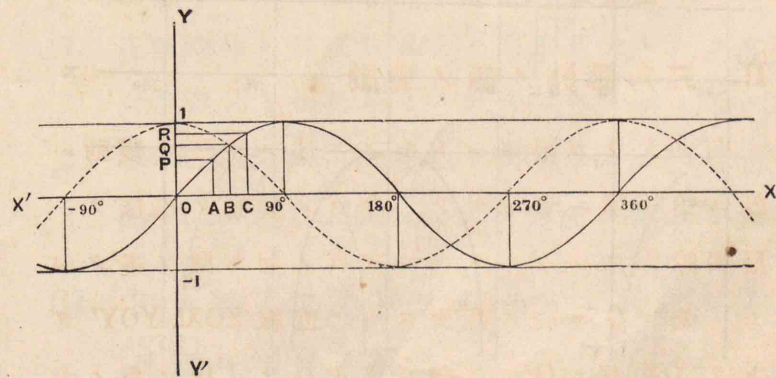
サ(例ヘバ度数)ヲ表サシメ、ソノ端ヨリ  $OY$  ニ平行(即チ  $OX$  ニ垂直)ナル直線ヲソノ方向ニ引キ、ソノ長サヲシテ正弦ノ値ヲ表サシム、但シ角ガ負ナルトキハソノ大サヲ  $OX'$  上ニ表スベク、又正弦ガ負ナルトキハ垂線ヲ  $OY'$  ノ方向ニ引クモノトス。斯クノ如キ垂線ノ端ノ軌跡ヲ考フレバ圖ニ實線ヲ以テ示ス如キ波狀ノ曲線ヲ得ベシ、コレ即チ正弦ノ變動ヲ圖示スルモノニシテ 正弦曲線 ト稱スルモノナリ。此ノ圖ニ於テ

$$OA=30^\circ, \quad OB=45^\circ, \quad OC=60^\circ,$$

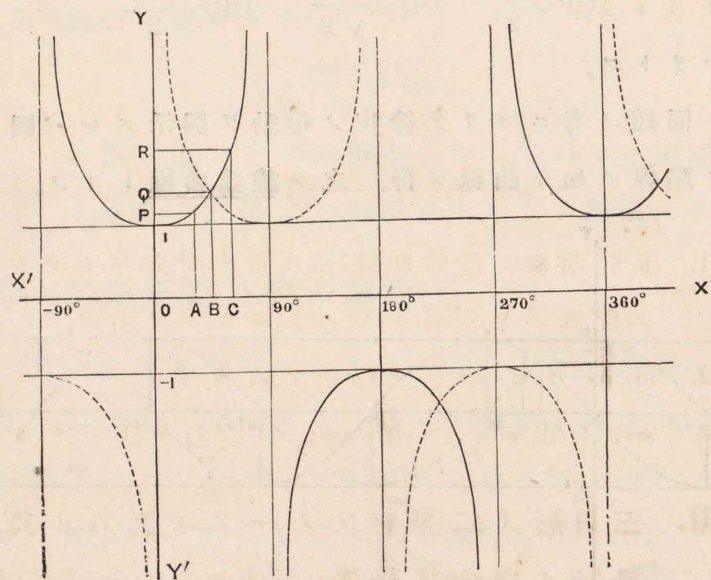
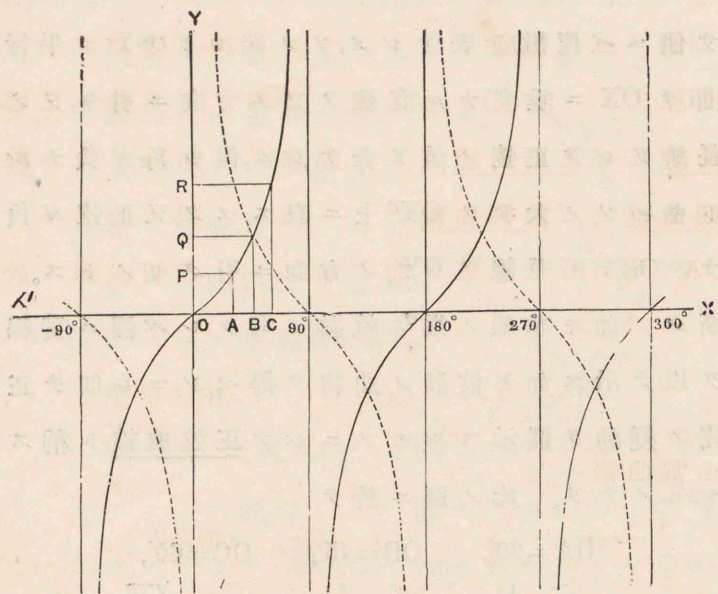
$$OP=\frac{1}{2}, \quad OQ=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad OR=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ナリトス。

同様ノ考ニヨリテ餘弦ノ變動ヲ圖示スレバ圖ノ點線ノ如キ曲線ヲ得。之ヲ 餘弦曲線 トイフ。







他ノ三角函數ニツイテモ夫々其ノ變動ヲ示ス  
 曲線アリ。前頁ニ示ス圖ノ實線ナル曲線ハ正切  
曲線及ビ正割曲線ニシテ、點線ナル曲線ハ夫々餘  
切曲線及ビ餘割曲線ナリ。何レノ圖ニ於テモ  
 OA, OB, OCノ意味ハ前ノ如シトシ、正切曲線ニ於  
 テハ

$$OP = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad OQ = 1, \quad OR = \sqrt{3},$$

正割曲線ニ於テハ

$$OP = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad OQ = \sqrt{2}, \quad OR = 2$$

ナリトス。

### 例 題

1. 正弦曲線ト餘弦曲線トハ同形同大ニシテタ  
 ダ位置ノミ相異ルモノナルコトヲ示セ。
2.  $\sin 2x$  及ビ  $\sin \frac{x}{2}$ ノ變動ヲ圖示セヨ。
3.  $\sin x + \cos x$  及ビ  $\sin x \cos x$ ノ變動ヲ圖示セヨ。

### III. 三角形ノ二邊トソノーツニ對スル角 ヲ知ル場合ノ解法



$B, b, c$  フ與ヘラレタルモノトスレバ、先ヅ正弦則ニヨリ

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b}$$

之ニヨツテ  $C$  フ求メ、從

ツテ  $A = 180^\circ - (B + C)$

ヲ得。再ビ正弦則ニヨリ  $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$  フ得ベシ。

此ノ解法ニ於テハ先ヅ  $\sin C$  ノ値ヲ求メ、之ヨリ  $C$  フ出スモノナルヲ以テ、ココニ種々ノ場合ヲ生ズ。

I.  $B < 90^\circ$  ナルトキ。

(1)  $b < c \sin B$  ナラバ、 $\sin C > 1$  トナリ、從ツテ  $C$  フ得ズ。此ノ場合ニハ解ナシ。

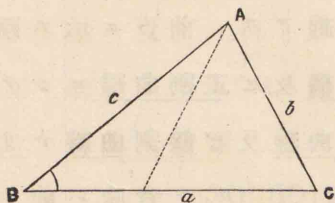
(2)  $b = c \sin B$  ナラバ、 $\sin C = 1$  トナリ、從ツテ  $C = 90^\circ$  ナリ。故ニ此ノ場合ニハ

$$A = 90^\circ - B, \quad a = c \cos B$$

トシテ解クコトヲ得。

(3)  $b > c \sin B$  ナラバ、 $\sin C < 1$  トナリ從ツテ  $C$  ノ値二ツアリ、一ツハ鋭角一ツハ鈍角ナリ。

然レドモ、モシ  $b \geq c$  ナラバ、 $B \geq C$  ナルヲ以テ  $C$  ハ鈍角ナルコト能ハズ。依ツテ  $C$  ノ値トシテ鋭角ノミヲトルベク、解ハ唯一通ナリ。



モシ  $b < c$  ナラバ、 $C$  ノ値トシテ鋭角ヲモ鈍角ヲモ取り得ベク、之ニ應ジテ  $A$  及ビ  $a$  モ各二種ツツノ値ヲトルベシ。即チ此ノ場合ニハ二通りノ解アリ、之ヲ兩意ノ場合ト稱ス。

II.  $B \geq 90^\circ$  ナルトキ。

此ノ場合ニハ明カニ  $B > C$  ナルベキヲ以テ、

(1)  $b \leq c$  ナラバ解ナシ。

(2)  $b > c$  ナラバ勿論  $b > c \sin B$  ニシテ、 $\sin C < 1$  トナル。然レドモ  $C$  ハ鈍角ナルコト能ハザルヲ以テ  $C$  ノ値トシテハ唯一ツ鋭角ノミヲトル、從ツテ解ハ一通ナリ。

以上吟味シタル種々ノ場合ヲ、「二邊トソノ一ツニ對スル角ヲ知リテ、三角形ヲ作レ」トイフ作圖題ノ幾何學的解法ト對照シテ考フレバヨクソノ意義ヲ了解スルヲ得ベシ。(學生自ラ之ヲ試ミヨ)

## 例 題

次ノ三角形ヲ解ケ。

$$b = 8.5, \quad c = 12, \quad B = 40^\circ$$

## IV. 三角方程式

次ノ三ツハ三角方程式ノ基本的ナルモノナリ。



$$(1) \sin x = a, \quad -1 \leq a \leq 1$$

ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ  
 $a$  トスレバ,  $x$  ノ最モ一般ナ  
 ル値ハ次式ニヨリテ表サル。

$$x = n\pi + (-1)^n a \quad (n \text{ ハ 整数})$$

$$(2) \cos x = a, \quad -1 \leq a \leq 1$$

ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ  
 $a$  トスレバ,

$$x = 2n\pi \pm a. \quad (n \text{ ハ 整数})$$

$$(3) \tan x = a$$

ニ適スル一ツノ角ノ弧度ヲ  
 $a$  トスレバ,

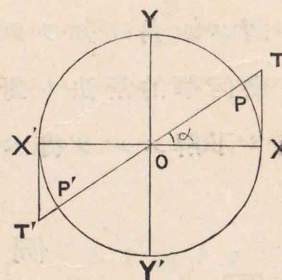
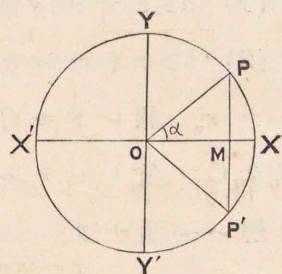
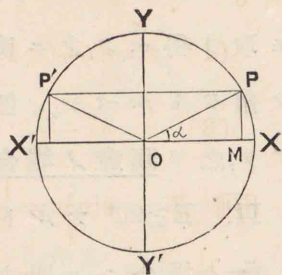
$$x = n\pi + a. \quad (n \text{ ハ 整数})$$

例 1. 次ノ各ノ式ヲ満  
 足セシムルスベテノ  
 角ヲ求メヨ。

$$(1) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(2) \cos x = -\frac{1}{2}, \quad (3) \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

各式ニ適スル  $x$  ノ一ツノ値ハ夫々  $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3},$



$-\frac{\pi}{6}$  ナリ。故ニ一般ノ解ハ次ノ如シ。

$$(1) x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, \quad (2) x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},$$

$$(3) x = n\pi - \frac{\pi}{6}.$$

例 2.  $\sin^2 x = \frac{1}{2}$  ナル方程式ヲ解ケ。

兩邊ヲ平方ニ開ケバ  $\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  ヲ得。

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ トスレバ, } x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4},$$

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ トスレバ, } x = n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{4}.$$

ヲ得, 兩者ヲマトムレバ

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4} = (4n \pm 1) \frac{\pi}{4}$$

トナル。然ルニ  $4n \pm 1$  ハスベテノ奇數ヲアラハ  
 スモノナレバツノ内容ニ於テハ  $2n+1$  ト全ク相  
 等シ, 依ツテ次ノ答ヲ得。

$$x = (2n+1) \frac{\pi}{4}$$

例 3.  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  ナル方程式ヲ解ケ。

此ノ方程式ヲ満足セシムル  $2x$  ノ一ツノ値ハ  $\frac{\pi}{6}$   
 ナリ, 故ニソノ一般ナル値ハ

$$2x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$$



ナリ。依ツテ

$$x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$$

**注意** 公式  $n\pi + (-1)^n a$  は  $\sin x = a$  ナル形ノ方程式ノ一般ナル根ヲ與フルモノナレバ、本例ノ如キ場合ニハ上ノ如ク  $2x$  ノ一ツノ未知角ト見做シテコノ公式ヲ適用スベキナリ。之ヲ次ノ如クニスルハ誤ナリ。

$2x$  ノ一ツノ値ハ  $\frac{\pi}{6}$ 、從ツテ  $x$  ノ一ツノ値ハ  $\frac{\pi}{12}$  ナリ。  
故ニ一般ニ  $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

**例 4.**  $\sin 2x = \cos 3x$  ナル方程式ヲ解ケ。

之ヲ書き直セバ

$$\cos(90^\circ - 2x) = \cos 3x,$$

$$\text{故ニ } 3x = n \cdot 360^\circ \pm (90^\circ - 2x),$$

$$x = \frac{n \cdot 360^\circ \pm 90^\circ}{3 \pm 2}$$

$$= (4n+1)18^\circ \text{ 又ハ } (4n-1)90^\circ.$$

### 例 題

1.  $n \cdot 180^\circ + (-1)^n A$  ニ於テ  $A = 30^\circ$  ナル場合ト、  
 $A = 150^\circ$  ナル場合トノ諸角ヲ列記シ、何レニシテモ此ノ式ノ表ス内容ハ全ク同ジモノナルコトヲ示セ。

2. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$(1) \sin 4x + \sin x = 0. \quad (2) \sin^2 x - 2 \cos x + \frac{1}{4} = 0.$$

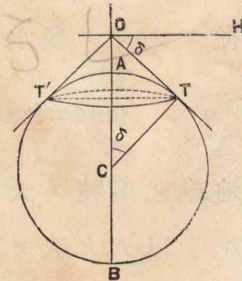
$$(3) \tan 2x = 8 \cos^2 x - \cot x. \quad (4) \sin 3\theta = \sin 2\theta.$$

3. 次ノ各組ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$(1) \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \tan(x+y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x+y = 150^\circ \\ \tan x + \tan y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

### V. 視 界

地球ノ形ヲ完全ナル球ト假定シ、 $C$  ヲソノ中心トシ、一ツノ直徑  $BCA$  ノ延長ノ上ニ任意ノ一點  $O$  ヲトリ、 $O$  ヨリ



球面ニ切線  $OT, OT'$  等ヲ引ケバ切點  $T, T'$  等ノ軌跡ハ一ツノ小圓トナルベシ。今  $O$  ニ眼ヲ置キテ見レバ此ノ小圓ノ内ダケガ即チ展望シ得ベキ範圍ニシテ、之ヲ  $O$  ニ於ケル 視界 トイヒ、コノ小圓ノ周ヲ 視水平 トイフ。又  $OT$  ノ長サヲ 視界半徑 トイヒ、 $OT$  ガ  $O$  ヲ過ル水平面トナス角ヲ 視水平ノ俯角 トイフ。

今  $AC = r, OA = h$  トスレバ、幾何學ニヨリ

$$OT^2 = OA \cdot OB = h(2r + h)$$

ナルヲ以テ、



$$OT = \sqrt{h(2r+h)}$$

ナリ。然レドモ通常吾人ノ登リ得ル高サ  $h$  ハ地球ノ半徑  $r$  ニ比スレバ頗ル小ナルヲ以テ、概算ニ於テハ  $2r+h$  ノ代リニ  $2r$  ヲ用フルコトトシ、

$$OT = \sqrt{2hr}$$

トシテ差支ナシ。

從ツテマタ視水平ノ俯角ヲ  $\delta$  トスレバ、概略

$$\tan \delta = \tan OCT = \frac{OT}{CT} = \sqrt{\frac{2h}{r}} \text{ ナリ。}$$

地球ノ半徑ハ大約 3960 哩ニシテ、1 哩ハ 5280 呎ナルヲ以テ、 $h$  呎ノ高サヨリ望見シ得ル視界ノ半徑ノ哩數ハ大約

$$\sqrt{2 \times \frac{h}{5280} \times 3960} = \sqrt{\frac{3}{2}h}$$

ニ等シ。

### 例 題

1. 燈臺ノ火光ヲ 15 哩ノ距離ヨリ望ミ得ル様ニスルニハ、ソノ高サヲ何呎以上ナラシムルコトヲ要スルカ。
2. 一ツノ燈臺ニ向ツテ進行スル船アリ、橋頭ヨリ燈臺ノ火光ヲ初メテ視水平ノ線上ニ認メ

タル後 30 分ヲ經テツヒニ甲板ヨリモツノ火光ヲ認メ得ルニ至レリ、甲板ハ海面上 16 呎ノ高サニアリ、橋頭ハ甲板上 48 呎ノ高サニアリトセバ、此ノ船ノ速サ如何。

$$\sqrt{\frac{3}{2}(16+48)} = 4\sqrt{6} \text{ mile}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}16} = 2\sqrt{6}$$

$$2(4\sqrt{6} - 2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6} = 9.79$$



$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

## 補充問題

### 第一 鋭角

1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$(1) \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \sec^2 A - 1.$$

$$(2) \sec(90^\circ - A) - \cot A \cos(90^\circ - A) \tan(90^\circ - A) = \sin A.$$

$$(3) \sin^2(45^\circ + x) + \sin^2(45^\circ - x) = 1.$$

$$(4) \frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} + \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{1 + \sin \theta - \cos \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta.$$

$$(5) (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A) = 1.$$

2.  $\tan \theta + \sec \theta = 5$  ヨリ  $\sin \theta$  ノ値ヲ求メヨ。

3.  $\tan A = 2 - \sqrt{3}$  ナルトキ  $\sin A, \cos A$  ノ値ヲ求メヨ。

4.  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{4}$  ナルトキ  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$  ノ値ヲ求メヨ。

5. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - \frac{7}{4} = 0.$$

6. 直角三角形 ABC = 於テ、直角ノ頂點 A ヨリ BC = 垂線 AD ヲ引キ、ソノ足 D ヨリ更ニ邊 AB 及ビ AC = 夫々垂線 DE, DF ヲ引クトキハ

$$DE : DF = \cos B : \cos C = \sin C : \sin B$$

ナルコトヲ示セ。

7. 二等邊三角形ノ頂角ヲ A、底邊ヲ a トスレバ、ソノ面積ハ  $\frac{a^2}{4} \cot \frac{A}{2}$  ナルコトヲ證明セヨ。

8. 一邊 a ナル正 n 角形ノ面積、内接圓ノ半徑及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。



9.  $\sin A + \cos A \geq 1$  ナルコトヲ證明セヨ。
10.  $\tan A + \cot A \geq 2$  及ビ  $\tan^2 A + \cot^2 A \geq 2$  ナルコトヲ證明セヨ。
11.  $\sin A + \cos A = a$  ナルトキハ,  $\sin A$  及ビ  $\cos A$  ハ方程式  
 $2x^2 - 2ax + a^2 = 1$  ノ根ナルコトヲ證明セヨ。
12. 一直線上ニ 1000m ツツ距テテ設ケタル三ツノ觀測所ヨリ同時ニ或ル飛行船ノ仰角ヲ測リ夫々  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  ヲ得タリ, コノ飛行船ノ高サヲ求メヨ。
13. 東西ノ方向ニ一直線ヲナセル道路 ABC アリ, A ノ正北ニ立テル塔ノ仰角ヲ A, B, C ノ三地點ニテ測リシニ夫々  $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$  ヲ得タリトセバ, B ハ AC ノ中點ナルコトヲ證明セヨ。
14. 一直線ナル道路上ニ二點 A, B アリ, ソノ間ノ距離 1000m ナリ, A ヨリ道路外ノ一樹木 P ヲ望メバ角 PAB ハ  $35^\circ$  ニシテ, 又 B ヨリ望メバ角 PBA ハ  $72^\circ$  ナリ, P ハ道路ヨリ何米ノ距離ニアルカ。(本文第 18 頁ノ表ニヨレ)
15.  $\frac{\sin^4 x}{\sin^2 y} + \frac{\cos^4 x}{\cos^2 y} = 1$  ナルトキハ, 此ノ中ノ  $x$  ト  $y$  トヲ入レ代ヘテモナホ眞ナルコトヲ證明セヨ。
16.  $\sin A = p, \tan A = q$  ナルトキハ  $q^2 = p^2(1+q^2)$  ナルコトヲ證明セヨ。
17.  $\sin x + \sin^2 x = 1$  ナラバ,  $\cos^2 x + \cos^4 x = 1$  ナルコトヲ證明セヨ。
18.  $\tan A + \sin A = p, \tan A - \sin A = q$  ナルトキハ,  $(p^2 - q^2)^2 = 16pq$  ナルコトヲ證明セヨ。
19.  $a \sin \theta + b \cos \theta = 1, a \cos \theta + b \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$  ナルトキハ,  $a^2 + b^2 = 1$  ナルコトヲ證明セヨ。但シ  $\sin \theta, \cos \theta$  ノ絶對値ハ不等トス。
20. 次ノ各組ノ式ニ於テ  $x$  ヲ消去セヨ。  
 (1)  $\tan x + \sec x = p, \tan x - \sec x = q$   
 (2)  $m \operatorname{cosec} x - b \cot x = a, b \tan x - n \sec x = a$

$$(3) a \sin x + b \cos x = c, a' \sin x + b' \cos x = c'$$

21. 矩形 ABCD ノ一頂點 A ヨリ對角線 BD = 垂線ヲ引キ, ソノ足 E ヨリ更ニ邊 BC, CD = 夫々垂線 EF, EG ヲ引キ,  $EF = p, EG = q, BD = c$  トスルトキハ,  $p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$  ナルコトヲ證明セヨ。
22. 直六面體ノ一ツノ對角線ガ其ノ一端ニ會スル三ツノ稜トナス角ヲ夫々  $\alpha, \beta, \gamma$  トスレバ  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  ナルコトヲ證明セヨ。

## 第 二 一 般 ノ 角

23.  $A+B+C=180^\circ$  ナルトキ, 次ノ等式ヲ證明セヨ。  
 (1)  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$   
 (2)  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$
24.  $A+B+C=180^\circ, \cos A = \cos B \cos C$  ナルトキハ,  $\cot B \cot C = \frac{1}{2}$  ナルコトヲ證明セヨ。
25. 次ノ式ヲ證明セヨ。  
 $\sin A + \cos B = 2 \sin \left( \frac{A+B}{2} + 45^\circ \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} - 45^\circ \right)$   
 $= 2 \cos \left( 45^\circ - \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( 45^\circ + \frac{A-B}{2} \right)$
26. 次ノ式ヲ證明セヨ。  
 (1)  $\sin 4A = 4 \sin A \cos^3 A - 4 \cos A \sin^3 A$   
 (2)  $\cot A + \tan A = 2 \operatorname{cosec} 2A$   
 (3)  $\cot A - \tan A = 2 \cot 2A$   
 (4)  $\frac{1 \pm \sin \alpha}{1 \mp \sin \alpha} = \tan^2 \left( 45^\circ \pm \frac{\alpha}{2} \right)$   
 (5)  $\sec \alpha \pm \tan \alpha = \tan \left( 45^\circ \pm \frac{\alpha}{2} \right)$
27.  $\tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \beta$  ナルトキハ,  
 $\cos 2\alpha + \sin^2 \beta = 0$  ナルコトヲ示セ。



28.  $\cos 47^\circ - \cos 61^\circ - \cos 11^\circ + \cos 25^\circ = \sin 7^\circ$  ヲ證明セヨ。
29.  $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$  ノ値ヲ求メヨ。
30.  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta + \sin \theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$  ヲ證明シ、之ニヨリテ  $15^\circ$  及ビ  $22^\circ 30'$  ノ正切ヲ求メヨ。
31.  $\sin^4 A - \cos^4 A$  及ビ  $\sin^6 A + \cos^6 A$  ノ取り得ベキ最大値及ビ最小値ヲ求ム。
32. ABC ハ C ヲ直角トスル直角二等邊三角形ナリトシ、BC ノ中點ヲ D トスレバ  $\cot \angle BAD = 3$  ナルコトヲ示セ。
33. A, B ハ正ノ銳角ニシテ  $\sin A = \frac{12}{13}$ ,  $\cos B = \frac{3}{5}$  ナルトキ、 $\tan(A+B)$  ノ値如何。
34.  $\alpha, \beta$  ハ正ノ銳角ニシテ  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\tan \beta = \frac{3}{2}$  ナルトキ、 $\alpha + \beta$  ハ何度ナルカ。
35. 方程式  $x^2 + 6x + 7 = 0$  ノ二根ヲ  $\tan A, \tan B$  トセバ  $A+B$  ノ値如何。
36.  $\cos(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = k \sin(45^\circ - \alpha)$  ナル如キ  $k$  ノ値ヲ小数第二位マデ求メヨ。
37.  $\sin \theta + \sin \varphi = a$ ,  $\cos \theta + \cos \varphi = b$  ナルトキ  $\sin \frac{1}{2}(\theta + \varphi)$  ノ値ヲ  $a$  ト  $b$  トニテ表セ。
38. 次ノ等式ヲ證明セヨ。
- (1)  $\tan(45^\circ + \alpha) \tan(45^\circ - \alpha) = 1$ .
  - (2)  $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} = \tan(A+B)$ .
  - (3)  $\sin 2A \tan 2A = \frac{4 \tan^2 A}{1 - \tan^4 A}$ .
  - (4)  $\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\sin 3B}{\sin B} = 4 \sin(A+B) \sin(B-A)$ .
  - (5)  $\tan \frac{A+B}{2} - \tan \frac{A-B}{2} = \frac{2 \sin B}{\cos A + \cos B}$ .
39.  $A+B+C=180^\circ$  ナルトキ、次ノ等式ヲ證明セヨ。

- (1)  $\sin 8A + \sin 8B + \sin 8C + 4 \sin 4A \sin 4B \sin 4C = 0$ .
  - (2)  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$ .
  - (3)  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$ .
40.  $\sin^2 24^\circ - \sin^2 36^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$  ヲ證明セヨ。
41.  $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $\sin B = \frac{12}{13}$ ,  $\sin C = \frac{7}{25}$  ニシテ A, B, C ハ何レモ正ノ銳角トスレバ、 $\sin(A+B+C)$  ノ値如何。
42.  $\cos \theta = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta}$  ナルトキハ、 $\tan^2 \frac{\theta}{2} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \tan^2 \frac{\beta}{2}$  ナルコトヲ證明セヨ。
43.  $a \sin \theta + b \cos \theta = c = a \operatorname{cosec} \theta + b \sec \theta$  ナルトキハ、 $\sin 2\theta = \frac{2ab}{c^2 - a^2 - b^2}$  ナルコトヲ證明セヨ。
44.  $\tan \beta = \frac{n \sin \alpha \cos \alpha}{1 - n \sin^2 \alpha}$  ナルトキハ、 $\tan(\alpha - \beta) = (1-n) \tan \alpha$  ナルコトヲ示セ。
45.  $\sin 3A = n \sin A$  ナルトキハ、 $n$  ハ 3 ト -1 トノ間ニアル數ナラザル可カラザルコトヲ示シ、次ニ  $n=2$  ナル場合ニ於ケル  $\sin A$  ノ値ヲ求メヨ。
46. 次ノ各組ノ式ヨリ  $\theta$  ヲ消去セヨ。
- (1)  $\begin{cases} a \sec^2 \theta - b \cos \theta = 2a, \\ b \cos^2 \theta - a \sec \theta = 2b. \end{cases}$
  - (2)  $\begin{cases} \operatorname{cosec} \theta - \sin \theta = m, \\ \sec \theta - \cos \theta = n. \end{cases}$
  - (3)  $\sin \theta + \cos \theta = a$ ,  $\cos 2\theta = b$ .
47.  $\left. \begin{aligned} y \cos \varphi - x \sin \varphi &= a \cos 2\varphi \\ y \sin \varphi + x \cos \varphi &= 2a \sin 2\varphi \end{aligned} \right\}$  ヲリ  $\varphi$  ヲ消去スレバ、 $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$  ヲ得ルコトヲ示セ。
48.  $\tan x + \tan y = m$ ,  $\cot x + \cot y = n$ ,  $x+y=a$  ヲリ  $x, y$  ヲ消去セヨ。
49. 次ノ公式ヲ證明セヨ。
- $$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A} \right\},$$



$$\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A} \right\}.$$

但シ右邊 = 於ケル符號ハ  $\frac{A}{2}$  ノ値 = ヨリテ適當 = 選  
ブモノトス。

50. 矩形ノ相隣レル二邊ヲ  $m, n$  トシ、ソノ對角線ノ夾ム角  
ヲ  $\theta$  トスレバ、 $\tan \theta = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$  ナルコトヲ證明セヨ。

51. 半徑  $a$  及ビ  $b$  ナル二ツノ圓ガ互ニ外切スルトキ、一雙  
ノ外公切線ノナス角ヲ  $\theta$  トスレバ、

$$\sin \theta = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2} \text{ ナルコトヲ證明セヨ。但シ } a > b \text{ ナ}$$

リトス。

### 第 三 三 角 形 ノ 解 法

(三角形ノ内角ヲ  $A, B, C$ 、之ニ對スル邊ヲ夫々  $a, b, c$  トス。)

52. 正弦則ヨリ第一、第二餘弦則ヲ導ケ。又餘弦則ヨリ正  
弦則ヲ導ケ。

53. 三邊ガ  $a = x^2 + x + 1$ ,  $b = 2x + 1$ ,  $c = x^2 - 1$  ナル三角形ノ最  
大角ハ何度ナルカ。

54.  $A = 2C$  ナルトキハ  $a^2 = bc + c^2$  ナルコトヲ證明セヨ。

55. 三角形  $ABC$  = 於テ邊  $BC$  ノ中點ヲ  $D$  トスレバ、

$$\cot BAD - \cot B = 2 \cot A$$

ナル事ヲ證明セヨ。

56.  $b = a(\sqrt{3} - 1)$ ,  $C = 30^\circ$  ナルトキ  $c = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} a$  ナルコトヲ  
證セヨ。

57.  $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$  ナルトキハ、 $a, b, c$  ハ等差級數ヲ  
ナスコトヲ證明セヨ。

58.  $a \tan A + b \tan B = (a + b) \tan \frac{A + B}{2}$  ナラバ、二等邊三角形ナ  
ルコトヲ證明セヨ。

59.  $A, B, C$  ヨリ夫々對邊ニ引ケル垂線ヲ  $AD, BE, CF$  トス  
レバ、垂足三角形  $DEF$  ノ三邊ハ  $EF = a \cos A$ ,  $FD = b \cos B$ ,  
 $DE = c \cos C$  ナルコトヲ證明セヨ。

60.  $BC$  上ニ一 $\dot{D}$ ヲトリ、 $BD : DC = m : n$  ナリトスレバ、  
 $(m + n) \cot ADC = n \cot B - m \cot C$

ナルコトヲ證明セヨ。

61. 四邊形ノ對角線ノ長サヲ  $p$  及ビ  $q$  トシ、ソノ間ノ角ヲ  
 $\theta$  トスレバ、ソノ四邊形ノ面積ハ  $\frac{1}{2} pq \sin \theta$  ナルコトヲ  
證明セヨ。

62. 三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナストキ、ソノ三角形ノ最  
大角ヲ  $\theta$ 、最小角ヲ  $\varphi$  トスレバ、

$$4(1 - \cos \theta)(1 - \cos \varphi) = \cos \theta + \cos \varphi$$

ナルコトヲ證明セヨ。

63. 半徑  $r$  ナル球形ノ輕氣球アリ、ソノ視角ハ  $\alpha$ 、中心ノ高  
度ハ  $\beta$  ナルトキ、此ノ氣球ノ中心ハ幾何ノ高サニアル  
カ。

64. 東西ノ方向ニ互リテ立テル矩形ノ塀アリ、今太陽ガ南  
 $30^\circ$  東ノ方向ニテ  $60^\circ$  ノ高度ヲ有ストセバ、コノ塀ガ  
地ニ投ズル影ノ面積ト實物ノ面積トノ比如何。

65.  $AB$  ハ水平面上ノ一直線ニシテ、ソノ長サ  $2a$  米トス、 $A$   
及ビ  $B$  ヨリ或ル山ノ頂ヲ望メバ、ソノ仰角ハ共ニ  $\theta$  ニ  
シテ、又  $AB$  ノ中點ヨリ望メバ、ソノ仰角ハ  $\varphi$  ナリトセ  
バ、此ノ山ノ高サハ

$$\frac{a \sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{\sin(\varphi + \theta) \sin(\varphi - \theta)}} \text{ 米}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

66.  $A$  ナル一地點ニ於テ東南東ノ方向ニ一ツノ飛行機ヲ  
見、ソノ仰角ヲ測リテ  $45^\circ$  ヲ得タリ、然ルニ之ト同時刻  
ニ、 $A$  ヨリ北東ニアル一地點  $B$  ニテハ此ノ飛行機ヲ正



南ノ方向ニ見、又 B ヨリ 800m 南ニアル一地點 C ニテハ垂直ニ頭上ニ見タリトイフ、此ノ機ノ高サハ何米ナリシカ。

67. 甲乙ニツノ塔アリ、其ノ高サ甲ハ 18m、乙ハ 8m ナリ；而シテ各塔ノ基底ニ於テ互ニ他ノ塔ノ仰角ヲ測リシニ、甲塔ノ仰角ハ乙塔ノ仰角ノ二倍ナリシト云フ；ニツノ塔ノ間ノ距離如何。

68. 湖水ヲ隔テテ A 及ビ B ナルニツノ山アリ、A ノ高サハ湖水上ハ  $h$  米ナリトス、今 A ノ頂ヨリ B ノ頂ノ仰角ヲ測レバ  $\alpha$  ニシテ又湖水面ニ映ズル B ノ頂ノ像ノ俯角ヲ測レバ  $\beta$  ナリ、B 山ノ湖水上ヨリノ高サ何米ナルカ。

69. 塔ノ頂ニ長サ  $a$  米ノ旗竿ヲ立テ地上ノ一點ヨリ之ヲ望ミタルニ、塔ト竿トガ共ニ  $\theta$  ナル視角ヲ有セリトセバ、塔ノ高サハ  $a \cos 2\theta$  米ナルコトヲ證明セヨ。

70. 二點 P, Q アリ、今 P ノ正南ナル一地點 A ヨリ之ヲ望ミテ  $\angle PAQ = \theta$  ナルヲ知り、A ヨリ正西ニ  $a$  ナル距離ヲ進ミテ B ニ至リテモナホ矢張  $\angle PBQ = \theta$  ナルヲ知り、更ニ B ヨリ正西ニ  $b$  ナル距離ヲ進ミテ見レバ Q ガ正北ニ見エタリトイフ、然ルトキハ

$$PQ = \sqrt{(a+b)^2 + b^2 \tan^2 \theta}$$

ナルコトヲ證セヨ。

71. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$(1) a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0.$$

$$(2) \frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C-B)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin C} = 0.$$

$$(3) \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\cot A} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{\cot B} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\cot C}.$$

$$(4) a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C.$$

72. 次ノ各三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

$$(1) a=13cm, b=14cm, c=15cm.$$

$$(2) a=12m, B=45^\circ, C=60^\circ.$$

73. 或ル人 112m ノ繩ヲ 50m, 41m, 21m ノ三部ニ分チテ地上ニ三角形ヲ劃セントセシニ誤リテソノ一部ヲ 51m トナセリ、然ラバ豫定ト同ジ面積ノ三角形ヲ作ランニハ、殘リノ二部ヲ何米ト何米トニ變更スベキカ。

74.  $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$  ナルトキハ、此ノ三角形ハ直角三角形ナルカ、或ハ二等邊三角形ナルコトヲ證明セヨ。

75. 一ツノ圓ニ外接スル正  $n$  邊形及ビ正  $2n$  邊形ノ面積ノ比ガ 3:2 ナルトキ、 $n$  ヲ求ム。

76. 一ツノ圓ニ内接スル正  $2n$  邊形ノ面積ハ、同ジ圓ニ内接及ビ外接スルニツノ正  $n$  邊形ノ面積ノ比例中項ナルコトヲ示セ。

77. 一ツノ圓ニ内接及ビ外接スルニツノ正  $n$  邊形ノ面積ノ比ガ 3:4 ナルトキ、 $n$  ヲ求ム。

78. 鋭角三角形 ABC ノ外心ヲ O トシ、AO ノ延長ガ BC ト交ル點ヲ D トスレバ、 $DO \cdot \cos(B-C) = AO \cdot \cos A$  ナルコトヲ示セ。

79. 一直線上ニアル四點 P, Q, R, S ヲソノ直線外ノ一點 O ト結ベバ、 $\frac{PQ \cdot RS}{QR \cdot PS} = \frac{\sin POQ \cdot \sin ROS}{\sin QOR \cdot \sin POS}$  ナルコトヲ證セヨ。

80. 高サ  $h$  ナル望樓ヨリ東ノ方ニ一ツノ船ヲ見、ソノ俯角  $\alpha$  ナリシガ、一時間ノ後ソノ船ハ南ニ見エ俯角ハ  $\beta$  トナレリトイフ、モシ此ノ船ガ一直線ニ航行セルモノトセバ、ソノ速度如何。

81. 高サ  $h$  ナル山上ヨリ西ニ方リテ一ツノ船ヲ望見セシニ俯角  $\theta$  ナリシガ、或ル時間ヲ經テ再ビ之ヲ望メバ南  $30^\circ$  西ニ方リ俯角ハ  $\phi$  トナレリトイフ、此ノ船ノ前後兩



位置間ノ距離如何。

- 82.** 一ツノ梯子ヲ地面ト A ナル角ヲナシテ家ニ立テカク  
レバソノ上端ガ丁度窓ノ上端ニ接ス; モシ梯子ノ下端  
ヲ更ニ之ヨリ  $a$  米遠ザケ地面トノ傾斜ヲ B トスレバ  
ソノ上端ハ窓ノ下端ニ接スベシトイフ, 窓ノ長サハ  
 $a \cot \frac{A+B}{2}$  米ナルコトヲ證明セヨ。
- 83.** 垣ノ彼方ニ木アリ, 或ル地點ヨリ見レバ垣ノ上端ト木  
ノ梢トハ相重ナリテ見エ共ニ  $\alpha$  ナル仰角ヲ有ス, 更ニ  
此ノ地點ニ於テ  $h$  米ノ臺ニ上リテ見レバ梢ノ仰角ハ  
 $\beta$  トナリ木ノ根元ハ垣ノ上端ト相重ナリテ見ユトイ  
フ, 木ト垣トノ高サ各何米ナルカ。但シ眼高ヲ零トス。
- 84.** 或ル塔ノ頂ニ一ツノ旗竿ヲ立テ地上ヨリ之ヲ望ムニ,  
旗竿ノ視角ハ塔ノ基底ヨリ  $l$  ナル距離ニ於ケルトキ  
ガ最大ニシテソノ値  $\theta$  ナリトセバ, 塔ノ高サハ  
 $l \tan \left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$  ニシテ, 旗竿ノ長サハ  $2l \tan \theta$  ナルコトヲ  
示セ。
- 85.** 臺ノ上ニ立テル銅像アリ; 臺ノ基底ヨリ  $9m$  及ビ  $11m$   
ヲ距テタル二ツノ地點ニ於テ銅像ノ視角ハ何レモ  $\alpha$   
ニシテ, ココニ  $\tan \alpha = \frac{1}{10}$  ナリトス, 臺及ビ像ノ各ノ高サ  
如何。

#### 第 四 雜 題

- 86.**  $n$  ガ任意ノ整數ナルトキ, 次ノ式ヲ證明セヨ。  
 $\sin(n \cdot 180^\circ + A) = (-1)^n \sin A, \quad \cos(n \cdot 180^\circ + A) = (-1)^n \cos A,$   
 $\tan(n \cdot 180^\circ + A) = \tan A.$
- 87.**  $360^\circ$  以下ノ正角ニシテ次ノ方程式ヲ満足セシムルス  
ベテノ角ヲ求メヨ。

- (1)  $\cot x + \tan x = 2 \operatorname{cosec} x.$   
(2)  $\cos \theta + 2 \sec \theta + 2 \tan \theta = 0.$   
(3)  $\cos 4x + \cos 2x + \cos x = 0.$   
(4)  $\cos 2x - \cos 4x = \sin x.$   
(5)  $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2}.$   
(6)  $\cos 3\theta + \sin 3\theta = \cos \theta + \sin \theta.$
- 88.** 次ノ等式ヲ證明セヨ。  
(1)  $2 + \tan^2(\theta + 90^\circ) + \cot^2(\theta - 90^\circ) = 4 \operatorname{cosec}^2 2\theta.$   
(2)  $\tan A \tan(60^\circ + A) \tan(120^\circ + A) + \tan 3A = 0.$
- 89.**  $A+B+C=360^\circ$  ナルトキ, 次ノ等式ヲ證明セヨ。  
(1)  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{C+A}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2}.$   
(2)  $\cos A + \cos B + \cos C + 1 = 4 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{A+B}{2}.$   
(3)  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$
- 90.** 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。  
(1)  $\frac{\sin 150^\circ \operatorname{cosec}(-45^\circ)}{\cos 225^\circ \tan 135^\circ}.$   
(2)  $\frac{\sin(90^\circ + A) \cos(90^\circ - A)}{\cos(180^\circ + A)} + \frac{\sin(180^\circ - A) \cos(90^\circ + A)}{\sin(180^\circ + A)}.$   
(3)  $\sin(\theta + 60^\circ) + 2 \sin(\theta - 60^\circ) - \sqrt{3} \cos(120^\circ - \theta).$
- 91.**  $A$  ヲ第三象限ノ角トシ,  $\tan A = \frac{8}{15}$  ナルトキ  $\sin A$  及ビ  
 $\cos A$  ノ値ヲ求メヨ。
- 92.**  $\tan x = (2 + \sqrt{3}) \tan \frac{x}{3}$  ナルトキ,  $\tan x$  ノ値ヲ求メヨ。
- 93.**  $\sin A = -\frac{3}{5}$  ナルトキ  $\sin \frac{A}{2}, \cos \frac{A}{2}, \tan \frac{A}{2}$  ヲ求ム。  
但シ  $270^\circ > A > 180^\circ.$
- 94.**  $A$  ヲ一般ナル角トシ,  $\sec A = \sqrt{2}$  ナルトキ  $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\sin A}}$   
ノスベテノ値ヲ求メヨ。
- 95.**  $\cos 2x = \frac{3}{5}$  ナルトキ  $\sin^4 x + \cos^4 x$  ノ値如何。



96.  $\sec 2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$  が成立スルタメニハ、必ズ  $x=y$  ナルヲ要シ、且ツ  $\theta$  ハ  $180^\circ$  ノ整数倍ナルベキコトヲ證明セヨ。

97.  $\sin 3\theta = \sin \theta \cos 2\theta$  ナラバ、 $\theta$  ハ  $90^\circ$  ノ整数倍ナルコトヲ證明セヨ。

98. 三角形 ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ R、内接圓ノ半徑ヲ  $r$  トスルトキハ

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

ナルコトヲ證セヨ。

99. 任意ノ四邊形 ABCD = 於テ  $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$  トシ、又其ノ面積ヲ S トスルトキ、次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$(1) 2S = ad \sin A + bc \sin C.$$

$$(2) \frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) = ad \cos A - bc \cos C$$

100. 前問ノ二式ヲ各邊自乗シテ相加ヘ、之ヲ變形スレバ、

$$16S^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{A+C}{2}$$

ヲ得。之ヨリ次ノ式ヲ導ケ。

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{A+C}{2}}$$

但シ  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$  トス。

101. 前問ノ結果ヨリ次ノ公式ヲ出セ。

(1) 四邊形ガ圓ニ内接スルトキ、

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

(2) 四邊形ガ圓ニ外接スルトキ、

$$S = \sqrt{abcd} \sin \frac{A+C}{2}.$$

(3) 四邊形ガーツノ圓ニ外接シ、他ノーツノ圓ニ内接スルトキ、

$$S = \sqrt{abcd}.$$

102. 三角形 ABC = 於テ、 $A=30^\circ, B=\frac{3}{2}$  radian ナルトキ、C

ノ弧度ヲ求メヨ。

103. 高サ 5 尺 5 寸ノ人像標的ヲ 1800m ノ距離ヨリ望マバ其ノ視角ハ幾分ナルカ。但シ圓周率ヲ 3.1416 トシテ計算シ、分以下ヲ四捨五入セヨ。

104. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$(1) \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - (2n\pi + \theta) \right\} = \sin \theta.$$

$$(2) \tan \left\{ \pi + (4n+3) \frac{\pi}{2} - \theta \right\} = \cot \theta.$$

105. 扇形ノ半徑ヲ  $r$ 、中心ニ於ケル角ノ弧度ヲ  $\theta$  トスレバ、ソノ面積ハ  $\frac{1}{2}r^2\theta$  ナルコトヲ證明セヨ。

106. 半徑  $r$  ナル圓ニ於テ長サ  $l$  ナル弧ノ兩端ヲ結ビ付ケテ得ル弓形ノ面積ハ  $\frac{1}{2}r \left( l - r \sin \frac{l}{r} \right)$  ナルコトヲ示セ。

107. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$(1) \tan x - \tan a = \cot x - \cot a.$$

$$(2) \cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3} = \cos x - \cos \frac{\pi}{3}.$$

$$(3) \tan x + \tan \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 2.$$

$$(4) 6 \cot^2 x - 1 = 4 \cos^2 x.$$

108. 地球ノ半徑ヲ  $r$  トスレバ地面ヨリノ高サ  $h$  ガ甚シク大ナラザル限り、視水平ノ俯角ノ弧度ハ大約  $\sqrt{\frac{2h}{r}}$  ニ等シキコトヲ證明セヨ。

109. 或ル飛行船上ヨリ視水平ノ俯角ヲ計リテ  $1^\circ$  ヲ得タリトセバ、此ノ飛行船ノ高サ及ビソノ視界ノ面積如何。但シ地球ノ半徑ヲ 3960 哩トス。

110. 観測點ガ地面ヨリ甚シク高カラザルトキハ、視界ノ面積ハ高サニ正比例スルコトヲ證明セヨ。



## 答

雜題 (20頁) 2.  $\cot A = \frac{b}{a}$ ,  $\sec A = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ ,  $\cos A = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$   
 $\sin A = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ,  $\operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

3.  $\frac{19}{31}$     4.  $\tan x$     5.  $\frac{1}{8}$     6.  $x=45^\circ$

7.  $x=45^\circ$  又  $\wedge 60^\circ$

8.  $\sin EAB = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos EAB = \frac{2}{\sqrt{5}}$

例題 (26頁) 1. 5.7m(強)    2. 520m(弱)    3. 2.5度  
 4. 282.8m(強)    5. 25m    6. 1095m(強)

雜題 (43頁) 1.  $\sin 585^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\cos 690^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  
 $\sec(-930^\circ) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

2.

角	$\sin$	$\cos$	$\tan$
$233^\circ$	-0.8480	-0.5299	1.6003
$-1072^\circ$	0.1392	0.9903	0.1405

4.  $\sin(A-90^\circ) = -\cos A$ ,  $\cos(A-90^\circ) = \sin A$ ,  
 $\tan(A-90^\circ) = -\cot A$

5. (1) 0, (2) 0    6.  $150^\circ$  又  $\wedge 210^\circ$     7.  $\pm \frac{(m^2-n^2)}{2mn}$

雜題 (53頁) 1.  $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$     2. 0

3.

$\alpha$ / 象限	$\beta$ / 象限	值
I	I	$\frac{980}{2501}$
I	II	$\frac{100}{2501}$
IV	I	$-\frac{100}{2501}$
IV	II	$-\frac{980}{2501}$



$$4. \sin A = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos A = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan A = \frac{2t}{1-t^2}$$

- 雜題 (75頁) 1. (1)  $90^\circ, 270^\circ, 221^\circ 24' 5, 138^\circ 35' 5$   
 (2)  $45^\circ, 225^\circ, 26^\circ 34' 1, 206^\circ 34' 1$   
 (3)  $270^\circ, 46^\circ 23' 3$

2.  $x=0.4428, y=26^\circ 11' 9$

- 雜題 (81頁) 1. (1)  $C=67^\circ 28', b=79.09, c=77.10$   
 (2)  $B=78^\circ 11' 5, C=25^\circ 18' 5, a=86.44$   
 (3)  $A=77^\circ 8' 4, B=39^\circ 26' 0, C=63^\circ 25' 8$

2.  $90^\circ$

3. 直角三角形ノトキハ  $a=100\sqrt{3}$ , 二等邊三角形ノトキハ  $a=50\sqrt{3}$

4. 邊ノ長サハ決定セラレズ, 三邊ノ比ハ  
 $a:b:c=1:2:\sqrt{3}, A=30^\circ, B=90^\circ, C=60^\circ$

- 雜題 (87頁) 1.  $h \cot \beta \tan \alpha$  2.  $309m$ (強) 3.  $30m$ (強)  
 4. 高サ  $24.5m$ (弱), 距離  $51m$ (強) 5.  $73.48m$   
 6.  $17.3m$  7. 北  $30^\circ$  東, 2時34.5分間

### 附 録

[I] 1.  $18^\circ, 210^\circ, 144^\circ$  2.  $\frac{4\pi}{15}, \frac{11\pi}{18}, \frac{791\pi}{360}$

3.  $\frac{c}{2R}$  radians

[III]  $\begin{cases} A=74^\circ 50' \\ C=65^\circ 10' \\ a=12.76 \end{cases}$  又ハ  $\begin{cases} A=25^\circ 10' \\ C=114^\circ 50' \\ a=5.62 \end{cases}$

- [IV] 1.  $A=30^\circ$  又ハ  $150^\circ$  トシテ諸角ヲ表セバ

A \ n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
30°	-330°	-210°	30°	150°	390°	510°	750°	870°
150°	-210°	-330°	150°	30°	510°	390°	870°	750°

2. (1)  $x = \frac{2n\pi}{5}$  又ハ  $x = \frac{(2n+1)\pi}{3}$  (2)  $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(3)  $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$  又ハ  $x = \frac{1}{4} \{ n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \}$

(4)  $\theta = 2n\pi$  又ハ  $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{5}$

3. (1)  $\begin{cases} x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \\ y = m\pi + \frac{\pi}{6} - (-1)^n \frac{\pi}{6} \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} x = 120^\circ + n \cdot 90^\circ \\ y = 30^\circ - n \cdot 90^\circ \end{cases}$

- [V] 1. 150呎以上 2. 毎時9.796哩

### 補 充 問 題

#### 第一 銳 角 (1頁)

2.  $\frac{12}{13}$  [第一篇 = 於テハ負ノ値ハ採ラズ]

3.  $\sin A = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \cos A = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$  4.  $\frac{115}{128}$

5.  $x=30^\circ$  [第一篇 = テハ一般角ヲ知ラズ]

8. 内接圓ノ半徑 =  $\frac{a}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}$

外接圓ノ半徑 =  $\frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n}$

正  $n$  角形ノ面積 =  $\frac{na^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}$

12.  $1225m$ (弱) 14.  $570.5m$ (強)



20. (1)  $pq+1=0$  (2)  $m^2+n^2=a^2+b^2$   
 (3)  $(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)^2$

### 第二 一般ノ角 (3 頁)

29. 0      30.  $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ ,  $\tan 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$   
 31. 第一式ノ最大値ハ 1, 最小値ハ -1  
 第二式ノ最大値ハ 1, 最小値ハ  $\frac{1}{4}$   
 33.  $-\frac{56}{33}$       34.  $90^\circ$       35.  $45^\circ + n \cdot 180^\circ$       36. 1.93  
 37.  $\pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$       41.  $\frac{56}{65}$       45. 0 又ハ  $\pm \frac{1}{2}$       46. (1)  $a^2=b^2$   
 (2)  $m^2n^2(m^2+n^2+3)=1$       (3)  $a^2(a^2-2)+b^2=0$   
 48.  $(n-m)\tan a = mn$

### 第三 三角形ノ解法 (6 頁)

53.  $120^\circ$       63.  $r \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \sin \beta$       64. 1:2  
 66. 612.24m      67. 24m      68.  $\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} h$  米  
 72. (1) 84 平方糎, (2) 45.646 平方米      73. 26m, 35m  
 75.  $n=3$       77.  $n=6$   
 80. 毎時  $h\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta}$  ノ行程 = テ南  $\theta$  西 = 進  $\Delta$ 。  
 但シ  $\tan \theta = \frac{\cot \alpha}{\cot \beta}$       81.  $h\sqrt{\cot^2\theta + \cot^2\varphi - \cot \theta \cdot \cot \varphi}$   
 83. 木ノ高サ  $\frac{h \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha-\beta)}$  米, 垣ノ高サ  $\frac{h}{2 - \cot \alpha \cdot \tan \beta}$  米  
 85. 像 2 m, 臺 9 m

### 第四 雜 題 (10 頁)

87. (1)  $60^\circ, 300^\circ$       (2) ナシ。  
 (3)  $90^\circ, 270^\circ; 40^\circ, 160^\circ, 280^\circ; 80^\circ, 200^\circ, 320^\circ$   
 (4)  $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ; 10^\circ, 130^\circ, 250^\circ; 50^\circ, 170^\circ, 290^\circ$   
 (5)  $315^\circ$   
 (6)  $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ; 22.^\circ 5, 202.^\circ 5; 112.^\circ 5, 292.^\circ 5$   
 90. (1) -1, (2) 0, (3) 0      91.  $-\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}$   
 92. 0 又ハ  $\pm 1$   
 93.  $\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -3$   
 94.  $\sqrt{2}+1$  又ハ 1      95.  $\frac{17}{25}$   
 102.  $C = \frac{5\pi}{6} - \frac{3}{2} = 1.118$  弱      103. 約  $\frac{10}{3.1416}$  分 = 3 分(強)  
 107. (1)  $x = \frac{n\pi}{2} + \alpha$ , (2)  $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$  又ハ  $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ,  
 (3)  $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ , (4)  $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$   
 109. 高サ =  $\frac{11 \cdot \pi^2}{180}$  哩 =  $\frac{11 \cdot \pi^2 \times 5280}{180}$  呎 = 3184.6 呎  
 面積 =  $484 \cdot \pi^3$  平方哩 = 15007.1 平方里



目錄

第一章 算術 (1) 10

第二章 代數 (2) 10

第三章 幾何 (3) 10

第四章 三角 (4) 10

第五章 微積分 (5) 10

第六章 圖表 (6) 10

第七章 物理 (7) 10

第八章 化學 (8) 10

第九章 生物 (9) 10

第十章 地理 (10) 10

第十一章 歷史 (11) 10

第十二章 社會 (12) 10

第十三章 藝術 (13) 10

第十四章 體育 (14) 10

第十五章 音樂 (15) 10

第十六章 戲劇 (16) 10

第十七章 電影 (17) 10

第十八章 廣播 (18) 10

第十九章 電視 (19) 10

第二十章 電腦 (20) 10

## 附 表

三角函數對數表 2—10

對 數 表 11

比 例 部 分 表 11

公 式 一 覽 表 12



度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
<b>0 0</b>	— ∞		— ∞		∞	0	0.0000	<b>0 90</b>
10	3̄.4637	3011	3̄.4637	3011	2.5363	0	0.0000	50
20	3̄.7648	1760	3̄.7648	1761	2.2352	0	0.0000	40
30	3̄.9408	1250	3̄.9409	1249	2.0591	0	0.0000	30
40	2̄.0658	969	2̄.0658	969	1.9342	0	0.0000	20
50	2̄.1627	792	2̄.1627	792	1.8373	0	0.0000	10
<b>1 0</b>	2̄.2419	669	2̄.2419	670	1.7581	1	1̄.9999	<b>0 89</b>
10	3088	580	3089	580	6911	0	9999	50
20	3668	511	3669	512	6331	0	9999	40
30	4179	458	4181	457	5819	1	9999	30
40	4637	413	4638	415	5362	0	9998	20
50	5050	378	5053	415	4947	1	9998	10
<b>2 0</b>	2̄.5428	348	2̄.5431	348	1.4569	0	1̄.9997	<b>0 88</b>
10	5776	321	5779	322	4221	1	9997	50
20	6097	300	6101	300	3899	0	9996	40
30	6397	280	6401	281	3599	1	9996	30
40	6677	263	6682	263	3318	0	9995	20
50	6940	248	6945	249	3055	1	9995	10
<b>3 0</b>	2̄.7188	235	2̄.7194	235	1.2806	1	1̄.9994	<b>0 87</b>
10	7423	222	7429	223	2571	0	9993	50
20	7645	212	7652	213	2348	1	9993	40
30	7857	202	7865	202	2135	1	9992	30
40	8059	192	8067	194	1933	1	9991	20
50	8251	185	8261	185	1739	1	9990	10
<b>4 0</b>	2̄.8436	177	2̄.8446	178	1.1554	0	1̄.9989	<b>0 86</b>
10	8613	170	8624	171	1376	1	9989	50
20	8783	163	8795	165	1205	1	9988	40
30	8946	158	8960	158	1040	1	9987	30
40	9104	152	9118	154	0882	1	9986	20
50	9256	147	9272	148	0728	2	9985	10
<b>5 0</b>	2̄.9403	142	2̄.9420	143	1.0580	1	1̄.9983	<b>0 85</b>
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度

度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
<b>5 0</b>	2̄.9403	142	2̄.9420	143	1.0580	1	1̄.9983	<b>0 85</b>
10	2̄.9545	137	2̄.9563	138	1.0437	1	9982	50
20	2̄.9682	134	2̄.9701	135	1.0299	1	9981	40
30	2̄.9816	129	2̄.9836	130	1.0164	1	9980	30
40	2̄.9945	125	2̄.9966	127	1.0034	2	9979	20
50	1̄.0070	122	1̄.0093	123	0.9907	1	9977	10
<b>6 0</b>	1̄.0192	119	1̄.0216	120	0.9784	1	1̄.9976	<b>0 84</b>
10	0311	115	0336	117	9664	2	9975	50
20	0426	113	0453	114	9547	1	9973	40
30	0539	109	0567	111	9433	1	9972	30
40	0648	107	0678	108	9322	2	9971	20
50	0755	104	0786	105	9214	2	9969	10
<b>7 0</b>	1̄.0859	102	1̄.0891	104	0.9109	2	1̄.9968	<b>0 83</b>
10	0961	99	0995	101	9005	2	9966	50
20	1060	97	1096	98	8904	1	9964	40
30	1157	95	1194	97	8806	1	9963	30
40	1252	93	1291	94	8709	2	9961	20
50	1345	91	1385	94	8615	2	9959	10
<b>8 0</b>	1̄.1436	89	1̄.1478	93	0.8522	1	1̄.9958	<b>0 82</b>
10	1525	87	1569	91	8431	2	9956	50
20	1612	85	1658	89	8342	2	9954	40
30	1697	84	1745	87	8255	2	9952	30
40	1781	82	1831	86	8169	2	9950	20
50	1863	80	1915	84	8085	2	9948	10
<b>9 0</b>	1̄.1943	79	1̄.1997	82	0.8003	2	1̄.9946	<b>0 81</b>
10	2022	78	2078	81	7922	2	9944	50
20	2100	76	2158	80	7842	2	9942	40
30	2176	75	2236	78	7764	2	9940	30
40	2251	73	2313	77	7687	2	9938	20
50	2324	73	2389	76	7611	2	9936	10
<b>10 0</b>	1̄.2397	73	1̄.2463	74	0.7537	2	1̄.9934	<b>0 80</b>
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度



度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
<b>10</b> 0	<b>1.2397</b>		<b>1.2463</b>		<b>0.7537</b>		<b>1.9934</b>	<b>0 80</b>
10	2468	71	2536	73	7464	3	9931	50
20	2538	70	2609	73	7391	2	9929	40
30	2606	68	2680	71	7320	2	9927	30
40	2674	68	2750	70	7250	3	9924	20
50	2740	66	2819	69	7181	2	9922	10
		66		68		3		
<b>11</b> 0	<b>1.2806</b>		<b>1.2887</b>		<b>0.7113</b>		<b>1.9919</b>	<b>0 79</b>
10	2870	64	2953	67	7047	3	9917	50
20	2934	64	3020	65	6980	2	9914	40
30	2997	63	3085	65	6915	2	9912	30
40	3058	61	3149	64	6851	3	9909	20
50	3119	61	3212	63	6788	2	9907	10
		60		63		3		
<b>12</b> 0	<b>1.3179</b>		<b>1.3275</b>		<b>0.6725</b>		<b>1.9904</b>	<b>0 78</b>
10	3238	59	3336	61	6664	3	9901	50
20	3296	58	3397	61	6603	2	9899	40
30	3353	57	3458	61	6542	3	9896	30
40	3410	57	3517	59	6483	3	9893	20
50	3466	56	3576	59	6424	3	9890	10
		55		58		3		
<b>13</b> 0	<b>1.3521</b>		<b>1.3634</b>		<b>0.6366</b>		<b>1.9887</b>	<b>0 77</b>
10	3575	54	3691	57	6309	3	9884	50
20	3629	54	3748	57	6252	3	9881	40
30	3682	53	3804	56	6196	3	9878	30
40	3734	52	3859	55	6141	3	9875	20
50	3786	52	3914	55	6086	3	9872	10
		51		54		3		
<b>14</b> 0	<b>1.3837</b>		<b>1.3968</b>		<b>0.6032</b>		<b>1.9869</b>	<b>0 76</b>
10	3887	50	4021	53	5979	3	9866	50
20	3937	50	4074	53	5926	3	9863	40
30	3986	49	4127	53	5873	4	9859	30
40	4035	49	4178	51	5822	3	9856	20
50	4083	48	4230	52	5770	3	9853	10
		47		51		4		
<b>15</b> 0	<b>1.4130</b>		<b>1.4281</b>		<b>0.5719</b>		<b>1.9849</b>	<b>0 75</b>
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度

度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
<b>15</b> 0	<b>1.4130</b>		<b>1.4281</b>		<b>0.5719</b>		<b>1.9849</b>	<b>0 75</b>
10	4177	47	4331	50	5669	3	9846	50
20	4223	46	4381	49	5619	3	9843	40
30	4269	46	4430	49	5570	4	9839	30
40	4314	45	4479	49	5521	3	9836	20
50	4359	45	4527	48	5473	4	9832	10
		44		48		4		
<b>16</b> 0	<b>1.4403</b>		<b>1.4575</b>		<b>0.5425</b>		<b>1.9828</b>	<b>0 74</b>
10	4447	44	4622	47	5378	3	9825	50
20	4491	44	4669	47	5331	4	9821	40
30	4533	42	4716	47	5284	4	9817	30
40	4576	43	4762	46	5238	3	9814	20
50	4618	42	4808	46	5192	4	9810	10
		41		45		4		
<b>17</b> 0	<b>1.4659</b>		<b>1.4853</b>		<b>0.5147</b>		<b>1.9806</b>	<b>0 73</b>
10	4700	41	4898	45	5102	4	9802	50
20	4741	41	4943	45	5057	4	9798	40
30	4781	40	4987	44	5013	4	9794	30
40	4821	40	5031	44	4969	4	9790	20
50	4861	40	5075	44	4925	4	9786	10
		39		43		4		
<b>18</b> 0	<b>1.4900</b>		<b>1.5118</b>		<b>0.4882</b>		<b>1.9782</b>	<b>0 72</b>
10	4939	39	5161	43	4839	4	9778	50
20	4977	38	5203	42	4797	4	9774	40
30	5015	38	5245	42	4755	4	9770	30
40	5052	37	5287	42	4713	5	9765	20
50	5090	38	5329	42	4671	4	9761	10
		36		41		4		
<b>19</b> 0	<b>1.5126</b>		<b>1.5370</b>		<b>0.4630</b>		<b>1.9757</b>	<b>0 71</b>
10	5163	37	5411	41	4589	5	9752	50
20	5199	36	5451	40	4549	4	9748	40
30	5235	36	5491	40	4509	5	9743	30
40	5270	35	5531	40	4469	4	9739	20
50	5306	36	5571	40	4429	5	9734	10
		35		40		4		
<b>20</b> 0	<b>1.5341</b>		<b>1.5611</b>		<b>0.4389</b>		<b>1.9730</b>	<b>0 70</b>
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度



度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
<b>20 0</b>	<b>1.5341</b>		<b>1.5611</b>		<b>0.4389</b>		<b>1.9730</b>	<b>0 70</b>
10	5375	34	5650	39	4350	5	9725	50
20	5409	34	5689	39	4311	4	9721	40
30	5443	34	5727	38	4273	5	9716	30
40	5477	34	5766	39	4234	5	9711	20
50	5510	33	5804	38	4196	5	9706	10
<b>21 0</b>	<b>1.5543</b>		<b>1.5842</b>		<b>0.4158</b>		<b>1.9702</b>	<b>0 69</b>
10	5576	33	5879	37	4121	5	9697	50
20	5609	33	5917	38	4083	5	9692	40
30	5641	32	5954	37	4046	5	9687	30
40	5673	32	5991	37	4009	5	9682	20
50	5704	31	6028	37	3972	5	9677	10
<b>22 0</b>	<b>1.5736</b>		<b>1.6064</b>		<b>0.3936</b>		<b>1.9672</b>	<b>0 68</b>
10	5767	32	6100	36	3900	5	9667	50
20	5798	31	6136	36	3864	6	9661	40
30	5828	30	6172	36	3828	5	9656	30
40	5859	31	6208	36	3792	5	9651	20
50	5889	30	6243	35	3757	5	9646	10
<b>23 0</b>	<b>1.5919</b>		<b>1.6279</b>		<b>0.3721</b>		<b>1.9640</b>	<b>0 67</b>
10	5948	30	6314	36	3686	6	9635	50
20	5978	29	6348	35	3652	5	9629	40
30	6007	29	6383	34	3617	6	9624	30
40	6036	29	6417	35	3583	5	9618	20
50	6065	28	6452	34	3548	6	9613	10
<b>24 0</b>	<b>1.6093</b>		<b>1.6486</b>		<b>0.3514</b>		<b>1.9607</b>	<b>0 66</b>
10	6121	28	6520	34	3480	5	9602	50
20	6149	28	6553	33	3447	6	9596	40
30	6177	28	6587	34	3413	6	9590	30
40	6205	28	6620	33	3380	6	9584	20
50	6232	27	6654	34	3346	5	9579	10
<b>25 0</b>	<b>1.6259</b>		<b>1.6687</b>		<b>0.3313</b>		<b>1.9573</b>	<b>0 65</b>
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度

度 分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
<b>25 0</b>	<b>1.6259</b>		<b>1.6687</b>		<b>0.3313</b>		<b>1.9573</b>	<b>0 65</b>
10	6286	27	6720	33	3280	6	9567	50
20	6313	27	6752	32	3248	6	9561	40
30	6340	27	6785	33	3215	6	9555	30
40	6366	26	6817	32	3183	6	9549	20
50	6392	26	6850	33	3150	6	9543	10
<b>26 0</b>	<b>1.6418</b>		<b>1.6882</b>		<b>0.3118</b>		<b>1.9537</b>	<b>0 64</b>
10	6444	26	6914	32	3086	7	9530	50
20	6470	26	6946	32	3054	6	9524	40
30	6495	25	6977	31	3023	6	9518	30
40	6521	26	7009	32	2991	6	9512	20
50	6546	25	7040	31	2960	7	9505	10
<b>27 0</b>	<b>1.6570</b>		<b>1.7072</b>		<b>0.2928</b>		<b>1.9499</b>	<b>0 63</b>
10	6595	24	7103	32	2897	6	9492	50
20	6620	25	7134	31	2866	7	9486	40
30	6644	24	7165	31	2835	7	9479	30
40	6668	24	7196	31	2804	6	9473	20
50	6692	24	7226	30	2774	7	9466	10
<b>28 0</b>	<b>1.6716</b>		<b>1.7257</b>		<b>0.2743</b>		<b>1.9459</b>	<b>0 62</b>
10	6740	24	7287	31	2743	7	9453	50
20	6763	23	7317	30	2683	7	9446	40
30	6787	24	7348	31	2652	7	9439	30
40	6810	23	7378	30	2622	7	9432	20
50	6833	23	7408	30	2592	7	9425	10
<b>29 0</b>	<b>1.6856</b>		<b>1.7438</b>		<b>0.2562</b>		<b>1.9418</b>	<b>0 61</b>
10	6878	22	7467	29	2533	7	9411	50
20	6901	23	7497	30	2503	7	9404	40
30	6923	22	7526	29	2474	7	9397	30
40	6946	23	7556	30	2444	7	9390	20
50	6968	22	7585	29	2415	7	9383	10
<b>30 0</b>	<b>1.6990</b>		<b>1.7614</b>		<b>0.2385</b>		<b>1.9375</b>	<b>0 60</b>
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	分 度



度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
<b>30</b> 0	$\bar{1}.6990$		$\bar{1}.7614$		0.2386		$\bar{1}.9375$	0 <b>60</b>
10	7012	22	7644	30	2356	7	9368	50
20	7033	21	7673	29	2327	7	9361	40
30	7055	22	7701	28	2299	8	9353	30
40	7076	21	7730	29	2270	7	9346	20
50	7097	21	7759	29	2241	8	9338	10
<b>31</b> 0	$\bar{1}.7118$		$\bar{1}.7788$		0.2212		$\bar{1}.9331$	0 <b>59</b>
10	7139	21	7816	28	2184	8	9323	50
20	7160	21	7845	29	2155	8	9315	40
30	7181	21	7873	28	2127	7	9308	30
40	7201	20	7902	29	2098	8	9300	20
50	7222	21	7930	28	2070	8	9292	10
<b>32</b> 0	$\bar{1}.7242$		$\bar{1}.7958$		0.2042		$\bar{1}.9284$	0 <b>58</b>
10	7262	20	7986	28	2014	8	9276	50
20	7282	20	8014	28	1986	8	9268	40
30	7302	20	8042	28	1958	8	9260	30
40	7322	20	8070	28	1930	8	9252	20
50	7342	20	8097	27	1903	8	9244	10
<b>33</b> 0	$\bar{1}.7361$		$\bar{1}.8125$		0.1875		$\bar{1}.9236$	0 <b>57</b>
10	7380	19	8153	28	1847	8	9228	50
20	7400	19	8180	27	1820	9	9219	40
30	7419	19	8208	28	1792	8	9211	30
40	7438	19	8235	27	1765	8	9203	20
50	7457	19	8263	28	1737	9	9194	10
<b>34</b> 0	$\bar{1}.7476$		$\bar{1}.8290$		0.1710		$\bar{1}.9186$	0 <b>56</b>
10	7494	18	8317	27	1683	9	9177	50
20	7513	19	8344	27	1656	8	9169	40
30	7531	18	8371	27	1629	9	9160	30
40	7550	19	8398	27	1602	9	9151	20
50	7568	18	8425	27	1575	9	9142	10
<b>35</b> 0	$\bar{1}.7586$		$\bar{1}.8452$		0.1548		$\bar{1}.9134$	0 <b>55</b>

log cos 差 log cot 通差 log tan 差 log sin 分 度

度分	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
<b>35</b> 0	$\bar{1}.7586$		$\bar{1}.8452$		0.1548		$\bar{1}.9134$	0 <b>55</b>
10	7604	18	8479	27	1521	9	9125	50
20	7622	18	8506	27	1494	9	9116	40
30	7640	17	8533	26	1467	9	9107	30
40	7657	18	8559	27	1441	9	9098	20
50	7675	17	8586	27	1414	9	9089	10
<b>36</b> 0	$\bar{1}.7692$		$\bar{1}.8613$		0.1387		$\bar{1}.9080$	0 <b>54</b>
10	7710	17	8639	26	1361	10	9070	50
20	7727	17	8666	27	1334	9	9061	40
30	7744	17	8692	26	1308	9	9052	30
40	7761	17	8718	26	1282	10	9042	20
50	7778	17	8745	27	1255	9	9033	10
<b>37</b> 0	$\bar{1}.7795$		$\bar{1}.8771$		0.1229		$\bar{1}.9023$	0 <b>53</b>
10	7811	16	8797	26	1203	9	9014	50
20	7828	17	8824	27	1176	10	9004	40
30	7844	16	8850	26	1150	9	8995	30
40	7861	17	8876	26	1124	10	8985	20
50	7877	16	8902	26	1098	10	8975	10
<b>38</b> 0	$\bar{1}.7893$		$\bar{1}.8928$		0.1072		$\bar{1}.8965$	0 <b>52</b>
10	7910	16	8954	26	1046	10	8955	50
20	7926	16	8980	26	1020	10	8945	40
30	7941	15	9006	26	0994	10	8935	30
40	7957	16	9032	26	0968	10	8925	20
50	7973	16	9058	26	0942	10	8915	10
<b>39</b> 0	$\bar{1}.7989$		$\bar{1}.9084$		0.0916		$\bar{1}.8905$	0 <b>51</b>
10	8004	15	9110	26	0890	10	8895	50
20	8020	16	9135	25	0865	11	8884	40
30	8035	15	9161	26	0839	10	8874	30
40	8050	15	9187	26	0813	10	8864	20
50	8066	16	9212	25	0788	11	8853	10
<b>40</b> 0	$\bar{1}.8081$		$\bar{1}.9238$		0.0762		$\bar{1}.8843$	0 <b>50</b>

log cos 差 log cot 通差 log tan 差 log sin 分 度



度 分	$\log \sin$	差	$\log \tan$	通差	$\log \cot$	差	$\log \cos$	
<b>40</b> 0	$\bar{1}.8081$		$\bar{1}.9238$		0.0762		$\bar{1}.8843$	0 <b>50</b>
10	8096	15	9264	26	0736	11	8832	50
20	8111	15	9289	25	0711	11	8821	40
30	8125	14	9315	26	0685	11	8810	30
40	8140	15	9341	26	0659	10	8800	20
50	8155	15	9366	25	0634	11	8789	10
		14		26		11		
<b>41</b> 0	$\bar{1}.8169$		$\bar{1}.9392$		0.0608		$\bar{1}.8778$	0 <b>49</b>
10	8184	15	9417	25	0583	11	8767	50
20	8198	14	9443	26	0557	11	8756	40
30	8213	15	9468	25	0532	11	8745	30
40	8227	14	9494	26	0506	12	8733	20
50	8241	14	9519	25	0481	11	8722	10
		14		25		11		
<b>42</b> 0	$\bar{1}.8255$		$\bar{1}.9544$		0.0456		$\bar{1}.8711$	0 <b>48</b>
10	8269	14	9570	26	0430	12	8699	50
20	8283	14	9595	25	0405	11	8688	40
30	8297	14	9621	26	0379	12	8676	30
40	8311	14	9646	25	0354	11	8665	20
50	8324	13	9671	25	0329	12	8653	10
		14		26		12		
<b>43</b> 0	$\bar{1}.8338$		$\bar{1}.9697$		0.0303		$\bar{1}.8641$	0 <b>47</b>
10	8351	13	9722	25	0278	12	8629	50
20	8365	14	9747	25	0253	11	8618	40
30	8378	13	9773	26	0227	12	8606	30
40	8391	13	9798	25	0202	12	8594	20
50	8405	14	9823	25	0177	12	8582	10
		13		25		13		
<b>44</b> 0	$\bar{1}.8418$		$\bar{1}.9848$		0.0152		$\bar{1}.8569$	0 <b>46</b>
10	8431	13	$\bar{1}.9874$	26	0126	12	8557	50
20	8444	13	$\bar{1}.9899$	25	0101	12	8545	40
30	8457	13	$\bar{1}.9924$	25	0076	13	8532	30
40	8469	12	$\bar{1}.9949$	25	0051	12	8520	20
50	8482	13	$\bar{1}.9975$	26	0025	13	8507	10
		13		25		12		
<b>45</b> 0	$\bar{1}.8495$		0.0000		0.0000		$\bar{1}.8495$	0 <b>45</b>
	$\log \cos$	差	$\log \cot$	通差	$\log \tan$	差	$\log \sin$	分 度



對 數 表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474	
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551	
12	792	828	864	899	934	969	004*038*072*106*	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627	634	642	649	657
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701	
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774	
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846	
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917	
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987	
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	028*035*041*048*055*	
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122	
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189	
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254	
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319	
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382	
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445	
25	979	997	014*031*048*	065*082*099*116*133*	70	451	457	463	470	476	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506	
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567	
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627	
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686	
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745	
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802	
31	914	928	942	955	969	983	997	011*024*038*	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859	865	871	
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915	
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971	
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	004*009*015*020*025*	004*009*015*020*025*	004*009*015*020*025*	004*009*015*020*025*	004*009*015*020*025*	
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079	
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133	
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186	
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	233	
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289	
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340	
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489	
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538	
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586	
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633	
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680	
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727	
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773	
50	990	998	007*016*024*	033*042*050*059*067*	95	777	782	786	791	795	95	800	805	809	814	818	823	827	832	836	841	
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	853	857	861	865	869	873	877	881	885	889	
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952	
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996	
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99											

	11	12	13	14	15	16
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4
	32	33	34	35	36	37
1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4
3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1
4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8
5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5
6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2
7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9
8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6
9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3
	53	54	55	56	57	58
1	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
2	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6
3	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4
4	21.2	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2
5	26.5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0
6	31.8	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8
7	37.1	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6
8	42.4	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4
9	47.7	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2
	75	76	77	78	79	80
1	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
2	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.0
3	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.0
4	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.0
5	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.0
6	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.0
7	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.0
8	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.0
9	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.0

50  
49  
48  
47  
46  
45  
度



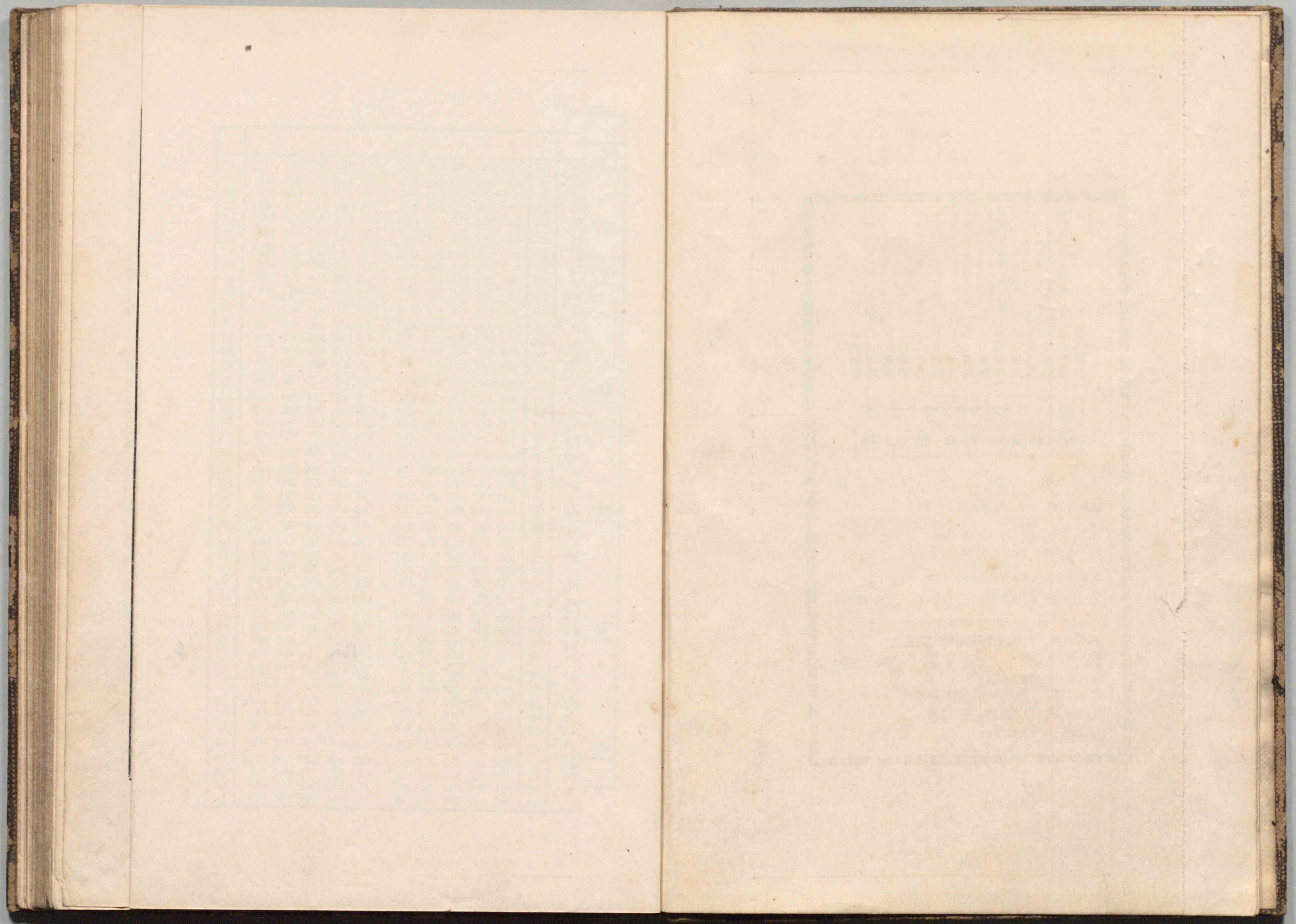
對 數 表

比 例 部 分 表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	004*038*072*106*				57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	000*007*014*021*								
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	014*031*048*			065*082*099*116*133*					70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	011*024*033*			76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	004*009*015*020*025*				
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	242	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	007*016*024*			033*042*050*059*067*					95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	034	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.1			
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.2			
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.3			
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.4			
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.5			
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.6			
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.7			
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.8			
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.9			
	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	
1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.1	5.2			
2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	10.2	10.4			
3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.3	12.6	12.9	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7	15.3	15.6			
4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6	20.4	20.8			
5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5	25.5	26.0			
6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.6	25.2	25.8	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4	30.6	31.2			
7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.7	29.4	30.1	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3	35.7	36.4			
8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.8	33.6	34.4	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2	40.8	41.6			
9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.9	37.8	38.7	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1	45.9	46.8			
	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
1	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.1	7.3	7.4			
2	10.6	10.8	11.0																			







刷行刷行刷行刷行刷行  
 印發印發印發印發印發  
 版版版版版版版版版版  
 再再再再再再再再再再  
 正正正正正正正正正正  
 印發修修修修修修修修  
 日日日日日日日日日日  
 六九一四四七三六九二  
 廿廿廿廿廿廿廿廿廿廿  
 月月月月月月月月月月  
 十十二十一八十一  
 年年年年年年年年年年  
 十十三十四三三三三  
 正正正正正正正正正正  
 大大大大大大大大大大  
 昭昭昭昭昭昭昭昭昭昭  
 和和和和和和和和和和  
 五五五五五五五五五五  
 年年年年年年年年年年  
 十十十十十十十十十十  
 月月月月月月月月月  
 十十五十十五十十五十  
 日日日日日日日日日日  
 修修修修修修修修修修  
 正正正正正正正正正正  
 七七八七八七八七八七  
 版版版版版版版版版版  
 印發印發印發印發印發  
 刷行刷行刷行刷行刷行

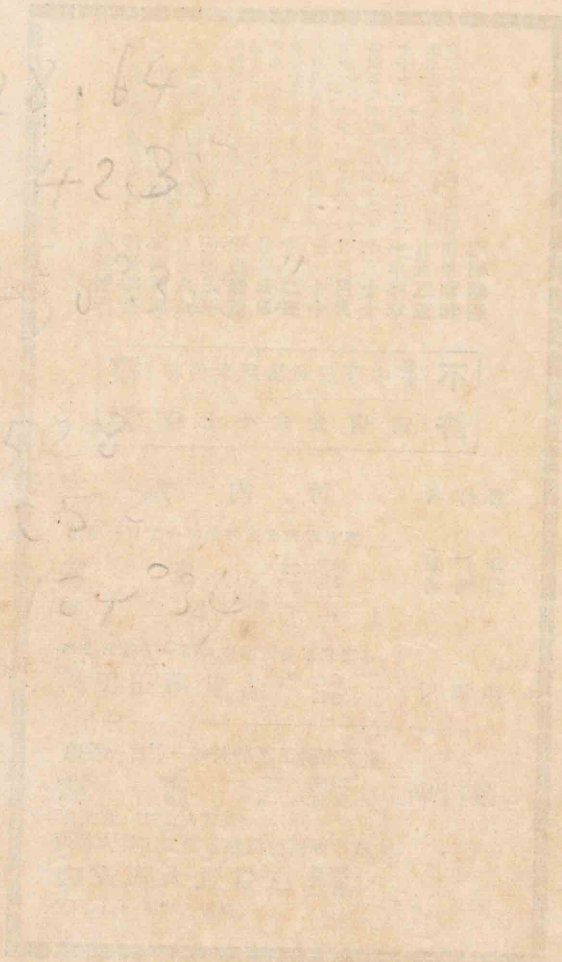
不許 訂 中等三角法新教科書 複製  
 定價金六十七錢

著者 竹 內 端 三  
 東京市神田區神保町一丁目一番地  
 發行兼 株式 三省 堂  
 印刷者 代表者 龜井寅雄  
 東京市蒲田區仲六郷一丁目五番地  
 印刷所 株式 三省堂蒲田工場  
 東京市神田區神保町一丁目一番地  
 發行所 株式 三省 堂  
 (振替東京三一五五五)  
 大阪市西區阿波座下通二丁目六番地  
 株式 三省堂大阪支店  
 (振替大阪八一三〇〇)



$a = 317$   
 $b = 533$   
 $c = 510$

$a = 28.64$   
 $b = 42.85$   
 $c = 0.3$   
 $d = 528$   
 $e = 0.5$   
 $f = 104.34$



西  
京  
一

西  
原  
盛  
一



A = 82° 49'      a = 44.5.12

B = 71° 14'      b = 37.0.0

C = 26° 37'      c = 10.0.0

a = 4.0.0      A = 10.0.0

b = 1.0.0      B = 1.0.0

c = 1.0.0      C = 1.0.0

A = 10.0.0      a = 1.0.0

B = 10.0.0      b = 1.0.0

C = 10.0.0      c = 1.0.0

a = 1.0.0      A = 1.0.0

b = 1.0.0      B = 1.0.0

c = 1.0.0      C = 1.0.0

A = 1.0.0      a = 1.0.0

B = 1.0.0      b = 1.0.0

C = 1.0.0      c = 1.0.0





教  
4  
20