中等

平面幾何學新教科書

理學博士
竹內端三 著

株式會社
三省堂

昭和二年十二月二日
文部省檢定濟
中學校數學科用

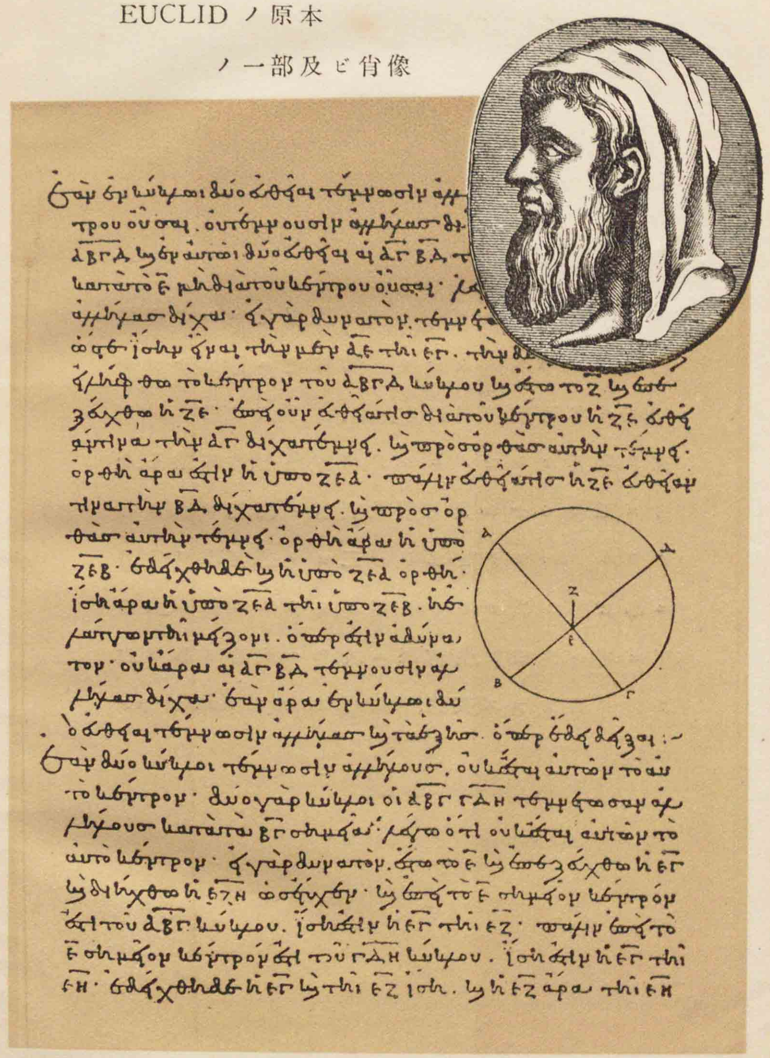
中等平面幾何學新教科書

東京帝國大學教授
理學博士
竹內端三著

株式會社
三省堂
東京　大阪

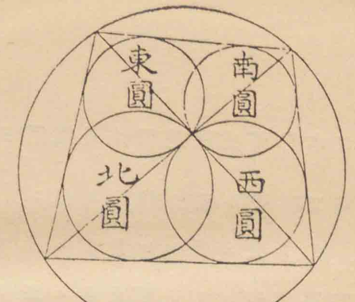
EUCLIDノ原本

ノ一部及ビ肖像



ゆーくりつどハぎりしやノ數學者ニシテ西暦紀元前300年頃ノ人ナリ。其傳記ハ詳カナラザレドモ其著『幾何學原本』ハ彼自身及ビ前人ノ研究ヲ編纂セルモノニシテ、秩序整然、論理嚴正、今日ニ至ルモナホ幾何學教科書ノ模範ヲ以テ目セラル。カツテとれみー王ヨリ幾何學ヲ容易ニ學ビ得ル法ナキヤト問ハレタルニ對シ、彼言下ニ答ヘテ曰ク、幾何學ニ於テハ王者ト雖別途ヲ行ク可カラズ(英譯、There is no royal road in geometry.)ト。

所懸于羽州鶴岡山王社者一事



今有如圖圓内設六斜容四圓各切上三斜南圓徑一寸東圓徑二寸西圓徑三寸問北圓徑幾何

答曰北圓徑四寸

術曰置東圓徑加西圓徑内減南圓徑餘得北圓徑合問

寛政十二年庚申五月

丸山良玄門人

東都　丸山鐵五郎良寛

増修日本數學史(遠藤利貞氏遺著)ヨリ抄錄

○藤田嘉言門彌ト稱シ、龍川ト號ス。定資ガ男ナリ。業ヲ父ニ受ケテ數理ニ通ズ。神壁算法ハ明和四年ヨリ天明九年ニ至リテ(二十餘年間)諸國神社佛閣ニ揭ゲシ所ノ算題ヲ蒐輯シタルモノニシテ、從前未ダ見ザル所ノ算集ナリ。 (418頁)

○文化三年(一八〇六)藤田嘉言續神壁算法ヲ著ハス。〔中略〕續神壁算法ハ寛政八年ヨリ文化三年ニ至ル十一年間諸國ノ神社佛堂ニ揭ゲタル算題ヲ蒐輯シタルモノナリ。(490頁)

表面ノ問題ハ續神壁算法中ニアル一問ニシテ本書補充問題68ニ相當ス。

改版緒言

本書ハ曩ニ中等教育平面幾何學ノ教科用ニ供センガタメニ編述セルモノノ改版ニシテ,現行ノ教授要目ニ準據シ其範圍内ニ於テ出來得ル限リ最近數學界ノ趨勢ニ鑑ミテ新傾向ヲ加味セルモノナリ。

今本書初版以來著者ガ特ニ意ヲ用ヒ來レル若干ノ要點ヲ摘記スレバ次ノ如シ。

(一) 幾何學ノ初歩ニ屬スル簡單ナル事項ハ實驗ニヨリテ學生ニ會得セシムルモ可ナリト雖,本書ニ於テハ特ニコレラノ入門的ノ說明ヲ記載セズ,コレ一ニハ頁數ヲ節約センガタメニシテ,又一ニハ斯學本來ノ面目ハ飽クマデモ理論ヲ尊重スル所ニアルコトヲ明カニセンガタメナリ。

(二) 定理ノ形式,證明法等ノ如キ抽象的ナル論理事項ハ學生ガ漸次推理ニ慣ルヽニ從ツテ之ヲ授クルコトヽシ,所々ニ其說明ヲ挿入セリ。但シ他ノ本文ト區別スルタメニ特ニ其節ハ細字ヲ以テ之ヲ印刷スルコトヽシタリ。

(三) 必要條件及ビ十分條件ノ意義ヲ正確ニ會得スルコトハ數學全般ニ亘リテ緊要ナルヲ以テ第六章中ニ特ニ一節ヲ割キテ之ヲ詳論セリ。然レドモ初學者ニトリテハ稍難解ナルベキヲ以テ或ハ暫ク之ヲ省略シテ進行スルモ差支ナシ。依ツテ其節モ亦細字ヲ以テ印刷スルコトヽシタリ。

(四) 軌跡ノ概念ハ頗ル重要ナルニ關ラズ常ニ學生ノ理解ニ苦シム所ナルヲ以テ特ニ一編ヲ設ケテ十分ニ之ヲ詳說セリ。

(五) 面積ニ關シテハ普通其根本原理ヲ說カザルモノ多シ。本書ニ於テハ先ヅ最初ニ面積比較ノ原理ヲ述べ,多角形ノ面積ハ之ヲ矩形ノ面積ニ直シ得ルコトヲ示シ,然ル後之ヲ計リテ其大サヲ數ヲ以テ表シ得ル理ヲ詳論セリ。幾何學ト代數學トノ知識ヲ混同セザル樣ニ兩々相對比シテ其關係ヲ會得セシメンコトモ亦特ニ意ヲ用ヒタル點ナリトス。

(六) 比例ノ編中ニ述ベタル「線分ノ計算」ナル一章ハ從來ノ因襲ヲ脫シテ幾何學ト代數學トノ融合ヲ最モ自由ナル形式ニ於テ發表セルモ

ノニシテ一見或ハ異樣ノ觀ナキニアラザル可キモ仔細ニ吟味スレバコレ毫モ幾何學ノ本質ヲ濫スモノニアラザルヲ知ルベシ。之ニ依ツテ幾多ノ難解ナル作圖題ヲ平易ニ解クコトヲ得ベシ。

(七) 本書中ノ問題ヲ二種ニ分テリ。各節ノ終リニ附シタル「例題」ハ其節ニ說明セル事項ヲ練習セシムルタメノ問題ナリ,又各編ノ終リニ附シタル「雜題」ハ其編マデノ全既習事項ヲ應用セシムル問題ナリ。ナホ此他卷末ニ補充問題トシテ各編ノ內容ニ從ツテ分類セルモノ二百餘題,全卷ニ亘レル雜題六十餘ヲ排列セリ。

(八) 問題ハ何レモ穩當ニシテ實力ノ練磨ニ資ス可キモノヽミヲ選ビ,甚シキ難問等ハ一切之ヲ載セズ。

著者ハ本書舊版ニ關シテ種々有益ナル忠言ヲ寄セラレタル諸賢ニ對シテ厚ク感謝ノ意ヲ表ス,而シテ今後ナホ改良ヲ重ネ漸次完璧タルニ近カラシムベク,重ネテ諸賢ノ高批ヲ希望シテ止マザルモノナリ。

昭和二年七月　著者識

目　次

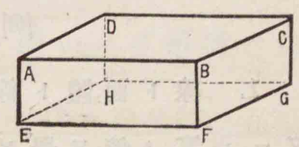
中等平面幾何學新教科書

第一篇

緒論

1. 幾何學ノ目的

スベテノ物體ハ必ズ何等カノ物質ヲ以テ組織セラレ空間ニ於テ幾許カノ場所ヲ占有ス。物體ノ色,重サ,硬サ等ハソノ物體ヲ組織スル物質ニ關スル性質ニシテ之ヲ物質的性質トイフ。之ニ反シテ物體ノ形,大サ及ビ位置ハソノ物體ガ空間ニ於テ場所ヲ占有スル有樣ニ關スルモノニシテ,物質ノ如何ニハ關係ナキモノナリ,之ヲ空間的性質トイフ。幾何學ハ物體ノ空間的性質ノミヲ研究スル學科ナリ。



2. 體,面,線,點

物體ノ物質的性質ヲ無視シ空間的性質ニノ

ミ注目スルトキハ之ヲ體又ハ立體トイフ。即チ**體トハ形,大サ及ビ位置ノミヲ有スルモノナリ。**

體ノ限界ヲ面トイフ。面ハ廣サヲ有スレドモ厚サヲ有セズ。一般ニ體ノ限界タルト否トヲ問ハズ,スベテ**形,位置及ビ廣サノミヲ有スルモノヲ面トイフ。**

面ノ限界又ハ二ツノ面ノ交リ*ヲ考フルトキハ形,位置及ビ長サヲ有スレドモ廣サ及ビ厚サヲ有セザルモノヲ得。一般ニ斯クノ如ク**形,位置及ビ長サノミヲ有スルモノヲ線トイフ。**

線ノ限界又ハ二ツノ線ノ交リヲ考フルトキハ唯位置ノミヲ有シテ形及ビ大サヲ有セザルモノヲ得。一般ニ斯クノ如ク**位置ノミヲ有スルモノヲ點トイフ。**

例題

1. 線ト面,體ト線,體ト面ノ交リハ何ナルカ。又コレ等ノ例ヲ擧ゲヨ。

*「交リ」トハ兩方ニ共通ナル部分ヲイフ。

2. 形等シク物質ノ異ルモノ,又物質等シクシテ形ノ異ルモノハ例ヲ擧ゲヨ。

3. 直線,平面

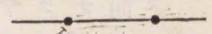
線ノ中ニテ例ヘバ強ク張ラレタル絲ノ如ク眞直(マツスグ)ナルモノヲ直線トイフ。

直線ハ双方ニ限リナク長キモノトス。

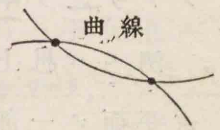
次ニ擧グルモノハ直線ノ重要ナル一性質ナリ。

任意ノ二點ヲ過ル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル

故ニ二ツノ直線ガ二點ヲ共有スルトキハ,兩者ハ全ク相一致スルモノナリ。


直線

換言スレバ,任意ノ一ツノ直線ヲトリテ之ヲ他ノ任意ノ一ツノ直線ノ上ニ置クトキ,若シ前者ノ中ノ二點ガ後者ノ上ニ*アル様ニサヘスレバ其置キ方ノ如何ニ關ハラズ兩者ハ全ク相一致スルモノナリ。


曲線

*「直線ノ上ニアリ」トイフハ其直線ノ中ニ含マルルコトヲイフ,直線ヲ離レテ上ノ方ニアル意ニアラズ。「直線上ニアリ」,「同上ニアリ」ナドトイフ場合モスベテ然リ。

直線ナラザル線ヲ**曲線**トイフ。

面ノ中ニテ例ヘバ靜止セル水面ノ如ク凹凸ナキモノヲ**平面**トイフ。

平面ハ其面上ノ何レノ方向ニモ限リナク擴ガレルモノトス。

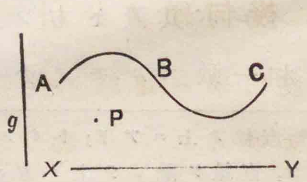
次ニ擧グルモノハ平面ノ重要ナル一性質ナリ。

一ツノ平面上ニ任意ノ二點ヲトレバ之ヲ過ル直線ハ常ニ全ク其平面上ニアリ。

平面ナラザル面ヲ**曲面**トイフ。

曲線ニテモ一ツノ平面上ニ全ク含マルルモノアリ,之ヲ**平面曲線**トイフ。

例ヘバ机上ニ展ベラレタル紙面ノ如キハホボ平面ノ一部ト見做シ得ベシ。從ツテ鉛筆ノ尖端ヲ紙上ニ走ラスルトキハソノ畫ケル條痕ハホボ平面曲線又ハ直線ノ一部ヲ表スモノト



考フルコトヲ得。點ハ線ノ端又ハ線ノ交リトシテモ表サルレドモ,特ニ或ル一點ヲ示ス必要アルトキハ〔・〕ヲ以テ之ヲ表ハスモノトス。

點ヲ呼ブニハ之ニ附シタル記號ノ一文字ヲ以テス,例ヘバ點Pノ如シ。線ヲ呼ブニハソノ上ニアル二ツ以上ノ點ニ附シタル記號ヲ併稱ス,例ヘバ直線(ソノ一部ヲ畫ク)XY,曲線ABCノ如シ。然レドモ或ル場合ニハ線全體ヲ唯一ツノ文字ニテ表スコトアリ,例ヘバ直線gノ如シ。

4. 圖　形

體,面,線,點又ハソレラノモノヽ集合ヲ稱シテ**圖形**トイフ。特ニ同一平面上ニアル圖形ヲ**平面圖形**トイフ。卽チ平面圖形ハ同一平面上ニアル線,點又ハソレラノモノヽ集合ナリ。

5. 幾何學ノ分科

幾何學ハ圖形ノ性質ヲ研究スル學科ナリ。卽チ換言スレバ,**物ノ形,大サ及ビ位置ニ關スル眞理ヲ研究スル學科ナリ**。

幾何學ノ中特ニ平面圖形ノミヲ研究スル部分ヲ**平面幾何學**トイヒ,更ニ一般ノ圖形ヲ研究スル部分ヲ**立體幾何學**又ハ**空間幾何學**トイフ。

本書ハ平面幾何學ヲ述ブ,故ニスベテノ圖形ハ悉ク同一平面上ニアルモノト考フベシ,煩雜ヲ避クルタメ以下一々同一平面上ニアルコトノ斷リ書ヲナサズ。

6. 幾何學ノ研究法

例ヘバ平面幾何學ニ於テ或ル圖形ノ性質ヲ研究セントスルニ,紙上ニ畫カレタル線又ハ點等ニツイテ實驗觀察ヲ試ミタルノミニテハ精確ナリトイフヲ得ズ,況ンヤ圖形ノ大小種類ハ無數ニ多ク存在スルヲ以テソノスベテニ通ズル一般ノ眞理ヲ求メンニハ到底一々實驗觀察ヲ試ミラルベクモアラズ。サレバ幾何學ニ於テハ先ヅ若干ノ簡單ナル事項ヲ基礎トシテ確定シ置キ,ソレ以上ノ複雜ナル事項ハスベテ嚴密ナル推理ニヨリテ求ムルコトトス。ソノ基礎トスル事項ヲ**公理**トイヒ,之ヨリ推理シテ得ル事項ヲ**定理**トイフ。既ニ定理トシテ得タル事項ハ之ヲ公理ト共ニ推理ノ基礎トナシ之ニヨリテ更ニ他ノ定理ヲ索ムル用ニ供セラル。

一ノ定理ガ公理又ハ既成ノ定理ヨリ導キ出サルル理路(スヂミチ)ヲ明カニ示スコトヲ稱シテソノ定理ノ**證明**トイフ。證明ハ幾何學ニ於テ最モ重ンゼラルルモノニシテ,證明ナクシテ漫リニ或ル事項ヲ斷定スルコトハ許容セラレザルモノトス。

注意 證明ノ重ンズベキコト斯クノ如シト雖,實驗觀察モ亦全然無用トイフニ非ズ,之ニヨリテ新ラシキ定理ヲ豫想スルコトアリ,或ハ既ニ得タル定理ヲ驗シ見ルコトモアリ,殊ニ初步ノ程度ニ於テソノ必要多シ。然レドモ實驗觀察ニノミ賴ルコトハ幾何學本來ノ研究法ニアラザルコトヲ忘ル可カラズ。

推理ヲ嚴正ナラシムルタメニハ用語ノ意味ヲ明カニ陳述シ置クコトヲ要ス。ソノ陳述ヲ稱シテ其語ノ**定義**トイフ。

例ヘバ第4節ニ述ベタル事項ハ圖形及ビ平面圖形ノ定義ナリ。

7. 公理

公理 一. 任意ノ二點ヲ過ル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。 (第3節參照)

公理 二. 一直線上ニアラザル任意ノ三點ヲ過ル平面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

公理 三. 一平面上ノ二點ヲ過ル直線ハ全ク其平面上ニアリ。 (第3節參照)

圖形ノ形及ビ大サヲ變ゼズシテソノ位置ノミヲ變ゼシムルコトヲ**變位**トイフ。

公理 四. 任意ノ圖形ハ之ヲ變位セシムルコトヲ得,而シテソノ圖形中ノ任意ノ一點ヲ任意ノ與ヘラレタル位置ニ來ラシムルコトヲ得。

圖形ハ物質的性質ヲ有セザルガ故ニ二ツノ圖形ガ同時ニ同ジ場所ヲ占有スルコトモ可能ナリトス。モシ一ツノ圖形ヲ變位セシメテ他ノ一ツノ圖形ト互ニ過不足ナク同一ノ場所ヲ

占有セシメ得ルトキハ,ソノ二ツノ圖形ハ**全ク相等シ**又ハ**合同ナリ**トイフ。

公理 五. 任意ノ二直線ハ合同ナリ。

公理 六. 任意ノ二平面ハ合同ナリ。

例題

圖形ノ形ヲ變ゼズシテ大サヲ變ズルコト,又ハ大サヲ變ゼズシテ形ヲ變ズルコトヲ考ヘ得ルカ。各ソノ實例ヲ擧ゲヨ。

第二篇
直線
第一章　基本性質

8. 直線ノ部分

幾何學ニ於テ單ニ直線トイフトキハ双方ノ方向ニ限リナク長キモノヲイフ。モシ直線上ニ一點ヲトリ,之ヨリ一方ノ側ニアル直線ノ部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**半直線**トイフ。モシ又直線上ニ二點ヲトリ,ソノ間ニアル直線ノ部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**線分**又ハ**有限直線**トイフ。

有限直線ニ對シテ双方ノ方向ニ限リナキ直線ヲ**無限直線**ト云フコトアリ。

直線ノ中ヨリ半直線又ハ線分ヲ取リタル殘リノ部分ヲソノ半直線又ハ線分ノ**延長**トイフ。

9. 直線ニ關スル公理

公理一(第7節)ヨリ直チニ次ノ事項ヲ斷定スルコトヲ得。

(1)　一點ヲ共有スル二直線ハ全ク相合スルニ非ザレバ他ノ點ヲ共有スルコトナシ。

二直線ガ唯一點ノミヲ共有スルトキハ,其二直線ハ其點ニ於テ**相交ル**トイヒ,其點ヲ其二直線ノ**交點**トイフ。

(2)　任意ノ二點ヲ兩端トスル線分ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

カクノ如キ線分ヲ作ルコトヲ稱シテ其二點ヲ**結ブ**トイフ。

公理　七.　一ツノ平面ハソノ上ニアル任意ノ一直線ニヨリテ二ツノ部分ニ分タル。其同一ノ部分ニ屬スル任意ノ二點ヲ結ブ線分ハ前ノ直線ト相交ラズ,相異ナル部分ニ屬スル任意ノ二點ヲ結ブ線分ハ前ノ直線ト相交ル。

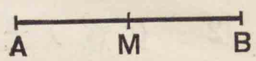
10. 線分ノ長サ

二點A及ビBヲ兩端トスル線分ノコトヲ線

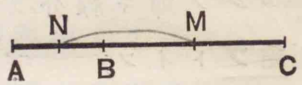
分 AB ト呼ビ,ソノ長サヲ表スニハ $\overline{AB}$ 又ハ單ニ AB ト記ス。

線分 AB ノ長サノコトヲ **二點 A, B ノ間ノ距離** トイフ。

線分 AB 上ニ一點 M ヲトリ AM＝MB ナラシムルトキハ,M ヲ **線分 AB ノ中點** 又ハ **二點 A, B ノ中點** トイフ。



今 A, B, C ヲ一直線上ニアル三點トシ,線分 BC ノ中點ヲ M トスルトキハ,



$$AM=AB+BM,$$

又　$AM=AC-MC=AC-BM.$

故ニ　$2.AM=AB+AC,$

從ツテ　$$AM=\frac{AB+AC}{2}. \qquad (1)$$

更ニ線分 AB ノ中點ヲ N トスルトキハ,

$$NM=NB+BM=\frac{AB}{2}+\frac{BC}{2}=\frac{AB+BC}{2},$$

故ニ　$$NM=\frac{AC}{2}. \qquad (2)$$

例　題

1.　一直線上ニ三點 A, B, C アリ,線分 AC ノ中點ヲ M,線分 BC ノ中點ヲ N トスレバ,

$$MN=\frac{AC-BC}{2}=\frac{AB}{2}$$

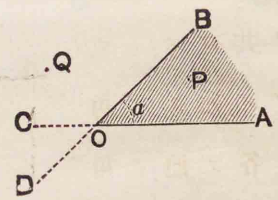
ナルコトヲ證明セヨ。

2.　一直線上ニ四點 A, B, C, D アリ,線分 AB 及ビ CD ノ中點ヲ夫々 M 及ビ N トス。$MN=a,\ BC=b$ ナラバ,線分 AD ノ長サ如何。

第二章 角

11. 角

[定義] 共通ノ一端ヲ有スル二ツノ半直線ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ツ。其一方ノ部分ヲ稱シテ**角**トイヒ,二ツノ半直線ヲソノ角ノ**邊**,共通ノ一端ヲソノ角ノ**頂點**トイフ。平面ノ中ニテ角ニ屬スル部分ヲソノ角ノ**內部**トイヒ,然ラザル部分ヲ**外部**トイフ。



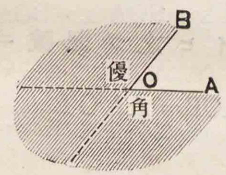
例ヘバ圖ニ於テ二ツノ半直線 OA, OB ハ角ヲ作ル,圖ニ陰影ヲ施シテ其一ツヲ示ス。半直線 OA, OB ハソノ邊,點 O ハソノ頂點ナリ。點 P ハ此角ノ內部ニアリ,點 Q ハ外部ニアリ。

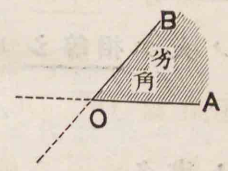
角トイフ語ヲ更ニ廣キ意味ニ用ヒテ,例ヘバ二ツノ線分 OA, OB ノナス角トイフコトアリ。其トキハ,O ヲ共通ノ一端トスル二ツノ半直線 OA, OB ノナス角ノ意味ナリトス。

OA, OB ヲ邊トスル角ノコトヲ OA, OB ノ**夾ム角**又ハソノ**夾角**トモイフ。

角ヲ表スニハ記號∠ヲ用フ。例ヘバ ∠AOB 又ハ ∠BOA ノ如ク頂點ヲ表ス文字ヲ中央ニ入ルルモノトス。或ル場合ニハ略シテ單ニ ∠O トイフコトアリ,又角全體ヲ一ツノ文字ニテアラハシ ∠α 等トイフコトモアリ。

半直線 OA, OB ハ二ツノ角ヲ作リ,ソノ二角ハ頂點及ビ二邊ヲ共有ス。カクノ如キ二角ノ各ヲ他ノ角ノ**共軛角**トイフ。二邊ノ延長ガ角ノ內部ニアルトキハ其角ヲ**優角**トイヒ,外部ニアルトキハ**劣角**トイフ。

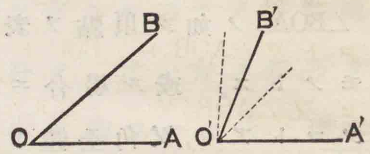




通常單ニ ∠AOB 等トイフトキハ一双ノ共軛角ノ中,劣角ノ方ヲ指スモノトス。若シ優角ヲ指ス必要アルトキハ特ニ優角 AOB ト呼ブベシ。

12. 角ノ大サ

∠A O B及ビ∠A′O′B′ヲ與ヘラレタル二角トス。今前者ヲ變位セシメテ,頂點OヲO′ノ上ニ,邊OAヲ邊O′A′ノ上ニ重ネ,且兩角ノ内部ガ共通ナル部分ヲ有スル樣ニ置クベシ。(公理四,五,六)



其時モシ邊OBガ邊O′B′ト相合スルトキハ,∠AOBト∠A′O′B′トハ合同ナリ,此場合ニハ二角ノ大サ**相等シ**トイヒ之ヲ記號ニテ

$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

ト書ク。

モシOBガ∠A′O′B′ノ内部又ハ外部ニアルトキハ,夫々∠AOBハ∠A′O′B′ヨリモ**小ナリ**又ハ**大ナリ**トイヒ,之ヲ記號ニテ夫々

$$\angle AOB < \angle A'O'B'$$

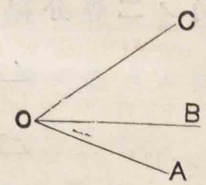
又ハ

$$\angle AOB > \angle A'O'B'$$

ト書ク。

頂點ト一邊トヲ共有シ,且内部ガ共通ノ部分

ヲ有セザル二角ヲ**接角**トイヒ,ソノ中ノ一方ノ角ヲ他ノ角ノ**隣リノ角**トイフ。



例ヘバ圖ニ於テ∠AOBト∠BOCトハ接角ナリ。コノ場合ニ∠AOCノコトヲ∠AOBト∠BOCトノ**和**トイヒ,又∠AOB(又ハ∠BOC)ヲ∠AOCト∠BOC(又ハ∠AOB)トノ**差**トイフ。コノ關係ヲ表スニハ

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC,$$

$$\angle AOC - \angle BOC = \angle AOB,$$

$$\angle AOC - \angle AOB = \angle BOC.$$

ト記ス。和又ハ差ヲ求ムルコトヲ**加フ**又ハ**引ク**(減ズ)ト稱スルコトハ算術及ビ代數學ニ於ケルト同ジ。

例題

1. ∠AOBノ内部ニ於テソノ頂點Oヨリ半直線OMヲ引キ,∠AOM=∠MOBナラシムルトキハ,半直線OMヲ稱シテ∠AOBノ**二等分線**トイフ。角ノ二等分線ハ唯一ツアルノミナルコトヲ證明セヨ。

2. ∠AOB及ビ∠BOCヲ接角ナリトシ,ソノ各角ノ二等分線ヲ夫々ON及ビOMトスルトキハ,

$$\angle AOM=\frac{\angle AOB+\angle AOC}{2},$$

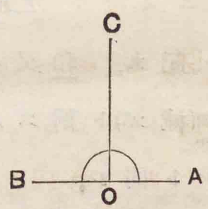
$$\angle NOM=\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}=\frac{\angle AOC}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。 (12頁參照)

13. 平角, 直角

定義 角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアリテ一直線ヲナストキハ其角ヲ**平角**トイフ。

平角ノ半分ヲ**直角**トイフ。



例ヘバ圖ニ於テ,AOBヲ一直線トスレバ∠AOBハ平角ナリ,又

$\angle AOC=\angle COB$

トスレバ∠AOC及ビ∠COBハ何レモ直角ナリ。

此場合ニ直線(又ハ線分)COハ直線ABニ**垂直ナリ**又ハ之ト**直交ス**トイフ。

二ツノ直線ガ互ニ直交スルトキハ,ソノ一方ヲ他ノ方ノ**垂線**トイヒ,ソノ交點(上ノ圖ニテハ點O)ヲ垂線ノ**足**トイフ。

二直線ガ互ニ垂直ナルコトヲ表スニハ記號⊥ヲ用フ。例ヘバ二直線COトABトガ互ニ垂直ナルコトヲCO⊥ABト書ク。又直角ヲ表スニ記號R∠(Right Angleノ略)ヲ用フルコトアリ。

定理 一. 任意ノ二ツノ平角ハ合同ナリ。

何トナレバ,一ツノ平角ヲ變位セシメテ他ノ任意ノ平角ノ上ニ重ネ,前者ノ頂點及ビ二邊ガ夫夫後者ノ頂點及ビ二邊ノ上ニ落チ,且兩角ノ內部ガ相重ナル樣ニ置クコトヲ得。(公理四,五,六)故ニスベテノ平角ハ合同ナリ。

系*1. スベテノ平角ハ相等シ。

何トナレバ合同ナル角ノ大サハ相等シケレバナリ。(第12節)

注意 平角ニ限ラズ一般ニ二角ガ合同ナル事ト其大サノ相等シキ事トハ常ニ相伴フ,依ツテ以下一々之ヲ特記セズ。

系 2. スベテノ直角ハ相等シ。

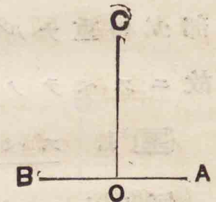
何トナレバ,スベテノ平角ハ相等シキガ故ニ,ソノ半分ヅヽナル直角モ亦相等シカルベキナリ。

*一ツノ定理ヨリ直チニ推定シ得ル事項ヲ其定理ノ系トイフ。

定理 二. 接角ヲナス二角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ,ソノ共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス。

何トナレバ,其二角ノ和ハ平角ニ等シ,従ツテ平角ノ定義ニヨリ其二邊ハ一直線ヲナスベキナリ。

定理 三. 一直線上ノ一點ヲ過リ之ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ル。



今點 O ヲ直線 AB 上ノ一點トスレバ, O ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線ハ平角 AOB ノ二等分線ニ他ナラズ。

故ニ斯クノ如キ直線ハ唯一ツニ限ル。(第12節例題1)

定義 直角ヨリ小ナル角ヲ**鋭角**トイヒ,直角ヨリ大ニシテ平角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ。

二角ノ和ガ平角ニ等シキトキハ各ヲ他ノ**補角**トイヒ,二角ノ和ガ直角ニ等シキトキハ各ヲ他ノ**餘角**トイフ。

例　題

1.* 接角ヲナス二角ノ共通ナラザル二邊ガ一直線ヲナストキハ,ソノ接角ハ互ニ補角ナリ。

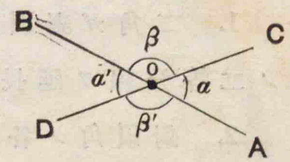
2. 相交ル二直線ニヨリテ作ラルル四ツノ劣角ノ中,一ツガ直角ナルトキハ,殘リノ三ツモ亦各直角ナリ。

3. 接角ヲナス二角ガ互ニ補角ヲナストキハ,各ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ。

14. 對頂角

定義 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ノ延長ニシテ,且兩角共ニ劣角又ハ共ニ優角ナルトキハ,ソノ二角ヲ**對頂角**トイフ。

例ヘバ二ツノ直線 AB, CD ガ O ニ於テ相交ルトキハ,



$\angle$AOC ト $\angle$BOD ハ對頂角,又 $\angle$COB ト $\angle$DOA モ對頂角ナリ。

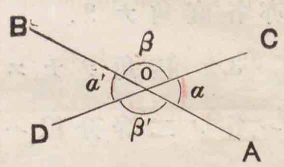
*コヽニ記述セル事項ノ證明ヲ求ムル問題ナリ。詳シク云ヘバ「……ナルコトヲ證明セヨ」トイフベキナレドモ,通常之ヲ省略スルモノトス。

定理 四. 對頂角ハ相等シ。

特述 圖ニ於テ ∠AOC, ∠COB, ∠BOD, ∠DOA ヲ夫々 $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle\alpha'$, $\angle\beta'$ ニテ表ストスレバ $\angle\alpha=\angle\alpha'$ 及ビ $\angle\beta=\angle\beta'$ ナルコトヲ證明セントス。

證明 サテ　$\angle\alpha+\angle\beta=$平角,

$\angle\beta+\angle\alpha'=$平角.



故ニ　$\angle\alpha+\angle\beta=\angle\beta+\angle\alpha'$.

從ツテ　$\angle\alpha=\angle\alpha'$.

同樣ニ　$\angle\beta=\angle\beta'$.

又優角 AOC (即チ $\angle\beta+\angle\alpha'+\angle\beta'$) ト優角 BOD (即チ $\angle\beta'+\angle\alpha+\angle\beta$) トノ相等シキコト等モ之ニヨリテ明カナリ。

例　題

1. 二角ガ對頂角ヲナストキハ,其一方ノ角ノ二等分線ヲ延長スレバ,他ノ角ヲ二等分ス。

2. 對頂角ノ各ノ二等分線ハ一直線ヲナス。

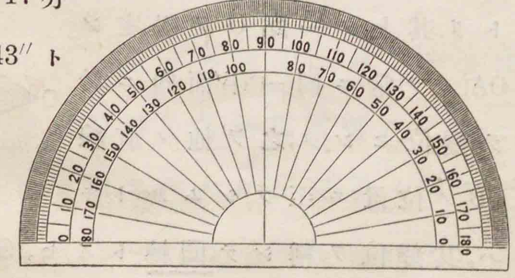
3. 頂點ヲ共有スル二ツノ相等シキ角ヲ∠AOB 及ビ ∠COD トス。モシ AO ト OC トガ一直線ヲナストキハ,此二角ハ對頂角ヲナスカ。

15. 實用上ノ角ノ單位

幾何學ノ理論上ニ於テハ,角ヲ計ルニ直角ヲ單位トスルコト多ケレドモ,實際問題ニ於テハ直角ヨリ小ナル角ヲ取扱フコト多キヲ以テ,更ニ小ナル單位ヲ用フル方ガ便利ナリ。ヨツテ一直角ノ九十分ノ一ヲ**一度**,一度ノ六十分ノ一ヲ**一分**,一分ノ六十分ノ一ヲ**一秒**ト名付ケ,コレラノ補助單位ヲ併用シテ角ノ大サヲ計ルコトトス。コノ測角法ヲ**六十分法**ト云フ。

度,分,秒等ノ單位ノ名ヲ示スニハ,數字ノ右肩ニ夫々 °, ′, ″ ナル記號ヲ附ス。

例ヘバ 57 度 17 分 43 秒ヲ $57°\ 17'\ 43''$ ト記スガ如シ。



角ヲ測ルニハ分度器ヲ用フ。普通用ヒラルルモノハ此圖ノ如キ半圓形ノ薄板ニ度盛ヲナセルモノナリ。

例題

1. 直角ノ四分ノ一ハ幾度幾分ナルカ。

2. 平角ノ$\frac{7}{16}$ヲ六十分法ニテ表セ。

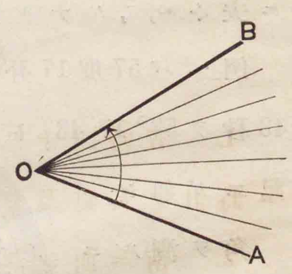
3. 直角ヲ單位トシテ,次ノ各角ヲ言ヒアラハセ。

$30°,\ 60°,\ 270°,\ 18°,\ 75°.$

4. 二時十五分ノトキ,時計ノ兩針ノナス角ヲ度(分秒ヲ用ヒズ)ヲ單位トシテ表セ。

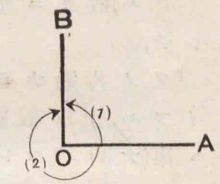
5. 二角ガ夫々$32°17'8''$及ビ$73°54'36''$ナルトキソノ和ノ補角ヲ求メヨ。

16. 回轉



直線又ハ其一部分OAヲトリ其上ノ一點Oヲ固定シOAヲ常ニ同一平面內ニ於テ變位セシメ,之ヲ他ノ直線OBノ位置ニ至ラシムルトキハ,其變位ヲ稱シテ**回轉**トイヒ,Oヲ**回轉ノ中心**ト云フ。

此時角AOBノ大サノコトヲ此**回轉ノ大サ**トイフ。但シコヽニイフ角AOBトハ,二ツノ半直線OA, OBノナス互ニ共軛ナル二角ノ中ニテ,直線ガ回轉ニ際シテソノ角ノ內部ヲ通過セル方ヲ取ルモノトス。



例ヘバ圖ニ於テ,∠AOBヲ直角ナリトシ,半直線OAガ回轉シテOBノ位置ニ至ルトキ,ソノ回轉ノ方向ガ(1)ノ矢ヲ以テ示セル如クナルトキハOAハ90°(一直角)回轉セリトイヒ,モシ其方向ガ(2)ノ如クナルトキハ270°(三直角)回轉セリトイフガ如シ。

例題

1. 五時四十八分ヨリ六時十一分マデノ間ニ時計ノ長針及ビ短針ハ各何程回轉スルカ。

2. 南ニ面シテ立テル人ガ,其左手ノ向キニ$\frac{3}{2}$直角回轉スレバ,何レノ方向ニ面スルカ。更ニ此人ガ,北ニ面センニハ如何ナル回轉ヲナスベキカ。

17. 定理ノ形式

一般ニ一ツノ定理ハ假設及ビ終結ノ二部分ヨリ成ル。例ヘバ定理二ニ於テ

「接角ヲナス二角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ」

トイフハ,假リニ然リト考フル事ナレバ,コレ卽チ**假設**ニシテ,

「ソノ共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス」

トイフハ,上ノ假設ヨリ其當然ノ結論トシテ導キ出サルヽ事ナレバ,コレ卽チ**終結**ナリ。

定理一ノ如キモノニアリテモ之ヲ言ヒ直シテ,

「二角ガ共ニ平角ナラバ,ソノ二角ハ合同ナリ」

トスレバ,矢張假設及ビ終結ノ二部分ヲ指摘スルコトヲ得。

サテ,定理ヲ說明スルタメニハ,特殊ノ記號ヲ用フルコトアリ。(例ヘバ圖ヲ畫キテ之ニA, B, C等ノ文字ヲ附スルガ如シ)ソノ場合ニハ,先ヅ其記號ノ意味ヲ說明スルヲ要ス。例ヘバ定理三ノ證明ニ先ダチテ,「今點Oヲ直線AB上ノ一點トスレバ」ト斷ルガ如シ。定理三ノ如キハ簡單ナルガ故ニ直チニ證明ニ取リ掛リタレドモ,一般ニハ記號ノ意味ヲ說明スルト同時ニソレヲ用ヒテ,假設及ビ終結ヲ陳述シ置クベシ,之ヲ**特述**トイフ。(定理四ヲ見ヨ)

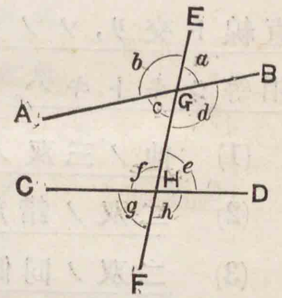
定理ノ證明ヲ記述スルニハ,先ヅ特述ヲ記シテ後,ソノ證明ニ入ルヲ常トス。

例題

定理3,4及ビ22頁例題1,2ノ假設及ビ終結ヲ述ベヨ。

第三章 平行線

18. 同位角,錯角,內角,外角



二直線AB, CD及ビ其交點ヲ過ラザル一直線EFアリ。EFガAB及ビCDト交ル點ヲ,夫々G及ビHトシ,且AトCハEFノ同ジ側ニアリ,從ッテBトDハ他ノ同ジ側ニアリトス。コヽニ於テ

$\angle BGE=a,\ \angle EGA=b,\ \angle AGH=c,\ \angle HGB=d,$

$\angle DHG=e,\ \angle GHC=f,\ \angle CHF=g,\ \angle FHD=h$

ト名付クルトキハ,

a ト e, b ト f, c ト g, d ト h ヲ **同位角**,

c ト e, d ト f ヲ **錯角**,

$c,\ d,\ e,\ f$ ヲ **內角**,

$a,\ b,\ g,\ h$ ヲ **外角**

トイフ。

特ニ　c ト f, d ト e　ヲ**同側內角**,

　　　a ト h, b ト g　ヲ**同側外角**

トイフコトアリ。

[定理] **五.** 二直線ガ其交點ヲ過ラザル一直線ト交リ,ソノナス所ノ一双ノ同位角ガ相等シキトキハ。

(1)　他ノ三双ノ同位角モ各相等シク,

(2)　二双ノ錯角ハ各相等シク,

(3)　二双ノ同側內角ハ各互ニ補角ヲナシ,

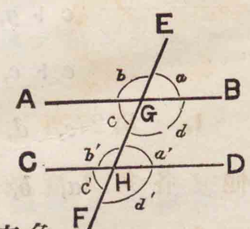
(4)　二双ノ同側外角ハ各互ニ補角ヲナス。

[特述] 二直線 AB, CD ガ其交點ヲ過ラザル一直線 EF ト夫々 G, H ニテ交リタリトシ,コヽニ

$\angle BGE=\angle a$, $\angle EGA=\angle b$, $\angle AGH=\angle c$, $\angle HGB=\angle d$,

$\angle DHG=\angle a'$, $\angle GHC=\angle b'$, $\angle CHF=\angle c'$, $\angle FHD=\angle d'$

トスルトキ,モシ



$\angle a=\angle a'$ ナラバ,

(1)　$\angle b=\angle b'$, $\angle c=\angle c'$, $\angle d=\angle d'$,

(2)　$\angle c=\angle a'$, $\angle d=\angle b'$,

(3)　$\angle c+\angle b'=2$直角, $\angle d+\angle a'=2$直角,

(4)　$\angle a+\angle d'=2$直角, $\angle b+\angle c'=2$直角

ナルコトヲ證明セントス。

[證明] (1) AG ト GB トハ,點 G ノ反對ノ側ニアリテ一直線ヲナス。

故ニ　　$\angle a+\angle b=2$直角.

同様ニ　　$\angle a'+\angle b'=2$直角.

故ニ　　$\angle a+\angle b=\angle a'+\angle b'$.

然ルニ　　$\angle a=\angle a'$,　　(假設)

故ニ　　$\angle b=\angle b'$.

同様ニシテ　　$\angle c=\angle c'$, $\angle d=\angle d'$.

(2), (3), (4) モ容易ニ證明スルコトヲ得。

[系] 一双ノ錯角ガ相等シキトキ,又ハ一双ノ同側內角ガ互ニ補角ヲナストキ,又ハ一双ノ同側外角ガ互ニ補角ヲナストキニモ上ト同様ノ終結ヲ得。

例　題

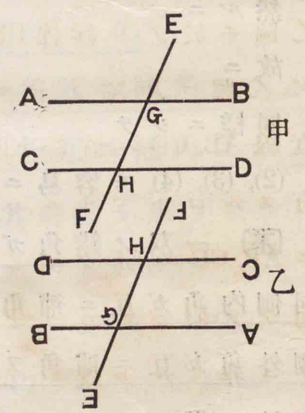
1.　第27頁ノ圖ニ於テ $c=60°$, $e=100°$ ナラバ,他ノ各角ノ度數如何。

2.　一双ノ同位角ガ互ニ補角ヲナストキハ,

四双ノ同位角ハ各互ニ補角ヲナシ,二双ノ錯角ハ各互ニ補角ヲナシ,二双ノ同側内角ハ各相等シク二双ノ同側外角ハ各相等シ。

19. 平行線

[豫備定理] 二直線ガ一直線ト交リテ一双ノ相等シキ同位角ヲ作ルトキハ,前ノ二直線ハ相交ラズ。



[特述] 甲圖ニ於テ, AB, CD ヲ二ツノ直線トシ,一直線 EF ガ AB, CD ト交ル點ヲ夫々 G, H トス。今 ∠BGE=∠DHG ナルトキハ,二直線 AB, CD ハ相交ラザルベシ。

[證明] 甲圖ヲ回轉シテ乙圖ノ如クシ,之ヲ甲圖ノ上ニ持チ來リテ乙圖ノ H, G ガ夫々甲圖ノ G, H ノ上ニ重ナル樣ニ置キタリトセヨ。然ルトキハ乙圖ノ直線 FHGE ハ全ク甲圖ノ EGHF ト合スベク(公理一),

而シテ ∠BGE=∠DHG (假設)

故ニ ∠BGE=∠CHF (定理四)

ナルヲ以テ,乙圖ノ BG ハ甲圖ノ CH ト相重ナル,從ツテ乙圖ノ直線 BGA ハ甲圖ノ CHD ト全部相重ナル(公理一)。同樣ニシテ乙圖ノ直線 DHC ハ甲圖ノ AGB ト相重ナル。

故ニ若シ甲圖ニ於テ直線 AB ト CD トガ直線 EF ノ何レカノ側ニ於テ相交ルトセバ,其交點ハ乙圖ニ於テハ直線 FE ノ前ト反對ノ側ニアルベク,乙圖ヲ甲圖ノ上ニ重ネテ見ルトキハ,結局二直線 AB, CD ハ直線 EF ノ兩側ニ一ツヅヽ交點ヲ有スルコトヽナル,コレ不合理ナリ(公理一)。故ニ AB, CD ハ EF ノ何レノ側ニ於テモ相交ラズ。而シテ假定ニヨリ, EF ハ AB, CD ノ交點ヲ過ルモノニ非ザルガ故ニ, AB, CD ハ EF ノ上ニ於テモ相交ラズ。故ニ AB, CD ハ何所ニ於テモ相交ルコトナシ。

[定義] 同一平面上ニアリテ相交ラザル二直線ヲ**平行線**トイフ。又其二直線ハ**平行ナリ**トイフ。

平行*トイフ語ハ二直線ノ一方又ハ兩方ノ代リニ其一部ナル線分或ハ半直線ヲ取リタル場合ニモ之ヲ用フルコトトス。

依ツテ今證明シタル豫備定理ト定理五トヲ綜合シテ次ノ定理ヲ得。

定理 六. 二直線ガ其交點ヲ過ラザル一直線ト交リ,次ノ條件ノ中何レカ一ツガ成立スルトキハ,前ノ二直線ハ平行ナリ。

(1) 一双ノ同位角ガ相等シキトキ。

(2) 一双ノ錯角ガ相等シキトキ。

(3) 一双ノ同側內角ガ互ニ補角ヲナストキ。

(4) 一双ノ同側外角ガ互ニ補角ヲナストキ。

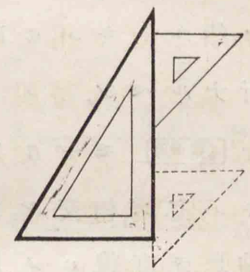
例題

1. 同一ノ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

*AB ト CD トガ平行ナリト云フコトヲ表スニ AB∥CD ナル記號ヲ用フルコトアリ。

2. 二枚ノ三角定規ヲ用ヒテ,平行線ヲ畫ク法ヲ考案セヨ。

3. 二枚ノ三角定規ヲ用ヒテ,與ヘラレタル一直線外ノ一點ヲ過リ,之ニ平行ナル直線ヲ引ク法ヲ考案セヨ。



20. 平行線ニ關スル公理

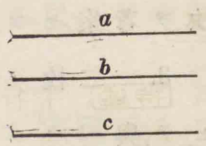
直線上ノ一點ヲ過リテ之ニ平行ナル直線ヲ引キ得ザルコトハ平行線ノ定義ニヨリテ明カナリ。

然レドモ,若シ點ガ直線外ニアルトキハ之ヲ過リテ其直線ニ平行ナル直線ヲ引クコトヲ得(前節ノ例題3),而シテ斯クノ如キ直線ガ唯一ツ限リ引キ得ルコトハ公理トス。

公理 八. 一直線外ノ一點ヲ過リ,之ニ平行ナル直線ハ唯一ツ存在ス。

定理 七. 同一ノ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

特述 a, b, c ヲ三ツノ直線トシ, a ト c 及ビ b ト c ヲ夫々互ニ平行ナリトセヨ,然ルトキハ a ト b トハ互ニ平行ナルベシ。



證明 モシ a ト b トガ互ニ平行ナラザルトキハ必ズ相交ル,ソノ交點ヲPトスベシ。モシ點Pガ直線 c ノ上ニアラザルトキハ,直線外ノ一點ヲ過リ之ニ平行ナル二ツノ直線ヲ引キ得ルコトトナリ,公理八ニ反ス。モシ又點Pガ直線 c 上ニアルトキハ, a 及ビ b ハ c ト相交ルコトトナル,コレ假設ニ反ス。何レニシテモ不都合ナレバ結局交點Pナルモノハ存在スルヲ得ズ。換言スレバ, a ト b トハ相交ルコトナシ,即チ互ニ平行ナリ。

定理 八. 平行ナル二直線ガ一ツノ直線ト交ルトキハ,

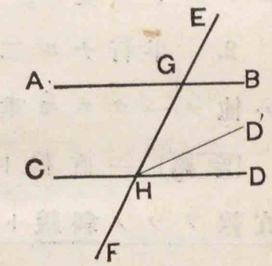
(1) 四双ノ同位角ハ各相等シク,

(2) 二双ノ錯角ハ各相等シク,

(3) 二双ノ同側内角ハ各互ニ補角ヲナシ,

(4) 二双ノ同側外角ハ各互ニ補角ヲナス。

特述 平行ナル二直線AB, CDガ一直線EFト交リタリトシ,ソノ交點ヲ夫々G, Hトス。先ヅ最初ニ $\angle BGE = \angle DHG$ ナルコトヲ證明セントス。



證明 若シコノ二角ガ相等シカラザレバ,點Hヲ過リテ $\angle BGE = \angle D'HG$ ナル如キ直線HD'ヲ引クトキハ, HD' ハ HD トハ相異ナルベシ。而シテ GB ト HD' トハ EF ト交リテ相等シキ同位角ヲ作ルヲ以テ互ニ平行ナリ(定理六)。故ニ結局一點 H ヲ過リテ一直線 AB ニ平行ナル直線ガ二ツ(HD ト HD')アルコトトナル。コレ公理八ニ反ス。故ニ $\angle BGE = \angle DHG$ ナラザル可カラズ。

従ツテ定理五ニヨリ,四双ノ同位角及ビ二双ノ錯角ハ各相等シク,二双ノ同側内角及ビ二双ノ同側外角ハ各互ニ補角ヲナス。

例 題

1. 平行ナル二直線ノ一ツト交ル直線ハ他ノ一ツトモ交ル。

2. 平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ垂直ナリ。

定義 一直線ト交リテ,コレニ垂直ナラザル直線ヲソノ**斜線**ト云フ。

3. 一ツノ直線ノ垂線ト斜線トハ相交ル。

4. 相交ル二直線ニ夫々垂直ナル二直線ハ相交ル。

5. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ一ツノ角ノ二邊ニ夫夫平行ナルトキハ,其二角ハ相等シキカ又ハ互ニ補角ヲナス。

6. 平行ナル二直線 AB, CD ノ間ニアル一點 O ヲ過リ二直線 AD, BC ヲ引ケバ

$$\angle ABO+\angle CDO=\angle BOD \quad ナリ。$$

21. 定理ノ逆

一ツノ假設ト一ツノ終結トヨリ成ル定理ニ於テ,其假設ト終結トヲ入レ換ヘタルモノヲ,其**定理ノ逆**トイフ。

例ヘバ

「A=B ナラバ, C=D ナリ」

トイフ定理アルトキハ,

「C=D ナラバ, A=B ナリ」

ハ其定理ノ逆ナリ。

然レドモ定理ノ假設ハ必ズシモ單一ナル條件ニアラズシテ一ツヨリ多クノ條件ヨリ成ルコトアリ,例ヘバ

「A=B, C=D ナラバ, E=F ナリ」

ノ如シ。此ノ場合ニハ假設中ノ一條件ト終結トヲ入レ換ヘタルモノヲ各モトノ定理ノ逆トイフ。例ヘバ上ノ定理ノ逆ハ二ツアリ,次ノ如シ。

「A=B, E=F ナラバ, C=D ナリ」

「C=D, E=F ナラバ, A=B ナリ」

一般ニ或ル定理ガ眞ナリトモ,ソノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ。ソレガ眞ナリヤ否ヤハ別ニ考究セザル可カラズ。

今マデニ得タル諸定理ニツイテ之ヲ驗スレバ次ノ如シ。

定理一ノ逆ハ「合同ナル角ハ平角ナリ」トナル,其眞ナラザルコト明カナリ。

定理二ノ逆ハ第13節ノ例題1ニシテ眞ナリ。

定理三ノ逆ハ「一直線上ノ一點ヲ過リ唯一ツ限リ存在シ得ル直線ハ垂線ナリ」トナル,此ハ眞ナラズ,何トナレバ斜線ニテモ特殊ノ條件ヲ以テ制限スレバ唯一ツ限リ存在スル如キ場合アレバナリ

定理四ノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ。(學生自ラコノ逆ヲ述ベヨ)

定理五ハ多クノ終結ヲ有ス,之ヲ一ツヅツ取リテ別別ノ定理ニ分チ,其各ノ逆ヲ考フルトキハ皆眞ナルヲ見ルベシ。(學生自ラ之ヲ試ミヨ)

定理六ト定理八トハ各他ノ逆ナリ。

定理七ノ假設ハ二ツノ條件ヨリ成ル,即チ a ト c トガ平行ナルコト及ビ b ト c トガ平行ナルコト是ナリ。今ソノ一ツヲ終結ト交換スレバ

「a ト c トガ平行, a ト b トガ平行ナラバ, b ト c トハ平行ナリ」

トナル。然ルニ此ハ(記號 a, b, c, ノ差違ヲ考ニ入レザレバ)内容ニ於テ矢張定理七自身ニ他ナラズ。故ニ定理七ノ逆ハソレ自身ナリ。

例　題

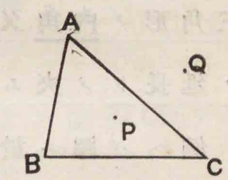
今マデニ學ビタル系及ビ例題ノ二三ニツキテ,ソノ逆ノ眞否ヲ考ヘヨ。

第四章　三　角　形

22. 三角形

定義　相連接セル三ツノ線分ニテ圍マレタル平面ノ部分ヲ**三角形**トイヒ,其三ツノ線分ヲ三角形ノ**邊**,其線分ノ端ヲ三角形ノ**頂點**トイフ。平面ノ中ニテ三角形ニ屬スル部分ヲ其三角形ノ**内部**トイヒ,然ラザル部分ヲ**外部**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ三ツノ線分AB, BC, CAハ一ツノ三角形ヲ作ル。線分AB, BC, CAハ其邊,點A, B, Cハ其頂點ナリ。點Pハ此三角形ノ内部ニアリ,點Qハ外部ニアリ。



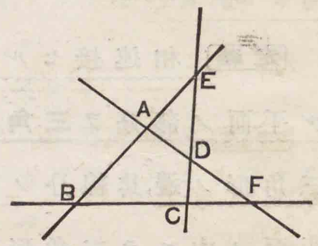
頂點ガA, B, Cナル三角形ノコトヲ△ABCナル記號ニテ表ス。

頂點Aヲ邊BCニ對スル頂點トイヒ,邊BCヲ頂點Aニ對スル邊トイフ。其他ノ頂點及ビ邊ニツイテモ之ニ準ズ。

例題

1. 一平面上ニアル三ツノ直線ハ常ニ三角形ヲ作ルカ。

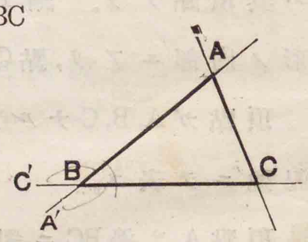
2. 圖ノ如ク四ツノ直線ガ二ツヅツ六ツノ點ニ於テ相交ルトキ,幾個ノ三角形ヲ作ルカ。



23. 內角,外角

定義 一ツノ三角形ノ二邊ノ夾ム劣角ヲ其三角形ノ**內角**又ハ單ニ**角**トイヒ,一邊ト他ノ邊ノ延長トノ夾ム劣角ヲ其三角形ノ**外角**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ ハ $\triangle ABC$ ノ內角ニシテ, $\angle ABC'$, $\angle A'BC$ 等ノ如キハ外角ナリ。



內角ヲ表スニ單ニ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ トイフコトアリ。

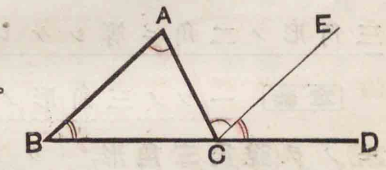
$\angle A$ ヲ邊 BC ニ對スル角トイヒ,邊 BC ヲ $\angle A$ ニ對スル邊トイフ。其他ノ內角及ビ邊ニツイテモ之ニ準ズ。

定理 九. 一ツノ三角形ニ於テ

(1) 一ツノ外角ハ之ニ隣ラザル二ツノ內角ノ和ニ等シ,

(2) 三ツノ內角ノ和ハ二直角ニ等シ。

特述 $\triangle ABC$ ニ於テ,邊 BC ノ延長ヲ CD トス。



然ルトキハ

(1) $\angle ACD = \angle A + \angle B$,

(2) $\angle A + \angle B + \angle C = 2$ 直角

ナルコトヲ證明セントス。

證明 C ヲ過リ,邊 BA ニ平行ナル直線 CE ヲ引クトキハ,

$\angle ACE = \angle A$, (定理八(2))

$\angle ECD = \angle B$. (定理八(1))

故ニ $\angle ACE + \angle ECD = \angle A + \angle B$,

即チ $\angle ACD = \angle A + \angle B$.

從ツテ $\angle A + \angle B + \angle C = \angle ACD + \angle C$

$= \angle BCD = 2$ 直角.

系 1. 三角形ノ外角ハ之ニ隣ラザル何レノ内角ヨリモ大ナリ。

系 2. 一ツノ三角形ハ一ツヨリ多クノ直角又ハ鈍角ヲ其内角トシテ有スルコトナシ。

系 3. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シケレバ,第三角モ亦相等シ。

定義 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ皆鋭角ナルモノヲ**鋭角三角形**,一ツノ角ガ直角ナルモノヲ**直角三角形**,一ツノ角ガ鈍角ナルモノヲ**鈍角三角形**トイフ。

直角三角形ニ於テハ直角ニ對スル邊ヲ特ニ**斜邊**トイフ。

定義 三角形ノ外角ニ隣ラザル他ノ内角ヲ何レモ其外角ノ**内對角**ト云フ。例ヘバ前頁ノ圖ニ於テ ∠A, ∠B ハ何レモ外角 ACD ノ内對角ナリ。

例題

1. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々 48° 30′ 及ビ 90° 20′ ナルトキハ,殘リノ一角如何。

2. 一ノ三角形ノ三ツノ角ノ比カ 3:4:5 ナルトキ,各角ノ度數如何。

3. △ABC ノ内部ニ一點 O ヲトルトキハ,

∠BOC > ∠BAC ナリ。

4. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ垂直ナルトキハ,ソノ二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲナス。

5. 一直線外ノ一點ヲ過リ,此直線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

24. 邊及ビ角ノ大小

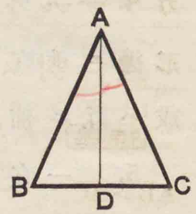
定義 二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**又ハ**等脚三角形**トイヒ,三邊ガ相等シキ三角形ヲ**正三角形**又ハ**等邊三角形**トイフ。

一般ニ一ツノ三角形ニ於テ其任意ノ一邊ヲ指シテ**底邊**又ハ**底**トイフコトアリ,其場合ニハ之ニ對スル頂點ノコトヲ單ニ**頂點**トイヒ,頂點ニ於ケル内角ヲ**頂角**トイヒ,他ノ二角ヲ各**底角**トイフ。又底邊ニ對スル頂點ヨリ底邊マデ引キタル垂線ノ長サヲ其三角形ノ**高サ**トイフ。

二等邊三角形ニ於テハ,單ニ底邊トイフトキハ其等邊ニアラザル邊ヲ指スモノトシ,頂角,底角,高サ等ノ語モ之ニ應ジテ用フルモノトス。

定理 十. 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シ。

特述 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB=AC$ ナルトキハ, $\angle B=\angle C$ ナルコトヲ證明セントス。



證明 $\angle A$ ノ二等分線ヲ引キ之ガ邊 BC ト交ル點ヲ D トス。

今 AD ヲ折リ目トシテ $\triangle ADC$ ヲ $\triangle ADB$ ノ上ニ重ネタリトセヨ。然ルトキハ $\angle CAD=\angle BAD$ ナルヲ以テ直線 AC ハ直線 AB ト合シ,且 $AC=AB$ ナルヲ以テ點 C ハ點 B ト合ス,從ッテ邊 DC ハ邊 DB ト合ス。故ニ $\triangle ADB$ ト $\triangle ADC$ トハ合同ナリ。依ッテ $\angle B=\angle C$ ナリ。

系 1. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分シ,*其三角形ヲ合同ナル二ツノ三角形ニ分ツ。

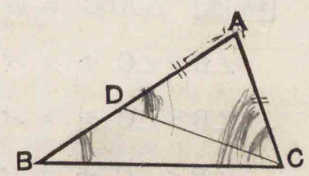
*底邊ニ垂直ニ交リ且底邊ヲ二等分スルコトナリ。一般ニ一ツノ線分ニ垂直ニシテ且コノ線分ヲ二等分スル直線ヲコノ線分ノ**垂直二等分線**ト云フ。

系 2. 正三角形ノ三ツノ角ハ各 60° ナリ。

系 3. 二等邊三角形ノ底角ハ鋭角ニシテ,其外角ハ鈍角ナリ。

定理 十一. 一ツノ三角形ノ二邊ガ相等シカラザルトキハ,大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリ大ナリ。

特述 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ナルトキハ, $\angle C>\angle B$ ナルコトヲ證明セントス。



證明 AB 上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ, D ト C トヲ結ブベシ。然ルトキハ $\triangle ADC$ ニ於テ $AD=AC$ ナルヲ以テ,

$$\angle ACD=\angle ADC. \qquad (1) \quad (定理十)$$

サテ假設ニヨリ $AB>AC$ ナルガ故ニ點 D ハ A ト B トノ間ニアリ,從ッテ線分 DC ハ $\angle C$ ノ内部ニアリ。

故ニ
$$\angle C>\angle ACD. \qquad (2)$$

又 $\angle ADC$ ハ $\triangle DBC$ ノ外角ナルヲ以テ

$\angle ADC > \angle B$. (3)

(1), (2), (3) ヨリ $\angle C > \angle B$ ヲ得。

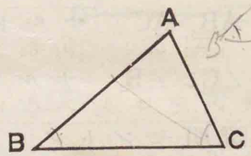
定理 十二. 一ツノ三角形ノ二角ガ相等シキトキハ,之ニ對スル二邊ハ相等シ;二角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリ大ナリ。

特述 $\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle B = \angle C$ ナラバ $AC = AB$,

$\angle B > \angle C$ ナラバ $AC > AB$,

$\angle B < \angle C$ ナラバ $AC < AB$



ナルコトヲ證明セントス。

證明 先ヅ $\angle B = \angle C$ ナリトセンニ,此時モシ $AC > AB$ ナリト考フレバ定理十一ニヨリ $\angle B > \angle C$ トナリ假設ニ反スベク;モシ $AC < AB$ ナリト考フレバ又同定理ニヨリ $\angle B < \angle C$ トナリ矢張假設ニ反ス,故ニ $\angle B = \angle C$ ナリトスレバ是非共 $AC = AB$ ナラザル可カラズ。

次ニ $\angle B > \angle C$ ナリトセンニ,此時モシ $AC = AB$ ナリト考フレバ定理十ニヨリ $\angle B = \angle C$ トナリ

假設ニ反スベク;モシ又 $AC < AB$ ナリト考フレバ定理十一ニヨリ $\angle B < \angle C$ トナリ矢張假設ニ反ス。故ニ $\angle B > \angle C$ ナルトキハ $AC > AB$ ナラザル可カラズ。

同樣ニシテ,$\angle B < \angle C$ ナルトキハ $AC < AB$ ナルコトヲ證明シ得。

系 1. 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ相等シケレバソノ三角形ハ正三角形ナリ。

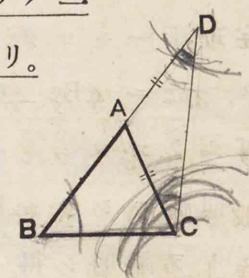
系 2. 三角形ノ一角ガ直角又ハ鈍角ナルトキハ,之ニ對スル邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大ナリ。

系 3. 一直線外ノ一定點ヨリ其直線マデ引キタル線分ノ中ニテ垂線ガ最モ短シ。

定義 一點ヨリ一直線ニ至ル**距離**トハ,其點ト之ヨリ其直線ニ引ケル垂線ノ足トノ間ノ距離ヲ云フ。

系 4. 直線外ノ一定點ヨリ其直線マデ引キタル斜線ノ中ニテ相等シキモノハ唯二ツアルノミ。

定理 十三. 一ツノ三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ。



特述 $\triangle ABC$ ニ於テ

$$AB+AC>BC$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 邊 BA ヲ A ヲ通シテ延長シ,其上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ,D ト C トヲ結ビ付ケヨ。

然ルトキハ $\triangle ADC$ ニ於テ $AC=AD$ ナルガ故ニ

$\angle ADC=\angle ACD.$　(定理十)

然ルニ　$\angle BCD>\angle ACD,$

即チ　$\angle BCD>\angle BDC.$

故ニ　$BD>BC.$　(定理十二)

然ルニ　$BD=AB+AD=AB+AC,$

故ニ　$AB+AC>BC.$

系 一ツノ三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ。

例題

1. 二等邊三角形ノ頂角(又ハ一ツノ底角)ノ度數ヲ知リテ,殘リノ角ノ度數ヲ求ムル公式ヲ作レ。

2. 一角ガ $60°$ ナル二等邊三角形ハ正三角形ナリ。

3. 二等邊三角形ニ於テ,相等シキ二邊ノ長サヲ一定ナラシメ置キ,其頂角ヲ二倍,三倍等(一般ニ任意ノ整數倍)ナラシムルトキハ,其底邊ハモトノ底邊ノ二倍,三倍等ヨリ小ナリ。*

4. 二等邊三角形ノ底邊ノ垂直二等分線ハ其頂角ヲ二等分ス。

5. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB=AC$ ナルトキ,邊 BC 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ $AB>AP$, $AC>AP$ ナリ。モシ點 P ガ邊 BC ノ延長上ニアラバ如何。

6. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A$ ノ二等分線ガ邊 BC ト交ル點ヲ D トスレバ, $AB>BD$, $AC>CD$ ナリ。

7. $\triangle ABC$ ノ内部ニ一點 O ヲ取ルトキハ,

$$BO+OC<BA+AC.$$

8. $\triangle ABC$ ノ内部ニ一點 O ヲ取ルトキハ,

$$AB+BC+CA>OA+OB+OC,$$

---

* 算術ニテ知レル如ク比例トイフ語ヲ用フレバ「二等邊三角形ノ底邊ノ長サハ頂角ノ大サニ比例セズ」トイフコトヲ得。

及ビ $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA).$

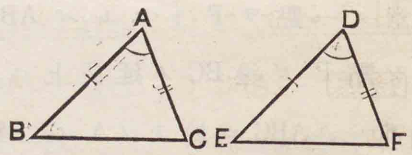
9. 三角形ABCニ於テ角Aガ最大角ナルトキハ,邊AB上ノ點Pト,邊AC上ノ點Qトヲ結ブ線分PQハ邊BCヨリ小ナリ。

25. 三角形ノ合同

定理 **十四.** 一ツノ三角形ノ二邊ト其夾角ガ,他ノ三角形ノ二邊ト其夾角トニ夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。

特述 △ABCト△DEFトニ於テ

AB=DE, AC=DF,



∠A=∠D ナルトキハ,兩三角形ハ合同ナルコトヲ證明セントス。

證明 今△ABCヲ△DEFノ上ニ重ヌルニ,ABヲ之ニ等シキDEニ合セシメ,頂點CトFトハDEノ同ジ側ニ落ツル樣ニセヨ。然ルトキハ∠A=∠Dニシテ且AC=DFナルヲ以テ,ACハDFト合ス。斯クシテ頂點B,Cハ夫々E,Fト相合

スルニヨリ,邊BCハ邊EFト合ス。故ニ兩三角形ハ合同ナリ。

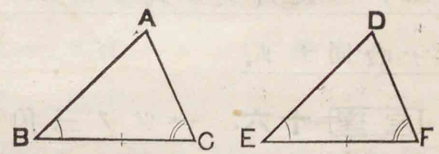
注意 二ツノ圖形ガ合同ナルコトヲ表スニハ記號≡ヲ用フ。例ヘバ本定理ノ終結ハ△ABC≡△DEFト書クコトヲ得。

系 二ツノ直角三角形ニ於テ直角ヲ夾ム二邊ガ夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。

定理 **十五.** 一ツノ三角形ノ二角ト其間ノ邊ガ,他ノ三角形ノ二角ト其間ノ邊トニ夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。

特述 △ABCト△DEFトニ於テ

∠B=∠E, ∠C=∠F,



BC=EF ナルトキハ,△ABC≡△DEFナルコトヲ證明セントス。

證明 今△ABCヲ△DEFノ上ニ重ヌルニ,BCヲ之ニ等シキEFニ合セシメ,頂點AトDトハEFノ同シ側ニ落ツル樣ニセヨ。然ルトキハ∠B=∠E, ∠C=∠FナルヲVY以テ,BA及ビCAハ夫

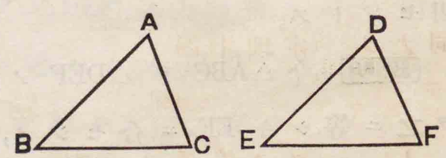
夫 ED 及ビ FD ニ合シ,從ツテ A ハ D ニ合スベシ。故ニ兩三角形ハ合同ナリ。

系 1. 二ツノ三角形ニ於テ二角ト其一ツニ對スル邊トガ夫々相等シキトキハ兩三角形ハ合同ナリ。

系 2. 二ツノ直角三角形ニ於テ一邊ト其端ニ於ケル一鋭角トガ夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。

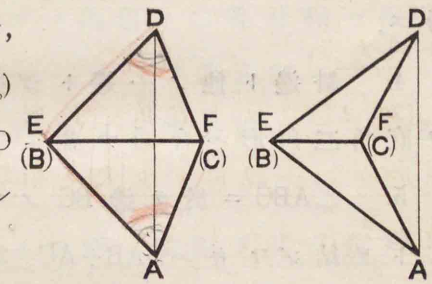
系 3. 二ツノ直角三角形ニ於テ一邊ト之ニ對スル一鋭角トガ夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。

定理 十六. 一ツノ三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ト夫々相等シキトキハ,兩三角形ハ合同ナリ。



特述 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $AB=DE$, $BC=EF$, $CA=FD$ ナルトキハ, $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ ナルコトヲ證明セントス。

證明 今 $\triangle ABC$ ヲ取リテ,ソノ邊 BC ヲ之ニ等シキ EF ニ合セシメ,頂點 A ハ EF ニ對シテ D ト反對ノ側ニ落ツル樣ニ置キ, A ト D トヲ結ブベシ。(圖ニハ二ツノ場合ダケヲ畫ケリ,此他ニ如何ナル場合アルカ,學生自ラ研究セヨ。)



然ルトキハ $\triangle EAD$ ニ於テ $EA=ED$ ナルヲ以テ,

$$\angle EDA=\angle EAD. \quad \text{(定理十)}$$

又 $\triangle FAD$ ニ於テ $FA=FD$ ナルヲ以テ,

$$\angle FDA=\angle FAD. \quad \text{(定理十)}$$

故ニ

$$\angle EDF=\angle EAF.$$

即チ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A=\angle D$ ナルコトトナルヲ以テ,兩三角形ハ合同ナリ。(定理十四)

例　題

1. 一ツノ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線上ノ點ハ其線分ノ兩端ヨリ等距離ニアリ。又此逆モ眞ナリ。

2. 二等邊三角形ノ底邊ノ中點ト頂點トヲ過ル直線ハ底邊ニ垂直ナリ。

3. 同一ノ底邊ヲ共有スル二ツノ二等邊三角形ノ兩頂點ヲ過ル直線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分ス。

4. 斜邊ト他ノ一邊トガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ハ合同ナリ。

5. $\triangle ABC$ ニ於テ邊 BC ノ中點ヲ D トシ, D ト A トヲ結ブトキハ, $AB+AC>2.AD$ ナリ。

定義 三角形ノ一ツノ頂點ト之ニ對スル邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲ**中線**トイフ。例題5ニ於ケル AD ハ卽チ一ツノ中線ナリ。

6. 三角形ノ一頂點ヨリ引ケル中線ガソノ頂角ヲ夾ム二邊トナス二角ノ大サヲ比較セヨ。

7. 三角形ノ二邊ヲ夫々垂直ニ二等分スル二ツノ直線ハ相交ル,而シテソノ交點ハ其三角形ノ三ツノ頂點ヨリ等距離ニアリ。

8. 三角形ノ三邊ヲ夫々垂直ニ二等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル。

定義 例題8ニイフ所ノ交點ヲ其三角形ノ**外心**トイフ。

9. 一ツノ角ノ二等分線上ノ點ハ,ソノ角ノ二邊ヨリ等距離ニアリ。又コノ逆ハ如何。

10. 三角形ノ二ツノ內角ノ二等分線ハ相交ル,而シテソノ交點ハ三邊ヨリ等距離ニアリ。又三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル。

定義 例題10ニイフ所ノ交點ヲ其三角形ノ**內心**トイフ。

11. 三角形ノ一ツノ內角ト之ニ隣ラザル二ツノ外角トヲ夫々二等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル,而シテ其點ハ三邊ヨリ等距離ニアリ。且斯クノ如キ點ハ一ツノ三角形ニ就キテ三ツアリ。

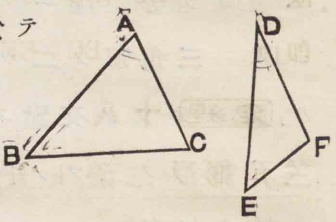
定義 例題11ニイフ所ノ交點ヲ何レモ其三角形ノ**傍心**トイフ。

26. 二邊ガ夫々相等シキ三角形

定理 十七. 一ツノ三角形ノ二邊ガ他ノ

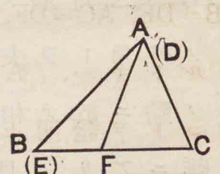
三角形ノ二邊ト夫々相等シク,其夾角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル夾角ヲ有スル方ノ三角形ガ大ナル第三邊ヲ有ス。

特述 △ABC, △DEF ニ於テ AB=DE, AC=DF, ∠A>∠D ナルトキハ, BC>EF ナルコトヲ證明セントス。

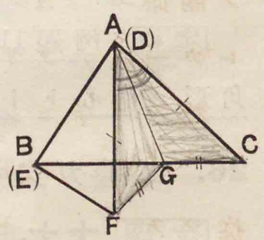


證明 今 △DEF ヲ △ABC ノ上ニ重ヌルニ, DE ヲ之ニ等シキ AB ニ合セシメ, 頂點 F ト C トハ AB ノ同シ側ニ落ツル樣ニセヨ。然ルトキハ ∠D<∠A ナルヲ以テ DF ハ ∠A ノ内部ニアリ。故ニ若シ F ガ丁度 BC ノ上ニ落ツルナラバ(甲圖ノ場合),明カニ BC>EF ナリ。

(甲)



(乙)



モシ F ガ BC 上ニアラザルトキハ(乙圖ノ場合), ∠FAC ノ二等分線ガ BC ト交ル點ヲ G トシ, G ト F トヲ結べ。然ル

トキハ, △AFG, △ACG ニ於テ

AF=AC, AG ハ共通, ∠FAG=∠CAG

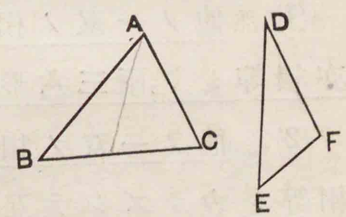
ナルガ故ニ,兩三角形ハ合同ナリ。故ニ GF=GC.

故ニ　BC=BG+GC=BG+GF>BF,

即チ　BC>EF　ナリ。

定理十八. 一ツノ三角形ノ二邊ガ他ノ三角形ノ二邊ト夫々相等シク,其第三邊ガ相等シカラザルトキハ,大ナル第三邊ヲ有スル方ノ三角形ガ之ニ對スル大ナル角ヲ有ス。

特述 △ABC, △DEF ニ於テ AB=DE, AC=DF, BC>EF ナルトキハ, ∠A>∠D ナルコトヲ證明セントス。

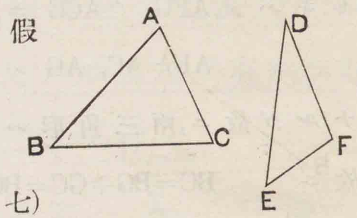


證明 ∠A ト ∠D トノ關係ハ ∠A>∠D, ∠A=∠D, ∠A<∠D ノ中ノ何レカ一ツナラザル可カラズ。

然ルニ今モシ ∠A=∠D ナリトセバ,

△ABC≡△DEF.　(定理十四)

從ツテ　BC=EF



ナラザル可カラズ,コレ假設ニ反ス。

モシ又 $\angle A<\angle D$ トセバ, $BC<EF$ (定理十七)

ナラザル可カラズ,コレモ亦假設ニ反ス。

故ニ是非共 $\angle A>\angle D$ ナラザル可カラズ。

定理 十九. 一ツノ三角形ノ二邊ガ他ノ三角形ノ二邊ト夫々相等シク,且其一双ノ相等シキ邊ニ對スル角ガ相等シキトキハ,次ノ二ツノ場合アリ,而シテ此二ツニ限ル。

(1) 他ノ一双ノ相等シキ邊ニ對スル角モ亦相等シク,兩三角形ハ合同ナリ。

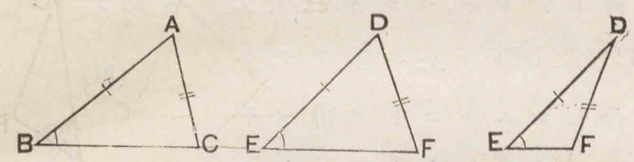
(2) 他ノ一双ノ相等シキ邊ニ對スル角ハ相等シカラズシテ互ニ補角ヲナシ,兩三角形ハ合同ナラズ。

特述 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$AB=DE$, $AC=DF$, $\angle B=\angle E$ ナルトキハ,

$\angle C=\angle F$, $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

ナルカ,然ラザレバ



$\angle C+\angle F=2$直角, $\triangle ABC\not\equiv\triangle DEF$

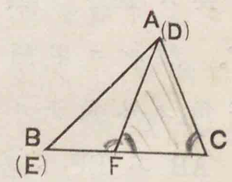
ナルコトヲ證明セントス。

證明 今 $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ヌルニ, DE ヲ之ニ等シキ AB ニ合セシメ,頂點 F ト C トハ AB ノ同シ側ニ落ツル様ニセヨ。然ルトキハ $\angle B=\angle E$ ナルヲ以テ EF ハ BC ノ上ニ落ツ。

モシ F ガ C ト合スレバ,兩三角形ハ合同ニシテ(1)ノ場合トナル。

モシ F ガ C ト合セザレバ, BC 又ハ其延長ノ上ニアルベシ。

(甲)



今 F ガ BC 上ニアリトスレバ,

$\triangle AFC$ ニ於テ $AF=AC$

ナルヲ以テ $\angle ACF=\angle AFC$,

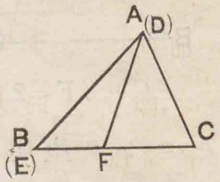
從ツテ $\angle AFB+\angle ACF=\angle AFB+\angle AFC=2$直角.

故ニ $\angle F+\angle C=2$直角.

而シテ此場合ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トハ合同ナラ

ズ。何トナレバ,モシ兩三角形ガ合同ナラバ△ABC ヲ △DEF ノ上ニ重ネテ全ク相合セシムルコトヲ得ベキ筈ナリ。然ルニ今上記ノ如クニ重ヌレバ兩者ハ相重ナラズ。マタ他ノ重ネ方ヲナサントスルニ,トニカク甲圖ニヨリテ見レバ ∠F ハ三角形 AFC ノ外角ナルヲ以テ之ニ隣ラザル內角 C ヨリ大ナリ,故ニ AB ヲ DE ニ合セシメテハ*兩三角形ヲ重ナリ合ハスコト能ハズ。次ニ AB ヲ EF ト合セシメテ兩三角形ヲ重ネ合ハセンニハ $EF=AB=DE$, 從ツテ △DEF ハ二等邊三角形ナルヲ要ス,依ツテ,其底角 F ハ鋭角ナラザル可カラズ。然ルニ甲圖ニ於テ ∠F ハ二等邊三角形ノ底角ノ外角ナルヲ以テ鋭角ナルコト能ハズ,故ニ AB ハ EF ト合スルコトナシ。最後ニ AB ヲ DF ト合セシメントスルニ,モシ $AB=DF$ ナラバ甲圖ニ於テ △ABF ハ二等邊三角形トナリ,從ツ

(甲)

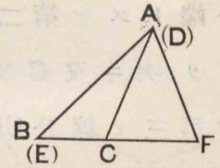


*AB ヲ DE ニ合セシメテ兩三角形ヲ重ヌル仕方ハ甲圖ノ他ニナホ一方ノ三角形ヲ裏向キニシテ重ヌル仕方モアリ。

テ ∠AFB ハ鋭角ナラザル可カラズ。然ルニ ∠AFB ノ鋭角ナラザルコトハ上記ノ如シ,故ニ AB ハ DF ト合スルコトナシ。故ニ結局 △ABC ハ如何ニシテモ △DEF ト相合セシムルコト能ハズ,卽チ合同ナラズ。

F ガ BC ノ延長ノ上ニアル場合(乙圖)モ之ト同樣ニ論ズルコトヲ得。

(乙)



系 二邊及ビ其一方ニ對スル直角又ハ鈍角ガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形又ハ鈍角三角形ハ合同ナリ。 (54頁例題 4 參照)

例題

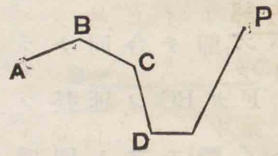
1. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ガ之ニ對スル邊ノ中點ヲ過ルトキハ,其三角形ハ二等邊ナリ。

2. △ABC ニ於テ $AB>AC$ ナルトキ,邊 AB, AC ノ上ニ夫々點 D, E ヲトリ, $BD=CE$ ナラシムレバ, $BE>CD$ ナリ。

3. △ABC ノ邊 AB, AC ノ上ニ夫々點 D, E ヲトリ, $BD=CE$ ナラシムレバ, $DE<BC$ ナリ。

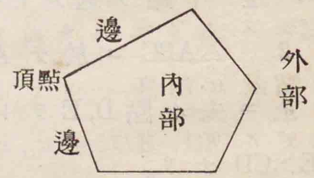
第五章 多角形

27. 多角形



一ツノ線分ABノ端Bヲ一端トスル第二ノ線分BCアリ,次ニ又Cヲ一端トスル第三ノ線分CDアリ,順次ニカクノ如ク其端ニ於テ相接續セル線分ノ一連ヲ稱シテ**折線**トイフ。最後ノ線分ノ末端ヲPトスルトキハ,AトPトヲコノ折線ノ**端**トイフ。

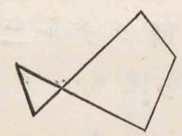
折線ノ兩端ハ必ズシモ相異ナル點ナルコトヲ要セズ。例ヘバ三角形ノ如キハ三ツノ線分ヨリ成ル折線ノ兩端ガ相一致セルモノナリト考フルコトヲ得。

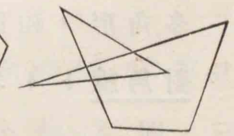


一般ニ一ツノ折線ノ兩端ガ相一致シ,而シテ其折線ガ途中ニ於テ其自身ト相交ラザルトキハ之ニヨリテ平面ガ二ツノ部分ニ分タル。其中ニテ大サノ限ラレタ

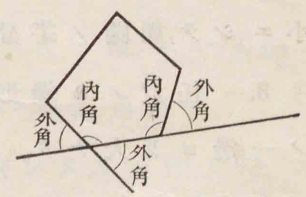
ル部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**多角形**トイヒ,其限界ヲナス折線ヲ多角形ノ**周圍**トイフ。平面ノ中ニテ多角形ニ屬スル部分ヲ其多角形ノ**內部**トイヒ,然ラザル部分ヲ其多角形ノ**外部**トイフ。

途中ニテ其自身ト相交ル折線ハ平面ヲ二ツヨリ多クノ部分ニ分ツ。





多角形ノ周圍ニ屬スル各線分ヲソノ**邊**,邊ノ端ヲ**頂點**トイフ。二ツノ相隣レル邊ノ夾ム共軛角ノ中ニテ多角形ノ內部ヲ含ム方ノ角ヲ其多角形ノ**內角**トイヒ,一邊ト其隣リノ邊ノ延長トノ夾ム劣角ヲ其多角形ノ**外角**トイフ。



一ツノ多角形ニ於テ邊,頂點及ビ內角ハ常ニ同數ダケアリ。其數ガ3, 4, 5, ……, nナルニ從ツテ其多角形ヲ夫々**三角形,四角形,五角形,……,n角形**,又ハ**三邊形,四邊形,五邊形,……,n邊形**トイフ。

180
180

多角形ヲ示スニハ,其頂點ニ附シタル記號ヲ順次ニ並記シテ呼ブ,例ヘバ四角形ABCD,五角形PQRST等ト呼ブベシ。

内角ガ何レモ二直角ヨリ小ナル多角形ヲ**凸多角形**トイヒ,内角ノ中少クモ一ツガ二直角ヨリ大ナルモノヲ**凹多角形**トイフ。

多角形ノ相隣ラザル二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ**對角線**トイフ。

例題

1. 四角形ノ内角ノ和ハ四直角ニ等シ。

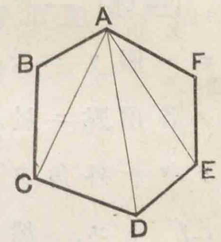
2. 四邊形ノ二ツノ對角線ノ和ハ周圍ヨリ小ニシテ,周圍ノ半分ヨリ大ナリ。

3. 任意ノn邊形ニ於テ$(n-1)$邊ノ和ハ殘リノ一邊ヨリ大ナリ。

4. n角形ノ一ツノ頂點ヨリ幾ツノ對角線ヲ引キ得ルカ。又n角形ノ對角線ノ總數ヲ求ムル公式ヲ作レ。

28. 内角,外角

定理 二十. n角形ノ内角ノ總和ハ$(2n-4)$直角ニ等シ。



特述 ABC……Fヲn角形トス(圖ニハ假リニ六角形ヲ畫ケリ),然ルトキハ

$$\angle A+\angle B+\angle C+\dots\dots+\angle F=(2n-4)\text{直角}$$

ナルコトヲ證明セントス。

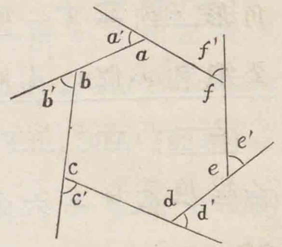
證明 一ツノ頂點Aヨリ對角線AC,AD等ヲ引クトキハ,之ニヨリテn角形ハ$(n-2)$個ノ三角形ABC,ACD等ニ分タル。而シテモトノn角形ノ内角ノ總和ハ卽チコレラノ$(n-2)$個ノ三角形ノ内角ノ總和ニ等シ。然ルニ一ツノ三角形ノ内角ノ和ハ2直角ニ等シキガ故ニ,$(n-2)$個ノ三角形ノ内角ノ總和ハ$2(n-2)$直角卽チ$(2n-4)$直角ニ等シ。之ニ依ッテ本定理ヲ得。

定理 二十一. 凸多角形ノ各頂點ニ於テ一ツヅヽ作リタル外角ノ總和ハ四直角ニ等シ。

[特述] 一ツノ凸 n 角形(圖ニハ假リニ六角形ヲ畫ケリ)ノ各頂點ニ於テ一ツヅヽ作リタル外角ヲ $\angle a'$, $\angle b'$……, $\angle f'$ トス。然ルトキハ

$$\angle a' + \angle b' + \dots\dots + \angle f' = 4\text{直角}$$

ナルコトヲ證明セントス。



[證明] $\angle a'$, $\angle b'$, ……, $\angle f'$ ニ隣ル內角ヲ夫々 $\angle a$, $\angle b$, ……, $\angle f$ トスレバ,

$$\angle a' + \angle a = 2\text{直角},\quad \angle b' + \angle b = 2\text{直角},\quad \dots\dots,\quad \angle f' + \angle f = 2\text{直角}.$$

故ニ $(\angle a' + \angle b' + \dots\dots + \angle f') + (\angle a + \angle b + \dots\dots + \angle f) = 2n\text{直角}.$

然ルニ $\angle a + \angle b + \dots\dots + \angle f = (2n-4)\text{直角}$ (定理二十)

故ニ $\angle a' + \angle b' + \dots\dots + \angle f' = 4\text{直角}.$

例題

1. 定理二十ハ凹多角形ニツイテモ眞ナリ。種々ノ形ノ場合ヲ畫キテ之ヲ確カメヨ。又多

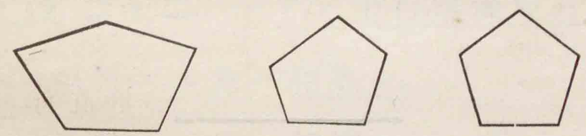
角形ノ內部ニ一點ヲトリ,之ト各頂點トヲ結ビ,全形ヲ n 個ノ三角形ニ分チテ證明セヨ。

2. 凸多角形ハ其內角トシテ三ツヨリ多クノ鋭角ヲ有スルコトナシ。

29. 正多角形

[定義] 多角形ノ邊ガ皆相等シキモノヲ**等邊多角形**トイヒ,內角ガ皆相等シキモノヲ**等角多角形**トイフ。

等邊ニシテ且等角ナル多角形ヲ**正多角形**トイフ。



等邊五角形　等角五角形　正五角形

三角形ノ場合ニハ等邊ナルモノハ必ズ等角,等角ナルモノハ必ズ等邊ナレドモ,一般ノ多角形ニ於テハ必ズシモ然ラズ。

正多角形ハ其邊數ニ從ッテ之ヲ**正三角形**,**正四角形**等ト稱ス。特ニ正四角形ノコトヲ**正方形**トイフ。

例題

1. 等角多角形ハ必ズ凸多角形ナリ。

2. 正 n 角形ノ一ツノ内角ノ大サヲ求メヨ。n ノ値ヲ 4, 5, 6, 8 トシテ夫々其度數ヲ計算セヨ。

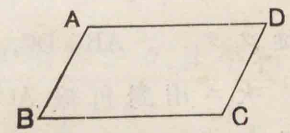
3. 一邊ガ相等シキ二ツノ正 n 角形ハ合同ナリ。

4. $2n$ 角形ガ等角ナルトキハ，其任意ノ一邊ト之ヨリ數ヘテ第 $(n+1)$ 番目ノ邊トハ平行ナリ。

第六章 平行四邊形

30. 平行四邊形

定義 四邊形ノ相對スル二双ノ邊ガ夫々平行ナルモノヲ**平行四邊形**トイフ。



頂點ガ順次ニ A, B, C, D ナル平行四邊形ヲ表スニハ ▱ABCD 又ハ ▱AC, ▱BD 等ノ記號ヲ用フ。

定理 二十二. 一ツノ平行四邊形ニ於テ

(1) 相對スル角ハ相等シ，

(2) 相對スル邊ハ相等シ，

(3) 對角線ハ各他ヲ二等分ス。

特述 略ス。

證明 ▱ABCD ニ於テ

$\angle A+\angle B=2$ 直角, $\angle A+\angle D=2$ 直角.

(定理八)

故ニ $\angle B=\angle D.$

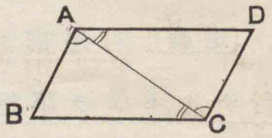
同樣ニシテ　$\angle A=\angle C$
ナルコトモ證明セラル。

次ニ對角線 AC ヲ引ケバ, $\triangle ABC$ ト $\triangle CDA$ トニ於テ

$\angle BAC=\angle DCA$, (定理八)

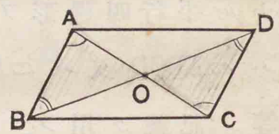
$\angle ACB=\angle CAD$, (定理八)

AC ハ共通.



故ニ　$\triangle ABC\equiv\triangle CDA$. (定理十五)

從ツテ　$AB=DC$, $BC=AD$.



次ニ兩對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスレバ, $\triangle ABO$ ト $\triangle CDO$ トニ於テ, 今證明シタル所ニヨリ $AB=CD$,

又　$\angle BAO=\angle DCO$, $\angle ABO=\angle CDO$. (定理八)

故ニ　$\triangle ABO\equiv\triangle CDO$.

從ツテ　$AO=OC$, $BO=OD$.

系 1. 平行四邊形ノ對角線ハ之ヲ二ツノ合同ナル三角形ニ分ツ。

系 2. 二ツノ平行線ノ中ノ任意ノ一ツノ上ノ各點ト他ノ線トノ距離ハ皆相等シ。

定義 二ツノ平行線ノ**距離**トハ其中ノ任意ノ一ツノ上ノ點ト他ノ線トノ距離ナリ。

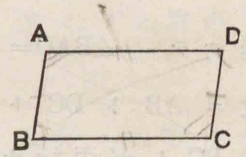
定理 二十三. 四邊形ハ次ノ各場合ニ於テ平行四邊形ナリ。

(1) 二双ノ相對スル角ガ夫々相等シキトキ。

(2) 二双ノ相對スル邊ガ夫々相等シキトキ。

(3) 對角線ガ各他ヲ二等分スルトキ。

(4) 一双ノ相對スル邊ガ相等シク, 且平行ナルトキ。



特述 略ス。

證明 四邊形 ABCD ニ於テ

$\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$ ナルトキハ,

$$\angle A+\angle B=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D).$$

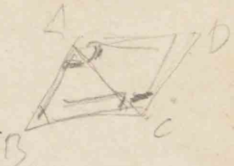
然ルニ　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4$ 直角. (定理二十)

故ニ　$\angle A+\angle B=2$ 直角.

故ニ AD ト BC トハ平行ナリ。 (定理六)

同樣ニシテ AB ト DC トガ平行ナルコトモ證明セラル。故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。

次ニ　$AB=DC$, $AD=BC$

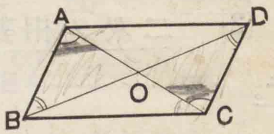


ナルトキ,對角線 AC ヲ引ケバ

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA. \quad (定理十六)$$

從ツテ　$\angle BAC=\angle DCA,\quad \angle ACB=\angle CAD.$

故ニ AB ト DC, AD ト BC ハ夫々平行ニシテ, ABCD ハ平行四邊形ナリ。



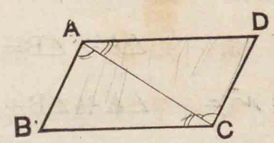
次ニ兩對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トシ,

$AO=OC,\quad BO=OD$　ナリトスレバ,

$$\triangle AOB \equiv \triangle COD. \quad (定理十四)$$

從ツテ　$\angle BAO=\angle DCO.$

故ニ AB ト DC トハ平行ナリ。同樣ニシテ AD ト BC トガ平行ナルコトモ證明セラル。故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。



次ニ AB ト DC トガ平行ニシテ,且 AB=DC ナリトスレバ,對角線 AC ヲ引クトキ,

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA. \quad (定理十四)$$

從ツテ　$\angle ACB=\angle CAD.$

故ニ AD ト BC トハ平行ナリ。故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。

系 1. 等邊ナル四邊形ハ平行四邊形ナリ。

系 2. 等角ナル四邊形(ソノ各角ハ直角ナリ)ハ平行四邊形ナリ。

定義　等邊ナル四邊形ヲ**菱形**トイヒ,等角ナル四邊形ヲ**矩形**又ハ**長方形**トイフ。

菱形ニシテ且矩形ナルモノハ正方形ナリ。

例題

1. 定理二十三ノ系ノ逆ヲ述ベ,ソノ眞否ヲ考ヘヨ。

2. 菱形ノ對角線ハ各他ヲ垂直ニ二等分ス。此逆ハ眞ナルカ。

3. 矩形ノ兩對角線ハ相等シ。

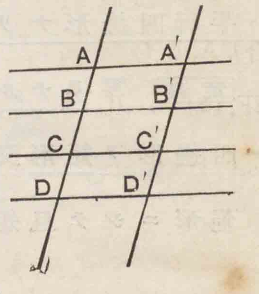
4. 平行四邊形ノ兩對角線ガ相等シケレバ矩形ナリ。

5. 相隣レル二邊ト其夾角トガ夫々相等シキ二ツノ平行四邊形ハ合同ナリ。

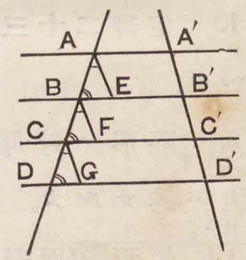
6. 三角形 ABC ノ邊 AB, AC ノ外側ニ正三角形 ABD, ACE ヲ作リ,又 BC ニ關シテ三角形 ABC

ト同側ニ正三角形 BCF ヲ作レバ,四邊形 ADFE ハ平行四邊形ナリ。

(甲)



(乙)



31. 平行線ニ關スル定理

定理 二十四. 若干ノ平行線ガ一ツノ直線ト交リテ之ヨリ相等シキ線分ヲ截リ取ルトキハ,他ノ如何ナル直線ト交ルモ常ニソレヨリ相等シキ線分ヲ截リ取ル。

特述 平行線 AA', BB', CC', DD' ガ二ツノ直線 ABCD 及ビ $A'B'C'D'$ ト交ルトキ, モシ $AB=BC=CD$ ナラバ, $A'B'=B'C'=C'D'$ ナルコトヲ證明セントス。

證明 モシ二直線 ABCD 及ビ $A'B'C'D'$ ガ平行ナルトキハ(甲圖ノ場合),四邊形 $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ ハ何レモ平行四邊形ナルガ故ニ

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ CD=C'D'.$$

然ルニ假設ニヨリ $\quad AB=BC=CD,$

故ニ $\quad A'B'=B'C'=C'D'.$

モシ二直線ガ平行ナラザルトキハ(乙圖ノ場合), A, B, C ヲ過リ直線 $A'B'C'D'$ ニ平行ニ夫々 AE, BF, CG ヲ引キ, ソノ BB', CC', DD' トノ交點ヲ夫々 E, F, G トセヨ。然ルトキハ $AEB'A'$, $BFC'B'$, $CGD'C'$ ハ何レモ平行四邊形ナルガ故ニ

$$AE=A'B',\ BF=B'C',\ CG=C'D'.$$

然ルニ $\quad \triangle ABE \equiv \triangle BCF \equiv \triangle CDG, \qquad$ (定理十五)

從ツテ $\quad AE=BF=CG.$

故ニ $\quad A'B'=B'C'=C'D'.$

系 1. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ過リ他ノ一邊ニ平行ナル直線ハ第三邊ノ中點ヲ過ル。

系 2. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行ニシテ,且其半分ニ等シ。

定義 一双ノ相對スル邊ガ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,ソノ平行ナル各邊ヲ**底邊**又ハ**底**トイフ。底ニアラザル二邊ガ相等シキ梯形ヲ**二等邊梯形**又ハ**等脚梯形**トイフ。

74頁ノ乙圖ニ於ケル $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ ハ何レモ梯形ナリ。

系 3. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點ヨリ等距離ニアリ。又此逆モ眞ナリ。

例 題

1. 一ツノ三角形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビテ得ル三ツノ線分ハ此三角形ヲ四ツノ合同ナル三角形ニ分ツ。

2. $\triangle ABC$ ニ於テ邊 AB ノ中點ヲ D トシ, 又邊 AC 上ニ一點 E ヲトリ $DE=\frac{1}{2}BC$ ナラシムレバ, DE ハ BC ニ平行ナルカ。

3. 任意ノ四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブトキハ一ツノ平行四邊形ヲ得。特ニ最初ノ四邊形ガ矩形ナルトキハ, 斯クシテ得ル平行四邊形ハ菱形ナリ。

4. $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC 上ニ夫々點 D, E ヲトルトキ, BE, CD ガ互ニ二等分セラルヽコトアリヤ。

5. 一ツノ梯形ニ於テ平行ナラザル二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行ニシテ, 且兩底ノ和ノ半分ニ等シ。又兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ如何。

6. 一ツノ平行四邊形及ビ之ト交ラザル一直線アリ, 今其平行四邊形ノ一双ノ相對スル頂點ヨリ其直線ニ引ケル垂線ノ和ハ, 他ノ一双ノ相對スル頂點ヨリ同シ直線ニ引ケル垂線ノ和ニ等シ。

7. 前題ニ於テ, モシ始メノ一直線ガ平行四邊形ト相交ルトキハ如何。

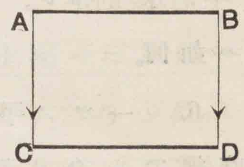
8. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫々點 P, Q ヲ取リ $BP=3AP$, $CQ=3AQ$ ナラシム。BC ノ長サガ $1\,m$ ナラバ, PQ ノ長サハ何程ナルカ。

9. 梯形 $ABCD$ ノ平行ナラザル二邊 AB, DC 上ニ夫々二點 P, Q ヲトリ $AP=3BP$, $DQ=3CQ$ ナラシム。今 $AD=4\,m$, $BC=8\,m$ ナラバ PQ ノ長サ如何。

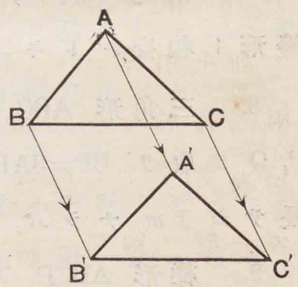
32. 平行移動, 回轉, 裏返シ

一平面上ニ二ツノ相等シキ線分 AB, CD アリ,

其端ヲ夫々結ブ線分 AC, BD ガ相等シク且平行ナルトキハ, ACDB ハ平行四邊形ニシテ AB ト CD トハ平行ナリ。故ニ AB ヲ同一平面上ニテ其方向ヲ變ゼザル樣ニ變位セシメテ, CD ト相合セシムルコトヲ得ベシ。

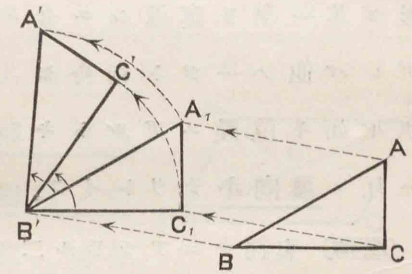


線分ニ限ラズ,一般ニ同一平面上ニアル任意ノ二ツノ合同ナル圖形ニ於テ其相對應スル點ヲ夫々結ブ線分ガ悉ク相等シク且平行ナルトキハ, 其一ツノ圖形ヲ同一平面上ニテ其方向ヲ變ゼザル樣ニ變位セシメテ他ノ一ツト相合セシムルコトヲ得ベシ。斯クノ如キ變位ヲ稱シテ**平行移動**トイフ。



同一平面上ニ二ツノ合同ナル圖形アルトキ平行移動ノミニヨリテ其一ツヲ他ノ一ツト相合セシムルコトハ必ズシモ可能ナラズ。例ヘバ

下ノ圖ニ於テ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ナルトキ, $\triangle ABC$ ヲ平行移動ニヨリテ $\triangle A_1B'C_1$ ノ位置ニ變位セシメタリトスルニ,此時 A_1, C_1 ハ必シモ夫々 A', C' トハ相合セザルベシ。然レドモコヽニ

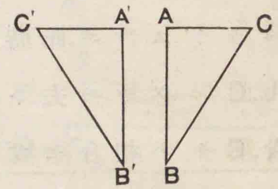


$$\angle A'B'A_1 = \angle C'B'C_1 \qquad (1)$$

ナリ。故ニ B' ヲ中心トシテ $B'A_1$ 及ビ $B'C_1$ ヲ (1) ノ如キ相等シキ角ダケ回轉セシムレバ(第16節), 兩三角形ハ全ク相合ス。斯クノ如キ變位ヲ言ヒ表スタメニ**回轉**トイフ語ヲ直線ノミニ限ラズ一般ノ圖形ニ對シテモ用ヒ,回轉ニ際シテ變位セザル一點(上ノ例ニテハ B') ヲソノ**回轉ノ中心**トイフ。

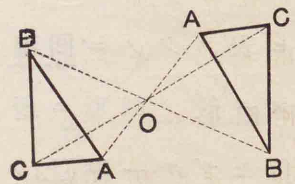
同一平面上ニテ平行移動及ビ回轉ヲ如何程行ヒテモナホ達シ得ザル合同圖形ノ位置アリ。例ヘバ次頁ノ圖ニ於テ, $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ合同ナレドモ之ヲ相合セシムルニハ其何レカ

一方ヲ此平面ヨリ離シテ**裏返シ**ニセザル可カラズ。二ツノ合同ナル圖形ガ其一ツヲ裏返シニセザレバ他ノ一ツト相合セザル如キ位置ニアルトキハ互ニ**裏向キ**ナリトイフ。



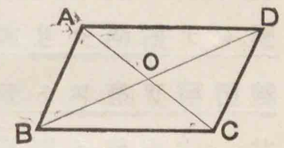
注意 裏向キニアラザル二ツノ合同圖形ヲ相合セシムルニハ平行移動ト回轉トヲ行ヘバヨキコトハ上述ノ如クナレドモ,若シ回轉ノ中心ヲ適當ノ點ニ選ベバ單ニ一ツノ回轉ノミニヨリテ相合セシムルコトモ出來得ベシ。此事ハナホ後ニ論ズベシ。(第45節ノ應用6ヲ見ヨ。)

33. 點對稱,線對稱

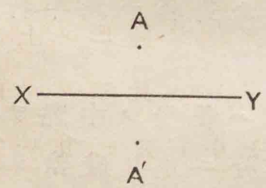


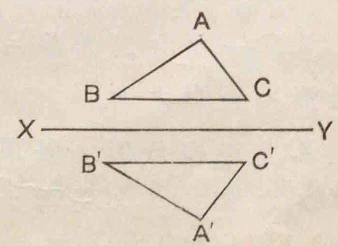
定義 同一平面上ニ二ツノ圖形アリ,此平面上ニ於テ一定點ノ周リニ二直角ダケ一ツノ圖形ヲ回轉シテ他ノ圖形ノ上ニ全ク重ネ合ハスコトヲ得ルトキハ,此二ツノ圖形ハ其一定點ニ關シテ**對稱ナリ**ト云ヒ,其一定點ヲ**對稱ノ中心**ト云フ。

定義 一ツノ圖形アリ,其平面上ニ於テ一定點ノ周リニ二直角ダケ此圖形ヲ回轉シテ原ノ圖形ノ上ニ全ク重ネ合ハスコトヲ得ルトキハ,此圖形ハ其一定點ニ關シテ**對稱ナリ**或ハ**點對稱ヲ有ス**ト云ヒ,其一定點ヲ**對稱ノ中心**ト云フ。(前ノ特別ノ場合ナリ)。上圖ニ於テOハ對稱ノ中心ヲ示ス。

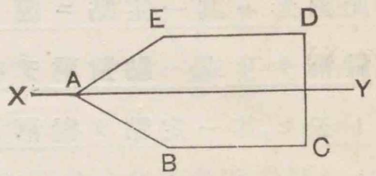


定義 同一平面上ニ二ツノ圖形アリ,此平面上ニ於テ一定直線ヲ折リ目トシテ一ツノ圖形ノ在ル平面ヲ他ノ圖形ノアル平面ノ上ニ折リ重ヌルトキ其兩圖形ガ全ク相重ナルトキハ,其兩圖形ハ此一定直線ニ關シテ**對稱ナリ**ト云ヒ,其一定直線ヲ**對稱ノ軸**ト云フ。





定義 一ツノ圖形アリ,其平面上ニ於テ一定直線ヲ折リ目トシテコノ圖形ヲ折リ重ヌルトキ此圖形ノ二部分ガ全ク相重リ合フトキハ此圖形ハ其一定直線ニ關シテ**對稱ナリ**或ハ**線對稱ヲ有ス**ト云ヒ,其一定直線ヲ**對稱ノ軸**ト云フ。(前ノ特別ノ場合ナリ)



上圖ニ於テ XY ハ對稱ノ軸ヲ示ス。

例題

1. 平行四邊形ハ其對角線ノ交點ニ關シテ對稱ナリ。

2. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ之ヲ二ツノ對稱ナル三角形ニ分ツ。又二等邊三角形ハ其頂角ノ二等分線ニ關シテ對稱ナリ。

3. 一ツノ對角線ニ關シテ對稱ナル平行四邊形ハ菱形ナリ。

4. 正多角形ノ各頂點又ハ各邊ノ中點ヲ過リテ之ヲ二ツノ對稱ナル部分ニ分ツ直線ヲ引クコトヲ得。

5. 直線 XY ノ同ジ側ニアル二點ヲ A, B, 又 XY ニ關シテ A ト對稱ナル點ヲ A′ トシ, BA′ ト XY トノ交點ヲ C トスレバ

$$\angle ACX = \angle BCY.$$

又 XY 上ニ C ノ他ニ一點 P ヲトレバ

$$AC + BC < AP + BP.$$

34. 定理ノ裏及ビ對偶

一ツノ定理

「A=B ナラバ, C=D ナリ」 (1)

トアルトキ,之ニ對シテ

「C=D ナラバ, A=B ナリ」 (2)

ヲ其逆トイフコトハ第21節ニ述ベタリ。

今モシ(1)ノ假設及ビ終結ヲ共ニ否定シテ

「A=B ナラザレバ, C=D ナラズ」 (3)

トスルトキハ,之ヲ(1)ノ**裏**トイフ。

元ノ定理ハ眞ナリトモ其裏ハ必ズシモ眞ナラズ。ソノ眞ナリヤ否ヤハ別ニ考究スルヲ要ス。例ヘバ

「一ツノ四邊形ガ平行四邊形ナラバ,ソノ對角線ハ各他ヲ二等分ス」 (4)

ハ眞ニシテ,ソノ裏

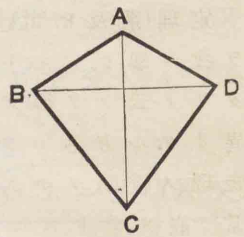
「一ツノ四邊形ガ平行四邊形ナラザレバ,ソノ對角線ハ各他ヲ二等分セズ」

モ亦眞ナリ。之ニ反シテ

「一ツノ四邊形ガ矩形ナラバ,ソノ對角線ハ相等シ」ハ眞ナレドモ,ソノ裏

「一ツノ四邊形ガ矩形ナラザレバ,ソノ對角線ハ相等シカラズ」

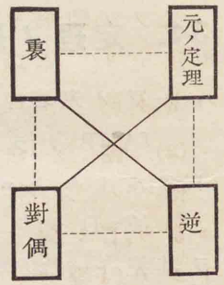
ハ必ズシモ眞ナラズ。



次ニ(1)ノ假設ト終結トヲ交換スルト同時ニ共ニ否定スルトキハ

「C=Dナラザレバ, A=Bナラズ」 (5)

トナル。之ヲ(1)ノ**對偶**トイフ。對偶ハ卽チ逆ノ裏,裏ノ逆ナリ。



一ツノ定理ガ眞ナラバ其對偶モ亦眞ナリ。

例ヘバ(4)ノ對偶ハ

「對角線ガ各他ヲ二等分セザル四邊形ハ平行四邊形ナラズ」ニシテ,此ハ明カニ眞ナリ。

何トナレバ,モシ平行四邊形ナリトセバ,(4)ニヨリテソノ對角線ガ各他ヲ二等分スル筈ナレバナリ。

元ノ定理トソノ逆,裏及ビ對偶ノ關係ハ圖ニ示スガ如シ,圖中點線ハ必ズシモ兩立セザル關係ヲ表シ,太キ線ハ必ズ兩立スル關係ヲ表ス。

例題

「一ツノ四邊形ガ平行四邊形ナラバ,一ツノ對角線ハ之ヲ二ツノ合同ナル三角形ニ分ツ」ノ逆,裏及ビ對偶ヲ述ベ,ソノ眞否ヲ考ヘヨ。

35. 定理ノ證明法

定理(系及ビ問題等ヲモ含ム)ノ證明法ノ主ナル種類ヲ次ニ擧グ。モトヨリ之ヲ以テアラユル種類ヲ盡シタリト云フヲ得ズ,又同一ノ定理ニテモ之ヲ種々ノ相異リタル方法ニテ證明シ得ルコト多シ。サレバ或ル定理ノ證明ヲナスニ際シ强イテ之ヲ何レカノ種類ニ當テ嵌メントスルガ如キコトヲ爲ス可カラズ。

(1) 重置法

二ツノ圖形ヲ重ネ合セテ其合同ナルコトヲ證明スル法ナリ。定理一,十四,十五ハ皆此法ニヨレリ。此法ハ基本的ノ定理ニ多ク使用セラル。

(2) 歸謬(ビウ)法

例ヘバ「AハBナリ」トイフコトヲ證明セントスルニ當リ,若シ假リニ「AハBナラズ」ト考フレバ其結果トシテ何等カノ不合理ガ起リ來ルコトヲ示シ,之ニ依ツテ是非共「AハBナラザル可カラズ」ト斷定スル法ナリ。例ヘバ定理七ノ證明法ノ如キハ之ナリ。

(3) 轉換法

例ヘバ △ABC ニ於テ

AB>AC ナラバ, ∠B<∠C,
AB=AC ナラバ, ∠B=∠C,
AB<AC ナラバ. ∠B>∠C,

トイフ三ツノ定理ノ眞ナルコトヲ知ルトキハ,コレラノ各定理ノ逆ハ皆眞ナリ。(定理十二ノ證明ヲ見ヨ)

一般ニ一群ノ定理アリテ其假設ハ或事項ニ就イテ起リ得ベキ總テノ場合ヲ盡シ,其終結ハ互ニ相容レザ

ル(二ツ以上同時ニ眞ナルヲ得ザル)モノナルトキハ,此等ノ定理ノ逆ハ皆眞ナルコトヲ證明スルヲ得。此論法ヲ轉換法トイフ。定理十四及ビ十七ヨリ定理十八ヲ推論スルガ如キモ此例ナリ。

仔細ニ考フレバ此法ハツマリ歸謬法ヲ繰リ返シテ行フニ過ギザレドモ,斯クノ如キ形式ニ於テ一群ノ定理ノ逆ヲ悉ク證明スル場合ハ屢起リ來ルヲ以テ之ヲ一種別段ノ方法トシテ命名シ置ク方ガ便利ナリ。

(4) **同一法**

例ヘバA,Bナルモノガ各唯一ツ限リ存在スルトキ「AハBナリ」トイフコトガ眞ナラバ,同時ニ「BハAナリ」トイフコトモ眞ナリ。此推理法ヲ同一法トイフ。例ヘバ一ツノ二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ唯一ツアリ,又底邊ヲ垂直ニ二等分スル直線モ唯一ツアリ,故ニ「頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分ス」トイフコトヲ知ルト同時ニ,「底邊ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ頂角ヲ二等分ス」ト推論シ得ルガ如シ。

(5) **既知ノ定理ニ歸着セシムル法**

例ヘバ定理十三ニ於テ, $AB+AC>BC$ ナルコトヲ證明セントスルニ,先ヅ AC ノ長サヲ AD ニ移シ,ツマリ $BD>BC$ ナルコトヲ證明スレバヨシト考フレバ,之ニヨリテ本定理ハ既知ノ定理十二ニ歸着セラレタルコトヲ見ルベシ。斯クノ如ク,今證明セントスル事項ガ眞ナルタメニ如何ナルコトガ成立スレバヨキカヲ考ヘテ,結局既知ノ或ル定理ニ歸着セシムル論法ハ多クノ定理ノ證明ニ於テ屢用ヒラルヽモノナリ。

雜 題

1. A, E, B ハ一直線上ノ三點ニシテ C, F, D ハ直線 AB ニ平行ナル一直線上ノ三點トス,今一點 P ガ此平行線ノ上ニアラザルトキハ優角又ハ劣角 EPF ハ $\angle AEP+\angle CFP$, $\angle AEP\sim\angle CFP$, $\angle AEP+\angle DFP$, $\angle AEP\sim\angle DFP$ ノ何レカニ等シ。

2. 二等邊三角形ノ底邊ノ上ノ一點ヨリ相等シキ邊ニ平行線ヲ引ケバ,コレラニテ作レル平行四邊形ノ周圍ハ一定ノ長サヲ有ス。

3. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ヲ C ヲ通過シテ延長シ其延長上ニ CD ヲ AB ニ等シク取レバ, AD ハ BC ヨリモ大ナリ。

4. 二直線 AO ト BC トノ交點ヲ O トス,今 $\angle AOB$ ノ二等分線ニ垂直ニ O ヲ過リテ引キタル直線ハ $\angle AOC$ ヲ二等分ス。(第21頁例題3ノ逆)

5. 四邊形 ABCD ニ於テ O ヲ任意ノ點トスレバ $OA+OB+OC+OD$ ハ $AC+BD$ ヨリ小ナラズ。

6. 四邊形 ABCD ノ邊ノ中ニテ AD ガ最大ニ

シテ BC ガ最小ナルトキハ, $\angle ABC$ ハ $\angle ADC$ ヨリモ大ニシテ, $\angle BCD$ ハ $\angle BAD$ ヨリモ大ナリ。

7. 一直線外ノ一點ト此直線上ノ各點トヲ結ブ線分ノ中, 大ナル線分ノ足ハ小ナル線分ノ足ヨリモ垂線ノ足ニ遠シ。

8. 三角形 ABC ノ各ノ邊ノ上ニ其外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ畫ケバ, 線分 AD, BE, CF ハ相等シ。　(73頁例題6ト比較セヨ)

9. 同一ノ底邊ヲ有スル二ツノ三角形 ABC, DBC ニ於テ AB, DB, DC, AC ノ中點ヲ夫々 P, Q, R, S トスレバ, PQRS ハ平行四邊形ナリ。

10. 二等邊三角形 ABC ニ於テ A ヲ其頂點トス, AB ヲ B ヲ通過シテ延長シ BF=AB トシ, G ヲ AB ノ中點トセバ $CF=2.CG$.

11. $\triangle ABC$ ノ中線 BE, CF ノ延長上ニ夫々 BE, CF ニ等シク EG, FH ヲ取レバ, G, A, H ハ一直線上ニアリ。

12. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點 D ヲ過リ角 A ノ二等分線ニ垂直ニ引キタル直線ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 X, Y トセバ,

$$(1)\qquad \angle X=\angle Y=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C),$$

$$(2)\qquad \angle BDX=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C),$$

$$(3)\qquad BX=\frac{1}{2}(AB\sim AC),$$

$$(4)\qquad AX=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

13. 有限直線 AB 上ニ一點 C ヲトリ, 線分 AC, CB 上ニ夫々同側ニ正方形 ACDE, CBGF ヲ畫ケバ, AF, DB ハ互ニ垂直ナリ。 モシ正方形ノ代リニ正三角形 ACD, CBF ヲ作ラバ AF, DB ノナス角ノ大サ如何。

14. 二隣邊ガ相等シカラザル平行四邊形ノ四ツノ角ヲ二等分スル直線ハ一ツノ矩形ヲ作ル。

15. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle C=90°$, $\angle B=30°$, AC ノ長サ 20 m ナラバ AB ノ長サハ何米ナルカ。

16. 角 A ノ一邊上ニ二點 B, C ヲ取リ又他ノ邊上ニ二點 D, E ヲ取リ AB=AD, AC=AE ナラシムレバ, 線分 BE, CD ノ交點ト A トヲ過ル直線ハ角 A ヲ二等分ス。

17. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ヲ過ギ

ル,而シテ此點ト各頂點トノ距離ハ夫々各中線ノ長サノ三分ノ二ニ等シ。

定義 三角形ノ三ツノ中線ノ交點ヲ其三角形ノ**重心**ト云フ。

18. 三角形ノ大ナル邊ニ引ケル中線ハ,小ナル邊ニ引ケル中線ヨリモ小ナリ。

19. 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ引ケル三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ過ギル。

定義 此點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。

20. △ABC ノ垂心ヲ H トスレバ △HBC ノ垂心ハ A ナリ。

21. 平行四邊形 ABCD ノ對邊 BC, AD ノ中點ヲ夫々 F, E トスレバ BE, DF ハ AC ヲ三等分ス。

22. 平行四邊形 ABCD ノ邊 CD, AD ノ中點ヲ夫々 F, E トスレバ BE, BF ハ AC ヲ三等分ス。

23. 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊ニ至ル距離ノ和ハ一定ナリ。

又ソノ點ヲ底邊ノ延長上ニトルトキハ如何

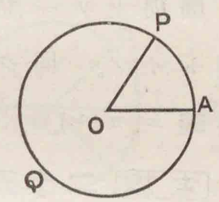
第三篇

圓

第一章 基本性質

36. 圓周, 圓

一ツノ線分 OA ヲ取リ,其一端 O ヲ固定シ置キテコノ線分ヲ一平面内ニテ一回轉セシムルトキハ,他ノ端 A ハ一ツノ線ヲ畫クベシ。其線ハ直線ニ非ズ,何トナレバ其線上ノ任意ノ點 P トOトノ距離ハ常ニ一定ニシテ OA ニ等シ,然ルニ直線ニ於テハソノ線外ノ一點ヨリ線上ノ一點ニ至ル距離ハ二ツヨリ多ク相等シキコトアリ得ザル筈ナレバナリ。(定理十二系4) 故ニ A ノ畫ク線ハ曲線ナリ。此曲線ヲ名付ケテ**圓周**トイヒ,點 O ヲソノ**中心**トイフ。



一圓周ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ツ。其中ニテ大サノ限ラレタル方ノ部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**圓**トイヒ,其圓周ノ中心ヲ**圓ノ中心**トイフ。

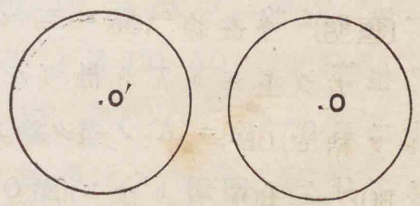
平面ノ中ニテ圓ニ屬スル部分ヲソノ圓ノ**內部**トイヒ,然ラザル部分ヲ**外部**トイフ。

圓ヲ表スニハ圓周上ニアル若干ノ點ニ附シタル記號ヲ並記スルカ,又ハ中心ニ附シタル記號ヲ以テスベシ。例ヘバ圓周上ノ三點 A, P, Q ヲトリテ圓APQ,又ハ中心 O ヲトリテ圓 O トイフガ如シ。

圓周上ノ一點ト中心トヲ結ブ線分ヲ圓ノ**半徑**トイフ。同ジ圓ノ半徑ハスベテ相等シ(圓ノ定義ニヨル)。

定理 二十五. 相等シキ半徑ヲ有スル二ツノ圓ハ合同ナリ。

特述 圓 O, 圓 O' ノ半徑ヲ相等シトス,然ルトキハ圓 O ト圓 O' ハ合同ナリ。

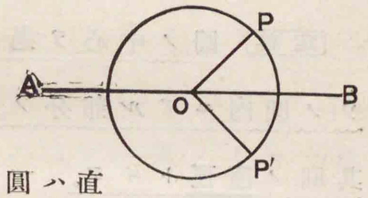


證明 中心 O' ガ中心 O ニ重ナル樣ニ圓 O' ヲ圓 O ノ上ニ置クトキハ,圓 O' ノ周上ノ各點ハ圓 O ノ周上ニ在ルベシ。何トナレバ若シ然ラザレバ兩圓ノ半徑ハ等シキコトヲ得ズシテ假設ニ反スレバナリ。同樣ニ圓 O ノ周上ノ各點モ亦圓 O' ノ周上ニ在リ。

故ニ兩圓周ハ全ク相重ル,從ツテ兩圓モ亦相重ル。

故ニ圓 O ト圓 O' ハ合同ナリ。

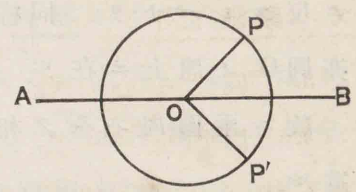
定理 二十六. 圓ハ其中心ヲ過ル直線ニ關シテ對稱ナリ。



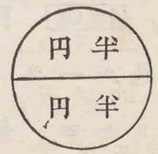
特述 圓 O ノ中心ヲ過ル一ツノ直線ヲ AOB トセヨ。然ルトキハ此圓ハ直線 AOB ニ關シテ對稱ナルコトヲ證明セントス。

證明 今直線 AOB ニヨリテ分タレタル圓周ノ一方ノ上ニアル任意ノ一點ヲ P トシ, O ト P トヲ結ビ, OB ニ對シテ P ト反對ノ側ニ $\angle BOP' = \angle BOP$ ナル樣ニ直線 OP' ヲ引キ,圓周ト交ル點ヲ P' トセヨ。然ルトキハ OP, OP' ハ共ニ圓 O ノ半徑ナルガ故ニ相等シ。故ニ直線 AOB ヲ折リ目トシテ圓周ノ一方ノ部分ヲ他ノ方ノ上

ニ重ヌルトキハ,PハP′ト相合スベシ。斯クノ如クシテ圓周上ノ何レノ點ヲトルモ之ヲ上記ノ如ク折リ返ストキハ常ニ圓周上ノ他ノ部分ノ何レカノ點ト相合ス。故ニ此圓周ハ直線AOBニ關シテ對稱ナリ。從ツテ此圓周ニヨリテ圍マルヽ圓モ亦直線AOBニ關シテ對稱ナリ。



定義 圓ノ中心ヲ過ル直線ノ中ツノ圓内ニアル部分ノミヲ指シテ其圓ノ**直徑**トイフ。一ツノ圓ノ直徑ハ半徑ノ二倍ニシテ,皆相等シ。



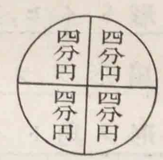
一ツノ直徑ニヨリテ分タレタル圓ノ一部分ヲ**半圓**トイフ。

例題

1. 同ジ或ハ相等シキ圓ノ半圓ハ合同ナリ。

2. 一ツノ圓ニ於テ互ニ垂直ナル二ツノ直徑ハ其圓ヲ合同ナル四ツノ部分ニ分ツ。

定義 其一ツノ部分ヲ**四分圓**又ハ**象限**トイフ。



3. 圓ノ中心ハ唯一ツニ限ル。

4. 圓周上ノ一點ト一ツノ直徑ノ兩端トヲ夫々結ブ二ツノ線分ハ互ニ垂直ナリ。

(76頁系3ノ逆)

37. 弧, 扇形

定義 圓周ノ一部分ノミヲ考フルトキハ之ヲ**弧**トイフ。

同ジ或ハ相等シキ圓ノ二ツノ弧ノ大サヲ比較スルニハ,線分ノ大サヲ比較スル如クニ,之ヲ重ネ合ハセテ見ルコトヲ得。

一ツノ圓周ヲ二ツノ弧ニ分チタルトキハ,ソノ二ツノ弧ヲ互ニ**共軛**ナリトイヒ,其二ツガ相等シカラザルトキハ大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**トイフ。

一ツノ圓ノ二ツノ半徑ハ其圓ヲ二ツノ部分ニ分ツ。其中ノ一方ノミヲ考フルトキハ之ヲ

扇形トイヒ,其二ツノ半徑ノ夾ム共軛角ノ中ニテ扇形ヲソノ内部ニ有スル方ヲ**扇形ノ角**トイフ。

半圓及ビ四分圓ハ扇形ノ角ガ夫々二直角及ビ一直角ナル特別ノ場合ナリ。

例題

1. 同ジ又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ角ヲ有スル扇形ハ合同ナリ。

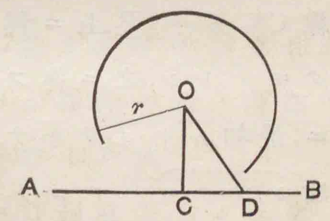
2. 二ツノ扇形ノ半徑ガ相等シク其夾角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル角ヲ有スル扇形ノ弧ガ,小ナル角ヲ有スル扇形ノ弧ヨリモ大ナリ。

3. 一ツノ圓ニ於ケル扇形ノ角ヲ二倍,三倍等ニスレバ,其扇形ニ屬スル弧モ亦二倍,三倍等ニナル。逆ニ扇形ニ屬スル弧ヲ二倍,三倍等ニスレバ,ソノ扇形ノ角モ亦二倍,三倍等ニナル。

第二章 圓ト直線

38. 割線,切線

定理 二十七. 圓ノ中心ヨリ一ツノ直線ニ至ル距離ガ其圓ノ半徑ヨリ大ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナルカニ從ツテ,其直線ハ其圓周ト共通ナル點ヲ有セザルカ,或ハ之ト唯一點ヲ共有スルカ,或ハ之ト二點ヲ共有ス。

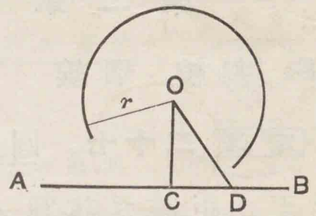


特述 圓Oノ中心ヨリ直線ABニ垂線OCヲ引キタリトシ,又此圓ノ半徑ヲrトス。然ルトキハ,直線ABト圓Oノ周圍トハ,$OC>r$ ナラバ共通點ヲ有セズ,$OC=r$ ナラバ唯一點ヲ共有シ,$OC<r$ ナラバ二點ヲ共有スルコトヲ證明セントス。

證明 先ヅ $OC>r$ ナルトキハ,點OトAB上ノ任意ノ一點Dトヲ結ベバ常ニ $OD>OC>r$,

故ニDハ圓Oノ周上ニアラズ。故ニ直線ABハ圓周ト出會フコトナシ。

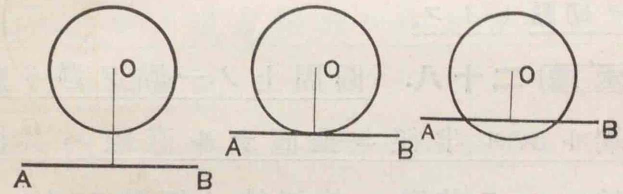
次ニ $OC=r$ ナルトキハ,點Cハ明カニ圓Oノ周上ニアリ。然レドモ



AB上ニCヨリ他ノ點ヲ取レバ常ニ圓Oノ外部ニアルコトハ上ノ場合ト同樣ニ證明セラル。故ニABハ圓Oト唯一點Cヲ共有ス。

次ニ $OC<r$ ナリトセヨ。今一點Dガ最初ニ點Cト相合セル位置ニアリ,之ヨリ發シテ半直線CA又ハCB上ニ變位シ限リナク遠方マデ行クモノトシ,之ニ伴フ線分ODノ長サヲ考フルニ,最初ハ r ヨリ小ナレドモ次第ニソノ大サヲ增シ,ツイニハ r ヨリ大ナルニ至ルベシ。故ニ其途中ニテ $OD=r$ ナル位置ガ一ツアルベク,其位置ニ於ケル點Dハ圓Oノ周上ニアリ,其他ノ位置ニ於テハ圓Oノ周上ニアラズ。而シテ斯クノ如キ位置ハ半直線CA及ビCB上ニ各一ツヅヽアルヲ以テ,結局直線ABハ圓Oト二點ダケヲ共有ス。

系 圓周ト直線トノ位置ニ就キテハ次ノ三ツノ場合アリ。



(1) 直線ト圓周トハ一點ヲモ共有セズ,直線ハ全部圓ノ外部ニアリ。

(2) 直線ト圓周トハ唯一點ヲ共有ス,直線中ソノ一點ヲ除ク他ノ部分ハ圓ノ外部ニアリ。

(3) 直線ト圓周トハ二點ヲ共有ス,而シテ直線中ソノ二點ヲ兩端トスル線分ハ圓ノ內部ニアリ,其他ノ部分ハ圓ノ外部ニアリ。

圓ノ中心ト直線トノ間ノ距離ハ(1)ニ於テハ圓ノ半徑ヨリ大ナリ,(2)ニ於テハ半徑ニ等シ,(3)ニ於テハ半徑ヨリ小ナリ。

定義 圓周ト直線トガ二點ヲ共有スルトキハ兩者ハ**相交ル**トイヒ,其直線ヲ其圓ノ**割線**トイフ。

圓周ト直線トガ唯一點ヲ共有スルトキハ兩者ハ**相切ス**トイヒ,其直線ヲ其圓ノ**切線**,マタ其點ヲ**切點**トイフ。

定理 二十八. 圓周上ノ一點ヲ過リ此點ヲ端トスル半徑ニ垂直ナル直線ハ其圓ノ切線ニシテ,其點ハ其切線ノ切點ナリ。

證明 略ス。(學生自ラ之ヲ試ミヨ)

例題

1. 圓ト直線トハ三點ニ於テ交ルコトナシ。
2. 圓周上ノ一點ヲ過ル切線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。
3. 圓周上ノ一點ヲ過リ其點ニ引キタル半徑ニ垂直ナラザル直線ハ割線ナリ。
4. 切點ヲ過ギリ切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心ヲ過ル。

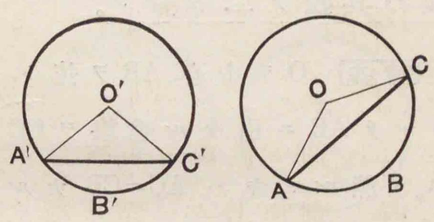
39. 弦

定義 同一圓周上ニアル二點ヲ結ブ線分ヲソノ圓ノ**弦**トイフ。

定理 二十九. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,

(1) 二ツノ弧ガ相等シキトキハ,之ニ對スル弦モ相等シ。

(2) 二ツノ劣弧ガ相等シカラザルトキハ,大ナル弧ニ對スル弦ガ小ナル弧ニ對スル弦ヨリモ大ナリ。



特述 弧 ABC ト弧 $A'B'C'$ トハ同ジ圓又ハ相等シキ圓ノ二ツノ弧ナリトス。今此兩弧ガ相等シキトキハ,之ニ對スル弦 AC 及ビ $A'C'$ ハ相等シク,又兩弧ガ共ニ劣弧ニシテ且 ABC ガ $A'B'C'$ ヨリ大ナルトキハ,弦 AC ハ $A'C'$ ヨリモ大ナルコトヲ證明セントス。

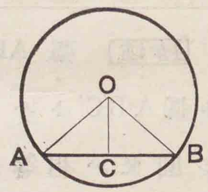
證明 弧 ABC 及ビ $A'B'C'$ ノ兩端ヲ夫々其圓ノ中心ニ結ビ,二ツノ扇形 OAC 及ビ $O'A'C'$ ヲ作ルトキハ,其扇形ノ角ノ大小ハ弧 ABC 及ビ $A'B'C'$ ノ大小ニ從フ。然ルニ $\triangle OAC$ 及ビ $\triangle O'A'C'$ ニ於テ

$$OA=OC=O'A'=O'C'$$

ナルヲ以テ邊 AC 及ビ $A'C'$ ノ大小ハ $\angle AOC$ 及ビ $\angle A'O'C'$ ノ大小ニ従フ。故ニ結局弦 AC, $A'C'$ ノ大小ハ弧 ABC, $A'B'C'$ ノ大小ニ依ツテ定マル.

系 本定理ノ逆モ亦眞ナリ。

定理 三十. 圓ノ中心ヨリ弦ニ引ケル垂線ハ其弦ヲ二等分ス。



特述 O ヲ中心, AB ヲ弦トシ, O ヨリ AB ニ引ケル垂線ヲ OC トス。然ルトキハ $AC=CB$ ナルコトヲ證明セントス。

證明 $\triangle OAC\equiv\triangle OBC$. (學生自ラ之ヲ證明セヨ)。

故ニ　　　$AC=CB$.

系 1. 弦ノ中點ト圓ノ中心トヲ結ブ直線ハ其弦ニ垂直ナリ。

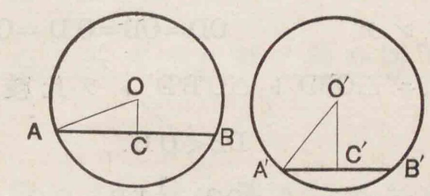
系 2. 弦ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ圓ノ中心ヲ過ル。

系 3. 圓ノ中心ト弦ノ中點トヲ過ル直線ハ其弦ニ對スル共軛弧ノ各ヲ二等分ス。

定理 三十一. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,

(1) 相等シキ弦ハ中心ヨリ相等シキ距離ニアリ、

(2) 相等シカラザル弦ノ中,大ナル弦ハ小ナル弦ヨリモ中心ニ近シ。



特述 AB, $A'B'$ ヲ相等シキ圓(又ハ同ジ圓)ノ二ツノ弦トシ,中心 O, O' ヨリ之ニ引ケル垂線ヲ夫々 OC, $O'C'$ トス。然ルトキハ,

(1)　$AB=A'B'$ ナラバ $OC=O'C'$,

(2)　$AB>A'B'$ ナラバ $OC<O'C'$

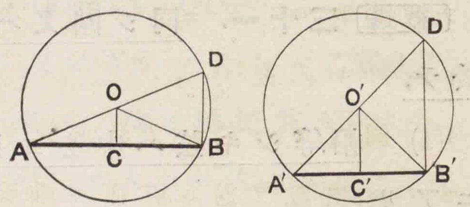
ナルコトヲ證明セントス。

證明 $AB=A'B'$ ナルトキハ $AC=A'C'$. (定理三十)

故ニ　$\triangle OAC\equiv\triangle O'A'C'$. 従ツテ $OC=O'C'$.

次ニ $AB>A'B'$ ナルトキハ半徑 AO, $A'O'$ ヲ引キ此等ノ延長ガ圓周ト交ル點ヲ夫々 D, D' トシ

DB, D′B′, OB, O′B′ ヲ引キ，△OAB ト △O′A′B′ トヲ比較スルニ，



$$OA = OB = O'A' = O'B', \quad \text{而シテ} \ AB > A'B'.$$

故ニ $\angle AOB > \angle A'O'B'$.

從ツテ $\angle DOB < \angle D'O'B'$.

而シテ $OD = OB = O'D' = O'B'$.

故ニ △OBD ト △O′B′D′ トヲ比較スルコトニ依リテ

$$DB < D'B'.$$

然ルニ $OC = \frac{1}{2}DB, \quad O'C' = \frac{1}{2}D'B'$.

依ツテ $OC < O'C'$.

[系] 此定理ノ逆モ亦眞ナリ。

例題

1. 圓ノ中心以外ノ點ニ於テ相交ル三ツノ弦ハ互ニ他ヲ二等分スルコトナシ。

2. 一ツノ圓ノ平行ナル弦ノ中點ハ一ツノ直徑ノ上ニアリ。

3. 二ツノ平行ナル弦ハ圓周ヨリ相等シキ弧ヲ截リ取ル。又一ツノ弦ト之ニ平行ナル切線トニツキテ考ヘヨ。

4. 圓內ノ一定點ヲ過ル弦ノ中ニテ最小ナルモノハ，其點ヲ過ル直徑ニ垂直ニシテ，且之ニヨリテ二等分セラル。

5. 一ツノ圓ニ於ケル相等シキ長サノ弦ハスベテ他ノ一ツノ圓ニ切ス。

[定義] 同一ノ中心ヲ共有スル圓ヲ**同心圓**トイフ。

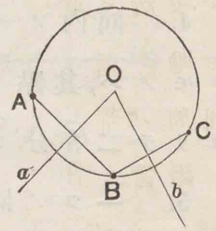
6. 二ツノ同心圓アリ，小ナル圓ニ切スル大ナル圓ノ弦ノ長サハ一定ナリ。

7. 任意ノ二點ヲ過ル圓周ハ無數ニ多クアリ，ソノ中心ハスベテ同一直線上ニアリ。

40. 三點ヲ過ル圓

[定理] 三十二. 同一直線上ニアラザル任意ノ三點ヲ過ル圓周ハ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル。

特述 A, B, C ヲ一直線上ニアラザル三點トス。然ルトキハ此三點ヲ過ル圓周ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證明セントス。



證明 若シ此三點ヲ過ル圓周アリトセバ,其中心ハ弦 AB ヲ垂直ニ二等分スル直線 a ノ上ニアルベシ。

同理ニヨリ,其中心ハマタ弦 BC ヲ垂直ニ二等分スル直線 b ノ上ニモアルベシ。故ニ其中心ハ a ト b トノ交點ナラザル可カラズ。

然ルニ假定ニヨリ AB ト BC トハ一直線ヲナサヾルガ故ニ,ソノ各ニ垂直ナル a ト b トハ平行ナラズ。故ニ a ト b トノ交點ハ實際ニ存在ス,コレヲ O トスレバ

$$OA=OB=OC$$

ナリ。(第54頁例題 7)

故ニ O ヲ中心トシ, OA (又ハ OB, 又ハ OC) ヲ半徑トスル圓周ヲ考フレバ,コレ卽チ三點 A, B, C ヲ過ル圓周ナリ。

上ノ推理ニヨリテ明カナル如ク,求ムル圓周ノ中心 O ハ a ト b トノ交點ナラザル可カラザルガ故ニ唯一ツニ限リ,從ツテソノ半徑ノ長サモ唯一通リニ限ラル。故ニ三點 A, B, C ヲ過ル圓周ハ唯一ツニ限ル。

附言. 此定理ヲ換言シテ「同一直線上ニアラザル三點ハ一ツノ圓周ヲ決定ス」トモイフ。

例題

1. 一點ヨリ圓周上ノ二ツヨリ多クノ點マデノ距離ガ相等シケレバ,其點ハソノ圓ノ中心ナリ。

2. 同一直線上ニアル三點ヲ過ル圓周ハ存在セズ。

第三章 二ツノ圓

41. 二ツノ圓ノ共有點

前節ノ定理三十二ヨリ直ニ次ノ事ヲ推知スルコトヲ得。

二ツノ圓*ハ全ク相合スルニ非ザレバ二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトナシ。

故ニ全ク相合セザル二ツノ圓ノ共有點ハ多クトモ二個ナリ。之ニツキナホ詳シク考フルタメニ先ヅ次ノ定義ヲ設ク。

定義 二ツノ圓ノ中心ヲ兩方共過ル直線ヲ兩圓ノ**中心線**トイフ。

一ツノ圓ハソノ中心ヲ過ル任意ノ直線ニ關シテ對稱ナルガ故ニ次ノ定理アリ。

定理 三十三. 二ツノ圓ハソノ中心線ニ關シテ對稱ナリ。

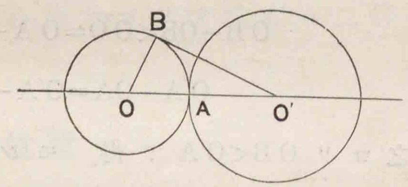
系 1. 二ツノ圓ガ中心線上ニアラザル一點

*本章ニ於テハ便宜上圓周ノコトヲモ單ニ圓ト稱ス。

ヲ共有スルトキハ,中心線ニ關シテ之ト對稱ナル他ノ一點ヲモ共有ス。

系 2. 二ツノ圓ガ中心線上ニアル一點ヲ共有スルトキハ,其他ニ共有點ナシ。

定義 二ツノ圓ガ二點ヲ共有スルトキハ二圓ハ**相交ル**トイヒ,唯一ツノ點ヲ共有スルトキハ**相切ス**トイフ。相切スル場合ニハ其共有スル一點ヲ**切點**トイフ。(甲圖)



二ツノ圓O,O′ガ相切スルトキハ,ソノ切點Aハ中心線上ニアリ(系1參照),今Aガ線分OO′ノ上ニアリトセヨ。(甲圖ノ場合) 然ルトキハ圓Oノ上ニAノ他ニ任意ノ一點Bヲトレバ

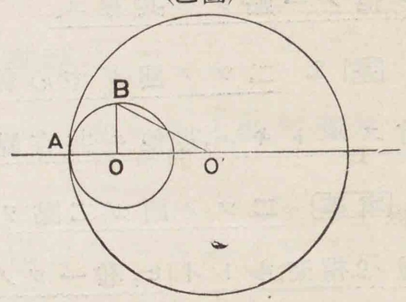
$$OB+O'B>OO',\quad OO'=OA+O'A.$$

然ルニ $OB=OA$, 故ニ $O'B>O'A$.

故ニBハ圓O′ノ外部ニアリ。從ツテ圓Oハ(一點Aヲ除クノ他)圓O′ノ外部ニアリ。

同様ニ圓O′モ亦(一點Aヲ除クノ他)圓Oノ外部ニアリ。即チ此場合ニハ兩圓ハ(一點Aヲ除クノ他)各他ノ外部ニアリ。

(乙圖)



次ニAガ線分O′OノOヲ通シテノ延長ノ上ニアリトセヨ(乙圖ノ場合)。此場合ニ圓Oノ上ノ一點ヲBトシ, $O'B>OB$ トスレバ

$$O'B-OB<O'O=O'A-OA,$$

$$O'A-OA=O'A-OB.$$

之ヨリ $O'B<O'A$ ヲ得。モシマタ $O'B\leqq OB$ ナラバ,

$$O'B\leqq OB=OA<O'A.$$

故ニ勿論 $O'B\leqq O'A$ ナリ。故ニ何レニシテモ圓Oハ(一點Aヲ除クノ他)全ク圓O′ノ内部ニアリ。

同様ニシテ, Aガ線分OO′ノO′ヲ通シテノ延長ノ上ニアルトキハ,圓O′ガ圓Oノ内部ニアルコトヲ知ル。

定義 二ツノ圓ガ相切スルトキ,ソノ切點ヲ

除クノ他,各他ノ外部ニアルトキハ**外切ス**トイヒ,一方ガ他方ノ内部ニアルトキハ**内切ス**トイフ。

例題

1. 二ツノ圓ガ相交ルトキハ,其交點ハ中心線上ニアラズ。

2. 二ツノ圓ガ相切スルトキハ,其切點ニ於テ共通ナル切線ヲ有ス。

3. 二ツノ相交ル圓ノ交點ヲ結ブ線分(之ヲ**共通弦**トイフ)ハ中心線ニヨリテ垂直ニ二等分セラル。

42. 二ツノ圓ノ位置

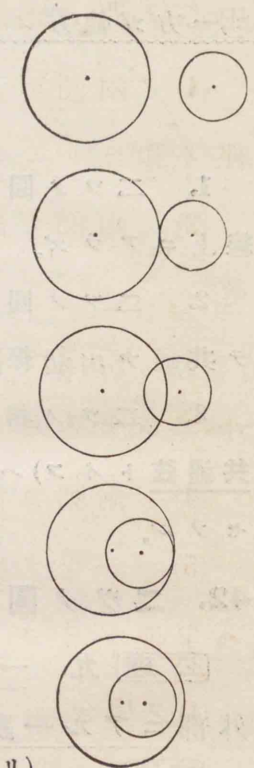
公理 九. 一ツノ圓ノ内部ニアル一點ト外部ニアル一點トヲ過ル圓ハ始メノ圓ト相交ル。

故ニ二ツノ圓ガ一點ヲモ共有セザルトキハ其一ツノ圓ハ全ク他ノ圓ノ外部ニアルカ,又ハ全ク他ノ圓ノ内部ニアルベシ。何トナレバ若シ一ツノ圓ノ一部分ガ他ノ圓ノ内部ニ,一部分

ガ外部ニアリトセバ,公理九ニヨリテ兩圓ハ相交ルベク,從ツテ二點ヲ共有スルコトヽナリ,假設ニ反スベシ。

又二ツノ圓ガ共通點ヲ有スル場合ニツイテハ前節ニ詳論セル如シ。

依ツテ結局二ツノ相異ル圓ノ位置ハ次ノ五通リニ限ル。



(1) 各他ノ外部ニアリ。(共有點ナシ)

(2) 外切ス。(共有點一ツアリ)

(3) 相交ル。(共有點二ツアリ)

(4) 內切ス。(共有點一ツアリ)

(5) 一ツガ他ノ內部ニアリ。(共有點ナシ)

注意 二圓ガ合同ナルトキニハ(4),(5)ハ成立セズ,其代リニ(1),(2),(3)ノ他ニ二圓ガ相重リ合フトイフ一ツノ場合ヲ生ズ。故ニ合同ナル二ツノ圓ノ位置ハ四通リトナル。

定理 三十四. 二ツノ同心ナラザル圓ノ中心ノ間ノ距離ハ,

(1) 兩圓ガ各他ノ外部ニアルトキハ,半徑ノ和ヨリモ大ナリ。

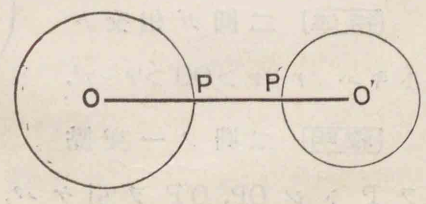
(2) 兩圓ガ外切スルトキハ,半徑ノ和ニ等シ。

(3) 兩圓ガ相交ルトキハ,半徑ノ和ヨリモ小ニシテ,差ヨリモ大ナリ。

(4) 兩圓ガ內切スルトキハ半徑ノ差ニ等シ。

(5) 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ內部ニアルトキハ半徑ノ差ヨリモ小ナリ。

(1)ノ場合

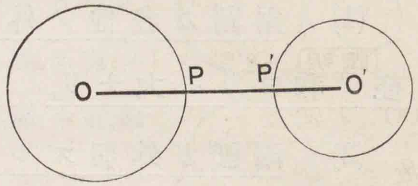


特述 圓ガ各他ノ外部ニアルトキ,二圓ノ中心ヲ夫夫 O, O' トシ二圓ノ半徑ヲ夫々 r, r' トスレバ

$$OO' > r+r'.$$

證明 OO' ト圓O, 圓 O' トノ交點ヲ夫々 P, P' トスレバ, P' ハ圓Oノ外ニ在ルヲ以テ

$$OP'>r.$$

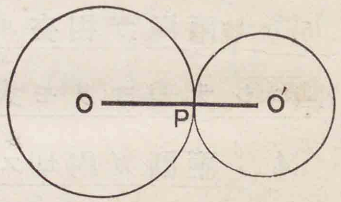


故ニ $OP'+r'>r+r'.$

即チ $OO'>r+r'.$

(2) ノ場合

特述 二圓ガ外切スルトキハ $OO'=r+r'.$

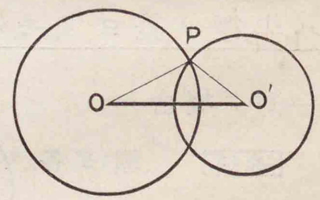


證明 切點ヲPトスレバ, OO' ハPヲ過ル。

故ニ $OO'=OP+PO'.$

即チ $OO'=r+r'.$

(3) ノ場合



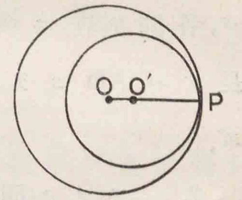
特述 二圓ガ相交ルトキハ $r+r'>OO'>r\sim r'.$

證明 二圓ノ一交點ヲPトシ $OP, O'P$ ヲ引ケバ, $\triangle POO'$ ニ於テ

$$OP+O'P>OO'>OP\sim O'P.$$

即チ $r+r'>OO'>r\sim r'.$

(4) ノ場合



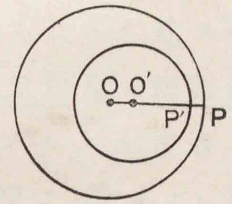
特述 二圓ガ内切スルトキハ $OO'=r\sim r'.$

證明 切點ヲPトスレバ, OO' ノ延長ハPヲ過ル。

故ニ $OO'=OP\sim O'P.$

即チ $OO'=r\sim r'.$

(5) ノ場合



特述 圓 O' ガ圓Oノ内部ニアルトキハ

$$OO'<r-r'.$$

證明 OO' ノ延長ガ圓O, 圓 O' ト交ル點ヲ夫々 P, P' トスレバ, P' ハ圓Oノ内部ニ在リ。

故ニ $OP'<r.$

從ツテ $OP'-r'<r-r'.$

即チ $OO'<r-r'.$

系 此定理ノ逆モ眞ナリ。

例題

1. 二ツノ圓ガ各他ノ外部ニアルトキ, 其中

心線ト兩圓トノ交點ヲ順次ニ A, B, C, D トスレバ,各圓周上ニ夫々一端ヲ有スル任意ノ線分ノ長サハ AD ヨリモ大ナラズ,又 BC ヨリモ小ナラズ。

2. 二ツノ圓ノ種々ノ位置ニツイテ前題ノ結果ヲ適當ニ訂正シ,之ヲ證明セヨ。

第四章　作圖題

43. 作圖ノ公法

與ヘラレタル條件ニ適スル圖形ヲ畫ク幾何學的ノ方法ヲ求ムル問題ヲ**作圖題**トイヒ,之ヲ實際ニ畫クコトヲ**作圖**トイフ。

初等平面幾何學ニ於テ作圖ヲナスニ當リ使用スルコトヲ許サルル器具ハ**定規**及ビ**兩脚規**ニ限リ,而シテ前者ハ線分ヲ引クタメニ,後者ハ圓周又ハ弧ヲ畫クタメニノミ用フベキモノトス。

注意　普通ノ三角定規ハ 30°, 60°, 90° 或ハ 45° 等ノ角ヲ有スレドモ作圖題ニ於テハコレラノ角ヲ利用スルコトヲ許サズ,又定規ノ緣ニ尺度ノ目盛リヲナセルモノ等アレドモ之ヲモ利用スベカラズ,要スルニ唯三角形ノ一邊ノミヲ使用スルモノト考フベシ。其他尺度,分度器,雲形定規等ノ器具ハ一切使用スベカラズ。斯クノ如ク制限ヲ附スル理由ハ作圖題ナルモノガ單ニ製圖スルコトノミヲ目的トセズシテ,寧ロソノ作圖法ヲ案出スルタメニ思考力ヲ練磨スルコトヲ主眼トスルガ故ナリ。

次ノ二ツノコトハ定規及ビ兩脚規ヲ用セテ

爲シ得ルモノト承認ス。之ヲ作圖ノ**公法**又ハ**規矩**トイフ。コレ以外ノ圖ヲ畫クニハスベテコノ二ツノ公法ヲ有限ノ回數ダケ反復應用シテ作圖スベキモノトス。

(1) 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル任意ノ長サノ線分ヲ引クコト。

(2) 與ヘラレタル點ヲ中心トシ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓周ヲ畫クコト。

例　題

1. 與ヘラレタル線分ヲ任意ノ長サニ延長セヨ。

2. 與ヘラレタル線分ノ一端ヲ中心トシテ其線分ノ二倍ノ長サヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケ。

44. 作圖題ノ解法

一ツノ簡單ナル例ヲ擧ゲテ作圖題ノ解法ヲ説明セントス。

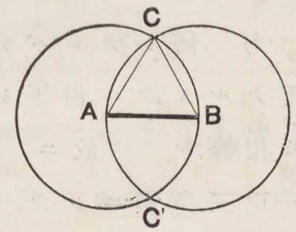
作圖題　與ヘラレタル線分ヲ一邊トスル正三角形ヲ作レ。

特述

(1) ABヲ與ヘラレタル線分トス。今之ヲ一邊トスル正三角形ヲ作ルコトヲ求ム。

解析

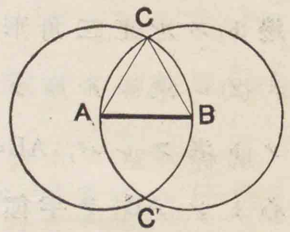
(2) 求ムル所ノ正三角形 ABC ガ出來タルモノト考フレバ, AB=AC ナルガ故ニ, C ハ A ヲ中心トシ AB ヲ半徑トスル圓周上ニアルベシ。同理ニヨリ,マタ C ハ B ヲ中心トシ AB ヲ半徑トスル圓周上ニモアルベシ。此二ツノ圓ハ線分 AB ガ與ヘラルレバ夫ニヨリテ定マルモノナレバ,從ツテソノ交點トシテ頂點 C モ亦定マルベシ。C ガ定マレバ正三角形 ABC ヲ作ルコト容易ナリ。依ツテ次ノ如ク作圖スベシ。



作図

(3) 與ヘラレタル線分 AB ノ一端 A ヲ中心トシ AB ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ(公法 2),次ニマタ他ノ一端 B ヲ中心トシ AB ヲ半徑トスル圓ヲ畫クベシ(公法 2)。然ルトキハ兩圓ノ中心ノ間ノ距離 AB ハ兩半徑ノ和(卽チ AB ノ二倍)ヨリ小

ニシテ,其差(卽チ零)ヨリ大ナルヲ以テ,兩圓ハ相交ル。其交點ノ一ツヲCトシ, AC, BC ヲ結ベバ(公法 1) $\triangle ABC$ ヲ得。コレ卽チ求ムル所ノ正三角形ナリ。



證明 (4) 何トナレバ AC ト AB トハ同ジ圓Aノ半徑ナルガ故ニ相等シク,同理ニヨリ BC ト AB トモ相等シ。故ニ $AB=BC=CA$. 故ニ $\triangle ABC$ ハ正三角形ニシテ,ソノ一邊ハ與ヘラレタル線分ABナリ。ヨツテ $\triangle ABC$ ハ求ムル所ノモノナリ。

吟味 (5) 圓Aト圓Bトノ交點ハ二ツアリ(第42節)。Cト異ル方ノ交點ヲ C' トスレバ, $\triangle ABC'$ モ亦求ムル所ノモノナリ。然レドモ $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$ ナルヲ以テ,位置ノ相違ヲ考ニ入レザルトキハ,求ムル正三角形ハ唯一通リナリトイヒテ可ナリ。

又兩圓ハ必ズ相交ルヲ以テ,上記ノ作圖ハ常ニ遂行スルコトヲ得。故ニ求ムル正三角形ノ出來ザルコトナシ。

コレニテ本題ハ完全ニ解決セラレタリ。

(1) ハ卽チ作圖題ノ**特述**ナリ。次ニ

(2) ノ如ク先ヅ求ムル圖形ガ出來タルモノトシテ其圖形ノ性質ヲ調ベ,之ヲ作ルニハ如何ニスレバ可ナルカヲ考フルコトヲ**解析**トイフ。

解析ハ單ニ作圖法ヲ案出セシムル利アルノミナラズ,求ムル圖形ガ之ヨリ他ニハ存在セザルコトヲ確カムルノ用ヲナスモノナリ。

(3) ハ卽チ**作圖**ナリ。解析ノ結果ヨリ推シテ其作圖ヲ案出スルコトヲ稱シテ**綜合**トイフ。

(4) ハ今作圖シタル結果ガ實際求ムル所ノ圖形ナルコトノ**證明**ナリ。

(5) ハ與ヘラレタル作圖題ガ可能ナルヤ否ヤ,又可能ナル場合ニ幾通リノ圖形ヲ得ルカ等ノコトヲ調ベタルモノニシテ,之ヲ**吟味**トイフ。

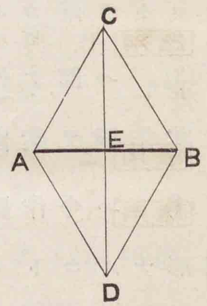
一般ニ作圖題ヲ解クニハ以上ノ順序ヲ踏ムヲ常トス。然レドモ容易ナル問題ニ於テハ解析ヲ略スコトアリ,又解析ヲ詳述セルトキハ之ニヨリテ作圖又ハ證明ヲ略シテモ差支ナキコトアリ。

例題

三邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

45. 基本的作圖題

[作圖題] 1. 與ヘラレタル線分ヲ二等分セヨ。



[特述] 與ヘラレタル線分ヲABトス。今之ヲ二等分スルコトヲ求ム。

[作圖] ABノ兩側ニ之ヲ一邊トスル正三角形ABC及ビABDヲ作リ(前節ノ作圖題), CトDトヲ結ブ線分ヲ引キ之トABトノ交點ヲEトセヨ。Eハ卽チ求ムル二等分點ナリ。

[證明] 第54頁ノ例題3ヲ見ヨ。

[吟味] 二ツノ正三角形ABC及ビABDハ常ニ作圖シ得(前節ノ(5)參照)。又線分CDトABトハ必ズ相交ル(第9節公理七)。故ニEハ常ニ唯一ツ決定セラル。

[注意] CDハABヲ單ニ二等分スルノミナラズ,之ト垂直ニ交ルモノナリ。

△ABC, △ABDハ必シモ正三角形ナルヲ要セズ, ABヲ底邊トスル任意ノ二等邊三角形ニテ可ナリ。(54頁例題3) 故ニ實際ノ作圖ニ於テハA及ビBヲ夫々中心トシテ, ABノ半分ヨリ大ナル(目分量ニテ)相等シキ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ, 兩圓ノ交點ヲ結ベバABノ垂直二等分線ヲ得。

[應用] 1. 與ヘラレタル線分ヲ直徑トスル圓ヲ畫ケ。

[應用] 2. 與ヘラレタル弧ヲ二等分セヨ。

[應用] 3. 與ヘラレタル三點ヲ過ル圓ヲ畫ケ。

(定理三十二)

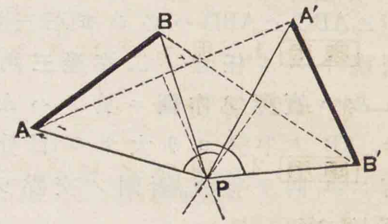
[應用] 4. 與ヘラレタル圓(又ハ弧)ノ中心ヲ求メヨ。

[應用] 5. 與ヘラレタル二ツノ線分ヲ對角線トスル菱形ヲ作レ。

[應用] 6. 相等シキ長サノ二線分AB, A′B′ガ任意ノ位置ニアルトキ,一點Pヲトリテ $AP=A'P$, $BP=B'P$ ナラシメヨ。

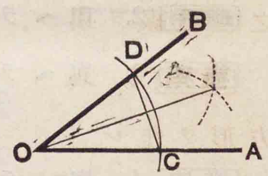
[注意] 此場合ニ點Pハマタ $\angle APA'=\angle BPB'$ ナル性質ヲ有ス。

之ニヨリテA′B′ヲABニ相合セシムルニハ,Pヲ中心トシテABヲ∠APA′ダケ回轉スレバヨキコトヲ知ル。線分ニ限ラズ一般ニ裏向キナラザル合同圖形ニツイテハスベテ同様ナリ。(第32節ノ注意参照)



作圖題 2. 與ヘラレタル角ヲ二等分セヨ。

特述 ∠AOBヲ與ヘラレタル角トス。今之ヲ二等分スルコトヲ求ム。



作圖 頂點Oヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ,邊OA, OBト交ル點ヲ夫々C, Dトシ,CトDトヲ結ビ付ケヨ。線分CDノ垂直二等分線ヲ作レバ(作圖題1),コレ即チ∠AOBノ二等分線ナリ。

證明 第49頁例題4ニヨリ,CDノ垂直二等分線ハ∠AOBヲ二等分ス。

注意 線分CDノ垂直二等分線ヲ作ルニハ作圖題1ノ方法ヲ繰リ返ス代リニ,C及ビDヲ夫々中心トスル

相等シキ(CDノ半分ヨリ大ナル)半徑ノ圓ヲ畫キ,其一ツノ交點トOトヲ結ベバヨシ。

應用 1. 與ヘラレタル角ヲ四等分,八等分等(一般ニ2^n等分)セヨ。

應用 2. 與ヘラレタル三角形ノ內心及ビ傍心ヲ求メヨ。

應用 3. 與ヘラレタル平角ヲ二等分セヨ。換言スレバ,與ヘラレタル直線上ノ一點ヲ過リ之ニ垂線ヲ引ケ。

應用 4. 與ヘラレタル線分ヲ一邊トスル正方形ヲ作レ。

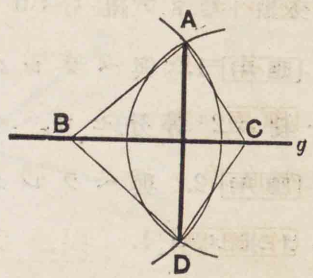
應用 5. 60°, 30°, 15°, 7° 30′ 及ビ 90°, 45°, 22° 30′ 等ノ角ヲ作レ。

應用 6. 直角ヲ三等分セヨ。

作圖題 3. 與ヘラレタル直線外ノ一點ヨリ之ニ垂線ヲ引ケ。

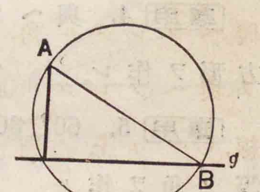
特述 gヲ與ヘラレタル直線,Aヲ其上ニアラザル一點トス。今Aヨリgニ垂線ヲ引クコトヲ求ム。

作圖 g 上ニ任意ノ二點B及ビCヲトリ,コレヲ夫々中心トシテAヲ過ル二ツノ圓ヲ畫キ,其兩圓ノA以外ノ交點ヲDトセヨ。AトDトヲ結ベバ,コレ卽チ求ムル垂線ナリ。

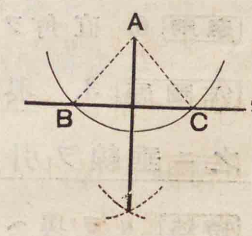


證明 BA=BD, CA=CD. 故ニ △ABD, △ACD ハ同一ノ底邊 AD ノ上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ナリ。故ニ BC ト AD トハ垂直ニ相交ル。(54頁例題3)

吟味 略ス。(學生自ラ之ヲ試ミヨ)



別法 1. g 上ニ任意ノ一點Bヲトリ,線分ABヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,之ト g トノ交點ヲAト結ベバ求ムル垂線ヲ得。(第95頁ノ例題4)

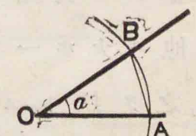


別法 2. Aヲ中心トシ g 上ノ一點ヲ過ル圓ヲ畫キ,モシ g ガ此圓ニ切スルナラバ,其切點ト

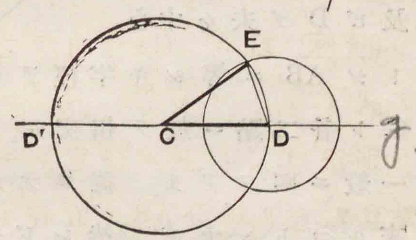
Aトヲ結ブベク,モシ g ガ此圓ト二點B, Cニテ相交ルナラバ,線分BCノ垂直二等分線ヲ作ルベシ。之ニ依ツテ求ムル垂線ヲ得。(定理30系2)

應用 與ヘラレタル點ヲ中心トシ,與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

作圖題 4. 與ヘラレタル直線上ノ一點ヲ過リ,之ト與ヘラレタル角ヲナス直線ヲ引ケ。



特述 ∠AOB ヲ與ヘラレタル角, g ヲ與ヘラレタル直線, Cヲ g 上ノ與ヘラレタル一點トス。今Cヲ過リ, g ト∠AOBニ等シキ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求ム。



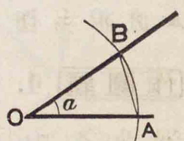
作圖 Oヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ,邊OA, OBトノ交點ヲ夫々A, Bトス。Cヲ中心トシ前ト同ジ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ, g ト交ルーツノ點ヲDトス。Dヲ中心トシ線分AB

ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ,圓Cトノ交點ノ一ツヲEトシ,CトEトヲ過ル直線ヲ引ケバコレ卽チ求ムル所ノモノナリ。

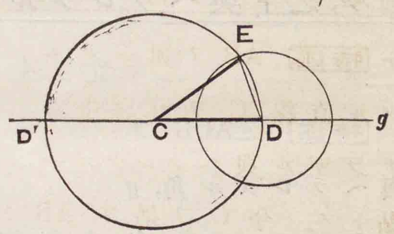
證明 $CE=CD=OA=OB.\quad ED=AB.$

故ニ $\triangle CDE \equiv \triangle OAB.$

從ツテ $\angle DCE=\angle AOB.$



吟味 圓Cト直線gトノ交點ハDノ他ニナホ一ツアリ,之ヲD′トス。D及ビD′ヲ夫々中心トシAB ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケバ,圓Cト各二點ニ於テ相交ル。故ニEノ如キ點ハ一般ニ四ツアリ。從ツテ求ムル直線ハ四ツ出來ルコトヽナル。然レドモソノ中二ツヅヽ同一ノ直線トナルヲ以テ,結局一般ニハ相異ル直線ハ二ツダケ引キ得ベシ。(學生自ラ之ヲ證明シ,且常ニ二ツ引キ得ルヤ否ヤヲ考ヘヨ)



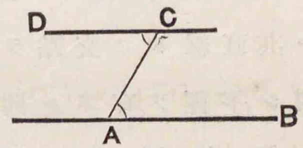
應用 1. 與ヘラレタル二角ノ和及ビ差ニ等シキ角ヲ作レ.

應用 2. 二邊ト其夾角トガ與ヘラレタルトキ,三角形ヲ作レ。

應用 3. 二角ト一邊トガ與ヘラレタルトキ,三角形ヲ作レ。(其一邊ガ與ヘラレタル二角ノ間ニアル場合ト然ラザル場合トアリ)

作圖題 5. 與ヘラレタル直線外ノ一點ヲ過リ之ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

特述 ABヲ與ヘラレタル直線,CヲソノL上ニアラザル與ヘラレタル一點トス。今Cヲ過リABニ平行ナル直線ヲ引クコトヲ求ム。



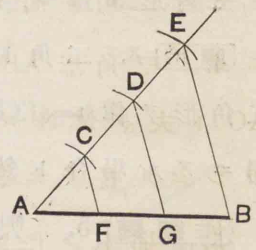
作圖 直線AB上ニ任意ノ一點Aヲトリ,CトAトヲ結ビ,$\angle BAC$ト相等シキ錯角$\angle ACD$ヲ作ル樣ニ直線CDヲ引ケ。CDハ卽チ求ムル直線ナリ。

證明 定理六ニヨル。

別法. 定理二十四系2ヲ應用スレバ本作圖題ノ別法ヲ得。(學生自ラ之ヲ試ミヨ)。

應用 與ヘラレタル點ヲ過リ,與ヘラレタル直線ト與ヘラレタル角ヲナス直線ヲ引ケ.

作圖題 6. 與ヘラレタル線分ヲ若干等分セヨ。



特述 AB ヲ與ヘラレタル線分トス。今之ヲ三等分スルコトヲ求ム。(幾等分トスルモ同理ナリ)

作圖 A ヲ過リ, AB ト合セザル任意ノ直線ヲ引キ, A ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ其直線トノ交點ヲ C トシ, 次ニ C ヲ中心トシ同シ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ同シ直線トノ交點ヲ D トシ, 更ニ今一度 D ヲ中心トシテ同樣ノ作圖ヲナシ交點 E ヲ求メヨ。E ト B トヲ結ビ, C 及ビ D ヲ過リテ EB ニ平行ニ CF, DG ヲ引キ, AB トノ交點ヲ夫々 F, G トスレバ, 此二點ハ卽チ線分 AB ヲ三等分スルモノナリ。

證明 定理二十四ニヨル。

例題

1. 二隣邊ト其夾角トヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

2. 一對角線ヲ與ヘテ正方形ヲ作レ。

3. 二角ト周トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

4. 三角形 ABC ノ一邊 BC ニ平行ニシテ AB, AC ト夫々 M, N ニテ交ル直線ヲ引キ MN ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。

5. 同上ノ作圖ニ於テ MN ヲシテ BM ト CN トノ和ニ等シカラシメヨ。

又 MN ヲシテ BM ト CN トノ差ニ等シカラシメヨ。

6. 二ツノ對角線及ビ一邊ヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

7. 與ヘラレタル角 LMN 内ノ一定點 P ヲ過リテ一直線ヲ引キ ML, MN トノ交點ヲ夫々 L, N トシ

(1) PL＝PN

(2) PL＝2.PN

(3) PL＝3.PN ナラシメヨ。

8. 前題ニ於テ定點 P ヲ ∠LMN ノ外ニ在リトシ PL＝3.PN ナラシメヨ。

9. 二邊及ビ第三邊ヘノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

10. 二點 A, B ガ直線 XY ノ同ジ側ニアルトキ, XY 上ニ一點 P ヲトリ ∠APX=∠BPY ナラシメヨ。又 A, B ガ XY ノ兩側ニ一ツヅツアルトキ, XY 上ニ一點 P ヲトリ ∠APX=∠BPX ナラシメヨ。 (83頁例題5参照)

11. 一直線 AB ノ同側ニ二定點 P, Q アリ。AB 上ニ一點 R ヲ取リ PR+RQ ヲ最小ナラシムル樣ニセヨ。

12. 定直線 XY ノ同ジ側ニ二定點 A, D アリ。今 XY 上ニ二點 B, C ヲ求メ, BC ノ長サヲ與ヘラレタル線分 l ニ等シカラシメ, 且 AB, BC, CD ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

13. 定角 MON ノ內部ニ二定點 A, B アリ。P, Q ヲ夫々 OM, ON 上ニトリ AP+PQ+QB ヲ最小ナラシメヨ。

14. 頂角ト周圍ノ長サトヲ知リテ二等邊三角形ヲ作レ。

15. 平行四邊形ノ相對スル二邊ノ延長ト他ノ二邊トニ交ル直線ヲ引キ, 其交點間ノ三ツノ部分ヲ等長ナラシメヨ。

16. 與ヘラレタル點 P ヲ過リ, 與ヘラレタル平行線 AB, CD ノ間ニアル部分ガ與ヘラレタル長サヲ有スル如キ直線ヲ引ケ。

第五章 圓ト角及ビ切線

46. 中心角

定義 圓ノ二ツノ半徑ノナス角ヲ**中心角**トイフ。中心角ハ其二邊ノ間ニ夾マレタル**弧(或ハ其兩端ヲ結ブ弦)ノ上ニ立ツ**トイヒ、**弧(或ハ弦)ハ其中心角ニ對ス**トイフ。

第37節ノ例題1, 2 (96頁)ヲ換言スレバ直チニ次ノ定理ヲ得ベシ。

定理 **三十五.** 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ

(1) 二ツノ中心角ガ相等シキトキハ,之ニ對スル弧モ相等シ。

(2) 二ツノ中心角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル中心角ニ對スル弧ガ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリモ大ナリ。

系 此定理ノ逆モ亦眞ナリ。

コヽニ於テ更ニ定理二十九及ビ其系ヲ參酌スレバ次ノ定理ヲ得。

定理 **三十六.** 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ

(1) 二ツノ中心角ガ相等シキトキハ,之ニ對スル弦モ相等シ。

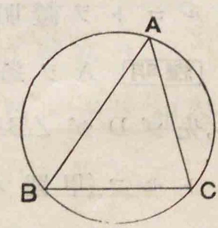
(2) 二ツノ中心角ガ共ニ劣角ニシテ相等シカラザルトキハ大ナル中心角ニ對スル弦ガ小ナル中心角ニ對スル弦ヨリモ大ナリ。

系 此定理ノ逆モ亦眞ナリ。

例題

定理三十六ニ於テ二ツノ中心角ガ共ニ優角ナル場合ハ如何。

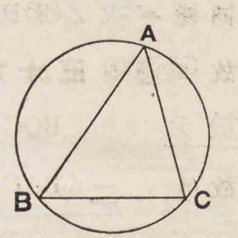
47. 圓周角



圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ弦ノナス角ヲ**圓周角**トイフ。圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マレタル**弧(或ハ其兩端ヲ結ブ**

弦)ノ上ニ立ツトイヒ，**弧(或ハ弦)ハ其圓周角ニ對ス**トイフ。

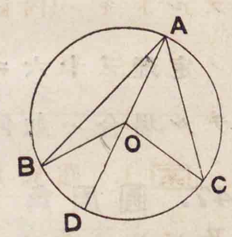
一ツノ弦ニヨリテ分タレタル圓ノ一部分ヲ**弓形**トイフ。



弓形ニ屬スル弧ノ上ノ一點ト其弦ノ兩端トヲ夫々結ブ二ツノ弦ノナス圓周角ヲ其**弓形ノ含ム角**又ハ單ニ**弓形ノ角**トイフ。

定理 三十七. 一ツノ圓ニ於テ圓周角ハ之ニ對スル弧(或ハ弦)ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ。

甲



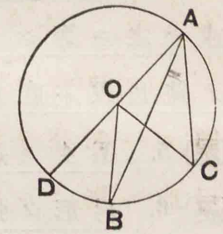
特述 圓Oニ於テ∠BACヲ一ツノ圓周角トスルトキハ，

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 Aヲ過ル直徑ADヲ引キ，先ヅDガ∠BACニ對スル弧BCノ上ニ落チタリトセヨ。(甲圖ノ場合) 然ルトキハ△AOBハ明カニ二等邊三角形ナルヲ以テ

乙



$$\angle BOD=2\angle BAO.$$

同樣ニ $\angle COD=2\angle CAO.$

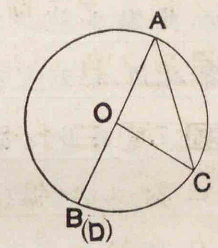
故ニ邊々相加フレバ

$$\angle BOC=2\angle BAC.$$

故ニ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$

モシDガ∠BACニ對スル弧BCノ他ニ落チタリトスレバ(乙圖ノ場合)，上ノ二式ヲ相加ヘタル代リニ一方ヨリ他方ヲ減ズレバヨシ。

丙



モシ又DガB又ハCト相合スルトキハ(丙圖ノ場合)，上ノ二式ノ何レカ一方ノミニテ既ニ證明スベキ結果ヲ與フルコトトナル。

系 1. 圓周角ニツイテモ定理三十五，三十六及ビソノ各ノ系ト同樣ノコトガ成立ス。

系 2. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハスベテ相等シ。

系 3. 同ジ弓形ノ角ハ相等シ。

系 4. 弓形ノ角ハ,其弓形ガ半圓ヨリ小ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ大ナルカニ從ツテ,鈍角,或ハ直角,或ハ鋭角ナリ。

系 5. 系4ノ逆モ眞ナリ。

系 6. 弓形ノ弦叉ハ其延長ニ對シテ其弓形ト同側ニ在ル點ガ弓形ノ内或ハ外ニ在ルニ從ツテ,此點ト弦ノ兩端トヲ結ビテ得ル角ハ弓形ノ含ム角ヨリ大或ハ小ナリ。

系 7. 系6ノ逆モ眞ナリ。

例題

1. 一ツノ圓ノ二ツノ弦 AB, CD ガ圓内ノ一點 E ニ於テ相交ルトキハ,角 AEC ハ弧 AC 及ビ BD ノ上ニ立ツ中心角ノ和ノ半分ニ等シ。

2. 一ツノ圓ノ二ツノ弦 AB, CD ガ圓外ノ一點 E ニ於テ相交ハルトキハ,角 AEC ハ弧 AC 及ビ BD ノ上ニ立ツ中心角ノ差ノ半分ニ等シ。

3. 三角形 ABC ノ外心 O ヨリ邊 BC ニ垂線 OD ヲ引クトキハ,角 BOD ハ角 A 或ハ其補角ニ等シ。

4. 三角形ノ二邊ヲ夫々直徑トスル二ツノ圓周ハ第三邊叉ハ其延長ノ上ニ於テ出會フ。

5. 相交ル二圓ノ一ツノ交點ヲ過ル各ノ圓ノ直徑ノ他ノ端ヲ結ベバ他ノ交點ヲ過ル。

6. 一ツノ圓ニ於テ同一ノ弧ノ上ニ立ツスベテノ圓周角ノ二等分線ハ一定點ヲ過ル。

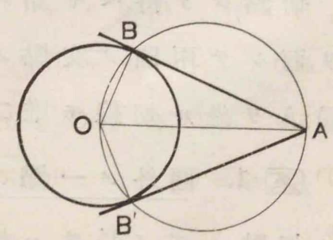
7. 一圓周ヲ四ツノ弧ニ分チ其中點ヲ順次ニ A, B, C, D, トスレバ,弦 AC ト BD トハ直交ス。

8. 一ツノ圓ノ二ツノ弧ノ中點ヲ結ブ直線ハソレラノ弧ニ對スル弦ト等角ヲナス。

9. 一ツノ圓ニ於テ二ツノ相等シキ弧ヲ AB, CD トスレバ,弦 AC, BD ハ平行ナルカ,或ハ相等シ。

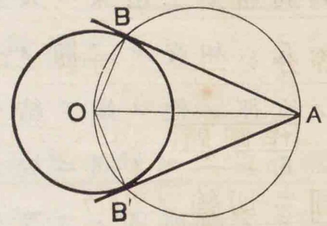
48. 切線

定理 三十八. 圓外ノ一點ヲ過リ其圓ニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯二ツニ限ル。



特述 圓 O ノ外部ニアル一點ヲ A トス。然

ルトキハAヲ過リ,圓Oニ切スル直線ハ二ツアリ,而シテ唯二ツニ限ルコトヲ證明セントス。



證明　今Aヲ過ル切線アリトシ,其一ツヲトリテ切點ヲBトセヨ。然ルトキハ∠OBAハ直角ナリ。(定理二十七)　故ニBハOAヲ直徑トスル圓周上ニアリ(定理三十七系5)。之ニ依リテ見レバ,Aヲ過リ圓Oニ引キタル切線ノ切點ハOAヲ直徑トスル圓ト圓Oトノ交點ナラザル可カラズ。サテ點Oハ圓Oノ內部ニアリ,點Aハ外部ニアルヲ以テ,OAヲ直徑トスル圓ハ圓Oト二點ニ於テ相交ル。從ツテ其各交點ヲ夫々Aト結ベバ二ツノ切線ヲ得。

切點タリ得ベキ點ハ上記ノ兩圓ノ交點ニ限リ,而シテ兩圓ノ交點ハ唯二ツニ限ルヲ以テ,結局Aヲ過ル切線モ唯二ツニ限ル。

系 1.　圓外ノ一點ヨリ其圓ニ引キタル切線ノ切點マデノ長サハ相等シ。

系 2.　圓ノ中心ト圓外ノ一點トヲ過ル直線ハ其點ヨリ引キタル二ツノ切線ノナス角ヲ二等分シ,二ツノ切點ヲ結ブ弦ヲ垂直ニ二等分ス。

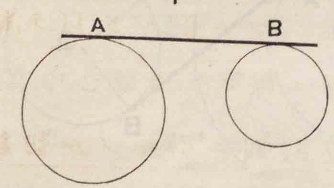
作圖題　與ヘラレタル圓外ノ一點ヨリ其圓ニ切線ヲ引ケ。

定理三十八ノ證明中ニ之ヲ解セリ。

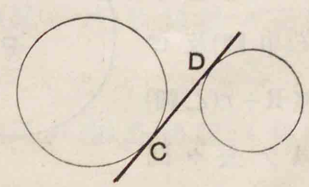
定義　二ツノ圓ニ共通ナル切線ヲ其**公切線**トイフ。二ツノ圓ガ其公切線ノ同側ニアルトキハ其公切線ヲ**外公切線**トイヒ,二ツノ圓ガ其公切線ノ反對ノ側ニ一ツヅツアルトキハ**內公切線**ト云フ。

例ヘバ甲圖ノ直線ABハ外公切線ニシテ,乙圖ノ直線CDハ內公切線ナリ。

甲



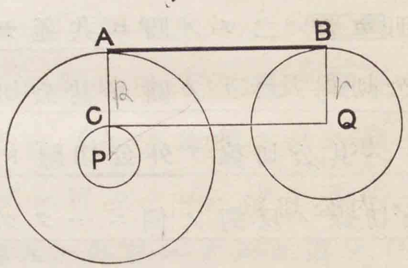
乙



定理 **三十九.** 二ツノ圓ノ各ガ全ク他ノ外ニアルトキハ,此二圓ニ二ツノ外公切線ト二ツノ内公切線トヲ引クコトヲ得。

特述 二ツノ圓ノ中心ヲ夫々P,Qトシ,此二圓ガ全ク他ノ圓ノ外ニアルトキハ,二ツノ外公切線ト二ツノ内公切線トヲ引キ得ルコトヲ證明セントス。

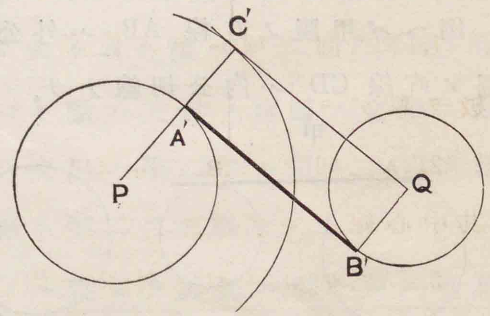
甲



證明 圓P及ビ圓Qノ半徑ヲ夫々R,rトシ,且R>rトス。

二圓ハ各全ク他ノ外ニアルヲ以テPQ>R+rナリ。

乙



故ニPヲ中心トシ,半徑R−r(甲圖)及ビ半徑R+r(乙圖)ヲ以テ夫々圓ヲ畫ケバ,點Qハ此等ノ圓ノ外ニアリ。

依ツテ(前定理ニヨリ)Qヨリ此等ノ二圓ニ夫夫二ツヅツノ切線ヲ引クコトヲ得。

今二ツノ切線ノ中ノ一ツヲ甲圖ニ於テハQCトシ,乙圖ニ於テハQC′トス。PC, PC′ト圓Pノ周トノ交リヲ夫々A, A′トシ,QヨリCA, C′A′ニ平行ニ夫々QB, QB′ヲ引キ圓Qノ周トノ交リヲ夫夫B, B′トスレバ,ACQB, A′C′QB′ハ矩形ナルコト明カナリ。故ニAB, A′B′ハ夫々圓P, 圓Qノ外公切線及ビ内公切線ノ一ツトナル。

依ツテ全體ニ於テ二ツノ外公切線及ビ二ツノ内公切線ヲ引クコトヲ得。

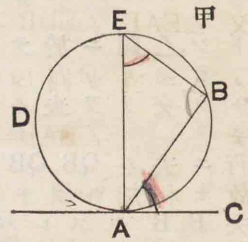
例題

1. 二圓ノ種々ナル位置ニ就キテ公切線ノ數ヲ擧ゲヨ。

2. 二圓ノ一双ノ内(又ハ外)公切線ノ交點ハ其中心線上ニアリ。

3. 二圓ノ一双ノ外(又ハ内)公切線ノ切點間ノ部分ハ相等シ。

定理 **四十.** 弦ノ一端ニ於ケル切線ト其弦トノ夾ム角ハ,其角ノ外部ニアル弓形ノ含ム角ニ等シ。



特述 圓 ABD ニ於ケル一ツノ弦ヲ AB トシ,其一端 A ニ於ケル切線ヲ AC トス。

然ルトキハ $\angle CAB$ ハ其内部ニアラザル弓形 ADB ノ含ム角ニ等シキコトヲ證明セントス。

證明 A ヨリ直徑 AE ヲ引キ,先ヅ E ガ弓形 ADB ノ弧上ニアリトセヨ。(甲圖ノ場合) 然ルトキハ EB ヲ結ベバ $\angle ABE$ ハ直角ナルヲ以テ

$$\angle AEB+\angle EAB=\text{直角}.$$

又 $\angle EAC$ モ直角ナルヲ以テ

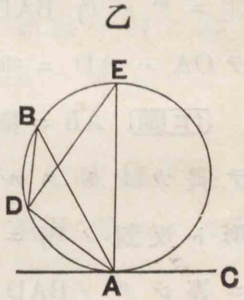
$$\angle CAB+\angle EAB=\text{直角}.$$

故ニ $\angle AEB=\angle CAB$.

而シテ $\angle AEB$ ハ卽チ弓形 ADB ノ含ム角ナリ。

次ニ E ガ弧 ADB ノ共軛弧ノ上ニアリトセヨ。(乙圖ノ場合) 弧 ADB 上ノ任意ノ一點 D ヲトリ

DA, DE, DB ヲ結ブベシ。然ルトキハ $\angle CAE$, $\angle ADE$ ハ共ニ直角ナルヲ以テ



$$\angle CAE=\angle ADE.$$

又 $\angle EAB$, $\angle EDB$ ハ同ジ弧 BE ノ上ニ立ツ圓周角ナルヲ以テ

$$\angle EAB=\angle EDB.$$

故ニ相加ヘテ $\angle CAB=\angle ADB$,

而シテ $\angle ADB$ ハ卽チ弓形 ADB ノ含ム角ナリ。

最後ニ E ガ B ト合スル場合ニハ $\angle CAB$, $\angle ADB$ ハ共ニ直角ナルヲ以テ勿論相等シ。

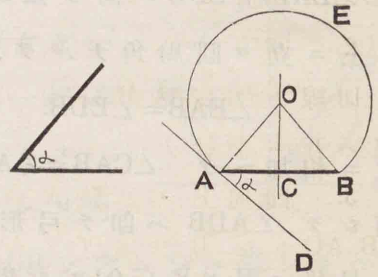
系 弦ノ一端ヲ過ル直線ト其弦トノナス角ガ其角ノ外部ニアル弓形ノ含ム角ニ等シキトキハ,其直線ハ切線ナリ。

作圖題 與ヘラレタル線分ヲ弦トシ,與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ作レ。

解析 與ヘラレタル線分 AB ノ一定ノ側ニ與ヘラレタル角 α ヲ含ム弓形ノ弧 AEB ガ畫カレタリトス。弓形ノ弧ノ中心 O ハ AB ノ垂直二等分線上ニアリ。又點 A ニ於テ圓 AEB ニ切

線 AD ヲ引クトキハ, AB ニ對シテ弓形ト反對ノ側ニアル角 BAD ハ $\angle\alpha$ ニ等シ。(定理四十) 而シテ OA ハ AD ニ垂直ナリ。依ツテ次ノ作圖ヲ得。

作圖 AB ニ關シテ畫カントスル弓形ト反對ノ側ニ $\angle\alpha$ ニ等シク $\angle$BAD ヲ作レ。A ニ於テ AD ニ垂直ナル直線ト, AB ノ垂直二等分線トノ交點ヲ O トス。O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓ヲ畫クトキ AB ニ關シテ D ト反對ノ側ニアル弓形ハ求ムルモノナリ。



證明 O ハ AB ノ垂直二等分線上ノ點ニシテ OA=OB ナレバ圓 O ハ A 及ビ B ヲ過ル。

又 AD ハ AO ニ垂直ナルヲ以テ圓 O ニ切ス。故ニ弓形 AEB ノ含ム角ハ $\angle$BAD 卽チ $\angle\alpha$ ニ等シ。

注意 $\angle\alpha$ ガ直角ナルトキ求ムル弓形ハ AB ヲ直徑トスル半圓ナリ。

應用 底邊,頂角,高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

例題

1. 圓 O ノ二ツノ平行ナル切線ガ同ジ圓ノ他ノ一ツノ切線ト交ル點ヲ A, B トスレバ, $\angle$AOB ハ直角ナリ。

2. 圓ノ中心ニ於テ直交スル二直線ト任意ノ切線トノ交點 P, Q ヨリソノ圓ニ引ケル二切線ハ互ニ平行ナリ。

3. 圓周上ノ一點 A ヨリ引ケル二ツノ弦ヲ AB, AC トシ, B ヲ過リテ A ニ於ケル切線ニ平行ナル直線ヲ引キ AC (又ハ其延長)ト D ニ於テ交ラシム。三點 B, C, D ヲ過ル圓ハ AB ニ切ス。

4. 弧 AB ノ中點 C ヲ過ル直線ガ弦 AB ト交ル點ヲ D トシ,弧 AB ノ共軛弧ト交ル點ヲ E トス。直線 AC ハ三點 A, D, E ヲ過ル圓ニ切ス。

5. 與ヘラレタル圓ヨリ與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ截リ取レ。

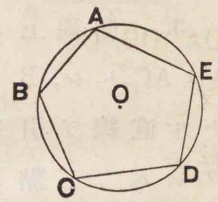
6. 與ヘラレタル二點 A, B 及ビ與ヘラレタル直線 l アリ。l 上ニ一點 P ヲ求メ $\angle$APB ヲ與ヘラレタル角 α ニ等シカラシメヨ。

7. AB ヲ直徑トスル圓周上ノ一點 P ニ於ケル切線ト, A ニ於ケル切線トノ交點ヲ C トシ, AC, BP ノ延長ノ交點ヲ D トスレバ, AC=CD ナリ。

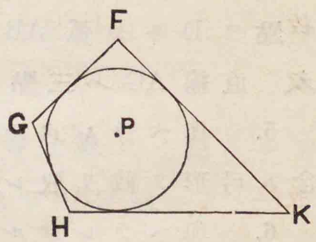
第六章 圓ト多角形

49. 內接, 外接

定義 一ツノ多角形ノ頂點ガ皆同一ノ圓周上ニアルトキハ,コノ多角形ハ其圓ニ**內接**ストイヒ,圓ハコノ多角形ニ**外接**ストイフ。



一ツノ多角形ノ邊ガ皆同一ノ圓ニ切スルトキハ,コノ多角形ハ其圓ニ**外接**ストイヒ,圓ハコノ多角形ニ**內接**ストイフ。



外接又ハ內接スル圓ノコトヲ夫々**外接圓**又ハ**內接圓**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ ABCDE ハ圓 O ニ內接スル五角形, FGHK ハ圓 P ニ外接スル四角形ニシテ,圓 O ハ前者ノ外接圓,圓 P ハ後者ノ內接圓ナリ。

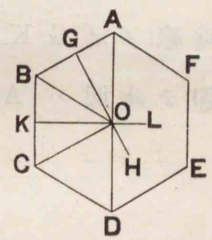
定理 **四十一.** 正多角形ニハ內接圓及ビ外接圓ヲ畫クコトヲ得。

特述 正多角形ヲ ABCDEF トス,然ルトキハ之ニ外接圓及ビ內接圓ヲ畫クコトヲ得ベシ。

證明 AB, BC ノ垂直二等分線 GH, KL ヲ引ケバ此二直線ハ相交ル。其交點ヲ O トス。

OA, OB, OC ヲ結ベバ, $OA=OB=OC$.

又 $AB=BC$.



故ニ $\triangle OAB \equiv \triangle OCB$

ニシテ $\angle OBA=\angle OBC$.

故ニ $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$.

又 $\angle OBC=\angle OCB$.

$\angle ABC=\angle BCD$.

故ニ $\angle OCB=\frac{1}{2}\angle BCD=\angle OCD$.

次ニ $\triangle OCB$ ト $\triangle OCD$ トニ於テ

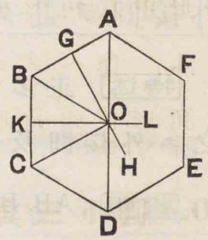
$CB=CD$, OC ハ共通,

$\angle OCB=\angle OCD$,

故ニ $\triangle OCB \equiv \triangle OCD$.

故ニ $OB=OD$.

同様ニOヨリ各ノ頂點ニ至ル距離ハ皆相等シ。故ニOヲ中心トシOAヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ,此圓ハABCDEFノ外接圓ナリ。



又OハABCDEFノ各角ノ二等分線上ニ在リ。從ツテ此多角形ノ各邊ヨリ等距離ニアリ。故ニOヲ中心トシOGヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ,此圓ハ各ノ垂線ノ足G, K等ニ於テ各邊ニ切ス。

即チ此圓ハABCDEFノ內接圓ナリ。

例題

1. 圓周ヲn等分シ其分點ヲ順次ニ結ブトキハ,其圓ニ內接スル正n角形ヲ得。又各分點ニ於テ切線ヲ引クトキハ,其圓ニ外接スル正n角形ヲ得。

2. 同シ圓ニ內接(又ハ外接)スル二ツノ正n角形ハ合同ナリ。

3. 與ヘラレタル圓ニ內接又ハ外接スル正方形,正八角形,正十六角形等ヲ作レ。

4. 與ヘラレタル圓ニ內接又ハ外接スル正三角形,正六角形,正十二角形等ヲ作レ。

50. 圓ト三角形

定理 四十二. 任意ノ三角形ニハ內接圓及ビ外接圓各一ツアリ,而シテ各唯一ツニ限ル。內接圓及ビ外接圓ノ中心ハ夫々內心及ビ外心ナリ。

(證明ハ略ス。54,55頁ノ例題7,8,10參照)

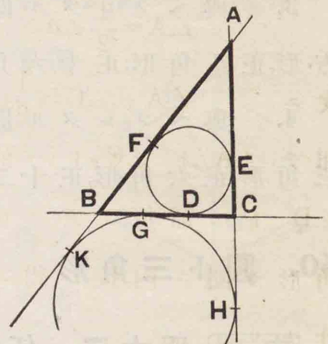
例題

1. 三角形ノ一邊及ビ他ノ二邊ノ延長ニ切スル圓ヲ其三角形ノ**傍接圓**トイフ,其中心ハ**傍心**ナリ。一ツノ三角形ハ三ツノ傍接圓ヲ有ス。

(55頁例題11參照)

2. △ABCノ內接圓ガ邊BC, CA, ABニ切スル點ヲ夫々D, E, Fトシ,同シ三角形ノ邊BCニ

切スル傍接圓ガ邊BC及ビ邊 AC, AB ノ延長ニ切スル點ヲ夫々 G, H, K トス。



今 $BC=a, CA=b, AB=c,$

$$\frac{a+b+c}{2}=s$$

トスルトキハ,

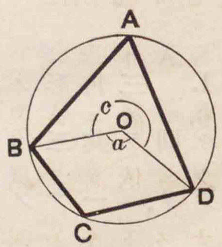
$AK=AH=s,$ $FK=EH=a,$

$AF=AE=s-a,$ $BG=BK=s-c,$

$BD=BF=s-b,$ $CH=CG=s-b,$

$CE=CD=s-c,$ $GD=b-c$ 又ハ $c-b.$

51. 圓ト四角形



任意ノ四角形ハ必ズシモ外接圓ヲ有セズ,之ヲ有シ得ルタメニハ或ル條件ヲ具備スルコトヲ要ス。今ABCDヲ圓ニ內接スル四角形トシ,弧BCD及ビBADノ上ニ立ツ中心角ヲ夫々a及ビcトスレバ,

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle a,\quad \angle C=\frac{1}{2}\angle c.\quad \text{(定理三十七)}$$

故ニ $$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle a+\angle c)=2\text{直角}.$$

卽チ $\angle A$ ト $\angle C$ トハ補角ヲナシ,從ツテ $\angle B$ ト $\angle D$ トモ補角ヲナスコトヲ知ル。コレ卽チ四角形ガ圓ニ內接シ得ルタメニ必ズ具フベキ條件ナリ。

逆ニ,四角形 ABCD ニ於テ其一双ノ相對スル角 A ト C トガ補角ヲナストキハ,其四角形ハ圓ニ內接スルコトヲ得ベシ。何トナレバ三ツノ頂點 A, B, D ヲ過ル圓周ヲ考フルニ,殘リノ頂點 C ハ對角線 BD ノ A ト反對ノ側ニアルヲ以テ, C ガ弧 BAD ノ共軛弧ノ上ニアルトキニ限リテ $\angle A$ ト $\angle C$ トガ補角ヲナスベシ。(定理三十七系 6) 故ニ A, B, C, D ハ同一圓周上ニアリ。

之ニ依ツテ見ルニ,一双ノ相對スル角ガ補角ヲナストキハ四角形ハ確ニ圓ニ內接スベシ。

故ニ次ノ定理ヲ得。

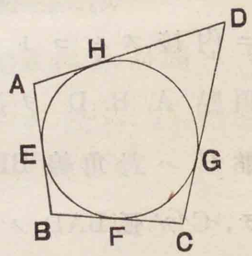
定理 四十三. 四角形ガ圓ニ內接シ得ル

タメノ條件*ハ,一双ノ相對スル角ガ補角ヲナスコトナリ。

定義 四角形ノ外角ニ隣レル內角ト相對スル內角ヲ其外角ノ**內對角**ト云フ。

系 圓ニ內接スル四角形ノ外角ハ其內對角ニ等シ。

次ニ四角形 ABCD ガ圓ニ外接スル場合ヲ考フルニ,邊 AB, BC, CD, DA 上ノ切點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ



$$AE=AH,\quad CG=CF,$$
$$BE=BF,\quad DG=DH.$$

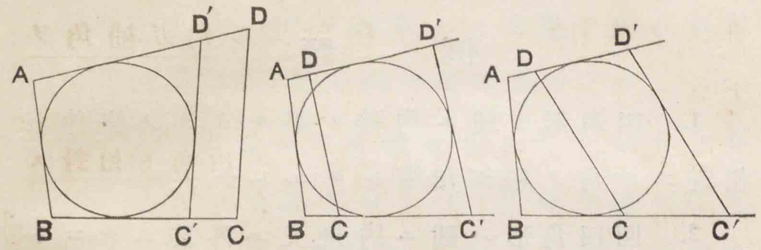
故ニ $(AE+BE)+(CG+DG)$
$=(AH+DH)+(BF+CF),$

卽チ $AB+CD=AD+BC.$ (1)

卽チ相對スル邊ノ和ガ相等シキコトヲ知ル。

逆ニ,四角形 ABCD ニ於テ (1) ノ關係ガ成立スルトキハ其四角形ハ圓ニ外接シ得ベシ。何トナレバ先ヅ三邊 DA, AB, BC ニ切スル圓ヲ畫キ,

*嚴密ニイヘバ「必要ニシテ且十分ナル條件」ナリ。(次節參照)



モシ CD ガ之ニ切セザルナラバ,之ニ平行ナル切線ヲ引キ,邊 AD, BC 又ハソノ延長トノ交點ヲ夫々 D′, C′ トス。然ルトキハ四角形 ABC′D′ ハ圓ニ外接スルヲ以テ

$$AB+C'D'=AD'+BC' \qquad (2)$$

ナル關係ガ成立ス。(1) ヨリ (2) ヲ邊々相減ズレバ

$$CD-C'D'=D'D+C'C,$$

卽チ $CD=D'D+D'C'+C'C.$

コレ不合理ナリ。(64頁例題 3) 故ニ CD ハ同ジ圓ニ切セザル可カラズ。

依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 **四十四.** 四角形ガ圓ニ外接シ得ルタメノ條件*ハ,相對スル邊ノ和ガ相等シキコトナリ。

*嚴密ニイヘバ「必要ニシテ且十分ナル條件」。(次節參照)

例　　題

1. 四角形ガ圓ニ內接シ得ルタメノ條件ハ相對スル角ノ和ガ相等シキコトナリ。

2. 凹四角形ハ圓ニ內接,又ハ外接スルコトナシ。

3. 平行四邊形ガ圓ニ內接スルトキハ矩形ニシテ,外接スルトキハ菱形ナリ。

4. 圓ニ內接スル四角形ノ相對スル二角ノ各二等分線ガ再ビ圓ト交ル二點ヲ結ベバ一ツノ直徑トナル。

5. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線 DE ガ邊 AB, AC 或ハソノ延長ト交ル點ヲ D, E トスレバ B, D, E, C ハ同一圓周上ニアリ。

6. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ,其足 D ヨリ邊 AB, AC ニ夫々垂線 DE, DF ヲ引クトキハ,四點 A, E, D, F 及ビ B, E, F, C ハ夫々一ツノ圓周上ニアリ。

7. 圓ノ直徑 BA ノ延長上ノ一點 L ヨリ任意ノ割線 LDC ヲ引キ,又直線 LAB ニ垂線 LX ヲ

作リ, LX ト BC, BD ノ延長トノ交點ヲ夫々 N, M トスレバ M, N, C, D ハ同一圓周上ニアリ。

8. 三ツノ定レル直線 a, b, c アリ。a, b ノ交點ヲ P; b, c ノ交點ヲ Q トス。P, Q ヲ過ル任意ノ圓ガ a, c ト交ル點ヲ夫々 A, C トスレバ,直線 AC ハ一定ノ方向ヲ有ス。

9. 圓ニ內接スル等邊多角形ハ正多角形ナリ。

10. 圓ニ內接スル等角多角形ハ,頂點ノ數ガ奇數ナラバ正多角形ナリ。偶數ナルトキハ必ズシモ然ラズ。

11. 圓ニ外接スル等角多角形ハ正多角形ナリ。

12. 圓ニ外接スル等邊多角形ハ邊ノ數ガ奇數ナラバ正多角形ナリ。偶數ナルトキハ必ズシモ然ラズ。

13. ABCD ヲ圓ニ內接スル四邊形トシ, AB, DC ノ延長ノ交點ヲ P; DA, CB ノ延長ノ交點ヲ Q トス。$\angle APD=20°$, $\angle CQD=40°$ ナルトキ,此四邊形ノスベテノ角ヲ求メヨ。

14. OA, OB ハ O ヲ中心トスル圓ノ互ニ垂直

ナル二ツノ半徑ニシテ, AX, BY ハ任意ノ平行ナル二ツノ弦ナリトセバ, AY, BX ハ互ニ垂直ナリ。

15. A, B ニテ相交ル二圓ノ中一ツノ圓周上ノ任意ノ點 P ヲ A, B ニ結ブ直線ト他ノ一ツノ圓トノ交點ヲ夫々 X, Y トスレバ, XY ハ第一ノ圓ノ P ヲ過ル直徑ト直交ス。

16. 前題ニ於ケル弦 XY ノ長サハ P ノ位置ニ關セズ一定ナリ。

17. 與ヘラレタル圓ニ內接スル三角形ヲ畫キ,其三ツノ角ヲシテ他ノ與ヘラレタル三角形ノ三ツノ角ニ夫々等シカラシメヨ。

18. 與ヘラレタル圓ニ外接シ與ヘラレタル三角形ト等シキ角ヲ有スル三角形ヲ作レ。

52. 必要ナル條件, 十分ナル條件

アル事ガ成立スルタメニ必ズ滿足セザル可カラザル條件ヲ**必要ナル條件**トイフ。

又アル條件ガ滿足セラルレバソノ事ガ必ズ成立スルトキハ其條件ヲ**十分ナル條件**トイフ。

例 1. 二ツノ圓ノ中心ヲ O, O'; ソノ半徑ヲ夫々

r, r' トスレバ,兩圓ガ外切スルタメニハ必ズヤ

$$OO'=r+r' \qquad (1)$$

ナル條件ガ滿足セシメラレザル可カラズ。(定理三十四)故ニ(1)ハ此二ツノ圓ガ外切スルタメノ必要ナル條件ナリ。

又逆ニ(1)ナル條件ガ滿足セシメラルヽトキハ二ツノ圓 O, O' ハ必ズ外切ス。故ニ(1)ハマタ此二ツノ圓ガ外切スルタメノ十分ナル條件ナリ。

之ヲマトメテ次ノ如ク言フコトヲ得。

「二ツノ圓ガ外切スルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ兩圓ノ中心ノ間ノ距離ガ兩半徑ノ和ニ等シキコトナリ」。

例 2. 前例ノ二ツノ圓ニ於テ,モシ兩圓ガ相交ルトセバ

$$OO'<r+r' \qquad (2)$$

及ビ

$$OO'>r\sim r' \qquad (3)$$

ナル條件ガ滿足セシメラレザル可カラズ。故ニ(2)及ビ(3)ハ何レモ必要ナル條件ナリ。

然レドモ(2)ノミニテ(3)ヲ伴ハザルトキハ OO' ハ $r\sim r'$ ニ等シキコトモ,又ハ之ヨリ小ナルコトモ起リ得ベク,從ツテ兩圓ハ必ズシモ相交ルトハ限ラズ。故ニ(2)ダケニテハ兩圓ガ相交ルタメノ十分ナル條件ニアラズ。

同樣ニ,(3)ダケニテモ十分ナル條件ニアラズ。

之ニ反シテ(2)ト(3)トガ同時ニ滿足セシメラルヽト

キハ兩圓ハ確ニ相交ルベシ。故ニ(2)ト(3)トヲ合セテ始メテ十分ナル條件トナルナリ。

注意 此場合ニ若シ必要ナル條件ダケヲ求ムルナラバ(2)又ハ(3)ノ一方ノミヲ擧グルモ可ナレドモ,必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求ムルナラバ必ズ(2)及ビ(3)ヲ列擧セザル可カラズ。

例 3. 一ツノ四邊形ガ平行四邊形ナルトキハ

(I) 二双ノ相對スル邊ガ夫々平行ナリ,

(II) 一双ノ相對スル邊ガ相對シク且平行ナリ,

(III) 二ツノ對角線ガ各他ヲ二等分ス。

サレバ(I), (II), (III)ハ何レモ一ツノ四邊形ガ平行四邊形ナルタメノ必要ナル條件ナリ

又逆ニ(I), (II), (III)ノ何レカ一ツダケニテモ成立スルトキハ其四邊形ハ平行四邊形ナリ。故ニ(I), (II), (III)ハ各(一ツダケニテ)十分ナル條件ナリ。

注意 此場合ニハ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ擧ゲント欲セバ(I), (II), (III)ノ何レカ一ツヲ言ヘバヨシ,タダソノ異ナル所ハ條件ヲ邊ニツイテ述ブルカ,對角線ニツイテ述ブルカニアリ,要スルニコレ注目スル要點ノ相違ニ過ギズ,論理上ハ何レニテモ可ナリ。

(I)ハ平行四邊形ノ定義ヲソノマヽ述ベタルモノナルガ,一般ニ或ル事ニ對シテ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求ムル問題ニ於テハソノ事ノ定義トハ異ナル點ニ注目セル條件ヲ求ムルヲ常トス。

例 4. 四角形ガ圓ニ內接シ得ルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ一双ノ相對スル角ガ補角ヲナスコトナリ。(定理四十三)

例題

1. 四邊形ガ圓ニ外接シ得ルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求メヨ。

2. 二直線 l, m ガ他ノ一直線 g ト交ルトキ, l, m ガ平行ナルタメニ必要ナル條件ヲ(例ヘバ同位角,錯角等ニ注目シテ)求メヨ。又十分ナル條件ハ如何。

3. 二ツノ圓ガ相切スルタメノ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求メヨ。

4. 四邊形 ABCD ニ於テ對角線ノ交點ヲ O トセバ,此四邊形ガ矩形ナルタメニハ

$$OA=OB=OC=OD$$

ナルコトガ必要ニシテ且十分ナリ。

5. 三ツノ線分 a, b, c ヲ邊トスル三角形ヲ作リ得ルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件如何。

雜題

1. 圓周ノ十分ノ一ノ弧ニ對スル圓周角ハ何度ナルカ。又十五分ノ一ノ弧ニ對スル圓周角ハ何度カ。

2. 二等邊三角形ノ等邊ノ一ツヲ直徑トシテ畫ケル圓ハ底邊ノ中點ヲ過ル。

3. 相交ル二圓ノ交點A,Bヲ過ギリ弦PAQ,RBSヲ引ケバ直線PR,QSハ平行ナリ。

4. 二圓ノ切點Aヲ過ル二直線PAQ,RASヲ引キ圓周トP,Q,R,Sニ交ハラシムレバ弦PR,QSハ平行ナリ。

5. 二圓ガ互ニ切スルトキ切點ヲ過ル直線ガ再ビ二圓ト交ハル二點ニ於ケル切線ハ互ニ平行ナリ。

6. Pハ中心Cナル圓周上ノ一點ナリ,Pニ於ケル切線ト半徑CAノ延長トノ交點ヲTトス,PNヲCTニ垂直ニ引クトキハ,APハ∠TPNヲ二等分ス。

7. 圓周上ノ一點Cニ於テ其圓ニ切線ヲ引キ,直徑ABノ一端Aヨリ此切線ニ垂線ADヲ引クトキハ,ACハ角BADヲ二等分ス。

8. 圓ノ直徑ABノ一端Aヨリ圓周上ノ一點Cニ於ケル切線ニ垂線ADヲ引キ,其延長トBCノ延長ト交ル點ヲEトスレバAE=ABナリ。

9. 圓ノ割線ト切線トガ相交ルトキハ其ナス角ハ此等ノ二直線ノ間ニ夾マレタル二弧ノ差ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

10. 圓ノ二切線ノナス角ハ此二切線ノ間ニ夾マレタル二弧ノ差ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

11. 內心ト外心トガ一致スル三角形ハ如何ナル三角形ナルカ。

12. 三角形ノ一頂點ガ內心及ビ外心ト共ニ一直線上ニアルトキハ,コノ三角形ハ二等邊ナリ。

13. 圓ニ內接スル四邊形ノ外角ノ二等分線ト其內對角ノ二等分線トハ同ジ圓ノ周上ニテ出會フ。

14. 中心Oナル圓周上ノ一點Aヲ過ル總テノ弦ハOAヲ直徑トスル圓周ニヨリテ二等分セラル。

15. 二圓ガAニ於テ內切スルトキ,ソノ內圓ニBニ於テ切スル外圓ノ弦ヲ引クトキハ,直線ABハ此弦ニ對スル弧ヲ二等分ス。

又二圓ガ外切シ一ツノ圓ノ弦ノ延長ガ他ノ圓ニ切スルトキハ如何。

16. Pニ於テ內切スル二圓ヲ一割線ニテ截リ,ソノ交點ヲ順次ニA, B, C, Dトスレバ

$$\angle APB = \angle CPD \quad ナリ。$$

又二圓ガ外切スルトキハ如何。

17. 二圓相切(內切又ハ外切)スルトキ切點ヲ過ギル任意ノ直線ハ二ツノ圓ヨリ相等シキ角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ル。

18. 一ツノ弦ニ對スル弧ノ中點ハ其弦及ビ其一端ニ於ケル切線ヨリ等距離ニ在リ。

19. 圓ニ內接スル三角形ノ一ツノ頂點ヨリ底邊ニ引ケル垂線ノ足ハ其垂線ノ延長ガ圓周ト出會フ點ト垂心トノ中點ナリ。

20. 三角形ノ一ツノ頂點ヨリ垂心ニ至ル距離ハ外心ヨリ其頂點ニ對スル邊ニ至ル距離ノ二倍ナリ。

21. 三角形ノ各頂點ト垂心トノ中任意ノ三點ヲ過ル圓ハ皆相等シ。

22. △ABCノ頂點B, Cヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々E, Fトスレバ,BCノ中點トEFノ中點トヲ結ブ直線ハEFト直交ス。

23. 三角形ABCニ於テ, ACハABヨリ大ナリトス。今AC上ニ$AB=AB'$ヲ取リ,ABノ延長上ニ$AC=AC'$ヲ取リB', C'ヲ結ブ直線ガABCノ外接圓ト交ル點ヲD, Eトスレバ,三角形ADEハ二等邊ナリ。

24. 定點Aニ於テ定角ヲナシテ交ル任意ノ二直線ニ他ノ定點Bヨリ垂線BP, BQヲ引クトキハ, PQハ定長ニシテ且定圓ニ切ス。

25. 一ツノ圓ノ與ヘラレタル弦ヲABトシ,同圓周上ノ與ヘラレタル點ヲPトス。Pヲ過リABニヨリテ二等分セラルヽ弦ヲ作レ。

26. 直線XYノ兩側ニアル二定點A, Bヨリ直線XYニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々F, Hトス,直線XY上ニ點Pヲ求メ$\angle APF = \angle HBP$ナラシメヨ。

第四篇
軌跡

53. 軌跡

圓周上ノ點ハ皆中心ヨリ半徑ニ等シキ距離ニアリ。逆ニ,中心ヨリ半徑ニ等シキ距離ニアル點ハ皆圓周上ニアリ。故ニ今一定點ヨリ與ヘラレタル距離ニアル點ヲスベテ含ミ,然ラザル點ハ一ツモ含マザル如キ圖形ハ何カト問ハバ,其ハソノ定點ヲ中心トシ,與ヘラレタル距離ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ナリトイハザル可カラズ。斯クノ如ク一般ニ與ヘラレタル條件ニ適スル點ヲスベテ含ミ,然ラザル點ハ一ツモ含マザル如キ圖形ヲ考フルコトハ屢必要アリ。依ツテ次ノ定義ヲ設ク。

定義 或ル圖形上ノ點ハ皆與ヘラレタル條件ニ適シ,又逆ニ其條件ニ適スル點ハ皆其圖形上ニアルトキハ,其圖形ヲ稱シテ其條件ニ適スル點ノ**軌跡**トイフ。

軌跡トイフ語ヲ用ヒテ圓周ニ關スル上ノ事實ヲ言ヒ表セバ次ノ定理ヲ得。

定理 四十五. 定點ヨリ定距離ニアル點ノ軌跡ハ,其點ヲ中心トシ其定距離ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ナリ。

軌跡ノ意味ヲ更ニ考ヘ直シテ見レバ次ノ如クニモイフコトヲ得。今一ツノ點ガ平面上ニテ變位スルトキ,モシ之ニ或ル條件ヲ附スルトキハ(例ヘバ一定點ヨリ常ニ一定ノ距離ニアルベシト定ムルガ如シ),其點ノ變位ハ之ガタメニ制限セラレテ或ル特殊ノ線又ハ平面ノ一部分ノ上ニノミ變位シ得ルコトトナルベシ。コノ限ラレタル變位ノ範圍ガ卽チ上ニ定義シタル軌跡トイフモノニ當ル。故ニ或ル條件ニ適スル點ノ軌跡トハ,一ツノ點ガ常ニ其條件ニ適スル樣ニ變位スルトキ,其點ノ通過シ得ベキスベテノ範圍ヲイフト考ヘテモ可ナリ。

軌跡ハ一ツノ線(直線又ハ曲線)ナルコトアリ,或ハソノ一部分ナルコトアリ,或ハ幾ツカノ線

ノ集マリテ成レル圖形ナルコトアリ。又條件ノ如何ニヨリテハ平面ノ全部或ハソノ一部分トナルコトモアルベシ。

54. 軌跡ノ斷定法

定理四十五ニ於テ軌跡ガ圓周ナルコトヲ斷定スルニ次ノ二ツノ事實ニ依レリ。

(1) 條件ニ適スル點ハ皆圖形上ニアリ。

(2) 圖形上ニアル點ハ皆條件ニ適ス。

但シココニイフ條件トハ「定點ヨリ定距離ニアリ」トイフ條件ノコトニシテ,圖形トハ「其定點ヲ中心トシ,其定距離ヲ半徑トスル圓周」ノコトナリ。

(1)ト(2)トハ互ニ逆ナリ。コノ兩方ヲ證明セザレバ軌跡ハ完全ニ決定セラレズ。何トナレバ(1)ノミニテハ條件ニ適セザル點モ同ジ圖形ノ上ニ存在スルカモ知レズトイフ疑アリ,從ツテ軌跡ハ其圖形ノ全部ナルカ一部ナルカ不明ナリ。又(2)ノミニテハ其圖形以外ニモナホ條件ニ適スル點ガ存在スルカモ知レズトイフ疑アリ,從ツテ軌跡ハ其圖形ダケニ止マルヤ否ヤ不明ナリ。故ニ(1),(2)ハ兩方トモ省略ス可カラズ。

然レドモ一般ニ或定理ヲ證明スル代リニ其對偶ヲ證明スルモ可ナルヲ以テ(第34節),定理四十五ヲ證明スルニハ(1)ト(2)トヲ證明スル代リニ其一方又ハ兩方ノ對偶ヲ取リテ之ヲ證明シテモヨシ。(1),(2)ノ對偶ハ夫々次ノ如シ。

(1′) 圖形上ニアラザル點ハ條件ニ適セズ。

(2′) 條件ニ適セザル點ハ圖形上ニアラズ。

之ニ依ツテ見レバ定理四十五ニ限ラズ,一般ニ或ル圖形ガ或ル條件ニ適スル點ノ軌跡ナルコトヲ證明スルニハ次ノ四種ノ方法アルコトヲ知ルベシ。

〔A〕 (1)ト(2)トヲ證明スル法,

〔B〕 (1)ト(2′)トヲ證明スル法,

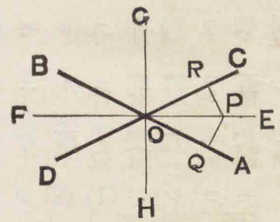
〔C〕 (1′)ト(2)トヲ證明スル法,

〔D〕 (1′)ト(2′)トヲ證明スル法。

次ニ各種ノ證明法ノ例ヲ示サン。

定理 四十六. 二ツノ相交ル定直線ヨリ

等距離ニアル點ノ軌跡ハ,其二直線ノナス二双ノ對頂角ノ各ヲ二等分スル二ツノ直線ナリ。



特述 AB, CD ヲ O ニ於テ相交ル二ツノ定直線トス。然ルトキハ此二直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ二双ノ對頂角 AOC, BOD 及ビ COB, AOD ノ各ヲ二等分スル二ツノ直線 EOF 及ビ GOH ナルコトヲ證明セントス。

證明 〔A〕ノ方法ニヨリテ證明スルコト下ノ如シ。

(1) 今二直線 AOB, COD ヨリ等距離ニアル一點アリトシ,之ヲ P ト名付ク。然ルトキハ P ヨリコレラノ二直線ニ夫々引ケル垂線 PQ, PR ハ相等シク,從ツテ $\triangle POQ \equiv \triangle POR$ ナルコト明カナリ。故ニ $\angle POQ = \angle POR$, 卽チ P ハ二直線 AOB, COD ノナス角ノ二等分線 EOF, GOH ノ中ノ何レカ一ツノ上ニアリ。

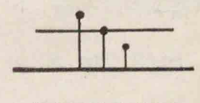
(2) 逆ニ EOF, GOH ノ中ノ何レカ一ツノ上ニ任意ノ一點 P ヲ取リ,之ヨリ二直線 AOB, COD ニ夫々垂線 PQ, PR ヲ引クトキハ $\triangle POQ \equiv \triangle POR$, 從ツテ $PQ = PR$ ナルコトハ容易ニ證明セラル。

故ニ二直線 AOB, COD ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,二直線 EOF, GOH ナリ。

定理 **四十七.** 定直線ヨリ定距離ニアル點ノ軌跡ハ,其直線ニ平行ニシテ之ヨリ其距離ニアル二ツノ直線ナリ。

證明 〔B〕ノ方法ニヨリテ證明センニハ次ノ二ツノコトヲイヘバヨシ。

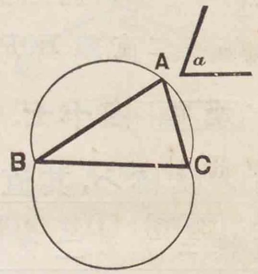
(1) 定直線ヨリ定距離ニアル點ハ,斯クノ如キ二ツノ平行線ノ中何レカ一ツノ上ニアリ。



(2) ソノ直線ヨリソノ距離ニアラザル點ハ斯クノ如キ平行線ノ何レノ上ニモアラズ。

(學生自ラコノ證明ヲ完成セヨ)。

定理 四十八. 三角形ノ底邊ノ位置及ビ大サガ一定シ且頂角ノ大サモ一定ナルトキ,其頂點ノ軌跡ハ底邊ノ上ニ立チ與ヘラレタル頂角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧ナリ。



特述 三角形ABCニ於テ底邊BCノ位置及ビ大サガ一定シ且頂角Aノ大サガ一定角αニ等シトス。然ルトキハ頂點Aノ軌跡ハBCノ上ニツノ兩側ニ夫々立チテαニ等シキ角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧ナルコトヲ證明セントス。

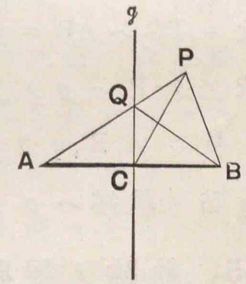
證明 〔C〕ノ方法ニヨリテ證明センニハ次ノ二ツノコトヲイヘバヨシ。

(2) 斯クノ如キ弓形ノ弧上ニ任意ノ一點Aヲトレバ, $\angle BAC=\angle\alpha$ ナリ。(定理三十七系3)

(1′) 斯クノ如キ弓形ノ弧上ニアラザル任意ノ點ヲAトスレバ, $\angle BAC=\angle\alpha$ ナラズ。

(定理三十七系6)

定理 四十九. 二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,其二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ナリ。



特述 A, Bヲ二定點トス。然ルトキハ此二點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,線分ABノ垂直二等分線gナルコトヲ證明セントス。

證明 〔D〕ノ方法ニヨリテ證明スルコト下ノ如シ。

(1′) g ノ外ニ任意ノ一點PヲトリPA及ビPBヲ結ベバ,何レカ一方ハ必ズgト交ハル(公理七),其交點ヲQトス。然ルトキハ

$$QA=QB, \qquad \text{(53頁例題 1)}$$

從ツテ $$PA\lessgtr PB \qquad \text{(定理十三)}$$

ナリ。故ニPハ條件ニ適セズ。

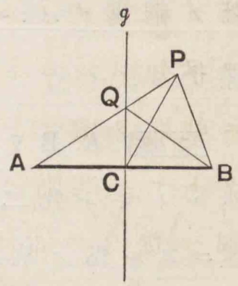
(2′) 逆ニ $PA\lessgtr PB$

ナル如キ一點Pヲ取リ;之ト線分ABノ中點Cトヲ結ベバ, $\triangle PCA$, $\triangle PCB$ ニ於テ

$CA = CB$, PC ハ共通, $PA \lessgtr PB$.

故ニ $\angle PCA \lessgtr \angle PCB$.

(定理十八)



故ニ PC ハ AB ニ垂直ナラズ。

依ツテ P ハ g ノ上ニアラズ。

故ニ A, B ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ g ナリ。

55. 軌跡ノ限界

軌跡ヲ求ムルトキ其軌跡ガ直線又ハ圓周ノ一部分ナルヲ誤リテ全部トナスコトアリ,又全部ナルヲ誤リテ一部分トナスコトアリ。卽チ軌跡ノ**限界**(範圍)ニ就キテ注意ヲ要ス。

例ヘバ定理四十八ニ於テ線分 BC ニ關シテ一ツノ側ニアル弧ノミヲ取リテハ軌跡トシテ不完全ナリ。又 ABC ノ全圓周ヲトルトキハ必要以外ノ部分ヲ含ムヲ以テコレマタ誤ナルコト勿論ナリ。

56. 軌跡ノ索メ方

前節ノ諸定理ニ於ケルガ如キ簡單ナル軌跡ハ最初ヨリ直チニ之ヲ知ルコトヲ得レドモ,條件ガ稍複雜ナルモノニ至ツテハ其軌跡ノ圖形ヲ推知スルコト困難ナル場合多シ。ソノ場合ニ軌跡ヲ索メンニハ,先ヅ條件ニ適スル一點アリトセバ其點ハ如何ナル性質ヲ有スベキカヲ調べ,從ツテ如何ナル線上ニアラザル可カラザルカヲ推定スベシ。而シテ後,逆ニ今考ヘタル線上ニ任意ノ一點ヲトリテソレガ實際條件ニ適スルヤ否ヤヲ考フベシ。定理四十六ノ證明ハ此手段ニヨリタルモノナリ。

例題

1. 一定點ヲ過リ,定長ノ半徑ヲ有スル圓ノ中心ノ軌跡如何。

2. 一定直線上ノ一定點ニ於テ之ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。

3. 相交ル二定直線ノ各ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。若シ二定直線ガ平行ナラバ如何。

4. 一定點ト一定直線上ノ任意ノ一點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡如何。

5. 一定點ト一定圓周上ノ任意ノ一點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡如何。

6. 一定圓ニ於テ,一定點ヲ過ル弦ノ中點ノ軌跡如何。

7. 一定圓周上ニ二定點 A, B アリ,同ジ圓周上ニ任意ノ一點 C ヲトリ,弦 AC ヲ C ヲ通シテ延長シソノ上ニ CB=CD ナル様ニ點 D ヲ取ルトキ, D ノ軌跡如何。

8. AB, CD ハ一定圓ニ於ケル二ツノ弦ニシテ, AB ハ位置及ビ大サガ定マリ, CD ハ大サノミ定マレリトス。弦 AC, BD (又ハ其延長) ノ交點ノ軌跡如何。

9. 定マレル長サノ線分ノ兩端ガ,垂直ニ相交ル二定直線上ニ一ツヅヽアリテ動クトキ,其線分ノ中點ノ軌跡如何。

10. 相交ル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ一定ナル如キ點ノ軌跡如何。モシ二定直線ガ平行ナラバ如何。

11. 三角形ノ底邊ノ位置及ビ大サト頂角ノ大サトガ定マレルトキ,其三角形ノ

(1) 內心　(2) 重心

(2) 頂角ノ內部ニアル傍心

(4) 垂心

ノ各軌跡如何。

57. 軌跡ノ交リ

作圖題ハ結局二ツノ條件ヲ兼ネ備フル點ヲ求ムル問題ニ歸着スルモノ多シ。

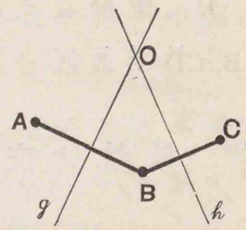
例ヘバ「與ヘラレタル三點ヲ過ル圓ヲ畫ケ」トイフ作圖題ヲ解クニハ其圓ノ中心ヲ求ムレバヨシ。故ニ換言スレバ「三定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ」トイフ問題ト同ジコトナリ。今其三定點ヲ A, B, C トスレバ,求ムル點ハ

(1) A, B ヨリ等距離ニアルコト,

(2) B, C ヨリ等距離ニアルコト

ノ二條件ヲ兼ネ備フル點ナラザル可カラズ。(A, C ヨリ等距離ニアルコトハ (1) ト (2) ヨリ當然ノ結果トシテ出デ來ルヲ以テ特ニ列擧スルヲ要セズ)。

扨(1)ニ適スル點ノ軌跡ハ線分ABノ垂直二等分線gナルガ故ニ,今求ムル中心ハg上ニアラザル可カラズ。同理ニヨリマタ線分BCノ垂直二等分線hノ上ニモアラザル可カラズ。結局求ムル點ハgトhトノ交點Oナラザル可カラズ。斯クシテ中心ヲ決定シ依ツテ求ムル圓ヲ畫クコトヲ得ベシ。(第40節參照)



一般ニ甲乙二ツノ條件ヲ兼ネ備フル點ヲ求ムルニハ,甲ノ條件ニ適スル點ノ軌跡ト,乙ノ條件ニ適スル點ノ軌跡トノ交リヲ求ムレバヨシ。

此方法ハ作圖題ヲ解クトキニ屢利用セラルルモノナリ。

例 題

1. 三定點A,B,Cアリ,A,Bヨリ等距離ニアリ且Cヨリ與ヘラレタル距離ニアル點ヲ求メヨ。

2. 四定點A,B,C,Dヨリ等距離ニアル一點ハ常ニ求メ得ラルルカ。

3. 相交ル二定直線ニ至ル距離ガ相等シク且二定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

4. 位置及ビ大サノ定マレル二ツノ線分AB, CDアリ。今一點Pヲ求メテ∠APBヲ定角αニ等シカラシメ,且∠CPDヲ定角βニ等シカラシメヨ。

雜 題

1. 一定點ヨリ他ノ一定點ヲ中心トスル同心圓ニ引ケル切線ノ切點ノ軌跡ヲ求ム。

2. 一ツノ圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム。

3. 一線分ノ一端ヲ恒ニ一定圓周上ニアラシメ,此線分ヲ他ノ一定直線ニ平行ナラシメツツ動カストキ,此線分ノ他ノ一端ノ軌跡如何。

4. 定長ナル等邊ヲ有スル二等邊三角形ABC ノ底邊 BC ガ定直線上ニアリ,且 B ハ定點ナリトス。CA ヲ A ノ方ニ延長シテ CA ニ等シク AP ヲトルトキ,點 P ノ軌跡ヲ求ム。

5. AB ヲ定圓ノ定弦トシ, AC ヲ動弦トス。AB, AC ヲ隣邊トスル平行四邊形 ABDC ノ對角線ノ交點 P ノ軌跡ヲ求ム。

6. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ニ垂直ナル任意ノ直線ガ邊 BA, CA 叉ハ其延長ト交ル點ヲ D, E トス。直線 CD, BE ノ交點ノ軌跡如何。

7. 二ツノ定圓アリ,其交リノ一ツナル A ヲ過リテ一定直線 BAC ヲ引キ二圓ト夫々 B, C ニテ交ラシム。今 A ヲ過リテ任意ノ直線 DAE ヲ引キ二圓ト夫々 D, E ニテ交ラシムレバ, BD, CE ノ交點 P ノ軌跡如何。

8. 相等シキ二ツノ線分 AB, BC アリ。

$$\angle APB = \angle BPC$$

ナル如キ點 P ノ軌跡ハ一ツノ直線,一ツノ弧及ビ二ツノ半直線ヨリナル。

9. ABCD ヲ正方形トス,一點 P ヲトリ

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$$

ナラシムルトキ,點 P ノ軌跡如何。

10. 半徑 5 cm ノ甲乙二圓アリ,甲圓ハ固定シ乙圓ハ甲圓ト $\frac{2}{3}$ 直角ノ交角ヲ保チツツ動クトキ,乙圓ノ中心ノ軌跡如何。(二圓ノ交角トハ其交點ニ於ケル各圓ノ切線ノナス角ナリ。)

11. 與ヘラレタル二直線ニ切シ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

12. 與ヘラレタル一ツノ直線及ビ一ツノ圓ニ切シ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

13. 與ヘラレタル二ツノ圓ニ切シ,與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

14. 底邊,高サ及ビ頂點ヨリ引キタル中線ヲ知リテ,三角形ヲ作レ。

15. 底邊,外接圓ノ半徑及ビ頂點ヨリ引キタル中線ヲ知リテ,三角形ヲ作レ。

16. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ和又ハ差ヲ知リテ,三角形ヲ作レ。

17. 底邊,頂角及ビ內接圓ノ半徑ヲ知リテ,三角形ヲ作レ。

18. 一定點ヲ過リ定圓ニ割線ヲ引キ,此圓ガ此割線ヨリ截リ取ル弦ヲシテ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。

19. 與ヘラレタル圓ニ切線ヲ引キ,他ノ與ヘラレタル圓ガ之ヨリ截リ取ル弦ヲシテ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。

20. 與ヘラレタル直線ニ與ヘラレタル點ニ於テ切シ,且他ノ與ヘラレタル點ヲ過ル圓ヲ畫ケ。

21. 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切シ,且與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

22. 底邊,兩底角ノ差及ビ他ノ二邊ノ差ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

23. 二邊及ビ一中線ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

24. 一邊及ビ二中線ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

25. 三中線ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

26. 頂角,其頂角ニ對スル邊ヘノ高サ及ビ內接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

27. 一角及ビ二ツノ高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

28. 頂角,高サ,三邊ノ和ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

29. 二定點ヲ夫々過リテ互ニ平行ナル二直線ヲ引キ,他ノ一双ノ平行線ト交ラシメテ菱形ヲ作レ。

第五篇

面積

第一章　基本性質

58. 面積比較ノ原則

定義　幾ツカノ直線又ハ曲線ヲ以テ限界セラレタル平面ノ一部ヲ稱シテ**平面形**又ハ單ニ**形**トイフ。

平面形ノ**面積**トハ其限界内ニアル平面ノ部分ノ大サ(卽チ廣サ)ノコトナリ。

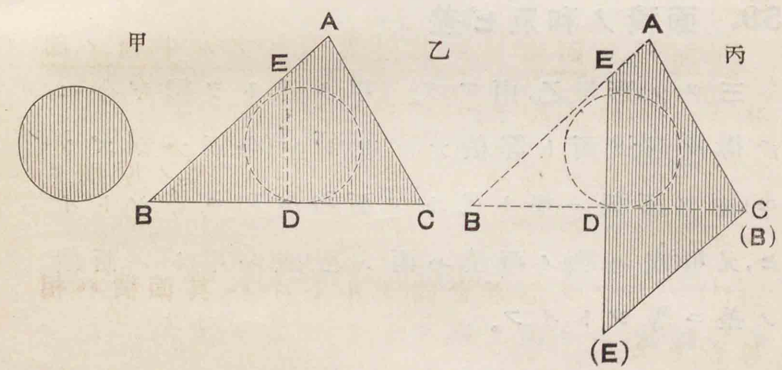
二ツノ形ノ面積ヲ比較スルニハ次ノ原則ニヨルモノトス。

(1)　**二ツノ形ガ合同ナルトキハ,其面積ハ相等シトス。**

(2)　**一ツノ形ガ他ノ形ヲ全ク其内部ニ含ミテナホ餘リアルトキハ,前者ノ面積ハ後者ノ面積ヨリ大ナリトシ,又後者ノ面積ハ前者ノ面積ヨリ小ナリトス。**

(3)　**二ツノ形PトP'トガ合同,又QトQ'トガ合同ナルトキハ,P, Qニ夫々P', Q'ヲ繼ギ足シテ得ル形,又ハP, Qヨリ夫々P', Q'ヲ取リ去リタル殘リノ形ハ合同ナラズトモ其面積相等シトス。**

例ヘバ次ノ圖ニ於ケル三ツノ形ノ面積ヲ甲,乙,丙ト名付クレバ,甲ハ乙ヨリ小,乙ハ甲ヨリ大ナリ,又乙ト丙トハ相等シ,從ツテ甲ハ丙ヨリ小,丙ハ甲ヨリ大ナリ。(甲ト乙トノ關係ハ(2)ニヨリ,乙ト丙トノ關係ハ(3)ニヨル。)



二ツノ形ノ面積ガ相等シキコトヲ**等積**ナリトイフ。

合同ナル形ハ等積ナリ,然レドモ等積ナル形ハ必ズシモ合同ナラズ。

例 題

1. 一ツノ三角形ノ二邊ト其夾角トガ,夫々他ノ三角形ノ二邊ト其夾角トニ相等シキトキハ,此二ツノ三角形ハ等積ナリ。

2. 二ツノ矩形アリ,一ツノ矩形ノ相隣レル二邊ガ,夫々他ノ矩形ノ相隣レル二邊ニ等シキトキハ,此二ツノ矩形ハ等積ナリ。

59. 面積ノ和及ビ差

三ツノ形甲,乙,丙アリ。甲ト乙トヲ繼ギ合セテ得ル形ガ丙ト等積ナルトキハ(合同ナラズトモ),丙ノ面積ハ甲ト乙トノ面積ノ和ニ等シトイヒ,又甲(或ハ乙)ノ面積ハ丙ト乙(或ハ甲)トノ面積ノ差ニ等シトイフ。

例 題

1. 平行四邊形ノ一ツノ對角線上ノ一點ヲ過リテ各邊ニ平行ナル直線ヲ引キ,全形ヲ四ツノ平行四邊形ニ分ツトキ,始メニ取リタル對角線ヲ其内部ニ有セザル二ツノ平行四邊形ハ等積ナリ。

定義 斯クノ如キ二ツノ形ヲ元ノ平行四邊形ノ對角線ニ沿フ平行四邊形ノ**餘形**トイフ。

2. 與ヘラレタル平行四邊形ト等積ニシテ且之ト一角ヲ共有シ,與ヘラレタル長サノ一邊ヲ有スル平行四邊形ヲ作レ。

3. 三ツノ矩形 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ アリ,其面積ヲ夫々 S, S_1, S_2 トス。今モシ

$$AB=A_1B_1=A_2B_2,$$

$$BC=B_1C_1+B_2C_2$$

ナリトセバ $S=S_1+S_2$ ナリ。

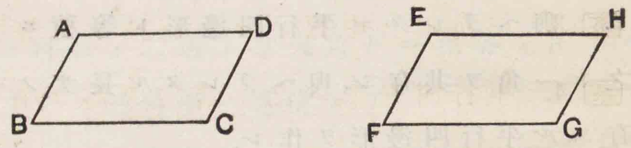
定義 平行四邊形ノ任意ノ一邊ヲ**底邊**又ハ單ニ**底**ト稱スルコトヲ得,ソノトキニハ之ト其對邊トノ距離ヲ其平行四邊形ノ**高サ**トイフ。

4. 底及ビ高サトイフ語ヲ用ヒテ,前題ノ事實ヲ述ベヨ。又矩形ガ三ツヨリ多クアル場合ニ同樣ノ定理ヲ述ベ,且之ヲ證明セヨ。

60. 多角形ノ面積

定理 **五十.** 二ツノ平行四邊形ニ於テ其

底ト高サトガ夫々相等シキトキハ,兩形ハ等積ナリ。

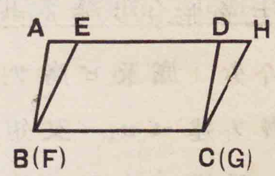


特述　二ツノ平行四邊形 ABCD, EFGH ニ於テ底邊 BC, FG ガ相等シク,又之ニ對スル高サモ相等シトセバ,兩形ハ等積ナルコトヲ證明セントス。

證明　EFGH ヲ ABCD ノ上ニ重ネ,邊 FG ガ邊 BC ト合シ,且兩形ハ邊 BC ノ同シ側ニアル様ニセヨ。

然ルトキハ AD ト EH トハ同一直線上ニアルコト明カニシテ,又

△DCH≡△ABE.



コノ各ヲ全形 ABCH ヨリ

引ケバ　　ABCD=EBCH.

卽チ　　ABCD=EFGH　ヲ得.

系 1.　等底,等高ヲ有スル二ツノ三角形ハ等積ナリ。

系 2.　等底(又ハ等高)ニシテ等積ナル二ツノ三角形ハ等高(又ハ等底)ナリ。

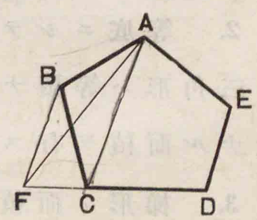
系 3.　三角形ノ中線ハソノ面積ヲ二等分ス。

系 4.　平行四邊形ハ之ト等底,等高ヲ有スル矩形ト等積ナリ。

系 5.　三角形ノ面積ハ之ト等底,等高ヲ有スル矩形ノ面積ノ半分ニ等シ。

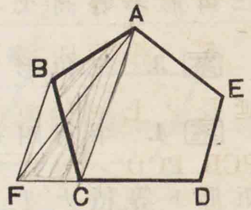
作圖題　與ヘラレタル(三角形ナラザル)多角形ト等積ニシテ,邊數ガ之ヨリ一ツ少キ多角形ヲ作レ。

特述　ABCDE ヲ與ヘラレタル五角形トス。(三角形ナラザル限リ,何角形トスルモ同様ナリ。)今之ト等積ナル四角形ヲ作ラントス。



作圖　B ヲ過リテ對角線 AC ニ平行ニ BF ヲ引キ,邊 DC ノ延長ト F ニ於テ交ラシメ, AF ヲ結ブベシ。然ルトキハ四角形 AFDE ハ卽チ求ムル所ノモノナリ。

證明 三角形 ABC, AFC ハ底邊 AC ヲ共有シ, 且同ジ平行線 AC, BF ノ間ニ夾マルルヲ以テ等高ナリ。



故ニ　　$\triangle ABC = \triangle AFC$.

兩邊ニ ACDE ヲ加フレバ

$$ABCDE = AFDE.$$

應用 1. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル三角形ヲ作レ。

應用 2. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル矩形ヲ作レ。

例　題

1. 平行四邊形ヲ適當ニ截リ, 之ヲ繼ギ合セテ矩形ヲ作レ。

2. 等底ニシテ等高ナラザル平行四邊形或ハ三角形ハ等積ナラズ, ソノ高サノ大ナル方ガ大ナル面積ヲ有ス。

3. 梯形ノ面積ハ其平行ナル二邊ノ和ヲ底邊トシ, 其二邊間ノ距離ヲ高サトスル矩形ノ面積ノ半分ニ等シ。

4. 與ヘラレタル五角形ト等積ニシテ, 且其一邊ヲ共有スル三角形ヲ作レ。

5. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 又ハ其延長ノ上ニ任意ノ一點 P ヲトルトキハ, 三角形 PCB, PCD ハ等積ナリ。

6. 與ヘラレタル二ツノ線分ヲ二邊トスル三角形ノ中ニテ其夾角ガ直角ナルモノガ最大ノ面積ヲ有ス。

7. 定點 A ヨリ定圓 O ニ割線 ABC ヲ引キ $\triangle OBC$ ノ面積ヲ最大ナラシメヨ。

8. 同一ノ底邊ヲ共有スル等積ナル三角形ノ頂點ノ軌跡如何。

9. 與ヘラレタル一角ト一邊トヲ有シ, 且與ヘラレタル平行四邊形ト等積ナル平行四邊形ヲ作レ。

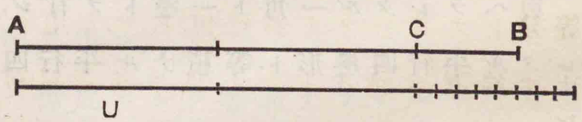
第二章 面積ヲ計ルコト

61. 線分ノ長サ

一定ノ長サノ線分ヲ標準トシテ他ノ任意ノ線分ノ長サヲ之ト比較シ,ソノ幾倍ナルカヲ考フルコトヲ稱シテ其長サヲ**計ル**トイヒ,標準ニ取リタル長サヲ**單位**トイフ。或ル長サヲ計リタル結果ソレガ單位ノ幾倍ナルカヲ數ヲ以テ言ヒ表ストキハ,其數ヲ元ノ長サノ**數値**トイフ。

例ヘバ線分Uノ長サヲ單位トシテ線分ABノ長サヲ計リタルトキ,　　$AB=3U$

ナラバ, ABノ長サノ數値ハ3ナリ。



然レドモ一般ニハABハ必ズシモUノ丁度何倍カニ等シカラズシテ,例ヘバ2倍ヨリハ大,3倍ヨリハ小ナル如キコトアルベシ。然ルトキハABノ中ヨリUノ2倍ダケヲ取リ去リタル殘リCBヲ更ニUヨリ小ナル單位ヲ用ヒテ計ル

コトトス, 其小ナル單位トシテハUヲ幾ツカニ等分シ其一ツヲ取リテ用フルガ普通ナリ。今假リニUヲ八等分シテ其一ツヲ單位トシ,之ニヨリテCBヲ計リタル結果CBガ其單位ノ5倍ニ等シキコトヲ知リタリトセバ

$$AB=2U+\frac{5}{8}U=2\frac{5}{8}U$$

ニシテ, ABノ長サノ數値ハ$2\frac{5}{8}$ナリ。

然レドモコヽニ始メノ單位Uヲ丁度八等分スレバヨシトノコトハ必ズシモ最初ヨリ豫知シ得ラルルコトニ非ズ,又Uヲ幾等分シテモCBハ丁度ソノ何倍カニ等シカラザルカモ知レズ。

依ツテ實際ニハCBノ如何ニ關ハラズ常ニUヲ十等分シテ其一ツヲ新單位トシテ用ヒ,ソレニテナホ端下(ハシタ)ガ殘ルトキハ更ニ其新單位ヲ十等分シタルモノ(卽チ$\frac{1}{100}U$)ヲ第三ノ單位トシ,以下次第ニ斯クシテ進ムモノトス。此方法ニヨレバ前頁ノ場合ハ

$$AB=2U+\frac{6}{10}U+\frac{2}{100}U+\frac{5}{1000}U=2.625U$$

トナリ,ABノ長サノ數値ハ2.625トナル。一般

ニコノ方法ニヨルトキハ數値ノ端數ハ直チニ小數ニヨリテ表サルルヲ以テ便利ナリ。

Uヲ逐次ニ十等分シテ新單位ヲ作リ之ニヨリテABヲ計ルトキ,何程進ミテモ丁度ABヲ計リ盡シ得ザルコトモアルベシ。其場合ニハABノ長サノ數値ハ循環小數又ハ無理數トナル。前者ノ場合ニハ數値ハ分數ヲ以テ精確ニ示シ得レドモ,後者ノ場合ニハ其近似値ヲ適當ナル小數位マデ取ルニ止マルモノトス。

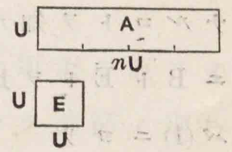
62. 矩形ノ面積

線分ノ長サヲ計リタルト同様ノ考ヲ以テ矩形ノ面積ヲ計ルコトヲ得。卽チ一ツノ定マレル矩形ノ面積ヲ單位トシ,與ヘラレタル矩形ノ面積ガソレノ幾倍ナルカヲ考フレバヨシ。

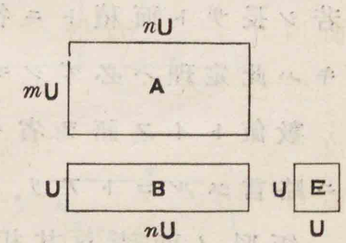
面積ノ單位トシテ普通用ヒラルルモノハ單位ノ長サヲ有スル線分ヲ一邊トスル正方形ノ面積ナリ。之ニヨリテ任意ノ矩形ノ面積ヲ計リ其數値ヲ定ムルニハ次ノ如クスベシ。

長サノ單位ヲUトシ,一邊ガUナル正方形ノ

面積ヲEトス,Eハ卽チ面積ノ單位ナリ。今與ヘラレタル任意ノ矩形ノ面積ヲAトシ,AガEノ幾倍ナルカヲ考ヘントスルニ,便宜上次ノ二ツノ場合ニ分ツ。



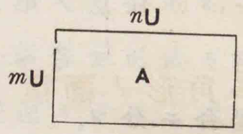
(1) 矩形Aノ一邊ガ丁度Uニ等シク,ソノ隣邊ガnU(nハ其邊ノ長サノ數値)ニ等シキトキハ $A=nE$ ナリ。何トナレバ,一般ニ矩形ノ高サ(又ハ底)ヲ一定ナラシメテ其底(又ハ高サ)ヲ若干倍又ハ若干等分スレバ,其面積モ亦同一ノ數ダケニ倍セラレ又ハ等分セラルルコト明カナレバナリ。(187頁例題3, 4參照) (nガ無理數ナル場合ト雖,何程ニテモ之ニ近キ有理數ノ近似値ヲ取リテ同樣ニ考フルコトヲ得ベシ。)



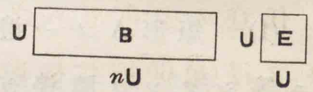
(2) 一般ニ矩形Aノ相隣ル二邊ガ夫々mU, nUナルトキハ,先ヅ別ニU, nUナル二邊ヲ有スル矩形Bヲ作リ,AトBトヲ比較スベシ。コノ兩形ニ於テハnUナル邊

ハ双方相等シキヲ以テ,(1)ニ於ケルト同様ノ論法ニヨリ

$$A=mB$$



ナルコトヲ知ル。然ルニBトEトヲ比較スレバ(1)ニヨリ



$$B=nE$$

ナリ。故ニ

$$A=m(nE)=mnE$$

ナル結果ヲ得。

以上ノ結果ニヨリ次ノ定理ヲ得。

<u>矩形ノ面積ノ數値ハ其相隣ル二邊ノ長サノ數値ノ積ニ等シ。</u>

但シコヽニ面積ノ單位トシテハ長サノ單位ヲ一邊トスル正方形ヲ用フルコトガ必要ナリ,若シ長サト面積トニ各任意ノ單位ヲ用フルトキハ此定理ハ必ズシモ成立セズ。

數値トイフ語ヲ省キテ上ノ定理ヲ次ノ如クニ略言スルコトアリ。

<u>矩形ノ面積ハ其相隣ル二邊ノ長サノ積ニ等シ。</u>

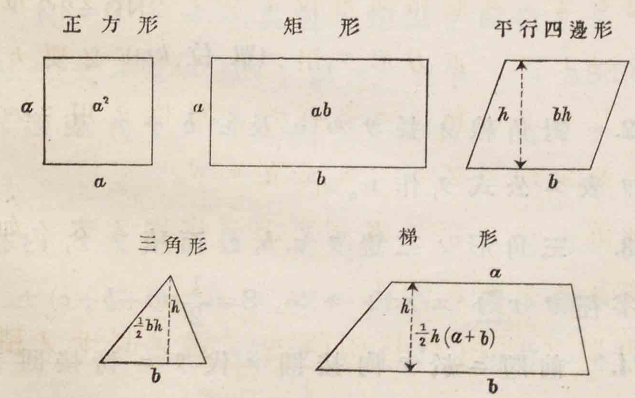
今後面積ノ數値ノコトヲ略シテ單ニ面積トイフコトトス。

63. 多角形ノ面積

任意ノ多角形ハ之ト等積ナル矩形ニ直スコトヲ得(第60節作圖題應用2),從ツテ前節ノ理ニヨリ其面積ヲ求ムルコトヲ得。

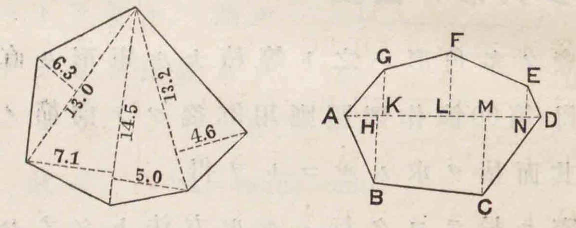
實際ニ於テヨク行ハルル方法トシテハ與ヘラレタル多角形ヲ對角線ニヨリテ若干ノ三角形又ハ梯形ニ分チ,其各形ノ面積ノ和ヲ求ムルニアリ。(次ノ例題ヲ見ヨ。)

簡單ナル面積ノ公式ヲ擧グレバ次ノ如シ。



例 題

1. 次ノ圖ノ如キ多角形ノ面積ヲ求メヨ。



(單位 m)		
	BH=4.5	AH=1.8
	CM=6.2	HK=0.7
	EN=2.0	KL=5.0
	FL=3.6	LM=2.3
	GK=2.9	MN=2.5
		ND=2.2

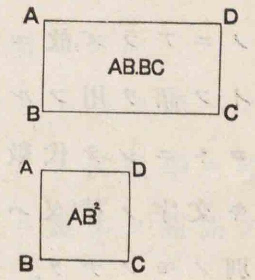
(單位 km)

2. 對角線ノ長サガ a 及ビ b ナル菱形ノ面積ヲ表ス公式ヲ作レ。

3. 三角形ノ三邊ヲ a, b, c, 面積ヲ S, 內接圓ノ半徑ヲ r トスルトキハ, $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ ナリ。

4. 前題ニ於テ內接圓ノ代リニ傍接圓ヲ用フレバ如何。

5. 正多角形ノ周圍,面積及ビ內接圓ノ半徑ノ間ノ關係式ヲ見出セ。



64. 二ツノ線分ノ包ム矩形

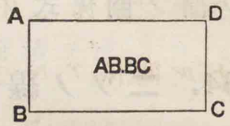
「相隣ル二邊ガ AB, BC ニ等シキ矩形」ノコトヲ「AB, BC ノ包ム矩形」トイヒ,ソノ面積ヲ示スニ AB. BC ト記スコトアリ。

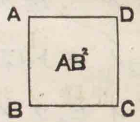
又一邊ガ AB ナル正方形ノコトヲ「AB ノ上ノ正方形」トイヒ,ソノ面積ヲ示スニ AB^2 ト記スコトアリ。

モシ二ツノ線分ヲ各一ツノ文字例ヘバ M, N ニテ表ストキニハ,其包ム矩形ノ面積ヲ示スニハ M.N 又ハ單ニ MN ト記ス。又コヽニ AB.BC 又ハ M.N ノ代リニ BC.AB 又ハ N.M ト書キテモ同一ナリトス。

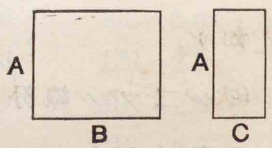
斯クノ如キ記法ニテ示サレタル矩形ノ面積ヲ二ツノ線分 AB, BC 又ハ M, N ノ**積**ト稱ス。特ニ二ツノ線分 AB, BC 又ハ M, N ガ相等シキトキハ其積ヲ AB ノ**平方**又ハ M ノ**平方**ト稱ス,但シ

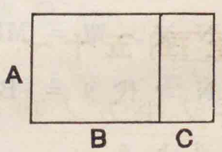
コヽニ AB, BC, M, N 等ハ何レモ「線分」ヲ表スモノニシテ其長サノ「數值」ヲ表スモノニアラズ,故ニ積(又ハ平方)トイフ語ヲ用フルハ唯便宜上ノコトニシテ代數學ニ於ケル如キ文字ノ積(又ハ平方)トハ全ク別ノモノナリ。





今三ツノ線分 A, B, C アリ。B ト C トヲ繼ギ合セテ得ル一ツノ線分ヲ B+C ニテ表ストキハ, A ト B+C トノ包ム矩形ノ面積ハ上述ノ記法ニヨレバ A(B+C) ニシテ, 又 A ト B, A ト C トノ包ム矩形ノ面積ハ夫々 A.B, A.C ナリ。而シテコレラノ三ツノ矩形ノ面積ノ間ニハ $A(B+C)=A.B+A.C$ ナル關係アリ。或ハ同一ノ關係ヲ $(B+C)A=B.A+C.A$ トモ書クコトヲ得。



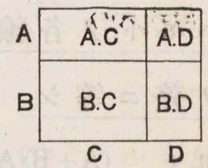


又 B ガ C ヨリ大ナルトキニハ

$$A(B-C)=A.B-A.C,$$
$$(B-C)A=B.A-C.A$$

ナル關係アルコトモ容易ニ證明セラル。

コレラノ式ハ代數學ニ於ケルト全ク同一ノ形ヲ有ス。從ツテ之ヲ基礎トシテ代數學ニ於ケルト同様ノ推理ニヨリテ更ニ幾多ノ關係ヲ導キ出スコトヲ得ベシ。例ヘバ

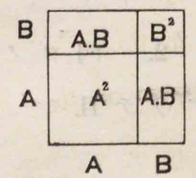


$$(A+B)(C+D)=(A+B)C+(A+B)D$$
$$=A.C+B.C+A.D+B.D$$

ノ如シ。

(次ノ三ツノ定理ヲ先ヅ線分ノ積ノ計算ニヨリ,次ニ直接ニ圖ニヨリテ證明セヨ。)

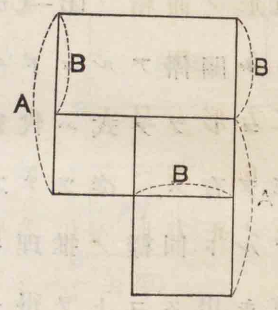
定理 五十一. 二ツノ線分ノ和ノ平方ハ,其各ノ平方ノ和ニ其二線分ノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。



即チ　$(A+B)^2=A^2+B^2+2A.B$

定理 五十二. 二ツノ線分ノ差ノ平方ハ,

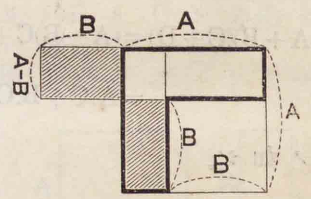
其各ノ平方ノ和ヨリ其二線分ノ積ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ。



即チ

$$(A-B)^2=A^2+B^2-2AB$$

定理 五十三. 二ツノ線分ノ和ト差トノ積ハ,モトノ各線分ノ平方ノ差ニ等シ。



即チ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

例 題

1. 四ツノ點 A, B, C, D ガ一直線上ニ此順ニアルトキハ, $AB.CD+AD.BC=AC.BD$.

2. 四ツノ點 A, B, C, D ガ一直線上ニ此順ニアリテ且 $AB.CD=AD.BC$ ナルトキハ,

$$AB.AC+AC.AD=2.AB.AD.$$

3. 線分 AB 上ノ任意ノ點ヲ C トシ,又其線分ノ中點ヲ M トスレバ, $AC.CB=AM^2-MC^2$.

4. 與ヘラレタル線分ヲ二ツニ分チ,其包ム矩形ノ面積ヲ最大ナラシメヨ。

5. 與ヘラレタル周ヲ有スル矩形ノ中ニテ正方形ハ最大ノ面積ヲ有ス。

6. 與ヘラレタル線分ヲ二ツニ分チ,其各ノ上ノ正方形ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

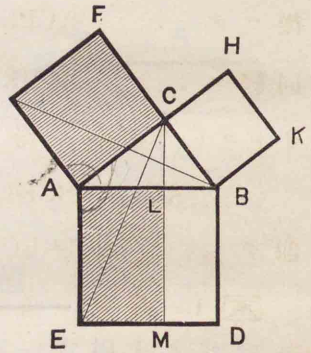
(學生ハマタ4, 5, 6ノ代數的解法ヲ試ミヨ。)

第三章　三角形ノ性質

65. ぴたごらすノ定理

定理 **五十四.** 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シ。

之ヲぴたごらす (Pythagoras) ノ定理トイフ。



特述 三角形ABCニ於テ角Cヲ直角ナリトスレバ,

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 AB, AC, BCノ上ノ正方形ヲ夫々ABDE, ACFG, BCHKトシ, CヨリABニ垂線ヲ引キ,之トAB及ビEDトノ交リヲ夫々L及ビMトス。BGヲ結ベバ,正方形ACFGト三角形ABGトハ底AGヲ共有シ且等高(BCトCFトハ一直線ヲナス)ナルヲ以テ

$$ACFG=2\triangle ABG.$$

同様ニ, CEヲ結ベバ

$$ALME=2\triangle AEC.$$

然ルニ二ツノ三角形ABG, AECニ於テ

$$AB=AE,\quad AG=AC,$$

又角BAG, EACハ何レモ直角ニ角BACヲ加ヘタル和ニ等シキヲ以テ互ニ相等シ。

故ニ　$$\triangle ABG\equiv\triangle AEC.$$

從ツテ　$$ACFG=ALME. \qquad (1)$$

同様ニシテ　$$BCHK=BLMD \qquad (2)$$

ナルコトヲ證明シ得。故ニ(1),(2)ヲ邊々相加ヘテ

$$ACFG+BCHK=ABDE,$$

卽チ　$$AC^2+BC^2=AB^2.$$

系 1. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊及ビ斜邊ノ長サヲ同一ノ單位ニテ計リタルトキノ數値ヲ夫々a, b及ビcトスルトキハ,其中ノ何レカ二ツヲ知リテ殘リノ一ツヲ求ムル公式ハ次ノ如シ。

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)},$$
$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)},$$
$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

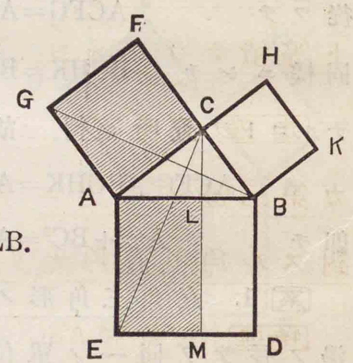
試ミニ直角三角形ノ三邊ノ數値ガ悉ク整數ナルモノノ例ヲ擧グレバ次ノ如シ。

$3^2+4^2=5^2$,	$9^2+12^2=15^2$,	$12^2+35^2=37^2$,
$5^2+12^2=13^2$,	$9^2+40^2=41^2$,	$13^2+84^2=85^2$,
$6^2+8^2=10^2$,	$10^2+24^2=26^2$,	$14^2+48^2=50^2$,
$7^2+24^2=25^2$,	$11^2+60^2=61^2$,	$15^2+20^2=25^2$,
$8^2+15^2=17^2$,	$12^2+16^2=20^2$,	$15^2+36^2=39^2$.

系 2. $AC^2=AL.AB$,

$BC^2=BL.BA$.

系 3. $CL^2=AL.LB$.



何トナレバ

$AC^2=AL.AB=AL^2+AL.LB$.

故ニ

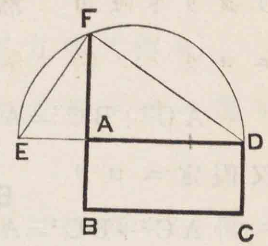
$AC^2-AL^2=CL^2=AL.LB$.

此性質ヲ利用シテ次ノ作圖題ヲ解クコトヲ得。

作圖題 與ヘラレタル矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

作圖 ABCD ヲ與ヘラレタル矩形トス。AD ヲ A ヲ通シテ延長シ AE=AB ナラシメ, ED ヲ

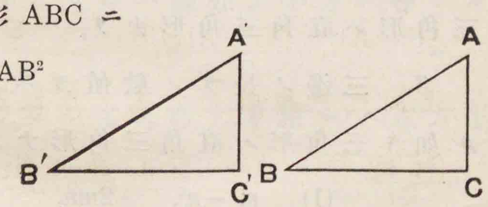
直徑トスル圓ヲ畫キ, AB ヲ A ヲ通シテ延長シ,圓周ト F ニ於テ交ラシメヨ。 AF ヲ一邊トスル正方形ハ卽チ求ムル所ノモノナリ。



作圖題 與ヘラレタル線分ヲ二ツノ部分ニ分チ,ソノ包ム矩形ヲ與ヘラレタル正方形ト等積ナラシメヨ。

定理 五十五. 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ガ第三邊ノ平方ニ等シキトキハ,第三邊ニ對スル角ハ直角ナリ。(ぴたごらすノ定理ノ逆)

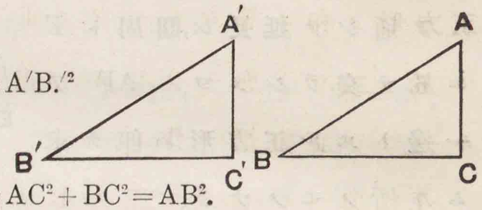
特述 三角形 ABC ニ於テ $AC^2+BC^2=AB^2$ ナルトキハ,角 C ハ直角ナルコトヲ證明セントス。



證明 AC, BC ニ夫々等シキ二邊 A′C′, B′C′ ヲ有シ,且ソノ夾角ガ直角ナル三角形 A′B′C′ ヲ作

リタリトセヨ。然ルトキハぴたごらすノ定理ニヨリ

$$A'C'^2+B'C'^2=A'B'^2.$$



又假定ニヨリ

$$A'C'^2+B'C'^2=AC^2+BC^2=AB^2.$$

故ニ　$A'B'=AB.$

從ツテ二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ハ合同ナリ。故ニ角 C ハ角 C′ ニ等シク,卽チ直角ナリ。

例　　題

1. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ長サガ 5 *cm* 及ビ 12 *cm* ナルトキ,斜邊ノ長サ如何。

2. 三邊ノ長サガ 3, 4, 5 ナル數値ヲ有スル三角形ハ直角三角形ナリ。

3. 三邊ノ長サノ數値ガ次ノ式ニテ表サルル如キ三角形ハ直角三角形ナリ。

(1)　$m^2-n^2,\quad 2mn,\quad m^2+n^2.$

(2)　$4p^2-1,\quad 4p,\quad 4p^2+1.$

4. 四邊形 ABCD ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ $AB^2+CD^2=AD^2+CB^2$ ナリ。逆モ亦眞ナリ。

5. 二ツ又ハ二ツヨリ多クノ與ヘラレタル正方形ノ和ニ等シキ一ツノ正方形ヲ作レ。

6. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ差ニ等シキ一ツノ正方形ヲ作レ。

7. 與ヘラレタル正方形ノ二倍(又ハ三倍)ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ。

8. 與ヘラレタル正方形ノ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 及ビ $\frac{3}{5}$ ノ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ。

9. 一點ヨリ二ツノ垂直ニ相交ル直線ノ各ニ引ケル垂線ノ平方ノ和ガ一定ナルトキ,其點ノ軌跡如何。

10. 線分 AB ノ延長ノ上ニ一點 C ヲトリ, AB.BC ヲ與ヘラレタル一線分ノ平方ニ等シカラシメヨ。

11. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

12. 三線分ヲ A, B, C トシ,次ノ面積ト等積ナル正方形ヲ作レ。

$$\frac{1}{2}A^2-B^2,\qquad A^2+3B^2-C^2.$$

13. 一邊ノ長サガ $1\,cm$ ナル正方形ノ對角線ノ長サ如何。

14. 一邊ノ長サガ $2\,cm$ ナル正三角形ノ高サハ幾糎ナルカ。又ソノ面積ヲ求メヨ。

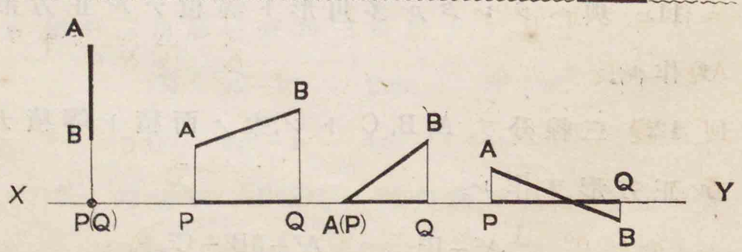
15. 一邊 a 糎ナル正六邊形ノ面積ヲ求メヨ。

66. 正射影

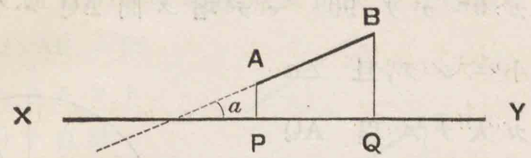
定義 一直線上ニ投ズル一點ノ**正射影**トハ其點ヨリ其直線ニ引ケル垂線ノ足ヲイフ。

一ツノ線分ノ兩端 A, B ノ一直線 XY 上ニ投ズル正射影ヲ夫々 P, Q トスルトキハ, 線分 PQ (特別ノ場合ニハ一點トナルコトアリ)ノコトヲ直線 XY 上ニ投ズル線分 AB ノ**正射影**トイフ。

正射影ヲ考フル基準トシテ用ヒタル直線XYニ對シテ線分ABノナス角ヲ此線分ノ**傾角**トイフ。

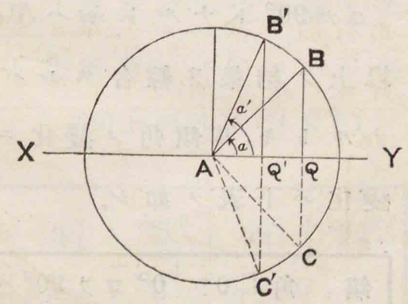


線分 AB ノ長サト其傾角トガ與ヘラルレバ,



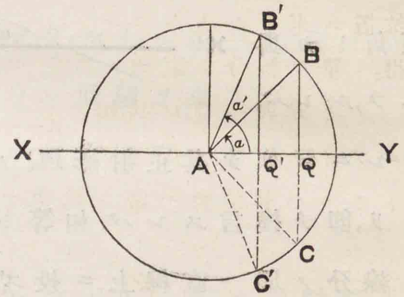
ソレニヨリテ其正射影PQノ長サハ定マルモノナリ, 卽チ換言スレバ, 相等シク且平行ナル二ツノ線分ノ同一直線上ニ投ズル正射影ハ相等シ。(學生自ラ之ヲ證明セヨ。)

故ニ與ヘラレタル線分 AB ニ如何ナル平行移動ヲ行フモ, 一定直線 XY 上ニ投ズル其正射影ノ長サハ變ラズ。依ツテ今便宜上線分ABノ一端Aハ直線XY上ニアルモノトシ, AB ノ長サガ一定ナルトキ其傾角 a ノ變化ニ伴ヒテ正射影 AQ ノ長サガ如何ニ變ズルカヲ考フベシ。



$\angle a$ ガ $0°$ ナルトキハ AQ ハ AB ニ等シ。$\angle a$

ガ 0° ヨリ 90° マデ増ス間 AQ ハ常ニ AB ヨリ小ニシテ,且 $\angle a$ ガ大ナル程 AQ ガ小ナリ。



(何トナレバ,$\angle a' > \angle a$ トシ, XY ニ關シテ B, B' ト對稱ナル點ヲ夫々 C, C' トスレバ,

$$\angle B'AC' = 2\angle a' > 2\angle a = \angle BAC.$$

故ニ劣弧 B'C' ハ劣弧 BC ヨリ大ナリ。從ツテ弦 B'C' ハ弦 BC ヨリ大ナリ。故ニ $AQ' < AQ$.

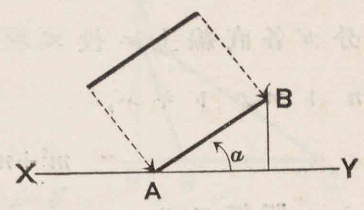
(定理三十一)

$\angle a$ ガ 90° トナルトキハ AQ ノ長サハ零トナル。

以上ノ結果ヲ綜合スレバ,線分 AB ノ長サガ l ナルトキ,其傾角ノ變化ニ伴フ正射影ノ長サノ變化ハ下表ノ如シ。

傾　角	0°	0° ヨリ 90° マデ増ストキ	90°
正射影	l	l ヨリ 0 マデ減ズ	0

注意 任意ノ與ヘラレタル線分ハ之ヲ平行移動ニヨリテ常ニ圖ノ AB ノ如キ位置ニ來ラシムルコトヲ得。單ニ線分ト直線 XY ノミガ與ヘラレ其傾角ニツイテ何等ノ規定ナキトキニハ,其傾角ハ常ニ鋭角ナルモノトス。



例　題

1. 平行ナル二ツノ線分ノ同一直線上ニ投ズル正射影ガ相等シキトキハ,其二線分ハ相等シ。

2. 相等シキ二ツノ線分ノ同一直線上ニ投ズル正射影ガ相等シキトキ,其二線分ハ平行ナルカ。

3. 一單位ノ長サノ線分ガ一定直線上ニ投ズル正射影ノ長サト其傾角トノ間ニハ下表ノ如キ關係アリ。 (210 頁例題 13, 14 參照)

傾　角	0°	30°	45°	60°	90°
正射影	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

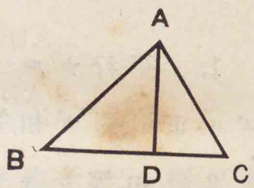
4. 垂直ニ相交ル二直線アリ,長サ l ナル線分ガ各直線上ニ投ズル正射影ノ長サヲ夫々 m, n トスルトキハ,

$$m^2+n^2=l^2$$

ナル關係アリ。

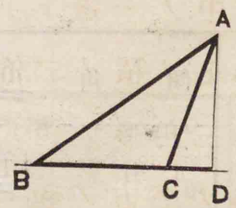
67. 一般ノ三角形ニ關スル定理

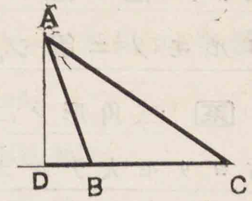
(1) △ABC ニ於テ,角 B ガ鋭角ナルトキ, A ヨリ BC ニ引ケル垂線ヲ AD トスレバ角 C ガ鋭角ナラバ D ハ B ト C トノ間ニアリ。



故ニ
$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2+DC^2 \\ &= AD^2+(BC-BD)^2 \\ &= (AD^2+BD^2)+BC^2-2BD.BC \\ &= AB^2+BC^2-2BD.BC. \qquad (1) \end{aligned}$$

モシ角 C ガ鈍角ナラバ, D ハ邊 BC ノ C ヲ通シテノ延長ノ上ニアリ。此場合ニハ上ノ第二式ニアル $(BC-BD)^2$ ノ代リニ $(BD-BC)^2$ ヲ入ルレバヨシ,其他ニハ何等ノ變更ヲ要セズ。





(2) 角 B ガ鈍角ナルトキハ, D ハ邊 CB ノ B ヲ通シテノ延長ノ上ニアリ。此場合ニハ次ノ如クスベシ。
$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2+DC^2 \\ &= AD^2+(DB+BC)^2 \\ &= (AD^2+DB^2)+BC^2+2BD.BC \\ &= AB^2+BC^2+2BD.BC. \qquad (2) \end{aligned}$$

扨 (1), (2) ニ於テ BD ハ卽チ線分 AB ノ直線 BC 上ニ投ズル正射影ニ他ナラズ。依ッテ次ノ定理ヲ得。

定理 五十六. 三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ,其二邊ノ中ノ一邊ト其上ニ投ズル他ノ邊ノ正射影トノ積ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ。

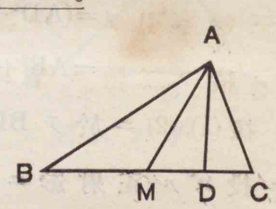
三角形ノ鈍角ニ對スル邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ニ,其二邊ノ中ノ一邊ト其上ニ

投ズル他ノ邊ノ正射影トノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

系 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ガ第三邊ノ平方ヨリモ大ナルカ又ハ小ナルカニ從ッテ,ソノ第三邊ニ對スル角ハ鋭角ナルカ又ハ鈍角ナリ。

定理 **五十七.** 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ,第三邊ノ半分ノ平方ト,第三邊ニ引ケル中線ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ。

特述 三角形 ABC ニ於テ邊 BC ノ中點ヲ M トスレバ,



$$AB^2+AC^2=2(BM^2+AM^2)$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 A ヨリ BC ニ引ケル垂線ヲ AD トセヨ。

モシ D ガ M ト合スレバ,角 AMB, AMC ハ共ニ直角ナルヲ以テ,

$$AB^2=BM^2+AM^2,$$

$$AC^2=CM^2+AM^2=BM^2+AM^2.$$

故ニ　$$AB^2+AC^2=2(BM^2+AM^2).$$

モシ D ガ M ト合セザレバ,角 AMB, AMC ノ中一

ツハ鋭角ニシテ一ツハ鈍角ナリ。何レヲ鋭角トスルモ證明ノ論法ハ同樣ナルヲ以テ,今假リニ角 AMC ヲ鋭角ナリトスレバ,

$$AB^2=BM^2+AM^2+2BM.MD,$$

$$AC^2=CM^2+AM^2-2CM.MD$$

$$=BM^2+AM^2-2BM.MD.$$

故ニ　$$AB^2+AC^2=2(BM^2+AM^2).$$

系 三角形ノ二邊ノ平方ノ差ハ第三邊ト,第三邊ニ引ケル中線ガソノ上ニ投ズル正射影トノ積ノ二倍ニ等シ。

例　題

1. 三角形 ABC ノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トスルトキ,

$\angle A=60^\circ$ ナラバ,　$a^2=b^2+c^2-bc,$

$\angle A=120^\circ$ ナラバ,　$a^2=b^2+c^2+bc.$

2. 三角形ノ三邊 a, b, c ヲ知リテ,三ツノ中線ノ長サヲ求ムル公式ヲ作レ。

3. 三角形ノ三ツノ中線 l, m, n ヲ知リテ,三邊ノ長サヲ求ムル公式ヲ作レ。

4. 三角形ノ三邊ノ平方ノ和ノ三倍ハ三中線ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ。

5. $\triangle ABC$ ノ重心ヲ G トスレバ,

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2).$$

6. 四邊形ノ各邊ノ平方ノ和ハ,兩對角線ノ平方ノ和ニ,兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ノ平方ノ四倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

7. 平行四邊形ノ四邊ノ平方ノ和ハ兩對角線ノ平方ノ和ニ等シ。コノ逆モ亦眞ナリ。

8. 定線分ヲ二ツノ部分ニ分チ,其各ノ平方ノ和(又ハ差)ヲシテ與ヘラレタル正方形ニ等シカラシメヨ。

9. 一點ヨリ二定點ニ至ル距離ノ平方ノ和(又ハ差)ガ一定ナルトキ,其點ノ軌跡如何。

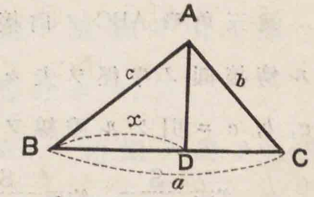
10. 二定點 A, B 及ビ一定直線 g ガ與ヘラレタルトキ,g 上ニ一點 C ヲトリ AC^2+BC^2 ヲ定平方ニ等シカラシメヨ。

68. 三角形ノ面積ニ關スル公式

三角形 ABC ノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々

a, b, c トシ,邊 AB ノ直線 BC 上ニ投ズル正射影 BD ヲ x トス。先ヅ角 B ヲ鋭角トスレバ

$$b^2=c^2+a^2-2ax.$$



之ヨリ x ヲ求ムレバ

$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

之ヲ $AD^2=c^2-x^2=(c+x)(c-x)$

ニ代入スレバ

$$AD^2=\frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(c+a-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}.$$

角 B ガ鋭角ナラザル場合ニモ同様ノ結果ヲ得。

ココニ於テ $a+b+c=2s$ ト置ケバ,

$$AD^2=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

トナル,之ヨリ AD ヲ求ムルコトヲ得。

今三角形 ABC ノ面積ヲ S トスレバ

$$S=\frac{a.AD}{2}.$$

故ニ上ニ得タル AD ノ値ヲ代入スレバ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

コレ卽チ三角形ノ三邊ヲ知リテ其面積ヲ求ムル公式ナリ。

之ヲへろん(Heron)又ハひーろー(Hero)ノ公式ト云フ。

又三角形 ABC ノ内接圓ノ半徑ヲ r; 邊 a, b, c ニ切スル傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r_1, r_2, r_3; 頂點 A, B, C ヨリ對邊 a, b, c ニ引ケル垂線ヲ夫々 h_1, h_2, h_3 トスレバ

$$r=\frac{S}{s},\quad r_1=\frac{S}{s-a},\quad r_2=\frac{S}{s-b},\quad r_3=\frac{S}{s-c},$$

(198 頁例題 3, 4 參照)

$$h_1=\frac{2S}{a},\quad h_2=\frac{2S}{b},\quad h_3=\frac{2S}{c}.$$

コレラノ式ノ右邊ハ何レモ邊ノ長サノミヲ以テ表シ得ルモノナリ。

例　題

1.　三角形ノ三邊ガ夫々 13 m, 14 m, 15 m ナルトキ,其面積如何。

2.　平行四邊形ノ相隣レル二邊ガ 60 cm 及ビ 70 cm ニシテ一ツノ對角線ガ 110 cm ナルトキ,其面積如何。

3.　二邊ガ夫々 18 m 及ビ 25 m ニシテ其夾角ガ 60° ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

雜　題

1.　與ヘラレタル點ヲ過ル直線ヲ引キ與ヘラレタル平行四邊形ヲ二等分セヨ。

2.　三角形 ABC ノ一邊 AB ノ兩端ヲ過リ此邊ニ引ケル垂線ガ BC, AC (又ハ其延長) ト交ル點ヲ D, E トスレバ三角形 CDE ハ三角形 ABC ニ等シ。

3.　△ABC ノ三頂點 A, B, C ヲ過リテ三ツノ平行線ヲ引キ其對邊(又ハ其延長)ト交ル點ヲ夫夫 X, Y, Z トスレバ　△AYZ,　△BZX,　△CXY, △ABC ハ等積ナリ。又 △XYZ＝2△ABC.

4.　四邊形ノ面積ハ,其二ツノ對角線ヲ二邊トシ且對角線ノナス角ヲ夾角トスル三角形ノ面積ニ等シ。

5.　四邊形ノ對角線ノ長サガ各一定ナラバ,其ナス角ガ如何ナルトキ最大ノ面積ヲ有スルカ。

6.　梯形ノ底邊ニアラザル二邊ヲトリ,其一ツヲ底トシ他ノ一ツノ中點ヲ之ニ對スル頂點トスル三角形ヲ作レバ,原ノ梯形ノ半分ニ等シ。

7. 斜邊ガaナル直角二等邊三角形ト等積ナル正三角形ノ一邊ヲ求メヨ。

又$a=10$トシテコノ正三角形ノ一邊ヲ小數第三位マデ求メヨ。

8. 四邊形ノ一双ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ブ線分ガ其四邊形ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツトキハ,其二邊ハ互ニ平行ナリ。

9. 與ヘラレタル面積ヲ有スル矩形ノ中,正方形ハ最小ノ周圍ヲ有ス。

10. 三角形ノ重心ヲ三頂點ニ結ブ三線分ハ其三角形ノ面積ヲ三等分ス。

11. 定マレル等邊多角形アリ,其形內ノ任意ノ一點ヨリ各邊ニ引ケル垂線ノ和ハ,其點ノ位置ニ拘ハラズ一定ナリ。

12. 四邊形ノ一ツノ對角線ガ他ノ對角線ヲ二等分スレバ,此對角線ハ此四邊形ノ面積ヲ二等分ス。又コノ逆ハ如何。

13. 任意ノ四邊形ABCD內ノ一點Pヲコノ四邊形ノ各頂點ニ結ビテ得ル四ツノ三角形ガスベテ等積ナル樣ニ點Pヲ定メ得ルカ。各種ノ場合ニツキテ吟味セヨ。

14. 同ジ底邊ノ同ジ側ニ在ル等高ナル二ツノ三角形ガ底邊ニ平行ナル一直線ヨリ截リ取ル二ツノ線分ハ相等シ。

15. 三角形ノ底邊ニ平行ニシテ他ノ二邊ノ間ニ夾マルル線分ハ,ソノ底邊ニ引ケル中線ニヨリテ二等分セラル。

16. 四邊形ノ二ツノ對角線ノ平方ノ和ハ,此四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ブ線分ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シ。

17. 圓ノ二弦AB, CDガ直交スルトキ,ソノ交點ヲOトスレバ　$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$　ハ直徑ノ平方ニ等シ。

18. 定圓ノ直徑上ノ定點ト此直徑ニ平行ナル任意ノ弦ノ兩端トヲ結ブ二ツノ線分ノ平方ノ和ハ一定ナリ。

19. 二ツノ同心圓アリ,小圓周上ノ一點Pヲ過リ小圓ノ弦PAヲ引キ,又之ト直交スル大圓ノ

弦 BPC ヲ引クトキハ,三角形 ABC ノ三邊ノ平方ノ和ハ, PA ノ方向ニ關セズ一定ナリ。

20. 一點 P ヨリ二定圓 O, O' ノ各ニ引ケル切線ノ長サガ相等シキトキ,點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。(之ヲ二圓ノ**根軸**トイフ。)

21. 與ヘラレタル三角形ノ面積ヲソノ周上ノ定點ヨリ引ケル直線ニテ二等分セヨ。

22. 與ヘラレタル四邊形ノ一頂點ヨリ直線ヲ引キ此四邊形ノ面積ヲ二等分セヨ。

23. 定角內ノ一定點ヲ過リテ一直線ヲ引キ,之ト角ノ二邊トニテ作ラルヽ三角形ノ面積ヲ最小ナラシメヨ。

24. 底邊 BC, 頂點 A ヨリ BC ニ引ケル垂線ノ足 D ノ位置及ビ AB^2+AC^2 ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

第六篇

比　例

第一章　基本性質

69. 比及ビ比例

同ジ種類ノ二ツノ量 A 及ビ B アルトキ,之ヲ相較ベテ A ガ B ノ幾倍ナルカヲ考フルコト屢アリ,斯クスルコトヲ稱シテ **A ノ B ニ對スル比** 又ハ **A ト B トノ比** ヲ考フトイフ。

コレ卽チ一般ノ比ノ定義ニシテ,算術及ビ代數學ニ於テ其諸性質及ビ之ヲ各種ノ量ニ應用スルコトヲ學ビタルモノナリ。今幾何學ニ於テモ此定義ニヨリテ線分ノ長サ,多角形ノ面積等ノ比ヲ考ヘントス。

一般ノ量ノ比ニ關スル主ナル事項ヲ擧グレバ次ノ如シ。(詳細ハ代數學ニ讓ル)

「A ト B トノ比」ヲ記號ニテ $A:B$ 又ハ $\dfrac{A}{B}$ ト書ク,A 及ビ B ヲ**比ノ項**トイヒ,A ヲ**前項**,B ヲ**後項**トイフ。

AガBノ幾倍ナルカヲ示スニハBヲ單位トシテAヲ計リタルトキ得ルAノ數値ヲイヘバ可ナリ,之ヲ比A:Bノ**値**トイフ。例ヘバ$A=nB$ナラバ,A:Bノ値ハnナリ。比ノ値ノコトヲ略シテ單ニ比トイフコト多シ。

比ノ値ハ常ニ一ツノ不名數ナリ。

二量ノ比ハ其各ヲ同ジ單位ニテ計リテ得ル數値ノ比ニ等シ。

之ニヨリテスベテ量ノ比ハ之ヲ數ノ比ニ直シテ考フルコトヲ得。

比ノ兩項ニ零ニアラザル同ジ數ヲ乘ジ,又ハ兩項ヲ零ニアラザル同ジ數ニテ除スルモ,ソノ比ノ値ハ變ラズ。

比ノ前項ト後項トヲ交換シテ得ル比ヲモトノ比ノ**反比**又ハ**逆比**トイフ。

反比ノ値ハモトノ比ノ値ノ逆數ナリ。

二ツノ比A:BトC:Dトノ値ガ相等シキトキハA,B,C,Dハ**比例ヲナス**トイフ。A,B,C,Dノ各ヲ此比例ノ**項**トイヒ,特ニAトDトヲ**外項**,

BトCトヲ**内項**トイヒ,又Dヲ三ツノ量A,B,Cノ**第四比例項**トイフ。

A:B=C:Dナルトキハ次ノ關係ガ成立ス。

(1)　$B:A=D:C.$　(**反轉ノ理**)

(2)　$mA:nB=mC:nD,$

但シm, nハ任意ノ正數トス。

(3)　$\dfrac{A+B}{B}=\dfrac{C+D}{D},\quad \dfrac{A-B}{B}=\dfrac{C-D}{D}.$

(**合比,除比ノ理**)

從ツテ　$\dfrac{A+B}{A-B}=\dfrac{C+D}{C-D}.$

(4)　A,B,C,Dガ悉ク同種ノ量ナラバ

$A:C=B:D.$　(**更迭ノ理**)

(5)　$A>B,\ A=B,\ A<B$ ニ從ツテ,夫々

$C>D,\ C=D,\ C<D.$

(6)　同種類ノ數多ノ量ヲA, B, C, D, E, F……トスルトキ,

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}=\dfrac{E}{F}\ldots\ldots$ ナラバ $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A+C+E\ldots\ldots}{B+D+F\ldots\ldots}.$

(**加比ノ理**)

同ジ種類ノ三ツノ量A,B,Cガ

$A:B=B:C$

ナル關係ヲ有スルトキハ,BヲAトCトノ**比例中項**トイヒ,CヲA,Bノ**第三比例項**トイフ。

70. 互ニ比例スル量

相互ニ關聯シテ其大サヲ變動スル二ツノ量A,B(同種又ハ異種)アリテ,其相對應スル數値ヲ夫々a及ビbトスルトキ,二數a, bノ比ガ各量ノ變動ニ關ハラズ常ニ一定ノ値ヲ有スルトキハ,二量A,Bハ**互ニ比例ス**トイフ。

比$a:b$ノ一定ナル値ヲ比例ノ**常數**トイフ,之ヲkトスレバ

$$\frac{a}{b}=k \qquad 即チ \quad a=kb$$

ナル關係アリ。

二量A,Bガ互ニ比例スルトキハ,Aノ取ル任意ノ二ツノ値a, a'ト,Bノ夫々之ニ對應スル値b, b'トハ比例ヲナス。

何トナレバ $\frac{a}{b}=k$, $\frac{a'}{b'}=k$.

故ニ $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$. 依ツテ $a:a'=b:b'$.

即チ詳シクイヘバ,Aヲ二倍,三倍,……一般ニ

n倍(nハ必ズシモ整數ナルヲ要セズ)スルトキハ,之ニ對應スルBモ亦二倍,三倍,……,n倍トナル。

又逆ニA,Bガ斯クノ如キ關係ヲ有スルトキハ此二量ハ互ニ比例スルコト明カナリ。

第62節(1)ヲ參照スレバ直チニ次ノ定理ヲ得。

定理 五十八. 高サガ一定ナル矩形ノ面積ハ其底ニ比例ス。底ガ一定ナル矩形ノ面積ハ其高サニ比例ス。

系 平行四邊形及ビ三角形ニツイテモ同樣ノ定理ガ成立ス。

此定理及ビ系ハ次ノ如クニモ言ヒ直サル。

等高ナル二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,其底ノ比ニ等シ。等底ナル二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,其高サノ比ニ等シ。矩形ノ代リニ平行四邊形又ハ三角形トスルモ同樣ナリ。

注意 上ノ二通リノ述べ方ノ中,前者ハ一ツノ變動スル矩形ニツイテ考ヘ,後者ハ二ツノ定マレル矩形ニツイテ考ヘタルモノナリ。後者ノ二ツノ矩形トイフハ前者ノ一ツノ矩形ノ變動スル途中ニ於ケル任意ノ

二ツヲ取リタルモノト考フレバ,兩者ハ結局同ジ內容ヲ言ヒ表シ居ルモノナルコト明カナリ。定理五十八ト同樣ノ考ニヨリテ次ノ定理ヲ得,之ヲ換言スレバ其次ノ系ヲ得ベシ。

定理 五十九. 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,中心角(又ハ圓周角)ト之ニ對スル弧トハ互ニ比例ス。

系 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,二ツノ中心角(又ハ圓周角)ノ比ハ之ニ對スル弧ノ比ニ等シ。

例題

1. 一ツノ圓ニ於テ扇形ノ面積ハ之ニ屬スル弧ニ比例ス。

2. 一ツノ圓ニ於テ弦ト之ニ對スル弧トハ互ニ比例スルカ。

3. 三角形ノ二邊ノ長サガ一定ナルトキ,其夾角ト第三邊トハ互ニ比例スルカ。

71. 互ニ反比例スル量

相關聯シテ變化スル二ツノ量A,Bアリ,Aノ

數值aトコレニ對應スルBノ數值bノ逆數トノ比ガ常ニ一定ノ值ヲ有スルトキハ,二量A,Bハ**互ニ反比例ス**或ハ**逆比例ス**トイフ。

コノ場合ニ比 $a:\frac{1}{b}$ ノ值ナル常數ヲkトスレバ

$$\frac{a}{\frac{1}{b}}=k \quad 即チ \quad ab=k.$$

又Aノ取ル任意ノ二ツノ值a, a'ト,Bノ夫々之ニ對應スル值b, b'トノ間ニハ常ニ

$$a:a'=b':b$$

ナル關係ガ成立ス。何トナレバ $ab=k,\ a'b'=k.$

故ニ $ab=a'b'.$ 依ツテ $a:a'=b':b.$

又逆ニA,Bガ斯クノ如キ關係ヲ有スルトキハ此二量ハ互ニ反比例ス。

定理 六十. 面積ガ一定ナル矩形ノ高サト底トハ互ニ反比例ス。

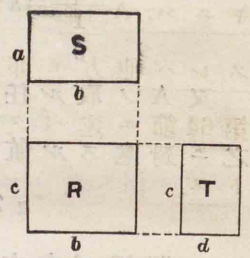
證明 矩形ノ高サト底トノ數值ヲ夫々a, bトスレバ,其面積ノ數值ハabニテ表サル。(第62節)

故ニ面積ガ一定ナルトキハ $ab=k$ (kハ常數)ナル關係アリ,即チ高サト底トハ互ニ反比例ス。

系 等積ナル二ツノ矩形ノ高サノ比ハ其底ノ反比ニ等シ。

前節ノ注意ニ述ベタル如ク此系ト本定理トハ結局同一ノ内容ニ歸着スルモノナルガ,更ニ次ノ如クニモ證明セラル。

二ツノ矩形ノ面積ヲ S, T トシ,其相隣レル二邊ヲ夫々 a, b 及ビ c, d トス。今別ニ c, b ヲ相隣レル二邊トスル矩形ヲ考ヘ,其面積ヲ R トスレバ



$$S : R = a : c, \qquad (1)$$

$$T : R = d : b. \qquad (2)$$

故ニ　S=T ナラバ

$$a : c = d : b \qquad (3)$$

トナル,コレ卽チ證明セントシタル結果ナリ。

モシ又四ツノ線分 a, b, c, d ノ間ニ(3)ナル比例ガ成立スルトキハ,之ト(1),(2)トヨリ逆ニ S=T ナルコトガ容易ニ證明セラル。依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 六十一. 四ツノ線分ガ比例ヲナストキハ,其内項ノ包ム矩形ト外項ノ包ム矩形トハ等積ナリ。

系 A, B, C, D ガ何レモ線分ノ長サヲ表ストキニハ, A : B = C : D 及ビ A.D = B.C ノ一方ガ成立スレバ他方モ亦成立ス。但シ A.D 及ビ B.C ハ第64節ニ述ベタル如ク矩形ノ面積ヲ表スモノトス。

例　題

1. 平行四邊形及ビ三角形ニツイテ定理六十ト同樣ノ定理ヲ述ベ,且之ヲ證明セヨ。

2. 底邊ガ一定ナル二等邊三角形ノ頂角ハ高サニ反比例スルカ。

3. 二ツノ線分ノ比例中項ヲ求ム。

72. 相乘比

定義 一ツノ比ノ値ガ他ノ幾ツカノ比ノ値ノ相乘積ニ等シキトキハ,前ノ一ツノ比ヲ後ノ幾ツカノ比ノ**相乘比**トイフ。

相等シキ二ツ,三ツ,一般ニ n 個ノ比ノ相乘比ヲ夫々其各ノ比ノ**二乘比,三乘比,一般ニ n 乘比**トイフ。

A:B ト C:D トノ相乘比ヲ表スニハ

$$\left.\begin{matrix}A:B\\C:D\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}A:B\\C:D\end{matrix}\right.\quad 又ハ\quad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}$$

ト書ク,三ツ以上ノ比ノ相乘比モ之ニ準ズ。

二乘比,三乘比等ヲ示スニハ

$$(A:B)^2,\quad (A:B)^3\quad 又ハ\left(\frac{A}{B}\right)^2,\quad \left(\frac{A}{B}\right)^3$$

等ト書ク。

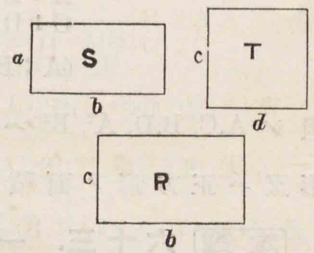
注意 1. 二組ノ數ノ比 $a:b$, $c:d$ ノ相乘比ハ直チニ $ac:bd$ ト書クコトヲ得レドモ,一般ニ二組ノ量ノ比 A:B, C:D ノ相乘比ハ漫リニ A.C:B.D ト書クヲ得ズ,何トナレバ A.C 及ビ B.D ハ一般ニハ必ズシモ意味ヲ有セザレバナリ。

注意 2. A,B,C ガ同種ノ量ナルトキ, A:C ハ A:B, B:C ノ相乘比ニ等シ。何トナレバ A,B,C ノ數値ヲ夫々 a,b,c トスレバ, A:B, B:C ノ値ハ夫々 $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ ニシテ其相乘積ハ $\frac{a}{c}$, 卽チ A:C ノ値ニ等シケレバナリ。

第62節ニ述ベタル所ニヨリ直ニ次ノ定理ヲ得。

定理 六十二. 二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ其底ノ比ト高サノ比トノ相乘比ニ等シ。

何トナレバ,二ツノ矩形ノ面積ノ數値ヲ S, T トシ,各ノ相隣レル二邊ノ長サヲ夫々 a, b 及ビ c, d トスレバ(單位ヲ適當ニトレバ)



$$S=ab,\qquad T=cd$$

ナリ。故ニ

$$\frac{S}{T}=\frac{ab}{cd}=\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}.$$

或ハ第62節ノ結果ヲ用ヒズシテ次ノ如クニモ證明セラル。

今相隣レル二邊ガ c, b ナル第三ノ矩形ヲ作リ,其面積ヲ R トスレバ,

$$S:R=a:c,\qquad (定理五十八)$$
$$R:T=b:d.$$

各邊ノ相乘比ヲ求ムレバ

$$S:T=\left\{\begin{matrix}a:c\\b:d.\end{matrix}\right.$$

系 1. 二ツノ平行四邊形又ハ三角形ノ面積ノ比ハ其底ノ比ト高サノ比トノ相乘比ニ等シ。

系 2. 二ツノ正方形ノ面積ノ比ハ其邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

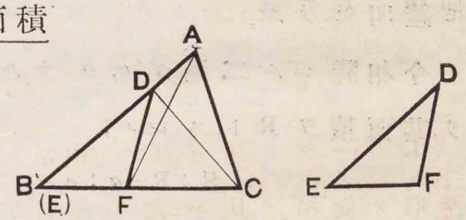
系 3. A, B, C, D ガ何レモ線分ノ長サヲ表ストキニハ,

$$\left.\begin{matrix}A:B\\C:D\end{matrix}\right\}=A.C:B.D,$$

$$(A:B)^2=A^2:B^2.$$

但シ A.C, B.D, A^2, B^2 ハ第64節ニ述ベタル如ク矩形又ハ正方形ノ面積ヲ表スモノトス。

定理 六十三. 一ツノ角ガ互ニ相等シキ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,其角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シ。



特述 三角形 ABC, DEF ニ於テ $\angle B=\angle E$ ナルトキハ, $\triangle ABC:\triangle DEF=AB.BC:DE.EF$ ナルコトヲ證明セントス。

證明 三角形 DEF ヲ ABC ノ上ニ重ネ, E ガ B ノ上ニ,邊 EF, ED ガ夫々邊 BC, BA ノ上ニ重ナル樣ニ置キタリトシ, CD ヲ結ベバ

$$\triangle ABC:\triangle DBC=AB:DB,$$

何トナレバ,コノ兩三角形ハ C ヨリノ高サガ相等シケレバナリ。同樣ニ

$$\triangle DBC:\triangle DBF=BC:BF.$$

故ニ相乘比ヲトレバ

$$\triangle ABC:\triangle DBF=\left\{\begin{matrix}AB:DB\\BC:BF\end{matrix}\right.$$

$$=AB.BC:DB.BF,$$

卽チ $\triangle ABC:\triangle DEF=AB.BC:DE.EF.$

系 一ツノ角ガ互ニ補角ヲナス二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,其角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シ。

例 題

1. 一ツノ角ガ互ニ相等シキ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,之ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シ。

2. 二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ

$$\angle A=\angle D,\ AB=DE$$

ナルトキハ,

$$\triangle ABC:\triangle DEF=AC:DF.$$

73. 複比例スル量

各任意ニ大サヲ變ジ得ル二ツノ量A, B及ビ其各ニ關聯シテ變動スル第三ノ量Cアリ。モシAガ一定ニシテBノミ變ズルトキハ, CハBニ比例シ, モシBガ一定ニシテAノミ變ズルトキハ, CハAニ比例ストセバ, A, B共ニ變ズルトキハCハ如何ナル變動ヲナスベキカトイフ問題ハ代數學ニ於テ一般ニ論ゼラルル所ニシテ, 其結論ニヨレバCノ數値ガA, Bノ數値ノ積ニ比例シテ變動スルモノナリ。斯クノ如キ場合ニCハA及ビBニ**複比例ス**ト稱セラル。

定理六十二及ビ其系1等ハ此一般ナル理論ノ中ニ包含セラルルモノニシテ, 複比例トイフ語ヲ用フレバ更ニ次ノ如クニ言ヒ直スコトヲ得。

矩形(一般ニ平行四邊形又ハ三角形)ノ面積ハ其底ト高サトニ複比例ス。

定理六十三ヲ換言スレバ次ノ如シ。

一ツノ角ノ大サガ一定ナル三角形ノ面積ハ, 之ヲ夾ム二邊ノ長サニ複比例ス。

例　題

1. △ABCアリ, AB, ACノ長サ夫々12*cm*, 15*cm*ナリ, 今AB, AC上ニ夫々點D, Eヲ取リBDノ長サヲ3*cm*, CEノ長サヲ5*cm*トスレバ, △ABCト△ADEトノ面積ノ比ノ値如何。

2. 前題ニ於テ四邊形BCEDト△ADEトノ面積ノ比ヲ求メヨ。

3. △ABCノ三邊AB, BC, CAヲ夫々P, Q, Rニテ何レモ2:1ニ分タバ△ABC:△PQRノ値如何。

4. △ABCノ邊ABノ中點ヲDトス。AC上ニ一點Eヲ求メ△ADEト四邊形DBCEノ比ヲ2:3ナラシムルニハ點Eヲ如何ニ定ムベキカ。

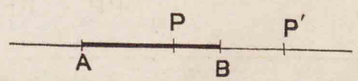
第二章　線分ノ比

74. 内分, 外分

定義 線分上ノ一ツノ點ハ之ヲ**内分**ストイヒ,其延長上ノ一ツノ點ハ之ヲ**外分**ストイフ。何レノ場合ニ於テモ線分ノ兩端ヨリ分點マデノ距離ヲ其**分**トイフ。

内分ノ場合ニハモトノ線分ハ二ツノ分ノ和ニ等シク,外分ノ場合ニハ二ツノ分ノ差ニ等シ。

線分 AB ヲ P ニ於テ内分又ハ外分シタルトキ,單ニ其二ツノ分ノ比トイヘバ AP:BP ト BP:AP トノ二通リニ考ヘラル。之ヲ區別スルタメニ前者ノ場合ニハ線分 AB ヲ分チタル分ノ比トイヒ,後者ノ場合ニハ線分 BA ヲ分チタル分ノ比トイフコトト定ムベシ。



例ヘバ P ハ線分 AB ヲ 2:1 ナル比ニ内分ス

ル點*, P′ ハ AB ヲ 3:1 ナル比ニ外分スル點ニシテ,換言スレバ P ハ線分 BA ヲ 1:2 ナル比ニ内分スル點, P′ ハ BA ヲ 1:3 ナル比ニ外分スル點ナリ。

線分 AB ヲ $m:n$ ナル比ニ内分スル點ハ,コノ比ノ値ガ 1 ニ等シケレバ AB ノ中點ニアリ, 1 ヨリ大ナラバ中點ヨリ B ニ近キ方ニアリ, 1 ヨリ小ナラバ A ニ近キ方ニアリ。又 AB ヲ $m:n$ ナル比ニ外分スル點ハ,コノ比ノ値ガ 1 ヨリ大ナラバ此線分ノ B ヲ通シテノ延長ノ上ニアリ, 1 ヨリ小ナラバ A ヲ通シテノ延長ノ上ニアリ, 1 ニ等シキトキハ斯クノ如キ外分點ハ存在セズ。

定理 六十四. 線分 AB ヲ P 及ビ P′ ニ於テ共ニ内分又ハ共ニ外分シタルトキ, $\frac{AP}{BP}=\frac{AP'}{BP'}$ ナラバ, P ト P′ トハ相合ス。

證明 先ヅ内分ノ場合ニツイテ考フレバ,

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AP'}{BP'}$$

---

*一般ニ $m:n$ ナル比ニ内分(外分)スルトハ,二ツノ分ノ比ガ $m:n$ ナル樣ニ内分(外分)スルコトナリ。

ナルヲ以テ $\dfrac{AP+BP}{BP}=\dfrac{AP'+BP'}{BP'}$. (合比ノ理)

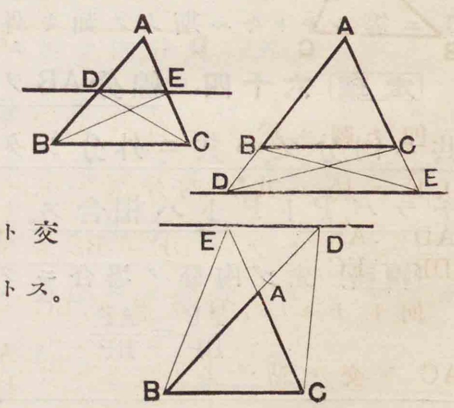
然ルニ $AP+BP=AB=AP'+BP'$.

故ニ $BP=BP'$. 依ッテ P ト P′ トハ相合セザル可カラズ。

外分ノ場合ニハ除比ノ理ヲ用フレバ同様ニ證明セラル。

定理 **六十五.** 三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シキ比ニ(其二邊ノ相會スル頂點ヲ一端トスル分ガ相對應スル樣ニ)内分又ハ外分ス。

特述 三角形ABCノ一邊BCニ平行ナル直線ガ他ノ二邊AB, AC又ハ其延長ト交ル點ヲ夫々D, Eトス。然ルトキハ



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 BE, CDヲ結ビ付ケヨ。DEトBCトハ平行ナルヲ以テ

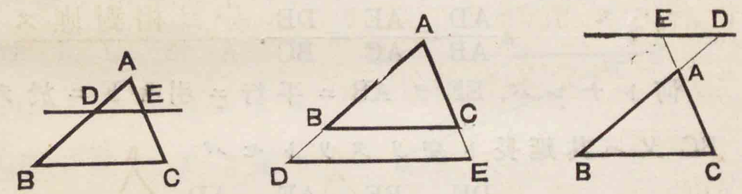
$$\triangle BDE=\triangle CDE.$$

故ニ $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\dfrac{\triangle ADE}{\triangle CDE}$.

然ルニ $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\dfrac{AD}{DB}$, $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle CDE}=\dfrac{AE}{CE}$.

從ッテ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

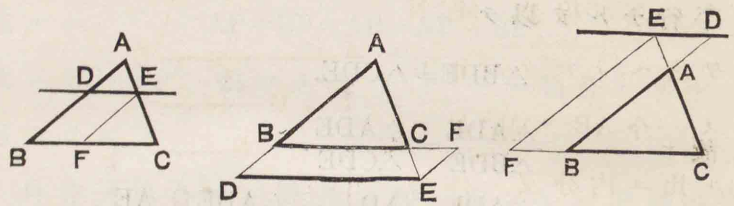
系 1. 此定理ノ逆モ亦眞ナリ。



即チ圖ニ於テ三角形ABCノ邊AB, ACヲ夫々D, Eニ於テ共ニ内分又ハ共ニ外分シタルトキ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ ナラバ, DEハBCニ平行ナリ。

何トナレバ, Dヲ過リBCニ平行ナル直線ガACト交ル點ヲE′トスレバ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE'}{E'C}$. 然ルニ假定ニヨリ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$, 故ニ $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AE'}{E'C}$,

從ッテ E′ ハ E ト合スレバナリ。



系 2. 圖ニ於テ

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$

系 3. 又同ジ圖ニ於テ

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

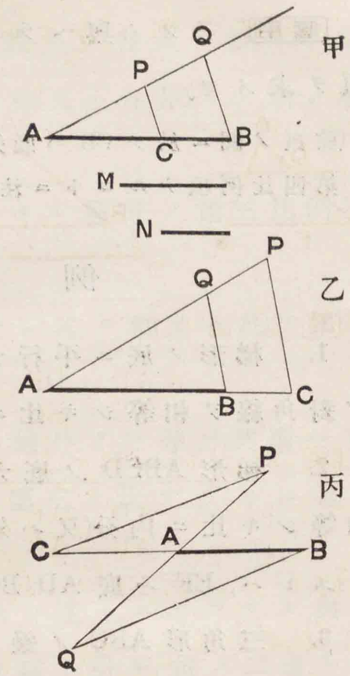
何トナレバ, EF ヲ AB ニ平行ニ引キ F ニ於テ BC 又ハ其延長ト交リタリトセバ

$$\frac{DE}{BC}=\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}.$$

系 4. 二ツノ直線ガ數多ノ平行ナル直線ニヨリテ截ラルルトキハ,其相對應スル部分ノ比ハ一定ナリ。

作圖題 與ヘラレタル線分ヲ與ヘラレタル比*ニ内分及ビ外分セヨ。

*與ヘラレタル比ハ通常二ツノ線分ノ比トシテ表スモノトス。



特述 AB ヲ與ヘラレタル線分, M:N ヲ與ヘラレタル比トス。今 AB ヲ M:N ナル比ニ内分又ハ外分セントス。

作圖 A ヲ過リ, AB ト合セザル任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ二點 P, Q ヲ AP=M, PQ=N ナル樣ニトリ, QB ヲ結ビ, P ヲ過リ QB ニ平行ナル直線ヲ引キ,之ガ AB ト交ル點ヲ C トセヨ。C ハ卽チ求ムル點ニシテ, P ガ A ト Q トノ間ニアルトキハ内分點,然ラザルトキハ外分點ナリ。

證明 定理六十五ニヨリテ明カナリ。

吟味 内分點ハ常ニ存在シ,外分點ハ M=N ナラザル限リ常ニ存在ス。而シテ各唯一ツニ限ル。(定理六十四)

應用 三ツノ與ヘラレタル線分ノ第四比例項ヲ求メヨ。

(前頁ノ圖ニ於テ CB ハ既知ノ三ツノ線分 AQ, PQ, AB ノ第四比例項ナルコトニ注目セヨ)

例題

1. 梯形ノ底ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊及ビ對角線ヲ相等シキ比ニ分ツ。

2. 梯形 ABCD ノ底ナラザル二邊 AB, DC ヲ相等シキ比ニ內分(又ハ外分)スル點ヲ夫々 E, F トスレバ, EF ハ底 AD, BC ニ平行ナリ。

3. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 D, E, F ヲトルトキ, EF, FD, DE ガ夫々 BC, CA, AB ニ平行ナラバ, D, E, F ハ各邊ノ中點ナリ。

4. AB, CD ヲ二ツノ平行ナル線分トシ,今直線 AC 上ニ一點 E ヲトリテ AB : CD = AE : CE ナラシムルトキハ,三點 B, D, E ハ一直線上ニアリ。但シ AB, CD ガ直線 AC ノ同ジ側ニアルトキハ E ヲ線分 AC ノ延長上ニトルベク,反對ノ側ニアルトキハ E ヲ線分 AC ノ上ニトルモノトス。

5. 一定點ト一定直線上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ一定ノ比ニ內分(又ハ外分)スル點ノ軌跡如何。

6. 二ツノ與ヘラレタル線分ノ第三比例項ヲ求メヨ。

7. 二ツノ線分ノ比ト其ノ和(又ハ差)ヲ知リテソノ二線分ヲ作レ。

8. 與ヘラレタル一線分ヲ三分シ,其第一,第二ノ比ヲ $l : m$ ニ,第二,第三ノ比ヲ $p : q$ ニ等シカラシメヨ。

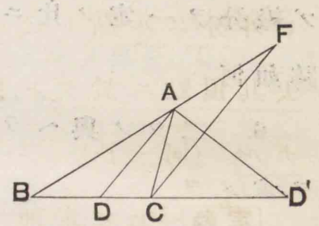
9. 與ヘラレタル角ノ邊上ニアラザル與ヘラレタル點 P ヲ過ル直線ヲ引キ,角ノ二邊ト夫夫 A, B 於テ交ラシメ,比 PA : PB ヲ與ヘラレタル比ニ等シカラシメヨ。

10. 二ツノ與ヘラレタル線分ノ比ノ二乘比(三乘比,四乘比,……)ニ等シキ比ヲ有スル二ツノ線分ヲ作レ。

75. 調和列點

定理 六十六. 三角形ノ頂角及ビ之ニ接

スル外角ノ二等分線ハ夫々底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分ス。



特述 三角形ABCニ於テ,頂角A及ビ其外角ノ二等分線ガ底邊BC又ハ其延長ト交ル點ヲ夫々D, D′トセヨ。然ルトキハ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}, \qquad \frac{BD'}{CD'}=\frac{AB}{AC}$$

ナルコトヲ證明セントス。

證明 Cヲ過リDAニ平行ニCFヲ引キ,BAノ延長トFニ於テ交ラシムレバ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{FA}.$$

而シテ　$\angle AFC=\angle BAD,\quad \angle ACF=\angle DAC.$

然ルニ　$\angle BAD=\angle DAC.$

故ニ　$\angle AFC=\angle ACF,$　從ッテ　$FA=CA.$

故ニ　$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}.$

Cヲ過リD′Aニ平行線ヲ引ケバ,外角ノ二等分線ノ場合モ同様ニシテ證明セラル。

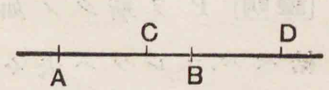
但シAB=ACナルトキハ點D′ハ存在セズ,此場合ダケハ本定理ヨリ除外スベシ。

系 三角形ノ一邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分スル點ト之ニ對スル頂點トヲ結ベバ,夫々其頂點ニ於ケル內角及ビ外角ノ二等分線トナル。(同一法)

定義 上ノ定理ニ於ケル二點D, D′ハ線分BCヲ同一ノ比ニ內分及ビ外分スル一對ノ點ナリ。

一般ニ線分ABガ二點C, Dニヨリテ同ジ比ニ內分及ビ外分セラルルトキハ,線分ABハC, Dニヨリテ**調和ニ分タル**トイヒ,四點A, B, C, Dヲ**調和列點**トイフ。

然ルニ　$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}$



ナルトキハ　$\dfrac{CB}{DB}=\dfrac{CA}{DA}$　ナリ。(更迭ノ理)

故ニABガC, Dニヨリテ調和ニ分タルルトキハ,CDハマタA, Bニヨリテ調和ニ分タル。

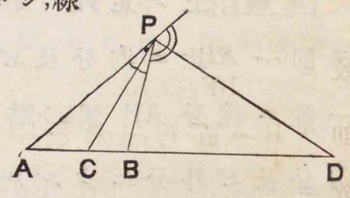
依ッテAトB, CトDヲ各一對ノ**共軛點**トイフ。

定理 六十七. 二定點ヨリノ距離ノ比ガ1ニ等シカラザル一定ノ値ヲ有スル如キ點

ノ軌跡ハ一ツノ圓周ニシテ,二定點ノ間ヲ其比ニ內分及ビ外分スル一對ノ共軛點ハ其圓ノ一ツノ直徑ノ兩端ナリ。

之ヲあぽろにうす (Apollonius) ノ定理トイフ。

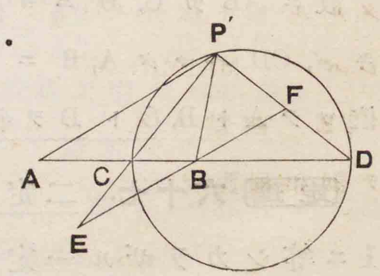
特述 A, B ヲ二定點トシ,線分 AB ヲ一定ノ比 $m:n$ ニ內分及ビ外分スル一對ノ共軛點ヲ C 及ビ D トス。



然ルトキハ $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{m}{n}$ ナル如キ點 P ノ軌跡ハ CD ヲ直徑トスル圓周ナルコトヲ證明セントス。

證明 P ヲ斯クノ如キ一點ナリトシ, PC, PD ヲ結ベバ,コレラハ夫々角 APB 及ビソレニ隣レル補角ノ二等分線ナリ。故ニ角 CPB ト角 BPD ノ和,卽チ角 CPD ハ直角ナリ。故ニ P ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアリ。

次ニハ逆ニ CD ヲ直徑トスル圓周上ニ一點 P′ ヲトリタルトキ



$$\frac{P'A}{P'B}=\frac{m}{n}$$

ナルコトヲ證明セザル可カラズ。今 B ヲ過リ P′A ニ平行ナル直線ヲ引キ,直線 P′C, P′D ト交ル點ヲ E, F トセヨ。然ルトキハ

$$\frac{AP'}{BF}=\frac{AD}{BD},\quad \frac{AP'}{BE}=\frac{AC}{BC}.$$ (定理六十五系3)

故ニ $\dfrac{AP'}{BF}=\dfrac{AP'}{BE}$, 從ツテ $BF=BE$.

卽チ B ハ直角三角形 EP′F ノ斜邊 EF ノ中點ナリ。

故ニ $$BE=BP'.$$

然ルニ $$\frac{AP'}{BE}=\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n},$$

故ニ $$\frac{AP'}{BP'}=\frac{m}{n}.$$

例　題

1. 線分 AB ガ二點 C, D ニヨリテ調和ニ分タルルトキ,線分 CD, AB ノ中點ヲ夫々 M, N トスレバ

$$MA.MB=MC^2,\qquad NC.ND=NA^2.$$

2. 四點 A, B, C, D ガ一直線上ニ此順ニアリテ調和列點ヲナストキハ

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}.$$

3. 四點 A, B, C, D ガ一直線上ニ此順ニアリテ

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}$$

ナルトキハ,其四點ハ調和列點ヲナス。(前問 2 ノ逆)

4. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫夫 a, b, c トスルトキ,角 A 及ビ其外角ノ二等分線ガ直線 BC ト交ル點ヲ P, Q トスレバ,線分 PQ ノ長サ如何。

5. 底邊,高サ(又ハ頂角)及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

6. 三定點ヨリノ距離ノ比ガ $l:m:n$ ナル點ヲ求メヨ。

7. 二定圓 O, O′ ノ交點 A ヲ過リ ツノ二圓ト夫々 P, Q ニ於テ交ル直線ヲ引キ, PA : AQ ヲ與ヘラレタル比 $m:n$ ナラシメヨ。

第三章　相似多角形

76. 相似多角形

定義 二ツノ n 角形ノ頂點ヲ夫々順次ニ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 及ビ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ トスルトキ,モシ

$$\angle A_1=\angle B_1,\quad \angle A_2=\angle B_2,\ldots\ldots,\quad \angle A_n=\angle B_n$$

ナル關係アルトキハ,兩形ハ互ニ**等角**ナリトイフ。而シテ A_1 ト B_1, A_2 ト B_2, ..., A_n ト B_n ヲ**相對應スル頂點**トイヒ, A_1A_2 ト B_1B_2, A_2A_3 ト B_2B_3, ..., $A_{n-1}A_n$ ト $B_{n-1}B_n$ ヲ**相對應スル邊**トイフ。

注意 コヽニイフ等角ハ第29節ニ定義セルモノト異リ,二ツノ多角形ニツイテイフモノナリ,混同スベカラズ。

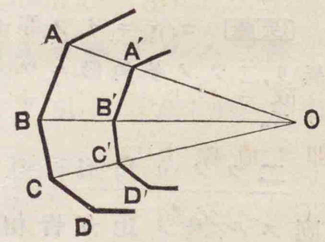
二ツノ n 角形ガ互ニ等角ニシテ且ツノ相對應スル邊ノ比ガ皆相等シキトキハ,兩形ハ互ニ**相似**ナリトイフ。

二ツノ n 角形 $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ ガ互ニ相似ニシテ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ガ夫々 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ニ對應スルコトヲ表スニハ $A_1A_2\ldots A_n \backsim B_1B_2\ldots B_n$ ト記ス。

定理 **六十八.** 二ツノ多角形ガ互ニ相似ナルトキハ,其對應邊ガ夫々平行ナル樣ニ置クコトヲ得。斯ク置キタルトキニハ,相對應スル頂點ヲ夫々結ブ直線ハスベテ平行ナルカ或ハスベテ同一ノ點ヲ過ル。

特述 $ABC\ldots \backsim A'B'C'\ldots$ ナルトキハ,コノ二ツノ多角形ノ位置ヲ適當ニトレバ邊 AB, BC, ... ヲシテ夫々邊 $A'B'$, $B'C'$, ... ニ平行ナラシメ得ルコト,及ビ其場合ニハ直線 AA', BB', CC', ... ハスベテ平行ナルカ,又ハスベテ同一ノ點ヲ過ルコトヲ證明セントス。

證明 $\angle ABC=\angle A'B'C'$ ナルヲ以テ,其二邊 AB, BC ヲ夫々 $A'B'$, $B'C'$ ニ平行ナル樣ニ置クコトヲ得。然ルトキハ又 $\angle BCD=\angle B'C'D'$ ナルヲ以テ,邊 CD ト $C'D'$ トモ平行ナリ。以下次第ニ同樣ニシテ兩形ノスベテノ對應邊ガ夫々平行ナル事ガ證明セラル。

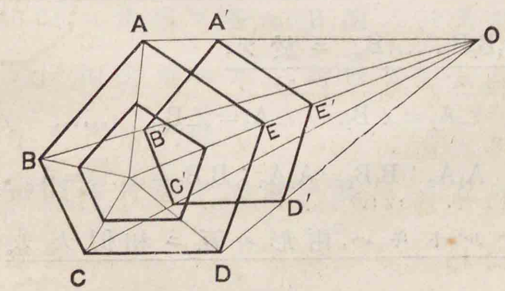


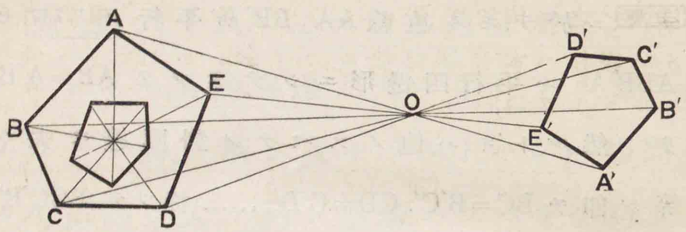
コヽニ於テ,モシ直線 AA', BB' ガ平行ナリトセバ $ABB'A'$ ハ平行四邊形ニシテ,從ッテ $AB=A'B'$ ナリ。然ルトキハ他ノスベテノ對應邊モ夫々相等シ,卽チ $BC=B'C'$, $CD=C'D'$, ... 從ッテ $BCC'B'$, $CDD'C'$, ... 等ハ皆平行四邊形ナリ。故ニ AA', BB', CC', DD', ... ハスベテ平行ナリ。(此場合ニハ兩形ハ相似ナルノミナラズ,實ハ合同ナルモノナリ。)

モシ直線 AA', BB' ガ相交ルトセバ,其交點ヲ O トセヨ。然ルトキハ

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$ (假設及ビ定理六十五系3)

故ニ C, C', O ハ一直線上ニアリ(246頁例題4),卽チ直線 BB', CC' ノ交點モ亦 O ナリ。依ッテ上ト同樣ノ論法ヲ繰リ返セバ,結局





AA′, BB′, CC′ 等ハスベテ皆 O ヲ過ルコトヲ知ル。(此場合ニハ兩形ハ合同ナラズ,圖ニハ一ツノ五角形 ABCDE ニ對スル A′B′C′D′E′ ノ種々ノ位置ヲ示ス)。

系 1. 二ツノ相似 n 角形ヲ各 n 個ノ三角形ニ分チ,兩形ニ於テ相對應スル三角形ヲ夫々互ニ相似ナラシムルコトヲ得。

系 2. 二ツノ n 角形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots A_n$ 及ビ $B_1B_2B_3\ldots\ldots B_n$ ニ於テ,

$$\angle A_2=\angle B_2,\quad \angle A_3=\angle B_3,\quad \ldots\ldots,\quad \angle A_{n-1}=\angle B_{n-1},$$

$$A_1A_2:B_1B_2=A_2A_3:B_2B_3=\ldots\ldots=A_{n-1}A_n:B_{n-1}B_n$$

ナルトキハ,兩形ハ互ニ相似ナリ。(定理六十八ニ於ケル如ク兩形ヲ置キテ見ヨ)。

注意 之ニ依ツテ見レバ,二ツノ多角形ノ相似ナルタメノ條件ハ本節ノ定義ニ述ベタルヨリモヤヽ簡單ニスルコトヲ得ベシ。

例題

1. 同ジ邊數ヲ有スル正多角形ハ互ニ相似ナリ。

2. 二ツノ平行四邊形ニ於テ一角ガ相等シク,之ヲ夾ム邊ガ比例ヲナストキハ,兩形ハ相似ナリ。

3. $A_1A_2\ldots\ldots A_n \backsim B_1B_2\ldots\ldots B_n$ ナルトキ,對角線 A_1A_k 及ビ B_1B_k (k ハ 3 ヨリ $n-1$ マデノ間ノ任意ノ整數)ヲ引キテ兩形ヲ各二ツニ分テバ,

$$A_1A_2\ldots A_k \backsim B_1B_2\ldots B_k,\quad A_1A_k\ldots A_n \backsim B_1B_k\ldots B_n.$$

4. 二ツノ相似 n 角形ヲ各 $n-2$ 個ノ三角形ニ分チ,兩形ニ於テ相對應スル三角形ヲ夫々互ニ相似ナラシムルコトヲ得。

5. 二ツノ相似多角形ノ周圍ノ比ハ一双ノ對應邊ノ比ニ等シ。

6. △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ AB, AC

(又ハ其延長)ト交ル點ヲ夫々 D, E トシ,線分 BC 及ビ DE ヲ同ジ比ニ內分(又ハ外分)スル點ヲ夫夫 M, N トスレバ三點 A, M, N ハ一直線上ニアリ。

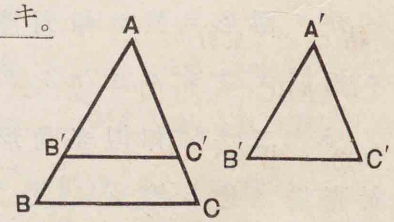
77. 相似三角形

定理 **六十九.** 二ツノ三角形ハ次ノ各ノ場合ニ於テ互ニ相似ナリ。

(1) 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ三角形ノ二角ニ等シク,從ツテ兩形ガ等角ナルトキ。

(2) 一ツノ三角形ノ一角ト之ヲ夾ム二邊ノ比ガ夫々他ノ三角形ノ一角ト之ヲ夾ム二邊ノ比ニ等シキトキ。

(3) 一ツノ三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ト比例ヲナストキ。



證明 (1) 二ツノ三角形 ABC, A'B'C' ニ於テ,先ヅ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ ト假定スルトキハ,三角形

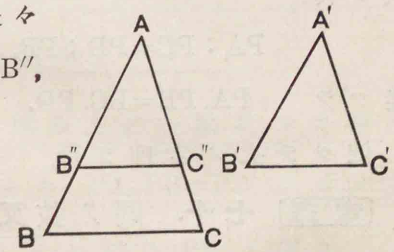
A'B'C' ヲ ABC ノ上ニ重ネ,邊 A'B', A'C' ガ夫々邊 AB, AC ノ上ニ落ツル樣ニ置ケバ, B'C' ハ BC ニ平行ナリ。故ニ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}. \qquad \text{(定理六十五)}$$

依ツテ兩三角形ハ互ニ相似ナリ。

(2) 次ニ, $\angle A=\angle A'$, $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$ ト假定シ,上ノ場合ト同樣ニ三角形 A'B'C' ヲ ABC ノ上ニ重ヌルトキハ,矢張 B'C' ハ BC ニ平行ナリ(定理六十五系 1)。依ツテ兩三角形ハ等角ニシテ,從ツテ (1) ニヨリ相似ナリ。

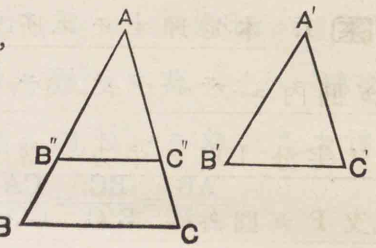
(3) 最後ニ, $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$ ト假定スルトキハ,邊 AB, AC ノ上ニ夫々 A'B', A'C' ニ等シク AB'', AC'' ヲトリ, B''C'' ヲ結ベバ三角形 AB''C'' ハ ABC ニ相似ナリ



((2) ノ場合)。故ニ $\dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{BC}{B''C''}$.

然ルニ $$\frac{AB}{AB''}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

故ニ $\frac{BC}{B''C''}=\frac{BC}{B'C'}$,



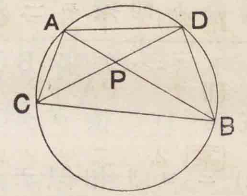
従ッテ $B''C''=B'C'$.

故ニ

$\triangle AB''C''\equiv\triangle A'B'C'$.

依ッテ三角形 $A'B'C'$ ト ABC トハ相似ナリ。

系 圓ノ内又ハ外ニアル一點 P ヲ過ル二ツノ直線ガ圓周ト交ル點ヲ夫夫 A, B 及ビ C, D トスルトキハ,

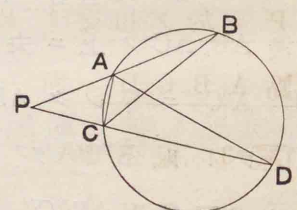


$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$,

又 $\triangle PAD \backsim \triangle PCB$.

此系ヨリ直チニ次ノ比例式ヲ得。

$PA : PC = PD : PB$.

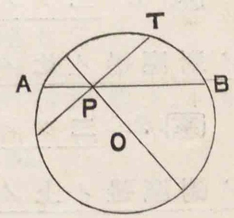


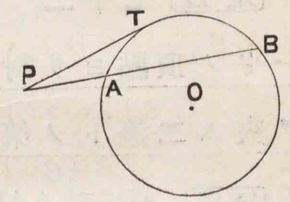
従ッテ $PA.PB=PC.PD$.

依ッテ次ノ定理ヲ得。

定理 七十. 圓ノ弦又ハ其延長ガ一定點ヲ過ルトキハ,其定點ニヨリテ内分又ハ外分セラレタル弦ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ一定ノ面積ヲ有ス。

系 1. 本定理ニイフ所ノ一定ノ面積ハ,定點 P ガ圓内ニアルトキハ P ヲ過ル直徑ニ垂直ナル弦ノ半分 PT ノ平方ニ等シク,又 P ガ圓外ニアルトキハ P ヨリ圓ニ引キタル切線ノ長サ(定點 P ヨリ切點 T マデノ距離)ノ平方ニ等シ。





即チ $PA.PB=PT^2$.

系 2. 二ツノ線分 AB, CD 又ハ兩線分ノ延長ガ一點 P ニ於テ相交リ $PA.PB=PC.PD$ ナルトキハ,四點 A, B, C, D ハ同一圓周上ニアリ。

系 3. 線分 BA ノ延長上ノ一點 P ヨリ他ノ線分 PT ヲ引キタルトキ,$PA.PB=PT^2$ ナラバ三點 A, B, T ヲ過ル圓ハ T ニ於テ PT ニ切ス。

定理 七十一. 二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ一双ノ對應邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

定理六十三及ビ相似形ノ定義ニヨリテ直チニ證明スルコトヲ得,學生自ラ之ヲ試ミヨ。

系 1. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ一双ノ對應邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

系 2. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ一双ノ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シ。

定理 **七十二.** 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一ツノ頂點ヨリ對邊ニ引ケル垂線ト此頂角ヲ夾ム二邊トノ第四比例項ナリ。

特述 AD ヲ $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ直徑トシ, AE ヲ BC ニ引ケル垂線トスレバ, $AE:AB=AC:AD$ ナルコトヲ證明セントス。

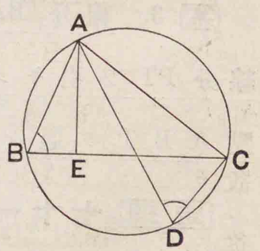
證明 $\triangle ABE$ ト $\triangle ADC$ トニ於テ,

$\angle B=\angle D$,

$\angle AEB=\angle ACD=$直角.

故ニ $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$.

依ツテ $AE:AB=AC:AD$.



定理 **七十三.** 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ對角線ノ包ム矩形ニ等シ。

之ヲとれみー (Ptolemy) ノ定理トイフ。

特述 ABCD ヲ圓ニ内接スル四邊形トスレバ

$$AB.CD+AD.BC=AC.BD$$

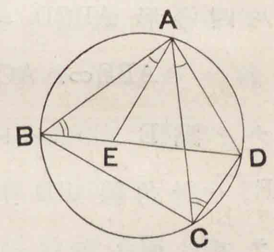
ナルコトヲ證明セントス。

證明 BD 上ニ一點 E ヲ取リ

$\angle BAE=\angle CAD$ ナラシム。

$\angle ACD=\angle ABD$ ナルヲ以テ,

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$. (1)



從ツテ $AB:AC=BE:CD$,

故ニ $AB.CD=AC.BE$. (2)

次ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle AED$ トニ於テ

$\angle BAC=\angle EAD$, (作圖ニヨル)

$AB:AC=AE:AD$. ((1)ニヨル)

故ニ $\triangle ABC \backsim \triangle AED$.

從ツテ $BC:ED=AC:AD$.

故ニ $AD.BC=AC.ED$. (3)

(2)ト(3)トヨリ

$$AB.CD+AD.BC=AC.BE+AC.ED$$
$$=AC(BE+ED)$$
$$=AC.BD.$$

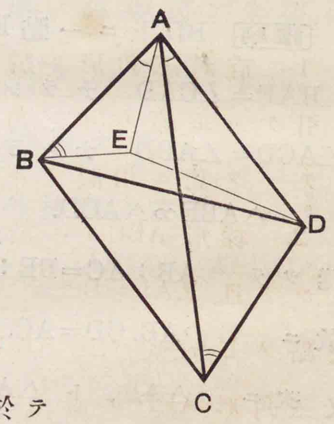
系 1. 圓ニ內接セザル四邊形ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ其對角線ノ包ム矩形ヨリ大ナリ。

(略解) 圓ニ內接セザル四邊形 ABCD ニ於テ

$$\triangle ABE \backsim \triangle ACD,$$

ナル點 E ヲトルトキハ, E ハ對角線 BD 上ニアラズ。而シテ

$$AB.CD=AC.BE. \quad (1)$$



次ニ △ABC ト △AED ニ於テ

$$\angle BAC=\angle EAD, \quad AB:AC=AE:AD.$$

故ニ $\triangle ABC \backsim \triangle AED$

ニシテ $AD.BC=AC.ED.$ (2)

(1), (2) ヨリ $AB.CD+AD.BC=AC.BE+AC.ED$

$$=AC(BE+ED).$$

然ルニ $BE+ED>BD.$

依ッテ $AB.CD+AD.BC>AC.BD.$

系 2. 對邊ノ包ム矩形ノ和ガ對角線ノ包ム矩形ニ等シキ四邊形ハ圓ニ內接ス。

(本定理ノ逆, 系 1 ノ對偶)

例 題

1. 直角三角形ニ於テ, 直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ引ケル垂線ハ, 其三角形ヲ原形ニ相似ナル, 從ッテマタ互ニ相似ナル二ツノ三角形ニ分ツ。

2. 梯形 ABCD ニ於テ, 邊 AD ト BC トガ平行ニシテ且 2.AD=BC ナルトキ, 對角線 AC, BD ノ交點ヲ E トセバ, 比 AE:EC, BE:ED ノ値如何。又三角形 AED ノ面積ハ全形ノ面積ノ幾分ノ一ナルカ。

3. 三角形 ABC ノ邊 AB 及ビ AC ヲ何レモ $m:n$ ナル比ニ內分スル點ヲ夫々 D 及ビ E トスルトキハ, 線分 BE ト CD トハ各他ヲ如何ナル比ニ分ツカ。又外分スルトキハ如何。

4. 二ツノ三角形ノ各邊ガ夫々平行ナルカ又ハ夫々垂直ナルトキハ,兩三角形ハ相似ナリ。

5. 二直線ガ三ツノ平行線ト夫々 A, B, C 及ビ A′, B′, C′ ニ於テ相交リ,ココニ AB : BC = $m : n$ ニシテ且最初ノ二直線ノ交點ガ三ツノ平行線ノ間ニアラザルトキハ, nAA′ + mCC′ = $(m+n)$BB′ ナリ。若シ交點ガ平行線ノ間ニアルトキハ如何。

6. 前問ニ於テ AA′ = a, CC′ = c トシ,又二直線 AA′ ト CC′ トノ間ノ距離ヲ d トセバ,二直線 ABC, A′B′C′ ノ交點ヨリ三ツノ平行線 AA′, BB′, CC′ ニ至ル距離各如何。

7. 三角形 ABC ニ於テ, A ヨリ邊 BC ニ引ケル垂線ノ足 D ガ B ト C トノ間ニアリテ且 AD ガ BD, DC ノ比例中項ナルトキハ,角 A ハ直角ナリ。

8. 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ

$$\angle A = \angle A', \ AB : BC = A'B' : B'C',$$

ナルトキ,兩形ハ互ニ相似ナルカ。

(58頁定理十九ト比較セヨ)

9. 二ツノ三角形ニ於テ一双ノ角ガ相等シク他ノ一双ノ角ガ互ニ補角ヲナストキハ此等ノ角ニ對スル邊ハ比例ヲナス。

10. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ,其對邊ノ包ム矩形ノ和ハ其四邊形ノ二倍ニ等シ。

11. 直角三角形 ABC (∠B = 直角) ニ於テ, AB ノ三等分點ヲ過リ之ニ垂線ヲ引キ,全形ヲ三ツノ部分ニ分チ,ソノ面積ヲ順次ニ X, Y, Z トセバ

$$X + Z = 2Y.$$

12. C, D ハ一ツノ半圓ノ直徑上ニ在リテ其ノ中心 O ヨリ等距離ニ在ル二ツノ定點ナリ。任意ノ平行線 CP, DQ ヲ引キ半圓ノ周トノ交點ヲ P, Q トスルトキハ,矩形 CP. DQ ハ一定ナリ。

13. 圓ノ直徑上ニ於テ中心 O ヨリ双方ニ等距離ニ設ケタル二點ヲ A, B トシ, B ヲ過ル任意ノ弦ヲ CD トスレバ △ACD ノ三邊ノ平方ノ和ハ一定ナリ。

14. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點 O ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ,ソレト BC,

AD 及ビ CD ノ延長トノ交點ヲ,夫々 E, F, G トスレバ, GO ハ GE, GF ノ比例中項ナリ。

15. 三角形 ABC ニ於テ,直線 DE ヲ中線 AM ニ平行ニ引キ, AB, AC (又ハ其延長)ト夫々 D, E ニ於テ交ラシムルトキハ, AD : AE = AB : AC.

16. 三邊ノ長サガ a 糎, b 糎, c 糎ナル三角形 ABC ノ各角ノ二等分線ト對邊トノ交點ヲ D, E, F トスルトキ,三角形 DEF ト三角形 ABC トノ面積ノ比ハ $\dfrac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ ナリ。

17. 線分 AB ヲ C, D ニ於テ内分シ AB : AC = AC : AD ナラシメ, A ヲ過リ AC ニ等シキ他ノ線分 AE ヲ引ケバ, EC ハ角 BED ヲ二等分ス。

18. AC = 2.AB ナル三角形 ABC ニ於テ,頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ト交ル點ヨリ二邊 AC, AB ニ平行ナル二直線ヲ引キ AB, AC ト夫々 E, F ニ於テ交ラシメ, FE ノ延長ト CB ノ延長トノ交點ヲ G トスレバ, EF = GE ナリ。

19. 二ツノ定直線ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

20. 一定點ト一定圓周上ノ任意ノ點トヲ結ブ線分ヲ一定ノ比ニ分ツ點ノ軌跡如何。

21. 定點 A ヲ過ル任意ノ直線ガ定直線ト交ル點ヲ B トシ, △ABC ヲ作リテ與ヘラレタル三角形ト相似ナラシムルトキ頂點 C ノ軌跡如何。

22. 定點 P ヲ過ル任意ノ直線ガ平行ナル二定直線ト交ル點ヲ A, B トシ, AB ヲ一邊トシテ其定マレル側ニ正三角形 ABC ヲ作ルトキ,頂點 C ノ軌跡如何。

23. 二定點ヲ過リ,且一定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

24. 二定點ヲ過リ,且一定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。

第四章　線分ノ計算

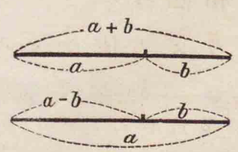
78. 線分ノ計算

第64節ニ述ベタルコト及ビ定理六十一ノ系,定理六十二ノ系3等ニヨリテ見レバ線分ノ長サニツイテ恰カモ數ニ關スル代數的公式ト同樣ノ關係ガ成立スルコトヲ知ル。實際或ル程度マデハ數ト全ク同樣ノ法則ニ從ツテ線分ノ加減乘除等ヲ行フコトヲ得ルモノナリ。之ヲ**線分ノ計算**ト稱ス。

79. 四則及ビ開平

線分ノ四則及ビ開平ノ意味ヲ次ノ如ク定義ス,但シ以下線分ノ長サノコトヲ略シテ單ニ線分ト稱シ,又 a, b, c 等ハ何レモ線分ヲ表スモノトシ,四則及ビ開平等ノ記號ハスベテ代數學ニ於ケルト同一ノモノヲ用フルコトトス。

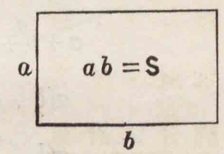
二ツノ線分ノ和トハ其二ツヲ繼ギ足シテ得ル一ツノ線分ノコトナリ。



一ツノ線分ヨリ他ノ線分ヲ引キタル差トハ,ソレト後者トノ和ガ前者ニ等シクナル如キ一ツノ線分ノコトナリ。

但シ前者ガ後者ヨリ小ナル如キ場合ハ引クコトヲ得ザルモノトス,即チ「負ノ線分」トイフベキモノハ本書ノ程度ニ於テハ考ヘザルコトトス。

二ツノ線分ノ積トハ其二ツガ包ム矩形ノ面積ノコトナリ。

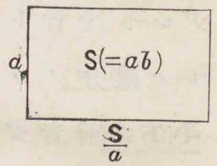


但シ之ヲ圖ニアラハストキニハ必ズシモ矩形トスルヲ要セズ,之ト等積ナル任意ノ多角形*ヲ以テ之ニ代フルモ可ナリ。

サテ二ツノ線分ノ積ハ一ツノ線分ニアラズシテ多角形ノ面積ナルガ故ニ,掛ケ算ノ逆算法タル割リ算ヲ考フルニ當ツテハ,其被除數ニ相應スルモノハ一ツノ多角形ノ面積ニシテ,除數ニ相應スルモノハ一ツノ線分ナリトセザル可カラズ。依ツテ次ノ如ク定義ス。

*多角形ナラザル形ノ面積ハ未ダ取扱ハザルヲ以テココニハ多角形ト限レリ。

一ツノ多角形ノ面積ヲ一ツノ線分ニテ割リタル商トハ,ソレト後者(線分)トノ積ガ前者(多角形ノ面積)ニ等シクナル如キ一ツノ線分ノコトナリ。



以上ノ如ク定義セラレタル線分ノ四則ニツイテハ次ノ諸法則ガ成立スルコト明カナリ。

$$a+b=b+a,\qquad ab=ba,$$
$$a+b+c=a+(b+c),$$
$$a(b+c)=ab+ac,$$
$$a(b-c)=ab-ac.$$

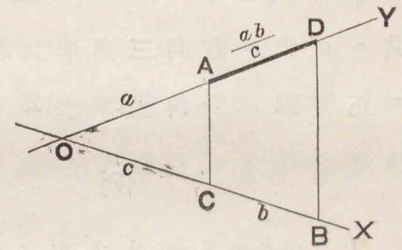
從ツテマタコレラヨリ誘導セラルル種々ノ代數的公式モ成立スベシ。但シ小ナル線分ヨリ大ナル線分ヲ引クコト,二ツヨリ多クノ線分ヲ相乘ズルコト (abc ノ如キ),面積ト線分トノ和又ハ差ヲ作ルコト ($ab+c$ ノ如キ),等スベテ意義ナキモノハ避クベキモノトス。

掛ケ算ノ特別ノ場合トシテ掛ケ合スベキ二ツノ線分ガ相等シキトキハ,其積ハ卽チモトノ各線分ノ平方ナリ。

逆ニ,一ツノ多角形ノ面積ガ與ヘラレタルトキ,之ガ如何ナル線分ノ平方ナルカヲ求ムル算法ヲ**開平**トイヒ,其線分ヲ與ヘラレタル**面積ノ平方根**トイフ。

線分ノ計算ニ關スル二三ノ例ヲ次ニ示ス。

例 1.　a, b, c ヲ知リテ $\dfrac{ab}{c}$ ヲ求ム。



相交ル二直線 OX, OY ヲ引キ, OX 上ニ $OC=c$, $CB=b$ ヲトリ,又 OY 上ニ $OA=a$ ヲトリ,B ヲ過リ AC ニ平行線ヲ引キ,之ト OY トノ交點ヲ D トス。AD ハ卽チ求ムル線分ナリ。　(定理六十五)

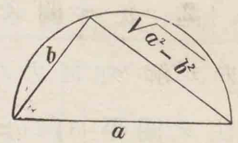
或ハ OX 上ニ O ヨリ互ニ反對ノ方向ニ $OA=a$, $OB=b$ ヲトリ,OY 上ニ $OC=c$ ヲトリ,三點 A, C, B ヲ過ル圓ト OY トノ交點ヲ D トスレバ,

$OD=\dfrac{ab}{c}$ ナリ。　(定理七十)

例 2.　a, b ヲ知リテ $\sqrt{(a+b)(a-b)}$ ヲ求ム。但シ $a>b$ トス。

之ヲ變形スレバ

$$\sqrt{(a+b)(a-b)}=\sqrt{a^2-b^2}.$$



故ニ斜邊ガ a, 他ノ一邊ガ b ナル直角三角形ヲ作レバ,其第三邊ガ卽チ求ムル線分ナリ。

例 3. a ヲ知リテ $\sqrt{2}a$ ヲ求ム。

$\sqrt{2}a=\sqrt{a^2+a^2}$ ナリ。故ニ直角ヲ夾ム二邊ガ共ニ a ナル直角三角形ノ斜邊(卽チ一邊ガ a ナル正方形ノ對角線)ヲ求ムレバヨシ。

例　題

1. a, b, c ヲ知リテ次ノ各計算ノ結果ヲ作圖ニヨリテ求メヨ。

(1) $3a+\dfrac{b^2}{c}$,　　(2) $2a^2+b^2$,

(3) $\sqrt{a(b-c)}$, 但シ $b>c$,　　(4) a^2-ab+b^2,

(5) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$,　　(6) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$,

(7) $(a+b)^2-(a-b)^2$, 但シ $a>b$,

(8) $\sqrt{3}a+\sqrt{5}b$,

(9) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$,

(10) $\sqrt{a^2-3ab+2b^2}$, 但シ $a>2b$.

2. x ニ關スル次ノ一次方程式ヲ作圖ニヨリテ解ケ。

(1) $ax-b^2=a^2$,

(2) $cx-b(a+x)=0$,　$c>b$.

80. 一元二次方程式ノ解法

數ニ關スル一元二次方程式ハ常ニ

$$x^2+px+q=0$$

ナル形ニ書クコトヲ得,ココニ x ハ未知數, p, q ハ既知數トス。而シテ之ヲ解クコトハ代數學ニ於テ既ニ學ベル所ナリ。

今線分ノ計算ニツイテ之ト同樣ナル問題ヲ考ヘンニ, x, p ヲ各一ツノ線分トスレバ, x^2 及ビ px ハ何レモ面積ヲアラハスガ故ニ, q ハ一ツノ面積ニ等シカラザル可カラズ,依ツテ q ノ代リニ q^2 ト書クコトトシ,コノ新シキ q ハ一ツノ線分ヲ表スモノトスベシ。且又今考フル線分ノ計算ニ於テハ負ノ量ヲ考ヘザルヲ以テ代數學ニ於ケル如ク p, q 等ノ文字ヲシテ任意ニ正又

ハ負ノ符號ヲ含マシムル能ハズ,依ツテ方程式ノ形ヲ

$$x^2 \pm px \pm q^2 = 0$$

トシ,符號ノ四種ノ各組合ニツイテ此方程式ノ有スル正根ヲ求ムルコトヲ考フベシ。

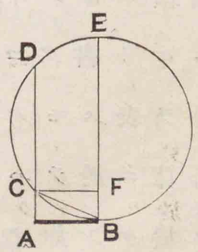
(1)　$x^2 + px + q^2 = 0.$

此方程式ハ正根ヲ有セザルコト明カナリ。

(2)　$x^2 - px + q^2 = 0.$

之ヲ書キ直セバ $x(p-x) = q^2$ トナル。依ツテ次ノ如キ作圖ヲナスベシ。

先ヅ $AB = q$ ナル線分ヲ引キ,其一端 B ニ於テ之ニ切スル直徑 p ナル圓ヲ畫キ, A ニ於テ AB ニ垂直ニ引キタル直線ト此圓周トノ交點ヲ C, D トスレバ, AC 及ビ AD ハ何レモ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ。



何トナレバ, $AC = x$ トシ, C ヨリ此圓ノ直徑 BE ニ垂線 CF ヲ引ケバ, $AC = BF$ ニシテ

$$BF.FE = BF(BE - BF) = CF^2,$$

即チ　$x(p-x) = q^2.$

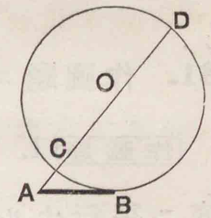
$AD = x$ トスルモ同樣ノ結果ヲ得。

(但シ $2q > p$ ナラバ根ナシ)

(3)　$x^2 + px - q^2 = 0.$

之ヲ書キ直セバ $x(x+p) = q^2$ トナル。今 $AB = q$ ナル線分ノ一端 B ニ於テ之ニ切スル直徑 p ナル圓 O ヲ畫キ,直線 AO ガ此圓ト交ル二ツノ點ノ中 A ニ近キ方ヲ C, 遠キ方ヲ D トスレバ, AC ガ求ムル所ノ正根ナリ。何トナレバ

$$AC.AD = AC.(AC + CD) = AB^2,$$



故ニ $AC = x$ トスレバ

$$x(x+p) = q^2.$$

(4)　$x^2 - px - q^2 = 0.$

上ノ(3)ノ場合ト同樣ノ作圖ヲナセバ, AD ガ求ムル正根ナリ。(學生自ラ之ヲ證明セヨ。)

例　題

1.　$x^2 - 10x + 16 = 0$ ノ二根ヲ作圖ニヨリテ求メヨ。

2.　代數學ニヨレバ二次方程式 $x^2 - px + q^2 = 0$ ノ根ハ

$$x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q^2}}{2}$$

ナリ。之ニヨリテ線分 x ヲ求ムル作圖法ヲ考ヘヨ。

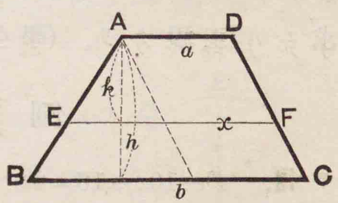
3. 二ツノ線分ノ和ト,其包ム矩形ト等積ナル正方形トヲ知リテ,モトノ各線分ヲ求メヨ。

4. 前問ニ於テ和ノ代リニ差ヲ知ルトキハ如何。

5. a, b, c ガ與ヘラレタル線分ナルトキ,比例式 $x:a=b:x+c$ ニ適合スル線分 x ヲ求メヨ。

81. 作圖題ニ於ケル應用

作圖題 1. 與ヘラレタル梯形ノ面積ヲ其底ニ平行ナル直線ニヨリテ二等分セヨ。



特述 四邊形 ABCD ハ邊 AD, BC ガ平行ナル梯形ナリトス。今其底 BC ニ平行ナル直線ヲ以テ其面積ヲ二等分セントス。

解析 今求ムル直線ヲ引キタリトシ,其直線ト邊 AB, DC トノ交點ヲ夫々 E, F トセヨ。直線 AD, BC ノ距離ヲ h, AD, EF ノ距離ヲ k トシ,又

$$\mathrm{AD}=a,\quad \mathrm{EF}=x,\quad \mathrm{BC}=b$$

トスレバ,

$$\mathrm{ABCD}=\frac{1}{2}h(b+a),\qquad \mathrm{AEFD}=\frac{1}{2}k(x+a).$$

然ルニ $\mathrm{ABCD}=2.\mathrm{AEFD}$

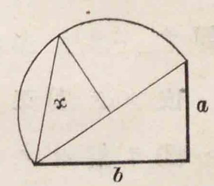
ナルヲ以テ $h(b+a)=2k(x+a)$,

即チ $\dfrac{h}{k}=\dfrac{2(x+a)}{b+a}.$

然ルニ又一方ニ於テ

$$\frac{h}{k}=\frac{b-a}{x-a}$$

ナルコトハ容易ニ説明セラル(定理六十五系)。



故ニ $\dfrac{2(x+a)}{b+a}=\dfrac{b-a}{x-a},$

即チ $2(x^2-a^2)=b^2-a^2$

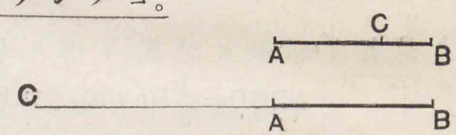
ナル方程式ヲ得。之ヲ解ケバ

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

ヲ得。斯クノ如キ線分ハ作圖ニヨリテ作ルコトヲ得ベシ。

(作圖,證明) 學生自ラ之ヲ試ミヨ。

作圖題 2. **與ヘラレタル線分ヲ內分又ハ外分シ,全線分ト其一ツノ分トノ積ヲ他ノ分ノ平方ニ等シカラシメヨ。**



特述　線分 AB ヲ C ニ於テ內分又ハ外分シ, $AB.BC=AC^2$ ナラシメントス。

解析　$AB=a$, $AC=x$ トスレバ,內分ノ場合ニ於テハ $BC=a-x$ ナルガ故ニ

$$a(a-x)=x^2,$$

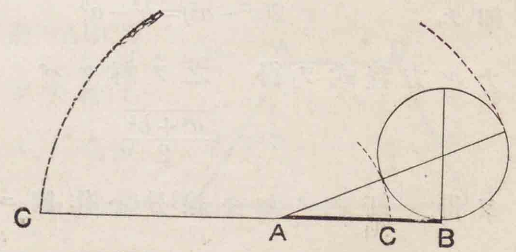
卽チ　$$x^2+ax-a^2=0. \qquad (1)$$

又外分ノ場合ニ於テハ $BC=a+x$ ナルガ故ニ

$$a(a+x)=x^2,$$

卽チ　$$x^2-ax-a^2=0. \qquad (2)$$

依ツテ (1) 又ハ (2) ヲ解ケバ,夫々內分又ハ外分スル點 C ヲ決定スルコトヲ得。

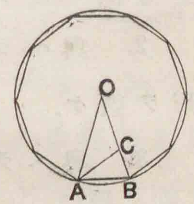


(作圖,證明)　學生自ラ之ヲ試ミヨ。

附言.　線分ヲ斯クノ如クニ分ツコトハ種々ノ場合ニ應用アルモノニシテ,之ヲ**黃金分割**トイフ。(又ハ**中末比**ニ分ツトモ**外中比**ニ分ツトモ云フ)

其應用ノ一例ヲ次ニ擧グ。

作圖題 3. **與ヘラレタル圓ニ內接スル正十角形ヲ畫ケ。**



解析　圓 O ニ內接スル正十角形ノ一邊ヲ AB トスレバ,

$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ,$$

從ツテ　$$\angle OAB=\angle OBA=72^\circ.$$

故ニ角 OAB ノ二等分線 AC ヲ引クトキハ,

$$\triangle ABC \backsim \triangle OBA$$

ナルコトハ容易ニ證明セラル。依ツテ

$$BC:AB=AB:OB.$$

然ルニ三角形 COA, ABC ハ何レモ二等邊ニシテ

$$AB=CA=OC$$

ナルヲ以テ　$$BC:OC=OC:OB.$$

卽チ　$$OB.BC=OC^2.$$

故ニ與ヘラレタル圓ノ半徑ヲ C ニ於テ斯クノ

如クニ内分スレバ(黄金分割), OC ハ卽チ此圓ニ內接スル正十角形ノ一邊ニ等シ。

(**作圖, 證明**) 學生自ラ之ヲ試ミヨ。

例 題

1. 與ヘラレタル線分ノ長サヲ a トセバ, 黄金分割ニ於ケル各ノ分ノ長サ如何。

2. 與ヘラレタル線分ヲ一邊トスル正十角形ヲ畫ケ。

3. 與ヘラレタル圓ニ內接スル正五角形, 及ビ與ヘラレタル一邊ヲ有スル正五角形ヲ畫ケ。

4. 正十五角形ノ作圖法如何。

$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}\right.$ ナルコトヲ利用セヨ。$\left.\right)$

5. 直角ヲ五等分セヨ。

6. 正五角形ノ外角ヲ三等分セヨ。

7. 與ヘラレタル多角形ト相似ニシテ, 且ソレトノ面積ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ多角形ヲ作レ。

8. 與ヘラレタル三角形ヲ其一邊ニ平行ナル直線ニヨリテ二等分セヨ。

9. 與ヘラレタル三角形ヲ其一邊ニ垂直ナル直線ニヨリテ二等分セヨ。

10. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ, 與ヘラレタル直線ヨリ所定ノ長サノ線分ヲ截リ取ル圓ヲ畫ケ。

11. 三角形 ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 X, Y トシ, X ヨリ BC ニ垂線 XZ ヲ引キ, XY+XZ ヲシテ所定ノ長サニ等シカラシメントス。直線 XY ノ作圖法如何。

12. 一直線上ニ四點 A, B, C, D アリ, 同ジ直線上ニ一點 O ヲトリテ OA.OD=OB.OC ナラシメヨ。

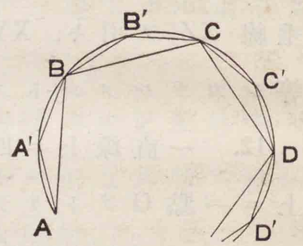
13. △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線 DE ヲ引キ AB, AC ト夫々 D, E ニ交ラシメ △ADE=△EBC ナラシメヨ。

第五章

正多角形ニ關スル計算

82. 作圖シ得ル正多角形

正 n 角形 ABCD……ノ外接圓ノ弧 AB, BC, CD, ……ヲ各二等分シ,其分點ヲ夫々 A', B', C', ……トスレバ, $AA'BB'CC'D$…… ナル多角形ガ正 $2n$ 角形ナルコトハ容易ニ證明セラル。



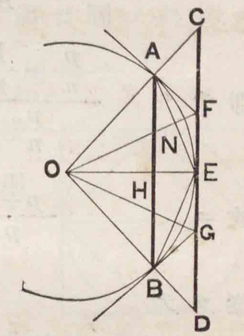
故ニ正 n 角形ガ作圖セラルヽトキハ從ツテ正 $2n$ 角形,正 $4n$ 角形等,一般ニ正 $2^h n$ 角形(h ハ任意ノ正ノ整數)ヲ作圖スルコトヲ得。

今正三角形,正四角形(正方形)ハ容易ニ作圖シ得。又正五角形,正十五角形モ作圖シ得。(第81節ノ例題3及ビ4) 從ツテ次ノ邊數ヲ有スル正多角形ハ今マデ學ビタル所ニテスベテ作圖スルコトヲ得ルモノナリ。

$$3.2^h,\quad 4.2^h,\quad 5.2^h,\quad 15.2.^h$$

83. 一ツノ圓ノ外接及ビ内接正多角形ノ周圍ノ計算

中心 O ナル圓ニ於テ,内接正 n 角形ノ一邊ヲ AB, 外接正 n 角形ノ一邊ヲ CD トシ,且 CD ノ切點 E ハ弧 AB ノ中點ニアリトス。A 及ビ B ニ於ケル此圓ノ切線ガ CD ト交ル點ヲ夫々 F 及ビ G トスレバ, OF, OG ガ夫々角 COE, DOE ノ二等分線ナルコト,從ツテ又 FG ガ外接正 $2n$ 角形ノ一邊ナルコトハ容易ニ證明セラル。



今同ジ圓ニ於ケル

外接正 n 角形ノ周圍ヲ P, 内接正 n 角形ノ周圍ヲ p,

外接正 $2n$ 角形ノ周圍ヲ P_1, 内接正 $2n$ 角形ノ周圍ヲ p_1

トス,卽チ P, p, P_1, p_1 等ヲ次ノ如キ意味ニ用フ。

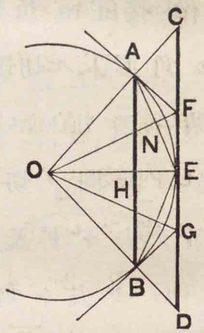
$$CD=2.CE=\frac{P}{n},\qquad FG=2.FE=\frac{P_1}{2n},$$

$$AB=2.AH=\frac{p}{n},\qquad AE=2.EN=\frac{p_1}{2n}.$$

サテ　$\triangle COD \backsim \triangle AOB$

ナルヲ以テ　$\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OC}{OE}=\dfrac{CF}{FE}$.　(定理六十六)

故ニ　$\dfrac{AB+CD}{AB}=\dfrac{CF+FE}{FE}=\dfrac{CE}{FE}$,



即チ　$\dfrac{\dfrac{p}{n}+\dfrac{P}{n}}{\dfrac{p}{n}}=\dfrac{\dfrac{P}{2n}}{\dfrac{P_1}{4n}}$.

故ニ　$\dfrac{p+P}{p}=\dfrac{2P}{P_1}$,

從ッテ　$P_1=\dfrac{2pP}{p+P}$

ヲ得。即チ P_1 ハ p ト P トノ調和中項ナリ。

又　$\triangle AHE \backsim \triangle ENF$

ナルヲ以テ　$\dfrac{AH}{AE}=\dfrac{EN}{EF}$.

即チ　$\dfrac{\dfrac{p}{2n}}{\dfrac{p_1}{2n}}=\dfrac{\dfrac{p_1}{4n}}{\dfrac{P_1}{4n}}$.

故ニ　$\dfrac{p}{p_1}=\dfrac{p_1}{P_1}$.

從ッテ　$p_1=\sqrt{pP_1}$

ヲ得。即チ p_1 ハ p ト P_1 トノ等比中項ナリ。

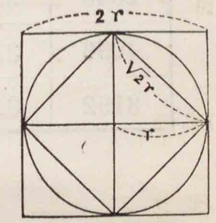
故ニ一ツノ圓ニ外接及ビ內接スル二ツノ正

n 角形ノ周圍 P 及ビ p ヨリ始メテ逐次ニ相連續スル二數ノ調和中項及ビ等比中項ヲ交互ニ取リテ進ムトキ得ル一列ノ數

$$P,\ p,\ P_1,\ p_1,\ P_2,\ p_2,\ \ldots\ldots$$

ヲ作ルトキハ、P_h, p_h ハ夫々同ジ圓ノ外接正 $2^h n$ 角形及ビ內接正 $2^h n$ 角形ノ周圍ナリ。

半徑 r (直徑 $2r$) ナル圓ニ外接及ビ內接スル二ツノ正方形ノ周圍ヲ考フレバ,



$$P=2r\times 4,$$

$$p=4\sqrt{2}\,r=2\sqrt{2}\times 2r=2.8284271\times 2r$$

ナルコトハ容易ニ計算セラル。之ヨリ始メテ上記ノ理ニヨリ順次ニ同ジ圓ニ外接及ビ內接スル正八,十六,......角形ノ周圍ヲ計算スレバ下表ノ如シ。

邊　數	外接正多角形ノ周	內接正多角形ノ周
4	4.0000000　$\times 2r$	2.8284271　$\times 2r$
8	3.3137085　$\times 2r$	3.0614675　$\times 2r$
16	3.1825979　$\times 2r$	3.1214452　$\times 2r$
32	3.1517249　$\times 2r$	3.1365485　$\times 2r$

64	3.1441184 $\times 2r$	3.1403312 $\times 2r$
128	3.1422236 $\times 2r$	3.1412773 $\times 2r$
256	3.1417504 $\times 2r$	3.1415138 $\times 2r$
512	3.1416321 $\times 2r$	3.1415729 $\times 2r$
1024	3.1416025 $\times 2r$	3.1415877 $\times 2r$
2048	3.1415951 $\times 2r$	3.1415914 $\times 2r$
4096	3.1415933 $\times 2r$	3.1415923 $\times 2r$
8192	3.1415928 $\times 2r$	3.1415926 $\times 2r$

例 題

1. 本節ノ圖ニ於テ,圓 O ノ半徑ヲ r トシ,又 $AB=a$, $CD=b$ トスレバ,

$$OH=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}} \quad ニシテ,且\quad \frac{CE}{OE}=\frac{AH}{OH}$$

ナル關係アリ。之ニヨリテ次ノ關係ヲ證明セヨ。

$$a=\frac{2rb}{\sqrt{b^2+4r^2}},\qquad b=\frac{2ra}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

2. 更ニ同ジ圖ニ於テ, EO ノ延長ガ再ビ圓ト交ル點ヲ K トスレバ

$$AE^2=EH.EK$$

ニシテ,コヽニ

$$EH=r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\qquad EK=2r$$

ナルコトニ注目シ,依ツテ

$$AB=a,\qquad AE=a'$$

トスレバ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

$$a'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a^2})},$$

$$a=\frac{a'\sqrt{4r^2-a'^2}}{r}.$$

第六章　圓ニ關スル計算

84. 圓周ノ長サ

定義　一ツノ圓ニ外接スル正n角形ノ周圍ガ同ジ圓ニ内接スル正n角形ノ周圍ヨリ大ナルコトハ容易ニ證明セラル。而シテ其邊數nヲ增ストキハ外接形ノ周圍ハ次第ニ小トナリ,内接形ノ周圍ハ次第ニ大トナリ,双方相接近シ來ル。其共通ノ極限値ヲ**圓周ノ長サ**トス。

扨前節ノ終リニ擧ゲタル表ニヨレバ,一ツノ圓ノ外接及ビ内接正多角形ノ周圍ノ其圓ノ直徑ニ對スル比ノ値ハ,邊數ガ漸々增加スルニ從ツテ外接ノ場合ト内接ノ場合トハ次第ニ相接近シ,ツイニ邊數ガ 8192 ナルニ至レバ此二種ノ比ノ値ハ小數第六位マデハ全ク一致スルヲ見ル。故ニ圓周ノ長サハ直徑ノ約 3.141592 倍ナリ。ナホ外接及ビ内接正多角形ノ邊數ヲ增加シテ見レバ上記ノ二種ノ比ノ値ハ小數點以下更ニ

多クノ桁數マデ相一致スベク,從ツテ圓周ノ其直徑ニ對スル比ノ値ヲ更ニ精シク定ムルコトヲ得ベシ。此比ノ値ハ實ハ無理數ニシテ有限ナル桁數ノ小數ヲ以テ正シク表スヲ得ザルコトハ高等數學ノ證明スル所ナリ。依ツテ通常之ヲπ(パイ)ナルぎりしや文字ニテ表スコトヽス。

以上ノ結果ニヨリ次ノ定理ヲ得。

定理 七十四. 半徑rナル圓周ノ長サハ$2\pi r$ナリ。

系　圓周ノ長サハ其半徑(又ハ直徑)ニ比例ス。

附言. 圓周ノ其直徑ニ對スル比ノ値(卽チπ)ヲ**圓周率**トイフ。其値ハ今日ニテハ小數點以下七百七位マデ算出セラレタリ。試ミニ其最初ノ若干位ヲ擧グレバ次ノ如シ。

$$\pi=3.14159265358979323846264338327 9\ldots\ldots$$

然レドモ實用ニハ大抵 3.1416 ナル近似値ヲ用フ。又屢分數 $\dfrac{22}{7}=\underline{3.14}28\ldots\ldots$ 及ビ $\dfrac{355}{113}=\underline{3.141592}92\ldots\ldots$ ヲ用フルコトアリ。

例　題

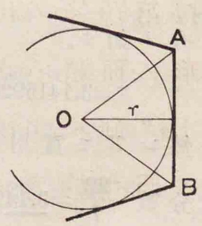
1. 半徑 120 m ナル圓周ノ長サヲ計算セヨ。但シ圓周率ノ近似數トシテ 3.1416 ヲ用ヒ,粉位未滿ヲ四捨五入セヨ。

2. 周圍 300 m ナル圓形ノ池ノ直徑ヲ米ノ小數一位マデ正シク求メヨ。

3. 半徑 r ナル圓ニ於テ,長サ l ナル弧ニ對スル中心角ノ度數ヲ求メヨ。

85. 圓ノ面積

圓ノ面積ハ之ニ內接スル正多角形ノ面積ヨリモ大ニシテ又外接スル正多角形ノ面積ヨリモ小ナリ(面積比較ノ原理)。然ルニ邊數ヲ限リナク增ストキハ兩多角形ノ面積ハ共通ノ極限値ヲ有ス。之ニ依ツテ圓ノ面積ヲ求ムルコトヲ得。



半徑 r ナル圓ノ中心ヲO,之ニ外接スル正 n 角形ノ一邊ヲ AB トスレバ,

$$\triangle AOB=\frac{1}{2}AB.r.$$

今此正 n 角形ノ面積ヲ S トスレバ,

$$S=n.\triangle AOB=\frac{1}{2}n.AB.r.$$

然ルニ n.AB ハ正 n 角形ノ周圍ニ他ナラズ,之ヲ P ニテ表セバ,

$$S=\frac{1}{2}Pr$$

トナル。コヽニ於テ邊數 n ヲ限リナク增ストキハ,極限ニ於テ P ハ圓周ノ長サ卽チ $2\pi r$ トナリ, S ハ今求メントスル圓ノ面積トナルベシ。依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 七十五. 半徑 r ナル圓ノ面積ハ πr^2 ナリ。

系 圓ノ面積ハ其半徑(又ハ直徑)ノ平方ニ比例ス。

扨第70節ノ例題1ニヨリ一ツノ圓ニ於ケル扇形ノ面積ハ之ニ屬スル弧ノ長サニ比例スルコトヲ知ル。故ニ今半徑 r ナル圓ノ面形ヲ S, 同ジ圓ニ於テ a ナル長サノ弧ヲ有スル扇形ノ面積ヲ A トスレバ,

$$\frac{A}{S}=\frac{a}{2\pi r},$$

故ニ $$A=\frac{a}{2\pi r}S=\frac{a}{2\pi r}\pi r^2=\frac{ar}{2}.$$

依ツテ次ノ定理ヲ得。

定理 七十六. 扇形ノ面積ハ其半徑ノ長サト弧ノ長サトノ積ノ半分ニ等シ。

例 題

1. 一邊ノ長サ 1 cm ナル正方形ニ外接スル圓ノ面積如何。

2. 一平方米ノ面積ヲ有スル圓ノ直徑ヲ求メヨ,但シ糎位未滿ハ四捨五入スベシ。

3. 周圍 P ナル圓ノ面積ハ $\frac{P^2}{4\pi}$ ナリ。

4. 半徑 r,中心角 a 度ナル扇形ノ面積如何。

5. 半徑 r ナル圓板アリ,之ニ圓形ノ穴ヲ穿チ殘部ノ面積ヲ始メノ面積ノ $\frac{3}{4}$ ナラシメントス。穴ノ半徑ヲ何程トスベキカ。

6. 三ツノ圓周ノ和(又ハ二圓周ノ和ト第三圓周トノ差)ニ等シキ一ツノ圓周ヲ作レ。

7. 半徑ノ比ガ 1:2 ナル二圓ガ C ニ於テ內切スルトキ,大圓ノ一ツノ直徑ト兩圓トノ交點ヲ順次ニ P, Q, R, S トスレバ,大圓ノ弧 CP ト小圓ノ弧 CQ トハ相等シ。

雜 題

1. 四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ交點ヲ O トスルトキハ, $\triangle ABD : \triangle BCD = AO : CO$.

2. CA, CB ハ一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル半徑, DE ハ任意ノ弦ナリ。 BD, BE ガ AC ト夫々 F, G ニ於テ交レバ $\triangle BFG$, $\triangle BDE$ ハ相似ナリ。

3. $\triangle ABC$ ニ於テ BC ノ中點ヲ D トシ, $\angle ADB$, $\angle ADC$ ノ二等分線ガ夫々 AB, AC ト交ル點ヲ E, F トスレバ, EF ト BC トハ平行ナリ。 又逆ハ如何。

4. 正五角形ニ於テ同一ノ頂點ヲ過ラザル二ツノ對角線ハ互ニ中末比ニ內分セラル。

5. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB 上ニ一點 D ヲトリ $AD.DB=CD^2$ ナラシムルトキ, D ハ AB ノ中點ナルカ,或ハ CD ハ AB ニ垂直ナリ。

6. 與ヘラレタル點 P ヲ過ル一直線ヲ引キ與ヘラレタル二直線トノ交點ヲ A, B トシ, PA, PB ヲシテ與ヘラレタル比ヲ有セシメヨ。

7. 與ヘラレタル一點ヲ過ル一直線ヲ引キ此直線ト他ノ與ヘラレタル二點トノ距離ヲシテ與ヘラレタル比ヲ有セシメヨ。

8. 與ヘラレタル二圓ノ和(又ハ差)ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

9. 與ヘラレタル三角形ノ與ヘラレタル一邊ニ平行線ヲ引キ,他ノ二邊ノ一双ノ對應部分ノ和(又ハ差)ヲシテ與ヘラレタル長サヲ有セシメヨ。

10. 圓周上ノ二ツノ與ヘラレタル點ノ各ヲ過リ,互ニ平行ニシテ且ソノ長サガ與ヘラレタル比ヲ有スル如キ弦ヲ引ケ。

11. 三角形ノ一邊,他ノ二邊ノ比及ビ一角ガ與ヘラレタルトキ,此三角形ヲ作レ。

12. 一邊,對角ノ二等分線及ビ他ノ二邊ノ比ガ與ヘラレタルトキ,此三角形ヲ畫ケ。

13. 與ヘラレタル正方形ニ其正方形ノ面積ノ$\frac{3}{5}$ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ內接セヨ。

14. 與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作レ。

15. 與ヘラレタル弓形ノ弧 APB 上ニ一點 P ヲ求メ, PA. PB ヲ與ヘラレタル正方形ニ等シクセヨ。

16. △ABC ノ ∠A (又ハ其外角) ノ二等分線ガ BC (又ハ其延長) 及ビ其外接圓周ト交リタル點ヲ夫々 D, E トスレバ, AB. AC＝AD. AE ナリ。

17. △ABC ノ ∠A 或ハ其外角ノ二等分線ガ BC 又ハ其延長ト交リタル點ヲ D トスレバ, $AB.AC=BD.DC\pm AD^2$. (內角ノ場合ニハ和,外角ノ場合ニハ差ヲトル。)

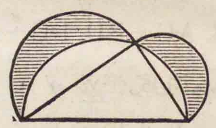
18. △ABC ノ外接圓ニ B 及ビ C ニ於テ夫々切線ヲ引キ, A ヲ過リコレラノ切線ニ平行ニ引ケル直線ガ BC 又ハソノ延長ト D, E ニ於テ交ルトキハ, AD, AE ハ何レモ BD, CE ノ比例中項ナリ。

19. 三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ二點 P, Q アリ, P ヨリ二邊 AB, AC ニ至ル距離ノ包ム矩形ト, Q ヨリ二邊 AB, AC ニ至ル距離ノ包ム矩形ト等積ナルトキ, BP ハ QC ニ等シ。

20. 底邊ト高サトノ和(又ハ差)及ビ頂角ヲ知リテ二等邊三角形ヲ作レ。

21. 三角形 ABC ノ邊 AB 上ニ二點 D, E ヲ,邊 AC 上ニ三點 F, G, H ヲ,邊 BC 上ニ一點 K ヲトリ, $AD=DE=EB$, $AF=FG=GH=HC$, $BK=KC$ ナラシムルトキ,四邊形 DEGF ト五邊形 EBKHG トノ面積ノ比ヲ求メヨ。

22. 半徑 a ナル圓ニ於テ $120°$ ヲ含ム弓形ノ面積ヲ求メヨ。



23. 直角三角形ノ各邊ノ上ニ半圓ヲ描クトキニ生ズル二ツノ新月形ノ和ハ直角三角形ト等積ナリ。(ひぽくらてす Hippocrates ノ定理)

補充問題

第一 直線

1. 三ツノ中線ガ相等シキ三角形ハ正三角形ナリ。

2. 三角形ノ一角ノ二等分線上ニ在ル一點ト其對邊ノ兩端トノ距離ノ差ハ其角ヲ夾ム二邊ノ差ヨリモ大ナラズ。

3. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ相對スル邊ニ引ケル垂線ノ交點ト頂點トヲ過ル直線ハ頂角ヲ二等分ス。

4. 同底,等高ヲ有スル三角形ノ中ニテ二等邊ノモノハ其周最小ナリ。

5. 不等邊三角形 ABC 內ニ一點 P ヲトリ,邊 BC 上ニ二點 Q, R ヲトリテ $PQ+PR>AB+AC$ ナラシムルコトヲ得ルカ。

6. 直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ニ引ケル中線ト垂線トハ其角ノ二等分線ト等角ヲナス。

7. $\triangle ABC$ ニ於テ AB ト $\angle C$ ニ等シキ角ヲナス直線 AD ヲ,又 AC ト $\angle B$ ニ等シキ角ヲナス直線 AE ヲ各 $\angle A$ ノ側ニ作リ, BC トノ交點ヲ夫々 D, E トスレバ $\triangle ADE$ ハ二等邊三角形ナリ。

8. 線分 AB ノ兩端ヨリ他ノ一ツノ直線ニ引ケル垂線ノ足ハ AB ノ中點ヨリ相等シキ距離ニアリ。

9. 正方形 ABCD ノ對角線 DB 又ハソノ延長上ニ BE ヲ BC ニ等シク取リ, E ヨリ之ニ垂線ヲ引キ CD ト交ル點ヲ F トセバ　CF=EF=DE.

10. 三角形ノ一角ノ二等分線ト其角頂*ヨリ對邊ニ引ケル垂線トノ夾角ハ他ノ二角ノ差ノ半ニ等シ。

11. △ABC ニ於テ AB<AC ナルトキハ, C ヨリ AB ニ引ケル垂線ハ, B ヨリ AC ニ引ケル垂線ヨリモ大ナリ。

12. 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點ヨリ他ノ二邊ニ引ケル垂線ノ和ガ底邊ニ引ケル高サニ等シキトキコノ三角形ハ正三角形ナリ。

13. 正三角形内ノ任意ノ一點ヨリ三邊ニ至ル距離ノ和ハ一定ナリ。

モシ又點ヲ其形外ニ取ラバ如何。

14. 正三角形内ノ一點ヨリ二邊ニ引ケル垂線ノ和ガ他ノ一邊ニ引ケル垂線ヨリ大ナル點ハ如何ナル範圍内ニアルカ。

15. 一點ヨリ正三角形ノ三中線ニ到ル距離ノ中一ツハ他ノ二ツノ和ニ等シ。

16. 三角形ノ一角ノ二等分線ハ其頂點ヨリ對邊ニ引ケル垂線ト中線トノ間ニ在リ。

17. 三角形ノ兩底角及ビ其外角ノ二等分線ニ頂點ヨリ引ケル四ツノ垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ。

---

*頂點ノコトヲ角頂トモイフ

18. 梯形ノ二ツノ對角線ガ相等シキトキハ,其平行ナラザル二邊ハ相等シ。

19. 平行四邊形ノ各頂點ヨリ對角線ニ引ケル垂線ノ足ハ一ツノ平行四邊形ノ四ツノ頂點ヲナス。

20. 平行四邊形ノ各頂點ガ他ノ平行四邊形ノ各邊上ニアレバ,此等ノ平行四邊形ノ對角線ハ同一點ヲ過ル。

21. 四邊形 ABCD ノ相隣レル二角 A, B ノ二等分線ノナス角ノ一ツハ他ノ二角 C, D ノ和ノ二分ノ一ニ等シク,又相對スル二角ノ二等分線ノナス角ノ一ツハ他ノ相對スル二角ノ差ノ二分ノ一ニ等シ。

22. 平行四邊形ノ各角ノ二等分線ハ相交リテ一ツノ矩形ヲ作リ,其對角線ハ元ノ平行四邊形ノ邊ニ平行ニシテ,兩隣邊ノ差ニ等シ。

23. 四邊形ノ相對スル二邊ガ相等シキトキハ是等ノ邊ハ他ノ二邊ノ中點ヲ過ル直線ト相等シキ角ヲナス。

24. 四邊形ノ相對スル二邊ノ中點ヲ結ブ直線ガ其各邊ニ垂線ナラバ他ノ二邊ハ相等シ。

25. 直角三角形 ABC ノ直角 A ヲ二等分スル直線 AP ト,斜邊 BC ノ中點 D ヲ過リ BC ニ垂直ナル直線トノ交點ヲ P トスレバ　AD=DP.

26. 三角形ノ三中線ノ和ハソノ周ヨリ小ナリ。

27. 三角形ノ各角ノ二等分線ノ和ト周トハ何レガ大ナルカ。(二等分線ト中線トヲ比較セヨ。16及ビ26參照)

28. $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 D, E, F ヲトレバ

$$3(AD+BE+CF)<5(AB+BC+CA).$$

29. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle C=$直角, $2.AC=BC$ ナルトキハ

$$\angle A>2\angle B.$$

30. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC 上ニ其外側ニ正方形 BADF, CAEG ヲ作レバ, A ヨリ BC ニ引ケル中線ハ DE ノ半ニ等シク,且 DE ニ垂直ナリ。

31. 直角二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ底邊ニ平行線ヲ引キ,其上ノ一點ヲ D トシ BD, AC (又ハ各ノ延長)ノ交點ヲ E トス。然ルトキハ若シ $BD=BC$ ナラバ $CD=CE$ ナリ。

32. 直角三角形 ABC ニ於テ ABDM, ACEN ヲ直角ノ二邊 AB, AC ノ上ニ作リタル正方形トシ,直角頂 A ニ對スル角頂 D, E ヨリ斜邊 BC ノ延長ニ垂線 DF, EG ヲ引ケバ　$FB=CG.$

33. 一線分 AB 上ノ一點ヲ C トシ, AB 外ノ一點 O ヨリ三直線 OB, OC, OA ヲ引キ $\angle ABO=$直角ナラシメ, A ヨリ OB ニ平行線 AD ヲ引キ OC トノ交リヲ D トスルトキ, $CD=2.AO$ ナラバ $\angle COB=\frac{1}{3}\angle AOB.$

34. 一線分 AD 上ニ二點 E, B アリ $AE=EB$, $AB=BD$ トス。AD 外ノ一點 C ヲ A, E, D ニ結ビ $AC=AB$ ナラシムレバ　$CD=2.CE.$

35. 正方形 ABCD ノ頂點 A ヲ過リテ一直線 AXY ヲ

引キ DC ト X ニ於テ, BC ノ延長ト Y ニ於テ交ラシムレバ　$AX+AY>2.AC.$

36. $\triangle ABC$ ニ於テ AC ノ中點ヲ D トシ, BC 上ノ一點ヲ E トシ, $EC=2.BE$ トスレバ, AE ハ BD ヲ二等分ス。又 BD ト AE トノ交點ヲ O トスレバ

$$AO=3.EO.$$

37. $\triangle ABC$ ニ於テ $3.AB=AC$ ナルトキ, C ヨリ角 A ノ二等分線ニ垂線 CD ヲ引クトキハ, AD ハ BC ニテ二等分セラル。

38. $\triangle ABC$ ノ重心ヲ G トス, A, B, C, G ノ四點ヨリ三角形ト交ヲザル一直線ニ引ケル垂線ノ長サヲ夫々 a, b, c, g トスレバ　$a+b+c=3g.$　又コノ直線ガ三角形ト交レバ如何。

39. 三角形ノ重心ヲ過リ任意ノ直線ヲ引ケバ,其同側ニ在ル二ツノ頂點ヨリ此直線ニ引ケル垂線ノ和ハ反對ノ側ニアル一ツノ頂點ヨリ同ジ直線ニ引ケル垂線ニ等シ。又逆ハ如何。

40. 等角六角形ニ於テ相連續セル四ツノ邊ノ長サガ順次ニ $1m$, $3m$, $3m$, $2m$ ナルトキ,他ノ二邊ノ長サヲ求ム。

第二圓

41. 正方形 ABCD ノ對角線上ノ任意ノ一點ヲ過リ邊ニ平行ナル直線ヲ引ケバ,此直線ガ邊ト交ル點ハ皆對角線ノ交點ヲ中心トセル一ツノ圓周上ニアリ。

42. 中心Oナル圓ノ一ツノ弦ABヲBヲ通シテ延長シBCヲ半徑ニ等シカラシメ, COヲOヲ通シテ延長シ圓周トDニ於テ交ラシムレバ

$$\angle AOD = 3\angle BOC.$$

43. 直角三角形ノ直角ノ二等分線ハ斜邊ノ上ニ其外側ニ畫キタル正方形ノ對角線ノ交點ヲ過ル。

44. 三角形ノ內心,傍心及ビ二ツノ頂點ハ同一圓周上ニアリ。

45. 三角形ノ二ツノ傍心及ビ二ツノ頂點ハ同一圓周上ニ在リ。

46. △ABC ノ二頂點 B, C ヲ過ル圓ガ二邊 AB, AC ト交ル點ヲ B′, C′ トセバ,直線 B′C′ ハ常ニ一定直線ニ平行ナリ。

47. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫々P, Q, R, Sトスレバ,四ツノ圓 APS, BQP, CRQ, DSR ハ皆相等シク,何レモ圓 ABC ニ內切ス。

48. 三角形ノ外接圓周上ノ一點ヨリ三邊ニ引ケル垂線ノ足ハ同一直線上ニ在リ。

之ヲしむそん (Simson) ノ定理ト云ヒ,此直線ヲ**シムソン線**ト云フ。

49. △ABC ノ外接圓周上ノ任意ノ一點 P ヨリ邊 AB, BC ニ引ケル垂線ノ足ヲ L, M トス。直線 LM ガ邊 AC (又ハ其延長)ト交ル點ヲ N トスレバ PN ハ AC ト直交ス。 (前問ノ逆ノ一ツ)

50. 相等シキ二圓ガ相交ルトキ,其交點ノ一ツヲ過ル任意ノ直線ガ各ノ圓周ト交ル點ハ二圓ノ他ノ一ツノ交點ヨリ等距離ニアリ。

51. 點 E ニ於テ外切スル二圓ノ直徑 AB, CD ヲ平行ニ引ケバ,直線 AD, BC ハ點 E ニ於テ相交ル。但シ A ト C トハ中心線ニ關シテ同ジ側ニアルモノトス。

又二圓ガ內切シ C, D ガ中心線ニ關シテ反對ノ側ニアリトシテ試ミヨ。

52. △ABC ノ頂角 A ノ二等分線ト此三角形ノ外接圓トノ交點ヲ D トシ, D ヲ過ル此圓ノ直徑ノ他ノ端ヲ D′ トシ, D ヨリ AB ニ引ケル垂線ノ足ヲ E トスレバ

$$\angle ADD' = \frac{1}{2}(\angle B \sim \angle C),$$

$$BE = \frac{1}{2}(AB \sim AC),$$

$$AE = \frac{1}{2}(AB + AC).$$

53. 一直線ガ二ツノ同心圓周ト交レバ,此二圓周ノ間ニアル二ツノ線分ハ相等シ。

54. 四邊形 ABCD ガ圓ニ內接スルトキ,對邊 AB, DC ノ交點ヲ P トシ; AD, BC ノ交點ヲ Q トスレバ, △BCP 及ビ △DCQ ノ外接圓ハ PQ 上ノ一點ニテ交ル。

55. 二圓ノ公切線ノ切點ト二圓ノ中心線ガ圓周ト交ル點トヲ結ブ直線ハ二ツヅツ互ニ平行ナリ。

56. 正三角形ノ外接圓上ノ一點ヨリ各角頂ニ至ル距離ノ中最モ大ナルモノハ他ノ二ツノ和ニ等シ。

57. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキ,其對角線ノ交點ヨリ一邊ニ引ケル垂線ノ延長ハ其邊ニ對スル邊ヲ二等分ス。

之ヲぶらーめぐぷた (Brahmegupta) ノ定理トイフ。

58. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點 O ヲ過リ邊 BC ニ引ケル垂線 OP ハ △AOD ノ外心ヲ過ル。

59. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トス。 △OBC ノ外接圓ニ點 O ヲ過リテ切線 EF ヲ引クトキ EF ハ AD ニ平行ナリ。

定義。 一ツノ三角形ノ各頂點ヨリ之ニ對スル邊ニ引ケル垂線ノ足ヲ結ビテ得ル三角形ヲ原ノ三角形ノ**垂足三角形**ト云フ。

60. 垂足三角形ノ二邊ハ其交點ヲ過ル原ノ三角形ノ垂線ト等角ヲナス。

61. 圓ニ内接スル四邊形ノ二双ノ相對スル邊ヲ延長シテ作レル二ツノ角ノ二等分線ハ互ニ垂直ニ交ル。

62. △ABC ノ一ツノ傍接圓ガ BC ト D ニ於テ切シ, AC, AB ノ延長ト E, F ニ於テ切スルトキ,三角形 DEF ノ三ツノ内角ヲ ∠A, ∠B, ∠C ニテ表セ。

63. 圓ノ弦 AB ヲ双方ヘ延長シテ AC=BD ナル様ニ夫々點 C, 點 D ヲ取レバ

(1) C, D ヨリ此圓ニ引ケル切線ハ相等シ

(2) C 及ビ D ヨリ AB ノ反對ノ側ニ夫々切線ヲ引クトキハ,其二切點ヲ結ブ直線ハ AB ヲ二等分ス。

64. 圓外ノ一點 P ヨリ切線 PA, PB 及ビ割線 PCD ヲ引キ,又 A ヨリ CD ニ平行ナル弦 AE ヲ引クトキハ, EB ハ弦 CD ヲ二等分ス。

65. 圓 O ノ平行ナル二弦ヲ AB, CD トシ CD ノ中點ヲ E トス。 三點 E, A, O ヲ過ル圓ト圓 O トノ交點ヲ F トスレバ B, E, F ハ一直線上ニアリ。

66. 直角三角形ノ内接圓ノ直徑ハ直角ヲ夾ム二邊ノ和ト斜邊トノ差ニ等シ。

67. 圓ニ内接スル六角形ノ一ツ置キノ角ノ和ハ 4 直角ニ等シク,圓ニ内接スル八角形ノ一ツ置キノ角ノ和ハ 6 直角ニ等シ。 一般ニ圓ニ内接スル $2n$ 角形ニツキ一ツ置キノ角ノ和ヲ求ムル公式ヲ作レ。

68. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ニ於テ △ABC, △BCD, △CDA, △DAB ノ各内心ハ一ツノ矩形ノ頂點ヲナス。 又コレ等ノ三角形ノ内接圓ノ半徑ヲ夫々 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ トスレバ

$$\gamma_1+\gamma_3=\gamma_2+\gamma_4.$$

69. 一ツノ圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ二ツノ邊 AB, DC ヲ延長シテ點 E ニ於テ交ラシメ又 BC, AD ヲ延長シテ點 F ニ於テ交ラシムルトキ, E, B, D, F ガ一圓周上ニアレバ EF ハ第二圓ノ直徑ナリ。

70. 定マレル弓形 ACB アリ,弧 ACB 上ノ任意ノ一點ヲ P トス, $\angle APB$ ノ外角ノ二等分線ハ常ニ一定點ヲ過ル。

71. 中心 C, D ナル二圓ノ交點ヲ A, B トス, A ヲ過リテ一直線 MAN ヲ引ケバ $\angle MBN = \angle CAD$ ナリ。但シ M, N ハ圓周上ノ點トス。

72. 三角形 ABC ノ內接圓ノ中心 O ト頂點 A トヲ過ル直線ガ圓 ABC ト交ル點ヲ D トスレバ,

$$DB = DO = DC.$$

又 O ヲ傍心トスレバ如何。

73. 三角形ノ各邊ノ中點,各角頂ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ足及ビ垂心ト各角頂トヲ結ブ線分ノ中點ハ皆同一ノ圓周上ニ在リ。(此圓ヲ**九點圓**トイフ。)

74. 九點圓ノ半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半分ニ等シ。

75. 圓ノ弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ其弦ニ對スル弧ヲ三等分セズ。

76. 圓ノ弦ニ對スル弧ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ其弦ヲ三等分セズ。

77. 二定平行線 AB, CD アリ, AB 上ノ定點 P ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫ケバ,其圓ガ CD ト交ル點ニ於テ此圓ニ引ケル切線ハ皆點 P ヨリ一定ノ距離ニ在リ。

78. 圓ノ中心 O ヨリ一直線 XY ニ引ケル垂線 OA ノ足 A ヲ過ル割線 ABC ヲ引キ,其圓トノ交點 B, C

ニ於テ切線ヲ作リ, XY トノ交リヲ X, Y トセバ $AX = AY$ ナリ。

79. 一ツノ圓ニ外接スル四邊形ヲ ABCD トスレバ, $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle ADC$ ノ內接圓ハ互ニ相切ス。

80. $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ ハ $\angle A$ ヲ共有シ且 $BC = DE$ ナルトキ此二ツノ三角形ノ外接圓ノ共通弦ハ外公切線ト直交ス。

81. 底邊ノ大サ及ビ位置ト他ノ二邊ノ差トガ一定ナル三角形ノ頂角ノ二等分線ニ底邊ノ一端ヨリ引ケル垂線ノ足ハ同一圓周上ニ在リ。

82. 三角形 ABC ノ內心ヲ O, 外心ヲ P トスレバ

$$\angle OAP = \frac{1}{2}(\angle B \sim \angle C).$$

83. 三角形ノ外心,重心,垂心ハ同一直線上ニ在リ,而シテ垂心ト重心トノ距離ハ外心ト重心トノ距離ノ二倍ナリ。

84. AB ヲ直徑トスル圓周上ノ點 C ニ於ケル切線ト AB ノ延長トノ交點ヲ P トシ, $\angle APC$ ノ二等分線ト弦 AC トノ交點ヲ D トスレバ, $\angle PDC$ ハ $45°$ ナリ。

85. O ヲ銳角三角形 ABC ノ外心, H ヲ共垂心トス, AB 上ニ AH ニ等シク AD ヲトリ, AC 上ニ AO ニ等シク AE ヲ取レバ, DE ハ外接圓ノ半徑ニ等シ。

86. 一ツノ圓ノ直徑 MN 上ノ一點ヲ A, 此直徑ニ垂直ナル半徑ノ端ヲ B トシ,今 BA ヲ結ビ P ニ於テ圓周ト交ラシメ, P ニ於ケル切線ト直徑 MN ノ

延長トノ交點ヲCトスレバ, △CAP ハ二等邊三角形ナリ。

87. 圓ノ直徑 AB ノ延長上ニ AP ヲ半徑ニ等シク取リ, A ニ於ケル切線 AE ト P ヨリ引ケル切線 PEC トノ交點ヲ E トシ, C ヲ切點トス, BC ノ延長ト AE トノ交點ヲ D トスレバ, △DEC ハ正三角形ナリ。

88. 圓ノ直徑 AC 上ノ一點ヲ P トシ, P ヨリ AB ノ同シ側ニテ圓周迄二線分 PQ, PR ヲ引キ ∠APQ=∠BPR ナラシムレバ, △APQ ト △RPB トハ各角夫々相等シ。

89. 中心 O ナル圓ノ直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ヲ AC, BD トシ O ヲ過ル任意ノ直線ト AC トノ交點ヲ C トシ,又 O ヨリ OC ニ垂線ヲ引キ BD トノ交點ヲ D トスレバ直線 CD ハ圓 O ニ切ス。

90. △PQR ノ外接圓ノ中心ヲ O トス,今 O ヨリ PQ ニ平行ナル直線 OS ヲ引キ Q ニ於ケル切線トノ交點ヲ S トシ,又 O ヨリ PR ニ平行ナル直線 OT ヲ引キ R ニ於ケル切線トノ交點ヲ T トスレバ, ST ハ此圓ニ切ス。

91. 外切スル二圓ノ中心ヲ A, B トシ,此二圓ノ外公切線ノ切點ヲ C, D トスレバ CD ヲ直徑トスル圓ハ AB ニ切シ, AB ヲ直徑トスル圓ハ CD ニ切ス。

92. 二定圓ノ一交點ヲ過リ其二圓周ノ間ニ夾マルル任意ノ線分ヲ引ケバ,ソノ中點ハ一定圓周上ニ在リ。

93. 二圓ノ交點 A ヲ過リ二ツノ直線 MAN, M′AN′ ヲ引キ圓周ト夫々 M, N 及ビ M′, N′ ニ於テ交ラシムレバ MM′ 及ビ NN′ ノ延長ノナス角ハ一定ナリ。

94. 二ツノ相等シキ圓ノ交點ヲ A, B トス, B ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ一圓周トノ交點ヲ E, F; 他ノ圓周トノ交點ヲ E′, F′ トスレバ A, E′, F; 及ビ A, E, F′ ハ各一直線上ニ在リ。

95. 定三角形 ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ任意ノ等長線分 BX, CY ヲ取リ XY ヲ結ブトキハ, △AXY ノ外接圓ハ恒ニ一定點ヲ通ル。

又 X, Y ヲ邊ノ延長上ニトルトキ及ビ X, Y ノ中一ツヲ延長上ニトルトキ如何。

96. △ABC ノ各邊上ニ其外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ作レバ,

(1) 此三ツノ正三角形ニ夫々外接スル三ツノ圓周ハ同一點(O ト名ヅク)ニ於テ交ル。

(2) A, O, D ハ同一直線上ニ在リ。

(3) AD=BE=CF. 〔88頁雜題8〕

97. M, N ヲ一定圓周上ノ二定點トス,今 M ヲ過リテ任意ノ割線ヲ引キ此定圓ト A ニ於テ,又一定直線 XY ト B ニ於テ交ラシム,然ルトキハ圓 ABN ハ一定點ヲ過ル。

98. 與ヘラレタル三角形ト合同ナル三角形ノ二邊ガ夫々二定點ヲ過ルトキハ,第三邊ハ常ニ一定圓ニ切ス。

99. 一ツノ圓ノ直徑 AB ノ同ジ側ニ引ケル二ツノ弦 AC, BD ノ交點ヲ E トシ,三點 C, D, E ヲ過ル圓ヲ畫ケバ,點 C 或ハ D ニ於ケル兩圓ノ切線ハ直交ス。

100. 二等邊三角形ノ二ツノ等邊ヲ夫々直徑トスル二圓ノ公切線ノ二切點間ノ部分ハ底邊ニ平行ニシテ且其半ニ等シ。

第三　軌跡及ビ作圖

101. 定圓 O ノ周上ノ一定點 A ヨリ任意ノ弦 AP ヲ引キ其延長上ニ一點 Q ヲ取リ PQ=AP ナラシム,點 Q ノ軌跡ヲ求ム。

102. 一定點ヨリ一定圓周迄引ケル諸線分ヲ其方向ニ其二倍ニ延長スレバ其末端ノ軌跡如何。

103. 一定直線上ノ二定點ヲ M, N トス,今 M, N ニ於テ夫々 MN ニ切シ且互ニ相切スル二圓ノ切點ノ軌跡如何。

104. 互ニ相切スル二圓ガ二定點 A, B ニ於テ與ヘラレタル圓ニ切スルトキ,此二圓ノ切點ノ軌跡如何。

105. AB ヲ定圓 O ノ定弦トシ, CD ハ長サ一定ナル弦トス,今弦 CD ガ動クトキ(兩端ヲ常ニ圓周上ニ置キテ) CD ノ中點 G ト AB ノ中點 M トヲ結ブ線分 MG ノ中點ノ軌跡如何。

106. 一定ノ圓 O ノ周上ノ動點 P ヨリ定マレル直徑 AOB ニ垂線 PC ヲ引キ,半徑 OP 上ニ OC ニ等シク OQ ヲ取ルトキハ,點 Q ノ軌跡如何。

107. 一定點 P ヨリ一定圓 O ニ引キタル切線ノ切點ヲ A, B トス。A ヲ過リ任意ノ弦 AC ヲ引キ,又 P ヲ過リ AC ニ平行ナル直線ヲ引キ之ト直線 BC トノ交點ヲ Q トス, 點 Q ノ軌跡ヲ求ム。

108. 定線分 AB 上ノ任意ノ點ヲ P トシ, AP, BP ノ上ニ其各ヲ底邊トスル二ツノ正三角形ヲ其定線分ノ同側ニ作ルトキ,其二ツノ頂點ヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求ム。

109. 定圓ニ於テ定長ナル弦ノ兩端ニ引ケル切線ノ交點ノ軌跡如何。

110. AB ハ與ヘラレタル圓ノ與ヘラレタル直徑ナリトシ,ソノ一端 B ヲ過ル任意ノ弦 BQ ノ延長上ニ一點 P ヲトリ, PQ ノ長サヲシテ P ヨリ A ニ於ケル切線上ニ引キタル垂線ト等シカラシムルトキ,點 P ノ軌跡如何。

111. 定長ノ直線 AB ガ定角 XOY ノ各邊上ニ兩端ヲ有スルトキ, A 及ビ B ヨリ OX, OY ニ夫々垂線ヲ作ラバ其交點 P ノ軌跡如何。

112. ABCD ハ平行四邊形ニシテ AB ノ位置及ビ大サ一定ナリトシ, BC ハ其長サガ與ヘラレタルモノトス, ∠C 及ビ ∠D ノ二等分線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

113. 矩形 ABCD ニ於テ, A ノ位置ト AB, AD ノ方向ト周ノ大サトガ一定ナルトキ, C ノ軌跡如何。

114. 三角形ノ一角ノ位置及ビ大サガ與ヘラレ且其角ヲ夾ム二邊ノ和ガ一定ナルトキ,ソノ外心ノ軌跡如何。

115. 二ツノ與ヘラレタル圓周ノ交點ノ一ツAヲ過リB及ビCニ於テ此二ツノ圓周ト交ル直線BACヲ引キ,此ノ直線上ニ AP ヲ AB, AC ノ和ニ等シク取レバ點Pノ軌跡如何。

116. 一定點Aヨリ定直線ニ引ケル線分 AP ヲ一邊トスル正三角形APQノ頂點Qノ軌跡ヲ求メヨ。

117. 正三角形 PMN ノ邊 MN ノ上ニ任意ノ點 A ヲトリ, AP ヲ高サトシAヲ頂點トスル正三角形 ABC ヲ描クトキ,B及ビCノ軌跡ヲ求メヨ。

118. 與ヘラレタル圓ニ切シ,且與ヘラレタル直線ト與ヘラレタル角ヲナス(又ハ平行ナル)線分ヲ引ケ。

119. 一邊,其一端ニ於ケル角及ビ他ノ二邊ノ和(又ハ差)ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

120. 一定點ヲ過リ他ノ二定點ヨリ等距離ニアル直線ヲ引ケ。

121. 三角形ABCニ於テ AC上ニ一點 P ヲ求メ, Pヨリ AB, BC ニ夫々平行ナル直線ヲ引キ BC, AB ト夫夫 D, E ニテ交ラシムルトキ, PD ヲ PE ニ等シカラシムル様ニセヨ。

122. 二定直線ニ切シ且中心ガ他ノ定圓周上(又ハ直線上)ニアルベキ圓ヲ畫ケ。

123. 二直線ノ交點ヲ與ヘラレザルモノトシテ其交角ノ二等分線ヲ引ケ。

124. 一定圓ト一定直線トアリ,此直線上ノ點ヨリ此圓ニ切線ヲ引キ其切點マデノ長サヲ與ヘラレタル線分ニ等シカラシメヨ。

125. 同一ノ點ヲ過ラザル三ツノ定直線ノ各ヨリ同一ノ與ヘラレタル長サノ弦ヲ截リ取ル如キ圓周ヲ畫ケ。

126. 二圓ノ交點ノ一ツヲAトシ, Aヲ過ル一ツノ直線ト二圓トガ再ビ交ル點ヲB, CトスルトキAB, ACノ和又ハ差ヲ定長ナラシメヨ。

127. 圓周上ノ二ツノ點ヲ過リテ二ツノ平行弦ヲ作リ其ノ和ヲ與ヘラレタル長サニ等シクセヨ。
又其ノ差ヲ與ヘラレタル長サニ等シクセヨ。

128. 定圓Oニ切シ且定直線 PQ 上ノ一定點 P ニ於テ此直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

129. 一對角線ト一邊トノ和(又ハ差)ヲ知リテ正方形ヲ作レ。

130. 三角形ノ頂角,此頂角ニ對スル邊及ビ之ト內接圓トノ切點ノ位置ヲ知リテ此三角形ヲ畫ケ。

131. 三角形ノ底邊,頂角,及ビ其頂點ト內心トノ距離ヲ知リテ此三角形ヲ作レ。

132. 與ヘラレタル四邊形ニ外接スル正方形ヲ作レ。

133. 四ツノ邊ヲ與ヘテ梯形ヲ作レ。

134. 頂點ガ一ツヅツ三平行線ノ各ノ上ニアル樣ニ正三角形ヲ作レ。

135. 與ヘラレタル正方形ノ周上ノ與ヘラレタル一點ヲ一角頂トシテ之ニ正三角形ヲ內接セヨ。

136. 定マレル二ツノ平行線L, Mアリ,其間ノ定點Pヲ過リテ直線ヲ引キL, Mト夫々X, Yニテ交ラシメ, AX=AYナル樣ニセヨ,但シAハL上ノ定點トス。

137. 同一ノ點ヲ過ル三定直線アリ,今之ト交ル一直線ヲ引キ各ノ交點間ノ線分ヲシテ夫々與ヘラレタル長サヲ有セシメヨ。

138. 與ヘラレタル點ヲ過ル直線ヲ引キ之ト與ヘラレタル二直線トニテ成ル三角形ノ周ヲシテ與ヘラレタル長サヲ有セシメヨ。

139. △ABCノ二邊AB, ACト夫々P, Qニ於テ交ル一直線ヲ引キ, PQヲ與ヘラレタル一直線ニ平行ニシテ且AP=CQナラシメヨ。

140. 二圓ノ交點ノ一ツヲ過リテ一直線ヲ引キ各圓內ニアル部分ノ長サヲ等シカラシメヨ。

141. 與ヘラレタル圓內ニ,與ヘラレタル長サニ等シク且與ヘラレタル弦ABニヨリテ二等分セラルル弦ヲ引ケ。

142. 圓外ノ與ヘラレタル點Pヨリ割線PABヲ引キ圓トA, Bニ於テ交ラシメ, PA+PBヲ與ヘラレタル長サニ等シクセヨ。

143. 定直線XYト共外ニ二定點A, Bアリ,一點PヲXY上ニ求メBPガXYトナス角ヲシテAPガXYトナス角ノ二倍ナラシメヨ。

144. 二ツノ定マレル平行線ノ各ヨリ夫々定長ニ等シキ線分ヲ截リトル圓ヲ畫キ,且此圓周ヲシテ一定點ヲ通ラシメヨ。

145. △ABCノ邊BCニ平行ナル直線ヲ引キ邊AB, ACト夫々X, Yニ交ハラシメBX+CY=BCナラシメヨ。

146. 一定點A及ビ二定圓O, O′アリ。Aヲ過リ二定圓ト夫々B, Cニ於テ交ル直線ヲ引キAB=ACナラシメヨ。

147. 二ツノ頂點ハ二定點ニシテ他ノ二ツノ頂點ハ二定圓ノ各ノ上ニ一ツヅツアル如キ平行四邊形ヲ作レ。

第四　面積

148. 矩形ノ各頂點ヨリ順次ニ各邊ノ上ニ共邊ノ三分ノ一ノ距離ニ一點ヅヽ設クルトキ,其レ等ノ點ヲ頂點トスル四邊形ハ平行四邊形ナルコトヲ證明セヨ。又其面積ハ元ノ矩形ノ幾分ノ幾ツナルカ。

194. 二邊ノ長サa米, b米ナル矩形ABCDノ邊AB, BC, CD, DAノ中點ヲ夫々E, F, G, HトスルトキAG, BH, CE, DFニテ作ラルル四邊形ノ面積ヲ求メヨ。

150. 一邊ガa, 對角線ガbナル矩形ノ面積ヲ求メヨ。

151. $\triangle ABC$ ニ於テ邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 X, Y トシ CX, BY ノ交點ヲ O トセバ $\triangle AXY=3\triangle XOY$.

152. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle C$ ヲ直角トシ,一直線ガ二邊 AC, BC ト交ル點ヲ D, E トセバ,

$$AE^2+BD^2=DE^2+AB^2.$$

153. 二ツノ同心圓 APB, CQD ノ直徑ヲ夫々 AB, CD トシ, P, Q ヲ夫々圓周上ノ任意ノ點トスレバ,

$$PC^2+PD^2=QA^2+QB^2.$$

154. 圓 O ノ二ツノ弦 PQ, RS ガ G ニ於テ直交スルトキハ, $PQ^2+RS^2=8.\ PO^2-4.\ GO^2$.

155. 平行四邊形 ABCD ノ角頂 A ヲ過ル任意ノ直線ガ BC, DC 或ハ其延長ト交ル點ヲ P, Q トセバ,二ツノ三角形 ABQ, ADP ハ相等シ。

156. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 D ヨリ任意ノ直線 DEF ヲ引キ BC トE ニ於テ, AB ノ延長トF ニ於テ交ラシムレバ, $\triangle ABE$, $\triangle CEF$ ハ等積ナリ。

157. 平行四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ,三角形 ABO 内ノ一點ヲ P トスレバ, $\triangle PCD$ ハ, $\triangle PAB$, $\triangle PAC$, $\triangle PBD$ ノ和ニ等シ。

158. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 又ハ又延長上ニ一點 P ヲトレバ, BP, CP ノ包ム矩形ハ AP ト AB トノ上ノ正方形ノ差ニ等シ。

159. P, Q ハ定線分 AB ノ反對ノ側ニアル二定點ナリ, AB ノ中點ヲ O トスレバ三角形 POQ ハ $\triangle APQ$, $\triangle BPQ$ ノ面積ノ和ノ半分又ハ差ノ半分ニ等シ。

160. 一點ヲ平行四邊形ノ各頂點ニ結ビテ成ル四ツノ三角形ノ中相對スル二邊ヲ底邊トスル二ツノ三角形ノ和又ハ差ハ此平行四邊形ノ二分ノ一ニ等シ。

161. 平行四邊形 ABCD 内ノ任意ノ一點 P ヲ過リ二邊 AB, BC ニ夫々平行ナル直線ヲ引ケバ,二ツノ平行四邊形 DP, BP ノ面積ノ差ハ $\triangle APC$ ノ面積ノ二倍ニ等シ。

162. 直角二等邊三角形 ABC ノ斜邊 AB 上ノ任意ノ一點ヲ P トスルトキハ $AP^2+BP^2=2.CP^2$.

163. $\triangle ABC$ ノ底邊 AB 上ニ於テ AP ガ PB ノ半分ニ等シキ樣ニ點 P ヲ取レバ,

$$2.AC^2+BC^2=6.AP^2+3.PC^2.$$

164. 直角三角形 ABC ノ直角 B ヲ夾ム二邊 AB, BC ガ此三角形ノ内接圓ト切スル點ヲ夫々 D, E トスレバ

$$\triangle ABC=AD.\ CE.$$

165. 平行四邊形 ABCD ニ於テ角 BAD 及ビ其對頂角内ニアラザル任意ノ一點ヲ O トスレバ,

$$\triangle OAC=\triangle OAB+\triangle OAD.$$

166. 四角形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ, A ヲ過リ對角線 BD ニ平行ニシテ之ト等長ナル線分 AE ヲ引キ CE, OE ヲ結ブトキハ, $\triangle OCE$ ト $\triangle BCD$ トハ等積ナリ。

167. $\triangle ABC$ ノ各頂點ヨリ對邊ヘノ垂線ヲ AD, BE, CF トシ又垂心ヲ H トスレバ,

$AH^2+BC^2=BH^2+CA^2=CH^2+AB^2$.

168. $\triangle ABC$ ノ重心ヲ G トシ, P ヲ任意ノ一點トセバ,

$PA^2+PB^2+PC^2=AG^2+BG^2+CG^2+3.PG^2$.

169. 三定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ最小ナル如キ點ノ位置ヲ求メヨ。

170. 三定點又ハ四定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡如何。

171. 二ツノ圓ガ點 O ニテ外切スルトキ切點 O ヲ過リ互ニ垂直ナル二ツノ直線 POP′, QOQ′ ヲ引キ, 中心線ト二圓トノ交點ヲ A, A′ トスレバ, PP′, QQ′ ノ上ノ正方形ノ和ハ AA′ ノ上ノ正方形ニ等シ。但シ P, Q ハ一ツノ圓周上ニアリ, P′, Q′ ハ他ノ圓周上ニアルモノトス。

172. 與ヘラレタル圓ノ直徑ヲ AB トシ, 圓周上ノ一點 R ニ於ケル切線ト, A, B ニ於ケル切線トノ交點ヲ夫々 P, Q トスレバ, 矩形 PR. QR ハ一定ナリ。

173. 三角形 ABC ノ三頂點ヨリ互ニ直交セル二直線 OX, OY ニ至ル六ツノ距離ガ與ヘラレタルトキ, 此三角形 ABC ノ面積ヲ求ムル公式ヲ作レ。

第五　比例

174. 二ツノ圓ガ內切スルトキ, 其切點ヨリ引ケル外圓ノ任意ノ弦ガ內圓周ニテ分タルヽ二ツノ部分ハスベテ一定ノ比ヲ有ス。

175. 二ツノ圓周ノ交點ヲ A, B トシ, A ヲ過ル任意ノ直線ト二圓周トノ交點ヲ C, D トスレバ, BC : BD ハ一定ナリ。

176. $\triangle ABC$ ノ邊 AC 上ニ一點 A′ ヲトリ, CB ノ延長上ニ BB′ ヲ AA′ ニ等シクトレバ, AB ニテ截ラレタル A′B′ ノ二ツノ部分ノ比ハ CB ト CA トノ比ニ等シ。

177. 不等ナル二線分ノ和ノ半分ハ其比例中項ヨリモ大ナリ。

178. 圓周上ノ一定點 A ヨリ直線 APQ ヲ引キ圓周ト P ニ於テ交ラシメ, 又 A ニ於ケル切線ニ平行ナル定直線ト Q ニ於テ交ラシムルトキハ, 矩形 AP.AQ ハ恆ニ一定ナリ。

179. 定點ヨリ定直線上ノ任意ノ一點ニ引ケル線分ヲ內分シ, 全線分ト定點ヨリ分點ニ至ル部分トノ包ム矩形ヲシテ一定ナラシムルトキハ, ソノ分點ノ軌跡如何。

180. $\triangle ABC$ 內ノ一點 O ヲ過リテ AO ヲ引キ, 邊 BC ト X ニテ出會ハシムルトキハ, $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ ノ比ハ BX, CX ノ比ニ等シ。

181. $\triangle ABC$ ニ於テ BC ノ中點ヲ M, 角 A ノ二等分線ガ BC ト交ル點ヲ D トスルトキハ,

$MB : MD = AB+AC : AB \sim AC$.

182. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 A ヨリ一直線ヲ引キ

BD, BC, DC (又ハ其延長)ト夫々 P, Q, R ニテ交ラシムルトキハ, AP ハ PQ, PR ノ比例中項ナリ。

183. △ABC ノ各頂點ヨリ對邊ニ引ケル垂線ヲ AD, BE, CF トシ,又垂心ヲ H トスレバ

$$AH.\ HD = BH.\ HE = CH.\ HF.$$

184. 二ツノ圓ガ P ニ於テ相切スルトキ, P ヲ過リテ三ツノ直線ヲ引キ一ツノ圓周トノ交點ヲ A, B, C トシ,他ノ一ツノ圓周トノ交點ヲ A′, B′, C′ トスレバ, △ABC ト △A′B′C′ トハ相似ナリ。

185. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ノ中點 O ヨリ此邊ニ垂線ヲ立テ他ノ二邊ト E, F ニテ交ラシメ,又直角ノ頂點 A ヲ O ニ結ブトキハ $AO^2 = OE.\ OF$ ナリ。

186. A ヲ頂點トスル二等邊三角形 ABC ニ於テ, A ヨリ BC ニ引ケル垂線ヲ AD トシ,邊 AB ヲ B ノ方ニ延長シタル部分ノ上ノ一點 P ト C トヲ結ビ, PC ノ中點ヲ M, A ヨリ PC ニ引ケル垂線ノ足ヲ H, 又 AD ノ延長ト PC トノ交點ヲ E トスレバ,

(1) MD ハ圓 DEH ニ切ス。

(2) $BP^2 = 4.ME.\ MH.$

187. 圓ノ二ツノ平行ナル切線ガ A ニ於テ切スル第三ノ切線ト交ル點ヲ P, Q トスレバ,此圓ノ半徑ハ AP, AQ ノ比例中項ナリ。

188. 一定圓ノ任意ノ直徑 AB 上ノ一點 P ヲ過リ AB ニ垂直ナル弦 CD ヲ作リ,點 C 及ビ D ニ於ケル切線ノ交點ヲ Q トシ, P, Q ヲ過ル任意ノ圓ト,與ヘラレタ

ル圓トノ交點ヲ E トスレバ, E ニ於ケル二ツノ圓ノ切線ハ互ニ垂直ナリ。

189. △ABC ノ底ニ平行ナル二直線ヲ引キテ此三角形ヲ三等分セヨ。

190. 與ヘラレタル三角形ト相似ナル三角形ヲ作リ,其一頂點ハ一定點ニアラシメ,其他ノ二頂點ハ夫々與ヘラレタル二ツノ直線上ニ一ツヅツ在ル樣ニセヨ。

191. 二圓ガ A ニテ內切スルトキ,外圓ノ弦 CD ガ B ニテ內圓ニ切シ, AD 及ビ AC ガ內圓周ト交ル點ヲ E, F トスレバ　AE : AF = BD : BC.

192. 圓 ABE ノ周上ノ任意ノ點 A ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓 BCD ヲ畫キ,前ノ圓ト B 及ビ C ニ於テ交ラシメ,又 A ヨリ任意ノ直線 AFE ヲ引キ共通弦 BC ト F ニ於テ,圓周 BCD, ABE ト夫々 D, E ニ於テ交ラシムレバ, AD ハ AF, AE ノ比例中項ナリ。

193. △ABC ノ邊 AB ノ中點 D ヨリ半直線ヲ引キ, AC ト E ニ於テ, BC ノ延長ト F ニ於テ交ラシムルトキハ,　BF : CF = AE : EC.

194. 正三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點ヲ結ブ直線上ノ任意ノ點ヲ D トシ,直線 BD ノ延長ト邊 AC トノ交點, 及ビ CD ノ延長ト邊 AB トノ交點ヲ夫々 E, F トシ, $CE = x$, $BF = y$, $BC = 2a$ トスレバ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2a}.$$

195. 一定點Aヨリ一定圓ニ二切線ヲ引キ,一ツノ切點Bヨリ他ノ切點Cヲ過ル直徑CDニ垂線BEヲ引ケバ,直線ADハBEヲ二等分ス。

196. 一ツノ圓ノ直徑ABノ兩端ニ於ケル切線AC, BDト,圓周上ノ任意ノ一點Eニ於ケル切線トノ交點ヲ夫々C, Dトシ,又AD, BCノ交點ヲFトスレバ,EFハACニ平行ナリ。

197. 二ツノ圓ノ中心線ガ此二圓ノ外公切線ト交ル點ヲPトシ,Pヲ過ル任意ノ一直線ガ二圓周ト交ル點ヲ順次ニA, B, C, Dトスレバ

$$PA.\ PD = PB.\ PC.$$

198. 一直線ガ三角形ABCノ三邊BC, CA, AB又ハ其延長ト夫々D, E, Fニ於テ交ルトキハ,

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

之ヲめねらうす(Menelaus)ノ定理トイフ。

199. めねらうすノ定理ノ逆モ眞ナリ。

200. 三角形ノ各外角ノ二等分線ガ夫々ソノ對邊ノ延長ト交ル三ツノ點ハ一直線上ニアリ。

又二角及ビ一外角トスルモ同様ナリ。

201. 三角形ABCノ邊上ニアラザル一點ヲPトシ, AP, BP, CPト夫々ソノ對邊又ハ其延長トノ交點ヲD, E, FトスルトキハA,

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

之ヲせゔぁ(Ceva)ノ定理トイフ。

202. せゔぁノ定理ノ逆モ眞ナリ。

注意 めねらうすノ定理ニ於テハ三點D, E, Fノ中一ツ又ハ三ツガ邊ノ延長ノ上ニアリ,せゔぁノ定理ニ於テハ一ツモ延長上ニアラザルカ又ハ二ツガ延長上ニアリ。コレ兩定理ノ相違スル點ナリ。

203. 三角形ABCノ內接圓ガ邊BC, CA, ABニ切スル點ヲ夫々D, E, Fトスレバ,三直線AD, BE, CFハ一點ニ會ス。

204. 前題ニ於テ內接圓ノ代リニ傍接圓ヲトラバ如何。

205. 正三角形ABCニ於テAC上ノ一點ヲEトシ, BCノ延長上ニD, Fヲ取リCD=CA, CF=CEナラシメ, AFトDEトノ交點ヲHトセバ,

$$CH : CF = AB : BF.$$

206. 圓周上ノ一點Pヨリ二ツノ切線AB, ACニ引ケル垂線ヲPE, PFトシ,其切點B, Cヲ結ブ弦BCニ引ケル垂線ヲPDトスレバ,

$$PD^2 = PE.\ PF.$$

207. 二等邊三角形ABCノ底邊BCノ中點Dヲ中心トシAB, ACニ切スル圓アリ,之ニ任意ノ切線ヲ引キAB, ACトノ交點ヲ夫々X, YトスレバBDハBX, CYノ比例中項ナリ。

208. 圓內ノ一定點Pヲ過リテ弦ABヲ引キPA : PBヲ與ヘラレタル比$m : n$ニ等シカラシメヨ。又點Pガ圓外ニアルトキハ如何。

209. 三角形ノ一邊上ノ與ヘラレタル點ヲ過リテ一直線ヲ引キ,コノ三角形ヲ $m:n$ ノ比ニ二分セヨ.

210. 二ツヅツ相交ル三ツノ圓アリ,其二ツヅツニ共通ナル三ツノ弦(又ハ其延長)ハ同一ノ點ヲ通ル。

定義。此點ヲ三ツノ圓ノ**根心**トイフ。

211. △ABC ノ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交リヲ D トシ,內心ヲ Q トスレバ AQ : QD=AB+AC : BC.

212. 圓 C ノ外ニアル一點 O ヨリ二ツノ切線 OA, OB ヲ引キ A, B ヲ夫々切點トス, AB ト OC トノ交點ヲ N トシ, N ヲ過リテ弦 PQ ヲ引ケバ, OC ハ ∠POQ ヲ二等分ス。又 OQ ト圓周トノ交點ヲ S トスレバ, AB ハ ∠SNQ ヲ二等分ス。

213. AB ヲ一ツノ圓ノ定弦トシ, PQ ヲ AB ニテ二等分セラルル他ノ弦トセバ, P, Q ニ於ケル二切線ノ交點ハ一定圓周上ニアリ。

214. △ABC ノ一邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AB, AC トノ交リヲ夫々 D, E トシ, BE, CD ノ交點ヲ O トスレバ, OA ハ BC ヲ二等分ス。

215. 圓周上ノ一點 P ヨリ其圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ相對スル邊ニ引ケル二双ノ垂線ノ包ム矩形ハ相等シ。

又一双ノ對邊ノ代リニ二ツノ對角線トセバ如何。

216. 定三角形ニ正方形ヲ內接セヨ。(正方形ノ一邊ト三角形ノ一邊ガ一直線上ニアル樣ニ)

217. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ニ平行ナル直線ヲ引キ BC, CA, AB ヲ夫々 D, E, F ニ於テ截ラシムルトキハ　　BD : DC=BF : EC.

218. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ニアル一點 K ヲ過リテ夫々 AD, AB ニ平行ナル直線 EG, HF ヲ引キ, AB, BC, CD, DA トノ交リヲ夫々 E, F, G, H トスレバ, EF, CA, GH ハ同一點ヲ過ル。

219. 銳角三角形 ABC ノ邊 BC ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ,邊 AB ノ上ニ AD ヲ A ヨリ引ケル切線ニ等シク取リ, DE ヲ AB ニ垂直ニ引キ AC ノ延長ト E ニ於テ交ラシムルトキハ, △ABC, △ADE ハ等積ナリ.

220. 正三角形ノ一邊ヲ a トシ,其內部ニ互ニ相切スル三個ノ等圓ヲ畫キ,各邊ガ夫々三圓ノ中ノ二圓ノ公切線トナル樣ニセバ其半徑如何。

221. 一定圓アリ,之ト同心ナル一ツノ圓周ヲ畫キテ此定圓ヲ內外二部ニ分チ,其面積ノ比ヲシテ $m:n$ ナラシメヨ。

222. 三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ一點 P ヲトリ, BP : PC=$m:n$ ナラシムルトキハ, 〔補充 163 參照〕

$$mAC^2+nAB^2=(m+n)PA^2+mPC^2+nPB^2.$$

223. 直角三角形ノ斜邊ノ兩端ヨリ之ニ引ケル垂線ト斜邊上ノ一點ヨリ他ノ二邊ニ引ケル垂線トノ交點ハ直角ノ頂點ト共ニ一直線上ニアリ。

224. 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ アリ,三直線 AA′, BB′, CC′ ガ同一ノ點ヲ過ルトキハ, AB ト A′B′ ノ交點, BC

ト $B'C'$ ノ交點, CA ト $C'A'$ ノ交點ハ一直線上ニアリ。

之ヲでざるぐ (Desargue) ノ定理トイフ。

225. でざるぐノ定理ノ逆モ眞ナリ。

226. 圓ニ內接スル六角形 ABCDEF ニ於テ,對邊 AB ト DE ノ交點, BC ト EF ノ交點, CD ト FA ノ交點ハ一直線上ニアリ。

之ヲぱすかる (Pascal) ノ定理トイフ。

227. 一直線上ニ四點 A, B, C, D アルトキ, $\angle APB=\angle CPD$ ナル如キ點 P ノ軌跡如何。

228. △ABC ノ邊 BC ノ中點 D ヲ通ル任意ノ直線ガ直線 AB, AC 及ビ A ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト夫々 E, F 及ビ G ニテ交ルトキハ,

$$EG.\ FD=ED.\ FG.$$

229. 針金ニテ,半徑 a ナル三本ノ丸棒ヲ互ニ相接シテ結束セントス。之ニ要スル針金ノ長サヲ求メヨ。

230. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA 上ニ,夫々點 P, Q ヲ

$$BP:PC=m:n,\qquad CQ:QA=p:q$$

ナル如ク取リ, AP, BQ ノ交點ヲ R トス,比 AR:RP ヲ m, n, p, q ニテ表セ。

231. 角 A ヲ直角トスル直角三角形 ABC ニ於テ $AB=8m$, $AC=6m$ トスルトキ,斜邊 BC ノ中點ニ於テ之ニ切シ,且邊 AB ニ切スル圓ノ半徑幾何ナルカ。

232. 圓ノ互ニ　直ナル二ツノ半徑ヲ OA, OB トシ,弧 AB 上ノ任意ノ點 M ニ於ケル切線ト OA, OB ノ延

長トノ交點ヲ,夫々 S, T トシ, M ヨリ OA ニ引ケル垂線ノ足ヲ P トスレバ,三角形 AOB ハ三角形 SOT, OMP ノ比例中項ナリ。

233. 三角形 ABC ノ頂點 C ニ於テ AC ニ切シ且 D ニ於テ AB ニ切スル圓ヲ畫キ BC ト G ニ於テ會セシメ, A ヨリ BC, CD ニ夫々垂線 AH, AE ヲ引クトキハ,

$$CG : AH=CD : AE.$$

第六雜題

234. 四邊形ヲナス紙片ノ四隅ヲ折返シテ四ツノ頂點ヲ形內ノ一點ニ會セシムルトキ過不足ナク全部ヲ二重トナシ得ルタメニハ,原形ハ如何ナル四邊形ナルヲ要スルカ。

235. 等邊ナラザル三角形ノ各外角ノ二等分線ノ作ル三角形ヲ第一新三角形トシ,此第一新三角形ノ各外角ノ二等分線ノ作ル三角形ヲ第二新三角形トシ,逐次ニコノ作圖法ヲ繼續スルトキハ次々ニ生ズル三角形ハ次第ニ正三角形ニ近ヅク。

236. 正方形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD ガ夫々定點 L, M, N ヲ過ルトキハ,邊 DA モ亦或ル一定點ヲ過ル。

237. 定點 O ヨリ出ヅル二ツノ定マレル半直線 OA, OB 上ニ夫々定點 A, B アリ。 OA, OB ノ延長上ニ夫夫點 P, Q ヲトリテ $OA.\ OB=AP.\ BQ$ ナラシムレバ直線 PQ ハ定點ヲ過ル。

238. 一直線 X 上ニアル三點 A, B, C 及ビ直線 X ト共通點ヲ有セザル圓 O アリ。B ヲ過ル一直線ガ圓 O ト D, E ニ於テ交リ,三點 D, E, C ヲ過ル圓ガ直線 X ト F ニ於テ交リ,二點 A, F ヲ過ル圓ガ圓 O ト G, H ニ於テ交リ,直線 GH ガ直線 X ト N ニ於テ交リ, N ヲ過リ圓 O ニ引ケル一ツノ切線ノ切點ヲ K トシ,直線 AK ガ圓 O ト交ル點ヲ L, 直線 BK ガ圓 O ト交ル點ヲ M トスレバ, $\triangle AFK$ ノ外接圓ハ直線 NK ト相切シ,且 L, M, C ハ一直線上ニアリ。

239. $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A$ ノ二等分線ヲ AD, 邊 BC ノ中點ヲ M, 頂點 C ヨリ AD 叉ハソノ延長ニ引ケル垂線ノ足ヲ P トシ, CP ガ AM 叉ハソノ延長ト交ル點ヲ Q トスレバ, $QD \parallel AC$.

240. 直角三角形 ABC ノ直角頂 A ヨリ斜邊ニ垂線 AD ヲ引クトキハ $AD+BC>AB+AC$.

241. 圓ニ內接スル四邊形ノ一双ノ對邊ト等角ヲナス直線ハ他ノ一双ノ對邊トモ等角ヲナス。又一双ノ對角線ト等角ヲナスカ。

242. 三角形ノ內心ハ三ツノ傍心ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ナリ。

243. 四邊形ノ外側ニ各邊ヲ一邊トスル正方形ヲ作ルトキ,二組ノ相對スル正方形ノ對角線ノ交點ヲ結ブ線分ハ相等シク,且直交ス。

244. 平行四邊形 ABCD ノ邊 AB, CD 上ニ夫々點 P, Q ヲトルトキ,圓 APQ ト AD, AC 叉ハソノ延長ト交ル點ヲ夫々 M, N トスレバ,圓 DMQ, 圓 CNQ ハ相切ス。

245. 銳角三角形 ABC ニ於テ $AB>BC>AC$ ナルトキ A, B, C ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々 K, L, M トシ,其對邊ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスレバ

$$DK.\ BC=FM.\ AB+EL.\ AC$$

246. 四邊形ノ兩對角線ノ中點ト一双ノ對邊ノ延長ノ交點ヲ結ビテナル三角形ノ面積ハ原形ノ四分ノ一ナリ。

247. 圓ノ弧 BC ノ中點ヲ A, 其共軛弧上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ $PA^2=AB^2+PB.\ PC.$

248. 直角三角形 ABC ノ直角頂 A ヨリ斜邊ニ引ケル垂線 AD ノ延長上ニ點 E ヲトリ, DE ヲ AD, DC ノ第三比例項ナラシムレバ $\triangle BDE=\triangle ADC.$

249. 點 A ヨリ圓 O ニ引ケル切線 AB, AC ノ中點ヲ夫々 M, N トス。 直線 MN 上ノ任意ノ點 P ヨリ圓 O ニ切線 PQ ヲ引クトキハ $AP=PQ.$

250. 半圓 ABC ノ弧上ノ點 C ヨリ直徑 AB ニ垂線 CD ヲ引キ, DB, CD 及ビ弧 BC ト夫々 E, F, G ニ於テ切スル圓ヲ作ルトキ

(1) A, F, G ハ一直線上ニアリ。

(2) $AC=AE.$

251. 三角形ニ於テ小角ノ二等分線ハ大角ノ二等分線ヨリモ大ナリ。逆モ亦眞ナリ。

252. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ナリトシ, A ヨリ引ケル中

線 AD 上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ

$$AB-AC>PB-PC.$$

（補充 2 ト比較セヨ。）

253. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ナリトシ, BC ニ引ケル垂線 AD 上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ

$$AB-AC<PB-PC.$$

254. $\triangle ABC$ ノ頂點 A ニ於テ AB ニ切シ且内心 I ヲ過ル圓ガ BC ト交ル點ヲ D, E トスレバ, IC ハ $\angle DIE$ ヲ二等分ス。

又内心 I ノ代リニ $\angle A$ 内ノ傍心トスレバ如何。

255. 圓 O ノ中心ヨリ圓外ノ直線 XY ニ垂線 OA ヲ引キ,其足 A ヨリ二ツノ割線 ABC, ADE ヲ引キ,直線 BD, CE ガ XY ト交ル點ヲ夫々 P, Q トスレバ

$$AP=AQ.$$

又 XY ガ圓 O ト交ルトシテ試ミヨ。

256. 圓ニ內接スル四邊形ヲ ABCD トス。然ルトキハ $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ ノ各垂心ハ四邊形 ABCD ト合同ナル四邊形ノ頂點ヲナス。

257. 圓周上ノ一點 A ヨリ引ケル三ツノ弦 AB, AC, AD ヲ直徑トスル圓ガ二ツヅツ相交リテ作ル三ツノ交點ハ一直線上ニアリ。

258. $\triangle ABC$ ノ頂角 A ガ 60° ナルトキ, H ヲ垂心, O ヲ外心トスレバ, AB, AC, HO ノ三直線ハ一ツノ正三角形ヲ作ル。

259. 直角二等邊三角形 ABC ノ斜邊 BC 上ニ二點 D, E ヲトリテ $\angle DAE=45^\circ$ ナラシムレバ

$$DE^2=BD^2+CE^2.$$

但シ四點 B, D, E, C ハコノ順ニアリトス。

260. 二定點 A, B ヲ過リ,定圓 O ト交ル任意ノ圓ヲ作ルトキハ,其共通弦又ハ其延長ハ定點ヲ過ル。

261. 定角 XOY ノ邊 OX, OY 上ニ夫々點 A, B ヲトリテ $\triangle OAB$ ヲ定面積ナラシメ, AB ノ中點 P ヲ過リ定方向ニ引ケル直線ト OX, OY トノ交點ヲ夫々 C, D トスルトキハ, PC. PD ハ一定ナリ。

262. 點 C ニ於テ相切スル二圓 A, B アリ。圓 A ノ周上ノ任意ノ一點 P ヨリ圓 B ニ切線 PT ヲ引ケバ $PC:PT$ ハ一定ナリ。

263. $\triangle ABC$ ノ邊 BC 上ニ點 D, E ヲトリテ $\angle BAD=\angle CAE$ ナラシムレバ　$AB^2:AC^2=BD.BE:CD.CE.$

264. $\triangle ABC$ ニ於テ BC ハ長サ及ビ位置, $\angle A$ ハ大サガ各一定ナルトキ,邊 AC ノ中點ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線ハ定點ヲ過ル。

265. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點ヲ M トス。$\angle AMB$, $\angle AMC$ ノ各二等分線ガ直線 AB, AC 及ビ圓 AMB, AMC ト交ル點ヲ夫々 D, E, F, G トスレバ四點 D, F, G, E ハ同一圓周上ニアリ。

266. 一邊ノ長サ a 糎ナル正方形ニ內接シ,コレト一頂點ヲ共有スル正三角形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。

267. 底邊ノ長サ $4\,m$, 他ノ二邊ノ和 $5\,m$, 高サ $1.2\,m$ ナル三角形ノ他ノ二邊ノ長サヲ求メヨ。

268. ABCD ハ圓ニ內接スル正方形, PQRS ハ半圓 BCD ニ內接シ一邊 QR ハ BD 上ニアル正方形ナルトキ,コノ二ツノ正方形ノ面積ノ比如何。

269. △ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 P, Q, R ヲトリテ

$$BP:PC=CQ:QA=AR:RB=m:n$$

ナラシムレバ

$$\frac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=\frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}.$$

270. 半徑 $25\,cm$ ナル二等圓相交リ,ソノ中心ガ各他ノ圓周上ニアルトキ,コノ二圓ニ共通ナル部分ノ面積ヲ求メヨ。

271. 兩對角線ノ長サガ夫々 a 糎, b 糎ニシテ其夾角 $60°$ ナル四邊形ノ面積ヲ求メヨ。

272. 三邊ノ長サ a, b, c ナル三角形ニ於テ a ニ對スル角ノ二等分線ノ長サヲ求ムル公式ヲ作レ。
又 $a=12$, $b=16$, $c=13$ トシテ二等分線ノ長サヲ求メヨ。

273. 半徑 a 糎ナル三等圓 A, B, C ガ二ツヅツ互ニ外切スルトキ,コノ三等圓ノ劣弧ニテ圍マルル部分(弧三角形トイフ)ノ面積ヲ求メヨ。

274. 定圓周上ノ定點 A ヨリ一定ノ大サノ角 α ヲナス二ツノ弦 AP, AQ ヲ引クトキ點 P, Q ニ於ケル二ツノ切線ノ交點 R ノ軌跡如何。

275. 定點 A ヲ過リ定圓 O 內ニ引ケル任意ノ弦ノ中點ヲ M トス。點 M ニ於テ AM ニ垂直ニ,且 AM ニ等シキ長サノ線分 MP ヲ作ルトキ點 P ノ軌跡如何。

276. OA, OB ハ定圓 O ノ互ニ垂直ナル定マレル半徑ナリ。PQ ヲ圓 O ノ任意ノ直徑トスルトキ PA, QB ノ交點 R ノ軌跡如何。

277. 頂角ノ位置及ビ大サ,底邊ノ長サ一定ナル三角形ノ垂心ノ軌跡ヲ求メヨ。

278. 定圓內ノ定點 A ヲ過ル任意ノ弦 BAC ヲ引クトキ,點 A ヲ過リ且夫々 B, C ニ於テ此定圓ト切スル二ツノ圓ノ第二ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

279. 矩形 ABCD ノ頂點 A ガ定位置ニアリ,他ノ頂點 B, C ガ定圓周上ヲ動クトキ,第四ノ頂點 D ノ軌跡ヲ求メヨ。

280. 定三角形ニ內接スル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

281. 定直線 XY 外ノ定點 A ヨリ XY ニ引ケル線分ヲ AP トス。△APQ ヲ作リテ ∠PAQ ヲ定角 α, 又面積ヲ一定量 l^2 ナラシムルトキ,頂點 Q ノ軌跡如何。

282. 一點ヨリ二定圓ニ引ケル二双ノ切線ノ夾ム角ガ相等シクナル如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

283. △ABC ノ二邊 AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ル直線ヲ引キ, DE ヲシテ定方向ヲ有セシメ且
BD+DE+EC ヲ定長 l ナラシメヨ

284. 四邊形 ABCD ノ邊 BC 上ニ一點 P ヲ求メ

$\angle BAP = \angle CDP$ ナラシメヨ。

285. 定圓 O ニ外接スル菱形ヲ作リ,ソノ一邊ヲ定長 a ナラシメヨ。

286. △ABC ノ頂點ヲ過リテ直線 DAE ヲ引キ,其上ニ投ズル邊 AB, AC ノ正射影ノ和ヲ最大ナラシメヨ。

287. 相交ル二圓 O, O′ ノ交點 A ヲ過リ二圓周ト夫々 B, C ニ於テ交ル直線ヲ引キ, AB. AC ヲ定面積 a^2 ナラシメヨ。

288. 三ツノ同心圓ノ各ノ上ニ一ツヅツ頂點ヲ置ク正三角形ヲ作レ。

289. 定圓周上ノ二定點 A, B ヨリ平行ナル二ツノ弦 AA′, BB′ ヲ引キ,梯形 ABB′A′ ヲシテ一定ノ面積 a^2 ヲ有セシメヨ。

290. 二定點 A, B ヲ過リ,且定圓 O ノ周ヲ二等分スル圓ヲ作レ。

291. 一邊ト高サトノ和ヲ知リテ正三角形ヲ作レ。

292. 直線 XY ノ同ジ側ニ二定圓 A, B アリ。 XY 上ニ一點 C ヲ求メ, C ヨリ圓 A, B ニ引ケル切線ガ XY トナス角ヲシテ相等シカラシメヨ。

293. 三ツノ高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

294. △ABC ノ邊 BC 上ニ一點 P ヲ求メ, P ヨリ AB, AC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC, AB ト夫々 Q, R ニ於テ交ラシメ,平行四邊形 AQPR ヲシテ △ABC ノ九分ノ四ナラシメヨ。

295. △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ, AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交ラシメ,且

(1) $DE^2 = AE.\ EC$ ナラシメヨ。

(2) $DE^2 = DB.\ AE$ ナラシメヨ。

296. 四邊形 ABCD ノ邊 AB 上ノ定點 E ヲ過ル直線ニテ此面積ヲ二等分セヨ。

297. 頂角ト高サトガ與ヘラレタル三角形ノ中ニテ二等邊三角形ハ面積最小ナリ。

298. 三定點 A, B, C ノ一ツヅツヲ過ル直線ニテナル三角形ヲ作リ,コノ三角形ヲ定三角形 LMN ニ相似ニシテ且最大ナラシメヨ。

299. 一定點ヲ過リ二定直線ニ切スル圓ヲ作レ。

300. 定圓ト二定直線トニ切スル圓ヲ作レ。

大正十年十月廿六日印刷
大正十年十月廿九日發行
大正十三年十月廿四日修正三版印刷
大正十三年十月廿七日修正三版發行
大正十四年一月廿三日修正四版印刷
大正十四年一月廿六日修正四版發行
昭和二年七月廿七日修正五版印刷
昭和二年七月三十日修正五版發行
昭和二年十一月一日修正六版印刷
昭和二年十一月四日修正六版發行

不許複製

中等平面幾何學新教科書
定價金九十二錢

141

昭和五年度臨時定價 金壹圓五拾錢

著作者 竹内端三

東京市神田區通神保町一番地
發行兼印刷者 株式會社 三省堂
代表者 神保周藏

東京市外蒲田
士
印刷所 株式會社 三省堂蒲田工場

東京市神田區通神保町一番地
發行所 株式會社 三省堂
(振替東京三一五五五)
大阪市南區順慶町通一丁目
株式會社 三省堂大阪支店
(振替大阪八一三〇〇)

壹

【蒲田製本】

杉下達雄