A NEW SOLID GEOMETRY

H. TERAO
R. FUZINO

文部省檢定濟
大正十五年二月十二日　中學校數學科用

中學教科

新立體幾何

理學博士　寺尾　壽
早稻田大學教授　藤野了祐

合編

東京　冨山房　神田

緒言

本書ハ故寺尾壽博士ト余トノ合編ニ係ル中學教科新平面幾何ニ續クタメニ編纂シタルモノナルガ,博士ノ生前ニ於テ其大綱ヲ決シタルニ止マリ,全内容ニ就テ詳ニ合議スルヲ得ザリシヲ以テ,責任ハスベテ余ガ負フ所ナリ.

本書ニ於テハ實地教授者諸氏ノ意見ヲ十分參酌シ,先ヅ定理ノ排列ニ注意シ其證明ヲナルベク普通ニ其事項ヲ認識スル通リニ素直ニナシ,又求積ノ說明ヲ強テ形式的嚴正ニ固執セズ出來ルダケ平易ニナシタルコト等,スベテ簡明ナランコトニ務メタリ.

本書ヲ使用セラルヽ諸賢ガ從來ノ如ク更ニ本書ニツキ實際教授上ニ於ケル貴重

ナル高見ヲ寄セラレンコト,余ノ光榮トシテ切ニ懇請スル所ナリ。

大正十四年十一月

藤野了祐

目次

大正十五年版

中學教科

新立體幾何

第一編

平面及直線

第一章 緒論

1. 立體幾何學

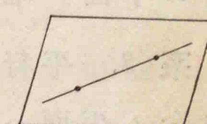
立體幾何學ハ同一平面上ニアラザル圖形ノ性質ヲ研究スル學科ナリ.

2. 平面

平面トハ一ツノ面ニシテ,其上ノ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全ク其面上ニアルモノヲイフ.

(平幾第7節再記) 故ニ

一直線上ノ二點ガ一ツノ平面上ニアラバ,其直線ハ全ク其平面上ニアリ.



平面ニアラザル面ヲ**曲面**トイフ.

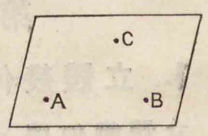
點ガ或面上ニアラバ此面ハ其點ヲ**通ル**又ハ**含ム**トイフ.

直線ガ全ク或面上ニアルトキハ此面ハ其直線ヲ**含ム**トイフ.

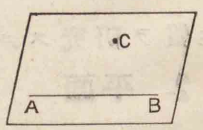
注意　平面ノ廣サハ限リナキモノトス. 但シ圖ニハ其一部分(通例ハ平行四邊形)ヲ畫キテ表ハス.

3. 平面ノ公理

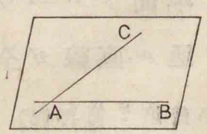
一直線上ニアラザル三定點ヲ通ル平面ハ唯一ツアリ.



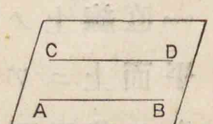
系 1.　一直線ト其上ニアラザル一點トヲ含ム平面ハ唯一ツアリ.



系 2.　相交ル二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツアリ.



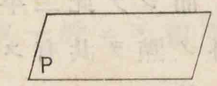
系 3.　平行ナル二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツアリ.



注意　或條件ニ適スル面ガ唯一ツアルトキハ,其條件ハ其面ヲ**定ム**又ハ**決定ス**トイフ.

三點A, B, Cガ定ムル平面ヲ平面(A, B, C)ト書キ,直線ABト點Cトニテ定マル平面ヲ平面(AB, C)ト書ク. 其他モ之ニ倣フ.

時トシテハ唯一ツノ文字ニテ平面ヲ表ハスコトアリ,例ヘバ平面Pナドノ如シ.



例題

1.　定點ヲ通リ,此點ヲ通ラザル定直線ニ交ル任意ノ直線ハ其定點ト其定直線トガ定ムル平面上ニアリ.

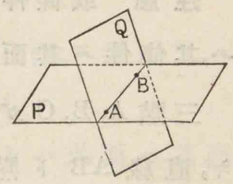
2.　相交ル二定直線ノ各ノ上ノ任意ノ點ヲ結ブ直線ハ其二定直線ガ定ムル平面上ニアリ.

3.　二定平行線ノ各ノ上ノ任意ノ點ヲ結ブ直線ハ其二平行線ガ定ムル平面上ニアリ.

4. 定理

二平面ガ出會ハバ唯一ツノ直線ヲ共有ス.

證明 二平面P,Qガ出會フ線上ニ任意ノ二點A,Bヲ取レバ直線ABハ各平面上ニ含マル,卽チ二平面P,Qハ一直線ABヲ共有ス.



而シテ此二平面ハ全ク相合セザル限リAB外ノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ.(第3節系1)

故ニ二平面P,Qハ唯一直線ABヲ共有スルノミ.

5. 二平面ノ位置ノ關係

二平面ハ唯一直線ヲ共有スルカ或ハ如何程延長スルモ出會ハザルカナリ.

初ノ場合ニハ二平面ガ相交ルトイヒ,後ノ場合ニハ二平面ガ互ニ平行ナリトイフ.

6. 二直線ノ位置ノ關係

空間ニ於ケル二直線ハ同一平面上ニアラザルカ或ハ同一平面上ニアリテ相交ルカ又ハ平行ナルカナリ.

同一平面上ニアラザル場合ニハ相交ラズ又平行ナラズ.

問題

1. 三角形,平行四邊形,梯形ハ皆平面圖形ナリ.

2. 同一平面上ニアラザル二直線ノ各ニ交ル二直線ハ決シテ平行ナラズ,又一般ニハ相交ラズ.

3. 同一平面上ニアラザル三直線ガ何レノ二ツヲ取リテモ相交ラバ此三直線ハ一點ニ會ス.

第二章　平行ナル平面及直線

7. 平面ト直線トノ位置ノ關係

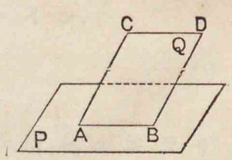
平面ト直線トハ(1)平面ガ直線ヲ含ム(直線ガ平面ニ含マルヽ)カ,(2)唯一點ヲ共有スルカ,(3)如何程延長スルモ出會ハザルカ,ノ何レカナリ.

(2)ノ場合ニハ平面ト直線トガ相交ルトイヒ,(3)ノ場合ニハ平面ト直線トガ互ニ平行ナリトイフ.

8. 定理

二平行線ノ一ツダケヲ含ム平面ハ今一ツノ直線ニ平行ナリ.

證明　AB, CDヲ二平行線トシ,平面PガABヲ含ミテCDヲ含マズトスレバ,Pト二平行線AB, CDヲ含ム平面Qトノ交リハ直線ABナリ.



故ニQ上ノ直線CDハAB外ニ於テ平面Pニ出會フコトヲ得ズ.

而シテCDハABニ出會フコトヲ得ズ.

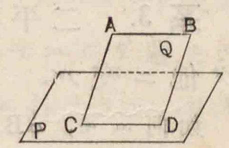
因テCDハ平面Pニ出會フコトヲ得ズ.

即チ　$CD \parallel P$

9. 定理

平面ト直線トガ互ニ平行ナラバ此直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交リハ其直線ニ平行ナリ.

證明　平面Pト直線ABトガ平行ナリトシ,ABヲ含ム任意ノ平面QトPトノ交リヲCDトスレバ,



$$AB \parallel P$$

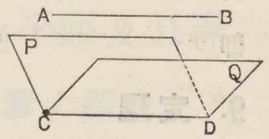
ナルユエ,ABハP上ノ直線CDニ出會フコトヲ得ズ,而シテAB, CDハ同一平面Q上ニアリ.

$$\therefore \quad AB \parallel CD$$

系 1.　平面ト直線トガ互ニ平行ナラバ,其平面上ノ一點ヲ通リ其直線ニ平行ニ引ケル直線ハ其平面上ニアリ.

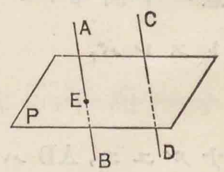
系 2.　同一直線ニ平行ナル二平面ノ交リハ其直線ニ平行ナリ.

如何ニモ $AB \parallel P$, $AB \parallel Q$ トスレバ, P, Q ノ交線上ノ一點 C ヨリ AB ニ平行ニ引ケル直線ハ P, Q ノ各ノ上ニアラザルベカラズ(系 1), 從テ P, Q ノ交線 CD ニ合セザルベカラザレバナリ.



系 3. 二平行線ノ一ニ交ル平面ハマタ他ニ交ル.

如何ニモ, $AB \parallel CD$ トシ, 平面 P ガ AB ト E ニ於テ交ルトセンニ, 若シ $P \parallel CD$ ナラバ P 上ノ一點 E ヨリ CD ニ平行ニ引ケル直線 AB ハ P 上ニアルコトトナリ(系 1), 假設ニ背ケバナリ.



10. 定理

二平行線ヲ一ツヅツ含ム二平面ノ交リハ元ノ平行線ノ何レニモ平行ナリ.

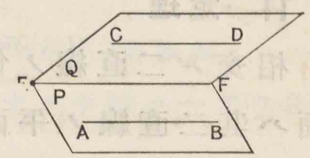
證明 $AB \parallel CD$ トシ, AB, CD ヲ一ツ宛含ム平面ヲ夫々 P, Q トシ, P, Q ノ交リヲ FE トスレバ

$CD \parallel P$ (第 8 節)

$\therefore$ $EF \parallel CD$ (前節)

同樣ニ

$EF \parallel AB$



系 同一直線ニ平行ナル二直線ハマタ互ニ平行ナリ.

如何ニモ, $AB \parallel CD$, $AB \parallel EF$ トスレバ, 平面 (AB, EF) ト平面 (E, CD) トノ交リハ E ヲ通リテ AB ニ平行ナルユヱ(本定理), EF ニ外ナラズ. 因テ

$EF \parallel CD$ (本定理)

例 題

1. 二平行平面ノ一ツノ上ニアル任意ノ直線ハ他ノ平面ニ平行ナリ.

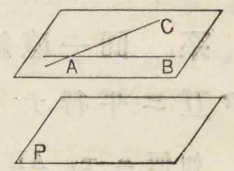
2. 捩(ネヂレ)四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結ブ四直線ハ一ツノ平行四邊形ヲナス.

註 悉クハ同一平面上ニアラザル若干ノ(相接續セル且ツ閉ヂタル)線分ニテナル圖形ヲ捩多角形トイフ. 之ニ對シテ普通ノ多角形ヲ平面多角形トイフ.

11. 定理

相交ル二直線ノ何レニモ平行ナル平面ハ其二直線ノ平面ニ平行ナリ.

證明 AB // P, AC // P トセンニ, 若シ平面 P ガ平面 (AB, AC) ト交ラバ其交リハ AB, AC ノ何レニモ平行ナルベク(第9節), 從テ AB // AC トナリ(前節系), 假定ニ背ク.



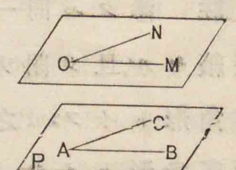
∴ (AB, AC) // P

系 相交ル二直線ガ夫々他ノ相交ル二直線ニ平行ナラバ, 前ノ二直線ノ平面ト後ノ二直線ノ平面トハマタ平行ナリ.

12. 定理

一定點ヲ通リ一定平面ニ平行ナル平面ハ唯一ツアリ.

證明 定點ヲ O, 定平面ヲ P トシ, 平面 P 上ニ於テ相交ル任意ノ二直線 AB, AC ヲ引キ, O ヨリ夫々之ニ平行ニ二



直線 OM, ON ヲ引ケバ

平面 (OM, ON) // P (前節系)

故ニ O ヲ通リ P ニ平行ナル平面ハ一ツハ必ズアリ.

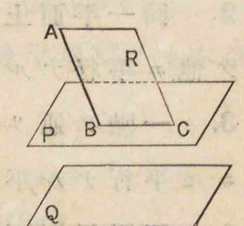
而シテ O ヲ通リテ P ニ平行ナル平面ハ, P 上ノ直線 AB, AC ノ何レニモ平行ナラザルベカラズ, 故ニ其平面ハ OM 及 ON ヲ含マザルベカラズ(第9節系1), 從テ平面 (OM, ON) ノ外ニハナシ.

系 1. 同一平面ニ平行ナル二平面ハマタ互ニ平行ナリ.

系 2. 二平行平面ノ一ニ交ル平面ハマタ他ニ交ル.

系 3. 二平行平面ノ一ニ交ル直線ハマタ他ニ交ル.

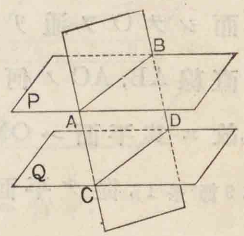
如何ニモ, P, Q ヲ二平行平面, AB ヲ P ト B ニ於テ交ル直線トシ, B ヲ通リ P 上ニ任意ノ直線 BC ヲ引カンニ, 若シ AB ガ Q ニ平行ナラバ BC ハ



勿論Qニ平行ナルヲ以テ, AB, BCヲ含ム平面RハマタQニ平行ナルベク(前節定理), 因テ本定理ニ背ケバナリ.

13. 定理

二平行平面ガ第三ノ平面ト交ラバ,其交リノ直線ハ互ニ平行ナリ.



證明 略ス.

系 若干ノ平行線ガ二平行平面ノ間ニ夾マルヽ部分ハ皆相等シ.

例題

1. 一定點ヲ通リ一定平面ニ平行ナル直線ハ,スベテ其點ヲ通リ其平面ニ平行ナル平面ノ上ニアリ.

2. 同一平面上ニアラザル二直線ノ一ヲ含ミテ他ニ平行ナル平面ハ唯一ツアリ.

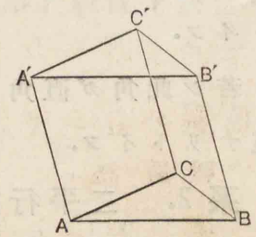
3. 一點ヲ通リ平行ナラザル二定直線ノ何レニモ平行ナル平面ハ唯一ツアリ.

4. 三平行平面ニ交ル任意ノ直線ガ此等ノ

平面ノ間ニ夾マルヽ部分ノ比ハ一定ナリ.

14. 定理

二角ノ二邊ガ夫々同ジ向キニ平行ナラバ此二角ハ相等シ.



證明 二角 BAC, B'A'C' ニ於テ

$$AB \parallel A'B',\quad AC \parallel A'C'$$

トシ, 各對應邊上ニ

$$AB=A'B',\quad AC=A'C'$$

ナル樣ニ B, B', C, C' ヲ取リ, AA', BB', CC' ヲ引ケバ, 四邊形 ABB'A' 及 ACC'A' ハ何レモ平行四邊形ナリ.

$$\therefore\quad BB'=AA'=CC'$$

又　$BB' \parallel AA' \parallel CC'$

$\therefore\quad BB' \parallel CC'$ (第10節系).

因テ BC, B'C' ヲ引ケバ四邊形 BCC'B' モ亦平行四邊形ナリ.

$$\therefore\quad BC=B'C'$$

$$\therefore\quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

$\therefore \quad \angle BAC = \angle B'A'C'$

系 1. 任意ノ點ヨリ同一平面上ニアヲザル二定直線ニ夫々平行ニ引ケル二直線ノナス角ハ一定ナリ.

定義 此一定ノ角ヲ元ノ**二定直線ノナス角**トイフ.

若シ此角ガ直角ナラバ元ノ二直線ハ互ニ垂直ナリトイフ.

系 2. 二平行線ノ一ニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直ナリ.

問　題

1. 二平面ガ平行ナラバ其一平面上ノ任意ノ點ヲ通リ他ノ平面ニ平行ナル直線ハスベテ初ノ平面上ニアリ.

2. 三平面ガ一點ニ會セザレバ其中ノ二平面ノ交線ハ第三ノ平面ニ含マルヽカ又ハソレニ平行ナリ.

3. 同一平面上ニアラザル二直線ノ一ヲ含ミテ他ニ平行ナル二平面ハ平行ナリ.

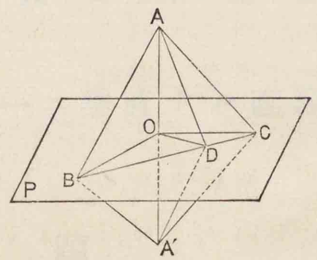
4. 一定點ヲ通リ二定直線ノ各ニ交ル直線ヲ引ケ.

註 「……ヲ引ケ又ハ作レ」ナドトイフハ平面幾何ノ定規ト compass ニヨル作圖ヲナセトノ意ニハアラズ,單ニ求ムル圖形ノ位置ヲ決定セヨトノ意ナリ.

第三章　垂　　線

15. 定理

相交ル二直線ノ交點ヲ通リテ其各ニ垂直ナル直線ハ,其二直線ヲ含ム平面上ノ其交點ヲ通ル任意ノ直線ニ垂直ナリ.



證明　OAガOニ於テ相交ル二直線OB,OCノ何レニモ垂直ナリトシ,OB,OCヲ含ム平面P上ニ於テOヲ通ル任意ノ直線ODヲ引キ,又OB,OC,ODニ交ル任意ノ直線ヲ引キ,其交點ヲ夫々B,C,Dトス.

AOヲ延長シOA'=OAナラシメ,A,A'ヲ各B,C,Dニ結ベバ,OB,OCハ何レモ線分AA'ヲ垂直ニ二等分スル直線ナリ.

$\therefore$　AB=A'B,　AC=A'C

$\therefore$　△ABC≡△A'BC

$\therefore$　∠ABD=∠A'BD

$\therefore$　△ABD≡△A'BD

$\therefore$　AD=A'D

$\therefore$　△OAD≡△OA'D

$\therefore$　∠AOD=∠A'OD

卽チ　OA⊥OD

定義　一平面上ノ一點ヲ通ル直線ガ其點ヲ通ル其平面上ノ總テノ直線ニ垂直ナルトキハ,其直線ト平面トハ互ニ垂直ナリトイヒ,其直線ヲ其平面ノ**垂線**トイフ.

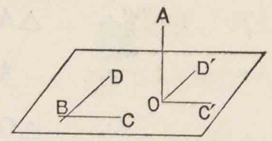
平面ト交リテ之ニ垂直ナラザル直線ヲ其平面ノ**斜線**トイフ.

平面ノ垂線又ハ斜線ト其平面トノ交點ヲ夫夫其垂線又ハ斜線ノ**足**トイフ.

上ノ定理ハ次ノ如ク述ブルコトヲ得.

平面上ノ相交ル二直線ノ各ニ,其交點ヲ通リテ垂直ナル直線ハ其平面ニ垂直ナリ.

系 1.　平面上ノ相交ル二直線ノ各ニ垂直ナル任意ノ直線ハ其平面ニ垂直ナリ.

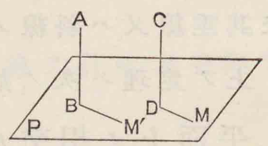


如何ニモ, OA ガ平面 P 上ノ相交ル二直線 BC, BD ニ垂直ナリトハ, 其足 O ヨリ BC, BD ニ夫々平行ニ引ケル二直線 OC′, OD′ ニ平行ナルコトナレバナリ. (第14節定義).

系 2. 平面ノ垂線ハ其平面上ノ任意ノ直線ニ垂直ナリ.

16. 定理

二平行線ノ一ニ垂直ナル平面ハ他ニモ垂直ナリ.



證明 AB, CD ヲ二平行線トシ, P ヲ AB ニ垂直ナル平面トス.

CD ノ足 D ヲ通リ P 上ニ任意ノ直線 DM ヲ引キ, AB ノ足 B ヨリ之ニ平行ニ BM′ ヲ引ケバ

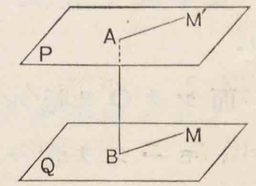
$AB \perp BM'$ (前節定義)

$\therefore$ $CD \perp DM$ (第14節)

$\therefore$ $CD \perp P$ (前節定義)

17. 定理

二平行平面ノ一ニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直ナリ.



證明 P, Q ヲ二平行平面トシ, AB ヲ P ニ垂直ナル直線トス.

AB ガ P, Q ト交ル點ヲ夫夫 A, B トシ, B ヲ通リ Q 上ニ任意ノ直線 BM ヲ引キ, A ヨリ之ニ平行ニ AM′ ヲ引ケバ BM ハ P ニ平行ナルユヱ, AM′ ハ P 上ニアリ. (第9節系1)

而シテ $AB \perp AM'$

$\therefore$ $AB \perp BM$

$\therefore$ $AB \perp Q$

18. 定理

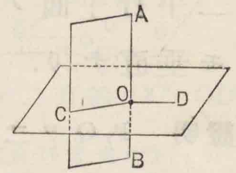
定點ヲ通リ定直線ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアリ.

證明 (第一) 定點 O ガ定直線 AB 上ニアル場合

O ヲ通リ AB ニ垂直ナル任意ノ二直線 OC,

ODヲ引ケバ

平面(OC, OD)$\perp$AB



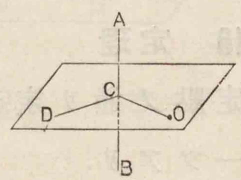
故ニOヲ通リABニ垂直ナル平面ハ一ツハ必ズアリ.

而シテOヲ通ル他ノ平面ハ, OC, OD中ノ少ナクトモ一ツヲ含マザルユヱ, 例ヘバOCヲ含マズトスレバ, 此平面ト平面(AB, OC)トノ交リハOヲ通ルOC外ノ直線ナルユヱABニ垂直ナラズ, 從テ其平面ハABニ垂直ナラズ.

故ニOヲ通リテABニ垂直ナル平面ハ上ノ外ニハナシ.

(第二) 定點Oガ定直線AB外ニアル場合

OヨリABニ垂線OCヲ引キ, 其足CヨリABニ垂直ナル他ノ任意ノ直線CDヲ引ケバ



平面(CO, CD)$\perp$AB

故ニOヲ通リABニ垂直ナル平面ハ一ツハ必ズアリ.

而シテOヲ通ル他ノ平面ハ, 若シCヲ通ラバABニ垂直ナラズ(第一), 又若シCヲ通ラザレバ此平面ト平面(AB, OC)トノ交リハOヲ通ルOC外ノ直線ナルユヱABニ垂直ナラズ, 從テ其平面ハABニ垂直ナラズ.

故ニOヲ通リテABニ垂直ナル平面ハ上ノ外ニハナシ.

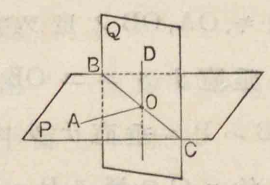
系 同一直線ニ垂直ナル二平面ハ互ニ平行ナリ.

19. 定理

定點ヲ通リ定平面ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアリ.

證明 (第一) 定點Oガ定平面P上ニアル場合

Oヲ通リP上ニ任意ノ直線OAヲ引キ, Oヲ通リOAニ垂直ナル平面ヲQトシ(前節), QトPトノ交リヲBCトセヨ.

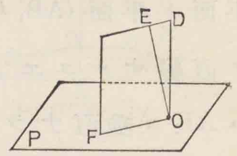


Q上ニ於テOヲ通リBCニ垂線ODヲ引ケバ

$OD \perp OA$ (第15節系2)

$\therefore$ $OD \perp P$ (同系1)

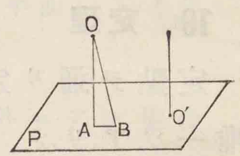
又Oヲ通ル他ノ任意ノ直線OEヲ引キ,平面(OD, OE)トPトノ交リヲOFトスレバ,OEハOFニ垂直ナラズ,從テOEハPニ垂直ナラズ.



故ニOヲ通リPニ垂直ナル直線ハODノミナリ.

(第二) 定點Oガ定平面P外ニアル場合

P上ノ任意ノ點O′ヨリPニ垂線ヲ引ケバ(第一),Oヨリ之ニ平行ニ引ケル直線OAハPニ垂直ナリ.(第16節)



又Oヲ通リPニ交ル他ノ任意ノ直線OBヲ引キ,OA, OBノ足ヲ夫々A, BトスレバOAハABニ垂直ナルユヱOBハABニ垂直ナラズ,從テOBハPニ垂直ナラズ.

故ニOヲ通リPニ垂直ナル直線ハOAノミナリ.

系 1. 同一平面ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ.

如何ニモ,若シ此レガ平行ナラザレバ其一ノ上ノ一點ヨリ他ニ平行ニ引ケル直線ハ亦其平面ニ垂直トナリテ(第16節)本定理ニ背ケバナリ.

系 2. 平面外ノ一點ヨリ此平面ニ引ケル線分ノ中,垂線ハ最モ短シ.

定義 平面外ノ一點ヨリ此平面ニ引ケル垂線ノ長サヲ**此點ト平面トノ距離**トイフ.

系 3. 二平行平面ニ共通ナル任意ノ垂線ノ此二平面間ニ夾マルヽ部分ノ長サハ不易ナリ.

定義 此一定ノ長サヲ**此平行二平面間ノ距離**トイフ.

例題

1. 一點ヲ通ル三直線ガ他ノ一直線ニ垂直ナラバ,此等ノ三直線ハ同一平面上ニアリ.

2. 二平行線ニ夫々垂直ナル二平面ハ平行ナリ.

3. 二平行平面ニ夫々垂直ナル二直線ハ平行ナリ.

4. 同一直線ニ垂直ナル直線ト平面トハ平行ナリ.

5. 平面外ノ一點ヨリ此平面ニ垂線及若干ノ斜線ヲ引ケバ

(1) 斜線ノ足ガ垂線ノ足ヨリ等距離ニアル者ハ相等シク,大ナル距離ニアル者ハ小ナル距離ニアル者ヨリ大ナリ.

逆ニ,相等シキ斜線ノ足ハ垂線ノ足ヨリ等距離ニアリ,大ナル斜線ノ足ハ小ナル斜線ノ足ヨリモ垂線ノ足ニ遠シ.

(2) 垂線ト等角ヲナス斜線ハ相等シク,大ナル角ヲナス斜線ハ小ナル角ヲナス斜線ヨリ大ナリ.

逆ニ,相等シキ斜線ハ垂線ト等角ヲナス,大ナル斜線ハ小ナル斜線ヨリモ垂線ト大ナル角ヲナス.

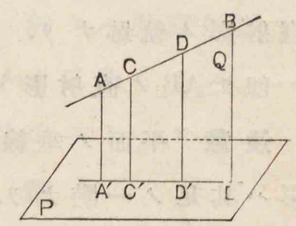
20. 直射影

定義 一點ヨリ一平面ニ引ケル垂線ノ足ヲ,

其點ノ此平面上ニ於ケル直射影(又ハ正射影)トイフ.

或線上ノ總テノ點ノ一平面上ニ於ケル直射影ノ軌跡ヲ,**其線ノ此平面上ニ於ケル直射影ト**イフ.

定理 平面ニ垂直ナラザル直線ノ此平面上ニ於ケル直射影ハ直線ナリ.



證明 ABヲ平面Pニ垂直ナラザル直線トシ, AB上ノ任意ノ二點A,BヨリPニ垂線AA', BB'ヲ引キ,其足ヲ夫々A', B'トスレバ,直線A'B'ガABノP上ニ於ケル直射影ナリ.

如何ニモ,先ヅ $AA' \parallel BB'$

ナルユヱ,圖形AA'B'Bハ一平面上ニアリ. 此平面ヲQトセン.

AB上ノ任意ノ一點CヨリPニ垂線CC'ヲ引ケバ

$$CC' \parallel AA'$$

故ニCC'ハQ上ニアリ,因テCノ直射影C'ハ直線$A'B'$上ニアリ.

逆ニ, $A'B'$上ノ任意ノ點D'ヨリPニ垂線$D'D$ヲ引ケバ

$$DD' /\!/ AA'$$

故ニDD'ハQ上ニアリ,因テDD'トABトノ交點ヲDトスレバ,D'ハDノ直射影ナリ.

故ニ$A'B'$ハAB上ノ總テノ點ノP上ニ於ケル直射影ノ軌跡ナリ.

即チABノ直射影ハ直線$A'B'$ナリ.

注意 平面ノ垂線ノ此平面上ニ於ケル直射影ハ其足ノ一點ナリ.

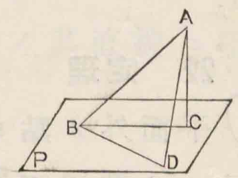
21. 定理

平面ノ斜線ガ,其足ヲ通リ此平面上ニ引ケル任意ノ直線トナス角ノ中,其直射影トナス鋭角ガ最小ナリ.

證明 ABヲ平面Pノ斜線, Bヲ其足, BCヲABノP上ニ於ケル直射影トス.

Bヲ通リP上ニ任意ノ直線BDヲ引キ, AB上

ノ一點AノP上ニ於ケル直射影ヲCトシ, BD上ニBCニ等シクBDヲ取リ,



A, Dヲ結べバ, $\triangle ABC$ト$\triangle ABD$トニ於テ

ABハ共通

$BC=BD$

$AC<AD$ (第19節系2)

$\therefore \angle ABC<\angle ABD$

定義 直線ガ或平面上ニ於ケル其直射影トナス角ヲ,**此直線ト平面トノナス角**トイフ.

平面ト其垂線トハ**直角**ヲナストイフ.

例題

1. 平面ニ平行ナル直線ノ此平面上ニ於ケル直射影ハ其直線ニ平行ナリ.

2. 平面ニ平行ナル直線上ノ任意ノ點ヨリ此平面ニ引ケル垂線ノ長サハ一定ナリ.

定義 此一定ノ長サヲ**此直線ト平面トノ距離**トイフ.

3. 二平行線ガ一平面トナス角ハ相等シ.

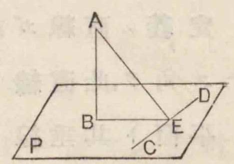
4. 相等シク且ツ平行ナル二線分ノ一平面

上ニ於ケル直射影ハマタ相等シク且ツ平行ナリ.

22 定理

平面外ノ點ヨリ平面ニ垂線ヲ引キ,其足ヨリ其平面上ノ直線ニ垂線ヲ引ケバ,後ノ垂線ノ足ト最初ノ點トヲ結ビ付クル直線ハ平面上ノ其直線ニ垂直ナリ.

證明 平面P外ノ點Aヨリ P ニ垂線 AB ヲ引キ,其足Bヨリ P上ノ一直線CDニ垂線BE ヲ引キ,其足EトAトヲ結ベバ



$AB \perp P$

$\therefore \quad AB \perp CD$

又 $\quad BE \perp CD$

$\therefore$ 平面$(AB, BE) \perp CD$

$\therefore \quad AE \perp CD$

注意 本定理ハ通例**三垂線ノ定理**ト稱セラル.

系 平面外ノ一點ヨリ其平面及其上ノ一直線ニ垂線ヲ引ケバ,其二ツノ足ヲ結ビ付クル直線ハ平面上ノ其直線ニ垂直ナリ.

例題

1. 平面P外ノ一點AヨリP上ノ一直線BCニ垂線ADヲ引キ,其足DヨリP上ニ於テBCニ垂線DEヲ引キ,AヨリDEニ垂線AEヲ引ケバAEハPニ垂直ナリ.

2. △ABCノ垂心Oヨリ其平面ニ引ケル垂線上ノ一點ヲDトスレバDAハBCニ垂直ナリ.

問題

1. 平面ノ斜線ノ足ヲ通リ,其平面上ニ於テ其斜線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアリ.

2. 或線ノ,相交ル二平面ノ各ノ上ニ於ケル直射影ガ何レモ直線ナルトキハ,其線ハ一般ニハ直線ナリ.

若シ二直射影ノ直線ガ何レモ二平面ノ交リニ垂直ナルトキハ如何.

3. 定平面ヨリノ距離ガ定長ニ等シキ點ノ軌跡如何.

4. 二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ此二定點ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル平面ナリ.

5. 一直線上ニアラザル三定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ此三定點ヲ通ル圓ノ中心ヲ通リ此圓ノ平面(此三定點ガ定ムル平面)ニ垂直ナル直線ナリ.

6. 一平面上ニ於テ其上ノ定點ヲ通ル任意ノ直線ヘ,其平面外ノ定點ヨリ引ケル垂線ノ足ノ軌跡如何.

7. 同一平面上ニアラザル二直線ノ各ニ交リテ且此等ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアリ.

而シテ此直線ノ二交點間ニ夾マルル部分ノ長サハ初ノ二直線間ノ最短距離ナリ,卽チ初メノ二直線ノ各ノ上ノ任意ノ點ヲ結ブ線分ノ中,其長サノ最小ナルモノナリ.

定義 同一平面上ニアラザル二直線ノ各ニ交リテ且此等ニ垂直ナル直線ヲ特ニ初ノ二直線ノ**共通垂線**トイフ.

共通垂線ノ長サトハ共通垂線ノ初ノ二直線間ニ夾マルヽ部分ノ長サノコトナリ.

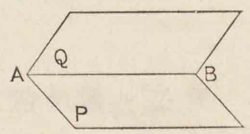
8. 一直線ト之ニ平行ナル一平面上ノ或直線トノ最短距離ハ,一般ニハ初ノ直線ト其平面トノ距離ニ等シ

第四章 二面角及多面角

23. 二面角

定義 平面ヲ,其上ノ或一直線ニテ二ツニ分チ,其一方ダケヲ考フルトキハ,之ヲ**半平面**トイフ.

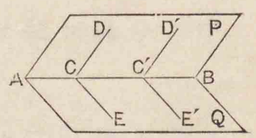
同一直線ヲ限界トスル二ツノ半平面ハ**二面角ヲナス**トイフ. 其直線ヲ二面角ノ**稜**,此二ツノ半平面ヲ二面角ノ**面**トイフ.



上圖ニ於テ, AB ハ二ツノ半平面P, Q ガナス二面角ノ稜, P, Q ハ其ノ面ナリ.

24. 定理

二面角ノ稜上ノ任意ノ點ヲ通リ,各面上ニ於テ稜ニ垂直ニ引ケル二ツノ半直線ノナス角ハ一定ナリ.



證明 略ス. (第14節定理參照)

定義 相交ル二平面ノ交線上ノ一點ヲ通リ,

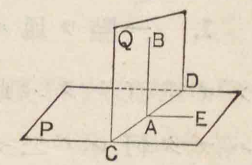
各面上ニ於テ稜ニ垂直ニ引ケル二直線ノナス角ヲ,此**二平面ノナス角**トイフ.

二平面ノナス角ガ直角ナルトキハ此二平面ハ互ニ**垂直ナリ**トイフ.

25. 定理

一平面ノ垂線ヲ含ム任意ノ平面ハ前ノ平面ニ垂直ナリ.

證明 平面Pノ一垂線AB ヲ含ム一平面ヲQトシ, P, Q ノ交リヲCDトスレバ



$$AB \perp CD \text{ (第15節系2)}$$

ソコデ垂線ノ足 A ヲ通リ, P上ニ於テ CD ニ垂線 AE ヲ引ケバ, ∠BAE ハ二平面P, Qノナス角ナリ,而シテ

$$AB \perp AE \text{ (第15節系2)}$$

$$\therefore \quad P \perp Q$$

系 1. 二平面ガ互ニ垂直ナルトキハ,其交リニ垂直ニ其一方ノ平面上ニ引ケル直線ハ他ノ平面ニ垂直ナリ.

系 2. 二平面ガ互ニ垂直ナルトキハ,其一方ノ平面上ノ一點ヨリ他ノ平面ニ引ケル垂線ハ初ノ平面上ニアリ.

系 3. 同一平面ニ垂直ナル二平面ノ交線ハ初ノ平面ニ垂直ナリ.

例題

1. 一點ヲ通ル三直線ガ何レノ二ツヲ取リテモ垂直ナラバ此三直線ヲ二ツ宛含ム三平面ハマタ何レノ二ツヲ取リテモ垂直ナリ.

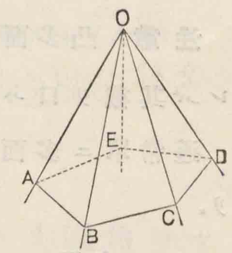
2. 三平面ガ何レノ二ツヲ取リテモ垂直ナラバ其二ツ宛ノ交リナル三直線ハマタ何レノ二ツヲ取リテモ垂直ナリ.

3. 一點ヨリ相交ル二平面ノ各ニ引キタル二垂線ヲ含ム平面ハ初ノ二平面ノ交線ニ垂直ナリ.

4. 平面ニ垂直ナラザル直線ヲ含ミ其平面ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアリ.

26. 多面角

定義 一點ニ會スル數多ノ平面ヲ各其隣リノ平面トノ交線ニテ限リ,且ツ其會點ニテ限ルトキ,此等ノ平面ハ**多面角ヲナス**トイフ.



其點ヲ多面角ノ**頂點**,各平面ヲ其ノ**面**,相隣レル二面ノ交線ヲ其ノ**稜**,相隣レル二稜ノナス角ヲ其ノ**平面角**トイフ.

上圖ニ於テ,Oハ多面角ノ頂點,平面AOB,BOC等ハ其面, OA, OB 等ハ其稜, ∠AOB, ∠BOC 等ハ其平面角ナリ.

面ノ數ガ三ツ,四ツ等ナル多面角ヲ夫々**三面角,四面角**等トイフ.

多面角ヲ表ハスニハ頂點ノ名ヲ書クカ,又ハ頂點ノ名ノ次ニ各稜上ノ一點ノ名ヲ順ニ續ケテ書ク. 例ヘバ多面角O又ハ多面角O-ABCDEノ如シ.

多面角ガ其ノ何レノ面ヲ延長シテモ其一方

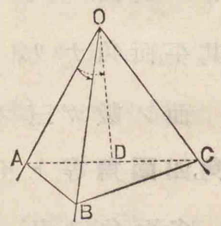
ニアルトキハ之ヲ凸多面角トイヒ,其ノ何レカ一ツノ面ヲ延長スレバ其ノタメニ多面角ガ二ツノ部分ニ分タルヽトキハ之ヲ凹多面角トイフ.

注意 凸多面角ヲ其各稜ニ交ル平面ニテ截レバ其截リ口ハ凸多角形ナリ.

通常單ニ多面角トイフハ凸多面角ノコトナリ.

27. 定理

三面角ノ一平面角ハ他ノ二平面角ノ和ヨリ小ナリ.



證明 三面角 O−ABC ノ三平面角中最大ナラザル者ハ他ノ二平面角ノ和ヨリ小ナルコト言フマデモナシ. ソコデ例ヘバ ∠AOC ガ最大ナリトシ, ∠AOC 内ニ於テ ∠AOB ニ等シク ∠AOD ヲ取リ, OA, OD, OC ニ交ル一直線 ADC ヲ引キ, OB 上ニ OD ニ等シク OB ヲ取リ, AB, BC ヲ引ケバ

$\triangle AOB \equiv \triangle AOD$

$\therefore\ AB = AD$

$\therefore\ \cdots\cdots DC < BC$

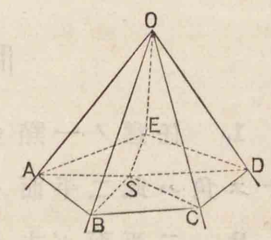
$\therefore\ \angle DOC < \angle BOC$

$\therefore\ \angle DOC + \angle AOD < \angle BOC + \angle AOB$

即チ $\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$

28. 定理

凸多面角ノ平面角ノ和ハ 4 直角ヨリ小ナリ.



證明 例ヘバ多面角 O−ABCDE ヲ其各稜ニ交ル一平面ニテ截リ,其截リ口ノ凸多角形ヲ ABCDE トス.

ABCDE 内ニ一點Sヲ取リ, SA, SB 等ヲ引ケバ, O ヲ頂點トシ AB, BC 等ヲ底邊トスル一群ノ三角形トSヲ頂點トシ AB, BC 等ヲ底邊トスル一群ノ三角形トハ同數ニシテ,從テ其内角ノ和ハ相等シ.

然ルニ三面角 A−OEB, B−OAC 等ニ於テ

$$\angle OAE+\angle OAB>\angle EAB$$

$$\angle OBA+\angle OBC>\angle ABC$$

....

此等ノ不等式ヲ邊々相加フレバOヲ頂點トスル三角形ノ底角ノ和ハSヲ頂點トスル三角形ノ底角ノ和ヨリ大ナルコトガ分カル.

故ニOヲ頂點トスル三角形ノ頂角ノ和卽チ多面角ノ平面角ノ和ハSヲ頂點トスル三角形ノ頂角ノ和卽チ4R∠ヨリ小ナリ.

問題

1. 任意ノ一點ヨリ二平面ニ引ケル垂線ノナス角ハ此二平面ノナス角叉ハ其補角ニ等シ.

2. 二平面ガ夫々他ノ二平面ニ平行ナラバ各組ノ二平面ノナス角ハ相等シキカ叉ハ補角ナリ.

3. 平面ニ平行ナル直線ニ垂直ナル平面ハ前ノ平面ニ垂直ナリ.

4. 定直線外ノ定點ヨリ此定直線ヲ含ム任意ノ平面ニ引ケル垂線ノ足ノ軌跡如何.

5. 相交ル二平面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何.

6. 三面角ノ頂點ヲ通リ其内部ニ引ケル一直線ガ其各稜トナス三ツノ角ノ和ハ此三面角ノ三平面角ノ和ノ半分ヨリ大ナリ.

7. 三面角ノ各平面角ガ與ヘラレタルトキ,此三面角ノ二ツノ面ノナス角ヲ作圖ニヨリテ求メヨ.

第二編

多面體

第一章 角壔及角錐

29. 多面體

定義 若干ノ平面ニテ圍マレタル立體ヲ**多面體**トイフ.

多面體ノ表面ヲナス多角形ヲ多面體ノ**面**,相隣レル二面ノ交線ヲ其ノ**稜**,相隣レル二稜ノ交點ヲ其ノ**頂點**トイフ.

同一面上ニアラザル二頂點ヲ結ブ線分ヲ多面體ノ**對角線**トイフ.

面ノ數ガ四ツ,五ツ等ナル多面體ヲ夫々**四面體**,**五面體**等トイフ.

多面體ガ其ノ何レノ面ヲ延長シテモ其一方ニアルトキハ之ヲ**凸多面體**トイヒ,其ノ何レカ一ツノ面ヲ延長スレバ其ノ爲ニ多面體ガ二ツノ部分ニ分タル丶トキハ之ヲ**凹多面體**トイフ

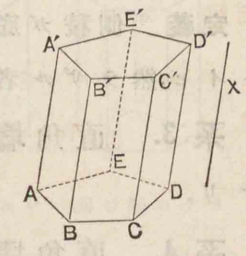
注意 凸多面體ヲ平面ニテ截リタル截リ口ハ凸多角形ナリ.

通常單ニ多面體トイフハ凸多面體ノコトナリ.

30. 角壔

定義 二平行平面ト一直線ニ平行ナル若干ノ平面トニテ圍マレタル多面體ヲ**角壔**トイフ.

其平行ナル二面ヲ角壔ノ**底面**トイヒ,其他ノ面ヲ其ノ**側面**トイフ.



相隣レル二側面ノ交線ヲ角壔ノ**側稜**トイフ.

二底面間ノ距離ヲ角壔ノ**高サ**トイフ.

側面ノ數ガ三ツ,四ツ等ナル角壔ヲ夫々**三角壔**,**四角壔**等トイフ.

角壔ヲ表ハスニハ其兩底面ノ名ヲ續ケテ書ク. 例ヘバ五角壔 ABCDE−A′B′C′D′E′ ノ如シ.

31. 定理

角壔ノ側面ハ何レモ平行四邊形ニシ

テ,兩底面ハ合同ナリ.

證明 略ス.

系 1. 角壔ノ側稜ハ皆平行シニテ且ツ相等シ.

系 2. 角壔ヲ其ノスベテノ側稜ニ交ル二平行平面ニテ截リタル截リ口ハ合同ナリ.

定義 側稜ガ底面ニ垂直ナル角壔ヲ**直角壔**トイヒ,然ラザル者ヲ**斜角壔**トイフ.

系 3. 直角壔ノ高サハ其側稜ノ長サナリ.

系 4. 直角壔ノ側面ハ何レモ矩形ナリ.

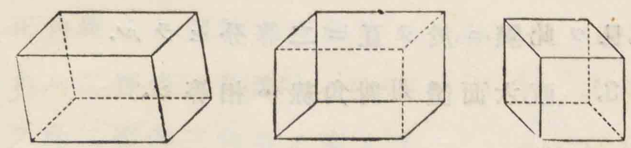
32. 平行六面體

定義 底面ガ平行四邊形ナル角壔ヲ**平行六面體**トイフ.

底面ガ矩形ナル直角壔(卽チ各面ガ矩形ナル平行六面體)ヲ**直六面體**トイフ.

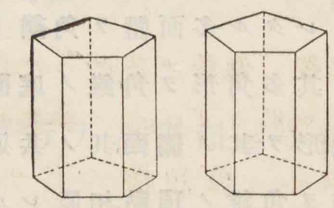
各面ガ正方形ナル直六面體ヲ**立方體**トイフ.

平行六面體　　直六面體　　立方體



33. 定理

底面ガ合同ニシテ高サガ相等シキ直角壔ハ合同ナリ.



證明 略ス.

(兩底面ヲ重ネレバ全部重ナルコトガ分カル. 若シ兩角壔ノ底面ノ位置ガ逆ノ順ニアラバ一方ノ角壔ヲ倒サマニスレバ同ジ順ニナリテ重ネ合ハスコトヲ得)

系 1. 一頂點ニ會スル三稜ガ夫々相等シキ二直六面體ハ合同ナリ.

系 2. 一稜ノ長サガ相等シキ二立方體ハ合同ナリ.

例　題

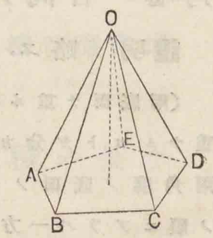
1. 平行六面體ノ相對スル面ハ夫々合同ナル平行四邊形ナリ.

2. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ一點ニ會シ,且ツ此點ニ於テ互ニ二等分セラル.

3. 直六面體ノ對角線ハ相等シ.

34 角錐

定義 一多角形ト,其各邊ヲ底邊トシ其平面外ノ一點ヲ共通ノ頂點トスル三角形トニテ圍マレタル多面體ヲ**角錐**トイフ.



其多角形ヲ角錐ノ**底面**,各三角形ヲ其ノ**側面**,其ノ共通ノ頂點ヲ角錐ノ**頂點**,相隣レル側面ノ交リヲ其ノ**側稜**トイフ.

頂點ト底面トノ距離ヲ角錐ノ**高サ**トイフ.

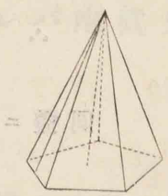
底面ガ三角形,四角形等ナル角錐ヲ夫々**三角錐**,**四角錐**等トイフ.

角錐ヲ表ハスニハ其頂點ノ名ノ次ニ底面ノ名ヲ續ケテ書ク. 例ヘバ五角錐 O–ABCDE ノ如シ.

底面ガ正多角形ニシテ其頂點ガ底ノ中心(外接圓ノ中心卽チ內切圓ノ中心)ヨリ底ニ引ケル

垂線上ニアル角錐ヲ**正角錐**トイフ.

正角錐ノ各側稜ハ皆相等シク,各側面ハ皆合同ナル二等邊三角形ナリ. 而シテ此二等邊三角形ノ高サヲ此正角錐ノ**側高**トイフ.



注意 三角錐ハ四面體ナリ,而シテ四面體ハ必ズ三角錐ナリ.

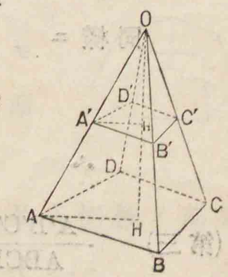
35. 定理

角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ

(第一) 側稜及高サハ同ジ比ニ分タル.

(第二) 截リ口ト底面トハ相似ナリ.

(第三) 截リ口ノ面積ト底面積トノ比ハ頂點ト此等ノ面トノ距離ノ平方ノ比ニ等シ.



證明 角錐 O-ABCD ノ底面 ABCD ニ平行ナル一平面ニテノ截リ口ヲ A'B'C'D' トシ,頂點 O ヨリ底面ニ引ケル垂線ガ底

面及截リロト交ル點ヲ夫々H,H'トスレバ

(第一)　$A'B' \,//\, AB$ (第13節)

$$\therefore \quad \frac{OA'}{A'A}=\frac{OB'}{B'B}$$

同様ニ　$\dfrac{OB'}{B'B}=\dfrac{OC'}{C'C}$

....

又AH, A'H'ヲ引ケバ

$A'H' \,//\, AH$ (第13節)

$$\therefore \quad \frac{OA'}{A'A}=\frac{OH'}{H'H}$$

(第二)　$\angle ABC=\angle A'B'C'$ (第14節)

同様ニ　$\angle BCD=\angle B'C'D'$

....

又　$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{B'C'}{BC}$

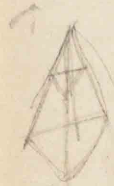
同様ニ　$\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}$

....

$$\therefore \quad A'B'C'D' \backsim ABCD$$

(第三)　$\dfrac{A'B'C'D'}{ABCD}=\dfrac{A'B'^2}{AB^2}=\dfrac{OA'^2}{OA^2}=\dfrac{OH'^2}{OH^2}$

系　底面ガ等積ニシテ高サガ相等シキ二角錐ヲ,其頂點ヨリ等距離ニ於テ底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ兩截リロハ等積ナリ.



例題

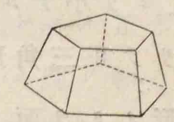
1. 高サh,底面積aナル角錐ヲ其底ニ平行ニシテ頂點ヨリノ距離ガh'ナル平面ニテ截レバ其截リロノ面積如何.

2. 角錐ヲ底ニ平行ナル平面ニテ截リ其截リロノ面積ヲ底面積ノ半分ナラシメヨ.

36. 角錐臺

定義　角錐ヲ其底ニ平行ナル平面ニテ截ルトキ,其截リロト底面トノ間ノ部分ヲ**角錐臺**トイフ.

此截リロト底面トヲ何レモ此角錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ.



元ノ角錐ノ各側面ノ部分及各側稜ノ部分ヲ夫々角錐臺ノ**側面**及**側稜**トイフ.

元ノ角錐ガ正角錐ナル角錐臺ヲ**正角錐臺**トイフ.

元ノ正角錐ノ各側高ノ部分ヲ正角錐臺ノ側高トイフ.

注意　角錐臺ノ側面ハ皆梯形ナリ. 正角錐臺ノ側面ハ皆合同ナル二等邊梯形ナリ.

37. 正多面體

定義　多面體ノ各面ガ合同ナル正多角形ニシテ其各頂點ニ於ケル多面角ガ皆合同ナルモノヲ**正多面體**トイフ.

定理　正多面體ハ五種ヨリ多カラズ.

證明　正多面體ノ各頂點ニ於ケル多面角ノ平面角ハ何レモ合同ナル正多角形ノ角ニシテ, コレガ三箇以上集マリ, 且ツ其平面角ノ和ハ4R∠ヨリ小ナルコトヲ要ス.

サテ正三角形ノ一角ハ$\frac{2}{3}$R∠ナルユヱ, 正三角形ノミヲ面トシテ作リ得ベキ多面角ハ三面角又ハ四面角又ハ五面角ダケナリ.

又正方形ノ一角ハ1R∠,正五邊形ノ一角ハ$\frac{6}{5}$R∠ナルユヱ, 正方形ノミ又ハ正五邊形ノミヲ面トシテ作リ得ベキ多面角ハ何レモ三面角ダケナリ.

次ニ正六邊形ノ一角ハ$\frac{4}{3}$R∠ニシテ

$$\frac{4}{3}R\angle\times3=4R\angle \nless 4R\angle$$

因テ六邊以上ノ正多角形ノミヲ面トシテハ多面角ヲ作ルコトヲ得ズ.

故ニ正多面體ノ多面角ヲナス面ハ次ノ五種ヨリ多カラザルコトガ分カル.

(1)　三箇ノ正三角形　　(2)　三箇ノ正方形

(3)　四箇ノ正三角形　　(4)　三箇ノ正五邊形

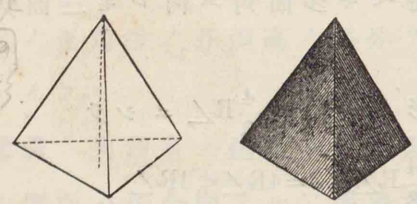
(5)　五箇ノ正三角形

從テ正多面體モ亦五種ヨリ多クアルコトヲ得ズ.

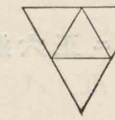
注意　上ノ五種ヲ夫々多面角トスル正多面體ハ實際ニアリテ夫々次ノ二頁ノ圖ノ如ク正四面體,正六面體,正八面體,正十二面體及正二十面體ナリ.

展開形
割尾形

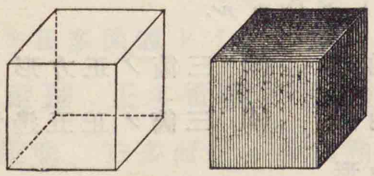
正四面體



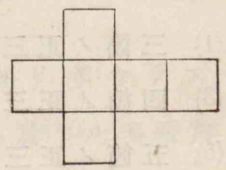
表面ノ展開圖



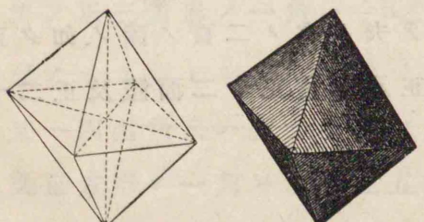
正六面體



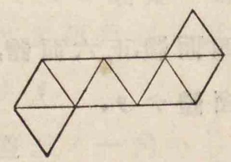
表面ノ展開圖



正八面體



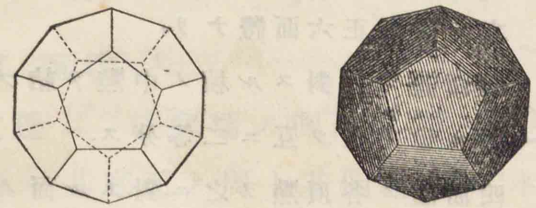
表面ノ展開圖



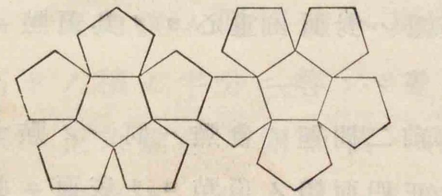
三角形
〃
〃

10面体
8
20
6
12

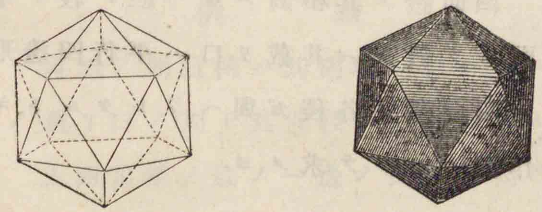
正十二面體



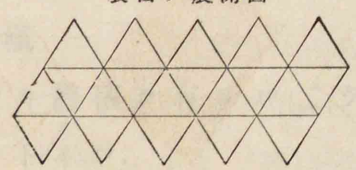
表面ノ展開圖



正二十面體



表面ノ展開圖



問　題

1. 立方體ハ正六面體ナリ.

2. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ一點ニ會シ,且ツ互ニ二等分ス.

3. 四面體ノ各頂點ヲ之ニ對スル面ノ重心ニ結ブ四直線ハ一點ニ會シ,此點ヨリ各頂點ニ至ル距離ハ對面ノ重心ヨリ其頂點ニ至ル距離ノ$\frac{3}{4}$ニ等シ.

4. 前二問題ノ會點ハ同一ノ點ナリ.

5. 正四面體ノ頂點ヨリ底面ニ引ケル垂線ハ其足ヨリ側面ニ引ケル垂線ノ三倍ニ等シ.

6. 四面體ヲ其相對スル一組ノ稜ニ平行ナル平面ニテ截レバ其截リ口ハ平行四邊形ナリ.

7. 四面體ノ各稜ガ與ヘラレタルトキ其高サヲ作圖ニヨリテ求メヨ.

第二章　求　積

38. 面積

定理 1. 直角壔ノ側面積(側面ノ面積ノ和)ハ其底面ノ周ト其側稜(高サ)トノ積ニ等シ.

定理 2. 正角錐ノ側面積ハ其底面ノ周ト側高トノ積ノ半分ニ等シ.

定理 3. 正角錐臺ノ側面積ハ兩底面ノ周ノ和ト側高トノ積ノ半分ニ等シ.

證明 略ス.

例　題

1. 角壔ノ側面積ハ其側稜ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ノ周ト其側稜トノ積ニ等シ.

2. 正四角錐ノ底ノ一邊ノ長サa,高サhナルトキ其側面積如何.

39. 體積

相等シキ體積ヲ有スル二ツノ圖形ハ等積ナリトイフ.

合同ナル圖形ハ必ズ等積ナレドモ,等積ナル圖形必ズシモ合同ナラズ.

體積ノ單位ニハ一稜ノ長サガ長サノ單位ニ等シキ立方體ノ體積ヲ用フルモノトス.

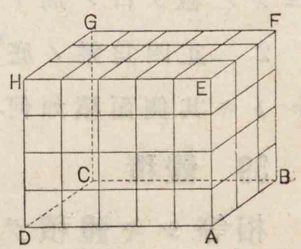
例ヘバ長サノ單位ヲ1米トスレバ,之ヲ一稜トスル立方體ノ體積ヲ體積ノ單位トシ之ヲ1立方米トイフ.

1立方尺,1立方寸等モ之ニ準ズ.

40. 定理

直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ其一頂點ニ於テ會スル三稜ヲ表ハス數ノ積ニ等シ.

證明 (第一) 各稜ヲ表ハス數ガ何レモ整數ナルトキ.



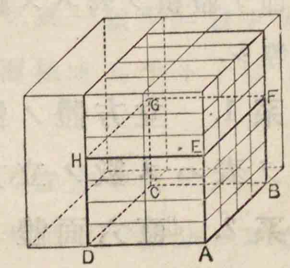
直六面體 ABCD-EFGH ニ於テ,例ヘバ AB=3糎, AD=5糎, AE=4糎ナリトセン.

AB, AD, AE ヲ夫々三等分,五等分四等分シ,各分點ヲ通リ夫々其稜ニ垂直ナル平面ヲ作レバ,此等ノ平面ノタメニ此直六面體ハ三ツ宛五列ノモノ四段卽チ $3\times5\times4$ 箇ノ相等シキ立方體ニ分タル,而シテ此立方體ノ稜ノ長サハ1糎ナルヲ以テ其體積ハ1立方糎ナリ,從ツテ直六面體 ABCD-EFGH ノ體積ハ $1^{\text{立方糎}}\times3\times5\times4=3\times5\times4$ 立方糎ナリ.

卽チ體積ヲ表ハス數ハ三稜ヲ表ハス數ノ積ニ等シ.

(第二) 各稜ヲ表ハス數ガ何レモ分數ナルトキ.

例ヘバ $AD=\frac{2}{3}$ 寸, $AB=\frac{4}{5}$ 寸, $AE=\frac{4}{7}$ 寸ナリトセン.



稜ノ長サ1寸ナル立方體ヲ取リ,其一稜ヲ三等分シ,其各分點ヲ通リテ之ニ垂直ナル平面ヲ作レバ,之ニヨリテ立方體ハ合同ナル三ツノ直

六面體ニ分タル.（第33節）

其二ツヲ其儘合ハセタル直六面體ヲ取リ,長サ1寸ナル稜ヲ五等分シ,其各分點ヲ通リテ之ニ垂直ナル平面ヲ作レバ,此直六面體ハ合同ナル五ツノ直六面體ニ分タル.（第33節）

其四ツヲ其儘合ハセタル直六面體ヲ取リ,長サ1寸ナル稜ヲ七等分シ,其各分點ヲ通リテ之ニ垂直ナル平面ヲ作レバ,七ツノ合同ナル直六面體ニ分タル.

其四ツヲ其儘合ハセタル直六面體ハ卽チ一頂點ニ會スル三稜ガ夫々$\frac{2}{3}$寸,$\frac{4}{5}$寸,$\frac{4}{7}$寸ナル直六面體ニシテ,其體積ハ初ノ立方體ノ體積ノ$\frac{2}{3}$ノ$\frac{4}{5}$ノ$\frac{4}{7}$卽チ $1^{立方寸}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{7}$立方寸ナリ.

卽チ體積ヲ表ハス數ハ三稜ヲ表ハス數ノ積ニ等シ.

系 1. 立方體ノ體積ヲ表ハス數ハ其稜ヲ表ハス數ノ立方(三乘)ニ等シ.

系 2. 直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ其底面積ヲ表ハス數ト其高サヲ表ハス數トノ積ニ等シ.

系 3. 底面ガ等積ニシテ高サガ相等シキ二ツノ直六面體ハ等積ナリ.

系 4. 底面積(又ハ高サ)ガ相等シキ二ツノ直六面體ノ體積ハ其高サ(又ハ底面積)ニ比例ス.

系 5. 直六面體ノ底面積(又ハ高サ)ヲ表ハス數ハ其體積ヲ表ハス數ヲ其高サ(又ハ底面積)ヲ表ハス數ニテ除シタル商ニ等シ.

系 6. 立方體ノ一邊ヲ表ハス數ハ其體積ヲ表ハス數ノ立方根ニ等シ.

41. 積

定義 直六面體ノ體積ヲ其一頂點ニ會スル三稜ノ積ト名ヅク. 又底面積ト高サトノ積トモイフ.

立方體ノ體積ヲ其一稜ノ**立方**ト名ヅク.

三線分a, b, cノ積ヲ$a.b.c$ト記シ,一線分aノ立方ヲa^3ト記ス.

面積Sト線分lトノ積ヲ$S.l$ト記ス.

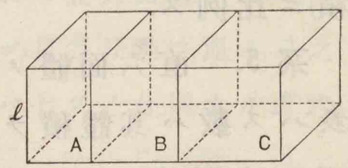
42. **定理**

若干ノ面積ノ和ト一線分トノ積ハ其各面積ト其線分トノ積ノ和ニ等シ.

例ヘバ三ツノ面積ヲA, B, Cトシ一線分ヲlトスレバ

$(A+B+C).l=A.l+B.l+C.l$

ナリ.



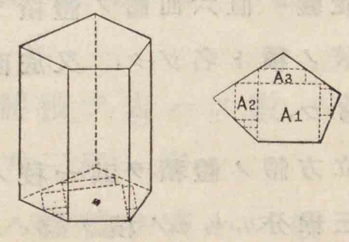
證明 略ス.

系 二ツノ面積ノ差ト一線分トノ積ハ其各面積ト其線分トノ積ノ差ニ等シ.

43. **定理**

直角壔ノ體積ハ其底面積ト高サトノ積ニ等シ.

證明 直角壔ノ底面内ニ矩形ヲ十分ニ多ク入ルレバ此等ノ矩形ノ面積ノ和ハ底面ノ面積ニ限リナク近ヅクベク,之ト



同時ニ此等ノ各矩形ヲ底面トシ直角壔ノ高サヲ高サトスル直六面體ノ體積ノ和ハマタ直角壔ノ體積ニ限リナク近ヅクベシ.

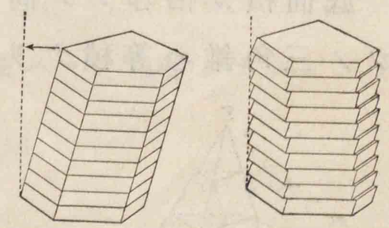
即チ直角壔ノ底面積ヲA,高サヲh,底面内ニ入レタル矩形ノ面積ヲA_1, A_2, A_3等トシ,直角壔ノ體積ヲVトスレバ $A_1+A_2+A_3+\ldots\ldots$ ハ限リナクAニ近ヅキ $A_1.h+A_2.h+A_3.h+\ldots\ldots$ 即チ $(A_1+A_2+A_3+\ldots\ldots).h$ ハ限リナクVニ近ヅク.

$$\therefore \quad V=A.h$$

44. **定理**

角壔ノ體積ハ其底面積ト高サトノ積ニ等シ.

證明 角壔ノ側稜ヲn等分シ,其各分點ヲ通リテ底面ニ平行ナル平面ヲ作レバ,此等ノ平面ニヨリテ此角壔ハn箇ノ薄キ角壔ニ分タル.



之ヲ底ノ一端ヨリ底ニ引ケル垂線ノ方ニ矢

ノ如クズラセバ底面モ高サモ元ト變ハラザル直角壔ノ形ニ近ヅクベシ.

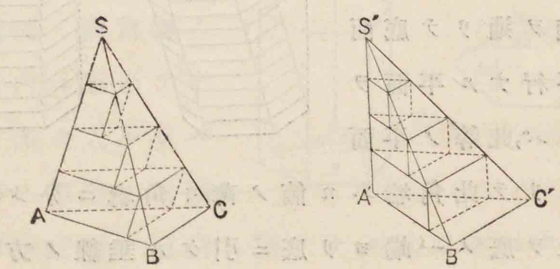
nヲ大キクスルニ從ヒ緣邊ノ凹凸ハ漸次小サクナリ, nヲ十分ニ大キクスレバ限リナク直角壔ニ近ヅク,而シテ直角壔ノ體積ハ其底面積ト高サトノ積ニ等シ. 因テ斜角壔ニ於テモ亦然ラザルヲ得ズ.

系 1. 底面ガ等積ニシテ高サガ相等シキ兩角壔ハ等積ナリ.

系 2. 等底(又ハ等高)ナル兩角壔ノ體積ハ其高サ(又ハ底面積)ニ比例ス.

45. 定理

底面積ガ相等シク高サガ相等シキ二ツノ三角錐ハ等積ナリ.



證明 S-ABC 及 S'-A'B'C' ヲ等底等高ナル二ツノ三角錐トセン.

高サヲn等分シ,各分點ヲ通リ底面ニ平行ナル平面ヲ作レバ,此等ノ平面ニ依リテノ兩角錐ノ截リ口ノ面積ハ夫々相等シ. (第35節系)

各截リ口ヲ底面トシ元ノ角錐ノ高サノ$\frac{1}{n}$ヲ高サトシ夫々SA及S'A'ニ平行ナル稜ヲ有スル角壔ヲ各截リ口ノ下ニ作レバ,兩角錐內ニ生ズル此等ノ角壔ハ一ツ宛夫々等積ニシテ(前節),從テ一方ノ角錐內ノ角壔ノ體積ノ和ハ分割スル數ノ如何ニ拘ラズ恒ニ他方ノソレニ等シ.

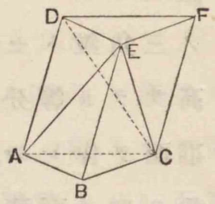
サテnヲ十分ニ大キク取レバ,双方ノ角錐內ノ角壔ノ體積ノ和ハ夫々限リナク其角錐ノ體積ニ近ヅク.

因テ兩角錐ノ體積ハマタ相等シカラザルヲ得ズ.

46. 定理

三角壔ハ之ヲ等積ナル三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得.

證明 三角壔 ABC-DEF ヲ平面 EAC 及 EDC ニテ截レバ三ツノ三角錐 E-ABC, E-ACD, E-FDC ニ分タル.



サテ兩三角錐 E-ACD, E-FDC ハ其底面 ACD, FDC ガ等積ニシテ其高サハ何レモ頂點 E ト平面 ACFD トノ距離ナルユヱ等積ナリ.

又兩三角錐 E-ABC ト E-FDC 卽チ C-DEF トハ底面 ABC, DEF ガ等積ニシテ其高サハ何レモ原三角壔ノ高サナルユヱ等積ナリ.

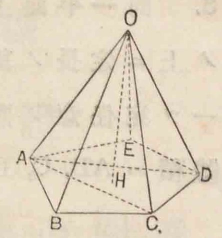
卽チ三角壔 ABC-DEF ハ等積ナル三箇ノ三角錐ニ分タル.

系　三角錐ノ體積ハ其底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シ.

47. 定理

角錐ノ體積ハ其底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シ.

證明 例ヘバ五角錐 O-ABCDE ハ其高サ OH ヲ共通ノ高サトスル三ツノ三角錐 O-ABC, O-ACD, O-ADE ニ分ツコトヲ得.



而シテ

O-ABE ノ體積 $=\frac{1}{3}.(\triangle ABC).OH$

O-ACD 〃 $=\frac{1}{3}.(\triangle ACD).OH$

O-ADE 〃 $=\frac{1}{3}.(\triangle ADE).OH$

∴ O-ABCDE ノ體積 $=\frac{1}{3}.(\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE).OH$

$=\frac{1}{3}.(ABCDE).OH$

系 1. 底面ガ等積ニシテ高サガ相等シキ角錐ハ等積ナリ.

系 2. 等底(又ハ等高)ナル角錐ノ體積ハ其高サ(又ハ底面積)ニ比例ス.

問　　題

1. 一稜ノ長サ a ナル正四面體ノ高サ及體積如何.

2. 正六角錐ノ底面ノ一邊ノ長サ a, 側稜ノ長サ b ナルトキ其體積如何.

3. 同一平面上ニアラザル三平行線中ノ一ツノ上ニ定長ノ線分 AB ヲ取リ,他ノ二ツノ上ニ一ツ宛任意ノ點 C, D ヲ取レバ,四面體 ABCD ノ體積ハ AB, C, D ノ位置ニ關セズ常ニ一定ナリ.

4. 底面積 a, 高サ h ナル角錐ヲ底ニ平行ナル平面ニテ截リ其體積ヲ二等分スルトキ頂點ヨリ截リ口マデノ距離如何.

5. 角錐臺ノ體積ヲ V, 兩底面積ヲ a, a', 高サヲ h トスレバ

$$V=\tfrac{1}{3}.(a+a'+\sqrt{aa'}).h$$

6. 稜ノ長サ a ナル正八面體ノ體積及對角線ノ長サヲ求メヨ.

第三編

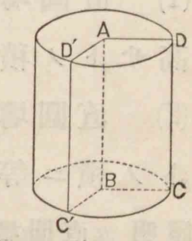
曲面體

第一章 直圓壔及直圓錐

48. 直圓壔

定義 矩形ガ其一邊ヲ軸トシテ一廻轉シタルトキ他ノ三邊ガ畫ク面ニテ圍マルヽ立體ヲ**直圓壔**トイフ.

廻轉ノ軸トシタル邊ヲ直圓壔ノ**軸**トイフ.



軸ニ垂直ナル二邊ハ平行ニシテ相等シキ二圓ヲ畫ク,此各ヲ直圓壔ノ**底面**トイヒ,其半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**トイフ.

軸ニ平行ナル邊ハ一ツノ曲面ヲ畫ク,之ヲ直圓壔ノ**側面**トイフ.

軸ノ長サ卽チ兩底面間ノ距離ヲ直圓壔ノ**高サ**トイフ.

廻轉スルトキノ各位置ニ於ケル軸ニ對スル邊ヲ直圓壔ノ**母線**トイフ.

注意 各母線及軸ハ平行ニシテ且ツ相等シ.

例題

1. 直圓壔ノ軸ヲ含ム平面ニテノ截リ口ハ矩形ナリ.

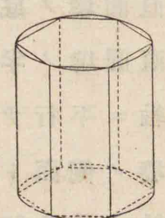
2. 直圓壔ノ軸ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ハ底ニ等シキ圓ナリ.

49. 定理

(1) 直圓壔ノ側面積ハ其底面ノ周ト其高サトノ積ニ等シ.

(2) 直圓壔ノ體積ハ其底面積ト其高サトノ積ニ等シ.

證明 直圓壔ノ底ノ周ヲ p, 高サヲ h, 側面積ヲ A, 底面積ヲ B, 體積ヲ V トス.



直圓壔ノ底面ニ內接スル正 n 邊形ヲ底面トシ直圓壔ノ高サヲ高サトスル直角壔ヲ作リ,其底ノ周ヲ p_n,側

面積ヲ A_n,底面積ヲ B_n,體積ヲ V_n トスレバ,邊數 n ヲ大キクスルニ從ヒ p_n, A_n, B_n, V_n ハ夫々 p. A, B, V ニ近ヅキ, n ヲ限リナク大キクスレバ此等ハ夫々限リナク相近ヅク. 從テ $p_n.h$ 及 $B_n.h$ ハマタ夫々限リナク $p.h$ 及 $B.h$ ニ近ヅク.

而シテ n ノ値ニ拘ラズ恒ニ

$$A_n = p_n.h \quad (\text{第38節定理1})$$

$$V_n = B_n.h \quad (\text{第43節})$$

$$\therefore \quad A = p.h, \quad V = B.h$$

系 直圓壔ノ底ノ半徑ヲ r トスレバ

$$A = 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

例題

1. 直圓壔ノ側面積ハ底ノ直徑ト高サトノ比例中項ニ等シキ長サヲ半徑トスル圓ノ面積ニ等シ.

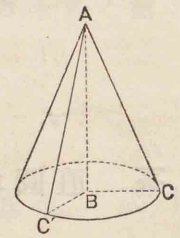
2. 側面積ガ相等シキ二圓壔ノ體積ノ比ハ其半徑ノ比ニ等シ.

3. 深サト內徑トガ相等シキ直圓壔狀ノ一リ

ツトル桝ノ深サヲ粍ノ小數第一位マデ算出セヨ. 但 $\pi=3.1415926535\ldots\ldots$

50. 直圓錐

定義 直角三角形ガ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一廻轉シタルトキ他ノ二邊ガ畫ク面ニテ圍マルヽ立體ヲ**直圓錐**トイフ.



廻轉ノ軸トシタル邊ヲ直圓錐ノ軸トイフ.

軸ニ垂直ナル邊ハ一ツノ圓ヲ畫ク,之ヲ直圓錐ノ**底面**トイヒ,其半徑ヲ直圓錐ノ**半徑**トイフ.

斜邊ハ一ツノ曲面ヲ畫ク,之ヲ直圓錐ノ**側面**トイフ.

軸ト斜邊ト交ル頂點ヲ直圓錐ノ**頂點**トイフ.

軸ノ長サ卽チ頂點ト底面トノ距離ヲ直圓錐ノ**高サ**トイフ.

廻轉スルトキノ各位置ニ於ケル斜邊ヲ直圓錐ノ**母線**トイヒ,其長サヲ直圓錐ノ**斜高**トイフ.

例題

1. 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ.

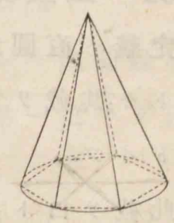
2. 直圓錐ノ軸ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ハ圓ナリ.

51. 定理

(1) 直圓錐ノ側面積ハ其底面ノ周ト其斜高トノ積ノ半分ニ等シ.

(2) 直圓錐ノ體積ハ其底面積ト其高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ.

證明 直圓錐ノ底ノ周ヲ p, 高サヲ h, 斜高ヲ l, 側面積ヲ A, 底面積ヲ B, 體積ヲ V トス.



直圓錐ノ底面ニ內接スル正 n 邊形ヲ底面トシ,直圓錐ノ頂點ヲ頂點トスル正 n 角錐ヲ作リ,其底ノ周ヲ p_n, 側高ヲ l_n, 側面積ヲ A_n, 底面積ヲ B_n, 體積ヲ V_n トスレバ,邊數 n ヲ大キクスルニ從ヒ p_n, l_n, A_n, B_n, V_n ハ夫々 p, l, A, B, V ニ近ヅキ, n ヲ限リナ

ク大キクスレバ此等ハ夫々限リナク相近ヅク.

從テ $\frac{1}{2}.p_n.l_n$ 及 $\frac{1}{3}.B_n.h$ ハマタ夫々 $\frac{1}{2}.p.l$ 及 $\frac{1}{3}.B.h$ ニ近ヅク.

而シテ n ノ値ニ拘ラズ恒ニ

$$A_n=\frac{1}{2}.p_n.l_n \quad (\text{第38節定理2})$$

$$V_n=\frac{1}{3}.B_n.h \quad (\text{第47節})$$

$$\therefore \quad A=\frac{1}{2}.p.l, \qquad V=\frac{1}{3}.B.h$$

系 直圓錐ノ底ノ半徑ヲ r トスレバ

$$A=\pi rl$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

52. 直圓錐臺

定義 直圓錐ヲ其底ニ平行ナル平面ニテ截ルトキ,其截リ口ト底面トノ間ノ部分ヲ**直圓錐臺**トイフ.

此截リ口ト底面トヲ何レモ此直圓錐臺ノ**底面**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ其ノ**高サ**トイフ.

元ノ直圓錐ノ各側面及各斜高ノ部分ヲ夫々直圓錐臺ノ**側面**及**斜高**トイフ.

定理 直圓錐臺ノ側面積ハ其兩底面ノ周ト其斜高トノ積ノ半分ニ等シ.

證明 略ス.(第38節定理3ヲ用ヒ,前節ノ定理ノ證明ト同様ニシテ證明スルコトヲ得)

例題

1. 直圓錐ヲ其軸ノ中點ヲ通リ底ニ平行ナル平面ニテ截レバ其二部分ノ體積ノ比如何.

2. 直角ヲ夾ム二邊ノ比ガ 3:4 ナル直角三角形ヲ其各邊ヲ軸トシテ廻轉シタルトキ生ズル三ツノ立體ノ體積ノ比如何.

3. 直圓錐臺ノ體積ヲ V,兩底面積ヲ a, a',高サヲ h トスレバ

$$V=\frac{1}{3}.(a+a'+\sqrt{aa'}).h$$

4. 深サト底ノ內徑トガ相等シキ直圓錐狀1リットル桝ノ深サヲ粍ノ小數第一位マデ算出セヨ.

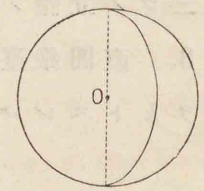
第二章　球

53. 球

定義　半圓ガ其直徑ヲ軸トシテ一廻轉シタルトキ其半圓周ガ畫ク曲面ニテ圍マレタル立體ヲ**球**トイフ.

半圓ガ屬スル圓ノ中心ヲ球ノ**中心**トイフ.

中心ヨリ球面(球ノ表面)マデ引キタル線分ヲ球ノ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ其兩端ガ球面上ニアル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ.



球又ハ球面ヲ表ハスニハ通例其中心ノ名ヲ唱フ. 例ヘバ球O又ハ球面Oノ如シ.

注意　球ノ定義ヨリ直ニ次ノ事柄ガ分カル.

(1)　球ノ半徑及直徑ノ長サハ夫々一定ニシテ,直徑ハ半徑ノ二倍ナリ.

(2)　球面ハ中心ヨリノ距離ガ半徑ノ長サニ等シキ點ノ軌跡ナリ.

(3)　球内ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ小ニシテ,球外ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ大ナリ.

逆ニ,中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ小ナル點ハ球內ニアリ,半徑ヨリ大ナル點ハ球外ニアリ.

(4)　半徑ガ相等シキ二球ハ合同ナリ.

逆ニ,合同ナル二球ノ半徑ハ相等シ.

例　題

1.　定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ頂點ノ軌跡如何.

2.　二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡如何.

54. 定理

球ノ中心ト平面トノ距離ガ

(1)　半徑ヨリ大ナラバ,此球面ト平面トニハ共有點ナシ.

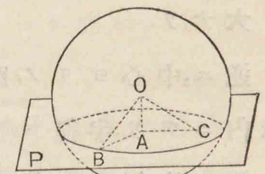
(2)　半徑ニ等シケレバ,此球面ト平面トハ唯一點ヲ共有ス.

(3)　半徑ヨリ小ナラバ,此球面ト平面

トハ唯一圓周ヲ共有ス.

證明　(1), (2) 略ス.

(3)　球ノ中心Oヨリ平面Pニ引ケル垂線ノ足ヲAトシ,球ノ半徑ヲrトス.



P上ニ於テAヲ通ル任意ノ直線上ニ

$$AB^2=r^2-OA^2$$

ナル様ニABヲ取レバ, $\angle OAB=R\angle$ ナルユヱ

$$OB^2=AB^2+OA^2=r^2$$

$$\therefore\quad OB=r$$

故ニBハ球面Oノ上ニアリ.　即チP上ニ於テAヨリノ距離ガABニ等シキ點ハスベテ球面Oノ上ニアリ.

マタP上ニ於テAヨリノ距離ガABニ等シカラザル一點ヲCトスレバ

$$AC^2\neq r^2-OA^2\qquad\therefore\quad AC^2+OA^2\neq r^2$$

$$\therefore\quad OC^2\neq r^2\qquad\therefore\quad OC\neq r$$

故ニCハ球面Oノ上ニアラズ.

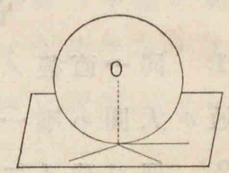
故ニ球面Oト平面PトハP上ニ於テAヨリ

ノ距離ガ定長ABニ等シキ點ノ軌跡即チAヲ中心ABヲ半徑トスル唯一圓周ヲ共有ス.

定義　球面ト平面トガ一圓周ヲ共有スルトキハ此球ト平面トハ互ニ**相交ル**トイフ.

球面ト平面トガ唯一點ヲ共有スルトキハ此球ト平面トハ互ニ**相切ス**トイヒ,其平面ヲ其球ノ**切平面**,其點ヲ**切點**トイフ.

切平面上ニ於テ切點ヲ通ル任意ノ直線ハ球面ト其點外ニ於テ出會フコトナシ,此各直線ヲ球ノ**切線**トイフ.



系 1.　球面ト直線トハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フコトナシ.

如何ニモ此直線ヲ含ム任意ノ平面ト球トガ相交ルトモ其交リハ圓周ニシテ,圓周ト直線トハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フコト能ハザレバナリ.

系 2.　球ノ中心ヨリ等距離ニアル平面ニテノ截リ口ナル圓ハ皆相等シク,等

距離ニアラザル平面ニテノ截リ口ナル圓ノ中,球ノ中心ニ近キ者ハ遠キ者ヨリ大ナリ.

球ノ中心ヲ通ル平面ニテノ截リ口ハ最大圓ナリ,此圓ヲ其球ノ**大圓**トイヒ,其他ノ截リ口ノ圓ヲ其球ノ**小圓**トイフ.

大圓ノ半徑ハ球ノ半徑ニ等シ.

例題

1. 同一直徑ノ兩端ナラザル球面上ノ二點ヲ通ル大圓ハ唯一ツアリ.

2. 同ジ球ノ二ツノ大圓ハ互ニ他ヲ二等分ス.

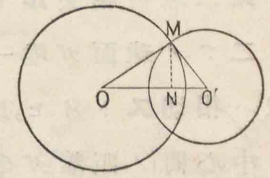
3. 大圓ハ球及球面ヲ二等分ス.

大圓ニテ分タレタル球ノ二部分ヲ各**半球**トイフ.

55. 定理

二球ノ中心間ノ距離ガ其半徑ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナラバ此二ツノ球面ハ唯一圓周ヲ共有ス,而シテ其圓ノ

平面ハ二球ノ中心ヲ結ブ直線ニ垂直ニシテ,其圓ノ中心ハ此直線上ニアリ.



證明 二球ノ中心O,O′ヲ含ム任意ノ平面ニテ二球ヲ截レバ其截リ口ハ各球ノ大圓ニシテ,從テ其半徑ハ夫々各球ノ半徑ニ等シ.

サテ假定ニヨリ,中心間ノ距離ハ半徑ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナルコヱ,此二ツノ大圓ハ相交ル. 其一交點ヲMトスレバMハツマリ二ツノ球面ノ一交點ナリ.

而シテ$\triangle OO'M$ハ各邊ノ長サ何レモ一定ナルコヱ,MヨリOO′ニ垂線MNヲ引ケバMNノ長サモ一定ニシテ其足Nハ定點ナリ.

故ニ空間内ニ於ケルM點ノ軌跡ハ定點Nヲ通リOO′ニ垂直ナル平面上ニ於テNヲ中心トシNMヲ半徑トスル圓周ナリ.

卽チ二ツノ球面ハ此唯一圓周ヲ共有ス.

系 中心間ノ距離ガ半徑ノ和ニ等シキカ若クハ其差ニ等シキ二ツノ球面ハ

唯一點ヲ共有ス.

定義 二ツノ球面ガ一圓周ヲ共有スルトキハ此二球ハ**相交ル**トイフ.

二ツノ球面ガ唯一點ヲ共有スルトキハ此二球ハ**相切ス**トイヒ,其點ヲ**切點**トイフ.

中心間ノ距離ガ半徑ノ和ニ等シケレバ一球ハ互ニ他ノ外ニアリ,半徑ノ差ニ等シケレバ一ガ他ノ內ニアリ,前ノ場合ニハ二球ガ互ニ**外切ス**トイヒ,後ノ場合ニハ二球ガ互ニ**內切ス**トイフ.

例　題

二球ガ相切スルトキハ其切點ニ於テ共通ノ切平面ヲ有ス.

~~球分~~ トナル

56. ~~缺球~~,球帶

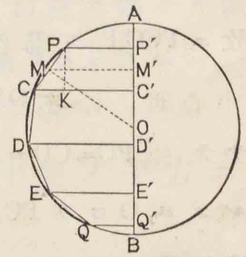
定義 球ヲ平行二平面ニテ截ルトキ其兩截リ口ノ間ニアル部分ヲ**缺球**トイフ.

缺球ノ側面ヲ特ニ**球帶**トイフ.

各截リ口ヲ缺球又ハ球帶ノ**底面**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ缺球又ハ球帶ノ**高サ**トイフ.

定理 球帶ノ面積ハ此球帶ガ屬スル球ノ大圓ノ周ト球帶ノ高サトノ積ニ等シ.

證明 中心Oナル圓ノ一直徑 AB ヲ軸トシテ其圓ノ弧 PQ ヲ一廻轉セシムレバ一球帶ヲ得ベシ.



弧 PQ ヲ C, D 等ニテ若干等分シ,弦 PC, CD 等ヲ引キ,P, C, D, ……Q ヨリ AB ニ夫々垂線 PP′, CC′, DD′, ………QQ′ ヲ引ケバ,弧 PQ ノ廻轉ニ伴ヒ PCC′P′, CDD′C′ 等ハ夫々直圓錐臺ヲ畫ク.

PCC′P′ ガ畫ク直圓錐臺ノ兩底面ハ夫々 P′ 及 C′ ヲ中心トシ P′P 及 C′C ヲ半徑トスル圓ニシテ斜高ハ PC ナリ.

PC ノ中點 M ヨリ AB ニ垂線 MM′ ヲ引ケバ,PCC′P′ ガ畫ク直圓錐臺ノ側面積ハ

$\frac{1}{2}.(2\pi.PP'+2\pi.CC').PC$ (第52節定理)

$=\pi.(PP'+CC').PC=\pi.(2.MM').PC$

$=2\pi.MM'.PC$

今OMヲ引キ,又PヨリCC'ニ垂線PKヲ引ケバ

$$\triangle OMM' \backsim \triangle CPK$$

$$\therefore \quad OM : MM' = CP : PK$$

$$\therefore \quad MM'.CP = OM.PK = OM.P'C'$$

故ニPCC'P'ガ畫ク直圓錐臺ノ側面積ハ

$2\pi.OM.P'C'$ ナリ.

サテ　$PC = CD = \ldots\ldots\ldots\ldots$

ナルユエ,OヨリPC, CD等ニ引ケル垂線ノ長サハ皆相等シ.

故ニ,上ト同様ニシテCDD'C'ガ畫ク直圓錐臺ノ側面積ハ$2\pi.OM.C'D'$ナリ. 其他モ之ニ準ズ.

因テ此等ノ直圓錐臺ノ側面積ノ和ハ

$$2\pi.OM.(P'C'+C'D'+\ldots\ldots\ldots) = 2\pi.OM.P'Q'$$
$$= 2\pi.OM.h$$

但シhハ球帶ノ高サトス.

サテ分點ノ數ヲ限リナク大キクスレバ,上ノ各直圓錐臺ノ側面積ノ和ハ限リナク球帶ノ面積Sニ近ヅキ,PC, CD等ハ限リナク小サクナルユエOMハ限リナク球ノ半徑rニ近ヅク.

$$\therefore \quad S = 2\pi.r.h$$

57. 定理

球ノ表面積ハ其大圓ノ面積ノ四倍ニ等シ.

證明　球ハ其高サガ球ノ直徑ニ等シキ缺球ト看做サルヽユエ,其表面積ヲSトスレバ

$$S = 2\pi.r.\ 2r = 4\pi r^2$$

系　球ノ表面積ハ其半徑ノ平方ニ比例ス.

例題

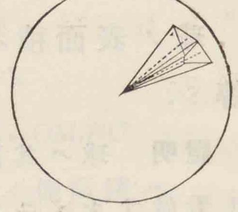
1. 球ノ表面積ハ之ニ外切スル直圓壔(其兩底面ガ球ニ切シ,且ツ其底ニ平行ナル球ノ大圓周ガ其側面ニ含マルヽ直圓壔)ノ側面積ニ等シ

2. 表面積1平方メートルノ球ノ半徑ヲ粍ノ位マデ算出セヨ.

58. 定理

球ノ體積ハ球ノ表面積ト其半徑トノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シ.

證明　球ニ內接スル多面體ヲ畫ケバ,此多面體ノ體積ハ其各面ヲ底面トシ球ノ中心ヲ頂點



トスル若干ノ角錐ノ和ニ等シ. 即チ此多面體ノ各面ノ面積ヲ A_1, A_2. A_3,......トシ,球ノ中心ヨリ此等ノ面ニ至ル距離ヲ夫々 h_1, h_2, h_3,..........トシ,多面體ノ體積ヲ V トスレバ

$$V=\frac{1}{3}(A_1.h_1+A_2.h_2+A_3.h_3+\ldots\ldots)$$

ナリ.

サテ此多面體ノ各面ヲ極メテ小サクスレバ,球ノ中心ヨリ各底面ニ至ル距離 h_1, h_2, h_3,........ハ何レモ限リナク球ノ半徑ニ近ヅク. 故ニ球ノ半徑ヲrトスレバ多面體ノ體積Vハ限リナク $\frac{1}{3}(A_1+A_2+A_3+\ldots\ldots\ldots)r$ ニ近ヅク. 而シテ之ト同時ニ多面體ノ體積Vハ限リナク球ノ體積ニ近ヅキ,多面體ノ表面積 $A_1+A_2+A_3+\ldots\ldots$ ハ限リナク球ノ表面積ニ近ヅク.

故ニ球ノ體積ハ球ノ表面積ト其半徑トノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シ.

系 1. 球ノ體積ヲ V, 其半徑ヲ r トスレバ

$$V=\frac{4}{3}\pi.r^3$$

系 2. 球ノ體積ハ其半徑ノ立方ニ比例ス.

例題

1. 球ノ體積ハ之ニ外切スル直圓壔ノ體積ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シ.

2. 體積1リットルナル球ノ半徑ヲ粍ノ位マデ算出セヨ.

問題

1. 同一平面上ニアラザル四點ヲ通ル球面ハ唯一ツアリ.

2. 球面上ノ三點ヲ通ル圓周ハ全ク此球面上ニアリ.

3. 二定點ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡如何.

4. 二定點ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡如何.

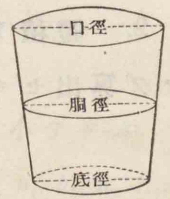
5. 三定點ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡如何.

6. 一邊ノ長サ a ナル正三角形ガ其一頂點ヲ通リ底ニ平行ナル直線ノ周リヲ廻リテ生ズ

ル立體ノ全表面積及體積各如何.

又此旋轉體ノ全表面積ハ此正三角形ノ周ト正三角形ノ重心ガ廻轉シテ畫ク圓ノ周トノ積ニ等シク,其體積ハ正三角形ノ面積ト其重心ガ畫ク圓周トノ積ニ等シキコトヲ示セ.

7. 酒造規則ニ於テ酒樽ノ容量ヲ算出スル公式ハ次ノ如シ.



口徑 a 寸,胴徑 b 寸,底徑 c 寸,深サ d 寸ナル酒樽ノ容量ハ

$$0.00201922d\{(a+b)^2+(b+c)^2-(a+c)b\}\text{ 升}$$

トス.

今酒樽ノ上半部及下半部ガ夫々直圓錐臺狀ヲナスモノトシテ上ノ公式ヲ證明セヨ. 但シ $\pi=3.1416$ トス.

補充問題

第一編 平面及直線

第一章 緒論

1. 一直線ガ定點ヲ通リ且ツ此點ヲ通ラザル他ノ定直線ニ交リツヽ動ケバ一平面ヲ畫ク.

2. 一直線ガ他ノ定直線ニ交リツヽ最初ノ位置ニ平行ニ動ケバ一平面ヲ畫ク.

3. 同一平面上ニアラザル二ツノ三角形 $ABC, A'B'C'$ アリテ對應邊 BC ト $B'C'$, CA ト $C'A'$, AB ト $A'B'$ トガ夫々相交ラバ此三交點ハ一直線上ニアリ. 而シテ三直線 AA', BB', CC' ハ皆平行ナルカ若クハ一點ニ會ス.

第二章 平行ナル平面及直線

1. 三平面ノ關係的位置ノ相異ナル總テノ場合ヲ列擧セヨ.

2. 三平面ハ空間ヲ幾ツノ部分ニ分ツカ,總テノ場合ヲ吟味セヨ.

3. A,B,C,D ガ同一平面上ニアラザル四點ナルトキ,二直線 AB, AC ニ交ル一直線ト二直線 BD, CD ニ交ル一直線トガ平行ナラバ此二直線ハ何レモ BC ニ平行ナリ.

4. 平行二平面間ニ夾マルヽ任意ノ線分ヲ定比ニ

分ツ點ノ軌跡如何.

5. 同一平面上ニアラザル二定直線間ニ夾マルヽ任意ノ線分ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡如何.

6. 二定直線ニ交リ且ツ他ノ定直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ.

7. 二定直線ヲ一ツ宛含ム二平面ヲ作リ,其交線ガ定平面上ニ含マルヽ樣ニセヨ.

第三章 垂線

1. 直線上ノ一點ヲ通リテ之ニ垂直ナル任意ノ直線ハ皆其點ヲ通リテ初ノ直線ニ垂直ナル平面上ニアリ.

2. 直角ノ一邊ヲ軸トシテ之ヲ廻轉スレバ他ノ邊ハ初ノ邊ニ垂直ナル平面ヲ畫ク.

3. 一平面上ノ平行ナラザル三直線ト等角ヲナス直線ハ其平面ノ垂線ナリ.

4. 定直線ヲ含ミ他ノ定直線ニ垂直ナル平面ヲ作リ得ルヤ否ヤ.

5. 同一點Oヨリ引ケル六直線OA, OB, OC, OA′, OB′, OC′アリテ三平面(OB, OC), (OC, OA), (OA, OB)ガ夫々OA′, OB′, OC′ニ垂直ナラバ三平面(OB′, OC′), (OC′, OA′), (OA′, OB′)ハマタ夫々OA, OB, OCニ垂直ナリ.

6. 平面外ノ一定點ヨリ此平面ヘ引ケル定長ノ斜線ノ足ノ軌跡如何.

7. 水平面上ニ垂直ニ立テル二本ノ棒アリ,此平面上ニ於テ各棒ヲ見ル角ガ相等シキ點ノ軌跡如何.

第四章 二面角及多面角

1 數多ノ平面ノ交リガ悉ク平行ナラバ,任意ノ一點ヨリ此等ノ平面ヘ引ケル垂線ハスベテ同一平面上ニアリ.

2. 平面ニ平行ナル二直線ニ夫々垂直ナル二平面ノ交リハ初ノ平面ニ垂直ナリ.

3. 一點Aヨリ相交ル二平面P, Qヘ夫々垂線AB, ACヲ引キ, CヨリPヘ垂線CDヲ引ケバ, BDハP, Qノ交リニ垂直ナリ.

4. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ガ或平面ニ平行ナラバ,此三角形ノ各頂點ノ其平面上ニ於ケル直射影ヲ頂點トスル三角形ハマタ直角三角形ナリ.

5. 圓ノ直徑ABノ一端Aニ於テ此圓ノ平面ニ垂線ヲ引キ,其上ノ一點Pヲ圓周上ノ一點Cニ結ベバ二平面PAC, PBCハ垂直ナリ.

6. 二點A, Bヨリ一平面Pヘ垂線AC, BDヲ引キ,又ABニ垂直ナル任意ノ平面QトPトノ交線ヲMNトスレバMN⊥CDナリ.

7. 同一平面上ニアル二直線ガ他ノ平面ト等角ヲナストキハ此二直線ガ其二平面ノ交線トナス角ハマ

タ相等シ.

8. 一平面上ノ任意ノ直線ガ他ノ平面上ニ於ケル其直射影トナス鋭角ノ中,二平面ノ交線ニ垂直ナル直線ノナス角卽チ此二平面ノナス角ガ最大ナリ.

9. 四面角ヲ其二組ノ相對スル面ノ交線ニ平行ナル任意ノ平面ニテ截レバ其截リ口ハ平行四邊形ナリ.

10. 定點ヲ通リ定直線ニ平行ニシテ且ツ定平面ニ垂直ナル平面ヲ作レ.

11. 二定直線ニ交リ一定平面ニ垂直ナル直線ヲ引ケ.

12. 矩形 ABCD ノ對角線 AC ヲ折リ目トシテ之ヲ折リ,二平面 ABC, ADC ガ垂直ナル樣ニシタルトキ B, D 間ノ距離如何. 但シ $AB=a$, $BC=b$ トス.

第二編 多面體

第一章 角壔及角錐

1. 角壔ノ側稜ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ハ平行四邊形ナリ.

2. 平行六面體ハ何レノ面ヲ底面トシテモヨシ. 直六面體モ亦然リ.

3. 直六面體ノ對角線ノ平方ハ一頂點ニ會スル三稜ノ平方ノ和ニ等シ.

4. 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ平方ノ和ハ 12 ノ稜ノ平方ノ和ニ等シ.

5. 平行六面體ヲ二組ノ相對スル面ニ交ル平面ニテ截レバ其截リ口ハ平行四邊形ナリ.

6. 立方體ノ對角線ハ其一端ニ於テ會スル三稜ノ他ノ端ナル三點ヲ通ル平面ニ垂直ナリ.

7. 角錐ノ側面積ハ底面積ヨリ大ナリ.

8. 四面體ノ各双ノ對稜ガ夫々相等シケレバ各面合同ナル鋭角三角形ナリ.

9. 四面體ノ各双ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三線分ガ何レノ二ツヲ取ルモ垂直ナラバ對稜ハ夫々相等シ.

10. 四面體ノ各双ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三線分ガ皆相等シケレバ對稜ハ夫々垂直ナリ.

11. 四面體ノ二双ノ對稜ガ夫々垂直ナラバ殘リノ

一双モマタ垂直ナリ.

12. 正四面體ノ高サノ平方ノ三倍ハ稜ノ平方ノ二倍ニ等シ.

13. 立方體ノ二對角線ノナス角ハ正四面體ノ二面ノナス角ニ等シ.

14. 同一平面上ニアラザル二定線分ヲ稜トスル平行六面體ヲ作レ.

15. 三定直線上ニ夫々三稜ヲ有スル平行六面體ヲ作レ.

第二章 求積

1. 四面體ノ一稜ト之ニ對スル稜ノ中點トヲ含ム平面ハ之ヲ等積ナル二ツノ四面體ニ分ツ.

2. 四面體ノ一組ノ對稜ガ夫々二定直線上ニアリテ且ツ其長サガ一定ナルトキハ,此等ノ稜ノ位置ニ拘ラズ此四面體ノ體積ハ不易ナリ.

3. 全表面積ガ一定ナル直六面體ノ中,體積ノ最大ナル者ハ立方體ナリ.

4. 底面積a,高サhナル角錐ヲ底ニ平行ナル二平面ニテ截リテ其體積ヲ三等分セヨ.

5. 四面體內ニ一點ヲ求メ,此點ヲ頂點トシ四面體ノ各面ヲ底面トスル四ツノ三角錐ヲ等積ナラシメヨ.

第三編 曲面體

第一章 直圓壔及直圓錐

1. 直圓壔ヲ其軸ニ平行ナル平面ニテ截レバ其截リ口ハ矩形ナリ.

2. 直圓錐ヲ其頂點ヲ通ル平面ニテ截レバ其截リ口ハ二等邊三角形ナリ.

3. 直圓壔又ハ直圓錐ノ底面ノ一切線ト其切點ヲ通ル母線トヲ含ム平面ハ其母線外ノ點ニ於テ其直圓壔又ハ直圓錐ノ側面ニ出會ハズ.

定義 此平面(卽チ直圓壔又ハ直圓錐ノ側面ト唯一直線ニテ出會フ平面)ヲ其直圓壔又ハ直圓錐ノ**切平面**トイフ. 切平面上ニアリテ母線ニ交ル任意ノ直線ハ其直圓壔又ハ直圓錐ノ側面ト他ノ點ニ於テ出會ハズ此直線(卽チ直圓壔又ハ直圓錐ノ側面ト唯一點ニテ出會フ直線)ヲ其直圓壔又ハ直圓錐ノ**切線**トイフ.

4. 矩形ノ二隣邊ヲ夫々軸トシテ廻轉シテ生ズル二直圓壔ノ體積ノ比ハ其二邊ノ反比ニ等シ.

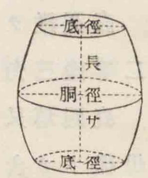
5. 直圓錐臺ノ斜高ガ兩底面ノ半徑ノ和ニ等シキトキハ,此圓錐臺ノ高サハ兩底ノ半徑ノ比例中項ノ二倍ニ等シク,體積ハ其側面積ト高サトノ積ノ$\frac{1}{6}$ニ等シ.

6. 一邊ノ長サaナル正方形ABCDガAヲ通リBDニ

平行ナル直線ノ周リヲ廻リテ生ズル立體ノ全表面積及體積如何.

又此旋轉體ノ全表面積ハ此正方形ノ周ト正方形ノ重心(對角線ノ交點)ガ廻轉シテ生ズル圓ノ周トノ積ニ等シク,其體積ハ正方形ノ面積ト其重心ガ畫ク圓周トノ積ニ等シキコトヲ示セ.

7. 底徑a吋,胴徑b吋,長サl吋ナル西洋樽(兩端同形ニシテ中央膨大セルモノ)ノ容量ハ大約



$$0.0034l\left(\frac{a^2+2b^2}{3}\right)\text{がろん}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

但シ$\pi=3.1416$トス. 1がろん=231立方吋

註 上半部及下半部ヲ夫々直圓錐臺ト見做セバ其容量ハ$0.0034l\left(\frac{a^2+b^2+ab}{3}\right)$トナル. 此結果ハ明カニ小ニ過グルヲ以テ$ab$ノ代リニ$b^2$ヲ置ケバ略々眞ノ値ニ近キモノトシテ上ノ結果ヲ得ベシ.

第二章 球

1. 定直線ヲ含ミ定球ニ切スル二平面ヲ作ルトキハ其二切點ヲ結ブ直線ハ初ノ定直線ニ垂直ナリ.

2. 定球ヲ相等シキ小圓ニテ截ル任意ノ平面ハ此球ト同心ナル他ノ定球ニ切ス.

3. 同一平面上ニアラザル二圓周ガ二點ニ於テ出

會フトキハ此二圓周ヲ含ム球面アリ.

4. 定點ヨリ定球ヘ引ケル任意ノ切線ノ切點ノ軌跡如何.

5. 二定點ヨリノ距離ガ夫々定長ニ等シキ點ノ軌跡如何.

6. 一定點ヲ通ル任意ノ平面ヘ他ノ一定點ヨリ引ケル垂線ノ足ノ軌跡如何.

7. 定點ヲ含ム任意ノ平面ニテ定球ヲ截リテ生ズル圓ノ中心ノ軌跡如何.

8. 高サト底ノ直徑トガ相等シキ直圓錐ノ體積ハ其底ノ半徑ヲ半徑トスル半球ノ體積ニ等シ.

9. 半圓周ヲ三等分シ,其直徑ヲ軸トシテ之ヲ廻轉スルトキ,中央ノ弧ガ生ズル球帶ノ面積ハ他ノ二弧ガ生ズル球帶ノ面積ノ和ニ等シ.

10. 同一圓ニ外切スル正三角形及正方形ノ一邊ガ同一直線上ニアルトキ,此直線ニ垂直ナル直徑ヲ軸トシテ全圖形ヲ廻轉スレバ,正方形ガ生ズル直圓壔ノ全表面積(或ハ體積)ハ正三角形ガ生ズル直圓錐ノ全表面積(或ハ體積)ト圓ガ生ズル球ノ表面積(或ハ體積)トノ比例中項ナリ.

11. 定直線ヲ含ミ定球ニ切スル平面ヲ引ケ.

12. 一稜ガaナル立方體ニ外接スル球ノ半徑如何.

全書雜題

1. 四ツノ平面ハ一般ニハ空間ヲ15ノ部分ニ分ツ.

2. 一平面ノ同側ニアル二定點ヨリノ距離ノ和ガ最小ナル點ヲ此平面上ニ求メヨ.

3. 平面ノ兩側ニ一ツ宛アル二定點ヨリノ距離ノ差ガ最大ナル點ヲ此平面上ニ求メヨ.

4. 捩四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ他ノ二邊ノ和ノ半分ヨリ小ナリ.

5. 捩四邊形ノ四ツノ角ノ和ハ4R∠ヨリ小ナリ. 從テ各角ガ直角ナル四邊形ハ矩形ナリ.

6. OA, OB, OC ガ平行六面體ノ三稜ニシテ OP ガ其對角線ナルトキハ

$$OP^2+OA^2+OB^2+OC^2=PA^2+PB^2+PC^2$$

7. 四面體ノ六稜ノ平方ノ和ハ對稜ノ中點ヲ結ブ三線分ノ平方ノ和ノ四倍ナリ.

8. 四面體ノ三頂點ニ於ケル平面角ノ和ガ何レモ二直角ナルトキハ殘リノ頂點ニ於ケル平面角ノ和モ亦二直角ニシテ,各面ハ皆合同ナリ.

9. 四面體ノ一双ノ對稜ガ相等シケレバ此等ノ稜ニ平行ナル平面ニヨリテノ截リ口ノ周ハ不易ナリ.

10. 四面體ヲ一双ノ對稜ニ平行ナル平面ニテ截リ,

其截リ口ノ面積ヲ最大ナラシメヨ.

11. 正四面體内ノ任意ノ一點ヨリ各面ニ至ル距離ノ和ハ四面體ノ高サニ等シ.

12. 四面體ノ體積ハ其一双ノ對稜ノ中點ヲ通ル任意ノ平面ニヨリテ二等分セラル.

13. 四面體ノ二面ノナス角ヲ二等分スル平面ハ相對スル稜ヲ其二面ノ面積ニ比例スル二部ニ分ツ.

14. 各双ノ對稜ガ皆垂直ナル四面體ニ於テハ

(1) 頂點ヨリ對面ニ引ケル垂線ノ足ハ其面ノ垂心ナリ.

(2) 頂點ヨリ對面ヘ引ケル四垂線ハ一點ニ會ス.

(3) 對稜ノ共通垂線ハ一點ニ會ス. 此會點ハ(2)ノ會點ト同一點ナリ.

(4) 對稜ノ平方ノ和ハ相等シ.

(5) 各稜ノ中點ハ同一球面上ニアリ.

15. 三面角ノ二面ガ垂直ナラバ此三面角ヲ其任意ノ稜ニ垂直ナル平面ニテ截リタル截リ口ハ直角三角形ナリ.

16. 三面角ノ各平面角ガ皆直角ナルトキハ此三面角ヲ一平面ニテ截リタル截リ口ハ鋭角三角形ニシテ,其垂心ハ三面角ノ頂點ヨリ其截リ口ノ面ニ引ケル垂線ノ足ナリ.

17. 四面體ヲ平面ニテ截リ其截リ口ヲ菱形ナラシ

メヨ.

18.　立方體ヲ平面ニテ截リ其截リ口ヲ正六邊形ナラシメヨ

19.　正八面體ヲ平面ニテ截リ其截リ口ヲ正六邊形ナラシメヨ.

20.　相交ル二定直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何.

21.　同一直線上ニアリテ相接續セル三線分 AB, BC, CD ノ各ヲ等角ニ見ル點ノ軌跡如何.

22.　同一平面上ニアラズシテ垂直ナル二定直線間ニ夾マルヽ定長線分ノ中點ノ軌跡如何.

23.　二定直線間ニ夾マリテ且ツ定平面ニ平行ナル定長ノ線分ヲ引ケ.

24.　定直線上ノ一點ヨリ垂直ナル二定平面ニ至ル距離ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメヨ.

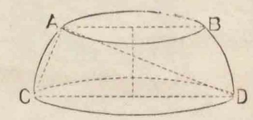
25.　定直線上ノ一點ヨリ他ノ定直線ニ至ル距離ヲ定長ニ等シカラシメヨ.

26.　正角錐ノ底面上ノ一點ヨリ之ニ引ケル垂線ガ側面或ハ其延長ト會スル點マデノ距離ノ和ハ常ニ一定ナリ.

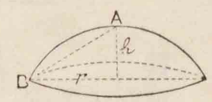
27.　三角壔ヲ其底ニ平行ナラザル平面ニテ截リテ生ズル立體ノ體積ハ元ノ底面ヲ底面トシ截リ口ナル三角形ノ各頂點ヲ頂點トスル三ツノ三角錐ノ體積ノ和ニ等シ.

28.　半圓ヨリ小ナル扇形OABガ其ノ屬スル圓ノ中心Oヲ通リ此扇形ニ交ラザル直徑ヲ軸トシテ一廻轉シテ生ズル立體ノ體積ハ扇形ノ弧ガ畫ク球帶ノ面積ト扇形ノ半徑トノ積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シ.

29　缺球ノ體積ハ其各底面ノ半徑ヲ半徑トシ其高サヲ高サトスル二直圓壔ノ體積ノ和ノ半分ト其高サニ等シキ半徑ノ球ノ體積トノ和ニ等シ.



30.　右圖ニ於ケル球帶ノ面積ハ $\pi AC.AD$ ニ等シキコトヲ證明セヨ. 之ニヨリテ下圖ノ缺球ノ曲面積ハ $\pi(r^2+h^2)$ ニ等シク又ハ AB ヲ半徑トスル圓ノ面積ニ等シキコトヲ示セ.



31.　一稜ガ a ナル正四面體ニ內切スル球ノ半徑如何.

32.　一稜ガ a ナル正八面體ニ內切スル球ノ半徑如何.

33.　一稜ガaナル正四面體ノ對稜間ノ最短距離如何.

34.　一稜ガ a ナル立方體ノ對角線ト稜トノ間ノ最短距離如何.

大正十四年十一月二十七日　印刷
大正十四年十一月三十日　發行
大正十五年二月五日　訂正再版印刷
大正十五年二月八日　訂正再版發行

中學教科新立體幾何

定價金貳拾七錢　昭和五年度臨時定價金四拾四錢

編者　寺尾壽
編者　藤野了祐

東京市神田區通神保町九番地
發行者　合資會社　冨山房
同所
代表者　坂本嘉治馬

發行所　合資會社　冨山房
電話九段1921—1925番
振替口座東京五〇一番

共同印刷株式會社印刷

農科第三学年甲組
益田好實