ELEMENTARY COURSE
OF

# GEOMETRY

T. HAYASHI.



訂正版

文部省檢定濟
大正十二年二月十五日　中學校·師範學校數學科用

中等教育

# 幾何學教科書

〔平面之部〕

東北帝國大學教授
理學博士
林鶴一
編

東京開成館藏版

## 改版ノ序

本書前版發行以來正ニ六星霜,其間ニ於テ世界ノ大戰亂アリ,又列強間ノ諸會議アリ,帝國ノ國運益々隆盛ナルト同時ニ,列强トノ競爭益々激烈ヲ加フルニ至レリ。是ニ於テ我教育界モ亦モ大ナル改進ヲナサザルベカラザルナリ,加之歐米先進國ニ於テハ數年來數學教授殊ニ幾何學教授ニ關シテハ大ニ論議研究セラレ,其改革ノ機運既ニ熟セントス,我國ニ於テモ日本中等教育數學會ノ創設アリテ,我國ニ於ケル中等教育數學科ノ課程ヲ審議シタリ,依テ余ハ先進國ニ於ケル數學教育界現時ノ狀態ヲ調査シ,前記日本中等教育數學會議定ノ教授案ヲ尊重シ,且本書前版ヲ使用セラレタル多數ノ

教師諸君ノ實驗上ヨリノ忠言ヲ參案シテ改纂ヲ企テタリ。

次ニ今回改訂ノ要項ヲ述ブベシ。

一. 教材ヲ一層精選シ,其說述ヲ簡明ナラシメタルコト。

二. 門戶ヲ大ニ簡易ナラシメ,先ヅ簡單ナル基礎的圖形ト基本的作圖題トヲ嚴密ナル形式的方法ニヨラズシテ研究ヲセシメ,中學第二學年ヨリ始ムルモ差支ナカラシメ,且始メニ於テハ或ハ實驗實測ヲナサシメ,又ハ種々ナル作圖ノ練習ヲナサシムル等敎師諸君ノ意ノ如ク敎授シ得ラルル樣ニナシタルコト。

三. 教材ノ排列ニ大改良ヲ施シ,定理ハ成ルベク圖形ノ作圖及ビ觀察ニヨリテ之ヲ學生ニ發見セシメ,作圖題ハ成ルベク各適當ナル定理ノ應用タラシメンコトヲ力メ,總テ教材間ノ連絡ヲ圓滑ニ且教育的ナラシメタルコト。

四. 定理ノ證明ハ單ニ其方法ヲ示スニ止メズ,之ヲ案出スル筋途ヲ悟ラシメ,作圖題ノ解法ハ先ヅ解析ヲ施シテ作圖ノ發見法ヲ會得セシメンコトヲ計リタルコト。



五. 挿圖ニ大改良ヲ施シ,了解ヲ容易ナラシメンガタメニ種々ノ工夫ヲナシタルコト。

六. 實地應用問題ヲ增加シ,測量,求積其他製圖等ノ基本事項ニ涉リテ幾何學ヲ實地ニ應用スル利益ト興味トヲ知ラシメタルコト。

七. 計算問題ヲ增加シ算術及ビ代數學トノ連絡融合ヲ實現シタルコト。

八. 圖形ノ要素ノ變動ト圖形ノ變化トヲ對照スルノ機會ヲ多クシ,以テ研究ヲ動的ナラシメ,所謂圖形ノ函數的取扱ヲナサシメタルコト。

九. 代數式ノ圖表法ヲ說キ,代數學ニ於ケル教授ト相俟テ函數思想ノ養成ヲ確實ナラシメ,且此圖表法ノ例ト圓錐體ノ截斷面トノ研究トニヨリテ,實際ニ重要ナル楕圓,拋物線及ビ雙曲線ノ概念ヲ與ヘタルコト。

十. 相似多角形ノ條下ニ於テ勾配ヲ說キ,以テ三角函數ノ概念ヲ與ヘタルコト。

**十一.** 問題ヲ練習及ビ應用ノ鍛練ニ向テ一層適當ナルモノニ變更シ,各定理,作圖題等ノ間ニハ多數ノ簡易ナルモノヲ挿入シ,以テ教授ノ確實,應用ノ養成ヲ計リ,又各所ニ輯メタルモノニ於テハ,其配列ニ深甚ナル注意ヲ拂ヒ,且解法ニ氣附キ惡キモノノ若干ニ對シテハ,其解法ノ指針又ハ之ヲ暗示スル圖ヲ附シテ學生ノ工夫ヲ援助シタルコト。

**十二.** 各篇ノ終リニ雜題ヲ附シ,既習事項ノ回顧復習ト思考鍛練トニ遺憾ナカラシメンガタメ,其各事項ヲ修メシ時ニ與ヘシ問題ヨリモ少シク程度ヲ高クシ,尚雜題ノ回數ヲ重ヌルニ伴ヒ漸次其程度ヲ高メ,循環的ニ鍛練ヲ重ネテ以テ實力ノ圓滿ナル發達ト增進トヲ期シタルコト。

**十三.** 卷末ニ多數ノ補充問題ヲ附シ,以テ學生ニ研究資料ヲ與ヘ,特ニ立體ノ部ノ卷末ニ與ヘタルモノハ幾何學全般ニ亘リテ最モ適切ナルモノヲ選集シ,且之ヲ其性質ト解法トニヨリテ系統的ニ分類排列シ,補習材料タラシムルト同時ニ學生中高等ノ學校ニ進マントスルモノニ對シテ極メテ有効ナル準備資料タラシメタルコト。



**十四.** 第五學年ノ課程トシテ立體ノ部ニ總括ト補充ナル一篇ヲ設ケ,尚一層教授ノ徹底ト完結トヲ計リタルコト。

**十五.** 所々ニ小活字ニテ記述シタル事項及ビ問題ヲ挿入シ,學校ノ種々ノ事情,計畫等ニヨリテ適宜取捨自由ナラシメタルコト。

以上ノ外改補セル事項甚ダ多シ,余ハ之ヲ以テ現時ノ要求ニ適應スルモノニシテ恐ラクハ教師諸君ノ意ヲ盡クセルモノナラントト信ズ。然レドモ世運ノ進展ハ一日モ休止スルモノニアラズ,殊ニ現時ノ社會ハ其進化ノ速度甚大ニシテ今日是ナルモノト雖ドモ數年ヲ出デズシテ,更ニ改訂ノ要アルニ至ラン。サレバ余ハ中等教育界

ニ於テ大多數ニ本書ヲ使用セラルル教師諸君ト共ニ益々研究ヲ積ミ改訂ヲ怠ラズ,本書ヲシテ常ニ時代ノ要求ニ遺憾ナク,寧ロ其先驅者タラシメント望ミ,諸君ノ忠言ニ吝ナラザランコトヲ希望シテ止マザルナリ。終リニ臨ミ余ハ本書ノ改纂ニ就キテ多年中學校ノ數學教授ニ經驗アル津村定一君ノ熱心ナル多大ノ補助ヲ得タルコトヲ玆ニ記シテ以テ謝意ヲ表ス。

大正十一年十一月

著者識

# 目次

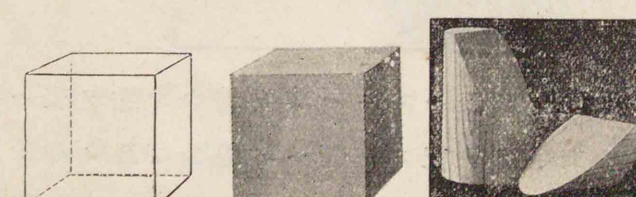
# 中等教育 幾何學教科書

## 緒論

**1. 幾何學**トハ物體ノ形,大サ及ビ位置ニ關スル事柄ヲ論ズル學問ナリ.

**2. 立體.** 物體ニ關スル種々ナル事柄ヲ研究スルニ當リ,之ヲ組成スル物質ヲ顧ミズ,唯其形,大サ及ビ位置ノミニ著目スルトキハ,之ヲ**立體**ト云フ.

**面,線,點.** 立體ノ限界ヲ**面**ト云ヒ,面ノ限界又ハ二面ノ交ハル處ヲ**線**ト云ヒ,線ノ限界又ハ二線ノ交ハル處ヲ**點**ト云フ.



立體ハ形,大サ及ビ位置ヲ有ス。

面ハ大サ(廣サ)及ビ位置ヲ有スルモ,厚サヲ有セズ。

線ハ大サ(長サ)及ビ位置ヲ有スルモ幅及ビ厚サヲ有セズ。

點ハ全ク大サヲ有セズ,唯位置ヲ有スルノミ。

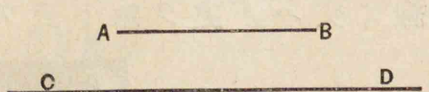
點ヲ表ハスニハA, B, C等ノ文字ヲ以テス。

例ヘバA·, B× (點A又ハA點等ト呼ブ)ノ如シ。

### 3. **直線**トハ眞直(マツスグ)ナル線ナリ。

強ク張レル細キ絲ノ如キハ其形ヲ呈ス。

直線ハ雙方ヘ限リナク長キモノトス,若シ其一部分ヲ取ルトキハ,之ヲ**有限直線**又ハ**線分**ト云ヒ,殘リノ部分ヲ其**延長**ト云フ。有限直線ニ對シテ,長サニ限リナキモノヲ**無限直線**ト云フコトアリ。




有限直線ヲ表ハスニハ,其兩端ナル點ヲ表ハス二ツノ文字ヲ並記ス。例ヘバ線分ABノ如シ。

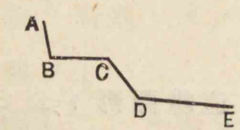
無限直線ヲ表ハスニハ,其上ニ在ル任意二點ヲ



表ハス文字ヲ並記ス。例ヘバ直線CDノ如シ。

又直線ヲ表ハスニ一ツノ文字ヲ以テスルコトアリ。例ヘバ線分A,直線Lト云フガ如シ。

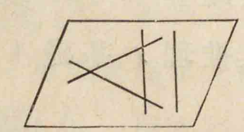
連接セル一群ノ線分ヨリ成ル線ヲ**折線**ト云ヒ其各線分ヲ折線ノ**邊**ト云フ。

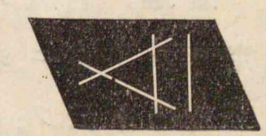




### 4. **曲線**トハ何レノ部分モ直線ナラザル線ナリ。

### 5. **平面**トハ其面上ニアル任意ノ二點ヲ通過スル直線ガ,全ク其面ニ密著スル面ナリ。





大工ガ板ヲ平ラニ削ルニ當リ,さしがねノ縁ヲ板ノ面ニ當テテ,其密著スルカ否カヲ見ルハ此理ニ基ヅク。

6. **曲面**トハ何レノ部分モ平面ナラザル面ナリ。

問. 曲線,平面,曲面ノ例ヲ擧ゲヨ。

7. **圖形**トハ立體,面,線,點又ハ其等ノ集合ヲ云フ。

直線ノミニテ成ル圖形ヲ**直線圖形**ト云ヒ,同一平面上ニ在ル圖形ヲ**平面圖形**ト云フ。

故ニ**幾何學**ハ圖形ノ性質ヲ論ズル學問ナリ。

而シテ其方法ハ**推理法**ニヨル。

**平面幾何學**ハ平面圖形ノミヲ論ズ。其他ノ圖形ノ考究ハ**立體幾何學**ニ屬ス。

8. **公理**。吾人ノ經驗ニヨリテ眞ナリト認定スル事實ニシテ,推理ノ基礎トナルモノヲ公理ト云フ。

**公理一**。**定マレル二點ヲ通過スル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。**

此事實ヲ二點ハ一直線ヲ決定スト云フ.



此公理ヨリ直ニ次ノコトノ眞ナルヲ知ル。

[1] 二點ヲ共有スル二直線ハ相合シテ同一直線トナル。

從テ 一部分ヲ共有スル二直線ハ相合ス。

[2] 相交ハル二直線ノ交點ハ唯一ツニ限ル。

二點ヲ兩端トスル樣ニ直線ヲ引クコトヲ,其**二點ヲ結ブ**ト云フ。

**公理二**。**二點ヲ結ブ線分ハ其二點間ノ最短通路ナリ。**

二點ヲ結ブ線分ノ長サヲ其**二點間ノ距離**ト云フ。

**公理三**。**一ツノ直線ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ツ,而シテ其各部分ニ各一點ヲ取ルトキハ,其二點ヲ結ブ直線ハ必ズ初メノ直線ト交ハル。**

**公理四**。**平面ハ其任意ノ部分ヲ他ノ部分又ハ他ノ平面ノ任意ノ部分ニ重ヌルコトヲ得。**

**公理五**。**圖形ハ其形及ビ大サヲ變ズルコトナク,其位置ノミヲ變ズルヲ得。**

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ置キ,兩者ヲ全ク密合セシメ得ルトキハ,此二ツノ圖形ハ**合同**ナリ,

或ハ全等ナリト云フ。

合同ナルモノノ大サハ相等シ。

**注意** 次ニ揭グルモノハ普通公理ト稱シ,幾何學ニ限ラズ算術,代數學一般ニ用フルモノナリ。

[1] 全部ハ其總テノ部分ノ和ナリ,從テ其一部分ヨリ大ナリ。

以下 $A, B, C$ 等ハ量ヲ表ハシ,$m, n$ 等ハ正數トス。

[2] $A=C,\ B=C$ ナラバ $A=B$

[3] $A>B,\ B>C$ ナラバ $A>C$

[4] $A>B$ ナラバ $mA>mB$

又 $A=B$ ナラバ $mA=mB$

又 $mA>mB$ ナラバ $A>B$

$mA=mB$ ナラバ $A=B$

[5] $A=B,\ C=D$ ナラバ

$A+C=B+D$ 及ビ $A\sim C=B\sim D$

[6] $A>B,\ C=D$ ナラバ

$A+C>B+D,\ A-C>B-D$ 或ハ $C-A<D-B$

[7] $A>B,\ C>D$ ナラバ, $A+C>B+D$

(此時 $A-C>B-D$ ナリトスベカラズ)。

# 平面幾何學

## 第一篇

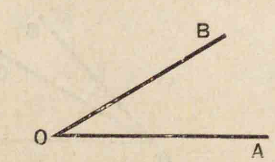
## 簡單ナル平面圖形

### 第一章

### 角

**9. 角**トハ一點ヨリ出ヅル二直線ヨリ成レル圖形ナリ。此點ヲ角ノ**頂點**ト云ヒ,其二直線ヲ角ノ**邊**ト云フ。

例ヘバ一點 O ヨリ出ヅル二直線 OA, OB* ハ角ヲ作ル。之ヲ角 O, 角 AOB 又ハ 角 BOA ト云フ。

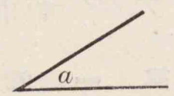



* カクノ如キ直線ヲ半直線又ハ射線ト云フコトアリ。

角ヲ記スルニハ,角ナル文字ノ代リニ ∠ ナル記號ヲ用ヒテ ∠AOB, ∠BOA ト記スヲ常トス。

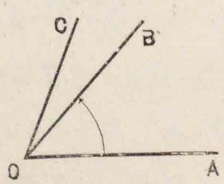
時トシテハ其頂點ノ文字一ツヲ以テスルコトアリ。例ヘバ∠O ノ如シ。

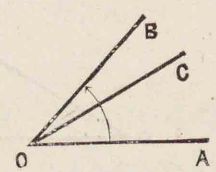
又頂點ニ近ク二邊ノ間ニ置キタル一ツノ文字ヲ以テスルコトアリ。例ヘバ $\angle a$ ノ如シ。




**角ノ大サ。** 角AOBニ於テ一邊OAヲ頂點Oノ周リニ,平面ヲ離ルルコトナク廻轉シテ,OBニ重ナル位置マデ來ラシムルトキハ,OAハ角AOBヲ**畫ク**又ハ角AOB**ダケ廻轉セリ**ト云フ。

此ノ廻轉ニ於テ,OAノ觸レタル平面ノ部分ヲ**角內**ト云ヒ,他ノ部分ヲ**角外**ト云フ。



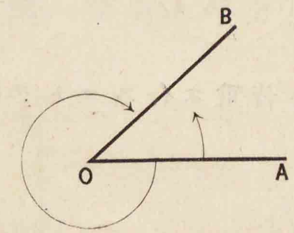




一ツノ角ヲ他ノ角ノ上ニ置キ,頂點ト一邊トヲ



相合セシメタルトキ,他ノ邊ガ亦相合スルトキハ,此二角ハ**相等シ**, 一ツノ角ノ第二ノ邊ガ他ノ角ノ內ニアルカ,又ハソノ外ニアルカニヨリテ,其角ハ他ノ角ヨリ**小ナリ**,又ハ**大ナリ**ト云フ。

故ニ角ノ大サハ二邊ノ長サニハ無關係ナリ。



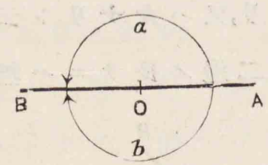

然ルニOAヲ廻轉セシメテOBノ位置ニ至ラシムルニ二ツノ途アリ。即チ上圖ニ示セルガ如ク,一ツハ時計ノ針ノ廻轉ト同ジク,他ハ之ニ反ス。

故ニ一點ヨリ出ヅル二直線ハ常ニ二ツノ角ヲ作リ,此二角ノ頂點ト邊トハ共通ナリ。

此二角ヲ互ニ**共軛角**ト云ヒ,大ナル方ヲ**優角**,小ナル方ヲ**劣角**ト云フ。

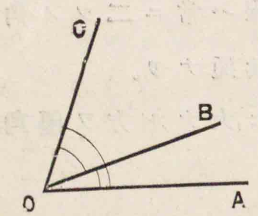
サレド單ニ角ト云ハバ,通例其劣角ヲ指スモノトス。

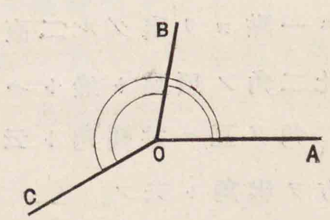
**10. 平角**。角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアリテ同一ノ直線ヲナストキハ,此角ヲ**平角**ト云フ。




平角ハ明ラカニ皆重ネ合スコトヲ得。故ニ
**平角ハ皆相等シ**。

**11. 隣接角**。頂點ト一邊トヲ共通ニシ,且其共通邊ノ兩側ニアル二角ヲ**隣接角**ト云フ。



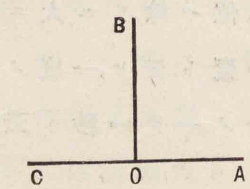

圖ニ於テ $\angle AOB$ ト $\angle BOC$ ハ隣接角ナリ。
而シテ $\angle AOC$ ハ此兩隣接角ノ和ナリ。

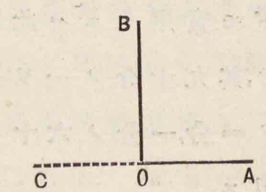


**12. 角ノ二等分線**。角ノ頂點ヲ過ギ之ヲ相等シキ兩隣接角ニ分ツ直線ヲ,此角ノ**二等分線**ト云フ.

角ノ二等分線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

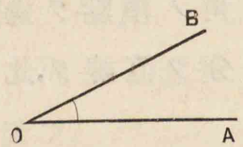
**13. 直角**。平角ノ半分ニ等シキ角ヲ**直角**ト云フ.

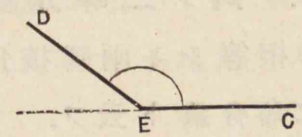



平角AOCノ二等分線ヲOBトセバ, $\angle AOB$ 及ビ $\angle BOC$ ハ共ニ直角ナリ。
平角ハ皆相等シキヲ以テ,
**直角ハ皆相等シ**。而シテ**平角ハ直角ノ二倍ニ等シ**。

**14. 鋭角,鈍角**。直角ヨリ小ナル角ヲ**鋭角**ト云ヒ,直角ヨリ大ニシテ平角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**ト云フ.



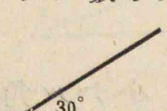

**15. 角ノ單位。** 前ニ述ベタル如ク,直角ハ其大サ一定セルヲ以テ,之ヲ測角ノ基本單位トス。

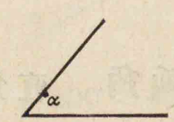
然レドモ實用上ニハ此單位ハ餘リニ大ニ過グルヲ以テ,其九十分ノ一ヲ**一度**ト云ヒ,一度ノ六十分ノ一ヲ**一分**,一分ノ六十分ノ一ヲ**一秒**ト云ヒ,此等ヲ併用ス。

故ニ　平角ハ2直角從テ180度ニ等シ。

又例ヘバ直角ノ十六分ノ一ハ5度37分30秒ニシテ,之ヲ $5°\,37'\,30''$ ト記ス。

角ノ大サヲ表ハスニ,其内部ノ頂點ニ近キ處ニ記シタル數字又ハ文字ヲ以テスルコトアリ。



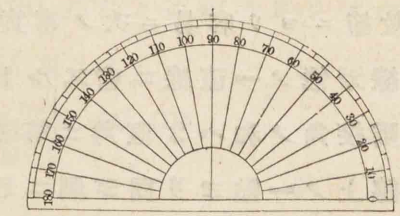




$\alpha = 47°13'7''$ 等

角ヲ測ル器械ヲ**分度器**ト云フ。

普通用フルモノハ次ニ示スガ如シ。





**問1.** 2直角ノ三分ノ一ハ幾度ナルカ。$\frac{3}{4}$直角ハ幾度ナルカ。$\frac{4}{32}$直角ハ幾度幾分ナルカ。

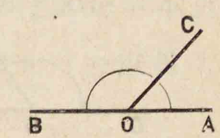
**問2.** 次ノ各ノ角度ヲ直角單位ニテ表ハセ。

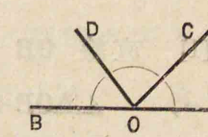
$30°$,　$45°$,　$60°$,　$22°30'$,　$135°$,　$25°$

又分度器ヲ使用シテ此等ノ角ヲ畫ケ。

**問3.** 兩隣接角ガ $30°$ 及ビ $45°$ ナルトキハ,其二角ノ二等分線ノナス角ハ幾度幾分ナルカ。

**問4.** 一直線 **AB** 上ニ任意ノ一點 **O** ヲ取リ, **O** ヨリ一ツノ直線 **OC**, 又ハ **AB** ノ同ジ側ニ二ツノ直線 **OC, OD** ヲ引クトキハ,




∠**AOC, COB** ノ和　又ハ

∠**AOC, COD, DOB** ノ和ハ各幾何ナルカ。

**問5.** **OA, OB** ハ **O** 點ヨリ出ル二ツノ直線トス,今 **OA** ハ固定シ, **OB** ガ動クトスレバ, ∠**AOB** ガ幾何ナルトキ **OA** ト **OB** ガ一直線ヲナスカ。

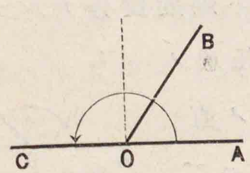
16.　前數節ニヨリ容易ニ次ノ事實ヲ得ベシ。

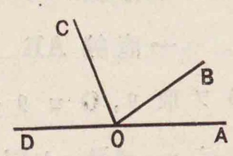
[1]　**一直線ガ他ノ一直線ニ會スルトキ生ズル二ツノ隣接角ノ和ハ 2 直角ニ等シ。**

[2]　**一直線上ノ一點ヨリ同ジ側ニ若干ノ直線ヲ引クトキハ,此等ノ直線ガ夫々其次ノ直線トナス角ノ和ハ 2 直角ニ等シ。**

[3]　**一點ヨリ出ヅル若干ノ直線ガ夫々其次ノ直線トナス角ノ和ハ 4 直角ニ等シ。**

[4]　**二ツノ隣接角ノ和ガ 2 直角ニ等シキトキハ,其共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス。**




[1]　直線 OB ガ直線 AC ト O ニ於テ會スルトキハ,　∠AOB+BOC =2直角。

[2]　直線 OB, OC ガ直線 AD ト O ニ於テ會シ,共ニ AD ノ同側ニアルトキハ,

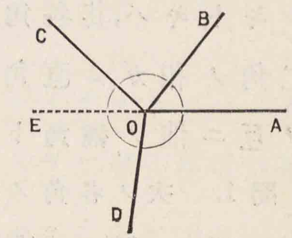
∠AOB+BOC+COD=2 直角。

コレ此等ノ角ノ和ハ平角 AOD ナレバナリ。



又 OB, OC ノ如キ直線ハ幾ツアルモ同様ナリ。

[3]　一點 O ヨリ引ケル直線ヲ OA, OB, OC, OD トスレバ,




∠AOB+BOC+COD+DOA =4 直角。

コレ AO ノ延長ヲ OE トセバ,此等ノ角ノ和ハ平角 AOE ト其共軛角トノ和ニ等シキヲ以テナリ。

[4]　∠AOB ト ∠BOC ヲ二ツノ隣接角トシ,

∠AOB+BOC = 2 直角　ナルトキハ,

OA ト OC トハ一直線ヲナス。

コレ∠AOB ト∠BOC トノ和ナル∠AOC ハ平角ナルベク,從テ其二邊タル OA ト OC トハ一直線ヲナセバナリ。

問 1.　一點ヨリ出ヅル八ツノ直線ガ,各其相隣ル二直線ト皆相等シキ角ヲ作ルトキハ,其各角ノ大サハ幾直角ナルカ。又幾度ナルカ。

問 2.　時計ノ分針ハ一時間ニ幾度ノ角ヲ通過スルカ。又一分間ニハ如何。又15分間ニハ如何。

**17. 餘角,補角。** 二角ノ和ガ直角ニ等シキトキハ,其各角ヲ互ニ他ノ**餘角**ト云ヒ,二角ノ和ガ2直角ニ等シキトキハ,其各角ヲ互ニ他ノ**補角**ト云フ。

**問 1.** 次ノ各角ノ餘角如何。

15°,　30°,　45°,　60°,　$\frac{2}{3}$直角,　52°18′14″

**問 2.** 次ノ各角ノ補角如何。

30°,　60°,　135°,　$\frac{3}{2}$直角,　直角,　72°35′

***問 3.** 前節ノ[1]及ビ[4]ハ夫々次ノ如ク述ブルヲ得ルコトヲ說明セヨ。

[1] 一直線ガ他ノ一直線ニ會スルトキ生ズル二ツノ隣接角ハ互ニ補角ナリ。

[4] 二ツノ隣接角ガ互ニ補角ナルトキハ,其共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス。

***問 4.** 同ジ角又ハ相等シキ角ノ補角ハ相等シ。又餘角ニ就キテモ同樣ナリ。

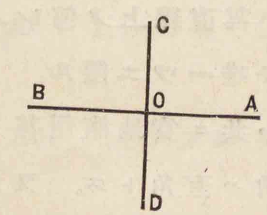
**問 5.** 角ノ二邊ハ其角ノ二等分線ノ延長ト等角ヲナス。其理如何。

*ヲ附シタル問題ハ重要ナルモノナリ。



**問 6.** 互ニ補角ナル二角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル角ハ鈍角ニシテ,小ナル角ハ銳角ナリ。其理如何。

**問 7.** 二ツノ直線ガ相交ハリテナス四ツノ角ノ中,何レカ一ツガ直角ナルトキハ,他ノ三ツモ亦直角ナリ。其理如何。




**18. 垂直ナル二直線,垂線。** 二ツノ直線ガ相交ハリテナス角ガ直角ナルトキハ,此二直線ヲ互ニ**垂直ナリ**ト云フ(又互ニ**直交ス**トモ,**直角ニ交ハル**トモ云フ)。而シテ一ツガ他ノ上ニ立ツト考フル場合ニハ,前者ヲ後者ノ**垂線**ト云ヒ,其出會フ點ヲ垂線ノ**足**ト云フ。

例ヘバ上ノ圖ニ於テ AB ト CD トハ互ニ垂直ナリ。又 CO ハ AB ノ垂線, AO ハ CD ノ垂線ナ

リ等ト云フ。

而シテ此等ヲ次ノ如ク記スコト多シ。

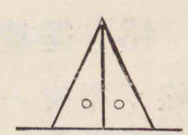
CO⊥AB　　　　AO⊥CD

一直線ノ垂線ハ,ツマリ其直線上ノ一點ヲ過ギ,其點ヲ頂點トスル平角ノ二等分線ニ外ナラザルヲ以テ,次ノ事實アリ (12節)

**一直線ノ垂線ハ其直線上ノ何レノ點ニ於テモ一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル。**

直角及ビ垂線ハ共ニ實地應用甚ダ大ナルヲ以テ,三角定木ノ一角ハ直角トス。又大工等ノ使用スルさしがねノ如キモ直角ヲ有ス。

問. 三角定木ノ直角ガ正シキカ否カヲ檢査スル方法ヲ考按セヨ。



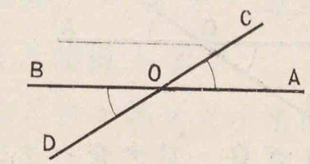
**19. 斜線。** 一直線ト出會ヒ之ニ垂線ナラザル直線ヲ,其直線ノ**斜線**ト云ヒ,其出會フ點ヲ斜線ノ**足**ト云フ。

**20. 對頂角。** 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ノ延長ナルトキハ,此



二角ヲ**對頂角**ト云フ。

二直線ガ相交ハルトキハ,二組ノ對頂角ヲ作ル




例ヘバ二直線 AB,CD ガ圖ノ如ク O ニ於テ交ハルトキハ,∠AOC ト ∠BOD 及ビ ∠BOC ト ∠AOD ハ各對頂角ナリ。

此場合ニ ∠AOC ノ大サガ 45° ナルトキハ,他ノ角ノ大サ各如何。

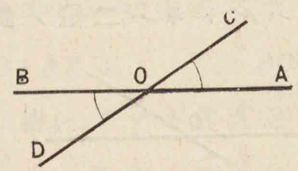
**21. 定義。** 前節ノ始メニ於ケル說述ハ,**對頂角ナル用語ノ意義**ヲ定ムルモノナリ。此ノ如キ說述ハ學生諸子ガ既ニコレマデニ多ク見タル所ノモノナリ。一般ニ,

用語ノ意義ヲ定ムル說述ヲ其語ノ**定義**ト云フ。

問. 次ノ各ノ定義ヲ述ベヨ。

平面，圖形，平角，隣接角，直角，補角及ビ餘角，垂直ナル二直線，垂線。

## 22. 對頂角ノ比較。




二直線 AB,CD ガ O ニ於テ交ハリ,二組ノ對頂角 AOC, BOD 及ビ BOC, AOD ヲナストス。

$\angle$AOC ト COB トノ和ハ平角 AOB ナリ,

又 $\angle$BOD ト COB トノ和ハ平角 COD ナリ,

故ニ $\angle AOC+COB=BOD+COB$ (10節)

双方ヨリ $\angle$COB ヲ減ズレバ,

$\angle AOC=BOD$ (8節注意[5])

同樣ニ $\angle BOC=AOD$

依テ次ノ事實ヲ得。

**對頂角ハ相等シ。**

## 23. 定理。

前節ニ得タル事柄ノ如ク,定義,公理及ビ既ニ眞ナルコトノ確定シタル事柄ニヨリテ,推理ヲ以テ其眞ナルコトヲ論定シ得ル事柄ヲ**定理**ト云フ。



又或事柄ヨリ直ニ推知シ得ル事柄ヲ其事柄ノ**系**ト云フ。

而シテ其眞ナルコトヲ論定スル方法ヲ定理又ハ系ノ**證明**ト云フ。

問 1. 本章ニ於テ學ビタル事柄ノ中,定理ト思フモノヲ列擧セヨ。

問 2. 前節ノ定理ヲ第17節問4ヲ用ヒテ證明セヨ。又$\angle$AOC ヲ O 點ノ周リニ廻轉シテ$\angle$BOD ノ上ニ重ネテモ證明セヨ。

問 3. 角ノ二等分線ノ延長ハ其角ノ對頂角ヲ二等分ス。*之ヲ證明セヨ。

## 問題 1.

1. 次ノ時刻ニ於ケル時計ノ兩針間ノ角度ヲ問フ。

三時, 三時三十分

2. 一直線ガ他ノ一直線ニ出會ヒテ作ル二角ノ中,一ツガ $68°18'23''$ ナラバ,他ノ角ノ大サ如何。

* 以下ノ問題ニハ此一句ヲ省略スルコトトス。

又此兩角ノ二等分線ノナス角ノ大サ如何。

*3. 一直線ガ他ノ一直線ニ出會ヒテナス二ツノ隣接角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ。

4. 隣接角ノ大サ $120^\circ$ 及ビ $60^\circ$ ナルトキハ,其共有ニアラザル二邊ハ一直線トナルカ。

5. 一直線 AB 上ノ一點 O ヲ過ギ,其兩側ニ二直線 OC, OD アリテ, $\angle AOC = BOD$ ナルトキハ, COD ハ一直線ナリ。

6. 四直線ガ一點ニ出會ヒ四ツノ直角ヲ作ルトキハ,此四直線ハ二直線ヲナス。

7. 順次ニ隣レル角 AOB, BOC, COD ガ夫々 $105^\circ 30'$, $15^\circ 20'$, $69^\circ 10'$ ナルトキハ, AO ト OD トハ一直線ヲナスカ否カ。

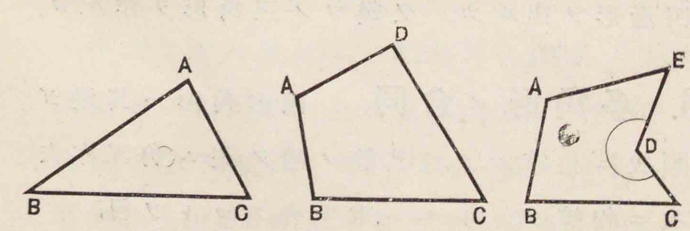
## 第二章

# 三角形ノ合同

**24.** **定義** **平面形**トハ線ヲ以テ圍マレタル平面ノ有限ノ部分ナリ。

而シテ其部分ヲ平面形ノ**内**ト云ヒ,他ノ部分ヲ**外**ト云フ。

**多角形**トハ連接セル若干ノ線分ニテ圍マレタル平面形ナリ。其各線分ヲ多角形ノ**邊**ト云ヒ,二隣邊ノ作ル角ヲ多角形ノ**角**ト云ヒ,其頂點ヲ多角形ノ**頂點**ト云フ。




多角形ノ邊數,角數及ビ頂點ノ數ハ相等シ。

多角形ノ總テノ邊ノ和ヲ其**周**ト云フ。

**25.** **定義** 三角形トハ三ツノ角ヲ有スル多角形ナリ。

四ツ,五ツ,六ツノ角ヲ有スル多角形ヲ夫夫**四角形**,**五角形**,**六角形**ト云フ,以上之ニ準ズ。

三角形,四角形,五角形等ヲ夫々**三邊形**,**四邊形**,**五邊形**等トモ云フ。

三角形ハ多角形中邊數ノ最小ナルモノナリ。

多角形ヲ表示スルニハ,其頂點ヲ表ハス文字ヲ順ニ並記ス。例ヘバ三角形ABC,四角形ABCD,五角形ABCDE等ノ如シ。

三角形ABCハ之ヲ△ABCト記スコト多シ。

問. 三直線ハ常ニ三角形ヲ作ルカ。四直線ハ常ニ四邊形ヲ作ルカ。又幾ツノ三角形ヲ作ルカ。

**26. 多角形ノ合同。** 兩多角形ハ其邊ガ夫々順次ニ相等シク,且其等ノ邊ノ夾ム角ガ亦夫夫順次ニ相等シキトキハ,重ネ合スコトヲ得,即チ兩形ハ合同ナリ。

合同多角形ニ於テ相等シキ邊及ビ角ヲ各**對應邊**及ビ**對應角**ト云フ。



**27. 三角形ノ合同。**

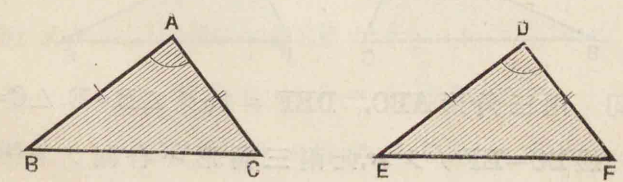
**定理** 二ツノ三角形ニ於テ,次ノモノガ夫夫相等シキトキハ兩三角形ハ合同ナリ。

而シテ等邊ハ夫々等角ニ對ス。

[1] **二邊ト其夾角。**

[2] **二角ト其頂點間ノ邊。**

[1] 兩三角形ABC, DEF ニ於テ, AB=DE, AC=DF ニシテ,且∠A=D ナルトキハ,此兩三角形ハ合同ナルベシ。



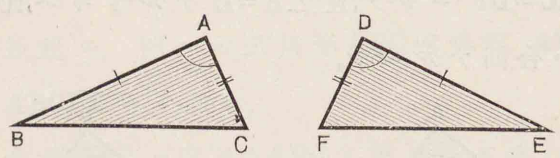

今之ヲ證明センニ△ABCヲ△DEFノ上ニ置キ,頂點Aヲ頂點Dノ上ニ重ネ,邊ABヲ邊DEノ上ニ,角Aヲ之ニ等シキ角Dノ上ニ重ヌルトキハ,邊ACハ邊DFノ上ニ重ナリ,且AB=DEナル故,頂點Bハ頂點Eノ上ニ重ナリ,又AC=DFナル故,頂點Cハ頂點Fノ上ニ重ナル。

從テ△ABCハ全ク△DEFノ上ニ重ナル。

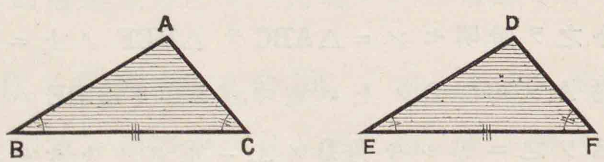
依テ此兩三角形ハ合同ナリ。

**注意一**。上ノ如ク二ツノ圖形ヲ重ネ合セテ,或事柄ヲ證明スル方法ヲ**重置法**ト云フ。

**注意二**。兩三角形ガ前圖ニ示スガ如キトキハ,其一ツヲ其儘他ノ上ニ重ヌルコトヲ得レドモ,若シ次ノ圖ニ示スガ如キ場合ニハ其一ツヲ裏返ヘシテ之ヲ他ノ上ニ重ヌルヲ要ス,サレド其合同ナルコトニ於テハ何レモ同一ナリトス。




[2] 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ $\angle B=E, \angle C=F$, 邊 $BC=EF$ ナラバ,此兩三角形ハ合同ナルベシ。




(重置法ニヨリテ學生之ヲ證明セヨ)。

兩三角形ガ合同ナルコトヲ記スニハ≡ナル記號ヲ用フ。即チ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トガ合同ナルコトヲ

$$\triangle ABC \equiv DEF$$

ト記ス。



**28. 假設ト終結。** 定理ハ假設及ビ終結ヨリ成ル,假設トハ假リニ定ムル事項ニシテ,終結トハ假設ヨリ生ズル結果ナリ。

而シテ假設ヨリ終結ヲ得ル理由ハ即チ定理ノ證明ナリ。

例ヘバ前節定理ノ[1]ハ次ノ如シ。

$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ,

「邊 $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A=D$ ナラバ」ハ假リニ定ムルコトナルヲ以テコレ假設ナリ。

而シテ「$\triangle ABC \equiv DEF$ ナリ」ハ上ノ通リ定ムルトキニ生ズル結果ニシテコレ終結ナリ。

**問 1.** 前節定理[2]ノ假設及ビ終結ヲ述ベヨ。

**問 2.** $\triangle ABC$ ノ邊 $BC$ ノ中點*ヲ $D$ トシ, $AD$ ヲ結ビ,之ヲ $D$ ノ方ヘ延長シ,其上ニ $E$ 點ヲ取リ, $DE$ ヲ $DA$ ニ等シクシ, $BE$ ヲ結ベバ $\triangle ACD$, $\triangle BDE$ ハ合同ナルコトヲ證明シ,ヨリテ以テ $BE=AC$ 及ビ $\angle DAC=E$, $\angle C=EBD$ ナルコトヲ證明セヨ。

* 線分ヲ二等分スル點ヲ其線分ノ中點ト云フ。一ツノ線分ノ中點ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル。

**29. 定義** 三角形ノ中線トハ頂點ト其對邊ノ中點トヲ結ブ線分ナリ。

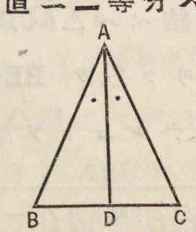
問1. △ABCノ頂點Aヨリ出ヅル中線ガBCノ垂線ナルトキハ, AB=ACナリ。

問2. 三角形ノ一角ノ二等分線ガ其角ノ對邊ニ垂直ナルトキハ,其三角形ノ二邊ハ相等シ。

**30. 定義** 二等邊三角形或ハ等脚三角形トハ,二邊ガ相等シキ三角形ナリ。

二等邊三角形ニ於テハ,其二ツノ相等シキ邊ノ會點ヲ特ニ其頂點ト云ヒ,頂點ニ於ケル角ヲ其頂角,其對邊ヲ其底邊又ハ底ト云ヒ,底ノ兩端ニアル角ヲ其底角ト云フ。

**31. 定理** 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ,其底邊ヲ垂直*ニ二等分ス。




(第27節ノ定理[1]ヲ用ヒテ學生之ヲ證明セヨ)。

* 底ニ垂直ニシテ且其中點ヲ過グルコトナリ。



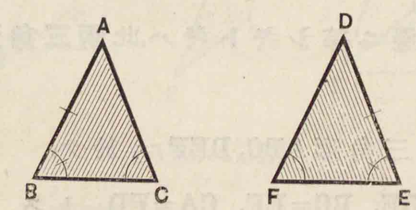
系一。 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シ。

系二 三角形ノ三邊ガ相等シキトキ(之ヲ等邊三角形ト云フ)ハ其三ツノ角ハ相等シ。

**32. 定理** 三角形ノ二角ガ相等シキトキハ之ニ對スル二邊ハ相等シ。

假設 △ABCニ於テ∠B=Cトス。

終結 AB=ACナリ。




證明 △ABCヲ裏返シタルモノヲ△DEFトス。

兩三角形ABC, DEFニ於テ,

∠B=E, ∠C=F (假設)

ニシテ BC=EF ナリ。 (假設)

故ニ △ABC≡DEF (27節[2])

故ニ AB=DF

然ルニ DF=AC (作圖)

故ニ AC=AB

系 三角形ノ三ツノ角ガ相等シキトキハ,其三ツノ邊ハ相等シ。

33. **定義** **正三角形**トハ三ツノ邊ガ相等シク,從テ三ツノ角モ相等シキ三角形ナリ。

34. **定理** **一ツノ三角形ノ三邊ガ夫々他ノ三角形ノ三邊ニ等シキトキハ,此兩三角形ハ合同ナリ。**

**假設** 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ,

AB=DE, BC=EF, CA=FD トス。

**終結** △ABC≡DEF

**證明** △DEF ノ邊 DF ヲ △ABC ノ邊 AC ニ重ネテ之ヲ △ACG ノ位置ニ置キ, BG ヲ結ベバ,

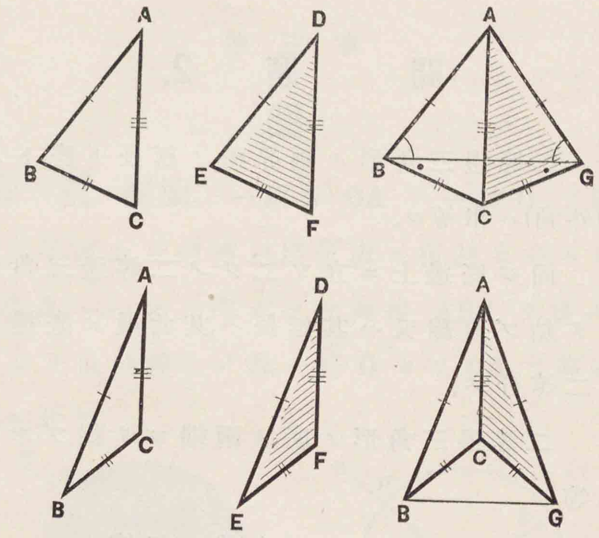
AB=AG ナル故,　∠AGB=ABG　(31節系一)

又 CB=CG ナル故,　∠CGB=CBG,

故ニ　∠AGC=ABC

故ニ兩三角形 ABC ト AGC トハ二邊ト其夾角ヲ夫々相等シクスルヲ以テ合同ナリ。






依テ　△ABC≡DEF

問 1. 二等邊三角形ノ頂點ヨリ出ヅル中線ハ底邊ニ垂直ナリ。又頂角ヲ二等分ス。

問 2. 前數節ニ於テ學ビタル兩三角形ノ合同ナル場合ヲ列擧セヨ。

**注意** 合同ナル兩三角形ニ於テハ,相等シキ角ハ夫々相等シキ邊ニ對シ,又相等シキ邊ハ夫々相等シキ角ニ對ス。

問 3. 二邊ト一角トヲ夫々相等シクスル兩三角形ハ合同ナリト云ヒ得ルカ。

## 問　題　2.

1. 二等邊三角形ノ兩等邊ノ延長ト底トノナス角(外角)ハ相等シ。

2. 同ジ底邊上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ結ブ直線又ハ其延長ハ,其共通ノ底邊ヲ垂直ニ二等分ス。

3. 二等邊三角形ノ底ノ兩端ヨリ出ヅル中線ハ相等シ。

4. 正三角形ノ三ツノ中線ハ相等シ。

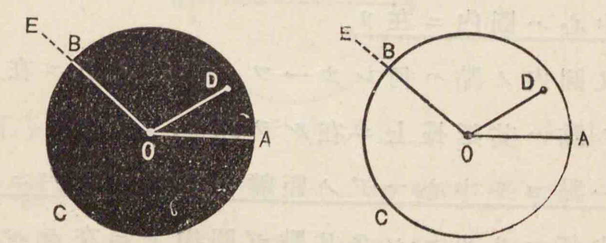
5. 合同ナル兩三角形ノ對應スル邊ヲ二等分スル中線(又對應角ヲ二等分スル二等分線ノ頂點ト對邊トノ間ニアル部分)ハ相等シ。

### 第三章

# 圓

**35. 圓, 圓周。** 一線分 OA ノ一端 O ヲ固定シ,之ヲ平面上ニ廻轉シ原位置ニ復歸セシムレバ,他ノ端 A ハ一ツノ閉ヂタル曲線 ABC ヲ畫ク。

而シテ此曲線上ノ點ハ皆 O ヨリ OA ニ等シキ距離ニ在リ。




**定義** 圓トハ一ツノ曲線ニテ圍マレタル平面形ニシテ,此曲線ハ其上ノ點ガ皆或一點ヨリ等距離ニ在ルモノナリ。此曲線ヲ**圓周**ト云ヒ,其點ヲ圓ノ**中心**ト云フ。而シテ中心ヨリ圓周マデ引ケル線分ヲ圓ノ**半徑**ト云フ。

故ニ　**同ジ圓ノ半徑ハ皆相等シ。**

圓又ハ圓周ヲ表ハスニハ圓周上ノ三點ヲ表ハス文字ヲ列記ス。

例ヘバ圓**ABC**, 圓周**ABC**ノ如シ。

時ニハ圓ヲ表ハスニ其中心ヲ表ハス文字ヲ以テスルコトアリ。例ヘバ圓**O**ト云フガ如シ。

圓周ニテ圍マルル部分(上ノ**OA**ガ廻轉シタルトキ觸レタル部分)ヲ**圓內**ト云ヒ,平面ノ他ノ部分ヲ**圓外**ト云フ。

中心ハ圓內ニ在リ。

又圓內ノ點ハ何レカ一ツノ半徑ノ上ニ在リ,圓外ノ點ハ其延長上ニ在ルヲ以テ,

一點ヨリ中心マデノ距離ハ,其點ガ圓內ニ在ラバ半徑ヨリ小ニシテ,其點ガ圓周上ニ在ラバ半徑ニ等シク,其點ガ圓外ニ在ラバ半徑ヨリ大ナリ。

又反對ニ, 一點ヨリ中心マデノ距離ガ,其圓ノ半徑ヨリ小ナラバ其點ハ圓內ニ在リ,其距離ガ半徑ニ等シキトキハ其點ハ圓周上ニ在リ,又其距離ガ半徑ヨリ大ナラバ其點ハ圓外ニ在リ。

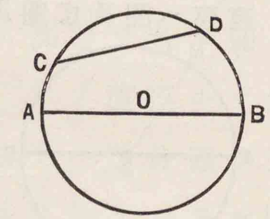
故ニ 一點ヨリ等シキ距離ニ在ル點ハ皆,其點ヲ中心トシ其距離ヲ半徑トスル圓周上ニ在リ。



從テ 圓ノ中心ヲ固定シ,此圓ヲ自己ノ平面上ニ廻轉スレバ,其各位置ハ常ニ原圓ニ合ス。

依テ 同ジ中心ヲ有シ等シキ半徑ヲ有スル圓及ビ圓周ハ唯一ツアルノミ。

**36.** **定義** 弧トハ圓周ノ一部分ナリ。




**弦**トハ弧ノ兩端ヲ結ブ線分ニシテ,其中心ヲ通過スルモノヲ特ニ**直徑**ト云フ。

上ノ圖ニ於テ**CD**ハ弦ニシテ,**AB**ハ直徑ナリ。

故ニ直徑ハ皆中心ヲ通過シ,且其中心ニテ二等分セラル。

從テ 直徑ハ半徑ノ二倍ナリ。

依テ 同ジ圓ノ直徑ハ皆相等シ。

又圓ノ中心ハ其直徑ノ中點ナルヲ以テ,

圓ノ中心ハ唯一ツアルノミ。

故ニ 二ツノ圓周ガ相合スレバ,其中心モ亦相

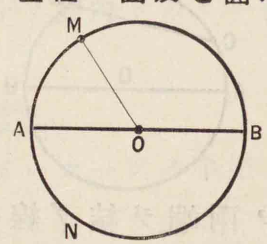
合ス。

故ニ合同ナル圓(等圓)ノ半徑ハ相等シ。

又相等シキ半徑ヲ有スル圓ハ合同ナリ。

**問.** 大ナル半徑ヲ有スル圓ハ,小ナル半徑ヲ有スル圓ヨリ大ナリ。

## 37. **定理** 直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分ス。




**假設** AMBN ヲ一ツノ圓,O ヲ其中心トシ,AB ヲ其一ツノ直徑トス。

**終結** AB ハ此圓及ビ圓周ヲ二等分ス。

**證明** AB ヲ折目トシテ AMB ナル部分ヲ ANB ナル部分ノ上ニ重ヌルトキハ, 弧 AMB 上ノ點ハ皆中心 O ヨリ此圓ノ半徑ダケノ距離ニ在ルヲ以テ,弧 ANB ノ上ニ重ナル。

同様ニ此時弧 ANB 上ノ點ハ皆弧 AMB ノ上ニ重ナル,



故ニ此兩部分ハ全ク相重ナル。

依テ AB ハ此圓及ビ圓周ヲ二等分ス。

**系** 直交スル二ツノ直徑ハ,圓及ビ圓周ヲ四等分ス。

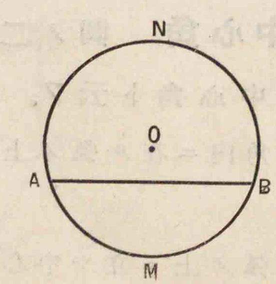
## 38. **定義** **半圓**。直徑ニテ分タレタル圓ノ二ツノ部分ヲ各**半圓**ト云フ。

垂直ナル二ツノ直徑ニテ分タレタル四部分ヲ各**象限**又ハ**四分圓**ト云フ。

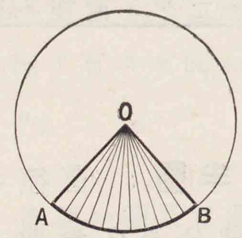
**弓形**。弦ニテ分タレタル圓ノ二ツノ部分ヲ**弓形**ト云ヒ,其大ナルモノヲ**優弓形**,小ナルモノヲ**劣弓形**ト云フ。

劣弓形ハ半圓ヨリ小ナリ。

中心ハ優弓形内ニ在リ。



**39. 扇形。** 圓ノ二ツノ半徑ノ間ニ在ル部分ヲ**扇形**ト云フ。




上ノ圖ニ於テ AOB ハ扇形ナリ。

又兩半徑 OA, OB ノ間ニハ二ツノ弧ト二ツノ角アリ,而シテ此兩弧ハ合セテ全圓周ヲ成シ,其兩端ハ共通ナリ,カクノ如キ二ツノ弧ヲ**共軛弧**ト云ヒ,其大ナルモノヲ**優弧**,小ナルモノヲ**劣弧**ト云フ。

但シ單ニ弧ト言ハバ通例劣弧ヲ指スモノトス。

劣弧ハ半圓周ヨリ小ナリ。

**40. 定義 中心角。** 圓ノ二ツノ半徑ノ夾ム角ヲ圓ノ**中心角**ト云フ。

圓ノ中心角ハ其角内ニ在ル弧ノ上ニ**立ツ**ト云フ。

**注意** 兩共軛弧ノ上ニ立ツ中心角ハ共軛角

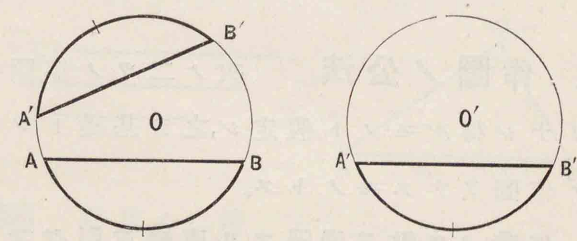


ナリ。

**41. 定理** 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ就キテ次ノ定理アリ。皆重置法ニヨリテ證明スルコトヲ得ベシ。

**[1] 等弧ノ弦ハ相等シ。**

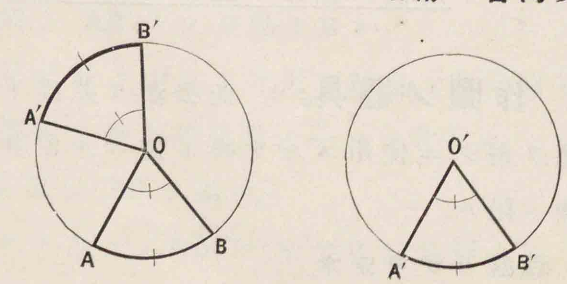
**[2] 等弦ヲ有スル弧ハ相等シ。**




**[3] 相等シキ中心角ニ對スル弧ハ相等シ。**

**[4] 等弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シ。**

**[5] 等シキ中心角ヲ有スル扇形ハ合同ナリ。**



## 第四章

# 作圖題

**42. 定義** 作圖題トハ所設ノ條件ニ適スル圖形ヲ畫ク方法ヲ求ムル問題ナリ。

作圖ノ方法ヲ單ニ作圖ト云ヒ,得タル圖形ヲ其解答ト云フ。

**43. 作圖ノ公法。** 次ノ二ツノ作圖ハ初メヨリナシ得ルモノト假定シ,之ヲ基礎トシテ順次他ノ作圖ヲナスモノトス。

[1] **任意ノ二點ヲ通過スル直線ヲ引クコト。**

[2] **任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫クコト。**

[1]ニヨリテ所設ノ線分ヲ延長スルコトヲ得。

**44. 作圖ノ器具。** 此公法ヲ基礎トシテ作圖題ヲ解クニ使用スルヲ得ト定ムル器具ハ次ノ二種ニ限ル。

[1] **目盛リナキ定木。**





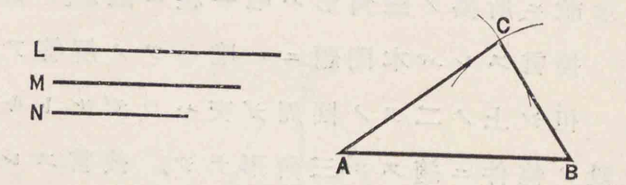
[2] **兩脚器即チこんぱす。**

[1]ハ直線ヲ引クニ用ヒ,[2]ハ圓周ヲ畫クニ用フ。

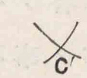
**45. 作圖題** **三邊ガ夫々所設ノ三線分ニ等シキ三角形ヲ作レ。**

**題意** L, M, N ヲ所設ノ三線分トス。

夫々 L, M, N ニ等シキ三邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコトヲ求ム。




**作圖** 任意ノ直線 AB ヲ引キ, (公法[1])




其上ノ一點 A ヲ中心トシ L ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫キ, (公法[2])

此圓周ト AB トノ交點ヲ B トス。

A 及ビ B ヲ中心トシ,夫々 M 及ビ N ニ等シキ半徑ノ圓周ヲ畫キ,其交點ノ一ツヲ C トス。 (公法[2])

AC 及ビ BC ヲ結ベ。 (公法[1])

然ルトキハ △ABC ハ所要ノ三角形ナリ。

**證明** △ABC ノ三邊 AB, AC,BC ハ夫々所設ノ三線分 L, M, N ニ等シ。 (作圖)

故ニ此三角形ハ所設ノ條件ニ適ス。

**注意** 上ニ畫キタル二ツノ圓周ハ C 點ノ外尙一ツノ點ニ於テ交ハル,此交點ヲ C′ トセバ △ABC′ モ亦所設ノ條件ニ適スルモノナリ。

サレド △ABC′ ト △ABC トハ合同ナリ。 (34節)

故ニ所要ノ三角形ハ唯一種ニ限ル。

換言スレバ本問題ニハ唯一ツノ解答アリ。

但シ上ノ二ツノ圓周ガ交ハラザルトキハ,所設ノ條件ニ適スル三角形ナシ。換言スレバ問題ハ解答ヲ有セズ。

此等ノ事項ニ關シテハ後篇ニ詳論スベシ。

**46.** 次ノ作圖題ハ容易ニ解クコトヲ得ベシ。

**作圖題** **所設ノ線分ニ等シキ邊ヲ有スル正三角形ヲ作レ。**

問1. 底邊ト他ノ邊トヲ與ヘテ二等邊三角形ヲ作レ。

問2. 所設ノ二點ヨリ所設ノ等距離ヲ有スル



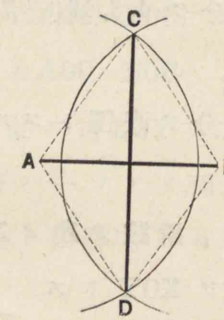
點ヲ求メヨ。

問3. 所設ノ二點ヨリ夫々所設ノ距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

**47.** **作圖題** **所設ノ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線(之ヲ垂直二等分線ト云フ)ヲ引ケ。**

**題意** 所設ノ線分ヲ AB トス。

AB ヲ垂直ニ二等分スル直線ヲ引コトヲ求ム。




**作圖** AB ノ兩端ヲ中心トシ,等シキ半徑ヲ有スル相交ハル二ツノ圓周(圓周ノ全部ヲ畫クニ及バズ)ヲ畫キ,其交點ヲ C 及ビ D トス。 (公法〔2〕)

CD ヲ結べ。 (公法〔1〕)

然ルトキハ,CD ハ所要ノ直線ナリ。

**證明** AC, BC, AD, BD ヲ結ベバ,

$\triangle ACD \equiv BCD$ (34節)

$\therefore \angle ACD = BCD$

而シテ$\triangle ACB$ハ二等邊三角形ニシテ$\angle ACB$ハ其頂角ナリ。 (作圖)

故ニCDハABヲ垂直ニ二等分ス。 (31節)

**注意** 所要ノ直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。 (18節及ビ27頁脚注)

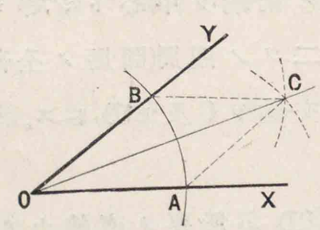
問1. 所設ノ線分ヲ4, 8, 16(一般ニ$2^n$, $n$ハ正ノ整數)箇ニ等分セヨ。

*問2. 所設ノ線分ヲ直徑トスル圓周ヲ畫ケ。

## 48. 作圖題 所設ノ角ノ二等分線ヲ引ケ。

**題意** 所設ノ角ヲXOYトス。

$\angle XOY$ノ二等分線ヲ引クコトヲ求ム。






**作圖** 頂點Oヲ中心トシ任意ノ圓周ヲ畫キ,二邊トA及ビBニ於テ交ハラシム。 (公法[2])

A及ビBヲ中心トシ,相等シキ半徑ヲ有シ相交ハル二ツノ圓周ヲ畫キ,其交點ヲCトス。 (公法[2])

直線OCヲ引ケ。 (公法[1])

然ルトキハOCハ所要ノ二等分線ナリ。

**證明** 兩三角形AOC, BOCノ三邊ハ夫々相等シ。 (作圖)

故ニ $\triangle AOC \equiv BOC$ (34節)

$\therefore \angle AOC = BOC$

依テOCハ所設ノ角XOYヲ二等分ス。

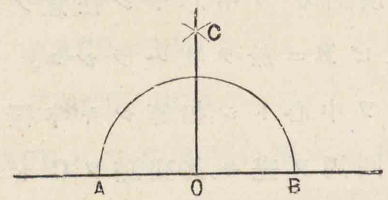
**注意** 解答ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

問. 所設ノ角ヲ四等分セヨ,又八等分セヨ。

## 49. 作圖題 所設ノ直線上ノ所設ノ點ヲ過ギ,其直線ニ垂線ヲ引ケ。

**題意** ABヲ所設ノ直線トシ,Oヲ其上ノ所設ノ點トス。

Oヲ過ギABニ垂直ナル直線ヲ引クコトヲ求ム。




**作圖** 平角AOBノ二等分線OCヲ引ケ。 (48節)

然ルトキハ, OCハ所要ノ垂線ナリ。

**證明** 略ス。

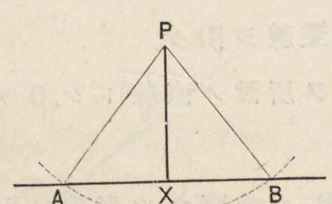
**注意** 解答ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

問. $45^\circ$及ビ$135^\circ$ノ角ヲ作レ。

**50. 作圖題** 所設ノ直線外ノ所設ノ點ヨリ此直線ニ垂線ヲ引ケ。

**題意** 所設ノ直線ヲAB,所設ノ點ヲPトス。

PヨリABヘ垂線ヲ引クコトヲ求ム。




**作圖** Pヲ中心トシ,ABニ交ハル任意ノ圓周



ヲ畫キ,其交點ヲA及ビBトス。 (公法〔2〕)

∠APBノ二等分線PXヲ引ケ。 (48節)

然ルトキハPXハ所要ノ垂線ナリ。

**證明** △PABハ二等邊三角形ニシテPハ其頂點ナリ。 (作圖)

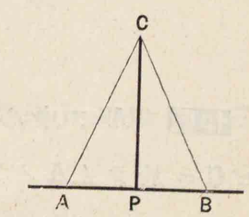
故ニPXハABニ垂直ナリ。 (31節)

即チPXハPヲ過ギルABノ垂線ナリ。

**注意** 解答ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル。

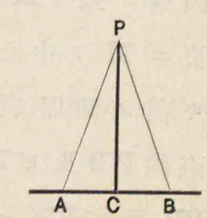
問. 一點Pヨリ一直線ABニ垂線ヲ引クニ,實地測量ニ於テハ次ノ如キ方法ヲ用フ。其理ヲ說明セヨ。

[1] PガAB上ニ在ルトキ。




AB上ニPヨリ其兩側ニPA=PBナル樣ニA及ビBヲ取リ,A及ビBヨリ,PAヨリハ長キ相等シキ二ツノ繩ヲ引キ,其他ノ端ヲ合セテ之ヲCトシ,PCヲ結ブトキハ,PCハ所要ノ垂線ナリ。

[2] PガAB外ニ在ルトキ。

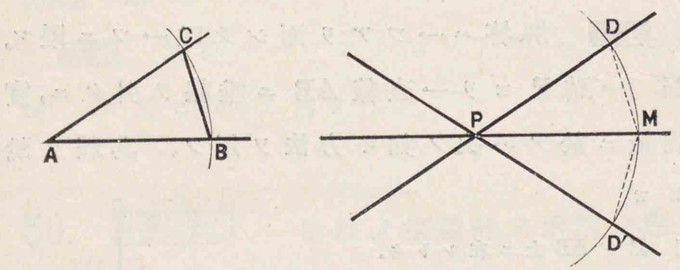



Pヨリ二ツノ相等シキ繩ヲ引キ,他ノ端ヲABニ合セ其點ヲA及ビBトシ,ABノ中點Cヲ求メPCヲ結ブベシ。

**51. 作圖題** **所設ノ直線上ノ所設ノ點ニ於テ,其直線ト所設ノ角ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引ケ。**

**題意** 所設ノ直線ヲ PM, 所設ノ點ヲ P シト, 所設ノ角ヲ BAC トス。

P ヲ過ギ, PM ト $\angle BAC$ ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求ム。




**作圖** A ヲ中心トスル任意ノ圓周ヲ畫キ, B 及ビ C ニ於テ $\angle A$ ノ二邊ト交ハラシム。 (公法〔2〕)

次ニ P ヲ中心トシ前ノ圓ノ半徑ニ等シキ半徑ノ圓周ヲ畫キ, M ニ於テ PM ト交ハラシム。 (公法〔2〕)

更ニ M ヲ中心トシ BC ニ等シキ半徑ノ圓周ヲ畫キ,前ノ圓周ト D 及ビ D' ニ於テ交ハラシム。

直線 PD 及ビ PD' ヲ引ケ。 (公法〔1〕)

PD 及ビ PD' ハ所要ノ直線ナリ。



**證明**. 三角形 MPD, MPD' 及ビ BAC ハ三邊ガ夫夫相等シキヲ以テ合同ナリ。

故ニ $\angle MPD$ 及ビ MPD' ハ共ニ $\angle BAC$ ニ等シ。

依テ PD 及ビ PD' ハ共ニ所要ノ直線ナリ。

**注意** 作圖ハ常ニ可能ナリ。

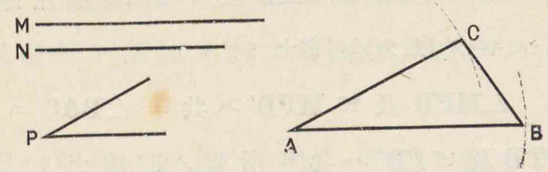
次ニ P ヲ中心トシテ畫キタル圓周ハ PM ト M ノ外尙一ツノ點ニ於テ交ハルヲ以テ, D ノ如キ點尙二ツヲ得レドモ,其等ハ夫々直線 PD ト PD' ノ上ニ在ルベキヲ以テ,解答ハ上ノ二ツナリ。

問. 所設ノ角ガ直角ナラバ如何。

**52. 作圖題** **二邊ト其夾角トヲ知リテ三角形ヲ作レ。**

**題意** M, N ヲ二邊ノ長サトシテ與ヘラレタル二ツノ線分, $\angle P$ ヲ其夾角ノ大サトシテ與ヘラレタル角トス。

二邊ガ夫々 M, N ニ等シクシテ,其夾角ガ $\angle P$ ニ等シキ三角形ヲ畫クコトヲ求ム。




**作圖** 任意ノ直線ABヲ引キ, (公法〔1〕)

其上ノ任意ノ一點Aヲ中心トシ,Mニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫キ,ABトノ交點ヲBトス。(公法〔2〕)

AヨリABト∠Pニ等シキ角ヲ作ル直線ACヲ引ケ。(51節)

Aヲ中心トシNニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫キ,ACトノ交點ヲCトス。(公法〔2〕)

BCヲ結ベ。(公法〔1〕)

然ラバ△ABCハ所要ノ三角形ナリ。

**證明** 學生之ヲナスベシ。

**注意** 所要ノ三角形ハ唯一種ニ限ル。

問. 頂角ト其邊トヲ知リテ等脚三角形ヲ作レ。

## 53. 作圖題 二角ト其頂點間ノ邊トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

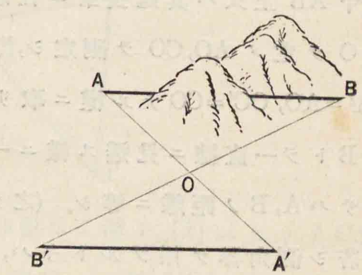
(前節ノ解法ニ準ジテ學生之ヲ解クベシ。)



問. 頂角ト頂點ヨリ底邊マデ引ケル垂線(高サ)トヲ知リテ二等邊三角形ヲ作レ。

## 54. 測量上ノ應用。

[1] 間接ニ二點間ノ距離ヲ測定スルコト。




A,Bヲ山ノ兩側又ハ湖沼ヲ隔テタル二點ノ如ク,其距離ヲ直接ニ測定スルコト困難ナル二點トス。

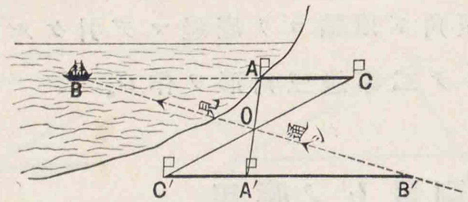
今此兩地點間ノ距離ヲ測定センニ,A及ビBマデ一直線ニ歩ミ得ベキ一點Oヲ取リ,AヨリOヲ經テ一直線ニ$OA'=AO$ナル樣ニA′點ヲ求メ,

又BヨリOヲ經テ$OB'=BO$ナル樣ニB′ヲ求メ,

A′B′間ノ距離ヲ測定セバ,コレAB間ノ距離ニ等シ。

(之ヲ證明セヨ。)

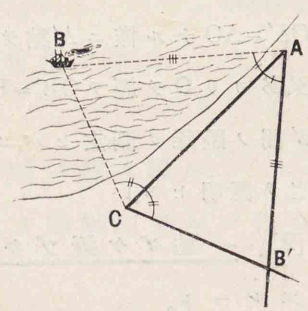
[2] 一點ダケ近ヅキ得ベキ二點間ノ距離ヲ測定スルコト。




A,Bヲ二點トシ,Aダケ近ヅキ得ルモノトス。

今AB上又ハ其延長上ニ任意ノ一點Cヲ取リ,又他ニ一點Oヲ定メAO,COヲ測定シ,其延長上ニ$A'$及ビ$C'$ヲ夫々$OA'=AO$, $OC'=CO$ナル樣ニ取リ,直線$C'A'$又ハ其延長上ニOトBトヲ一直線ニ見透ス樣ニ一點$B'$ヲ取ラバ,線分$A'B'$ノ長サハA,Bノ距離ニ等シ。(之ヲ證明セヨ。)

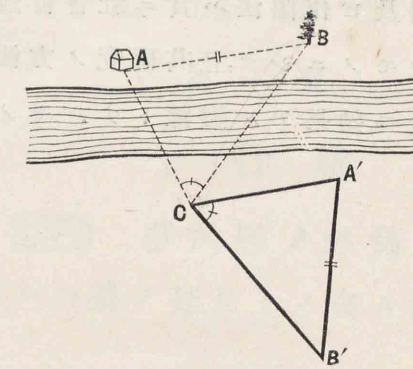
若シ測角器ヲ用フルトキハ,Aヨリ適宜ニ一線分ACヲ引キ,Aニ於テ$\angle CAB$ニ等シキ角ヲACト其反對ノ側ニ作ル直線ヲ引キ,又Cニ於テCAト$\angle ACB$ニ等シキ角ヲ其反對ノ側ニ作ル直線$CB'$ヲ引キ,此兩直線ノ交點ヲ$B'$トシ,A,$B'$間ノ距離ヲ測定スベシ。




今ヨリ約2500年前有名ナル希臘ノ數學者たーれすハ此方法ニヨリテ海岸ヨリ海上ニ在ル船マデノ距離ヲ測リタリト云フ。



[3]　共ニ近ヅクコトヲ得ザル二點間ノ距離(AB)ヲ測定スルコト。




先ヅA,Bヲ望見シ得ル一地點Cヲ選ミ,[2]ニヨリテCA,CBノ距離ヲ求メ,次ニCヨリ適宜ニ二線分$CA'$,$CB'$ヲ引キ,其長サヲ夫々CA,CBニ等シクシ,且$\angle A'CB'$ヲ$\angle ACB$ニ等シクシ$A'B'$ヲ測定セバ,コレABニ等シキモノナリ。

或ハ$\angle A'CB'=ACB$ナラシムル代リニ,$CA'$及ビ$CB'$ヲ夫夫CA及ビCBニ垂直ナラシムルモ可ナリ。

## 55. 幾何學ノ目的

**55.** **幾何學ノ目的**ハ物體ノ形,大サ及ビ位置ニ關スル眞理ヲ研究スルニアルコトハ既ニ言ヘリ,而シテ其研究ノ方法ハ既ニ示シタルガ如ク,既定ノ事項ヲ基礎トシテ次第ニ新ラシキ圖形

ヲ觀察シ,其等ニ關スル眞理ヲ探究シ,且之ヲ確定シ,又各種ノ圖形ヲ畫ク方法ヲ研究スルニアリ。

此等ノ眞理及ビ作圖法ハ實ニ社會百般ノ工藝ノ基礎トナルモノニシテ,且其研究ノ方法ハ,吾人ノ思考力ノ最モ効果アル鍛錬トナルモノナリ。

# 第二篇

# 直線圖形

## 第一章

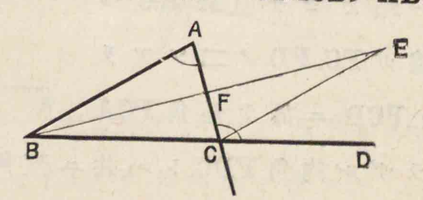
## 平行線

**56.** **定義** **多角形ノ外角**トハ一邊ト之ニ隣レル邊ノ延長トノ夾ム角ナリ。

**57.** **定理** **三角形ノ外角ハ之ニ隣ラザル內角ノ何レヨリモ大ナリ。**

**假設** △ABCノ邊BCヲC*ノ方ヘ延長シ,其上ノ任意ノ一點ヲDトス。

**終結** ∠ACD>BAC及ビ∠ACD>ABC




* BCヲCノ方ヘ延長シタルモノヲBCノ延長, Bノ方ヘ延長シタルモノヲCBノ延長ト云ヒテ區別スルコトトス。

**證明** 邊 AC ノ中點ヲ F トシ, BF ヲ結ビ之ヲ延長シテ FE=BF ナル様ニ E ヲ取リ, EC ヲ結ベバ, F ハ ∠ABC 内ニ在ルヲ以テ BE モ亦此角ノ内ニ在リ,故ニ E 點ハ ∠ACD 内ニ在リ。

依テ CE ハ ∠ACD 内ニ在リ。

故ニ $\angle ACD > ACE$ (6頁[1])

然ルニ $\triangle CEF \equiv ABF$ (第27節)

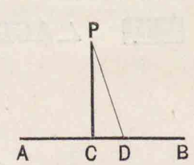
$\therefore \angle ACE = BAC$

$\therefore \angle ACD > BAC$

同様ニ $\angle ACD > ABC$

問. O ヲ △ABC 内ノ任意ノ一點トセバ ∠BOC ハ ∠A ヨリ大ナリ。

系 直線外ノ一點ヨリ其直線ヘ引ク垂線ハ唯一ツニ限ル。




其故ハ一點 P ヨリ直線 AB ヘ引ケル垂線ガ PC, PD ノ二ツアリトセバ, △PCD ニ於テ外角 PCA ト之ニ隣ラザル内角 PDC トハ共ニ直角ニシテ相等シ。コレ上ノ定理ニヨリテ不合理ナレバナリ。

**注意** 第50節及ビ上ノ系ニヨリテ次ノ事實

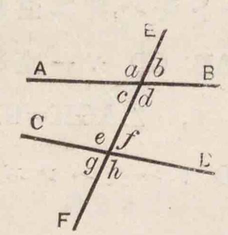


ヲ得。

直線外ノ一點ヨリ其直線ヘ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル。

**58.** **定義** **一點ト一直線トノ距離**トハ,其點ヨリ其直線マデ引キタル垂線ノ長サナリ。

**59. 外角,内角,錯角,同位角。** 一直線ガ二直線ト交ハルトキハ,其交點ヲ頂點トスル八ツノ角ヲ作ル,此等ノ角ニ夫々次ノ如キ名稱ヲ附ス。




上圖ノ如ク角ニ命名スレバ四角 $a, b, g, h$ ヲ各**外角**ト云ヒ, $c, d, e, f$ ヲ各**内角**ト云ヒ, 二角 $c$ ト $f$ 及ビ二角 $d$ ト $e$ ヲ各**錯角**ト云ヒ, $a$ ト $e$; $b$ ト $f$; $c$ ト $g$ 及ビ $d$ ト $h$ ヲ各**同位角**ト云フ。

問. 上ノ圖ニ於テ $\angle a=100^\circ$, $\angle f=80^\circ$ ナルトキハ,殘リノ六ツノ角ノ大サ如何。

又 $\angle c=f=60^\circ$ ナラバ如何。

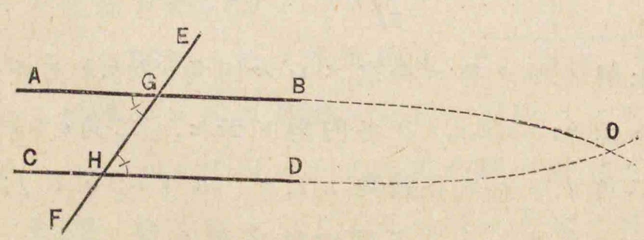
(系) 二直線ガ一直線ト交ハリテナス所ノ角ノ中,一組ノ錯角ガ相等シキトキハ,他ノ一組ノ錯角モ相等シク,四組ノ同位角ハ各相等シク,後ノ直線ノ同側ニ在ル二ツノ内角ハ互ニ補角ナリ。

又一組ノ同位角ガ相等シキトキモ,後ノ直線ノ同側ニ在ル内角ガ互ニ補角ナルトキモ同樣ナリ。

**60.** **定理** **二直線ガ一直線ト交ハリテ相等シキ錯角ヲ作ルトキハ,其二直線ハ交ハラズ。**

**假設** 二直線 AB, CD ガ一直線 EF ト夫々 G 及ビ H ニ於テ交ハリ, $\angle AGH=GHD$ トス。

**終結** AB ト CD トハ交ハラズ。






**證明** 今假ニ AB, CD ガ其 B, D ノ方ニ於テ交ハルトシ,其交點ヲ O トセン。

然ラバ $\triangle OGH$ ヲ生ジ, $\angle AGH$ ハ其一外角ニシテ $\angle GHD$ ハ之ニ隣ラザル内角ナリ。

故ニ $\angle AGH$ ハ $\angle GHD$ ヨリ大ナルヲ要ス。(57節)

コレ假設ニヨリテ不可能ナリ。

故ニ AB, CD ハ B, D ノ方ニ於テハ交ハラズ。

同樣ニ AB, CD ハ A, C ノ方ニ於テモ交ハラズ。

故ニ AB, CD ハ交ハラズ。

**61.** **定義** **平行線トハ同一ノ平面上ニ在リテ相交ハラザル二直線ナリ。**

二直線 AB, CD ガ平行ナルコトヲ次ノ如ク記ス。

$$AB \parallel CD$$

**注意** 同一ノ平面上ニ在ル二直線ハ相交ハルカ,又ハ平行ナリ。

相交ハル直線ヲ**相交線**ト云フ。

前節ノ定理ハ次ノ如ク述ブルヲ得。

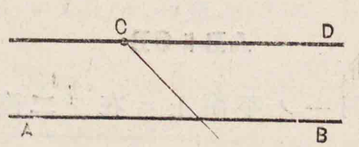
二直線ガ一直線ト交ハリテナス角ノ中,一組ノ錯角ガ相等シキトキハ,其二直線ハ平行ナリ。

系一。　二直線ガ一直線ト交ハリテナス角ノ中,一組ノ同位角ガ相等シキカ,此第三直線ノ同側ニ在ル內角ガ補角ヲナストキハ,其二直線ハ平行ナリ。

系二。　同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ平行ナリ。

前節ノ定理又ハ本節ノ系ニヨリテ學生ハ容易ニ次ノ作圖題ヲ解クコトヲ得ベシ。

**62.　作圖題　所設ノ點(C)ヲ過ギ,所設ノ直線(AB)ニ平行ナル直線ヲ引ケ。**




問.　三角定木二枚又ハ直線定木ト三角定木各一枚トヲ用ヒテ平行線ヲ引ケ。



**63.　公理　六。　一直線外ノ一點ヲ通過シ,此直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。**

前節ト上ノ公理トヨリシテ次ノコトヲ知ル。

一直線外ノ一點ヲ通過シ,此直線ニ平行ナル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

系一。　平行線ノ一ツニ交ハル直線ハ亦他ノ一ツニモ交ハル。

系二。　平行線ノ一ツニ平行ナル直線ハ亦他ノ一ツニモ平行ナリ。

系三。　同ジ直線ニ平行ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

上ノ三ツノ系ヲ證明スルニハ,假ニ其終結ヲ否定シテ上ノ公理ニ戾ルコトノ生ズルコトヲ示シ,以テ其終結ガ眞ナルコトヲ論斷スベシ。

カク終結ヲ假ニ否定シテ,既定ノ公理,定義,定理ニ戾ルカ,又ハ所設ノ假設ニ反スル(第60節ノ證明參照)コトノ起ルヲ示シ,以テ其終結ハ眞ナリト斷定スル證明法(論理的方法)ヲ歸謬法ト云フ。

問1.　既ニ學ビタル定理ノ證明ノ中歸謬法ニヨレルモノヲ擧ゲヨ。

**問2.** 隣接角ノ共通ナラザル二邊ガ一直線ヲナサザレバ,其二角ノ和ハ2直角ニ等シカラズ。

又隣接角ノ和ガ2直角ニ等シカラザレバ,其共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナサズ。

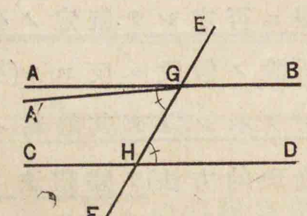
*問3. 平行線ノ各ニ夫々平行ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。

*問4. 相交線ノ各ニ夫々平行ナル二直線ハ相交ハル。

**64. 定理 平行線ガ一直線ト交ハラバ,其錯角ハ各相等シ。**

**假設** 平行線 AB,CD ガ一直線 EF ト夫々 G,H ニ於テ交ハルトス。

**終結** ∠AGH=GHD 及ビ ∠BGH=GHC




**證明** G ヲ過ギ ∠GHD ニ等シクシテ,且之ト錯



角ノ位置ニ在ル角ヲ GH ト作ル直線 GA′ ヲ引ケバ,GA′ ハ G ヲ過ギ CD ニ平行ナル直線ナリ。(60節)

然ルニ AB モ亦 G ヲ過ギ CD ニ平行ナル直線ニシテ,カクノ如キ直線ハ唯一ツニ限ルヲ以テ,

GA′ ハ GA ニ重ナル。

故ニ ∠AGH ハ ∠A′GH ニ重ナル。

然ルニ ∠A′GH ハ ∠GHD ニ等シ。

故ニ ∠AGH=GHD

同様ニ ∠BGH=GHC

**系一。** 平行線ガ一直線ト交ハルトキハ,同位角ハ各相等シク,又此第三直線ノ同ジ側ニ在ル内角ノ和ハ各2直角ニ等シ。

**問1.** 平行線ガ一直線ト交ハリテナス角ノ中,一ツガ45°ナラバ,他ノ七ツノ角ノ大サ各如何。

**系二。** 平行線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ亦他ノ一ツニモ垂直ナリ。

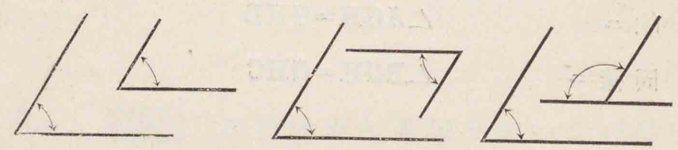
**注意** 此事柄ヲ平行線ハ**共通垂線**ヲ有スト云フ。

**問2.** 平行線ノ各ニ夫々垂直ナル二直線ハ平

行ナリ,

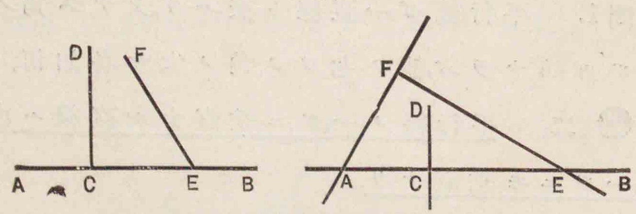
**系** **三**。一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ平行ナルトキハ,此二角ハ相等シキカ,又ハ互ニ補角ナリ。

兩角ノ邊ノ方向ニヨリテ相等シキ場合ト,補角ナル場合トヲ區別セヨ。又角ノ種類ニヨリテモ區別セヨ。



**系** **四**。同ジ直線ノ垂線ト斜線トハ相交ハル,

**系** **五**。相交線ノ各ニ夫々垂直ナル直線ハ相交ハル。



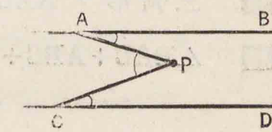

(系四,系五ハ共ニ歸謬法ニヨルベシ。)



## 問題 3.

**1.** 若干ノ直線アリ,其何レノ二ツヲ取ルモ互ニ平行ナルトキハ,其何レカ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ總テニモ垂直ナリ。

**2.** 平行線 AB, CD ノ間ニ圖ノ如ク任意ノ一點Pヲ取ルトキハ,




$\angle APC = BAP + DCP$

ナリ。

**3.** 二等邊三角形ノ頂點ヲ過ギ底ニ平行ナル直線ハ頂點ニ於ケル外角ヲ二等分ス。

**4.** 二ツノ相等シキ鋭角アリテ,其一組ノ邊ガ平行ナルトキハ,他ノ一組ノ邊ハ平行ナルカ,又ハ其角ノ二倍ニ等シキ角ヲ夾ム,

## 第二章

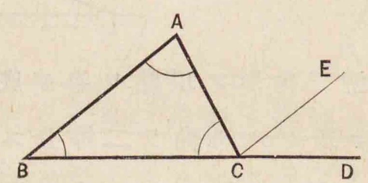
# 三角形

### (1) 多角形ノ角ノ和

**65.** **定理** **三角形ノ三ツノ角ノ和ハ2直角ニ等シ。**

**假設** 三角形ヲ $ABC$ トス。

**終結** $\angle BAC+ABC+ACB=2$ 直角




**證明** 邊 $BC$ ヲ延長シ其上ニ一點 $D$ ヲ取リ, $C$ ヨリ $BA$ ニ平行ニ $CE$ ヲ引クトキハ, $\angle ACD$ ハ外角ナル故 $\angle A$, $\angle B$ ノ何レヨリモ大ナリ。 (57節)

故ニ $CE$ ハ $\angle ACD$ ノ内ニアリ。 (64節)

而シテ $\angle ACE=A$ 及ビ $\angle DCE=B$

從テ $\angle ACD=BAC+ABC$

依テ $\angle BAC+ABC+ACB=ACD+ACB$

$=$ 平角 $BCD=2$ 直角



**系一。** 三角形ノ外角ハ之ニ隣ラザル内角(内對角)ノ和ニ等シ。

**問1.** 三角形ノ二角ガ定マルトキハ,其殘リノ一角ハ定マル。

二角ガ次ノ如キモノノ第三角如何。

[1] $50°, 70°$ [2] $30°, 120°$ [3] $53°20', 64°45'$

**問2** 正三角形ノ一角ノ大サ如何。

**問3.** 頂角ガ $72°$ ナル等脚三角形ノ底角ハ如何。又底角ガ $72°$ ナルトキハ頂角ハ如何。

**問4.** 二等邊三角形ノ一角ガ $60°$ ナルトキハ,コレ正三角形ナリ。

**問5.** 圓周ノ六分ノ一ナル弧ノ弦ハ半徑ニ等シ。

**問6.** 二等邊三角形ノ底角ハ鋭角ナリ。

**系二。** 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シキトキハ,第三角モ亦相等シ。

**問7.** $15°$ 及ビ $75°$ ノ角ヲ作レ。

**問8.** 兩等脚三角形ノ頂角ガ等シキトキハ,此兩三角形ノ底角ハ等シキカ,又一底角ガ互ニ等シ

キトキハ頂角ハ相等シキカ。

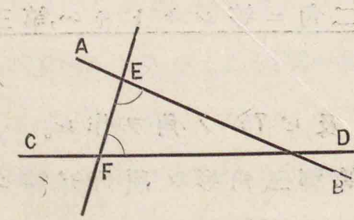
問9.　一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ垂直ナルトキハ,此二ツノ角ハ相等シキカ又ハ補角ナリ。

**系 三。** 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シク,且其一組ノ等角ノ對邊ガ相等シキトキハ,此兩三角形ハ合同ナリ。

問10.　二等邊三角形ノ頂點ヨリ底ヘ引ケル垂線ハ底ヲ二等分ス。

問11.　二ツノ三角形ガ合同ナル場合ヲ列擧セヨ。

**系 四。** 二直線ガ之ニ交ハル一直線ト其同側ニ於テナセル內角ノ和ガ,2直角ニ等シカラザルトキハ,此等ノ二直線ハ其和ガ2直角ヨリ小ナル內角ノ在ル方ニ於テ交ハル。(歸謬法)

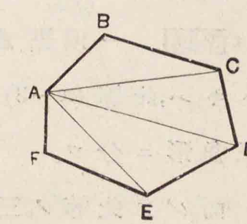





**66. 定義**　多角形ノ對角線トハ,其相隣ラザル頂點ヲ結ブ線分ナリ。

問1.　四角形ニハ幾ツノ對角線アルカ,五角形ニハ幾ツアルカ。

問2.　六角形ノ一頂點ヨリ出ヅル對角線ハ幾ツアルカ。カクシテ對角線ノ總數ヲ求メヨ。

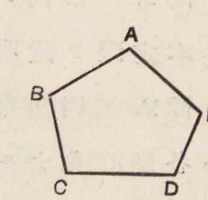



又一般ニ $n$ 角形ノ對角線ノ數ノ公式ヲ作レ。

**67. 定義**　凸多角形トハ其邊ノ延長ガ何レモ其形內ニ入ラザル多角形ナリ。

例ヘバココニ示ス多角形 ABCDE ノ如シ。

凸多角形ノ角ハ皆平角ヨリ小ニシテ,其外角ハ皆形外ニ在リ。




三角形ハ凸多角形ナリ。

爾來單ニ多角形ト言ハバ,常ニ凸多角形ヲ指スコトトス。

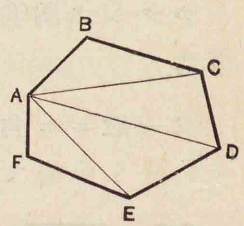
**68. 定理** $n$邊ノ多角形ノ内角ノ和ハ$(2n-4)$直角ニ等シ。

**假設** ABCDE…… ヲ $n$邊ノ多角形トス。

**終結** $\angle ABC+BCD+CDE+\quad=(2n-4)$直角。

**證明** 一頂點 A ヨリ對角線 AC, AD 等ヲ引クトキハ,此等$(n-3)$箇ノ對角線ハ本形ヲ$(n-2)$箇ノ三角形ニ分ツ。

而シテ此等ノ三角形ノ總テノ内角ノ和ハ此多角形ノ内角ノ和ナリ。




故ニ $\angle ABC+BCD+CDE+\cdots\cdots$ ハ此等ノ三角形ノ内角ノ和即チ2直角ノ$(n-2)$倍即チ$(2n-4)$直角ニ等シ。

**問1.** 形内ノ任意ノ一點ヲ各頂點ニ結ビテ以テ本定理ヲ證明セヨ。

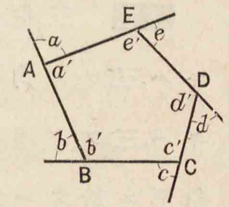
**問2.** 四角形,五角形,六角形,八角形ノ内角ノ和ハ各幾直角ナルカ。

**問3.** 或多角形ノ内角ノ和ガ16直角ニ等シト云フ,此多角形ノ邊數ヲ求メヨ。



**69. 定理** 多角形ノ總テノ邊ヲ順次延長シテ作レル外角ノ和ハ4直角ニ等シ。

**假設** ABCD… ヲ $n$ 邊ノ多角形(圖ニ於テハ五角形トス)トシ $a,b,c,d,\cdots$ ヲ夫々頂點 A,B,C,D,… ニ於ケル一ツノ外角ノ大サヲ表ハスモノトシ, $a',b',c',d'\cdots$ ヲ夫々其外角ニ隣レル内角ノ大サヲ表ハスモノトス。




**終結** $\angle a+b+c+d+e+\cdots=4$直角。

**證明** 各頂點ニ於ケル一ツノ外角ト内角トノ和ハ明カニ2直角ニ等シ。

故ニ $\angle a+a'+b+b'+c+c'+d+d'+\cdots\cdots$

即チ $\angle a+b+c+d+\cdots\cdots+a'+b'+c'+d'+\cdots\cdots$ ハ$2n$直角ナリ。

然ルニ $\angle a'+b'+c'+d'+\cdots$ ハ$(2n-4)$直角ナリ。

故ニ $\angle a+b+c+d+\cdots=4$直角。

**問.** 任意ノ一點ヨリ夫々各邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ本定理ヲ證明セヨ。

**70.** **定義** **正多角形**トハ總テノ邊相等シク,又總テノ角相等シキ多角形ナリ。

**注意** 三角形ニ於テハ三ツノ邊ガ等シキトキハ,三ツノ角モ等シク,又三ツノ角ガ等シキトキハ,三ツノ邊モ亦等シト雖ドモ,四邊以上ノ多角形ニ於テハ然ラズ。

*問1. 正六角形,正八角形ノ各角ノ大サ如何,又一般ニ $n$ 邊ノ正多角形ノ一角ヲ表ハス公式如何。

問2. 正多角形ノ一角ガ $\frac{9}{5}$ 直角ナルトキハ其邊數如何。

*問3. $n$ 邊ノ正多角形ノ外角ノ大サヲ表ハス公式ヲ求メ,ヨリテ以テ邊數ガ多クナルニ從テ外角ハ次第ニ小サクナリ,內角ハ次第ニ大キクナル(但シ2直角ヨリハ小)コトヲ證明セヨ。

問4. 正多角形ノ一外角ガ30°ナルトキハ其邊數如何。

問5. 三角形ノ一角ガ他ノ二角ノ和ヨリ大ナルカ,其和ニ等シキカ,又ハ其和ヨリ小ナルカニ從テ,其角ハ鈍角ナルカ,直角ナルカ,又ハ鋭角ナリ。

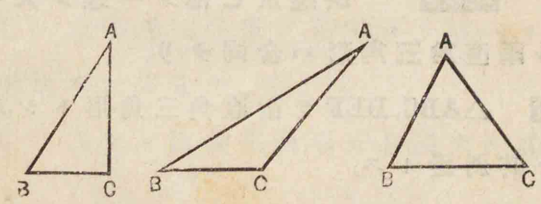


問6. 三角形ハ二ツ以上ノ直角又ハ鈍角ヲ有スルコトヲ得ルカ。又凸多角形ハ三ツヨリ多ク鋭角ヲ有スルコトヲ得ルカ。

**71.** **定義** **直角三角形**トハ其一角ガ直角ナル三角形ニシテ,其直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**ト云フ。

**鈍角三角形**トハ其一角ガ鈍角ナル三角形ナリ。

**鋭角三角形**トハ三ツノ角ガ皆鋭角ナル三角形ナリ。




問1. 直角三角形ノ直角ナラザル二角ハ共ニ鋭角ニシテ互ニ餘角ナリ。

問2. 一鋭角ヲ等シクスル兩直角三角形ノ他ノ鋭角ハ相等シ。

問 3.　鈍角三角形ノ鈍角ナラザル二角ハ共ニ銳角ナリ。

*問 4.　△ABC ニ於テ A ヨリ BC ヘ垂線ヲ下ストキ,其足ハ ∠B 及ビ ∠C ガ共ニ銳角ナラバ邊 BC 上ニ在リ, ∠B ガ鈍角ナラバ CB ノ延長上ニ, ∠C ガ鈍角ナラバ BC ノ延長上ニ在リ。

問 5.　正三角形ハ銳角三角形ナリ。

問 6.　直角二等邊三角形ノ各角ノ大サ如何。

問 7.　直角二等邊三角形ヲ作レ。

又直角ノ二邊ヲ知リテ直角三角形ヲ作レ。

**72.** **定理**　**斜邊及ビ他ノ一邊ヲ夫々等シクスル兩直角三角形ハ合同ナリ。**

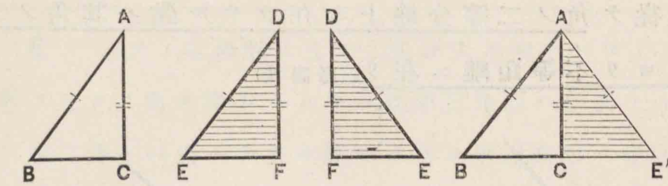
**假設**　△ABC, DEF ヲ兩直角三角形トシ,AB, DE ヲ夫々其斜邊トス。

而シテ　AB=DE,　AC=DF　トス。

**終結**　△ABC≡DEF

**證明**　△DEF ノ邊 DF ヲ之ニ等シキ AC ニ重ネ, △ABC ト △DEF ヲ各 AC ノ反對ノ側ニアル






樣ニ置キ, △DEF ヲ圖ニ於ケル △AE′C ノ位置ヲ取ラシムレバ, ∠ACB 及ビ ∠ACE′ ハ共ニ直角ナルヲ以テ, BCE′ ハ一直線トナル。　(16節[4])

故ニ △ABE′ ニ於テ AB=AE′ ナリ。

故ニ　∠B＝E′

然ルニ　∠E′＝E

∴　∠B＝E

∴　△ABC≡DEF　(65節系三)

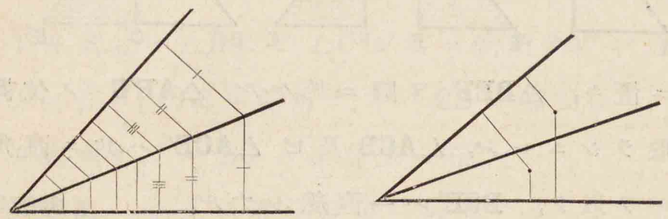
問 1.　二等邊三角形ノ頂點ヨリ底ヘ下セル垂線ハ頂角ヲ二等分ス。

問 2.　二ツノ直角三角形ガ合同ナル場合ヲ列擧セヨ。

**系**　角ノ二等分線上ノ各點ハ夫々其角ノ二邊ヨリ等距離ニ在リ。

又角ノ二邊ヨリ等距離ニ在ル點ハ,皆其角ノ二等分線上ニ在リ。

從テ角ノ二等分線上ニ在ラザル點ハ其角ノ二邊ヨリ不等距離ニ在リ。(歸謬法)



## 問題 4.

1. 直角三角形ノ一鋭角ガ他ノ鋭角ノ二倍ナルトキハ,三ツノ角ノ大サ如何。

又此場合ニハ斜邊ハ其一ツノ邊ノ二倍ニ等シ。

2. 正十五角形ノ一角ノ大サハ幾度ナルカ。

3. 正十一角形ノ一角ノ大サハ何度何分何秒ナルカ。 [鹿農]

4. 二等邊三角形ノ底ノ兩端ヨリ夫々對邊マデ引ケル垂線ハ相等シ。

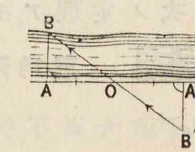
5. 直角ヲ三等分セヨ。



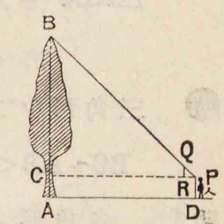
6. 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ三ツノ角ニ等シキトキハ,此兩三角形ハ合同ナルカ

又二角ト一邊トヲ夫々等シクスル兩三角形ハ合同ナリト言ヒテ可ナルカ。

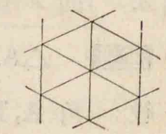
7. ココニ示ス圖ニヨリテ河ノ幅ヲ測ル方法ヲ考按セヨ。



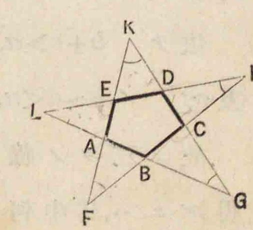

8. 直角二等邊三角形ヲ用ヒテ木ノ高サヲ測ル方法ヲ考按セヨ。




9. 圖ニ示セル如ク,合同ナル正多角形狀ノ瓦ヲ以テ地面ヲ敷詰メントス,瓦ノ邊數ヲ定メヨ。



10. 五邊形 ABCDE ノ各邊ヲ延長シテ星形 FGHKL ヲ作ルトキハ $\angle F+G+H+K+L$ ハ2直角ニ等シ。



## (2) 三角形ノ邊ト角ノ不等

**73.** 二點間ノ最單通路ハ其間ノ直線ナルヲ以テ次ノ定理アリ。

**定理** **三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ。**

$\triangle ABC$ ニ於テ $BC$ ヲ最大邊トスルモ,

$$AB+AC>BC$$

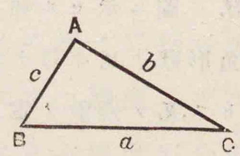
**系** 三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ。

$BC \sim AB<AC$ 及ビ $BC \sim AC<AB$

**問1.** 多角形ノ一邊ハ他ノ邊ノ和ヨリ小ナリ。

**問2.** 圓ノ弧ハ之ニ對スル弦ヨリ大ナリ。

**注意** $\triangle ABC$ ニ於テハ一般ニ角 $A, B, C$ ノ對邊ヲ夫々 $a, b, c$ ニテ表ハス。




依テ $b+c>a,\quad c+a>b,\quad a+b>c,$

及ビ $b \sim c<a,\quad c \sim a<b,\quad a \sim b<c$

故ニ三ツノ線分ガ三角形ノ三邊タルコトヲ得ルニハ,其中何レノ二ツヲ取ルモ其和ガ他ノ一ツヨリ大ナラザルベカラズ,又其差ガ他ノ一



ツヨリ小ナラザルベカラズ。

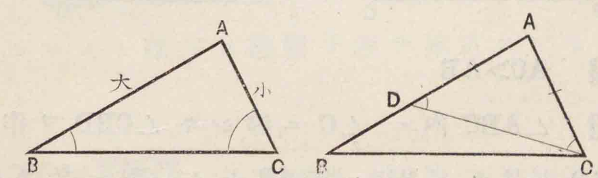
**問3.** 7寸, 3寸, 2寸ナル三線分ニテ三角形ヲ作ルコトヲ得ルカ。(實驗セヨ。)

又種々ノ長サヲ用ヒテ研究セヨ。

**74.** **定理** **三角形ノ二邊ガ不等ナルトキハ,大邊ノ對角ハ小邊ノ對角ヨリ大ナリ。**

**假設** $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ トス。

**終結** $\angle ACB>ABC$




**證明** $AB$ 上ニ $AC$ ニ等シク $AD$ ヲ取リ, $CD$ ヲ結べバ,

$\angle ADC=ACD$ (31節系一)

然ルニ $D$ ハ $AB$ ノ上ニ在ルヲ以テ

$\angle ADC>ABC$ (57節)

又 $\angle ACB>ACD$

$\therefore \angle ACB>ABC$

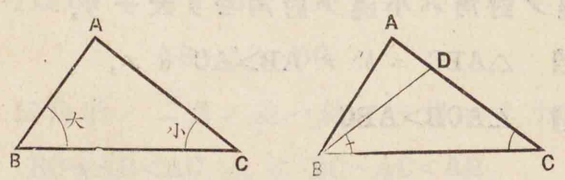
**問.** 上ノ圖ニ於テ

$\angle ACD=\frac{1}{2}(ACB+ABC)$,

$\angle BCD=\frac{1}{2}(ACB-ABC)$ ナリ。

**75.** **定理** **三角形ノ二角ガ不等ナルトキハ,大角ノ對邊ハ小角ノ對邊ヨリ大ナリ。**

**假設** $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle ABC>ACB$ トス。




**終結** $AC>AB$

**證明** $\angle ABC$ 內ニ $\angle C$ ニ等シキ $\angle CBD$ ヲ作ル直線 $BD$ ヲ引カバ, $BD$ ハ邊 $AC$ 上ノ一點ニ於テ $AC$ ト交ハル,此交點ヲ $D$ トス。

然ラバ $DB=DC$ (32節)

及ビ $AD+DB>AB$ (73節)

$\therefore$ $AD+DC>AB$

即チ $AC>AB$

*問 1. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大ナリ。



*問 2. 鈍角三角形ニ於テハ,鈍角ノ對邊ガ最大ナル邊ナリ。

**76.** **定義** 定理ノ假設ト終結トヲ交換シテ生ズル定理ヲ原ノ定理ノ逆ト云フ。

例ヘバ74節ト75節ノ定理ハ互ニ逆ナリ。

問. 既ニ學ビタル定理中互ニ逆ナルモノヲ擧ゲヨ。

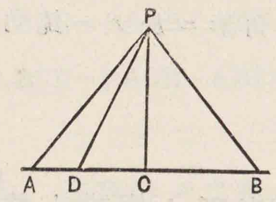
**注意** 定理ノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ,其眞ナルモノト雖ドモ證明ヲ經テ確定スルモノナリ。

**77.** **定理** **一直線外ノ一點ヨリ此直線マデ垂線及ビ斜線ヲ引クトキハ,**

[1] **垂線ガ最短ナリ。**

[2] **垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル兩斜線ハ相等シ。**

[3] **垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ハ之ヨリ小ナル距離ニ足ヲ有スル斜線ヨリ大ナリ。**




**假設** 一直線ヲ AB トシ,其上ニ在ラザル一點ヲ P トシ,

[1] PC ヲ P ヨリ AB マデ引ケル垂線トス。

[2] PA, PB ヲ二ツノ斜線トシ A, B ヲ夫々其足トシ, $CA=CB$ トス。

[3] PA, PD ヲ二ツノ斜線トシ $CA>CD$ トス。

**終結** [1] PC ハ P ヨリ引ケル總テノ斜線ヨリ小ナリ。

[2] $PA=PB$

[3] $PA>PD$

**證明** [1] PA ヲ P ヨリ AB ヘ引ケル任意ノ斜線トセバ,直角三角形 PAC ニ於テ,

$\angle PAC<PCA$ (71節)

$\therefore$ $PC<PA$ (75節)

[2] $\triangle PAC\equiv PBC$ (27節)

$\therefore$ $PA=PB$



[3] $CA>CD$ ナルヲ以テ, D ハ線分 AC 又ハ BC 上ニ在リ,今 D ヲ AC 上ニ在リトセバ,

$\angle PDA>PCD$ (57節)

故ニ $\angle PDA$ ハ鈍角ナリ。

然ルニ $\angle PAD$ ハ鋭角ナリ。 (71節)

故ニ $\angle PDA>PAD$

$\therefore$ $PA>PD$ (75節)

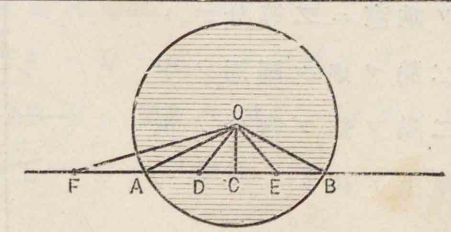
又 D ヲ BC 上ニ在リトセバ, $PB>PD$ ナル故,何レニシテモ $PA>PD$ ナリ

**系一**。此定理ノ逆モ眞ナリ。

**系二**。一點ヨリ一直線マデ引ケル相等シキ斜線ハ,同ジ點ヨリ引ケル垂線ト等角ヲナス。

大ナル斜線ハ小ナル斜線ヨリ,垂線ト大ナル角ヲナス。逆モ亦眞ナリ。

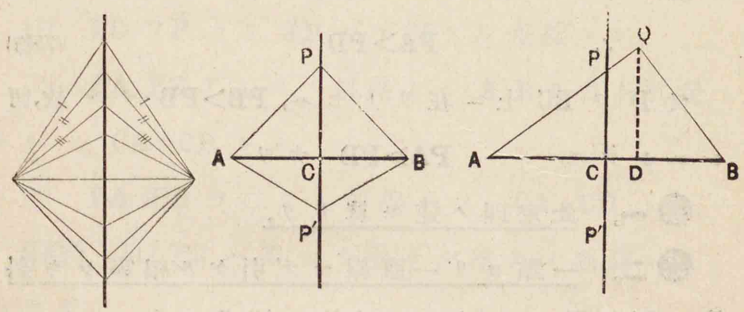
**系三**。圓ノ弦上ノ點ハ其兩端ノ外皆圓內ニ在リ,而シテ其延長上ノ點ハ皆圓外ニ在リ。



系 四。線分ノ垂直二等分線上ノ點ハ,皆其線分ノ兩端ヨリ等距離ニアリ。

而シテ其上ニ在ラザル點ハ,皆其線分ノ兩端ヨリ不等距離ニアリ。

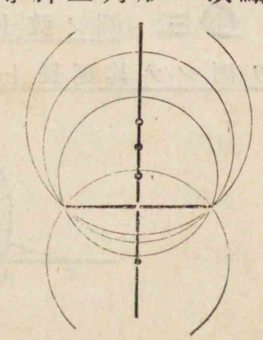
從テ　二點ヨリ等距離ニ在ル點ハ,皆其二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ニ在リ。




*問1.　二點A,Bヨリ等距離ニ在ル二點P,P′ヲ通過スル直線ハ,線分ABノ垂直二等分線ナリ。

問2.　同底上ニ立ツ二ツノ等脚三角形ノ頂點ヲ結ブ直線(或ハ其延長)ハ,其共有ノ底邊ヲ垂直ニ二等分ス。

問3.　二點ヲ過ル圓周ノ中心ハ,皆其二點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ニ在リ。

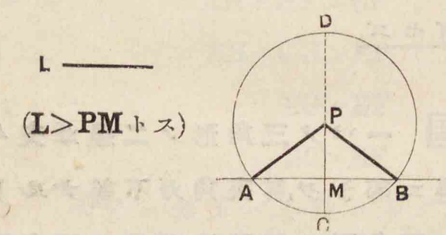




**78. 定理　一直線外ノ一點ヨリ其直線ヘ所設ノ線分ニ等シキ斜線ヲ二ツ引クコトヲ得,而シテ唯二ツニ限ル。**

**假設**　ABヲ一ツノ直線,Pヲ其上ニ在ラザル一點トシ,Lヲ所設ノ線分トス。

**終結**　PヨリABヘLニ等シキ斜線ヲ二ツ引クコトヲ得,而シテ唯二ツ引キ得ルノミ。




**證明**　PヨリABヘ垂線PMヲ引キ,之ヲ雙方ヘ延長シ,PC及ビPDヲ共ニLニ等シカラシムレバ,CトDトハABノ兩側ニ在ル點ナリ。

故ニPヲ中心トシPCヲ半徑トスル圓ヲ畫クトキハ,此圓周ハ必ズABト交ハル。其交點ヲAトセバ,PAハLニ等シキ斜線ナリ。

次ニAB上ニMBヲMAニ等シク取ルトキハ,PBモ亦Lニ等シキ斜線ナリ。

故ニ P ヨリ AB ヘ, L ニ等シキ二ツノ斜線 (PA, PB) ヲ引クコトヲ得。

而シテ P ヨリ AB ヘ引ク他ノ斜線ハ皆 PA ニ等シカラズ。 (77節[3])

故ニカクノ如キ斜線ハ此二ツニ限ル。

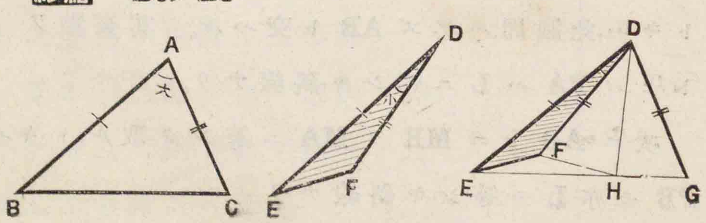
**系** 一直線外ノ一點ヲ中心トシ,其點ヨリ其直線マデノ距離ヨリ大ナル半徑ヲ有スル圓周ハ必ズ其直線ト二點ニ於テ交ハル,而シテ二ツヨリ多クノ交點ヲ有セズ。

**79.** **定理** **一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク,其夾角ガ不等ナルトキハ,夾角ノ大ナル三角形ノ第三邊ガ他ノ三角形ノ第三邊ヨリ大ナリ。**

**假設** 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ

$AB=DE,\ AC=DF,\ \angle BAC>EDF$ トス。

**終結** $BC>EF$






**證明** △ABC ヲ取リテ AB ヲ DE ニ重ネ,兩三角形ヲ DE ノ同ジ側ニ置キ,頂點 C ガ G ニ來レリトシ,∠FDG ノ二等分線 DH ヲ引ケ。

然ルトキハ,DH ハ ∠EDG 內ニ在ルヲ以テ,EG ト其上ノ或點 H ニ於テ交ハル。

FH ヲ結ベバ $\triangle DFH \equiv DGH$ (27節)

$\therefore\ FH=GH$

然ルニ $EH+HF>EF$ (73節)

$\therefore\ EH+GH>EF$

即チ $EG>EF$

$\therefore\ BC>EF$

問1. 大股ニ歩カバ小股ニ歩クヨリハ一歩ノ長サ大ナルハ何故ナルカ。

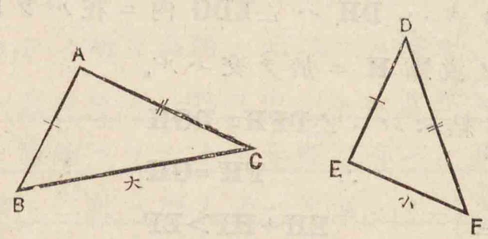
問2. △ABC ノ一邊 BC ノ中點ヲ M トシ, ∠AMB ガ鈍角ナルトキハ $AB>AC$ ナリ。

**80.** **定理** **一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク,第三邊ガ不等ナルトキハ大ナル第三邊ヲ有スルモノノ其邊ニ對スル角ハ,他ノ三角形ノ第三邊ニ對スル角ヨリ大ナリ。**

**假設** 兩三角形 ABC, DEF ニ於テ,

$AB=DE$, $AC=DF$, $BC>EF$ トス。

**終結** $\angle A>D$




**證明** 假設ノ如何ニ關セズ,

$\angle A=D$, $\angle A<D$, $\angle A>D$

ノ中何レカ一ツハ必ズ眞ナリ。

然ルニ

$\angle A=D$ トセバ $BC=EF$ ニシテ假設ニ戻リ,

又 $\angle A<D$ トセバ $BC<EF$ ニシテ又假設ニ戻ル。

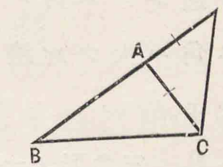
故ニ$\angle A$ハ$\angle D$ニ等シカラズ,又$\angle D$ヨリ小ナラズ。

故ニ $\angle A>D$

問. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ トシ, AD ヲ A ヨリ出ヅル中線トセバ $\angle ADB$ ハ鈍角ナリ。



## 問題 5.




1. 75節ノ定理ニヨリテ73節ノ定理ヲ證明セヨ。

2. $\triangle ABC$ ノ一邊 BC ヲ D マデ延長シテ $CD=AB$ ナラシムレバ $BC<AD$ ナリ。

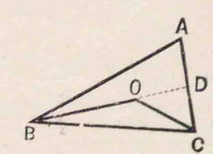
3. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ底 BC 上ノ任意ノ一點 D ニ結ブ線分 AD ハ AB, AC ノ各ヨリ小ナリ。

4. $\triangle ABC$ ニ於テ$\angle BAC$ノ二等分線ガ對邊 BC ニ交ハル點ヲ D トセバ, $BD<AB$ 及ビ $CD<AC$ ナリ。 [商船]

5. 三角形ノ頂點ヲ底ノ中點ニ結ブ直線ガ底ノ半分ヨリ小ナラバ頂角ハ鈍角ナリ、

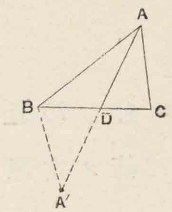
6. 四邊形 ABCD ノ四邊中 AD ガ最大ニシテ, BC ガ最小ナルトキハ,

$\angle ABC>ADC$ 及ビ $\angle BCD>BAD$




7. O ヲ$\triangle ABC$ 内ノ任意ノ一點トセバ $OB+OC<AB+AC$ ナリ。

**8.** 三角形ノ中線ガ之ト隣レル邊トナス角ノ中,小ナル邊トナス角ハ大ナル邊トナス角ヨリ大ナリ。 [陸士,商船,東工]




**9.** 三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ引ケル中線ノ二倍ハ,他ノ二邊ノ和ヨリ小ニシテ,其和ト底トノ差ヨリ大ナリ。

**10** 三角形ノ三中線ノ和ハ周ヨリ小ニシテ周ノ半分ヨリ大ナリ。 [海兵,商船,醫專,東工]

**11.** O ヲ $\triangle ABC$ 内ノ一點トセバ,

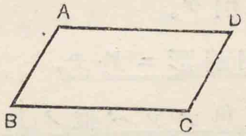
$$AB+BC+CA>AO+BO+CO>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

**12.** 二邊ト其間ノ中線トヲ夫々等シクスル兩三角形ハ合同ナリ。

## 第三章

# 平行四邊形

**81. 定義** **平行四邊形トハ二組ノ對邊ガ各平行ナル四邊形ナリ。**




例ヘバ上圖 **ABCD** ノ如シ。之ヲ □**ABCD** ト記シ,□**AC** 又ハ □**BD** ト略記スルコトアリ。

*問1. 平行四邊形ノ相隣レル角ハ互ニ補角ナリ。一角ガ60°ナラバ他ノ角ハ如何。

*問2. 平行四邊形ノ對角線ハ之ヲ合同ナル兩三角形ニ分ツ。

**82. 定理** **平行四邊形ニ於テハ,**

[1] **對邊ハ各相等シ。**

[2] **對角ハ各相等シ。**

[3] **對角線ハ互ニ二等分ス。**

(學生之ヲ證明セヨ。)

**系一。** 平行線間ニアル其共通垂線ノ部分ハ相等シ。

**定義** **平行線ノ距離**トハ其共通垂線ノ,其平行線間ニアル部分ノ長サナリ。

*問. 所設ノ直線ヨリ所設ノ距離ニ在リテ之ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

**系二。** 平行四邊形ニ於テ,

[1] 一角ガ直角ナラバ他ノ角モ皆直角ナリ。

[2] 一組ノ隣邊相等シケレバ四邊皆相等シ。

**83. 定義** **矩形**(1) トハ角ガ皆直角ナル四邊形ナリ。

**正方形**(2) トハ四邊ガ等シキ矩形ナリ。

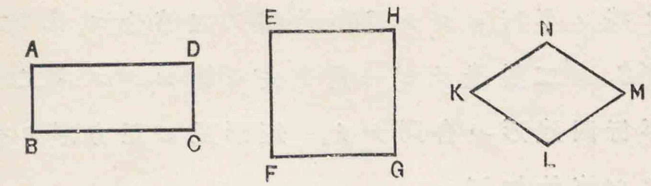
**菱形** トハ四邊ガ等シキ四邊形ナリ。

例ヘバ次頁ノ圖ニ於テ **ABCD** ハ矩形, **EFGH** ハ正方形ニシテ, **KLMN** ハ菱形ナリ。

問1. 正方形ハ矩形ニシテ且菱形ナリ。矩形ハ正方形ナルカ,又菱形ハ正方形ナルカ。

(1)又直方形トモ云フ。 (2)又平方形或ハ平方トモ云フ。






問2. 平行四邊形ニ於テ,一組ノ隣邊相等シクシテ一角ガ直角ナラバ,ソハ正方形ナリ。

又對角線ガ直交スルトキハ,ソハ菱形ナリ。

**84. 定理** **四邊形ハ次ノ場合ニ於テハ平行四邊形ナリ。**

[1] **二組ノ對邊ガ各相等シキトキ。**

[2] **一組ノ對邊ガ相等シクシテ且平行ナルトキ。**

[3] **二組ノ對角ガ各相等シキトキ。**

[4] **對角線ガ互ニ二等分スルトキ。**

(學生之ヲ證明セヨ。)

**系** 矩形,菱形,正方形ハ皆平行四邊形ナリ。

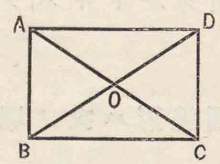
*問1. 平行四邊形ガ矩形,正方形,菱形タル條件如何。(邊,角,對角線ニ關シテ種々ナル條件ヲ研究セヨ。)

問2. 平行四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ,

他ノ邊ニ平行ニシテ,且對角線ヲ二等分ス。

*問3. 二隣邊及ビ一角ヲ夫々等シクスル二ツノ平行四邊形ハ合同ナリ。矩形及ビ正方形ノ合同ナル條件如何。

85. **定理** **矩形ノ對角線ハ相等シ。**

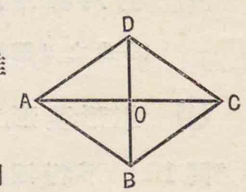



(ABCD ヲ矩形トセバ,兩三角形 ABC, DCB ノ合同ナルコトヨリ,學生ハ容易ニ本定理ヲ證明シ得ベシ。)

**系一。** 對角線ガ相等シキ平行四邊形ハ矩形ナリ。

**系二。** 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ,三ツノ頂點ヨリ等距離ニ在リ。

*問1. 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ニ二等分ス。

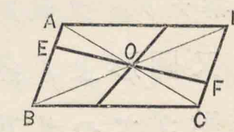



故ニ菱形ハ其對角線ヲ折リ目トシテ,其一部ヲ他ノ部分ノ上ニ折リ重ヌルヲ得,

*問2. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ過ギ,兩端

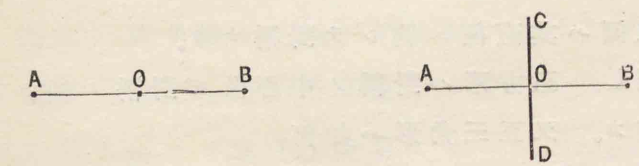


ヲ對邊上ニ有スル線分ハ皆其交點ニテ二等分セラル。




86. **定義** 一點ヲ過ル直線上ニ其點ノ兩側ニ其點ヨリ等距離ニ在ル二點ハ,**其點ニ關シテ對稱ナリ**ト云フ。

又二ツノ點ヲ結ブ線分ガ一ツノ直線ニテ垂直ニ二等分セラルルトキハ,其二點ハ**其直線ニ關シテ對稱ナリ**ト云フ。




圖形上ノ各點ノ或一點ニ關スル對稱ナル點ガ其圖形上ニ在ルトキハ,其圖形ハ其點ニ關シテ**對稱ナリ**ト云ヒ,其點ヲ其圖形ノ**對稱ノ中心**ト云フ。而シテカカル圖形ヲ**點對稱ヲ有スル**圖形ト云フ。

例ヘバ平行四邊形ハ其對角線ノ交點ニ關シテ

對稱ナリ。又圓周ハ其中心ニ關シテ對稱ナリ。

又圖形上ノ各點ノ或一直線ニ關スル對稱點ガヤハリ其圖形上ニ在ルトキハ,其圖形ハ其**直線ニ關シテ對稱ナリ**ト云ヒ,其直線ヲ其圖形ノ**對稱ノ軸**ト云フ。而シテカカル圖形ヲ**直線對稱ヲ有スル**圖形ト云フ。

直線對稱ヲ有スル圖形ハ其對稱ノ軸ヲ折リ目トシテ,其軸ノ一方ノ側ニアル部分ヲ,他ノ側ニアル部分ニ全ク折リ重ヌルヲ得。

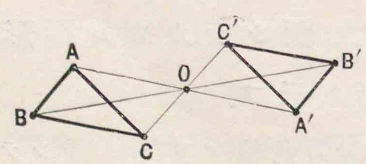
菱形ハ其對角線ニ關シテ對稱ナリ。

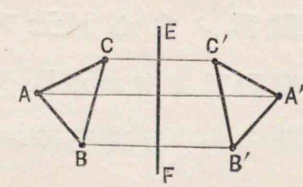
又圓ハ其直徑ニ關シテ對稱ナリ。

**問1.** 正方形ハ對稱ノ中心及ビ對稱ノ軸ヲ有スルカ。又正三角形ハ如何。

**問2.** 一點ニ關シテ對稱ナル三點ヲ頂點トスル二ツノ三角形ハ其點ニ關シテ對稱ナリ。

又一直線ニ關シテ對稱ナル三點ヲ頂點トスル二ツノ三角形ハ,其直線ニ關シテ對稱ナリ。






**87.** 學生ハ容易ニ次ノ作圖題ヲ解キ得ベシ

**作圖題** **二隣邊ト其夾角トヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作レ。**

**二隣邊ヲ與ヘテ矩形ヲ作レ。**

**邊ヲ與ヘテ正方形ヲ作レ。**

**問1.** 次ノモノヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

[1] 二隣邊ト一對角線。

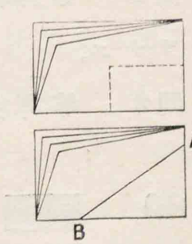
[2] 一邊ト兩對角線。

**問2.** 兩對角線ヲ與ヘテ菱形ヲ作レ。

*__問3.__ 對角線ヲ與ヘテ正方形ヲ作レ。

**問4.** 對角線ト一邊トヲ知リテ矩形ヲ作レ。

**問5.** 紙上ニ矩形及ビ菱形ヲ畫クニ次ノ如キ實用的方法アリ,其理ヲ說明セヨ。




紙ヲ二ツニ折リ,更ニ又之ヲ二ツニ折リ(折リ目ヲ折リ重ネ)其上ニ針ニテ穴ヲ穿チ,之ヲ開キ四ツノ穴ヲ連結スレバ矩形ヲ得ベシ。

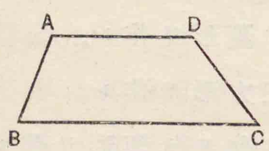
又上ノ如ク折リタル紙ヲ,折リ目ヲA, Bニテ一直線ニ切ルトキハ,切リ口ABヲ邊トスル菱形ヲ得ベシ。

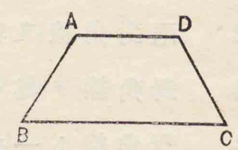
カクシテ正方形ヲ切ル法ハ如何。

**88.** **定義** **梯形**トハ一組ノ對邊ガ平行ナル四邊形ナリ。

梯形ノ平行ナル二邊ヲ其**底**ト云ヒ,一ヲ**上底**他ヲ**下底**ト云フ。而シテ下底ノ兩端ニ在ル角ヲ其**底角**ト云フ。

梯形ノ底ニアラザル二邊ノ相等シキモノヲ**等脚梯形**又ハ**二等邊梯形**ト云フ。




問1. 等脚梯形ノ兩底角ハ相等シク,對角ハ補角ヲナス。

問2. 等脚梯形ハ對稱ノ軸ヲ有スルカ。

**89.** **定理** **若干ノ平行線ガ之ニ交ハル二直線ノ一ツヲ若干等分スルトキハ,他ノ線ヲモ同數ニ等分ス。**

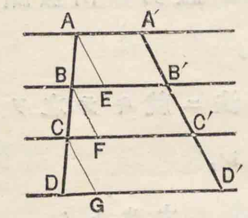
**假設** $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ 等ヲ平行線, $AB$ ヲ此

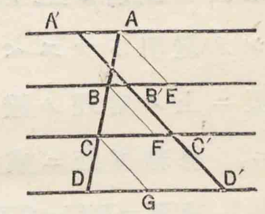


等ニ夫々 A, B, C, D 等ニ於テ交ハル一直線トシ,且 $AB=BC=CD$ 等トス。

又 $A'B'$ ヲ此等ノ平行線ニ交ハル他ノ任意ノ一直線トシ,其交點ヲ夫々 $A', B', C', D'$ 等トス。

**終結** $A'B'=B'C'=C'D'$ 等ナリ。




**證明** $A'B'$ ガ $AB$ ニ平行ナル場合ハ本定理ノ眞ナルコト明カナリ。

然ラザル場合ハ分點 A, B 等ヨリ $A'B'$ ニ平行ニ夫々 $AE$, $BF$ 等ヲ引キテ E, F 等ニ於テ夫々 $BB'$, $CC'$ 等ニ交ハラシムルトキハ,

$$\triangle ABE \equiv BCF \equiv CDG \quad \cdots\cdots \qquad (27節)$$

$$\therefore \quad AE=BF=CG \quad \cdots\cdots$$

然ルニ $A'B'=AE,\ B'C'=BF,\ C'D'=CG,\ \cdots\cdots,$

$$\therefore \quad A'B'=B'C'=C'D'= \ \cdots\cdots$$ ナリ。

**注意** 定理ヲ證明スルニ當リ,直ニ其方法ニ

氣附カザルトキハ次ノ如クスベシ。

終結ガ既ニ成立スルトキハ如何ナル事實ガ成立スルカヲ考ヘ,次ニ其事實ヨリ成立スル第三ノ事實ヲ探究シ,遂テカクノ如クシテ既ニ證明シタル定理若シクハ假設ヨリ直ニ斷定シ得ベキ事實ニ到著シ,之ヲ以テ證明ノ出發點トシ,逆進シテ證明トナスベシ。

今更ニ上ノ定理ノ證明法ニ就キテ之ヲ說明センニ, 終結ガ既ニ成立シ,

即チ $A'B'=B'C'=C'D'$ ナリトシ,

A, B, C ヨリ $A'D'$ ニ平行ニ AE, BF, CG ヲ引ク(カク適當ニ補助線ヲ引クコトハ,幾何學研究ノ全般ヲ通ジテ最モ重要ナルコトニシテ,學生諸子ノ特ニ注意シテ習熟ヲ期スベキコトナリ)トキハ, $AE=BF=CG$ ニシテ

且 $\angle BAE=CBF=DCG$

而シテ $AB=BC=CD$ ナルヲ以テ,

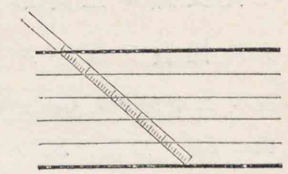
$\triangle ABE\equiv BCF\equiv CDG$ ヲ得。

コレ假設ヨリ直ニ斷定スルヲ得ル事實ナリ。

故ニ之ヲ以テ證明ノ出發點トシタルナリ。

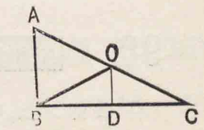


**問1** 婦人等ガ布ヲ等分スルニ,圖ニ示スガ如ク物指ヲ斜メニ當テハムルハ如何ナル理ニヨルカ。

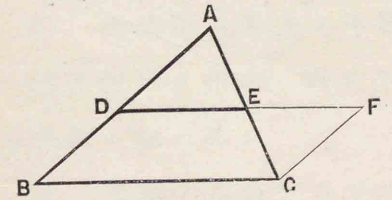


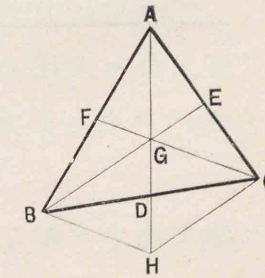
**系一。** 三角形ノ一邊ノ中點ヨリ他ノ邊ニ平行ニ引ケル直線ハ第三邊ノ中點ヲ通過ス。

**問2.** 此系ヲ用ヒテ36節ノ定理系二ヲ證明セヨ。




**系二。** 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ,他ノ邊ニ平行ニシテ且其半ニ等シ。




**系三。** 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ヲ通過ス,而シテ此交點ヨリ頂點ニ至ル距離ハ夫々其中線ノ三分ノ二ナリ。

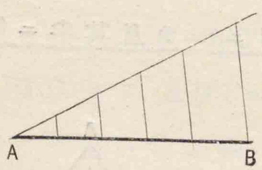
此交點ヲ三角形ノ**重心**ト云ヒ,力學ニ於テ緊要ナル性質ヲ有スルモノナリ。

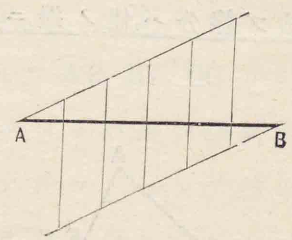
(先ツ二中線 BE, CF ガ交ハルコトヲ證明シ,其交點ヲ G トシ,次ニ AG ノ延長ガ BC ノ中點ヲ通過スルコトヲ證明スベシ。)

問 3.　三角形ノ二ツノ中線ガ相等シキトキハ,此三角形ハ二等邊三角形ナリ。

**90.** **作圖題**　**所設ノ線分ヲ若干等分セヨ。**

(前節ノ定理及ビ問1ヨリ容易ニ解法ヲ發見シ得ベシ。)






## 問　題　6.

1.　平行四邊形ノ一對角線ガ其兩端ニアル角ヲ二等分セバ,其平行四邊形ハ菱形ナリ。

2.　平行四邊形ノ四ツノ角ノ二等分線ガ作ル四邊形ハ矩形ナリ。

矩形ノ角ノ二等分線ハ正方形ヲ作ル。

3.　相等シキ二線分 AB, CD ガ平行線 AC, BD ノ間ニアリテ點 O ニ於テ交ハルトキハ, OA=OC 及ビ OB=OD ナリ。 〔神商〕

4.　三角形ノ各邊ノ中點ヲ二ツヅツ結ブ線分ハ其三角形ヲ四ツノ合同三角形ニ分ツ。

5.　四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ブ線分ハ平行四邊形ヲ作ル。而シテ其周ハ原ノ四形邊ノ對角線ノ和ニ等シ。

6.　梯形ノ平行ナラザル二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ,兩底ニ平行ニシテ且其和ノ半ニ等シ。

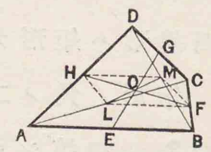
又兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ如何。

7.　一線分ノ兩端及ビ中點ヨリ一ツノ直線マデ引ケル三ツノ平行線分ノ中,中點ヨリ引キタル

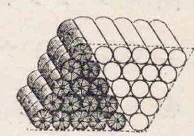
モノガ,他ノ二ツノ和又ハ差ノ半ニ等シ。

**8.** E及ビFヲ夫々平行四邊形ABCDノ一組ノ對邊AD及ビBCノ中點トセバ, BE, DFハ對角線ACヲ三等分ス。

**9.** 四邊形ノ二組ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二直線ト,兩對角線ノ中點ヲ結ブ直線トハ互ニ二等分ス。而シテ此三直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ハル。




**10.** 圖ノ如ク積ミタル俵ノ數ヲ計算スル方法ヲ求メヨ。且コレヨリシテ自然數 1, 2, 3, 4, ......... 和ヲ求ムル公式ヲ求メヨ。

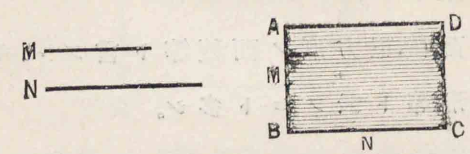


## 第四章

# 矩形ノ面積

**91.** **定義** 平面形ノ**面積**トハ,其圍ミ取レル平面ノ部分ノ大サ(廣サ)ナリ。

**92.** **定義** **二線分ノ矩形**トハ,此二線分ニ等シキ二隣邊ヲ有スル矩形ナリ。




例ヘバ矩形ABCDノ二隣邊AB, BCガ夫々二線分M, Nニ等シキトキハ,此矩形ヲM, Nノ矩形ト云ヒ,其面積ヲ矩形M.Nト記ス。

又此矩形ヲAB, BCノ矩形トモ云ヒ,其面積ヲ矩形AB.BCト記ス。

又矩形ナル文字ノ代リニ □ ナル記號ヲ用ヒテ,上ノ矩形ノ面積ヲ □M.N, □AB.BC 又ハ □AC 或ハ □BD ト記スコトアリ。

平行四邊形 ABCD ノ面積ヲ ▱ABCD 又ハ ▱AC 又ハ ▱BD ト記スコトアリ。

**93.** **定義** **一線分上ノ正方形**又ハ**一線分ノ平方**トハ,此線分ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ナリ。

線分 AB 上ノ正方形ノ面積ヲ $\overline{AB}^2$ ニテ表ハシ,線分 A ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ノ面積ヲ表ハスニ $A^2$ ヲ以テス。

矩形ノ面積,正方形ノ面積等ト言フベキヲ單ニ矩形,正方形等ト云フコト多シ。

**94.** **面積ノ單位**。 面積ヲ計ルニハ,先ヅ必要ナル長サヲ計ルコトヲ要ス。故ニ面積ノ單位トシテハ,其**長サノ單位ノ平方**ヲ以テス。

總テ量ヲ計ルトキ,其量ガ單位ノ幾倍又ハ幾分ノ幾ツニ當ルカヲ表ハス數ヲ,其量ノ**測度**ト云フ。

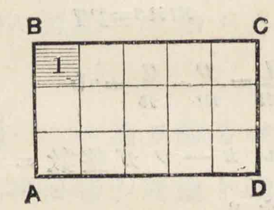


**95.** **定理** **矩形ノ面積ノ測度ハ,其ノ二隣邊ノ測度ノ乘積ニ等シ。**

**假設** ABCD ヲ矩形トシ,其二邊 AB, AD ノ同ジ單位ニ對スル測度ヲ $a$, $b$ トシ,面積ノ測度(其長サノ單位ニ關スル)ヲ $s$ トス。

**終結** $s=ab$

**證明** [1] $a$, $b$ ヲ共ニ整數トス。




AB ヲ $a$ 等分シ, AD ヲ $b$ 等分シ,各分點ヨリ夫々ニ隣邊ニ平行ナル直線ヲ引カバ,矩形 AC ハ明カニ $ab$ 箇ノ面積單位ニ分タル。

故ニ $$s=ab$$

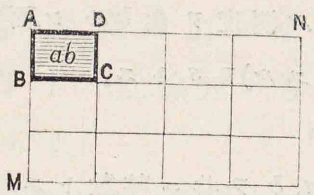
[2] $a$, $b$ ヲ分數トシ, $a=\frac{p}{m}$, $b=\frac{q}{n}$ トセヨ。

但シ $m$, $n$, $p$, $q$ ハ皆整數トス。

AB, AD ヲ夫々 M, N マデ延長シ,

$$AM=m AB \qquad AN=n AD$$

ナラシムレバ,AM 及ビ AN ノ測度ハ夫々 $p$ 及ビ $q$ ニシテ,且矩形 AM.AN ハ矩形 AC ノ $mn$ 倍ニシテ其測度ハ $pq$ ナリ。




故ニ　$mns=pq$

$$\therefore \quad s=\frac{pq}{mn}=\frac{p}{m}\cdot\frac{q}{n}=ab$$

又 $a$, $b$ ノ中何レカ一ツガ整數ニシテ,他ガ分數ナル場合モ同様ナリ。

尚 $a$, $b$ ノ内何レカ一ツ又ハ雙方ガ不盡數ナル場合ニモ本定理ハ眞ナリ。

但シ其證明ハ之ヲ省略ス。

此定理ハ之ヲ次ノ如ク略述スルヲ常トス。

矩形ノ面積ハ其二隣邊ノ乘積ニ等シ。

或ハ一邊ヲ**底**ト云ハバ其隣邊ヲ**高サ**ト云ヒ,又ハ二隣邊ヲ夫々**長サ**及ビ**幅**ト云フ故,

矩形ノ面積ハ底ト高サ(又ハ長サト幅)トノ乘積



ニ等シ　ト云フ。

**系**　正方形ノ面積ノ測度ハ,其一邊ノ測度ノ二乘冪ニ等シ。

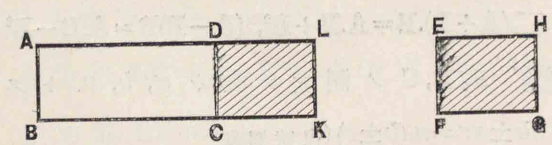
或ハ之ヲ次ノ如ク略述ス。

正方形(平方)ノ面積ハ,其一邊ノ二乘冪ニ等シ。

**注意**　故ニ或數ノ二乘冪ヲ其**平方**ト云フ。

*問.　矩形ノ底(又ハ高サ)ノ測度ハ,其面積ノ測度ヲ高サ(又ハ底)ノ測度ニテ除シタル商ナリ。

**96. 定理**　**一邊ヲ等シクスル二ツノ矩形ノ和又ハ差ハ,其相等シキ邊ト他ノ邊ノ和又ハ差トノ矩形ニ等シ。**




**假設**　二ツノ矩形 ABCD, EFGH ニ於テ AB=EF トス。

**終結**　□AB.BC+EF.FG=AB(BC+FG)

**證明**　BC ヲ延長シ CK=FG ナラシメ,矩形 ABKL ヲ作ルトキハ,　矩形 DK ハ矩形 EG ニ合

同ナルヲ以テ

$$\square AK=AC+EG$$

而シテ $\square AK$ ハ $AB$ ト $BC+FG$ ニ等シキ $BK$ トノ矩形ナリ。

故ニ　$\square AC+EG=AB.(BC+FG)$

即チ　$\square AB.BC+EF.FG=AB(BC+FG)$

同様ニ　$\square AB.BC-EF.FG=AB(BC-FG)$

ナルコトヲ證明スルコトヲ得。

但シ $BC>FG$ トス。

**系**　$\square A.B+A.C+A.C=A(B+C+D)$　等

$\square A.B-A.C+A.D=A(B-C+D)$　等

但シ $B>C$ トス。

問.　$\square(A+B).B=A.B+B^2$, $(A-B)B=A.B-B^2$

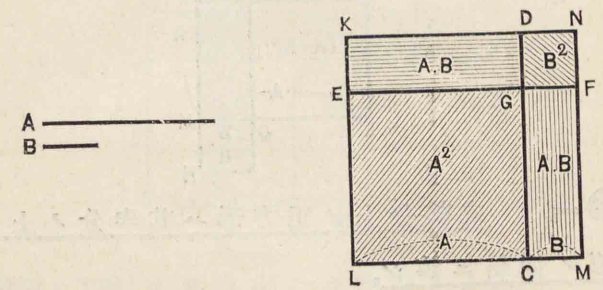
**注意**　A, B, C ノ測度ヲ夫々 $a, b, c$ トスレバ,
$ab\pm ac=a(b\pm c)$ (複號同順)

**97.** **定理**　二線分(A, B)ノ和又ハ差ノ上ノ正方形ハ,其各線分上ノ正方形ノ和ニ其二線分ノ矩形ノ2倍ヲ加ヘタルモノ,又ハ其和ヨリ其矩形ノ2倍ヲ減ジタルモノニ等シ。



即チ [1] $(A+B)^2=A^2+B^2+2A.B$

[2] $(A-B)^2=A^2+B^2-2A.B$ (但シ $A>B$ トス)。




**證明**　[1] LM ヲ $A+B$ ニ等シキ線分トシ, LM 上ニ正方形 LMNK ヲ作リ, 又 LM 及ビ LK 上ニ $LC=A$, $LE=A$ ナル様ニ夫々 C 及ビ E ヲ取リ, C 及ビ E ヲ過ギ夫々 LK 及ビ LM ニ平行ニ CD 及ビ EF ヲ引クトキハ,

正方形 $LN=(A+B)^2$,　正方形 $CE=A^2$,

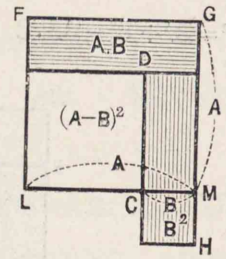
正方形 $DF=B^2$,

矩形 $CF=A.B$,　矩形 $ED=A.B$　ニシテ

正方形 $LN=CE+DF+CF+ED$　ナル故,

$(A+B)^2=A^2+B^2+2A.B$

[2] ハ次ノ圖ニヨリテ學生之ヲ證明セヨ。




系一。 或線分上ノ正方形ハ,其半分ノ上ノ正方形ノ四倍ニ等シ。

系二。 面積相等シキ兩正方形ノ邊ハ相等シ。

問1. 或線分ヲ三分スレバ,全線上ノ正方形ハ,各線分上ノ正方形ト,各部分ヲ二ツヅツ取リテ作ル矩形ノ二倍ヅツトノ和ニ等シ。

問2. 二線分ノ和ノ平方ハ,其差ノ平方ヨリ,其二線分ノ矩形ノ四倍ダケ大ナリ。

注意 A及ビBノ測度*ヲ夫々$a$及ビ$b$トセバ

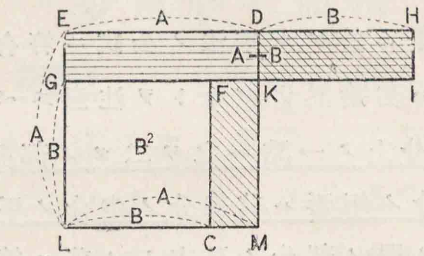
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \text{ 及ビ } (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

**98. 定理 二線分(A,B)上ノ正方形ノ差ハ,其二線分ノ和ト差トノ矩形ニ等シ。**

* 或量例ヘバAノ測度ガ$a$ナリト云フベキヲ單ニAノ測度ガ$a$ナリト云フコトトス。



即チ $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 但シ $A>B$ トス。




證明 LM ヲ A ニ等シキ線分トシ,其上ニ B ニ等シク LC ヲ取リ LM, LC 上ニ LM ノ同ジ側ニ正方形 LMDE, LCFG ヲ作リ, GF ヲ延長シテ MD ト K ニ於テ交ハラシムレバ,

$$A^2-B^2=LD-LF=GD+CK$$

今 ED 及ビ GK ヲ延長シ,其上ニ DH 及ビ KL ヲ共ニ KM (即チ B) ニ等シク取レバ,

$$\square CK \equiv KH$$

故ニ $\square GD+CK=GD+KH=GH$

依テ $A^2-B^2=GH=EH.EG$

然ルニ $EH=A+B,\ EG=A-B$ ナルヲ以テ,

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

注意 A, B ノ測度ヲ夫々 $a$, $b$ トスレバ,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

以上數箇ノ定理ヲ式ニテ書キタルモノハ,全ク代數學ニ於ケル乘法ノ公式ニ符合スレドモ,其意義ハ勿論異ナルコトヲ注意スベシ。

系 線分上ノ一點ハ之ヲ二ツノ部分ニ分ツ,其二ツノ部分ノ矩形ハ,其線分ノ半分ノ平方ト中點ト分點トノ間ノ部分ノ平方トノ差ニ等シ。

問1. MヲABノ中點トシ,Pヲ分點トシ,AP=9寸,PB=5寸ナルトキハ,MPノ長サ如何。

一般ニ $MP=\frac{1}{2}(AP\sim BP)$

*問2. 或線分ヲ二分シ,其二部分ノ矩形ヲ最大ナラシメントス,其分チ方如何。

問3. 周ガ相等シキ矩形ノ中,正方形ガ最大ナル面積ヲ有ス。

問4. 線分ABヲCニテ二等分シ,又Dニテ任意ニ二分スルトキハ,

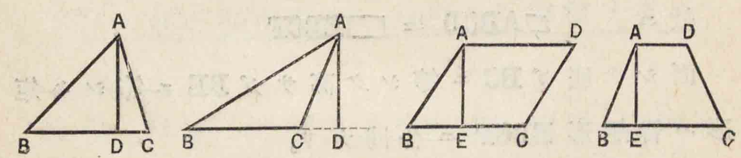
$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{CD}^2$$ ナリ。

問5. 線分ヲ二分シ,各部分ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメントス,其分チ方如何。

## 第五章

# 多角形ノ面積

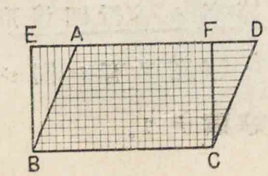
**99. 定義** 三角形及ビ平行四邊形ハ其何レカ一邊ヲ底ト見做シ,其上ニ立ツト考フルコトアリ, 而シテ此場合ニハ底ト之ニ對スル頂點又ハ底ノ對邊トノ距離ヲ其高サト云フ。




梯形ノ高サトハ其兩底間ノ距離ヲ云フ。

問. 直角等脚三角形ノ高サハ,其底ノ半分ニ等シ。

**100. 定理** 平行四邊形ハ之ト底ト高サトヲ夫々等シクスル矩形ニ等シ。



**假設** ABCD ヲ平行四邊形トシ,BC ヲ其底トス。

**終結** ABCD ハ BC ニ等シキ底ヲ有シ,其高サニ等シキ高サヲ有スル矩形ニ等シ。

**證明** 底ノ兩端 B 及ビ C ヨリ BC ニ垂線ヲ引キ,對邊 AD 又ハ其延長ト夫々 E 及ビ F ニ於テ交ハラシムレバ,BCFE ハ矩形ナリ。

兩直角三角形 ABE, CDF ハ斜邊ト一邊ヲ夫々等シクスルヲ以テ合同ナリ。

故ニ　　▱ABCD = □EBCF

而シテ底ガ BC ニ等シク高サガ BE ニ等シキ矩形ハ皆矩形 EBCF ニ合同ナリ。

故ニ平行四邊形 ABCD ハ其底 BC ニ等シキ底ヲ有シ,其高サ BE ニ等シキ高サヲ有スル矩形ニ等シ。

**注意** 二ツノ平面形ハ其形ヲ異ニシテ,其大サ即チ面積ノ相等シキモノアリ,此場合ニハ兩形ハ相等シ又ハ等積ナリト云フ。

**系一**。 等底等高ノ平行四邊形ハ等積ナリ。

問 1. 同底又ハ等底ヲ有シ,同ジ平行線間ニアル平行四邊形ハ等積ナリ。



問 2. 所設ノ平行四邊形ニ等積ナル矩形ヲ作レ。又等積ニシテ其一角ガ所設ノ角ニ等シキ平行四邊形ヲ作レ。

**系二**。 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ乘積ニ等シ。

今平行四邊形ノ面積ヲ $s$, 其底及ビ高サヲ夫々 $b$ 及ビ $h$ トセバ　$s=bh$　ナリ。

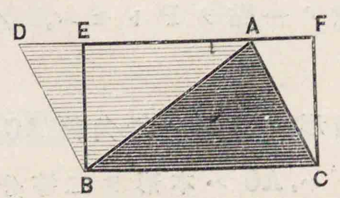
**系三**。 等底(又ハ等高)ノ平行四邊形ニ於テハ,高サ(又ハ底)ノ大ナルモノガ大ナル面積ヲ有ス。逆モ眞ナリ。

問 3. 等積ナル兩正方形ノ邊ハ相等シ。(再出)

*問 4. 系一ノ逆(二ツアリ)ハ眞ナリ。

**101.** **定理** **三角形ハ等底等高ノ矩形ノ半ニ等シ。**

(次ノ圖ニヨリ學生之ヲ證明セヨ。)

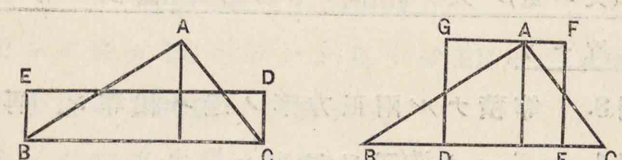


**系一。** 等底等高ノ三角形ハ等積ナリ。逆モ亦眞ナリ。

**系二。** 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ乘積ノ半ニ等シ。

今三角形ノ面積ヲ $s$,其底及ビ高サヲ夫々 $b$ 及ビ $h$ トセバ　$s=\frac{1}{2}bh$　ナリ。

問1. AヨリBCヘ垂線ヲ引キテ此定理ヲ證明セヨ。又次ノ圖ニヨリテモ證明セヨ。




問2. 三角形ノ中線ハ其三角形ヲ二等分ス。

問3. 平行四邊形ノ兩對角線ハ本形ヲ四等分ス。

問4. 平行四邊形ABCDノ對角線AC又ハ其延長上ノ任意ノ一點ヲPトセバ, △PCB = PCD ナリ。〔商船〕

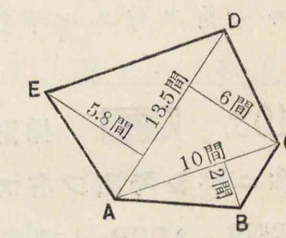
問5. 四邊形ABCDノ對角線ACガBDヲ二等分スルトキハ,ACハ本形ヲ二等分ス。〔上蠶〕



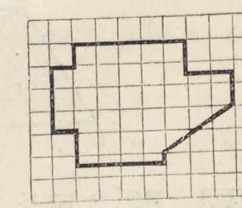
問6. 四邊形ABCDノ對角線ACノ長サヲ $d$ トシ,B及ビDヨリACヘ下セル垂線ノ長サヲ $p$ 及ビ $q$ トセバ,此四邊形ノ面積ハ $\frac{1}{2}d(p+q)$ ナリ

問7. 同底等積ナル兩三角形ノ頂點ヲ結ブ直線ハ底ニ平行ナルカ,又ハ底ニテ二等分セラル。

問8. ココニ示スガ如キ宅地ノ坪數ヲ求メヨ。



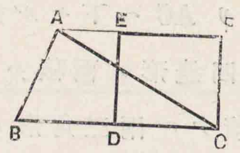

問9. 方眼ノ數ヲ計ヘテ次ノ多角形ノ面積ヲ概算セヨ。但シ方眼ノ一邊ヲ一糎トスベシ。



**注意** 此方法ハ甚實用的ニシテ,方眼ノ大サヲ小サクセバ益々精確ナル結果ヲ求ムルコトヲ得。平面形ノ周ノ一部若シクハ全部ガ曲線ナル場合ニモ,其周ニヨリテ截ラルル方眼ノ出入リヲ考フレバ可ナリ。

**102. 作圖題** 所設ノ三角形ト等積ナル矩形ヲ作レ。

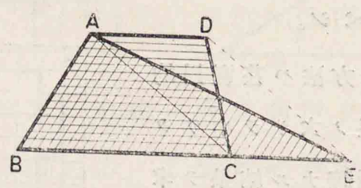
(次ノ圖ニヨリ學生之ヲ解クベシ。)




**問.** 所設ノ三角形ト等積ニシテ,所設ノ角ニ等シキ一角ヲ有スル平行四邊形ヲ作レ。

## 103. 定理 **梯形ハ之ト等高ニシテ其兩底ノ和ニ等シキ底ヲ有スル三角形ニ等シ。**

**假設** ABCD ヲ梯形トシ AD, BC ヲ其兩底トス。




**證明** BC ヲ延長シ其上ニ E ヲ取リ, CE ヲ AD ニ等シクシ, AE, AC, DE ヲ結ブ。

然ラバ,四邊形 ACED ハ其一組ノ對邊 AD, CE ガ平行ニシテ且相等シキヲ以テ平行四邊形ナリ。

即チ $DE \parallel AC$

故ニ $\triangle AEC = ADC$



$\triangle ABC$ ニ此相等シキ兩三角形ヲ加フレバ,

$$\triangle ABE = ABCD$$

然ルニ $\triangle ABE$ ハ BE ヲ底トスレバ,梯形 ABCD ト等高ニシテ且其底 BE ハ BC+AD ニ等シ。

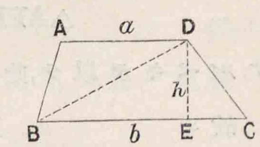
故ニ ABCD ハ之ト等高ニシテ其兩底ノ和ニ等シキ底ヲ有スル $\triangle ABE$ ニ等シ。

**系** 梯形ノ面積ハ兩底ノ和ト高サトノ乘積ノ半ニ等シ。

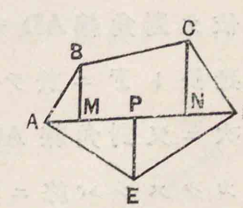
今梯形ノ兩底ヲ夫々 $a, b$ トシ其高サヲ $h$ トシ面積ヲ $s$ トスレバ, $s=\frac{1}{2}h(a+b)$ ナリ。

**問1.** 平行二邊ガ夫々15糎, 28糎ニシテ其間ノ距離ガ12糎ナル梯形ノ面積ハ幾平方糎ナルカ。

**問2.** 上ノ公式ヲ直接ニ三角形ノ面積ノ公式ヨリ求メヨ。




**問3.** ココニ示ス圖ニヨリテ多角形 ABCDE ノ面積ヲ求メヨ。但シ AM, MN, ND, BM, CN, EP ヲ夫々 $a, b, c, d, e, f$ トス。

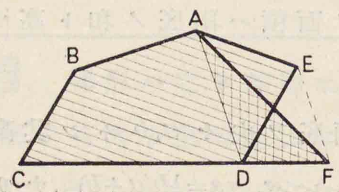



**問4.** 梯形ノ底ナラザル一邊ノ中點ヲ過ギ對邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ,此

定理ヲ證明セヨ。

**104. 作圖題** **所設ノ多角形ニ等積ナル三角形ヲ作レ。**

**題意**　ABCDE ヲ所設ノ多角形トシ,之ニ等積ナル三角形ヲ作ルコトヲ求ム。




**作圖**　先ヅ ABCDE ガ邊數一ツ少ナキ ABCF ニ等シトシ, AD, EF ヲ結ベバ,

$$\triangle AFD = AED$$

ナルベキヲ以テ,此兩三角形ハ等高ナルヲ要ス。

故ニ　$EF \parallel AD$　ナルヲ要ス。*

依テ對角線 AD ヲ引キ之ニ平行ニ EF ヲ引キ CD ノ延長ト F ニ於テ交ハラシメ, AF ヲ結ブ。

次ニ又對角線 AC ヲ引キテ同法ヲ行フ。

カクスレバ終ニ所要ノ三角形ヲ得。

* ココマデハ解析ト云フ部分ナリ, 第112節ニ至リテ明瞭トナルベシ。



**證明**　$EF \parallel AD$　(作圖)

故ニ　$\triangle AFD = AED$

故ニ　多角形 ABCF=ABCDE

故ニ此方法ヲ續ケ行フトキハ,如何ナル多角形モ一回ニ一邊ヅツ少ナキ等積ノ多角形ニ變ゼラレ,終ニ三角形トナル。

## 問　題　7.

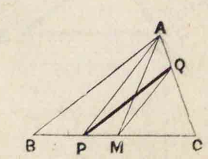
1. 所設ノ二線分ヲ二邊トスル三角形ノ中,其夾角ガ直角ナルモノガ最大ナリ。　〔東工〕

2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次結ビテ成ル平行四邊形ハ本形ノ半分ニ等シ。　〔熊工〕

3. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ過ル直線ハ本形ヲ二等分ス。

4. 所設ノ點ヲ過ル直線ヲ以テ所設ノ平行四邊形ヲ二等分セヨ。

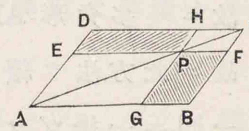
5. △ABC ノ一邊 BC 上ノ定點 P ヲ過ギ,此三角形ノ面積ヲ二等分スル直線ヲ引ケ。



[高,札農,農實,商船,仙醫,米工,陸士,鹿農,專檢]

又此面積ヲ三等分スル直線ヲ引ケ。

*6. ABCD ヲ平行四邊形トシ, P ヲ其形内ニ在ル一點トシ, P ヲ過ギ二隣邊ニ平行ニ EF, GH ヲ引カバ,




[1] P ガ對角線上ニ在ラバ,

$$\square PB = PD$$

此場合ニ於テ EG, FH ヲ對角線 AC ニ沿ヘル平行四邊形ト云ヒ PB, PD ヲ其餘形ト云フ。

[2] P ガ對角線 AC 上ニ在ラザレバ,

$$\triangle APC = \frac{1}{2}(\square PB \sim PD)$$ [商船]

[3] □PB=PD ナラバ, P ハ AC 上ニ在リ。

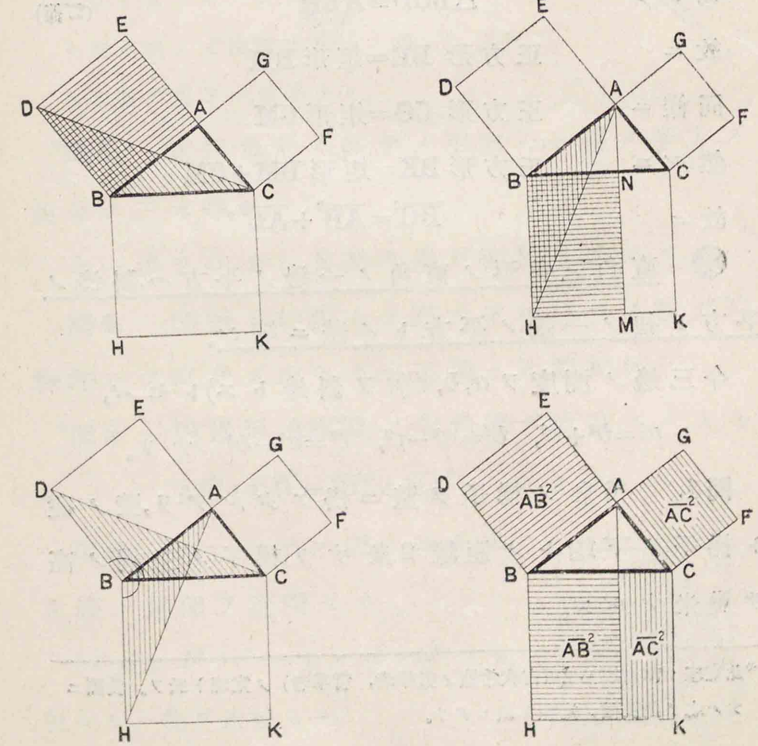
第六章

# 三角形ノ邊ノ平方

**105.** **定理** 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シ。

**假設** △ABC ニ於テ ∠BAC ヲ直角トス。

**終結** $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$



**證明** AB, AC, BC 上ニ夫々正方形 ABDE, ACFG, BCKH ヲ畫キ, A ヨリ BH ニ平行ニ AM ヲ引キ HK ト M ニ於テ交ハラシメ, AH 及ビ DC ヲ結べ。

然ラバ CAE ハ一直線ニシテ BD ニ平行ナリ。

故ニ, 正方形 BE=2△BCD (101節)

又 矩形 BM=2△ABH

而シテ △BCD≡ABH (27節)

故ニ 正方形 BE=矩形 BM

同樣ニ 正方形 CG=矩形 CM

然ルニ 正方形 BK=矩形 BM+CM

故ニ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$*

**系** 直角三角形ノ直角ノ一邊ノ平方ハ,斜邊ノ平方ト他ノ一邊ノ平方トノ差ニ等シ。

今三邊ノ測度ヲ $a, b, c$ ($a$ ヲ斜邊トス) トセバ,

$a^2=b^2+c^2,\quad b^2=a^2-c^2,\quad c^2=a^2-b^2$ ナリ。

**問1.** 6米ノ梯子ヲ壁ニ掛ケタルアリ,壁ノ礎ト梯子ノ下端トノ距離 2米ナリ,梯子ノ上端ノ高サ幾米ナルカ。

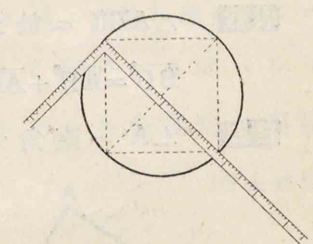
*此定理ヲぴたごらす(古代希臘ノ數學者, 哲學者)ノ定理ト云フ。我國ニテハ之ヲ鉤股弦ノ定理ト云ヒタリ。



***問2.** 正方形ノ對角線ノ平方ハ一邊ノ平方ノ二倍ニ等シ。

今一邊ヲ $a$ トセバ,對角線ハ $\sqrt{2}a$ ニ等シ。

**注意** 古來我國ノ大工等ノ所持スル物指(さしがね)ニ裏指ナルモノアリ,コレ $\sqrt{2}$ 寸ヲ分割ノ單位トセルモノニシテ,丸太ヨリ取ル柱ノ寸法等ヲ知ルニ用ヒテ甚ダ便ナルモノナリ。



***問3.** 正三角形ノ高サノ平方ハ,一邊ノ平方ノ四分ノ三ニ等シ。

今一邊ヲ $a$ トシ,其高サ及ビ面積ヲ求メヨ。

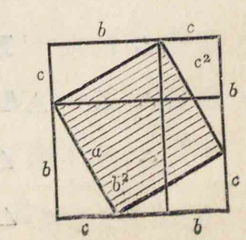
**問4.** 60糎ト40糎トノ高サアル二ツノ柱ガ30糎離レテ直立スルトキハ,其頂ノ距離如何。

***問5.** 四邊形 ABCD ノ對角線ガ直交スルトキハ,

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2$ ナリ。

**問6.** ココニ示ス圖ニヨリテ本節ノ定理ヲ證明セヨ。

($a^2$ 及ビ $b^2+c^2$ ヲ夫々 $(b+c)^2$ ヨリ引キタル差ヲ比較セヨ。)

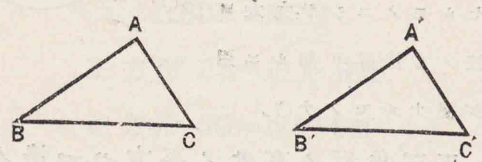


**106. 定理** 三角形ノ一邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シキトキハ,其邊ノ對角ハ直角ナリ。

**假設** △ABC ニ於テ

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ トス。

**終結** ∠A ハ直角ナリ。




**證明** 今 △A′B′C′ ヲ二邊 A′B′,A′C′ ガ夫々 AB, AC ニ等シク,其且夾角 A′ ガ直角ナル三角形トセバ,

$\overline{B'C'}^2=\overline{A'B'}^2+\overline{A'C'}^2$ (105節)

$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ (作圖)

然ルニ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ (假設)

故ニ $\overline{B'C'}^2=\overline{BC}^2$

∴ $B'C'=BC$

∴ $\triangle ABC\equiv A'B'C'$ (34節)

∴ $\angle A=A'$

$\angle A=$直角



問1. 三邊ノ測度ガ 3, 4, 5 ナル三角形ハ直角三角形ナリ。

**注意** 此簡單ナル三ツノ長サハ一筋ノ縄ニテ直角ヲ作ルニ用ヒテ極メテ便ナリ,故ニ測量ニ應用セラル。

問2. 梯形ノ兩底ガ夫々 6 間及ビ 9 間ニシテ他ノ二邊ガ 5 間及ビ 4 間ナルトキ,此梯形ノ面積ハ幾坪ナルカ。 [東大農實]

**107. 作圖題** 所設ノ兩正方形ノ和又ハ差ニ等シキ正方形ヲ作レ。

**題意** 所設兩正方形ヲ $A^2$ 及ビ $B^2$ トス。

$A^2+B^2$ ニ等シキ正方形及ビ $A^2-B^2$ ($A>B$ トシ) ニ等シキ正方形ヲ作ルコトヲ求ム。

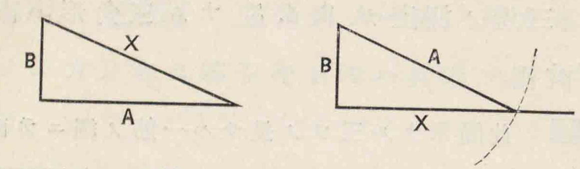
**解** 所要ノ正方形ヲ $X^2$ トセバ,

$A^2+B^2=X^2$

及ビ $A^2-B^2=X^2$ 從テ $A^2=B^2+X^2$

ナルベキヲ以テ, A,B,X ハ一ツノ直角三角形ノ三邊ニ等シク, 第一ノ場合ニ於テハ X ガ斜邊トナリ,第二ノ場合ニ於テハ A ガ斜邊トナル。

依テ容易ニ作圖法ヲ得ベシ。(學生之ヲ試ミヨ。)



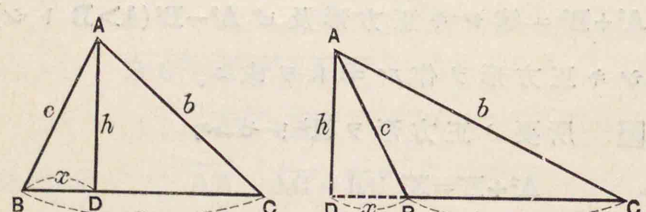

問. $A^2+B^2+C^2$ ニ等シキ正方形ヲ作レ。

**108.** **定理** **三角形ABCノ三邊 BC, CA, AB ノ測度ヲ夫々 $a, b, c$ トシ,其面積ノ測度ヲ $S$ トセバ, $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$* ナリ。**

但シ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ [半周] トス。

**證明** 高サ AD ノ測度ヲ $h$, BD ノ測度ヲ $x$ トセバ,

$$h^2=c^2-x^2=b^2-(a\pm x)^2$$




故ニ $c^2-x^2=b^2-(a\pm x)^2$ ヨリ

$$x=\pm\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$$

之ヲ $h^2=c^2-x^2=(c+x)(c-x)$ ニ代入スレバ

*此公式ヲひーろー又ハへろんノ公式ト云フ。



$$h^2=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

依テ三角形ノ面積ノ測度ヲ $S$ トセバ,

$$S=\frac{1}{2}ah$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

然ルニ $a+b+c=2s$ ナル故

$$b+c-a=2s-2a=2(s-a),$$
$$c+a-b=2(s-b),$$
$$a+b-c=2(s-c)$$

之ヲ上式ニ代入シテ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ ヲ得。

問1. 三邊ノ長サガ夫々6米,11米,7,米ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

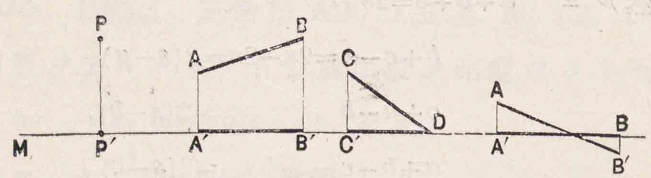
問2. 三邊ガ夫々7米,8米,9米ナル三角形ノ最小邊ヲ底トシタルトキノ高サヲ計算セヨ。

**109.** **定義** 一直線上ニ投ズル或點ノ**正射影**トハ,其點ヨリ其直線ヘ下セル垂線ノ足ナリ。

又一直線上ニ投ズル或**線分ノ正射影**ト

ハ,其線分ノ兩端ヨリ,其直線ヘ下セル垂線ノ足ノ間ニアル其直線ノ部分ナリ。

初等幾何學ニ於テハ正射影ノコトヲ單ニ射影ト云フコト多シ。



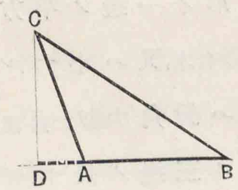

問. 或線分ト其射影ニ於テ其兩者ガ相等シキコトアルカ。又或線分ノ射影ガ點トナルコトアルカ。

**110. 定理** **鈍角三角形ノ鈍角ノ對邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ其一邊ト其上ニ投ズル他ノ邊ノ射影トノ矩形ノ二倍ダケ大ナリ。**

**假設** △ABC ニ於テ ∠BAC ヲ鈍角トシ, CD ヲ C ヨリ對邊ヘ下シタル垂線トス。

**終結** $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB.AD$






**證明** ∠BAC ハ鈍角ナル故 D ハ BA ノ延長上ニ在リ。

故ニ $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$ (105節)

$=(BA+AD)^2+\overline{CD}^2$

$=\overline{BA}^2+\overline{AD}^2+2BA.AD+\overline{CD}^2$ (97節)

$=\overline{BA}^2+(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)+2BA.AD$

$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB.AD.$ (105節)

問1. △ABC ノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 $a$, $b$, $c$ トスルトキ, $\angle A=120^\circ$ ナラバ

$a^2=b^2+c^2+bc$ ナリ。

**系一。** 三角形ノ鋭角ノ對邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ,其一邊ト其邊上ニ投ズル他ノ邊ノ射影トノ矩形ノ二倍ダケ小ナリ。

問2. △ABC ノ三邊ヲ前問ノ如クシ, $\angle A=60$ トセバ, $a^2=b^2+c^2-bc$ ナルコトヲ證明シ,ヨリテ以テ $a=2\sqrt{3}$(寸), $c=4$(寸) ナルトキ $b$ ヲ求ム。

**系二。** 三角形ノ一邊ノ平方ガ,他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ大ナルカ,又ハ小ナルカニ從ッテ,其邊ノ對角ハ鈍角又ハ鋭角ナリ。(歸謬法)

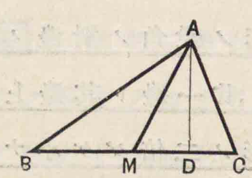
**問3.** 三角形ノ三邊ノ長サガ夫々次ノ如キトキハ,此三角形ハ鋭角三角形,直角三角形,鈍角三角形ノ何レナルカ。

$2, 3, 4;\quad \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 1;\quad \sqrt{20}, \sqrt{30}, \sqrt{40}$

**111. 定理 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ,第三邊ノ半分ノ平方ト此邊ヘノ中線ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ。**

**假設** △ABC ニ於テ M ヲ邊 BC ノ中點トス。

**終結** $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$




(A ヨリ BC ヘ垂線 AD ヲ引キ,前節ノ定理及ビ其系一ヲ用ヒテ學生之ヲ證明セヨ。)

***問1.** 平行四邊形ノ四邊ノ平方ノ和ハ,兩對角



線ノ平方ノ和ニ等シ。 [大工,海機]

**問2.** 矩形ノ相對スル二頂點ヲ任意ノ點ニ結ブ線分ノ平方ノ和ハ,他ノ二ツノ頂點ヲ同ジ點ニ結ブ二線分ノ平方ノ和ニ等シ。 [東工]

**問3.** △ABC ノ三中線ノ長サヲ三邊 $a, b, c$ ニテ表ハセ。若シ底ガ 210 糎,他ノ邊ガ 105 糎, 135 糎ナラバ,底ヲ二等分スル中線ノ長サ如何。

## 問 題 8.

1. 等脚三角形 ABC ノ底 AB 上ノ任意ノ一點ヲ P トセバ, $\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=AP.BP$ ナリ。 [商船,山商]

又 P ガ AB ノ延長上ニアラバ如何。

又頂角ガ直角ナラバ,

$$2\overline{PC}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$ ナリ。 [陸士]

2. 三角形ノ二邊ノ平方ノ差ハ,

[1] 其二邊ノ交點ナル頂點ヨリ第三邊ヘ引ケル垂線ガ,分テル第三邊ノ二ツノ部分ノ平方ノ差ニ等シ。 [秋鑛]

[2] 第三邊ト此邊ヘノ中線ガ,此邊ヘ投ズル射影トノ矩形ノ二倍ニ等シ。

3. 直角ヲ夾ム二邊ノ長サガ $a, b$ ナルコトヲ知リテ,此三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ。 [海兵]

4. 正三角形ト正方形トアリテ其周圍相等シキトキハ,何レノ面積ガ大ナルカ。 [商船]

又其周圍ガ何レモ12米ナルトキハ,面積ノ差ハ幾平方米ナルカ。 [京城醫]



5. 河幅ヲ測ラントシテ河岸ノ一地點 A ニ立チテ,其正對岸ノ地點 B ヲ望ミ,更ニ AB ト直角ヲナセル川岸ニ沿ウテ歩ムコト50間ニシテ C ニ達シ,再ビ B ヲ望ミタルニ,角 ACB ハ 60° ナリシト云フ,川幅幾間ナルカ。 [神商]

*6. 所設ノ線分ヲ二分シ,其兩分ノ平方ノ差ヲ所設ノ正方形ニ等シクセヨ。 [京城商]

7. 四邊形ノ對角線ノ平方ノ和ハ,各二對邊ノ中點ヲ結ブ線分ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シ。[水原農]

8. △ABC ノ底 BC ヲ D, E ニテ三等分スルトキハ, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2$ ナリ。 [商船]

## 雜 題 1.

1. 或角ノ補角ト其角ノ餘角トノ和ガ 150° ナリ,其角ヲ求メヨ。

2. 二等邊三角形ノ頂角ガ底角ノ半分ナルトキハ,頂角ハ直角ノ五分ノ二ナリ。 [中幼]

3. 二ツノ隣接角ノ各ヲ二等分スル直線ガ互ニ垂直ナルトキハ,其共有ニアラザル二邊ハ一直

線ヲナス。

**4.** 一點ヨリ出ヅル四ツノ直線ノナス角ニ於テ,相隣ラザル角ガ各相等シキトキハ,此等ノ四直線ハ二直線ヲナス。

**5.** △ABCノ二中線BE, CFヲ夫々M, Nマデ延長シEM=BE, FN=CFトセバ,三點M, A, Nハ同一直線上ニ在リ。

**6.** 正三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ト他ノ二邊(其延長ヲモ含ムコトアリ)トニテ作レル三角形ハ正三角形ナリ。

**7.** 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ヲ各對邊マデ引クトキハ其長サ相等シ。

又外底角ノ二等分線ハ如何。

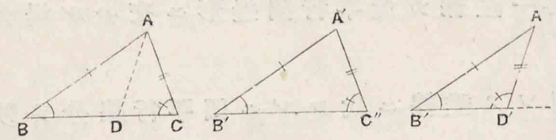
**8.** 三角形ノ底ノ兩端ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ガ相等シキトキハ,其三角形ハ等脚三角形ナリ。 [商船]

**9.** 三角形ノ三中線ガ相等シキトキハ,其三角形ハ正三角形ナリ。

**10.** 三角形ノ二中線ノ中,大邊ヘ引ケルモノハ他ヨリ小ナリ。 [北海大豫]



**11.** 二邊ヲ等シクシ,且其一組ノ等邊ニ對スル角ヲ等シクスル兩三角形ニ於テハ,他ノ一組ノ等




邊ニ對スル角ハ相等シキカ,或ハ互ニ補角ナリ(如何ナル場合ニ相等シキカヲ研究セヨ),而シテ其相等シキ場合ニハ兩三角形ハ合同ナリ。

**12.** 三角形ノ一角ノ二等分線ガ對邊ヲ二等分スルトキハ,其三角形ハ等脚三角形ナリ。

**13.** 三角形ノ一角ノ二等分線ト直交スル直線ハ,其角ノ二邊ト二等邊三角形ヲ作ル。

外角ノ二等分線ト直交スル直線ハ如何。

**14.** 二等邊三角形ノ底ノ一端ヨリ,之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ガ底トナス角ハ頂角ノ半ニ等シ。

**15.** 四邊形ノ對角線ガ相等シク,且一双ノ對邊ガ相等シキトキハ,此四邊形ハ梯形ナリ。

**16.** 梯形ノ對角線ガ相等シキトキハ,此梯形ハ等脚梯形ナリ。 [山商]

**17.** 平行四邊形ノ一組ノ對角頂ヨリ,其形外ノ

一直線マデ引ケル垂線ノ和ハ,他ノ一組ノ對角頂ヨリ同ジ直線マデ引ケル垂線ノ和ニ等シ。〔商船〕

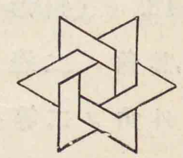
若シ其一直線ガ此平行四邊形ニ交ハル場合ハ如何。

又此四ツノ垂線ニ代フルニ四平行線分ヲ以テスレバ如何。

**18.** 二角ト其一ツニ對スル邊トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

**19.** 所設ノ直線外ノ定點ヲ過ギ,此直線ト所設ノ角ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引ケ。

**20.** 圖ノ如キ正三角形ノ組合セヲ畫ケ。



而シテ内部ニ生ズル六角形ハ正六角形ナルコトヲ證明セヨ。

**21.** 次ノモノヲ知リテ直角三角形ヲ作レ。

斜邊ト一邊, 斜邊ト一鋭角, 一邊ト一鋭角。

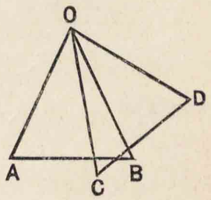
**22.** 一頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ヲ知リテ正三角形ヲ作レ。

**23.** 四邊形ノ對角線ガ直交スルトキハ,其包ム矩形ハ本形ノ二倍ニ等シ。

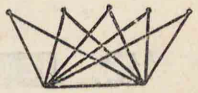


**24.** 二邊ガ夫々相等シク,其夾角ガ互ニ補角ナル兩三角形ハ等積ナリ。

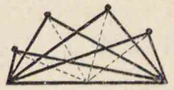
**25.** 同ジ頂點 **O** ヲ有スル二ツノ合同ナル二等邊三角形 **OAB, OCD** アルトキ,其一ツ **OCD** ヲ **O** ヲ中心トシテ回轉スルトキ, **AC** ト **BD** ハ常ニ相等シ。




**26.** 同ジ底邊上ニ其同側ニ等積ノ三角形ガ立ツトキハ,其頂點ハ如何ナル線上ニ在ルカ。



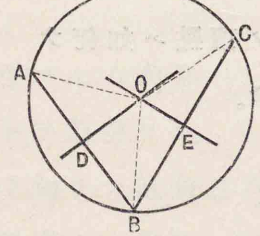
**27.** 同ジ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ直角ノ頂點ハ如何ナル線上ニ在ルカ。



# 第三篇
# 圓

## 第一章
## 中心角, 弧及ビ弦
(第一篇第三章ノ續キ)

**112.** **作圖題** **一直線上ニ在ラザル三點(A, B, C)ヲ通過スル圓周ヲ畫ケ。***




**作圖** AB 及ビ BC ヲ結ビ,其垂直二等分線 DO 及ビ EO ヲ引ク。 (47節)

DO ト EO トハ交ハル。 (64節系五)

* 以下一々圖ニツキテ題意ヲ説明セズ, 題文中ニ符號ヲ挿ミテ之ヲ指示スルニ止ム。 定理ニ就キテモ亦同樣トス。



其交點ヲ O トシ, O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケバ,コレ所要ノ圓周ナリ。

**證明** BO, AO, CO ヲ結ベバ,

$$OB=OA \text{ 及ビ } OB=OC \qquad \text{(77節系四)}$$

故ニ $$OA=OB=OC$$

故ニ此圓周ハ A, B 及ビ C ヲ過グ。

**注意一。** 作圖題ヲ解クニ當リ,直ニ其作圖法ヲ按出シ得ザルトキハ,次ノ如クスベシ。

問題ガ既ニ解キ得ラレタリト考へ, 解答ト假定スル圖形ヲ畫キ, 此圖形ニ於テ所設ノ條件ガ成立スルタメニハ其代リニ如何ナル條件ガ成立スルヲ要スルカヲ考へ, 更ニ此新條件ガ成立スルタメニ必要ナル第三ノ條件ヲ探究シ, 遂テカクノ如クシテ,終ニ直ニ作圖シ得ベキ條件ヲ得,以テ作圖ノ出發點トスベシ。 之ヲ作圖題ノ**解析**ト云フ。

解析ニテ得タル筋途ニ依リ解析ト全ク反對ノ順序ヲ以テ作圖ヲ進行スルトキハ終ニ所要ノ圖形ヲ得ベシ。 之ヲ**總合**又ハ**作圖**ト云フ。

作圖題ヲ解クニハ先ヅ解析ヲ施シテ作圖ノ

出發點ヲ究メ，次ニ總合ニヨリテ作圖ノ方法ヲ作ルベシ。前者ハ進路ヲ指導シ,後者ハ解答ヲ實現セシム。

更ニ上ノ問題ニ就キテ之ヲ說明センニ，

圓ヲ畫クニハ其中心ノ位置ト半徑トヲ知レバ可ナルヲ以テ,A,B,C ヲ過ル圓周ガ既ニ畫キ得ラレタリト考ヘ，其中心ヲ O トセバ，

O ハ三點 A,B,C ヨリ等距離ニ在ルヲ要ス。

故ニ O ハ二點 A,B ヨリ等距離ニ在リ,且二點 B,C ヨリ等距離ニ在ルヲ要ス。

從テ O ハ線分 AB ノ垂直二等分線上ニ在リテ,且線分 BC ノ垂直二等分線上ニ在ルヲ要ス。

而シテ半徑ハ O ト A(B又ハC)トノ距離ナリ。

依テ上ノ作圖法ヲ得ルナリ。

**注意**二。作圖題ヲ解クニ當リ，先ヅ解析ヲ行フトキハ,總合即チ作圖ニヨリテ所要ノ圖形ガ悉ク得ラルルコトトナル。

又上ノ問題ニ於テ O ハ AB, BC ノ垂直二等分線上ニ在ルヲ要スルヲ以テ,此兩者ガ平行ナルトキハ存在セズ。



故ニ所設ノ三點 A,B,C ガ一直線上ニ在ラバ解答ナシ，即チ問題ハ不可能ナリ。

又 A,B,C ガ一直線上ニ在ラザレバ此兩垂直二等分線ハ必ズ交ハルヲ以テ解答アリ。

而シテ O ハ AB, BC ノ垂直二等分線ノ交點ニ限ラズ,三線分 AB, BC, CA ノ何レカ二ツノ垂直二等分線ノ交點ニテ可ナリ。(上ノ證明)

然ルニ OA=OC ナルヲ以テ,AC ノ垂直二等分線ハ必ズ O ヲ通過ス。(77節系四)

即チ AB, BC, CA ノ垂直二等分線ハ一點 O ニ會ス。

而シテ同ジ點ヲ中心トシ,等シキ半徑ヲ有スル圓周ハ唯一ツナルヲ以テ(35節) A,B,C ヲ通過スル圓周ハ上ノ圓周唯一ツニ限ル。

即チ本問題ノ解答ハ唯一ツアルノミ。

カク問題ノ可能不可能ニ關スル所設ノ元素間ノ關係ヲ定メ,且其可能ニ於ケル場合ノ解答ノ數ヲ定ムルコトヲ作圖題ノ**吟味**ト云フ。

作圖題ヲ解クトキハ解析及ビ吟味ヲナスコト肝要ナリ。

**113.** 前節ノ研究ニヨリ次ノ定理ヲ得。

**定理** **一直線上ニ在ラザル三點ヲ通過スル圓周ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。**

系 三點ヲ共有スル二圓周ハ合同ナリ。

問. 圓周上ノ三點ヨリ等距離ニ在ル點ハ其圓ノ中心ナリ。

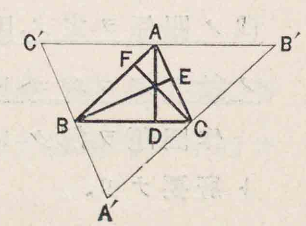
**114.** **定義** 三角形ノ三頂點ヲ通過スル圓ヲ其**外接圓**ト云ヒ,其中心ヲ**外心**ト云フ。

三角形ノ外接圓ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。而シテ外心ハ三頂點ヨリ等距離ニ在リ。

系一. 三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ一點ニ會シ,其交點ハ外心ナリ。

系二. 三角形ノ各頂點ヨリ夫々對邊ヘ下セル三垂線ハ同一點ヲ通過ス。

其故ハ此三垂線ハ各頂點ヲ過ギ夫々對邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ生ズル三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ニ相當スレバ






ナリ。

此點ヲ三角形ノ**垂心**ト云フ。

問1. 一角Bガ鈍角ナル三角形ABCノ垂心ノ位置如何。又其垂心ヲPトセバ,

$\angle PBC+ABC-(PCB+ACB)=2$直角。 [海機]

問2. △ABCノ垂心ヲPトセバ,四點A, B, C, Pハ何レヲ取ルモ他ノ三ツヲ頂點トスル三角形ノ垂心ナリ。

**115.** 次ノ作圖題ハ直チニ解クコトヲ得ベシ。

**作圖題** 所設ノ圓ノ中心ヲ求メヨ。

問1. 所設ノ弧ヲ完全ナル圓周トナセ。

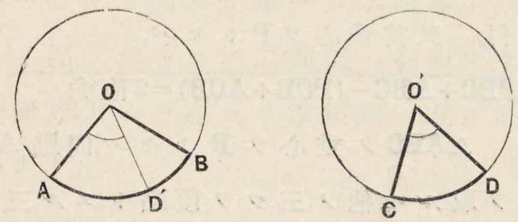
問2. 一定點ヲ通過シ相交ハル二定直線ト等角ヲナスベキ直線ヲ引ケ。 [東商]

問3. 定點ヲ過ル直線ヲ引キ,其所設ノ平行線間ニ夾マルル部分ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。

**116.** **定理** **等圓又ハ同圓ニ於テ二ツノ中心角ガ等シカラザルトキハ,其大ナル中心角ニ對**

スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大ナリ。

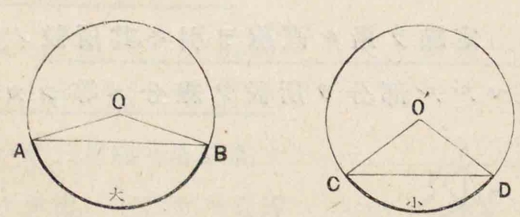
逆モ眞ナリ。




(兩圓ヲ重ネテ學生之ヲ證明セヨ。)

**117.** **定理** 等圓又ハ同圓ニ於テ二ツノ劣弧ガ等シカラザルトキハ,其大ナル弧ノ弦ハ小ナル弧ノ弦ヨリ大ナリ。

逆モ眞ナリ。




(前節及ビ79節,80節ノ定理ニヨリテ學生之ヲ證明セヨ。)



**118.** **定理** 弦(AB)ニ垂直ナル直徑(MN)ハ此弦及ビ此弦ニ對スル二ツノ弧(ANB及ビAMB)ヲ二等分ス。

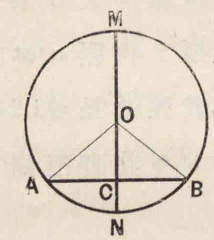
**證明** 中心ヲOトシ,ABトMNトノ交點ヲC

トセバ　$\triangle ACO \equiv BCO$　(72節)

$\therefore$　$AC = BC$

又　中心角 $AON = BON$

$\therefore$　弧 $AN = BN$




從テ　弧 $AM = BM$

*問1. 平行線ノ各ガ一圓周ト交ハルトキハ,其間ニ在ル二ツノ弧ハ相等シ。

**系一。** 弦ノ垂直二等分線ハ中心ト其弦ニ對スル弧ノ中點トヲ通過ス。

*問2. 所設ノ弧ヲ二等分セヨ。

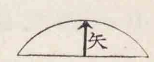
**系二**。弦ノ中點ト中心トヲ過ル直線ハ此弦ニ垂直ナリ。

**注意** 上ノ定理ノ弦ニ關スルモノノ逆ハ系一,系二ノ二ツナリ。

カク假設ガ二ツ以上ノ事項ヲ含ムトキハ,其一ツト終結トヲ交換シテ生ズル事項ヲ原定理ノ逆ト云フ。

問3. 一點ト一直線アリ,其距離3米ナリ,今此點ヲ中心トシ,其定直線ヨリ8米ノ弦ヲ截リ取ル圓ヲ畫カントス,半徑ヲ何程ニスベキカ。

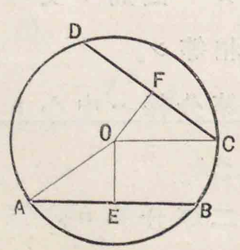
問4. 圓弧アリ,其弦ノ長サ1.2米,矢ノ長サ2米ナルトキ其直徑如何。




## 119. **定理** 等圓又ハ同圓ニ於テ,

[1] **中心ヨリ等距離ニ在ル弦ハ相等シ。**

[2] **中心ニ近キ弦ハ之ヨリ遠キ弦ヨリ大ナリ。**



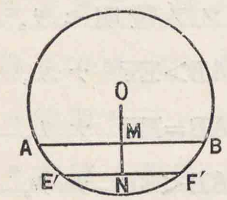

([1]ハ學生之ヲ證明セヨ。)

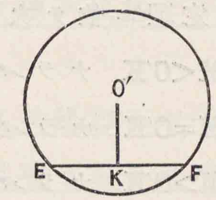


**假設** 等圓$O, O'$ノ二弦ヲ夫々$AB, EF$トシ,中心$O, O'$ヨリ此二弦ヘ夫々垂線$OM, O'K$ヲ下シ,

$OM<O'K$ トス。

**終結** $AB>EF$




**證明** 圓$O'$ヲ圓$O$ニ重ネ中心$O'$ヲ中心$O$ノ上ニ$O'K$ヲ$OM$上ニ置クトキハ,

$O'K>OM$ナル故, $K$ハ$OM$ノ延長上ニ落ツ。

此點ヲ$N$トシ,弦$EF$ガ$E'F'$ノ位置ニ來ルトセン。

然ラバ,$O$ト$N$トハ$AB$ノ兩側ニ在リテ且$E'F'$ハ$AB$ニ平行ナルヲ以テ$E'F'$ハ$AB$ノ$O$點ト反對ノ側ニ在リ。

故ニ$E', F'$ハ共ニ劣弧$AB$上ニ在リ。

依テ 劣弧 $AB>E'F'$

故ニ 弦 $AB>E'F'$ (117節)

故ニ 弦 $AB>EF$

系一。直徑ハ其圓ノ最大ナル弦ナリ。

系二。本定理ノ逆モ亦皆眞ナリ。

コレ上ト同法ニヨリテ證明スルヲ得レドモ,次ノ如ク論理的ニ證明スルヲ便ナリトス。

既ニ本定理ニ依テ次ノ三ツヲ證明セリ。

[1] $OM<O'K$ ナラバ 弦 $AB>EF$ ナリ。

[2] $OM=O'K$ ナラバ 弦 $AB=EF$ ナリ。

[3] $OM>O'K$ ナラバ 弦 $AB<EF$ ナリ。

而シテ證明スベキ事項(系二)ハ次ノ三ツナリ。

[4] 弦 $AB>EF$ ナラバ $OM<O'K$ ナリ。

[5] 弦 $AB=EF$ ナラバ $OM=O'K$ ナリ。

[6] 弦 $AB<EF$ ナラバ $OM>O'K$ ナリ。

今先ヅ[4]ヲ證明セン。

若シ假ニ $OM$ ガ $O'K$ ヨリ小ナラズトセバ,
必ズ $OM=O'K$ 或ハ $OM>O'K$ ナルヲ要ス。
然ルニ若シ $OM=O'K$ ナリトセバ,
[2]ヨリ 弦 $AB=EF$ トナリテ假設ニ戻リ,
又若シ $OM>O'K$ ナリトセバ,
[3]ヨリ 弦 $AB<EF$ トナリテ假設ニ戻ル。
故ニ $OM<O'K$ ナリ。



同樣ニ[5]及ビ[6]ヲ證明スルコトヲ得。

此證明法ヲ**轉換法**ト稱ス。

此論法ハ證明セントスル定理ノ終結ト異ル終結ヲ眞ナリト假定スレバ,皆假設ニ戻ル結果ヲ生ズルコトヲ示シ,以テ其定理ノ終結ノミガ眞ナリト結論ス。(80節ノ證明參照)

既ニ證明セラレタル互ニ關聯セル一群ノ定理ニ於テ,其等ノ假設ハ或事項ニ於テ起ルベキ總テノ場合ヲ盡クシ,其中一ツハ必ズ成立スベク,終結ハ互ニ相容レザル(同時ニ二ツ以上眞ナルヲ得ザル)トキハ,上ノ方法ニヨリテ常ニ其等ノ定理ノ逆ガ悉ク眞ナルコトヲ證明スルヲ得。

此論法ハカク一群ノ定理ノ逆ヲ一括シテ證明セントスル場合ニ用ヒテ便ナリ。

**問1.** 相等シキ二圓ノ中心ヲ結ブ直線ニ平行ナル直線ガ其圓周ニテ截リ取ラルル弦ハ相等シ。

***問2.** 圓內ノ同ジ點ヲ過ル弦ノ中ニテ,此點ニテ二等分セラルルモノガ最小ナリ。

***問3.** 圓內ノ同ジ點ヲ過ル弦ノ中ニテ最モ短キモノハ,其點ヲ過ル直徑ニ垂直ナリ。 [東工]

問4. 116節及ビ117節ノ定理ノ逆ノ部分ノ證明ヲ轉換法ニテ試ミヨ。

## 問題 9.

*1. 等圓又ハ同圓ニ於テ一ツノ中心角ガ他ノ中心角ノ $n$ 倍ナルトキハ,前者ノ其中心角ニ對スル弧ハ,後者ノ其中心角ニ對スル弧ノ $n$ 倍ニ等シ。逆モ眞ナリ。

2. 同圓又ハ等圓ニ於テ,或弧ノ弦ハ其二倍ノ弧ノ弦ノ半分ヨリ大ナリ。

3. 中心Oナル圓ノ弦ABヲCマデ引キ延バシ,BCヲ此圓ノ半徑ニ等シクシ,CトOトヲ過ル直線CDOEヲ引キ,圓周ト交ハル點ヲD,Eトスレバ,弧AEハ弧BDノ三倍ニ等シ。

4. 弧ノ中點ヲ過ル中心線ハ其弧ノ弦ヲ垂直ニ二等分ス。

*5. 圓外ノ一點Pヨリ其圓周ヘ二ツノ相等シキ線分PA,PBヲ引クトキハ,∠APBノ二等分線ハ中心ヲ通過ス。

6. 中心ヲ通過セザル二弦ガ互ニ等分スルコトアルカ。



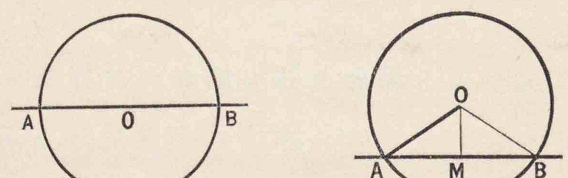
7. 二ツノ等弦ガ相交ハルトキハ,其交點ニテ分タレタル部分ハ二ツヅツ相等シ。

8. 一定點ヨリ一定圓ヲ截ル直線ヲ引キ,其圓外部ヲ圓內部ニ等シカラシメヨ。 〔商船〕

## 第二章

# 割線及ビ切線

**120.** **定理** **圓周上ノ一點(A)ヲ過ギ,此點ヘ引ケル半徑(OA)ニ垂直ナラザル直線(AB)ハ二點ニ於テ圓周ト交ハル。**




**證明** ABガ中心Oヲ過ルトキハ,ABハ即チ直徑ニシテ,其兩端ナル二點ニ於テ圓周ト交ハル。

ABガOヲ通過セザルトキハ,OヨリABヘ垂線OMヲ下シ, AMニ等シクAMノ延長上ニMBヲ取ルトキハ, $OB=OA$ ナルヲ以テBハ圓周上ニ在リ。從テABハ二點A,Bニテ圓周ト交ハル。

而シテABト圓周トハ此外ニ交點ナシ。(78節)

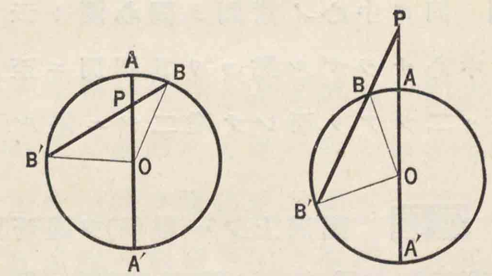
故ニ 直線ト圓周トノ交點ハ二ツヨリ多カラズ。



**121.** **定義** 圓周ト二點ヲ共有スル直線ハ其圓ト交ハルト云ヒ,圓ニ交ハル直線ヲ圓ノ割線ト云フ。

中心ヲ通過スル割線ヲ特ニ**中心線**ト云フ。

**122.** **定理** **一點ヨリ圓周ニ至ル線分中,其點ヲ過ル中心線ニ合スルモノガ,最短及ビ最長ナリ。**




**假設** Pヲ一點トシ, $APA'$ 又ハ $PAA'$ ヲ中心線トシ, $BPB'$ 又ハ $PBB'$ ヲ他ノ任意ノ割線トス。

而シテ $PA<PA'$ 及ビ $PB<PB'$ トス。

**終結** $PA<PB$ 及ビ $PA'>PB'$

**證明** [1] $OB \sim OP<PB$ 及ビ $OB=OA$ ナル故,

$$PA<PB$$

[2] $FO+OB'>PB'$ 及ビ $OB'=OA'$ ナル故,

$$PA'>PB'$$

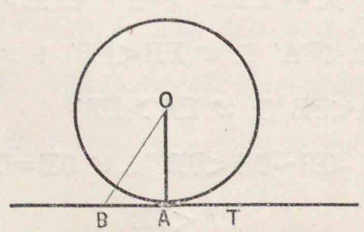
**123.** **定義** 一點ト圓周トノ距離トハ,此點ヨリ之ヲ過ル中心線ト圓周トノ二交點ノ中ノ近キ點マデノ距離ナリ。

問1. 同ジ中心ノ二ツノ圓周ノ一ツノ上ノ一點ヨリ,他ノ圓周マデノ距離ハ皆相等シ。

**注意** 同ジ中心ノ諸圓ヲ**同心圓**ト云フ。

問2. 中心ナラザル點ヨリ其圓周ニ至ル相等シキ線分ハ二ツアリ,而シテ唯二ツニ限ル。

**124.** **定理** **圓周上ノ一點(A)ヲ過ギ,此點ヘ引ケル半徑(OA)ニ垂直ナル直線(BAT)ハ,圓周ト唯此一點ヲ共有スルノミ。**






**證明** B ヲ AT 上ノ A ニアラザル任意ノ一點トセバ, OA ハ BAT ノ垂線ナルヲ以テ

$$OB>OA$$

故ニ B ハ圓外ニ在リ。

依テ BAT ハ圓周 O ト A 點ヲ共有スルノミ。

**125.** **定義** 圓ノ**切線**トハ其圓周ト唯一點ヲ共有スル直線ニシテ,其點ヲ其**切點**ト云フ。

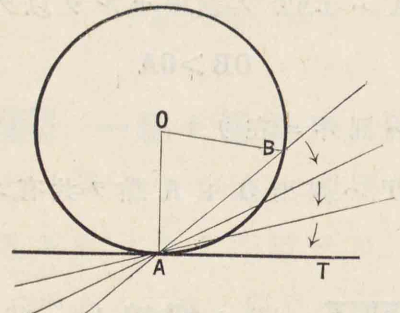
而シテ切線ハ切點ニ於テ其圓ニ**切ス**ト云フ。

第120節及ビ前節ノ定理ハ次ノ如ク述ブルヲ得。

圓周上ノ一點ヲ通過シ,其點ヘ引キタル半徑ニ斜交スル直線ハ割線ニシテ,直交スル直線ハ切線ナリ。

**注意** 圓ノ割線 AB ヲ A ヲ固定シテ B ガ次第ニ A ニ近ヅク樣ニ動カストキハ,割線 AB ハ次第ニ A ニ於ケル切線 AT ニ近ヅキ, B ガ A ニ重ナルトキハ AB ハ A ニ於ケル切線トナル,而

シテ此時 AB ハ OA ニ垂直トナル。




系一。切線ハ切點ヲ通過スル中心線ニ垂直ナリ。

系二。切線ハ圓周上ノ各點ニ於テ各一ツアリ，而シテ唯一ツヅツアルノミ。

系三。切點ヲ過ギ切線ニ垂直ナル直線ハ，其圓ノ中心ヲ通過ス。

系四。圓ノ中心ト一ツノ直線トノ距離ハ其直線ガ割線ナルカ，切線ナルカ，又ハ全ク其圓ニ交ハラザルカニ從テ，半徑ヨリ小ナルカ，半徑ニ等シキカ，又ハ半徑ヨリ大ナリ。

逆モ亦眞ナリ。

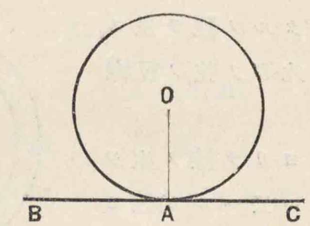
*問 1.　系三ノ逆ヲ述べ，且之ヲ證明セヨ。



問 2.　圓内ノ點ヲ過ル直線ハ割線ナリ。

*問 3.　所設ノ點ヲ中心トシ，所設ノ直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

**126.** **作圖題**　**所設ノ圓ノ周上ノ所設ノ點ヲ過ル其圓ノ切線ヲ引ケ。**



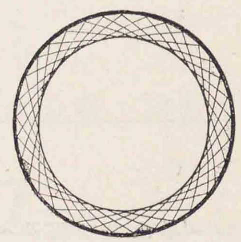

（學生之ヲ解クベシ。）

問.　所設ノ直線ニ平行ナル様ニ所設ノ圓ニ切線ヲ引ケ。

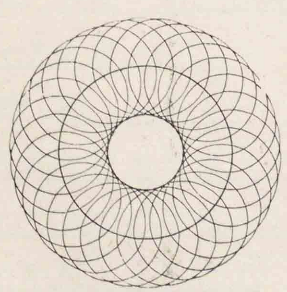
## 問題 10.

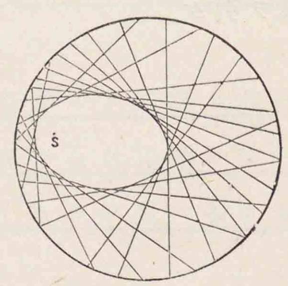
1. 二ツノ同心圓ノ中ノ小圓ニ切スル大圓ノ弦ハ皆相等シク,且皆切點ニテ二等分セラル。

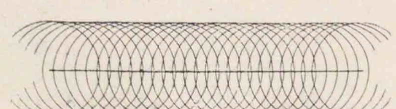
**注意** 此弦ヲ無數ニ引クトキハ内ナル圓ハ恰モ此等ノ弦ニテ作ラレタルノ觀ヲ呈ス。故ニ此内圓ハ此等ノ弦ノ**包線**ト稱ス。



點ノ運動ニヨリテ線ノ生ジタルコトハ前ニ云ヘルガ,線モ亦運動シテカク線ヲ作ルト考フルヲ得。次ニ尚二三ノ圖ヲ示サン。









2. 弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ガ其弧ヲ分ツ三ツノ部分ノ大小如何。 [高]

3. Oヲ中心トスル圓周上ノ一點Aニ於ケル切線ト,任意ノ半徑OBノ延長トノ交點ヲCトシ,OBニ垂線ADヲ引クトキハ,ABハ∠DACヲ二等分ス。 [陸士]

4. 圓周上ノ一點Aニ於ケル切線ニ平行ナル任意ノ弦ヲBCトセバ,弧AB, ACハ相等シ。

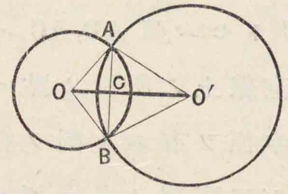
5. 所設ノ直線上ノ所設ノ點ニ於テ此直線ニ切シ,且所設ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

6. 相交ハル二直線ノ各ニ切スル圓ノ中心ハ,其二直線ノナス角ノ二等分線上ニ在リ。

### 第三章

## 二圓ノ相交及ビ相切

**127.** **定理** **二ツノ圓周ガ其兩中心ヲ通過スル直線上ニ在ラザル一點ヲ共有スルトキハ又，其直線ニ關スル其點ノ對稱點ヲ共有ス。**




**證明** 二圓周 O, O′ ガ其中心 O, O′ ヲ通過スル直線上ニ在ラザル一點 A ヲ共有ストス。

A ヨリ OO′ ヘ垂線 AC ヲ下シ，之ヲ延長シテ CB ガ AC ニ等シキ樣ニ B ヲ取ルトキハ，

OA=OB 及ビ O′A=O′B ナルコト明カナリ。

故ニ兩圓周 O, O′ ハ共ニ B ヲ通過ス。

換言スレバ此兩圓周ハ又 OO′ ニ關スル A ノ對稱點 B ヲ共有ス。

而シテ此外ニハ共有點ヲ有セズ。 (113節系)

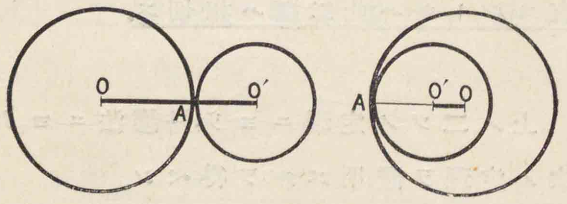


**128.** **定義** 二點ヲ共有スル二ツノ圓周ハ互ニ相交ハルト云フ。

**注意** 前節ノ圖形ハ OO′ ニ關シテ對稱ナリ。

**系** 相交ハル二圓ノ共通弦ハ，其共通ノ中心線ニテ垂直ニ二等分セラル。

**129.** **定理** **二ツノ圓周(O, O′)ガ其兩中心ヲ通過スル直線上ノ一點 (A) ヲ共有スルトキハ，其二圓周ハ其點ノ外ニ共有點ヲ有セズ。**




**證明** 中心 O′ ガ圓 O ノ內又ハ外ニ在ルニ拘ラズ，O′ 點ヨリ圓周 O ニ至ル最短又ハ最長線分ハ O′A ナリ。 (122節)

故ニ圓周 O 上ノ點ハ A ヲ除クノ外皆圓 O′ ノ外又ハ內ニ在リ。

故ニ兩圓周ハ A ノ外ニ共有點ヲ有セズ。

**130.** **定義** 唯一點ヲ共有スル二ツノ圓周ハ互ニ**相切ス**ト云ヒ,其點ヲ其**切點**ト云フ。

各圓ノ中心ガ各他ノ圓ノ外ニ在ルトキハ,各圓ハ各他ノ外ニ在リ,之ヲ**外切**ト云フ.

又小圓ノ中心ガ大圓内ニ在ルトキハ,小圓ハ全ク大圓内ニ在リ,之ヲ**内切**ト云フ。

前節ノ定理ハ次ノ如ク述ブルヲ得。

二ツノ圓周ガ其兩中心ヲ通過スル直線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,此二圓ハ相切ス。

**131.** 上ノ二ツノ定理ニヨリ,歸謬法ニヨリテ容易ニ次ノ定理ヲ證明スルヲ得ベシ。

**定理** **兩圓相切スルトキハ,其切點ハ兩圓ノ共通中心線上ニ在リ。而シテ其中心間ノ距離ハ兩圓ノ半徑ノ和(外切)又ハ差(内切)ニ等シ。**

**定理** **兩圓相交ハルトキハ,其交點ハ兩圓ノ共通中心線上ニ在ラズ。而シテ其中心間ノ距離ハ兩圓ノ半徑ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナリ。**



*問 1. 兩圓相切スルトキハ,切點ニ於テ共通ノ切線ヲ引クコトヲ得。

*問 2. 所設ノ圓周ト其上ノ所設ノ點ニ於テ切シ,且定半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

**132.** **定理** **二ツノ圓周ガ全ク共有點ヲ有セザルトキハ,其中心間ノ距離ハ兩圓ノ半徑ノ和ヨリ大ナルカ或ハ其差ヨリ小ナリ。**

(學生之ヲ證明セヨ。)

## 133. 二圓ノ位置ト其中心間ノ關係。

今兩圓ノ半徑ヲ $r$ 及ビ $r'$ トシ,其中心間ノ距離ヲ $d$ トセバ, 前二節ヨリ

[1] 兩圓互ニ外方ニ離ルルトキハ, $d > r+r'$

[2] 兩圓外切スルトキハ, $d = r+r'$

[3] 兩圓相交ハルトキハ, $r+r' > d > r\sim r'$

[4] 兩圓内切スルトキハ, $d = r\sim r'$

[5] 一圓ガ全ク他ノ内ニ在リテ相離ルルトキハ, $d < r\sim r'$

上ノ五ツノ定理ノ逆ハ皆眞ナリ。(轉換法)

特ニ[3]ノ逆ヨリ　$a+b>c>a\sim b$　ナル關係ヲ有スル三線分 $a, b, c$ ニテハ必ズ三角形ヲ作リ得ルコトヲ知ル。

即 $a, b, c$ 間ノ此關係ハ $a, b, c$ ヲ三邊トスル三角形ガ出來ルタメニ必要ニシテ十分ナル條件ナリ。(54節注意)

問1.　二ツノ圓ノ半徑ガ夫々3糎及ビ5糎ニシテ,兩圓ノ中心間ノ距離ガ2糎ナリト云フ,此二圓ノ位置如何。若シ中心間ノ距離ガ8糎ナラバ如何。

問2.　$a+b>c>a\sim b$　ナル關係アルトキハ, $a, b, c$ ハ其何レノ二ツノ和モ殘リノ一ツヨリ大ナルコトヲ證明セヨ。

## 問　題　11.

1.　第128節ノ系ヲ應用シテ第一篇50節ノ作圖題ヲ解ケ。

2.　二ツノ圓ガ互ニAニ於テ外切シ,二直線PAX, QAYガ夫々一ツノ圓周ニP, Qニ於テ,他ノ



圓周ニX, Yニ於テ交ハルモノトス,然ルトキハPQトXYトハ平行ナリ。　〔京城商〕

3.　相切スル兩圓ノ切點ヲ通過シテ任意ニ割線ヲ引クトキハ,其交點ニ至ル兩半徑ハ平行ナリ。

4.　相切スル兩圓ノ平行ナル直徑ノ端ト切點トハ三點ヅツ同一ノ直線上ニ在リ。　〔商船,神商〕

5.　相交ハル兩圓ノ交點ノ一ツニ於ケル兩圓ノ切線ガ直交スルトキハ,其切線ハ夫々其兩圓ノ中心ヲ過グ。

カクノ如キ二圓ヲ**直交圓**ト云フ。

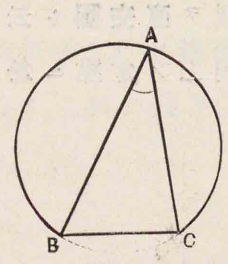
6.　定圓ト其周上ノ定點ニ於テ直交スル定半徑ノ圓ヲ畫ケ。

## 第四章

# 內接角

**134.** **定義** **弓形ノ角**トハ弓形ノ弧上ノ一點ヲ其弧ノ兩端ニ結ブ直線ノナセル角ナリ。

弓形ノ角ヲ完全ナル圓ヨリ見ルトキハ，之ヲ**內接角**ト云フ。



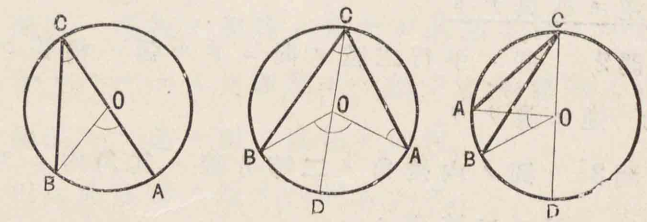

例ヘバ BAC ハ弓形，∠BAC ハ弓形 BAC ノ角ニシテ，之ヲ圓 ABC ノ弧 BC 上ニ立ツ內接角ト云フ。

此角ハ又弧 BC 上ニ立ツ**圓周角**トモ云フ。

**135.** **定理** **內接角(ACB)ハ同弧(AB)ノ上ニ立ツ中心角(AOB)ノ半ニ等シ。**



**證明** [1] ∠ACB ノ一邊 AC ガ中心 O ヲ通過スルトキハ， OB=OC ナル故，




$$\angle OCB = OBC$$

$$\therefore \quad \angle AOB = OBC + OCB = 2ACB$$

[2] AC ガ O ヲ通過セザルトキハ，

直徑 COD ヲ引キ[1]ヨリ，

$$\angle AOD = 2ACD$$

及ビ $$\angle BOD = 2BCD$$

$$\therefore \quad \angle AOD \pm BOD = 2(ACD \pm BCD) \quad \text{(複號同順)}$$

$$\therefore \quad \angle AOB = 2ACB$$

故ニ一般ニ $\angle ACB = \frac{1}{2}AOB$

**系一**。同ジ弓形ノ角ハ皆相等シ。

**問 1.** 同底上ニ立チ，其底ヲ弦トスル同ジ弓形ノ弧上ニ頂點ヲ有スル諸三角形ノ頂角ハ皆相等シ。

系二. 同圓又ハ等圓ニ於テ等弧ノ上ニ立ツ內接角ハ相等シ。

逆モ亦眞ナリ。

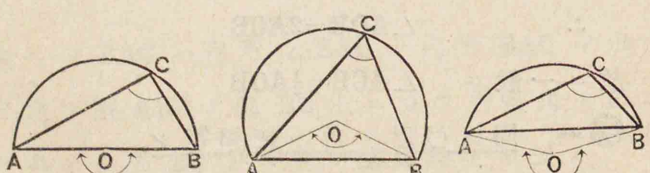
問2. 圓ノ平行二弦ノ間ニアル弧ハ相等シ(再出)。逆モ眞ナリ。

問3. 圓ノ內接角ノ二等分線ハ,其角內ニアル其圓ノ弧ヲ二等分ス。

問4. 同ジ弓形ノ角ノ二等分線ハ皆同ジ點ヲ通過ス。

**136. 定理** **半圓ノ角ハ直角ナリ。半圓ヨリ大ナル弓形ノ角ハ鋭角ニシテ,半圓ヨリ小ナル弓形ノ角ハ鈍角ナリ。**

**逆モ眞ナリ。**




(前節ノ定理ニヨリ學生之ヲ證明セヨ。)

*問1. 直徑ニ對スル內接角ハ直角ナリ, 又內接角ガ直角ナラバ,之ニ對スル弦ハ直徑ナリ.

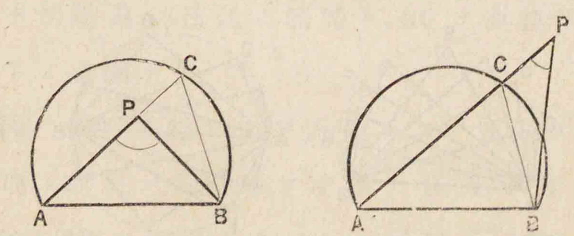


問2. 一ツノ圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ハ其圓ノ內切圓ニシテ,其周ハ切點ヲ過ル初メノ圓ノ弦ヲ二等分ス。

問3. 學校ノ建物ノ長サガ某點ニ於テ30°ノ角ニ含マルルコトヲ觀測セリ,然ラバ其建物ノ兩端ト測點トヲ過ル圓ノ直徑ハ如何。

但シ此建物ノ長サハ20米トス。

**137. 定理** **弓形(ACB)ノ弦(AB)ノ兩端ヲ其弦ノ弓形ト同側ニ在ル一點(P)ニ結ブトキ,其二直線ノ夾角ハ,該點ガ弓形內ニ在ラバ弓形ノ角ヨリ大ニシテ,其點ガ弓形外ニ在ラバ弓形ノ角ヨリ小ナリ。逆モ眞ナリ。**




**證明** [1] Pガ弓形內ニアルトキハ, APノ延長ト弓形ノ弧トノ交點ヲCトセバ, ∠APBハ三

角形 BCP ノ外角ナルヲ以テ,

$$\angle APB > C$$

[2] P ガ弓形外ニアルトキハ AP, BP ノ中少クトモ一ツハ弓形ノ弧ト交ハル。

今 AP ガ弓形ノ弧ト交ハルトシ,其交點ヲ C トセバ

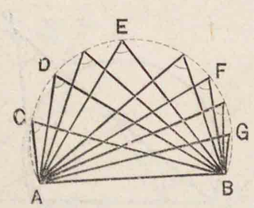
$$\angle ACB > P$$

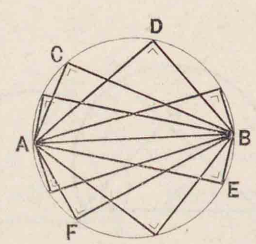
即チ $\angle APB < ACB$

逆ハ歸謬法ニヨリテ容易ニ證明スルヲ得。

**系 同ジ底邊上ニ其同ジ側ニ立ツ三角形ノ中頂角ガ相等シキモノノ頂點ハ皆其底ヲ弦トスル同ジ弧ノ上ニ在リ。**

**特ニ同ジ斜邊ヲ有スル直角三角形ノ直角ノ頂點ハ皆其斜邊ヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。**



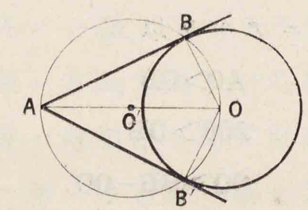




問1. 菱形ノ各邊ヲ直徑トスル四ツノ圓周ハ同一點(對角線ノ交點)ヲ通過ス。



問2. 同一點ヲ通過スル弦ノ中點ハ皆同一ノ圓周上ニ在リ。

**138. 作圖題 所設ノ圓(O)外ノ所設ノ點(A)ヨリ其圓ニ切線ヲ引ケ。**




**解析** 所要ノ切線ガ既ニ引カレタリトシ,之ヲ AB, 切點ヲ B トシ OB ヲ結ベバ,

$\angle ABO$ ハ直角ニシテ且線分 AO ハ一定ナリ。

故ニ B ハ AO ヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。

即チ切點 B ハ所設ノ圓周ト,AO ヲ直徑トスル圓周トノ交點ナリ。

**作圖** AO ヲ結ビ,之ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ,此圓周ト所設ノ圓周トノ交點ヲ B 及ビ B′ トシ, AB 及ビ AB′ ヲ引クトキハ,コレ所要ノ切線ナリ。

**證明** 學生之ヲナスベシ。

**吟味** AO ヲ直徑トスル圓ノ中心ヲ O′(AO ノ中

點トセバ,OO′ハ此圓ノ半徑ナルヲ以テ,勿論兩圓 O, O′ ノ半徑ノ和ヨリ小ナリ。

又OO′ガO圓ノ半徑ヨリ大ナルトキハ,OO′ハ兩圓ノ半徑ノ差(OO′−OB)ヨリ大ナルコト勿論ナリ。

又 OO′ ガ O 圓ノ半徑(OB)ヨリ小ナルトキモ,
A ガ圓 O ノ外ニアルヲ以テ

$$AO>OB$$

故ニ $2OO'>OB$

依テ $OO'>OB-OO'$

即チ OO′ ハ兩圓ノ半徑ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナリ,依テ相交ハル。 (131節)

故ニ其交點ハ必ズ二ツ(B及ビB′)アリ。

故ニ所要ノ切線ハ必ズ二ツ(AB及ビAB′)アリ。

**注意** 點AガO圓ノ周上ニ在ルトキハ切線ハ一ツアリ。 (126節系二)

又AガO圓ノ内ニ在ラバAヲ過ル切線ナシ,コレ此場合ニハ圓O′ハ圓Oニ交ハラザレバナリ。

上ノ吟味ニヨリ次ノ定理ヲ得ベシ。



**139. 定理** **圓外ノ一點ヨリ此圓ニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得。而シテ唯二ツニ限ル。而シテ圓内ノ點ヲ過ル切線ナシ。**

系 圓外ノ一點ヨリ引ケル兩切線ノ其點ト切點トノ間ノ部分ハ相等シ。

*問1. 圓外ノ一點ヨリ二ツノ切線ヲ引クトキ,

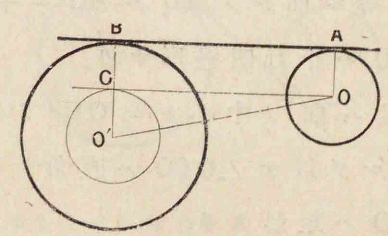
[1] 兩切線ハ其點ヲ過ル中心線ト等角ヲナス。

[2] 兩切線ハ兩切點ヲ結ブ直線ト等角ヲナス。

[3] 其點ヲ過ル中心線ハ兩切點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分ス。

問2. 圓ノ平行ナル二ツノ切線ガ他ノ一ツノ切線トA及ビBニ於テ交ハラバ線分ABハ中心ニ於テ直角ニ對ス

**140. 作圖題** 所設ノ二圓(O,O′)ニ共通切線ヲ引ケ。



[1] 兩圓ヲ同シ側ニ有スル切線。(**共通外切線**)

**解析** 所要ノ切線ガ既ニ引カレタリトシ,其兩圓ノ切點ヲ夫々 A 及ビ B トス。

O ヨリ AB ニ平行ニ OC ヲ引キ O'B トノ交點ヲ C トセバ,∠OCO' ハ直角ニシテ,O'C ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シ。(但シ O'B>OA トス)

故ニ OC ハ O ヲ過ギ,O' ヲ中心トシ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ノ切線ナリ。

**作圖** 大圓ノ中心 O' ヲ中心トシ,兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ヲ畫キ,O ヨリ此圓ニ切線 OC ヲ引キ,其切點ヲ C トス。 (136節)

O'C ヲ引キ圓周 O' トノ交點ヲ B トシ,O'B ニ平行ナル O 圓ノ半徑 OA ヲ引キ,AB ヲ作レバコレ所要ノ切線ナリ。

**證明** O'C ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキヲ以テ BC ハ AO ニ等シ,而シテ BC ハ AO ニ平行ナリ。

故ニ ABCO ハ平行四邊形ナリ。

而シテ OC ハ O' ヲ中心トシ O'C ヲ半徑トスル圓ノ切線ナルヲ以テ ∠O'CO ハ直角ナリ。

故ニ ABCO ハ矩形ナリ。



依テ ∠OAB 及ビ ∠O'BA ハ共ニ直角ナリ。

故ニ AB ハ A, B ニ於テ夫々圓 O, O' ニ切ス。

**吟味** O點ガ O' ヲ中心トシ,兩圓ノ半徑ノ差ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ノ外ニ在ルカ,其圓ノ周上ニ在ルカ,又ハ其圓ノ內ニ在ルカニ從テ,O ヨリ其圓ニ引ケル切線ノ數ハ二ツ,一ツ又ハ 0 ナリ。

從テ其各ノ場合ニ就キテ所要ノ共通切線ハ夫夫二ツ,一ツアルカ,又ハ一ツモナシ。

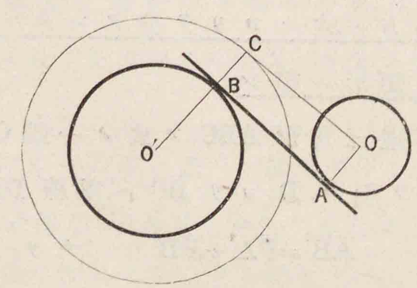
今兩圓ノ半徑ヲ夫々 $R$, $r$ トシ中心間ノ距離 (OO') ヲ $d$ トセバ,

$d>R\sim r$ ナルトキハ共通切線二ツアリ,

$d=R\sim r$ ナルトキハ共通切線一ツアリ,

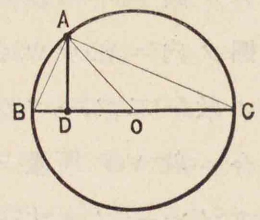
$d<R\sim r$ ナルトキハ共通切線一ツモナシ。

[2] 兩圓ヲ其兩側ニ有スル切線。(**共通內切線**)




(此場合ハ學生之ヲ研究スベシ)

**141.** **定理** 圓周上ノ一點(A)ヨリ其圓ノ直徑(BC)ヘ下セル垂線(AD)ノ平方ハ,此垂線ニテ分タルル其直徑ノ二ツノ部分ノ矩形ニ等シ。




**證明** 直角三角形 AOD ヨリ

$$\overline{AD}^2=\overline{AO}^2-\overline{OD}^2$$
$$=(AO-OD)(AO+OD)$$
$$=(BO-OD)(CO+OD)$$
$$=BD.DC$$

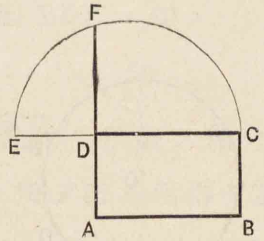
**系** 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ノ平方ハ,之ニヨリテ分タレタル斜邊ノ二ツノ部分ノ矩形ニ等シ。

問. 二等邊三角形 ABC ノ底ノ一端 C ヨリ AB ヘ垂線 CD ヲ引キ, D ヨリ BC ヘ垂線 DP ヲ引ケバ,

$\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PD}^2$ ナリ。 〔專檢〕



**142.** **作圖題** 所設ノ矩形(ABCD)ニ等シキ正方形ヲ畫ケ。




前節ノ定理ニヨリ直チニ次ノ作圖法ヲ得ベシ。

**作圖** CD ヲ延長シ DE ヲ作リ,之ヲ DA ニ等シクス。

CE ヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ, AD ノ延長ト此圓周トノ交點ヲ F トス。

DF 上ニ正方形ヲ作レバ,コレ所要ノ正方形ナリ

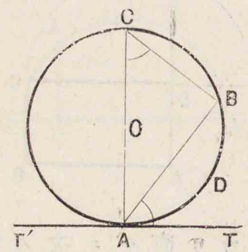
*問 1. 所設ノ多角形ニ等シキ正方形ヲ畫ケ。

問 2. 所設ノ正方形ノ $n$ 倍又ハ $n$ 分ノ一ニ等シキ正方形ヲ作レ。

問 3. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 等ヲ表ハス線分ヲ作レ。

問 4. 面積ガ $L^2+M.N$ ニ等シキ正方形ヲ作レ。但シ L, M, N ハ皆與ヘラレタル線分トス。 〔陸士〕

**143.** **定理**　切線(TAT′)ト其切點(A)ヲ過ル弦(AB)トノ間ノ角(BAT)ハ,此角內ノ弧上ニ立ツ內接角ニ等シ。




**證明**　直徑 AC ヲ引クトキハ $\angle CAT$ 及ビ $\angle B$ ハ共ニ直角ナル故, $\angle BAT$ ト $\angle C$ トハ共ニ $\angle BAC$ ノ餘角ナリ。

故ニ　$\angle BAT = C$

然ルニ弓形 ACB 內ノ角卽チ弧 ADB 上ニ立ツ內接角ハ皆 $\angle C$ ニ等シ。

從テ $\angle BAT$ ハ此等ノ角ニ等シ。

同樣ニ $\angle BAT'$ ハ弧 BCA 上ニ立ツ內接角ニ等シ。

問 1.　二圓ガ P ニ於テ內切シ,割線ガ二圓周ヲ A, B, C, D ニ於テ截ルトキハ $\angle APB = CPD$ ナリ。

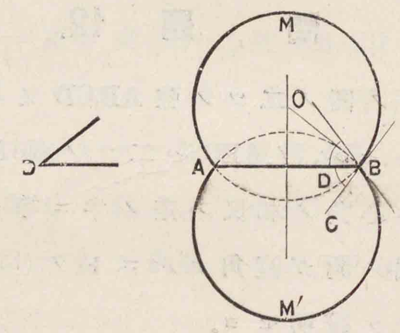
**系**　弓形ノ弦ノ一端ヲ通過シ,此弦ト其反對ノ側ニ於テ弓形ノ角ニ等シキ角ヲ作ル直線ハ,其弓形ノ弧ノ切線ナリ。



問 2.　二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ過ル直線ガ底ト D ニ於テ,外接圓ノ周ト E ニ於テ交ハルトキハ, AB ハ圓 BDE ニ切ス。

**144.** **作圖題**　所設ノ線分(AB)上ニ所設ノ角(D)ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ。

前節ノ定理ヨリ直チニ次ノ作圖法ヲ得ベシ。




**作圖**　AB ノ一端 B ニ於テ所設ノ角 D ニ等シキ角 ABC ヲ作リ, B ヨリ BC ニ垂線 BO ヲ引キ, AB ノ垂直二等分線ト O ニ於テ交ハラシムレバ, O ヲ中心トシ OB ヲ半徑トスル弓形 AMB (AB ノ $\angle ABC$ ト反對ノ側ニ在ル)ガ所要ノモノナリ。

**證明**　學生之ヲナスベシ。

**吟味** AMB ト反對ナル AB ノ側ニモ亦條件ニ適スル弓形ヲ畫クヲ得。

故ニ所要ノ弓形ハ AB ノ兩側ニ各一ツヅツアリ。而シテ此兩者ハ AB ニ關シテ對稱ナリ。

問. 所設ノ圓ヨリ所設ノ角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ截リ取レ。

## 問題 12.

1. 一ツノ圓ノ二ツノ弦 AB,CD 又ハ其延長ノ交點ヲ E トセバ, ∠AEC ハ二ツノ弧 AC 及ビ BD 上ニ立ツ中心角ノ和又ハ差ノ半ニ等シ。

2. 半圓ノ角ガ直角ナルコトヲ (135節ノ) 定理ヲ用ヒズシテ證明セヨ。

3. 二ツノ等圓アリ A, B 二點ニ於テ交ハル。今 A ヲ過ル一直線ガ兩圓周ニ更ニ交ハル二點ヲ C, D トセバ, △BCD ハ等脚三角形ナリ。 〔商船〕

4. 角ト弦トヲ等シクスル弓形ハ合同ナリ。

5. 三角形ノ二邊ヲ直徑トスル二圓ハ他ノ邊又ハ其延長上ニ於テ相交ハル。 〔東師〕



6. 相交ハル二圓ノ交點ノ一ツヲ過ル各圓ノ直徑ノ他ノ端ハ,兩圓ノ他ノ交點ト共ニ同一直線上ニ在リ。 〔千醫〕

7. 中心 O ナル圓外ノ一點 A ヨリ二ツノ切線 AB, AC ヲ引キ,劣弧 BC 上ノ一點 D ニ於テ切線ヲ引キ, AB 及ビ AC ト夫々 E 及ビ F ニ於テ交ハラシムレバ, △AEF ノ周及ビ ∠EOF ノ大サハ D 點ノ位置ニ關セズ一定ナリ。

8. 圓內ニ於テ交ハル二弦 AB, CD ノ交點 P ニ於テ圓 APC ニ切スル直線ハ BD ニ平行ナリ。〔高〕

9. O ヲ中心トスル圓ノ直徑 AB ノ兩端 A, B ヲ任意ノ一點 C ニ結ビテ AC, BC ヲ引キ, AC, BC ガ圓周ニ交ハル點ヲ P, Q トセバ OP, OQ ハ圓 CPQ ニ切ス。 〔海軍〕

10. 所設ノ圓ニ切線ヲ引キ,所設ノ直線ト所設ノ角ニ等シキ角ヲナス樣ニセヨ。

11. 次ノモノニ等シキ正方形ヲ畫ケ。

$A^2-B^2$, $A^2+B^2-C^2$, $A^2-B^2+C^2$,

但シ A, B, C ハ所設ノ三線分トス。

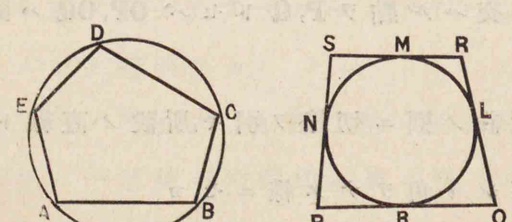
## 第五章

# 内接形及ビ外接形

**145.** **定義** **圓ノ内接多角形**トハ其頂點ヲ悉ク同一ノ圓周上ニ有スル多角形ナリ。此圓ヲ其多角形ノ**外接圓**ト云フ。

又多角形ノ邊ガ皆同一ノ圓ニ切スルトキハ,此圓ヲ此多角形ノ**内接圓**ト云ヒ,此多角形ヲ此圓ノ**外接多角形**ト云フ。

圖ニ於テ ABCDE ハ圓ノ内接五角形ニシテ,四邊形 PQRS ハ圓ノ外接四邊形ナリ。




*問 1. 多角形ハ邊ノ垂直二等分線ガ皆同一點ヲ通過スルトキ圓ニ内接シ,角ノ二等分線ガ皆同一點ヲ通過スルトキ圓ニ外接ス。

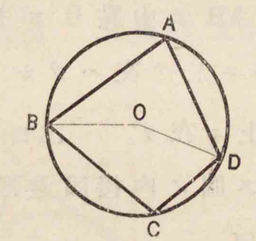


問 2. 圓ニ外接スル四邊形ノ一組ノ對邊ノ和ハ,他ノ一組ノ對邊ノ和ニ等シ。

問 3. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形ナリ。

問 4. 所設ノ圓ニ内接シ,且一邊ガ所設ノ線分ニ等シキ矩形ヲ作レ。

**146.** **定理** **圓ニ内接スル四邊形(ABCD)ノ對角ハ補角ヲナス。**




**證明** ∠A ハ弧 BCD ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シク,∠C ハ弧 BAD ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ。

故ニ ∠A+C ハ O ニ於ケル共軛ナル二角ノ和ノ半分卽チ 2 直角ニ等シ。

同様ニ ∠B+D モ亦 2 直角ニ等シ。

**系一**。圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハ其内對角

其外角ニ隣レル角ノ對角)ニ等シ。

問1. 圓ニ内接スル平行四邊形ハ矩形ナリ。而シテ其對角線ハ其圓ノ直徑ナリ。

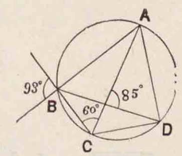
系二。 圓ニ内接セザル四邊形ノ對角ノ和ハ2直角ニ等シカラズ。

系三。 四邊形ノ對角ノ和ガ2直角ニ等シキトキハ,此四邊形ハ圓ニ内接ス。(歸謬法)

問2. 矩形ハ圓ニ内接ス。

問3. 圓ノ弧 AB ノ中點 C ヨリ二弦 CD, CE ヲ引キ弦 AB ト F,G ニ於テ交ハラシムレバ,四點 D,F, G,E ハ同ジ圓周上ニ在リ。 〔長商〕

問4. 圖ニ示ス圓ノ内接四邊形ノ各角ノ大サ如何。

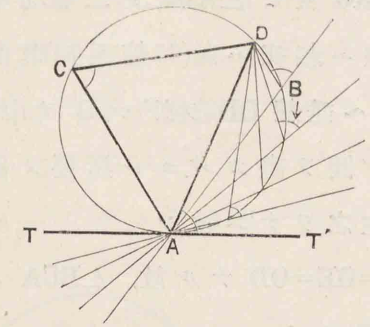



系四。 四邊形ノ對角ノ和ガ2直角ニ等シカラザルトキハ,此四邊形ハ圓ニ内接セズ。(歸謬法)

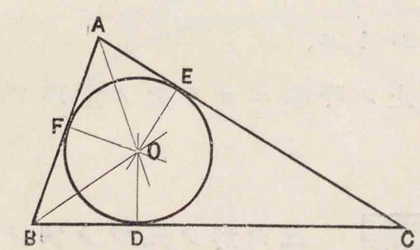
**注意** ABDC ヲ圓ニ内接スル四邊形トシ,今 A,B ヲ通過スル割線ガ A ヲ固定シ次第ニ A ニ於ケル此圓ノ切線ニ近ヅクトキ, B ニ於ケル外角ト ∠C トノ關係ヲ考ヘ,B ガ限リナク A ニ近ヅキタル場合ニ於ケル狀態ヲ考ヘ,



系一ト 143 節ノ定理トヲ比較セヨ。




## 147. **作圖題** 三角形(ABC)ノ内接圓ヲ畫ケ。




**解析** 内接圓 DEF ガ既ニ畫カレタリトシ,其切點ヲ D, E, F, 中心ヲ O トシ OD, OE, OF ヲ結ベバ, OE=OF ナル故, O ハ ∠BAC ノ二等分線上ニ在ルベク,同様ニ O ハ亦 ∠ABC ノ二等分線上ニ在ル

ヲ要ス。

**作圖** $\angle BAC$ 及ビ $\angle ABC$ ノ二等分線ヲ引クトキハ此兩直線ハ相交ハル(65節系四)其交點ヲ O トシ,O ヨリ BC ヘ垂線 OD ヲ下シ,O ヲ中心トシ,OD ヲ半徑トスル圓ヲ畫カバ,コレ所要ノ圓ナリ。

**證明** 學生之ヲナスベシ。

**吟味** OF=OE=OD ナル故, $\angle BCA$ ノ二等分線モ亦 O ヲ通過ス。

故ニ解答ハ唯一ツナリ。

*問. $AF=s-a$, $BD=s-b$, $CE=s-c$ ヲ證明セヨ。

但シ BC, CA, AB ヲ夫々 $a, b, c$ ニテ表ハシ,

且 $a+b+c=2s$ トス。

**注意** 上ノ吟味ニヨリ次ノ定理アルヲ知ル。

**148.** **定理** **三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ一點ニ會シ其點ハ三邊ヨリ等距離ニ在リ。**

此點ヲ**內心**(內接圓ノ中心)ト云フ。

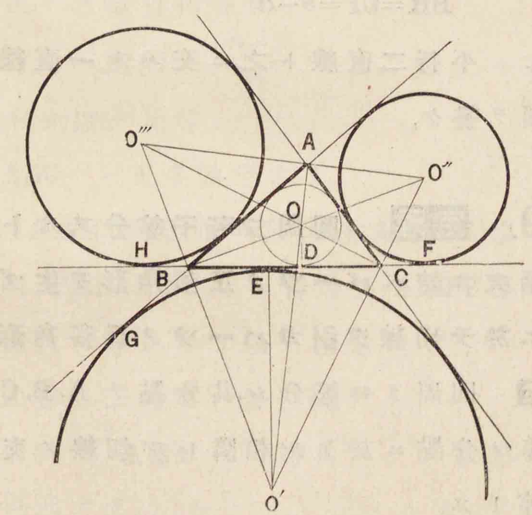
**系** 三角形ノ一角ト他ノ二角ノ外角ノ二等分線ハ一點ニ會ス。而シテ此點ハ三邊(或ハ延長)ヨリ等距離ニ在リ。



此點ヲ中心トシ,此點ト邊トノ距離ヲ半徑トスル圓ハ,三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切ス。

此圓ヲ此三角形ノ**傍接圓**ト云ヒ,其中心ヲ**傍心**(傍接圓ノ中心)ト云フ。

三角形ニハ三ツノ傍接圓アリ。




*問 1. 三ツノ直線ヨリ等距離ニ在ル點ヲ求ム。

問 2. 三ツノ直線ヨリ等長ノ弦ヲ截リ取ル圓ノ中心ヲ求メヨ。

*問 3. $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB ヲ夫々 $a, b, c$ ニ

テ表ハシ,其内接圓ノ半徑ヲ$r$,三角形ノ面積ヲ$S$ニテ表ハストキハ,　$S=sr$　ナリ。

又邊BCニ切スル傍接圓ノ半徑ヲ$r'$トスレバ$S=(s-a)r'$ナリ。　但シ$2s=a+b+c$トス。

*問4.　前頁ノ圖ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$AG=BF=CH=s$$

$$BH=CF=s-a$$

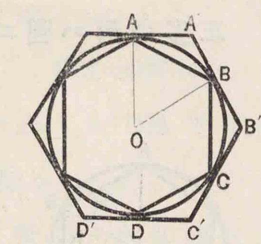
*問5.　平行二直線ト之ニ交ハル一直線トニ切スル圓ヲ畫ケ。

**149.　定理　圓周ヲ若干等分スルトキ,其分點ヲ順次ニ結ベバ一ツノ正多角形ヲ生ズ。　又各分點ニ於テ切線ヲ引カバ一ツノ正多角形ヲ生ズ。**

**假設**　圓周ヲ$n$等分シ,其分點ヲA, B, C等トシ,又此等ノ分點ニ於ケル相隣レル切線ノ交點ヲA′, B′, C′等トス。

**終結**　ABC… 及ビ A′B′C′… ハ正多角形ナリ。






**證明**　[1]　多角形ABCD…ニ於テ邊AB, BC等ハ等弧ノ弦ナル故皆相等シ。

又其各角ハ圓周ノ$\dfrac{n-2}{n}$ニ當ル弧上ニ立ツ內接角ナルヲ以テ相等シ。

故ニABC…ハ正多角形ナリ。

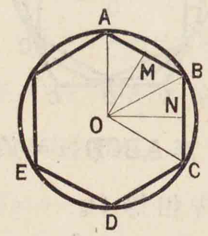
[2]　△A′AB, B′BC等ニ於テ邊AB, BC等ハ相等シク,又角A′AB, B′BC等ハ皆等弧AB, BC等ノ上ニ立ツ內接角ニ等シキヲ以テ相等シ。

故ニ此等ノ三角形ハ皆合同ナリ。

從テ多角形A′B′C′…ハ等角ニシテ等邊ナリ,故ニ正多角形ナリ。

問.　圓ニ內接スル等邊多角形ハ常ニ等角ナルカ。　逆ハ如何。

**150.** **定理** **正多角形ハ圓ニ內接シ,又外接ス。**




**證明** [1] 正多角形ABCD… ノ二隣角A, Bノ二等分線ノ交點ヲOトシOCヲ結ベバ,

$$\triangle AOB \equiv BOC \qquad (27節)$$

$$\therefore \quad OA=OC$$

而シテAOBハ等脚三角形ナリ。

$$\therefore \quad OA=OB=OC$$

$$\therefore \quad \angle OCB=OBC=\tfrac{1}{2}ABC=\tfrac{1}{2}BCD$$

故ニOCハ∠BCDノ二等分線ナリ。

從テ上ト同樣ニ順ヲ追ヒテOD, OE等モ皆OAニ等シキコトヲ證明スルヲ得。

故ニABCD…ハOヲ中心トスル圓ニ內接ス。

[2] OM, ON等ヲOヨリ邊AB, BC等マデ引ケ



ル垂線トスレバ,

$$OM=ON=\cdots\cdots \qquad (119節系二)$$

故ニOヲ中心トシOMヲ半徑トスル圓ハABCD…ニ內接ス。

**系一**。正多角形ノ內接圓及ビ外接圓ノ中心ハ相合ス。

此共通ノ中心ヲ正多角形ノ**中心**ト云ヒ,外接圓ノ半徑ヲ正多角形ノ**半徑**ト云フコトアリ。

**系二**。正多角形ノ面積ハ,其周ト內接圓ノ半徑トノ乘積ノ半ニ等シ。

*問1. 正六角形ノ一邊ハ其半徑ニ等シ。

*問2. 正六角形ノ一邊ヲ$a$トシテ其面積ヲ求メヨ。

問3. 正三角形ノ外接圓ノ直徑ハ,內接圓ノ直徑ノ二倍ナリ。

問4. 正三角形ノ一邊ヲ$a$トシ其內接圓,外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。又半徑Rナル圓ノ內接正三角形ノ一邊ヲ求メヨ。

**151.** **作圖題**　**所設ノ圓ニ內接スル正方形,正八角形,正十六角形等ヲ作レ。**

(學生之ヲ解クベシ。)

**注意**　正多角形ノ作圖法ハ圓周ノ等分法ニ歸シ,圓周ノ等分法ハ4直角ノ等分法ニ歸ス。

而シテ角ノ二等分法ハ常ニナシ得ルヲ以テ,或正多角形ヲ畫クコトヲ得バ,之ヲ基礎トシテ順次ニ其二倍邊數ノ正多角形ヲ作ルコトヲ得。

例ヘバ上ノ作圖題ニ於テハ$2^n$邊ノ正多角形ヲ作ルヲ得ルナリ。但シ$n$ハ2ヨリ大ナル正ノ整數トス。

問1.　半徑Rナル圓ノ內接正方形ノ一邊如何。

問2.　邊數ガ偶數ナル正多角形ハ其中心ニ關シテ對稱ナリ。

**152.** **作圖題**　**圓ニ內接スル正六角形,正三角形,正十二角形ヲ作レ。**

(學生之ヲ解クベシ。)

**注意**　此方法ニヨリ　$3\times2^n$ 邊ノ正多角形ヲ作ルヲ得。但シ$n$ハ任意ノ正ノ整數トス。



問1.　所設ノ一邊ヲ有スル正六角形ヲ作レ。

問2.　圓ニ內接スル正六角形ハ同圓ニ外接スル正六角形ノ四分ノ三ニ等シ。

## 問　題　13.

1.　圓ニ內接スル三角形 ABC ノ各角ガ夫々 30°, 50° 及ビ 100° ナルトキ,此三ツノ角ノ二等分線ガ圓周ニ交ハル點ヲ A, B, C トセバ, △ABC ノ各角ノ大サ如何。　[小 商]

2.　直角三角形ニ內接スル圓ノ直徑ハ直角ヲ夾ム二邊ノ和ト斜邊トノ差ニ等シ。

3.　三角形ノ一頂點ヨリ對邊ヘ下セル垂線ノ足ハ,其垂線又ハ其延長ガ外接圓ニ會スル點ト垂心トノ半途ニ在リ。　[高,商 船,海 兵,醫 專,東 震]

4.　二圓ノ交點 A 及ビ B ヲ過ル直線 PAQ 及ビ RBS ヲ引キ,圓周ト P, Q 及ビ R, S ニ於テ交ハラシムルトキハ,弦 PR ト QS トハ平行ナリ。

5.　△ABC ノ邊 AB, AC ノ上ニ夫々正方形ヲ三角形ノ外方ニ畫キ,之ニ外接スル圓ヲ畫クトキ

ハ,其交點ノ一ツハ BC ヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。 〔商船〕

6. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點ニ於テ,此交點ト二ツノ頂點トヲ過ル圓ニ切線ヲ引クトキハ,此切線ハ四邊形ノ一邊ニ平行ナリ。 〔盛農〕

7. 圓ニ內接スル六邊形ノ二組ノ對邊ガ各互ニ平行ナルトキハ,第三組ノ對邊モ亦互ニ平行ナリ。 〔東女高師〕

8. 梯形ノ平行邊ヲ AB, CD トシ對角線ノ交點ヲ E トスレバ, △ABE, CDE ノ外接圓ハ E ニ於テ切ス。 〔小商〕

*9. 三角形ノ外心ト內心トガ重ナルトキハ,此三角形ハ正三角形ナリ。

10. 三角形ノ內心ト傍心ノ一ツト二頂點トハ同一ノ圓周上ニ在リ。

又二ツノ傍心ト二頂點トモ亦然リ。 〔長商〕

11. △ABC ノ邊 AC ニ切スル傍接圓ノ中心 D ヨリ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,邊 AC, AB 又ハ其延長ト交ハル點ヲ夫々 E, F トスレバ, EF ハ BF ト CE トノ差ニ等シ。 〔高校入學資格試驗〕



12. △ABC ノ邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,二邊 AB, AC ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシメ, BE ト CF ノ和(又ハ差)ヲ EF ニ等シクセヨ。

13. 一邊10尺ノ正方形ヲ內接スベキ圓ニ內接スル正三角形ノ邊ハ幾尺ナルカ。

14. 正多角形內ノ任意ノ一點ヨリ各邊或ハ其延長マデ下セル垂線ノ和ハ一定ナリ。

15. 所設ノ圓ニ內接(又ハ外接)スル三角形ヲ畫キ,其三ツノ角ヲ夫々所設ノ三角形ノ三ツノ角ニ等シキ樣ニセヨ。

16. 一定點 P ヲ過ギテ一直線 PBC ヲ引キ,定角 XAY ノ二邊 AX, AY ヲ夫々 B 及ビ C ニ於テ截リ,以テ生ズル三角形 ABC ノ周ヲシテ與ヘラレタル長サニ等シクセヨ。 〔明專〕

17. 直角三角形ノ斜邊ニアラザル二邊ノ長サヲ $a$, $b$ トシ斜邊上ニ中心ヲ有シ,他ノ二邊ニ切スル圓ノ半徑ノ長サヲ計算セヨ。 〔小商〕

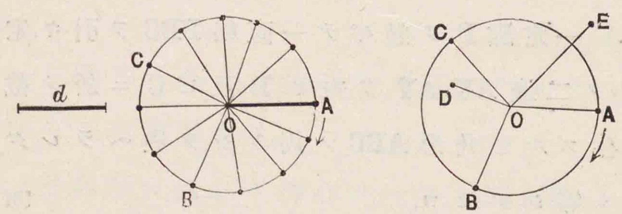
第六章

# 軌　跡

## 153. 或條件ニ適スル樣ニ動キタル點ノ道筋。

點ノ運動ニヨリテ線ノ生ズルコトハ前ニ言ヘリ,今點ガ或條件ニ適スル樣ニ動クトキニ生ズル線ニ就キテ研究セン。

**例** 所設ノ點Oヨリ所設ノ距離($d$)ヲ保チツツ動キタル點(A)ノ道如何。




**解** Oヲ中心トシ,$d$ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫クトキハ,Oヨリ$d$ニ等シキ距離ヲ有スル點A,B,C等ハ皆此圓周上ニ在リ。

而シテ此圓周上ニ在ル點ハ皆O點ヨリノ距離ガ$d$ニ等シ。 (35節)

故ニAガ動キタル跡ニ印スル道ハ此圓周ナリ。



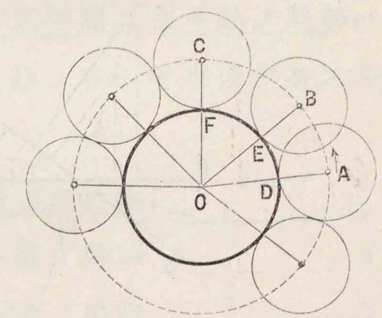
上ノ事柄ハ次ノ二ツノ事實ヲ表ハス。

[1] Oヨリ$d$ニ等シキ距離ニ在ル點ハ皆此圓周上ニ在ルコト。

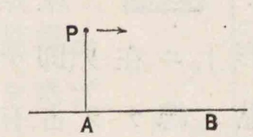
[2] 此圓周上ノ點ハ皆Oヨリノ距離ガ$d$ニ等シキコト。

而シテ[1]ハ此圓周ガ,Oヨリノ距離ガ$d$ニ等シキ點ノ總テヲ占有スルコトヲ表ハシ, [2]ハ此圓周上ノ點ハ皆其性質ヲ有スルコトヲ表ハスナリ。

**問1.** 所設ノ半徑$d$ヲ有スル圓周ガ常ニ定圓周ニ外切シテ移動スルトキハ,其中心ガ通過スル道如何。

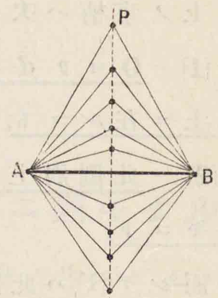



**問2.** 一定直線上ニ一端ヲ置キ,且之ニ垂直ナル定長ノ線分ガ動クトキ,他ノ端(即チ一定直線ヨリ定距離ニアル點)ノ通過スル道如何。



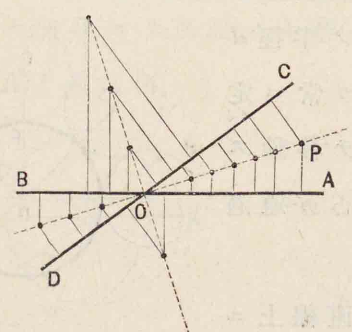

**問3.** 一直線ヲナス軌道上ニ汽車ガ進行スル

トキ,其一ツノ車輪ノ中心ハ如何ナル動キ方ヲナスカ。




**問4.** 所設ノ二點ヨリ等距離ニアル樣ニ移動スル點ガ通過スル道如何。

**問5.** 所設ノ二直線ヨリ等距離ニアル樣ニ移動スル點ガ通過スル道如何。




**154.** **定義** 或條件ニ適スル點ガ悉ク或圖形上ニ在リ(即チ其圖形ガ其條件ニ適スル點ノ總テヲ占有シ),且其圖形上ノ點ハ悉ク其條件ニ適スルトキハ,其圖形ヲ其條件ニ適スル點ノ軌跡ト云フ。

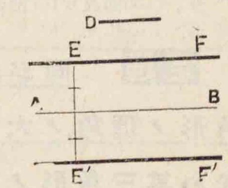


故ニ或條件ニ適スル點ノ軌跡トハ,點ガ其條件ニ適スル樣ニ動クト考フルトキ,其點ガ通過スル道ヲ云フナリ。

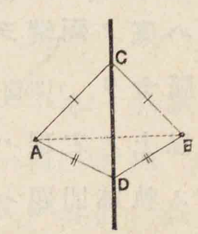
## 155. 基礎軌跡。

第153節ノ研究ニヨリ軌跡ニ關スル次ノ諸定理ヲ得ベシ。

**定理** **一定點ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,此點ヲ中心トシ,其定距離ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ナリ。**



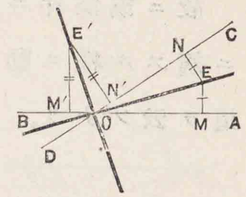

**定理** **一定直線ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,此直線ノ兩側ニ於テ其距離ニ在ル一組ノ平行線ナリ。**




**定理** **二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,此二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線ナリ。**

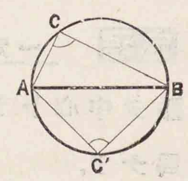
(77節系四)

**定理** **相交二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,其二直線ノナス角ヲ二等分スル一組ノ直線ナリ。**(72節系)

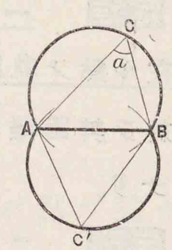



*問 1. 平行ナル二直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,其平行線ノ距離ヲ垂直ニ二等分スル直線ナリ。

**定理** **所設ノ線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點ノ軌跡ハ,其線分ヲ直徑トスル圓周ナリ。**(136節及ビ137節系)




**定理** **同ジ底邊上ニ立ツ三角形ノ頂角ノ大サガ定マレルトキハ其三角形ノ頂角ノ頂點ノ軌跡ハ,底ノ兩端ヲ通過スル二ツノ圓弧ナリ。**(136節系及ビ137節系)




以上ノ定理ハ軌跡ニ關スル基礎定理ニシテ,多クノ軌跡問題ハ,上ノ何レカ一ツニ歸著セシメ得ベシ。



問 2. 一定直線ニ切シ定マレル長サノ半徑ヲ有スル圓ノ中心ノ軌跡ハ,其直線ニ平行ニシテ其直線ヨリ其半徑ニ等シキ距離ニ在ル二ツノ平行線ナリ。

## 156. 軌跡ノ證明法。

前數節ニ於ケル研究ニヨリ,或條件ニ適スル點ノ軌跡ガ或圖形ナルコトヲ斷定スルニハ,次ノ二ツノ事項ヲ證明スルコトガ必要ニシテ,且ソレニテ十分ナリ。

[1] **其條件ニ適スル點ハ皆其圖形上ニ在ル事。**

[2] **其圖形上ノ點ハ皆其條件ニ適スル事。**

但シ[1]ノ代リニ其圖形上ニ在ラザル點ハ其條件ニ適セザル事ヲ證明スルモ可ナリ。

コレ此事ト[1]トハ同ジ事柄ナレバナリ。*

而シテカクスル場合ニハ先ヅ初メニ[2]ヲ證明スルヲヨシトス。

問 1. 相交二直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ其二直線ノナス角ヲ二等分スル一組ノ直線ナリ。

問 2. 圓周上ノ一定點ヲ通過スル其圓ノ弦ノ

*カクノ如キ二ツノ定理ヲ互ニ他ノ對偶ト云フ。

中點ノ軌跡ハ,其點ト其圓ノ中心トヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓周ナリ。

**問 3.** 一定點ヨリ一定直線ニ至ル線分ノ中點ノ軌跡ハ,其點ヨリ其直線ヘ引ケル垂線ヲ垂直ニ二等分スル直線ナリ。

**157. 軌跡ノ求メ方。** 軌跡ノ問題ハ前節ニ示セルガ如ク,其軌跡タル圖形ヲ指示スルコトアルモ,多クハ其圖形ガ何ナルカヲ示サズシテ之ヲ決定スルコトヲ要求ス。

カカル場合ニハ,先ヅ所設ノ條件ニ適スル一點ヲ考ヘ,此點ハ如何ナル圖形上ニ在ルベキカヲ研究シテ前節ノ[1]ヲ證明スベシ。

***問 1.** 同底又ハ同一直線上ノ等底上ニ立ツ等積ナル三角形ノ頂角頭ノ軌跡如何。

**問 2.** 同ジ底邊ノ上ニ立ツ二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡如何。

***問 3.** 二定點ヲ通過スル圓ノ中心ノ軌跡如何。

**問 4.** 二定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。



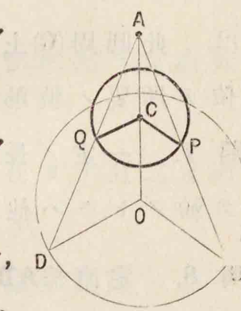
**問 5.** 所設ノ線分 **AB** ヲ底邊トシ,頂角ガ$60^\circ$ナル三角形ノ頂點ノ軌跡如何。

又此軌跡ヲ作圖セヨ。

**問 6.** 定直線又ハ定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何。

**例** 所設ノ一點(A)ヨリ所設ノ圓周(O)ヘ至ル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**解** **A** ヨリ圓周 **O** ノ周上ノ任意ノ一點 **B** ニ至ル線分 **AB** ノ中點ヲ **P** トセバ,**P** ハ所設ノ條件ニ適スル一點ナリ。




**AO** ヲ結ビ其中點ヲ **C** トシ,**OB**, **CP** ヲ結ベバ,**P** 及ビ **C** ハ夫々△**ABO** ノ二邊ノ中點ナルヲ以テ

$$CP=\frac{1}{2}OB$$

然ルニ **OB** ハ **B** 點ガ圓周 **O** ノ上ヲ如何ニ移動スルモ長サ一定ナリ。

故ニ **CP** ノ長サハ **P** 點ノ移動ニ關セズ一定ナリ。

而シテ **C** ハ不動ノ點ナリ。故ニ

[1] **P** ハ **C** ヲ中心トシ所設ノ圓ノ半徑ノ半ニ

等シキ半徑ヲ有スル圓周上ニ在リ。

次ニ此圓周上ニ任意ノ一點Qヲ取リ,AQヲ結ビ,AQノ延長上ニ一點Dヲ取リ,QD=AQナラシメ,CQ,ODヲ結ベバ,OD=2CQニシテ $CQ=CP=\frac{1}{2}OB$ ナル故 OD=OB ナリ。故ニDハ圓周O上ニ在リ。

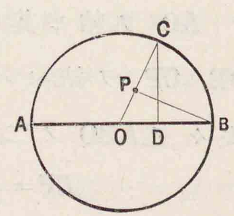
從テQハAヨリ圓Oノ周上ヘ引ケル線分ADノ中點ナリ。故ニ

[2] 此圓周(C)上ノ點ハ皆所設ノ條件ニ適ス。

依テ所要ノ軌跡ハ此圓周(C)ナリ。

問7. 一定ノ長サノ線分ノ一端ガ一定圓ニ切シテ動クトキハ,他ノ端ノ軌跡如何。

問8. 定直線ABヲ直徑トスル圓周上ノ一點ヲCトシ,CヨリABニ垂線CDヲ下ス,OC上ニ一點Pヲ取リ,OP=ODトスレバPノ軌跡ハ何カ。




〔商船〕



## 158. 軌跡ノ交リ。

甲乙二ツノ條件アリ,其各ニ適スル點ノ軌跡ヲ夫々A,Bトセバ,此兩軌跡ノ交點ハ,兩條件甲,乙ノ雙方ニ適スルコト明カナリ。而シテ其交點ノ外ニハ此兩條件ニ適スル點ナシ。(46節問1,2及ビ112節參照)

若シ此兩軌跡ガ交ハラザルトキハ,此兩條件ノ全部ニ適スル點ナシ。

問1. 二定點ヨリ等距離ニ在ル點ヲ,定直線又ハ定圓周上ニ求メヨ。

問2. 二定點ヨリ等距離ニ在リテ,且二定直線ヨリモ等距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

*問3. 二定直線ヨリ夫々所設ノ距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

## 159. 作圖題ノ解法ニ軌跡ヲ應用スルコト。

作圖題中ニハ其解法ガ,某條件ニ適合スル點ヲ發見スルコトニ歸スルモノ多シ。

例ヘバ,三定點ヲ通過スル圓周ヲ畫クコトハ其中心ヲ求ムルコトニ歸シ,(112節)又圓外ノ一點ヨリ此圓ニ切線ヲ引クコトハ其切點ヲ決定スルコト

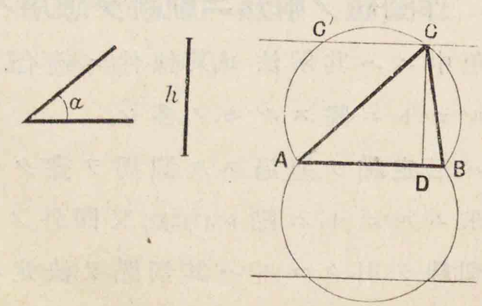
ニ歸スルガ如シ。

此場合ニ於テ所設ノ條件中,其一ツヲ除キテ殘リノ條件ノミニ適スル點ヲ求ムルトキハ,概シテ或軌跡ヲ得ベシ。是ニ於テ更ニ先キニ除キ置キタル條件ヲ復活シ,其代リニ他ノ一條件ヲ除去スルトキハ,又多クハ一軌跡ヲ得ン。然ルトキハ此兩軌跡ノ交點ハ所設ノ條件全部ニ適スル點ナリ。

而シテ其交點ガ數多アラバ,解答モ亦從テ數多アリ,又若シ兩軌跡ガ交ハラザルトキハ解答ナシ。

**例** 底(AB)ノ長サ及ビ位置ト高サ($h$)幷ニ頂角($\alpha$)トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

**解** 底ABノ大サ及ビ位置ハ定マレルヲ以テ,本問題ハ唯頂點トナルベキ點ヲ定ムレバ可ナリ。依テ所設ノ條件中ヨリ高サニ關スルモノヲ除






クトキハ,頂點ノ軌跡トシテABヲ弦トシ∠$\alpha$ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧ヲ得,(137節系)是第一軌跡ナリ。

次ニABヨリ$h$ニ等シキ距離ニ在リテABニ平行ナル直線ハ頂點ノ第二軌跡ナリ(155節)。

故ニ此兩軌跡ヲ畫キ,其交點ノ一ツヲCトスレバ,△ABCハ所設ノ條件ニ適スルモノナリ。

**吟味** 作圖ノ各段階ニツキテハ兩軌跡ヲ得ルマデ常ニ可能ナリ。

次ニ第二軌跡ナル直線ガ第一軌跡ナル弧ニ交ハルトキハ互ニ合同ナル四ツノ三角形ヲ得,兩軌跡ガ相切スルトキハ合同ナル二ツノ等脚三角形ヲ得,兩軌跡ガ交ハラザルトキハ解答ナシ。

**問1.** 斜邊及ビ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ヲ知リテ直角三角形ヲ作レ。

**問2.** 底邊ト頂角ト底ヲ二等分スル中線トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

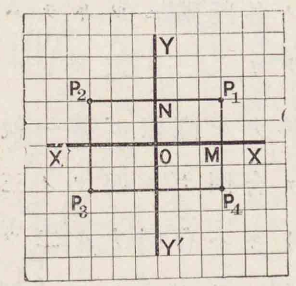
**問3.** 平行線ノ各ニ切シ,且一定點ヲ通過スル圓ヲ畫ケ。

**問4.** 所設ノ二直線ニ切シ,所設ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

## 160. 點ノ位置ヲ定ムル方法,坐標。

或點ノ位置ヲ表ハスニハ,他ニ既ニ位置ノ確定セルモノヲ基準トセザルベカラズ。

例ヘバ或地點Pノ位置ヲ知ルニハ,他ニ既ニ位置ノ確定セル一地點Oヲ取リ,Oヨリ東3町等ト云ヒテPノ位置ヲ知ルナリ。




此場合若シPガOノ丁度正東ニ在ラザルトキハ,PハOノ東3町ノ地點ヨリ正北2町ノ處ニ在リ等ト云ハバ,其位置ヲ確定スルコトヲ得。*

今Oヲ通過シ互ニ直交スル二直線 XOX′ 及ビ YOY′ ヲ引キ,OX 及ビ OY ヲ夫々 O ヨリ東及ビ北ノ方向ヲ示スモノトセバ,P點ノ位置ハ Pト此

*此場合Pノ位置ヲ表ハスニOヨリ引ケル一直線OXノ位置ト,∠XOPノ大キサ及ビOPノ長サトヲ以テスル方法アレドモ,ココニハ之ヲ說カズ。



二直線トノ距離 OM 及ビ MP (即チ ON) ノ長サニヨリテ定マル。地球上或地點ノ位置ヲ表ハスニ東經何度,北緯何度ト云フガ如キハ之ニ類セル方法ニヨルモノニシテ,夫々英國ぐりにぢヲ通過スル本初子午線及ビ赤道ヘノ距離ヲ以テスルモノナリ。

**OM, ON** ノ長サヲ **P** 點ノ**坐標**ト云ヒ,**OM** ヲ**横坐標**, **ON** ヲ**縱坐標**ト云フ。而シテ通例 $x$ 及ビ $y$ ヲ以テ夫々 **OM** 及ビ **ON** ノ長サヲ表ハス。

**XOX′, YOY′** ヲ **P** 點ノ**坐標軸**ト云ヒ,**横軸**ヲ **$x$ ノ軸**,**縱軸**ヲ **$y$ ノ軸**ト云フ。而シテ兩軸ノ交點 **O** ヲ**坐標ノ原點**ト云フ。

然ルニ横軸及ビ縱軸ヨリノ距離ガ夫々3及ビ2ナル點ハ圖ニ示スガ如ク四ツアリ。依テ是等ヲ區別センガタメニ,原點OヨリOX及ビOY上ニ測リタル長サヲ正數ヲ以テ表ハシ,反對ノ方向即チ OX′ 及ビ OY′ 上ニ測リタル長サヲ負數ヲ以テ表ハスコトトス。

而シテ上ノ四點ハ之ヲ次ノ如ク記ス。

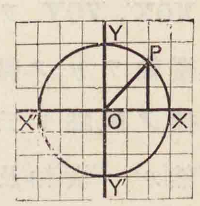
$P_1(3, 2)$, $P_2(-3, 2)$, $P_3(-3, -2)$, $P_4(3, -2)$

互ニ相關聯シテ變化スル二量ノ變化ノ狀況ノ如キハ坐標ヲ用ヒテ甚ダ明瞭ニ之ヲ表示スルヲ得ルコトハ,學生諸子ガ既ニ代數學ニ於テ知リタルコトナルベシ。

## 161. 方程式ノ軌跡。

代數學ニ於テ知レルガ如ク,一ツノ二元一次方程式ヲ圖示スレバ一ツノ直線ヲ得,一ツノ二元二次方程式ヲ圖示スレバ一般ニ一ツ又ハ二ツノ曲線ヨリ成ル圖形ヲ得。

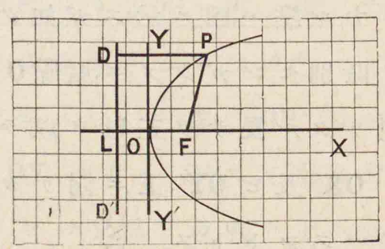
此等ノ圖形ヲ夫々其**方程式ノ軌跡**ト云フ。コレ其線上ノ總テノ點ノ坐標ハ其方程式ニ適合シ,其線外ノ總テノ點ノ坐標ハ然ラザルヲ以テナリ。




今少シク次ノ四ツノ方程式ノ軌跡ヲ研究セン。

[1] $x^2+y^2=25$

此方程式ノ軌跡ハ圓ナリ。* 而シテ其半徑ハ5ナリ。



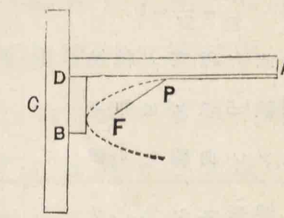

[2] $y^2=4x$

此方程式ノ軌跡ハ圖ニ示スガ如キ曲線ニシテ之ヲ**拋物線**ト云フ。

コレ 一定點Fト一定直線DD'トヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ナリ。

*此證明ハ第二篇105節ニヨルベシ。



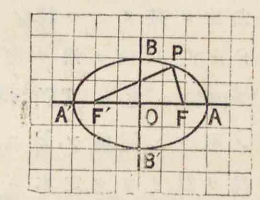



定點Fヲ拋物線ノ**焦點**ト云ヒ,定直線DD'ヲ**準線**,Oヲ**頂點**ト云フ。

拋物線ハ上ノ性質ニヨリ,次ノ如クシテ畫クヲ得。

絲ノ一端ヲ針ニテ止メ,他ノ端ヲT字定木ノ一端Aニ結ビ付ケ,FヨリAニ至ル絲ノ全長ヲADニ等シクシ,定木Cニ沿ウテBDヲ辷ラシ,Pニ鉛筆ヲ附ケDAニ沿ウテ動カスベシ。

其故ハAD=AP+FPナル故,FP=PDナレバナリ。




[3] $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

此方程式ノ軌跡ハ圖ニ示スガ如キ曲線ニシテ,之ヲ**橢圓**ト云フ。

コレ 二定點(F,F')ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ナリ。

二定點F,F'ヲ橢圓ノ**焦點**ト云ヒ,橢圓周ト兩軸トノ交點ナルA, A'; B, B'ヲ橢圓ノ**頂點**ト云フ。而シテ線分AA'及ビBB'ヲ夫々**長徑**及ビ**短徑**ト云フ。

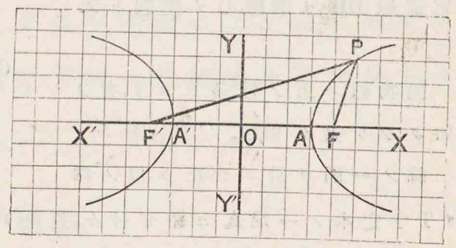
兩焦點F,F'ガ漸々ニ近ヅクトキハ,橢圓ハ漸次圓ニ近ヅキ,其相合スルトキ圓トナル。

橢圓ヲ畫クニハ針ヲ以テ絲ノ兩端ヲ焦點F及ビF'ニ止メ絲ヲ張リナガラPニアル鉛筆ヲ走ラスベシ。

[2]以下ニ關スル證明ハ本書ノ程度外ニ屬ス。

[4] $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$

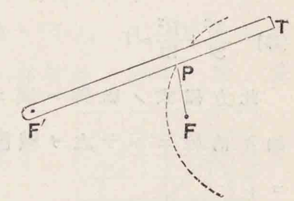
此方程式ノ軌跡ハ圖ニ示スガ如キ二ツノ曲線ヨリ成ル圖形ニシテ之ヲ**雙曲線**ト云フ。




コレ　二定點(F,F')ヨリノ距離ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ナリ

二定點F, F'ヲ雙曲線ノ**焦點**ト云フ。

雙曲線ヲ畫クニハ絲ノ一端ヲ焦點Fニ止メ,他ノ端ヲ定木ノ一端Tニ固定シ定木 TF' ヲ他ノ焦點F'ノ廻リニ囘轉シ,Pニアル鉛筆ノ絲ヲ張リツツ定木ニ沿ウテ辷ラスベシ。




其故ハ FP~F'P ハ FPT~F'T ニ等シク,即チ常ニ定木ノ長ナヨリ絲ノ全長ヲ減ジタルモノニ等シケレバナリ。

**注意** 一。以上示シタル曲線ハ皆甚ダ重要ナルモノナリ。其中,拋物線ハ常ニ一軸ノ何レカ一方ニノミ存在シ,且他ノ軸ニ關シテ對稱ナリ。圓,楕圓及ビ雙曲線ハ縱横兩軸ニ關シテ對稱ナリ。故ニ此等對稱ノ軸ヲ其等ノ曲線ノ軸ト云フ。此等ハ又其兩軸ノ交點ニ關シテ對稱ナリ。雙曲線ノ縱軸ハ曲線ニ交ハラザルヲ以テ特ニ之ヲ**虚軸**ト云フコトアリ。

**注意** 二。上ニ示シタルガ如ク,點ノ軌跡ハ所設ノ條件ノ如何ニヨリテハ圓ニアラザル曲線ヨリ成ルコトアリ,然レドモ初等平面幾何學ニ於テハ此等ノ軌跡ヲ取扱ハズ。故ニ第 154 節軌跡ノ定義中ニアル圖形ナル言葉ハ,一ツ或ハ數箇ノ直線(無限又ハ有限)又ハ一ツ或ハ數箇ノ圓周又ハ弧ヲ意味スルモノト知ルベシ。



## 問題 14.

1. 半徑2糎ナル定圓ノ周ヨリ1糎ノ距離(其中心線上)ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 所設ノ一點ヲ過ギ,所設ノ半徑ヲ有スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

3. 圓ノ相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ハ其圓ト同心ナル一ツノ圓周ナリ。(問題10ノ1參照)

4. 所設ノ點ヲ過ギ所設ノ圓ニ割線ヲ引キ,其圓ノ弦トナル部分ヲ,所設ノ線分ニ等シクセヨ。

5. 定マレル線分ノ端ガ一ツヅツ二ツノ直交線ノ各ノ上ニ在リテ動クトキ,其線分ノ中點ノ軌跡如何。　[大工]

6. 二定圓アリA,Bニ於テ交ハル,今Aヲ通過シ此兩圓周ト夫々C及ビDニ於テ交ハル定直線ヲ引キ,次ニ又Aヲ過ル任意ノ直線ト此兩圓トノ交點ヲ夫々E,Fトセバ,二弦CE,DF又ハ其延長ノ交點Pノ軌跡如何。

7. 底ト頂角ト一底角トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

8. 底ト高サト一底角又ハ底ヘノ中線トヲ知リテ三角形ヲ作レ。

9. 底邊,高サ及ビ外接圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。 [廣師]

10. 定圓内ノ定點ヨリ定直線マデ直線ヲ引キ,其定圓ノ周ニテ二等分セシメヨ。 [神商]

11. 互ニ外方ニ相離レタル二定圓ニ切シ,所設ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

12. 一定點ヲ通過シ,定直線又ハ定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫ケ。

13. 所設ノ直線ト圓トニ切シ,且所設ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。 [高]

14. 半徑2糎ナル圓ヲ半徑5糎ナル半圓ノ周



及ビ直徑ニ切セシムルコト。 [海兵]

15. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ所設ノ平方$m^2$ニ等シキ點ノ軌跡如何。而シテ此軌跡ヲ作圖セヨ。

## 雜題 2.

1. 正方形ABCDノ對角線BDニ沿ウテBヨリBCニ等シクBEヲ取リ,BDニ垂線EFヲ引キFニ於テCDニ交ハラシムレバ,DE=EF=FC ナリ。 [商船]

2. △ABCノ外角B及ビCニ於ケル外角ノ二等分線間ノ角ハAニ於ケル外角ノ半ニ等シ。

3. 三角形ノ一角ノ二等分線ハ其角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ト中線トノ間ニアリ。 [小商]

4. 次ノ問題ヲ證明スベキタメニ必要ナル補助線ヲ加ヘヨ。 [陸士]

△ABCニ於テ $\angle B=2C$, $AD\perp BC$, $BE=EC$ ナルトキハ, $AB=2DE$ ナリ。

5. △ABC ノ邊 AB ハ AC ヨリ長シ,然ルトキハ, ∠BAC ノ外角ノ二等分線ハ必ズ BC ノ延長ニ交ハルベシ,問フ其交點ハ BC ヲ B ノ方又ハ C ノ方ノ何レニ延長シタル方ニ在ルカ, 之ヲ決定シ且其理ヲ述ベヨ。〔海機〕

6. 直角三角形アリ,其直角ヲ夾ム二邊ヲ $a,b$ トス,此三角形ノ內接圓ノ半徑ヲ $a,b$ ニテ表ハセ。〔東商〕

7. 斜邊29寸,他ノ一邊21寸ナル直角三角形ノ內接圓ノ半徑及ビ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ。

8. 三角形 ABC ノ外接圓ノ直徑 AD ヘ B,C ヨリ垂線 BE, CF ヲ引クトキハ,

$$\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = AD.EF$$ 〔商船〕

9. 四邊形ノ四邊ノ平方ノ和ハ兩對角線ノ平方ノ和ヨリモ,兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分ノ平方ノ四倍ダケ大ナリ。

10. 半徑 $r$ ナル圓ノ內接矩形ノ面積ガ $q^2$ ニ等シキトキハ,其二邊ノ長サ如何。〔東師〕

11. 中心 O ナル圓外ノ一定點 P ヨリ,此圓ニ割



線 PAB ヲ引キ,ソレト圓周トノ交點ヲ A,B トシ弦 AB ノ中點ヲ Q トスレバ, PQ ノ長サハ ∠POQ ノ減少スルニ從ヒ增加ス。〔東師〕

12. 四邊形 ABCD ガ圓ニ內接シ,其對邊ノ延長ガ夫々 E,F ニ於テ交ハルトスレバ, △BCE, DCF ノ外接圓ハ EF 上ニ於テ交ハル。

13. 三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB (其延長ニテモ可ナリ)上ニ夫々任意ニ一點ヅツ D,E,F ヲ取ルトキハ,三角形 AEF, BFD, CDE ノ外接圓周ハ一點ニ會ス。〔海機〕

14. △ABC ノ任意ノ二頂點ト垂心 H トヲ過ル圓ト △ABC ノ外接圓トハ大小アルカ。〔海經〕

15. 三角形ノ各頂點ヨリ夫々對邊ヘ引ケル三ツノ垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形(此三角形ヲ原三角形ノ**垂足三角形**ト云フ)ノ邊ハ原三角形ノ邊ト夫々等角ヲナス。〔商船〕

*16. 三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ一點ヨリ,三邊ヘ下セル垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ。〔海機〕

**注意** 此定理ヲしむそんノ定理ト云ヒ,此直線ヲ其

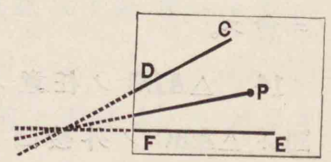
點ニ關スルしむそん線ト云フ。

**17.** 一定圓周上ニ在ル二ツノ定點ヲ **P**,**Q** トシ,一ツノ不動ノ弦ヲ **AB** トシ,二直線 **AP**, **BQ** ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

**18.** 同底上ニ立ツ三角形ノ底ノ一端ヨリ出ヅル中線ガ定長ナルトキハ,其頂點ノ軌跡如何。

**19.** 一定點ヲ通過シ,所設ノ二組ノ平行線間ニ等長ノ線分ヲ夾ム直線ヲ引ケ。

**20.** 引延バシテ其交點ヲ知ルコト能ハザル二ツノ直線アリ,




[1] 一定點ヲ通過シ,其二直線ノ交點ヲ通過スル直線ヲ引ケ。

[2] 其二直線ノナス角ノ二等分線ヲ引ケ。

**21.** 次ノモノガ與ヘラレテ三角形ヲ作レ。

*[1] 二邊ト其一對角。(吟味ニ注意セヨ)。

[2] 一邊ト一ツノ高サト一ツノ中線。(五ツノ場合アリ。)

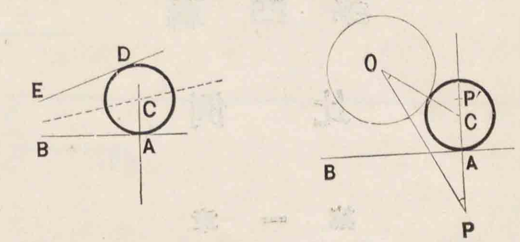
〔東商〕

[3] 二ツノ角ト周。 〔神商船〕

**22.** 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且他ノ定



直線又ハ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。 〔商船〕



# 第四篇

# 比例

## 第一章

## 比例線

### 162. 倍量,約量,公約量(公度)。

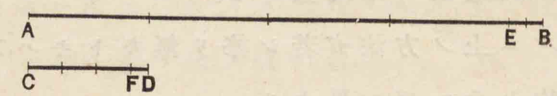
或量Aガ之ト同種ノ量Bノ整數倍ニ等シキトキハ,AヲBノ倍量ト云ヒ,逆ニBヲAノ約量ト云フ。二量ヲ同時ニ倍量トスル量ヲ其二量ノ公約量又ハ公度ト云フ。

例ヘバ二線分ノ長サヲ測リシニ夫々3糎及ビ$2\frac{1}{3}$糎ヲ得タリトセバ$\frac{1}{3}$糎,$\frac{1}{6}$糎,$\frac{1}{9}$糎等ノ長サヲ有スル線分ハ,皆此二線分ノ公度ナリ,而シテ$\frac{1}{3}$糎ノ長サヲ有スルモノハ其最大公度ナリ。

二量ガ公約量ヲ有スルトキハ之ヲ通約セラルト云ヒ,然ラザレバ之ヲ通約セラレズト云フ。



### 163. 所設ノ二線分(AB, CD)ノ最大公約量ヲ求ムルコト。




$AB>CD$トセバ所要ノ公約量ハCDヨリ大ナラズ。今CDヲAB中ヨリ出來得ルダケ多ク取ルトキ,例ヘバABガ丁度CDノ四倍ヲ含ムトセバ,CDハ所要ノ最大公約量ナリ。而シテ此場合ニハCDヲ單位トセバABノ測度ハ整數4ナリ。

若シABガCDノ四倍ト尙殘リEBヲ含ムトセバ,EBヲCD中ヨリ取リ得ルダケ取ルベシ,而シテ若シCDガEBヲ三倍ト尙殘リFDヲ含ムトセバ,更ニFDヲ前ノ如クEB中ヨリ取ルベシ,然ルトキ例ヘバEBガFDノ二倍ヲ含ミテ殘リナケレバ,FDハ所要ノ最大公約量ナリ。而シテ此場合ニハ

$$CD=7FD,\quad AB=30FD$$

ナル故,CDヲ單位トスルトキABノ測度ハ分數$\frac{30}{7}$ナリ。

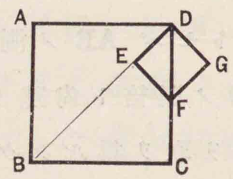
上ノ方法ハ代數學ニ於テ學ビタル二數ノ最大公約數ヲ求ムル方法ト同様ナリ。

從テ其證明モ亦同様ナリ。

然ルニ上ノ方法ガ若シ終リ無キトキハ,二線分ハ通約セラレザル量ナリ。

例ヘバ正方形 ABCD ノ對角線 BD ト一邊 BC トヲ考ヘンニ, BD 中ニ BE ヲ BC ニ等シク取リ,E ヨリ BD ニ垂線 EF ヲ引クトキハ,

$$DE=EF=FC \quad ナリ$$




故ニ BD ト BC トノ公約量ヲ求ムルコトハ, DF ト DE 即チ第二ノ正方形 DEFG ノ對角線ト一邊トノ公約量ヲ求ムルコトトナリ,以下同ジ方法ヲ繰返スノミニシテ終リアルコトナシ。故ニ

正方形ノ邊ト對角線トハ通約セラレズ。

而シテ邊ヲ單位トシテ對角線ヲ表ハス數ハ不盡數 $\sqrt{2}$ ナリ。



**164.** **定義** 或量 A ノ他ノ量 B ニ對スル**比**トハ, A ガ B ノ何倍ナルカノ關係ナリ。

此關係ハ A ヲ得ルタメニ B ニ乘ズベキ數ヲ知ラバ定マル,此數ヲ**比ノ値**ト云フ。

比ノ値ト言フベキヲ單ニ比ト云フコト多シ。

故ニ B ヲ單位トシテ A ヲ計ルトハ, A ノ B ニ對スル比ヲ求ムルコトナリ。

從テ A ノ B ニ對スル比トハ, B ヲ單位トシテ A ヲ表ハス數ナリ,ト云フコトヲ得。

例ヘバ 1 粁ノ 1 米ニ對スル比ハ 1000 ナリ。

通約セラルル二量ノ比ハ整數又ハ分數ニシテ通約セラレザル二量ノ比ハ不盡數ナリ。

從テ通約セラレザル二量ノ比ハ,其眞ノ値ヲ求ムルコト能ハザレドモ,適當ナル程度ニ於テ其近似値ヲ求メテ實用ニ供ス。

A ノ B ニ對スル比ヲ $\frac{A}{B}$ 又ハ A:B ト記ス。

而シテ A ヲ**比ノ前項**, B ヲ**後項**ト云ヒ,兩者ヲ通稱シテ**比ノ項**ト云フ。

165. **定義**　二量ノ比ガ他ノ二量ノ比ニ等シキトキハ,此四量ハ**比例ヲナス**ト云ヒ,此四量ヲ**比例量**ト云フ。

四量 A, B, C, D ガ比例ヲナスコトヲ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

ト記シ, 之ヲ**比例式**ト云フ。此式ハ又

$$A:B=C:D \quad 或ハ \quad A:B::C:D$$ トモ記ス。

A ト D トヲ比例ノ**外項**ト云ヒ, B ト C トヲ**内項**ト云フ。又 D ヲ A, B, C ノ**第四比例項**ト云フ。

A ト B 及ビ C ト D トハ各同種ノ量タルベキハ勿論ナルモ, A ト C 從テ B ト D トハ必ズシモ同種ノ量タルヲ要セザルナリ。

若シ A, B, C ガ同種ノ三量ニシテ比例式

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C} \quad 即チ \quad A:B=B:C$$

ガ成立スルトキハ,此三量ハ比例ヲナスト云ヒ, C ヲ A ト B ノ**第三比例量**, B ヲ A ト C ノ**比例中項**ト云フ。



166. **定理**　**二量 A ト B トノ比ハ,之ヲ同單位ニテ計リタル A ノ測度 $a$ ト, B ノ測度 $b$ トノ比ニ等シ。**

**證明**　C ヲ共通ノ單位トセバ,

$$A=aC, \quad B=bC \quad ナル故,$$

$$C=\frac{1}{b}B \quad 從テ \quad A=\frac{a}{b}B$$

故ニ $$\frac{A}{B}=\frac{a}{b} \quad (定義)$$

**系**　$A:B=mA:mB$

但シ $m$ ハ任意ノ正數トス。

**注意**　上ノ定理ニヨリ,量ノ比ヲ研究スルニハ,其測度ノ比ヲ以テスレバ可ナルヲ知ル。

故ニ以下代數學ニ於テ知リタル比例ノ諸性質ヲ引用スベシ。

其重ナルモノヲ擧グレバ次ノ如シ。

[1]　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラバ $a \gtreqless b$ ニ從テ $c \gtreqless d$ ナリ。

[2]　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナラバ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$　(反轉ノ理)

及ビ　$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$　及ビ　$\dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}$　ナリ。(更迭ノ理)

[3]　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナラバ $\dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}$　(複號同順)

及ビ　$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$　ナリ。

[4]　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots$ ナラバ,

$$\frac{a}{a'}=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}.$$ ナリ。(加比ノ理)

[5]　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナラバ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\left(\dfrac{c}{d}\right)^2$ ニシテ,

又　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\left(\dfrac{c}{d}\right)^2$ ナラバ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$　ナリ。

**問 1.**　正三角形ノ內接圓,外接圓,傍接圓ノ半徑ノ比ハ1:2:3ニ等シ。

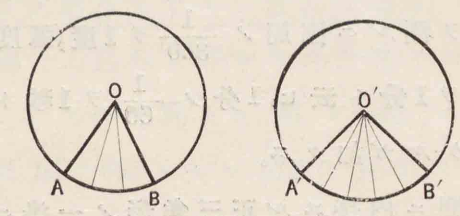
**問 2.**　同ジ圓ノ內接正三角形ト內接正六角形トノ比ヲ求メヨ。

又內接正方形ト內接正六角形トノ比ヲ求メヨ。

**問 3.**　圓周ヲ11ト13トノ比ニ分テ。　〔陸士〕



**167.** **定理**　同圓或ハ等圓ニ於テ,二ツノ中心角(AOB,A′O′B′)ノ比ハ,其夾弧(AB,A′B′)ノ比ニ等シ。




**證明**　角AOB, A′O′B′ノ公約量ヲ求メ,* 角AOBハ其三倍ニ等シク,A′O′B′ハ其五倍ニ等シトセバ,

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{3}{5}$$

又角AOBヲ三等分シ, A′O′B′ヲ五等分シタリト考フレバ,弧AB, A′B′モ亦同樣ニ等分セラル。

$$\therefore\quad \frac{弧AB}{弧A'B'}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{弧AB}{弧A'B'}$$

**問 1.**　圓ノ弦ABヲCマデ引キ延バシ, BCヲ半徑ニ等シク截リ,Cヲ過ル中心線CDEヲ引クト

* 其方法ハ163節ニ同ジ,又二角ガ通約セラレザル場合ニモ本定理ハ勿論眞ナルモ其證明ハ之ヲ省略ス。以下亦同ジ。

キハ弧 AE ト BD トノ比如何。〔海經〕

系 圓ノ中心ニ於テ單位角ヲ作レル弧ヲ弧ノ單位トセバ,中心角ト其夾弧トハ測度相同ジ。

故ニ弧ヲ測ルニ圓周ノ $\frac{1}{360}$ ヲ**1度**(弧度)ト云ヒ, 1度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**1分**ト云ヒ, 1分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**1秒**ト云フコト角ニ於ケルガ如クス。

問2. 圓ニ內接スル正三角形ノ一邊ニ對スル弧ハ幾度ノ弧ナルカ。

問3. 圓內ニ頂點ヲ有スル角ノ測度ハ,此角ノ二邊ニテ夾メル弧及ビ其對頂角ノ二邊ニテ夾メル弧ノ和ノ半ノ測度ニ同ジ。〔海兵〕

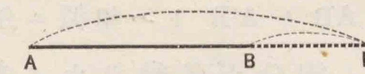
**168.** 定義 線分ノ上ニ在ル點又ハ其延長上ニ在ル點ハ此線分ヲ**分ツ**ト云フ。

後者ハ特ニ線分ヲ**外分ス**ト云ヒ,之ニ對シテ前者ハ線分ヲ**內分ス**ト云フコトアリ。

何レノ場合ニ於テモ,分點ト其線分ノ兩端トノ距離ヲ其**二部分**ト云フ

(內分) 




(外分) 


內分ノ場合ニ於テハ,線分ハ其二部分ノ和ニ等シク,外分ノ場合ニ於テハ其差ニ等シ。

注意 二部分ノ等シキ外分點アルカ。

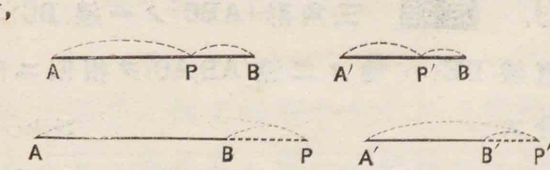
問1. P ヲ外分點トシ, M ヲ AB ノ中點トシ, AP=30糎, BP=6糎 トセバ MP ノ長サ如何。

一般ニ $MP=\frac{1}{2}(AP+BP)$ ナルコトヲ證明セヨ。

*問2. 一線分ヲ二分スルトキハ,內分,外分ニ關セズ,其二分ノ矩形ハ其線分ノ半分ノ平方ト中點ト分點トノ距離ノ平方トノ差ニ等シ。

二ツノ線分ガ各二ツノ部分ニ分タレ,其二分ノ比ガ相等シキトキハ,此二線分ハ**相似ニ分タル**ト云フ。

例ヘバ二線分AB, A′B′ ガ夫々P 及ビ P′ ニ於テ分タレ,

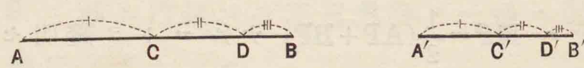



$$\frac{AP}{PB}=\frac{A'P'}{P'B'} \quad 從テ \quad \frac{AP}{A'P'}=\frac{PB}{P'B'}$$

ナルトキハ,AB ト A'B' トハ相似ニ分タルト云フ。

又二ツノ線分ガ各幾ツカノ部分ニ分タレ(内分),其對應スル部分ガ比例スルトキハ,此二線分ハ相似ニ分タルト云フ。

例ヘバ二ツノ線分 AB, A'B' ガ夫々 C,D 及ビ C',D' ニ於テ各三分セラレ,




$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DB}{D'B'}$$ ナルトキハ AB, A'B' ハ相似ニ分タルト云ヒ, 此比例式ヲ

$AC:CD:DB=A'C':C'D':D'B'$ ト記スコトアリ。

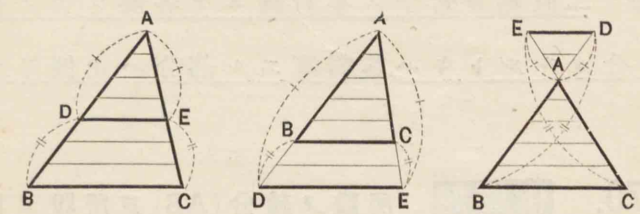
又上ノ比例式ヨリ次ノ式ヲ誘出スルヲ得。

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{CB}{C'B'}=\cdots\cdots$$ (166節)

**169.** **定理** **三角形(ABC)ノ一邊(BC)ニ平行ナル直線(DE)ハ,他ノ二邊(AB,AC)ヲ相似ニ内分又ハ外分ス。** (*Thales*ノ定理)

**證明** DA ト DB トノ公約量ヲ求メ, DA ハ其 $m$ 倍ニ等シク, DB ハ其 $n$ 倍ニ等シトスレバ,






$$\frac{DA}{DB}=\frac{m}{n}$$

但シ $m,n$ ハ正ノ整數トス。

DA ヲ $m$ 等分シ, DB ヲ $n$ 等分シ,各分點ヲ過ギテ底 BC ニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,此等ノ直線ハ EA ヲ $m$ 等分シ EC ヲ $n$ 等分ス。 (89節)

$$\therefore\quad \frac{EA}{EC}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore\quad \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$$

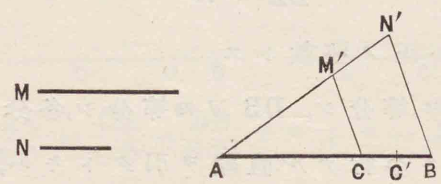
*問1. △ABC ノ一邊 BC ニ平行ナル線分 DE ヲ,他ノ二邊間ニ引クトキ生ズル種々ノ比例式ヲ書ケ。

問2. 二ツノ圓ガ内切スルトキハ切點ヲ過ギル大圓ノ弦ハ,皆小圓ノ周ニテ相似ニ分タル。

[東師]

系 二直線ガ若干ノ平行線ニテ各幾ツカノ部分ニ分タルルトキハ,其對應スル部分ハ比例ヲナス。

**170.** **作圖題** 所設ノ線分(AB)ヲ所設ノ比(M:N)*ニ内分及ビ外分セヨ。




**作圖** ABノ一端Aヨリ之ト重ナラザル線分AM′ヲ引キ,之ヲMニ等シカラシメ,AM′ノ延長上ニM′N′ガNニ等シキ様ニN′ヲ取リ,N′Bヲ結ビ,之ニ平行ニM′Cヲ引クトキハM′Cハ必ズABト交ハル,其交點ヲCトセバ,

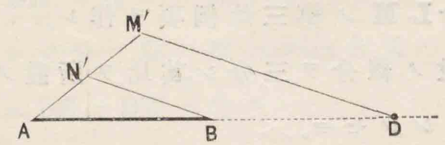
$$AC:CB=AM':M'N'=M:N$$

故ニCハ,ABヲ所設ノ比ニ分ツ。(内分)

同様ノ方法ニヨリABヲ所設ノ比ニ外分スル點ヲ求ムルヲ得ベシ。(學生之ヲ考按セヨ)

*所設ノ比ハ通例二線分ノ比ニテ與フルモノトス。






次ニAB上Cニアラザル任意ノ一點ヲC′トシ,

假ニ $AC':C'B=M:N$ トスレバ,

$$AC'+C'B:C'B=M+N:N$$

即チ $AB:C'B=M+N:N$

然ルニ $AB:CB=M+N:N$

$$\therefore\ CB=C'B$$

故ニC′ハCニ合ス。

從テABヲ$AC:CB=M:N$ナル様ニ内分スル點ハC點唯一ツアルノミ。

同様ニ外分點モ唯一ツアルノミ。

但シ所設ノ比ガ1ニ等シキ場合ニハ外分點ナシ。

即チ 或線分ヲ或比ニ内分又ハ外分スル點ハ各一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

但シ其比ガ1ニ等シキ場合ニハ外分點ナシ。

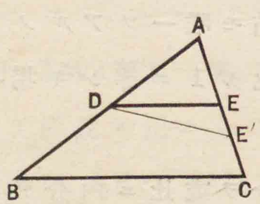
*問1. 所設ノ三線分 L, M, N ノ第四比例項ヲ作レ。又二線分 L, M ノ第三比例項ヲ作レ。

*問2. 所設ノ線分ヲ三分シ,其比ヲ所設ノ比 L : M : N ニ等シクセヨ。

問3. 相交ハル二圓アリ,其交點ノ一ツヲ過ギテ一ツノ直線ヲ引キ,各圓ガ夫々ソレヨリ截取ル弦ヲシテ 1:2 ナル比ヲナサシメヨ。〔東商〕

問4. 線分 AB ヲ C 及ビ D ニ於テ同ジ比 $m:n$ ニ内分及ビ外分スルトキ CA, CB, DA 及ビ DB ノ長サヲ求メヨ。但シ AB ノ測度ヲ $a$ トス。

**171. 定理** **三角形ノ二邊(AB,AC)ヲ相似ニ内分又ハ外分スル直線(DE)ハ第三邊ニ平行ナリ。**




**證明** D ヲ過ギ BC ニ平行ナル直線 DE' ハ唯



一ツアリテ,此直線ハ AC ヲ E' ニ於テ AE' : E'C ガ AD : DB ニ等シキ樣ニ分ツ。而シテ AC ヲ此比ニ等シク分ツ點ハ唯一ツ(内分又ハ外分)アルノミ。

故ニ DE ハ DE' ニ合ス,

從テ DE ハ BC ニ平行ナリ。

**注意** 上ノ證明法ハ**同一法**ト稱シ,茲ニ唯一ツノ甲ト唯一ツノ乙トアルトキ,

甲ハ乙ナリ トニフコトガ眞ナラバ,直ニ其逆 乙ハ甲ナリ ト斷定シ得ル方法ナリ。

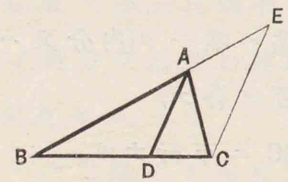
問 四邊形 ABCD ノ邊 AB 上ノ一點 E ヨリ BC ニ平行ニ EF ヲ引キ,對角線 AC ト F ニ於テ交ハラシメ,更ニ F ヨリ CD ニ平行ニ FG ヲ引キ AD ト G ニ於テ交ハラシムレバ,EG ハ BD ニ平行ナリ。

**172. 定理** **三角形ノ内角又ハ外角ノ二等分線ハ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分ス。**

[1] 内分ノ場合。

**假設** 三角形 ABC ノ頂角 BAC ノ二等分線ヲ AD トシ,底 BC ヲ D ニ於テ内分ストス。

**終結** $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$




**證明** DA ニ平行ニ CE ヲ引キ，BA ノ延長ト E ニ於テ交ハラシムレバ，

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE} \qquad (169節)$$

然ルニ $\angle ACE=DAC$，$\angle E=BAD$ ニシテ $\angle CAD=DAB$ ナルヲ以テ

$$\angle ACE=E$$

$$\therefore \quad AE=AC$$

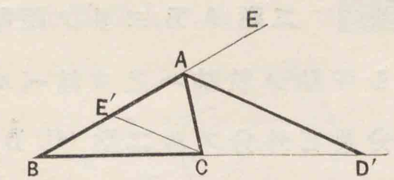
$$\therefore \quad \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

[2] 外分ノ場合。

AD′ ヲ外角 CAE ノ二等分線トシ，BC ノ延長ト D′ ニ於テ交ハルトセバ，上ト同様ニ

$$\frac{BD'}{CD'}=\frac{AB}{AC}$$






問 1. △ABC ニ於テ AC>AB ナリ。今頂角 A ノ二等分線ガ BC ト D ニ於テ交ハラバ CD>BD ナリ。 〔商 船〕

問 2. △ABC ノ底 BC ノ中點ヲ D トシ，∠ADB，ADC ノ二等分線ト二邊トノ交點ヲ夫々 E，F トスレバ，EF ∥ BC ナリ。 〔商 船，海 機，東 商，上 蠶〕

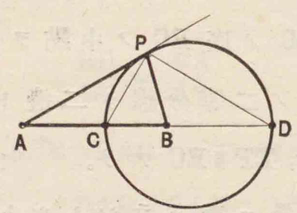
又二邊ノ延長ニ交ハラシムルトキハ如何。

問 3. △ABC ノ三邊ヲ夫々 3尺，5尺，6尺トシ，最大角ノ二等分線ガ對邊ヲ分ツ其各部分ノ長サヲ求メヨ。(内分及ビ外分) 〔海 機〕

系 三角形ノ頂點ヨリ出デ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分又ハ外分スル直線ハ，頂角又ハ之ニ隣ル外角ノ二等分線ナリ。

**173.** **定理** 二點(A, B)ヨリノ距離ノ比ガ所設ノ比ニ等シキ點ノ軌跡ハ,之ヲ結ベル線分(AB)ヲ此比ニ内分及ビ外分スル二點(C, D)間ノ線分(CD)ヲ直徑トセル圓周ナリ。 (*Apollonius* ノ定理)

**證明** [1] M:N ヲ所設ノ比トシ,P ヲ所設ノ條件ニ適スル任意ノ一點ト考フレバ,




$$\frac{PA}{PB}=\frac{M}{N},\quad \frac{AC}{BC}=\frac{M}{N}$$ ナル故,

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}$$

故ニ PC ハ∠APB ヲ二等分ス。 (172節系)

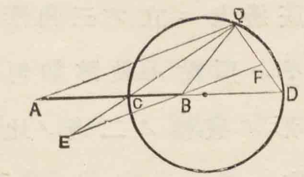
同様ニ PD ハ∠APB ニ隣ル外角ヲ二等分ス。

故ニ∠CPD ハ直角ナリ,而シテ CD ハ不動ノ線分ナリ。

依テ P ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニ在リ。



[2] 次ニ此圓周上ノ任意ノ一點ヲ Q トシ,




QA, QB, QD ヲ結ビ, 又 B ヲ過ギ QA ニ平行ナル直線ヲ引キ,QC ノ延長ト E ニ於テ,QD ト F ニ於テ交ハラシムレバ, BE ハ AQ ニ平行ナル故,

$$\frac{AQ}{BE}=\frac{AC}{BC}=\frac{M}{N}$$

又 $$\frac{AQ}{BF}=\frac{AD}{BD}=\frac{M}{N}$$

$$\therefore\quad \frac{AQ}{BE}=\frac{AQ}{BF}$$

$$\therefore\quad BE=BF$$

故ニ B ハ直角三角形 QEF ノ斜邊ノ中點ナリ。

故ニ $$BE=BQ$$

$$\therefore\quad \frac{AQ}{BQ}=\frac{M}{N}$$

故ニ Q ハ所設ノ條件ニ適ス。

故ニ $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{M}{N}$ ナル如キ點 P ノ軌跡ハ CD ヲ

直徑トセル圓周ナリ。

**問 1.** 同ジ底邊上ニ立ツ三角形ノ他ノ二邊ノ比ガ定マルトキハ,頂點ノ軌跡如何

**問 2.** 三角形ノ底,他ノ二邊ノ比及ビ高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。 〔專檢〕

又高サノ代リニ底ヘノ中線又ハ頂角ヲ知ラバ如何。 〔商船,陸經,小商〕

**問 3.** 三定點ヨリノ距離ノ比ガ所設ノ比 **L**:**M**:**N** ニ等シキ點ヲ求メヨ。

## 問 題 15.

**1.** 所設ノ角 **BAC** ノ內ニ在ル所設ノ點 **P** ヲ過ギ,此角ノ二邊ト **B**,**C** ニ於テ交ハル直線ヲ引キテ, **BP**:**PC** ヲ所設ノ比ニ等シカラシメヨ。

又 **P** ガ角外ニアラバ如何。

**2.** △**ABC** ノ頂角 **A** ノ二等分線ヲ **AD** トシ,其內心ヲ **O** トセバ,底ト二邊ノ和トノ比ハ **DO**:**OA** ニ等シ。 〔東師〕

**3.** 二等邊三角形アリ,底ノ高サニ對スル比ガ



3:2 ニ等シ,然ラバ內心ニテ分タルル高サノ二ツノ部分ノ比如何。

**4.** △**ABC** ノ三邊 **AB**, **BC**, **CA** ノ長サヲ夫々12糎,7糎,9糎トシ,又 ∠**BAC** 及ビ其外角ヲ二等分スル直線ガ **BC** 及ビ其延長ニ交ハル點ヲ夫々 **P**,**Q** トスレバ **PQ** ノ長サ如何。

**5.** 所設ノ弧 **AB** 上ニ一點 **C** ヲ取リ,弦 **AC**,**BC** ノ比ヲ所設ノ比ニ等シクセヨ。 〔高〕

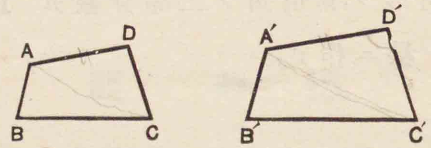
**6.** 定線分 **BC** ヲ底邊トシ,所設ノ角 $\alpha$ ヲ頂角トスル三角形ヲ,其頂角ノ二等分線ガ **BC** 上ノ定點 **D** ヲ過ル樣ニ作レ。 〔神商船〕

## 第二章

# 相似形

**174.** **定義** 一ツノ多角形ノ角ガ夫々順次ニ他ノ多角形ノ角ニ等シク,且其相等シキ各組ノ角ノ間ニ在ル各組ノ邊(對應邊)ノ比ガ相等シキトキハ,此兩多角形ハ互ニ相似ナリト云フ。

例ヘバ兩四角形 ABCD, A′B′C′D′ ニ於テ,




$\angle A=A'$, $\angle B=B'$, $\angle C=C'$, $\angle D=D'$ ニシテ

且 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}$ ナルトキハ,

此兩四邊形ハ相似ナリト云ヒ,之ヲ次ノ如ク記ス。

$$ABCD \backsim A'B'C'D'$$

相似多角形ノ對應邊ノ比ヲ兩形ノ**相似比**ト云フ。

**系一。** 同一ノ多角形ニ相似ナル二ツノ多角形ハ互ニ相似ナリ。

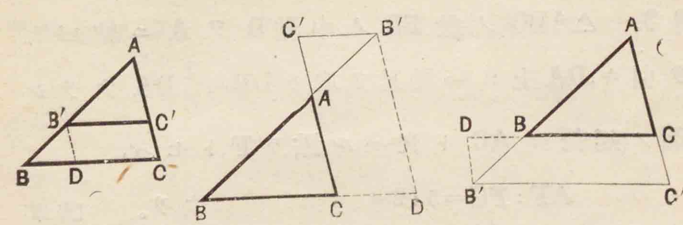


**系二。** 相似多角形ノ周ノ比ハ其相似比ニ等シ。

**問 1.** 兩相似多角形ノ一組ノ對應邊ガ相等シキトキハ,他ノ邊モ夫々相等シク,兩形ハ合同ナリ。

**問 2.** 同邊數ノ兩正多角形ハ相似ナリ。

**175.** **定理** **三角形(ABC)ノ一邊ニ平行ナル直線(B′C′)ト他ノ二邊(或ハ延長)トハ,原形ト相似ナル三角形(AB′C′)ヲ作ル。**




**證明** 先ヅ $B'C' \parallel BC$ ナルヲ以テ,

兩三角形 AB′C′, ABC ノ角ハ夫々相等シ。

次ニ $\dfrac{AB'}{AC'}=\dfrac{BB'}{CC'}=\dfrac{AB'\pm BB'}{AC'\pm CC'}$ ナルヲ以テ

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$$

同様ニ AC ニ平行ニ B′D ヲ引クトキハ,

$B'C'=DC$ ナル故

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{CD}{CB}=\frac{B'C'}{BC}$$

故ニ兩三角形ノ對應邊ハ比例ヲナス。

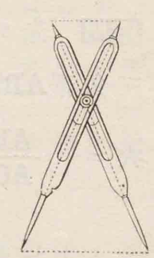
$$\therefore \quad \triangle AB'C' \backsim ABC$$

問 1. 梯形ノ一底ガ他ノ底ノ二倍ナルトキハ、兩對角線ハ互ニ其三分ノ一ノ所ニテ交ハル。

問 2. D及ビEヲ夫々△ABCノ邊AB及ビACヲ $2:3$ ニ分ツ點トセバ, BEトCDトハ各他ヲ $5:2$ ニ分ツ。

問 3. △ABCノ邊BCノ中點DヲAニ結ビテDAヲ引キ,DA上ニ一點Eヲ取リ $DE=\frac{1}{6}DA$ ナラシメ,BEノ延長ガACト交ハル點ヲFトセバ,

$AF:FG=5:2$ ナリ。〔海軍〕

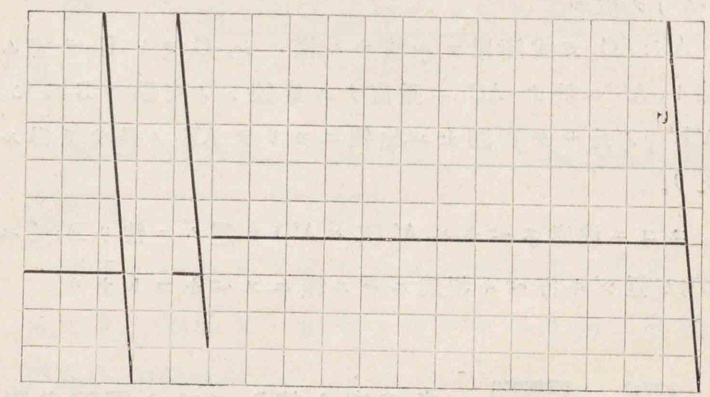


問 4. ココニ示ス比例尺ノ理及ビ使用法ヲ述ベヨ。

問 5. 次ノ方眼紙(一糎目)ニ記スル長サハ夫々2.7糎, $\frac{7}{9}$ 糎及ビ12.6糎ナルコトヲ證明セヨ。

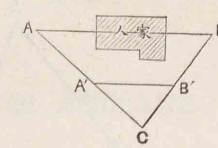
此方法ヲ**對角線尺**又ハ**斜線尺**ト云フ。此方法ニ準ジテ種々ノ長サヲ畫ケ。





**注意** 本節ノ定理ヲ應用シテ二點間ノ距離ヲ間接ニ測ルコトヲ得。(測量ニ應用セラル)

[1] 二點(A, B)共ニ近ヅキ得ル場合。



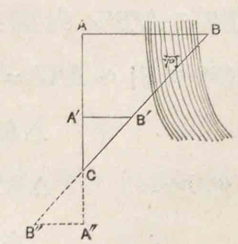

適宜ニ一點Cヲ取リCA, CBヲ測定シ,其上ニ夫々A'及ビB'ヲ取リ,

$CA':A'A=CB':B'B$ ナラシメ

(此比ハ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ノ如キ成ルベク簡單ナルヲ便ナリトス)

A'B'ノ長サヲ實測スルトキハ,簡單ナル比例ニヨリテABノ長サヲ知ルコトヲ得。

[2] 一點(A)ダケ近ヅキ得ル場合。



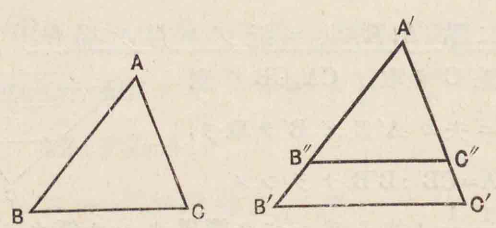

AヨリABニ垂直ナル直線ヲ引キ,其上ニ一點Cヲ取リ,次ニAC(又ハ其延長)上ニ一點A'(又

ハ$A''$)ヲ取ル。

$AC:AC$ ガ或簡單ナル値ナル樣ニシ, C ヨリ B ヲ望ム線ト, $A'$ ニ於テ AC ニ垂直ナル直線トノ交點ヲ $B'$ トシ, $A'B'$ ノ長サヲ實測セバ,比例ニヨリテ AB ノ長サヲ得ルナリ。

ココニ注意スベキハ, $A'$(又ハ$A''$)ヲ選ムニ當リ$B'$(又ハ$B''$)ガ近ヅキ得ベキ場處ニ在ル樣ニスベキコトナリ。

**176.** **定理** **角ヲ夫々等シクスル兩三角形($ABC, A'B'C'$)ハ相似ナリ。**




**證明** 邊 $A'B'$(又ハ其延長)上ニ一點$B''$ヲ取リ, $A'B''$ヲ$A'B'$ノ對應邊 AB ニ等シクシ,$B'C'$ニ平行ニ$B''C''$ヲ引キ$A'C'$ニ$C''$ニ於テ交ハラシムレバ,

$$\triangle A'B''C'' \infty A'B'C' \qquad (175節)$$

然ルニ　$\triangle A'B''C'' \equiv ABC$

$\therefore$　$\triangle ABC \infty A'B'C'$



**系一。** 二角ヲ夫々相等シクスル兩三角形ハ相似ナリ。

**系二。** 同邊數ノ正多角形ノ周ノ比ハ,其外接圓,内接圓ノ半徑ノ比ニ等シ。

**問 1.** 一鋭角ヲ等シクスル兩直角三角形ハ相似ナリ。頂角又ハ底角ヲ等シクスル兩二等邊三角形ハ相似ナリ。

***問 2.** 兩三角形ノ邊ガ夫々平行ナルカ,又ハ夫々垂直ナラバ,此兩三角形ハ相似ナリ。

***問 3.** 相似三角形ノ對應スル高サノ比ハ其相似比ニ等シ。

***問 4.** 圓外ノ一點 A ヨリ割線 ABC, ADE ヲ引キ,圓周ト夫々 B, C; D, E ニ於テ交ハラシムレバ, $\triangle ABD$, AEC ハ相似ナリ。〔陸士〕

又此二割線中一ツガ切線トナルトキハ如何。

又 A ヨリ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ P, Q トセバ　$PB:PC=QB:QC$　ナリ。〔東師〕

**問 5.** 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊ヘ垂線 CD ヲ引クトキハ,

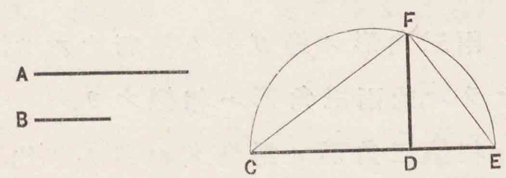
[1]　$\triangle ACD \backsim CBD \backsim ABC$

[2]　$AD:AC=AC:AB,$　　$BD:BC=BC:BA$

[3]　$AD:CD=CD:BD$

**177.** **作圖題**　二線分(A,B)ノ比例中項ヲ求メヨ。

前節ノ問5ノ[3]ヨリ直チニ次ノ作圖法ヲ得。




**作圖**　Aニ等シキ線分CDヲ引キ,其延長上ニDEヲBニ等シク取リ,CEヲ直徑トスル圓周ヲ畫キ,DヨリCEニ垂直ニDFヲ引キ圓周トノ交點ヲFトセバ,DFハ所要ノ比例中項ナリ。

**證明**　略ス。

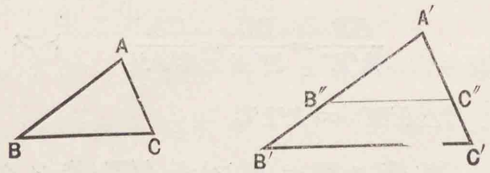
**178.** **定理**　兩三角形ノ一角ガ相等シク,且其角ノ二邊ガ比例ヲナストキハ,此兩三角形ハ相似ナリ。



**假設**　$\triangle ABC,\ A'B'C'$ ニ於テ

$\angle A=A'$ 及ビ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$ トス。

**終結**　$\triangle ABC \backsim A'B'C'$




**證明**　邊A′B′(又ハ其延長)上ニB″ヲ $A'B''=AB$ ナル樣ニ取リ,B′C′ニ平行ニB″C″ヲ引クトキハ,

$$\triangle A'B''C'' \backsim A'B'C'$$

$$\therefore\quad \frac{A'B''}{A'B'}=\frac{A'C''}{A'C'}$$

然ルニ　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$　(假設)

及ビ　$A'B''=AB$　(作圖)

$\therefore\quad A'C''=AC$

$\therefore\quad \triangle ABC \equiv A'B''C''$

$\therefore\quad \triangle ABC \backsim A'B'C'$

**179.** **定理** 一ツノ三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ト比例ヲナストキハ,此兩三角形ハ相似ナリ。

**假設** △ABC, A'B'C' ニ於テ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$$ トス。

**終結** △ABC ∽ A'B'C'

**證明** (前節ノ圖ヲ用フ)邊 A'B'(若シクハ其延長)上ニ一點 B'' ヲ, A'B''=AB ナル樣ニ取リ, B'C' ニ平行ニ B''C'' ヲ引クトキハ,

$$\triangle A'B''C'' \backsim A'B'C'$$

$$\therefore \quad \frac{A'B''}{A'B'}=\frac{B''C''}{B'C'}=\frac{C''A'}{C'A'}$$

然ルニ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$$

及ビ $$A'B''=AB$$

$$\therefore \quad B''C''=BC \text{ 及ビ } C''A'=CA$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv A'B''C''$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim A'B'C'$$

問 1. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ビテ生ズル三角形ハ原形ト相似ナリ。



**注意** 以上三定理ヲ總括スレバ,次ノ如シ。

兩三角形ハ次ノ場合ニ相似ナリ。

[1] 二角ガ夫々相等シキトキ。

[2] 一角ガ相等シク其邊ガ比例ヲナストキ

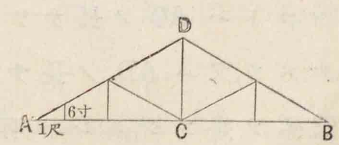
[3] 三邊ガ比例ヲナストキ。

而シテ兩三角形(多角形モ亦然リ)ガ相似ナルトキハ,角ハ夫々相等シク,邊ハ對應邊ガ對應スル樣ニ比例ヲナス。

問 2. 相似多角形ノ對應スル對角線ノ比ハ相似比ニ等シ。

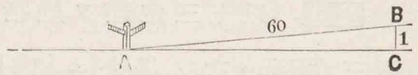
**180.** **勾配**。 建物ノ屋根又ハ坂道ノ高クナル度合ヲ表ハスニ勾配ナル言葉ヲ用フ。

例ヘバ家屋ノ屋根ノ上リ方ガ水平1尺ノ距離ニ對シテ6寸ダケ高クナルトキハ,之ヲ **6寸勾配ノ流レ** ト云フ。




上ノ勾配ニ於テ梁間(AB) 5 間ノ家ニ於ケル屋根ノ流レ(AD)ハ幾尺ナルカ。

又鐵道線路等
於ケル坂道ノ




上リノ(又下リノ)割合ハ,其坂ノ長サニ對スル歩合ヲ以テ言ヒ表ハス,例ヘバ$\frac{1}{60}$ノ上リトハ坂ノ長サ60米ニ對シテ1米ノ割ニ上ルコトヲ云フナリ。

$\frac{1}{60}$ノ上リ勾配ヲ有スル鐵道線路ヲ1粁上ルトキハ,原ヨリ幾米ノ高サニ上ルコトトナルカ。

勾配ハ相似ナル三角形ノ二邊ノ比ヲ表ハスヲ以テ,其値ハ梁木ノ長サ又ハ坂道ノ長サニハ關スルコトナク,其水平線トノ間ノ角ニ伴ウテ變ズ。

前者ヲ其角(CAD)ノ**正切**ト云ヒ,後者ヲ其**正弦**ト云フ,而シテ夫々之ヲ$\tan A$及ビ$\sin A$ト記ス,但シAハ∠CADノ大サヲ表ハスモノトス。

角CADガ増大スレバ,其正切及ビ正弦モ亦増大スルコトハACノ長サヲ定メテDヲCD線上ニ動カスカ,又ハADノ長サヲ定メテAヲ中心トスル圓弧ヲ畫カシムレバ明カナリ。

$\tan A$, $\sin A$等ヲ∠Aノ**三角函數**ト云フ。

三角函數ニ就キテハ三角法ニ於テ詳説スベシ。

**問.** 4寸勾配,幅5間ノ屋根ニ於テハ,棟ト梁ト



ノ間如何。

## 問題 16.

1. 一點ヲ過ル一群ノ直線*ハ平行線ヲ相似ニ分ツ。

2. 二等邊三角形ノ一邊ト底邊トノ比ガ100ト143トノ如シ,然ラバ頂角ハ鋭角ナルカ,或ハ鈍角ナルカ。 [愛知醫大豫]

3. 直徑ガ$D$,$d$ナル二ツノ圓ガ外切ス,此二圓ト其共通切線トノ切點ガA,BナラバABハ$D$ト$d$トノ比例中項ナリ。 [遞信省官吏養成所]

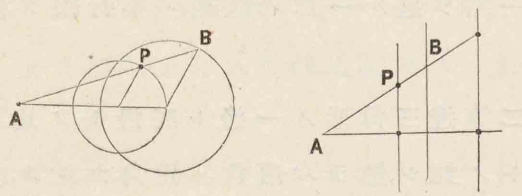
4. △ABCノ角A及ビBノ二等分線ノ交點Oヲ過リAOニ垂線ヲ引キ,邊AB,ACト交ハル點ヲ夫々D,Eトスレバ,OD又ハOEハBD,CEノ比例中項ナリ。 [高]

5. 平行四邊形ABCDノ二邊AB,AD上ニ夫々二點E,Fヲ$AE=EB$, $AF=\frac{1}{2}FD$ナル樣ニ取リ,直

*一點ヲ過ル一群ノ直線ハ一ツノ**射線束**ヲナスト云ヒ,其點ヲ**束點**ト云フ,而シテ束點ヲ過ギザル直線ヲ**共截線**ト云フ。

線 EF ト對角線 AC トノ交點ヲ G トセバ, AG ハ AC ノ五分ノ一ナリ。 〔商船〕

**6.** 一定點ヨリ一定直線又ハ一定圓周ヘ至ル線分ヲ所設ノ比ニ分ツ點ノ軌跡如何。




**7.** 所設ノ圓周上ニ在ル所設ノ點ヲ A トシ, BC ヲ所設ノ弦トス。今 A ヲ過リ BC ト E ニ交ハル弦 AD ヲ引キ $\mathrm{DE}=\frac{1}{3}\mathrm{AD}$ ナラシメヨ。

但シ起リ得ベキ總テノ場合ヲ吟味セヨ。 〔名工〕

又作圖不能ノ場合ヲ擧ゲヨ。 〔東工〕

**8.** 定圓外ノ所設ノ一點 P ヨリ割線 PAB ヲ引キ圓外部 PA ヲ弦 AB ノ二倍ナラシメヨ。

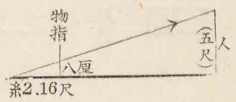
**9.** 塔アリ, 日光ノタメニ地上ニ 120 尺ノ影ヲ寫ス, 此時 9 尺ノ直立竿ハ地上ニ $3\sqrt{3}$ 尺ノ影ヲ寫スト云フ, 塔ノ高サヲ求メヨ。

**注意** 此問題ノ方法ニヨリ一本ノ杖ヲ利用シテ塔ノ高サヲ測ルコトヲ得。



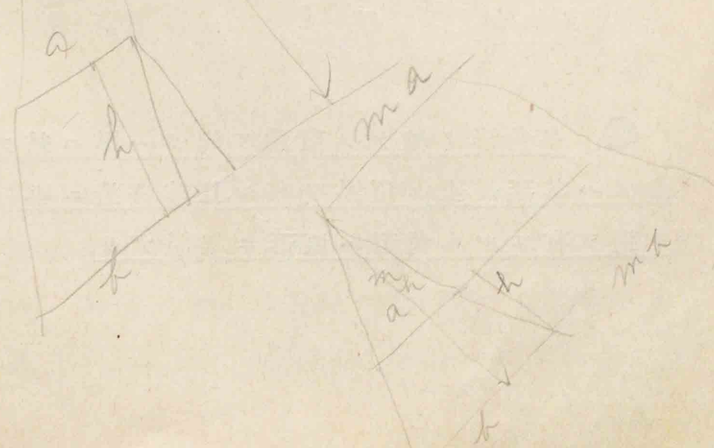
又次ノ問題ハ人ノ丈(タケ)ヲ 5 尺トシテ距離ノ概測ヲナスニ和算家ノ用ヒシ方法ナリ。

**10.** 物指ノ一端ニ 2 尺 1 寸 6 分ノ絲ヲ附シ, 絲ノ他ノ端ヲ口ニ啣ヘテ物指ヲ直立セシメ, 川向ニ立テル人ノ丈ヲ見ル時ニ物指ノ 8 厘ニ見ユルトキハ川幅何程。



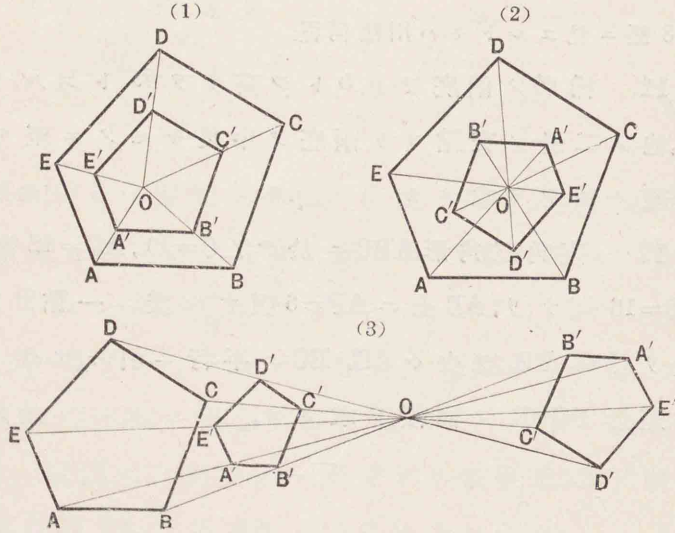

**11.** 梯形ノ兩底ヲ $a, b$ トシ高サヲ $h$ トスルトキ, 他ノ二邊ノ交點ヨリ兩底ノ中, 長キモノニ至ル垂線ノ長サヲ求メヨ。 〔海兵〕

**12.** 直角三角形 ABC ニ於テ $\angle C=90^\circ$, AC=12 糎, BC=16 糎ナリ, AB 上ニ AP=6 糎ナル樣ニ一點 P ヲ取リ, PQ, PR ヲ夫々 AC, BC ニ平行ニ引キテ生ズル矩形 PQCR ノ面積ヲ求メヨ。 〔廣師〕



**181. 定理** 多角形ノ總テノ頂點ヲ同一點ニ結ベル線分ヲ,同ジ比ニ内分(又ハ外分)スル點ヲ結ビテ成ル多角形ハ原形ト相似ナリ。

**證明** 學生之ヲナスベシ。




**系** 多角形ノ總テノ頂點ヲ同ジ一點ニ結ブ線分又ハ其延長上ニ頂點ヲ有シ,且其各邊ニ平行ナル邊ヲ有スル多角形ハ原形ニ相似ナリ。



**182. 定理** 二ツノ相似多角形ハ各組ノ對應邊ガ各平行ナル樣ニ置クコトヲ得,而シテ此場合其對應スル頂點ヲ結ブ直線ハ同一點ヲ通過ス。

此交點ヲ兩形ノ**相似ノ中心**ト云フ。

**證明** 二ツノ相似多角形ヲ ABCDE, A'B'C'D'E' トシ,(前節ノ圖ヲ用フ),其一組ノ對應邊 AB ト A'B' トヲ平行ナル樣ニ置キ,直線 BB' ヲ引キ,其上ノ一點ヲ O トセバ $\angle OBA=OB'A'$ ニシテ,且 $\angle ABC=A'B'C'$ ナルヲ以テ $\angle OBC \parallel OB'C'$ ナリ。

故ニ $BC \parallel B'C'$

同樣ニ順次各組ノ對應邊ガ平行ナリ。

次ニ AA' ト BB' トノ交點ヲ O, CC' ト BB' トノ交點ヲ O' トセバ, $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ ナル故,

$$OB:OB'=AB:A'B',\quad O'B:O'B'=BC:B'C'$$

然ルニ $AB:A'B'=BC:B'C'$ ナル故,

$$OB:OB'=O'B:O'B'$$

故ニ O ト O' トハ相合ス。 (170節)

換言スレバ CC' ハ AA' ト BB' トノ交點 O ヲ通過ス。同樣ニ DD' ハ BB' ト CC' トノ交點即チ O ヲ通過ス。同樣ニ對應スル頂點ヲ結ブ直線ハ皆

同一點 O ヲ通過ス。

系一。兩多角形ノ相似ノ中心ハ其兩形ノ對應スル頂點ヲ結ブ直線ヲ相似比ニ內分又ハ外分ス。

*問. 兩圓ノ共通切線ハ,其兩圓ノ中心線上ニ於テ交ハリ,且其交點ハ其兩圓ノ中心間ノ線分ヲ半徑ノ比ニ內分又ハ外分ス。

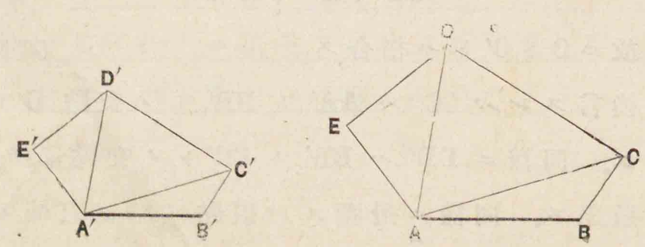
此點ヲ兩圓ノ相似ノ中心ト云フ。

系二。相似ナル兩多角形ハ,其對應邊ヲ夫々對應邊トスル同數ノ相似三角形ニ分ツコトヲ得。

逆モ亦眞ナリ。

前節ノ圖(1),(2)ニ示スガ如ク分ツコトヲ得,又對角線ニヨリテモ分ツコトヲ得。

**183.** **作圖題** 所設ノ線分(AB)上ニ,所設ノ多角形(A′B′C′D′E′)ニ相似ナル多角形ヲ作レ。






**作圖** 所設ノ多角形 A′B′C′D′E′ ノ對角線 A′C′, A′D′ ヲ引キ,之ヲ三ツノ三角形ニ分ツ。

AB ヲ一邊トスル三角形 ABC ヲ作リ ∠BAC 及ビ ∠B ヲ夫々 ∠B′A′C′ 及ビ ∠B′ ニ等シクセバ,△ABC ハ △A′B′C′ ニ相似ニシテ, AB ト A′B′ ハ一組ノ對應邊ナリ。

次ニ AC ノ上ニ其 B ト反對ノ側ニ △A′C′D′ ニ相似ナル三角形ヲ ∠A, C ガ夫々 ∠A′, C′ ニ對應スル樣ニ作リ,

更ニ同樣ニ AD ノ上ニ, △A′D′E′ ニ相似ナル三角形 ADE ヲ作ルトキハ, ABCDE ハ所要ノ多角形ナリ。

**證明** 此兩多角形ハ明カニ同數ノ相似三角形ヨリ成ル,故ニ相似ナリ。　(前節系二)

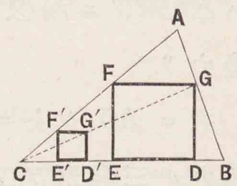
而シテ AB ト A′B′ トハ對應邊ノ一組ナリ。

カカル兩相似形ハ AB ト A′B′ ノ上ニ相似ノ位置ニアリト云フ。

問 1. 所設ノ三角形 ABC ニ,二邊ノ比ガ所設ノ比ニ等シキ矩形ヲ內接セシメヨ。但シ矩形ノ一邊ハ BC 上ニ置クモノトス。

**注意**　一ツノ多角形ガ他ノ多角形ノ邊上ニ頂點ヲ置クトキハ,前者ハ後者ニ**内接ス**ト云ヒ,逆ニ後者ハ前者ニ**外接ス**ト云フ。

**解析**　所設ノ矩形ガ圖ノ如ク畫カレタリト考ヘ,CG ヲ結ベバ,CF, CG, CD, CE ヲ同ジ比ニ分ツ點 F′, G′, D′, E′ ハ所設ノ矩形ニ相似ナル矩形 D′E′F′G′ ヲ作ル,從テ C ハ此兩矩形ノ相似ノ中心トナル。




カク相似ノ中心ヲ使用シテ問題ヲ解ク方法ヲ**相似法**ト云ヒ,其應用甚ダ廣シ。

問 2.　所設ノ三角形ニ正方形ヲ內接セシメヨ。

問 3.　所設ノ半圓又ハ扇形ニ,正方形又ハ圓ヲ內接セシメヨ。〔京蠶,米工〕

問 4.　正方形ノ對角線ト一邊トノ和又ハ差ヲ知リテ此正方形ヲ作レ。〔高,神商,北大豫〕

## 184. 圖形ノ擴大及ビ縮小。

上ニ述ベタル相似多角形ノ性質ニヨリ,一ツノ多角形ノ一邊ノ $n$ 倍又ハ $n$ 分ノ一ニ等シキ線分上ニ,其多角形ニ相似ナル多角形ヲ,其二邊ガ一組

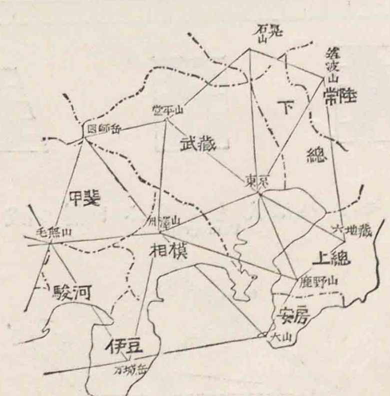


ノ對應邊トナル樣ニ畫クトキハ,後者ノ各邊,對角線其他其上ノ諸點ヲ結ブ線分ハ,皆夫々前者ノ之ニ對應スルモノノ $n$ 倍又ハ $n$ 分ノ一ニ等シ。

カクノ如ク前ノ圖形ト相似ニシテ大サヲ異ニスル新圖形ヲ畫クコトヲ,**圖形ヲ擴大スル**又ハ**縮小スル**ト云フ。

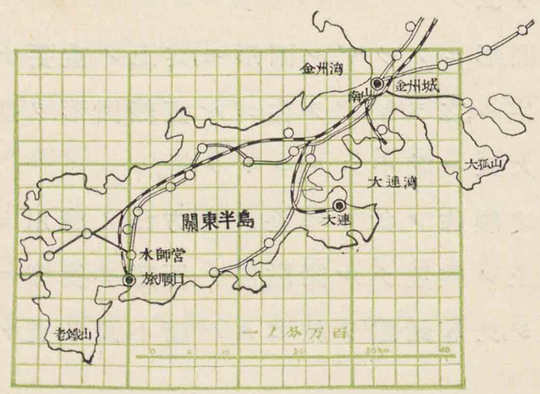
直線圖形ニアラザル圖形モ,其上ノ重要ナル諸點ヲ選定シ,之ヲ結ビテ生ズル直線圖形ヲ基礎トシテ擴大又ハ縮小スルコトヲ得。

**地圖ノ製作**ノ如キモ全ク此方法ノ應用ニシテ,先ヅ地上ノ重要ナル諸點間ノ距離ヲ實測ニヨリテ測定シ,此等諸點ヲ結ビタル縮小圖ヲ畫キ,之ヲ



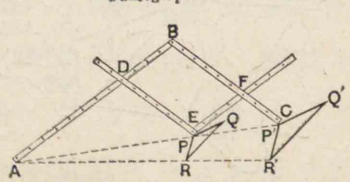
基礎トシテ海岸線其他ヲ記入スルナリ。二萬分ノ一,十萬分ノ一等ノ地圖ト云フハ,其縮小率ヲ云フモノニシテ,圖上ノ兩地間ノ距離ガ實際ノ距離ノ二萬分ノ一,十萬分ノ一等ニ當ルノ謂ヒナリ。

上ノ擴大又ハ縮少ヲナスニハ方眼紙ヲ使用スルヲ便ナリトス。次ニ二三ノ圖ヲ示サン。





次ニ示スモノハぱんとぐらふ(Pantograph)ト稱シ,或圖形ヲ擴大又






ハ縮少スルニ廣ク用ヒラルルモノナリ。

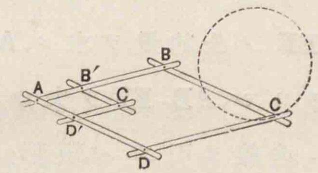
AB, BC, DE, EF ハ BDEF ガ平行四邊形ヲナス樣ニ組合セル四ツノ竿ニシテ,之ヲ

$$AD : AB = BF : BC$$

ナル樣ニ組合ストキハ A, E, C ハ常ニ一直線上ニ在リ。今 A ヲ固定シ,E ニ在ル針ヲ動カシテ所設ノ圖形,例ヘバ △PQR ノ周上ヲ書クトキハ,C ニ在ル鉛筆又ハぺんノ尖端ハ之ニ相似ナル圖形ヲ書ク。

此理ヲ證明セヨ。又其擴大又ハ縮少ノ率ハ如何。

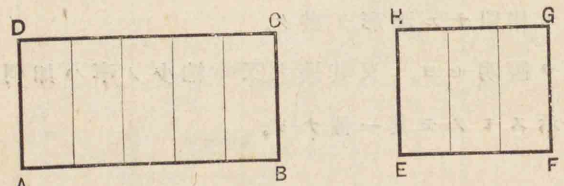
次ニ示スモノモ其一種ナリ。



第三章

# 面積ニ關スル比例

**185.** **定理** 等高ノ矩形(ABCD,EFGH)ノ比ハ底(AB,EF)ノ比ニ等シ。




**證明** 底AB,EFノ公約量ヲ求メ*,ABハ其$m$倍EFハ其$n$倍ナリトシ,AB,EFヲ夫々$m,n$等分スル分點ヨリ底ニ垂線ヲ引カバ,矩形ABCD及ビEFGHハ夫々$m$等分及ビ$n$等分セラル。

$$\therefore \quad \frac{\square AC}{\square EG}=\frac{m}{n}$$

然ルニ
$$\frac{AB}{EF}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\square AC}{\square EG}=\frac{AB}{EF}$$

*AB,EFガ通約スベカラザル場合ノ證明ハココニ之ヲ略ス。



**系一**。等底ノ矩形ノ比ハ其高サノ比ニ等シ。

**系二**。等高(又ハ等底)ノ兩平行四邊形及ビ兩三角形ノ比ハ,其底(又ハ高サ)ノ比ニ等シ。

**系三**。等半徑ノ兩扇形ノ比ハ其弧ノ比,從テ其中心角ノ比ニ等シ。

問 1. 二線分ノ矩形ハ其各線分上ノ正方形ノ比例中項ナリ。

問 2. 四邊形ABCDノ對角線ノ交點ヲOトシ,△AOB,△BOC,△CODノ面積ヲ夫々4平方糎,7平方糎及ビ6平方糎トセバ,△AODノ面積如何。〔鹿農〕

問 3. △ABCノ頂點Aヨリ邊BC(又ハ其延長)ヘ任意ノ直線ADヲ引キ,其上(又ハ其延長上)ニ任意ノ一點Oヲ取ラバ,△AOB,AOCノ比ハBD,DCノ比ニ等シ。

問 4. △ABCノ重心ヲOトセバ,
△AOB=BOC=COA　ナリ。

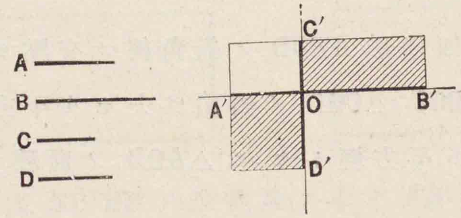
問 5. 三角形内ニ一點ヲ求メ,之ヲ各頂點ニ結ビテ,以テ三角形ヲ三等分セヨ。〔神商,醫專,東大農實〕

**186. 定理**　四ツノ線分(A,B,C,D)ガ比例ヲナストキハ,外項ノ矩形(A.D)ハ内項ノ矩形(B.C)ニ等シ。

**證明**　Oニ於テ直交スル二直線A′B′, C′D′上ニ

$OA'=A,\ OB'=B,\ OC'=C,\ OD'=D$

ナル様ニ四點A′,B′,C′,D′ヲ取リ,矩形B′C′, C′A′, A′D′ヲ作ルトキハ,




$$\frac{\square A'C'}{\square B'C'}=\frac{A'O}{OB'}=\frac{A}{B},$$

及ビ　$$\frac{\square A'C'}{\square A'D'}=\frac{C'O}{OD'}=\frac{C}{D}$$　(185節)

然ルニ　$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$　(假設)

∴　$$\frac{\square A'C'}{\square B'C'}=\frac{A'C'}{A'D'}$$

∴　$$\square A'D'=B'C'$$

**系一**。　二ツノ矩形又ハ三角形ガ等積ナルトキハ,其高サノ比ハ底ノ比ノ反比ニ等シ。



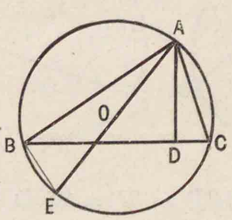
**系二**。　二線分ノ矩形ハ,其比例中項ノ上ノ正方形ニ等シ。逆モ亦眞ナリ。

*問 1.　直角三角形ABCノ直角ノ頂點Aヨリ斜邊ヘ垂線ADヲ下ストキハ $\overline{AD}^2=BD.CD$ ナリ。

問 2.　圓外ノ一點ヨリ二ツノ切線ト一ツノ割線トヲ引キ二ツノ切點ヲ割線ノ二ツノ交點ニ結ビテ四邊形ヲ作ルトキハ,其四邊形ノ相對スル邊ノ包ム矩形ハ相等シ。　[京城醫專]

**187. 定理**　三角形(ABC)ノ二邊ノ包ム矩形(AB.AC)ハ第三邊ヘノ高サ(AD)ト外接圓ノ直徑トノ矩形ニ等シ。

**證明**　Aヨリ直徑AEヲ引キ,BEヲ結ベバ,




$\triangle ABE \backsim ADC$　(176節)

∴　$AB:AD=AE:AC$

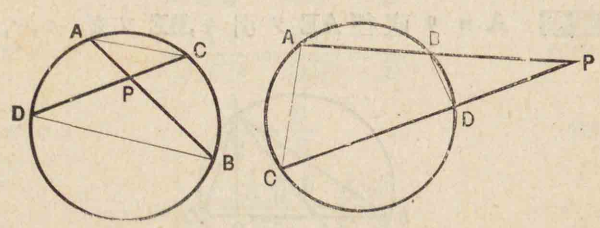
∴ $AB.AC = AD.AE$

問 1. 半徑$r$ナル圓ニ內接スル△ABCノ二邊AB, ACノ長サガ夫々$m, n$ナルトキハ,Aヨリ對邊ヘ下セル垂線ノ長サ如何。 〔長商〕

問 2. △ABCノ邊BC或ハ其延長上ニ一點Dヲ取ルトキハ, △ABD, ACDノ外接圓ノ直徑ノ比ハAB:ACニ等シ。

**188.** **定理** **圓ノ二弦若シクハ其延長ガ相交ハルトキハ其交點ニテ分タレタル各弦ノ二部分ノ矩形ハ相等シ。**

**證明** AB, CDヲ二弦トシPヲ其交點トセバ,




兩三角形APC, BPDハ互ニ等角ナル故相似ナリ

∴ $AP : PD = CP : PB$,

∴ $AP.PB = CP.PD$



**系一。** 一定點ヲ過ル弦ノ此點ニテ分タルル二部分ノ矩形ハ常ニ相等シク,

〔1〕 此點ガ圓內ニ在ラバ, 此點ニテ二等分セラルル弦ノ半分ノ平方ニ等シク,

〔2〕 此點ガ圓外ニ在ラバ,此點ヨリ引ケル切線ノ平方ニ等シ。

**系二。** 系一ノ逆モ眞ナリ。即チ

〔1〕 二線分AB, CD (又ハ其延長)ガPニ於テ相交ハリ, $AP.PB = CP.PD$ ナラバ, 此兩線分ノ端A, C, B, Dハ同一ノ圓周上ニ在リ,

〔2〕 一線分ABノ外分點Pヨリ一線分PCヲ引キタルトキ, $AP.PB = \overline{PC}^2$ ナルトキハ, PCハCニ於テ圓ABCニ切ス。

問 1. △ABCノ三頂點ヨリ對邊ヘ下セル三垂線ヲAD, BE, CFトシ,其交點ヲOトセバ,

$$AO.OD = BO.OE = CO.OF$$ ナリ。

問 2. 圓ノ弦ヲ双方ヘ相等シク延長スルトキハ,其兩端ヨリ其圓ヘ引ケル切線ハ相等シ。

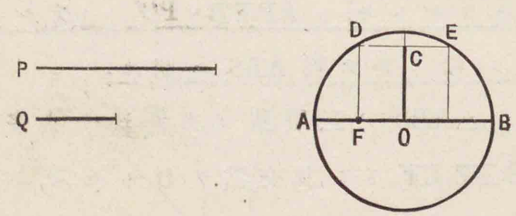
*問 3. 二定點A, Bヲ過ル圓ヘABノ延長上ノ一點ヨリ引ケル切線ハ皆相等シ。 〔上曌,鳥農〕

*問 4.　系一 [2] ヲ應用シテ所設二線分ノ比例中項ヲ求メヨ。

問 5.　相交ハル二圓ノ交點 A, B ヲ結ブ直線 AB ノ延長上ノ任意ノ一點 P ヨリ各圓ヘ割線 PCD, PEF ヲ引キ兩圓周トノ交點ヲ夫々 C, D; E, F トセバ, 此四點ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

又 AB ヲ 7 寸, BP ヲ 9 寸トセバ, P ヨリ各圓ヘ引ケル切線ノ長サ如何。　[陸士]

**189.** **作圖題**　**二線分ノ和(P)ト其積*(Q²)トヲ知リテ此二線分ヲ作レ。**




**作圖**　P ニ等シキ線分 AB ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, 之ニ垂直ナル半徑上ニ Q ニ等シク OC ヲ取

*二線分ノ矩形ト云フ代リニ, 二線分ノ積ト云フコトアリ。又所設ノ面積ハ通例正方形ノ面積ニテ與ヘラル, 從テ其正方形ノ一邊ガ已知ノモノトス。



リ, C ヲ過ギ AB ニ平行ナル弦 DE ヲ引キ, D ヨリ AB ヘ垂線 DF ヲ引キ其足ヲ F トセバ AF, FB ハ所要ノ線分ナリ。

**證明**　$AF+FB=AB=P,$

$$AF\cdot FB=\overline{DF}^2=\overline{OC}^2=Q^2$$

**吟味**　本題ハ D 點ガ存在スルトキ,

即チ　$OC \leqq OA$　從テ　$Q \leqq \frac{P}{2}$

ナルトキニ限リ解答アリ。

而シテ　$Q<\frac{P}{2}$　ナルトキハ, AB ノ分點ハ二ツアレドモ解答ハ一通ナリ。

又　$Q=\frac{P}{2}$　ナルトキハ, 兩線分共ニ $\frac{P}{2}$ トナル。

**注意**　今 P 及ビ Q ノ測度ヲ $p$ 及ビ $q$ トシ, 所要ノ線分ノ測度ヲ $x$ 及ビ $y$ トスレバ,

本題ハ　$x+y=p,\quad xy=q^2$　ナル一組ノ方程式

從テ　$x^2-px+q^2=0$　ナル二次方程式ノ作圖的解法ヲ問フモノナリ。

今圖ニヨリテ $x$ 及ビ $y$ ヲ計算センニ,

$x=AF=OA-OF,\quad y=FB=OA+OF$　ニシテ

$\overline{OF}^2=\overline{OD}^2-\overline{DF}^2=\overline{OA}^2-\overline{OC}^2$　ナリ

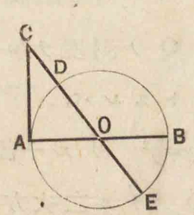
$$\therefore\quad OF=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}$$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{p}{2}-\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q^2} \\ y=\dfrac{p}{2}+\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q^2} \end{cases}$$

コレ上ノ方程式ノ二根ナリ。

問．所設ノ線分ヲ二分シ,其兩分ノ矩形ヲ所設ノ正方形ニ等シカラシメヨ。且之ヲ應用シテ二次方程式 $x^2-10x+16=0$ ノ根ヲ作圖ニヨリ見出セ。〔大工〕

**190.** **作圖題** **二線分ノ差(P)及ビ積($Q^2$)ヲ知リテ此二線分ヲ作レ.**




**作圖**　P ニ等シキ線分 AB ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ,其一端 A ニ於ケル此圓ノ切線上ニ Q ニ等シキ AC ヲ取リ, C ヨリ中心線 CDOE ヲ引カバ CD, CE ハ所要ノ二線分ナリ。(188節系一)

**吟味**　本題ハ常ニ成立ス。



**注意**　P, Q 及ビ CE, CD ノ測度ヲ夫々 $p, q$ 及ビ $x, y$ トセバ,本題ハ聯立方程式

$$x-y=p, \quad xy=q^2$$ ノ解法ニシテ,

$$CO=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q^2}$$ ナル故,

$$\begin{cases} x=CO+OA=\sqrt{\dfrac{p^2}{4}+q^2}+\dfrac{p}{2} \\ y=CO-OA=\sqrt{\dfrac{p^2}{4}+q^2}-\dfrac{p}{2} \end{cases}$$

コレ上ノ聯立方程式ノ根ニシテ, 二次方程式

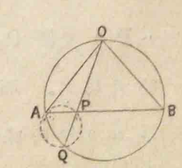
$x^2-px-q^2=0$　ノ根ノ絕對値ナリ。

## 問　題　17.

1. 圓ノ弦ヲ内分或ハ外分スレバ,其二ツノ分ノ矩形ハ,半徑ノ平方ト分點ヲ中心ニ結ブ線分ノ平方トノ差ニ等シ。〔海機〕

2. 菱形 ABCD ノ頂點 A ヲ過ル直線ヲ引キ,其直線ガ二邊 BC, CD, 及ビ對角線 BD ト夫々 E, F 及ビ K ニテ交ハルトキハ, $\overline{KC}^2=KE.KF$ ナリ。〔東工〕

3. 二等邊三角形 OAB ノ頂點 O ヨリ任意ノ直線ヲ引キ,底 AB ト P ニ於テ,外接圓ノ周ト Q ニ於テ交ハ

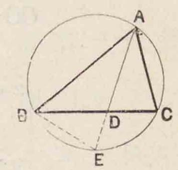


ラシムレバ,矩形 OP.OQ ハ一定ナリ。 〔東師,東商〕

**4.** △ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底 BC ト D ニ於テ,外接圓ノ周ト E ニ於テ交ハルトキハ,

[1] AB.AC=AE.AD 〔醫專〕

[2] $\overline{AD}^2$=AB.AC−BD.DC

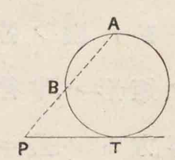



又 AD ガ A ニ隣ル外角ノ二等分線ナラバ如何。

***5.** 三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ R, 三邊ヲ $a, b, c$ トセバ,面積ハ $\dfrac{abc}{4R}$ ナルコトヲ證明セヨ。 〔陸士〕

**6.** 一邊,面積及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

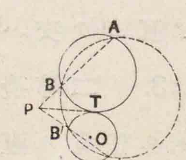
***7.** 二定點ヲ過リ一定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。 〔海機,農實〕




(PA.PB=$\overline{PT}^2$ ヨリ切點 T ヲ定メヨ。)

**8.** 二定點ヲ過ギ一定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。 〔東商〕

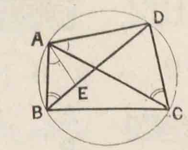
(所設ノ二點 A, B ヲ過ギ,所設ノ圓 O ニ交ハル任意ノ圓ヲ畫キ, AB, A′B′ ノ交點ヲ P トセバ,所要ノ圓ハ P ヨリ圓 O ニ引ケル切線ニ其切點ニ於テ切ス。而シテ定點ト定圓トノ位置ニヨリテ吟味セヨ。)






***9.** 圓ニ内接スル四邊形ノ對邊ノ矩形ノ和ハ對角線ノ矩形ニ等シ。

(Ptolemy ノ定理)




**10.** 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ガ直交スルトキハ,對邊ノ矩形ノ和ハ其四邊形ノ二倍ニ等シ。

**191.** **定義** 若干ノ比ノ乘積ノ比ニ等シキ比ヲ,其等ノ比ノ**複比**或ハ**相乘比**ト云フ。

例ヘバ, $\dfrac{X}{Y}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}\times\dfrac{E}{F}$ ナルトキハ,

$\dfrac{X}{Y}$ ヲ $\dfrac{A}{B}, \dfrac{C}{D}, \dfrac{E}{F}$ ノ複比ト云フ。

相等シキ二ツノ比ノ複比ヲ其各比ノ**二乘比**ト云ヒ,相等シキ三ツノ比ノ複比ヲ其**三乘比**ト云フ。

例ヘバ $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ ニシテ $\dfrac{X}{Y}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}$ ナルトキハ, $\dfrac{X}{Y}$ ハ $\dfrac{A}{B}$ 及ビ $\dfrac{C}{D}$ ノ二乘比ナリ。

此場合ニハ $\dfrac{X}{Y}=\left(\dfrac{A}{B}\right)^2=\left(\dfrac{C}{D}\right)^2$ ナリ。

**192.** **定理** A,B,C ヲ同種類ノ量トセバ,
A:C ハ A:B ト B:C トノ複比ナリ。

**證明** $\frac{A}{B}=p$, $\frac{B}{C}=q$ トスレバ,

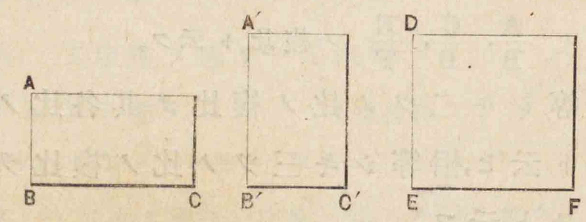
$A=pB$, $B=qC$ ナル故,

$$A=pq.C$$

$$\therefore \quad \frac{A}{C}=pq=\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}$$

**注意** 量ガ三ツヨリ多キ場合モ同様ナリ。

**193.** **定理** 二ツノ矩形ノ比ハ其高サノ比ト底ノ比トノ複比ニ等シ。




**證明** AC ト A'C' ヲ二ツノ矩形トシ, AC ト等底ニシテ A'C' ト等高ナル第三ノ矩形 DF ヲ作ラバ,

$$\frac{\square AC}{\square DF}=\frac{AB}{DE}, \qquad (185節)$$

又 $$\frac{\square DF}{\square A'C'}=\frac{EF}{B'C'}, \qquad (同系一)$$



及ビ $$\frac{\square AC}{\square A'C'}=\frac{\square AC}{\square DF}\times\frac{\square DF}{\square A'C'} \qquad (192節)$$

$$\therefore \quad \frac{\square AC}{\square A'C'}=\frac{AB}{DE}\times\frac{EF}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{BC}{B'C'}$$

**系一。** 三角形(又ハ平行四邊形)ノ比ハ,其高サノ比ト底ノ比トノ複比ニ等シ。

**系二。** 二ツノ正方形ノ比ハ,邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

問 1. 三線分 A, B, C ガ比例ヲナストキハ,

$A:C=A^2:B^2$ ナリ。 [東工]

*問 2. 四線分 A, B, C, D ガ比例ヲナストキハ,

$A^2:B^2=C^2:D^2$ ナリ。

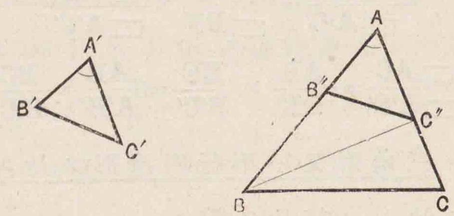
逆モ亦眞ナリ。

問 3. 同ジ圓ニ内接セル正六角形ト,正三角形トノ邊上ニ作レル正方形ノ比ヲ求メヨ。

**194.** **定理** 一角ヲ等シクスル兩三角形ノ比ハ,其等角ヲ夾メル二邊ノ矩形ノ比ニ等シ。

**證明** 三角形 A'B'C'.ABC ニ於テ $\angle A=A'$ トス。

三角形 A'B'C' ヲ ABC ノ上ニ其等角ヲ重ネ,其位置ヲ AB''C'' トセバ,




兩三角形 AB″C″, ABC″ ハ同高ナリト考フルヲ得。

故ニ $$\frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC''}=\frac{AB''}{AB}$$ (185節系二)

同様ニ $$\frac{\triangle ABC''}{\triangle ABC}=\frac{AC''}{AC}$$

然ルニ $$\frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC}=\frac{AB''C''}{ABC''}\times\frac{ABC''}{ABC}$$ (192節)

$$\therefore \frac{\triangle AB''C''}{\triangle ABC}=\frac{AB''}{AB}\times\frac{AC''}{AC}=\frac{AB''.AC''}{AB.AC}$$ (193節)

$$\therefore \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$$

系 等積ナル兩三角形ノ一角ガ相等シキトキハ,其角ノ邊ハ比例ヲナス。

例ヘバ上ノ兩三角形ガ等積ナラバ,

$A'B':AB=AC:A'C'$ ナリ。

問 1. ∠A ト A′ ガ互ニ補角ナル場合モ本定理ハ眞ナリ。

又平行四邊形ニ就キテモ本定理ハ眞ナリ。



問 2. △ABC ノ二邊 BC, CA 上ニ夫々二點 D, E ヲ取リ, BD:DC=2:3, CE:EA=7:5 ナラシムレバ,兩三角形 ABC, CDE ノ比如何。

問 3. △ABC ノ二邊 AB,AC 上ニ夫々 D,E ヲ取リ △ADE ヲ △ABC ノ三分ノ一ナラシメントス。今 D ヲ AB ノ中點トシテ E ノ位置ヲ定メヨ。

問 4. △ABC ノ三邊 BC, CA, AB 上ニ夫々 D, E, F ヲ取リ BD:DC=CE:EA=AF:FB=2:1 ナラシムレバ △DEF ト △ABC トノ比如何。

**195. 定理** 兩相似三角形ノ比ハ,其相似比ノ二乘比ニ等シ。

**證明** 兩三角形 ABC, A′B′C′ ガ相似ニシテ, ∠A=A′ ナリトセバ,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'}$$ (194節)

然ルニ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$ (191節)

系一。兩相似多角形ノ比ハ,相似比ノ二乘比ニ

等シ。從テ對應邊ノ平方ノ比ニ等シ。

系二。同邊數ノ兩正多角形ノ比ハ,其外接圓或ハ內接圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シ。

問 1. △ABC ノ二ツノ中線 AD, BE ノ交點ヲ G トセバ,兩三角形 AGB, DGE ノ比如何,

問 2. 四ツノ線分 A, B, C, D ガ比例ヲナストキハ,A ト B ノ上ニ之ヲ對應邊トスル樣ニ二ツノ相似形ヲ作リ,C ト D ノ上ニモ同樣ニ相似形ヲ作ルトキハ,此等ノ四ツノ多角形ハ比例ヲナス。

*問 3. 兩相似三角形ノ比ハ其對應邊ヘ引ケル兩形ノ高サノ平方ノ比ニ等シ。 [商船]

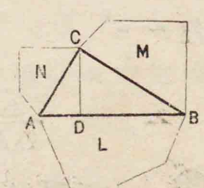
又兩形ノ外接圓ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シ [東蠶]

問 4. 周ノ長サ相等シキ正三角形ト,正六角形トノ面積ノ比ヲ求メヨ。 [陸士]

問 5. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊ヘ垂線 AD ヲ下ストキハ,

$$\overline{BC}^2:\overline{CA}^2:\overline{AB}^2=BC:CD:BD$$ ナリ。

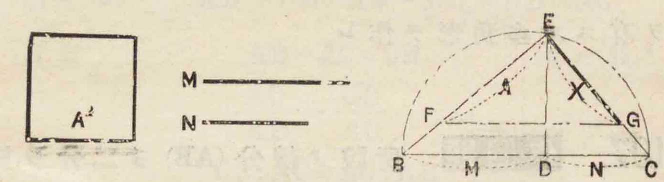
*問 6. 直角三角形ノ三邊上ニ,夫々相似形ヲ其三邊ヲ對應邊トスル樣ニ畫クトキハ,斜邊上ノ形ハ,他ノ二ツノ形ノ和ニ等シ。






**注意** 此定理ハ Pythagoras ノ定理ト稱スルモノニシテ,各邊上ノ形ハ單ニ直線形ニ限ラズ如何ナル相似形ニテモ可ナリ。105 節ノ定理ハ此定理ノ特別ノ場合ナリ。

**196. 作圖題** **所設ノ正方形($A^2$)トノ比ガ,所設ノ比(M:N)ニ等シキ正方形ヲ作レ。**




**作圖** 一直線上ニ BD=M, DC=N ヲ取リ,其和 BC ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, D ヨリ BC ニ垂線 DE ヲ引キ,圓周トノ交點ヲ E トシ, EB(或ハ延長)上ニ一點 F ヲ取リ, EF=A ナラシム。

F ヨリ BC ニ平行ニ FG ヲ引キ EC ト G ニ於テ交ハラシムレバ EG ハ所要ノ正方形ノ一邊ナリ。

**證明** EG ヲ X ニテ表ハサバ FG ∥ BC ナル故.

$$\frac{A}{X}=\frac{EB}{EC}$$

ニ然ルニ　$\triangle EBD \infty CED$　ナル故

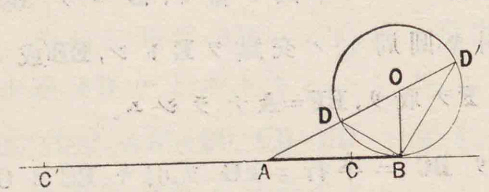
$$\frac{EB^2}{CE^2}=\frac{\triangle EBD}{\triangle ECD}=\frac{M}{N}\qquad\text{(195節及ビ185節系二)}$$

$$\therefore\quad \frac{A^2}{X^2}=\frac{M}{N}$$

問 1.　所設ノ三角形ニ相似ニシテ,且コレト所設ノ比ヲ有スル三角形ヲ作レ。　〔東 師〕

問 2.　所設ノ多角形ト相似ニシテ,且所設ノ面積ヲ有スル多角形ヲ作レ。

**197.**　**作圖題**　**所設ノ線分(AB)ヲ二分シ,其一部分(AC)ヲ他ノ部分(CB)ト全線分トノ比例中項ナラシメヨ。**




**作圖**　B ヨリ AB ニ垂線 BO ヲ引キ,之ヲ AB ノ半ニ等シクシ,O ヲ中心トシ OB ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,A ヨリ中心線 ADD′ ヲ引キ,



$$AC=AD,\qquad AC'=AD'$$

ナル樣ニ夫々 AB 上及ビ BA ノ延長上ニ C 及ビ C′ ヲ取ラバ,コレ所要ノ分點ナリ。

**證明**　$$\triangle ABD' \infty ADB$$

$$\therefore\quad \frac{AD'}{AB}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{AC}$$

$$\therefore\quad \frac{AD'-AB}{AB}=\frac{AB-AC}{AC}$$

然ルニ　$AD'-AB=AD'-DD'=AD=AC$

及ビ　$AB-AC=CB$　ナル故,

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}$$

$$\therefore\quad CB:AC=AC:AB$$

同樣ニ　$CB:AC'=AC':AB$

**注意**　上ノ分割法ヲ外中比ニ分ツトモ云ヒ,古昔ハ之ヲ**黃金分割**ト稱セリ。

又此分割法ハ次ノ如ク述ブルヲ得。

所設ノ線分ヲ二分シ,全線ト其一部トノ矩形ヲ他ノ部分上ノ正方形ニ等シクスルコト。

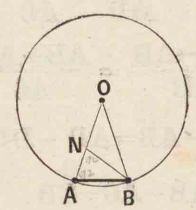
*問.　上ノ分割法ニ於テハ

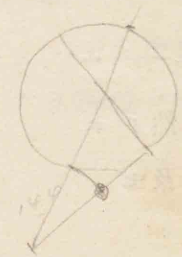
$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,\qquad AC'=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AB\quad ナリ。$$

(先ヅ AO ヲ求メヨ,又二次方程式ヲ解キテモヨシ。)

**198.** **作圖題** **正十角形及ビ正五角形ヲ作レ。**

**解析** 正十角形ガ圓Oニ内接セラレタリトシ,BAヲ其一邊トスレバ,



$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$$

故ニ $\angle OAB=OBA=72^\circ$

依テ $\angle OBA$ノ二等分線BNヲ引カバ,

$$\angle ABN=36^\circ$$

$\therefore$ $\triangle BAN \backsim OAB$

$\therefore$ $AN:NB=AB:AO$

然ルニ ONB, ABN ハ共ニ等脚三角形ナル故

$$ON=NB=AB$$

$\therefore$ $AN:NO=NO:AO$

故ニNハ半徑AOヲ外中比ニ分ツ。

**作圖** 任意ノ半徑OAヲ引キ,之ヲNニ於テ外



中比ニ分タバ,其大ナル部分ONハ此圓ニ内接スル正十角形ノ一邊ナリ。

**證明** 學生之ヲナスベシ。

*問 1. 圓ノ半徑ヲRトセバ,其内接正十邊形ノ一邊ハ$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R$ナリ。 3命1.45

問 2. 半徑2寸ノ圓ニ内接スベキ正十角形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。

*問 3. 所設ノ圓ニ内接スル正五角形ヲ作レ。

*問 4. 所設ノ圓ニ内接スル正十五角形作レ。

$\left(\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{10}\right.$ ニ注意セヨ。$\left.\right)$

**注意** 正七角形,正九角形,正十一角形等ノ如キ正多角形ハ多クハ之ヲ作圖スルヲ得ズ,諸子ガ既ニ作圖シ得ル正多角形ノ邊數ヲ擧ゲヨ

## 問 題 18.

1. PハABCノ邊AB上ノ一點ニシテ$AP:PB$ハ$5:2$ニ等シ,然ルトキハPヲ過ギ此三角形ノ面積ヲ二等分スル直線ハ,邊ACヲ$7:3$ニ内分ス。

[海軍]

2. 三角形ノ三中線ヲ三邊トスル三角形ノ面積ハ,原三角形ノ面積ノ四分ノ三ニ等シ。 [名工]

3. 所設ノ線分ヲ所設ノ兩正方形ノ比ニ分テ。 [熊工]

4. 所設ノ三角形ヲ其一邊ニ平行ナル直線ニテ二等分セヨ。 [廣工,盛農]

5. 所設ノ三角形ト等積ニシテ,其三角形ノ一角ヲ頂角トスル二等邊三角形ヲ作レ。 [陸主,名工,米工]

6. 圓ニ內接スル正五角形ノ相交ハル對角線ハ互ニ他ヲ外中比ニ內分ス。 [山商]

7. 頂角ガ直角ノ五分ノ二ナル二等邊三角形ヲ作レ。 [陸士]

8. 一邊ノ長サヲ定メテ正八角形,正十角形ヲ作レ。

## 第四章

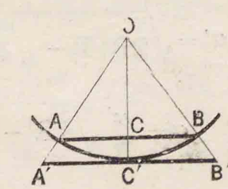
# 圓ノ周及ビ面積

**199.** **定理** 半徑 R ナル圓ニ內接及ビ外接スル同邊數ノ正多角形ノ一邊ヲ $a$ 及ビ $a'$ トセバ,

$$a' = \frac{aR}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}} \quad \text{及ビ} \quad a = \frac{a'R}{\sqrt{R^2 + \frac{a'^2}{4}}} \quad \text{ナリ。}$$

高サ比から　　OA'ニテ求から

**證明** AB ヲ圓ニ內接スル正多角形ノ一邊トシ,之ニ垂直ナル半徑 OCC′ ヲ引キ,C′ ニ於ケル切線ト OA, OB ノ延長ト夫々 A′, B′ ニ於テ交ハラシムレバ,A′B′ ハ同邊數ノ外接正多角形ノ一邊ナリ。




依テ　$OA = R$, $AB = a$, $A'B' = a'$ ニシテ,

$\triangle A'OB' \sim AOB$　ヨリ

$$\frac{a'}{a} = \frac{R}{OC}$$

而シテ $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$

$$\therefore \quad a'=\frac{aR}{\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}}$$

同様ニ $\frac{a}{a'}=\frac{OA}{OA'}$ ヨリ

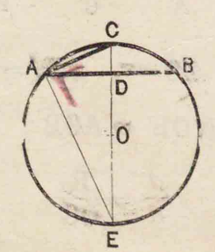
$$a=\frac{a'R}{\sqrt{R^2+\frac{a'^2}{4}}}$$

問. 半徑Rナル圓ノ外接正六邊形ノ一邊如何。

**200.** **定理** 半徑Rナル圓ニ内接スル正多角形ノ一邊ヲ$a$トシ,二倍ノ邊數ノ正多角形ノ一邊ヲ$a'$トセバ,

$$a'=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right)}$$

及ビ $a=\frac{a'}{R}\sqrt{4R^2-a'^2}$ ナリ






**證明** ABヲ一ツノ内接正多角形ノ一邊トシ,之ニ垂直ナル直徑CDOEヲ引クトキハ,弦ACハ二倍ノ邊數ノ内接正多角形ノ一邊ナリ。而シテ

弧 $BC=AC$ ナル故

$$\angle CAD=E$$

故ニ圓ADEハACニ切ス,

依テ $AC^2=CE.CD$

而シテ $CE=2R,\quad CD=R-OD,$

及ビ $OD=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$ ナル故,

$$a'=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right)}$$

又 $2\triangle ACE=AD.CE=AC.AE$ ヨリ

$$\frac{1}{2}a.2R=a'\sqrt{4R^2-a'^2}$$

$$\therefore \quad a=\frac{a'}{R}\sqrt{4R^2-a'^2}$$

問 1. 圓ニ内接スル正六邊形ノ一邊ヨリ内接正三角形ノ一邊ヲ算出セヨ。(150節問1參照)

問 2. 本定理及ビ151節問1ニヨリテ内接正八角形ノ一邊ハ$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ナルコトヲ證明シ,且直徑ヲ1トシテ此値並ニ内接正八角形ノ周ヲ計

算セヨ。

**201.** 上ノ二ツノ定理ニヨリテ直徑1ナル圓ニ内接スル $n$ 邊ノ正多角形ノ一邊ノ長サヲ知ルトキハ,之ニ内接及ビ外接スル $2n, 4n, 8n, \ldots$ 邊ノ正多角形ノ周ヲ計算スルコトヲ得ベシ。何トナレバ $\mathbf{R}=\dfrac{1}{2}$ トシテ 199 節ヨリ $a'=\dfrac{a}{\sqrt{1-a'}}$, 200 節ヨリ $a'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$ ヲ得テ,順次ニ二倍邊數ノ正多角形ノ一邊ノ長サヲ知ルヲ得,從テ其周ヲ計算スルコトヲ得ベケレバナリ。今内接正方形外接正方形ノ周ヨリ起算スレバ次表ヲ得。

| 邊　數 | 内接形ノ周 | 外接形ノ周 |
|---|---|---|
| 4 | 2.8284271 | 4.0000000 |
| 8 | 3.0614675 | 3.3137085 |
| 16 | 3.1214452 | 3.1825979 |
| 32 | 3.1365485 | 3.1517249 |
| 64 | 3.1403312 | 3.1441184 |
| 128 | 3.1412773 | 3.1422236 |
| 256 | 3.1415138 | 3.1417504 |
| 512 | 3.1415729 | 3.1416321 |
| 1024 | 3.1415877 | 3.1416025 |
| 2048 | 3.1415914 | 3.1415951 |



**202.** **定理七。** 圓周ハ外接多角形ノ周ヨリ小ナリ,

而シテ圓周ノ長サハ,此圓ニ内接スル正多角形ノ周ト外接スル正多角形ノ周トノ間ニアリ,而シテ其邊數ヲ限リナク増ストキハ,其周ハ何レモ其圓周ニ限リナク近迫ス,

**203.** **定理** 二圓周ノ比ハ其半徑ノ比ニ等シ。

**證明** 所設ノ二ツノ圓周ノ長サヲ夫々 $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ トシ,半徑ヲ夫々 $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$ トシ,此等ノ二ツノ圓ニ内接スル $n$ 邊ノ正多角形ヲ畫キ,其周ヲ夫々 $p, p'$ トセバ, $n$ ノ値ニ係ラズ $p:p'=\mathbf{R}:\mathbf{R}'$ 　(176節系二)

$n$ ヲ限リナク増ストキハ, $p$ 及ビ $p'$ ハ夫々 $\mathbf{P}$ 及ビ $\mathbf{P}'$ ニ限リナク近迫スルヲ以テ

$$\mathbf{P}:\mathbf{P}'=\mathbf{R}:\mathbf{R}'^{*}$$

**系一。** 圓周ガ其直徑ニ對スル比ハ一定ナリ。

コレ $\dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{P}'}=\dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}'}$ ナル故 $\dfrac{\mathbf{P}}{2\mathbf{R}}=\dfrac{\mathbf{P}'}{2\mathbf{R}'}$ ナレバナリ。

* 此事實ノ詳細ナル證明ハココニハ之ヲ省ク。

此比ハ不盡數[1]ナリ。之ヲ圓周率ト云ヒ,之ヲ表ハスニ通常$\pi$[2]ナル文字ヲ以テス。

系二。半徑Rナル圓ノ周ハ$2\pi R$ニ等シ。

問. 半徑3寸ナル圓ノ周ヨリ,半徑2寸ノ圓ノ周ニ等シキ弧ヲ截リ取レ。

## 204. 圓周率ノ近似値。

直徑1ナル圓ノ周ヲPトセバ,$P=\pi$ナリ。

依テ第201節ニ得タル表ヨリ

$$3.1415914<\pi<3.1415951$$ ヲ得。

故ニ小數第五位迄ノ正シキ$\pi$ノ近似値ハ

$$3.14159$$ ナリ。

**注意** $\pi$ノ近似値トシテハ通例3.1416又ハ $\frac{22}{7}$ 或ハ $\frac{355}{113}$ ヲ用フ。

又 $\frac{1}{\pi}$ ノ近似値ハ 0.3183 ナリ。

問1. 半徑3.256尺ナル圓ノ周如何。

問2. $\pi$ノ値ヲ3.14159トスルト $\frac{22}{7}$ トスルト

(1)此事實ノ證明ハココニハ之ヲナスヲ得ズ。
(2)希臘文字ノ一ツニシテぱい(Pi)ト訓ム。



ハ,半徑120米ノ圓ノ周ニ於ケル差幾米カ。

問3. 圓周22糎ナル圓ニ内接スル正方形ノ面積ヲ求ム。

## 205. 公理八。圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ガ無限ニ增ストキ,其面積ハ其圓ノ面積ニ限リナク近迫ス。

## 206. 定理 圓ノ面積ハ圓周ト半徑トノ乘積ノ半ニ等シ。

**證明** 圓ノ面積,圓周及ビ半徑ヲ夫々S,P及ビRニテ表ハシ,之ニ内接スル正多角形ノ面積,周及ビ此正多角形ニ内接スル圓ノ半徑ヲ夫々$s$,$p$及ビ$r$ニテ表ハストキハ,此多角形ノ邊數ヲ限リナク增ストキハ,$s,p,r$夫ハ々S,P,Rニ限リナク近迫ス。

然ルニ $$s=\frac{pr}{2}$$ (150節系二)

故ニ $$S=\frac{PR}{2}$$

**系一。** 半徑 R ナル圓ノ面積ハ $\pi R^2$ ニ等シ。

**系二。** 圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ比例ス。

**系三。** 扇形ノ面積ハ半徑ト弧トノ乘積ノ半ニ等シ。

問 1. 直徑10米ノ圓ノ面積幾何。

問 2. 面積 2 町 2 段 3 畝17歩アル圓形ノ土地アリ,其直徑ヲ求ム。但シ圓周率ヲ $\frac{22}{7}$ トセヨ。

## 問　題　19.

1. 所設ノ二圓,又ハ若干箇ノ圓ノ周ノ和ニ等シキ圓周ヲ作レ。又二圓ノ和又ハ差ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

2. 周ガ10米ナル圓ノ面積ヲ求メヨ。

3. 30°ノ中心角ニ對スル弧ノ長サガ一米ナルトキハ,半徑ノ長サ如何。

4. 半徑 9 糎ナル圓アリ,其面積ヲ二等分スル同心圓ノ半徑ト,三等分スル二ツノ同心圓ノ半徑トヲ計算セヨ

5. 半徑ガ R ナル扇形ノ角ヲ $d^\circ$ トセバ,其面積



ハ $\frac{d}{360}\pi R^2$ ナリ。

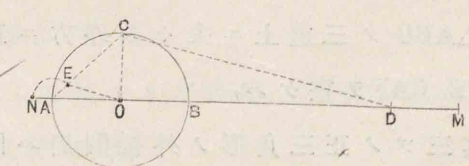
6. 半徑 $r$ ナル圓ヲ內接正三角形ノ一邊ニヨリテ二分スルトキハ,各部分ノ面積各如何。［海軍］

7. 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下ス垂線ニテ分タレタル兩三角形ノ內接圓ノ面積ノ比ハ,斜邊ノ二ツノ部分ノ比ニ等シ。［專檢］

8. 半徑25糎ナル二ツノ等圓ガ相交ハリ,其各ハ他ノ圓ノ中心ヲ過グ,此二圓ニ共通ナル部分ノ面積ヲ平方粍ノ十分ノ一マデ求メヨ。

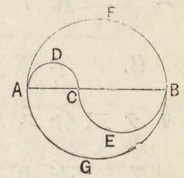
9. 圓周ノ長サニ近似的ニ等シキ線分ヲ作圖スル方法ハ種々アリ,次ニ其一ツヲ示サン。

圓 O ノ直徑 AB ヲ引キ,之ヲ M マデ延長シ AM=6AO ナラシメ, AD=5AO トシ, AB ニ垂直ナル半徑 OC ヲ引キ, O ヨリ CD ニ平行ニ OE ヲ引キ, A ヲ中心トシ AE ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, OA ノ延長ト N ニ於テ交ハラシムレバ, MN ハ殆ンド圓 O ノ周ニ等シ。之ヲ證明セヨ。




10. 圓ノ直徑 AB 上ニ任意ノ一點 C ヲ取リ, AC, BC ヲ直徑トスル半圓ヲ圖ノ如ク AB ノ互ニ反對ノ側ニ書

クトキハ,曲線形




ADCEBF ト AGBECD トノ比ハ BC : AC ニ等シ。

カクシテ圓ヲ任意ニ等分スル方法ヲ發見セヨ。

## 雜　題　3.

1.　一直線外ノ一點 P ヨリ其直線ヘ垂線 PA, 斜線 PB, PC, PD, ヲ引キ, $\angle APB = BPC = CPD$ ナラシムレバ $AB < BC < CD$ ナリ。

2.　△ABC ノ二邊 AB 及ビ AC 上ニ外側ニ夫夫正方形 ABFG, ACHK ヲ作ルトキハ,此兩正方形ノ中心(對角線ノ交點)ト BC 及ビ GK ノ中點ハ一ツノ正方形ノ頂點トナル。　[名工]

3.　△ABC ノ三邊上ニ夫々其外方ニ正三角形 ABD, BCE, CAF ヲ畫ケバ,

[1]　其三ツノ正三角形ノ外接圓周ハ同一點ヲ通過ス。

[2]　其三ツノ外接圓ノ中心ハ一ツノ正三角形



ノ頂點トナル。　[神商]

[3]　AE, BF, CD ハ相等シク,且一點ニ會ス。

4.　△ABC ハ圓ニ內接シ, D 及ビ D′ ハ夫々弧 BC 及ビ BAC ノ中點トシ, DE 及ビ D′E′ ハ夫々 D 及ビ D′ ヨリ邊 AB ヘ引ケル垂線ナリトセバ,

[1]　$AE = \frac{1}{2}(AB + AC) = BE'$

[2]　$BE = \frac{1}{2}(AB \sim AC) = AE'$

[3]　$\angle ADD' = \frac{1}{2}(ABC \sim ACB)$

5.　前問ヲ應用シテ次ノモノガ與ヘラレタルトキ三角形ヲ作レ。

[1]　底邊,頂角,他ノ二邊ノ和又ハ差。

[2]　底邊,頂角及ビ兩底角ノ差。

6.　長サ一定ナル直線 AP ガ他ノ定直線ニ平行シ,且其一端 A ガ一定圓周上ヲ滑ルトキハ,他ノ端ノ軌跡如何。

7.　二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ定量ナル點 P ノ軌跡如何。

8.　四邊形ノ各頂點ヨリ其頂點ヲ過ギザル對角線ヘ垂線ヲ作ルトキハ,其足ヲ順次ニ結ビテ成

ル四邊形ハ原四邊形ニ相似ナリ。　〔神商船〕

2　**9.**　四邊形ノ一雙ノ對角ノ二等分線ガ對角線ノ一ツノ上ニテ交ハルトキハ,他ノ一雙ノ對角ノ二等分線モ亦他ノ對角線ノ上ニテ交ハル。　〔海機〕

4　**10.**　一線分ABヲ$m:n$ノ比ニ内分スル點ヲPトシ,A,P,Bヲ過ギ互ニ平行ナル三直線ガ他ノ任意ノ直線ヲ夫々A′,P′,B′ニテ截ルトキハ,

$$PP'=\frac{nAA'+mBB'}{m+n}$$ ナリ。

**11.**　ABハ所設ノ圓ノ所設ノ弦ナリ,今此圓周上ニ一點Pヲ求メ,比AP : BPヲ所設ノ比ニ等シカラシメヨ。　〔大工〕

6　**12.**　相交ハル二圓周ノ交點ノ一ツヲ通過スル割線ヲ引キ,

〔1〕　兩圓周ニ夾マルル部分ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。

〔2〕　其線分ヲ最大ナラシメヨ。　〔米工〕

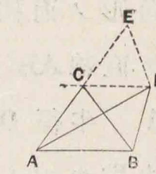
〔3〕　一圓ノ弦ヲ他ノ圓ノ弦ノ二倍ナラシメヨ。一般ニ兩弦ノ比ヲ所設ノ比ニ等シカラシメヨ。　〔東大農實〕

278 — (5)



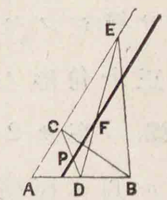
**13.**　一定直線上ニ一點ヲ求メ,所設ノ二點ヨリ其點マデノ距離ノ上ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

**14.**　同底等積ノ三角形ノ周ハ二等邊ナルモノガ最小ナリ。　〔陸士,東商〕




**15.**　同底等周ノ三角形中ニ於テ二等邊ナルモノ最大ナリ。〔農實,海機〕

**16.**　同底上ニ立チ一底角ノ定マレル三角形ノ重心ノ軌跡ヲ求メヨ。　〔東工〕




7　**17.**　相交ハラザル二定圓ノ一ツト内切シ,他ト外切スル圓ヲ畫クバ,其切點ヲ結ブ直線ハ常ニ一定點ヲ過グ。　〔高〕

8　**18.**　高サノ知レザル塔アリ,今塔ノ底Aト同ジ水平面上ニテAヨリ6間距リタル點Mヨリ塔頂Bノ仰角AMB及ビAヨリ2間ノ高サニ在ル點Cノ仰角AMCヲ觀測シタルニ,前者ハ後者ノ二倍ニ等シト云フ,塔ノ高サヲ求ム。　〔陸士〕

**19.**　底邊$a$米,高サ$h$米ナル三角形ニ於テ,底邊

ニ平行ナル一直線ヲ作リ,此三角形ヲ二等分スルトキハ,此直線ノ長サハ幾何ナルカ。〔陸士〕

**20**　Cヲ直角ノ頂點トスル直角三角形ABCノ角Aノ二等分線ト對邊BCトノ交點ヲDトス,此三角形ノ面積6平方寸,邊ACノ長サ4寸トヲ知リテ,直線AB及ビADノ長サヲ求メヨ。〔海兵〕

**21**　半徑OCガ直徑ABニ垂直ニシテMガOBノ中點ナルトキ,AB上ニD點ヲ取リMDトMCトヲ等シクセバ,CDハ正五角形ノ一邊ニシテ,ODハ正十角形ノ一邊ナリ。

**22.**　高サ2尺,底邊1尺ノ二等邊三角形ニ内接スル圓ノ面積ハ幾平方寸ナルカ。

但シ平方寸未滿ヲ四捨五入セヨ。〔上蠶〕

**23.**　半徑2尺ノ三圓相切ス,其間ニアル三邊形(三邊ハ各圓ノ弧)ノ面積ヲ計算セヨ。〔東工〕

# 附録

## 復習補習

## 雜題

### I (第一篇,第二篇ノ分)

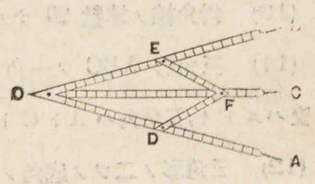
(1) A, B, C ヲ順次ニ一直線上ニ並列スル三點トシ BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 L, M, N トセバ,

$$MN=\frac{1}{2}BC,\quad NL=\frac{1}{2}CA,\quad LM=\frac{1}{2}AB$$ ナリ。

(2) 角 AOB ノ二等分線ヲ OM トシ, ON ヲ角外ノ任意ノ一直線トスレバ, 角 MON ハ二角 AON, BON ノ和ノ半ニ等シ。

(3) 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線上ノ各點ハ夫々其底ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ 【海兵】

(4) ココニ示スモノハ角ノ二等分器ナリ。三ツノ竿ガ O 及ビ F ニ於テ固定サレ,(但シ隨意ニ閉開スルコトヲ得)



OD=OE, FD=FE ナリトス。 然ルトキハ OD 及ビ OE ヲ夫々或角ノ二邊上ニ置クトキハ OF ハ其二等分線トナル。 其理ヲ說明セヨ。

(5) △ABC ノ邊 BC. CA. AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トシ E, F ヨリ形外ニ夫々 AC, AB ニ垂線 LG, FH ヲ引キ, 之ヲ夫々 AC, AB ノ半分ニ等シカラシムルトキハ △DEG, DFH ハ合同ナリ, 而シテ ∠GDH ハ直角ナリ。

(6) 二邊及ビ一中線ヲ等シクスル兩三角形ハ合同ナリ。(二ツノ場合アリ。)

(7) 三角形ノ三ツノ高サノ和ハ其三角形ノ周ヨリ小ナリ。

(8) 正三角形ノ兩底角ノ二等分線ノ交點ヲ過ギ,二邊ニ平行ナル二直線ハ底ヲ三等分ス。

(9) ABC ハ C ヲ直角トスル直角三角形ナリ。 今A ヨリ AD ヲ引キ BC ヲ E ニ於テ, B ヨリ AC ニ平行ニ引ケル直線ヲ D ニ於テ截ラシメ,且 DE=2AB ナラシムレバ, ∠DAC ハ ∠BAC ノ三分ノ一ニ等シ。

(10) 對角線ノ總數 20 ナル多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

(11) 三角形 ABC ノ一角 B ノ外角ノ二等分線ト邊 AC トガ相交ハルトキ,其交角ハ A ト C トノ差ノ半ニ等シ。

(12) 三角形ノ二ツノ底角ノ外角ノ二等分線ハ必ズ相交ハリ,其交角ハ頂角ノ半分ノ餘角ニ等シ。



(13) △ABC ノ B 及ビ C ニ於ケル外角ノ二等分線ノ交點ヲ D トセバ, ∠BDC ハ ∠B 及ビ ∠C ノ和ノ半ニ等シ。

(14) A,B ヲ一直線上ノ二點, C, D ヲ他ノ一直線上ノ二點トセバ, ∠ADC, CBA ヲ二等分スル直線ノナス角 BOD ハ DAB ト BCD トノ和ノ半ニ等シ. [陸經]

(15) 凸四角形ニ於テ

[1] 二隣角ノ二等分線ノ交角ハ他ノ二角ノ和ノ半ニ等シク,

[2] 二對角ノ二等分線ノ交角ハ他ノ二角ノ差ノ半ニ等シ。[東師]

(16) 三角形 BAC ニ於テ BE, CD ヲ二中線トシ, BE ニ平行ナル DF ト AB ニ平行ナル EF ヲ引キ F ニ於テ會セシメ, CF ヲ引クトキハ, △CDF ノ三邊ハ夫々 △ABC ノ三中線ニ等シ。 [東師]

**注意** 此定理ニヨリ三中線ヲ知リテ三角形ヲ畫クコトヲ得。

(17) △ABC ノ邊 AB ノ中點ヲ D トス,邊 AC 上ニ AE ヲ AC ノ三分ノ二ニ等シク取リ CD, BE ノ交點ヲ O トセバ, OE ハ BE ノ四分ノ一ナリ。 [海兵]

(18) 等脚梯形ノ對角線ハ相等シ。 逆ニ對角線ガ相等シキ梯形ハ等脚ナリ。

(19) 四邊形 ABCD ニ於テ AB=CD, 及ビ ∠ABC=BCD ナルトキハ,此四邊形ハ梯形ナリ。

(20) 矩形又ハ等脚梯形ノ四邊ノ中點ヲ順次ニ連ネテ生ズル四邊形ハ菱形ナリ。

(21) A ヲ直角トセル三角形 ABC ノ B 角ノ二等分線ト邊 AC トノ交點ヲ D トシ,又 A ヨリ斜邊 BC へ引キタル垂線ト BD トノ交點ヲ E トセバ　AD=AE　ナリ。〔商船〕

(22) 矩形ノ二邊ノ間ニ夾マレタル線分ハ對角線ヨリ小ナリ。

(23) △ABC ノ C ニ於ケル外角ノ二等分線上ノ一點 D ヲ A 及ビ B ニ結ビ付クレバ△ABD ノ周ハ △ABC ノ周ヨリ大ナリ。〔陸士〕

(24) 平行ニシテ等長ナル二線分ハ同一直線上ニ等長ナル射影ヲ投ズ。逆ハ如何。

(25) 一點ヨリ一直線へ引ケル相等シキ二ツノ斜線ハ,其點ヨリノ垂線ニ關シテ對稱ナリ。

(26) 平行線ノ共通垂線ハ其對稱ノ軸ナリ。

等脚梯形ハ一ツノ對稱ノ軸ヲ有ス。

矩形ハ二ツノ對稱ノ軸ヲ有ス。

(27) 四邊形ノ對角線ノ一ツガ他ノ垂直二等分線ナルトキハ,其四邊形ハ其對角線ニ關シテ對稱ナリ。

カクノ如キ四邊形ヲ紙鳶形ト云フ。

(28) 一定點ヲ通過スル總テノ直線ニ關シテ對稱ナル平面形ハ圓ナリ。

---

(29) AB 上ニ立ツ兩三角形 ABC, ABD ノ頂點 C, D ヲ結ブ線分ノ中點ヲ E トセバ,△ABE ハ前ノ兩三角形ノ和若シクハ差ノ半分ニ等シ。〔商船〕



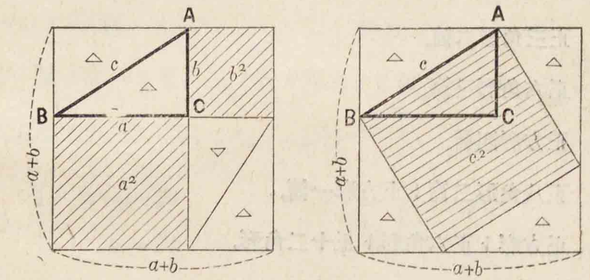
(30) 同底ヲ有シ,其同側ニ立テル兩三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブトキハ平行四邊形ヲ得テ,其面積ハ初メノ兩三角形ノ差ノ半ニ等シ。

(31) 梯形ノ面積ハ底ニアラザル一邊ト之ニ其對邊ノ中點ヨリ引キタル垂線トノ矩形ニ等シ。〔商船〕

(32) A, B, C, D ヲ同一ノ直線上ニ在ル四點トスレバ,

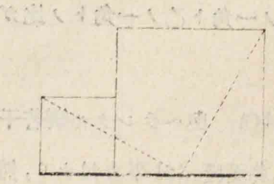
AB.CD+BC.AD=AC.BD ナリ (*Euler* ノ定理)。

(33) 次ノ圖ニヨリテぴたごらす定理ノ別證明法ヲ得ヨ。




(34) 接續セル二線分ノ上ニ各正方形ヲ畫キ,生ズル所ノ六邊形ヲ三部ニ分チ,之ヲ接合シテ正方形ヲ作レ。

而シテ *Pythagoras* 定理ノ別證ヲ得ヨ。



(35) △ABC ニ於テ ∠B ガ直角ノ半分ナルトキ,邊 AB ノ中點

ヲDトシ頂點CヨリABニ下シタル垂線ノ足ヲEトセバ,

$\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2)$　ナリ。　[東師]

(36)　所設ノ線分ヲ二部ニ分チ,其平方ノ和ヲ所設ノ平方ニ等シカラシメヨ。　[海機]

(37)　△ABCノ中線ヲ AD, BE, CF トセバ,

$4\overline{AD}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$

及ビ　$3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)$　[商船,海機]

(38)　次ノ正多角形ヲ以テ周角(一點ノ周リ)ヲ充塞シ得ルコトヲ證明セヨ。

[1]　正三角形六箇。

[2]　正六角形三箇。

[3]　正方形四箇。

[4]　正八角形二箇ト正方形一箇。

[5]　正方形ト正六角形ト正十二角形。

[6]　正五角形二箇ト正十角形。

(39)　甲乙二箇ノ正多角形アリ,甲ノ邊數ハ乙ノ邊數ノ二倍ニシテ甲ノ一角ト乙ノ一角トノ比ガ 9:8 ニ等シト云フ,甲乙ノ邊數各如何　[海兵]

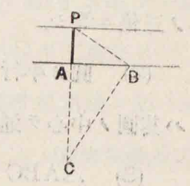
(40)　與ヘラレタル綱若干尺アリ,之ヲ周トスル正方形ヲ作ルトキハ,其面積 324 平方尺ナリ,然ラバ之ヲ周トスル正六角形ヲ作ラバ其面積幾何ナルカ。　[海兵]



(41)　矩形ノ面積ハ其二隣邊上ノ正方形ニ於ケル兩對角線ノ夾ム矩形ノ半ニ等シ。

(42)　△ABCニ於テ AB=10糎, AC=8糎ニシテ,AヨリBCヘ下セル垂線ガ 7.5糎ナルトキハ,BCノ長サ如何。又本題ニハ二通リノ答アルカ。

(43)　河岸ノ一點Pニ一樹アリ,正對岸Aニ立チ,ソレヨリ岸ニ沿ヒテ 40 歩ヲ歩ミテB點ニ到リ,更ニ PB ニ直角ニ 50 歩ダケ歩マバ,PA 線ノ延長上ニ到ルト云フ,河幅ヲ求メヨ。但シ一歩ヲ 75 糎トス。　[海兵]



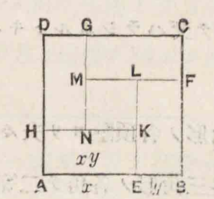

(44)　次ノ圖ニヨリテ,次ノ各方程式ノ正根ヲ求メヨ。而シテ其解法ヲ代數學的方法ト比較セヨ。

[1] $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=24 \end{cases}$　[2] $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=40 \end{cases}$

[3] $\begin{cases} xy=48 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$

[4] $\begin{cases} x+y=14 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$

[5] $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$




([3] 以下ヲ解クニハ對角線 EH, EF 等ヲ引クベシ。)

## II (第三篇ノ分)

(1) 圓Oノ任意ノ直徑ヲ AB トシ,半徑AOノ中點ト A トノ間ニ一點Cヲ設ケ,Cヲ中心トシ CO ヲ半徑トスル圓ト圓 O トノ交點ヲDトシ, DC ノ延長ト圓 O トノ交點ヲ E トセバ,弧 BE ハ弧ADノ三倍ニ等シ。 〔商船〕

(2) 圓ノ平行ナル二弦ノ端ヲ結ブ直線ノ夾角ヲ二等分スル直線ハ其圓ノ中心ヲ通過ス。

(3) △ABC ノ外心ヲ頂點Aニ結ブ直線ト,AヨリBCヘ下セル垂線トハ, ∠A ノ二等分線ニ關シテ對稱ナリ。 〔東師〕

(4) AB ヲ弦トスル弓形ノ弧ノ中點ヲ P トシ,其弧上ノ任意ノ一點ヲ C トスレバ,PC ハ∠ACB ノ外角ヲ二等分ス。

(5) △ABC ノ外心ヲOトシ,弧 BC ノ中點ヲ M トスレバ,
$\angle AMO$ ハ $\frac{1}{2}(B\sim C)$ ニ等シ。

(6) 圓ノ弧 BC ノ中點MヨリニMA, MDヲ引キ弦 BC ト夫夫 E,F ニ於テ交ハラシムルトキハ,四點 A, D, F, E ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

(7) 三角形ノ各頂點ヨリ夫々對邊ヘ引ケル三ツノ垂線ハ夫々其三角形ノ垂足三角形ノ各角ヲ二等分ス。 〔盛農〕

(8) 弓形 ABD ノ弧上ニ兩端ヲ有スル定長ノ動弦 BC アリ,弓形ノ兩端 A, D ヲ夫々 B, C ニ結ブトキハ,其兩直線ノ夾角ハ BC ノ



位置ニ關ラズ一定不易ナリ。

(9) A, B, C ヲ圓周上ノ三點トシ,弧 AB, AC ノ中點ヲ D, E トシ,直線 DE ト弦 AB, AC トノ交點ヲF, G トセバAF=AGナリ。

(10) △ABC ノ邊BA ヲ延長シ AC ニ等シク AD ヲ截ルトキ,∠BAC ヲ二等分スル直線ハ三點 C, A, D ヲ過ル圓ニ切ス。 〔東工〕

(11) 圓周上ノ一點 C ニ於テ切線ヲ引キ,任意ノ直徑 AB ノ一端ヨリ此切線ヘ垂線 AD ヲ下ストキハ, AC ハ∠BAD ヲ二等分ス。

(12) 直角三角形ノ直角ノ一邊ヲ直徑トスル圓周ガ斜邊ニ交ハル點ニ於ケル切線ハ他ノ邊ヲ二等分ス。 〔東師,秋鑛,京工〕

(13) 第191頁ノ圖ニ於テ次ノ各ヲ證明セヨ。

$DF=HE=b,\quad DH=EF=c,\quad HF=b+c,\quad DE=b\sim c$

(14) 兩圓相切スルトキハ,其切點ヲ通過スル二ツノ割線ノ間ニ夾マルル兩圓ノ弧ノ弦ハ平行ナリ。 〔鹿農〕

(15) 正多角形ハ邊數ト同數ノ對稱ノ軸ヲ有ス。

(16) 邊數ガ偶數ナル正多角形ハ對稱ノ中心ヲ有ス。

(17) 圓ノ直交スル兩弦ノ平方ノ和ハ,半徑ノ平方ノ八倍ヨリ中心ト其兩弦ノ交點トヲ結ブ直線ノ平方ノ四倍ヲ減ジタルモノニ等シ。

---

(18) 平行線ニ至ル距離ノ和又ハ差ガ所設ノ線分ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(19) 次ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナルコトヲ知リテ其圓周ヲ決定セヨ。

A 點ニ於テ相交ハル二直線 AB, AC アリ,一定ノ線分 PQ ガ P ハ AB ノ上ニ,Q ハ AC ノ上ニアリテ移動ス,今 P ヨリ AB ニ, Q ヨリ AC ニ垂線ヲ引クトキ其交點 R ノ軌跡。 〔陸士〕

(20) 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ニ, F ニ於テ垂直ナル直線ト邊 BC, CA 若シクハ其延長トノ交點ヲ夫々 D, E トシ AD, BE ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。 〔商船〕

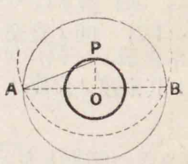
(21) 圓外ノ一點 P ヨリ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ A 及ビ B トシ, A ヲ過ル任意ノ弦 AQ ニ平行ナル直線 PR ト直線 QB トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。 〔仙工〕

(22) AB ハ定圓ノ定弦, AC ハ A ヨリ引ケル任意ノ弦ナルトキ, AB, AC ヲ二隣邊トスル平行四邊形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(23) 三角形ノ底ガ一定シ,且底ノ一端ヨリ出ヅル中線ノ長サガ一定ナルトキ,其三角形ノ頂點ノ軌跡如何。

(24) 所設ノ圓ノ任意ノ切線上ニ其切點 A ヨリ所設ノ長サ AB ヲ取ルトキ, B 點ノ軌跡如何。

(25) 定半徑ヲ有シ,且所設ノ圓周ヲ二等分スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。 〔高〕




(26) 一直線上ニ一點 A ト其線外ニ一點 P アリ, 今此直線上ニ一點 X ヲ取リ $AX+XP$ ヲ所設ノ線分ニ等シクセヨ。 〔海機〕



(27) 一定點ヲ通過シ,他ノ二定點ヨリ等距離ニ在ルベキ直線ヲ引ケ。

(28) 定角 BAC ノ一邊 AB 上ノ定點 P ヨリ AC ヘ直線 PQ ヲ引キ, $\angle APQ$ ヲ $\angle AQP$ ノ三倍ナラシメヨ。 〔東工〕

(29) 所設ノ圓内ノ所設ノ點 O ヲ通過スル弦 AOB ヲ引キ AO, BO ノ差ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。 〔水產〕

(30) 中心ヲ用ヒズシテ圓周上ノ所設ノ點ニ於テ,其圓ニ切スル切線ヲ引ケ。

(31) 定直線上ニ一點ヲ求メ,之ヨリ所設ノ圓周ニ至ル切線ノ長サヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。

(32) 所設ノ點ヲ過ギ所設ノ平行線ヲ截ル直線ヲ引キ,其平行線間ニ在ル部分ガ他ノ所設ノ直線ニテ二等分セラルル樣ニセヨ。

(33) 所設ノ平行線ノ間ニ夾マルル部分ガ所設ノ線分ニ等シク,且此部分ガ所設ノ直線ニヨリテ二等分セラルル直線ヲ引ケ。

(34) 次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

[1] 一邊ト他ノ二邊ヘノ中線。 〔陸士,長商〕

[2] 二邊ト第三邊ヘノ中線。 〔商船,鹿農〕

[3] 一邊ト二中線。(總テノ場合ヲ擧ゲヨ) 〔新醫,長商〕

[4] 頂角及ビ其二邊ヘノ中線。 〔大工〕

[5] 底邊,頂角及ビ頂角ノ二等分線ガ底ト交ハル點。 〔東師〕

[6] 二邊ト其二邊ニ對スル角ノ差。 〔專檢〕

[7] 一邊ト其對角及ビ他ノ二邊ノ差。 [高,陸士,東商]

[8] 二邊ノ差,其對角ノ差及ビ他ノ一邊。 [商船]

[9] 頂角ト其二等分線ト高サ。

[10] 垂足三角形ノ三頂點。 [廣師,熊工]

(35) 等速度ヲ以テ一直線ニ航行スル汽船アリ,或人一定地點ヨリ其距離ヲ觀測セシニ,最初ハ $d_1$ 浬ナリシガ 30 分ヲ經テ $d_2$ 浬トナリ,更ニ 30 分ヲ經タルニ $d_3$ 浬トナレリ,同船ガ一時間ニ進メル距離ヲ求ムベキ作圖法ヲ問フ. [海軍]

(36) 所設ノ弓形ノ弧上ニ一點ヲ求メ,之ヨリ弦ノ兩端ニ至ル距離ノ和又ハ差ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。

(37) 次ノモノヲ知リテ二等邊三角形ヲ作レ。

[1] 底邊ト其一端ヨリ出ヅル中線。 [高]

[2] 周及ビ高サ。

(38) 高サヲ與ヘテ正三角形ヲ作レ。

(39) 次ノモノヲ與ヘテ直角三角形ヲ作レ。

[1] 直角ノ一邊ト斜邊ヘ引ケル高サ。

[2] 斜邊ト其兩端ノ角ノ差。

(40) 所設ノ圓ノ所設ノ弦ノ延長上ニ一點ヲ求メ,之ヨリ引ケル切線ヲ所設ノ線分ニ等シクスルコト。

(41) 定直線又ハ定圓周ニ切シ,他ノ定直線上ニ中心ヲ置クベキ既知半徑ノ圓ヲ畫ケ。



(42) 半徑 2 糎ナル圓ヲ半徑 5 糎ナル半圓ノ周及ビ直徑ニ切セシムルコト。 [海兵]

(43) 三角形又ハ矩形ニ於テ底邊(又ハ高サ)ガ定マレルトキ,其面積ト高サ(又ハ底)トノ關係ヲ表ハス方程式ヲ作リ,ぐらふヲ畫キテ其變化ノ狀況ヲ示セ。

又面積定マレルトキ底ト高サトノ變化ヲ圖示セヨ。

(44) 半徑 $r$ ナル四分圓ニ內接スル圓ノ半徑ヲ表ハス公式ヲ作レ。 [商船]

(45) 一邊一尺ノ正方形ニ外接スル圓ト,一邊一尺四寸ノ正三角形外ニ接スル圓トハ何レガ大ナルカ。 [商船]

## III (第四篇ノ分)

(1) 比例 $a:b=c:d$ ニ於テ $a$ ガ最大ナラバ $a+d>b+c$ ナリ。

(2) 圓周上ニ弧 AB, BC, CD, DA ヲ次第ニ小サク取ルトキハ, 弦 BD ガ弦 AC ヨリ小ナリ。(比例ヲ用ヒテ解ケ) [海機]

(3) 三角形 ABC ノ邊 BC ヲ延長シテ BC ニ等シク CD ヲ取リ,點 D ヲ AC ノ中點 E ニ結ビ DE ヲ延長シテ AB ト F ニ會セシメ, FE ト ED トノ比ヲ求メヨ。 [東工]

(4) 圓 ADBC ニ於テ AB, CD ヲ互ニ垂直ナル二ツノ直徑トス,今任意ノ弦 EF ヲ引キ,直線 CE 及ビ CF ガ AB ト交ハル點ヲ夫々 G, H トセバ, △CGH ト CFE ハ相似ナリ。 [海軍]

(5) AO, OB ハ中心 O ナル一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル半徑, DE ハ任意ノ弦ナリ. BD, BE ガ AO ト夫々 F 及ビ G ニ於テ交ハレバ三角形 BFG, BDE ハ相似ナルコトヲ證セヨ。

(6) 一角ヲ等シクシ,且他ノ一角ノ二邊ガ等角ノ對邊ガ相對應スル樣ニ比例ヲナス兩三角形ニ於テハ,第三ノ角ハ相等シキカ,又ハ互ニ補角ヲナス。 其相等シキ場合ニハ兩三角形ハ相似ナリ。

(7) 等角ニシテ二組ノ相隣レル對應邊ガ比例ヲナス四邊形ハ相似ナリ。

(8) 平行四邊形 ABCD ノ頂點 A,B,C,D ヨリ對角線ヘ下セル垂線ノ足ヲ夫々 E, F, G, H トセバ四邊形 EFGH ト ABCD トハ相



似ナリ。 [東師]

(9) 正五角形ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トセバ BC ハ AC, CO ノ比例中項ナリ。 [海機]

(10) 一直線 DEF ガ △ABC ノ三邊 BC, CA, AB ト夫々 D, E, F ニ於テ交ハリ AB, AC ト等角ヲナストキハ,

BD:CD=BF:CE ナリ。 [海兵]

(11) △ABC ノ A ヨリ BC ヘ下セル垂線 AD ガ形内ニアリテ BD, DC ノ比例中項ナルトキハ, ∠BAC ハ直角ナリ。 [高]

(12) 同底又ハ同一直線上ノ等底上ニ其同側ニ立ツ等積ノ三角形ノ二邊又ハ其延長ガ底ニ平行ナル直線ヨリ截リ取ル部分ハ相等シ。

(13) △ABC ノ底 BC 上ノ任意ノ一點 O ヨリ AC, AB ニ平行線ヲ引キ,ソレト AB, AC トノ交點ヲ夫々 X, Y トスレバ, △AXY ハ △BOX, △COY ノ比例中項ナリ。 [神商船]

(14) 圓周上ノ一點ヨリ其圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル邊ヘ下セル垂線ノ包ム矩形ハ相等シ。

(15) 圓外ノ一點ヨリ其圓ニ二ツノ切線ト一ツノ割線トヲ引クトキ,二ツノ切點ヲ割線ノ二交點ニ結ビ付ケテ成ル四邊形ニ於テハ兩對邊ノ包ム矩形ハ相等シキコトヲ證明セヨ。 [山高]

(16) A ニ於テ内切スル兩圓アリ,今小圓周上ノ一點 D ニ於テ之ニ切スベキ大圓ノ弦 BC ヲ引キ, AB, AC ヲ結ビ AB, AC ガ小圓周ニ交ハル點ヲ P, Q トスレバ DC.AP=DB.AQ ナリ。

(17) 相交ハル二圓ノ共通弦上ノ一點 C ヲ過ギテ直線 ABCDE ヲ引キ,一ツノ圓トノ交ハリヲ A, D 他ノ圓トノ交ハリヲ B, E トスルトキハ AB : BC = ED : DC ナリ。〔陸士〕

(18) 圓周上ノ一點 P ヨリ弦 PA, PB, PC ヲ出シ P 點ニ於ケル切線ニ平行ナル直線ト H, K, L ニ交ハラシムルトキハ,

PA.PH = PB.PK = PC.PL ナリ。〔陸士〕

(19) △ABC ニ於テ AC>BC トシ對邊ヘ垂線 AD, BE ヲ下ストキハ, AC+AE>BC+AD ナルコトヲ證セヨ。〔商船〕

(20) 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ノ中點 D ヨリ BC ニ垂線 DEF ヲ立テテ二邊 AB, AC ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシメ,又 AD ヲ引クトキハ $\overline{AD}^2$ = DE.DF ナリ。〔東師〕

(21) 圓ノ弦 BC ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ヲ A トシ,圓周上ノ任意ノ點 P ヨリ BC, CA, AB ヘ下ス垂線ヲ夫々 PD, PE, PF トスレバ, $PD^2$ = PE.PF ナリ。〔商大豫〕

(22) 所設ノ半圓ノ直徑 BC ニ垂線 DG ヲ立テ,弧上ニ任意ノ點 A ヲ設ケテ AB, AC ガ DG ニ交ハル點ヲ E, F トスレバ,

$\overline{DG}^2$ = PE.DF ナリ。〔東師〕

(23) 平行四邊形 ABCD ノ一邊 BC ヲ適宜ニ Q マデ延長シ,直線AQ ガ對角線 BD ト E ニ交ハリ, CD ト P ニ交ハルトキハ

$\overline{AE}^2$ = PE.EQ ナリ。〔商船〕

(24) 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ニ在ル任意ノ一點 P



ト頂點 A トヲ結ブ直線ガ邊 BC ト E ニ於テ交ハルトセバ,

(a) △ABP, PEC ハ相似ナルコトヲ證シ,ヨリテ以テ

(b) $\overline{PA}^2 = \overline{AC}^2$ + PB.PC ナルコトヲ證セヨ。〔高〕

(25) 等積ナル直角二等邊三角形ト等邊三角形トノ底ノ比如何。〔海機〕

(26) C ヲ直角トセル三角形 ABC ノ A角ノ二等分線ト對邊BC トノ交點ヲ D トス,此三角形ノ面積 6 平方寸,邊 AC ノ長サ 4 寸ヲ知リ直線 AB 及ビ AD ノ長サヲ求メヨ。〔海兵〕

(27) △ABC ニ於テ BC =15, CA=12, AB=18 ナルトキ ∠A ノ二等分線ノ長サヲ求メヨ。〔明專〕

(28) 海面上 16間ノ高サニ光源ヲ有スル燈臺アリ。

[1] 幾里ノ距離マデ海面ヲ照スベキカ。

[2] 海面上 4 間ノ高サヲ有スル船上ヨリ之ヲ望ムトキ,燈光ヲ認メ得ベキ最大距離幾里ナルカ。但シ地球ヲ半徑 1635 里ノ球トシ,小數一位未滿ヲ四捨五入セヨ。〔神商〕

(29) 定點 A ト定直線 XY 上ノ任意ノ點 B トヲ結ビ付ケ,其線分上ニ一點 P ヲ取リ AP, AB ノ包ム矩形ノ面積ヲ所設ノ面積ニ等シカラメシントス, P 點ノ軌跡ヲ求メヨ。〔高〕

(30) 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスレバ,矩形 AB.AD ト矩形 BC.CD トノ比ハ OA : OC ニ等シ。〔京城商〕

(31) 二等邊三角形 ABC ニ於テ底 BC 上ノ任意ノ點 D ヨリ底ト等角ヲナス二直線 DE 及ビ DF ヲ引クトキ,此等ノ直線ト AB, AC トノ交點ヲ夫々 E, F トセバ, $\triangle BDF=CDE$ ナリ。 〔神商〕

(32) $\triangle ABC$ ノ三邊 AB, BC, CA, 上ニ夫々三點 $A'$, $B'$, $C'$ ヲ取リ, $AA'$, $BB'$, $CC'$ ヲ夫々其邊ノ三分ノ一ニ等シク取ルトキハ, $\triangle A'B'C'$ ハ $\triangle ABC$ ノ三分ノ一ナリ。 〔上置〕

(33) $\triangle ABC$ ノ邊 AB 上ニ $\frac{1}{3}AB$ ニ等シク $AA'$ ヲ取リ,邊 BC 上ニ $\frac{1}{4}BC$ ニ等シク $BB'$ ヲ取リ,邊 CA 上ニ $\frac{1}{5}CA$ ニ等シク $CC'$ ヲトリテ三角形 $A'B'C'$ ヲ作ル, 三角形 $A'B'C'$ ト三角形 ABC トノ面積ノ比ヲ求ム。 〔東工〕

(34) $\triangle ABC$ ノ邊 AB 上ニ一點 D アリテ $AD:DB$ ガ $2:1$ ニ等シトス。今 D ヲ過ル一直線ヲ引キ AC ト E ニ於テ交ハラシメ,四邊形 DECB ト $\triangle ADE$ トノ比ヲ $3:4$ ニ等シカラシメントス,比 $AE:EC$ ヲ求ム。 〔海機〕

(35) 半徑 R ナル圓ニ内接スル正五角形ノ一邊ハ

$$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}R$$ ナルコトヲ證明セヨ。

(36) 所設ノ線分ヲ三部ニ分チ,第一ト第二トノ比及ビ第二ト第三トノ比ヲ夫々所設ノ比ニ等シクセヨ。

(37) 所設ノ圓弧 AB 上ニ一點 C ヲ取リ,弦 AC, BC ノ比ヲ所設ノ比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ。 〔高〕



(38) 所設ノ角 BAC 内ニ在ル所設ノ點 P ヲ過ギ此角ノ二邊トB,C ニ於テ交ハル直線ヲ引キ, $BP:PC$ ヲ所設ノ比ニ等シカラシメヨ。又 P ガ角外ニ在ラバ如何。

(39) 所設ノ底邊 BC ヲ有シ,所設ノ角 $\alpha$ ニ等シキ頂角ヲ有シ,且頂角ノ二等分線ガ BC 上ノ定點 D ヲ過ル樣ニ三角形ヲ作レ。

(40) 所設ノ三角形ニ所設ノ四邊形ニ相似ナル四邊形ヲ内接セシメヨ。

(41) 二邊ノ和ト二角トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

(42) 一角ノ二等分線ガ對邊ヲ分ツ二ツノ部分ト他ノ一角トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

(43) 直角ヲ五等分セヨ。

(44) 正五角形ノ外角ヲ三等分セヨ。

(45) 圓ニ内接又ハ外接スル等邊多角形ハ正角形ナルカ否カヲ研究セヨ。

(46) 圓ノ半徑ヲ以テ其内接正十二邊形ノ周及ビ面積ヲ表ハス公式ヲ作レ。 〔商船〕

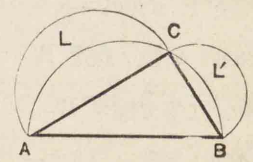
(47) 不等ナル兩圓ニ於テ等長ナル弧ニ對スル中心角ハ半徑ト比例ヲナス。

(48) 100坪ノ圓ノ直徑ヲ計算セヨ。

(49) 半徑ガ R, $R'$ ナル同心圓周ノ間ニ生ズル圓環ノ面積ハ小圓ニ切スル大圓ノ弦ヲ直徑トセル圓ノ面積ニ等シ。 〔商船〕

(50)　內外二重ノ柵ヲ有スル圓形ノ競馬場アリ,兩柵ノ間隔六間ニシテ其中央ニ於ケル周ハ一里ナリ,各柵ノ長サ如何。　〔海兵〕

(51)　直角三角形 ABC ノ三邊上ニ圖ノ如ク半圓ヲ畫クトキ,新月形 L,L′ ノ和ハ △ABC ニ等シ。




(*Hippocrates* ノ定理)　〔東工〕

(52)　一邊 $a$ ナル正方形內ニ互ニ外切スル四ツノ等圓ヲ內接セシムルトキ其圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

(53)　半徑 $r$ ナル圓ニ內切シ,且互ニ外切スル三ツノ等圓ヲ畫クトキハ其半徑如何。

(54)　半徑 R 寸ナル圓ニ正方形ヲ內接セシメ,次ニ此正方形ニ圓ヲ內接セシメ,次ニ此圓ニ正方形ヲ內接セシメ,以下カクノ如ク際限ナク同ジ作圖ヲナストキハ,此等ノ正方形ノ面積ノ和ノ極限ヲ求メヨ。

(55)　半徑ト等長ナル弧上ニ立ツ中心角ノ大サハ約 57° 17′ 45″ ナルコトヲ證明セヨ。

此中心角ハ理論數學ニ於テ測角ノ單位トシテ用ヒルモノニシテ,此單位ヲ **れーぢあん** ト云ヒ,此測角法ヲ **弧度法** ト云フ。

(56)　半徑5寸3分ナル圓ノ周,面積及ビ之ト等積ノ正方形ノ一邊ヲ求ム。

但シ $\pi=3.14$ トシテ有効數字三位ヲ要ス。

# 計算問題ノ答

問題 1.　**1.** 90°, 75°.　**2.** 111° 41′37″, 直角.

問題 4.　**1.** 90°, 60°, 30°.　**2.** 156°　**3.** $147°\ 16'\ 21''\frac{9}{11}$.

問題 6.　**10.** $1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

問題 8.　**3.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.　**4.** 正方形ノ方大, 2.1平方尺(約).

**5.** 86.6間(約).

雜題 1.　**1.** 60°.

問題 13.　**1.** 75°, 65°, 40°.　**13.** $5\sqrt{6}$尺.

**17.** $\frac{ab}{a+b}$.

雜題 2.　**6.** $\frac{\sqrt{a+b}(\sqrt{a+b}-1)}{2}$.　**7.** 6寸, 14.5寸弱.

**10.** $\frac{1}{2}(\sqrt{4r^2+2q^2}+\sqrt{4r^2-2q^2})$, $\frac{1}{2}(\sqrt{4r^2+2q^2}-\sqrt{4r^2-2q^2})$.

但シ $q \ngtr \sqrt{2}r$(內接正方形ノ一邊)ナラザレバ不可能ナリ。

問題 15.　**3.** 5:3.　**4.** 2.4糎.

問題 16.　**9.** $120\sqrt{3}$尺.　**10.** 1350尺.

**11.** $\frac{ah}{a-b}$.(但シ $a>b$ トス)。　**12.** 40.32平方寸.

問題 19.　**2.** $\frac{25}{\pi}$平方米.　**3.** $\frac{6}{\pi}$米.

**4.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$糎, $3\sqrt{3}$糎, $3\sqrt{6}$糎.

**6.** $\frac{r^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$, $\frac{r^2}{12}(8\pi+3\sqrt{3})$.

**8**. 767.7平方粍.

**雑題** 3.　**18**. 4間半.　**19**. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$米.　**20**. 5寸, $\frac{4\sqrt{10}}{3}$寸.

**22**. 48平方寸弱.

**附錄雑題**　**I**. (10). 8.　(39). 20, 10.

(40)　374.12 平方尺(約).

(42)　∠B,∠C ガ共ニ鋭角ナラバ, 9.3糎(約).

∠C ガ鈍角ナラバ, 3.7糎(約).

(43)　40米.

**II**. (44)　$(\sqrt{2}-1)r$.　(45)　後者ノ方大.

**III**. (3)　1:3.　(25)　$4\sqrt{3}:1$.　(26)　5寸, $\frac{4\sqrt{10}}{3}$寸.

(27)　$9\sqrt{2}$.　(27)　4.9里强, 4.3里强.

(33)　5:12.　(34)　6:1.

(46)　半徑ヲ $r$ セトバ, 周 ハ$6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)r$ニシテ面積ハ

$3r^2$ ナリ。

(48)　$\frac{20\sqrt{\pi}}{\pi}$間.　(50)　1里18間5尺, 35町41間1尺.

(52)　$\frac{a}{4}$ 或ハ $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a$.　(53)　$\sqrt{3}(2-\sqrt{3})r$.

(54)　$4R^2$.　(56)　3尺3寸3分弱, 88.2平方寸强, 9.39寸强.

大正二年十二月一日印刷　大正二年十二月四日發行
大正五年十二月廿五日訂正三版印刷　大正五年十二月廿八日訂正三版發行
大正十一年十二月廿日修正四版印刷　大正十一年十二月廿三日修正四版發行
大正十二年二月五日訂正五版印刷
大正十二年二月八日訂正五版發行

林氏

中等教育 幾何學教科書(平面)
定價 金七拾九錢

大正十二年度臨時
定價一圓三十四錢

編纂者　林鶴一

發行者兼印刷者　東京市小石川區小日向水道町八十四番地
株式會社 東京開成館
代表者 渡邊良助

發行所　東京市小石川區小日向水道町八十四番地
株式會社 東京開成館
(振替貯金口座)東京第五參貳貳番

西部販賣所　大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角
三木佐助

東部販賣所　東京市日本橋區數寄屋町九番地
林平次郎