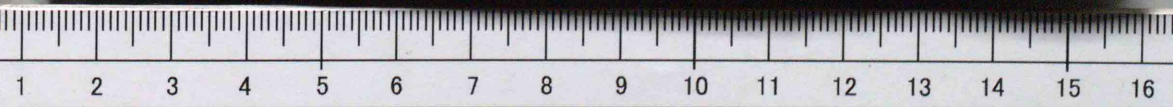
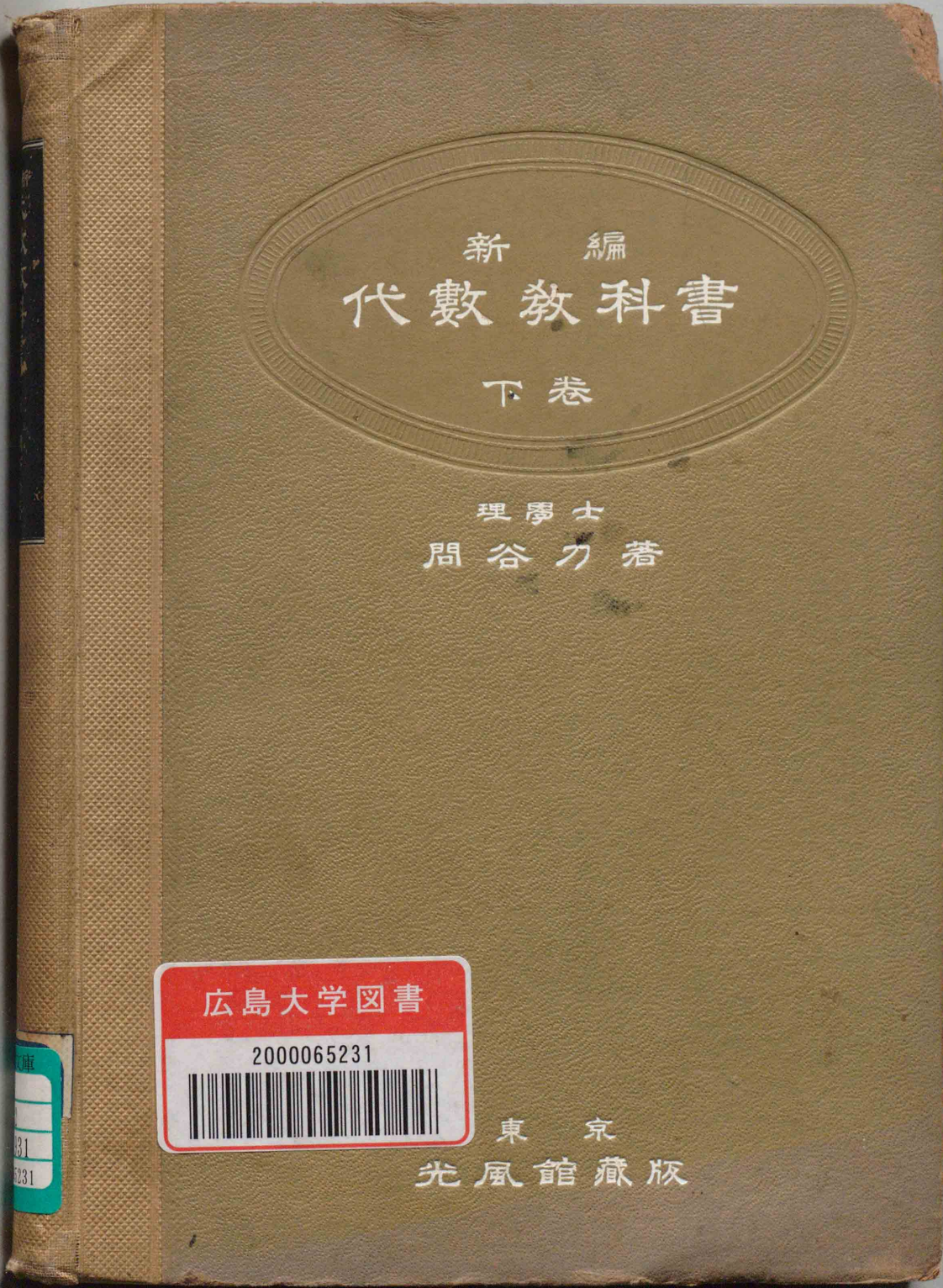
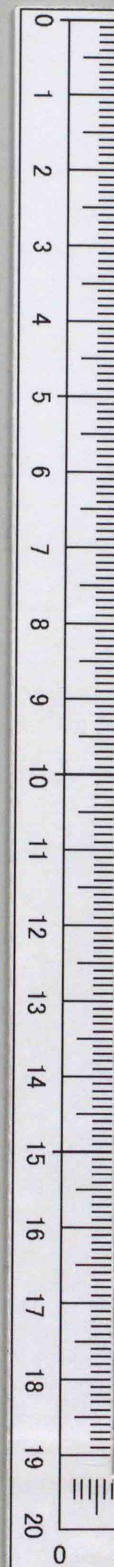
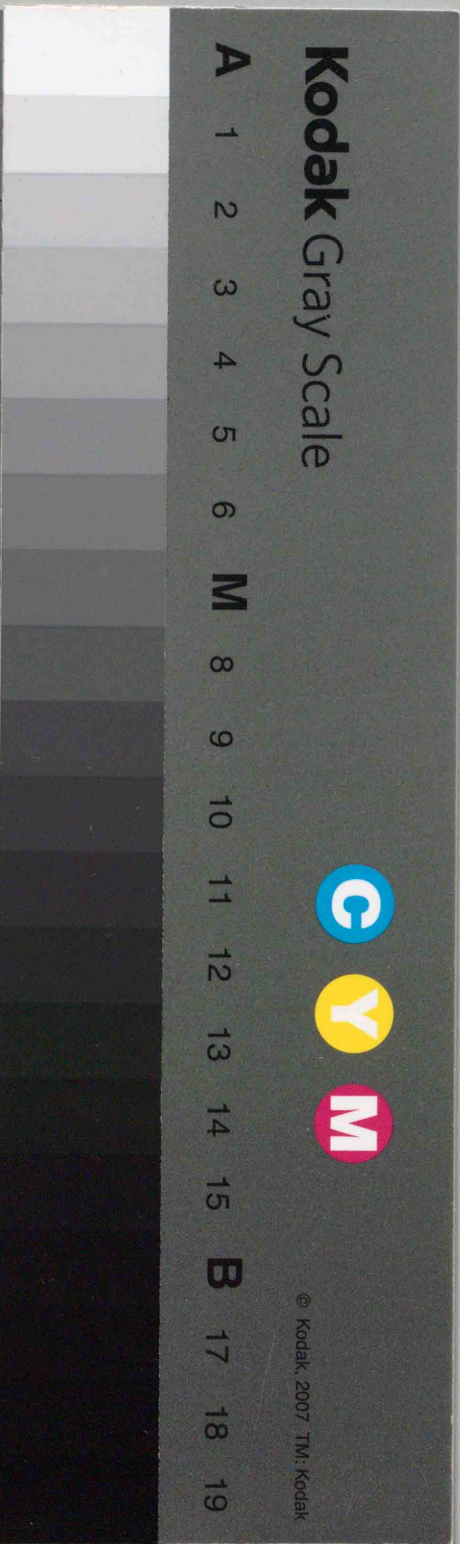
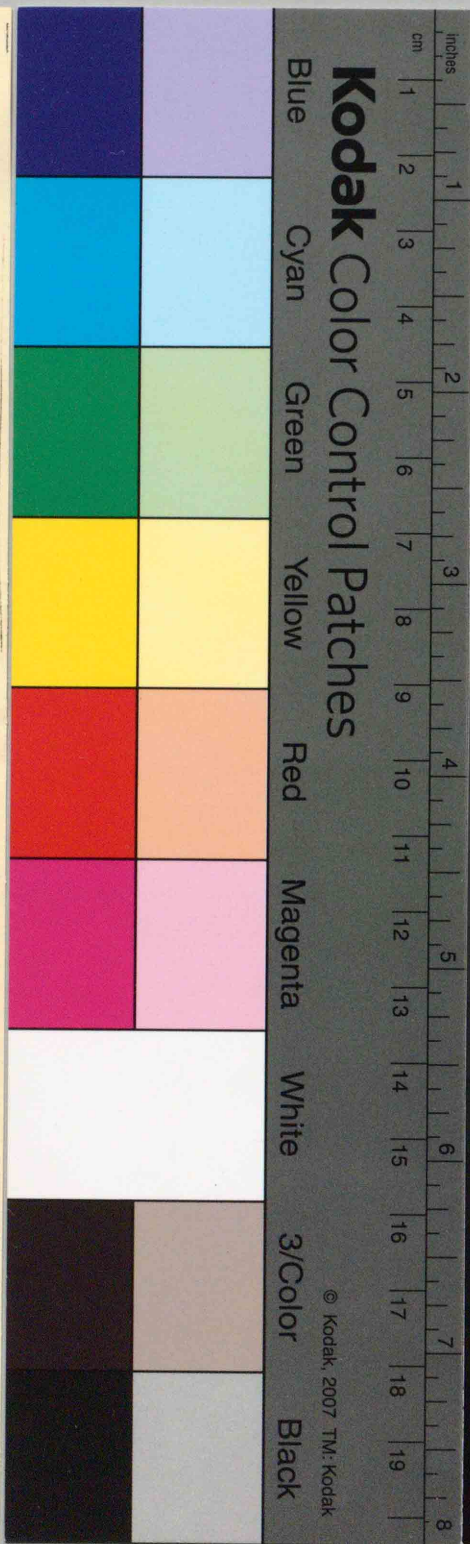


40146

教科書文庫

4
41z
41-1931
20000 65231



3757
To 9

教科書文庫
4
412
41-1931
2000065231

資料室

等差級數

$$l = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

對數

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log \frac{LM}{N} = \log L + \log M - \log N$$

$$\log M^n = n \log M$$

$$\log \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log M$$

等比級數

$$l = ar^{n-1}$$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

特別ナル數

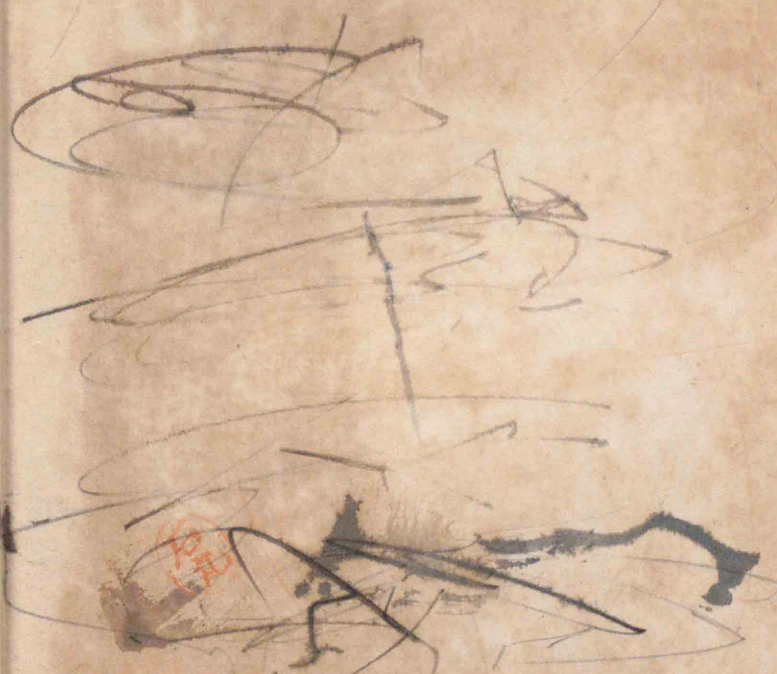
$$\sqrt{2} = 1.7321 \dots \quad \sqrt{8} = 1.73205 \dots$$

$$\pi = 3.14159265358979323846 \dots$$

$$\frac{4\pi}{3} = 4.1888 \dots \quad \log \pi = 0.4971 \dots$$

$$e^2 = 9.8969 \dots \quad \frac{1}{\pi} = 0.3183 \dots$$

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 1.7725 \dots \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.5642 \dots$$



文 部 省 檢 定 濟
昭和六年十二月十二日 中學校數學科教科用

新 編
代 數 教 科 書
下 卷

東京文理科大學助教授
東京高等師範學校教授
問 谷 力 著



東 京
光 風 館 藏 版

広島大学図書

2000065231



序 言

1. 中等學校ニ於ケル數學ハヤヤモスルト難解ノ學科デアルトイフ歎聲ヲ聞ク。或ハ數學ヲ能クスルモノハ特殊ノ生徒ニ限ラレタルガ如クニ考ヘラレタ時代モアル。ケレドモ中等學校ニ於ケル數學ハ今日普通學科デアツテ誰デモ學ビ得ルモノデナケレバナラナイ。險シイ舊來ノ山路モ開ケバ必ズヤ容易ニ登リ得ラレルモノデアル。
2. 學ブベキ範圍廣ク理論ノ根柢深イコノ代數學ハ、固ヨリ易々タルモノデハナイ。シカシ困難ナルノ故ヲ以テ理論ヲ曖昧ニスルコトハ諸般ノ基礎ヲ造ラウトスル教育ノ趣旨ニ反スル。ノミナラズ、理論ノ不明確ソレ自身ガ數學ソノモノヲ難シイモノニスル。平易ニ説イテ理論ノ正確ニ達セシメルコトハ本書ノ理想ノ一ツデアル。
3. 教材ノ配列ハ新制度ノ要目ニ準據シ理論ノ程度ハ生徒ノ心理的發達ノ程度ニ應ジナケレ

バナラナイ。章ヲ重ネルニ從ツテ生徒ノ年齢ガ長ジテ來ル。例ヘバ無理數ノ習ヒ初メニ完全ナ説明ヲシテモ生徒心意ノ發達ハコレニ適應シナイ。故ニ無理數ノ取扱ガ自由ニナルコトヲ主眼トシ、下卷ノ終リ第十九章デ再ビ正確ナ考ヲ授ケルコトニシタ。又文章ニシテモ後章ニ至ルニ從ツテ數學的ノ嚴格ナイヒ表シ方ヲスルガ初メハ極メテ平易ナ言葉ダイヒ表ストイフ方針ヲトツタ。

4. 初メニ一般的法則ヲ示シテソレヲ適用セシメントスルモ、學ブモノノ心ニ於テ滿サンナイモノガアル。初メニ例ヲ示シ理法ノ存スルコトヲ説キ、次イデソレヲ一般的法則ニ達セシメネバナラナイ。一般的法則ヲ學ンダナラバソレヲ適用スルコトニ馴レシメルコトガ必要デアアル。本書ハ終始コノ方針ニ基イテ、先ヅ例ヨリ入ツテ一般的理法ニ導キ、ソノ一般的法則ヲ運用セシメルコトニシテアル。

5. 以上ノ趣旨ニヨツテソノ理想ヲ本書内ニ十分取り容レルタメニ種々ノ點ニ新タナ工夫ト

創作トヲ加ヘ得タツモリデアアル。又本書ノ編纂ニ當リ極メテ熱心ナル新進教育家諸賢ノ意見ヲ乞ヒ、ソノ深イ經驗上ノ援助ニヨルコトガ甚大デアアル。爲スベクシテ爲シ得ナイ點ハ版ヲ重ネルニ從ヒ漸次改善スル考デアアル。幸ニシテ數學教育上幾分ナリトモ所期ノ理想ヲ實現スルコトヲ得レバ著者ノ最モ幸トスルトコロデアアル。

昭和六年十月

著 者 識

例 言

1. 本書ハ新制度ニ於ケル中學校ノ代數學教科書トシテ編纂シタモノデアアル。
2. 上卷ハ第三學年マデノ教材ヲ新要目ニヨツテ配當シタ。代數學ノ教材ニ取リ入レル時間數ハ學校ニヨツテ異ルカラ教材ノ内容ハ最モ少ナイ時間數ヲ豫想シソノ時間數デ教授シ得ル程度ニシテオイタ。尙時間ニ餘裕ガアル場合ニハ補充問題ヲ各章ニ配當シテアルカラソレヲ利用サレタイ。
3. 第一篇カラ第五篇マデ各篇ハ中學校ニ於ケル各學年別ヲ目當トシテ教材ヲ配當シタノデアアル。

目 次

第四篇 基本教材ノ補充・級數及ビ對數	1—157
第十三章 一元方程式	1
第十四章 聯立方程式	27
第十五章 約數・倍數	56
第十六章 級數	76
第十七章 對數	115
第五篇 補充總括	158—245
第十八章 歩合・利息	158
第十九章 數及ビ式	183
第二十章 不等式	210
第二十一章 函數ノ變化	223
補充問題	246—269
第十三章ノ問題	246
第十四章ノ問題	248
第十五章ノ問題	252

第十六章ノ問題	254
第十七章ノ問題	258
第十八章ノ問題	260
第十九章ノ問題	263
第二十章ノ問題	266
第二十一章ノ問題	268
補充教材	270-279
複利表	286
現價表	281
貯金表	284
對數表	295
答	297

目次終

新編 代數教科書

下卷

第四篇

基本教材ノ補充
級數及ビ對數

第十三章

一元方程式

89. 無理方程式

$4+\sqrt{x+3}$ ノヤウニ根號内ニ文字ヲ含ム式ヲソ
ノ文字ニ關スル無理式トイヒ

$$4+\sqrt{x+3}=6$$

ノヤウニ未知數ニ關スル無理式ヲ含ム方程式ヲ
無理方程式トイフ。

例 1 $\sqrt{2x+3}=x$ (1)

兩邊ヲ二乗スレバ

$$2x+3=x^2 \quad (2)$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$x=3 \text{ 或ハ } x=-1$$

吟味 $x=3$ トスレバ

$$\text{左邊}=\sqrt{6+3}=3 \quad \text{右邊}=3$$

$$x=-1 \text{ トスレバ}$$

$$\text{左邊}=\sqrt{-2+3}=1 \quad \text{右邊}=-1$$

故ニ $x=3$ ハ原方程式ノ根デアアルガ $x=-1$ ハ原方程式ノ根デハナイ。

シカルニ

$$\sqrt{2x+3}=-x \quad (3)$$

ナル方程式ノ兩邊ヲ二乗スルトヤハリ (2) ノ方程式トナル。今ココロミニ $x=-1$ ヲ (3) ノ方程式ノ兩邊ニ代入シテ見レバコノ方程式ヲ満足スル。即チ $x=3$ 及ビ $x=-1$ ハトモニ (2) ノ方程式ノ根デアアルガ一ツハ (1) ノ方程式ノ根デ他ハ (3) ノ方程式ノ根デアアル。

一般ニ方程式

$$A=B \quad (1)$$

ノ兩邊ヲ二乗シタ方程式

$$A^2=B^2 \quad (2)$$

ヲ研究シテ行クト

$$A^2-B^2=0$$

$$(A+B)(A-B)=0$$

$$A=-B \text{ 或ハ } A=B$$

即チ (2) ノ方程式ノ中ニハ $A=B$ ナル方程式ノ根ト $A=-B$ ナル方程式ノ根トガ含まレテキル。故ニ或方程式ヲ解ク代リニ兩邊ヲ二乗シタ方程式ヲ解ケバ通常餘分ノ根ガ含まレテ來ル。コノ餘分ノ根ヲ無縁根トイフ。

モシ $A=-B$ ニ根ヲ有シナイ場合ニハ

$$A=B \quad \text{ト}$$

$$A^2=B^2 \quad \text{ト}$$

ハ根ガ全ク同一デアアル。根ガ全ク同一デアアルニツノ方程式ヲ同値ノ方程式トイフ。

⑥ 無理方程式ヲ解クニハ兩邊ノ乘幂ヲ作ル
コトニヨツテ整方程式ニ變形シソレヲ解イ
テ得ル根カラ無縁根ヲ省ケ。

例 2 $2 + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x+1}$

移項シテ後兩邊ヲ二乗スレバ

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{3x-1}$$

$$x+1 = 3x-2\sqrt{3x+1}$$

即チ $2\sqrt{3x} = x$, $\sqrt{3x} = x$

再ビ兩邊ヲ二乗スレバ

$$3x = x^2$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或ハ } 3$$

吟味 $x=0$ 左邊 $= 2 + \sqrt{1} = 3$

右邊 $= \sqrt{0} + 1 = 1$

故ニ $x=0$ ハ根デナイ。

$x=3$ 左邊 $= 2 + \sqrt{4} = 4$

右邊 $= \sqrt{9} + 1 = 4$

答 $x=3$

例 3 $\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{1-x}} = 1$

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{x}$$

$$x + \sqrt{1-x} = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - 2\sqrt{x}$$

$$1-x = 1 - 4\sqrt{x} + 4x$$

$$4\sqrt{x} = 5x$$

$$16x = 25x^2$$

$$x = 0 \text{ 或ハ } \frac{16}{25}$$

吟味 $x=0$, 左邊 $= 0 + \sqrt{0 + \sqrt{1-0}} = 1$ (根)

$$x = \frac{16}{25}, \text{ 左邊} = \sqrt{\frac{16}{25}} + \sqrt{\frac{16}{25} + \sqrt{1 - \frac{16}{25}}}$$

$$= \frac{4}{5} + \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{3}{5}} = \frac{4}{5} + \sqrt{\frac{31}{25}}$$

$$= \frac{4 + \sqrt{31}}{5} \text{ (根デナイ)}$$

答 $x=0$

例題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $\sqrt{25-x^2} = 7-x$

2. $x + \sqrt{9+x^2} = 9$

3. $2x + \sqrt{10 - x^2} = 5$
 4. $3 - \sqrt{x + 8} = x - 31$
 5. $2 - \sqrt{x - 2} = x$
 6. $2\sqrt{x - 1} - \sqrt{2x - 1} = 1$
 7. $\sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 6} = 1$
 8. $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{6 - x}$
 9. $\sqrt{x - 2} - \sqrt{6x - 11} + \sqrt{x + 3} = 0$
 10. $\frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}} = 2 + \sqrt{3}$

90. 置換法ニヨル解法

例 $\sqrt{3x^2 - 2x + 4} + 16 = 3x^2 - 2x$

根號ヲ去ルタメニ移項シテ兩邊ヲ二乗スレバ
 四次方程式トナル。コレヲ置換法ニヨレバ次數
 ヲ二次以上ニ高メナイデ解クコトガ出來ル。

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 4} = y \quad \text{トオケバ}$$

$$y + 16 = y^2 - 4$$

$$y^2 - y - 20 = 0$$

$$(y - 5)(y + 4) = 0$$

$$y = 5 \quad \text{或ハ} \quad -4$$

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 4} = 5 \quad (1)$$

$$3x^2 - 2x + 4 = 25 \quad (2)$$

コレヲトイテ

$$x = -\frac{7}{3} \quad \text{或ハ} \quad 3$$

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 4} = -4$$

コレハ明カニ根ナシ。

何故カ。

吟味 (1)ノ方程式ノ右邊ノ符號ヲ變ヘタ方程式
 $\sqrt{3x^2 - 2x + 4} = -5$ ハ根ヲ有シナイカラ(1)
 ト(2)トハ同價デアル。從ツテ

$\sqrt{3x^2 - 2x + 4} = 5$ ノ兩邊ヲ二乗シテ解イ
 テモ無縁根ガ現レナイ。依ツテ $x = -\frac{7}{3}$
 及ビ $x = 3$ ハ $\sqrt{3x^2 - 2x + 4} = 5$ ヲ満足スル。從
 ツテ原方程式ノ根デアル。

答 $x = 3$ 或ハ $-\frac{7}{3}$

例題

- $3(x^2 + 5x + 1) - 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 5$
- $x^2 - 2x + 6\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 21$
- $\sqrt{x^2 - 6x + 16} = 13 - (x - 3)^2$
- $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{13}{6}$
- $3x^2 - 4x - 10 + 2\sqrt{3x^2 - 4x + 5} = 0$

91. 應用問題

例 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ差ハ2米デ
三邊ノ長サノ和ハ24米デアアル。コノ三邊ノ長
サヲ求メヨ。

【解】 小ナル邊ヲ x 米トスレバ大ナル邊及ビ斜
邊ハ夫々

$$(x+2) \text{ 米}, \sqrt{x^2+(x+2)^2} \text{ 米}$$

デアアル。故ニ

$$x+(x+2)+\sqrt{x^2+(x+2)^2}=24$$

コレヲ解ケバ

$$\sqrt{x^2+(x+2)^2}=22-2x$$

$$2x^2+4x+4=22^2-88x+4x^2$$

$$2x^2-92x+(22^2-2^2)=0$$

$$2x^2-92x+24 \times 20=0$$

$$x^2-46x+12 \times 20=0$$

$$(x-6)(x-40)=0$$

$$x=6 \text{ 或ハ } 40$$

$x=40$ ハ原方程式ニ適シナイ。

$x=6$ ハ原方程式ノ根デアアル。

從ツテ他ノ二邊ハ

$$6+2=8, \sqrt{6^2+8^2}=10$$

$$\text{シカシテ } 6+8+10=24$$

故ニ問題ニ適スル。

答 6米, 8米, 24米

例題

1. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ長サノ和ハ
35米デ三邊ノ長サノ和ハ60米デアルトイフ。
コノ三邊ノ長サヲ求メヨ。
2. 矩形ノ地面ガアル。短イ邊ハ對角線ヨリ15
米減ジタモノノ半ニ等シク,短イ邊ト長イ邊
トノ和ハ對角線ヨリモ20米長イトイフ。短
邊,長邊及ビ對角線ノ長サ如何。
3. x ニ關シテ一次ノ式ガアル。 $x=5$ トスレバ
コノ式ノ値ハ13トナリ, $x=-9$ トスレバ-15
トナル。 x ノ如何ナル値ニ對シテコノ式ノ
平方根ガツノ x ノ値ニ等シクナルカ。

92. $a \pm \sqrt{b}$ の平方根

例へば方程式

$$\sqrt{7+2x}=2+\sqrt{3}$$

ノ両邊ヲ二乗シテ得タ方程式ヲ解ケバ

$$x=\sqrt{12}$$

コノ値ガ原方程式ノ根ナルカ否カヲ驗スト

$$\text{左邊}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$$

即チ $7+2\sqrt{12}$ ノ平方根ヲ他ノ形ニ變形シナケ
レバナラナイ。

$$\begin{aligned} 7+2\sqrt{12} &= 4+2\sqrt{4 \times 3}+3 \\ &= (\sqrt{4}+\sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4}+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$$

ココニ $x=\sqrt{12}$ ハ根デアル。

$$\text{例 1 } \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2+2\sqrt{3 \times 2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2-2\sqrt{3 \times 2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

【注意】 $5-2\sqrt{6} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ デアルガ $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ ハ平方根ノ正ナル方ヲ
トルコトヲ忘レテハナラナイ。

$$\begin{aligned} \text{例 2 } \sqrt{8-\sqrt{48}} &= \sqrt{8-2\sqrt{12}} = \sqrt{6+2-2\sqrt{6 \times 2}} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

例題

1. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

2. $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$

3. $\sqrt{5+2\sqrt{4}}$

4. $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

5. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

6. $\sqrt{38-3\sqrt{32}}$

7. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$

8. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

9. $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$

10. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$

11. $\sqrt{3\frac{1}{10}+\sqrt{6}}$

12. $\frac{1}{\sqrt{16+6\sqrt{7}}} + \frac{1}{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}$

2. $x = \pm\sqrt{12}$ ハ方程式

$$\sqrt{7+2x} + \sqrt{7-2x} = 4$$

ノ根ナルコトヲ證明セヨ。

3. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $\sqrt{x^2-3x+5} + \sqrt{x^2-5x+3} = x+1$

2. $\sqrt{x+1}-1 = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$

93. 高次方程式

$$x^3+x+5=0$$

$$x^4+3x^2-x+8=0$$

ナドノヤウニ方程式ヲ整頓シタトキニ二次ヨリ
モ高次ノ整方程式ナラバソノ方程式ヲ高次方
程式イフ。

高次方程式ノ一般論ハ本書ノ程度デナイカラ
一元二次方程式ノ解法ヲ應用スルカ又ハ因数ニ
分解シテ解ケル特殊ナモノヲ取扱フコトニスル。

例 $x^4-7x^2+12=0$

$$x^2=X \text{ トオケバ}$$

$$X^2-7X+12=0$$

コノ二次方程式ヲトイテ

$$X=4 \text{ 或ハ } X=3$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

$$x^2=3$$

$$x=\pm\sqrt{3}$$

答 $x=2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

因数分解ヲ用ヒテ解ケバ

$$x^4-7x^2+12=0$$

$$(x^2-4)(x^2-3)=0$$

$$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

各因数ヲ夫々零ニスル x ノ値ヲトレバ

$$x=2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

(I) 置換法ニヨル解法

例 $(x^2+3x-2)^2-5(x^2+3x+3)+31=0$

$$x^2+3x=X \text{ トオケバ}$$

$$(X-2)^2-5(X+3)+31=0$$

即チ $X^2-9X+20=0$

コレヲ解ケバ

$$X=4 \text{ 或ハ } X=5$$

$$X=4$$

$$x^2+3x=4$$

$$x^2+3x-4=0$$

$$(x+4)(x-1)=0$$

$$x=1 \text{ 或ハ } -4$$

$$X=5$$

$$x^2+3x=5$$

$$x^2+3x-5=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$$

答 $x=1, -4, \frac{-3+\sqrt{29}}{2}, \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$

置換法ニヨツテ一元二次方程式ノ解法ニ導カ
レル二三ノ例ヲ舉ゲルト

$$1. x^2 + \frac{12}{x^2} = 7$$

$$x^2 = X \text{ ト オ イ テ } X^2 - 7X + 12 = 0$$

$$2. \frac{x^2+9}{16} - \frac{48}{x^2+9} = 2$$

$$\frac{x^2+9}{16} = X \text{ ト オ イ テ } X^2 - 2X - 3 = 0$$

$$x^2+9 = X \text{ ト オ ケ バ } X^2 - 32X - 768 = 0$$

$$3. x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$$

$$x + \frac{1}{x} = X \text{ ト オ ケ バ } x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2$$

$$\text{從ツテ } X^2 + X - 6 = 0$$

$$4. (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 120$$

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$$

$$x^2 - 5x = X \text{ ト オ ケ バ}$$

$$(X+4)(X+6) = 120$$

$$X^2 + 10X - 96 = 0$$

$$5. x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0$$

各項ヲ x^2 デ割ツテ次ノヤウニスル。

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

(II) 因數分解ニヨル解法

例 1 $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ ヲ解ケ。

$$x^2(x-3) - (x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2-1) = 0$$

$$(x-3)(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = 3, 1, -1 \quad \text{答}$$

例 2 $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$

$$(x^3 - 1) + (3x^2 - 3x) = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) + 3x(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2+4x+1) = 0$$

$$x-1 = 0 \quad \text{或ハ} \quad x^2+4x+1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{或ハ} \quad x = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{答} \quad x = 1, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$$

例 3 $x^3 = 1$ ヲ解ケ。

移項シテ因數ニ分解スレバ

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{或ハ} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\text{答} \quad x = 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

【注意】コノ例ニヨルト3乗シテ1ニナルベキ
 數即チ1ノ立方根ハ1ノ外ニ尙ニツアル。
 但シツノニツハ虚數デアアル。

例 題

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
2. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
3. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
4. $x^4 + 12x^2 + 36 = 0$
5. $x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 9x + 1 = 0$
6. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$
7. $x^3 = 27$
8. $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 15 = 0$
9. $9\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 24\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$
10. $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$
11. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 24$
12. ニツノ實數ノ和ハ5デツノ立方ノ和ハ65デア
 ルトイフ。コノ二數ヲ求メヨ。
13. 1ノ立方根ヲ1, ω, ω' トスレバ $\omega^2 = \omega', \omega'^2 = \omega,$
 $\omega + \omega' + 1 = 0$ ナルコトヲ證明セヨ。

94. 剰餘定理

方程式 $F=0$

ノ左邊ヲ因數ニ分解シテ

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

ノヤウニナツタトキ

$$x-\alpha=0, x-\beta=0, x-\gamma=0$$

ヲ別々ニ解イテ得タ根即チ

$$x=\alpha, x=\beta, x=\gamma$$

ハモトノ方程式ノ根デアアル。

因數ヲ見出スニ有力ナーツノ定理ガアル。

$x^3 + 3x^2 - x + 6$ ヲ $x-3$ デ割ルト

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 17 \\ x-3 \overline{) x^3 + 3x^2 - x + 6} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ 6x^2 - x \\ \underline{6x^2 - 18x} \\ 17x + 6 \\ \underline{17x - 51} \\ 57 \end{array}$$

從ツテ $x^3 + 3x^2 - x + 6 = (x-3)(x^2 + 6x + 17) + 57$

コノ場合ニ剰餘ダケ求メルニハ實際ノ運算ヲ
 行ハナイデ求メルコトガ出來ル。

上ノ等式ハ恒等式デアアルカラ x ニ如何ナル値

ヲ代入シテモ兩邊ノ數值ハ等シイ。

$$x=3 \text{ トスレバ}$$

$$\text{左邊} = 3^3 + 3 \times 3^2 - 3 + 6 = 57$$

$$\text{右邊} = 0 \times (3^2 \times 3 \times 6 + 17) + 57 = 57.$$

即チ初メノ式ニ $x=3$ ヲ代入シタトキノ數值ハソノ式ヲ $x-3$ デ割ツタトキノ剩餘ニ等シイ。

一般ニ整式 F ヲ $x-a$ デ割ツタトキノ整商ヲ Q , 剩餘ヲ R トスレバ

$$F = (x-a)Q + R$$

但シ R ハ x ヲ含マナイ式デアル。 $x=a$ ヲ代入シタトキ F ノ値ガ F' デ Q ノ値ガ Q' デアルトスレバ

$$F' = 0 \times Q' + R = R$$

x ニ關スル整式 F ヲ一次式 $x-a$ デ割ツタトキノ剩餘ハ F ノ中ニ $x=a$ ヲ代入シタ値ニ等シク、特ニソノ値ガ零ナラバ整式 F ハ $x-a$ デ割リキレル。

コレヲ剩餘定理トイフ。

例 1 $x^3 - 5x^2 + 11x - 7 = 0$ ヲ解ケ。

〔解〕 $x=1$ ヲ左邊ニ代入スレバ

$$1 - 5 + 11 - 7 = 0$$

∴ $x^3 - 5x^2 + 11x - 7$ ハ $x-1$ デ割リキレル。

$$(x-1)(x^2 - 4x + 7) = 0$$

$$x=1 \text{ 或ハ } x=2 \pm \sqrt{4-7}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}i$$

答 $x=1, 2+\sqrt{3}i, 2-\sqrt{3}i$

例 2 $x^3 - 5x^2 + px + 45$ ガ $x-5$ デ割リキレルヤウニ p ノ値ヲ定メ、後コレヲ因數ニ分解セヨ。

$x-5$ デ割リキレルヤウニスルニハ $x=5$ ヲ代入シテソノ値ガ零ニナルヤウニスレバヨイ。

$$5^3 - 5 \times 5^2 + 5p + 45 = 0$$

$$p = -9$$

從ツテ初メノ式ニ p ヲ -9 ト置キカヘテ後 $x-5$ デ割リ算ヲ行ヘバ

$$x^3 - 5x^2 - 9x + 45$$

$$= (x-5)(x^2 - 9)$$

$$= (x-5)(x+3)(x-3)$$

例 3 $(x+1)(x+2)(x+3) + (a-1)(a-2)(a-3)$ ハ $x+a$ デ割リキレルコトヲ證明セヨ。

【解】 コノ式ニ $x=-a$ ヲ代入スレバ

$$\begin{aligned} & (-a+1)(-a+2)(-a+3)+(a-1)(a-2)(a-3) \\ & = (1-a)(2-a)(3-a)-(1-a)(2-a)(3-a) \\ & = 0 \end{aligned}$$

故ニ上ノ式ハ $x+a$ デ割リキレル。

又剰餘定理カラ次ノ定理ガ導キ出サレル。

x ニ關スル整式 F ガ $x-a$ 及ビ $x-b$ ノ何レデ割ツテモ割リキレ、シカモ $a \neq b$ ナルトキハ整式 F ハ積 $(x-a)(x-b)$ デ割リキレル。

證明 整式 F ヲ $x-a$ デ割ツタトキノ商ヲ Q トスレバ $F=(x-a)Q$
 又 F ハ $x-b$ デ割リキレルトスレバコノ式ニ $x=b$ ヲ代入スルト零ニナル。從ツテ Q ノ式ニ $x=b$ ヲ代入シタトキノ價ヲ Q' トスレバ $0=(b-a)Q'$
 シカルニ $b-a \neq 0$ ナル故 $Q'=0$
 故ニ Q ハ $x-b$ デ割リキレル。即チ

$$Q=(x-b)q$$

$$\text{故ニ } F=(x-a)(x-b)q$$

依ツテ F ハ積 $(x-a)(x-b)$ デ割リキレル。

例 4 x^3+x^2+mx+n ガ x^2-4 デ割リキレルヤウニ m, n ノ値ヲ定メヨ。

【解】 $x^2-4=(x+2)(x-2)$

$x+2$ デ割リキレルタメニハ $x=-2$ ヲ代入スレバ零トナル。故ニ

$$-8+4-2m+n=0$$

$$2m-n=-4 \quad (1)$$

同様ニ $x=2$ ヲ代入シテ

$$8+4+2m+n=0$$

$$2m+n=-12 \quad (2)$$

(1), (2) ヲ満足スル m, n ノ値ヲトレバ $x+2$ 及ビ $x-2$ デ割リキレル。從ツテ積 x^2-4 デ割リキレル。

(1), (2) ヲ一組ノ聯立方程式トシコレヲ解ケバ

$$m=-4, n=-4 \quad \text{答}$$

例題

次ノ各方程式ヲ解ケ。(1—4)

1. $9x^3 - 12x^2 + x + 2 = 0$
2. $3x^3 + 8x^2 - 8x - 3 = 0$
3. $x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$
4. $2x^3 + 3x^2 + 8x + 20 = 0$
5. $x^4 - 1, x^5 - 1, x^8 - 1$ ハ $x - 1$ 及ビ $x + 1$ デ割リキレルコトヲ示セ。
6. $x^3 + 1, x^5 + 1, x^7 + 1$ ハ $x + 1$ デ割リキレ $x - 1$ デ割リキレナイコトヲ證明セヨ。又割リキレナイモノハソノ剩餘ヲ求メヨ。
7. $x^3 - y^3, x^4 - y^4, x^5 - y^5$ ハ $x - y$ 及ビ $x + y$ デ割リキレルカドウカ。
8. $a^3 + b^3, a^5 + b^5, a^7 + b^7$ ハ $a - b$ 及ビ $a + b$ デ割リキレルカドウカ。
9. $x^7 - (7 + a)x^6 + 7a^6$ ハ $x - a$ デ割リキレルカドウカ。
10. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ ハ $(a + b)(b + c)(c + a)$ デ割リキレルコトヲ證明セヨ。

11. $x^3 + mx^2 + x - 6$ ガ $x - 2$ デ割リキレルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ。
12. $x^4 + px^2 + qx + a^2$ ガ $x - 1$ 及ビ $x + 1$ ノ何レデモ割リキレルトキハ $(x + a)(x - a)$ デ割リキレルコトヲ證明セヨ。
13. $x^3 + 4x^2 + px + q = 0$ ガ $x = 1$ 及ビ $x = -3$ ノ根ヲ有スルヤウニ p, q ノ値ヲ定メ残りノ根ヲ求メヨ。
14. $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ ガ $x + y + z$ デ割リキレルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ。
15. $(b + c)(c + a)(a + b) + mabc$ ガ $a + b + c$ デ割リキレルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ。
16. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) - 24$ ハ x デ整除サレルコトヲ證明セヨ。
17. $x^{m+1} - (m + a)x^m + ma^m$ ハ $x - a$ デ割リキレルコトヲ證明セヨ。
18. x ニツイテノ有理整式ヲ $x - a$ デ割ツタトキノ剩餘ヲ α トシ, $x - b$ デ割ツタトキノ剩餘ヲ p トスレバ $(x - a)(x - b)$ デ割ツタトキノ剩餘如何。

練習問題

次ノ各方程式ヲ解ケ。(1-20)

1. $\sqrt{10x+5}-\sqrt{10x-3}=4$
2. $x+\sqrt{x-2}=2$
3. $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$
4. $\sqrt{x^2-3x+5}+\sqrt{x^2-5x+3}=x+1$
5. $\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$
6. $a=x+\sqrt{x^2-1}$ 但シ $a>1$
7. $\sqrt{x^2+ax+b^2}+\sqrt{x^2-ax+c^2}=2a$
8. $3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-x+5}=0$
9. $x^2-5x+6\sqrt{x^2-5x+3}=10$
10. $2x^2-3\sqrt{2x^2-7x+7}=7x-3$
11. $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$
12. $x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12$
13. $x^4-22x^2+81=0$
14. $6x^4-5x^3-44x^2-5x+6=0$
15. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
16. $9x^3-12x^2+x+2=0$

17. $x = \frac{5}{6 - \frac{5}{6 - \frac{5}{6-x}}}$
18. $\frac{1}{x-a-b} = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$
19. $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$
20. 次ノ方程式ヲ $(ax^2+bx)^2-(cx+d)^2$ ノ形ニ變形シテコノ方程式ヲトケ。
 $4x^4+12x^3-7x^2-40x-25=0$
21. $ax^3+bx^2-47x-15$ ガ $3x+1$ 及ビ $2x-3$ デ割リキレルコトヲ知ツテ a, b ノ値ヲ求メ, シカル後コレヲ因數ニ分解セヨ。
22. x ニツイテノ三次式ガアル。 $2x-3$ デ割レバ -3 残り, $2x^2-5x+3$ デ割レバ商 $3x+4$ ヲ得テ残ハ x ヲ含マナイトイフ。コノ三次式ヲ求メヨ。
23. x ノ一整式ガアツテコレヲ $x-2$ デ割ルト 5 ヲ残シ, $x-3$ デ割ルト 9 ヲ残ストイフ。シカラバコノ式ヲ $(x-2)(x-3)$ デ割レバソノ残りハドウナルカ。

24. 三次式 $x^3 - 5x^2 + px + 45$ が $x + 5$ で割リキレルトイフ。コノ三次式ヲ零ニ等シイトオイテ出来ル方程式ヲトケ。
25. アル自動車進行ノ途中目的地ヨリ 60 哩ノ所デ故障ヲ生ジ 35 分間停車シ、ソレカラ後ハ速サヲ一時間ニツイテ 3 哩増シテ豫定ヨリ 5 分早く目的地ニ達シタ。初メノ速度ヲ求メヨ。
26. 荷馬車ガアル。ソノ前輪ノ周圍ハ後輪ノ周圍ヨリモ 0.7 米短ク、シカシテ 2 軒進ム間ニ前輪ハ後輪ヨリモ 175 回多ク回轉スルトイフ。兩輪ノ周圍各幾米デアルカ。
27. 甲乙二人池ノ周圍ヲ一周スルニ同時ニ同一點カラ反對ノ向キニ出發シタ。甲ハ 6 分間デ一周シ乙ハ途中甲ニ出會ツテカラ 8 分間ヲ經テ出發點ニ到着シタ。乙ガ池ノ周圍ヲ一周スルニ要スル時間ヲ求メヨ。

第十四章

聯立方程式

95. 一方ガ一次ノ二元聯立方程式

例 1 次ノ聯立方程式ヲトケ。

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} & (2) \end{cases}$$

【解】 (1) カラ $y = 5 - x$ トシテ (2) ニ代入スレバ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{5-x} = \frac{5}{6}$$

分母ヲ拂ツテ整頓スレバ

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \text{ 或ハ } 3$$

$$\begin{array}{l|l} x=2 \text{ ノ トキ} & x=3 \text{ ノ トキ} \\ y=5-2=3 & y=5-3=2 \end{array}$$

$$\text{答 } \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

例 2 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 2y-x=1 & (1) \\ \sqrt{x+y-1}-\sqrt{x-y+1}=2 & (2) \end{cases}$$

【解】 (1) カラ $x=2y-1$ (3)

コレヲ (2) = 代入スレバ

$$\sqrt{3y-2}-\sqrt{y}=2 \quad (4)$$

コレヲ解ケバ

$$\sqrt{3y-2}=2+\sqrt{y}$$

$$3y-2=4+4\sqrt{y}+y$$

$$2y-6=4\sqrt{y}$$

$$y-3=2\sqrt{y}$$

$$y^2-6y+9=4y$$

$$y^2-10y+9=0$$

$$(y-9)(y-1)=0$$

$$y=9 \text{ 或ハ } 1$$

$y=9$ ハ (4) ヲ満足シ $y=1$ ハ (4) ヲ満足シナイ。

$y=9$ ヲ (3) = 代入シテ $x=17$

$$\text{答} \begin{cases} x=17 \\ y=9 \end{cases}$$

例 題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \begin{cases} y-x=1 \\ \sqrt{2x-1}+\sqrt{y+2}=3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+2y=17 \\ \sqrt{x-5}+\sqrt{y+5}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+y=a \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=b \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 4x-3y=1 \\ 12xy+13y^2=25 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x+2y=3 \\ x^3+3x^2y-x^2+xy=4y^3-x^2+9 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2 \\ x^2+y^2=ax+by \end{cases}$$

7. $2x^3-m^2x^2+nx-3$ ハ $x-1$ デ割リキレ,
 $2mx^2-3nx-36$ ハ $x+3$ デ割リキレルトイフ。
 m, n ノ値如何。

8. 乙職工ハ甲職工ヨリ 3 日間少ク働イテ合計 91 圓 50 錢ヲ得タ。モシ甲乙ガ働イタ日數ヲ取リ換ヘルト兩人ノ得ル賃錢ハ相等シク甲 1 日ノ賃錢ハ乙 1 日ノ賃錢ヨリモ 50 錢多イトイフ。甲ノ働イタ日數及ビ甲 1 日ノ賃錢ハ何程カ。

96. 二次ト二次トノ二元聯立方程式

(I) 二次ノ項ヲ消去シ得ル場合

例 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 4xy+3x-5y+3=0 & (1) \\ 3xy+2x-y+11=0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{〔解〕 } (1) \times 3 \quad 12xy+9x-15y+9=0$$

$$(2) \times 4 \quad 12xy+8x-4y+44=0$$

$$x-11y-35=0 \quad (3)$$

(3) ハ一次方程式デアルカラコレト (1) (2)

ノ何レカト組合セタ一組ヲ解ケバヨイ。

(3) カラ $x=11y+35$ トシテ (1) ニ代入スレバ

$$4y(11y+35)+3(11y+35)-5y+3=0$$

$$\text{即チ } 11y^2+42y+27=0$$

$$y=-3 \quad \text{或ハ} \quad \frac{9}{11}$$

$$y=-3 \text{ ノトキ } \begin{cases} y=-\frac{9}{11} \\ x=-33+35=2 \end{cases}$$

$$x=-9+35=26$$

$$\text{答 } \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=26 \\ y=-\frac{9}{11} \end{cases}$$

例題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \begin{cases} xy-3x+4y-5=0 \\ 2xy+x-5y-5=0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+y+xy=-31 \\ 2x+3y-2xy=52 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2+2xy+x-y=9 \\ x^2+2xy-2x=4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} (x+y)(x+y-2)=30+x \\ (x+y)(x+y-4)=33-y \end{cases}$$

(II) 一方ガ一次因数ニ分解シ得ル場合

方程式ノ各項ヲ一邊ニ集メテ $A=0$ ノ形ニシ
タトキ $A=0$ ガ一次因数ニ分解サレル場合ニハ
前ノ解法ニ導カレル。

例 1 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} (3x-2y)(x-y+3)=0 & (1) \\ x^2+xy-3y+1=0 & (2) \end{cases}$$

〔解〕 (1) カラ $3x-2y=0$ 或ハ $x-y+3=0$

コレト (2) トヲ組合セテ解ケバ

$$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ x^2+xy-3y+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+3=0 \\ x^2+xy-3y+1=0 \end{cases}$$

$$x=\frac{2y}{3} \quad x=y-3$$

$$\frac{4y^2}{9} + \frac{2y^2}{3} - 3y + 1 = 0 \quad (y-3)^2 + (y-3)y - 3y + 1 = 0$$

$$10y^2 - 27y + 9 = 0 \quad 2y^2 - 12y + 10 = 0$$

$$y = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 40 \times 9}}{20} \quad y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$= \frac{27 \pm 3\sqrt{41}}{20} \quad (y-5)(y-1) = 0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{10} \quad y = 5 \text{ 或ハ } 1$$

$$x = 2 \text{ 或ハ } -2$$

答 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=\frac{9+\sqrt{41}}{10} \\ y=\frac{27+3\sqrt{41}}{20} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{9-\sqrt{41}}{10} \\ y=\frac{27-3\sqrt{41}}{20} \end{cases}$

例 2 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = y + 3 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

【解】 (2) ノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(2x-y)(x+2y) = 0$$

$$2x-y=0 \text{ 或ハ } x+2y=0$$

$$y=2x$$

コレヲ (1) = 代入

スレバ

$$x^2 - 4x^2 + 4x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x=3 \text{ 或ハ } -1.$$

$$y=6 \text{ 或ハ } -2.$$

$$x=-2y$$

コレヲ (1) = 代入ス

レバ

$$4y^2 + 4y^2 + y^2 = y + 3$$

$$9y^2 - y - 3 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{109}}{18}$$

$$x = \frac{-1 \mp \sqrt{109}}{9}$$

答 $\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{109}}{9} \\ y=\frac{1+\sqrt{109}}{18} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{109}}{9} \\ y=\frac{1-\sqrt{109}}{18} \end{cases}$

例題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \begin{cases} (5x-2y)(3x+7y)=0 \\ x^2+xy=14 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} (5x-2y+6)(x+y-4)=0 \\ 6x^2+xy-2y^2+25=0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2-xy-6y^2=0 \\ 3x^2+xy-2y^2=16y \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 4x^2-7xy+3y^2=0 \\ 2x^2+4xy=6y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4xy + y^2 - 3y = 0 \\ 2x^2 + 27xy + 6y^2 - 6x - 21y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^2 - y^2 = a(x-y) - b(x-y) \\ x^2 - ax - by = 0 \end{cases}$$

$$\text{例} \begin{cases} (x+y)(x+y+1) = 30 & (1) \\ (x-y)(x-y-2) = 15 & (2) \end{cases}$$

〔解〕 (1) に於て $(x+y)$ を未知数とスレバ

$$(x+y)^2 + (x+y) - 30 = 0$$

$$(x+y-5)(x+y+6) = 0$$

$$x+y=5 \quad \text{或ハ} \quad x+y=-6$$

(2) カラ $(x-y)$ を未知数とスレバ

$$x-y=5 \quad \text{或ハ} \quad x-y=-3$$

ヨツテ次ノ四組ノ聯立方程式ヲ解ケバヨイ。

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=5 \end{cases} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-3 \end{cases} \begin{cases} x+y=-6 \\ x-y=5 \end{cases} \begin{cases} x+y=-6 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

コレカラ

$$\text{答} \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{11}{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{9}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2(x+y)^2 - 9(x+y) = 18 \\ (x-y)^2 + (x-y) = 6 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -10 + 9(x+y) = 2(x+y)^2 \\ 6 - (x-y) = (x-y)^2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x+y+2\sqrt{x+y}=3 \\ 2x-5\sqrt{x-2y}=4y+3 \end{cases}$$

(III) 未知項ガ全部二次ナル場合

例 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 5y^2 = 9 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{〔解〕} (1) \times 2. \quad 6x^2 + 2xy - 10y^2 = 18$$

$$(2) \times 3. \quad \frac{3x^2 + 6xy - 6y^2 = 18}{3x^2 - 4xy - 4y^2 = 0} \quad (3)$$

(3) ノ左邊ヲ因数ニ分解シテ

$$(x-2y)(3x+2y) = 0$$

$$x=2y \quad \text{或ハ} \quad x=-\frac{2}{3}y$$

$$x=2y$$

$$4y^2 + 4y^2 - 2y^2 = 6$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$x = \pm 2$$

$$x = -\frac{2}{3}y$$

$$\frac{4y^2}{9} - \frac{4y^2}{3} - 2y^2 = 6$$

$$y^2 = -\frac{27}{13}$$

$$y = \pm \frac{3\sqrt{39}i}{13}$$

$$x = \mp \frac{2}{13}\sqrt{39}i$$

$$\text{答 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{39}i}{13} \\ y=-\frac{3\sqrt{39}i}{13} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{2\sqrt{39}i}{13} \\ y=\frac{3\sqrt{39}i}{13} \end{cases}$$

例題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 = 1 \\ 7x^2 - 10xy + 4y^2 = 12 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 12 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 32 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 6 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 2y \\ 2x^2 + 4xy = 5y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 6x^2 - xy - 2y^2 = 20 \\ 18x^2 - 27xy + 10y^2 = 28 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x(x+y) = a(a+b) \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

7. ニツノ實數ノ積ガ28デ各數ノ平方ノ差ガ33ナルトキコノ二數ヲ求メヨ。

97. 和ト積トニ歸スル二元聯立方程式

例1 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x+y=8 & (1) \\ x^2-xy+y^2=19 & (2) \end{cases}$$

(2)ノ左邊ヲ x, y ニツイテノ和ト積トノ式ニ

變形スルト

$$(x+y)^2 - 3xy = 19$$

コレニ $x+y=8$ ヲ代入スレバ

$$64 - 3xy = 19$$

$$xy = 15$$

コレト(1)トヲ組合セテ

$$\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$$

二數ノ和ガ8デ積ガ15トナル二數ハ

$$Z^2 - 8Z + 15 = 0 \quad (5)$$

ノ二根デアル。コレヲトイテ得タ根

$$Z=5 \quad \text{或ハ} \quad Z=3$$

ノ中一ツヲ x トスレバ他ハ y デアル。故ニ

$$\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{或ハ} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{答}$$

例2 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7 & (1) \\ x^2+y^2+xy=133 & (2) \end{cases}$$

【解】(2)カラ $(x+y)^2 - xy = 133$ (3)

$(x+y)$ ト \sqrt{xy} トヲ未知數トシテ解ケバ

(1) カラ $\sqrt{xy}=(x+y)-7$

コレヲ (3) = 代入シテ

$$(x+y)^2 - \{(x+y)-7\}^2 = 133$$

$$(x+y)^2 - (x+y)^2 + 14(x+y) - 49 = 133$$

$$x+y=13 \quad (4)$$

故ニ $\sqrt{xy}=6$

故ニ $xy=36 \quad (5)$

(4), (5) ニ ヨツテ x, y ハ

$$z^2 - 13z + 36 = 0$$

ノ 根 デ ア ル。

$$z=4 \text{ 或ハ } 9$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases} \quad \text{答}$$

例 題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

1. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^3+y^3=152 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^3+y^3=344 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=3 \\ x^3+y^3-3xy=27 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=189 \\ x+\sqrt{xy}+y=21 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=35 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=13 \\ x^3+y^3=91 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=12 \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}=18 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=79 \\ x+y+2xy=38 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2}=20 \\ \frac{ab}{xy}=8 \end{cases}$

練習問題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=455 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+6\sqrt{2x+y+4}=22y \\ 4x^2-6x=y^2+3y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{2x}}=2 \\ xy-x-y=24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}-12=0 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

$$5. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} (x+y)(x+y+1) = 56 \\ (x-y)(x-y-1) = 12 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x+y+\sqrt{x+y} = 12 \\ x^3+y^3 = 189 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} (x-\sqrt{x})+(y-\sqrt{y}) = 5 \\ (x-\sqrt{x})(y-\sqrt{y}) = 6 \end{cases}$$

9. x^3+ax^2+bx-2 が $x-2$ で割ると整除セラレ、
 $x-3$ で割ると 4 餘るとイフ。 a, b の値ヲ求
メヨ。

10. 次ノ等式ヲ満足スル x, y ノ實數値ヲ求メヨ。

$$1. \left(2x - \frac{1}{2y} - 5\right)^2 + \left(4x^2 + \frac{1}{4y^2} - 37\right)^2 = 0$$

$$2. \left(3x - \frac{1}{y} - 4\right)^2 + \left(9x^2 + \frac{1}{y^2} - 40\right)^2 = 0$$

11. ax^2+bx+6 は $x=3$ ナルトキ零トナリ、 $x=2$ ナ
ルトキ -2 トナル。 a, b ノ値如何。

12. m ガ如何ナル値ヲ有スルトキ次ノ二ツノ方
程式ガ x ノ同ジ値ニヨツテ満足サレルカ。

$$5x^2+(9+4m)x+2m^2=0, \quad 5x+9=0$$

13. x, y ヲ未知數トスル聯立方程式

$$\begin{cases} mx-6y=5m-3 \\ 2x+(m-7)y=-7m+29 \end{cases}$$

ガ $x=y$ ナル根ヲ有スルタメニハ m ノ値ヲ
ドウスレバヨイカ。又ソノ場合ニ於ケル $x,$
 y ノ値ヲ求メヨ。

14. 二次方程式

$$abx^2-(2b+9a)x+12b-15a=0$$

ノ二根ノ和ハ 4 デ二根ノ積ハ 1 デアルトス
レバ a 及ビ b ノ値如何。

15. 甲乙丙ノ三船ガ同時ニ A 港カラ B 港ニ向
ツテ出帆シタ。シカルニ甲ハ乙ヨリモ速サ
ガ毎時 2 哩速イタメ 20 分早ク到着シ、乙ハ丙
ヨリモ毎時 3 哩速イタメ 30 分早ク到着シタト
イフ。A, B 間ノ距離ヲ求メヨ。

98. 三元一次聯立方程式

例 1 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=8 & (1) \\ 3x-y-z=4 & (2) \\ 5x-2y+2z=2 & (3) \end{cases}$$

【解】 (1) ト (2) トカラ z ヲ消去スレバ

$$\begin{array}{r} (1) \quad 2x+3y+5z=8 \\ (2) \times 5 \quad 15x-5y-5z=20 \\ \hline 17x-2y \quad =28 \end{array} \quad (4)$$

(2) ト (3) トカラ z ヲ消去スレバ

$$\begin{array}{r} (2) \times 2 \quad 6x-2y-2z=8 \\ (3) \quad 5x-2y+2z=2 \\ \hline 11x-4y \quad =10 \end{array} \quad (5)$$

(4) ト (5) トノ一組ヲ解ケバ

$$x=2, \quad y=3$$

コノ値ヲ (1) ニ代入スレバ

$$4+9+5z=8 \quad z=-1$$

$$\text{答} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases}$$

三元一次聯立方程式ヲ解ク一般的方法トシテハ上ノ例ノヤウニ二ツヅツ組合セテ同ジ未知數ヲ消去シタニツノ二元方程式ヲ作り、ソレヲ一組ノ聯立方程式トシテ解ケバニツノ根ヲ求メルコトガ出來ル。ソノ根ヲ原方程式ノ何レカ一ツニ代入シテ残りノ一組ヲ求メレバヨイ。

例 2 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} y+z-x=2(b+c) & (1) \\ z+x-y=2(c+a) & (2) \\ x+y-z=2(a+b) & (3) \end{cases}$$

【解】 上ノ一般的方法ニヨラナイデ次ノヤウニ解イテ見ル。

(1)(2)(3) ノ方程式ヲ全部邊邊相加ヘルト

$$x+y+z=2(2a+2b+2c) \quad (4)$$

$$(4)-(1) \quad 2x=2(2a+b+c) \quad x=2a+b+c$$

$$(4)-(2) \quad 2y=2(a+2b+c) \quad y=a+2b+c$$

$$(4)-(3) \quad 2z=2(a+b+2c) \quad z=a+b+2c$$

$$\text{答} \begin{cases} x=2a+b+c \\ y=a+2b+c \\ z=a+b+2c \end{cases}$$

四元一次聯立方程式ノ場合ニハ同ジ未知數ヲ消去スルコトニヨツテ三元ノ場合ノ解法ニ導クコトガ出來ル。

若シ三元デ唯二ツノ方程式例ヘバ

$$\begin{cases} 2x-3y+z=6 \\ 5x+2y-3z=7 \end{cases}$$

ガ與ヘラレタ場合ヲ考ヘルト z ノ値ヲ任意ニトツテ兩方程式ニ代入スレバ二元聯立方程式ガ出來ル。ソノ一組ノ方程式ヲ解イテ x, y ノ値ヲ定メ得ルガ故ニ上ノ聯立方程式ヲ満足スル x, y, z ノ値ハ無數ニアル。從ツテ上ノ一組ノ方程式ノ根トシテ x, y, z ノ値ヲ決定スルコトガ出來ナイ。即チ三元聯立方程式ヲ解イテソノ根ヲ決定スルニハ三ツノ方程式ガ入用デアアル。

又三元デ四ツノ方程式ガ與ヘラレタ場合ニハ何レカ三ツヲトツテ一組ノ聯立方程式トシソレヲ解イテ得タ一組ノ根ガ殘リノ方程式ヲ必ズ満足スルトハ限ラナイ。モシソノ一組ノ根ガ殘リノ方程式ヲ満足スル場合ニ限ツテ四ツヲ一組トシタ聯立方程式ニハ解ガアルコトニナル。

例 題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。(1—4)

$$1. \begin{cases} 3x-2y+2z=15 \\ x+3y+3z=0 \\ 3x-4y-5z=9 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} y+z=1 \\ z+x=9 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x+3y+4z=16 \\ 3x+2y-5z=8 \\ 5x-6y+3z=6 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2y+2z-x=-1 \\ 2z+2x-y=-7 \\ 2x+2y-z=12 \end{cases}$$

5. A, B, C ノ三地點ガアル。A, C ノ距離ハ B, C ノ距離ヨリ 2 軒大デ, B, C ノ距離ハ A カラ他ノ二點ニ至ル距離ノ和ノ三分ノ一ニ等シク, A, B ノ距離ハ C カラ他ノ二點ニ至ル距離ノ和ノ四分ノ三ニ等シイトイフ。三點 A, B, C 間ノ相互ノ距離ヲ求メヨ。

6. 或仕事ヲナスニ甲乙協力スレバ 6 日ヲ要シ, 甲丙協力スレバ 9 日ヲ要シ, 乙丙協力スレバ 18 日ヲ要スルトイフ。甲乙丙各一人デナストキハソレゾレ幾日ヲ要スルカ。

99. 三元二次聯立方程式

(I) ニツガー次ナル場合

例 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & (1) \\ x + 2y - 2z = 16 & (2) \\ x^2 + yz + z^2 = 8 & (3) \end{cases}$$

【解】(1)ト(2)トカラ z ヲ消去スレバ

$$5x + 4y = 22 \quad y = \frac{1}{4}(22 - 5x) \quad (4)$$

(1)ト(2)トカラ y ヲ消去スレバ

$$3x + 4z = -10 \quad z = -\frac{1}{4}(3x + 10) \quad (5)$$

(4)ト(5)トヲ(3)ニ代入スレバ

$$x^2 - \frac{1}{16}(22 - 5x)(3x + 10) + \frac{1}{16}(3x + 10)^2 = 8$$

整頓スレバ

$$10x^2 + 11x - 62 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{或ハ} \quad -\frac{31}{10}$$

$$\begin{array}{l} x=2 \text{ノトキ} \\ y = \frac{1}{4}(22 - 10) = 3 \\ z = -\frac{1}{4}(6 + 10) = -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = -\frac{31}{10} \text{ノトキ} \\ y = \frac{1}{4}\left(22 + \frac{31}{2}\right) = \frac{75}{8} \\ z = -\frac{1}{4}\left(-\frac{93}{10} + 10\right) = -\frac{7}{40} \end{array}$$

$$\text{答} \quad \begin{cases} x=2 & x = -\frac{31}{10} \\ y=3 & y = \frac{75}{8} \\ z=-4 & z = -\frac{7}{40} \end{cases}$$

例題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x^2 + yz = 3 \end{cases} & 2. \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 2x + y - 2z = 6 \\ xy + y^2 + yz = 0 \end{cases} \\ 3. \begin{cases} \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 179 \end{cases} & 4. \begin{cases} 7x + 6y - 9z = 0 \\ 2x + y = 2z \\ x^3 + y^3 + z^3 = 216 \end{cases} \end{array}$$

(II) 二元ツツノ積ニ歸スル場合

例 1 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$(1) \quad \begin{cases} yz = 8 \\ zx = 12 \\ xy = 6 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} xy + zx = 27 \\ yz + xy = 32 \\ zx + yz = 35 \end{cases}$$

(1)ノ解 (2)ノ解

$$yz=8 \quad (1)$$

$$zx=12 \quad (2)$$

$$xy=6 \quad (3)$$

$$(1) \times (2) \times (3) \quad x^2 y^2 z^2 = 576$$

$$xyz = \pm 24$$

$$xyz=24 \quad (4) \quad \left| \quad xyz=-24 \quad (5) \right.$$

$$(4) \div (1) \quad x=3 \quad \left| \quad (5) \div (1) \quad x=-3 \right.$$

$$(4) \div (2) \quad y=2 \quad \left| \quad (5) \div (2) \quad y=-2 \right.$$

$$(4) \div (3) \quad z=4 \quad \left| \quad (5) \div (3) \quad z=-4 \right.$$

$$\text{答} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=-4 \end{cases}$$

(2) の解

$$xy + zx = 27 \quad (1)$$

$$yz + xy = 32 \quad (2)$$

$$zx + yz = 35 \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \quad 2(xy + yz + zx) = 94$$

$$xy + yz + zx = 47 \quad (4)$$

$$(4) - (1) \quad yz = 20 \quad (5)$$

$$(4) - (2) \quad zx = 15 \quad (6)$$

$$(4) - (3) \quad xy = 12 \quad (7)$$

(5), (6), (7) カラ前ト同ジヤウニシテ解ケバ

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=-5 \end{cases} \quad \text{答}$$

例 2 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} (x+y)(x+z) = 15 & (1) \\ (y+z)(y+x) = 10 & (2) \\ (z+x)(z+y) = 6 & (3) \end{cases}$$

【解】 (1), (2), (3) ノ全部ヲ邊邊相乗ズレバ

$$(x+y)^2(x+z)^2(z+y)^2 = 900$$

$$(x+y)(x+z)(z+y) = \pm 30$$

$$(x+y)(x+z)(z+y) = 30$$

$$y+z=2 \quad (4)$$

$$z+x=3 \quad (5)$$

$$x+y=5 \quad (6)$$

(+)

$$2(x+y+z) = 10$$

$$x+y+z=5 \quad (7)$$

$$(7) - (4) \quad x=3$$

$$(7) - (5) \quad y=2$$

$$(7) - (6) \quad z=0$$

$$(x+y)(x+z)(z+y) = -30$$

$$y+z=-2 \quad (4)$$

$$z+x=-3 \quad (5)$$

$$x+y=-5 \quad (6)$$

(+)

$$2(x+y+z) = -10$$

$$x+y+z=-5 \quad (7)$$

$$(7) - (4) \quad x=-3$$

$$(7) - (5) \quad y=-2$$

$$(7) - (6) \quad z=0$$

$$\text{答 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=-0 \end{cases}$$

例題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \begin{cases} yz=15 \\ zx=10 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} xy=-6 \\ yz=-12 \\ zx=18 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} xy+yz=-20 \\ yz+zx=-56 \\ zx+xy=-6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y+z=\frac{1}{x} \\ z+x=\frac{1}{y} \\ x+y=\frac{1}{z} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x(y+1)=24 \\ z(y+1)=8 \\ xz=12 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} (x+1)(y+1)=-2 \\ (y+1)(z+1)=-6 \\ (z+1)(x+1)=12 \end{cases}$$

(III) 雜例

$$\text{例 1 } \begin{cases} (y+z)(x+y+z)=10 & (1) \\ (z+x)(x+y+z)=20 & (2) \\ (x+y)(x+y+z)=20 & (3) \end{cases}$$

$$(1)+(2)+(3) \quad \dots$$

$$(2x+2y+2z)(x+y+z)=50$$

$$(x+y+z)^2=25$$

$$x+y+z=\pm 5$$

$$x+y+z=5 \quad (4)$$

$$(4)\div(1) \quad y+z=2$$

$$(4)\div(2) \quad z+x=4$$

$$(4)\div(3) \quad x+y=4$$

$$2(x+y+z)=10$$

$$x+y+z=5$$

$$\text{故 } x=3$$

$$y=1$$

$$z=1$$

$$x+y+z=-5 \quad (5)$$

$$(5)\div(1) \quad y+z=-2$$

$$(5)\div(2) \quad z+x=-4$$

$$(5)\div(3) \quad x+y=-4$$

$$2(x+y+z)=-10$$

$$x+y+z=-5$$

$$\text{故 } x=-3$$

$$y=-1$$

$$z=-1$$

$$\text{答 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\text{例 2 } \begin{cases} x-y-z=2 & (1) \\ x^2+y^2-2z^2=2 & (2) \\ xy=-3 & (3) \end{cases}$$

$$(2)-(3)\times 2 \quad (x-y)^2-2z^2=8 \quad (4)$$

(1) と (4) とヲ一組トシ $(x-y)$ と z とヲ未知數トシテ解ケバ

$$(1) \text{ カラ } x-y=2+z \quad (5)$$

コレヲ (4) ニ代入シテ

$$(2+z)^2 - 2z^2 = 8$$

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

$$z = 2$$

コレヲ (5) ニ代入シテ

$$x - y = 4 \quad (6)$$

(3) と (6) とノ一組ヲ解ケバ

$$x = 4 + y$$

$$(4 + y)y = -3$$

$$y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$(y + 3)(y + 1) = 0$$

$$y = -3 \text{ 或ハ } y = -1$$

$$y = -3 \text{ ナラバ } x = 1$$

$$y = -1 \text{ ナラバ } x = 3$$

$$\text{答 } \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

例題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

$$1. \begin{cases} x(x+y+z)=18 \\ y(x+y+z)=27 \\ z(x+y+z)=36 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ x+y+z=3 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ y^2+yz=7 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x+y+z=19 \\ x^2+y^2+z^2=133 \\ xz=y^2 \end{cases}$$

練習問題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。(1-15)

$$1. \begin{cases} x^2+xy=8x+3 \\ y^2+xy=8y+6 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{y} = 9 \\ \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 45 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+y=2xy \\ x^2y^2+x+y=8xy-9 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{126}{125} \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x+y=4 \\ x^3+y^3=5(x^2+y^2) \end{cases}$$

7. $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x+y+z=9 \\ 3x+2y+7z=8 \\ 5x-3y-z=7 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x-4y+z=7 \\ 3x+2y+9z=14 \end{cases}$
11. $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{10}=9 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{25}=11 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{18}+\frac{z}{10}=10 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-z}=2 \\ \frac{6}{x+y}-\frac{5}{y-z}=1 \\ \frac{4}{x-z}+\frac{5}{y-z}=1 \end{cases}$
13. $xy=a(x+y), \quad xz=b(x+z), \quad yz=c(y+z)$
14. $x+y+z=4\frac{1}{3}, \quad x+yz=3\frac{1}{3}, \quad xyz=1$
15. $x+y+z=1, \quad x^2=y^2+z^2, \quad 12yz=1$
16. 次ノ方程式ヲ満足スル x, y, z ノ和ヲ求メヨ。
 $(a+1)x+y+z=p, \quad x+(b+1)y+z=q, \quad x+y+(c+1)z=r$
17. $\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}=3, \quad x^2+y^2+1=2x$ ヲ満足スル x, y ノ實數値ハ存在シナイコトヲ證明セヨ。
18. $ax^2+bxy-cy^2$ ハ $x=3, y=2$ ナルトキノ値ガ 9 デ $x=3, y=-1$ ナルトキノ値ハ -3 デ又 $x=5, y=3$ ナルトキノ値ハ 28 デアルトイフ。シカラバ $x=4, y=5$ ナルトキノ數値如何。

19. 三位ノ整數ガアル。ソノ三數字ノ和ハ 10 デ中央ノ數字ハ他ノ數字ノ和ニ等シイ。又原數ノ數字ノ順ヲ逆ニシテ排列スルト原ノ數ヨリ 99 大ナル數ヲ得ルトイフ。原數如何。
20. 5 デ割リキレル三位ノ整數ガアル。コレヲ組立テル三數字ノ和ハ 17 デ、ソノ數字ヲ逆ノ順序ニ列ベテ得ル三位ノ數ハ原數ヨリモ 198 多イトイフ。原數ヲ求メヨ。
21. 甲乙各若干ノ球ヲ持ツテ居ル。甲ハ乙ニ乙ガ所持シテ居ルダケ與ヘ、乙ハ甲ニ甲ガナホ餘セルダケ返シタ。次ニ甲ハ乙ニコノ時乙ガ所持シテ居ルダケ、乙ハ甲ニ甲ガコノ時所持シテ居ルダケ戻シ最後ニ甲乙各 16 箇ヲ持ツテ居タトイフ。最初ニ兩人ガ所持シテキタ球ノ數ヲ求メヨ。
22. 甲ハ白米若干石ヲ 1 圓ニツキ若干升ノ割デ買入レ、コレヲ一圓ニツキ買値ヨリ 1 合高ク乙ニ賣ツテ 20 圓ヲ利シタ。乙ハコレヲ己ノ買値ヨリ 1 圓ニツキ 1 合高ク丙ニ賣ツテ 22 圓ノ利ヲ得タ。白米ノ石數ヲ求メヨ。

第十五章
約數・倍數

100. 因數分解ノ補充

重要ナ公式

$$ma + mb - mc = m(a + b - c) \quad (1)$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \quad (2)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (3)$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b) \quad (4)$$

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d) \quad (5)$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \quad (6)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) \end{aligned} \quad (8)$$

例 1 $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$
 $= (x - y)^2 - z^2$
 $= (x - y + z)(x - y - z)$

又 x ニツイテ整頓シテ公式(4)ヲ適用スレバ

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 - 2xy \\ = x^2 - 2xy + (y + z)(y - z) \\ = \{x - (y + z)\} \{x - (y - z)\} \\ = (x - y - z)(x - y + z) \end{aligned}$$

又 y ニツイテ整頓シテ同様ナ方法ヲ行ヘバ

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 - 2xy \\ = y^2 - 2xy + (x + z)(x - z) \\ = \{y - (x + z)\} \{y - (x - z)\} \\ = (y - x - z)(y - x + z) \end{aligned}$$

又 z ニツイテ整頓スレバ

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 - 2xy \\ = -z^2 + (x - y)^2 \end{aligned}$$

トナツテ公式(3)ヲ適用スルコトニナル。

上ノ例ヲ見ル如クアル文字ニツイテ整頓シタ
トキソノ文字ニツイテノ二次式即チ

$$Ax^2 + Bx + C$$

ナル形ニ導カレタ場合ニハ (2)(3)(4)(5) ノ何レカ
ノ公式ヲ適用スルカ又ハ

$$Ax^2 + Bx + C = A \left(x - \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) \left(x - \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right)$$

ナル法則ヲ適用シテ因數ニ分解スルコトガ出來ル。

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad & a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab \\ & = a^2 + 2(b+c)a + (b+c)^2 \\ & = (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 3} \quad & (x+y+z)(yz+zx+xy) - xyz \\ & = \{(x+y)+z\} \{(x+y)z+xy\} - xyz \\ & = z(x+y)^2 + (z^2+xy)(x+y) + xyz - xyz \\ & = (x+y) \{z(x+y) + z^2 + xy\} \\ & = (x+y) \{z^2 + (x+y)z + xy\} \\ & = (x+y)(z+x)(z+y) \end{aligned}$$

コレハ $(x+y)$ ナル因數ヲ有スルトイフ見込ミノモトニ初メ $(x+y)$ ニツイテ整頓シテ行ツタノデアル。特別ナ見込ミガツカナイトスレバ或文字例ヘバ x ニツイテ整頓シテ行ク

$$\begin{aligned} & (x+y+z)(yz+zx+xy) - xyz \\ & = x^2(y+z) + x(y^2+2yz+z^2) + yz(y+z) \\ & = x^2(y+z) + x(y+z)^2 + yz(y+z) \\ & = (y+z) \{x^2 + x(y+z) + yz\} \\ & = (y+z)(x+y)(x+z) \end{aligned}$$

例 題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。(1-28)

1. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$
2. $2x^2 - 5x - 5xy - 5y + 2y^2 - 25$
3. $2y^2 - 5xy + 2x^2 - ay - ax - a^2$
4. $x^2 + 2(l+m)x - lm(l-2)(m+2)$
5. $(a^2 - b^2)x^2 + 4abx - (a^2 - b^2)$
6. $(a^2 - a - 6)x^2 + (2a + 4)x - a^2 - a + 2$
7. $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$
8. $m^2(a^2 - b^2) + n^2(c^2 - d^2) + 2mn(ac + bd)$
9. $x^2 + (2a-b)xy + (a-3b)(a+2b)y^2$
10. $a^2b^2x^2 - ab(2b+1)(2a+1) + ab(a-b)x$
11. $x^2 - x + xy - 2y - 2y^2$
12. $3x^2 + 2(a+b)x - a(a-2b)$

$$\begin{aligned} \text{例 4} \quad & (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 \\ & = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15 \\ & = (x^2 + 8x)^2 + 22(x^2 + 8x) + 120 \\ & = (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) \\ & = (x^2 + 8x + 10)(x+2)(x+6) \end{aligned}$$

13. $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$
 14. $(x^3-x^2+x+1)(x^3-x^2+x+2)-6$
 15. $(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)-24$
 16. $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$
 17. $x^4+4x^3-12x^2-32x+64$
 18. $(x^2+6x+5)(x^2+10x+21)+15$
- 例 5 $x^4-x^2y^2+16y^4$
 $= (x^4+8x^2y^2+16y^4)-9x^2y^2$
 $= (x^2+4y^2)^2-9x^2y^2$
 $= (x^2+3xy+4y^2)(x^2-3xy+4y^2)$
19. $x^4+\frac{81}{4}$
 20. $x^8+x^4y^4+y^8$
 21. $x^4-23x^2y^2+y^4$
 22. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$
 23. $27x^3-8y^3$
 24. $(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3$
 25. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$
 26. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
 27. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
 28. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

剰餘定理ヲ應用シテ次ノ各式ヲ因數ニ分解セ

ヨ。 (29-34)

29. x^3+2x^2-5x-6 30. x^3+5x^2+3x-9
 31. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$
 32. $(x+1)(x+2)(x+3)-5\cdot6\cdot7$
 33. $(x-1)x(x+1)-2\cdot3\cdot4$
 34. $(x+y)(x+y+1)(x+y+2)-1\cdot2\cdot3$
 35. $a+b+c=0$ ナルトキハ $a^3+b^3+c^3=3abc$ ナルコ
 トヲ證明セヨ。

又コレニヨツテ分數式

$$\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$$

ヲ簡單ニセヨ。

36. 前題ニヨツテ $(y-z)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(x-y)$
 ヲ簡單ニセヨ。
37. $x=\frac{1}{(b-c)(c-a)}$, $y=\frac{1}{(c-a)(a-b)}$, $z=\frac{1}{(a-b)(b-c)}$
 ナルトキハ $x^3+y^3+z^3=3xyz$ ナルコトヲ證明セ
 ヨ。

101. 整数整除の問題

例 連続シタ三ツノ奇数ノ平方ノ和ニ1ヲ加ヘ
タ数ハ常ニ12デ割リキレルガ24デハ割リ切レ
ナイコトヲ證明セヨ。

〔解〕 連続シタ三ツノ奇数ヲ $2n-1, 2n+1, 2n+3$
トスル。

$$\begin{aligned} & (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + 1 \\ &= 12n^2 + 12n + 12 \\ &= 12(n^2 + n + 1) \\ &= 12\{n(n+1) + 1\} \end{aligned}$$

即チ12ノ倍数デアル。シカシテ $n(n+1)$ ハ連
續シタ二ツノ整数ノ積デアルカラ常ニ偶数
デアル。従ツテ $n(n+1) + 1$ ハ奇数デアル故
ニ24デハ割リキレナイ。

例題

1. 連続シタ三ツノ整数ノ積ハ6ノ倍数ナルコ
トヲ證明セヨ。
2. 3ノ倍数デナイ相異ル二ツノ整数ノ平方ノ

差ハ常ニ3ノ倍数ナルコトヲ證明セヨ。

3. 奇数ノ平方カラ1ヲ減ジタモノハ8ノ倍数
ナルコトヲ證明セヨ。
4. 二位ノ整数トソノ数字ノ順序ヲ交換シテ出
來ル数トノ差ハ9ノ倍数デアルコトヲ證明
セヨ。
5. n ガ奇数ナラバ $n^3 - n$ ハ24ノ倍数ナルコト
ヲ證明セヨ。
6. n ガ整数ナラバ $2n^5 + 4n$ ハ6ノ倍数デアルコ
トヲ證明セヨ。
7. $9^n + 1$ ハ n ガ奇数ナラバ10ノ倍数デアルコ
トヲ證明セヨ。
8. $11^n - 1$ ハ n ガ整数ナラバ常ニ10ノ倍数ナル
コトヲ證明セヨ。
9. a 及ビ b ガ1ヨリ大ナル正ノ整数ナルトキ
ハ $a^3b - ab^3$ ハ3デ割リキレルコトヲ證明セ
ヨ。
10. 五位ノ整数ニツイテコレヲ9デ割ツタ剰餘
ハソノ数字ノ和ヲ9デ割ツタ剰餘ニ等シイ
コトヲ證明セヨ。

102. 公約数・公倍数

二つの整数又ハ整式ヲ A, B トシソノ公約数ヲ G トシ公倍数ヲ L トスレバ

$$A=aG \quad B=bG$$

$$L=abG$$

特ニ G ガ A, B ノ最大公約数ナラバ a, b ニハ公約数ガナク abG ハ最小公倍数デアル。

a, b ニ公約数ガナイコトヲ a, b ハ互ニ素デアルトイフ。

例 1 x ニ關スル二整式ガアツテ、ソノ最大公約数ハ $2x+3$ 、最小公倍数ハ $24x^3-26x^2-53x+60$ デアルトイフ。コノ二式ヲ求メヨ。

【解】 二式ヲ A, B トシ最大公約数ヲ G トスル。

$$A=aG, B=bG \quad (\text{但シ } a, b \text{ ハ互ニ素})$$

$$G=2x+3, \quad abG=24x^3-26x^2-53x+60$$

$$\text{故ニ } ab=12x^2-31x+20$$

$$=(3x-4)(4x-5)$$

$$\text{故ニ } \begin{cases} a=3x-4 \\ b=4x-5 \end{cases} \quad \text{或ハ} \quad \begin{cases} a=(3x-4)(4x-5) \\ b=1 \end{cases}$$

コノ a, b ノ式ヲ交換スルモ二式ヲ求メルコトノ結果ニ於テハ同一デアル。

$$\text{答} \quad \begin{cases} (2x+1)(3x-4) \\ (2x+1)(4x-5) \end{cases} \quad \begin{cases} (2x+1)(3x-4)(4x-5) \\ 2x+1 \end{cases}$$

例題

- x ニ關スル同ジ次数ノ二ツノ整式ガアル。ソノ最大公約数ハ $x-1$ デ最小公倍数ハ $x^5-x^4-3x^3+x^2+2x$ デアル。コノ二式如何。
- 正ナル二数ノ和ハ 48 デ最大公約数ハ 3 デアル。コノ二数ハ如何ナル数カ。
- 有理整式 A, B, Q, R ノ間ニ $A=QB+R$ ナル關係ガアルトキ A, B ノ最大公約数ト B, R ノ最大公約数トハ同ジモノナルコトヲ證明セヨ。
- $2x^2+9x-5$ 及ビ $2x^2+13x-7$ ヲ同時ニ零ナラシメル x ノ値ヲ求メヨ。
- $2x^2-7x+5$ ハ零トナルモ同時ニ $3x^2-7x+4$ ガ零トナラザル x ノ値ヲ求メヨ。
- A, B ノ公約数ハ $A+B, A-B, mA+nB$ ノ約数ナルコトヲ示セ。

例 2 x^2+ax+b と x^2+mx+n の最大公約数ヲ $x+\alpha$ トスレバ $(b-n)^2=(a-m)(bm-an)$ ナルコトヲ證明セヨ。

【解】 兩式ガ $x-\alpha$ デ整除サレルナラバ

$$\alpha^2-a\alpha+b=0 \quad (1)$$

$$\alpha^2-m\alpha+n=0 \quad (2)$$

$$(1)-(2) \quad \alpha(m-a)+b-n=0$$

$$\alpha = \frac{b-n}{a-m}$$

コノ値ヲ (1)ニ代入スレバ

$$\left(\frac{b-n}{a-m}\right)^2 - \frac{a(b-n)}{a-m} + b = 0$$

$$(b-n)^2 - (a-m)\{a(b-n) - b(a-m)\} = 0$$

$$(b-n)^2 = (a-m)(bm-an)$$

7. $x^2+(m+1)x+m$, $x^2-(m-5)x+2$ ガ x ニツイテ一次ノ公約数ヲ有スルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ。
8. ニツノ方程式 $x^2-7x+k=0$ と $x^2-9x+2k=0$ トガーツノ共通根ヲ有スルトシテ各方程式ヲ解ケ。
9. $ax^2+bx+c=0$, と $lx^2+mx+n=0$ トガーツノ共通

根ヲ有スルナラバ $(an-cl)^2=(bl-am)(cm-bn)$ ナル關係アルコトヲ證明セヨ。

10. x^3+ax^2+bx+1 と x^3+bx^2+ax+1 トガ一次ノ公約数ヲ有スルナラバ a と b トノ間ニ如何ナル關係ガアルカ。
11. $x^3+3x^2+\lambda x+1$ と $x^3+\lambda x^2+3x+1$ トガ公約数ヲ有スルトキ λ ノ値ヲ求メヨ。
12. x^2+ax+b と x^2+mx+n トノ最大公約数ガ $x+f$ デアルトキコノ二式ノ最小公倍数ハ $x^3+(a+m-f)x^2+(am-f^2)x+f(a-f)(m-f)$ ナルコトヲ證明セヨ。

103. 連除法

例 1. $x^3+6x^2+3x-10$ と $x^3+8x^2+9x-18$ トノ最大公約数ヲ求メヨ。

x	$x^3+6x^2+3x-10$	$x^3+8x^2+9x-18$	1
	x^3+3x^2-4x	$x^3+6x^2+3x-10$	
3	$3x^2+7x-10$	$2(2x^2+6x-8)$	
	$3x^2+9x-12$	x^2+3x-4	x
	$-2 -2x+2$	x^2-x	
	答 $x-1$	$4x-4$	4
		$4x-4$	
		0	

整式 A を整式 B で割つた整商を Q, 剰餘を R とすれば

$$A=BQ+R$$

従つて A, B の公約數と B, R の公約數とは全然同一であることが證明出來る (前條例題 3)

コレによつて A と B との最大公約數ヲ求メル代りに B と R との最大公約數ヲ求メテモヨイ。

B と R との最大公約數ヲ求メルニハマタ B を R で割つて剰餘 R' を出シ R と R' との最大公約數ヲ求メレバヨイ。マタ R を R' で割ルトイフヤウニ計算ヲ續ケテ最後ニ割リキレルマデ計算ヲ行ツテ行ク。

最後ニ $4x-4$ を $x-1$ で割つて割リキレタ。コノトキ $x-1$ は $4x-4$ と $x-1$ との最大公約數であるカラ従つて初メノ二式ノ最大公約數ハ $x-1$ である。

計算ノ途中デ或式ヲ 2 で割つたノハ割リ算ヲ簡單ニスルタメデ公約數ニハ無關係である。

A, B が二ツノ整數デアツテモコレト全ク同様ナ理法ガ成立ツコトハ明カである。

例 2 $2x^3+5x^2-6x-9$, $3x^3+4x^2-13x+6$ を同時ニ零ナラシメル x の値ヲ求メヨ。

$2x^3+5x^2-6x-9$	$3x^3+4x^2-13x+6$	6
$14x^3+35x^2-42x-63$	$6x^3+8x^2-26x+12$	3
$14x^3+16x^2-78x$	$6x^3+15x^2-18x-27$	3
$19x^2+36x-63$	-1	$-7x^2-8x+39$
7	$7x^2+8x-39$	$7x$
$133x^2+252x-441$	$7x^2+21x$	-13
$133x^2+152x-741$	$-13x-39$	-13
100	$-13x-39$	0
$100x+300$	0	0
$x+3$	0	0

$$G. C. M = x+3$$

$$2x^3+5x^2-6x-9=a(x+3)$$

$$3x^3+4x^2-13x+6=b(x+3) \quad (\text{但シ } a, b \text{ ハ互ニ素})$$

$$\text{故ニ } x+3=0 \quad x=-3$$

例題

1. $x^3+6x^2+3x-10$, $x^3+8x^2+9x-18$ の最大公約數ヲ求メヨ。
2. x^4-x^3+5x-3 , $2x^4-x^2+9$ の最大公約數ヲ求メヨ。

3. $2x^4+x^3-6x^2-2x+3$, $2x^4-3x^3+2x-3$ フ同時ニ零ナラシメル x ノ値ヲ求メヨ。
4. $8x^5-4x^4+2x^3-7x^2+5x-1$, $24x^4-28x^3+6x^2+3x-1$ フ同時ニ零ナラシメル x ノ凡テノ値ヲ求メ, 次ニ $8x^5-4x^4+2x^3-7x^2+5x-1=0$ ナル方程式ヲ解ケ。
5. $6x^3-7x^2-16x+12$ フ零トナラシメ, シカモ $3x^3-5x^2-4x+4$ フ零ナラシメナイ x ノ値ヲ求メヨ。
6. $2x^4+x^2-2x-a$, $2x^3-x^2-x-3$ ノ最大公約數ガ x ニツイテノ二次式ナルタメニハ a ノ値如何。
7. 次ノ各式ヲ計算セヨ。
- $\frac{x+24}{x^3+x^2-3x-6} + \frac{x-15}{x^3+2x^2-3}$
 - $\frac{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc}{x^2-(b+c)x+bc}$
 $\frac{x^3-2ax^2+(a^2+ab-b^2)x-ab(a-b)}{x^2-(a+b)x+ab}$
 - $(yz+zx+xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$

104. 三ツノ整數又ハ整式ノ公約數・公倍數

三ツノ整數又ハ整式ヲ A, B, C トシツノ最大公約數ヲ G トシ公倍數ヲ M トスレバ

$$A=aG, \quad B=bG, \quad C=cG, \quad M=NabcG$$

ココデ a, b, c 全部ニ通ズル公約數ハナイ。シカシ a, b ダケノ公約數ハアルカモ知レナイ。從ツテ $abcG$ フ以テ直チニ A, B, C ノ最小公倍數トハイヘナイ。

$$a, b \text{ ノ最大公約數ヲ } g_1$$

$$b, c \text{ ノ最大公約數ヲ } g_2$$

$$c, a \text{ ノ最大公約數ヲ } g_3$$

トスレバ g_1, g_2, g_3 ハ互ニ素デアル。從ツテ

$$A=lg_1g_3G, \quad B=mg_1g_2G, \quad C=ng_2g_3G$$

コノトキ l, m, n ハ何レノ二ツヲトルモ互ニ素デアル。從ツテ最小公倍數ハ $lmng_1g_2g_3G$ デアル。即チ $L.C.M.=lmng_1g_2g_3G$

$$\text{又 } A, B \text{ ノ } G.C.M.=g_1G$$

コレト C トノ公約數ハ G ヨリ外ニハナイ。即チ A, B, C ノ最大公約數ヲ求メルニ A, B ノ最大公約

数トCトノ最大公約数ヲ求メレバヨイ。

三ツノ整数又ハ整式ノ最大公約数ヲ求メルニハソノ中ノ任意ノ二ツノ最大公約数ト残りノ一ツトノ最大公約数ヲ求メレバヨイ。

三ツヨリ多クノ整数又ハ整式ノ場合モ同様ニ逐次計算スレバヨイ。

又, A, B ノ L.C.M. = $lm_1g_2g_3G$

コレト C トノ最小公倍数ハ $lm_1g_2g_3G$ デアル。

即チ

A, B, C ノ最小公倍数ヲ求メルニハ A, B ノ最小公倍数ト C トノ最小公倍数ヲ求メレバヨイ。

三ツノ整数又ハ整式ノ最小公倍数ヲ求メルニハソノ中ノ任意ノ二ツノ最小公倍数ト残りノ一ツトノ最小公倍数ヲ求メレバヨイ

三ツヨリ多クノ整数又ハ整式ノ場合モ同様ニ逐次計算スレバヨイ。

例 題

1. 次ノ三ツノ式ノ最大公約数及ビ最小公倍数ヲ求メヨ。

$$3x^3+7x^2-4, \quad 3x^3+x^2-8x+4$$

$$x^3+6x^2+11x+6$$

又コノ三ツノ式ヲ同時ニ零ナラシメル x ノ値如何。

2. $x^3-3x^2+3x-1, \quad x^3-x^2-x+1, \quad x^3-2x^2+2x-1$

ナル三式ノ最大公約数及ビ最小公倍数ヲ求メヨ。

3. 二次及ビ三次ノ整式ガアツテソノ相乗積ハ $x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1$ デソノ最大公約数ハ $x-1$ デアル。初メノ二式ヲ求メヨ。

4. 次ノ分數式ヲ計算セヨ。

$$\frac{1}{x^3-3x^2+3x-1} - \frac{1}{x^3-x^2-x+1}$$

$$\frac{1}{x^4-2x^3+2x-1} - \frac{1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

練習問題

次ノ各式ヲ因数ニ分解セヨ。(1-10)

1. $(c^2+b^2)^2+(ab+ac)^2+(ab-ac)^2+a^4$
2. $x^4(1-y)^2-2x^2(1+y^2)+(1+y)^2$
3. $x^4(1-y)^2+4x^2y^2-(1+y)^2$
4. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$
5. $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)-3y^4$
6. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$
7. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$
8. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
9. $x^3-\frac{20}{33}x^2y+\frac{1}{11}xy^2$
10. $15x^2+53x+27$
11. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1$ ナルトキハ a, b, c ノ中何レカ二ツノ和ハ零ナルベキコトヲ證明セヨ。
12. $b^2=ac$ ナラバ $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$ ナルコトヲ證明セヨ。
13. $a+b+c=0$ ナラバ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ ハ $(ab+bc+ca)^2$ ニ等シイコトヲ證明セヨ。

14. $x+y+z=0$ ナルトキ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$ ハ完全平方式ナルコトヲ證明セヨ。
15. ニツノ方程式 $x^2+(m-3)x+2=0$ 及ビ $x^2+mx-1=0$ ガ唯一ツノ共通根ヲモツ様ニ m ノ値ヲ定メヨ。
16. x^2-x-6 ト $x^2+(3-a)x-3a$ トガ一次ノ公約數ヲ有スルタメニハ a ハ如何ナル値ヲトルベキカ。
17. 方程式 $x^2-x+2c=0, 2x^2-5x+c=0$ ハ一ツノ共通根ヲモツテキルトイフ。コノ方程式ノ根ヲ求メヨ。
18. $x^3+x^2+x+3+p$ ト x^2-x+p トガ一次ノ公約數ヲ有スルトキ p ノ値ヲ求メヨ。
19. x^3+px+q ト $3x^2+p$ トガ一次ノ公約數ヲ有スルトキハ $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$ ナルコトヲ證明セヨ。
20. A, B, C ノ二ツツツノ最大公約數ヲ G_1, G_2, G_3 トシニツツツノ最小公倍数ヲ L_1, L_2, L_3 トスレバ $G_1 G_2 G_3 L_1 L_2 L_3=(ABC)^2$ ナルコトヲ證明セヨ。

105. 等差級數

例へば

$$1, 3, 5, 7, 9 \quad (1)$$

$$1, 2, 4, 8, 16 \quad (2)$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \quad (3)$$

$$3, 0, -3, -6, -9 \quad (4)$$

ノヤウニ一定ノ法則ニ從ツテ順序ニ並ベター列ノ數ヲ級數トイヒ、ソノ各數ヲ級數ノ項トイフ。

級數ノ項ハソノ順序ニヨツテ**第一項**、**第二項**、**第三項**等トイヒ特ニ最初ノ項ヲ**初項**、最後ノ項ヲ**末項**トイフ。上ノ級數ノ中デ

(1) ハ各項ニ2ヲ加ヘルト次ノ項ガ得ラレ

(4) ハ各項ニ-3ヲ加ヘルト次ノ項ガ得ラレ

ル。(1)(4)ノヤウニ任意ノ一項ヲソノ次ノ項カラ

引イタ差ガ常ニ一定ナルトキコレヲ**等差級數**トイヒ、ソノ一定ノ差ヲ**公差**トイフ。

等差級數ノ初項ヲ a 、公差ヲ d デ表スト

$$\text{初項} \quad a$$

$$\text{第二項} \quad a+d$$

$$\text{第三項} \quad a+2d$$

$$\text{第四項} \quad a+3d$$

トナルカラ等差級數ハ次ノヤウニ表サレル。

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

各項ニ於ケル d ノ係數ハ順序ヲ示ス數ヨリ常ニ1ダケ小デアル。從ツテ n 番目ニアル項ハ

$$a+(n-1)d$$

デ表サレル。ココデ $n=1, 2, 3, \dots$ 等ヲ代入スレバソレゾレ第一項、第二項、第三項等ガ得ラレル。コノ意味ニ於テコノ式ヲ等差級數ノ一般項トイフ。第 n 項ヲ l トスレバ

$$l=a+(n-1)d$$

コノ中ニアル文字ノ中何レカ三ツノ値ヲ知ルトキハ殘ル一ツヲ求メルコトガ出來ル。

等差級數ノ初項ヲ a , 公差ヲ d トス
レバ各項ハ $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$
第 n 項 l ハ $l = a + (n-1)d$

例 1 級數 1, 3, 5,ノ第 15 項ヲ求メヨ。

【解】 初項 $a=1$

公差 $d=3-1=2$

第 15 項 $l=1+(15-1) \times 2=29$

例 2 12 ト -3 トノ間ニ 4 箇ノ數ヲ並ベテ全體
ガ等差級數ヲナスヤウニセヨ。

【解】 4 箇ノ數ヲ並ベルト

$a=12, b_1, b_2, b_3, b_4, l=-3$

即チ -3 ハ第 6 項ニ相當スル。公差ヲ d

トスレバ $-3=12+(6-1)d$

$d=-3$

故ニ 12, 9, 6, 3, 0, -3

例 3 等差級數ノ第 5 項ガ 12, 第 8 項ガ -6 デ
アルトイフ。初項及ビ公差ヲ求メテコノ級數
ヲ書キ列ベヨ。

【解】 初項ヲ a , 公差ヲ d トスレバ

$$\begin{cases} 12=a+(5-1)d & (1) \\ -6=a+(8-1)d & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12=a+(5-1)d & (1) \\ -6=a+(8-1)d & (2) \end{cases}$$

コノ一組ノ聯立方程式ヲ解イテ

$$a=36, d=-6$$

級數ヲ書キ列ベルト次ノヤウニナル。

36, 30, 24, 18, 12, 6, 0, -6,

例 題

1. 次ノ級數ハドンナ法則ニヨツテ列ベラレテ
アルカ。モシソノ中ニ等差級數ガアレバソ
ノ公差ヲ求メ最後ニ續ク二項ヲ書ケ。

1. -5, 0, 5, 10, 15, 20

2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$

3. 10, 6, 2, -2, -6, -10

4. $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$

5. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{1}{6}$

2. 次ノ各等差級數ニ於テ示サレタ項ヲ求メヨ。

1. 1, 6, 11, 16, 第 9 項, 第 15 項

2. 7, 0, -7, -14.....第9項, 第17項
3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \dots$第20項
4. $a, 3a, 5a, 7a, \dots$第10項
5. $(a+b)^2, a^2+b^2, (a-b)^2 \dots$ 第11項
3. 次ノ各等差級數ノカケタ所ヲ補へ。
1. 3, $\triangle, \triangle, \triangle, 19$
2. 10, $\triangle, \triangle, 4, \triangle, \triangle$
3. $\triangle, \triangle, 15, \triangle, \triangle, 9, \triangle$
4. $\triangle, \triangle, \triangle, \triangle, 17, \triangle, \triangle, \triangle, 29$
4. 初項ガ5, 公差ガ3ナル等差級數ノ第何項ガ29トナルカ。
5. 100カラ200マデノ間ニ3ノ倍數ハ幾ツアルカ。
6. 100ト300トノ間ニアル整數ノ中デソレヲ7デ割ルト3餘ルヤウナ整數ハ幾ツアルカ。
7. 初項ガ a , 第2項ガ b ナル等差級數ガアル。
 $\frac{a}{a-b}$ ガ正ノ整數ナラバソノ級數ノ中ニハ零ニ等シイ項ガアルコトヲ證明セヨ。

106. 等差中項

二數 a, b ノ間ニ m 箇ノ數ガアツテ全體ガ等差級數ヲナストキハ中間ノ數ヲ a, b ノ間ニアル m 箇ノ等差中項トイフ。

例 二數 a, b ノ間ニ5箇ノ等差中項ヲ入レヨ。

〔解〕 a, b ノ間ニ5箇ノ中項ヲ入レルト b ハ第7項トナル故公差ヲ d トスレバ

$$b = a + (7-1)d$$

$$d = \frac{1}{6}(b-a)$$

故ニ等差中項ハ次ノヤウニナル。

$$a + \frac{b-a}{6}, a + \frac{2}{6}(b-a), a + \frac{3}{6}(b-a), a + \frac{4}{6}(b-a)$$

$$a + \frac{5}{6}(b-a)$$

一般ニ a, b ノ間ニ m 箇ノ等差中項ヲ入レルト b ハ第 $(m+2)$ 項トナル。從ツテ公差ヲ d トスレバ

$$b = a + (m+2-1)d$$

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

故ニ入レルベキ等差中項ハ次ノヤウニナル

$$a + \frac{1}{m+1}(b-a), a + \frac{2}{m+1}(b-a) \dots, a + \frac{m}{m+1}(b-a)$$

a, b ノ間ニ m 箇ノ等差中項ヲ入レ

ルニハ

$$b = a + (m+1)d \quad d = \frac{b-a}{m+1}$$

ニヨツテ公差 d ヲ求メヨ。

特ニ a, b ノ間ノ等差中項ガ唯一ツナルトキハ
ソノ中項ヲ a, b ノ等差中項トイフ。

a, b ノ等差中項ヲ A トスレバ

$$A = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

a, b ノ等差中項ヲ a, b ノ相加平均又ハ算術平均トモイフ。

又 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ ガ等差級數ヲナストキハ a, b, c, d ハ調和級數ヲナストイヒ b, c ヲ a, d ノ間ニアル 2 箇ノ調和中項トイフ。

a, b ノ間ニ唯一ツノ調和中項ガアルトキハソノレヲ單ニ a, b ノ調和中項トイフ。

a, b ノ調和中項ヲ H トスレバ

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$$

ガ等差級數ニナルコトノ意味デアルカラ

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

a, b ノ調和中項ヲ a, b ノ調和平均トモイフ。

a, b ノ等差中項ヲ A トスレバ

$$A = \frac{a+b}{2}$$

a, b ノ調和中項ヲ H トスレバ

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

例 題

- 次ノ各二數ノ等差中項及ビ調和中項ヲ求メヨ。
 - 5, 9
 - 3, 7
 - $a+b, a-b$
 - $x^2+y^2, 2xy$
- 次ノ各數ノ間ニ示サレタ箇數ノ等差中項ヲ

入レヨ。

1. 5 と 20 とノ間ニ 4 箇
2. 4 と 25 とノ間ニ 8 箇
3. $-6\sqrt{2}$ と $12\sqrt{2}$ とノ間ニ 9 箇
4. $3x$ と $-4x$ とノ間ニ 13 箇
3. $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{c+b}$ ガ等差級數ヲナストキ b^2 ハ a^2 と c^2 とノ等差中項ナルコトヲ證明セヨ。又ソノ逆ハ如何。
4. a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab ガ等差級數ヲナストキ a, b, c ノ間ニ如何ナル關係アルカ。但シ $a+b+c$ ハ零デナイモノトセヨ。
5. b ガ a, c ノ等差中項ナルトキハ方程式 $ax^2+2bx+c=0$ ノ根ハ實數デアルコトヲ證明セヨ。
6. a, b, c ガ等差級數ヲナシ b, c, d ガ調和級數ヲナストキハ $a:b=c:d$ ナルコトヲ證明セヨ。
7. a, b ヲ正數トスルトキソノ等差中項ト調和中項トハ何レガ大デアルカ。

107. 等差級數ノ和

例 等差級數 2, 4, 6,ニ於テ初項カラ第 10 項マデノ和ヲ求メヨ。

〔解〕 第 10 項ヲ l トスレバ

$$l=2+(10-1) \times 2=20$$

總和ヲ S トスレバ

$$S=2+4+6+\dots\dots\dots+20$$

$$S=20+18+16+\dots\dots+2$$

コノ二ツノ等式ヲ邊々加ヘ合セレバ

$$2S=22+22+22+\dots\dots+22$$

$$=22 \times 10$$

$$\text{故ニ } S=\frac{22 \times 10}{2}=110$$

一般ニ等差級數ノ初項ヲ a , 末項ヲ l トスレバ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\dots\dots\dots+l$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\dots\dots\dots+a$$

コノ二等式ヲ邊々相加ヘルト

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\dots\dots\dots+(a+l)$$

項數ヲ n トスレバ

$$2S=n(a+l) \quad S=\frac{n(a+l)}{2} \quad (1)$$

もし末項が與へられナイ場合ニハ

$$l = a + (n-1)d$$

デアアルカラコレヲ前ノ式ニ代入スレバ

$$S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} \quad (2)$$

初項ト公差ト項數ガ與へラレタ場合ニハコノ
公式ニヨツテ和ヲ求メルカ又ハ一旦末項ヲ求メ
テカラ (1) ノ公式ヲ適用シテモヨイ。

a, l, d, n ヲ夫々等差級數ノ初項末
項公差及ビ項數トシ總和ヲ S トスレ
バ

$$S = \frac{n(a+l)}{2} \quad (1)$$

$$S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} \quad (2)$$

例 1 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

$$(1) 1+2+3+\dots+n$$

$$(2) 1+3+5+\dots \text{第 } n \text{ 項マデ}$$

【解】 (1) 末項ハ n デ項數モ n デアルカラ

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(1+n)}{2}$$

(2) 末項ヲ求メテ公式 (1) ヲ適用スレバ

$$l = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$$

$$S = \frac{n(1+l)}{2} = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$$

又公式 (2) ヲ適用スレバ

$$S = \frac{n}{2} \{2 + (n-1) \times 2\} = n^2$$

例 2 等差級數 15, 12, 9, ……ノ項ヲ幾ツトレ
バツノ和ガ 42 トナルカ。

【解】 初項 $a=15$, 公差 $d=-3$, $S=42$ ヲ公式 (2) ニ
代入スレバ

$$42 = \frac{n}{2} \{15 \times 2 + (n-1) \times (-3)\}$$

コレヲ簡單ニスレバ

$$n^2 - 11n + 28 = 0$$

$$(n-4)(n-7) = 0$$

$$n=4 \text{ 或ハ } 7.$$

【驗】 第 7 項マデノ和ヲ式ニ書キナラベルト

$$15+12+9+6+3+0-3=42.$$

コ、デ第 5 項, 第 6 項, 第 7 項ノ和ハ零トナ
ツテ第 4 項マデノ和モ又 42 トナル。

例3 等差級數ノ初項カラ第5項マデノ和ハ40
デ第7項ハ20デア。初項カラ第20項マデノ
和ヲ求メヨ。

【解】 初項ヲ a , 公差ヲ d トスレバ

$$\begin{cases} 40 = \frac{5}{2} \{2a + (5-1)d\} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = a + (7-1)d & (2) \end{cases}$$

コノ聯立方程式ヲ解ケバ

$$a=2, \quad d=3$$

第20項マデノ和ヲ求メルト

$$S = \frac{20}{2} \{4 + (20-1) \times 3\} = 610 \quad \text{答}$$

例 題

1. 次ノ各等差級數ノ和ヲ求メヨ。

1. $1+2+3+\dots$ (50項)

2. $10+5+0-5+\dots$ (17項)

3. $2+4+6+\dots$ (25項)

4. $\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+\dots$ (15項)

5. $a+2a+3a+\dots$ (n 項)

2. 等差級數ノ第7項ハ23, 第20項ハ62デア。第20項マデノ和ヲ求メヨ。

3. 等差級數ノ最初7項ノ和ハ70デ, 初項ハ1デアルトイフ。第10項マデノ和ヲ求メヨ。

4. 等差級數
 $10, 9.6, 9.2, \dots$

ノ幾項マデノ和ガ126トナルカ。

5. 等差級數ノ公差ガ-3デ末項ハ-39, 總和ガ-264ナルトキ初項ト項數トヲ求メヨ。

6. 100ト1000トノ間ニアル3ノ倍數ノ總和ヲ求メヨ。

7. 200ト700トノ間ニアル數デ13デ割リキレル總テノ整數ノ和ヲ求メヨ。

8. 三桁ノ正整數ノ中デ17ノ倍數ノ總和ヲ求メヨ。

9. 70本ノ杭ヲ3間オキニ一直線ニ並ベタ列ガアル。今始メノ杭カラ100間隔ツタコノ直線上ノ一地點ニ居ル人が總テノ杭ヲ1本ヅツコノ所ニ運ブモノトスレバ運ビ終ルマデニ何程ノ道ヲ歩ムカ。

108. 等比級數

例へバ

2, 6, 18, 54,..... (1)

4, -2, +1, -1/2,..... (2)

ノヤウニ級數ノ任意ノ項デソノ次ノ項ヲ割ツタ商ガ常ニ一定デアルトキハコレヲ等比級數トイヒ、ソノ一定ノ商ヲ公比トイフ。

上ノ例デ(1)ノ公比ハ3デ、(2)ノ公比ハ-1/2デアル。

等比級數ノ初項ヲa、公比ヲrトスレバ

初 項 a

第二項 ar

第三項 ar^2

第四項 ar^3

.....

トナルカラ等比級數ハ次ノヤウニ表サレル。

a, ar, ar^2, ar^3,.....

各項ニ於ケルrノ指數ハ順番ヲ示ス數ヨリ常ニ1ダケ小デアル。從ツテn番目ニアル項ハ

ar^{n-1}

デ表サレル。ココデn=1, 2, 3.....等ヲ代入スレバソレゾレ第一項,第二項,第三項等ガ得ラレル。コノ意味ニ於テ上ノ式ヲ等比級數一般項トイフ。第n項ヲlトスレバ

l=ar^{n-1}

等比級數ノ初項ヲa、公比ヲrトスレバ各項ハ a, ar, ar^2, 第n項lハ l=ar^{n-1}

例1 1, 2, 4,.....ナル等比級數ノ第6項ヲ求めヨ。

初項 a=1

公比 r=2

第6項 l=1x2^{6-1}=32

例2 4 1/2 ト 1/18 トノ間ニ3箇ノ數ヲナラベテ全體ガ等比級數ヲナスヤウニセヨ。

【解】 3箇ノ數ヲ入レルト全體デ5項ニナルカラ 1/18 ハ第5項デアル。公比ヲrトスレバ

$$\frac{1}{18} = 4 \frac{1}{2} r^4 \quad r^4 = \frac{1}{81} \quad r = \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{故ニ} \quad 4 \frac{1}{2}, \quad 1 \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{18}$$

$$\text{或ハ} \quad 4 \frac{1}{2}, \quad -1 \frac{1}{2}, \quad + \frac{1}{2}, \quad - \frac{1}{6}, \quad + \frac{1}{18}$$

例3 等比級數ノ第5項ガ1, 第7項ガ $\frac{1}{4}$ ナラバ
初項及ビ公比如何。

〔解〕 初項ヲ a , 公比ヲ r トスレバ

$$\begin{cases} ar^4 = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ar^6 = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \div (1) \quad r^2 = \frac{1}{4} \quad r = \pm \frac{1}{2}$$

コノ値ヲ (1) ニ代入スレバ

$$a \times \frac{1}{16} = 1 \quad a = 16$$

答 初項16, 公比 $\pm \frac{1}{2}$

例 題

1. 次ノ級數ノ中カラ等比級數ヲエラビ出シ
ノ公比ヲイヘ。

1. 1, 2, 4, 8, 16.....

2. $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2$

3. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

4. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \frac{16}{243}, \dots$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \dots$

2. 次ノ各等比級數ニ於テ示サレタ項ヲ求メヨ。

1. 2, 6, 18,..... 第5項, 第7項

2. 16, 8, 4,..... 第7項, 第10項

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 第8項, 第10項

4. 2, $3\sqrt{2}, 9, \dots$ 第10項

3. 次ノ各等比級數ノカケタ所ヲ補ヘ。

1. 1, $\triangle, \triangle, 125, \triangle$

2. $\triangle, \triangle, 3, \triangle, \triangle, 81$

3. $\triangle, 64, \triangle, \triangle, 27, \triangle$

4. 初項ガ3, 公比ガ5ナル等比級數ノ第何項ガ
9375トナルカ。

5. 等比級數ヲナス四數ガアル。初メノ二項ノ
和ハ48デ, 終リノ二項ノ和ハ432デアル。コ
ノ四數ヲ求メヨ。

109. 等比中項

二數 a, b ノ間ニ m 箇ノ數ガアツテ全體ガ等比級數ヲナストキハ中間ノ數ヲ a, b ノ間ニアル m 箇ノ等比中項トイフ。

特ニ a, b ノ間ノ等比中項ガ唯一ツナルトキハソノ中項ヲ a, b ノ等比中項トイフ。

a, b ノ等比中項ヲ G トスレバ

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \quad G^2 = ab$$

$$\text{故ニ} \quad G = \pm \sqrt{ab}$$

a, b ノ等比中項ヲ a, b ノ相乘平均又ハ幾何平均トモイフ。

例 二數 a, b ノ間ニ 5 箇ノ等比中項ヲ入レヨ。

【解】 a, b ノ間ニ 5 箇ノ等比中項ヲ入レルト b

ハ第 7 項トナル故公比ヲ r トスレバ

$$b = ar^{7-1} = ar^6$$

$$r^6 = \frac{b}{a}$$

$$r = \pm \sqrt[6]{\frac{b}{a}}$$

從ツテ求ムル等比中項ハ次ノ通りデアル。

$$a\sqrt[6]{\frac{b}{a}}, a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}, a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^3}, a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^4}, a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^5}$$

或ハ

$$-a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)}, a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}, -a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^3}, a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^4}, -a\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^5}$$

一般ニ a, b ノ間ニ m 箇ノ等比中項ヲ入レルト b ハ第 $(m+2)$ 項トナル故

$$b = ar^{m+1} \quad r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

コレカラ r ヲ求メテ等比中項ヲ挿入スルコトガ出來ル。

a, b ノ間ニ m 箇ノ等比中項ヲ入レルニハ

$$b = ar^{m+1} \quad r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

ニヨツテ公比 r ヲ求メヨ。

特ニ a, b ノ等比中項ヲ G トスレバ

$$G = \pm \sqrt{ab}$$

例 1 $\frac{9}{4}$ ト $\frac{8}{27}$ トノ間ニ 4 箇ノ等比中項ヲ入レヨ。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \frac{8}{27} &= \frac{9}{4} r^5 & r^5 &= \frac{8}{27} \times \frac{4}{9} = \frac{2^5}{3^5} \\ r &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

求メル中項ハ次ノ通リデアル。

$$\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$$

例2 2ト9トノ間ニ二ツノ數ヲ入レテ初メノ三數ハ等差級數ヲナシ、後ノ三數ハ等比級數ヲナスヤウニセヨ。

【解】 二數 x, y ヲ挿入シテ

$$\begin{aligned} x \text{ ガ } 2 \text{ ト } y \text{ トノ等差中項ナルタメニハ} \\ 2x = 2 + y \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y \text{ ガ } x \text{ ト } 9 \text{ トノ等比中項ナルタメニハ} \\ y^2 = 9x \end{aligned} \quad (2)$$

(1), (2) ノ一組ノ聯立方程式ヲ解ケバ

$$\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases} \text{ 或ハ } \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{答 } \begin{cases} 2, 4, 6, 9 \\ 2, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, 9 \end{cases}$$

例3 $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ ガ等差級數ヲナストキ a, b, c ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

$$\text{【解】 } 2 \times \frac{1}{2b} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$$

$$\text{故ニ } (a+b)(b+c) = b(b+c) + b(a+b)$$

括弧ヲ拂ツテ簡單ニスレバ

$$b^2 = ac$$

故ニ b ハ a, c ノ等比中項デアル。從ツテ a, b, c ハ等比級數ヲナス。

例 題

1. 次ノ各二數ノ等比中項ヲ求メヨ。

$$1. 18, 50 \quad 2. \frac{10}{9}, \frac{5}{98}$$

$$3. (a+b)^2, (a-b)^2 \quad 4. \frac{2ab}{a+b}, \frac{a+b}{2}$$

2. 次ノ各二數ノ間ニ示サレタ等比中項ヲ挿入セヨ。

$$1. 162 \text{ ト } 2 \text{ トノ間ニ } 3 \text{ 箇}$$

$$2. \frac{2}{13} \text{ ト } 6 \text{ トノ間ニ } 3 \text{ 箇}$$

$$3. 8\frac{1}{3} \text{ ト } \frac{81}{125} \text{ トノ間ニ } 4 \text{ 箇}$$

3. $8, a, b$ が等差級數ヲナシ $a, b, 36$ が等比級數ヲナストイフ。 a, b ノ値ヲ求メヨ。
4. 二數ノ差ハ 32 デ、等差中項ハ等比中項ヨリモ 8 ダケ大デアアル。コノ二數ヲ求メヨ。
5. 相異ル二ツノ正數ノ等差中項ハ等比中項ヨリ大デアアルコトヲ證明セヨ。
6. $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = xyz(x^3 + y^3 + z^3)$ ナルトキ x, y, z ノ中何レカーツハ他ノ二ツノ比例中項ナルコトヲ證明セヨ。
7. a, b, c が等差級數ヲナシ x ヲ a ト b トノ等比中項トシ y ヲ b ト c トノ等比中項トスレバ x^2, b^2, y^2 ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。
8. 三數 a, b, c ハ等差級數ヲナシ、 b, a, c ハ等比級數ヲナスナラバ a, c, b ハ調和級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

110. 等比級數ノ和

初項 a 、公比 r ナル等比級數ノ第 n 項マデノ和ヲ求メルニハ次ノヤウニスル。

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$Sr = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

邊邊相減スレバ

$$S - Sr = a - ar^n$$

$$S(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (\text{但シ } r \neq 1) \quad (1)$$

モシ $r=1$ ナルトキハ

$$S = a + a + \dots + a = na$$

【注意】 $r > 1$ ナルトキハ $S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ ナル公式ヲ

用ヒル方ガ便利デアアル。

末項ヲ l トスレバ $ar^n = ar^{n-1}r = lr$

$$\text{故ニ} \quad S = \frac{a-lr}{1-r} \quad (2)$$

末項ガ與ヘラレタ場合ニハコノ公式ヲ用ヒル方ガ便利デアアル

a, l, r, n ヲ夫々等比級數ノ初項,末項,公比及ビ項數トシ,總和ヲ S トスレバ

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (1)$$

$$S = \frac{a-lr}{1-r} \quad (2)$$

例 1 等比級數 $1, 2, 4, 8, \dots$ ノ初項カラ第 16 項マデノ和ヲ求メヨ。

【解】 初項 $a=1$, 公比 $r=2$, 項數 $n=16$

$$\text{故ニ } S = \frac{2^{16}-1}{2} = 65536$$

例 2 四項カラナル等比級數ノ和ハ 200 デ兩端ノ項ノ和ハ 140 デアル。コノ級數ヲ求メヨ。

【解】 初項ヲ a , 公比ヲ r トスレバ

$$\begin{cases} \frac{a(1-r^4)}{1-r} = 200 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+ar^3 = 140 & (2) \end{cases}$$

コノ一組ノ聯立方程式ヲ解ケバ

$$\begin{cases} r=3 \\ a=5 \end{cases} \text{ 或ハ } \begin{cases} r=\frac{1}{3} \\ a=135 \end{cases}$$

$$\text{答 } \begin{cases} 5, 15, 45, 135 \\ 135, 45, 15, 5 \end{cases}$$

例 題

1. 次ノ各等比級數ノ和ヲ求メヨ。

1. $1+3+9+\dots$ (第 6 項マデ)

2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$ (第 6 項マデ)

3. $\frac{2}{3}+2+6+\dots$ (第 5 項マデ)

4. $\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\dots$ (第 4 項マデ)

5. $\sqrt{3}, -3, 3\sqrt{3}, -\dots$ (第 8 項マデ)

2. $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{4+2\sqrt{3}} + \frac{1}{10+6\sqrt{3}} + \dots$ 第 4 項マデノ和ヲ最モ簡單ナ形デ表セ。

3. 等比級數ノ第 2 項ハ $\frac{2}{3}$ デ第 3 項ハ $\frac{4}{9}$ ナルトキ初項カラ第 7 項マデノ和ヲ求メヨ。

4. 次ノ多項式ノ積ヲ求メヨ。
 $(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)$

5. $S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

$$S' = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \dots + \frac{1}{ar^{n-1}}$$

ナルトキ $SS' = a^2r^{n-1}$ ナルコトヲ證明セヨ。

111. 無限等比級數

$\frac{1}{3}$ に割リ算ヲ施シテ之ヲ小數ニ直スト 0.333...
トナツテ循環小數トナル。シカシヨク考ヘルト
0.333ノ小數位ヲ幾桁マデトツテモ丁度
 $\frac{1}{3}$ ニ等シクハナラナイ。ケレドモ 3 ノ數字ヲ多
クトレバトルダケ $\frac{1}{3}$ ニドコマデモ近イモノニナ
ルコトガワカル。コノ事ヲイヒ表スニ

$$0.3333\text{.....} \quad \text{ノ極限ハ} \quad \frac{1}{3}$$

デアルトイフ。

尙上ノ事柄ヲ確實ニスルタメニ等比級數ヲ用
ヒテ研究シテ見ルコトニシヨウ。

0.333..... ノ小數第 n 位マデトツタ時ノ値ヲ S
トスレバ

$$\begin{aligned} S &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots \dots \dots n \text{ 項マデ} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots \dots \dots \frac{3}{10^n} \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3 \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{9} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 10^n} \end{aligned}$$

即チ $\frac{1}{3}$ ヨリハ $\frac{1}{3 \times 10^n}$ ダケ小デアル。

10^n ノ値ハ n ガ増大スルニ從ツテ如何程ニモ
大トナルカラ $\frac{1}{3 \times 10^n}$ ノ分母ハ如何様ニモ増大
スル。從ツテコノ値ハ如何様ニモ小トナル。ヨ
ツテ S ハドコマデモ限リナク $\frac{1}{3}$ ニ近ヅク。故ニ
級數ノ和

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots \dots \dots$$

ノ項數ヲ限リナク増ストキ極限ハ $\frac{1}{3}$ デアル。

(1) ノヤウニ限リナク多クノ項ヲ有スル級數ヲ
無限級數トイヒ、ソノ和ノ極限ヲ無限項ノ和トイ
フ。

一般ニ無限等比級數ノ和

$$S = a + ar + ar^2 + \dots \dots \dots$$

ヲ研究スルニハ第 n 項マデノ和

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

ニ於テ n ガ次第ニ大トナルニ從ツテ S_n ガドウ變
化スルカヲ見レバヨイ。上式デ n ガ變化スルニ
從ツテ變ルモノハ r^n ダケデアル。

(1) r の絶対値が 1 より小ナル場合

$$r^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

一般に a の絶対値を $|a|$ で表スコトトスレバ。

$$\left|\frac{1}{r}\right| > 1$$

$$\text{故に } \left|\frac{1}{r}\right| = 1 + \alpha \quad \text{但し } \alpha > 0$$

$$(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha$$

$$(1 + \alpha)^3 > (1 + 2\alpha)(1 + \alpha) > 1 + 3\alpha$$

.....

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$$

$$\text{故に } \left|\left(\frac{1}{r}\right)^n\right| > 1 + n\alpha \quad \text{但し } \alpha > 0$$

故に絶対値が 1 より大ナル數 $\left|\frac{1}{r}\right|$ に n 乗スル度數ノ多クナルニ從ツテ如何様ニモ大トナル。從ツテ $\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n}$ ノ分母ノ絶対値ガ如何様ニモ大トナルカラコノ分數ノ絶対値ハ限リナク 0 ニ近ヅク。ヨツテ r^n ノ極限ハ 0 デアル。 r^n ニ一定ノ數 $\frac{a}{1-r}$ フ掛ケテモソノ極限ハ 0 デアル。故に S_n ノ極限ハ $\frac{a}{1-r}$ デアル。コレヲ表スニ次ノ記號ヲ用ヒル。

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

(2) r の絶対値が 1 より大ナル場合

コノ場合ニハ r^n ノ絶対値ハ如何様ニモ大トナルカラ S_n ノ極限值ハ考ヘラレナイ。

(3) r の絶対値が 1 に等シイ場合

$r=1$ ナルトキ $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ナル公式ヲ適用スルコトガ出來ナイ。原級數ハ

$$S_n = a + a + a + \dots \dots \dots \quad (n \text{ 項})$$

$$= na$$

トナルカラ n ガ増大スルト S_n ハ限リナク大トナル。從ツテソノ極限值ハナイ。

$$r=-1 \text{ ナル場合ニハ } S_n = \frac{a\{1-(-1)^n\}}{2}$$

n ガ偶數ナルトキハ 0 デ n ガ奇數ナラバコノ値ハ a トナル。

(1)(2)ノ何レノ場合ニ於テモ無限項ノ和ヲ考ヘルコトハ出來ナイ。即チ無限等比級數ハ公比ガ 1 より小ナルトキニ限ツテソノ和ヲ求メルコトガ出來ル。

無限等比級數ノ和

$-1 < r < 1$ ナルトキ

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

但シ a, r ハ初項及ビ公比ヲ表ス

例 1 無限等比級數 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ ノ和ヲ求メヨ。

【解】 初項 $a=1$

公比 $r = \frac{1}{2} < 1$

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

例 2 或ごむ球ガ床上ニ落ツルトキハ落下ノ高サノ 8 割マデ跳ネ反ルトイフ。コレヲ 2 米ノ高サカラ落下セシメルトキ静止スルマデニコノ球ガ上下スル距離如何。

【解】 第一回ニ跳ネ反ル高サハ 2×0.8 從ツテ上下スル距離ハ 4×0.8

第二回ニ跳ネ反ツテ上下スル距離ハ第一回ノ 0.8 即チ 4×0.8^2

以下同様ノ事ヲ限リナク繰リ反スカラ

$$\begin{aligned} S &= 2 + (4 \times 0.8 + 4 \times 0.8^2 + \dots) \\ &= 2 + \frac{4 \times 0.8}{1 - 0.8} = 18 \end{aligned}$$

答 18 米

例 題

1. 次ノ各無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。

1. $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots$

2. $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \dots$

3. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$

4. $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \dots$

5. $0.25 + 0.0025 + 0.000025 + \dots$

2. 初項 $\frac{1}{\sqrt{5}}$, 公比 $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ ナル無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。

3. 無限等比級數ノ和ハ 4 デ第二項ハ -3 デアル。コノ等比級數ヲ求メヨ。

4. 無限等比級數ノ和ハ 4 デ初項ト第二項トノ相乗積ハ第四項ノ 24 倍ニ等シイトイフ。コ

ノ級數ヲ求メヨ。

5. $q^n > 1$ ナルトキ次ノ無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。

$$\frac{a}{q^n} + \frac{a}{q^{2n}} + \frac{a}{q^{3n}} + \dots$$

6. 象牙ノ球ヲ水平ナ眞鍮盤上ニ落下スルト初メノ高サノ $\frac{3}{4}$ ダケ鉛直ニ跳ネ上ルトイフ。コレヲ2米ノ高サカラ落ストキ静止スルマデコノ球ガ上下スル距離ハ何程カ。
7. 長サ a 米ノモノガアル。初メニソノ $\frac{1}{3}$ ヲ取り去リ、次ニソノ残りノ $\frac{1}{3}$ ヲ取り去リ、次第ニ斯ノ如ク進ムモノトスレバ取り去ツタ部分ノ總計幾米トナルカ。
8. 一邊ノ長サ a ナル正方形ガアル。各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ第二ノ正方形ヲ作り又コノ正方形ノ各邊ノ中點ヲ結ンデ第三ノ正方形ヲ作り、又ソノ正方形ノ中點ヲ結ブトイフヤウニコノ方法ヲ限リナク繰リ反ストスレバ、コレ等中點ヲ結ンデ出來ル正方形ノ面積ノ總和如何。

112. 循環小數

例 1 $0.\dot{2}3 = 0.232323\dots$

$$\begin{aligned} &= 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \dots \\ &= 0.23 + 0.23 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 0.23 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \dots \\ &= \frac{0.23}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{23}{99} \end{aligned}$$

例 2 $2.3\dot{4}7 = 2.3474747\dots$

$$\begin{aligned} &= 2.3 + 0.047 + 0.00047 + \dots \\ &= 2.3 + 0.047 + 0.047 \times \left(\frac{1}{100}\right) + \dots \\ &= 2.3 + \frac{0.047}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= 2.3 + \frac{47}{990} \\ &= \frac{2.3 \times (1000 - 10) + 47}{990} \\ &= \frac{2347 - 23}{990} \\ &= \frac{2314}{990} \end{aligned}$$

例 題

1. 次ノ各循環小數ヲ分數ニ直セ。

- 1. $0.\dot{3}$ 2. $0.\dot{5}$
- 3. $0.6\dot{5}7$ 4. $3.2\dot{4}5$
- 5. $2.3\dot{6}5\dot{2}$ 6. $0.2\dot{3}6\dot{4}$

2. 次ノ式ヲ計算セヨ。

- 1. $0.\dot{3} + 0.4$ 2. $0.\dot{3}\dot{6} \times 0.\dot{8}\dot{1}$
- 3. $1.\dot{2}\dot{5} \div 0.05$ 4. $(0.1\dot{2} \div 0.\dot{3}) \div 0.\dot{3}\dot{2}$

113. 雜例

例 1
$$S = 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + 8\frac{1}{8} + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= (2 + 4 + 8 + \dots + 2^n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2(2^n - 1) + \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$= (2^n - 1)\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}(2^n - 1)(2^{n+1} + 1)$$

例 2 $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ ヲ求メヨ。

【解】 $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

コノ等式デ x ヲ順次 1, 2, 3, ニトレバ

$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$

$4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$

.....

$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

コレ等ノ兩邊ヲ邊邊加ヘ合セルト

$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$
 $= 3S + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$

故 $= 3S = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$

$= \frac{n+1}{2} \{2(n+1)^2 - 3n - 2\}$

$= \frac{n+1}{2} (2n^2 + n)$

$= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$

故 $= S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\text{例 3} \quad S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{故} = S = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

例 題

次ノ各級數ノ和ヲ求メヨ。

$$1. \quad 3\frac{1}{3} + 9\frac{1}{9} + \left(27 + \frac{1}{27}\right) + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)$$

$$2. \quad \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(3 - \frac{1}{2}\right) + (5+1) + \dots \dots \dots (n \text{ 項})$$

$$3. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$4. \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{20 \cdot 21}$$

$$5. \quad 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + (2n+1)^2$$

練習問題

1. 等差級數ヲナス三數ガアル。ソノ和ハ24デ
コノ三數ニ夫々 1, 2, 12 ヲ加ヘルト等比級
數ヲナストイフ。三數ヲ求メヨ。
2. 四數 a, b, c, d ガアル。 a, b, c ハ等比級數ヲ
ナシ b, c, d ハ等差級數ヲナシ $a+d=14$,
 $b+c=12$ デアルトイフ。 a, b, c, d ヲ求メヨ。
3. 三數 a, b, c ガ等差級數ヲナスト同時ニ等比
級數ヲナストイフ。 a, b, c ノ間ニ如何ナル
關係アルカ。
4. 等比級數ヲナス三數ガアル。初項ト第2項
トヲ交換スルト公差3ナル等差級數ヲ得ル
トイフ。三數ヲ求メヨ。
5. a, b, c ガ等差級數 b, c, d ガ等比級數ヲナシ
 $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ ガ等差級數ヲナストキ c ハ a, e ノ
等比中項ナルコトヲ證セヨ。
6. 等差級數ノ最初 n 項ノ和ハ常ニ $n(16+n)$ ニ
等シイトイフ。初項及ビ公差ヲ求メヨ。

7. 等差級數ノ最初ノ項ノ和ハ常ニ $n(5n-4)$ ニ等シトイフ。初項及ビ公差ヲ求メヨ。
8. 第 n 項ガ常ニ $\frac{9}{2} - \frac{n}{3}$ ナルベキ等差級數ノ第6項カラ第15項マデノ和ヲ求メヨ。
9. ニツノ等差級數ノ初項カラ第 n 項マデノ和ノ比ハ $\frac{7n+2}{5n-2}$ デアルトイフ。第13項ノ比ヲ求メヨ。
10. 或人 231 斤ノ距離ヲ行クニ第一日ニハ 36 斤, 第二日ニハ 33 斤, 第三日ニハ 30 斤ノヤウニ毎日ノ行程ヲ減ジナガラ旅行ヲ續ケルトキハ何日デ目的地ニ達スルカ。
11. 甲ハ或地點ヲ出發シテ初日ニハ 1 里, 第二日ニハ 2 里, 第三日ニハ 3 里ノヤウニ毎日 1 里ヅツ行程ヲ増シ, 乙ハ甲ノ出發後五日ヲ經テ毎日 12 里ヅツノ行程ヲ保チテ同ジ道ヲ歩行スルモノトスレバ甲ト乙トガ出會フノハ乙出發後幾日目ニナルカ。

對 數

114. 冪 根

$$5^3=125, \quad (-5)^3=-125$$

$$5=\sqrt[3]{125} \quad -5=\sqrt[3]{-125} \quad (1)$$

或數ヲ n 乗シテ a ニナルヤウナ數ハ a ノ n 乗根デ a ノ n 乗根ノ實數値ガ唯一ツナル場合ニハソレヲ表スニ $\sqrt[n]{a}$ ナル記號ヲ用ヒル。

$$\text{又} \quad 2^6=64 \quad (-2)^6=64$$

ナル故 64 ノ 6 乗根ハ

$$\sqrt[6]{64}=2 \quad -\sqrt[6]{64}=-2 \quad (2)$$

或數 a ノ n 乗根ガ二箇ノ實數値ヲ有スルトキハ平方根ノ場合ト同ジクソノ正ナル方ヲ $\sqrt[n]{a}$ デ表シ, n 乗根ヲ求メル算法ヲ開法トイフ。

【注意】本章デハ實數ノ範圍内デ論ズルコトトシ, ソノ都度實數トイフ言葉ヲ省ク。

(1) ノ關係ハ 3 乗根ト限ラズ指數ガ奇數ナラバ

コレト同様ノ式ガ成立シ(2)ハ根指數ガ偶數ナラバコレト同様ナコトガ成立スル。

一般ニ n ガ偶數ナラバ正數ノ n 乗根ハ二ツアツテ兩者ハ絶對値相等シク符號相反シ負數ノ n 乗根ハ存在シナイ。

n ガ奇數ナラバ正數ノ n 乗根ハ正數デ負數ノ n 乗根ハ負數デアル。

n ガ偶數ナラバ

正數 a ノ n 乗根ハ $\pm \sqrt[n]{a}$

n ガ奇數ナラバ

正數 a ノ n 乗根ハ $\sqrt[n]{a} > 0$

負數 $-a$ ノ n 乗根ハ $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

【注意】 既ニ學ンダ \sqrt{a} ハ $\sqrt[2]{a}$ ノ 2 ヲ略シタモノデ根指數ヲ省略スルノハ $n=2$ ナル場合ニ限ル。

例 49 ノ平方根ハ $\pm\sqrt{49} = \pm 7$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

例 題

- 100 ノ平方根ト $\sqrt{100}$ トハ同數カ。
- 27 ノ立方根ハ何カ。 -27 ノ立方根ハ何カ。
- 次ノ文章又ハ等式ニ誤ガアラバ正セ。
 1. 8 ハ 64 ノ平方根デアル。
 2. 64 ノ平方根ハ 8 デアル。
 3. -4 ハ -64 ノ立方根デアル。
 4. $(-3)^2$ ノ平方根ハ ± 3 デアル。
 5. $\sqrt[4]{16} = \pm 2$
 6. $\sqrt[4]{(-3)^4} = \pm 3$
 7. $\sqrt[4]{(-3)^4} = +3$
 8. $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$
- 次ノ幕根ヲ求メヨ。
 1. $\sqrt[5]{(-2)^5}$
 2. $\sqrt[3]{(-2)^6}$
 3. $\sqrt[4]{10000}$
 4. $-\sqrt[5]{0.00032}$
 5. $\sqrt[3]{(1-2)^9}$
 6. $\sqrt[6]{0.000001}$
 7. $\sqrt{a^2}$ (但シ $a > 0$)
 8. $\sqrt{a^2}$ (但シ $a < 0$)

115. 冪根ト乗冪

a ノ n 乗根ハ n 乗シテ a トナルヤウナ數デア
ルカラ明カニ

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad (1)$$

コレハ a ノ正負ノ如何ニ關ラズ成立スル。

シカルニ

$$\sqrt{3^2} = 3 \quad \sqrt{(-3)^2} = 3$$

ノヤウニ n ガ偶數ナラバ

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (2)$$

ナル等式ノ成立スルノハ a ガ正ナル場合ニ限ル。

今後 (1) ト (2) トヲ基本トシテ論ヲ進メテ行カ
ウト思フ故ニ根號内ノ文字ハスベテ正數ヲ表ス
モノトスル。

根號内ノ算式ヲ計算シタ結果負數トナルコト
ガ出來ルノハ奇數乗根ノ場合ニ限ル。シカルニ
 n ガ奇數ナル場合ニハ

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

ナル故根號内ハ必ズ正數ナルヤウニ變形スルコ
トガ出來ル。依テ計算ノ公式トシテハ根號内ノ

文字ガ正數ナル場合ヲ示セバヨイコトニナル。

從ツテ以下ノ公式ヲ適用スル場合ニハ先ヅ根
號内ノ數ガ正數ナルヤウニ變形シテ後計算ヲ行
ハネバナラナイ。

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n & \left| \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} \\ &= \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n \end{aligned} \\ &= (\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n & \therefore \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ \therefore \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \end{aligned}$$

コノ公式ハ冪ノ法則

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

ニ相當スルモノデアル。又

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \{ (\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^m \}^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\therefore \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{從ツテ } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

コレ又冪ノ指數法則 $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$ ニ相當ス
ルモノデアル。

$$\sqrt[n]{a^n} = a = (\sqrt[n]{a})^n$$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	$(ab)^n = a^n b^n$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$

例 $\sqrt[3]{3^3 \times 125} = \sqrt[3]{3^3} \sqrt[3]{125} = 3 \times 5 = 15$

$$\sqrt[4]{\frac{80}{81}} = \sqrt[4]{\frac{16 \times 5}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2\sqrt[4]{5}}{3}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt[4]{64a^8} = \sqrt[4]{4 \times 2^4(a^2)^4} = 2a^2\sqrt[4]{4} = 2a^2\sqrt{2}$$

例 題

1. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。
- | | | |
|----------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\sqrt[3]{81}$ | 2. $\sqrt[4]{32}$ | 3. $\sqrt[3]{16a^6}$ |
| 4. $\sqrt[3]{24a^5}$ | 5. $\sqrt[5]{a^2b^{10}}$ | 6. $\sqrt{2^{10}a^{15}b^2}$ |
| 7. $\sqrt{b^4c^2}$ | 8. $\sqrt[3]{\frac{250b^3c}{a^5}}$ | 9. $\sqrt[6]{\frac{729a^8}{125}}$ |

2. 次ノ各式ヲ一ツノ根號ヲ用ヒテナルベク簡單ニ表セ。

- | | | |
|---|---|-------------------------|
| 1. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ | 2. $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ | 3. $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$ |
| 4. $\sqrt{12} \times \sqrt{5} \times \sqrt{15}$ | 5. $\sqrt[3]{\frac{5}{7}} \times \sqrt[3]{\frac{7}{125}}$ | |
| 6. $\sqrt{35} \div \sqrt{\frac{7}{5}}$ | 7. $\sqrt{\sqrt{256}}$ | |
| 8. $\sqrt[3]{\sqrt{46656}}$ | 9. $\sqrt[4]{54} \times \sqrt[4]{24}$ | |

116. 冪ノ冪根・冪根ノ冪

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{(a^{\frac{m}{n}})^n} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^{np}} = \sqrt[n]{(a^p)^n} = a^p$$

コトヲテ $np = m$ トオケバ $p = \frac{m}{n}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

或數ノ m 冪ノ n 冪根ハ m ガ n デ割リキレル場

合ニハソノ數ノ $\frac{m}{n}$ 乗冪ニ等シイ。

又 $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{aaaaa} = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a}$

• $= (\sqrt[3]{a})^5$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{aa \dots a} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\text{即チ } \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

或數ノ m 冪ノ n 乗根ハツノ數ノ n 乗根ノ m 冪ニ等シイ。

$$\text{次ニ } \sqrt[6]{a^{10}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^{10}}} = \sqrt[3]{a^5}$$

$$\sqrt[n^p]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\text{即チ } \sqrt[n^p]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

或數ノ冪ノ冪根ヲ求メルトキ根指數ト冪指數トヲ同一ノ數デ割ツテモ又双方ニ同一ノ數ヲ掛ケテモツノ結果ハ同一デアル。

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (\text{但シ } m \text{ ハ } n \text{ ノ倍数})$$

$$\sqrt[n^p]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

例 1 $\sqrt[3]{5}$ ト $\sqrt{3}$ トノ大小ヲ比較セヨ。

$$\text{〔解〕 } \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\therefore \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

例 2 $\sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^8} \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[12]{a^8 a^9} = \sqrt[12]{a^{17}} = a^{\frac{17}{12}} = a^{\frac{12}{12}} \sqrt[12]{a^5}$

例 題

1. $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[6]{20}$ ヲ大イサノ順ニナラベヨ。

2. 次ノ各積ヲ簡單ニセヨ。

$$1. \sqrt[3]{5} \times \sqrt{10} \qquad 2. \sqrt{6} \times \sqrt[3]{30}$$

$$2. \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{6}} \times \sqrt{2}$$

$$4. \sqrt{32} \div \sqrt[3]{6} \qquad 5. \sqrt[3]{a^4 b} \div \sqrt[4]{ab^5}$$

$$6. (5\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt{b})$$

117. 分數指數

今マデ學ンダ冪指數ト根指數ノ法則ニハ極メテ類似スル點ガ多イ。更ニ進ンデ分數指數ヲ學ブトコレ等ノ間ハ一層密接ナ關係ニ結ビツケラレル。

$$m \text{ ガ } n \text{ ノ倍数ナルトキハ } \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

コノ意味ヲ擴張シテ m ガ n デ割リキレナイ場合ニモ $a^{\frac{m}{n}}$ ハ $\sqrt[n]{a^m}$ ト同ジ意味ヲ表シテキルーツノ記號デアルコトトシテオク。

特ニ $m=1$ ナラバ $a^{\frac{1}{n}}$ ハ $\sqrt[n]{a}$ ト同一ノ事ヲ意味スル。イヒカヘルト a ノ n 乗根ノコトヲ $\sqrt[n]{a}$ 或ハ $a^{\frac{1}{n}}$ デ表シ a ヲ m 乗シタモノ n 乗根ヲ $\sqrt[n]{a^m}$ 或ハ $a^{\frac{m}{n}}$ デ表スモノトスル。

而ルトキハ

$$(1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \quad \text{ハ} \quad (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$$

$$(2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{ハ} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

$$(3) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \text{ハ} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

ノヤウニ表スコトガ出来ル。即チ冪ノ法則ニ於ケル指數ヲ分子ガ1ナル分數ニ改メルトソレハ直チニ冪根ノ法則ヲ示スコトニナル。

尙一般ニ (1), (2), (3) ノ公式ハ分子ガ1デ、ナクトモ成立スル。

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^q} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mq}}} = \sqrt[pn]{a^{mq}}$$

$$\text{即チ} \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{q}{p}}$$

依テ m, n ハ一般ニ正ノ整數、分數ヲ表スモノトシテ次ノ公式ガ成立スル。

$$(ab)^m = a^m b^m \quad (1)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (3)$$

尙冪ノ法則トシテコノ外ニ次ノ二ツヲ學ンデキル。

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{但シ } m > n)$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}} \quad (\text{但シ } m < n)$$

コレ等モ亦 m, n ガ分數デアル場合ニ成立スルカドウカヲ研究シテ見ルコトニシヨウ。

$$m = \frac{q}{p}, \quad n = \frac{s}{r} \quad (\text{但シ } p, q, r, s \text{ 正整數) トスレバ}$$

$$\begin{aligned}
 a^m \times a^n &= a^{\frac{q}{p}} \times a^{\frac{s}{r}} \\
 &= a^{\frac{qr}{pr}} \times a^{\frac{sp}{pr}} \\
 &= \sqrt[p]{a^{qr}} \times \sqrt[p]{a^{rs}} \\
 &= \sqrt[p]{a^{qr} \times a^{rs}} \\
 &= \sqrt[p]{a^{q+rs}} \\
 &= a^{\frac{q+rs}{p}} \\
 &= a^{\frac{q}{p} + \frac{s}{r}} \\
 &= a^{m+n}
 \end{aligned}$$

從ツテ $m > n$ ナラバ

$$a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m$$

$$\therefore \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

又 $m < n$ ナラバ

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\therefore \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

一般ニ m, n フ正ノ整數分數ヲ表スモノトシテ次ノ法則ガ成立スル。

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (4)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{但シ } m > n)$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}} \quad (\text{但シ } m < n) \quad (5)$$

シカモ、コノ中ニハ根指數ノ法則モ含マレテキルモノデコレヲ指數法則トイフ

$$\begin{aligned}
 \text{例 1. } \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^5} &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{3}} \\
 &= a^{\frac{1}{2} + \frac{5}{3}} = a^{\frac{13}{6}} = a^{2 + \frac{1}{6}} \\
 &= a^2 \sqrt[6]{a}
 \end{aligned}$$

根號ノマ、計算スレバ

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^5} &= \sqrt[6]{a^3} \times a^{\frac{5}{3}} \\
 &= a^{\frac{6}{6}} \sqrt[6]{a^3 \times a^4} = a^{\frac{6}{6}} \sqrt[6]{a^7} = a^2 \sqrt[6]{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{例 2 } \{(\sqrt{5})^3 \times \sqrt[3]{2}\}^2 &= (5^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}})^2 \\
 &= 5^{\frac{3}{2} \times 2} \times 2^{\frac{1}{3} \times 2} = 5^3 \times 2^{\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

本節ニヨツテ a^m ハ m ガ正ノ整數以外ノ分數デモ一ツノ數ヲ表スコトニナツタ。同時ニ

$$a^m = b \text{ ナラバ } a = \sqrt[m]{b}$$

ハ m ガ分數ナル場合ニモ意義アラシメル。從ツテ

$$b^{\frac{1}{m}} = (a^m)^{\frac{1}{m}} = a$$

$$\sqrt[m]{b} = b^{\frac{1}{m}}$$

ハ m ガ正ノ整數又ハ分數デモ成立スル。イヒカヘルト m ガ分數デモ $\sqrt[m]{b}$ ト $b^{\frac{1}{m}}$ トハ同一ノ意義ヲ表スト見テ差支ヘナク從ツテ指數法則ノ中ニ根指數ノ法則ガ含マレテキルトハ單ニ根指數ガ正整數ナル場合ト限ラズ正ノ分數ノ場合ヲモ含マレテキルトイツテヨイ。

例 題

1. 次ノ各冪ヲ冪根ノ形ニ書キ改メヨ。

1. $4^{\frac{3}{5}}$ 2. $5^{\frac{7}{3}}$ 3. $(3^{\frac{7}{3}})^3$

4. $(a^3)^{\frac{1}{4}}$ 5. $(a^{\frac{3}{5}})^{\frac{1}{5}}$ 6. $(x^{\frac{7}{3}})^{\frac{7}{5}}$

2. 次ノ冪根ヲ冪ノ形ニ書キ改メヨ。

1. $\sqrt[3]{a^2}$ 2. $(\sqrt{a})^3$ 3. $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}}}$

4. $(\sqrt{a})^{\frac{1}{3}}$ 5. $\sqrt{a^m}$ 6. $\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}$

3. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1. $(5^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{3}}$ 2. $(\sqrt[4]{a})^{\frac{3}{5}} \times \sqrt[3]{a^2}$

3. $\sqrt[3]{a^4} \times (\sqrt{a^3})^{\frac{4}{3}}$ 4. $(4^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{3}{5}})^{\frac{1}{5}}$

5. $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}})$

118. 一般ノ指數

分數指數カラ更ニ進ンデ負數及ビ零ナル指數ノ意義ヲ定メルコトニシヨウ。

$$m > n \text{ ナルトキ } a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (1)$$

$m = n$ ナル場合ニコノ公式ヲ適用シテ見ルト

$$a^m \div a^n = a^{m-n} = a^0$$

左邊ハ 1 ニ等シイカラ

$$a^0 = 1 \quad (2)$$

デアルト定メテオク。恰モ割算デハ如何ナル數デモソレト同數デ割ツタ商ハ常ニ 1 トスルコトニ何等ノ不思議ガナイト同様ノ意味デ如何ナル數(零デナイ)デモソレノ零乗ヲ 1 トスル。

$m < n$ ナルトキ (1) ノ公式ヲ適用シテ見ルト

$$a^3 \div a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$$

然ルニ左邊ハ $\frac{1}{a^2}$ デアルカラ

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

デアルト定メル。

$$\text{一般ニ } a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

サウスルト前ノ五ツノ公式ハドウナルカ。

(5)ノ公式ハ m, n ノ大小ニ關係ナク

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

トシテ統一サレル。又コノ左邊ヲ $\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n}$ トシテ見レバ

$$a^m \times a^{-n} = a^{m+(-n)}$$

依ツテ (4), (5) ノ公式ヲ一ツニ纏メテ

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ ハ正負ノ有理數})$$

デアラスコトガ出來ル。

又 (3) ノ公式 $(a^m)^n = a^{mn}$ ハ m, n ガ負數ニナツテモ成立スルカドウカ。

p, q ヲ正ノ有理數トシテ

$$(a^p)^{-q} = \frac{1}{(a^p)^q} = \frac{1}{a^{pq}} = a^{-pq}$$

$$(a^{-p})^q = \left(\frac{1}{a^p}\right)^q = \frac{1}{a^{pq}} = a^{-pq}$$

$$(a^{-p})^{-q} = \frac{1}{(a^{-p})^q} = \frac{1}{a^{-pq}} = a^{pq}$$

故ニ m, n ヲ任意ノ正負ノ有理數トシテ

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ハ成立スル

モシ m, n ノ中ニ零ガアルトスルトコノ兩邊ハトモニ1トナツテコノ公式ハ成立スル。

又 (1) ノ公式ニ於テ m ヲ負數 $-p$ トスレバ

$$(ab)^{-p} = \frac{1}{(ab)^p} = \frac{1}{a^p b^p} = a^{-p} b^{-p}$$

故ニ m, n ガ負數デモ

$$(ab)^m = a^m b^m$$

ハ成立スル

又 $m=0$ ノ場合デモコノ公式ハ成立スル。從ツテ (2) ノ公式 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ノ左邊ヲ $(ab^{-1})^m$ ト見レバ

$$(ab^{-1})^m = a^m b^{-m}$$

故ニ (1) (2) ノ公式ヲ一ツニ纏メテ

$$(ab)^m = a^m b^m$$

トスルコトガ出來ル。

即チ前ノ五ツノ公式ハ次ノ三ツニ統一スルコトガ出來ル。

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

但シ m, n ハ正負ノ整數分數及ビ零

例 1 $a^0 \times a^{-\frac{1}{4}} \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{0-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

例 2 $(x^{\frac{2}{3}} + 1 + x^{-\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}})$
 $= \{(x^{\frac{1}{3}})^2 + x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}} + (x^{-\frac{1}{3}})^2\}(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}})$
 $= (x^{\frac{1}{3}})^3 - (x^{-\frac{1}{3}})^3$
 $= x - x^{-1}$
 $= x - \frac{1}{x}$

例 題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1. $(a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}})^{-2}$
2. $(-x^{\frac{1}{2}} y^{-3})^2$
3. $b^{-\frac{1}{3} \cdot 12} \sqrt{b^{-5}} \div b^{-1} \sqrt{b^{-1}}$
4. $\frac{(x^{\frac{2}{3}} - 1 + x^{-\frac{2}{3}})(x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}})}{x - x^{-1}}$

119. 對 數

指數ノ法則ニツイテ大體學ンダカラ次ハ指數ガ變化スル場合ヲ考ヘテ見ルコトニショウ。

(I) 2^x ノ表

$2^1 = 2$	$2^8 = 256$	$2^{15} = 32768$
$2^2 = 4$	$2^9 = 512$	$2^{16} = 65536$
$2^3 = 8$	$2^{10} = 1024$	$2^{17} = 131072$
$2^4 = 16$	$2^{11} = 2048$	$2^{18} = 262144$
$2^5 = 32$	$2^{12} = 4096$	$2^{19} = 524288$
$2^6 = 64$	$2^{13} = 8192$	$2^{20} = 1048576$
$2^7 = 128$	$2^{14} = 16384$	$2^{21} = 2097152$

コノ表ヲ用ヒルト

$$16 \times 128 = 2^4 \times 2^7 = 2^{11} = 2048$$

$$512 \times 2048 = 2^9 \times 2^{11} = 2^{20} = 1048576$$

$$262144 \div 8192 = 2^{18} \div 2^{13} = 2^5 = 32$$

ノヤウニコノ表ノ中ニアル二數ノ乗除ハ加減ノ演算ニ轉化シテ計算スルコトガ出來ル。

又 $(a^m)^n = a^{mn}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ナルコトヲ應用スレバ乗冪又ハ冪根ヲ求メル算法ハ乗除法ニ歸スルコトガ出來ル。

$$32^4 = (2^5)^4 = 2^{20} = 1048576$$

$$\sqrt{16384} = \sqrt{2^{14}} = 2^7 = 128$$

2^x ノ表ニ於テ x ガ分數ナルコトガ出來ルカラモット精密ナ表ヲ作ツテオケバ應用ハ一層自由ニナルヲケデアル。

2^x ノ表ノ指數 1, 2, 3, 等ヲ夫々 2, 4, 8, 等ノ對數トイヒ 2 ヲ對數ノ底トイフ。

$$2 \text{ ヲ底トシタ } 1024 \text{ ノ對數ハ } 10$$

$$2 \text{ ヲ底トシタ } 16384 \text{ ノ對數ハ } 14$$

等トトナヘ、コノ事柄ヲ次ノ記號デ書ク。

$$\log_2 1024 = 10$$

$$\log_2 16384 = 14$$

(II) 3^x ノ表

$$3^1 = 3 \quad 3^5 = 243 \quad 3^9 = 19683$$

$$3^2 = 9 \quad 3^6 = 729 \quad 3^{10} = 59049$$

$$3^3 = 27 \quad 3^7 = 2187 \quad 3^{11} = 177147$$

$$3^4 = 81 \quad 3^8 = 6561 \quad 3^{12} = 531441$$

3 ヲ底トシタ

$$243 \text{ ノ對數ハ } 5 \quad \log_3 243 = 5$$

$$6561 \text{ ノ對數ハ } 8 \quad \log_3 6561 = 8$$

$$a^x = N \quad \text{ト} \quad \log_a N = x$$

トハ同一ノ事柄ヲ表シテキル。

例 題

1. 表ニヨツテ次ノ計算ヲ行ヘ。

$$1. \quad 16 \times 256 \quad 2. \quad 32 \times 64$$

$$3. \quad 512 \div 128 \quad 4. \quad 2048 \div 256$$

$$5. \quad \sqrt{6561} \quad 6. \quad \sqrt[3]{531441}$$

2. 表ヲ用ヒテ次ノ値ヲイヘ。

1. $\log_2 2048,$ 2. $\log_2 8192$

3. $\log_3 243$ 4. $\log_3 2187$

3. 表ヲ用ヒテ次ノ等式ニ於ケル x ノ値ヲイヘ。

1. $\log_2 x = 3$ 2. $\log_2 x = 6$

3. $\log_3 x = 2$ 4. $\log_3 x = 7$

4. 10^x ノ表ヲ作ツテ次ノ對數ノ値ヲイヘ。

1. $\log_{10} 100$ 2. $\log_{10} 10000$

3. $\log_{10} 0.1$ 4. $\log_{10} 0.001$

5. 次ノ對數ノ値如何

$\log_1 1, \log_2 1, \log_3 1$

6. 2ヲ底トシタ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ノ對數如何。

120. 常用對數

實用ノ計算ニハ專ラ10ヲ底トシタ對數ヲ用ヒル。10ヲ底トシタ對數ヲ常用對數トイヒ、常用對數ニハ底ハ略シテ書カナイコトニスル。本書デ單ニ對數トイヘバ常用對數ノコトデアル。

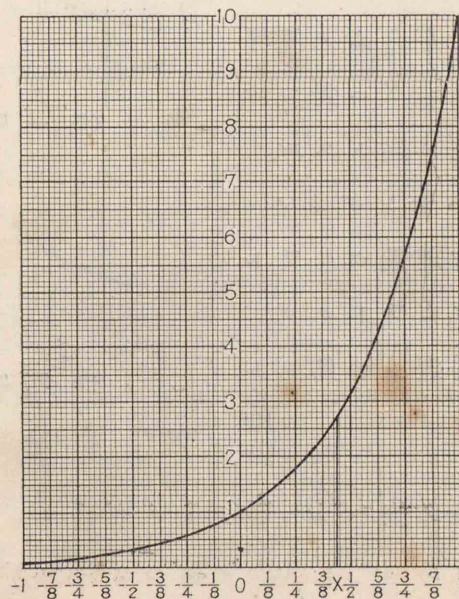
(I) 10^x ノぐらふ

$10^1 = 10$ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3.16$ $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3.16} = 1.78$

$10^{\frac{3}{4}} = 1.78^3 = 5.62$ $10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{1.78} = 1.33$

$10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3.16} = 0.316$ $10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{1.78} = 0.562$

$10^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5.62} = 0.178$ $10^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{1.33} = 0.749$



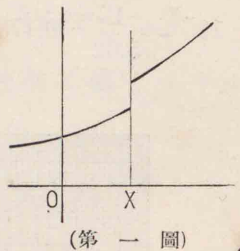
x ハ元來有理數トシテ學ンダノデアアルガ或無理數 X ニ對シソノ前後如何様ニ接近シタ x ノ有理數ヲトツテモソレニ對應シタ 10^x ノ値ハ存在スル。從ツテ $x=X$ ニ於テハソノ左右ノぐらふノ境界デアアル。ソノトキ第一圖ノ如クナラバ

$x=X$ ニ對應シタぐらふ上ノ點ヲ定メルノニ困ルガ第二圖ノ如クナラバ左右ノぐらふノ境界ヲトツテ $x=X$ ニ對スルぐらふ上ノ點トスル。

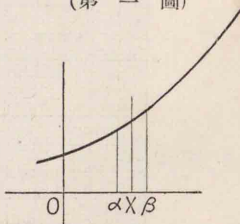
今 X ヲハサンデ x ノ二ツノ有理數 α, β ヲトリソノ α, β ヲドコマデモ X ニ接近シテ見ルト

$$\frac{10^\beta}{10^\alpha} = 10^{\beta - \alpha}$$

ノ右邊ノ値ハ 10^0 即チ 1 ニドコマデモ近い値ニナルカラ 10^α ト 10^β ノ値ハドコマデモ接近スル。從ツテぐらふハ第二圖ノヤウニナル。



(第一圖)



(第二圖)

X ガ無理數ナルトキ $x=X$ ニ對應シテ 10^x ノぐらふ上ノ點ヲ決定スルコトガ出來ルナラバコノ點ノ縦線ノ値ヲ 10^x ノ値トシテ無理數乘ニモ意義アラシメル。サウスルト

x ノ任意ノ値ニ對シテ y ノ値ヲ決定スルコトガ出來ル。 即チ $y=10^x$ ナル函數ノ x ハ無理數ヲ含メタ變數デアアル。カヤウナ函數ヲ指數函數トイフ。

$y=10^x$ ナル函數ノ性質

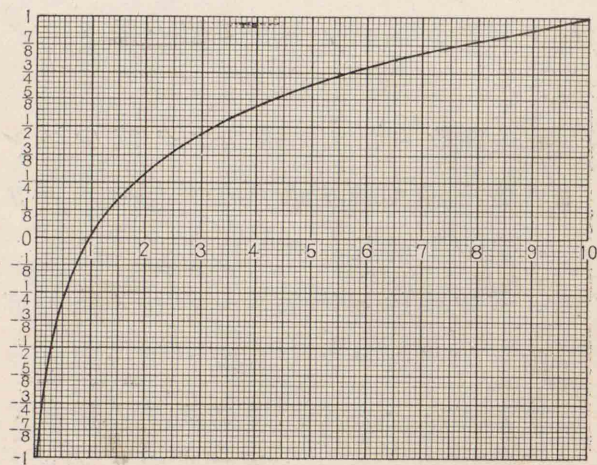
- (1) x ガ増スニ從ツテ y ノ値ハ増大シ、 x ガ限リナク大トナルト y ノ値ハ限リナク増大スル。
- (2) x ガ負數トナツテ限リナク減少スレバ y ノ値ハ零ニ限リナク近ヅキシカモ y ノ値ハ決シテ負數ニナラナイ。
- (3) x ガ連續的ニ變化スレバ y ノ値モ亦連續的ニ變化シソノぐらふハ第一圖ノヤウニナルコトハナイ。從ツテ y ノ任意ノ正ナル値ニ對シテ x ノ値ヲ決定スルコトガ出來ルカラ x モ亦 y ノ函數デアアル。

(II) $y = \log x$ のぐらふ

$y = \log x$ と $x = 10^y$ との見方ノ相違デアツテ x と y とノ關係ハ同一デアル。

$x = 10^y$ ハ x ガ y ノ函數デアルコトノ方面カラ見タ表シ方デ $y = \log x$ ハ y ガ x ノ函數ナルコトノ方面カラ見タ表シ方デアル。 $y = \log x$ ノヤウナ函數ヲ對數函數トイフ。又對數 y ニ對シテ x ヲ y ノ眞數トイフコトガアル。

$y = \log x$ ノぐらふハ次ノヤウニナル。



例 題

- ぐらふヲ用ヒテ次ノ各等式ヲ満足スル x ノ値ヲ求メヨ。
 - $2 = 10^x$
 - $3 = 10^x$
 - $4 = 10^x$
 - $5 = 10^x$
 - $6 = 10^x$
 - $7 = 10^x$
 - $8 = 10^x$
 - $9 = 10^x$
- 前題デ求メタ x ノ各數値ト 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 トノ關係ヲ $y = \log x$ ノ形デ書キ表セ。
- $\log 2$ ノ値ト $\log 3$ ノ値トノ和ヲ求メソレヲ對數トスル眞數ヲぐらふカラ求メヨ。
- $\log 8$ ノ値ト $\log 2$ ノ値トノ差ヲ求メソレヲ對數トスル眞數ヲ求メヨ。

121. 指標ト假數

$$10^5 = 100000 \quad \log 100000 = 5$$

$$10^4 = 10000 \quad \log 10000 = 4$$

$$10^3 = 1000 \quad \log 1000 = 3$$

$$10^2 = 100 \quad \log 100 = 2$$

$10^1=10$	$\log 10=1$
$10^0=1$	$\log 1=0$
$10^{-1}=0.1$	$\log 0.1=-1$
$10^{-2}=0.01$	$\log 0.01=-2$
$10^{-3}=0.001$	$\log 0.001=-3$

コレニ依ツテ1ヨリ大ナル數ノ對數ハ正數デ
ソノ整數部分ハ次ノヤウニナル。

整數部分

10000 ト 100000 トノ間ノ數ノ對數	4
1000 ト 10000 トノ間ノ	3
100 ト 1000 トノ間ノ	2
10 ト 100 トノ間ノ	1
1 ト 10 トノ間ノ	0

又1ヨリ小ナル數ノ對數ハ負數デアアル。對數
ガ負數ナル場合ハ小數部分ヲ正數デ整數部分ダ
ケ負數ナルヤウニ書ク。例ヘバ

$$-0.25 = -1 + 0.75$$

$$-1.68 = -2 + 0.32$$

ノヤウニ表シ右邊ノ式ノ代リニ $\bar{1}.75, \bar{2}.32$ 等ト書
ク。從ツテ1ヨリ小ナル數ノ對數ノ整數部分ハ

次ノヤウニナル

整數部分

0.1 ト 1 トノ間ノ數ノ對數	$\bar{1}$
0.01 ト 0.1 トノ間ノ	$\bar{2}$
0.001 ト 0.01 トノ間ノ	$\bar{3}$

對數ノ整數部分ヲ指標トイヒ小數部分ヲ假數
トイフ。シカシテ對數ノ小數部分ハ常ニ正數デ
表スモノデアアル。

一位ノ桁ヲ0番目トシソノ次カラ
數ヘテ左ノ方 n 桁目ニ最高位ノ數字
ガアルトソノ對數ノ指標ハ n デアル。
又右ノ方 n 桁目ニ最高位ノ有効數字
ガアルトソノ對數ノ指標ハ \bar{n} デアル。

ぐらふニヨツテ $\log 3.2 = 0.5$ ヲ得タトスレバ

$$3.2 = 10^{0.5} \text{ ナル故ニ}$$

$$32 = 10^{0.5} \times 10 = 10^{1.5} \quad \log 32 = 1.5$$

$$320 = 10^{0.5} \times 10^2 = 10^{2.5} \quad \log 320 = 2.5$$

$$0.32 = 10^{0.5} \times 10^{-1} = 10^{\bar{1}.5} \quad \log 0.32 = \bar{1}.5$$

ノヤウニ

有効數字ノ列ガ同ジデ小數點ノ位置ダケヲ異ニスル數ノ對數ハ假數ガ同一デ、指標ダケ異ル。

例 題

1. 次ノ各對數ノ指標ヲイヘ。
 1. $\log 26$ 2. $\log 260$ 3. $\log 0.3$
 4. $\log 0.006$ 5. $\log 0.365$ 6. $\log 7$
2. 次ノ各等式ニ於ケル M ノ最高位ヲイヘ。
 1. $\log M = 2.36$ 2. $\log M = \bar{2}.78$
 3. $\log M = 0.16$ 4. $\log M = 3.28$
3. $\log 36 = 1.5563$ ナルトキ次ノ各對數ヲ求メヨ。
 1. $\log 3600$ 2. $\log 0.036$
 3. $\log 360$ 4. $\log 0.0036$
4. $\log 245 = 2.3892$ ナルトキ次ノ等式ニ於ケル M ノ値如何。

1. $\log M = 3.3892$ 2. $\log M = \bar{2}.3892$

122. 對數表

對數ヲ用ヒテ計算スルニハ對數表ヲ用ヒル。表ニハ指標ハ載セナイ。假數ハ小數點ヲ省イテソレ以下ノ數字ノ列ダケ載セテオク。

卷尾ノ對數表ハ小數第四位未滿ヲ四捨五入シタモノデアル。コノ表ニツイテソノ使用法ヲ説明シテ見ヨウ。

例 1 $\log 25.4$ ヲ求メヨ。

〔解〕 指標ハ 1 デアル。

左端ノ縦行ニ 25 ヲ見出シ上欄ニアル 4 ト對照シ 25 ノ横列ト 4 ノ縦行トノ交叉シタ所ノ數 4048 ガ 254 ノ假數デアル。故ニ

$$\log 25.4 = 1.4048$$

例 2 $\log 2483$ ヲ求メヨ。

〔解〕 指標ハ 3 デアル。

四桁ノ數 2483 ニ應ズル對數ハ表中ニナイガソノ假數ハ $\log 2480$ ノ假數ヨリ大デ $\log 2490$ ノ假數ヨリ小デアル。

$$\log 2480 = 3.3945 \quad \text{表差 } 17$$

$$\frac{3 \dots \dots \dots 51}{\log 2483 = 3.3950} \quad (\text{四捨五入})$$

log 2490 と log 2480 とノ假數ノ差 17 フツノ表差トイフ。コノ表差 17 ハ真數ガ 2480 カラ 2490 マデ増シタトキノ對數ノ増加デアアル。コノ間ノ増加ハ略、真數ノ増加ニ比例スル。(比例部分ノ原理)

ヨツテ 2480 カラ 2483 ニ増シタトキノ對數ノ増加シタ分量ハ

$$17 \times 0.3 = 5.1$$

ト見テ大差ナイ。コノ 17×0.3 フ見ルニハ表中ノ比例部分ノ表内ニアル掛算表ヲ用ヒルト便利デアアル。

【問 1】 次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

$$1. \quad 0.237 \qquad 2. \quad 60 \qquad 3. \quad 378$$

$$4. \quad 343 \qquad 5. \quad 87.9 \qquad 6. \quad 585$$

$$7. \quad 0.000275 \qquad 8. \quad 0.00253 \qquad 9. \quad 0.03$$

$$10. \quad 1257 \qquad 11. \quad 0.3896 \qquad 12. \quad 169.7$$

【問 2】 $\log 2.008$, $\log 169.7$ フ求メヨ。

例 3 $\log x = 1.8215$ フ満足スベキ真數 x ノ値如何。

【解】 表ニヨツテ 8215 フ假數トスル真數ノ數字ノ列ビハ 663 デアル。シカシテ指標ガ 1 デアルカラ最高位ハ十ノ位デアアル。

$$x = 66.3 \quad \text{答}$$

例 4 $\log x = \bar{2}.1268$ カラ x フ求メヨ。

【解】 假數 1268 ハ表ノ中ニナイ。コレヲ夾ムニツノ假數ハ 1239 ト 1271 デアル。

$$133 \quad \text{ノ假數ハ } 1239$$

$$134 \quad \text{ノ假數ハ } 1271$$

1268 ハ 1271 ノ方ニ近イカラ 134 フトル。

指標ハ $\bar{2}$ デアル故最高位ハ小數第二位デアアル。

$$x = 0.0134$$

尙比例部分ノ理ヲ用ヒレバ 133 カラ 134

ニナルト假數ハ 32 ダケ増スカラ假數ガ 29

ダケマスニハ $\frac{29}{32} = 0.9$ ダケ増ス。

$$x = 0.01339$$

0.9 フ求メルニハ比例部分ノ表デ表差ガ 32

ノ欄ヲ見テ29ニ最モ近イ積ヲ與ヘル數9
ヲトレバヨイ。

計算ハ次ノヤウナ形式ヲトル。

$$\begin{array}{r} \log x = \bar{2}.1268 \quad d=32 \\ 0.0133 \dots \bar{2}.1239 \\ \underline{9 \dots \dots 29} \quad 29 \div 32 = 0.9 \\ x = 0.01339 \end{array}$$

〔問〕 次ノ各等式ニ適スル x ノ値ヲ求メヨ。

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $\log x = 2.9243$ | 2. $\log x = 3.6454$ |
| 3. $\log x = \bar{2}.8401$ | 4. $\log x = \bar{1}.8420$ |
| 5. $\log x = 3.9269$ | 6. $\log x = \bar{3}.4983$ |

123. 對數ニヨル計算

(I) 積及ビ商ノ計算

$\log_a M = m \quad \log_a N = n$ トスレバ

$M = a^m,$	$N = a^n$
$MN = a^{m+n}$	$\frac{M}{N} = a^{m-n}$
$\log_a MN = m+n$	$\log_a \frac{M}{N} = m-n$
$= \log_a M + \log_a N$	$= \log_a M - \log_a N$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

例 1 124×0.15 ヲ計算セヨ。

〔解〕 $x = 124 \times 0.15$

$$\log x = \log 124 + \log 0.15$$

$$\log 124 = 2.0934$$

$$\log 0.15 = \bar{1}.1761$$

$$\log x = 1.2695$$

$$x = 18.6$$

例 2 $x = \frac{12.48 \times 0.0452}{8.423}$

$$\log x = \log 12.48 + \log 0.0452 - \log 8.423$$

$$\log 12.4 = 1.0934 \quad d=35$$

$$\begin{array}{r} 8 \dots \dots 28 \\ \log 12.48 = 1.0962 \end{array} \quad 1.0962$$

$$\log 0.0452 = \bar{2}.6551 \quad \bar{2}.6551$$

$$\log 8.42 = 0.9253 \quad d=5 \quad \bar{1}.07455$$

$$\log 8.423 = 0.92545 \quad 2.82585$$

$$\begin{array}{r} 3 \dots \dots 15 \\ - \log 8.423 = 0.92545 \end{array} \quad x = 0.067$$

$$\log 8.423 = 0.92545$$

$$- \log 8.423 = \bar{1}.07455$$

最後ノ 0.92545 ヲ引ク代リニ -0.92545 即チ 1.07455 ヲ加ヘル方法ヲトレバ加減ガ幾ツアツテモ全部ノ累加ヲ行ヘバヨイコトニナル。

或數ノ對數ノ符號ヲ變ヘタモノヲ原ノ數ノ餘對數トイフ。

例 題

對數ヲ用ヒテ次ノ各式ノ計算ヲ行ヘ。

- 1. $192 \div 24$
- 2. $343 \div 49$
- 3. $4340 \div 28 \div 5$
- 4. $9100 \div 52 \div 25$
- 5. $8180 \div 31 \div 35$
- 6. $\frac{23.40 \times 0.8625}{0.00495 \times 6.3804}$

(II) 冪及ビ冪根ノ計算

$\log_a M = m$ トスレバ $M = a^m$

$M^p = a^{pm}$

$\log_a (M^p) = pm$

$= p \log_a M$

$M^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{m}{p}}$

$\log_a \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p}$

$= \frac{1}{p} \log_a M$

$\log_a M^p = p \log_a M$

$\log_a \sqrt[p]{M} = \frac{1}{p} \log_a M$

例 1 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$ ヲ計算セヨ。

〔解〕 $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$ $\log 1 = 0$
 $\log x = 5 \log \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\frac{1}{2} \log 3 = 0.2385$
 $= 5(\log 1 - \log \sqrt{3})$ $-\frac{1}{2} \log 3 = \bar{1}.7615$
 $= 5(\log 1 - \frac{1}{2} \log 3)$ $\frac{5(\times)}{2.8075}$
 $x = 0.0642$

例 2 $x = \frac{(0.3845)^5 \times \sqrt[3]{0.07335}}{0.00002892}$

$\log x = 5 \log 0.3845 + \frac{1}{3} \log 0.07335$
 $-\log 0.00002892$
 $\log 0.384 = \bar{1}.5843$ $d = 12$
 $\frac{5 \dots \dots \dots 6}{\bar{1}.5843}$
 $\frac{5(\times)}{3.9215}$
 $5 \log 0.3845 = \bar{3}.9215$
 $\log 0.0733 = \bar{1}.8651$ $d = 6$
 $\frac{5 \dots \dots \dots 3}{3) \bar{1}.8654}$
 $\frac{1}{3} \log 0.07335 = \bar{1}.9551$

$$\begin{array}{r} \log 0.0000289 = 5.4609 \\ \underline{2 \dots \dots \dots 3} \\ 5.4612 \\ -\log 0.00002892 = 4.5388 \end{array} \quad \begin{array}{l} d=15 \\ \\ \\ \log x = 2.4184 \\ x = 2.62 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3.9245 \\ 1.9551 \\ 4.5388 (+) \end{array}$$

例 題

對數表ヲ用ヒテ次ノ式ヲ計算セヨ。

1. $(0.3845)^5$
2. $\sqrt[3]{0.7335}$
3. $\sqrt{\frac{4 \times 3}{11}}$
4. $\sqrt{4.7 \div 3.1416}$
5. $\sqrt[5]{\frac{2.75}{3576}}$
6. $\sqrt{\frac{20 \times 0.03}{11}}$
7. $(0.25)^{0.35}$
8. $\sqrt[11]{\frac{3.428^2 \times 0.02463^3}{6.3228}}$

124. 對數ノ性質

$$a^0 = 1 \quad \therefore \log_a 1 = 0$$

逆 = $\log_a N = 0$ ナラバ $N = a^0 = 1$

1ノ對數ハ0デ逆ニ0ノ眞數ハ1デアル。

$$\text{又 } a^1 = a \quad \therefore \log_a a = 1$$

逆 = $\log_a N = 1$ ナラバ $N = a^1 = a$

底ノ對數ハ1デ逆ニ1ノ眞數ハ底ニ等シイ。

又對數ノ底ニハ0ト1及ビ負數ヲトラナイコトニスル。從ツテ $\log_a N = x$ ナラバ $N = a^x > 0$ 即チNハ負數ナルコトヲ得ナイ。

負數ノ對數ハナイ。

今マデ學ンダ對數ノ諸性質ヲ公式トシテマトメテ見ルト次ノヤウニナル。

$$\log_a N \text{ ニ於テ } N > 0 \quad (1)$$

$$\log_a 1 = 0 \quad (2)$$

$$\log_a a = 1 \quad (3)$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (4)$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (5)$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \quad (6)$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M \quad (7)$$

例 1 對數ノ和ガ零ナル二ツノ數ノ間ニ如何ナル關係アルカ。

〔解〕 $\log x + \log y = 0$ ナラバ

$$\log xy = 0$$

$$\therefore xy=1$$

例 2 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\log 2x^2 = \log(2x+15) + 1$$

【解】 $\log 2x^2 - \log(2x+15) = 1$

$$\log \frac{2x^2}{2x+15} = 1$$

底ハ 10 デアルカラ (3) ノ公式ニヨツテ

$$\frac{2x^2}{2x+15} = 10$$

$$\text{即チ } x^2 - 10x - 75 = 0$$

$$x = 5 \text{ 或ハ } -15 \text{ 答}$$

例 3 $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$ ナルコトヲ證明セヨ。

【解】 $\log_a b = x, \log_b c = y, \log_c a = z$ トスレバ

$$b = a^x, c = b^y, a = c^z$$

$$\therefore \log b = x \log a, \log c = y \log b, \log a = z \log c$$

$$\therefore \log b \log c \log a = xyz \log a \log b \log c$$

$$a, b, c \text{ ハ } 1 \text{ ニ等シクナイカラ}$$

$$\log a \log b \log c \neq 0$$

$$\therefore xyz = 1 \text{ 即チ } \log_a b \log_b c \log_c a = 1$$

例 4 或數 a ヲ底トシタ對數 $\log_a M$ ヲ常用對數
デ表ス方法如何。

【解】 $\log_a M = p, \log_{10} M = q$ トスレバ

$$M = a^p, M = 10^q$$

$$\therefore a^p = 10^q$$

10 ヲ底トシタ對數ヲトシバ

$$p \log_{10} a = q$$

$$p = \frac{q}{\log_{10} a}$$

$$\text{即チ } \log_a M = \frac{\log_{10} M}{\log_{10} a}$$

例 題

1. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

$$1. \log \sqrt{5x+5} = 1 - \log \sqrt{2x-1}$$

$$2. \frac{1}{2} \log(2x+2) + \log \sqrt{3x+4} = 1 + \log 2$$

$$3. \log \left(x + \frac{101}{100} \right) = 2 \log x - 2$$

2. $(2.5)^x = 1000, (0.25)^y = 1000$ ナラバ

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \text{ ナルコトヲ證明セヨ。}$$

3. $2^x = 5^y = 10^z$ ナラバ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ ナルコトヲ證
明セヨ。

4. $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ ナルコトヲ證明セヨ。

5. a, b, c ガ等比級數ヲナストキハ

1. $\log a, \log b, \log c$ ハ等差級數ヲナシ

2. $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x} = \frac{1}{\log_b x}$

ナルコトヲ證明セヨ。

6. $\log x, \log y, \log z, \dots$ 等ガ等差級數ヲナストキハ x, y, z, \dots 等ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

7. 或數ノ常用對數ノ2倍ハツノ數ニ60ヲ加ヘタ數ノ常用對數ニ1ヲ加ヘタモノニ等シイトイフ。或數ヲ求メヨ。

8. 或數 x ノ常用對數ノ2倍ハ $x + \frac{11}{10}$ ナル數ノ常用對數ヨリ1ダケ大デアルトイフ。 x ヲ求メヨ。

練習問題

1. 25^{32} ハ幾桁ノ數ナルカ。

2. $(1.25)^{100}$ ハ幾桁ノ整數ヲ有スルカ。

3. 連乘積 $3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots$ ガ初メテ一千萬ヲ超ユルニハ幾ツノ因數ヲトルベキカ。

4. $\left(\frac{50}{49}\right)^{100}$ ハ10ヨリ大カ又ハ小カ。

5. $\log \frac{280}{33} - \log \frac{1}{35} + \log \frac{99}{98} - \log 3$ ヲ簡單ニセヨ。

6. $\log(\sqrt{10}+3) - \log(\sqrt{10}-3) = 2\log(\sqrt{10}+3)$ ナルコトヲ證明セヨ。

7. $\frac{27^{13}}{16^{12}}$ ト7000トハ何レが大ナルカ。

8. 次ノ式ノ値ヲ計算ヨ。

1. $\sqrt[3]{\frac{43.24 \times 17^2}{475}}$ 2. $\sqrt[5]{\frac{276.5 \times 32^2}{3042}}$

9. 次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $\begin{cases} x+y=29 \\ \log x + \log y=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \log(x^3-y^3)=2 \\ \log(x-y)=0 \end{cases}$

第五篇

補充總括

第十八章

歩合・利息

125. 割引ト割増

歩合利息ニ關スル簡單ナ問題ハ算術デモ既ニ學ンダノデアアルカラ稍複雑ナ場合又ハマギレ易イ場合ニツイテ研究シテ見ルコトニショウ。

S 圓ノ 2 割ハ $0.2 S$ 圓

S 圓ノ 2 割引ハ $S(1-0.2)$ 圓

S 圓ノ 2 割増ハ $S(1+0.2)$ 圓

割引シタ結果ヲ割引高トハイハナイ。10 圓ノ 2 割引ハ 8 圓デ割引シタ金高ノ 2 圓ヲ割引高トイフ。割引シタ結果ヲ差引高又ハ残高トイフ。又割増ノ結果ヲ合計高トイフコトガアル。

外割引

10 圓ノ 2 割引ハ 8 圓デアルトイフ場合ニハ 10 圓ヲ元高トシタノデアアルガ減額 2 圓ハ 8 圓ニ對シテハ 2 割 5 分デアアル。カヤウナ場合ニ 8 圓ヲ 10 圓ノ外 2 割 5 分引デアルトイフ。外 2 割 5 分引ニ對シテ 8 圓ハ 10 圓ノ内 2 割引デアルトイフコトガアル。

10 圓ノ内 2 割引 $10 \times (1-0.2) = 8$ (圓)

10 圓ノ外 2 割 5 分引 $\frac{10}{1+0.25} = 8$ (圓)

S 圓ノ外割引歩合ヲ r トシ割引シタ結果ヲ D トスレバ

$$D = \frac{S}{1+r}, \quad D(1+r) = S$$

例 1 或品物ヲ 81 圓デ賣ツテ原價ノ 3 割 5 分ノ利益ヲ得タ。原價ハ何程カ。

【解】原價ヲ S 圓トスレバ 81 圓ハ原價ノ 3 割 5 分ダケ割増シタモノデアアル。

$$81 = S(1+0.35)$$

$$S = \frac{81}{1.35} = 60$$

答 60圓

例2 或品物ヲ定價ノ2割引デ賣ツテ尙2割ヲ利スルヤウニスルニハ定價ヲ元價ノ幾割増ニスベキカ。

【解】 原價ヲ x 圓, 定價ヲ y 圓トスレバ

$$y(1-0.2) = x(1+0.2)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5$$

$$y = x(1+0.5)$$

答 5割増

例3 歩合ガ同一デアルトキ外割引ノ結果ハ内割引ノ結果ヨリ小ナルコトヲ證明セヨ。

【解】 割引歩合ヲ r トシ元高ヲ S トスレバ

$$\text{外割引ノ結果ハ } \frac{S}{1+r}$$

$$\text{内割引ノ結果ハ } S(1-r)$$

$$\frac{S}{1+r} - S(1-r) = \frac{Sr^2}{1+r} > 0$$

即チ外割引ノ結果ハ内割引ノ結果ヨリ大デアル。

例題

1. 或品物ノ定價ガ原價ノ2割増デアルトキ定價ノ1割引デ賣ルト利益ハ原價ノ幾割カ。
2. 外6割引ハ内幾割引ニ當ルカ。
3. 甲商品ヲ20圓48錢ニ賣ツテ2割8分ヲ利シ乙商品ヲ22圓99錢ニ賣ツテ2割1分ノ利ヲ得タ。全部デ幾割ノ利ニナルカ。
4. 甲品ヲ定價ヨリモ1割高ク, 乙商品ヲ定價ヨリモ7圓安ク賣ルトキハ合計51圓ヲ得ベク, 甲品ヲ定價ヨリ2圓50錢安ク, 乙商品ヲ定價ヨリモ1割5分高ク賣ルトキハ合計56圓25錢ヲ得ルトイフ。甲乙兩品ノ原價ヲ求メヨ。
5. 定價通りニ賣レバ1個ニツキ3圓ノ利益アル品ヲ定價ノ1割引デ4個賣ツテ得ル利益ハ定價ノ1割2分引デ5個賣ツテ得ル利益ニ等シイトイフ。コノ商品1個ノ原價ハ何程ナルカ。

126. 単利法

歩合算トイフノハ單ニ元高,歩合,歩合高ノ關係ヲ含ンダ問題ヲイフノデ,時間ノ經過ニヨツテ金高ノ價值ヲ考ヘルヤウナ場合ハ利息算トイフ。

期間ガ一ケ年以内ニハ通常利息ハ期間ニ比例スルモノトシテ計算スル。コノ方法ヲ單利法トイフ。

元金ヲ p , 利率ヲ r , トスレバ

t 期間ノ利子 I ハ $I = prt$

ソノ元利合計 S ハ $S = p(1+rt)$

例 1 t ケ月後ニ支拂フベキ額面 p 圓ノ手形ヲ現今支拂フモノトスレバ何程支拂シノガ適當デアルカ。

【解】 約束ヨリモ t ケ月前ニ支拂フノデアルカラソノ期間ノ利子ヲ引キ去ツテ支拂フノガ至當デアル。

月利率ヲ r トシ, 現在ノ支拂額ヲ A 圓トスレバ,

(1) A 圓ニ對シ t ケ月後ノ元利合計ガ p 圓トナレバヨイノデアルカラ

$$p = A(1+rt)$$

$$A = \frac{p}{1+rt}$$

(2) 額面 p 圓ヲ元高トシテ t ケ月間ノ利子ヲ引キ去ルトスレバ

$$A = p(1-rt)$$

手形ノ額面高カラ或期間内ノ利子ヲ引キ去ルコトヲ手形ノ割引トイヒ, 引キ去ル金高ヲ割引高, 引キ去ツタ残リヲ現價トイフ。

手形ノ割引ハ理論上カライフト(1)ノ方法ニヨルノガ正當デアルガ銀行デハ専ラ(2)ノ方法ニヨル。(2)ノ方法ヲ銀行割引又ハ商業割引トイヒ(1)ノ方法ヲ眞割引トイフ。

例 2 金若干圓ヲ貸シ一ケ年ノ後元利合計 168 圓ヲ得タ。モシ元金ガ 25 圓多ク年利率ガ 4 分高イナラバ元利合計 203 圓ヲ得ルトイフ。元金及ビ年利率ハ何程カ。

【解】 元金ヲ x 圓, 年利率ヲ r トスレバ

$$\begin{cases} x(1+r)=168 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+25)(1+r+0.04)=203 & (2) \end{cases}$$

この一組ノ聯立方程式ヲトイテ

$$x=150, r=0.12$$

答 元金 150 圓

利率年 1 割 2 分

例 題

1. 支拂期日ガ七月三十一日ナル額面 300 圓ノ手形ヲ五月十日ニ日歩 2 錢 8 厘デ銀行割引ヲスレバソノ現價ハ何程カ。但シ割引スル日モ日數計算ニ入レヨ。(兩端入レ)
2. 今カラ 4 ケ月後ニ支拂フベキ金 2460 圓ヲ同利率デ眞割引スルノト銀行割引スルノトソノ割引高ニ 1.5 圓ノ差ガアルトイフ。年利率ヲ求メヨ。
3. 730 圓ヲ甲,乙,丙ノ三口ニ分ケ甲ヲ年利 8 分,乙ヲ年利 7 分,丙ヲ年利 6 分デ貸シ一ケ年ノ利子ハ何レモ相等シクナツタトイフ。各口ノ元金ヲ求メヨ。

4. 13000 圓ヲ甲乙二口ニ分ケ各々異ル利率デ貸シ一ケ年後ニ合計 840 圓ノ利息ヲ得タ。若シ甲ノ口ヲ乙ノ利率デ貸スト一ケ年ニ 360 圓ノ利息ヲ得ベク,乙ノ口ヲ甲ノ利率デ貸スト一ケ年ニ 490 圓ノ利息ヲ得ルトイフ。各口ノ金額及ビ年利率如何。
5. 即時ニ 300 圓ヲ支拂フ代リニソノ時ヲ初メトシテ 3 ケ月毎ニ都合四度ニ分ケテ毎度等額ヅハ拂ハウトスルト年利 8 分トシテ計算スレバ毎回支拂フ金額ヲ幾何トシタラヨイカ。

127. 支拂期日ノ平均

同ジ人ニ對シテ今カラ

a 日後ニ支拂フベキ額面高 A 圓

b 日後ニ支拂フベキ額面高 B 圓

c 日後ニ支拂フベキ額面高 C 圓

ナル三枚ノ手形ヲ振出シテアル。コレ等全部ト引キ換ヘニ一枚ノ手形ヲ作ツテ額面高ヲ

$(A+B+C)$ 圓

トシ而モ双方ガ損得ナイヤウニスルニハ支拂期日ヲ幾日後トスレバヨイカ。

【解】初メノ三通ノ手形ノ現價ノ總和ガ引換ヘニスルニ一枚ノ手形ノ現價ニ等シクナルヤウニ期日ヲ定メレバヨイ。

求メル期日ヲ t 日後、一日ノ利率ヲ r トスレバ

(1) 銀行割引ニヨレバ

$$A(1-ar) + B(1-br) + C(1-cr) \\ = (A+B+C)(1-tr)$$

$$r(Aa+Bb+Cr) = tr(A+B+C)$$

$$t = \frac{Aa+Bb+Cc}{A+B+C}$$

(2) 眞割引ニヨレバ

$$\frac{A}{1+ar} + \frac{B}{1+br} + \frac{C}{1+cr} = \frac{A+B+C}{1+tr}$$

$$1+tr = \frac{A+B+C}{\frac{A}{1+ar} + \frac{B}{1+br} + \frac{C}{1+cr}}$$

$$tr = \frac{\left(\frac{Aa}{1+ar} + \frac{Bb}{1+br} + \frac{Cc}{1+cr} \right) r}{\frac{A}{1+ar} + \frac{B}{1+br} + \frac{C}{1+cr}}$$

$$t = \frac{\frac{Aa}{1+ar} + \frac{Bb}{1+br} + \frac{Cc}{1+cr}}{\frac{A}{1+ar} + \frac{B}{1+br} + \frac{C}{1+cr}}$$

平均支拂期日ノ計算ニハ常ニ銀行割引ヲ用ヒル。コレニヨルト結果ニ於テハ眞割引ヲ用ヒタ場合ト大差ナク而モ次ノヤウナ便利ガアル。

(1) 計算ガ簡單デアル。

(2) 割引歩合ニ關係シナイ。

(3) 起算ノ當日ニ關係ガナイ。コレハ次ノヤウニシテ證明ガ出來ル。

起算ノ日ヲ今カラ n 日後ニスルト

$$\frac{A(a-n) + B(b-n) + C(c-n)}{A+B+C}$$

$$= \frac{Aa+Bb+Cc}{A+B+C} - n$$

トナツテ日數ハ前ノ計算ヨリモ丁度 n 日減少スル。從ツテ平均支拂期日ニハ變リガナイ。

算術ニ於ケル平均支拂期日ノ算法ハコノ原理ニ基イテ(1)ノ方法ヲ適用スルノデアル。

今カラ a 日, b 日, c 日後ニ支拂フベキ A 圓, B 圓, C 圓ノ平均支拂期日ヲ t 日後トスレバ

$$t = \frac{Ar + Bb + Cc}{A + B + C}$$

例題

- 30 日後ニ 600 圓, 40 日後ニ 300 圓, 28 日後ニ 400 圓ヲ支拂フベキヲ一時ニ支拂フニハ幾日後トスレバヨイカ。(日數ノ端下ハ切り上ゲ)
- 前題ニ於テ即時ニ 600 圓ヲ支拂フト殘金ハ何時支拂フベキカ。

128. 複利法

一定ノ期間毎ニ利息ヲ元金ニ繰込ミツノ元利合計ヲ次ノ期間ノ元金トシテ利子ヲ計算シテ行ク方法ヲ複利法トイフ。

郵便貯金ハ一ケ年ヲ一期トシ, 銀行預金ハ通常半年ヲ一期トシテ複利法ニヨツテ利子ヲ計算スル。

元金ヲ p 圓, 一期間ノ利率ヲ r トシ n 期間後ノ元利合計ヲ S 圓トスレバ

$$S = p(1+r)^n \quad (1)$$

$$p = \frac{S}{(1+r)^n} \quad (2)$$

(1)ハ n 期間後ノ元利合計ヲ計算スルニ用ヒ, (2)ハ n 期間經過シタ後受取ルベキ S 圓ニ對スル現在ノ價值即チ現價ヲ求メルニ用ヒラレル。

例 1 元金 200 圓ヲ年利率 6 分, 半年毎ノ複利デ 10 年預ケテ置ケバ元利合計何程トナルカ。

〔解〕 公式 $S = p(1+r)^n$ ニ於テ

$$p = 200, \quad r = 0.03, \quad n = 10 \times 2 = 20$$

$$\therefore S = 200(1+0.03)^{20}$$

(i) 對數ヲ用ヒルト

$$\log S = \log 200 + 20 \log 1.03$$

$$\log 1.03 = 0.0128$$

$$\frac{20}{\quad}$$

$$\frac{0.2560}{\quad}$$

$$\log 200 = 2.3010$$

$$\frac{2.5570}{\quad}$$

$$\begin{array}{r} \log S = 2.5570 \\ \log 360 = 2.5563 \quad d = 12 \\ \hline 6 \dots \dots \dots 72 \\ \hline S = 360.6 \end{array}$$

答 約 360.6 圓

(ii) 複利表ヲ用ヒルト

$$\begin{aligned} (1+0.03)^{20} &= 1.806111 \\ 200 \times 1.80611 &= 361.6222 \end{aligned}$$

答 約 361.62 圓

對數ノ値ハ近似値デアルカラソレヲ20倍スレバ誤差ハ相當大キクナル。利子ヲ正シク計算スルニハナルベク桁ノ多イ對數表ヲ用ヒレバソレダケ誤差ガ小サクナル。

【注意】銀行ナドデハ毎期末ニ利子ヲ計算シテ帳簿ヲ整理スル。ソノ時ノ利子計算ハ一圓未滿ニ對シテハ利子ヲツケテナイ。又計算シタ結果一錢未滿ノ端數ハ切り捨テルノガ普通デアル。從ツテ元利合計ノ計算ニハ(1)ノ公式ハ適用サレナイコトニナル。

例 2 或人 5000 圓ヲ銀行ニ預ケ、一ケ年ノ終リニ 150 圓ヲ引キ出シ、更ニ一ケ年ヲ經テ元利合計 5564 圓ヲ得タトイフ。年利率何程ナルカ。但シ利息ハ一年毎ニ元金ニ繰込ムモノトセヨ。

【解】年利率ヲ r トスレバ

$$\{5000(1+r) - 150\}(1+r) = 5564$$

$$1+r = x \text{ トオケバ}$$

$$5000x^2 - 150x - 5564 = 0$$

$$10x = y \text{ トオケバ}$$

$$50y^2 + 15y - 5564 = 0$$

$$y = \frac{107}{10} \quad \text{或ハ} \quad -\frac{52}{5}$$

負根ハ問題ニ適シナイ

$$y = 10.7 \quad x = 1.07 \quad r = 0.07$$

答 年 7 分

例 題

1. 元金 2500 圓、年利 4 分 5 厘、一年毎ノ複利トシテ計算スレバ 8 ケ年後ノ元利合計何程トナルカ。對數ヲ用ヒタ結果ト複利表ヲ用ヒタ結果トヲ比較セヨ。

2. 年利 4 分 8 厘, 元金 120 圓, 半年毎ニ利子ヲ元金ニ繰込ムトキ 12 ケ年後ニハ元利合計幾何トナルカ。
3. 年利 6 分, 一年毎ノ複利デ元利合計ガ元金ノ 5 倍以上トナルハ幾年後カ。
4. 年利 5 分一年毎ノ複利デ元金 100 圓ヲ預ケ元利合計ガ 1050 圓トナルノハ約何年ヲ要スルカ。
5. 年利 5 分半年毎ノ複利デ 6 ケ年後ノ元利合計ガ 10000 圓トナルベキ現價如何。
6. 或人 5000 圓ヲ貸付ケ一ケ年ノ後ソノ元利ヲ受取リ, ソノ内 25 圓ヲ費シ, 殘金ハ前ト同利率デ尙一ケ年貸付ケ元利合計 5382 圓ヲ受取ツタ。年利率何程ナルカ。

129. 年賦積立

毎年ノ初メニ a 圓ヅ、ヲ積立テルトキ一年毎ノ複利トシテ計算スレバ n 年ノ終リニハ元利合計何程トナルカ。

年利率ヲ r トスレバ第一回ノ積立金ノ第 n 年

末ニ於ケル元利合計ハ $a(1+r)^n$ 圓トナル。第二年ノ初メニ積立テタ金ハ $a(1+r)^{n-1}$ 圓トナル。以下同様ニシテ第 n 年ノ初メニ積立テタ金ハ $a(1+r)$ 圓トナル。依テ求メル元利合計ヲ S 圓トスレバ

$$\begin{aligned} S &= a(1+r) + a(1+r)^2 + \dots + a(1+r)^n \\ &= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} \\ &= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \end{aligned}$$

一年毎ノ複利デ年利率ヲ r トシ毎年年初メニ a 圓ヅツ積立テルトキニ n 年末ノ元利合計ヲ S 圓トスレバ

$$S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

例 年 5 分, 一年毎ノ複利デ毎年初メニ 180 圓ヅツ預ケルト満八年後ニハ元利合計何程トナルカ。

〔解〕 $r=0.05, a=180, n=8$

$$\begin{aligned} S &= \frac{180 \times 1.05 \times (1.05^8 - 1)}{0.05} \\ &= 180 \times 21 \times (1.05^8 - 1) \end{aligned}$$

對數ニヨレバ

$$x = 1.05^8$$

$$\log x = 8 \log 1.05$$

$$= 8 \times 0.0212$$

$$= 0.1696$$

$$\log 1.47 = 0.1673$$

$$7 \dots \dots 21$$

$$1.477 = x$$

$$1.05^8 = 1.477$$

$$S = 180 \times 21 \times 1.477$$

$$= 1802.06$$

答 1802.06 圓

複利表ニヨレバ

$$1.05^8 = 1.477455$$

$$S = 180 \times 21 \times 1.477455$$

$$= 1804.78$$

答 1804.78 圓

例 題

1. 年利率 5 分、一年毎ノ複利デ毎年ノ初メニ 100 圓ヅツ積立テルトキ 11 年目ノ終リニ積立金ノ元利合計何程トナルカ。對數ヲ用ヒタ場合ト複利表ヲ用ヒタ場合トヲ比較セヨ。
2. 昭和元年ノ終リカラ毎年末ニ 10 圓ヅ、積立テルトキハ昭和何年ニ初メテ元利合計ガ

100 圓ヲ超過スルカ。但シ年利 8 分、一ケ年毎ノ複利トシテ計算セヨ。

130. 年賦償還

S 圓ヲ年利率 r 、一ケ年毎ノ複利デ借入レ、ソレヨリ滿一ケ年ヲ經過スル毎ニ定額ヅ、返済シテ第 n 年末ニ丁度全部償還スルヤウニスルニハ毎回ノ償還金ヲ如何ニスレバヨイカ。

毎年末 a 圓ヅ、償還シテソノ元利合計ガ丁度 S 圓ノ元利合計ニナレバヨイ。

毎年 a 圓ヅ、ノ償還ヲ a 圓ヅツノ積立ト見レバ第 $(n-1)$ 回目ニ積立テテカラ一ケ年後ニ於テ最後ノ a 圓ヲ加算シテ全部償還シタコトニナレバヨイノデアル。

$$\begin{aligned} S(1+r)^n &= \frac{a(1+r)\{(1+r)^{n-1}-1\}}{r} + a \\ &= a \times \frac{(1+r)^n - (1+r) + r}{r} \\ &= a \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \\ a &= \frac{Sr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{Sr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \end{aligned}$$

一年毎ノ複利デ年利率ヲ r トシ S
圓ノ n 回年賦償還金ハ

$$a = \frac{Sr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad (1)$$

$$a = \frac{Sr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (2)$$

對數ヲ用ヒテ計算スルナラバ(2)ヲ用ヒ複利表
ヲ用ヒルナラバ(1)ヲ用ヒルト便利デアル。

例 或會社ガ 20000 圓ヲ年利 4 分デ借入レーケ
年後ヨリ始メテ 10 回ノ年賦償還ヲスルニハ每
回ノ償還金如何。

【解】 (2) ノ公式ヲ用ヒルト

$$a = \frac{20000 \times 0.04}{1 - \frac{1}{1.04^{10}}}$$

$$x = \frac{1}{1.04^{10}} \quad \log x = -10 \log 1.04$$

$$= -0.170$$

$$= \bar{1}.80$$

$$x = 0.676$$

$$a = \frac{800}{0.324} = 2469.13$$

答 2469.13 圓

例 題

- 1000 圓ヲ年利 6 分ノ複利デ借入レ一年後カ
ラ始メ 5 回ノ年賦償還ヲスルニハ 毎回ノ償
還金何程カ。對數表ヲ用ヒテ計算セヨ。
- 或人 3000 圓ヲ年 8 分デ借入レ家屋ヲ建築シ
10 ヶ年ノ年賦償還ヲスルトキ 毎回ノ償還金
ハ何程ニナルカ。複利表ニヨツテ計算セヨ。

131. 年 金

I. 定期年金

年利率ヲ r トシ今カラ n 年間毎年ノ終リニ a
圓ヅ、受取ルベキ年金ガアル。一年毎ノ複利ト
シテ計算スレバ

$$\text{第 1 回ノ年金ノ現價ハ} \quad \frac{a}{1+r} \text{ 圓}$$

$$\text{第 2 回ノ年金ノ現價ハ} \quad \frac{a}{(1+r)^2} \text{ 圓}$$

.....

$$\text{第 } n \text{ 回ノ年金ノ現價ハ} \quad \frac{a}{(1+r)^n} \text{ 圓}$$

コノ年金ヲ今一時ニ受取ルモノトシテソノ現價ヲ S 圓トスレバ

$$S = \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \dots + \frac{a}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{a}{r} \times \frac{\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r)^n} = \frac{a}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\}$$

即チ S ト a トノ關係ハ S 圓ヲ借入レテ一ケ年据置キ、 a 圓ヅツ n 回ノ年賦償還スル場合ト同ジコトデアル。

II. 永續年金

年利率ヲ r トシ毎年ノ終リニ a 圓ヅツ永久ニ受取ルベキ年金ガアルトキ、一年毎ノ複利トシテ現價 S 圓ヲ計算スレバ

$$S = \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \dots$$

$$= \frac{a}{r}$$

$$Sr = a$$

即チ S ト a トノ關係ハ毎年末ニ a 圓ヅツノ利子ヲ受取ルベキ元金ヲ S 圓トシタ場合ト同一デアル。

年利率 r 、一年毎ノ複利トシテ毎年末ニ a 圓ヅツ受取ルベキ年金ノ現價 S 圓ハ

(I) 定期 n 年

$$S = \frac{a \{(1+r)^n - 1\}}{r(1+r)^n} = \frac{a}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\}$$

(II) 永續年金 $S = \frac{a}{r}$

【注意】 モシ半期毎ニ a 圓ヲ得ル場合ニハ年利率ノ $\frac{1}{2}$ ヲ r トシ、半年毎ノ複利トシ、年數ノ二倍ヲ n トシテ計算スルナラバ上ノ公式ハソノマ、適用スルコトガ出來ル。

例題

1. 今カラ10ケ年間毎年末ニ60圓ヅツ、受取ルベキ年金ノ現價ヲ求メヨ。但シ年利率5分、1年毎ノ複利トセヨ。
2. 今カラ毎年末200圓ヅツ受取ルベキ永續年金ノ現價ヲ求メヨ。但シ年利率6分、1年毎ノ複利トシテ計算セヨ。

3. 今カラ 240 圓ヅツノ年金ヲ半期毎ニ等額ヅツ分ケテ受取ルベキ永續年金ノ現價ヲ求メヨ。但シ年利率ハ 6 分トセヨ。

練習問題

1. 定價通リニ賣レバ 4 箇ニツキ 9 圓ノ利益アル品物 6 箇ヲ定價ノ 1 割 5 分引デ賣ツテ得ル利益ハ 10 箇ヲ定價ノ 1 割 8 分引ニ賣ツテ得ル利益ニ等シイトイフ。コノ品物ノ原價ヲ求メヨ。
2. 或會社デ男工 300 人女工 250 人ヲ使用シ毎日賃金 180 圓ヲ拂ツタ。シカルニ物價騰貴ノタメ男工ノ賃金ハソノ 3 割ヲ増シ、女工ノ賃金ハ男工ノ賃金増加ノ二分ノ一ヲ増シタタメ日々賃金合計 231 圓ヲ支拂ツタトイフ。男工女工各初メノ一日ノ賃金ハ何程デアツタカ。
3. 或國ニ於テ茶ハ珈琲ノ 3 倍ノ需用ガアル。今茶ノ需用ヲ $a\%$ 増シ珈琲ノ需用ヲ $b\%$ 減ズレバ全體トシテ $2c\%$ 増加シ、又茶ヲ $3b\%$ 減ジ珈琲ヲ $5a\%$ 増スト全體トシテ $3c\%$ 減少スル

- トイフ。 a ト b トノ比ヲ求メヨ。
4. 金ト銀トノ合金 7465 瓦アル。コレヲ水中デ秤ルト 467 瓦減ズルトイフ。コノ塊中ニ含ンデ居ル金ト銀トノ目方ヲ問フ。但シ水中デハ金ハソノ目方ノ 5.2% 減ジ銀ハ 9.5% 減ズルモノトセヨ。
 5. 或都市デ 1 ケ年間ニ生レル人數ハソノ年ノ初メニ於ケル人口ノ $\frac{1}{30}$ デ、死亡スル人數ハ $\frac{1}{48}$ デアル。コノ割合ヲ續ケルトキハ幾年ヲ經ルトソノ都市ノ人口ガ 2 倍トナルカ。但シ $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$ トセヨ。
 6. 或會社デ數年前 100000 圓デ購入シタ機械ガアル。毎年ノ減損ヲソノ年ノ初メノ記帳價格ノ 8.5% トスルト現在ノ記帳價格ハ約 44955 圓トナル。幾年前ニ購入シタカ。但シ $\log 9.15 = 0.96142$, $\log 4.495 = 0.65273$, $\log 4.496 = 0.65283$ トシテ計算セヨ。
 7. 或入金 1000 圓ヲ二口ニ分ケ一口ハ年 6 分デ甲銀行へ預ケ、他ノ口ハ年 4 分デ乙銀行へ預ケタ。シカシテコレヲ平均スレバ年 4 分 5

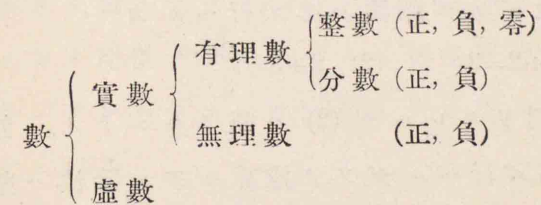
- 厘ノ利ニ當ルトイフ。各口ノ金高ヲ求メヨ。
8. 或人前年四月カラ本年三月末マデ毎月末金若干圓ヅ、郵便局ニ預入レテ元利合計 950 圓ヲ得タ。毎月ノ預入レ金高ハ何程カ。但シ郵便貯金ノ利子ハ月利 3 厘 5 毛デ月末ニ預ケ入レタモノハ翌月ヨリ利子ヲ付ケ、利子ヲ元金ニ繰入レル時期ハ三月末日デアアル。
9. 年利率 7 分、一年毎ノ複利デ元利合計ガ元金ノ 10 倍ヲ越スノハ幾年後カ。
- 但シ $\log 107 = 2.02938$ デアルトセヨ。

第十九章

數 及 ビ 式

132. 實數ノ成立チ

今マデ學ンダ數ヲ分類シテ見ルト次ノヤウニナル。



零ハ元來整數トモ分數トモイヘナイノデアアルガ便宜上整數ノ部ヘ入レテオク。又小數ハ分數ノ特別ナモノト考ヘルコトガ出來ル。

コレ等ノ數ニツイテノ成立チヲ一通リ系統的ニ見テ行クコトニシヨウ。

初メ正ノ整數 1, 2, 3, 4,ガアツテソレカラ出發シテ種々ノ計算ヲ行フト正ノ整數ダケデ

ハ色々ト不便ナコトガ起ツテ來ル。ソレ等ノ不便ヲ除イテシカモ計算ノ諸法則ガ通用サレルヤウニ分數、無理數及ビソノ他ノ數ガ工夫サレタモノデアアル。

整數ダケノ範圍デ

$$2 \times 3 \quad \text{ハ} \quad 2 + 2 + 2$$

$$a \times 5 \quad \text{ハ} \quad a + a + a + a + a$$

デアアルカラ乘法ハイツデモ行フコトガ出來ル。

逆ニ整數ダケデ除法ハ必ズ行ヘルカ

$$(1) \quad 6 \div 2 = 3 \quad (2) \quad 2 \div 3 = \frac{2}{3}$$

(1)ハ割リキレルガ(2)ハ割リキレナイ。即チ乘法ハ必ズ行ヘルガソノ逆算デアアル除法ハ整數ダケノ範圍デハ必ズ行ヘルトハ限ラナイ。

又應用上カラ考ヘルト例ヘバ2米ヲ3等分スルコトハ幾何學上可能デアアル。2米ヲ3等分シタ長サハアルガ整數ダケナラバソノ長サヲ表スベキ數ガナイコトニナル。

カヤウナ不便ヲ除クタメニココニ新タニ $\frac{2}{3}$ ノヤウナ分數ヲ設ケ、コレニ對シテ今マデノ數ヲ整數ト名ヅケル。即チ

分數、小數ハ除法ヲ常ニ可能ナラシメルタメニ定メラレタ數デアアル

同様ニ加法ハ常ニ行フコトガ出來ルガソノ逆算デアアル減法ハドウカ。正數ダケナラバ

$$2 - 3, \quad \frac{1}{2} - 3$$

ノヤウニ被減數ガ減數ヨリ小ナラバ引キ算ガ出來ナイコトニナル。コノ不便ヲ除クタメニ負數ヲ設ケル。負數ヲ設ケルトソレニ對シテ今マデノ數ヲ正數ト名ヅケ、同時ニ零モ又今マデ何モナイコトノ記號デアツタガコ、デ正數ト負數トノ境界ニアル新タナーツノ數トシテ認メルコトニナル。即チ

負數及ビ零ハ減法ヲ常ニ可能ナラシメルタメニ定メラレタ數デアアル。

コレデ有理數ハ出來上ツタノデアアルガ有理數ダケノ範圍デアアルト

$$2^3 \quad \text{ハ} \quad 2 \times 2 \times 2$$

$$a^5 \quad \text{ハ} \quad a \times a \times a \times a \times a$$

ノヤウニ冪法ハ常ニ行フコトガ出來ルガ逆ニ開法ハ常ニ施スコトガ出來ルカドウカ。

例へば $x^2=2$

ニ適スル x ノ値ガアルカドウカハ次ノヤウニ研究シテ見レバ判ル。

整数ノ範圍デハ 2 ハ 2×1 ヨリ外ニ積ノ形ニ變形スルコトハ出來ナイカラ整数ヲ二乗シテ 2 トナルベキ數ハナイ。

p, q ヲ整数トシ、分數 $\frac{q}{p}$ ハ既約分數デアルトスル。

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 = 2$$

ガ成立スルナラバ

$$q^2 = 2p^2, \quad q \times q = 2 \times p \times p$$

即チ q ハ 2 ナル約數ヲ有シナケレバナラナイ。

$$\text{故ニ} \quad q = 2q' \quad (q' \text{ ハ 整数})$$

トオクコトガ出來ル。サウスルト

$$4q'^2 = 2p^2 \quad 2q'^2 = p^2$$

$$\text{故ニ} \quad 2 \times q' \times q' = p \times p$$

即チ p ハ 2 ナル約數ヲ有シナケレバナラナイ。

從ツテ p, q ハ 2 ナル公約數ヲ有シ既約分數トイフ假定ニ反スル。故ニ

二乗シテ 2 トナルベキ分數ハ存在シナイ。 從

ツテ小數ノ中ニモ存在シナイ。

即チスベテノ有理數ハ

(1) 二乗シテ 2 ヨリ小カ

(2) 二乗シテ 2 ヨリ大カ

ノ二通りニ區分サレ二乗シテ丁度 2 トナルモノハナイ。シカシ二乗シテ如何様ニモ 2 ニ近イ有理數ハアル (上卷 174 頁參照)

故ニ二ツノ區分サレタ有理數ノ境界ニ新タナ數ヲ設ケテ $\sqrt{2}$ トスル。即チ

開法ヲ常ニ可能ナラシメルタメニ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ノヤウナ無理數ヲ設ケタノデアアル。

應用上カラ見ルト或單位

ノ長サヲ二邊トスル直角三角形ノ斜邊ヲ a トスレバ

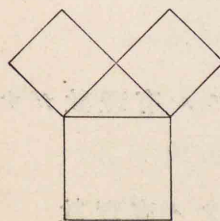
$$a^2 = 2$$

有理數ダケナラバ面積測

度ガ 2 トナルベキ正方形ハ

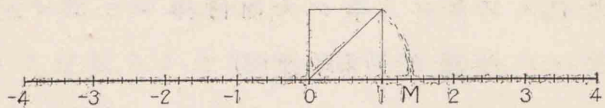
アルガソノ一邊ヲ表スベキ

數ハナイコトニナル。無理數ヲ設ルト初メテソノ線分ヲ數デ表スコトガ出來ル。



應用上カラノ見方ヲ一般ニ擴張シテ開法カラ來タ以外ノ無理數ヲモ考ヘテ見ルコトニシヨウ。

一直線上ノ或點ヲ零トシソノ左右ニ或長サヲ單位トシテスベテノ有理數ノ目盛リヲシテ見ル。



今有理數ダケノ範圍トスレバ任意ノ整數分數小數ガ與ヘラレルトソレニ對應シタ點ハコノ直線上ニ必ず存在スル。

逆ニコノ直線上ノ任意ノ點ヲトレバソレニ相當スル整數分數ガ必ずアルカトイフニサウハイカナイ。

或點 M ニ對シテソレニ對應スル有理數ガナイ場合ニハ

(1) M ノ右側ニアルスベテノ有理數

(2) M ノ左側ニアルスベテノ有理數

トノ二通りニ區分スレバ M ニ如何様ニモ近い有理數ヲ配列スルコトガ出來ル。コノ兩有理數ノ

境界ニ新タナ數ヲ設ケテ M 點ニ對應スル數トスル。カクシテ得タ數ガ無理數デ、イヒカヘルト整數分數ノ何レニモ屬シナイガ如何様ニモコレニ近い有理數ヲ見出シ得ル數デアル。

無理數ガ設ケラレタタメソレニ對シテ今マデノ數ヲ有理數トイフ。無理數ニハ

(1) 開法カラ來タ數 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$,

(2) 然ラザル數 π , $\log 2$,

ノ二通リアル。前者ヲ特ニ不盡根數トイフ。

例 a , b ヲ正ノ有理數トシ、 b ハ完全平方數デナイトシテ $a \pm \sqrt{b}$ ノ平方根ヲ求メヨ。

〔解〕 $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ トオイテ兩邊ヲ二乗スレバ

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

$$\text{故ニ } (a - x - y) + \sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$$

再ビ兩邊ヲ二乗スレバ

$$(a - x - y)^2 + b + 2\sqrt{b}(a - x - y) = 4xy$$

$$\text{故ニ } 2\sqrt{b}(a - x - y) = 4xy - b - (a - x - y)^2$$

モシ $a - x - y \neq 0$ トスルト左邊ハ無理數デ右邊ハ有理數デアルカラ等式ハ不合理デ

アル。從ツテ

$$a-x-y=0 \quad 4xy-b=0$$

$$\text{即チ } x+y=a \quad xy=\frac{b}{4}$$

コノ一組ノ聯立方程式ヲ解ケバ

$$\begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} & x = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} \\ y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} & y = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \end{cases} \quad \text{或ハ}$$

何レニシテモ

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

同様ニシテ次ノ結果ガ得ラレル。

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

モシ $\sqrt{a^2 - b}$ ガ開キキレテ有理數トナルナラバ $a \pm \sqrt{b}$ ノ平方根ハ二ツノ有理數ノ平方根ノ和ノ形ニ表スコトガ出來ル。

【注意】本書ノ10頁ニハ $a \pm \sqrt{b}$ ノ平方根ヲ視察ニヨツテ求メルコトヲ學ンダ。視察ニヨツテ解ケナイ場合ニハ上ノ方法ニヨツテ求メル。

例 題

1. 次ノ式ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ。

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} + \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$$

2. $\sqrt{9\sqrt{6} + 6\sqrt{12}} + \sqrt{9\sqrt{6} - 6\sqrt{12}}$ ヲ簡單ニセヨ。

3. $\sqrt{\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{24}}{4\sqrt{2} + \sqrt{24}}}$ ヲ簡單ナ形ニ直セ。

4. $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18} - \sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{10} + \sqrt{18}}{\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$ ヲ簡單ニシ

且小數第四位マデ計算セヨ。

5. $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)^2 = \sqrt{59 + 24\sqrt{6}}$ ナルコトヲ示セ。

6. $\frac{1}{2}\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$ ト $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ トノ大小ヲ比較セヨ。

7. a, b, c, d ガ有理數デ \sqrt{b}, \sqrt{d} ガ無理數ナルトキ $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ ナル等式ガ成立スルナラバ $a = c, b = d$ ナルコトヲ證明セヨ。

133. 虚數ニツイテ

虚數モ又開法ノ結果ニ乗シテ -1 トナルベキ
數ヲ i ト定メテコレヲ虚數單位トイヒ

$$2+3i, 5-4i, \sqrt{2}+i\sqrt{3}$$

ノヤウナ數ヲスベテ虚數トイフ。一般ノ虚數ハ
常ニ

$$a+bi \quad (a, b \text{ ハ 實數, } b \neq 0)$$

ナル形ニ書ケル。ソノ a ヲ實數部 bi ヲ虚數部ト
イフ。特ニ $a=0$ ナラバコレヲ純虚數トイフコト
ガアル。

上ノ式デ $b \neq 0$ ナル條件ヲ省イテ

$$a+bi \quad (a, b \text{ ハ 實數})$$

トスルト $b=0$ ナラバ實數デ $b \neq 0$ ナラバ虚數デ
アルカラ一般ノ數ハ $a+bi$ ノ形ニ含マレル。コ
ノ意味デ形ノ上カラ $a+bi$ ヲ複素數トイフ。

$a+bi$ ト $a-bi$ ノヤウニ虚數部ノ符號ダケヲ異
ニスル虚數ヲ共軛ナル虚數トイヒ $\sqrt{a^2+b^2}$ ヲソ
レ等ノ絶対値トイフ。虚數ニハ絶対値ノ大小ハ
考ヘラレルガ數ソノモノノ大小ヲ考ヘルコトガ

出來ナイ。

例 題

1. 次ノ各數ヲ $a+bi$ ナル形デ表セ。

$$1. \frac{3+2i}{2} \quad 2. \frac{7}{5+\sqrt{2}i}$$

2. 次ノ各數ノ絶対値ヲ求メヨ。

$$1. 2+3i \quad 2. \sqrt{2}+\frac{3}{2}i$$

3. 次ノ二ツノ計算デ何レガ正シイカ。

$$\sqrt{-6} \times \sqrt{-24} = \sqrt{(-6) \times (-24)} = \sqrt{6 \times 24} = 12$$

$$\sqrt{-6} \times \sqrt{-24} = \sqrt{6}i \times 2\sqrt{6}i = 12i^2 = -12$$

コレニヨツテ虚數計算ニ注意スベキコトヲ
述ベヨ。

4. 互ニ共軛ナ虚數ノ和及ビ積ハ常ニ實數ナル
コトヲ證明セヨ。

5. $a+bi=0$ ナラバ $a=0, b=0$ トナル。何故カ。

6. 複素數 $(a+bi)(c+di)$ ガ實數ナルタメニハ a, b, c, d ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。

134. 代數式

今マデ學ンダ代數式ヲ分類シテ見ルト次ノヤウニナル。

代數式	{	有理式	{	整式
				分數式
		無理式		

或文字ニツイテ加減乗除以外ノ算法例ヘバ $\sqrt[3]{x}$, $\log x$ ノヤウナモノヲ含マナイ代數式ヲソノ文字ニツイテノ有理式トイフ。

有理式ノ中デ着目スル文字ニツイテノ除法ヲ含マナケレバソノ文字ニツイテノ整式トイヒ、然ラザルモノヲ分數式トイフ。

除法ヲ含ンデモ割リキレル場合即チ計算ノ結果ソノ文字ニツイテノ割算ヲ含マナケレバ整式デアアル。

無理式ニツイテモ同様加減乗除外ノ算法ヲ含ンダ式例ヘバ $\sqrt{(a-b)^2}$ ノヤウナ式ガアツテモ計算ノ結果有理式ニナルナラバソレハ無理式デハナイ。

ココニ注意スベキハ整式トイツテモソレハ式ノ形ニツイテイフノデアツテ必ズシモ整數ヲ表スモノトハ限ラナイ。 $2x+3$ ハ整式デアアルガ x ガ $\frac{1}{3}$ ナラバ $\frac{11}{3}$ ナル分數ヲ表シテキル。同様ニ分數式ハ必ズ分數ヲ示シテ居ルトハ限ラナイ。整數ニナルトキモ分數ニナルトキモ又ハ無理數ニナル場合モアル。無理式ニツイテモ同様ソノ式ノ値ハ有理數ニナルトキモ無理數ニナルトキモアル。

例 題

1. 無理式ノ値ガ無理數トナラナイ例ヲ二、三擧ゲテ見ヨ。
2. x ニ關スル三次式ノ最モ一般的ノ形ノ式ヲ書ケ。
3. x, y ニ關スル二次式ノ一般的ノ形ノ式ヲ書ケ。
4. 相異ル三ツノ x ノ値ニ對シテ二次三項式 ax^2+bx+c ガ零トナルナラバ $a=0, b=0, c=0$ ナルベキコトヲ證明セヨ。

135. 未定係數法

二ツノ三次式

$$ax^3+bx^2+cx+d, \quad a'x^3+b'x^2+c'x+d'$$

ガ x ノ相異ル四ツノ値ニ對シテ相等
シクナルナラバ

$$a=a', \quad b=b', \quad c=c', \quad d=d'$$

トナツテ全ク同一ノ式デアル。

【證明】 四ツノ相異ル x ノ値 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ニ對シテ
兩式ガ等シクナルトスレバ

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=a'\alpha^3+b'\alpha^2+c'\alpha+d'$$

$$(a-a')\alpha^3+(b-b')\alpha^2+(c-c')\alpha+(d-d')=0$$

故ニ剩餘定理ニヨツテ三次式

$$(a-a')x^3+(b-b')x^2+(c-c')x+(d-d') \quad (1)$$

ハ $x-\alpha$ ナル因數ヲ有スル。同様ニシテ
コノ式ハ $x-\beta, x-\gamma$ ナル因數ヲ有スル。

$$\therefore (a-a')x^3+(b-b')x^2+(c-c')x+(d-d')$$

$$=A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \text{但シ } A=a-a'$$

尙コノ式ハ $x-\delta$ デモ割リキレルカラ

$$A(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)=0$$

シカルニ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ何レノ二ツモ等シ
クナイ。故ニ

$$(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma) \neq 0$$

$$\text{故ニ } A=a-a'=0 \quad a=a'$$

故ニ (1) ノ式ハ

$$(b-b')x^2+(c-c')x+(d-d')$$

コレニ今ト同ジ論法ヲ施セバ

$$b=b', \quad c=c', \quad d=d'$$

依ツテ初メノ二ツノ三次式ハ全ク同一
ノ式デアル。

以上ノ定理ハ三次式トハ限ラナイ。一般ニ x
ニ關スル n 次ノ整式ナラバ n 箇ヨリ多クノ相異
ル x ノ値ニ對シテ兩式ガ相等シクナル時ハコノ
二ツノ整式ハ全ク同一ノ式デアル

例 1 $16x^4-40x^3+x^2+30x+9$ ハ或式ノ平方形ニナ
シ得ルカドウカ。

$$\text{【解】 } 16x^4-40x^3+x^2+30x+9=(4x^2+lx\pm 3)^2 \quad (1)$$

トオイテ兩邊ガ全然同一ノ式ニナリ得ル
カドウカヲ見レバヨイ。

右邊ヲ展開スレバ

$$16x^4 - 40x^3 + x^2 + 30x + 9$$

$$= 16x^4 + 8lx^3 + (l^2 \pm 24)x^2 \pm 6lx + 9$$

$$\text{故ニ } \begin{cases} -40=8l \\ 1=l^2+24 \\ 30=6l \end{cases} \text{ 或ハ } \begin{cases} -40=8l \\ 1=l^2-24 \\ 30=-6l \end{cases}$$

コノ二組ノ等式ノ何レカヲ満足スル l ノ
値ガ存在スルナラバ(1)ノ等式ノ兩邊ハ全
然同一ノ式デアル。シカシテ $l=-5$ ハ後
ノ一組ヲ満足スル

$$\text{故ニ } 16x^4 - 40x^3 + x^2 + 30x + 9 = (4x^2 - 5x - 3)^2$$

カヤウナ解法ヲ未定係數法トイフ。

例2 $3x^3 + mx^2 + nx + 42$ ガ $x^2 - x + 6$ デ割リキレル
ヤウニ m, n ノ値ヲ定メヨ。

【解】三次式ヲ二次式デ割レバ商ハ一次式デア
ル。從ツテ

$$3x^3 + mx^2 + nx + 42 = (x^2 - x + 6)(ax + b)$$

トオイテ兩邊ガ x ノ値ノ如何ニ關ラズ等
シクナルヤウニスレバヨイ。

$$x^3 \text{ ノ係數ヲ比較シテ } 3=a \quad (1)$$

$$x^2 \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad m=b-a \quad (2)$$

$$x \text{ ノ係數ヲ比較シテ } n=6a-b \quad (3)$$

$$\text{絶對項ヲ " } 42=6b \quad (4)$$

$$(1) \text{ ト } (4) \text{ トカラ } a=3, b=7$$

コレヲ(2)ト(3)トニ代入シテ

$$m=4, n=11$$

【注意】

1. $3x^3$ ト 42 トカラ他ノ因數 $3x+7$ ヲ求メテ

$$3x^3 + mx^2 + nx + 42 = (x^2 - x + 6)(3x + 7)$$

トオイテ未定係數法ヲ適用スレバ一層簡
單ニ問題ヲ解決スルコトガ出來ル。

2. $x^2 - x + 6$ ヲ因數ニ分解シテ $(x-\alpha)(x-\beta)$ ナ

ル形ニナシ得ル場合ニハ剩餘定理ニヨリ

原式ニ $x=\alpha$ 及ビ $x=\beta$ ヲ代入シタ式ヲ零ト

オイテ m, n ヲ求メルコトガ出來ル。

例 題

1. $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ ガ $x^2 - x + b$ デ割リキレル

ヤウニ a, b ノ値ヲ定メヨ。

2. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + ax + b$ ガ完全平方式ナルヤウニ $a,$

b ノ値ヲ定メヨ。

3. $(x-a)(x-2a)(x-3a)(x-4a)+a^4$ ノ平方根ヲ求メヨ。
4. $x^4+3x^3+mx^2+nx+p$ ガ $(x^2+1)(x+1)$ デ整除サレルタメニハ m, n, p ノ値如何。
5. $13x^2+18x+10$ ヲ $(ax+b)^2+(cx+d)^2$ ノ形ニ變形セヨ。但シ a, b, c, d ハ正ノ整數デアルトセヨ。
6. ax^3+bx^2+cx+d ガ x^2+h デ整除サレルトキ a, b, c, d ハ比例スルコトヲ證明セヨ。
7. x^3+ax^2+bx+c ガ $(x+h)^3$ ナル形ニ變形シ得ルタメニハ a, b, c, d ノ間ニ如何ナル關係ガアルカ。
8. $\frac{5x-3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ ナルタメニハ A, B ヲ如何ナル數値ニ定ムベキカ。
9. k ガ如何ナル數値ヲ有スルトキ

$$x^2-y^2+3x-7y+k$$
 ヲ x, y ニ關スル二ツノ一次因數ニ分解シ得ルカ。

136. 等式ノ證明

例 1 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ ナラバ $\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} = 0$ ナル

コトヲ證明セヨ。

〔解〕 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ ナラバ

$$ayz + bzx + cxy = 0$$

$$\therefore \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} = \frac{1}{abc}(cxy + ayz + bzx) = 0$$

一般ニ A, B ヲ整式トシ $A=0$ ナルトキ $B=0$ トナルナラバ $B=AC$ ナルベキコトニ着目シテ剰餘定理ヲ應用スルコトガ出來ル。

〔別解〕 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ ノ分母ヲ拂ツテ

$$ayz + bzx + cxy = 0$$

文字 x ニ着目スレバ

$$x(bz + cy) + ayz = 0$$

$\therefore x = \frac{-ayz}{bz + cy}$ ヲ證明スベキ終結ノ左邊

$$\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} = \text{代入スレバ}$$

$$\begin{aligned} & \frac{-ay^2z}{ab(bz+cy)} + \frac{yz}{bc} + \frac{-ayz^2}{ca(bz+cy)} \\ &= \frac{-cy^2z + yz(bz+cy) - byz^2}{bc(bz+cy)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \text{ハ } x(bz+cy) + ayz \text{ ナル 因}$$

數ヲ有スル。從ツテ

$$\begin{aligned} \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} &= (ayz + bzx + cxy)P \\ &= 0 \end{aligned}$$

例 2 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ ナルトキハ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ナルコトヲ證明セヨ。}$$

【解】 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$\therefore \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ca}\right) = 1$$

從ツテ $\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ca} = 0$ ナルコトニ歸着ス

ル。コレハ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ ナルコトカラ前

ノヤウニ證明スレバヨイ。

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

例 題

1. $a+b+c=0$ ナルトキ次ノ等式ヲ證セヨ。

$$(a^2+b^2+c^2) = 2(a^4+b^4+c^4)$$

2. $abc=1$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$1. \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{c}\right)^2 + 8$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right)$$

$$2. \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$$

3. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$ ナルトキ $a,$

b, c, d ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

4. $x+y+z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ナルトキハ x, y, z ノ中
少クトモ一ツハ 1 ニ等シイ事ヲ證明セヨ。

5. $x+y+z = a, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ ナルトキ x, y, z ノ
中何レカ一ツハ a ニ等シイコトヲ證セヨ。

例 3 $x + \frac{1}{y} = 1$, $y + \frac{1}{z} = 1$ ナルトキ $z + \frac{1}{x} = 1$ ナル
コトヲ證明セヨ。

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 1 & (1) \\ y + \frac{1}{z} = 1 & (2) \end{cases}$$

コノ二ツノ等式ノ中ニハ文字 x, y, z ヲ含
ミ證明スベキ終結ニハ文字 x, z ヲ含ミ
ガ含マレテキナイ。從ツテ上ノ二式カラ
 y ヲ消去スルコトニスレバ

$$(2) \text{ ヨリ } y = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}$$

コレヲ (1) ニ代入シテ

$$x + \frac{z}{z-1} = 1$$

コレヨリ $z + \frac{1}{x} = 1$ ヲ證明スルニハ前ノ方
法ヲ適用スレバヨイ。

$$x = 1 - \frac{z}{z-1} = \frac{-1}{z-1}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = 1 - z$$

$$\therefore z + \frac{1}{x} = 1$$

例 4 a, b, c ハ何レモ零デナイモノトシテ

$$a(by + cz - ax) = b(cz + ax - by) = c(ax + by - cz),$$

$a + b + c = 0$ ナラバ $x + y + z = 0$ ナルコトヲ證明セ
ヨ。

$$\text{〔解〕 } a(by + cz - ax) = b(cz + ax - by) = c(ax + by - cz)$$

カラ $x + y + z$ ヲ a, b, c ノ式デ表スナラバソ
ノ式ハ $a + b + c$ デ割リキレルカドウカラ
研究スレバヨイ。

$$a(by + cz - ax) = b(cz + ax - by) = c(ax + by - cz) = k$$

トオケバ

$$a \neq 0 \quad \therefore by + cz - ax = \frac{k}{a} \quad (1)$$

$$b \neq 0 \quad \therefore cz + ax - by = \frac{k}{b} \quad (2)$$

$$c \neq 0 \quad \therefore ax + by - cz = \frac{k}{c} \quad (3)$$

(1), (2), (3) カラ

$$x = \frac{-k(b+c)}{2abc}, y = \frac{-k(c+a)}{2abc}, z = \frac{-k(a+b)}{2abc}$$

$$\therefore x + y + z = \frac{-2k}{2abc}(a+b+c) = 0$$

即チ $x + y + z = 0$

例題

- 1.
- $x=ay+az, y=bz+bx, z=cx+cy$
- ナラバ

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1$$

ナルコトヲ證明セヨ。

- 2.
- $ax+by+cz=0, bx+cy+az=0, cx+ay+bz=0$
- ナル

トキハ $a^3+b^3+c^3=3abc$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ a, b, c, x, y, z ハスベテ零デナイモノトセヨ。

- 3.
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+x} = 0, \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+y} = 0$
- 及ビ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \text{ ナルトキハ } a+b+c=0 \text{ ナルコト}$$

ヲ證明セヨ。

- 4.
- $x+y+z=a, x^2+y^2+z^2=b, x^3+y^3+z^3-3xyz=c$
- ナル

トキ $a^3-3ab+2c=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

- 5.
- $a=x(2-ax), b=1-\frac{2x^2}{1+x^2}$
- ナルトキハ
- $a^2+b^2=1$

ナルコトヲ證明セヨ。

練習問題

- 1.
- $x^2+x-1=0$
- ナルトキ
- x^3+2x^2+x+1
- ノ値ヲ求メヨ。

- 2.
- $a+b+c=0$
- ナルトキ次式ノ値如何

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

- 3.
- $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$
- ノ平方根ヲ求メヨ。

- 4.
- $x = \frac{1}{2}$
- ナルトキ
- $\frac{\sqrt{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}}{\sqrt{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}}$
- ノ數値ヲ小

數第三位マデ算出セヨ。

- 5.
- $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$
- ヲ最モ簡單ナ形ニ改メ、

 $x = \sqrt{7}, y = 2\sqrt{3}$ ナルトキコノ式ノ數値ヲ小數第二位マデ計算セヨ。

- 6.
- $x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$
- ナルトキ
- x^3+3x+1
- ノ數値ヲ計算セヨ。

7. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^3$$

8. $a = \sqrt{x+y}$, $b = \sqrt{x-y}$ ナルトキ下ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\frac{ab^2 - a}{ab + 1} + a}{\frac{a^2b + b}{ab + 1} - b}$$

又 $a = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $b = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ナルトキ上ノ式ノ値ヲ四捨五入シテ小數第三位マデ求めヨ。

9. $a = 1 + \sqrt{5}$, $b = 1 - \sqrt{5}$ ナルトキ
 $4(a^n - b^n)^2 + (a^{n+1} - b^{n+1})^2 = 2\sqrt{5}(a^{2n+1} - b^{2n+1})$
 ナルコトヲ證明セヨ。

10. $a = 1.414 + x$, $b = 1.732 + y$ トシ, x, y ノ絶對値ハ何レモ 0.0005 ヨリハ大デナイモトスレバ ab ト 1.414×1.732 トノ差ハ 0.002 ヨリモ大トナラナイコトヲ證明セヨ。

11. 何レモ小數第一位ニ終ル二數ヲ四捨五入シタ結果ガ 26 及 ビ 83 ナルトキ, コノ二數ノ積ヲ 26×83 トシテ計算スルコトニヨツテ生ズル誤差ハ最モ多クテ何程トナルカ。

12. $x^2 + px^2 + qx + r$ ガ $x^2 + ax + b$ デ整除サレルタメニハ $\frac{p-a}{1} = \frac{q-b}{a} = \frac{r}{b}$ ナルベキコトヲ證明セヨ。

13. a, b, c 及 ビ x ハ夫々實數デ, シカモ $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)(x^2 + 1) + c^2 = c(a+b)(x+1) - 2abx$ ナル關係アルトキハ $a = b$ ナルカ, 或ハ $a + b = c$ ナルコトヲ證明セヨ。

14. $\frac{a-b}{1+ab} = \frac{c-d}{1+cd}$ ナルトキハ $\frac{a+a}{1-ad} = \frac{b+c}{1-bc}$ ナルトコトヲ證明セヨ。

15. $b^2 - 4ac = (a-c)^2$ ナルトキハ $c^2 - 4ab = (a-b)^2$ ナルカ又ハ $c^2 + 4ab = (a+b)^2$ ナルトコトヲ證明セヨ。

...
...
...

第二十章

不等式

137. 不等式ノ性質

- (1). $a-b > 0$ ナラバ $a > b$
- $a-b < 0$ ナラバ $a < b$

シカシテコノ逆モ真デアル。

【證明】 $a-b=c$ トスレバ $a=b+c$

或數ニ正數ヲ加ヘルトハソノ絶對値ダケ増スコトデ負數ヲ加ヘルトハソノ絶對値ダケ減少スルコトデアル。故ニ

$c > 0$ ナラバ $a > b$

$c < 0$ ナラバ $a < b$

從ツテコノ逆モ又真デアル

コノ性質ニヨツテ、 a, b ノ大小相等ハ $a-b$ ノ正、負及ビ零ニヨツテ判定スルコトガ出來ル。

- (2). $a > b$ ナラバ $a+c > b+c$

【證明】 $a > b$ ナラバ $a-b > 0$

從ツテ $(a+c)-(b+c) > 0$

故ニ $a+c > b+c$

又 c ヲ減ズルノハ $-c$ ヲ加ヘルト同一デア
ルカラ一般ニ不等式ノ兩邊ニ同ジ數ヲ加ヘテ
モ又同ジ數ヲ減ジテモ不等號ノ向キハ變ラナ
イ。コノ性質ヲ應用スレバ等式ノ場合ト同ジ
ク項ノ符號ヲ變ヘテコレヲ他邊ニ移項スルコ
トガ出來ル。例ヘバ

$x-3 > 5$ ナラバ $x > 5+3$

- (3). $a > b, c > d$ ナラバ

$a+c > b+d$

【證明】 $a > b$ ナラバ $a-b > 0$

$c > d$ ナラバ $c-d > 0$

從ツテ $(a-b)+(c-d) > 0$

即チ $(a+c)-(b+d) > 0$

故ニ $a+c > b+d$

不等號ガ同ジ向キニアル不等式ノ兩邊ヲ邊
邊相加ヘルト不等號ハ前ト同ジ向キヲ有スル。

(4). $a > b, c > 0$ ナラバ

$$ac > bc$$

【証明】 $a > b$ ナラバ $a - b > 0$

$$\text{又 } c > 0 \quad \therefore c(a - b) > 0$$

$$\text{從ツテ } ac - bc > 0$$

$$\therefore ac > bc$$

又正數 c デ割ルノハ $\frac{1}{c}$ ヲ掛ケルソト同一
デアルカラ一般ニ不等式ノ兩邊ニ同一ノ正數
ヲ掛ケテモ兩邊ヲ同一ノ正數デ割ツテモ不等
號ノ向キハ前ト同ジデアル。

(5). $a > b, c < 0$ ナラバ

$$ac < bc$$

【証明】 $a > b \quad \therefore a - b > 0$

$$\text{又 } c < 0 \quad \therefore c(a - b) < 0$$

$$\text{從ツテ } ac - bc < 0$$

$$\therefore ac < bc$$

又 c デ割ルソト $\frac{1}{c}$ ヲ掛ケルソトハ同一デ
アルカラ一般ニ不等式ノ兩邊ヲ同一ノ負數デ
乗除スルト不等號ノ向キハ前ト反對ニナル。

138. 不等式ノ解法

例 1 $2x + 4 > 8$ ヲ解ケ。

【解】 4 ヲ移項スレバ

$$2x > 8 - 4$$

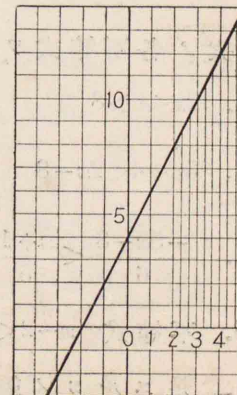
$$2x > 4$$

兩邊ヲ正數 2 デ割ルト

$$x > 2$$

$2x + 4$ ヲ x ノ函數トシテ考ヘルト x ノ値ニヨ
ツテハコノ函數ノ値ハ 8 ヨリ大トモナリ、又 8 ニ
等シクモ或ハ 8 ヨリ小トナルトキモアル。ソノ
變化ノ状態ヲぐらふデ示スト次ノ圖ニナル。

ぐらふヲ見レバ明カナル
如ク $2x + 4$ ノ値ハ $x = 2$ ノ時
ニ丁度 8 ニ等シク、 x ガ 2
ヨリ大ナラバ x ノ凡テノ値
ニ對シテ 8 ヨリ大トナリ x
ガ 2 ヨリ小ナル凡テノ値ニ
對シテハ 8 ヨリ小トナル。



尙考ヘテ見ルト " $2x + 4 > 8$ "

ヲトケ”トハ x ノ如何ナル範圍ニ於テ函數 $2x+4$ ノ値ガ8ヨリ大トナルカトイフ意味デ又 $2x+4=8$, $2x+4<0$ 等ヲ解ケトイフモソレハ何レモ函數ノ増減變化ヲ研究スルコトノ局部的ノモノデアル。

例2 $2x-2>5x-11$ ヲ解ケ。

〔解〕 移項スレバ

$$2x-5x>2-11$$

$$-3x>-9$$

兩邊ヲ負數 -3 デ割レバ

$$x<3$$

例 題

次ノ各不等式ヲ解ケ。

1. $2x-6>8$

2. $3x-4>8x+4$

3. $5x+4<2x-8$

4. $\frac{x-4}{5}>\frac{x-7}{3}$

5. $\frac{-5x-8}{6}<\frac{x+1}{5}$

6. 不等式 $x-2<5x$ 及ビ $3x-5<7$ ヲ同時ニ満足スル x ノ範圍如何。

例3 $x^2-8x+15<0$ ヲ解ケ。

〔解〕 左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-3)(x-5)<0$$

從ツテ

$$(1) \begin{cases} x-3<0 \\ x-5>0 \end{cases} \text{ 或ハ } \begin{cases} x-3>0 \\ x-5<0 \end{cases} \quad (2)$$

(1) ヲリ $x<3$ シカモ $x>5$ 不可能

(2) ヲリ $x>3$ シカモ $x<5$

$$\therefore 3<x<5 \quad \text{答}$$

例4 $x^2-8x+15>0$ ヲ解ケ。

〔解〕 左邊ヲ因數ニ分解シテ

$$(x-3)(x-5)>0$$

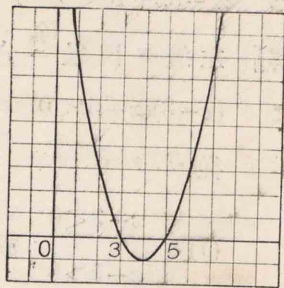
從ツテ

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x-5>0 \end{cases} \text{ 或ハ } \begin{cases} x-3<0 \\ x-5<0 \end{cases}$$

コレヨリ $x<3$ 或ハ $x>5$

二次函數 $x^2-8x+15$ ノ値ノ變化ヲ研究シテ見ルト $x=3$ ト $x=5$ トニ於テコノ函數ノ値ハ零トナリ、ソノ他ノ場合ニハ或ハ正トナリ或ハ負トナル。變化ノ状態ヲぐらふニ示シテ見ヨウ。

コノぐらふハ $x=3$ ト
 $x=5$ ノ所デ x 軸ト交ハ
 リ $x<3$ 及ビ $x>5$ ノ範
 圍ニ於テ x 軸ノ上部ニ、
 $3<x<5$ ノ範圍ニ於テ x
 軸ノ下部ニアル。



一般ニ x^2+px+q ヲ

因數ニ分解シテ $(x-\alpha)(x-\beta)$ トシタト

キ $\alpha<\beta$ トスレバ

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ ヲトクト $x<\alpha$ 或ハ $x>\beta$

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ ヲトクト $x=\alpha$ 或ハ β

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ ヲトクト $\alpha<x<\beta$

例 4 $x^2+3x>2x^2-4x+8$ ヲ解ケ。

【解】 移項レバ

$$-x^2+7x-8>0$$

$$\therefore x^2-7x+8<0$$

$$(x+1)(x-8)<0$$

$$\therefore -1<x<8 \quad \text{答}$$

例 題

次ノ各不等式ヲ解ケ。

1. $x^2-7x-18<0$ 2. $m^2+7m+12<0$

3. $x^2-9<0$ 4. $-6x^2+17x-5>0$

5. $2x^2+6>7x$ 6. $3x^2+11x<4$

7. $x^2-2\sqrt{3}x+1>0$

8. $x^2-6x+8>0$, $x^2-9x+18<0$ ヲ同時ニ満足スベ

キ x ノ範圍如何。

9. $x^2+2x-15<0$, $x^2+2x-8>0$ ヲ同時ニ満足スル

x ノ限界ヲ求メヨ。

10. 方程式 $x^2-2(m-1)x+7-m=0$ ノ根ガ實數ナル

ヤウニスルニハ m ノ限界ヲドウスレバヨ

イカ。

11. 聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

ガ實根ヲ有スルヤウニ a ノ範圍ヲ定メヨ。

12. x ガ實數ナルトキ $x+\frac{1}{x}$ ハ -2 ト 2 トノ間ノ

値ヲトラナイ。ソノ理由如何。

139. 不等式ノ證明

今マデ學ンダヤウニ式中ノ或文字ニ特別ナ制限ヲツケタトキニ限ツテ成立スル不等式ヲ條件附不等式トイフ。コレニ反シテ式中ノ或文字ニ如何ナル實數値ヲ與ヘテモ恒ニ成立スベキ不等式ヲ絶對的不等式トイフ。

例 1 $p^2 - 4q < 0$ ナルトキ $x^2 + px + q$ ノ値ハ x ノ如何ニカ、ハラズ恒ニ正ナル値ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } x^2 + px + q &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} \\ \text{シカルニ } p^2 - 4q < 0 \text{ ナル故ニ } -\frac{p^2 - 4q}{4} > 0 \\ \therefore \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} > 0 \end{aligned}$$

即チ $x^2 + px + q$ ハ x ノ値ノ如何ニ關ラズ恒ニ正ナル値ヲ有スル。

【問】 $b^2 - 4ac < 0$ ナルトキ $ax^2 + bx + c$ ノ値ハ恒ニ a ト同符號ナルコトヲ證明セヨ。

例 2 a, b フトモニ正ノ實數トスルトキ

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

特ニ $a=b$ ナラバ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$

負ナラザル二數ノ相加平均ハ相乗平均ヨリ大ナルカ又ハ相等シイ。

例 3 a, b, c ハ悉クハ相等シクナイナラバ

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} > 0 \end{aligned}$$

【問】 a, b, c ハ凡テ正數ニシテ悉クハ相等シク

ナイナラバ

$$a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$$

ナルコトヲ證明セヨ。

例 題

1. a, b ヲ任意ノ實數トスルトキ

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

ナルコトヲ證明セヨ。

2. a, b, c ヲ正數トスルトキ

$$\frac{1}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. a, b, c ヲ任意ノ實數トスレバ

$$(a+b+c)^2 \geq \{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)\}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

4. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)$ ハ 9 ヲ小ナラザル

コトヲ證明セヨ。但シ a, b, c ハ正ノ實數ト

セヨ。

5. $x^2 - 1$ ト $x - x^2$ トハ何レが大ナルカ。

練習問題

1. 初項 -52 , 公差 7 ナル等差級數ニ於テ初項ヨリ第何項マデノ和ガ 500 ヲ大トナルカ。
2. 1.08^x ノ整數部ガ二桁ノ數トナルニハ x ノトリ得ル値ノ限界如何。又 x ヲ整數トシテ x ノトリ得ル最小値ヲ求メヨ。
3. 分子ガ分母ヨリ大ニシテ且共ニ正ナル分數ノ兩項ニ同一ノ正ノ數ヲ加ヘルトキハ分數ノ値ハ減少スルコトヲ證明セヨ。又分子ガ分母ヨリ小ナル場合ハ如何。
4. a, b ガ正數ナルトキ

$$\left\{ \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \right\} - 3 \geq 0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

5. m, n 及ビ a, b ハ實數デ且 $a > 0, b > 0$ ナルト $\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b}$ ト $\frac{(m+n)^2}{a+b}$ トハイツレが大カ。又兩項ガ相等シイタメノ條件如何。

6. a, b, c が正ノ實數ナルトキ

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a}\right) \geq 8$$

ナルコトヲ證明セヨ。

7. a, b, c 及ビ x, y, z が任意ノ實數ナラバ

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

8. 三角形ノ三邊ガ等比級數ヲナストキ、ソノ公

比ハ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ヨリ大デ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ヨリ小ナル

コトヲ證明セヨ。

9. 次ノ各不等式ヲ解ケ。

1. $x^2 - 2x - 15 < 0$

2. $\frac{x-2}{x-3} < 0$

3. $(x-2)(x-3)(x-5) > 0$

4. $\frac{(x-2)(x-5)}{x-7} > 0$

5. $x^2 - 5x - 7 < 0$

第二十一章

函 數 ノ 變 化

140. 變數ト函數

例ヘバ

$$y = 2x - 1 \quad (1)$$

$$y = x^2 \quad (2)$$

$$y = 10^x \quad (3)$$

等ニ於ケル y ノ値ハ x ガ種々ノ値ヲトルニ從ツテソレニ對應シタ種々ノ値ヲトル。 x ニ任意ノ値ヲ與ヘルト y ノ値モ亦ソレニ從ツテ定マル。即チ y ハ x ノ函數デアル。

コレ等ノ場合ニ於ケル x, y ノヤウニ種々ノ値ヲ與ヘテ考ヘルヲ變數トイフ。

變數ニハ如何ナル値ヲモトリ得ル場合ト一定ノ範圍内ニ於テ任意ノ値ヲトリ得ル場合トアル。

(1), (2), (3) ニ於テ x ハ如何ナル値デモヨイ。シ

カルニ y ノ値ハドウカ。(1)ニ於ケル y ハ任意ノ値ヲトルコトガ出來ルガ(2), (3)ニ於ケル y ハ負數ニナルコトガ出來ナイ。正數ノ範圍内ナラバ任意ノ値ヲトルコトガ出來ル。 $y = \log x$ ニ於ケル變數 x モ又同様ニ負數デハイケナイ。

$$y = \sqrt{2-x}$$

ナル函數ニ於テ x ハ 2 ヨリ大ナラザル範圍デ任意ノ値ヲトルコトガ出來ル。

(1), (2) ノヤウニ函數ヲ變數 x ノ整式デ表サレタ場合ニハソノ次數ニヨツテ一次函數, 二次函數等トイフ。

141. 一元一次函數ノぐらふ

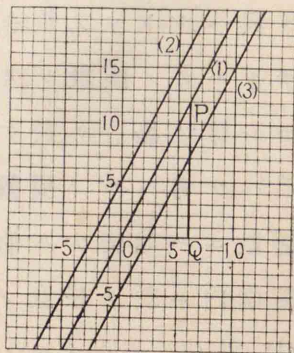
(1) $y = 2x$

(2) $y = 2x + 5$

(3) $y = 2x - 5$

等ノぐらふヲ描クト右圖ノヤウニナル。

x ノ同ジ値ニ對シ
(2) ノ函數値ハ (1) ノ函



數値ニ 5 ヲ加ヘタモノニ等シイカラ(1)ノぐらふヲ 5 ダケ上方ヘ移動シタモノガ(2)ノぐらふデアアル。同様ニ(3)ノぐらふハ(1)ノぐらふヲ 5 ダケ下方ニ移動シタモノト考ヘルコトガ出來ル。形ニツイテハ(1)ノぐらふヲ考ヘテ見ルコトニシヨウ。

$y = 2x$ ニ於テハ x ガ 1 マスゴトニ y ハ常ニ 2 ヲ増スガ故ニソノぐらふハ直線デアルト學ンダノデアアルガ x ニ無理數ヲ與ヘタ場合ハ考ヘニ入レテナカツタ。シカシ $y = 2x$ ナラバ x ガ無理數ヲ含メテ考ヘテ y ハ x ニ比例スル。ぐらふ上ノ任意ノ點 P カラ横軸ニ垂線 PQ ヲ下ストキハ常ニ $PQ : OQ = 2$ ナル故 $\triangle POQ$ ハ一定ノ形ヲ保有スル。從ツテ PO ハ x 軸ニ對シ一定ノ傾キヲ有スル。從ツテぐらふ上ノ點ハ凡テ一定直線上ニアル。シカシテ x, y ハ連續シテ變化スルコトヲ得ルヲ以テぐらふハ連續シタ直線トナル。

一般ニ

$$y = ax \quad (a \text{ ハ 常數})$$

ナル函數ノぐらふハ原點ヲ通ル直線デアツテ

$$y = ax + b \quad (a, b \text{ ハ 常數})$$

ナル函數ノぐらふハ $y=ax$ ナルぐらふニ平行ナ直線デ b ハ y ノ直線ガ縦軸ト出會フ點ノ縦座標ヲ示シテキル。特ニ $b=0$ ナルトキハ y ハ x ニ比例スル函數デソノ時ノぐらふハ原點ヲ通ル直線デアアル。即チ前ニ學ンダ比例スル函數ハ一次函數ノ特別ナ場合デアアル。

一次函數 $y=ax+b$ (a, b ハ常數)

ノぐらふヲ描ケバ縦軸上ニ原點カラ b ダケノ距離ニアル點ヲ過ル直線デアアル。

例 題

- 次ノ函數ノぐらふヲ描ケ。
 - $y=x$
 - $y=-x$
 - $y=\frac{1}{2}x$
 - $y=-\frac{1}{2}x$
- 前問ノぐらふニ於テ x ノ係數トソノ直線トノ間ニ如何ナル關係ガアルカヲ研究セヨ。
- ぐらふニヨツテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$2x+3y=0 \quad 5x-y=17$$

142. 一元二次函數ノぐらふ

(1) $y=2x^2$

(2) $y=2x^2-3$

(3) $y=2x^2-12x+18 = 2(x-3)^2$

(4) $y=2x^2-12x+15 = 2(x-3)^2-3$

ナル四ツノぐらふハ右ノヤウニナル。

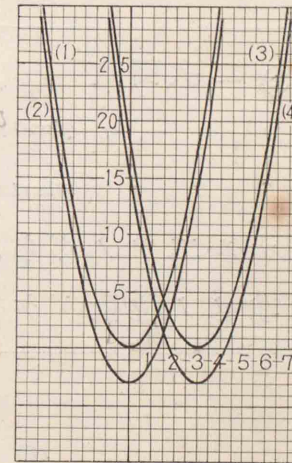
(2)ノぐらふハ(1)ノぐらふヲ3ダケ下方ニ移動シタモノデ、又(3)ノ函數ハ

$$y=2(x-3)^2$$

ニ變形シテ見ルト x ノ任意ノ値 α ニ對スル(1)ノ y ノ價ト x ノ値 $\alpha+3$ ニ對スル(3)ノ y ノ値トハ恒ニ等シク從ツテ(3)ノぐらふハ(1)ノぐらふヲ3ダケ右ニ移動シタモノデアアル。又(4)ノ函數ハ

$$y=2(x-3)^2-3$$

トナル故(3)ノぐらふヲソノマ、下方へ3ダケ移動シタモノデアアル。形ニツイテハ何レモ(1)ノぐらふト同一デアアル。



一般ニ a ヲ常數トシテ $y=ax^2$ ナル關係アルトキ y ハ x^2 ニ比例スル函數トイヒコノ場合ノぐらふヲ拋物線トイフ。

㉔ 二次函數

$$y=ax^2$$

$$y=ax^2+bx+c$$

ナル二ツノぐらふハ同形ノ拋物線デ唯ソノ位置ダケヲ異ニスル。

例 題

- 次ノ各函數ノぐらふヲ描ケ。
 - $y=x^2$
 - $y=-x^2$
 - $y=\frac{1}{2}x^2$
 - $y=\frac{1}{2}x^2$
 - $y=3x^2$
 - $y=-3x^2$
- 前問ノぐらふニヨツテ x^2 ノ係數ノ正負トぐらふノ形トノ間ニ如何ナル關係アルカヲ研究セヨ。
- 次ノ四ツノぐらふノ關係ヲ述ベヨ。

- $y=x^2$
 - $y=x^2-3$
 - $y=x^2-10x+25$
 - $y=x^2-10x+22$
4. 前問ノぐらふニヨツテ次ノ問ニ答ヘヨ。
- $x^2-10x+22=0$ ヲ解ケ。
 - $x^2-10x+22>0$ ヲ解ケ。
 - $x^2-10x+22<0$ ヲ解ケ。
 - $x^2-10x+22$ ガ最小値ノトキノ x ノ値如何。又ソノ最小値ヲイヘ。

143. 最大値最小値ノ求メ方

例 1 $x^2+4x+15$ ノ最小値ヲ求メヨ。又ソノ時ニ於ケル x ノ値如何。

〔解 i〕 $x^2+4x+15=(x+2)^2+11$

x ハ實數トスル故

$$(x+2)^2 \geq 0$$

故ニ $x+2=0$ ノトキ函數ノ値ハ最小トナル。從ツテソノ最小値ハ 11 デアル。

答 $\begin{cases} x=-2 \text{ニ於テ} \\ \text{最小値 } 11. \end{cases}$

〔解ii〕 $x^2+4x+15=y$ トオケバ

$$x^2+4x+(15-y)=0$$

x ガ實數値ナルタメニハ

$$2^2-(15-y) \geq 0$$

故ニ $y \geq 11$ 故ニ y ノ最小値ハ 11.

コレヲ初メノ等式ニ代入スレバ

$$x^2+4x+15=11$$

コレヲ解イテ $x=-2$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=-2 \text{ ノ時最小値ヲトル} \\ \text{最小値ハ 11.} \end{array} \right.$$

例題

次ノ各式ノ最大値又ハ最小値ヲ求メヨ。

1. $x^2+2x-15$ 2. $-x^2-2x+15$
3. $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 4. $-2x^2-5x+6$
5. $x\{24000-25000(x-8)\}$ フ最大ナラシメル x ノ値如何。又ソノ最大値ヲ求メヨ。
6. $x+y=31$ ナル關係アルトキ x^2+y^2 ノ値ヲ最小ナラシメル x, y ノ値ヲ求メヨ。

144. 互ニ反比例スル函数

x ト y トガ互ニ反比例スルニツノ函数

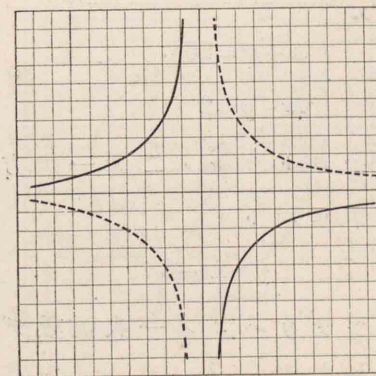
$$(1) y = \frac{2}{x} \quad (2) y = \frac{-2}{x}$$

ナルニツノ函数ノぐらふハ次ノヤウニナル。

x	-3	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	3	4
$\frac{2}{x}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{2}{x}$	$\frac{2}{3}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$
x		3								3	2	

x ノ絶對値

ガ大トナルニ從ツテ y ノ絶對値ハ限リナク小トナリ, x ノ絶對値ガ零ニ近ヅクニ從ツテ y ノ絶對値ハ限リナク



大トナル。從ツテぐらふノ左右兩端ハ次第ニ x 軸ニ近ツキ上下ノ兩端ハ次第ニ y 軸ニ近ヅク。

シカモ兩軸ニ出會フコトハナイ。カヤウナトキ
コノ兩軸ハコノぐらふノ漸近線デアルトイフ。

上ノぐらふヲ双曲線トイフ。

例題

次ノ各函數ノぐらふヲ描ケ。

1. $y = \frac{3}{x}$

2. $y = \frac{-3}{x}$

3. $y = \frac{3}{x} + 2$

4. $y = \frac{-3}{x} + 2$

145. 方程式ノぐらふ

例 1 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (1) \\ 2x - y = 2 & (2) \end{cases}$

(2)ハ x ト y トノ二元一次方程式デアルガコレ
ヲ變形スルト

$$y = 2x - 2$$

トナツテ y ハ x ノ一次函數デアル。同時ニ又

$$x = \frac{1}{2}y + 1$$

ト變形シテ見レバ x ハ明カニ y ノ函數デアル。

(1)ノ方程式モ又變形シテ

$$y = \pm\sqrt{25-x^2}$$

トスレバ $y = \sqrt{25-x^2}$ 及ビ $y = -\sqrt{25-x^2}$ ナルニツ
ノ函數ヲ表シテ居ルト見做スコトガ出來ル。即
チ y ハ x ノ函數デアル。同様ニ x ハ又 y ノ函數
デアル。

(2)ハ直線デアツテ(1)ノぐらふヲ研究シテ見ル
ト次ノヤウニナル。

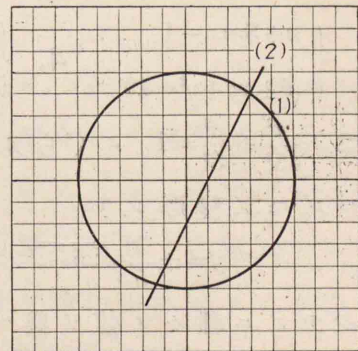
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	±3	±4	±4.6	±4.9	±5	±4.9	±4.6	±4	±3	0

(2)ノぐらふハ右
ノヤウニ圓ニナツ
テソノ半徑ハ5デ
アル。

(1)ト(2)ヲ一組ノ
聯立方程式トシテ
解クト

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = -\frac{24}{5} \end{cases}$$

ナル一組ノ根ガ得ラレコレハ(1),(2)ノぐらふノ
交點ノ座標ヲ表シテキル。



モシ根ガ一組(等根)シカナイ場合ニハ一方ガ他ニ切スル場合デ,モシ聯立方程式ニ根ガナイ(虚根)場合ニハ兩ぐらふハ交點ヲ有シナイ。

例 題

次ノ各聯立方程式ノ根トぐらふヲ描イタトキノ交點ノ座標トヲ比較シテ見ヨ。

$$1. \begin{cases} x-2y=0 \\ x^2+y^2=45 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x+y=5 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+3y=-1 \\ x^2+xy+y^2=19 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x+3y=3 \\ x^2+5xy-y^2=-45 \end{cases}$$

例 2 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ ノぐらふ

コレモ又變形シテ

$$y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{25-x^2}$$

トシテ x ニ種々ノ値ヲ與ヘテソレニ對應シタ y ノ値ヲ計算スルコトガ出來ル。シカシテ $\sqrt{25-x^2}$ ノ値ハ例 1 ニ於テ計算シタノデアアルカラソレニ $\frac{3}{5}$ ヲ掛ケルト次ノ表ガ出來ル。

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	± 1.8	± 2.4	± 2.8	± 2.9	± 3	± 2.9	± 2.1	± 2.1	± 1.8	0

$$x = -4, 4$$

$$y = \pm 3 \times \frac{3}{5} = \pm 0.18$$

$$x = -3, 3$$

$$y = \pm 4 \times \frac{3}{5} = 0.24$$

$$x = -2, 2$$

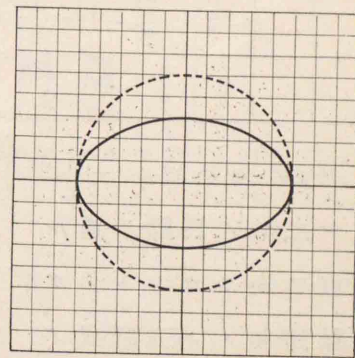
$$y = \pm 4.6 \times \frac{3}{5} = 0.28$$

$$x = -1, 1$$

$$y = \pm 4.9 \times \frac{3}{5} = 0.29$$

$$x = 0$$

$$y = \pm 5 \times \frac{3}{5} = \pm 3$$



コノ曲線ヲ橢圓トイヒ, $x^2+y^2=25$ ナル圓ヲ x 軸ノ上下ヲ等シク $\frac{3}{5}$ 倍ニ縮小シタ圖形デアアル。

二元二次方程式ノぐらふニヨツテ表サレタ曲線ハ圓, 橢圓, 双曲線, 拋物線ノ四通リニ區別サレテアル。ソノ中デ双曲線ト拋物線ハ限リナク遠方マデ延ビキルモノデ。拋物線ハ一本ノ曲線, 双曲線ハ二本ノ曲線カラ出來テキル。

二元二次方程式ノぐらふニヨツテ表サレタ曲線ヲ總稱シテ二次曲線トイフ。

例3 $x^2 - 4y^2 = 0$ ノぐらふ

$$y = \pm \frac{1}{2}x$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2

即チ $y = \frac{1}{2}x$ 及ビ $y = -\frac{1}{2}x$

ナル二ツノ原點ヲ通ル

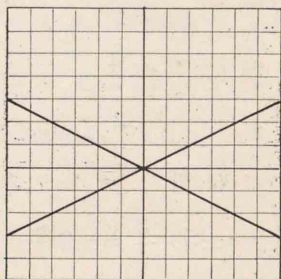
直線ヲ表スコトナツ

テ結局初メノ方程式ノ

左邊ヲ因数ニ分解シテ

$$(x-2y)(x+2y)=0$$

トシ $x-2y=0$, $x+2y=0$ トオイタ二ツノ直線ヲ表スコトニナル。



二元二次方程式ノぐらふハ通常曲線デ特別ナ場合ニ二ツノ直線ヲ表スコトガアル。

例題

次ノ各方程式ノぐらふヲ研究セヨ。

1. $x^2 + y^2 = 16$

2. $16x^2 - 25y^2 = 0$

3. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

4. $x^2 - y^2 = 25$

5. $x^2 + xy + y^2 = 1$

6. $2x^2 + xy = 16$

練習問題

1. 函数 $\frac{2x-7}{x+2}$ ハ x ガ増加スルニ從ツテ如何ニ變化スルカ。
2. x ガ -2 カラ 5 マデ増ストキ $x^2 - 2x - 8$ ノ値ハ如何ニ變ズルカ。ソノ狀況ヲぐらふニ描ケ。又函数ノ値ノ正負ノ範圍ヲ示セ。
3. $ax^2 + bx + c$ ノ數値ガ $x=1, 2, 3$ ナルトキ夫々 $4, 2, 12$ トナルトイフ。コノ式ノ最大又ハ最小値如何。
4. x, y, z ハ實數デ $x+y+z=5, x-y+3z=3$ ナル關係アルトキ $x^2 + y^2 + z^2$ ヲ最小ナラシメル x, y, z ノ値ヲ求メヨ。又コノ式ノ最小値如何。
5. 東京某地ニ於ケル或日ノ氣温ハ次表ノ通りデアアル。コノ表ヲぐらふデ示シ次ニぐらふヲ利用シテソノ日ノ午前六時及ビ正午ニ於

ケル氣溫ヲ推定セヨ。但シ氣溫ハ徐々ニ變化スルト考ヘテヨイ。(太字ハ午後)

時	5	7	9	11	1	3	5
氣溫	45.5°	44.5°	52.0°	57.3°	57.5°	55.5°	52.3°

6. 一日ニ現在ノ分量ノ $\frac{1}{20}$ ズツ成長スル大根ガアル。ソノ單價ハ毎日最初ノ單價ノ $\frac{1}{30}$ ズツ下落スルモノトスレバ農家ガ賣ツテ最大ノ所得ヲ得ルノハ現在カラ幾日後カ。
7. 互ニ垂直ニ交ルニツノ直線 AOB, COD 上ヲ動ク甲乙ニツノ質點ガアル。甲ハ每秒3糎ノ等速度デ A カラ B ニ向ヒ, 乙ハ甲ト同時ニ C カラ D ニ向ツテ每秒4糎ノ等速度ヲ以テ進ムモノトスル。AO=50糎, CO=100糎トスレバ出發後幾秒デ甲乙ガ最モ接近シタ距離ニアルカ。又ソノ時ノ甲乙ノ距離ヲ求メヨ。

復習雜題

- $x^2+2x-15, x^3-9x^2+28x-3$ ノ最大公約數ヲ求メヨ。
- $2x^4+5x^3-143x^2-218x+144$ ト $x^3+2x^2-71x-72$ トヲ同時ニ零ナラシメヨ。
- $x^2=6x-4$ ナルトキ $3x^3-14x^2-4x+19$ ノ數値ヲ小數第三位マデ求メヨ。
- $p=\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}\right)$ ナルトキ $(1+p^2)=\frac{(x+y)^2}{4xy}$ ナルコトヲ示セ。
- $a^p=s+\sqrt{1+s^2}$ ナルトキ $a^{-p}=-s+\sqrt{1+s^2}$ ナルコトヲ示セ。
- $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ ナルトキ $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ ヲ簡單ニセヨ。
- $2\{(x-a)(x-b)+(a-x)(a-b)+(b-x)(b-a)\}$ ヲ三ツノ平方形式ノ和ニ變形セヨ。
- a, b ガ有理數デ $1+\sqrt{3}, a+b\sqrt{3}, 10+6\sqrt{3}$ ガ比例ヲナストキハ a, b ノ値如何。

9. 方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ガ絶対値相等シク符號相反スル二ツノ根ヲ有スルトキハ係數 p, q, r ノ間ニ如何ナル關係有ルカ。
10. 間桿^{ケンゴウ}ヲ用ヒテ矩形ノ地面ヲ測量シテ一段歩ヲ得タ。而ルニ後ニ至ツテソノ間桿ニ一寸ノ延ビアルコトヲ發見シタ。コノ地面ノ面積ハ何程カ。
11. $9x+3x^2+4\sqrt{x^2+3x-5}=11$ ヲ解ケ。
12. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。
 $x:y=3:2, (2-x)^2+(1-y)^2=25$
13. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ガ $x=10, y=-3$ トシテモ又, $x=-4, y=13$ トシテモ満足セラレルモノトスレバ $x=-32$ トスルト y ノ値ヲ如何ニ定メレバ上ノ方程式ヲ満足セシメ得ルカ。
14. 二ツノ正ノ整數甲,乙ガアル。ソノ差ハ24デ甲ヲ乙デ除シタトキノ剩餘ハ4デアルトイフ。二數ヲ求メヨ。
15. 次ノ聯立方程式ニ於ケル a ノ値如何。
 $ax+y=1, x+5ay=2, 2x+6y=3$
16. a, b ガ共ニ1ヨリ大ナル實數ナルトキ,

- $a^2+a^{-2}=2b$ ナル方程式ヲ満足スル x ノ實數値如何。
17. a, b ガ共ニ正數デ方程式 $ax^3+bx^2+bx+a=0$ ノ三根ガ皆實數ナルタメニハ $b \geq 3a$ ナルコトヲ證明セヨ。
18. x, y ヲ共ニ正ノ整數トスルトキ $x^2-y^2=17$ ヲ満足スル x, y ノ値ヲ求メヨ。
19. x, y, z ハ何レモ零デナク, 且 $x+y+z=0$ ナラバ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$ ハ完全平方式ナルコトヲ證明セヨ。
20. 方程式 $x^3+Ax+B=0$ ノ一根ハ $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}$ デアルト云フ。 A, B ノ値如何。但シ A, B ハ有理數デアル。
21. 一組ノ方程式 $A=B, C=D$ ノ根ハ他ノ一組ノ方程式 $A+C=B+D, C=D$ ノ根ト全ク同一デアル。ソノ理由如何。
22. a, b, c ガ何レモ實根デ
 $(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)$
 ガ完全平方式ナルトキハ $a=b=c$ ナルコトヲ證明セヨ。

23. n ノ値ノ如何ニ拘ラズ恒ニ次ノ等式ガ成立スルトイフ。 x, y ノ値ヲ求メヨ。

$$(n+1)(x^2+y^2)=ax+nbx$$

24. ニツノ方程式

$$x^2+2x+a=0 \quad (1)$$

$$x^2-x+b=0 \quad (2)$$

ガアツテ(1)ノ一根ハ(2)ノ一根ノ2倍デ(1)ノ他ノ根ガ(2)ノ他ノ根ノ3倍デアルト云フ。 a, b ノ値ヲ求メヨ。

25. $x^2+px+q=0$ ノ一根ハ a ヨリ大デ、他ノ一根ハ a ヨリ小ナルトキハ $a^2+pa+q<0$ ナルコトヲ證明セヨ。

26. α, β ハ何レモ實數デ $\alpha+\beta=\alpha\beta=k$ ナルトキハ k ハ0ト4トノ間ニアルコトヲ得ナイ。コレヲ證明セヨ。

27. 二位ノ整數ガアル。十ノ位ノ數字ヲ x 、一ノ位ノ數字ヲ y トスルトキ $6x^2-3y^2=7xy$ ナル關係ヲ満足スルトイフ。カカル數ハ幾通りアルカ。

28. 周圍ノ長サガ等差級數ヲナス三ツノ正方形

ガアル。ソノ面積合セテ56平方尺デ周圍ノ和ハ48尺デアアル。各正方形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。

29. 矩形ノ一邊ヲ9等分シコレニ隣ル邊ヲ4等分シテ原矩形ト相似ナ矩形36個ヲ作ルコトヲ得ルトイフ。原形ノ二邊ノ長サノ比如何。
30. 120kmノ旅行ヲナスニ一日平均若干軒ヲ行クベキ豫定ヲ2km宛多ク行キタルタメニ豫定ノ日ヨリ3日早ク到着シタトイフ。一日ノ豫定軒數如何。
31. A, B二個ノ車ガアル。毎分BハAヨリ、100回多ク廻轉シAガ900回廻轉スルニ要スル時間ハBガ700回廻轉スルニ要スル時間ヨリ5秒多イトイフ。A, Bノ毎分ノ廻轉數ヲ求メヨ。
32. 甲、乙二社員退社ニ際シテ退職給與若干宛ヲ得タ。ソノ給與金額ハ在職年數ノ平方根ニ比例スル。甲社員ハ乙社員ヨリ9年間長ク在職シタタメソノ給與金ハ乙社員ヨリ500圓多ク、若シ甲社員ノ在職年數ガ乙社員ノ在

職年數ヨリ $4\frac{1}{4}$ 年長イナラバソノ給與金ノ比ハ 9:8 ノヤウニナルトイフ。二社員ノ在職年數ト各々ノ得タ給與金何程カ。

33. 200 カラ 400 マデノ整數ノ内デ 7 ノ倍數ヲ悉ク加ヘルト何程ニナルカ。

34. a, b, c ハ等比級數ヲナシ p ハ a, b ノ等差中項, q ハ b, c ノ等差中項ナルトキハ

$$\frac{a}{p} + \frac{c}{q} = 2 \text{ ナルコトヲ證明セヨ。}$$

35. 某汽船ガ航行中ニ要スル石炭料ハソノ速サノ二乗ニ比例シ毎時 10 哩デ進ムトキハ毎時 50 圓ノ石炭ヲ費ストイフ。尙航行中ニハソノ速サノ如何ニ關ラズ毎時 50 圓ノ雜費ヲ要スルトスレバ總費用 1200 圓デ 100 哩ヲ航行スルニハソノ速サヲ何程ニ定ムベキカ。

36. 燈臺ノ光ガ濃霧ノタメニ妨ゲラレ光源ヨリ x 米ニ於ケル光ノ強サハ a^{-x} ニ比例スルトイフ。但シ a ハ一定ノ數デアアル。光源カラノ距離ガ等差級數ヲナス地點ニ於テハ光ノ強サハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。又 5 米ヲ隔テタ地點ニ於テ光ノ強サガ半減セ

ラレルトキニハ強サガ $\frac{1}{16}$ ニ減ズル地點ハ光源カラ幾米ノ距離ニアルカ。

37. A ト B トノ和ハ y ニ等シク A ハ x ニ正比例シ, B ハ x ニ反比例スル。 x ガ 4 ナルトキ y ハ 10 デ x ガ 1 ナルトキ y ハ -5 デアルトイフ。然ラバ x ト y トノ關係ヲ表ハス式如何。

補 充 問 題

第 十 三 章 ノ 問 題

次ノ各方程式ヲ解ケ (1-24)

1. $\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}} = \frac{x}{3}$
2. $\sqrt[3]{(1+x)^2} + 4\sqrt[3]{(1-x)^2} = 5\sqrt[3]{1-x^2}$
3. $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{3x-2}} = \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x-4}}$
4. $x^2 - 3x + 1 + 4\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 16$
5. $2x^2 - 3\sqrt{2x^2 - 7x + 7} = 7x - 3$
6. $2\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 3x^2 = 6x + 1$
7. $9x^3 - 4x + 1 = 0$
8. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$
9. $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + \frac{1}{a^2}$
10. $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$
11. $(x^2 + x)^2 - 22(x^2 + x) + 40 = 0$

12. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 12$
13. $x^3 - 3x^2 - 7x + 21 = 0$
14. $x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0$
15. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$
16. $(x^2 + 2)^2 + 8x(x^2 + 2) + 15x^2 = 0$
17. $x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$
18. $2x^4 + 7x^3 - x^2 + 7x + 2 = 0$
19. $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = 3$
20. $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b}$
21. $\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x+b} = \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}$
22. $\frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} = \frac{a-c}{x+a-c} + \frac{b+c}{x+b+c}$
23. $x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0$
24. $x(x-1)(x-2)(x-3) = 5.6.7.8$
25. 直角三角形ノ周圍ハ 30 米 デ 面積 ハ 30 平方米
アルトイフ。コノ三角形ノ三邊ノ長サヲ求
メヨ。

第十四章ノ問題

次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。(1—30)

1.
$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=91 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x+\frac{3}{y}=\frac{7}{2} \\ 2x-\frac{2}{y}=\frac{26}{3} \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} (5x-2y+6)(x+y-4)=0 \\ 6x^2+xy-2y^2+25=0 \end{cases}$$
4. $x^2+xy=8x+3, \quad y^2+xy=8y+6$
5. $x^2-3xy+2y^2=12, \quad x+2xy-3y^2=32$
6. $x^2-3xy+2y^2=3, \quad 2x^2+y^2=0$
7. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=45, \quad \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=9$
8. $x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{2}{x+y}, \quad x^2+y^2=7$
9. $2x^2+27xy+6y^2-6x-21y+4=0$
 $2x^2-9xy-3y^2-6x+6y+4=0$
10. $y\sqrt{2-4x^2}-x\sqrt{2-4y^2}=\sqrt{1-2x^2}\sqrt{1-2y^2}-2xy=1$
11. $x^3+1=9y, \quad x^2+x=6y$
12. $\sqrt{\frac{2x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{2x}}=2, \quad xy-x-y=24$
13. $x+y=7, \quad x^3+y^3=91$

14. $x+y=5, \quad (x^2+y^2)(x^3+y^3)=455$
15. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2}, \quad \frac{3}{x+y}=1$
16. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}, \quad \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12$
17. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2, \quad x^2y^2+x+y=8xy-9$
18. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2, \quad xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$
19. $x^2y+xy^2=30, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$
20. $x^2+y^2=41, \quad \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$
21. $x^2+y^2+(x-y)=32, \quad (x^2+y^2)(x-y)=87$
22. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{12}, \quad \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{19}{12}$
 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=\frac{16}{12}$
23. $y+z-3x=2a, \quad z+x-3y=2b$
 $x+y-3z=2c$
24. $x-ay+a^2z=a^3, \quad x-by+b^2z=b^3$
 $x-cy+c^2z=c^3$
25. $x+y+z=a, \quad y+z+w=b$
 $z+w+x=c, \quad w+x+y=d$

26. $x+y=z$, $3x-2y+17z=0$
 $x^3+3y^3+2z^3=167$
27. $(y+z)(x+y+z)=a$, $(z+x)(x+y+z)=b$
 $(x+y)(x+y+z)=c$
28. $x+y-3z=7$, $x^2+y^2+z^2=9-2z$
 $yz+zx+xy=2z^2+3z$
29. $x^2+y^2+z^2=50$, $yz+xy-zx=7$
 $xy-yz-zx=47$
30. $x+y+z=c$, $x^2+y^2+z^2=c^2$
 $x^3+y^3+z^3=c^3$
31. 或人若干圓ヲ甲乙丙三人ニ分與シタ金高ヲ比較シテ見ルト甲ノ所得ノ三倍ト全金額ノ二倍トノ差ハ600圓, 乙ノ所得ノ二倍ト全金額ノ三倍トノ差ハ120圓, 丙ノ所得ノ四倍ト全金額ノ五倍トノ和ハ3400圓デアルトイフ。各人ノ所得幾何ナルカ。
32. 木炭若干俵ヲ男女若干人ニ分ケルニ一人毎ニ4俵宛トスレバ4俵不足シ2俵宛トスレバ8俵餘リ, 若シ男子ニハ一人毎ニ男ノ人數, 女子ニハ一人毎ニ女子ノ人數ニ等シイ俵數

ヲ與ヘルト過不足ガナイトイフ。木炭ノ俵數ト男女ノ人數トヲ求メヨ。

33. 甲乙二人ノ金物商ガ合計400貫ノ鐵材ヲ各々異ナル値段デ賣ツテ甲乙同額ノ代金ヲ得タ。モシ甲ガ乙ノ賣價デ賣ルナラバ720圓ヲ得ベク又乙ガ甲ノ賣價デ賣ルナラバ320圓ヲ得ベシトイフ。甲乙ノ各所持シテ居タ鐵材ノ貫數及ビ賣價各何程カ。

第十五章ノ問題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。(1—14)

1. $4(ad-bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$
2. $a^2(a+1) - b^2(b+1)$
3. $x^3 - 9xy + y^3 + 27$
4. $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$
5. $(a+b)^2x^4 - 2(a^2+b^2)x^2y^2 + (a-b)^2y^4$
6. $x^4 + x^2 - 2ax + 1 - a^2$
7. $(x^2 - ax)^2 + 4ax^3 - (ab + bx)^2$
8. $x^4 - 27x^2y^2 + y^4$
9. $a^4 + b^4 - a^3b - ab^3$
10. $(l^2 + lm)x^{2m} + (2m^2 - lm)x^n - 6m^2$
11. $72(x^2 - 1) - 17x$
12. $x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4$
13. $mn(x^2 + y^2) + (m^2 + n^2)xy$
14. $(x+y)^2 - (a+b)^2 + (x+a)^2 - (y+b)^2$
15. $y^2 = xz$ ナラバ $x^2 + y^2 + z^2$ ハ x, y, z ノ一次ノ同次式ノ積ニ分解サレルコトヲ證明セヨ。
16. $a+b+c=0$ ナラバ $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$ ナル

コトヲ證明セヨ。

16. $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab$ ナルトキ

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

17. $ax^2 + bx + c = 0$ ト $bx^2 + cx + a = 0$ トガ共通ノ一根ヲモツトキハ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ナルコトヲ證明セヨ。

18. $x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$ ガ只一ツノ共通根ヲモツタメニハ $a + b = -1$ ナルコトヲ證明セヨ。

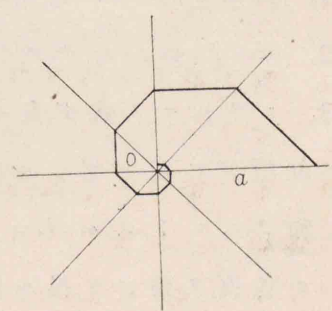
19. A ト B, B ト C, C ト A ノ最大公約數ヲ夫々 G_1, G_2, G_3 トシ A, B, C ノ最大公約數ヲ G, 最小公倍數ヲ L トスレバ $ABCG = LG_1G_2G_3$ ナルコトヲ證明セヨ。

第十六章ノ問題

1. 等差級數ノ各項ニ同一ノ數ヲ加ヘルト如何ナル級數ヲ得ルカ。
2. 等差級數ノ各項ニ同一ノ數ヲ掛ケルト亦等差級數ニナルコトヲ説明セヨ。
3. 凸多角形ガアツテソノ内角ノ度數ハ等差級數ヲナシ最小角ハ 120° デ公差ハ 5° デアル。ソノ邊數ヲ求メヨ。
4. 連続シタ整数 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ヲ括弧ニ集メテ $(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$ トスルトキハ
 1. 第10番目ノ括弧内ニアル項數ハ幾ツアルカ。
 2. 第10番目ノ括弧内ニアル初項ト末項トヲ求メヨ。
 3. 第10番目ノ括弧内ノ項ノ和ヲ求メヨ。
5. 連続シタ偶數 $2, 4, 6, 8, 10, \dots$ ヲ括弧内ニ集メテ $(2, 4), (6, 8, 10), (12, 14, 16, 18), \dots$ トスルトキ第10番目ノ括弧内ニ屬スル諸數ノ總

和ヲ求メヨ。又 n 番目ニアル諸數ノ和ヲ n ノ式デ表セ。

6. $\frac{32}{9}$ ト $\frac{27}{32}$ トノ間ニ4箇ノ等比中項ヲ入レヨ。
7. 次ノ等比級數ノ和ヲ求メヨ。
 1. $54+18+6+\dots$ (第7項マデ)
 2. $1+\sqrt{2}+2+\dots$ (第8項マデ)
 3. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\dots$ (第10項マデ)
8. $\sqrt{3}-3+3\sqrt{3}-\dots$ ノ第10項マデノ和ヲ小数第三位マデ正シク計算セヨ。
9. 次ノ無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。
 1. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\dots$
 2. $3-2+\frac{4}{3}-\dots$
10. 圖ノヤウニ一點 O ヲ過ル四直線ガアツテ相隣ル二直線ノナス角ハ何レモ 45° デア



ル。コノ一直線上ニ於テOカラ a ノ距離ニアル一點カラソノ隣リノ直線へ垂線ヲ下シソノ足ヲ次ノ隣リノ直線へ垂線ヲ下ス。カクノ如ク限リナクコノ方法ヲ施スモノトスレバコノ垂線ノ長サノ和ハドウナルカ。

11. 等比級數ノ最初ノ n 項ノ和ハ常ニ $3^n + a$ デアルトイフ。コノ級數ハ如何ナル級數カ。
12. 三數 $m^2 + m + 1$, $m^2 + 2m + 11$, $m^2 + 3m + 28$ ガ等比數ヲナスヤウニ m ノ値ヲ定メヨ。
13. 等比級數ガアル。ソノ初項カラ n 項マデノ和ヲ p , $2n$ 項マデノ和ヲ q , $3n$ 項マデノ和ヲ s トスレバ
 1. $p, q, q+s-p$ ハ等比級數ヲナスコトヲ示セ。
 2. $p^2 + q^2 = p(q+s)$ ナルコトヲ示セ。
 3. s ヲ p, q ノ式デ表セ。
14. 初項ガ a 及ビ a' ナル二ツノ無限等比級數ノ和ヲ s, s' トスレバ、コノ二ツノ級數ノ對應スル各項ヲ乘ジテ得ル無限等比級數ノ和ハ次ノ式ニナルコトヲ證明セヨ。

$$\frac{ss'aa'}{sa'+s'a-aa'}$$

15. 次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots$$

第十七章ノ問題

1. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

1. $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)$

2. $\frac{x+y}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$ 3. $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}})^2$

2. $x^{\frac{3}{4}} - 2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{8}} + a^6$ ヲ $x^{\frac{1}{4}} - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{8}} + a$ デ割レ。

3. $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q} \div \left(\frac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$ ヲ簡單ニセヨ。

4. 次ノ對數ヲ求メヨ。

1. $\log_2 512$ 2. $\log_2 32768$

5. 次ノ等式ニ於ケル x ノ値ヲ求メヨ。

1. $\log_2 x = 11$ 2. $\log_2 x = 13$

6. 次ノ各式ヲ計算セヨ。

1. $\frac{32 \times 128 \times 8 \times 1024}{512 \times 2048}$

2. 512^2 3. $\sqrt{262144}$

4. $\sqrt[5]{1048576}$

7. a, b, c ガ等差級數ヲナシ x, y, z ガ等比級數ヲナストキハ

$$(b-c)\log x + (c-a)\log y + (a-b)\log z = 0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

8. $x = a^c$ ナルトキ $x = A^{c \log_A a} = A^{\frac{c}{\log_a A}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

9. $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$ ナルトキハ $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

10. 次ノ式ヲナルベク簡單ニセヨ。

1. $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} \times \left\{ \frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}} \right\} \div \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$

2. $\left\{ (x^{\frac{p-q}{r}})^{\frac{q-r}{p}} \right\}^{\frac{r-p}{q}} \times x^{\frac{p-q}{r} + \frac{q-r}{p} + \frac{r-p}{q}}$

3. $(x^{\frac{a}{c-a}})^{\frac{1}{a-b}} (x^{\frac{b}{a-b}})^{\frac{1}{b-c}} (x^{\frac{c}{b-c}})^{\frac{1}{c-a}}$

4. $\left\{ (a^2b)^3 \times \left(\frac{b}{a}\right)^4 \right\} (ab^2)^2 \times \left(\frac{a}{b}\right)^3 \Big\}^4$

第十八章ノ問題

1. 某市ノ人口 (40000) 人デソノ死亡率ハ毎年百分ノ三、他カラノ移住者ハ毎年 400 人ヅツアルトスレバ二年後ニ 1500 人以上ノ人口ヲ増スニハソノ出産率何程ヲ要スルカ。
2. 一定ノ期間ニ於ケル或金高ノ銀行割引高ト眞割引高トノ差ハ眞割引高ノソノ期間内ニ於ケル利息ニ等シイコトヲ説明セヨ。
3. 或金高ヲ一年毎ノ複利デ預入レ、二ケ年後ノ元利合計 3087 圓ヲ得タ。モシ單利ナラバ元利合計ハコレヨリ 7 圓少クナルトイフ。預入レ金額ト年利率トヲ求メヨ。
4. 月利率ヲ r トシ 4 ケ月毎ノ複利デ毎年ノ初メニ a 圓ヅ、預入レルト n 年後ニハ元利合計何程トナルカ。
5. 今カラ滿一年毎ニ年金 a 圓ヅツヲ $2n$ 年間受取ルベキ人ガ第一回ノ年金ハ長男ニ、第二回ノ年金ハ次男ニ、第三回ノ年金ハ長男ニ、追ッテ斯ノ如ク與フルコトヲ約束シタ。然ラ

- バコノ二子ノ受取ルベキ金額ノ現價ニ何程ノ差ガアルカ。
6. 或商品ノ原價ニ對シ或歩合ノ利益ヲ見積ツテ賣價ヲ 3 圓 68 錢トシタ。若シ原價ガ 20 錢ダケ安ケレバ利益ヲ五分多クシテモ尙賣價ハ 3 圓 60 錢トナル。原價、利益ノ歩合如何。
 7. 或人金 2000 圓ヲ預金シ一年後ニ 1000 圓ヲ引出シタルニ二年後ニ於ケル預金額合計 1115 圓トナツタ。コノ預金ノ年利率ヲ求メヨ。但シ利息ハ滿一年毎ニ元金ニ繰込ムモノトモノセヨ。
 8. 或人金 5000 圓ヲ銀行ニ預ケ、一ケ年ノ終リニ 150 圓ヲ引出シ殘金ヲ更ニ一ケ年預ケタルニ元利合計 5564 圓トナツタ。年利何程ナルカ。
 9. 年利 4 分一年毎ノ複利デ金 100 圓ヲ預ケ元利合計ガ 2000 圓トナルニハ約何年ヲ要スルカ。但シ $\log 2 = 0.301$, $\log 1.3 = 0.114$ トシテ計算セヨ。
 10. 或人毎月ノ終リニ金 5 圓ヅツ貯金シ年利率

5分デ各貯金ノ翌日カラ利子ヲ計算シ最初ノ貯金後滿一ケ年毎ニ利子ヲ元金ニ繰入レルトキハ滿30年後ニ元利合計何程トナルカ。

第十九章ノ問題

1. $x^2+x-1=0$ ナルトキ x^4+6x^2+9x+5 ノ値ヲ求メヨ。

2. $x=1$ 及ビ $x=2$ ガ次ノ方程式ヲ満足スルナラバ a, b, c ノ間ニ如何ナル關係ガアルカ。

$$\frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{3x-5} = 0$$

3. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ トシテ $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ ノ値ヲ求メヨ。

4. $2x = a + \frac{1}{a}$, $2y = b + \frac{1}{b}$ ナルトキ $xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$ ノ値ヲ求メヨ。

5. $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ ナルトキ $\sqrt[3]{\left(a + \frac{b}{x}\right)^2 + (b+ax)^2}$ ノ値如何。

6. $x = \frac{2a}{1+a^2}$ トシテ $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ ヲ簡單ニセヨ。

7. $x = \frac{a+b}{\sqrt{2}(a-b)}$ ナルトキ $\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} + \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

ノ値ヲ最モ簡單ナ形デ表セ。

8. 正ノ整数 n ノ正ノ平方根ノ整数部ヲ a トスレバソノ小数部ト $\frac{n-a^2}{2a}$ トノ差ハ $\frac{1}{2a}$ ヨリモ小ナルコトヲ證明セヨ。
9. $y^2+5xy+mx^2+x+y-2$ ガ x, y ニ關スル一次ノ二因數ニ分解サレルタメニハ m ノ値ヲ如何ニ定ムベキカ。
10. a, b, c ニ如何ナル値ヲ與ヘルトキ次ノ式ハ完全平方式トナルカ。

$$x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$$
11. x^3+px^2+qx+r ガ完全平方式ナルタメニ必要ナ條件ハ $p^3=3pq=27r$ ナルコトヲ證明セヨ。又コノ逆ハ如何。
12. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz=0$ ナルトキハ x, y, z ノ中何レカ二ツノ和ハ零ニ等シイコトヲ證明セヨ。
13. $a^2+b^2+c^2=x^2, l^2+m^2+n^2=y^2, al+bm+cn=xy$ ナルトキ $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ各文字ハ何レモ實數デ零デナイモノトセヨ。

14. $\frac{x+y}{a^2}=\frac{y+z}{b^2}=\frac{z+x}{c^2}, xy+yz+zx=0$ ナラバ $a\pm b\pm c=0$ ナルコトヲ證明セヨ。
15. 三ツノ方程式 $lx+my+n=0, \frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}=0, \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ ガ同時ニ成立スルトキハ $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。
16. $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ ナラバ $a=b=c=d$ ナルコトヲ證明セヨ。
17. $a^3+pa+q=0, b^3+pb+q=0, c^3+pc+q=0$ ガ成立シ、 a, b, c ガ何レモ相等シクナイモノトスレバ $a+b+c=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

第二十章ノ問題

1. 73ヲ二ツノ部分ニ分チ各部分ヲ整数トシ大ナル部分ノ3倍ガ小ナル部分ト8トノ和ノ5倍ヨリモ大デ、大ナル部分カラ3ヲ減ジタ差ノ3倍ガ小ナル部分ノ7倍ヨリモ小トナルヤウニセヨ。
2. $x > y > 0$ ナラバ $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} > \frac{x - y}{x + y}$ ナルコトヲ證明セヨ。
3. a, b, c, d ハ互ニ相異ル正ノ實數デシカモ $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ ナルトキハ $ac + bd < 1$ ナルコトヲ證明セヨ。
4. 方程式 $x^2 + 2m(x+1) + 15 = 0$ ガ實根ヲ有スルニハ m ノ限界如何。
5. $x^2 + 2(p+1)x + 6p + 5 = 0$ ノ根ガ虚根ナルタメニハ p ノ限界ヲ如何ニスベキカ。
6. $x^3 - 6x^2 + 10x$ ハ x ノ値ノ如何ニカ、ハラズ恒ニ x ト同符號ナルコトヲ證明セヨ。
7. $ax^2 + 2x + 1$ ガ x ノ値ノ如何ニカ、ハラズ恒ニ正ナルタメ a ノトルベキ條件ヲ求メヨ。

8. x ガ實數ナルトキ $x - \frac{1}{2} - x^2$ ハ恒ニ負ナルコトヲ證明セヨ。
9. a, b, c ガ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ストキハ $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ ノ値ハ x ノ値ニカカハラズ恒ニ正ナルコトヲ證明セヨ。
10. 三角形ノ周ノ長サガ一定デ、一邊ノ長サガ他ノ一邊ノ長サノ2倍ナルトキ、最短邊ノ周圍ニ對スル比ハ $\frac{1}{6}$ ト $\frac{1}{4}$ トノ間ニアルコトヲ證明セヨ。
11. a, c ガ正數ナラバ $\frac{b+d}{a+c}$ ハ $\frac{b}{a}$ ト $\frac{d}{c}$ トノ間ニアルコトヲ證明セヨ。
12. a, b, c, a', b', c' ハスベテ正數デ $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'} > \frac{c}{c'}$ ナルトキハ

$$\frac{a}{a'} > \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} > \frac{c}{c'}$$
 ナルコトヲ證明セヨ。

第二十一章ノ問題

1. $a > b > c$ トシテ x ガ c ヨリモ小ナル値ヨリ漸次増大シテ a ヨリ大トナルマデノ間ニ於テ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ノ値ノ符號ハドウ變化スルカ。
2. x ニ關スル二次函數ガアツテ $x=2$ ナルトキソノ式ノ値ハ 37 トナリ $x = \frac{5 \pm 2\sqrt{3}}{6}$ トオケバソノ式ノ値ハ零トナル。コノ二次三項式ヲ求メヨ。又ソノ二次三項式ノ最大又ハ最小値如何。
3. x ニツイテノ二次函數 $x^2 + px + q$ ハ $x=1$ ニ於テ最小値 2 ヲトルトイフ。 p, q ノ値ヲ求メヨ。
4. 與ヘラレタ正數 a ヲ二分シソノ積ヲ最大ナラシメル方法如何。
5. 底邊 a 米高サ h 米ナル三角形ニ内接シ、一邊ヲ底邊上ニ有スル矩形ノ中デソノ面積ヲ最大ナラシメルニハソノ二邊ノ長サヲ何程トスベキカ。
6. $x^2 + px + q$ ヲ零ナラシメル x ノ値ヲ α, β トシ、

- α ト β トノ間ノ任意ノ數ヲ γ トスルトキ $\gamma^2 + p\gamma + q < 0$ ナルコトヲ證明セヨ。
7. $ax^2 + bx + c = 0$ ノ相異ル實根ヲ α, β ($\alpha > \beta$) トスルトキ $m > \alpha$ 或ハ $m < \beta$ ナルトキ及ビ $\alpha > m > \beta$ ナルトキニツイテ $ax^2 + bx + c$ ノ値ノ正負ヲ吟味セヨ。但シ $a > 0$ ナルモノトセヨ。
8. $b^2 - 4ac > 0$ ナルトキ $ax^2 + bx + c$ ノ値ハ正トモナリ又負トモナリ得ルコトヲ證明セヨ。
9. a, b ハ相異ル實數デ $x=a$ 及ビ $x=b$ ナルトキ $x^2 + px + q$ ノ値ガ相等シイナラバコノ函數ハ $x = \frac{a+b}{2}$ ノトキニ最小値ヲトルコトヲ證明セヨ。
10. x, y ガ實數デ $x^2 + y^2 = 6x - 8y$ ナルトキ x 及ビ y ノ最大値又ハ最小値ヲ求メヨ。

補充教材

1. 順列

例 1 2, 3, 5 ナル三種ノ數字ヲ用ヒテ二桁ノ數
幾箇ヲ作り得ルカ。

〔解〕

十ノ位	2	3	5
列ベ方	22	32	52
	23	33	53
	25	35	55

十ノ位ニ置クベキ數字ハ 2, 3, 5 ノ何レデモ
ヨクソノ選ビ方ハ三通リアル。

ソノ各々ニ對シテ一ノ位ノ數ヲ書キ列ベル
仕方ガ三通リヅツアル。故ニ

$$3 \times 3 = 9 \quad \text{答 9 箇}$$

一般ニ a, b, c ナル三種ノ文字ヲ用ヒテ 2 箇ヅ
ツ種々ノ順序ニ列ベルト

$aa \quad ab \quad ac$

$ba \quad bb \quad bc$

$ca \quad cb \quad cc$

ノ 9 通リアル。コレ等ノ配列ヲ a, b, c ノ順列ト
イフ。

例 2 a, b, c, d ナル四種ノ文字ヲ用ヒテ 3 箇ノ
文字カラナル順列ハ幾通リアルカ。

〔解〕 左端ニ置クベキ文字ノトリ方ハ

a, b, c, d

ノ何レデモヨイカラ種類ハ四通リアル。

ソノ一ツ例ヘバ a フトツタトキ第二位ニ
種々ノ文字ヲ書キ列ベテ見ルト

aa, ab, ac, ad

ノ四通リアル。他ノモノニモコレト同様
ノコトヲ施セバ二箇列ベル仕方ハ總計

$$4 \times 4 = 16$$

ノ種類ガアル。ソノ中ノ一ツ例ヘバ ba フ
トツテ第三位ニ種々ナ文字ヲ列ベテ見ル

ト前ト同様ニ baa, bab, bac, bad ノ四通リ
アル。

16 種類ノ全部ニ之ヲ施スト總計

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

ノ種類アツテ而モ文字ノ列ベ方ハ何レモ

同一デハナイ。

一般ニ

n 種類ノモノヲ用ヒテ r 箇ノモノ
カラナル順列ハ

$${}_n P_r$$

箇ノ種類ヲ有スル

例 題

1. 5, 6, 7, 8 ナル數字ヲ用ヒテ三桁ノ整數幾箇ヲ作り得ルカ。
2. 5, 9, 3, 0 ナル數字ヲ用ヒテ四桁ノ整數幾箇ヲ作り得ルカ。
3. 10 箇ノ數字ヲ用ヒテ四位ノ整數幾箇ヲ作り得ルカ。

例 3 A, B, C ナル 3 箇ノ物カラ 2 箇ヅツ取り出シテ列ベル順列ハ幾通リアルカ。

前例ト異ナル所ハ 3 箇ノ物カラ 1 箇取り出すト第二位ニ取り出スモノハ残りノモノカラ

選ブコトヲ要スル。從ツテ一ツノ順列内ニハ同文字ガ重複シナイ。

左端ノ第一位ニ列ベル仕方ハ A, B, C ノ三通リアル。

其各ニ對シテ残りノ (3-1) 箇ノ中ノ何レカヲ第二位ニ配スル仕方ハ (3-1) 通リアル。

$$\therefore 3 \times (3-1) = 6 \quad \text{答 } 6 \text{ 通り}$$

第一ノ文字	A	B	C
列ベ方	AB	BA	CA
	AC	BC	CB

一般ニ n 箇ノ異ナル物ノ中カラ r 箇ノ物ヲ取り出シテ列ベル順列ノ數ヲ表スニ ${}_n P_r$ ト書ク。

上ノ例デハ

$${}_3 P_2 = 3 \times (3-1) = 6$$

例 4 $a, b, c, d \dots l$ 等 n 箇ノ文字カラ 3 箇ヅツ取り出シテ列ベル順列ノ總數如何。

最初左端ノ第 1 位ニ選ブ仕方ハ

$$a, b, c, d, \dots, l$$

ノ n 種類アル。 ${}_n P_1 = n$

ソノ各々ニ對シテ第2位ニ列ベル仕方ハ残りノ文字ノ數ダケ即チ $n-1$ 種類アル

$${}_n P_2 = n(n-1)$$

ソノ各々ニ對シテ第3位ニ列ベル仕方ハ $(n-2)$ 種類アル。故ニ

$${}_n P_3 = n(n-1)(n-2) \quad \text{答}$$

以上ノ考ヘヲ用ヒテ行ケバ

$${}_n P_1 = n$$

$${}_n P_2 = n(n-1)$$

$${}_n P_3 = n(n-1)(n-2)$$

$${}_n P_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

特ニ $r=n$ ナラバ

$${}_n P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1$$

1カラ n マデノ自然數ノ積ヲ n ノ階乗トイヒコレヲ表スニ \underline{n} 又ハ $n!$ ナル記號ヲ用ヒル。

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$${}_n P_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$= n!$$

例5 1, 2, 3, 4, 5 ナル數字ヲ用ヒテ 100 ト 1000 ノ間ニ 5 ノ倍數ハ幾ツアルカ。但シ同數ガ重複スルモノハ省ク。

【解】

$${}_4 P_2 = 4 \times 3 = 20$$

例6 8 人ノ學生ヲ 4 人ツツ二組ニ分ケテ二列ニ坐セシメルニハ幾通りノ仕方ガアルカ。

【解】 8 人ノ中カラ 4 人ヲ選ビ出シテ種々ニ坐スル仕方ハ ${}_8 P_4$

ソノ中ノ一ツノ列ベ方ニ對シ残りノ 4 人ヲ種々ニナラベル仕方ハ ${}_4 P_4$

$$\therefore {}_8 P_4 \times {}_4 P_4 = 40320 \quad \text{答}$$

例7 大サ相等シイ 4 箇ノ赤旗ト 5 箇ノ白旗トヲ交ヘテ一列ニ並ベル仕方幾通リアルカ。

【解】 求メル仕方ヲ N トシ其中ノ一ツノ配列

例へば

赤赤白赤白白赤白

ニツイテ考へルト

赤旗相互ノ位置ヲ交換シテモ新ラシイ順
列ヲ生ズルコトナク而モ交換ノ種類ハ

$${}_4P_4$$

同様ニ白旗同志ヲ交換シテモ順列ハ同ジ
デ交換スル種類ハ

$${}_5P_5$$

故ニ N ノ中ノ一ツニ對シテ赤ハ赤同志、白
ハ白同志交換スルトキ皆異ルモノトスレ
バ其ノ種類ハ

$${}_4P_4 \times {}_5P_5$$

カクシテ得タ配列ノ總數ハ $N \times {}_4P_4 \times {}_5P_5$ ニ
等シクコレハツマリ 9 箇ノモノカラ 9 箇
取リ出シテ列ベル順列ノ數ニ等シイ。

$$\therefore N \times 4! \times 5! = 9! \quad \therefore N = \frac{9!}{4!5!} = 126 \quad \text{答}$$

例 題

- 1, 2, 3, 4, 5 ノ中カラ相異ナル 4 箇ノ數字ヲ
取リ出シテ作ル四桁ノ數ノ中デ 5 デ割リ切
レル數ハ幾ツアルカ。
- 1, 2, 3, 4, 5, 6 ノ中カラ相異ル四箇ノ數字ヲ
取リ出シテ作ル四桁ノ數ノ中デ 25 ノ倍數ハ
幾通リアルカ。
- 生徒 50 名ノ中カラ級長ト副級長トヲ各一名
ツツ選ブ仕方ハ幾通リアルカ。
- A, B, C, D ノ 4 人ガ圓卓ヲ廻ツテ著席スル
方法ハ幾通リアルカ。
- ${}_n P_5 = 12 \times {}_n P_3$ ガ成立スルトキ n ノ値ヲ求メヨ。
- 6 人ノ中カラ 5 人ヲ選ンデ環狀ヲ作ル仕方
幾通リアリカ。
- 4 人ノ男子ト 4 人ノ女子トガ圓卓ヲカコム
時男子ト女子ト交互ニ坐スル仕方幾通リア
ルカ。

2. 組合セ

例 1 三箇ノ文字 a, b, c ノ中カラ順序ニ關係ナク 2 箇ヅツ取り出ス仕方幾通リアルカ。

【解】 ab ト ba ノヤウニ順序ガ異ルモノヲ凡テトルト ${}_3P_2$ アル。

此ノ中デ文字ガ同一ノモノ ab ト ba トハ取ル仕方カラ見ルト同一デアアル。從ツテ ${}_3P_2$ ノ中ニハ二箇ヅツハ相等シイ。

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times (3-1) = 3$$

ab, bc, ca ノヤウニ 3 箇ノ中カラ順序ニ關係ナク 2 箇取り出シタモノヲ 3 箇ノ中カラ 2 箇ヅツ取り出シタ組合セトイヒツノ種類ノ數ヲ ${}_3C_2$ デ表ス。一般ニ n 箇ノ中カラ r 箇ヅツ取出シタ組合セノ數ヲ ${}_nC_r$ デ表ス。

例 2 a, b, c, d カラ 3 箇ノ文字ヲ取り出ス組合セノ數ヲ求メヨ。

【解】 一ツノ組合セ例ヘバ abd ニツイテ種種ノ順序ニ列ベル仕方ハ ${}_3P_3 = 3!$

全部ノ組合セ ${}_4C_3$ 箇ニツイテ同様ノ方

法ヲ施ト總計 ${}_4C_3 \times 3!$ ヲ得ル。

コノ數ハ 4 箇ノ中カラ 3 箇取り出シテ作ル順列ノ數ニ等シイ。故ニ

$${}_4C_3 \times 3! = {}_4P_3 \quad \therefore {}_4C_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

即チ組合セノ種類ハ次ノ 4 箇デアアル。

abc, abd, acd, bcd

一般ニ

$${}_nC_r \times r! = {}_nP_r \quad (1)$$

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (2)$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (3)$$

コノ公式ハ元來 $n \geq r$ ナレバヨイ。而ルニ (2) ノ公式ノ分母ヲ見ルト $n=r$ ヲ適用スレバ $0!$ トナル。 $n=r$ ノトキニモ成立スルヤウニ $0!$ ノ意義ヲ定メルニハ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!}$$

$\therefore 0! = 1$ ト定メル。從ツテ

${}_nC_n=1$ ${}_nC_0=1$ モ之公式ノ中ニ含まレルコトニナル。

上ノ公式ニヨルト

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$$

又 n 箇ノ中カラ r 箇取り出ス度毎ニ残りトシテ必ズ $(n-r)$ 箇ノ組合セガ生ズル。

$$\therefore {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

例題

1. 5 人ダケ乗リ得ベキ自動車ニ乗ラウトスル人ガ12人居ル。自動車ニ乗リ込ム組合ノ數ヲ求メヨ。
2. 7 邊形ノ凡テノ對角線ヲ結ンデ生ズル三角形ノ中デ頂點ガ7 邊形ノ頂點ニアルモノ幾箇アルカ。
3. 日本人7 人ト外國人4 人トノ中カラ4 人ノ日本人ト2 人ノ外國人トカラナル委員ヲ選ビ出ス仕方ハ幾通リアルカ。
4. 10 人ヲ5 人乗リノ自動車ニ分乗スルト2 組

ニ分ツ仕方幾通リアルカ。但シ自動車ニヨル區別ハ考ニ入レナイモノトセヨ。

5. ${}_nC_6 = {}_nC_{12}$ カラ n ヲ求メヨ。
6. ${}_nC_7 = {}_nC_8$ カラ ${}_nC_5$ ヲ求メヨ。
7. ${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$ ナルコトヲ證明セヨ。

3. 二項定理

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

ナル公式ハ既ニ學ンデ居ル。コレ等ノ間ニ一定ノ法則ガアルコトヲ研究シテ見ヤウ。

$$(x+a)(x+c)(x+c) \text{ノ展開ニツイテ}$$

各因數カラ x ヲ取り出シタ積ハ x^3 ニツノ因數カラ x ヲ取り出シ残りノ一ツカラ x デナイ文字ヲ一ツツトリ出シタ積ノ和ハ

$$ax^2 + bx^2 + cx^2 = (a+b+c)x^2$$

一ツノ因數カラ x ヲ取り他ノ二ツカラ他ノ文字ヲ取り出シタ積ノ總和ハ

$$abx + bcx + cax = (ab+bc+ca)x$$

各因數カラ x デナイ文字ヲ取リ出シテ作ル積

abc

$\therefore (x+a)(x+b)(x+c)$
 $=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

故ニ

(1) x^2 ノ係數ハ a, b, c ノ中カラ 1 箇トツタ結合セナル故 ${}_3C_1$ 箇ノ項ヲ有シ

(2) x ノ係數ハ ${}_3C_2$ 箇ノ項ヲ有スル。

同様ニシテ次ノ事モ判ル

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$
 $=x^4$ 係數ノ項數
 $+ (a+b+c+d)x^3 \dots\dots\dots {}_4C_1$
 $+ (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 \dots\dots\dots {}_4C_2$
 $+ (abc+abd+acd+bcd)x \dots\dots\dots {}_4C_3$
 $+ adcd \dots\dots\dots {}_4C_4$

故ニ $a=b=c=d$ ナラバ

$(x+a)^4 = x^4 + {}_4C_1ax^3 + {}_4C_2a^2d^2x^2 + {}_4C_3a^3x + {}_4C_4a^4$

コノ理法ハ一般ニ通ズルカラ

$(x+a)^n = x^n + {}_nC_1ax^{n-1} + {}_nC_2a^2d^{n-2} + \dots + {}_nC_{n-1}a^{n-1}x + {}_nC_n a^n$

而シテ

${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$

${}_nC_1 = {}_nC_{n-1} = n$

${}_nC_2 = {}_nC_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}$

.....

ナル故初項ト末項トガ同シ順番ニアル項ノ係數ハ相等シイ。

$(x+a)^n = x^n + {}_nC_1ax^{n-1} + {}_nC_2a^2x^{n-2} + \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots + {}_nC_{n-1}a^{n-1}x + {}_nC_n a^n$
 $= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} + \dots + na^{n-1}x + a^n$

コノ公式ニ $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 等ヲ代スレバ夫々 $(x+a)^1, (x+a)^2, (x+a)^3, (x+a)^4, \dots$ 等ノ展開式ヲ作ルコトガ出來ル。コノ公式ヲ二項定理トイヒ

$1, {}_nC_1, {}_nC_2, \dots, {}_nC_{n-1}, {}_nC_n$

ヲ二項係數トイフ。

又 ${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$ ナル故二項係數ニハ次ノヤウナ性質ガアル。

$$\begin{array}{r}
 (x+a)^2 \\
 (x+a)^3 \\
 (x+a)^4 \\
 (x+a)^5 \\
 \dots\dots\dots \\
 (x+a)^0 = 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 {}_2C_0, {}_2C_1, {}_2C_2 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 {}_3C_0, {}_3C_1, {}_3C_2, {}_3C_3 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 {}_4C_0, {}_4C_1, {}_4C_2, {}_4C_3, {}_4C_4 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 {}_5C_0, {}_5C_1, {}_5C_2, {}_5C_3, {}_5C_4, {}_5C_5 \\
 \dots\dots\dots \\
 \text{ナル故此ノ係數ヲ 1 ト見ルト}$$

係數

$(x+a)^0$	1
$(x+a)^1$	1, 1
$(x+a)^2$	1, 2, 1
$(x+a)^3$	1, 3, 3, 1
$(x+a)^4$	1, 4, 6, 4, 1
$(x+a)^5$	1, 5, 10, 10, 5, 1
$(x+a)^6$	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

コレニヨルト例ヘバ $(x+a)^5$ ノ展開式ガアツテ
直チニ $(x+a)^6$ ノ展開式ヲ求メルノニ便利デアル。

例題

1. $(x-a)^2, (x-a)^3, (x-a)^4, (x-a)^5$ ヲ展開セヨ。
2. $(a+2b), (2x+3y)^4, (a-b)^4, (a+2b)^5, \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^5$ ヲ展開セヨ。
3. $(x+a)^n$ ノ展開式ニ於テ左カシ $r+1$ 番目ノ項ハ ${}_nC_r a^r x^{n-r}$ デアル。コレニ依ツテ次ノ各項ヲ求メヨ。
 1. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ ノ第八項
 2. $(x-by)^{12}$ ノ第八項
 3. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ ノ第六項
 4. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ ニ於ケル x^8 ノ項
 5. $(3-4x)^9$ ニ於ケル x^5 ノ項
4. $(1+\sqrt{1-x^2})^5 + (1-\sqrt{1-x^2})^5$ ヲ展開セヨ。
5. 1.004^5 ヲ小數第三位マデ求メヨ。
6. 1.005^9 ヲ小數第四位マデ求メヨ。
7. $(x+a)^{10}, (x+a)^8$ ノ各中央項ヲ求メヨ。
8. ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n$ ナルコトヲ證明セヨ。

複 利 表

期	2%	2.5%	3%	3.5%
1	1.02	1.025	1.03	1.035
2	1.0404	1.050625	1.0609	1.071225
3	1.061208	1.076891	1.092727	1.108718
4	1.082432	1.103813	1.125509	1.147523
5	1.104081	1.131408	1.159274	1.187686
6	1.126162	1.159693	1.194052	1.229255
7	1.148686	1.188686	1.229874	1.272279
8	1.171659	1.218403	1.266770	1.316809
9	1.195093	1.248863	1.304773	1.362897
10	1.218994	1.280085	1.343916	1.410599
11	1.243374	1.312087	1.384234	1.459970
12	1.268242	1.344889	1.425761	1.511069
13	1.293607	1.378511	1.468534	1.563956
14	1.319479	1.412974	1.512590	1.618695
15	1.345868	1.448298	1.557967	1.675349
16	1.372786	1.484506	1.604706	1.733986
17	1.400241	1.521618	1.652848	1.794676
18	1.428246	1.559659	1.702433	1.857489
19	1.456811	1.598650	1.753506	1.922501
20	1.485947	1.638616	1.806111	1.989789
21	1.515666	1.679582	1.860295	2.059431
22	1.545980	1.721571	1.916103	2.131512
23	1.576899	1.764611	1.973587	2.206114
24	1.608437	1.808726	2.032794	2.283328
25	1.640606	1.853944	2.093778	2.363245
26	1.673418	1.900293	2.156591	2.445959
27	1.706886	1.947800	2.221289	2.531567
28	1.741024	1.996495	2.287928	2.620172
29	1.775845	2.046407	2.356566	2.711878
30	1.811362	2.097568	2.427262	2.806794

複 利 表

期	4%	4.5%	5%	6%
1	1.04	1.045	1.05	1.06
2	1.0816	1.092025	1.1025	1.1236
3	1.124864	1.141166	1.157625	1.191016
4	1.169859	1.192519	1.215506	1.262477
5	1.216653	1.246182	1.276282	1.338226
6	1.265319	1.302260	1.340096	1.418519
7	1.315932	1.360862	1.407100	1.503630
8	1.368569	1.422101	1.477455	1.593848
9	1.423312	1.486095	1.551328	1.689479
10	1.480244	1.552969	1.628895	1.790848
11	1.539454	1.622853	1.710339	1.898299
12	1.601032	1.695881	1.795856	2.012196
13	1.665074	1.772196	1.885649	2.132928
14	1.731676	1.851945	1.979932	2.260904
15	1.800944	1.935282	2.078928	2.396558
16	1.872981	2.022370	2.182875	2.540352
17	1.947900	2.113377	2.292018	2.692773
18	2.025817	2.208479	2.406619	2.854339
19	2.106849	2.307860	2.526950	3.025600
20	2.191123	2.411714	2.653298	3.207135
21	2.278768	2.520241	2.785963	3.399564
22	2.369919	2.633652	2.925261	3.603537
23	2.464716	2.752166	3.071524	3.819750
24	2.563304	2.876014	3.225100	4.048935
25	2.665836	3.005434	3.386355	4.231871
26	2.772470	3.140679	3.555673	4.549383
27	2.883369	3.282010	3.733456	4.822346
28	2.998703	3.429700	3.920129	5.111687
29	3.118651	3.584036	4.116136	5.418388
30	3.243398	3.745318	4.321942	5.743491

複 利 表

期	7%	8%	9%	10%
1	1.07	1.08	1.09	1.1
2	1.1449	1.1664	1.1881	1.21
3	1.225043	1.259712	1.295029	1.331
3	1.310796	1.360489	1.411582	1.4641
5	1.402552	1.469328	1.538624	1.61051
6	1.500730	1.586874	1.677100	1.771561
7	1.605781	1.713824	1.828039	1.948717
8	1.718186	1.850930	1.992563	2.143589
9	1.838459	1.999005	2.171893	2.357948
10	1.967151	2.158925	2.367364	2.593742
11	2.104852	2.331639	2.580426	2.853117
12	2.252192	2.518170	2.812665	3.138428
13	2.409845	2.719624	3.065805	3.452271
14	2.578534	2.937194	3.341727	3.797498
15	2.759032	3.172169	3.642482	4.177248
16	2.952164	3.425943	3.970306	4.594973
17	3.158815	3.700018	4.327633	5.054470
18	3.379932	3.996019	4.717120	5.559917
19	3.616528	4.315701	5.141661	6.115909
20	3.869684	4.660957	5.604411	6.727500
21	4.140562	5.033834	6.108808	7.400250
22	4.430402	5.436540	6.658600	8.140275
23	4.740530	5.871464	7.257874	8.954302
24	5.072367	6.341181	7.911083	9.849733
25	5.427433	6.848475	8.623081	10.834706
26	5.807353	7.396353	9.399158	11.918177
27	6.213868	7.988061	10.245082	13.109994
28	6.648838	8.627106	11.167140	14.420994
29	7.114257	9.317275	12.172182	15.863093
30	7.612255	10.062657	13.267678	17.449402

現 價 表

期	2%	2.5%	3%	3.5%
1	0.980392	0.975610	0.970874	0.966184
2	0.961169	0.951814	0.942596	0.933511
3	0.942322	0.928599	0.915142	0.901943
4	0.923845	0.905951	0.888487	0.871442
5	0.905731	0.883854	0.862609	0.841973
6	0.887971	0.862297	0.837484	0.813501
7	0.870560	0.841265	0.813092	0.785991
8	0.853490	0.820747	0.789409	0.759412
9	0.836755	0.800728	0.766417	0.733731
10	0.820348	0.781198	0.744094	0.708919
11	0.804263	0.762145	0.722421	0.684946
12	0.788493	0.743556	0.701380	0.661783
13	0.773033	0.725420	0.680951	0.639404
14	0.757875	0.707727	0.661118	0.617782
15	0.743015	0.690466	0.641862	0.596891
16	0.728446	0.673625	0.623167	0.576706
17	0.714163	0.657195	0.605016	0.557204
18	0.700159	0.641166	0.587395	0.538361
19	0.686431	0.625528	0.570286	0.520156
20	0.672971	0.610271	0.553676	0.502566
21	0.659776	0.595386	0.537549	0.485571
22	0.646839	0.580865	0.521893	0.469151
23	0.634156	0.566697	0.506692	0.453286
24	0.621721	0.552875	0.491934	0.437957
25	0.609531	0.539391	0.477606	0.423147
26	0.597579	0.526235	0.463695	0.408838
27	0.585862	0.513400	0.450189	0.395012
28	0.574375	0.500878	0.437077	0.381654
29	0.563112	0.488661	0.424346	0.368748
30	0.552071	0.476743	0.411987	0.356278

現 價 表

期	4%	4.5%	5%	6%
1	0.961538	0.956938	0.952381	0.943396
2	0.924556	0.915730	0.907029	0.889996
3	0.888996	0.876297	0.863838	0.839619
4	0.854804	0.838561	0.822702	0.792094
5	0.821927	0.802451	0.783526	0.747258
6	0.790315	0.767896	0.746215	0.704961
7	0.759918	0.734828	0.710681	0.665057
8	0.730690	0.703185	0.676839	0.627412
9	0.702587	0.672904	0.644609	0.591898
10	0.675564	0.643928	0.613913	0.558395
11	0.649581	0.616199	0.584679	0.526788
12	0.624597	0.589664	0.556837	0.496969
13	0.600574	0.564272	0.530321	0.468839
14	0.577475	0.539973	0.505068	0.442301
15	0.555265	0.516720	0.481017	0.417265
16	0.533908	0.494469	0.458112	0.393646
17	0.513373	0.473176	0.436297	0.371364
18	0.493628	0.452800	0.415521	0.350344
19	0.474642	0.433302	0.395734	0.330513
20	0.456387	0.414643	0.376889	0.311805
21	0.438834	0.396787	0.358942	0.294155
22	0.421955	0.379701	0.341850	0.277505
23	0.405726	0.363350	0.325571	0.261797
24	0.390121	0.347703	0.310068	0.246979
25	0.375117	0.332731	0.295303	0.232999
26	0.360689	0.318402	0.281241	0.219810
27	0.346817	0.304691	0.267848	0.207368
28	0.333477	0.291571	0.255094	0.195630
29	0.320651	0.279015	0.242946	0.184557
30	0.308319	0.267000	0.231377	0.174110

現 價 表

期	7%	8%	9%	10%
1	0.934579	0.925926	0.917431	0.909091
2	0.873439	0.857339	0.841680	0.826446
3	0.816298	0.793832	0.772183	0.751315
4	0.762895	0.735030	0.708425	0.683013
5	0.712986	0.680583	0.649931	0.620921
6	0.666342	0.630170	0.596267	0.564474
7	0.622750	0.583490	0.547034	0.513158
8	0.582009	0.540269	0.501866	0.466507
9	0.543934	0.500249	0.460428	0.424098
10	0.508349	0.463193	0.422411	0.385543
11	0.475093	0.428883	0.387533	0.350494
12	0.444012	0.397114	0.355535	0.318631
13	0.414964	0.367698	0.326179	0.289664
14	0.387817	0.340461	0.299246	0.263331
15	0.362446	0.315242	0.274538	0.239392
16	0.338735	0.291890	0.251870	0.217629
17	0.316574	0.270269	0.231073	0.197845
18	0.295864	0.250249	0.211994	0.179859
19	0.276508	0.231712	0.194490	0.163508
20	0.258419	0.214548	0.178431	0.148644
21	0.241513	0.198656	0.163698	0.135131
22	0.225713	0.183941	0.150182	0.122846
23	0.210947	0.170315	0.137781	0.111678
24	0.197147	0.157699	0.126405	0.101526
25	0.184249	0.146018	0.115968	0.092296
26	0.172195	0.135202	0.106393	0.083905
27	0.160930	0.125187	0.097608	0.076278
28	0.150402	0.115914	0.089548	0.069343
29	0.140563	0.107328	0.082155	0.063039
30	0.131367	0.099377	0.075371	0.057309

貯 金 表

期	2%	2.5%	3%	3.5%
1	1.02	1.025	1.03	1.035
2	2.0604	2.075625	2.0909	2.106225
3	3.121608	3.152516	3.183627	3.214943
4	4.204040	4.256329	4.309136	4.362466
5	5.308121	5.387737	5.468410	5.550152
6	6.434283	6.547430	6.662462	6.779408
7	7.582969	7.736116	7.892336	8.051687
8	8.754628	8.954519	9.159106	9.368496
9	9.949721	10.203382	10.463879	10.731393
10	11.168715	11.483466	11.807796	12.141992
11	12.412090	12.795553	13.192030	13.601962
12	13.680332	14.140442	14.617790	15.113030
13	14.973938	15.518953	16.086324	16.676986
14	16.293417	16.931927	17.598914	18.295681
15	17.639285	18.380225	19.156881	19.971030
16	19.012071	19.864730	20.761588	21.705016
17	20.412312	21.386349	22.414435	23.499691
18	21.840559	22.946007	24.116868	25.357180
19	23.297370	24.544658	25.870374	27.279682
20	24.783317	26.183274	27.676486	29.269471
21	26.298984	27.862856	29.536780	31.328902
22	27.844963	29.584427	31.452884	33.460414
23	29.421862	31.349038	33.426470	35.666528
24	31.030300	33.157764	35.459264	37.949857
25	32.670906	35.011708	37.553042	40.313102
26	34.344324	36.912001	39.709634	42.759060
27	36.051210	38.859801	41.930923	45.290627
28	37.792235	40.856296	44.218850	47.910799
29	39.568079	42.902703	46.575416	50.622677
30	41.879441	45.000271	49.002678	53.429471

貯 金 表

期	4%	4.5%	5%	6%
1	1.04	1.045	1.05	1.06
2	2.1216	2.137025	2.1525	2.1836
3	3.246464	3.278191	3.310125	3.374616
4	4.416323	4.470710	4.525631	4.637093
5	5.632975	5.716892	5.801913	5.975319
6	6.898294	7.019152	7.142008	7.393838
7	8.214226	8.380014	8.549109	8.897468
8	9.582795	9.802114	10.026564	10.491316
9	11.006107	11.288209	11.577893	12.180795
10	12.486351	12.841179	13.206787	13.971643
11	14.025805	14.464032	14.917127	15.869941
12	15.626838	16.159913	16.712983	17.882138
13	17.291911	17.932109	18.598632	20.015066
14	19.023588	19.784054	20.578564	22.275970
15	20.824531	21.719337	22.657492	24.672528
16	22.697512	23.741707	24.840366	27.212880
17	24.645413	25.855084	27.132385	29.955653
18	26.671229	28.063562	29.539004	32.759992
19	28.778079	30.371423	32.065954	35.785591
20	30.969202	32.783137	34.719252	38.992727
21	33.247970	35.303378	37.505214	42.392290
22	35.617889	37.937030	40.430475	45.995828
23	38.082604	40.689196	43.501999	49.815577
24	40.645908	43.56210	46.727099	53.864512
25	43.311745	46.570645	50.113454	58.156383
26	46.084214	49.711324	53.669126	62.705766
27	48.967583	52.993333	57.402583	67.528112
28	51.966286	56.423033	61.322712	72.639798
29	55.084938	60.007070	65.438848	78.058186
30	58.328335	63.752388	69.760790	83.801577

貯 金 表

期 率	7%	8%	9%	10%
1	1.07	1.08	1.09	1.1
2	2.2149	2.2464	2.2781	2.31
3	3.439943	3.506112	3.573129	3.641
4	4.750739	4.866601	4.984711	5.1051
5	6.153291	6.335929	6.523335	6.71561
6	7.654021	7.922803	8.200435	8.487171
7	9.259803	9.636628	10.028474	10.435888
8	10.977989	11.487558	12.021036	12.579477
9	12.816448	13.486562	14.192930	14.937425
10	14.783599	15.645487	16.560293	17.531167
11	16.888451	17.977126	19.140720	20.384284
12	19.140643	20.495297	21.953385	23.522712
13	21.550488	23.214920	25.019189	26.904983
14	24.129022	26.152114	28.360916	30.772482
15	26.888054	29.324283	32.003399	34.940730
16	29.840217	32.750226	35.973705	39.544703
17	32.999033	36.450244	40.301338	44.599173
18	36.378965	40.446263	45.018458	50.159090
19	39.995492	44.761964	50.160120	56.274999
20	43.865177	49.422921	55.764530	63.002499
21	48.005739	54.456755	61.873338	70.402749
22	52.436141	59.893296	68.531939	78.543024
23	57.176671	65.764759	75.789813	87.497327
24	62.249038	72.105940	83.700696	97.347059
25	67.676470	78.954415	92.323977	108.181765
26	73.483823	86.350768	101.723135	120.099942
27	79.697691	94.338830	111.968217	133.209936
28	86.346529	102.965936	123.135356	147.630930
29	93.460786	112.283211	135.307539	163.494023
30	101.073041	122.345868	148.575217	180.943425

數 表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例 部分				
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474					
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551					
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627					
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	2.6	2.5	2.4	2.3
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	2	5.2	5.0	4.8	4.6
											3	7.8	7.5	7.2	6.9
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	4	10.4	10.0	9.6	9.2
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	5	13.0	12.5	12.0	11.5
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	6	15.6	15.0	14.4	13.8
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7	18.2	17.5	16.8	16.1
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	8	20.8	20.0	19.2	18.4
											9	23.4	22.5	21.6	20.7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189					
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254					
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319					
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382					
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	2.2	2.1	1.9	1.8
											2	4.4	4.2	3.8	3.6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	3	6.6	6.3	5.7	5.4
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	4	8.8	8.4	7.6	7.2
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	5	11.0	10.5	9.5	9.0
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6	13.2	12.6	11.4	10.8
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	7	15.4	14.7	13.3	12.6
											8	17.6	16.8	15.2	14.4
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	9	19.8	18.9	17.1	16.2
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859					
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915					
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971					
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025					
											17	16	15	14	
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1.7	1.6	1.5	1.4
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	2	3.4	3.2	3.0	2.8
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	3	5.1	4.8	4.5	4.2
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	4	6.8	6.4	6.0	5.6
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5	8.5	8.0	7.5	7.0
											6	10.2	9.6	9.0	8.4
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	7	11.9	11.2	10.5	9.8
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	8	13.6	12.8	12.0	11.2
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	9	15.3	14.4	13.5	12.6
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489					
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538					
											18	12	11		
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	1	1.3	1.2	1.1	1.1
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	2	2.6	2.4	2.2	2.2
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	3	3.9	3.6	3.3	3.3
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	4	5.2	4.8	4.4	4.4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	5	6.5	6.0	5.5	5.5
											6	7.8	7.2	6.6	6.6
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	7	9.1	8.4	7.7	7.7
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	8	10.4	9.6	8.8	8.8
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	9	11.7	10.8	9.9	9.9
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952					
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996					

數ノ對數表

Table of logarithms with columns for numbers (0-9), proportions, and logarithmic values. The table is organized into blocks for numbers 10 through 54.

問 題 ノ 答

P. 5 例 題

1. 3, 4 2. 4 3. 1 4. 28
5. 2 6. 5 7. 根無シ 8. 5
9. 6 10. 2

P. 7 例 題

1. $\frac{1}{3}, \frac{16}{3}$ 2. 3, -1 3. 0, 6 4. $\frac{9}{13}, \frac{4}{13}$
5. 2, $\frac{2}{3}$

P. 9 例 題

1. 15 米, 20 米, 25 米 2. 25 米, 60 米, 65 米
3. 3, 1

P. 11 例 題

1. (1) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ (2) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ (3) 3 (4) $\sqrt{5} - 1$
(5) $2 + \sqrt{3}$ (6) $6 - \sqrt{2}$ (7) $3 + \sqrt{5}$
(8) $3 - \sqrt{2}$ (9) $\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$ (10) 1
(11) $\frac{5\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}{10}$ (12) 3
3. (1) $\frac{9 \pm 4\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

P. 16 例題

1. $\pm 2, \pm 3$ 2. $\pm 2i, \pm 3$ 3. $\pm 1, \pm 3$ 4. ± 6 (等根)
 5. $2 \pm \sqrt{3}, \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ 6. $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 7. $3, 3\omega, 3\omega^2$
 8. $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2}$ 9. $3, \frac{1}{3}, \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$
 10. $0, -5, \frac{-5 \pm \sqrt{15}i}{2}$ 11. $5, 0$ 12. $1, 4$

P. 22 例題

1. $1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ 2. $1, \frac{-11 \pm \sqrt{109}}{6}$ 3. $2, \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$
 4. $-2, \frac{1 \pm \sqrt{79}i}{4}$ 6. $2, 2, 2$ 11. $m = -1$
 13. $p=1, q=-6$; 残りノ根 2 14. $m = -3$
 15. $m = 1$ 18. $\frac{\alpha + \beta}{a - b}x + \frac{a\beta - b\alpha}{a - b}$

P. 24 練習問題

1. 根無し 2. 2 3. $1, \frac{-9}{2}$ 4. $\frac{9 + 4\sqrt{3}}{3}$
 5. $27, -64$ 6. $\frac{a^2 + 1}{2a}$ 7. $\pm \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{3}}$ 8. 2
 9. $\frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$ 10. $-1, \frac{9}{2}$ 11. $9, -2$ 12. $-1, 6$
 13. $\pm(\sqrt{10} + 1), \pm(\sqrt{10} - 1)$ 14. $\frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}, \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$
 15. $-1, \pm\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}}, \pm\sqrt{\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}}$ 16. $1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$
 17. $1, 5$ 18. a, b 19. $-a, -b$
 20. $-1, -\frac{5}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{41}}{4}$ 21. $a = 24, b = 2$

22. $6x^3 - 7x^2 - 11x + 9$ 23. $4x - 3$ 24. $\pm 3, 5$
 25. 毎時 10 哩 26. 前輪 2.5m, 後輪 3.2m 27. 12 分

P. 29 例題

1. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b} \\ y = \frac{ab \mp \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b} \end{cases}$
 4. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{53}{88} \\ y = -\frac{25}{22} \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x = \frac{9}{5}, 9 \\ y = \frac{3}{5}, -3 \end{cases}$
 6. $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ $\begin{cases} m=1, -3 \\ n=2, 10 \end{cases}$ 8. 18 日, 3 圓

P. 31 例題

1. $\begin{cases} x=3, -\frac{15}{7} \\ y=2, -\frac{5}{13} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=5, -\frac{29}{4} \\ y=-6, \frac{19}{5} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=2, -\frac{2}{7} \\ y=1, -\frac{41}{7} \end{cases}$
 4. $\begin{cases} x=-15 \\ y=12 \end{cases}$

P. 33 例題

1. $\begin{cases} x=2, -2 \\ y=5, -5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}, -7, \frac{1}{3}, -7 \\ y = \frac{29}{8}, -\frac{29}{2}, \frac{11}{3}, 11 \end{cases}$
 3. $\begin{cases} x=0, \frac{12}{7}, 0, -4 \\ y=0, \frac{4}{7}, 0, 2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x=0, 1, 0, \frac{12}{11} \\ y=0, 1, 0, \frac{16}{11} \end{cases}$
 5. $\begin{cases} x=1, 1, \frac{1}{2}, 2 \\ y=0, -1, 1, 0 \end{cases}$

$$6. \begin{cases} x=0, a+b, \frac{(a-b)\pm\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2} \\ y=0, a+b, \frac{(a-b)\mp\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x=4, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{9}{4} \\ y=2, \frac{9}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x=2, -\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{1}{4} \\ y=0, \frac{5}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{4} \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x=\frac{11}{3} \\ y=-\frac{8}{3} \end{cases}$$

P. 36 例 題

$$1. \begin{cases} x=\pm 2, \pm \frac{16}{\sqrt{91}} \\ y=\pm 1, \pm \frac{5}{\sqrt{91}} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x=\pm 5 \\ x=\pm 1 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x=\pm 1, \pm \sqrt{3} \\ y=\pm 2, 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x=0, 1, 0, \frac{15}{22} \\ y=0, 1, 0, \frac{9}{22} \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x=\pm a, \frac{\pm(a+b)}{\sqrt{2}} \\ y=\pm b, \frac{\pm(a-b)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$7. (7, 4), (-7, -4)$$

P. 38 例 題

$$1. \begin{cases} x=5, 3 \\ y=3, 5 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x=7, 1 \\ y=1, 7 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x=0, 3 \\ y=3, 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x=3, 12 \\ y=12, 3 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x=8, 27 \\ y=27, 8 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x=3, 4 \\ y=4, 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x=4, 8 \\ y=8, 4 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x=3, 5, \frac{-15\pm\sqrt{139}i}{4} \\ y=5, 3, \frac{-15\mp\sqrt{139}i}{4} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x=\pm \frac{a}{2}, \pm \frac{a}{4} \\ y=\pm \frac{b}{4}, \pm \frac{b}{2} \end{cases}$$

P. 39 練習問題

$$1. \begin{cases} x=2, 3 \\ y=3, 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x=2, \frac{60}{49}, -\frac{6}{23} \\ y=1, -\frac{27}{49}, \frac{12}{23} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x=6, -4 \\ y=6, -4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x=5, 4 \\ y=4, 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x=6, \frac{-3\pm\sqrt{49}}{2} \\ y=6, \frac{-3\mp\sqrt{49}}{2} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x=2, -2, \frac{11}{2}, -\frac{11}{2} \\ y=5, -6, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x=4, 5 \\ y=5, 4 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}, 4 \\ y=4, \frac{7+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$$

$$10. (1) \begin{cases} x=3, -\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}, -\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=2, -\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{2}, -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$11. a=2, b=-8$$

$$12. m=0, \frac{18}{5}$$

$$13. \begin{cases} m=\frac{21}{4} \\ x=-31, y=-31 \end{cases} \quad \begin{cases} m=3 \\ x=y=4 \end{cases} \quad 14. a=2, b=3$$

15. 20 哩

P. 45 例題

$$1. \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = -\frac{7}{3} \\ z = \frac{32}{21} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} y = \frac{11}{9} \\ y = \frac{29}{9} \\ z = \frac{28}{9} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \text{AB間 12 粒} \\ \text{BC間 7 粒} \\ \text{AC間 9 粒} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \text{甲 9 日} \\ \text{乙 18 日} \\ \text{丙 仕事無シ} \end{cases}$$

P. 47 例題

$$1. \begin{cases} x = -1, -4 \\ y = 2, -1 \\ z = 1, 13 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x = 3, \frac{9}{2} \\ y = -2, 0 \\ z = -1, \frac{3}{2} \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x = 3, -\frac{29}{7} \\ y = 7, -\frac{51}{7} \\ z = 11, -\frac{73}{7} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = 3, 3\omega, 3\omega^2 \\ y = 4, 4\omega, 4\omega^2 \\ z = 5, 5\omega, 5\omega^2 \end{cases}$$

P. 50 例題

$$1. \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \\ z = \pm 5 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x = 3, -3 \\ y = -2, 2 \\ z = 6, -6 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x = 3, -3 \\ y = -5, 5 \\ z = 7, -7 \end{cases}$$

$$4. x = y = z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5. \begin{cases} y = 6, -6 \\ y = 3, -3 \\ z = ?, -2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = -3, 1 \\ y = 0, -2 \\ z = -7, 5 \end{cases}$$

P. 53 例題

$$1. \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \\ z = \pm 4 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x = 2, 1 \\ y = 1, 2 \\ z = 0, 0 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x = 1, 1, 2, 2 \\ y = 2, 3, 3, 1 \\ z = 3, 2, 1, 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = 4, 9 \\ y = 6, 6 \\ z = 9, 4 \end{cases}$$

P. 53 練習問題

$$1. \begin{cases} x = 3, -\frac{1}{3} \\ y = 6, -\frac{2}{3} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x = \frac{a}{6}, \frac{a}{3} \\ y = -\frac{b}{3}, -\frac{b}{6} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = 3 + \sqrt{6}, 3 - \sqrt{6} \\ x = 3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6} \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x = 6 + \sqrt{30}, 6 - \sqrt{30} \\ y = 6 - \sqrt{30}, 6 + \sqrt{30} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = 1, 5 \\ y = 5, 1 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x = 2(1 + \sqrt{3}), 2(1 - \sqrt{3}) \\ y = 2(1 - \sqrt{3}), 2(1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = 5, 5 \\ y = 4, -4 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x = 2, 3, 1, -6 \\ y = 3, 2, -6, 1 \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = \frac{29}{5} \\ y = 1 \\ z = -\frac{3}{5} \end{cases} \quad 11. \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \\ z = 50 \end{cases} \quad 12. \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = \frac{2abc}{bc-ab+ac}, y = \frac{2abc}{bc+ab-ac}, z = \frac{2abc}{-bc+ab+ac} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \\ y = 1, 3 \\ z = 3, 1 \end{cases} \quad 15. \begin{cases} x = \frac{5}{12} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \quad 16. \frac{pqc+qac+rab}{abc+bc+ca+ab}$$

$$18. -\frac{127}{6} \quad 19. 253 \quad 20. 395 \quad 21. \text{甲 } 21, \text{乙 } 11$$

$$22. 9.24 \text{ 石}$$

P. 59 例 題

$$1. (a-b+c+d)(a-b-c-d) \quad 2. (x-2y-5)(2x-y+5)$$

$$3. (x-2y-a)(2x-y+x) \quad 4. \{x-m(l-2)\}\{x+l(m+2)\}$$

$$5. \{(a+b)x-(a-b)\}\{(a-b)x+(a+b)\} \quad 6. \{(a-3)x+(a-1)\}\{(a+2)x-(a+2)\}$$

$$7. (a+b-c)(ab+bc+ca)$$

$$8. \{(a+b)m+(c-d)n\}\{(a-b)m+(c+d)n\}$$

$$9. \{x+(a-3b)y\}\{n+(a+2b)y\} \quad 10. ab(ax-2a-1)(bx+2b+1)$$

$$11. (x+2y)(x-y-1) \quad 12. (x+a)(3x-a+2b)$$

$$13. (x-1)(x+4)(x^2+3x+6) \quad 14. (x-1)(x^2+1)(x^3-x^2+x+4)$$

$$15. (x-2)(x+4)(x^2+2x+3) \quad 16. (x-1)^2(x+2)^2$$

$$17. (x-2)^2(x+4)^2 \quad 18. (x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$$

$$19. \left(x^2-3x+\frac{9}{2}\right)\left(x^2+3x+\frac{9}{2}\right) \quad 20. (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$(x^4-x^2y^2+y^4) \quad 21. (x^2-5xy+y^2)(x^2+5xy+y^2)$$

$$22. (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

$$23. (3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2) \quad 24. -3(x-1)(x-2)(2x-3)$$

$$25. -3(x-y)(y-z)(z-x) \quad 26. (a-b)(b-c)(a-c)$$

$$27. (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) \quad 28. (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

$$29. (x+1)(x-2)(x-3) \quad 30. (x-1)(x+3)^2$$

$$31. (a+b+c)(ab+bc+ca) \quad 32. (x-4)(x^2+10x+51)$$

$$33. (x-3)(x^2+3x+8) \quad 34. (x+y-1)\{(x+y)^2+4(x+y)+6\}$$

$$35. (a+b)(b-c)(c+a) \quad 36. (x-z)^3$$

P. 65 例 題

$$1. x^3-3x^2+2x, x^3+x^2-x-1 \quad 2. (3, 45), (9, 39), (15, 33), (21, 27)$$

$$4. x=1 \quad 5. x=\frac{5}{2} \quad 7. m=\frac{1}{2}$$

$$8. x=2, 5; x=4, 5 \quad 10. a+b+2=0 \quad 11. \lambda=-5$$

P. 69 例 題

$$1. x^2-x+3 \quad 2. x^2-2x+3 \quad 3. x=-1 \text{ 或 } \frac{3}{2}$$

$$4. x=\frac{1}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{4} \quad 5. x=-\frac{3}{2} \quad 6. a=1$$

$$7. (1) \frac{2}{(x-2)(x-1)} \quad (2) -b \quad (3) 2(x+y+z)$$

P. 73 例 題

$$1. x+2, x=-2 \quad 2. \text{G.C.M}=x-1, \text{L.C.M}=x^6-3x^5+x^4$$

$$-3x^2+x-1 \quad 3. x^2-1, x^3+2x^2-2x-1$$

$$4. \frac{2}{(x+1)(x^2+1)(x-1)^3}$$

P. 74 練習問題

1. $(a^2+b^2+c^2)^2$
2. $(x-1)(x+1)(x(1-y)+1+y)\{x(1-y)-1-y\}$
3. $(x-1)(x+1)\{x^2-2x^2y+x^2y^2+y^2+2y+1\}$
4. $(x^2+5x)(x^2+5x+10)$
5. $(x^2+5xy+3y^2)(x^2+5xy+7y^2)$
6. $(x+y)(y+z)(z+x)$
7. $(a+b)(b+c)(c+a)$
8. $(a+b)(b+c)(c+a)$
9. $\frac{x}{33}(3x-y)(11x-3y)$
10. $15\left(x+\frac{53+\sqrt{1189}}{30}\right)\left(x+\frac{53-\sqrt{1189}}{30}\right)$
15. $m=0$
16. $a=3, -2$
17. $\left(x=0, 1; x=0, \frac{5}{2}\right), \left(x=3, -2; x=3, -\frac{1}{2}\right)$
18. $P=-2$

P. 79 例題

2. (1) 41, 71 (2) -49, -105 (3) $19\frac{2}{3}$
(4) $19a$ (5) $a^2-8ab+b^2$
4. 第9項
5. 33
6. 29

P. 83 例題

1. (1) $7, \frac{45}{7}$ (2) $5, \frac{21}{5}$
(3) $a, \frac{a^2-b^2}{a}$ (4) $\frac{(x+y)^2}{2}, \frac{xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2}$
2. (1) 8, 11, 14, 17 (2) $\frac{19}{3}, \frac{26}{3}, 11, \frac{40}{3}, \frac{47}{3}, 18, \frac{61}{3}$

- $$\frac{68}{3} \quad (3) -4.2\sqrt{2}, -1.4\sqrt{2}, 0.4\sqrt{2}, 2.2\sqrt{2}, 4\sqrt{2},$$
- $$5.8\sqrt{2}, 7.6\sqrt{2}, 9.4\sqrt{2}, 11.2\sqrt{2} \quad (4) \frac{5}{2}x, 2x, \frac{3}{2}x, x,$$
- $$\frac{1}{2}x, 0, -\frac{1}{2}x, -x, -\frac{3}{2}x, -2x, -\frac{5}{2}x, -3x, -\frac{7}{2}x$$
4. a, b, c ハ等差級數
 7. 等差中項ノ方大

P. 88 例題

1. (1) 1275 (2) -595 (3) 650 (4) 60 (5) $\frac{an(n+1)}{2}$
2. 670
3. 145
4. 21項又ハ30項
5. 初項6, 項數16
6. 165150
7. 17043
8. 28832
9. 7252間, 28490間

P. 93 例題

2. (1) 162, 1458 (2) $\frac{1}{4}, \frac{1}{32}$
(3) $-\frac{1}{256}, -\frac{1}{1024}$ (4) $\frac{3^9 \times \sqrt{2}}{16}$
4. 第6項
5. 12, 36, 108, 324 或ハ -24, 72, -216, 648

P. 97 例題

1. (1) ± 30 , (2) $\pm \frac{5}{21}$ (3) $\pm(a^2-b^2)$ (4) $\pm\sqrt{ab}$
2. (1) 54, 18, 6, 或ハ -54, 18, -6 (2) $\frac{2}{13}\sqrt[4]{39}$,
 $\frac{2}{13}\sqrt{39}$, $\frac{2}{13}\sqrt[3]{39^3}$ 或ハ $-\frac{2}{13}\sqrt[4]{39}$, $\frac{2}{13}\sqrt{39}$, $-\frac{2}{13}\sqrt[3]{39^3}$
(3) $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{25}$
3. $a=16, b=24$

P. 101 例 題

1. (1) 364 (2) $\frac{63}{32}$ (3) $\frac{484}{6}$ (4) $\frac{27}{8}$
 (5) $-40(3-\sqrt{3})$ 2. $\frac{4-\sqrt{3}}{4}$
 3. $\frac{2059}{729}$ 4. $\frac{(1-x^5)^2(1+x^5)}{(1-x)^2(1+x)}$

P. 107 例 題

1. (1) 6 (2) 2 (3) 3 (4) $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{25}{99}$
 2. $\frac{5+3\sqrt{5}}{20}$ 3. 初項 6, 公比 $-\frac{1}{2}$
 4. 初項 6, 公比 $-\frac{1}{2}$ 或 初項 $\frac{8}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ 5. $\frac{a}{q^n-1}$
 6. 8 米 7. a 米

P. 110 例 題

1. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{5}{9}$ (3) $\frac{217}{330}$ (4) $3\frac{27}{110}$ (5) $\frac{3649}{9990}$
 (6) $\frac{2341}{9900}$ 2. (1) $\frac{7}{9}$ (2) $\frac{36}{121}$ (3) $22\frac{6}{11}$
 3. $1\frac{43}{320}$

P. 112 例 題

1. $\frac{3^{2n+1}-2\times 3^n-1}{2\times 3^n}$ 2. $n^2+\frac{1-(-2)^n}{12}$ 3. 2870
 4. $\frac{20}{21}$ 5. $\frac{4}{3}(2^{2n}-1)$

P. 113 練習問題

1. 3, 8, 13 或 24, 8, -8

2. $a=3, b=4, c=8, d=12$ 或 $a=\frac{25}{2}, b=\frac{15}{2}, c=\frac{9}{2}, d=\frac{3}{2}$
 3. $a=b=c$ 4. 1, -2, 4 6. 初項 17, 公差 2
 7. 初項 1, 公差 10 8. 10 9. $\frac{177}{122}$
 10. 11 日, 11.3 日

P. 117 例 題

4. (1) -2 (2) 4 (3) 10 (4) -0.2 (5) -1
 (6) 0.1 (7) a (8) $-a$

P. 120 例 題

1. (1) $3\sqrt[3]{3}$ (2) $2\sqrt[4]{2}$ (3) $2a^2\sqrt[3]{2}$ (4) $2a\sqrt[3]{3a^2}$
 (5) $b^2\sqrt[3]{a^2}$ (6) $32a^7b\sqrt[3]{a}$ (7) b^2c (8) $\frac{3a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{5}}$
 2. (1) $\sqrt[3]{2}$ (2) $\sqrt[3]{2}$ (3) $\sqrt[3]{a}$ (4) 30 (5) $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$
 (6) 5 (7) 4 (8) 6 (9) 6

P. 123 例 題

1. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{11}, \sqrt[5]{20}$ 2. (1) $\sqrt[5]{25000}$ (2) $\sqrt[5]{194400}$
 (3) $\sqrt[5]{12}$ (4) $4\sqrt[5]{\frac{2}{9}}$ (5) $\sqrt[12]{\frac{a}{b^{11}}}$
 (6) $5\sqrt[5]{a^5}-2\sqrt[3]{ab}+5\sqrt[5]{ab}-2\sqrt[5]{b^5}$

P. 128 例 題

3. (1) $\sqrt[3]{5^2}$ (2) $\sqrt[3]{a^5}$ (3) $a^2\sqrt[3]{a}$ (4) $\sqrt[15]{4}, \sqrt[25]{125}$
 (5) $x-y$

P. 133 例 題

1. $a\sqrt[3]{b^2}$ 2. $\frac{x}{y^8}$ 3. $\sqrt[4]{b^3}$ 4. $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

P. 135 例 題

1. (1) 4096 (2) 2048 (3) 4 (4) 8 (5) 81 (6) 81
 2. (1) 11 (2) 13 (3) 5 (4) 7
 3. (1) 8 (2) 64 (3) 9 (4) 128 (5) 何レモ0
 6. 1, -1, -2, -3, -4

P. 144 例 題

3. (1) 3.5563 (2) $\bar{2}.5563$ (3) 2.5563 (4) $\bar{3}.5563$
 4. (1) 2450 (2) 0.0245

P. 150 例 題

1. 8 2. 4.96 3. 31 4. 7 5. 7.538 6. 639

P. 152 例 題

1. 0.008404 2. 0.9016 3. 1.091 4. 1.4964
 5. 0.23865 6. 0.05454 7. 0.607 8. 0.38524

P. 155 例 題

1. (1) $x=3$ (2) $x=7$ (3) $x=101$ 7. 30 8. 11

P. 157 練習問類

1. 55 桁 2. 10 桁 3. 5 4. 10 ヲリ小
 5. 2 7. $\frac{27^{13}}{16^{12}} > 7000$ 8. (1) 1.38 (2) 3.127

9. (1) $x=25, y=4$ 或ハ $x=4, y=25$ (2) $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{133})$,
 $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{133})$

P. 161 例 題

1. 8 分 2. 3 割 7 分 5 厘 3. 2 割 4 分 2 厘
 4. 甲 30 圓, 乙 25 圓 5. 12 圓

P. 164 例 題

1. 293.028 圓 2. 7 分 5 厘 3. 甲 210 圓, 乙 240 圓,
 丙 280 圓 4. 甲 6000 圓, 0.07, 乙 7000 圓, 0.06
 5. 77.18 圓強

P. 168 例 題

1. 32 日後 2. 58 日 (切リステ)

P. 171 例 題

1. 355.4 圓 (對數), 355.5 圓 (複利表) 2. 約 216.8 圓
 3. 27 年後 4. 48 年 5. 7435.56 圓 6. 0.04

P. 174 例 題

1. 1492.68 圓 (對數), 1491.71 圓 (複利表) 2. 27 年

P. 177 例 題

1. 234.27 圓弱 2. 447.09 圓弱

P. 179 例 題

1. 約 703.3 圓 2. 3333.33 圓 3. 4000 圓

P. 180 練習問題

1. 7.75 圓 2. 男 40 錢, 女 24 錢 3. 21:19
 4. 金 $5631\frac{42}{43}g$, 銀 $1833\frac{1}{43}g$ 5. 56 年 6. 9 年前
 7. 甲 250 圓, 乙 750 圓 8. 77.67 圓 9. 35 年

P. 191 例題

1. 4.881 2. $2\sqrt[4]{6^3}$ 3. $2-\sqrt{3}$ 4. $3+\sqrt{5}$, 5.2360
 6. $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ ノ方ヲ大

P. 193 例題

1. (1) $\frac{3}{2}+i$ (2) $\frac{35}{27}-\frac{7\sqrt{2}}{27}i$ 2. (1) $\sqrt{13}$ (2) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
 3. $\frac{a}{c}=-\frac{b}{d}$

P. 199 例題

1. $a=-7, b=-1$ 或ハ $a=-12, b=-2$ 2. $a=-b, b=1$
 3. $x^2-5ax+5a^2$ 4. $m=3, n=3, p=2$ 5. $(3x+1)^2+(2x+3)^2$
 7. $a^3=3ab=27c$ 8. $A=-7, B=12$ 9. $k=-10$

P. 207 練習問題

1. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 2. -3 3. $x+2-\frac{1}{x}$ 4. 0.517
 5. 19.74 6. 5 7. $2\sqrt{y}(3x+y)$
 8. $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}, \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ 11. 54.25

P. 214 例題

1. $x>7$ 2. $x<-\frac{8}{5}$ 3. $x<-4$
 4. $x<-\frac{5}{2}$ 5. $x>-\frac{46}{31}$ 6. $-\frac{1}{2}<x<4$

P. 217 例題

1. $-2<x<9$ 2. $-4<m<-3$ 3. $-3<x<3$
 4. $\frac{1}{3}<x<5$ 5. $x<\frac{3}{2}$ 或ハ $x>2$ 6. $-4<x<\frac{4}{3}$
 7. $x<\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 或ハ $x>\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 8. $4<x<6$
 9. $-5<x<-4$ 或ハ $2<x<3$ 10. $m\geq 3$ 或ハ $m<-2$
 11. $-\sqrt{10}\leq a\leq\sqrt{10}$

P. 220 例題

5. $-\frac{1}{2}<x<1$ ナルトキ $x^2-1<x^2-x$. ソノ他ハ $x^2-1>x^2-x$

P. 221 練習問題

1. 23 項以上 2. $\frac{3}{0.334}>x\geq\frac{1}{0.334}$, 最小値 6
 5. $\frac{m^2}{a}+\frac{n^2}{b}\geq\frac{(m+n)^2}{a+b}$ 9. (1) $-3<x<5$ (2) $2<x<3$
 (3) $2<x<3$ 或ハ $x>5$ (4) $2<x<5$ 或ハ $x>7$
 (5) $\frac{5-\sqrt{53}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{53}}{2}$

P. 230 例題

1. 最小値 -16 2. 最大値 16 3. 最大値 3, 最小値 $\frac{1}{3}$

4. 最大値 $\frac{73}{8}$ 5. $x = \frac{112}{25}$ = 於テ最大値 501760

P. 237 練習問題

3. $x = \frac{5}{3}, y = \frac{13}{6}, z = \frac{7}{6}$ = 於テ最小値 $\frac{53}{6}$ 6. 5日後
7. 22秒後, 20 糧

P. 239 復習雜題

1. $x=3$ 2. $x=8, -9$ 3. -18.764 或ハ -23.236
6. b 又ハ $\frac{1}{b}$ 7. $(x-a)^2 + (a-b)^2 + (b-x)^2$
8. $\begin{pmatrix} a=4 \\ b=2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a=-4 \\ b=-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a=2\sqrt{2} \\ b=4\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a=-2\sqrt{3} \\ b=-4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ 9. $pq=r, q>0$
10. $310\frac{1}{12}$ 坪 11. $x = \frac{-9 \pm \sqrt{277}}{6}$ 12. $x=6, y=4$ 或ハ
 $x = -\frac{30}{13}, y = -\frac{20}{13}$ 13. $y=45$ 14. 29, 5; 34, 10;
44, 20 15. $a=1, \frac{7}{15}$ 16. $x = \frac{\log(b \pm \sqrt{b^2-1})}{\log a}$
18. $x=9, y=8$ 20. $A=9, B=-6$ 23. $x=0, y=0$
或ハ $x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 24. $a=-120, b=-20$
27. 32, 64, 96 28. 2尺, 4尺, 6尺 29. 3:2
30. 8 km 31. A 2700 回, B 2800 回 32. 年數甲 25 年,
乙 16 年 金高甲 2500 圓, 乙 200 圓 33. 6729
35. 每時 $12 \pm 2\sqrt{11}$ 哩 36. 20 米 37. $y = 3x - \frac{8}{x}$

補充問題

第十三章ノ問題

1. $x=3$ 2. $\frac{\sqrt{5+1}}{2}$ 3. 根ナシ 4. $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$
5. $x=-1, \frac{9}{2}$ 6. $x=1$ 7. $x = -\frac{1}{3}, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$
8. $x = \pm(a-b), \pm(a+b)$ 9. $x = \pm a, \pm \frac{1}{a}$ 10. $x=-1,$
 $-2, 2, 3$ 11. $x=-4, -2, 1, 5$ 12. $x=1, -3 \pm 2\sqrt{2}$
13. $x=3, \pm\sqrt{2}$ 14. $x=1.4$ 15. $x=1, -6, \frac{-5 \pm 39i}{2}$
16. $x=-1, -2, \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$ 17. $x=1, \frac{-5 \pm 21}{2}$
18. $\frac{-7 + \sqrt{87} \pm \sqrt{74-14\sqrt{89}}}{8}, \frac{-7 - \sqrt{89} \pm \sqrt{74+14\sqrt{89}}}{8}$
19. $\frac{-6 \pm \sqrt{3}}{3}$ 20. $x=c, \frac{-a(c+a)-b(c+b)}{a+b+2c}$ 21. $x=c,$
 $\frac{-ab(a+b+2c)}{bc+ca+2ab}$ 22. $x=0, -\frac{a+b}{2}$ 23. $x=3, \pm 5$
24. $x=-5.8, \frac{3 \pm \sqrt{159}i}{2}$ 25. 5米, 12米, 13米

第十四章ノ問題

1. $x=-5, y=6; x=6, y=-5$ 2. $x = \frac{33}{2}, y = -\frac{24}{5}$
3. $\begin{pmatrix} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{29}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = -7 \\ y = -\frac{29}{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{11}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = -7 \\ y = 11 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} x = 3 \\ y = b \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} x = 5 \\ y = 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = -5 \\ y = -1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} x = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

7. $\begin{cases} x = \frac{a}{6} \\ y = -\frac{b}{3} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ y = -\frac{b}{6} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x=-2 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$
11. $\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{31+7\sqrt{17}}{8} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{31-7\sqrt{17}}{8} \end{cases}$
12. $\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$
14. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$
15. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$
16. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{45}}{2} \\ y = \frac{-3-\sqrt{45}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{-3-\sqrt{45}}{2} \\ y = \frac{-3+\sqrt{45}}{2} \end{cases}$
17. $\begin{cases} x=3+\sqrt{6} \\ y=3-\sqrt{6} \end{cases}, \begin{cases} x=3-\sqrt{6} \\ y=3+\sqrt{6} \end{cases}$
18. $\begin{cases} x=6+\sqrt{30} \\ y=6-\sqrt{30} \end{cases}$
19. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases}, \begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$
20. $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$
21. $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}, \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = \frac{29+\sqrt{835}i}{2} \\ y = \frac{-29+\sqrt{835}i}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{29-\sqrt{835}i}{2} \\ y = \frac{-29-\sqrt{835}i}{2} \end{cases}$

22. $x=6, y=3, z=4.$
23. $x = -\frac{1}{2}(2a+b+c),$
 $y = -\frac{1}{2}(a+2b+c), z = -\frac{1}{2}(a+b+2c).$
24. $x=abc$
 $y=ab+bc+ca, z=a+b+c.$
25. $x = \frac{1}{3}(a-2b+c+d), y = \frac{1}{3}(a+b-2c+d)$
 $z = \frac{1}{3}(a+b+c-2d), w = \frac{1}{3}(-2a+b+c+d)$
26. $x=-3, y=4, z=1.$
27. $x = \frac{\pm(b+c-a)}{\sqrt{2(a+b+c)},$
 $y = \frac{\pm(c+a-b)}{\sqrt{2(a+b+c)}, z = \frac{\pm(a+b-c)}{\sqrt{2(a+b+c)}$
28. $\begin{cases} a=3 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$
29. $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = -\frac{10}{3} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = -\frac{10}{3} \end{cases}$
30. $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=-4 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=-5 \end{cases}, \begin{cases} x=c \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=c \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=c \end{cases}$
31. 甲 200 圓, 乙 300 圓, 丙 100 圓.
32. 俵數 20
 男 4 人, 女 2 人 或 男 2 人, 女 4 人.
33. 甲 200 貫
 2 圓, 乙 160 貫, 3 圓
- 第十五章ノ問題
1. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-a)(-a+b-c+d)$

2. $(a-b)(a^2+ab+b^2+a+b)$ 3. $(x+y+)(x^2+y^2-xy-3x-3y+y)$
 4. $(a+b)(b+c)(c+a)$ 5. $(x+y)(x-y)\{(a+b)x+(a-b)y\}$
 $\{(a+b)x-(a-b)y\}$ 6. $(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)$
 7. $(x+a)^2(x+b)(x-b)$ 8. $(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$
 9. $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$ 10. $(L^n+2m)\{(1+m)x^n-3m\}$
 11. $(9x+8)(8x-9)$ 12. $(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)$
 13. $(mx+ny)(nx+my)$ 14. $2(x-b)(x+y+a+b)$

第十六章ノ問題

3. 9. 4. (1) 10. (2) 46, 55, (3) 505 5. 1320, $n(n+1)(n+2)$
 6. $\frac{8}{3}, 2, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}$ 7. (1) $80\frac{26}{27}$ (2) $15(1-\sqrt{2})$
 (3) $\frac{31}{32}(2+\sqrt{2})$ 8. -153.421 9. (1) 3 (2) $\frac{9}{5}$
 10. $a(2+\sqrt{2})$ 13. (3) $s = \frac{p^2-pq+q^2}{p}$
 15. $\frac{1}{2^{n-1}}\{2(2^n-1)-n\}$

第十七章ノ問題

1. (1) $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$ 2. $x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$ 2. $(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}a^{\frac{1}{4}}+a)^2$
 3. $\frac{1}{x^{-+2}}$ 4. (1) 9 (2) 15 5. (1) 2048 (2) 8192
 6. (1) 31.1 (2) 262.44 (3) 512 (4) 16
 10. (1) $x^{\frac{7}{12}}y^{\frac{5}{6}}$ (2) 1 (3) 1 (4) $a^{18}b^3$

第十八章ノ問題

1. $\frac{39}{1000}$ 3. 2800 圓, 年 5 分 4. $\frac{a(1+4r)^3\{(1+4r)^{3n}-1\}}{(1+4r)^2-1}$
 5. $\frac{a}{r+2}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^{2n}}\right\}$ 6. 3 圓 20 錢 1 割 5 分
 7. 1591.72 圓 8. 6 分 9. 76 年
 10. 4098 圓

第十九章ノ問題

1. 13 2. $a:b::=6:7:5$ 3. 1 4. $\frac{a^2b^2+1}{2ab}$
 5. $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$ 6. $a^2 < 1$ ナルトキ a , $a^2 > 1$ ナルトキ $\frac{1}{a}$
 7. $\frac{2(a+b)^2}{(a-b)^2}$ 8. $\frac{8ab}{(a-b)^2}$ 9. 6
 10. $a=-6, b=92, c=39$

第二十章ノ問題

1. 51, 22 4. $m < -3$ 或ハ $m > 5$
 5. $2+2\sqrt{2} > p > 2-2\sqrt{2}$ 7. $a > 0$

第二十一章ノ問題

2. $36x^2-180x+13$, 最小値 -12 3. $p=-2, q=4$
 4. $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$ 5. $\frac{a}{2}, \frac{h}{2}$ 10. x ノ最大値 2, 最小値
 -8, y ノ最大値 9, 最小値 -1

補充教材

P. 27 例題

1. 64 2. 192 3. 9000

P. 32 例題

1. 24 2. 12 3. 2450 4. 6 5.
- $n=7$
6. 144
-
8. 144

P. 35 例題

1. 792 2. 35 3. 210 4. 126 5.
- $n=18$
- 6.
- $n=15$

P. 40 例題

2. $a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4, 16a^4+96a^3y+216a^2y^2+216xy^3$
 $+81y^4, a^5+10a^4b+40a^3b^2+80a^2b^3+80ab^4+32b^5, \frac{x^5}{y^5}$
 $+\frac{5x^3}{y^3}+\frac{10y}{x}+\frac{10y}{x}+\frac{5y^3}{x^3}+\frac{y^5}{x^5}$ 3. (1) $\frac{120}{x}$
 (2) $-792b^7x^5y^7$ (3) $\frac{56}{x^2}$ (4) $210x^5$ (5) $9289728a^6$
 4. $10x^4-40x^2+32$ 5. 1.020 6. 1.054 7. $352a^5x^5, 70a^4x^4$

答 終

文 部 省 檢 定 濟

昭和六年十二月十二日 中學校數學科教科用

昭和六年十月一日 印刷
 昭和六年十月四日 發行
 昭和六年十二月一日 修正再版印刷
 昭和六年十二月四日 修正再版發行


 著 作 權 所 有

〔定價金九十五錢〕

著 作 者 問 谷 力

發 行 者 上 原 才 一 郎
東京市神田區通神保町六番地印 刷 者 山 崎 與 吉
東京市神田區通神保町六番地

發 行 所

光 風 館 書 店

東京市神田區通神保町六番地

(電話是神田三〇八七番)(振替口座東京三二七番)

中華民國二十六年六月

第一一六號
第一一七號
第一一八號
第一一九號



中華民國二十六年六月

第一一六號

第一一七號

第一一八號

第一一九號

第一二〇號

第一二一號

第一二二號



