ELEMENTARY COURSE OF TRIGONOMETRY

T. HAYASHI

訂正版

文部省檢定濟
大正十三年二月七日　中學校數學科用

中等教育

平面三角法教科書

東北帝國大學教授
理學博士
林　鶴　一
編

東京開成館藏版

改纂ノ序

著者ガ嚮ニ中等教育三角法ヲ公刊セシ以來既ニ五星霜ヲ過グ。其間幸ニ極メテ多數ノ中等學校ノ教科書ニ採用セラレタルハ著者ノ大ニ光榮トスル所ナリ。

今又教師諸君ノ實地使用ノ結果ニヨル精細ナル忠言ト世界戰亂後我國ハ勿論歐米先進國最近ノ趨勢トニ鑑ミテ更ニ改訂ヲ施シタル本書ヲ提供スルヲ得ルハ著者ノ大ニ欣幸トスル所ナリ。

次ニ改纂ノ要項ヲ摘擧スベシ

一. 教材ヲ一層精選シ其說述ヲ簡明ナラシメ,出來得ル限リ其量ヲ輕減シタルコト。

二. 教材ノ排列ヲ改良シ其間ノ連絡ヲ圓滑ナラシメ,又問題ニ就キテハ其若干ニ解法ノ指針又ハ之ヲ暗示スル圖ヲ適當ナル程度ニ於

テ添附シ,生徒自身ガ其解法ヲ工夫發見スルノ能力ヲ極メテ敎育的ニ援助セシメタルコト。

三. 數學四分科ヲ通ジテ一層相互ノ連絡提携ヲ計リタルコト。

四. 三角函數ノ定義ニ次ギテ直ニ其應用ニ關スル實用的ノ例ヲ示シ,之ヲ學ブ便益ヲ知ラシメ,以テ本敎科ニ對スル好學心ヲ喚起シ,尙實用上ノ應用問題ヲ加ヘ,尙三角函數ノ値ノ變化ノぐらふヲ授ケテ,近時數學敎授上最モ重要視セラルヽ函數思想ノ養成ニ資シタルコト。

五. 多數ノ問題ヲ練習及ビ應用ニ於テ一層適切ナルモノニ變更シ,且其配置ニ深甚ノ注意ヲ拂ヒ,又各節間ニハ多數ノ簡易ニシテ適當ナル問題ヲ插入シ,以テ各事項ノ敎授ヲ徹底セシメ,知識收得ノ確實ト應用力ノ養成ニ適應セシメタルコト。

六. 卷末ニ附錄トシテ雜題ヲ附シ,既修事項ノ囘顧復習ト生徒各自ノ研究トニ遺憾ナカラ

シメタルコト。

七. 弧度法,反三角函數,三角方程式モ附錄中ニ加ヘタルコト。

八. 數ノ對數表ト三角函數ノ眞數表及ビ其對數表トヲ一纏メトシテ別附冊トシ以テ使用ニ便ナラシメタルコト。

要スルニ著者ハ本書ニヨリテ中等學校ニ於ケル三角法ノ敎授ヲ圓滑ニ且愉快ニ進行セシメ有効ナル結果ヲ收メンコトヲ期スルト同時ニ又本書ヲ以テ中等學校現時ノ要求ニ最モ適應スルモノト信ズルモノナリ。

終リニ臨ミ著者ハ本書ニ就テモ亦從前ノ如ク敎師諸君ノ誠實ナル批評忠言ニ吝ナラザランコトヲ希望ス。

大正十二年十一月　　著者識

目　次

第一篇　鋭角ノ三角函數

第二篇　一般ノ角ノ三角函數

第三篇　斜角三角形

附 録

附 表

平面三角法

第一篇

銳角ノ三角函數

第一章

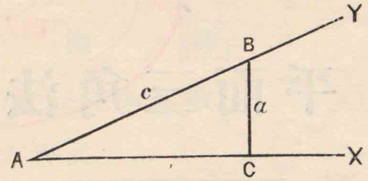
三角函數ノ定義

1. 正弦, 餘弦, 正切, 餘切.

定義 XAY ヲ一ツノ銳角トシ, 一邊 AY 上ノ任意ノ一點 B ヨリ他ノ邊 AX ヘ垂線 BC ヲ下ストキハ直角三角形 ABC ヲ生ズ。

今此三角形ノ角ノ大サヲ夫々其頂點ノ文字 A, B, C ニテ表ハシ, 其對邊ヲ夫々 a, b, c ニテ表ハス*トキハ, a, b, c ノ間ニ生ズル比ニ夫々次ノ如ク名稱ヲ附ス。

* 此記號ハ本書全部ニ通ジテ採用ス。



〔1〕　角 A ノ對邊 (a) ノ斜邊 (c) ニ對スル比ヲ此角ノ**正弦**ト云ヒ，之ヲ $\sin A$ ト記ス。

依テ　　$\sin A=\dfrac{a}{c}$ ………… (1)

〔2〕　角 A ノ隣邊 (b) ノ斜邊 (c) ニ對スル比ヲ此角ノ**餘弦**ト云ヒ，之ヲ $\cos A$ ト記ス。

依テ　　$\cos A=\dfrac{b}{c}$ ………… (2)

〔3〕　角 A ノ對邊 (a) ノ隣邊 (b) ニ對スル比ヲ此角ノ**正切**ト云ヒ，之ヲ $\tan A$ ト記ス。

依テ　　$\tan A=\dfrac{a}{b}$ ………… (3)

〔4〕　角 A ノ正切ノ逆數ヲ此角ノ**餘切**ト云ヒ，之ヲ $\cot A$ ト記ス。

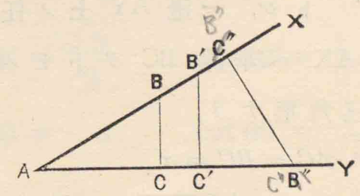
依テ　　$\cot A=\dfrac{b}{a}$ ………… (4)

問。　$a=3,\ b=4,\ c=5$ トシテ $\angle A$ ノ正弦,餘弦,

正切等ヲ求メヨ。

又 $a:b:c$ ガ $5:12:13$ ニ等シキトキハ如何。

2.　定理　同ジ角又ハ等シキ角ノ正弦,餘弦等ハ一定ナリ。



證明　或角 A ノ邊上ノ任意ノ諸點ヨリ他ノ邊ヘ垂線 BC, B′C′, B″C″ 等ヲ引クトキハ，$\dfrac{BC}{AB}$, $\dfrac{B'C'}{AB'}$, $\dfrac{B''C''}{AB''}$ 等ハ皆 $\angle A$ ノ正弦ナリ。然ルニ △ABC, AB′C′, AB″C″ 等ハ皆相似ナルヲ以テ，

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots$$

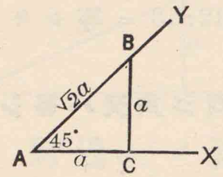
故ニ $\sin A$ ハ一定ナリ。

餘弦,正切等ニ就テモ同様ナリ。

又等シキ角ニ就テモ同様ナリ。

問。　$\sin A=\dfrac{2}{3}$ 及ビ $\tan A=\dfrac{5}{4}$ ナル如キ角 A ヲ作圖セヨ。

3. 45°ノ正弦,餘弦,正切,餘切。



$\angle XAY=45°$ トシ,一邊 AY 上ノ任意ノ一點 B ヨリ他ノ邊 AX ヘ垂線 BC ヲ下セバ,△ABC ハ直角二等邊三角形ナリ。

依テ $AC=BC=a$ トセバ,

$AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a$ ナリ,

故ニ $\sin 45°=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{\sqrt{2}\,a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

又 $\cos 45°=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{a}{\sqrt{2}\,a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

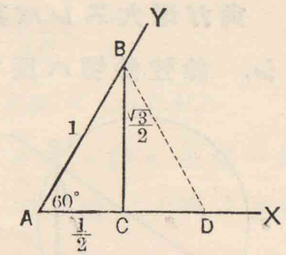
又 $\tan 45°=\dfrac{a}{a}=1.$

及ビ $\cot 45°=\dfrac{a}{a}=1.$

4. 60°ノ正弦,餘弦等。

$\angle XAY=60°$ トシ,正三角形 ABD ヲ作リ,BC ヲ其高サトシ,AB ヲ長サノ單位トセバ,

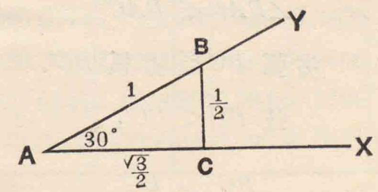
$BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad AC=\dfrac{1}{2}$ ナル故,



$\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos 60°=\dfrac{1}{2},$

$\tan 60°=\sqrt{3},\qquad \cot 60°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

5. 30°ノ正弦,餘弦等。



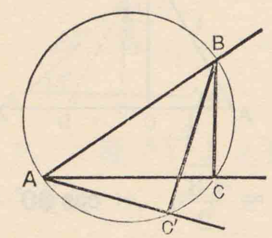
$\angle XAY=30°$ トシ, AY 上ニ AB＝1 ヲ取リ, B ヨリ AX ヘ垂線 BC ヲ下セバ,

$BC=\dfrac{1}{2},\quad AC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ナルヲ以テ,

$\sin 30°=\dfrac{1}{2},\qquad \cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\qquad \cot 30°=\sqrt{3}.$

6. **定理**　**角ガ増大スレバ其正弦,正切ハ之ニ伴ヒテ増大シ, 餘弦,餘切ハ反ツテ減少ス。**



證明　$\angle BAC < BAC'$　トシ, 共有邊 AB 上ニ中心ヲ置キ且共通ノ頂點 A ヲ過ギル任意ノ圓周ヲ畫キ,他ノ邊ト夫々 C 及ビ C′ ニ於テ交ハラシムレバ,　$\angle BAC < BAC'$　ナル故,

$$劣弧\ BC < 劣弧\ BC'.$$

從テ　$$弦\ BC < BC',$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB} < \frac{BC'}{AB}.$$

即チ　$$\sin BAC < \sin BAC'.$$

故ニ角ガ増大スルニ伴ヒテ其正弦ハ増大ス。

又明カニ　弦 $AC > AC'$　ナルヲ以テ,

$$\cos BAC > \cos BAC'.$$

故ニ角ガ増大スルニ伴ヒ餘弦ハ減少ス。

次ニ又　$\dfrac{BC}{AC} < \dfrac{BC'}{AC'}$　ナルヲ以テ,

$$\tan BAC < \tan BAC'.$$

故ニ角ガ増大スルニ伴ヒ正切ハ増大ス。

今 10° ヨリ 85° マデ 5° 飛ビノ角ノ正弦,餘弦,正切,餘切ノ値ヲ表示スレバ次ノ如シ。

角	正弦	餘弦	正切	餘切	角	正弦	餘弦	正切	餘切
10°	0.1737	0.9848	0.1763	5.6713	50°	0.7660	0.6428	1.1918	0.8391
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	55°	0.8192	0.5736	1.4281	0.7002
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	60°	0.8660	0.5000	1.7321	0.5774
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65°	0.9063	0.4226	2.1445	0.4663
30°	0.5000	0.8666	0.5774	1.7321	70°	0.9397	0.3420	2.7475	0.3640
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	75°	0.9659	0.2588	3.7321	0.2679
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	80°	0.9848	0.1736	5.6713	0.1763
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	85°	0.9962	0.0872	11.4301	0.0875

問。 正弦及ビ餘弦ノ値ハ常ニ 1 ヨリ小ニシテ, 正切及ビ餘切ノ値ハ如何ナル數トモナルコトヲ説明セヨ。

注意　或文字ヲ含ム式ノ値ガ其文字ノ値ノ變化ニ伴ヒテ變ズルトキハ其式ノ値ハ其文字ノ**函數**ナリト云フ。

例ヘバ圓ノ周及ビ面積ハ其半徑ノ函數ナリ。
又 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 等ハ A ノ函數ナリ。

7. 正割及ビ餘割。

定義 或角 A ノ餘弦ノ逆數ヲ A ノ**正割**ト云ヒ，正弦ノ逆數ヲ A ノ**餘割**ト云フ。

而シテ夫々之ヲ $\sec A$ 及ビ $\mathrm{cosec}\,A$ ト書ク。

故ニ $\sec A=\dfrac{1}{\cos A}$ 及ビ $\mathrm{cosec}\,A=\dfrac{1}{\sin A}$ ナリ。

$\sec A$ 及ビ $\mathrm{cosec} A$ ハ共ニ A ノ函數ナリ。

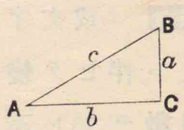
8. **定義** 或角ノ正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割ヲ總稱シテ其角ノ**三角函數**ト云フ。

注意 三角函數ハ又**圓函數**又ハ**三角比**トモ云フ。

三角函數ヲ利用スレバ,三角形ノ角ト邊トノ關係ヲ甚ダ都合ヨク結ビ付クルコトヲ得。

例一。直三角角形ノ邊ト角トノ關係。

直角三角形ヲ ABC トシ, AB ヲ其斜邊トシ, BC, CA, AB ヲ夫々 a, b, c ニテ表ハス



トキハ,

$\sin A=\dfrac{a}{c}$ ナル故　$a=c\sin A$,　$c=\dfrac{a}{\sin A}$

又 $\tan A=\dfrac{a}{b}$ ナル故　$a=b\tan A$.

同樣ニ　$b=c\cos A$,　$b=a\cot A$　ヲ得.

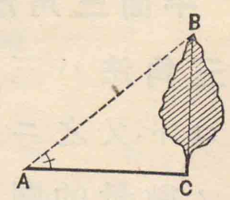
即チ

$$a=c\sin A=b\tan A,$$
$$b=c\cos A=a\cot A,$$
$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos A}.$$

問 1. $c=100$, $A=30°$ トシテ a 及ビ b ヲ求メヨ.
又 $b=100$ 米突, $A=65°$ ナラバ如何.

例二。木ノ高サノ測量.

BC ヲ測ラントスル木ノ高サトシ,A ヲ測點トス。A ヨリ樹頂 B ヲ望ム視線 AB ト水平線 AC トノナス角ヲ A トセバ,前例ノ公式ニヨリ



$BC=AC\tan A$　ナリ。

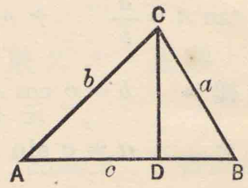
問 2. $AC=20$ 米突, $A=60°$ ナラバ木ノ高サハ何程ナリヤ。

例三。三角形ノ面積。

△ABC ノ一頂點 C ヨリ對邊 AB ヘ垂線 CD ヲ下ストキハ，直角三角形 ACD ヨリ $CD = b\sin A$ ヲ得ルヲ以テ之ヲ

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} CD \times AB$$

ニ代入スレバ



公式

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} bc\sin A$$ ヲ得。

問3. 上ノ公式ニヨリ,一角ヲ等シクスル兩三角形ノ面積ノ比ハ其夾邊ノ矩形ノ比ニ等シキコトヲ證明セヨ。

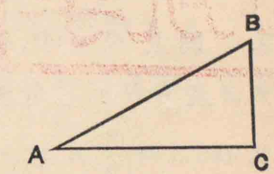
9. 平面三角法ノ目的。

平面三角法ハ三角函數ノ性質ヲ研究スルコト,又之ニヨリテ三角形ノ邊ト角トノ數量的關係ヲ求メ,其等ヲ算出スル方法ト,更ニ之ヲ高サ,距離等ノ測量ニ應用スル方法トヲ考究スルヲ以テ目的トス。

10. 餘角ノ三角函數。

定理　**或角ノ餘弦,餘切ハ夫々其餘角ノ正弦,正切ニ等シ。**

直角三角形 ABC ニ於テ, C ヲ直角トセバ A 及ビ B ハ互ニ餘角ナリ。此二角ノ三角函數ヲ比較對照セバ容易ニ本定理ヲ證明スルヲ得。



任意ノ一角ヲ α トセバ,其餘角ハ $90°-\alpha$ ナル故

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \sin(90°-\alpha) \\ \cot\alpha &= \tan(90°-\alpha) \\ \sin\alpha &= \cos(90°-\alpha) \\ \tan\alpha &= \cot(90°-\alpha) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(1)$$

例ヘバ　$\tan 30° = \cot 60°$

$\cos 35°20' = \sin 54°40'$　等。

問。 次ノ各式ニ適スル x ノ値ヲ求メヨ。

$\sin x = \cos 60°$,　　$\sin 45° = \cos x$,

$\tan x = \cot 30°$,　　$\tan 15° = \cot x$,

$\sin 5x = \cos 7x$,　　$\cot \frac{x}{2} = \tan 5x$.

問　題　1.

1. 直角三角形ABCニ於テ $C=90°, AC=3,$ $BC=4$ ナルトキハ, $\angle A$ ノ三角函數如何。〔商船〕

2. 同上 $C=90°, b=2mn, c=m^2+n^2$ ナルトキハ, 二角 A 及ビ B ノ三角函數如何。

又 $\tan A=\dfrac{3}{2}$ ニシテ $AC=\dfrac{5}{3}$ ナルトキハ BC ノ長サ如何。

3. 次ノ如キ角 A ヲ作圖セヨ。

$$\sin A=\frac{1}{2},\quad 7\cos A=5,\quad \tan A=\frac{3}{\sqrt{3}}.$$

4. 正方形ABCDノ一邊CDノ中點ヲEトセバ, $\angle EBC$ ノ正弦,餘弦及ビ正切各幾何。〔海機〕

5. $(1+\sin 45°+\sin 30°)(1-\cos 45°+\cos 60°)=\dfrac{7}{4}$ ヲ證明セヨ〔商船〕

6. 次式ノ値ヲ求メヨ。〔海機〕

$$\cos 60°-\tan 45°+\frac{3}{4}\tan^2 30°{}^{*}+\cos^2 30°-\sin 30°$$

7. 次ノ式ノ値ヲ小數第二位マデ計算セヨ。

$$\frac{\tan 60°-\tan 30°}{\sin 60°-\sin 45°}$$ 〔海機〕

8. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\ y=x\tan 30°$ ニ適スル x, y ノ値ヲ求メヨ。〔米工〕

9. 半徑 r ナル圓アリ,其中心角Aニ對スル弦ノ長サハ $2r\sin\dfrac{A}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

10. 底邊12糎,頂角60°ヲ有スル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

---

* $\tan^2 30°$, $\cos^2 30°$ ハ夫々 $(\tan 30°)^2$, $(\cos 30°)^2$ ノコトナリ,他モ之ニ準ズ。

第二章

三角函數ノ眞數表及ビ對數表

11. 三角函數ノ眞數表。

角ノ三角函數ノ略近値ヲ角ノ大サノ順ニ列記セル表ヲ**三角函數ノ眞數表**ト云フ。

本書ニ別冊トシテ附スルモノハ十分飛ビノ四桁ノ表ニシテ其用法次ノ如シ。

例一。 $\tan 34°50'$ ヲ求メヨ。

解 表ノ最上列ニ $\tan$ ト記セル行ノ數ノ中ニテ左端ノ行ノ $34°50'$ ト同列ニアル數 0.6959 ヲ取リテ所要ノ値トス。

即チ　$\tan 34°50' = 0.6959$

例二。 $\sin 46°20'$ ヲ求メヨ。

解 所題ノ角ガ $45°$ ヨリ大ナルトキハ,最下列ニ $\sin$ ト記セル行ノ中ニテ右端ノ行ノ $46°20'$ ト同列ニアル數 0.7234 ヲ取リテ所要ノ値トス。

即チ　$\sin 46°20' = 0.7234$

注意 此値ハ亦 $\cos 43°40'$ ノ値ナリ。

一般ニ　$\sin(45°+x) = \cos(45°-x)$　ナル故,表ニ於テハ $0°$ ヨリ $45°$ マデノ角ノ函數ヲ載セ,右端ノ行ニ $45°$ ヨリ大ナル角ヲ夫々是ト同列ノ左端ノ行ノ角ト餘角ヲナス如ク排列シテ表中ノ諸數ヲ $45°$ ヨリ大ナル角ノ函數トモ見ラルヽ如クス。

例三。 $\sin 18°12'$ ヲ求メヨ。

解 表ヨリ　$\sin 18°10' = 0.3118$

及ビ　$\sin 18°20' = 0.3145$

故ニ角ノ差 $10'$ ニ對スル正弦ノ差ハ 0.0027 ナリ。コノ 27 ヲ**表差**ト云フ。

然ルニ角ノ**微小ナル變化**ニ於ケル角ノ差ト之ニ對應スル三角函數ノ微小ナル差トハ正比例ヲナス(之ヲ**比例部分ノ法則**ト云フ)*トシテ差支ナキヲ以テ, $2'$ ニ對スル正弦ノ差 x ハ比例式

$$10' : 2' = 0.0027 : x$$

ヨリ

$$x = 0.0027 \times \frac{2}{10} = 0.0005$$

$$\therefore \quad \sin 18°12' = 0.3118 + 0.0005 = 0.3123$$

以上ノ計算ヲ次ノ如ク記ス。

* 此事實ノ證明及ビ研究ハ高等數學ニ屬ス。

$\sin 18°12'$

$\quad 18°10'$ ‥ニ對シテ‥ 0.3118 　　表差 $= 27$

$\quad 2' \cdots\cdots\cdots \overset{*}{5}$ 　　$27 \times 0.2 = \overset{*}{5}.4$

$\sin 18°12' \quad = \underline{\underline{0.3123}}$

例四。 $\cos 67°23'$ ヲ求メヨ。

解 $\cos 67°23'$

$\quad 67°20' \cdots\cdots\cdots 0.3854$ 　　表差 $= 27$

$\quad 3' \cdots\cdots\cdots -\overset{*}{8}$ 　　$27 \times 0.3 = \overset{*}{8}.1$

$\cos 67°23' \quad = \underline{\underline{0.3846}}$

或ハ $\cos 67°23'$

$\quad 30' \cdots\cdots\cdots 0.3827$ 　　表差 $= 27$

$\quad -7' \cdots\cdots\cdots +19$ 　　$27 \times 0.7 = 18.9$

$\cos 67°23' \quad = \underline{\underline{0.3846}}$

問。 $\tan 43°5'$ 及ビ $\cos 37°33'$ ヲ求メヨ。

例五。 $\sin A = 0.4572$ ヨリ A ヲ求メヨ。

解 表ヨリ $\sin 27°10' = 0.4566$

及ビ $\sin 27°20' = 0.4592$

依テ $10'$ニ對スル差 $= 0.0026$

而シテ $\sin A - \sin 27°20' = 0.0006$

故ニ $0.0026 : 0.0006 = 10' : d'$

ヨリ $d' = 2'.3$

之ヲ$27°10'$ニ加ヘテ $A = \underline{\underline{27°12'.3}}$ ヲ得

此計算ヲ次ノ如ク記ス。

$\sin A = 0.4572$

$\quad 0.4566 \cdots\cdots 27°10'$ 　　表差 $= 26$

$\quad 6 \cdots\cdots\cdots \overset{*}{2}'.3$ 　　$\frac{6}{2.6} = 2'.\overset{*}{3}$

$A = \underline{\underline{27°12'.3}}$

例六。 $\cot A = 0.5455$ ヨリ A ヲ求メヨ。

解 $\cot A = 0.5455$

$\quad 0.5467 \cdots\cdots 61°20'$ 　　表差 $= 37$

$\quad -12 \cdots\cdots\cdots +\overset{*}{3}'.2$ 　　$\frac{12}{3.7} = \overset{*}{3}.2$

$A = \underline{\underline{61°23'.2}}$

問。 次ノ各式ヨリ x ヲ求メヨ。

(1) $\sin x = 0.4912$ 　　(2) $\tan x = 1.3363$

(3) $\cos x = 0.3540$ 　　(4) $3 \cot x = 2$

12. 三角函數ノ對數表。 此表ハ三角函數ノ眞數ノ對數ヲ排列セルモノニシテ其組織ハ大略眞數表ノ組織ニ同ジ。但シ三角函數ノ値ハ1ヨリ小ナルモノ多キヲ以テ其對數ノ指標ハ負數多シ,依テ表中ニ負ノ指標ヲ記入スルコトヲ避ケ,總テノ指標ニ10ヲ加フ,之ヲ**表對數**ト云ヒ,之ヲ表ハスニ Lsin, Lcos 等ヲ以テス。

從テ　$\log \sin A = \mathrm{L} \sin A - 10$　等ナリ。

別冊ニ載スルモノハ10′飛ビノ五桁ノ對數表ニシテ其用法次ノ如シ。

例一。 $\mathrm{L}\sin 28^\circ 47'$ ヲ求ム。

解　表ヨリ　$\mathrm{L}\sin 28^\circ 40' = 9.68098$

及ビ　$\mathrm{L}\sin 28^\circ 50' = 9.68328$

故ニ此處ニ於ケル角10′ノ增加ニ伴フ對數ノ增加ハ0.00230(コレ表中L sinノ行ノ右ニ記シアル表差ヨリ知ルヲ得)ナリ。依テ此處ノ7′ニ對スル增加ハ

$$10' : 7' = 0.00230 : x$$

ヨリ

$$x = 0.00161$$

依テ

$$\mathrm{L}\sin 28^\circ 47' = 9.68098 + 0.00161$$
$$= \underline{\underline{9.68259}}$$

此計算ヲ次ノ如ク記ス。

$$\begin{array}{lr}
\mathrm{L}\sin 28^\circ 47' & \\
\quad \underline{28^\circ 40'} \cdots\cdots 9.68098 & \text{表差} = 230 \\
\quad\quad 7' \cdots\cdots\cdots \overset{*}{161} & 230 \times .7 = \overset{*}{161} \\
\hline
\mathrm{L}\sin 28^\circ 47' \quad = \underline{\underline{9.68259}} &
\end{array}$$

問。 $\mathrm{L}\sin 63^\circ 23'$ 及ビ $\mathrm{L}\tan 43^\circ 32'$ ヲ求メヨ。

例二。 $\log\cos 17^\circ 31' 40''$ ヲ求ム。

解　$\log\cos 17^\circ 31' 40''$

$$\begin{array}{lr}
\quad \underline{17^\circ 40'} \cdots\cdots \bar{1}.97902 & \text{表差} = 40 \\
\quad (\text{差})8' 20'' \cdots\cdots + \overset{*}{33} & 40 \times .8\frac{1}{3} = \overset{*}{33}.3 \\
\hline
\log\cos 17^\circ 31' 40'' \quad = \underline{\underline{\bar{1}.97935}} &
\end{array}$$

問。 $\log\cot 18^\circ 35' 10''$ ヲ求メヨ。

例三。 $\log\sin A = \bar{1}.44881$　ヨリ A ヲ求メヨ。

解　$\log\sin A = \bar{1}.44881$

$$\begin{array}{lr}
\underline{472} \cdots\cdots 16^\circ 10' & \text{表差} = 433 \\
409 \cdots\cdots \overset{*}{9}'.4 & \frac{409}{43.3} = \overset{*}{9}.4 \\
\hline
A = \underline{\underline{16^\circ 19'.4}} &
\end{array}$$

問1. 次ノ各式ヨリ A ヲ求メヨ。

$\mathrm{L}\sin A = 9.84358,$　　$\mathrm{L}\tan A = 9.42126,$

$\log\tan A = 1.20073,$　　$\log\cos A = \bar{1}.48896$

問2. $\mathrm{L}\sin 13^\circ 10' = 9.35752,$　$\mathrm{L}\sin 13^\circ 20' = 9.36289$ ヨリ　$\mathrm{L}\sin 13^\circ 17' 12''$ ヲ求メヨ。　〔商船〕

o **問3.** $\log 2 = 0.30103,$　$\log 3 = 0.47712$ ヲ知リテ $\log\sin 60^\circ$ ヲ計算セヨ。　$\bar{1}.93753$　〔海經〕

o **問4.** 次式ヲ最簡單ニセヨ。　〔仙工〕

$$1 + \log 75 - \log(13 \times 8) + \frac{1}{2}\log 10816 - 2\log\sin 60^\circ.$$

第三章

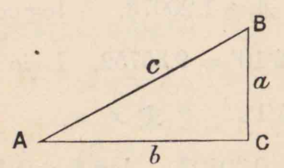
直角三角形ノ解法

13. **定義** 三角形ノ三邊及ビ三角ノ中三ツヲ知リテ他ノ三ツヲ算出スルコトヲ**三角形ヲ解ク**ト云ヒ，其方法ヲ**三角形ノ解法**ト云フ。

本章ニ於テハ直角三角形ノ解法ヲ論ズベシ

14. 直角三角形ノ邊ト角トノ關係。

直角三角形 ABC ニ於テ C ヲ直角トセバ，既ニ知レルガ如ク次ノ關係アリ(第8節例一)。



$$\left.\begin{aligned} a &= c\sin A = c\cos B = b\tan A = b\cot B. \\ b &= c\sin B = c\cos A = a\tan B = a\cot A. \\ c &= \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

此等ノ公式ニヨリ直角三角形ヲ解クコトヲ得。

15. 直角三角形ノ解法。 直角三角形ニ於テハ直角ノ外，二ツノ部分ヲ知ラバ，(但シ鋭角二ツヲ知ル場合ヲ除ク)之ヲ解クコトヲ得。依テ直角三角形ノ解法ニ次ノ四ツノ場合アリ。

第一。 斜邊ト一鋭角トヲ知ルトキ。

第二。 斜邊ト一邊トヲ知ルトキ。

第三。 一邊ト一鋭角トヲ知ルトキ。

第四。 直角ノ二邊ヲ知ルトキ。

第一ノ場合ノ解法。

既知ノ部分ヲ c(斜邊)及ビ A(一鋭角)トセバ，

先ヅ $B = 90° - A$ ヨリ B ヲ求メ。

次ニ $a = c\sin A$

及ビ $b = c\cos A$ ヨリ a 及ビ b ヲ得。

問 1. $c = 2000,\ A = 30°$ トシテ解法ヲ行ヘ。

第二，第三，第四ノ場合ノ解法ハ學生之ヲ行ヘ。

問 2. 次ノモノヲ知リテ解法ヲ行ヘ。

$c = 40,\ a = 20;\quad b = 1.25$ 尺，$B = 30°$ 〔海機〕

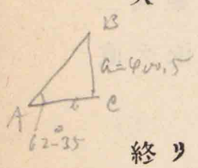
$a = 150,\ B = 60°;\quad a = 3,\ b = \sqrt{3}$

例 $a = 400.5,\ A = 62°35'$ トシテ解法ヲ行ヘ。

解法。 先ヅ $B = 90° - 62° 35' = \underline{\underline{27° 25'}}.$

次ニ b ヲ計算センタメ表ヲ用ヒ $\cot A$ ヲ求メテ

$\cot A = 0.5188$ ヲ得ルヲ以テ,



$$b = a \cot A = 400.5 \times 0.5188 = \underline{\underline{207.8}}$$

終リニ c ヲ計算センタメ,表ヲ用ヒ $\sin A$ ヲ求メテ

$\sin A = 0.8877$ ヲ得ルヲ以テ,

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{400.5}{0.8877} = \underline{\underline{451.2}}$$

對數的計算。 $\frac{b}{a} = \cot A$

先ヅ $\log b = \log a + \log \cot A$ ヨリ

$$\begin{array}{r} \log a = 2.60260 \\ \log \cot A = 1.71494 \\ \hline \log b = 2.31754 \end{array}$$

(此對數ノ眞數ヲ求メ)

$$\begin{array}{r} 744 \cdots\cdots 2077 \\ 10 \cdots\cdots\cdots\cdots 5 \\ \hline b = \underline{\underline{207.8}} \end{array}$$

次ニ $\log c = \log a - \log \sin A$ ヨリ

$$\begin{array}{r} \log a = 2.60260 \\ -\log \sin A = 0.05174 \\ \hline \log c = 2.65434 \end{array}$$

(此對數ノ眞數ヲ求メ)

$$\begin{array}{r} 427 \cdots\cdots 4511 \\ 7 \cdots\cdots 1 \\ \hline c = \underline{\underline{451.2}} \end{array}$$

問3. 次ノモノヲ知リテ解法ヲ行ヘ。

〔1〕 $c = 2000,\ A = 18° 24'$

〔2〕 $a = 128.3,\ B = 50° 36'$

〔3〕 $a = 135.62,\ b = 200$

問 題 2.

1. 次ノモノヲ與ヘテ直角三角形 $(C = 90°)$ ヲ解ケ。

〔1〕 $c = 1123,\ B = 54° 43'$

〔2〕 $c = 3457,\ b = 3404$

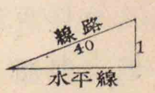
〔3〕 $a = 293.8$米, $A = 37° 19'$

〔4〕 $a = 3.104,\ b = 2.965$

2. 直角三角形ABCノ直角ノ頂點Cヨリ斜邊ヘ下セル垂線ハ $c \sin A \cos A$ ニ等シ,之ヲ證明セヨ。

3. 直角ニ交ル甲乙兩直線アリ,長サ a 米ノ直線ガ甲トナス角ヲ 30° トス,然ラバ甲乙兩直線上ニ於ケル此直線ノ正射影ノ長サヲ求メヨ。〔海兵〕

4. 鐵道線路ノ勾配ガ $\frac{1}{40}$ ナルトキハ,線路ガ水平線トナス角ノ大サヲ求メヨ。



第四章

高サ及ビ距離ノ測量

16. 測量上ノ用語及ビ器械。

直角三角形ノ解法ヲ應用シテ高サ及ビ距離ノ簡單ナル**測量**ヲナスヲ得。今先ヅ之ニ必要ナル用語及ビ器械ヲ説明セン。

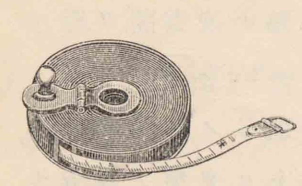
重錘ヲ吊シタルトキノ糸ノ方向ヲ**鉛直線**ト云ヒ,之ニ垂直ナル平面ヲ**水平面**ト云フ。而シテ水平面上ニ在ル直線ヲ**水平線**ト云ヒ,其間ノ角ヲ**水平角**ト云フ。又鉛直線ヲ含ム平面(卽チ水平面ニ垂直ナル平面)ヲ**直立面**ト云フ。而シテ直立面ニ於テ或點ヲ觀測スルトキ,其視線ト眼ヲ過ギル水平線ト爲ス角ガ其水平面ノ上方ニ在ルトキハ此角ヲ其點ノ**仰角**又ハ**高度**ト云ヒ,其水平面ノ下方ニ在ルトキハ其點ノ**俯角**ト云フ。

二點間ノ距離ヲ實測スルニハ**測鎖**又ハ**巻尺**ヲ以テシ,仰角,俯角及ビ水平角ハ**經緯儀**ヲ以テ測ル。

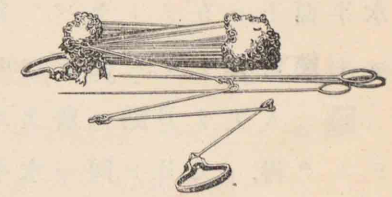
若シ觀測スベキ二點ニ至ル視線ノ定ムル平面ガ水平面ニモ直立面ニモアラザルトキハ,其二線

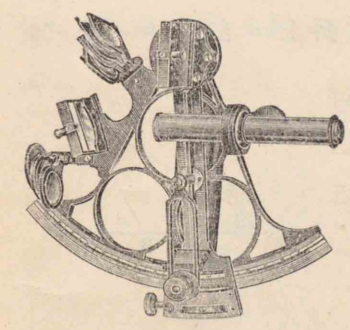
間ノ角ヲ測定スルニハ**六分儀**ヲ以テス。

巻尺

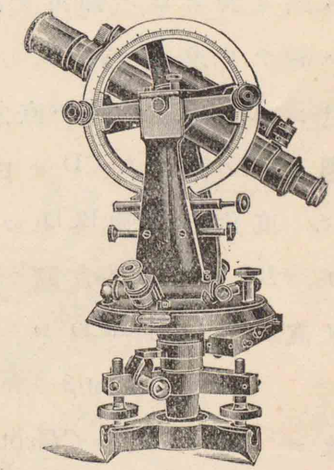


測鎖　測針





六分儀



經緯儀

問1. 直立セル煙突ノ基底ヲ距ル 100 米突ノ處ニ於テ其頂頭ノ仰角ヲ測リ $32°\ 16'$ ヲ得タリ,煙突ノ高サヲ求メヨ(第8節例二參照)。

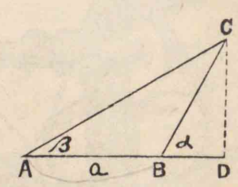
問2. 東京淺草ニアリシ凌雲閣ノ高サハ凡67

米突ナリ,或人某地點ニ於テ其頂ノ仰角ヲ測リタルニ 15° ヲ得タリ,今此人ト凌雲閣ノ基底トガ同一水平面上ニ在リトセバ, 此地點ハ凌雲閣ヲ距ルコト幾何ナリヤ。但シ $\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$ トス。

例　人アリB點ニ於テ或山頂Cノ仰角ヲ測リテ α ヲ得, 又Bト同一水平面上 a 米突ノ後方ナルA點ニ於テCノ仰角ヲ測リテ β ヲ得タリ,依テ山ノ高サヲ求メヨ。

但シ A, B, C ハ同一直立面上ニ在ルモノトス。

解　山ノ高サヲ CD トセバ, 直角三角形 BCD ヨリ



$$BD = CD\cot\alpha,$$

又直角三角形 ACD ヨリ

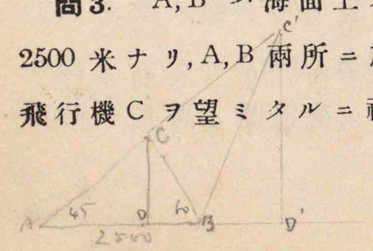
$$AD = CD\cot\beta$$

故ニ

$$AD - BD = CD(\cot\beta - \cot\alpha)$$

$$\therefore\quad CD = \frac{a}{\cot\beta - \cot\alpha}.$$

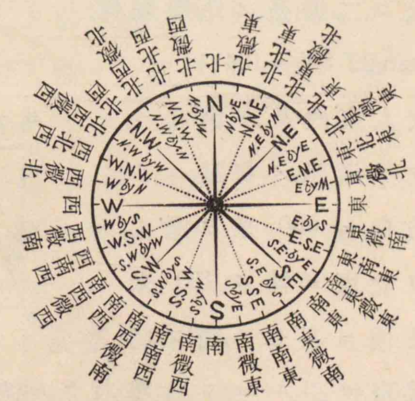
問3.　A, B ハ海面上ノ二點ニシテ相距ルコト2500米ナリ, A, B 兩所ニ於テ AB 線ノ直上ニ在ル飛行機Cヲ望ミタルニ視線ガ水平面トナス角ハ



夫々 45° 及ビ 60° ナリ,飛行機ハ水平面ヨリ幾米ノ高サニアリヤ(解答二ツアリ)。

17. 方位。 物ノ位置ヲ表ハスニ,既ニ確定セル位置ノ處ヨリ確定セル方向ヲ基トスル**方位**ニヨルコトアリ。其方法ニ次ノ三法アリ。

〔1〕東西南北ノ間ノ角ヲ各八等分シ,從テ總テノ方位ヲ三十二方位トシ,其各方位ニ次ノ圖ニ示スガ如ク名稱ヲ附シ,其一ツノ方位ヲ以テスル方法。



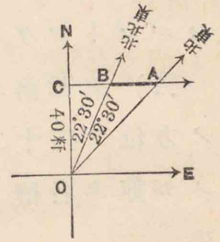
コレ**航海用羅針盤**ノ方位ナリ。

〔2〕北(或ハ南)ヨリ東(或ハ西)ヘ偏スル角ヲ以テシ,之ヲ N 幾度幾分 E 等ト記スル方法。

〔3〕 北ヲ0°ノ方位ト定メ,之ヨリ順次東,南,西ヲ經テ北ニ復ル度數ヲ以テスル方法。

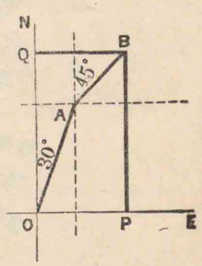
コレ我國參謀本部陸地測量部ニ於テ採用セルモノナリ。

問1. 一船進行中,北東及ビ北北東ニ方リテ二箇ノ燈臺ヲ見タリ。ソレヨリ正北ニ向ツテ進行スルコト40粁ニシテ再ビ前ノ燈臺ヲ見タルニ其方位何レモ正東ナリシト云フ,二燈臺ノ距離幾何。



但シ $\tan 22°30' = 0.4142$

問2. 或人東西及ビ南北ニ通ズル二ツノ道路ノ交點ヨリ $N30°E$ ノ方向ニ600米ヲ進ミ,更ニ方向ヲ北東ニ轉ジ400米ヲ進ミテ某地ニ達セリ,問フ此地點ハ兩道路ヲ距ルコト各幾米ナルカ。



問題 3.

1. 平地ニ直立セル長サ6米ノ旗竿アリ,日中地上ニ5米ノ影ヲ投ゼリト云フ,太陽ノ此時ノ仰角何程ナルカ。但シ $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$, $\log\tan 50°11' = 0.07901$, $\log\tan 50°12' = 0.07927$.

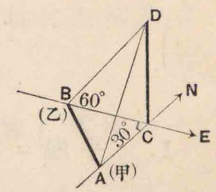
2. 地上60米及ビ40米ノ高サヲ飛行スル飛行機ヲ連ヌル直線ガ水平面ト33°40′ノ角ヲナストキ,此二箇ノ飛行機ノ距離如何。

3. 人アリ,水平面ト30°ノ傾斜ヲナセル坂路ヲ登ルコト230米ナリ,此人ハ此坂ノ麓ノ水平面ヨリ幾何ノ高サニ在ルカ。

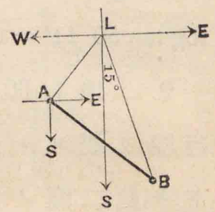
4. 水平面ニ45°傾斜セル長サ100米ノ坂路アリ,傾斜ヲ減ジテ30°トナサバ坂路ノ長サ幾米トナルベキカ。

5. 屋上ニ旗竿ヲ樹ツルアリ,5米ノ距離ニ於テ竿ノ上下兩端ノ仰角ヲ測リテ60°及ビ30°ヲ得タリ,旗竿ノ長サ如何。

6. 同一水平面上ニ在リテ相距ルコト2粁ナル甲乙二點ニ於テ,同時ニ飛行船ノ方位及ビ仰角



ヲ測リタルニ,甲ニ於テハ方位北,仰角 30°, 乙ニ於テハ方位東,仰角 60° ヲ得タリ,飛行船ノ高サヲ米ノ位マデ計算シ未滿ハ四捨五入セヨ。 〔新醫〕



7. 或人燈臺Lヨリ南西及ビ南15°東ノ方向ニ二船A及ビBヲ見タリ,ABノ方向ハ南東ニシテA,Lノ距離ハ4浬ナリト云フ,二船ノ距離如何。 〔海經〕

第五章

同角ノ三角函數ノ關係

18. 逆數關係。 定義ニヨリ,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec} A &= \frac{1}{\sin A}\\ \sec A &= \frac{1}{\cos A}\\ \cot A &= \frac{1}{\tan A}\end{aligned}\right\} \text{従テ} \quad \left.\begin{aligned}\sin A \operatorname{cosec} A &= 1\\ \cos A \sec A &= 1\\ \tan A \cot A &= 1\end{aligned}\right\} \cdots (3)$$

19. 相除關係。

$$\left.\begin{aligned}\tan A &= \frac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

コレ定義ヨリ直ニ證明スルコトヲ得。

問 1. $\sin A = \cos A \tan A$, $\cos A = \sin A \cot A$ ヲ證明セヨ。

問 2. $\sin A \sec A \cot A$ ハ 1 ニ等シキコトヲ示セ。

問 3. $\tan x + \cot x = 2$ ヨリ $\tan x$ ノ値ヲ求メヨ。 * $\tan x \neq 0$ $\tan x = 1$

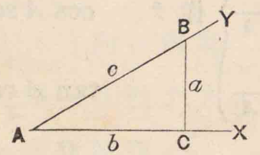
20. 第一平方關係。

$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1.$

一般ニ三角函數ノ冪ハ指數ヲ函數記號ノ右肩ニ置ク。例ヘバ上式ハ次ノ如ク記ス。

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

證明 直角三角形 ABC ($C = 90°$) ヨリ



$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

系 $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ 及ビ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A.$

問 1. 因數分解法ニヨリテ $\sin^4 A - \cos^4 A$ ハ $\sin^2 A - \cos^2 A$ ニ等シキコトヲ示セ。

問 2. $\cos^2 A - \sin^2 A$ ヲ $2\cos^2 A - 1$ 及ビ $1 - 2\sin^2 A$ ニ變化セヨ。

問 3. $\sin^4 A + \cos^4 A$ ヲ $\sin A$ ニテ表ハセ。

$2\sin^4 A - 2\sin^2 A + 1$

問 4. $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$ ヨリ $\cos x$ ヲ求メヨ。

$\frac{1}{2}$ or 1

21. 第二平方關係。

$$\left.\begin{aligned} 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

證明 $1 + \tan^2 A = 1 + \dfrac{a^2}{b^2}$ 〔前節ノ圖ヲ見ヨ〕

$$= \frac{b^2 + a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \sec^2 A.$$

同樣ニ $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A.$

問. 次ノ公式ヲ作レ。

$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}, \qquad \cot A = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}.$

22. 三角函數ノ一ツヲ知リテ他ノ函數ヲ求ムル法。

例ヘバ $\sin A$ ヲ以テ他ノ函數ヲ表ハス公式ヲ求メンニ，先ヅ第20節系ニヨリテ

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}.$$

從テ公式(4)ヨリ

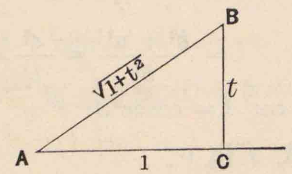
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}.$$

及ビ $$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A}.$$

又 $$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}.$$

又此等ノ公式ハ次ノ如ク作圖ニヨリテモ求ムルヲ得。例ヘバ $\tan A$ ヲ知レル場合ニ於テハ，$\tan A$ ヲ t ニテ表ハシ，$AC=1$，$BC=t$ ナル直角三角形 ABC ($C=90^\circ$) ヲ作ラバ，



$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{t}{1}=t \quad ニシテ，$$

且．$$AB=\sqrt{1+t^2}=\sqrt{1+\tan^2 A}.$$

故ニ $$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

及ビ $$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

等ナリ。

問 1.　$\tan A=\dfrac{8}{15}$ ナルトキ，$\sin A$，$\cos A$ ノ値如何。〔海兵，海機〕

問 2.　$\sin A=\dfrac{12}{13}$ トシテ他ノ函數ヲ求メヨ。

問 3.　$\cos A$ ニテ他ノ函數ヲ表ハス公式ヲ作レ。

問 4.　$\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ トシテ $\sin A$，$\tan A$ ヲ求メヨ。

問 5.　公式 $\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$ ヲ作レ。

$\cot A=t$ トス

23. 三角恒等式。 前節ニ示セル公式ノ如ク，三角函數ヲ含ム恒等式ヲ**三角恒等式**ト云フ。

注意　或特別ナル角ニ限リテ成立スル等式ハ**三角方程式**ト云フ。

例一。 $(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A+\cot A)^2$

$=2\sec A\operatorname{cosec} A$　ヲ證明セヨ。

證明　左邊 $=\sec^2 A+2\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A$

$-(\tan^2 A+2\tan A\cot A+\cot^2 A)$

$=1+\tan^2 A+2\sec A\operatorname{cosec} A+1+\cot^2 A$

$-\tan^2 A-2-\cot^2 A$

$=2\sec A\operatorname{cosec} A.$

問。 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

〔1〕　$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$

〔2〕　$(1+\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2=3+2(\sin\theta+\cos\theta)$

例二。 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)$ ヲ證明セヨ。

證明　左邊 $=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha\}$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha).$

問。 $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$ ヲ證明セヨ。

例三。 $\tan A(\cos^2 A - \sin^2 A) = \sin A \cos A(1 - \tan^2 A)$

ヲ證明セヨ。

證明 左邊 $= \dfrac{\sin A}{\cos A}\cos^2 A - \dfrac{\sin A}{\cos A}\sin^2 A$

$$= \sin A \cos A - \frac{\sin^3 A}{\cos A},$$

右邊 $= \sin A \cos A - \sin A \cos A \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$$= \sin A \cos A - \frac{\sin^3 A}{\cos A}.$$

$\therefore \quad \tan A(\cos^2 A - \sin^2 A) = \sin A \cos A(1 - \tan^2 A).$

問。 $\mathrm{cosec}\,\alpha(\sec\alpha - 1) + \sin\alpha = \cot\alpha(1 - \cos\alpha) + \tan\alpha$

ヲ證明セヨ。

例四。 $\dfrac{\mathrm{cosec}\,\alpha + \cot\alpha}{\sec\alpha + \tan\alpha} = \dfrac{\sec\alpha - \tan\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha - \cot\alpha}$

ヲ證明セヨ。

證明 此等式ガ眞ナルタメニハ,

$$\mathrm{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha = \sec^2\alpha - \tan^2\alpha,$$

從テ $\quad 1 + \cot^2\alpha - \cot^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha - \tan^2\alpha$

ナレバ可ナリ, 然ルニ此式ノ兩邊ハ共ニ1ニ等シ。故ニ所題ノ等式ハ眞ナリ。

問。 $\dfrac{1 - \sec A + \tan A}{1 + \sec A - \tan A} = \dfrac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1}$

ヲ證明セヨ。

注意 恒等式ヲ證明スルニハ,例一,例二ニ於テ示セルガ如ク,一邊(通例複雜ナル邊,又ハ公式ヲ適用シ得ベキ邊,又ハ因數ニ分解シ得ル邊)ヲ變ジテ他ノ邊ニ同ジクスルヲヨシトスレドモ,例三ノ如ク兩邊ヲ別々ニ變ジテ同ジ式ニ化スルモ可ナリ,又例四ノ如ク所題ノ等式ガ成立スルタメノ十分條件ヲ考究スルコトアリ。

問題 4.

1. 次ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ求メヨ。

〔1〕 $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$

〔2〕 $3\sin x = 2\cos^2 x$

2. $\sin\alpha = \dfrac{n}{m}$ トシテ $\tan\alpha$ ヲ求メヨ。

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ〔3〕－〔12〕。

3. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

4. $\tan A \sin A + \cos A = \sec A$ 〔美術〕

5. $\tan A + \cot A = \sec A\,\mathrm{cosec}\,A$ 〔海兵,商船〕

6. $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A$ 〔商船〕

7. $(1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A)$

8. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$ 〔商船〕

9. $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x$

10. $\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\tan\theta$ 〔陸士〕

11. $\dfrac{\tan x}{\sec x-1}+\dfrac{\tan x}{\sec x+1}=2\operatorname{cosec} x$ 〔海機〕

12. $\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\operatorname{cosec} A-\cot A$

13. 公式(5)〔32頁〕ヨリ次ノ恒等式ヲ誘導セヨ。

$\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$

14. 次ノ二式ヲ簡單ニセヨ。

〔1〕 $(\sin A-\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A-\cot A)^2$
$+(\cos A-\sec A)^2$ 〔商船〕

〔2〕 $(\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A)$ 〔海兵〕

15. $\sin A=a,\ \tan A=b$ ナルトキハ,

$b^2=a^2(1+b^2)$ ナルコトヲ證明セヨ。〔商船〕

第二篇

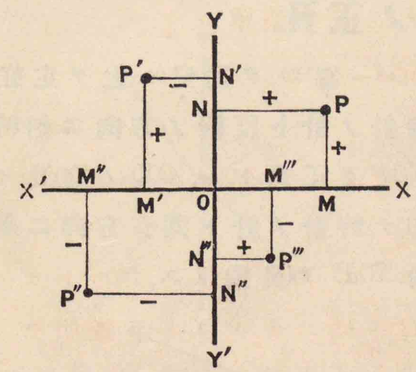
一般ノ角ノ三角函數

第一章

三角函數ノ定義及ビ關係

24. 線分ノ正負。

XX′, YY′ヲ圖ノ如ク互ニ直交スル二直線トシ, Oヲ其交點トセヨ。然ルトキハ, OヨリOX上ノ



一點Mニ至ル線分OM及ビ之ニ平行シテYY′ノ上ノ點ヨリYY′ノ右方ニ引ケル線分NP, $N'''P'''$等ヲ正トシ, OX′上ノ一點M′ニ至ル線分OM'及ビ之ニ

平行シテ YY' ノ左方ニ在ル線分 $N'P'$, $N''P''$ 等ヲ負トス。又 YY' ニ沿ヘル ON, ON' 及ビ之ニ平行シテ XX' ノ上方ニ在ル線分 MP, $M'P'$ 等ヲ正トシ,下方ニ在ル線分 ON'', ON''', $M''P''$, $M'''P'''$ 等ヲ負トス。

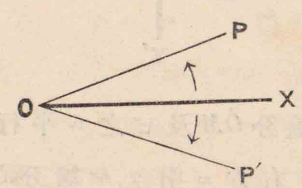
略言セバ,

(1) YY'ヨリ之ニ垂直ニ右方ニ向ヒテ測レル線分ヲ正トシ,左方ニ向ヒテ測レル線分ヲ負トス。

(2) XX'ヨリ之ニ垂直ニ上方ニ向ヒテ測レル線分ヲ正トシ,下方ニ向ヒテ測レル線分ヲ負トス。

25. 角ノ正負。

直線 OP ノ一端 O ヲ固定シ,之ヲ定直線 OX ノ位置ヨリ**時計ノ針ト反對ノ方向ニ**廻轉セシメテ生ズル角 XOP ヲ**正角**トシ, OX ノ位置ヨリ前ト反對ノ方向即チ**時計ノ針ト同ジ方向ニ**廻轉セシメテ生ズル角 XOP' ヲ**負角**トス。



例ヘバ角 XOP 及ビ XOP' ノ大サガ共ニ30°ナラバ

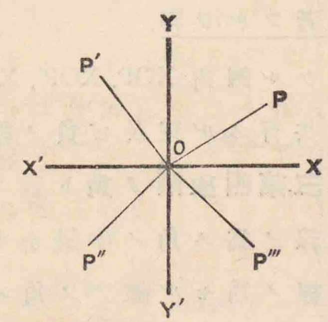
$\angle XOP = +30°$, $\angle XOP' = -30°$ ナリ。

定直線 OX ヲ角ノ**主線**ト云ヒ, OP ヲ**動徑**ト云フ.

26. 象限, 角ノ大サ。

互ニ直交スル二直線 XOX', YOY' ニテ分タレタル平面ノ四部分ヲ**象限**ト云ヒ, OX, OY ヲ圖ノ如ク正ノ方向トセバ, XOY, YOX', X'OY', Y'OX ヲ順次ニ**第一,第二,第三,第四象限**ト云フ。

角ヲ考フル場合ハ主線ヲ OX トシ動徑 OP ガ OX ノ位置ヨリ O 點ノ周リニ廻轉スルモノトス。



動徑 OP ガ主線 OX ヲ發シテ正ノ方向ニ廻轉セバ生ズル角ハ次第ニ増大シテ0°ヨリ360°ニ至ル。

圖ニ於テ　$0° < XOP < 90°$,　$90° < XOP' < 180°$,

$180° < XOP'' < 270°$,　$270° < XOP''' < 360°$

OPガ尚廻轉ヲ續ケOXヲ超エテ再ビ圖中OPノ位置ニ至ルト考フレバOPハOXト360°ヨリ大ナル角XOPヲ作ルト考フルヲ得。例ヘバ$\angle XOP$ノ初メノ大サヲ30°トセバ,後ノ大サハ30°+360°卽チ390°ナリ,而シテOPハ尚幾回ニテモOノ周リヲ廻轉シテ尚大ナル角ヲ作ルコトヲ得。

同樣ニOPハ負ノ方向ニモ幾回モ廻轉シテ如何ニ絶對値ノ大ナル負角ヲモ作ルコトヲ得。

故ニ角ノ絶對値ニハ際限ナク, 且ツ動徑ノ一ツノ位置OPト主線OXトノ爲ス角ハ正角負角共ニ無數アリト考フルヲ得。

上ノ圖ニ於ケル四角XOP, XOP′, XOP″, XOP‴及ビ之ト二邊ヲ共有スル正及ビ負ノ總テノ角ヲ夫夫**第一,第二,第三,第四象限ノ角**ト云フ。

今動徑ト主線ノ爲ス角ノ中最小ナル正角ヲαトセバ, 此二線ノ爲セル總テノ角ハ一ツノ式

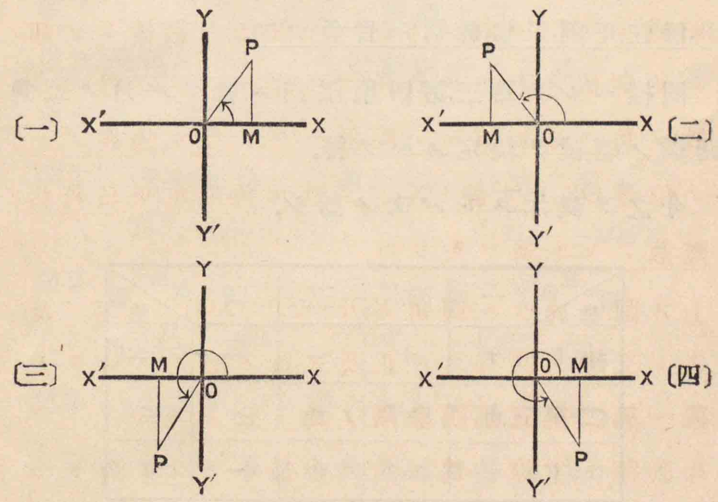
$$\alpha + n.360^\circ$$

ニテ表ハサル, 但シnハ零又ハ正負ノ整數トス。

問. 120°, 225°, 405°, −30, −300°, −750° ハ各何象限ノ角ナルカ。又此各角ヲ作圖セヨ。

27. 一般ノ角ノ三角函數。

角XOPヲθニテ表ハシ,OXヲ主線, OPヲ動徑トセバ,角θノ三角函數ハOP上ノ一點PヨリOX或ハ其**延長上**ニ垂線PMヲ引キテ第一篇第1節ト同樣ニ定ム。但シMP及ビOMハ第24節ニ述ベシ如ク符號ヲ有シ, OPハ常ニ正ナリトス。



卽チ

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP},\qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{MP},$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP},\qquad \sec\theta = \frac{OP}{OM},$$

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM},\qquad \cot\theta = \frac{OM}{MP}.$$

依テ第一象限内ニ於テハ MP, OM ハ共ニ正ナルヲ以テ,

第一象限内ニ在ル角ノ三角函數ハ皆正ナリ.

第二象限内ニ於テハ MP ハ正ニシテ, OM ハ負ナルヲ以テ,

第二象限内ニ在ル角ノ正弦ト餘割トハ正ニシテ,餘弦,正割,正切,餘切ハ皆負ナリ。

同樣ニシテ第三,第四象限内ニ於ケル角ノ三角函數ノ符號ヲ決定スルヲ得。

今之ヲ表示スレバ次ノ如シ。

象限 / 函數	一	二	三	四	象限 / 函數
$\sin\theta$	+	+	−	−	$\operatorname{cosec}\theta$
$\cos\theta$	+	−	−	+	$\sec\theta$
$\tan\theta$	+	−	+	−	$\cot\theta$

然ルニ θ ハ正,負共ニ無數ノ角ヲ表ハスヲ以テ,同ジ三角函數ヲ有スル角ハ無數アリ。今其中ノ最小ナル正角ヲ α トセバ $\theta=\alpha+n.360°$ ナルヲ以テ $\alpha+n.360°$ ナル式中ニ含マルヽ總テノ角ノ三

角函數ハ皆 $\angle\alpha$ ノ三角函數ニ同ジ。

即チ
$$\left.\begin{aligned}\sin(n.360°+\alpha)&=\sin\alpha\\ \cos(n.360°+\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(n.360°+\alpha)&=\tan\alpha\\ \text{等}&\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

但シ n ハ0又ハ正,負ノ整數トス。

從テ或角ニ360°ノ任意整數倍ヲ加減スルモ其三角函數ハ變ラズ。

問1. 次ノ各角ノ三角函數ノ符號ヲ言ヘ。

135°, 265°, 275°, −10°, −91°, −1000°.

問2. 次ノ各ノ角ノ三角函數ヲ求メヨ。

765°, 10860°, −330°, −1020°.

問3. 正弦ガ $\frac{1}{2}$ ニ等シキ角ヲ三ツ言ヘ。又餘弦ガ $\frac{1}{2}$ ニ等シキ角ヲ三ツ言ヘ。

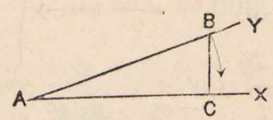
問4. 次ノ各方程式ニ適スル角ヲ三ツヅツ求メヨ。

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 2\cos x=\sqrt{2},\quad \tan x=\sqrt{3}.$$

45°

28. $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ 及ビ 270° ノ三角函數。

角 XAY ノ一邊 AX ヲ固定シ,他ノ邊 AY ヲ A ヲ中心トシテ廻轉シ AX ニ近ヅクレバ, 角 BAC ハ



漸次減少シ AY 上ノ任意ノ一點 B ヨリ AX ヘ下セル垂線 BC モ亦漸次減少シテ共ニ如何樣ニモ小トナル, 且 AB ノ長サハ漸次 AC ノ長サニ近ヅクベシ。

故ニ角ガ非常ニ小ナル角トナルニ從ヒ,其正弦及ビ正切ハ非常ニ 0 ニ近迫シ, 其餘弦ハ非常ニ 1 ニ近迫ス。此事實ヲ夫々次ノ如ク略記ス。

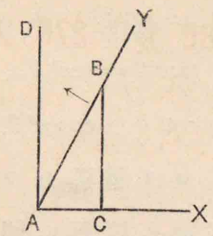
$$\sin 0^\circ = 0, \qquad \cos 0^\circ = 1, \qquad \tan 0^\circ = 0.$$

又角ガ減少スルニ從ヒ,餘切ハ漸次增大シテ際限ナシ。此事實ヲ次ノ如ク畧記ス。

$$\cot 0^\circ = \infty.$$

同樣ニ　$\sec 0^\circ = 1, \quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$

又 AY ヲ前ト反對ニ廻轉シ,漸次 A ニ於ケル AX ノ垂線 AD ニ近ヅカシムレバ,前ト同樣ニ



$$\sin 90^\circ = 1, \qquad \cos 90^\circ = 0,$$
$$\tan 90^\circ = \infty, \qquad \cot 90^\circ = 0.$$

同樣ニ

$$\sin 180^\circ = 0, \qquad \cos 180^\circ = -1,$$
$$\tan 180^\circ = 0, \qquad \cot 180^\circ = \infty,$$
$$\sin 270^\circ = -1, \qquad \cos 270^\circ = 0,$$
$$\tan 270^\circ = \infty, \qquad \cot 270^\circ = 0.$$

29. 一般ノ角ノ三角函數間ノ關係。

第一篇第五章公式 (3), (4), (5), (6) ハ一般ノ角ニ就テモ成立スルコト容易ニ證明スルヲ得。

故ニ θ ノ正負大小ニ論ナク,

$$\begin{cases} \sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1 \\ \cos\theta \sec\theta = 1 \\ \tan\theta \cot\theta = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

及ビ $\begin{cases} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \\ 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta. \end{cases}$

從テ是等ノ公式ヨリ誘導セラルヽ公式,恒等式ハ角ノ大サ及ビ符號ノ如何ニ關セズ皆眞ナリ.

但シ第22節ニ於テ求メシ公式ハ不十分ナリ,何トナレバ,例ヘバ $\sin A$ ヲ知リテ $\cos A$ ヲ求ムルニ,A 若シ第二象限ノ角ナラバ,

$$\cos A = -\sqrt{1-\sin^2 A}$$ ナレバナリ.

詳言スレバ A ノ存在スル象限ニヨリテ根號ノ前ニ正又ハ負ノ符號ヲ附スル必要アレバナリ.

問 1.　$\sin A = \frac{3}{5}$ ヲ知リテ $\tan A$ 及ビ $\operatorname{cosec} A$ ヲ求メヨ.　〔海經〕

問 2.　A ハ三角形ノ一角ニシテ其正切ハ $-\frac{4}{3}$ ナリ,A ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ.　〔海機〕

30. 三角函數ヲ線分ニテ表ハスコト.

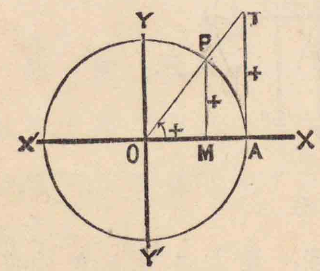
角 XOP ノ頂點 O ヲ中心トシ,長サノ單位ヲ半徑トスル圓(之ヲ**單位圓**ト云フ)ヲ畫キ,主線 OX,動徑 OP ト夫々 A, P ニ於テ交ハラシメ且 A ニ於ケル

其圓ノ切線ト OP トノ交點ヲ T トセバ,OP ト OA ノ測度ハ共ニ 1 ナルヲ以テ,角 $XOP(\theta)$ ノ正弦,餘弦,正切ハ次ノ如シ.

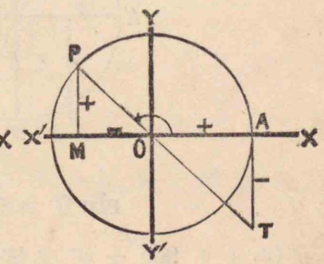
$$\sin\theta = MP,$$
$$\cos\theta = OM,$$
$$\tan\theta = AT.$$

但シ MP, OM, AT ハ夫々其測度ヲ表ハシ,且ツ符號ヲ有スルモノトス.

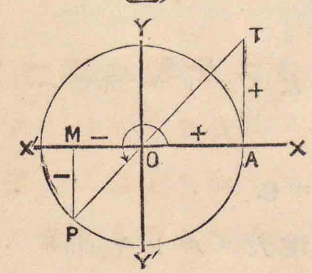
〔一〕



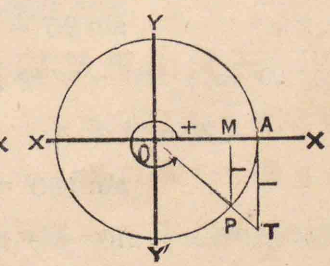
〔二〕



〔三〕



〔四〕

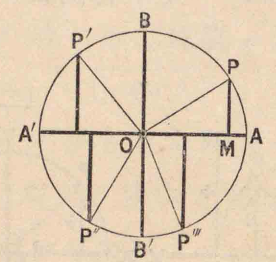


31. 三角函數ノ變化。

OA ヲ主線, OP ヲ動徑トシ, 角 AOP ヲ θ ニテ表ハシ, θ ガ 0° ヨリ 360° マデ次第ニ增大スルニ從ヒ, 其三角函數ノ變化スル有樣ヲ考究セントス。

〔1〕 **正弦ノ變化。** 單位圓ニ於テ

$$\sin\theta = MP.$$



先ヅ　　　$\sin 0^\circ = 0.$

θ ガ 0° ヨリ 90° マデ次第ニ增大スレトキ $\sin\theta$ ハ之ニ伴ヒテ 0 ヨリ 1 マデ次第ニ增大ス。

而シテ　　　$\sin 90^\circ = 1.$

θ ガ 90° ヨリ 180° マデ增大スルトキ, $\sin\theta$ ハ 1 ヨリ 0 マデ次第ニ減少ス,

而シテ　　　$\sin 180^\circ = 0.$

θ ガ 180° ヨリ 270° マデ增大スルトキ $\sin\theta$ ハ常ニ負ニシテ其絕對値ハ 0 ヨリ 1 マデ次第ニ增大ス, 而シテ　　$\sin 270^\circ = -1.$

θ ガ 270° ヨリ 360° マデ增大スルトキ, $\sin\theta$ ハ猶負ニシテ其絕對値ハ 1 ヨリ 0 マデ減少ス,

而シテ　　　$\sin 360^\circ = 0.$

θ ガ 360° ヲ超エテ更ニ增大スレバ, 復タ上ト同一ノ變化ヲ繰返スコト明カナリ。

〔2〕 **餘弦ノ變化。** 前ノ圖ニ於テ

$$\cos\theta = OM.$$

故ニ第一象限ニアリテハ $\cos\theta$ ハ 1 ヨリ 0 マデ減少シ, 第二象限ニアリテハ 0 ヨリ -1 マデ減少シ, 第三, 第四象限ニアリテハ反對ニ增大ス。

而シテ

$$\cos 0^\circ = 1, \ \cos 90^\circ = 0, \ \cos 180^\circ = -1,$$
$$\cos 270^\circ = 0, \ \cos 360 = 1.$$

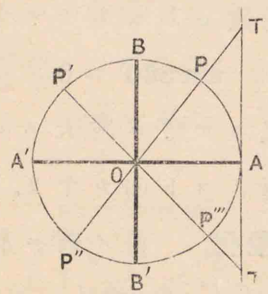
注意　坐標ヲ用ヒテ方程式

$$y = \sin x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$
$$y = \cos x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

ヲ圖示スレバ折込ミ圖ニ示スガ如キ曲線ヲ得。

コレ正弦及ビ餘弦ノ變化ノ圖ニシテ,此曲線ヲ夫々**正弦曲線及ビ餘弦曲線**ト云フ。

〔3〕 正切ノ變化.　定義ニヨリ



$\tan\theta = AT$　　ナルヲ以テ,

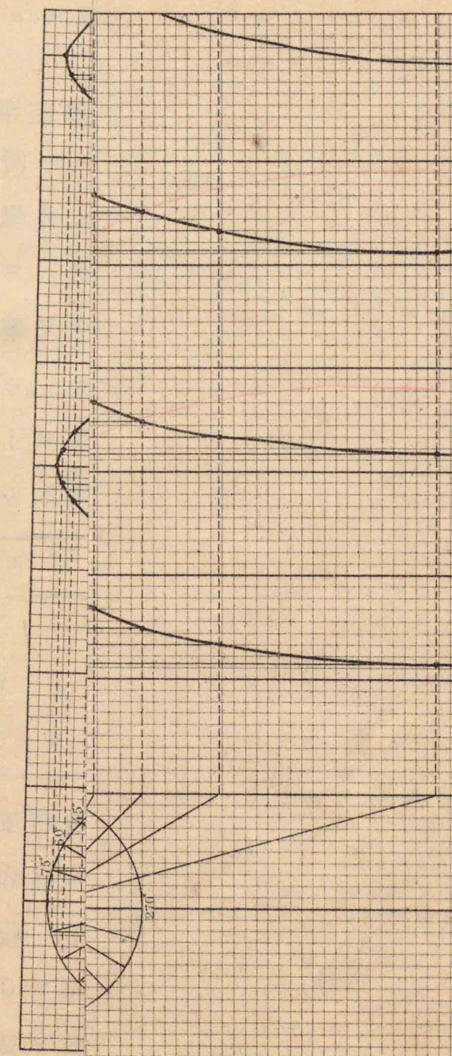
先ヅ　　　$\tan 0^\circ = 0.$

θ ガ 0° ヨリ 90° マデ増大スルトキ, $\tan\theta$ ハ 0 ヨリ次第ニ増大シ, θ ガ十分 90° ニ近ヅカバ $\tan\theta$ ハ如何ニ大ナル正數ヨリモ大トナル,之ヲ略言シテ**90°ノ正切ハ無限大ナリ**ト云フ(第28節参照)。

θ ガ僅ニ 90° ヲ超ユルトキハ,正切ハ俄ニ負トナリテ其絶對値ハ如何ナル數ヨリモ大ナリ,

故ニ　　　$\tan 90^\circ = \pm\infty$

θ カ 90° ヨリ 180° マデ増大スルトキハ, $\tan\theta$ ハ



此曲線ヲ

以テ,

θ ハ 0 ヨ

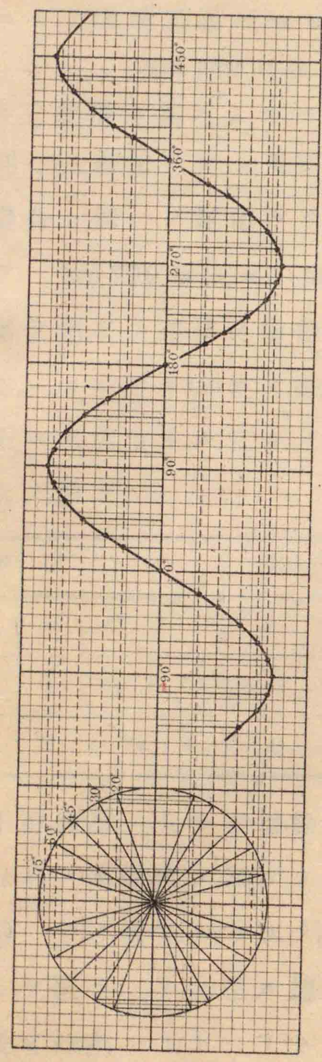
tan θ ハ

略言シテ

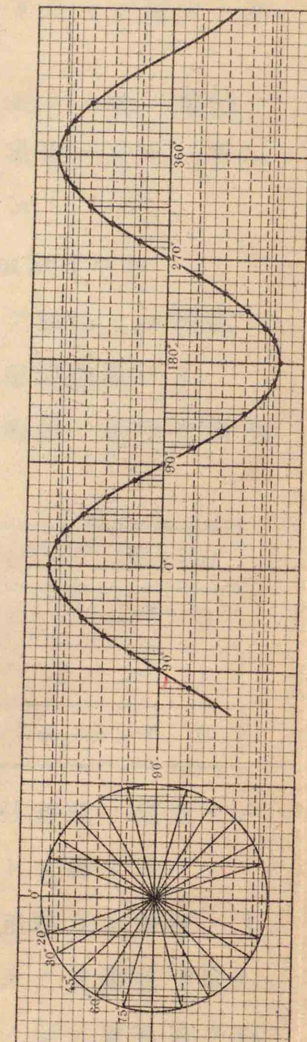
ニ負トナ

リ,

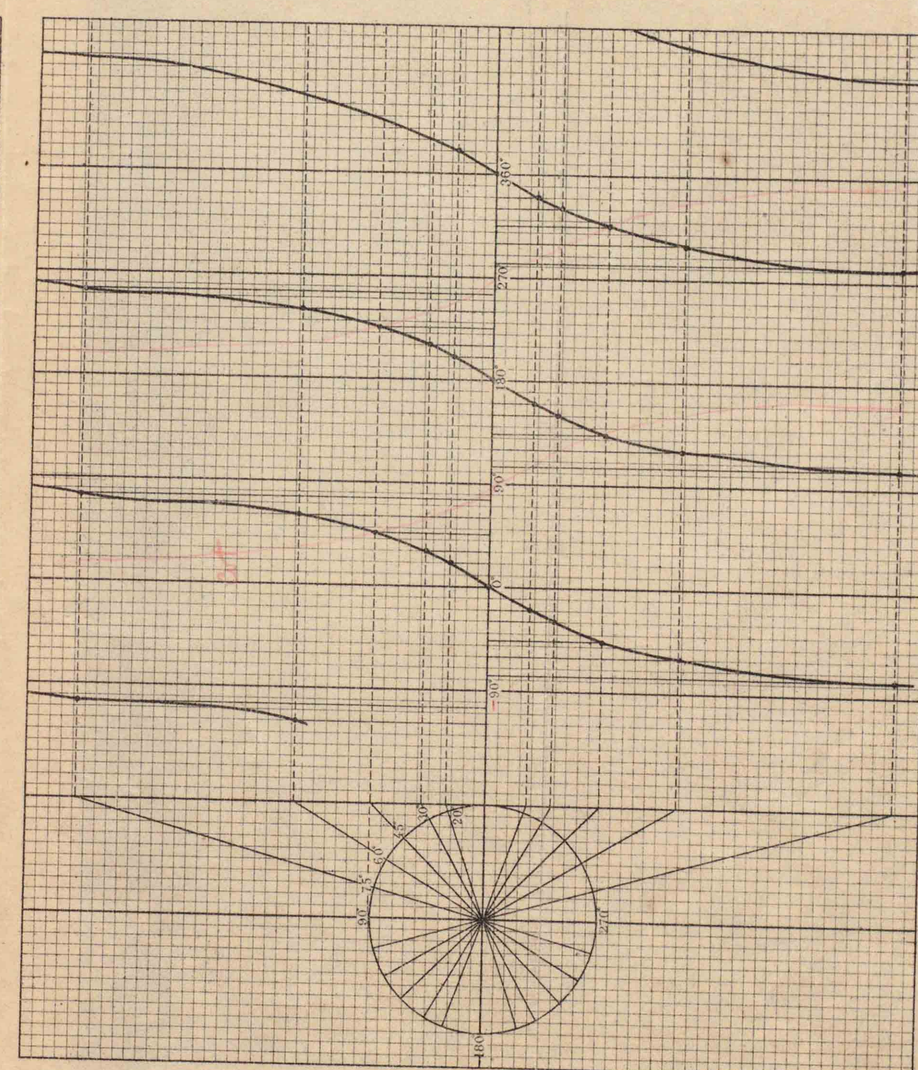
, tan θ ハ



正弦ノ變化



餘弦ノ變化



正切ノ變化

常ニ負ニシテ其絕對値ハ∞ヨリ0マデ減少ス,而シテ　$\tan 180^\circ = 0$.

θ ガ第三象限ニ在ルトキハ $\tan\theta$ ハ第一象限ノ場合ト同一ノ變化ヲナシ,第四象限ニ於テハ第二象限ノ場合ト同一ノ變化ヲナス。

而シテ　$\tan 270^\circ = \pm\infty,\quad \tan 360^\circ = 0.$

今坐標ヲ用ヒテ正切ノ變化ヲ圖示セバ折込ミ圖ノ如シ。コレ $y = \tan x$ ノ圖(**正切曲線**)ナリ。

更ニ上ニ考究シタル三ツノ函數ノ變化ヲ表示スレバ次ノ如シ。

函數＼角(象限)	0°	(I)	90°	(I)	180°	(III)	270°	(IV)	360°
$\sin\theta$	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
$\cos\theta$	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
$\tan\theta$	0	↗	∞, −∞	↗	0	↗	∞, −∞	↗	0

餘切,正割,餘割ハ夫々正切,餘弦,正弦ノ逆數ナルヲ以テ容易ニ其變化ヲ知ルコトヲ得ベシ。

注意　上ノ研究ニヨリテ,正弦及ビ餘弦ハ1ヨリ0ヲ經テ -1 ニ至ル總テノ實數値ヲ取リ,正割及ビ餘割ハ1ト -1 トノ間ノ實數値ヲ取

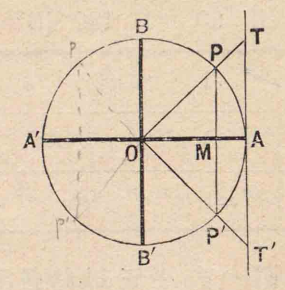
∴ sec A, cosec A ノ値ハ $x \geqq 1$ or $x \leqq -1$

ルコトナク,正切及ビ餘切ハ $+\infty$ ヨリ 0 ヲ經テ $-\infty$ ニ至ル實數値,卽チ正及ビ負ノ總テノ實數値ヲ取ル。

問。 上ト同様ニ $\sin^2\theta$ 及ビ $\cos 2\theta$ ノ變化ヲ考究セヨ。

32. 負角ノ三角函數。

單位圓ニ於テ角 AOP ヲ θ トシ,垂線 PM ヲ延長シ P' ニ於テ圓周ト會セシムレバ,角 AOP' ハ $-\theta$ ナリ,而シテ　$MP'=-MP,\ AT'=-AT$ ナルヲ以テ,



$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)&=\cos\theta\\ \tan(-\theta)&=-\tan\theta\\ \cot(-\theta)&=-\cot\theta \text{ 等}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

問。 $-45°,\ 300°,\ 330°,\ -3630°$ ノ三角函數ヲ求ム。

33. 餘角及ビ補角。

定義　二角ノ和ガ $90°$ ナルトキハ,其各ヲ他ノ**餘角**ト云ヒ,二角ノ和ガ $180°$ ナルトキハ其各ヲ他ノ**補角**ト云フ。

例ヘバ $30°,\ 100°,\ 225°,\ -50°$ ノ餘角ハ夫々 $60°,\ -10°,\ -135°,\ 140°$ ニシテ,其補角ハ $150°,\ 80°,\ -45°,\ 230°$ ナリ。

34. 餘角ノ三角函數。

單位圓 O ニ於テ角 AOP ヲ θ トシ,角 AOP' ヲ $90°-\theta$ トシ, P 及ビ P' ヨリ直徑 AOA' ヘ垂線 PM, P'M' ヲ引クトキハ,

$$M'P'=OM,\quad OM'=MP \quad \text{ナル故,}$$

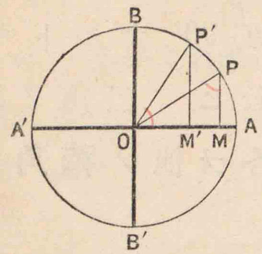
θ ノ大サ及ビ符號ニ關セズ,

$$\left.\begin{aligned}\sin(90°-\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90°-\theta)&=\sin\theta\\ \tan(90°-\theta)&=\cot\theta\\ \cot(90°-\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(9)$$

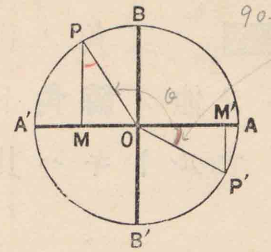
(第一篇第10節參照)

90-θ=-(θ-90)

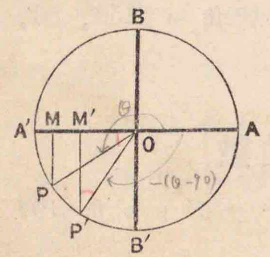
〔一〕



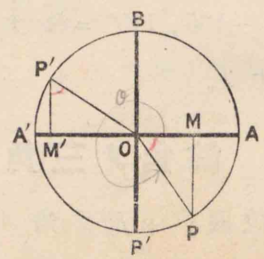
〔二〕



〔三〕



〔四〕



問。次ノ公式ヲ證明セヨ。

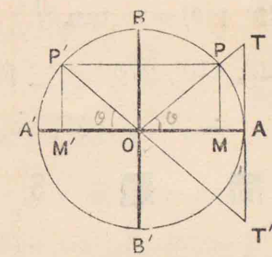
$$\left.\begin{array}{l}\sin(\theta-90^\circ)=-\cos\theta\\ \cos(\theta-90^\circ)=\quad\sin\theta\\ \tan(\theta-90^\circ)=-\cot\theta\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\sin(90^\circ+\theta)=\quad\cos\theta\\ \cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta\\ \tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta\end{array}\right\}$$

35. 補角ノ三角函數。

單位圓 O ニ於テ $\angle AOP=\theta$ トシ, P ヨリ AO ニ平行ニ PP′ ヲ引キ P′ ニ於テ圓周ト會セシムレバ,

$\angle AOP'$ ハ $180^\circ-\theta$ ナリ。今 P 及ビ P′ ヨリ直徑 AOA′ ニ垂線 PM 及ビ P′M′ ヲ引クトキハ,

$$M'P'=MP,\quad OM'=-OM \quad ナル故$$



$$\left.\begin{array}{l}\sin(180^\circ-\theta)=\quad\sin\theta\\ \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta\\ \cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(10)$$

問 1.　$\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2},$

$\sin 135^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 135=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ヲ證明セヨ。

問 2.　150° ノ三角函數ヲ求メヨ。

問 3.　表ヲ用ヒテ $\sin 125^\circ 48'$, $\cos 143^\circ 16'$ 及ビ $\log\sin 140^\circ 37'$ ヲ求メヨ。

問4.　次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\left.\begin{aligned}\sin(180^\circ+\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(180^\circ+\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ+\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(11)$$

問5.　$225^\circ,\ 240^\circ,\ 210^\circ,\ 270^\circ$ ノ三角函數ヲ求メヨ。

問題 5.

1.　次ノ各等式ヲ證明セヨ。

〔1〕　$\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta,\quad \cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta.$

〔2〕　$\sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta,\quad \tan(270^\circ+\theta)=-\cot\theta.$

2.　$330^\circ,\ 750^\circ,\ 1080^\circ,\ -210^\circ,\ -300^\circ,\ -315^\circ$ ノ正弦,餘弦,正切ヲ求メヨ。

3.　次式ノ値ヲ求メヨ。

〔1〕　$\sec(-780^\circ)\tan 1290^\circ.$　〔商船〕

〔2〕　$\dfrac{\sin 150^\circ \operatorname{cosec}(-45^\circ)}{\cos 225^\circ \tan 135^\circ}.$　〔海兵〕

4.　$\sin 40^\circ=0.64$ トセバ, $\tan 140^\circ$ ノ値如何。〔熊工〕

5.　$\tan 238^\circ=\dfrac{8}{5}$ トセバ, $\sin 238^\circ$ 及ビ $\cos 122^\circ$ ノ値如何。　〔水產〕

6.　$\cot\theta=-\dfrac{2}{3}$ ナルトキ, $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \sec\theta$ ノ値ヲ求メヨ。但シ $180^\circ>\theta>0^\circ$ トス。　〔海機〕

7.　$\tan A=2-\sqrt{3}$ ナルトキ $\cos A$ ノ値如何。　〔商船〕

8.　$\tan(45^\circ+\alpha)\tan(45^\circ-\alpha)=1$ ヲ證明セヨ。〔高〕

9.　$\sin(A-40^\circ)=\sin(A+80^\circ)$ ナルトキ A ヲ求メヨ。但シ A ハ正ノ鋭角トス。　〔海機〕

10.　$\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(A-45^\circ)=1$ ヲ證明セヨ。　〔商船〕

11.　次式ヲ簡單ニセヨ。

〔1〕　$\tan(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A)$
$+\cos(180^\circ-A)\cot(180^\circ-A).$　〔海兵〕

〔2〕　$\sin 90^\circ+\tan^2(180^\circ-\alpha)-\operatorname{cosec}^2(90^\circ-\alpha).$　〔東工〕

12.　次ノ方程式ヲ解ケ。

〔1〕　$2\sin^2 x=\sin x.$

〔2〕　$2\cos^2 x-3\cos x+1=0.$

〔3〕　$8\sin^2 x+3\operatorname{cosec}^2 x=10.$

〔4〕　$6\cot^2 x-4\cos^2 x=1.$

第二章

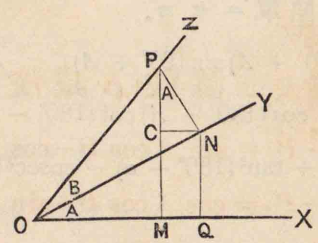
二角ノ和及ビ差ノ三角函數

36. 正弦及ビ餘弦ノ加法定理。

A 及ビ B ヲ任意ノ二角トセバ

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\ \cos(A+B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

證明 角 XOY ヲ A, YOZ ヲ B ニテ表ハサバ, 其和 XOZ ハ $A+B$ ナリ。



今 $\angle XOZ<90^\circ$ ト假定シ, OZ 上ニ一點 P ヲ取リ, P ヨリ OX, OY ヘ垂線 PM, PN ヲ引キ, N ヨリ OX, PM ヘ夫々垂線 NQ, NC ヲ引クトキハ,

$$\angle CPN=\angle QON=A \quad ナリ。$$

サテ OP ヲ長サノ單位ト考フレバ,

$$\sin(A+B)=MP=MC+CP=QN+CP$$

ニシテ $\quad QN=ON\sin A=\cos B\sin A,$

$$PC=PN\cos A=\sin B\cos A \quad ナル故$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

又 $\quad \cos(A+B)=OM=OQ-MQ=OQ-CN$

ニシテ $\quad OQ=ON\cos A=\cos B\cos A,$

$$CN=PN\sin A=\sin B\sin A \quad ナル故$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

問。 A, B ヲ共ニ 90° ヨリ小ナル正角トシ, 且 $\cos A=\dfrac{40}{41}$, $\cos B=\dfrac{60}{61}$ トシテ, $\sin(A+B)$ ノ値ヲ計算セヨ。 〔海機〕

37. 正弦及ビ餘弦ノ減法定理。

$$\left.\begin{aligned}\sin(A-B)&=\sin A\cos B-\cos A\sin B\\ \cos(A-B)&=\cos A\cos B+\sin A\sin B\end{aligned}\right\}\cdots(13)$$

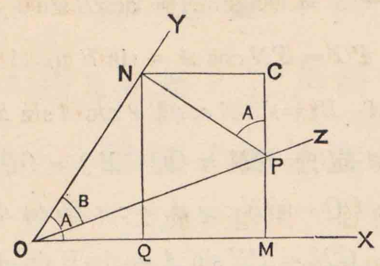
證明 $A>B$ トシ $\angle XOY$ ヲ A, $\angle YOZ$ ヲ B トシ, OZ ヲ OX ト OY トノ間ニ在ル如クセバ, $\angle XOZ$ ハ $A-B$ ナリ。 前節ト同樣ノ作圖ヲ爲ストキハ,

$$\sin(A-B)=MP=MC-PC=NQ-PC$$

ニシテ, $\quad QN=ON\sin A=\cos B\sin A,$

$$PC=PN\cos A=\sin B\cos A \quad ナル故$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$



同様ニ $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

問1. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$

〔2〕 $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B$

〔3〕 $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75^\circ$

$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sin 75^\circ$

$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}=\cot 75^\circ$

$\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}=\cot 15^\circ$

〔4〕 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(45^\circ+\theta)=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\theta)$

〔5〕 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\theta)=\sqrt{2}\cos(45^\circ+\theta)$

〔6〕 $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}$ (複號同順)

注意一。本節及ビ前節ノ證明ニ於テハ, A, B, $A+B$ 及ビ $A-B$ ヲ何レモ 90° ヨリ小ナル正角ト假定セリ, 然レドモ角ノ大サ及ビ其符號ニ關セズ上ノ定理ハ眞ナリ。

問2. 前節ノ問題ニ於テ A, B ヲ 90° ヨリ小ナル正角ト限ラザルトキハ $\sin(A+B)$ ノ値如何。

注意二。加法定理ニ於テ B ヲ $-B$ ニ置換ユレバ之ヨリ減法定理ヲ誘導スルコトヲ得ベシ。

38. 正切ノ加法定理及ビ減法定理。

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\quad\cdots\cdots\cdots(14)$$

證明

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}.$$

終リノ式ノ分母子ヲ $\cos A\cos B$ ニテ除スレバ

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

同様ニ $$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\quad\cdots(15)$$

コレ正切ノ減法定理ナリ。

問1. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\tan(45^\circ\pm\theta)=\dfrac{1\pm\tan\theta}{1\mp\tan\theta}$.　（複號同順）

〔2〕 $\cot(A\pm B)=\dfrac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A}$.　（同　上）

問2. 公式(14),(15)ニヨリ再ビ $\tan 75^\circ$ 及ビ $\tan 15^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

問3. 次式ヲ簡單ニセヨ。

$\tan A+\tan(45^\circ-A)+\tan A\tan(45^\circ-A)$.　〔海機〕

39. 二倍角ノ三角函數。

公式(12)及ビ(14)ニ於テ B ヲ A トセバ

$$\left.\begin{aligned}\sin 2A &= 2\sin A\cos A\\ \cos 2A &= \cos^2 A-\sin^2 A\\ &= 1-2\sin^2 A\\ &= 2\cos^2 A-1\\ \text{又}\quad \tan 2A &= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(16)$$

系　$\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$,

$\cos A=1-2\sin^2\dfrac{A}{2}=2\cos^2\dfrac{A}{2}-1$ 等。

問1. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\pm\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2=1\pm\sin\theta$.　（複號同順）

〔2〕 $1+\cos A=2\cos^2\dfrac{A}{2}$,　$1-\cos A=2\sin^2\dfrac{A}{2}$.

〔3〕 $\tan(45^\circ+\alpha)-\tan(45^\circ-\alpha)=2\tan 2\alpha$.　〔東師〕

問2. 二次方程式 $x^2-2x\cot A-1=0$ ノ根ヲ求メ,之ヲ出來得ルダケ簡單ナル式ニ直セ。〔大工〕

40. 半角ノ三角函數。

$$\left.\begin{aligned}\text{前節ヨリ}\quad \sin\frac{1}{2}A &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\\ \cos\frac{1}{2}A &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\\ \text{從テ}\quad \tan\frac{1}{2}A &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

但シ根號前ノ符號ハ $\frac{1}{2}A$ ノ大サニヨリ適當ニ選定スルヲ要ス。

問1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\tan\dfrac{1}{2}A=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$.

〔2〕 $\sin 22^\circ 30'=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

〔3〕 $\cos 22^\circ 30'=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

〔4〕 $\tan 22^\circ 30'=\sqrt{2}-1$.

問2. 一邊 a ナル正八角形ノ面積ヲ求メヨ。又其外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

問3. 本節ノ公式ニヨリテ再ビ 15° 及ビ 75° ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求メヨ。

問4. 正十二角形ノ一邊ハ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$ ナルコトヲ證明セヨ。但シRハ外接圓ノ半徑トス。

41. 三倍角ノ三角函數。

$$\begin{aligned}\sin 3A &= \sin(2A+A) = \sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A\\ &= 2\sin A\cos^2 A+(1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A(1-\sin^2 A)+(1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A-2\sin^3 A+\sin A-2\sin^3 A.\end{aligned}$$

即チ $\quad \sin 3A = 3\sin A-4\sin^3 A$

同様ニ $\quad \cos 3A = 4\cos^3 A-3\cos A$

及ビ $\quad \tan 3A = \dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$ $\Bigg\}$ …… (18)

問1. $\sin^3 A=\frac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A)$

及ビ $\cos^3 A=\frac{1}{4}(3\cos A+\cos 3A)$ ヲ證明セヨ。

問2. $A=18^\circ$ トセバ, $\sin 2A=\cos 3A$ ナルコトヨリシテ $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ナルコトヲ證明シ, 且之ヨリシテ $\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ ヲ證明セヨ。

問3. 正十邊形ノ一邊ノ長サ(平面幾何學第198節問題)ヲ用ヒテ $\sin 18^\circ$ ヲ幾何學的ニ求メヨ。

問4. $\sin A=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$ 及ビ $\tan\frac{1}{2}A$ ヲ求ム。但シ $0^\circ<A<90^\circ$ トス。〔七高〕

問5. $\tan A=2.21$ ヨリ $\cos 2A$ ヲ求メヨ。〔盛農〕

問6. $\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

及ビ $\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ ヲ證明セヨ。

問7. 正五角形ノ一邊ハ $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ナルコトヲ證明セヨ。但シRハ外接圓ノ半徑トス。

問　題　6.

1. $\sin A=\frac{15}{17}$, $\cos B=\frac{4}{5}$ ナルトキ, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$ ノ値ヲ求メヨ。〔陸士〕

次ノ各等式ヲ證明セヨ。〔2 − 14〕

2. $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$. 〔海兵,仙工〕

3. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0.$ 〔商船〕

4. $\frac{1}{2}\cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^\circ=\sin 70^\circ.$ 〔海兵〕

5. $\cot\alpha\pm\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

6. $\cos 65^\circ + \cos 55^\circ + \cos 175^\circ = 0.$ 〔仙醫〕

7. $\cos^2 \alpha + \cos^2(120^\circ + \alpha) + \cos^2(120^\circ - \alpha) = \dfrac{3}{2}.$

8. $\dfrac{2\sin A - \sin 2A}{2\sin A + \sin 2A} = \tan^2\dfrac{A}{2}.$ 〔鹿農〕

9. $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$ 〔千醫〕

10. $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$ 〔海機,早大〕

11. $\sin(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ) = -\dfrac{\cos 2\alpha}{2}.$ 〔海機〕

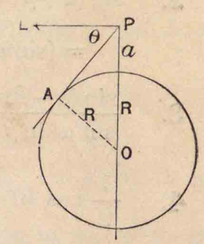
12. $\tan(45^\circ - A) + \tan(45^\circ + A) = 2\sec 2A.$ 〔水產〕

13. $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} + \dfrac{\cos 3B}{\cos B} = 4\cos(A+B)\cos(A-B).$

14. $\cos 4A = 1 - 8\cos^2 A + 8\cos^4 A.$ 〔農實〕

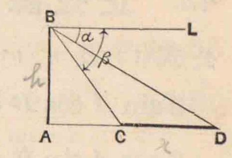
15. 高サ a 哩ノ山頂ヨリ地平線ヲ望ム線(地面ヘノ切線)ノ俯角ヲ θ トセバ地球ノ半徑ハ

$$\frac{a\cos\theta}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}$$ 哩ナリ。



16. △ABC ニ於テ C ヨリ邊 AB ヘ下セル垂線ノ長サヲ AB 及ビ $\angle A$, $\angle B$ ニテ求メヨ(對數式ニテ示セ)。

17. 海濱ニ在ル高サ h 尺ノ高樓ヨリ海上ニ在ル二船ガ同方位ニ見ヘ,且其俯角ガ夫々 α 及ビ β ナルヲ知レリ,然ラバ二船ノ距離如何。



18. 公式(12)及ビ(14)ヲ用ヒテ $\sin(A+B+C)$, $\cos(A+B+C)$ 及ビ $\tan(A+B+C)$ ヲ展開セヨ, 而シテ公式(18)ヲ誘導セヨ。

19. $A+B+C=180^\circ$ トシテ次ノ二件ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C.$

〔2〕 $\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$ ハ常ニ一定ノ値ヲ有ス。 〔商船〕

42. 正弦,餘弦ノ積。

公式(12)及ビ(13)ニ加法及ビ減法ヲ施セバ

$$\left.\begin{aligned}
2\sin A\cos B &= \sin(A+B)+\sin(A-B)\\
2\cos A\sin B &= \sin(A+B)-\sin(A-B)\\
2\cos A\cos B &= \cos(A+B)+\cos(A-B)\\
2\sin A\sin B &= \cos(A-B)-\cos(A+B)
\end{aligned}\right\}\cdots (19)$$

問 1. 次ノ二式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $2\cos 50^\circ \sin 30^\circ = \sin 80^\circ - \sin 20^\circ$

〔2〕 $\cos(45^\circ - A)\cos(45^\circ + A) = \frac{1}{2}\cos 2A$

問 2. 次式ノ値ヲ求メヨ。

$\cos 105^\circ \cos 225^\circ - \sin 105^\circ \sin 285^\circ$ 〔海機〕

43. 二角ノ正弦又ハ餘弦ノ和及ビ差。

前節ノ公式ニ於テ $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$ トセバ,

$A=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $B=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ナルヲ以テ,

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\
\cos\beta-\cos\alpha &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)
\end{aligned}\right\}\cdots (20)$$

要

問 1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ = \sin 20^\circ$. 〔盛農〕

〔2〕 $\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha) = \sqrt{3}\sin\alpha$. 〔陸經〕

〔3〕 $\dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$.

〔4〕 $\dfrac{\sin A + \sin 4A + \sin 7A}{\cos A + \cos 4A + \cos 7A} = \tan 4A$.

〔5〕 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

$$=4\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

問 2. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$

ヲ積ノ形ニ變ゼヨ。 〔高〕

問 3. $\cos A - \cos B\cos C + \sin B\sin C$ ヲ一項式ニ化セヨ。 〔商船〕

問 4. 次式ヲ簡單ニセヨ。

$\dfrac{\sin A\sin 2A+\sin 2A\sin 5A+\sin 3A\sin 10A}{\cos A\cos 2A+\sin 2A\cos 5A+\sin 3A\cos 10A}$. 〔明專〕

sinA

問 題 7.

1. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\sin(45^\circ - A)\sin(45^\circ + A) = \frac{1}{2}\cos 2A$

〔2〕 $\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A$ 〔水產〕

〔3〕 $\sin 2A\cos A+\cos 4A\sin A=\sin 3A\cos 2A$

〔4〕 $\sin 50^\circ+\sin 10^\circ-\cos 20^\circ=0$ 〔農實〕

〔5〕 $\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}$ 〔教養〕

〔6〕 $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}=\tan\dfrac{5}{2}x$

2. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ-\sin 30^\circ$ ヲ積ノ形ニ直セ。

3. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

〔1〕 $\sin A\sin(2B+A)-\sin B\sin(2A+B)$ 〔海機〕

〔2〕 $\dfrac{\sin 3A+\sin 2A}{\cos 3A-\cos 2A}$ 〔東商〕

〔3〕 $\dfrac{\cos\theta-\cos\dfrac{m+n}{m}\theta}{\sin\theta+\sin\dfrac{m+n}{m}\theta}$ 〔海機〕

4. 次ノ二式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$

$=4\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A+C}{2}\sin\dfrac{B+C}{2}$ 〔陸士〕

〔2〕 $\sin(B-C)+\sin(C-A)+\sin(A-B)$

$-+4\sin\dfrac{1}{2}(B-C)\sin\dfrac{1}{2}(A-B)\sin\dfrac{1}{2}(A-C)=0$ 〔醫專〕

5. $A+B+C=180^\circ$ トシテ次式ヲ證明セヨ。

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

又 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$ ヲ A, B, C ノ函數ノ積ニ變ゼヨ。 〔專檢〕

第三篇

斜角三角形

第一章

三角形ノ角ト邊トノ關係

44. 角ノ關係。

三角形ヲ ABC トセバ,其三ツノ角ハ A, B, C ニテ表ハシ,其對邊ハ夫夫 a, b, c ニテ表ハスコトハ既ニ言ヘリ。而シテ A, B, C 間ニハ次ノ關係アリ。

$$\left.\begin{aligned}
&A+B+C=180^\circ\\
&\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ\\
&\sin A=\sin(B+C)\\
&\cos A=-\cos(B+C)\\
&\sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C)\\
&\cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}(B+C)\\
&\tan\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}(B+C)\\
&\cot\frac{1}{2}A=\tan\frac{1}{2}(B+C)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

問. △ABC ニ於テ次ノ關係式アルコトヲ證明セヨ。

〔1〕 $\sin 2(A+B) = -\sin 2C,\quad \cos 3(A+B) = -\cos 3C$

及ビ $\sin\dfrac{3}{2}(A+B) = -\cos\dfrac{3}{2}C$

〔2〕 $\cos A\cos B + \cos C = \sin A\sin B.$

〔3〕 $\sin A+\sin B+\sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

〔東師,商船,山商〕

〔4〕 $\sin A+\sin B-\sin C = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

〔東北大農,上蠶,鹿農〕

〔5〕 $\cos A+\cos B+\cos C-1 = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

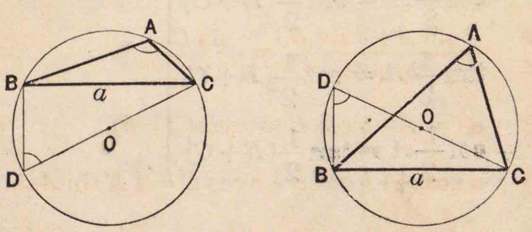
〔仙工,米工〕

45. 正弦法則。

△ABC ニ於テ次ノ公式アリ。

必要

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\ (=2R) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$



證明 C ヨリ外接圓ノ直徑 CD ヲ引カバ,

$A<90°$ ナルトキハ $\angle D = A,$

$A>90°$ ナルトキハ $\angle D = 180°-A.$

何レノ場合ニ於テモ

$$\sin D = \sin A.$$

然ルニ……… $BC = CD\sin D.$

依テ今外接圓ノ半徑ヲ R ニテ表ハストキハ,

$$2R = \frac{a}{\sin A}.$$

同樣ニ $2R = \dfrac{b}{\sin B}$ 及ビ $2R = \dfrac{c}{\sin C}.$

故ニ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

系 $a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,\quad c = 2R\sin C$

及ビ $a = \dfrac{b\sin A}{\sin B} = \dfrac{c\sin A}{\sin C}$ 等。

問1. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\dfrac{2\sin A+3\sin B}{2a+3b} = \dfrac{\sin C}{c}.$

〔2〕 $a\cos A+b\cos B = c\cos(A-B).$ 〔專檢〕

〔3〕 $a\cos A+b\cos B+c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C.$

〔大醫〕

問2.　角ノ比ガ $3:4:5$ ナル三角形ニ於テ最小邊ガ5尺ナルトキハ他ノ一邊ノ長サ如何。〔新醫〕

46. 三角形ノ各邊（第一餘弦法則）。

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

證明　$a = 2R\sin A = 2R\sin(B+C)$

$$= 2R(\sin B\cos C + \cos B\sin C)$$

$$= 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B$$

$$= c\cos B + b\cos C.$$

他ノ式モ同様ニシテ證明スルヲ得。

問。次ノ各式ヲ證明セヨ。

〔1〕　$a+b+c = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$

〔2〕　$a(\cos C - \cos B) = 2(b-c)\cos^2\dfrac{A}{2}$　〔商船〕

47. 邊ノ平方（第二餘弦法則）。

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

證明　公式(23)ノ第一,第二,第三式ノ兩邊ニ夫々 $a, -b, -c$ ヲ乘ジテ邊々相加フレバ

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A.$$

$$\therefore\quad a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A.$$

他ノ式モ同様ニシテ誘出スルヲ得。

系

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

問1.　$b = 12$尺, $c = 9$尺, $A = 120^\circ$ ナルトキ a ヲ計算セヨ。〔海機〕

問2.　公式(23)及ビ(24)ヲ圖ニヨリテ證明セヨ。

48. 二邊ノ和差ト第三邊トノ比。

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} \text{ 等} \cdots\cdots\cdots (26)$$

$$\text{及ビ}\quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} \text{ 等} \cdots\cdots\cdots (27)$$

證明　$$\frac{a+b}{c}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

同様ニ　$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}.$$

問。　$\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}$ ヲ證明セヨ。

49. 二邊ノ和ト差トノ比(正切法則)。

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tsn}\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}\ 等\ \cdots\cdots\cdots\cdots (28).$$

證明　$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$$

系　$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C\ 等\ \cdots (29).$$

50. 半角ノ正弦,餘弦及ビ正切。

公式(15)及ビ(25)ニ依テ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

今三角形ノ周圍ノ半(半周)ヲ s トセバ

$$a+b+c=2s,$$

$$a+b-c=2(s-c),$$

$$a-b+c=2(s-b)$$

ナルヲ以テ,之ヲ上式ニ代入スレバ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}.$$

$$\left.\begin{aligned}
\therefore\quad \sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\
同様ニ\quad \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\
\sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}
\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots (30)$$

又上ト同様ニシテ次ノ公式ヲ得。

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

従テ

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

問。次ノ各等式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}=s$

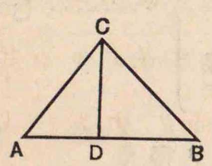
〔2〕 $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$.

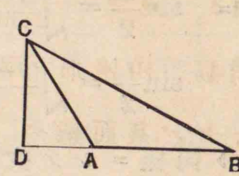
51. 三角形ノ面積。

面積ヲSニテ表ハサバ

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\quad(33)$$

及ビ $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ⋯⋯⋯⋯ (34)





證明 △ABC ニ於テ CD ヲ高サトセバ,

$$S=\frac{1}{2}AB.CD$$

ニシテ, $CD=b\sin A$ 又ハ $CD=b\sin(180°-A)$

ナルヲ以テ,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$ (第一篇8節應用ノ例三)

同様ニ $S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

又 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

之ニ公式(30)及ビ(31)ヲ用ヒテ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ヲ得。之ヲ Hero ノ公式ト云フ(平面幾何學108節)。

問1. 三邊ガ夫々17間, 24間, 35間ナル三角形ノ面積ハ何坪何合何勺ナルカ。〔醫專〕

問2. 三角形ノ二邊ガ定マルトキ其面積ノ最大ナルハ,其夾角ガ直角ナルトキナルコトヲ證明セヨ。

問3. $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$ ヲ證明セヨ。

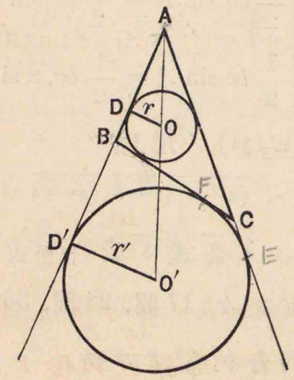
問4. 四邊形ノ兩對角線ヲ d, d' トシ其夾角ヲ θ トセバ,其面積ハ $\frac{1}{2}dd'\sin\theta$ ナリ。〔陸經〕

52. 三角形ノ內接圓,傍接圓ノ半徑。

內接圓ノ半徑ヲ r, 傍接圓ノ半徑ヲ r', r'' 及ビ r''' ニテ表ハストキハ

$$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad\cdots(35)$$

及ビ $$r'=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} \text{ 等} \quad\cdots\cdots(36)$$



證明　上ノ圖ニ於テ

$s = AD + BC = AD + a$

$$r=OD=AD\tan\frac{A}{2}=(s-a)\tan\frac{A}{2}$$

$AB+BF=$

及ビ $$r'=O'D'=AD'\tan\frac{A}{2}=s\tan\frac{A}{2}$$

$AD'=AE=AC+CF$

$\therefore AD'=s$

之ニ公式(32)ヲ用フレバ上ノ公式ヲ得。

問。三邊ガ 3, 5, 6 ナル三角形ノ內接圓ノ半徑ヲ求メヨ。　〔陸士〕

問　題　8.

1. $\triangle ABC$ ニ於テ $\sin(A+B)=\frac{1}{2}, \cos(A-C)=\frac{1}{2}$ ナルトキハ A, B, C ノ大サ各如何。

三角形ABCニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。(2—9)

2. $\sin A+\sin B>\sin C$.　〔陸士〕

3. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.　〔高,商船,長商〕

4. $b\cos A-a\cos B=\dfrac{b^2-a^2}{c}$.　〔商船〕

5. $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}$.　〔高〕

6. $\cos A:\cos B=b:a$ ナルトキハ, ABC ハ直角三角形ナルカ, 又ハ等脚三角形ナリ。　〔東商〕

7. 圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ弦ノ比ハ其點ニ於ケル切線ト此等ノ弦トガナス角ノ正弦ノ比ニ等シ。

8. 圓ノ內接四邊形 ABCD ニ於テ $\angle CAD=\alpha$, $BAC=\beta, ABD=\gamma$ ナラバ $CD=\dfrac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$ ナリ。

9. R (外接圓ノ半徑) $=\dfrac{abc}{4S}$ ヲ證明セヨ。

第二章
斜角三角形ノ解法

53. 斜角三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合アリ(第一篇第13節及ビ15節参照)

第一　二角ト其頂點間ノ邊トヲ知ル場合。

第二　二邊ト其夾角トヲ知ル場合。

第三　二邊ト其一對角トヲ知ル場合。

第四　三邊ヲ知ル場合。

54. 第一ノ場合。

既知部分ヲ　$a,\ B,\ C$　トセバ,

未知部分ハ　$A,\ b,\ c$　ナリ。

解　先ヅ　$A=180°-(B+C)$　……(1)

次ニ正弦法則ニヨリテ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\quad 及ビ\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

$\therefore\ \log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$　……(2)

及ビ　$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$　……(3)

問 1.　$a=142.46,\quad B=47°\,35',\ C=61°\,43'$　ナルトキ三角形ヲ解ケ。

問 2.　$A=32°\,47',\ B=44°\,17',\ b=372.67$　ナルトキ a ヲ計算セヨ。

55. 第二ノ場合。

既知部分ヲ　$a,\ b,\ C$　トセバ,

未知部分ハ　$A,\ B,\ c$　ナリ。

解　先ヅ　$\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$　……(1)

及ビ　$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C$ (公式29)　……(2)

ヨリ $\frac{1}{2}(A+B)$ 及ビ $\frac{1}{2}(A-B)$ ヲ知リ A 及ビ B ヲ得。

而シテ　$c=\dfrac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$ (公式26)　……(3)

ヨリ c ヲ得。

例　$a=456.12,\ b=296.86,\ C=74°\,20'$

トシテ三角形ヲ解ケ。

解　先ヅ　$\frac{1}{2}C=37°\,10'$　ナル故,

$$\frac{1}{2}(A+B)=90°-37°\,10'=52°\,50'\quad\cdots\cdots(1)$$

次ニ　$a-b=159.26,\quad a+b=752.98$　ナル故,

$\log(a-b)=2.20211$　及ビ　$\log(a+b)=2.87678$

又 $\log\cot\dfrac{C}{2} = 0.12026$ （表ヲ用ヒ） ナル故，

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-B) = \log(a-b) - \log(a+b) + \log\cot\frac{1}{2}C$$

ヨリ

$$\begin{aligned} \log(a-b) &= 2.20211 \\ -\log(a+b) &= \bar{3}.12322 \\ \log\cot\tfrac{1}{2}C &= 0.12026 \\ \hline \log\tan\tfrac{1}{2}(A-B) &= \bar{1}.44559 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &299 \cdots\cdots 15^\circ 30' \\ &260 \cdots\cdots\cdots 5' \\ \hline &\tfrac{1}{2}(A-B) = 15^\circ 35' \cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

35.8

依テ(1)及ビ(2)ヨリ $A = \underline{\underline{68^\circ 25'}}$, $B = \underline{\underline{37^\circ 15'}}.$

25.8 14.2

次ニ $\log\sin\dfrac{1}{2}C = \bar{1}.78113$

及ビ $\log\cos\dfrac{1}{2}(A-B) = \bar{1}.98374$ ナル故，

$$\log c = \log(a+b) + \log\sin\frac{1}{2}C - \log\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

ヨリ

$$\begin{aligned} \log(a+b) &= 2.87678 \\ \log\sin\tfrac{1}{2}C &= \bar{1}.78113 \\ -\log\cos\tfrac{1}{2}(A-B) &= 0.01626 \\ \hline \log c &= 2.67417 \end{aligned}$$

答 $\begin{cases} A = 68^\circ 25' \\ B = 37^\circ 15' \\ c = 472.24 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &413 \cdots\cdots\cdots 4722 \\ &4 \cdots\cdots\cdots\cdots 4 \\ \hline &c = \underline{\underline{472.24}} \end{aligned}$$

問. $a = 522$, $b = 320$, $C = 34^\circ 22'$ トシテ三角形ヲ解ケ。 ［七高］

注意 上ノ解法ニ於テハ $a>b$ ト假定セリ，$a<b$ ナル場合モ同様ナリ。

又 c ヲ求ムルニハ第45節系又ハ公式(27)ニヨルモ可ナレドモ上ノ如クスルヲ良シトス。

56. 第三ノ場合。

既知部分ヲ a, b, A トセバ

未知部分ハ B, C, c ナリ。

解 先ヅ $\sin B = \dfrac{b\sin A}{a}$ ……………（1）

ヨリ B ヲ知リ， $C = 180^\circ - (A+B)$ ………（2）

ヨリ C ヲ知リ， $c = \dfrac{a\sin C}{\sin A}$ ……………（3）

ヨリ c ヲ得。

吟味 此場合ハ正弦ニヨリテ一角ヲ定ムルヲ以テ一般ニ二ツノ値ヲ得，ソレ等ヲ共ニ採用スベキ場合アリ，又其中一ツヲ採用スベキ場合アリ，又一ツヲモ算出シ得ザル不可能ノ場合アリ。依テ次ニ之ヲ細論スベシ。

[1] $A>90^\circ$ ナルトキ。

（イ） $\underline{a<b}$ 或ハ $\underline{a=b\text{ ナルトキ}}$ ハ $A<B$ 或ハ

$A=B$ ニシテ二角 A, B ガ共ニ鈍角トナルベキ故問題ハ不可能ナリ。

(ロ) $a>b$ ナルトキハ, $A>B$ ニシテ B ノ値トシテハ(I)ヨリ得ル二ツノ値ノ中鋭角ノミヲ採用スルヲ得, 故ニ解答ハ唯一ツアリ。

[2] $A=90°$ ナルトキ。(第一篇第15節第二參照)

(イ) $a<b$ 或ハ $a=b$ ナルトキハ, $A<B$ 或ハ $A=B$ ナルベキヲ以テ問題ハ不可能ナリ。

(ロ) $a>b$ ナルトキハ, $A>B$ ニシテ B ノ値トシテハ(I)ヨリ得ル鋭角ノミヲ採用スルヲ得, 故ニ解答ハ唯一ツアリ。

[3] $A<90°$ ナルトキ。

(イ) $a>b$ 或ハ $a=b$ ナルトキハ, $A>B$ 或ハ $A=B$ ナル故, B ノ値トシテ(I)ヨリ得ル鋭角ノミヲ採用スルヲ得,故ニ解答ハ唯一ツアリ。

(ロ) $a<b$ ナルトキハ, $A<B$ ナル故 B ハ鋭角ニテモ又鈍角ニテモ可ナリ。然レドモ此場合ニハ(I)ノ右邊ガ1ヨリ大ナルコトアルヲ以テ更ニ次ノ吟味ヲ要ス。

(i) $b\sin A<a$ ナルトキ。

此場合ニハ(I)ヨリ得ル B ノ値ハ二ツ共採用スルコトヲ得, 而シテ C 及ビ c ノ値モ亦從テ夫々二ツアリ。故ニ解答ハ二ツアリ

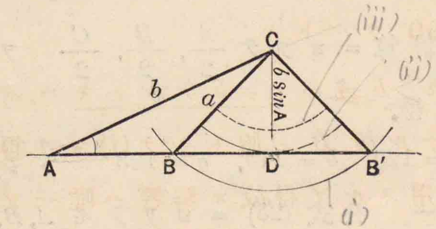
此場合ヲ**兩意ノ場合**ト云フ。

(ii) $b\sin A=a$ ナルトキ。

此場合ニハ B ノ値ハ直角ナリ。故ニ解答ハ唯一ツアリ。

(iii) $b\sin A>a$ ナルトキ。

此場合ニハ $\dfrac{b\sin A}{a}>1$ ナル故 B ノ値ナシ故ニ問題ハ不可能ナリ。



注意 學生ハ上ノ圖ニヨリ以上ノ吟味ガ幾何等ニ於ケル本題ノ作圖ノ吟味ニ符合スルコトヲ確ムベシ。

問. 次ノ各場合ニ三角形ヲ解ケ。

(1) $a=250$尺, $c=125$尺, $A=120°$

〔2〕 $A=30^\circ,\ a=3,\ b=3\sqrt{2}$ 〔陸經〕

〔3〕 $c=\sqrt{2}$ 米, $b=1$ 米, $B=30^\circ$

57. 第四ノ場合。

既知部分ヲ $a,\ b,\ c$ トセバ

未知部分ハ $A,\ B,\ C$ ナリ。

解 公式
$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$
$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$
$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ヨリ對數計算ニヨリテ $\frac{A}{2},\ \frac{B}{2},\ \frac{C}{2}$ ヲ得,從ツテ $A,\ B,\ C$ ヲ得。

問。 $a=123,\ b=113,\ c=103$ トシテ解ケ。

注意一。 公式 (25) ニヨリテモ A, B, C ヲ求メ得レドモ此式ハ對數計算ニ適セズ。又公式 (30) 或ハ (31) ヲ用ヒ得レドモ上ノ公式ヲ用フルヲ最良トス。其故ハ此公式ニヨレバ唯四數 $s,\ s-a,\ s-b,\ s-c$ ノ對數ニテ足レバナリ。

注意二。 上ノ計算ノ結果三ツノ角ノ和ハ

180° トナルベキモノナレドモ實際ニ於テハ然ルコト稀ナリ,コレ對數表ヲ用フルヨリ起ル誤差ナリ。本章ノ計算ノ結果ハ皆近似數ナリ。

問題 9.

次ノ各部分ヲ知リテ三角形ヲ解ケ。(1−5)

1. $B=60^\circ40',\ C=59^\circ10',\ a=10.62$ 〔東商〕

2. $B=82^\circ20',\ C=40^\circ20',\ b=479$

3. $a=20.71,\ b=18.87,\ C=55^\circ12'$

4. $a=317,\ b=533,\ c=510$

5. $a=3(\sqrt{3}-1),\ c=2,\ C=75^\circ$

6. $B=30^\circ,\ c=150,\ b=50\sqrt{3}$ ナル條件ニ適合スル二ツノ三角形ノ中,一ツハ二等邊三角形,一ツハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ。且大ナル三角形ノ第三邊ヲ見出セ。 〔農實〕

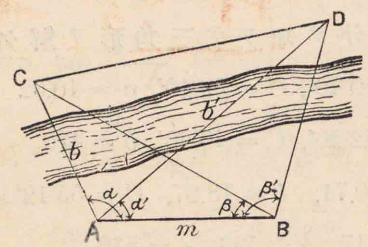
7. $A=45^\circ,\ B=105^\circ,\ AB=c$ トシテ BC 及ビ CA ヲ根式ニテ表セ。

8. $a=87.6,\ b=68.3,\ c=74.7$ トシテ面積,内接圓,傍接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

第三章

測量上ノ應用問題

58. 近ヅキ得ザル二點間ノ距離ヲ求ムルコト。



解 C, D ヲ二點トシ之ヲ望ミ得ル適當ナル二點 A, B ヲ選ビ基線 $AB(m)$ ヲ測リ,
A點ニ於テ $\angle BAC(\alpha)$ 及ビ $BAD(\alpha')$ ヲ測リ,
又B點ニ於テ $\angle ABC(\beta)$ 及ビ $ABD(\beta')$ ヲ測ルベシ。

然ラバ $\triangle ABC$ ヨリ $AC=\dfrac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,

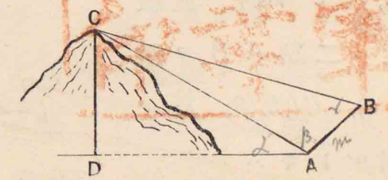
$\triangle ABD$ ヨリ $AD=\dfrac{m\sin\beta'}{\sin(\alpha'+\beta')}$

ヲ得, 依テ $\angle CAD=\alpha-\alpha'=A$ トシ, $\angle ACD$ 及ビ ADC ヲ夫々 C 及ビ D トセバ, $\triangle ACD$ ヨリ

$$CD=\frac{(AC+AD)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(C-D)}$$ ヲ得。

注意 四點 A, B, C, D ガ同一ノ平面上ニ在ラザルトキハ $\angle CAD$ ハ實測スルヲ要ス。

59. 山ノ高サヲ求ムルコト。



解 先ヅ適當ナル基線 $AB(m)$ ヲ測リ, A ニ於テ山頂ノ仰角 $CAD(\alpha)$ ト $\angle CAB(\beta)$ トヲ測リ, 次ニ B ニ於テ $\angle ABC(\gamma)$ ヲ測ルベシ, 然ルトキハ $\triangle ABC$ ヨリ

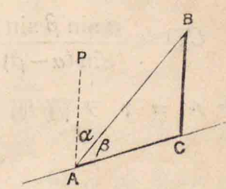
$$AC=\frac{m\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

然ルニ $CD=AC\sin CAD$ ナルヲ以テ

$$CD=\frac{m\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

問1. $\angle CAB=105°$, $CBA=30°$, $CAD=60°$, $AB=30$ 米ナルトキハ煙突(CD)ノ高サ幾何。〔專檢〕

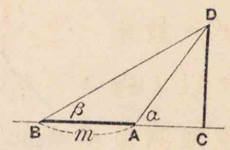
問2. 坂路上ニ立ツ塔BCアリ,今坂路上ノ一點 A ニ於テ塔頂及ビ塔脚ヲ望ミ $\angle BAP(\alpha)$ 及ビ $BAC(\beta)$ ヲ得タリ塔ノ高サヲ



求メヨ。

但シ AC ハ測リ得ルモノトス。

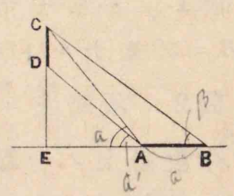
問3. 河ノ對岸ニ立ツ樹木 CD ノ高サヲ測ラントシ其根ト同水平面上ニ在リテ且 C, A, B ガ同一直線上ニ在ル樣ニ二點 A, B ヲ選ビ, $\angle CAD(\alpha)$, $CBD(\beta)$ 及ビ $AB(m)$ ヲ測ルトキハ



$$CD=\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$ ナルコトヲ證明セヨ。

又若シ C, A, B ガ同一直線上ニ在ルモ同一水平面上ニ在ラザルトキハ如何。

問4. 塔 ED 上ニ立ツ旗竿 CD アリ,今其長サヲ測ラントト欲シ,塔底ト同一水平面上ノ一點 A ニ於テ仰角 $CAE(\alpha)$ 及ビ $DAE(\alpha')$ ヲ測リ,更ニ基線 $AB(a)$ ヲ退キテ再ビ仰角 $CBE(\beta)$ ヲ測ルトキハ,



$$CD=\frac{a\sin\beta\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha'}$$

ナルコトヲ證明セヨ。〔専門〕

60. 三角測量。 大ナル地形ヲ測定スルニハ其地面上ニ在ル若干ノ重要ナル地點ヲ選ビ,是等ヲ頂點トスル數多ノ三角形ヲ以テ地面ヲ蔽フモノト考フ,而シテ是等ノ三角形ノ邊中最モ便宜ナル數邊ハ之ヲ基線トスル爲メニ金屬製ノ直銲ヲ以テ極メテ精密ニ其長サヲ測定ス。我國陸軍陸地測量部ニ於テハ全國ノ地圖ヲ作ルタメニ次ノ基線ヲ測定セリ。

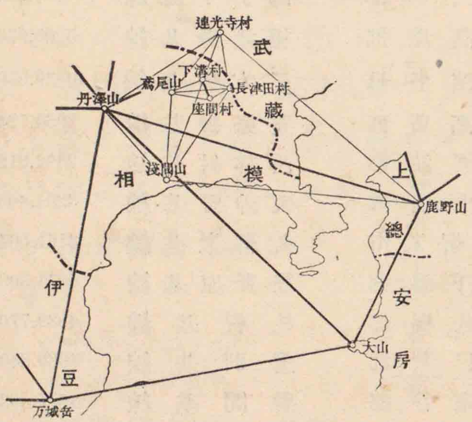
羽前國最上郡	鹽野原基線	5129.587米
信濃國上高井郡	須坂基線	3291.912米
陸奥國三戸郡	鶴子平基線	4006.031米
相摸國高座郡	相摸野基線	5209.970米
遠江國濱名郡	三方原基線	10839.958米
近江國高島郡	饗庭野基線	3065.724米
阿波國阿波郡	西林村基線	2832.212米
伯耆國東伯郡	天神野基線	3301.805米
筑後國久留米市	久留米基線	3161.007米
大隅國肝屬郡	笠野原基線	5875.509米
石狩國札幌郡	札幌基線	4539.770米
根室國目梨郡	薫別基線	4069.850米
北見國宗谷郡	聲問基線	2677.503米

是等ノ基線ト各地點ニ於テ測定シタル他ノ兩地點間ノ水平面上ニ於ケル角トヲ以テ順次間接

ニ三角形ノ解法ヲ用ヒテ各地點間ノ距離ヲ測定スルモノトス。

上ノ如キ測量ヲ**三角測量**ト云ヒ,三角形ノ大小ニヨリ一等,二等,三等ノ別アリ,又地面ヲ蔽ヘル三角形ノ群ヲ**三角網**ト云フ。但シ大地測量ノ如ク地面上甚遠キ諸點間ノ距離ヲ測ルトキニハ,之ヲ直線トナスベカラズ球面ノ大圓弧ヨリナル所謂球面三角形ノ邊トナスベシ,從テ其計算ハ**球面三角法***ノ法則ニヨラザルベカラズ。

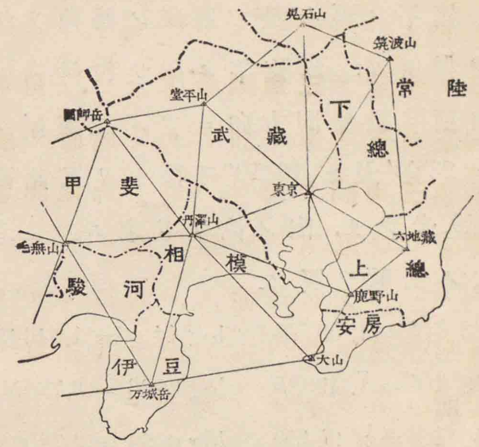
相撲野附近三角網ノ圖



基線ヲ一邊トスル小三角形ヨリ次第ニ三角形ヲ擴大シテ遂ニ一等三角形ヲ作ルヲ示ス。

* 三角法ヲ二ツニ分チ，平面上ノ三角形ヲ論ズルモノヲ平面三角法ト云ヒ，球面三角形ニ關スルモノヲ球面三角法ト云フ。

東京附近一等三角網ノ圖



問題 10.

1. 某港ニ碇泊セル船ノ距離ヲ知ラント欲シテ海岸ニ於テ長サ c 米ノ基線ヲ測リ其兩端ノ點ニ於テ船ノ一點ノ方向ガ基線トナセル角ヲ測リテ α 及ビ β ヲ得タリ,然ラバ船ト基線トノ距離ヲ見出ス式如何。

2. 海濱ニ聳ユル山ノ高サ CD ヲ知ラント欲シ相距ルコト 365 米ナル二船 A, B ニ於テ

$\angle BAC = 67°16'$, $ABC = 54°20'$, 仰角 $CAD = 35°30'$

ヲ測リ得タリ，山ノ高サヲ問フ。

3.　高サ h 尺ノ塔頂ヨリ,之ト同一ノ地平面上ニ立テル旗竿ノ頂上及ビ基底ノ俯角ヲ測リテ α 及ビ β ヲ得タリ，此旗竿ノ高サ如何。

4.　山頂ニ於テ同方向ニアル二家屋ノ俯角ヲ測リシニ $23°20'$ 及ビ $18°10'$ ヲ得タリ,又此兩家屋ノ距離ハ 440 米ナリ，山ノ高サヲ求ム。

但シ次ノ對數ヲ與フ。　〔陸士〕

$$\log\sin 23°\,10' = \bar{1}.59778,\qquad \log 44 = 1.64345,$$
$$\log\sin 18°\,10' = \bar{1}.49385,\qquad \log 6033 = 3.78053,$$
$$\log\sin 5°\,10' = \bar{2}.95450,\qquad \log 6034 = 3.78061.$$

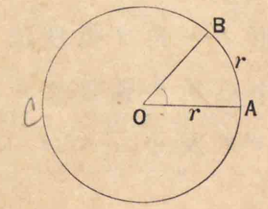
5.　N 15° W　ノ方位ニ向ヒ一直線ノ道路ヲ進行セル人北ニ當リテ一ツノ塔ヲ望ミ，更ニ200米進ミタルトキ此塔ヲ東北ノ方位ニ見タリト云フ,然ラバ此塔ヲ北ニ見タル位置ヨリ塔マデノ距離幾何ナルカ。但シ米ノ小數第一位マデ求メ其下四捨五入セヨ。　〔海機〕

附録第一

弧度法, 反三角函數, 三角方程式

1. 半徑ト等長ナル弧上ニ立ツ中心角。

弧度法。



圓 ABC ニ於テ半徑 OA ヲ r トシ,弧 AB ヲ r ニ等シトセバ, 中心角ハ其弧ニ比例スル故,

$$\angle AOB : 360^\circ = r : 2\pi r.$$

$$\therefore \quad \angle AOB = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ.2958 \text{弱} = 206265'' \text{弱}.$$

此角ハ斯ク一定ノ大サヲ有スルヲ以テ之ヲ測角ノ單位トスルコトアリ。而シテ此角單位ヲ**れーぢあん**ト云ヒ,此測角法ヲ**弧度法**ト云フ。

$\widehat{AB} = \theta \times OA$

系 四直角ハ2πれーぢあんニ, 2直角ハπれーぢあんニ當ル。

而シテ之等ヲ表ハスニハ其測度ノミヲ記ス。

卽チ　$360^\circ = 2\pi$,　$180^\circ = \pi$,　$90^\circ = \frac{\pi}{2}$,　$60^\circ = \frac{\pi}{3}$　等,

一般ニ　$$n^\circ = \frac{n\pi}{180}$$ radian　ナリ。

問1.　45°, 30°, 15° 及ビ $22^\circ 30'$ ヲ各弧度法ニテ表ハセ。

問2.　$\frac{7\pi}{6}$ 及ビ $\frac{5\pi}{12}$ ハ各幾度ニ當ルカ。

問3.　正多角形ノ一角ヲ弧度法ニテ表ハセ。

問4.　半徑 r, 中心角 θ (弧度)ナル扇形及ビ弓形ノ面積ハ夫々 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 及ビ $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$ ナルコトヲ證明セヨ。

問5.　次ノ各式ヲ證明セヨ。

(1)　$\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \cos^2 B} = \tan\frac{3\pi}{4}$　〔陸士〕

(2)　$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$　〔京醫〕

(3)　$\cot\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{8} = 2$　〔陸士〕

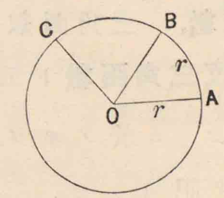
(4)　$\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$　〔農實〕

問6.　$A+B+C=\pi$　ナルトキハ,

$$\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \sin B \cos C$$

ナルコトヲ證明セヨ。　〔陸經〕

2.　半徑 r ナル圓ニ於テ長サ a ナル弧上ニ立ツ中心角ノ弧度ヲ求ムルコト。



解　圓ABCニ於テ $\widehat{AB} = r$, $\widehat{AC} = a$　トシ, 所要ノ弧度ヲ x トセバ

$$\angle AOC : \angle AOB = \widehat{AC} : \widehat{AB}$$　ナル故,

$$x : 1 = a : r$$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{r}$$

故ニ $\angle AOC$ ハ $\frac{a}{r}$ れーぢあんニシテ,其度數,秒數ヲ夫々 d, s トスレバ

$$d = \frac{a}{r} \times 57.2958, \quad s = \frac{a}{r} \times 206265.$$

又特ニ $r=1$ トセバ $x=a$ ナル故, 單位圓ニ於テハ中心角ト其弧トハ其測度ヲ同ジクス。

故ニ角ノ三角函數ヲ**弧ノ三角函數**トモ云フ。

問.　身長5尺4寸ノ兵士ノ直立セルヲ18町24間ノ距離ヨリ見タルトキノ身長ノ視角ヲ弧度法

ニテ求メヨ。 〔陸士〕

3. 反三角函數。 三角函數ニ於テ其角ヲ其三角函數ノ値ノ**反三角函數**ト云フ。

例ヘバ $y=\sin x$ ニ於テ x ヲ y ノ**反正弦**ト云ヒ，之ヲ次ノ如ク記ス。

$$x=\arcsin y \quad \text{或ハ} \quad x=\sin^{-1}y.$$

同様ニ $\cos\theta=c$ 及ビ $\tan\theta=t$ ナルトキハ θ ヲ夫々 c 及ビ t ノ**反餘弦**及ビ**反正切**ト云ヒ，夫々之ヲ $\theta=\arccos c$ 或ハ $\theta=\cos^{-1}c$

及ビ $\theta=\arctan t$ 或ハ $\theta=\tan^{-1}t$

ト記ス，他ノ函數ニ於テモ之ニ準ス。

故ニ例ヘバ $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ナル故，

$$30^\circ=\sin^{-1}\frac{1}{2} \quad ナリ。$$

同様ニ $30^\circ=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$ 等ナリ。

注意一。 $\sin^{-1}y$, $\tan^{-1}t$ 等ハ代數學ニ於ケルト其意義ヲ異ニス。

注意二。 反三角函數モ亦六種アリ。

注意三。 反三角函數ヲ**逆三角函數**トモ云フ。

問1. 次式ノ値ヲ求ム。

$$\sin^{-1}0+2\sec^{-1}\infty-3\tan^{-1}\sqrt{3}.$$ 〔高〕

但シ各反三角函數ハ正ニシテ且直角ヨリ大ナラズトス(次ノ問題ニ於テモ亦然リ)。

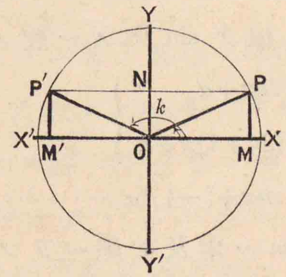
問2. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=90^\circ$ 〔海經〕

〔2〕 $\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{4}{3}=\frac{\pi}{2}$

〔3〕 $\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$

4. $\sin\theta=k$ ニ適スル θ ノ總ベテノ値ヲ求ムルコト。但シ $-1\leqq k\leqq 1$ トス。



解 或角ノ正弦ノ値ハ唯一ツナレドモ，逆ニ同ジ値ヲ正弦トスル角ハ無數アリ(第二篇第27節)。

今單位圓Oヲ畫キ,互ニ直交スル直徑XOX′,YOY′ヲ引キ YOY′ 上ニ中心Oヨリ k ニ等シキ線分ON(圖ニハ k ヲ正トス)ヲ取リ,N ヲ過ギ XOX′ ニ平行ナル弦PP′ヲ引クトキハ, OX ト OP ノ爲ス總ベテノ角ノ正弦ハ MP ニシテ, OX ト OP′ トノ爲ス總ベテノ角ノ正弦ハ $M'P'$ ナリ,而シテ共ニ k ニ等シ。而シテ此等ノ角ノ外ニハ k ニ等シキ正弦ヲ有スル角ナシ。

今 $\angle XOP$ ヲ α ニテ表ハストキハ, $\angle XOP'$ ハ $\pi-\alpha$ ナリ。依テ OX ト OP ノ爲ス總ベテノ角ハ

α ニ 360° ノ整數倍ヲ加ヘタルモノ卽チ $(2n\pi+\alpha)$ ニテ表ハサレ, OX ト OP′ トノ爲ス總ベテノ角ハ

$\pi-\alpha$ ニ 360° ノ整數倍ヲ加ヘタルモノ $(2n+1)\pi-\alpha$ ニテ表ハサル。依テ $\sin^{-1}k$ ノ一般ノ値ヲ θ トセバ

$$\left.\begin{aligned}\theta&=2n\pi+\alpha\\ \text{及ビ}\quad \theta&=(2n+1)\pi-\alpha\end{aligned}\right\}$$

卽チ　$\theta=m\pi+(-1)^m\alpha$ .... (1)

但シ n 及ビ m ハ零及ビ總ベテノ整數ヲ表ハスモノトス。

正負

問1.　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ ニ適スル θ ノ一般ノ値如何。

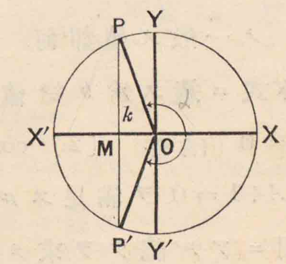
αハ正弦ノ其値ニ対スル角ノ中ノ｜ノ最小ノモノヲ意味ス ∴又ハ正弦共ニ
値ヲトルモノトス

又其中ニテ 360° ヨリ小ナル θ ノスベテノ正角ヲ求メヨ。　〔海兵〕

問2.　次式ニ適スル θ ノ値如何。

〔1〕 $\sin\theta=1$　　〔2〕 $\sin\theta=0$

5. $\cos\theta=k$ ニ適スル θ ノ總テノ値ヲ求ムルコト。但シ $-1\leqq k\leqq 1$ トス。



解　單位圓Oニ於テ直徑XOX′上ニOMヲ k(圖ニ於テハ k ヲ負數トス)ニ等シク取リ,Mヲ過ギXOX′ニ垂直ナル弦PMP′ヲ引ケ,然ルトキハ $\angle XOP$ ヲ α ニテ表ハストキハ $\angle XOP'$ ハ $-\alpha$ ニシテ此 α 及ビ $-\alpha$ ニ 2π ノ任意整數倍ヲ加ヘタル角ノ餘弦ハ皆 OM ニシテ卽チ k ニ等シ,而シテ此外ニ k ヲ餘弦トスル角ナシ。

故ニ $\cos^{-1}k$ ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表サバ

$$\theta = 2n\pi \pm \alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

但シ n ハ零又ハ正或ハ負ノ整數トス。

コレ　$\cos\theta = k$　ニ適合スル總テノ値ナリ。

問 1.　$2\cos\theta = -\sqrt{3}$　ニ適スル θ ノ一般ノ値如何。

問 2.　表ヲ用ヒテ　$\cos\theta = 0.5640$　ヲ滿足スル θ ノ値ヲ求メヨ。

問 3.　$\cos^{-1}0$　ノ一般ノ値如何。

問 4.　次ノ各式ニ適スル θ ノ値如何。

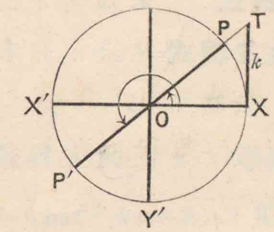
訂正　〔1〕 $\cos 3\theta = 0$　〔海機〕　〔2〕 $\cos^2\theta = 1$　$\left.\begin{array}{l}2n\pi \\ (2n+1)\pi\end{array}\right\} = n\pi$

問 5.　$2\cos 3A + 1 = 0$ ヲ滿足スル A ノ値ノ中 $0°$ ト $180°$ トノ間ニアル總テヲ求メヨ。　〔東鑑〕

40, 80, 160

6. $\tan\theta = k$ ニ適スル θ ノ總テノ値ヲ求ムルコト。但シ k ハ任意ノ數トス。

解　單位圓ノ直徑　XOX′　ノ端 X ニ於テ垂線 XT　ヲ引キ其長サヲ k（圖ニ於テハ k ヲ正トス）ニ等シク取リ直線 TO ヲ引キ P, P′ ニ於テ圓周ニ交ラシムレバ，∠XOP 及ビ ∠XOP′ 及ビ之ニ 2π ノ



任意ノ整數倍ヲ加ヘタルモノノ正切ハ皆 XT 即チ k ニ等シ。依テ今 $\angle XOP$ ヲ α ニテ表ハストキハ $\angle XOP'$ ハ $\pi+\alpha$ ニシテ所要ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表ハサバ，

$$\theta = 2n\pi + \alpha$$

及ビ　$\theta = 2n\pi + \pi + \alpha = (2n+1)\pi + \alpha$

ナリ，之ヲ一式ニ纏ムレバ

$$\theta = m\pi + \alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

但シ n 及ビ m ハ零及ビ總ベテノ整數ヲ表ハスモノトス。

問 1.　次ノ各式ニ適スル θ ノ値ヲ求メヨ。

$\theta = n\pi \pm 60$

$\tan\theta = 1$,　　$\tan^2\theta = 3$,　　$\log\tan 3\theta = 0$.

問 2.　$\tan 10\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ニ適合スル總テノ鋭角ヲ求メヨ。

7.　三角方程式。　未知角ノ三角函數ヲ含メル方程式ヲ**三角方程式**ト云ヒ,其未知角ヲ求ムルコトヲ其**解法**ト云フ。

前章ニ於テ簡單ナル三角方程式

$$\sin\theta=k,\quad \mathrm{con}\,\theta=k,\quad \tan\theta=k$$

等ヲ解キタリ,　今次ニ稍複雜ナルモノノ解法ヲ示サン。

例一。　$\cos 2\theta=\cos\theta$　ヲ解ケ。

解　上ノ第5節ノ公式(2)ニヨリ

$$2\theta=2n\pi\pm\theta$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi \quad 或ハ \quad \theta=\frac{2}{3}n\pi.$$

但シnハ任意ノ整數又ハ0トス,　以下皆同ジ。

問。　$\tan x=\tan 5x$　ヲ解ケ。　但シ　$0^\circ<x<360^\circ$

例二。　$2\cos^2\theta+3\sin\theta=3$　ヲ解ケ。　〔教養〕

解　$\cos^2\theta$　ノ代リニ　$1-\sin^2\theta$　ヲ置キ

$$2-2\sin^2\theta+3\sin\theta=3.$$

整頓スレバ　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0.$

$$\therefore\quad \sin\theta=1 \quad 或ハ \quad \frac{1}{2}.$$

依テ　$\sin\theta=1$　ヨリ　$\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}.$

及ビ　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　ヨリ　$\theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}.$

問1.　$2\sin^2\theta-5\cos\theta-4=0$　ヲ解ケ。　〔長醫〕

問2.　$\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$　ヲ解ケ。

問3.　$4\cos^2 x+\cos^2 2x=1$　ヲ解ケ。〔東北大工專〕

例三。　$\cos 2\theta-\cos 4\theta=\sin\theta$　ヲ解ケ。

解　左邊ヲ積ノ形ニ變ズレバ

$$2\sin 3\theta\sin\theta=\sin\theta$$

$$\therefore\quad \sin\theta=0 \quad 或ハ \quad \sin 3\theta=\frac{1}{2}.$$

依テ　$\sin\theta=0$　ヨリ　$\theta=n\pi.$

及ビ　$\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$　ヨリ　$\theta=\dfrac{1}{3}\left\{n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\right\}.$

問1.　$\cos x+\cos 7x=\cos 4x$　ヲ解ケ。　〔高〕

問2.　$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$　ヲ解ケ。〔秋鑛,山商〕

問3.　$\sin\theta+\sin 2\theta=\cos\theta+\cos 2\theta$　ヲ解ケ。〔商船〕

例四。　$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$　ヲ解ケ。

解　$\sin\theta$　ヲ右邊ヘ移シ兩邊ヲ平方シテ解クコトヲ得レドモ,斯クスレバ無緣根ヲ誘出スル恐レアルヲ以テ,次ノ如クスルヲ便ナリトス。

兩邊ヲ2ニテ割リ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}.$$

$$\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta-\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}.$$

問。 次ノ方程式ヲ解ケ。

〔1〕 $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$

〔2〕 $\sin x-\cos x=1$ (但シ $0^\circ<\theta<180^\circ$). 〔上蠶〕

例五。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\sin(x-y)=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解 (1)ヨリ $x+y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$

(2)ヨリ $x-y=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{6}.$

$$\therefore\quad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\left\{(2n+m)\pi\pm\frac{\pi}{4}+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right\}\\ y&=\frac{1}{2}\left\{(2n-m)\pi\pm\frac{\pi}{4}-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right\}\end{aligned}\right.$$

注意 若シ x, y ヲ共ニ正ノ鋭角ト假定セバ

$$0^\circ<x+y<180^\circ \quad 及ビ \quad 0^\circ<x-y<90^\circ$$

ナルベキヲ以テ

$$x+y=\frac{\pi}{4} \quad 及ビ \quad x-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{24}\pi,\quad y=\frac{1}{24}\pi.$$

問。 $x+y=90^\circ$, $\sin x+\cos y=\sqrt{3}$ ヲ解ケ。

但シ x 及ビ y ハ共ニ 180° ヨリ小ナル正角トス。

問題

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $\sin A\cos A=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$ 〔教養〕

2. $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$ (但シ $90^\circ<x<180^\circ$). 〔商船〕

3. $\tan^2\theta-4\tan\theta+1=0.$ 〔商船〕

4. $\cos 3\theta+4\cos^2\theta=0.$ 〔東工〕

5. $3\tan^2\theta=1+4\sin^2\theta.$

6. $\cos 5\theta+\cos 3\theta+\cos\theta=0.$

7. $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ 〔大工,高〕

8. $\tan\theta+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2.$ 〔海兵〕

9. $3\operatorname{cosec}^2\theta - 8\cot\theta + 2 = 0$ ニ適スル鋭角 θ ノ値ヲ求メヨ。但シ次ノ對數ヲ與フ。

$\log\tan 30°\,57' = \bar{1}.77791,$

$\log\tan 30°\,58' = \bar{1}.77820,\ \log 6 = 0.77815$

10. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

〔1〕 $\sin(2x-y) = \cos(x+2y) = \frac{1}{2}$ 〔海機〕

〔2〕 $x+y = 150°,\ \tan x + \tan y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ 〔東工〕

〔3〕 $\sin(A+B) = -\frac{1}{2},\ \cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

但シ A, B ハ共ニ $360°$ ヨリ小ナル正角トス。

〔商船〕

11. 表ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$\sin^4 x + \cos^4 x = 0.8$

12. 二等邊三角形ノ底角ノ正弦ト餘弦トノ和ガ $\sqrt{2}$ ニ等シキトキハ頂角ノ大サ如何。

附録第二

補習問題

I. (第一篇ノ分)

1. $\frac{4}{3}\cot^2 30° + 3\sin^2 60° - 2\operatorname{cosec}^2 60° - \frac{3}{4}\tan^2 30°$ ノ値ヲ求メヨ。 〔専檢〕

2. $\sin^2 A - 2\cos A + \frac{1}{4} = 0$ ナルトキ A ノ値ヲ求メヨ。但シ A ハ正ノ鋭角ナリトス。 〔德工〕

3. $\triangle ABC$ ニ於テ $A=90°$, $AB=AC=1$ ナリ, 今 AB ヲ D マデ延長シテ $BD=BC$ ナラシムルトキ, AD 及ビ CD ノ長サヲ計算シ,コレニヨリテ $\sin 22°\,30'$, $\cos 22°\,30'$ 及ビ $\tan 22°\,30'$ ヲ求メヨ。

〔東師〕

4. 次ノ各恒等式ヲ證明セヨ。

[1] $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A\cos^2 A$ 〔東大農實〕

[2] $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$ 〔鹿農〕

[3] $\cos\alpha(1+2\tan\alpha)(\tan\alpha+2) = 2\sec\alpha + 5\sin\alpha$

〔東師〕

[4] $2\sin A\cos A + \sin^3 A\sec A + \cos^3 A\operatorname{cosec} A$

$= \tan A + \cot A$ 〔東商船〕

5. $3(\sin\theta-\cos\theta)^4+6(\sin\theta+\cos\theta)^2+4(\sin^6\theta+\cos^6\theta)$ ヲ簡單ニセヨ。〔明專〕

6. $\tan A$ ヲ以テ次式ヲ簡單ニ表ハセ。

$2\sec^2 A-\sec^4 A-2\operatorname{cosec}^2 A+\operatorname{cosec}^4 A$ 〔東商船〕

7. $\cos A=\cos x\sin C,\quad \cos B=\sin x\sin C$ ナルトキハ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$ ナルコトヲ證セヨ。

〔京城工〕

8. $\sin x+\sin^2 x=1$ ヲ滿足スル x ハ方程式 $\cos^2 x+\cos^4 x=1$ ヲモ滿足スルコトヲ證明セヨ。

〔京都工〕

9. 三ツノ邊ガ等比級數ヲナス直角三角形ノ二ツノ鋭角ノ餘弦ヲ求ム。〔神商船〕

10. 正四面體ノ各稜ヲ稜トスル二面角ノ大サヲ分ノ位迄(以下四捨五入)求メヨ。〔鐵道教習所〕

但シ $\cos 70^\circ 30'=0.3338$ ニシテ $10'$ ニ對スル表差 0.0027 ナリ。

11. 高サ 100 尺ノ丘上ニ直立セル塔ノ頂及ビ底ノ仰角ヲ某地點ニテ測リテ 60° 及ビ 45° ヲ得タリ, 塔ノ高サヲ求メヨ。〔東商船〕

12. 海上ノ一點ヨリ海岸ニアル絶壁上ニ直立セル高サ 150 尺ノ塔ノ頂點ト基點トノ仰角ヲ測リタルニ夫々 $60^\circ, 45^\circ$ ヲ得タリ,絶壁ノ高サヲ求ム。

〔神商船〕

13. 平地ニ直立セル樹木ノ正南ノ一地點ニ於テ梢ノ仰角ヲ測リテ 30° ヲ得,次ニ此地點ヨリ西ニ40間ヲ離レタル地點ニ於テ再ビ梢ノ仰角ヲ測リテ $22^\circ.5$ ヲ得タリ,樹木ノ高サハ何間ナルカ。

〔東大農實〕

14. 或高低ノアル土地ヲ測量セルニ,地上ニA, B, C ノ三點ヲ選ビ,點 A ノ正東方ニ點Bアリ,又 B ノ正北方ニ點 C アリ,點 A ニ於テ點 B ヲ望ミタルニ直線 AB ト點 A ニ於ケル水平面トナス角卽チ仰角ハ 8° ニシテ,同樣ニ點 B ニ於テ點 C ヲ望ミタルニ仰角ハ 15° ナリ,而シテ地面ニ沿ヒ直線的ニ測レル AB 間ノ距離ハ 55 間ニシテ同樣ニ BC 間ノ距離ハ 120 間ナリ,點 C ハ點 A ヨリ直立的ニ何尺高キカ。

又 AC 間ノ水平的距離ハ何間ナルカ。〔上高〕

但シ $\sin 8^\circ=0.139,\quad \cos 8^\circ=0.990,\quad \sin 15^\circ=0.259,$

$\cos 15^\circ=0.966$ トス。

II. (第二篇ノ分)

1. $\tan A = \dfrac{15}{8}$ ニシテ A ガ第三象限ノ角ナラバ, $\cos A$ ノ值如何。〔遞信官吏練習所〕

2. $\sin A = \dfrac{12}{13}$, $\cos B = \dfrac{7}{25}$ ナルトキ, $\sin(A+B)$ ノ數值如何。

但シ A, B ハ何レモ 90^0 ヨリ小ナル正角トス。〔東商船〕

3. $\sin A = \dfrac{4}{5}$, $\cos B = \dfrac{3}{5}$ ヲ與ヘ $\sin(A+B)$ 及ビ $\cos(A-B)$ ヲ求メヨ。〔大工〕

4. $\tan 15^0$ ノ值ヲ小數第五位マデ求メヨ。〔慈惠醫大豫〕

5. $\tan \alpha = -\dfrac{3}{4}$, $\tan \beta = \dfrac{7}{24}$ ナルトキ, $\sin(\alpha+\beta)$ ノ值ヲ求メヨ。

但シ α ハ第二象限ノ角, β ハ第一象限ノ角ナリトス。〔神商〕

6. $\sin A + \sin B = \dfrac{7}{5}$, $\sin A \sin B = \dfrac{12}{25}$ ナラバ $\sin(A+B)$ ノ數值如何。

但シ A, B ハイヅレモ 90^0 ヨリ大ニシテ 180^0 ヨリ

小ナリトス。〔神商船〕

7. $1+\tan(45^0+B) = \dfrac{2\tan C}{\tan C - 1}$ ナル關係アルトキハ, $\tan B \tan C = 1$ ナルコトヲ證明セヨ。〔神商〕

8. $\sin A = \dfrac{1}{5}$ ナルトキ $\cos 2A$ ノ值ヲ求メヨ。〔千園〕

9. A ヲ第二象限ノ角トシテ $\tan A = -\dfrac{4}{7}$ ナルトキ, $7\cos 2A + 4\sin 2A$ ノ值ヲ求ム。〔神商船〕

10. $\tan A = \dfrac{1}{5}$ ナルトキ, $\tan 2A$ 及ビ $\tan\dfrac{A}{2}$ ノ值ヲ求ム。

但シ四捨五入法ニヨリテ小數第三位マデ計算スベシ。〔鹿農〕

11. α 及ビ 2α ハ共ニ正ノ銳角ナリトシテ, $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ ヨリ $\sin 2\alpha$ ヲ求メヨ(小數三位マデ)。〔桐工〕

12. $\tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ知リテ $\sin 15^0$ ノ值ヲ求メヨ。〔米工〕

13. 次ノ各恒等式ヲ證明セヨ。

[1] $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$ 〔東大農實〕

[2] $\tan^2(45^\circ+A)=\dfrac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}$ 〔京蠶〕

[3] $\tan^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ 〔神商船〕

[4] $\tan\left(45^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ 〔東商船〕

[5] $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{A}{2}\right)^2$ 〔東商船〕

[6] $\tan\theta+\tan(60^\circ-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{0.5+\cos(60^\circ-2\theta)}$ 〔廣師〕

[7] $\dfrac{\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}{\tan\alpha+\sec\alpha}=\cot\dfrac{\alpha}{2}\tan\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

〔東商船〕

[8] $\cos^2\alpha-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos\beta\cos(2\alpha-\beta)$ 〔東商船〕

[9] $1+\tan 65^\circ+\tan 70^\circ=\tan 65^\circ\tan 70^\circ$ 〔神商船〕

[10] $\{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}\cos\beta$

$+\{\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\sin\beta=\sqrt{2}\sin(\alpha+45^\circ)$

〔東商船〕

[11] $\dfrac{4\tan^2 x}{1-\tan^4 x}=\sec 2x-\cos 2x$ 〔東商船〕

[12] $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ 〔神商〕

[13] $\cos nA\cos(n+2)A-\cos^2(n+1)A+\sin^2 A=0$

〔鹿農〕

14. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

[1] $\dfrac{\sin 3A+\sin 2A}{\cos 3A-\cos 2A}$ 〔東工藝〕

[2] $\sin^2(A-B)+\sin^2 B+2\sin(A-B)\sin B\cos A$

〔三重農〕

15. 次式ノ數値ヲ求メヨ。

$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ 〔東商船〕

16. 次式ヲ積ノ形ニ直セ。

$\cos A+2\cos 2A+\cos 3A$ 〔東商船〕

17. $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$ 及ビ $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$ ナル二式ヲ夫々積ニ直シ,依テ $\sin 75^\circ$ 及ビ $\sin 15^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。 〔明專〕

18. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ, 次ノ各式ヲ證明セヨ。

[1] $\sin A\sin B+\cos^2\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=\cos^2\dfrac{C}{2}$

〔神商船〕

[2] $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}$

$+2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=1$ 〔米工〕

19. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ, 次ノ式ヲ積ノ形ニ化セヨ。

$\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)$

〔東商船〕

20. $A+B+C=0$ トシテ次式ヲ證明セヨ。

$1+2\sin A\sin B\cos C+\cos^2 C=\cos^2 A+\cos^2 B$

〔東商船〕

21. $A+B+C=360^\circ$ ナルトキ，次式ヲ證明セヨ。

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\cos A\cos B\cos C=2.$

〔横工〕

22. $A+B=225^\circ$ ナルトキ $\dfrac{\cot A}{1+\cot A}\times\dfrac{\cot B}{1+\cot B}$ ノ値ヲ求メヨ。〔神商船〕

23. $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ ナルトキハ，

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\beta}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

〔京都工〕

24. $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ ナルトキハ $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=a$ ナルコトヲ證セヨ。〔京蠶〕

25. $\dfrac{\tan(a-b)}{\tan a}+\dfrac{\sin^2 c}{\sin^2 a}=1$ ナル關係アルトキハ，

$\tan^2 c=\tan a\tan b$ ナリ。〔神商船〕

26. $(1+a\cos x)(1-a\cos y)$ $1-a^2$ ナルトキハ，

$\dfrac{\tan^2\dfrac{x}{2}}{\tan^2\dfrac{y}{2}}=\dfrac{1+a}{1-a}$ ナルコトヲ證明セヨ。

〔東商船〕

27. $\sec(\phi-\alpha)$, $\sec\phi$, $\sec(\phi+\alpha)$ ガ等差級數ヲナストキハ，$\cos\phi=\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

〔神商船〕

28. $\sin y=10^{\frac{1}{1-\log\sin}}$, $\sin z=10^{\frac{1}{1-\log\sin}}$ ナルトキハ，$\sin x=10^{\frac{1}{1-\log\sin z}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

〔仙工〕

29. $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トシテ $\tan(\alpha-\beta)$ ノ値ヲ求メヨ。〔熊工〕

30. $7x^2-8x+1=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha$ 及ビ $\tan\beta$ トスレバ $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ノ値如何。〔盛農〕

31. $\tan(45^\circ-\alpha)$ 及ビ $\tan(45^\circ+\alpha)$ ハ方程式 $x^2-2x\sec 2\alpha+1=0$ ノ二根ナルコトヲ證明セヨ。

〔東北大專〕

32. C ガ直角ナル直角三角形ニ於テ次式ヲ證明セヨ。

$\cos 2B=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}$ 〔東商〕

33. △ABC ノ頂點 B ヨリ底邊 AC ニ垂線 AD ヲ下ス，今 $\angle ABC=45°$，$AD=9$，$DC=6$ ナルコトヲ知リテ AB 及ビ BC ヲ求メヨ。〔東工〕

34. 等脚梯形アリ，其上底，下底，斜高ヲ夫々 a, b, c，トシ，對角線ノ交角ヲ θ トスレバ $\cos\theta$ ノ値如何。〔東商船〕

35. 球狀ノ輕氣球アリ其直徑 20 米突ニシテ之ヲ望ムニ角 $8°10'$ ヲ夾ミ，其中心ノ仰角ハ $45°$ ナリト云フ，測者ヨリ輕氣球ノ高サ幾何ナリヤ。

但シ $\sin 4°5'=0.071$ トス。〔水産〕

36. 同一ノ水平面上ニ 120 米ヲ距テテ立テル甲乙兩塔アリ，甲ノ基礎ヨリ乙ノ頂ヲ望ミタルニ其仰角ハ乙ノ基礎ヨリ甲ノ頂ヲ望ミタル仰角ノ二倍ニ等シク，又兩塔ノ基礎ヲ結ビタル直線ノ中點ヨリ兩塔ノ頂ヲ望ミタルニ仰角ハ互ニ餘角ヲナセリト云フ，兩塔ノ高サハ各幾米ナリヤ。

〔東工〕

37. $(\cos a+\cos b)^2+(\sin a+\sin b)^2$ ハ 4 ヨリ大ナルコト能ハザルコトヲ證セ。〔神商船〕

III. (第三篇ノ分)

1. $\triangle ABC$ ニ於テ $a=7$，$b=15$，$c=20$ ナルトキ，$\cos\dfrac{C}{2}$ ノ數値ヲ求メヨ。〔東商〕

2. $\triangle ABC$ ニ於テ $a=7$，$b=3$，$c=5$ ナルトキ，$\angle A$ ノ大サヲ求ム。〔神商〕

3. $\triangle ABC$ ニ於テ $a=9$，$b=56$，$c=61$ ナルトキ角 C ノ大サ如何。〔東商船〕

4. $\triangle ABC$ ニ於テ次ノ各式ヲ證明セヨ。

[1] $a^2+b^2=bc\cos A+ca\cos B+2ab\cos C.$

〔東商船〕

[2] $\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$ 〔富藥〕

[3] $(a^2-b^2)\cot C+(b^2-c^2)\cot A=(a^2-c^2)\cot B.$

〔名工〕

[4] $1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{c}{s}$ 〔神商〕

但シ s ハ半周トス，以下亦同ジ。

[5] $s=2d\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

但シ d ハ外接圓ノ直徑トス。〔熊工〕

[6] $a\cos^2\dfrac{A}{2}+b\cos^2\dfrac{B}{2}+c\cos^2\dfrac{C}{2}$

$=s\left(1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)$ 〔神工〕

[7] $4S=a^2\sin 2B+b^2\sin 2A$

但シ S ハ面積トス。

5. $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ半徑ヲ R トシ,邊 BC ノ垂直二等分線ガ其外接圓周ニ E,F ニ於テ交ルトセバ $\triangle AEF$ ノ面積ハ $R^2\sin(B\sim C)$ ニ等シ。

〔東商船〕

6. $\triangle ABC$ ニ於テ $\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A$ ナルトキハ,此三角形ハ直角三角形ナリ。 〔水產〕

7. $\sin A=\dfrac{\sin B}{2\cos C}$ ナラバ三角形ハ二等邊三角形ナリ。

〔三重農〕

8. 邊 a,b,c ニ對スル角ヲ夫々 $2\theta, 3\theta, 4\theta$ トスレバ,次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

$$\tan^2\theta=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2-1$$ 〔秋鑛〕

9. $\sin A+\sin C=2\sin B$ ナル關係アルトキハ,

$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ ナリ。 〔神商船〕

10. $\triangle ABC$ ニ於テ $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{A+C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ ナルトキハ此三角形ノ三邊ハ等差數級ヲナスコトヲ證明セヨ。

〔神工〕

11. 三角形ニ於テ $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}b$ ナルトキハ, a,b,c ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ。

〔神商船〕

12. $\triangle ABC$ ノ三ツノ角ガ等差級數ヲナシ,最小角ハ $45°$,最小邊ハ $\sqrt{2}$ 尺ナリト云フ, 他ノ二邊ハ夫々何尺何寸何分ナルカ 〔東商船〕

13. $\triangle ABC$ ノ頂點 A ヨリ底 BC ニ垂線 AH ヲ引キ $\angle BAH=\alpha$, $\angle CAH=\beta$, $AC=b$, $AB=c$ トスレバ $\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{c+b}{c-b}$ ナルコトヲ證明セヨ。

〔名工〕

14. 二直線 AB, AC ガ A ニ於テ相交ルトキ,銳角 BAC 內ノ定點 P ヲ過リテ引ケル任意ノ直線 XY ガ AB 及ビ AC ニ交ル點ヲ夫々 X 及ビ Y トスレバ, XY ノ位置ハ變ズルモ式

$\left(\dfrac{1}{PX}+\dfrac{1}{PY}\right)\dfrac{1}{\sin APY}$ ノ値ハ一定ナルコトヲ證セ。

〔仙工〕

15. $A=57°\ 13'.2$, $a=26.4$, $b=31.4$ ナルトキ角 B ノ大サヲ定メヨ。

〔東工〕

但シ $\log\sin 57°\ 13'.2=\bar{1}.92467$

$\log 3.14=0.49693$, $\log 2.64=0.42160$ トス。

16. $b=\sqrt{3}$, $c=1$, $A=30^0$ ナルトキ, a, C, B ヲ求メヨ。〔神商船〕

17. $b=55$, $c=45$, $A=64^0$ ナラバ, B, C ノ大サヲ分ノ小數一位マデ算セバ如何。〔遞信官吏練習所〕

但シ $\mathrm{L}\cot 32^0=10.20421$, $\mathrm{L}\tan 9^0\,0'=9.19971$,

$\mathrm{L}\tan 9^0\,10'=9.20782$

IV. (三角方程式)

1. $\tan x=\dfrac{1}{2}$, $\tan y=\dfrac{1}{3}$ トシテ $\tan(x+y)$ 及ビ $x+y$ ヲ求メヨ。〔桐工〕

2. $\tan\theta+\cot\theta=4$ ニ適スル 180^0 以内ノ正角ヲ求メヨ。〔東商船〕

3. $\sin\theta+\sin 2\theta=1+\cos\theta$ ニ適合スル 360^0 以内ノ正角ヲ求メヨ。〔東商船〕

4. $\sin 2x+\cos 4x=\cos 2x$ ヲ解ケ。〔東師〕

但シ $0^0\leqq x\leqq 90^0$ トス。

5. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ。〔三重農〕

6. $\sin^3\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^3\theta=1$ ヲ解ケ。〔明專〕

7. 次ノ方程式ニ適合スベキ $0^0<\theta<180^0$ ナル θ ヲ求ム。

$\cos\theta-\sin\theta=\cos 2\theta$ 〔東商船〕

8. 次ノ方程式ヲ滿足スル θ ノ値ヲ 0^0 ト 180^0 トノ間ノ範圍ニ於テ求メヨ。

$\tan(45^0-\theta)=1-\sin 2\theta$ 〔商船〕

9. $3\tan\theta+4=3\sec^2\theta+\cot\theta$ ヲ解ケ。

但シ $0^0<\theta<180^0$ トス。〔東師〕

10. 二次方程式 $(1+\tan^2\theta)x^2-4\tan^2\theta x+4\tan^2\theta-1=0$ ガ等根ヲ有スルタメノ $\tan\theta$ ノ値及ビ θ ノ値ヲ求メヨ。〔桐工〕

11. 方程式 $x^2+6x+7=0$ ノ根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トスレバ, $\sin(\alpha+\beta)$ ハ $\cos(\alpha+\beta)$ ニ等シキコトヲ證セヨ。〔廣工〕

12. C ヲ直角トスル $\triangle ABC$ ニ於テ $\dfrac{a+c}{b}=\sqrt{3}$ ナルトキハ,角 A ノ値如何。〔東商船〕

13. $\triangle ABC$ ノ角頂 A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ引キ, BD, CD, AD ガ 2, 3, 6 ニ比例スルトキ, 頂角 ABC ノ大サ如何。〔神商船〕

14. x ガ 0^0 ヨリ 360^0 マデ變化スルニ應ジテ

$3\sin x + 4\cos x$ ノ値ノ變化ヲ說明セヨ。　〔米工〕

15.　$\sin x + \operatorname{cosec} x = a$ ヲ解キ，且如何ナル場合ニ實根アルカヲ吟味セヨ。　〔高〕

16.　$x+y=90^\circ$,　$\sin(3x-y)=\dfrac{1}{2}$ ニ適合スル x, y ノ中 180° ヨリ小ナル正角ヲ求メヨ。　〔大工〕

17.　$\sin\alpha = m\sin\beta$,　$\tan\alpha = n\tan\beta$ ヨリ β ヲ消去セヨ。　〔東商船〕

18.　0° ト 180° トノ間ニ於テ $\sin x$ ガ $\cos 50^\circ$ ヨリ小ナルタメノ x ノ範圍ヲ求メヨ。　〔海兵〕

19.　$2\sin(\alpha-30^\circ)\cos\alpha$ ヲ和又ハ差ノ形ニ變形シ然ル後此式ノ値ヲ最大ナラシムル α ノ値ヲ求メヨ。　〔海兵〕

20.　$\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ ハ θ ノ値ガ如何ナルトキ最大ナル値ヲ有スルカ。　〔東商船〕

問題ノ答

〔簡易ナル問題ノ答ハ省略ス〕

問題 1.　**4.**　$\sin EBC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,　$\cos EBC=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\tan EBC=\dfrac{1}{2}$.

6.　0.　　**7.**　7.26.........

8.　$x=\dfrac{6}{\sqrt{7}}$,　$y=\dfrac{6}{\sqrt{21}}$;　$x=-\dfrac{6}{\sqrt{7}}$,　$y=-\dfrac{6}{\sqrt{21}}$.

10.　$4\sqrt{3}$ 粍

問題 2.　**1.**　(1)　$A=35^\circ 17'$,　$a=648.6$,　$b=916.7$

(2)　$B=79^\circ 58'$,　$A=10\ 2'$,　$a=602$.

(3)　$B=52^\circ 41'$,　$b=385.4$,　$c=484.6$

(4)　$A=46^\circ 18'$.　$B=43^\circ 42'$,　$c=1.293$

3.　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 米,　$\dfrac{1}{2}a$ 米.　　**4.**　$1^\circ 26'$

問題 3.　**1.**　$50^\circ 11'.7$　　**2.**　36米.　　**3.**　115米

4.　141.4米　　**5.**　5.8米.

6.　1095米强.　　**注.**　直角三角形 ABC ニぴたごらす定理ヲ適用セヨ。

7.　$4\sqrt{3}$ 浬　　**注.**　$\angle A=90^\circ$, $\angle ALB=60^\circ$ ナルコトニ着目セヨ。

8.　$1250 \times (3\pm\sqrt{3})$ 米

問題 4. 1. 〔1〕 60° 或ハ 30° 〔2〕 30°

2. $\dfrac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}$ 14. 〔1〕 1. 〔2〕 1.

問題 5 2. 夫々 -30°, 30°, 0°, 150°, 60°, 45° ノ三角函數ニ同ジ。

3. 〔1〕 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 〔2〕 $-1.$ 4. 0.83

5. $\sin 238^\circ = -\dfrac{8}{\sqrt{89}}$, $\cos 132^\circ = -\dfrac{5}{\sqrt{89}}$

6. $\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sec\theta = -\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

7. $\pm\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 9. 70°

11. 〔1〕 $\operatorname{cosec} A$ 〔2〕 0

12. 〔1〕 $n.180^\circ$, $n.360^\circ+30^\circ$, $n.360^\circ+150^\circ$,
但シ n ハ任意ノ整數トス，以下同ジ。
〔2〕 $n.360^\circ$, $n.360^\circ+60^\circ$. $n.360^\circ-60^\circ$
〔3〕 $n.360^\circ\pm45^\circ$, $n.360^\circ\pm135^\circ$, $n.360^\circ\pm60^\circ$, $n.360 \pm120^\circ$
〔4〕 $n.360^\circ\pm60^\circ$, $n.360^\circ\pm120^\circ$

問題 6. 1. $\cos(A+B)=\pm\dfrac{77}{85}$ 或ハ $\pm\dfrac{13}{85}$
$\sin(A-B)=\dfrac{84}{85}$ 或ハ $\dfrac{36}{85}$

16. $\dfrac{AB\sin A\sin B}{\sin(B+A)}$ 但シ $\angle A$ ガ鈍角ナラバ $\dfrac{AB\sin A\sin B}{\sin(B-A)}$ ナリ。

17. $\dfrac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

18. 公式集(卷末)ニアリ。

問題 7. 2. $4\sin 5^\circ \sin 10^\circ \sin 15^\circ$

3. 〔1〕 $\sin(A+B)\sin(A-B)$
〔2〕 $-\cot\dfrac{1}{2}A$, 〔3〕 $\tan\dfrac{n}{2m}\theta$

5. $4\sin A\sin B\sin C.$

問題 8. 1. $A=90^\circ$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$.

問題 9. 1. $A=60^\circ 10'$, $b=10.678$, $c=10.512$

2. $A=57^\circ 20'$, $a=406.87$, $c=312.82$

3. $A=67^\circ 28'.9$, $B=57^\circ 19'.1$, $c=18.41$

4. $A=35^\circ 18'$, $B=76^\circ 18'$, $C=68^\circ 23'$

5. 不可能

6. $100\sqrt{3}$ 7. $a=\sqrt{2}\,c$, $b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}c.$

8. $S=2468.7$, $r=21.4$, $r_a=89.1$, $r_b=52.5$, $r_c=60.8$, $R=45.3$.

問題 10. 1. $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ 或ハ $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$

2. 202.17尺 3. $\dfrac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}$

4. 603.26米 5. 2449.米强

附錄第一 問題 1. $\dfrac{1}{2}\left\{n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{4}\right\}$

2. 135°, 3. $n\pi+\dfrac{5}{12}\pi$, $n\pi+\dfrac{\pi}{12}$

4. $n\pi\pm\frac{\pi}{2}$,　$2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.　**5.** $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

6. $\frac{1}{3}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,　$n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

7. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$.　**8.** $n\pi+\frac{5}{12}\pi$,　$n\pi+\frac{\pi}{12}$

9. 45°,　30° 57′ 50″

10. 〔1〕 $2x-y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$,　$x+2y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

ニ於テ m 及ビ n ニ任意ノ整數ヲ與ヘテ得ル所ノ此兩式ノ値ヨリシテ夫々 x 及ビ y ノ値ノ組ヲ得ベシ。

〔2〕 $\begin{cases} x=\frac{m}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi \\ y=-\frac{m}{2}\pi+\frac{\pi}{6} \end{cases}$　$\begin{cases} x=-\frac{m}{2}\pi+\frac{\pi}{6} \\ y=\frac{m}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi \end{cases}$

〔3〕 $A+B=210°$, 330°, 570°, 690°.
$A-B=30°$, 150°, 330°, $-30°$, $-150°$,
$-330°$ ヲ出來得ル限リ組合セテ得ル所ノ A, B ノ値ノ組合ニ於テ A, B ガ共ニ 360° ヨリ小ナルモノヲ採ルベシ。

答　90°, 120°; 120°. 90°; 150°, 180°;
180°, 150°; 270°, 300°; 300°, 270°

11. $\frac{1}{2}(n\pi\pm 39°14')$　**12.** 90°

附録第二 (補習問題)

I. 1. $\frac{10}{3}$　2. 60°

3. $\sin 22°30'=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$,　$\cos 22°30'=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\tan 22°30'=\sqrt{2}-1$,

5. 13　**6.** $\frac{1-\tan^8 A}{\tan^4 A}$

9. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$　**10.** 70°32′

11. 73.2尺　**12.** 205尺　**13.** 23.7間

14. 128間

II. 1. $-\frac{8}{17}$　2. $\frac{204}{325}$

3.

A	B	$\sin(A+B)$	$\cos(A-B)$
一 (象限)	一	$\frac{24}{25}$	1
一	四	0	$-\frac{7}{25}$
二	一	0	$\frac{7}{25}$
二	四	$\frac{24}{25}$	-1

4. 0.26795　5. $\frac{44}{125}$　**6.** -1.

8. $\frac{23}{25}$　9. $\frac{7}{65}$

10. $\tan 2A=0.417$弱,
$\tan\frac{A}{2}=0.099$強　或ハ　-10.099強

11. 0.733

14. 〔1〕 $-\cot\frac{A}{2}$　〔2〕 $\sin^2 A$

15. $\frac{1}{8}$　**16.** $4\cos 2A\cos^2\frac{A}{2}$

19. $3\sin A\sin B\sin C$.　**22.** $\frac{1}{2}$

29. $\pm\dfrac{\sqrt{p^2-4q}}{1+q}$ 30. $\dfrac{1}{2}$ 或ハ -2

33. $6\sqrt{10}$ 34. $\pm\dfrac{a^2+b^2-2c^2}{2(ab+c^2)}$

35. 100米 36. 40米, 90.

III. 1. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 2. 120° 3. 120°

12. 1.73尺, 1.93尺. 15. 90°

16. $a=1,\ C=30^\circ,\ B=120^\circ$

17. $B=67^\circ5'.1,\ C=48^\circ54'.9$

IV 1. $n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 2. $75^\circ,\ 15^\circ$

3. $45^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ\ 225^\circ$ 4. $0^\circ,\ \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{\pi}{4}$

5. $2n\pi+\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{3}$ 6. $2n\pi,\ 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$

7. $45^\circ,\ 90^\circ$ 8. $0^\circ,\ 45^\circ,\ 180^\circ$

9. $30^\circ,\ 45^\circ,\ 150^\circ$ 10. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$

12. 30° 13. $45^\circ,\ \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$

16. $x=30^\circ,\ y=60^\circ;\ x=60^\circ,\ y=30^\circ$

17. $\sin^2\alpha+n^2\cos^2\alpha=m^2$

18. $0^\circ<x<45^\circ$ 或ハ $140^\circ<x<180^\circ$

19. $n\pi+\dfrac{\pi}{3}$ 20. $n\pi+\dfrac{\pi}{4}$

希臘文字一覽表

大字	小字	發音	大字	小字	發音
A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ, ς	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi (ki)
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

公 式 一 覽 表

(1)(9) $\begin{cases} \cos\alpha = \sin(90^\circ-\alpha). \\ \cot\alpha = \tan(90^\circ-\alpha). \\ \operatorname{cosec}\alpha = \sec(90^\circ-\alpha). \end{cases}$

(1)(9) $\begin{cases} \sin\alpha = \cos(90^\circ-\alpha). \\ \tan\alpha = \cot(90^\circ-\alpha). \\ \sec\alpha = \operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha). \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \sin A \operatorname{cosec} A = 1. \\ \cos A \sec A = 1. \\ \tan A \cot A = 1. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}. \\ \cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}. \end{cases}$

(5) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$

(6) $\begin{cases} 1+\tan^2 A = \sec^2 A. \\ 1+\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \sin(n.360^\circ+\alpha) = \sin\alpha. \\ \cos(n.360^\circ+\alpha) = \cos\alpha. \\ \tan(n.360^\circ+\alpha) = \tan\alpha. \\ \text{等} \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta. \\ \cos(-\theta) = \cos\theta. \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta. \\ \cot(-\theta) = -\cot\theta. \\ \text{等} \end{cases}$

(10)(11) $\begin{cases} \sin(180^\circ\mp\theta) = \pm\sin\theta. \\ \cos(180^\circ\mp\theta) = -\cos\theta. \\ \tan(180^\circ\mp\theta) = \mp\tan\theta. \\ \cot(180^\circ\mp\theta) = \mp\cot\theta. \\ \text{等} \end{cases}$ (複號同順)

(12) $\begin{cases} \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B. \\ \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B. \\ \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \end{cases}$

(14) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$

(15) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$

(16) $\begin{cases} \sin 2A = 2\sin A\cos A. \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \\ \qquad = 1-2\sin^2 A \\ \qquad = 2\cos^2 A - 1. \\ \tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} \sin\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}. \\ \cos\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}. \\ \tan\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}. \end{cases}$

(18) $\begin{cases} \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A. \\ \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A. \\ \tan 3A = \dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}. \end{cases}$

(19) $\begin{cases} 2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B). \\ 2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B). \\ 2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B). \\ 2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B). \end{cases}$

(20) $\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta). \\ \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta). \\ \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta). \\ \cos\beta-\cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta). \end{cases}$

角	0°	15°	30°	45°	╱
sin	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	soc
cos	1	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	sin
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	cot
cot	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	tan
╱	90°	75°	60°	45°	角

$\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

$\sqrt{2} = 1.4142\cdots\cdots$ $\log 2 = 0.30103$

$\sqrt{3} = 1.7320\cdots\cdots$ $\log 3 = 0.47712$

$\begin{cases} \sin(A+B+C) = \sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C. \\ \cos(A+B+C) = \cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C. \\ \tan(A+B+C) = \dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}. \end{cases}$

直角三角形 ABC($C=90^\circ$)ニ關スル公式

(2) $\begin{cases} a = c\sin A = c\cos B \\ \quad = b\tan A = b\cot B \\ b = c\sin B = c\cos A \\ \quad = a\tan B = a\cot A \\ c = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\cos B} = \dfrac{b}{\cos A} \\ \quad = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

△ABC ニ關スル公式

(21) $\begin{cases} A+B+C = 180^\circ. \\ \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C = 90^\circ \\ \sin A = \sin(B+C)\text{等}. \\ \cos A = -\cos(B+C)\text{等}. \\ \sin\frac{1}{2}A = \cos\frac{1}{2}(B+C)\text{等}. \\ \cos\frac{1}{2}A = \sin\frac{1}{2}(B+C)\text{等}. \\ \tan\frac{1}{2}A = \cot\frac{1}{2}(B+C)\text{等}. \end{cases}$

(22) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}.$

(23) $\begin{cases} a = b\cos C+c\cos B. \\ b = c\cos A+a\cos C. \\ c = a\cos B+b\cos A. \end{cases}$

(24) $\begin{cases} a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A. \\ b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B. \\ c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C. \end{cases}$

(25) $\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \\ \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}. \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{cases}$

(26) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$ 等.

(27) $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$ 等.

(28) $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$ 等.

(29) $\tan\frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C$ 等.

(30) $\begin{cases} \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}. \\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \end{cases}$

(31) $\begin{cases} \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}. \\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}. \\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}. \end{cases}$

(32) $\begin{cases} \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}. \\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}. \\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \end{cases}$

(33

(34

(35

(36

1れ

πれ

公式一覽表

(12) $\begin{cases}\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.\\ \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.\end{cases}$

(13) $\begin{cases}\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.\\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B\end{cases}$

(14) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$

(15) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$

(16) $\begin{cases}\sin 2A=2\sin A\cos A.\\ \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A\\ \qquad =1-2\sin^2 A\\ \qquad =2\cos^2 A-1.\\ \tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\end{cases}$

(17) $\begin{cases}\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}.\\ \cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.\\ \tan\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}.\end{cases}$

(18) $\begin{cases}\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.\\ \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.\\ \tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.\end{cases}$

(複號同順)

$\begin{cases}\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C.\\ \cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C.\\ \tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}.\end{cases}$

(19) $\begin{cases}2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B).\\ 2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B).\\ 2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B).\\ 2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B).\end{cases}$

(20) $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\\ \cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\end{cases}$

角	0°	15°	30°	45°	
sin	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	soc
cos	1	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	sin
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	cot
cot	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	tan
	90°	75°	60°	45°	角

$\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$ $\log 2=0.30103$

$\sqrt{3}=1.7320\cdots\cdots$ $\log 3=0.47712$

直角三角形 ABC($C=90^\circ$)ニ關スル公式

(2) $\begin{cases}a=c\sin A=c\cos B\\ \quad=b\tan A=b\cot B\\ b=c\sin B=c\cos A\\ \quad=a\tan B=a\cot A\\ c=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\cos B}=\dfrac{b}{\cos A}\\ \quad=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$

△ABC ニ關スル公式

(21) $\begin{cases}A+B+C=180^\circ.\\ \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ.\\ \sin A=\sin(B+C)\text{等}.\\ \cos A=-\cos(B+C)\text{等}.\\ \sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C)\text{等}.\\ \cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}(B+C)\text{等}.\\ \tan\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}(B+C)\text{等}.\end{cases}$

(22) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}.$

(23) $\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B.\\ b=c\cos A+a\cos C.\\ c=a\cos B+b\cos A.\end{cases}$

(24) $\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{cases}$

(25) $\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{cases}$

(26) $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$ 等.

(27) $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$ 等.

(28) $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$ 等.

(29) $\tan\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C$ 等.

(30) $\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}.\\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\end{cases}$

(31) $\begin{cases}\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}.\\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}.\\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}.\end{cases}$

(32) $\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.\\ \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}.\\ \tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.\end{cases}$

(33) $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 等.

(34) $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

(35) r(內接圓ノ半徑)

$=\dfrac{S}{s}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

(36) r'(傍接圓ノ半徑)

$=\dfrac{S}{s-a}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$ 等.

但シ $s=\frac{1}{2}(a+b+c).$

R(外接圓ノ半徑)

$=\dfrac{a}{2\sin A}$(等)$=\dfrac{abc}{4S}.$

1れーぢあん $=\dfrac{180^\circ}{\pi}=57^\circ\,17'\,45''.$

πれーぢあん $=180^\circ$

$n^\circ=\dfrac{n}{180}\pi$ れーぢあん

$\pi=3.1415926\cdots\cdots$

或ハ略 $\dfrac{22}{7}$ 又ハ $\dfrac{355}{113}$

ニ等シトス.

α ト同シ正弦ヲ有スル角

$\theta=n\pi+(-1)^n\alpha.$

α ト同シ餘弦ヲ有スル角

$\theta=2n\pi\pm\alpha.$

α ト同シ正切ヲ有スル角

$\theta=n\pi+\alpha.$

大正十三年度臨時定價　金八拾參錢

大正元年八月廿四日印刷
大正元年八月廿八日發行
大正元年十月廿六日訂正再版發行
大正四年一月十日修正三版發行
大正四年二月四日訂正四版發行
大正六年十二月十五日修正五版發行
大正七年二月七日訂正六版發行
大正十二年十二月廿六日修正七版發行
大正十三年一月二十二日訂正八版印刷
大正十三年一月二十五日訂正八版發行

中等教育平面三角法教科書
定價金四拾六錢

著作者　林鶴一
東京市小石川區小日向水道町八十四番地
發行者　株式會社東京開成館
代表者　渡邊亘助
大阪市西區阿波座二番町一番地
印刷者　堀越幸
東京市小石川區小日向水道町八十四番地
發行所　株式會社東京開成館
〔振替貯金口座〕東京第五參貳貳番
大阪市心齋橋通北久寶寺町角
西部販賣所　三木佐助
東京市日本橋區數寄屋町九番地
東部販賣所　林平次郎

（大阪　日本印刷製本株式會社　印刷）