中等教育

代數學

下卷

第二版

株式會社
東京・明治書院・神田

大正十四年一月十五日
文部省檢定濟
中學校數學科用

中等教育

代數學

第二版

下卷

理學士
文學士 梶島二郎著

東京

株式會社
明治書院

中等教育 代 數 學

下 卷

目 次

第八篇　二次方程式

第九篇　聯立二次方程式

第十篇　有理式ノ性質(續)

第十一篇 無理式ノ性質

第十二篇 比及ビ比例

第十三篇 級數

第十四篇 對數

第十五篇 步合及ビ年金

雜題ノ答

第八篇 二次方程式

第一章 一元二次方程式

135. 二次方程式

二次方程式ハ,未知數ノ二次ノ項ヲ含ミ,且ツ其次數ガ二次ヲ越エザル整方程式ナリ。

$$3x^2-5x+4=0,\quad xy=3^*,\quad x^2+2xy+y^2=0$$

ノ如キハ二次方程式ニシテ, $3x-1=0$, $2x^3-4=7y^2$ ノ如キハ二次方程式ニ非ズ。又

$$3x^2-5=0,\quad x^2-3x+2=0$$

ノ如キハ,唯ダ一種類ノ未知數ノミヲ含ム二次方程式ナレバ,一元二次方程式ナリ。

---

* x 及ビ y ヲ未知數トス。以下是レニ準ズ。

一元二次方程式ハ,一般ニ三ツノ項ヨリ成立ス。

ソレハ

1. 未知數ノ平方ヲ含ム項(**二次ノ項**),
2. 一次ノ未知數ヲ含ム項(**一次ノ項**),
3. 未知數ヲ含マザル項ナリ(**常數項**又ハ**絶對項**)。

故ニ,一元二次方程式ノ一般ノ形ハ

$$ax^2+bx+c=0, \quad 但シ\ a\neq0$$

ナリ。

136. 一次ノ項ヲ缺クー元二次方程式

例一。 方程式 $x^2-9=0$ ヲ解ケ。

常數項ヲ移シテ

$$x^2=9.$$

平方シテ9トナル數ハ $+3$, 及ビ -3 ナレバ

$$x=\pm3.$$

故ニ,與ヘラレタル方程式ハ二ツノ相異ナル根ヲ有シ,一ツハ $+3$, 他ノ一ツハ其符號ヲ變ヘタル

モノ -3 ナリ。

〔驗:$(+3)^2-9=9-9=0$, $(-3)^2-9=9-9=0$〕。

【注意】 $x^2=9$ ノ兩邊ヲ平方ニ開ケバ, $\pm x=\pm3$ トナリ,是レハ四ツノ關係式 $+x=+3$, $-x=-3$, $+x=-3$, $-x=+3$ ヲ表スコトトナル。併シ,此ノ中,初メノ二ツハ $x=3$ ニシテ,後ノ二ツハ $x=-3$ トナレバ,結局ハ $x=\pm3$ トナル。

故ニ,$x^2=9$ ヨリ x ノ値ヲ求メルニハ,兩邊ヲ平方ニ開キ,$x=\pm3$ ナル根ヲ得ルモノト見テヨシ。

例二。 方程式 $3x^2-15=0$ ヲ解ケ。

常數項ヲ移シテ

$$3x^2=15.$$

兩邊ヲ3ニテ割リ

$$x^2=5.$$

兩邊ヲ平方ニ開キ

$$x=\pm\sqrt{5}.$$

〔驗:$3(+\sqrt{5})^2-15=3\times5-15=0$, $3(-\sqrt{5})^2-15=3\times5-15=0$〕。

例三。 方程式 $5x^2-7=2x^2$ ヲ解ケ。

二次ノ項ヲ左邊ニ纏メ,常項數ヲ右邊ニ移シ

$$5x^2-2x^2=7,$$

$$3x^2=7.$$

$$\therefore \quad x^2=\frac{7}{3}.$$

兩邊ヲ平方ニ開キ

$$x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}=\pm\frac{\sqrt{7\times3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

〔驗：原式ノ x ニ結果ヲ入レテ驗シテミヨ〕。

故ニ,一次ノ項ヲ缺ク一元二次方程式ヲ解クニハ

1. x^2 ヲ既知數ニテ表シ,
2. 兩邊ヲ平方ニ開ケバヨシ。

此場合ニハ,常ニ二ツノ根アリテ,一ツノ根ハ,他ノ根ノ符號ヲ變ヘタルモノニ等シ。

例四。 方程式 $(2x-5)^2-16=0$ ヲ解ケ。

括弧ヲ拂ヘバ,x ノ一次ノ項ガ表ルルモ,此儘ニテ解クコトヲ得ベシ,ソレニハ -16 ヲ移項シテ

$$(2x-5)^2=16.$$

兩邊ヲ平方ニ開キ

$$2x-5=\pm4.$$

$$\therefore\ x=\frac{5\pm4}{2}.$$

故ニ,求ムル根ハ $\frac{9}{2}$, 及ビ $\frac{1}{2}$ ナリ。

〔驗：$(2\times\frac{9}{2}-5)^2-16=(9-5)^2-16=16-16=0$,

$(2\times\frac{1}{2}-5)^2-16=(1-5)^2-16=16-16=0$〕。

練習問題 (1)

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $x^2-121=0$.
2. $4x^2-49=0$.
3. $12x^2-64=4x^2+8$.
4. $\frac{x^2}{5}=\frac{x^2}{4}-20$.
5. $(x+2)^2=4x+8$.
6. $\frac{4x^2+18}{9}=x^2-3$.

137. 因數分解ニヨル解法

幾ツカノ數ノ積ガ零ナルタメニハ,其等ノ因數ノ中,少クトモ一ツハ零ナルヲ要ス,若シ何レノ因數モ零ニ等シクナケレバ,其等ノ積ハ零ニナルコト決シテナシ。又,一ツノ因數ガ零ナラバ,積ハ必ズ零トナルベシ。

此原理ニ基キ,因數分解ノ方法ヲ適用シテ,方程式ヲ解クコトヲ得。

例一。 方程式 $4x^2-9=0$ ヲ解ケ。

方程式ノ左邊ヲ因數ニ分解シテ

$$(2x-3)(2x+3)=0.$$

此ノ等式ガ成立スルタメニハ,左邊ノ因數ノ中,何

レカ一ツハ零ナルヲ要シ,又零ナラバヨシ。即チ

$$2x-3=0,\quad 或ハ\quad 2x+3=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2},\quad 或ハ\quad x=-\frac{3}{2}.$$

故ニ,求ムル根ハ $\frac{3}{2}$ 及ビ $-\frac{3}{2}$ ナリ。

【注意】 此方程式ノ根ハ前節ノ方法ニヨリテモ,容易ニ求メラルベシ。

〔驗：$4\left(\frac{3}{2}\right)^2-9=4\times\frac{9}{4}-9=9-9=0,\ 4\left(-\frac{3}{2}\right)^2-9=4\times\frac{9}{4}-9=0$〕,

例二。 方程式 $x^2-2x=3$ ヲ解ケ。

總テノ項ヲ左邊ニ集メ

$$x^2-2x-3=0.$$

左邊ヲ因數ニ分解シテ

$$(x-3)(x+1)=0.$$

此ノ等式ガ成リ立ツタメニハ

$$x-3=0,\quad 或ハ\quad x+1=0$$

ナルヲ要ス。故ニ

$$x=3,\quad 或ハ\quad x=-1.$$

故ニ,求ムル根ハ 3,及ビ -1 ナリ。

〔驗：$3^2-2\times3-3=9-6-3=0,\ 1^2-2\times(-1)-3=1+2-3=0$〕。

例三。 方程式 $x^3+5x^2+6x=0$ ヲ解ケ。

方程式ノ左邊ノ各項ニ,x ガ因數トシテ含マレテ居ルコトニ注意シ

$$x(x^2+5x+6)=0.$$

括弧ノ中ヲ,更ニ因數ニ分解シテ

$$x(x+2)(x+3)=0.$$

此ノ等式ガ成立スルタメニハ

$$x=0,\quad 或ハ\quad x+2=0,\quad 或ハ\quad x+3=0$$

ナルヲ要ス。故ニ,求ムル根ハ三ツアリテ

$$x=0,\quad x=-2,\quad x=-3.$$

〔驗：$x=0$ ハ勿論,原ノ方程式ニ適ス。

$x=-2$ トシテ, $(-2)^3+5(-2)^2+6(-2)=-8+20-12=0$。

$x=-3$ トシテ, $(-3)^3+5(-3)^2+6(-3)=-27+45-18=0$〕.

因數分解ニヨリ方程式ヲ解クニハ

1. 總テノ項ヲ左邊ニ集メ,
2. ソレヲ因數ニ分解シ,
3. 各因數ヲ零ニ等シト置キテ,其等ノ方程式ノ根ヲ求ムレバヨシ。

$x^2-2x+1=0$ ノ如ク,總テノ項ヲ一邊ニ集メタル式ガ,完全平方式ナルトキハ, $(x-1)(x-1)=0$ ノ如ク變形サレ,各因數 $x-1$, 及ビ $x-1$ ヲ零ニ等シト

置キテ得ル方程式ノ根ハ同一ナリ。カヤウナ根ヲ等根ト云ヒ,方程式ハ等根ヲ有スト云フ。

練習問題 (2)

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $36x^2-25=0.$
2. $x^2-5x=0.$
3. $x(x^2-1)-x^2+1=0.$
4. $x^2-10x+25=0.$
5. $x^2-12x+32=0.$
6. $4x^2-4x+1=0.$

138. 完全平方式ニ變形スル解法

方程式 $x^2+7x-7=0$ ノ如キモノハ,左邊ヲ因數ニ分解スルコト容易ナラズ。カヤウナ方程式ヲ解クニハ, x^2+7x ニ適當ナル項ヲ加ヘ,是レヲ完全平方式ニ變形シ,然ル後,第136節例四ノ如クシテ根ヲ求ムベシ。

三項式ノ完全平方式ノ基礎ノ形ハ

$$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2,$$

$$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$$

ナリ。是等ノ公式ニ於テ,特ニ注意スベキハ, x^2 ノ係數ガ1ナルトキ,常數項 a^2 ハ,一次ノ項ノ x ノ係數 $\pm 2a$ ノ $\frac{1}{2}$ ノ平方ニ等シキコトナリ。

例一。方程式 $x^2+6x+8=0$ ヲ解ケ。

常數項ヲ右邊ニ移セバ

$$x^2+6x=-8. \qquad (1)$$

此方程式ノ左邊 x^2+6x ガ,完全平方式ニナルタメニハ,是レニ一次ノ項ノ x ノ係數6ノ $\frac{1}{2}$,卽チ3ノ平方ヲ加ヘルコト必要ナリ。故ニ,(1)ノ兩邊ニ 3^2 ヲ加ヘテ

$$x^2+6x+3^2=-8+3^2,$$

$$x^2+6x+9=-8+9.$$

$$\therefore \quad (x+3)^2=1.$$

兩邊ヲ平方ニ開キ

$$x+3=\pm 1.$$

$$\therefore \quad x=-3\pm 1.$$

故ニ,求ムル根ハ -2 及ビ -4 ナリ。

〔驗: $(-2)^2+6\times(-2)+8=4-12+8=0,$

$(-4)^2+6\times(-4)+8=16-24+8=0$〕。

例二。方程式 $4x^2-4x-15=0$ ヲ解ケ。

常數項ヲ移項シテ

$$4x^2-4x=15.$$

x^2 ノ係數ヲ1ナラシムルタメ,兩邊ヲ4ニテ割リ

$$x^2-x=\frac{15}{4}.$$

左邊ヲ完全平方式ニスルタメ,一次ノ項ノxノ係數(-1)ノ半分,$\frac{-1}{2}$ノ平方ヲ兩邊ニ加ヘテ

$$x^2-x+\left(\frac{-1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}+\left(\frac{-1}{2}\right)^2,$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}+\frac{1}{4},$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=4.$$

兩邊ヲ平方ニ開キ

$$x-\frac{1}{2}=\pm 2.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\pm 2.$$

故ニ,求ムル根ハ$\frac{5}{2}$及ビ$\frac{-3}{2}$ナリ。

〔驗：驗算ハ，成ル可ク結果ノ適否ガ，簡明ニ分カルヤウニスルヲ旨トスベシ。次ノ如キ，形式モ亦一ツノ方法ナルベシ〕。

$x=\frac{5}{2}.$	$x=\frac{-3}{2}.$
$4\left(\frac{5}{2}\right)^2-4\left(\frac{5}{2}\right)-15=0,$	$4\left(\frac{-3}{2}\right)^2-4\left(\frac{-3}{2}\right)-15=0,$
$5^2-2\cdot5-15=0,$	$(-3)^2-2(-3)-15=0,$
$25-10-15=0,$	$9+6-15=0,$
$0=0.$	$0=0.$

完全平方式ニ變形シテ,一元二次方程式ヲ解クニハ

1. 未知數ヲ含ム項ヲ左邊ニ集メ,常數項ヲ右邊ニ置キ,
2. 兩邊ヲ適當ナル數ニテ乘除シ,未知數ノ二次ノ項ノ係數ヲ1ニ等シクシテ
$$x^2\pm px=q$$
ノ形ニ整ヘ,
3. 一次ノ項ノ係數$(\pm p)$ノ$\frac{1}{2}$ノ平方,$\left(\pm\frac{p}{2}\right)^2$ヲ兩邊ニ加ヘテ,左邊ヲ完全平方式ニ變形シ,
4. 兩邊ヲ平方ニ開ケバヨシ。

練習問題 (3)

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $x^2-4x=-3.$　　**4.** $3y^2+12y+5=0.$

2. $x^2-4x-21=0.$　　**5.** $z^2+3z-18=0.$

3. $x^2+6x=1.$　　**6.** $x^2-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}.$

139. 根ノ公式

一般ノ一元二次方程式

(1)　　$ax^2+bx+c=0,\qquad a\neq 0$

ヲ解クタメ,c ヲ移項シ

$$ax^2+bx=-c.$$

兩邊ヲ a ヲ以テ割リ

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

兩邊ニ x ノ係數ノ $\frac{1}{2}$ ノ平方,$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ヲ加ヘテ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

或ハ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

兩邊ヲ平方ニ開キ

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

故ニ

(2)　　$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

是レハ,一元二次方程式ノ**根ヲ表ハス公式**ニシテ之レヲ用ヒ,總テノ一元二次方程式ノ根ヲ求ムルコトヲ得ベシ。

【注意】 一元二次方程式ヲ解クニ當リ,因數分解ノ方法ガ容易ニ適用サレルトキノ外ハ,此公式ヲ用フベシ。

例一。 方程式 $2x^2-3x-5=0$ ヲ解ケ。

方程式(1)ト比較シテ

$$a=2,\quad b=-3,\quad c=-5$$

トルコトヲ注意シ,是等ノ値ヲ公式(2)ニ代入シ

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2(-5)}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{+3\pm\sqrt{9+40}}{4}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{3\pm7}{4}.$$

故ニ,求ムル根ハ

$$\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

及ビ

$$\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1.$$

〔驗:次ノ如クスベシ〕。

$x=\frac{5}{2}.$	$x=-1.$
$2\left(\frac{5}{2}\right)^2-3\left(\frac{5}{2}\right)-5=0,$	$2(-1)^2-3(-1)-5=0,$
$\frac{25}{2}-\frac{15}{2}-5=0,$	$2+3-5=0,$
$\frac{25-15-10}{2}=0,$	$5-5=0,$
$0=0.$	$0=0.$

一元二次方程式ガ

$$(3)\qquad ax^2+2bx+c=0,\qquad a\neq 0$$

ノ如ク,一次ノ項ノ係數ガ偶數ナルトキハ,根ノ公式(2)ヲ聊カ簡單ニスルコトヲ得。(1)ニ比較シテ異ナル點ハ,x ノ係數ガ b ナル代リニ,$2b$ ナレバ,公式(2)ノ b ノ代リニ $2b$ ト置キテ

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{(2b)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}.$$

故ニ,(3)ノ根ハ

$$(4)\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

〔公式(2)ヲ用ヒズニ,直接ニ公式(4)ヲ求メテ見ヨ〕。

例二。 方程式 $3k^2x^2=2kx+1$ ヲ解ケ。但シ $k\neq0$.

移項シテ

$$3k^2x^2-2kx-1=0.$$

是レヲ,(3)ニ比較シ

$$a=3k^2,\quad b=-k,\quad c=-1$$

ナレバ,是等ノ値ヲ公式(4)ニ代入シ

$$x=\frac{-(-k)\pm\sqrt{(-k)^2-3k^2(-1)}}{3k^2}$$

$$=\frac{k\pm\sqrt{k^2+3k^2}}{3k^2}$$

$$=\frac{k\pm\sqrt{4k^2}}{3k^2}=\frac{k\pm2k}{3k^2}.$$

故ニ,求ムル根ハ

$$\frac{1}{k},\ 或ハ\ -\frac{1}{3k}.$$

〔驗:原方程式ノ x ヲ $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{3k}$ トシテ驗シテ見ヨ〕。

練習問題 (4)

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $2x^2-3x+1=0.$	**5.** $2x+2=x^2.$
2. $8x^2-6x+1=0.$	**6.** $2x^2-\frac{11}{2}x-\frac{15}{2}=0.$
3. $y^2+y-1=0.$	**7.** $x^2+2ax=a^2.$
4. $x^2+\sqrt{5}\,x=10.$	**8.** $x^2-bx=a(a-b).$

140. 應用問題

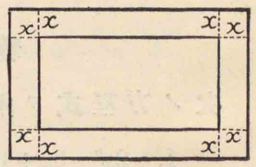
方程式ヲ用ヒ,應用問題ヲ解クトキニ,方程式ガ一元二次方程式トナレバ,根ガ二ツアル譯ナリ。其二ツノ根ガ,共ニ問題ノ答トナルコトモアレバ,又何レカ一ツノミガ答トナリ,一ツハ答ニナラヌコトモアリ,又何レモ答ニナラヌコトモアリ。方程式ノ根ガ其儘問題ノ答トナラヌコトアルハ,屢

繰返セシコトナガラ,注意ヲ要スル事項ナリ。

例一。額ノ繪ハ横 2 尺 6 寸,縦 1 尺ニシテ,一様ナル幅ノ額椽アリ。額椽ノ面積ハ 160 平方寸ナリト云フ。額ノ横ト縦トハ,各幾尺幾寸ナルカ。

額椽ノ幅ヲ x 寸トスレバ

$4x^2$＝四隅ノ額椽ノ面積,



$2(26x+10x)$＝殘リノ額椽ノ面積.

$$\therefore\quad 4x^2+2(26x+10x)=160,$$

或ハ $$x^2+18x-40=0.$$

$$\therefore\quad x=2,\quad 或ハ\quad -20.$$

故ニ,額椽ノ幅ハ2寸,或ハ -20寸ナリ,併シ幅ガ -20 寸ト云フコトナケレバ,是レハ答トナラズ。故ニ,額椽ノ幅ハ2寸ニシテ,額ノ横ハ3尺,縦ハ1尺4寸ナリ。

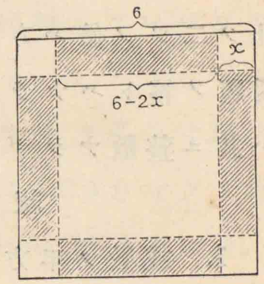
〔驗：$30\times14=420$, $26\times10+160=260+160=420$〕。

例二。一邊ノ長サ 6 寸ナル正方形ノ紙ニ,一様ナル幅ノ枠ヲ附ケテ,圖ノ陰影ヲ施シタル部分ノ面積ヲ,全面積ノ $\frac{4}{9}$ ニ等シカラシメントス。枠ノ幅ヲ幾寸ニスレバヨキカ。

枠ノ幅ヲ x 寸トスレバ

$4\times x(6-2x)$＝枠ノ影ヲ施シタル部分ノ面積.

$$\therefore\quad 4x(6-2x)=\frac{4}{9}\times36,$$

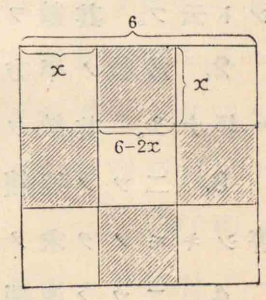


$$8x(3-x)=16,$$

$$x(3-x)=2.$$

總テノ項ヲ左邊ニ集メ,全體ノ符號ヲ變ヘレバ

$$x^2-3x+2=0.$$



$$\therefore\quad (x-1)(x-2)=0.$$

故ニ,求ムル枠ノ幅ハ一寸,及ビ二寸ナリ。是レハ,何レモ求ムル答ニシテ,右ノ二ツノ圖ニ示スガ如シ。

〔驗：$4\times1\times(6-2)=16=\frac{4}{9}\times36$, $4\times2\times(6-4)=16=\frac{4}{9}\times36$〕。

例三。二ツノ連續セル整數アリ。其積ハ 14 ニ等シト云フ。各數ヲ求メヨ。

x＝一ツノ整數,

$x+1$＝連續セル整數.

$$\therefore\quad x(x+1)=14.$$

$$x^2+x-14=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{57}}{2}.$$

此ノ二ツノ値ハ方程式 $x(x+1)=14$ ノ根ナレドモ,問題ノ答トハナラズ,何故カト云フノニ,是等ノ値ハ共ニ整數ナラザレバナリ。

練習問題 (5)

1. 或數ノ平方ト,其數ノ二倍トノ和ハ15ニ等シト云フ。其數ヲ求メヨ。

2. 或數ノ平方ノ二倍ヨリ,其數ヲ引キタル差ハ45ナリ。其數ヲ求メヨ。

3. 二ツノ連續セル整數*ニシテ,其積ガ462ニ等シキモノヲ求メヨ。

4. 二ツノ連續セル整數アリ,平方ノ和ハ685ニ等シト云フ。各數ヲ求メヨ。

5. 三ツノ連續セル整數ニシテ,平方ノ和ガ110ニ等シキモノヲ求メヨ。

6. 矩形ノ地所アリ。横ハ縦ヨリ3間長ク,面積ハ270坪ナリト云フ。横,縦各幾間ナルカ。

7. 幅3寸,長サ4寸8分ノ用紙ノ周邊ニ一樣

* 算術ニテハ,二ツノ連續セル整數ト云ヘバ2,3;30,31ノ如キ數ナルモ,代數ニテハ−3,−2;−32,−31ノ如キ數ニテモ差支ナシ。

ナル幅ノ黑枠ヲ印刷シ,枠ノ面積ヲ全紙面ノ $\frac{1}{5}$ ニナサントス。黑枠ノ幅ヲ何分何厘ニスレバヨキカ,但シ一厘未滿ハ四捨五入セヨ。

8. 正立方體アリ。其横,縦,高サヲ各3寸増ストキハ,體積ハ原ノ體積ヨリモ4,167立方寸ダケ増スベシト云フ。其立方體ノ高サハ幾寸ナルカ。

9. 或人,年利率若干ニテ,金四百圓ヲ銀行ニ預ケ,一ケ年末ニ其年ニ受取ルベキ利息ト共ニ,尙ホ金百圓ヲ元金ニ加ヘタルニ,二ケ年末ニハ元利合計五百四拾六圓ニナレリト云フ。年利率何程ナルカ。 (上蠶)

10. 或人,金五千圓ヲ年利率若干ニテ貸付ケ,一年ノ後,元利ヲ受取リ,其内貳拾五圓ヲ費シ,殘金ヲ再ビ前ト同利率ニテ一ケ年貸付ケ,元利合計五千參百八拾貳圓ヲ受取リタリト云フ。年利率何程ナルカ。 (高等)

第二章

一元二次方程式ノ根ノ性質

141. 判別式

一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a\neq 0$$

ノ二ツノ根ハ

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ 及ビ } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ナルコトハ,既ニ說明シタルガ如シ。此ノ二ツノ根ノ性質ニヨリ,三ツノ場合ヲ區別スルコトヲ得。

(I). b^2-4ac ガ正數 ($b^2-4ac>0$) ナル場合

此場合ニハ,正數ノ平方根ハ有理數,又ハ無理數ナレバ,根ハ實數(實根ト云フ)ナリ。且ツ,二ツノ根ノ差ハ

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

ニシテ,$b^2-4ac\neq 0$ ナレバ,此差ハ零ニアラズ。故ニ,二ツノ根ハ等シカラズ。

(II). b^2-4ac ガ零 ($b^2-4ac=0$) ナル場合

此場合ニハ,二ツノ根ハ共ニ $-\dfrac{b}{2a}$ ニシテ,實數ナリ。此時ニ,二次方程式ハ唯ダ一ツノ根ヲ有スルトハ云ハズシテ,二ツノ相等シキ根(等根)ヲ有スルト云フ。

(III). b^2-4ac ガ負數 ($b^2-4ac<0$) ナル場合

此場合ニハ,二ツノ根ハ負數ノ平方根ヲ含ムニヨリ,二ツトモ虛數(虛根ト云フ)ナリ。且ツ,二ツノ根ハ

$$-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ノ如ク書キ表スコトヲ得レバ,實數ノ部分ハ共ニ $-\dfrac{b}{2a}$ ニシテ,虛數ノ部分ハ唯ダ符號ノミガ反對ナルコトヲ知ル。カヤウナ複素數ヲ**互ニ共軛ナル複素數**ト云フ。

故ニ,二次方程式*ノ一ツノ根ガ複素數ナラバ,他ノ一ツノ根ハ,ソレニ共軛ナル複素數ナリ。

上ノ結果ヲ纏メレバ

(I). $b^2-4ac>0$ ナラバ,實根ニシテ不等根.

(II). $b^2-4ac=0$ ナラバ,實根ニシテ等根.

* 係數及ビ常數項ハ實數ナル二次方程式ナリ。

(III). $b^2-4ac<0$ ナラバ,虚根.

カヤウニ,方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ性質ハ,b^2-4ac ノ値ニヨリ,判定スルコトヲ得レバ,此式ヲ二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ**判別式**ト云フ。

例一。 $x^2+5x-7=0$ ノ根ノ性質ヲ判定セヨ。

$$a=1,\quad b=5,\quad c=-7.$$

$$\therefore\quad b^2-4ac=25+28=53.$$

故ニ,二根ハ實根ニシテ,不等根ナリ。

例二。 $2x^2-6x+5=0$ ノ根ノ性質ヲ判定セヨ。

$$a=2,\quad b=-6,\quad c=5.$$

$$\therefore\quad b^2-4ac=36-40=-4.$$

故ニ,二根ハ虚根ナリ。

例三。 次ノ方程式ノ二ツノ根ガ相等シキタメニハ,m ノ値ヲ如何ニ選定スレバヨキカ。

$$2mx^2+(5m+2)x+(4m+1)=0.$$

一般ノ方程式ト比較シ,$a=2m$, $b=5m+2$, $c=4m+1$ ナレバ,其等ノ値ヲ $b^2-4ac=0$ ニ代入シテ

$$(5m+2)^2-8m(4m+1)=0.$$

未知數 m ニ就テノ此二次方程式ヲ整頓シテ

$$7m^2-12m-4=0.$$

$$\therefore\quad m=2,\quad \text{或ハ}\quad m=-\frac{2}{7}.$$

〔驗;m ヲ 2, 或ハ $-\frac{2}{7}$ トスレバ,與ヘラレタル方程式ハ

$$4x^2+12x+9=0,\quad 4x^2-4x+1=0$$

トナル。是レヲ因數ニ分解シテ

$$(2x+3)^2=0,\quad (2x-1)^2=0.$$

此方程式ハ共ニ等根ヲ有ス〕。

練習問題 (6)

次ノ方程式ノ根ノ性質ヲ判定セヨ。(1)−(6).

1. $x^2-7x+12=0.$ **4.** $x^2+4x-32=0.$

2. $3x^2-3x+1=0.$ **5.** $x^2-2x+9=0.$

3. $5x^2+8=0.$ **6.** $4x^2-12x+9=0.$

次ノ方程式ガ等根ヲ有スルタメニハ,m ノ値ヲ如何ニ選定スレバヨキカ。(7)−(10).

7. $(m+1)x^2+(m-1)x+m+1=0.$

8. $m^2x^2+(m^2+m)ax+a^2=0.$ (水產)

9. $x^2-2(m-1)x+m=0.$ (高等)

10. $2x^2-3x-3+m(x^2+x+2)=0.$ (海軍)

11. a, b, c ガ實數ナルトキ,方程式

$$(b^2-4ac)^2x^2+(a+c)x=4$$

ハ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。 (神商)

12. $2b=a+c$ ナルトキ,方程式

$$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

ハ等根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。 (東師)

142. 根ト係數トノ關係

二次方程式

$$x^2-6x+5=0$$

ヲ解クタメ,左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-1)(x-5)=0$$

トナリ,x ノ二ツノ値ハ 1 ト 5 トナル。此ノ二ツノ値ノ和 6 ハ,x ノ係數ノ符號ヲ變ヘタルモノニ等シク,積 5 ハ常數項ニ等シ。

一般ニ,二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

ノ二ツノ根ヲ α,β* トスレバ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ニシテ,此二ツノ根ノ和ト,積トヲ作リ

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}, & (1) \\[2ex] \alpha\beta=\dfrac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}. & (2) \end{cases}$$

* β ハぎりしや字ニシテ Beta「べえたあ」ト讀ム。

故ニ,方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ兩邊ヲ x^2 ノ係數 a ヲ以テ割リ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

ノ如ク變形シテ,次ノ關係ヲ得。

一元二次方程式アリ。二次ノ項(x^2)ノ係數ヲ以テ全體ヲ割リシトキ

1. 二ツノ根ノ和ハ,一次ノ項(x)ノ係數ノ符號ヲ變ヘタルモノニ等シク,
2. 二ツノ根ノ積ハ,常數項ニ等シ。

例ヘバ, $2x^2+3x-4=0$ ノ二根ノ和ハ $-\dfrac{3}{2}$ ニ等シク,二根ノ積ハ -2 ナリ。

【注意】 虚根ノ場合ニモ二根ノ和ト積トハ實數ナリ。

例一。 方程式 $4x^2+12x+d=0$ ノ二ツノ根ノ差ガ 2 ナルトキ,其等ノ根ト d ノ値トヲ求メヨ。

α,β ヲ二ツノ根トスレバ, $\beta-\alpha=2$ ニシテ, β ハ $\alpha+2$ トナル。故ニ

$$\alpha+\beta=\alpha+(\alpha+2)=-\frac{12}{4},\quad 2\alpha+2=-3.$$

$$\therefore\ \alpha=-\frac{5}{2}.$$

又 $\dfrac{d}{4}=\alpha\beta=-\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{5}{2}+2\right)=-\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right),$

$\therefore\ d=5.$

例二。方程式$x^2+px-q=0$ニ於テ,pハ實數,qハ零ニ等シカラズシテ正ノ實數ナルトキ,此方程式ノ一ツノ根ハ正數ニシテ,他ハ負數ナルコトヲ證明セヨ。

先ヅ,根ノ性質ヲ判定スルタメ,判別式

$$p^2+4q$$

ヲ見ルニ,p^2ハ零,又ハ正數ニシテ,$4q$ハ正數ナレバ,此式ノ値ハ正數ニシテ零ニアラズ。故ニ,方程式ノ二ツノ根ハ實數ニシテ等シカラズ。

又,二ツノ根ノ積ハ,常數項$-q$ニ等シク,是レハ負數ナレバ,二ツノ實根ノ中,一ツハ正數ニシテ,他ノ一ツハ負數ナリ。

練習問題 (7)

次ノ方程式ノ二根ノ和,及ビ積ヲ求メヨ。

(1)−(4).

1. $x^2-7x+3=0.$ **2**. $9x^2=25.$

3. $2x^2+5x+1=0.$ **4**. $ax^2+ab=a^2+bx.$

5. 方程式$x^2-3(1+m)x+5+8m=0$ノ一ツノ根ハ,他ノ根ノ五倍ニ等シト云フ。mノ値ヲ求メヨ。

6. $ax^2+bx+c=0$ノ二ツノ根ヲα及ビβトスレバ,$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{b}{c}=0$ナルコトヲ證明セヨ。

7. 方程式$x^2+bx+c=0$ノ根ハ$a,\ -2a$ニシテ,方程式$x^2+(b-4)x+c=0$ノ根ハ$-a,\ 2a$ナルトキb, c, aノ値ヲ求メヨ。 (仙工)

8. 二次方程式$x^2-p^2x-p=0$ニ於テ,二ツノ根ハ$x^2+px-1=0$ノ二ツノ根ニ,夫々1ヲ加ヘタルモノニ等シト云フ。pノ値ヲ求メヨ。 (海軍)

9. 次ノ方程式ノ二ツノ根ガ,絶對値ヲ等シクシテ,符號ノミ異ニスル樣ニmノ値ヲ定メ,次ニ其根ヲ求メヨ。

$$3(x-1)(x-m)=x(7-m^2).$$ (桐工)

10. p, qガ實數ナルトキ,方程式$x^2+px+q=0$ノ二根ガ共ニ正ノ實數ナルタメニハ,$p^2\geqq 4q,\ p<0,\ q>0$ナルヲ要ス,是レヲ證明セヨ。又,二根ガ共ニ負ノ實數ナルタメノ條件ヲ求メヨ。

143. 既知數ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト

方程式$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ハαトβトヲ根トスル二次方程式ナレバ，7ト-4トヲ根トスル二次方程式ハαヲ7トシ，βヲ-4トシテ

$$(x-7)\{x-(-4)\}=0,\ 或ハ\ (x-7)(x+4)=0$$

ナリ。或ハ，$(x-7)(x+4)=x^2-3x-28$ナレバ

$$x^2-3x-28=0$$

ヲ求ムル方程式トシテモ可ナリ。

例。 2,3,5ヲ根トスル三次方程式ヲ作レ。

求ムル方程式ハ

$$(x-2)(x-3)(x-5)=0.$$

或ハ $$x^3-10x^2+31x-30=0.$$

練習問題 (8)

次ノ各數ヲ根トスル最低次ノ方程式ヲ作レ。

1. $3,\ -7.$ **4.** $3+2\sqrt{-1},\ 3-2\sqrt{-1}.$

2. $-5,\ -6.$ **5.** $a-\sqrt{3},\ a+\sqrt{3}.$

3. $\sqrt{5},\ -\sqrt{5}.$ **6.** $a,\ -b,\ -c.$

7. $x^2+px+q=0$ノ根ヲα,βトスレバp,qヲ根トスル二次方程式ハ

$$x^2+(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。 (商船)

8. 方程式$3x^2+6x+2=0$ノ根ヲα及ビβトシ，$-\dfrac{\alpha^2}{\beta}$及ビ$-\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ。

(神商)

9. 方程式$ax^2+bx+c=0$ノ根ヲα及ビβトスレバ$\dfrac{1}{\alpha+2\beta},\ \dfrac{1}{\beta+2\alpha}$ヲ根トスル二次方程式ハ

$$(2b^2+ac)x^2+3abx+a^2=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。 (名工)

144. 二次式ノ因數分解

xニ就テノ二次式

$$ax^2+bx+c$$

ヲ因數ニ分解スルニ當リ，$ax^2+bx+c=0$ノ二ツノ根ヲα,βトスレバ

$$\frac{b}{a}=-(\alpha+\beta),\quad \frac{c}{a}=\alpha\beta$$

ナルコトヲ注意シ

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

$$\therefore \quad ax^2+bx+c=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}.$$

$$\therefore \quad ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

トナル。尙ホ,根ノ公式ヲ用ヒ α, β ニ實際ノ値ヲ入レテ

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{ax^2+bx+c} \\ &\boldsymbol{=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).} \end{aligned}$$

或ハ

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{ax^2+bx+c} \\ &\boldsymbol{=a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).} \end{aligned}$$

二次式ヲ因數ニ分解スルニ,此公式ヲ用フレバ,視察ニヨルヨリモ却テ簡單ノコトアリ,且ツ根ガ無理數ノトキハ,多クノ場合,視察ニテハ因數ニ分解シ得ズ。併シ,上ノ公式ニヨレバ,容易ニ因數ニ分解シ得ラルベシ。*

---

* 因數分解ヲ行フトキ,因數ノ係數ハ實數ニ限ルモノト規約スルコト多シ。例ヘバ, x^2+1 ハ $(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$ ノ如ク變形サルルモ,因數ニ虛數ノ項ガ表ル。是レハ,實數ノミヨリ成ル因數ニハ分解サレズ。カヤウナ場合ニハ,因數ニ分解サレズト云フコト普通ナリ。

例一。 $2x^2+x-3$ ヲ因數ニ分解セヨ。

方程式 $2x^2+x-3=0$ ノ二根ハ 1 及ビ $-\dfrac{3}{2}$ ナレバ

$$\begin{aligned} 2x^2+x-3&=2(x-1)\left\{x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\} \\ &=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right) \\ &=(x-1)(2x+3). \end{aligned}$$

〔驗：$(x-1)(2x+3)=2x^2-2x+3x-3=2x^2+x-3$〕。

例二。 $2x^2+xy-2y^2$ ヲ因數ニ分解セヨ。

x ニ就テノ方程式 $2x^2+xy-2y^2=0$ ノ二ツノ根ハ

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}y, \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4}y$$

ナレバ

$$\begin{aligned} 2x^2+xy-2y^2&=2\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{4}y\right) \\ &=\left(2x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}y\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{4}y\right) \end{aligned}$$

〔驗：結果ヲ驗シテ見ヨ〕。

一元二次方程式ガ二ツノ根ヲ有スルコトハ,既ニ說明セル通リナルモ,夫レニ附隨シテ起ル問題ハ,三ツ以上ノ根ヲ有セズヤト云フコトナリ。今,二次方程式 $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ ガ相異ナル三ツ

ノ根ヲ有スルモノトシ,其値ヲ α,β,γ* トスレバ

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ニシテ,γ ハ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ナルニヨリ,従テ

$a\gamma^2+b\gamma+c=0$ ナルベク,故ニ上ノ等式ニヨリ

$$a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=0$$

ナルベシ。然ルニ,是等三ツノ因数 $a, \gamma-\alpha$ $\gamma-\beta$ ノ中,零ナルモノ一ツモナシ。故ニ,此ノ等式ハ成立スルコトナシ。卽チ,二次方程式ハ三ツノ根ヲ有スルコトナシ。故ニ

一元二次方程式ハ二ツヨリ多クノ根ヲ有スルコトナシ。

練習問題 (9)

次ノ式ヲ因数ニ分解セヨ。

1. $3x^2+11x-4.$ **4.** $15x^2+53x+27.$ (山商)

2. $3y^2+8y-3.$ **5.** $4a^2-151ab+1365b^2.$ (商船)

3. $2m^2-3m+2.$ **6.** $6x^2-19x+15.$ (海兵)

7. $abx^2+(a^2+b^2)xy+aby^2$, 但シ $ab\neq0.$

8. $A(x^2-y^2)-xy(B-C)$, 但シ $A\neq0.$

* γ ハぎりしや字, "Gamma",「がんまあ」ト讀ム。

第三章

分數方程式

145. 方程式ノ同値

二ツノ方程式アリ。其一ツノ方程式ノ總テノ根ガ,他ノ方程式ニ適合シ,又後ノ方程式ノ總テノ根ガ,前ノ方程式ヲ滿足セシムルトキ,此ノ二ツノ方程式ハ**同値ナリ**ト云フ。

例ヘバ,次ノ二ツノ方程式

$$x^2-6x+8=0. \qquad (1)$$

$$5(x-2)(x-4)=0. \qquad (2)$$

ニ於テ,(1)ノ根2ト4トハ(2)ニ適合シ,又(2)ノ二ツノ根2ト4トハ(1)ニ適合スレバ,(1)ト(2)トハ同値ナリ。然レドモ(1),或ハ(2)ト

$$x-2=0 \qquad (3)$$

トハ同値ナラズ,(3)ノ根2ハ(1),又ハ(2)ニ適合スルモ,(1)又ハ(2)ノ根2及ビ4ノ中,4ハ(3)ニ適合セザレバナリ。

或方程式ノ兩邊ニ,未知數ヲ含ム同ジ式ヲ掛ケ

テ得タル方程式,或ハ同ジ式ニテ割リテ得タル方程式ハ,一般ニ原ノ方程式ト同値ナラズ。

例ヘバ,方程式 $3x=2$ ハ $\frac{2}{3}$ ヲ根トスレドモ,兩邊ニ $x-2$ ヲ乘ジテ得タル方程式 $3x(x-2)=2(x-2)$ ハ二ツノ根 $\frac{2}{3}$, 2ヲ有シ,初メノ方程式ト同値ナラズ。其ノ2ハ,兩邊ニ乘ジタル式,$x-2$ ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ方程式,$x-2=0$ ノ根ナリ。

又,$3x(x-2)=2(x-2)$ ハ $\frac{2}{3}$, 及ビ2ナル根ヲ有スルモ,兩邊ヲ $x-2$ ニテ割リテ得タル方程式 $3x=2$ ハ $\frac{2}{3}$ ノミヲ根トシ,原ノ方程式ト同値ナラズ。

故ニ,方程式ノ兩邊ヲ未知數ヲ含ム式ニテ乘除スルニハ注意ヲ要ス。但シ,明ニ零ニ等シカラザル式ニテ乘除スルハ差支ナシ。

146. 二次方程式ニ歸スル分數方程式

分數方程式ノ解法ハ,曩ニ第五篇ニテ説明セリ。今,特ニ一元二次方程式ニ歸着スルモノヲ考ヘン。分數方程式ヲ解クトキニ,注意スベキハ,何レノ

分數式ノ分母モ,零ニ等シカラザルコトナリ。

例。$\frac{x}{x-2}+\frac{x-3}{x-1}=\frac{3x-4}{x-2}$ ヲ解ケ。

第五篇ニ説明シタルガ如ク,先ヅ全體ヲ左邊ニ集メ,通分シテ其和ヲ作リ,既約分數式ニ化シ

$$\frac{x}{x-2}+\frac{x-3}{x-1}-\frac{3x-4}{x-2}=0. \tag{1}$$

$$\frac{x(x-1)+(x-3)(x-2)-(3x-4)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=0. \tag{2}$$

$$-\frac{x^2-x-2}{(x-1)(x-2)}=0,$$

$$-\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=0,$$

$$\therefore\ -\frac{x+1}{x-1}=0. \tag{3}$$

此等式(3)ガ成立スルタメニハ,分子 $x+1$ ガ零ナルヲ要シ,又ソレガ零ナラバヨシ。故ニ,求ムル根ハ

$$x=-1.$$

或ハ,此方法ニ據ラズニ,兩邊ニ總テノ分母ノL.C.M. $(x-1)(x-2)$ ヲ掛ケ,分母ヲ拂フモヨシ。

分數式ノ分母ハ零ニ等シカラザル事ヲ原則トスレバ,與ヘラレタル方程式ト,方程式ノ兩邊ニ零

ニ等シカラザル $(x-1)(x-2)$ ヲ掛ケタルモノ

$$x(x-1)+(x-3)(x-2)=(3x-4)(x-1). \qquad (4)$$

トハ同値ナリ。整方程式(4)ノ根ハ

$$x=-1,\ 2.$$

偖テ,此場合ニ注意スベキハ,$(x-1)(x-2)$ ハ零ニ非ザルモノトシテ,方程式(4)ヲ得タルガ,上ノ根 -1 及ビ2ハ果シテ $(x-1)(x-2)$ ヲ零ナラシメヌモノナルカ否カ,卽チ分數式ノ分母ヲ零ナラシメヌモノナルカ否カ。若モ,零ニスルモノナラバ,ソレハ捨テザル可カラズ,所デ $x=-1$ ハ $(x-1)(x-2)$ ヲ零ナラシムルモノニ非ズ,卽チ分母ヲ零ナラシムル値ニ非ズ。實際,驗算ヲ行フニ各邊ノ x ヲ -1 トシ

$$\frac{-1}{-1-2}+\frac{-1-3}{-1-1}=\frac{7}{3},\quad \frac{3(-1)-4}{-1-2}=\frac{7}{3}$$

故ニ,$x=-1$ ハ求ムル根ナリ。次ニ,$x=2$ ヲ考フルニ是レハ $(x-1)(x-2)$ ヲ零ナラシメ,原ノ方程式ノ第一分數式ノ分母ヲ零ナラシムル値ナレバ,根ニ非ズ。故ニ,求ムル根ハ -1 ノミ。

【注意】分數方程式ヲ解クニハ普通,第二ノ方法ニ據ル。此時ノ驗算ハ,分數方程式ヲ變形シテ得タル整方程式ノ

根ガ,原式ノ分母ヲ零ナラシムル値ナルカ否カヲ驗シ,且ツ計算ニ誤ナキカ否カヲ驗ス譯ニシテ,根ヲ決定スル上ニハ,是非トモ試ムルヲ要スル階程ナリ。

練習問題 (10)

次ノ方程式ヲ解キ,驗算ヲ行ヘ。

1. $\dfrac{3x-2}{2x-3}=\dfrac{3x-8}{x+4}.$

4. $\dfrac{a}{x+a-c}+\dfrac{b}{x+b-c}=2.$ (長商)

2. $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3}{2}.$

5. $\dfrac{x+1}{1-x}+\dfrac{x+2}{2-x}+\dfrac{x+3}{3-x}=3.$ (神商)

3. $\dfrac{x-5}{4}-\dfrac{4}{x-5}=\dfrac{3x-1}{4}.$

6. $\dfrac{a-x}{b}-\dfrac{b}{a-x}=\dfrac{a}{b-x}-\dfrac{b-x}{a}.$

7. $\dfrac{5}{6-\dfrac{5}{6-\dfrac{5}{6-x}}}=x.$

147. 應用問題

例。若干本ノ筆ヲ購入シ,1圓20錢ヲ支拂ヘリ。若シ,一本ノ値段ガ3錢宛安キモノヲ買ヘバ,同ジ金額ニテ2本多ク購入スルコトヲ得ベシト云フ。筆ノ個數ト,一本ノ値段トヲ求メヨ。

x=筆ノ個數,

$$\frac{120}{x}=\text{筆一本ノ値段(錢ヲ單位トシテ)}.$$

若モ,一本3錢宛安ケレバ

$$x+2=\text{筆ノ個數},$$

$$\frac{120}{x+2}=\text{筆一本ノ値段(錢ヲ單位トシテ)}.$$

$$\therefore \quad \frac{120}{x}-\frac{120}{x+2}=3.$$

此分數方程式ヲ解キ

$$x=8,\ \text{或ハ}\ -10.$$

筆ノ個數ガ-10ト云フコトナケレバ,ソレヲ捨テテ,筆ハ8本,一本ノ値段ハ$\frac{120}{8}$錢,卽チ15錢ナリ。

〔驗；$120\div15=8$, $120\div(15-3)=10$. $10-8=2$〕。

練習問題 (11)

1. 若干本ノ筆ヲ購入シ,1圓20錢ヲ支拂ヘリ。若シ,一本3錢宛高ケレバ,同ジ金額ニテ購入シ得ラルル筆ノ個數ハ,前ヨリモ2本少カルベシト云フ。筆ノ個數ト,一本ノ値段トヲ求メヨ。

2. 420哩ノ距離ヲ旅行スルニ,急行列車ニヨレバ,普通列車ニヨルヨリモ,7時間早ク到着スルト云フ。兩列車ノ速サノ差ハ毎時十哩ナルコトヲ

知リテ,各列車ノ毎時間ニ於ケル速サヲ求メヨ。

3. 或集會ヲ開催シ,24圓ヲ會員ヨリ平均ニ醵出スル筈ナリシガ,2人ノ缺席者アリシタメ,1人ノ負擔40錢ヲ增セリ。出席會員數ヲ求メヨ。

4. 或鳥商50圓ニテ鷄若干羽ヲ買入レタルニ,其內,四羽病死シタリ。然ルニ,殘リ全部ヲ一羽ニツキ75錢宛ノ利益ニテ賣却シ,結局2圓ノ利益ヲ得タリト云フ。幾羽ヲ買ヒタルカ。 (東師)

5. 9哩ノ道ヲ行ク人アリ,3哩ヲ行キタル後,速サヲ毎時間1哩增セバ,豫定ヨリモ一時間早ク到着スベシト云フ。豫定ノ時間數ヲ求メヨ。

6. 或人,若干ノ土地ヲ地代百四拾四圓ニテ借リ受ケ,其內八段ヲ自家用ニ供シ,殘リヲ自己ノ借賃ヨリ,一段ニツキ貳拾錢高ク他人ニ轉貸シタルニ,其貸賃ヲ以テ丁度地主ニ全部ノ地代ヲ拂ヒ得タリ。此人ノ借リシ總段別ヲ求メヨ。 (高等)

7. 甲乙二臺ノ發電機アリ。乙ハ毎分,甲ヨリモ100回多ク廻轉ス,甲ガ900回廻轉スルニ要スル時間ハ,乙ガ700回廻轉スルニ要スル時間ヨリ$\frac{1}{12}$分多シ。甲乙一分間ノ廻轉數ヲ求メヨ。

8. 水槽アリ。水ヲ入ルルニ,甲乙二管ヲ用フレバ4時間ニテ滿ツベク,其中ノ一管ヲ用フレバ,他ノ管ヲ用フルヨリモ,6時間早ク滿ツベシト云フ。各一管ヲ用フレバ,幾時間ニテ滿ツルカ。

9. 或事業ヲナスニ,甲ハ乙ヨリ10日早ク仕上グベシト云フ。今,甲乙協力シテ12日働キタル後,殘業ヲ乙一人ニテナシタルニ,12日ヲ要シタリ。甲乙各一人ニテハ,全事業ヲ幾日ニ成就スベキカ。

第四章

無理方程式

148. 無理方程式

未知數ニ就テノ無理式ヲ含ム方程式ヲ**無理方程式**ト云フ。

$$x^2+\sqrt{x^2-7}=19,\quad \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$$

ノ如キハ無理方程式ナリ。

例一。 $\sqrt{6-x}-\sqrt{3}=\sqrt{x-3}$ ヲ解ケ。

根號ヲ取リ去ルタメ,兩邊ヲ平方シテ

$$6-x-2\sqrt{3}\sqrt{6-x}+3=x-3.$$

移項シテ2ニテ割リ

$$6-x=\sqrt{3}\sqrt{6-x}.$$

再ビ平方シテ

$$36-12x+x^2=3(6-x),\qquad x^2-9x+18=0.$$

$$\therefore\quad (x-6)(x-3)=0.$$

故ニ,xハ6, 3ナリ。方程式ノ各邊ノxヲ6トシ

$$\sqrt{6-6}-\sqrt{3}=-\sqrt{3},\qquad \sqrt{6-3}=\sqrt{3}.$$

故ニ,$x=6$ハ根ニアラズ,次ニxヲ3トスレバ

$$\sqrt{6-3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0,\quad \sqrt{3-3}=0.$$

故ニ, $x=3$ ハ求ムル根ナリ。

上ノ例ニ於テ,何故ニ原ノ方程式ヲ滿足セザル根(無緣根ト云フ)ガ表レタルカ。ソレハ,或方程式 $P=Q$ (P, Q ノ中,少クトモ何レカ一方ハ未知數ヲ含ム代數式)ト,兩邊ヲ平方シテ得ベキ方程式 $P^2=Q^2$ トハ,一般ニ同値ニアラズ。ソレハ $P=Q$ ト,$P-Q=0$ トハ同値ノ方程式ニシテ,第二ノ方程式 $P^2=Q^2$ ハ $P^2-Q^2=0$, 卽チ $(P-Q)(P+Q)=0$ ト同値ナルニヨリ $P-Q=0$ ノ根ノ外ニ,尙ホ $P+Q=0$ ノ根*ヲモ含ムニヨル(例二ヲ參照セヨ)。

故ニ,無理方程式ノ根號ヲ取リ去ルタメニ,兩邊ヲ平方スルコトアレバ,其結果ハ必シモ初メノ方程式ト同値ニ非ズ。無理方程式ノ根ヲ確定スルニハ驗算ヲスルコト必要ナリ。

例二。 方程式 $\sqrt{x-1}=\sqrt{3}+\sqrt{4-x}$ ヲ解ケ。

未知數ヲ含ム一ツノ無理式ガ一邊ニ在ルコト

* 但シ方程式 $P+Q=0$ ニ根ノナキコトモアルベシ。

ニ注意シテ

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{3}+\sqrt{4-x}. \tag{1}$$

ノ兩邊ヲ平方シテ

$$x-1=3+2\sqrt{3}\sqrt{4-x}+4-x. \tag{2}$$

移項シテ,兩邊ヲ 2 ヲ以テ割リ

$$x-4=\sqrt{3}\sqrt{4-x}. \tag{3}$$

再ビ兩邊ヲ平方シテ

$$x^2-8x+16=3(4-x), \tag{4}$$

$$x^2-5x+4=0,$$

$$\therefore\ (x-1)(x-4)=0. \tag{5}$$

(5) ニ適スル x ハ 1, 及ビ 4 ナリ。是レヲ,原式ニ代入スレバ

$x=1.$	$x=4.$
$\sqrt{1-1}-\sqrt{4-1}=-\sqrt{3},$	$\sqrt{4-1}-\sqrt{4-4}=\sqrt{3},$
$-\sqrt{3}\neq\sqrt{3}.$	$\sqrt{3}=\sqrt{3}.$

故ニ, $x=4$ ガ求ムル根ナリ。

次ニ, $x=1$ ナル無緣根ノ表レタル原因ハ,(1)ヲ平方シテ (2) ニ移ルノハ (1), 卽チ

$$\sqrt{x-1}-\{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}\}=0$$

ノ兩邊ニ $\sqrt{x-1}+\{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}\}$ ヲ掛ケテ,方程式

$$\left[\sqrt{x-1}-\{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}\}\right]$$
$$\times\left[\sqrt{x-1}+\{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}\}\right]=0 \qquad (2)'$$

ヲ作リ,此ノ括弧ヲ拂ヒシモノガ(2)ナリ。又,(3)ヲ平方シテ(4)ヲ得ルノハ, $(x-4)-\sqrt{3}\sqrt{4-x}=0$ ノ兩邊ニ $(x-4)+\sqrt{3}\sqrt{4-x}$ ヲ掛ケルコトニシテ

$$(x-4-\sqrt{3}\sqrt{4-x})(x-4+\sqrt{3}\sqrt{4-x})=0 \qquad (4)'$$

ガ(4)ニ當ル。即チ,方程式(5)ハ

$$\left[\sqrt{x-1}-\{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}\}\right]\left[\sqrt{x-1}+\{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}\}\right]$$
$$\times(x-4+\sqrt{3}\sqrt{4-x})=0 \qquad (5)'$$

ト同値ナリ。故ニ,方程式(1)ハ(5)ト必シモ同値ナラザルコト明ナリ。方程式(1)ノ無縁根 $x=1$ ハ,因數 $x-4+\sqrt{3}\sqrt{4-x}$ ヲ零ナラシムル値ニシテ,方程式 $x-4+\sqrt{3}\sqrt{4-x}=0$ ノ根ナリ。

故ニ,無理方程式ヲ解クニハ

1. 未知數ヲ含ム無理式ヲ唯ダ一ツダケ一邊ニ置キ,
2. 兩邊ヲ乘羃シ,尙ホ根式ヲ含メバ,(1)ノ要領ニ從ヒ,移項シテ再ビ乘羃シ,カヤウニシテ,
3. 最後ニ整方程式ヲ解キ,
4. 其根ヲ原ノ方程式ニ代入シテ,根ヲ確定スベシ。

例三。 方程式 $7x^2-5x+8\sqrt{7x^2-5x+1}=8$ ヲ解ケ。

前ノ方法ヲ適用スレバ,四次方程式トナル。是レヲ解クニハ,兩邊ニ1ヲ加ヘ

$$7x^2-5x+1+8\sqrt{7x^2-5x+1}=9.$$

$\sqrt{7x^2-5x+1}$ ヲ一ツノ未知數ト見テ, y ト置キ

$$y^2+8y-9=0.$$
$$\therefore \quad y=1, \quad -9.$$

$\sqrt{7x^2-5x+1}$ ハ實數ナラバ正數(又ハ零)ヲ表スベキ規約ナレバ, -9 ニ等シキコト能ハズ。 $y=1$, 從テ

$$7x^2-5x+1=1,$$
$$\therefore \quad x(7x-5)=0.$$

故ニ, x ハ 0 及ビ $\frac{5}{7}$ ナリ。此二ツハ $\sqrt{7x^2-5x+1}$ ヲ 1 ナラシムル値ニシテ,ソレヲ以テ,原方程式ノ根ナルコトヲ驗算シ得ベシ。

練習問題 (12)

次ノ方程式ヲ解キ,驗算セヨ。(1)—(6).

1. $x+\sqrt{x+5}=7.$ 3. $\sqrt{x}+\sqrt{5x+1}=5.$

2. $2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=5.$ 4. $3\sqrt{x+4}-2\sqrt{2x-1}=3.$ (東師)

5. $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24.$ (山商)

6. $3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0.$ (海兵)

7. $\sqrt{x+9}=2\sqrt{x}-3$ ヲ解クタメニ,二回平方シテ表レル整方程式ハ,原方程式ニ如何ナル式ヲ掛ケタモノト同値ナルカ。且ツ,上ノ方程式ヲ解ケ。

第五章

ぐらふニ據ル解法

149. 一元一次方程式

一元方程式ノ解法ノ根底トナルベキ性質ノ中,ぐらふヲ用ヒテ説明スレバ,極メテ平易ニ,且ツ明瞭ニ會得サレルモノ多シ。先ヅ順序トシテ,一元一次方程式ノ場合ヨリ初ムベシ。

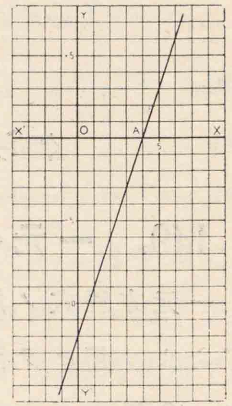
例。 ぐらふニヨリ,方程式 $3x-12=0$ ヲ解ケ。

$3x-12$ ハ x ニ種々ナル値ヲ代入スレバ,種々異ナル値ヲトル。$x=1$ ノトキハ -9, $x=2$ ノトキハ -6 トナルガ如シ。問題ハ,$3x-12$ ヲ 0 ニ等シカラシムル x ヲ求ムルニアリ。

今, $y=3x-12$ トシ, x ノ値ニ應ズル y ヲ求ム。

x	-2	-1	0	1	2	5	6
y	-18	-15	-12	-9	-6	3	6

是等ノ相應ズル値ヲ,點ノ座標トシテぐらふヲ作レバ,次ノ圖ノ如シ。是レハ,直線ナリ。



此ノぐらふガ,x軸ト交ル點ヲAトスレバ,A點ノ座標ハ$x=4$, $y=0$ナリ。

故ニ,原ノ方程式ニ於テ,$x=4$トスレバ,y即チ$3x-12$ハ0トナル,$x=4$ハ$3x-12=0$ノ根ナリ。

xノ一元方程式ヲぐらふニヨリ解クニハ

1. 總テノ項ヲ左邊ニ集メ,
2. 其左邊ヲyトシ,
3. 未知數xニ種々ナル値ヲ代入シテ,ソレニ應ズルyノ値ヲ求メ,
4. x, yノ夫々相應ズル値ヲ,點ノ座標トシテぐらふヲ作リ,
5. ぐらふガ,x軸ト交ル點ヲ求メレバ,交點ノx座標ガ求ムル根ナリ。

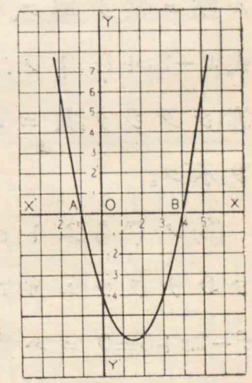
【注意】 一元一次方程式ノぐらふハ直線ニシテ,ソレガx軸ト交ル點ハ,一般ニ一ツナレバ,圖ノ上ヨリ,一元一次方程式ノ根ハ一ツアルコトヲ知ル。

150. 一元二次方程式

例。ぐらふニヨリ方程式$x^2-3x-4=0$ヲ解ケ。

$y=x^2-3x-4$トシ,xニ種々ノ値ヲ代入スレバ

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6



x, yノ相應ズル値ヲ點ノ座標トシテ,ぐらふヲ作レバ,圖ノ如シ。

ぐらふガx軸ト交ル點ヲA, Bトスレバ

點A: $x=-1$, $y=0$.

點B: $x=4$, $y=0$.

故ニ,求ムル根ハ-1, 及ビ4ナリ。

〔驗: $(-1)^2-3(-1)-4=1+3-4=0$, $4^2-3\cdot4-4=16-12-4=0$〕。

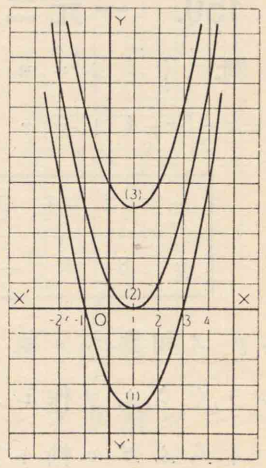
上ノ例ニ倣ヒ,方程式$x^2-2x-3=0$, $x^2-2x+1=0$及ビ$x^2-2x+5=0$ヲ解クタメ,ぐらふ

(1) $y=x^2-2x-3$,

(2) $y=x^2-2x+1$,

(3) $y=x^2-2x+5$.

ヲ作レバ圖ノ如シ。

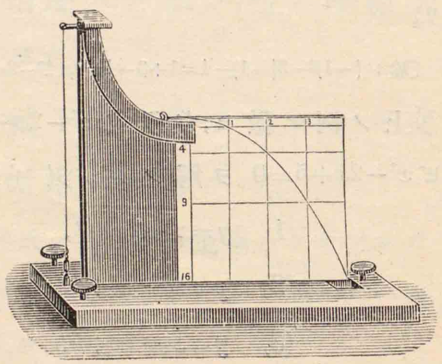


(1)ノぐらふト,x軸トハ二點ニテ交リ,其座標ハ$(-1,0)$,$(3,0)$ナレバ,$x^2-2x-3=0$ノ根ハ-1及ビ3ナリ。

(2)ノぐらふハ,x軸ト$(1,0)$ナル點ニ於テ切ス。是レハ,方程式$x^2-2x+1=0$ノ二ツノ根ハ相等シクシテ,共ニ$x=1$ナルコトヲ示ス。

(3)ノぐらふトx軸トハ交ラズ,是レハ(3)式ノyヲ0ナラシムルxノ値ノナキコトヲ示シ,方程式$x^2-2x+5=0$ニハ實根ナク,虚根ヲ有スルコトヲ示スモノナリ。

上ノ圖ニ示スガ如キぐらふヲ拋物線ト云フ。



拋物線ハ物體ヲ投ゲルトキニ現レル曲線ナリ。

一般ニ,方程式

$$y=ax^2+bx+c$$

ノ表スぐらふハ拋物線ナリ。

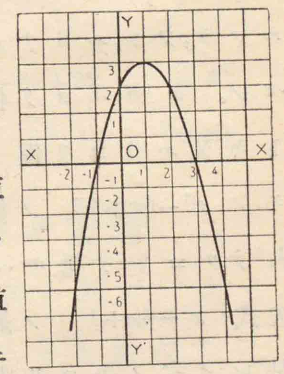
上ノ例ハ,總テaガ正數ノトキナリシガ,aガ負數ノトキハ如何。例ヘバ

$$y=3+2x-x^2$$

ノぐらふハ

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	0	3	4	3	0	-5

ノ如クニシテ,下ノ圖ニ示スガ如キ拋物線ナリ。



151. 最大,最小

右ノ圖ニ於テ,xガ實數ノ値ヲトルトキ,y即チ$3+2x-x^2$ノトル最大値ハ$x=1$ノトキノ値4ニシテ,xガ1ヨリモ僅カニ小ナル時,又ハ1ヨリモ僅カニ大ナル時,$3+2x-x^2$ノトル値ハ4ヨリモ小*ナルヲ見ル。4ヲ$3+2x-x^2$

* 實際,$x=1\pm\frac{1}{100}$トスレバ$3+2x-x^2=4-\left(\frac{1}{100}\right)^2$トナル。

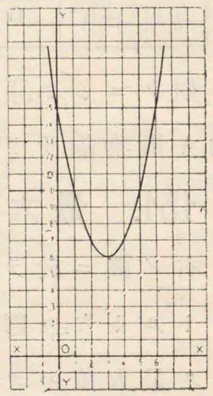
ノ**最大値**ト云フ。 即チ

$$3+2x-x^2=4-(1-2x+x^2)$$

$$=4-(x-1)^2$$

ニシテ,茲ニ $(x-1)^2$ ハ $x-1$ ガ實數ナレバ零又ハ正數ナリ。 故ニ, $4-(x-1)^2$ ノトル値ハ, 4カ又ハ4ヨリ小ナルベク,從テ4ガ其最大値ナリ。 又,4トナルノハ $x-1$ ガ零ナルトキナリ。

次ニ, $y=x^2-6x+15$ ノぐらふヲ求メンニ,其ぐらふハ圖ノ如シ。 此ぐらふヨリシテ, $x=3$ ニ應ズル y ノ値ガ最小ニシテ,ソレハ6ナルコトヲ見ルベシ。 x ガ3ヨリ僅カニ小ナルトキ,又ハ3ヨリ僅カニ大ナルトキノ $x^2-6x+15$ ノ値ハ6ヨリモ大*ナルコトヲ見ルベシ。 6ヲ二次式 $x^2-6x+15$ ノ**最小値**ト云フ。



是レヲ式ノ上ヨリ求メレバ

$$x^2-6x+15=x^2-6x+9+6$$

* 實際, $x=3\pm\frac{1}{100}$ トスレバ $x^2-6x+15=6+\left(\frac{1}{100}\right)^2$ トナル。

$$=(x-3)^2+6$$

茲ニ, $(x-3)^2$ ハ $x-3$ ガ實數ナレバ,零又ハ正數ニシテ, $(x-3)^2+6$ ハ6カ,又ハ6ヨリ大ナルベシ。 $x=3$ ノトキ $(x-3)^2$ ハ零ニシテ,此時ノ値6ガ最小ナリ。

練習問題 (13)

ぐらふニヨリ次ノ方程式ヲ解ケ。 (1)—(4).

1. $2x=7.$ **3.** $x^2-7x+6=0.$

2. $x^2=16.$ **4.** $x^2+6x+5=0.$

x ガ實數ナルトキ,次ノ式ノ最大値,或ハ最小値ヲ求メヨ。 (5)—(8).

5. $x^2-6x+11.$ **7.** $x^2-8x+22.$ (海兵)

6. $2+2x-x^2.$ **8.** $3x^2-10x+9.$ (商船)

152. 最大,最小ノ基礎ノ定理*

(1). 二ツノ正數, x 及ビ y ノ和ガ一定ナルトキ,其積 xy ハ $x=y$ ナルトキ最大ナリ。

x,y ノ和ヲ a トスレバ

$$x+y=a, \quad \therefore \quad y=a-x.$$

$$\therefore \quad xy=x(a-x)=ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.$$

* 本節ハ省略シテ差支ナシ。

故ニ, $x=\frac{a}{2}$ノトキ,減數 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ ハ最小ナル値ヲトレバ, xy ハ $x=\frac{a}{2}$ ナルトキ,最大ナル値トナリ,其値ハ $\frac{a^2}{4}$ ナリ。且ツ,其時 y ハ $a-\frac{a}{2}$, 卽チ $\frac{a}{2}$ ニシテ, $x=y$ ナリ。

此性質ハ,幾何學上ノ「周ノ長サガ一定ナル矩形ノ中,面積ノ最大ナルモノハ正方形ナリ」ト云フコトト一致スルモノナリ。

(2). 二ツノ正數 x 及ビ y ノ積ガ一定ナルトキ,其和 $x+y$ ハ $x=y$ ナルトキ最小ナリ。

x, y ノ積ヲ a トスレバ

$$xy=a, \quad \therefore \ y=\frac{a}{x}.$$

$$\begin{aligned}\therefore \ x+y&=x+\frac{a}{x}=\frac{1}{x}(x^2+a)\\&=\frac{1}{x}\left\{(x-\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\,x\right\}\\&=2\sqrt{a}+\frac{1}{x}(x-\sqrt{a})^2.\end{aligned}$$

茲ニ, x ハ正數ナレバ $\frac{1}{x}(x-\sqrt{a})^2$ ハ正數,又ハ零ニシテ, $\frac{1}{x}(x-\sqrt{a})^2$ ハ $x=\sqrt{a}$ ナルトキ,最小ナル値零トナレバ, $x+y$ ハ $x=\sqrt{a}$ ナルトキ,最小ナル値ヲトリ,其値ハ $2\sqrt{a}$ ナリ。其時, y ハ $\frac{a}{\sqrt{a}}$, 卽チ $\sqrt{a}$ ニシテ, $x=y$ ナリ。

此性質ハ「面積一定ナル矩形ノ中,周ノ長サノ最小ナルモノハ正方形ナリ」ト云フコトト一致スルモノナリ。

練習問題 (14)

1. x, y ハ正數ニシテ $xy=6$ ナルトキ, $3x+2y$ ガ最小ナル値ヲ有スルタメニハ, x ト y トハ如何ナル値ヲトルヲ要スルカ。

2. x, y ハ正數ニシテ $x+y=4$ ナルトキ, $\frac{2(x+y)}{3xy}$ ノ最小値ヲ求メヨ。

3. $\frac{nE}{ax+by}$ ナル式ニ於テ, $n=xy$ ナリ。此式ガ最大ナル値ヲ有スルトキハ a, b, x, y ノ間ニ如何ナル關係ガアルカ。但シ, n, E, a, b ハ總テ一定ナル正數ニシテ, x, y ハ共ニ正數ナリトス。(神商)

4. 斜邊ノ長サガ與ヘラレタル直角三角形ノ面積ハ,二等邊ナルトキ最大ナルコトヲ示セ。

【注意】直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ,他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。又 x^2y^2 ガ最大値ヲトルトキハ, xy ノ絕對値ハ最大ナルコトヲ注意セヨ。

雜　題（第七）

（1）

1.　次ノ方程式ヲ解ケ。

(*a*)　$3(x-2)(x-4)=(x-5)^2.$

(*b*)　$1-10ax+16a^2x^2=0.$

2.　次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+6}{x-6}+\frac{x+9}{x-9}+3=0.$$

【注意】 各分數式＝ 1 ヲ加ヘヨ。

3.　方程式 $x^2+(4m-2)x+3m^2+5=0$ ノ一ツノ根ハ, 他ノ根ノ二倍＝等シト云フ。 m ノ値ヲ求メヨ。　（廣工）

4.　a, b, c ガ實數ナラバ, 方程式

$$(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$$

ハ實根ヲ有スルコトヲ證明シ, $a=b=c$ ノトキ, 二ツノ等根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。　（大工）

5.　$x^2+px+1=0$ ノ二ツノ根ヲ α, β トシ, $x^2+qx+1=0$ ノ二ツノ根ヲ γ, δ* トスレバ

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。　（早高）

---

* δ ハぎりしや字＝シテ, delta「でるたあ」ト讀ム。

（2）

1.　次ノ方程式ノ根ヲ小數第二位マデ正確＝求メヨ。

(*a*)　$2x^2+6x-3=0.$

(*b*)　$x^2-4x-1=0.$

2.　次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}=0.$$

【注意】 第一,第四分數式ヲ一ツ＝纒メ,第二,第三分數式ヲ一ツ＝纒メヨ。

3.　二次方程式 $x^2-(2k-1)x+k=0$ ハ k ノ如何ナル値＝對シ,

(1)　二根ノ和ガ 5 トナルカ。

(2)　二根相等シクナルカ。

4.　$a>0, b>0, c>0$ ナルトキハ,方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ ハ正數ノ根ヲ有セザルコトヲ證明セヨ。　（東鑛）

5.　二輪車アリ。前輪ノ周ハ後輪ノ周ヨリモ 20 糎長クシテ, 2,520 米ヲ進ム間＝, 後輪ハ前輪ヨリモ60回多ク廻轉セリ。各輪ノ周ハ幾糎ナルカ。

（3）

1.　$(6x-5)(2x-3)$ ノ値ヲ, $(3x+2)(4x-1)$ ノ値ヨリモ 13 ダケ大ナラシムル＝ハ, x ヲ如何ナル値トスレバヨキカ。

2.　次ノ方程式ヲ解キ, 且ツ驗算セヨ。

$$3(x+1)(x-3)-(3-x)^2=8(2x-3)+2x^2-26.$$

3. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{3(x-2)}{x+3}=\frac{36-4x}{x^2-9}-\frac{2+3x}{3-x}.$$

4. 二次方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二ツノ根ヲ α, β トシ，$\frac{\alpha}{\beta}$，$\frac{\beta}{\alpha}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ。 (東工)

5. A, B 二臺ノ自動車アリ。360 哩ヲ隔テタル二地點ヨリ,相向テ出發シ, B ハ或速サヲ以テ進行シ, A ハ B ヨリモ毎時 12 哩大ナル速サヲ以テ進行シ, 若干時ノ後,相會セリ。若シ, A ハ前ヨリ毎時 8 哩速サヲ減ジ, B ハ 2 哩ヲ增シテ, 前ト同樣ニ二地點ヨリ出發スレバ, 相會スルマデニ以前ヨリ 40 分多クノ時間ヲ要スベシト云フ。初メノ場合ニ於ケル A, B ノ速サヲ求メヨ。 (東工)

---

(4)

1. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(a) $\sqrt{x+16}-\sqrt{x}=2.$

(b) $\sqrt{3+x}+\sqrt{x}=\frac{5}{\sqrt{x}}.$

2. a, b, p, q ガ實數ニシテ方程式

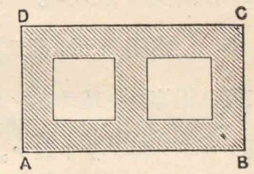
$$(a^2+b^2)x^2-2(ap+bq)x+p^2+q^2=0$$

ガ實根ヲ有スルタメニハ, 二ツノ根ハ相等シキヲ要ス。ソレヲ證明セヨ。

3. a, b, c ハ共ニ正ノ實數ニシテ,悉クハ相等シカラザルトキ,次ノ方程式ノ根ハ正ノ實數ナルコトヲ證セヨ。

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$$ (高等)

4. 矩形 ABCD ノ中ニ, 二ツノ相等シキ正方形アリ。陰影ヲ施シタル椽ノ幅ハ總テ 3 寸ナリ。椽ノ面積ヲ 159 平方寸ニ等シクセンニハ, 正方形ノ一邊ヲ幾寸ニトレバヨキカ。



5. 二ツノ連續セル奇數ノ平方ノ和ヨリ 4 ヲ減ジタルモノハ,其等二數ノ積ノ二倍ニ等シキコトヲ示セ。

---

(5)

1. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{x}{x+b}+\frac{a}{x+a}.$$

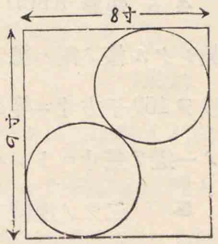
2. $x\{240,000-25,000(x-8)\}$ ヲ極大ナラシムル x ノ値ヲ求メヨ。 (商船)

3. 初メノ速サ毎秒 23「メートル」ヲ以テ, 石ヲ眞上ニ投上ゲタルトキ, 石ハ約幾「メートル」ノ高サ迄上ルカ。$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ ヲ以テ計算セヨ。但シ, s ハ距離, v_0 ハ初メノ速サ, t ハ時間ニシテ g ハ毎秒毎秒 9.81 米ナル加速度ヲ表スモノトス。 (大醫)

4. 直角ニ交叉スル甲乙兩直線アリ。 A ハ甲直線上ニ, B ハ

乙直線上ニ夫々交叉點ヲ距ル 50 尺ト, 100 尺トノ位置ヨリ, 共ニ交叉點ニ向ヒ, 同時ニ進行ヲ始メ, A ハ毎秒 4 尺, B ハ毎秒 3 尺ノ速サヲ以テ, 方向ヲ變ヘズニ進行ヲ續ケルモノトスレバ, A ト B トノ距離ガ最モ近クナルノハ幾秒ノ後ナルカ。且ツ,其距離ヲ求メヨ。 (海兵)

5. 內徑 8 寸, 深サ 9 寸ノ罐ノ內ニ二個ノ相等シキ球ヲ容レタルニ, 丁度蓋ヲ蔽フコトヲ得タリト云フ。各球ノ直徑ハ何程ナルカ。 (高等)



第九篇

聯立二次方程式

153. 聯立二次方程式

二ツノ未知數ヲ含ム聯立二次方程式ヲ解クニハ,方程式ノ形ニヨリ,特別ナル解法ヲ試ムル必要アリ。次ニ,容易ナル場合ヨリ順次ニ說明スベシ。

【注意】 一般ニ,二元聯立二次方程式ノ解法ハ,四次方程式ニ歸着ス。例ヘバ

$$\begin{cases} x^2+y^2+x-9=0, & (1) \\ x^2+2y^2-3y-8=0 & (2) \end{cases}$$

ヲ解カンニ,(1) ヨリ (2) ヲ引キ

$$-y^2+3y+x-1=0.$$

$$\therefore \quad x=1-3y+y^2. \qquad (3)$$

此ノ x ノ値ヲ (2) ニ代入スレバ

$$(1-3y+y^2)^2+2y^2-3y-8=0,$$

$$\therefore \quad y^4-6y^3+13y^2-9y-7=0. \qquad (4)$$

故ニ,(1), (2) ヲ解クノハ (4) ノ解法ニ歸着ス。是レハ四次方程式ニシテ,四次方程式ハ吾々ノ未ダ解クコトヲ得

ザル方程式ナリ。故ニ,茲ニ論ズルハ聯立二次方程式ノ中,特別ノモノノミニシテ,結局一元一次,又ハ一元二次方程式ノ解法ニ歸着スルモノノミヲ擧ゲントス。

倘ホ,注意スベキハ,一般ニ四次方程式ニハ四ツノ根アリ。故ニ,二元聯立二次方程式ノ解ハ四通リヲ超ユルコトナシ。

154. 二元一次方程式ト二元二次方程式

例一。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 3x^2+2xy=5, & (1) \\ x+\ y\ =2. & (2) \end{cases}$$

(2) ノ x ヲ移項シテ

$$y=2-x. \qquad (3)$$

(1) ノ y ノ代リニ, (3) ノ $2-x$ ヲ入レテ

$$3x^2+2x(2-x)=5,$$

$$x^2+4x-5=0.$$

$$\therefore\ (x-1)(x+5)=0.$$

故ニ, $x=1$, 及ビ $x=-5$. 是レヲ,(3) ニ代入シテ

$$y=2-1=1,$$

及ビ
$$y=2-(-5)=7.$$

故ニ,求ムル解ハ

$$(x=1,\ y=1)\ ;\ (x=-5,\ y=7).$$

〔驗:此ノ二組ノ解ヲ (1), (2) ニ入レテ驗シテ見ヨ〕。

【注意】 解ヲ作ルトキニ,x ノ値ト y ノ値トハ互ニ相應ズル値ヲ組合セルコトニ注意セヨ。

例二。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 3x-7y=1, & (1) \\ x^2-2xy-2x+y=-3. & (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ

$$y=\frac{3x-1}{7}. \qquad (3)$$

是レヲ, (2) ニ代入シテ

$$x^2-2x\times\frac{3x-1}{7}-2x+\frac{3x-1}{7}=-3.$$

分母ヲ拂ヒ

$$7x^2-2x(3x-1)-14x+3x-1=-21.$$

項ヲ整頓スレバ

$$x^2-9x+20=0.$$

$$\therefore\ (x-4)(x-5)=0.$$

故ニ, $x=4$, 及ビ $x=5$. 是ヲ (3) ニ代入シ,答ハ

$$\left(x=4,\ y=\frac{11}{7}\right);\ (x=5,\ y=2).$$

155. 解法ノ特別ナル方法*

一次方程式ト二次方程式トヨリ成ル聯立方程式ノ中,次ノ如キモノハ特別ナル方法ニテ解クコトヲ得。

例一。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x+y=7, & (1)\\ xy=12. & (2)\end{cases}$$

(1) ヲ平方シテ

$$x^2+2xy+y^2=49. \qquad (3)$$

(2) ニ 4 ヲ掛ケテ

$$4xy=48. \qquad (4)$$

(3) ヨリ (4) ヲ引キ

$$x^2-2xy+y^2=1. \qquad (5)$$

兩邊ヲ平方ニ開キテ

$$x-y=\pm1. \qquad (6)$$

(1) ト (6) トヨリ

* ぐらふニ據ル解法ハ卷末ノ附錄ニアリ。

$$\begin{cases} x+y=7,\\ x-y=1.\end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=7,\\ x-y=-1.\end{cases}$$

此ノ二組ノ聯立一次方程式ヲ解キ,求ムル答ハ

$$(x=4,\ y=3);\ (x=3,\ y=4).$$

【注意】 本問題ハ x, y ノ和ト,積トガ夫々 7 ト 12 ナルヲ以テ x, y ハ $X^2-7X+12=0$ ノ二根トシテ求メラルベシ。

例二。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, & (1)\\ x-y=1. & (2)\end{cases}$$

(2) ヲ平方シテ (1) ヨリ引キ

$$2xy=12. \qquad (3)$$

(3) ヲ (1) ニ加ヘテ

$$x^2+2xy+y^2=25. \qquad (4)$$

(4) ノ兩邊ヲ平方ニ開キ

$$x+y=\pm5. \qquad (5)$$

(2) ト (5) トヨリ

$$(x=3,\ y=2);\ (x=-2,\ y=-3).$$

練習問題 (1)

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。(1)—(8).

1. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=20. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2-y^2=14, \\ x+2y=17. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-y=-2, \\ xy=35. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y=2x^2+2x-1, \\ 2x-y=4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x-y=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2, \\ x^2+y^2=ax+by. \end{cases}$ (水產)

8. $\begin{cases} x^2-y^2=p, \\ x-y=q. \end{cases}$

9. 二數アリ,其和,其積,其平方ノ差,悉ク相等シト云フ。二數ヲ求メヨ。(高等)

10. 父子ノ年齢ノ和ハ 100 ニシテ,父子ノ年齢ノ積ノ $\frac{1}{10}$ ハ,父ノ年齢ヨリ 180 多シ。父子ノ各年齢ヲ求メヨ。

11. 周ノ長サ a,面積 b ナル矩形ノ長サト,其幅トハ,次ノ公式ニテ示サレルコトヲ證明セヨ。

$$\frac{1}{4}(a+\sqrt{a^2-16b}),\quad \frac{1}{4}(a-\sqrt{a^2-16b}).$$

156. 左邊ガ二次ノ同次式ナル方程式

〔第一ノ場合〕未知數ノ平方ノミヨリ成ル場合

例。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2=21, & (1) \\ 3x^2-2y^2=25. & (2) \end{cases}$$

此場合ニハ,x^2 ト y^2 トヲ一ツノ未知數ト見テ,解ケバヨシ。(1) ニ 2 ヲ掛ケ,(2) ニ 3 ヲ掛ケテ加ヘ

$$13x^2=117.$$

$$x^2=9.$$

$$\therefore\quad x=\pm 3.$$

(1) ノ x ノ値ヲ夫々 $+3$, 及ビ -3 トシテ

$$(x=3,\ y=1);\quad (x=3,\ y=-1).$$

$$(x=-3,\ y=1);\quad (x=-3,\ y=-1).$$

〔第二ノ場合〕未知數ヲ含ム三項ガ二次ノ場合

例。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x^2+3xy-2y^2=2, & (1) \\ x^2+xy+y^2=3. & (2) \end{cases}$$

常數項ヲ消去スルコトヲ工夫シテ,(1) ニ 3 ヲ掛ケタルモノヨリ,(2) ニ 2 ヲ掛ケテ引キ

$$x^2+7xy-8y^2=0. \qquad (3)$$

(1), (2) ニ於テ,y ハ 0 ナラザルコト明ナレバ,(3) ノ兩邊ヲ y^2 ヲ以テ割リ

$$\frac{x^2}{y^2}+7\times\frac{x}{y}-8=0.$$

$$\therefore\ \left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}+8\right)=0.$$

故ニ $$x=y,\quad x=-8y.$$

(1) ニ於テ $x=y$ トシ

$$2y^2=2,$$

$$y^2=1,$$

$$y=\pm1.$$

$y=1$ ノトキ

$$x=1.$$

$y=-1$ ノトキ

$$x=-1.$$

(1) ニ於テ $x=-8y$ トシ

$$38y^2=2,$$

$$y^2=\frac{1}{19},$$

$$\therefore\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{19}}=\pm\frac{\sqrt{19}}{19}.$$

$y=\frac{\sqrt{19}}{19}$ ノトキ

$$x=-\frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

$y=-\frac{\sqrt{19}}{19}$ ノトキ

$$x=\frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

故ニ,求ムル答ハ

$$(x=-1,\ y=-1);\ \left(x=-\frac{8\sqrt{19}}{19},\ y=\frac{\sqrt{19}}{19}\right);$$

$$(x=1,\ y=1);\ \left(x=\frac{8\sqrt{19}}{19},\ y=-\frac{\sqrt{19}}{19}\right).$$

【注意】 (3) ノ左邊ヲ因數ニ分解シ, $(x-y)(x+8y)=0$ トシテ $x=y$, $x=-8y$ ナル關係ヲ求メテモヨシ。

練習問題 (2)

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。(1)—(6).

1. $\begin{cases} x^2+y^2=50, \\ x^2-y^2=14. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x^2+y^2=42, \\ x^2+5y^2=18. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x^2-2y^2=a, \\ 3x^2-y^2=b. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2xy+y^2=16, \\ 2x^2-xy=12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=11, \\ x^2-y^2=4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-xy-6y^2=24, \\ x^2-3xy-10y^2=32. \end{cases}$ (東商)

7. x ニ關スル方程式

$$x^2-(2a^2+2ab-3b^2)x+10(a-b)^2=0$$

ノ二ツノ根ガ 6, 及ビ 30 ナルトキハ a 及ビ b ノ値各々如何。 (高等)

8. x,y ガ實數ナルトキ,方程式

$$(x^2+y^2-3xy-3)^2+(2x^2+y^2-6)^2=0$$

ニ適スル x 及ビ y ヲ求メヨ。 (東工)

157. 未知數ノ置換

問題ニ表レタル未知數ノ代リニ,他ノ未知數ヲ置キ換ヘテ,聯立方程式ヲ解ク方法アリ。

例一. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{20}, & (1) \\[2ex] \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{41}{400}. & (2) \end{cases}$$

$\dfrac{1}{x}=u,\ \dfrac{1}{y}=v$ ト置ケバ(1), (2) ハ

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{9}{20}, & (3) \\[2ex] u^2+v^2=\dfrac{41}{400}. & (4) \end{cases}$$

(3) ヲ平方シテ

$$u^2+2uv+v^2=\frac{81}{400}. \qquad (5)$$

(5) ヨリ (4) ヲ引キ

$$2uv=\frac{40}{400}. \qquad (6)$$

(4) ヨリ (6) ヲ引キ

$$u^2-2uv+v^2=\frac{1}{400}.$$

兩邊ヲ平方ニ開キ

$$u-v=\pm\frac{1}{20}. \qquad (7)$$

(3) ト (7) トヨリ

$$u=\frac{1}{4},\quad v=\frac{1}{5};\quad u=\frac{1}{5},\quad v=\frac{1}{4}.$$

故ニ,求ムル答ハ

$$(x=4,\ y=5);\quad (x=5,\ y=4).$$

【注意】 $\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{y}$ ヲ u, v ト置カズニ, $\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{y}$ ヲ其儘未知數トシテ取扱フテモ差支ナシ。

例二。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+2\dfrac{y}{x}=3, & (1) \\[2ex] x^2-y^2-2x+1=0. & (2) \end{cases}$$

$\dfrac{x}{y}$ ヲ u ト置ケバ, (1) ハ

$$u+\frac{2}{u}=3.$$

分母ヲ拂ヒ,移項シテ

$$u^2-3u+2=0.$$

$$\therefore\quad (u-1)(u-2)=0. \qquad (3)$$

(3) ヨリ $u=1,\ u=2$ トナレバ

$$\frac{x}{y}=1,\qquad \frac{x}{y}=2.$$

$$\therefore\quad x=y,\qquad x=2y. \qquad (4)$$

(2) ノ x ヲ y トシテ

$$-2y+1=0.$$

$$y=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}.$$

(2) ノ x ヲ $2y$ トシテ

$$3y^2-4y+1=0.$$

$$y=1,\quad \frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad x=2,\quad \frac{2}{3}.$$

故ニ,求ムル答ハ

$$(x=2, y=1)\,;\left(x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}\right);\left(x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{3}\right).$$

例三。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=6, & (1) \\ x^2-y^2=27. & (2) \end{cases}$$

$\sqrt{x+y}$ ヲ u ト置ケバ, (1) ハ

$$u^2+u=6. \qquad (3)$$

$$u^2+u-6=0.$$

故ニ, $u=2$, $u=-3$. 卽チ

$$\sqrt{x+y}=2, \qquad \sqrt{x+y}=-3.$$

$\sqrt{x+y}$ ハ實數ナラバ正數,又ハ零ヲ表スベキ規約ニ基キ, $\sqrt{x+y}$ ハ -3 ニ等シキコトナシ。故ニ

$$x+y=4. \qquad (4)$$

(2) ヲ $(x-y)(x+y)=27$ ノ如ク變形シ, $x+y$ ヲ 4 トシテ

$$x-y=\frac{27}{4}. \qquad (5)$$

(4) ト (5) トヨリ, $x=\dfrac{43}{8}$, $y=-\dfrac{11}{8}$ ガ求ムル解ナリ。

〔驗: $\dfrac{43}{8}-\dfrac{11}{8}+\sqrt{\dfrac{43}{8}-\dfrac{11}{8}}=4+\sqrt{4}=6$,

$\left(\dfrac{43}{8}\right)^2-\left(\dfrac{11}{8}\right)^2=\left(\dfrac{43}{8}-\dfrac{11}{8}\right)\left(\dfrac{43}{8}+\dfrac{11}{8}\right)=4\times\dfrac{27}{4}=27$〕。

例四。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x+y+xy=11, & (1) \\ x^2y+xy^2=30. & (2) \end{cases}$$

$x+y=u$, $xy=v$ トスレバ,(1) ト (2) トハ

$$\begin{cases} u+v=11, & (3) \\ uv=3. & (4) \end{cases}$$

(3), (4) ヲ解キテ

$$u=5, \quad v=6\,; \quad u=6, \quad v=5.$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=6, \\ xy=5. \end{cases}$$

是等ヲ解キ,次ノ四組ノ解ヲ得。

$$(x=2, y=3)\,;\,(x=3, y=2)\,;\,(x=1, y=5)\,;\,(x=5, y=1).$$

158. 特別ナル場合

二元聯立方程式ノ一ツガ,三次以上ノ方程式ナルトキ,前節ノ例四ノ如ク,其解法ヲ聯立二次方程式ノ解法ニ歸着セシムルヲ得ルコトアリ。

例。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x^3+y^3=54xy, & (1) \\ x+y=6. & (2) \end{cases}$$

(1) ノ左邊ヲ因數ニ分解シ

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=54xy. \qquad (3)$$

(3) ノ $x+y$ ヲ 6 トシテ

$$x^2-xy+y^2=9xy. \qquad (4)$$

(4) ノ兩邊ニ $3xy$ ヲ加ヘ

$$x^2+2xy+y^2=12xy,$$

$$(x+y)^2=12xy. \qquad (5)$$

(5) ノ $x+y$ ヲ 6 トシテ

$$xy=3. \qquad (6)$$

(2) ト (6) トヨリ

$$(x=3+\sqrt{6},\ y=3-\sqrt{6});\ (x=3-\sqrt{6},\ y=3+\sqrt{6}).$$

練習問題 (3)

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

1. $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8, \\ xy=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x+y)(x+y+1)=30, \\ (x-y)(x-y-2)=15. \end{cases}$ (東商)

3. $\begin{cases} 2(x+y)^2-9(x+y)=18, \\ (x-y)^2+(x-y)=6. \end{cases}$ (醫專)

4. $\begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=4, \\ (x+y)^2-3xy=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$ (水產)

6. $\begin{cases} \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=45, \\ \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=9. \end{cases}$ (樽商)

7. $\begin{cases} x^2=ax+by, \\ y^2=ay+bx. \end{cases}$ (醫專)

8. $\begin{cases} x+y=8, \\ x^3+y^3=344. \end{cases}$ (桐工)

9. $\begin{cases} x^2y+xy^2=126, \\ x+y=9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{13}{6}, \\ x^2+y^2=97. \end{cases}$ (商船)

11. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=12, \\ x^3+y^3=189. \end{cases}$ (高等)

12. $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4. \end{cases}$ (醫專)

159. 三元聯立二次方程式

例一。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} yz=2, & (1) \\ zx=6, & (2) \\ xy=3. & (3) \end{cases}$$

(1), (2), (3) ノ各邊ヲ夫々掛ケ合セテ

$$x^2y^2z^2=2\times6\times3. \qquad (4)$$

(4) ノ兩邊ヲ平方ニ開キ

$$xyz=\pm6. \qquad (5)$$

$xyz=6$ ノ兩邊ヲ (1), (2), (3) ノ各邊ニテ夫々割リ

$$x=3,\quad y=1,\quad z=2.$$

$xyz=-6$ ノ兩邊ヲ (1), (2), (3) ノ各邊ニテ夫々割リ

$$x=-3,\quad y=-1,\quad z=-2.$$

故ニ求ムル解ハ

$$(x=3,\ y=1,\ z=2);\ (x=-3,\ y=-1,\ z=-2).$$

例二。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 6yz=5(y+z), & (1) \\ 4zx=3(z+x), & (2) \\ 8xy=15(x+y). & (3) \end{cases}$$

(1) ニ於テ, $y=0$ トスレバ $z=0$, 從テ (2) ニヨリ $x=0$ トナル。$x=0$, $y=0$ ハ又 (3) ヲ滿足セシム。故ニ, $(x=0, y=0, z=0)$ ハ一組ノ解ナリ。

一般ニ,聯立方程式ガ常數項ナクシテ,總テ未知數ヲ含ム項ノミヨリ成ルトキハ,總テノ未知數ヲ零トシタルモノハ,一組ノ答ナリ。

次ニ x, y, z ノ中,假リニ $y \neq 0$ トスレバ, (1) ニヨリ z ハ 0 トナルコトナク,又(2) ニヨリ, x ハ 0 トナルコトナシ。依リテ, $(x=0,\ y=0,\ z=0)$ ノ解ノ外ハ, x, y, z ノ中, 0 ニナルモノナシ。

故ニ, x, y, z ハ 0 ニ等シカラザルモノトシ $5yz$, $3zx$, $15xy$ ヲ以テ,夫々 (1), (2), (3) ヲ割リ

$$\begin{cases} \dfrac{6}{5}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}, & (4) \\ \dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}, & (5) \\ \dfrac{8}{15}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}. & (6) \end{cases}$$

(4), (5), (6) ヲ加ヘ, 2 ニテ割リ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{23}{15}. \qquad (7)$$

(7) ノ兩邊ヨリ (4), (5), (6) ノ各邊ヲ引キ

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{z}=1.$$

故ニ,求ムル解ハ

$$(x=0, y=0, z=0)\ ;\ (x=3, y=5, z=1).$$

例三。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x+y+z=6, & (1) \\ x^2+y^2+z^2=14, & (2) \\ xy=6. & (3) \end{cases}$$

(2) ニ (3) ノ二倍ヲ加ヘ

$$(x+y)^2+z^2=26. \qquad (4)$$

(1) ト (4) ニ於テ, $x+y=u$ ト置ケバ

$$\begin{cases} u+z=6, & (5) \\ u^2+z^2=26. & (6) \end{cases}$$

(5), (6) ヲ解キテ

$$u=5, \quad z=1\ ; \quad u=1, \quad z=5.$$

$u=5$, 及ビ $u=1$ ト (3) トヲ組合セテ

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1, \\ xy=6, \end{cases}$$

是等ノ聯立方程式ヲ解キ,求ムル答ハ

$$(x=2,\ y=3,\ z=1)\ ;\quad (x=3,\ y=2,\ z=1);$$

$$\left(x=\frac{1+\sqrt{-23}}{2},\ y=\frac{1-\sqrt{-23}}{2},\ z=5\right);$$

$$\left(x=\frac{1-\sqrt{-23}}{2},\ y=\frac{1+\sqrt{-23}}{2},\ z=5\right).$$

練習問題 (4)

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。(1)-(6).

1. $\begin{cases}(x+y)(x+z)=12,\\(y+z)(y+x)=15,\\(z+x)(z+y)=20.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x(y+z)=1,\\y(z+x)=1,\\z(x+y)=1.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x(x+y+z)=a^2,\\y(x+y+z)=b^2,\\z(x+y+z)=c^2.\end{cases}$ (米工)

5. $\begin{cases}x+y+z=1,\\x^2=y^2+z^2,\\12yz=1.\end{cases}$ (商船)

3. $\begin{cases}xy=a(x+y),\\yz=b(y+z),\\zx=c(z+x).\end{cases}$ (海兵)

6. $\begin{cases}x+y+z=4,\\yz+zx+xy=-4,\\yz=2x^2.\end{cases}$ (廣師)

7. 次ノ聯立方程式ニ適スル $x,\ y,\ z$ ノ値ノ和ヲ求メヨ。

$(a+1)x+y+z=p,\ (b+1)y+z+x=q,\ (c+1)z+x+y=r.$ (高等)

8. 直角三角形アリ。其周ハ a 尺ニシテ,面積ハ b 平方尺ナリ。三邊ノ長サヲ求メヨ。(東商)

9. 直角三角形アリ,斜邊ノ長サハ他ノ二邊ノ長サノ和ヨリ小ナルコト4寸ニシテ,其面積ハ30平方寸ナリ,三邊ノ長サ各幾何ナルカ。(海機)

10. 甲乙二學生アリ。方程式 $x^2+bx+c=0$ ヲ解クニ當リ,甲ハ c ヲ見誤リタルタメ $-2,\ -8$ ナル根ヲ得,乙ハ b ヲ見誤リタルタメ $1,9$ ナル根ヲ得タリ。正シキ方程式ト,其根トヲ求メヨ。(北農)

160. 消去問題*

聯立方程式ノ數ガ,未知數ノ數ヨリモ多キトキハ,未知數ノ値ヲ求ムルニ必要ナルダケ方程式ヲ採リ,其等ヨリ未知數ノ値ヲ求メ,然ル後,其値ヲ殘リノ方程式ニ代入シ,總テノ未知數ヲ消去シ得ベシ。但シ,未知數ノ値ヲ求メズシテ,特別ナル方法ニヨリ,其等ヲ消去シ得ルコト多シ。

例一. 次ノ聯立方程式ヨリ x,y ヲ消去セヨ。

$$x=cy+b,\quad y=a+cx,\quad bx+ay=1.$$

初ノ二ツノ方程式ヨリ $x,\ y$ ノ値ヲ求メルタメ,先ヅ,第二方程式ノ y ノ値ヲ,第一方程式ニ代入シ

$$x=c(a+cx)+b,\qquad \therefore\quad x=\frac{ac+b}{1-c^2}.$$

* 本節ハ省略シテ差支ナシ。

次ニ,第一方程式ノ x ノ値ヲ第二方程式ニ代入シ

$$y=a+c(cy+b),\qquad \therefore\ y=\frac{bc+a}{1-c^2}.$$

是等ノ x,y ノ値ヲ,第三方程式ニ代入シテ

$$\frac{b(ac+b)}{1-c^2}+\frac{a(bc+a)}{1-c^2}=1.$$

分母ヲ拂ヒ,項ヲ揃ヘテ求ムル結果ハ

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1.$$

例二。 次ノ聯立方程式ヨリ x,y ヲ消去セヨ。

$$lx+my=a,\quad mx-ly=b,\quad x^2+y^2=1.$$

第一,第二方程式ヲ平方シテ加ヘレバ

$$l^2x^2+m^2y^2+m^2x^2+l^2y^2=a^2+b^2.$$

$$\therefore\ (l^2+m^2)(x^2+y^2)=a^2+b^2.$$

第三方程式ニヨリ,$x^2+y^2=1$ ナレバ,求ムル結果ハ

$$l^2+m^2=a^2+b^2.$$

練習問題 (5)

1. 次ノ聯立方程式ヨリ x,y,z ヲ消去セヨ。

$$x(x+y+z)=a^2,\quad y(x+y+z)=b^2,\quad z(x+y+z)=c^2,$$
$$ax+by+cz=d^2.$$

2. 次ノ聯立方程式ヨリ x,y ヲ消去セヨ。

$$x-y=a,\quad x^2-y^2=b^2,\quad x^3-y^3=c^3.$$

3. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ガ $p,\ np$ ナルタメニハ,a,b,c,n ノ間ニ如何ナル關係ノアルコトヲ要スルカ。

4. $ax^2+bx+c=0$ ト $lx^2+mx+n=0$ トガ一ツノ共通ナル根ヲ有スルタメニハ,a,b,c,l,m,n ノ間ニ如何ナル關係ノアルコトヲ必要トスルカ。

5. $\frac{y}{x}+\frac{x}{z}=a,\ \frac{z}{y}+\frac{y}{x}=b,\ \frac{x}{z}+\frac{z}{y}=c$ ヨリ x,y,z ヲ消去セヨ。

【注意】 $\frac{y}{x}\times\frac{z}{y}\times\frac{x}{z}=1$ ナルコトニ注意セヨ。

6. $x+\frac{1}{y}=1$ ニシテ,且ツ $y+\frac{1}{z}=1$ ナルトキニハ,$z+\frac{1}{x}$ モ亦 1 ニ等シキコトヲ證明セヨ。 (高等)

【注意】 $z+\frac{1}{x}$ ニハ y ガ含マレテ居ラヌコトニ注意セヨ。

7. $y=a-\frac{a^2}{x},\ z=a-\frac{a^2}{y}$ ナルトキハ,$x=a-\frac{a^2}{z}$ ナルコトヲ證明セヨ。

161. 應用問題

例一。 周ガ36尺,面積ガ90平方尺ナル矩形ノ幅

ト長サヲ求メヨ。

幅ト長サトヲ夫々 x 尺, y 尺トスレバ

$$\begin{cases} x+y=18, \\ xy=90. \end{cases}$$

此聯立二次方程式ノ解ハ方程式

$$x^2-18x+90=0$$

ノ根ナルコトニ注意シ, x, y ノ値ハ

$$(x=9+3\sqrt{-1},\ \ y=9-3\sqrt{-1});$$

$$(x=9-3\sqrt{-1},\ \ y=9+3\sqrt{-1})$$

ナリ。カヤウニ,虚數ガ結果ニ表レルコトハ,答ノナキコトヲ示スモノニシテ,問題ニ與ヘラレタルガ如キ矩形ノ存在セヌコトヲ示スモノナリ。實際, $x+y=18$ ナルトキ, xy ノ極大値ハ $x=y=9$ ノトキニシテ, $xy=81$ ナリ。周ガ36尺,面積ガ90平方尺ナル矩形ハナシ。

例二。 規定ノ速サニテ,AヨリBニ向フ汽船アリ,若シ速サヲ毎時二浬増セバ,規定ノ時間ヨリ四時間早ク到着シ,又毎時二浬減ズレバ,六時間延着ス。A,B間ノ距離ト,規定ノ速サトヲ求メヨ。

x浬 $=$ A, B 間ノ距離,

y浬 $=$ 毎時間ニ於ケル規定ノ速サ,

$\dfrac{x}{y}=$ 規定ノ時間數.

$\dfrac{x}{y+2}=$ 速サヲ毎時2浬増セシ時,要スル時間數,

$\dfrac{x}{y-2}=$ 速サヲ毎時2浬減ゼシ時,要スル時間數.

$$\therefore\quad \frac{x}{y}-\frac{x}{y+2}=4, \tag{1}$$

及ビ
$$\frac{x}{y-2}-\frac{x}{y}=6. \tag{2}$$

(1)ト(2)ノ分母ヲ拂ヒ,整理シテ

$$\begin{cases} x=2y(y+2), & (3) \\ x=3y(y-2). & (4) \end{cases}$$

(3), (4) ヨリ

$$2y(y+2)=3y(y-2). \tag{5}$$

y ハ零ニ等シキコトナケレバ,兩邊ヲ y ニテ割リ

$$2(y+2)=3(y-2).\qquad \therefore\quad y=10.$$

此値ヲ(3)ノ y ニ代入シ

$$x=240.$$

故ニ,求ムル距離ハ240浬,速サハ毎時10浬ナリ。

〔驗: $\dfrac{240}{10}=24,\ \dfrac{240}{10+2}=\dfrac{240}{12}=20.\quad \therefore\ 24-20=4.$

又 $\dfrac{240}{10-2}=\dfrac{240}{8}=30.\quad \therefore\ 30-24=6$〕

練習問題 (6)

1. 240哩ヲ隔テタル兩停車場ヨリ,二ツノ列車ガ同時ニ相向ヒテ出發シ,途中ニテ相會シテヨリ,一ツハ4時間,一ツハ9時間ニテ各先方ノ停車場ニ到着セリ。毎時間ノ各列車ノ速サヲ求メヨ。

2. 或客車ガ甲驛ヲ出發シ,乙驛ニ向ヒタルト同時ニ,或貨車ガ乙驛ヲ出發シテ甲驛ニ向ヒ,36分ノ後,兩列車相會シ,其後客車ハ貨車ヨリモ30分早ク先方ノ驛ニ到着シタリト云フ。甲乙兩驛ノ距離ヲ30哩トスレバ,毎時間ニ於ケル兩列車ノ速サハ何程ナルカ。 (東師)

3. 甲乙二人,夫々 A, B 兩地ヨリ相向テ同時ニ出發シ,甲ガ乙ヨリ a 里多ク歩ミタルトキ,途中ニテ出會ヒ,其後甲ハ m 時間,乙ハ n 時間ニテ何レモ目的地ニ到着シタリ。兩地ノ距離ハ幾里ナルカ。

4. 一ノ位ト,小數第一位トノ二桁ヨリナル帶小數アリ。各數字ノ平方ノ和ハ52ニシテ,此帶小數ヨリ,數字ノ位置ヲ交換シテ得ベキ帶小數ヲ引キタル差ハ1.8ナリ。其帶小數ヲ求メヨ。 (醫專)

5. 若干行,若干字詰ノ野紙アリ,若シ2行減ジ,且ツ各行ヲ3字宛減ズレバ,全面ニテ145字減ジ,又行ヲ3行増シ,且ツ各行ヲ4字宛増セバ,全面ノ字數ノ $\frac{7}{29}$ ヲ増スト云フ。原ノ行數ト一行ノ字數トヲ求メヨ。 (高等)

6. 若干ノ人夫アリ。甲地ヨリ乙地ニ往復9回ニテ若干ノ彈丸ヲ運搬スルコトヲ得,若シ人夫7人ヲ増シ,一人毎ニ2個宛少ク運搬スルトキハ8回ヲ要スベク,若シ又人夫4人ヲ減ジ,一人毎ニ1個宛多ク運搬スルトキハ,10回ヲ要スベシト云フ。人夫ノ數ト彈丸ノ個數トヲ求メヨ。 (東工)

7. 或人金13,000圓ヲ二口ニ分チ,各々異リタル利率ニテ貸付ケタルニ,各口ヨリ相等シキ利息ヲ得タリ。今,若シ其利率ヲ交換シテ貸セバ,一箇年ノ利息,夫々360圓及ビ490圓トナルベシト云フ。各口ノ金額及ビ各年利率ヲ求メヨ。 (東師)

8. 甲乙二職工アリ。甲ハ或期日働キテ賃金90圓ヲ得,乙ハ甲ヨリ6日少ク働キテ賃金57圓60錢ヲ得タリ。今,若シ甲ト乙トノ働キシ日數ガ前ノ反對ナルトキハ,兩人ノ受取ル金額ハ相等シカ

ルベシト云フ。兩人ノ働キシ日數,及ビ各一日ノ賃金ハ何程ナルカ。

9. 二輪車アリ,前輪ノ周ハ後輪ノ周ヨリ小ナリ。此車ガ6間進ムトキニ,兩輪ノ廻轉ノ數ノ差ハ1ナリ。若シ,前輪ノ周ヲ1尺增セバ,10間進ムトキ,前輪ハ後輪ヨリモ1回多ク廻轉スルト云フ。前後兩輪ノ周ノ長サハ各幾尺ナルカ。 (東工)

【注意】 名數ノ單位ヲ揃ヘルコトニ注意セヨ。

10. 或船夫,河流ヲ10里漕ギ下リタル後,直ニ引返シ河流ヲ溯リテ出發點ニ達シタルニ,往復10時間ヲ費セリ。此時,3里下ル時間ニ2里溯ルコトヲ得タリト云フ。此船夫ガ10里河流ヲ漕ギ下ルニ要セシ時間ト,每時ノ河流ノ速サトヲ求メヨ。

11. 河ニ沿ヒ,8里隔タレル甲乙二村ヲ往復スル汽船アリ,平時ニ於テ此二村間ヲ往復スルニハ5時20分ヲ要ス。或日,水勢增シテ,速サ平常ノ$\frac{6}{5}$トナリシヲ以テ,往復ニ6時15分ヲ要セリ。平時ニ於ケル水流ノ速サハ每時幾里ナルカ。 (海機)

12. 甲乙二人,A,B二村間ヲ往復スルアリ。甲ガAヲ出發スルト同時ニ,乙ハBヲ出發シタルニ,

初メ往路ニテハ,Bヲ隔タル$\frac{3}{4}$里ノ所ニテ出會ヒ,復路ニテハ,ソレヨリ一時間後,Aヨリ$\frac{1}{2}$里ノ所ニテ出會ヒタリト云フ。每時間ニ於ケル各人ノ速サ,及ビA,B二村間ノ距離ヲ求メヨ。 (海兵)

13. 甲乙丙丁ナル四人,自轉車ニテ,甲乙ハAヨリBニ向ヒ,丙丁ハBヨリAニ向ヒ,總テ同時ニ出發シタリ。甲ハAヲ去ル5哩ノ所ニテ丙ニ會シ,Bヨリ4.5哩ノ所ニテ丁ニ會シ,乙ハ兩地ノ中央ニテ丁ニ會シ,Aヨリ3.6哩ノ所ニテ丙ニ會セリ。A,B兩地間ノ距離ヲ求メヨ。

雜　　題（第八）

（1）

1.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(*a*)　$\begin{cases} x^3-y^3=117, \\ x-y=3. \end{cases}$　(*b*)　$\begin{cases} \sqrt{a-x}-\sqrt{y-x}=\sqrt{y}, \\ \sqrt{b-x}+\sqrt{y-x}=\sqrt{y}. \end{cases}$　（廣師）

2.　二ツノ根ノ差ハ 3 ＝等シク，平方ノ和ハ 65 ＝等シキ二次方程式ヲ作レ。

3.　二次方程式アリ。二ツノ根ノ差ハ 1 ＝等シク，立方ノ差ハ 19 ＝等シ。其方程式ヲ求メヨ。　（長商）

4.　次ノ二ツノ方程式ヨリ y ヲ消去シ，且ツ二ツノ方程式＝同時＝適合スル x ノ値ヲ求メヨ。

$$x^2-xy+2x-3y=3,\quad 2x-y=3.$$

5.　甲ガ 14 哩ヲ隔テタル或町＝向テ出發セル後，乙ハ甲＝用事アリテ，甲ノ出發後40分ヲ經テ出發シ，甲＝追ヒ付キタル後，直＝引返シテ出發地＝歸着シタル時，甲モ亦先方ノ町＝到着セリト云フ。乙ノ速サヲ毎時 4 哩トスレバ，甲ノ速サハ毎時幾哩ナルカ。（山商）

（2）

1.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} xy=x+y+1, \\ zx=z+x+2, \\ yz=y+z+5. \end{cases}$$

【注意】 $xy=x+y+1$ ヲ $x(y-1)-y+1=2$，卽チ $(x-1)(y-1)=2$ ノ如ク變形セヨ。

2.　$x+y+\sqrt{x+y}-12$ ヲ零ナラシムル x, y ノ値＝シテ，且ツ其平方ノ差ガ 9 トナルベキモノヲ求ム。　（高等）

3.　$ax^2+2bx+c=0$ ノ根ヲ α, β トシ，$Ax^2+2Bx+C=0$ ノ根ヲ $\alpha+\delta,\ \beta+\delta$ トスレバ

$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

4.　$a=x(2-ax),\ b=1-\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ ナル二ツノ方程式ヨリ x ヲ消去セヨ。　（陸士）

5.　男工一人＝ツキ日給 3 圓，女工一人＝ツキ日給 2 圓ノ割＝テ，男女合セテ 15 人＝若干日間ノ給料トシテ，259 圓ヲ支拂ヒタリ。其內，男工ノ分トシテ支拂ヒタル金額ハ，女工ノ分ヨリモ 35 圓多カリシト云フ。男工，女工各幾人ナルカ。

（3）

1.　次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x+y+z=19, \\ x^2+y^2+z^2=133, \\ y^2=xz. \end{cases}$$ (廣師)

2. 聯立方程式

$$x^2-3xy+y^2=5,\quad y=2x+a$$

ニ於テ, x, y ノ各ノ値ガ實數ナルタメニハ, a ノ値如何。　(高等)

3. m ガ如何ナル値ヲ有スルトキ, 次ノ二ツノ方程式ハ x ノ同ジ値ニヨリ滿足セシメラルルカ。

$$5x^2+(9+4m)x+2m^2=0,\quad 5x+9=0.$$ (東師)

4. $x^2+(y-a)^2=25$ ナル方程式ニ於テ

(a) y ノ兩根ガ相等シクナルトキノ x, y ノ値ヲ求メヨ。

(b) $x=3$ ナルトキ, y ノ一根ヲ零トナスベキ a ノ値ヲ求メヨ。　(海兵)

5. 二萬斤以上ノ石炭ヲ若干ノ人夫ニテ, 或場所ヨリ他ノ場所ニ運搬スルニ, 8 時間ヲ要セリ。次ニ, 8 人ノ人夫ヲ增シ, 各一人ノ一時間ノ運搬量ヲ 5 斤ヅツ減ジタルニ, 7時間ニテ運搬セリ。又, 8 人ノ人夫ヲ減ジ, 各人ノ一時間ノ運搬量ヲ 11 斤ヅツ增シタルニ, 9 時間ニテ運搬セリト云フ。初メ幾人ノ人夫ヲ使用シタルカ。　(高等)

---

(4)

1. 次ノ三ツノ關係ガ同時ニ成立スベキ x, y ノ値ヲ求メヨ。

$$x^2-3xy+2y^2=3,\quad 2x^2+y^2=6,\quad 2x^2+6x=xy+3y.$$ (高等)

【注意】 方程式ノ數ガ, 未知數ノ個數ヨリモ多キトキ, 其等ノ方程式ガ同ジ未知數ノ値ニ對シテ, 同時ニ成リ立ツノハ, 極メテ特別ナル場合ナリ。其場合, 三ツノ方程式ノ中, 何レカ二ツヨリ x, y ヲ求メ, 其等ヲ殘リノ方程式ニ代入シ, 果シテ三ツノ關係ニ同時ニ適合スル x, y ノ値ガアルカ否カ, 驗算ヲ行ハザル可ラズ。

2. $\dfrac{x}{y+z}=a,\quad \dfrac{y}{z+x}=b,\quad \dfrac{z}{x+y}=c$ ヨリ x, y, z ヲ消去スレバ $bc+ca+ab+2abc=1$ ナルコトヲ證シ, 次ニ $\dfrac{x^2}{a-abc}=\dfrac{y^2}{b-abc}=\dfrac{z^2}{c-abc}$ ナルコトヲ示セ。

3. 甲乙二人, 池ノ周圍ヲ一周スルニ, 同時ニ一點ヨリ反對ノ向キニ出發セリ。甲ハ三時間ニテ一周ヲ終リ, 乙ハ途中甲ニ出會シテヨリ, 四時間ニシテ出發點ニ歸着セリト云フ。乙ガ池ヲ一周スルニ要シタル時間ヲ求メヨ。　(東工)

4. 長サ等シキ甲乙ノ電車アリ。反對ノ方向ニ走ルトキハ, 相接シテヨリ離ルルマデ一秒ヲ要ス。同方向ニ走ルトキハ, 甲ガ乙ヲ追越スニ, 追付キテヨリ離ルルマデ12秒ヲ要シ, 甲ノ速サヲ毎分12間增セバ10秒ニテ足レリト云フ。電車ノ長サ及ビ各速サヲ求メヨ。

5. 隔タルコト 12 里ナル A, B 兩地間ヲ, 甲乙二人自轉車ニテ往復スルニ, 甲ハ A ヨリ, 乙ハ B ヨリ午前十一時相向ヒテ出發シ, 途中 C ニテ會セリ。甲ハ B ニ於テ 48 分間, 乙ハ A ニ於テ 30 分間休

息シタル後,各歸途ニ就キ,午後三時四十分 A ヨリ 4里24町隔タレル D ニ於テ再ビ相會セリ。A, C 間ノ距離ト, C ニ於テ相會セシ時刻トヲ求メヨ。 (東商)

(5)

1. 次ノ二組ノ聯立方程式ガ,同ジ解ヲ有スルナラバ a, b ノ値如何。

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x-y+3=0, \\ x+ay-b=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-5=0, \\ 7x+y+2=0, \\ x+2ay+3b=0. \end{cases}$$

2. 次ノ方程式ガ同時ニ成立スルトキハ $a+b+c=0$ ナルヲ示セ。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+x}=0, \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+y}=0,$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0.$$

(高等)

3. 或人若干里ノ道ヲ旅行スルニ, 8 里行キタル後,毎時間ニ14町24間其速サヲ増シタルタメ, 20 分早ク到着セリ。若シ,初メヨリ増加シタル速サニテ旅行スレバ, 60 分早ク到着スベシト云フ。全體ノ距離ヲ求メヨ。

4. 或ル驛ヨリ他ノ驛ニ向ヘル汽車アリ。出發後 a 哩ヲ走リシトキ機關ニ故障起リ,速度ノ $\frac{1}{n}$ ヲ減ジタルタメ b 分延着セリ。若シ,故障ガ出發シテヨリ t 時間後ニ起リタランニハ,前ノ場合ヨリモ

c 分ダケ早ク着クコトヲ得タルベシト云フ。二驛間ノ距離ヲ求メヨ。 (高等)

5. 一組ノ船夫アリ。河ヲ漕ギ下リテ甲村ヨリ乙村ニ至ルニ, 3 時間ヲ要セリ。若シ,最初ヨリ流ニ任セテ漕ガズニ下リタランニハ,同組ノ船夫ガ,甲乙兩村ト相等シキ距離ノ靜水ヲ漕ギ行クニ要スル時間ヨリハ,尙ホ 8 時間ダケ多ク費スベシト云フ。乙村ヨリ甲村ニ漕ギ上ルニハ幾時間ヲ要スルカ。 (神商)

第十篇

有理式ノ性質(續)

第一章

剩餘ノ定理

162. 剩餘ノ定理(第一)

曩ニ,整式ノ除法ヲ説明スルニ當リ,剩餘ノ定理ニ就キ,少シク論ジタルガ,今此所ニ重ネテ是レヲ研究シ,其應用ヲ明ニセントス。

x ニ關スル整式 ax^3+bx^2+cx+d ヲ x ニ關スル一次ノ整式 $x-p$ ニテ割レバ,其剩餘ハ被除式ノ x ヲ p ニテ置キ換ヘタルモノ, ap^3+bp^2+cp+d ニ等シ。

何トナレバ,實際ニ割リ算ヲ行ヒ

$$
\begin{array}{l|l|l}
x-p & ax^3+bx^2+cx+d & ax^2+(ap+b)x+(ap^2+bp+c) \\
 & ax^3-apx^2 & \\
\hline
 & (ap+b)x^2+cx & \\
 & (ap+b)x^2-(ap+b)px & \\
\cline{2-2}
 & \quad (ap^2+bp+c)x+d & \\
 & \quad (ap^2+bp+c)x-(ap^2+bp+c)p & \\
\cline{2-2}
 & \qquad ap^3+bp^2+cp+d \quad \cdots(\text{剩餘}) &
\end{array}
$$

トナレバナリ。

尙ホ,一般ノ場合ニ就キ説明センニ,x ノ n 次ノ整式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

ヲ $x-p$ ニテ割リ,剩餘ガ x ヲ含マザルモノニ至ルトキ,商ヲ Q, 剩餘ヲ R トスレバ,次ノ恒等式ヲ得。

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=\mathrm{Q}(x-p)+\mathrm{R}. \qquad (2)$$

茲ニ,Q ハ x ニ就テノ $(n-1)$ 次ノ整式ニシテ,Q 式ノ x ニ p ヲ代入シタルトキノ値ヲ Q′* トスレバ,(2) ノ兩邊ノ x ヲ p トシテ,次ノ關係ヲ得。

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}p+a_n=\mathrm{Q}'(p-p)+\mathrm{R}. \qquad (3)$$

$$\therefore\ \mathrm{R}=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}p+a_n. \qquad (4)$$

故ニ, x ニ關スル整式ヲ, $x-p$ ニテ割リタルトキノ剩餘ハ,其式ノ x ノ代リニ p ヲ入レタルモノニ等シ。

例一。 x^3-2x^2+5x+6 ヲ $x-1$ ニテ割リシトキノ剩餘ヲ求メヨ。

剩餘ヲ R トスレバ,上ノ定理ニヨリ $p=1$ ナレバ

* Q′ ハ Q「ダッシ」(dash), 又ハ Q「プライム」(prime) ト讀ム。又 Q″ ハ Q "two dash", 又ハ Q「セカンド」(second) ト讀ム。

$$R=1^3-2\cdot1^2+5\cdot1+6=1-2+5+6=10.$$

例二。 $2x^4-5x^2-12$ ヲ $x+2$ ニテ割リシトキノ剩餘ヲ求メヨ。

$x+2$ ハ變形シテ, $x-(-2)$ ト書キ直スコトヲ得レバ,上ノ定理ニヨリ $p=-2$ トシテ,剩餘 R ハ

$$R=2(-2)^4-5(-2)^2-12=2\cdot16-5\cdot4-12$$
$$=32-20-12=0.$$

例三。 $2x^3-5x^2+3x+1$ ヲ $2x-5$ ニテ割リシトキノ剩餘ヲ求メヨ。

上ノ定理ノ除式ハ $x-p$ ニシテ,x ノ係數ハ1ナリ。此例題ニテハ除式ノ x ノ係數ハ2ナレバ,上ノ定理ヲ其儘適用スル能ハズ。被除式ヲ $2x-5$ ニテ割リシトキノ商ヲ Q,剩餘ヲ R トスレバ

$$2x^3-5x^2+3x+1=Q(2x-5)+R.$$

茲ニ, R ハ x ヲ含マザル最後ノ剩餘トス。

今,$2x-5$ ヲ零ナラシムル x ノ値 $\frac{5}{2}$ ヲ兩邊ノ x ニ代入シ

$$2\left(\frac{5}{2}\right)^3-5\left(\frac{5}{2}\right)^2+3\left(\frac{5}{2}\right)+1=R.$$

$$\therefore\ R=\frac{5^3}{4}-\frac{5^3}{4}+\frac{15}{2}+1=\frac{17}{2}.$$

【注意】 R ハ,被除數ノ x ニ,除數ヲ 0 ナラシムル x ノ値, $\frac{5}{2}$ ヲ代入シタルモノニ等シキコトヲ注意セヨ。

練習問題 (1)

1. x^3-7x^2+5x-6 ヲ $x-3$ ニテ割リタルトキノ剩餘ヲ求メヨ。
2. x^3+2x^2-4x-5 ヲ $x+5$ ニテ割リタルトキノ剩餘ヲ求メヨ。
3. x^2-5x+2 ヲ $3x+1$ ニテ割リタルトキノ剩餘ヲ求メヨ。
4. a^7+b^7 ヲ $a+b$ ニテ割リタル時ノ剩餘ヲ求メヨ。
5. $(a-1)(a-2)+(a-2)(a-3)+(a-3)(a-1)$ ヲ a ニテ割リタルトキノ剩餘ヲ求メヨ。

163. 剩餘ノ定理(第二)

或整式ガ,他ノ整式ニテ割リ切レルト云フノハ,商ガ整式ニシテ,剩餘ガ零ナル場合ヲ云フ。故ニ

x ニ關スル整式ガ $x-p$ ニテ割リ切レルニハ

1. 其整式ノ x ヲ p ニテ置キ換ヘタルトキノ値ガ,零ニ等シキコトヲ要シ,

2. 其値ガ零ナラバ,其整式ハ $x-p$ ニテ割リ切レル。

例一。 n ガ正ノ整數ナルトキ,x^n-a^n ハ $x-a$ ニテ割リ切レルコトヲ示セ。

x^n-a^n ニ於テ, x ノ代リニ a ヲ入レレバ a^n-a^n トナリ,是レハ 0 ニ等シキヲ以テ, x^n-a^n ハ n ガ正ノ整數*ナルトキ,$x-a$ ニテ割リ切レル。

例二。 $x^2-(p+2)x+6$ ガ $x-p$ ニテ割リ切レルタメニハ,p ノ値ヲ如何ニ定ムレバヨキカ。

$x^2-(p+2)x+6$ ガ $x-p$ ニテ割リ切レルタメニハ, x ノ代リニ p ヲ入レタル値ガ零ニ等シキヲ要ス。

$$p^2-(p+2)p+6=0,$$

$$p^2-(p^2+2p)+6=0,$$

$$\therefore\quad -2p+6=0.$$

故ニ,p ノ値ヲ 3 トスレバヨシ。

〔驗 : $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$〕。

練習問題 (2)

1. x^3+2x^2-kx+1 ハ k ニ如何ナル値ヲ入レレバ,$x-2$ ニテ割リ切レルカ。

* n ガ正ノ整數ノトキ, x^n-a^n ハ整式ナリ。

2. x^4-kx^2-1 ガ $x+\frac{1}{2}$ ニテ割リ切レルタメニハ, k ヲ如何ニ定ムレバヨキカ。

3. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ ハ $a-b$ ヲ因數トスルコトヲ證明セヨ。

4. $(x-y)^5-(x^5-y^5)$ ハ x 及ビ y ニテ割リ切レルコトヲ示セ。

5. $(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3+a^3+b^3+c^3$ ハ abc ニテ割リ切レルコトヲ示セ。

6. n ガ正ノ偶數ナルトキ, x^n-a^n ハ $x+a$ ニテ整除サレ,又 n ガ正ノ奇數ナルトキ, x^n+a^n ハ $x+a$ ニテ整除サレルコトヲ證明セヨ。

7. m ガ正ノ奇數ナラバ, $(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$ ハ $a+b$ ヲ因數トスルコトヲ示セ。

8. ax^3+bx^2+bx+a ガ x^2-1 ニテ割リ切レルヤウニ a,b ノ値ヲ定メヨ。

9. x ニ關スル二次ノ整式アリ。 $x-1$ ニテ割リ切レ,$x-2$ ニテ割レバ 1 ヲ剰シ, $x-3$ ニテ割レバ 6 ヲ剰スト云フ。此二次式ヲ求メヨ。 (明專)

10. $x^4+px^2+qx+a^2$ ガ $x-1$, 及ビ $x+1$ ノ何レニテモ割リ切レルナラバ,$x-a$, 及ビ $x+a$ ノ何レニテモ亦割リ切レルコトヲ證明セヨ。 (高等)

第二章

未定係數

164. 恒等式ノ性質

x ニ關シ,同次ノ二ツノ整式アリ。x ニ如何ナル値ヲ入レテモ(卽チ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ),恒ニ相等シキタメニハ,x ノ同ジ次數ノ係數相等シク,常數項ガ相等シキヲ要ス。又,其等ノ條件ヲ具ヘレバ,二式ハ恒ニ相等シ。

例ヘバ,x ニ關スル二ツノ二次式 ax^2+bx+c 及ビ px^2+qx+r アリ,x ニ如何ナル値ヲ入レテモ恒ニ

$$ax^2+bx+c=px^2+qx+r \qquad (1)$$

ナラバ,$a=p$, $b=q$, $c=r$ ナルベシ。

是レヲ證明スルタメ,右邊ヲ移項シ

$$(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)=0. \qquad (2)$$

(2) ハ x ニ如何ナル値ヲ入レテモ,成リ立ツ等式ナレバ,假リニ x ヲ 0 トシテ

$$c-r=0, \qquad \therefore\ c=r. \qquad (3)$$

次ニ,(2) ノ c ヲ r トスレバ,(2) ハ

$$\{(a-p)x+(b-q)\}x=0 \qquad (4)$$

トナル。(4) ハ x ニ如何ナル値,1 或ハ 2, 3, ...ヲ入レテ,恒ニ成リ立ツ筈ナレバ

$$(a-p)x+(b-q)=0 \qquad (5)$$

ナルヲ要ス。(5) ノ x ハ 0 ニテモ差支ナシ,故ニ x ヲ 0 トシテ

$$b-q=0, \qquad \therefore\ b=q. \qquad (6)$$

(5) ノ b ヲ q トスレバ,(5) ハ

$$(a-p)x=0. \qquad (7)$$

x ノ値ノ如何ニ拘ラズ $(a-p)x$ ガ恒ニ零ナルタメニハ

$$a-p=0, \qquad \therefore\ a=p. \qquad (8)$$

故ニ,恒等式 (1) ガ成立スルタメニハ,$a=p$, $b=q$, $c=r$ ナルヲ要ス。

又,$a=p$, $b=q$, $c=r$ ナラバ,x ニ如何ナル値ヲ入レテモ,恒ニ

$$ax^2+bx+c=px^2+qx+r$$

ナルコト明ナリ。故ニ,二次式ノ場合ニ,上ノ定理ノ正シキコトハ證明サレタリ。同様ノ方法ニヨ

リ一般ノ場合,卽チ三次式,四次式等ノ場合ニモ,上ノ定理ノ正シキコトヲ知リ得ベシ。

練習問題 (3)

x ニ如何ナル値ヲ入レテモ,次ノ等式ガ成リ立ツタメニハ, A, B (及ビ C) ヲ如何ニ定ムレバヨキカ。 (1)—(4).

1. $(x-1)(x-3)+A(x+3)+B=(x+1)(x+2)$.

2. $A(x-3)+B(x-4)=2$.

3. $A(x-2)^2+B(x-2)(x+3)+C(x+3)=50$.

4. $x^3+Ax^2+Bx+C=(x+3)^3$.

5. $ax^2+bxy+cy^2$ ガ x, y ニ如何ナル値ヲ入レテモ,恒ニ $px^2+qxy+ry^2$ ニ等シキタメニハ, $a=p$, $b=q$, $c=r$ ナルヲ要ス。是レヲ證明セヨ。

165. 未定係數ノ比較法

前節ノ定理ニヨリ,或恒等式ノ未定ノ係數ハ,兩邊ノ係數ヲ比較シテ,是レヲ定メ得ルコトアリ。

例。 x^3+ax^2+bx+1 ガ x^2+x+1 ニテ割リ切レルタメニハ a, b ヲ如何ニ定ムレバヨキカ。

x ノ三次式ヲ,二次式ニテ割ル譯ナレバ,商ハ x

ノ一次式ナリ。且ツ,被除數ノ最高次數ノ項 x^3 ヲ,除數ノ最高次數ノ項 x^2 ニテ割リシ商 x ガ,商ノ最高次ノ項トナルベキニヨリ,商ヲ $x+p$ ト假定スルコトヲ得。從テ,次ノ恒等式ヲ得。

$$x^3+ax^2+bx+1=(x+p)(x^2+x+1).$$

括弧ヲ拂ヒ,項ヲ整頓シテ

$$x^3+ax^2+bx+1=x^3+(p+1)x^2+(p+1)x+p.$$

此恒等式ガ成立スル爲ニハ,各項ノ係數ヲ比較シ

$$a=p+1, \quad b=p+1, \quad 1=p$$

ナルヲ要シ,又ソレナラバヨシ。故ニ,求ムル値ハ

$$a=2, \qquad b=2.$$

〔驗 : $x^3+2x^2+2x+1=(x^3+x^2+x)+(x^2+x+1)=(x+1)(x^2+x+1)$〕。

166. 未定係數ノ代入法

恒等式ノ文字ニ,特別ナル數ヲ入レテ,未定ノ係數ノ値ヲ定メ得ルコトアリ。

例。 次ノ恒等式ニ適スル A, B, C ノ値ヲ定メヨ。

$$8x-120=A(x-3)(x-5)+B(x-5)(x-7)+C(x-7)(x-3).$$

是レハ,恒等式ナレバ左,右兩邊ノ x ニ如何ナル値ヲ入レテモ,恒ニ成リ立ツ筈ナリ。先ヅ,A ヲ定

メルタメニハ,Aヲ含ム項ノミ殘リ,他ノB,Cヲ含ム項ガ,消エルヤウナxノ値ガアレバ便利ナリ。

左邊ノ第二,第三式ニハ,$x-7$ガ共通ナルコトニ注意シ,xヲ7トシテ

$$8\cdot7-120=A\cdot4\cdot2, \qquad \therefore\ A=-8.$$

次ニ,xヲ3トシテ

$$8\cdot3-120=B(-2)(-4), \qquad \therefore\ B=-12.$$

$x=5$トシテ

$$8\cdot5-120=C(-2)\cdot2, \qquad \therefore\ C=20.$$

故ニ,求ムルA,B,Cノ値ハ -8, -12, 20ナリ。

【注意】上ノ問題ヲ解クノニ,比較法ヲ用ヒテモ勿論可ナリ。併シ,此場合ニハ代入法ニ據ル方ガ簡便ナルコトヲミルベシ。或問題ヲ解クノニ,比較法ト代入法トヲ混用シテモヨシ,例ヘバ上ノ例題ニ於テ,AトBトガ夫々-8, -12ナルコトヲ知リ,次ニCヲ定ムルニ當リ,兩邊ノx^3ノ係數ヲ比較シ

$$0=A+B+C$$

ナレバ, $C=-A-B=-(-8)-(-12)=20$ トシテモ差支ナシ。

練習問題 (4)

1. $(x^2+px+q)(ax^2+bx+c)$ ニ於テ, x^3 トxトノ項

ノ係數ヲ,共ニ零ニ等シカラシムルニハ,pトqトヲ如何ニ定ムレバヨキカ。 (東師)

2. $(x^3-px^2+qx-r)(px^3+x^2+5x+7)$ ヲ展開シタルトキ, x^5, x^3, x ノ係數ガ零ニナルヤウニp,q,rノ値ヲ定メヨ。 (高等)

3. 次ノ恒等式ニ於ケル,A,B,Cノ値ヲ定メヨ。

$$3x^3+7x^2-15x+9=3(x+1)^3+A(x+1)^2+B(x+1)+C.$$

4. 次ノ恒等式ガ成立スルトキ,A,B,C,Dノ數値ヲ求メヨ。

$$x^3=A+B(x-1)+C(x-1)(x-2)+D(x-1)(x-2)(x-3).$$

(商船)

5. $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{1-x}+\dfrac{C}{1+x}$ ヲ一ツノ分數式ニ纏メタルトキ,分子ガ $1-x+6x^2$ ニ等シクナルヤウニ A,B,C ノ値ヲ定メヨ。

6. $\dfrac{x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$ ニ適スル A,B,C ノ數値ヲ定メヨ。

7. $y^2+5xy+mx^2+x+y-2$ ガx,yニ關スル一次式ノ二ツノ因數ノ積ニ分括サレルタメニハ,mノ値ヲ如何ニ定ムレバヨキカ。 (商船)

8. $x^4+6x^3+7x^2+ax+b$ ガ完全平方式ナルヤウニ a, b ノ數値ヲ定メヨ。 (高等)

【注意】與ヘラレタル式ヲ $(x^2+px+q)^2$ ニ等シト置キ, p, q ヲ定メ,然ル後, a, b ノ値ヲ求メヨ。

167. 二次ノ完全平方式

二次式 ax^2+bx+c ガ,完全平方式ナルタメニハ,如何ナル條件ガ必要ナルカ。先ヅ,與ヘラレタル式ガ $(px+q)^2$ ニ等シキモノト假定シ,次ノ恒等式

$$ax^2+bx+c=(px+q)^2 \qquad (1)$$

ガ成立スルタメニハ, a, b, c ノ間ニ,如何ナル條件ヲ必要トスルカ。右邊ノ括弧ヲ拂ヒ

$$ax^2+bx+c=p^2x^2+2pqx+q^2. \qquad (2)$$

(2) ガ成立スルタメニハ

$$a=p^2, \quad b=2pq, \quad c=q^2$$

ナルヲ要ス。此ノ三ツノ式ヨリ,未知數 p, q ヲ消去センニ, $b^2=4p^2q^2$ ノ p^2, q^2 ニ夫々 a, c ヲ代入シ

$$b^2=4ac. \qquad (3)$$

故ニ,二次式 ax^2+bx+c ガ完全平方式ナルタメニハ, $b^2-4ac=0$ ナルコトガ必要ナリ。然ルニ,曩ニ $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスレバ, ax^2+bx+c ハ

$a(x-\alpha)(x-\beta)$ ノ如ク因數ニ分解サルルコトヲ證明シタリ。 b^2-4ac ガ 0 ナラバ $\alpha=\beta$* ニシテ

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2 \qquad (4)$$

トナル。故ニ

ax^2+bx+c ガ完全平方式ナルタメニハ

1. $b^2-4ac=0$ ナルコトヲ要シ,
2. 又,ソレナラバヨシ。

練習問題 (5)

1. $ax^2+2bx+c$ ガ $ax+b$ ニテ割リ切レルトキ,第一式ハ完全平方式ナルコトヲ證明セヨ。 (海軍)

2. $(a+bx)^2+(c+dx)^2$ ガ x ニ就テノ完全平方式ナルタメニハ, a, b, c, d ノ間ニ如何ナル關係式ノアルノヲ必要トスルカ。但シ $b^2+d^2\neq 0$ トス。 (醫專)

3. $ax^2+bxy+cy^2$ ガ x, y ニ就テノ完全平方式ナルタメニハ,如何ナル條件ヲ必要トスルカ。

4. $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$ ガ x ニ就テノ完全平方式ナルタメニハ, $a=b=c$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ a, b, c ハ實數ナリトス。 (高等)

* $b^2-4ac=0$ ノトキ, $\alpha=\beta=\dfrac{-b}{2a}$.

第三章

因數分解(續)

168. 二元二次式ノ因數分解

二元二次式ノ中,二ツノ一次式ノ積ニ分解サレルモノハ,極メテ特別ノモノナリ。

例。 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ ヲ因數ニ分解セヨ。

與ヘラレタル式ガ,因數ニ分解サレテ

$$(ax+by+p)(a'x+b'y+q) \qquad (1)$$

ノ如クナルモノトスレバ,二次ノ項 $x^2+2xy-8y^2$ ハ $(ax+by)(a'x+b'y)$ ニ等シカルベシ。何トナレバ,(1)ノ括弧ヲ拂ヘバ,二次ノ項ハ總テ $(ax+by)(a'x+b'y)$ ニ包括サレ,他ハ一次ノ項及ビ常數項ナレバナリ。然ルニ

$$x^2+2xy-8y^2=(x-2y)(x+4y)$$

ナレバ,次ノ恒等式ノ成立スルモノト假定ス。

$$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x-2y+p)(x+4y+q).$$

茲ニ,p,q ハ未定ノ係數ナリ。右邊ノ括弧ヲ拂ヒ

$$x^2+2xy-8y^2+(p+q)x+(4p-2q)y+pq.$$

是レガ,左邊ニ等シキタメニハ

$$\begin{cases} p+q=2, & (2) \\ 4p-2q=14, & (3) \\ pq=-3. & (4) \end{cases}$$

ナルヲ要ス,(2)ト(3)トヨリ p,q ヲ求メ,$p=3$, $q=-1$ トナル。此ノ p,q ノ値ハ(4)ヲ滿足セシム。故ニ

$$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x-2y+3)(x+4y-1).$$

【注意】 此場合ニ常數項ガ -3 ニ非ズシテ,3又ハ -5 ノ如キ數ナラバ,(2),(3)ニ適スル p,q ノ値ハ(4)ヲ滿足セヌコトトナル,其場合ニハ二元二次式ハ因數ニ分解シ得ズ。

此例題ハ,與ヘラレタル二次式ヲ x ノミノ二次式トシテ,ax^2+bx+c ノ因數分解ノ公式ヲ適用シテモ可ナリ。

練習問題 (6)

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

1. $xy+7x+3y+21.$
2. $2x^2-5x-5xy-5y+2y^2-25.$ (陸士)
3. $x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz.$ (商大)

【注意】 z ヲ x,y ノ係數トシテ,$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ ナレバ,上ノ式ヲ $(x-y+pz)(x+y+qz)$ ト假定シ p,q ヲ定メヨ。

4. $x^2+y^2+2z^2-3yz+3zx-2xy.$
5. $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab.$ (高等)

169. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ノ因數分解

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ヲ,或一ツノ文字,例ヘバ a ヲ選ビ,a ノ降冪ノ順序ニ並ベ,然ル後,因數ニ分解セン=

$$\begin{aligned} & a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \\ =\ & a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c) \\ =\ & (b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\} \\ =\ & (b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\} \\ =\ & (b-c)(a-b)(a-c). \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$
$$\boldsymbol{=-(b-c)(c-a)(a-b).}$$

【注意】 上ノ問題ハ又次ノ如クシテ,因數ニ分解スルコトヲ得。ソレハ上ノ式ハ $b=c$ トスレバ,零ニ等シクナリ,又 $c=a$ トシテモ,亦 $a=b$ トシテモ零トナル。故ニ $(b-c)$, $(c-a)$, $(a-b)$ ニテ割リ切レ次ノ恒等式ヲ得ベシ。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=\mathrm{L}(b-c)(c-a)(a-b).$$

玆ニ,左邊ハ a, b, c ノ三次式,$(b-c)(c-a)(a-b)$ モ亦 a, b, c ノ三次式ナレバ,L ハ a, b, c ニ關係ノナキ未定ノ數ナリ。L ヲ定メルタメニ,兩邊ノ a^2b ノ係數ヲ比較シ $1=-\mathrm{L}$,卽チ L

ハ -1 ニ等シキコトヲ知ル。

又, $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ ヲ a ノ降冪ノ順序ニ整頓スレバ, $a^2(b-c)-a(l^2-c^2)+bc(b-c)$ トナル。故ニ

$$\boldsymbol{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}$$
$$\boldsymbol{=-(b-c)(c-a)(a-b).}$$

練習問題 (7)

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。(1)—(3).

1. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3.$

2. $(b-c)(b^2+c^2)+(c-a)(c^2+a^2)+(a-b)(a^2+b^2).$

3. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b).$ (東師)

4. 次ノ等式ヲ證明セヨ(**おいれるノ公式**)。

(1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=0.$

(3) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1.$ (醫專,北農)

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。(5)—(7).

5. $\dfrac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{b^4}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{c^4}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$ (盛農)

6. $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$.　(廣師)

7. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.　(陸士)

170. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$ ノ因數分解

a ノ降冪ノ順序ニ配列シテ,因數ニ分解スレバ

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc}\\&=\{a+(b+c)\}\{bc+a(b+c)\}-abc\\&=a^2(b+c)+a(b+c)^2+abc+bc(b+c)-abc\\&=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}\\&\boldsymbol{=(b+c)(c+a)(a+b).}\end{aligned}$$

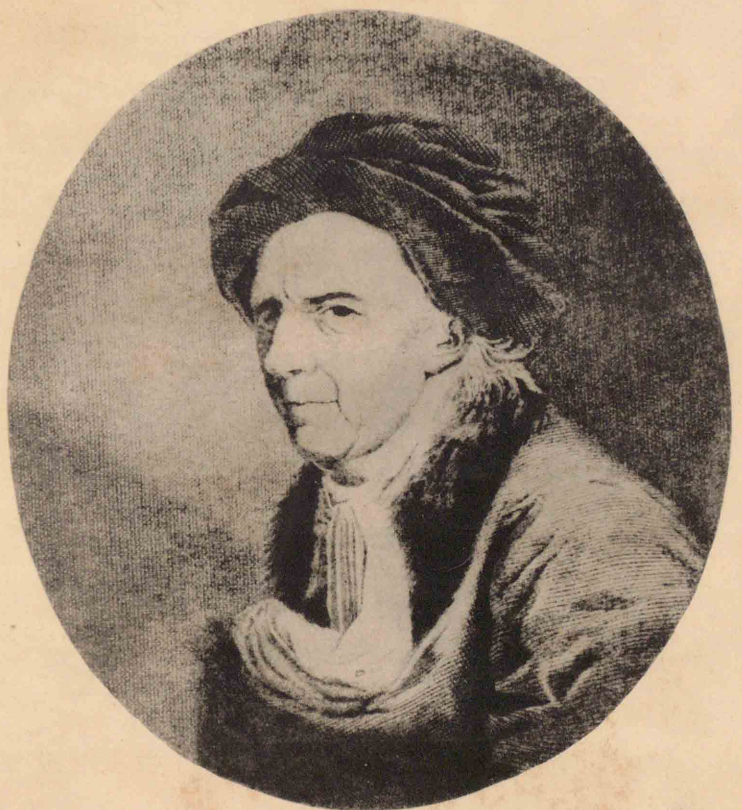
【注意】 此結果ニ於テ等式ノ項ノ順序ヲ入レ變ヘテ,次ノ如ク書キ表スコトヲ得。

$$\boldsymbol{(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(bc+ca+ab).}$$

練習問題 (8)

1. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ ヲ因數ニ分解セヨ。

2. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(a+b+c)=1$ ナルトキハ, a, b, c ノ何レカ二ツノモノノ和ハ,零ナルコトヲ證明セヨ。　(高等)



LEONHARD EULER
(1707—1783)

れおんはーど・おいれるハすうぃつるらんどノ數學者ナリ。おいれるハ其時代ニ至ル總テノ數學（特ニ代數學）ヲ整理シ，今日行ハルル數學ノ體系ヲ構成セリ。現今ノ代數學ノ組織ハ，多クおいれるノ力ニ據ルモノニシテ，高等數學ニ關スル研究ヲ除キテモ　其効績ハ永久ニ沒ス可ラズ。

171. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ ノ因數分解

a ノ降冪ノ順序ニ配列シテ,因數ニ分解スレバ

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\\
&=\{a+(b+c)\}^3-a^3-b^3-c^3\\
&=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3-a^3-b^3-c^3\\
&=3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)-b^3-c^3\\
&=3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+3bc(b+c)\\
&=3(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}\\
&=\mathbf{3(b+c)(c+a)(a+b).}
\end{aligned}$$

172. $a^3+b^3+c^3-3abc$ ノ因數分解

前節ノ結果ニヨリ

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(b+c)(c+a)(a+b).$$

$a+b+c=s$ ト置ケバ

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3=s^3-3(s-a)(s-b)(s-c)\\
&=s^3-3\{s^3-s^2(a+b+c)+s(bc+ca+ab)-abc\}\\
&=s^3-3s(bc+ca+ab)+3abc.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ &\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc}\\
&=s^3-3s(bc+ca+ab)
\end{aligned}$$

$$=s\{s^2-3(bc+ca+ab)\}$$

$$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)\}$$

$$=\mathbf{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}.$$

【注意】 $2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ ナルコトニ注意シ,上ノ結果ヲ次ノ形ニ書キ直スコトヲ得。

$$\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}.$$

練習問題 (9)

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。 (1)—(2).

1. $(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3-a^3-b^3-c^3$.

2. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$.

(陸士)

【注意】 $b+c-a=\mathrm{A}$, $c+a-b=\mathrm{B}$, $a+b-c=\mathrm{C}$ トシテ見ヨ。

3. $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$ ナルトキ

$$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

4. $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-b$ ナルトキ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

ヲ簡單ニセヨ。 (海機)

5. $2s=a+b+c$ ナラバ

$$s^3-(s-a)^3-(s-b)^3-(s-c)^3=3abc$$

ナルコトヲ證明セヨ。

6. $3x=a+b+c$ ナラバ

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

第四章

高次方程式

173. 因數分解ニヨル解法

例一。 方程式 $x^3-6x^2+5x=0$ ヲ解ケ。

左邊ノ各項ニ x ガ共通ナレバ

$$x(x^2-6x+5)=0.$$

故ニ,原方程式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ0ナルカ,又ハ $x^2-6x+5=0$ ニ適合スルモノナラバヨシ。後ノ二次方程式ヲ解キ, $x=1$, $x=5$ ナリ。

故ニ,求ムル根ハ 0, 1, 5 ナリ。

〔是等ノ根ヲ方程式ニ代入シテ驗シテ見ヨ〕。

例二。 方程式 $x^3+x^2-4x-4=0$ ヲ解ケ。

左邊ヲ變形シテ

$$x^2(x+1)-4(x+1)=0.$$

$$\therefore\quad (x+1)(x^2-4)=0.$$

故ニ,求ムル根ハ $-1,\ 2,\ -2$ ナリ。

例三。 方程式 $x(x^2-9)=a(a^2-9)$ ヲ解ケ。

x ノ代リニ a ト置ケバ,此ノ等式ハ成リ立ツニヨリ, a ハ一ツノ根ナリ。右邊ヲ移項シテ

$$x(x^2-9)-a(a^2-9)=0.$$

此式ノ左邊ハ, $x=a$ ノトキ零トナルベキニヨリ, $x-a$ ニテ割リ切レル筈ナリ。割リ算ヲ行ヒ(又ハ因數ニ分解シテ),次ノ如ク變形サル。

$$(x-a)(x^2+ax+a^2-9)=0.$$

故ニ,求ムル根ハ

$$a,\quad \frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{36-3a^2}\right),\quad \frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{36-3a^2}\right).$$

174. 二次方程式ノ解法ニ歸着スル高次方程式

例一。 方程式 $x^4-10x^2+9=0$ ヲ解ケ。

$x^2=y$ ト置ケバ,原方程式ハ

$$y^2-10y+9=0$$

トナル。此方程式ノ根ヲ求メ

$$y=9,\quad 或ハ\quad 1.$$

$$\therefore\quad x=\pm 3,\quad 或ハ\quad \pm 1.$$

例二。 方程式 $(x^2-3x)^2+4x^2-12x-21=0$ ヲ解ケ。

$x^2-3x=y$ ト置ケバ,原方程式ハ

$$y^2+4y-21=0$$

トナル。是レヲ解キ

$$y=3, \quad 或ハ \quad -7.$$

$$\therefore\ x^2-3x=3, \quad 或ハ \quad x^2-3x=-7.$$

此ノ二ツノ二次方程式ヲ解キ,求ムル根ハ

$$\frac{1}{2}(3+\sqrt{21}),\ \frac{1}{2}(3-\sqrt{21}),\ \frac{1}{2}(3+\sqrt{-19}),\ \frac{1}{2}(3-\sqrt{-19}).$$

例三。方程式 $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=4$ ヲ解ケ。

$x+\frac{1}{x}=y$ ト置ケバ, $y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$.

$$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

故ニ,原方程式ハ次ノ如ク書キ變ヘラル。

$$(y^2-2)+y=4.$$

此二次方程式ヲ解キ

$$y=2, \quad 或ハ \quad -3.$$

$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=2, \quad 或ハ \quad x+\frac{1}{x}=-3.$$

是等ノ二ツノ方程式ヲ解キ,求ムル根ハ

$$1, \quad 1, \quad \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

練習問題 (10)

次ノ方程式ヲ解ケ。(1)—(8).

1. $x^3-x^2-x+1=0.$
2. $(x^2-x-6)(x^2-x-20)=0.$
3. $a^2x^4-(a^4+1)x^2+a^2=0.$
4. $x^2-\frac{1}{x^2}=a^2-\frac{1}{a^2}.$ (名工)
5. $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0.$
6. $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44.$ (廣師)
7. $x(x+1)(x+2)=a(a+1)(a+2).$
8. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0.$ (明專)

9. $x=1$ ナル根ノアルコトヲ知リテ,次ノ方程式ヲ解ケ。

$$2x+\frac{1}{x-2}-\frac{x(5x-8)}{x^2-4}=0.$$ (仙工)

175. 1ノ立方根

方程式 $x^3-1=0$ ノ根ヲ求メルタメニ,左邊ヲ因數ニ分解シテ

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

$$\therefore \quad x-1=0, \quad \text{或ハ} \quad x^2+x+1=0.$$

是レヲ解キ,求ムル根ハ

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

故ニ,立方シテ1ニナルモノ,卽チ1ノ立方根ハ三ツアリ。其中,一ツハ實數,他ノ二ツハ虛數ナリ。此ノ虛數ノ根ノ中,何レカ一ツヲω*トスレバ,他ハω^2ニテ表サル。假リニ,$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ヲ$\omega$トスレバ

$$\omega^2=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{-3})^2=\frac{1}{4}(1-2\sqrt{-3}-3)$$

$$=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}).$$

同樣ニ,$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ヲ$\omega$トスレバ,$\omega^2$ハ計算ノ結果,$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$トナル。故ニ,1ノ立方根ハ

$$1, \quad \omega, \quad \omega^2$$

ニテ表サル。茲ニ,ωハ$x^3=1$ノ根ナレバ

$$\omega^3=1. \tag{1}$$

又,ωハ$x^2+x+1=0$ノ根ナレバ次ノ關係アリ。

$$\omega^2+\omega+1=0. \tag{2}$$

* ωハぎりしや字ニシテ「おめが」,Omegaト讀ム。

一般ニ,實數ノ立方根ハ三ツアリ。a^3ヲ實數トスレバa^3モ,$(\omega a)^3$モ,$(\omega^2 a)^3$モ皆a^3ニシテ,a^3ノ立方根ハaト,ωaト,$\omega^2 a$ノ三ツアリ。而シテ,此他ニハナシ。何トナレバ,$a, \omega a, \omega^2 a$ハ$x^3-a^3=0$ニ適スルxノ値ナレバ,x^3-a^3ハ$x-a, x-\omega a, x-\omega^2 a$ニテ割リ切レ,次ノ恒等式ヲ得。

$$x^3-a^3=(x-a)(x-\omega a)(x-\omega^2 a).$$

右邊ハ,$x=a, \omega a, \omega^2 a$以外ノ値ヲ代入シテ,零トナルコトナシ。從テ,$x^3-a^3$ガ零ニナルタメニ,$x$ノトルベキ値ハ三ツアルノミ,ソレ以外ニハナシ。

故ニ,實數ノ立方根ハ三ツアリテ,三ツニ限ル。

練習問題 (11)

次ノ等式ノ正シキコトヲ證明セヨ。

1. $x^3+1=(x+1)(x+\omega)(x+\omega^2)$.
2. $(x+\omega y)(x+\omega^2 y)=x^2-xy+y^2$.
3. $(1-\omega)^3=3(1+2\omega^2)$.
4. $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$.

第五章

最大公約數及ビ最小公倍數(續)

176. 約數ノ性質

第四篇ニ於テ,若干ノ整式ノ最大公約數ヲ求ムルニ當リ,各式ヲ因數ニ分解シテ後,是レヲ求メシガ,今一般ノ方法ニ就キテ述ブベシ。ソレニハ,先ヅ約數ニ關スル二,三ノ性質ヲ知ルヲ要ス。

(1) 或一ツノ整式ノ約數ハ,其式ノ倍數ノ約數ナリ。

整式Aノ一ツノ約數ヲPトスレバ,Pハ又mAノ約數ナルベシ。茲ニ,mハ或數値ニテモ,亦整式ニテモ差支ナシ。

ソレヲ證明スルタメ,AヲPニテ割リシトキノ商ヲaトスレバ,$A=a{\cdot}P$ニシテ,從テ

$$mA=maP.$$

茲ニ,maハ數値,又ハ整式ナレバ,mAハPニテ割リ切レル。PハmAノ約數ナリ。

(2) 二ツノ整式ノ公約數ハ二式ノ和,又

ハ差,又ハ其等ノ倍數ノ和,又ハ差ノ約數ナリ。

整式A及ビBノ公約數ヲPトスレバ,Pハ又タ$mA\pm nB$ノ約數ナルベシ($m=1, n=1$ノトキ$mA\pm nB$ハ特ニ$A\pm B$トナル)。

何トナレバ,$A=a{\cdot}P$, $B=b{\cdot}P$トスレバ

$$mA\pm nB=maP\pm nbP=(ma\pm nb)P.$$

茲ニ,$ma\pm nb$ハ或數値,又ハ整式ナルベキニヨリ,$mA\pm nB$ハPニテ割リ切レル。卽チ,Pハ$mA\pm nB$ノ約數ナリ。

177. 最大公約數ヲ求ムル方法

A及ビBヲ,同ジ一ツノ文字ノ降冪ノ順序ニ整頓シタル代數式トシ,其文字ニ就テノBノ次數ハAノ次數ヨリモ大ナラザルモノトス。

Bヲ以テAヲ割リ,割リ切レレバ,BハAトBトノH.C.F.ナリ。

若シ,割リ切レヌトキニハ,商ヲQ,剩餘ヲRトシテ,次ノ等式ヲ得。

$$A=BQ+R,\qquad 或ハ\qquad R=A-BQ.$$

然ラバ,前節ノ(2)ノ性質ニヨリ,$R=A-BQ$ ナレバ A,B ノ公約數ハ,R ノ約數ナリ。故ニ,

A,B ノ公約數ハ B,R ノ公約數ナリ。 (I)

又, $A=BQ+R$ ナル以テ B,R ノ公約數ハ A ノ約數ナリ。故ニ,

B,R ノ公約數ハ A,B ノ公約數ナリ。 (II)

故ニ,(I),(II) ニヨリ, A,B ノ H.C.F. ト B,R ノ H.C.F. トハ同ジモノナルヲ知ル。

依テ,A,B ノ H.C.F. ヲ求メル代リニ B,R ノ H.C.F. ヲ求メレバ可ナリ。故ニ, B ガ R ニテ割リ切レレバ, R ハ A,B ノ H.C.F. ナリ。若シ,割リ切レズシテ,B ヲ R ニテ割リタルトキ,剩餘 R' ヲ得ルモノトスレバ, R ト R' トノ H.C.F. ハ B,R ノ H.C.F. 卽チ A,B ノ H.C.F. トナル。追テ,カヤウニシテ除法ヲ繰リ返ヘシ,遂ニ整除シ得ラルルトキ,其除數ガ A,B ノ H.C.F. ナリ。

尙ホ,三ツ以上ノ整式ノ H.C.F. ヲ求メンニハ,何レカ二ツノ式ノ H.C.F. ヲ求メ,ソレト第三式トノ H.C.F. ヲ求メレバヨシ。

例。 $12x^2-25x+12,\ 3x^2+2x-8$ ノ H.C.F. ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r|l|l} 3x^2+2x-8 & 12x^2-25x+12 & 4 \\ & 12x^2+\ 8x-32 & \\ \hline & -33x+44 \cdots\cdots \text{剩餘} & \end{array}$$

與ヘラレタル二ツノ式ノ H.C.F. ハ,此剩餘ノ因數トシテ含マレテ居ル譯ナリ。然ルニ,剩餘ノ一ツノ因數 -11 ハ,原ノ二ツノ式ノ公約數ナラザルコト明ナレバ,問題ハ $-33x+44$ ヲ -11 ニテ割リタルモノ $3x-4$ ト,$3x^2+2x-8$ トノ H.C.F. ヲ求ムレバヨキコトトナル。

$$\begin{array}{r|r|l} 3x-4 & 3x^2+2x-8 & x+2 \\ & 3x^2-4x & \\ \hline & 6x-8 & \\ & 6x-8 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$\therefore$ H.C.F.$=3x-4$.

178. 共通ナル根

x ニ就テノ二ツノ方程式

$$A=0,\quad B=0$$

アリ。此二ツガ α ヲ共通ナル根トスレバ,二ツノ整式 A 及ビ B ニ於テ,x ヲ α トスレバ,共ニ零トナル筈ナリ。卽チ,A,B ハ $x-\alpha$ ニテ割リ切レ, $x-\alpha$ ハ A,B,ノ公約數トナル。

カヤウニシテ, $A=0$, 及ビ $B=0$ ニ共通根ガアルナラバ,ソレハ, AトBトノ H.C.F. ヲ求メ,ソレヲ零ナラシムル x ノ値ヲ求メレバ可ナリ。

例. $6x^3+5x^2-2=0$ ト $8x^2+2x-3=0$ トノ共通根ヲ求メヨ。

$6x^3+5x^2-2$ ト $8x^2+2x-3$ トノ H.C.F. ヲ求メントスルニ, $6x^3$ ヲ $8x^2$ ヲ以テ割ルノニ,其係數6ハ8ニテ割リ切レズ。是レハ極メテ不便ナレバ,初メノ式ニ4ヲ掛ケル。4ハ固ヨリ二ツノ式ノ公約數ナラヌコト明ナレバ,結果ニハ何等ノ影響ナシ。

$$\begin{array}{r|l|l} 8x^2+2x-3 & 24x^3+20x^2\qquad -8 & 3x \\ & \underline{24x^3+\ 6x^2-9x} & \\ & \qquad 14x^2+9x-8 & \end{array}$$

$14x^2+9x-8$ ヲ $8x^2+2x-3$ ヲ以テ割ルノニ,係數ガ割リ切レズシテ不便ナリ。故ニ, $14x^2+9x-8$ ニ再ビ4ヲ掛ケル。

$$\begin{array}{r|l|l} 8x^2+2x-3 & 56x^2+36x-32 & 7 \\ & \underline{56x^2+14x-21} & \\ & \qquad 22x-11 & \end{array}$$

剰餘 $22x-11$ ヲ 11ニテ割リ

$$\begin{array}{r|l|l} 2x-1 & 8x^2+2x-3 & 4x+3 \\ & \underline{8x^2-4x} & \\ & \qquad 6x-3 & \\ & \qquad \underline{6x-3} & \\ & \qquad\quad 0 & \end{array}$$

故ニ, $6x^3+5x^2-2$ ト $8x^2+2x-3$ ノ H.C.F. ハ $2x-1$ ニシテ,求ムル共通根ハ $x=\frac{1}{2}$ ナリ。

179. 最小公倍數

二ツノ整式ノ最大公約數ト,最小公倍數トノ積ハ其等二式ノ積ニ等シ。

何トナレバ,二ツノ整式ヲ A, B トシ H.C.F. ヲ G トシ, A, B ヲ G ヲ以テ割リシトキノ商ヲ,夫々 a, b トスレバ

$$A=aG,\qquad B=bG.$$

玆ニ, G ハ A ト B トノ H.C.F. ナレバ, a ト b トニハ公約數ナシ。故ニ, A,B ノ L.C.M. ハ abG ニシテ, $A\cdot B$, 卽チ $G\cdot abG$ ハ A, B ノ H.C.F. ト L.C.M. トノ積ニ等シ。

故ニ, A, B ノ L.C.M. ヲ求メルニハ, A, B ノ H.C.F. ヲ求メ,ソレヲ以テ $A\cdot B$ ヲ割レバヨシ。

練習問題 (12)

1. $20x^2+21x-5$, $5x^2+4x-1$ ノ H.C.F. ヲ求メヨ。

2. $3x^4-5ax^3+a^2x^2+a^4$, $2x^3-ax^2-a^3$ ノ H.C.F. ヲ求メヨ。 (海軍)

3. $3x^4+2x^3+6x^2-x+2$ ト $3x^4-4x^3+5x^2-2x+1$ トノ H.C.F. ヲ求メヨ。 (神商)

4. $9x^3-8-22x$ ト $2-11x^2+6x^3$ トヲ同時ニ零ナラシムル x ノ値ヲ求メヨ。

5. $2x^3-x^2+x-6=0$ ト $6x^3-9x^2+10x-15=0$ トニ共通ナル根ヲ求メヨ。 (高等)

6. $6x^3-7x^2-16x+12$ ヲ零ナラシムルモ,同時ニ $3x^3-5x^2-4x+4$ ヲ零ナラシメザル x ノ値ヲ求メヨ。 (海軍)

7. x^2+mx+n ト x^2+px+q トノ H.C.F. ハ $x+1$ ニシテ, L.C.M. ハ x^3+2x^2-5x-6 ナルヤウニ m, n, p, q ノ値ヲ定メヨ。

8. $2x^3+x^2+bx+8$ ト x^3-bx^2+ax+4 トガ,共ニ $x-2$ ヲ約數トスルヤウニ a, b ノ値ヲ定メ,次ニ二式ノ L.C.M. ヲ求メヨ。 (東蠶)

9. x^2+ax+b ト x^2+bx+a トガ,一次ノ H.C.F. ヲ有スルトキニハ L.C.M. ハ $x^3+(ab+a+b)x-ab$ ナルコトヲ證明セヨ。

第六章

不等式

180. 不等式

不等式ハ,二ツノ式ガ同ジ數值ナラヌコトヲ表ス關係式ニシテ,不等號ニヨリ結バレタル二ツノ式ヨリ成立ス。二ツノ式ノ中,不等號ノ左ニアル部分ヲ不等式ノ**左邊**,右ニアル部分ヲ**右邊**ト云フ。

181. 大小

a, b ガ實數ナルトキ, $a-b$ ガ正數ナラバ a ハ b ヨリモ大, $a-b$ ガ負數ナラバ a ハ b ヨリモ小ナリ。

卽チ

$$a-b>0 \text{ ナラバ } a>b,$$

$$a-b<0 \text{ ナラバ } a<b.$$

【注意】 二ツノ式ノ關係ヲ示ス記號トシテ,「小ナラズ」ト云フコトヲ表スニ $\nless$ ヲ用ヒ,「大ナラズ」ト云フコトヲ示スニ $\ngtr$ ヲ用フルコトアリ。

182. 不等式ノ性質

(1) $a>b$ ナラバ $a+c>b+c$,* 又 $a-c>b-c$ ナリ。

初メノ不等式ヲ證明スルタメ, $(a+c)$ ト $(b+c)$ トノ差ヲ作ルニ,其差ハ $a-b$ ニシテ,是レハ $a>b$ ナレバ正數ナリ。故ニ

$$(a+c)-(b+c)>0, \quad \therefore \ a+c>b+c.$$

同樣ニシテ,第二ノ不等式ヲ證明スルヲ得ベシ。

(2) $a>b,\ c>0$ ナラバ $ac>bc$, 又 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$ ナリ。

初メノ不等式ヲ證明スルタメニ, $ac-bc$; 即チ $c(a-b)$ ヲ考ヘンニ, c ハ正數, $a-b$ モ亦正數ナレバ, $ac-bc$ ハ正數ナリ。故ニ

$$ac-bc>0, \quad \therefore \ ac>bc.$$

第二ノ不等式ハ,同樣ニシテ證明スルコトヲ得。

(3) $a>b,\ c<0$ ナラバ $ac<bc$, 又 $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$ ナリ。

此場合ニハ差 $ac-bc$, 即チ $c(a-b)$ ニ於テ, c ハ負數, $a-b$ ハ正數ナレバ $ac-bc$ ハ負數ナリ。故ニ

$$ac-bc<0, \quad \therefore \ ac<bc.$$

第二ノ不等式ハ,是レト同樣ニシテ證明スルコトヲ得ベシ。

* a, b, c ハ總テ實數ナリ。

【注意】上ノ性質ハ,總テ $a>b$ ノトキナリシモ, $a<b$ ノトキニモ,同樣ナル性質アリ。

即チ, $a<b$ ナラバ, $a\pm c<b\pm c$; 又 $a<b$ ニシテ $c>0$ ナラバ, $ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$; 又 $c<0$ ナラバ $ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$ ナリ。

故ニ,不等式ノ兩邊ニ同ジ數ヲ加ヘ,或ハ兩邊ヨリ同ジ數ヲ引キ,或ハ兩邊ニ同ジ正數ヲ掛ケ,或ハ同ジ正數ニテ割リテモ,不等號ノ向キハ變ラズ。

之レニ反シ,不等式ノ兩邊ヲ同ジ負數ニテ乘除スレバ,不等號ノ向キガ變ハル。

183. 相加平均ト相乘平均

a, b ヲ實數トスレバ $a^2+b^2 \geqq 2ab$ ナリ。

何トナレバ, a, b ハ實數ナレバ, $(a-b)^2$ ハ一般ニ正數ニシテ, $a=b$ ノトキニ限リ零ナリ。故ニ

$$a^2-2ab+b^2 \geqq 0,$$

$$\therefore \ a^2+b^2 \geqq 2ab.$$

今, a^2 ノ代リニ文字 x ヲ用ヒ, b^2, ノ代リニ y ト書ケバ, x, y ハ正數又ハ零ニシテ,次ノ關係ヲ得。

$$x+y \geqq 2\sqrt{x}\sqrt{y}, \quad 或ハ \quad \frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}.$$

故ニ,二ツノ正數ノ相加平均(或ハ算術平均, $\frac{x+y}{2}$) ハ相乘平均(或ハ幾何平均, $\sqrt{xy}$) ヨリモ,一般ニ大ナリ。 但シ,二數相等シキトキニ限リ相等シ。

例一。 a, b ガ正數ニシテ,相等シカラザルトキ,次ノ不等式ノ成立スルコトヲ示セ。

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

是レヲ證明スルタメ,兩邊ノ差ヲ作リ

$$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2.$$

玆ニ, $(a+b)$ 及ビ $(a-b)^2$ ハ正數ナレバ

$$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)>0. \qquad \therefore \quad a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

例二。 a, b, c ハ實數ニシテ,互ニ相等シカラザルトキ, $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$ ナルコトヲ示セ。

本節ノ定理ニヨリ

$$a^2+b^2>2ab, \quad b^2+c^2>2bc, \quad c^2+a^2>2ca.$$

$$\therefore \quad 2a^2+2b^2+2c^2>2ab+2bc+2ca.$$

$$\therefore \quad a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

練習問題 (13)

次ノ各問題ニ答ヘヨ。 但シ,文字ノ表ス値ハ,總テ正數ニシテ,且互ニ相等シカラザルモノトセヨ。

(1)—(4).

1. $a^2+3b^2>2b(a+b)$. **3.** $a^3b+ab^3>2a^2b^2$.

2. $(b+c)(c+a)(a+b)>8abc$. **4.** $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>4$.

5. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ ト $(ac+bd)^2$ トハ何レガ大ナルカ。

6. $\frac{a+b}{2}$ ト $\frac{2ab}{a+b}$ トハ何レガ大ナルカ。

7. $\frac{m^2}{a}+\frac{n^2}{b}$ ト $\frac{(m+n)^2}{a+b}$ トハ何レガ大ナルカ。又等シキタメノ條件ヲ求メヨ。 (高等)

雜　　題（第九）

（1）

1.　a, b, c ガ實數ニシテ

$$(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab)$$

ナルトキハ，$a=b=c$ ナルコトヲ證明セヨ。

2.　$(a-3)x^3+(2a-3b+5)x^2+(3a+2b-5c)x+ac-bd+7$　ト x^3+7x^2+4x+5 トガ，x ノ値ニ關セズ恒ニ相等シキトキハ，a, b, c, d ノ値各如何。

3.　方程式 $x^3-5x^2+2x=p$ ノ三ツノ根ガ $\alpha, \alpha+3, \beta$ ナルトキ，p, α, β ノ値ヲ求メヨ。　（陸士）

【**注意**】 α ト $\alpha+3$ トガ方程式ノ根ナルコトヨリ，α ノ二次方程式ヲ得。其二次方程式ヲ解キ，α ノ値ヲ求メ，ソレヲ原ノ方程式ニ代入シ，p ヲ決定スベシ。

4.　$x^3-19x^2+119x+c=0$　ノ三ツノ根ノ中，二ツガ相等シキトキ，c ノ數値如何。　（大醫）

5.　方程式　$y=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$　ノ表スぐらふガ三ツノ點 $(1, 3); (2, 8); (3, 5)$ ヲ通ルヤウニ a, b, c ノ値ヲ定メヨ。

（2）

1.　次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(*a*)　$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$

$$+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

(*b*)　$$\frac{(1+xy)(1+xz)}{(x-y)(x-z)}+\frac{(1+yz)(1+yx)}{(y-z)(y-x)}+\frac{(1+zx)(1+zy)}{(z-x)(z-y)}.$$

2　二次式 $ax^2+2bxy+cy^2$ ニ於テ，$x=px'+qy'$，$y=rx'+sy'$ ト置キ換ヘテ得ル式ヲ　$\mathrm{A}x'^2+2\mathrm{B}x'y'+\mathrm{C}y'^2$　トスレバ，$\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}$　ハ $(b^2-ac)(ps-qr)^2$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。　（京工）

3.　x ノ三次ノ多項式ヲ因數ニ分解セル次ノ式アリ。

$$(\quad)x^3-(\quad)x^2-29x-12=(2x+1)(x-4)(\quad).$$

然ルニ，括弧ニテ示セル x^3 及ビ x^2 ノ係數ト，一ツノ因數トハ汚損ノタメ不明ナリト云フ。理由ヲ附シテ是等ヲ補足セヨ。　（海軍）

4.　次ノ方程式ノ左邊ヲ $(ax^2+bx)^2-(cx+d)^2$ ノ形ニ變化シテ，方程式ノ正數ノ根ヲ求メヨ。

$$4x^4+12x^3-7x^2-40x-25=0.$$　（商船）

5.　x ニ關シ，次數ノ同ジ二ツノ整式アリ。其ノ最大公約數及ビ最小公倍數ハ夫々 x^2+3x+2, $x^4+5x^3-7x^2-41x-30$ ナリト云フ。二式各如何。　（海軍）

---

(3)

1. $abc=1$ ナルトキ，次ノ等式ノ正シキコトヲ證明セヨ。

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2+8=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right).$$

(商船)

2. $a+b+c=0$ ナルトキハ

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. 方程式 $\frac{25}{x^4}-\frac{226}{x^2}+9=0$ ヲ解ケ。

4. $ax^3+bx^2-47x-15$ ハ $3x+1$ ニテモ，又 $2x-3$ ニテモ整除セラルト云フ。a, b ノ値ヲ求メヨ。

5. x ニ就キテノ三次式アリ。$2x-3$ ニテ割レバ -3 殘リ，$2x^2-5x+3$ ニテ割レバ商 $3x+4$ ヲ得テ，殘リハ x ヲ含マズト云フ。此三次式ヲ求メヨ。 (陸士)

(4)

1. 次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

(a) $x^2-xy-x+2y-2$.

(b) $a^4+a^2b^2+b^4$.

2. $\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2$ ナルコトヲ證明セヨ。

3. $t=\frac{3x^2+x-2}{3-x}$ ナルトキ，$\frac{3t+x+2}{t+3x+2}$ ヲ簡單ナル形ニテ表セ。

4. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(a) $\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-\frac{12}{5}x=8\frac{1}{5}.$

【注意】 $\frac{3x+4}{5}=y$ トセヨ。

(b) $\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{5}{2}.$

【注意】 $\frac{2x-3}{3x-5}=y$ トセヨ。

5. x^3+ax^2+bx+c 及ビ x^2+bx+c ガ公約數 $x-k$ ヲ有スルトキハ，$(a-1)^2-b(a-1)+c=0$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ，a ハ 1 ニ等シカラズ，又 c ハ零ニ等シカラザルモノトス。 (高等)

(5)

1. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\frac{1}{bc}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{ca}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}.$$

(商船)

2. x, y, z ガ悉ク零ニアラズシテ

$$ax+by+cz=0,\quad bx+cy+az=0,\quad cx+ay+bz=0$$

ナルトキハ, $a^3+b^3+c^3=3abc$ ナルコトヲ證明セヨ。 (橫工)

3. x ニ就テノ或有理整式ヲ, $x-1$ ニテ割リシトキノ剩餘ハ 4 ニシテ, 其商ヲ更ニ $x-2$ ヲ以テ割リシトキノ剩餘ハ 3ナリト云フ。原ノ有理整式ヲ $x-2$, 及ビ $(x-1)(x-2)$ ニテ割リシトキノ各剩餘ヲ求メヨ。 (愛醫)

4. a, b, c ハ實數ニシテ, $x^3-3b^2x+2c^3$ ガ $x-a$, 及ビ $x-b$ ニテ割リ切レルトキハ, $a=b=c$ ナルカ, 又ハ $a=-2b=-2c$ ナルコトヲ證明セヨ。 (名工)

5. x^3+px^2+qx+1 及ビ x^3+qx^2+px+1 ガ公約數ヲ有スルトキハ, $p=q$ ナルカ, 又ハ $p+q+2=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

第十一篇

無理式ノ性質

第一章

二重ノ根式

184. 平方根ヲ含ム式ノ平方根

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ ノ如ク, 平方根ヲ含ム式ノ平方根ハ, 是レヲ次ノ定理ニヨリ, 簡單ニ變形シ得ルコトアリ。

a, x ハ有理數, $\sqrt{b}$, $\sqrt{y}$ ハ無理數ニシテ

$$a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$$

ナラバ $x=a,\ y=b$ ナリ。

是レヲ證明スルタメ, x ヲ移項シ

$$a-x+\sqrt{b}=\sqrt{y}.$$

兩邊ヲ平方シテ

$$(a-x)^2+2\sqrt{b}(a-x)+b=y.$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{b}(a-x)=y-b-(a-x)^2.$$

此等式ノ右邊ノ各項ハ有理數ナレバ,左邊モ亦有理數ナルヲ要ス。然ルニ,$\sqrt{b}$ハ無理數ナレバ,此等式ガ成立スルタメニハ,$a-x$ハ零ナラザル可カラズ。

$$\therefore \quad x=a, \quad 從テ \quad y=b.$$

此定理ニヨリ,平方根ヲ含ム式ノ平方根ヲ簡單ナル形ニ表シ得ルコトアリ。次ノ例ヲ見ヨ。

例。 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ ヲ簡單ニセヨ。

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ ヲ簡單ニスルタメ,ソレヲ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ニ等シキモノト假定ス。

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

兩邊ヲ平方シテ

$$7+4\sqrt{3}=x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

此等式ガ成立スルタメニハ

$$x+y=7, \quad 2\sqrt{x}\sqrt{y}=4\sqrt{3}$$

ナルヲ要ス。即チ

$$x+y=7, \quad xy=12.$$

此ノ聯立方程式ヲ解キ, $x=4$, $y=3$; 或ハ $x=3$, $y=4$.

何レノ場合ニ應ジテモ

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

【注意】 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ヲ簡單ニスルニハ,是レヲ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ト置キ,其結果 $x=4$, $y=3$; 或ハ $x=3$, $y=4$ トナル。故ニ

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}, \quad 或ハ \quad \sqrt{3}-2.$$

然ルニ,規約ニヨリ平方根式 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ハ實數ナラバ,正數又ハ零ヲ表ス筈ナレバ,負數 $\sqrt{3}-2$ ハ,答トナラズ。故ニ

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

練習問題 (1)

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。(1)—(5).

1. $\dfrac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}.$

2. $\dfrac{14}{\sqrt{18-8\sqrt{2}}}-\sqrt{2}.$ （海兵）

3. $\dfrac{\sqrt{45}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}.$ （名工）

4. $\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}.$ （名工）

5. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$ （高等）

6. $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt{8}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ヲ簡單ナル形ニ變化シ,小數點以下第三位マデ正確ニ求メヨ。 (廣工)

7. $\sqrt{9\sqrt{6}+6\sqrt{12}}+\sqrt{9\sqrt{6}-6\sqrt{12}}$ ヲ簡單ニセヨ。 (商大)

【注意】 $\sqrt{9\sqrt{6}+6\sqrt{2}\sqrt{6}}=\sqrt[4]{6}\sqrt{9+6\sqrt{2}}$ ナルコトヲ注意セヨ。

第二章

無理式ノ數値

185. 平方根式ノ積

二ツノ平方根式ノ積ニ就テ,注意スベキコトハ既ニ第七篇ニ述ベタリ。今,ソレヲ列擧スレバ

(1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}.$

(2) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{(-2)\times3}=\sqrt{-6}.$

(3) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)\times(-3)}=-\sqrt{6}.$

故ニ,$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ナル公式ハ,a, b ガ共ニ負數ノトキニ限リ成立セズ。ソノトキニハ

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}.\quad (a, b\text{ ハ勿論實數トス})$$

186. 平方根式ノ商

二ツノ平方根式ノ商ニ就テハ如何。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}.$

(2) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\sqrt{-1}=\sqrt{-\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{-3}{2}}.$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{2}\cdot(-1)}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{-1}$

$$=-\sqrt{-\frac{3}{2}}=-\sqrt{\frac{3}{-2}}.$$

(4) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{-3}{-2}}.$

故ニ,公式 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ ハ a ガ正數,b ガ負數ノトキニ限リ成立セズ。ソノトキニハ

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

例一。x, y ガ正數ナルトキ,$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ ヲ簡單ニセヨ。

根號ノ中ノ $x+y$ ハ,題意ニヨリ正數ナルガ,$x-y$ ハ正數ナルカ負數ナルカ分ラズ,故ニ正數ノトキト,負數ノトキトヲ分ケテ考ヘザル可カラズ。

(1) $x-y>0$ ノトキ

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$$

$$=\frac{(x+y)+(x-y)}{\sqrt{x-y}\sqrt{x+y}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}.$$

(2) $x-y<0$ ノトキ

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=-\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x--y}}+\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$$

$$=\frac{-(x+y)+(x-y)}{\sqrt{x-y}\sqrt{x+y}}=\frac{-2y}{\sqrt{x^2-y^2}}=-\frac{2y\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}.$$

例二。$x=1$ ノトキ,次ノ式ノ數値ヲ求メヨ。

$$\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2-4}}\times\frac{1}{\sqrt{2x^2-4}}.$$

與ヘラレタル式ニ於テ,$x=1$ トスレバ

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}\times\frac{1}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{3}\sqrt{2}}=-1.$$

練習問題 (2)

1. $2x=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキ,$\frac{x^2-1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ ノ値ヲ求メヨ。 (商船)

2. $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ナルトキ,$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ ノ値ヲ求メヨ。 (早高)

3. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ ナルトキ,$a^3+\frac{1}{a^3}$ ノ値ヲ求メヨ。

4. $x=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ ナルトキ,$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ ノ値ヲ求メヨ。

5. $x=\dfrac{a+b}{\sqrt{2}\,(a-b)}$ ナルトキ

$$\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

ヲ最モ簡單ナル形ニテ表セ。　(醫專)

雜　題（第十）

(1)

1. $x=\sqrt{2}$ ナルトキ,次式ノ値ヲ最モ簡單ナル形ニテ答ヘヨ。

$$\left\{\frac{3}{x+1}-\frac{2x-3}{x^2+\dfrac{x-1}{2}}\right\}\div\left\{1-\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right\}.$$

(海軍)

2. 次ノ式ニ於テ, R ノ値ヲ a ヲ以テ表セ。

$$\sqrt{R^2-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}=a.$$

3. 次ノ方程式ヲ解ケ。但シ, R ヲ未知數トス。

$$\left(\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=R^2-4.$$

4. $a+b+c=0$ ナラバ,次ノ等式ノ正シキコトヲ證明セヨ。

(*a*) $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab).$

(*b*) $a^3+b^3+c^3=3abc.$　(熊工)

5. $a+b+c=0$ ナラバ

$$a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$

ナルコトヲ證明セヨ。　(神商)

---

(2)

1. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

2. 次ノ式ヲ簡單ナル形ニ直セ。

$$\frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{(3-2\sqrt{2})}}.$$

3. $2s=a+b+c$ ナルトキ,次ノ等式ノ正シキコトヲ證明セヨ。

$$s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2.$$

4. $\frac{n}{2}s=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$ ナラバ

$$(s-x_1)^2+(s-x_2)^2+\cdots\cdots+(s-x_n)^2=x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。　(慶應)

5. $x=b+c-a,\ y=c+a-b,\ z=a+b-c$ ナラバ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

(3)

1. $a^2=b^2+c^2-2bc(2Q^2-1)$ ナラバ

$$Q=\pm\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

2. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ ノ値ヲ求メヨ。

(北農)

3. $x=\sqrt[3]{(a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{a^2+b^3})}$ ナラバ

$$x^3+3bx-2a=0$$

ナルコトヲ示セ。　(大工)

4. $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)+20$ ハ x ノ實數ノ値ニ對シ,常ニ正數ナルコトヲ證明セヨ。　(名商)

5. 方程式 $\frac{7}{x-1}-\frac{5}{x+1}=a^2$ ハ,常ニ絕對値ガ 1 ヨリモ大ナル二ツノ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

(4)

1. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$ ノ平方根ヲ求メヨ。　(商大)

2. $x^2+x-1=0$ ナルトキ, $3x^4+2x^3-x^2+5x-4$ ノ値ヲ求メヨ。

【注意】 $3x^4+2x^3-x^2+5x-4$ ヲ x^2+x-1 ヲ以テ割レバ

$$(3x^2-x+3)(x^2+x-1)+x-1.$$

故ニ, $x^2+x-1=0$ ノトキ,此値ハ $x-1$ ニ等シキコトヲ注意セヨ。

3. a, b, c, d ガ何レモ正數ニシテ, $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$ ナルトキハ $\frac{b}{a}>\frac{b+d}{a+c}$, $\frac{b+d}{a+c}>\frac{d}{c}$ ナルコトヲ證明セヨ。　(海兵)

4. a, b ガ實數ナラバ,如何ナル値ニテモ方程式

$$\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4$$

ノ四ツノ根ハ,常ニ實數ナルコトヲ證明セヨ。

5. 方程式 $x^2+2(a-1)x+5a-9=0$ ノ根ガ實數ナルタメ

ニハ, a ハ如何ナル範圍ノ數ナルヲ要スルカ。其限界ヲ求メヨ。 (東工)

---

(5)

1. $\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2=\sqrt{59+24\sqrt{6}}$ ナルコトヲ證明セヨ。 (長商)

2. 三角形ノ三ツノ邊ノ長サヲ a, b, c トスレバ

$$a^2+b^2+c^2<2(bc+ca+ab)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3 $xy>1$ ナルトキハ

$$\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+y\right)>0$$

ナルコトヲ證明セヨ。 (東師)

4. a, b, c ハ皆正數ニシテ $a>b>c$ ナルトキ, 次ノ各場合ニ應ズル $(x-a)(x-b)(x-c)$ ノ符號ヲ定メヨ。

(1) $x>a$ ナルトキ,

(2) $a>x>b$ ナルトキ,

(3) $b>x>c$ ナルトキ,

(4) $c>x>0$ ナルトキ,

(5) $x<0$ ナルトキ。

5. 零ニアラザル實數ト, 其逆數トノ和ノ絕對値ハ 2 ヨリモ小ナラザルコトヲ證明セヨ。 (陸士)

【注意】 零ナラザル實數ヲ a トシ, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 \nless 4$ ナルコトヲ證明セヨ。其理由ヲ考ヘヨ。

第十二篇

比及ビ比例

第一章

比

187. 數ノ比

二ツノ實數, a 及ビ b ノ大サヲ比較スルニ, 凡ソ三ツノ見方アリ。ソレハ次ノ如シ。

(1) a ハ b ヨリモ大ナリ, a ハ b ニ等シ, a ハ b ヨリモ小ナリ。

(2) a ハ b ヨリモ何程多シ, a ト b トハ差ナシ, a ハ b ヨリモ何程少シ。

(3) a ハ b ノ幾倍ナリ, a ハ b ニ等シ, a ハ b ノ幾分ノ幾ツナリ。

此ノ第三ノ場合ニ於ケル, a ト b トノ關係ヲ, **a ノ b ニ對スル比**ト云ヒ, 此場合ニハ, a ト b トハ一般ニ $a=mb$ ナル關係ニテ表スコトヲ得ベシ。m ハ

$$12=3\times4,\quad 6=\frac{2}{3}\times9,\quad \sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2$$

ニ於ケルガ如ク,整數,分數又ハ不盡數ヲ表シ,是レヲaノbニ對スル**比ノ値**トイフ。

aノbニ對スル比ヲ表ハスニ$a:b$*ト書キ,aヲ比ノ**前項**,bヲ比ノ**後項**ト云フ。

比$a:b$ノ値,即チmハ商$\frac{a}{b}$ニ等シク,時トシテハ比$a:b$ヲ表スニ$\frac{a}{b}$ト書クコトアリ。

比$a:b$ノ値ハ$\frac{a}{b}$, 又,比$ma:mb$ノ値ハ$\frac{ma}{mb}$ニシテ,$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}$ナレバ,比$a:b$ノ値ハ$ma:mb$ノ値ニ等シ。

或數mヲ以テ或數ヲ割ルノハ,逆數$\frac{1}{m}$ヲ掛ケルコトト同ジナレバ,比$a:b$ノ値ハ比$\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$ノ値ニ等シ。故ニ

1. 比ノ兩項ニ,零ニ等シカラザル同ジ數ヲ掛ケテモ,
2. 兩項ヲ,零ニ等シカラザル同ジ數ニテ割リテモ,

* $a:b$ハ「aノbニ於ケル比」,「aトbトノ比」,又ハ「aニ對スルbノ比」,或ハ略シテ「aニ對スルb」ト讀ム。

3. 比ノ値ハ變ラズ。

例。 比$5\frac{1}{2}:3\frac{2}{3}$ヲ簡單ナル整數ノ比ニ變ヘヨ。

$$5\frac{1}{2}:3\frac{2}{3}=\frac{11}{2}:\frac{11}{3}=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times6:\frac{1}{3}\times6=3:2.$$

練習問題 (1)

次ノ比ノ値ヲ簡單ニセヨ。(1)—(6).

1. $144:36.$　　4. $\left(a+\frac{1}{b}\right):\left(a-\frac{1}{b}\right).$
2. $\frac{1}{2}:\frac{3}{4}.$　　5. $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right):\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right).$
3. $3\frac{3}{4}:4\frac{2}{7}.$　　6. $4(a+b)^2x:6(a^2-b^2)y.$
7. $b:a=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ナルコトヲ證明セヨ
8. $m>n$ナラバ,$ma:nb>a:b$ナルコトヲ證明セヨ。但シ,m,n,a,bハ正數トス。
9. $m<n$ナラバ,$ma:nb<a:b$ナルコトヲ證明セヨ。但シ,m,n,a,bハ正數トス。

188. 量ノ比

或量Aガ,同ジ種類ノ量Bノ幾倍ナルカ,又ハ等

シキカ,又ハ幾分ノ幾ツナルカト云フ關係ヲ**量A**ト**量B**トノ**比**ト云フ。此比ヲ表スニ**A:B**ト書キ,Aヲ比ノ**前項**,Bヲ比ノ**後項**ト云フ。

前項ガ,後項ノ幾倍ナルカ,等シキカ,幾分ノ幾ツナルカヲ示ス數ヲ,**量ノ比ノ値**ト云フ。故ニ,量ノ比 A:B ノ値ハ,Bヲ單位トシテ,Aヲ測リテ得ベキ數値ナリ。例ヘバ,5尺4寸ハ2尺×2.7ナレバ,5尺4寸ニ對スル2尺ノ比ノ値ハ2.7ナルガ如シ。

189.　量ノ比ト數ノ比

同ジ種類ノ二ツノ量A,Bヲ同ジ種類ノ量 u ヲ單位トシテ測リ,其等ノ數値ヲ夫々 a, b トスレバ

$$A=au,\quad B=bu$$

ナリ。 $B=bu$ ヨリ

$$u=\frac{B}{b}.$$

$$\therefore\quad A=a\left(\frac{B}{b}\right)=\frac{a}{b}B.$$

故ニ,量ノ比 A:B ノ値ハ, $\frac{a}{b}$ 即チ數ノ比 $a:b$ ノ値ニ等シ。カヤウニシテ

二ツノ量AトBトノ比ノ値ハ,同ジ單位

u ヲ以テ,AトBトヲ測リタルトキノ數値, a ト b トノ比ノ値ニ等シ。

此性質ニヨリ,量ノ比ヲ數ノ比ニ變ヘルコトヲ得。故ニ,以下主トシテ數ノ比ニ付キ説明スベシ。

190.　複比

二ツノ比 $a:b$, 及ビ $c:d$ アリ。前項ノ積ヲ前項トシ,後項ノ積ヲ後項トシタル比 $ac:bd$ ヲ $a:b$ 及ビ $c:d$ ノ**複比**ト云フ。

例ヘバ,長サ a 尺,幅 c 尺ニシテ,面積A平方尺ナル矩形ト,長サ b 尺,幅 d 尺ニシテ,面積B平方尺ナル矩形アリ。二ツノ矩形ノ面積ノ比ヲ求メンニ

$$A:B=ac\text{平方尺}:bd\text{平方尺}=ac:bd.$$

故ニ,二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,長サノ比 $a:b$ ト幅ノ比 $c:d$ トノ複比ニ等シ。

相等シキ二ツノ比ノ複比ヲ,其各比ノ**二乘比**ト云ヒ,相等シキ三ツノ比ノ複比ヲ,其各比ノ**三乘比**ト云フ。 $a^2:b^2$ ハ $a:b$ ノ二乘比, $a^3:b^3$ ハ $a:b$ ノ三乘比ナリ。

例ヘバ,二ツノ正方形ノ面積ノ比ハ,邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

【注意】複比 $ac:bd$ ヲ表スニ,次ノ如ク書クコトアリ。

$$\begin{cases} a:b, \\ c:d. \end{cases}$$

191. 反比

比 $a:b$ ノ兩項ヲ,交換シタル比 $b:a$ ヲ,原ノ比ノ**反比(逆比)**ト云フ。

$b:a$ ノ兩項ヲ ab ヲ以テ割レバ $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ トナルニヨリ

$a:b$ ノ反比ハ兩項ノ逆數ノ比 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ ニ等シ。

例ヘバ,甲乙二種ノ砂糖アリ。甲ハ一斤 a 錢,乙ハ一斤 b 錢ナルトキ, x 錢ヲ以テ,各砂糖ヲ買ヒ得ル斤數ノ比ヲ求メンニ

$\frac{x}{a}$=甲ノ斤數,

$\frac{x}{b}$=乙ノ斤數.

$$\therefore \quad \frac{x}{a}:\frac{x}{b}=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a.$$

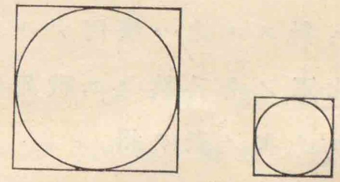
故ニ,各斤數ノ比ハ,單價ノ比 $a:b$ ノ反比ニ等シ。

練習問題(2)

1. a 里ノ b 間ニ對スル比ヲ求メヨ。

2. 二ツノ圓アリ。半徑ガ夫々 r 尺, r' 尺ナルトキ,周ノ比,及ビ面積ノ比ヲ求メヨ。

3. 圖ニ示スガ如キ圓ノ面積ノ比ハ,ソレニ外接スル正方形ノ面積ノ比ニ等シキコトヲ示セ。



4. $\frac{2x+3y}{4x-y}=\frac{2}{3}$ ナルトキ,$x:y$ ノ値ヲ求メヨ。

5. $2x^2-5xy+2y^2=0$ ナルトキ,$x:y$ ノ値ヲ求メヨ。

6. 方程式 $x^2+px+144=0$ ノ二ツノ根ノ比ガ,$9:4$ ナルヤウニ p ノ値ヲ定メヨ。

7. $(p-x):(q-x)$ ガ, $p:q$ ノ二乘比ニ等シクナルヤウニ x ノ値ヲ定メヨ。

8. 一ツノ矩形アリ。其面積ハ,是レニ外接スル圓ノ面積ノ $\frac{1}{2}$ ナリ。今,π ヲ $\frac{22}{7}$ トシテ計算スルトキ,矩形ノ二邊ノ比ハ $(5+\sqrt{3}):(5-\sqrt{3})$ ナルコトヲ證明セヨ。

192. 應用問題

例。 南北兩軍ノ戰鬪ニ於テ,南軍ノ北軍ニ對スル兵數ノ比ハ a,戰死者ノ數ノ比ハ b,生存者ノ數ノ比ハ c ナリシト云フ。各軍,戰死者數ノ其全兵數ニ對スル比ハ幾何ナルカ。

北軍ノ全兵數ヲ x,戰死者數ヲ y トスレバ,題意ニヨリ次ノ表ヲ得。

	全兵數	戰死者數	生存者數
南	ax	by	$ax-by$
北	x	y	$x-y$

然ルニ,生存者ノ數ノ比ハ c ナルニヨリ

$$\frac{ax-by}{x-y}=c,$$

$$(b-c)y=(a-c)x,$$

$$\therefore\ \frac{y}{x}=\frac{a-c}{b-c},\ 及ビ\ \frac{by}{ax}=\frac{b(a-c)}{a(b-c)}.$$

練習問題 (3)

1. 甲乙二種ノ品アリ。甲10個ト乙4個トノ價ハ,甲8個ト乙7個トノ價ニ等シ。甲乙各一個ノ價ノ比ヲ求メヨ。

2. 石炭500噸ヲ馬12頭ヲ用ヒ,毎日8時間宛ニテ運ブニ要スル日數ト,石炭450噸ヲ馬10頭ヲ用ヒ,毎日9時間宛ニテ運ブニ要スル日數トノ比ヲ求メヨ。

3. 甲乙二群ノ鷄アリ。甲群ノ鷄ノ數ト,乙群ノ鷄ノ數トノ比ハ 7:9 ニシテ,甲群ノ雌雄ノ比ハ 3:4, 乙群ノ雌雄ノ比ハ 7:5 ナリト云フ。甲乙二群ヲ合併スルトキハ,其中ノ雌雄ノ比ハ如何ニナルカ。　(桐工)

4. 甲乙二校ニ於テ,各三百名宛ノ生徒ヲ募集セシニ,應募者ノ數ハ兩校合セテノ數ニテ云ヘバ,募集人員ノ八倍ヨリモ猶ホ百五十名多カリシガ,是レヲ前年度ニ比スレバ,兩校合セテノ數ニテハ,前年度ヨリモ其ノ10%* ヲ減ジタルモノニシテ,甲校ノミニ付テハ,前年度ヨリモ其ノ2% ヲ增シ,乙校ノミニ付テハ前年度ヨリモ其ノ20% ヲ減ジ

---

* p% ハ p「ぱーせんと」ト讀ム。$\frac{p}{100}$ ト云フニ同ジ。

タリト云フ。兩校ニ於ケル應募者ノ數ヲ求メヨ。

(高等)

5. 或國ニ於テ,茶ハ酒ヨリモ五倍ノ需用アリ。茶ノ使用ヲ$a\%$,酒ノ使用ヲ$b\%$増加スレバ,全體トシテ$7c\%$ノ増加トナリ,又茶ヲ$b\%$,酒ヲ$a\%$増加スレバ,全體トシテ$3c\%$ノ増加トナルト云フ。a,bノ比ヲ求メヨ。

第二章

比　　例

193. 比例

四ツノ數a,b,c,dアリ。比$a:b$ガ比$c:d$ニ等シキトキ,是等四ツノ數ハ**比例ヲナス**ト云フ。

a,b,c,dガ比例ヲナスコトヲ示スニ

$$a:b=c:d, \text{ 或ハ } a:b::c:d$$

ノ如キ式ヲ用フ。カヤウナ式ヲ**比例式**,又ハ單ニ**比例**ト云フ。

比例ヲナス四ツノ數ヲ,初ヨリ順次ニ**第一項**,**第二項**,**第三項**,**第四項**ト云ヒ,第一項ト第四項トヲ併セテ**外項**,第二項ト第三項トヲ併セテ**内項**ト云フ。

194. 比例ノ性質

$a:b=c:d$ナラバ$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$,此ノ等式ノ兩邊ニ$bd$ヲ掛ケテ

$$(1) \qquad ad=bc.$$

故ニ,比例式ノ外項ノ積ハ内項ノ積ニ等シ。

又, $ad=bc$ ナルトキ,兩邊ヲ bd ニテ割リ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \text{即チ}\quad a:b=c:d.$$

故ニ,二數ノ積ガ他ノ二數ノ積ニ等シキトキ,

1. 一方ノ二數ヲ外項トシ,
2. 他ノ二數ヲ內項トスル比例式ヲ得。

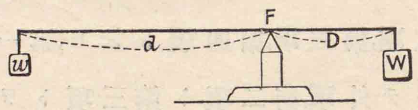
練習問題 (4)

次ノ式ニ適スル x ノ値ヲ求メヨ。(1)—(4).

1. $x:38=15:19.$　　3. $28:35=16:x.$

2. $48:75=x:32.$　　4. $2x+1:4x+7=5:15.$

5. 圖ニ示スガ如ク,二ツノ重サ W 及ビ w ガ一樣ナル棒ノ兩端ニアリテ釣合フトキ,支點 F ヨリ棒ノ端ニ至ル距離ヲ D, d トスレバ

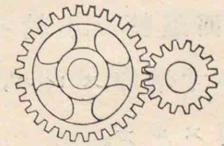


$$\frac{W}{w}=\frac{d}{D},\ \text{或ハ}\quad WD=wd$$

ナル關係アリ。W=4貫, w=2貫, D=6寸トシテ,釣合フニハ d ヲ幾寸ニスレバヨキカ。

6. 相嚙ミ合フテ廻ル二ツノ齒車アリ。大輪ノ齒ノ數ハ T ニシテ,毎分 N 回廻轉シ,小輪ノ齒ノ數ハ t ニシテ,毎分 n 回廻轉ス。T, N, t, n ノ間ニ

$$TN=tn,\ \text{或ハ}\ \frac{T}{t}=\frac{n}{N}$$

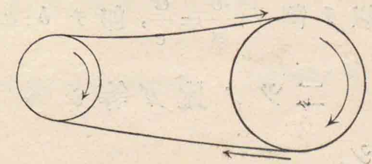


ナル關係ノアルコトヲ示セ。

7. 上ノ問題ニ於テ,大輪ハ齒ノ數90ニシテ,一秒ニ一廻轉シ,小輪ハ一秒ニ二廻轉スルトキ,小輪ノ齒ノ數ヲ求メヨ。

8. 齒ノ數T,毎秒ノ廻轉數Nナル齒車ト,齒ノ數 t ナル齒車ト相嚙ミ合フテ廻轉ス。後ノ齒車ノ齒ノ數ヲ r 個增加スレバ,其齒車ハ前ヨリモ毎秒 $\dfrac{TNr}{t(t+r)}$ 回遲ク廻轉スルコトヲ示セ。

9. 二ツノ車輪アリ。調帶(シラベカハ)ノ作用ニヨリ,相伴フテ廻轉ス。大輪ノ直徑ヲD,毎分ノ廻轉數ヲN,小輪ノ直徑ヲ d, 毎分ノ廻轉數ヲ n トスレバ



$$\mathrm{DN}=dn,\quad 或ハ\quad \frac{\mathrm{D}}{d}=\frac{n}{\mathrm{N}}$$

ナル關係ノアルコトヲ示セ。

10. 上ノ問題ニ於テ,大輪ノ直徑1尺ニシテ,每秒1回廻轉シ,小輪ハ直徑3寸ナリ。今,小輪ノ直徑ヲ2寸增加スレバ,小輪ハ前ヨリモ,每秒幾回遲ク廻轉スルカ。

195. 比例式ノ變形

比例式 $a:b=c:d$ ヲ基トシテ,此ノ同ジ a, b, c, d ノ關係ヲ,次ノ如ク變形シテ書キ表スコトヲ得。

(1) $\boldsymbol{ad=bc.}$

是レハ,既ニ前節ニ證明シタリ。

(2) $\boldsymbol{b:a=d:c.}$ (反轉ノ理)

(1)ニヨリ,$a:b=c:d$ ナラバ $bc=ad.$ 兩邊ヲ ac ヲ以テ割リ,$\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$, 卽チ $b:a=d:c.$ 故ニ

二ツノ比ガ等シキトキハ,反比モ亦相等シ。

(3) $\boldsymbol{a:c=b:d.}$ (更迭ノ理)

(1)ニヨリ $ad=bc$, 兩邊ヲ cd ニテ割リ $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$, 卽チ $a:c=b:d.$ 故ニ

比例式ノ內項ヲ交換シテ差支ナシ。

(4) $\boldsymbol{d:b=c:a.}$ (更迭ノ理)

(1)ニヨリ $ad=bc$, 兩邊ヲ ab ヲ以テ割リ $\dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}$, 卽チ $d:b=c:a.$ 故ニ

比例式ノ外項ヲ交換シテ差支ナシ。

(5) $\boldsymbol{a+b:b=c+d:d.}$ (合比ノ理)

何トナレバ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ノ各邊ニ1ヲ加ヘ,$\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1.$

故ニ $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$, 卽チ $a+b:b=c+d:d.$

(6) $\boldsymbol{a-b:b=c-d:d.}$ (除比ノ理)

是レハ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ノ各邊ヨリ1ヲ引キ,$\dfrac{a}{b}-1=\dfrac{c}{d}-1.$

故ニ $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$, 卽チ $a-b:b=c-d:d.$

(7) $\boldsymbol{a+b:a-b=c+d:c-d.}$ (合除比ノ理)

是レハ(5)ト(6)トヨリ

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

相應ズル邊ノ割リ算ヲ行ヒ

$$\frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d}.$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},\ \text{即チ}\ a+b:a-b=c+d:c-d.$$

例. $p+q+r+s,\ p-q+r-s,\ p+q-r-s,\ p-q-r+s$ ガ比例ヲナストキハ,p, q, r, s モ亦比例ヲナスコトヲ證明セヨ。

題意ニヨリ

$$(p+q+r+s):(p-q+r-s)=(p+q-r-s):(p-q-r+s)$$

(7)ノ合除比ノ理ニヨリ

$$(p+q+r+s)+(p-q+r-s):(p+q+r+s)-(p-q+r-s)$$
$$=(p+q-r-s)+(p-q-r+s):(p+q-r-s)-(p-q-r+s)$$

$$\therefore\ p+r:q+s=p-r:q-s.$$

(3)ノ更迭ノ理ニヨリ

$$p+r:p-r=q+s:q-s.$$

再ビ,(7)ノ合除比ノ理ニヨリ

$$(p+r)+(p-r):(p+r)-(p-r)=(q+s)+(q-s):(q+s)-(q-s).$$

$$\therefore\ p:r=q:s.\qquad \therefore\ p:q=r:s.$$

196. 三ツ以上ノ等比

二組ノ數 $a, b, c, \cdots\cdots$,及ビ $a', b', c', \cdots\cdots$ アリテ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナルトキ,二組ノ數 $a, b, c, \cdots\cdots$,ト $a', b', c', \cdots$ トハ**比例スル**ト云ヒ,是レヲ次ノ如ク記ス。

$$a:b:c:\cdots\cdots=a':b':c':\cdots\cdots.$$

二ツノ數ガ比例スルトキ,次ノ定理アリ。

(1) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots$ **ナラバ,此ノ各ノ比ハ**

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}$$

ニ等シ。

是レヲ證明スルタメ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=k$$

ト置ケバ

$$a=a'k,\ b=b'k,\ c=c'k,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

是等ノ等式ノ相應ズル邊ノ和ヲ作リ

$$a+b+c+\cdots\cdots=(a'+b'+c'+\cdots\cdots)k.$$

$$\therefore\ k=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}.$$

$$\therefore\ \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}.$$

【注意】 上ノ證明ニテ,$a'+b'+c'+\cdots\cdots$ ハ零ニ等シカラ

ザルコトヲ假定セリ。若シモ, $a'+b'+c'+\cdots\cdots\cdots\cdots=0$ ナラバ $a+b+c+\cdots\cdots=0$ ナルベシ。

(2) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots$ **ニシテ, $p, q, r, \cdots\cdots\cdots\cdots$ ガ任意ノ實數ナルトキ,此ノ各ノ比ハ**

$$\frac{pa+qb+rc+\cdots\cdots}{pa'+qb'+rc'+\cdots\cdots}$$

ニ等シ。

證明ノ仕方ハ,(1)ノトキト同樣ナレバ,各自ニ試ミヨ。

例一。 $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ ナラバ

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

與ヘラレタル相等シキ比ヲ k ト置ケバ

$$x=k(b+c-a),\quad y=k(c+a-b),\quad z=k(a+b-c).$$

$$\therefore\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$$

$$=k\{(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)+(a-b)(a+b-c)\}$$

$$=k\{b^2-c^2-a(b-c)+c^2-a^2-b(c-a)+a^2-b^2-c(a-b)\}$$

$$=0.$$

例二。 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ ナラバ

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

與ヘラレタル比ヲ k ト置ケバ $x=ak, y=bk$.

$$\therefore\ \frac{x^2+a^2}{x+a}=\frac{a(k^2+1)}{k+1},\qquad \frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{b(k^2+1)}{k+1}.$$

$$\therefore\ \frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{a(k^2+1)+b(k^2+1)}{k+1}$$

$$=\frac{(a+b)(k^2+1)}{k+1}=\frac{(a+b)^2(k^2+1)}{(a+b)(k+1)}$$

$$=\frac{(a+b)^2k^2+(a+b)^2}{(a+b)k+a+b}$$

$$=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}.$$

練習問題 (5)

$a:b=c:d$ ナルトキ, (1)-(3) ノ正シキコトヲ示セ。

1. $a^2+c^2:b^2+d^2=ac:bd.$

2. $a+c:b+d=a^2d:b^2c.$

3. $4a+5c:3a+5c=4b+5d:3b+5d.$

4. $(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d$

$$=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d)$$

ナルトキハ, $a:b=c:d$ ナルコトヲ證セヨ, (高等)

5. 正數 a, b, c ト a', b', c' トガ比例スルトキハ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{\sqrt[n]{pa^n+qb^n+rc^n}}{\sqrt[n]{pa'^n+qb'^n+rc'^n}}$$

ナルコトヲ證セヨ。但シ, p, q, r ハ任意ノ實數ニシテ, n ハ正ノ整數ナリトス。

6. $x:a=y:b=z:c$ ナラバ,次ノ等式ヲ證セヨ。

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

7. $x:y:z=a:b:c$ ナラバ

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{y-b}{y+b}-\frac{2(z^2-c^2)}{z^2+c^2}=\frac{8(x+y+z)^2(a+b+c)^2}{(x+y+z)^4-(a+b+c)^4}$$

ナルコトヲ證明セヨ。 (高等)

8. $(2x+3y):(3y+4z):(4z+5x)$

$$=(4a-5b):(3b-a):(2b-3a)$$

ナルトキ, $7x+6y+8z=0$ ナルコトヲ證セヨ。(東農)

9. $\dfrac{x+y}{cx+ay}=\dfrac{y+z}{ay+bz}=\dfrac{z+x}{bz+cx}$ ナルトキハ,其各式ハ $\dfrac{3}{a+b+c}$ ニ等シキコトヲ示セ。 (醫專)

10. $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$ ナルトキ, $x+y+z=0$ ナルコトヲ示シ,次ニ各分數ハ $\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。 (高等)

197. 連比例

a, b, c, d ……アリテ,第一數ト第二數トノ比,第二數ト第三數ノ比ノ如ク,次々ニ其等ノ比ガ等シキトキ,卽チ

$$a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots$$

ナルトキ, $a, b, c, d,$ …… **ハ連比例ヲナス**ト云フ。

三ツノ數 a, b, c ガ連比例ヲナストキ, b ヲ a, c ノ**比例中項**, c ヲ a, b ノ**第三比例項**ト云フ。

b ガ a, c ノ比例中項ナルトキ,卽チ $a:b=b:c$ ナルトキハ $b^2=ac$, 從テ $b=\pm\sqrt{ac}$ ナリ。

練習問題 (6)

a, b, c ガ連比例ヲナストキ,次ノ等式ノ正シキコトヲ證明セヨ。(1)—(4).

1. $a^2+b^2:b^2+c^2=a:c.$

2. $a^2+b^2:b(a+c)=b(a+c):b^2+c^2.$ (橫商)

3. $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2.$ (大工)

4. $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2=2(a+b+c)(a+c).$

5. $5+7\sqrt{2}$ ト $\dfrac{29+47\sqrt{2}}{73}$ トノ比例中項ヲ求メヨ。 (東師)

a, b, c, d ガ連比例ヲナストキ,次ノ等式ノ正シキコトヲ示セ。(6)—(8).

6. $(b+c)(b+d)=(a+c)(c+d)$. (東師)

7. $(ma+nb):(pa+qb)=(mc+nd):(pc+qd)$.

8. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

198. 比例配分

或數,又ハ或量ヲ二ツ以上ノ數ニ比例スル樣ニ分ツコトヲ**比例配分**,又ハ**按分比例**ト云フ。

例。 金 m 圓ヲ甲,乙,丙ニ分配シ,所得ガ a, b, c ニ比例スルヤウニセントス。各所得ヲ求メヨ。

甲乙丙ノ各所得ヲ夫々 x 圓, y 圓, z 圓トスレバ

$$\begin{cases} x+y+z=m, \\ x:y:z=a:b:c. \end{cases}$$

ナル聯立方程式ヲ得。故ニ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{m}{a+b+c}.$$

$$\therefore\ x=\frac{am}{a+b+c},\quad y=\frac{bm}{a+b+c},\quad z=\frac{cm}{a+b+c}.$$

故ニ,甲ノ所得ハ $\dfrac{am}{a+b+c}$ 圓,乙ノ所得ハ $\dfrac{bm}{a+b+c}$ 圓,丙ノ所得ハ $\dfrac{cm}{a+b+c}$ 圓ナリ。

練習問題 (7)

1. 金1400圓ヲ 5:7:8 ノ割合ニ三分セヨ。

2. 二輪車アリ。前輪ノ直徑3尺,後輪ノ直徑2尺ナリ。今,或距離ヲ進ミシニ,兩輪ノ廻轉數ノ和ハ2450ナリシト云フ。進行セシ距離ヲ求ム。

3. 甲乙,二ツノ水車アリ。甲ハ三時間ニ米3石6斗ヲ舂キ,乙ハ四時間ニ5石6斗ヲ舂クベシ。今,米1560石ヲ此二ツノ水車ニテ,最短ナル時間ニ舂キ上ゲルニハ,如何ニ分配スレバヨキカ。

4. 金525圓ヲ甲乙丙三人ニ分チ,所得ノ比ヲ甲ト乙トハ5:4,乙ト丙トハ3:2ノ如クセヨ。

5. 甲ガ一萬圓ニテ商業ヲ始メタルニ,二ケ月ヲ經テ,乙ハ五千圓ヲ出資シテ是レニ加ハリ,其後三ケ月ニシテ,丙ハ甲ノ持分ノ內,五千圓ヲ讓リ受ケテ是レニ加入シ,開業一ケ年ノ後,利益金3400圓ヲ出資金額ト出資期間トニ應ジテ分配セリト云フ。各人ノ所得金額ヲ求メヨ。

6. 甲ハ乙ヨリ金150圓多ク出資シ,兩人ニテ或事業ヲ營メリ。事業開始後,3個月ニシテ丙ノ加入ヲ許シ,其出資金500圓ヲ收入シ,1個年間ニ金1590圓ノ利益ヲ得タリ。此利益金ヲ出資金額及ビ出資期間ニ比例シテ分配シ,ソレヲ各組合員ノ出資金ニ組入レタルニ,乙ノ出資金ハ880圓ニナレリ。乙ノ最初ノ出資金額ヲ求メヨ。　(神商)

199. 混合法

二ツ以上ノ値段ノ異ナルモノヲ混合スルトキ平均ノ價格ト,混合ノ割合トニ關スル計算ヲ混合法ト云フ。混合法ハ二ツニ區別スルコトヲ得。

(1) 混合スル原料ノ値段ト,混合ノ割合トヲ知リテ,平均ノ價格ヲ求ムル場合。

例。 上下二種ノ茶アリ。上ハ1斤1圓,下ハ1斤70錢ナリ。今,上茶5斤,下茶3斤ヲ買フトキハ平均1斤ノ價ハ幾錢ナルカ。

平均ノ値段ヲx錢トスレバ,次ノ方程式ヲ得。

$$100\times5+70\times3=x(5+3).$$

$$\therefore\quad x=\frac{500+210}{8}=88.75.$$

故ニ,求ムル値段ハ88.75錢ナリ。

(2) 混合スル原料ノ値段ト,混合後ノ平均ノ價格トヲ知リテ,混合ノ割合ヲ求ムル場合。

例一。 1斤50錢ト,1斤65錢ノ珈琲アリ。是レヲ混ジテ,1斤60錢ノモノヲ作ラントス。混合ノ割合ヲ求メヨ。

50錢ノ品ヲx斤,65錢ノ品ヲy斤混ジテ平均1斤60錢トナルトスレバ,次ノ方程式ヲ得。

$$50x+65y=60(x+y).$$

$$\therefore\quad (60-50)x=(65-60)y.$$

題意ニヨリ,yハ零ナルコトナケレバ,方程式ノ兩邊ヲy及ビ$60-50$ニテ割リ

$$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{65-60}{60-50}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

故ニ,50錢ノモノト,65錢ノモノトヲ$1:2$ノ割合ニ混合スレバヨシ。

【注意】 方程式$50x+65y=60(x+y)$ハx,yヲ未知數トスレバ不定方程式ニシテ,定メ得ラルルモノハ比$x:y$ノミ。從テ上ヲ一斤,下ヲ二斤トリテモ,上ヲ三斤,下ヲ六斤トリヲモ差支ナシ。故ニ,此場合ニx,yノ値ヲ確定セントスルニハ,尚ホ一ツノ條件ヲ附加スル必要アリ。例ヘバ,平

均價格60錢ノ品15斤ヲ作ルコトトセンカ, 然ラバ $x=5$, $y=10$ トナルベシ。

例二. 一反ノ値180錢, 200錢, 230錢ノ反物各幾反カヲトリ, 平均一反210錢ニ賣ラントス。如何ナル割合ニトレバヨキカ。

180錢ノ品ヲ x 反, 200錢ノモノヲ y 反, 230錢ノモノヲ z 反トリテ, 丁度平均一反210錢ニナルトスレバ, 次ノ方程式ヲ得。

$$180x+200y+230z=210(x+y+z).$$

$$\therefore\ 3x+y=2z.$$

此場合ニハ, x, y, z ノ値ハ勿論不定ニシテ, 又比 $x:y:z$ ノ値モ不定ナリ。今, $x:y:z$ ノ小ナル整數ノ答ヲ求メンニ, $x=1, y=1$ トスレバ $z=2$ トナレバ,

$$x:y:z=1:1:2$$

ハ一ツノ解答ナリ。又 $x=1, y=3$ トスレバ, $z=3$ トナリテ

$$x:y:z=1:3:3$$

モ一ツノ解答ナリ。追テ斯クノ如クシテ, 多クノ解答ヲ得ベシ。

練習問題 (8)

1. 鹽2%ヲ含ム溶液ト, 3%ヲ含ム溶液トヲ3:2ノ割合ニ混合スレバ, 鹽ヲ幾[ぱーせんと]含ム溶液トナルカ。

2. 旅人アリ。晴天ニハ毎日11里, 雨天ニハ毎日9里ヲ歩ミ, 10日間ニ104里ヲ距テタル地ニ達セリト云フ。晴雨ノ日, 各幾日ナリシカ。

3. 一升 p 圓ノ酒ト, 一升 q 圓ノ酒トヲ混合シテ, 一升 s 圓ノ酒 t 升ヲ造ラントス。各幾升宛混合スレバヨキカ。 (北農)

4. 甲乙二ツノ桶アリ。甲ハ酒精3, 水1ノ混合液ヲ有シ, 乙ハ酒精1, 水3ノ混合液ヲ有セリ。今, 此兩液ヲ混ジテ酒精3, 水2ノ混合液一石ヲ造ラントス。二ツノ桶ヨリ汲ミ取ルベキ液量, 各幾何トスレバヨキカ。

5. 銅ト亞鉛ノ合金, 甲乙二塊アリ。甲ニ於テハ, 銅ノ亞鉛ニ對スル比ハ3:2ニシテ, 乙ニ於テハ, 其比ハ7:3ナリト云フ。然ラバ, 甲乙二塊ヲ如何ナル割合トシテ熔解スレバ, 其中ニ含マルル銅ノ亞鉛ニ對スル比ガ11:5トナルカ。 (山商)

6. 2.6%ノ鹽ヲ含ム海水800瓦ノ中ヨリ, 幾瓦ノ水ヲ蒸發セシムレバ, 4%ノ鹽ヲ含ムモノトナルカ。

7. 酒精ト水トノ混合液ヲ入レタル甲乙,二ツノ樽アリ。酒精ト水トノ割合ハ,甲ニ於テハ4:3,乙ニ於テハ2:3ナリ。而シテ,甲ノ中ニアル酒精ノ量ハ2斗1升ニシテ,若シ兩樽ノ液ヲ全部混ズルトキハ,酒精ト水ト等分ノ混合液ヲ得ベシト云フ。乙樽ニアル酒精ノ量ハ幾何ナルカ。　(東師)

第三章

比例スル量

200. 正比例スル量

相伴フテ一樣ニ變ズル二ツノ量X,Yアリ。或値ヲ標準トシテ,Xノ數値ガ2倍,3倍,……スルニ從ヒ,Yノ數値ガ又2倍,3倍,……スルトキ,二ツノ量ハ**互ニ比例ス**,又ハ**互ニ正比例スル**ト云ヒ,或ハ**YハXノ如ク變ハル**ト云ヒ,$Y \propto X$*トアリ。

例ヘバ,毎時30哩ノ速サニテ走ル汽車アリ。1時間ニハ30哩進ミ,2時間ニハ60哩,3時間ニハ90哩,4時間ニハ120哩進ム。故ニ,時間ガ2倍,3倍,……スレバ,距離モ亦2倍,3倍,……スルニヨリ,時間ト距離トハ互ニ正比例スル量ニシテ,距離ハ時間ノ如ク變ル。

此場合ニ,距離ト時間ノ數値ノ比ハ

$$\frac{30}{1}=\frac{60}{2}=\frac{90}{3}=\frac{120}{4}=\cdots\cdots=30$$

*$Y \propto X$ハ「YハXノ如ク變ハル」ト讀ム。

ノ如ク,其値一定ナリ。

二ツノ量X及ビYアリ。XトYトガ互ニ正比例スルトキ,Xノ任意ノ數値x', x'', x'''ニ對應スルYノ數値ヲy', y'', y'''トスレバ

$$y':x'=y'':x''=y''':x'''$$

ナリ。卽チ,Yノトル數値ト,Xノ數値トノ比ハ一定ナリ。此一定ノ値ヲkトシ,Xノトル數値ヲ一般ニxトシ,xニ應ズルYノ數値ヲyトスレバ

$$\frac{y}{x}=k,\quad 卽チ\quad y=kx$$

ナル關係アリ。カヤウナx, yハX, Yノ相對應スル任意ノ數値ニシテ,種々ナル値ヲ表ハスコトヲ得。カカル數ヲ**變數**ト云ヒ,kノ如キ一定ノ數ヲ**常數**ト云フ。

二ツノ變數アリ。其一ツガ變ハルトキ他ノ一ツガ變ハリ,又ソレガ一定値ヲトルトキ,夫ニ對應シテ他ガ一定ノ値ヲトルトキ,後ノ變數ヲ初ノ變數ノ**函數**ト云フ。$y=kx$ニ於テ,yハxノ函數ナリ。

例。30分間ニ18町ノ速サニテ歩ム人アリ。45分間ニハ幾町ヲ行クベキカ。

一様ナル速サニテ歩ムトキ,距離ト時間トハ互

ニ正比例スル量ナルヲ以テ,一般ニx分ニy町ヲ歩ムモノトシテ

$$y=kx \tag{1}$$

ナル關係アリ。茲ニ,kノ値ヲ定メンニ,$x=30$ノトキ$y=18$ナレバ

$$18=k\cdot 30,\qquad \therefore\quad k=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}.$$

故ニ,xトyトノ關係ハ

$$y=\frac{3}{5}x \tag{2}$$

ナリ。今,(2)ノxヲ45トシテ,yヲ求メレバ

$$y=\frac{3}{5}\times 45=27.$$

故ニ,求ムル距離ハ27町ナリ。

或ハ又,$x=30$ノトキ,$y=18$ナルヲ以テ(1)ヨリ

$$18=k\cdot 30. \tag{3}$$

又,$x=45$ナルトキハ

$$y=k\cdot 45. \tag{4}$$

$$\therefore\quad y:18=k\cdot 45:k\cdot 30=45:30. \tag{5}$$

(5)ヨリ,yヲ求メレバ27トナリ,答27町ヲ得。

【注意】 問題ニヨリ,直ニ(5)式卽チ$y:18=45:30$ヲ作レバ,算術ニテ學ビタル解法トナル。

練習問題 (9)

1. 18哩ヲ走ルニ54分ヲ要スル汽車アリ,1時30分間ニハ何程ヲ走ルカ。

2. 工夫若干人ニテ,25日間ニ工賃400圓ヲ得タリ。其等ノ工夫ハ18日間ニハ何程ノ工賃ヲ得ルカ。

3. 靜止ノ狀態ヨリ石ヲ落スニ,落下スル距離ハ時間ノ平方ニ正比例ス。3秒間ニ,145呎落下シタルコトヲ知リテ,5秒間ニ經過スベキ距離ヲ求メヨ。

4. 二ツノ變數x,yアリ。$y\propto x$ニシテ,$x=a$ノトキ$y=b$ナリ。$x+y:x-y$ノ値ヲ求メヨ。

5. 甲乙丙三ツノ量アリ。甲ト乙トハ互ニ正比例シ,乙ト丙トハ互ニ正比例スルトキ,甲ト丙トハ,又互ニ正比例スルコトヲ示セ。

6. 球體ノ重サハ體積ニ正比例シ,體積ハ直徑ノ立方ニ正比例ス。今,或金屬ヨリ成ル直徑4寸,重サ2貫目ノ球アリ。直徑4尺ノ同ジ金屬ノ球ノ重サヲ求メヨ。

201. 反比例スル量

相伴フテ一樣ニ變ズル二ツノ量X,Yアリ。或値ヲ標準トシテ,Xノ數値ガ2倍,3倍,……スルニ從ヒ,Yノ數値ガ$\frac{1}{2},\frac{1}{3},$……スルトキ,二ツノ量ハ**互ニ反比例スル**ト云ヒ,或ハ**YハXノ反比ノ如ク變ハル**ト云フ。

例ヘバ,甲驛ヲ出デテ120哩ヲ隔タレル乙驛ニ至ラントスル汽車アリ。1時間,10哩ノ速サヲ以テ進メバ12時間ヲ要シ,1時間20哩ノ速サナラバ6時間ニテ達スベク,1時間30哩ノ速サナラバ4時間ニテ達スベシ。速サガ每時間2倍,3倍,……スルニ從ヒ,時間ハ$\frac{1}{2},\frac{1}{3},$……スルニヨリ,速サト時間トハ互ニ反比例スル量ニシテ,時間ハ速サノ反比ノ如ク變ル。

此場合,時間數ト,每時間ニ於ケル速サヲ表ス哩數ノ逆數トノ比ハ其値一定ナリ

$$12:\frac{1}{10}=6:\frac{1}{20}=4:\frac{1}{30}=\cdots\cdots=120.$$

二ツノ量X及ビYアリ。XトYトガ互ニ反比例スルトキ,Xノ任意ノ數値x', x'', x'''ニ對應スルYノ數値ヲy', y'', y'''トスレバ

$$y' : \frac{1}{x'} = y'' : \frac{1}{x''} = y''' : \frac{1}{x'''}$$

ナリ。即チ,Yノトル數値ト,Xノトル數値ノ逆數トノ比ハ一定ナリ。此比ヲkトシ,Xノ數値ヲ一般ニxトシ,ソレニ應ズルYノ數値ヲyトスレバ

$$y : \frac{1}{x} = k, \quad 或ハ \quad xy = k.$$

【注意】數値ノ上ヨリ云ヘバ,Yノ値ハXノ値ノ逆數ニ正比例シ,Yハ$\frac{1}{X}$ノ如ク變レバ,$Y \propto \frac{1}{X}$ト書クコトヲ得。

例。長サ12間,幅15間ノ矩形アリ。長サ18間ニシテ,ソレト面積等シキ矩形ノ幅ノ間數ヲ求メヨ。

面積一定ナルトキ,矩形ノ長サト幅トハ互ニ反比例スル量ナルヲ以テ,長サヲx間,幅ヲy間トスレバ

$$xy = k. \qquad (1)$$

ナル關係アリ。$x=12$, $y=15$トスレバ

$$12 \times 15 = k.$$

故ニ,(1)ハ

$$xy = 12 \times 15 \qquad (2)$$

トナル。(2)ノxヲ18トシテ

$$18y = 12 \times 15, \qquad \therefore \quad y = 10.$$

故ニ,求ムル幅ハ10間ナリ。

或ハ,(1)ヲ變形シ,$y = k \cdot \frac{1}{x}$トシテ,$x=12$, $y=15$トスレバ

$$15 = k \cdot \frac{1}{12}. \qquad (3)$$

又,$x=18$トシテ

$$y = k \cdot \frac{1}{18}. \qquad (4)$$

(3)ト(4)トヨリ

$$y : 15 = k\frac{1}{18} : k\frac{1}{12} = 12 : 18. \qquad (5)$$

(5)ヨリyヲ求メテ,答ハ10間トナル。

【注意】問題ヨリシテ直ニ(5)ノ式,$y : 15 = 12 : 18$ヲ作レバ,算術ニテ學ビタル解法トナル。

練習問題 (10)

1. 職工7人ニテ24日ヲ要スル仕事ヲ,8人ニテ從事スルトキハ,幾日ニテ成就スベキカ。

2. 三ツノ量,甲乙丙アリ。甲ト乙トハ互ニ反比例シ,乙ト丙トハ互ニ反比例スルトキ,甲ト丙トハ正比例スルコトヲ證明セヨ。

3. 高サa寸,幅b寸,深サc寸ノ立方形ノ箱ト,容積等シクシテ高サa寸,幅p寸ノ箱ヲ作ラントス。深サハ幾寸ニスレバヨキカ。

4. 子供ト大人ト同ジ時間内ニ成ス仕事ノ割合ハ3:5ナリ。大人ガ6時間ニテ仕上ゲル仕事ヲ,子供ト大人ト協力シテソレニ從事スレバ,幾時間ニテ仕上ゲ得ルカ。

5. 35人ノ職工ニテ,47日ニ成就スル仕事アリ。初メ17日間ハ35人皆從事セシガ,18日目ヨリハ10人ヲ減ゼリ。全部成就スルニハ,合計幾日ヲ要スルコトトナルカ。

202. 複比例

相伴フテ一樣ニ變ズベキ三ツノ量X, Y, Zアリ。Yガ一定ナルトキ,ZトXトハ互ニ正比例シ,Xガ一定ナルトキ,ZトYハ互ニ正比例スル場合,ZハXトYトニ**複比例スル**ト云フ。

X, Yノ數値ガx', y'ナルトキ,Zノ數値ヲz',

X, Yノ數値ガx', y''ナルトキ,Zノ數値ヲz''',

X, Yノ數値ガx'', y''ナルトキ,Zノ數値ヲz''

トスレバ,假定ニヨリ

$$\frac{z'}{z'''}=\frac{y'}{y''},\qquad \frac{z'''}{z''}=\frac{x'}{x''},$$

$$\therefore\quad \frac{z'}{z'''}\times\frac{z'''}{z''}=\frac{y'}{y''}\times\frac{x'}{x''},$$

$$\therefore\quad \frac{z'}{x'y'}=\frac{z''}{x''y''}.$$

故ニ,Zノトル數値ト,ソレニ對應スルX, Yノ數値ノ積トノ比ハ一定ナリ。此比ヲkトシ, X, Y, Zノ相對應スル數値ヲ,一般ニx, y, zトスレバ

$$\frac{z}{xy}=k,\qquad \therefore\quad z=kxy.$$

同樣ニ,三ツノ量X, Y, Zアリ。Yガ一定ナルトキ,ZハXニ正比例シ, Xガ一定ナルトキZハYニ反比例スル場合, X, Y, Zノ相對應スル數値ヲx, y, zトスレバ

$$z=k\frac{x}{y}$$

ナル關係アリ。

例一。 2人ニテ5日間働キ,賃金25圓ヲ得ルトスレバ,7人ガ8日間働ケバ,賃金何程ヲ得ベキカ。

日數ガ一定ナルトキ,賃金ハ人數ニ正比例シ,人數ガ一定ナルトキ,賃金ハ日數ニ正比例スルヲ以テ,x人,y日ノ賃金ヲz圓トスレバ

$$z=kxy. \tag{1}$$

$x=2,\ y=5$ ノトキ, $z=25$ ナルヲ以テ

$$25=k\times 2\times 5. \tag{2}$$

$$\therefore\quad k=2.5.$$

$$\therefore\quad z=2.5xy. \tag{3}$$

(3)ニ於テ,$x=7,y=8$トスレバ

$$z=2.5\times 7\times 8=140.$$

故ニ,求ムル答ハ140圓ナリ。

例二。 2人ニテ5日間働キ,賃金25圓ヲ得ルトスレバ,3人ニテハ幾日間働キテ45圓ヲ得ベキカ。

人數ガ一定ナルトキ,日數ト賃金トハ互ニ正比例シ,賃金ガ一定ナルトキ,日數ト人數トハ互ニ反比例スルヲ以テ,x人ニテz日間働キ,y圓ヲ得ルトスレバ

$$z=k\frac{y}{x}. \tag{1}$$

(1)ニ於テ,$x=2,\ y=25$ ノトキ $z=5$ ナレバ

$$5=k\frac{25}{2}. \tag{2}$$

又,$x=3,\ y=45$ ノトキハ(1)ハ

$$z=k\frac{45}{3}. \tag{3}$$

(2)ト(3)トヨリ

$$z:5=k\frac{45}{3}:k\frac{25}{2}$$

$$=2\times 45:3\times 25\left(=\begin{cases}2:3\\45:25\end{cases}\right). \tag{4}$$

$$\therefore\quad z=\frac{5\times 2\times 45}{3\times 25}=6.$$

故ニ,求ムル答ハ6日ナリ。

【注意】 題意ニヨリ,直ニ(4)ノ括弧内ノ複比ヲ作レバ,算術ノ解法トナル。

練習問題(11)

1. 60人ノ職工ニテ毎日10時間働キ,30日間ニ落成スベキ工事アリ。今,ソレヲ12日間ニ落成センガ爲メニハ,毎日12時間就業スルトシテ,尚ホ幾人ノ職工ヲ増加スル必要アルカ。　(商船)

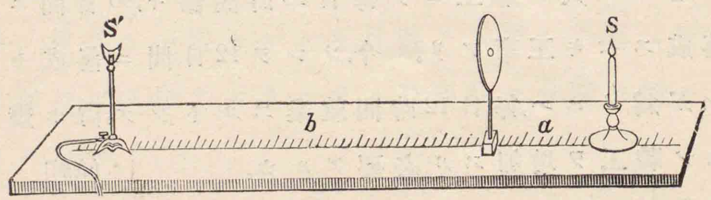
2. 直圓錐ノ體積ハ,高サ一定ナルトキ,底面ノ

半徑ノ平方ノ如ク變ハリ,底面ガ一定ナルトキハ高サノ如ク變ハル。底面ノ半徑7尺,高サ15尺ナル直圓錐ノ體積ガ770立方尺ナラバ,底面ノ半徑3尺,體積132立方尺ナル直圓錐ノ高サハ幾尺ナルカ。

3. 或ル平面ニ垂直ニ風ガ當ルトキ,平面ガ受ケル壓力ハ風ノ速度ノ平方ト,面ノ廣サトニ正比例ス。風ノ速度一秒ニ1「メートル」ナルトキ,一平方「メートル」ノ平面ガ受ケル壓力ハ80「グラム」ニ等シト云フ。然ラバ,一時間ニ72「キロメートル」ノ速度ノ風ガ24平方「メートル」ノ平面ニ垂直ニ當ルトキ,其面ノ受ケル壓力ハ幾「キログラム」ナルカ。

(東工)

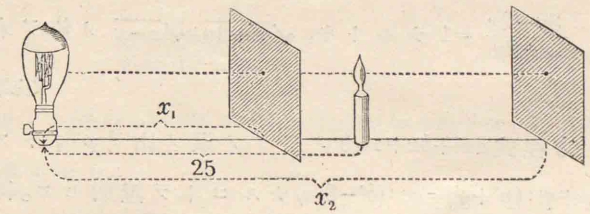
4. 光源s, s'ガ衝立(ツイタテ)ヲ照ラス度ハ,光源ノ光度ニ正比例シ,s, s'ヨリ夫々衝立ニ至ル距離a, bノ二乘ニ反比例ス。圖ニ於テ,蠟燭ノ光度ハ2燭光,衝立



ヨリ蠟燭マデノ距離5寸,瓦斯燈マデノ距離1尺

5寸ニシテ,衝立面ノ兩光源ノ照度相等シト云フ。瓦斯燈ノ光度ハ幾燭光ナルカ。

5. 32燭光ノ電氣燈ト,6燭光ノ蠟燭トノ距離



2尺5寸ナリ。兩光源ノ照度ノ等シキ位置ヲ求メヨ。

雑　題（第十一）

（1）

1. $\dfrac{3y-2x}{x-2y}=1$ ナルトキ, $\sqrt{x+2y}:\sqrt{x-y}$ ノ値ヲ求メヨ。 （海軍）

2. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二ツノ根ノ比ヲ $p:q$ トスレバ, $pq(p+q):(p^3+q^3)=ac:(b^2-3ac)$ ナルコトヲ證明セヨ。（名商）

3. 四ツノ正數 a, b, c, d ガ連比例ヲナシ,且ツ a ガ最大ナルトキハ, $a-d>b-c$ ナルコトヲ證明セヨ。

4. 四ツノ正數 a, b, c, d ノ中, a ガ最大ニシテ $a:b=c:d$ ナルトキ, $a+d>b+c$ ナルコトヲ證明セヨ。 （陸士）

5. 甲乙丙ノ三人ニテ, 工事ヲ完成セントスルニ,甲一人ニテハ乙丙二人協力シテナス日數ノ a 倍ヲ要シ,乙一人ニテハ甲丙二人協力シテナス日數ノ b 倍ヲ要シ,丙一人ニテハ甲乙二人協力シテナス日數ノ c 倍ヲ要スルトキハ, a, b, c ノ間ニ

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$$

ナル關係アリ。是レヲ證明セヨ。 （商船）

（2）

1. $x+3y+5z=0,\ 2x+4y+7z=0$ ナルトキ,次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+7z^2}.$$

（海機）

2. $ax+cy+bz=0,\ cx+by+az=0,\ bx+ay+cz=0$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

3. 寶石入,純金ノ指環アリ。其重サ 9.1 瓦ニシテ,之レヲ水中ニテ量レバ, 8.1 瓦ナリ。金ノ比重ハ 19, 寶石ノ比重ハ 2.5 ナルコトヲ知リテ,金及ビ寶石ノ重サヲ求ム。 （高等）

4. 甲ガ a 歩スル間ニ乙ハ b 歩シ,甲ガ p 歩ニテ行ク所ヲ,乙ハ q 歩ニテ行クト云フ。兩人ノ速サノ比ヲ求メヨ。

5. A ト B トノ和ハ y ニ等シク, A ハ x ニ正比例シ, B ハ x ニ反比例ス。今, x ガ 4 ナルトキ, y ハ 10 ニシテ, x ガ 1 ナルトキ, y ハ -5 ナラバ, x ト y トノ關係ヲ表ハス式如何。 （廣工）

（3）

1. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(a) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c},\quad x^2+y^2+z^2=1.$ (熊工)

(b) $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=2xyz.$

2. $a+b:b+c=c+d:d+a$ ナルトキハ,$a=c$ ナルカ,又ハ $a+b+c+d=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

3. 純金42匁ニ,二十一金* 56匁ト銅若干匁トヲ混熔シテ十八金ヲ作ラントス。銅幾匁ヲ混ズレバヨキカ。

4. 酒精若干アリ。是レニ水一斗ヲ混和シ,其内二斗ヲ汲出シ,更ニ水二斗ヲ混和セシニ,酒精ト水トノ容量ガ,3ト5トノ割合ニナリシト云フ。初メ,酒精ハ幾斗アリシカ。 (横商)

5. 甲ハ東地ヨリ西地ニ向ヒ,乙ハ西地ヨリ東地ニ向ヒテ,同時ニ出發シ,各均等ナル速サニテ進行セリ。甲ハ m 時間ニテ西地ニ着シ,乙ハ n 時間ニテ東地ニ着シタリ。但シ,兩人出會セシ後,要セシ時間ハ,甲ハ a 時間,乙ハ b 時間ナリシト云フ。然ルトキハ a,b,m,n ノ間ニ次ノ關係アルコトヲ證セヨ。

$$a:b=m^2:n^2.$$ (神商)

---

* 21金トハ金ト銅トノ割合ガ21:3ナル合金ヲ云フ。

(4)

1. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(a) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{xyz}{x+y+z}.$ (海軍)

(b) $\dfrac{y+z-x}{b+c}=\dfrac{z+x-y}{c+a}=\dfrac{x+y-z}{a+b}=1.$ (長商)

2. y ハ甲乙二數ノ和ニ等シク,甲ハ x ニ正比例シ,乙ハ x ニ反比例ス。$x=2$ ノトキ $y=7$; $x=1$ ノトキ $y=-1$ ナリト云フ。然ラバ x,y ノ間ニ

$$y=5x-\frac{6}{x}$$

ナル關係ノアルコトヲ證明セヨ。

3. 四ツノ量 A, B, C, D アリテ

$$A:B=a:b,\quad B:C=b':c,\quad C:D=c':d$$

ナルトキ, $A:D=ab'c':bcd$ ナルコトヲ證明セヨ。

【注意】 カヤウナ量 A,B,C,D ヲ **連鎖比例** ヲナス量ト云フ。

4. 甲ガ3日ニナス仕事ヲ,乙ハ4日半ニナシ,乙ガ3日ニナス仕事ヲ,丙ハ4日ニテ完成シ,丙ガ10日ヲ要スル仕事ヲ,丁ハ8日ニテナスト云フ。甲ガ5日ニテナス仕事ヲ,丁ハ幾日ニテ完成スベキカ。

5. 米3石ノ價ハ麥5石ノ價ニ等シク,麥7石ノ價

ハ粟4石ノ價ニ等シキトキ,米30石ヲ受取ル代リニ粟20石ト麥幾石トヲ受取レバ損益ナキカ。

---

(5)

1. $ma+nc,\ pa+qc,\ mb+nd,\ pb+qd$ ガ比例スルトキハ a, b, c, d 又ハ m, n, p, q ガ比例スルコトヲ證明セヨ。

(慈醫)

2. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ ガ $x-y$ ニ反比例スルナラバ,$(x+y)^2$ ハ x^2+y^2 ニ正比例スルコトヲ證セヨ。　(商大)

3. 一晝夜ニ6分宛進ム時計アリ。或日ノ正午ニ,正時ニ合セ置キタリトスレバ,翌日ノ正時ノ午前八時マデニハ幾分進ムカ。又,此時計ガ翌日ノ午前八時ヲ指ストキハ,正時ノ幾時ナルカ。

4. 甲組ノ職工3人ニテナス仕事ヲ,乙組ノ職工ガ同時間ニ仕上ゲルニハ5人ヲ要ス。今,或仕事ヲ甲組ノ職工20人ニテ,毎日9時間宛働キ,10日間ニ共ノ$\frac{1}{3}$ヲ成シタル後,其組ニ代リテ,乙組ノ職工25人ガ毎日8時間宛從事スレバ,殘リノ仕事ヲ幾日ニテ仕上グベキカ。

5. 甲乙丙三人ノ工夫ニテ,報酬16圓38錢ノ或ル作業ヲ引キ受ケタルニ,一日間ニ甲ハ其作業ノ$\frac{1}{13}$,乙ハ$\frac{2}{9}$,丙

ハ$\frac{1}{7}$ヲ成スト云フ。今,三人ガ毎日一人ヅツ甲乙丙ノ順ニ,交互ニ働キテ作業ヲ完成スルトキハ,各ノ所得金幾何ナルカ。但シ,報酬ハ各人ノ成セシ作業ノ量ニ比例シテ分配スルモノトス。

第十三篇

級數

第一章

等差級數

203. 等差級數

一列ノ數アリ。其各數ニ一定ノ數ヲ加ヘレバ,夫々次ノ數ニナルトキ,此ノ一列ノ數ヲ**等差級數***(又ハ**算術級數**)ト云フ。

例ヘバ,次ノ如キ數列

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

ハ等差級數ナリ。何トナレバ,其各數ニ3ヲ加ヘレバ,夫々次ノ數トナレバナリ。

等差級數ノ各數ヲ**項**ト云ヒ,最初ノ項ヲ**初項**,最後ノ項ヲ**末項**ト云ヒ,各項ニ加ヘテ次ノ項トナルベキ一定ノ數ヲ**公差**ト云フ。

* 等差級數ヲ表スニ Arithmetical Progression ノ頭字 A. P. ヲ用フルコト多シ。

一般ニ,初項 a, 公差 d ナル等差級數ハ次ノ如シ。

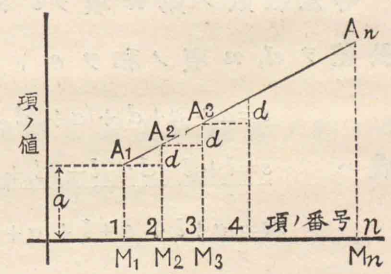
$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d, \cdots\cdots$$

204. 第 n 項

上ノ一般ノ等差級數ノ數列ニ於テ,第二項ハ初項ニ公差ノ一倍ヲ加ヘタルモノ,第三項ハ初項ニ公差ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。カヤウニシテ,各項ノ d ノ係數ハ,項ノ番號ヨリ常ニ1ダケ小ナリ。故ニ,一般ニ第 n 項ヲ l トスレバ

(1) $\quad l=a+(n-1)d.$

【注意】右ノ圖ノ如ク,初項 a ニ等シク A_1M_1 ヲトリ,d ヲ公差トスレバ,第二項ノ値 A_2M_2 ハ $a+d$, 第三項ノ値 A_3M_3 ハ $a+2d$ ニシテ,第 n 項ノ値,即チ A_nM_n ハ $a+(n-1)d$ ニ等シキヲ見ルベシ。



練習問題 (1)

a, d, n, l ノ中,次ノモノヲ知リテ,殘リノ一ツヲ求メヨ。(1)—(4).

1. $a=3,\ d=2,\ n=7.$ **3.** $a=-2,\ n=9,\ l=-26.$

2. $a=2,\ d=-5,\ l=-33.$ **4.** $d=7,\ n=4,\ l=43.$

5. 等差級數 $-8,\ -4,\ 0,\ 4,\ \cdots\cdots$ ノ第十五項及ビ第二十項ヲ求メヨ。

6. 等差級數ノ第五項 13, 第十三項 49 ナルトキ,初項及ビ公差ヲ求メヨ。

7. 等差級數ノ第五項,第六項ノ和 28, 第十二項,第十三項ノ和56ナリ。 初項及ビ公差ヲ求メヨ。

205. 等差級數ノ和

等差級數ノ第 n 項ヲ l トシ,初項ヲ a, 項數ヲ n, 公差ヲ d, n 項ノ和ヲ s トスレバ

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots\cdots+(l-d)+l,$$

或ハ

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots\cdots+(a+d)+a.\ (+$$

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$

$$=n(a+l).$$

$$(2)\qquad s=\frac{n}{2}(a+l).$$

公式(1), 及ビ公式(2)

$$\begin{cases} l=a+(n-1)d, & (1)\\ s=\dfrac{n}{2}(a+l). & (2)\end{cases}$$

ニヨリ,五ツノ文字 a, d, l, n, s ノ中,三ツノ値ヲ知レバ,殘リノ二ツヲ決定スルコトヲ得。

又,(1)ノ l ノ値ヲ(2)ノ l ニ代入シ,公式(2)ハ

$$s=\frac{n}{2}\{a+a+(n-1)d\}.$$

$$(3)\qquad s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

ノ如ク變形スルコトヲ得。

例一。 等差級數 5, 8, 11,……ノ十項ノ和ヲ求ム。

$a=5,\ d=8-5=3,\ n=10$ ナレバ,公式(3)ニヨリ

$$s=\frac{10}{2}\{2\times5+(10-1)\times3\}=5(10+27)$$

$$=185.$$

例二。 等差級數ノ初項 3, 末項31, 級數ノ和 136 ナルトキ,其級數ノ各項ヲ求メヨ。

公式(1)ト(2)トヨリ

$$\begin{cases} 31=3+(n-1)d,\\ 136=\dfrac{n}{2}(3+31).\end{cases}$$

後ノ方程式ヨリ $n=8$, 是レヲ初メノ方程式ニ代入シ, $d=4$ トナル。 故ニ,求ムル級數ハ8項ニシテ

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.

206. 等差中項

若干ノ數ガ等差級數ヲナストキ,兩端ノ數ニ對シテ,中間ノ數ヲ**等差中項**ト云フ。特ニ,中間ノ數ガ一ツノトキ,單ニ**等差中項**ト云ヒ,中間ノ數ガn個ノトキ,**等差n中項**ト云フコトアリ。

二ツノ數a, bノ等差中項ヲ**A**トスレバ

$$\mathrm{A}-a=b-\mathrm{A}.$$

$$\mathbf{A}=\frac{a+b}{2}. \tag{4}$$

例. 2ト30ノ間ニ,6個ノ等差中項ヲ入レヨ。

二數ノ間ニ,6個ノ等差中項ヲ入レレバ,全體トシテ8項ヨリ成ル等差級數トナル。故ニ,(1)ヨリ

$$30=2+7d. \quad \therefore \quad d=4.$$

故ニ,求ムル等差中項ハ

$$[2],\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ [30].$$

練習問題 (2)

次ノ等差級數ノ和ヲ求メヨ。(1)−(4).

1. 1, 2, 3, 4, ……(至第100項).

2. $2,\ 3\frac{1}{2},\ 5,$ ………(至第40項).

3. $-4\frac{1}{2}-4\frac{5}{6}-5\frac{1}{6}-$ ……(至第20項).

4. $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+$ ……(至第n項). (陸士)

5. 4ト67トノ間ニ,等差二十中項ヲ入レヨ。

6. 五十一項ヨリ成ル等差級數ノ中央項ガ10ナルトキ,此級數ノ和ヲ求メヨ。 (陸士)

7. 等差級數アリ。其和ハ63ナリ。又,初項ト第三項トノ和ハ24,第二項ト第六項トノ和ハ18ナリ。項數ヲ求メヨ。 (東商)

8. 200ヨリ400マデノ數ノ中,7ニテ割リ切レル整數ヲ總テ加ヘレバ何程トナルカ。 (東師)

9. 等差級數ノ初項ヨリ第p項迄ノ和q,第q項迄ノ和pナルトキ,第$(p+q)$項迄ノ和ヲ求ム。

10. 或等差級數ノ初メノn項ノ和ハ,nノ値ノ如何ニ拘ラズ,常ニ$n(5n-4)$ニ等シト云フ。初項ト公差トヲ求メヨ。 (海軍)

11. n本ノ杭ノ中,先ヅ1本ヲ立テ,其處ヨリ1本宛運ビテ,2間宛ノ間隔ニ,一列ニ一本ヅツ立テ,順

次ニ遠キニ及ベバ,全部立テ終ルマデニ歩ムコト幾間ナルカ。

12. 或物體靜止ノ狀態ヨリ,第一秒ニ16.08呎,第二秒ニ48.24呎,第三秒ニ80.40呎ノ如ク落下スレバ,十秒間ニハ何程落下スルカ。

13. 凸多角形アリ。內角ハ等差級數ヲナシ,最小角ハ120度,公差ハ5度ナリ。邊數ヲ求ム。(高等)

14. 甲乙二人競走ヲナスニ,甲ハ最初ノ一分間ニ300米,次ノ一分間ニ290米,又次ノ一分間ニ280米ノ如ク,一分間ノ行程ヲ10米ヅツ減ジテ進行ス。乙ハ甲ヨリ一分間後ニ,同一點ヲ出發シ,一分間ニ240米ノ等速ニテ進行ス。乙ハ甲ノ出發後幾分ニテ甲ニ追ヒ付クカ。(東商)

第二章

等比級數

207. 等比級數

一列ノ數アリ。其各數ニ一定ノ數ヲ掛ケレバ夫々次ノ數ニナルトキ,此一列ノ數ヲ**等比級數***(又ハ**幾何級數**)ト云フ。

例ヘバ,次ノ如キ數列

2, 6, 18, 54, 162, 486.

ハ等比級數ナリ。何トナレバ,其各數ニ3ヲ掛ケレバ,次ノ數トナレバナリ。

等比級數ノ各數ヲ**項**ト云ヒ,最初ノ項ヲ**初項**,最後ノ項ヲ**末項**ト云ヒ,各項ニ掛ケテ,次ノ項トナルベキ一定ノ數ヲ**公比**ト云フ。

一般ニ,初項a, 公比rナル等比級數ハ

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4, \cdots\cdots\cdots$$

ニテ表サル。

* 等比級數ヲ表スニ Geometrical Progression ノ頭字 G. P. ヲ用フルコト多シ。

208. 第 n 項

上ノ一般ノ等比級數ノ數列ニ於テ,第三項ハ初項ニ公比ノ二乘ヲ掛ケタルモノ第四項ハ初項ニ公比ノ三乘ヲ掛ケタルモノニ等シ。カヤウニ,各項ノ r ノ指數ハ,項ノ番號ヨリ,常ニ 1 ダケ小ナリ。

故ニ,一般ニ第 n 項ハ ar^{n-1} ナリ。

第 n 項ヲ l トスレバ

(1) $$l=ar^{n-1}.$$

練習問題 (3)

a, r, n, l ノ中,次ノモノヲ知リテ,殘リノ一ツヲ求メヨ。(1)—(4).

1. $r=3,\ n=5,\ l=162.$ 3. $a=3,\ r=2,\ l=1536.$
2. $a=-4, r=-3, n=6.$ 4. $a=3,\ n=4,\ l=192.$
5. 等比級數 $1, \sqrt{2}, 2, \cdots\cdots$ ノ第十二項ヲ求ム。
6. 等比級數ノ第六項 27, 第九項 729 ナルトキ,初項及ビ公比ヲ求メヨ。
7. 等比級數ノ第三項ハ $2x^3y^4$, 第五項ハ $8x^5y^8$ ナリ。此級數ヲ初項ヨリ第六項マデ求メヨ。

209. 等比級數ノ和

等比級數ノ第 n 項ヲ l トシ,初項ヲ a, 項數ヲ n, 公比ヲ r, n 項ノ和ヲ s トスレバ

$$s=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$
$$rs=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \quad (-$$
$$s-rs=a-ar^n.$$
$$\therefore\quad (1-r)s=a(1-r^n).$$

故ニ

(2) $$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\quad 或ハ\quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

【注意】上ノ公式ハ $r<1$ ノトキ初ノ式ヲ,$r>1$ ナルトキ後ノ式ヲ用フレバ便利ナリ。

(1) ニヨリ $ar^{n-1}=l$ ナレバ, $ar^n=rl$ ニシテ,是レヲ (2) ノ ar^n ニ置キ換ヘテ,公式 (2) ハ

(3) $$s=\frac{a-rl}{1-r},\quad 或ハ\quad s=\frac{rl-a}{r-1}$$

ノ如ク變形スルコトヲ得。

例一. 等比級數 4, 8, 16,⋯⋯ノ十項ノ和ヲ求ム。

$a=4,\ r=\frac{8}{4}=2,\ n=10$ ナレバ,公式(2)ヨリ

$$s=\frac{4(2^{10}-1)}{2-1}=4092.$$

例二。 初項 3, 末項 192, 各項ノ和 381 ナル等比級數アリ。項數ト其級數トヲ求メヨ。

公式(1)ト(3)トヨリ

$$\begin{cases} 192=3r^{n-1}, \\ 381=\dfrac{192r-3}{r-1}. \end{cases}$$

後ノ方程式ヨリ $r=2$, 是レヲ初ノ方程式ニ代入シテ

$$2^{n-1}=64=2^6, \qquad \therefore \ n=7.$$

求ムル級數ハ

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192.$$

210. 等比中項

若干ノ數ガ等比級數ヲナストキ,兩端ノ數ニ對シテ,中間ノ數ヲ**等比中項**ト云フ。特ニ,中間ノ數ガ一ツナルトキ,單ニ**等比中項**ト云ヒ,中間ノ數ガ n 個ノトキ**等比 n 中項**ト云フコトアリ。

二ツノ數 a, b ノ等比中項ヲ G トスレバ

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}.$$

$$\therefore \ G^2=ab.$$

$$(4) \qquad G=\pm\sqrt{ab}.$$

例。 3 ト 48 ノ間ニ, 3 個ノ等比中項ヲ入レヨ。

二數ノ間ニ, 3 個ノ等比中項ヲ入レレバ,全體トシテ 5 項ヨリ成ル等比級數トナレバ,(1)ニヨリ

$$48=3r^4, \qquad r^4=16.$$

$$\therefore \ r=\pm 2.$$

故ニ,求ムル等比中項ハ

$$[3],\ 6,\ 12,\ 24,\ [48];$$

或ハ $$[3],\ -6,\ 12,\ -24,\ [48].$$

練習問題 (4)

次ノ等比級數ノ和ヲ求メヨ。

1. $1,\ -2,\ 4,\ -8,$ ………(至第 8 項).

2. $m,\ -\dfrac{m}{4},\ \dfrac{m}{16},\ -\dfrac{m}{64},$ ……(至第 5 項).

3. $0.1+0.5+2.5+$ ………(至第 7 項).

4. $(a-b)^2+(a^2-b^2)+(a+b)^2+$ ………(至第 n 項).

5. 5 ト 3125 ノ間ニ,等比三中項ヲ入レヨ。

6. 若干項ノ等比級數アリ。公比ハ 3, 末項ハ 486, 其和ハ 728 ナリ。初項ト項數ヲ求メヨ。(商船)

7. 公差ガ 3 ナル等差級數ト,公比ガ 2 ナル等

比級數トアリ。此二ツノ級數ノ,第一項ヨリ第五項マデノ和ノ合計ハ 148 ニ等シク,又第一項ヨリ第十項マデノ和ノ合計ハ 3254 ニ等シ。二ツノ級數ノ初項ハ各何程ナルカ。(海軍)

8. 十五項ヨリ成ル等差級數ト,等比級數トアリ。等差級數ノ初項ト末項トガ夫々等比級數ノ初項ト,末項トニ等シク,等差級數ノ第九項ハ等比級數ノ第八項ニ等シト云フ。等比級數ノ公比ヲ求メヨ。

9. 等比級數アリ。初項ヨリ第p項マデト,第$2p$項マデト,第$3p$項マデノ和ヲ夫々x, y, zトスレバ,$x, y, y+z-x$ ハ等比級數ヲナスコトヲ示セ。(大工)

10. $a+b+c,\ b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$ ガ r ヲ公比トスル等比級數ヲナセバ,$r^3+r^2+r=1$ ナルコトヲ證明セヨ。(神商)

11. $\dfrac{1}{b-a}, \dfrac{1}{2b}, \dfrac{1}{b-c}$ ガ等差級數ヲナストキ,a,b,c ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。(長商)

12. n 項ヨリ成ル等比級數アリ。P ヲ總テノ項ノ積,S ヲ總テノ項ノ和,R ヲ總テノ項ノ逆數ノ和トスレバ,$P^2R^n=S^n$ ナルコトヲ證明セヨ。(東工)

211. 無限等比級數

次ノ如キ,等比級數ノ和アリ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$$

假リニ,最初ノ十項ノ和ヲ求メレバ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^9}=\frac{1-\dfrac{1}{2^{10}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^9}.$$

尙ホ一項ヲ增シ,第十一項マデノ和ヲ求メレバ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{10}}=2-\frac{1}{2^{10}}$$

カヤウニシテ,項ノ數ヲ增加スレバ,此級數ノ和ハ次第ニ 2 ニ近ヅクコトヲ見ルベシ。

然ラバ,2 ト此級數ノ和トノ差ヲ $\dfrac{1}{10,000}$ ヨリ小ナラシムルニハ,幾項マデトレバヨキカ。

例ヘバ,第n項マデトルトスレバ,級數ノ和ハ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

ニシテ,此和ハ 2 ヨリ $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ダケ小ナリ。$\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ガ n ヲ如

何ナル値トスレバ $\frac{1}{10,000}$ ニ等シクナルカ,又ハソレヨリモ小トナルカ。實際計算シテ見ルニ 2^{13} ハ 8,192; 2^{14} ハ 16,384 ナレバ

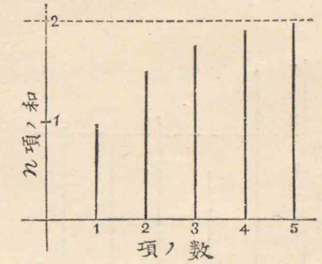
$$\frac{1}{2^{14}}<\frac{1}{10,000}.$$

故ニ,第15項マデトレバ,2ト級數ノ和トノ差ハ $\frac{1}{10,000}$ ヨリモ尚ホ小トナル。

斯クノ如クシテ,項數 n ヲ增加スレバ,2ト級數ノ和トノ差ハ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得。併シ,2ニ等シクナルコトハ決シテナシ。差ハ常ニ $\frac{1}{2^{n-1}}$ ニシテ,此値ハ零ニナルコトナシ。唯ダ,項數 n ヲ充分ニ大ニスレバ,$\frac{1}{2^{n-1}}$ ハ限リナク減少シ,級數ノ和ハ如何程ニテモ2ニ近ヅクノミ。

此事ヲ,n ガ限リナク大ニナル時,此級數ノ n 項ノ和ハ2ニ近ヅク,又ハ n ガ限リナク大ニナル時,n 項ノ和ノ**極限**ハ2ナリト云ヒ,是レヲ表ハスニ $n\longrightarrow\infty$(n ガ限リナク大ニナルト云フコトヲ示ス) ナルトキ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2$ ト書ク。

此ノ關係ヲ圖ニ示セバ,右圖ノ如シ。項數ヲ增加スレバ,級數ノ和ハ次第ニ2ニ近ヅクヲ見ルベシ。



例。次ノ等比級數ノ n 項ノ和ヲ求メ,n ガ無限ニ大ニナルトキノ極限ヲ求メヨ。

$$4-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

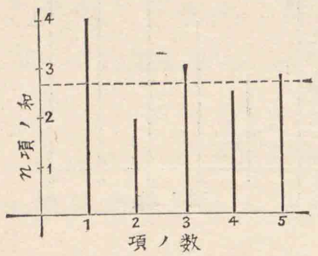
公比ハ $\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ ナレバ,n 項ノ和ハ

$$s=\frac{4\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{8}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}.$$

茲ニ,$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ハ n ガ偶數ナルカ,又ハ奇數ナルカニヨリ,正數又ハ負數ナルモ,n ガ無限ニ大ニナルトキハ,其値ハ零ニ近ヅク。故ニ,$n\longrightarrow\infty$ ナルト

キ, $s=\dfrac{8}{3}$ ナリ。



此關係,卽チ項ノ數ヲ增加スルニ從ヒ,項ノ和ハ$\dfrac{8}{3}$ニ近ヅクコトハ左ノ圖ヲ見レバ,一層明白トナルベシ。

一般ニ等比級數

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots\cdots\cdots$$

アリ。公比 r ノ絕對値ガ1ヨリ小ナルトキ,項ヲ無限ニ多クトレバ,此級數ノ和ハ或一定ノ値ニ近ヅク。假リニ,n 項マデノ和ヲ求メレバ

$$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

ニシテ,$\dfrac{a}{1-r}$ ハ項數 n ニ無關係ナルモ,$\dfrac{ar^n}{1-r}$ ハ r ノ絕對値ガ1ヨリモ小ナレバ,n ガ限リナク增加スルトキ,分子 ar^n ノ絕對値ハ零ニ近ヅキ,從ッテ其値ハ零ニ近ヅク。故ニ,n ガ無限ニ大ニナルトキ,s ノ極限ハ $\dfrac{a}{1-r}$ ニシテ,$n\longrightarrow\infty$ ナルトキ

(5) $$s=\frac{a}{1-r}.$$

【注意】 上ノ級數ノ和ノ極限ヲ「等比級數ノ無限項ノ和」,又ハ「無限等比級數ノ和」ト云フコトアリ。

例。 無限等比級數ノ和 $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots\cdots$ ヲ求メヨ。

$a=1,\ r=\dfrac{1}{3}$ ニシテ r ハ1ヨリモ小ナレバ,公式(5)ニヨリ

$$s=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

212. 循環小數

循環小數ハ,是レヲ一ツノ無限等比級數ノ和ト考ヘテ,分數ノ形ニ變ヘルコトヲ得。

例一。 循環小數 $0.\dot{2}\dot{7}$ ヲ分數ノ形ニ變ヘヨ。

$$0.\dot{2}\dot{7}=0.272727\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ニシテ

$$0.27=\frac{27}{100},$$

$$0.0027=\frac{27}{100}\times\frac{1}{100},$$

$$0.000027=\frac{27}{100}\times\frac{1}{100^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナレバ

$$0.\dot{2}\dot{7}=\frac{27}{100}+\frac{27}{100}\times\frac{1}{100}+\frac{27}{100}\times\frac{1}{100^2}+\cdots\cdots$$

是レハ, $a=\frac{27}{100}$, $r=\frac{1}{100}$ ナル無限等比級數ノ和ト考ヘラレルニヨリ

$$0.\dot{2}\dot{7}=\frac{27}{100}\div\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{27}{100}\div\frac{99}{100}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}.$$

例二。 $0.4\dot{8}\dot{1}$ ヲ分數ノ形ニ變ヘヨ。

$$0.4\dot{8}\dot{1}=\frac{4}{10}+\frac{81}{10\times100}+\frac{81}{10\times100^2}+\frac{81}{10\times100^3}+\cdots\cdots$$

ニシテ,右邊ノ第二項以下ハ

$$a=\frac{81}{10\times100},\quad r=\frac{1}{100}$$

ナル無限等比級數ノ和ナリ。故ニ

$$0.4\dot{8}\dot{1}=\frac{4}{10}+\frac{81}{10\times100}\div\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{4}{10}+\frac{81}{990}$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{9}{110}=\frac{4\times11+9}{110}$$

$$=\frac{53}{110}.$$

練習問題 (5)

次ノ無限等比級數ノ和ヲ求メヨ。(1)−(4).

1. $3+1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$

2. $8-4+2-\cdots\cdots$

3. $\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots\cdots$

4. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots$

次ノ循環小數ヲ分數ノ形ニ變ヘヨ。(5)—(6).

5. $0.\dot{8}1\dot{4}$　　**6.** $0.13\dot{1}3\dot{5}$.

7. 等比級數ノ無限項ノ和ノ極限ハ 4 ニシテ,初項ト第二項トノ相乘積ハ第四項ノ24倍ニ等シト云フ。其級數ノ初項ト公比トヲ求メヨ。(檢商)

8. 長サ a 尺ナル直線アリ。初メ,其三分ノ二ヲ切リ取リ,次ニ殘リノ三分ノ二ヲ切リ取リ,次第ニ斯クノ如ク限リナク切リ取ルトキ,切リ取リタル部分ノ長サノ和ハ何程トナルカ。

9. 彈力性ノ球ヲ15尺ノ高サヨリ落ストセヨ。

其球ガ靜止スルマデニ何程ノ距離ヲ經過スベキカ。但シ,毎回落下ノ際,其時ノ高サノ$\frac{2}{3}$ノ處マデ跳ネカヘルモノトス。

10. 一邊ノ長サa尺ナル正三角形ヲ作リ,其各邊ノ中點ヲ結ビテ,第二ノ正三角形ヲ作ル。以下同樣ノ作圖ヲ續ケテ得ラレル總テノ三角形ノ面積ノ和ノ極限ヲ求メヨ。 (熊工)

11. 半徑Rナル圓ニ內接スル正方形ヲ畫キ,更ニ其ノ正方形ニ內接スル圓ヲ畫キ,更ニ其ノ圓ニ內接スル正方形ヲ畫キ,以下追フテ斯クノ如クシテ作ラレル總テノ圓ノ面積ノ和ヲ求メヨ。(高等)

12. 球ノ體積ハ半徑ノ三乘ニ比例ス。然ラバ,半徑2尺,1尺,$\frac{1}{2}$尺,$\frac{1}{4}$尺……ノ如キ,無數ノ球ノ體積ノ總和ハ何程ナルカ。但シ,半徑$\frac{1}{2}$尺ノ球ノ體積ヲ0.5236立方尺トセヨ。 (海軍)

213. 雜級數

或一定ノ法則ニ基キ,並ベラレタル數ノ列ヲ,一般ニ級數ト云フ。次ニ,簡單ナル級數ノ和ヲ求ムル方法ヲ説明スベシ。

例一。 $3+33+333+\cdots\cdots$ノ第n項マデノ和ヲ求ム。

求ムル和ヲsトスレバ

$$s=3(1+11+111+\cdots\cdots) \qquad \text{(至第}n\text{項)}$$

$$=\frac{1}{3}(9+99+999+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{3}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots\cdots\}$$

$$=\frac{1}{3}\{(10+10^2+10^3+\cdots\cdots+10^n)-n\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{1}{3}\left\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right\}.$$

例二。 $1+2r+3r^2+4r^3+\cdots\cdots$ノ$n$項ノ和ヲ求ム。

$$s=1+2r+3r^2+4r^3+\cdots\cdots+nr^{n-1}$$

$$rs=\quad r+2r^2+3r^3+\cdots\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n \quad (-$$

$$s-rs=1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^{n-1}-nr^n$$

$$=\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n.$$

$$\therefore\quad s=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}.$$

練習問題 (6)

1. 級數$(a-b),(a^2-2b),(a^3-3b),\cdots\cdots$ノ$n$項マデノ和ヲ求メヨ。 (東農)

2. $0.3+0.33+0.333+\cdots\cdots$ ノ第n項マデノ和ヲ求メヨ。 (大工)

3. $\dfrac{1}{p(p+1)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}$ ナルコトニ注意シ,次ノ級數ノn項ノ和,及ビ無限項ノ和ノ極限ヲ求メヨ。

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots\cdots$$

4. 級數ノ和 $1+r+2r^2+3r^3+\cdots\cdots\cdots+nr^n$ ヲ簡單ナル式ニ變ヘヨ。

5. 初項 $1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots, n$ ニシテ,夫レニ應ズル公比ガ順次ニ $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots\cdots\cdots, \dfrac{1}{n+1}$ ナル無限等比級數ノ和ヲ,夫々 $s_1, s_2, s_3, \cdots\cdots\cdots s_n$ トスレバ

$$s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots+s_n=\frac{n}{2}(n+3)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

雜 題 (第十二)

(1)

1. 等差級數ヲナス三ツノ數アリ。其和27,平方ノ和 293 ナリ。三ツノ數ヲ求メヨ。

【注意】 等差級數ヲナス三ツノ數ノ和ガ既知ナルトキハ,其等ノ數ヲ $x-y$, x, $x+y$ トセヨ。 又,四ツノ數ノトキニハ $x-3y, x-y, x+y, x+3y$ トスレバ便利ナリ。

2. 等差級數ヲナス三ツノ數アリ。平方ノ和ハ 332 ニシテ,第一數ト第三數トノ比ハ $3:7$ ニ等シ。三ツノ數ヲ求メヨ。(東師)

3. 200ヲ等差級數ヲナス四ツノ數ニ分ケ,第一數ト第四數ノ積ノ三倍ヲ,第二數ト第三數ノ積ノ二倍ニ等シカラシメヨ。

4. 200 ヨリ 400 マデノ數ノ內ニテ,13 ニテ割レバ剩餘ガ 7 トナル總テノ數ノ和ヲ求メヨ。

5. 與ヘラレタル二數 a, b ノ間ニ,m 個ノ等差中項ヲ入レタルトキ,a ヨリ數ヘテ第 r 番目ノ項ヲ求メヨ。 (高等)

---

(2)

1. 等比級數ヲナス三ツノ數アリ。各數ノ和ハ $\dfrac{7}{6}$,又各數ノ平方ノ和ハ $\dfrac{133}{36}$ ナリ。三數ヲ求メヨ。 (大工)

2. 四ツノ正數ガ等比級數ヲナストキ，第一項ト第四項トノ差ノ絕對値ハ，他ノ二項ノ差ノ絕對値ノ三倍ヨリモ小ナラヌコトヲ證明セヨ。（陸士）

3. 項數相等シキ二ツノ等比級數アリ。初項ハ何レモ 1 ニシテ，第一級數ノ末項ハ p，第二級數ノ末項ハ $\frac{1}{p}$ ナリ。第一級數ノ和ノ，第二級數ノ和ニ對スル比ヲ求メヨ。（海兵）

4. 等比級數ノ公比ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ小ナル正ノ數ナルトキ，各項ノ絕對値ハ其次ノ項以下ノ無限項ノ絕對値ノ和ヨリモ大ナルコトヲ證明セヨ。

5. 45 度ナル角ノ一ツノ邊ノ上ニ，頂點 A ヨリ 6 尺ノ處ニ點 P ヲトリ，其點ヨリ他ノ邊ニ垂線 PP_1 ヲ下シ，其足 P_1 ヨリ邊 AP ヘ垂線 P_1P_2 ヲ下シ，又其足 P_2 ヨリ邊 AP_1 ヘ垂線 P_2P_3 ヲ下シ，此ノ如キ方法ヲ際限ナク續ケ行フトキ，是等ノ垂線ノ長サノ和ノ極限ヲ四捨五入ノ法ニヨリ，寸位マデ計算セヨ。（高等）

(3)

1. 等差級數ヲナス四數アリ。此級數ノ第一項ヨリ初メテ，順次ニ，1, 1, 3, 9 ヲ加ヘテ得ル四數ハ，順次ニ等比級數ヲナスト云フ。初メノ四數ヲ求メヨ。（神商）

2. 一ツノ數列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots\cdots\cdots,a_n$$

ガ等比級數ヲナセバ

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\frac{1}{a_n}$$

ハ又等比級數ヲナスコトヲ證明シ，初メノ級數ノ和ヲ s，後ノ級數ノ和ヲ s' トスレバ $\frac{s}{s'}=a_1a_n$ ナルコトヲ證明セヨ。（大工）

3. 等差級數アリ。始メノ七項ノ和ハ，其次ノ四項ノ和ヨリモ大ナルコト 5 ニシテ，第四項，第七項，第十一項ハ等比級數ヲナスト云フ。此級數ノ初項及ビ公差ヲ求メヨ。（陸士）

4. a, b, c ガ等差級數ヲナシ，b, c, d ガ調和級數ヲナストキ，$a:b=c:d$ ナルコトヲ證明セヨ。（長商）

【注意】 b, c, d ガ調和級數ヲナストハ，其等ノ逆數 $\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$，$\frac{1}{d}$ ガ等差級數ヲナスコトナリ。

5. $a, b, -2$ ガ等差級數ヲナシ，$-30, a, b$ ガ調和級數ヲナセバ a, b ノ値ハ幾何ナルカ。（名工）

(4)

1. 級數 $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 8\frac{1}{8}\cdots\cdots\cdots$ ノ 20 項ノ和ヲ求ム。（海軍）

2. 級數 $1+2\cdot2+3+4\cdot2+5+6\cdot2+\cdots\cdots\cdots$ ノ 30 項ノ和ヲ求ム。（明專）

3. 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

$$s=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2.$$ (東商)

【解】 $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ ナレバ

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

此恒等式ニ於テ, n ニ順次ニ 1 ヨリ n マデノ整數ヲ代入シ

$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1,$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1,$$
$$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1,$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

是等ノ等式ノ左邊ト右邊ヲ夫々加ヘ合セテ

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2)$$
$$+3(1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n)+n$$
$$=3s+\frac{3n(n+1)}{2}+n.$$

$$\therefore\quad s=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

4. 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1).$$

【注意】 $p(p+1)=p^2+p$ ナルコトヲ注意セヨ。

5. 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n).$$

(5)

1. n ガ奇數ナルトキ, $\frac{n}{2}$ ヨリモ大ニシテ, n ヨリ小ナル奇數ノ個數ヲ求メヨ。

【注意】 $n=2h+1$ トシテ見ヨ。

2. a, b, c ナル三ツノ數アリ。a ハ b ト c トノ等差中項, $\frac{1}{c}$ ハ $\frac{1}{a}$ ト $\frac{1}{b}$ トノ等差中項ナルトキ, b ハ a ト c トノ等比中項ナルコトヲ證明シ, b 及ビ c ヲ a ヲ以テ書キ表セ。

3. 等差級數 2, 5, 8,………,200, 及ビ 2, 7, 12,…,202 ニ於テ, 相合致スル項ノ數ト其等ノ項ノ和トヲ求メヨ。 (商大)

4. 自然數ヲ次ノ如ク分括スルトキ, 第 p 番目ノ括弧内ノ諸數ノ和ヲ求メヨ。

$$(1),\ (2,\ 3),\ (4,\ 5,\ 6),\ (7,\ 8,\ 9,\ 10),\ \cdots\cdots\cdots$$

【解】 第 p 番目ノ括弧内ノ諸數ノ個數ハ p ナルコト明ナリ。 今, p 番目ノ級數ノ初項ヲ求メンニ

第一番目ノ末項$=1$,

第二番目ノ末項$=$(一番目ノ項數)$+$(二番目ノ項數)

$=1+2=3.$

第三番目ノ末項$=$(一番目ノ項數)$+$(二番目ノ項數)$+$(三番目ノ項數)

$=1+2+3=6.$

…………………………………

第$(p-1)$番目ノ末項$=$(一番目ノ項數)$+$(二番目ノ項數)$+\cdots\cdots$

$+(p-1$番目ノ項數)

$$=1+2+\cdots\cdots+(p-1)=\frac{(p-1)p}{2}.$$

∴ 第p番目ノ初項$=\frac{(p-1)p}{2}+1.$

故ニ,求ムル第p番目ノ諸項ノ和ハ,等差級數ノ公式(1)ニ於テ,

$$a=\frac{(p-1)p}{2}+1,\quad d=1,\quad n=p$$

トシテ

$$\frac{p}{2}\left[2\left\{\frac{(p-1)p}{2}+1\right\}+(p-1)\times 1\right]=\frac{p}{2}(p^2-p+2+p-1)$$
$$=\frac{p}{2}(p^2+1).$$

5. 1ヨリ始マレル自然數ヲ,次ノ如ク分括スルトキ,第n番目ノ區劃ノ數ノ和ハ幾何ナルカ。

$|1, 2|, |3, 4, 5, 6|, |7, 8, 9, 10, 11, 12|, |13, \cdots\cdots 20|, \cdots\cdots$

(高等)

第十四篇 對數

第一章 指數ノ法則

214. 指數ノ法則

mトnトガ正ノ整數ノトキニハ,次ノ公式ノ成立スルコトヲ知レリ。*

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}.$

(3) $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m.$

(4) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$ (但シ $m>n$).

(5) $(ab)^m = a^m b^m.$

是等ノ公式ノ示ス關係ヲ指數ノ法則ト云フ。今,上ノ諸法則ヲ尙ホ廣ク適用スルタメ,m, nガ分數ノトキニモ,負數ノトキニモ,又零ノトキニモ冪ノ意義ガ成立スルヨウニ冪ノ定義ヲ擴張セント

* (1)ハ上卷58頁, (2)ハ同232頁, (3)ハ同236頁, (4)ハ同68頁, (5)ハ同61頁.

ス。ソレニハ$a^{\frac{1}{3}}$又ハa^{-1}ノ如キ式ハ何ヲ意味スルカ,ソレヲ說明スル必要アリ。

吾々ハ第一ノ法則,卽チ

$$(1)\qquad a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

ハm, nガ分數,又ハ負數ノトキモ成立スルモノト假定シ,其假定ヲ出發點トシテ$a^{\frac{1}{3}}$又ハa^{-1}等ノ意味ヲ定メルコト便利ナリ。

215. 指數ガ分數ナルトキノ羃ノ意義

上ノ假定ニ基キ,(1)ノ$m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$トスレバ

$$a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{2}}=a$$

トナレバ,$a^{\frac{1}{2}}$ハソレヲ二ツ掛ケ合セレバaニ等シクナルニヨリ,aノ平方根$\sqrt{a}$ヲ表スモノト見ルコトヲ得ベシ。

一般ニpガ正ノ整數ノトキ,$a^{\frac{1}{p}}$ハソレノp個ノ連乘積ヲ作レバ

$$a^{\frac{1}{p}}\times a^{\frac{1}{p}}\times\cdots\cdots\times a^{\frac{1}{p}}=a^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}}=a^{\frac{p}{p}}=a.$$

故ニ,$a^{\frac{1}{p}}$ハaノp羃根$\sqrt[p]{a}$ヲ表スモノト見ルコトヲ得ベシ。*

又,p, qガ共ニ正ノ整數ノトキニハ$a^{\frac{q}{p}}$ノp個ノ連乘積ヲ作リ

$$a^{\frac{q}{p}}\times a^{\frac{q}{p}}\times\cdots\cdots\times a^{\frac{q}{p}}=a^{\frac{q}{p}+\frac{q}{p}+\cdots\cdots+\frac{q}{p}}=a^{\frac{q}{p}\times p}=a^q.$$

故ニ,$a^{\frac{q}{p}}$ハa^qノp羃根$\sqrt[p]{a^q}$ヲ表スモノト見ルコトヲ得。或ハ,$a^{\frac{1}{p}}$ノq個ノ連乘積ヲ考ヘテ

$$a^{\frac{1}{p}}\times a^{\frac{1}{p}}\times\cdots\cdots\times a^{\frac{1}{p}}=a^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\quad+\frac{1}{p}}=a^{\frac{q}{p}}.$$

故ニ,$a^{\frac{q}{p}}$ハ$a^{\frac{1}{p}}$卽チaノp羃根ノq乘羃ト見做シテモ可ナリ。故ニ

$$a^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{a^q},\quad \text{或ハ}\quad a^{\frac{q}{p}}=(\sqrt[p]{a})^q.$$

例一。　$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4,$

或ハ　$8^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4.$

例二。　$(x^{10})^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(x^{10})^3}=\sqrt{x^{30}}=x^{15},$　〔xハ正數トス〕

或ハ　$(x^{10})^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{x^{10}})^3=(x^5)^3=x^{15}.$

---

* aノ平方根ハ$\pm\sqrt{a}$ニシテ,$\sqrt{a}$ノミニ限ラザルモ,$a^{\frac{1}{2}}$ハ$\sqrt{a}$ト同ジクaガ正數ノトキニハ,正數ヲ表スモノト假定スベシ。又,$a^{\frac{1}{3}}$ハaノ立方根ノ中,實數ノミヲ表スモノト假定セン。其他之レニ準ズ。

216. 指數ガ負數ナルトキノ羃ノ意義

第214節ノ假定ニ基キ,公式(1)ニテ $m=0$ トスレバ

$$a^0.\, a^n = a^{0+n} = a^n.$$

$$\therefore\quad a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$ 〔上卷68頁參照〕

又,p ヲ正數トシ,公式(1)ニ於テ $m=p,\ n=-p$ トスレバ

$$a^p.\, a^{-p} = a^{p-p} = a^0 = 1.$$

$$\therefore\quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

依テ,或數ノ $-p$ 羃ハ其數ノ p 羃ノ逆數ヲ表スモノト見ルコトヲ得。

即チ

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2},\quad 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{4}.$$

【注意】 a^0 ハ a ガ零ニ等シカラザルトキ1ニシテ,$a=0$ ノトキハ不定ナリ。何トナレバ,$a^0.a^n = a^n$ ニ於テ $a=0$,n ヲ正ノ整數トスレバ a^n ハ零ニ等シク,從テ此式ニ適スル a^0 ノ値ハ不定ナレバナリ。 〔上卷160頁〕

217. 指數ガ分數又ハ負數ナルトキノ指數ノ法則

ISAAC NEWTON
(1642—1727)

あいざーく・にゆとん ハ英國ニ生レ，少ニシテ既ニ學界ニ貢献スルコト多カリキ。指數ガ負數，分數ナルトキノ指數法則ノ擴張ハ にゆとんノ効績ニ歸スルモノニシテ，數學及ビ物理學ノ根底タル微分積分學ハ實ニにゆとんノ創見ナリ。

にゆとん曰ク「私ハ世界ニ就テ何ヲ知テ居ルノカ少シモ分ラナイ 自分ハ海濱ヲ遊ビ廻リ，他ノモノガ拾フタモノヨリモ少シ角ノ取レタ小石トカ，又ハ少シ綺麗ナ介殼ヲ探シ當テテ悦ビ，又現ニ樂シミニ探シテ居ル兒童ノ樣ニ思ハレテナラナイ。眞理ノ大洋ハ，渺茫トシテ總テ眼ノ前ニ未知ノ儘横ハル」ト。

m, nガ分數,又ハ負數ノトキニモ,第一ノ指數ノ法則ハ成立スルモノトシテ,指數ガ分數又ハ負數ノトキノ羃ノ意義ヲ確定シタルガ,其時ニ,第二以下ノ指數ノ法則ハ成立スルモノナルカ否カ,研究ヲ要スル事項ナリ。次ニ第二ノ法則 $(a^m)^n=a^{mn}$ ハ m, nガ分數,又ハ負數ノトキニモ成立スルコトヲ證明セン。

今,mハ正數,又ハ負數何レニテモ差支ナキモノトシ,nノ性質ニ從ヒ,次ノ如ク分類シテ證明ヲ試ミルベシ。

(1) nガ正ノ整數ノ場合。

$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times\cdots\cdots\times a^m \qquad \text{〔n個ノ連乘積〕}$$

$$=a^{m+m+\cdots\cdots+m}=a^{mn}.$$

(2) nガ$\dfrac{p}{q}$ニ等シク,p及ビqガ正ノ整數ノ場合。

$$(a^m)^n=(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{mp}}\ *$$

$$=a^{mp\times\frac{1}{q}}=a^{m\times\frac{p}{q}}=a^{mn}.$$

(3) nガ負ノ整數$-p$ニ等シキ場合。

* $(a^m)^p$ ハ (1) ニヨリ a^{mp} ニ等シ。

$$(a^m)^n=(a^n)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}=\frac{1}{a^{mp}}$$

$$=a^{-mp}=a^{m\times(-p)}=a^{mn}.$$

(4) n ガ $-\dfrac{p}{q}$ ニ等シク,p 及ビ q ガ正ノ整數ノ場合。

$$(a^m)^n=(a^m)^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{(a^m)^{\frac{p}{q}}}$$

$$=\frac{1}{a^{m\times\frac{p}{q}}}=\frac{1}{a^{-mn}}=a^{mn}.$$

m, n ガ分數又ハ負數ノトキニ,第三以下ノ指數ノ法則ノ成立スルコトハ,上ト同樣ニシテ證明スルコトヲ得ベシ。

指數ノ法則ノ擴張ニヨリ,次ノ運算ヲ行フコトヲ得。

例一。 $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-3}b^4}=a^{\frac{5}{6}+3}\,b^{-\frac{1}{3}-4}=a^{\frac{23}{6}}b^{-\frac{13}{3}}.$

例二。 $(t^{-\frac{3}{2}})^{\frac{6}{5}}=t^{-\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}}=t^{-\frac{9}{5}}.$

例三。 $\left(\dfrac{x^{-3}}{y^{\frac{4}{5}}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{(x^{-3})^{-\frac{2}{3}}}{(y^{\frac{4}{5}})^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{x^2}{y^{-\frac{8}{15}}}=x^2\,y^{\frac{8}{15}}.$

練習問題 (1)

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。 (1)—(10).

1. $x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}.$ **2.** $y^{\frac{2}{3}}\div y^{\frac{4}{3}}.$ **3.** $(32)^{-\frac{3}{5}}\div(0.09)^{\frac{3}{2}}.$

4. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}.$ **5.** $a^0\div a^3.$ **6.** $\left(a^{1+\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{q+p}}.$

7. $\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right).$

8. $(a-b)\div\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right).$

9. $\left(x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1}\right).$ (山商)

10. $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}.$ (海軍)

11. $x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$ ナルトキハ, $2x^3+6x=3$ ナルコトヲ證明セヨ。

12. $a^p=s+\sqrt{1+s^2}$ ナルトキハ, $a^{-p}=-s+\sqrt{1+s^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。 (秋鑛)

13. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ ナルトキハ,$(x+y+z)^3=27xyz$ ナルコトヲ證明セヨ。

第二章

對　　數

218. 對數ノ定義

2ノ3乘冪ハ8ナリ。此關係ヲ言葉ヲ變ヘテ，3ハ2ヲ底數トシタル8ノ對數ナリト云フコトアリ。一般ニ，aガ1ニ等シカラザル正數ヲ表ストキ $a^n=N$ ナラバ，nヲaヲ**底數**トスルNノ**對數**ト云ヒ，$n=\log_a N$ ト書ク。故ニ，次ノ二ツノ等式

$$\boldsymbol{a^n=N}, \qquad \boldsymbol{n=\log_a N}$$

ハ a, N, n ノ完ク同ジ關係ヲ表ス。

【注意】 上ノ定義ニヨリ，$a^{\log_a N}=N$ナル恒等式ノ成立スルコト明ナリ。

例一。 $\log_2 32$ ヲ求メヨ。

$\log_2 32=x$ トシテ，之レヲ指數ノ關係ニ書キ直セバ $2^x=32$. 然ルニ，$32=2^5$ ナレバ $x=5$ ナリ。

$$\therefore \qquad \log_2 32=5.$$

例二。 $\log_8 N=\dfrac{5}{6}$ ナルトキ，Nヲ求メヨ。

$\log_8 N=\dfrac{5}{6}$ ヲ指數ノ關係ニ書キ變ヘレバ

$$N=8^{\frac{5}{6}}.$$

右邊ヲ尚ホ簡單ノ形ニ直セバ

$$N=8^{\frac{5}{6}}=(2^3)^{\frac{5}{6}}=2^{3\times\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=\sqrt{32}.$$

例三。 $\log_a 8=-1.5$ ナルトキ，aヲ求メヨ。

與ヘラレタル對數ノ關係ヲ指數ノ式ニ變ヘテ

$$a^{-1.5}=8,$$

$$a=8^{\frac{1}{-1.5}}=(2^3)^{-\frac{1}{1.5}}=2^{-2}=\frac{1}{4}.$$

練習問題 (2)

次ノ各式ノ未知數ヲ求メヨ。　(1)—(6).

1. $\log_2 4=x$.　　**3.** $\log_a 64=6$.　　**5.** $\log_{10} y=-\dfrac{2}{3}$.

2. $\log_4 2=y$.　　**4.** $\log_3 N=4$.　　**6.** $\log_a \dfrac{1}{2}=-1$.

7. 次ノ表ノ空位ニ應ズル數ヲ求メヨ。

底　數	數	對　數
10		3
	64	2
2	$\frac{1}{64}$	
3	$\frac{1}{9}$	
	125	$\frac{1}{3}$
	32	-5

219. 對數ノ基礎ノ性質

(1). 如何ナル正數ヲ底數トスルモ,1ノ對數ハ零ナリ。

$$a^0=1, \qquad \therefore \ \log 1=0.$$

(2). 底數ト同ジ數ノ對數ハ1ナリ。

$$a^1=a, \qquad \therefore \ \log a=1.$$

(3). 積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シ。

是レヲ證明スルタメニ

$$\log_a M=m, \quad \log_a N=n.$$

ト假定スレバ

$$a^m=M, \quad a^n=N.$$

$$MN=a^m \cdot a^n=a^{m+n}.$$

此關係ヲ對數ノ關係ニ書キ變ヘレバ

$$\log MN=m+n.$$

$$\therefore \ \mathbf{\log_a MN=\log_a M+\log_a N.}$$

同様ニシテ

$$\mathbf{\log_a MNP=\log_a M+\log_a N+\log_a P.}$$

【注意】 a^m, a^n 等ノ指數 m, n 等ハ無理數ノトキニモ,第一章ニ擧ゲタル指數ノ法則ハ,總テ適用サレルモノト假定ス。

例一。 $\log_a 105=\log_a(3\times5\times7)=\log_a 3+\log_a 5+\log_a 7.$

例二。 $\log_{10}49=1.6902$, $\log_{10}134=2.1271$ ナルコトヲ知リテ, $\log_{10}(49\times134)$ ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned}\log_{10}(49\times134)&=\log_{10}49+\log_{10}134\\&=1.6902+2.1271\\&=3.8173.\end{aligned}$$

(4). 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ,除數ノ對數ヲ減ジタル差ニ等シ。

前ノ如ク $\log_a M=m$, $\log_a N=n$ トスレバ

$$a^m=M, \quad a^n=N.$$

$$\frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

$$\therefore \ \log_a\frac{M}{N}=m-n,$$

$$\therefore \ \mathbf{\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N.}$$

例一。 $\log_a\dfrac{2}{3}=\log_a 2-\log_a 3.$

例二。 $\log_{10}793=2.8993$, $\log_{10}379=2.5786$ ヲ與ヘテ $\log_{10}\dfrac{793}{379}$ ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{793}{379}&=\log_{10}793-\log_{10}379\\&=2.8993-2.5786\\&=0.3207.\end{aligned}$$

(5). 或正數ノ乗羃ノ對數ハ,其數ノ對數ト羃ノ指數トノ積ニ等シ。

$$\log_a N=n, \quad \text{即チ} \quad a^n=N$$

トスレバ

$$N^p=(a^n)^p=a^{np}.$$

$$\therefore \quad \log_a N^p=np,$$

$$\therefore \quad \mathbf{\log_a N^p = p\log_a N.}$$

例。 $\log_{10}1.05=0.0212$ ヲ知リテ,$\log_{10}(1.05)^{20}$ ヲ求メヨ。

$$\log_{10}(1.05)^{20}=20\times\log_{10}1.05$$
$$=20\times0.0212$$
$$=0.4240.$$

(6). 或正數ノ羃根ノ正ノ實數ノ對數ハ,其數ノ對數ヲ羃根ノ指數ニテ割リタル商ニ等シ。

前ノ如ク $\log_a N=n$ トスレバ,$a^n=N$ ニシテ

$$\sqrt[r]{N}=\sqrt[r]{a^n}=a^{\frac{n}{r}}.$$

$$\therefore \quad \log_a\sqrt[r]{N}=\frac{n}{r}.$$

$$\therefore \quad \mathbf{\log_a\sqrt[r]{N}=\frac{1}{r}\log_a N.}$$

例。 $\log_{10}258=2.4116$ ヲ與ヘテ,$\log_{10}\sqrt{258}$ ヲ求メヨ。

$$\log_{10}\sqrt{258}=\log_{10}(258)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_{10}258$$
$$=\frac{1}{2}\times2.4116$$
$$=1.2058.$$

練習問題 (3)

次ノ各數ノ對數ヲ整數ノ對數ノ和,又ハ差ニテ表シ,成ル可ク簡單ニセヨ。 (1)—(4).

1. $\log_a\dfrac{\sqrt[4]{8}}{9^{\frac{1}{5}}6^{\frac{2}{3}}}$.　　**3.** $\log_a\dfrac{(17)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{10}\sqrt{18}}$.

2. $\log_a\dfrac{(12)^{-2}}{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{8}}}$.　　**4.** $\log(\sqrt{2}\sqrt[3]{7^2}\sqrt[5]{6})$.

次ノ各數ノ10ヲ底數トスル對數ヲ求メヨ。但シ $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ ヲ知ルモノトス。

5. 6.　　**8.** 900.

6. 5. $\left(\dfrac{10}{2}\text{トセヨ}\right)$　　**9.** $\sqrt[3]{324}$.

7. 25.　　**10.** $\dfrac{24}{\sqrt[3]{18}}$.

220. 常用對數

數ノ運算ヲ行フトキ,對數ヲ利用スル場合ニハ底數トシテ10ヲ用フ。或數ノ10ヲ底數トスル對

數ヲ常用對數ト云ヒ, $\log_{10}3$ 又ハ $\log_{10}N$ ト書クベキトキニ,底數ヲ畧シテ單ニ $\log 3$, $\log N$ ト書クコトアリ。以下此規約ニ基ヅクモノトス。

10ノ整數羃ヲ求メ,ソレニ對應スル常用對數ヲ揭ゲンニ

$10^0=1$, $\log 1=0$.

$10^1=10$, $\log 10=1$.

$10^2=100$, $\log 100=2$.

$10^3=1000$, $\log 1000=3$.

....

$10^{-1}=0.1$, $\log 0.1=-1$.

$10^{-2}=0.01$, $\log 0.01=-2$.

$10^{-3}=0.001$, $\log 0.001=-3$.

$10^{-4}=0.0001$, $\log 0.0001=-4$.

....

故ニ,次ノ相應ズル二數ノ間ノ數ノ常用對數ハ次ノ表ニ示スガ如クナルベシ。

數	常用對數
1 及ビ 10ノ間	0+(正ノ小數)
10 及ビ 100ノ間	1+(正ノ小數)
100 及ビ1000ノ間	2+(正ノ小數)
1 及ビ 0.1ノ間	−1+(正ノ小數)
0.1 及ビ 0.01ノ間	−2+(正ノ小數)
0.01 及ビ0.001ノ間	−3+(正ノ小數)

常用對數ノ0及ビ正或ハ負ノ整數ノ部分ヲ常用對數ノ**指標**ト云ヒ,正ノ小數ノ部分ヲ**假數**ト云フ。

常用對數表ハ假數ノミヲ揭ゲタルモノナリ。故ニ,常用對數表ハ1ヨリ大ニシテ,10ヨリ小ナル數ノ常用對數表ト云フ事ヲ得。但シ,1及ビ10ノ對數ヲ含ム。

常用對數ノ主ナル性質ヲ明ニスルタメ,先ヅ例ヲ以テ說明スベシ。

對數表ニヨリ

$$\log 3.76=0.5752, \quad \text{即チ} \quad 3.76=10^{0.5752}. \qquad (1)$$

(1)ノ兩邊ニ10ヲ掛ケテ

$$37.6=10^{0.5752}\times 10^{1}=10^{1+0.5752}=10^{1.5752},$$

$$\therefore\quad \log 37.6=1.5752.$$

(2)ノ兩邊ニ100ヲ掛ケテ

$$376=10^{0.5752}\times 10^{2}=10^{2+0.5752}=10^{2.5752},$$

$$\therefore\quad \log 376=2.5752.$$

(1)ノ兩邊ニ1000及ビ10000ヲ掛ケテ

$$\log 3760\ =3+0.5752=3.5752,$$

$$\log 37600=4+0.5752=4.5752.$$

故ニ,1及ビ10ノ間ニアル數ノ常用對數ガ與ヘラレタルトキ,其數ノ小數點ヲ左ヨリ右ニ移シタル數ノ常用對數ハ

1. 假數ハ同ジニシテ,
2. 指標ハ小數點ヲ移シタル桁數ニ等シ。

次ニ,(1)ノ兩邊ヲ10ヲ以テ割レバ

$$0.376=10^{0.5752}\div 10^{1}=10^{0.5752-1},$$

$$\therefore\quad \log 0.376=0.5752-1,\quad 或ハ\ \bar{1}.5752.$$

同樣ニ,(1)ノ兩邊ヲ100ヲ以テ割リ

$$0.0376=10^{0.5752}\div 10^{2}=10^{0.5752-2},$$

$$\therefore\quad \log 0.0376=0.5752-2,\quad 或ハ\ \bar{2}.5752.$$

茲ニ$\bar{1}$,$\bar{2}$ハ指標ガ負數ナルコトヲ示スタメ,-1及ビ-2ノ代リニ用ヒタル記號ナリ。

或數ノ常用對數ノ整數ノ部分(指標)ハ,負數ニテモ差支ナキモ,小數ノ部分ハ常ニ正數ヲ以テ表スコト原則ナリ。故ニ,假數ハ常ニ正數ナリトス。

上ノ例ニヨリ,次ノ結果ヲ得ベシ。

1及ビ10ノ間ニアル數ノ常用對數ガ與ヘラレタルトキ,其數ノ小數點ヲ右ヨリ左ニ移シタル數ノ常用對數ハ

1. 假數ハ同ジニシテ,
2. 指標ハ小數點ヲ移シタル桁數ヲ絶對値トスル負數ナリ。

221. 假數ノ性質ト指標ノ定メ方

前節ノ説明ニヨリ,次ノ性質ヲ知ルベシ。

1. 同ジ數字ノ同ジ配列ヨリ成リ,唯ダ位取リノ異ナル數ノ假數ハ總テ相同ジ。
2. 1ヨリ大ナル數ノ常用對數ノ指標

ハ零又ハ正ノ整數ニシテ,其値ハ小數點以上ノ整數部ノ桁數ヨリ1ヲ減ジタルモノナリ。

3. 1ヨリ小ナル正數ノ常用對數ノ指標ハ負ノ整數ニシテ,小數點以下第一位,第二位,第三位,………ニ於テ初テ0ナラザル有效數字ヲ有スル數ノ指標ハ $\bar{1},\bar{2},\bar{3},$ ナリ。

例一。 log876 ヲ求メヨ。〔附表ヲ使用セヨ〕

與ヘラレタル數ハ三桁ノ整數ナレバ,指標ハ2ナリ。假數ハ對數表ニ於テ,頭字 N ノ行ノ下ノ方ニ,先ヅ87ヲ求メ,次ニ87ノ横列ノ數ノ中デ,頭字6ノ行ノ數9425ヲ求ムレバヨシ。故ニ

$$\log 876 = 2.9425.$$

例二。 log0.043 ヲ求メヨ。

小數點以下有效數字ニ至ル0ノ數ハ1ニシテ,有效數字ハ第二位ヨリ初マレバ指標ハ $\bar{2}$ ナリ。假數ハ N ノ行ノ43ニ應ジ,頭字0ノ行ノ數ヲ求メ,6335ナリ。故ニ

$$\log 0.043 = \bar{2}.6335.$$

練習問題 (4)

次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

1.	422.	**4.**	5470.	**7.**	2.35.
2.	505.	**5.**	6000.	**8.**	0.00497.
3	36.	**6.**	0.315.	**9.**	0.003.

222. 對數表ノ用法

三桁以下ノ數ノ對數ハ,附錄ノ四桁ノ對數表ニヨリ容易ニ之レヲ求メ得ルモ,四桁以上ノ數ノ對數ハ表ニヨリ直ニ其値ヲ求ムルコトヲ得ズ。

但シ

二ツノ數ノ差ガ極メテ小ナルトキハ,ソレニ應ズル假數ノ差ハ數ノ差ニ比例スルコト

ヲ原則トシテ,計算上其略近値ヲ求ムルコトヲ得。

例一。 log3785 ヲ求メヨ。

3785ヲ挿ム二ツノ數,3780及ビ3790ノ對數ヲ求メレバ

$$\log 3780 = 3.5775,$$

$$\log 3790 = 3.5786.$$

是等二ツノ對數ノ差ハ11(之レヲ**表差**ト云フ)ニシテ,ソレハ3790ト3780ノ差10ニ應ズルモノナリ。然ルニ,3785ト3780ノ差ハ5ナレバ,次ノ比例式ヲ得。

$$10:5=11:x, \qquad x=5.5.$$

故ニ,求ムル對數ハ3780ノ對數ノ末位ニ5.5ヲ四捨五入シタルモノ,6ヲ加ヘテ

$$\log 3785=3.5781.$$

表差11ニ應ズル$x=5.5$ハ,表ノ下位ニ附加シタル別表ニヨリ,ソレヲ定ムルコトヲ得。別表ヲ**比例部分ノ表**ト云フコトアリ。卽チ,同表ノ11ニ應ズル横列ノ數ノ中,5ノ行ニアル5.5ガ其値ナリ。

此計算ハ次ノ如ク記(シル)スヲ便トス。

log3780 ……3.5775		表差 11
5 ………… 5.5		
log3785 =3.5781		(四捨五入シテ)

例二。 log87.426ヲ求メヨ。

log87.4 ………1.9415		表差 5
2 ……… ……1.0		
6 ……………… 3.0		
log87.426 =1.9416		(四捨五入シテ)

【注意】 四桁ノ對數表ヲ用フルトキハ,假數ハ常ニ四桁ニ止ムベシ。

練 習 問 題 (5)

次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

1. 487.4. **3.** 0.02532. **5.** 3.1416.

2. 7.524. **4.** 52.408. **6.** 0.028125.

223. 對數ヲ知リテ數ヲ求ムル方法

例一。 1.5647ヲ對數トスル數ヲ求メヨ。

指標ガ1ナレバ,小數點以上二位ノ數ナルコト明ナリ。次ニ,5647ヲ假數トスル數ヲ求メンニ,對數表ニヨリ,367ノ假數ガ丁度5647ナルコトヲ知ル。故ニ,求ムル數ハ36.7ナリ。

例二。 $\log N=2.3948$ニ適スルNヲ求メヨ。

指標ハ2ナレバ,求ムルNハ整數部三桁ノ數ナルコトヲ知ル。次ニ對數表ニヨリ,3948ヲ挿ミソレニ近キ値ヲ假數トスル二數ヲ求ムレバ,248及ビ249ニシテ,248及ビ249ノ假數ハ夫々3945及ビ3962ナリ。

與ヘラレタル對數ノ假數ハ,3945ヨリ3ダケ大

ニシテ,248及ビ249ノ假數ノ差ハ17ナリ。故ニ

$$17:3=10:x. \qquad \therefore\ x=1.8.$$

故ニ,Nハ248.18,四捨五入シテ248.2ナリ。

上ノ計算ハ,比例部分ノ表ヲ用ヒ,表差17ノ横列ニ於テ,3ニ最モ近キ數3.4ニ應ズル數ハ2ナルコトニ注意シ,次ノ如クスルヲ便トス。

$$\begin{array}{ll} 2.3945 \cdots\cdots & 248 \\ 3 \cdots\cdots & 2 \\ \hline 2.3948 = & \log 248.2 \end{array} \qquad \text{表差}\ 17$$

$$\therefore\ N=248.2$$

例三。 $\log N=\bar{2}.7258$ ニ適スルNヲ求メヨ。

$$\begin{array}{ll} \bar{2}.7251 \cdots\cdots & 0.0531 \\ 7 \cdots\cdots & 9 \\ \hline \bar{2}.7258 = & \log 0.05319 \end{array} \qquad \text{表差}\ 8$$

$$\therefore\ N=0.05319.$$

【注意】 四桁ノ對數表ヲ用ヒ,與ヘラレタル對數ニ應ズル數ヲ求メルトキニハ,有效數字四桁ニ止ムベシ。

練習問題 (6)

次ノ各對數ニ應ズル數ヲ求メヨ。

1. 1.3139. **3.** 3.9126. **5.** 0.4127.

2. 0.7148. **4.** $\bar{1}.5983$. **6.** $\bar{2}.0246$.

224. 對數ニ依ル計算法

常用對數ヲ用ヒテ計算ヲ簡捷ニ行ヒ得ルハ,第219節ニ述ベタル對數ノ基礎ノ性質ニ基ク。卽チ,對數ヲ用フレバ,乘法ト除法トハ加法ト減法ニ變ハリ,羃法ト開法ハ乘法ト除法ニ變ハル。

例一。 $N=2870\times 37.54$ ノ値ヲ有效數字四桁マデ求メヨ。

$$\begin{array}{rl} \log 2870 = & 3.4579 \\ \log 37.54 = & 1.5745\ (+ \\ \hline \log N = & 5.0324 \end{array}$$

$$\therefore\ N=107700.$$

例二。 $N=673.2\div 7.81$ ノ値ヲ有效數字四桁マデ求メヨ。

$$\begin{array}{rl} \log 673.2 = & 2.8281 \\ \log 7.81 = & 0.8927\ (- \\ \hline \log N = & 1.9354 \end{array}$$

$$\therefore\ N=86.18.$$

例三。 $N=\dfrac{6.32\times 8.674}{2.851}$ ノ値ヲ有效數字四桁マデ求メヨ。

$$\begin{array}{r}\log 6.320=0.8007\\ \log 8.674=0.9382\ (+\\ \hline \log(6.32\times 8.674)=1.7389\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\log 2.851=0.4550\ (-\\ \hline \log N=1.2839\end{array}$$

$$\therefore\quad N=19.23.$$

例四。 $N=\sqrt[3]{58.61}$ ノ値ヲ求メヨ

$$\begin{array}{r}\log 58.61=1.7680\\ \log\sqrt[3]{58.61}=0.5893\\ \hline \therefore\quad N=3.885.\end{array}$$

例五。 $N=\sqrt[5]{(0.007624)^3}$ ノ値ヲ求メヨ。

$$\log 0.007624=\bar{3}.8822 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\log(0.007624)^3=-9+2.6466$$

$$=\bar{7}.6466$$

$$\log\sqrt[5]{(0.007624)^3}=\frac{1}{5}\times\bar{7}.6466 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$=\frac{1}{5}(-10+3.6466)$$

$$=\bar{2}.7293$$

$$\therefore\quad N=0.05361.$$

【注意】 (1) ノ如ク,指標ガ負數ナル對數ニ,或數ヲ掛ケルニハ,指標ト假數トニ各別々ニ掛ケテ後,ソレヲ纒ムベシ。又,(2) ノ如ク指標ガ負數ナル對數ヲ,或數ニテ割ルニハ,指標ヲ除數ノ倍數ニ變化シ,然ル後,指標ト假數トヲ各

別々ニ割リ,ソレヲ纒ムベシ。

練習問題 (7)

對數表ヲ用ヒ,次ノ各問ノ値ヲ有效數字四桁マデ計算セヨ。

1. $5.83\times 12.02.$

2. $-8945\times 73.85.$

3. $(35.41)^2\times(29.3)^3.$

4. $7065\div 5401.$

5. $\dfrac{5334\times 0.246}{3.1416}.$

6. $\sqrt[4]{72.48}.$

7. $\sqrt[3]{-0.00146}.$

8. $\sqrt{1960\times 256}.$

9. $(29.3)^{\frac{1}{3}}\div(576)^{\frac{1}{2}}.$

10. $\dfrac{\sqrt[3]{0.00071}}{\sqrt[4]{0.006158}}.$

11. 球ノ表面積ハ $4\pi r^2$,體積ハ $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ ナルコトヲ知リテ, $r=1.471$ ナル球ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。但シ $\pi=3.142$ トセヨ。

12. 三角形ノ三邊ヲ a, b, c トシ,三邊ノ和ノ二分ノ一ヲ s トスレバ,三角形ノ面積 **A** ハ

$$\mathbf{A}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ナリ。此公式ヲ用ヒ $a=7.89$ 米, $b=4.75$ 米, $c=3.81$ 米ノ三角形ノ面積ヲ求メヨ。

13. 長サ l ナル眞鍮ノ針金ノ一端ヲ固定シ,他ノ端ニ質量 m ナル錘(オモリ)ヲ懸ケタルトキ,針金ノ延長

s ハ

$$s=\frac{mgl}{\pi r^2 k}$$

ニテ表サル。茲ニ g ハ 980 ニ等シク, r ハ針金ノ切斷面ノ半徑, k ハ一定ノ常數ナリ。今, $m=944.2$「グラム」, $l=219.2$「センチメートル」, $r=0.32$「センチメートル」ナルトキ, $s=0.06$「センチメートル」ナリト云フ。k ヲ求メヨ。

14. 單振子ノ糸ノ長サヲ l トシ, 振子ノ振動ノ週期ヲ $\mathbf{T}$ トスレバ

$$\mathbf{T}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ナル公式アリ。$l=84.9$「センチメートル」ナル振子ノ振動ノ週期ヲ求メヨ。

225. 指數方程式

指數ニ未知數ヲ含ム方程式ヲ**指數方程式**ト云フ。例ヘバ, $2^x=16$ ノ如キハ x ニ就キテノ指數方程式ナリ。斯クノ如キ簡單ナル方程式ノ x ノ値ハ, 視察ニヨリ直ニ求メ得ラルルモ, 一般ニハ對數表ヲ用ヒテ解クベキモノ多シ。

例。 方程式 $2^{2-x}=5^{3(x-1)}$ ヲ解ケ。

JOHN NAPIER
(1550—1617)

じょん・ねぴいあハすこつとらんどノ名流(男爵)ナリ。自然對數ヲ發見セルハねぴいあニシテ　爾後，數ノ計算ハ極メテ簡捷ニ行ハルルニ至レリ。

ねぴいあノ意ヲ承ケ，自然對數ヨリ出デテ成功セルモノ　ぶりーぐす(Briggs, 1556—1631) ノ常用對數ナリトス。常用對數ニ至リテ，對數ノ實用性ハ更ニ一段ノ光輝ヲ增セリ。

10ヲ底數トスル兩邊ノ對數ヲ求メ

$$\log 2^{2-x}=\log 5^{3(x-1)},$$

$$(2-x)\log 2=3(x-1)\log 5.$$

$$\therefore\quad x(3\log 5+\log 2)=2\log 2+3\log 5.$$

$$x=\frac{2\log 2+3\log 5}{3\log 5+\log 2}$$

$$=\frac{0.6020+2.0970}{2.0970+0.3010}$$

$$=\frac{2.699}{2.398}.$$

再ビ,兩邊ノ對數ヲ求メテ

$$\log x=\log 2.699-\log 2.398$$

$$=0.4312-0.3798$$

$$=0.0514.$$

$$\therefore\quad x=1.126.$$

練習問題 (8)

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $5^{2x}=8.$ (東商)

2. $4^{x+1}-2^{x+1}=240.$ (陸士)

3. $2\times 10^{3x}-10^{-3x+1}=1.$ (東商)

4. $\begin{cases}5^{x+y}=82,\\ 3^{x-y}=4.\end{cases}$

5. $\begin{cases}(3-x)^y=100(3+x)^{-y},\\ (8x)^y=100.\end{cases}$ (大工)

6. $(a^2-b^2)^{-1}=\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2x-1}$ ヲ解ケ。 (農實)

7. $6^x=\dfrac{10}{3}-6^{-x}$ ヲ解キ,小數第三位マデ求メヨ。

但シ $\log 2=0.30103,\ \log 3=0.47712.$ (廣師)

226. 對數方程式

方程式ノ中ニ,未知數ヲ含ム式ノ對數ノアルトキ,其方程式ヲ**對數方程式**ト云フ。

例。 $\log(x+1)+\log(x-1)=1$ ヲ解ケ。

$\log 10$ ハ 1 ナルコトニ注意シテ

$$\log(x+1)(x-1)=\log 10,$$

$$x^2-1=10.$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{11}.$$

$x+1$ 及ビ $x-1$ ノ x ヲ $\sqrt{11}$ トスレバ,二式ハ共ニ正數トナルモ,$-\sqrt{11}$ ヲ代入スレバ,二式ハ共ニ負數トナル。正數ノ乘冪ハ常ニ正數ナルヲ以テ負數ノ對數ハ無意味ナリ。$\sqrt{11}$ ハ根ニシテ,$-\sqrt{11}$ ハ根ニ非ズ。

練習問題 (9)

次ノ各方程式ヲ解ケ。

1. $\log(35-x^3)=3\log(5-x).$ (農實)

2. $\log(x-1)-\log(x^2+7x-8)+1=0.$ (長商)

3. $\log\sqrt{5x+5}=1-\log\sqrt{2x-1}.$ (桐工)

4. $\log x^3-\dfrac{12}{\log x}=5.$ (樽商)

5. $x^{\log x}=1000x^2.$ (東工)

6. $\begin{cases}\log x+\log y=2+\log 3,\\ 2x+3y=85.\end{cases}$ (陸士)

7. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=3,\\ \log x+\log y=2.\end{cases}$ (東工)

雜　　題（第十三）

（1）

1. $x=2\frac{1}{4}$ ナルトキ,$x^{x\sqrt{x}}$ ハ $(x\sqrt{x})^x$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

2. 次ノ恒等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$\log_b N=\log_a N\log_b a.$$

【解】 $u=\log_a N,\ v=\log_b N$ ト假定スレバ

$$a^u=N,\quad b^v=N.$$

$$\therefore\ a^u=b^v.$$

$$a=b^{\frac{v}{u}},$$

$$\frac{v}{u}=\log_b a,$$

$$\therefore\ v=u\log_b a.$$

3. $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$ ナルコトヲ證明セヨ。

4. $\log_4 N=0.3518$ ナルトキ, $\log_8 N$ ノ値ヲ求メヨ。

5. $\log_{10}2=0.3010$ ヲ知リテ, $\log_{25}200$ ノ値ヲ求メヨ。

（東商）

（2）

1. $\dfrac{a^{n+1}}{x^n}=\dfrac{b^{n+1}}{y^n}=\dfrac{c^{n+1}}{z^n}=x+y+z$ ナルトキハ,此ノ各式ハ

$\left(a^{\frac{n+1}{n}}+b^{\frac{n+1}{n}}+c^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

2. $a^2+b^2=6ab$ ナルトキハ,次ノ恒等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$\log\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b).$$

（神商）

3. $\log(\sqrt{10}+3)-\log(\sqrt{10}-3)$ ト $2\log(\sqrt{10}+3)$ トハ相等シキコトヲ證明セヨ。

（海軍）

4. n 項ヨリ成ル等比級數アリ。初項ヲ a,第 n 項ヲ l トスレバ,此級數ノ初項ヨリ第 n 項マデノ總テノ項ノ積ハ $(al)^{\frac{n}{2}}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

5. 初項 a,第 n 項 l ナル等比級數アリ。此級數ノ第 r 項ハ $(a^{n-r}l^{r-1})^{\frac{1}{n-1}}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。但シ $r\leqq n$ ナリトス。

（3）

1. $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{c-a}}\left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{b}{a-b}}\left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{b-c}}$ ヲ簡單ニセヨ。但シ $x\neq 0$ トス。

（高等）

2. 次ノ不等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。但シ $\log 2=0.30103,\quad \log 3=0.47712.$

$$100^{96}>9^{200}>100^{95}.$$

（陸士）

3. 8^{50} ハ幾桁ノ數ナルカ,$\log 2=0.30103$ ニヨリテ計算セ

ヨ。 (東商)

4. 2, 4, 8, 16, ……… ナル等比級數ノ初項ヨリ第30項マデノ總和ハ幾桁ノ數ナルカ。但シ $\log 2=0.30103$. (京醫)

5. $(1.08)^x$ ノ整數部分ガ四桁ノ數ナル爲ニハ, x ノ最大値及ビ最小値ハ如何ナル數ナルカ。但シ, x ハ整數ナリトス。

$$\log 2=0.30103, \quad \log 3=0.47712.$$

(高等)

---

(4)

1. 等比級數ヲナス各數ノ對數ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

2. 等比級數ノ第 p 項,第 q 項,第 r 項ヲ夫々 a, b, c トスレバ

$$(q-r)\log a+(r-p)\log b+(p-q)\log c=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{95}$ ヲ小數ニテ表ストキハ,小數點ト最初ノ有效數字トノ間ニアル零ノ個數ハ幾何ナルカ。

但シ $\log 2=0.30103$ トセヨ。 (海軍)

4. $2^1\times2^3\times2^5\times$ ……… ガ初メテ100億ヲ超ユルタメニハ,幾ツノ因數ヲ取レバヨキカ。但シ $\log 2=0.3010$. (北大)

5. 初項1,公比0.5ナル無限等比級數アリ。幾項ヨリ

多クノ和ヲ取レバ,其和ヲ級數ノ無限項ノ和ニ,一萬分ノ一ヨリモ尚モ近迫セシムルコトヲ得ルカ。 (大醫)

---

(5)

1. $2\sqrt{2}$ ヲ底數トシテ $32\sqrt[5]{4}$ ノ對數ヲ求メヨ。

2. $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ ヲ與ヘテ $\log\dfrac{1}{(0.\dot{6})^2}$ ヲ求メヨ。 (長商)

3. $y=10^{\frac{1}{1-\log_{10}x}}$, $z=10^{\frac{1}{1-\log_{10}y}}$ ナルトキハ $x=10^{\frac{1}{1-\log_{10}z}}$ ナルコトヲ證明セヨ。 (海軍)

4. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} z^x=y^{2x}, \\ 8^z=4\times32^x, \\ x+y+z=11. \end{cases}$$

(商大)

5. 燈臺ノ光ガ濃霧ノタメニ妨ゲラレ,光源ヨリ x 尺ニ於ケル光ノ强サハ a^{-x} ニ比例スルト云フ。但シ, a ハ或一定ノ數ナリ。光源ヨリノ距離ガ等差級數ヲナス地點ニ於テハ,光ノ强サハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。又,光源ヨリ5尺ヲ隔テタル地點ニ於テ,光源ノ光ノ强サガ半減セラルルトキハ,强サガ $\dfrac{1}{16}$ ニ減ズル地點ハ光源ヨリ幾尺ノ距離ニアルベキカ。 (東工)

第十五篇

歩合及ビ年金

第一章

歩合

227. 歩合

甲量ノ,ソレト同種類ノ乙量ニ對スル比ヲ**歩合**ト云ヒ,甲量ヲ**歩合高**,乙量ヲ**元高**ト云フ。之レハ,既ニ算術ニテ學ビタルコトナリ。

元高ヲ$\mathbf{A}$,歩合高ヲ$\mathbf{B}$,歩合ヲrトスレバ

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=r,$$

$$\therefore\quad \mathbf{B}=\mathbf{A}r. \qquad (1)$$

元高ト歩合高トノ和ヲ**合計高**,元高ヨリ歩合高ヲ減ジタルモノヲ**殘高**ト云フ。合計高ヲ$\mathbf{S}$,殘高ヲ$\mathbf{D}$トスレバ

$$\mathbf{S}=\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathbf{A}(1+r). \qquad (2)$$

$$\mathbf{D}=\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathbf{A}(1-r). \qquad (3)$$

例。或商品ヲ494圓ニ賣リシガ,賣却手數料ト

シテ,賣價ノ1割2分5厘ヲ支拂ヒタルヲ以テ,結局原價ニ對シ1分2厘ノ損失トナレリト云フ。原價ハ幾何ナリシカ。

賣價494圓ヨリ手數料ヲ支拂ヒタル殘高ハ

$$494\times(1-0.125)圓$$

ニシテ,之レハ原價ヲx圓トスレバ,原價ノ1分2厘ノ損失ヲナシタル殘高

$$x(1-0.012)圓$$

ニ等シカルベキヲ以テ,次ノ方程式ヲ得。

$$494\times(1-0.125)=x(1-0.012).$$

$$\therefore\qquad x=437.5.$$

故ニ,原價ハ437圓50錢ナリ。

228. 內割歩合,外割歩合

原價10圓ノ商品ヲ割引シテ8圓ニ賣レバ,割引高ハ2圓ナリ。其割引歩合ハ,割引高2圓ノ定價10圓ニ對スル比ニ等シク2割ナリ。然ルニ,割引高2圓ノ賣價8圓ニ對スル比ハ2割5分ニシテ,此割引歩合ヲ前ノ割合歩合ニ對シテ**外割歩合**ト云ヒ,前ノ割引歩合ヲ**內割歩合**ト云フ。

原價(元高)ヲ A, 割引高(歩合高)ヲ B, 內割步合ヲ r,

外割步合ヲ r' トスレバ

$$r=\frac{B}{A}, \tag{4}$$

$$r'=\frac{B}{A-B}. \tag{5}$$

(4) ヨリ B＝Ar, 之レヲ (5) ノ B ニ代入シテ

$$r'=\frac{r}{1-r}. \tag{6}$$

(6) ヨリ r ヲ r' ノ項ニテ表セバ

$$r=\frac{r'}{1+r'}. \tag{7}$$

例。 外 2 割 5 分引ハ內幾割引ニ當ルカ。

公式(7) ニ於テ, $r'=0.25$ トスレバ

$$r=\frac{0.25}{1+0.25}=\frac{0.25}{1.25}=0.2.$$

故ニ, 內 2 割引ニ當ル。

練　習　問　題　(1)

1. 或株式會社ノ某年ニ於ケル純益ハ資本金ノ 1 割ニ當レリ。此純益金ノ中, 1 割ヲ積立金トシ, 7 割ヲ株主ノ配當金トシテ削除シ, 尙ホ 560 圓ヲ殘セリ。此會社ノ資本金額ヲ求メヨ。

2. 商人アリ。或商品ヲ賣リテ 2 割 5 分ノ損失ヲナセリ。若シ, 原價ガ 50 錢安カリシナラバ, 却ツテ 2 割 5 分ノ利益ヲ得タリシナラント云フ。原價ハ幾何ナリシカ。 (山商)

3. 或人疾病ニ罹リ, 其體重以前ヨリモ 2 割 5 分ヲ減ジタルガ, 病氣保養ノ結果, 保養前ノ體重ニ比シ 2 割ヲ增セリト云フ。保養後ノ體重ハ病前ニ比シ幾割減少シタルカ。 (東師)

4. 或事業ニ於テ, 甲ハ若干圓ヲ資本金トシテ金 480 圓ノ利益ヲ得, 乙ハ甲ヨリ金 1200 圓ダケ少キ資本金ニテ同額ノ利益ヲ得タリ。而シテ, 其利益ノ步合ノ差ハ 2 分ナリト云フ。甲乙兩人ノ資本金及ビ利益ノ步合ヲ求メヨ。 (東師)

5. 或商品ヲ外 1 割 2 分引ニテ賣レバ, 內 1 割 2 分引ニテ賣ルヨリモ, 7 圓 20 錢ノ利益アリト云フ。其商品ノ價格ヲ求メヨ。

6. 或商品ヲ原價ノ外 3 割引ニテ賣ルノト, 內 2 割引ニテ賣ルノト, 其賣價ノ差ハ原價ノ內幾割ニ當ルカ。

7. 圓ニ內接スル正三角形及ビ正六角形ノ一邊ヲ夫々 a, b トシ, 此圓周ノ近似値ヲ $8b-a$ ニテ表

セバ,其誤差(眞値ト近似値トノ差)ノ眞値ニ對スル比ハ「幾ぱーせんと」ナルカ。但シ,$\pi=3.1416$トセヨ。

(大工)

第二章

利息算

229. 單利法

利息ガ元金ト期間數トニ複比例スルトキノ利息算ヲ**單利法**ト云フ。

元金ヲ**A**,單位期間ノ利率ヲr,期間ヲ表ス數ヲt,全期間ノ利息ヲ**B**,元利合計ヲ**S**トスレバ

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}rt, \tag{1}$$

$$\mathbf{S}=\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathbf{A}(1+rt). \tag{2}$$

【注意】單位期間ガ1日ナルトキハ,特ニ元金百圓ニ對スル利息ヲ用ヒ,**日歩**何錢何厘ト云フ。

230. 手形ノ割引

或期日ニ支拂ヲ受クベキ手形ヲ以テ,支拂期日以前ニ支拂ヲ受ケントスル場合ニハ,額面高ヨリ,額面高ヲ元金トシ,其日ヨリ期日ニ至ルマデノ利息ヲ引キ去ラルルモノナリ。之ヲ**手形ノ割引**ト云ヒ,引キ去ラルル金高ヲ**割引高**,手取金ヲ**現價**,割引ニ用ヒル利率ヲ**割引歩合**ト云フ。

額面高ヲ**A**,單位期間ニ於ケル割引歩合ヲr,期間ヲ表ス數ヲt,現價ヲ**P**,割引高ヲ**B**トスレバ

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}rt. \qquad (3)$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}(1-rt). \qquad (4)$$

理論上ヨリ云ヘバ,現價ト現價ガ割引當日ヨリ支拂期日ニ至ルマデニ生ズル利息トノ和ガ,額面高ニ等シクナル樣ニ計算スルノガ至當ナリ。其計算ノ方法ニヨレバ

$$\mathrm{A}=\mathrm{P}(1+rt),$$

$$\therefore \quad \mathbf{P}=\frac{\mathbf{A}}{1+rt}. \qquad (5)$$

$$\mathbf{B}=\mathrm{A}-\mathrm{P}=\mathrm{A}-\frac{\mathrm{A}}{1+rt}$$

$$=\frac{\mathbf{A}rt}{1+rt}. \qquad (6)$$

後ノ計算法ニヨリ割引スルノヲ**眞割引**ト云ヒ,ソレハ額面高ノ外割引ニ相當スルモノナリ。

初メノ割引ノ方法ハ,後ノニ比較シテ,極メテ簡單ナレバ,實際ニ銀行等ノ割引ハ初メノ方法ニ從フモノナリ。之ヲ**銀行割引**ト云フ。丁度,額面高ノ內割引ニ相當スル計算ノ方法ナリ。

例一。支拂期日大正十四年十月五日,額面高,金750圓ノ手形ヲ,大正十四年九月十日ニ銀行ニ持參シ割引スルニ,割引日步二錢ナリト云フ。現價ハ何程ナルカ。

公式**(4)**ニ於テ

$$\mathrm{A}=750^{円},\quad r=\frac{0.02}{100},\quad t=26.$$

$$\mathrm{B}=750^{円}\times\frac{0.02}{100}\times 26=3.^{円}9.$$

$$\therefore \quad \mathrm{P}=750^{円}-3.^{円}9=746^{円}.1.$$

故ニ,九月十日ニ於ケル手形ノ現價ハ746圓10錢ナリ。

例二。額面1900圓ノ手形アリ。支拂期日ハ今ヨリ四ケ月ノ後ナリ。割引歩合年6分ナルトキ,今,銀行割引ニヨルノト,眞割引ニヨルノト何程ノ差額ヲ生ズベキカ。

公式**(3)**及ビ**(6)**ニ於テ

$$\mathrm{A}=1900^{円},\quad r=0.06,\quad t=\frac{4}{12}.$$

$$\text{銀行割引高}=1900^{円}\times 0.06\times\frac{4}{12}=33^{円},$$

$$\text{眞割引高}=\frac{1900^{円}\times 0.06\times\frac{4}{12}}{1+0.06\times\frac{4}{12}}=37.^{円}25.$$

故ニ,銀行割引高ト眞割引高トノ差額ハ

$$38^{円} - 37.^{円}25 = 0.^{円}75.$$

答. 75錢.

【注意】 割引ノ期間ガ短キトキハ,銀行割引高ト眞割引高トノ差ハ比較的小ナリ。故ニ,實務上ハ計算ヲ簡便ニ行フタメ,銀行割引ヲ用フ。以下ノ問題ニ於テモ,割引ハ銀行割引ニ依ルモノトス。

練習問題 (2)

1. 元金1400圓ヲ1年4ケ月間貸シ附ケテ利息金160圓ヲ得。此割合ニテ,元金6400圓ヲ何年何ケ月間貸セバ,利息金400圓ヲ得ベキカ。 (高等)

2. 或人金840圓ヲ日歩1錢5厘,90日間ノ期限ニテ借リ入レタルニ,20日間ヲ經テ幾圓カ返金シ,期日ニ至リ588圓61錢ヲ支拂ヘリト云フ。中途ニテ返濟セシ金額ヲ求メヨ。

3. 或人年7分ニテ若干圓ヲ借リ,其金全部ヲ以テ6分利附公債,額面4500圓ヲ100圓ニ付キ96圓ノ相場ニテ買ヒタリト云フ。半年間ノ借リ金ノ利息ト公債ノ利息トノ差ヲ求メヨ。 (東商)

4. 或人,次ノ如キ手形ヲ所持セリ。「額面高五

百八拾圓,支拂期日大正十四年十一月十日」,此人現金ノ必要アリテ,同年六月三日此手形ヲ銀行ニ持參シ,年8分5厘ノ歩合ニテ割引ヲ請求シタリ。幾何ノ金額ヲ受取ルベキカ。但シ,厘位ハ四捨五入セヨ。

5. 或人,今ヨリ3ケ月後ニ支拂ヲ受クベキ額面高250圓ノ手形ヲ銀行ニ持參シテ割引ヲ求メ,現金246圓25錢ヲ得タリ。割引歩合,年利率幾分ニ當ルカ。

6. 今ヨリ3ケ月後ニ受取ルベキ金アリ。今,年利率8分ニテ割引スルトキハ,眞割引ニ依ルノト銀行割引ニ依ルノトニテ,受取高ニ1圓ノ差アリトイフ。額面高ヲ求メヨ。

7. 今ヨリ4ケ月後ニ支拂フベキ金2460圓アリ。之ヲ年x%ニテ眞割引ニヨリ割引スルノト,年x%ニテ銀行割引ニヨリ割引スルノト,其割引ノ高ニ$1.^{円}5$ノ差アリト云フ。xヲ求メヨ。 (神商)

231. 複利法

利息ノ計算ニ於テ,一定ノ期間(通例,半年又ハ一

年)ノ終リ毎ニ利息ヲ元金ニ加ヘ,ソレヲ次期ノ元金トシテ計算スル方法ヲ**複利法**ト云フ。

元金ヲ A,一期間ノ利率ヲ r,第一期末ノ元利合計ヲ S_1,第二期末ノ元利合計ヲ S_2,等トスレバ

$$S_1=A(1+r),$$

$$S_2=S_1(1+r)=A(1+r)^2,$$

$$S_3=S_2(1+r)=A(1+r)^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n=S_{n-1}(1+r)=A(1+r)^n.$$

今,第 n 期末ノ元利合計 S_n ヲ S トスレバ,次ノ公式ヲ得。

$$\mathbf{S=A(1+r)^n.} \qquad (7)$$

之ヲ計算ノ便宜ノタメニ,對數ノ關係ニ直セバ

$$\mathbf{\log S=\log A+n\log(1+r).} \qquad (8)$$

【注意】 年利率 r ナルトキ,半年毎ノ複利法ニヨリ元利合計ヲ計算スルトキニハ,公式(7)叉ハ(8)ノ r ヲ $\frac{r}{2}$ トスレバヨシ。其他之ニ準ズ。

例一。 金250圓ヲ年利率5分,一年毎ノ複利ニテ預ケ置クトキハ,25年末ノ元利合計ハ何程トナルカ。

公式(8)ニ於テ

$$A=250, \quad r=0.05, \quad n=25.$$

$$\log S=\log 250+25\log(1+0.05),$$

$$\begin{array}{r} \log 250=2.3979 \\ 25\log 1.05=0.5300 \\ \hline \log S=2.9279 \end{array} \ (+$$

$$\therefore \qquad S=847.0.$$

故ニ,25年末ノ元利合計ハ約847圓ナリ。

【注意】 以上ノ計算ニハ,四桁ノ對數表ヲ用ヒタリ。尙ホ桁數ノ多キ表ニ依レバ,一層精密ナル結果ヲ得べシ。

若シ,期間ガ一期ニ滿タザルモノアルトキハ,期間ヲ表ハス數 n ガ整數ノ部分ト,小數ノ部分トヨリナルベシ。次ノ例ヲ見ヨ。

例二。 金2000圓ヲ年利率8分,半ケ年毎ノ複利ニテ銀行ニ預ケレバ,幾年ノ後ニ金5000圓トナルベキカ。

公式(7)ニ於テ

$$S=5000, \quad A=2000, \quad r=\frac{0.08}{2}=0.04$$

トスレバ

$$5000=2000(1+0.04)^n,$$

$$\therefore \qquad 2.5=1.04^n.$$

兩邊ノ對數ヲ求メ

$$\log 2.5 = n \log 1.04,$$

$$n = \frac{\log 2.5}{\log 1.04} = \frac{0.3979}{0.0170} = \frac{3979}{170}.$$

$$\therefore \quad \log n = \log 3979 - \log 170.$$

$$\begin{array}{r} \log 3979 = 3.5998 \\ \log 170 = 2.2304 \;(- \\ \hline \log n = 1.3694 \end{array}$$

$$\therefore \quad n = 23.41.$$

依テ,求ムル年數ハ

$$\frac{1}{2} \times 23.41 = 11.71.$$

0.71 年ハ $12^{月} \times 0.71 = 8^{月}.52$ トナレバ,答ハ約 11 年 9 ケ月ナリ。

練習問題 (3)

1. 年利率 5 分,一年毎ノ複利ニテ金 400 圓ヲ 15 ケ年預ケ置カバ,元利合計何程トナルカ。

2. 或金額ヲ年利率 5 分 2 厘,一年毎ノ複利ニテ 91 年間利殖スルトキハ,元利合計ガ元金ノ百倍ヲ超ユルコトヲ證明セヨ。

3. 年利率 5 分,一年毎ノ複利ニテ 10 年間預ケ置キ,元利合計 1000 圓トナルベキ現在ノ金額(現價)ヲ求メヨ。

4. 三年間ノ利息ガ單利ニテ 450 圓,一年毎ノ複利ニテ 477.円54 トナルベキ元金及ビ年利率ヲ求メヨ。 (高等)

5. 645 圓ヲ半年ヲ一期トスル複利ニテ 24 ケ年預ケ置クトキハ,元利合計 3362.円76 トナルベシト云フ。年利率ヲ求メヨ。

6. 年利率 5 分,一年毎ノ複利ニテ預ケ置キ,元利合計ガ元金ノ二倍以上トナルノハ幾年ヲ經タル後ナルカ。 (商船)

7. 某國,人口統計表ニ依レバ,一ケ月間ノ出生數及ビ死亡數ハ夫々其月ノ始メニ於ケル人口ノ $\frac{1}{480}$ 及ビ $\frac{1}{600}$ ナリ。此狀況ニテ進メバ,人口ガ今ノ二倍トナルノハ,幾年幾月ノ後ナルカ。 (東商)

第三章

年金算

232. 年賦積立金

每年,一定ノ期日ニ積立ツル一定ノ金額ヲ**年賦金**ト云フ。

每年末 a 圓宛ヲ年利率 r,一年每ノ複利ニテ積立テルトキ,第 n 年後ノ終リニ於ケル總積立金ノ元利合計 **S** ヲ求メンニ,先ヅ各年末ノ積立金ノ n 年後ノ元利合計ヲ各々計算シテ見レバ

第一回積立金ノ元利合計 $=a(1+r)^{n-1}$,

第二回積立金ノ元利合計 $=a(1+r)^{n-2}$,

………………………………………

第$(n-1)$回積立金ノ元利合計 $=a(1+r)$,

第 n 回積立金 $=a$.

$$\therefore\quad S=a+a(1+r)+\cdots\cdots+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-1}$$

$$=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}.$$

$$\therefore\quad \mathbf{S}=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}. \qquad (1)$$

【注意】 每年ノ始メニ a 圓宛,一年每ノ複利ニテ n 年間

積立テルトキハ,n 年後ニ於ケル積立金ノ元利合計ハ

$$\mathbf{S}=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}.$$

例。 年利率6分,一年每ノ複利ニテ十年間,每年末ニ 100 圓宛ノ拂込ニテ積立テルトキ,第十年ノ終リニ於ケル積立金ノ元利合計ハ何程トナルカ。

公式 **1** ニ於テ

$$a=100,\qquad r=0.06,\qquad n=10.$$

$$\therefore\quad S=\frac{100\times(1.06^{10}-1)}{0.06}.$$

$N=1.16^{10}$ ヲ對數表ヲ用ヒ,計算センニ

$$\log 1.06=0.0253,$$

$$10\log 1.06=0.253$$

$$\log N=0.253$$

$$\therefore\quad N=1.790.$$

$$\therefore\quad S=\frac{100\times 0.79}{0.06}=1317.$$

答. 約 1317圓.

233. 年賦償還金

年ノ始メニ年利率 r,一年每ノ複利ニテ **A** 圓ヲ借リスレ,其年ヨリ初メテ每年末ニ一定ノ金額ヲ償還シ,第 n 年ニ至リ皆濟セントス。 此時,每年末

ニ支拂フベキ年賦金 a 圓ヲ求メンニ,ソレハ毎年ノ終リニ a 圓宛預ケ入レテ,其積立金ノ第 n 年ノ終リニ於ケル元利合計ガ,元金 A 圓ノ元利合計,即 $A(1+r)^n$ ニ等シクナレバヨシ。故ニ,毎年末 a 圓宛 n 年間積立テルトキノ元利合計ノ公式(1)ヲ用ヒ,次ノ方程式ヲ得。

$$\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}=A(1+r)^n,$$

$$\therefore\quad a=\frac{\mathbf{A}r(\mathbf{1}+r)^n}{(\mathbf{1}+r)^n-\mathbf{1}}. \qquad (2)$$

例. 或人開墾ノ目的ヲ以テ,農工銀行ヨリ金壹萬圓ヲ年8分,一年毎ノ複利ニテ借リ入レ,滿一ヶ年後ヨリ25個年ニ年賦償還セントス。年賦金額ハ何程トナルカ。

公式(2)ニ於テ

$$A=10{,}000,\quad r=0.08,\quad n=25$$

トスレバ

$$a=\frac{10000\times0.08\times1.08^{25}}{1.08^{25}-1}.$$

對數表ヲ用ヒ, $N=1.08^{25}$ ヲ求メンニ

$$\log1.08=0.0334,$$

$$\begin{array}{l} 25\log1.08=0.8350 \\ \hline \log N\ =0.8350 \end{array}$$

$$\therefore\quad N=6.839.$$

$$\therefore\quad a=\frac{10000\times0.08\times6.839}{5.839}=\frac{800\times6839}{5839}.$$

更ニ,兩邊ノ對數ヲ取リ

$$\log a=\log800+\log6839-\log5839.$$

$$\begin{array}{l} \log800=2.9031 \\ \log6839=3.8350\ (+ \\ \hline \qquad 6.7381 \\ \log5839=3.7663\ (- \\ \hline \log a=2.9718 \end{array}$$

$$\therefore\quad a=937.2$$

故ニ,求ムル年賦金ハ約937圓20錢ナリ。

練習問題(4)

1. 毎年ノ始メニ金50圓宛,年利率7分,一年毎ノ複利ニテ銀行ニ預ケ入レルトキハ,第20年ノ終リニハ元利合計何程トナルカ。

2. 年利率5分,一年毎ノ複利ニテ10個年ノ終リニ元利合計5,000圓ヲ得ントス。毎年ノ末ニ於ケル積立金ヲ幾圓宛ニスレバヨキカ。

3. 或人金一千圓ヲ年9分,一年毎ノ複利ニテ借リ入レ,爾後一個年毎ニ支拂フベキ年賦金ニテ十個年ニ之ヲ返濟セントス。年賦金ハ何程ナルカ。（神商）

4. 某會社アリ。金五萬圓ヲ年利率6分,一年毎ノ複利ニテ借リ入レ,滿五年間据置キ,其後二十個年ニ年賦償還セントス。年賦金如何。

5. 或人金100圓ヲ年利率5分,一年毎ノ複利ニテ銀行ニ預ケ,其後二年毎ニ金10圓宛引出セリ。二十年後ノ殘金如何。（農實）

6. 或人二十五歳ノ時,年ノ始メニ生命保險ニ加入シ,保險金2000圓ヲ得ンガ爲メニ,毎年ノ始メニ保險金ノ2分ニ當ル保險料ヲ納メ,四十歳ノ時,年ノ終リニ死セリ。此人,生命保險ニ加入スル代リニ,毎年保險料ダケノ金額ヲ年利率五分,毎年末ニ利息ヲ元金ニ繰入レル複利法ニテ銀行ニ預ケタリトセバ,何程ノ損益ヲ生ズベキカ。但シ,錢位未滿ヲ四捨五入セヨ。

234. 年金

一定ノ期間,又ハ永續シテ一定ノ期日毎ニ支拂ヒ,又ハ支拂ヲ受クル一定ノ金額ヲ**年金**ト云フ。一定ノ期間ニ限ル年金ヲ**定期年金**,永久ニ繼續スル年金ヲ**永續年金**ト云フ。

將來,繼續シテ年金ヲ生ズベキ現在ノ資金ノ額ヲ年金ノ**現價**ト云フ。

235. 年金ノ現價

今ヨリ初メテ,一年ノ終リ毎ニ a 圓宛,n 年間支拂ヲ受クル年金アリ。年利率 r,一年毎ノ複利トシテ,其年金ノ現價 $\mathbf{P}$ ヲ求メンニ,各年支拂ヲ受クル a 圓ノ現價ヲ別々ニ計算スレバ

$$第一回ノ年金ノ現價=\frac{a}{1+r},$$

$$第二回ノ年金ノ現價=\frac{a}{(1+r)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$第(n-1)回ノ年金ノ現價=\frac{a}{(1+r)^{n-1}},$$

$$第\,n\,回ノ年金ノ現價=\frac{a}{(1+r)^n}.$$

$$\therefore\quad \mathbf{P}=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{a}{(1+r)^{n-1}}+\frac{a}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{a}{1+r}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{1+r}\right)^n}{1-\dfrac{1}{1+r}}$$

$$=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r(1+r)^n}. \qquad (3)$$

若シ,期間ヲ表ス數 n ガ限リナク大ナルトキハ,永續年金ノ現價ヲ得ベク,其時ニハ

$$P=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots\cdots \qquad \text{(無限項ノ和)}$$

トナル。之レハ初項 $\frac{a}{1+r}$, 公比 $\frac{1}{1+r}$ ガ1ヨリ小ナル無限等比級數ノ和ナルヲ以テ

$$P=\frac{\frac{a}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{a}{r}. \qquad (4)$$

【注意】公式(3)ハ,公式(2)ノ a ヲ年金,A ヲ年金ノ現價ト見テ,ソレヨリ導キテモ差支ナシ。

例一。 年利率4分,一年毎ノ複利トシテ,今ヨリ一年毎ニ五年間105圓宛支拂ヲ受クル年金アリ。現價ヲ求メヨ。

公式(3)ニ於テ　$a=105,\ r=0.04,\ n=5$ トスレバ

$$P=\frac{105(1.04^5-1)}{0.04\times1.04^5}.$$

之ヲ對數表ヲ用ヒテ計算シ,約466圓20錢トナル。

例二。 毎年300圓宛ノ永續年金アリ。年利率6分,一年毎ノ複利ナルトキ,其現價ハ何程ナルカ。

公式(4)ニ於テ　$a=300,\ r=0.06$ トスレバ

$$P=\frac{300}{0.06}=5{,}000. \qquad \text{答.　5,000圓.}$$

練習問題 (5)

1. 今ヨリ初メテ,一年ノ末毎ニ500圓宛,30年間受取リ得ベキ年金アリ。年利率6分,一年毎ノ複利トシテ其現價ヲ求メヨ。

2. 六年間据置キ,据置期間ノ終了ト共ニ初マリ,一年毎ニ300圓宛,20年間繼續スル年金アリ。年利率6分,一年毎ノ複利トシテ其現價ヲ求メヨ。

3. 毎年200圓宛ノ永續年金アリ。今之レヲ40年繼續ノ定期年金ニ振リ變ヘントス。定期年金額何程ヲ得ベキカ。但シ,年利率6分,一年毎ノ複利トシテ計算セヨ。

4. 今ヨリ滿一年毎ニ年金 a 圓ヲ $2n$ 年間受取ルベキ人ガ,第一回ノ年金ハ長男ニ,第二回ノ年金ハ次男ニ,第三回ノ年金ハ長男ニ,追ツテ斯クノ如ク與フルコトヲ約セリ。然ラバ,此二子ノ受取ルベキ金額ノ現價ノ差ハ何程ナルカ。年利率 r,一年毎ノ複利トシテ計算セヨ。　(陸士)

雜　題 (第十四)

(計算ニハ成ルナク對數表ヲ使用セヨ)

(1)

1. $v=\pi l(x^2-y^2)$ ヲ知リテ, (*a*) x ヲ v, l, y ノ項ヲ以テ書キ表セ。(*b*) $y=13, l=3.6, v=610, \pi=3.142$ ナルトキノ x ノ正數ノ値ヲ求メヨ。

2. 或一數ヲ $2^x, 5^y, 10^z$ ノ何レニテモ表シ得ルトセバ

$$z=\frac{xy}{x+y}$$

ナルコトヲ證明セヨ。(廣師)

3. 或人,人ヲ傭フニ當リ「給金ハ一年 100 圓ノ割合デ支拂フガ,一年毎ニ20圓宛增額シヨウカ,ソレトモ半年毎ニ 5 圓宛增額シテ行カウカ。ドチラデモ希望ノ通リニ契約シヨウ」ト。雇人ハ何レノ契約ヲ選ブベキカ。

4. 柱時計ハ振子ノ伸縮如何ニヨリ時間ニ遲速ノ差ヲ生ズ。華氏60°ノトキ正確ニ進ム柱時計アリ。且ッ60°以外ニ於ケル遲速ノ差異ハ60°ト温度ノ差ノ平方ノ如ク變ハル。今,温度52°ノトキ一日ニ付キ1.5秒進ム割合ナルヲ知レリ。温度40°ノトキニハ一日ニ付キ幾秒進ムカ。

5. 果物商アリ。林擒十箱ヲ買ヒ,運賃 6 圓ヲ拂ヘリ。

然ルニ,5% ノ腐リヲ生ズルモ六割ノ利益アル見込ニテ一個16錢宛ニ賣リシニ,78個ノ腐リヲ生ゼシタメ,結局四割ノ利益ヲ得タリト云フ。一箱ノ原價幾何ナルカ。但シ,箱ハ全部ニテ48錢ニ賣ルモノトス。(商大)

(2)

1. $u=25.24,\ v=13.27$ ナルトキ,次ノ方程式ニ適スル x ノ値ヲ有效數字三桁マデ求メヨ。

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}.$$

2. 底面ノ半徑ガ 3.5 寸ナル圓壔ニ,同ジ大サノ底面ヲ有スル圓錐ヲ重ネテ,砲彈形ノ立體ヲ作ルニ,全體ノ體積ハ 1000立方寸,高サハ 2 尺 9 寸ナリト云フ。圓壔ト圓錐ノ各高サヲ求メヨ。但シ,圓壔ノ高サヲ l トスレバ其體積ハ $\pi r^2 l$ ニ等シク,圓錐ノ高サヲ l' トスレバ其體積ハ $\frac{1}{3}\pi r^2 l'$ ニ等シ。玆ニ,r ハ各底面ノ半徑ヲ表ス。

3. 學校ノ經費ノ一部分ハ,生徒ノ多寡ニ拘ハラズ一定ナレドモ,殘リノ部分ハ生徒ノ數ニ正比例ス。或年,生徒 180 人ノトキ 3680圓ヲ要シ,翌年ハ 210 人ニ增加シタル爲メ 4100圓ヲ要セリ。其翌年,生徒ハ 230 人ニ增加セリ。其年間ノ經費ヲ計算セヨ。

4. 或物品ニ對スル製造人ノ評價ハ,製造價格ニ其 p 分ノ利益ヲ加ヘタルモノナリ。今,ソレヲ評價ヨリ q 分割引シテ問屋ニ卸ストスレバ,製造人ハ結局幾分ノ利益ヲ得ルコトトナルカ。

5. 或物品ヲ製造人ハ a 圓ニテ造リ,ソレヲ問屋ニ卸シ,問屋ハ $p\%$ ノ利益ヲ以テ小賣商ニ賣渡シ,小賣商ハ更ニソレニ $q\%$ ノ利益ヲ加ヘ,b 圓ヲ以テ需要者ニ販賣セリ。製造人ノ利益ノ歩合ハ幾%デアルカ。又,問屋,小賣商ノ利益ノ歩合ハ從前ノ儘トシテ,製造人ガ其利益ヲ二倍ニスレバ,需要者ノ支拂フ增額ノ割合ハ何程ナルカ。

---

(3)

1. 五位ノ整數アリ。之ヲ9ニテ除シテ得ベキ剩餘ハ,其數字ノ和ヲ9ニテ除シテ得ベキ剩餘ニ等シキコトヲ證明セヨ。 (高等)

2. m 位ノ正整數ト,n 位ノ正整數トノ積ハ少クトモ $(m+n-1)$ 位,多クトモ $(m+n)$ 位ノ整數ナルコトヲ證明セヨ。

3. 上中下ノ林檎アリ。1圓ニ付キ,上ハ中ヨリ4個少ナク,又3圓ニ付キ下ハ中ヨリモ20個多ク買ヒ得ベシ。而シテ,中1個ノ價ハ上下各1個ノ價ノ平均額ニ等シト

云フ。中ハ1圓ニ付キ幾個ヲ買ヒ得ベキカ。 (東師)

4. 等差級數ヲナス四ツノ整數アリ。其平方ノ和ハ120ニシテ,第二數ト第四數トノ積ハ第一數ト第三數トノ積ノ2倍ヨリ大ナルコト8ナリ。此ノ四ツノ整數ヲ求メヨ。 (高等)

5. 水面以下 d 尺ノ深サノ所ヨリ,體積 v ナル空氣ノ泡ガ水面マデ昇リシトキ,其體積Vハ次ノ公式ニヨリ示サル。

$$V=\frac{d+34}{34}v.$$

若シモ,150尺ノ深サノ所ヨリ,直徑 $\frac{1}{10}$ 寸ノ泡ガ球形ヲ保チテ水面マデ昇リシトキハ,其直徑ハ幾寸トナルカ。

但シ,半徑 r ナル球ノ體積ハ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ニ等シ。

---

(4)

1. n ノ値ノ如何ニ拘ラズ,第 n 項ガ an^2+bn+c ナル級數ニ於テ

(a) 連續セル二項宛ノ差ハ等差級數ヲナスコトヲ示セ。

(b) 第一項ヨリ第 n 項マデノ和ヲ求メヨ。

2. 同一ノ年金ヲ以テ,n 年,$2n$ 年,$3n$ 年ノ年賦償還ヲ

行ハントス。ソレニ應ズル現價ヲa圓,b圓,c圓トスレバ

$$a^2-ab+b^2=ac$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. 二ケ國ヨリ成ル或縣アリ。其一ケ國ハ一里平方ノ人口平均q人,他ハ一里平方ノ人口平均r人ナリ。同縣ノ總人口p人,總面積m平方里ナリト云フ。二國ノ各面積ヲ求メヨ。

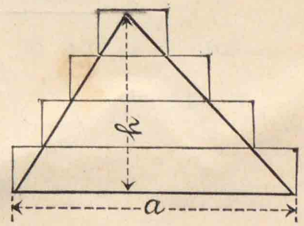
4. 甲乙丙三種ノ株券アリ。其ノ現在市價ノ比ハ5:3:2 ニシテ,一年前ノ市價ニ比シ,甲ハ一割ノ騰貴,乙ハ二割ノ騰貴,丙ハ一割ノ下落ニ當ルト云フ。一年前ニ,甲株券 220 枚,乙株券 100 枚,丙株券 180 枚ヲ買ヒタル人ガ得タル利益ノ,買價ニ對スル歩合ヲ求メヨ。(厘位未滿四捨五入) (商大)

5. 光ヲ垂直ニ受ケル表面ノ照度ハ,其光源ノ光度ニ正比例シ,光源ヨリノ距離ノ平方ニ逆比例ス。水平ノ机アリ。垂直ニ上ニ,5尺ヲ隔タレル16燭光ノ電燈ニヨリ照サル。(a)若シ電燈ヲ今ヨリ2尺上ニシテ,尙机ガ同照度ヲ保ツタメニハ,幾燭光ノ電燈ニ變ヘル必要ガアルカ。(b) 16燭光ヲ25燭光ニ變ヘテ,尙机ガ同照度ヲ保ツタメニハ,今ヨリモ電燈ヲ幾尺上ニスル必要ガアルカ。

(5)

1. 一數アリ。之ニ$0.3\dot{1}2\dot{5}$ヲ乘ズベキヲ誤リテ0.3125ヲ乘ジタルニヨリ,積ニ1ノ差ヲ生ジタリトイフ。其數ヲ求メヨ。 (名工)

2. 圖ニ於テ,三角形ノ底邊ノ長サヲa,高サヲhトスルトキ,二邊ヲ夫々n等分シ,對應スル等分點ヲ結ビ,圖ノ如キ矩形ヲ作レバ,是等ノ矩形ノ面積ノ和ト,三角形ノ面積トノ差ハ何程ナルカ。又nガ限リナク大ニナルトキヲ考ヘヨ。



3. 物體ノ重サハ地球ノ表面ヨリ昇ルニ從ヒ,地球ノ中心ヨリノ距離ノ平方ニ正比例シテ減少ス。重サガ二分ノ一ニナルニハ,地球ノ表面ヨリ幾哩隔タルコトヲ要スルカ。地球ノ半徑ヲ 4000 哩トシテ計算セヨ。

4. 遊星ガ太陽ヲ一周スルニ要スル時間ノ二乘ハ,太陽ヨリノ距離ノ三乘ニ正比例ス。太陽ヨリ地球及ビ金星ニ至ル距離ガ,夫々$91\frac{1}{4}\times10^6$哩及ビ66×10^6哩ナリトスレバ,金星ガ太陽ヲ一周スルニハ幾日ヲ要スルカ。(廣工)

5. 或會社ニ於テ,數年前ニ100,000 圓ニテ購入シタル

機械アリ。每年ノ價格ノ減損ヲ,其前年記帳價格ノ8.5%トシタルニ,現在記帳價格約44,955圓ナリ。幾年前ニ購入セシモノナルカ。但シ $\log 9.15=0.96142$, $\log 4.495=0.65273$, $\log 4.496=0.65283$ トセヨ。 (橫工)

雜題ノ答

雜題 (第七) 56－60.

(1) 1. (a) $\dfrac{4\pm3\sqrt{2}}{2}$. (b) $\dfrac{1}{2a}$ 及ビ $\dfrac{1}{8a}$.

2. 0 及ビ $6\pm\sqrt{3}$. 3. -1 及ビ $\dfrac{37}{5}$.

(2) 1. (a) 0.43 及ビ -3.43. (b) 4.23 及ビ -0.23.

2. 0 及ビ $\pm\dfrac{\sqrt{58}}{2}$. 3. (1) 3. (2) $\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

5. 前輪300糎,後輪280糎.

(3) 1. $\dfrac{4}{33}$. 2. 2. 3. $-\dfrac{12}{11}$.

4. $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$. 5. 36哩, 24哩.

(4) 1. (a) 9. (b) $\dfrac{25}{13}$. 4. 5寸.

(5) 1. $x=0$.(但シ $a-b\neq0$ ト假定セリ)。 2. $\dfrac{44}{5}$.

3. 26.96「メートル」. 4. 20秒, 50尺. 5. 5寸.

雜題 (第八) 88－93.

(1) 1. (a) $x=5,\ y=2;\ \ x=-2,\ y=-5$.

(b) $x=\dfrac{ab}{a+b},\ \ y=\dfrac{a+b}{4}$.(但シ $a+b\neq0$ ト假定セリ)。

2. $x^2\pm11x+28=0$. 3. $x^2\pm5x+6=0$.

4. $x^2+x-6=0$; 2 及ビ -3. 5. 3哩.

(2) **1.** $x=2, y=3, z=4$; $x=0, y=-1, z=-2$.

2. $x=5, y=4$; $x=4, y=5$. **4.** $a^2+b^2=1$.

5. 男工7人，女工8人.

(3) **1.** $x=4, y=6, z=9$; $x=9, y=6, z=4$.

2. $-2\geqq a$, $a\geqq 2$. **3.** 0及ビ $\frac{18}{5}$.

4. (a) $x=\pm 5, y=a$. (b) ± 4. **5.** 36人.

(4) **1.** $x=1, y=2$; $x=-1, y=-2$. **3.** 6時間.

4. 長サ6間，甲毎秒6.5間，乙5.5間.

5. 6里24町，午後0時20分.

(5) **1.** $a=\frac{27}{83}$, $b=-\frac{305}{249}$. **3.** 12里.

4. $\frac{a\{(n-1)(b-c)+60t\}}{60t-c(n-1)}$ 哩.

雜 題 (第九) 134−138.

(1) **2.** $a=4, b=2, c=\frac{12}{5}, d=\frac{29}{5}$.

3. $p=-8, \alpha=-1, \beta=4$; $p=-\frac{104}{27}, \alpha=\frac{4}{3}, \beta=-\frac{2}{3}$.

4. -245 及ビ $-\frac{6647}{27}$. **5.** $a=\frac{5}{2}, b=\frac{3}{2}, c=-8$.

(2) **1.** (a) $a^3+b^3+c^3+3abc$. (b) -1.

3. $4x^3-8x^2-29x-12=(2x+1)(x-4)(2x+3)$.

4. $(2x^2+3x)^2-(4x+5)^2=0$, $\frac{1+\sqrt{41}}{4}$.

5. $x^3+8x^2+17x+10$ 及ビ x^3-7x-6.

(3) **3.** $5, -5, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$. **4.** $a=24, b=2$.

5. $6x^3-7x^2-11x+9$.

(4) **1.** (a) $(x-2)(x-y+1)$. (b) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

3. x. **4.** (a) -3 及ビ 7. (b) 1 及ビ $\frac{7}{4}$.

(5) **1.** $(b+c)(c+a)(a+b)$. **3.** 7, $3x+1$.

雜 題 (第十) 147−150.

(1) **1.** $\frac{11+8\sqrt{2}}{7}$. **2.** $\pm 2a$. **3.** $\pm 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

(2) **1.** 0. **2.** $2\sqrt{2}+1$.

(3) **2.** 1.

(4) **1.** $\pm\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$. **2.** $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

5. $a\geqq 5$, $a\leqq 2$.

(5) **4.** (1) 正. (2) 負. (3) 正. (4) 負. (5) 負.

雜 題 (第十一) 192−197.

(1) **1.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$.

(2) **1.** $\frac{8}{11}$. **2.** $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

3. 金7.6瓦，寶石1.5瓦. **4.** $aq:bp$.

5. $3x^2-xy-8=0$.

(3) **1.** (a) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=s$ トスレバ

(as, bs, cs); $(-as, -bs, -cs)$. (b) $(0, 0, 0)$;

$\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=s$ トスレバ

$(-a+b+c)s$, $(a-b+c)s$, $(a+b-c)s$;

$(a-b-c)s$, $(-a+b-c)s$, $(-a-b+c)s$.

3. $23\frac{1}{3}$匁. **4.** 3 斗.

(4) **1.** (a) $\frac{a+b+c}{abc}=s$ トスレバ (as, bs, cs).

(b) $\left(\frac{2a+b+c}{2}, \frac{a+2b+c}{2}, \frac{a+b+2c}{2}\right)$.

4. 8 日. **5.** 15 石.

(5) **3.** 5分, 午前7時55分$\frac{1}{241}$. **4.** 30 日.

5. 甲 3 圓78錢, 乙 7 圓92錢, 丙 4 圓68錢.

雜題 (第十二) 221−226.

(1) **1.** 4, 9, 14. **2.** 6, 10, 14; 或ハ -6, -10, -14.

3. 20, 40, 60, 80. **4.** 4792.

5. $\frac{a(m-r+2)+b(r-1)}{m+1}$.

(2) **1.** $\frac{2}{3}$, -1, $\frac{3}{2}$. **3.** p. **5.** 14.5 尺.

(3) **1.** 1, 3, 5, 7. **3.** 初項6, 公差1.

5. $a=12$, $b=5$ 及ビ $a=-10$, $b=-6$.

(4) **1.** $2^{21}-1-\frac{1}{2^{20}}$. **2.** 705.

4. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. **5.** $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

(5) **1.** $n=2h+1$ ト考ヘテ, h ガ奇數ナラバ $\frac{n-3}{4}$ 個, h ガ偶數ナラバ $\frac{n-1}{4}$ 個.

2. $b=a$, $c=a$; $b=-2a$, $c=4a$.

3. 13個, 1391. **5.** $n(2n^2+1)$.

雜題 (第十三) 256−259.

(1) **4.** 0.2345. **5.** 1.6459.

(3) **1.** $\frac{1}{x}$. **3.** 46桁 **4.** 10桁.

5. 最小値90, 最大値119.

(4) **3.** 28個. **4.** 6個. **5.** 15項以上.

(5) **1.** $\frac{18}{5}$. **2.** 0.35218. **4.** $x=-1$, $y=3$, $z=9$;

$x=-1$, $y=-4$, $z=16$. **5.** 20尺.

雜題 (第十四) 282−288.

(1) **1.** (a) $\pm\sqrt{\frac{v}{\pi l}+y^2}$. (b) 14.93. **3.** 半年毎 = 5圓.

4. 9.4秒. **5.** 3圓80錢.

(2) **1.** 8.69. **2.** 24.47寸, 4.53寸. **3.** 4380圓.

4. $\left(p-q-\frac{pq}{100}\right)$分. **5.** $\frac{100b}{a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)}-100,$

$\left[2-\frac{a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)}{b}\right]:1.$

(3) **3.** 20個. **4.** $(2, 4, 6, 8); (-2, -4, -6, -8)$.

5. 0.1756寸.

(4) **1.** (b) $\frac{n}{6}\left\{2an^2+3(a+b)n+a+3b+6c\right\}$.

3. $\frac{mr-p}{r-q}$平方里, $\frac{mq-p}{q-r}$平方里. **4.** 0.067.

5. (a) 31燭光. (b) 1尺2寸5分.

(5) **1.** 79920. **2.** $\frac{ah}{n}$, 0, n ガ限リナク大ニナレバ,矩形ノ面積ノ和ハ三角形ノ面積ト同ジニナル。

3. 1660哩. **4.** 225日. **5.** 9年.

補遺

ぐらふニ據ル
聯立二次方程式ノ解法

1. 双曲線

聯立二次方程式ヲぐらふヲ用ヒテ解ク準備トシテ,二元二次方程式ノ表スぐらふヲ説明スル必要アリ。

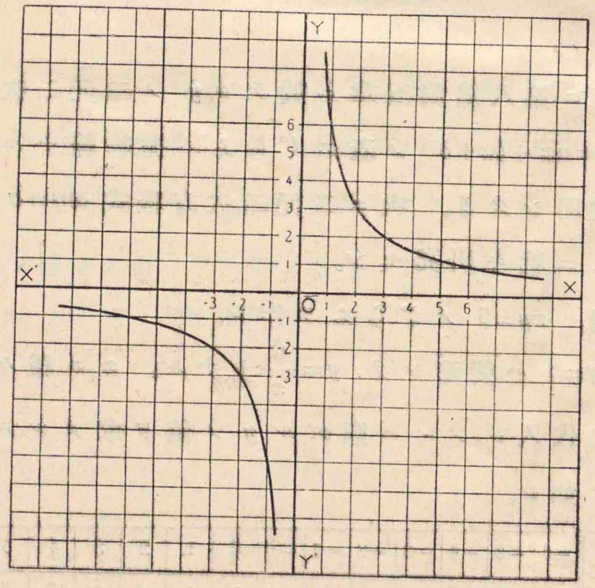
既ニ,第八篇第五章ニ於テ x, y ノ二元二次方程式 $y=ax^2+bx+c$ ノ表スぐらふハ拋物線ナルコトヲ説明シタリ。次ニ,二元二次方程式 $xy=a$ ノぐらふニ就キ研究セン。

例。 $xy=6$ ノぐらふヲ作レ。

$xy=6$ ハ變形シテ, $y=\frac{6}{x}$ トナル。x ニ種々ノ數値ヲ代入シ,ソレニ應ズル y ノ値ヲ求メレバ,次ノ表ノ如シ。

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4	5	6
y	-1	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{2}$	-2	-3	-6	-8	8	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

是等x, yノ相應ズル値ヲ,同一平面上ノ點ノ座標トシテぐらふヲ作レバ,次ノ如キ曲線ヲ得。尙此所ニ注意スベキハ,$x=1$ヨリ初メテ次第ニ小サク,正數ニテ次第ニ零ニ近カキ値,$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \cdots\cdots$ 等ヲ代入スレバ,yノ値ハ次第ニ增加シ,又$x=-1$ヨリ初メテ次第ニ大キク,負數ニテ次第ニ零ニ近カキ値,$-\frac{1}{10}, -\frac{1}{100}, -\frac{1}{1000}, \cdots\cdots$ 等ヲ代入スレバ,yノ値ハ次第ニ減少スルコトナリ。



上ノぐらふハ方程式 $xy=6$ ノ表ス曲線ナルモ,

一般ニ,二次方程式 $xy=a$ ノぐらふハ上ト同ジ種類ノ曲線トナル。此種類ノ曲線ヲ**双曲線**ト云フ。

2.　圓

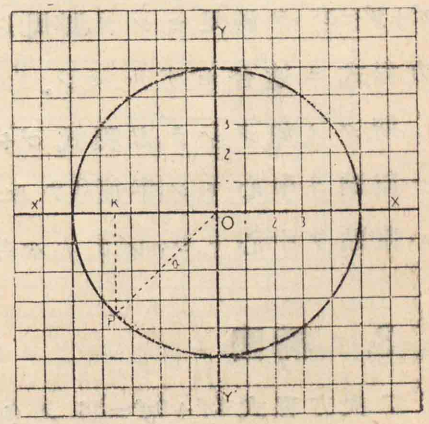
二次方程式$x^2+y^2=25$ノぐらふヲ求メンニ,此方程式ノyヲxノ項ヲ以テ表セバ

$$y=\pm\sqrt{25-x^2}$$

トナル。今,xヲ±5トスレバyハ0トナリ,$x=5$ヨリ大ナル値,或ハ-5ヨリ小ナル値ヲ代入スレバ,yハ虛數トナル。

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	$\pm\sqrt{-11}$	0	±3	±4	±4.6	±4.9	±5	±4.9	±4.6	±4	±3	0	$\pm\sqrt{-11}$

是等ノx, yノ相應ズル實數ノ値ヲ同一平面上ノ點ノ座標トスレバ,其等ノ點ハ原點ヲ中心トシ,半徑5ナル圓周ノ上ニアルベシ。故ニ,$x^2+y^2=25$ノ表



すぐらふハ圓周ナリ。

一般ニ二元二次方程式

$$x^2+y^2=a^2$$

ノ表スぐらふハ原點ヲ中心トシ,半徑 a ナル圓周ナリ。ソレヲ證明スルタメ,此圓周ノ上ニ圖ノ如ク,任意ニ一點 P ヲトル。點 P ヨリ x 軸ニ垂直ニ直線 PK ヲ引キ,點 P ノ座標ヲ x, y トスレバ

$$x=\mathrm{OK}, \quad y=\mathrm{KP}.$$

然ルニ,直角三角形 POK ニ於テ

$$\overline{\mathrm{OK}}^2+\overline{\mathrm{KP}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2.$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=a^2.$$

故ニ,此ノ圓周ノ上ノ總テノ點ノ座標ハ,方程式 $x^2+y^2=a^2$ ヲ滿足セシメ,圓周以外ノ點ノ座標ハ,此方程式ニ適合セザルベシ。

斯クノ如クシテ,方程式 $x^2+y^2=9$ ノ表スぐらふハ原點ヲ中心トシ,半徑3ナル圓周ニシテ,$x^2+y^2=5$ ハ原點ヲ中心トシ,$\sqrt{5}$ ナル半徑ノ圓周ヲ表ス。

3. 楕圓

二次方程式 $4x^2+9y^2=36$ ノぐらふヲ求メンニ,y

ヲ x ノ項ヲ以テ表セバ

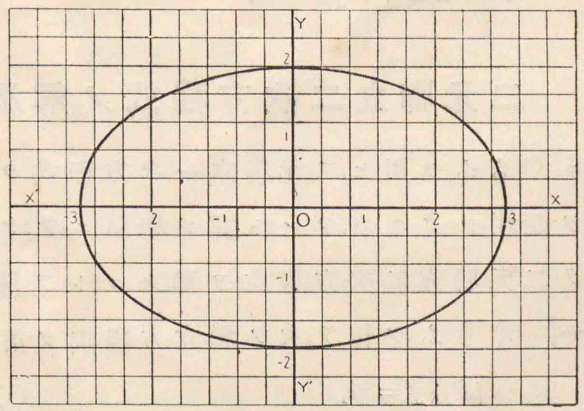
$$y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

トナル。x ニ種々ノ値ヲ代入シテ,次ノ表ヲ得。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{-7}$	0	±1.5	±1.9	±2	±1.9	±1.5	0	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{-7}$

x ニ 3 ヨリ大ナル値,又ハ -3 ヨリ小ナル値ヲ代入スレバ,y ハ虚數トナル。上ノ x, y ノ相應ズル實數ヲ平面上ノ點ノ座標トシテぐらふヲ作レバ,圖ニ示スガ如キ曲線トナルベシ。

此種類ノ曲線ヲ**楕圓**ト云フ。



一般ニ,$a \neq b$ ナルトキ,二元二次方程式 $ax^2+by^2=c$ ノ表スぐらふハ楕圓ナリ。

【注意】上ノぐらふヲ作ルトキ,方眼紙ノ罫二個半ヲ 1 單位トシ,五個ヲ 2 單位トセリ。是ハ數ガ比較的小ナルトキ,圖形ヲ大キクスルタメノ方便ナリ。

練習問題 (1)

次ノ方程式ノ示スぐらふヲ作リ,且ツ曲線ノ名稱ヲ述ベヨ。

1. $y=\frac{1}{4}x^2.$ **4.** $xy=-6.$

2. $y^2+4x=0.$ **5.** $x^2+y^2=4.$

3. $xy=12.$ **6.** $x^2+y^2=10.$

7. $25x^2+16y^2=400.$

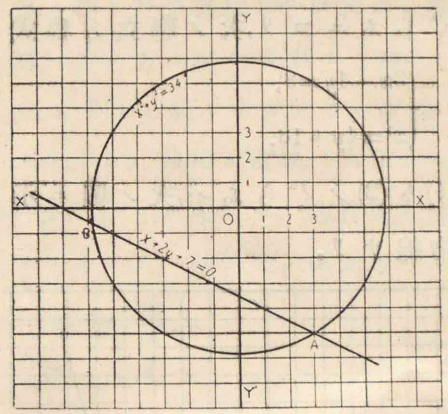
4. 二元聯立二次方程式ノ解法

曩ニぐらふヲ用ヒ,二元聯立一次方程式ヲ解クコトヲ説明シタルガ,ソレト同ジ趣向ニテ,ぐらふヲ以テ二元聯立二次方程式ヲ解クコトヲ得。

例一。 ぐらふヲ作リ,次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x^2+y^2=34, & (1) \\ x+2y+7=0. & (2) \end{cases}$$

方程式(1)ト(2)ノぐらふハ圓ト直線ナリ。



是等二ツノぐらふノ交點 A, B ノ座標ハ圖ニヨリ

$$A\begin{cases} x=3, \\ y=-5. \end{cases} \qquad B\begin{cases} x=-5\frac{4}{5}, \\ y=-\frac{3}{5}. \end{cases}$$

故ニ,求ムル解ハ

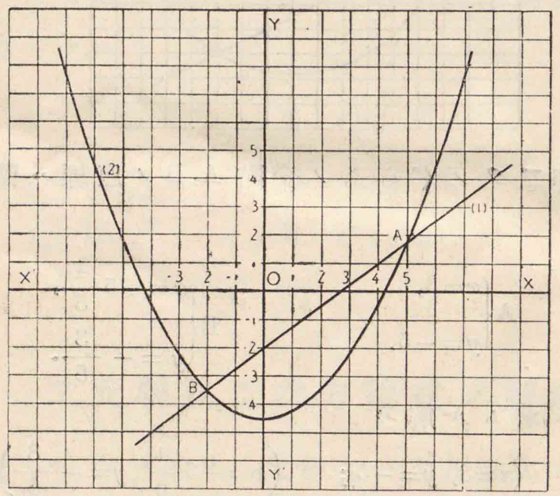
$$(x=3,\ y=-5); \qquad \left(x=-5\frac{4}{5},\ y=-\frac{3}{5}\right).$$

【注意】A點ノ座標ハ二ツノぐらふノ交點トシテ,$x=3$, $y=-5$ ナルコト明白ナレド,B點ノ座標ハ上ノ圖ノミニテハ,$x=-5\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$ ト斷定スル能ハズ,略ボ $x=-5\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$ ト云ヒ得ルノミ。之ハ x 軸上ノ -5 ト -6 トノ間ヲ更ニ五等分シ,又 y 軸上ノ 0 ト -1 トノ間ヲ五等分シテ,初メテ確定スルコトヲ得ルモノナリ。

例二。 ぐらふニヨリ,次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} 3x-4y=8, & (1) \\ x^2=4y+18. & (2) \end{cases}$$

方程式(1)ト(2)ノぐらふハ,次ノ圖ニ示スガ如キ直線ト拋物線ナリ。



ぐらふノ二ツノ交點A,Bノ座標ハ圖ノ上ヨリ

$$\text{A}\begin{cases} x=5, \\ y=1\dfrac{3}{4}. \end{cases} \qquad \text{B}\begin{cases} x=-2, \\ y=-3\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

故ニ,求ムル解ハ

$$\left(x=5,\ y=1\frac{3}{4}\right); \quad \left(x=-2,\ y=-3\frac{1}{2}\right).$$

【注意】上ノ圖ニ於テ,直線ABヲ初メノ位置ニ平行シナガラ,次第ニ下ノ方ニ移セバ,點Aト點Bトハ漸次ニ接近シ,遂ニAトBトハ限リナク近ヅキ直線ABハ拋物線ノ切線トナルベシ。其時ノ直線ノ方程式ハ高等數學ニヨレバ$3x-4y=\frac{81}{4}$ニテ表サル。此直線ト拋物線トノ交點ハ唯一ツアルノミ。従テ,次ノ聯立方程式

$$\begin{cases} 3x-4y=\dfrac{81}{4}, \\ x^2=4y+18. \end{cases}$$

ハ唯一組ノ解ヲ有スルコトトナル。之ハA,B二點ガ限リナク近ヅキシ場合ナレバ,二組ノ解ガ重ナリシモノト解釋スルコト至當ナリ。

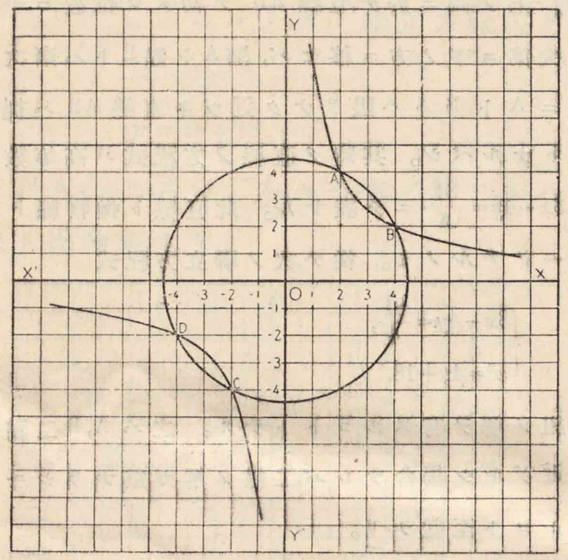
直線ヲ切線ノ位置ヨリ,尚ホ下ノ方ニ切線ノ位置ニ平行シナガラ移動スレバ,直線ト曲線トハ最早交ラズ。其時ハ,聯立方程式ノ解ハ二組ノ虚數トシテ表ルベシ。例ヘバ,次ノ聯方方程式ヲぐらふヲ用ヒズニ解イテ見ヨ。

$$\begin{cases} 3x-4y=25, \\ x^2=4y+18. \end{cases}$$

例三。 ぐらふニ據リ,次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, & (1) \\ xy=8. & (2) \end{cases}$$

方程式(1)ト(2)ノぐらふハ圓ト双曲線ナリ。



是等二ツノぐらふノ交點ノ座標ハ

A $\begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$ B $\begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$ C $\begin{cases} x=-2, \\ y=-4. \end{cases}$ D $\begin{cases} x=-4, \\ y=-2. \end{cases}$

故ニ,求ムル解ハ

$(2, 4)$; $(4, 2)$; $(-2, -4)$; $(-4, -2)$.

上ノ三ツノ例題ニヨリ,二元聯立方程式ハ其一ツガm次方程式ニシテ,他ガn次方程式ナルトキ,解ノ個數ハmn個ナルコトヲ知ル。解ノ中,或ルモノハ虚數ノコトモ,亦等値ノコトモアルベシ。

併シ,解ノ個數ガmn個ヲ超過スルコトノナキハ明ナリ。上ノ例ハm, nガ1又ハ2ノトキナリシモ,m,nガ如何ナル正ノ整數ニテモ,一般ニ上ノ結果ハ成立スルモノナリ。

練習問題 (2)

ぐらふヲ用ヒテ,次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

1. $\begin{cases} y=x^2, \\ y-2x=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ x+2y+4=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+y^2=40, \\ xy=12. \end{cases}$

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$1/n$
5.5	30.25	2.34521	7.41620	166.375	1.76517	3.80295	.181818
5.6	31.36	2.36643	7.48331	175.616	1.77581	3.82586	.178571
5.7	32.49	2.38747	7.54983	185.193	1.78632	3 84850	.175439
5.8	33.64	2.40832	7.61577	195.112	1.79670	3.87088	.172414
5.9	34.81	2.42899	7.68115	205.379	1.80697	3.89300	.169492
6.0	36.00	2.44949	7.74597	216.000	1.81712	3.91487	.166667
6.1	37.21	2.46982	7.81025	226.981	1.82716	3.93650	.163934
6.2	38.44	2.48998	7.87401	238,328	1.83709	3.95789	.161290
6.3	39.69	2.50998	7.93725	250.047	1.84691	3.97906	.158730
6.4	40.96	2.52982	8.00000	262.144	1.85664	4.00000	.156250
6.5	42.25	2.54951	8.06226	274.625	1.86626	4 02073	.153846
6.6	43.56	2.56905	8.12404	287.496	1.87578	4.04124	.151515
6.7	44.89	2.58844	8.18535	300.763	1.88520	4.06155	.149254
6.8	46.24	2.60768	8.24621	314.432	1.89454	4.08166	.147059
6.9	47.61	2.62679	8.30662	328.509	1.90378	4.10157	.144928
7.0	49.00	2.64575	8.36660	343.000	1.91293	4.12129	.142857
7.1	50.41	2.66458	8.42615	357.911	1.92200	4.14082	.140845
7.2	51.84	2.68328	8.48528	373.248	1.93098	4.16017	.138889
7.3	53.29	2.70185	8.54400	389.017	1.93988	4.17934	.136986
7.4	54.76	2.72029	8.60233	405.224	1.94870	4.19834	.135135
7.5	56.25	2.73861	8.66025	421.875	1.95743	4.21716	.133333
7.6	57.76	2.75681	8.71780	438.976	1.96610	4.23582	131579
7.7	59.29	2.77489	8.77496	456.533	1.97468	4.25432	.129870
7.8	60.84	2.79285	8.83176	474.552	1.98319	4.27266	.128205
7.9	62.41	2.81069	8.88819	493.039	1.99163	4.29084	.126582
8.0	64.00	2.82843	8.94427	512.000	2.00000	4.30887	.125000
8.1	65.61	2.84605	9.00000	531.441	2.00830	4.32675	.123457
8.2	67.24	2.86356	9.05539	551.368	2.01653	4.34448	.121951
8.3	68.89	2.88097	9.11043	571.787	2.02469	4.36207	.120482
8.4	70.56	2.89828	9.16515	592.704	2.03279	4.37952	.119048
8.5	72.25	2.91548	9.21954	614.125	2.04083	4.39683	.117647
8.6	73.96	2.93258	9.27362	636.056	2.04880	4.41400	.116279
8.7	75.69	2.94958	9.32738	658.503	2.05671	4.43105	.114943
8.8	77.44	2.96648	9.38083	681.472	2.06456	4.44796	.113636
8.9	79.21	2.98329	9.43398	704.969	2.07235	4.46475	.112360
9.0	81.00	3.00000	9.48683	729.000	2.08008	4.48140	.111111
9.1	82.81	3.01662	9.53939	753.571	2.08776	4.49794	.109890
9.2	84.64	3.03315	9.59166	778.688	2.09538	4.51436	.108696
9.3	86.49	3.04959	9.64365	804.357	2.10294	4.53065	.107527
9.4	88.36	3.06594	9.69536	830.584	2.11045	4.54684	.106383
9.5	90.25	3.08221	9.74679	857.375	2.11791	4.56290	.105263
9.6	92.16	3.09839	9.79796	884.736	2.12532	4.57886	.104167
9.7	94.09	3.11448	9.84886	912.673	2.13267	4.59470	.103093
9.8	96.04	3 13050	9.89949	941.192	2.13997	4.61044	102041
9.9	98.01	3.14643	9.94987	970.299	2.14723	4.62607	.101010
n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$1/n$

附　表

1ヨリ99マデノ平方，平方根，立方，立方根，逆數ノ表

【用法】　此表ニハ二桁ノ數ノ平方，平方根，立方，立方根及ビ逆數ノ小數點以下五位マデノ數値ヲ掲ゲタリ。

例ヘバ$\sqrt{1.7}$ ヲ求メルニハ$\sqrt{n}$ノ行ニ於テ，$n=1.7$ニ應ズルモノヲ求メ，1.30384 ヲ得。

又，$\sqrt{17}$ハ$\sqrt{10n}$ノ行ニ於テ，$n=1.7$ ニ應ズルモノヲ求メ，其値ハ4.12311ナリ。$\sqrt{170}$ハ$10\sqrt{1.7}$ナレバ，$\sqrt{1.7}$ノ10倍ニ等シクシテ 13.0384ナリ。

同様ニ，$\sqrt[3]{1.7}$ハ$\sqrt[3]{n}$ノ行ヨリ1.19348，$\sqrt[3]{17}$ハ$\sqrt[3]{10n}$ノ行ノ$n=1.7$ニ應ズルモノヲ求メ，2.57128。又，$\sqrt[3]{170}$ハ$\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{17}$ナレバ，$2.15443\times2.57128=5.53964$。

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$1/n$
1.0	1.00	1.00000	3.16228	1.000	1.00000	2.15443	1.00000
1.1	1.21	1.04881	3.31662	1.331	1.03228	2.22398	.909091
1.2	1.44	1.09545	3.46410	1.728	1.06266	2.28943	.833333
1.3	1.69	1.14018	3.60555	2.197	1.09139	2.35133	.769231
1.4	1.96	1.18322	3.74166	2.744	1.11869	2.41014	.714286
1.5	2.25	1.22474	3.87298	3.375	1.14471	2.46621	.666667
1.6	2.56	1.26491	4.00000	4.096	1.16961	2.51984	.625000
1.7	2.89	1.30384	4.12311	4.913	1.19348	2.57128	.588235
1.8	3.24	1.34164	4.24264	5.832	1.21644	2.62074	.555556
1.9	3.61	1.37840	4.35890	6.859	1.23856	2.66840	.526316
2.0	4.00	1.41421	4.47214	8.000	1.25992	2.71442	.500000
2.1	4.41	1.44914	4.58258	9.261	1.28058	2.75892	.476190
2.2	4.84	1.48324	4.69042	10.648	1.30059	2.80204	.454545
2.3	5.29	1.51658	4.79583	12.167	1.32001	2.84387	.434783
2.4	5.76	1.54919	4.89898	13.824	1.33887	2.88450	.416667
2.5	6.25	1.58114	5.00000	15.625	1.35721	2.92402	.400000
2.6	6.76	1.61245	5.09902	17.576	1.37507	2.96250	.384615
2.7	7.29	1.64317	5.19615	19.683	1.39248	3.00000	.370370
2.8	7.84	1.67332	5.29150	21.952	1.40946	3.03659	.357143
2.9	8.41	1.70294	5.38516	24.389	1.42604	3.07232	.344828
3.0	9.00	1.73205	5.47723	27.000	1.44225	3.10723	.333333
3.1	9.61	1.76068	5.56776	29.791	1.45810	3.14138	.322581
3.2	10.24	1.78885	5.65685	32.768	1.47361	3.17480	.312500
3.3	10.89	1.81659	5.74456	35.937	1.48881	3.20753	.303030
3.4	11.56	1.84391	5.83095	39.304	1.50369	3.23961	.294118
3.5	12.25	1.87083	5.91608	42.875	1.51829	3.27107	.285714
3.6	12.96	1.89737	6.00000	46.656	1.53262	3.30193	.277778
3.7	13.69	1.92354	6.08276	50.653	1.54668	3.33222	.270270
3.8	14.44	1.94936	6.16441	54.872	1.56049	3.36198	.263158
3.9	15.21	1.97484	6.24500	59.319	1.57406	3.39121	.256410
4.0	16.00	2.00000	6.32456	64.000	1.58740	3.41995	.250000
4.1	16.81	2.02485	6.40312	68.921	1.60052	3.44822	.243902
4.2	17.64	2.04939	6.48074	74.088	1.61343	3.47603	.238095
4.3	18.49	2.07364	6.55744	79.507	1.62613	3.50340	.232558
4.4	19.36	2.09762	6.63325	85.184	1.63864	3.53035	.227273
4.5	20.25	2.12132	6.70820	91.125	1.65096	3.55689	.222222
4.6	21.16	2.14476	6.78233	97.336	1.66310	3.58305	.217391
4.7	22.09	2.16795	6.85565	103.823	1.67507	3.60883	.212766
4.8	23.04	2.19089	6.92820	110.592	1.68687	3.63424	.208333
4.9	24.01	2.21359	7.00000	117.649	1.69850	3.65931	.204082
5.0	25.00	2.23607	7.07107	125.000	1.70998	3.68403	.200000
5.1	26.01	2.25832	7.14143	132.651	1.72130	3.70843	.196078
5.2	27.04	2.28035	7.21110	140.608	1.73248	3.73251	.192308
5.3	28.09	2.30217	7.28011	148.877	1.74351	3.75629	.188679
5.4	29.16	2.32379	7.34847	157.464	1.75441	3.77976	.185185
n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$1/n$

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$1/n$
5.5	30.25	2.34521	7.41620	166.375	1.76517	3.80295	.181818
5.6	31.36	2.36643	7.48331	175.616	1.77581	3.82586	.178571
5.7	32.49	2.38747	7.54983	185.193	1.78632	3.84850	.175439
5.8	33.64	2.40832	7.61577	195.112	1.79670	3.87088	.172414
5.9	34.81	2.42899	7.68115	205.379	1.80697	3.89300	.169492
6.0	36.00	2.44949	7.74597	216.000	1.81712	3.91487	.166667
6.1	37.21	2.46982	7.81025	226.981	1.82716	3.93650	.163934
6.2	38.44	2.48998	7.87401	238.328	1.83709	3.95789	.161290
6.3	39.69	2.50998	7.93725	250.047	1.84691	3.97906	.158730
6.4	40.96	2.52982	8.00000	262.144	1.85664	4.00000	.156250
6.5	42.25	2.54951	8.06226	274.625	1.86626	4.02073	.153846
6.6	43.56	2.56905	8.12404	287.496	1.87578	4.04124	.151515
6.7	44.89	2.58844	8.18535	300.763	1.88520	4.06155	.149254
6.8	46.24	2.60768	8.24621	314.432	1.89454	4.08166	.147059
6.9	47.61	2.62679	8.30662	328.509	1.90378	4.10157	.144928
7.0	49.00	2.64575	8.36660	343.000	1.91293	4.12129	.142857
7.1	50.41	2.66458	8.42615	357.911	1.92200	4.14082	.140845
7.2	51.84	2.68328	8.48528	373.248	1.93098	4.16017	.138889
7.3	53.29	2.70185	8.54400	389.017	1.93988	4.17934	.136986
7.4	54.76	2.72029	8.60233	405.224	1.94870	4.19834	.135135
7.5	56.25	2.73861	8.66025	421.875	1.95743	4.21716	.133333
7.6	57.76	2.75681	8.71780	438.976	1.96610	4.23582	131579
7.7	59.29	2.77489	8.77496	456.533	1.97468	4.25432	.129870
7.8	60.84	2.79285	8.83176	474.552	1.98319	4.27266	.128205
7.9	62.41	2.81069	8.88819	493.039	1.99163	4.29084	.126582
8.0	64.00	2.82843	8.94427	512.000	2.00000	4.30887	.125000
8.1	65.61	2.84605	9.00000	531.441	2.00830	4.32675	.123457
8.2	67.24	2.86356	9.05539	551.368	2.01653	4.34448	.121951
8.3	68.89	2.88097	9.11043	571.787	2.02469	4.36207	.120482
8.4	70.56	2.89828	9.16515	592.704	2.03279	4.37952	.119048
8.5	72.25	2.91548	9.21954	614.125	2.04083	4.39683	.117647
8.6	73.96	2.93258	9.27362	636.056	2.04880	4.41400	.116279
8.7	75.69	2.94958	9.32738	658.503	2.05671	4.43105	.114943
8.8	77.44	2.96648	9.38083	681.472	2.06456	4.44796	.113636
8.9	79.21	2.98329	9.43398	704.969	2.07235	4.46475	.112360
9.0	81.00	3.00000	9.48683	729.000	2.08008	4.48140	.111111
9.1	82.81	3.01662	9.53939	753.571	2.08776	4.49794	.109890
9.2	84.64	3.03315	9.59166	778.688	2.09538	4.51436	.108696
9.3	86.49	3.04959	9.64365	804.357	2.10294	4.53065	.107527
9.4	88.36	3.06594	9.69536	830.584	2.11045	4.54684	.106383
9.5	90.25	3.08221	9.74679	857.375	2.11791	4.56290	.105263
9.6	92.16	3.09839	9.79796	884.736	2.12532	4.57886	.104167
9.7	94.09	3.11448	9.84886	912.673	2.13267	4.59470	.103093
9.8	96.04	3.13050	9.89949	941.192	2.13997	4.61044	102041
9.9	98.01	3.14643	9.94987	970.299	2.14723	4.62607	.101010
n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$1/n$

四桁對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010

表差	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	4.3	8.6	12.9	17.2	21.5	25.8	30.1	34.4	38.7
42	4.2	8.4	12.6	16.8	21.0	25.2	29.4	33.6	37.8
41	4.1	8.2	12.3	16.4	20.5	24.6	28.7	32.8	36.9
40	4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	24.0	28.0	32.0	36.0
39	3.9	7.8	11.7	15.6	19.5	23.4	27.3	31.2	35.1
38	3.8	7.6	11.4	15.2	19.0	22.8	26.6	30.4	34.2
37	3.7	7.4	11.1	14.8	18.5	22.2	25.9	29.6	33.3
36	3.6	7.2	10.8	14.4	18.0	27.6	25.2	28.8	32.4
35	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5	21.0	24.5	28.0	31.5
34	3.4	6.8	10.2	13.6	17.0	20.4	23.8	27.2	30.6
33	3.3	6.6	9.9	13.2	16.5	19.8	23.1	26.4	29.7
32	3.2	6.4	9.6	12.8	16.0	19.2	22.4	25.6	28.8
31	3.1	6.2	9.3	12.4	15.5	18.6	21.7	24.8	27.9
30	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0	21.0	24.0	27.0

N	0	1	2	3	4	5	6	7
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432

表差	1	2	3	4	5	6	7
29	2.9	5.8	8.7	11.6	14.5	17.4	20.3
28	2.8	5.6	8.4	11.2	14.0	16.8	19.6
27	2.7	5.4	8.1	10.8	13.5	16.2	18.9
26	2.6	5.2	7.8	10.4	13.0	15.6	18.2
25	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5
24	2.4	4.8	7.2	9.6	12.0	14.4	16.8
23	2.3	4.6	6.9	9.2	11.5	13.8	16.1
22	2.2	4.4	6.6	8.8	11.0	13.2	15.4
21	2.1	4.2	6.3	8.4	10.5	12.6	14.7
20	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0
19	1.9	3.8	5.7	7.6	9.5	11.4	13.3
18	1.8	3.6	5.4	7.2	9.0	10.8	12.6
17	1.7	3.4	5.1	6.8	8.5	10.2	11.9
16	1.6	3.2	4.8	6.4	8.0	9.6	11.2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
14	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
02	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
39	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
61	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
61	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
41	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
04	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
53	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
88	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
0	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
22	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
24	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
7	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
02	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
9	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
0	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
4	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
4	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
1	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
4	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
1	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
5	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
5	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
1	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
2	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
8	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
1	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	8.6	12.9	17.2	21.5	25.8	30.1	34.4	38.7
4.2	8.4	12.6	16.8	21.0	25.2	29.4	33.6	37.8
4.1	8.2	12.3	16.4	20.5	24.6	28.7	32.8	36.9
4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	24.0	28.0	32.0	36.0
3.9	7.8	11.7	15.6	19.5	23.4	27.3	31.2	35.1
3.8	7.6	11.4	15.2	19.0	22.8	26.6	30.4	34.2
3.7	7.4	11.1	14.8	18.5	22.2	25.9	29.6	33.3
3.6	7.2	10.8	14.4	18.0	27.6	25.2	28.8	32.4
3.5	7.0	10.5	14.0	17.5	21.0	24.5	28.0	31.5
3.4	6.8	10.2	13.6	17.0	20.4	23.8	27.2	30.6
3.3	6.6	9.9	13.2	16.5	19.8	23.1	26.4	29.7
3.2	6.4	9.6	12.8	16.0	19.2	22.4	25.6	28.8
3.1	6.2	9.3	12.4	15.5	18.6	21.7	24.8	27.9
3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0	21.0	24.0	27.0

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445

表差	1	2	3	4	5	6	7	8	9
29	2.9	5.8	8.7	11.6	14.5	17.4	20.3	23.2	26.1
28	2.8	5.6	8.4	11.2	14.0	16.8	19.6	22.4	25.2
27	2.7	5.4	8.1	10.8	13.5	16.2	18.9	21.6	24.3
26	2.6	5.2	7.8	10.4	13.0	15.6	18.2	20.8	23.4
25	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0	22.5
24	2.4	4.8	7.2	9.6	12.0	14.4	16.8	19.2	21.6
23	2.3	4.6	6.9	9.2	11.5	13.8	16.1	18.4	20.7
22	2.2	4.4	6.6	8.8	11.0	13.2	15.4	17.6	19.8
21	2.1	4.2	6.3	8.4	10.5	12.6	14.7	16.8	18.9
20	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0
19	1.9	3.8	5.7	7.6	9.5	11.4	13.3	15.2	17.1
18	1.8	3.6	5.4	7.2	9.0	10.8	12.6	14.4	16.2
17	1.7	3.4	5.1	6.8	8.5	10.2	11.9	13.6	15.3
16	1.6	3.2	4.8	6.4	8.0	9.6	11.2	12.8	14.4

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

表差	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	9.0	10.5	12.0	13.5
14	1.4	2.8	4.2	5.6	7.0	8.4	9.8	11.2	12.6
13	1.3	2.6	3.9	5.2	6.5	7.8	9.1	10.4	11.7
12	1.2	2.4	3.6	4.8	6.0	7.2	8.4	9.6	10.8
11	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.6	7.7	8.8	9.9
10	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
9	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.4	6.3	7.2	8.1
8	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	4.8	5.6	6.4	7.2
7	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	4.9	5.6	6.3
6	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4
5	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
4	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6

大正十三年十月二十七日印　　刷
大正十三年十月三　十　日發　　行
大正十四年一月　一　日訂正印刷
大正十四年一月　四　日訂正發行

定價	上卷　金七拾貳錢
	下卷　金七拾七錢

大正十五年度臨時定價
上卷　金壹圓貳拾貳錢
下卷　金壹圓參拾壹錢

著者　梶島二郎

發行兼印刷者
東京市神田區錦町一丁目十番地
株式會社　明治書院
取締役社長　鈴木友三郎

發行所
東京市神田區錦町一丁目十番地
株式會社　明治書院

7

高等工業
小路常一