理學博士 中川銓吉編

新編女子幾何

東京 冨山房 神田

一年
戒能美代用

新編女子幾何

理學博士　中川銓吉編

文部省檢定濟
昭和十二年二月二日 高等女學校 實業學校 數學科

東京　冨山房　神田

序

本書ハ同時ニ公刊シタ新編女子算術及ビ新編女子代數ノ姉妹篇デアツテ,三者ノ間ニ互ニ連絡,統制ヲ保チツツ教材ヲ取捨選擇シ,重複ヲ避ケ,以テ數學教授上ノ能率ヲ擧ゲ得ルヤウニ工夫シタモノデアル。然シナガラコノ三者ハ各〻獨立ノ教科書トシテ使用セラレルモ何等ノ不便ガ無イバカリデナク,最近改善セラレツツアル數學教授ニ對シテ絶好ノ指針タルノ内容ヲ持ツモノト信ズル。本書ニ於テモ

1. 教材ノ排列ハ徒ニ數學的體系ニ泥ムコトナク,專ラ數學的常識ノ涵養ニ重點ヲ置イタ。
2. 從ツテ教材ノ選擇方針モ亦生徒ノ日常見聞スル事實ニ重キヲ置キ,努メテ抽象的取扱ニ終ラヌヤウニシタ。
3. 上級學校ヘ進ム者ノ爲ニ,女子專門學校ナドノ入學試驗問題ヲ參酌シタ補充問題ヲ卷末ニツケタ。

昭和十一年十一月　　編者識

目　次

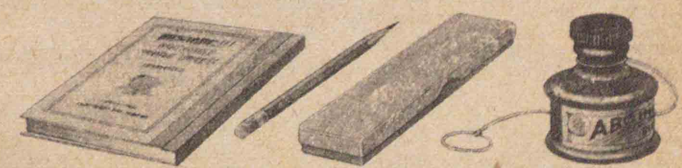
新編女子幾何

第一篇

緒論及ビ概説

1. 物體ノ觀察

書物,鉛筆,黒板ナドヲ見ルト,ソノ形,重サ,色彩ナド種々ノ事柄ガ心ニ浮ブデアラウ。又筆入,いんき壺ナドニツイテハ,以上ノ外ニ容積ニツイテモ考ヘルコトガ出來ル。シカシ今コレ等ノモノノ剛柔,色彩,



價格,物質ナドハ考ヘズニ,唯ソノ形,大イサ,位置ノミニツイテ考ヘテ見ヨ。黒板ノ形ハ如何,面積ハ如何,位置ハ如何。更ニ種々ノ物體ヲ觀察セヨ。

形ニハ規則正シイモノモアリ,不規則ナモノモアル。面積ヤ容積ニハ大小ガアリ,位置ニツイテモソノ相違ガ考ヘラレル。本書デハコレ等ニ關スル知

識ヲ明確ニシ,更ニ研究ヲ進メルノデアルガ,先ヅソノ基本トナル點,線,面ナドカラ研究ヲ始メル。

2. 點・線

點ニハ位置ダケガアツテ,長サモ幅モ厚サモナイ。……………………………………[I]

大イサノナイモノヲ圖示スルコトハ出來ナイカラ,便宜上・又ハ×デ點ヲ表ハシ點A,點Bナドトイフ。

點ハソノ位置ヲ變ヘルコトガ出來ル。

點ノ動イタ跡ガ線デアル。卽チ

線ニハ位置ト長サトガアツテ,幅モ厚サモナイ。……………………………………[II]

線ニハ紙ノ折目ノヤウナ眞直ナ線ト,弛ンダ糸ノヤウニ曲ツタ線トガアル。

眞直ナ線ヲ直線トイヒ,曲ツタ線ヲ曲線トイフ。……………………………………[III]

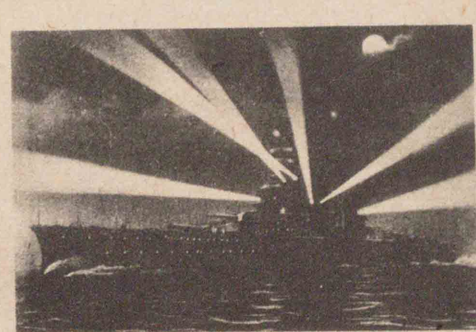
直線ノ呼ビ方

直線ハ雙方ヘ限リナク延ビテヰルモノト考ヘテ

コレヲ無限直線トイフ。

直線上ノ一點Aカラ他ノ點Bニ至ル間ノ部分ヲ言ヒ表ハスニハ,線分AB又ハ有限直線ABトイフ。

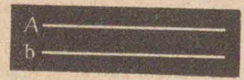
無限直線ハ全體ヲ書クコトハ出來ナイカラ,便宜上線分ヲ書イテコレヲ代表サセ,コノ線分上ニ二點A, Bヲトツテ無限直線AB又ハ略シテ直線ABトイフ。



無限直線上ニ一點Oヲトレバ,コノ直線ハ二ツノ部分ニ分タレル。ソノ各々ヲ半直線トイヒ,Oヲ半直線ノ基點又ハ原點トイフ。半直線ヲ表ハスニハ,基點ノ外ニ任意ノ點Aヲトリ,半直線OAトイフ。

無限直線ABヨリ線分ABヲ取去ツタ殘ヲ,コノ線分ABノ延長トイフ。故ニコノ延長ハA及ビBヲ夫々基點トシテ反對ノ方向ニアル二ツノ半直線ヨリ成立ツノデアル。

注意　直線ヤ線分ハ又唯一ツノ文字デ表ハスコトガアル。例ヘバ直線A,線分 *b* ナドトイフ。



直線ノ基本性質

右圖ハ直線ヲ示スモノデアル。ソノ一部分例ヘバ BC ヲトツテソノ兩端B, Cガ他ノ部分AB,DE ナドノ上ニ落チルヤウニ置ケバ,全ク重ナルモノデアル。AB, CD ナドノ部分ヲ他ニ重ネテモ同樣デアル。

[1] **直線ハソノドノ部分ヲトツテモ,ソノ兩端ガ他ノ部分ノ上ニ落チルヤウニ任意ニ置ケバ,全ク重ナルモノデアル。**

問 1. 曲線ニハ上述ノ性質ガアルカ。圖ニツイテ考ヘテ見ヨ。

問 2. 紙上ニ二點A,Bヲトツテコレヲ通ル直線ヲ定規ヲ用ヒテ引ケ。何本引ケルカ。

吾々ノ經驗デ認メラレルヤウニ,

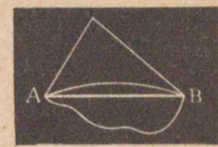
[2] **二點ヲ通ル直線ハ常ニ唯一ツアル。**

ヨツテ二點ハ直線ヲ定メル又ハ決定スルトイフ。

二點ヲ通ル直線ヲ引クコトヲ二點ヲ結ブトイフ。

[3] **二點A,B間ニ引イタ種々ノ線ノウチ,最モ短イ**

モノハ,コノ二點ヲ兩端トスル線分デアル。

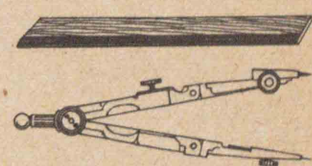


コノ線分 AB ヲ二點**A, B** 間ノ距離トイフ。

二點 A,B ヲ結ブ線分上ニアツテ A,B カラ等シイ距離ニアル點M ヲ**二點 A, B ノ中點又ハ線分 AB ノ中點或ハ二等分點**トイフ …[IV]

線分ノ中點ハ常ニ唯一ツアル。

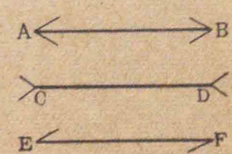
定規・こんぱす　正確ナ圖ヲ畫クニハ,定規トこんぱすガ必要デアル。定規ハ直線ヲ引クニ用ヒル器具デ,こんぱすハ線分ノ長サヲ測リ又ハコレヲ移動シ,或ハ圓ヲ畫クニ用ヒル器具デアル。



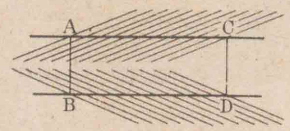
問　題

1. 任意ノ線分 AB ヲ畫キ,コレヲ AB ノ方向ニ延長セヨ。又 BA ノ方向ニ延長セヨ。

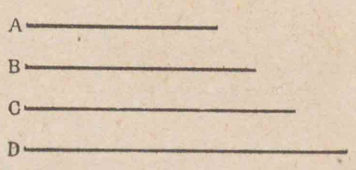
2. 右圖ノ三ツノ線分 AB, CD EF ノウチ,何レガ長ク見エルカ。次ニこんぱすデ驗セ。



3. 右圖デ, AB ト CD トハ何レガ長ク見エルカ。次ニこんぱすデ驗セ。



4. 目測デ右ノ線分ノ長サト中點トヲ求メ, 次ニ物指デ測ツテソノ正否ヲ確メヨ。

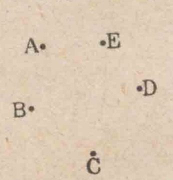


5. 目測デ紙面上ニ二點 A, B ヲトリ, ソノ距離ヲ

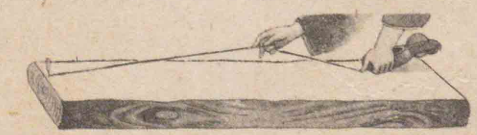
① 1 cm　② 2.5 cm　③ 3 cm　④ 5 cm

ナラシメ, 次ニ物指デ測ツテソノ正否ヲ確メヨ。

6. 右ノ五ツノ點 A, B, C, D, E ニヨツテ幾ツノ直線ガ決定サレルカ。



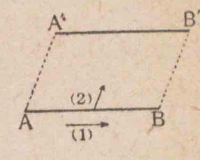
7. 大工ガ材木ノ面ニ直線ヲ引クトキ, 右圖ノヤウニスル理由ヲ説明セヨ。



8. 射撃ノトキ如何ニシテ狙ヲ定メルカ。

3. 面

點ガ動イテ線ガ出來タガ, ソノ線ガ更ニ方向ヲ變ヘテ動クトキハ, ソノ跡ハ面デアル。即チ



面ニハ位置ト廣サ(即チ幅ト長サ)ダケガアツテ, 厚サハナイ。……………………[V]

凸凹ノナイ平ラナ面ヲ**平面**トイヒ, 平デナイ面ヲ**曲面**トイフ。……………………[VI]

平面ハ四方ニ限リナク擴ガツテヰルモノト考ヘル。靜水ノ表面ハホボ平面ノ一部ト看做シ得ル。

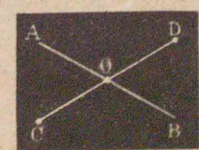
平面ノ基本性質

[1] 一直線上ニナイ任意ノ三點ヲ通ル平面ハ常ニ唯一ツアル。

[2] 二ツノ平面ハ一方ヲ他ノ上ニ勝手ニ置ケバ, 全ク重ナリ合フ。

[3] 平面上ノ任意ノ二點 A, B ヲ結ブ直線 AB ハ, 全クソノ平面ノ上ニアルモノデアル。

[4] 平面上ニアル一無限直線例ヘバ AB ハコノ平面ヲ二ツニ分ツモノデ, ソノ各々ヲ半平面トイフ。



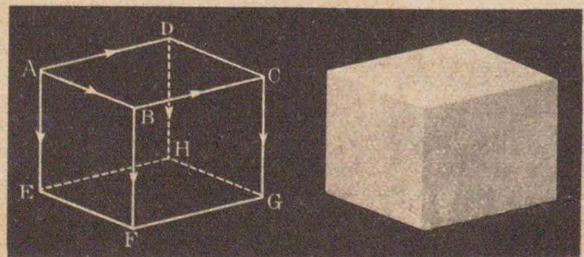
ソシテ一方ノ側ニアル點Cト他ノ側ニアル點Dトヲ結ブ線分CDハ必ズ直線ABト唯一點デ出會フ。

コノトキ二直線AB,CDハ相交ルトイヒ,ソノ出會ツタ點Oヲ交點トイフ。

4. 立體

線ガ動イテ面ガ出來タガ,面ガ更ニ異ナツタ方向ニ動クトキハ,ソノ跡ガ立體デアル。

例ヘバ下圖(左)デ,Aニアツタ點ガ矢ノ方向ニ動イテBノ位置マデ來レバ,線ABガ出來,線ABガ矢ノ方向ニ動イテDCノ位置マデ來レバ面ABCDガ出



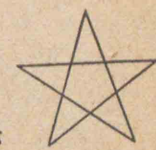
來ル。更ニコノ面ガ矢ノ方向ニ動イテEFGHノ位置マデ來レバ,圖(右)ノヤウナ立體ガ出來ル。

立體ハソノ形ダケニツイテ考ヘタモノデ,ソノ物質ヤ性質ナドニハ何等ノ關係モナイ。卽チ

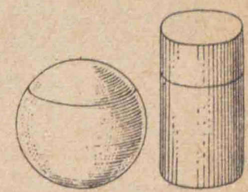
立體トハ物體ノ位置,形及ビ大イサノミニツイテ考ヘタモノデアル。…… ……[VII]

前圖デ面ABCDト面AEFBトノ交リハ線ABデ,又面AEFBト面BFGCトノ交リハ線BFデアル。ソシテ線ABト線BFトノ交リハ點Bデアル。

問題



1. 右圖ヲ星形トイフ。コレニハ線ト線トノ交點ガ幾ツアルカ。
2. 茶壺ヲドウ截ツタラソノ截口ヲ示ス線ガ直線トナルカ。



3. 茶壺ノ代リニてにすぼーるヲ截レバ如何。
4. 平面ト平面トノ交リハ何カ。

5. 圖形

點,線,面又ハコレ等ノ幾ツカガ集ツタモノヲ圖形トイフ。……………………[VIII]

圖形ハソノ形,大イサヲ變ヘズニ,ソノ位置ヲ變ヘルコトガ出來ル。

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ,ソノスベテノ部分ガ合スルヤウニ重ネルコトガ出來レバ,コノ二ツノ

圖形ハ全ク相等シイ又ハ合同デアルトイフ。

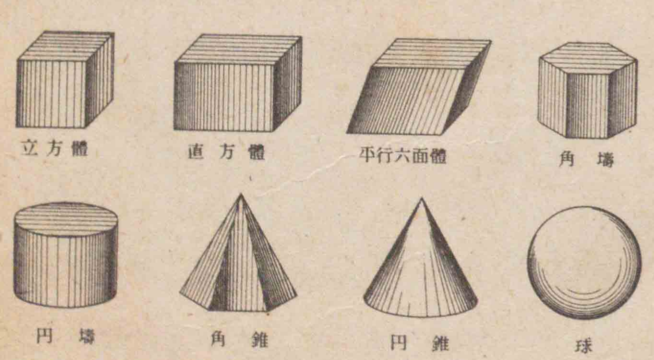
スベテノ部分ガ同一平面上ニアル圖形ヲ**平面圖形**トイヒ,スベテノ部分ガ同一平面上ニナイ圖形ヲ**立體圖形**トイフ。

平面圖形ノ性質ヲ研究スル學科ヲ**平面幾何學**トイヒ,立體圖形ノ性質ヲ研究スル學科ヲ**立體幾何學**トイフ。

既ニ小學校デ學ンダ平面圖形ノ主ナルモノハ

角, 三角形, 正方形, 矩形, 平行四邊形,
梯形, 四邊形, 五邊形, 圓

ナドデアツテ,立體圖形トシテハ次ノモノガヨク知ラレテヰル。



6. 作圖題

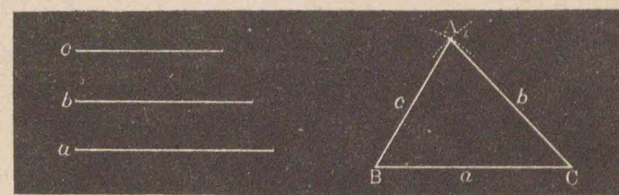
こんぱすト目盛ノナイ定規トデ或條件ニ適スル

圖形ヲ畫ク問題ヲ**作圖題**トイフ。

作圖題ニツイテハ後章ニ詳説スルガ,基礎的圖形ニツイテハ,必要ニ應ジテソノ作圖法ヲ説明スル。

作圖題 1. 三邊(a, b, c)ガ與ヘラレタトキ三角形ヲ畫クコト。

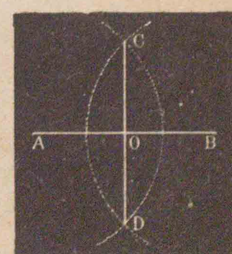
9. 作圖 任意ニ一ツノ直線 BC ヲ引キ,ソノ上ニこんぱすデ a ニ等シクトリ,ソレヲ BC トスル。次ニ



b ニ等シイ開キデ C ヲ中心トシテ弧ヲ畫キ,又 c ニ等シイ開キデ B ヲ中心トシテ弧ヲ畫ク。ソノ交リヲ A トスレバ,三角形 ABC ハ求メルモノトナル。

作圖題 2. 與ヘラレタ線分(AB)ヲ2等分スルコト。

作圖 線分 AB ノ兩端 A, B ヲ中心トシテ AB ノ半分ヨリ大キイ任意ノ相等シイ半徑デ弧ヲ畫キ,ソノ二ツノ弧ノ交點ヲ夫々 C, D トスル。C, D ヲ結ブ直線ガ AB ト交ル點ヲ O トスレバ,O ハ AB ノ中點トナル。



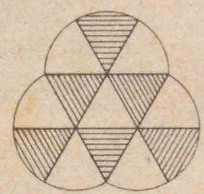
CD ヲ折目トシテ OB ヲ OA

ノ上ニ重ネレバ全ク重ナル。(理由ハ後ニワカル)

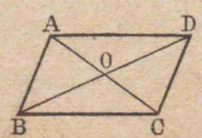
注意　本書ニアル作圖ノ問題中特ニ寸法ヲ指示シテアルモノハ,物差ヲ用ヒルコトトスル。

問題

1. 邊ノ長サガ夫々 5 cm, 4 cm, 3 cm デアル三角形ヲ書ケ。
2. 三邊トモ長サガ3 cmデアル三角形ヲ書ケ
3. 2 cm, 3 cm, 7 cm ノ三ツノ線分ヲ邊トスル三角形ガ書ケルカ。
4. 右ノ圖形ト同様ノモノヲ各線分ノ長サヲ2倍ニシテ書ケ。



5. 紙上ニ任意ノ長サノ線分ヲ書キ,コレヲ4等分,8等分シ,次ニ各分點デ切リ離シテ重ネ合セテ見ヨ。
6. 長サ4 cm ノ線分 AB ヲ作圖題2ノ方法デ2等分シ,ソノ各〻ヲ物指デ測ツテ見ヨ。
7. 線分 AC ノ一方ノ側ニ任意ノ點 B ヲトリ,B,A; B,C ヲ結ビ,次ニ DC=AB, AD=BC ナルヤウニ D ヲ定メヨ(作圖題1利用)。ソシテ B ヲ任意ニトツテモ常ニ AB ハ DC ニ平行ニ,又 BC ハ AD ニ平



行ニナルコトヲ2個ノ三角定規ニヨツテ確メルニハドウスレバヨイカ。

又 BD ト AC トノ交點 O ハ線分 AC ノ中點デアリ,線分 BD ノ中點デモアルコトヲ確メヨ。

7. 定義・公理

幾何學デハ言葉遣ヲ明瞭ニ,シカモ嚴格ニシテ何人モ必ズ同一ニ解釋スルヤウナ言ヒ表ハシ方ヲスル。サテ

用語ノ意味ヲ明瞭ニ嚴格ニ定メタモノガ,ソノ語ノ定義デアル。

例ヘバ前述ノ [I], [II], [III], ……,[VIII] ハ定義デアル。

幾何學デハ吾々ノ經驗カラ誰デモ承認スルコトノ出事ル若干ノモノヲ幾ツカ選ビ出シテ,コレヲ基礎トシテ圖形ノ性質ヲ研究スル。カヤウニ

何人モ正シイト承認スルコトノ出來ルモノデ,推理ノ基礎トナル幾ツカノ各〻ヲ公理トイフ。

4頁ノ [1], [2], 7頁ノ [1]–[4] ナドハ何レモ公理デアル。

次ニ掲ゲルモノハ量ニ關スル基本的性質デアル。

A, B, C, D ハ同種類ノ量デ, m ガ任意ノ正數ナラバ, 次ノ關係ガアル。

[1]　A=B, A=C ナラバ,　B=C

[2]　A=B ナラバ,　A+C=B+C,　A−C=B−C

$$mA=mB,\quad \frac{A}{m}=\frac{B}{m}$$

[3]　A>B, B>C ナラバ,　A>C

[4]　A>B ナラバ,　A+C>B+C,　A−C>B−C

$$mA>mB,\quad \frac{A}{m}>\frac{B}{m}$$

[5]　A>B, C>D ナラバ,　A+C>B+D

[6]　$\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=A,\quad \frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}=B$

注意　以下第五篇マデハ平面幾何學デアル

第二篇

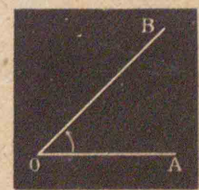
直線形

第一章　角

8. 角

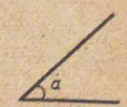
問　次ノ圖デ角ヲナシテヰルトコロヲ指摘セヨ。

一點 O カラ引イタ二ツノ半直線 OA, OB ノ作ル開キヲ**角**トイヒ, OA, OB ハ**角ヲ夾ム**又ハ**角ヲナス**トイフ。



點 O ヲコノ角ノ**頂點**トイヒ, 半直線 OA, OB ヲコノ角ノ**邊**トイフ。

コノ角ヲ**角 AOB** 又ハ**角 BOA** トイヒ, ∠AOB, ∠BOA ト書ク。但シ紛レル虞レノナイトキニハ, 單ニ頂點ノ名ヲ用ヒ**角 O** ト呼ビ, ∠O ト書クコトガアル。

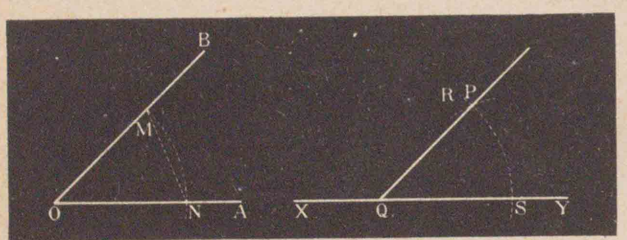


注意　角ハマタソノ二邊ノ間ニ文字ヲ書

イテ $\angle\alpha$（アルファ）ナドト表ハスコトモアル。

作圖題 3. 與ヘラレタ角(AOB)ニ等シイ角ヲ與ヘラレタ直線(XY)ヲ一邊トシテ作ルコト。

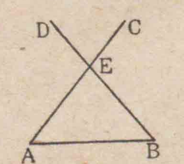
作圖　先ヅOヲ中心トシテ,任意ノ半徑デ弧ヲ畫キ,角ノ二邊 OB, OA ト夫々M, Nデ交ラシメル。次ニ XY 上ノ一點Qヲ中心トシ,前ト等シイ半徑デ弧 RS ヲ畫キ, XY トSデ交ラシメル。次ニ線分 MN



ト同ジ長サノ半徑デSヲ中心トシテ弧ヲ畫キ,前ノ弧RSト交ル點ヲPトスル。P,Q ヲ結ブ直線ヲ引ケバ, $\angle SQP$ ノ大イサハ $\angle AOB$ ノ大イサニ等シクナル。

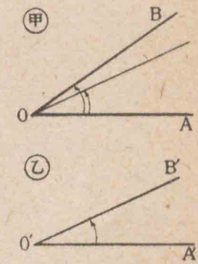
問題

線分 AB ヲ引キ,ソノ一端Aニ於テ任意ノ角BACヲ作リ,次ニBニ於テコレト等シイ角ABDヲ圖ノヤウニ引イテ, AC, BD ノ交點ヲEトセヨ。ソシテEAトEBトノ長サヲ比較セヨ。



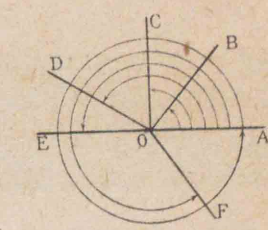
9. 角ノ大小ニヨル名稱

二角甲,乙ノ大イサヲ比較スルニハ,圖ノヤウニ甲,乙二角ノ頂點ト一邊トヲ一致セシメ,且ツ兩角ガ共通部分ヲ有スルヤウニ重ネ,他ノ邊ノ位置ヲ見テ大小ヲ定メル。



角ノ大イサハ邊ノ長サニハ關係シナイ。

廻轉ニヨツテ生ズル角　OA ヲ一邊トスル角ノ他ノ一邊ガ,Oヲ固定シテ OA ノ位置カラ矢ノ方向ニ廻ツテ OB, OC, OD, …… ノ位置ヲ占メルモノトスレバ,ソノ廻轉ノ大小ニヨツテ角ノ大イサヲ測ルコトガ出來ル。

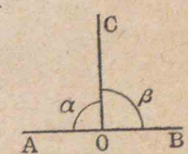


直角　直線上ノ一點カラ一ツノ半直線ヲ引クトキ出來ル二ツノ角ガ相等シイトキ,ソノ各々ノ角ヲ直角トイフ。

圖デ直線 AB 上ノ一點Oカラ半直線 OC ヲ引イテ出來ル二ツノ角ガ等シケレバ,即チ

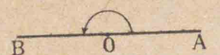
$\angle\alpha = \angle\beta$（ビータ）

ナルトキハ,ソノ各々ハ直角デアル。



直角ノ記號トシテ $\angle R$ ヲ用ヒル。

平角 一ツノ角ノ一邊ガ他ノ邊ノ延長デアル角ヲ平角トイフ。

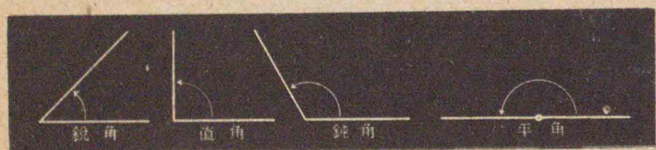


平角ハ2直角ニ等シイ。

二ツノ直線ハ全ク重ネ合ハスコトガ出來ルカラ,平角ハスベテ相等シイ。從ツテ直角ノ大イサモ一定デアル。

鋭角 直角ヨリ小サイ角ヲ鋭角トイフ。

鈍角 直角ヨリ大キク,平角ヨリ小サイ角ヲ鈍角トイフ



劣角 2直角ヨリ小サイ角ヲ劣角トイフ。

優角 2直角ヨリ大キイ角ヲ優角トイフ。

注意 單ニ角トイヘバ劣角ノコトデアル。

問題

1. 一點ヲ通ル三直線ハ平面ヲ幾ツノ部分ニ分ツカ。

2. 日常使用スル器具ニツイテ,指針ノ廻轉ニヨル角ノ大小ニヨツテ量ヲ測ルヤウニ工夫セラレタ

モノノ例ヲ擧ゲヨ。

3. 體操ノ號令デ「半バ右向ケ右」「右向ケ右」「廻レ右」ノトキ,身體ヲ幾直角廻轉スルカ。

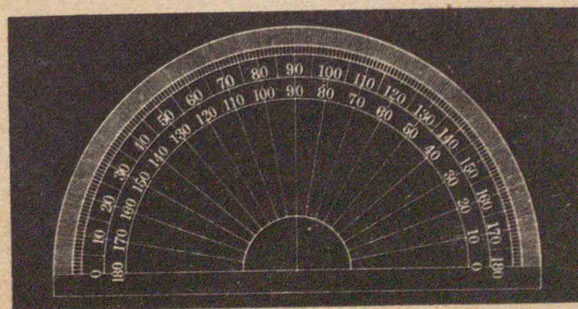
4. 教室内デ鋭角,直角,鈍角ヲナシテヰル場所ヲ夫夫指摘セヨ。又日常使用スル器具ニツイテソレ等ノ角ヲナシテヰルモノヲ言ヘ。

5. 時計ノ兩針ハ幾區劃離レタ場合ニ直角ヲナスカ。午前9時1分カラ午前10時マデニ,又正午カラ午後6時マデニ,兩針ハ夫々何回直角ヲナスカ。

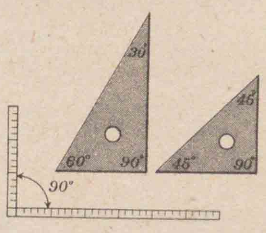
10. 角ノ單位

幾何學デハ角ノ單位ニ直角ヲ用ヒルガ,實用上ニハソノ$\frac{1}{90}$ヲ基本單位ニトリ,コレヲ度(°)トイフ。補助單位ニハ分(′),秒(″)ガアル。

1直角=90°, 1°=60′, 1′=60″



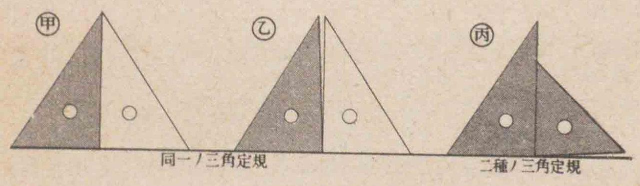
角ヲ測ルニハ分度器ヲ用ヒル。前圖ハソノ一種デアル。三角定規ニハ普通二種アルガ,コレ等ノ一角ハ何レモ直角デ,他ノ二角ハ二ツトモ 45° ノモノト, 30°, 60° ノモノトデアル。



大工ハ直角ヲ畫クニ曲尺(マガリガネ)ヲ用ヒル。

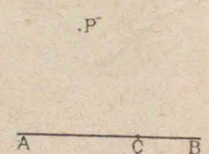
問題

1. 三角定規ヲ次圖ノヤウニ一直線上ニ置イテ見



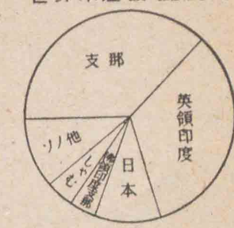
ヨ。甲圖ノヤウニナルカ。乙,丙圖ノヤウニハナラナイカ。乙,丙ノヤウニナル定規ハ正シクナイ定規デアル。何故カ。

2. 三角定規ヲ用ヒテ與ヘラレタ直線 AB 上ノ一點 C ニ於テコレト 30° 及ビ直角ヲナス直線ヲ引ケ。又直線 AB 外ノ一點 P ヲ通ッテ AB ト直角ヲナス直線ヲ引ケ。



3. 各邊ノ長サガ 5 cm ナル三角形ヲ畫イテ,各角ノ大イサヲ分度器デ測ッテ見ヨ。

世界米産額（昭和8年）

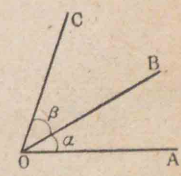


4. 右ノぐらふハ角ノ大イサニヨッテ産額ノ多少ヲ示シテキル。コノ角ヲ測ッテ産額ノ比ヲ求メヨ。(大體デヨイ)

5. 時計ガ 8 時ヲ示ストキ,長針ト短針トハ何度ノ角ヲナスカ。又時計ガ 1 時ヲ示ストキハ如何。

11. 二角ノ關係

接角　頂點及ビ一邊ヲ共有シ,コノ共有邊ノ兩側ニアル二角ノ各々ヲ互ニ他ノ角ノ接角トイフ。



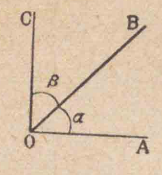
右圖デ $\angle\alpha$ ト $\angle\beta$ トハ接角デアル。

コノ圖デ $\angle AOC$ ハ $\angle AOB$ ト $\angle BOC$ トノ和ニ等シク, $\angle AOB$ ハ $\angle AOC$ ト $\angle BOC$ トノ差ニ等シイ。コレヲ夫々次ノヤウニ表ハス。

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC, \quad \angle AOB = \angle AOC - \angle BOC$$

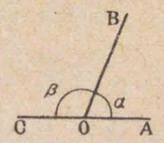
餘角　二角ノ和ガ直角デアルトキ,コノ二角ノ各々ヲ互ニ他ノ角ノ餘角トイフ。

右圖デ,$\angle\alpha+\angle\beta=\angle R$ナラバ,$\angle\alpha$ノ餘角ハ$\angle\beta$デ,又$\angle\beta$ノ餘角ハ$\angle\alpha$デアル。

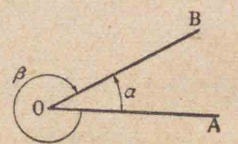


補角　二角ノ和ガ2直角デアルトキ,コノ二角ノ各〻ヲ互ニ他ノ角ノ補角トイフ。

右圖デ,$\angle\alpha+\angle\beta=2\angle R$ナラバ,$\angle\alpha$ノ補角ハ$\angle\beta$デ,又$\angle\beta$ノ補角ハ$\angle\alpha$デアル。

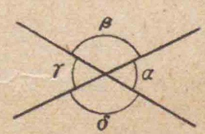


共軛角　頂點及ビ二邊ヲ共有シ,ソノ外ニ共有部分ノナイ二角ヲ共軛角(又ハ互ニ共軛デアル)トイフ。



上圖デ$\angle\alpha$ト$\angle\beta$トハ共軛角デアル。

對頂角　二直線ガ交ツテ出來ル四ツノ角ノウチ,接角デナイ二角ヲ對頂角トイフ。



上圖デ$\angle\alpha$ト$\angle\gamma$(ガンマ),$\angle\beta$ト$\angle\delta$(デルタ)トハ夫々對頂角デアル。

問題

1. 次ノ各角ノ餘角ヲ言へ。

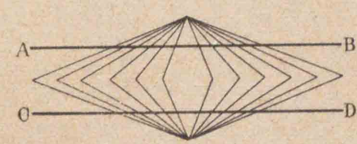
15°,　18°,　37°,　45°35′,　68°24′18″

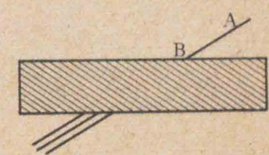
2. 次ノ各角ノ補角ヲ言へ。

30°,　75°,　105°,　110°12′,　150°24′37″

12. 定理・系

次ノ左圖デABトCDトノ間隔ハ中央ノ處デ狹クナツテキルヤウニ見エルガ,ソノ實,幅ハ何處モ同一デアル。又右圖デABヲ延長シタトキ,下ノ三線ノウチ何レニナルカヲ目測シ,次ニ定規ヲ當テテ驗シテ見ヨ。





コレ等ノ例デ明ラカナヤウニ,圖形ノ性質ハ唯目デ見テ判斷スルトキハ往々ソノ判斷ニ誤ガアルコトガアル。ソレ故ニ幾何學デ「斯ク斯クデアル」トイフコトヲ言ヒ切ルニハ,ソレ相當ノ理由ヲ述べナケレバナラナイ。サテ

圖形ノ性質ヲ述ベタモノヲ**定理**トイフ。

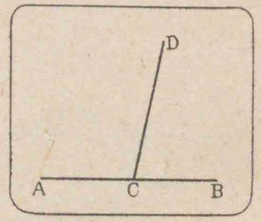
スベテ定理ハ既知ノ事柄(公理,定義ナド)カラソノ眞デアルコトヲ說キ明(アカ)シ得ル事柄デアル。ソシテカク說キ明スコトヲ證明スルトイフ。

一定理(又ハ公理)カラ直チニ推定シ得ル定理ヲ系トイフ。

13. 接角・對頂角

定理 1. 直線上ノ一點カラ一ツノ半直線ヲ引クトキ出來ル二ツノ接角ノ和ハ2直角ニ等シイ。

例ヘバ,直線AB上ノ一點Cカラ半直線CDヲ引ケバ $\angle BCD+\angle DCA=2\angle R$ デアル。



証明 $\angle BCD$ ト $\angle DCA$ トノ和ハ $\angle ACB$ デアツテ,平角デアル ソシテ平角ハ2直角ニ等シイ。

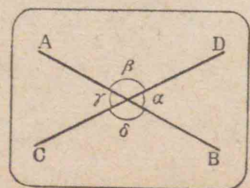
$\therefore\quad \angle BCD+\angle DCA=2\angle R$

系 二ツノ接角ノ和ガ2直角ニ等シケレバ,ソノ共通デナイ二邊ハ一直線ヲナス。(一方ノ邊ヲ延長スレバ他方ノ邊ニ重ナル)

定理 2. 對頂角ハ相等シイ。

二直線ガ交ツテ出來ル對頂角ヲ夫々 $\alpha, \gamma; \beta, \delta$ トスレバ,證明スベキコトハ,

$\angle\alpha=\angle\gamma,\quad \angle\beta=\angle\delta$



証明 $\angle\alpha+\angle\beta=2\angle R$ (定理1)

$\angle\gamma+\angle\beta=2\angle R$ (定理1)

$\therefore\quad \angle\alpha+\angle\beta=\angle\gamma+\angle\beta$ (14頁,1)

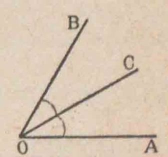
$\therefore\quad \angle\alpha=\angle\gamma$ 同様ニ $\angle\beta=\angle\delta$ (14頁,2)

系 二直線ガ交ツテ出來ル四ツノ角ノウチ,一ツガ直角デアレバ,他ノ三ツモ亦直角デアル。

14. 角ノ二等分線・垂線・斜線

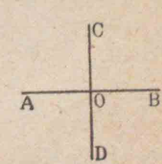
一ツノ角ヲ相等シイ二ツノ接角ニ分ツ直線ヲソノ角ノ**二等分線**トイフ。

右圖デ $\angle AOC=\angle COB$ トスレバ,OCハ $\angle AOB$ ノ二等分線デアル。



角ノ二等分線ハ常ニ唯一ツアル。

前定理系ニヨリ,二直線AB,CDガ一點Oデ交ツテ出來ル四ツノ角ノウチ,一ツガ直角デアレバ,他ノ三ツノ角モ亦直角デアル。

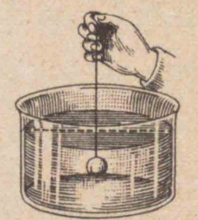


二直線ガ互ニ直角ヲナシテ交ルトキ,コノ二直線ハ互ニ**垂直デアル**又ハ**直交スル**或ハ**直角ニ交ル**トイフ。ソシテソノ一ツ

ニ注目スルトキハ,他ヲ前者ノ**垂線**トイヒ,交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。

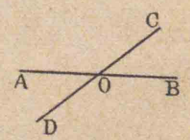
前圖デAB,CDハ互ニ垂直デ, CDハABノ垂線,ABハCDノ垂線デアル。又Oハ垂線ノ足デアル。ABトCDトガ互ニ垂直デアルコトヲ示スニ**AB⊥CD**ト書ク。

注意 錘ヲツケタ絲ヲ靜カニ水面ニ下ゲタ場合ニ,コノ絲ノ方向ハ常ニ一定デ靜止セル水面ト交ル點ヲ通リコノ水面上ニアル直線ニ垂直トナル。コノ絲ノ方向ヲ**鉛直線**トイフ。又水面上ノ直線ヲスベテ**水平線**トイフ。



線分ノ中點ヲ通リコレニ垂直デアル直線ヲコノ線分ノ**垂直二等分線**トイフ。

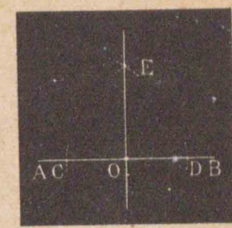
相交ル二直線(AB,CD)ガ互ニ垂直デナイトキハ,ソノ一ツヲ他ノ**斜線**トイヒ,ソノ交點(O)ヲ**斜線ノ足**トイフ。



作圖題 4. 與ヘラレタ直線(AB)上ノ一點(O)ニ於テコレニ垂線ヲ引クコト。

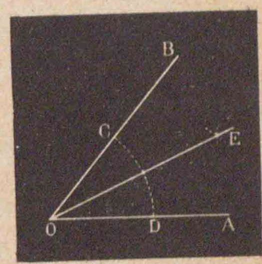
作圖 Oヲ中心トシテ任意ノ半徑デ弧ヲ畫キ,

ABトC,Dデ交ラシメル。次ニC,Dヲ夫々中心トシテ前ヨリモ長イ任意ノ相等シイ半徑デ弧ヲ畫キ,二ツノ弧ノ交點ヲEトスル。O,Eヲ結ブ直線ハABニOデ垂直トナル。(OEヲ折目トシテ二ツノ角ヲ重ネテ見ヨ)



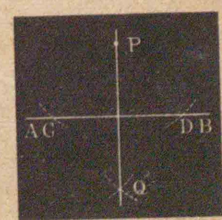
作圖題 5. 與ヘラレタ角(∠AOB)ヲ2等分スルコト。

作圖 ∠AOBノ頂點Oヲ中心トシ,任意ノ半徑デ弧ヲ畫キ角ノ二邊ト夫々C,Dデ交ラシメル。次ニC,Dヲ夫々中心トシテ相等シイ半徑デ弧ヲ畫イテ交ラシメ,ソノ交點ヲEトスル。O,Eヲ結ブ直線ハ∠AOBノ二等分線トナル。



作圖題 6. 與ヘラレタ直線(AB)外ノ一點(P)カラコノ直線ニ垂線ヲ引クコト。

作圖 Pヲ中心トシテ任意ノ半徑デ弧ヲ畫キ,ABトC,Dデ交ラシメル。次ニC,Dヲ夫々中心トシテ前ト同ジ半徑デ弧ヲ畫キ,Pノ外ニQデ交ラシメル。P,Qヲ結ブ直線ハABニ垂直トナ



ル。(PQヲ折目トシテ二ツノ角ヲ重ネテ見ヨ)

問題

1. 長サ3cmノ線分ノ兩端ニ夫々垂線ヲ引ケ。
2. 作圖題2ト4トノ作圖ヲ比較シ,線分ABノ垂直二等分線ヲ畫ク方法ヲ述ベヨ。
3. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ヲ引キ,ソノ三ツノ垂線ガ同一ノ點ヲ通ルコトヲ見ヨ。
4. 三角形ノ各角ノ二等分線ヲ引キ,ソノ三ツノ二等分線ガ同一ノ點ヲ通ルコトヲ見ヨ。
5. 角ノ二等分線ノ延長ハソノ共軛角ヲ2等分スル。
6. 一點カラ四ツノ半直線ヲ引クトキ出來ル四ツノ角ノウチ,相隣ラナイ角ガ二ツヅツ相等シケレバ,コレ等ノ四ツノ半直線ハ二直線トナル。
7. 一直線上ノ一點カラ半直線ヲ引イテ出來ル接角ノ各〻ノ二等分線ハ互ニ直角ヲナス。

15. 垂線

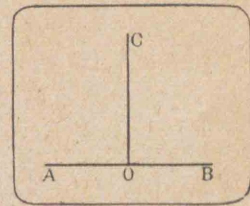
定理 3. 一直線上ノ一定點ヲ通リ,コレニ垂直デアル直線ハ常ニ唯一ツアル。

一直線AB上ノ定點Oヲ通ツテ,ABニ垂直デア

ル直線ハ一ツハ必ズアツテ,唯一ツシカナイ。

証明 平角AOBノ二等分線OCヲ作レバ

$\angle AOC=\angle COB=\angle R$



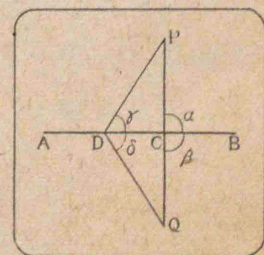
故ニOCハOヲ通ルABノ垂線デアル。

然ルニ角ノ二等分線ハ唯一ツシカナイカラ,Oヲ通ル他ノ直線ハ平角ノ二等分線デナイ。即チ垂線デナイ。

故ニOヲ通リABニ垂直デアル直線ハ常ニ唯一ツアル。

定理 4. 一直線外ノ一定點ヲ通リ,コノ直線ニ垂直デアル直線ハ常ニ唯一ツアル。

定直線AB外ニアル定點Pヲ通リ,ABニ垂直デアル直線ハ一ツハ必ズアツテ,唯一ツシカナイ。



証明 ABヲ折目トシテPノアル側ヲ他ノ側ニ重ネ,コノトキPノ落チル點ヲQトセヨ。P,Qヲ結ベバ線分PQハABト必ズ交ル(7頁,公理)。ソノ點ヲCトスル。サテABヲ折目トシテPガQニ來ルヤウニ折返ストキ,CPガCQノ上ニ重ナルカラ,

圖ニ於テ $\angle\alpha=\angle\beta$, 且ツ PCQ ハ一直線デアルカラ $\angle PCQ$ ハ平角デアル。

$$\therefore \quad \angle\alpha=\angle R \qquad \therefore \quad PC\perp AB$$

今モシ PC ノ外ニ PD モ垂線デアルトスルトDトQトヲ結ベバ,前ノヤウニ折返ストキ,圖ニ於テ $\angle\gamma=\angle\delta=\angle R$ トナリ,PDQ ハ一直線トナラナケレバナラヌ。然ルニ二點 P, Q ヲ通ツテ異ナツタ二直線ヲ引クコトハ出來ナイカラ(4頁,公理),PD ハ垂線デナイ。

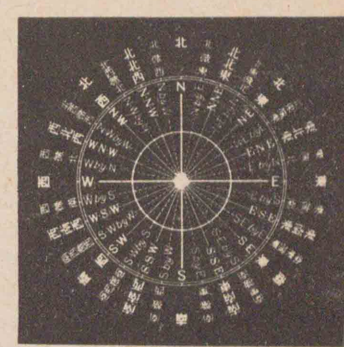
故ニ P ヲ通ツテ AB ニ垂直デアル直線ハ常ニ唯一ツアル

直線外ノ一點カラコノ直線ヘ引イタ垂線(又ハ斜線)ノ長サトハ,ソノ點トソノ垂線(斜線)ノ足トノ間ノ距離ノコトデアル。

直線外ノ一點カラコノ直線ヘ引イタ垂線ノ長サヲソノ點ト直線トノ距離トイフ。

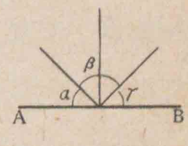
雜題

1. 與ヘラレタ直線上ノ一點ヲ通リ,コノ直線ト一方ノ側デ 45° ノ角ヲナス直線及ビソレト反對ノ側デ 60° ノ角ヲナス直線ヲ分度器ヲ用ヒテ畫ケ。



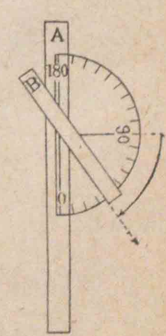
2. 正東カラ 45° 南ニソレタ方向ヲ何トイフカ。正東ノ方向ト南西ノ方向トガナス角ハ幾度カ。北北東ハ北方ト幾度ノ角ヲナスカ。風ガ西北カラ西南ニ變ツタトイフ。ソノ方向ノ變化ハ何度カ。

3. 一直線上ノ一點カラソノ一方ノ側ニ二ツノ半直線ヲ引イテ出來ル角ノ大イサヲ順次 1, 2, 3 ノ割合ニナルヤウニセヨ。



4. 右圖デ $\angle\alpha=\angle\gamma$ デアレバ, $\angle\beta$ ノ二等分線ハ AB ニ垂直デアル。

5. 直線 AB 上ノ一點 O カラ半直線 OC ヲ引ケバ, $\angle BOC$ ハ $\angle AOC$ トソノ共軛角トノ差ノ半分デアル。(CO ヲ延長シテ考ヘヨ)



6. 分度器ト二個ノ定規トヲ右圖ノヤウニ組合セテ,自分ノ眼ト建物ノ二點トヲ夫々結ブ二直線ガ作ル角ヲ測ル方法ヲ述ベヨ。

第二章　平行線

16. 平行線・內角・外角・錯角・同位角

一平面上ニアル異ナル二直線ノ相互ノ位置ニツイテハ次ノ二ツノ場合ガアル。

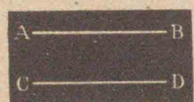
(1)　相交ル。

(2)　如何ホド延長シテモ相交ラナイ。

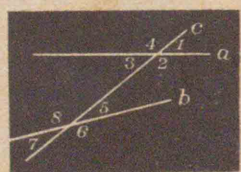
コノ(1),(2)ハ同時ニ成立ツコトナク,何レカ一ツハ必ズ成立ツノデアル。

同ジ平面上ニアツテ如何ホド延長シテモ相交ラナイ二直線ハ互ニ**平行デアル**トイヒ,コノ二直線ヲ**平行線**トイフ。

二直線AB, CDガ互ニ平行デアルコトヲ **AB∥CD** ト書ク。



一直線 c ガ二ツノ直線 a, b ト交ルトキ出來ル八ツノ角ニ次ノ名稱ヲツケル。



(1)　∠2, ∠5, ∠3, ∠8 ノ各ヲ**內角**トイヒ,

(2)　∠1, ∠4, ∠6, ∠7 ノ各ヲ**外角**トイヒ,

(3)　∠2 ト ∠8 及ビ ∠3 ト ∠5 ノ各組ヲ**錯角**トイヒ,

(4)　∠1 ト ∠5, ∠2 ト ∠6, ∠4 ト ∠8 及ビ ∠3 ト ∠7 ノ各組ヲ**同位角**トイフ。

コレヨリ直チニ次ノコトガワカル。

一直線ガ他ノ二直線ト交ルトキ,

[1]　一組ノ同位角ガ相等シケレバ,他ノ三組ノ同位角モ夫々相等シク,錯角ハ夫々相等シク,同ジ側ノ內角ハ互ニ補角デアル。

[2]　一組ノ錯角ガ相等シケレバ,他ノ一組ノ錯角モ亦相等シク,四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。

[3]　一組ノ同ジ側ノ內角ガ互ニ補角ヲナセバ,他ノ一組ノ內角モ亦補角ヲナシ,四組ノ同位角ハ夫々相等シク,二組ノ錯角ハ相等シイ。

コノ [1], [2], [3] ハ皆定理デアツテ何レモ定理 1, 2 ヲ用ヒテ證明スルコトガ出來ル。

定理ノ形式

スベテ定理ハ二ツノ部分カラナル。上述ノ[1], [2], [3] ヲ見ルニ,何レモ初メノ部分ハ起リ得ル**假定**ノ事柄デアツテ,コレヲ**假設**トイヒ,後ノ部分ハコノ假設カラ當然起ツテ來ル事柄デ,コレヲ**終結**トイフ。

假設ガラ主張通リニ終結ノ眞ナルコトヲ述ベルノガ證明デアル。(23頁参照)

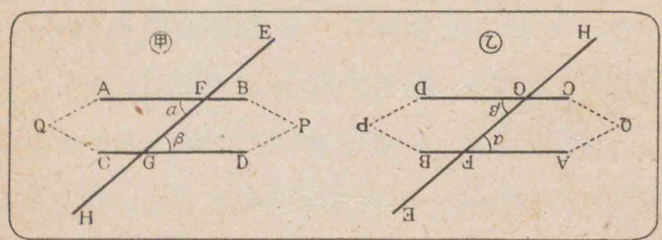
17. 平行線

[定理] **5.** 一直線ガ二直線ト交ツテ出來ル一組ノ錯角ガ相等シケレバ,コノ二直線ハ互ニ平行デアル。

[假設] 一直線 EH ガ二直線 AB, CD ト夫々 F, G デ交ツテ出來ル一組ノ錯角,例ヘバ α, β ガ相等シイトスル。

[終結] AB ∥ CD

[証明] 甲圖ヲ乙圖ノヤウニ廻轉シテ,乙ノ線分FG ヲコレニ等シイ甲ノ線分 GF ノ上ニ重ネルニ,乙ノ

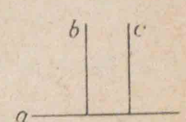


F ハ甲ノ G ノ上ニ,又乙ノ G ハ甲ノ F ノ上ニ落チルヤウニスル。然ルトキハ假設ニヨツテ乙ノ ∠α ハ甲ノ ∠β ニ等シイカラ,乙ノ直線 BA ハ甲ノ直線CD ノ上ニ重ナル。同様ニ乙ノ直線 DC ハ甲ノ直線AB ノ上ニ重ナル。

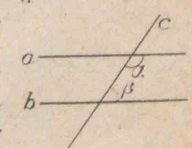
故ニ假ニ甲ノ AB, CD ガ EH ノ一方ノ側ノ一點 P デ交ルモノトスレバ,乙ヲ甲ノ上ニ重ネタトキ,P ハ Q ノ位置ニ來テ甲ノ AB, CD ハ更ニ點 Q デ交ルコトトナル。即チ二點P, Q ヲ通ル二ツノ直線 AB, CD ガ存在スルコトトナツテ不合理デアル(4頁,公理)。

故ニ AB ト CD トハ交ルコトガ出來ナイ。即チ互ニ平行デアル。

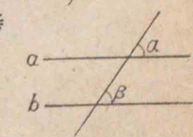
[注意] コノ證明デハ,終結ガ成立タナイモノトスレバ,不合理トナルカラ,終結ハ成立ツトイフ論法デアル。コレハ證明ニ屢〻用ヒル方法デアツテ歸謬法トイフ。



[系] **1.** 同ジ直線ニ垂直デアル二直線ハ互ニ平行デアル。(錯角ヲ考ヘヨ)



[系] **2.** 一直線ガ他ノ二直線ト交ルトキ,初メノ直線ニ對シテ同ジ側ニアル一組ノ内角ガ互ニ補角ヲナセバ,コノ二直線ハ互ニ平行デアル。(錯角ヲ考ヘヨ)



[系] **3.** 一直線ガ他ノ二直線ト交ルトキ,一組ノ同位角ガ相等シケレバ,コノ二直線ハ互ニ平行デアル。(錯角ヲ考ヘヨ)

[公理] 一直線外ノ一點ヲ通リ,コノ直線ニ平行デ

アル直線ハ常ニ唯一ツアル。

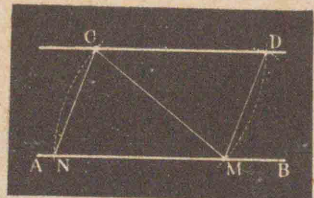
系 1. 二ツノ平行線ノ一ツニ交ル直線ハ他ニモ交ル。(歸謬法ヲ用ヒヨ)

系 2. 直線 c ガ直線 a ト交リ,且ツ直線 b ニ平行デアルトキハ a ト b トハ平行デナイ,卽チ相交ル。

($b \parallel c$,ソシテ系 1 ヲ用ヒヨ)

作圖題 7. 與ヘラレタ點(C)ヲ通ツテ,與ヘラレタ直線(AB)ニ平行線ヲ引クコト。

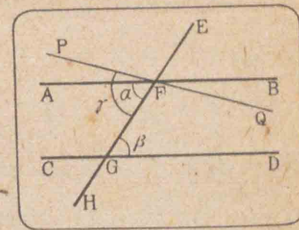
作圖 AB 上ノ任意ノ點 M ヲ中心トシ,こんぱすヲ C マデ開イテ弧ヲ畫キ, AB ト交ル點ヲ N トスル。次ニ C ヲ中心トシ,前ト同ジ半徑デ弧ヲ畫ク。次ニ CN ノ長サヲ半徑トシテ M ヲ中心トスル弧ヲ畫キ,前ノ弧ト AB ニ對シテ C ノアル側デノ交點ヲ D トスル。C, D ヲ通ル直線ハ AB ニ平行デアル。(コノ作圖ノ正シイコトハ後ニワカル)



定理 6. 一直線ガ平行二直線ト相交ルトキ錯角ハ相等シイ。

假設 一直線 EH ガ平行二直線 AB, CD ト F, G デ交ツテ出來ル錯角ヲ α, β トスル。

終結 $\angle\alpha=\angle\beta$



證明 假ニ $\angle\alpha \neq \angle\beta$ トシ, F ヲ通ル他ノ直線 PQ ヲ引イテ,錯角 γ ト β トヲ等シクスル。然ルトキハ, CD ト PQ トハ平行デアル(前定理)。又假設ニヨツテ AB∥CD デアル。故ニ $\angle\alpha \neq \angle\beta$ トスレバ, F ヲ通リ CD ニ平行デアル二直線 AB,PQ ガアルコトトナツテ不合理デアル(35頁,公理)。

故ニ $\angle\alpha=\angle\beta$ デナケレバナラヌ。

系 1. 一直線ガ平行二直線ト相交ルトキ,

[1] 各組ノ同位角ハ相等シイ。

[2] 同ジ側ニアル內角ハ互ニ補角ヲナス。

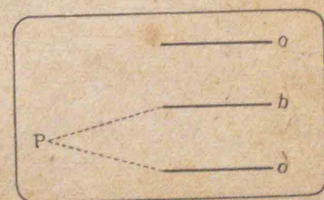
系 2. 平行二直線ノ一ツニ垂直デアル直線ハ他ニモ垂直ニ交ル。(コノ直線ヲ二直線ノ共通垂線トイフ)

定理 7. 同ジ直線ニ平行デアル二ツノ直線ハ互ニ平行デアル。

假設 $a \parallel b$, $a \parallel c$ トスル。

終結 $b \parallel c$

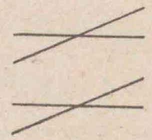
證明 假ニ b ト c トハ一點 P デ交ルトセヨ。然



ルトキハ,P ヲ通リ a ニ平行デアル二直線 b, c ガアルコトトナッテ不合理デアル(35頁,公理)。

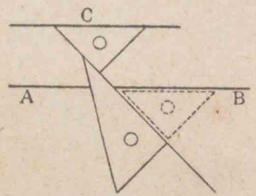
ヨッテ b, c ハ交ラナイ。卽チ平行デアル。

系 相交ル二直線ノ各々ニ夫々平行デアル二直線ハ必ズ相交ル。(歸謬法ヲ用ヒヨ)

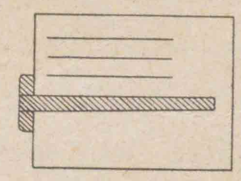


問題

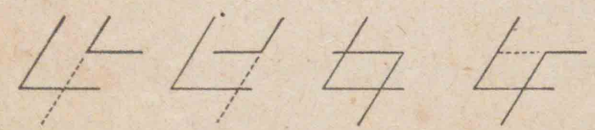
1. 作圖題7ハ二個ノ三角定規ヲ用ヒレバ,容易ニ作圖スルコトガ出來ル。右圖ニヨッテソノ方法ヲ述ベヨ。



2. 右圖ニ示シタ丁字形定規デ平行線ヲ畫クノハ,ドノ定理又ハ系ニヨルカ。



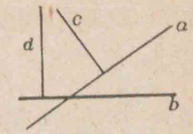
*3. 一ツノ角ノ二邊ガ,他ノ角ノ二邊ニ夫々平行デアルトキ,コノ二ツノ角ハ相等シイカ,又ハ互ニ補角デアル。



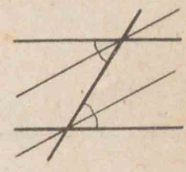
*4. 相交ル二直線(a, b)ニ夫々垂直デアル二直線(c,

* 印ノ問題ハ屢々應用サレル問題デアル。

d)ハ相交ル。(若シ c, d ガ平行デアルトスレバ37頁系2ニヨリ $a \perp d$, ソシテ a, b ハドウナルカ)



*5. 一直線ガ平行二直線ト交ッテ出來ル一組ノ錯角(又ハ同位角)ノ二等分線ハ互ニ平行デアル。



6. 一直線ガ平行二直線ト交ッテ出來ル一組ノ同側內角ノ各々ノ二等分線ハ相交ル。

*7. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々垂直ナラバ,コノ二ツノ角ハ相等シイカ,又ハ互ニ補角デアル。

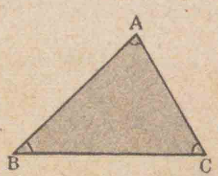
第三章　三角形

18. 三角形

問　三角形トハドンナ圖形カ,小學校デ學ンダコトヲ言ヘ。

三ツノ線分ニヨツテ圍マレタ平面ノ部分ヲ**三角形**又ハ**三邊形**トイフ。

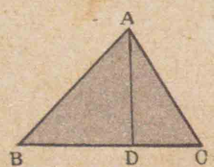
右ノ三角形デ,線分BC, CA, ABヲソノ邊,二邊ノ交點A, B, Cヲソノ頂點トイヒ,∠A, ∠B, ∠Cヲ三角形ノ內角又ハ單ニ角トイフ。



上ノ三角形ヲ三角形ABCトイヒ,△ABCト書ク。

三角形ノ一角トソノ角ノ內部ニアル邊トハ相對スルトイヒ,角ヲコノ邊ノ**對角**,邊ヲコノ角ノ**對邊**トイフ。又頂點カラ對邊ニ下シタ垂線ヲ三角形ノ**垂線**,ソノ長サヲ三角形ノコノ邊ニ立ツ**高サ**トイフ。

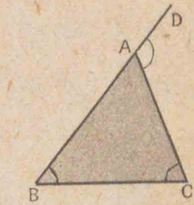
右圖デ∠Aノ對邊ハ邊BC,邊BCノ對角ハ∠Aデアル。又線分ADハBCニ立ツ高サデアル。



三角形ノ一邊ヲ**底邊**トイフコトガアル。コノ場合ニ底邊ノ兩端ニアル角ヲ**底角**

トイヒ,底邊ニ對スル角ヲ**頂角**トイフ。

三角形ノ一邊トソノ隣邊ノ延長トガ夾ム角ヲ**外角**トイヒ外角ニ接シテキナイ內角ノ各ヽヲソノ外角ノ**內對角**トイフ。



上圖デ∠CAD △ABCノ一ツノ外角デ,∠ABC及ビ∠ACBハソノ內對角デアル。

問題

1. 三邊ガ夫々5 cm,6 cm,7 cmデアル三角形ヲ畫キ,ソノ各角ノ大イサヲ分度器デ測ツテ,ドノ邊ニ對スル角ガ最モ大キイカヲ見ヨ。
2. 三邊ガ3 cm, 4 cm, 5 cmデアル三角形ヲ畫キ,5 cmノ邊ノ對角ト接角ヲナス外角ノ大イサヲ分度器デ測レ。
3. 三角形ノ邊ノ大小トコレニ對應スル高サノ大小トニドンナ關係ガアルカヲ圖ヲ畫イテ調ベヨ。

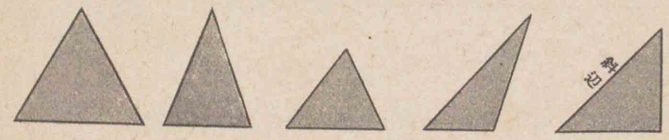
三角形ノ種類

正三角形　三ツノ邊ガ皆等シイ三角形ヲ正三角形トイフ。

二等邊三角形　二邊ガ相等シイ三角形ヲ

二等邊三角形トイフ。

銳角三角形　三ツノ角ガ皆銳角デアル三角形ヲ銳角三角形トイフ。

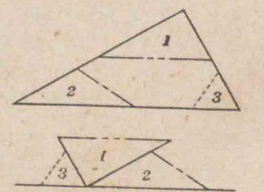


鈍角三角形　一角ガ鈍角デアル三角形ヲ鈍角三角形トイフ。

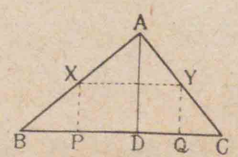
直角三角形　一角ガ直角デアル三角形ヲ直角三角形トイフ。

直角三角形ノ直角ノ對邊ヲ斜邊トイフ。

19. 三角形ノ內角ト外角トノ關係



観察 1.　任意ノ三角形ヲ紙ニ書キ,コレヲ切リ離シテ圖ノヤウニ三ツノ角ヲ並ベテ見ヨ。ドンナコトガワカルカ。



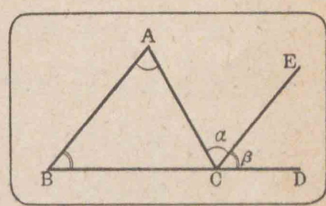
観察 2.　圖デ AD⊥BC. XY ハ AD ノ垂直二等分線,又 XP⊥BC, YQ⊥BC デアル。コノヤウナ三角形ヲ紙ニ書キ,點線ニ沿ウテ折リ疊ミ,點A, B

C ヲ點 D ノ上ニ重ネテ見ヨ。

定理 **8.**　三角形デハ,

[1]　一ツノ外角ハソノ二ツノ內對角ノ和ニ等シイ。

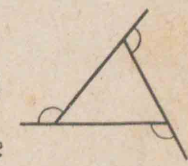
[2]　三ツノ內角ノ和ハ2直角デアル。



証明　省略スル。

(△ABC ノ任意ノ一邊,例ヘバ BC ヲ延長シテ外角 ACD ヲ作リ,C ヲ通リ AB ニ平行ニ直線CE ヲ引キ,コノ外角ヲ二ツノ角 α, β ニ分ケ,定理6及ビソノ系1ヲ用ヒレバ $\angle A=\angle\alpha$, $\angle B=\angle\beta$ トナル)

系 **1.**　三角形ノ一ツノ角ガ直角デアレバ,他ノ二角ハ共ニ銳角デ,且ツ互ニ餘角デアル。



系 **2.**　三角形ノ各頂點ニ於ケル外角ヲ一ツヅツトツタ和ハ4直角デアル。

問題

1.　三角形ノ三ツノ角ガ夫々 $2x^\circ+5^\circ$, $4x^\circ-13^\circ$, $5x^\circ+1^\circ$ デアルトイフ。x° ヲ求メヨ。

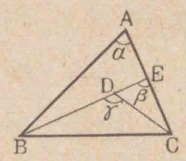
2.　次ノ方程式中ノ x ハ三角形ノ一ツノ內角ヲ示ス度數デアル。コノ三角形ハ如何ナル三角形カ。

$$2(3x+5)=5x+100$$

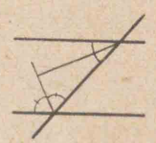
3.　三角形 ABC ノ ∠A 及ビ ∠B ノ二等分線ノ交點

ヲDトスレバ,∠ADBハ直角ヨリ$\frac{\angle C}{2}$ダケ大デアル。

4.　三角形ABC内ノ一點Dカラ一邊BCノ兩端ニ引イタ二線分ノナス角BDCハソノ邊ニ對スル角Aヨリ大キイ。(右圖デ ∠γ>∠β>∠α)



5.　一直線ガ平行二直線ト交ツテ出來ル同ジ側ノ二ツノ内角ノ二等分線ハ互ニ垂直デアル。



20.　三角形ノ合同

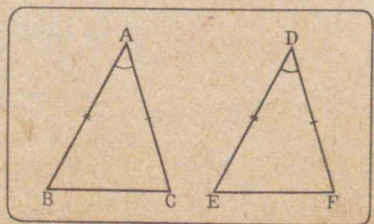
問　圖形ノ合同ノ定義ヲ述ベヨ。

注意　△ABC ト △DEF トガ合同デアルコトヲ表ハスニ △ABC≡△DEF ト書ク。

定理 9.　二邊トソノ夾角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。

假設　△ABC及ビ△DEFニ於テ, AB=DE, AC=DF, ∠A=∠D トスル。

終結　△ABC≡△DEF



證明　相等シイ角AトDトヲ重ネ,∠Dノ邊DE, DFガ夫々∠Aノ邊

AB, ACノ上ニ落チルヤウニ置ケバ, AB=DE, AC=DFデアルカラ, EハBノ上ニ, FハCノ上ニ來テ,邊EFハ邊BCト重ナル。

∴　△ABC≡△DEF

注意 1.　合同デアル二ツノ三角形デハ,

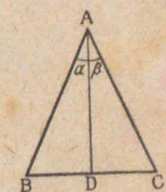
(1)　等シイ角ニ對スル邊ハ相等シイ。

(2)　等シイ邊ニ對スル角ハ相等シイ。

注意 2.　コノ定理ノ證明ノヤウニ,兩圖形ヲ重ネ合セテ證明スル方法ヲ重置法トイフ。

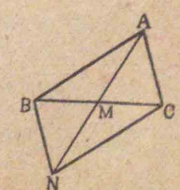
系 1.　二點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ2等分スル直線上ニアル點ハ,コノ二點カラ等距離ニアル。

系 2.　二等邊三角形ノ相等シイ邊ニ對スル角ハ相等シイ。即チ AB=AC ナラバ ∠B=∠C デアル。(∠Aノ二等分線ヲ引イテ本定理ヲ用ヒルカ或ハ裏返シテモトノモノノ上ニ重ネヨ)



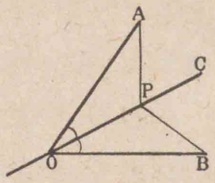
問題

1.　三角形ABCノ邊BCノ中點ヲMトシ,MトAトヲ結ビ,コレヲ延長シテAM=MNトシ,B, N; C, Nヲ結ベバ,
△ABM≡△NCM,　△ACM≡△NBM



注意 コノ AM ノヤウナ線分ヲ△ABCノ中線トイフ。

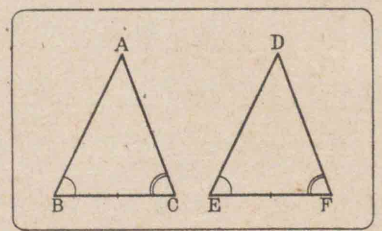
2. 一點Oカラ引イタ相等シイ二ツノ線分OA,OBノ各ゝノ他ノ端A,Bハソノ線分ガ夾ム角ノ二等分線OC上ノ任意ノ點Pカラ等距離ニアル。



定理 10. 二角トソノ頂點ノ間ノ邊トガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。

假設 △ABC及ビ△DEFニ於テ, ∠B=∠E, ∠C=∠F, BC=EFトスル。

終結 △ABC≡△DEF



證明 △DEFヲトツテ△ABCノ上ニ, EガBニ, 邊EFガ邊BCノ上ニ, 且ツDトAトガ邊BCノ同ジ側ニ來ルヤウニ重ネレバ, FハCニ, 邊EDハ邊BAノ上ニ, 邊FDハ邊CAノ上ニ重ナルカラDハAト一致スル。

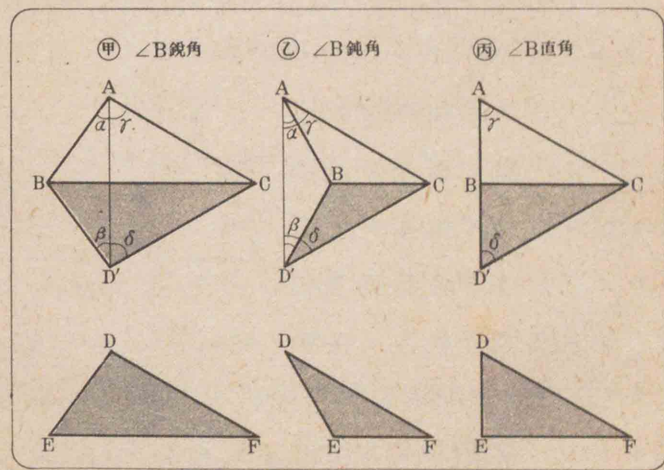
∴ △ABC≡△DEF

定理 11. 三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。

假設 △ABC及ビ△DEFニ於テ, AB=DE, AC=DF, BC=EFトスル。

終結 △ABC≡△DEF

證明 △DEFヲトツテ, EガBニ邊EFガ邊BCニ合シ且ツ直線BCニ對シテ△ABCト反對ノ側ニアルヤウニ裏返ニシテ置ク。コノトキDガD′ノ位置ニ來タトシ, AトD′トヲ結べバ, ∠Bノ大イサニヨツテ次圖ノ如ク三ツノ場合甲,乙,丙ガ出來ル。



何レノ場合デモ　∠α=∠β, ∠γ=∠δ (定理9系2)

從ツテ ∠BAC=∠BD′CナルコトガワカJル。

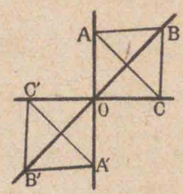
然ルニ　∠BD′C=∠EDF

∴　∠BAC=∠EDF

從ツテ　△ABC≡△DEF　(定理 9)

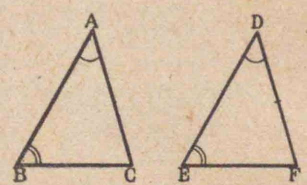
問題

1\. 三線分 AA', BB', CC' ガ同一點 O デ交リ, O ガ各線分ノ中點デアレバ, $\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ ハ合同デアル。又モシ三點 A, B, C ガ一直線上ニアレバ, A', B', C' モ亦一直線上ニアル。

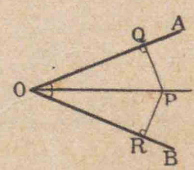


2\. $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ ガ邊 AB ノ同ジ側ニアツテ且ツ $AC=BD$, $AD=BC$ ナルトキ, AD ト BC トノ交點ヲ O トスレバ, $\triangle OAC \equiv \triangle OBD$

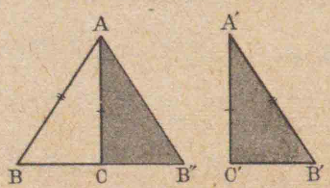
*3. 二角ガ夫々相等シク,且ツソノ一組ノ相等シイ角ニ對スル邊ガ相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。



*4. 角ノ二等分線上ノ任意ノ點ハソノ二邊カラ等距離ニアル。



*5. 一邊ト斜邊トガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。($\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $\angle C=\angle C'=\angle R$ トスル。$\triangle A'B'C'$ ヲ圖ノヤウニ $\triangle ACB''$ ノ位置ニ移セバ, BCB'' ハ一直線トナルコトヨリ

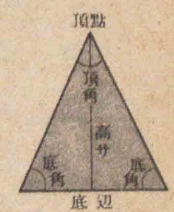


$\triangle ABB''$ ハ二等邊三角形トナルカラ $\angle B=\angle B''=\angle B'$。ヨツテ $\angle A=\angle A'$ $\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$)

*6. 角ノ二邊カラ等距離ニアル點ハコノ角ノ二等分線上ニアル。

21. 二等邊三角形ノ性質

二等邊三角形デハ等邊デナイ第三邊ヲ特ニ底邊又ハ底トイヒ,底邊ノ兩端ノ角ヲ底角,底邊ノ對角ヲ頂角,ソノ角頂ヲ頂點トイフ。又二等邊三角形ノ高サトイヘバ,頂點カラ底邊ニ至ル垂線ノ長サノコトデアル。

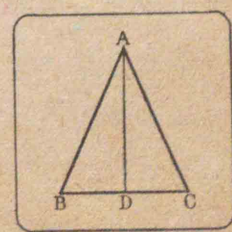


定理9系2ヲ言ヒカヘレバ

定理 12. 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ。

系 正三角形ノ各角ハスベテ相等シク60°デアル。

定理 13. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ2等分スル。



假設 $\triangle ABC$ ニ於テ, $AB=AC$ トシ, $\angle A$ ノ二等分線ガ BC ト交ル點ヲ D トスル。

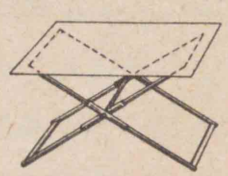
終結 $AD \perp BC$ 且ツ $BD=DC$

【證明】 省略スル。(定理9ヲ用ヒテ證セヨ)

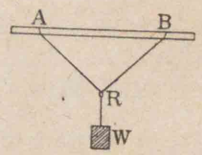
【系】 二等邊三角形デハ,頂角ノ二等分線,頂點ト底邊ノ中點トヲ結ブ直線,頂點カラ底邊ヘ引イタ垂線,底邊ノ垂直二等分線ハ何レモ同一直線デアル。

【問題】

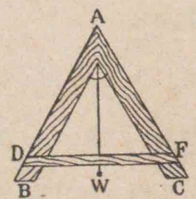
1. 右圖ノヤウナ腰掛ハ高サヲ如何樣ニ調節シテモ,ソノ面ハ常ニ床面ニ平行デアル。ソノ構造ノ大略ヲ述ベヨ。



2. 右圖ハ輪Rヲ通シタ糸ノ兩端ヲ眞直ナ棒ノ二點A,Bニ結ンダモノデ,輪Rハ自由ニ動キ得ル。今輪Rニ錘Wヲ下ゲ,ABヲ水平ニスレバ,Rハ如何ナル位置ヲトルカ。



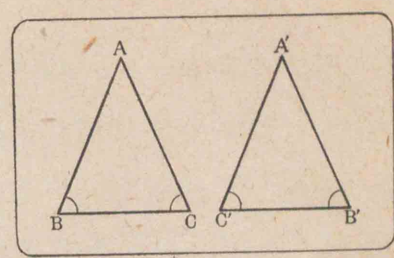
3. 右圖ハ大工ガ用ヒル水平器デアル。コノ構造ヲ推測シ,且ツ使用法ヲ說明セヨ。(Wハ糸デ下ゲタ錘)



4*. 二點A,Bカラ等距離ニアル點ハ線分ABノ垂直二等分線上ニアル。

【定理】14. 二角ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形

デアル。



【假設】 △ABCニ於テ,∠B=∠Cトスル。

【終結】 AB=AC

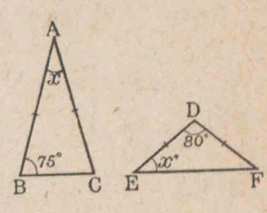
【證明】 省略スル。

(△ABCヲ裏返シテ△A'B'C'ヲ作リ,∠Bト∠C',∠Cト∠B'トガ重ナルヤウニ置イテ證セヨ)

【系】 三ツノ角ガ等シイ三角形ハ正三角形デアル。

【問題】

1. 右圖ハ何レモ二等邊三角形デアル。xヲ求メヨ。



2. 二等邊三角形ABCノ底邊BCニ平行ナ直線ト邊AB,ACトノ交點ヲ夫々P,Qトスレバ,△APQハ二等邊三角形デアル。

3*. 二等邊三角形ノ頂角ニ隣ル外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行デアル。

22. 定理ノ逆

「甲デアレバ,乙デアル」トイフコトト,「乙デアレバ,甲デアル」トイフコトトハ,互ニ一方ノ假設ガ他ノ終結

トナツテキル。

斯様ナ場合ニ一ツハ他ノ逆デアルトイフ。

例ヘバ,定理12ト定理14ハ互ニ逆デアル。即チ

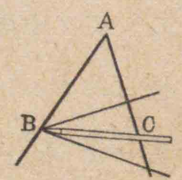
$\triangle ABC$ デ $AB=AC$ ナラバ, $\angle B=\angle C$ （定理12）

$\triangle ABC$ デ $\angle B=\angle C$ ナラバ, $AB=AC$ （定理14）

例ヘバ「$\angle\alpha$ ト $\angle\beta$ ノ各ヽガ直角ナラバ, $\angle\alpha$ ト $\angle\beta$ トハ相等シイ」ハ眞デアルガ,ソノ逆「$\angle\alpha$ ト $\angle\beta$ トガ相等シケレバ, $\angle\alpha$ ト $\angle\beta$ ノ各ヽハ直角デアル」ハ眞デナイ。等シクテモ直角デナイコトガ多イ。故ニ逆ガ眞デアルコトヲ主張スルニハ,更ニコレヲ證明シナケレバナラナイ。

23. 一ツノ三角形ノ角ト邊ノ關係

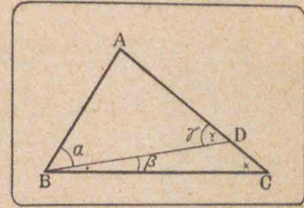
觀察 一ツノ角Aヲ作リ,$AB=AC$ トナルヤウニ鉛筆BCヲ置キ,Bヲ中心トシテ $\angle ABC$ ガ減小又ハ增大スルヤウニ廻轉セヨ。コノトキACノ長サノ變化ト $\angle ABC$ ノ大イサノ變化トノ關係ヲ調ベヨ。



定理 15. 三角形ノ二邊ガ不等デアレバ,大キイ邊ニ對スル角ハ小サイ邊ニ對スル角ヨリ大キイ。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ, $AC>AB$ トスル。

終結 $\angle B>\angle C$

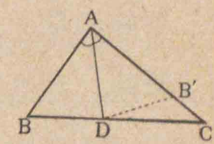


證明 AC上ニABニ等シクADヲトツテ,B, Dヲ結ブト $AC>AB$ デアルカラ,BDハ $\angle B$ ヲ二ツノ部分 α, β ニ分ツ。サテ $AB=AD$ デアルカラ圖ニ於テ

$\angle\alpha=\angle\gamma$ （定理12） 然ルニ $\angle\gamma>\angle C$ （定理8）

又 $\angle B>\angle\alpha$ $\therefore$ $\angle B>\angle C$

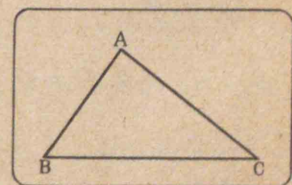
問 本定理ヲ $\angle A$ ノ二等分線ADヲ折目トシテABヲAC上ニ折リ重ネテ證明シテ見ヨ。



定理 16. 三角形ノ二角ガ不等デアレバ,大キイ角ニ對スル邊ハ小サイ角ニ對スル邊ヨリ大キイ。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ, $\angle B>\angle C$ トスル。

終結 $AC>AB$



證明 AB, ACノ大イサヲ比較スルニ次ノ三ツノ場合ノウチ,唯一ツガ成立スル。

(1) $AB=AC$ (2) $AB>AC$ (3) $AB<AC$

サテ今假ニ $AB=AC$ トスレバ定理9系2ニヨツテ $\angle B=\angle C$ デナケレバナラヌ。コレハ假設卽チ

$\angle B>\angle C$ ニ反スルカラ採用出來ナイ。

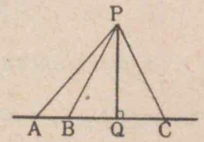
又假ニ $AB>AC$ トスレバ,定理15ニヨツテ $\angle B<\angle C$ デナケレバナラヌ。コレモ亦假設ニ反スルカラ採用出來ナイ。

故ニ $AC>AB$ デナケレバナラヌ。

注意 コノ定理ノ證明ハ歸謬法ヲ繰リ返シタノデアルガ,コノヤウナ證明法ヲ特ニ轉換法トイフ。

系 直線外ノ一點カラ直線ニ引イタ線分ノウチ,

[1] 垂線ハ最モ短イ。

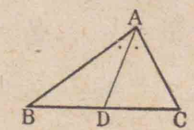


[2] 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ二ツノ斜線ノ長サハ相等シイ。

[3] 長サガ相等シイ二ツノ斜線ノ足ハ垂線ノ足カラ等距離ニアル。

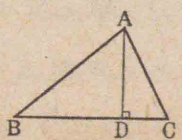
問題

1. 三角形ABCノ $\angle A$ 及ビ $\angle B$ ガ夫々 50° 及ビ 60° デアル。邊ヲ大イサノ順ニ云ヘ。



2.* 三角形ABCノ $\angle A$ ノ二等分線ガ邊BCト交ル點ヲDトスレバ,

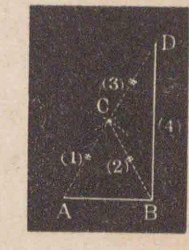
$AB>BD$, $AC>CD$



3. 三角形ABCノ頂點Aカラ對邊BCへ下シタ垂直ノ足ヲDトス

ル。モシ $\angle DAB>\angle DAC$ ナラバ, $AB>AC$

4.* 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三ツノ頂點カラ等距離ニアル。



5. 前問ヲ利用シテ線分ABノ一端Bニ於テコレニ垂線ヲ引ク方法ヲ工夫セヨ。

24. 三角形ノ二邊ノ和

觀察 三角形ノ底邊ハ12cmデ,他ノ二邊ノ長サガ夫々次ノ如ク與ヘラレタトキ,11頁作圖題1ヲ用ヒテ三角形ガ畫ケルカドウカヲ驗シテ見ヨ。

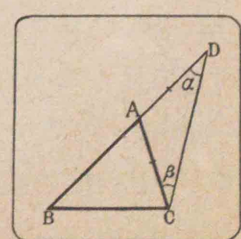
① 4cm, 6cm ② 6cm, 6cm ③ 7cm, 8cm

定理17. 三角形ノ二邊ノ和ハ第三邊ヨリ大キイ。

$\triangle ABC$ ニ於テ,例ヘバ $AB+AC>BC$ ヲ證明スル。

証明 邊BAヲAカラDマデ延長シ,ADヲACニ等シクトリ,D,Cヲ結ブ。$\triangle ACD$ ニ於テ

$AD=AC$ $\therefore$ $\angle\alpha=\angle\beta$



サテ $\angle BCD>\angle\beta$

$\therefore$ $\angle BCD>\angle\alpha$

$\therefore$ $BD>BC$ (定理16)

即チ $AB+AC>BC$

系 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ差ヨリ大キイ。

($AB>AC$ナラバ, $BC+AC>AB$ ヨリ $BC>AB-AC$)

問題

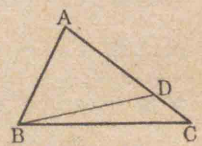
1. 次ノ條件デ三角形ABCヲ畫ケ。不能ノ場合ガアルカ。但シ a, b, c ハ夫々$\angle A, \angle B, \angle C$ ノ對邊ノ長サヲ表ハス。

① $b=4$ cm, $c=3.5$ cm, $\angle B=90°$

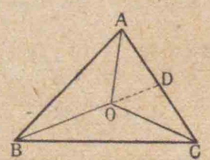
② $a=1$ cm, $b=4$ cm, $c=5$ cm

2. 54頁問題2ニヨツテ定理17ヲ證セヨ。

3. 三角形ABCニ於テ $\angle B>\angle C$ トシ, $\angle CBD$ ガ $\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$ ニ等シクナルヤウニ作ツテ定理16ヲ證セヨ。[$\angle ABD=\angle ADB=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ ナルコトニ注意セヨ]



4. 三角形ABC內ニ一點Oヲトレバ, $AB+AC>OB+OC$ (BOノ延長ガACト交ル點ヲDトスレバ, $AB+AD>BO+OD$, $OD+DC>OC$. コノ二式ヲ邊々加ヘヨ)



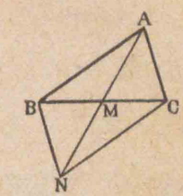
5.* 前問ニ於テ

① $AB+BC+CA>OA+OB+OC$

② $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(BC+CA+AB)$

6.* 三角形ABCノ中線AMヲMヲ越エテ延長シ, $MN=AM$ トスレバ,

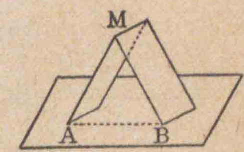
$2AM=AN<AB+AC$



7. 三角形ノ三中線ノ和ハ三邊ノ和ヨリ小サイ。(各中線ニ前問ヲ應用シ,ソノ和ヲ作レ)

25. 二ツノ三角形ノ邊ト角ノ關係

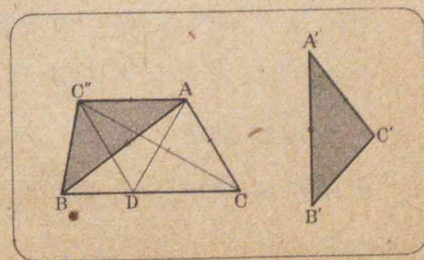
觀察 厚紙ヲ切リ,コレヲ折リ曲ゲテ圖ノヤウニ立テ, $\angle AMB$ ヲ增大又ハ減少セシメレバ, A, B 間ノ距離モ增大又ハ減少スルコトヲ見ヨ。



定理 18. 二ツノ三角形デ,二邊ガ夫々相等シクソノ夾角ガ不等デアレバ,夾角ノ大キイ方ガソノ對邊モ大キイ。

假設 $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A>\angle A'$ トスル。

終結 $BC>B'C'$



證明 $AB=A'B'$ デアルカラ $\triangle A'B'C'$ ヲトツテ, A′ハAニ, B′ハBニ落チルヤ

ウニ重ネ,C'ハ AB ニ對シテCト反對ノ側ニアルヤウニ置イタトキノ位置ヲC''トスレバ

$\angle C''AB<\angle BAC$ (假設)

故ニ $\angle C''AC$ ヲ2等分スル直線ハ $\angle BAC$ ノ内部ヲ通ツテ, BC ト一點Dデ交ル。今C'', Dヲ結ベバ, $\triangle C''AD$, $\triangle CAD$ ニ於テ

$AC''=AC$(假設), AD ハ共通, $\angle C''AD=\angle CAD$ (作圖)

$\therefore$ $\triangle C''AD\equiv\triangle CAD$ (定理9)

$\therefore$ $C''D=CD$……………………………(1)

又 $BC''<C''D+DB$ (定理17)

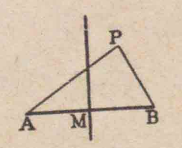
$\therefore$ $BC''<CD+DB$ [(1)ニヨル]

即チ $B'C'<BC$

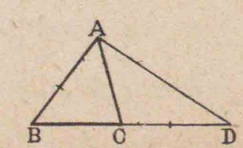
問題

1. 定理18ニ於テ∠Aノ大小ハソノ對邊BCノ大小ニ比例スルカ否カヲ圖ヲ書イテ調ベヨ。

2. 線分ABノ垂直二等分線外ノ任意ノ點PカラA, Bニ至ル距離ハ等シクナイ。



3. 三角形ABCノ邊BCヲCノ方ヘDマデ延長シ, CDヲABニ等シクトリ,AトDトヲ結ベ

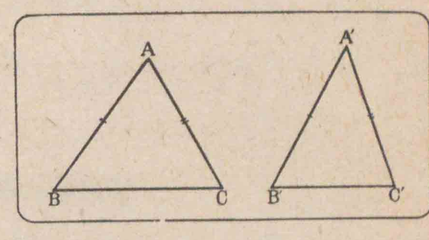


バ, $AD>BC$

定理 **19.** 二ツノ三角形デ,二邊ガ夫々相等シク第三邊ガ不等デアレバ,邊ノ大キイ方ガ對角モ大キイ。

假設 $\triangle ABC$ 及ビ $\triangle A'B'C'$ニ於テ $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC>B'C'$ トスル。

終結 $\angle A>\angle A'$



證明 ∠Aト∠A′ヲ比較スルニ,次ノ三ツノ場合ノウチ,唯一ツガ成立スル。

(1) $\angle A=\angle A'$ (2) $\angle A<\angle A'$ (3) $\angle A>\angle A'$

サテ今假ニ $\angle A=\angle A'$デアルトスレバ

$BC=B'C'$ (定理9)

コレハ假設ニ反スルカラ採用出來ナイ。

又假ニ$\angle A<\angle A'$デアルトスレバ

$BC<B'C'$ (定理18)

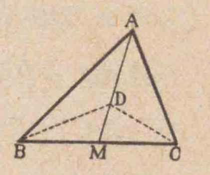
コレモ亦假設ニ反スルカラ採用出來ナイ。

故ニ$\angle A>\angle A'$デナケレバナラナイ。

注意 本定理ハ兩圖形ヲ定理18ノ證明ノトキノヤウニ置ケバ轉換法ニヨラズ,直接ニ證明スルコトガ出來ル。

問題

1.* 二ツノ二等邊三角形ノ底邊ガ不等デ等邊ガ相等シイトキハ,大キイ底邊ニ對スル頂角ハ小サイ底邊ニ對スル頂角ヨリ大キイ。

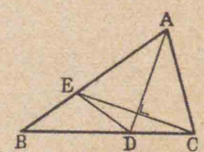


2.* 三角形ABCノ邊BCノ中點ヲMトスル。AB>ACナラバ,∠AMBハ鈍角,∠AMCハ鋭角デアル。

3.* 前問デ線分AM上ニ一點Dヲトレバ, DB>DC

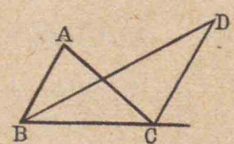
雜題

1. 二點P,Qハ直線ABニ對シテ反對ノ側ニアッテ,且ツABヨリノ距離ガ相等シイトキ,線分PQハABニヨッテ2等分サレル。



2. 三角形ABCニ於テAB>ACトシ,∠Aノ二等分線ガBCト交ル點ヲDトスル。CカラADニ下シタ垂線ガABト交ル點ヲEトスレバ,

$$\triangle ADC \equiv \triangle ADE$$



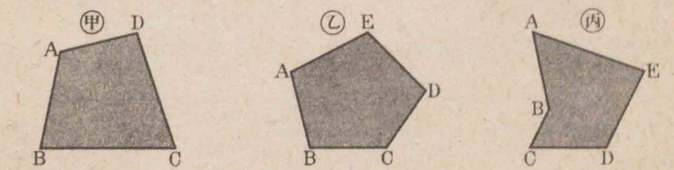
3. 三角形ABCノ∠Bノ二等分線ト頂點Cニ於ケル外角ノ二等分線トノ交點ヲDトスレバ, $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle A$

第四章・多角形

26. 多角形

若干ノ線分ガソノ各々ノ端ニ於テ互ニ接續シテ圍ンダ平面ノ部分ヲ**多角形**トイフ。

多角形ヲ圍ム各線分ヲソノ**邊**,スベテノ邊ノ和ヲソノ**周**,二隣邊ノ交點ヲソノ**頂點**トイヒ,二隣邊ガ作ル形内ノ角ヲ多角形ノ**内角**又ハ單ニ**角**トイフ。



多角形ノ角ト邊ノ數トハ相等シイ。コノ數ニヨッテ**三角形**,**四角形**,**五角形**又ハ**三邊形**,**四邊形**,**五邊形**ナドトイフ。

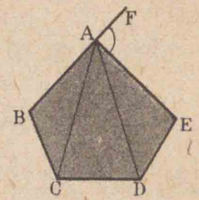
多角形ヲ呼ブニハ相隣ル頂點ノ名ヲ順次ニ唱ヘ,**四邊形ABCD**,**五邊形 ABCDE**ナドトイフ。

多角形ノ内角ガスベテ2直角ヨリ小デアルモノヲ**凸多角形**(上圖甲,乙)トイヒ,一ツデモ2直角ヨリ大ナルモノガアレバ**凹多角形**(上圖丙)トイフ。

注意 今後單ニ多角形トイヘバ,凸多角形ヲ指スモノトスル。

多角形ニ於テ,相隣ラナイ二頂點ヲ結ブ線分ヲソノ對角線トイフ。

右圖デAC, ADハ頂點Aカラ引イタ對角線デアル。



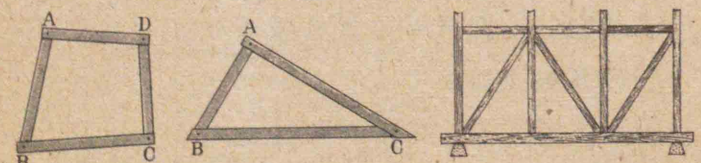
多角形ノ一邊トソノ隣邊ノ延長トノナス角ヲ多角形ノ外角トイフ。

上圖デ∠EAFハ五邊形ABCDEノ一外角デアル。

正多角形 内角ノ大イサガスベテ相等シク,且ツ邊ノ長サガスベテ相等シイ多角形ヲ正多角形トイフ。

問題

1. 細長ク切ツタ厚紙ヲびんデ繼ギ合セテ三角形,四角形ヲ作レ。次ニ四角形ノ何レカノ隅ヲ引キ又ハ押スコトニヨツテ形ガ變ルカ否カヲ見ヨ。三角形デハドウカ。家ヲ建テルトキ柱ト柱トノ間ニ筋違(スヂカヘ)ヲ入レル理由ヲ考ヘヨ。



2. 五角形デハ,一ツノ頂點カラソノ頂點トソレニ

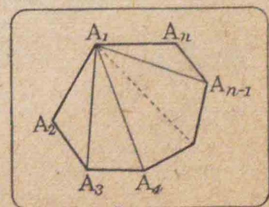
隣ル二頂點トヲ除イタ數,即チ5−3本ノ對角線ガ引ケル。ソシテ各頂點カラ同樣ニ對角線ヲ引ケバ,全體デ$(5-3)\times5$本ノ對角線ガ引ケル。併シソノウチ,二本ヅツハ重ナルカラ,ソノ總數ハ$\frac{(5-3)\times5}{2}$即チ5本トナル。コレカラ推理シテ多角形ノ邊數ガnノトキノ對角線ノ數ヲ表ハス公式ヲ書ケ。

27. 多角形ノ内角ノ和

觀察 多角形ハ一頂點カラ引キ得ル對角線ニヨツテ,幾ツノ三角形ニ分レルカヲ考ヘテ次ノ表ヲ完結セヨ。

多角形ノ邊ノ數	一頂點カラノ對角線ニヨツテ出來ル三角形ノ數	多角形ノ内角ノ和
4	2 即チ 4−2	$(4-2)\times180^\circ=4\angle R$
5	3 〃 5−2	$(5-2)\times180^\circ=6\angle R$
6		
⋮		
n		

定理 20. n角形ノ内角ノ總和ハ直角ノ$2(n-2)$倍ニ等シイ。

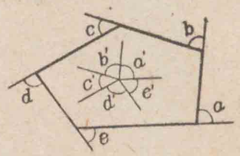


証明 省略スル。(上ノ觀察ニヨリn角形ハ一頂點カラノ對角線ニヨツテ$(n-2)$個ノ三角形ニ分レルコトト,定理8[2]ヲ用ヒヨ)

系 1.　四邊形ノ内角ノ和ハ 4 直角デアル。

系 2.　多角形ノ各頂點ニ於ケル外角ヲ一ツヅツトツタ和ハ 4 直角ニ等シイ。

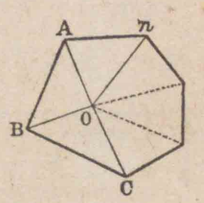
(多角形内ノ一點カラ圖ノヤウニ引イテ出來ル角ト外角トヲ比較セヨ)



注意　多角形ノ外角ノ和ハ邊ノ數ニ關係シナイ。

問題

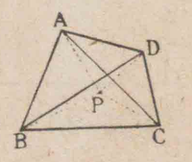
1.　多角形内ノ一點 O ト各頂點トヲ結ンデ定理20ヲ證セヨ。



2.　正五角形,正六角形ノ一ツノ内角ハ夫々何度カ。

3.　一外角ノ大イサガ 24° ナル正多角形ハ何角形カ。

4.　四邊形ノ四ツノ頂點カラノ距離ノ和ガ最小ナル點ヲ求メヨ。



5.　四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ和ハ邊 AD,BC ノ和ヨリ大キイ。又邊 AB,CD ノ和ヨリ大キイ。

6.　四邊形ノ周ハ一ツノ對角線ノ 2 倍ヨリ大キイ。又兩對角線ノ和ヨリ大キイ。

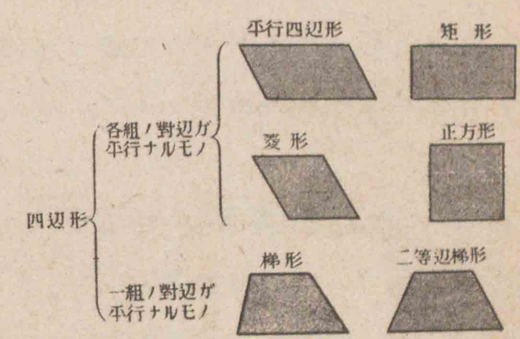
第五章　平行四邊形

28.　四邊形ノ種類

四邊形ノ相隣ラナイ二邊ヲ相對スル邊又ハ對邊,相隣ラナイ二角ヲ相對スル角又ハ對角トイフ。

平行四邊形　二組ノ對邊ガ夫々平行デアル四邊形ヲ平行四邊形トイフ。

平行四邊形 ABCD ト記ス代リニ ▱ABCD 又ハ ▱AC, ▱BD ナドデ表ハスコトモアル。



矩形　角ガスベテ相等シイ四邊形ヲ矩形トイフ。

定理20系 1 ニヨツテ矩形ノ各角ハ直角デアル。

矩形 ABCD ト記ス代リニ ▭ABCD 又ハ ▭AC, ▭BD ナドデ表ハスコトモアル。

菱形　邊ガスベテ相等シイ四邊形ヲ菱形トイフ。

正方形　邊ガスベテ相等シイ矩形ヲ正方形トイフ。

正方形 ABCD ト記ス代リニ □ABCD 又ハ □AC, □BD ナドデ表ハスコトモアル。

梯形　一組ノ對邊ガ平行デ,他ノ一組ノ對邊ガ平行デナイ四邊形ヲ梯形トイフ。

梯形ノ平行デアル二邊ヲ底邊又ハ底トイフ。

二等邊梯形　平行デナイ二邊ガ相等シイ梯形ヲ二等邊梯形又ハ等脚梯形トイフ。

29. 平行四邊形ノ性質

定理 21. 平行四邊形デハ,

[1] 相隣レル角ハ互ニ補角ヲナス。

[2] 相對スル角ハ相等シイ。

[3] 相對スル邊ハ相等シイ。

[4] 對角線ノ各ハコノ平行四邊形ヲ合同デアル二ツノ三角形ニ分ツ。

[5] 對角線ハ互ニ他ヲ2等分スル。

証明　平行四邊形ヲ ABCD トスル。

[1]　$AB \parallel DC$　(假設)

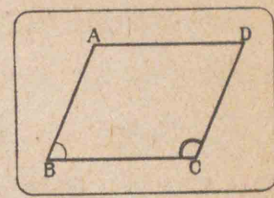
$\therefore$　$\angle B+\angle C=2\angle R$　(定理6系1[2])

同樣ニ　$\angle A+\angle D=2\angle R$

又　$AD \parallel BC$　(假設)

$\therefore$　$\angle A+\angle B=2\angle R$

同樣ニ　$\angle D+\angle C=2\angle R$



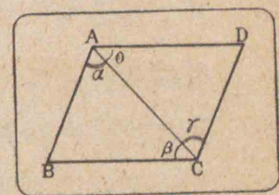
[2]　$\angle A+\angle B=\angle A+\angle D=2\angle R$　([1]ニヨル)

$\therefore$　$\angle B=\angle D$　同樣ニ　$\angle A=\angle C$

[3] 對角線 AC ヲ引ケバ, △ABC, △CDA ニ於テ

$\left.\begin{array}{l}\angle\alpha=\angle\gamma\\ \angle\beta=\angle\delta\end{array}\right\}$　(定理6)

AC ハ共通



$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle CDA$　(定理10)

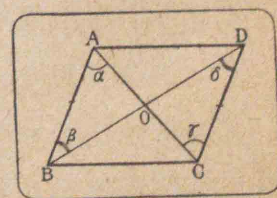
$\therefore$　$AB=CD$,　$BC=AD$

[4] 上ノ證明中ニ含マレル。

[5] 對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスレバ, △AOB, △COD ニ於テ

$\left.\begin{array}{l}\angle\alpha=\angle\gamma\\ \angle\beta=\angle\delta\end{array}\right\}$　(定理 6)

$AB=CD$　([3]ニヨル)



$\therefore$　$\triangle AOB\equiv\triangle COD$　(定理10)

$\therefore$　$AO=OC$,　$BO=OD$

系　平行二直線ノ一ツノ上ニアル任意ノ點カラ他

ノ直線ニ至ル距離ハ一定デアル。

注意 コノ長サヲ平行二直線間ノ距離トイフ。

平行四邊形ノ一邊ヲ底邊ト考ヘルトキ,コレニ平行デアル邊ト底邊トノ間ノ距離ヲ高サトイフ。梯形デハ兩底間ノ距離ヲ高サトイフ。

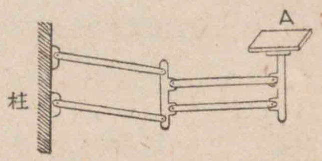
問題

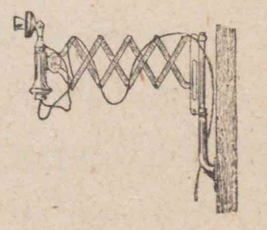
1. 平行四邊形ノ一角ガ直角デアレバ,矩形デアル。

2. 平行四邊形ノ相隣ル二邊ガ等シケレバ,菱形デアル。

3. 兩對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。

4. 右ノ上圖ハ水平臺ト稱シ,臺Aヲ水平ニ保チナガラ前後左右ニ動カシ得ルモノデアル。如何ナル理由ニヨルカ。又下圖ハ電話器ヲ水平ニ前後ニ動カス裝置デアル。コノ構造ヲ述ベヨ。



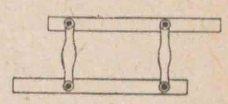


5. 平行四邊形ノ對角ノ大イサガ夫々 $5(y+6)$ 度, $(21y-34)$ 度デアル。y ヲ求メヨ。

6. 平行四邊形ノ對角ノ大イサガ,夫々 $(3x+5)$ 度, $(6y+2)$ 度デ,殘リノ角ノ一ツガ $(143+9y-2x)$ 度デアル。x, y ヲ求メテ各角ノ大イサヲ言ヘ。

7. 菱形ノ兩對角線ハ各々ソノ内角ヲ2等分シ,且ツ合同ナ四ツノ直角三角形ニ分ツ。

8. 左圖ハ平行定規デアル。ソノ構造及ビ使用法ヲ考察セヨ。



定理 22. 四邊形ハ次ノ各々ノ場合ニ於テ平行四邊形デアル。

[1] 一ツノ角ガコレニ隣ル角ノ各々ト互ニ補角ヲナストキ,

[2] 二組ノ相對スル角ガ夫々相等シイトキ,

[3] 二組ノ相對スル邊ガ夫々相等シイトキ,

[4] 一組ノ相對スル邊ガ相等シク,且ツ平行デアルトキ,

[5] 對角線ガ互ニ他ヲ2等分スルトキ。

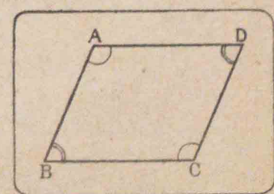
證明 四邊形ヲ ABCD トスル。

[1] $\angle B+\angle A=2\angle R$

$\angle B+\angle C=2\angle R$

トスレバ

$BC \parallel AD$, $AB \parallel DC$ (定理5系2)



故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

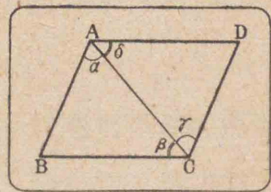
[2]　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R$　（定理20系1）

然ルニ　$\angle A=\angle C,\ \angle B=\angle D$　（假設）

$\therefore$　$\angle A+\angle B=2\angle R,\ \angle B+\angle C=2\angle R$

故ニ[1]ニヨリ ABCD ハ平行四邊形デアル。

[3]　$AB=CD,\ BC=AD$ トシ,對角線 AC ヲ引ケバ



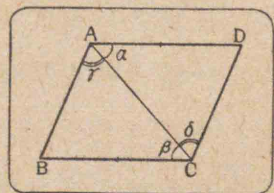
$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$　（定理11）

$\therefore$　$\angle\alpha=\angle\gamma,\quad \angle\beta=\angle\delta$

$\therefore$　$AB \parallel DC,\quad BC \parallel AD$　（定理5）

故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

[4]　$AD=BC,\ AD \parallel BC$ トシ,對角線 AC ヲ引ケバ



$\angle\alpha=\angle\beta$　（定理6）

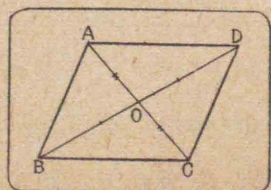
$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$　（定理9）

$\therefore$　$\angle\gamma=\angle\delta$

$\therefore$　$AB \parallel DC$　（定理5）

故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

[5]　兩對角線ノ交點ヲ O トシ, $OA=OC,\ OB=OD$ トスル。



$\angle AOB=\angle COD$　（定理2）

$\therefore$　$\triangle OAB \equiv \triangle OCD$　（定理9）

$\therefore$　$AB=DC$

同樣ニ　$AD=BC$

故ニ[3]ニヨッテ ABCD ハ平行四邊形デアル

系 1.　菱形ハ平行四邊形デアル。

系 2.　菱形ノ對角線ハ互ニ他ヲ垂直ニ2等分スル。

逆ニ四邊形ノ兩對角線ガ互ニ他ヲ垂直ニ2等分スレバ,ソノ四邊形ハ菱形デアル。

系 3.　矩形ハ平行四邊形デアッテ,ソノ兩對角線ハ相等シイ。

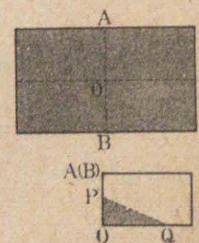
問題

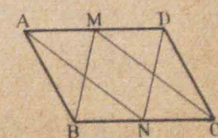
1.　次ノ條件ニヨッテ平行四邊形ヲ書キ,各邊ノ長サヲ測ッテ見ヨ。

①　對角線ノ長サガ4 cm, 6 cm,ソノ夾角ガ60°。

②　底邊6 cm,他ノ邊ガ4 cm,ソノ夾角ガ60°。

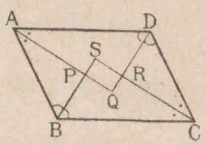
2.　紙片ヲ右圖ノヤウニ, AB ヲ折目トシテ折リ,次ニ OA,OB ガ重ナルヤウニ折ッテ,直線 PQ ニ沿ウテ剪ミ截レバ,一般ニ菱形ガ得ラレル。コノ方法ニヨッテ正方形ヲ作ルニハドウスレバヨイカ。





平行四邊形ノ一組ノ對邊ノ中點ヲ夫々ソノ對邊ノ兩端ニ

結ンデ出來ル四邊形ハ平行四邊形デアル。

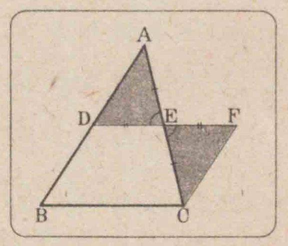


4. 平行四邊形ノ各角ヲ2等分スル四ツノ直線ハ一ツノ矩形ヲ作ル。

30. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分

[定理]23. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ,第三邊ニ平行デ,且ツソノ半分ニ等シイ。

[假設] △ABC ニ於テ,邊 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トスル。



[終結] DE∥BC, DE=$\frac{1}{2}$BC

[証明] DE ヲ F マデ延長シ, EF=DE ナラシメ, F, C ヲ結ベバ

△AED≡△CEF (定理9)

∴ FC=AD=BD (D ハ AB ノ中點)

且ツ ∠ADE=∠EFC ∴ DB∥FC

故ニ DBCF ハ平行四邊形デアル。 [定理22(4)]

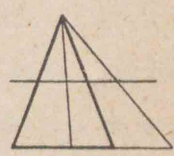
從ツテ DE∥BC 又 DE=$\frac{1}{2}$DF=$\frac{1}{2}$BC

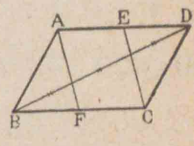
[系] 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ,他ノ一邊ニ平行デアル直線ハ,第三邊ノ中點ヲ通ル。

問題

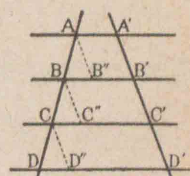
1. 正三角形ノ三邊ノ中點ヲ結ンデ出來ル三角形ハ又正三角形デアル。

*2. 三角形ノ一頂點カラ對邊(又ハソノ延長)ヘ引イタ線分ハ,他ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線ニヨッテ2等分サレル。

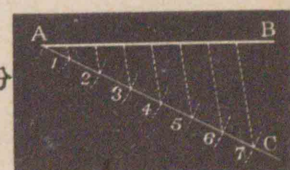




3. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル邊 AD, BC ノ中點ヲ夫々E, F トスレバ, AF=CE デ,且ツ AF, CE ハ對角線BD ヲ3等分スル。

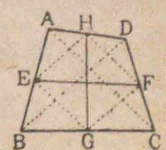


4. 數多ノ平行線ガ一直線ト交ッテ,コレカラ等シイ線分ヲ截リトルトキハ,他ノ何レノ直線ト交ッテモ,ソレカラ等シイ線分ヲ截リトル。



5. 與ヘラレタ線分ヲ7等分セヨ。

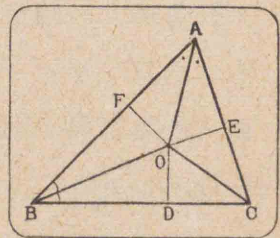
6. 四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ブ二ツノ直線ハ互ニ他ヲ2等分スル。



31. 三角形ノ內心·外心·重心·垂心

定理 24. 三角形ノ各角ヲ2等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

證明 △ABC ニ於テ ∠A 及ビ ∠B ノ二等分線ハ三角形內デ相交ル。ソノ交點ヲOトシ, Oカラ三邊 BC, CA, AB ニ夫々垂線 OD, OE, OF ヲ引ケバ



OE=OF,　OF=OD　(48頁, 問題4)

∴　OE=OD

即チOハ∠Cノ二等分線上ニアル。(49頁, 問題6)

故ニ三角形ノ各角ヲ2等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

注意 コノ點Oヲ三角形ノ內心トイフ。

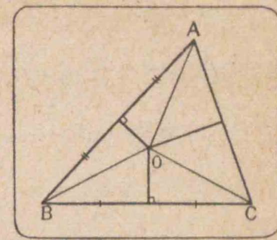
系 三角形ノ內心カラ各邊マデノ距離ハ相等シイ。

定理 25. 三角形ノ各邊ヲ垂直ニ2等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

證明 △ABC ニ於テ,二邊 AB, BC ハ相交ルカラソノ各、ヲ垂直ニ2等分スル二直線ハ相交ル(38頁,問題4)。ソノ交點ヲOトシ,コレヲ各頂點ニ結ベバ,

OA=OB,　OB=OC　(定理9系1)

∴　OA=OC



即チ點Oハ又邊 AC ヲ垂直ニ2等分スル直線上ニアル(定理13系)。

故ニ三角形ノ各邊ヲ垂直ニ2等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

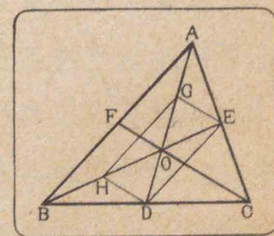
注意 コノ點Oヲ三角形ノ外心トイフ。

系 三角形ノ外心カラ各頂點マデノ距離ハ相等シイ。

定理 26. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點デ交リ,ソノ交點ハ各中線ノ頂點カラ $\frac{2}{3}$ ノトコロデアル。

證明 次ノヤウニ考ヘテ證明セヨ.

邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスル。



(1) AD, BE ハ相交ル。ソノ交點ヲOトシ, AO ノ中點GトBOノ中點Hトヲ結ビ,又G, E; E, D; D, H ヲ結ベバ,DEGH ハ平行四邊形トナル。

(2) 對角線 HE, DG ハドンナ點デ交ルカ。

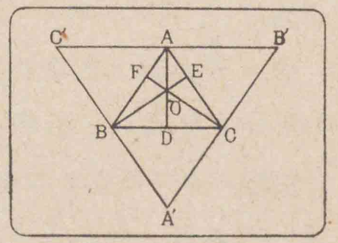
(3) AO$=\frac{2}{3}$AD,　BO$=\frac{2}{3}$BE

(4) AD トCFトハドコデ交ルカ。

注意　コノ點Oヲ三角形ノ重心トイフ.

定理 **27.** 三角形ノ各頂點カラソノ對邊ヘ引イタ三ツノ垂線ハ,同一ノ點ヲ通ル。

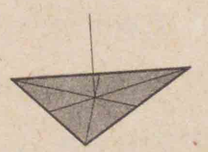
証明　省略スル。(圖ノヤウニ各頂點ヲ通ッテソノ對邊ニ平行線ヲ引イテ出來ル△A′B′C′ニ定理25ヲ用ヒテ證セヨ)



注意　コノ交點Oヲ三角形ノ垂心トイフ。

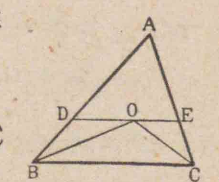
問題

1. 厚紙ニ三角形ヲ書キ,ソノ重心ノ位置ヲ求メ,次ニコノ三角形ヲ切リ離シテ重心ノ位置ニ糸ヲ通シテ吊シテ見ヨ



2. 三角形ノ內心,外心,垂心ノ三點ガ一致スル三角形ハドンナ三角形カ。

3. 三角形ノ內心及ビ外心ハ常ニ三角形ノ內部ニアルカ否カヲ言ヘ。直角三角形ノ外心ハドコニアルカ。



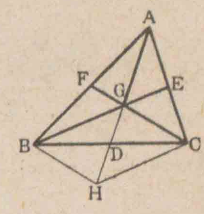
4. 三角形ABCノ內心Oヲ通リBCニ平行ニ引イタ直線ガAB, ACト交ル點ヲ夫々D, Eトスレバ, DE=BD+CE

5. 三角形ノ二邊ノウチ,小サイ邊ヘノ中線ハ大キイ邊ヘノ中線ヨリ大キイ。(60頁,問題3利用)

雜題

1.* 梯形ノ底デナイ一邊ノ中點ヲ通ッテ底ニ平行デアル直線ハ對邊ノ中點ヲ通ル。又コノ兩中點間ノ距離ハ兩底ノ和ノ半分ニ等シイ。

2. 三角形ノ三中線ガ一點デ交ルコトヲ圖ノヤウニシテ證明セヨ。圖ハ中線BE, CFノ交點ヲGトシ, A, Gヲ結ビ,コレヲ延長シテ邊BCトDデ交ラシメ,更ニ延長シテGHヲAGニ等シクトリB, H; H, Cヲ結ンダノデアル。



3. 前問ノ圖ニ於テ△BGHノ各邊ハ夫々△ABCノ三中線ノ$\frac{2}{3}$ニ等シイ。

4.* 二等邊三角形ノ底邊(又ハソノ延長)上ノ一點カラ他ノ二邊ニ下シタ垂線ノ和(又ハ差)ハ,底ノ一端カラ對邊ニ下シタ垂線ニ等シイ。

5. 正三角形內ノ一點カラ各邊ニ引イタ三ツノ垂線ハコノ三角形ノ一ツノ垂線ニ等シイ。(ソノ點ヲ通リ一邊ニ平行ナ直線ヲ引イテ前問ニ歸セヨ)

第三篇

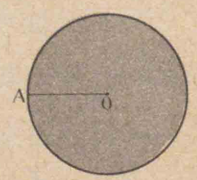
圓

第一章　圓ノ基本性質

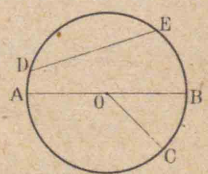
32. 圓

問　圓ト看做シ得ルモノノ實例ヲ擧ゲヨ。

線分OAノ一端Oヲ固定シ,コレヲ平面上デ一廻轉サセタトキ,他ノ端Aガ畫ク曲線ヲ**圓周**トイヒ,線分OAガ通ル平面ノ部分ヲ**圓**トイフ。



コノトキOヲ**中心**トイヒ,圓周上ノ一點ト中心トヲ結ブ線分ヲ**半徑**,圓周上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ**弦**,中心ヲ通ル弦ヲ**直徑**トイフ。



右圖デOA, OB, OCハ半徑,DEハ弦,ABハ直徑デアル。

中心Oナル圓ヲ表ハスニ**圓O**ト書ク。

圓ノ定義カラ直チニ次ノコトガワカル。

[1]　同ジ圓ノ半徑ハ皆相等シイ。從ツテ直徑モ亦

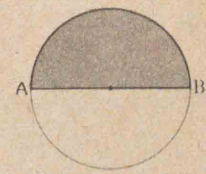
相等シイ。

[2]　半徑ガ相等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

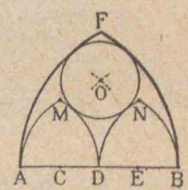
[3]　合同デアル二ツノ圓ノ半徑ハ相等シイ。

[4]　直徑ハ圓及ビ圓周ヲ2等分スル。

直徑デ分タレタ圓及ビ圓周ノ各部ヲ夫々**半圓**及ビ**半圓周**トイフ。



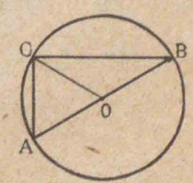
問題



1.　右ノ圖ヲ畫イテ見ヨ。

2.　矩形ノ四ツノ頂點ハ對角線ノ交點ヲ中心トスル一ツノ圓周上ニアル。

3.　圓ノ一ツノ弦ノ兩端ヲ中心ニ結ベバ,二等邊三角形トナル。



4.　直徑ノ兩端ヲ圓周上ノ一點ニ結ベバ直角三角形トナル。(圓周上ノ點ト中心トヲ結ビ,前問ヲ利用セヨ)

33. 圓ト直線トノ位置ノ關係

定理 28. 圓ノ中心カラ直線マデノ距離ガ,

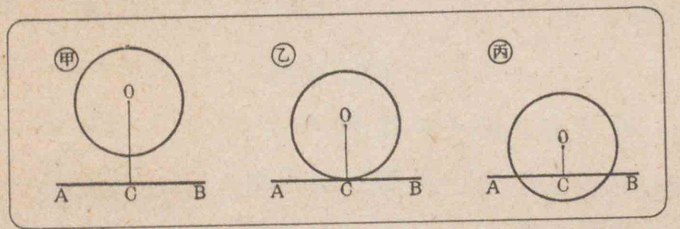
[1]　半徑ヨリ大デアレバ,圓ト直線トハ共有點ヲモ

タナイ。(甲圖)

[2] 半徑ニ等シケレバ,圓周ト直線トハ唯一點ヲ共有スル。(乙圖)

[3] 半徑ヨリ小デアレバ,圓周ト直線トハ二點ヲ共有スル

證明 省略スル。(定理16系ヲ用ヒヨ)



圓ト直線トガ唯一點ヲ共有スルトキハ,コノ圓ト直線トハ相**切スル**トイヒ,コノ直線ヲ圓ノ**切線**,ソノ共有點ヲ**切點**トイフ。

乙圖デABハ圓Oノ切線デ,Cハソノ切點デアル。

圓ト直線トガ二點ヲ共有スルトキハ,コノ圓ト直線トハ相**交ル**トイヒ,コノ直線ヲ圓ノ**割線**トイフ。

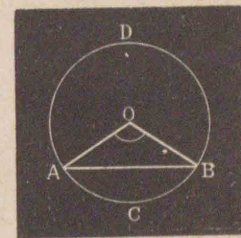
丙圖デABハ圓Oノ割線デアル。

問 圓ノ切線又ハ割線ト看做シ得ルモノノ實例ヲ擧ゲヨ。

第二章 弧,弦及ビ中心角

34. 弧·中心角

圓周ノ一部分ヲ**弧**トイフ。



弧ヲ表ハスニハソノ兩端ノ文字ヲ用ヒ,弧 **AB** 又ハ $\overset{\frown}{AB}$ ト書キ,或ハ更ニ弧ノ上ニ一點Cヲトリ,弧 **ACB** 又ハ $\overset{\frown}{ACB}$ ナドト書ク。

圓ノ一ツノ弧トソノ殘リノ弧トハ互ニ**共軛**デアルトイフ。ソノウチ大キイ方ヲ**優弧**,小サイ方ヲ**劣弧**トイフ。

上圖デ $\overset{\frown}{ACB}$ ハ劣弧デ, $\overset{\frown}{ADB}$ ハ優弧デアル。

弧ノ兩端ヲ中心ニ結ブ二ツノ半徑ガナス角ヲ,コノ弧ノ上ニ立ツ**中心角**トイフ。

前圖デ劣角AOBハ劣弧ACBノ上ニ立ツ中心角デ,優角AOBハ優弧ADBノ上ニ立ツ中心角デアル。

注意 單ニ弧AB トイヘバ劣弧AB ノコトデ,中心角AOB トイヘバ,劣弧AB ニ對スル中心角ノコトデアル。

弧ノ兩端ヲ結ブ**弦**ヲコノ弧ヲ張ル弦トイフ。

前圖デ弦AB ハ共軛弧 ACB, ADB ノ各々ヲ張ル弦

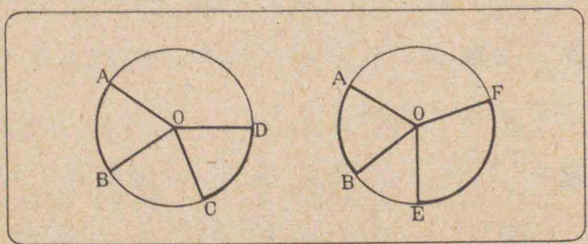
デアル。

一ツノ弧トコレヲ張ル弦及ビコノ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ夫々互ニ相對スルトイフ。

35. 弧ト中心角及ビ弦トノ關係

定理 29. 同ジ圓(又ハ等圓)ニ於テ,相等シイ弧ニ對スル中心角ハ相等シク,大キイ弧ニ對スル中心角ハ小サイ弧ニ對スル中心角ヨリ大キイ。

コノ逆モ亦眞デアル。

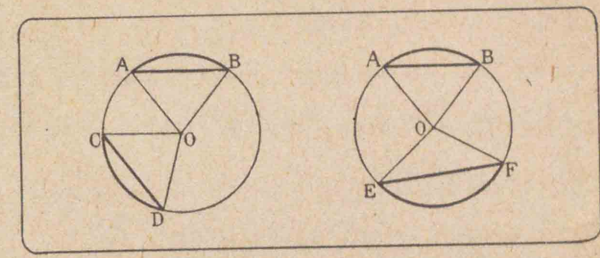


証明　省略スル。(重置法ニヨツテ證明セヨ)

定理 30. 同ジ圓(又ハ等圓)ニ於テ,弧ガ等シケレバコレヲ張ル弦ハ相等シク,大キイ劣弧ヲ張ル弦ハ小サイ劣弧ヲ張ル弦ヨリ大キイ。

コノ逆モ亦眞デアル。

証明　省略スル。(弧ノ兩端ヲ夫々中心ニ結ンデ出來ル二ツノ三角形ニ定理29及ビ定理 9, 18ヲ用ヒテ本定



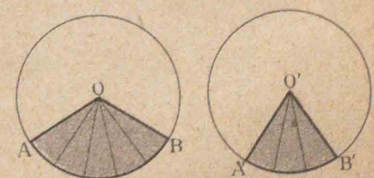
理ヲ證明シ,逆定理ノ證明ニハ定理11,19及ビ定理29ヲ用ヒヨ)

問題

1. 任意ノ圓ヲ畫キ,中心角ヲ20°, 40°, 60°, 80°,100°ニ作リ,ソノ各〻ノ中心角ニ對スル弧ノ長サヲ測リ(ドウスレバヨイカ),中心角ノ大イサト弧ノ長サトガ比例スルカ否カヲ確メヨ。

注意　同ジ圓(又ハ等圓)ニ於テ二ツノ中心角ノ比ハソレニ對スル弧ノ比ニ等シイ。即チ弧ト中心角トハ比例スル。

今右圖デO,O′ヲ等圓トスレバ $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}$ デアル。



証明　$\angle AOB, \angle A'O'B'$ ノ大イサヲ度ヲ單位トシテ表ハシタトキ,ソノ數ノ間ニ公約數 m° ガアルトスル。

今, m° デ各角ヲ割ツテ得タ數ヲ夫々 r, s トスレバ,

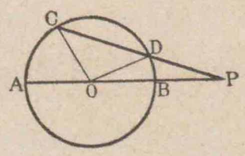
$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{r}{s}$$

ヨッテ ∠AOB, ∠A'O'B' ヲ夫々 r 等分, s 等分スル半徑ヲ引ケバ, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ モ亦 r 等分, s 等分セラレ,且ツソレ等ノ弧ハ皆相等シイ。

故ニ $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}=\dfrac{r}{s}$ $\therefore$ $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}$

∠AOB, ∠A'O'B' ヲ表ハス度數ノ間ニ公約數ガナイトキノ證明ハ複雜デアルカラ省略スル。

2. 任意ノ圓ヲ畫キ, 10°, 20°, 30°, 60° ノ中心角ヲ作リ, 夫々コレニ對スル弦ヲ引イテソノ長サヲ測リ,中心角ノ大イサトソレニ對スル弦ノ長サトガ正例スルカ否カヲ確メヨ。

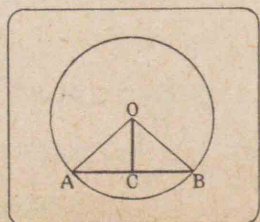


3. 直徑ハ最大ノ弦デアル。

4. 右圖デ P ヲ圓 O ノ直徑 AB ト弦 CD トノ交點トスレバ, AP>CP, PB<PD

36. 弦ノ垂直二等分線

定理 31. 圓ノ中心カラ弦ヘ引イタ垂線ハソノ弦ヲ2等分スル。



証明 省略スル。(定理13系ヲ用ヒテ證セヨ)

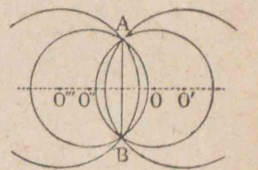
系 1. 弦ヲ垂直ニ2等分スル直線ハ圓ノ中心ヲ通リ,且ツ弦ガ張ル二ツノ共軛弧ノ各々ヲ2等分スル。

系 2. 圓ノ中心ト弦(直徑ヲ除ク)ノ中點トヲ結ブ直線ハ,ソノ弦ヲ垂直ニ2等分スル。

問題

1. 圓ノ平行ナ二ツノ弦ノ中點ヲ結ブ直線ハソノ圓ノ中心ヲ通ル。

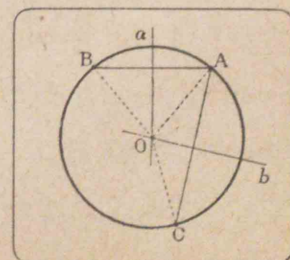
2*. 二定點ヲ通ルスベテノ圓ノ中心ハ,コノ二定點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ2等分スル直線上ニアル。



3. 圓ノ二ツノ弦(直徑ヲ除ク)ハ互ニ他ヲ2等分スルコトハ出來ナイ。(定理31系2ヲ用ヒヨ)

定理 32. 同一直線上ニナイ三點ヲ通ル圓ハ常ニ唯一ツアル。

証明 A, B, C ヲ同一直線上ニナイ三點トスル。線分 AB ヲ垂直ニ2等分スル直線 a ト,線分 AC ヲ垂直ニ2等分スル直線 b トハ相交ル



(38頁,問題4) ソノ交點ヲOトスル。 Oハ直線 a 上ニアルカラ二點A, Bカラ等距離ニアル(定理9系1)。又Oハ直線 b 上ニアルカラ二點A, Cカラ等距離ニアル。故ニOハ三點A, B, Cカラ等距離ニアル。

ヨッテOヲ中心トシ, OAヲ半徑トスル圓ハ必ズ三點A, B, Cヲ通ル。故ニA, B, Cヲ通ル圓周ハ必ズアル。

次ニ三點A, B, Cヲ通ル圓ノ中心ハ弦ABノ垂直二等分線 a 上ニアルト同時ニ,弦ACノ垂直二等分線 b 上ニモナケレバナラヌ(定理31系1)。然ルニ二直線 a, b ハ唯一點Oヲ共有スルダケデアルカラ,三點A, B, Cヲ通ル圓ノ中心ハOヨリ外ニナイ。ソシテ半徑ハOAニ等シクナケレバナラナイ。

故ニA, B, Cヲ通ル圓ハ,常ニ唯一ツアル。

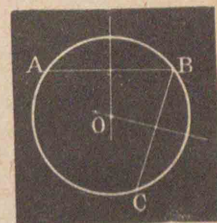
注意 三點ヲ通ル圓ハ唯一ツデアルカラ圓ヲ呼ブニハ,ソノ周上ノ三點,例ヘバA, B, Cヲトッテ圓ABCトイフコトガアル。

三角形ノ三ツノ頂點ヲ通ル圓ヲコノ三角形ノ**外接圓**トイフ。

三角形ノ外心ハソノ三角形ノ外接圓ノ中心デアル。(74頁,定理25)

系 二ツノ圓周ガ三點ヲ共有スレバ,ソノ兩圓周ハ全ク重リ合ッテキル。

作圖題 8. 與ヘラレタ圓ノ中心ヲ求メルコト。



作圖 圓ABCガ與ヘラレタトスル。先ヅ任意ノ弦AB, BCヲ引キ,コノ二弦ノ垂直二等分線ヲ作リ,ソノ交點ヲOトスル。 Oハ求メル中心デアル。

問題

1. 與ヘラレタ點ヲ通リ,與ヘラレタ半徑デ與ヘラレタ直線上ニ中心ヲ持ツ圓ヲ書ケ。

2*. 點Aカラ圓周上ノ三點P, Q, Rニ至ル距離AP, AQ, ARガ皆相等シケレバ,AハソノΠ圓ノ中心デアル。

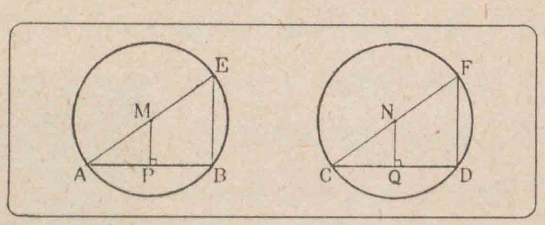
37. 弦ト中心トノ距離

定理 33. 同ジ圓(又ハ等圓)ニ於テ,相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル。ソシテ大キイ弦ハ小サイ弦ヨリ中心ニ近イ。

圓M及ビNハ相等シイ圓デ, AB, CDハソノ弦,又MP, NQハ中心カラコレニ下シタ垂線トスル。

[1] AB=CD ナラバ, MP=NQ

[2] AB>CD ナラバ, MP<NQ



証明 直徑 AE, CF ヲ作リ弦 BE, DF ヲ引ク。△ABE ニ於テ, P ハ AB ノ中點(定理31), M ハ AE ノ中點デアル。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ヨツテ} & MP=\frac{1}{2}BE \\ \text{同樣ニ} & NQ=\frac{1}{2}DF\end{array}\right\}\cdots\cdots(1)\quad(\text{定理}23)$$

[1] AB=CD ナラバ, 劣弧AB=劣弧CD (定理30)

又半圓周 ABE, CDF ハ相等シイカラ,コレカラ劣弧AB, CD ヲ夫々取リ去レバ

劣弧BE=劣弧DF ∴ 弦BE=弦DF (定理30)

∴ MP=NQ [(1)ニヨル]

[2] AB>CD ナラバ, 劣弧AB>劣弧CD (定理30)

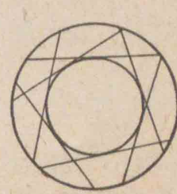
∴ 劣弧BE<劣弧DF ∴ 弦BE<弦DF (定理30)

∴ MP<NQ

系 1. 同ジ圓(又ハ等圓)デ,中心カラ等距離ニアル弦

ハ相等シイ。ソシテ中心ニ近イ距離ニアル弦ハ中心ニ遠イ距離ニアル弦ヨリ大キイ。

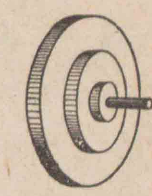
系 2. 圓ノ數多ノ弦ノ長サガ皆相等シイトキ,コレ等ノ弦ハコノ圓ノ中心ヲ中心トスル一ツノ圓ニ切スル。



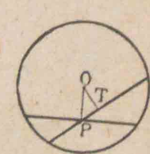
二ツ以上ノ圓ガ同一ノ中心ヲモツトキ,コレ等ノ圓ヲ同心圓トイフ。

問題

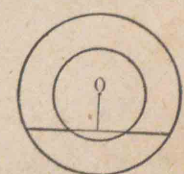
1. 次ノ圖ハ調革ヲ掛ケル車ノ一方ヲ示シタモノデアル。コレニハ幾組ノ同心圓ガアルカ。



2. 圓O内ノ點Pヲ通ル弦ノ中デ最大及ビ最小デアルモノハ何カ。(OPヲ結ビ,Pヲ通ル任意ノ弦ニ中心Oカラ垂線ヲ下シテ見ヨ)



3. 一直線ガ二ツノ同心圓ノ各〻ト交ルトキ,コノ二圓周ノ間ニ夾マレル二ツノ線分ハ相等シイ。

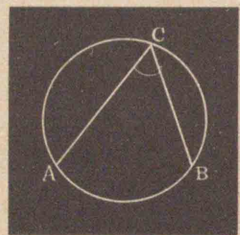


第三章　圓周角·弓形

38. 圓周角·弓形

圓周上ノ一點カラ引イタ二ツノ弦ノ夾ム角ヲ**圓周角**トイフ。

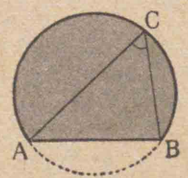
圓周角ハソノ内部ニアル弧ノ上ニ立ツトイヒ,コノ弧ト圓周角トハ互ニ相對スルトイフ。



右圖デ∠ACBハ弧ABノ上ニ立ツ圓周角デアル。

圓ノ弦ハ圓ヲ二ツノ部分ニ分ツ。ソノ各〻ヲ**弓形**トイヒ,弦ヲ**弓形ノ弦**トイフ。

右圖デ影ヲツケタ部分ハ弓形デABハソノ弦デアル。



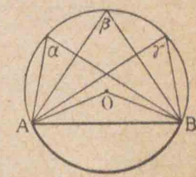
弓形ノ弧ノ上ノ一點ヲソノ弦ノ兩端ニ結ビツケタ二ツノ弦ノナス角ヲ弓形ノ角又ハ弓形ガ含ム角トイフ。

圖デ∠ACBハ弓形ACBノ角デアル。

[注意]　弓形ノ角ハソノ弓形ノ弧ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角デアル。

39. 中心角ト圓周角トノ關係

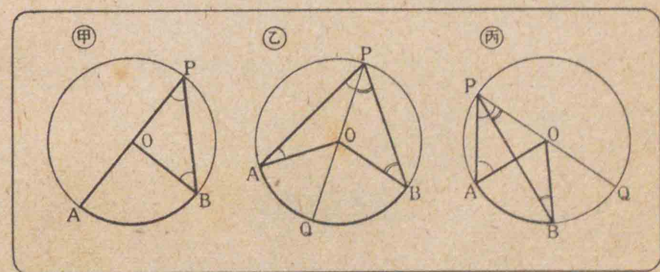
[觀察]　弧ABノ上ニ立ツ圓周角α, β, γ, …ヲ畫キ,各〻ヲ分度器デ測ツテ見ヨ。皆相等シイカ。次ニ中心角AOBヲ測ツテ見ヨ。圓周角ノ何倍カ。



[定理]34. 圓周角ハコレニ對スル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シイ

[假設]　圓Oニ於テ,弧ABノ上ニ立ツ圓周角ヲAPB,中心角ヲAOBトスル。

[終結]　$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$



[證明]　[1]　中心Oガ圓周角ノ一邊,例ヘバPA上ニアル場合。(甲圖)

∠AOBハ二等邊三角形OBPノ外角デアル。

$$\therefore \quad \angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

[2]　中心Oガ圓周角ノ内部ニアル場合。(乙圖)

Pヲ通ル直徑POQヲ作レバ

$$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ,\quad \angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$$

$$\therefore\quad \angle APQ+\angle BPQ=\frac{1}{2}(\angle AOQ+\angle BOQ)$$ ([1]ノ場合)

即チ $$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$$

[3] Oガ圓周角ノ外部ニアル場合。(丙圖)

([2]ノ證明ニ倣ツテ∠APQ〜∠BPQヲ作ツテ見ヨ)

系 1. 同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ皆相等シイ。從ツテ同ジ弓形ガ含ムスベテノ角ハ相等シイ。

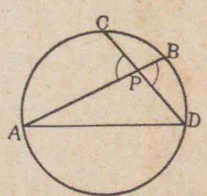
系 2. 同ジ圓(又ハ等圓)デ,相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ皆相等シイ。コノ逆モ亦眞デアル。

系 3. 直徑ノ上ニ立ツ圓周角(即チ半圓ガ含ム角)ハ直角デアル。コノ逆モ亦眞デアル。

問題

1. 圓周ノ$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ニ等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ノ大イサハ各〻幾度カ。

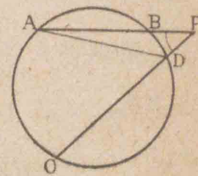
2.* 圓ノ二弦AB, CDガPデ交レバ,△APC, △DPBハ等角デアル。



3.* 圓ノ二弦AB, CDガ圓內ノ點Pデ交ツテナス角APCハ,コノ

角トソノ對頂角ノ內部ニアル弧ノ各〻ノ上ニ立ツ圓周角ノ和ニ等シイ。

4.* 前題デ二弦AB,CDガ圓外ノ點Pデ交ルトキハ,角APCハコノ角ノ內部ニアル二ツノ弧ノ各〻ノ上ニ立ツ圓周角ノ差ニ等シイ。

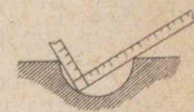


5. AB,CDハ一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル直徑デアル。劣弧BC上ニ一點Pヲトルトキハ,

$$\angle APB=2\angle APC$$

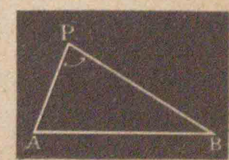
6.* 三角形ABCノ邊BCハ固定シ,頂點Aガソノ外接圓ノ弧BACノ上ヲ動クトキ,角Aノ二等分線ハ圓周上ノ一定點ヲ通ル。

7 大工ハ半圓ガ正シイカ否カヲ調ベルノニ曲尺ヲ圖ノヤウニ當テテ見ル。ソノ理由ヲ説明セヨ。



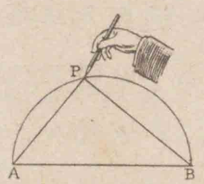
40. 弦ヲ見込ム角ノ大小

一點ト線分ノ兩端トヲ結ブ二線分ガ夾ム角ヲ,コノ點デソノ線分ヲ見込ム角トイフ。



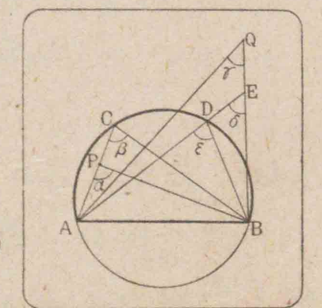
前圖デ$\angle P$ハ點PデAB線分ヲ見込ム角デアル。

観察　圖ノヤウニ線分ABヲ弦トスル弓形ヲ書キ,A,Bノ間ニごむ絲ヲ張リ,鉛筆ノ先デごむ絲ヲカケテ弧ニ沿ウテ動カストキ$\angle APB$ノ大イサハ變化スルカ。又鉛筆ヲ弓形外ニ出シタトキト,弓形内ニ入レタトキハ如何ニ變ルカヲ見ヨ。



定理 35. 弓形内ノ一點デ,ソノ弦ヲ見込ム角ハ,弓形ノ角ヨリ大キイ。又弓形外ニアツテ弦ニ對シテ弓形ト同ジ側ニアル點デ,ソノ弦ヲ見込ム角ハ弓形ノ角ヨリ小サイ。

証明　ABヲ弓形ノ弦,Pヲソノ弓形内ノ點トシ,Qヲソノ弓形外ニアツテ直線ABニ對シテ弓形ト同ジ側ニアルモノトスル。



$\angle APB$ノ一邊APヲAPノ方向へ延長シ,弓形ノ弧トCデ交ラシメ,C,Bヲ結ベバ,圖ニ於テ　$\angle \alpha > \angle \beta$　(定理8)

故ニ$\angle \alpha$ハ弓形ACBノ角ヨリ大キイ。

次ニ$\angle AQB$ノ二邊ノ間ニ夾マレル弓形ノ弧ノ上

ニ,ソノ弧ノ兩端デナイ任意ノ點Dヲトリ,A,Dヲ結ビ,コレヲ延長シテBQトEデ交ラシメ,又B,Dヲ結ベバ,圖ニ於テ

$\angle \gamma < \angle \delta$,　$\angle \delta < \angle \varepsilon$（イプシロン）　(定理8)

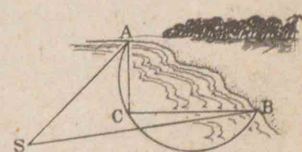
$\therefore$　$\angle \gamma < \angle \varepsilon$　又　$\angle \varepsilon = \angle \beta$　(定理34系1)

故ニ$\angle \gamma$ハ弓形ACBノ角ヨリ小サイ。

系　同一ノ底邊上ニ,ソノ同ジ側ニ相等シイ頂角ヲモツ若干ノ三角形ヲ作ルトキハ,ソノ一ツノ三角形ノ外接圓ノ周ハ,又ソノ他ノスベテノ三角形ノ頂點ヲ通ル。

問題

右圖デ,圓内ハ海岸AB附近ヲ通過スル船ガ避クベキ暗礁地帶ヲ示シ,圓外ハ安全デアルトスル。船SハABヲ見込ム角ガ$\angle ACB$ヨリ小サイ間ハ安全ナルコトヲ説明セヨ。

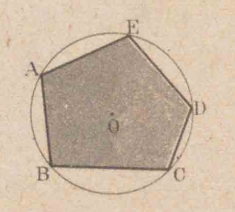


41. 内接四邊形

多角形ノ頂點ガ悉ク同一圓周上ニアルトキハ,コノ多角形ヲ圓ノ**内接多角形**,圓ヲ

多角形ノ**外接圓**トイフ。

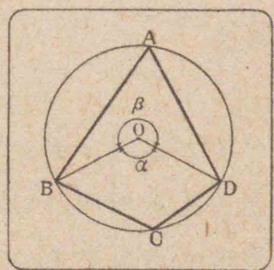
コノトキ多角形ハ圓ニ**內接スル**トイヒ,圓ハ多角形ニ**外接スル**トイフ。



右圖デ, ABCDE ハ圓Oノ內接五角形デ,圓Oハソノ外接圓デアル。

三ツヨリ多クノ點ガ皆同一圓周上ニアルトキ,コレ等ノ點ヲ**共圓點**トイフ。

定理 36. **圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。**



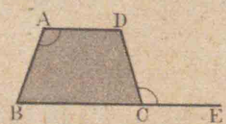
假設　ABCD ヲ圓Oニ內接スル四邊形トスル。

終結　$\angle A+\angle C=2\angle R$,
$\angle B+\angle D=2\angle R$

證明　省略スル。

(圖デ $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle\alpha$, $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle\beta$ ナルコトニ注意セヨ)

四邊形ノ一ツノ外角ニ隣ル內角ニ對スル角ヲ,ソノ外角ノ**內對角**トイフ。

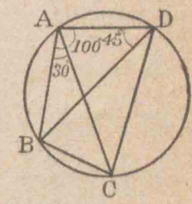


右圖デ $\angle A$ ハ外角DCEノ內對角デアル。

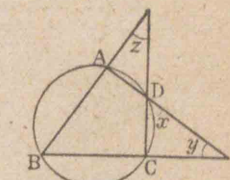
系　圓ニ內接スル四邊形ノ外角ハソノ內對角ニ等シイ。

問題

1. ABCD ハ圓ニ內接スル四邊形デ $\angle A$ ハ $80°$ デアル。$\angle C$ ト $\angle B+\angle D$ トヲ求メヨ。



2. 右圖デ $\angle BAD=100°$, $\angle BAC=30°$, $\angle ADB=45°$ トスレバ,四邊形ABCDノ他ノ三ツノ角ノ大イサハ夫々何度カ。



3. 右圖デ $y=45°$, $z=35°$ トスレバ x ハ何度カ。又 $y+z=90°$ ナラバ $x=45°$ ナルコトヲ證セヨ。

4. 圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形デアル。又圓ニ內接スル梯形ハ二等邊梯形デアル。

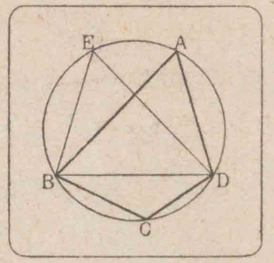
定理 37. **四邊形ノ對角ガ互ニ補角ヲナセバ,コノ四邊形ハ圓ニ內接スル。**

證明　四邊形ABCDニ於テ, $\angle A+\angle C=2\angle R$ トスル。B, D ヲ結ンデ△BCDノ外接圓ヲ書キ,弧BCDノ共軛弧上ニ任意ノ點Eヲトルト,四邊形EBCDハ圓ニ內接スルカラ

$\angle E+\angle C=2\angle R$　　(定理36)

然ルニ　$\angle A+\angle C=2\angle R$　　(假設)

∴　$\angle A = \angle E$



且ツ點AハBDニ對シテEト同ジ側ニアル。

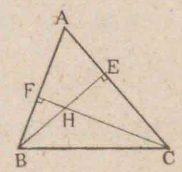
故ニ△BCDノ外接圓ハ點Aヲ通ル(定理35系)。

即チABCDハ圓Oニ内接スル。

系　四邊形ノ外角ガソノ内對角ニ等シケレバ,コノ四邊形ハ圓ニ内接スル。

問題

1. 三角形ABCノ二頂點B, Cカラ,夫々ソノ對邊へ垂線BE, CFヲ引キ,ソノ二ツノ垂線(又ハソノ延長)ノ交點ヲHトスレバ,

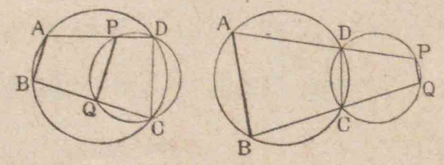


(1)　A, F, H, Eハ共圓點デアル

(2)　B, C, E, Fハ共圓點デアル。

2. 前問デ線分EFノ垂直二等分線ハBCノ中點ヲ通ル。

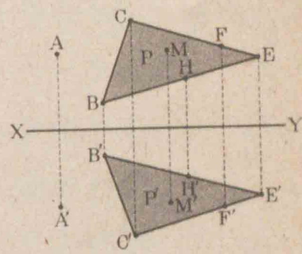
3. 四邊形ABCDガ圓ニ内接スルトキ, AD, BC(又ハソノ延長)ガD, Cヲ通ル圓ト夫々P, Qデ交ルトキハ, PQハABニ平行デアル。



42. 對稱圖形

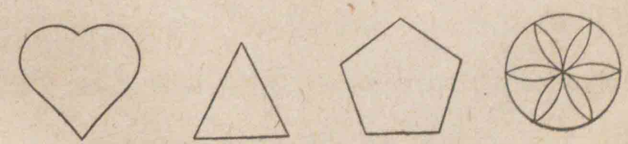
直線XYガ二點A, A′ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ2等分スルトキ,二點A, A′ハ直線XYニ關シテ對稱デアルトイヒ, XYヲ對稱ノ軸トイフ。

二ツノ圖形P, P′ガアッテ,直線XYニ關シテP上ノスベテノ點ノ對稱點ガP′上ニアリ,且ツP′上ノスベテノ點ノ對稱點ガP上ニアルトキ,圖形P, P′ハ軸XYニ關シテ對稱デアルトイフ。

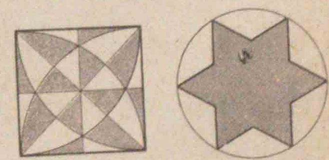


問題

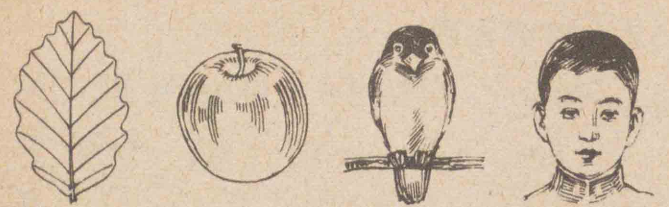
1. 次ノ各圖形ノ對稱ノ軸ヲ書キ入レヨ。



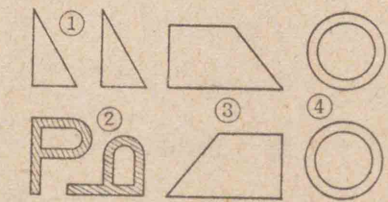
2. 右ノ二ツノ圖形ノ對稱軸ハ夫々何本アルカ。



3. 自然界デハ一平面ニ關シテ對稱トナッテヰルモノヲ左右相稱トイフ。次圖ノ外ニ左右相稱ヲナスモノノ例ヲ擧ゲヨ。



4. 右圖ハドウ移動シタラ對稱圖形ニナルカ。各、一方ノ圖形ヲ移動シテ對稱圖形トナシ,ソノ對稱ノ軸ヲ記入セヨ。



5. 圓ハ直徑ニ關シテ對稱ナルコトヲ說明セヨ。

6. 三角形ABCノ∠Aニ隣ル外角ノ二等分線g上ニアル任意ノ點PヲB,Cニ結ンデ出來ル三角形ノ周ハ△ABCノ周ヨリ大キイ。(gニ關シCノ對稱點ヲ用ヒヨ)

7. 直線XYノ同ジ側ニ二點A,Bガアル。XY上ニ一點Pヲ求メ,AP+BPヲ最小ニセヨ。

8. 底邊ト高サトガ與ヘラレタ三角形ノウチ二等邊三角形ハ周ガ最小デアル。

第四章 二ツノ圓

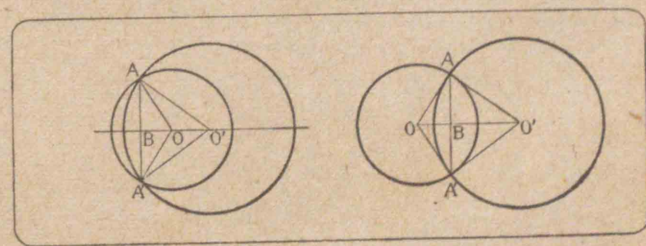
43. 二ツノ圓ノ位置ノ關係

二圓ノ中心ヲ結ブ直線ヲ二圓ノ**中心線**トイヒ,兩中心間ノ距離ヲ**中心線ノ長サ**トイフ。

定理 38. 二ツノ圓周ガソノ中心線上ニナイ一點ヲ共有スルトキハ,コノ二ツノ圓周ハ又他ノ一點ヲ共有スル。ソシテソノ二點ヲ結ブ線分ハ,中心線ニヨツテ垂直ニ2等分セラレル。

證明 二ツノ圓ノ中心ヲ夫々O,O'トシ,Aヲ中心線上ニナイ二圓周ノ共有點トスル。今中心線OO'ニ關スル點Aノ對稱點ヲA'トスレバ

$$OA=OA', \quad O'A=O'A' \qquad (\text{定理9系1})$$



ソシテOA, O'Aハ夫々圓O,O'ノ半徑デアルカラ,OA', O'A'モ亦夫々圓O,O'ノ半徑デアル。故ニA'ハ

又二圓O, O'ノ周ノ共有點デアル。

次ニ中心線OO'ハ二點A, A'ノ對稱ノ軸デアルカラ明ラカニAA'ヲ垂直ニ2等分スル。

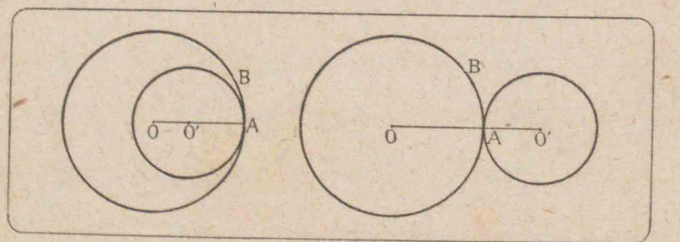
系 二ツノ圓周ガ二點A, Bヲ共有スルトキハ,ABノ垂直二等分線ハ兩圓ノ中心線デアル。

二ツノ圓周ガ二點ヲ共有スルトキハ,コノ二ツノ圓周(又ハ圓)ハ**相交ル**トイフ。

定理 39. 相合シテヰナイ二ツノ圓周ガ,ソノ中心線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,コノ二ツノ圓周ハソノ他ノ點ヲ共有シナイ。

證明 二ツノ圓O, O'ノ周ガソノ中心線上ノ一點Aヲ共有スルトスル。

今假ニAノ外ニ共有點ガアルトシ,モシソレガ中心線OO'上ノ點デアレバ,二ツノ圓ハ同ジ直徑ヲ有スル圓デ相合スル。コレハ假設ニ反スル。



又モシソレガ中心線OO'上ニナイ點Bデアルトスレバ,ABノ垂直二等分線モ亦中心線トナル(前定

理系)。コレハ不合理デアル。

故ニコノ二圓周ハA以外ノ點ヲ共有スルコトハナイ。

二ツノ圓周ガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキ,コノ二圓周(又ハ圓)ハ**相切スル**トイヒ,ソノ共有點ヲ**切點**トイフ。

コノ場合ニ前頁左圖ノヤウナノヲ**內切**スルトイヒ,右圖ノヤウナノヲ**外切**スルトイフ。

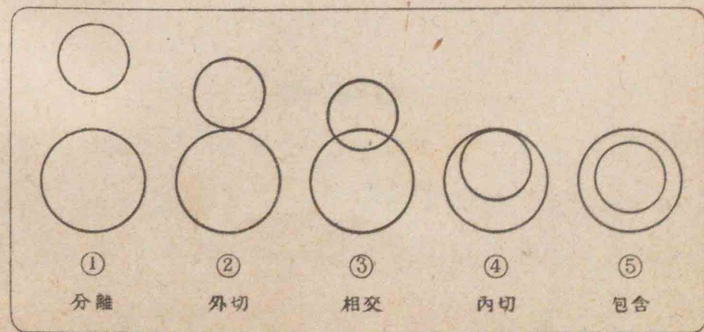
系 二ツノ圓ガ相切スルトキハ,ソノ切點ハコレ等ノ圓ノ中心線上ニアル。(歸謬法ニヨレ)

定理 40. 二圓ノ半徑ヲ夫々r, r' $(r>r')$トシ,ソノ中心間ノ距離ヲdトスルトキ,

[1] 各ノ圓ガ全ク他ノ外ニアレバ $d>r+r'$

[2] 外切スレバ, $d=r+r'$

[3] 相交レバ, $r+r'>d>r-r'$



[4] 内切スレバ, $d=r-r'$

[5] 一圓ガ全ク他ノ圓ノ内ニアレバ, $d<r-r'$

証明 省略スル。

二ツノ圓ノ位置ノ關係ハ上ノ五ツノ場合デ盡キル。ソシテ常ニソノウチノ唯一ツノミガ成立スル。

系 上ノ定理ノ逆モ亦眞デアル。(轉換法ニヨレ)

問題

1. 三ツノ圓ガ二ツヅツ互ニ外切シ,ソノ中心線ガ正三角形ヲナシ,ソノ邊ノ長サハ 6cm デアル。各ノ圓ノ半徑ヲ求メヨ。

2. 線分 AB 上ニ點 C ヲトッテ, AC, BC ヲ直徑トスル圓ヲ作レバ,コノ二圓ハ外切スル。

3. 相交ル二ツノ圓ノ交點ノ一ツヲ通ッテ各圓ノ直徑ヲ引ケバ,コレ等ノ直徑ノ他ノ端ヲ結ブ直線ハ他ノ交點ヲ通ル。

雜題

1. 圓ノ二ツノ弦ガ交ッテ作ル角ハソレ等ノ弦ノ中點ト圓ノ中心トヲ結ブ二ツノ直線ノナス角又ハソノ補角ニ等シイ。

2. AB ハ圓ノ定マッタ弦デ,CD ハコノ圓ノ任意ノ

直徑デ,CX 及ビ DY ハ AB ニ垂直デアルトキ,

① AB, CD ガ圓内デ交レバ,CX, DY ノ差ハ一定。

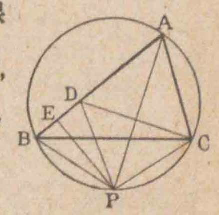
② 圓内デ交ラナケレバ,CX, DY ノ和ハ一定。

3. 二ツノ等圓ガ A, B デ交ルトキ,B ヲ通ル直線ガ兩圓ト更ニ交ル點ヲ P, Q トスレバ,三角形 APQ ハ二等邊三角形デアル。

4. 圓ノ互ニ平行ナ二ツノ弦ノ間ニ夾マレル二ツノ弧ハ相等シイ。

5. 圓ノ相等シイ二ツノ弧ヲ AB, CD トスレバ,弦 AC, BD ハ互ニ平行デアルカ,又ハ長サガ相等シイ。

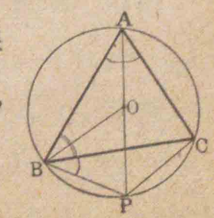
*6. 三角形 ABC ノ ∠A ノ二等分線ガ更ニ外接圓ト交ル點ヲ P トシ, P カラ AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ E トスレバ, $AB+AC=2AE$



*7. 三角形 ABC ノ ∠A ニ隣ル外角ノ二等分線ガ外接圓ト交ル點ヲ Q トシ,Q カラ AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ F トスレバ, $AB \sim AC=2AF$

8. 三角形 ABC ノ ∠A ノ二等分線ガ更ニ外接圓ト交ル點ヲ P トシ, 三角形ノ内心ヲ O トスレバ,

$PO=PB=PC$



第五章 作圖題

44. 作圖題

既ニ第 6 節(10頁)デ述ベタヤウニ,

與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ幾何學的ニ求メル問題ヲ**作圖題**トイヒ,ソレヲ畫クコトヲ**作圖**トイフ.

幾何學デハ次ノ二ツヲ可能ナモノトシテ,コレヲ幾度カ反覆應用シテ作圖ノ方法ヲ考究スル。

[1] **二定點ヲ通ル直線ヲ作ルコト,從ツテ線分ヲ延長スルコト。**

[2] **一定點ヲ中心トシテ,與ヘラレタ長サノ半徑ヲモツ圓ヲ畫クコト。**

直線ヲ畫クニハ定規ヲ用ヒ,圓ヲ畫クニハこんぱすヲ用ヒル。ソシテ定規ニハ目盛ガナイモノトノ定メデアル。

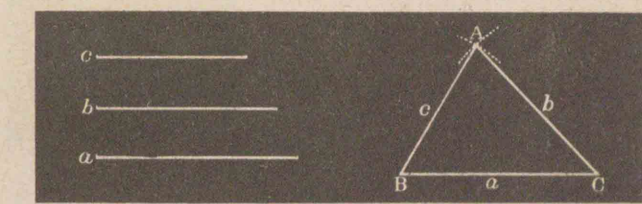
作圖題ヲ解クニハ作圖ノ方法ヲ示スト共ニ,ソノ作圖ノ正シイコトヲ證明シナケレバナラヌ。

作圖題 1(11頁)及ビ作圖題 7(36頁)ヲ幾何學的ニ取扱ヘバ次ノ通リデアル。

作圖題 1. 三邊(a, b, c)ガ與ヘラレタトキ,三角形ヲ畫

クコト。

作圖 線分 BC ヲ a ニ等シクトリ,C ヲ中心トシテ半徑 b ナル圓及ビ B ヲ中心トシテ半徑 c ナル圓ヲ畫キ,二ツノ圓ノ交點ノ一ツヲ A トスル。△ABC ハ求メルモノデアル。



証明 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ デアルカラ △ABC ハ條件ニ適スルモノノ一ツデアル。

注意 時トシテ與ヘラレタ條件ノ間ニ適當ナ關係ガナケレバ作圖ガ出來ナイコトガアル。

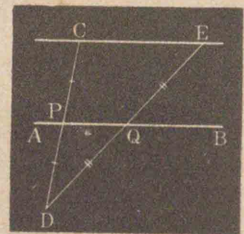
サテ本題デ B 及ビ C ヲ中心トシタ圓ガ交ラナイカ,又ハ直線 BC 上ノ一點デ切スレバ,作圖ハ出來ナイ。故ニ作圖ガ可能ナルタメニハ,B, C ヲ中心トシタ二ツノ圓ガ交ラナケレバナラナイ。コノ條件ヲ式デ表ハセバ,

$$b+c>a>b\sim c \qquad \text{(定理40)}$$

次ニ作圖ガ可能ナルトキ,B, C ヲ中心トシタ二ツノ圓ハ BC ニ關シテ A ノ對稱點デモ交ルカラ,ソノ點ト B, C トヲ結ンデモ亦條件ニ適スル三角形ガ出來ルガ,コレハ前ノ三角形ト合同デアル(定理11).

作圖題 7.　與ヘラレタ點(C)ヲ通ツテ與ヘラレタ直線 AB ニ平行線ヲ引クコト。

36頁ニ述ベタモノトハ異ナル方法ヲ揭ゲル。

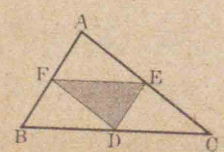


作圖　C ヲ通リ AB ト交ル任意ノ直線 CD ヲ引キ, AB トノ交點ヲ P トシ, CP ニ等シク PD ヲトル。次ニ D ヲ通リ AB ト點 Q デ交ル直線ヲ引キ, DQ ニ等シク QE ヲトル。C,E ヲ通ル直線ヲ作レバ,コレガ求メル直線トナル。

證明　作圖ニヨリ P,Q ハ △DCE ノ二邊 DC, DE ノ中點デアルカラ　CE ∥ AB　(定理23)

問題

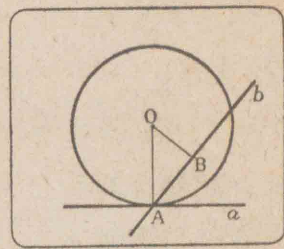
1. 前ニ述ベタ作圖題 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ノ作圖ガ正シイコトヲ證明セヨ。
2. 二邊ト夾角ガ與ヘラレタトキ,三角形ヲ作レ。
3. 二邊 (a, b) トソノ一邊 (a) ニ對スル角(A)ガ與ヘラレタトキ,三角形ヲ作レ。幾ツ出來ルカ,又三角形ガ出來ナイコトガアルカ。
4. 三角形ノ三邊ノ中點ノ位置ガ與ヘラレタトキ,三角形ヲ作レ。



第六章　圓ノ切線

45. 切線

定理 41.　圓ノ半徑ノ端ヲ通リ,コノ半徑ニ垂直デアル直線ハコノ圓ノ切線デ,コノ半徑ニ垂直デナイ直線ハコノ圓ノ割線デアル。



證明　省略スル。(定理16系,定理28[2],[3]ニヨツテ證セヨ)

系 1.　圓周上ノ一點デノ切線ハ唯一ツデアル。

系 2.　圓ノ切線トソノ切點ヲ通ル直徑トハ互ニ垂直デアル。

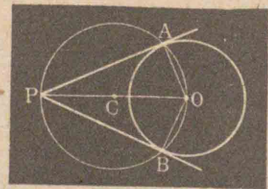
系 3.　圓ノ切線ノ切點ヲ通リ,コレニ垂直デアル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル。

系 4.　二ツノ圓ガ相切スルトキハ,コレ等ノ圓ハソノ切點デ一ツノ切線ヲ共有スル。

系 5.　同一直線上ノ同一ノ點デ,コノ直線ニ切スル二ツノ圓ハ相切スル。

作圖題 9.　定圓(O)外ノ一定點(P)ヲ通リ,コノ圓ニ切線ヲ引クコト。

作圖　O,P ヲ結ビ,コレヲ直徑トスル圓 C ヲ書キ,



コノ圓ト圓Oトノ交點ヲA及ビBトスル。二直線PA,PBハ求メル切線トナル。

証明　A,Bノ各ヽヲ中心Oニ結ベバ　∠OAP=∠R, ∠OBP=∠R　(半圓ノ含ム角)

故ニPA, PBハ何レモ圓Oノ切線デアル(定理41)。

定理42.　圓外ノ一點カラコノ圓ニ唯二ツノ切線ヲ引クコトガ出來ル。ソシテコノ點カラ兩切點ニ至ル距離ハ相等シイ。

証明　省略スル。

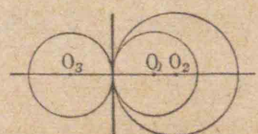
注意　コノ點カラ切點マデノ距離ヲソノ點ヨリノ切線ノ長サトイフ。

問題

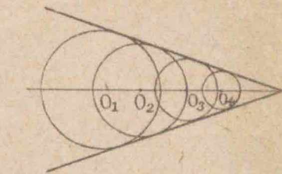
1.　三角形ABCノ二邊AB,ACト夫々B,C.ニ於テ切スル圓ヲ書クコトガ出來レバ,三角形ABCハ二等邊三角形デアル。

2.　圓ノ直徑ノ兩端ニ於テ引イタ切線ハ互ニ平行デアル。

3.*　直線上ノ一定點デコレニ切スル圓ノ中心ハ,スベテ一直線上ニアル。



4.*　定角ノ二邊ニ切スル任意ノ圓ノ中心ハ,コノ角ノ二等分線上ニアル。



5.*　圓Oノ周上ノ二點A,Bニ於テコノ圓ニ引イタ二ツノ切線ノ交點ヲPトスレバ,POハ弦ABヲ垂直ニ2等分スル。

6.　與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ直線ニ平行スル切線ヲ引ケ。

46.　切線ト弦トノナス角

定理43.　圓ノ弦トソノ一端ヲ通ル切線トノナス角ハ,ソノ角內ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シイ。

假設　ABヲ圓Oノ弦, ACヲAヲ通ル切線トシ, ∠ADBヲ $\overset{\frown}{AB}$ 上ニ立ツ圓周角トスル。

終結　∠BAC=∠ADB

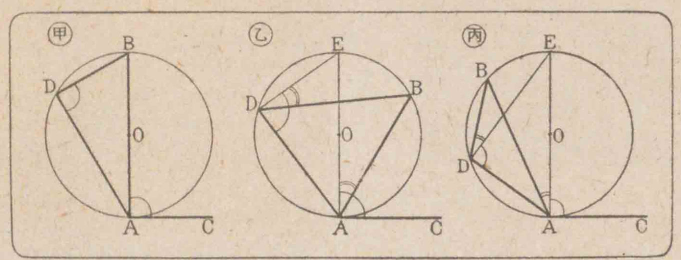
[1]　∠BACガ直角デアル場合。(甲圖)

コノ場合弦ABハ直徑デアル(定理41系3)。ソシテ直徑ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デアル(定理34系3)。

∴　∠BAC=∠ADB

[2]　∠BACガ鋭角デアル場合。(乙圖)

Aヲ通ル直徑AEヲ引キ,D,Eヲ結ブ。



$$\angle EAC=\angle EDA=\angle R$$

又 $\angle EAB=\angle EDB$ (定理34系1)

∴ $\angle EAC-\angle EAB=\angle EDA-\angle EDB$

即チ $\angle BAC=\angle ADB$

[3] $\angle BAC$ガ鈍角デアル場合。(丙圖)

([2]ノ證明ニ倣ツテ$\angle EAC+\angle EAB$ヲ作ツテ見ヨ)

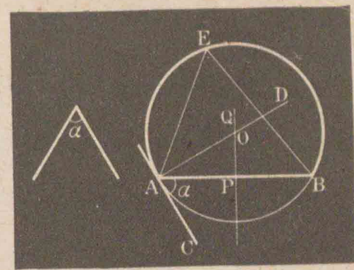
系 1. 圓ノ弦トソノ一端ヲ通ル直線トノナス角ガソノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シケレバ,ソノ直線ハコノ圓ノ切線デアル。

系 2. 圓ノ弦ノ兩端ニ於テ,夫々ソノ圓ニ切線ヲ作ルトキハ,弦ノ同ジ側ニアル角ハ相等シイ。

作圖題 10. 與ヘラレタ線分(AB)ヲ弦トシ,與ヘラレタ角(α)ヲ含ム弓形ヲ作ルコト。

作圖 ABノ一端Aヲ通リ,ABト$\angle\alpha$ニ等シイ角ヲナス直線ACヲ引キ,Aヲ通リACニ垂直ナ直線ADト,ABヲ垂直ニ2等分スル直線PQトノ交

點ヲOトスル。Oヲ中心トシ,OAヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ,$\angle BAC$内ニ含マレナイ弓形AEBハ求メル弓形トナル。



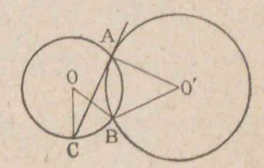
證明 省略スル。

注意 直線ABニ關シテ弓形AEBト對稱ナ弓形ヲ作レバ,コレモ亦條件ニ適スル弓形トナル。

問題

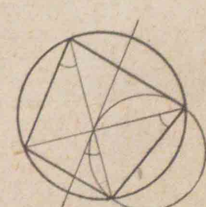
1. 二圓O,O'ガA,Bデ交ルトキ,Aニ於テ圓O'ニ引イタ切線ガ圓Oト交ル點ヲCトスレバ,

$$\angle COB=\angle BO'A$$ (A,Bヲ結べ)



2. 三角形ABCノ邊BAヲAヲ越エテ延長シテ,ACニ等シクADヲトルトキ,$\angle BAC$ノ二等分線ハA,C,Dノ三點ヲ通ル圓ノ切線トナル。

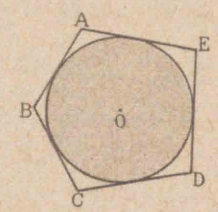
3. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ノ交點デ,コノ交點ト四邊形ノ相隣ル二頂點トヲ通ル圓ニ切スル直線ハ,四邊形ノ一邊ニ平行デアル。



47. 外切多角形

多角形ノスベテノ邊(延長デナイ)ガ同一ノ圓ニ切スルトキハ,コノ多角形ヲ圓ノ**外切多角形**,圓ヲ多角形ノ**內切圓**トイフ。

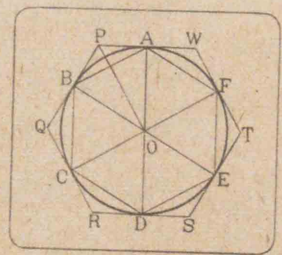
コノトキ多角形ハ圓ニ外切スルトイヒ,圓ハ多角形ニ內切スルトイフ。



右圖デ, ABCDE ハ圓Oノ外切五角形デ,圓Oハコノ五角形ノ內切圓デアル。

三角形ノ內心(74頁)ハ,ソノ內切圓ノ中心デアル。

定理 44. 圓周ヲ若干等分シ,ソノ各分點ヲ順次ニ結ベバ,內接正多角形ガ出來ル。又ソノ各分點ニ於テ切線ヲ引ケバ,邊數ノ同ジ外切正多角形ガ出來ル。



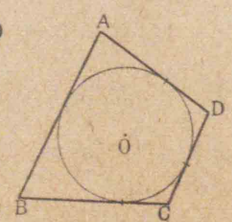
證明 省略スル。

問題

1.* 圓ニ外切スル四邊形 ABCD ニ於テハ,

$$AB+CD=AD+BC$$

(定理42ヲ利用セヨ)



2.* 前問ノ逆ヲ述ベ,且ツコレヲ證明セヨ。

3. 一ツノ正多角形ニ外接圓ト內切圓トヲ畫クコトガ出來ル。ソシテ兩圓ノ中心ハ同ジ點デアル。

注意 コノ共通ノ中心ヲ正多角形ノ中心トイフ。

48. 共通切線

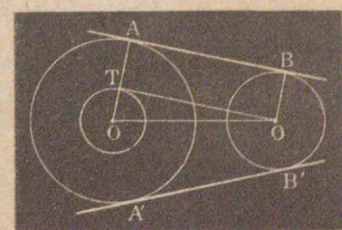
一直線ガ二ツノ圓ノ切線ナルトキ,ソノ直線ヲ二圓ノ**共通切線**トイフ。

コノトキ二圓ガ共通切線ノ同ジ側ニアルトキハ共通外切線トイヒ,互ニ反對ノ側ニアルトキハ共通內切線トイフ。

作圖題 11. 二定圓ニ共通切線ヲ引クコト。

二定圓ヲO,O'トシ,ソノ半徑ヲ r, r' $(r>r')$ トスル。

[1] 共通外切線ノ場合。



作圖 Oヲ中心トシ, $r-r'$ ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,コノ圓ニO'カラ切線ヲ引イテ,ソノ切點ヲTトスル。次ニTヲ通ル定圓Oノ半徑ヲ引キソノ端ヲAトスル。次ニOAニ平行ニ圖ノ如ク定圓O'ノ半徑ヲ引イテソノ端ヲBトスレバ,直線ABハ求メル共

通外切線ノ一ツデアル。

[証明] $TA=OA-OT=r-(r-r')=r'$, $O'B=r'$

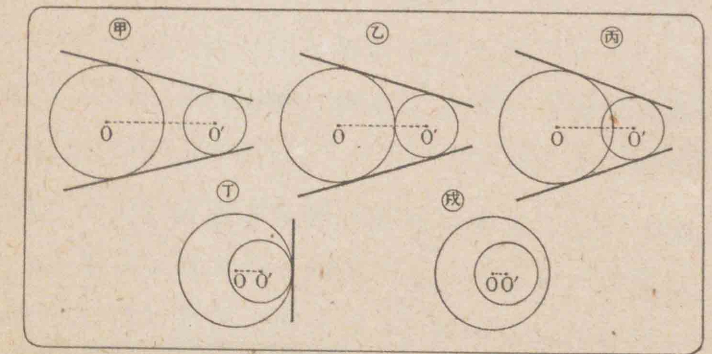
且ツ $TA \parallel O'B$ (作圖) 又 $\angle ATO'=\angle R$ (定理41系2)

故ニ $ATO'B$ ハ矩形トナル。

$\therefore$ $OA \perp AB$, $O'B \perp AB$

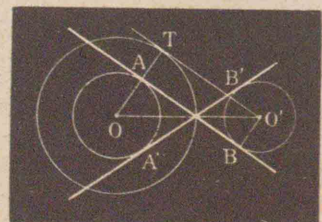
ヨツテ AB ハ二圓 O,O' ノ共通外切線デアル。

[注意] 二定圓ノ位置ノ關係ニヨツテ外切線ガ二ツノ場合,一ツノ場合,切線ガ作レナイ場合ガアル。(次圖參照)



[2] 共通内切線ノ場合。

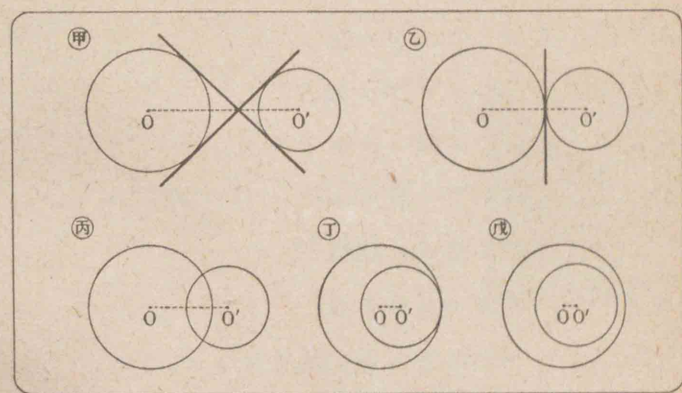
[作圖] O ヲ中心トシ $r+r'$ ヲ半徑トスル圓ヲ書キ,コノ圓ニ O' カラ切線ヲ引イテソノ切點ヲ T トスル。次ニ O,T ヲ結ビ,OT ガ圓 O ト交ル點ヲ A トスル。次ニ OT ニ平行ニ圖ノ如



ク定圓 O' ノ半徑ヲ引イテソノ端ヲ B トスレバ,直線 AB ハ求メル共通内切線ノ一ツデアル。

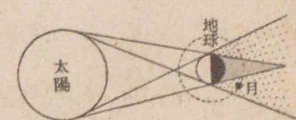
[証明] 省略スル。(TABO' ガ矩形トナル)

[注意] 二定圓ノ位置ノ關係ニヨツテ内切線ガ二ツノ場合,一ツノ場合,切線ガ作レナイ場合ガアル。(次圖參照)



問題

1. 右圖ハ太陽ト地球ト月トノ位置ノ關係カラ出來ル影ノ部分ヲ示シタモノデ,月食,日食ハコノ關係カラ出來ル。ソノ理由ヲ考ヘヨ。

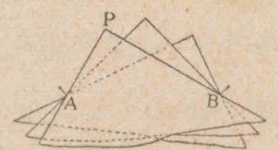


2. 二圓ノ共通外切線及ビ共通内切線ノ交點ハ中心線上ニアル。

第七章 軌　跡

49. 軌　跡

[觀察]1. 右圖ノヤウニ二點A, Bニ留針ヲ刺シテ,ソノ間ニ名刺ノ一隅ヲ夾ミ,名刺ノ緣ヲ針ニ觸レサセナガラ動カストキ,ソノ隅Pノ動ク跡ハ如何ナル線トナルカヲ見ヨ。



[觀察]2. 石ヲ斜上方ニ投ゲ上ゲテ,ソノ各時刻ニ於ケル位置ヲ連絡スレバ,右圖ノヤウナ線トナル。(コレハ拋物線トイフ曲線デアル)

[觀察]3. 圓ハ一定點(中心)カラ一定ノ距離(半徑ノ長サ)ヲ保チナガラ動イタ點ノ跡デアルトモ考ヘラレル。

與ヘラレタ條件ニ適スルスベテノ點ヲ含ム圖形デアツテ,逆ニコノ圖形上ノ點ハ悉クソノ條件ニ適スルトキ,コノ圖形ヲソノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。

或圖形ガ求メル軌跡デアルコトヲ斷定スルニハ次ノ二組ノ事柄ヲ證明シナケレバナラナイ。

(A) 或圖形上ニアル點ハ悉ク條件ニ適スル。

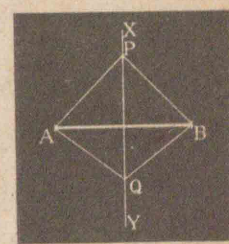
(B) 條件ニ適スル點ハ悉クコノ圖形上ニアル。

(B)ノ代リニ次ノコトヲ證明シテモヨイ。

(B′) コノ圖形上ニナイ點ハ悉ク條件ニ適シナイ。

[軌跡題]**1.** 二定點(A,B)カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,コノ二定點(A,B)ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ2等分スル直線(XY)デアル。

[證明] (A) PヲXY上ノ任意ノ點トスレバ



$$PA=PB$$ (定理9系1)

即チXY上ノ任意ノ點ハA, Bカラ等距離ニアル。

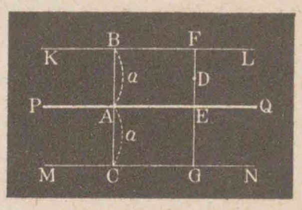
(B) QヲA, Bカラ等距離ニアル點トスレバ,Qハ直線XY上ニアル(50頁,問題4)。

故ニ直線XYハ二點A, Bカラ等距離ニアル點ノ軌跡デアル。

[軌跡題]**2.** 定直線(PQ)カラノ距離ガ定長(a)ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メルコト。

[解] PQ上ノ任意ノ點Aカラコレニ垂線ヲ引キ,ソノ上ニAノ兩側ニaニ等シイ線分AB, ACヲ取リ,B, CカラPQニ平行ニKL, MNヲ引ケバ,コノ二直線ハ求メル軌跡トナル。

(A) KL又ハMN上ノ任意ノ點カラPQニ下シタ垂線ノ長サハAB又ハACノ長サ卽チaニ等シイ。



(B′) KL又ハMN上ニナイ任意ノ點ヲDトシ,コレカラPQニ垂線DEヲ引キ,DE或ハソノ延長ガKL, MNト交ル點ヲ夫々F, Gトスレバ

DE≒FE　同様ニ　DE≒EG

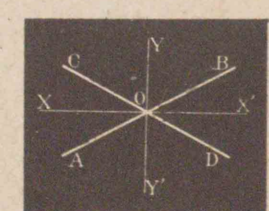
∴　DE≒a

故ニ二直線KL, MNハ求メル軌跡デアル。

軌跡題 **3.** 相交ル二直線(AB, CD)カラ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メルコト。

解 (B) Pヲ條件ニ適スル一點トスレバ,Pハ直線AB, CDガ作ル四ツノ角ヲ2等分スル二ツノ直線XX′, YY′ノ何レカノ上ニアル(49頁,問題6)。

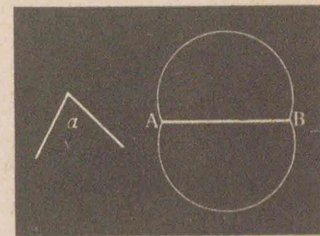
(A) コノ直線XX′又ハYY′上ニアル任意ノ點ハ48頁,問題4ニヨツテ悉クAB, CDカラ等距離ニアル。



故ニ求メル軌跡ハ兩直線ノナス四ツノ角ヲ2等分スル二ツノ直線デアル。

軌跡題 **4.** 一定線分(AB)ヲ定角(α)ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求メルコト。

解 ABヲ弦トシ,ソノ兩側ニ∠αヲ含ム弓形ヲ作レバ(作圖題10),ソノ弧ガ求メル軌跡トナル。



(A) コノ弓形ノ弧上ニアル點ハ,定理34系1ニヨツテ悉ク條件ニ適合スル。

(B′) コノ二ツノ弓形ノ何レノ弧ノ上ニモナイ點ハ,定理35ニヨツテ悉ク條件ヲ滿足サセナイ。

故ニコノ二ツノ弓形ノ弧ガ求メル軌跡デアル。

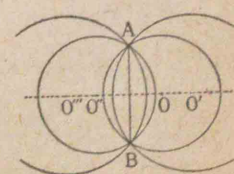
注意 ∠αガ直角ナルトキハ,二ツノ弓形ハ一ツノ圓トナル。

問題

1. 軌跡トイフ言葉ヲ用ヒテ圓ノ定義ヲ述ベヨ。

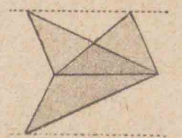
2. 半徑3cmノ圓ノ外側ニ沿ウテ半徑2cmノ圓ガ轉ガルトキ,コノ圓ノ中心ノ軌跡ハ何カ。

3. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。



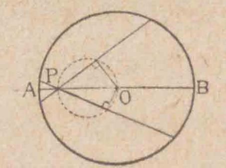
4. 一點トコレヲ含マナイ一定直線上ノ任意ノ點トヲ結ブ線

分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

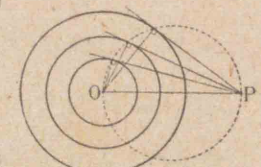


5. 同底,等高デアル三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

6. 圓內ノ定點Pヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。



7. 與ヘラレタ一點カラ同心圓ノ各〻ニ切線ヲ作ルトキ,ソノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。



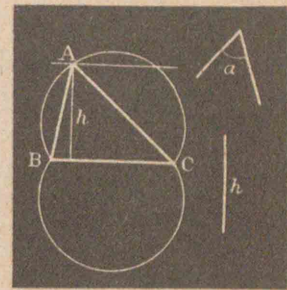
8. 圓ノ定長デアル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。(定理33系2參照)

50. 軌跡ノ交リ

定理ノ證明ヤ作圖題ノ解法ニ於テ軌跡ノ交リヲ利用スルコトガ多イ。

例ヘバ定理32ニ於テA,Bカラ等距離ニアル點ノ軌跡aト,A,Cカラ等距離ニアル點ノ軌跡bトノ交點Oハ三點A,B,Cカラ等距離ニアルコトヲ利用シタ。又作圖題1デ頂點Aノ位置ヲ定メタノモ軌跡ノ交リヲ利用シタノデアル。

作圖題 12. 底邊(BC) 頂角(α)及ビ頂點(A)ヨリノ高サ(h)ヲ與ヘテ三角形(ABC)ヲ作ルコト。



作圖 所要ノ三角形ハ高サガhデアルカラソノ頂點ハ底邊BCカラhノ距離ニアッテBCニ平行ナル直線上ニアル。又頂角ガ定マッテヰルカラ,頂點ハ底邊BCヲ$\angle\alpha$ニ等シイ角デ見込ム點ノ軌跡,卽チBCヲ弦トシ$\angle\alpha$ヲ含ム弓形ノ弧上ニナケレバナラナイ。

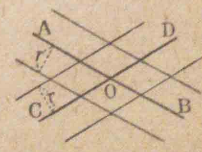
故ニコノ二ツノ軌跡ヲ畫イテ,ソノ交點ノ一ツヲAトスレバ,△ABCハ求メル三角形ノ一ツデアル。

證明 省略スル。

注意 BCカラhノ距離ニアル直線ト,BCヲ弦トシテ$\angle\alpha$ヲ含ム弓形ハCBノ兩側ニ各〻一ツヅツアルカラ,ソノ交點ハ四ツアルコトモアリ,二ツノコトモアリ,無イコトモアル。

問題

1. 二定點ヲ通リ一定直線上ニ中心ヲモツ圓ヲ畫ケ。

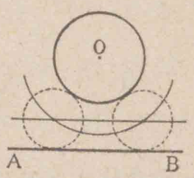


2. 二定直線ニ切シ,且ツ定長ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

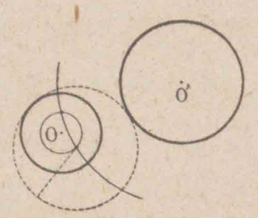
3. 一定點ヲ通リ二ツノ平行線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

(作圖ノ出來ル條件ハ何カ)

4. 一定直線ト一定圓ニ切シ,且ツ定長ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。(內切スル場合ト外切スル場合ヲ別別ニ考ヘヨ。右圖ハ外切スルモノ)



5. 二定圓ニ切シ,且ツ定長ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。(種種ノ場合ヲ考ヘヨ。右圖ハ圓Oト內切,圓O'ト外切スルモノ)



6. 與ヘラレタ圓ヘノ切線ノ長サガ一定デアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

7. 與ヘラレタ直線上ノ一點Pカラ,與ヘラレタ圓ニ與ヘラレタ長サノ切線ヲ引クニハ,Pヲドウ定メタラヨイカ。(前問ヲ利用セヨ)

8. 二定圓ニ割線ヲ引キ,ソノ各、ニヨツテ截リ取ラレル部分ヲ夫々定長ナラシメヨ。(同心圓ノ性質ヲ應用セヨ)

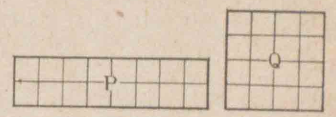
第四篇

面積

51. 面積

線デ圍マレタ圖形ノ廣サヲソノ面積トイフ。

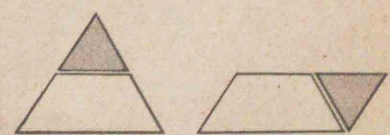
相等シイ面積ヲモツ二ツノ圖形ハ等積デアル又ハ單ニ相等シイトイフ。



多角形PトQトガ等積デアルコトヲ **P=Q** ト書ク。例ヘバ,△ABC=▱PQRS ハ三角形ABCト平行四邊形PQRSトガ等積デアルコトヲ示ス。

注意 合同デアル二ツノ圖形ハ常ニ等積デアルガ,等積デアル二ツノ圖形ハ必ズシモ合同デハナイ。

紙片デ三角形ヲ作リ,二邊ノ中點ヲ結ブ直線ニ沿ウテ截リ,圖ノヤウニ置キ方ヲ變ヘテ平行四邊形ヲ作ツテ見ヨ。コノ三角形ト平行四邊形トハ等積デアルガ合同デハナイ。

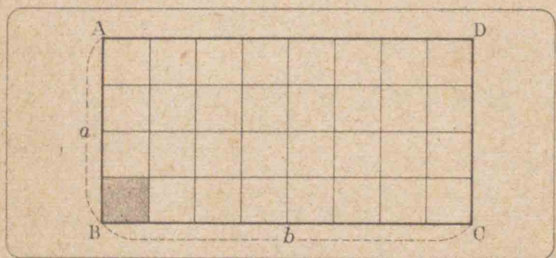


52. 矩形ノ面積

定理 45. **矩形ノ面積ヲ表ハス數ハ,ソノ二隣邊ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。**

卽チ矩形ノ二隣邊及ビ面積ヲ表ハス數ヲ夫々 a, b, S トスレバ, $\mathbf{S}=ab$

証明　a, b ガ整數ノトキ,矩形 ABCD ノ二邊 AB, BC ヲ夫々 a 等分, b 等分スレバ,ソノ一ツハ單位ノ長サトナルカラ,各分點ヲ通リ BC, AB ニ夫々平行線ヲ



引ケバ,矩形 ABCD ハ ab 個ノ正方形ニ分タレル。ソシテコノ各々ノ正方形ノ面積ハ單位面積デアル。

∴ $\mathrm{S}=ab$

注意　a, b ガ整數デナイトキデモ,上ノ定理ハ成立ツノデアルガ,ソノ證明ハ省略スル。

定理45ハ略シテ次ノヤウニ言フ。

矩形ノ面積ハソノ二隣邊ノ積ニ等シイ

注意　今後面積又ハ邊ヲ表ハス數トイフベキヲ略シテ上ノ如ク述ベル。

二隣邊ガ AB, BC デアル矩形ノコトヲ **AB, BC ノ包ム矩形**トイフ。

コレヲ **AB·BC** ト書キ, AB, BC ノ積トモイフ。

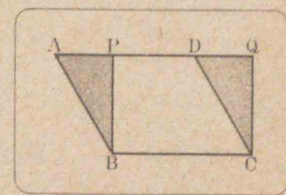
一邊ガ AB デアル正方形ノコトヲ**線分 AB ノ上ニ立ツ正方形**トイフ。

コレヲ $\mathbf{AB}^2$ ト書キ, AB ノ平方トモイフ。

53. 平行四邊形及ビ三角形ノ面積

定理 46. **平行四邊形ノ面積ハ,コレト等底,等高ナル矩形ノ面積ニ等シイ。**

証明　平行四邊形ヲ ABCD トシ,コレト等底,等高ナル矩形ヲ PBCQ トスレバ



$\triangle ABP \equiv \triangle DCQ$

∴ 四邊形 ABCQ $-\triangle DCQ=$ 四邊形 ABCQ $-\triangle ABP$

∴ ▱ABCD=□PBCQ

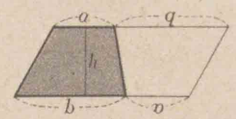
系 **1.** 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等シイ。

卽チ底ヲ a, 高サヲ h, 面積ヲ S トスレバ, $\mathbf{S}=ah$

系 **2.** 等底等高デアル二ツノ平行四邊形ハ等積デアル。

系3. 梯形ノ面積ハ,兩底ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ。

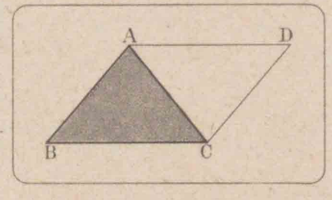
即チ兩底ヲ a, b, 高サヲ h,



面積ヲSトスレバ,

$$S=\frac{(a+b)h}{2}$$

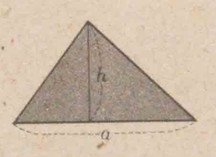
定理 47. 三角形ノ面積ハコレト等底,等高デアル平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シイ。



証明 省略スル。

系1. 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ。

即チ底ヲ a, 高サヲ h, ソノ面積ヲSトスレバ, $S=\frac{1}{2}ah$



系2. 等底,等高デアル二ツノ三角形ハ等積デアル。

問題

1. 三角形ノ一ツノ頂點ヲ通ル直線デ,ソノ面積ヲ2等分セヨ。又3等分セヨ。

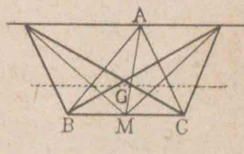
2. 三角形ノ三ツノ中線ハ,ソノ三角形ヲ六ツノ相等シイ三角形ニ分ツ。

3. 與ヘラレタ二邊ヲモツ平行四邊形ノウチデ,矩

形ノ面積ハ最大デアル。

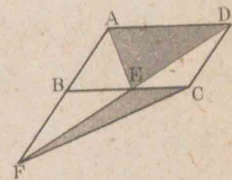
*4. 三角形ノ底邊ノ大イサ,ソノ位置及ビ面積ガ與ヘラレタトキ,頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 三角形ABCノ邊BCノ位置ト大イサ及ビ面積ガ與ヘラレタトキ,重心Gノ軌跡ヲ求メヨ。



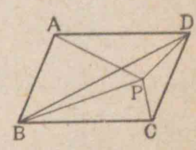
(Aノ位置ハBCノ兩側ニアル)

6. 平行四邊形ABCDノ邊BC上ニ一點Eヲトリ, DEガ直線ABト交ル點ヲFトスレバ,



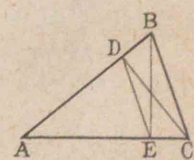
① $\triangle AED=\frac{1}{2}\square AC$ ② $\triangle ABE=\triangle CEF$

7. 平行四邊形ABCD內ノ一點ヲPトスレバ,



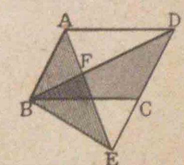
$\triangle PAB \sim \triangle PBC=\triangle PBD$

8. 右圖デ $DE \parallel BC$ トスレバ,



$\triangle BEC=\triangle BDC$, $\triangle ABE=\triangle ADC$

9. 平行四邊形ABCDノ邊DCノ延長上ニ一點Eヲトリ,二直線AEトBDトノ交點ヲFトスレバ,

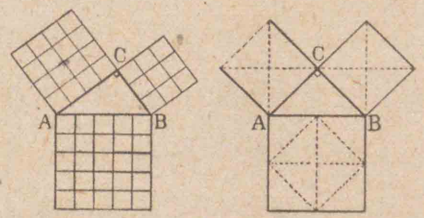


① $\triangle ABE=\triangle BCD$

② $\triangle DEF=\triangle BCE+\triangle ABF$

54.　ぴたごらす(Pythagoras)ノ定理

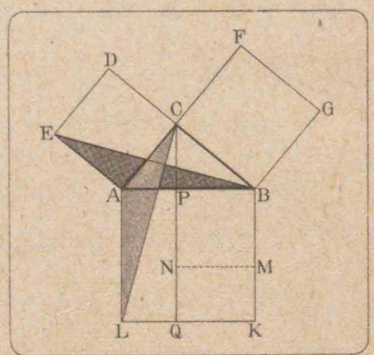
[觀察]　右ノ圖ニヨリ直角三角形ノ各邊ノ上ノ正方形ノ間ニハドンナ關係ガアルカヲ觀察セヨ。



[定理]48.　直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ各ノ平方ノ和ニ等シイ。

[假設]　三角形 ABC ニ於テ ∠C ヲ直角トスル。

[終結]　$AB^2=BC^2+AC^2$



[證明]　各邊 AC, BC, AB ノ上ニ,ソノ外側ニ夫々正方形ACDE, BCFG, ABKL ヲ作リ, C カラ AB ニ垂線 CP ヲ下シ,更ニ延長シテ KL トQ デ交ラシメル。次ニ B, E 及ビ C, L ヲ結ブ。

サテ △EAB, △CAL ニ於テ

AE=AC,　AB=AL,　∠EAB=∠CAL

∴　　△EAB≡△CAL　(定理 9) ………(1)

又 B, C, D ハ一直線上ニアツテ且ツ DB∥EA

∴　　2△EAB=□ACDE　(定理47) ………(2)

又　AL∥CQ デアルカラ

2△CAL=▭APQL……………(3)

(1),(2),(3)ニヨリ　▭APQL=□ACDE……………(4)

同樣ニ　　▭BPQK=□BCFG……………(5)

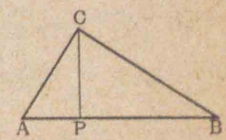
(4),(5) ヲ加ヘテ　□ABKL=□ACDE+□BCFG

即チ　　$AB^2=AC^2+BC^2$

[注意]　コノ定理ニ於テ BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トスレバ

$c^2=a^2+b^2$　從ッテ　$c^2-a^2=b^2$,　$c^2-b^2=a^2$

[系]　直角三角形ABCノ直角頂Cカラ斜邊ニ下シタ垂線ノ足ヲPトスレバ,



[1]　$AC^2=AP\cdot AB$　[2]　$BC^2=BP\cdot AB$

[3]　$CP^2=AP\cdot BP$　[$CP^2=AC^2-AP^2$
$=AP\cdot AB-AP^2=AP\ AB-AP)=AP\cdot BP$]

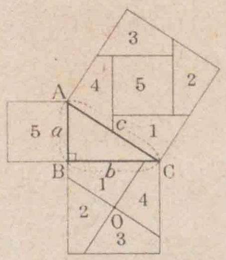
[問題]

1.* 三角形ABC ニ於テ $AB^2=BC^2+CA^2$ ナラバ, ∠C ハ直角デアル。(先ヅ A′C′=AC, B′C′=BC, ∠A′C′B′=∠R ナル三角形A′B′C′ ヲ作リ,定理48 ヲ用ヒテ AB=A′B′, 從ッテ △ABC≡△A′B′C′ ヲ證セヨ)

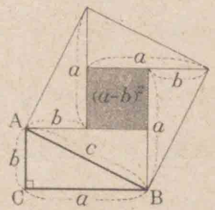
2.　直角三角形ノ二邊ノ長サガ 5 cm, 12 cm デアル

トキ,斜邊ノ長サハ幾ラカ。

3. 右圖ニヨツテぴたごらすノ定理ヲ證明セヨ。(BC上ノ正方形デハ,Oハソノ中心,Oヲ通ル二直線ノウチ一ツハACニ平行,他ハコレニ垂直。又AC上ノ正方形デハ各邊ノ中點ヲ通ツテAB又ハBCニ平行ニ引イタノデアル)

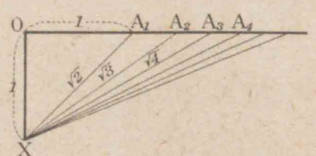


4. 右圖ニヨツテぴたごらすノ定理ヲ證明セヨ。 [$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2=a^2+b^2$]



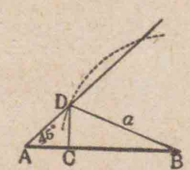
5. 一邊ノ長サガaデアル正三角形ノ高サ及ビ面積ヲ求メヨ。

6. 右圖デ $OX=OA_1=1$ (單位ノ長サ)トシ, $OA_2=XA_1$, $OA_3=XA_2$, $OA_4=XA_3$, …… トスレバ, $XA_1=\sqrt{2}$, $XA_2=\sqrt{3}$, $XA_3=\sqrt{4}$, …… ナルコトヲ證セヨ。



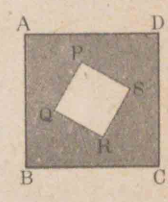
7. 與ヘラレタ二ツノ正方形ノ和ニ等シイ正方形ヲ作レ。

8. 與ヘラレタ線分AB又ハソノ延長上ニ一點Cヲトリ,AC^2+BC^2ヲ定正方形(a^2)ニ等シクセヨ。



9.* 三角形ABCノ頂點Aカラ對邊又ハソノ延長ニ下シタ垂線ノ足ヲPトスレバ,$AB^2\sim AC^2=BP^2\sim PC^2$

10. 右圖デ, ABCD, PQRS ハ何レモ正方形デアル。影ヲツケタ部分ト等積ナ正方形ヲ作レ。



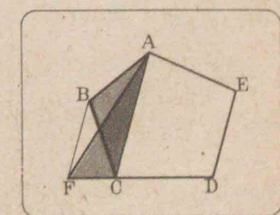
55. 等積變形

[作圖題] **13.** 與ヘラレタ多角形ト等積デ,且ツ邊數ガ一ツ少イ多角形ヲ作ルコト。

假ニ多角形ヲ五角形 ABCDE トスル。

[作圖] 對角線 AC ヲ引キ,次ニ Bカラコレニ平行ニ BF ヲ引キ,邊 DC ノ延長トノ交點ヲ F トスレバ, 四角形 AFDE ハ五角形 ABCDE ト等積デアル。

[證明] △AFC, △ABC ハ同一ノ底 AC ヲモチ,且ツ高サガ等シイ。故ニ等積デアル(定理47系2)。ソノ各〻ニ四角形 ACDE ヲ加ヘテ

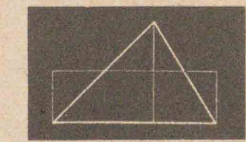


四角形 AFDE=五角形 ABCDE

[問題]

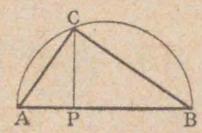
1. 與ヘラレタ五邊形ト等積デアル三角形ヲ作レ。

2. 與ヘラレタ三角形ト等積デアル矩形ヲ作レ。



3. 三角形 ABC ト一邊 BC ヲ共有シ,且ツ等積デアル平行四邊形ヲ作レ。

線分 AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, AB 上ノ一點 P ニ於テコレニ垂線ヲ立テ,半圓トノ交點ヲ C トスレバ, $\angle ACB=\angle R$ $\therefore$ $AP \cdot PB=PC^2$ (定理48系[3])



故ニ次ノ二ツノ作圖題ハ容易ニ解ケル。

作圖題 14. 與ヘラレタ矩形ト等積デアル正方形ノ一邊ヲ作ルコト。

作圖題 15. 與ヘラレタ線分ヲ二ツノ部分ニ分チ,ソノ兩部分ノ積ヲ定正方形ニ等シクスルコト。

問題

1.* 線分 AB ヲ B ヲ越エテ P マデ延長シ, AB, BP ノ積ヲ定正方形(a^2)ニ等シクセヨ。

2.* 線分 AB 上又ハソノ延長上ニ P ヲトリ, AB ト AP トノ積ヲ定正方形(a^2)ニ等シクセヨ。

3. 線分 AB ヲ二ツノ部分ニ分チ,ソノ部分ノ包ム矩形ノ面積ヲ最大ニセヨ。

第五篇
比　例

第一章　比及ビ比例

56. 量ノ比,比例

問 比及ビ比例ニ關スル定義ヲ述ベヨ。

幾何學デ取扱フ比及ビ比例ハ量ニ關スルモノデアッテ,量ノ比ト數ノ比トノ間ニハ次ノ關係ガアル。

定理 49. 同種類ノ二量ノ比ハ,コレヲ同ジ單位デ測ッタトキノ數値ノ比ニ等シイ。

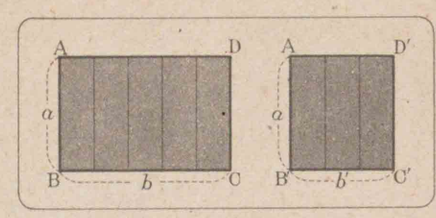
證明 省略スル。(新編女子代數,143頁參照)

コノ定理ニヨッテ,量ノ比ハ數ノ比ニ直シテ考ヘルコトガ出來ルカラ,算術ヤ代數デ學ンダ比及ビ比例ノ性質ハ量ノ意義ニ反シナイ限リ幾何學ニモ適用スルコトガ出來ル。

57. 面積ノ比

定理 50. 高サ又ハ底邊ガ相等シイ二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

[証明] 二ツノ矩形ABCD, A'B'C'D'ニ於テ,ソノ高サヲ共ニa, 底邊ヲ夫々b, b'トスレバ,



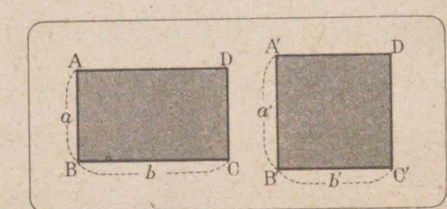
$\square ABCD = ab$, $\square A'B'C'D' = ab'$

$\therefore \quad \square ABCD : \square A'B'C'D' = ab : ab' = b : b'$

底邊ガ等シイ場合モ同様ニ證明出來ル。

[系] 高サ(又ハ底邊)ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ底邊(高サ)ノ比ニ等シイ。

[定理]51. 二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,ソノ底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。



[証明] 省略スル

[系]1. 二ツノ正方形ノ面積ノ比ハ,一邊ノ比ノ二乘比ニ等シイ。

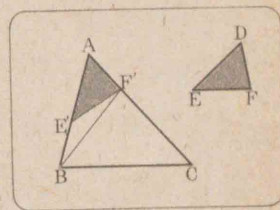
[系]2. 二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,ソノ底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シイ。

[定理]52. 一角ガ相等シイ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,ソノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ面積ノ比ニ等シイ。

[假設] △ABC, △DEF ニ於テ ∠A=∠D トスル。

[終結] △ABC:△DEF=AB·AC:DE·DF

[証明] AB, AC 又ハソノ延長上ニ夫々DE, DF ニ等シクAE', AF' ヲトレバ



$$\triangle DEF \equiv \triangle AE'F'$$

次ニB, F' ヲ結ベバ

$$\frac{\triangle AE'F'}{\triangle ABF'} = \frac{AE'}{AB}, \quad \frac{\triangle ABF'}{\triangle ABC} = \frac{AF'}{AC} \qquad \text{(定理50系)}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle AE'F'}{\triangle ABF'} \times \frac{\triangle ABF'}{\triangle ABC} = \frac{AE'}{AB} \times \frac{AF'}{AC}$$

即チ
$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{DE \cdot DF}{AB \cdot AC}$$

問題

1. 三角形ABCノ内心ヲOトスレバ,

   △OBC:△OCA:△OAB=BC:CA:AB

2*. 同一ノ圓ニ外切スル二ツノ多角形ノ面積ノ比ハ兩多角形ノ周ノ比ニ等シイ。

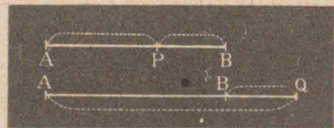
3. 三角形ABCノ邊AB, ACノ中點ヲ夫々D, Eトスレバ,△ABCト△ADEトノ面積ノ比如何。

58. 内分・外分

線分ABノ上ニ一點Pヲトルトキ,Pハ線

分 AB ヲ二ツノ部分 AP, BP ニ**内分スル**トイヒ, AB ノ延長上ニ一點 Q ヲトルトキ, Q ハ線分 AB ヲ二ツノ部分 AQ, BQ ニ**外分スル**トイフ。

線分 AB ガ P デ内分, Q デ外分セラレタトスレバ



$AB=AP+BP,\qquad AB=AQ\sim BQ$

定理 **53.** 線分 AB ヲ一點 P デ内分スルトキ, $AP:PB$ ニ等シイ内分點ハ他ニハナイ。又線分 AB ヲ一點 Q デ外分スルトキ, $AQ:QB$ ニ等シイ外分點ハ他ニハナイ。

証明　點 P ノ外ニ點 X ガアッテ

$AP:PB=AX:XB$

デアルトスレバ

$AP+PB:PB=AX+XB:XB$

即チ　$AB:PB=AB:XB$

∴　$PB=XB$

サテ P, X ハ共ニ線分 AB 上ノ點デアルカラ P ト X トハ一致スル。

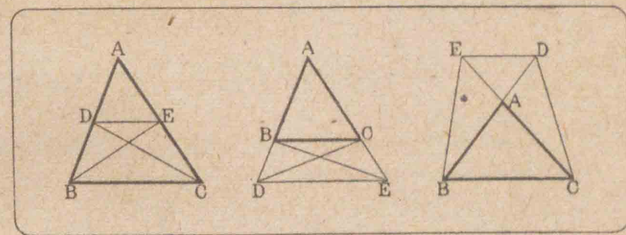
外分ノ場合ニモ同様ニ證明出來ル。

定理 **54.** 三角形ノ一邊ニ平行デアル直線ハ他ノ

二邊ヲソノ共通ノ頂點カラ相等シイ比ニ内分又ハ外分スル。

假設　三角形 ABC ノ一邊 BC ニ平行デアル直線ガ二邊 AB, AC 又ハソノ延長ト交ル點ヲ D, E トスル。

終結　$AD:DB=AE:EC$



証明　D, C; B, E ヲ結ベバ, $BC \parallel DE$ デアルカラ

$\triangle DEB=\triangle DEC$ (定理47系2)　∴　$\dfrac{\triangle ADE}{\triangle DEB}=\dfrac{\triangle ADE}{\triangle DEC}$

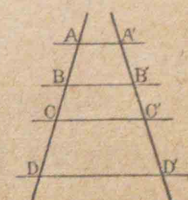
サテコノ式ノ左邊ノ三角形ハ E カラノ高サガ等シク, 右邊ノモノハ D カラノ高サガ等シイ。

∴　$AD:DB=AE:EC$　(定理50系)

系 **1.** 本定理カラ次ノ比例式ヲ得ル。

[1] $AB:AD=AC:AE$　　[2] $AB:BD=AC:CE$

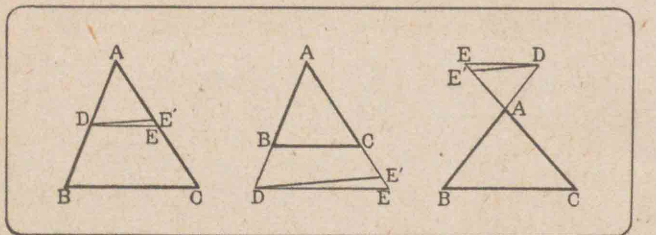
系 **2.** 二ツノ直線ガ數多ノ平行線 ($AA', BB', CC', \cdots$) デ截ラレルトキ, ソノ對應スル部分ノ比 ($AB:A'B', BC:B'C', \cdots\cdots$) ハ一定デアル。



定理 **55.** 一直線ガ三角形ノ二邊又ハソノ延長ト交ツテ,コノ二邊ヲ兩邊ノ共通デアル頂點カラ相等シイ比ニ同時ニ內分又ハ同時ニ外分スルトキハ,コノ直線ハ第三邊ニ平行デアル。

假設 一直線ガ△ABCノ二邊AB, AC又ハソノ延長ト夫々D, Eデ交ツテ兩邊ヲ同時ニ內分又ハ同時ニ外分シテAD:DB=AE:ECデアルトスル。

終結 DE∥BC



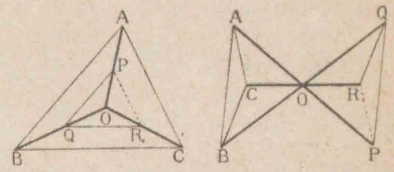
證明 省略スル。(Dヲ通ツテBCニ平行ナ直線ヲ引キAC又ハソノ延長トノ交點ヲE'トシ,前定理及ビ定理53ヲ用ヒテEトE'ガ一致スルコトヲ證セヨ)

問題

1. 定點Oカラ引イタ任意ノ直線ガ,平行二直線トP, Qデ交ルトキハ,OP:OQハ一定デアル。
2. 二ツノ圓ガ內切スルトキ,切點ヲ通ル大キイ圓ノ弦ハ皆小サイ圓ノ周デ同ジ比ニ分タレル。
3. 一點Oヲ通ル三線分OA, OB, OC又ハソノ延長

上ニ夫々P, Q, Rヲトリ, AB∥PQ, BC∥QRナラシメレバ,

AC∥PR。



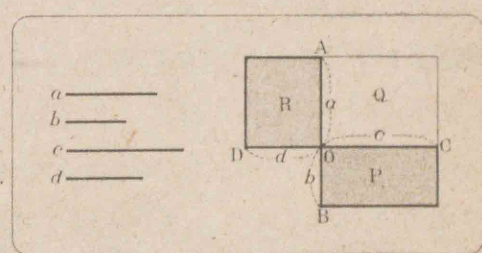
59. 比例スル線分

定理 **56.** 四ツノ線分ガ比例ヲナストキ,ソノ內項ノ包ム矩形ト外項ノ包ム矩形トハ等積デアル。

假設 四線分 a, b, c, d ニ於テ $a:b=c:d$ トスル。

終結 $a\cdot d=b\cdot c$

證明 圖ノヤウニOデ直交スル二直線AB, CDヲ引キ, $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$ トシテ矩形P, Q, Rヲ作ル。



$$\frac{\square Q}{\square P}=\frac{OA}{OB}=\frac{a}{b},\quad \frac{\square Q}{\square R}=\frac{OC}{OD}=\frac{c}{d}\quad (定理50)$$

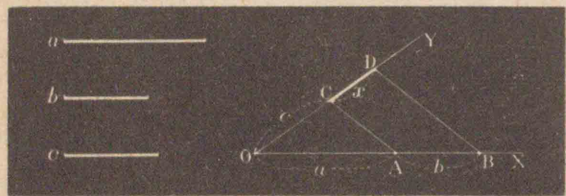
然ルニ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ (假設) $\therefore\ \dfrac{\square Q}{\square P}=\dfrac{\square Q}{\square R}$

$\therefore\ \square P=\square R$ 卽チ $a\cdot d=b\cdot c$

作圖題 **16.** 與ヘラレタ三線分(a, b, c)ノ第四比例項(x)ヲ求メルコト。

$a:b=c:x$ ニ適スル線分 x ヲ求メルノデアル。

作圖 任意ノ角ヲナス二ツノ半直線OX,OY上ニ OA$=a$, AB$=b$, OC$=c$ ヲ圖ノヤウニトリ,A,Cヲ結ブ。次ニBヲ通ツテACニ平行ナ直線ヲ引キ,OYトノ交點ヲDトスレバ,CDハ求メル線分xデアル。



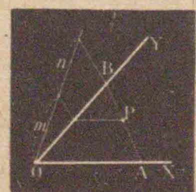
証明 省略スル。(定理54ヲ用ヒテ證セヨ)

作圖題17. 與ヘラレタ二線分(a, b)ノ比例中項(x)ヲ求メルコト。

作圖 省略スル。[$a:x=x:b$ ガ成立ツヤウナ線分xヲ求メルノデアルカラ,a, bガ包ム矩形ト等積デアル正方形ノ一邊ヲ求メルコトニ歸スル(作圖題14)]

問題

1.* 與ヘラレタ線分ABヲ他ノ二定線分ノ比$m:n$ニ内分及ビ外分セヨ。



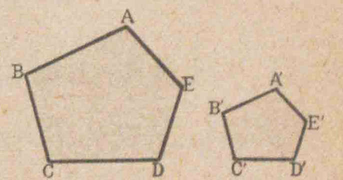
2. ∠XOYノ内部ニアル一定點Pヲ通ル直線ヲ引イテ兩邊トA,Bデ交ラシメ AP:PB ヲ二定線分m, nノ比ニ等シクセヨ。(PカラOXニ平行線ヲ引ケ)

第二章 相似形

60. 相似多角形

邊數ガ相等シイ二ツノ多角形(ABCD……, A′B′C′D′……)ニ於テ,ソノ一方ノ多角形ノ角ガ順次ニ他方ノ多角形ノ角ニ等シイ(∠A=∠A′, ∠B=∠B′,∠C=∠C′,………)トキ,コノ二ツノ多角形ハ**等角デアル**トイフ。

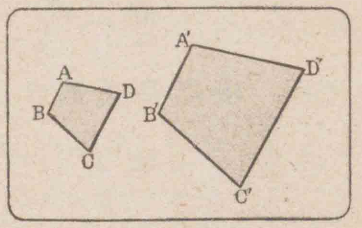
コノトキ相等シイ二ツノ角ノ頂點(A, A′; B, B′; C, C′;……)ヲ對應スル頂點又ハ**對應頂點**トイヒ,一方ノ相隣ル二頂點ガ定メル邊ト,コレニ對應スル他方ノ二頂點ガ定メル邊(例ヘバ AB ト A′B′)トヲ對應スル邊又ハ**對應邊**トイフ。



等角デ且ツ各對應邊ノ比ガ相等シイ二ツノ多角形ハ互ニ**相似デアル**トイヒ,相似多角形ノ對應邊ノ比ヲソノ**相似比**トイフ。

上圖デ五角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ハ互ニ相似デアル。コレヲ**五角形ABCDE∽五角形A′B′C′D′E′**ト書ク。

定理 57. 相似多角形ノ周ノ比ハソノ對應邊ノ比ニ等シイ。



証明　假リニ二ツノ四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ガ相似デアルトスレバ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'} \quad (\text{定義})$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AB+BC+CD+DA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}$$

卽チ周ノ比ハソノ對應邊ノ比ニ等シイ。

61. 三角形ノ相似

定理 58. 二ツノ三角形ハ次ノ各ノ場合ニ互ニ相似デアル。

[1] 互ニ等角デアルトキ,

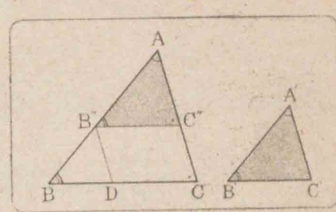
[2] 一角トコレヲ夾ム二邊ノ比ガ夫々相等シイトキ,

[3] 三邊ガ比例スルトキ。

証明　[1]　△ABC, △A′B′C′ ニ於テ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ トスル。

△A′B′C′ ヲ △ABC ノ上ニ ∠A′ ノ邊 A′B′, A′C′ ガ ∠A ノ邊 AB, AC 上ニ夫々落チルヤウニ重ネタトキ, B′C′ ガトル位置ヲ B″C″ トスル。

$\angle AB''C''=\angle B'=\angle B$



$\therefore \quad B''C'' \parallel BC$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}$$

(定理54系1)

從ツテ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

次ニ B″ ヨリ AC ニ平行線ヲ引キ, BC トノ交點ヲ D トスレバ

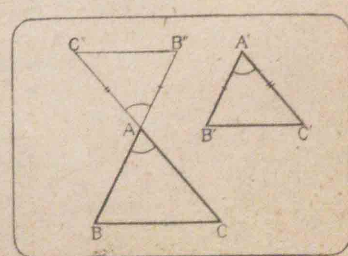
$\dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{CB}{CD}$ (定理54系1)　然ルニ $CD=C''B''$

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{CB}{C''B''}$　從ツテ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{CB}{C'B'}$

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{CB}{C'B'}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

[2]　△ABC, △A′B′C′ ニ於テ $\angle A=\angle A'$, $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{A'B'}{A'C'}$ トスル。



証明　∠A ノ兩邊 AB, AC ヲ延長シテ,ソノ上ニ圖ノヤウニ $AB''=A'B'$, $AC''=A'C'$ ナル點 B″, C″ ヲトツテコレヲ結ブト

$\triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C'$ (定理9)

然ルニ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{A'B'}{A'C'}$ (假設)

∴ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB''}{AC''}$ 從ッテ $\dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{AC}{AC''}$

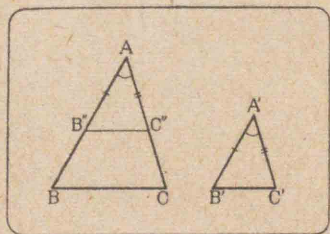
∴ $BC \parallel B''C''$ (定理55)

故ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle AB''C''$ トハ等角デアル。

卽チ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C$ ([1]ノ場合)

[3] $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'A'}{CA}$ トスル。

証明 AB 又ハソノ延長上ニ A'B' ニ等シク AB'' ヲトリ, BC ニ平行ニ B''C'' ヲ引イテ AC 又ハソノ延長トC''デ交ラシメレバ



$\triangle AB''C'' \backsim \triangle ABC$ ([1]ノ場合) (1)

∴ $\dfrac{AB''}{AB}=\dfrac{AC''}{AC}=\dfrac{B''C''}{BC}$

ソシテ $AB''=A'B'$ (作圖)

∴ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{AC''}{AC}=\dfrac{B''C''}{BC}$

又 $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$ (假設)

∴ $A'C'=AC''$, $B'C'=B''C''$

∴ $\triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C'$ (定理11)

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ [(1)ニヨル]

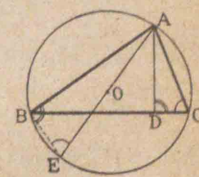
問題

1. 邊數ガ相等シイ二ツノ正多角形ハ相似デアル。

2. 三角形ABCノ中線AD上ノ一點Qヲ通リ, BCニ平行ナ直線ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々P,Rトスレバ,PQトQRトノ間ニドンナ關係ガアルカ。

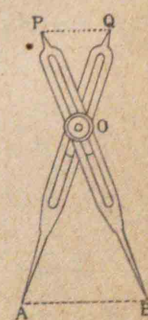
3. OA, OB, OC ハ定直線デアル。OA 上ノ任意ノ一點PカラOB, OC ヘ垂線PX, PYヲ下ストキハPX:PYハ一定ノ値ヲモツ。

4.* 三角形ABCノ二邊AB, ACノ包ム矩形ハ,Aカラ引イタ垂線ADト外接圓ノ直徑トガ包ム矩形ニ等シイ。(Aヲ通ル直徑ヲ引キ,ソノ端EヲB又ハCニ結ンデ見ヨ)



5. 右圖ハ比例こんはすトイフ器具デ圖面ヲ縮メ,又ハ擴大スルトキニ用ヒル。コノ構造ヲ言ヘ。

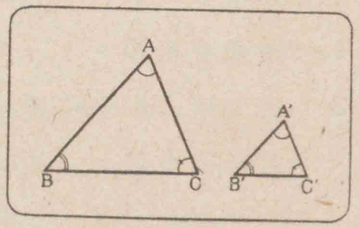
又 OA=2OQ, OB=2OP ナラバ, AB=2PQ ナルコトヲ證セヨ。



62. 相似形ノ面積

[定理]59. 二ツノ相似三角形ノ面積ノ比ハ,ソノ對應邊ノ二乘比ニ等シイ。

[假設] $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ トスル。



[終結] $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB^2}{A'B'^2}$

[證明] $\angle A=\angle A'$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'} \qquad \text{(定理52)}$$

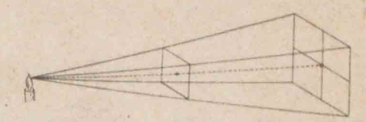
然ルニ
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'} \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

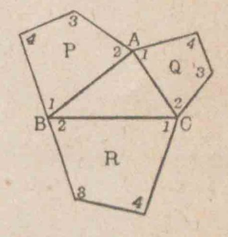
[系] 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ,ソノ對應邊ノ二乘比ニ等シイ。(對應スル對角線ヲ引イテ,兩相似多角形ヲ三角形ニ分ケレバ,ソノ對應スル三角形ハ又夫々相似形トナル)

問題

1. 二ツノ相似三角形ガアツテ,ソノ相對應スル一組ノ邊ノ長サハ夫々 15 cm, 12 cm デ,第一ノ三角形ノ面積ハ 100 平方糎デアル。第二ノ三角形ノ面積ヲ求メヨ。



2. 光ハ光源カラノ距離ノ二乘ニ比例シテ擴ガル。コレヲ圖ニヨツテ幾何學的ニ説明セヨ。



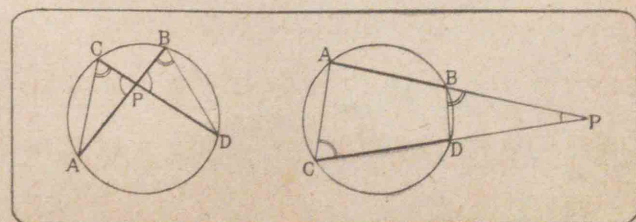
3. 直角三角形ノ三邊ノ上ニ,ソノ三邊ガ相對應スルヤウニ相似多角形ヲ夫々書ケバ,斜邊ノ上ノモノノ面積ハ,他ノ二邊ノ上ノモノノ和ニ等シイ。

63. 弦ノ部分ノ包ム矩形

[定理]60. 圓ノ二ツノ弦又ハソノ延長ガ相交ルトキ,ソノ交點デ内分又ハ外分サレタ各弦ノ部分ノ積ハ相等シイ。

[假設] 圓ノ二ツノ弦 AB, CD 又ハソノ延長ノ交點ヲ P トスル。

[終結] $PA\cdot PB=PC\cdot PD$



証明 A, C, B, D ヲ結ブ。 △ACP, △DBP ニ於テ

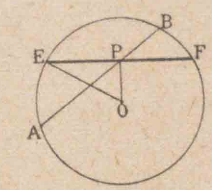
$$\angle ACP=\angle DBP,\quad \angle APC=\angle DPB$$

∴ △ACP∽△DBP 〔定理58, 1〕

従ッテ AP : CP=DP : BP

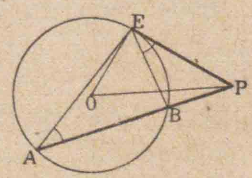
即チ AP·PB=CP·PD

系 1. 圓内ノ一點(P)ヲ通ル弦(AB)ガソノ點(P)デ分タレタ二ツノ部分ノ積(PA·PB)ハ、ソノ點ヲ中點トスル弦(EF)ノ半分ノ二乗ニ等シク一定デアル。



(圓ノ中心ヲOトシ, O, P及ビO, Eヲ結ベバ, EF⊥OP, $PA\cdot PB=PE\cdot PF=PE^2=OE^2-OP^2=$一定)

系 2. 圓外ノ一點(P)カラ引イタ割線(PBA)上ノ弦(AB)ガソノ點(P)デ外分セラレタ二ツノ部分ノ積(PA·PB)ハ,ソノ點カラ圓ニ引イタ切線(PE)ノ平方ニ等シイ。 (A, E; E, B ヲ結ベバ, △AEP∽△EBP ∴ PA : PE=PE : PB)



注意 圓ノ中心ヲOトスレバ,コノ場合ニハ, $PE^2=OP^2-OE^2=$一定。

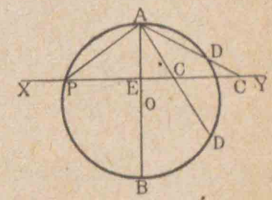
系 3. 二ツノ線分AB, CD又ハソノ各〻ノ延長ガ一點Pデ交リ, PA·PB=PC·PD ナラバ,四ツノ端A, B, C, Dハ同一圓周上ニアル。

問題

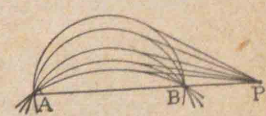
1.* 線分ABノ延長ガ他ノ線分PEノ一端Pヲ通ルトキ $PA\cdot PB=PE^2$ ナラバ,三角形ABEノ外接圓ハEニ於テPEニ切スル。

2. 三角形ノ各頂點カラソノ對邊へ引イタ垂線ガ,垂心デ内分又ハ外分サレル二ツノ部分ノ積ハ皆相等シイ。

3.* 圓周上ノ一點Aカラ任意ノ直線ヲ引キ, Aヲ通ル直徑ABニ垂直ナ一定直線XYトCデ,圓周トDデ交ラシメレバ, AC·AD=一定。又XYト圓周トガ交ルトキ,交點ノ一ツヲPトスレバ, $AC\cdot AD=AP^2$ デアル。



4. 二定點ヲ結ブ線分ノ延長上ノ一點カラ,コノ二點ヲ通ル數多ノ圓へ引イタ切線ノ長サハ相等シイ。



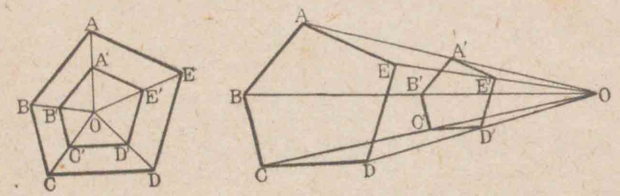
雑題

1. 與ヘラレタ矩形ト等積デ且ツ與ヘラレタ線分ニ等シイ一邊ヲモツ矩形ヲ作レ。

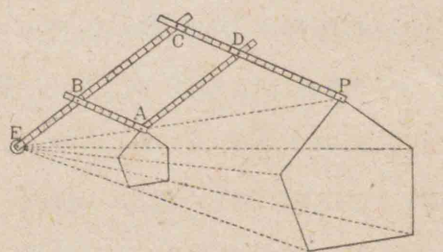
2. AB ヲ直徑トスル半圓ノ弧ノ上ノ一點ヲCトシ,弧 AC ノ中點ヲDトスレバ,

$$\triangle ADB : \triangle DBC = AB : BC$$

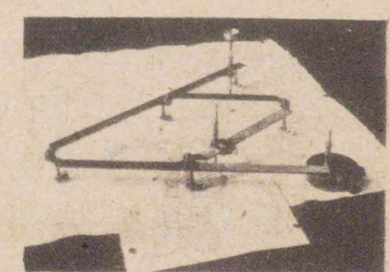
3. 多角形ノ總テノ頂點ヲ一點ニ結ブ各線分ヲ同ジ比ニ全部內分(又ハ全部外分)スル點ヲ順ニ結ビツケテ得ル多角形ハモトノ多角形ニ相似デアル。



4. 前問ヲ利用シテ與ヘラレタ多形ト相似デアル多角形ヲ書ケ。



5. 右圖ハ伸縮模寫器(Pantograph)デアル。

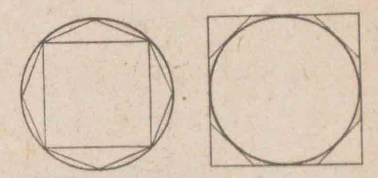


EB:BA=EC:CP ナル如ク調節スレバ,點E, A, P ハ常ニ一直線上ニアツテA, P ノ書ク直線形ハ互ニ相似デアルコトヲ說明セヨ。(一般圖形デモ同樣デアル)

第三章 圓ノ周及ビ面積

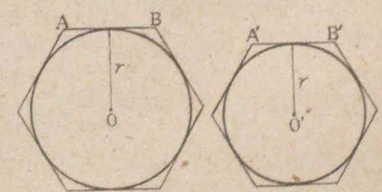
64. 圓ノ周·圓周率

觀察 圓ニ內接スル正多角形ノ邊數ガ2倍,3倍,……トナルニ從ツテ,ソノ周(又ハ面積)ハ次第ニ增シ圓ノ周(面積)ニ近ヅクコトヲ觀察セヨ。又圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ガ2倍,3倍,……トナルニ從ツテ,ソノ周ハ次第ニ減ツテ圓ノ周(面積)ニ近ヅクコトヲ觀察セヨ。



圓ノ周ハ,ソノ內接正多角形又ハ外切正多角形ノ邊ノ數ヲ限リナク增シタトキノ,コノ正多角形ノ周ノ極限デアル。

サテ邊數nデアル二ツノ正多角形ノ一邊ヲ夫々AB, A'B' トシ,ソノ周ヲm, m', 又各ゝノ內切圓O, O'ノ半徑ヲ夫々r, r' トスレバ,次ノ關係ガアル。



$$\frac{m}{m'}=\frac{nAB}{nA'B'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{r}{r'}$$ (理由ヲ考ヘヨ)

即チ二圓ニ夫々外切スル同ジ邊數ノ二ツノ正多形ノ周ノ比$(m:m')$ハ,邊數ニ關係ナク常ニ二圓ノ半徑ノ比$(r:r')$ニ等シイ。ヨツテコノ正多角形ノ邊數ヲ限リナク多クシタトキノ極限,即チ圓O,O'ノ周 l, l' ニツイテモ同様ニ

$$\frac{l}{l'}=\frac{r}{r'} \qquad \text{即チ} \qquad \frac{l}{2r}=\frac{l'}{2r'}$$

故ニ圓ノ周ノソノ直徑ニ對スル比ハ,スベテノ圓ニツイテ同一デアル。

コノ比ヲ圓周率ト名ヅケ,通例 π(パイ) デ表ハス。

即チ　$\dfrac{l}{2r}=\pi$　又　$l=2\pi\cdot r=\pi d$　(d ハ直徑)

注意　圓周率πハ無理數デアツテ,ソノ値ヲ小數第十位マデ示セバ, $\pi=3.1415926535\cdots\cdots$ デアル。

實用上デハπノ近似値トシテ3.1416 又ハ $\dfrac{355}{113}$ ヲ用ヒ,大略ノ計算ニハ 3.14 又ハ $\dfrac{22}{7}$ ヲ用ヒル。

上ニ述ベタコトヨリ次ノ定理ヲ得ル。

定理 61.　圓ノ周ハ,ソノ直徑ニ圓周率ヲ掛ケタモノニ等シイ。

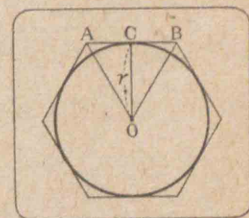
65. 圓及ビ扇形ノ面積

前節デ述ベタト同様ニ,

圓ノ面積ハ,ソノ内接正多角形又ハ外切正多角形ノ邊ノ數ヲ限リナク増シタトキノ,コノ正多角形ノ面積ノ極限デアル。

定理 62.　圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ圓周率ヲ掛ケタモノニ等シイ。

證明　AB ヲ半徑 r ナル圓Oノ外切正n角形ノ一邊, OC ヲ中心カラ AB ヘノ垂線, m ヲコノ多角形ノ周トスレバ



$$\triangle AOB=\frac{1}{2}AB\cdot r$$

兩邊ニ n ヲ掛ケテ

$$n\times\triangle AOB=\frac{1}{2}AB\cdot n\cdot r$$

∴　外切正n角形ノ面積$=\dfrac{1}{2}m\cdot r$

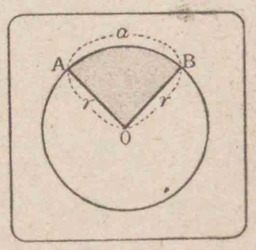
サテnヲ限リナク大キクスレバ,外切正n角形ノ面積ハ圓ノ面積トナリ,ソノ周mハ圓周即チ $2\pi r$ トナル。

∴　圓ノ面積$=\dfrac{2\pi r\cdot r}{2}=\pi r^2$

圓ノ弧トソノ兩端ヲ通ル半徑トデ圍マレタ圓ノ一部分ヲ扇形トイヒ,ソノ弧ニ對スル,中心角ヲ扇形ノ角トイフ。

定理 63. 半徑ガrデアル圓ノ扇形ノ弧ノ長サヲaトスレバ,ソノ面積ハ $\frac{1}{2}ar$ ニ等シイ。

証明 扇形ノ面積ト圓ノ面積トノ比ハ,扇形ノ弧ノ長サaト圓周 $2\pi r$ トノ比ニ等シクナケレバナラヌ。

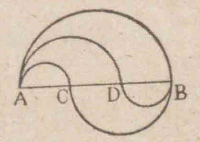


∴ 扇形ノ面積$=\frac{\pi r^2 a}{2\pi r}=\frac{1}{2}ar$

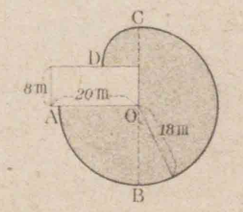
問題

1. 半徑4.5cm及ビ10.6cmデアル圓ノ周ヲ計算セヨ。(1mm以下四捨五入)

2. 右圖デC,Dハ線分ABノ三等分點デアル。AカラBニ至ル徑路ハ,ドノ曲線ヲ經ルモ同一ナルコトヲ證セヨ。



3. 牛ガ縦8m,横20mノ矩形ノ畜舎ノ外ノ一隅ニ長サ18mノ綱デ繋ガレテキル。コノ牛ノ動キ得ル範圍ノ面積ヲ平方米マデ求メヨ。



4. 二ツノ同心圓ガ作ル圓環ノ面積ガ22平方糎デ兩圓ノ半徑ノ差ガ1cmデアルトキ,$\pi=\frac{22}{7}$ トシテ兩圓ノ半徑ヲ求メヨ。

第六篇

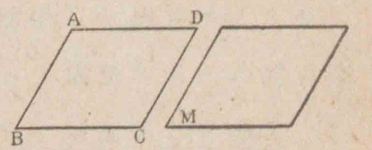
立體圖形

第一章 空間ニ於ケル點,線及ビ平面

66. 空間ニ於ケル點,直線,平面ノ位置

本篇ニ於テハ空間ニアル圖形ニツイテ考ヘル。以後斷リナクトモ圖形ハ空間ニアルモノトスル。

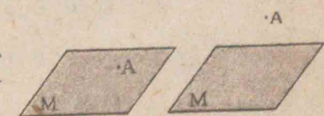
單ニ平面トイヘバ,四方ニ限リナク擴ガツテキルモノデアルガ,便宜上四邊形デ表ハシ,平面ABCD又ハ平面Mナドトイフ。



[I] 點ト平面

空間ニアル點ト平面トノ位置ノ關係ニハ次ノ二ツノ場合ガアル。

[1] 點Aガ平面Mノ上ニアル場合。



コノトキ,平面Mハ點Aヲ通ル又ハ含ムトイフ。

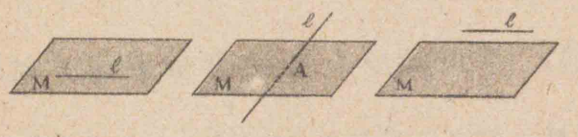
[2] 點Aガ平面M外ニアル場合。

[II] 直線ト平面

空間ニアル直線ト平面トノ位置ノ關係ニハ,次ノ三ツノ場合ガアル。

[1] 直線 l ガ平面M上ニアル場合。

コノトキ平面Mハ直線 l ヲ含ム又ハ通ルトイフ。



[2] 直線 l ト平面Mトガ唯一點デ出會フ場合。

コノトキ直線 l ト平面Mトハ相交ルトイヒ,ソノ交ル點Aヲソノ交點トイフ。

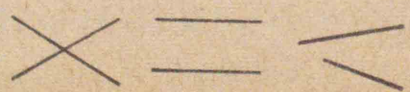
[3] 直線 l ト平面Mトガ一點ヲモ共有シナイ場合。

コノトキ直線 l ト平面Mトハ互ニ平行デアルトイフ。コレヲ $l \parallel M$ ト書ク。

[III] 二直線ノ位置

観察 二本ノ鉛筆ヲ左右ノ手ニ持チ,ソノ位置ノ關係ニツイテ種々ノ場合ヲ考察セヨ。

空間ニアル異ナル二直線ノ位置ノ關係ニハ,次ノ三ツノ場合ガアル。



[1] 相交ル場合。

[2] 平行ナ場合。

[3] 相交ラズ,且ツ平行デナイ場合。

コノトキ二直線ハ捩レノ位置ニアルトイフ。

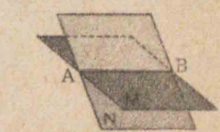
[IV] 二平面ノ位置

空間ニアル異ナル二平面ノ位置ノ關係ニハ,次ノ二ツノ場合ガアル。

[1] 二平面ガ出會フ場合。

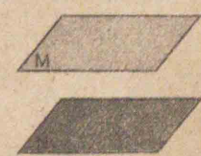
公理 二平面ガ出會フトコロハ唯一ツノ直線デアル。又二平面ガ一點ヲ共有スレバ,ソノ點ヲ通ル一直線ヲ共有スル。

二平面ガ出會フコトヲ交ルトイヒ,ソノ出會ツタ直線ヲ二平面ノ交線(右圖AB)トイフ。



[2] 二平面ヲ如何程擴張シテモ出會ハナイ場合。

コノトキ二平面ハ互ニ平行デアルトイフ。二平面M,Nガ互ニ平行デアルコトヲ $M \parallel N$ ト書ク。



67. 平面ノ決定

幾ツカノ與ヘラレタ直線點ヲ通ル平面ガ唯一ツ

デアルトキ,コレ等ノ直線,點ハ一平面ヲ決定スルトイフ。

公理 一平面上ニアル一定直線ヲ軸トシテコノ平面ヲ適當ニ廻轉スレバ,ソノ平面ヲシテ空間ニアルコノ定直線外ノ任意ノ與ヘラレタ點ヲ通ラセルコトガ出來ル。ソシテソノ位置ハ唯一ツデアル。

コノ公理ニヨツテ次ノ定理ヲ證明スルコトガ出來ル。

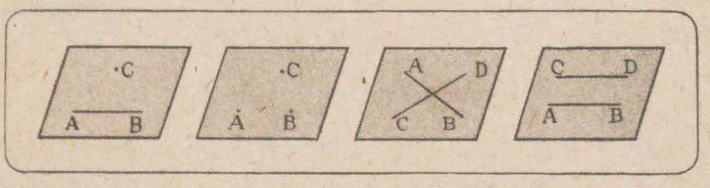
定理 64. 次ノ各ハ一平面ヲ決定スル。

[1] 一直線トソノ上ニナイ一點。

[2] 同一直線上ニナイ三點。

[3] 相交ル二直線。

[4] 平行デアル二直線。



注意 平面ヲ表ハスニ,ソノ決定スル條件ニ從ツテ次ノヤウニ書クコトガアル。

平面(BC, A)トハ直線BCト點Aトガ決定シタ平面

平面(A, B, C)トハ三點A, B, Cガ決定シタ平面。

平面(AB, CD)トハ二直線AB, CDガ決定シタ平面。

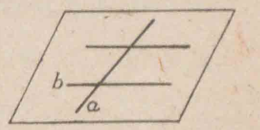
問題

1. 一ツノ平面ハ空間ヲ二ツノ部分ニ分ケル。相交ル二平面ハ空間ヲ幾ツノ部分ニ分ケルカ。又三平面ガ一點ヲ共有スレバドウカ。

2. 同一ノ平面上ニナイ四點ハ幾ツノ平面ヲ決定スルカ。

3. 二直線ガ相交ラズ,且ツ平行デナイトキ,コノ二直線ハ同一平面上ニアルカ。

4. 相交ル二直線 a, b ノ一ツ a ト交リ,b ニ平行デアル任意ノ直線ハ平面(a, b)上ニアル。



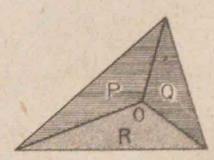
5. 平行二直線 a, b ノ一ツ a ニ交ル平面Mハ又 b ニモ交ル。[Mト平面(a,b)トノ交線ヲ考ヘヨ]

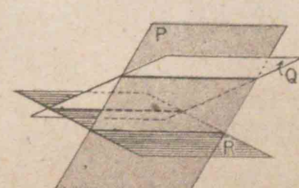
6. 三ツノ平面ガ相交ルトキ,ソノ交線ハ

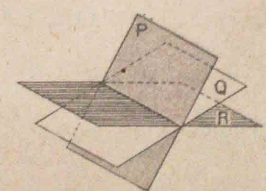
① 同一ノ點ヲ通ルカ,

② 互ニ平行デアルカ,

③ 又ハ相一致スル。



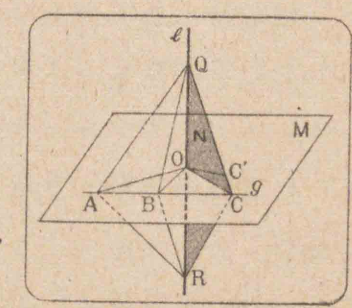




68. 平面ノ垂線及ビ斜線

[定理] **65.** 一直線上ノ定點ヲ通リ,コノ直線ニ垂直デアルスベテノ直線ハ同一平面上ニアル。

[假設] 一直線ヲ l, O ヲソノ直線上ノ定點トシ, $OA \perp l$, $OB \perp l$, $OC' \perp l$, …… トスル。



[終結] OA, OB, OC,′…… ハ同一平面上ニアル。

[證明] l ニ垂直ナ二直線 OA, OB ガ決定スル平面ヲMトスル。 O ヲ通リ l ニ垂直デアル他ノ任意ノ一直線 OC′ ト直線 l トハ O ヲ共有スルカラ一平面ヲ決定スル。 コレヲNトスレバ, M, N ハ相異ナル平面デ,且ツ一點 O ヲ共有スルカラ相交ル(公理) ソノ交線ヲ OC トスル。

サテM上デOA, OB, OC ト交ル直線 g ヲ引キ,ソノ交點ヲ夫々 A, B, C トシ,直線 l 上ニ O カラ等距離ニ點Q, R ヲトリ, QA, QΓ, QC, RA, RB, RC ヲ作ル。 三角形QAR ニ於テ AO ハ邊QR ノ中點ヲ通リ,且ツコレニ垂直デアルカラ　　　$AQ = AR$

同様ニ　　　$BQ = BR$

∴　　　$\triangle QAB \equiv \triangle RAB$　　　(定理14)

∴　　　$\angle QAC = \angle RAC$　且ツ　$QA = RA$

從ツテ　　　$\triangle QAC \equiv \triangle RAC$　　　(定理9)

故ニ △QCR ハ二等邊三角形デ, O ハ底邊 QR ノ中點トナル。

∴　　　$OC \perp l$

サテ OC, OC′ ハ l ト共ニ同一ノ平面N上ニアッテ,且ツ共ニ l ニ垂直デアルカラ,直線 OC′ ト OC トハ相合スル。 卽チ O ヲ通リ l ニ垂直デアル直線ハ皆一定ノ平面M ノ上ニアル。

一直線ガ一平面ト交リ,ソノ交點ヲ通ルコノ平面上ノスベテノ直線ニ垂直デアルトキ,直線ト平面トハ互ニ**垂直デアル**又ハ**直交スル**トイヒ,コノ直線ヲ平面ノ**垂線**又ハ**法線**トイヒ,交點ヲソノ**足**トイフ.

直線 l ト平面M トガ互ニ垂直デアルコトヲ $l \perp M$ ト書ク。

平面ニ垂直デナイ直線ヲソノ平面ノ**斜線**トイヒ,交點ヲソノ**足**トイフ.

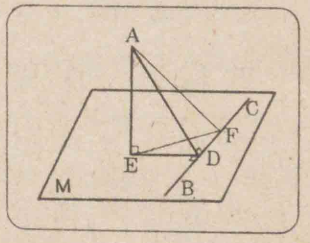
[系] **1.** 直交スル二直線ノ一方ヲ軸トシテ廻轉スル

トキ,他ノ直線ハ一ツノ平面ヲ畫ク。

系2. 相交ル二直線ニコノ交點ニ於テ垂直デアル直線ハ,モトノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デアル。

系3. 一直線上ノ定點ニ於テコレニ垂直デアル平面ハ,常ニ唯一ツアル。

定理 66. 平面M外ノ一點AカラM上ノ直線 BC ニ垂線 AD ヲ下シ,ソノ足Dニ於テ更ニ BC ニ垂直デアル直線 DE ヲM上ニ引キ,Aカラ DE ニ垂線ヲ下シ,ソノ足ヲEトスレバ, AE ハMニ垂直デアル。



假設 右圖デ $AD \perp BC$, $DE \perp BC$, $AE \perp DE$ トスル。

終結 $AE \perp M$

證明 BC 上ニ任意ノ點 F ヲトリ, EF, AF ヲ作ル。

直角三角形 ADF, ADE, EDF ヨリ

$$AF^2=AD^2+DF^2=AE^2+ED^2+DF^2=AE^2+EF^2$$

∴ $AE \perp EF$ (131頁問題 1)

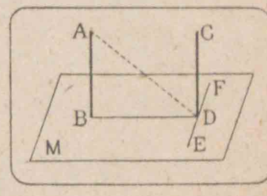
又 $AE \perp ED$ (作圖)

∴ $AE \perp M$ (定理65系2)

系1. 平面M外ノ一點ヲ通リMニ垂直デアル直線ハ,常ニ唯一ツアル。

系2. 平面M外ノ一點AカラMニ垂線ヲ下シ,ソノ足EカラM上ノ直線 BC ニ垂線ヲ下シ,ソノ足ヲDトスレバ, AD ハ BC ニ垂直デアル。(本定理ノ圖ニ於テ $AF^2=AE^2+EF^2=AE^2+ED^2+DF^2=AD^2+DF^2$ ナルコトニ注意)

定理 67. 一平面ニ垂直デアル二ツノ直線ハ互ニ平行デアル。



假設 右圖デ $AB \perp M$, $CD \perp M$ トスル。

終結 $AB \parallel CD$

證明 AB, CD ガ平面Mト交ル點 B, D ヲ結ビ, D ヲ通ツテM上ニ EF ヲ BD ニ垂直ニ引キ, AB 上ノ一點AトDトヲ結ベバ,

$AD \perp EF$ (定理66系2)

AD, BD, CD ハ同一ノ點Dニ於テ交リ,同一ノ直線 EF ニ垂直デアルカラ同一平面上ニアル(定理65)。

故ニ AB, CD ハ同一平面上ニアツテ,且ツ共ニ BD ニ垂直デアル(假設)。

∴ $AB \parallel CD$

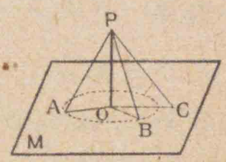
系1. 平行二直線 a, b ノ一ツ a ニ垂直デアル平面Mハ b ニモ垂直ニ交ル。(b 上ノ一點カラMニ垂線ヲ引ケ)

系 2. 平面上ノ定點ヲ通ツテコノ平面ニ垂直デアル直線ハ,常ニ唯一ツアル。

問題

1. 柱ヲ鉛直ニ立テルトキ,さげふりデ驗ス理由ヲ言ヘ。

2. 一點デ交ル三直線ガ二ツヅツ互ニ垂直ナルトキハ,ソノ一ツハ他ノ二直線ガ決定スル平面ニ垂直デアル。



3. 平面外ノ一點カラコノ平面ヘ引イタ線分ノウチ,

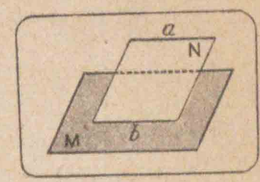
① 垂線ハ最モ短イ。(コノ長サヲ點ト平面トノ距離トイフ)

② 垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ斜線ハ相等シイ。

③ 垂線ノ足カラ大ナル距離ニ足ヲモツ斜線ハ小ナル距離ニ足ヲモツ斜線ヨリ大デアル。

69. 平行ナ直線

定理 68. 平行二直線ノ一方ヲ含ム平面ハ他ノ直線ヲ含ムカ又ハコレニ平行デアル。

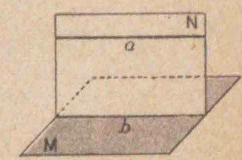


証明 平行二直線ヲ a, b トシ,平面Mハ b ヲ含ムモノトスル。

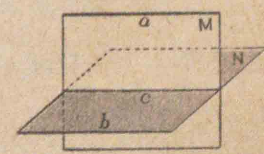
a, b ノ決定スル平面ヲNトスレバ,平面NトMトハ直線 b ヲ共有スルカラ,モシ一致スレバ,Mハ a ヲ含ム。

又モシ一致シナケレバ,MトNトノ交線ハ b デアルカラ,a ガMニ交ルトスレバ,ソノ交點ハ b 上ニナケレバナラヌ。コレハ假設即チ $a \parallel b$ ニ反スル。故ニコノ場合ニハ $a \parallel$ M デアル。

問題



1*. 平面Mト直線 a トガ平行ナラバ,Mト a ヲ含ム平面Nトノ交線 b ハ a ニ平行デアル。



2. 平行二直線 a, b ノ一ツ a ノミヲ含ム平面Mト,b ノミヲ含ム平面Nトノ交線 c ハ a, b ノ各〻ニ平行デアル。

3*. 同一直線ニ平行ナ二直線ハ互ニ平行デアル。

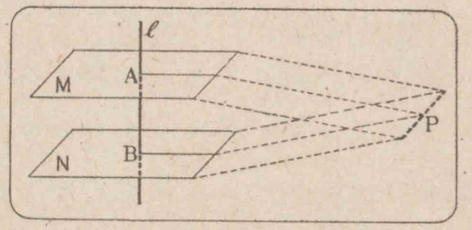
4*. 一直線 a ニ平行ナ二平面ノ交リハ a ニ平行デアル。

70. 平行ナ平面

[定理] 69. 一ツノ直線ニ垂直デアル二平面ハ互ニ平行デアル。

[假設] 直線 l 上ノ二點A, Bニ於テ夫々 l ニ垂直デアル平面ヲM. Nトスル。

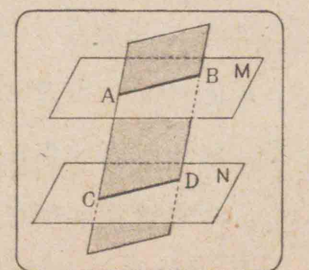
[終結] M∥N



[證明] A, Bヲ通ツテ夫々平面M, N上ニアル直線ハスベテ l ニ垂直デアル(定理65)。ソレ故モシ二平面M, Nガ交ルドスレバ,ソノ交線上ノ一點PトA及ビBトヲ結ブ二ツノ直線ハ共ニ l ニ垂直デナケレバナラナイ。コレデハ直線外ノ一點カラ一直線 l ニ二ツノ垂線ガ引ケルコトトナリ不合理デアル。

ヨツテM, Nハ交ラナイ。即チ　M∥N

[定理] 70. 一平面ガ平行二平面ト交ルトキハ,ソノ交線ハ互ニ平行デアル。



[證明] 省略スル。

[系] 1. 平行二平面M, Nノ一ツMニ垂直デアル直線 g ハNニ

モ垂直ニ交ル。(N上ノ一點ト g トヲ含ム平面ヲ作レ)

[系] 2. 平行二平面ニ垂直デアル數多ノ直線ガ,コノ二平面ニヨツテ截リ取ラレル線分ハ,スベテ長サガ相等シイ。(コノ長サヲ平行二平面間ノ距離トイフ)

問題

1. 教室内デ平行二平面ト看做シ得ル場所ヲ言ヘ

2. 相交ル二直線ノ何レニモ平行デアル平面ハ,ソノ二直線ガ決定スル平面ニ平行デアル。

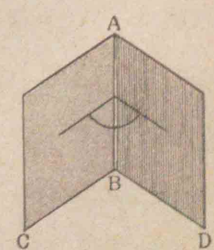
3*. 平面外ノ一點ヲ通ツテ,コノ平面ニ平行デアル平面ハ唯一ツデアル。

4*. 同一平面ニ平行ナ二平面ハ互ニ平行デアル。

5*. 角ABCト角DEFニ於テAB∥DE, BC∥EFトスレバ,兩角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。

71. 垂直ナ平面

一直線ヲ界トスル二ツノ半平面ノ開キヲ二面角トイヒ,コノ直線ヲ二面角ノ稜,各半平面ヲ二面角ノ面トイフ。



右圖デABハ稜,半平面ABC, ABDハ二面角ノ面デアル。コレヲ二面角ABCD又ハ二

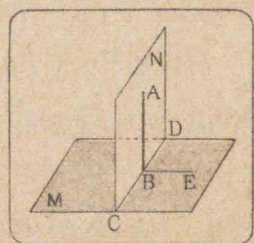
面角 AB ト書ク。

二面角ノ稜上ノ一點カラソノ稜ニ垂直ニ各面上ニ引イタ二直線ノナス角ノ大イサハ,ソノ點ノ位置ニ關セズ一定デアル(前問題5)。コレヲ二面角ノ平面角トイフ。

平面角ガ直角デアル二面角ノ二面ヲ夫夫含ム二平面ハ互ニ垂直デアルトイフ。

平面M,Nガ互ニ垂直デアルコトヲ M⊥N ト書ク。

定理 71. 一平面ニ垂直デアル直線ヲ含ム任意ノ平面ハモトノ平面ニ垂直デアル。



假設 平面Mノ垂線ヲABトシ,ABヲ含ム平面ヲNトスル。

終結 M⊥N

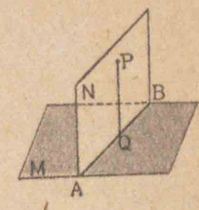
證明 ABトMトノ交點ヲBトシ,M,Nノ交線ヲCDトスレバ,BハCD上ニアル。今Bヲ通リM上ニアッテCDニ垂直デアル直線BEヲ引ケバ,

AB⊥Mデアルカラ AB⊥CD 且ツ AB⊥BE

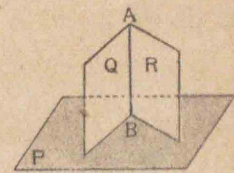
∠ABEハM,Nノ作ル二面角ノ平面角デアッテ,ソレガ直角デアルカラ,M⊥Nデアル。

系 1. 互ニ垂直デアル二平面M,Nノ一ツNノ上ノ

任意ノ一點Pヲ通リ,Mニ垂直デアル直線ハN上ニアッテ,且ツ兩平面ノ交線 AB ニ垂直デアル。(點PカラM,Nノ交線ニ垂線ヲ作レ)

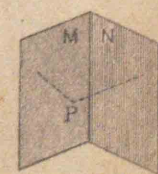


系 2. 一平面Pニ垂直デアル二平面Q,Rガ交ルトキ,ソノ交線ABハPニ垂直デアル。(AB上ノ任意ノ一點ヲ通リ,Pニ垂直ナ直線ヲ作ツテ系1ヲ利用セヨ)



問題

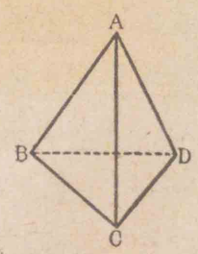
1. 教室内デ二面角ガ直角デアル場所ヲ言ヘ。
2. 互ニ垂直デアル二平面M,Nノ交線 AB 上ノ一點Pヲ通リ, AB ニ垂直デアル直線 PC ヲM上ニ引クトキハ,PC⊥N デアル。
3. 二面角ノ稜ニ垂直デアル平面ハ,コノ二面角ノ各〻ノ面ニ垂直デアル。
4. 相交ル二平面M,Nノ各〻ヘ任意ノ一點Pカラ引イタ二ツノ垂線ノナス角ハ,コノ二平面ガ作ル二面角ノ平面角或ハソノ補角ニ等シイ。



第二章　多面體

72. 多面體ノ種類

幾ツカノ多角形デ圍マレテキル立體ヲ**多面體**トイフ。

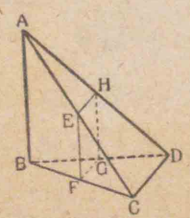


多面體ヲ圍ンデキル各〻ノ多角形ヲ多面體ノ**面**,相隣ル二面ノ交線ヲ**稜**トイヒ,稜ト稜トノ交點ヲ**頂點**トイフ。

多面體ハソノ面ノ數ニ從ツテ**四面體**,**五面體**,……トヒ,コレヲ表ハスニハ頂點ヲ列記スル。例ヘバ上圖ノ多面體ヲ表ハスニハ**多面體ABCD**ト書ク。

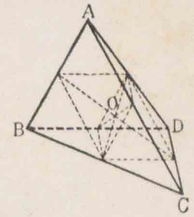
問　題

1. 多面體ヲ作ルニハ,少クモ幾ツノ面ガ必要カ。
2. 四面體ノ面,頂點,稜ノ數ヲイヘ。
3. 多面體ノ同一面上ニナイ二頂點ヲ結ブ線分ヲソノ**對角線**トイフ。四面體ニハ對角線ガアルカ。立方體ニハ對角線ガ幾ツアルカ。



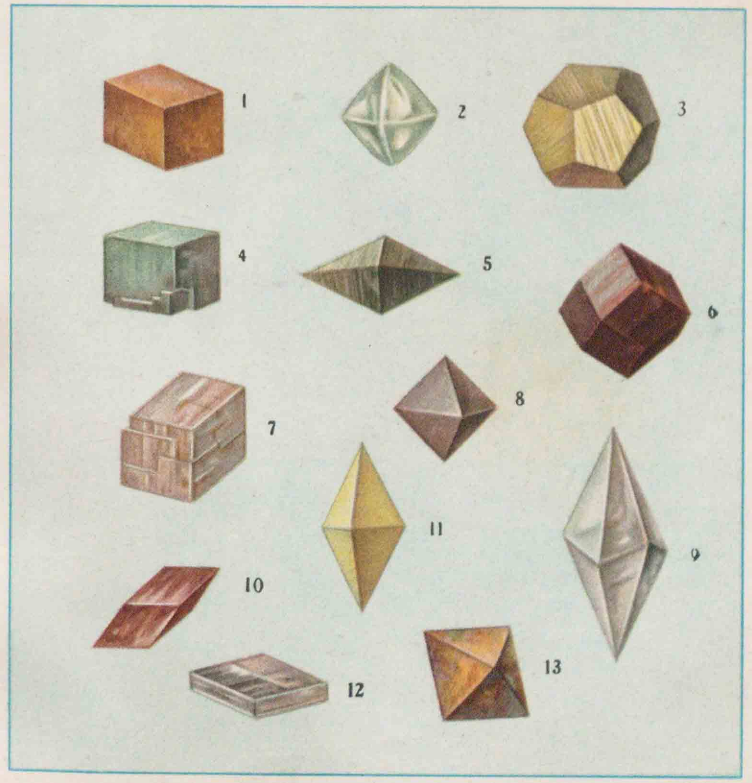
4. 四面體ノ相交ラナイ二稜ヲ**對稜**トイフ。四面體ノ二組ノ對稜ノ中點ハ一ツノ平行四邊形ノ頂

點トナル。



5. 四面體ノ各組ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三線分ハ同一ノ點ヲ通リ,且ツ互ニ他ヲ2等分スル。

自然界ニ存在スル多面體

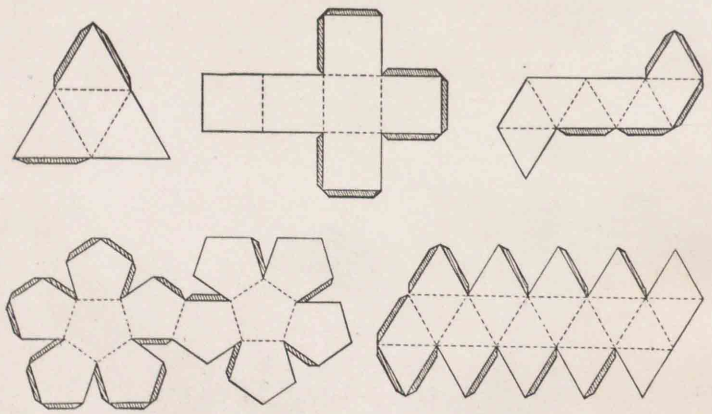


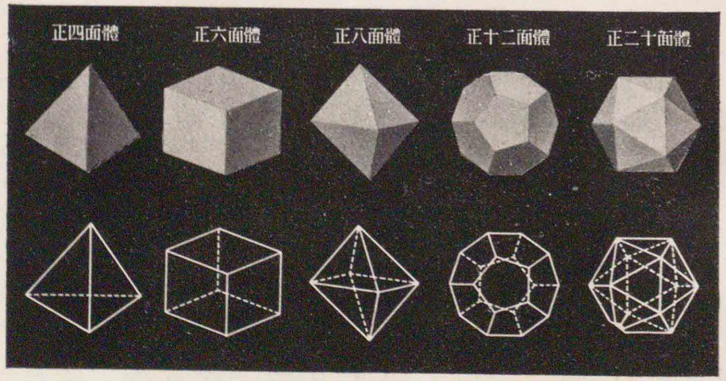
1. 銅　2. 金剛石　3. 黄鐵鑛　4. 礬石　5. 硫砒鐵鑛　6. 柘榴石　7. はろげん鹽
8. 磁鐵鑛　9. 犬牙石　10. 菱亞鉛鑛　11. 硫　黄　12. 重晶石　13. 黄銅鑛

[I] 正多面體

多面體ノ各面ガスベテ合同デアル正多角形デ各項點ニ集ル面ノ數ガ皆等シイモノヲ**正多面體**トイフ。

正多面體ニハ次ノ五種ガアツテ,コノ他ニハナイ。



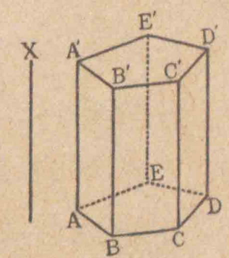


立體ヲ幾ツカノ線ニ沿ウテ切開イテ,ソノスベテ

ノ面ヲ一平面上ニ展ゲタ圖形ヲソノ立體ノ**展開圖**トイフ。前圖ハ正多面體ノ展開圖デアル。(影ヲツケタ處ハ模型ヲ作ルトキ糊付スルトコロ)

[II] 角壔

一ツノ直線ニ平行デアル三ツ以上ノ平面ト,コノ直線ニ交ル二ツノ平行デアル平面トデ圍マレタ多面體ヲ**角壔**トイフ。



角壔ノ平行デアル二面ヲ各、**底面**又ハ**底**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。又底デナイ面ヲ**側面**トイヒ,二側面ノ交線ヲ**側稜**トイフ。

角壔ハソノ底面ガ三角形,四角形,……ナルカニヨツテ**三角壔四角壔**,……トイフ。

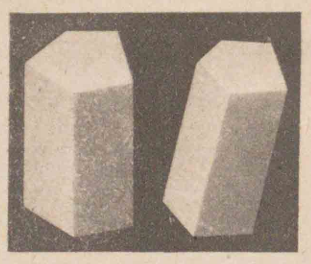
上ノ五角壔ヲ表ハスニ**ABCDE-A'B'C'D'E'**ト書ク。

167頁問題4,定理70及ビ169頁問題5ニヨリ直チニ次ノ定理ガ證明サレル。

定理 72. **角壔ノ側稜ハ互ニ平行シ,側面ハスベテ平行四邊形デアル。**

又角壔ノ兩底面ハ合同ナ多角形デアル。

側稜ガ兩底面ノ各ニ垂直デアル角壔ヲ**直角壔**トイヒ,サウデナイモノヲ**斜角壔**トイフ。

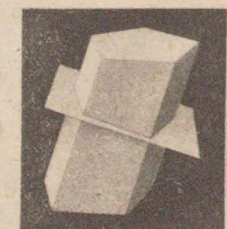


又底面ガ正多角形デアル直角壔ヲ特ニ**正角壔**トイフ。

四角壔ノウチ,底面ガ平行四邊形デアルモノヲ**平行六面體**トイヒ,底面ガ矩形デアル直角壔ヲ**直六面體**又ハ**直方體**トイフ。又各面ガ正方形デアル直六面體ヲ**立方體**トイフ。(10頁ノ圖參照)

注意 平行六面體,直六面體,立方體デハ何レノ面ヲモ底面ト看做スコトガ出來ル。

多面體ヲ一平面デ截ツテ得タ多角形ヲ**截口**トイフ。角壔ノ一側稜ニ垂直デアル平面ハスベテノ側稜ニ垂直デアル(定理67系1)。カヤウナ截口ヲ角壔ノ**直截面**トイフ。

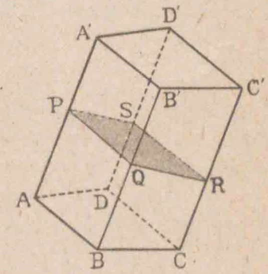


問題

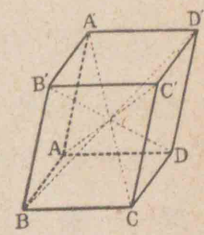
1. 平行六面體,立方體ノ各々ノ場合ニ於テ相對スル面ノ間ニハ如何ナル關係ガアルカ。

2. 側稜ガ3cmデ,底ノ一邊ガ2cmノ正三角形デアル直角壔ノ側面積及ビ全表面積(スベテノ面ノ面積ノ和)ヲ求メヨ。

3. 角壔ノ側面積ハ,ソノ直截面ノ周ト側稜トノ積ニ等シイ。(圖デPQRSヲコノ角壔ノ直截面トスレバ,PQ, QR, ……ハ夫々▱A'B, ▱B'C, ……ノ高サトナル)



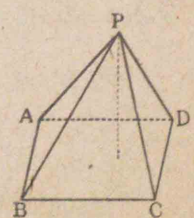
4. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ通リ,且ツ互ニ他ヲ2等分スル。



[III] 角錐

多角形ノ各頂點ヲソノ平面外ノ一點ニ結ビツケテ出來ル三角形ト,モトノ多角形トデ圍マレタ立體ヲ**角錐**トイフ。

コノトキ多角形ノ平面外ニトツタ點ヲ角錐ノ**頂點**トイヒ,コノ多角形ヲ角錐ノ**底面**又ハ**底**トイフ。又底面ノ各邊ヲ底トシ,頂點ヲ共通ノ



頂點トスル各三角形ヲ角錐ノ側面,頂點ニ集マル稜ヲ側稜トイフ。角錐ノ高サトハ頂點カラ底面ニ下シタ垂線ノ長サデアル。

角錐ハ底面多角形ノ邊數ニ從ツテ**三角錐**,**四角錐**,……トイフ。

前圖ノ四角錐ヲ表ハスニ **P-ABCD** ト書ク。

側稜ノスベテガ相等シク,且ツ底面ガ正多角形デアル角錐ヲ**正角錐**トイフ。

問題

1. 正角錐ノ頂點カラ底面ニ下シタ垂線ハ底デアル正多角形ノ中心ヲ通ル。

*2. 正角錐ノ側面積ハ底ノ周ト頂點カラ底面多角形ノ一邊ニ下シタ垂線ノ長サ(コレヲ正角錐ノ斜高トイフ)トノ積ノ半分ニ等シイ。

3. 正四面體ノ一稜ノ長サガ a cm デアルトキ,斜高及ビ高サハ各,幾糎デアルカ。

73. 多面體ノ體積

立體ガ占メル空間ノ有限ナル部分ノ大イサヲソノ**體積**トイフ。

一ツノ立體Aガ占メル空間ノ部分ノスベテガ,ソ

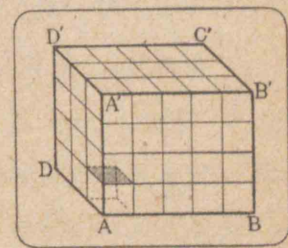
ノ形ヲ變ヘナイデ,又他ノ立體Bニヨツテモ占メ得ルトキ,コノ兩立體ハ**合同**デアルトイフ。

合同デアル立體ノ體積ハ相等シイ。

[I] 直角壔ノ體積

定理 **73. 直方體ノ體積ヲ表ハス數ハ,ソノ一頂點ニ集マル三稜ノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シイ。**

即チ右圖デAニ集マル三稜 AD, AB, AA′ ノ長サヲ表ハス數ヲ夫々 a, b, c トシ,體積ヲVトスレバ, $V=abc$



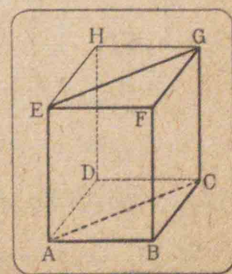
證明 省略スル。

本定理ヲ略シテ次ノヤウニイフ。

直方體ノ體積ハソノ縱橫,高サノ積ニ等シイ。

系 **直方體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。**

定理 **74. 底面ガ直角三角形デアル直角壔ノ體積ハ底面積ト高サ(又ハ一側稜)トノ積ニ等シイ。**

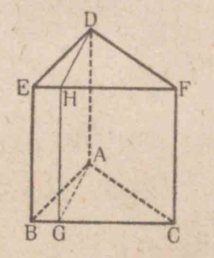


證明 直角壔 ABC-EFG ノ底面ABCノ角Bガ直角デアルトスル。今 BA, BC ヲ二隣邊トスル

矩形ABCDヲ作リ,コレヲ底面トシ,側稜ハBFニ等シイ直方體ABCD–EFGHヲ考ヘレバ,コノ直角壔ハ平面ACGEニヨツテ二ツノ合同デアル三角壔ABC–EFG, CDA–GHEニ分タレル。

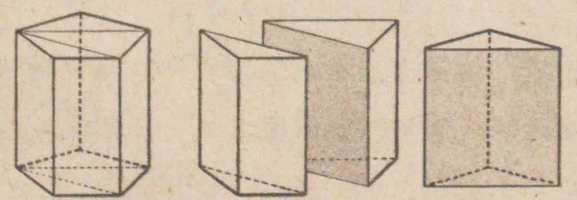
∴ ABC–EFGノ體積$=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot BF=(\triangle ABC)\times BF$

系 **1.** 底面ガ三角形デアル直角壔ノ體積ハ底面積ト高サ(又ハ一側稜)トノ積ニ等シイ。



(圖ニ於テ△ABCノ最大角ヲAトシ,頂點Aカラ對邊BCニ垂線AGヲ下セバ,GハBC上ニアル。ソコデAGヲ含ミ,底面ABCニ垂直ナ平面ADHGデ截レバ,三角壔ハ底面ガ直角三角形デアル二ツノ直角壔ニ分タレル)

系 **2.** 直角壔ノ體積ハ,底面積ト高サ(又ハ一側稜)トノ積ニ等シイ。(系1ニ歸セヨ)

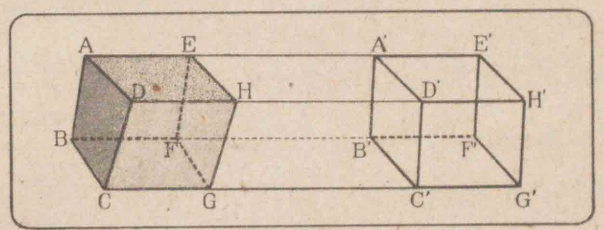


[II] 斜角壔ノ體積

定理 **75.** **斜角壔ノ體積ハソノ直截面ヲ底面トシ,**

側稜ノ一ツニ等シイ高サヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シイ。

證明 假ニ四角壔ヲ取リ,ソノ底面ヲABCD及ビEFGHトスル。各側稜AE, BF, CG, DHヲ夫々コノ方向ニ延長シ,コレ等ヲ夫々A′, B′, C′, D′デ截ル一ツノ直截面A′B′C′D′ヲ作リ,又AA′ノ方向ニA′カラAEニ等シクA′E′ヲ取リ,E′ヲ通ル直截面E′F′G′H′ヲ作リ,直線BB′, CC′, DD′トノ交點ヲ夫々F′, G′, H′トスル。



A′B′C′D′–E′F′G′H′ハモトノ角壔ノ直截面ヲ底面トシ,高サハモトノ角壔ノ側稜ノ一ツニ等シイ直角壔デアル。

∴ $A'E'=B'F'=G'C'=D'H'=AE=BF=CG=DH$

ヨツテ $AA'=EE',\ BB'=FF',\ CC'=GG',\ DD'=HH'$

又 四邊形ABCD≡四邊形EFGH

四邊形A′B′C′D′＝四邊形E′F′G′H′

故ニ二ツノ立體 ABCD–A′B′C′D′, EFGH–E′F′G′H′

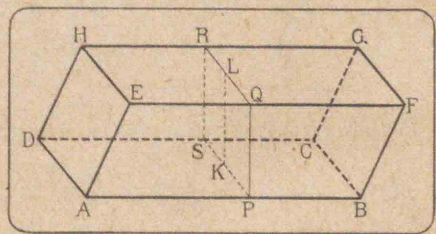
(一般ニハ角壔ニナラヌ)ハ,E, E′ガ夫々A, A′ニ, E′F′, E′H′

ガ夫々 $A'B'$, $A'D'$ ノ上ニ來ルヤウニ重ネ合スコトガ出來ル。即チ合同デアル。ヨツテ體積ハ相等シイ。ソノ各、カラ立體 $EFGH\text{–}A'B'C'D'$ ノ體積ヲ取リ去ツタ殘リハ相等シイ。即チ角壔 $ABCD\text{–}EFGH$ ノ體積ハ直角壔 $A'B'C'D'\text{–}E'F'G'H'$ ノ體積ニ等シイ。

系　角壔ノ體積ハ直截面ノ面積ト一側稜トノ積ニ等シイ。

定理 76.　平行六面體ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

証明　$ABCD\text{–}EFGH$ ヲ平行六面體トシ,ソノ底面ノ一ツヲ $ABCD$ トスル。コノ六面體ハ $AEHD$, $BFGC$ ヲ底トスル角壔デアルトモ考ヘラレル。



今ソノ直截面 $PQRS$ ヲ作レバ,前定理系ニヨリ

$$\text{平行六面體ノ體積} = PQRS\ \text{ノ面積} \times AB$$

又平行二直線 PS, QR ノ距離ヲ KL トスレバ

$$PQRS\ \text{ノ面積} = PS \times KL$$

サテ $PQRS$ ハ直截面ナル故　$PQ \perp AB$, $PS \perp AB$

$\therefore$　平面 $PQRS \perp$ 平面 $ABCD$　(定理71)

$\therefore$　$KL \perp$ 平面 $ABCD$,　$KL \perp$ 平面 $EFGH$

(171頁問題2,定理70系1)

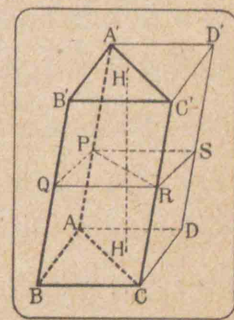
$\therefore$　平行六面體ノ體積 $= PS \cdot KL \cdot AB$

$= (PS \cdot AB) KL$

即チ　平行六面體ノ體積＝底面積×高サ

定理 77.　斜三角壔ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

証明　$ABC\text{–}A'B'C'$ ヲ三角壔トスル。底面 ABC ノ二邊,例ヘバ BA, BC ヲ二隣邊トスル平行四邊形 $ABCD$ ヲ作リ,コレヲ底面トシ, AA' ヲ側稜ニ有スル平行六面體 $ABCD\text{–}A'B'C'D'$ ヲ作ル。次ニ側稜ト交ル直截面 $PQRS$ ヲ作リ,コノ面ト平面 $ACC'A'$ トノ交リヲ PR トスル。PR ハ平行四邊形 $PQRS$ ノ面積ヲ2等分スル。故ニ定理75ニヨリ



三角壔 $ABC\text{–}A'B'C'$ ノ體積

$= $ 三角壔 $ACD\text{–}A'C'D'$ ノ體積

$= \dfrac{1}{2}$(平行六面體 $ABCD\text{–}A'B'C'D'$ ノ體積)

$= \dfrac{1}{2}$(底面 $ABCD$ ノ面積)×(高サ HH')

$=(\triangle ABC$ ノ面積$)\times($三角壔ノ高サ $HH')$

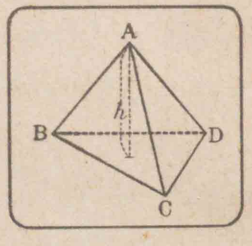
系 斜角壔ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

[III] 角錐ノ體積

三角錐ノ體積ニ關シテ次ノ定理ガアル。

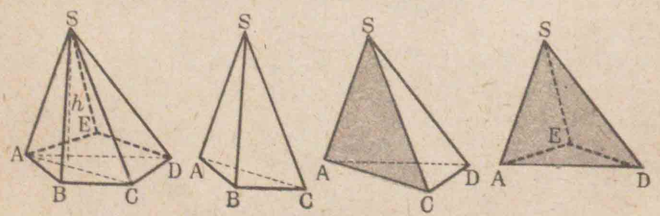
定理 78. 三角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。

即チ三角錐 A-BCD ノ底面ヲ $\triangle BCD$, 高サヲ h, 體積ヲ V トスレバ, $V=\frac{1}{3}.\triangle BCD\times h$



コノ定理ノ證明ハ容易デナイカラ省略スル。

系 角錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。



問題

1. 三角壔ノ側稜ノ長サ 3 m デ,直截面ノ三邊ノ長サガ夫々 30 cm, 40 cm, 50 cm デアルモノノ體積ハ

幾立方粍カ。

2. 正六角壔ノ底面ノ一邊ガ 4 cm デ,側稜ノ長サガ 10 cm デアルトキ,ソノ體積ヲ求メヨ。

3. 體積ガ 1728立方粍アル立方體ノ全表面積ハ幾平方粍カ。($\sqrt[3]{1728}=12$)

4. 高サ 22 cm デ,底面三角形ノ底邊ガ 10 cm, 高サガ 15 cm アル三角錐ノ體積ヲ求メヨ。

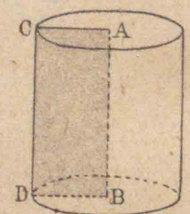
5. えぢぷとニアル最大ナぴらみっどハ四角錐デ,高サガ 145 m, 底ハ一邊ガ 233 m アル正方形デアルトイフ。コノ體積ハ幾立方米カ。

第三章　旋轉體

74. 直圓壔

平面圖形ガソノ圖形ヲ含ム平面上ノ一直線ヲ軸トシテ一廻轉シタトキ生ズル立體ヲ**旋轉體**トイフ。

矩形 ABDC ガソノ一邊 AB ヲ軸トシテ一廻轉シタトキ生ズル立體ヲ**直圓壔**トイフ。

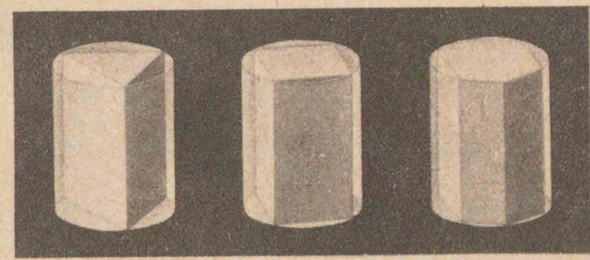


コノトキ矩形ノ二邊 AC, BD ガ畫ク圓ヲ**底面**又ハ**底**トイヒ,底面ノ半徑(AC)ヲ直圓壔ノ**半徑**,兩底間ノ距離(AB)ヲ直圓壔ノ**高サ**トイフ。又軸ノ對邊 CD ヲ直圓壔ノ**母線**トイヒ,母線ガ畫ク曲面ヲ**側面**トイフ。

直圓壔ノ一ツノ底面ニ內接又ハ外切スル多角形ヲ底トシ,高サガ直圓壔ノ高サニ等シイ直角壔ノ他ノ底面ハ又直圓壔ノ他ノ底面ニ內接又ハ外切スル。コノヤウナ直角壔ハ直圓壔ニ**內接**又ハ**外切スル**トイフ。

直圓壔ニ內接スル正角壔ノ側面積及ビ體積ハソ

ノ底デアル正多角形ノ邊數ガ增大スルニ從ツテ漸次直圓壔ノ側面積及ビ體積ニ近ヅクモノデアル。



即チ直圓壔ハ底面ガ圓トナツタ特別ノ正角壔デアルト看做シテ側面積及ビ體積ヲ計算シテヨイ。ヨツテ次ノ定理ガ得ラレル。

定理 79. 直圓壔ノ側面積ハ一ツノ底ノ周ト高サトノ積ニ等シイ。

又體積ハ一ツノ底ノ面積ト高サトノ積ニ等シイ。

系　直圓壔ノ半徑ヲ r,高サヲ h トスレバ,

[1]　側面積 $= 2\pi rh$

[2]　全表面積 $= 2\pi r(r+h)$

[3]　體積 $= \pi r^2 h$

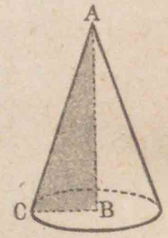
問題

1. 矩形ノ相隣ル二邊ノ長サガ夫々 a, b デアルトキ,ソノ各ヲ軸トシテ廻轉シテ得タ二ツノ直圓壔ノ側面積及ビ體積ノ比各如何。

2.　半徑ガ1cmアル硝子製ノ圓筒ノ側面ニ1立方糎ヅツノ容積ヲ表ハス目盛ヲ附ケルニハ,目盛ノ間隔ヲ如何程ニスレバヨイカ。

75. 直圓錐

直角三角形ABCノ直角ヲ夾ム邊ABヲ軸トシテ一廻轉シタトキ生ズル立體ヲ**直圓錐**トイフ。



コノトキ直角ノ他ノ邊BCガ畫ク圓ヲ直圓錐ノ**底面**又ハ**底**トイヒ,Aヲ**頂點**,軸トシタ邊ノ長サABヲ直圓錐ノ**高サ**トイフ。又斜邊ACヲ**母線**トイヒ,母線ガ畫ク曲面ヲ**側面**,母線ノ長サヲ**斜高**トイフ。

正多角錐ガ直圓錐ト同一ノ頂點ヲ有シ,底ガ直圓錐ノ底ニ内接又ハ外切スルトキ,コノ正多角錐ハ直圓錐ニ**内接**又ハ**外切スル**トイフ。

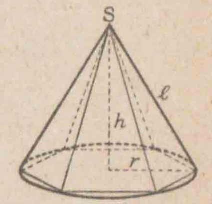
直圓壔ニ内接スル正角壔ノ場合ト同樣ニ,直圓錐ニ内接スル正多角錐ノ底ノ邊數ガ漸次増大スルニ從ツテ,ソノ側面積ト體積ハ漸次直圓錐ノ側面積ト體積ニ夫々近ヅク。

即チ直圓錐ハ正角錐ノ底面ガ圓トナツタ特別ノ場合デアル。ヨツテ次ノ定理ガ得ラレル。

定理 80. **直圓錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ積ノ$\frac{1}{2}$ニ等シイ。**

又體積ハ底ト高サトノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。

系　直圓錐ノ高サヲh,斜高ヲl,底ノ半徑ヲrトスレバ,



[1]　側面積$=\pi rl$

[2]　全表面積$=\pi r(r+l)$

[3]　$l=\sqrt{r^2+h^2}$

[4]　體積$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

問題

1.　漏斗ノ直圓錐形ノ部分ノ底ノ直徑ハ10cm,高サハ10cmデアル。コノ部分ノ容積ハ約幾りっとるデアルカ。但シ$\pi=3.1416$トシテ計算セヨ。

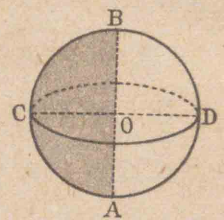
2.　半徑10cm,中心角120°ノ扇形デ作ツタ直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。又底面積ト側面積トノ比ハ如何。但シ$\pi=3.1416$トシテ計算セヨ。

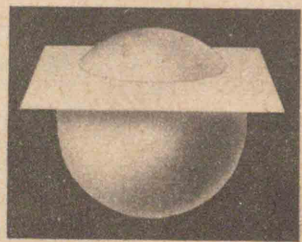
76. 球

半圓ガ,ソノ直徑(AB)ヲ軸トシテ一廻轉

シタトキ生ズル**立體**ヲ**球**トイフ。

コノトキ半圓周ガ畫ク曲面ヲ**球面**トイヒ,半圓ノ中心Oヲ球ノ**中心**又ハ**球心**トイフ。又球心カラ球面マデノ距離(即チ半圓ノ半徑)ヲ球ノ**半徑**トイヒ,球心ヲ通リソノ兩端ガ球面デ終ル線分ヲソノ**直徑**(例ヘバ圖ノAB)トイフ。





球ヲ平面デ截ルトキ,ソノ截口ハ必ズ圓トナルモノデアル。球心ヲ通ル平面デ截ツタ截口ヲ球ノ**大圓**トイヒ,球心ヲ通ラナイ平面デ截ツタ截口ヲ球ノ**小圓**トイフ。

次ノコトハ球ノ定義カラ明ラカデアル。

[1] 半徑ガ相等シイ球ハ合同デアル。

[2] 一ツノ球デハ半徑及ビ直徑ノ長サハ一定デアル。

[3] 球面ハ中心カラ半徑ニ等シイ距離ニアル點ノ軌跡デアル。

球ニ關シテ次ノ定理ガアル。

定理 **81.** 球ノ表面積ハ大圓ノ面積ノ4倍ニ等シ

イ。又體積ハ表面積ト半徑トノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シイ。

コノ證明ハ容易デナイカラ省略スル。

系 球ノ半徑ヲrトスレバ,

[1] 表面積$=4\pi r^2$

[2] 體積$=\frac{4}{3}\pi r^3$

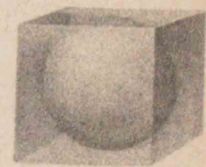
問題

1. 地球ヲ球ト看做セバ,

① 赤道ハソノ球ノ何ニ當ルカ。

② 緯度經度ハソノ球ノ何ニ當ルカ。

2. 丁度球ヲ入レルニ足ル立方體ノ體積ト球ノ體積トノ比ハ $6:\pi$ デアル。



3. 地球ノ大圓ノ周ハ約 40000 km デアル。地球ノ表面積及ビ體積ハ約何程カ。但シ $\pi=3.1416$ トスル。

4. 斜邊ノ位置ト長サガ一定デアルトキ,直角三角形ノ直角頂ノ軌跡ハ何カ。

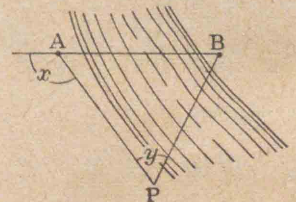
第七篇

簡易測量

第一章　幾何學ノ應用

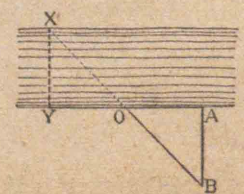
76.　二等邊三角形ノ應用

例　川ヲ隔テタ二點A, B ノ距離ヲ測ルトキ,圖ノヤウニ直線 AB ト角 x ヲナス直線 AP 上ノ一點P カラ B ヲ見テ, AP ト PB トノナス角 y ガ $\frac{1}{2}x$ トナルヤウニ點P ノ位置ヲ定メ, AP ノ長サヲ實測スレバ,コレハ AB ノ長サトナル。(理由ヲイヘ)



77.　合同三角形ノ應用

例　川幅 XY ヲ測ルトキ,圖ノヤウニ XY ト直角ヲナス方向ニ YA ヲ實測シテソノ中點O ヲ定メテ棒ヲ立テル。次ニ A ニ於テ YA ト直角ヲナス直線上デ, XO ノ延長ニ當ル點B



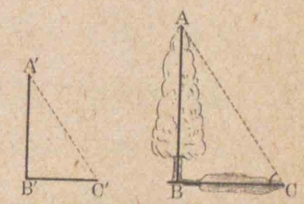
ヲ定メ, AB ヲ實測スレバ,コレガ XY ノ長サトナル。(理由ヲイヘ)

78.　相似三角形ノ應用

例1　樹木ノ高サ AB ヲ測ルトキ,ソノ影ノ長サ BC ヲ測リ,次ニ長サ既知ナル棒 A′B′ ヲ地上ニ直立セシメ,ソノ影ノ長サ B′C′ ヲ測レバ,二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ハ相似トナル。

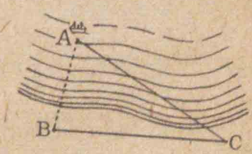
故ニ　　$AB : A'B' = BC : B'C'$

$\therefore$　　$AB = \dfrac{BC \times A'B'}{B'C'}$



例2　右圖デ A ヲ海上ニアル船ノ位置トシ, B ヲ海邊ノ一點トスル。 A, B 間ノ距離ハ次ノ如クシテモ求メルコトガ出來ル。

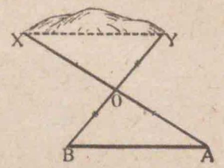
先ヅ海邊ニ線分 BC ヲトリ,ソノ長サヲ實測シ,又 B 及ビ C ニ於テ ∠ABC, ∠ACB ヲ測ル。 次ニ紙上ニコレト相似ナ三角形ヲ書キ, BC, AB ニ對應スル邊ノ長サヲ測レバ,計算ニヨッテ AB ノ長サヲ求メルコトガ出來ル。



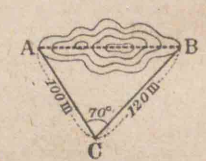
問題

1.　川幅ヲ測ルタメニ或人ガ次圖ノヤウニ,河岸ノ

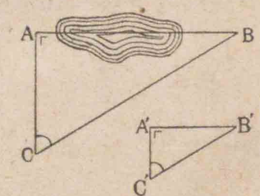
一點 C ニ立ツテ對岸ノ一點 B トコノ人ノ目ト手先トガ一直線上ニアルヤウニシ,ソノマヽ廻レ右ヲナシ,目ト手先トヲ結ブ直線ガ地面ト交ル點 B′ ヲ定メタ。川幅 BC ハ如何ニシテ求メラレルカ。



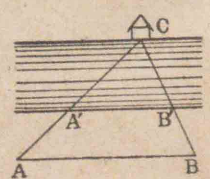
2. 右圖ニヨツテ岡ノ兩端 XY ノ距離ヲ測ル方法ヲ案出セヨ。



3. 或池ノ對岸ノ二點 A, B ノ距離ヲ測ルタメニ,池外ノ一點 C ヲ定メ, AC, BC 及ビ ∠ACB ヲ測ツタトコロガ,右圖ノヤウデアツタ。AB ヲ求メヨ。(方眼紙ト分度器トヲ用ヒヨ)



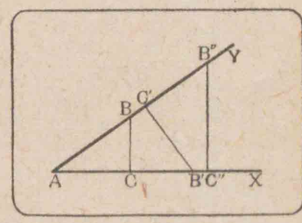
4. A, B 間ノ距離ヲ測ラウトシテ右圖ノヤウナ方法ヲトツタ。$\angle A=\angle A'=\angle R$, $A'B'=12$ cm, $A'C'=9$ cm, $AC=30$ m トシテ AB ヲ求メヨ。



5. 右圖デ $AB \parallel A'B'$, $AB=24$ m, $A'B'=18$ m, $AA'=9$ m トシテ AC ヲ求メヨ。

第二章 三角函數ノ應用

79. 銳角ノ三角函數



銳角 XAY ノ邊 AY 又ハ AX 上ノ任意ノ點 B, B′, B″ カラ他ノ邊 AX 又ハ AY ヘ垂線 BC, B′C′, B″C″ ヲ下セバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \backsim \triangle AB''C''$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}=\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B''C''}{AC''}=\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ソシテコレ等 (1), (2), (3) ノ値ハ角ガ一定ナラバ,夫々一定デアツテ,邊ノ大小ニハ無關係デアル。

コレ等ノ比ヲ ∠A ノ三角函數トイフ。

三角函數ノ値ヲ種々ノ角ニツイテ表ニシタモノガアル。コレヲ三角函數ノ眞數表トイフ。(次頁)

(1) ヲ ∠A ノ**正弦**トイヒ, **sinA** ト書キ,

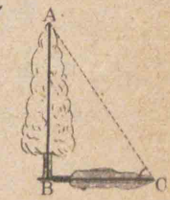
(2) ヲ ∠A ノ**餘弦**トイヒ, **cosA** ト書キ,

(3) ヲ ∠A ノ**正切**トイヒ, **tanA** ト書ク。

三角函數ノ眞數表

角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	∞

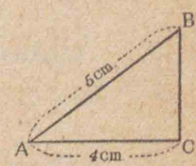
第78節ニ於テ樹木ノ高サヲ求メルトキ,長サ既知ノ棒ヲ地上ニ立テテ相似形ノ定理ヲ利用シタガ,三角函數ヲ用ヒレバ,一層簡單ニ求メルコトガ出來ル。



卽チCニ於テ∠BCAノ大イサヲ測レバ $\dfrac{AB}{BC}$ ノ値ガワカルカラ

$$AB=BC\times\frac{AB}{BC}=BC\tan C$$

問題

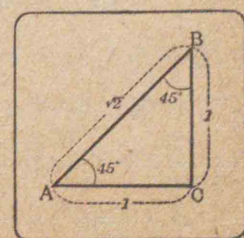


1. ∠Cガ直角デアル三角形ABCニ於テAB, ACガ夫々5 cm, 4 cmデアル。角Aノ正弦,餘弦,正切ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ。

2. $\cos A=\dfrac{1}{2}$ ナル角Aヲ作レ。又 $\tan A=\dfrac{2}{3}$ ナル角Aヲ作レ。

80. 45°, 30°, 60°ノ三角函數

[1] 45°ノ三角函數

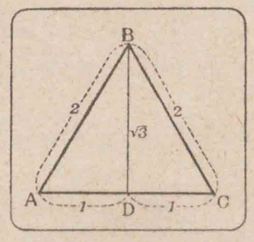


直角三角形ABCニ於テ∠C=90°, ∠A=∠B=45°トスル。AC=BCデアルカラコレヲ1トスレバ

$$AB=\sqrt{2}$$

$\therefore \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 45^\circ = 1$

[2] 30°, 60° ノ三角函數



正三角形ABCノ頂點Bカラ對邊AC ニ垂線ヲ下シ,ソノ足ヲDトスレバ,Dハ AC ノ中點デ $\angle A = 60^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ デアル。ソコデ $AD = 1$ トスレバ

$$AB = 2, \quad BD = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

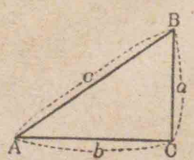
$\therefore \quad \sin 60 = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

又　$\tan 60^\circ = \sqrt{3}, \qquad \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

81. 直角三角形ノ原素間ノ關係

三角形ノ三邊及ビソノ三ツノ角ヲ三角形ノ**原素**又ハ**要素**トイフ。

直角三角形 ABC デ $\angle C$ ヲ直角トシ,各頂點デノ角ヲソノ頂點ヲ表ハス文字デ表ハシ,角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c デ表ハセバ,ソノ原素ノ間ニハ次ノ關係ガアル。



[1] $\angle A + \angle B = 90^\circ$

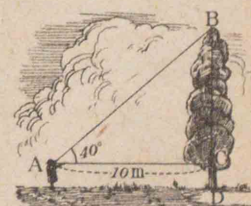
[2] $a^2 + b^2 = c^2$　　(ぴたごらすノ定理)

[3] $\begin{cases} a = c\sin A = c\cos B = b\tan A \\ b = c\sin B = c\cos A = a\tan B \\ c = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{a}{\cos B} = \dfrac{b}{\cos A} = \dfrac{b}{\sin B} \end{cases}$

コレ等ノ關係ヲ用ヒレバ,直角三角形ノ一邊ト他ノ一原素(直角ヲ除ク)トヲ知レバ,殘リノ原素ヲ求メルコトガ出來ルノデアル。

82. 三角函數ノ應用

例　或人ガ平地ニ直立スル樹木 BD ノ高サヲ測ラウトシテ,樹木カラ 10 m 離レタ點 A デ,頂上ノ點 B ノ仰角*ヲ測ッテ 40° ヲ得タ。樹木ノ高サヲ求メヨ。但シ眼ノ高サヲ 1.5 m トスル。



解　眼ヲ通ル水平線デ樹木ト交ルモノノ交點ヲ C トスレバ,$\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle C = \angle R, \ \angle A = 40^\circ, \ AC = 10\text{ m}$

$\therefore \quad BC = AC\tan A = 10\tan 40^\circ = 10 \times 0.8391$

$\qquad = 8.391$

---

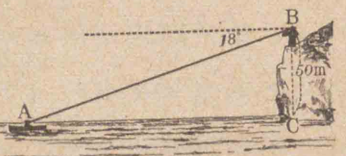
* 觀測者ノ眼ト觀測點トヲ連ネル直線ヲ**視線**トイヒ,視線ヲ含ム鉛直面内デ視線ト眼ヲ通ル水平線トノナス角ガ水平線ノ上ニアルトキハ**仰角**トイヒ,下ニアルトキハ**俯角**トイフ。

$BD=BC+CD=8.391+1.5=9.891$

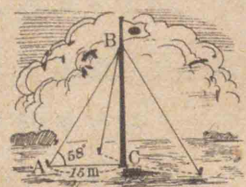
答　約 9.9 m

問題

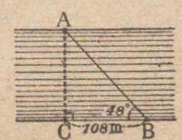
1. 海岸ニ立ツ高サ 50 m ノ斷崖ノ端Bニ於テ海上ニ浮ブ舟Aヲ望ンデ俯角18°ヲ得タ。舟カラ斷崖マデノ距離ヲ求メヨ。又觀測者ノ眼カラ舟マデノ距離ヲ求メヨ。



2. 地面ニ鍾直ニ立テタ旗竿 BCノ控綱ガ地面トナス角ハ58°デ,綱ト旗竿トノ地面上デノ距離ハ 15 m デアル。旗竿 BCノ高サヲ求メヨ。



3. 川ノ兩岸ガ平行デアル場所デ,ソノ一方ノ岸ノ點Cカラソノ岸ニ沿ウテ 108 m 距ツタ地點Bデ Cノ眞向ニアル對岸ノ點Aヲ望ンデ $\angle ABC=48°$ ヲ得タ。川幅 AC ヲ求メヨ。



4. 水平面ト28°ノ角ヲナス坂道ガアル。今 20 m ノ高サダケ昇ルニハ,コノ坂道ヲ約幾米歩マネバナラナイカ。

附錄　補充問題

第二篇　直線形

1. 直角三角形ノ二ツノ鋭角ノ差ハ,直角ノ頂點カラ引イタ中線ト斜邊ヘノ垂線トノナス角ニ等シイ。

2. 三角形ABCノ頂點B及ビCカラ夫々ソノ對邊ヘ下シタ垂線ノ足ヲD, EトシI,且ツ底邊 BC ノ中點ヲM,線分 DE ノ中點ヲNトスレバ, $MN \perp DE$。但シ $\angle A$ ハ直角デナイモノトスル。

3. 二等邊三角形ABCノ底邊 BC 上ノ任意ノ點ヲDトシ, AC ノ延長上ニ點Eヲトリ, $CE=CD$ ナラシメ, ED ノ延長ト AB トノ交點ヲFトスレバ, $\angle AFE=3\angle AEF$

4. 正三角形ABCノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點P, Q, Rヲトツテ $BP=CQ=AR$ ナラシメレバ,　$PQ=QR=RP$

5. 三角形 ABC ニ於テ $\angle ABC$, $\angle BCA$ ノ二等分線ニ頂點Aヨリ垂線ヲ引キ,ソノ足ヲ夫々D, Eトスレバ, $DE \parallel BC$

6. 二等邊三角形ABCノ等邊ノ一ツ AB 上ニ點Dヲトリ, AC ヲCヲ越エテEマデ延長シ, $CE=BD$ ナラシメ, DE, BC ノ交點ヲPトスレバ,

① $DP=PE$　　　② $BP>CP$

7. 三角形ABCノ邊 AB, AC 上ニ夫々點D, Eヲトリ,

BD=CE ナラシメレバ, DE<BC

8. 三角形ABC ノ ∠A ハ ∠B, ∠C ノ何レヨリモ大ナルトキ,邊AB, AC 上ニ夫々點D, E ヲトリ, BE, DE ヲ作レバ,

DE<BE<BC

9. 四邊形ノ邊AB, BC, CD, DA ガコノ順ニ順次ニ小サイモノトスレバ, ∠CDA>∠CBA (BD ヲ引ケ)

10. 三角形ABC ノ邊BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々D, E, F トスルトキ,三角形ABC ノ重心ト三角形DEF ノ重心トハ一致スルコトヲ證セヨ。次ニ三角形DEF ノ各邊ノ中點ヲ結ンデ三角形ヲ作リ,更ニコノ三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ンデ三角形ヲ作リ,次第ニコノ手續ヲ繰リ返ストキ,コレ等ノ三角形ハ如何ナル點ニ向ツテ收縮スルカ。且ツソノ理由ヲ述ベヨ。

11. 四邊形 ABCD ニ於テ AB=CD, ∠B=∠C ナルトキハ, AD ハ BC ニ平行デアル。

12. 或正多角形ノ邊數ナ9ダケ增シタ正多角形ヲ作ルトキ,一角ノ大イサハ丁度直角ダケ增ストイフ。初メノ正多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

13. 正八角形ノ一內角及ビ一外角ノ大イサヲ計算セヨ。

14. 四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點ヲ順ニ結ンデ出來ル四邊形ハ平行四邊形デ,特ニモトノ四邊形ノ對角線ガ相等シイトキハ,新シイ四邊形ハ菱形トナルコトヲ證セヨ。又新シイ四邊形ガ矩形又ハ正方形ナルタメニ,四邊形 ABCD ノ對角線ノ間ニアルベキ關係ヲ求メヨ。

15. 對角線ガ相等シイ四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫々E, F, G, H トスレバ, EG⊥FH

16. 四邊形 ABCD ノ各邊 AB, BC, CD, DA 及ビ對角線 AC, DB ノ中點ヲ夫々 A′, B′, C′, D′, E, F トスレバ,

① 四邊形 A′B′C′D′, A′EC′F, D′EB′F ハ何レモ平行四邊形デアル。

② A′C′, B′D′, EF ハ同一ノ點ヲ通リ,且ツ互ニ他ヲ2等分スル。

③ A′B′C′D′ ノ周ハ AC, BD ノ和ニ等シイ。

④ A′EC′F ノ周ハ AD, BC ノ和ニ等シク, D′EB′F ノ周ハ AB, CD ノ和ニ等シイ。

17. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ニ二點 E, F ヲトリ, AE=FC ナラシメレバ, BFDE ハ平行四邊形デアル。

18. 三角形ABC ノ二邊AB, BC ノ中點ヲ夫々D, E トシ,第三邊 CA 上ニ二點F, G ヲトリ, CF=FG=GA ナラシメ, DG, EF ノ延長ノ交點ヲHトスレバ, HGBF ハ平行四邊形デアル。

19. 正六角形 ABCDEF ニ於テ, AE ト BC トノ交點ヲ P トスレバ, PA=AE

20. 梯形 ABCD ニ於テ二角A, B ノ二等分線ノ交點ヲ E トシ,二角C, D ノ二等分線ノ交點ヲ F トスレバ, EF ハ兩底 AD, BC ニ平行デアル。

第三篇 圓

21. 圓ノ直徑上ノ一點ヲ通リコノ直徑ト等角ヲナス二ツノ弦ノ長サハ相等シイ。

22. 圓周ヲ四ツニ分チ,ソノ弧ヲ順次ニAB, BC, CD, DAトシ,コレ等ノ弧ノ中點ヲ夫々E, F, G, Hトスレバ,弦EGハFHト直交スル。

23. A, B, C Dハ同一圓周上ニ順次ニ配列サレタ四點デ,弦AD,弦BCハ相等シク,E, Fヲ夫々ソノ中點トスル。EFハ弦AB, 弦DCニ平行デ,且ツAB,DCノ和ノ半分ニ等シイ。

24. 圓ノ弦ABノ延長上ニ半徑ニ等シクBCヲトリ,點Cト圓ノ中心ヲ通ル直線CDEガ圓周ト交ル點ヲD, Eトスレバ,弧AEハ弧BDノ3倍ニ等シイ。コノトキ弦ABモ亦半徑ニ等シケレバ,弧BDハ圓周ノ幾分ノ幾ツトナルカ。

25. AB, CDハ中心Oナル圓ノ平行ナ二弦デADトBCトハ圓内ノ點Pデ交ルモノトスレバ, OPハ∠CPDヲ2等分スル。

26. 直角三角形ABCノ直角Cノ二等分線ハABヲ一邊トシテ外側ニ畫イタ正方形ノ兩對角線ノ交點ヲ通ル。

27. 三角形ABCノ外接圓ニ於テ,∠B,∠Cニ對スル弧ノ中點ヲ夫々P, Qトスルトキ,直線PQガ∠Aノ二邊ト交ッテ作ル三角形ハ二等邊三角形デアル。モシコノ三角形ガ正三角形ナラバ,ABCハ如何ナル三角形カ。

28. 圓ニ内接スル二等邊三角形ABCノ底角B内ニ弦BPヲ引キ,頂點AカラBPニ平行ニ引イタ直線ガ圓周ト交ル點ヲQトスレバ, AP ∥ CQ

29. 角Aガ60ナル三角形ABCノ内心ヲ中心トシテ,二邊AB, AC又ハソノ延長ト交ル圓ヲ畫キ,ソノAニ近イ交點ヲ夫々D, Eトスレバ,三角形ADEハ正三角形デアル。

30. 圓Oニ外切スル梯形ABCDノ兩底AD,BCニ中心Oヲ通ッテ平行線ヲ引キ,二邊AB,CDト交ル點ヲ夫々E, FトスレバEFハコノ梯形ノ周ノ$\frac{1}{4}$ニ等シイ。

31. 平行四邊形ABCDノ頂點Bヲ中心トシ,一邊BCヲ半徑トシテ畫イタ圓ガCD又ハソノ延長ト再ビ交ル點ヲEトスレバ,∠EACハ∠ABDト∠ACDトノ差ニ等シイ。

32. 圓Oニ圓外ノ一點Pカラ引イタ二ツノ切線ノ切點ヲA, Bトスレバ, ∠APB=2∠OAB

33. 圓周上ノ一點Cニ於ケル切線ヘ任意ノ直徑ABノ一端Aカラ垂線ADヲ下セバ, ACハ∠BADヲ2等分スル。

34. 鋭角三角形ABCノ頂點B, Cヨリソノ對邊ヘ下シタ垂線ノ延長ガ,コノ三角形ノ外接圓ト交ル點ヲ夫々D, Eトスレバ直線DEハ,Aニ於ケルコノ圓ノ切線ニ平行デアル。

35. 二ツノ角ト周トガ與ヘラレタトキ,三角形ヲ作レ。

36. 底邊ト二ツノ中線ガ與ヘラレタトキ,三角形ヲ作レ。

37. 與ヘラレタ三角形ABCノ各頂點ヲ中心トシテ圓ヲ畫キ,ソレ等ノ圓ノ何レノ二ツモ切スルヤウニセヨ。

38. 六角形ABCDEFガ圓ニ內接スルトキハ,

$$\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F$$

39. 三角形ABCノ垂線AD,BE,CFノ足ヲ夫々D,E,F,垂心ヲHトスレバ,

① △AEF △BDF,△CDEノ各ノ三ツノ角ハ夫々△ABCノ三ツノ角ニ等シイ。

② AD,BE,CFハ△DEFノ各角又ハ外角ノ二等分線デアル。

③ Dカラ邊AC,ABニ垂線DP,DQヲ下セバ,

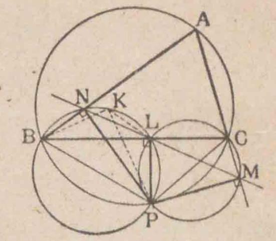
$$\angle APQ=\angle B, \qquad \angle AQP=\angle C$$

40. Hヲ鋭角三角形ABCノ垂心トシ,直線AH, BH, CHガ,ソノ外接圓ト交ル點ヲ夫々A′,B′,C′トスレバ,Hハ三角形A′B′C′ノ內心デアル。

41. 三角形ABCノ外接圓上ノ任意ノ點Pカラ三邊ヘ下シタ垂線PL,PM,PNノ足L,M,Nハ一直線上ニアル。

[コノ直線ヲしむさん(Simson)線トイフ]

証明 PC, PBヲ直徑トシテ夫々圓ヲ畫キ,又L,Mヲ結ビ,ソノ延長ガ後ノ圓ト交ル點ヲKトシ,KB,KPヲ作レバ, $\angle BKP=\angle R$ ……(1)



△BPC, △KPMニ於テ

$\angle CBP=\angle MKP$

$\angle BCP=\angle KMP$

∴ $\angle BPC=\angle KPM$ ………(2)

サテ∠BPCハ∠Aノ補角デ∠B+∠Cニ等シク,又∠KPMハ∠LPKト∠LPMトノ和デ,∠LPMハ∠Cニ等シイカラ

(2)ヨリ $\angle LPK=\angle B$ ∴ $\angle KBL=\angle B$…………(3)

ヨッテBKトBAトハ一致スル。即チ(3)ニヨリKハNト一致スルカラ,L,M,Nハ一直線上ニアルコトトナル。

42. 三角形デハ次ノ九ツノ點ハ同一圓周上ニアル。

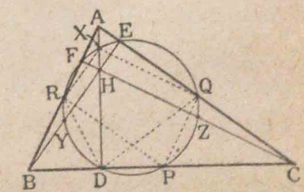
[1] 各邊ノ中點,

[2] 各頂點カラ對邊ヘノ垂線ノ足,

[3] 垂心ト各頂點トヲ結ビ付ケル線分ノ中點。

[コノ圓ヲ三角形ノ九點圓トイフ]

証明 △ABCノ頂點A,B,Cヨリノ垂線ノ足ヲ夫々D, E, F;邊BC, CA, ABノ中點ヲ夫々P, Q, Rトシ,垂心ヲH; AH, BH, CHノ中點ヲ夫々X, Y, Zトスル。



△ARD, △AQDハ二等邊三角形デアルカラ

$\angle A=\angle RDQ$……………(1)

又 RP∥AC, QP∥AB

∴ $\angle RPQ=\angle A$ …………(2)

(1)ト(2)カラDハ三點P,Q,Rヲ通ル圓ノ周上ニアル。同樣ニE,Fモコノ圓ノ周上ニアル。

又 $RX \parallel BH$, $QX \parallel CH$ $\therefore$ $\angle RXQ = \angle BHC = \angle A$ ノ補角

$\therefore$ (2)ニヨリ $\angle RPQ + \angle RXQ = 2\angle R$

故ニXモ前ト同一ノ圓周上ニアル。同樣ニY,Zモ亦コノ圓周上ニアル。

43. 圓ノ弧ABノ中點Cカラ二ツノ弦CD,CEヲ引キ,弦ABト夫々F,Gデ交ラシメレバ,四點D,F,G,Eハ同一圓周上ニアル。

44. 一平面上ニ何レノ三點モ一直線上ニナイ五點ガアル。ソシテソノ何レノ三點ヲ通ル圓ヲ畫クモ更ニ殘ノ點ノウチ,少クトモ一ツハソノ圓周上ニアルトイフ。然ルトキハコノ五點ハスベテ同一圓周上ニアルコトヲ證セヨ。又六點ナル場合ハ如何。

45. 定圓ノ直徑ABノ端Aヲ通ツテ任意ノ二弦AC,ADヲ引キ,ソノ延長トBニ於ケルコノ圓ノ切線トノ交點ヲ夫々E,Fトスレバ,四點C,D,E,Fハ共圓點デアル。

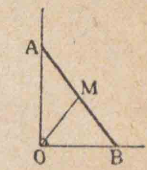
46. 直角三角形ABCノ直角ノ頂點Aカラ斜邊BCニ下シタ垂線ノ足ヲDトシ,∠Bノ二等分線ガAC,ADト交ル點ヲ夫々E,Fトスレバ,三點A,D,Eヲ通ル圓ハ,線分BFヲ2等分スル。

47. A,Bハ定圓Oノ周上ニアル二定點デ,Pハコノ圓周上ニアル他ノ任意ノ一點トスル。直線PA,PBガA及

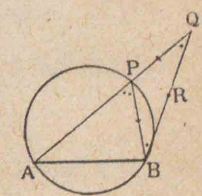
ビBヲ通ル他ノ任意ノ圓周ト再ビ交ル點ヲ夫々C,Dトスルトキ,直線CDハ直線POニ垂直デアル。

48. 內切スル二圓ガアル。小圓ノ中心ヲC,大圓ノ中心ヲO,切點ヲPトスル。圓Oノ弦PQガ圓Cト交ル點Rニ於テ圓Cニ切スル直線ガ圓Oト交ル點ヲ夫々A,Bトスレバ,Qハ弧ABノ中點トナル。

49. 定長ノ線分ABノ兩端ガ夫々直角ニ交ル二定直線ノ各々ノ上ヲ動クトキ,ソノ中點Mノ軌跡ヲ求メヨ。



50. ABハ圓ノ定弦デ,Pハ圓周上ノ任意ノ一點デアル。APヲQマデ延長シテPQ=PBナラシメルトキ,BQノ中點Rノ軌跡ヲ求メヨ。(先ヅQノ軌跡ヲ求メヨ)



第四篇 面 積

51. 一點Pガ平行四邊形ABCDノ外部ニアルトキハ,

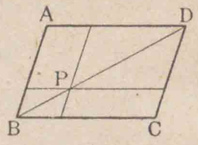
$\triangle PAB \sim \triangle PAD = \triangle PAC$ 又ハ $\triangle PAB + PAD = \triangle PAC$

(B,C,Dカラ直線PAニ垂線ヲ作レ)

52. 與ヘラレタ平行四邊形ト等積デアル二等邊三角形ヲ作レ。

定義 平行四邊形ノ一對角線上ノ一點ヲ通ツテ各邊ニ平行デアル直線ヲ引ケバ,原形ヲ四ツノ平行四邊形

ニ分ケル。ソノウチ對角線ガ又對角線トナル二ツノ平行四邊形ヲ對角線ニ沿フ平行四邊形トイヒ,殘リノ二ツヲソノ餘形トイフ.



53. 圖デ餘形□PA, □PCハ等積デアルコトヲ證セヨ。

54. 與ヘラレタ平行四邊形ト等積デ,且ツ與ヘラレタ一邊ト一角ヲモツ平行四邊形ヲ作レ。(餘形ヲ利用セヨ)

55. 平行四邊形ABCD内ノ一點ヲPトスレバ,△PABト△PCDノ面積ノ和ハ一定デアル。

56. a, b ガ線分ノ長サヲ表ハシ,且ツaハbヨリ大ルトキ,次ノ等式ヲ幾何學的ニ證セヨ。

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

57. 半徑9cmアル圓ノ中心ヨリ15cmノ距離ニ一點Pガアル。Pカラコノ圓ニ引イタ切線ヲPA, PBトスルトキ,切線ノ長サ及ビ弦ABノ長サヲ求メヨ。

58. 內切圓ノ半徑23m,外接圓ノ半徑30mナル直角三角形ガアル。コレト等積デアル正方形ノ一邊ノ長サヲ糎ノ位マデ計算セヨ。

59. 半徑1mノ圓ニ內接スル正三角形ト正方形トノ面積ノ差ヲ平方糎ノ位マデ正シク計算セヨ。

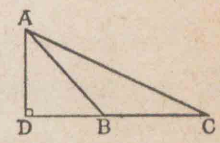
60. 半徑5cmノ圓ニ內接スル矩形ノ面積ガ48平方糎アルトキ,二邊ノ長サ各,何程カ。

61. 一邊ノ長サガaデアル正方形ガアル。ソノ各邊ヲ

直徑トシテ四ツノ半圓ヲ正方形ノ內部ニ畫クトキ,コレ等ノ圓ノ二ツヅツニ共通デアル部分ノ面積ノ和ヲ求メヨ。

62. 圓ニ內接スル正三角形ノ面積ハ同ジ圓ニ內接スル正六角形ノ面積ノ半分ニ等シイ。

63. 三角形ABCニ於テ∠Bヲ鈍角トシ,頂點Aカラ對邊BCノ延長ニ下シタ垂線ノ足ヲDトスレバ,



$$AC^2=AB^2+BC^2+2\,BD\cdot BC$$

証明 $DB+BC=DC$

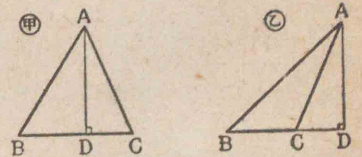
サテ $AC^2=AD^2+(DB+BC)^2=(AD^2+DB^2)+BC^2+2\,BD\cdot BC$

$=AB^2+BC^2+2\,BD\cdot BC$

64. 三角形ABCニ於テ∠Bヲ鋭角トシ,頂點Aカラ對邊BC又ハソノ延長ニ下シタ垂線ノ足ヲDトスレバ,

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\,BD\cdot BC$$

証明 垂線ADノ足DハCト一致スルカ,B, Cノ間ニアルカ或ハCヲ越エテノ延長上ニアル。



今DガCト一致スレバ,ぴたごらすノ定理ソノ儘デアル。他ノ二ツノ場合ニハ

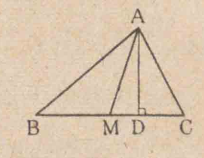
$CD=BC-BD$ (甲圖) $CD=BD-BC$ (乙圖)

サテ $AC^2=AD^2+CD^2=AD^2+(BD-BC)^2$ (甲モ,乙モ)

$$=(AD^2+BD^2)+BC^2-2\,BD\cdot BC$$
$$=AB^2+BC^2-2\,BD\cdot BC$$

65.　三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ M トスレバ，　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

(A カラ BC ニ垂線 AD ヲ下シ，△ABM, △ACM ニ問題 63,64 ヲ用ヒヨ)

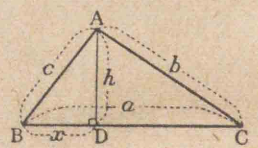


66.　線分 BC 又ハソノ延長上ノ任意ノ點ヲ A トシ，BC ノ中點ヲ M トスレバ，　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

67.　三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ニ對スル邊ノ長サヲ夫々 a, b, c トシ，$2s=a+b+c$ ト置クトキハ，三角形ノ面積ヲ表ハス數 S ハ　$S=\sqrt{s\,s-a)(s-b)(s-c)}$

[コレヲへろん (Heron) ノ公式トイフ]

証明　三角形ノ二角ハ鋭角デアルカラ，∠B, ∠C ヲ鋭角トスル。A ヨリノ垂線 AD ヲ引ケバ，D ハ B ト C ノ間ニアル。



サテ垂線 AD ノ長サヲ h, BD ノ長サヲ x トスレバ，a, b, c, h, x ノ間ニハ次ノ關係ガアル。

$$h^2=c^2-x^2,\quad b^2-(a-x)^2=h^2$$

故ニ　$b^2-a^2+2ax=c^2$　∴　$x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

コノ値ヲ $h^2=(c^2-x^2)=(c+x)(c-x)$ ニ代入シテ

$$h^2=\frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(c+a-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}$$

サテ $2s=a+b+c$ デアルカラ

$$2(s-a)=b+c-a,\quad 2(s-b)=c+a-b,\quad 2(s-c)=a+b-c$$

$$\therefore\quad h^2=\frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4a^2}$$

又三角形ノ面積ノ數値 S ハ $\dfrac{ha}{2}$ デアル。

$$\therefore\quad S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

68.　前問ニ於テ內切圓ノ半徑ヲ r トスレバ，

$$S=r.s=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

69.　直角三角形ノ斜邊及ビソノ他ノ二邊ノ長サヲ夫々 a, b, c トスルトキハ，次ノ等式ガ成立コトヲ證セヨ。

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4b^2c^2$$

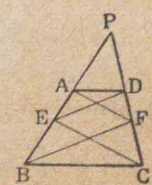
70.　梯形ガアツテ，ソノ底邊ノ長サハ夫々 11cm, 25cm デ，他ノ二邊ノ長サハ夫々 13 cm, 15 cm ナルトキ，ソノ面積如何。

第五篇　比　例

71.　三角形ノ一邊ニ平行デアル直線デ，ソノ面積ヲ 2 等分セヨ。又 3 等分セヨ。

72.　三角形ノ一邊ニ垂直デアル直線デ，ソノ面積ヲ 2 等分セヨ。

73.　梯形 ABCD ノ底デナイ邊 AB 上ニ一點 E ヲトリ，直線 EC ニ平行ニ AF ヲ引キ，CD トノ交點ヲ F トスレバ，直



線 ED,BF ハ互ニ平行スル。(AB,CD ヲ延長シテ P デ交ラシメヨ)

74. 二定點 A, B ヲ通ル任意ノ圓ガ一定圓 O ト交ル二點ヲ P, Q トスレバ,直線 PQ ハ直線 AB 上ノ一定點ヲ通ル。

75. 二定點ヲ通リ,且ツ一定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。(前問及ビ定理60系 2 ヲ利用セヨ)

76. 二定點ヲ通リ,且ツ一定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。(問題74ノ定點ヲ利用セヨ)

77. 二ツノ同心圓ガアル。內ノ圓ノ周ガ外ノ圓ノ面積ヲ 2 等分スルトキ,ソノ半徑ノ比如何。

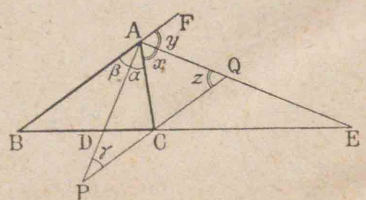
78. 三角形ABC ノ邊 BC 上ノ一點 D ヲ通リ, AB, AC ニ平行デアル直線ガ AC, AB ト交ル點ヲ E F トスレバ,

$$\triangle BFD : \triangle AEF = \triangle AEF : \triangle DEC$$ (AD, EF ヲ引ケ)

79. 三角形ABC ノ邊 BC 上ニ點 P ヲトリ, $BP \cdot PC = AP^2$ ナラシメヨ。(外接圓ヲ畫イテ見ヨ)

80. 三角形ABC ノ頂角A 及ビソノ外角ノ 2 等分線ガ底邊 BC 及ビソノ延長ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE}$$



(C ヲ通ツテ AB ニ平行デアル直線ヲ引キ,直線 AD, AE トノ交點ヲ夫々 P, Q トスレバ, $PC = AC = QC$, $\triangle ABD \backsim \triangle PCD$, $\triangle ABE \backsim \triangle QCE$ トナルコトニ注意)

昭和十一年十一月十一日印刷
昭和十一年十一月十四日發行
昭和十二年一月二十三日訂正再版印刷
昭和十二年一月二十六日訂正再版發行

新編女子幾何

定價金七拾五錢

編者 中川銓吉

發行者 合資會社 冨山房
東京市神田區神保町一丁目三番地

代表者 坂本守正

印刷所 東京印刷株式會社
東京市深川區白河町四丁目一番地

發行所 合資會社 冨山房
東京市神田區神保町一丁目三番地
電話神田(25)2171—2178番
振替口座東京五〇一番